

MARCO ANTÔNIO SILVA

**OBTENÇÃO DE UM MODELO GEOIDAL
PARA O ESTADO DE SÃO PAULO**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São
Paulo para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia

São Paulo

2002

MARCO ANTÔNIO SILVA

**OBTENÇÃO DE UM MODELO GEOIDAL
PARA O ESTADO DE SÃO PAULO**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São
Paulo para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia

Área de Concentração:
Engenharia de Transportes

Orientador:
Prof. Dr. Denizar Blitzkow

São Paulo

2002

DEDICATÓRIA

Dedico a meus pais Raimunda Viana
e José Jácimo e toda minha família.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a DEUS, pela saúde, pela fé, pelas oportunidades que se apresentaram em meu caminho, desde minha origem em Barão de Cocais–MG até aqui.

Agradeço à minha família, que mesmo distante esteve sempre presente, me apoiando e incentivando na busca de meus objetivos. De modo especial a minha mãe Raimunda Viana pelo incentivo e compreensão de que a ausência física era necessária para a abertura de novos horizontes. A meu pai, que já não está entre nós, muita saudade e gratidão.

Ao amigo e orientador Prof. Denizar Blitzkow, querido mestre, pelas diretrizes seguras e permanente incentivo na realização deste trabalho, pelos ensinamentos, conselhos e tempo a min dispensado, minha eterna gratidão.

Aos demais professores do LTG, Prof. Edvaldo Simões da Fonseca Junior, Prof. Nicola Pacileo Netto e Prof. Jorge Pimentel Cintra pelos ensinamentos e discussões que muito enriqueceram este trabalho.

Ao Prof. Antonio Simões Silva e Prof. Paulo César Lima Segantine pelas sugestões e contribuições ao longo do desenvolvimento do trabalho.

Ao Prof. Michael Sideris e Prof. Will Featherstone por terem cedido os softwares usados neste trabalho.

Aos colegas de curso, não só da Escola Politécnica da USP, mas também da graduação na Universidade Federal de Viçosa, pela convivência e amizade.

A empresa Alezi Teodolini, na pessoa do Sr. Adolfo Guandalini, por ter me dado a oportunidade de trabalho que possibilitou minha manutenção na cidade de São Paulo para a realização deste trabalho.

Aos amigos, pelo incentivo nas horas de desânimo e compreensão de que a ausência física nas incontáveis horas de estudo era necessária para o desenvolvimento das atividades, minha profunda gratidão.

Enfim, a todos que direta ou indiretamente ajudaram na concretização deste objetivo, meu muito obrigado.

SUMÁRIO

Dedicatória	i
Agradecimentos	ii
Sumário	iv
Lista de Figuras	vii
Lista de Tabelas	ix
Lista de Siglas e Abreviaturas	x
Resumo	xii
Abstract	xiii
Capítulo 1	1
Introdução	1
1.1 – Objetivos	4
1.2 – Apresentação do Trabalho.....	4
Capítulo 2	6
Fundamentos da Geodésia Física	6
2.1 – Teoria do Potencial.....	6
2.1.1 – Potencial Gravitacional	9
2.1.2 – Equação de Laplace e Poisson	10
2.1.3 – Problema de Valor Contorno da Geodésia Física	12
2.1.4 – Funções Harmônicas Esféricas de Superfície	14
2.2 – Campo da Gravidade Normal.....	16
2.2.1 – Terra Normal.....	16
2.2.2 – Aceleração da Gravidade Normal	19

2.3 – Campo de Gravidade Terrestre	21
2.3.1 – Geopes	22
2.3.2 – Geopotencial de Gravidade	23
2.4 – Equação Fundamental da Geodésia Física	24
2.4.1 – Potencial Perturbador	24
2.4.2 – Anomalia e Distúrbio da Gravidade.....	25
2.4.3 – Equação Fundamental da Geodésia Física	26
Capítulo 3.....	30
Determinação do Geóide.....	30
3.1 – A Integral de Stokes	32
3.2 – Os Modelos do Geopotencial.....	33
3.3 – Integral Modificada de Stokes.....	35
3.4 – A Transformada de Fourier.....	41
3.4.1 – A Integral de Stokes e a Transformada de Fourier.....	42
3.5 – Reduções da Gravidade	45
3.5.1 – Método da Condensação de Helmert	46
Capítulo 4.....	48
Modelos do Geopotencial.....	48
4.1 – Histórico dos Modelos do Geopotencial.....	48
4.2 – O Earth Gravity Model - EGM96	51
Capítulo 5.....	52
Dados utilizados para o cálculo do SPGEOID2002	52
5.1 – Dados Gravimétricos	53
5.2 – Dados Altimétricos.....	57

5.3 – Processamentos dos Dados do SPGEOID2002.....	60
Capítulo 6.....	64
Resultados e Discussão.....	64
6.1 – Avaliação do Modelo do Geopotencial EGM96.....	64
6.2 – Cálculo do Modelo Geoidal.....	68
Capítulo 7.....	78
Conclusões e recomendações.....	78
7.1 – Conclusões.....	78
7.2 – Recomendações.....	81
Referências Bibliográficas.....	84

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Componentes da força de atração	7
Figura 2.2 – Funções Harmônicas Esféricas de Superfície	14
Figura 2.3 - Geopes	23
Figura 2.4 – Potencial Perturbador no ponto P	24
Figura 2.5 – Anomalia e Distúrbio da Gravidade	25
Figura 3.1 – Geóide e Esferóide	34
Figura 3.2 – Geóide e Cogeóide	46
Figura 5.1 - Distribuição dos dados gravimétricos nas Américas do Sul e Central... 54	
Figura 5.2 - Distribuição dos dados gravimétricos no Brasil..... 56	
Figura 5.3 - Distribuição dos dados gravimétricos no Estado de São Paulo 56	
Figura 5.4.1 - Modelo Digital do Terreno para as Américas do Sul e Central 58	
Figura 5.4.2 - Modelo Digital do Terreno para o Brasil 59	
Figura 5.4.3 - Modelo Digital do Terreno para o Estado de São Paulo 59	
Figura 5.5 – Distribuição das anomalias médias de 10' x 10'	61
Figura 5.6 – Modelo de Anomalias Médias da Gravidade (mGal)	62
Figura 5.7 – Distribuição dos pontos DOP (azuis) e GPS (vermelhos)	63
Figura 6.1 – Distribuição das diferenças para o EGM96 (n=m=36)	65
Figura 6.2 – Distribuição das diferenças para o EGM96 (n=m=50)	66
Figura 6.3 – Distribuição das diferenças para o EGM96 (n=m=72)	66
Figura 6.4 – Distribuição das diferenças para o EGM96 (n=m=100)	66
Figura 6.5 – Distribuição das diferenças para o EGM96 (n=m=180)	67
Figura 6.6 – Distribuição das diferenças para o EGM96 (n=m=360)	67

Figura 6.7 – Malha dos pontos de cálculo	70
Figura 6.8 – Distribuição das diferenças entre FFT-VK e FFT-FV.....	71
Figura 6.9 – Distribuição das diferenças entre FFT-WG e FFT-VK	71
Figura 6.10 – Distribuição das diferenças entre FFT-FV e FFT-WG.....	72
Figura 6.11 – Distribuição das diferenças entre INT-VK e FFT-FV	73
Figura 6.12 – Distribuição das diferenças entre INT-VK e FFT-VK	74
Figura 6.13 – Distribuição das diferenças entre INT-VK e FFT-WG	74
Figura 6.14 – Distribuição das diferenças entre INT-VK e os pontos DOP e GPS...	75
Figura 6.15 – Distribuição das diferenças entre FFT-VK e os pontos DOP e GPS...	76
Figura 6.16 – Distribuição das diferenças entre FFT-FV e os pontos DOP e GPS ...	76
Figura 6.17 – Distribuição das diferenças entre FFT-WG e os pontos DOP e GPS ..	76
Figura 7.1 – Modelo Geoidal SPGEOID2002 para o Estado de São Paulo.....	83

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Sistema Geodésico Mundial 1984 – Terra Normal.....	19
Tabela 2.2 – Sistema Geodésico de Referência 1967	20
Tabela 2.3 – Sistema Geodésico Mundial 1984 – Gravidade Normal.....	20
Tabela 6.1 – Comparação entre os pontos DOP, GPS e o modelo EGM96.....	65
Tabela 6.2 – Resumo das comparações entre os experimentos FFT.....	70
Tabela 6.3 – Resumo das comparações entre os experimentos INT e FFT.....	72
Tabela 6.4 – Resumo das comparações entre experimentos e os pontos DOP e GPS	74

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

ABGP – Anglo Brazilian Gravity Project

BGI – Bureau Gravimétrique International

CPRM – Companhia de Pesquisas de Recursos Minerais

DMA-AC – Defense Mapping Agency – Aerospace Centre

DOP - Doppler

DoD – Department of Defense

EPUSP – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

EGM96 – Earth Geopotential Model publicado em 1996

FFT – Fast Fourier Transform

FTP – File Transfer Protocol

GEM – Goddard Earth Model

GETECH – Geophysical Exploration Technology

GPS - Global Positioning System

GRIM – Acrônimo dado aos modelos do geopotencial publicados pelo Groupe de Recherche de Géodésie Spatiale.

GSFC – Goddard Space Flight Center

IAG-USP – Instituto Astronômico e Geofísico da Universidade de São Paulo

IAU – International Astronomical Union

IBGE – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística

IUGG – International Union of Geodesy and Geophysics

JGM – Joint Gravity Model

LTG-EPUSP – Laboratório de Topografia e Geodésia da EPUSP

NASA – National Aeronautics and Space Administration

NGDC – National Geophysical Data Center

NIMA – National Imagery and Mapping Agency

NOAA – National Oceanic and Atmospheric Administration

ON – Observatório Nacional

OSU – Ohio State University

PPM – Partes Por Milhão

PTR-EPUSP – Departamento de Engenharia de Transportes da EPUSP

SAGP – South American Gravity Project

SI – Sistema Internacional de Unidades

SIRGAS – Sistema de Referência Geocêntrico para a América do Sul

SLR – Satellite Laser Ranging

UFPR – Universidade Federal do Paraná

UNB – Universidade de Brasília

WGS84 – World Geodetic System - 1984

RESUMO

O sistema GPS tem sido largamente usado para posicionamento. Vislumbra-se o potencial uso deste sistema para determinação de altitudes ortométricas, substituindo o oneroso e demorado processo de nivelamento geométrico. Para isso, um modelo geoidal com precisão absoluta submétrica e precisão relativa da ordem de 2 ppm é necessário. Este modelo pode ser dividido em duas componentes: longo e curto comprimento de onda. O modelo do geopotencial fornece a componente de longo comprimento de onda da altura geoidal, enquanto que a gravimetria associada a um modelo digital do terreno permite calcular a componente de curto comprimento de onda através da integral modificada de Stokes. Algumas das modificações da função de Stokes são comparadas. Dois métodos de avaliação desta integral, integração direta e FFT são mostrados no trabalho. Como resultado dessas comparações, obtém-se um modelo geoidal para o Estado de São Paulo.

ABSTRACT

The GPS system has been used broadly for positioning. It is glimpsed the potential use of this system for the determination of orthometric height, substituting the expensive and slow process of geometric leveling. For this propose, it is necessary a geoid model with submetric absolute accuracy and relative accuracy on the order of 2 ppm. This model can be divided in two components: long and short wavelengths. The model of the geopotential supplies the long wavelength component of the geoid height, while gravimetry associated with a digital terrain model, allows the estimation of the short wavelength component, through the modified Stokes's integral. Comparisons of some of these modifications of the Stokes's function are carried out. Two methods of evaluation of the integral, numerical integration and FFT are shown in the work. As a result of those comparisons, it is obtained a geoid model for the State of São Paulo.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Existem três superfícies que envolvem o posicionamento geodésico. A primeira é a superfície física limitante do relevo topográfico onde são realizadas as operações topográficas e geodésicas. A segunda é chamada de superfície elipsoidal, limitante de um elipsóide de revolução que é a figura matemática da Terra, gerada pela rotação de uma elipse em torno de seu eixo menor. A terceira é a superfície geoidal que limita um corpo chamado geóide, definida como uma superfície equipotencial do campo de gravidade que mais se aproxima do nível médio não perturbado dos mares, prolongado através dos continentes.

Considerando um ponto sobre a superfície física, a reta que passa por este ponto e é perpendicular ao geóide define a direção de uma linha de força chamada vertical. A reta que passa por este mesmo ponto e é perpendicular ao elipsóide define a direção de outra linha de força chamada normal. A distância entre a superfície física e a superfície geoidal, tomada sobre a vertical, é chamada de altitude ortométrica (**H**). A distância entre a superfície física e a superfície elipsoidal, tomada sobre a normal, é a altitude geométrica (**h**). A distância entre a superfície geoidal e a superfície elipsoidal, contado ao longo da normal, é a altura geoidal (**N**). Esta altura é aproximadamente igual à diferença entre as altitudes ortométrica e geométrica. Diz-se aproximadamente porque as retas suporte dessas altitudes não são colineares.

$$N \cong H - h \quad (1-1)$$

A altitude ortométrica é obtida através do nivelamento geométrico associado a medições adequadas da aceleração da gravidade. A obtenção da altitude ortométrica exige o conhecimento da gravidade média entre as superfícies física e geoidal, o que é impossível devido ao não conhecimento da distribuição de densidade de massa no interior da crosta terrestre. Uma alternativa é utilizar um valor conveniente da gravidade da Terra normal, obtendo-se a altitude normal.

A altitude geométrica é obtida diretamente através do GPS. Como o processo do nivelamento geométrico é dispendioso e muito demorado e o GPS tem sido largamente usado para posicionamento, vislumbra-se o potencial uso do GPS para a determinação de altitudes ortométricas. Para tanto é necessário que exista um modelo de alturas geoidais para a região de interesse.

O desenvolvimento dos modelos geoidais tomou um grande impulso com o advento dos satélites artificiais. Estes funcionam como sensores do campo gravitacional e a análise das perturbações de suas órbitas possibilitou o aprimoramento do cálculo dos coeficientes do desenvolvimento em série do modelo do geopotencial. O Earth Geopotential Model 1996 - EGM96 é o mais recente modelo publicado e será usado neste trabalho.

O modelo geoidal pode ser dividido em duas componentes: longo e curto comprimento de onda. O modelo do geopotencial fornece a componente de longo comprimento de onda da altura geoidal, enquanto que a gravimetria associada a um modelo digital do terreno, permite calcular a componente de curto comprimento de onda, através da integral modificada de Stokes.

A integral de Stokes que durante muito tempo foi considerada como teórica passou a ser facilmente aplicável a partir dos modelos do geopotencial, os quais permitiram estender a integral, ao invés da toda a Terra, a uma vizinhança do ponto de cálculo. Com isso, algumas modificações na função de Stokes foram pesquisadas. As modificações propostas por P. Vanicek e L. E. Kleusberg (1987), L. Wong e R. Gore (1969) e W. E. Featherstone, J. D. Evans e J. G. Olliver (1998), denominadas resumidamente aqui de Vanicek-Kleusberg, Wong-Gore e Featherstone-Vanicek, respectivamente, são apresentadas e comparadas neste trabalho.

O método tradicional de resolução da integral de Stokes é a integração numérica. O inconveniente deste método é o tempo muito grande de computação. Aplicando a Transformada de Fourier a integral de Stokes se transforma numa simples multiplicação de funções, uma vez tratar-se de uma integral de convolução, o que diminui o tempo de computação, mas exige que os pontos de cálculo estejam dispostos em uma malha regular. Os métodos, integração numérica e Transformada de Fourier são apresentados e comparados neste trabalho.

Os dados utilizados para o cálculo do modelo geoidal para o Estado de São Paulo, denominado por SPGEOID2002, são provenientes de diversas fontes como: Geophysical Exploration Technology, Petrobrás, Observatório Nacional, Companhia de Pesquisas de Recursos Minerais, Universidade Federal do Paraná, Universidade de Brasília, Instituto Astronômico e Geofísico da Universidade de São Paulo, entre outras, que depois de avaliados e certificados de sua consistência foram inseridos no arquivo geral de dados gravimétricos da Escola Politécnica.

1.1 – Objetivos

Este trabalho tem como objetivo principal obter um modelo geoidal para o Estado de São Paulo, combinando o modelo do geopotencial EGM96, anomalias médias da gravidade em quadrículas de 5' x 5', um modelo digital de terreno na área continental e dados de altimetria por radar nas áreas oceânicas.

Fazer comparações entre os métodos de avaliação da integral de Stokes: integração numérica e Transformada Rápida de Fourier – FFT.

Realizar comparações entre as diferentes alternativas de modificações da função de Stokes: Vanicek-Kleusberg, Wong-Gore e Featherstone-Vanicek.

1.2 – Apresentação do Trabalho

O capítulo 1 apresenta a introdução do assunto pesquisado, motivação, objetivos e apresentação do trabalho.

No capítulo 2 é apresentada uma revisão bibliográfica dos fundamentos da Geodésia Física, incluindo teoria do potencial, campo de gravidade terrestre e normal e uma descrição da Equação Fundamental da Geodésia Física.

No capítulo 3 é mostrado o método de determinação do SPGEOID2002, descrevendo o uso da Integral de Stokes, bem como as modificações propostas por Petr Vanicek e L. E. Kleusberg, L. Wong e R. Gore e Petr Vanicek e Will E. Featherstone. É descrito o método da Transformada Rápida de Fourier e suas implicações.

No capítulo 4 são feitos um histórico dos modelos do geopotencial e uma descrição do modelo EGM96.

A descrição dos dados utilizados, sua organização e o processamento estão descritos no capítulo 5.

Os resultados das comparações feitas entre as diferentes modificações da função de Stokes, entre os diferentes métodos de avaliação da integral: integração numérica e FFT e comparações com os pontos DOP e GPS são apresentados no capítulo 6.

Finalmente, no capítulo 7 têm-se as conclusões obtidas ao término deste trabalho, bem como recomendações para melhoria de resultados e desenvolvimento de novas pesquisas.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTOS DA GEODÉSIA FÍSICA

2.1 – Teoria do Potencial

De acordo com a Lei da Gravitação de Newton, duas partículas com massas m_1 e m_2 separadas por uma distância l , exercem mutuamente uma força de atração F igual a:

$$F = K \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{l^2} \quad (2-1)$$

A direção desta força é a linha que une as duas partículas. K é a constante universal de gravitação e tem valor igual a:

$$K = 6,63 \cdot 10^{-11} \quad \text{m}^3/\text{kg s}^2$$

As massas se atraem mutuamente, mas comumente uma é chamada de atraída e a outra de atrativa. Para simplificar, atribui-se o valor unitário à massa atraída m_2 e designa-se por m , a massa atrativa m_1 . A equação (2-1) fica:

$$F = K \cdot \frac{m}{l^2} \quad (2-2)$$

Considere-se um sistema cartesiano ortogonal e a partícula atrativa de massa m localizada na origem deste sistema, Figura 2.1. A força de atração exercida sobre uma partícula de massa unitária localizada em $P(x, y, z)$ vale:

$$\vec{F} = -K \cdot \frac{m}{l^3} \vec{l} \quad (2-3)$$

onde:

$$\vec{l} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

então:

$$\vec{F} = -K \cdot \frac{m}{l^3} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \quad (2-4)$$

As componentes da força de atração \vec{F} são:

$$F_x = -K \cdot \frac{mx}{l^3}$$

$$F_y = -K \cdot \frac{my}{l^3} \quad (2-5)$$

$$F_z = -K \cdot \frac{mz}{l^3}$$

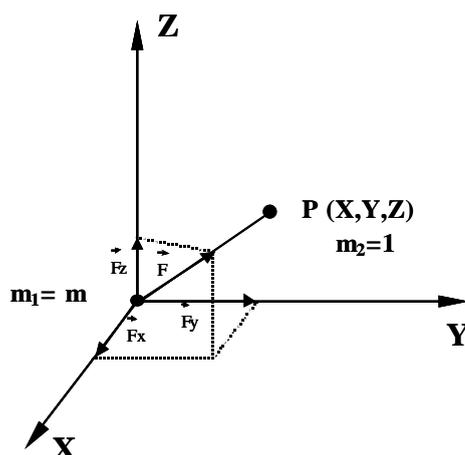


Figura 2.1 – Componentes da força de atração

Se a partícula atrativa de massa m não estiver na origem, mas num ponto $P'(x', y', z')$, as componentes são:

$$F_x = -K \cdot \frac{m(x - x')}{l^3}$$

$$F_y = -K \cdot \frac{m(y - y')}{l^3} \quad (2-6)$$

$$F_z = -K \cdot \frac{m(z - z')}{l^3}$$

Considerando no mesmo sistema cartesiano anterior, Figura 2.1, n partículas atrativas. A força de atração exercida pelas n partículas sobre a partícula localizada no ponto $P(x,y,z)$, vale:

$$\vec{F} = -K \sum_{i=1}^n \left(\frac{m_i}{l_i^3} \right) \hat{l}_i \quad (2-7)$$

Suas componentes são:

$$\begin{aligned} F_x &= -K \cdot \sum_{i=1}^n \frac{m_i (x - x_i)}{l_i^3} \\ F_y &= -K \cdot \sum_{i=1}^n \frac{m_i (y - y_i)}{l_i^3} \\ F_z &= -K \cdot \sum_{i=1}^n \frac{m_i (z - z_i)}{l_i^3} \end{aligned} \quad (2-8)$$

Considerando o mesmo sistema cartesiano da Figura 2.1 e uma distribuição contínua de massa, ou seja, um corpo de massa m e volume v , a força de atração exercida por esse corpo sobre uma partícula localizada no ponto $P(x,y,z)$, pode ser escrita assim:

$$\vec{F} = -K \int_0^M \frac{dm}{l^3} \vec{l} \quad (2-9)$$

onde $d\mathbf{m} = \mathbf{r} \, d\mathbf{v}$ e suas componentes se tornam:

$$\begin{aligned}
 F_x &= -K \int_0^v \frac{x-x'}{l^3} \rho \, dv \\
 F_y &= -K \int_0^v \frac{y-y'}{l^3} \rho \, dv \\
 F_z &= -K \int_0^v \frac{z-z'}{l^3} \rho \, dv
 \end{aligned}
 \tag{2-10}$$

2.1.1 – Potencial Gravitacional

Segundo Gemael (1999), a Teoria do Potencial, que remonta a Laplace em 1782, desempenha papel importante na Geodésia, interessada no campo de gravidade da Terra e suas implicações com a forma da Terra. O potencial gravitacional de atração é definido como uma função escalar do tipo:

$$V = \frac{Km}{l} \tag{2-11}$$

onde V representa o potencial gravitacional de atração de uma massa m sobre uma partícula, a uma distância l de seu centro de massa.

Considere-se um sistema discreto de partículas, com n partículas de massas m_1, m_2, \dots, m_n . O potencial gravitacional de atração produzido pelas n partículas no ponto $P(x,y,z)$, vale:

$$V = K \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{l_i} \tag{2-12}$$

Para o caso de uma distribuição contínua de massa em um volume V , com densidade ρ , o potencial gravitacional de atração produzido pelo elemento de massa d_m no ponto $P(x,y,z)$, é expresso por:

$$V = K \int_0^m \frac{dm}{l} = K \int_0^v \frac{\rho dv}{l} = K \int_0^v \frac{\rho dx' dy' dz'}{l} \quad (2-13)$$

onde l é a distância entre o elemento de massa $dm = \rho \, dv$ e o ponto considerado $P(x,y,z)$.

A principal propriedade do potencial gravitacional de atração é que a derivada de V em relação aos eixos coordenados é igual às componentes da força de atração exercida sobre o ponto $P(x,y,z)$, ou seja:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= F_x \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= F_y \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= F_z \end{aligned} \quad (2-14)$$

A segunda derivada da função potencial gravitacional de atração V , tem significado importante e será mostrado no item seguinte.

