

VALÉRIA CRISTINA SILVA

**Sistema Gravimétrico de Referência do estado de São Paulo:
contribuição ao referencial geodésico**

São Paulo
2020

VALÉRIA CRISTINA SILVA

**Sistema Gravimétrico de Referência do estado de São Paulo:
contribuição ao referencial geodésico**

Versão Corrigida

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de Concentração: Engenharia de Transportes -
Informações Espaciais

Orientador: Prof. Dr. Flávio Guilherme Vaz de Almeida Filho

São Paulo

2020

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, 18 de junho de 2020

Assinatura do autor: _____



Assinatura do orientador: _____



Catálogo-na-publicação

Silva, Valéria Cristina

Sistema Gravimétrico de Referência do estado de São Paulo: contribuição ao referencial geodésico / V. C. Silva -- versão corr. -- São Paulo, 2020.

145 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Transportes.

1.Geodesia Física 2.Sistemas de altitude 3.Aceleração de gravidade I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Transportes II.t.

SILVA, V. C. **Sistema Gravimétrico de Referência do estado de São Paulo: contribuição ao referencial geodésico.** 2020. 141 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Transportes). Departamento de Topografia e Geodesia. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2020.

Aprovado em: 24 de abril de 2020.

Banca Examinadora

Prof. Dr.: Flavio Guilherme Vaz de Almeida Filho
Instituição: Universidade de São Paulo
Julgamento: Aprovada

Dr.^a: Sônia Maria Alves Costa
Instituição: Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
Julgamento: Aprovada

Prof.^a Dr.^a: Regiane Dalazoana
Instituição: Universidade Federal do Paraná
Julgamento: Aprovada

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço à Deus por estar me permitindo viver com saúde, dignidade e honestidade.

Aos meus pais pelo exemplo de vida, por sempre apoiarem as minhas decisões e por transmitirem afeto e palavras de conforto, que me mantiveram forte apesar da distância.

Agradeço imensamente ao Prof. Denizar por me oferecer a oportunidade de desenvolver essa pesquisa e ao incentivo oferecido na participação de eventos. Sou grata pela amizade do senhor, pelos conselhos e pelas experiências de vida compartilhadas. Além dos inúmeros ensinamentos de Geodesia e ao tempo dedicado na revisão do meu trabalho. Com toda certeza as advertências na escrita e o rigor na definição dos termos, em especial, “aceleração de gravidade”, contribuíram para o meu desenvolvimento pessoal e profissional.

À Dr. Ana Cristina pelos seus conhecimentos na modelagem do geoide. Obrigada pela ajuda e a paciência em explicar os scripts em Shell, os programas em Fortran e os scripts para a geração de figuras com o GMT. Agradeço também pelas palavras de incentivo e motivação durante a pesquisa.

Ao professor Prof. Gabriel Guimarães, quem me apresentou a Geodesia Física durante a graduação.

Ao pessoal do Laboratório de Topografia e Geodesia, Prof. Flávio, Prof. Edvaldo, Adalberto, Luciane e aos companheiros pesquisadores Alex, Raissa, Rafael, Iuri, Gabriel, Renata e Lucas.

Ao meu namorado, Geovane, pela paciência em ouvir minhas reclamações, pela companhia nos finais de semana me incentivando a trabalhar na dissertação, e, sobretudo, ao carinho, a amizade e o amor.

Aos meus segundos pais, Alice e Gilmar, pela amizade e por todo apoio.

Às minhas irmãs Amanda e Vanessa, a toda minha família e a todos os meus amigos que me apoiaram e ajudaram de alguma maneira durante essa fase da minha vida, ficam os meus sinceros agradecimentos.

“O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001”

“Não se deve ir atrás de objetivos fáceis, é preciso buscar o que só pode ser alcançado por meio dos maiores esforços.”

Albert Einstein

RESUMO

SILVA, V. C. **Sistema Gravimétrico de Referência do estado de São Paulo: contribuição ao referencial geodésico**. 2020. 141 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Transportes). Departamento de Topografia e Geodesia. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2020.

Os avanços tecnológicos das últimas décadas modificaram o escopo da Geodesia. Hoje, compete a essa ciência a determinação de sistemas geodésicos capazes de detectarem as mudanças da Terra. Essa dissertação aborda as atuais recomendações da *International Association of Geodesy* (IAG), bem como os conceitos da teoria do potencial para a solução do Problema de Valor de Contorno da Geodesia (PVCG) e as definições dos sistemas de altitude e das determinações gravimétricas. Esse estudo objetiva modernizar os sistemas gravimétrico e altimétrico do estado de São Paulo, seguindo as últimas resoluções da IAG. As informações gravimétricas do estado foram atualizadas a partir dos valores absolutos do Sistema Gravimétrico de Referência (SGR). Uma análise das modificações nos valores da aceleração de gravidade foi realizada. Os modelos geoidal e quase geoidal foram determinados em função dos dados gravimétricos atualizados e do novo sistema de altitudes normais, divulgado pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). A produção do modelo quase geoidal foi efetuada solucionando o PVCG, empregando a integração numérica com a *Fast Fourier Transform* (FFT). Além disso, foi analisado o uso do Modelo Global do Geopotencial (MGG) XGM2019 com grau e ordem 250 e 720 na etapa remover-restaurar. A avaliação do modelo em relação a 295 determinações GNSS sobre a rede de nivelamento demonstrou uma consistência de 18 cm. A obtenção do modelo quase geoidal foi realizada empregando anomalias de Bouguer. À vista de colaborar com os estudos direcionados ao estabelecimento do *International Height Reference System* (IHRIS) foi determinado o potencial de gravidade em quatro estações do estado. Os cálculos foram realizados considerando o raio de 110 e 210 km de disponibilidade de informações gravimétricas. Ademais, investigou-se a contribuição da técnica *Residual Terrain Model* (RTM) ao cálculo.

Palavras-chave: Gravimetria. Altimetria. Geoide.

ABSTRACT

SILVA, V. C. **Sistema Gravimétrico de Referência do estado de São Paulo: contribuição ao referencial geodésico.** 2020. 141 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Transportes). Departamento de Topografia e Geodesia. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2020.

The technological advances of the last decades modified the Geodesy scope. Today, it is up to this science to determine geodetic systems capable of detecting the Earth changes. This dissertation addresses the current recommendations of the International Association of Geodesy (IAG), as well as the concepts of the potential theory for the Geodetic Boundary Value Problem (GBVP) solution and the definitions of height systems and gravimetric determinations. This study aims to modernize the gravimetric and altimetric systems of the state of São Paulo, following the latest IAG resolutions. The gravimetric information of the state was updated from the absolute values of the Gravity Reference System (GRS). An analysis of the changes in the gravity acceleration values was performed. The geoid and quasi-geoid models were determined based on the updated gravimetric data and the new system of normal height, released by the Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). The production of the quasi-geoid model was performed by solving the GBVP, using numerical integration with the Fast Fourier Transform (FFT). In addition, the use of the XGM2019 Global Geopotential Model (GGM) with order and degree 250 and 720 in the remove-restore step was analyzed. The evaluation of the quasi-geoid model in respect to 295 GNSS determinations on the leveling network demonstrated a consistency of 18 cm. The quasi-geoid model was obtained using Bouguer anomalies. In order to collaborate with studies of the establishment of the International Height Reference System (IHRM), the gravity potential at four stations in the state was determined. The computations were performed considering the radii of 110 and 210 km with availability of gravimetric information. In addition, the contribution of the Residual Terrain Model (RTM) technique to the computation was investigated.

Keywords: Gravimetry. Height System. Geoid.

LISTA DE SIGLAS

ABGP	<i>Anglo-Brazilian Gravity Project</i>
ANP	Agência Nacional do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis
ASTER	<i>Advanced Spaceborne Thermal Emission and Reflection Radiometer</i>
BGI	<i>Bureau Gravimétrique International</i>
CCM	Comitê Consultivo de Massa e Quantidades Relacionadas
CENEGEO	Centro de Estudos de Geodesia
CHAMP	<i>Challenging Minisatellite Payload</i>
CIPM-MIP	<i>International Committee for Weights and Measures Mutual Recognition Arrangement</i>
CMC	Capacidade de Medição de Calibração
CPRM	Serviço Geológico do Brasil
CRS	<i>Celestial Reference System</i>
DP	Desvio Padrão
DTU	<i>Technical University of Denmark</i>
EESC	São Carlos
EPUSP	Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
FFT	<i>Fast Fourier Transform</i>
GGOS	<i>Global Geodetic Observing System</i>
GMT	<i>Generic Mapping Tools</i>
GNSS	<i>Global Navigation Satellite System</i>
GOCE	<i>Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer</i>
GOCO	<i>Gravity Observation Combination</i>
GRACE	<i>Gravity Recovery and Climate Experiment</i>
GRACE-FO	<i>Gravity Recovery and Climate Experiment Follow-On</i>
GRS-80	<i>Geodetic Reference System 1980</i>
IAG	<i>International Association of Geodesy</i>
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
IERS	<i>International Earth Rotation and Reference Systems Service</i>
IGCSP	Instituto Geográfico e Cartográfico de São Paulo

IGRS	<i>International Gravity Reference System</i>
IGSN-71	<i>International Gravity Standardization Net 1971</i>
IHRS	<i>International Height Reference System</i>
ITRF	<i>International Terrestrial Reference Frame</i>
LTG	Laboratório de Topografia e Geodesia
MDT	Modelo Digital do Terreno
METI	<i>Japan's Ministry of Economy Trade and Industry</i>
MGG	Modelo Global do Geopotencial
MMQ	Método dos Mínimos Quadrados
NASA	<i>National Aeronautics and Space Administration</i>
NGA	<i>National Geospatial-Intelligence Agency</i>
NMAX	Grau e Ordem Máximo
NIMA	<i>National Imagery and Mapping Agency</i>
NMIs	<i>National Metrology Institutes</i>
ON	Observatório Nacional
PPTe	Presidente Prudente
PVC	Problema de Valor de Contorno
PVCG	Problema de Valor de Contorno da Geodesia
RAAP	Rede Altimétrica de Alta Precisão
RBMC	Rede Brasileira de Monitoramento Contínuo
RENEGA	Rede Nacional de Estações Gravimétricas Absolutas
RGFB	Rede Gravimétrica Fundamental Brasileira
RMQ	Raiz Média Quadrática
RMQD	Raiz Média Quadrática do Desvio
RMSD	<i>Root Mean Square Deviation</i>
RRNN	Referências de Nível
RTM	<i>Residual Terrain Model</i>
SGGR	Sistema Geodésico Global de Referência
SGR-SP	Sistema Gravimétrico de Referência no Estado de São Paulo
SI	Sistema Internacional
SJRP	São José do Rio Preto

