

## **4. CONTROLE ROBUSTO COM ALOCAÇÃO DE PÓLOS**

Nesse capítulo, apresentaremos nossa contribuição ao projeto de controladores robustos com estrutura pré-definida para sistemas de potência. O objetivo desses controladores é alocar os autovalores do sistema de potência em malha fechada numa região específica do plano complexo (a região mostrada na figura (2.1)), o que nos permite impor requisitos de desempenho para esse sistema (como amortecimento mínimo e outros). A estrutura dos controladores deve ser fixa e específica, uma vez que os ESP's utilizados atualmente apresentam uma estrutura bem definida, sendo adequado que os utilizemos como padrões para nossas implementações. O modelo dinâmico do sistema de potência a ser utilizado é aquele dado no capítulo 3. Na seção 4.1, serão descritos os ESP's (controladores a serem utilizados) e a estrutura do sistema em malha fechada com controladores de pólos fixos. Na seção 4.2, abordaremos o controle por realimentação de saída e a alocação de pólos através de LMI's. Na seção 4.3, mostraremos como restringir a norma da matriz de ganho estático do controlador, o que também limita seu ganho dinâmico. Na seção 4.4 apresentaremos o procedimento robusto para alocação de pólos de sistemas genéricos utilizando controladores com estrutura fixa, pólos fixos e com ganho estático restrito. Na seção 4.5, é desenvolvido um outro procedimento para o projeto de controladores robustos descentralizados para alocação de pólos através do método homotópico. Na seção 4.6, é desenvolvido um método de projeto de controladores robustos centralizados para aumentar o amortecimento de sistemas genéricos, considerando atrasos na transmissão de informação dentro do sistema.

### **4.1. ESTRUTURA DO SISTEMA EM MALHA FECHADA**

Estabilizadores de Sistemas de Potência são dispositivos de controle de sistemas de potência; suas principais funções são estabilizar os modos instáveis do sistema e aumentar o amortecimento de outros pólos críticos. A função dos sinais estabilizadores é fornecer amortecimento para as oscilações dos rotores das máquinas através da modulação da excitação do gerador. Com o aumento do amortecimento, os limites estáveis de transferência de potência são aumentados, melhorando o desempenho do sistema de potência. Para fornecer

amortecimento, o ESP deve produzir um componente de torque elétrico em fase com as variações de velocidade do rotor do gerador. Os ESP's normalmente são compensadores por avanço de fase (se o sinal de realimentação utilizado for a velocidade do rotor da máquina síncrona), cuja funcionalidade é adiantar o sinal extraído da máquina, compensando assim o atraso de fase resultante da interação entre máquina e regulador de tensão (Araújo, 1998). A estrutura dos ESP's utilizados será fixa, uma vez que devemos levar em consideração os aspectos ligados à implementação prática do controlador. Se considerarmos a estrutura fixa para o ESP, do modo como é feito atualmente nos sistemas de potência, a implementação do controlador será muito mais direta e fácil do que se considerarmos uma estrutura livre. A estrutura dos ESP's é dada pela seguinte função de transferência (Zanetta Jr. e Cruz, 2005):

$$K_i(s) = K_G \frac{(k_1s + 1)(k_2s + 1)}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)} \quad (4.1)$$

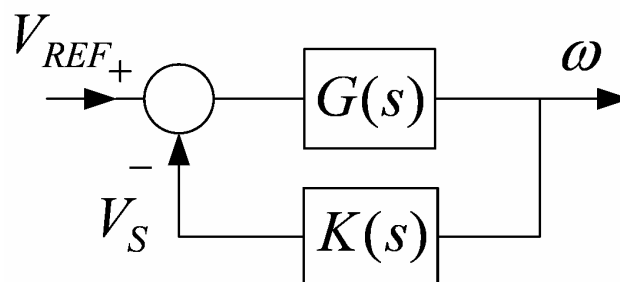
Nos sistemas de potência, é comum utilizar-se um filtro em série com o ESP, denominado filtro *washout*, cuja função é impedir que variações na velocidade angular dos rotores dos geradores (provenientes da atuação do regulador de velocidade) influenciem no controle da tensão terminal da máquina síncrona em regime permanente (Araújo, 1998). A função de transferência do filtro *washout* é a seguinte:

$$F_w(s) = \frac{sT_w}{1 + sT_w}$$

Na equação acima,  $T_w$  é a constante de tempo do filtro *washout*. Nos estudos que serão descritos posteriormente, o filtro *washout* está incluído no modelo dinâmico do sistema de potência em malha aberta.

Os valores a serem escolhidos para os pólos do ESP são baseados em estudos anteriores (Zanetta Jr. e Cruz, 2005). No método a ser proposto, os valores desses pólos podem ser alterados sem prejudicar a estrutura do controlador; além disso, os ESP's de cada máquina podem também ter pólos diferentes. A política de controle consistirá em aplicar à entrada do sistema de potência uma realimentação de saída, o que é muito comum em sistemas de potência (Kundur, 1994). Além disso, o controlador deve ter uma estrutura descentralizada, o

que também é importante se considerarmos sistemas de potência, uma vez que as máquinas que os compõem são bastante dispersas geograficamente. Assim, cada ESP será ligado a uma máquina do sistema, tendo como entrada a saída desta máquina (ou seja, medições de velocidades angulares do rotor da máquina); a saída do ESP será a entrada de controle aplicada a cada máquina do sistema. A figura 4.1 mostra o diagrama esquemático de um sistema de potência com ESP. A entrada do ESP é um vetor composto pelas velocidades angulares dos eixos dos rotores das máquinas que compõem o sistema de potência; a saída do ESP é um vetor composto por sinais de tensão estabilizantes; estes sinais são comparados com tensões de referência, e então são aplicados às entradas do sistema de potência. O ESP possui matriz de funções de transferência dada por  $K(s)$ , e o sistema de potência nominal tem matriz de funções de transferência dada por  $G(s)$ .



**Figura 4.1 - Estrutura do Sistema de Potência com o ESP**

Na equação (4.1), temos um controlador com pólos fixos e zeros e ganho livres; assim, devemos obter o ganho ( $K_G$ ) e os zeros (dados pelos valores de  $-1/k_1$  e  $-1/k_2$ ) do controlador. Para sistemas de controle de estrutura descentralizada, a matriz de funções de transferência do controlador assume a seguinte forma:

$$K(s) = \begin{bmatrix} K_1(s) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & K_n(s) \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

onde  $n$  é o número de máquinas do sistema de potência, e cada  $K_i(s)$  tem estrutura dada por (4.1).

A estrutura de controle dada por (4.2) pode ser escrita na forma correspondente no espaço de estados:

$$\begin{aligned} \dot{x}_C &= A_C \cdot x_C + B_C \cdot y \\ u &= C_C \cdot x_C + D_C \cdot y \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde  $A_C$ ,  $B_C$ ,  $C_C$  e  $D_C$  são matrizes que definem a estrutura do controlador dado em (4.2), tal que:

$$K(s) = C_C \cdot (sI - A_C)^{-1} \cdot B_C + D_C \quad (4.4)$$

Para definir as matrizes do modelo (4.3), podemos utilizar realizações no espaço de estados, como aquelas descritas em (Maciejowski, 1989). Para isso, seja a seguinte partição da matriz  $K(s)$ , onde  $k_i(s)$  representa a  $i$ -ésima coluna da matriz  $K(s)$ :

$$K(s) = [ k_1(s) \quad k_2(s) \quad \dots \quad k_n(s) ]$$

Cada coluna da matriz  $K(s)$  será escrita do seguinte modo (Maciejowski, 1989):

$$k_i(s) = \frac{n_i(s)}{d_i(s)} + \delta_i, \quad (4.5)$$

onde  $d_i(s)$  é o denominador comum polinomial de  $k_i(s)$ :

$$d_i(s) = s^m + d_i^1 \cdot s^{m-1} + \dots + d_i^m, \quad (4.6)$$

e  $n_i(s)$  é um vetor composto por polinômios, sendo cada polinômio de grau menor que  $m$ , e  $\delta_i$  é um vetor de constantes. Seja o  $j$ -ésimo elemento de  $n_i(s)$  o seguinte polinômio:

$$v_{ji}(s) = v_{ji}^1 \cdot s^{m-1} + v_{ji}^2 \cdot s^{m-2} + \dots + v_{ji}^m \quad (4.7)$$

Definimos as seguintes matrizes (Maciejowski, 1989):

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -d_i^m & -d_i^{m-1} & -d_i^{m-2} & \cdots & -d_i^1 \end{bmatrix}$$

$$B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C_i = \begin{bmatrix} v_{1i}^m & v_{1i}^{m-1} & \cdots & v_{1i}^1 \\ v_{2i}^m & v_{2i}^{m-1} & \cdots & v_{2i}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{ni}^m & v_{ni}^{m-1} & \cdots & v_{ni}^1 \end{bmatrix}$$

Assim,  $(A_i, B_i, C_i, \delta_i)$  será uma realização de  $k_i(s)$ . A realização de  $K(s)$  no espaço de estados será dada por  $(A_C, B_C, C_C, D_C)$ , com:

$$A_C = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_n \end{bmatrix}, \quad B_C = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_n \end{bmatrix}$$

$$C_C = [C_1 \quad C_2 \quad \cdots \quad C_n] \quad , \quad D_C = [\delta_1 \quad \delta_2 \quad \cdots \quad \delta_n]$$