2.1.2 – Equação de Laplace e Poisson

Derivando-se a equação (2-12) em relação aos eixos têm-se as componentes da força de atração exercida sobre o ponto $P'(x',y',z')$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} = F_x &= -K \sum_{i=1}^n \frac{m_i (x - x_i')}{l_i^3} \\ \frac{\partial V}{\partial y} = F_y &= -K \sum_{i=1}^n \frac{m_i (y - y_i')}{l_i^3} \\ \frac{\partial V}{\partial z} = F_z &= -K \sum_{i=1}^n \frac{m_i (z - z_i')}{l_i^3} \end{aligned} \quad (2-15)$$

A segunda derivada da função potencial em relação aos eixos, vale:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= K \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{l_i^3} - 3K \sum_{i=1}^n \frac{m_i (x - x_i')^2}{l_i^5} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= K \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{l_i^3} - 3K \sum_{i=1}^n \frac{m_i (y - y_i')^2}{l_i^5} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} &= K \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{l_i^3} - 3K \sum_{i=1}^n \frac{m_i (z - z_i')^2}{l_i^5}\end{aligned}\tag{2-16}$$

Somando-se as três derivadas segundas, resulta que:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 3 \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{l_i^3} - 3 \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{l_i^3} = 0\tag{2-17}$$

Fazendo:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\tag{2-18}$$

que é conhecido como operador laplaciano, tem-se:

$$\Delta V = 0\tag{2-19}$$

Esta é conhecida como Equação de Laplace e mostra que o laplaciano do potencial gravitacional de atração em pontos externos às massas atrativas é zero.

Aplicando o laplaciano na equação (2-13) que representa o potencial gravitacional de atração num sistema contínuo de massas com volume V e densidade \mathbf{r} , o resultado será o mesmo, ou seja, o laplaciano do potencial gravitacional de atração em pontos externos às massas atrativas é nulo.

Uma função que satisfaz a Equação de Laplace em todos os pontos de uma região é chamada função harmônica. A função do potencial gravitacional de atração

V é harmônica, pois como foi mostrado, satisfaz a equação de Laplace em pontos externos às massas atrativas.

O potencial gravitacional de atração no interior das massas atrativas não é nulo. Vejamos o potencial gravitacional de atração V de uma esfera de massa M e raio r , que é dado por (Gemael, 1999):

$$V = \frac{2K\pi\rho(3r^2 - l^2)}{3} \quad (2-20)$$

onde ρ é a densidade de massa, l é a distância do ponto considerado ao centro da esfera e r o raio da esfera.

Fazendo-se o mesmo procedimento ao aplicado à função potencial gravitacional de atração no exterior das massas atrativas, ou seja, aplicando o laplaciano à equação (2-20), obtém-se:

$$\Delta V = -4K\pi\rho \quad (2-21)$$

Esta é conhecida como Equação de Poisson e é válida para o potencial gravitacional de atração no interior das massas atrativas.

As equações de Laplace e de Poisson são de muita importância para a Geodésia; podem ser usadas para resolver o problema de valor de contorno da Geodésia Física no exterior e no interior das massas atrativas, respectivamente.

2.1.3 – Problema de Valor Contorno da Geodésia Física

A Teoria do Potencial, segundo Gemael (1999), admite dois problemas. Um chamado problema direto, que é a determinação do potencial, conhecida a massa geradora do mesmo. O segundo denominado problema inverso, que é a determinação da massa, conhecido o potencial. O segundo problema não admite solução única,

pois diferentes distribuições de massa podem gerar o mesmo potencial. Para a Geodésia Física interessa o problema direto.

A partir do problema direto, surgem três problemas de valor contorno da Teoria do Potencial.

O primeiro problema, chamado de Problema de Dirichlet¹ consiste em determinar uma função harmônica, no interior ou exterior de uma superfície S quando são conhecidos os valores que a função assume sobre a superfície (contorno).

O segundo problema, Problema de Neumann², consiste em determinar uma função harmônica no interior ou exterior de uma superfície S quando são conhecidos os valores que a derivada normal da função assume sobre a superfície.

O terceiro problema, Problema de Hilbert³, é determinar uma função harmônica no interior ou exterior de uma superfície S quando são conhecidos os valores que assume sobre a superfície, uma combinação linear da função e sua derivada normal.

O problema de valor de contorno da Geodésia Física se assemelha ao terceiro problema de valor de contorno da Teoria do Potencial, problema de Hilbert, pois a Equação Fundamental da Geodésia Física relaciona a superfície limitante, através da anomalia da gravidade, como uma combinação linear do potencial perturbador e sua derivada normal. A diferença com o problema de Hilbert é que a superfície não é conhecida. Na formulação de Stokes a superfície limitante é a geoidal, enquanto que na Teoria de Molodensky é a superfície física.

¹ Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1806-1859)

² Neumann (1903-1957)

³ David Hilbert (1862-1943)

2.1.4 – Funções Harmônicas Esféricas de Superfície

Na Figura 2.2, considere-se (ν, λ) e (ν', λ') as coordenadas esféricas das projeções de \mathbf{P} e de \mathbf{P}' sobre uma esfera de raio unitário com centro na origem do sistema cartesiano (Gemael, 1999).

O polinômio de Legendre para o grau 1 é:

$$P_1(\Psi) = \cos(\Psi) \quad (2-22)$$

$$P_1(\Psi) = \cos \nu \cdot \cos \nu' + \sin \nu \cdot \sin \nu' \cdot \cos(\lambda - \lambda') \quad (2-23)$$

sendo Ψ o ângulo formado entre as projeções dos pontos \mathbf{P} e \mathbf{P}' sobre a esfera e (ν, λ) e (ν', λ') as coordenadas esféricas dos mesmos.

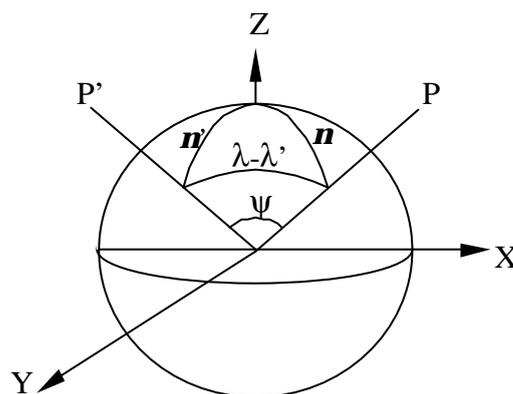


Figura 2.2 – Funções Harmônicas Esféricas de Superfície

Usando dois índices para denominar os polinômios, tem-se:

$$\begin{aligned} P_{10}(\nu) &= \cos(\nu) \\ P_{11}(\nu) &= \sin(\nu) \end{aligned} \quad (2-24)$$

Substituindo na equação (2-23), tem-se para o polinômio de 1ª ordem:

$$P_1(\Psi) = P_{10}(\nu) P_{10}(\nu') + P_{11}(\nu) P_{11}(\nu') \cos(\lambda - \lambda') \quad (2-25)$$

Para o polinômio de 2ª ordem tem-se:

$$P_2(\Psi) = P_{20}(v)P_{20}(v') + P_{21}(v)P_{21}(v')\cos(\lambda - \lambda') + P_{22}(v)P_{22}(v')\cos 2(\lambda - \lambda') \quad (2-26)$$

com:

$$\begin{aligned} P_{20}(v) &= (3\cos^2 v - 1)/2 \\ P_{21}(v) &= 3\cos v \sin v \\ P_{22}(v) &= 3\sin^2 v \end{aligned} \quad (2-27)$$

E assim pode-se exprimir os polinômios de ordem superiores.

Enfim:

$$P_n(\Psi) = S_n = \sum_{m=0}^n P_{nm}(v) P_{nm}(v') \cos m(\lambda - \lambda') \quad (2-28)$$

Desenvolvendo o último termo:

$$S_n = \sum_{m=0}^n P_{nm}(v) P_{nm}(v') (\cos m\lambda \cos m\lambda' + \sin m\lambda \sin m\lambda') \quad (2-29)$$

Fazendo:

$$\begin{aligned} P_{nm}(v') \cos m\lambda' &= A_{nm} \\ P_{nm}(v') \sin m\lambda' &= B_{nm} \end{aligned} \quad (2-30)$$

A equação (2-29) fica:

$$S_n = \sum_{m=0}^n [A_{nm} P_{nm}(v) \cos m\lambda + B_{nm} P_{nm}(v) \sin m\lambda] \quad (2-31)$$

A função S_n que depende somente de \mathbf{n} e \mathbf{l} do ponto \mathbf{P} é chamada de função harmônica esférica de superfície de gau \mathbf{n} . Ela contém $2n+1$ constantes A_{nm} e B_{nm} . Algumas funções S_n recebem nomes especiais. Por exemplo, se $\mathbf{m}=0$ as funções são chamadas de harmônicas esféricas zonais. Se $\mathbf{n}^1 \mathbf{m}$ as funções são chamadas de harmônicas esféricas tesserais e se $\mathbf{n}=\mathbf{m}$ são chamadas de harmônicas esféricas

sectoriais Os polinômios P_{nm} e P_{nm} são conhecidos como funções associadas de Legendre de grau n e ordem m .

2.2 – Campo da Gravidade Normal

2.2.1 – Terra Normal

Um elipsóide de revolução gerado pela rotação de uma elipse em torno de seu eixo menor, com a mesma massa, incluindo a massa da atmosfera, e a mesma velocidade de rotação \mathbf{w} da Terra real é chamada de Terra normal.

O potencial U_0 da Terra normal sobre a superfície é igual ao potencial W_0 da Terra real sobre o geóide. O potencial da Terra normal é chamado de esferopotencial e as superfícies equipotenciais são chamadas de esferopes ($U = \text{Cte}$).

A distribuição de massa da Terra normal é homogênea, garantindo que o potencial gravitacional de atração externo seja representado por superfícies equipotenciais regulares. A Terra normal é caracterizada pelos dois semi-eixos do elipsóide (\mathbf{a} e \mathbf{b}) ou pelo semi-eixo maior e o achatamento \mathbf{a} , pela massa \mathbf{M} e velocidade de rotação \mathbf{w} .

O esferopotencial U é dividido em esferopotencial de atração Z e esferopotencial de rotação Q , ou seja:

$$U = Z + Q \quad (2-32)$$

O esferopotencial de rotação ou centrífugo Q , segundo Gemael (1999), é definido por:

$$Q = 0,5 \omega^2 (x^2 + y^2) \quad (2-33)$$

A parcela $(x^2 + y^2)$ representa a distância do ponto considerado ao eixo de rotação e ω a velocidade de rotação. Em coordenadas esféricas tem-se:

$$\begin{aligned}x &= r \operatorname{sen} \nu \cos \lambda \\y &= r \operatorname{sen} \nu \operatorname{sen} \lambda\end{aligned}\quad (2-34)$$

Substituindo em (2-33), fica:

$$Q = 0,5 \omega^2 \left[(r \operatorname{sen} \nu \cos \lambda)^2 + (r \operatorname{sen} \nu \operatorname{sen} \lambda)^2 \right] \quad (2-35)$$

O esferopotencial de atração Z que um elemento de massa $dm(x',y',z')$, provoca em um ponto $P(x,y,z)$ a uma distância l é:

$$Z = K \int_0^M \frac{dm}{l} \quad (2-36)$$

Para facilitar o tratamento matemático, posto que a integral acima é tripla, utiliza-se os polinômios de Legendre, que introduzidos na equação (2-36) tem-se:

$$Z = K \left[\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^M \left(\frac{r'}{r} \right)^n P_n(\Psi) dm \right] / r \quad (2-37)$$

$$Z = \left(\frac{K}{r} \right) \int_0^M dm + \left(\frac{K}{r^2} \right) \int_0^M r' P_1(\Psi) dm + \left(\frac{K}{r^3} \right) \int_0^M r'^2 P_2(\Psi) dm + \dots$$

O 1º termo da equação ou o termo de grau zero representa o esferopotencial de atração produzido por uma esfera homogênea de massa M , no ponto P , distante r de seu centro de massa.

Para exprimir a série (2-37) em coordenadas esféricas, basta introduzir as funções harmônicas esféricas de superfície que são constituídas de zonais, pois as funções harmônicas sectoriais e tesserais são eliminadas devido à simetria do elipsóide. Eliminam-se também as funções cujos polinômios possuem potências

ímpares, pois pode resultar em valores negativos ou positivos, dependendo do sinal da latitude, o que colide com a simetria equatorial. Portanto, fica-se somente com os termos zonais pares (função de v) para a série (2-37) e a função esferopotencial de atração Z toma a seguinte forma (Gemael, 1999).

$$Z = \left(\frac{KM}{r} \right) \left[1 - J_2 \left(\frac{a}{r} \right)^2 P_2(v) - J_4 \left(\frac{a}{r} \right)^4 P_4(v) - J_6 \left(\frac{a}{r} \right)^6 P_6(v) \dots \right] \quad (2-38)$$

sendo a o semi-eixo maior da Terra normal.

Os coeficientes J_{2n} são calculados através de:

$$J_{2n} = (-1)^{n+1} \left(1 - n + \frac{5nJ_2}{e^2} \right) \frac{3e^{2n}}{(2n+1)(2n+3)} \quad (2-39)$$

sendo e a excentricidade do elipsóide e J_2 o fator dinâmico de forma. Pode-se então reescrever a equação (2-32) para o esferopotencial de atração da Terra normal:

$$U = Z + Q$$

$$U = \left\{ \left(\frac{KM}{r} \right) \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n} \left(\frac{a}{r} \right)^{2n} P_{2n}(v) \right] \right\} + \left[0,5 (\omega r \sin v)^2 \right] \quad (2-40)$$

O coeficiente J_2 é denominado de Fator Dinâmico de Forma. Aparece no Sistema de Constantes Astronômicas da IAU e participa da definição de um sistema geodésico de referência, como por exemplo, World Geodetic System 1984 - WGS84, adotado pelo sistema GPS e definido como na Tabela 2.1.

World Geodetic System 1984 - WGS84	
Semi-eixo maior	a = 6378137,0 metros
Constante Gravitacional	GM = 3986000,9 x 10 ⁸ m ³ / s
Zonal Harmônico de 2 ^o grau	C_{2,0} = -0,484166774985 x 10 ⁻³
Achatamento	a = 1 : 298,257223563

Tabela 2.1 – Sistema Geodésico Mundial 1984 – Terra normal

Os parâmetros **J₂** e **C_{2,0}** se relacionam através de (NIMA, 2000):

$$C_{2,0} = -J_2 / (5)^{0,5} \quad (2-41)$$

2.2.2 – Aceleração da Gravidade Normal

A fórmula para cálculo da aceleração da gravidade da Terra normal é do tipo (Gemael, 1999):

$$\gamma = \gamma_e (1 + \beta \sin^2 \phi + \beta' \sin^2 2\phi + \beta'' \sin^2 3\phi + \dots) \quad (2-42)$$

sendo **g_e** a gravidade normal no equador, **φ** a latitude do paralelo considerado e os coeficientes **β**, **β'** e **β''** dependentes das dimensões do elipsóide de referência e da velocidade angular de rotação.

Em 1967, a IUGG recomendou o uso do Sistema Geodésico de Referência 1967, que com relação à aceleração da gravidade normal, definiu os parâmetros relacionados na Tabela 2.2.

A fórmula da gravidade normal para o Sistema Geodésico de Referência 1967 fica:

$$\gamma = 978031,8 \cdot (1 + 0,0053024 \sin^2 \phi - 0,0000059 \sin^2 2\phi) \text{ mGal}^4 \quad (2-43)$$

⁴ mGal – miliGal que equivale a 10⁻⁵ m/s².

Sistema Geodésico de Referência 1967	
Velocidade de Rotação	$\mathbf{w} = 72921151467 \times 10^{-15} \text{ rad/s}$
Gravidade no Equador	$\mathbf{g}_e = 978031,845 \text{ mGal}$
Gravidade no Pólo	$\mathbf{g}_p = 983217,730 \text{ mGal}$
Coefficiente β	$\mathbf{b} = 0,0053023655$
Coefficiente β'	$\mathbf{b}' = -0,0000059$

Tabela 2.2 – Sistema Geodésico de Referência 1967

Com o estabelecimento do World Geodetic System 1984 - WGS84, referencial usado atualmente pelo sistema de satélites GPS, os parâmetros que se relacionam com a gravidade normal são (NIMA, 2000):

World Geodetic System 1984 - WGS84	
Velocidade de Rotação	$\mathbf{w} = 7292115,0 \times 10^{-11} \text{ rad/s}$
Gravidade no Equador	$\mathbf{g}_e = 978032,53359 \text{ mGal}$
Gravidade no Pólo	$\mathbf{g}_p = 983218,49378 \text{ mGal}$
Coefficiente β	$\mathbf{b} = 0,00193185265241$

Tabela 2.3 – Sistema Geodésico Mundial 1984 – Gravidade normal

A fórmula da gravidade normal no sistema WGS84 é a seguinte (NIMA, 2000):

$$\gamma = \gamma_e \frac{1 + \beta \sin^2 \phi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}} \quad (2-44)$$

Sendo e a excentricidade do elipsóide, ϕ a latitude do paralelo considerado e o coeficiente \mathbf{b} , se encontra nos parâmetros definidores do sistema WGS84.

2.3 – Campo de Gravidade Terrestre

O potencial de gravidade W da Terra real é uma soma de duas componentes que são o potencial de atração ou gravitacional V gerado pela massa da Terra e o potencial centrífugo Q , devido ao movimento de rotação.

$$W = V + Q \quad (2-45)$$

denominado de geopotencial de gravidade.

O gradiente do geopotencial de gravidade W representa o vetor força de gravidade \vec{g} , e o gradiente de suas parcelas V e Q são o vetor força de atração \vec{F} e força centrífuga \vec{C} , respectivamente.

$$\begin{aligned} \text{grad} W &= \text{grad} (V + Q) = \text{grad} V + \text{grad} Q \\ \vec{g} &= \vec{F} + \vec{C} \end{aligned} \quad (2-46)$$

As derivadas parciais do geopotencial de gravidade W em relação aos eixos coordenados são as componentes do vetor gravidade em relação aos mesmos eixos (Gemael, 1999):

$$\text{grad} W = \frac{\partial W}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial W}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial W}{\partial z} \vec{k} = g_x \vec{i} + g_y \vec{j} + g_z \vec{k} \quad (2-47)$$

$$\begin{aligned} g_x &= F_x + C_x = \frac{\partial W}{\partial x} = -K \int_0^M \frac{x - x'}{l^3} dm + \omega^2 x \\ g_y &= F_y + C_y = \frac{\partial W}{\partial y} = -K \int_0^M \frac{y - y'}{l^3} dm + \omega^2 y \\ g_z &= F_z + C_z = \frac{\partial W}{\partial z} = -K \int_0^M \frac{z - z'}{l^3} dm \end{aligned} \quad (2-48)$$

Sendo as integrais estendidas a toda a massa da Terra real.

A aceleração da gravidade ou simplesmente gravidade é a grandeza que pode ser medida com mais facilidade através de meios diretos ou indiretos, de maneira absoluta ou relativa. Numa aproximação esférica, sem rotação e com distribuição de massa homogênea, a direção da força da gravidade é a direção da vertical. No caso da Terra real onde as superfícies equipotenciais não são paralelas, portanto a vertical é uma curva, a força da gravidade tem a direção da tangente à vertical.

2.3.1 – Geopes

O lugar geométrico dos pontos do espaço que possuem o mesmo potencial de gravidade ou geopotencial de gravidade é chamado de superfície equipotencial ou simplesmente de geopes. Por um ponto no espaço passa somente uma superfície equipotencial, logo duas superfícies equipotenciais nunca se interceptam.

A superfície equipotencial que interessa para a Geodésia, e que é o objetivo deste trabalho, é a geoidal, que é definida como a superfície equipotencial do campo de gravidade que mais se aproxima do nível médio não perturbado dos mares, prolongado através dos continentes.

Se a Terra fosse um corpo regular, como uma esfera, sem rotação e sua distribuição de massa fosse homogênea, as superfícies equipotenciais seriam esféricas concêntricas. As linhas de força do campo de gravidade seriam retas perpendiculares às superfícies e convergiriam para o centro da esfera, indicando a direção do vetor força da gravidade, como na Figura 2.3 (a). Como a Terra real tem movimento de rotação e a distribuição de massa não é homogênea, as linhas de força no campo de gravidade não são retas, mas curvas e a superfície é irregular, como na Figura 2.3 (b). A direção da linha de força é chamada de vertical do lugar.

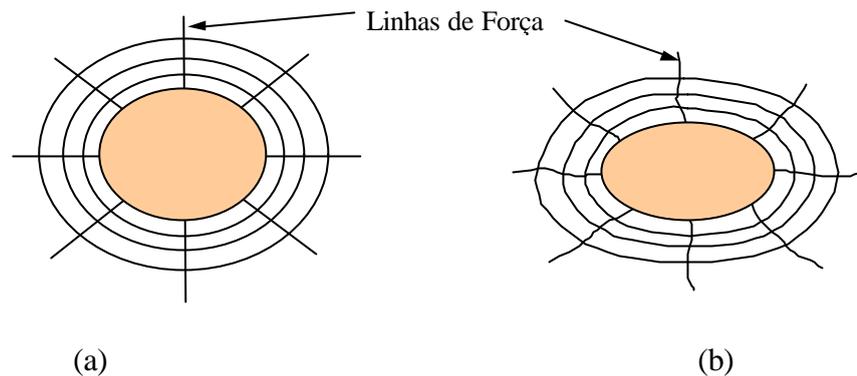


Figura 2.3 – Geoides

2.3.2 – Geopotencial de Gravidade

O geopotencial de gravidade representa o potencial da Terra real. Ele pode ser separado em duas componentes: geopotencial de atração ou gravitacional e centrífugo. É conveniente expressar o geopotencial de atração em uma série de funções harmônicas esféricas de superfície. Lembrando que estas funções são do tipo da equação (2-31):

$$S_n = \sum_{m=0}^n [A_{nm} P_{nm}(\nu) \cos m\lambda + B_{nm} P_{nm}(\nu) \sin m\lambda] \quad (2-49)$$

A geopotencial de gravidade é dada pela equação (2-45):

$$W = V + Q$$

$$W = K \int_0^M \frac{dm}{r} + Q \quad (2-50)$$

Representando o potencial de atração ou gravitacional V através de uma série de funções harmônicas esféricas, a equação (2-50) fica assim (Gemael, 1999):

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n r^{-(n-1)} [A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda] P_{nm}(\nu) + Q \quad (2-51)$$

onde:

$$\begin{aligned}
 A_{nm} &= \int_0^M r'^n a_{nm} dm = K \int_0^M r'^n P_{nm}(\nu) \cos m\lambda' dm \\
 B_{nm} &= \int_0^M r'^n b_{nm} dm = K \int_0^M r'^n P_{nm}(\nu) \sin m\lambda' dm
 \end{aligned}
 \tag{2-52}$$

2.4 – Equação Fundamental da Geodésia Física

2.4.1 – Potencial Perturbador

O potencial perturbador ou potencial anômalo T é definido como a diferença entre o potencial da Terra real ou geopotencial de gravidade W e o potencial da Terra normal ou esferopotencial U , no mesmo ponto P .

$$T(P) = W(P) - U(P) \tag{2-53}$$

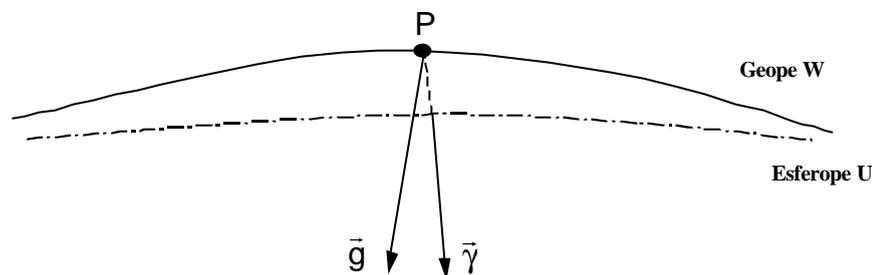


Figura 2.4 – Potencial Perturbador no ponto P

Como o potencial centrífugo é igual tanto para a Terra normal quanto para a Terra real, o potencial perturbador é função somente do efeito gravitacional, ou seja, o potencial das massas anômalas que é gerado pela não homogeneidade da distribuição de massa da Terra real. A função potencial perturbador é uma função harmônica, pois satisfaz a equação de Laplace, ou seja, $\Delta T = 0$:

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \tag{2-54}$$

Em sendo harmônica, a função potencial perturbador pode ser desenvolvida em uma série de funções harmônicas esféricas, que será visto no item 2.4.3.