SLR	<i>Satellite Laser Ranging</i>
SPBOP	Botucatu
SRTM	<i>Shuttle Radar Topography Mission</i>
TNMM	Topografia do Nível Médio do Mar
TRS	<i>Terrestrial Reference System</i>
UFPR	Universidade Federal do Paraná
UN	United Nations
USP	Universidade de São Paulo
XGM2019	<i>Experimental Gravity Field Model 2019</i>

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 -	Vetores g e γ	31
Figura 2 -	Superfícies e grandezas envolvidas no sistema de altitudes.....	36
Figura 3 -	Componentes do comprimento de onda da ondulação geoidal e da anomalia de altura.....	45
Figura 4	Representação geométrica da redução RTM.....	46
Figura 5 -	Superfícies de nível e linhas de prumo.....	48
Figura 6 -	Altitudes ortométrica-normal e normal.....	55
Figura 7 -	Nivelamento Geométrico e as superfícies equipotenciais.....	57
Figura 8 -	Gravímetro L&R.....	61
Figura 9 -	Gravímetros relativos (esquerda para direita): Scintrex CG6 (Micro-g LaCoste), Burris (ZLS), gPhone (Micro-g LaCoste) e Scintrex CG5 (Micro-g LaCoste)	61
Figura 10 -	Gravímetro absoluto A-10.....	63
Figura 11 -	Distribuição espacial das estações gravimétricas absolutas.....	67
Figura 12 -	Dados gravimétricos do estado de São Paulo em 2010.....	69
Figura 13 -	Estações do SGR-SP.....	70
Figura 14 -	Esquemática do IHRF pontual.....	73
Figura 15 -	Estações IHRF.....	74
Figura 16 -	Rede Altimétrica de Alta Precisão e RMPG.....	78
Figura 17 -	Estações IHRF em São Paulo.....	80
Figura 18 -	Esquema da atualização dos dados gravimétricos.....	83
Figura 19 -	Substituição da referência IGSN-71 pelas estações do SGR-SP.....	85
Figura 20 -	Modelo de aceleração de gravidade na área de estudo (a- noroeste; b-nordeste; c: sudoeste e d: sudeste).....	88
Figura 21 -	RMQD dos residuais em relação à janela móvel ideal (a: GOCO05S nmax: 100; b: GOCO05S nmax: 200.....	94
Figura 22 -	RMQD dos residuais de Δg_{MO} para o XGM2019 nmax: 2190.....	95

Figura 23 - RMQD dos residuais em relação à janela móvel ideal (a: XGM2019 nmax: 250; b: XGM2019 nmax: 720).....	95
Figura 24 - Distribuição dos dados gravimétricos para o cálculo do potencial de gravidade.....	96
Figura 25 - Fluxograma da metodologia aplicada para o IHRF.....	98
Figura 26 - Topografia das estações IHRF.....	102
Figura 27 - RMQ da diferença entre nmax e as determinações GNSS sobre a rede de nivelamento no estado de São Paulo.....	104
Figura 28 - RMQ da diferença entre nmax e determinações GNSS/ nivelamento.	104
Figura 29 - Distúrbios residuais de gravidade no estado de São Paulo - A: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:100; B: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:100 e RTM.....	105
Figura 30 - Distúrbios residuais de gravidade no estado de São Paulo - A: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:200; B: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:200 e RTM.....	106
Figura 31 - Distúrbios residuais de gravidade SPBOP – A: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:100; B: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:100 e RTM; C: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:200; D: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:200 e RTM.....	108
Figura 32 - Distribuição dos distúrbios residuais de gravidade da estação SPBOP – A: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:100 e RTM; B: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:100; C: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:200 e RTM; D: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:200.....	109
Figura 33 - Distúrbios residuais de gravidade PPTE - A: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:100; B: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:100 e RTM; C: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:200; D: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:200 e RTM.....	111
Figura 34 - Distribuição distúrbios residuais de gravidade da estação PPTE - A: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:100 e RTM; B: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:100; C: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:200 e RTM; D: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:200.....	112
Figura 35 - Distúrbios residuais de gravidade EESC - A: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:100; B: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:100 e RTM; C: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:200; D: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:200 e RTM.....	114

Figura 36 - Distribuição distúrbios residuais de gravidade da estação EESC - A: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:100 e RTM; B: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:100; C: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:200 e RTM ; D: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:200.....	115
Figura 37 - Distúrbios residuais de gravidade SJRP- A: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:100; B: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:100 e RTM; C: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:200; D: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:200 e RTM.....	117
Figura 38 - Distribuição distúrbios residuais de gravidade da estação SJRP - A: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:100 e RTM; B: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:100; C: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:200 e RTM ; D: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:200.....	118
Figura 39 - W_p das estações IHRF (adicione 62.600.000 m^2s^{-2} aos valores do gráfico).....	121
Figura 40 - Anomalias de gravidade de Molodensky.....	123
Figura 41 - Relação das anomalias de gravidade com altitude.....	124
Figura 42 - A anomalia de gravidade residual com RTM e XGM2019 nmax: 250 (A: grade 5'x5'; B: Erros da colocação).....	125
Figura 43 - A anomalia de gravidade residual com RTM e XGM2019 nmax: 720 (A: grade 5'x5'; B: Erros da colocação).....	126
Figura 44 - Fluxograma da determinação do modelo quase geoidal.....	128
Figura 45 - Modelo quase geoidal de São Paulo (A-nmax: 250; B-nmax: 720).....	129
Figura 46 - Modelo geoidal do estado de São Paulo.....	131
Figura 47 - Diferença entre o modelo geoidal e quase geoidal (A-nmax: 250; B-nmax: 720).....	131
Figura 48 - Avaliação GNSS/nivelamento com 295 pontos (a-nmax: 250; b:nmax: 720).....	133
Figura 49 - Diferença das altitudes normais-ortométricas e as altitudes normais..	134
Figura 50 - Avaliação GNSS/nivelamento com 246 pontos (a-nmax: 250; b:nmax: 720).....	135

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 -	Observações utilizadas do SRG- SP (μGal).....	81
Tabela 2 -	Estações relativas com conexão às estações do SGR-SP (μGal).....	84
Tabela 3 -	Resolução espacial da janela móvel.....	92
Tabela 4 -	Melhor janela móvel para a produção do MDT de referência.....	93
Tabela 5 -	Distribuição de dados gravimétricos para o IHRF.....	97
Tabela 6 -	Distúrbios de gravidade residuais em SOBOP com e sem RTM (mGal).....	106
Tabela 7 -	Potencial perturbador da estação SOBOP (m^2s^{-2}).....	109
Tabela 8 -	Distúrbios de gravidade residuais em PPTE com e sem RTM (mGal).....	110
Tabela 9 -	Potencial perturbador da estação PPTE (m^2s^{-2}).....	112
Tabela 10 -	Distúrbios de gravidade residuais em EESC com e sem RTM (mGal).....	113
Tabela 11 -	Potencial perturbador da estação EESC (m^2s^{-2}).....	115
Tabela 12 -	Distúrbios de gravidade residuais em SJRP com e sem RTM (mGal).....	116
Tabela 13 -	Potencial perturbador da estação SJRP (m^2s^{-2}).....	118
Tabela 14 -	Potencial de gravidade das estações IHRF (m^2s^{-2}).....	120
Tabela 15 -	Altitude normal das estações IHRF (m).....	122
Tabela 16 -	Estatística das anomalias de gravidade de Molodensky (mGal).....	124
Tabela 17 -	Consistência GNSS/nivelamento com 296 pontos.....	132
Tabela 18 -	Consistência GNSS/nivelamento com 246 pontos.....	135

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	17
1.1 Considerações gerais	17
1.2 Objetivo	20
1.3 Justificativa.....	21
2 TEORIA DO POTENCIAL E A ALTIMETRIA	24
2.1 Introdução	24
2.2 Campo Gravitacional.....	25
2.3 Campo de Gravidade	27
2.4 Terra Normal	29
2.5 Campo Anômalo.....	30
2.6 Problemas de Valor de Contorno	33
2.7 As formulações de Stokes e de Molodensky.....	37
2.8 Funções harmônicas esféricas.....	41
2.9 Modelagem topográfica com o <i>Residual Terrain Model</i>	45
2.10 Sistema de altitude.....	47
2.10.1 Superfícies de Nível e Número Geopotencial.....	47
2.10.2 Altitudes Físicas	49
2.10.2.1 Altitude Dinâmica.....	49
2.10.2.2 Altitude Ortométrica.....	50
2.10.2.3 Altitude Normal	52
2.10.2.4 Altitudes Ortométricas-Normais.....	54
2.10.3 Altitudes Geométricas	56
2.10.3.1 Altitude Nivelada	56
2.10.3.2 Altitude Geodésica	58
3 MENSURAÇÃO DA ACELERAÇÃO DE GRAVIDADE.....	59
3.1 Gravimetria.....	59
3.2 Gravímetros relativos	60

3.3 Gravímetros absolutos	62
3.3.1 Gravímetro absoluto Micro-g LaCoste A-10	63
3.4 Determinações gravimétricas	65
3.4.1 Sistema Gravimétrico de Referência	66
3.4.2 Rede relativa de referência	67
3.4.3 Determinações gravimétricas de densificação	68
3.4.4 Dados gravimétricos do estado de São Paulo.....	69

