

YURI RAFAEL MARIANO

Considerações sobre o problema de tempo mínimo de selagem de embalagens
com análises de sensibilidade e robustez de malha fechada

SÃO PAULO

2023

YURI RAFAEL MARIANO

Considerações sobre o problema de tempo mínimo de selagem de embalagens
com análises de sensibilidade e robustez de malha fechada

Versão original

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para obtenção do
título de Mestre em Ciências.

Área de concentração: Engenharia de Sistemas

Orientador: Prof. Dr. Fuad Kassab Júnior

SÃO PAULO

2023

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Catálogo-na-publicação

Mariano, Yuri Rafael

Considerações sobre o problema de tempo mínimo de selagem de embalagens com análises de sensibilidade e robustez de malha fechada / Y. R. Mariano -- São Paulo, 2023.
66 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle.

1.Controle ótimo 2.Programação linear 3.Robustez I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle II.t.

Nome: MARIANO, Yuri Rafael

Título: Considerações sobre o problema de tempo mínimo de selagem de embalagens com análises de sensibilidade e robustez de malha fechada

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Aprovado em:

Banca Examinadora

Prof. Dr. _____
Instituição: _____
Julgamento: _____

Profa. Dra. _____
Instituição: _____
Julgamento: _____

Prof. Dr. _____
Instituição: _____
Julgamento: _____

Ao querido professor Jaime.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Raquel, minha esposa, aos meus pais, Sebastião e Marlene, à minha irmã Ana e à minha tia Marli. Animaram-me quando a situação foi difícil, consolaram-me quando falhei e comemoraram quando progredi. Estou certo que sempre estive presente em suas orações para que concluísse este trabalho com êxito.

Agradeço ao grupo CCB USP, com a alegria da juventude me trouxe forças que não tinha mais.

Agradeço aos irmãos André Dantas Fernandes e Fábio Dantas Fernandes pela importante ajuda com a tradução do artigo científico.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Fuad Kassab Júnior. Aceitou o desafio de ser meu orientador mesmo sabendo das minhas enormes dificuldades, sem nunca transparecer que lhe fui um peso.

Agradeço ao querido Prof. Dr. José Jaime da Cruz. Pessoa de caráter ímpar, tecnicamente brilhante e dotado de uma didática singular, que faz os mais complexos conceitos parecerem naturalmente simples. Quando desistir parecia ser a única opção, mostrou-me um caminho.

Agradeço a Deus, pelo bem imensurável que faz a mim e por ter sido comigo em mais esta empreitada. Inclusive, por ter colocado estas pessoas na minha vida.

“Tudo tem o seu tempo determinado, e há tempo para todo o propósito debaixo do céu: (...)”.
(BÍBLIA SAGRADA, Eclesiastes 3, 1).

RESUMO

MARIANO, Y. R. **Considerações sobre o problema de tempo mínimo de selagem de embalagens com análises de sensibilidade e robustez de malha fechada.** 2023. Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2023.

Problemas de planejamento de trajetórias de tempo mínimo ocorrem com frequência em várias áreas da engenharia. Nesta dissertação considera-se o problema de controle de temperatura de uma máquina seladora utilizada em linhas de embalagem automática, em que a entrada é a potência térmica aplicada ao mordente e a saída é sua temperatura. Uma função de transferência de segunda ordem com polos reais é adotada para relacionar a saída à entrada. O problema é transferir em tempo mínimo a temperatura do mordente entre dois valores inicial e final dados sem sobressinal e com a derivada temporal da temperatura do mordente nula no tempo final. Mostra-se que uma sequência de problemas de Programação Linear pode ser usada para resolver o problema de tempo mínimo. Assim também como um método denominado Controle Ótimo Direto, calculando o momento de chaveamento do sinal de controle. Em seguida, a sensibilidade da temperatura final e de sua derivada temporal com relação aos parâmetros da função de transferência são avaliadas através da integração de um sistema apropriado de equações diferenciais lineares. Finalmente, utilizando um controlador PID-SIMC para fechar a malha, utiliza-se uma forma ligeiramente modificada da simulação de Monte Carlo para analisar a robustez do sistema quando as incertezas nos parâmetros estão presentes no modelo.

Palavras-chave: planejamento de trajetórias; controle ótimo; controle bang-bang; programação linear; sensibilidade; robustez.

ABSTRACT

MARIANO, Y. R. **Considerations on the problem of minimum time for sealing packages with closed-loop sensitivity and robustness analyses.** 2023. Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2023.

Instances of minimum-time path-planning problems occur frequently in several engineering areas. In this dissertation the problem of temperature control of a sealing machine used in automatic packing lines is considered where the input is the thermal power applied to the jaw and the output is its temperature. A second-order transfer function with real poles is adopted to relate the output to the input. The problem is to transfer in minimum-time the temperature of the jaw between two given initial and final values without overshoot and with null time-derivative of the jaw temperature at the final time. It is shown that a sequence of Linear Programming problems can be used to solve the minimum-time problem. As well as a method called Optimal Direct Control, calculating the switching moment of the control signal. Then, the sensitivity of both the final temperature and of its time-derivative with respect to the parameters of the transfer function are evaluated through the integration of an appropriate system of linear differential equations. Finally, using a PID-SIMC controller to close the loop, a slightly modified version of Monte Carlo simulation is used in order to analyse the robustness of the system when parameter uncertainties are present in the model.

Keywords: path-planning; optimal control; bang-bang control; linear programming; sensitivity; robustness.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Resposta típica a um pulso para o modelo da equação 2.1	22
Figura 2.2 – Forma típica na prática da resposta do sistema a um pulso	22
Figura 2.3 – Resposta típica a um pulso para o modelo da equação 2.2	23
Figura 3.1 – Representação gráfica da lei de controle ótimo	37
Figura 5.1 – Diagrama de simulação em malha fechada	51
Figura 6.1 – Tempo final para cada iteração	53
Figura 6.2 – Temperatura final alcançada para cada valor de tempo final	53
Figura 6.3 – Valor ótimo para a lei de controle $u(t)$	54
Figura 6.4 – Trajetória ótima da temperatura usando PL	54
Figura 6.5 – Taxa de variação da temperatura	55
Figura 6.6 – Trajetória ótima da temperatura usando Controle Ótimo Direto	55
Figura 6.7 – Tempo mínimo em função da margem de potência δ	57
Figura 6.8 – Pontos possíveis de α	58
Figura 6.9 – Pontos possíveis de α , β e γ uniformemente distribuídos	59
Figura 6.10 – Pontos possíveis de α , β e γ usando Método de Monte Carlo	59
Figura 6.11 – Pontos possíveis de α , β e γ combinando os métodos de distribuição uniforme e Monte Carlo	60
Figura 6.12 – Erro final máximo para diferentes margens e erros	61
Figura 6.13 – Taxa de variação da temperatura para diferentes margens e erros	62

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Unidades das variáveis do problema	45
Tabela 4.2 – Unidades das sensibilidades	45
Tabela 6.1 – Valores das constantes para simulação	52
Tabela 6.2 – Valores calculados das sensibilidades normalizadas	56

LISTA DE ABREVIATURAS, SIGLAS E SÍMBOLOS

PL	Programação Linear
TPBVP	Two-Point Boundary Value Problems
PID-SIMC	Proportional, Integral and Derivative – Skogestad Internal Model Control
θ	diferença entre a temperatura do mordente e a temperatura ambiente
u	entrada do sistema, sendo a potência do aquecedor
K	constante de ganho
τ_1	constante de tempo
τ_2	constante de tempo
u_{max}	potência máxima do aquecedor
t_S	tempo de duração do pulso
x	estado que representa θ
A	matriz da representação em espaços de estados
B	matriz da representação em espaços de estados
C	matriz da representação em espaços de estados
D	matriz da representação em espaços de estados
Φ	matriz de transição de estados
t_f	tempo final
n	número de intervalos de tempo
Δt	intervalo de tempo
τ	variável de integração do estado x
Γ_i	fator de multiplicação
U	vetor de entradas do sistema
U_{max}	vetor de entradas do sistema com potência máxima
$\bar{\theta}$	valor médio da taxa de variação da temperatura
θ^*	temperatura máxima resultante
θ_d	temperatura desejada
ε	tolerância aceitável entre valor desejado e obtido

$t_{f_{sup}}$	limite superior do tempo final
$t_{f_{inf}}$	limite inferior do tempo final
$t_{f_{meio}}$	valor médio entre tempo superior e inferior
S_{τ_1}	sensibilidade de $x(t_f)$ em relação a τ_1
S_{τ_2}	sensibilidade de $x(t_f)$ em relação a τ_2
S_K	sensibilidade de $x(t_f)$ em relação a K
x_e	estado estendido para cálculo das sensibilidades
A_a	matriz da representação em espaços de estados do sistema estendido
B_a	matriz da representação em espaços de estados do sistema estendido
Γ_{en}	fator de multiplicação do sistema estendido
q	potência do aquecedor
V	variável genérica em unidades de engenharia
V^B	valor base para normalização de V
θ^B	valor base para θ
τ_1^B	valor base para τ_1
τ_2^B	valor base para τ_2
K^B	valor base para K
$\bar{\theta}$	valor médio de θ em um determinado intervalo de tempo
\hat{V}	valor normalizado de V
$\hat{\theta}$	valor normalizado de θ
ε_p	incerteza aleatória nos parâmetros do modelo
p	número aleatório em um intervalo definido
\bar{p}	valor médio de p
δ	margem entre o valor de potência máxima disponível no atuador e potência máxima considerada
u_{max}	potência máxima de aquecimento
$u_{max,p}$	potência máxima considerada no planejamento da trajetória
α	valor aleatório para representação de um ponto amostral para simulação
β	valor aleatório para representação de um ponto amostral para simulação
γ	valor aleatório para representação de um ponto amostral para simulação

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	Preliminares.....	15
1.2	Objetivo e justificativa	15
1.3	Metodologia	18
1.4	Organização deste texto.....	19
2	MODELO DO SISTEMA	21
2.1	Representação por função de transferência.....	21
2.2	Representação por espaços de estados	27
2.3	Solução geral da equação de estados	28
3	O PROBLEMA DE TEMPO MÍNIMO	31
3.1	Proposição do problema	31
3.2	Minimização do tempo através do máximo ganho de temperatura	32
3.3	Otimização usando Programação Linear	35
3.4	Otimização usando Controle Ótimo Direto	36
4	SENSIBILIDADE.....	39
4.1	Introdução	39
4.2	Variações nos parâmetros do modelo do processo.....	39
4.3	Cálculo das derivadas parciais.....	41
4.3.1	Cálculo de $\partial x t f \partial \tau 1$	41
4.3.2	Cálculo de $\partial x t f \partial \tau 2$	42
4.3.3	Cálculo de $\partial x t f \partial K$	43
4.3.4	Sistema aumentado para o cálculo das sensibilidades.....	43
4.4	Normalização das sensibilidades	44
5	ESTUDO DA ROBUSTEZ EM MALHA FECHADA	49
6	SIMULAÇÕES E RESULTADOS	52
6.1	Valores utilizados nas simulações	52
6.2	Trajetória planejada de tempo mínimo usando Programação Linear	52
6.2.1	Simulação da temperatura máxima com tempo mínimo usando Programação Linear	54
6.3	Trajetória planejada de tempo mínimo usando Controle Ótimo Direto	55
6.4	Cálculo das sensibilidades	56
6.5	Simulações em malha fechada.....	57
6.5.1	Cálculo de tempo mínimo para diferentes valores de margem.....	57
6.5.2	Estratégia de simulação	58

6.5.3	Simulações em malha fechada	60
7	CONCLUSÕES.....	63
	REFERÊNCIAS.....	65

1 INTRODUÇÃO

1.1 Preliminares

Planejamento de trajetórias de tempo mínimo são comuns em diversas áreas da engenharia – na robótica industrial, em manobras de satélites, na operação de guindastes etc.

Na robótica industrial o planejamento de trajetória é capaz de aumentar a produtividade reduzindo tempo de processo, evitar colisões e utilizar a capacidade dos atuadores de forma mais otimizada (FANTI; FERREIRA; CARVALHO, 2013). Lançamentos de satélites à órbita tornar-se-iam ainda mais dispendiosos sem um adequado estudo de planejamento de trajetória, o que tem tornado intensa a pesquisa nessa área (MARCHI, 2017).

A operação de guindastes para descarga de navios é outro campo para estudo de trajetória de tempo mínimo, otimizando custos pelo tempo que o navio permanece atracado no porto (CRUZ; LEONARDI, 2013).

O problema de selagem de embalagens foi o tema considerado neste trabalho. No entanto, não há muita literatura acadêmica a este respeito. Este assunto parece ter ficado restrito ao âmbito industrial.

1.2 Objetivo e justificativa

Neste trabalho, o primeiro objetivo é apresentar uma proposta de cálculo da lei de controle ótimo de tempo mínimo, no mesmo sentido de planejamento de trajetória, para a temperatura no processo de aquecimento das lâminas de selagem, chamadas de mordentes, de uma máquina de selagem de embalagens plásticas. Além disso, o trabalho também se propõe a analisar tanto a sensibilidade da solução a variações dos parâmetros do modelo, como a robustez do seu rastreamento em malha fechada.

Conforme Oliveira (2016), esse processo, também chamado de selagem por termossoldagem, é o processo pelo qual dois materiais são unidos pela ação de calor e pressão, tendo ambos pelo menos uma camada de termoplástico nas faces a serem seladas. Ainda segundo Oliveira, este é o processo mais utilizado para o fechamento de embalagens plásticas

flexíveis, além de também ser muito usado para fechamento de embalagens plásticas rígidas. Aplicação muito usada na selagem de embalagens de alimentos.

Segundo Robertson (2012), uma embalagem de alimento deve ser tal que forneça vedação hermética, de fácil abertura e evidencie a inviolabilidade do produto. Um mau fechamento pode deteriorar e reduzir a vida útil do alimento embalado, o que torna imprescindível a precisão da termossoldagem.