2.4.2 – Anomalia e Distúrbio da Gravidade

A Figura 2.5 mostra uma linha perpendicular ao elipsóide no ponto P' , denominada n' e conhecida como normal, e uma outra n perpendicular ao geóide no ponto P , chamada de vertical do lugar. O vetor $\Delta\bar{g}$ é chamado de vetor anomalia da gravidade e é definido como:

$$\Delta\bar{g} = \bar{g}_P - \bar{\gamma}_{P'} \quad (2-55)$$

O módulo do vetor anomalia da gravidade é a anomalia da gravidade:

$$|\Delta g| = |\bar{g}_P| - |\bar{\gamma}_{P'}| \quad (2-56)$$

A separação N entre o elipsóide e o geóide é chamada de ondulação geoidal ou altura geoidal e é o objetivo final deste trabalho.

O ângulo i formado entre as duas retas n e n' é o desvio da vertical.

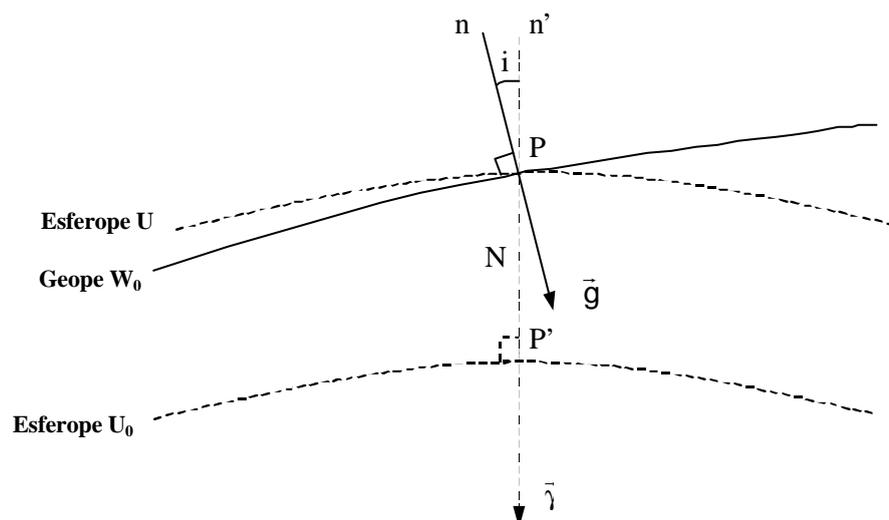


Figura 2.5 – Anomalia e Distúrbio da Gravidade

Pode-se verificar que a anomalia da gravidade é função de \mathbf{g} e \mathbf{g}' em pontos diferentes, \mathbf{P} e \mathbf{P}' respectivamente.

Quando se faz a diferença entre os módulos da gravidade da Terra real e Terra normal no mesmo ponto \mathbf{P} , obtém-se a grandeza chamada de distúrbio da gravidade:

$$|\delta g_P| = |g_P| - |\gamma_P| \quad (2-57)$$

e o vetor distúrbio da gravidade é:

$$\delta \vec{g}_P = \vec{g}_P - \vec{\gamma}_P \quad (2-58)$$

2.4.3 – Equação Fundamental da Geodésia Física

Observando a Figura 2.5, considere-se dois esferopes, um passando por \mathbf{P} e outro por \mathbf{P}' . Desprezando o desvio da vertical \mathbf{i} , para o potencial U_P pode-se escrever:

$$U_P = U_0 - N\gamma_P \quad (2-59)$$

Substituindo esta equação na (2-53), que define o potencial perturbador, tem-se:

$$\begin{aligned} T_P &= W_P - U_P = W_0 - U_0 \\ T_P &= W_0 - U_0 + N \cdot \gamma_P \end{aligned} \quad (2-60)$$

Considerando que o esferopotencial U_0 no elipsóide é igual ao geopotencial W_0 no geóide, o potencial perturbador \mathbf{T} se reduz a:

$$W_0 = U_0 \quad (2-61)$$

Então:

$$T_P = N \cdot \gamma_P \quad (2-62)$$

Esta é a Equação de Bruns que relaciona a altura geoidal N com potencial perturbador T .

Derivando a função potencial perturbador T na equação (2-60), tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial h} &= \frac{\partial W_0}{\partial h} - \frac{\partial U_0}{\partial h} + N \frac{\partial \gamma}{\partial h} \\ \frac{\partial T}{\partial h} &= -g + \gamma + N \frac{\partial \gamma}{\partial h} \\ g - \gamma &= -\frac{\partial T}{\partial h} + N \frac{\partial \gamma}{\partial h}\end{aligned}\tag{2-63}$$

então:

$$\Delta g = N \frac{\partial \gamma}{\partial h} - \frac{\partial T}{\partial h}\tag{2-64}$$

Conhecida como Equação Fundamental da Geodésia Física.

Substituindo a Equação de Bruns (2-62) na equação (2-64), tem-se outra forma da mesma equação:

$$\Delta g = \frac{T}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} - \frac{\partial T}{\partial h}\tag{2-65}$$

Substituindo o elipsóide por uma esfera de raio R e massa M , o que em alguns casos da Geodésia Física é aplicável, a equação (2-65) toma a forma:

$$\begin{aligned}\gamma &\approx \frac{KM}{R^2} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial R} &= \frac{\partial \gamma}{R} = -\frac{2KM}{R^3} = -\frac{2\gamma}{R}\end{aligned}\tag{2-66}$$

então:

$$\Delta g = -\frac{2T}{R} - \frac{\partial T}{\partial R}\tag{2-67}$$

que representa a Equação Fundamental da Geodésia Física numa aproximação esférica.

Como a anomalia da gravidade não é conhecida de maneira contínua, fica impossibilitado o cálculo do potencial perturbador e em consequência a altura geoidal. A solução é usar a equação (2-65) como uma condição de contorno para o cálculo do potencial perturbador. Esta condição de contorno se relaciona com o terceiro problema de valor de contorno da teoria do potencial, que é o problema de Hilbert, (ver item 2.1.3). Se a superfície de contorno usada for a geoidal, a solução vem da teoria de Stokes; se for a superfície física a solução é dada pela teoria moderna de Molodensky, o que significa envolver a superfície geoidal ou a quase-geoidal, respectivamente.

Como a função potencial perturbador T é uma função harmônica, ela pode ser escrita como uma série de funções harmônicas esféricas de superfície, conforme Blitzkow (1986):

$$T(r, \theta, \lambda) = -\frac{KM}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n (J'_{nm} \cos m\lambda + K'_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta) \quad (2-68)$$

onde J'_{nm} e K'_{nm} indicam grandezas vinculadas ao potencial perturbador.

A anomalia da gravidade e a ondulação geoidal sendo componentes do campo anômalo podem ser expressas em série de funções harmônicas esféricas. Assim, a anomalia da gravidade se escreve (Blitzkow, 1996):

$$\Delta g(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + D_{nm} \sin m\lambda) P_{nm} \cos \theta \quad (2-69)$$

cujos coeficientes são dados por:

$$C_{n0} = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \Delta g P_n(\cos \theta) d\sigma \quad (2-70)$$

para $m = 0$;

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{nm} \\ D_{nm} \end{array} \right\} = \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Delta g(\theta, \lambda) P_{nm}(\cos \theta) \left\{ \begin{array}{l} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{array} \right\} d\sigma \quad (2-71)$$

para $m \neq 0$.

Considerando a equação (2-62) e a (2-68), podemos escrever a altura geoidal em uma série de funções harmônicas esféricas:

$$N(\theta, \lambda) = -R \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(J'_{nm} \cos m\lambda + K'_{nm} \sin m\lambda \right) P_{nm}(\cos \theta) \quad (2-72)$$

Os coeficientes J'_{nm} e K'_{nm} se relacionam com os coeficientes da anomalia da gravidade C_{nm} e D_{nm} , equação (2-69), através de:

$$J'_{nm} = -\frac{1}{n-1} \frac{R^2}{KM} C_{nm} \quad (2-73)$$

$$K'_{nm} = -\frac{1}{n-1} \frac{R^2}{KM} D_{nm}$$

CAPÍTULO 3

DETERMINAÇÃO DO GEÓIDE

Neste capítulo será feita uma apresentação do método usado para determinação do geóide usando os modelos do geopotencial combinados com anomalias médias da gravidade em quadrículas de 5'x5' e um modelo digital do terreno.

No fim do século passado, Helmert desenvolveu a primeira metodologia para estimar as ondulações geoidais. Utilizava observações astronômicas para a determinação das componentes do desvio da vertical e através de procedimentos adequados, calculava as ondulações geoidais. Este procedimento ficou conhecido como método astrogeodésico ou nivelamento astronômico. O inconveniente deste método é a necessidade de uma rede razoável de pontos distribuídos sobre a região onde se deseja estimar as ondulações geoidais.

Em 1849 George Gabriel Stokes desenvolveu uma integral que tornou possível a determinação das alturas geoidais utilizando o conhecimento das anomalias da gravidade. Estas devem ser conhecidas de forma contínua sobre toda a superfície da Terra. Esta exigência tornou a metodologia pouco usada, pois a gravidade somente era conhecida de maneira discreta e sobre uma pequena parte da superfície terrestre; nos oceanos, por exemplo, era considerado impossível o conhecimento da gravidade.

Até 1920 os levantamentos gravimétricos eram realizados com dispositivos que utilizavam pêndulos, em pequena quantidade e em áreas continentais. A

dificuldade do método pendular é que exigia operadores especializados e a produtividade era muito baixa, além de impossível o levantamento em áreas oceânicas. Com o desenvolvimento dos gravímetros de mola, pequenos, leves e de fácil manejo, permitiu-se a rápida densificação de redes gravimétricas nos continentes. Já nos oceanos, o dispositivo tripendular de Vening Meinesz possibilitou medidas da aceleração da gravidade de maneira rápida. Depois, modernos gravímetros montados sobre plataformas giroestabilizadas em barcos permitem determinações rápidas e precisas. Hoje, a altimetria por radar resolveu o problema de determinação da gravidade nos oceanos.

Com o advento dos satélites artificiais e recursos computacionais, a Integral de Stokes ganhou um novo alento, pois, estudando as perturbações das órbitas desses satélites, é possível estimar a componente de longo comprimento de onda do campo gravitacional e em consequência da altura geoidal, através dos modelos do geopotencial. Desta forma não é mais necessário estender a integral a toda a Terra e sim a uma vizinhança do ponto de cálculo. Para isso é necessário introduzir uma modificação na mesma integral. Foram propostas várias modificações sendo que algumas delas serão apresentadas e comparadas neste trabalho.

A avaliação da integral pode ser feita de duas maneiras: por integração numérica ou por FFT – Fast Fourier Transform. Os dois métodos de avaliação serão descritos e comparados neste capítulo. A avaliação da integral através de FFT é descrita no item 3.4 e foi a metodologia usada para estimar as ondulações geoidais para o Estado de São Paulo, que será descrito detalhadamente no decorrer deste capítulo.

3.1 – A Integral de Stokes

George Gabriel Stokes apresentou em 1849, uma das fórmulas mais importantes da Geodésia Física, pois, torna possível determinar a separação geóide-elipsóide, ou seja, a ondulação geoidal, através do conhecimento das anomalias da gravidade. Ela foi considerada durante muito tempo como apenas teórica, pois necessitava do conhecimento da gravidade em toda a extensão da Terra, inclusive nos oceanos, o que era tido como impossível. Com o desenvolvimento tecnológico, principalmente o uso de satélites artificiais para determinar os modelos do geopotencial, a integral não precisa mais ser estendida a toda a Terra, e sim a uma vizinhança do ponto de cálculo. A componente de longo comprimento de onda da altura geoidal é baseada nos modelos do geopotencial.

Na dedução da fórmula, Stokes admitiu a inexistência de massas externas à superfície equipotencial considerada, o que faz com que se deva reduzir as medições da gravidade feitas na superfície física para o geóide e compensar as massas que estão externas ao geóide. Os procedimentos para isto serão vistos no item 3.5. Também admitiu uma aproximação esférica para a superfície da Terra.

A integral de Stokes tem a seguinte forma:

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Delta g S(\psi) \sin \psi \, d\psi \, d\alpha \quad (3-1)$$

onde N é a altura geoidal, R é o raio da Terra, g é o valor médio da gravidade da Terra normal, Δg é a anomalia da gravidade, (\mathbf{y}, \mathbf{a}) distância e azimute esférico entre o ponto considerado e o ponto onde N é calculado e $S(\mathbf{y})$ é a função de Stokes.

A função $S(\mathbf{y})$ pode ser expressa em uma expansão em série de polinômios de Legendre da seguinte forma:

$$S(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos\psi) \quad (3-2)$$

onde P_n são os polinômios de Legendre de grau n .

Como já foi mencionado, a Integral de Stokes pressupõe a não existência de massas externas ao geóide. Para isto reduzem-se as medições da gravidade, feitas sobre a superfície física, para o geóide e eliminam-se as massas topográficas. Com essas reduções, cria-se uma Terra fictícia com características diferentes da Terra real. Em seguida, através da Integral de Stokes determina-se a separação entre o elipsóide de referência e um geóide fictício, que é o corpo resultante da Terra modificada. Esse geóide fictício é chamado de cogeóide. Para cada método de remoção das massas topográficas resulta em um cogeóide. Tem-se então mais uma grandeza a determinar que é a separação entre o geóide e o cogeóide. Essa separação é conhecida como efeito indireto. O que se procura é adotar um método de remoção das massas topográficas que resulte no menor efeito indireto possível. Mais detalhes no item 3.5.

3.2 – Os Modelos do Geopotencial

Um modelo do geopotencial é obtido determinando-se os valores para os coeficientes A_{nm} e B_{nm} na expressão (2-51), até um dado grau e ordem. Os satélites artificiais trouxeram uma contribuição significativa na obtenção destes modelos para os coeficientes de grau e ordem mais baixos.

O fato que leva à utilização dos satélites é que seus movimentos estão sujeitos a perturbações devido à não homogeneidade na distribuição de massa da Terra. O estudo destas perturbações permite modelar as heterogeneidades, as quais se relacionam aos valores dos coeficientes acima citados. A contribuição dos satélites se restringe aos coeficientes de ordem mais baixa, pois eles são influenciados em seu movimento por variações de longo comprimento de onda do campo gravitacional.

A determinação dos coeficientes de ordem mais elevada exige o conhecimento das variações de curto comprimento de onda, que só podem ser obtidos por observações sobre a superfície. Os modelos mais modernos, como o EGM96 que foi usado neste trabalho, atingem o grau e ordem 360.

O modelo do geopotencial representa a superfície denominada de esferóide, a qual é intermediária entre o geóide e o elipsóide.

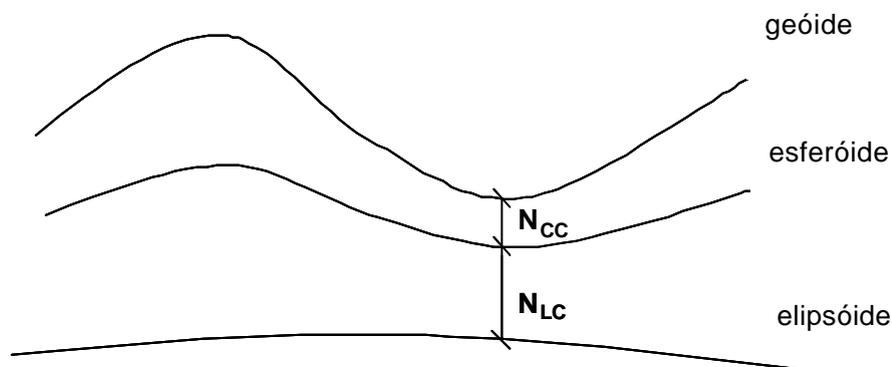


Figura 3.1 – Geóide e Esferóide

No capítulo 4 será apresentado um histórico dos modelos do geopotencial obtidos até hoje, bem como uma descrição mais detalhada do modelo EGM96.

Considere-se a equação (2-72), que pode ser escrita na seguinte forma (Blitzkow, 1986):

$$\begin{aligned}
N(\theta, \lambda) = & -R \sum_{n=2}^L \sum_{m=0}^n (J'_{nm} \cos m\lambda + K'_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta) - \\
& - \sum_{n=l+1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (J'_{nm} \cos m\lambda + K'_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta)
\end{aligned} \tag{3-3}$$

De forma abreviada:

$$N(\theta, \lambda) = N_{LC}(\theta, \lambda) + N_{CC}(\theta, \lambda) \tag{3-4}$$

Isto significa dividir a altura geoidal em duas componentes espectrais: uma componente de longo comprimento de onda N_{LC} e uma de curto comprimento de onda N_{CC} , conforme Figura 3.1. A primeira representa a separação entre o elipsóide de referência e o esferóide representado pelo modelo do geopotencial. A segunda representa a separação entre o esferóide e o geóide.

A primeira componente é calculada através do modelo do geopotencial, o que significa estender a série até um dado grau e ordem L . A segunda componente é determinada através das anomalias da gravidade por meio de uma modificação da Integral de Stokes.

3.3 – Integral Modificada de Stokes

Com a possibilidade do uso de um modelo do geopotencial para o cálculo da componente de longo comprimento de onda da altura geoidal, não é mais necessário estender a Integral de Stokes a toda a Terra, eliminando assim a limitação de uso da mesma.

Pode-se aplicar a integral a uma região próxima ao ponto de cálculo, limitada por um raio y_0 , que é a distância esférica máxima de aplicação da integral. Mesmo que a integral seja calculada em toda a área limitada pelo raio y_0 , isto ainda implica

num erro de truncamento. Porém a partir do raio \mathbf{y}_0 o cálculo é feito através dos modelos do geopotencial o que minimiza ou quase anula o erro de truncamento. Por isso este erro é comumente negligenciado durante determinações práticas de modelos geoidais, particularmente quando se usa a FFT como método de avaliação da integral (Schwarz et al., 1990). Para reduzir o erro de truncamento é necessária uma modificação na integral original de Stokes que consiste em modificar a função de Stokes $S(\mathbf{y})$ e a anomalia da gravidade. Diversas propostas de modificação da função de Stokes têm sido apresentadas. Neste trabalho são mostradas e comparadas as modificações propostas por P. Vanicek e L. E. Kleusberg (1987), L. Wong e R. Gore (1969) e P. Vanicek e W. E. Featherstone (1998), denominadas resumidamente aqui de Vanicek-Kleusberg, Wong-Gore e Featherstone-Vanicek, respectivamente.

A Integral de Stokes modificada pode ser escrita da seguinte maneira:

$$N^M(\theta, \lambda) = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_0^{\psi_0} \int_0^{2\pi} \Delta g(\alpha, \psi) S^M(\psi) \sin \psi \, d\psi \, d\alpha \quad (3-5)$$

sendo $S^M(\psi)$ a função modificada de Stokes. Os coeficientes de truncamento definidos por Molodensky são (Featherstone et al, 1998):

$$Q_n(\psi_0) = \int_{\psi_0}^{\pi} S(\psi) P_n(\cos \psi) \sin(\psi) \, d\psi \quad (3-6)$$

que podem ser calculados usando algoritmos iterativos, dado por Paul (1973).

O erro de truncamento definido por Molodensky é dado por (Featherstone et al, 1998):

$$\delta N_{ST} = \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=2}^{\infty} Q_n(\psi_0) \Delta g_n \quad (3-7)$$

O erro de truncamento δN_{ST} é função dos coeficientes de truncamento Q_n . Estes, de acordo com a equação (3-6), dependem da função de Stokes $S(\mathbf{y})$. As modificações da função $S(\mathbf{y})$ propostas visam minimizar o erro de truncamento em determinações gravimétricas de modelos geoidais.

L. Wong e R. Gore (1969) propuseram uma modificação baseada na remoção dos polinômios de grau mais baixo da função de Stokes, reduzindo com isso o erro de truncamento. Esta modificação é dada por:

$$S_{wg}^M(\psi) = S(\psi) - \sum_{n=2}^{M-1} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi) \quad (3-8)$$

onde $P_n(\cos \psi)$ são os polinômios de Legendre de grau n e M é o grau, até o qual, será removido da função de Stokes. Experimentos feitos por Featherstone e Sideris (1997) usaram $M = 36$ e $M = 360$ para esta modificação. A modificação de Wong-Gore quando usada em determinações de modelos regionais do geóide funciona como um filtro passa-alta. Para esta função modificada, os coeficientes de truncamento de Molodensky são dados por:

$$Q_n^M(\psi_0) = \int_{\psi_0}^{\pi} S_{wg}^M(\psi) P_n(\cos \psi) \sin(\psi) d\psi \quad (3-9)$$

De outra forma, $Q_n^M(\psi_0)$ pode ser escrito assim:

$$Q_n^M(\psi_0) = Q_n(\psi_0) - \sum_{k=2}^{M-1} \frac{2k+1}{k-1} e_{nk}(\psi_0) \quad (3-10)$$

onde:

$$e_{nk}(\psi_0) = \int_{\psi_0}^{\pi} P_k(\cos \psi) P_n(\cos \psi) \sin \psi \, d\psi \quad (3-11)$$

que pode ser calculado usando algoritmos iterativos, dado por Paul (1973).

O erro de truncamento para esta modificação é dado por:

$$\delta N^M = \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=2}^{\infty} Q_n^M(\psi_0) \Delta g_n \quad (3-12)$$

P. Vanicek e L. E. Kleusberg (1987) propuseram uma modificação na função de Stokes visando minimizar o limite superior do erro de truncamento em termos de desvio padrão. Esta modificação pode ser expressa assim (Featherstone et al. 1998):

$$S_{vk}^M(\psi) = S^M(\psi) - \sum_{n=2}^{M-1} \frac{2k+1}{2} t_k(\psi_0) P_k(\cos \psi) \quad (3-13)$$

onde t_k são os coeficientes da modificação. Os coeficientes de truncamento $Q_n^{m*}(\psi_0)$

e os coeficientes $t_k(\psi_0)$ da função modificada podem ser determinados através de:

$$\begin{aligned} Q_n^{M*}(\psi_0) &= \sum_{k=2}^{M-1} \frac{2k-1}{2} t_k(\psi_0) e_{nk}(\psi_0) \\ Q_n^{M*}(\psi_0) &= Q_n(\psi_0) - \sum_{k=2}^{M-1} \frac{2k-1}{k-1} e_{nk}(\psi_0) \\ Q_n^{M*}(\psi_0) &= \int_{\psi_0}^{\pi} S_{vk}^M(\psi) P_n(\cos \psi) \sin \psi \, d\psi \end{aligned} \quad (3-14)$$

sendo M o grau da modificação da função.

O erro de truncamento correspondente a esta modificação é dado por:

$$\delta N_{vk}^L = \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=L}^{\infty} Q_n^{M*}(\psi_0) \Delta g_n \quad (3-15)$$

sendo L o grau e ordem a partir do qual foi truncada a série.

Segundo Vanicek e Sjoberg (1991) esta modificação reduz mais o erro de truncamento do que a modificação de Wong-Gore.