4 A MODERNIZAÇÃO DAS COMPONENTES ALTIMÉTRICA E GRAVIMÉTRICA

.....	71
4.1 International Height Reference System.....	72
4.2 International Gravity Reference System.....	76
4.3 Esforços no Brasil para adequar o SGB ao IHRF	77
5 ATUALIZAÇÃO DAS INFORMAÇÕES GRAVIMÉTRICAS	81
5.1 Observações do SGR-SP utilizadas para a atualização	81
5.2 Metodologia de conexão da estrutura gravimétrica de São Paulo ao SGR	82
5.3 Resultado da conexão das informações gravimétricas ao SGR.....	84
5.4 Validação dos dados gravimétricos e reconstrução dos dados altimétricos	87

6 CÁLCULO DO POTENCIAL DE GRAVIDADE DAS ESTAÇÕES IHRF DO ESTADO DE SÃO PAULO E A DETERMINAÇÃO DOS MODELOS QUASE GEOIDAL E GEOIDAL

.....	90
6.1 A modelagem das superfícies topográficas para o RTM.....	91
6.2 Determinação do potencial de gravidade para as estações IHRF.....	96
6.2.1 Características topográficas das estações IHRF.....	102
6.2.2 Características dos MGGs no estado São Paulo	103
6.2.3 Efeito da modelagem RTM sobre os distúrbios residuais de gravidade no estado São Paulo.....	105
6.2.4 Distúrbios residuais de gravidade e o potencial perturbador nas estações de estudo	106
6.2.5 Potencial de gravidade e altitudes normais	120

6.3 Determinação do modelo quase geoidal e geoidal.....	123
6.3.1 Modelo quase geoidal	123
6.3.2 Modelo geoidal	129
6.3.3 Validação do modelo quase geoidal com as determinações GNSS sobre a rede de nivelamento	132
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS E RECOMENDAÇÕES	136
REFERÊNCIAS.....	139

1 INTRODUÇÃO

1.1 Considerações gerais

A evolução de técnicas espaciais e computacionais possibilitou a obtenção de um sistema tridimensional cartesiano de coordenadas associado a um elipsoide definido convencionalmente. Conseqüentemente, os fenômenos dinâmicos da Terra ocasionados por efeitos geofísicos são quantificados e qualificados por meio de dois referenciais, o *Celestial Reference System* (CRS) e o *Terrestrial Reference System* (TRS), os quais são monitorados pelo *International Earth Rotation and Reference Systems Service* (IERS) (BLITZKOW et al., 2011).

O estabelecimento dos sistemas de referência globais e o aprimoramento das técnicas de posicionamento possibilitaram que os elementos geométricos alcançassem precisão milimétrica (IHDE et al., 2017). No entanto, as coordenadas derivadas desses sistemas possuem limitações nas aplicações práticas em engenharia, nos estudos direcionados à detecção das mudanças da Terra e nos processos associados ao fluxo de fluidos, em razão de sua vinculação à superfície elipsoidal.

Sob o ponto de vista físico, a Terra é descrita pela figura do geoide, limitado por uma superfície equipotencial do campo de gravidade, melhor representada na natureza pelo nível médio do mar. Devido ao efeito rotacional e à distribuição não homogênea de massa, o geoide possui irregularidades, traduzidas pela diferença entre a superfície do elipsoide de referência global, atualmente o *Geodetic Reference System 1980* (GRS-80), e a superfície geoidal. Em termos da forma, a separação entre essas superfícies é denominada ondulação geoidal ou altura geoidal (N). No que tange às altitudes, N é o resultado da altitude geodésica (h), associada à superfície elipsoidal, subtraída pela altitude ortométrica (H), referida à superfície geoidal.

A principal dificuldade na determinação do modelo geoidal é a necessidade de conhecer a densidade das massas topográficas para reduzir as observações efetuadas na superfície física à superfície do geoide. Como alternativa, determina-se o modelo quase geoidal cuja separação entre as superfícies elipsoidal e quase geoidal é a anomalia de altura. Nesse caso, a altitude vinculada ao quase geoide é a altitude normal.

Os modelos geoidal e quase geoidal são ferramentas auxiliares para o sistema altimétrico uma vez fornecem a componente N , possibilitando a conversão entre altitudes de sentido matemático em grandezas físicas. No Brasil, adotou-se a altitude normal na realização de julho de 2018 da Rede Altimétrica de Alta Precisão (RAAP), gerida pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). Entretanto, o modelo geoidal oficial no país ainda é o MAPGEO2015. Anterior ao reajustamento da RAAP de 2018, a consistência deste modelo se encontrava em torno de 17 cm em relação às determinações *Global Navigation Satellite System* (GNSS) sobre a rede de nivelamento. Reitera-se que nessa época o sistema de altitude vigente era baseado nas altitudes normais-ortométricas cuja realização advém de um reajustamento da rede efetuado em 2011. Com as recentes modificações na RAAP a consistência com o MAPGEO2015 está em torno de 30 cm (IBGE, 2019a).

A modelagem das superfícies geoidal e quase geoidal requer Modelos Digitais do Terreno (MDTs) e dados gravimétricos terrestres e aéreos, combinados com informações advindas de Modelos Globais do Geopotencial (MGGs). Esse último consiste nos coeficientes do desenvolvimento em série de funções harmônicas esféricas do potencial gravitacional da Terra. A acurácia das informações utilizadas e a adequada densificação gravimétrica são determinantes para a produção de modelos de alta resolução. Países como Austrália possuem o modelo quase geoidal com consistência em torno de 10 cm em relação às determinações GNSS sobre a rede de nivelamento (FEATHERSTONE et al., 2018). Ao passo que outros optam por ajustar seu modelo à rede altimétrica, como o Japão, os Estados Unidos da América e a Grã-Bretanha. Anterior ao ajuste, o modelo geoidal do Japão possuía 8,44 cm de diferença padrão com a rede de nivelamento e as determinações GNSS e com o ajustamento a consistência foi de 0,19 cm (MIYAHARA, 2015). Já os Estados Unidos e a Grã-Bretanha apresentam apenas as diferenças padrão do modelo geoidal ajustado, sendo essas, 1,27 cm (NGA, 2019) e 1 cm (GREAVES; CLARKE, 2017) respectivamente. Apesar da qualidade desses modelos perdura ainda a adversidade enfrentada para a compatibilidade de altitudes físicas entre países visto que os modelos geoidal e quase geoidal estão associados às Referências de Nível (RRNN) dos sistemas verticais clássicos locais ou nacionais.

Em âmbito global, os esforços se concentram em fornecer um sistema geodésico que entenda e seja capaz de modelar as mudanças da Terra e corrigir as inconsistências entre as realizações dos sistemas de altitude (IHDE et al., 2017). Para tanto, além dos existentes referenciais é necessário um referencial físico global com precisão superior aos efeitos que o planeta está sujeito. Neste contexto, a *International Association of Geodesy* (IAG) tem se empenhado para a definição do *International Height Reference System* (IHRIS). O mesmo tem por objetivo substituir os atuais sistemas clássicos verticais, baseados em observações do nível médio do mar. Com o IHRIS o sistema de altitude será vinculado ao potencial de gravidade de um conjunto de estações distribuídas globalmente, constituídas por dados gravimétricos homogêneos em um raio de 210 km. O cálculo será baseado no valor médio do potencial de gravidade da Terra, $W_0 = 62.636.853,4 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$, e demais parâmetros específicos, a fim de padronizar as realizações. Além desse sistema ser fundamentado rigorosamente no campo de gravidade, o mesmo estará relacionado ao sistema geométrico por meio das coordenadas do *International Terrestrial Reference Frame* (ITRF) com a respectiva variação no tempo. Após a realização, o processo de unificação integrará a Topografia do Nível Médio do Mar (TNMM), determinada pela técnica de altimetria por satélite, considerando também os registros maregráficos.

Visto que a realização do IHRIS é dependente de informações gravimétricas, discute-se ainda, a definição do chamado *International Gravity Reference System* (IGRS), a fim de estabelecer padrões de determinação absoluta da aceleração de gravidade de forma consistente. A criação do IGRS se faz necessária para substituir a referência gravimétrica mundial ainda utilizada, a rede *International Gravity Standardization Net 1971* (IGSN-71) cuja precisão e distribuição espacial não satisfazem mais os requisitos para implantação de um referencial altimétrico global (SÁNCHEZ et al., 2017).

Vinculado às determinações da IGSN-71, 1864 estações gravimétricas dispostas em vários países constituem o *datum* gravimétrico mundial. Destas, 20 estações foram determinadas no Brasil, originando a chamada Rede Gravimétrica Fundamental Brasileira (RGFB). Somente no final da década de 1980, sete determinações absolutas da aceleração de gravidade foram estabelecidas com o gravímetro absoluto JILAG3 em

parceria com a Universidade de Hannover, dando origem à Rede Nacional de Estações Gravimétricas Absolutas (RENEGA) (GEMAEL, 2012). No ano de 2006 o Observatório Nacional (ON) adquiriu um gravímetro absoluto Micro-g Lacoste A-10, número 11, e contribuiu com 20 estações absolutas no país (BGI, 2019). No entanto, devido ao pequeno número de estações, diversos levantamentos relativos foram conduzidos tendo como referência as estações pertencentes à IGSN-71 e as determinações derivadas da mesma.

No ano de 2016 foi implantado um Sistema Gravimétrico de Referência no estado de São Paulo (SGR-SP), a partir de uma iniciativa do Laboratório de Topografia e Geodesia da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (LTG/EPUSP) e do Instituto Geográfico e Cartográfico de São Paulo (IGCSP). Participaram também, o IBGE e o Centro de Estudos de Geodesia (CENEGEO). Este sistema contém 15 novas estações e quatro reocupações. As medições foram realizadas utilizando um gravímetro absoluto Micro-g LaCoste, A-10, número 32, pertencente ao IGCSP, em operação no LTG.

O estabelecimento do IGRS exige que todas as redes locais e regionais sejam referenciadas a um padrão comum, designado pelas referidas observações absolutas (TORGE, 2001). Em face aos atuais objetivos da Geodesia para a vinculação do sistema de altitude ao potencial de gravidade e para a produção de modelos geoidal e quase geoidal de alta resolução, a conexão das observações absolutas do SGR-SP à densificação gravimétrica e o estudo de novas metodologias de cálculo, tendem a aprimorar os sistemas geodésicos de São Paulo.

