

Renato Casali Barão

*Algoritmos de controle ótimo  
quadrático com restrições*

Dissertação apresentada à Escola  
Politécnica da Universidade de São  
Paulo para obtenção do título de  
Mestre em Engenharia Elétrica.

São Paulo  
1997

Renato Casali Barão

*Algoritmos de controle ótimo  
quadrático com restrições*

Dissertação apresentada à Escola  
Politécnica da Universidade de São  
Paulo para obtenção do título de  
Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de concentração:  
Engenharia de Sistemas

Orientador:  
Oswaldo Luiz do Valle Costa

São Paulo  
1997

À minha família com muito amor.

## *Agradecimentos*

Ao meu orientador, professor Oswaldo Luiz do Valle Costa pelo tempo e dedicação para comigo.

Ao Ricardo Paulino Marques, recém-doutorado, pela sua valiosa ajuda, especialmente no campo computacional.

Ao Jorge Amaru Sierra Posadas, mestrando e colega e que em breve voltará ao seu país.

Aos demais colegas e professores do LAC, sempre prontos para prestar a assistência necessária ao desenvolvimento do trabalho.

Ao meu pai Nemesio, à minha mãe Nice e à minha irmã Eliana, pelo apoio e carinho.

E a todos os que de alguma forma participaram nesta caminhada, meus sinceros agradecimentos.

## *Resumo*

O objetivo do trabalho é apresentar dois algoritmos para a solução de problemas de controle ótimo quadrático robusto com restrições, dentro de um contexto de controladores preditivos (MPC do inglês Model Predictive Control). Inicialmente apresentamos uma breve introdução aos algoritmos MPC, com ênfase na abordagem do controlador linear quadrático. Em seguida são apresentados os dois algoritmos de interesse, que utilizam técnicas de otimização LMI. Dessa forma as restrições e as incertezas podem ser colocadas em formas computacionalmente tratáveis. Por fim são realizadas simulações e comparações entre esses algoritmos, bem como com técnicas de MPC encontradas na literatura atual.

## *Abstract*

The goal of the work is to present two algorithms for the solution of robust quadratic optimal control problems with restrictions, within a model predictive control (MPC) setup. Initially we present a brief introduction of the MPC algorithms, emphasizing the linear quadratic controller approach. Next the two algorithms of interest, using LMI optimization techniques, are presented. By using this technique the restrictions and uncertainties can be written in a computational way. Finally some simulations and comparisons between these algorithms, as well as with MPC techniques found in the current literature, are performed.

---

# Sumário

## 1. Introdução

1.1 Controle automático.....	9
1.2 Histórico do regulador linear quadrático.....	10
1.3 Restrições e robustez aplicadas aos processos químicos.....	11
1.4 Escopo da dissertação.....	12

## 2. Abordagem do regulador linear quadrático em MPC

2.1 Introdução.....	14
2.2 Definindo o controle preditivo.....	14
2.3 Elementos do algoritmo do MPC.....	15
2.4 Abordagem do regulador linear quadrático sem restrições em MPC.....	18
2.5 Abordagem quadrática robusta com restrições.....	23
2.5.1 Incertezas no modelo e robustez.....	24
2.5.2 MPC robusto sem restrições.....	25
2.5.3 MPC robusto com restrições.....	25
2.6 Conclusões.....	27

## 3. Controle $\mathcal{H}_2$ robusto com restrições

3.1 Introdução.....	28
3.2 Subsídios matemáticos.....	28
3.3 O modelo do sistema.....	33
3.4 Objetivos do controlador.....	34
3.5 Algoritmo para obtenção da lei de controle.....	35
3.5.1 Proposição dos problemas convexos.....	35
3.5.2 Obtenção dos controladores.....	36
3.6 Conclusões.....	44

## 4. Exemplos numéricos e simulações

4.1 Introdução .....	45
4.2 Sistema proposto.....	45
4.3 Simulação do sistema linearizado em malha aberta.....	46

---

4.4 Simulação do sistema não linear em malha fechada utilizando um controlador MPC.....	48
4.5 Simulação do sistema não linear em malha fechada utilizando um controlador LMI1.....	50
4.6 Simulação do sistema não linear em malha fechada utilizando um controlador LMI2.....	54
4.7 Conclusões.....	56
<b>5. Considerações Finais</b>	
5.1 Comentários e conclusões.....	57
<b>Apêndice A</b>	
Propriedade convexa de matrizes.....	59
<b>Apêndice B</b>	
Decomposição de Schur.....	61
<b>Apêndice C</b>	
Complemento das provas dos teoremas.....	63
<b>Apêndice D</b>	
Programas desenvolvidos.....	68
<b>Referências bibliográficas.....</b>	<b>80</b>



---

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Controle automático

O controle automático por realimentação já é conhecido e usado há mais de 2000 anos com trabalhos relatados na Grécia, como o relógio de água de Ktesbios. Apesar disso, a palavra realimentação somente foi introduzida por volta de 1920, pelos engenheiros de radiocomunicação.

Atualmente os processos químicos e petroquímicos são aqueles que mais demandam sistemas de controle automático garantindo a sobrevivência das empresas em um mercado extremamente competitivo e caminhando para a globalização.

Para que uma empresa seja lucrativa podemos dizer que ela deverá ter, no seu processo de fabricação, meios de reagir às variações do mercado em prazos curtos e com um mínimo de investimento financeiro. Estas imposições do mercado levam ao desenvolvimento de novas técnicas de controle, cada qual mais eficiente para um determinado tipo de processo.

Embora existam diferenças entre as várias técnicas de controle, todas têm que satisfazer a várias exigências comuns que são:

- Qualidade do produto;
- Preço competitivo;
- Restrições de funcionamento dos equipamentos e da planta;
- Segurança da operação e dos operadores;
- Emissão de poluentes dentro das normas;
- Quantidade que atenda à demanda.

Todas essas exigências, e ainda aquelas específicas do processo a ser controlado, e com as características multivariáveis das plantas atuais, tornam a solução dos problemas de controle impossíveis de serem obtidas analiticamente para sistemas reais nos dias de hoje.

Com o desenvolvimento rápido de computadores cada vez mais poderosos, temos uma evolução dos trabalhos de controle no sentido de descobrirem novas teorias que levem a algoritmos que sejam computacionalmente tratáveis. Assim, podemos resolver problemas de controle multivariáveis, com restrições nas variáveis da planta, de forma numérica com rapidez e precisão.

Modelos preditivos representam uma família de controladores bastante utilizada na indústria petroquímica, e que satisfazem de um modo geral as exigências apresentadas acima. Um grande número de técnicas de projeto para os controladores preditivos tem sido apresentadas na literatura internacional recentemente, cada uma delas assumindo diferentes tipos de modelos para a planta e funções objetivos a serem minimizadas (vide [3]-[11],[17],[18],[20],[21]). Podemos citar o DMC (Dynamic Matrix Control), o MAC (Model Algorithmic Control), o IMC (Internal Model

---

Control), e o LQR (Linear Quadratic Regulator)<sup>1</sup>. Para um resumo e comparação dessas técnicas, vide [3] ou [8]. Apresentaremos a seguir um histórico do método LQR, que servirá de base para os métodos convexos apresentados no capítulo 3.

## 1.2 Histórico do regulador linear quadrático

Como motivação aos estudos de problemas de controle preditivo que faremos no capítulo 2, e principalmente para os resultados obtidos no capítulo 3, apresentaremos aqui alguns detalhes da evolução do regulador linear quadrático.

A idéia de se utilizar um indicador para o desempenho de um sistema que fosse um índice quadrático dos erros de saída e dos esforços de controle foi introduzida por Kalman em 1960. Ele usou o cálculo variacional para mostrar que o controle ótimo de uma planta é obtido por uma realimentação linear das variáveis de estado. O nome de regulador linear quadrático foi dado posteriormente por Athans.

Um indicador de desempenho calculado pelo erro quadrático de saída já havia sido proposto em 1957 por Newton, Gould e Kaiser mas nenhum algoritmo havia sido proposto por eles até então.

A teoria de Kalman é aplicável a sistemas lineares variantes no tempo e a sistemas MIMO. Kalman também mostrou que a matriz de ganho de realimentação de estados ótima pode ser obtida resolvendo uma equação de atrasos de Riccati para estados invariantes.

Newton, Gould e Kaiser estenderam a idéia do indicador de desempenho por erro quadrático para o caso em que o erro é calculado pela média estatística do quadrado dos erros das estimativas das saídas.

Kalman e Bucy mostraram que o ganho do filtro ótimo para análise de harmônicas generalizadas, proposta por Norbert Wiener e G. I. Taylor pode ser obtido resolvendo-se uma equação de avanço de Riccati, que ficou conhecida como estimador linear quadrático (LQE do inglês Linear Quadratic Estimator). O LQE usa o modelo do sistema na forma de variáveis de estado somado a uma realimentação linear do erro de estimativa calculado pela diferença entre a medida da saída real e o valor estimado.

Pouco tempo depois descobriu-se que realimentando os estados estimados de um LQE com os ganhos de realimentação de um LQR minimiza-se o valor esperado da integral quadrática se as entradas de ruído branco forem gaussianas. À descoberta foi dado o nome de compensador linear quadrático gaussiano (LQG do inglês Linear Quadratic Gaussian).

A programação dinâmica desenvolvida por Bellman com base na teoria de Hamilton-Jacobi também pode ser resolvida aproximando-se os problemas tratados por ela para aqueles do tipo do regulador linear quadrático.

A programação dinâmica trata do problema de caminhos extremos que atendem a condições terminais especiais. A função de desempenho ótima nestes casos é definida normalmente por  $V(x, t)$ . Associada a  $V(x, t)$  está a função controle ótimo  $u(x, t)$  que é uma realimentação do estado atual  $x$  no instante  $t$ .

A programação dinâmica esbarra no problema conhecido como "maldição da dimensionalidade" que causa o estouro de memória dos computadores para sistemas

---

<sup>1</sup>Em português, RLQ (Regulador Linear Quadrático).

---

com mais de 2 ou 3 variáveis de estado. Entretanto se o espaço de estados é limitado a uma região próxima do caminho ótimo, o problema de programação dinâmica pode ser aproximado por um problema de LQR, ou seja, um problema de dinâmica linear (variante ou não no tempo) com um índice de desempenho quadrático cujas matrizes de penalização são a segunda derivada do hamiltoniano em relação aos estados e ao controle.

Com base em um algoritmo para solução do regulador quadrático proposto por Francis, Wilkinson desenvolveu um código para solução das equações de estados invariantes de Riccati que tornou-se a base de muitas ferramentas profissionais tais como MATLAB, MATRIX-X e CONTROL-C. O algoritmo de Wilkinson foi melhorado substituindo-se o método usado da decomposição do sistema em auto-vetores pela decomposição de Schur.

### **1.3 Restrições e robustez aplicadas aos processos químicos**

Na prática, o problema de controle de processos das indústrias químicas e petroquímicas está sujeito a restrições quanto à amplitude e taxa de variação das variáveis manipuladas e controladas (entradas e saídas das plantas). Os atuadores, que no nosso caso podem ser as válvulas de controle, são limitados, por exemplo, pela abertura ou fechamento totais e pela velocidade, ou taxa, que se pode efetuar a operação. Razões construtivas e de segurança, como a faixa de operação dos sensores, impõem limites nas variáveis de processo, tais como níveis dos tanques e vazão nos dutos. Além do mais, na prática, os pontos de operação das plantas são determinados para satisfazer interesses econômicos e normalmente recaem na interseção de algumas das restrições, operando ainda, próximos dos limites, sendo que a violação das restrições estão sempre na iminência de acontecerem.

Os sistemas de controle devem antecipar as violações das restrições e corrigí-las de uma maneira apropriada. As restrições nas saídas são devidas principalmente às razões de segurança, e devem ser controladas antecipadamente porque as variáveis de saída são afetadas pela dinâmica do processo. As variáveis de entrada (manipuladas) sempre podem ser mantidas dentro da faixa admissível pelo controlador, limitando a ação de controle para valores que satisfaçam as restrições de amplitude e de taxa de variação das entradas.

Além das restrições os sistemas sempre apresentam incertezas de modelagem que podem ter sido introduzidas pela simplificação do modelo para facilitar o tratamento matemático. Assim, modelos matemáticos de controle descrevem a dinâmica do processo de modo apenas aproximado.

A maioria das técnicas de projeto de controles necessitam um modelo nominal da planta que é usado durante o projeto. Os processos de controle são normalmente realimentados para que o sistema funcione, mesmo com perturbações externas e incertezas do modelo que não podiam ser explicitamente consideradas no princípio uma vez que não eram conhecidos todos os seus detalhes. O objetivo do controle robusto é o de projetar controladores que mantenham a estabilidade e o desempenho do processo apesar das incertezas e imprecisões do modelo.

As técnicas mais comuns de tratamento de incertezas são a de incertezas de resposta em frequência e incertezas paramétricas da função de transferência. Usaremos a segunda técnica no desenvolvimento do trabalho nos capítulos seguintes.

---

## 1.4 Escopo da dissertação

Apresentamos a seguir um pequeno resumo dos tópicos abrangidos em cada capítulo desta dissertação.

- **Capítulo 1**

Apresentamos neste capítulo um histórico da evolução do controle automático por realimentação, os fatores econômicos, de desempenho e qualidade que guiam os projetistas de controle e a evolução dos estudos no sentido do aprimoramento das ferramentas matemáticas que cada vez mais conduzem a utilização dos computadores no desenvolvimento dos projetos. É apresentada também a evolução da técnica do regulador linear quadrático como ferramenta de projeto de controladores e suas derivações, aprimoramentos e a relação com a equação algébrica de Riccati. O problema de sistemas reais com restrições e incertezas de modelagem é introduzido antecipando o problema que apresentaremos no capítulo 3.

- **Capítulo 2**

Neste capítulo faremos uma abordagem do regulador linear quadrático dentro de um contexto de controladores preditivos (MPC). Definiremos o que é o controle preditivo, os elementos que compõem um algoritmo MPC e apresentaremos um exemplo de algoritmo chamado DMC (do inglês Dynamic Matrix Control) que é um dos tipos de algoritmo MPC.

Faremos um estudo dos controladores MPC's em espaço de estados, para sistemas sem restrições primeiramente, apresentando uma solução para o problema de rastreamento do sistema.

Como motivação ao capítulo 3, faremos uma breve introdução ao problema do MPC robusto sem e com restrições, sendo este último o de maior interesse prático em processos industriais.

- **Capítulo 3**

Este capítulo apresenta inicialmente uma série de proposições matemáticas que servirão de apoio na elaboração do tema principal do trabalho.

A parte mais importante da teoria deste trabalho consiste na formulação de um problema de controle quadrático robusto com restrições, advindo dos modelos preditivos, em termos de problemas de programação convexa. Dois algoritmos convexos são propostos para a resolução deste problema. Este problema poderia ser tratado pela teoria de controle MPC, mas usando esta técnica não teríamos uma solução invariante no tempo, já que as restrições e incertezas impostas ao problema fazem com que o algoritmo de otimização tenha que ser aplicado a cada instante do tempo. Por outro lado, os algoritmos convexos levam a soluções invariantes no tempo, satisfazendo às restrições impostas à planta e atendendo às condições de estabilidade robusta. Note também que, devido às incertezas e restrições, o problema LQR não possui de um modo geral uma solução analítica que possa ser calculada diretamente.

O termo "convexo" surge do modo com que tratamos as incertezas e restrições do modelo da planta, criando a necessidade do algoritmo desenvolvido apresentar o que chamamos de robustez, ou seja, manter as características de desempenho e estabilidade do sistema mesmo com a presença das incertezas no modelo nominal adotado para a planta.

Para resolver os problemas de controle  $\mathcal{H}_2$  robusto com restrições que propomos temos que usar técnicas de LMI, tornando os algoritmos obtidos possíveis de serem implementados em programas computacionais. Uma fórmula conhecida como decomposição de Schur é a principal ferramenta LMI utilizada na solução dos dois problemas propostos.

- **Capítulo 4**

Neste capítulo apresentaremos algumas simulações numéricas para ilustrar as técnicas desenvolvidas. Faremos uma comparação entre os dois problemas convexos propostos com um controlador MPC tradicional. Para os controladores convexos, utilizaremos o pacote LMI Toolbox do MATLAB. Para o controlador MPC utilizaremos o pacote MPC Toolbox também do MATLAB.

- **Capítulo 5**

A dissertação será concluída com alguns comentários e conclusões finais.

---

# *Capítulo 2*

## *Abordagem do regulador linear quadrático em MPC*

### **2.1 Introdução**

Neste capítulo será analisada a abordagem de reguladores lineares quadráticos dentro de um contexto de controladores preditivos (em inglês, MPC - Model Predictive Control). Esse tipo de controlador (MPC) tem larga aceitação em aplicações industriais, principalmente processos de dinâmica lenta como os das indústrias químicas e petroquímicas, por conferir alto desempenho ao sistema e operar sem intervenção dos engenheiros por longos períodos de tempo. As restrições tratadas pelos algoritmos de MPC geralmente referem-se às limitações na abertura de válvulas e em variáveis manipuladas na planta do sistema (pressão, temperatura, etc.). Portanto MPC's servem como motivação para sistemas de controle com restrições.

A sequência do capítulo apresenta na seção 2.2 a definição de controle preditivo. A seção 2.3 trata dos elementos que compõem este tipo de controlador. A seção 2.4 apresenta a abordagem do regulador linear quadrático para modelos MPC sem restrições. Como resultado principal desta seção, e do próprio capítulo, são apresentadas condições para a existência de uma solução para o problema linear quadrático associado ao MPC sem restrições ou incertezas. Será verificado que a abordagem do regulador linear quadrático para o MPC recai em uma equação de Riccati, e condições para a existência de uma solução estabilizadora são estabelecidas. Esta abordagem do regulador linear quadrático será reavaliada dentro de um contexto de controladores  $\mathcal{H}_2$  robustos com restrições no capítulo 3. Apresentamos na seção 2.5 a descrição de controle robusto, que usamos na representação do modelo do nosso sistema, o algoritmo de projeto do MPC para sistemas sem restrições nos parâmetros da planta e o algoritmo MPC para sistemas com restrições. Na seção 2.6 temos as conclusões do capítulo.

### **2.2 Definindo o controle preditivo**

A metodologia de projeto de controladores do tipo MPC é direcionada para sistemas multivariáveis que têm forte interação entre as variáveis manipuladas e controladas.

Essa técnica apresenta um método sistemático para o tratamento das restrições físicas da planta e das variáveis de processo, tanto no projeto quanto na implementação do controlador.

O MPC apresenta vários algoritmos sendo que todos têm como elemento básico um modelo nominal da planta real, gerando assim a denominação de controle por modelo interno ou IMC (do inglês Internal Model Control).

Alguns dos algoritmos do MPC são o MAC (Model Algorithmic Control), o DMC (Dynamic Matrix Control) e o GPC (Generalized Predictive Control) (ver [8]).