P. Meissl (1971) propôs uma modificação simples para a função de Stokes. Subtrair da função original $S(\mathbf{y})$ o valor numérico da função no raio de truncamento $S(\mathbf{y}_0)$. Esta modificação é dada por:

$$S_{me}(\psi) = S(\psi) - S(\psi_0) \quad (3-16)$$

Esta modificação faz com que a série do erro de truncamento convirja para zero mais rapidamente, principalmente quando usada em conjunto com a técnica de remove-calcula-restaura (Featherstone et al. 1998).

O erro de truncamento para esta modificação é:

$$\delta N_{me}^L = \frac{R}{2\gamma} \left\{ \sum_{n=L}^{\infty} \frac{S(\psi_0)}{(n+1)} [P_{n-1}(\cos \psi_0) - \cos \psi_0 P_n(\cos \psi_0) + Q_n(\psi_0)] \right\} \Delta g_n \quad (3-17)$$

Featherstone W. E., Evans J. D. e Olliver J. G. (1998) propuseram uma modificação híbrida, combinando à modificação de P. Meissl com a de Vanicek e Kleusberg. Eles aplicam a modificação de Miessl, usando como função, a função modificada de Vanicek e Kleusberg. Este procedimento reduz ainda mais o erro de truncamento do que se as modificações fossem aplicadas separadamente. Ela pode ser assim expressa:

$$S_{m\text{vk}}^M(\psi) = S_{\text{vk}}^M(\psi) - S_{\text{vk}}^M(\psi_0) \quad (3-18)$$

Para esta modificação os coeficientes de truncamento $Q_n^{M*}(\psi_0)$ são determinados como segue:

$$K_{m\text{vk}}^M(\psi, \psi_0) = \begin{cases} S_{\text{vk}}^M(\psi_0) & \text{para } 0 \leq \psi \leq \psi_0 \\ S_{\text{vk}}^M(\psi) & \text{para } \psi_0 \leq \psi \leq \pi \end{cases} \quad (3-19)$$

Segue que:

$$Q_n^{M*}(\psi_0) = \int_0^\pi K_{m\text{vk}}^M(\psi, \psi_0) P_n(\cos \psi) \sin \psi \, d\psi \quad (3-20)$$

$$Q_n^{M*}(\psi_0) = \int_0^{\psi_0} S_{\text{vk}}^M(\psi_0) P_n(\cos \psi) \sin \psi \, d\psi + Q_n^{M*}(\psi_0)$$

Para o erro de truncamento tem-se a seguinte expressão:

$$\delta N_{m\text{vk}}^L = \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=L}^{\infty} \frac{S_{\text{vk}}^M(\psi_0)}{(n+1)} [P_{n-1}(\cos \psi_0) - \cos \psi_0 P_n(\cos \psi_0) + Q_n^{M*}(\psi_0)] \Delta g_n \quad (3-21)$$

que é análoga à expressão (3-17).

Os resultados práticos destas modificações da função de Stokes $S(\mathbf{y}_0)$ serão comparados na parte final deste trabalho.

Mostradas as modificações, voltamos à anomalia da gravidade. Como não se conhece os valores da anomalia da gravidade de forma contínua, a integral (3-5) não pode ser avaliada diretamente. Segundo Blitzkow (1996), a utilização de valores discretos faz com que o princípio da ortogonalidade das funções harmônicas esféricas seja perdido. O produto $\Delta g S^M$ torna-se incompatível e a anomalia da gravidade precisa ser subtraída dos harmônicos de grau e ordem mais baixos,

compatibilizando com o grau e ordem do modelo do geopotencial utilizado. Assim usando a equação (2-69), Δg_L^M é calculada com:

$$\Delta g_L^M = \Delta g - \sum_{n=0}^L \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + D_{nm} \sin m\lambda) P_{nm} \cos \theta \quad (3-22)$$

Com essa modificação, a expressão final para a integral de Stokes fica:

$$N^M(\theta, \lambda) = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_0^{\psi_0} \int_0^{2\pi} \Delta g^M(\alpha, \psi) S^m(\psi) \sin \psi \, d\psi \, d\alpha \quad (3-23)$$

Como a influência dos longos comprimentos de onda é levada em consideração pelo modelo do geopotencial, a função de Stokes fica limitada a uma vizinhança \mathbf{y}_0 .

A altura geoidal se completa com a componente de longo comprimento de onda N_{LC} calculada através dos coeficientes do modelo do geopotencial até o grau e ordem L , aplicada na (3-4). Daí a justificativa para a expressão remove-calcula-restaura.

3.4 – A Transformada de Fourier

As integrais usadas em Geodésia Física, mais precisamente a integral de Stokes, são conhecidas como integrais de convolução, que normalmente são definidas no domínio do espaço. Uma propriedade básica destas integrais é que elas se transformam em uma multiplicação de funções quando elas são resolvidas no domínio das frequências (Blitzkow, 1973).

A Transformada de Fourier é o método usado para levar uma função definida no domínio do espaço para o domínio das frequências. Os algoritmos usados para avaliar estas integrais são conhecidos como FFT - Fast Fourier Transform

(Transformada Rápida de Fourier). Para a utilização deste método é necessário que os dados estejam distribuídos em uma grade com espaçamento constante. Como os dados de anomalias da gravidade geralmente se apresentam de maneira irregular, há a necessidade do uso de processos de interpolação dos valores.

A FFT resolveu um dos principais problemas relacionado ao uso da integral de Stokes que é o tempo muito longo necessário ao processamento dos dados.

Uma descrição completa da Transformada de Fourier pode ser encontrada em Sideris (1994).

3.4.1 – A Integral de Stokes e a Transformada de Fourier

Limitando a integral de Stokes a uma calota esférica de raio y_0 a superfície esférica pode ser aproximada para um plano tangente no ponto de cálculo P . Recordando a integral de Stokes dada pela equação (3-1):

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Delta g S(\psi) \sin \psi \, d\psi \, d\alpha \quad (3-24)$$

Usando uma distância plana s ao invés da distância esférica y , $y = s/R$, sendo R o raio da Terra, a função de Stokes toma a forma:

$$S(s) = \frac{2R}{s} \quad (3-25)$$

O elemento de área $ds = seny \, dy \, da$, torna-se:

$$d\sigma = \frac{1}{R^2} s \, ds \, d\alpha \quad (3-26)$$

Usando esta aproximação plana, a integral de Stokes toma a seguinte forma:

$$N(x_p, y_p) = \frac{1}{2\pi\gamma} \int_0^{s_{\max}} \int_0^{2\pi} \frac{\Delta g(s, \alpha)}{s} s \, ds \, d\alpha \quad (3-25)$$

Usando um sistema de coordenadas cartesianas ao invés de polares, com centro no ponto \mathbf{P} , tem-se:

$$N(x_p, y_p) = \frac{1}{2\pi\gamma} \int_0^{x_{\max}} \int_0^{y_{\max}} \frac{\Delta g(x, y)}{\sqrt{(x_p - x)^2 + (y_p - y)^2}} dx dy \quad (3-26)$$

onde x e y são coordenadas do ponto considerado e x_p e y_p coordenadas do ponto de cálculo. Esta expressão é uma integral de convolução e pode ser expressa na forma:

$$N_p(x_p, y_p) = \frac{1}{2\pi\gamma} \Delta g(x, y) * d_N(x, y) \quad (3-27)$$

onde:

$$d_N = \left[(x_p - x)^2 + (y_p - y)^2 \right]^{1/2} \quad (3-28)$$

Aplicando a Transformada de Fourier, tem-se:

$$N(x, y) = \frac{1}{2\pi\gamma} F^{-1} \{ F[\Delta g(x, y)] \cdot F[d_N(x, y)] \} \quad (3-29)$$

sendo F e F^{-1} representando o operador da Transformada de Fourier e sua inversa.

Uma correção pode ser aplicada na expressão acima para levar em conta a aproximação esférica, já que até agora, usava-se uma aproximação plana (Schwarz et al., 1990).

A aproximação ao valor da integral introduzida pela forma plana da função de Stokes pode ser minimizada se se considera a forma esférica da mesma função. A integral na forma esférica é dada pela equação (3-24).

Escrevendo a (3-24) em função da latitude \mathbf{j} e da longitude \mathbf{l} , tem-se:

$$N(\varphi_p, \lambda_p) = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \Delta g(\varphi, \lambda) S(\varphi_p, \lambda_p, \varphi, \lambda) \cos \varphi d\varphi d\lambda \quad (3-30)$$

Como a anomalia da gravidade está disperso em uma grade com espaçamento constante, a (3-30) fica (Sideris, 1994).

$$N(\varphi_1, \lambda_k) = \frac{R}{4\pi\gamma} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{M-1} \Delta g(\varphi_j, \lambda_i) \cos \varphi_j S(\varphi_1, \lambda_k, \varphi_j, \lambda_i) \Delta\varphi \Delta\lambda \quad (3-31)$$

Pode-se aplicar a Transformada de Fourier na aproximação esférica da integral de Stokes em uma ou duas dimensões, conhecida como 1D FFT e 2D FFT, respectivamente. O inconveniente se usar a 2D FFT é a utilização da função de Stokes de forma aproximada. Para que a função da integral de Stokes seja avaliada sem aproximação, ou seja, com valor exato, é necessário fazer a avaliação em uma dimensão, ou seja, 1D FFT, que hoje é o método mais usado. A equação (3-31) para esta condição pode ser escrita assim (Sideris, 1994):

$$N(\varphi_1, \lambda_k) = \frac{R}{4\pi\gamma} \sum_{j=0}^{N-1} \left[\sum_{i=0}^{M-1} \Delta g(\varphi_j, \lambda_i) \cos \varphi_j S(\varphi_1, \varphi_j, \lambda_k - \lambda_i) \Delta\lambda \right] \Delta\varphi \quad (3-32)$$

Para $\varphi_1 = \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_N$

Nesta técnica, 1D FFT, os valores da função de Stokes, entre o ponto de cálculo e o de integração, para uma determinada diferença de longitude, são os mesmos para todos os pontos de cálculos sobre o paralelo. A convolução é realizada somente em uma direção, leste-oeste, na direção norte-sul realiza a integração numérica direta (Sideris, 1994). As grandes vantagens desta técnica são: o resultado é o mesmo daquele obtido com a integração numérica direta e como a convolução é realizada somente em uma direção, os recursos computacionais são mais otimizados. Detalhes e comparações das diversas técnicas podem ser encontrados em Haagmans et al (1993) e Forsberg e Sideris (1993). Resultados numéricos da aplicação da

técnica de 1D FFT em determinações de modelos geoidais podem ser encontrados em She (1993) e Sideris e She (1994), além é claro, deste trabalho que utilizou desta técnica para determinar o modelo SPGEOID2002.

3.5 – Reduções da Gravidade

Os valores de g medidos sobre a superfície física da Terra necessitam ser reduzidos para a superfície do geóide para aplicação da integral de Stokes, pois esta exige que não existam massas externas à superfície limitante e que os valores de contorno sejam sobre a mesma superfície. Esta exigência se faz necessária para que o potencial perturbador seja uma função harmônica sobre o geóide e seja tratado como um problema de valor de contorno na teoria do potencial. Adota-se para tanto um método que elimine a influência das massas topográficas. Vários métodos são propostos para fazer esta redução da gravidade e eliminação de massas topográficas: Redução de Ar Livre (Free Air), Correção de Bouguer, Correção Isostática, Condensação de Helmert e Inversão de Rudski. Essas reduções também são chamadas de regularização da Terra.

Independente do método utilizado, essa Terra Regularizada, estará com seu potencial modificado em relação à Terra real, o que implica numa mudança no geóide. Esta alteração no geóide é chamada de efeito indireto e resultará numa superfície com alguma diferença do geóide, chamada de cogeóide, Figura 3.2. O que se deseja é adotar um método de regularização que resulte no menor efeito indireto possível.

Dependendo da aplicação, geofísica, geodésia, etc..., uma ou outra redução trará um melhor resultado. Por exemplo, a correção de Bouguer quase sempre é usada nas aplicações geofísicas, causando uma grande mudança no potencial, com

isso grande efeito indireto. A correção de ar livre despreza as massas que estão sobre o geóide, considerando que o aumento de gravidade é resultante do aumento da altitude; seu efeito indireto é pequeno. Para aplicações geodésicas, o método que mais tem sido usado é a condensação de Helmert.

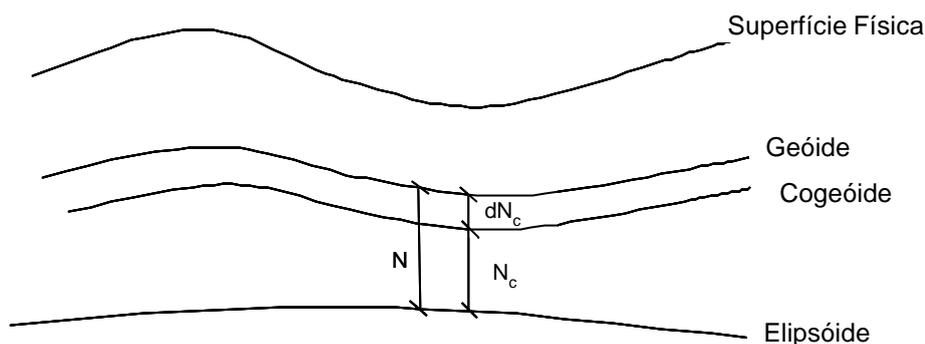


Figura 3.2 – Geóide e Cogeóide

3.5.1 – Método da Condensação de Helmert

Este método consiste em condensar as massas topográficas acima do geóide em uma superfície material sob o geóide de densidade proporcional à altitude das massas condensadas. Isto não elimina as massas topográficas como na redução de Bouguer, pelo contrário, a massa total da Terra não sofre qualquer alteração.

O método pode ser resumido nas seguintes etapas (Blitzkow, 1996):

1. Substituir o efeito das massas topográficas, pelo efeito da camada superficial sobre o geóide;
2. Reduzir o valor da aceleração da gravidade observada na superfície física ao geóide (Correção Ar Livre).

Embora este método não elimine as massas topográficas, não alterando a quantidade de massa total da Terra, causa uma mudança na distribuição das mesmas, com isso um efeito indireto. Dependendo da precisão com que se espera determinar

as alturas geoidais o efeito indireto pode ser desprezado, como é o caso do SPGEOID2002.

Para reduzir o valor da aceleração da gravidade observada sobre a superfície física para a superfície geoidal através da correção de Ar Livre é necessário o conhecimento do gradiente da aceleração da gravidade da Terra real. Este gradiente não pode ser determinado, pois não se conhece a distribuição de densidade de massa no interior da Terra. Deste modo, para fazer a correção de Ar Livre utiliza-se o gradiente da Terra normal. O resultado é que a aplicação da integral de Stokes resulta em alturas do quase-geóide e não do geóide. Não obstante ao fato, este texto se referirá sistematicamente ao geóide, embora a rigor exigisse a expressão quase-geóide.

CAPÍTULO 4

MODELOS DO GEOPOTENCIAL

Um modelo do geopotencial é o nome dado ao conjunto de coeficientes A_{nm} B_{nm} da equação do potencial (2-51) expresso em forma de funções harmônicas esféricas até um dado grau e ordem. Antes da era espacial era difícil o cálculo de modelos do geopotencial, pois os dados de anomalias da gravidade que poderiam ser usados no cálculo do modelo, eram poucos e de distribuição irregular sobre a Terra.

Os satélites funcionam como sensores do campo gravitacional e a análise de suas órbitas possibilitam modelar o mesmo campo. Entretanto, os satélites são sensíveis somente aos longos comprimentos de onda do campo gravitacional o que resulta na limitação aos coeficientes de ordem mais baixas ($n=m \leq 72$) através dos satélites. Os curtos comprimentos de onda são modelados a partir de medições da gravidade sobre a superfície física.

4.1 – Histórico dos Modelos do Geopotencial

Os satélites, o Sputnik I, Explorer I e Vanguard I foram os primeiros a terem suas órbitas analisadas, sendo que em 1958 o primeiro valor para o coeficiente de achatamento dinâmico C_{20} foi publicado (Buchar, 1958). A partir daí vários pesquisadores estudando as órbitas de outros satélites, publicaram valores para os demais coeficientes. Os cientistas D. G O’Keefe, C. D Batchelor, D. G King-Hele, E. Buchar, L. G. Jacchia, R. H. Merson, A. Cook, Y. Kozai, entre outros, estão entre os principais estudiosos na determinação de coeficientes do geopotencial nesta época.

Em 1966 o Smithsonian Astrophysical Observatory, publicou um modelo do geopotencial até o grau e ordem 8, (Lundquist; Veis, 1966). A análise das órbitas foi feita através de observações óticas das câmeras balísticas Baker-Nunn. Outros modelos foram sendo publicados em 1973, 1974 e 1977, a medida em que aumentava a quantidade de satélites disponíveis e melhorava a metodologia de análise.

O GSFC também iniciou a publicação de modelos do geopotencial sob a sigla GEM – Goddard Earth Model a partir de 1976, utilizando somente observações aos satélites artificiais. Os dados de gravimetria que ajudariam a modelar os curtos comprimentos de onda sempre esbarravam na distribuição irregular na superfície terrestre e nas grandes áreas sem nenhuma observação, como nos oceanos. Foram publicados os modelos GEM9 e GEM10 (Lerch et al., 1977). O GEM9, além de observações dos satélites GEOS-3, LANDSAT-1, LAGEOS e STARLETTE englobou também observações óticas, laser e eletrônica (Doppler e Banda-S), sendo completo até o grau e ordem 20. Os modelos GEM10A, GEM10B e GEM10C são completos até o grau e ordem 30, 36 e 180 respectivamente. Nestes modelos foram incluídas observações de altimetria por radar do satélite GEOS-3 e valores médios de anomalias da gravidade em quadrículas de $1^0 \times 1^0$ disponíveis.

O Groupe de Recherches de Géodésie Spatiale de Toulouse e o Sonderforschungsbereich, de Munique, também publicaram em 1976 seu primeiro modelo do geopotencial denominado de GRIM. O GRIM1 foi publicado em 1976 (Balmino et al., 1976). Depois publicou-se o modelo GRIM2 combinando dados de anomalias médias em quadrículas de $1^0 \times 1^0$, obtendo coeficientes até o grau e ordem 30. O GRIM3 complementado com dados de altimetria por radar atingiu o grau e ordem 36.

A Universidade de Ohio também se dedicou ao cálculo e publicação de modelos do geopotencial. Sob a sigla OSU, foi publicado o OSU81, completo até o grau 180, o OSU86, OSU89 e OSU91 completos até grau 360. A diferença destes modelos é a utilização de grande quantidade de dados gravimétricos.

Depois do lançamento de modelos de graus elevados as atenções se voltaram para os graus mais baixos com observações mais precisas de satélites específicos. Atendendo a este novo desafio foram publicados pelo GSFC os modelos JGM1 e JGM2, estes com observações do satélite altimétrico TOPEX/POSEIDON. Os modelos JGM são completos até o grau e ordem 70. Foram feitas observações a cerca de 30 satélites, incluindo satélites com dispositivos de altimetria por radar, GEOS3, SEASAT e GEOSAT, além do TOPEX/POSEIDON, cujos dados possibilitaram obter um modelo da topografia dinâmica do oceano até grau e ordem 15 (NEREM et al., 1994).

Com os dados de altimetria por radar do satélite TOPEX/POSEIDON e a liberação de dados gravimétricos dos países da ex União das Repúblicas Socialistas Soviéticas e da República Popular da China, o NIMA e o GSFC da NASA, juntamente com o Naval Surface Warfare Center e a Universidade de Ohio, se uniram para desenvolver um modelo global do geopotencial, completo até grau e ordem 360, que combinaria todo o acervo de dados, tanto de satélites quanto de anomalias médias da gravidade. Este projeto foi executado e o resultado é o EGM96–Earth Gravity Model 1996.

4.2 – O Earth Gravity Model - EGM96

O EGM96 é completo até o grau e ordem 360, compreendendo 130317 coeficientes.

Para o desenvolvimento do EGM96 foram usados os dados gravimétricos do NIMA, dados de órbitas de satélites da NASA/GSFC e do DoD (RAPP; NEREM, 1994). O esforço do NIMA consistiu em desenvolver um banco de dados mundiais de anomalias médias da gravidade em quadrículas de 30' x 30', com a precisão compatível com o modelo. O esforço do GSFC consistiu em modelar as órbitas de aproximadamente 30 satélites, incluindo dados de SLR – Satellite Laser Ranging, Tracking and Data Relay Satellite System – TDRSS e técnicas GPS para desenvolver o EGM96S (modelo somente com dados de satélites até o grau e ordem 70 do EGM96). O modelo também incorporou dados derivados dos satélites altimétricos TOPEX/POSEIDON, ERS-1 e GEOSAT. O GSFC incluiu também novas observações dos satélites LAGEOS, LAGEOS-2, AJISAI, STARLETTE, STELLA, GPSMET e GEOS-1.

O EGM96 até o grau e ordem 70 é recomendado para determinação e predição precisa de órbitas de satélites. A sensibilidade dessas órbitas ao geopotencial está fortemente relacionada à altitude dos satélites.

Todos os dados do EGM96 é de domínio público e está disponível na internet na pagina⁵ do NIMA.

⁵ Página do NIMA – www.nima.mil.com

CAPÍTULO 5

DADOS UTILIZADOS PARA O CÁLCULO DO SPGEOID2002

Os dados usados para cálculo do SPGEOID2002 são provenientes de várias fontes. O GETECH da Universidade de Leeds, Inglaterra, tem desde 1986, reunido e organizado os dados gravimétricos de diversos continentes. Na América do Sul foi completado em 1990 o SAGP - South American Gravity Project que no Brasil cobriu algumas áreas e revelou outras com poucas informações gravimétricas, como o Centro Oeste e Norte do país. A EPUSP e o IBGE realizaram um esforço conjunto na última década cobrindo parte considerável destas áreas.

Além desta iniciativa faz parte do acervo de dados gravimétricos da EPUSP usados no cálculo do SPGEOID2002, dados provenientes de empresas públicas e privadas que executam levantamentos gravimétricos no Brasil, entre elas a Petrobrás, Companhia de Pesquisas de Recursos Minerais e o Observatório Nacional. É de muita importância a contribuição dada pelo IAG-USP, através do Departamento de Geofísica. Alguns dados são provenientes de universidades que também realizam pesquisas na área de Geodésia e compartilham dados gravimétricos, como a Universidade Federal do Paraná, Universidade de Brasília, Universidade de Manaus.

5.1 – Dados Gravimétricos

Com base no SAGP e nas contribuições mencionadas, o LTG-EPUSP possui um arquivo de aproximadamente 500000 estações gravimétricas nas Américas do Sul e Central.

Este arquivo é organizado de acordo com critérios estabelecidos pela EPUSP em quadrículas de $1^0 \times 1^0$ em ordem crescente de longitude por leste e decrescente em latitude, iniciando na extremidade mais ao norte e oeste e se desenvolvendo para sul e leste. Cada linha do arquivo contém as seguintes colunas: latitude e longitude em minutos, aceleração da gravidade em mGal, altitude ortométrica em metros, anomalias ar livre e Bouguer em mGal, tipo de observação (L=continente, M=mar, A=aéreo, B=fundo do mar), código de confidencialidade (0=não confidencial, 1=confidencial), correção do relevo em mGal, código do levantamento (5 caracteres), país de origem da informação (3 caracteres), fonte da informação (3 caracteres). A distribuição destes dados é mostrada na Figura 5.1.

No cálculo do SPGEOID2002 foram utilizados os dados que estão localizados na região compreendida entre as latitudes de -9^0 a -36^0 SUL e pelas longitudes de -64^0 a -34^0 OESTE, que contém o Estado de São Paulo.