Nesse processo, os mordentes devem atingir uma temperatura adequada suficiente para o derretimento necessário do plástico sem que o rompa inutilizando-o. A selagem de embalagens por termossoldagem pode ser feita por diferentes perfis de mordente, como foi estudado por Oliveira (1995). Segundo Oliveira, os diferentes perfis podem compensar irregularidades no processo de selagem tornando-a mais homogênea.

A otimização considerada neste trabalho refere-se ao aquecimento inicial dos mordentes para a correta selagem da embalagem. Tanto uma demora excessiva para atingir a temperatura desejada como a ultrapassagem desta durante o aquecimento – que, quando ocorre, requer que se aguarde por um resfriamento natural dos mordentes, o que costuma ser um processo lento – representam perda de produtividade da máquina e força de trabalho ociosa.

Sabe-se que a busca de soluções de problemas de controle ótimo sujeitos a restrições normalmente é uma tarefa intrincada.

Métodos indiretos envolvem o uso do Princípio do Mínimo de Pontryagin para formular um problema não linear com valores nos dois pontos do contorno (Two-Point Boundary Value Problems - TPBVP), cuja solução está longe de ser trivial (DHANDA; FRANKLIN, 2010), (KAMIEN; SCHWARTZ, 1981), (SEIERSTED; SYDSAETER, 1977).

Métodos diretos envolvem o uso de algoritmos de programação não-linear para encontrar uma aproximação em tempo discreto para uma solução numérica do problema de controle ótimo (BÖHME; FRANK, 2017). Rao (2009) contém um bom levantamento de métodos numéricos para controle ótimo.

O primeiro objetivo deste trabalho é a resolução deste problema tempo mínimo. Serão usadas duas estratégias. Em uma delas, é usada uma aproximação da solução numérica do problema de tempo mínimo, baseada na resolução de uma sequência de problemas de

Programação Linear (PL). À outra estratégia utilizada, denominar-se-á Controle Ótimo Direto. Nesta abordagem, calcula-se o instante de chaveamento do sinal de controle, o que é possível devido a características deste sistema, que é de segunda ordem invariante no tempo.

Dentre os problemas da Programação Matemática, os problemas de PL estão certamente entre os mais simples de serem resolvidos. Uma das características interessantes dos algoritmos de PL é que normalmente eles não são iterativos, não exigem que se forneça uma estimativa inicial da solução e têm custo computacional relativamente baixo na prática.

Além disso, eles são sempre conclusivos a respeito da existência ou não da solução do problema e, quando a solução existe, ela é encontrada em um número finito de passos. Isso em geral não ocorre com a maioria dos algoritmos de solução de TPBVP's, os quais, além de tudo, ainda necessitam de uma boa aproximação inicial da solução.

Deve-se ressaltar ainda a facilidade com que se podem encontrar softwares disponíveis no mercado para a resolução de problemas de PL (Silva et al. 2019).

A obtenção da solução de tempo mínimo é um problema típico de planejamento de trajetória, sendo baseado em um modelo matemático da dinâmica do processo. Assim, do ponto de vista prático, a sensibilidade da solução em relação às incertezas nos parâmetros do modelo é uma questão fundamental. Esse efeito também foi estudado por Cruz (2012) no planejamento de movimento de guindastes com incerteza paramétrica e por Puglia, Leonardi e Ackermann (2012) no controle de ponte rolante.

Este estudo permite analisar quais são os parâmetros do modelo que têm maior impacto na solução ótima e, portanto, quais são aqueles cuja precisão é mais crítica para a implementação da trajetória planejada. Este é o segundo objetivo deste trabalho.

Na prática, a implementação da estratégia proposta requer que se tenha um sistema de controle em malha fechada para acompanhar a trajetória ótima planejada, dado que o modelo matemático constitui sempre uma representação aproximada do sistema real – seja por causa da presença de perturbações externas, seja em razão de incertezas no modelo. Neste trabalho é usado para fechamento da malha de controle um compensador do tipo PID-SIMC com anti-windup, sintonizado conforme proposto por Skogestad e Postlethwaite (2005).

No caso específico do problema de tempo mínimo, a solução ótima é do tipo bang-bang. Neste, a variável de controle ao longo do tempo assume os seus valores extremos, chaveando entre o máximo e o mínimo em instantes muito bem definidos.

Esta característica da lei de controle faz com que o desempenho do controlador em malha fechada seja degradado, uma vez que não há margem para a variável de controle corrigir desvios em relação à trajetória planejada quando o valor da variável de controle determinada pelo controlador de malha fechada é no sentido de violar a restrição de valor extremo.

É intuitivo que, planejando a trajetória com base em um valor menor de potência do que o máximo disponível no aquecedor, passa-se a ter alguma margem para eventuais correções em malha fechada; no entanto, isto deve ocorrer às custas de um aumento no tempo de aquecimento dos mordentes.

Utilizando uma versão ligeiramente modificada da simulação de Monte Carlo, um estudo é realizado para avaliar a robustez do rastreamento da trajetória ótima perante o grau de incerteza nos parâmetros do modelo dinâmico do sistema e perante a margem entre o valor máximo da potência do aquecedor e o utilizado no planejamento da trajetória. Este é o terceiro e último objetivo a ser alcançado no trabalho.

1.3 Metodologia

Para alcançar os objetivos propostos, o desenvolvimento deste trabalho foi realizado em cinco etapas, descritas a seguir.

Inicialmente será apresentado o modelo matemático adotado para descrever o comportamento do equipamento de selagem de embalagens.

Em seguida serão discutidas as estratégias adotadas para o planejamento da trajetória de tempo mínimo.

Na etapa seguinte, a sensibilidade da trajetória ótima a variações nos parâmetros do modelo será estudada.

A elaboração da estratégia de controle em malha fechada usando um controlador PID-SIMC é considerada em seguida.

A última etapa consiste na obtenção dos resultados de simulação utilizando as estratégias propostas, assim como sua discussão.

1.4 Organização deste texto

Esta dissertação está dividida em sete capítulos.

Este primeiro trata da introdução ao trabalho, com preliminares, objetivo e justificativa, a metodologia utilizada e a organização do texto.

O segundo capítulo traz o modelo do problema proposto, sua representação por função de transferência e por espaços de estados, além da solução geral da equação de estados.

No terceiro capítulo há a apresentação das estratégias de planejamento de trajetórias de tempo mínimo. Há a proposição do problema, a apresentação da ideia de minimização do tempo através do ganho máximo de temperatura e dois métodos de otimização, sendo um por Programação Linear e o outro através de Controle Ótimo Direto.

O quarto capítulo mostra o estudo da sensibilidade com todas as suas demonstrações de cálculo, que envolvem as derivadas parciais dos estados e um sistema aumentado para cálculo da sensibilidade. É apresentada ainda a proposta de normalização das grandezas utilizadas.

O quinto capítulo traz o estudo da robustez do sistema em malha fechada. Nesse estudo há a apresentação da ideia de um método modificado para simulação de Monte Carlo, o controlador tipo PID com anti-windup e a proposta de utilização de margens na potência máxima para atuação do controlador em malha fechada.

O sexto capítulo contém todas as simulações e resultados obtidos no trabalho. São apresentados os valores utilizados nas simulações, a trajetória planejada de tempo mínimo, simulação de ganho máximo de temperatura, cálculo das sensibilidades e as simulações feitas em malha fechada. Estas simulações envolvem os cálculos de tempo mínimo para diferentes

valores de margem na potência máxima, a estratégia de simulação e a apresentação dos resultados destas simulações.

O último capítulo apresenta as conclusões do trabalho e sugestões para desenvolvimentos futuros a partir do que foi aqui estudado.

2 MODELO DO SISTEMA

O processo de aquecimento do mordente se dá por meio de um resistor elétrico. A temperatura do mordente é medida por um sensor localizado em uma posição distinta da do resistor.

Sendo assim, o modelo do processo de aquecimento, considerando como entrada a potência do aquecedor e como saída a temperatura do mordente, apresenta dois tempos característicos: o primeiro representando o tempo de resposta do próprio aquecedor e, o segundo, associado ao tempo necessário para que o calor flua através do mordente até o ponto onde se localiza o sensor de temperatura. Normalmente, o primeiro tempo é significativamente menor que o segundo.

2.1 Representação por função de transferência

Um modelo comum para casos como esse é o de um sistema de primeira ordem com atraso de transporte como função de transferência (GARCIA, 2022):

$$\frac{\theta(s)}{u(s)} = \frac{K e^{-s\tau_1}}{\tau_2 s + 1}, \quad (2.1)$$

onde $\theta(s)$ é a diferença entre a temperatura do mordente e a temperatura ambiente, $u(s)$ é a entrada do sistema, sendo a potência do aquecedor, K é uma constante de ganho, τ_1 é uma constante de tempo do atraso de transporte e τ_2 é a constante de tempo de primeira ordem do sistema.

Considerando um sistema deste tipo inicialmente em regime estacionário (isto é, com temperatura constante com o tempo) a sua resposta a um pulso tem a forma geral apresentada na figura 1. Os valores dos parâmetros utilizados neste caso foram os seguintes: $K = 2 \text{ }^\circ\text{C/W}$, $\tau_1 = 50 \text{ s}$, $\tau_2 = 250 \text{ s}$; $u_{max} = 500 \text{ W}$ é a amplitude do pulso e $t_s = 100 \text{ s}$ é o instante de desligamento do pulso.

Note-se que, nesse caso, há uma descontinuidade na taxa de variação de θ no instante $t = \tau_1 = 50 \text{ s}$. Observe-se também que a duração do intervalo de tempo em que θ é crescente é de

100 s, exatamente igual à duração t_s do pulso. Além disso, após atingir seu valor máximo no instante $t = \tau_1 + t_s = 150$ s, θ começa a cair de forma brusca, com uma descontinuidade em sua derivada nesse momento, a qual é causada pela descontinuidade no pulso que existe no instante de seu desligamento, ocorrida 50 s antes.

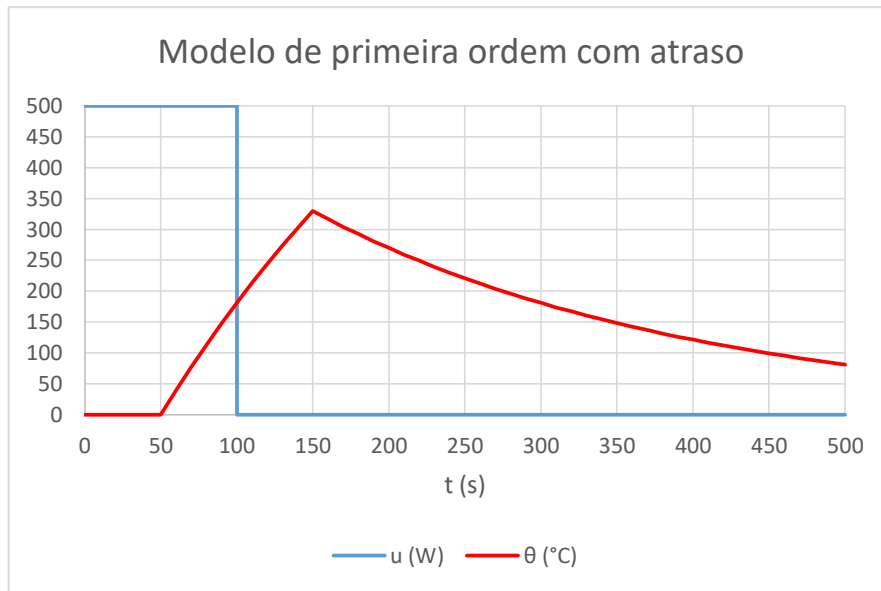


Figura 2.1 – Resposta típica a um pulso para o modelo da equação 2.1.

Ocorre, contudo, na prática que a resposta típica desse sistema para uma entrada do tipo pulso tem a forma geral mostrada na figura 2.2.

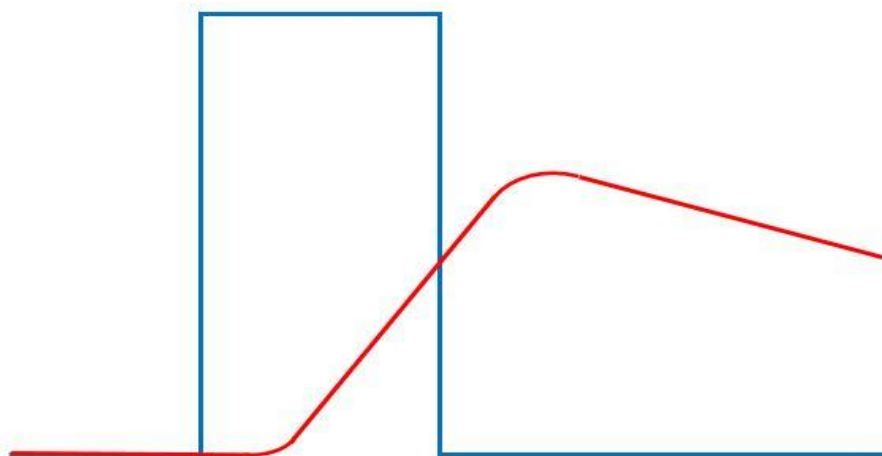


Figura 2.2 – Forma típica na prática da resposta do sistema a um pulso.

Há algumas diferenças qualitativas que podem ser observadas de imediato.

Em primeiro lugar, o atraso se manifesta aqui de maneira mais suave, pois, logo após a aplicação do pulso, a derivada da temperatura do mordente é nula e permanece assim durante um certo intervalo de tempo, após o qual a temperatura começa a subir contínua e suavemente, o que não ocorria com o modelo da equação 2.1.

Outra diferença que se nota é que, após o instante de desligamento do pulso, a temperatura do mordente continua a subir durante um certo intervalo de tempo – a temperatura apresenta uma espécie de sobressinal. Além disso, a queda em θ se dá de maneira suave, sem descontinuidade em sua derivada temporal. É oportuno mencionar que esta característica é bastante importante para o problema de planejamento ótimo de trajetória que será tratado posteriormente nesta dissertação.