O algoritmo do MPC, qualquer que seja, consiste em efetuar, em um instante de tempo  $k$ , medidas nas variáveis do processo  $y(k)$  e com o modelo nominal da planta calcular as entradas  $u(k)$  que serão aplicadas ao sistema num horizonte de  $n$  instantes futuros. Essas entradas são calculadas com a minimização de uma função custo de controle. A função custo normalmente é descrita por

$$J_n(k) = \sum_{i=0}^n [ (\hat{y}(k+i/k) - r(k+i))' Q (\hat{y}(k+i/k) - r(k+i)) + \Delta u(k+i/k)' R \Delta u(k+i/k) ]$$

onde

$$\Delta u(k+i/k) = u(k+i/k) - u(k+i-1/k), \text{ e ainda}$$

$\hat{y}(k+i/k)$  representa a produção da saída no instante  $k+i$ ,  $r(k+i)$  o sinal de referência no instante  $k+i$  e  $Q > 0$  e  $R > 0$  matrizes simétricas que representam a penalização nos erros de predição e controle em um horizonte de  $n$  instates futuros do sistema.

A minimização do custo do controle é feita em função das entradas futuras  $u(k+i/k)$ ,  $i = 0, 1, \dots, t-1$  para o horizonte de  $n$  instantes e é expressa por

$$\min_{u(k+i/k), i=0,1,\dots,t-1} J_n(k).$$

Para a minimização acima podem ser consideradas as restrições nas entradas  $u(k+i/k)$ ,  $i = 0, 1, \dots, t-1$ , ou estados  $x(k+i/k)$  e saídas  $y(k+i/k)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  do sistema.

Apesar do algoritmo adotar um horizonte de minimzação de  $n$  saídas futuras (normalmente fazendo  $n \rightarrow \infty$  para garantir a estabilidade do sistema), apenas a entrada do instante seguinte  $u(k)$  é implementada, quando então serão feitas novas medições na planta e a repetição do algoritmo para a nova situação do processo. Adotando-se esse procedimento minimiza-se o erro entre as saídas prevista e medida devido a ruídos e incertezas de modelagem da planta.

## 2.3 Elementos do algoritmo do MPC

Todos os algoritmos de controle preditivo têm os elementos comuns citados abaixo:

- **Modelo de predição:** responsável por calcular a saída estimada  $\hat{y}$  de acordo com o modelo nominal adotado para a planta do sistema.

Na forma de espaço de estados, o modelo pode ser escrito como

$$\begin{cases} x(k+i) = Ax(k) + Bu(k) \\ \hat{y}(k) = Cx(k) \end{cases}$$

cuja função de transferência é descrita por

$$G(z) = C(zI - A)^{-1}B.$$

Sendo  $A$  estável, temos pela expansão de Neuman (ver [7])

$$G(z) = \sum_{i=0}^{\infty} CA^i Bz^{-i-1} = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{H}_i z^{-i}, \quad \tilde{H}_i = \text{coeficientes da resposta impulsional.}$$

Pela hipótese de que  $A$  é estável, segue que  $\tilde{H}_i \rightarrow 0$  quando  $i \rightarrow \infty$ , e portanto temos o modelo da resposta impulsional truncada,

$$\hat{y}(k) \approx \sum_{i=1}^{N-1} \tilde{H}_i u(k-i).$$

Definindo  $H_i = \sum_{j=1}^i \tilde{H}_j$  obtemos o modelo de resposta ao degrau truncado

$$\hat{y}(k) = \sum_{i=1}^{N-1} H_i \Delta u(k-i) + H_N u(k-N), \quad \Delta u(k) = u(k) - u(k-1).$$

Dentro deste trabalho daremos ênfase ao modelo na forma de espaço de estados (vide seção 2.4). Algoritmos DMC, MAC e GPC utilizam modelos na forma de resposta ao degrau e resposta impulsional.

- **Função objetivo:** função a ser minimizada (que penaliza o esforço de controle e o erro de predição do sistema) para encontrarmos o sinal de controle adequado. Veja a equação na seção 2.2.
- **Obtenção da lei de controle:** algoritmo iterativo utilizado para minimização da função objetivo que levará ao melhor sinal de controle do sistema.

A estrutura de um algoritmo de controle preditivo por modelo interno pode ser representado pelo esquema abaixo:

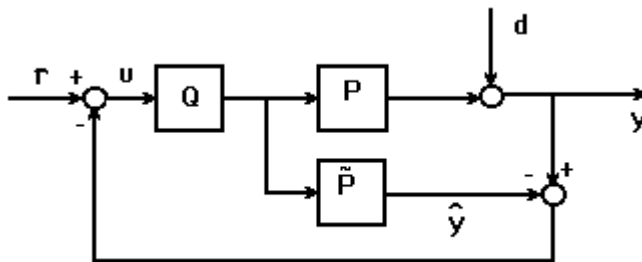


Fig. 2.1 Estrutura do IMC

Neste modelo,  $P$  é a planta real e  $\tilde{P}$  é o modelo nominal da planta (modelo de predição),  $Q$  é o controlador,  $y$  é a saída medida,  $r$  é o sinal de referência ou "set-point",  $u$  é a variável manipulada e  $d$  representa o efeito de distúrbios de ruídos na saída.

Como exemplo de um algoritmo MPC genérico apresentamos a seguir o DMC com restrições (vide [8]).



**Exemplo:** DMC com restrições

A função custo quadrático ou função objetivo, já apresentada anteriormente, está reescrita abaixo.

$$J_n(k) = \sum_{l=0}^n [ (\hat{y}(k+l/k) - r(k+l))' Q (\hat{y}(k+l/k) - r(k+l)) + \Delta u(k+l/k)' R \Delta u(k+l/k) ].$$

Minimizamos a função objetivo para a entrada  $u(k)$ , conforme expressão abaixo

$$\min_{\Delta u(k), \dots, \Delta u(k+l-1)} \sum_{l=0}^n [ (\hat{y}(k+l/k) - r(k+l))' Q (\hat{y}(k+l/k) - r(k+l)) + \Delta u(k+l/k)' R \Delta u(k+l/k) ] \quad (2.1)$$

sendo que a estimativa da saída  $\hat{y}(k+l/k)$  é definida por

$$\hat{y}(k+l/k) = \sum_{i=1}^l H_i \Delta u(k+l-i) + \sum_{i=l+1}^{N-1} H_i \Delta u(k+l-i) + H_N u(k+l-N) + \hat{d}(k+l/k) \quad (2.2)$$

e a estimativa dos distúrbios aditivos do processo  $\hat{d}(k+l/k)$  dada por

$$\hat{d}(k+l/k) = \hat{d}(k/k) = y_m(k) - \sum_{i=1}^{N-1} H_i \Delta u(k-i) + H_N u(k+l-N) \quad (2.3)$$

onde  $y_m(k)$  representa o valor medido de  $y$  no instante  $k$ . Ainda temos a restrição definida por

$$\sum_{l=1}^p C'_{yl} \hat{y}(k+l/k) + C'_{ul} u(k+l-1) + c' \leq 0. \quad (2.4)$$

A equação (2.2), de predição de saída do sistema, apresenta três elementos do lado direito da igualdade. O primeiro deles  $\left( \sum_{i=1}^l H_i \Delta u(k+l-i) \right)$  representa a entrada atual e todas as entradas futuras da variável manipulada, no horizonte de controle definido para o controlador e que são determinadas resolvendo-se a minimização da função objetivo. O segundo termo  $\left( \sum_{i=l+1}^{N-1} H_i \Delta u(k+l-i) + H_N u(k+l-N) \right)$  representa apenas os valores passados da variável manipulada e que são completamente conhecidos no instante  $k$ . O terceiro termo  $\left( \hat{d}(k+l/k) \right)$  representa a previsão da perturbação  $\hat{d}$  que é obtida resolvendo-se a expressão (2.3). A previsão  $\hat{d}(k+l/k)$  é assumida constante para todos os instante futuros ( $l \geq 0$ ). No instante  $k$  é processada a estimativa da diferença entre a saída  $y(k)$  medida e prevista  $\hat{y}(k)$  de acordo com o modelo. Na figura 2.1, o bloco  $\tilde{P}$

em paralelo com o modelo nominal da planta  $P$  corresponde à equação (2.3), com o sinal de realimentação resultante sendo dado por  $\hat{d}(k/k)$ . O controlador é representado pelo bloco  $Q$  na figura 2.1. As equações (2.1) – (2.4) formam um algoritmo quadrático que é resolvido on-line a cada instante de amostragem  $k$ .

## 2.4 Abordagem do regulador linear quadrático sem restrições em MPC

Apresentaremos a seguir o MPC utilizando o modelo em espaço de estados sem restrições. Os resultados aqui apresentados são adaptações dos que foram obtidos no artigo [8], onde a referência é um degrau unitário. A generalização apresentada neste trabalho consiste em considerar uma referência que seria a resposta ao degrau de um sistema linear estável qualquer.

Considere o modelo

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}$$

Consideremos  $A$  uma matriz  $n \times n$ ,  $B$  uma matriz  $n \times m$  e  $C$  uma matriz  $p \times n$ . Desejamos que a saída  $y(k)$  siga uma trajetória definida  $r(k)$  dada por

$$\begin{cases} z(k+1) = Fz(k) + (I - F)v \\ r(k) = \Gamma z(k) \end{cases}$$

onde  $v$  é um degrau e  $F$  uma matriz estável (de modo que  $z(k) \rightarrow v$  quando  $k \rightarrow \infty$  e  $r(k) \rightarrow \Gamma v$  quando  $k \rightarrow \infty$ ). Define-se

$$l(k) = z(k) - v$$

de modo que

$$l(k+1) = Fl(k).$$

A função objetivo a ser minimizada é dada por

$$J_{\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} [\Delta u(k)' R \Delta u(k) + (y(k) - r(k))' Q (y(k) - r(k))]$$

onde  $R > 0$  e  $Q > 0$  e  $\Delta u(k) = u(k) - u(k-1)$ . Definindo

$$\Delta x(k) = x(k) - x(k-1) \quad , \quad e(k) = y(k) - r(k)$$

segue que

$$\Delta x(k+1) = A\Delta x(k) + B\Delta u(k)$$

$$y(k+1) = Cx(k+1) = C(\Delta x(k+1) + x(k))$$

$$\begin{aligned}
&= C(A\Delta x(k) + B\Delta u(k) + x(k)) \\
&= CA\Delta x(k) + CB\Delta u(k) + y(k)
\end{aligned}$$

e lembrando que

$$\begin{aligned}
r(k+1) &= \Gamma z(k+1) = \Gamma(Fz(k) + (I-F)v) \\
&= \Gamma(-(I-F)z(k) + (I-F)v + z(k)) \\
&= -\Gamma(I-F)(z(k) - v) + \Gamma z(k) \\
&= -\Gamma(I-F)l(k) + r(k)
\end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned}
e(k+1) &= y(k+1) - r(k+1) \\
&= e(k) + CA\Delta x(k) + CB\Delta u(k) + \Gamma(I-F)l(k).
\end{aligned}$$

Escrevendo as equações acima em uma forma de espaço de estados, temos que

$$\begin{bmatrix} l(k+1) \\ \Delta x(k+1) \\ e(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ \Gamma(I-F) & CA & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l(k) \\ \Delta x(k) \\ e(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B \\ CB \end{bmatrix} \Delta u(k), \quad (2.5)$$

com o funcional

$$J_\infty = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \Delta u(k)' R \Delta u(k) + [l(k)' \quad \Delta x(k)' \quad e(k)'] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l(k) \\ \Delta x(k) \\ e(k) \end{bmatrix} \right). \quad (2.6)$$

Este problema pode ser visto como o problema do regulador linear quadrático padrão. Defina-se

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} F & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ \Gamma(I-F) & CA & I \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B \\ CB \end{bmatrix}, \quad \bar{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q \end{bmatrix}.$$

É fato conhecido que uma condição suficiente para a existência de uma solução estabilizadora  $P$  para a equação algébrica de Riccati associada ao problema acima, dada por

$$P = \bar{A}' P \bar{A} + \bar{Q} - \bar{A}' P \bar{B} (R + \bar{B}' P \bar{B})^{-1} \bar{B}' P \bar{A}$$

é que o par  $(\bar{A}, \bar{B})$  seja estabilizável, e que o par  $([0 \ 0 \ Q^{\frac{1}{2}}], \bar{A})$  seja detectável. Neste caso a lei de controle ótima é dada por uma realimentação de estados, onde a matriz de realimentação é dada por  $K = -(\bar{B}'P\bar{B} + R)^{-1}\bar{B}'P\bar{A}$ .

Passemos a uma análise das condições acima. Vejamos as condições suficientes para a existência de uma solução estabilizante ótima. Essas condições são generalizações dos resultados apresentados por [8].

### A) Condição de estabilizabilidade

#### Proposição 2.4.1

O sistema

$$\begin{bmatrix} F & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ \Gamma(I-F) & CA & I \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ B \\ CB \end{bmatrix}$$

sendo  $A$  uma matriz  $n \times n$ ,  $B$  uma matriz  $n \times m$  e  $C$  uma matriz  $p \times n$ , é estabilizável se, e somente se

a)  $(A, B)$  é estabilizável;

b)  $\begin{bmatrix} A-I & B \\ CA & CB \end{bmatrix}_{(n+p) \times (n+m)}$  tem posto completo de linhas.

#### Prova

Suponha que a) e b) sejam verdadeiras. Se o sistema não é estabilizável, então para algum  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \neq 0$  e  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $|\lambda| \geq 1$ ,

$$(v_1^* \ v_2^* \ v_3^*) \begin{bmatrix} F & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ \Gamma(I-F) & CA & I \end{bmatrix} = \lambda (v_1^* \ v_2^* \ v_3^*)$$

$$(v_1^* \ v_2^* \ v_3^*) \begin{bmatrix} 0 \\ B \\ CB \end{bmatrix} = 0$$

portanto

$$\begin{aligned} v_1^* F + v_3^* \Gamma(I-F) &= \lambda v_1^* \\ v_2^* A + v_3^* CA &= \lambda v_2^* \\ v_3^* &= \lambda v_3^* \\ (v_2^* + v_3^* C)B &= 0. \end{aligned}$$

Então i)  $v_3 = 0$  ou ii)  $\lambda = 1$ . Suponha primeiro que i) seja válida, ou seja  $v_3 = 0$ . Então

$$i.1) v_1^* F = \lambda v_1^*$$

$$i.2) v_2^* A = \lambda v_2^*, v_2^* B = 0$$

Desde que  $r(F) < 1$  e, por hipótese,  $|\lambda| \geq 1$ , temos que i.1) somente pode ser verdadeira se  $v_1 = 0$ . Neste caso i.2) torna-se  $v_2^* A = \lambda v_2^*$ ,  $v_2^* B = 0$  que é uma contradição ao fato de  $(A, B)$  ser estabilizável. Suponha agora que ii) seja válida, ou seja,  $\lambda = 1$ . Então

$$(v_1^* \quad v_2^* \quad v_3^*) \begin{bmatrix} F - I & 0 & 0 \\ 0 & A - I & B \\ \Gamma(I - F) & CA & CB \end{bmatrix} = (0 \quad 0 \quad 0).$$

Como  $F - I$  é inversível, devemos ter

$$(-v_1^* + v_3^* \Gamma)(I - F) = 0 \Leftrightarrow v_1^* = v_3^* \Gamma$$

e da hipótese b)

$$(v_2^* \quad v_3^*) = \begin{bmatrix} A - I & B \\ CA & CB \end{bmatrix} = (0 \quad 0) \Leftrightarrow v_2 = 0, v_3 = 0$$

portanto  $v_1 = 0, v_2 = 0, v_3 = 0$ , o que é uma contradição com  $v \neq 0$ .

Por outro lado, se a) ou b) não forem verdadeiras, usando argumentos similares aos anteriores, podemos mostrar que o sistema não é estabilizável.

**Observação:** Note que para que a matriz no item b) da Proposição 2.4.1 acima tenha posto completo de linhas, é preciso que  $p \leq m$ , o que está de acordo com o fato de que o número de variáveis controladas tem que ser menor que o número de variáveis manipuladas.

## B) Condição de detectabilidade

### Proposição 2.4.2

O sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & Q^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} F & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ \Gamma(I - F) & CA & I \end{bmatrix}$$

é detectável se e somente se  $(CA, A)$  é detectável.

**Prova**

O sistema é não detectável se, e somente se, para algum  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \neq 0$  e  $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \geq 1$ ,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & Q^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} F & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ \Gamma(I - F) & CA & I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

isto é,  $v_3 = 0$  (do fato que  $Q^{\frac{1}{2}} > 0$ ) e

$$Fv_1 = \lambda v_1$$

$$Av_2 = \lambda v_2$$

$$\Gamma(I - F)v_1 + CAv_2 = 0$$

Da estabilidade de  $F$ , devemos ter  $v_1 = 0$ , resultando em

$$Av_2 = \lambda v_2$$

$$CAv_2 = 0.$$

Isto só pode ser válido se  $(CA, A)$  é não detectável.

**C) Condição mais fraca**

Uma condição mais fraca que a detectabilidade é apresentada a seguir. Esta condição também garante a existência de uma solução estabilizadora para a equação algébrica de Riccati, apesar de não garantir unicidade dentro o conjunto de matrizes positivas semi-definidas (vide [23]).

**Proposição 2.4.3**

$(\overline{C}, \overline{A})$  não tem nenhum modo observável na circunferência de raio unitário se e somente se  $(C, A)$  não tem nenhum modo observável dentro da circunferência de raio unitário.

**Prova**

$(\bar{C}, \bar{A})$  não tem nenhum modo observável na circunferência de raio unitário  $\Leftrightarrow$  não existe  $v \neq 0$ ,  $|\lambda| = 1$  tal que  $\bar{A}v = \lambda v, \bar{C}v = 0 \Leftrightarrow$  não existe  $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \neq 0$ ,  $|\lambda| = 1$  tal que

$$\begin{bmatrix} F & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ \Gamma(I-F) & CA & I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, [0 \ 0 \ Q^{\frac{1}{2}}] \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{array}{c} \updownarrow \\ v_3 = 0, Fv_1 = \lambda v_1, Av_2 = \lambda v_2, \Gamma(I-F)v_1 + CAv_2 = 0 \\ \updownarrow \\ v_1 = 0, v_3 = 0, CAv_2 = \lambda Cv_2, Av_2 = \lambda v_2, \lambda Cv_2 = 0 \end{array}$$

$\Leftrightarrow (C, A)$  não tem nenhum modo observável dentro do círculo unitário.

**2.5 Abordagem quadrática robusta com restrições**

Na seção anterior apresentamos uma análise da abordagem quadrática para o MPC no caso sem restrições e com os parâmetros nominais coincidindo com os reais. Neste capítulo discutimos o caso robusto sem e com restrições como se segue. Consideramos que a entrada definida por  $u(k)$  represente na verdade a variação da variável manipulada  $\Delta u(k)$ . Poderíamos, na verdade, considerar restrições tanto em  $u(k)$  como em  $\Delta u(k)$ , mas, nos restringiremos às restrições em  $\Delta u(k)$  (que representa a taxa de variação da variável manipulada) por ser de grande importância em sistemas químicos, já que está relacionada à velocidade com a qual podemos operar as variáveis manipuladas.