1.2 Objetivo

Essa dissertação de mestrado tem como objetivo principal contribuir ao sistema geodésico de São Paulo a partir da atualização do banco de dados gravimétricos e da aplicação de metodologias direcionadas ao aprimoramento do sistema altimétrico. Destacam-se como objetivos específicos:

- Atualizar os valores da aceleração de gravidade da densificação do estado, a partir do reprocessamento das campanhas com a conexão dos valores absolutos da aceleração de gravidade do SGR-SP;
- Quantificar e analisar os resultados obtidos com a atualização gravimétrica;
- Produzir modelos geoidal e quase geoidal empregando a abordagem do princípio de Molodensky, com o uso da técnica *Residual Terrain Model* (RTM) e MGGs com diferentes grau e ordem;
- Determinar o potencial de gravidade em quatro estações IHRS, sendo uma de caráter global e três estações de nível regional.
- Avaliar a metodologia de realização do IHRS nos raios de 110 km e 210 km de dados gravimétricos e o uso do RTM.

1.3 Justificativa

A referência gravimétrica mundial, IGSN-71, é oriunda de uma série de medições conduzidas em sua maior parte por gravímetros relativos e dispositivos pendulares. Estima-se hoje, com os modernos gravímetros, que as observações gravimétricas referidas a essa rede apresentam precisão em torno de $100 \mu Gal$ (SÁNCHEZ et al., 2017).

O estado de São Paulo contava com apenas uma estação da IGSN-71 de caráter global, localizada no aeroporto de Cumbica-Guarulhos (ESCOBAR, 1980). Apesar de destruída, a referência serviu para a determinação de outros pontos, como o Museu do Ipiranga e o Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas da Universidade de São Paulo (IAG/USP), na época localizado no Parque da Água Funda. Um levantamento recente com conexão à estação absoluta da cidade de São Paulo revelou uma diferença de $110 \mu Gal$ na chapa do Museu do Ipiranga e de $40 \mu Gal$ no IAG da Água Funda.

A fim de substituir a rede de referência IGSN-71, pesquisadores da metrologia e geociências, membros da IAG, estão definindo resoluções para estabelecer padrões de medidas gravimétricas absolutas. No entanto, a garantia de informações precisas

somente é possível com a quantificação das incertezas apresentadas pelos equipamentos e pelos métodos de medição. As observações absolutas são estatisticamente independentes, portanto, não é possível realizar o ajustamento da rede pelo Método dos Mínimos Quadrados (MMQ), como é o caso da rede gravimétrica relativa. Segundo enfatiza Marti et al. (2014) para avaliar a precisão das observações, medições necessitam ser realizadas em estações gravimétricas de referência e a validação das possíveis inconsistências somente é feita após a mensuração com diferentes aparelhos ou em diferentes épocas.

O estado da arte das redes geodésicas demanda o ajustamento das observações. De acordo com Luz (2008), para o caso das redes gravimétricas brasileiras o ajustamento é inviável, visto que as linhas gravimétricas do IBGE compõem levantamentos de densificação, onde os circuitos iniciam e terminam, na maioria dos casos, em uma mesma estação de ordem superior, sem a reocupação de estações previamente determinadas em outras linhas. Em suma, a metodologia aplicada no estabelecimento das observações gravimétricas é que determina a possibilidade da aplicação do MMQ. Neste sentido, a interligação da rede secundária aos novos valores absolutos da aceleração da gravidade advindos de um aparelho moderno e com precisão superior aprimorará as redes gravimétricas.

A qualidade das informações da aceleração de gravidade é fundamental para o estudo e a determinação dos modelos geoidal e quase geoidal, cujos interesses são práticos e científicos. A análise das variações temporais de parâmetros da Terra possibilita entender os processos geodinâmicos, como por exemplo o derretimento de geleiras, as alterações no nível médio do mar, dentre outros. Na engenharia, os modelos geoidal e quase geoidal são constantemente empregados para a conversão de altitudes geodésicas, obtida de forma rápida por meio do posicionamento GNSS, em altitudes ortométricas ou normais. A combinação dessas componentes verticais é essencial na construção de grandes edificações, pontes, ferrovias e obras que envolvem o fluxo d'água; no planejamento urbano, como em levantamentos cadastrais e nas regiões costeiras, propensas à inundação; na exploração de recursos minerais, como em minas a céu aberto; e no dimensionamento e no design de elementos que precisam ser encaixados posição exata, conectando os demais.

Analogamente aos modelos geoidais, um modelo quase geoidal permite a conversão entre altitudes. Entretanto, diferente da superfície equipotencial do campo de gravidade, na qual os modelos geoidais estão baseados, o modelo quase geoidal possui como referência uma superfície não equipotencial. Em função dos conceitos matemáticos e físicos envolvidos, para fins de compatibilidade, é recomendado ao sistema altimétrico de altitudes normais o uso de um modelo quase geoidal.

Com as novas resoluções da IAG a realização dos referenciais verticais está sendo discutida no contexto mundial. A importância de um Sistema Geodésico Global de Referência (SGGR) preciso é reconhecido e apoiado pelas Nações Unidas (UN). A UN (2015) reforça que pesquisadores precisam de uma estrutura de referência geodésica global estável para identificar áreas sob ameaças de inundações, terremotos, ou secas, e adotar medidas preventivas. A chave para mitigar danos causados por fenômenos naturais, atividades antrópicas e realizar um planejamento sustentável, é a implantação, entre outros, de um sistema de altitudes físicas fundamentado em dados gravimétricos.

Além de prover uma infraestrutura para o desenvolvimento de estudos em esfera global, o estabelecimento do IHRS é fundamental para corrigir as deficiências encontradas nos sistemas de altitudes locais. As redes verticais diferem em até 2 metros, impossibilitando a compatibilização de informações entre países (IHDE et al., 2017). A correção dessas inconsistências é dependente de esforços para o reajustamento da rede altimétrica, a execução de levantamentos gravimétricos de densificação e a avaliação dos MGGs na região de estudo. Visto que a realização do IHRS se encontra em discussão é pertinente o desenvolvimento de estudos a fim de identificar as dificuldades envolvendo a metodologia e as informações para a determinação do potencial de gravidade.

2 TEORIA DO POTENCIAL E A ALTIMETRIA

2.1 Introdução

Nos últimos anos, missões espaciais dedicadas ao estudo do campo gravitacional, possibilitaram o aperfeiçoamento de modelos do geopotencial. As componentes do campo anômalo, como a ondulação geoidal, fornecidas por esses modelos, apresentam precisão de aproximadamente 1 cm em uma resolução espacial de 100 km (IHDE et al., 2017). Entretanto, essas informações não satisfazem, em termos de precisão, as aplicações em engenharia. Neste contexto, um modelo geoidal de alta resolução é necessário, demandando para sua produção a adequada densificação de medidas gravimétricas e o uso dos longos e médios comprimentos de onda advindos de MGGs.

Modelar a superfície geoidal requer determinar o potencial de gravidade externo às massas, envolvendo o chamado Problema de Valor de Contorno da Geodesia (PVCG). A resolução do PVCG está intimamente ligada ao conceito de altitude a qual deve ser analisada do ponto de vista físico e geométrico, considerando a superfície de referência escolhida como origem para as medições altimétricas e interpretando seu significado como superfície de referência do campo de gravidade (BLITZKOW; CAMPOS; FREITAS, 2004).

Um sistema de altitude é definido, coloquialmente, como um sistema unidimensional de coordenadas utilizado para obter distâncias métricas de um ponto até uma determinada superfície. Além disso, estão intrínsecos neste conceito a direção que liga o ponto a essa superfície e análise conceitual da mesma (FEATHERSTONE; KUHN, 2006). A forma pela qual se define os referidos elementos induz a determinação de distintas altitudes para um mesmo ponto.

A superfície equipotencial vinculada ao campo de gravidade dá origem às altitudes físicas que podem, de certa forma, possuir interpretação geométrica. O elemento básico para sua determinação são os números geopotenciais, em razão de sua relação unívoca com o campo de gravidade da Terra. A divisão do número geopotencial por um valor adequado de aceleração de gravidade expressa o valor de

altitude física em unidades métricas. Ao passo que as altitudes geométricas são grandezas com princípios analíticos que associam duas superfícies de referência.

Em grande parte das aplicações em engenharia é necessário que a coordenada vertical dos elementos esteja associada à superfície equipotencial da Terra. Hoje, a coordenada h é obtida de modo instantâneo e convertida para uma coordenada de sentido físico, a partir de um modelo geoidal ou quase geoidal. Essa transformação requer considerar o sistema de altitude local, a precisão exigida no trabalho, e a interpretação do conceito físico da componente vertical.

Esse capítulo tem por objetivo apresentar os aspectos da teoria do potencial, os elementos do campo anômalo direcionados à modelagem das superfícies geoidal e quase geoidal, e as definições e formulações para as altitudes físicas e geométricas, comumente utilizadas.

2.2 Campo Gravitacional

Os aspectos físicos da Geodesia clássica tem como princípio a Lei da Gravitação Universal, formulada por Isaac Newton¹ em sua obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, a qual define que toda partícula com massa no universo está sujeita a exercer atração física sobre partículas mais próximas devido à força gravitacional (NEWTON, 1687 apud GEMAEL, 2012). Dessa forma, define-se o campo gravitacional como um conjunto de pontos no espaço predispostos à referida força.