Em virtude desses fatos, um modelo para melhor representar o processo de aquecimento do mordente é o seguinte:

$$\frac{\theta(s)}{u(s)} = \frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}, \quad (2.2)$$

onde τ_1 e τ_2 são as constantes de tempo do sistema de segunda ordem.

A figura 2.3 ilustra a resposta típica de um sistema deste tipo a um pulso na entrada. Os valores utilizados para os parâmetros foram os seguintes: $K = 2.5 \text{ } ^\circ\text{C/W}$, $\tau_1 = 90 \text{ s}$, $\tau_2 = 180 \text{ s}$, $u_{max} = 500 \text{ W}$ e $t_s = 100 \text{ s}$.

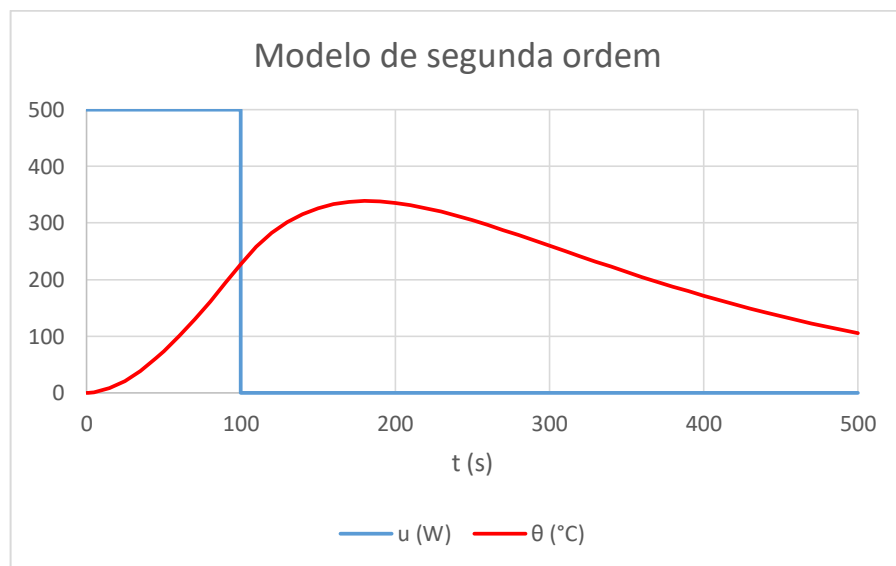


Figura 2.3 – Resposta típica a um pulso para o modelo da equação 2.2.

Nota-se que esta resposta apresenta características qualitativamente mais próximas daquelas exibidas pela resposta de um sistema real, tanto no que se refere ao seu comportamento no início do aquecimento (isto é, logo após a aplicação do pulso de potência), como após o desligamento do pulso (com a presença de um sobressinal suave).

Mostra-se a seguir que tais características presentes nesse exemplo particular são exibidas pelo modelo da equação 2.2 de maneira geral, independentemente dos valores numéricos dos parâmetros.

É intuitivo em primeiro lugar que, após o desligamento do pulso, θ deva prosseguir subindo durante um certo tempo porque, no instante do desligamento, a sua derivada é positiva. Em segundo lugar, é intuitivo também que então θ deva atingir um valor máximo, uma vez que no instante do desligamento do pulso θ é positiva e para tempos suficientemente grandes, θ obviamente tende a zero.

Estes fatos são mostrados a seguir.

Seja então um pulso $u(t)$ definido por

$$u(t) = \begin{cases} u_{max} & \text{para } 0 \leq t \leq t_S \\ 0 & \text{para } t > t_S \end{cases} \quad (2.3)$$

Considerando condições iniciais nulas, isto é,

$$\theta(0) = 0 \quad (2.4)$$

$$\dot{\theta}(0) = 0, \quad (2.5)$$

é simples mostrar que o modelo da equação 2.2 fornece:

• para $0 \leq t \leq t_S$:

$$\theta(t) = Ku_{max} \left(1 + \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) \quad (2.6)$$

$$\dot{\theta}(t) = -Ku_{max} \left(\frac{1}{\tau_2 - \tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) \quad (2.7)$$

• para $t > t_S$:

$$\theta(t) = c_1 e^{-\frac{t-t_S}{\tau_1}} + c_2 e^{-\frac{t-t_S}{\tau_2}} \quad (2.8)$$

$$\dot{\theta}(t) = -\frac{c_1}{\tau_1} e^{-\frac{t-t_S}{\tau_1}} - \frac{c_2}{\tau_2} e^{-\frac{t-t_S}{\tau_2}}, \quad (2.9)$$

em que

$$c_1 = \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \dot{\theta}(t_S) + \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \theta(t_S) \quad (2.10)$$

e

$$c_2 = \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_2 - \tau_1} \dot{\theta}(t_S) + \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} \theta(t_S). \quad (2.11)$$

A expressão 2.8 é obtida da integração da equação 2.2 com entrada nula e condições iniciais $\theta(t_S)$ e $\dot{\theta}(t_S)$ resultantes no final do intervalo $[0, t_S]$.

Note-se que, sem perda de generalidade, pode-se admitir que

$$\tau_1 > \tau_2. \quad (2.12)$$

Proposição 1

A derivada da temperatura no instante do desligamento do pulso é positiva.

Prova

A derivada da temperatura para $0 \leq t \leq t_S$ é dada pela equação 2.7, que pode ser reescrita como

$$\dot{\theta}(t) = Ku_{max} \frac{1}{\tau_1 - \tau_2} \left(e^{-\frac{t}{\tau_1}} - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right). \quad (2.13)$$

Dado que se supôs que $\tau_1 > \tau_2$, é imediato que, para todo t , $0 \leq t \leq t_S$,

$$\dot{\theta}(t) > 0 \quad (2.14)$$

e, portanto, o mesmo ocorre em particular para $t = t_S$.

Proposição 2

A temperatura no instante do desligamento do pulso é positiva.

Prova

Conforme a equação 2.4, $\theta(0) = 0$. Além disso, $\dot{\theta}(t) > 0$ para $0 \leq t \leq t_S$, de acordo com a Proposição 1 (equação 2.14). Consequentemente,

$$\theta(t) > 0 \quad (2.15)$$

para todo t , $0 \leq t \leq t_S$, e, portanto, também para $t = t_S$ em particular.

Proposição 3

A temperatura atinge um ponto de máximo após o desligamento do pulso.

Prova

Para calcular o valor de t^* em que a temperatura atinge o valor máximo, impõe-se que $\dot{\theta}(t) = 0$ na equação 2.9, obtendo-se

$$t^* = t_S + \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \ln \left(\frac{\tau_1 \dot{\theta}(t_S) + \theta(t_S)}{\tau_2 \dot{\theta}(t_S) + \theta(t_S)} \right). \quad (2.16)$$

Tendo em vista pela Proposição 2 que

$$\theta(t_S) > 0 \quad (2.17)$$

e pela Proposição 1 que

$$\dot{\theta}(t_S) > 0, \quad (2.18)$$

é imediato que

$$\frac{\tau_1 \dot{\theta}(t_S) + \theta(t_S)}{\tau_2 \dot{\theta}(t_S) + \theta(t_S)} > 1, \quad (2.19)$$

uma vez que se admitiu sem perda de generalidade que $\tau_1 > \tau_2$.

Consequentemente,

$$\ln \left(\frac{\tau_1 \dot{\theta}(t_S) + \theta(t_S)}{\tau_2 \dot{\theta}(t_S) + \theta(t_S)} \right) > 0. \quad (2.20)$$

Sendo assim, da equação 2.16 decorre obviamente que $t^* > t_S$, ou seja, a temperatura atinge um ponto de máximo após o desligamento do pulso.

2.2 Representação por espaços de estados

A partir da função de transferência, foi definido o estado $x(t)$ representando a diferença de temperatura do mordente em relação à temperatura ambiente – admitida constante com o tempo – e sua derivada, como mostrado abaixo:

$$x(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

onde $\theta(t)$, como já dito anteriormente, é a diferença entre a temperatura do mordente e a temperatura ambiente e $\dot{\theta}(t)$ é a sua derivada em relação ao tempo.

Definida também para a representação, a entrada u como a potência do aquecedor, foi possível obter a respectiva equação em espaços de estados invariante no tempo. A equação 2.22 mostra essa representação:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (2.22)$$

As matrizes da representação em espaços de estados da função de transferência apresentada na equação 2.2 podem ser escritas da seguinte forma

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\tau_1 \tau_2} & -\frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2} \end{bmatrix}, \quad (2.23)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K}{\tau_1 \tau_2} \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

$$C = [1 \quad 0] \quad (2.25)$$

e

$$D = [0]. \quad (2.26)$$

2.3 Solução geral da equação de estados

A equação em espaço de estados, descrita na equação 2.22, tem sua solução geral na forma da equação 2.27.

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (2.27)$$

Esta equação também pode ser escrita usando a matriz de transição de estados, que relaciona $x(0)$ a $x(t)$ e será representada por $\Phi(t)$:

$$\Phi(t) = e^{At} \quad (2.28)$$

Substituindo a equação 2.28 em 2.27, resulta em 2.29:

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau \quad (2.29)$$

Admitindo que o mordente se encontre inicialmente em repouso à temperatura ambiente, as condições iniciais são nulas. Assim, reescreve-se a equação 2.29 como em 2.30.

$$x(t) = \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau \quad (2.30)$$

Para posteriormente se usar a estratégia de Programação Linear, o sistema será discretizado subdividindo a integral que vai do tempo inicial nulo ao tempo final t_f em n intervalos de tempos iguais:

$$t_f = n\Delta t \quad (2.31)$$

Subdividindo em intervalos, a equação 2.31 pode ser escrita da forma como em 2.32:

$$x(t_f) = \int_0^{\Delta t} \Phi(t_f - \tau)Bu(\tau)d\tau + \int_{\Delta t}^{2\Delta t} \Phi(t_f - \tau)Bu(\tau)d\tau + \dots$$

$$\dots + \int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} \Phi(t_f - \tau)Bu(\tau)d\tau \quad (2.32)$$

Outra consideração a ser feita, é que a entrada u será considerada constante por trechos em cada intervalo Δt , isto é:

$$u(t) = u_i \quad (2.33)$$

com $i = 1, 2, \dots, n$ e $(i - 1)\Delta t \leq t < i\Delta t$.

Sendo B e $u(t)$ invariantes em τ , podem ser retirados da integração.

$$x(t_f) = \int_0^{\Delta t} \Phi(t_f - \tau)d\tau Bu_1 + \int_{\Delta t}^{2\Delta t} \Phi(t_f - \tau)d\tau B u_2 + \dots + \int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} \Phi(t_f - \tau)d\tau Bu_n$$

$$(2.34)$$

Para facilitar a escrita, o fator que multiplica u_i será representado por Γ_i , de maneira que

$$\Gamma_i = \int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} \Phi(t_f - \tau)d\tau B \quad (2.35)$$

com $i = 1, 2, \dots, n$

Desta forma, tem-se a solução geral escrita agora em 2.36.

$$x(t_f) = \sum_{i=1}^n \Gamma_i u_i \quad (2.36)$$

Como era esperado pelo fato de o modelo dinâmico ser linear, nota-se que esta equação é linear em u_1, u_2, \dots, u_n , o que é essencial para que, na próxima seção, se utilize a Programação Linear para o cálculo da solução do problema de tempo mínimo.

Particionando o vetor Γ_i ,

$$\Gamma_i = \begin{bmatrix} \Gamma_{i1} \\ \Gamma_{i2} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

e tendo em vista a equação 2.21, a equação 2.36 pode então ser representada como em 2.38:

$$\begin{cases} \theta(t_f) = \sum_{i=1}^n \Gamma_{i1} u_i \\ \dot{\theta}(t_f) = \sum_{i=1}^n \Gamma_{i2} u_i \end{cases} \quad (2.38)$$

3 O PROBLEMA DE TEMPO MÍNIMO

3.1 Proposição do problema

O objetivo neste trabalho é minimizar o tempo para o sistema atingir a temperatura desejada. Será usada como variável de controle a potência elétrica fornecida ao sistema de aquecimento. Há restrições físicas a serem consideradas na estratégia, quais sejam a potência máxima do equipamento e a máxima temperatura que o mordente pode atingir sem que danifique o material da embalagem selada. Também se considera que a temperatura do mordente será sempre maior que a temperatura ambiente e que a potência será sempre positiva, pois sempre introduzimos potência para aquecimento do equipamento. O resfriamento se dá apenas por perda de calor para o ambiente.

Deseja-se que, através da potência fornecida pelo sistema ao mordente, no tempo final $t = t_f$ o mordente alcance a temperatura final de operação, designada por θ_f

$$\theta(t_f) = \theta_f \quad (3.1)$$

e permaneça localmente estável nesse valor, ou seja,

$$\dot{\theta}(t_f) = 0. \quad (3.2)$$

Conforme já dito anteriormente, será considerado que o mordente estará inicialmente em repouso à temperatura ambiente. Assim, são válidas as equações 3.3 e 3.4.

$$\theta(0) = 0 \quad (3.3)$$

$$\dot{\theta}(0) = 0 \quad (3.4)$$

Designando por $U = [u_1, u_2, \dots, u_n]$ o vetor de incógnitas do problema, e considerando que u_{max} seja a potência máxima do aquecedor, tem-se naturalmente como restrições que

$$0 \leq U \leq U_{max}, \quad (3.5)$$

em que, obviamente,

$$U_{max} = [u_{max}, u_{max}, \dots, u_{max}]. \quad (3.6)$$

Dadas estas considerações, tem-se o problema de otimização, onde se procura o menor valor de t_f para atingir θ_f com $\dot{\theta}(t_f) = 0$, tendo u como variável de controle.

$$\min_U t_f \quad (3.7)$$

3.2 Minimização do tempo através do máximo ganho de temperatura

Ocorre, no entanto, que o modelo matemático proposto no capítulo anterior tem a temperatura e sua variação em função do tempo, representadas pelo estado $x(t)$. Assim, para que seja possível formular o problema de tempo mínimo como de Programação Linear, o mesmo será proposto como uma sequência de problemas de maximização da temperatura em um tempo final dado. O tempo final deve ser ajustado até que a temperatura máxima alcançada seja a temperatura desejada θ_d . Essa ideia, já usada para o planejamento de trajetórias de guindastes por Cruz e Leonardi (2013), será melhor apresentada a seguir.