Essa realização é controlável, mas pode não ser observável (Maciejowski, 1989). Para relacionar os elementos de (4.1) aos elementos de (4.5), (4.6) e (4.7), devemos escrever (4.1) de outra forma:

$$K_i(s) = \frac{a_i s^2 + b_i s + c_i}{s^2 + (p_1 + p_2)s + p_1 p_2} = \frac{(b_i - (p_1 + p_2)a_i)s + (c_i - p_1 p_2 a_i)}{s^2 + (p_1 + p_2)s + p_1 p_2} + a_i \quad (4.8)$$

A relação entre  $k_1, k_2, K_G$  (da equação (4.1)) e  $a_i, b_i, c_i$  (da equação (4.8)) é direta e pode ser facilmente derivada. Uma vez que (4.8) está no mesmo formato de (4.5), podemos identificar os coeficientes de  $d_i(s)$  e  $n_i(s)$ :

$$d_i(s) = s^2 + (p_1 + p_2)s + p_1p_2, \quad (4.9)$$

$$v_i(s) = (b_i - (p_1 + p_2)a_i)s + (c_i - p_1p_2a_i), \quad (4.10)$$

$$\delta e_i = a_i \quad (4.11)$$

Os polinômios  $d_i(s)$  serão sempre iguais, para todo  $i$ , pois estamos trabalhando com pólos fixos e iguais para todos os ESP's (pode-se também formular o problema de controle com ESP's de pólos diferentes). Como a matriz  $K(s)$  é diagonal (ver (4.2)), então cada vetor de polinômios  $n_i(s)$  terá apenas um elemento  $v_{ji}(s)$  não nulo. Assim, para simplificar a notação, esse único elemento não nulo de cada  $n_i(s)$  será denominado  $v_i(s)$ , em vez de  $v_{ji}(s)$ . Além disso, cada vetor de constantes  $\delta_i$  também possuirá apenas um elemento não nulo, que será chamado de  $\delta e_i$ . Portanto, as matrizes  $A_i, B_i$  e  $C_i$  serão as seguintes:

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -p_1p_2 & -(p_1 + p_2) \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ c_i - p_1p_2a_i & b_i - (p_1 + p_2)a_i \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e, por conseguinte, as matrizes que definem a descrição de  $K(s)$  no espaço de estados serão:

$$A_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ -p_1 p_2 & -(p_1 + p_2) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & -p_1 p_2 & -(p_1 + p_2) \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

$$B_C = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.13)$$

$$C_C = \begin{bmatrix} c_1 - p_1 p_2 a_1 & b_1 - (p_1 + p_2) a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 - p_1 p_2 a_2 & b_2 - (p_1 + p_2) a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c_n - p_1 p_2 a_n & b_n - (p_1 + p_2) a_n \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$D_C = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Outra realização no espaço de estados para  $K(s)$  pode ser derivada a partir das matrizes dadas nas equações (4.12) – (4.15). Esta realização, na qual as matrizes  $A_C$  e  $D_C$  mantêm-se idênticas às matrizes (4.12) e (4.15), será utilizada deste ponto em diante. As matrizes  $B_C$  e  $C_C$  são as seguintes:

$$B_C = \begin{bmatrix} p_1 a_1 - (1/p_1) c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 - (p_1 + p_2) a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_1 a_2 - (1/p_1) c_2 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 - (p_1 + p_2) a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_1 a_n - (1/p_1) c_n \\ 0 & 0 & \cdots & b_n - (p_1 + p_2) a_n \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

$$C_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Portanto, as matrizes  $A_C$  e  $C_C$  serão as matrizes fixas do problema, e as matrizes  $B_C$  e  $D_C$  serão as variáveis a serem calculadas, constituindo assim parâmetros de projeto. Como essas matrizes são funções de  $a_i$ ,  $b_i$  e  $c_i$ , é possível determinar diretamente os parâmetros das funções de transferência dos controladores (ESP's) a partir delas. Se quisermos alterar os valores dos pólos dos ESP's dados em (4.1), basta realizar as mudanças correspondentes na matriz  $A_C$ .

As dimensões de  $A_C$  e  $C_C$  são definidas pelo número de máquinas com ESP's presentes no sistema de potência. Assim, se tivermos um sistema com  $n$  máquinas equipadas com ESP's, a matriz  $A_C$  terá dimensões  $2n \times 2n$ , e a matriz  $C_C$  terá dimensões  $n \times 2n$ . A matriz  $B_C$  terá dimensões  $2n \times n$ , e a matriz  $D_C$  terá dimensões  $n \times n$ .

Aplicando a estrutura de controle (4.3) ao sistema descrito por (3.3) e (3.4), teremos a seguinte descrição para o sistema em malha fechada:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + B.D_C.C & B.C_C \\ B_C.C & A_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_C \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Para simplificar a formulação, utilizaremos uma técnica que transforma o problema de ajuste



do controlador dinâmico num problema de ajuste de controlador estático. Essa metodologia é apresentada em (Scavoni et al., 2001). Devem-se definir as seguintes matrizes:

$$A_m = \begin{bmatrix} A & B.C_c \\ 0 & A_c \end{bmatrix}, B_m = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, C_m = [C \quad 0] \quad (4.19)$$

A matriz  $A$  tem dimensões  $p \times p$ , a matriz  $B$  tem dimensões  $p \times n$  e a matriz  $C$  tem dimensões  $n \times p$ ; portanto, a matriz  $A_m$  terá dimensões  $(p + 2n) \times (p + 2n)$ , a matriz  $B_m$  terá dimensões  $(p + 2n) \times 3n$  e a matriz  $C_m$  terá dimensões  $n \times (p + 2n)$ . O ganho do controlador estático é definido do seguinte modo:

$$K_C = \begin{bmatrix} D_c \\ B_c \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

O sistema modificado, que é equivalente a (4.18), é dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_m &= A_m \cdot x_m + B_m \cdot u_m \\ y &= C_m \cdot x_m \end{aligned}, \quad (4.21)$$

onde  $x_m = [x \quad x_c]^T$  e a lei de controle é a seguinte (Scavoni et al., 2001):

$$u_m = K_C \cdot y = K_C \cdot C_m \cdot x_m \quad (4.22)$$

Utilizando a descrição no espaço de estados do sistema de potência e as matrizes fixas do controlador ( $A_c$  e  $C_c$ ), podemos calcular as matrizes  $A_m$ ,  $B_m$  e  $C_m$ . Então, o projeto do controlador consistirá em determinar a matriz de ganhos  $K_C$  que posiciona os pólos do sistema em malha fechada numa certa região do plano complexo (essa região é definida pelos requisitos de desempenho desejados para o sistema, como o coeficiente de amortecimento mínimo, por exemplo).

## 4.2. POSICIONAMENTO DE PÓLOS UTILIZANDO LMI's E CONTROLE POR REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA

Nosso objetivo de controle para o sistema de potência é posicionar os pólos do sistema em malha fechada numa região do plano complexo dada pela intersecção de 3 sub-regiões (descritas no capítulo 2). Para isso, teremos de aplicar a desigualdade (2.10) ao sistema em malha fechada. Aplicando a lei de controle (4.22) ao sistema (4.21), obtemos a seguinte descrição para o sistema em malha fechada:

$$\dot{x}_m = (A_m + B_m \cdot K_C \cdot C_m) \cdot x_m = A_{cl} \cdot x_m \quad (4.23)$$

Se substituirmos a matriz  $A_{cl}$  na desigualdade (2.10), para obter a matriz de ganhos  $K_C$  que posiciona os pólos do sistema em malha fechada na região desejada do plano complexo, teremos um termo não-convexo ( $A_{cl} Q$ ), pois este termo envolve a multiplicação de duas variáveis matriciais ( $K_C$  e  $Q$ ):

$$A_{cl} \cdot Q = A_m \cdot Q + B_m \cdot K_C \cdot C_m \cdot Q \quad (4.24)$$

A matriz  $Q$  tem dimensões  $(p + 2n) \times (p + 2n)$ . Para transformar (4.24) num problema LMI, ou seja, convexo, devemos utilizar a seguinte mudança de variáveis (Crusius e Trofino, 1999):

$$K_C \cdot C_m \cdot Q = N \cdot C_m, \quad (4.25)$$

onde a matriz  $N$  tem dimensões  $3n \times n$ , devendo apresentar a mesma estrutura de  $K_C$  para problemas de controle descentralizado. Substituindo (4.25) em (4.24), temos:

$$A_{cl} \cdot Q = A_m \cdot Q + B_m \cdot N \cdot C_m \quad (4.26)$$

Temos agora um problema LMI convexo (as variáveis matriciais são  $Q$  e  $N$ ). Para recuperar a matriz de ganhos do controlador, devemos utilizar o seguinte procedimento, criando uma matriz auxiliar  $M$  (Crusius e Trofino, 1999):

$$M \cdot C_m = C_m \cdot Q \Rightarrow M = C_m \cdot Q \cdot C_m^T \cdot (C_m \cdot C_m^T)^{-1}, \quad (4.27)$$

onde a matriz  $M$  tem dimensões  $n \times n$ . A existência da inversa em (4.27) é garantida se a matriz  $C_m$  tiver posto de linhas pleno. Em alguns casos, a igualdade (4.27) não pode ser satisfeita. Para que ela seja exatamente estabelecida, deve-se impor uma estrutura particular à matriz  $Q$ . Em primeiro lugar, ela deve ser bloco diagonal, de modo a originar controladores descentralizados. Além disso, para que (4.27) seja satisfeita, alguns elementos internos a cada bloco da matriz  $Q$  devem valer zero, dependendo da estrutura da matriz  $C_m$ . Essa última restrição, algumas vezes, torna o problema LMI infactível. Contudo, dependendo do sistema considerado, é possível obter uma boa aproximação da matriz de ganhos do controlador sem zerar esses elementos internos aos blocos da matriz  $Q$ .