A Lei de Newton, expressão (1), assegura que duas partículas no universo com massa M_1 e M_2 se atraem proporcionalmente ao produto de suas massas e inversamente ao quadrado da distância l entre elas, com uma força (GEMAEL, 2012):

$$f = K \frac{M_1 M_2}{l^2} \quad (1)$$

onde, K corresponde à constante universal da gravitação no Sistema Internacional (SI) de unidades:

¹ Isaac Newton (1643-1727)

$$K = (6,67384 \pm 0,00080) \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2} \quad (2)$$

É conveniente considerar uma partícula como atrativa e a outra como atraída e atribuir à primeira uma massa M ($M_1 = M$) e à última uma massa unitária ($M_2 = 1$) (3) (GEMAEL, 2012):

$$f = K \frac{M}{l^2} \quad (3)$$

As componentes da força gravitacional podem ser representadas em um sistema cartesiano tridimensional de coordenadas. Considerando as coordenadas (x', y', z') para a partícula atrativa de massa M , e, as coordenadas (x, y, z) para a partícula atraída, as componentes do vetor força de atração são expressas por (4) (GEMAEL, 2012):

$$\begin{aligned} f_x &= -KM \frac{(x - x')}{l^3} \\ f_y &= -KM \frac{(y - y')}{l^3} \\ f_z &= -KM \frac{(z - z')}{l^3} \end{aligned} \quad (4)$$

Na forma escalar, o potencial gravitacional gerado por uma massa M , em um determinado ponto, é definido por (5) (HOFMANN-WELLENHOF; MORITZ, 2006):

$$V = K \frac{M}{l} \quad (5)$$

Aplicando o gradiente ao respectivo potencial, obtém-se o vetor força de atração (6):

$$\mathbf{f} = \text{grad } V \quad (6)$$

Aplicando o operador de Laplace ou Laplaciano ao potencial V , o qual traduz o somatório das derivadas parciais de segunda ordem do potencial gravitacional, se obtém a expressão (7).

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad (7)$$

No exterior das massas o laplaciano de V satisfaz a equação de Laplace (8):

$$\nabla^2 V = 0 \quad (8)$$

A equação (8) estabelece a condição de continuidade para uma função em um domínio específico, denominando-a como função harmônica. Logo, o laplaciano do potencial gravitacional é nulo fora das massas atrativas e pode ser representado por meio de uma série de funções harmônicas em todos os pontos no exterior do corpo (GEMAEL, 2012).

Por outro lado, no interior das massas, o laplaciano do potencial gravitacional satisfaz a equação de Poisson.

$$\nabla^2 V = -4\pi K\rho \quad (9)$$

onde, ρ é a densidade da massa da partícula e K a constante universal da gravitação.

2.3 Campo de Gravidade

A rotação da Terra provoca uma força aparente que é de igual magnitude e de direção oposta à força centrípeta. Essa pseudo força, denominada centrífuga, age sobre a Terra de forma perpendicular ao eixo de rotação e é caracterizada pela inércia de um objeto em uma trajetória curva, quando se adota um referencial não inercial (SERWAY; JEWETT JUNIOR, 2014). A combinação das forças gravitacional e

centrífuga resulta em uma força, definida no princípio de Newton² e utilizada na Geodesia, como força de gravidade. Com efeito, o conjunto de pontos no espaço sujeitos à força de gravidade caracteriza o campo de gravidade.

Por conveniência adota-se a Terra como um corpo sólido, com o eixo de rotação fixo à Terra, rotacionando a uma velocidade angular constante. A partir desse referencial inercial, define-se a força centrífuga (z), originada da rotação da Terra, como (HOFMANN-WELLENHOF; MORITZ, 2006):

$$z = \omega^2 p \quad (10)$$

com ω referindo à velocidade de rotação da Terra e p , expressão (11), sendo a distância ao eixo de rotação.

$$p = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (11)$$

O potencial devido à força centrífuga (Z) é dado como (HOFMANN-WELLENHOF; MORITZ, 2006):

$$Z = \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) \quad (12)$$

Dessa forma, o potencial de gravidade da Terra (W) corresponde à soma de Z e V :

$$W(x, y, z) = V(x, y, z) + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) \quad (13)$$

O vetor força de gravidade se relaciona com W através do gradiente:

$$\mathbf{g} = \text{grad } W \quad (14)$$

² O conceito desta grandeza é encontrado na teoria de Einstein como sendo a consequência do espaço tempo, causado pela distribuição irregular de massa e energia, resultando em uma dilatação do tempo.

Com o laplaciano fora das massas:

$$\nabla^2 W = 2\omega^2 \quad (15)$$

Considerando o potencial em pontos localizados no interior da superfície de contorno, chega-se à equação generalizada de Poisson (16) para o potencial de gravidade W .

$$\nabla^2 W(V + Z) = -4\pi K\rho + 2\omega^2 \quad (16)$$

2.4 Terra Normal

Para representar a Terra em função de parâmetros matemáticos, utiliza-se a figura geométrica do elipsoide de revolução e atribui a ele algumas características da Terra Real. A Terra normal é formada pela rotação de uma elipse em torno de seu eixo menor, com a mesma velocidade angular e a mesma massa da Terra real. Associado ao campo de gravidade normal tem-se o potencial de gravidade da Terra normal, também denominado esferopotencial (U). Sobre a superfície elipsoidal injunciona-se a condição de que a mesma seja uma superfície equipotencial com o mesmo valor do potencial de gravidade da Terra real (W_0), cuja denominação para a Terra normal é U_0 (GEMAEL, 2012).

O potencial de gravidade da Terra normal (U) (17) é constituído pelos potenciais centrífugo (Z) e o gravitacional (V_U) (HOFMANN-WELLENHOF; MORITZ, 2006), representado por:

$$U = V_U + Z \quad (17)$$

No exterior do elipsoide de referência o laplaciano de U é expresso por:

$$\nabla^2 U = 2\omega^2 \quad (18)$$

Associado ao potencial de gravidade da Terra normal tem-se o vetor força de gravidade normal γ , dado pelo gradiente de U , como:

$$\gamma = \text{grad } U \quad (19)$$

2.5 Campo Anômalo

A proximidade da Terra normal com a Terra real possibilita realizar comparações entre o campo de gravidade real e o normal, originando grandezas residuais denominadas componentes do campo anômalo (TORGE, 2001).

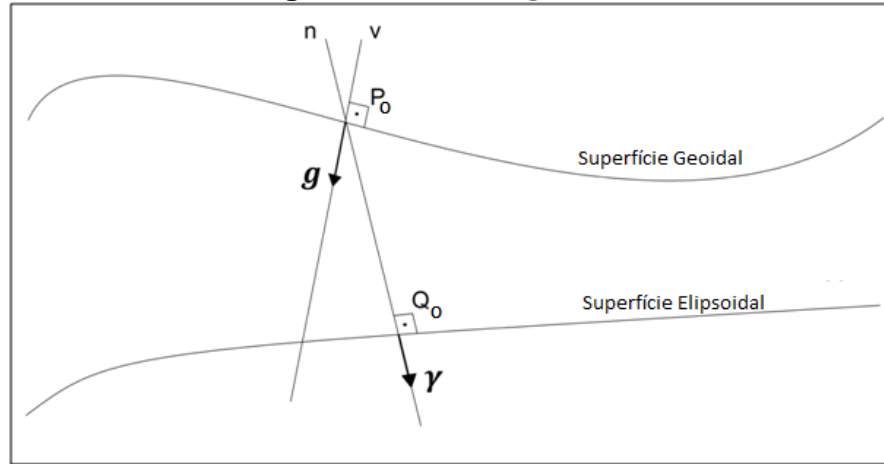
A diferença entre o potencial de gravidade da Terra real e o potencial de gravidade da Terra normal em um ponto P , caracteriza o chamado potencial anômalo ou potencial perturbador (HOFMANN-WELLENHOF; MORITZ, 2006), expresso por (20).

$$T_P = W_P - U_P \quad (20)$$

A diferença entre o vetor de gravidade real no ponto P_O da superfície geoidal e o vetor de gravidade normal no ponto Q_O da superfície elipsoidal, define uma grandeza fundamental para a Geodesia, o vetor anomalia de gravidade (21). A Figura 1 ilustra os vetores g e γ , com as respectivas direções da vertical (v) e da normal (n).

$$\Delta g = g_{P_O} - \gamma_{Q_O} \quad (21)$$

Figura 1 - Vetores g e γ .



Fonte: (BLITZKOW, 1996).

Ao se comparar os vetores g e γ em um mesmo ponto (P_0), é definida uma grandeza intitulada como vetor distúrbio de gravidade (22).

$$\delta g = g_{P_0} - \gamma_{P_0} \quad (22)$$

onde, γ_{P_0} é expresso considerando a relação natural da continuação para cima:

$$\gamma_{P_0} = \gamma_{Q_0} + \frac{\partial \gamma}{\partial h} N \quad (23)$$

e, γ_{Q_0} é a aceleração de gravidade normal na superfície elipsoidal, calculada pelas formulações clássicas, como o teorema de Clairaut ou fórmula de Somigliana (24); $\frac{\partial \gamma}{\partial h}$ expressa o gradiente da aceleração de gravidade normal; e N a ondulação geoidal.

$$\gamma_{Q_0}(\varphi) = \gamma_e \frac{1 + k \operatorname{sen}^2 \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \quad (24)$$

O vetor distúrbio de gravidade possui relação direta com o potencial perturbador (T) por meio do gradiente:

$$\delta g = grad T \quad (25)$$

De outra forma, considerando que a direção da normal (n) é coincidente para W e U , e lembrando do sinal negativo, devido à orientação do vetor de aceleração de gravidade, tem-se:

$$\delta g = -\left(\frac{\partial W}{\partial n} - \frac{\partial U}{\partial n}\right) = -\frac{\partial T}{\partial n} \quad (26)$$

Visto que h pode ser expresso como altitude ao longo da normal:

$$-\frac{\partial T}{\partial n} = -\frac{\partial T}{\partial h} \quad (27)$$

A relação entre a ondulação geoidal e o potencial perturbador, é dada pela expressão de Bruns (28).

$$N = \frac{T}{\gamma_{Q_0}} \quad (28)$$

onde, γ_{Q_0} é a aceleração de gravidade normal referida à superfície elipsoidal.