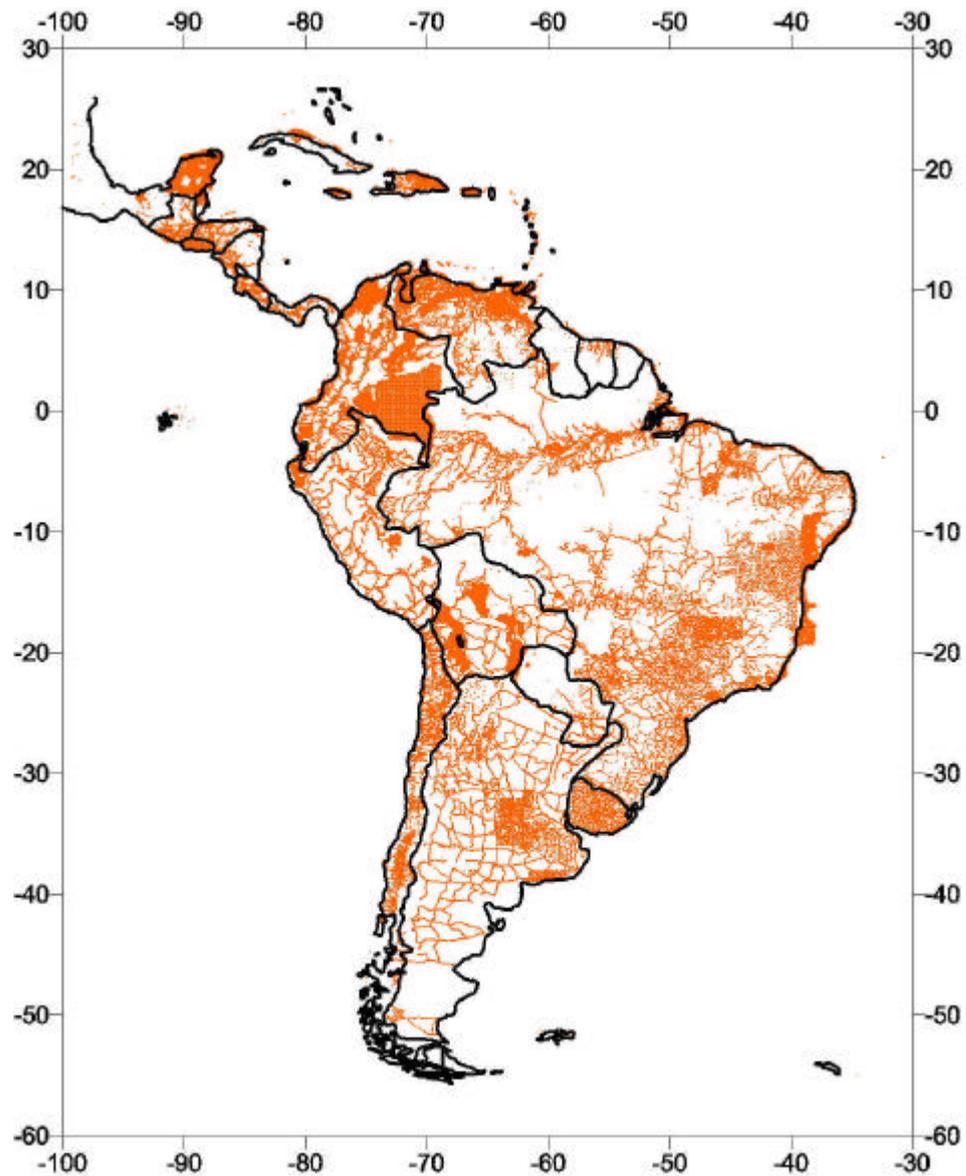


Figura 5.1 – Distribuição dos dados gravimétricos nas Américas do Sul e Central

O sistema de referência usado foi o WGS84 com a seguinte fórmula para a gravidade da Terra normal, que é a aplicação da equação (2-44):

$$\gamma_{\text{WGS84}} = 978032,53359 \frac{1 + 0,00193185265241 \text{ sen}^2 \phi}{\sqrt{1 - 0,00669437999014 \text{ sen}^2 \phi}} \text{ m Gal} \quad (5-1)$$

sendo ϕ a latitude.

A correção de ar livre foi aplicada ao valor da aceleração da gravidade medida sobre a superfície física utilizando a seguinte expressão empírica (Blitzkow, 1996):

$$C_{AL}^1 = (0,3083293357 + 0,0004397732 \cos^2 \phi) H + 7,125 \times 10^{-8} H^2 \quad (5-2)$$

sendo ϕ a latitude e H a altitude ortométrica.

A correção da atmosfera ao valor de g , devido ao fato da gravidade da Terra normal, equação (5-1), considerar a massa da mesma, foi realizada com a seguinte fórmula empírica (Blitzkow, 1996):

$$\delta g_a = 0,87 e^{-0,116H} H^{1,074} \quad \text{mGal} \quad (5-4)$$

sendo H em quilômetros.

Foi aplicada a correção de Bouguer levando em consideração um platô de extensão 167 Km, de espessura H com densidade **2,67 g/cm³** na região continental e **1,17 g/cm³** nas regiões oceânicas. A correção da curvatura da Terra foi também incluída dada pela expressão (Blitzkow, 1996):

$$C_{BO}^1 = -1,4639108 \times 10^{-3} H + 3,532715 \times 10^{-7} H^2 - 4,449648 \times 10^{-14} H^3 \quad \text{mGal} \quad (5-5)$$

sendo H a espessura do platô em metros.

Nos oceanos a correção de Bouguer é um pouco diferente e é dada pela equação (Blitzkow, 1996):

$$C_{BO}^2 = -6,40427 \times 10^{-4} P - 1,54751 \times 10^{-7} P^2 - 4,06303 \times 10^{-14} P^3 \quad \text{mGal} \quad (5-6)$$

sendo P a profundidade local em metros.

As Figuras 5.2 e 5.3 mostram a distribuição dos dados gravimétricos no Brasil e em São Paulo.

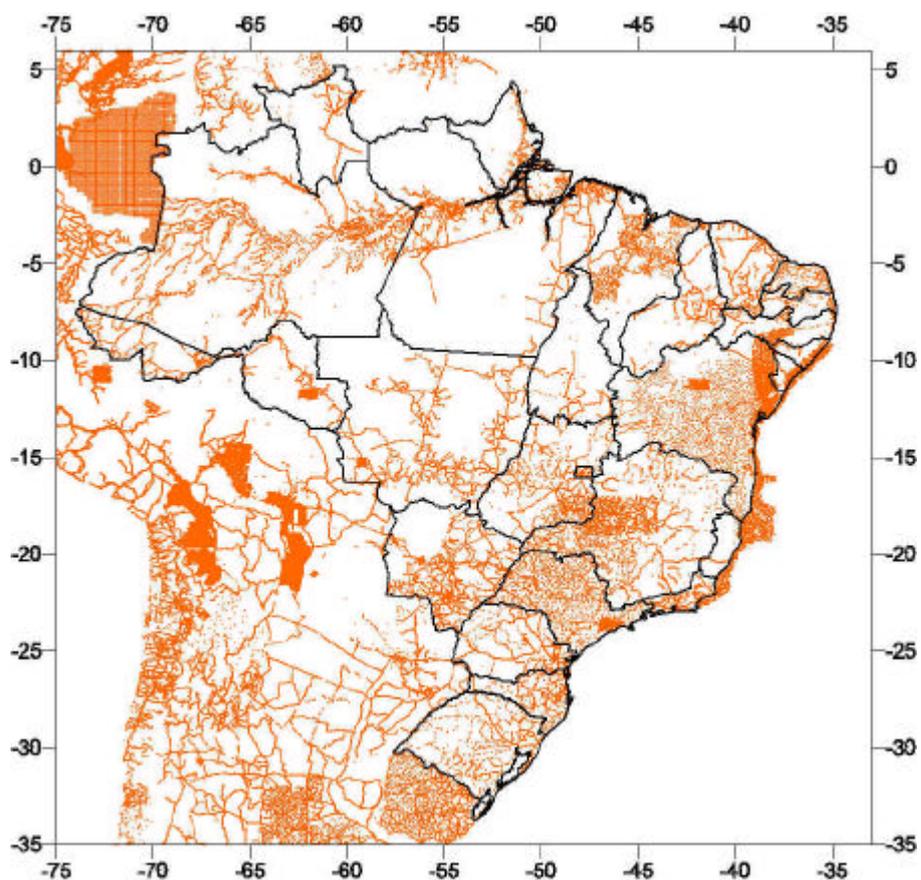


Figura 5.2 – Distribuição dos dados gravimétricos no Brasil

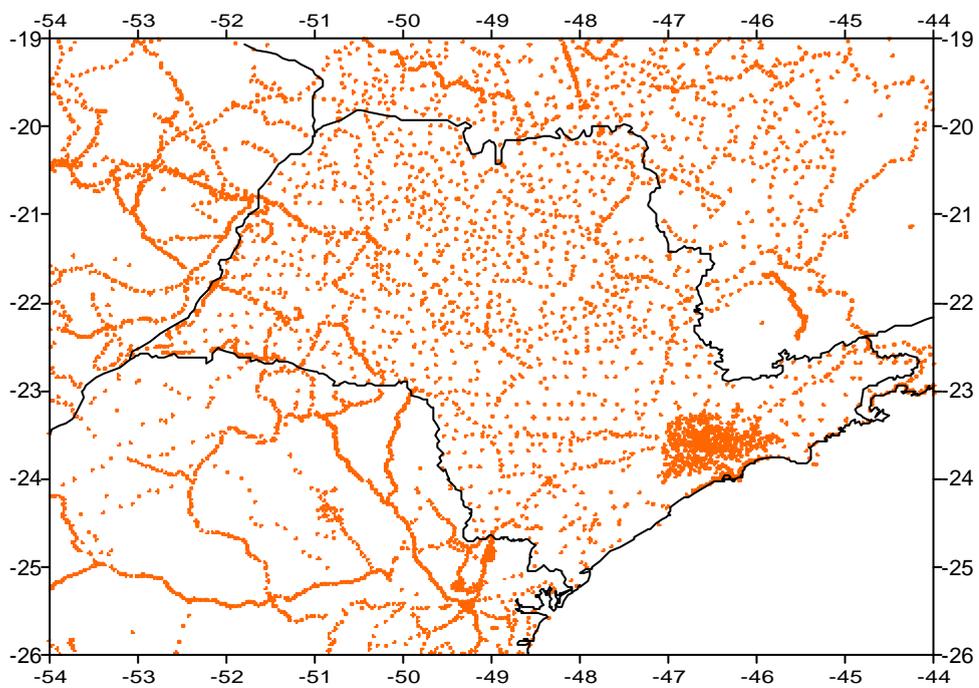


Figura 5.3 – Distribuição dos dados gravimétricos no Estado de São Paulo

5.2 – Dados Altimétricos

Um modelo digital do terreno confiável é de fundamental importância para a gravimetria. Dele, dependem as correções aplicadas aos valores de gravidade medidos sobre a superfície física para valores sobre a superfície geoidal. Por isso o SAGP criou um modelo digital do terreno para toda a América do Sul consistindo de um modelo de altitudes para o continente e de profundidades para os oceanos numa grade com espaçamento de 3'.

Para definição deste modelo, foram utilizados vários tipos de informações topográficas:

- Modelo de altitudes global denominado ETOPO5;
- Valores digitalizados a partir de cartas topográficas;
- Alturas estabelecidas nas estações gravimétricas;
- Locação de linhas costeiras.

O ETOPO5 é constituído de um modelo digital de elevação do terreno para os continentes e de profundidade para os oceanos numa grade regular com espaçamento de 5', publicado em 1988 pelo NDGC do NOAA.

As fontes de dados para geração do ETOPO5 foram várias: US Naval Oceanographic Office, NIMA e US Navy Fleet Numerical Oceanographic Center, Bureau of Mineral Resources da Austrália, Department of Industrial and Scientific Research da Nova Zelândia. Este modelo é de domínio público e está disponibilizado na internet na página⁶ do NOAA.

A resolução do modelo ETOPO5 é de 5'x 5' e a precisão varia de 1 a 150 metros dependendo da fonte dos dados da área considerada (NOAA, 2002).

⁶ Página do NOAA – <http://www.ngdc.noaa.gov/mgg/global/etopo5.html>

As Figuras 5.4.1, 5.4.2 e 5.4.3 mostram o modelo digital do terreno usado no cálculo do SPGEOID2002, nas Américas do Sul e Central, Brasil e em São Paulo, respectivamente.

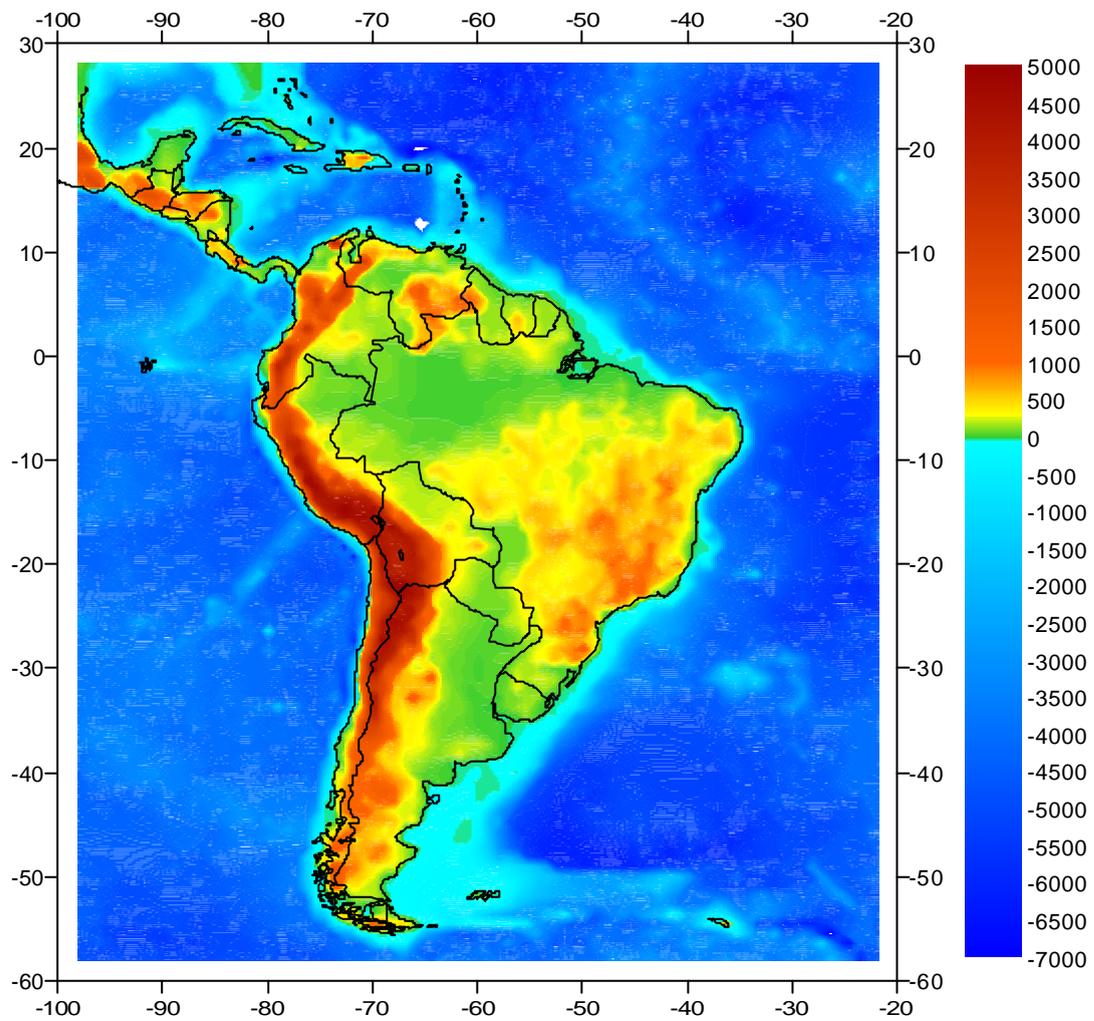


Figura 5.4.1 – Modelo Digital do Terreno para as Américas do Sul e Central

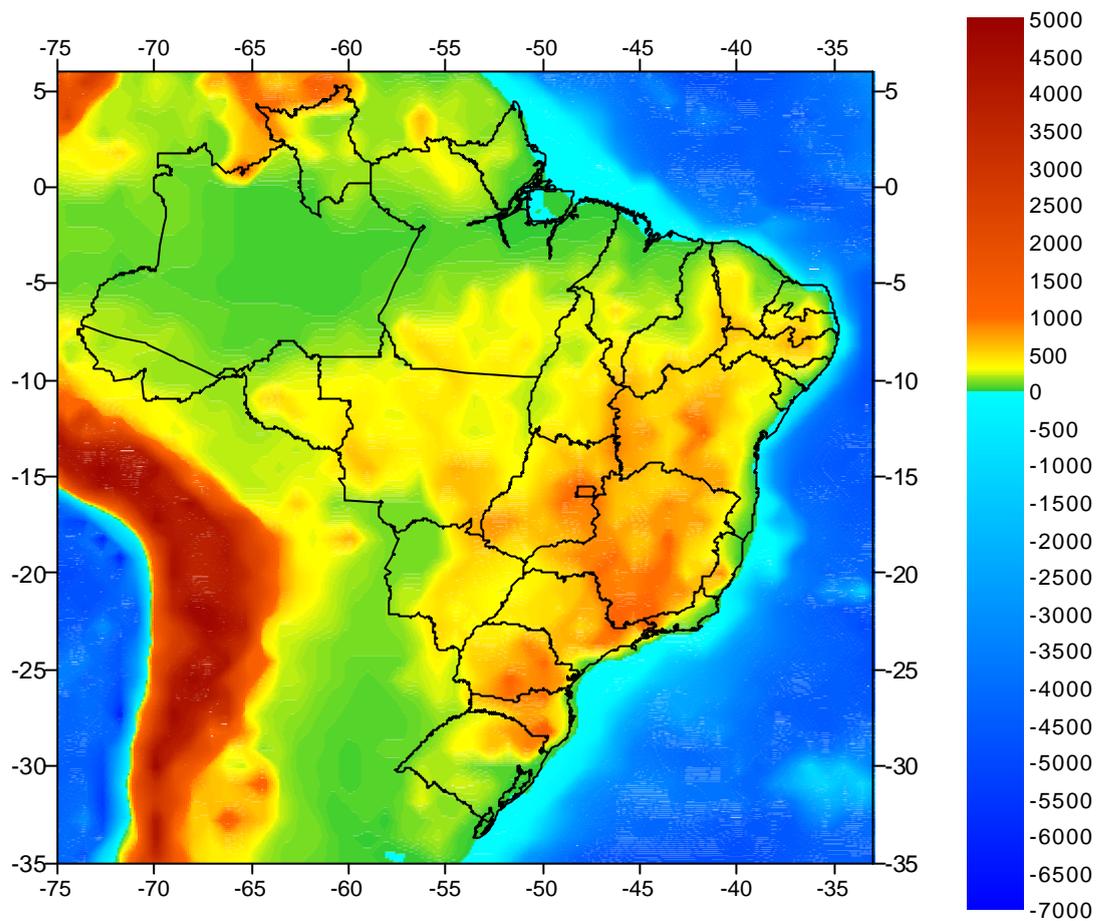


Figura 5.4.2 – Modelo Digital do Terreno para o Brasil

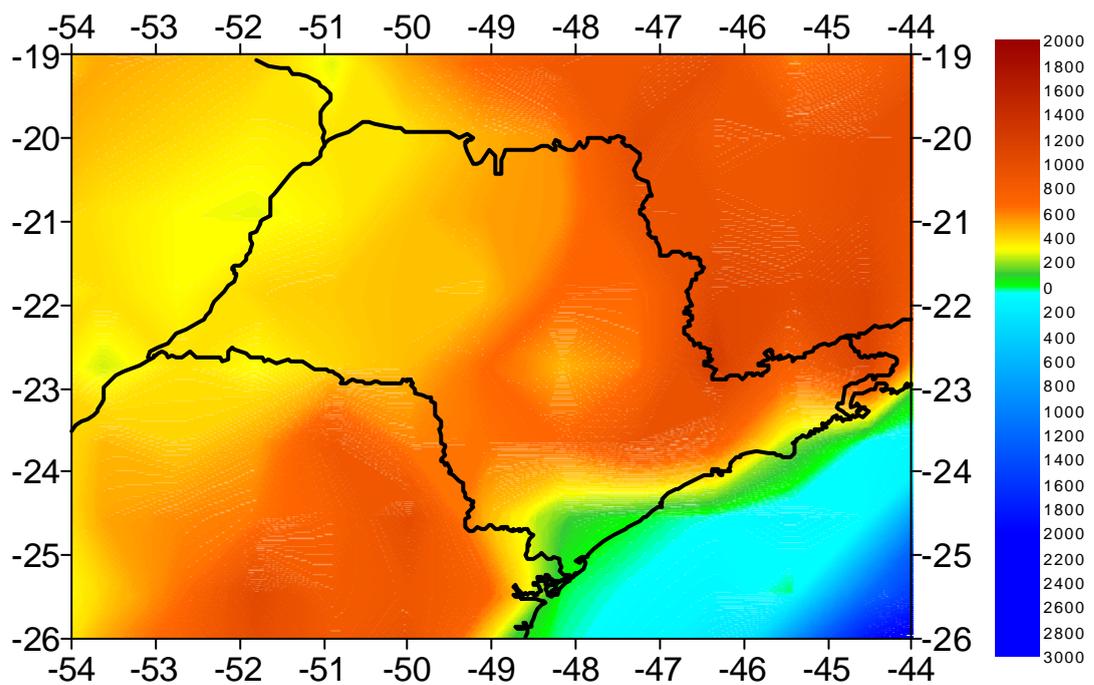


Figura 5.4.3 – Modelo Digital do Terreno para o Estado São Paulo

5.3 – Processamentos dos Dados do SPGEOID2002

O LTG-EPUSP possui um acervo de dados e programas para cálculos geoidais que vem sendo utilizado em outras pesquisas e atividades da escola.

Do arquivo geral de dados gravimétricos da América do Sul foi gerado um arquivo de anomalias médias para quadrículas de 5' x 5'. Este arquivo é assim organizado:

- Latitude e longitude em minutos do centro da quadrícula de 5' x 5';
- Valores médios para a anomalia de ar livre, Bouguer, altitude ortométrica, profundidade nos oceanos, correção do relevo.
- Número de pontos usados no cálculo da média;
- Identificação da quadrícula.

Verificou-se a presença de muitas áreas vazias, que não possuíam valores médios de anomalias decorrentes da falta de cobertura gravimétrica. Então optou-se por gerar um arquivo de anomalias médias para quadrículas de 10' x 10' derivado das anomalias médias de 5' x 5'. A Figura 5.5 mostra a distribuição destes dados no Estado de São Paulo

Os modelos digitais do terreno e correção do relevo foram também processados e obtidos valores médios para as mesmas quadrículas.

Para as regiões oceânicas que faziam parte da área foi usado o modelo global de anomalias da gravidade para o oceano, denominado KMS99. Este modelo foi calculado com dados dos satélites altimétricos ERS-1 e GEOSAT e publicado pelo Kort & Matrikstyrelsen⁷ da Dinamarca. O modelo é formado por valores de

⁷ União de: Geodetic Institute, Hydrographic Department e Danish Cadastral Department.

anomalias da gravidade, em mGal, numa grade regular com resolução de $2' \times 2'$, que cobre as áreas oceânicas.

O desenvolvimento completo deste modelo pode ser encontrado Andersen O; Knudsen P.; Trimmer R. (2000). Estes dados são de domínio público e estão disponíveis endereço de FTP⁸ do KMS.

A Figura 5.6 mostra o modelo de anomalias médias usado para cálculo do SPGEOID2002.