Após obter a matriz  $M$ , podemos enfim calcular a matriz de ganhos  $K_C$  :

$$\left. \begin{array}{l} K_C \cdot C_m \cdot Q = N \cdot C_m \\ M \cdot C_m = C_m \cdot Q \end{array} \right\} \Rightarrow K_C \cdot M \cdot C_m = N \cdot C_m \Rightarrow K_C = N \cdot M^{-1} \quad (4.28)$$

Tendo então as matrizes  $Q$  e  $N$ , podemos calcular  $K_C$ . Usando essa alteração de variáveis, a desigualdade (2.10) pode ser aplicada ao sistema em malha fechada (4.23) de modo a posicionar seus pólos numa região adequada do plano complexo. Substituindo (4.26) em (2.10), temos:

$$L \otimes Q + M \otimes (A_m \cdot Q + B_m \cdot N \cdot C_m) + M^T \otimes (Q \cdot A_m^T + C_m^T \cdot N^T \cdot B_m^T) < 0 \quad (4.29)$$

Resolvendo a desigualdade (4.29) simultaneamente para as 3 regiões descritas no capítulo 2, poderemos garantir que os pólos do sistema em malha fechada estarão na região desejada do plano complexo. Substituindo os valores de  $L$  e  $M$  para essas 3 regiões em (4.29), temos:

1. Semiplano  $\text{Re}(z) < \alpha$

$$2 \cdot \alpha \cdot Q + A_m \cdot Q + B_m \cdot N \cdot C_m + Q \cdot A_m^T + C_m^T \cdot N^T \cdot B_m^T < 0 \quad (4.30)$$

2. Disco de raio  $r$

$$\begin{bmatrix} -r.Q & A_m.Q + B_m.N.C_m \\ * & -r.Q \end{bmatrix} < 0 \quad (4.31)$$

3. Setor cônico com ângulo interno de  $2\theta$

$$\begin{bmatrix} a.A_{cl}.Q + a.Q.A_{cl}^T & b.A_{cl}.Q - b.Q.A_{cl}^T \\ * & a.A_{cl}.Q + a.Q.A_{cl}^T \end{bmatrix} < 0 \quad (4.32)$$

Nessas equações, \* denota termo simétrico, e:

$$\begin{aligned} A_{cl}.Q &= A_m.Q + B_m.N.C_m \\ Q.A_{cl}^T &= Q.A_m^T + C_m^T.N^T.B_m^T \\ a &= \sin \theta \\ b &= \cos \theta \end{aligned} \quad (4.33)$$

Resumindo o procedimento, temos o seguinte algoritmo:

1. Primeiramente, dadas as matrizes  $A_m$ ,  $B_m$  e  $C_m$  do sistema modificado (ver (4.19)) e as especificações de desempenho para o sistema em malha fechada (ou seja, os valores de  $\theta$ ,  $a$  e  $r$ ), resolver o sistema de LMI's dado pelas desigualdades (4.30), (4.31), (4.32) e  $Q > 0$  nas variáveis  $Q$  e  $N$ ;
2. Calcular a matriz  $M$ , dada pela equação (4.27);
3. Calcular a matriz de ganhos  $K_C = N.M^{-1}$ ;
4. Recuperar as matrizes  $B_C$  e  $D_C$  do controlador, considerando (4.20);

5. Calcular a função de transferência de cada controlador descentralizado, considerando (4.4).

Observamos ainda que, para que o controlador obtido seja descentralizado, deve-se impor estruturas bloco – diagonais para as matrizes variáveis  $Q$  e  $N$ , ou seja:

$$Q = Q_D \text{ e } N = N_D$$

Para exemplificar, mostramos abaixo duas matrizes bloco – diagonais. Note-se que a estrutura de  $N$  é definida pela estrutura de  $B_C$  e  $D_C$ , uma vez que essas duas matrizes compõem a matriz  $K_C$  (ver equação (4.20)). Assim, as quatro primeiras linhas da matriz  $N$  dada abaixo apresentam a mesma estrutura da matriz  $D_C$  (ver (4.15)), e as oito últimas linhas apresentam a estrutura da matriz  $B_C$  (ver (4.16)).

$$Q_D = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_{21} & q_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{33} & q_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{43} & q_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_{55} & q_{56} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_{65} & q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_{77} & q_{78} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_{87} & q_{88} \end{bmatrix} \quad N_D = \begin{bmatrix} n_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_{44} \\ n_{51} & 0 & 0 & 0 \\ n_{61} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_{72} & 0 & 0 \\ 0 & n_{82} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_{93} & 0 \\ 0 & 0 & n_{103} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_{114} \\ 0 & 0 & 0 & n_{124} \end{bmatrix}$$

### 4.3. RESTRIÇÕES NA MATRIZ DE GANHO ESTÁTICO

Como estamos trabalhando com a formulação de controladores dinâmicos convertidos em estáticos, é interessante limitarmos a norma da matriz de ganho estático  $K_C$  de modo a evitar valores inviáveis para os parâmetros do controlador. Para limitarmos a norma induzida da

matriz  $K_C = N.M^{-1}$  (com  $M$  dada por (4.27)), faremos o seguinte (Zecevic, Neskovic e Siljak, 2004):

$$\begin{aligned} \|N\| < k_N & \quad N^T \cdot N < k_N \cdot I \\ \|(C_m Q C_m^T)^{-1}\| < k_Q & \Leftrightarrow (C_m \cdot Q \cdot C_m^T)^{-1} < k_Q \cdot I \end{aligned} \quad (4.34)$$

Em outras palavras, estamos restringindo ao mesmo tempo as normas das matrizes  $N$  e  $M^{-1}$ . Reescrevendo (4.34), temos (ver capítulo 2):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -k_N \cdot I & N^T \\ N & -I \end{bmatrix} < 0 \\ \begin{bmatrix} C_m \cdot Q \cdot C_m^T & I \\ I & k_Q \cdot I \end{bmatrix} > 0 \end{aligned} \quad (4.35)$$

Os valores de  $k_N$  e  $k_Q$  são parâmetros de projeto ( $k_N \in R$  e  $k_Q \in R$ ) e devem ser escolhidos cuidadosamente, evitando-se que os ganhos dos controladores sejam muito elevados ou então que eles sejam reduzidos a ponto de tornar o problema de controle inviável. Esses valores impõem limites às normas das matrizes  $N$  e  $Q$ .

#### 4.4. CONTROLADORES ROBUSTOS I

Na seção 4.2, foi descrito um procedimento para posicionar os pólos do sistema de potência em malha fechada numa região pré-definida do plano complexo. Como estamos utilizando modelos de pequenas perturbações, os modelos originalmente não-lineares dos sistemas de potência são linearizados em torno de determinados pontos de operação. Contudo, um ponto de operação representa o comportamento do sistema num estado específico, e alterações no ponto de operação ocorrem frequentemente, muito embora essas alterações ocorram de modo lento e gradual. Assim, torna-se necessário assegurar que o sistema de potência apresentará

um bom desempenho também em casos de variações no ponto de operação (devido a mudanças nas cargas do sistema ou nas configurações da rede elétrica, por exemplo). Para resolver este problema, utilizaremos os modelos politópicos (Boyd et al., 1994).

Para definir um modelo politópico, seja  $(A_i, B_i, C_i)$  a representação do  $i$ -ésimo modelo de sistema de potência linearizado em torno de um certo ponto de operação; considerando o modelo utilizado aqui, as matrizes  $B$  e  $C$  não variam conforme a mudança no ponto de operação; assim, a representação do  $i$ -ésimo sistema será simplesmente  $(A_i, B, C)$ . Um politopo é o conjunto  $\Omega$  definido abaixo (Boyd et al., 1994):

$$\Omega = \left\{ A \mid A \in R^{n \times n}, A = \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot A_i, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \right\}, \quad (4.36)$$

onde  $n$  é a dimensão das matrizes  $A_i$  e  $m$  é o número de pontos de operação. As matrizes  $A_i$  são chamadas vértices do politopo.

Para assegurar que os pólos de qualquer sistema em malha fechada associado a uma matriz  $A \in \Omega$  estarão na região descrita na seção 2.1, deve-se resolver  $m$  LMI's simultaneamente nas mesmas variáveis  $Q$  e  $N$ , ou seja:

$$2 \cdot \alpha \cdot Q + A_{m,i} \cdot Q + B_m \cdot N \cdot C_m + Q \cdot A_{m,i}^T + C_m^T \cdot N^T \cdot B_m^T < 0, \quad (4.37)$$

$$\begin{bmatrix} -r \cdot Q & A_{m,i} \cdot Q + B_m \cdot N \cdot C_m \\ * & -r \cdot Q \end{bmatrix} < 0, \quad (4.38)$$

$$\begin{bmatrix} a \cdot A_{cl,i} \cdot Q + a \cdot Q \cdot A_{cl,i}^T & b \cdot A_{cl,i} \cdot Q - b \cdot Q \cdot A_{cl,i}^T \\ * & a \cdot A_{cl,i} \cdot Q + a \cdot Q \cdot A_{cl,i}^T \end{bmatrix} < 0, \quad (4.39)$$

$$\begin{bmatrix} -k_N \cdot I & N^T \\ N & -I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} C_m \cdot Q \cdot C_m^T & I \\ I & k_Q \cdot I \end{bmatrix} > 0 \quad , \quad (4.40)$$

para  $i = 1, 2, \dots, m$ , onde  $m$  é o número de pontos de operação do sistema de potência, e:

$$A_{m,i} = \begin{bmatrix} A_i & B \cdot C_C \\ 0 & A_C \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

$$A_{cl,i} \cdot Q = A_{m,i} \cdot Q + B_m \cdot N \cdot C_m \quad (4.42)$$

$A_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  são matrizes de estados do sistema de potência em cada ponto de operação (as equações utilizadas para construir esse modelo são aquelas dadas no capítulo 3).