A temperatura final do mordente pode ser expressa como o produto da média da taxa de variação de temperatura pelo tempo decorrido.

$$\theta(t_f) = \bar{\theta}(0, t_f) \cdot t_f \quad (3.8)$$

sendo $\bar{\theta}(0, t_f)$ o valor médio da taxa de variação da temperatura no intervalo $(0, t_f)$.

A partir da equação 3.8, há duas considerações:

- 1) Supõe-se inicialmente que $\theta(t_f)$ seja dado e o objetivo seja minimizar t_f . Neste caso, obviamente, o valor de $\bar{\theta}(0, t_f)$ deve ser máximo;
- 2) Considera-se agora que t_f é fixo. Neste caso, se o valor de $\bar{\theta}(0, t_f)$ é máximo, então $\theta(t_f)$ também é máximo.

O algoritmo para encontrar a solução de tempo mínimo pode então ser descrito como uma sequência de problemas de alcance máximo, onde, em cada passo, é assumido um valor t_f dado e o problema de PL é resolvido.

Em outras palavras, propõe-se primeiramente um tempo para que o mordente atinja a temperatura final. Com este tempo, aplica-se a otimização para se chegar à maior temperatura possível de ser atingida sob as restrições do problema.

Neste ponto é importante definir um critério de parada para o processo iterativo, tomando o erro entre a temperatura máxima resultante $\theta^*(t_f)$ no processo e a temperatura desejada θ_d :

$$|\theta^*(t_f) - \theta_d| \leq \varepsilon \quad (3.9)$$

sendo ε a tolerância aceitável entre o valor desejado e o obtido.

Feito isto, a temperatura atingida pode estar abaixo, acima ou dentro da faixa tolerável definida em 3.9. Estando dentro da faixa tolerável, u e t_f são considerados ótimos e o problema estará resolvido. Caso esteja abaixo, será preciso propor um tempo final maior. Caso esteja acima, propor-se-á um tempo final menor.

Um algoritmo de busca binária pode ser usado para encontrar o valor de t_f . Primeiramente é preciso definir um intervalo inicial para a busca desse tempo. Os valores mínimo e máximo serão escolhidos baseados na dinâmica do sistema. O valor mínimo será adotado como igual à metade da menor constante de tempo do modelo e o valor máximo, dez vezes a maior constante de tempo.

Tendo definidos os limites inferior e superior, o algoritmo de busca binária divide a faixa de busca escolhendo o valor central e testando-o. Não sendo este o valor procurado, a faixa de busca é dividida ao meio, escolhendo a metade inferior ou superior conforme a situação e então aplica-se novamente o mesmo procedimento de escolher o valor central.

O pseudocódigo a seguir mostra o algoritmo de busca binária utilizado.

Define intervalo de busca

Se: $\tau_1 \geq \tau_2$,

$$t_{f_{sup}} = 10\tau_1$$

$$t_{f_{inf}} = 0,5\tau_2$$

Se não,

$$t_{f_{sup}} = 10\tau_2$$

$$t_{f_{inf}} = 0,5\tau_1$$

Fim Se

Define valor médio do intervalo de busca de t_f

$$t_{f_{meio}} = (t_{f_{sup}} + t_{f_{inf}}) / 2$$

Aplica maximização para $t_{f_{meio}}$

$$\theta^*(t_{f_{meio}}) = \text{maximiza}(t_{f_{meio}})$$

Busca binária

$$\text{Enquanto } |\theta^*(t_{f_{meio}}) - \theta_d| > \varepsilon$$

$$\text{Se: } \theta^*(t_{f_{meio}}) > \theta_d$$

$$t_{f_{sup}} = t_{f_{meio}}$$

Se não:

$$t_{f_{inf}} = t_{f_{meio}}$$

Fim Se

Define novo valor médio do intervalo de busca de t_f

$$t_{f_{meio}} = (t_{f_{sup}} + t_{f_{inf}}) / 2$$

Aplica maximização para novo valor de $t_{f_{meio}}$

$$\theta^*(t_{f_{meio}}) = \text{maximiza}(t_{f_{meio}})$$

Fim Enquanto

3.3 Otimização usando Programação Linear

Neste trabalho, uma das estratégias adotadas foi de controle usando programação linear, onde a função objetivo é linear e as restrições são escritas como igualdades ou desigualdades lineares. Para a aplicação desta técnica, é preciso definir a função objetivo, as incógnitas desta equação e as restrições do sistema. De acordo com o capítulo anterior, será trabalhado um problema de maximização, como pode ser representado abaixo:

$$\max f(x_1, x_2, \dots, x_n) = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_m \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \\ &\vdots \\ x_n &\geq 0 \end{aligned}$$

onde $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é a função objetivo, x_1, x_2, \dots, x_n são as incógnitas e p_1, p_2, \dots, p_n cada um de seus respectivos pesos na função objetivo. As inequações às quais a função objetivo está sujeita são as restrições do sistema.

Na realidade deste trabalho, é preciso resolver a o seguinte problema de PL:

$$\max_U \theta(t_f) \tag{3.10}$$

sujeito a

$$\dot{\theta}(t_f) = 0 \tag{3.11}$$

$$0 \leq U \leq U_{max}. \quad (3.12)$$

A função objetivo será a parte da equação 2.38 que corresponde à temperatura final $\theta(t_f)$.

$$\theta(t_f) = \Gamma_{11}u_1 + \Gamma_{21}u_2 + \dots + \Gamma_{n1}u_n \quad (3.13)$$

onde $\theta(t_f)$ é a temperatura final que se deseja maximizar, u_1, u_2, \dots, u_n são as incógnitas e $\Gamma_{11}, \Gamma_{21}, \dots, \Gamma_{n1}$ seus pesos na função objetivo.

Como se deseja obter o máximo valor de $\theta(t_f)$ e que esse ponto seja atingido com derivada nula, uma das restrições será a parte da equação 2.38 que corresponde à variação da temperatura final no tempo:

$$\dot{\theta}(t_f) = \Gamma_{12}u_1 + \Gamma_{22}u_2 + \dots + \Gamma_{n2}u_n = 0 \quad (3.14)$$

Têm-se ainda as restrições da entrada de potência expressas através dos valores de u_i .

$$\begin{aligned} 0 &\leq u_1 \leq u_{m\acute{a}x} \\ 0 &\leq u_2 \leq u_{m\acute{a}x} \\ &\vdots \\ 0 &\leq u_n \leq u_{m\acute{a}x} \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde $u_{m\acute{a}x}$ é o máximo valor de entrada u_i .

3.4 Otimização usando Controle Ótimo Direto

No caso presente é possível calcular a lei de controle ótimo na forma simples e direta, sem a necessidade de se usar a abordagem baseada na Programação Linear.

Seja o modelo da planta na forma de função de transferência como mostrado na equação 2.2. Utilizando o vetor de estados da equação 2.21 obtém-se de imediato o modelo de estados escrito na forma usual da equação 2.22.

Para problemas de tempo mínimo do tipo do considerado neste trabalho, sabe-se que a solução é do tipo bang-bang, em que a variável de controle chaveia entre seus valores máximo

e mínimo. Além disso, há uma propriedade importante (KIRK, 2004) que pode ser bastante útil aqui: para sistemas de ordem n , o número máximo de chaveamentos é igual a $n - 1$.

No nosso caso, como $n = 2$, resulta portanto que o número máximo de chaveamentos é 1. Ou seja, ou não há chaveamento algum ou há um único chaveamento.

É evidente que a primeira possibilidade está descartada, de maneira que a lei de controle ótimo apresenta um único chaveamento. Portanto, a função tem a forma de um pulso em que a potência aplicada ao mordente assume seu valor máximo desde o início até o instante de chaveamento t_S e, a partir de então, se anula (figura 3.1).

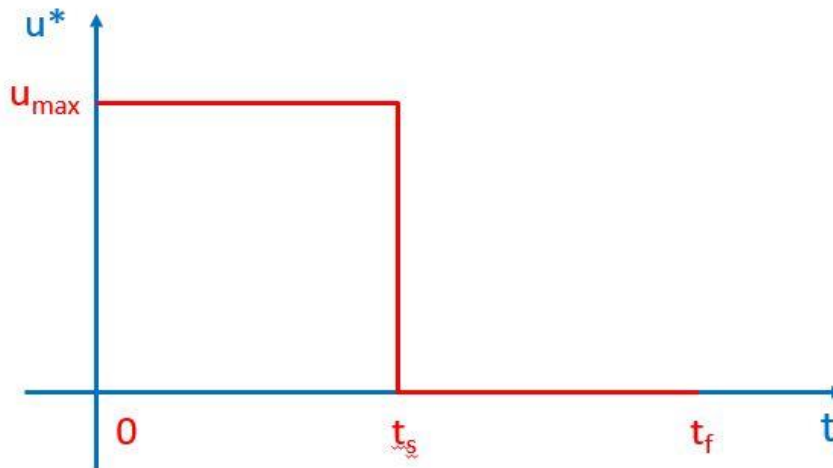


Figura 3.1 – Representação gráfica da lei de controle ótimo.

O problema se reduz, portanto, em calcular o instante de chaveamento t_S de maneira que no instante final t_f , desconhecido, a temperatura tenha atingido o valor desejado θ_d , isto é,

$$\theta(t_f) = \theta_d \quad (3.19)$$

com taxa de variação temporal nula, isto é,

$$\dot{\theta}(t_f) = 0. \quad (3.20)$$

Como se verá a seguir, isto pode ser feito sem grande dificuldade utilizando as condições de contorno.

O método de solução proposto é simples. Será necessário considerar aqui todo o estudo de modelagem mostrado do capítulo 2.

Admita-se inicialmente que se disponha de uma aproximação inicial para o valor de t_S .

Com esse valor, usando as equações 2.6 e 2.7, podem-se calcular $\theta(t_S)$ e $\dot{\theta}(t_S)$.

Em seguida, impondo-se $\dot{\theta}(t) = 0$ na equação 2.9, calcula-se o valor de t_f :

$$t_f = t_S + \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \ln \left(\frac{\tau_1 \dot{\theta}(t_S) + \theta(t_S)}{\tau_2 \dot{\theta}(t_S) + \theta(t_S)} \right). \quad (3.21)$$

Com este valor de t_f , a equação 2.8 permite calcular $\theta(t_f)$.

Se $\theta(t_f) > \theta_d$, diminui-se o valor de t_S e repete-se o procedimento; se $\theta(t_f) < \theta_d$, aumenta-se o valor de t_S .

A busca termina quando $|\theta(t_f) - \theta_d| < \varepsilon$ para um valor de $\varepsilon > 0$ escolhido a priori.

Supondo conhecido de antemão um intervalo inicial $[\underline{t}_S, \bar{t}_S]$ ao qual pertence a solução do problema, um procedimento de busca binária pode ser utilizado para, conforme o caso, diminuir ou aumentar o valor da aproximação corrente de t_S em cada passo. No final do procedimento, tem-se uma aproximação t_S^* do valor ótimo do instante de chaveamento.

4 SENSIBILIDADE

4.1 Introdução

O estudo da sensibilidade de um sistema, como será aqui proposto, procura entender como variações infinitesimais nos parâmetros do modelo afetam a resposta do sistema. Assim mensura-se quão sensível é a resposta em relação a variações que poderiam ser tidas como de menor grandeza.

Dado o modelo do processo apresentado no capítulo 2 e aplicada a técnica proposta no capítulo 3, deseja-se calcular as sensibilidades das condições terminais $\theta(t_f)$ e $\dot{\theta}(t_f)$ em relação aos parâmetros do modelo, a saber,

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial \theta(t_f)}{\partial \tau_1} & \frac{\partial \theta(t_f)}{\partial \tau_2} & \frac{\partial \theta(t_f)}{\partial K} \\ \frac{\partial \dot{\theta}(t_f)}{\partial \tau_1} & \frac{\partial \dot{\theta}(t_f)}{\partial \tau_2} & \frac{\partial \dot{\theta}(t_f)}{\partial K} \end{array}$$

Sob o ponto de vista prático, é oportuno notar que as sensibilidades da temperatura final e da sua taxa de variação temporal em relação aos parâmetros do modelo são os elementos mais relevantes. Isto se deve ao fato de que, no processo de aquecimento do mordente, não é desejável que a temperatura final ultrapasse o valor desejado nem que a taxa de variação final seja não nula.

4.2 Variações nos parâmetros do modelo do processo

Para o cálculo das sensibilidades, os parâmetros do modelo serão considerados acrescidos de variações nos seus valores. Na representação a seguir o símbolo “ \rightarrow ” será usado com o sentido de “passa a”. Desta forma, tem-se então:

$$\tau_1 \rightarrow \tau_1 + \Delta\tau_1$$

$$\tau_2 \rightarrow \tau_2 + \Delta\tau_2$$

$$K \rightarrow K + \Delta K$$

Correspondendo aos novos parâmetros, têm-se as novas matrizes da equação de estados do sistema mostradas nas equações 2.23 e 2.24,

$$A \rightarrow A + \Delta A$$

$$B \rightarrow B + \Delta B$$

e o novo vetor de estados como

$$x \rightarrow x + \Delta x.$$

Podem-se escrever as aproximações de primeira ordem dos incrementos ΔA e ΔB da seguinte forma:

$$\Delta A = \frac{\partial A}{\partial \tau_1} \Delta \tau_1 + \frac{\partial A}{\partial \tau_2} \Delta \tau_2 \quad (4.1)$$

$$\Delta B = \frac{\partial B}{\partial \tau_1} \Delta \tau_1 + \frac{\partial B}{\partial \tau_2} \Delta \tau_2 + \frac{\partial B}{\partial K} \Delta K \quad (4.2)$$

sendo todas as derivadas parciais calculadas no ponto (τ_1, τ_2, K) .