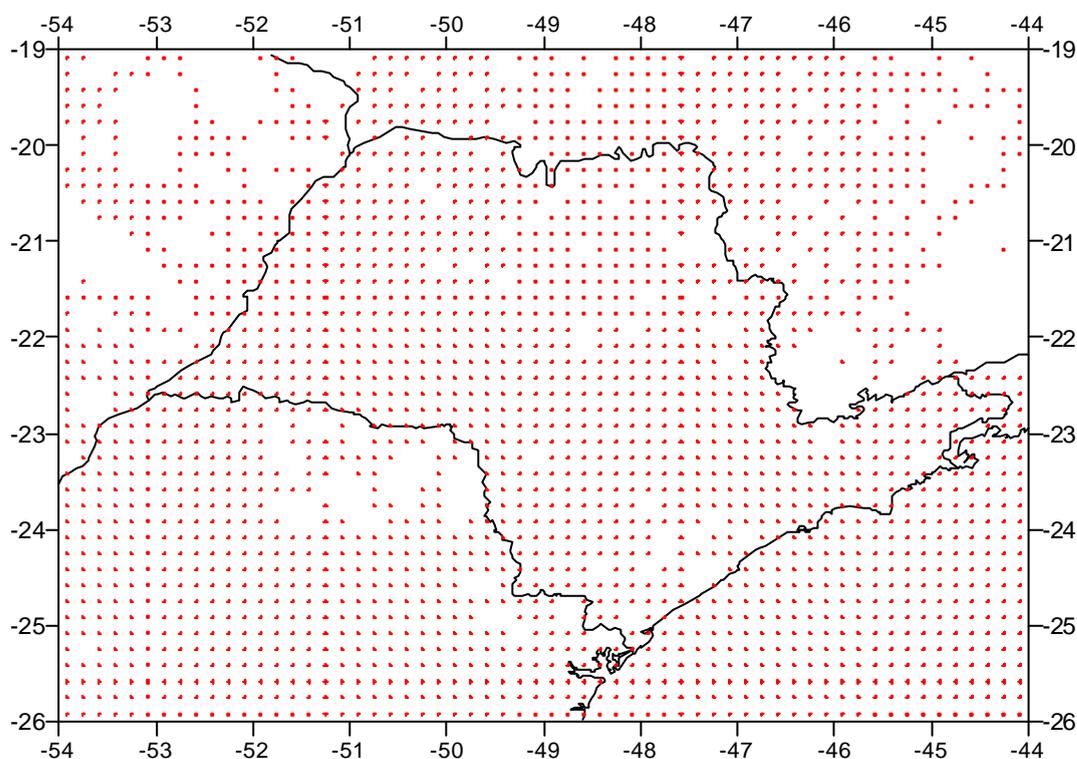


Figura 5.5 – Distribuição das anomalias médias de 10' x 10'

⁸ FTP do KMS – <ftp.kms.dk/GRAVITY>

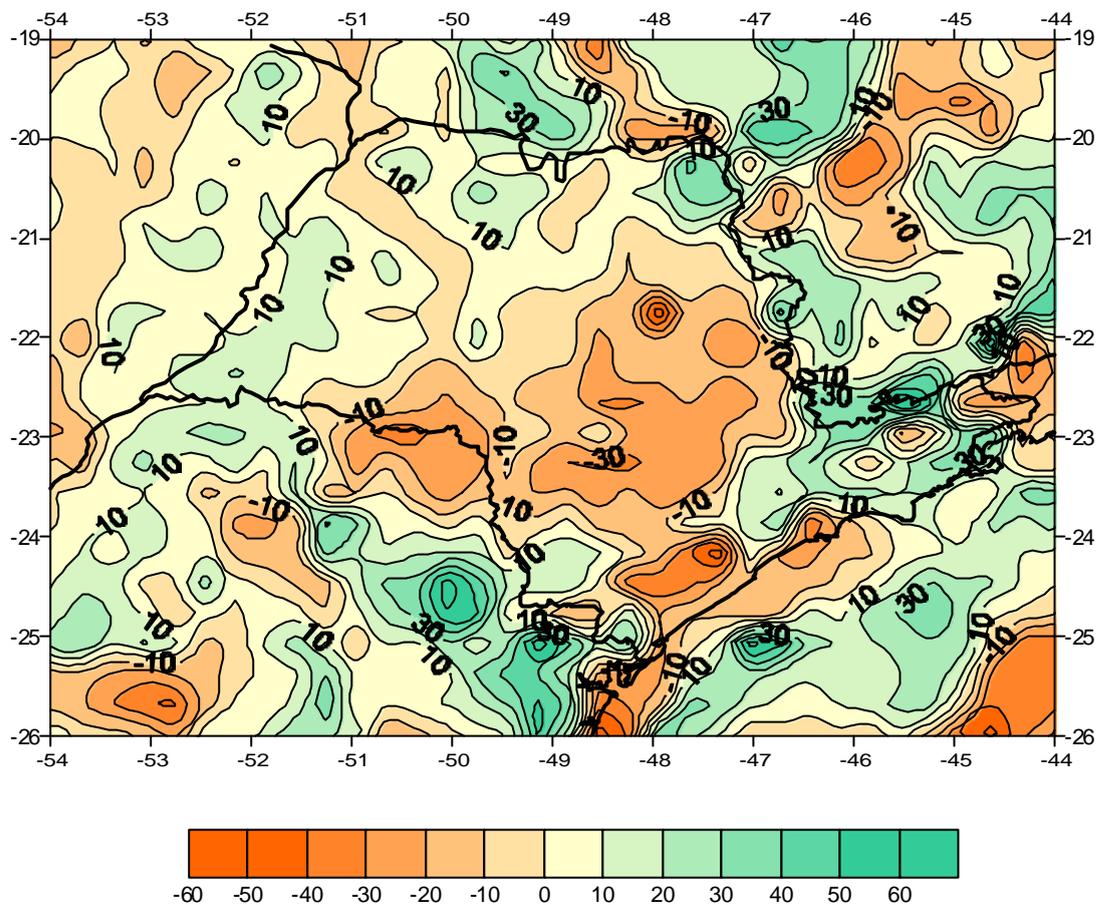


Figura 5.6 – Modelo de Anomalias Médias da Gravidade (mGal)

Para avaliar o geóide calculado foi usado um arquivo de 175 pontos da rede de nivelamento onde foram feitas observações com satélites de posicionamento, 86 pontos com o antigo sistema TRANSIT⁹, denominados de pontos DOP e 89 pontos com o sistema GPS, denominados de pontos GPS. Este arquivo é organizado da seguinte maneira: coordenadas cartesianas geocêntricas dos pontos (X, Y, e Z), altitude geométrica e altitude ortométrica. A Figura 5.7 mostra a distribuição dos pontos DOP e GPS no Estado de São Paulo.

⁹ Sistema de posicionamento por satélites anterior ao GPS que usava o método Doppler de posicionamento

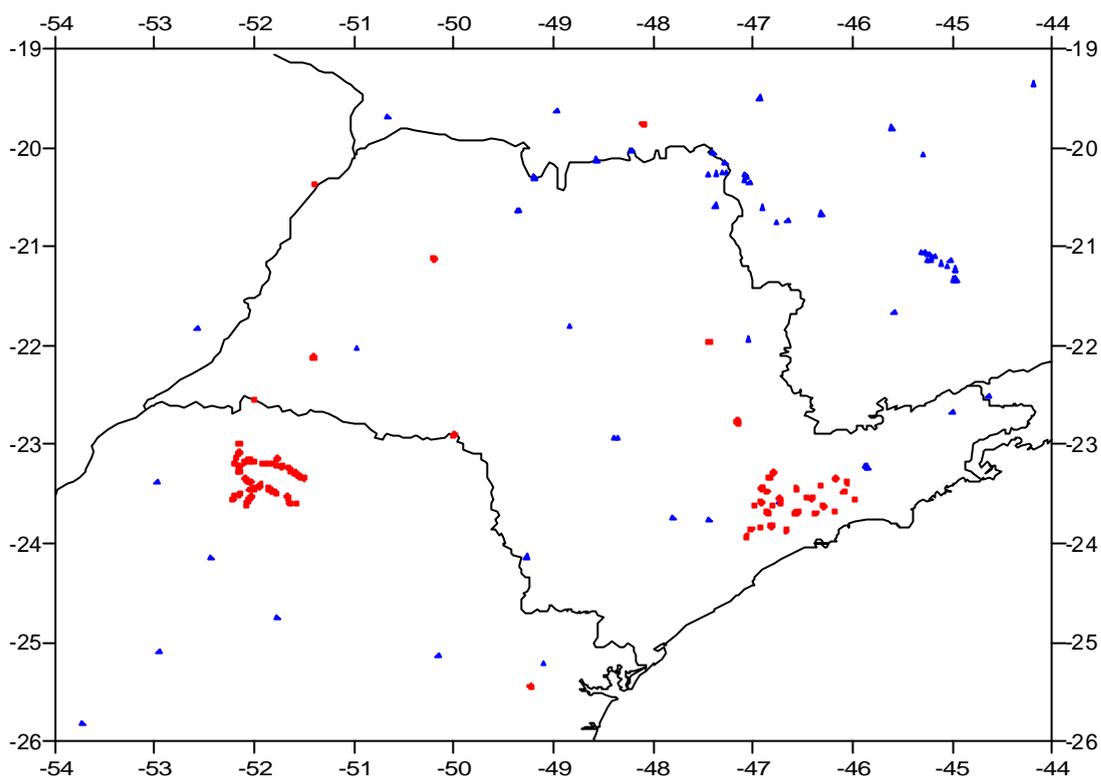


Figura 5.7 – Distribuição dos pontos DOP (azuis) e GPS (vermelhos)

Foram usados basicamente três softwares para o processamento do modelo geoidal SPGEOID2002. Dois desenvolvidos pelo Prof. Denizar Blitzkow chamados de NZE96 e STOKES. O NZE96 foi usado para executar os cálculos e avaliações do modelo EGM96 e o STOKES foi usado para executar o cálculo da integral de Stokes pelo método da integração numérica. Para executar o cálculo do pelo método da FFT foi usado o software desenvolvido pelo Prof. M. Sideris e modificado por W. E. Featherstone que implementou as rotinas de cálculo para as diferentes modificações da função de Stokes.

CAPÍTULO 6

RESULTADOS E DISCUSSÃO

6.1 – Avaliação do Modelo do Geopotencial EGM96

Primeiramente foi feita uma avaliação do modelo EGM96, comparando os valores das alturas esferoidais obtidas através do modelo com alturas geoidais obtidas através de satélites de posicionamento. Foram utilizados os 175 pontos, 86 pontos DOP e 89 pontos GPS. Estes pontos fazem parte da Rede Brasileira de Nivelamento do IBGE, onde foram feitas observações de satélites. A avaliação foi feita para diferentes valores de grau e ordem do modelo do geopotencial: 36, 50, 72, 100, 180 e 360. O sistema utilizado para as comparações foi o WGS84.

Para cada ponto foi obtida a diferença entre a altura geoidal por satélites N_s e a altura esferoidal obtida pelo modelo EGM96 N_E .

$$\Delta N = N_s - N_E \quad (6-1)$$

A partir das diferenças foi obtida a diferença padrão $\sigma_{\Delta N}$:

$$\sigma_{\Delta N} = \sqrt{\frac{\sum (\Delta N)^2}{n(n-1)}} \quad (6-2)$$

sendo n o número de pontos disponíveis.

A média das diferenças é a chamada altura geoidal de ordem zero N_0 que representa a diferença do semi-eixo maior entre o elipsóide de referência WGS84 e o elipsóide que melhor se adapta ao modelo do geopotencial EGM96 (Blitzkow; Sá, 1983). Os resultados desta verificação estão na Tabela 6.1.

Resumo dos Resultados da Avaliação do EGM96								
Grau e Ordem	Diferença Padrão (m)		Altura Geoidal de ordem zero N_0 (m)		Valor Máximo (m)		Valor Mínimo (m)	
	DOP	GPS	DOP	GPS	DOP	GPS	DOP	GPS
36	1,37	1,75	-0,66	-0,78	4,35	4,14	-5,39	-2,69
50	1,13	0,71	-0,05	-0,15	1,93	1,58	-2,94	-3,41
72	1,05	0,71	-0,56	-0,34	2,01	1,97	-3,31	-2,67
100	1,16	0,70	-0,77	-0,36	1,70	2,51	-3,08	-3,18
180	1,12	0,62	-0,70	-0,30	1,69	2,60	-3,23	-2,93
360	1,07	0,79	-0,65	-0,49	1,64	2,71	3,63	-3,73

Tabela 6.1 – Comparação entre os pontos DOP, GPS e o modelo EGM96

As Figuras 6.1 a 6.6 mostram a distribuição das diferenças entre os pontos DOP e GPS e os valores calculados pelo modelo do geopotencial para os diferentes valores de grau e ordem.

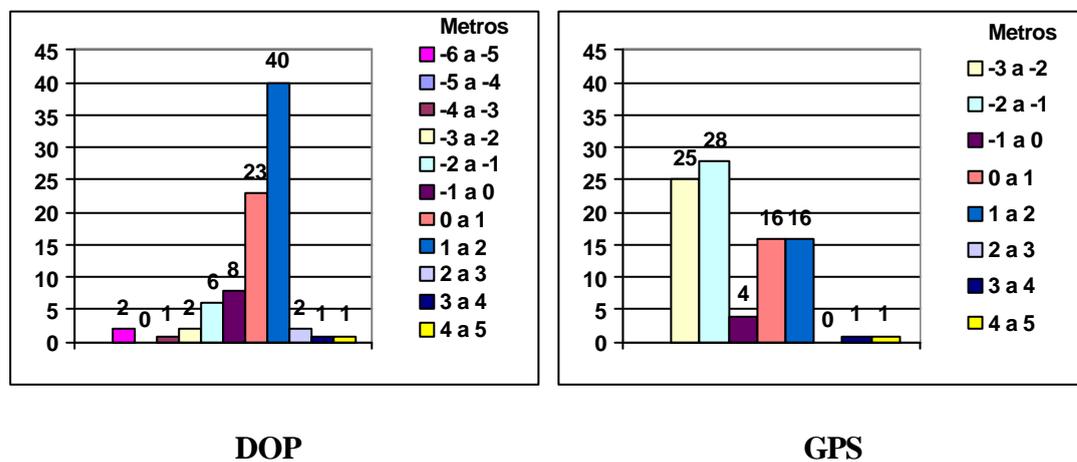


Figura 6.1 – Distribuição das diferenças para o EGM96 ($n=m=36$)

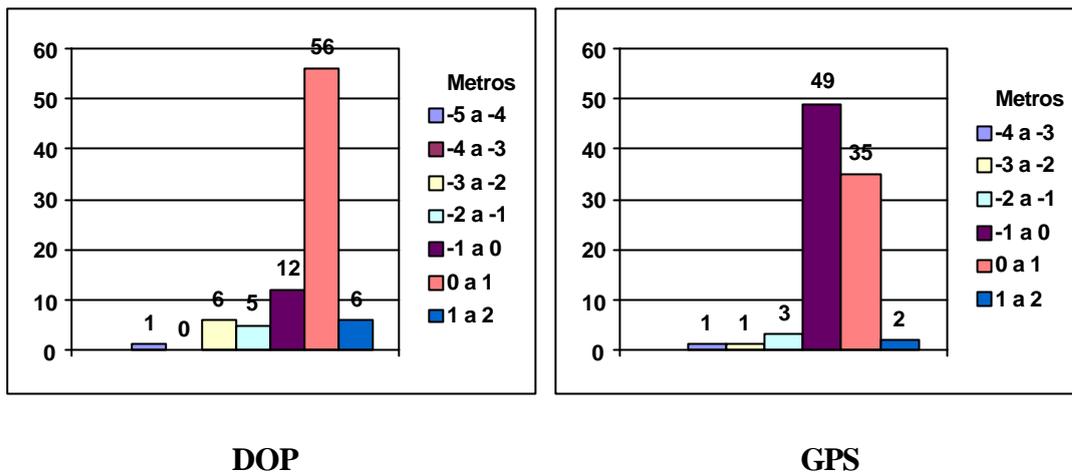


Figura 6.2 – Distribuição das diferenças para o EGM96 (n=m=50)

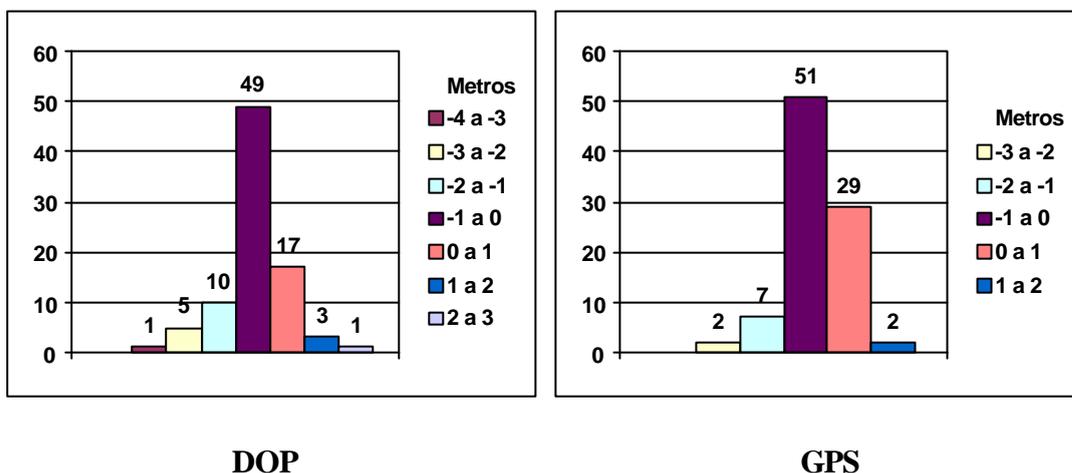


Figura 6.3 – Distribuição das diferenças para o EGM96 (n=m=72)

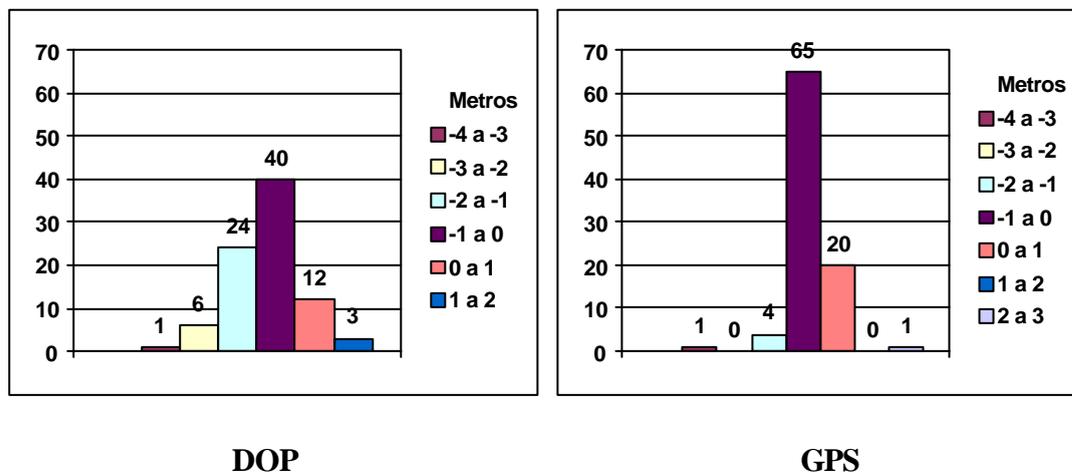


Figura 6.4 – Distribuição das diferenças para o EGM96 (n=m=100)

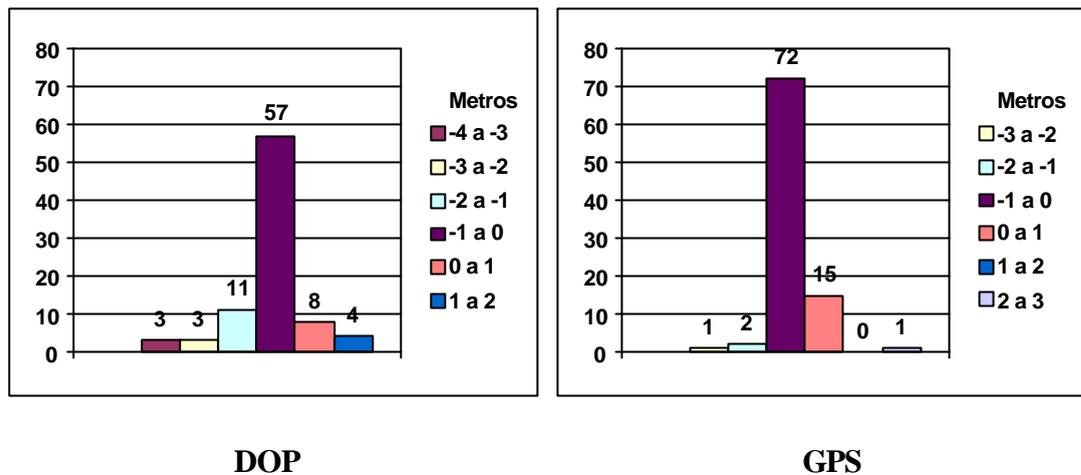


Figura 6.5 – Distribuição das diferenças para o EGM96 (n=m=180)

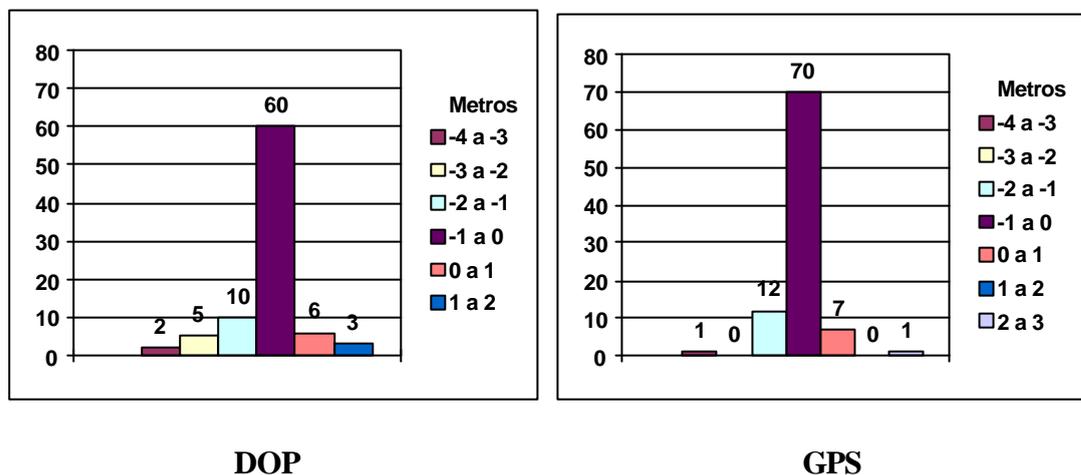


Figura 6.6 – Distribuição das diferenças para o EGM96 (n=m=360)

Analisando os dados da Tabela 6.1, verifica-se que a diferença padrão, aplicação de expressão (6-2), para os pontos DOP ficou em torno 1,10 m, com exceção do grau e ordem 36 que está em 1,37 m. Para os pontos GPS a diferença padrão está em torno de 0,70 m, menor 0,40 m do que os pontos DOP, com exceção do grau e ordem 36 que esta em 1,75 m. Verifica-se também que as diferenças padrão para os graus 50, 72, 100, 180 e 360 diferem entre si de aproximadamente 0,17 m. Este fato nos mostra que acima do grau e ordem 50 as diferenças padrão se mantêm. Os valores das diferenças diminuem à medida que aumenta o grau e ordem

do modelo do geopotencial, até o grau 180. A partir deste, as diferenças aumentam, chegando a 0,79 para o grau 360. Este aumento é devido à falta de dados gravimétricos que influenciariam nos graus e ordem mais altos, quando do cálculo do modelo EGM96. Com relação à 3ª coluna (N_0), a média nas diferentes estimativas é de -0,56 m para os pontos DOP e -0,40 m para os pontos GPS, ou seja, o elipsóide que mais se adapta ao modelo avaliado, é um elipsóide com semi-eixo maior de aproximadamente 6378136,50 m, menor 0,50 m do que o elipsóide WGS84 usado na avaliação. Todos os histogramas mostram tendência de distribuição não normal com média das diferenças diferente de zero, significando a existência de alguma diferença sistemática nos dados.