Conforme visto na seção anterior, a abordagem do regulador linear quadrático em MPC pode ser escrita como um problema LQR padrão, com variáveis de estado e funcional como em (2.5) e em (2.6). A partir de agora, redefiniremos as variáveis de estado  $x(k)$ , controle  $u(k)$  e matrizes  $A$  e  $B$ , conforme em (2.5) e o funcional com suas matrizes de custos conforme em (2.6), isto é, adotaremos a seguinte notação (vide (2.5) e (2.6)):

$$x(k) \leftrightarrow \begin{bmatrix} l(k+1) \\ \Delta x(k+1) \\ e(k+1) \end{bmatrix}$$

$$u(k) \leftrightarrow \Delta u(k)$$

$$A \leftrightarrow \bar{A} = \begin{bmatrix} F & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ \Gamma(I - F) & CA & I \end{bmatrix}$$

$$B \leftrightarrow \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B \\ CB \end{bmatrix}$$

$$Q \leftrightarrow \bar{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q \end{bmatrix}$$

$$R \leftrightarrow R$$

### 2.5.1 Incertezas no modelo e robustez

Sempre que recorremos a um processo de identificação de sistemas para obtenção de um modelo nominal de uma planta real estaremos sujeitos a obtê-lo de forma mais ou menos distante da planta real dependendo do processo utilizado, das necessidades do projeto e do nível de detalhes requeridos.

É claro que quanto mais próximo o modelo estiver da planta real, melhor será o projeto do controlador, mas, muitas vezes a complexidade do modelo obtido torna-o de difícil tratamento matemático, sendo mais interessante adotar um modelo mais simplificado.

Mesmo que obtivéssemos um modelo que fosse uma réplica fiel da planta, as diferenças viriam a aparecer com a variação dos parâmetros devido às condições de operação da planta.

Seja então qual for a origem dos erros de modelagem, estaremos sempre trabalhando com um modelo que não descreve fielmente a planta. Apesar disso, estaremos sempre considerando ao menos uma certa região de incertezas onde a planta pode ser aproximada pelo modelo obtido.

Existem alguns modos de se apresentar este intervalo de incerteza. O que usaremos no trabalho é o da incerteza politópica, visto a seguir.

Considerando o sistema a seguir (que representaria o modelo visto em (2.5), redefinindo as variáveis de estado e controle de forma apropriada; vide comentários no início desta seção):

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

podemos admitir que

$$[A \ B] \in \Omega$$

onde

$$\Omega = \left\{ [A, B]; A = \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i, B = \sum_{i=1}^N \alpha_i B_i, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \right\}.$$



A expressão acima define  $\Omega$  como sendo uma região onde certamente o par  $[A \ B]$  será encontrado.

Projetar um controlador robusto significa portanto que, embora não se tenha um modelo que seja uma réplica fiel da planta, teremos o sistema funcionando dentro das condições de operação desejáveis para o sistema.

Incertezas do tipo apresentada acima foram consideradas principalmente em [12]-[16].

## 2.5.2 MPC robusto sem restrições

Como foi visto anteriormente, a robustez do controlador projetado refere-se à capacidade dele operar satisfatoriamente mesmo que o modelo nominal obtido para a planta não represente fielmente a planta real.

Vimos também que a base do algoritmo MPC é encontrar um controle ótimo minimizando um funcional  $J_n(k)$ , e como foi dito, para garantir a estabilidade, fazemos  $n \rightarrow \infty$ , logo o funcional torna-se  $J_\infty(k)$ .

Mas, dadas as condições de incerteza da planta, não basta somente minimizarmos o funcional. Devemos encontrar o melhor controle possível na pior condição de modelagem da planta, ou seja, onde os parâmetros  $[A \ B]$  causam o pior valor do funcional  $J_\infty(k)$ .

Devemos então encontrar o pior, ou máximo valor de  $J_\infty(k)$  para os valores de  $[A_i \ B_i]$  dentro do intervalo definido por  $\Omega$ , e então procurar o melhor controle para esse caso.

Chamaremos de minimização da função de performance robusta a

$$\min_{u(k+i/k), i \geq 0} \max_{[A \ B] \in \Omega} J_\infty(k)$$

onde (a função custo a seguir deve ser interpretada conforme (2.6), após uma redefinição das variáveis de estado, controle, matrizes de custo)

$$J_\infty(k) = \sum_{i=0}^{\infty} [x(k+i/k)' Q x(k+i/k) + u(k+i/k)' R u(k+i/k)'].$$

O problema de minimização-maximização anterior não é analiticamente tratável por técnicas de programação dinâmica sendo, desta maneira, preciso usar técnicas de LMI, levando às soluções que apresentaremos no capítulo 3.

## 2.5.3 MPC robusto com restrições

Na prática todos os processos apresentam limitações físicas que devem ser respeitadas. Essas limitações podem estar na variável manipulada, na saída, etc. Elas representam as restrições do processo quanto à capacidade de resposta dos equipamentos (abertura de válvulas por exemplo), limites de operação impostos para manter a segurança do processo, limite de emissão de poluentes, fatores econômicos que visam maximizar o lucro ou minimizar o custo (isto é mais comum em processos da indústria petroquímica onde há produção de vários itens diferentes, direcionando

todo esforço operacional na produção dos que dêem mais lucro). Problemas industriais resolvidos com algoritmos MPC podem ser encontrados em [3].

Os algoritmos MPC em geral devem proporcionar uma maneira sistemática de tratarmos as restrições tanto no projeto quanto na implementação do sistema de controle, justificando a variedade de trabalhos encontrados na área.

Um algoritmo MPC bem projetado é aquele que calcula novos valores para a entrada quando alguma entrada ou saída prevista pelo controlador viole as restrições do sistema, visando sempre a minimização do funcional. Quando ocorrer uma violação dos limites das variáveis do sistema, o algoritmo simplesmente pode adotar o valor máximo possível para a entrada, mas neste caso não há garantia que este valor seja o melhor naquela condição de operação, caso não tenha sido calculado um novo valor ótimo para aquela situação. Esse tipo de operação do algoritmo subaproveita o potencial de predição do MPC.

Vejam os então como representar as restrições de entrada e saída de uma planta pelo algoritmo MPC.

### • Restrições na entrada

Lembrando novamente que a variável  $u(k)$  a seguir representa, na verdade, a variação da lei de controle nos instantes  $k$  e  $k - 1$ , apresentamos as restrições da entrada a serem consideradas neste trabalho:

$$\|Lu(k + i/k)\|_2^2 \leq u_{max}^2, \quad i \geq 0.$$

Este tipo de restrição incorpora as restrições quanto à máxima variação do valor de cada uma das entradas, da seguinte maneira:

$$|u_j(k + i/k)| \leq u_{j,max}, \quad i \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n_u$$

onde  $j$  designa a  $j$ -ésima entrada limitada.

Como foi dito na seção 2.2 com relação a minimização do funcional  $J_\infty(k)$ , as restrições nas entradas também não são analiticamente tratadas por técnicas tradicionais de programação dinâmica sendo, desta forma, preciso utilizar ferramentas de LMI para transformarmos o problema em uma forma computacionalmente adequada. A solução de problemas dessa natureza será apresentada no capítulo 3.

### • Restrições na saída

Consideramos restrição em uma saída  $z(k + i/k)$ , que leva em conta o erro de predição (veja capítulo 3). A representação destas restrições é dada por:

$$\|z(k + i/k)\|_2 \leq z_{max}, \quad i \geq 0$$

que da mesma forma que as restrições de entrada só são computacionalmente tratáveis se forem colocadas na forma de LMI.

---

## 2.6 Conclusões

Neste capítulo apresentamos a abordagem do regulador linear quadrático em MPC, que tem grande aplicação em processos de indústrias químicas e petroquímicas. Restrições geralmente ocorrem nesses casos na forma de limites na abertura de válvulas e nas variáveis manipuladas. No caso sem restrições verificamos (seção 2.4) que o problema do regulador linear quadrático em MPC pode ser colocado na forma de um regulador linear quadrático padrão. Condições para a existência de uma solução estabilizadora da equação de Riccati foram estabelecidas.

Entretanto, conforme mencionado anteriormente, em várias situações práticas devemos introduzir restrições ao modelo para torná-lo de interesse. Neste caso técnicas de programação quadrática com restrições podem ser utilizadas. Alguns algoritmos também permitem incorporar algumas incertezas ao modelo (vide [3]).

No próximo capítulo serão apresentados dois algoritmos convexos que permitem introduzir restrições e incertezas ao modelo, tornando-os poderosos para aplicação em situações reais que sempre estão sujeitas à restrições e incertezas. Simulações e comparações serão realizadas no capítulo 4.

# Capítulo 3

## Controle $\mathcal{H}_2$ robusto com restrições

### 3.1 Introdução

Neste capítulo será desenvolvido o principal resultado deste trabalho, que trata de formular o problema de controle quadrático robusto com restrições, advindo dos modelos MPC conforme visto no capítulo 2, na forma de dois problemas de programação convexa.

Inicialmente mostaremos na subseção 3.2, que o problema quadrático robusto com restrições pode ser escrito na forma de um problema de controle  $\mathcal{H}_2$  robusto com restrições. Também na seção 3.2 serão apresentadas as ferramentas matemáticas que serão úteis para o desenvolvimento dos algoritmos. A seção 3.3 mostra o modelo do sistema que apoiará a proposição dos problemas (que poderia representar o modelo (2.5) com custo (2.6)). A seção 3.4 traz os objetivos do controlador e as restrições de controle que deverão ser respeitadas. A seção 3.5 apresenta em 3.5.1 a proposição dos problemas que queremos resolver com base no modelo de sistema apresentado em 3.3 e nas restrições de 3.4 e em 3.5.2 os algoritmos que solucionam os problemas propostos em 3.5.1, provando que estes respeitam as restrições da seção 3.4. Finalmente na seção 3.6 estão as conclusões do capítulo.

Os comentários da subseção 2.5 referentes à notação adotada para  $x(k)$ ,  $u(k)$ , etc, também serão válidos neste capítulo.

### 3.2 Subsídios matemáticos

Nesta seção estão apresentadas as proposições e definições matemáticas que serão usadas no desenvolvimento da teoria deste capítulo. Será feita também uma verificação que a norma  $\mathcal{H}_2$  e o custo quadrático são formas equivalentes de representação de custos tratados pelo algoritmo que será desenvolvido no restante deste capítulo.

Para enunciarmos a proposição 3.2.1 consideremos o sistema linear a tempo discreto abaixo

$$\begin{cases} x(k+1) = A_{cl}x(k) + Jw(k) & \text{com } x(0) = 0 \\ z(k) = D_{cl}x(k) \end{cases}$$

onde  $cl$  designa *closed loop*.

Sendo  $A_{cl}$  estável, ou seja, apresenta todos os seus autovalores com módulo menor que 1, a função de transferência  $G(z)$  de  $w(k)$  para  $z(k)$  é dada por

$$G(z) = D_{cl}(zI - A_{cl})^{-1}J$$

e a norma  $\mathcal{H}_2$  é dada por

$$\|G\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{tr}(G(e^{-j\omega})^* G(e^{-j\omega})) d\omega \quad (\text{veja ref. [14] ou [22]}).$$

O seguinte resultado relaciona a norma  $\mathcal{H}_2$  com os gramianos de controlabilidade  $(A_{cl}, J)$  e observabilidade  $(D_{cl}, A_{cl})$  (veja ref. [14] ou [22]).

- **Proposição 3.2.1**

**Norma  $\mathcal{H}_2$  da função de transferência do sistema**

A norma  $\mathcal{H}_2$  da função de transferência do sistema apresentado anteriormente é dada por

$$\|G\|_2^2 = \text{tr}(D_{cl} L_c D_{cl}') = \text{tr}(J' L_o J)$$

onde

$$A_{cl} L_c A_{cl}' - L_c + J J' = 0$$

$$A_{cl}' L_o A_{cl} - L_o + D_{cl}' D_{cl} = 0 \quad \blacksquare$$

- **Observação 3.2.1**

Vamos verificar agora uma relação entre a norma  $\mathcal{H}_2$  e o custo quadrático visto na seção 2.4. Vejamos inicialmente que a norma  $\mathcal{H}_2$  também pode ser escrita como sendo

$$\|G\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^n \|z^i(k)\|^2$$

onde  $z^i(k)$  é a saída  $z(k)$  quando se aplica uma entrada  $w(0) = e^i$ ,  $w(k) = 0$  para  $k > 0$ , e  $e^i$  representa um vetor unitário de forma que  $\{e^1, \dots, e^n\}$  formam uma base ortonormal de  $\mathfrak{R}^n$  (veja ref. [22]).

Para provar a expressão acima, vamos substituir  $z^i(k)$  pela expressão de saída do sistema, reescrita abaixo

$$z^i(k) = D_{cl} x^i(k).$$

Obtemos então

$$\|z^i(k)\|^2 = z^i(k)' z^i(k) = x^i(k)' D_{cl}' D_{cl} x^i(k).$$

Substituindo agora  $D_{cl}' D_{cl}$  por

$$D_{cl}' D_{cl} = L_o - A_{cl}' L_o A_{cl}$$

que é expressão do gramiano de observabilidade de  $(D_{cl}, A_{cl})$  do sistema, temos

$$\begin{aligned} z^i(k)' z^i(k) &= x^i(k)' (L_o - A_{cl}' L_o A_{cl}) x^i(k) \\ &= x^i(k)' L_o x^i(k) - x^i(k)' A_{cl}' L_o A_{cl} x^i(k). \end{aligned}$$

Como  $w(k) = 0$  para  $k > 0$  então o estado do sistema nestes casos fica

$$x(k+1) = A_{cl}x(k).$$

Então para  $k > 0$

$$z^i(k)'z^i(k) = x^i(k)'L_o x^i(k) - x^i(k+1)'L_o x^i(k+1).$$

Para  $k = 0$ , temos que  $x(0) = 0$  e portanto

$$z^i(0)'z^i(0) = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N \|z^i(k)\|^2 &= \sum_{k=1}^N \|z^i(k)\|^2 = \sum_{k=1}^N z^i(k)'z^i(k) = \\ &= \sum_{k=1}^N [x^i(k)'L_o x^i(k) - x^i(k+1)'L_o x^i(k+1)] \end{aligned}$$

Note que na somatória acima o termo

$$-x^i(k+1)'L_o x^i(k+1) \quad , \text{ com } k = l$$

é cancelado pelo termo

$$x^i(k)'L_o x^i(k) \quad , \text{ com } k = l + 1.$$

Sendo assim, resta na expressão apenas o primeiro termo quando  $k = 1$  e o último termo quando  $k = N$ , pois os termos intermediários são todos cancelados. Logo

$$\sum_{k=0}^N \|z^i(k)\|^2 = x^i(1)'L_o x^i(1) - x^i(N+1)'L_o x^i(N+1).$$

Fazendo  $N \rightarrow \infty$  e lembrando que

a)  $A_{cl}$  é estável, logo  $x^i(N+1) \rightarrow 0$

b) Para  $k = 0$  temos  $w(0) = e^i$  e  $x(0) = 0$ , e portanto neste caso, pela equação do sistema

$$x^i(1) = J e^i$$

segue que

$$\sum_{k=0}^N \|z^i(k)\|^2 = e^{i'} J' L_o J e^i.$$

Tomando a somatória em  $i$ , temos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^n \|z^i(k)\|^2 = \sum_{i=1}^n e^{i'} J' L_o J e^i = \text{tr}(J' L_o J) = \|G\|_2^2.$$

Note agora que se  $A_{cl} = A - BK$ ,

$$D_{cl} = \begin{pmatrix} Q^{\frac{1}{2}} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ R^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} K,$$

e  $u^i(k) = -Kx^i(k)$ , e fazendo com que a saída do sistema seja  $z^i(k) = D_{cl}x^i(k)$ , temos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \|z^i(k)\|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} z^i(k)' z^i(k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} x^i(k)' D_{cl}' D_{cl} x^i(k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} [x^i(k)' (Q + K' R K) x^i(k)] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} [x^i(k)' Q x^i(k) + u^i(k)' R u^i(k)]. \end{aligned}$$

A expressão acima corresponde a um custo quadrático com condição inicial em  $k = 1$  sendo  $x^i(1) = J e^i$ . Portando a norma  $\mathcal{H}_2$  de  $G$  pode ser vista como sendo a soma em  $i$  de custos quadráticos para condição inicial em  $k = 1$  sendo  $x^i(1) = J e^i$ , verificando o fato desejado ■

Apresentamos a seguir várias proposições conhecidas na literatura que serão úteis neste capítulo. Algumas provas são apresentadas nos apêndices para auxiliar na compreensão do trabalho.

- **Proposição 3.2.2**  
**Propriedade convexa de matrizes**

Se

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \quad \text{e} \quad W \geq 0$$

então

$$\begin{aligned} \{\alpha Q_1 + (1 - \alpha) Q_2\} W \{\alpha Q_1 + (1 - \alpha) Q_2\}' &\leq \\ \alpha Q_1 W Q_1' + (1 - \alpha) Q_2 W Q_2' &\blacksquare \end{aligned}$$

( Para prova veja apêndice A ).

- **Proposição 3.2.3**  
**Decomposição de Schur**

Se

$$W_1 > 0$$

então

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \geq 0$$

se, e somente se

$$W_3 \geq W_2' W_1^{-1} W_2 .$$

Da mesma forma, se

$$W_3 > 0$$

então

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \geq 0$$

se, e somente se

$$W_1 \geq W_2' W_3^{-1} W_2 \blacksquare$$

( Para prova veja apêndice B ).

- **Proposição 3.2.4**

Seja  $e$  um vetor unitário em  $\mathfrak{R}^n$ . Temos que

$$ee' \leq I \blacksquare$$

- **Proposição 3.2.5**  
**Norma de matriz**

Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$ . Segue que

$$\|A\|^2 = \max\{\|Ax\|^2; \|x\| \leq 1\} = \lambda_{\max}\{A'A\} = \lambda_{\max}\{AA'\} \blacksquare$$

( Para prova veja ref. [2] ).



- **Proposição 3.2.6**  
**Teorema de Lyapunov**

Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$ . Se para  $Q > 0$  existe  $P > 0$  tal que

$$APA' - P \leq -Q$$

então  $A$  é estável ( todos os autovalores de  $A$  têm módulo  $< 1$ ) ■

### 3.3 O modelo do sistema

Para o desenvolvimento do nosso algoritmo consideraremos o sistema (3.1), em espaço de estados, descrito abaixo

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Jw(k), & \text{com } x(0) = 0 & (3.1.a) \\ z(k) = Ex(k) + Fu(k) & & (3.1.b) \end{cases}$$

onde

$$JJ' > 0 \quad \text{e} \quad E'F = 0.$$

A ortogonalidade entre  $E'$  e  $F$  é assumida somente por conveniência, podendo ser obtida por uma mudança apropriada de coordenadas.

O sistema (3.1) é um modelo nominal de uma planta real na forma MPC conforme visto em (2.5), (2.6), no capítulo 2, seção 2.5, e os parâmetros  $A$  e  $B$  apresentam incertezas de modelagem que nos levam a um desenvolvimento de algoritmos de controle que confirmam estabilidade robusta ao sistema.