Resolvendo o sistema de LMI's formado pelas desigualdades (4.37) – (4.40), pode-se garantir que os pólos do sistema em malha fechada estarão na região definida na seção 2.1, para cada um dos  $m$  pontos de operação considerados (além de outros pontos de operação contidos no polítopo definido por (4.36)). O procedimento para recuperação das matrizes do controlador é o mesmo descrito na seção 4.2.

Um modo mais elaborado de resolver o problema de controle consiste em definir duas novas variáveis,  $k_Q$  e  $k_N$ , e executar uma minimização sobre essas variáveis. Na seção 4.3, vimos que os valores de  $k_Q$  e  $k_N$  limitam a norma da matriz  $K_C$ . Assim, minimizar os valores dessas duas variáveis significa minimizar o esforço de controle. Definimos, então, o problema de minimização robusto:

$$\min_{Q, N, k_Q, k_N} k_Q + k_N \quad ,$$

sujeito a (4.37), (4.38), (4.39), (4.40), (4.41) e (4.42), para  $i = 1, \dots, m$



Nos modelos de sistemas de potência de 9 máquinas, as matrizes  $A_i$  têm dimensões  $39 \times 39$ , as matrizes  $B$  têm dimensões  $39 \times 9$ , as matrizes  $C$  têm dimensões  $9 \times 39$ , a matriz  $A_C$  tem dimensões  $18 \times 18$ , a matriz  $B_C$  tem dimensões  $18 \times 9$ , a matriz  $C_C$  tem dimensões  $9 \times 18$ , e a matriz  $D_C$  tem dimensões  $9 \times 9$ . Dessa forma, as matrizes  $A_{m,i}$  têm dimensões  $57 \times 57$ , as matrizes  $B_m$  têm dimensões  $57 \times 27$ , as matrizes  $C_m$  têm dimensões  $9 \times 57$ , a matriz  $Q$  tem dimensões  $57 \times 57$  e a matriz  $N$  tem dimensões  $27 \times 9$ .

#### 4.5. CONTROLADORES ROBUSTOS II - RESOLVENDO BMI'S ATRAVÉS DO MÉTODO HOMOTÓPICO

Para tratar a equação (4.24) na seção 4.4, optamos por transformar as desigualdades matriciais bilineares (ou BMI's, em inglês *Bilinear Matrix Inequalities*) em desigualdades matriciais lineares, obtendo então (4.26). Há também outra forma de tratar as BMI's de modo que possamos utilizar softwares de programação convexa para resolvê-las. Esse método é chamado homotópico, e sua implementação é baseada em (Hassibi, How e Boyd, 1999): as BMI's devem ser linearizadas utilizando a aproximação de primeira ordem, e então são calculados ganhos incrementais para o controlador, que aumentam ligeiramente o desempenho atual do sistema em malha fechada. Esse processo é repetido até que o desempenho desejado para o sistema em malha fechada seja atingido, ou então até que se conclua que o desempenho do sistema não pode mais ser aumentado.

A idéia de resolver problemas contendo BMI's através de linearização e posterior transformação em LMI's foi utilizada no contexto de projeto de controladores de baixa autoridade (ou LAC, em inglês *Low Authority Controller*) (Hassibi, How e Boyd, 1999). A hipótese considerada nos projetos de controladores LAC é que os atuadores têm autoridade limitada sobre o sistema, e assim o desempenho dos sistemas em malha aberta e malha fechada são próximos. Conseqüentemente, pode-se utilizar fórmulas de aproximação de primeira ordem para representar precisamente o desempenho do sistema em malha fechada.

Para explicitarmos o método de linearização utilizado, seja o sistema dado por (4.21). Deseja-se projetar um controlador  $\Delta K$  tal que o sistema em malha fechada tenha um amortecimento mínimo de seus autovalores de  $\zeta = \cos \theta$ . Considera-se que o amortecimento inicial do

sistema é  $\xi_0 = \cos \theta_0$ . A lei de controle, dada por  $u_m = \Delta K y$ , deverá aumentar o amortecimento do sistema em malha fechada em  $\Delta \zeta = \cos \Delta \theta$ . Esse problema é equivalente a encontrar uma solução para a BMI abaixo, com  $Q > 0$ :

$$\begin{bmatrix} a(A_m Q + B_m \Delta K C_m Q + Q A_m^T + Q C_m^T \Delta K^T B_m^T) & b(A_m Q + B_m \Delta K C_m Q - Q A_m^T - Q C_m^T \Delta K^T B_m^T) \\ * & a(A_m Q + B_m \Delta K C_m Q + Q A_m^T + Q C_m^T \Delta K^T B_m^T) \end{bmatrix} < 0$$

$$a = \sin(\theta - \Delta \theta) \quad , \quad b = \cos(\theta - \Delta \theta) \quad (4.43)$$

Este problema é uma BMI nas variáveis  $\Delta K$  e  $Q$ . O método de linearização para resolver (4.43) é formado por duas etapas. A primeira etapa consiste em encontrar  $Q_0$  positivo definido tal que:

$$\begin{bmatrix} \sin \theta_0 (A_m Q_0 + Q_0 A_m^T) & \cos \theta_0 (A_m Q_0 - Q_0 A_m^T) \\ * & \sin \theta_0 (A_m Q_0 + Q_0 A_m^T) \end{bmatrix} < 0 \quad (4.44)$$

Na segunda etapa, fazemos  $Q = Q_0 + \Delta Q$ , e substituímos em (4.43):

$$\begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ * & \Omega_{11} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.45)$$

$$\Omega_{11} = a[A_m(Q_0 + \Delta Q) + B_m \Delta K C_m(Q_0 + \Delta Q) + (Q_0 + \Delta Q)A_m^T + (Q_0 + \Delta Q)C_m^T \Delta K^T B_m^T]$$

$$\Omega_{12} = b[A_m(Q_0 + \Delta Q) + B_m \Delta K C_m(Q_0 + \Delta Q) - (Q_0 + \Delta Q)A_m^T - (Q_0 + \Delta Q)C_m^T \Delta K^T B_m^T]$$

$$a = \sin(\theta_0 - \Delta \theta) \quad , \quad b = \cos(\theta_0 - \Delta \theta)$$

Consideramos então que as matrizes de incremento  $\Delta Q$ ,  $\Delta K$  e o incremento angular  $\Delta\theta$  são relativamente pequenos, e assim os produtos de segunda ordem  $\Delta Q\Delta K$ ,  $\Delta Q\Delta\theta$  e  $\Delta K\Delta\theta$  podem ser desprezados. Dessa forma, podemos simplificar os termos de (4.45):

$$\begin{aligned}
\Omega_{11} &= \sin(\theta_0 - \Delta\theta)[A_m(Q_0 + \Delta Q) + B_m\Delta KC_m(Q_0 + \Delta Q) + \\
&+ (Q_0 + \Delta Q)A_m^T + (Q_0 + \Delta Q)C_m^T\Delta K^T B_m^T] = \\
&= (\sin\theta_0 \cos\Delta\theta - \sin\Delta\theta \cos\theta_0)[A_m(Q_0 + \Delta Q) + B_m\Delta KC_m(Q_0 + \Delta Q) + \\
&+ (Q_0 + \Delta Q)A_m^T + (Q_0 + \Delta Q)C_m^T\Delta K^T B_m^T] = \\
&= (\sin\theta_0 - \Delta\theta \cos\theta_0)[A_m(Q_0 + \Delta Q) + B_m\Delta KC_m(Q_0 + \Delta Q) + \\
&+ (Q_0 + \Delta Q)A_m^T + (Q_0 + \Delta Q)C_m^T\Delta K^T B_m^T] = \\
&= \sin\theta_0 A_m Q_0 + \sin\theta_0 A_m \Delta Q + \sin\theta_0 B_m \Delta K C_m Q_0 + \\
&+ \sin\theta_0 Q_0 A_m^T + \sin\theta_0 \Delta Q A_m^T + \sin\theta_0 Q_0 C_m^T \Delta K^T B_m^T - \\
&- \Delta\theta \cos\theta_0 A_m Q_0 - \Delta\theta \cos\theta_0 Q_0 A_m^T
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{12} &= \cos(\theta_0 - \Delta\theta)[A_m(Q_0 + \Delta Q) + B_m \Delta K C_m(Q_0 + \Delta Q) - \\
&-(Q_0 + \Delta Q)A_m^T - (Q_0 + \Delta Q)C_m^T \Delta K^T B_m^T] = \\
&= (\cos \theta_0 \cos \Delta\theta + \sin \theta_0 \sin \Delta\theta)[A_m(Q_0 + \Delta Q) + B_m \Delta K C_m(Q_0 + \Delta Q) - \\
&-(Q_0 + \Delta Q)A_m^T - (Q_0 + \Delta Q)C_m^T \Delta K^T B_m^T] = \\
&= (\cos \theta_0 + \Delta\theta \sin \theta_0)[A_m(Q_0 + \Delta Q) + B_m \Delta K C_m(Q_0 + \Delta Q) - \\
&-(Q_0 + \Delta Q)A_m^T - (Q_0 + \Delta Q)C_m^T \Delta K^T B_m^T] = \\
&= \cos \theta_0 A_m Q_0 + \cos \theta_0 A_m \Delta Q + \cos \theta_0 B_m \Delta K C_m Q_0 - \\
&-\cos \theta_0 Q_0 A_m^T - \cos \theta_0 \Delta Q A_m^T - \cos \theta_0 Q_0 C_m^T \Delta K^T B_m^T + \\
&+\Delta\theta \sin \theta_0 A_m Q_0 - \Delta\theta \sin \theta_0 Q_0 A_m^T
\end{aligned}$$