Analisando a Figura 5.7 que mostra a distribuição dos pontos DOP e GPS no Estado de São Paulo, verifica-se que os pontos GPS não têm uma distribuição ideal na área de estudo, mas são os dados disponíveis no momento.

6.2 – Cálculo do Modelo Geoidal

Após a avaliação do modelo EGM96 através dos pontos DOP e GPS, passou-se ao cálculo das alturas geoidais utilizando, além do modelo do geopotencial, dados de anomalias médias da gravidade e modelos digitais do terreno nos continentes e de altimetria por radar nas regiões oceânicas.

O procedimento matemático usado para calcular o SPGEOID2002 é conhecido como remove-calcula-restaura. Ou seja, removeu-se das anomalias médias da gravidade a componente de longo comprimento de onda, dada pelo modelo do geopotencial EGM96. Optou-se pelo grau e ordem 50. Calculou-se a altura geoidal através da integral modificada de Stokes estendendo-se a uma vizinhança $\mathbf{y}_0 = 4^\circ$. Em seguida restaurou-se na altura geoidal a componente de longo comprimento de

onda, através do modelo do geopotencial EGM96, evidentemente no mesmo grau e ordem.

Existem dois procedimentos para avaliação da integral de Stokes: a integração numérica e o FFT. A vantagem do FFT é o menor tempo de processamento em relação ao método de integração numérica. Foi executado o cálculo pelos dois procedimentos acima citados, sendo feitos diferentes experimentos, atribuindo-se as seguintes denominações:

- **INT-VK** – Integração numérica da fórmula Stokes, com a modificação de Vanicek-Kleusberg, modificação descrita pela expressão (3-13);
- **FFT-FV** – Integral de Stokes, por FFT com a modificação de Featherstone-Vanicek, modificação descrita pela expressão (3-18);
- **FFT-WG** – Integral de Stokes, por FFT com a modificação de Wong-Gore, modificação descrita pela expressão (3-8);
- **FFT-VK** – Integral de Stokes, por FFT com a modificação de Vanicek-Kleusberg, modificação descrita pela expressão (3-13).

Os cálculos foram feitos numa malha regular com espaçamento de 10'x10' num retângulo que envolve o Estado de São Paulo. A malha contém 162 linhas por 180 colunas. A Figura 6.7 mostra a malha criada, sendo que os pontos coincidem com o ponto central da quadrícula.

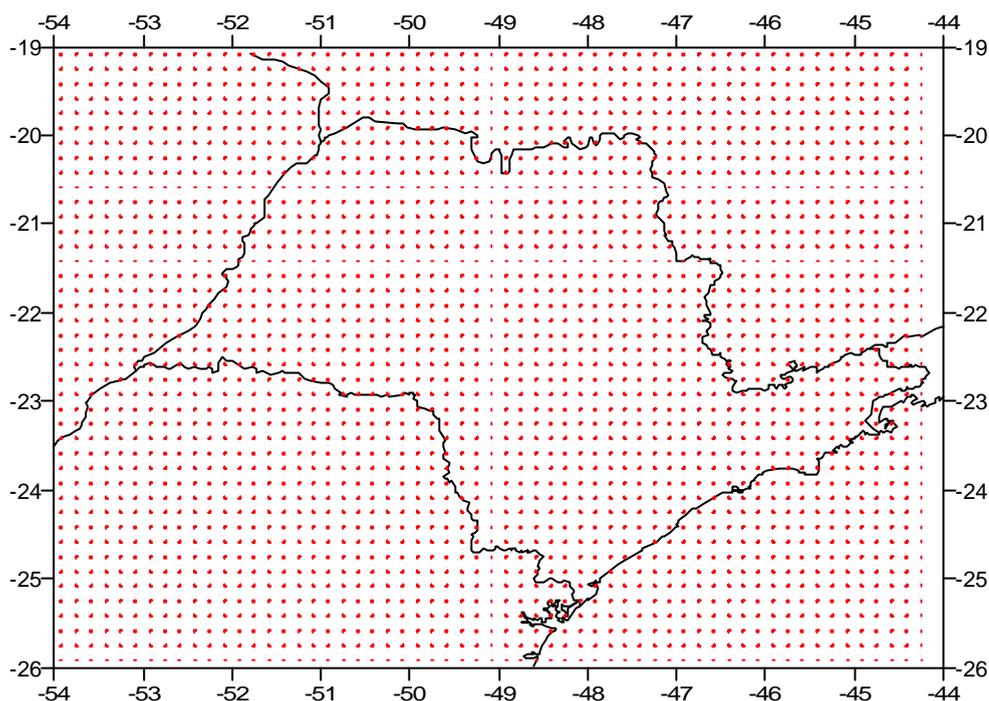


Figura 6.7 – Malha dos pontos de cálculo

Os modelos geoidais decorrentes dos quatro experimentos foram comparados entre si para verificar a consistência dos resultados. Estes são apresentados na Tabela 6.2.

Resumo das comparações entre os experimentos FFT				
Experimentos	Diferença Padrão (m)	Média das Diferenças (m)	Valor Máximo (m)	Valor Mínimo (m)
FFT-FV e FFT-VK	0,01	0,01	0,02	-0,01
FFT-WG e FFT-VK	0,32	-0,24	0,86	-0,19
FFT-FV e FFT-WG	0,32	-0,24	0,84	-0,19

Tabela 6.2 – Resumo das comparações entre os experimentos FFT

Como pode ser verificado na tabela acima, o resultado do cálculo através das modificações de Vanicek-Kleusberg e Featherstone-Vanicek, experimentos FFT-VK e FFT-FV, produziram resultados muito semelhantes, ou seja, a diferença padrão

ficou entre -0,01 m e 0,02 m com média de 0,01 m. Já a modificação de Wong-Gore, experimento FFT-WG, produziu resultado bastante diferente em relação aos dois citados acima, com as diferenças entre -0,19 m a 0,86 m, com diferença padrão de 0,32 m. A média das diferenças ficou em 0,24 m, significando a existência de alguma diferença sistemática nos dados comparados. Os gráficos das Figuras 6.8 a 6.10 mostram a distribuição das diferenças que são não normais.

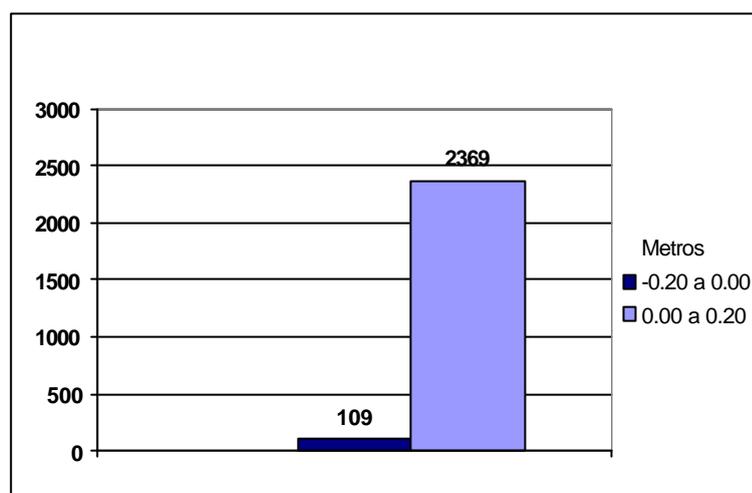


Figura 6.8 – Distribuição das diferenças entre FFT-VK e FFT-FV

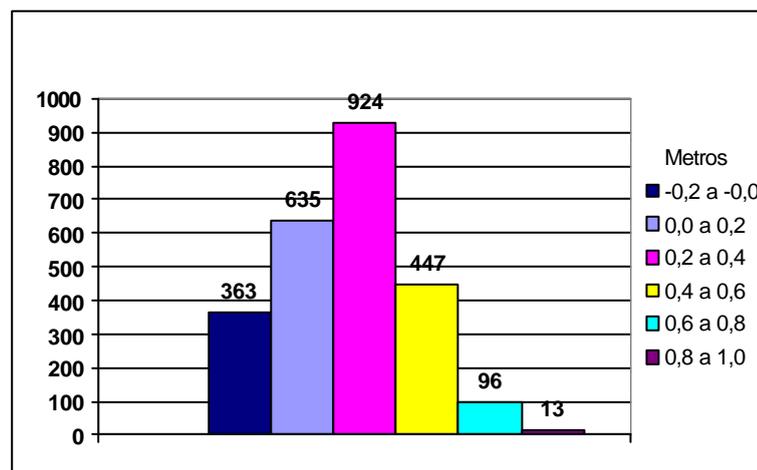


Figura 6.9 – Distribuição das diferenças entre FFT-WG e FFT-VK

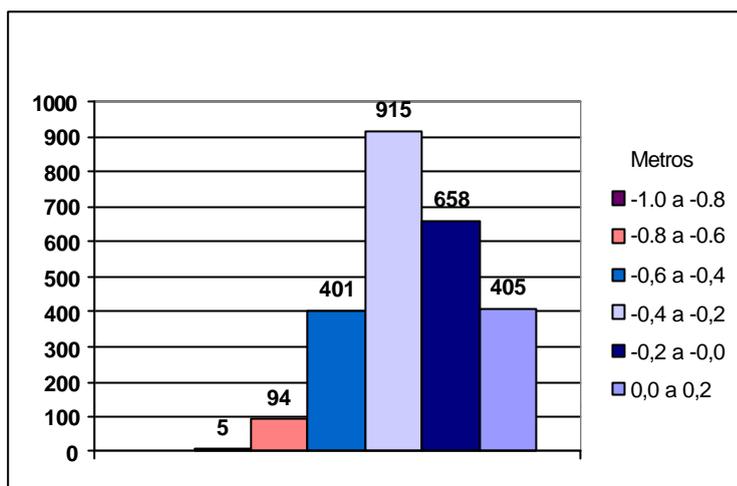


Figura 6.10 – Distribuição das diferenças entre FFT-FV e FFT-WG

A Tabela 6.3 e os gráficos das Figuras 6.11 a 6.13 se referem à comparação dos cálculos feitos com a integral de Stokes avaliada pelo método da integração numérica, experimento **INT-VK**, e os resultados feitos por FFT, com cada uma das modificações já citadas, experimentos **FFT-VK**, **FFT-FV** e **FFT-WG**.

Resumo das comparações entre os experimentos INT e FFT				
Experimento	Diferença Padrão (m)	Média das Diferenças (m)	Valor Máximo (m)	Valor Mínimo (m)
INT-VK e FFT-VK	0,54	0,01	1,88	-1,52
INT-VK e FFT-FV	0,54	0,01	1,88	-1,52
INT-VK e FFT-WG	0,63	-0,23	1,69	-1,93

Tabela 6.3 – Resumo das comparações entre os experimentos INT e FFT

Como pode ser constatado nos resultados das comparações entre as modificações de Vanicek-Kleusberg e Featherstone-Vanicek calculadas via FFT e Vanicek-Kleusberg via integração numérica, a diferença padrão e a média das diferenças são as mesmas 0,54 m e 0,01 m respectivamente, pois estas modificações

são muito semelhantes. A média das diferenças em 0.01 m significa a não existência de diferença sistemática. O resultado da modificação de Wong-Gore via FFT resultou numa diferença padrão e média das diferenças, maiores que as anteriores 0,63 m e -0,23 m, respectivamente. Este último significando alguma diferença sistemática. Os gráficos mostram tendência de distribuição normal das diferenças, com exceção do gráfico da Figura 6.13.

Estas comparações têm o objetivo de verificar a coerência das metodologias envolvidas.

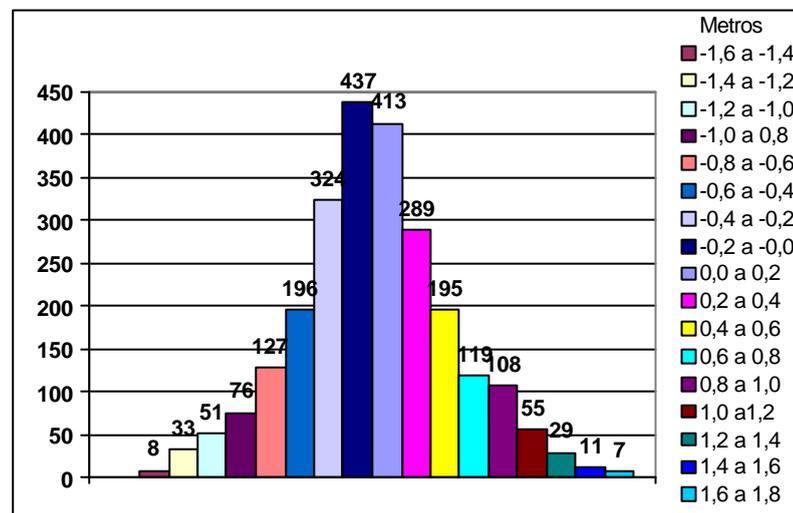


Figura 6.11 – Distribuição das diferenças entre INT-VK e FFT-FV

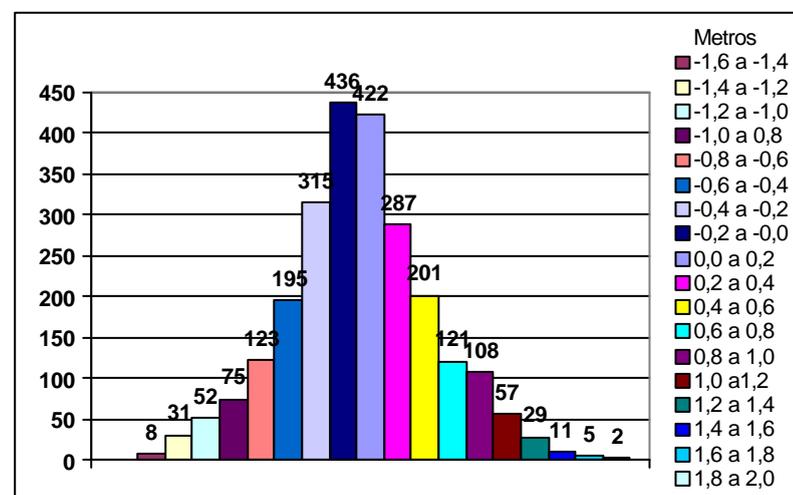


Figura 6.12 – Distribuição das diferenças entre INT-VK e FFT-VK

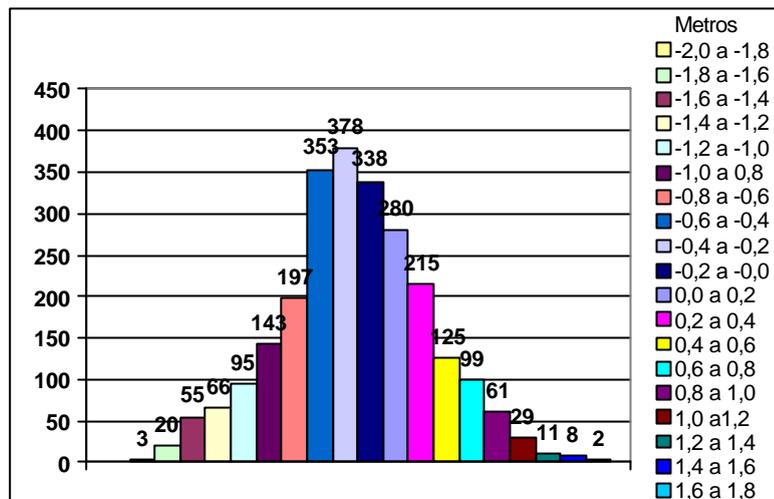


Figura 6.13 – Distribuição das diferenças entre INT-VK e FFT-WG

Para avaliação da exatidão das alturas geoidais calculadas foram usados 86 pontos DOP e 89 pontos GPS, cujas alturas geoidais serão consideradas como referência. O resultado deste procedimento está na Tabela 6.4 e nos gráficos das Figuras 6.14 a 6.17 com distinção entre pontos DOP e GPS.

Resumo das comparações entre os experimentos e os pontos DOP e GPS								
Experimento	Diferença Padrão (m)		Média das Diferenças (m)		Valor Máximo (m)		Valor Mínimo (m)	
	DOP	GPS	DOP	GPS	DOP	GPS	DOP	GPS
INT-VK	1,17	0,70	-0,58	-0,49	1,38	1,33	-3,20	-1,65
FFT-VK	1,06	0,78	-0,52	-0,74	1,36	-0,04	-3,70	-1,57
FFT-FV	1,05	0,77	-0,51	-0,74	1,37	-0,04	-3,69	-1,56
FFT-WG	0,98	0,62	-0,21	-0,46	1,77	0,29	-3,45	-1,47

Tabela 6.4 – Resumo das comparações entre experimentos e os pontos DOP e GPS

Analisando a Tabela 6.4 verifica-se que, para todos os experimentos, as diferenças padrão para os pontos DOP foram sempre maiores do que para os pontos GPS. Este resultado já era esperado, pois, independente da distribuição não ser a ideal, sabe-se que os pontos GPS são mais precisos do que os pontos DOP.

Verifica-se também que o experimento FFT-WG resultou numa menor diferença padrão 0,62 m e média das diferenças $-0,46$ m, se comparado com os outros experimentos. Mais uma vez a média das diferenças mostra alguma diferença sistemática nos dados. Os gráficos das Figuras 6.14 a 6.17 mostram distribuições não normais para as diferenças obtidas. Os gráficos relacionados aos pontos DOP mostram distribuição totalmente aleatória, indicando mais uma vez imprecisões relacionadas a estes.

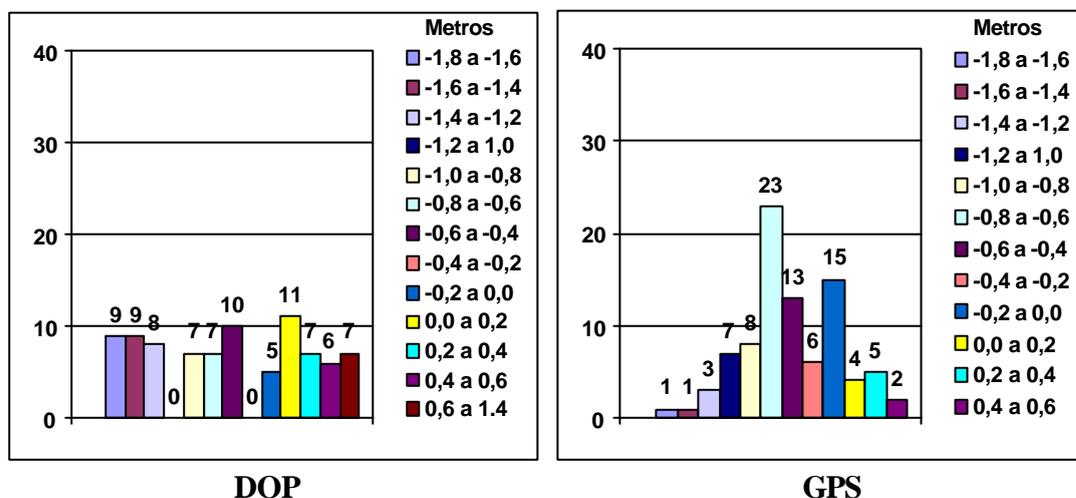


Figura 6.14 – Distribuição das diferenças entre INT-VK e os pontos DOP e GPS

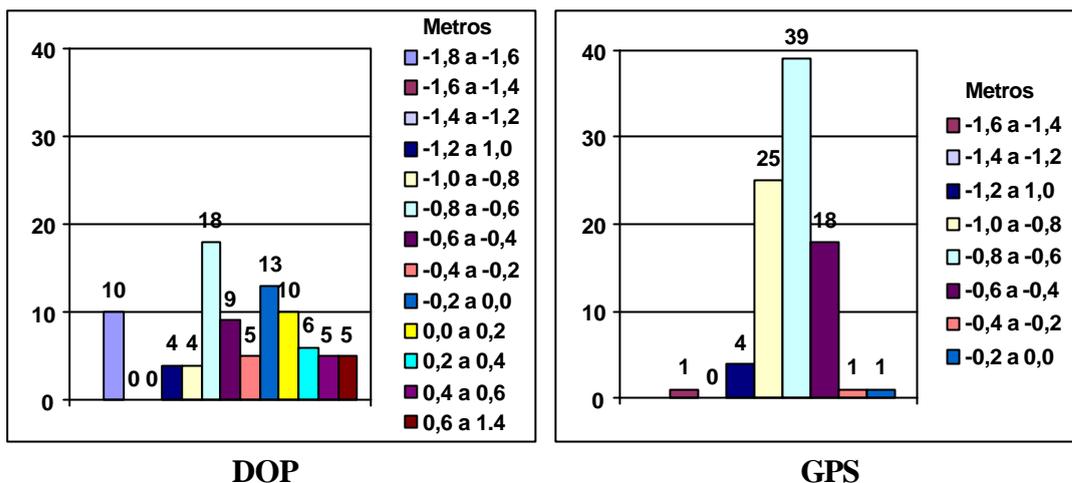


Figura 6.15 – Distribuição das diferenças entre FFT-VK e os pontos DOP e GPS

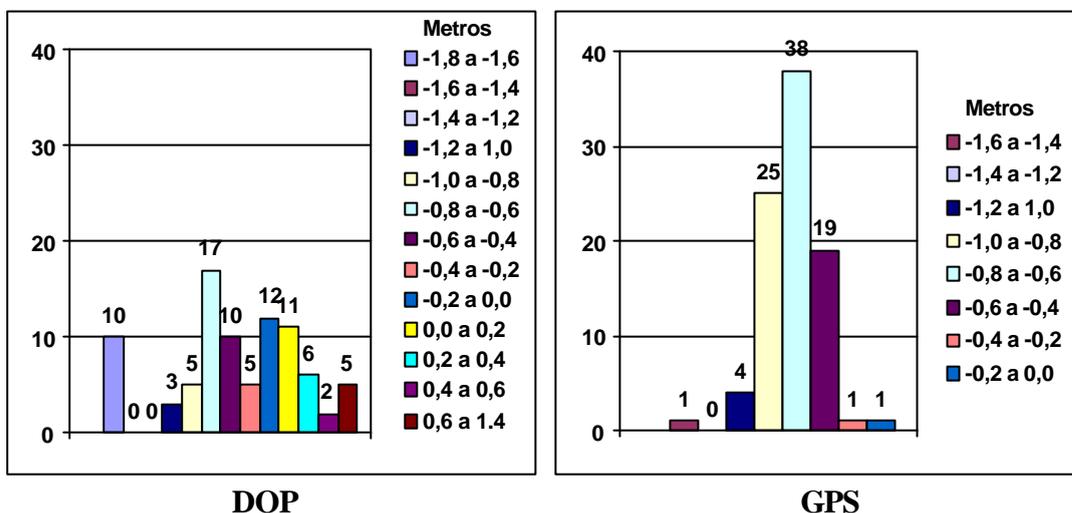


Figura 6.16 – Distribuição das diferenças entre FFT-FV e os pontos DOP e GPS

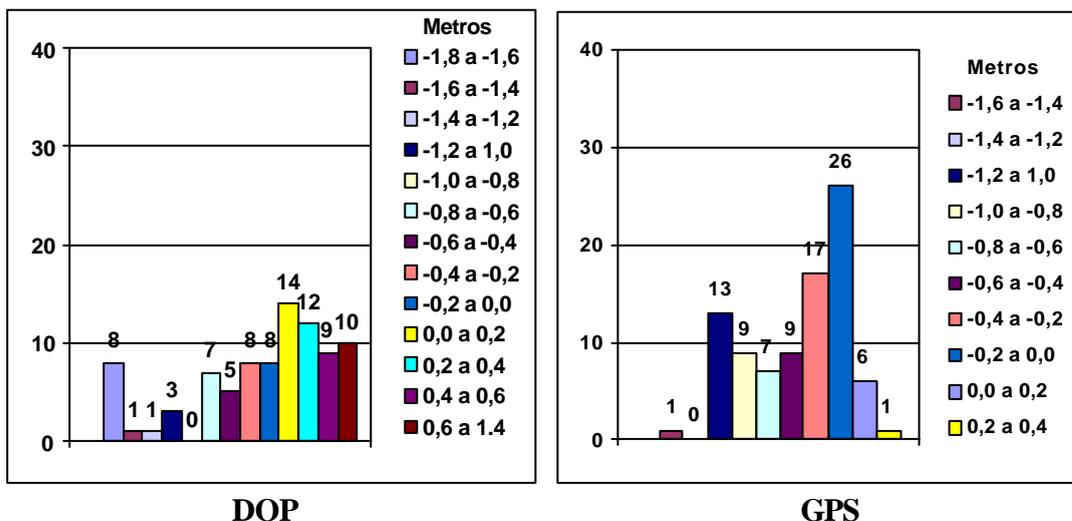


Figura 6.17 – Distribuição das diferenças entre FFT-WG e os pontos DOP e GPS

Analisando a Tabela 6.4 verifica-se que, para todos os experimentos, as diferenças padrão para os pontos DOP foram sempre maiores do que para os pontos GPS, resultado semelhante ao encontrado para a avaliação do EGM96.