Conforme na subseção 2.5.1, consideramos que os parâmetros  $A$  e  $B$  do sistema (3.1), sujeitos a erro de modelagem, podem ser representados como um conjunto convexo definido por  $\Omega$  e descrito por

$$\Omega = \left\{ [A, B]; A = \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i, B = \sum_{i=1}^N \alpha_i B_i, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \right\}$$

de modo que

$$[A \ B] = \sum_{i=1}^N \alpha_i [A_i \ B_i].$$

Note que se  $N = 1$  o sistema não apresenta incerteza de modelagem.

### 3.4 Objetivos do controlador

Para o sistema (3.1) com realimentação de estados dada por

$$u(k) = -Kx(k)$$

denotaremos por  $G_K$  a função de transferência em malha fechada de (3.1), conforme visto na seção 3.2, definida por

$$G_K = D_{cl}(zI - A_{cl})^{-1}J, \quad A_{cl} = A - BK, \quad D_{cl} = E - FK$$

e cuja norma  $\mathcal{H}_2$  é dada por

$$\|G_K\|_2^2 = \text{tr}(D_{cl}L_cD_{cl}') = \text{tr}(J'L_oJ).$$

O objetivo do algoritmo é encontrar a matriz de realimentação  $K$  de modo que o controlador satisfaça às seguintes condições:

i)  $u(k)$  estabilize o sistema (3.1); (3.2)

ii) A norma  $\mathcal{H}_2$  de  $\|G_K\|_2^2$ , conforme definida acima, seja

$$\|G_K\|_2^2 \leq \delta^2 \quad (3.3)$$

para algum  $\delta > 0$ ;

iii) Para qualquer impulso

$$w(k), \quad k = 0, 1, \dots \quad \text{aplicado a (3.1.a)}$$

as restrições

$$\|H_i x(k) + L_i u(k)\|^2 \leq \xi_i^2, \quad i = 1, \dots, l, \quad (3.4)$$

são satisfeitas para todo  $k = 0, 1, \dots$ .

Note que conforme foi visto na observação 3.2.1, a norma  $\mathcal{H}_2$  pode ser escrita como a soma dos custos quadráticos da saída para um conjunto de entradas impulsionais  $w^i(k)$  onde  $w^i(0) = e^i$ ,  $w^i(k) = 0$  para  $k > 0$ ,  $\{e^1, \dots, e^n\}$  formando uma base ortonormal para  $\mathfrak{R}^n$ . Logo a condição (3.4) impõe que para qualquer que seja esta entrada impulsional, as restrições em (3.4) são satisfeitas.

Note também que a condição (3.4) poderia representar restrições ou no controlador ou na variável de saída do sistema pois, fazendo

$$H_i = 0 \quad \text{para algum } i$$

temos que (3.4) fica da forma

$$\|L_i u(k)\|^2$$

que penaliza apenas uma combinação linear das variáveis de controle.

Ou então, fazendo

$$L_i = 0 \quad \text{para algum } i$$

temos

$$\|H_i x(k)\|^2$$

que penaliza a saída  $H_i x(k)$  do sistema.

Portanto a condição (3.4) representa uma generalização nas condições que devem ser respeitadas pelo controlador.

### 3.5 Algoritmo para obtenção da lei de controle

Nesta seção, inicialmente proporemos dois problemas robustos de programação convexa. Mostraremos em seguida que a solução desses dois problemas usando as ferramentas de desigualdade linear de matrizes (LMI do inglês Linear Matrix Inequalities) levarão às leis de controle que satisfazem às condições (3.2), (3.3) e (3.4) impostas na seção 3.4. Estas provas, apresentadas nos teoremas 3.5.1 e 3.5.2, são os principais resultados teóricos deste trabalho. Esses resultados podem ser vistos como uma adaptação dos resultados obtidos por [14] para o caso com restrições, e também dos resultados em [17], dentro do contexto de normas  $\mathcal{H}_2$  com restrições.

#### 3.5.1 Proposição dos problemas convexos

##### Problema 1:

Encontrar uma solução do tipo

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix}$$

para o problema de

$$\beta = \min \operatorname{tr} \left\{ \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix} W \begin{bmatrix} E' & 0 \\ 0 & F' \end{bmatrix} \right\} \quad (3.5)$$

sujeito às seguintes condições:

$$\text{a) } \quad A_i W_1 A_i' - B_i W_2' A_i - A_i W_2 B_i' + B_i W_3 B_i' - W_1 + J J' \leq 0, \quad (3.6)$$

para  $i = 1, \dots, N$

$$b) \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \geq 0, \quad W_1 > 0 \quad (3.7)$$

$$c) \left\{ H_i W_1 H_i' - L_i W_2' H_i' - H_i W_2 L_i' + L_i W_3 L_i' \right\} \leq \xi_i^2 I, \quad (3.8)$$

para  $i = 1, \dots, l$

### **Problema 2:**

Encontrar uma solução em  $(\nu, V, Y)$  para o problema de

$$\min(\nu)$$

sujeito às seguintes condições:

$$a) \begin{bmatrix} V & VA_i' + Y'B_i' & VE' & Y'F' \\ A_i V + B_i Y & V & 0 & 0 \\ EV & 0 & \nu I & 0 \\ FY & 0 & 0 & \nu I \end{bmatrix} \geq 0, \quad (3.9)$$

para  $i = 1, \dots, N$

$$b) \begin{bmatrix} I & J' \\ J & V \end{bmatrix} \geq 0, \quad V > 0, \quad \nu > 0 \quad (3.10)$$

$$c) \begin{bmatrix} \xi_i^2 I - (H_i V H_i' + L_i Y H_i' + H_i Y' L_i') & L_i Y \\ Y' L_i' & V \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.11)$$

para  $i = 1, \dots, l$

### **3.5.2 Obtenção dos controladores**

Nesta seção mostraremos que as soluções ótimas dos problemas 1 e 2 apresentados na seção 3.5.1 levam aos controladores robustos que satisfazem às condições (3.2), (3.3) e (3.4) da seção 3.4.

Vejamos a solução obtida para o problema 1.

#### **Teorema 3.5.1**

Suponha que o problema 1 tenha uma solução do tipo

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix}$$

e  $\beta$  é definido por (3.5).

Então as condições (3.2), (3.3) e (3.4) da seção 3.4 são satisfeitas para

$$u(k) = -Kx(k)$$

onde

$$K = W_2' W_1^{-1} \quad \text{e} \quad \delta^2 = \beta.$$

***Prova do teorema 3.5.1***

A prova de (3.2) e (3.3) segue os mesmos passos que aqueles apresentados em [14], e por isto é apresentada no Apêndice C. Vamos provar agora a condição (3.4).

Tomemos novamente o sistema (3.1), com sua equação (1.a) reescrita abaixo.

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Jw(k)$$

com

$$x(0) = 0 \quad \text{e} \quad u(k) = -Kx(k).$$

Assim

$$u(0) = -Kx(0) = 0.$$

Calculemos então  $x(1)x(1)'$

$$x(1) = Ax(0) + Bu(0) + Jw(0) = Jw(0)$$

logo

$$x(1)' = w(0)'J'.$$

Portanto

$$x(1)x(1)' = Jw(0)w(0)'J'.$$

Consideremos então um impulso  $w(k)$ ,  $k = 0, 1, \dots$  na entrada.

Logo, para um vetor unitário  $e$  temos

$$w(k) = \begin{cases} e & \text{para } k = 0 \\ 0 & \text{para } k > 0 \end{cases}$$

Da equação (c.1), reescrita abaixo, segue que

$$(A - BK)W_1(A - BK)' - W_1 + JJ' \leq 0.$$

Como

$$W_1 > 0 \quad \text{e} \quad JJ' > 0$$

temos

$$(A - BK)W_1(A - BK)' \geq 0$$

e da própria expressão (c.1) rearranjada, temos que

$$W_1 \geq (A - BK)W_1(A - BK)' + JJ'$$

e podemos concluir que

$$W_1 \geq (A - BK)W_1(A - BK)'$$

e

$$W_1 \geq JJ'.$$

Sendo  $w(0) = e$  um vetor unitário e a partir da proposição 3.2.4 temos que

$$x(1)x(1)' = Jw(0)w(0)'J' = Jee'J' = JJ' \leq W_1$$

e portanto

$$x(1)x(1)' \leq W_1.$$

Suponhamos então que a propriedade anterior seja válida para qualquer  $k = 0, 1, \dots$ , ou seja

$$x(k)x(k)' \leq W_1.$$

Tomemos novamente a equação (3.1.a);

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Jw(k).$$

Como  $w(k) = 0$  para  $k > 0$  o sistema é simplificado para

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), k > 0.$$

Substituindo  $u(k) = -Kx(k)$  na expressão anterior temos

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) - BKx(k) \\ &= (A - BK)x(k). \end{aligned}$$

Calculando agora  $x(k+1)x(k+1)'$  teremos

$$x(k+1)x(k+1)' = (A - BK)x(k)x(k)'(A - BK)'$$

e como supomos inicialmente que  $x(k)x(k)' \leq W_1$ , então

$$x(k+1)x(k+1)' = (A - BK)x(k)x(k)'(A - BK)' \leq (A - BK)W_1(A - BK)'$$

e ainda, como vimos anteriormente, para que a equação (c.1) seja válida devemos ter

$$(A - BK)W_1(A - BK)' \leq W_1.$$

Logo, concluímos que  $x(k+1)x(k+1)' \leq W_1$  e assim

$$x(k)x(k)' \leq W_1 \quad \text{para todo } k = 0, 1, \dots$$

Tomemos agora a expressão

$$x(k)'W_1^{-1}x(k)x(k)'W_1^{-1}x(k) = (x(k)'W_1^{-1}x(k))^2.$$

Como visto anteriormente

$$x(k)x(k)' \leq W_1$$

logo, se substituirmos  $x(k)x(k)'$  por  $W_1$  teremos que

$$\begin{aligned} x(k)'W_1^{-1}x(k)x(k)'W_1^{-1}x(k) &\leq x(k)'W_1^{-1}W_1W_1^{-1}x(k) \\ &= x(k)'W_1^{-1}x(k) \end{aligned}$$

e assim

$$(x(k)'W_1^{-1}x(k))^2 \leq x(k)'W_1^{-1}x(k)$$

o que só poderá ocorrer caso

$$x(k)'W_1^{-1}x(k) \leq 1.$$

Com isso podemos garantir que

$$x(k) \in \{x; x'W_1^{-1}x \leq 1\}.$$

Voltemos agora à expressão (3.8). Desejamos

$$\max_k \{ \|H_i x(k) + L_i u(k)\|^2 \} \leq \xi_i^2$$

Substituindo

$$u(k) = -Kx(k) \quad \text{com } K = W_2'W_1^{-1}$$

temos

$$\begin{aligned} \max_k \{ \|(H_i - L_i W_2' W_1^{-1})x(k)\|^2 \} &\leq \\ \max_x \{ \|(H_i - L_i W_2' W_1^{-1})x\|^2; x'W_1^{-1}x \leq 1 \} & \end{aligned}$$

Fazendo agora a seguinte mudança de variável

$$\tilde{x} = W_1^{-\frac{1}{2}} x$$

teremos

$$\begin{aligned} & \max_x \left\{ \|(H_i - L_i W_2' W_1^{-1})x\|^2; x' W_1^{-1} x \leq 1 \right\} = \\ & \max_{\tilde{x}} \left\{ \left\| \left( H_i W_1^{\frac{1}{2}} - L_i W_2' W_1^{-\frac{1}{2}} \right) \tilde{x} \right\|^2; \tilde{x}' \tilde{x} \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Pelo que foi exposto na proposição 3.2.5 podemos fazer

$$\begin{aligned} & \max_{\tilde{x}} \left\{ \left\| \left( H_i W_1^{\frac{1}{2}} - L_i W_2' W_1^{-\frac{1}{2}} \right) \tilde{x} \right\|^2; \tilde{x}' \tilde{x} \leq 1 \right\} = \\ & \lambda_{max} \left( \left( H_i W_1^{\frac{1}{2}} - L_i W_2' W_1^{-\frac{1}{2}} \right) \left( H_i W_1^{\frac{1}{2}} - L_i W_2' W_1^{-\frac{1}{2}} \right)' \right) = \\ & \lambda_{max} \left( \left( H_i W_1^{\frac{1}{2}} - L_i W_2' W_1^{-\frac{1}{2}} \right) \left( W_1^{\frac{1}{2}} H_i' - W_1^{-\frac{1}{2}} W_2 L_i' \right) \right) = \\ & \lambda_{max} (H_i W_1 H_i' - L_i W_2' H_i' - H_i W_2 L_i' + L_i W_2' W_1^{-1} W_2 L_i') \end{aligned}$$

Novamente pela proposição 3.2.3 temos que

$$W_3 \geq W_2' W_1^{-1} W_2.$$

Portanto se substituirmos  $W_2' W_1^{-1} W_2$  por  $W_3$  obteremos

$$\lambda_{max} (H_i W_1 H_i' - L_i W_2' H_i' - H_i W_2 L_i' + L_i W_2' W_1^{-1} W_2 L_i') \leq$$

$$\lambda_{max} (H_i W_1 H_i' - L_i W_2' H_i' - H_i W_2 L_i' + L_i W_3 L_i') \leq \xi_i^2, \quad i = 1, \dots, l$$

provando a condição (3.4).

Vejam agora a solução obtida para o **problema 2**.

### **Teorema 3.5.2**

Suponha que

$$E' E > 0$$

e que o problema 2 tenha uma solução em

$$(\nu, V, Y).$$



Então as condições (3.2), (3.3) e (3.4) da seção 3.4 são satisfeitas para

$$u(k) = -Kx(k)$$

onde

$$K = -YV^{-1} \quad \text{e} \quad \delta^2 = \nu r.$$

### ***Prova do teorema 3.5.2***

As provas de (3.2) e (3.3) seguem os passos dos resultados obtidos em [17], e são apresentadas no apêndice C. Vejamos a seguir a prova da condição (3.4).

Da eq. (c.2) podemos verificar que em particular

$$V^{-1} \geq (A - BK)'V^{-1}(A - BK)$$

e

$$V^{-1} \geq \frac{(E-FK)'(E-FK)}{\nu}$$

já que

$$V^{-1} \geq (A - BK)'V^{-1}(A - BK) + \frac{(E-FK)'(E-FK)}{\nu}$$

e

$$(A - BK)'V^{-1}(A - BK) \geq 0$$

e ainda

$$\frac{(E-FK)'(E-FK)}{\nu} \geq 0.$$

Portanto pré-multiplicando por  $x(k)'$  e pós-multiplicando por  $x(k)$  obtemos

$$x(k)'V^{-1}x(k) \geq x(k)'(A - BK)'V^{-1}(A - BK)x(k).$$

Tomemos novamente a equação (3.1.a), reescrita abaixo

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Jw(k)$$

com

$$x(0) = 0 \quad \text{e} \quad u(k) = -Kx(k)$$

e portanto

$$u(0) = -Kx(0) = 0.$$

Consideremos então um impulso  $w(k)$ ,  $k = 0, 1, \dots$  na entrada da seguinte forma:

$$w(k) = \begin{cases} e & \text{para } k = 0 \\ 0 & \text{para } k > 0 \end{cases}$$

Como para  $k > 0$ ,  $w(k) = 0$  temos

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + Jw(k) = Ax(k) - BKx(k) \\ &= Ax(k) - BKx(k) \\ &= (A - BK)x(k). \end{aligned}$$

Logo, de

$$x(k)'V^{-1}x(k) \geq x(k)'(A - BK)'V^{-1}(A - BK)x(k).$$

obtemos

$$x(k)'(A - BK)'V^{-1}(A - BK)x(k) = x(k+1)'V^{-1}x(k+1)$$

Da equação (1.a) obtemos, para  $k = 0$

$$x(1) = Ax(0) + Bu(0) + Jw(0)$$

$$x(1) = Jw(0).$$

Isto mostra que

$$1 = w(0)'w(0) \geq w(0)'J'V^{-1}Jw(0) = x(1)'V^{-1}x(1) \geq x(k)'V^{-1}x(k)$$

para todo  $k = 0, 1, \dots$

Portanto

$$x(k) \in \{x; x'V^{-1}x \leq 1\}.$$

Desejamos que

$$\max_{k \geq 0} \{\|H_i x(k) + L_i u(k)\|^2\} \leq \xi_i^2.$$

Substituindo

$$u(k) = -Kx(k) \quad \text{com } K = -YV^{-1}$$

temos

$$\max_{k \geq 0} \{\|(H_i + L_i YV^{-1})x(k)\|^2\} \leq$$

$$\max_x \{\|(H_i + L_i YV^{-1})x\|^2; x'V^{-1}x \leq 1\}$$

Fazendo agora a seguinte mudança de variável

$$\tilde{x} = V^{-\frac{1}{2}}x$$

teremos

$$\begin{aligned} \max_{\tilde{x}} \left\{ \left\| (H_i + L_i Y V^{-1}) V^{\frac{1}{2}} \tilde{x} \right\|^2; \tilde{x}' \tilde{x} \leq 1 \right\} = \\ \max_{\tilde{x}} \left\{ \left\| (H_i V^{\frac{1}{2}} + L_i Y V^{-\frac{1}{2}}) \tilde{x} \right\|^2; \tilde{x}' \tilde{x} \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Pelo que foi exposto na proposição 3.2.5 podemos fazer

$$\begin{aligned} \max_{\tilde{x}} \left\{ \left\| (H_i V^{\frac{1}{2}} + L_i Y V^{-\frac{1}{2}}) \tilde{x} \right\|^2; \tilde{x}' \tilde{x} \leq 1 \right\} = \\ \lambda_{max} \left( (H_i V^{\frac{1}{2}} + L_i Y V^{-\frac{1}{2}}) (H_i V^{\frac{1}{2}} + L_i Y V^{-\frac{1}{2}})' \right) = \\ \lambda_{max} \left( (H_i V^{\frac{1}{2}} + L_i Y V^{-\frac{1}{2}}) (V^{\frac{1}{2}} H_i' + V^{-\frac{1}{2}} Y' L_i') \right) = \\ \lambda_{max} (H_i V H_i' + L_i Y H_i' + H_i Y' L_i' + L_i Y V^{-1} Y' L_i') \leq \xi_i^2. \quad (3.12) \end{aligned}$$

Note agora que a condição (3.11) é equivalente, pela decomposição de Schur,

a

$$\xi_i^2 I - (H_i V H_i' + L_i Y H_i' + H_i Y' L_i') - L_i Y V^{-1} Y' L_i' \geq 0$$

e portanto

$$H_i V H_i' + L_i Y H_i' + H_i Y' L_i' + L_i Y V^{-1} Y' L_i' \leq \xi_i^2 I$$

o que implica que

$$\lambda_{max} (H_i V H_i' + L_i Y H_i' + H_i Y' L_i' + L_i Y V^{-1} Y' L_i') \leq \xi_i^2 I.$$

Este resultado juntamente com a eq.(3.12) mostra que

$$\|H_i x(k) + L_i u(k)\| \leq \xi_i$$

para todo  $i = 1, \dots, l$ , provando a condição (3.4).