Assim, teremos a seguinte desigualdade após a linearização:

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ * & \Phi_{11} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{11} &= \sin \theta_0 A_m Q_0 + \sin \theta_0 A_m \Delta Q + \sin \theta_0 B_m \Delta K C_m Q_0 + \sin \theta_0 Q_0 A_m^T + \\
&+ \sin \theta_0 \Delta Q A_m^T + \sin \theta_0 Q_0 C_m^T \Delta K^T B_m^T - \Delta\theta \cos \theta_0 A_m Q_0 - \Delta\theta \cos \theta_0 Q_0 A_m^T
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{12} &= \cos \theta_0 A_m Q_0 + \cos \theta_0 A_m \Delta Q + \cos \theta_0 B_m \Delta K C_m Q_0 - \cos \theta_0 Q_0 A_m^T - \\
&- \cos \theta_0 \Delta Q A_m^T - \cos \theta_0 Q_0 C_m^T \Delta K^T B_m^T + \Delta\theta \sin \theta_0 A_m Q_0 - \Delta\theta \sin \theta_0 Q_0 A_m^T
\end{aligned}$$

A desigualdade (4.46) é uma LMI nas variáveis  $\Delta Q$  e  $\Delta K$ . Uma vez que a LMI (4.46) foi resolvida, pode-se ainda calcular os termos quadráticos desprezados anteriormente e checar se o erro de linearização é realmente desprezível.

O método de linearização descrito acima resulta num algoritmo homotópico para resolver problemas de BMI's. A abordagem consiste em atingir o objetivo global de desempenho desejado para o sistema resolvendo iterativamente uma seqüência de problemas linearizados. A cada iteração, teremos um controlador que deverá ser ligeiramente melhor que o controlador da iteração anterior, no sentido de que o desempenho do sistema em malha fechada numa dada iteração será ligeiramente melhor do que na iteração anterior.

Assim, partindo de um sistema em malha aberta, a idéia é projetar controladores cada vez melhores, que aumentarão levemente o desempenho do sistema. Como os objetivos de desempenho em iterações consecutivas são próximos, a cada passo pode-se linearizar as BMI's para projetar controladores que melhorem ligeiramente o desempenho do sistema em relação ao passo anterior. Dessa forma, um problema de BMI's é transformado numa série de problemas LMI seqüenciais, parametrizados pelo desempenho do sistema em malha fechada (Hassibi, How e Boyd, 1999).

Esse método seqüencial pode ser utilizado para resolver muitos problemas de BMI's em controle. Contudo, não há garantia de que o algoritmo convergirá para uma solução viável. Como em outros métodos para solução de BMI's, a escolha dos valores iniciais é importante para a convergência do algoritmo, o que é um ponto fraco desse método. Por exemplo, não está claro qual  $Q_0$  deve ser utilizado em (4.46), dentre todos os  $Q_0$  possíveis que satisfazem (4.44). Uma sugestão dada em (Hassibi, How e Boyd, 1999) é utilizar o  $Q_0$  com o menor número de condição (ou *condition number*). O método homotópico parece funcionar melhor para problemas nos quais o desempenho desejado para o sistema em malha fechada não é muito superior ao desempenho do sistema em malha aberta, muito embora tenhamos feito testes que sugerem que o algoritmo pode funcionar bem em casos nos quais isso não ocorre.

O algoritmo para posicionar os pólos do sistema (4.21) em malha fechada no setor cônico do plano complexo (com ângulo  $\theta$ ) utilizando a solução de BMI's através do método homotópico é dado abaixo:

1. Inicializar a matriz do controlador  $K_C = [0]$ ;
2. Enquanto ( $\theta_{objetivo} < \theta_{atual}$  e  $i < N_{max}$ )

- Calcular a matriz  $Q_0$  com o menor número de condição associada ao amortecimento mínimo  $\theta_0$  do sistema em malha aberta:

minimizar  $\delta$

sujeito a  $I < Q_0 < \delta I$ , e

$$\begin{bmatrix} \sin(\theta_0 + \varepsilon)(A_m Q_0 + Q_0 A_m^T) & \cos(\theta_0 + \varepsilon)(A_m Q_0 - Q_0 A_m^T) \\ * & \sin(\theta_0 + \varepsilon)(A_m Q_0 + Q_0 A_m^T) \end{bmatrix} < 0$$

Na desigualdade acima,  $\varepsilon$  é um número positivo muito pequeno ( $0 < \varepsilon \ll 1$ ).

- Resolver as seguintes LMI's conjuntamente nas variáveis  $\Delta Q$  e  $\Delta K$ :

$$Q_0 + \Delta Q > 0$$

$$\|\Delta Q\| \leq 0.1 \|Q_0\|$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ * & \Phi_{11} \end{bmatrix} < 0, \text{ com:}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{11} = & \sin \theta_0 A_m Q_0 + \sin \theta_0 A_m \Delta Q + \sin \theta_0 B_m \Delta K C_m Q_0 + \sin \theta_0 Q_0 A_m^T + \\ & + \sin \theta_0 \Delta Q A_m^T + \sin \theta_0 Q_0 C_m^T \Delta K^T B_m^T - \Delta \theta \cos \theta_0 A_m Q_0 - \Delta \theta \cos \theta_0 Q_0 A_m^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{12} = & \cos \theta_0 A_m Q_0 + \cos \theta_0 A_m \Delta Q + \cos \theta_0 B_m \Delta K C_m Q_0 - \cos \theta_0 Q_0 A_m^T - \\ & - \cos \theta_0 \Delta Q A_m^T - \cos \theta_0 Q_0 C_m^T \Delta K^T B_m^T + \Delta \theta \sin \theta_0 A_m Q_0 - \Delta \theta \sin \theta_0 Q_0 A_m^T \end{aligned}$$

O incremento angular  $\Delta \theta$  deve ser pequeno o suficiente para que valham as aproximações de pequeno ângulo. A segunda LMI acima é adicionada para garantir que o incremento  $\Delta Q$  seja pequeno, validando a aproximação linear.

- Atualizar a matriz de ganhos do controlador e a matriz  $A_m$ :

$$K_C = K_C + \Delta K$$

$$A_m = A_m + B_m \Delta K C_m$$

- Incrementar o passo do algoritmo:  $i = i + 1$ ;

Para implementarmos a versão robusta deste controlador, utilizaremos novamente o politopo. Assim, para que tenhamos controladores robustos, ou seja, que garantam um desempenho

especificado para o sistema de potência em malha fechada em qualquer um dos  $m$  pontos de operação desse sistema, basta executarmos o algoritmo abaixo, onde  $A_{m,1}$ ,  $A_{m,2}$ ,  $A_{m,3}$ , ...,  $A_{m,m}$  são as  $m$  matrizes que definem o modelo dinâmico do sistema em cada ponto de operação (ver (4.41)):

1. Inicializar a matriz do controlador  $K_C = [0]$ ;
2. Enquanto ( $\theta_{objetivo} < \theta_{atual}$  e  $i < N_{max}$ )
  - Calcular a matriz  $Q_0$  com o menor número de condição associada ao amortecimento mínimo  $\theta_0$  dos  $m$  modelos do sistema em malha aberta:

minimizar  $\delta$

sujeito a  $I < Q_0 < \delta I$ , e

$$\begin{bmatrix} \sin(\theta_0 + \varepsilon)(A_{m,j}Q_0 + Q_0A_{m,j}^T) & \cos(\theta_0 + \varepsilon)(A_{m,j}Q_0 - Q_0A_{m,j}^T) \\ * & \sin(\theta_0 + \varepsilon)(A_{m,j}Q_0 + Q_0A_{m,j}^T) \end{bmatrix} < 0,$$

para  $j = 1, 2, 3, \dots, m$

- Resolver as seguintes LMI's conjuntamente nas variáveis  $\Delta Q$  e  $\Delta K$ :

$$Q_0 + \Delta Q > 0$$

$$\|\Delta Q\| \leq 0.1\|Q_0\|$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11}^j & \Phi_{12}^j \\ * & \Phi_{11}^j \end{bmatrix} < 0, \text{ para } j = 1, 2, 3, \dots, m, \text{ com:}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{11}^j &= \sin \theta_0 A_{m,j} Q_0 + \sin \theta_0 A_{m,j} \Delta Q + \sin \theta_0 B_m \Delta K C_m Q_0 + \sin \theta_0 Q_0 A_{m,j}^T + \\ &+ \sin \theta_0 \Delta Q A_{m,j}^T + \sin \theta_0 Q_0 C_m^T \Delta K^T B_m^T - \Delta \theta \cos \theta_0 A_{m,j} Q_0 - \Delta \theta \cos \theta_0 Q_0 A_{m,j}^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{12}^j &= \cos \theta_0 A_{m,j} Q_0 + \cos \theta_0 A_{m,j} \Delta Q + \cos \theta_0 B_m \Delta K C_m Q_0 - \cos \theta_0 Q_0 A_{m,j}^T - \\ &- \cos \theta_0 \Delta Q A_{m,j}^T - \cos \theta_0 Q_0 C_m^T \Delta K^T B_m^T + \Delta \theta \sin \theta_0 A_{m,j} Q_0 - \Delta \theta \sin \theta_0 Q_0 A_{m,j}^T \end{aligned}$$