Para a equação de estados definida em 2.22, com os incrementos propostos, pode-se escrever:

$$\dot{x} + \Delta \dot{x} = (A + \Delta A)(x + \Delta x) + (B + \Delta B)u \quad (4.3)$$

Considerando a aproximação de primeira ordem, resulta que:

$$\Delta \dot{x} = A \Delta x + \Delta A x + \Delta B u \quad (4.4)$$

Substituindo as equações 4.1 e 4.2 em 4.4 e rearranjando, tem-se que:

$$\Delta \dot{x} = A \Delta x + \left(\frac{\partial A}{\partial \tau_1} x + \frac{\partial B}{\partial \tau_1} u \right) \Delta \tau_1 + \left(\frac{\partial A}{\partial \tau_2} x + \frac{\partial B}{\partial \tau_2} u \right) \Delta \tau_2 + \left(\frac{\partial B}{\partial K} u \right) \Delta K \quad (4.5)$$

4.3 Cálculo das derivadas parciais

Como dito anteriormente, deseja-se calcular as derivadas parciais da temperatura final e de sua taxa de variação temporal em relação a cada um dos parâmetros do modelo:

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial \theta(t_f)}{\partial \tau_1} & \frac{\partial \theta(t_f)}{\partial \tau_2} & \frac{\partial \theta(t_f)}{\partial K} \\ \frac{\partial \dot{\theta}(t_f)}{\partial \tau_1} & \frac{\partial \dot{\theta}(t_f)}{\partial \tau_2} & \frac{\partial \dot{\theta}(t_f)}{\partial K} \end{array}$$

Dado que:

$$x(t_f) = \begin{bmatrix} \theta(t_f) \\ \dot{\theta}(t_f) \end{bmatrix},$$

basta então calcular as derivadas parciais de $x(t_f)$ em relação a cada um dos parâmetros do modelo:

$$\frac{\partial x(t_f)}{\partial \tau_1} \quad \frac{\partial x(t_f)}{\partial \tau_2} \quad \frac{\partial x(t_f)}{\partial K}$$

4.3.1 Cálculo de $\partial x(t_f)/\partial \tau_1$

Inicialmente, considera-se o problema de calcular:

$$\frac{\Delta x(t_f)}{\Delta \tau_1}$$

Feito isto, bastará tomar o limite para $\Delta \tau_1 \rightarrow 0$.

Considera-se neste caso, obviamente, que $\Delta \tau_2 = \Delta K = 0$, de maneira que, da equação 4.5, resulta:

$$\Delta \dot{x} = A \Delta x + \left(\frac{\partial A}{\partial \tau_1} x + \frac{\partial B}{\partial \tau_1} u \right) \Delta \tau_1 \quad (4.6)$$

Como $\Delta x(0) = 0$, a solução desta equação é dada por:

$$\Delta x(t_f) = \int_0^{t_f} e^{A(t_f-\tau)} \left(\frac{\partial A}{\partial \tau_1} x(\tau) + \frac{\partial B}{\partial \tau_1} u(\tau) \right) d\tau \Delta \tau_1 \quad (4.7)$$

Notando que $\Delta x(t_f)$ é linear em $\Delta \tau_1$, é imediato que, inclusive no limite para $\Delta \tau_1 \rightarrow 0$.

$$\frac{\partial x(t_f)}{\partial \tau_1} = \frac{\Delta x(t_f)}{\Delta \tau_1} \quad (4.8)$$

Desta maneira, obtém-se a derivada parcial de $x(t_f)$ em relação a τ_1 :

$$\frac{\partial x(t_f)}{\partial \tau_1} = \int_0^{t_f} e^{A(t_f-\tau)} \left(\frac{\partial A}{\partial \tau_1} x(\tau) + \frac{\partial B}{\partial \tau_1} u(\tau) \right) d\tau \quad (4.9)$$

Definindo S_{τ_1} como sendo a sensibilidade de $x(t_f)$ em relação a τ_1 , isto é:

$$S_{\tau_1} = \frac{\partial x(t_f)}{\partial \tau_1} = \left[\frac{\partial \theta(t_f)/\partial \tau_1}{\partial \hat{\theta}(t_f)/\partial \tau_1} \right], \quad (4.10)$$

a equação 4.9 mostra que S_{τ_1} pode ser calculada como a solução de:

$$\dot{S}_{\tau_1} = AS_{\tau_1} + \left(\frac{\partial A}{\partial \tau_1} x + \frac{\partial B}{\partial \tau_1} u \right) \quad (4.11)$$

com a condição inicial nula, isto é, $S_{\tau_1}(0) = 0$.

4.3.2 Cálculo de $\partial x(t_f)/\partial \tau_2$

Analogamente e procedendo da mesma forma que para a sensibilidade em relação a τ_1 , define-se S_{τ_2} a sensibilidade em relação a τ_2 , sendo a solução da equação 4.12.

$$\dot{S}_{\tau_2} = AS_{\tau_2} + \left(\frac{\partial A}{\partial \tau_2} x + \frac{\partial B}{\partial \tau_2} u \right) \quad (4.12)$$

com a condição inicial nula, $S_{\tau_2}(0) = 0$.

4.3.3 Cálculo de $\partial x(t_f)/\partial K$

Da mesma forma que para as sensibilidade já calculadas, S_K é a solução de:

$$\dot{S}_K = AS_K + \left(\frac{\partial A}{\partial K} x + \frac{\partial B}{\partial K} u \right) \quad (4.13)$$

Como $\frac{\partial A}{\partial K} x = 0$:

$$\dot{S}_K = AS_K + \frac{\partial B}{\partial K} u \quad (4.14)$$

também com a condição inicial nula: $S_{\tau_1}(0) = 0$.

4.3.4 Sistema aumentado para o cálculo das sensibilidades

Tendo em vista que, para o cálculo das sensibilidades, é necessário utilizar tanto a trajetória de estados x resultante da ação do controle ótimo u , como este último (veja equações 4.11, 4.12 e 4.14), é conveniente definir o estado estendido x_e :

$$x_e = \begin{bmatrix} x \\ S_{\tau_1} \\ S_{\tau_2} \\ S_K \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Neste novo estado, as sensibilidades correspondem aos elementos 3 a 8 de $x_e(t_f)$.

Definindo então:

$$A_a = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ \partial A/\partial \tau_1 & A & 0 & 0 \\ \partial A/\partial \tau_2 & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

$$B_a = \begin{bmatrix} B \\ \partial B/\partial \tau_1 \\ \partial B/\partial \tau_2 \\ \partial B/\partial K \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

as sensibilidades resultam da integração da equação 5.20:

$$\dot{x}_e = A_a x_e + B_a u \quad (4.18)$$

com condição inicial nula, isto é, $x_e(0) = 0$.

Como as matrizes A_a e B_a são constantes, a solução deste sistema é dada por:

$$x_e(t_f) = \int_0^{t_f} e^{A_a(t_f-\tau)} B_a u(\tau) d\tau \quad (4.19)$$

Considerando que u é constante por trechos, isto é,

$$u(\tau) = u_i \quad (t_{i-1} < \tau < t_i, \quad i = 1, 2, \dots, n), \quad (4.20)$$

$x_e(t_f)$ é dado por:

$$x_e(t_f) = \sum_{i=1}^n \Gamma_{en}(i) u_i \quad (4.21)$$

onde:

$$\Gamma_{en}(i) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{A_a(t_f-\tau)} B_a d\tau \quad (4.22)$$

4.4 Normalização das sensibilidades

Cabe-se neste ponto notar que as variáveis do problema pressupõem-se estarem expressas em unidades de engenharia. A tabela 4.1 contém um conjunto usual de unidades das variáveis do problema.

Tabela 4.1: Unidades das variáveis do problema

Variável	Unidade
θ	$^{\circ}\text{C}$
$\dot{\theta}$	$^{\circ}\text{C}/\text{s}$
q	W
τ_1	s
τ_2	s
K	$^{\circ}\text{C}/W$

Consequentemente, as unidades das sensibilidades são as que constam na tabela 4.2.

Tabela 4.2: Unidades das sensibilidades

Sensibilidade	Unidade
$\partial\theta(t_f)/\partial\tau_1$	$^{\circ}\text{C}/\text{s}$
$\partial\theta(t_f)/\partial\tau_2$	$^{\circ}\text{C}/\text{s}$
$\partial\theta(t_f)/\partial K$	W
$\partial\dot{\theta}(t_f)/\partial\tau_1$	$^{\circ}\text{C}/\text{s}^2$
$\partial\dot{\theta}(t_f)/\partial\tau_2$	$^{\circ}\text{C}/\text{s}^2$
$\partial\dot{\theta}(t_f)/\partial K$	W/s

Em alguns casos, as unidades não parecem ser muito intuitivas, como, por exemplo, para $\partial\dot{\theta}(t_f)/\partial K$.

Uma outra forma para se trabalhar, que parece ser mais apropriada, é usar sensibilidades normalizadas (adimensionalizadas), para que quantifiquem uma variação percentual numa variável decorrente de uma variação percentual em outra variável.

Designando por V uma variável genérica expressa em unidades de engenharia e por V^B o seu valor de base para normalização, serão os seguintes valores para as variáveis de base:

$$\theta^B = \theta_d$$

$$\dot{\theta}^B = \bar{\theta}[0, t_f]$$

$$\tau_1^B = \tau_1$$

$$\tau_2^B = \tau_2$$

$$K^B = K$$

sendo $\bar{\theta}[0, t_f]$ o valor médio de $\theta(t)$ no intervalo $[0, t_f]$.

No que se segue indica-se por \hat{V} o valor normalizado de uma variável V expressa em unidades de engenharia, isto é,

$$\hat{V} = \frac{V}{V^B} \quad (4.23)$$

Considera-se inicialmente a normalização da sensibilidade $\partial\theta(t_f)/\partial\tau_1$, que, em vista da linearidade, é o mesmo que de $\Delta\theta(t_f)/\Delta\tau_1$:

$$\frac{\partial\hat{\theta}(t_f)}{\partial\hat{\tau}_1} = \frac{\Delta\hat{\theta}(t_f)}{\Delta\hat{\tau}_1} \quad (4.24)$$

Como:

$$\Delta\hat{\theta}(t_f) = \frac{\Delta\theta(t_f)}{\theta^B} \quad (4.25)$$

e

$$\Delta\hat{\tau}_1 = \frac{\Delta\tau_1}{\tau_1^B} \quad (4.26)$$

portanto,

$$\frac{\Delta\hat{\theta}(t_f)}{\Delta\hat{\tau}_1} = \frac{\Delta\theta(t_f)}{\Delta\tau_1} \frac{\tau_1^B}{\theta^B} \quad (4.27)$$

de modo que

$$\frac{\partial \hat{\theta}(t_f)}{\partial \hat{\tau}_1} = \frac{\partial \theta(t_f)}{\partial \tau_1} \frac{\tau_1^B}{\theta^B} \quad (4.28)$$

De forma análoga, obtêm-se:

$$\frac{\partial \hat{\theta}(t_f)}{\partial \hat{\tau}_2} = \frac{\partial \theta(t_f)}{\partial \tau_2} \frac{\tau_2^B}{\theta^B} \quad (4.29)$$

$$\frac{\partial \hat{\theta}(t_f)}{\partial \hat{K}} = \frac{\partial \theta(t_f)}{\partial K} \frac{K^B}{\theta^B} \quad (4.30)$$

Assim como:

$$\frac{\partial \hat{\theta}(t_f)}{\partial \hat{\tau}_1} = \frac{\partial \dot{\theta}(t_f)}{\partial \tau_1} \frac{\tau_1^B}{\dot{\theta}^B} \quad (4.31)$$

$$\frac{\partial \hat{\theta}(t_f)}{\partial \hat{\tau}_2} = \frac{\partial \dot{\theta}(t_f)}{\partial \tau_2} \frac{\tau_2^B}{\dot{\theta}^B} \quad (4.32)$$

$$\frac{\partial \hat{\theta}(t_f)}{\partial \hat{K}} = \frac{\partial \dot{\theta}(t_f)}{\partial K} \frac{K^B}{\dot{\theta}^B} \quad (4.33)$$

Para ilustrar a normalização, consideram-se as seguintes variáveis de base:

$$\theta^B = 120 \text{ } ^\circ C$$

$$\tau_1^B = 180 \text{ s}$$

Supondo que:

$$\Delta \theta(t_f) = 1,2 \text{ } ^\circ C$$

$$\Delta \tau_1 = 3,6 \text{ s}$$

Desta forma:

$$\Delta \hat{\theta}(t_f) = \frac{\Delta \theta(t_f)}{\theta^B} = 0,01 = 1\%$$

$$\Delta \hat{\tau}_1 = \frac{\Delta \tau_1}{\tau_1^B} = 0,02 = 2\%$$

ou seja,

$$\frac{\partial \hat{\theta}(t_f)}{\partial \hat{\tau}_1} = \frac{\Delta \hat{\theta}(t_f)}{\Delta \hat{\tau}_1} = 0,5$$

O que se traduz disto, é que uma variação de 2% em τ_1 corresponde a uma variação de 1% em $\theta(t_f)$. Assim, quando considerada em forma normalizada, a sensibilidade tem de imediato um significado bastante claro.