---

### 3.6 Conclusões

Neste capítulo mostramos que a solução de problemas de controle ótimo de norma  $\mathcal{H}_2$  robusto com restrições podem ser resolvidos por algoritmos convexos com base na teoria de LMI (Linear Matrix Inequalities), que tem como principal ferramenta o teorema da decomposição de Schur. Apresentamos 2 algoritmos que resolvem o problema proposto, baseados em desigualdade linear de matrizes. Esses algoritmos podem ser utilizados em MPC, conforme visto no capítulo 2.■

# Capítulo 4

## Exemplos numéricos e simulações

### 4.1 Introdução

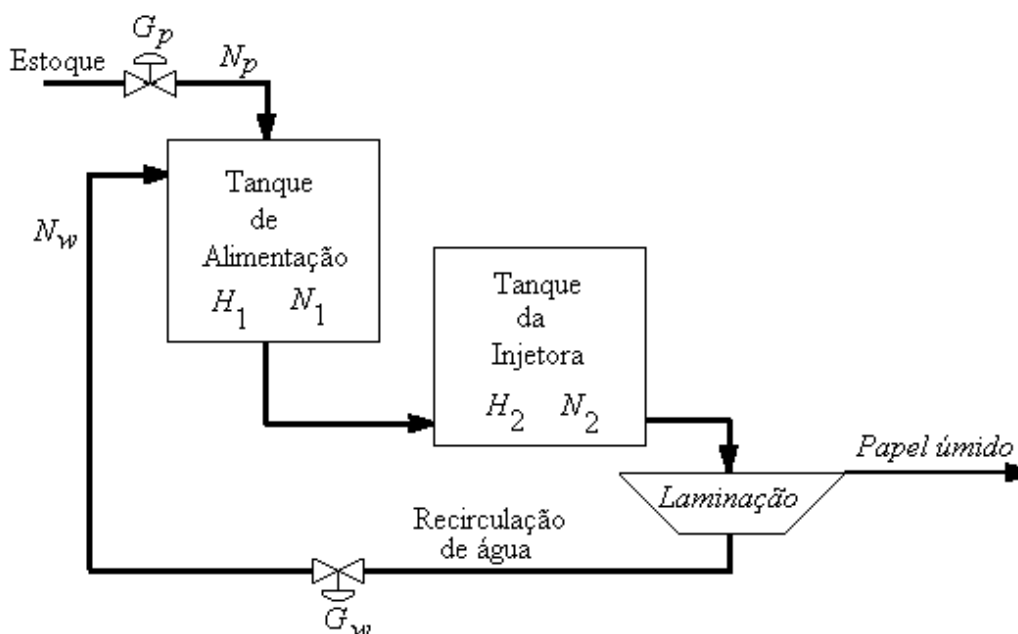
Neste capítulo descreveremos o sistema físico que iremos adotar para desenvolvermos as equações em espaço de estados que serão utilizadas para as simulações utilizando as técnicas de MPC e de LMI. Para o problema LMI 1 apresentado no capítulo 3 utilizaremos a notação LMI1, enquanto para o problema LMI 2 do mesmo capítulo utilizaremos a notação LMI2.

Adotaremos como sistema físico aquele estudado por Ying [24] e simulado por Morari [19] com a proposta de controlar as variáveis do tanque da injetora de uma máquina de fabricação de papel.

### 4.2 Sistema proposto

Abaixo apresentamos o desenho esquemático da máquina de papel onde queremos controlar a composição e nível de líquido do tanque da injetora. O modelo do processo é representado por equações diferenciais ordinárias bilineares.

Abaixo apresentamos o esquema da máquina de papel.



Utilizando a mesma nomenclatura dos textos sugeridos acima temos que os estados da planta são designados por  $x' = [H_1 H_2 N_1 N_2]$ , onde  $H_1$  é o nível do líquido no tanque de alimentação,  $H_2$  é o nível do líquido no tanque da injetora,  $N_1$  é

a consistência (porcentagem de polpa fibrosa em suspensão) no tanque de alimentação e  $N_2$  é a consistência no tanque da injetora. Consideramos todos os estados do sistema são mensuráveis, logo o vetor das saídas é dado por  $y' = [H_1 \ H_2 \ N_1 \ N_2]$ . O objetivo principal de controle é manter as saídas  $H_2$  e  $N_2$  ( $y_2$  e  $y_4$ ) em níveis previamente estabelecidos. Existem duas variáveis manipuladas que são  $u' = [G_p \ G_w]$  onde  $G_p$  é a taxa de produto que vem do estoque e  $G_w$  é a taxa de produto reciclado, ambos para o tanque de alimentação. Existem ainda duas perturbações, uma mensurável que é designada por  $v = [N_p]$  e representa a consistência de material vindo do estoque para o tanque de alimentação e uma não mensurável que é  $d = [N_w]$  que representa a consistência do produto reciclado que também entra no tanque de alimentação. Todas as variáveis estão normalizadas de modo que seus valores são zero na condição nominal de operação do sistema e variações em torno da situação nominal são sempre da mesma magnitude. Sabemos também que o processo é estável em malha aberta.

### 4.3 Simulação do sistema linearizado em malha aberta

A representação em espaço de estados do sistema linearizado é apresentada a seguir. Vale lembrar que esta representação considera o sistema normalizado em torno do ponto de operação ou seja  $x = 0$ ,  $u = 0$ ,  $v = 0$ ,  $d = 0$ .

$$\begin{cases} \dot{x}_m = Ax_m + Bu_m \\ y_m = Cx_m + Du_m \end{cases}$$

As matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  do sistema linearizado em tempo contínuo são as seguintes:

$$A = \begin{bmatrix} -1.93 & 0 & 0 & 0 \\ 0.394 & -0.426 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.63 & 0 \\ 0.82 & -0.784 & 0.413 & -0.426 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1.274 & 1.274 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.34 & -0.65 & 0.203 & 0.406 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para simulação faremos a conversão do sistema de tempo contínuo para tempo discreto, para tanto utilizaremos um período de amostragem de  $2 \text{ min}$ . Este período de amostragem é suficiente uma vez que o tempo de resposta desejado do sistema em malha fechada é da ordem de  $10 \text{ min}$ .

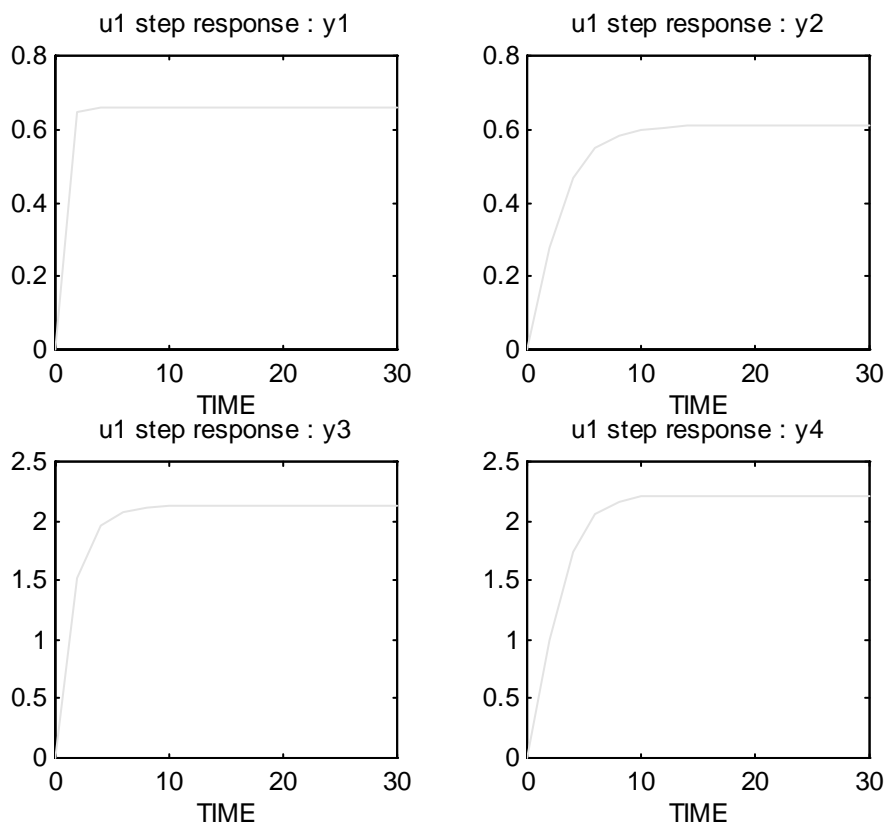
As matrizes  $C$  e  $D$  do sistema em tempo discreto são as mesmas que em tempo contínuo, já as matrizes  $A$  e  $B$  em tempo discreto são as seguintes:

$$A = \begin{bmatrix} 0.0211 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1062 & 0.4266 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2837 & 0 \\ 0.1012 & -0.6688 & 0.2893 & 0.4266 \end{bmatrix}$$

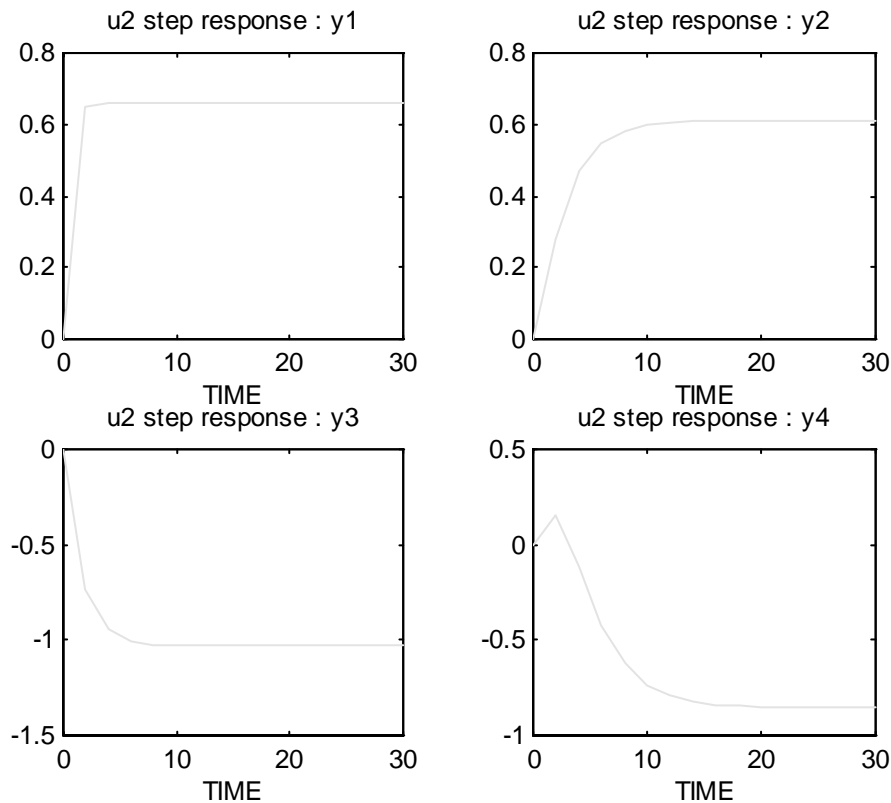
$$B = \begin{bmatrix} 0.6462 & 0.6462 & 0 & 0 \\ 0.2800 & 0.2800 & 0 & 0 \\ 1.5237 & -0.7391 & 0.2308 & 0.4616 \\ 0.9929 & 0.1507 & 0.0859 & 0.1718 \end{bmatrix}$$

A seguir apresentamos as respostas do sistema em malha aberta. O arquivo do programa utilizado para estas simulações é o **PAPMPC.M** do **Matlab** (vide [19]) que pode ser visto no final do trabalho.

Os gráficos seguintes representam as respostas do sistema em malha aberta para um degrau unitário em  $u_1$ .



Na seqüência, temos os gráficos das respostas do sistema em malha aberta para um degrau unitário em  $u_2$ .



Pelas respostas aos degraus aplicados à  $u_1$  e  $u_2$  vemos que existe grande interação entre as entradas e as saídas para o sistema em malha aberta, portanto, ajustando  $u_1$  e  $u_2$  teremos grande efeito sobre as saídas, principalmente sobre  $y_2$  e  $y_4$ .

#### 4.4 Simulação do sistema não linear em malha fechada utilizando um controlador MPC

Vamos agora simular o sistema da máquina de papel (modelo bilinear) utilizando para fechar a malha um controlador MPC. O controlador será projetado considerando-se o sistema linear nominal apresentado na seção 4.2. Para o modelo bilinear real serão utilizadas matrizes  $A$  e  $B$  com uma variação superior de 15% em relação aos valores nominais de projeto, ou seja,  $A_{real} = 1.15 * A_{nom}$ ,  $B_{real} = 1.15 * B_{nom}$ , onde  $A_{nom}$ ,  $B_{nom}$  são os valores apresentados na seção 4.3.

Para o projeto do controlador MPC, consideramos os seguintes parâmetros:

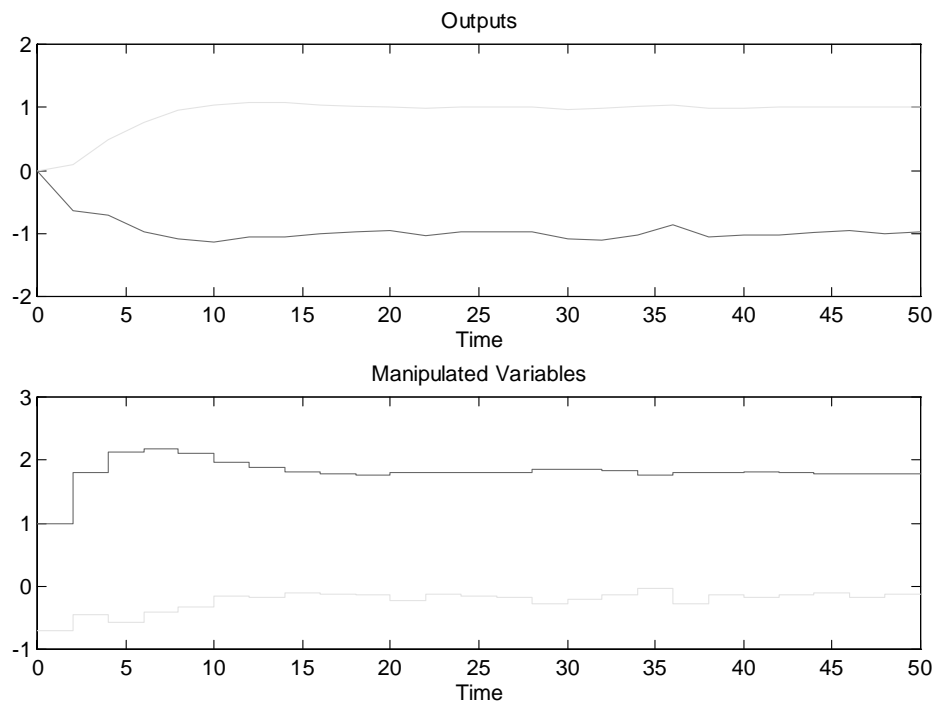
- Horizonte de predição de 10 períodos de amostragem ou seja  $20min$ ;
- Horizonte de controle de 3 períodos de amostragem ou seja  $6min$ ;
- Penalização unitária em  $y_2$  e  $y_4$  e nenhuma penalização em  $y_1$  e  $y_3$ , quanto ao acompanhamento de setpoint;
- Penalização de 0.6 em  $u_1$  e  $u_2$ ;
- Limites inferior e superior de  $u$  em  $-1000$  e  $1000$  ( na prática é como se não houvesse limite para  $u$  ) e taxa máxima de variação de 1;
- Nenhuma restrição em  $y$ ;



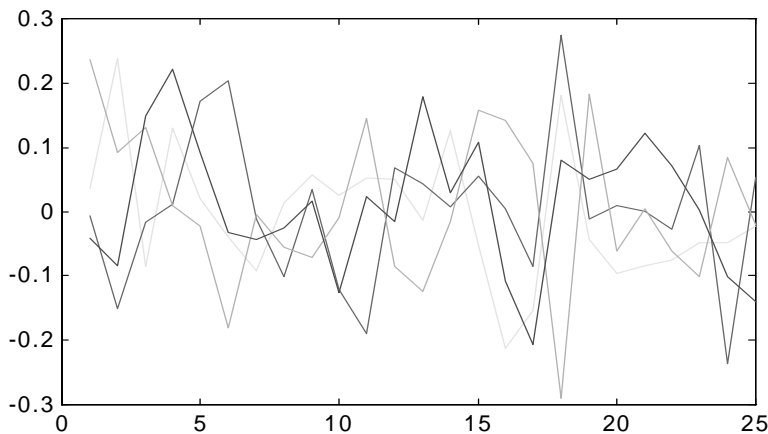
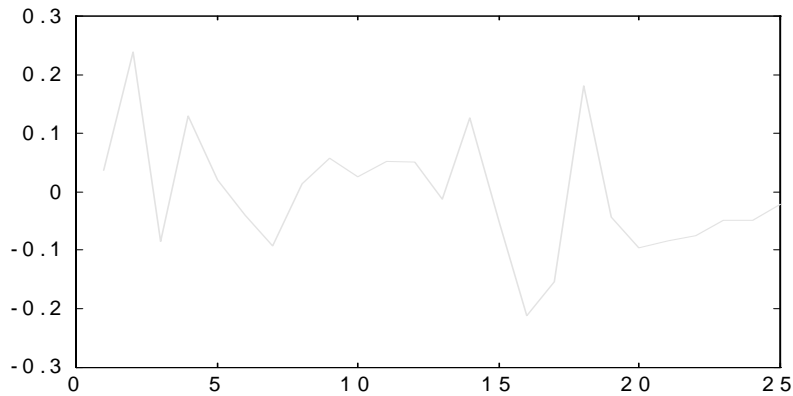
- Perturbação mensurável nula;
- Estimador do tipo Kalman;
- Setpoints das saídas dados por  $y_1 = 0$ ,  $y_2 = 1$ ,  $y_3 = 0$  e  $y_4 = -1$ ;
- Ruído branco gaussiano aplicado na entrada do controlador e na entrada da planta, com variância de 0.1.

O arquivo do programa utilizado para estas simulações é o **PAPMPC2.M** do **Matlab** que pode ser visto no final do trabalho.

A seguir apresentamos os gráficos das respostas  $y_2$  e  $y_4$ , bem como as variáveis de controle do sistema para esta situação:



Apresentamos a seguir os ruídos que foram introduzidos no controle e na saída do sistema. Vale lembrar que ambos são ruídos brancos gaussianos de variância 0.1.