Verifica-se também que o experimento FFT-WG resultou numa menor diferença padrão 0,62 m e média das diferenças $-0,46$ m se comparado com os outros experimentos, ou seja, o modelo geoidal calculado através da FFT com a modificação da função de Stokes proposta por L. Wong e R. Gore resultou em um geóide com menor diferença quando comparado com os pontos DOP e GPS. As diferenças padrão e a média das diferenças para os experimentos FFT-VK e FFT-FV são praticamente as mesmas. Já para o experimento INT-VK os valores foram menores. Analisando as médias das diferenças, nota-se que a diferença sistemática no método de integração numérica (INT-VK) é 0,25 m menor do que no método de FFT.

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

7.1 – Conclusões

Com base nos estudos executados, nos resultados obtidos e nas análises feitas, podem ser tiradas as seguintes conclusões:

- a) Com relação à avaliação do EGM96 para o Estado de São Paulo, para certas aplicações onde o modelo geoidal com precisão absoluta em torno de 1,0 m seja aceitável, pode-se usar somente o modelo do geopotencial. Quando se deseja um modelo geoidal com erros menores do que 1,0 m, é necessário combinar o modelo do geopotencial com dados de gravimetria;
- b) O modelo do geopotencial EGM96 para o Estado de São Paulo é representativo até o grau e ordem 180, o que significa uma resolução de 1°;
- c) As diferenças para os pontos GPS foram menores do que para os pontos DOP, pois o sistema GPS é muito mais preciso do que o antigo sistema TRANSIT, usado para determinar os pontos DOP;
- d) As diferenças para os pontos DOP e GPS, quando se utilizou somente o modelo do geopotencial EGM96 e quando combinou este modelo com as anomalias médias da gravidade, não se diferenciaram muito. Isto pode ser observado em regiões que, como o Estado de São Paulo, tem a superfície geoidal levemente ondulada. Para regiões onde a superfície geoidal se apresenta mais irregular, este fato não deve ocorrer.

- e) Os cálculos através das modificações de Vanicek-Kleusberg e Featherstone-Vanicek, experimentos FFT-VK e FFT-FV, produziram resultados muito semelhantes, pois, a modificação Featherstone-Vanicek é uma modificação híbrida entre a Vanicek-Kleusberg e Meissl, portanto, era esperado que seus resultados fossem muito parecidos;
- f) Os experimentos FFT-VK e INT-VK deveriam produzir resultados muito semelhantes, pois a modificação usada é a mesma, mudando somente o método de avaliação da integral. Num experimento foi usado a FFT e no outro a integração numérica. Portanto, suas diferenças deveriam ser próximas, o que não ocorreu. No momento não se encontrou uma explicação para o fato e o problema precisa ser pesquisado;
- g) A remoção até o grau e ordem 50 para o modelo do geopotencial EGM96 e a extensão da integral de Stokes até o raio de integração $\mathbf{y}_0 = 4^\circ$ foram valores definidos de maneira, até certo ponto empírica. Sabe-se que o modelo do geopotencial EGM96 representa, com boa resolução, longos comprimentos de onda, o que basicamente significa grau e ordem 36 a 72. Daí ter-se optado por um valor intermediário ($n=m=50$). A definição do raio em 4° é uma consequência da opção anterior. A influência dos curtos comprimentos de onda acima do grau e ordem 50 é restrita ao limite de 4° ;
- h) O fato da modificação de L. Wong e R. Gore resultar num geóide com menor diferença quando comparado com os pontos DOP e GPS é considerado inesperado. Segundo Vanicek P. e Sjoberg L. E. (1991) e Featherstone W. E. et. al (1998) a modificação de Vanicek-Kleusberg resultaria em um menor erro de truncamento do que a modificação L.

Wong e R. Gore. Já a modificação de Featherstone-Vanicek, Featherstone W. E. et al (1998) prova, através da segunda identidade de Green, que esta produziria um geóide com menor erro de truncamento do que L. Wong e R. Gore. Imagina-se que erros sistemáticos associado ao nivelamento geométrico das RNs, as quais foram usadas como referência, possa ter uma tendência a minimizar as diferenças para a modificação de L. Wong e R. Gore. Mas há incertezas que não permitem tirar conclusões definitivas. A comparação com os pontos DOP e GPS servem para indicar tendências;

- i) Apesar do experimento FFT-WG tenha resultado numa menor diferença padrão em relação aos pontos DOP e GPS, optou-se, por razões teóricas, por um modelo geoidal calculado através da FFT com a modificação da função de Stokes proposta por Featherstone W. E. et. al. (1998). O cálculo foi feito num retângulo que envolve o Estado de São Paulo, limitado pelas latitudes de -19° a -26° SUL e pelas longitudes de -54° a -44° OESTE. A Figura 6.19 mostra o modelo geoidal SPGEOID2002 obtido para o Estado de São Paulo. Este modelo tem diferenças absolutas da ordem de 0,80 m, quando comparado com os pontos GPS e diferença relativa da ordem de 0,4 cm/Km ou 4 ppm. A diferença relativa foi calculada pela equação (7-1). As curvas de iso-valores do modelo geoidal SPGEOID2002, Figura 7.1, estão equidistantes de 0,20 m;

$$\text{Diferença Relativa} = \frac{\sum_{n=1}^n \frac{\left| N_n^{\text{gps}} - N_{n+1}^{\text{gps}} \right| - \left| N_n^{\text{mod}} - N_{n+1}^{\text{mod}} \right|}{d_{(n,n+1)}}}{n} \quad (7-1)$$

sendo N_n^{gps} e N_{n+1}^{gps} as alturas geoidais de dois pontos, dadas pelo GPS e N_n^{mod} e N_{n+1}^{mod} as alturas calculadas pelo modelo SPGEOID2002 e $d_{n,n+1}$ a distância entre os pontos. Foram usados 88 pares de pontos com diferentes distâncias entre si.

- j) Para aplicações de engenharia é recomendado o uso do modelo através de determinações relativas.

7.2 – Recomendações

Baseado na experiência adquirida na execução deste trabalho, nos resultados obtidos, análises realizadas e problemas observados, apresenta-se a seguir, algumas recomendações que possam ser úteis em futuras pesquisas:

- a) Aprofundar a pesquisa deste assunto, principalmente no estudo mais refinado sobre as modificações da função de Stokes;
- b) Melhorar o modelo digital do terreno para que as correções aplicadas aos valores da aceleração da gravidade sejam mais precisas;
- c) Executar levantamentos gravimétricos nas áreas do Estado de São Paulo onde existem espaços vazios no arquivo de anomalias médias de 5' x 5';
- d) Utilizar observações GPS sobre a rede de nivelamento cobrindo as áreas sem nenhuma informação de referência como pode ser verificado na Figura 5.7. Com estes levantamentos pode-se dispensar os pontos DOP que, como se sabe, não são precisos;
- e) Executar nivelamento geométrico nos pontos pertencentes à Rede GPS do Estado de São Paulo, pois, nestes pontos as altitudes geométricas são conhecidas com precisão;

- f) Avaliar a rede de nivelamento quanto às incertezas observadas, principalmente quanto a erros sistemáticos advindo da distância muito grande do ponto de referência usado para o Sistema Geodésico Brasileiro, localizado em Imbituba – SC;
- g) Executar os cálculos geoidais usando outros valores para raio de integração y_0 e para outros valores de grau e ordem do modelo do geopotencial;

Algumas destas recomendações já estão em curso. O modelo digital do terreno está sendo melhorado mediante a digitalização de novas cartas topográficas, nas escalas 1:25000, 1:50000 e 1:100000 pelo IBGE. Existe também iniciativa do LTG-EPUSP para melhorar o modelo digital do terreno através do trabalho da pesquisadora A. C. Cancoro de Mattos. Em diversos estados, Minas Gerais, Santa Catarina, Paraná, etc... estão em curso o estabelecimento de redes de marcos GPS. Está sendo executado o projeto SIRGAS que pretende estabelecer um referencial único para a América do Sul. O referencial planimétrico, já foi estabelecido e o referencial altimétrico esta sendo elaborado pelo grupo de estudos III do SIRGAS.

Com todas estas iniciativas espera-se dentro de pouco tempo obter-se modelos geoidais regionais compatíveis com as precisões exigidas nos projetos de engenharia.

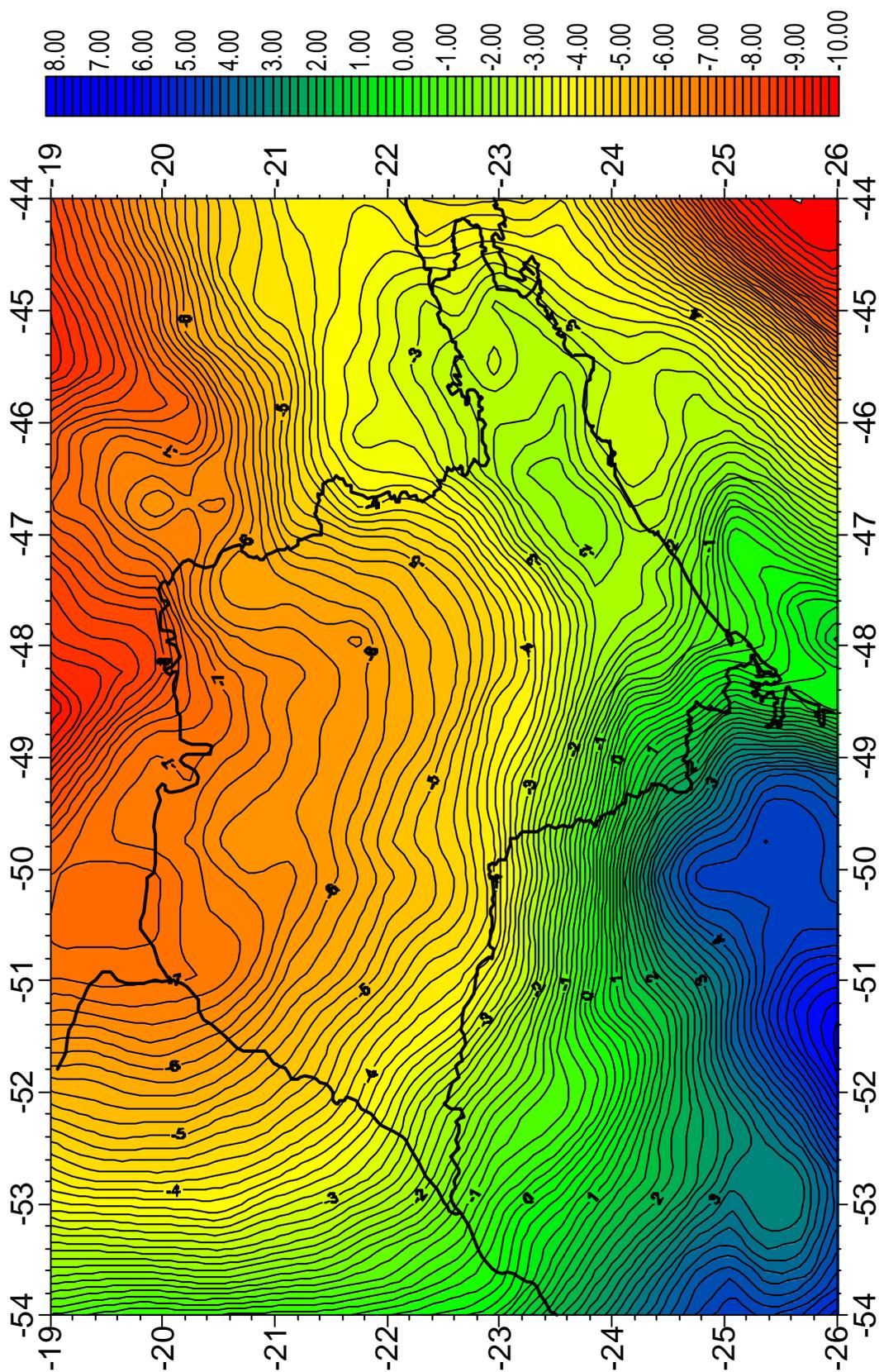


Figura 7.1 – Modelo Geoidal SPGEOID2002 para o Estado de São Paulo

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANDERSEN, O. B.; KNUDSEN P.; TRIMMER R. **The KMS99 global marine gravity field from ERS and GEOSAT altimetry.** In: ERS-Envisat Symposium. Gothenburg, Sweden. 2000.
- ANDERSEN, O. B.; KNUDSEN P. **Global marine gravity field from the ERS-1 and GEOSAT geodetic mission altimetry.** Journal of Geophysical Research, New York, Vol. 103, No. C4, p. 8129-8137, 1998.
- BALMINO, G.; REIGBER, C.; MOYNOT, B. **A geopotential model determined from recent satellite observing campaigns (GRIM1).** Manuscripta Geodaetica, Berlin, Vol. 1, No. 1, p. 41-69, 1976.
- BLITZKOW D. **A combinação de diferentes tipos de dados na determinação das alturas geoidais.** 1986. 91p. Tese (Doutorado) - Instituto Astronômico e Geofísico, Universidade de São Paulo. São Paulo.
- BLITZKOW D. **O Problema de Valor de Contorno da Geodésia – Resultados Práticos para a América do Sul.** 1996. 81p. Tese (Livre Docência) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo. São Paulo.
- BLITZKOW D. **Toward a 10' Resolution Geoid for South America: a Comparison Study.** Physics and Chemistry of the Earth. Amsterdam, Vol. 24, No. 1, p. 33-39, 1999.

BLITZKOW D.; CINTRA J. P.; FORTES L. P. S. **A contribution to the geoid determination.** In: Recent Geodetic and Gravimetric research in Latin America. Berlin. Edited by W. Torge. Springer-Verlag, 1991.

BLITZKOW D., CINTRA J. P., e FORTES L. P. S. **A contribution to the geoid determination.** In: Recent Geodetic and Gravimetric research in Latin América. Berlin, Edited by W. Torge. Sprinter-Verlag, 1991.

BLITZKOW D.; SÁ N. C. **As alturas geoidais Doppler e a separação elipsóide-esferóide de referência.** Revista Brasileira de Geofísica, São Paulo, No. 2(1), p. 19-24, 1983.

BUCHAR, E. **Motion of the nodal line of the second Russian Earth satellite and flattening of the Earth.** Nature, No. 182, p. 198-199, 1958.

ESAN, O. **Spectral Analysis of Gravity Field Data and Erros in view of Sub-Decimetre Geoid Determination in Canada.** 2000. Thesis (Master of Science) - Department of Geomatics Engineering. University of Calgary. Calgary. Canada.

FEATHERSTONE, W. E.; SIDERIS, M. G. **Modified kernels in spectral geoid determination: first results from Western Autralia.** In: Internacional Association of Geodesy Symposia, No. 119, p. 188-193, 1997.

FEATHERSTONE, W. E.; EVANS, J. D.; OLLIVER, J. G. **A Meissl-modified Vanicek and Kleusberg kernel to reduce the truncation error in gravimetric geoid computations.** Journal of Geodesy, Berlin, No. 72, p. 154-160, 1998.

FEATHERSTONE, W. E et al. **The AUSGeoid98 geoid model of Australia: Data treatment, computations and comparisons with GPS-levelling data.** Journal of Geodesy, Berlin, Vol. 75, No. 5/6, p. 313-301, 2001.

FORSBERG, R.; SIDERIS, M. G. **Geoid computations by multi-banding spherical FFT approach.** Manuscripta Geodaetica, Berlin, Vol. 18, No. 2 p. 82-90, 1993.

GEMAEL, C. **Introdução à Geodésia Física.** Curitiba: Editora da UFPR, 1999.

GEMAEL, C. **Introdução ao ajustamento de observações. Aplicações Geodésicas.** Curitiba: Editora da UFPR, 1994.

HAAGMANS, R.; DE MIN, E.; VAN GELDEREN, M. **Fast evaluation of convolution integrals on the sphere using 1D FFT and comparison with existing methods for Stokes' integral.** Manuscripta Geodaetica, Berlin, Vol. 18, No. 5, p. 227-241, 1993.

HEISKANEN, W.; MORITZ, H. **Physical Geodesy.** London: W. H. Freeman, 1967.

KOZAI, Y. **New determination of zonal harmonics coefficients of the Earth's gravitational potential.** Astron. Soc. Japan, Tokio, Vol. 16, p. 263-284, 1964.

LEMOINE F. G. et al. **The Development of the Joint NASA, GSFC and the National Imagery and Mapping Agency of the Geopotential Model EGM96.** USA. NASA, Technical Report 206861, 1998.

LERCH, F. J. et al. **Gravity model improvement using GEOS-3 (GEM9 and GEM10).** Greenbelt. Goddard Space Flight Center. Report X-921-77-246, 1997.

LERCH, F. J. et al. **Goddard Earth Models for Oceanographic applications (GEM10B and GEM10C)**. Marine Geodesy, USA, Vol. 5, No. 2, p. 145-187, 1981.

LUNDQUIST, C.; VEIS, G. **Geodetic parameters for a 1966 Smithsonian Institution Standard Earth**. In: Smithsonian Astrophysical Observatory. Special Report, No. 200. Cambridge, 1966.

MEISSL, P. **Preparations for the numerical evaluation of second-order Molodensky-type formulas**. Columbus, Dep. of Geodetic Science & Surveying. Ohio State University, Report 163, 1971.

MOLODENSKY, MS.; EREMEEV VF.; YURKINA, MI. **Methods for Study of the External gravitational Field and Figure of the Earth**. Jerusalém. Israeli Programme for the Translation of Scientific Publications, 1962.

NATIONAL GEOPHYSICAL DATA CENTER – NOAA. **Data Announcement 88-NGG-02 - Digital relief of the Surface of the Earth**. Colorado: Boulder, 1988.

NATIONAL OCEANIC AND ATMOSPHERIC ADMINISTRATION – NOAA. **NOAA Satellites & Data Centers**. Disponível em: <<http://www.ngdc.noaa.gov/mgg/global/seltopo.html>>. Acesso em 25 maio 2002.

NATIONAL IMAGERY AND MAPPING AGENCY - NIMA. - **World Geodetic System 1984 – Its Definition and Relationship with Local Geodetic System**. Third Edition Amendment. USA: Department of Defense, Technical Report. 2000

- NEREM, R. S. et al. **Gravity Model Development for TOPEX/POSEIDON: Joint Gravity Models 1 and 2.** Journal of Geophysical Research, New York, Vol. 99, No. C12, p. 24421-24447, 1994.
- O'KEEFE, J.; BATCHELOR, C. D. **Perturbations of a close satellite by the equatorial ellipticity of the Earth.** Astrophysical Journal, Vol. 62, p. 183-185, 1957.
- PAUL, MK. **A Method of evaluating the truncation error coefficients for geoidal height.** Bulletin Geodesique, Berlin, No. 47. p. 413-425, 1973.
- PRADO, W. S. **Determinação das Ondulações do Geóide através de Harmônicos Esféricos.** 1981. 86p. Dissertação (Mestrado) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais – INPE. São José dos Campos.
- RAPP, R. H. **Methods for the computation of geoid undulations from potential coefficients.** Bulletin Geodesique, Berlin, No.101, p. 283-297, 1971.
- RAPP, R. H.; NEREM, R. S. **A joint GSFC/DMA project for improving the model of the Earth's gravitational field.** In: Joint Symposium of the IGC/ICG. Graz, 1994.
- REIGBER, C. et al. **The GRIM3 Earth Gravity field model.** Manuscripta Geodaetica, Berlin, Vol. 8, No. 5, p. 93-138, 1983..
- SCHWARZ, K. P.; SIDERIS, M. G.; FORSBERG, R. **The use of FFT techniques in physical geodesy.** Geophysical Journal International, UK, Vol. 100. p. 485-514, 1990.

- SHE, B. B. **A PC-based unified geoid for Canada**. 1993. 105p. Thesis (Master of Science) – Department of Geomatics Engineering. University of Calgary. Calgary. Canada.
- SIDERIS, M. G. **Geoid Determination by FFT Techniques**. In: International School for the Determination and Use of the Geoid. Milan. Italy, 1994.
- SIDERIS, M. G.; SHE, B. B. **A new high resolution geoid for Canada and part of the U.S. by the 1D FFT method**. Bulletin Geodesique. Berlin, Vol. 96, No. 2, p. 92-124, 1994.
- SMITH, A.; MILBERT, D. G. **The GEOID96 high resolution geoid height model for the United States**. Journal of Geodesy. Berlin, Vol. 73, No. 5, p. 219-236, 1999.
- SMITH, A.; MILBERT, D. G. **The CARIB97 high resolution geoid height model for the Caribbean Sea**. Journal of Geodesy. Berlin, Vol 73, No. 1, p. 1-9, 1999.
- SMITH, A.; MILBERT, D. G. **Converting GPS Height into NAVD88 Elevation with the GEOID96 Geoid Height Model**. In: American Congress on Surveying and Mapping. Washington D.C., p. 681-692, 1996.
- SMITH, A.; MILBERT, D. G. (1997). **Evaluation of the EGM96 Model of the Geopotential in the United States**. Bulletin of International Geoid Service. Milan, Italy, No. 6, 1997. Disponível em <http://ngs.noaa.gov/PUBS_LIB/egm96.html>, Acesso em 30 jun.2000.

VANICEK, P.; KRAKIWSKY, E. **Geodesy: The Concepts**. 2.ed. Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1986.

VANICEK, P.; SJOBER, L. E. **Reformulation of Stokes's theory for higher than second-degree reference field and modification of integration kernels**. Journal of Geophysical Research, New York. Vol. 96, No. B4, p. 6529-6539, 1991.

VANICEK, P.; FEATHERSTONE, W. E. **Performance of three types of Stokes's kernel in the combined solution for the geoid**. Journal of Geodesy, Berlin. Vol. 72, No. 12, p. 684-697, 1998.

VANICEK P. et al. **The Canadian Geoid**. Technical Report No. 129. Fredericton. Department of Surveying Engineering, University New Brunswick, 1997.

VANICEK, P.; KLEUSBERG, A. **The Canadian geoid – Stokesian approach**. Manuscripta Geodaetica, Berlin. Vol 12, No. 5, p. 86-98, 1987.

WANG, Y. M.; RAPP, R. H. **Terrain effects on geoid undulation computation**. Manuscripta Geodaetica, Berlin, Vol. 15, p. 23-29, 1990.

WONG L.; GORE, R. **Accuracy of Geoid Heights from Modified Stokes Kernels**. Geophysical Journal Research. New York, Vol. 18, No.1, p. 81-91, 1969.