Em contrapartida, quando se consideram as sensibilidades em unidades de engenharia, os valores podem não transmitir de imediato uma noção clara de seu significado, como neste exemplo:

$$\frac{\partial \Delta \theta(t_f)}{\partial \tau_1} = \frac{\Delta \theta(t_f)}{\Delta \tau_1} = 0,3333 \text{ } ^\circ\text{C/s}$$

5 ESTUDO DA ROBUSTEZ EM MALHA FECHADA

O planejamento de trajetórias em geral é realizado com base em um modelo nominal do sistema que se deseja controlar. O rastreamento de uma trajetória planejada normalmente é realizado por meio de um sistema de controle em malha fechada. A razão para isto é garantir que o sistema opere satisfatoriamente a despeito de incertezas a que ele esteja sujeito. Dentre estas estão as perturbações externas e os erros no modelo dinâmico, não levados em conta no planejamento – a questão da robustez do desempenho do sistema é, portanto, central na prática.

O procedimento para avaliar a robustez do sistema de controle em malha fechada, quando sujeito a incertezas nos parâmetros do modelo, é apresentado nesta seção. Considera-se um controlador em malha fechada do tipo PID com anti-windup, por ser este de amplo uso industrial (ASTROM; HAGGLUND, 1995). Mais especificamente, optou-se pela sintonia de parâmetros PID-SIMC proposta por Skogestad e Postlethwaite (2005) que afirmam ser o mesmo “provavelmente o melhor PID com regras simples de sintonia do mundo”.

No caso de planejamento de trajetórias de tempo mínimo, a lei de controle resultante é do tipo bang-bang, em que a variável de controle chaveia em instantes específicos entre os seus limites mínimo e máximo de atuação. Sendo assim, o controlador de malha fechada não tem margem para atuação quando o controlador determina um valor da variável de controle que, somada ao valor do controle da trajetória planejada, tenda a violar os limites de atuação.

Utilizando simulações de Monte Carlo ligeiramente modificadas conforme descrito a seguir, o objetivo aqui é avaliar a robustez do sistema de controle em malha fechada quando sujeito a incertezas nos parâmetros do modelo. São consideradas incertezas aleatórias nos três parâmetros do modelo – a saber, K , τ_1 e τ_2 – de diversas magnitudes, representadas por ε_p . Mais especificamente, isto significa que se \bar{p} representa o valor nominal de um parâmetro p , o valor deste é um número aleatório no intervalo definido por $[(1 - \varepsilon_p)\bar{p}, (1 + \varepsilon_p)\bar{p}]$. A forma modificada do método de Monte Carlo utilizada consiste em, além dos pontos gerados aleatoriamente, considerar pontos uniformemente distribuídos no mesmo intervalo para cada parâmetro (MARIANO; CRUZ; KASSAB JUNIOR, 2021). Essa estratégia será apresentada em mais detalhes no capítulo de simulações e resultados.

Para contornar as situações no limite de atuação, em malha fechada são planejadas trajetórias considerando valores máximos da potência de aquecimento inferiores àqueles disponíveis no aquecedor (MARIANO; CRUZ; KASSAB JUNIOR, 2021). Seja δ , $0 < \delta < 1$, a margem entre o valor de potência máxima disponível no atuador e a potência máxima considerada no planejamento da trajetória. A potência máxima considerada no planejamento da trajetória $u_{max,p}$, é definida como,

$$u_{max,p} = (1 - \delta) u_{max} , \quad (5.1)$$

onde u_{max} é a potência máxima de aquecimento.

Naturalmente é de se esperar que o tempo de aquecimento para a trajetória planejada seja superior ao correspondente ao caso em que se considera a potência máxima do aquecedor.

Nessas simulações, é de se esperar também que, quanto maior for a incerteza ε_p nos valores dos parâmetros, tanto mais deverá ser exigido o controlador de malha fechada em termos de magnitude da variável de controle.

Para possibilitar as simulações nos dois extremos de atuação, foi necessária a inclusão de uma chave seletora para escolher entre dois controladores PID diferentes, porém com a mesma sintonia, diferindo apenas nos limites de saturação.

Um ponto fundamental a ser ressaltado é que o papel do controlador de malha fechada é prover correções na potência a ser efetivamente aplicada ao aquecedor. Em outras palavras, o valor do controle determinado pelo controlador de malha fechada (PID-SIMC, no nosso caso) em cada instante deve ser adicionado ao valor do controle ótimo da trajetória planejada para se obter a potência a ser efetivamente aplicada pelo aquecedor.

Obviamente, em malha fechada, os limites de saturação do controlador devem ser diferentes caso, num determinado instante, o valor do controle ótimo planejado seja zero ou seja igual à potência máxima considerada no planejamento $u_{max,p}$. O valor “mais seguro” para discernir entre esses dois valores é o valor médio entre eles.

Para tornar mais clara essa questão dos limites de saturação do controlador em malha fechada, considere-se, por exemplo, que $u_{max} = 1000$ W e $\delta = 0.2$. Neste caso, $u_{max,p} = 800$ W e, portanto, o “valor seguro” para discernir entre os dois extremos seria de 400 W. Ou seja,

se o valor do controle ótimo é superior a 400 W, concluímos que vale 800 W e, se é inferior, vale 0 W.

Considere-se o primeiro caso, isto é, aquele em que o valor do controle ótimo é de 800 W. Como a potência máxima disponível no aquecedor é de 1000 W, o limite de saturação superior do PID-SIMC é, portanto, de 200 W; por outro lado, como a mínima potência disponível no aquecedor é de 0 W, o limite de saturação inferior é de -800 W.

Considere-se agora o segundo caso, isto é, aquele em que o valor do controle ótimo é de 0 W. Aqui, o valor do limite de saturação superior do PID-SIMC é de 1000 W, enquanto que o limite inferior é de 0 W.

Note-se que, com esse esquema de chaveamento entre os controladores e de definição dos limites de saturação, a potência efetiva exigida do aquecedor sempre estará entre zero e u_{max} .

A figura 5.1 mostra o esquema montado no software Simulink® para simulações. Os blocos PID contêm o recurso de anti-windup e limites de saturação (ASTROM; HAGGLUND, 1995).

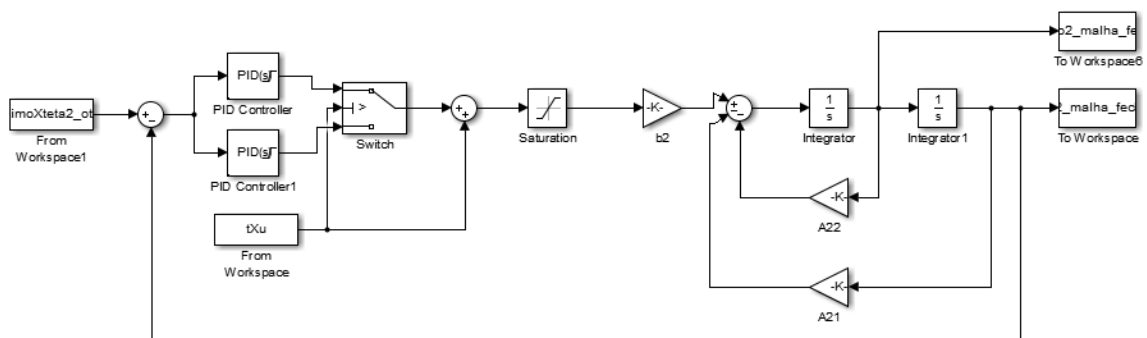


Figura 5.1 – Diagrama de simulação em malha fechada.

6 SIMULAÇÕES E RESULTADOS

Em ambiente MATLAB/Simulink® foram criados o procedimento de cálculo da lei de controle de tempo mínimo, os cálculos de sensibilidade e a simulação do sistema em malha fechada.

6.1 Valores utilizados nas simulações

A tabela 6.1 mostra os valores utilizados para as simulações.

Tabela 6.1 - Valores das constantes para simulação.

Constante	Valor atribuído	Descrição
K	0.5 °C/W	Constante de ganho linear
τ_1	30 s	Constante de tempo 1
τ_2	180 s	Constante de tempo 2
n	100	Número de pontos
θ_f	120 °C	Temperatura desejada
ε	1 %	Tolerância de erro
$u_{m\acute{a}x}$	500 W	Máxima potência de entrada

6.2 Trajetória planejada de tempo mínimo usando Programação Linear

Por meio do procedimento apresentado no capítulo 3, a trajetória de tempo mínimo foi calculada. A estratégia funcionou com eficiência e convergiu para o valor final de forma rápida, conforme mostra a figura 6.1, que apresenta o gráfico dos valores de tempo final escolhido em cada tentativa.



Figura 6.1 – Tempo final para cada iteração.

O tempo necessário para atingir a temperatura desejada foi de 162,11 s e foram necessárias 10 iterações para a busca binária convergir ao valor requerido.

No gráfico da figura 6.2 são mostrados os valores da temperatura final para cada valor de tempo final durante o processo iterativo.

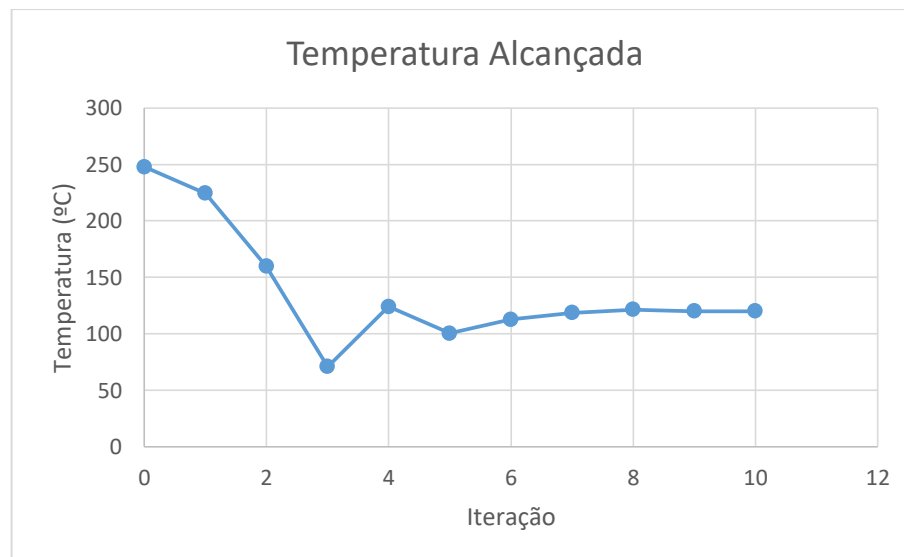


Figura 6.2 – Temperatura final alcançada para cada valor de tempo final.

6.2.1 Simulação da temperatura máxima com tempo mínimo usando Programação Linear

Com o tempo obtido de 162,11 s para a temperatura desejada, foi simulada a resposta do sistema. No gráfico da figura 6.3 pode ser visto o valor ótimo calculado para a entrada u ao longo do tempo.

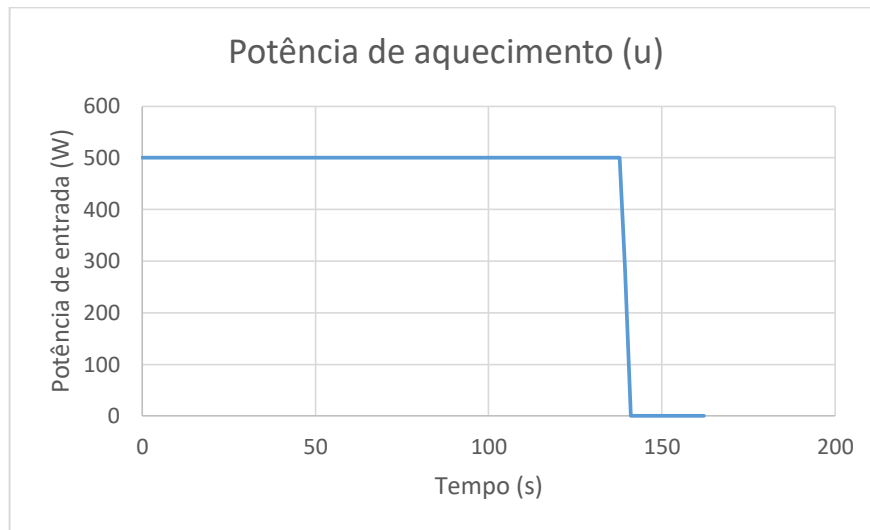


Figura 6.3 – Valor ótimo para a lei de controle $u(t)$.

A trajetória da temperatura alcançada ao longo do tempo pode ser vista no gráfico da figura 6.4.

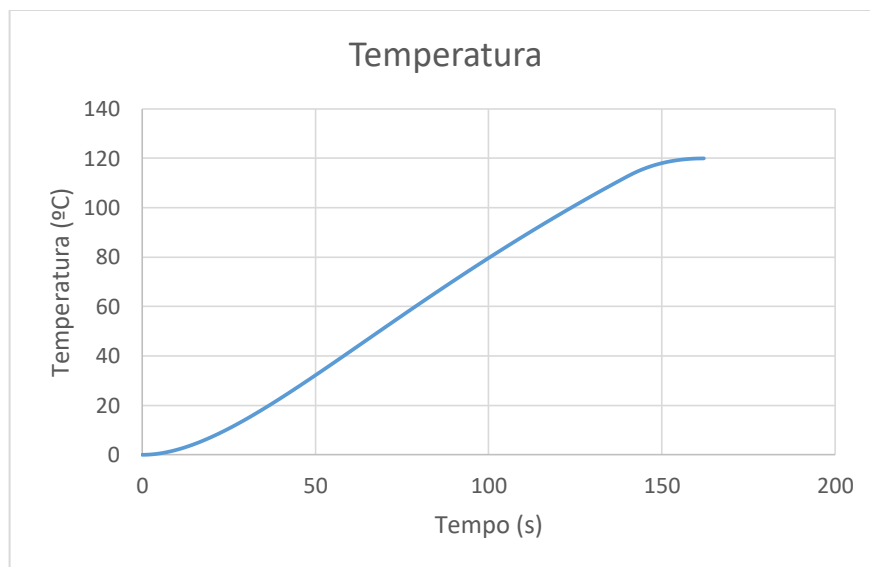


Figura 6.4 – Trajetória ótima da temperatura usando PL.