***Distúrbio na saída******Distúrbio no controle*****4.5 Simulação do sistema não linear em malha fechada utilizando um controlador LMI1**

Apresentamos nesta seção os resultados correspondentes às simulações do modelo visto na seção 4.4, utilizando agora o controlador LMI1. Inicialmente descrevemos o modelo em espaço de estados, na formulação adequada para MPC (vide equações 2.5 e 2.6), que utilizaremos para a obtenção do controlador LMI1. Note que neste caso a matriz  $F$  de (2.5) é zero, pois temos apenas resposta ao degrau. Desta forma, temos que a equação dinâmica de interesse é

$$\begin{bmatrix} \Delta x(k+1) \\ e(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ CA & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x(k) \\ e(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ CB \end{bmatrix} \Delta u(k) + Jw(k)$$

onde

$$e(k) = \begin{bmatrix} y_2(k) \\ y_4(k) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_2 \\ r_4 \end{bmatrix}$$

e  $r_i, i = 2, 4$ , é o degrau que se deseja seguir. O nosso funcional é:

$$\begin{aligned}
J &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \Delta u(k)' R \Delta u(k) + [\Delta x(k)' \quad e(k)'] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x(k) \\ e(k) \end{bmatrix} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (\|z(k)\|^2)
\end{aligned}$$

com

$$R = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 0 & 0.6 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$z(k) = E \begin{bmatrix} \Delta x(k) \\ e(k) \end{bmatrix} + F \Delta u(k)$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \sqrt{0.6} & 0 \\ 0 & \sqrt{0.6} \end{bmatrix} e$$

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto as matrizes do nosso sistema, para as variáveis  $\Delta x(k)$ ,  $\Delta u(k)$  e  $e(k)$  são:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ CA & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0211 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1062 & 0.4266 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2837 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1012 & -0.6688 & 0.2893 & 0.4266 & 0 & 0 \\ 0.1062 & 0.4266 & 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0.1012 & -0.6688 & 0.2893 & 0.4266 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ CB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6462 & 0.6462 \\ 0.2800 & 0.2800 \\ 1.5237 & -0.7391 \\ 0.0029 & 0.1507 \\ 0.2800 & 0.2800 \\ 0.9929 & 0.1507 \end{bmatrix}$$

Para as restrições, temos

$$L_1 = [1 \ 0], \quad L_2 = [0 \ 1], \quad \xi_1 = \xi_2 = 1, \quad H_1 = H_2 = 0.$$

Consideramos incertezas em  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$  do tipo politópica, conforme visto nas subseções 2.5.1 e 3.3, sendo  $N = 2$  (número de modelos do sistema), onde para  $i = 1$  (vide equação (3.6)) teremos os valores nominais de  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$  conforme acima, e para  $i = 2$ , consideramos um aumento de 15% nos seus valores nominais.

Reescrevemos a seguir o problema LMI1 proposto no capítulo 3 (item 3.5.1) utilizando o modelo em espaço de estados anterior. Queremos uma solução em  $W$  do tipo

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix}$$

para o problema de

$$\beta = \min \operatorname{tr} \left\{ \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix} W \begin{bmatrix} E' & 0 \\ 0 & F' \end{bmatrix} \right\}$$

sujeito às seguintes condições:

$$\text{a) } \bar{A}_i W_1 \bar{A}_i' - \bar{B}_i W_2' \bar{A}_i - \bar{A}_i W_2 \bar{B}_i' + \bar{B}_i W_3 \bar{B}_i' - W_1 + J J' \leq 0, \\ \text{para } i = 1, 2.$$

$$\text{b) } \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \geq 0, \quad W_1 > 0$$

$$\text{c) } \{ H_i W_1 H_i' - L_i W_2' H_i' - H_i W_2 L_i' + L_i W_3 L_i' \} \leq \xi_i^2 I, \\ \text{para } i = 1, 2.$$

Com a solução em  $W$  deste problema podemos encontrar a matriz de realimentação de estados  $K$  tal que

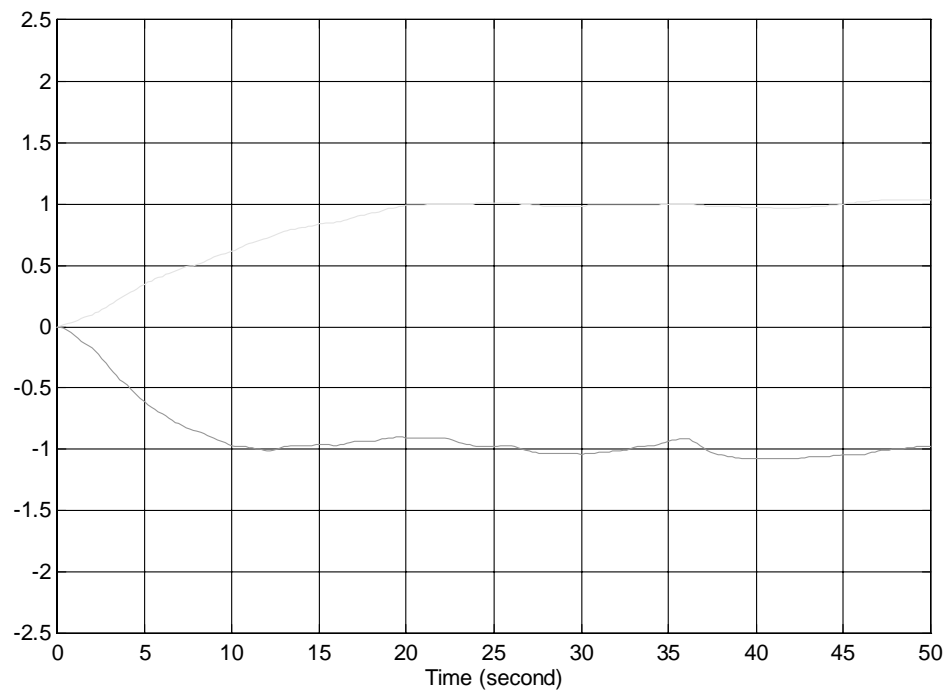
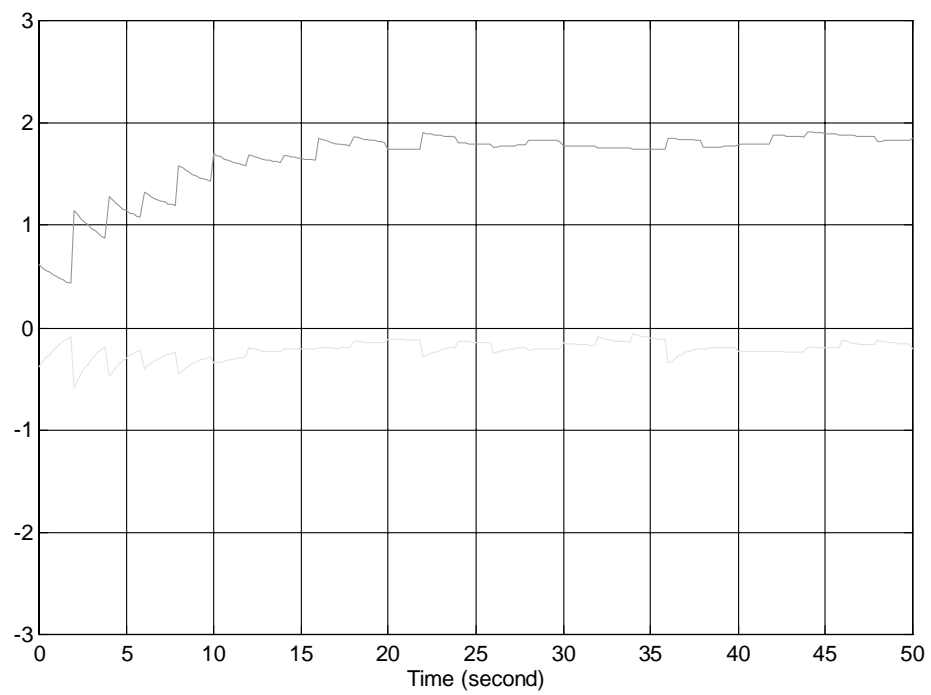
$$K = W_2' W_1^{-1}.$$

Para obtenção da matriz  $K$  e de  $\beta$  utilizamos o programa **PAPLMI1.M** do **Matlab** e para a obtenção dos gráficos da simulação utilizamos o programa **SIPAPER5.M** do **Simulink**, que podem ser vistos no final do trabalho.

Obtivemos a seguinte solução para o problema LMI1:

$$K = \begin{bmatrix} 0.0562 & -0.4923 & 0.2133 & 0.2837 & 0.0946 & 0.5685 \\ 0.0814 & 0.5320 & -0.0752 & -0.0834 & 0.4952 & -0.1087 \end{bmatrix} \\ \beta = 6.0448$$

e os seguintes gráficos para a saída e o controle da planta:

*Saída**Controle*

## 4.6 Simulação do sistema não linear em malha fechada utilizando um controlador LMI2

Apresentamos nesta seção os resultados correspondentes às simulações do modelo visto na seção 4.4 utilizando-se o controlador LMI2. O modelo considerado é o mesmo que visto na seção 4.5.

Reescrevemos a seguir o problema LMI2 proposto no capítulo 3 (item 3.5.1) utilizando o modelo em espaço de estados, com incertezas e restrições, conforme a seção anterior. Queremos uma solução em  $(\nu, V, Y)$  para o problema de

$$\min(\nu)$$

sujeito às seguintes condições:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} V & V\bar{A}_i' + Y'\bar{B}_i' & VE' & Y'F' \\ \bar{A}_iV + \bar{B}_iY & V & 0 & 0 \\ EV & 0 & \nu I & 0 \\ FY & 0 & 0 & \nu I \end{bmatrix} \geq 0, \quad \text{para } i = 1, 2.$$

$$\text{b) } \begin{bmatrix} I & J' \\ J & V \end{bmatrix} \geq 0, \quad V > 0, \quad \nu > 0$$

$$\text{c) } \begin{bmatrix} \xi_i^2 I - (H_i V H_i' + L_i Y H_i' + H_i Y' L_i') & L_i Y \\ Y' L_i' & V \end{bmatrix} \geq 0 \quad \text{para } i = 1, 2.$$

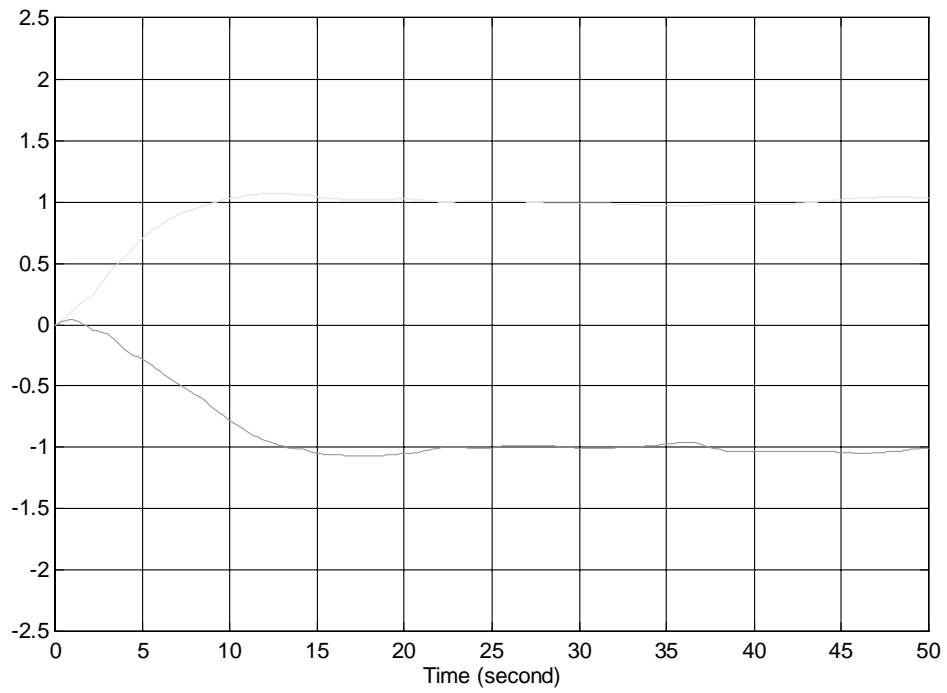
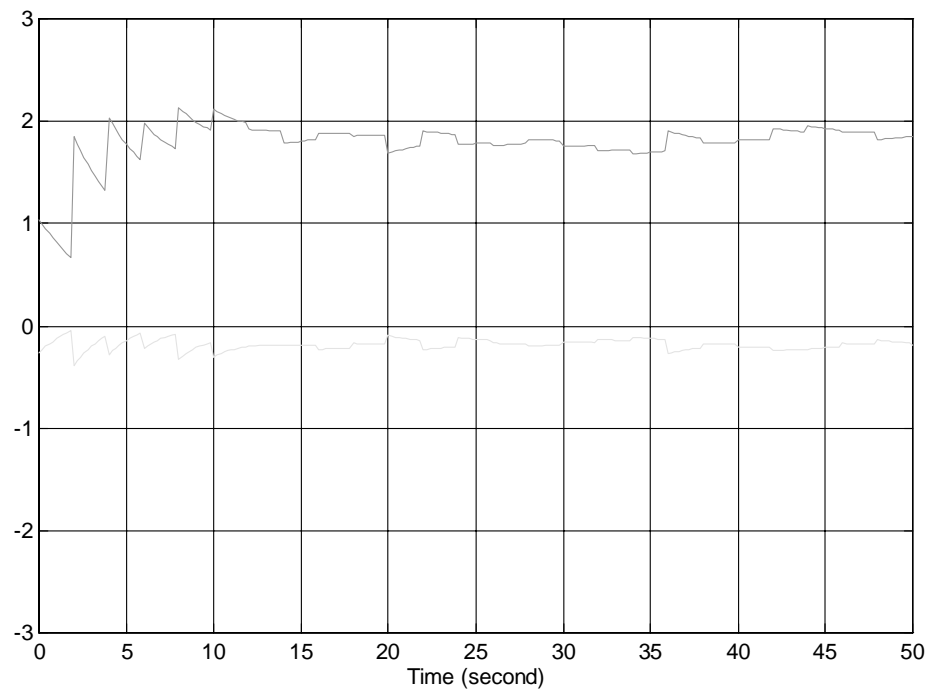
Para obtenção da matriz  $K$  e de  $\nu$  utilizamos o programa **PAPDUAL.M** do **Matlab** e para a obtenção dos gráficos da simulação utilizamos o programa **SIPAPER5.M** do **Simulink**, que podem ser vistos no final do trabalho.

Obtivemos a seguinte solução para o problema LMI2:

$$K = \begin{bmatrix} -0.0081 & -0.4837 & 0.1421 & 0.1792 & -0.0377 & 0.2623 \\ 0.0594 & 0.5656 & -0.1001 & -0.1309 & 0.7282 & -0.3274 \end{bmatrix}$$

$$\nu = 3.4579$$

e os seguintes gráficos para a saída e o controle da planta:

*Saída**Controle*

## 4.7 Conclusões

Neste capítulo apresentamos na seção 4.3 uma série de gráficos e simulações para o sistema físico de uma máquina de papel. Sabemos que o sistema é estável em malha aberta o que pode ser verificado pelos gráficos preliminares apresentados no início do capítulo, para o sistema sem nenhum controle. A seguir projetamos um controlador MPC para o sistema. Para as simulações da planta real, consideramos ruídos no controle e na saída do sistema, bem como incertezas no valor nominal dos parâmetros. Para o modelo real, consideramos os parâmetros 15% acima dos valores nominais. Os gráficos das simulações para o controlador MPC foram apresentados na seção 4.4. Na seção 4.5 projetamos um controlador LMI para o problema 1 apresentado na seção 3.5.1, e realizamos as simulações nas mesmas condições de ruído e incertezas adotadas no caso do controlador MPC. Também para esse caso apresentamos os respectivos gráficos das simulações realizadas. Na seção 4.6 projetamos um controlador LMI para o problema 2 também apresentado na seção 3.5.1, e realizamos as simulações nas mesmas condições de ruído e incertezas do controlador MPC e do controlador LMI1. Os gráficos das simulações realizadas também foram apresentados nesta seção.

Cabe ressaltar que os problemas LMI1 e LMI2, com restrições e incertezas, podem dar resultados diferentes, conforme verificamos nas seções 4.5 e 4.6. De antemão, não podemos afirmar nada com relação ao desempenho de cada controlador. Vimos pelos exemplos que o problema LMI2 apresentou resultados semelhantes àqueles obtidos utilizando MPC. Vimos também que o problema LMI1 teve um comportamento pior que o LMI2 no que se refere ao tempo de estabilização das saídas, ou seja, o sistema demorou mais tempo para atingir o valor de referência.

No caso sem restrições e sem incertezas temos que os dois problemas devem apresentar a mesma solução, que deve ser a mesma obtida pela equação de Riccati. Realmente, para o problema estudado neste capítulo, obtivemos para o problema LMI1 sem restrições e incertezas a seguinte solução:

$$K_{LMI1} = \begin{bmatrix} 0.0563 & -0.5282 & 0.2254 & 0.2985 & 0.0635 & 0.5916 \\ 0.1341 & 0.8498 & -0.1155 & -0.1260 & 0.8877 & -0.1600 \end{bmatrix}$$

enquanto que o problema LMI2, nas mesmas condições, forneceu a seguinte solução:

$$K_{LMI2} = \begin{bmatrix} 0.0581 & -0.5303 & 0.2269 & 0.3023 & 0.0671 & 0.5980 \\ 0.1349 & 0.8496 & -0.1148 & -0.1247 & 0.8892 & -0.1568 \end{bmatrix}.$$

Estas soluções podem ser consideradas numericamente iguais para os nossos problemas.



---

# Capítulo 5

## Considerações finais

### 5.1 Comentários e conclusões

O interesse maior deste trabalho foi o desenvolvimento de dois algoritmos, utilizando a técnica de LMI, para a resolução de um problema de controle ótimo quadrático robusto com restrições, dentro de um contexto de controladores preditivos. Nos capítulos 1 e 2 apresentamos uma introdução ao controle preditivo e as ferramentas matemáticas necessárias para a formulação e resolução dessa classe de problemas. No capítulo 3 formulamos o problema de controle ótimo quadrático com restrições e incertezas, em uma abordagem de modelos preditivos, como dois problemas de LMI's e obtivemos portanto algoritmos para sua solução. No capítulo 4 apresentamos um sistema físico, chamado de "Máquina de papel", para o qual realizamos simulações numéricas, utilizando os controladores MPC, em sua forma usual, e as abordagens via LMI, com os algoritmos do capítulo 3. Para tal, utilizamos o **Matlab** e o **Simulink**. As condições para as simulações dos 3 controladores foram as mesmas, ou seja, as matrizes do modelo real 15% superiores às do modelo nominal, introdução de ruídos na saída e no controle. Os problemas LMI1 e LMI2, com restrições e incertezas, apresentaram resultados diferentes, conforme verificamos nas seções 4.5 e 4.6. Deve-se ressaltar que, em geral, não é possível prever de antemão o desempenho de cada controlador. O problema LMI2 apresentou resultados semelhantes àqueles obtidos para o controlador MPC, com relação ao tempo de estabilização nos valores de referência, e rejeição dos ruídos. Vimos também que o problema LMI1 teve um comportamento pior que o LMI2 no que se refere ao tempo de estabilização das saídas, ou seja, o sistema demorou mais tempo para estabilizar nos valores de referência. Porém apresentou praticamente a mesma resposta no que se refere à rejeição de ruídos.

No caso sem restrições e sem incertezas, vimos que os dois problemas apresentaram a mesma solução, que deve ser a mesma obtida pela equação de Riccati, ou seja, as matrizes de realimentação  $K_{LMI1}$  e  $K_{LMI2}$  são praticamente iguais.