As grandezas definidas acima se associam por meio de relações matemáticas. Substituindo a expressão (23) em (22), tem-se:

$$-\frac{\partial T}{\partial h} = \delta g = g_{P_0} - \gamma_{Q_0} - \frac{\partial \gamma}{\partial h} N \quad (29)$$

Nota-se, que a expressão (29) pode ser reescrita em termos da anomalia de gravidade:

$$-\frac{\partial T}{\partial h} = \Delta g - \frac{\partial \gamma}{\partial h} N \quad (30)$$

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial h} + \frac{\partial \gamma}{\partial h} N \quad (31)$$

Introduzindo o teorema de Bruns em (31) se obtém a equação fundamental da Geodesia:

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial h} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} T \quad (32)$$

A equação (32) expressa a anomalia de gravidade como uma combinação linear entre o potencial perturbador e sua derivada normal. Com ela, a partir de observações da anomalia de gravidade, determina-se o potencial perturbador por meio de uma condição de contorno sobre a superfície na qual a anomalia esteja referida (BLITZKOW, 1996).

2.6 Problemas de Valor de Contorno

A partir do conhecimento de valores de uma variável sobre uma superfície limitante, considerando-se uma função que se associe àquela variável, caracteriza-se o chamado Problema de Valor de Contorno (PVC) (BLITZKOW, 1996). A Teoria do Potencial considera duas situações para o PVC, o problema direto e o problema inverso. O primeiro trata-se da determinação do potencial gravitacional em função das massas geradoras, enquanto que o último, considerando conhecido o referido potencial, remonta-se à distribuição das massas geradoras. Baseado no pressuposto que as infinitas distribuições de massa geram um mesmo potencial, o problema inverso que possui um interesse específico para a Geodesia, não possui solução única (GEMAEL, 2012).

Três problemas de valor de contorno são enunciados na teoria do potencial:

- **Primeiro Problema (Dirichlet):** conhecendo-se os valores de uma função arbitrária V sobre uma superfície S , determinar essa função V de tal forma que

seja harmônica interna ou externamente a S e que sobre a superfície S assuma os valores da função escolhida.

- **Segundo Problema (Neumann):** conhecendo-se os valores da derivada normal de uma função V sobre uma superfície S, determinar a função V que seja harmônica interna ou externamente a S.
- **Terceiro Problema (Hilbert):** conhecendo-se os valores da combinação linear da função V com a sua derivada normal sobre a superfície S, determinar a função V nas condições anteriores.

Semelhante ao potencial gravitacional, o potencial perturbador é harmônico fora das massas atrativas da Terra ($\nabla^2 T = 0$) (JEKELI, 2007). Dessa maneira, seguindo os preceitos das condições de contorno da teoria do potencial, são apresentadas três vertentes para o PVCG:

- **Primeiro problema (Dirichlet):** conhecendo-se os valores de uma função T sobre uma superfície S, determinar essa função T de tal forma que seja harmônica interna ou externamente a S e que sobre a superfície S assuma os valores da função escolhida.

$$\begin{cases} \nabla^2 T = 0 & r > R \\ T = \bar{T} & r = R \end{cases} \quad (33)$$

- **Segundo problema (Neumann):** conhecendo-se os valores da derivada normal de uma função T sobre uma superfície S, $\frac{\partial T}{\partial r}$, determinar a função T que seja harmônica interna ou externamente a S.

$$\begin{cases} \nabla^2 T = 0 & r > R \\ \frac{\partial T}{\partial r} = -\delta_g & r = R \end{cases} \quad (34)$$

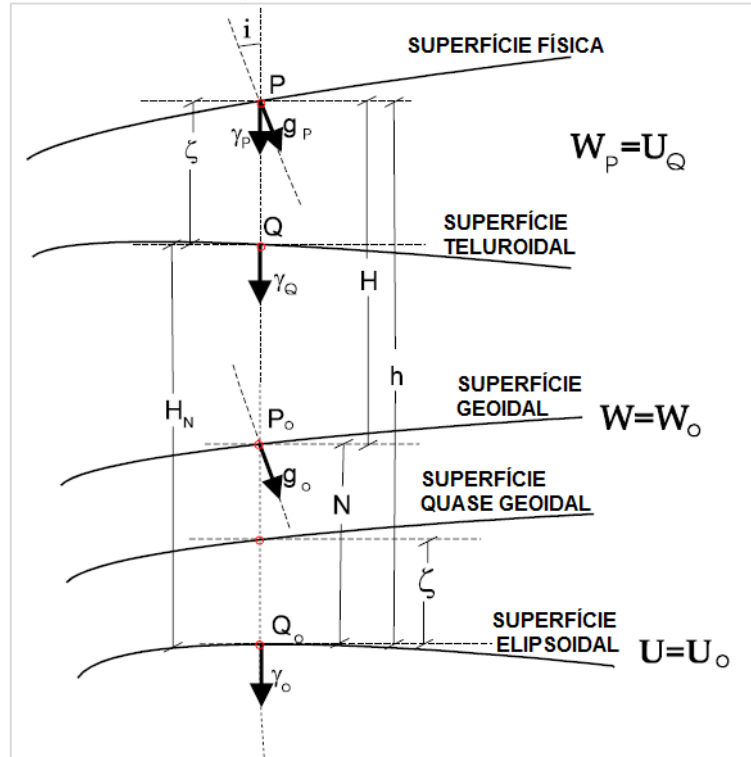
- **Terceiro problema (Hilbert):** conhecendo-se os valores da combinação linear da função T com a sua derivada normal sobre a superfície S , determinar a função T nas condições anteriores.

$$\begin{cases} \nabla^2 T = 0 & r > R \\ \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{2}{r} T = -\Delta g & r = R \end{cases} \quad (35)$$

No âmbito da Geodesia, os problemas de valor de contorno são adotados dentro da teoria de Stokes e de Molodensky. O princípio de Stokes se baseia na determinação do potencial perturbador em função da anomalia de gravidade (21), adotando a superfície geoidal como a superfície de contorno. Logo, trata-se de um problema interno às massas, implicando na redução das observações gravimétricas. Por outro lado, Molodensky propôs a utilização da superfície física como limite, dispensando o conhecimento de um modelo de distribuição de massa da Terra entre as superfícies geoidal e física (GUIMARÃES; BLITZKOW, 2011).

O problema de Dirichlet apesar de apresentar um enunciado simples se comparado aos demais, é considerado um problema teoricamente desafiador, uma vez que apresenta singularidades em sua solução (VERMEER, 2018). De forma genérica, Hofmann-Wellenhof e Moritz (2006) apresentam a resolução do problema de Dirichlet de acordo com a concepção de Molodensky; isto é, utilizando a superfície física como limite, considerando $W_P = U_Q$, com o ponto P e Q situado sobre a mesma normal da superfície elipsoidal. Nessa abordagem, a superfície intitulada teluroidal (Σ) é utilizada como referência (Figura 2).

Figura 2 - Superfícies e grandezas envolvidas no sistema de altitudes.



Fonte: Adaptado de Blitzkow, Campos e Freitas (2004).

A distância entre a superfície do teluroide e a superfície física ao longo da normal é denotada como anomalia de altura (ζ). Por outro lado, ao representar a anomalia de altura ao longo da normal sobre o elipsoide de referência, origina outra superfície de referência, denominada quase geoidal, caracterizada por ser uma superfície não equipotencial consideravelmente próxima à superfície geoidal. Na resolução desse problema emprega-se a anomalia de gravidade de Molodensky (Δg_{MO}). Nesse caso, a aceleração de gravidade real é observada no ponto P (g_P) da superfície física (SF) e a aceleração de gravidade normal é referida no ponto Q (γ_Q) da superfície teluroidal (Σ), conforme a expressão (36) (HOFMANN-WELLENHOF; MORITZ, 2006)

$$\Delta g_{MO} = g_P - \gamma_Q \quad (36)$$

O advento do posicionamento por satélites culminou na modernização da resolução do segundo PVCG, devido a Neumann. Para tanto, é necessário conhecer a

derivada do potencial perturbador ao longo da normal. Na abordagem de Molodensky, a superfície física é a superfície de contorno e a grandeza utilizada é o distúrbio de gravidade (23). O referido problema é caracterizado como PVCG fixo, devido à fixação das coordenadas (φ, λ, h) nas observações gravimétricas.

Já o terceiro problema do PVCG é considerado o de maior relevância para a Geodesia, visto que a determinação do potencial perturbador, de certo modo, se relaciona a ele. Sua solução pode ser dada segundo o princípio de Stokes, a partir de anomalias de gravidade (Δg) conforme a expressão (21), ou na visão moderna de Molodensky adotando (Δg_{MO}) (36).

2.7 As formulações de Stokes e de Molodensky

A formulação clássica do problema de Hilbert é devida a Stokes. Em 1849, ele desenvolveu uma integral para determinar o potencial perturbador, utilizando anomalias de gravidade (21). As ondulações geoidais são determinadas a partir do teorema de Bruns.

O potencial perturbador é expresso por (BLITZKOW, 1996):

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) \partial \sigma \quad (37)$$

onde, $S(\psi)$ é o kernel (38) e ψ a distância esférica.

$$S(\psi) = \frac{1}{\text{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right)} - 6\text{sen}\frac{\psi}{2} + 1 - 5\cos\psi - 3\cos\psi \ln\left(\text{sen}\frac{\psi}{2} + \text{sen}^2\frac{\psi}{2}\right) \quad (38)$$

Considerando o teorema de Bruns (28), tem-se a ondulação geoidal:

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) \partial \sigma \quad (39)$$

Uma vez que o problema de Stokes é interno às massas e utiliza a superfície geoidal como limitante, há a necessidade de reduzir os valores de g , observados sobre a superfície física à geoidal. Para isso, torna-se necessário empregar um modelo de densidades de massas. Devido ao não conhecimento da exata distribuição de massas no interior da crosta, os valores de g são reduzidos por meio do gradiente de gravidade ar livre da Terra normal, considerado uma boa aproximação.

A determinação da forma da Terra em função do potencial de gravidade e do vetor gravidade é realizada pela concepção de Molodensky. A formulação desse problema envolve as identidades de Green e a fórmula de Gauss para linearizar o potencial de gravidade (16), que passa a ser expresso como (HEISKANEN; MORITZ, 1967):

$$-2\pi W + \iint_{SF} \left[W \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{l} \right) - \frac{1}{l} \frac{\partial W}{\partial n} \right] \partial SF + 2\pi\omega^2(x^2 + y^2) + 2\omega^2 \iiint_{Terra} \frac{\partial v}{l'} = 0 \quad (40)$$

onde, l é a distância entre um ponto fixo P , no qual o primeiro e o terceiro elemento se referem, e o elemento de superfície ∂SF , l' a distância entre P e o elemento de volume ∂v .