Por fim, no gráfico da figura 6.5 é mostrada a taxa de variação da temperatura em função do tempo.

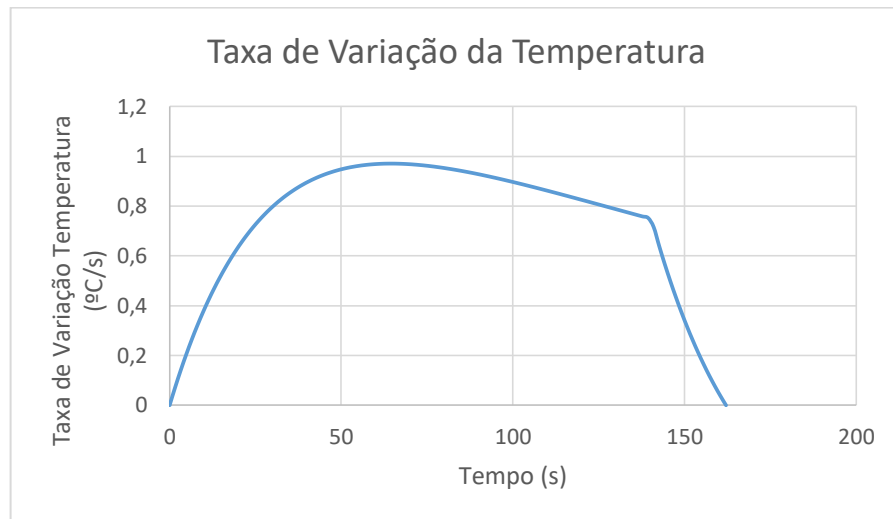


Figura 6.5 – Taxa de variação da temperatura.

6.3 Trajetória planejada de tempo mínimo usando Controle Ótimo Direto

A simulação da solução do problema usando Controle Ótimo Direto trouxe o mesmo resultado da estratégia usando PL. A figura 6.6 mostra os resultados obtidos sobrepostos.

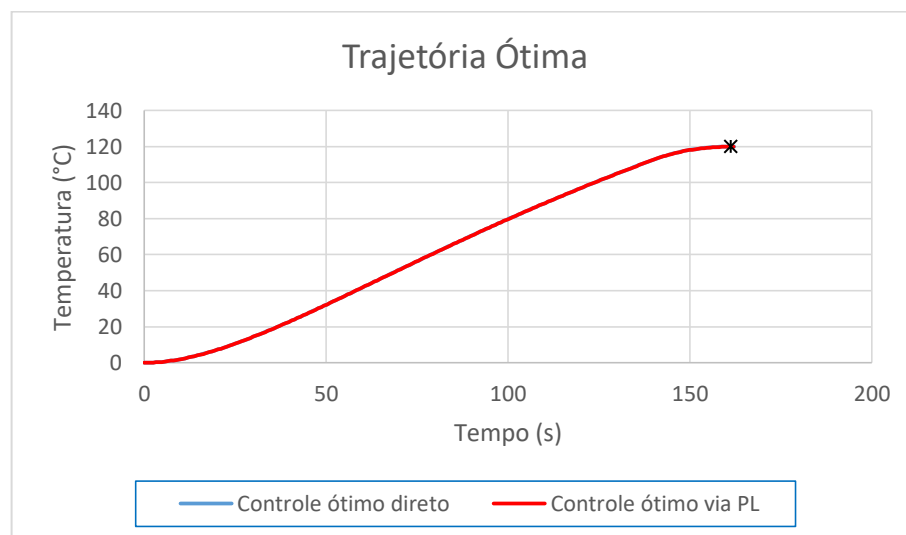


Figura 6.6 – Trajetória ótima da temperatura usando Controle Ótimo Direto.

Este era justamente o resultado esperado. Sendo o controle do tipo bang-bang, a dinâmica do sistema de segunda ordem e, conseqüentemente, apenas uma inversão do controle, encontrado o ponto onde isso ocorre, condiz que os resultados encontrados por um ou outro método sejam idênticos.

6.4 Cálculo das sensibilidades

Os valores das sensibilidades normalizadas foram calculados conforme o procedimento proposto no capítulo 4. Os resultados constam na Tabela 6.2.

Tabela 6.2 - Valores calculados das sensibilidades normalizadas.

Sensibilidade	Valor
$\partial\hat{\theta}(t_f)/\partial\hat{\tau}_1$	-0,14
$\partial\hat{\theta}(t_f)/\partial\hat{\tau}_2$	-0,65
$\partial\hat{\theta}(t_f)/\partial\hat{K}$	1
$\partial\hat{\dot{\theta}}(t_f)/\partial\hat{\tau}_1$	0,74
$\partial\hat{\dot{\theta}}(t_f)/\partial\hat{\tau}_2$	0,58
$\partial\hat{\dot{\theta}}(t_f)/\partial\hat{K}$	~ 0

Observando os resultados obtidos nota-se que a temperatura final $\hat{\theta}(t_f)$ é da ordem de 5 vezes mais sensível a variações na maior constante de tempo do sistema $\hat{\tau}_2$ do que na menor constante de tempo $\hat{\tau}_1$. Variações no ganho K se refletem integralmente na temperatura final.

Nota-se também que a taxa de variação final da temperatura $\hat{\dot{\theta}}(t_f)$ apresenta sensibilidades próximas tanto a variações em $\hat{\tau}_1$ como em $\hat{\tau}_2$. Por outro lado, $\hat{\dot{\theta}}(t_f)$ é praticamente insensível a variações no ganho K .

6.5 Simulações em malha fechada

As simulações em malha fechada envolveram diferentes estratégias e condições. Primeiramente foi avaliada a influência da inclusão de diferentes valores de margem de potência máxima no tempo mínimo necessário para alcançar a temperatura desejada. Após esse passo, com a junção de diferentes métodos de escolha de pontos possíveis, usando uma ideia ligeiramente modificada do método de Monte Carlo, foram feitas simulações com diferentes erros nos parâmetros do modelo junto aos diferentes valores de margens na potência máxima.

6.5.1 Cálculo de tempo mínimo para diferentes valores de margem

Inicialmente foram considerados diferentes valores para a margem δ – a saber, 0%, 5%, 10% e 20% – e calculados os valores do tempo mínimo para cada um deles. Estes tempos mínimos obtidos para cada margem de potência são mostrados na figura 6.7.

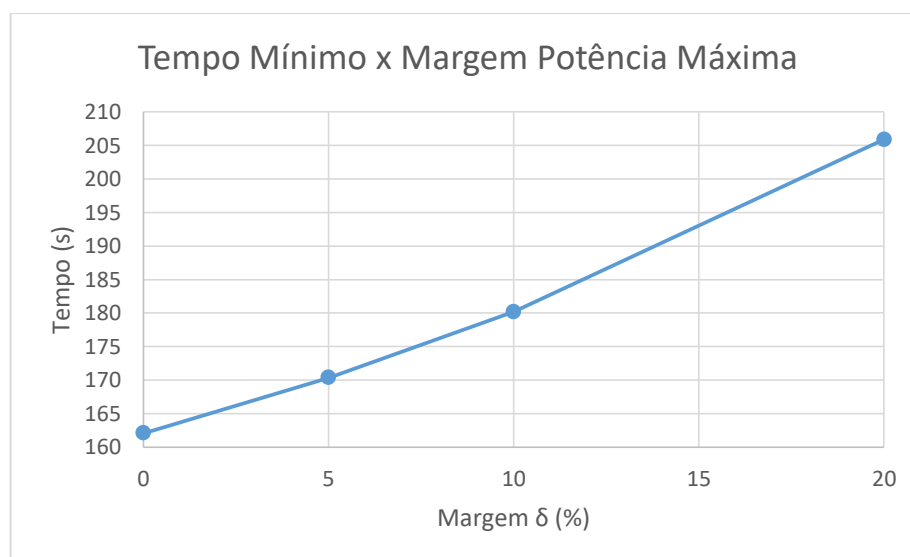


Figura 6.7 – Tempo mínimo em função da margem de potência δ .

Conforme esperado, o tempo mínimo é uma função crescente da margem de potência δ . Nota-se, por exemplo, que, para uma margem de 5%, o aumento no tempo mínimo também é próximo de 5%.

6.5.2 Estratégia de simulação

Para as simulações em malha fechada, foram usados dois métodos de escolha de pontos possíveis considerando incertezas nos parâmetros.

O primeiro método consistiu em selecionar pontos uniformemente distribuídos em torno dos valores nominais dos parâmetros até ao limite da incerteza ε_p aceitável. Pode-se ilustrar essa perspectiva como pontos equidistantes em uma reta, pontos formando um retângulo em um plano ou, para o caso de três variáveis, como neste trabalho, formando um paralelepípedo. Como exemplo, se para uma determinada variável α , o valor nominal é zero, a incerteza ε_p é igual a um e deseja-se três pontos possíveis, estes pontos seriam (-1,0,1), ilustrados na figura 6.8.



Figura 6.8 – Pontos possíveis de α .

Outra estratégia utilizada foi o Método de Monte Carlo. Esse método consiste em utilizar valores pseudoaleatórios dentro de um intervalo. Quanto mais pontos forem usados, mais a amostra será representativa do universo amostral. (BAUER, 1958).

Estendendo o exemplo, as figuras 6.9 e 6.10 mostram valores encontrados conforme os dois métodos para três variáveis diferentes: α , β e γ . Nestes exemplos, os valores nominais são iguais a zero para os três parâmetros e a quantidade de pontos para cada um também é três. Mantendo como no exemplo anterior a incerteza ε_p igual a um. Na figura 6.9 tem-se a distribuição uniforme com 27 pontos diferentes, ou seja, com três pontos diferentes para cada variável.

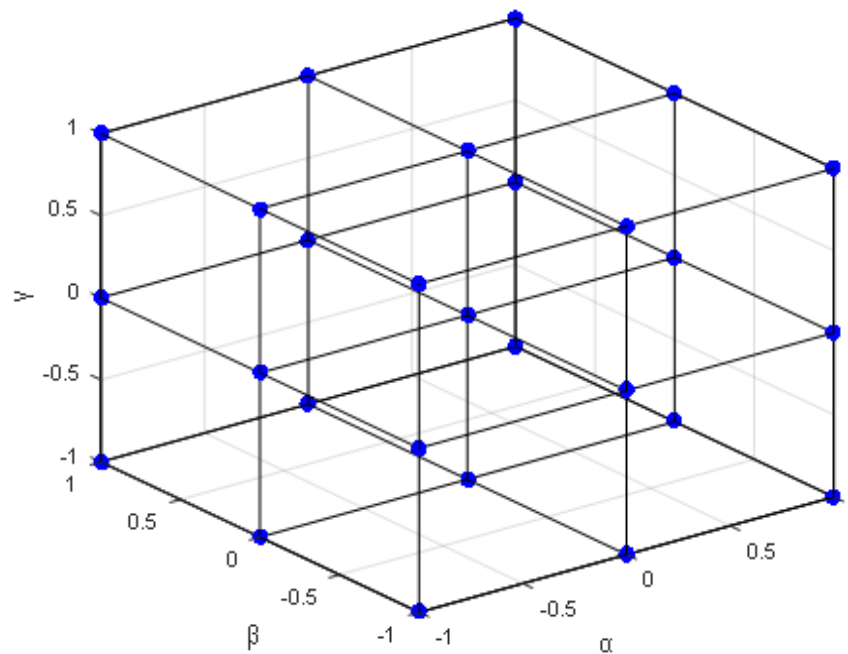


Figura 6.9 – Pontos possíveis de α , β e γ uniformemente distribuídos.

A figura 6.10 mostra os valores possíveis de α , β e γ obtidos usando simulação de Monte Carlo também com 27 pontos.

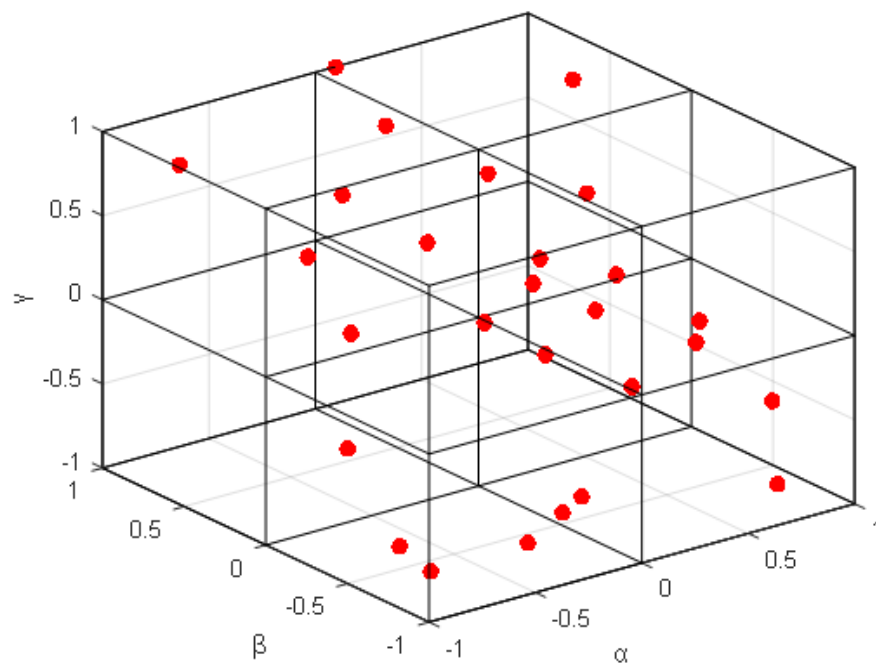


Figura 6.10 – Pontos possíveis de α , β e γ usando Método de Monte Carlo.