No estudo comparativo entre a solução dos problemas utilizando as técnicas de MPC e LMI podemos ressaltar os seguintes aspectos:

1. A solução do problema utilizando LMI demanda maior esforço computacional que o problema de otimização quadrática com restrições usado pelo MPC. Entretanto esses cálculos são realizados offline, ou seja, apenas uma vez, enquanto no controlador MPC, a cada instante de tempo, esses cálculos devem ser refeitos, devido ao fato do problema apresentar restrições. Assim, para o controlador LMI, sabemos de antemão qual a realimentação de controle a ser aplicada, sendo conveniente em processos que não permitem cálculos online para a determinação da lei de controle. Neste caso a cada passo o controlador não precisa calcular uma nova solução para um problema de otimização quadrática com restrições, como é feito pelo controlador

MPC. O controlador LMI pode ser utilizado para sistemas com dinâmica mais rápida, onde o controlador MPC talvez não seja tão eficiente.

2. O controlador LMI permite calcular soluções estabilizadoras para sistemas que apresentam incertezas nos parâmetros.

3. Para o controlador LMI devemos admitir conhecidos os estados do sistema o que não é necessário para o controlador MPC já que este pode ser resolvido utilizando-se um estimador de estados.

Como perspectiva para estudos futuros fica a evolução deste trabalho para controladores LMI sem a premissa dos estados serem conhecidos, ou seja, a possibilidade de utilizarmos estimadores de estados como no caso MPC.

# Apêndice A

## Propriedade convexa de matrizes

Inicialmente recordamos a definição de conjuntos convexos.

- **Definição : Conjunto convexo**

O conjunto  $\Omega \subseteq \mathfrak{R}^{m \times m}$  é convexo se para quaisquer  $Q_1, Q_2 \in \Omega$  o ponto  $Q = \alpha Q_1 + (1 - \alpha)Q_2 \in \Omega$  para todo  $\alpha \in [0, 1]$ .

Considerando  $N$  pontos com  $N > 2$ , então a definição pode ser estendida da seguinte maneira

$$Q_i \in \Omega, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

e a convexidade de  $\Omega$  implica que

$$Q = \sum_{i=1}^N \alpha_i Q_i \in \Omega$$

para todos os escalares  $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, N$  de tal forma que

$$\alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \quad \blacksquare$$

Apresentamos agora a prova da proposição 3.2.2.

### Prova da proposição 3.2.2

Como  $[A \ B] = \sum_{i=1}^N \alpha_i [A_i \ B_i]$ ,  $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$ ,  $\alpha_i \geq 0$ , é convexo, e utilizando a notação abaixo, façamos:

$$Q_i = \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Q = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Para  $i = 2$

$$Q = \alpha Q_1 + (1 - \alpha)Q_2$$

Aplicando uma propriedade do conjunto convexo podemos escrever:

$$\{\alpha Q_1 + (1 - \alpha)Q_2\}W\{\alpha Q_1 + (1 - \alpha)Q_2\}' \leq \alpha Q_1 W Q_1' + (1 - \alpha)Q_2 W Q_2'$$

- Para  $i = N$

---

$$Q = \alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2 + \alpha_3 Q_3 + \dots + \alpha_N Q_N$$

Aplicando a mesma propriedade do conjunto convexo podemos escrever:

$$\{\alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2 + \dots + \alpha_N Q_N\} W \{\alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2 + \dots + \alpha_N Q_N\}' \leq \\ \alpha_1 Q_1 W Q_1' + \alpha_2 Q_2 W Q_2' + \dots + \alpha_N Q_N W Q_N'$$

■

## Apêndice B

### Decomposição de Schur

#### Prova da proposição 3.2.3

Pela decomposição de Schur temos que se

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \text{com } W_1 > 0 \quad (\text{b.1})$$

se, e somente se

$$W_3 \geq W_2' W_1^{-1} W_2. \quad (\text{b.2})$$

Para provar a decomposição acima fazamos com (b.1) a seguinte operação:

$$\begin{bmatrix} x^* & y^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \geq 0.$$

Efetuando a operação acima e prosseguindo com algumas manipulações algébricas teremos:

$$\begin{aligned} x^* W_1 x + x^* W_2 y + y^* W_2' x + y^* W_3 y = \\ x^* (W_1 - W_2 W_3^{-1} W_2) x + x^* W_2 W_3^{-1} W_2' x + \\ x^* W_2 W_3^{-1} W_3 y + y^* W_3 W_3^{-1} W_2 x + y^* W_3 y = \\ x^* (W_1 - W_2 W_3^{-1} W_2) x + (y + W_3^{-1} W_2 x)' W_3 (y + W_3^{-1} W_2 x) \end{aligned} \quad (\text{b.3})$$

Vamos provar que se

$$W > 0$$

então

$$W_1 - W_2 W_3^{-1} W_2' \geq 0.$$

Se  $W > 0$  então

$$\begin{bmatrix} x^* & y^* \end{bmatrix} W \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \neq 0$$

Assim voltando a expressão (b.3), temos

$$x^* (W_1 - W_2 W_3^{-1} W_2) x + (y + W_3^{-1} W_2 x)' W_3 (y + W_3^{-1} W_2 x) \geq 0$$

Como a expressão acima é válida quaisquer que sejam  $x$  e  $y$  diferentes de zero, então, em particular, ela também é válida no caso em que

$$y = -W_3^{-1}W_2x.$$

Substituindo este valor de  $y$  em (b.3) temos

$$x^*(W_1 - W_2W_3^{-1}W_2)x + (-W_3^{-1}W_2x + W_3^{-1}W_2x)'W_3(-W_3^{-1}W_2x + W_3^{-1}W_2x) \geq 0$$

e que simplificando fica

$$x^*(W_1 - W_2W_3^{-1}W_2)x \geq 0, \quad \forall x.$$

Logo

$$W_1 - W_2W_3^{-1}W_2 \geq 0.$$

Vamos fazer agora a prova no sentido contrário, ou seja, se

$$W_1 - W_2W_3^{-1}W_2 \geq 0.$$

então

$$W \geq 0.$$

Voltando ao que fizemos na prova anterior

$$\begin{aligned} [x^* \quad y^*] \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \\ x^*(W_1 - W_2W_3^{-1}W_2)x + \\ (y + W_3^{-1}W_2x)'W_3(y + W_3^{-1}W_2x) \geq 0, \quad \forall \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim

$$[x^* \quad y^*] \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \geq 0$$

somente se

$$W \geq 0$$

ou seja

$$\begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \blacksquare$$

## Apêndice C

### Complemento das provas dos teoremas

*Complemento da prova do teorema 3.5.1 - condições (3.2) e (3.3)*

Vamos admitir o par  $[A \ B] = \sum_{i=1}^N \alpha_i [A_i \ B_i]$  para algum  $\alpha_i \geq 0$ , onde, por hipótese  $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$ . Podemos então reescrever a equação (3.6) da seguinte forma

$$AW_1A' - BW_2'A - AW_2B' + BW_3B' - W_1 + JJ' \leq 0.$$

Como

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix}$$

é solução do problema, e pela equação (3.7)

$$\begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \geq 0$$

podemos então reescrever a expressão anterior na forma seguinte

$$[I \ 0] \left\{ \sum_{i=1}^N \alpha_i \begin{bmatrix} A_i & -B_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} W \left\{ \sum_{i=1}^N \alpha_i \begin{bmatrix} A_i' & 0 \\ -B_i' & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} - W_1 + JJ' \leq 0.$$

Utilizando a propriedade convexa de matrizes exposta na proposição 3.2.2 temos que

$$\begin{aligned} & [I \ 0] \left\{ \sum_{i=1}^N \alpha_i \begin{bmatrix} A_i & -B_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} W \left\{ \sum_{i=1}^N \alpha_i \begin{bmatrix} A_i' & 0 \\ -B_i' & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} - W_1 + JJ' \\ & \leq \sum_{i=1}^N \alpha_i [I \ 0] \begin{bmatrix} A_i & -B_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} W \begin{bmatrix} A_i' & 0 \\ -B_i' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} - W_1 + JJ' \end{aligned}$$

Substituindo  $W$  e efetuando-se as multiplicações chegamos a

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \alpha_i [I \ 0] \begin{bmatrix} A_i & -B_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i' & 0 \\ -B_i' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} - W_1 + JJ' = \\ & \sum_{i=1}^N \alpha_i [I \ 0] \begin{bmatrix} A_i W_1 A_i' - B_i W_2' A_i' - A_i W_2 B_i' + B_i W_3 B_i' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} - W_1 + JJ' = \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i (A_i W_1 A'_i - B_i W'_2 A'_i - A_i W_2 B'_i + B_i W_3 B'_i) - W_1 + J J' \leq 0$$

Note que é indiferente colocarmos os termos  $(-W_1 + J J')$  dentro ou fora da somatória já que

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i (-W_1 + J J') = -W_1 + J J'$$

pois

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1.$$

Para uniformizar a notação vamos colocá-los dentro dos parenteses, e assim ficamos com

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i (A_i W_1 A'_i - B_i W'_2 A'_i - A_i W_2 B'_i + B_i W_3 B'_i - W_1 + J J') \leq 0.$$

Como está exposto na proposição 3.2.3 que trata da decomposição de Schur, temos que

$$W_3 \geq W'_2 W_1^{-1} W_2.$$

Se na somatória anterior substituirmos  $W_3$  pelo seu valor mínimo que é  $W'_2 W_1^{-1} W_2$ , garantimos ainda a validade da expressão. Vejamos então o resultado obtido:

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i (A_i W_1 A'_i - B_i W'_2 A'_i - A_i W_2 B'_i + B_i W_3 B'_i - W_1 + J J') =$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i (A_i W_1 A'_i - B_i W'_2 A'_i - A_i W_2 B'_i + B_i W'_2 W_1^{-1} W_2 B'_i - W_1 + J J') \leq 0.$$

Sendo  $[A \ B] = \sum_{i=1}^N \alpha_i [A_i \ B_i]$ , resolvendo a somatória e agrupando os

termos comuns temos

$$A W_1 A' - B W'_2 A' - A W_2 B' + B W'_2 W_1^{-1} W_2 B' - W_1 + J J' =$$

$$A(W_1 A' - W_2 B') - B(W'_2 A' - W'_2 W_1^{-1} W_2 B') - W_1 + J J' \leq 0$$

Queremos mostrar que

$$K = W'_2 W_1^{-1}$$

resolve o nosso problema.



Com base nesta solução proposta de  $K$  faremos as seguintes substituições na expressão obtida

$$W_2' = KW_1, \quad W_2 = W_1'K'$$

chegando a

$$A(W_1A' - W_2B') - B(W_2'A' - W_2'W_1^{-1}W_2B') - W_1 + JJ' =$$

$$A(W_1A' - W_2B') - B(KW_1A' - KW_2B') - W_1 + JJ' =$$

$$A(W_1A' - W_2B') - BK(W_1A' - W_2B') - W_1 + JJ' =$$

$$(A - BK)(W_1A' - W_2B') - W_1 + JJ' =$$

$$(A - BK)(W_1A' - W_1'K'B') - W_1 + JJ' \leq 0$$

Como  $W_1 = W_1'$  segue

$$(A - BK)(W_1A' - W_1K'B') - W_1 + JJ' =$$

$$(A - BK)W_1(A' - K'B') - W_1 + JJ' =$$

$$(A - BK)W_1(A - BK)' - W_1 + JJ' \leq 0. \quad (c.1)$$

Assim, a desigualdade de Lyapunov acima, como vista na proposição 3.2.6, mostra que  $K$  estabiliza  $(A, B)$  (lembrando que  $W_1 > 0$  e  $JJ' > 0$ ). Isto prova a condição (3.2).

Como  $(A - BK)$  é estável, existe uma solução única para o gramiano de controlabilidade

$$(A - BK)L_c(A - BK)' - L_c + JJ' = 0.$$

Mais ainda, temos que  $L_c = W_1$  da equação (c.1). Da proposição 3.2.1

$$\begin{aligned} \|G_K\|_2^2 &= \text{tr}((E - FK)L_c(E - FK)') \leq \\ &= \text{tr}((E - FK)W_1(E - FK)') = \\ &= \text{tr}(EW_1E' + FKW_1K'F') = \\ &= \text{tr}(EW_1E' + FW_2'W_1^{-1}W_2K'F') = \\ &= \text{tr}\left(\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix} W \begin{bmatrix} E' & 0 \\ 0 & F' \end{bmatrix}\right) = \beta \end{aligned}$$

provando a condição (3.3).

**Complemento da prova do teorema 3.5.2 - condições (3.2) e (3.3)**

Vamos admitir o par  $[A B] = \sum_{i=1}^N \alpha_i [A_i B_i]$  para algum  $\alpha_i \geq 0$ , onde, por hipótese  $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$ . Podemos então reescrever a equação (3.9) da seguinte forma

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \begin{bmatrix} V & VA'_i + Y'B'_i & VE' & Y'F' \\ A_i V + B_i Y & V & 0 & 0 \\ EV & 0 & \nu I & 0 \\ FY & 0 & 0 & \nu I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V & VA' + Y'B' & VE' & Y'F' \\ AV + BY & V & 0 & 0 \\ EV & 0 & \nu I & 0 \\ FY & 0 & 0 & \nu I \end{bmatrix} \geq 0$$

e da proposição 3.2.3, temos

$$V \geq (VA' + Y'B')V^{-1}(AV + BY) + \frac{VE'EV}{\nu} + \frac{Y'F'FY}{\nu}.$$

Sendo

$$K = -YV^{-1}$$

solução do nosso problema, então

$$Y = -KV.$$

Substituindo  $Y$  na inequação anterior e como  $V = V'$ , temos

$$V \geq (VA' - VK'B')V^{-1}(AV - BKV) + \frac{(VE'EV + VK'F'FKV)}{\nu}$$

Prosseguindo com as algumas manipulações algébricas teremos

$$\begin{aligned} V &\geq V(A' - K'B')V^{-1}(A - BK)V + \frac{V(E'E + K'F'FK)V}{\nu} \\ &\geq V(A - BK)'V^{-1}(A - BK)V + \frac{V(E'E + K'F'FK)V}{\nu} \\ &\geq V \left[ (A - BK)'V^{-1}(A - BK) + \frac{(E'E + K'F'FK)}{\nu} \right] V. \end{aligned}$$

Como admitimos, por hipótese, que

$$E'F = 0$$

então o numerador do último termo da inequação pode ser rearranjado como

$$(E'E + K'F'FK) = (E - FK)'(E - FK)$$

pois

$$(E - FK)'(E - FK) = (E' - K'F')(E - FK) = \\ E'E - E'FK - K'F'E + K'F'FK$$

e como

$$E'F = 0 \text{ então}$$

$$E'E - E'FK - K'F'E + K'F'FK = E'E + K'F'FK .$$

Logo, a inequação fica

$$V \geq V \left[ (A - BK)'V^{-1}(A - BK) + \frac{(E - FK)'(E - FK)}{\nu} \right] V .$$

Finalizando, pré e pós-multiplicamos a expressão acima por  $V^{-1}$ , ficando com

$$V^{-1}VV^{-1} \geq V^{-1}V \left[ (A - BK)'V^{-1}(A - BK) + \frac{(E - FK)'(E - FK)}{\nu} \right] V^{-1}$$

$$V^{-1} \geq (A - BK)'V^{-1}(A - BK) + \frac{(E - FK)'(E - FK)}{\nu} \quad (\text{c.2})$$

Assim, a desigualdade de Lyapunov acima, como vista na proposição 3.2.6, juntamente com a hipótese de que  $E'E > 0$  mostra que  $K$  estabiliza  $(A, B)$  provando a condição (3.2).

Da condição (3.10) reescrita abaixo

$$\begin{bmatrix} I & J' \\ J & V \end{bmatrix} \geq 0, \quad V > 0, \quad \nu > 0$$

obtemos a seguinte decomposição de Schur :

$$I \geq J'V^{-1}J .$$

Da proposição 3.2.1 temos que

$$\|G_K\|_2^2 \leq \nu \operatorname{tr}(J'V^{-1}J) \leq \nu \operatorname{tr}(I) = \nu r$$

provando a condição (3.3).

---

# *Apêndice D*

## *Programas desenvolvidos*

### **PAPMPC.M**

```
% Renato Casali Barão 16.10.97
% Simulação do problema da máquina de papel
% em malha aberta usando MPC (sem controle)

clc
clear

% Matrizes do sistema em tempo contínuo
A=[-1.93 0 0 0; .394 -.426 0 0; 0 0 -.63 0; .82 -.784 .413 -
.426];
B=[1.274 1.274 0 0;0 0 0 0;1.34 -.65 .203 .406;0 0 0 0];
C=eye(4);
D=zeros(4,4);

% Discretização do modelo
dt=2;
[PHI,GAM]=c2dmp(A,B,dt);
minfo=[dt,4,2,1,1,4,0];
imod=ss2mod(PHI,GAM,C,D,minfo);

% Gráficos da resposta ao degrau do sistema especificado
plotstep(mod2step(imod,30))
```

## PAPMPC2.M

```

% Renato Casali Barão 16.10.97
% Simulação do problema da máquina de papel
% usando controle MPC

clc
clear all

% Matrizes do sistema em tempo contínuo
A=[-1.93 0 0 0; .394 -.426 0 0; 0 0 -.63 0; .82 -.784 .413 -
.426];
B=[1.274 1.274 0 0;0 0 0 0;1.34 -.65 .203 .406;0 0 0 0];
C=eye(4);
D=zeros(4,4);

% Discretização do modelo
dt=2;
[PHI,GAM]=c2dmp(A,B,dt);
minfo=[dt,4,2,1,1,4,0];
imod=ss2mod(PHI,GAM,C,D,minfo);

% Definição dos parâmetros do controlador

% Horizonte de predição
P=10;

% Horizonte de controle
M=3;

% Penalização igual em y2 e y4 e nenhuma penalização em y1 e
y3
ywt=[0,1,0,1];

% Penalização igual para u1 e u2
uwt=0.6*[1 1];

% Os valores -1000 e 1000 para restrição em u representam na
% prática nenhuma restrição
ulim=[-1000*[1 1] 1000*[1 1] 1*[1 1]];

% Nenhuma restrição em y
ylim=[];

% Projeto do estimador
Q=30;
R=1*diag([1 1 1 1]);
Kest=smpcest(imod,Q,R);

% Simulação usando modelo não linear para controle das saída
y2 e y4

% Programa auxiliar para simulação não linear
pmod='papmach3';

% Setpoint em y2
setpts=[0 1 0 -1];

```

---

```
% Tempo de simulação
tend=50;

% Ruído gaussiano mensurável na saída da planta
randn('seed',23341);
z1=0.1*randn(25,1);
randn('seed',33345);
z2=0.1*randn(25,1);
randn('seed',65443);
z3=0.1*randn(25,1);
randn('seed',35667);
z4=0.1*randn(25,1);
z=[z1 z2 z3 z4];

% Nenhum distúrbio mensurável
v=[];

% Distúrbio gaussiano não mensurável na entrada da planta
randn('seed',23341);
d=0.1*randn(25,1);

% Nenhum distúrbio não mensurável nas entradas nas variáveis
manipuladas
du=[];

% Estado inicial da planta não linear
x0=zeros(4,1);

% Estado inicial das variáveis manipuladas
u0=zeros(2,1);

% Intervalo de integração numérica
stepsize=0.05;

% Ignorar as mensagens seguintes devido à simulação não
linear

[y,u,ym,x]=scmpcnl(pmod,imod,ywt,uwt,M,P,tend, ...
                  setpts,ulim,ylim,Kest,z,v, ...
                  d,du,x0,u0,stepsize);

y24=[y(:,2) y(:,4)];
y13=[y(:,1) y(:,3)];

plotall(y24,u,dt)

pause
figure
plotall(y13,u,dt)
```

---

## PAPMACH3.M

```

function [sys,x0,xstr]=papmach2(t,x,u,flag)

% SIMULAB representation of the paper machine process
described
% by Ying, Rao, and Sun, Chem. Eng. Communications, 1992.
(See
% also, Proceedings of American Control Conference, San
Diego,
% pp 1917, 1990). The model is bilinear. Using nomenclature
in
% the paper, process variables are:
%
% Manipulated variables:  Gp, Gw
% Measured disturbance:   Np
% Unmeasured disturbance: Nw
% Measured outputs:      H1, H2, N1, N2
% States:                 H1, H2, N1, N2
%
% Accepts standard SIMULAB inputs for a system model.
% The initial state is zero. The model expects the input
vector (u)
% to contain [Gp, Gw, Np, Nw] (in that order). The outputs
will be
% H1, H2, N1, N2 (in that order).

% Copyright by N. L. Ricker, December, 1991.
% $Revision: 1.1 $ $Date: 1994/05/09 15:45:55 $

% Initialization

if nargin == 0
    flag=0;
end

if flag == 0

    x0=zeros(4,1);
    sys=[4 0 4 4 0 0];
    xstr=['H1';'H2';'N1';'N2'];

% state update if ABS(FLAG) == 1

elseif abs(flag) == 1

    A0=1.15*[-1.93 0 0 0; .394 -.426 0 0; 0 0 -.63 0; .82 -
.784 .413 -.426];
    B0=1.15*[1.274 1.274;0 0;1.34 -.65;0 0];
    U=u(1:2,1); % Manipulated variables
    W=u(3:4,1); % Measured and unmeasured disturbance
inputs.

    sys=A0*x+B0*U;
    sys(3)=sys(3)-.327*x(3)*sum(U)+[.203 .406]*W;

% Output update if FLAG == 3.