- Atualizar a matriz de ganhos do controlador e as matrizes  $A_{m,j}$ :

$$K_C = K_C + \Delta K$$

$$A_{m,j} = A_{m,j} + B_m \Delta K C_m, \text{ para } j = 1, 2, 3, \dots, m$$

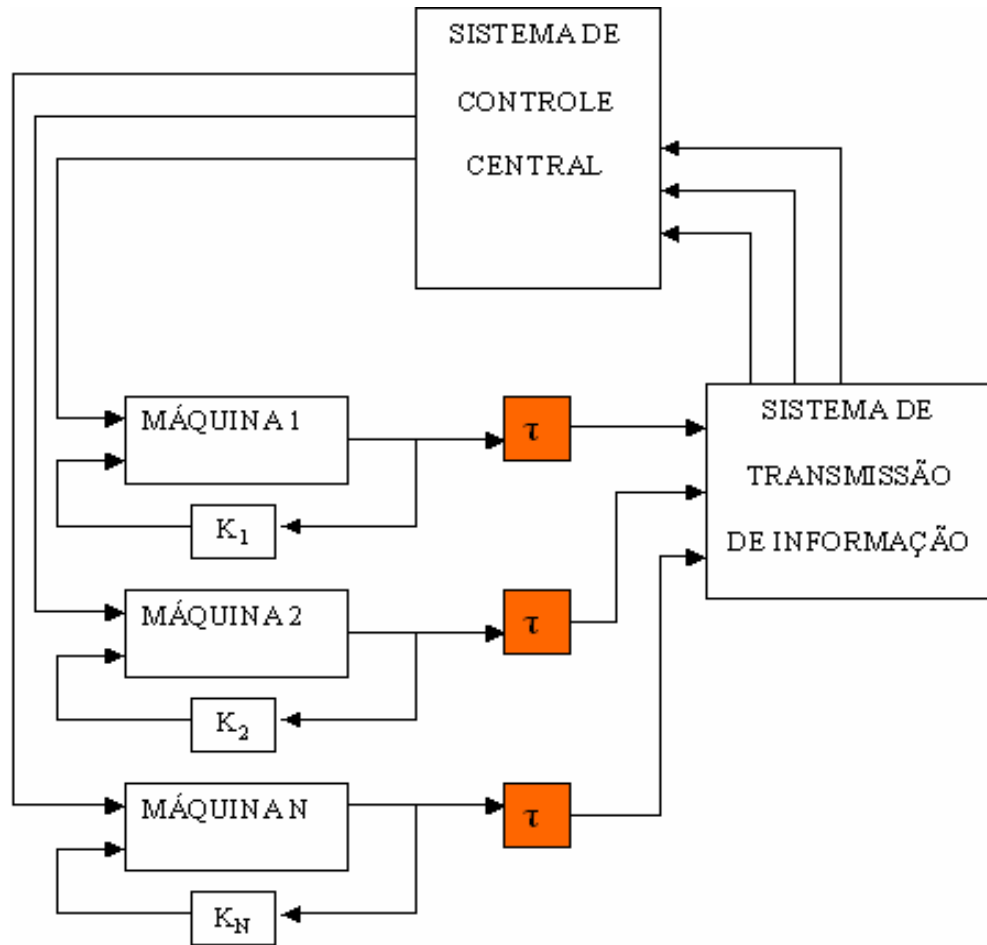
- Incrementar o passo do algoritmo:  $i = i + 1$ ;

#### 4.6. CONTROLADORES CENTRALIZADOS PARA SISTEMAS COM ATRASOS DE TRANSMISSÃO DE INFORMAÇÃO

Até este ponto, havíamos considerado apenas controladores descentralizados para sistemas de potência. Contudo, com a recente evolução dos sistemas de aquisição de dados e transmissão de informações em sistemas de potência, o presente sugere que em breve utilizaremos controladores hierarquizados que envolverão trocas de informações entre vários geradores dispersos geograficamente. Desse modo, haverá um controlador local, atuando em cada máquina do sistema e utilizando apenas informações desta máquina (tal como é feito no controlador descentralizado), e um controlador central, enviando sinais de controle para todas as máquinas de um sistema. Esse controlador central utilizará sinais de realimentação vindos de todas as máquinas do sistema para gerar seus sinais de controle, considerando que o sinal vindo de uma máquina qualquer para o controlador central sofre um atraso de transmissão  $\tau$ . Nesse contexto, teremos um controlador hierarquizado como mostrado na figura 4.2.

Note-se que poderíamos também acrescentar atrasos ( $\tau_2$ ) na rede de comunicação entre o sistema de controle central e as máquinas componentes do sistema de potência. Contudo, como consideramos aqui que os atrasos são iguais para todas as transmissões de informação entre cada máquina e os sistemas de controle centrais, pode-se provar que isso seria equivalente a acrescentar os novos atrasos ( $\tau_2$ ) aos atrasos  $\tau$  já existentes, simplesmente aumentando os atrasos  $\tau$ .





**Figura 4.2 – Sistema de Controle Hierarquizado (Centralizado / Descentralizado)**

Cada controlador descentralizado garante a estabilidade e o desempenho mínimo para o sistema de potência (por exemplo, um coeficiente de amortecimento de 0.15). O controlador centralizado pode ser utilizado para aumentar o desempenho do sistema (por exemplo, aumentar o amortecimento dos pólos em malha fechada para 0.2). No caso de perda de comunicação do sistema de transmissão (que é formado por um sistema de GPS - *Global Positioning System* - e um sistema integrado de PMU's – *Phasor Measurement Units* – ver (Decker et al., 2006)), pode-se garantir o desempenho mínimo e a estabilidade do sistema apenas com os controladores descentralizados.

Para incluirmos os atrasos de transmissão de informação no projeto do controlador centralizado, vamos primeiramente escrever o modelo do sistema de potência em malha fechada com os controladores descentralizados, tais como foram descritos nas seções 4.2 e 4.4. Esse modelo é o mesmo da equação (4.18):

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+B.D_C.C & B.C_C \\ B_C.C & A_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_C \end{bmatrix}$$

Assim, o projeto dos controladores descentralizados é feito conforme descrito anteriormente e, ao final, obtemos as matrizes  $B_C$  e  $D_C$ . As matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $A_C$  e  $C_C$  são previamente definidas. A matriz em malha fechada do modelo acima, então, será denominada  $A_{mf}$ , e será nosso ponto de partida para o projeto do controlador centralizado. Teremos o seguinte sistema a ser controlado:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{mf} &= A_{mf} \cdot x_{mf} + B_{mf} \cdot u \\ y &= C_{mf} \cdot x_{mf} \end{aligned}, \quad (4.47)$$

onde  $B_{mf} = [B \ ; \ 0]$ ,  $C_{mf} = [C \ 0]$  e  $x_{mf} = [x \ x_C]$ .

A matriz  $A_{mf}$  tem dimensões  $(p + 2n) \times (p + 2n)$ , a matriz  $B_{mf}$  tem dimensões  $(p + 2n) \times n$ , e a matriz  $C_{mf}$  tem dimensões  $n \times (p + 2n)$ . Os pólos deste modelo em malha fechada já possuem um coeficiente de amortecimento mínimo pré-especificado na fase de projeto, mas queremos aumentar esse amortecimento utilizando um controlador centralizado. Então, devemos incorporar nesse modelo os atrasos de transmissão de informação no sistema de potência. Consideraremos que os atrasos de transmissão para todas as máquinas do sistema são iguais ( $\tau$ ). Assim, modelando a transformada de Laplace do atraso de transmissão pela aproximação de Padé de primeira ordem, temos:

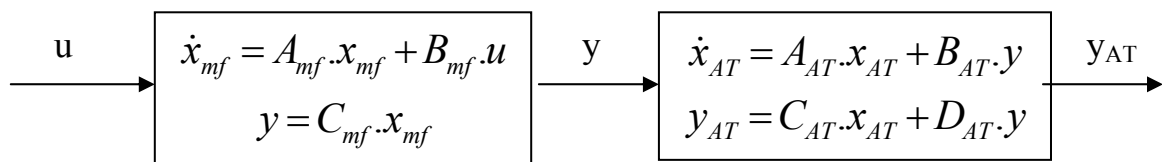
$$e^{-\tau \cdot s} \cong \frac{1 - \frac{\tau}{2} \cdot s}{1 + \frac{\tau}{2} \cdot s} \quad (4.48)$$

Os atrasos de transmissão serão considerados iguais para todas as máquinas; assim, a matriz de funções de transferência dos atrasos do sistema será a seguinte:

$$AT(s) = \begin{bmatrix} \frac{1 - \frac{\tau}{2} \cdot s}{1 + \frac{\tau}{2} \cdot s} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1 - \frac{\tau}{2} \cdot s}{1 + \frac{\tau}{2} \cdot s} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1 - \frac{\tau}{2} \cdot s}{1 + \frac{\tau}{2} \cdot s} \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

A matriz  $AT(s)$ , colocada em série com o sistema (4.47), gerará atrasos nas saídas das  $n$  máquinas que compõem o sistema de potência. Para que possamos montar uma realização do sistema série (4.47) – (4.49) no espaço de estados, vamos escrever a matriz de funções de transferência (4.49) na forma de descrição por estados.