Completando as ilustrações, tem-se na figura 6.11 a união dos pontos distribuídos uniformemente – em azul – e dos pontos escolhidos usando o Método de Monte Carlo – em vermelho.

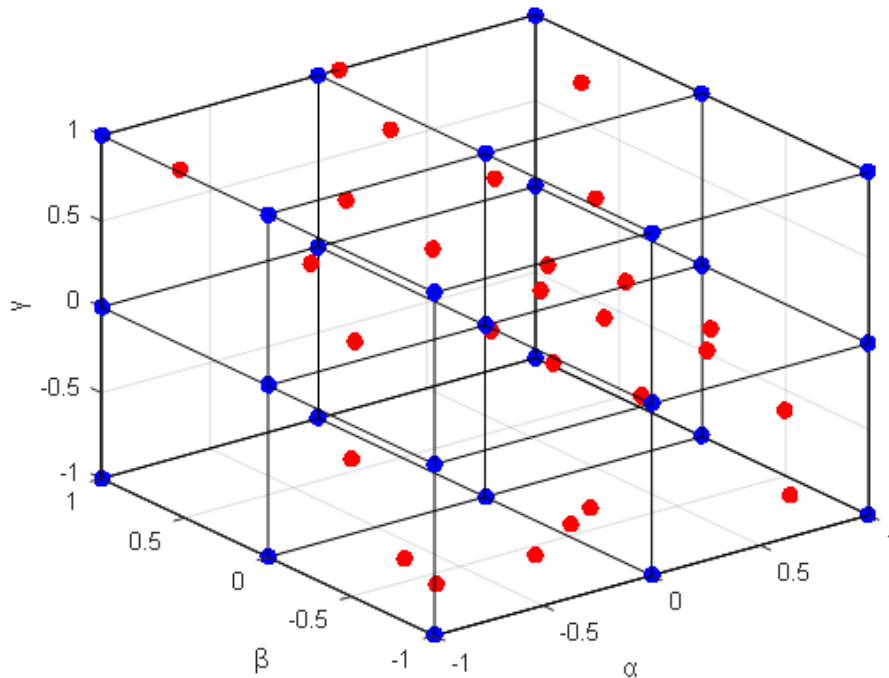


Figura 6.11 – Pontos possíveis de α , β e γ combinando os métodos de distribuição uniforme e Monte Carlo.

6.5.3 Simulações em malha fechada

As simulações em malha fechada foram realizadas utilizando os mesmos valores de δ descritos na seção 6.5.1 para o planejamento das trajetórias e diversos limites ε_p de erros nos parâmetros do modelo – a saber, 1%, 5%, 10% e 15%.

Para cada par (δ, ε_p) , foram realizadas as seguintes simulações: i) com três pontos distribuídos uniformemente em cada aresta do paralelepípedo; ii) o mesmo procedimento com quatro, cinco e seis pontos em cada aresta; iii) adicionalmente 13 simulações de Monte Carlo distintas contendo de nove a 250 pontos pseudoaleatórios. Este procedimento é o que chamamos de simulação de Monte Carlo modificada.

Para cada caso, a figura 6.12 mostra os resultados obtidos para o máximo erro (isto é, o pior caso) entre a temperatura final atingida e a desejada.

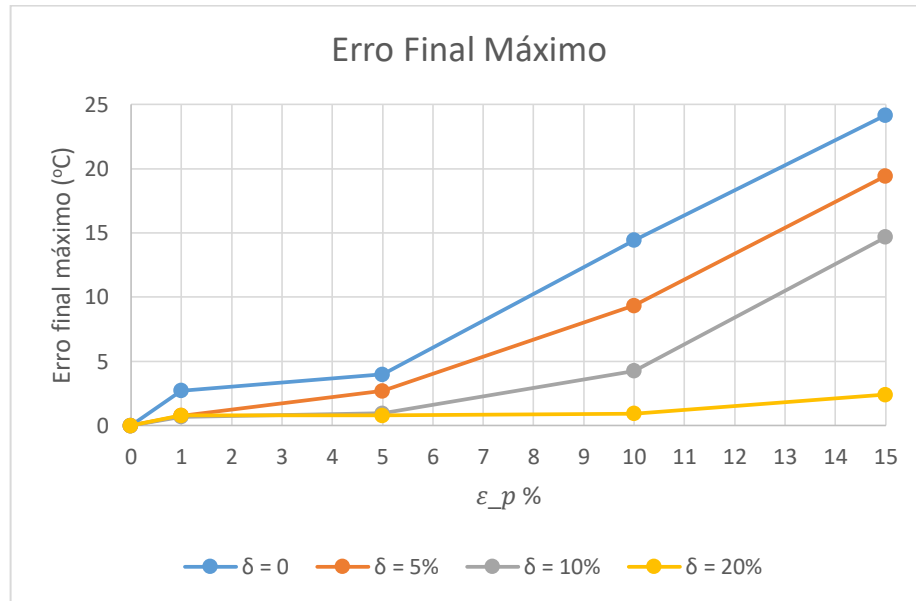


Figura 6.12 – Erro final máximo para diferentes margens e erros.

A figura 6.12 mostra que, à medida que δ cresce, os erros finais se tornam menores, o que indica uma melhora na robustez do desempenho do sistema. Vê-se também, como era esperado, que quando $\delta = 0$, pela falta de margem na capacidade de atuação, o desempenho do sistema em malha fechada é fortemente afetado pelos erros nos valores dos parâmetros do modelo. Em outras palavras, o sistema em malha fechada apresenta baixa robustez de desempenho.

É interessante notar que, para os valores de ε_p de 1% e 5%, os erros finais máximos para $\delta = 10\%$ e $\delta = 20\%$ são praticamente iguais e bastante reduzidos. Isto significa que um planejamento de trajetória realizado com uma margem δ de 10% apresenta uma boa robustez de desempenho para erros nos parâmetros de até 5%. O preço pago por essa robustez, contudo, é o aumento do tempo mínimo em torno de 11%.

A figura 6.13 mostra, para o pior caso, a taxa de variação da temperatura no instante final (que, idealmente, deveria ser nula). As conclusões são as mesmas anteriores, obtidas da observação da figura 6.12.

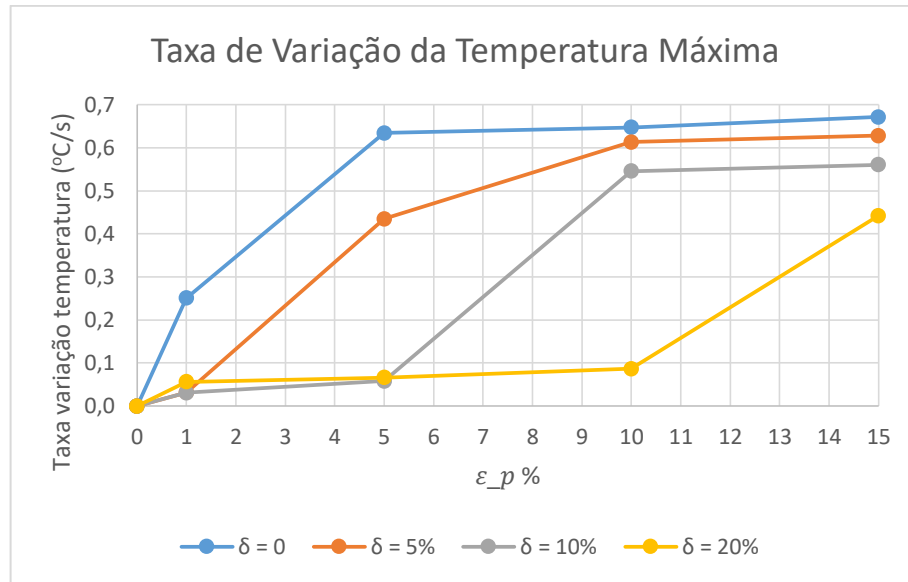


Figura 6.13 – Taxa de variação da temperatura para diferentes margens e erros.

7 CONCLUSÕES

Os testes realizados mostraram que o procedimento de cálculo da trajetória de tempo mínimo utilizando a Programação Linear se mostrou simples e rápido para a solução do problema de planejamento da trajetória ótima para o problema de controle de temperatura em uma máquina seladora de embalagens. Contribuiu para isso, além da eficiência do algoritmo de Programação Linear, a convergência em poucos passos do mecanismo de busca binária – com número de passos normalmente inferior a uma dezena.

O cálculo da trajetória de tempo mínimo utilizando Controle Ótimo Direto alcançou o mesmo objetivo de forma ainda mais simples e rápida. Ressaltando, no entanto, que esse procedimento foi viável apenas por tratar-se de um sistema de segunda ordem invariante no tempo.

O cálculo das sensibilidades normalizadas proposto é interessante por permitir ao analista avaliar objetivamente quais são os parâmetros do modelo que devem ser identificados com maior precisão.

Pelo fato de a lei de controle ótimo ser da forma bang-bang e, portanto, atribuir sempre valores extremos à variável de controle, o estudo da robustez explicitou de forma clara as implicações dessa característica na degradação do desempenho do sistema de rastreamento da trajetória. O presente trabalho mostrou que o planejamento de trajetórias realizado com margem no valor máximo da potência de aquecimento pode reduzir significativamente essa degradação, mas, em contrapartida, produz um aumento no tempo mínimo planejado.

Para encerrar este capítulo, fica claro que o procedimento proposto para avaliação de sensibilidade pode ser utilizado, em geral, sempre que o modelo dinâmico é linear. Da mesma forma, a avaliação da robustez em malha fechada para rastreamento de planejamento de trajetória de tempo mínimo pode ser feita seguindo as mesmas linhas do capítulo 5. Além disso, deve-se enfatizar que o cálculo da lei de controle de tempo mínimo através do método baseado em Programação Linear pode ser estendido para outros problemas onde o valor máximo alcançado pela variável controlada – alcance máximo – é uma função crescente do tempo final.

Como sugestões de continuidade para este trabalho, pode-se abordar a utilização de outras técnicas de controle em malha fechada ou até mesmo outros métodos de sintonia para

PID. Outra sugestão é testar de forma mais exaustiva o método modificado da simulação de Monte Carlo para entender os benefícios que pode trazer.

REFERÊNCIAS

- ASTROM, K.; HAGGLUND, T. **PID Controllers: Theory, Design and Tuning**. 2. ed. Reserch Triangle Park, NC: ISA, 1995.
- BAUER, W. F. The Monte Carlo method. **Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics**, v. 6, n. 4, p. 438-451. 1958.
- Böhme, T.J. and Frank B. **Direct methods for optimal control. In: hybrid systems, optimal control and hybrid vehicles. Advances in industrial control**. Springer International Publishing, Cham. 2017.
- CRUZ, J. J. Minimum-time motion planning of cranes with parametric uncertainty using linear programming. In: PORTUGUESE CONFERENCE ON AUTOMATIC CONTROL, 10., **Proceedings...** Funchal, p. 21-26. 2012.
- CRUZ, J.J.; LEONARDI, F. Minimum-time anti-swing motion planning of cranes using linear programming. **Optimal Control Applications & Methods**, v. 34, p. 191-201, 2013.
- DHANDA, A.; FRANKLIN, G. F. Optimal control formulations of vibration reduction problems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 55(2), p.378-394. 2010.
- FANTI, C. E.; FERREIRA, W. R. B.; CARVALHO, J. C. M. Planejamento de trajetórias robóticas definidas por segmentos de reta concordantes por polinomiais. **Horizonte científico**, v. 7, n. 1. 2013.
- GARCIA, C. **Modelagem e simulação de processos industriais e de sistemas eletromecânicos**. 3 ed. São Paulo: Edusp. 2022.
- KAMIEN, M. I.; SCHWARTZ, N. L. **Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management**. 2 ed. Amsterdam: Elsevier North Holland. 1991
- KIRK, D. E. **Optimal Control Theory: An Introduction**. Mineola, New York: Dover Publications. 2004.
- MARCHI, L. O. **Estudo de manobras para colocação de um satélite em uma órbita nominal**. 2017. Dissertação (Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2017.
- MARIANO, Y.R.; CRUZ, J.J.; KASSAB JUNIOR, F. Computation of minimum-time solution of a sealing machine through linear programming with sensitivity and closed-loop robustness analysis. In: 26th ABCM International Congress of Mechanical Engineering, **Proceedings...**, 2021, Florianópolis.
- OLIVEIRA, L. M. **Avaliação de perfis de mordente de fechamento na qualidade da termossoldagem de embalagens plásticas flexíveis metalizadas**. 1995. Dissertação (Mestrado em Tecnologia de Alimentos) – Faculdade de Engenharia de Alimentos, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1995.

OLIVEIRA, L. M. Fechamento de embalagens plásticas por termossoldagem. **Boletim de Tecnologia e Desenvolvimento de Embalagens**, v. 28(2). 2016.

PUGLIA, L. V.; LEONARDI, F.; ACKERMANN, M. Linear programming for the optimal control of a one-degree-of-freedom overhead crane system. In: ABCM SYMPOSIUM SERIES IN MECHATRONICS, v. 5, **Proceedings...**, 2012, Rio de Janeiro.

RAO, A.V. A survey of numerical methods for optimal control. **Advances in the Astronautical Sciences**, v. 135, n. 1, p. 497–528, 2009.

ROBERTSON, G. **Food Packaging: Principles and Practice**. 3 ed. Boca Raton: CRC Press. 2012

SEIERSTED, A.; SYDSAETER, K. Sufficient conditions in optimal control theory. **International Economic Review**, v. 18(2), p. 367-391. 1977.

SILVA, R.R.; SOARES, C.M.S.; AGUIAR, A.O.; GOMES, D.S.; MARTINS, G.A.S.; SILVA, W.G. Uso da programação linear na otimização de processos dentro da indústria de alimentos. **Desafios**, v. 6, especial. 2019.

SKOGESTAD, S.; POSTLETHWAITE, I. **Multivariable Feedback Control: Analysis and Design**. 2 ed. West Sussex: Wiley. 2005.