```

---

```
elseif flag == 3

    iy=[1,2,3,4]; % Picks out correct states to use as output
variables.
    sys=x(iy,1);

% For all other FLAG values, return an empty matrix.

else
    sys=[];
end
```



## PAPLMI1.M

```

% Renato Casali Barão 07.09.97
% Simulação da máquina de papel
% Determinação do ganho K usando LMI
% para o exemplo 1 da tese

clear
clc

% Matrizes linearizadas da máquina de papel em tempo contínuo
A=[-1.93 0 0 0; 0.394 -0.426 0 0; 0 0 -0.63 0; 0.82 -0.784
0.413 -0.426];
B=[1.274 1.274;0 0;1.34 -0.65;0 0];
C=[0 1 0 0; 0 0 0 1];
D=zeros(2,4);

% Discretização das matrizes

% Tempo de amostragem
dt=2;

% Conversão de tempo contínuo para discreto
[PHI,GAM]=c2dmp(A,B,dt);

A1=[PHI zeros(4,2); C*PHI eye(2)];
B1=[GAM; C*GAM];
R1=[0.6 0; 0 0.6];
Q1=[zeros(4,6);0 0 0 0 1 0; 0 0 0 0 0 1];
C1=[sqrtm(Q1); zeros(2,6)];
D1=[zeros(6,2); sqrtm(R1)];
J1=eye(6);

setlmis([]);

W1=lmivar(1,[6,1]);
W2=lmivar(2,[6,2]);
W3=lmivar(1,[2,1]);

% Condição da equação (6) do item 3.5.1 da tese
lmiterm([1 1 1 W1],A1,A1');
lmiterm([1 1 1 W2],-A1,B1','s');
lmiterm([1 1 1 W3],B1,B1');
lmiterm([1 1 1 W1],-1,1);
lmiterm([1 1 1 0],J1*J1');

% Para uma condição de 15% de incerteza em A e B
AC2=1.15*[-1.93 0 0 0; 0.394 -0.426 0 0; 0 0 -0.63 0; 0.82 -
0.784 0.413 -0.426];
BC2=1.15*[1.274 1.274;0 0;1.34 -0.65;0 0];

% Conversão de tempo contínuo para discreto
[PHI2,GAM2]=c2dmp(AC2,BC2,dt);

A2=[PHI2 zeros(4,2); C*PHI2 eye(2)];

```

---

```

B2=[GAM2; C*GAM2];

% Condição da equação (6) do item 3.5.1 da tese
lmiterm([2 1 1 W1],A2,A2');
lmiterm([2 1 1 W2],[-A2,B2','s']);
lmiterm([2 1 1 W3],B2,B2');
lmiterm([2 1 1 W1],[-1,1]);
lmiterm([2 1 1 0],J1*J1');

% Condição da equação (7) do item 3.5.1 da tese
lmiterm([-3 1 1 W1],1,1);
lmiterm([-3 1 2 W2],1,1);
lmiterm([-3 2 2 W3],1,1);

% Limite superior para a equação (8) para restrições
% em u(k) qsil=((psi^2)*I)
qsil = 1;

% Condição 1 da equação (8) do item 3.5.1 da tese
L1=[1 0];
H1=zeros(1,6);

lmiterm([4 1 1 W1],H1,H1');
lmiterm([4 1 1 W2],[-H1,L1','s']);
lmiterm([4 1 1 W3],L1,L1');
lmiterm([-4 1 1 0],qsil);

% Condição 2 da equação (8) do item 3.5.1 da tese
L2=[0 1];
H2=zeros(1,6);

lmiterm([5 1 1 W1],H2,H2');
lmiterm([5 1 1 W2],[-H2,L2','s']);
lmiterm([5 1 1 W3],L2,L2');
lmiterm([-5 1 1 0],qsil);

% Limite superior para a equação (8) para restrições
% em y(k) qsil=((psi^2)*I). Assumimos um valor alto
% que na prática representa nenhum limite
qsil2 = 1000;

% Condição 3 da equação (8) do item 3.5.1 da tese
L5=zeros(1,2);
H5=[0 1 0 0 0 0];

lmiterm([6 1 1 W1],H5,H5');
lmiterm([6 1 1 W2],[-H5,L5','s']);
lmiterm([6 1 1 W3],L5,L5');
lmiterm([-6 1 1 0],qsil2);

% Condição 4 da equação (8) do item 3.5.1 da tese
L6=zeros(1,2);
H6=[0 0 1 0 0 0];

```

---

```

lmiterm([7 1 1 W1],H6,H6');
lmiterm([7 1 1 W2],[-H6,L6','s']);
lmiterm([7 1 1 W3],L6,L6');
lmiterm([-7 1 1 0],qsi2);

% Condição 5 da equação (8) do item 3.5.1 da tese
L7=zeros(1,2);
H7=[0 0 0 1 0 0];

lmiterm([8 1 1 W1],H7,H7');
lmiterm([8 1 1 W2],[-H7,L7','s']);
lmiterm([8 1 1 W3],L7,L7');
lmiterm([-8 1 1 0],qsi2);

% Condição da equação  $W1 > 0$  do item 3.5.1 da tese
lmiterm([-9 1 1 W1],1,1);

% Formulação da função objetivo
% Beta = min { tr [ C1 0      * W * [ C1' 0
%                0  D1]          0  D1' ] }

LMISIS=getlmis;
n=decnbr(LMISIS);
c=zeros(n,1);

M=[C1 zeros(8,2); zeros(8,6) D1];

for j=1:n
    [W1j,W2j,W3j]=defcx(LMISIS,j,W1,W2,W3);
    c(j)=trace(M*[W1j W2j; W2j' W3j]*M');
end

% Solução do problema para as restrições e função objetivo
desejadas
[Copt,Xopt]=mincx(LMISIS,c);

W1opt = dec2mat(LMISIS,Xopt,W1)
W2opt = dec2mat(LMISIS,Xopt,W2)
W3opt = dec2mat(LMISIS,Xopt,W3)

% Matriz de realimentação de estados
% K = W2' * W1^-1

K = W2opt'*inv(W1opt)
Beta = Copt

```

## PAPDUAL.M

```

% Renato Casali Barão 05.11.97
% Simulação da máquina de papel
% Determinação do ganho K usando LMI
% para o exemplo 2 da tese
% Controle robusto H2 (formulacao dual)

% Discretização das matrizes
dt=2;

% Modelo 1 para o sistema
A1=[-1.93 0 0 0; 0.394 -0.426 0 0; 0 0 -0.63 0; 0.82 -0.784
0.413 -0.426];
B1=[1.274 1.274;0 0;1.34 -0.65;0 0];
C1=[0 1 0 0; 0 0 0 1];
D1=zeros(2,4);

[PHI1,GAM1]=c2dmp(A1,B1,dt);
Ax1=[PHI1 zeros(4,2); C1*PHI1 eye(2)];
Bx1=[GAM1;C1*GAM1];
Rx1=[0.6 0; 0 0.6];
Qx1=[zeros(4,6);0 0 0 0 1 0; 0 0 0 0 0 1];
Cx1=[sqrtm(Qx1); zeros(2,6)];
Dx1=[zeros(6,2); sqrtm(Rx1)];
Jx1=eye(6);

% Modelo 2 para o sistema (15% de aumento nos
% parâmetros A e B)
A2=1.15*[-1.93 0 0 0; 0.394 -0.426 0 0; 0 0 -0.63 0; 0.82 -
0.784 0.413 -0.426];
B2=1.15*[1.274 1.274;0 0;1.34 -0.65;0 0];
C2=[0 1 0 0; 0 0 0 1];
D2=zeros(2,4);

[PHI2,GAM2]=c2dmp(A2,B2,dt);
Ax2=[PHI2 zeros(4,2); C2*PHI1 eye(2)];
Bx2=[GAM2;C2*GAM2];
Rx2=[0.6 0; 0 0.6];
Qx2=[zeros(4,6);0 0 0 0 1 0; 0 0 0 0 0 1];
Cx2=[sqrtm(Qx2); zeros(2,6)];
Dx2=[zeros(6,2); sqrtm(Rx2)];
Jx2=eye(6);

% Restricoes em DELTA_u
qsi1=1;
L1=[1 0];
H1=zeros(1,6);

qsi2=1;
L2=[0 1];
H2=zeros(1,6);

% Restricoes em Y
qsi5=1000;
L5=zeros(1,2);
H5=[0 1 0 0 0 0];

```

---

```

qsi6=1000;
L6=zeros(1,2);
H6=[0 0 1 0 0 0];

qsi7=1000;
L7=zeros(1,2);
H7=[0 0 0 1 0 0];

setlmis([]);

Q=lmivar(1,[size(Ax1,1),1]);
Y=lmivar(2,[size(Bx1,2), size(Ax1,1)]);
nu=lmivar(1,[1,0]);

% Inequacao 1: (9) pag.29
lmiterm([-1 1 1 Q],1,1);
lmiterm([-1 1 2 Q],1,Ax1');
lmiterm([-1 1 2 -Y],1,Bx1');
lmiterm([-1 1 3 Q],1,Cx1');
lmiterm([-1 1 4 -Y],1,Dx1');
lmiterm([-1 2 2 Q],1,1);
lmiterm([-1 3 3 nu],1,1);
lmiterm([-1 4 4 nu],1,1);

% Inequacao 2: (10.1) pag.29
lmiterm([-2 1 1 0],1);
lmiterm([-2 1 2 0],Jx1');
lmiterm([-2 2 2 Q],1,1);

% Inequacao 3: (10.2) pag.29
lmiterm([-3 1 1 Q],1,1);

% Inequacao 4: (10.3) pag.29
lmiterm([-4 1 1 nu],1,1);

% Inequacao 5: (11.1) pag.29
lmiterm([-5 1 1 0],qsi1^2);
lmiterm([-5 1 1 Q],-H1,H1');
lmiterm([-5 1 1 Y],-L1,H1','s');
lmiterm([-5 1 2 Y],L1,1);
lmiterm([-5 2 2 Q],1,1);

% Inequacao 6: (11.2) pag.29
lmiterm([-6 1 1 0],qsi2^2);
lmiterm([-6 1 1 Q],-H2,H2');
lmiterm([-6 1 1 Y],-L2,H2','s');
lmiterm([-6 1 2 Y],L2,1);
lmiterm([-6 2 2 Q],1,1);

% Inequacao 7: (11.5) pag.29
lmiterm([-7 1 1 0],qsi5^2);
lmiterm([-7 1 1 Q],-H5,H5');
lmiterm([-7 1 1 Y],-L5,H5','s');
lmiterm([-7 1 2 Y],L5,1);
lmiterm([-7 2 2 Q],1,1);

% Inequacao 8: (11.6) pag.29
lmiterm([-8 1 1 0],qsi6^2);

```

---

```
lmiterm([-8 1 1 Q],-H6,H6');
lmiterm([-8 1 1 Y],-L6,H6','s');
lmiterm([-8 1 2 Y],L6,1);
lmiterm([-8 2 2 Q],1,1);

% Inequacao 9: (11.7) pag.29
lmiterm([-9 1 1 0],qsi7^2);
lmiterm([-9 1 1 Q],-H7,H7');
lmiterm([-9 1 1 Y],-L7,H7','s');
lmiterm([-9 1 2 Y],L7,1);
lmiterm([-9 2 2 Q],1,1);

% Inequacao 10: (9) pag.29
lmiterm([-10 1 1 Q],1,1);
lmiterm([-10 1 2 Q],1,Ax2');
lmiterm([-10 1 2 -Y],1,Bx2');
lmiterm([-10 1 3 Q],1,Cx2');
lmiterm([-10 1 4 -Y],1,Dx2');
lmiterm([-10 2 2 Q],1,1);
lmiterm([-10 3 3 nu],1,1);
lmiterm([-10 4 4 nu],1,1);

Sistema=getlmis;
n=decnbr(Sistema);
c=zeros(n,1);

for j=1:n
    [Qj,Yj,nuj]=defcx(Sistema,j,Q,Y,nu);
    c(j)=nuj;
end

[upH2,xopt]=mincx(Sistema,c);

Qopt = dec2mat(Sistema,xopt,Q)
Yopt = dec2mat(Sistema,xopt,Y)

K= -Yopt*inv(Qopt)
```



---

## *Referências bibliográficas*

- [1] Boyd, S.; El Ghaoui, L.; Feron, E.; Balakrishman, V. (1994), *Linear matrix inequalities and control theory*, (SIAM: Philadelphia).
- [2] Callier, F. M.; Desoer, C. A. (1991), *Linear system theory*, (Springer-Verlag).
- [3] Camacho, E. F.; Bordons, C. (1995), *Model predictive control in the process industry - Advances in industrial control*, (Springer-Verlag).
- [4] Clarke, D.W.; Mohtadi, C.; Tuffs, P.S. (1987), *Generalized Predictive Control*, (Automatica, 23, 137-148).
- [5] Coulibaly, E.; Maiti, S.; Brosilow (1995), *Internal Model Predictive Control (IMPC)*, (Automatica, 32, 1471-1482).
- [6] Economou, C.; Morari, M. (1986), *Internal Model Control, 5. Extension to Nonlinear Systems*, (Ind. Eng. Chem. Proc. Des. Dev., 25, 403-411).
- [7] Gahinet, P.; Nemirovski, A.; Laub, A. J.; Chilali, M.; *LMI control toolbox for use with Matlab*, (The Math Works Inc.).
- [8] Garcia, C. E.; Prett, M. D.; Morari, M. (1989), *Model predictive control: Theory and practice - a survey*, (Automatica vol. 25 nº 3, 335-348).
- [9] Garcia, C.E.; Morari, M. (1982), *Internal Model Control, 1. A Unifying Review and Some New Results*, (Ind. Eng. Chem. Proc. Des. Dev., 21, 308-323).
- [10] Garcia, C.E.; Morari, M. (1985), *Internal Model Control, 2. Design Procedure for Multivariable Systems*, (Ind. Eng. Chem. Proc. Des. Dev., 24, 472-484).
- [11] Garcia, C.E.; Morari, M. (1985), *Internal Model Control, 3. Multivariable Control Law Computation and Tuning Guidelines*, (Ind. Eng. Chem. Proc. Des. Dev., 24, 484-494).
- [12] Geromel, J. C.; Oliveira, M. C. (1996), *Programação convexa e aplicações em sistemas de controle*, Minicurso - XI Congresso Brasileiro de Automático, Sociedade Brasileira de Automática, São Paulo, SP, 13-38.
- [13] Geromel, J. C.; Peres, P. L. D.; Bernussou, J. (1991), *On a convex parameter space method for linear control design of uncertain systems*, (SIAM J. Control and Optimization 29, 381-402).
- [14] Geromel, J. C.; Peres, P. L. D.; Souza, S. R. (1993a),  *$\mathcal{H}_2$ -guaranteed cost control for uncertain discrete-time linear systems*, (Int. Journal of Control 57, 853-864).



- 
- [15] Geromel, J. C.; Peres, P. L. D.; Souza, S. R. (1993b), *Convex analysis of output feedback structural constraints*, (32<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control, San Antonio, TX, 1363-1364).
- [16] Geromel, J. C.; Peres, P. L. D.; Souza, S. R. (1995), *A convex approach to the mixed  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  – control problem for discrete-time uncertain systems*, (SIAM J. Control and Optimization 33, 1816-1833).
- [17] Kothare, M. V.; Balakrishnan, V.; Morari, M. (1996), *Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities*, (Automatica, 32, 1361-1379).
- [18] Lee, J.H.; Morari, M.; Garcia, C.E. (1994), *State Space Interpretation of Model Predictive Control*, (Automatica, 30, 707-717).
- [19] Morari, M.; Ricker, N. Lawrence (1994), *Model predictive control toolbox for use with Matlab*, (The Math Works Inc.).
- [20] Odloak, D. (1996), *Controle preditivo de processos químicos*, Minicurso - XI Congresso Brasileiro de Automático, Sociedade Brasileira de Automática, São Paulo, SP, 61-86.
- [21] Rivera, D.E.; Morari, M.; Skogestad, S. (1986), *Internal Model Control, 4. PID Controller Design*, (Ind. Eng. Chem. Proc. Des. Dev., 25, 252-265).
- [22] Saberi, A.; Sannuti, P.; Chen, M. B. (1995),  *$\mathcal{H}_2$  optimal control*, (Prentice Hall).
- [23] Souza, C. E.; Gevers, M. R.; Goodwin, G. G. (1986), *Riccati equation in optimal filtering of nonstabilizable systems having singular state transition matrices*, (IEEE Trans. Automat. Control 31, 831-838).
- [24] Ying, Y.; Rao, M.; Sun, Y. (1992), *Bilinear control strategy for paper-making process*, (Chem. Eng. Comm., 111 , 13-28).