Seja o sistema série dado na figura 4.3:



**Figura 4.3 – Sistema com atrasos (iguais) nas transmissões das saídas – Descrição no espaço de estados**

O segundo sistema acima, que deve ter matriz de funções de transferência  $AT(s)$ , pode ser escrito do seguinte modo:

$$\dot{x}_{AT} = A_{AT} \cdot x_{AT} + B_{AT} \cdot y = A_{AT} \cdot x_{AT} + B_{AT} \cdot C_{mf} \cdot x_{mf}$$

$$y_{AT} = C_{AT} \cdot x_{AT} + D_{AT} \cdot y = C_{AT} \cdot x_{AT} + D_{AT} \cdot C_{mf} \cdot x_{mf}$$

O conjunto mostrado na figura 4.3 pode então ser descrito através do seguinte modelo aumentado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{mf} \\ \dot{x}_{AT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{mf} & 0 \\ B_{AT} \cdot C_{mf} & A_{AT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{mf} \\ x_{AT} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{mf} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u \quad (4.50)$$

$$y_{AT} = \begin{bmatrix} D_{AT} \cdot C_{mf} & C_{AT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{mf} \\ x_{AT} \end{bmatrix}$$

As matrizes  $A_{AT}$ ,  $B_{AT}$ ,  $C_{AT}$  e  $D_{AT}$  são determinadas a partir de (4.49):

$$A_{AT} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\tau} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -\frac{2}{\tau} \end{bmatrix}, \quad B_{AT} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\tau} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{2}{\tau} \end{bmatrix},$$

$$C_{AT} = \begin{bmatrix} 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 2 \end{bmatrix}, \quad D_{AT} = \begin{bmatrix} -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 \end{bmatrix}$$

Pode-se também construir um modelo similar com atrasos dados pela aproximação de Padé de ordem 2, que é a seguinte:

$$e^{-\tau \cdot s} \cong \frac{1 - \frac{\tau}{2} s + \frac{\tau^2}{12} s^2}{1 + \frac{\tau}{2} s + \frac{\tau^2}{12} s^2} \quad (4.51)$$

Considerando essa nova aproximação, teremos o seguinte modelo dinâmico no espaço de estados para os atrasos:

$$A_{AT} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{12}{\tau^2} & -\frac{6}{\tau} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{12}{\tau^2} & -\frac{6}{\tau} \end{bmatrix}, \quad B_{AT} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \frac{12}{\tau^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \frac{12}{\tau^2} \end{bmatrix}$$

$$C_{AT} = \begin{bmatrix} 0 & -\tau & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\tau \end{bmatrix}, \quad D_{AT} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Utilizando essas matrizes, podemos finalmente calcular o modelo aumentado (4.50), que considera os atrasos de transmissão dos sinais de saída do sistema de potência. Assim, iremos dispor, em cada máquina do sistema, dos sinais vindos do controlador central; portanto, o controlador a ser implementado será do tipo centralizado. O sinal de controle de uma máquina qualquer será formado por uma combinação dos sinais (atrasados) vindos das outras máquinas. Para o cálculo desse controlador centralizado, utilizaremos um método que gera controladores de ordem idêntica à do modelo nominal do sistema de potência, além de ter pólos livres. Esse método já foi utilizado em (de Oliveira, Geromel e Bernussou, 2000) e (Ramos, Martins e Bretas, 2005) para gerar controladores estabilizantes e controladores descentralizados que posicionam os autovalores do sistema numa dada região do plano complexo. Aqui, utilizaremos este método para obter controladores centralizados. Primeiramente, consideremos o sistema dado em (4.50). Ele será representado de maneira simplificada por:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_{mf}^{AT} &= A_{mf}^{AT} \mathbf{x}_{mf}^{AT} + B_{mf}^{AT} \mathbf{u} \\ \mathbf{y}_{mf}^{AT} &= C_{mf}^{AT} \mathbf{x}_{mf}^{AT} \end{aligned} \quad (4.52)$$

A matriz  $A_{mf}^{AT}$  tem dimensões  $(p + 3n) \times (p + 3n)$ , a matriz  $B_{mf}^{AT}$  tem dimensões  $(p + 3n) \times n$ , e a matriz  $C_{mf}^{AT}$  tem dimensões  $n \times (p + 3n)$ . Esse sistema já apresenta um amortecimento mínimo satisfatório de seus autovalores, garantido pelos controladores descentralizados. Além

disso, estão embutidos nesse modelo os atrasos de transmissão de informação de um gerador para outro qualquer. Deseja-se fechar a malha com controladores centralizados para aumentar o amortecimento obtido anteriormente. Desse modo, o controlador centralizado será dado por:

$$\begin{aligned}\dot{x}_C^{AT} &= A_C^{AT} x_C^{AT} + B_C^{AT} y_{mf}^{AT} \\ u &= C_C^{AT} x_C^{AT}\end{aligned}\quad (4.53)$$

A dimensão da matriz  $A_C^{AT}$  é  $(p + 3n) \times (p + 3n)$ , a dimensão da matriz  $B_C^{AT}$  é  $(p + 3n) \times n$ , e a dimensão da matriz  $C_C^{AT}$  é  $n \times (p + 3n)$ .

Então, o sistema centralizado em malha fechada será representado da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{mf}^{AT} \\ \dot{x}_C^{AT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{mf}^{AT} & B_{mf}^{AT} C_C^{AT} \\ B_C^{AT} C_{mf}^{AT} & A_C^{AT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{mf}^{AT} \\ x_C^{AT} \end{bmatrix}\quad (4.54)$$

Seja a matriz de Lyapunov associada a esse sistema:

$$P_{AT} = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2^T & P_3 \end{bmatrix}\quad (4.55)$$

As matrizes  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  têm dimensões  $(p + 3n) \times (p + 3n)$ . Portanto, a dimensão de  $P_{AT}$  é  $(2p + 6n) \times (2p + 6n)$ .

Para aplicarmos a desigualdade (2.10) a esse sistema, a fim de obter um controlador centralizado que posicione seus autovalores numa certa região do plano complexo, devemos utilizar a multiplicação matricial abaixo:

$$\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2^T & P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{mf}^{AT} & B_{mf}^{AT} C_C^{AT} \\ B_C^{AT} C_{mf}^{AT} & A_C^{AT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 A_{mf}^{AT} + P_2 B_C^{AT} C_{mf}^{AT} & P_1 B_{mf}^{AT} C_C^{AT} + P_2 A_C^{AT} \\ P_2^T A_{mf}^{AT} + P_3 B_C^{AT} C_{mf}^{AT} & P_2^T B_{mf}^{AT} C_C^{AT} + P_3 A_C^{AT} \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

Como as matrizes do controlador e as matrizes de Lyapunov são todas incógnitas, temos na matriz acima termos bilineares. Desse modo, se substituirmos a matriz acima na desigualdade (2.10), teremos um problema de BMI's. Esse problema deve ser transformado num problema LMI, para que possa ser resolvido eficientemente através de algoritmos de pontos interiores. Apesar de já termos apresentado duas técnicas diferentes para realizar tal objetivo, utilizaremos aqui uma terceira, desenvolvida em (de Oliveira, Geromel e Bernussou, 2000), que é mais adequada ao tratamento de problemas relacionados a controladores centralizados do que as duas técnicas de controle descentralizado propostas neste capítulo. O algoritmo é denominado *cross-decomposition*, e consiste em duas etapas: a primeira é destinada ao cálculo da matriz  $C$  do controlador, e a segunda etapa utiliza a matriz  $C$  para calcular as matrizes  $A$  e  $B$  do controlador. Esse algoritmo utiliza transformações que reduzem as BMI's a LMI's. Assim, seja a inversa da matriz  $P_{AT}$ :

$$P_{AT}^{-1} = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ R_2^T & R_3 \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

Devem ser definidas algumas transformações de variáveis:

$$\begin{aligned} L &= C_C^{AT} R_2^T \\ F &= P_2 B_C^{AT} \\ M &= R_2 (A_C^{AT})^T P_2^T \\ Q &= R_1^{-1} \\ S &= R_1^{-1} M \end{aligned} \quad (4.58)$$

A dimensão da matriz  $L$  é  $n \times (p + 3n)$ , a dimensão de  $F$  é  $(p + 3n) \times n$ , e a dimensão de  $M$ ,  $Q$  e  $S$  é  $(p + 3n) \times (p + 3n)$ .

Após algumas manipulações matemáticas e outras transformações de variáveis, cujos detalhes podem ser encontrados em (de Oliveira, Geromel e Bernussou, 2000), obtemos um algoritmo para o cálculo das variáveis do controlador centralizado, que fornecerá soluções equivalentes às de  $A^T P + PA < 0$ , com  $PA$  dado por (4.56). Na primeira etapa, deve-se resolver a seguinte LMI, nas variáveis  $R_1$  e  $L$ :

$$A_{mf}^{AT} R_1 + R_1 (A_{mf}^{AT})^T + B_{mf}^{AT} L + L^T (B_{mf}^{AT})^T < 0 \quad (4.59)$$

A seguir, calcula-se a matriz  $C$  do controlador:

$$C_C^{AT} = L R_1^{-1} \quad (4.60)$$

Na segunda etapa do algoritmo, deve-se resolver a seguinte LMI nas variáveis  $Q$ ,  $P_1$ ,  $F$  e  $S$ :

$$\begin{bmatrix} A_{MOD}^T Q + Q A_{MOD} & Q A_{mf}^{AT} + A_{MOD}^T P_1 + (C_{mf}^{AT})^T F^T + S \\ * & (A_{mf}^{AT})^T P_1 + P_1 A_{mf}^{AT} + F C_{mf}^{AT} + (C_{mf}^{AT})^T F^T \end{bmatrix} < 0, \quad (4.61)$$

sendo que  $A_{MOD} = A_{mf}^{AT} + B_{mf}^{AT} C_C^{AT}$ . Esse algoritmo gera soluções para o controlador centralizado que obedecem à desigualdade de Lyapunov e, portanto, estabilizam o sistema. Para que encontremos um controlador centralizado que aumente o amortecimento dos autovalores do sistema em malha fechada, devemos trabalhar com a desigualdade de posicionamento de pólos, ou seja, (2.10). Utilizando (2.10) conjuntamente com as desigualdades (4.59) e (4.61), obtemos o seguinte algoritmo para posicionamento de pólos no setor cônico do plano complexo:



1. Resolver as LMI's abaixo, conjuntamente, nas variáveis  $R_1$  e  $L$ :

$$\begin{bmatrix} a(A_{mf}^{AT}R_1 + R_1(A_{mf}^{AT})^T + B_{mf}^{AT}L + L^T(B_{mf}^{AT})^T) & b(A_{mf}^{AT}R_1 + B_{mf}^{AT}L - R_1(A_{mf}^{AT})^T - L^T(B_{mf}^{AT})^T) \\ * & a(A_{mf}^{AT}R_1 + R_1(A_{mf}^{AT})^T + B_{mf}^{AT}L + L^T(B_{mf}^{AT})^T) \end{bmatrix} < 0$$

$$R_1 > 0$$

onde  $a = \sin \theta$  e  $b = \cos \theta$ , sendo  $\theta = \arccos \zeta$ .  $\zeta$  é o amortecimento desejado para o sistema de controle centralizado.