A linearização também é efetuada para a função do potencial normal U :

$$-2\pi U + \iint_{SF} \left[U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{l} \right) - \frac{1}{l} \frac{\partial U}{\partial n} \right] \partial SF + 2\pi\omega^2(x^2 + y^2) + 2\omega^2 \iiint_{Terra} \frac{\partial v}{l'} = 0 \quad (41)$$

Subtraindo (41) de (40) se obtém a equação (42) em termos do potencial perturbador (T):

$$-2\pi T + \iint_{SF} \left[T \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{l} \right) - \frac{1}{l} \frac{\partial T}{\partial n} \right] \partial SF = 0 \quad (42)$$

Visto que a diferença entre as superfícies elipsoidal e a teluroidal é dada pela anomalia de altura, é possível substituir a superfície física (SF) pela superfície teluroidal

(Σ). Com isso, além das anomalias de gravidade, têm-se os elementos da deflexão da vertical e a expressão se torna (HEISKANEN; MORITZ, 1967):

$$T - \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} \left[\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{l} \right) - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} \frac{\cos \beta}{l} \right] T d\Sigma = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} \frac{1}{l} [\Delta g - \gamma(\xi \tan \beta_1 + \eta \tan \beta_2)] \cos \beta d\Sigma \quad (43)$$

onde T é a incógnita e ξ e η correspondem às componentes do desvio da vertical. Os ângulos de inclinação no perfil norte-sul são representados por β_1 , e no perfil leste-oeste por β_2 . A inclinação máxima é dada por β .

A expressão (43) apresenta desvantagens por conter os elementos da vertical cuja determinação requer a redução dos mesmos à superfície física. Para a formulação (43) ser expressa em função da anomalia de gravidade de Molodensky, apresentando uma simples solução, a mesma é inserida na condição de contorno, expressão (32), com convenções específicas (HEISKANEN; MORITZ, 1967).

Na formulação de Molodensky para o problema de Dirichlet, a anomalia de altura é determinada pelo kernel de Stokes, conforme (44) (HOFMANN-WELLENHOF; MORITZ, 2006).

$$\zeta(P) = \frac{R}{4\pi\gamma_0} \iint (\Delta g_{MO} + g_1) S(\psi) \partial\sigma \quad (44)$$

em que, g_1 é a correção do termo de Molodensky e γ_0 é a aceleração de gravidade na latitude 45° . De acordo com Yildiz et al. (2012), aplicando a técnica RTM g_1 se torna dispensável.

A resolução da formulação (44) emprega a aceleração de gravidade normal γ em Q , referida à superfície teluroidal (Σ) (Figura 2), para calcular Δg_{MO} . Nesse caso γ_Q é determinado como (HOFMANN-WELLENHOF; MORITZ, 2006):

$$\gamma_Q = \gamma_{Q_0} \left[1 - 2(1 + f + m - 2f \operatorname{sen}^2 \varphi) \frac{H_N}{a} + 3 \left(\frac{H_N}{a} \right)^2 \right] \quad (45)$$

com a altitude normal (H_N) determinada por:

$$H_N = \frac{C}{\gamma_{Q_0}} \left[1 + (1 + f + m - 2f \operatorname{sen}^2 \varphi) \frac{C}{a\gamma_{Q_0}} + \left(\frac{C}{a\gamma_{Q_0}} \right)^2 \right] \quad (46)$$

em que, γ_{Q_0} corresponde ao valor da aceleração de gravidade normal na superfície elipsoidal, C o número geopotencial e os parâmetros associados ao elipsoide de referência, sendo f o achatamento, a o semi eixo maior e m uma constante física equivalente a 0,00344978600308.

Já no PVCG de Neumann utiliza-se o kernel de Hotine, também denominado fórmula de Neumann Koch, a partir do distúrbio de gravidade. O potencial perturbador é definido conforme a expressão (HOFMANN-WELLENHOF; MORITZ, 2006):

$$T(P) = \frac{R}{4\pi} \iint H(\psi) \delta g d\sigma \quad (47)$$

Nesse caso, analogamente ao teorema de Bruns, a condição válida para o potencial perturbador e a anomalia de altura é:

$$\zeta = \frac{T}{\gamma_Q} \quad (48)$$

A resolução desse problema para a determinação da superfície quase geoidal é dada como (HOFMANN-WELLENHOF; MORITZ, 2006):

$$\zeta(P) = \frac{R}{4\pi\gamma_0} \iint \delta g H(\psi) d\sigma + g_n \quad (49)$$

onde, g_n , envolve uma solução de alta ordem calculada de forma recursiva, com o kernel de Hotine $H(\psi)$ expresso por:

$$H(\psi) = \operatorname{cosec}\left(\frac{\psi}{2}\right) - \ln\left(1 + \operatorname{csc}\left(\frac{\psi}{2}\right)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n+1} P_n(\cos(\psi)) \quad (50)$$

A metodologia de Molodensky oferece vantagens do ponto de vista de sua determinação, uma vez que independe de um modelo de distribuição de densidade no interior da crosta. Contudo, a superfície quase geoidal não é uma superfície equipotencial do campo de gravidade.

2.8 Funções harmônicas esféricas

As funções harmônicas esféricas representam as funções próprias da equação de Laplace e são constituídas pelo produto das funções associadas de Legendre³ pelo seno e cosseno da longitude.

O desenvolvimento em série de funções harmônicas esféricas da função potencial gravitacional é dado pela expressão (51) (BLITZKOW, 1996):

$$V(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n [A_{nm} Y_{nm}^c + B_{nm} Y_{nm}^s] \quad (51)$$

com:

$$Y_{nm}^c = P_{nm}(\cos \theta) \cos m\lambda \quad (52)$$

$$Y_{nm}^s = P_{nm}(\cos \theta) \operatorname{sen} m\lambda \quad (53)$$

onde, $P_{nm}(\cos \theta)$ são as funções principais da equação associada de Legendre, n o grau, m a ordem, $\bar{Y}_{nm}^c, \bar{Y}_{nm}^s$ são as funções principais da equação de Laplace sobre a superfície de uma esfera, a é o fator de escala, r é a distância do centro do sistema de coordenadas esféricas de um ponto na superfície elipsoidal, θ a colatitude, λ a longitude e A_{nm} e B_{nm} são coeficientes com unidades de potencial.

³ Adrien-Marie Legendre (1752-1833)

Para facilitar o tratamento matemático se faz uso de coeficientes harmônicos esféricos adimensionais e plenamente normalizados à $V(r, \theta, \lambda)$. Com isso, a expressão se torna:

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{KM}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n [\bar{J}_{nm} \bar{Y}_{nm}^c + \bar{K}_{nm} \bar{Y}_{nm}^s] \right\} \quad (54)$$

Os coeficientes A_{nm}, B_{nm} com unidades de potencial, os coeficientes, J_{nm}, K_{nm} sem unidades, e os coeficientes $\bar{J}_{nm}, \bar{K}_{nm}$, plenamente normalizados se relacionam da forma (BLITZKOW, 1996):

$$A_{nm} = -\frac{KM}{a} J_{nm} \quad (55)$$

$$B_{nm} = -\frac{KM}{a} K_{nm} \quad (56)$$

$$\bar{J}_{nm} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} J_{nm} \quad (m = 0) \quad (57)$$

$$\bar{J}_{nm} = \sqrt{\frac{(n-m)!}{2(2n+1)(n-m)!}} J_{nm} \quad (m \neq 0) \quad (58)$$

$$\bar{K}_{nm} = \sqrt{\frac{(n-m)!}{2(2n+1)(n-m)!}} K_{nm} \quad (m \neq 0) \quad (59)$$

O potencial perturbador em termos de funções harmônicas esféricas é expresso por:

$$T(r, \theta, \lambda) = -\frac{KM}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n [\bar{J}'_{nm} \bar{Y}_{nm}^c + \bar{K}'_{nm} \bar{Y}_{nm}^s] \right\} \quad (60)$$

com,

$$\bar{J}'_{nm} = \bar{J}_{nm} - \bar{J}_{nm}^N \quad (61)$$

$$\bar{K}'_{nm} = \bar{K}_{nm} - \bar{K}^N_{nm} \quad (62)$$

sendo, \bar{J}'_{nm} os coeficientes do potencial perturbador plenamente normalizados, \bar{J}_{nm} os coeficientes do potencial gravitacional da Terra real, \bar{J}^N_{nm} referem-se à Terra normal.

A representação em termos de funções harmônicas esféricas da ondulação geoidal é da forma (BLITZKOW, 1996):

$$N(\theta, \lambda) = -R \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n [\bar{J}'_{nm} \bar{Y}^C_{nm} + \bar{K}'_{nm} \bar{Y}^S_{nm}] \right\} \quad (63)$$

A anomalia de altura em funções harmônicas esféricas é dada por (BARTHELMES, 2013):

$$\zeta(r, \varphi, \lambda) = \frac{KM}{r \gamma(r, \varphi)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n P_{nm}(\text{sen } \varphi) (\bar{J}'_{nm} \cos m\lambda + \bar{K}'_{nm} \text{sen } m\lambda) \quad (64)$$

onde, r é o raio da Terra com altitude geodésica nula ($h = 0$), \bar{J}'_{nm} e \bar{K}'_{nm} são os coeficientes plenamente normalizados do potencial perturbador, e φ a latitude.

Calcular a altura geoidal ou a anomalia de altura (modelo quase-geoidal) com precisão centimétrica requer decompor os mesmos em distintos comprimentos de ondas: longos, médios e curtos. De acordo com Rapp e Sansò (1991) as componentes caracterizadas longas possuem comprimento de onda em torno de 550 km e são advindas dos modelos globais do geopotencial, até grau e ordem convenientes. As componentes de ondas de dimensão média possuem comprimento em torno de 550 km a 20 km e são determinadas por observações terrestres. Nesse segmento, consideram-se as anomalias de gravidade médias e pontuais e os dados de deflexões verticais astro geodésicas. As ondas de curto comprimento possuem 20 km a 2 km de extensão e podem ser derivadas dos MDTs de alta resolução.