Feito isso, deve-se calcular a primeira matriz do controlador:  $C_C^{AT} = LR_1^{-1}$ .

A seguir, calcula-se a matriz auxiliar:  $A_{MOD} = A_{mf}^{AT} + B_{mf}^{AT}C_C^{AT}$ .

2. Resolver as LMI's abaixo, conjuntamente, nas variáveis  $Q, P_1, F$  e  $S$ :

$$\begin{bmatrix} f_1(Q) & f_2(Q, P_1, F, S) & f_3(Q) & f_4(Q, P_1, F, S) \\ * & f_5(P_1, F) & f_6(Q, P_1, F, S) & f_7(P_1, F) \\ * & * & f_1(Q) & f_2(Q, P_1, F, S) \\ * & * & * & f_5(P_1, F) \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} Q & Q \\ Q & P_1 \end{bmatrix} > 0$$

$$\begin{aligned}
f_1(Q) &= \sin\theta(A_{MOD}^T Q + Q A_{MOD}) \\
f_2(Q, P_1, F, S) &= \sin\theta(Q A_{mf}^{AT} + A_{MOD}^T P_1 + (C_{mf}^{AT})^T F^T + S) \\
f_3(Q) &= \cos\theta(Q A_{MOD} - A_{MOD}^T Q) \\
f_4(Q, P_1, F, S) &= \cos\theta(Q A_{mf}^{AT} - A_{MOD}^T P_1 - (C_{mf}^{AT})^T F^T - S) \\
f_5(P_1, F) &= \sin\theta((A_{mf}^{AT})^T P_1 + P_1 A_{mf}^{AT} + F C_{mf}^{AT} + (C_{mf}^{AT})^T F^T) \\
f_6(Q, P_1, F, S) &= \cos\theta(P_1 A_{MOD} - (A_{mf}^{AT})^T Q + F C_{mf}^{AT} + S^T) \\
f_7(P_1, F) &= \cos\theta(P_1 A_{mf}^{AT} - (A_{mf}^{AT})^T P_1 + F C_{mf}^{AT} - (C_{mf}^{AT})^T F^T)
\end{aligned}$$

Deve-se, então, calcular os valores das matrizes auxiliares e das matrizes do controlador centralizado:

$$\begin{aligned}
U &= Q - P_1 \\
M &= Q^{-1} S \\
A_C^{AT} &= U^{-1} M^T Q \\
B_C^{AT} &= U^{-1} F
\end{aligned}$$

Executando esse algoritmo, teremos então as matrizes do controlador centralizado que posiciona os autovalores do sistema em malha fechada na região cônica desejada do plano complexo, ou seja, que garante um desempenho adequado para o sistema centralizado, melhor do que aquele conseguido unicamente com o controle descentralizado. Para que os controladores centralizados obtidos sejam robustos, ou seja, garantam o desempenho do sistema em qualquer ponto de operação, utilizaremos novamente o conceito de politopo. Dessa forma, o algoritmo de controle robusto centralizado é o seguinte:

1. Resolver as LMI's abaixo, conjuntamente, nas variáveis  $R_i$  e  $L$ :

$$\begin{bmatrix}
a(A_{mf,i}^{AT} R_1 + R_1 (A_{mf,i}^{AT})^T + B_{mf}^{AT} L + L^T (B_{mf}^{AT})^T) & b(A_{mf,i}^{AT} R_1 + B_{mf}^{AT} L - R_1 (A_{mf,i}^{AT})^T - L^T (B_{mf}^{AT})^T) \\
* & a(A_{mf,i}^{AT} R_1 + R_1 (A_{mf,i}^{AT})^T + B_{mf}^{AT} L + L^T (B_{mf}^{AT})^T)
\end{bmatrix} < 0,$$

para  $i = 1, 2, \dots, m$ .

$$R_1 > 0,$$

$$\text{onde } A_{mf,i}^{AT} = \begin{bmatrix} A_i + BD_C C & BC_C & 0 \\ B_C C & A_C & 0 \\ B_{AT} C & 0 & A_{AT} \end{bmatrix}, \quad B_{mf}^{AT} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Além disso,  $a = \sin \theta$  e  $b = \cos \theta$ , sendo  $\theta = \arccos \zeta$ .  $\zeta$  é o amortecimento desejado para o sistema de controle centralizado.

Feito isso, deve-se calcular a primeira matriz do controlador:  $C_C^{AT} = LR_1^{-1}$ .

A seguir, calculam-se as matrizes auxiliares:  $A_{MOD}^i = A_{mf,i}^{AT} + B_{mf}^{AT} C_C^{AT}$ , para  $i = 1, 2, \dots, m$ .

2. Resolver as LMI's abaixo, conjuntamente, nas variáveis  $Q, P_1, F$  e  $S$ :

$$\begin{bmatrix} f_1^i(Q) & f_2^i(Q, P_1, F, S) & f_3^i(Q) & f_4^i(Q, P_1, F, S) \\ * & f_5^i(P_1, F) & f_6^i(Q, P_1, F, S) & f_7^i(P_1, F) \\ * & * & f_1^i(Q) & f_2^i(Q, P_1, F, S) \\ * & * & * & f_5^i(P_1, F) \end{bmatrix} < 0,$$

para  $i = 1, 2, \dots, m$ ,

$$\begin{bmatrix} Q & Q \\ Q & P_1 \end{bmatrix} > 0,$$

onde as funções  $f^i$  são as seguintes:

$$\begin{aligned}
f_1^i(Q) &= \sin \theta ((A_{MOD}^i)^T Q + Q A_{MOD}^i) \\
f_2^i(Q, P_1, F, S) &= \sin \theta (Q A_{mf,i}^{AT} + (A_{MOD}^i)^T P_1 + (C_{mf}^{AT})^T F^T + S) \\
f_3^i(Q) &= \cos \theta (Q A_{MOD}^i - (A_{MOD}^i)^T Q) \\
f_4^i(Q, P_1, F, S) &= \cos \theta (Q A_{mf,i}^{AT} - (A_{MOD}^i)^T P_1 - (C_{mf}^{AT})^T F^T - S) \\
f_5^i(P_1, F) &= \sin \theta ((A_{mf,i}^{AT})^T P_1 + P_1 A_{mf,i}^{AT} + F C_{mf}^{AT} + (C_{mf}^{AT})^T F^T) \\
f_6^i(Q, P_1, F, S) &= \cos \theta (P_1 A_{MOD}^i - (A_{mf,i}^{AT})^T Q + F C_{mf}^{AT} + S^T) \\
f_7^i(P_1, F) &= \cos \theta (P_1 A_{mf,i}^{AT} - (A_{mf,i}^{AT})^T P_1 + F C_{mf}^{AT} - (C_{mf}^{AT})^T F^T)
\end{aligned}$$

, onde  $C_{mf}^{AT} = [D_{AT} C \quad 0 \quad C_{AT}]$ .

Deve-se, então, calcular os valores das matrizes auxiliares e das matrizes do controlador centralizado:

$$\begin{aligned}
U &= Q - P_1 \\
M &= Q^{-1} S \\
A_C^{AT} &= U^{-1} M^T Q \\
B_C^{AT} &= U^{-1} F
\end{aligned}$$

Os procedimentos descritos nas seções 4.4, 4.5 e 4.6 deverão originar controladores robustos para o sistema de potência multimáquinas. Para testarmos a sua funcionalidade, devemos aplicar os controladores gerados ao sistema de potência em cada ponto de operação, determinando se os requisitos de estabilidade e desempenho são satisfeitos. Após isso, devem ser feitas simulações utilizando modelos não lineares do sistema de potência, que representam o comportamento do sistema dinâmico de modo mais realista.

As simulações não lineares são feitas geralmente durante a fase de validação do controlador, a fim de que a ação do controlador seja testada em vários pontos de operação do sistema de potência. Durante a fase de projeto, o modelo linear do sistema de potência é utilizado; isso é feito para que possamos obter controladores lineares e com estruturas idênticas às dos ESP's, ou seja, para que o projeto e implementação sejam eficientes e práticos. Caso os controladores

não apresentem desempenho satisfatório quando aplicados aos modelos não lineares, deve-se refazer o projeto, restringindo ainda mais os requisitos de desempenho.