As missões espaciais modernas, como o *Challenging Minisatellite Payload* (CHAMP), *Gravity Recovery and Climate Experiment* (GRACE), *Gravity Recovery and*

Climate Experiment Follow-On (GRACE-FO), e em especial a missão *Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer* (GOCE), melhoraram significativamente a determinação das componentes de longo e médio comprimento de onda do campo gravitacional (FREITAS; BLITZKOW, 1999). Dessa forma, os coeficientes de baixo grau do desenvolvimento em série do geopotencial são melhores determinados por dados orbitais do que a partir de informações terrestres.

A partir dessa segmentação realiza-se a remoção dos longos, médios e parcialmente dos curtos comprimentos de onda, obtendo residuais suaves que são facilmente interpolados em grade. Além disso, os cálculos são executados com as grandezas livre das componentes sistemáticas em razão da remoção, utilizando os modelos do geopotencial. Por fim, restaura-se a contribuição das altas, médias e parcialmente das curtas frequências, eliminadas anteriormente. Esse procedimento é descrito como remover-restaurar, desenvolvido por K. Colic (HOFMANN-WELLENHOF; MORITZ, 2006).

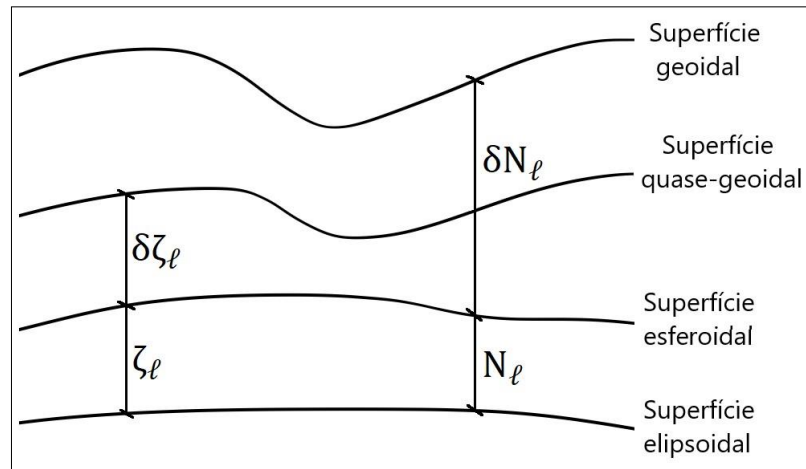
Em função das vantagens que a separação dos diferentes comprimentos de onda pode oferecer, expressam-se a ondulação geoidal e a anomalia de altura da seguinte forma:

$$N(\theta, \lambda) = N_l(\theta, \lambda) + \delta N_l(\theta, \lambda) \quad (65)$$

$$\zeta(\theta, \lambda) = \zeta_l(\theta, \lambda) + \delta \zeta_l(\theta, \lambda) \quad (66)$$

O primeiro termo dos dois casos, N_l e ζ_l refere-se aos longos comprimentos de onda, determinados em função de um modelo do geopotencial. Essa funcional representa a separação entre as superfícies elipsoidal e esferoidal (Figura 3). Essa última é definida como uma superfície intermediária entre as superfícies do quase geoide e do elipsoide, fornecida pelos MGGs (SILVA, 2002). De acordo com Vanicek e Krakiwski (1982), cada coleção de coeficientes do modelo gera uma superfície esferoidal de referência de grau l .

Figura 3 - Componentes do comprimento de onda da ondulação geoidal e da anomalia de altura.



Fonte: Adaptado de Gemael, (2012).

Para calcular as componentes de longo comprimento de onda, basta estender a série do referido modelo até um grau e ordem específico; comumente, adota-se o valor de 200. Já o segundo termo δN_1 e $\delta \zeta_l$ refere-se aos curtos comprimentos de onda oriundos da gravimetria e MDTs, representados na Figura 3 pela separação entre as superfícies geoidal e esferoidal, no caso da ondulação geoidal; para a anomalia de altura, os curtos comprimentos de onda são representados pela separação entre as superfícies esferoidal e a quase geoidal.

2.9 Modelagem topográfica com o *Residual Terrain Model*

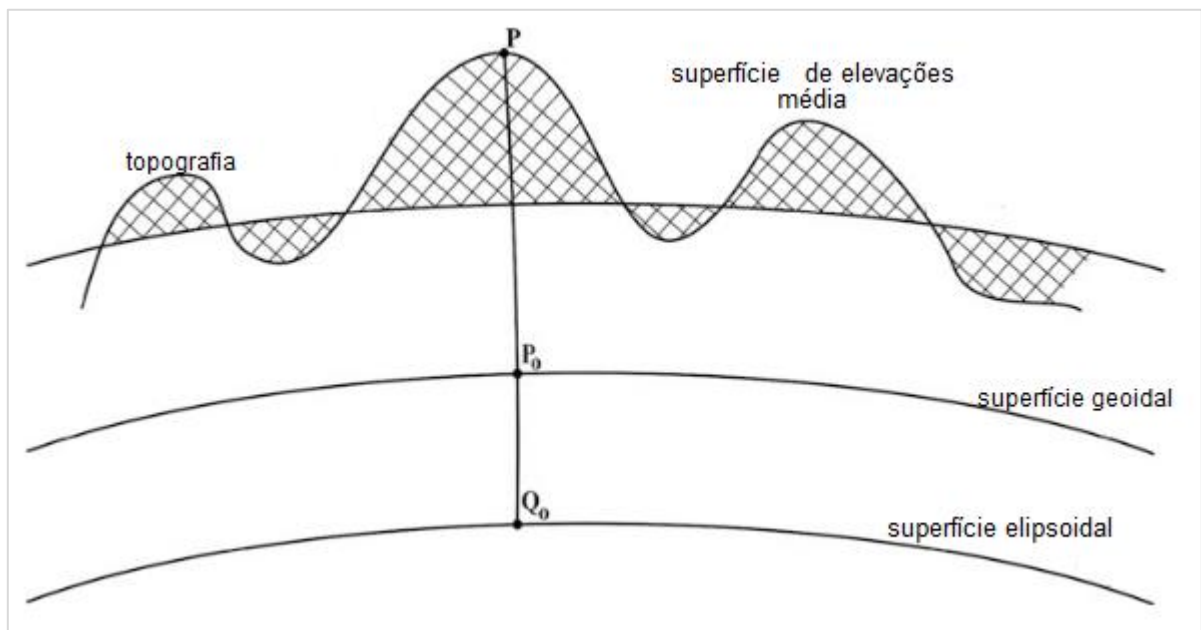
A determinação dos modelos geoidal e quase-geoidal pode se beneficiar da consideração dos efeitos topográficos em razão da possibilidade de dispor de modelos adequados da topografia. Esse sinal, encontrado nos curtos comprimentos de onda, deve ser modelado de acordo com o princípio e a metodologia adotadas no cálculo. Em geral, recorre-se à condensação de Helmert para o modelo geoidal e a técnica RTM para a determinação da superfície quase geoidal.

A técnica RTM consiste no uso de um modelo digital do terreno de alta resolução para calcular os efeitos topográficos e aplicá-los à decomposição espectral. Os comprimentos de onda são segmentados com a técnica remover-restaurar

considerando também a contribuição das baixas frequências do sinal gravitacional, determinados por um modelo do geopotencial.

Os efeitos topográficos são quantificados a partir de um modelo digital das elevações médias do terreno, chamado MDT de referência (Figura 4), produzido em função de dois MDTs, um de alta e um de baixa resolução. Esse último é denominado também como MDT irregular. O modelo, denominado MDT de referência, é definido por um filtro passa baixa, produzido em função do operador média móvel correspondente à distância na qual será feito a média das altitudes.

Figura 4 - Representação geométrica da redução RTM.



Fonte: TZIAVOS; SIDERIS, 2013.

O modelo produzido deve apresentar resolução compatível ao desenvolvimento em série dos coeficientes das funções harmônicas esféricas do potencial gravitacional oriundo do MGG (FORSBERG; TSCHERNING, 2008). Em outras palavras, o grau e a ordem do MGG deve corresponder à resolução espacial do MDT para que a topografia seja propriamente contabilizada pelos longos e curtos comprimentos de onda.

O potencial de atração das massas topográficas (ΔA_{RTM}) é calculado utilizando a expressão (67), com a aproximação de um prisma retangular, considerando $2,67 \text{ gcm}^{-3}$

para a densidade das massas (ρ) topográficas no continente e $1,030 \text{ gcm}^{-3}$ para a topografia oceânica (TZIAVOS; SIDERIS, 2013).

$$\Delta A_{RTM} = 2\pi K\rho(H - H_{ref}) - K \iint_E \int_{H_{ref}}^H \rho \frac{H_p - z}{l^3} \partial x \partial y \partial z \quad (67)$$

onde, H_{ref} é a altitude do MDT de referência utilizado, H a altitude das massas topográficas definida pelo MDT de alta resolução, H_p é a altitude normal do ponto e $\rho(x, y, z)$ é a função tridimensional de densidade. O segundo termo da equação corresponde a correção clássica do terreno dada pela integração das irregularidades das massas topográficas, referente ao platô de Bouguer.

A vantagem de fazer a remoção dos efeitos topográficos sobre as anomalias de gravidade com a técnica RTM é a obtenção de residuais mais suaves, comparado a outros métodos de redução. Com essa técnica a correlação entre a altitude e a anomalia é removida, evitando o efeito de alisamento ocasionado por observações de gravidade executadas em diferentes altitudes. Essa última condição ocorre em áreas de grandes irregularidades topográficas. Em contrapartida, a principal desvantagem é apresentada quando a anomalia estiver localizada abaixo da superfície de referência. Nesse caso, o potencial da massa deixa de satisfazer a função harmônica de Laplace, sendo necessário realizar correções aplicando a condensação de Helmert (TZIAVOS; SIDERIS, 2013).

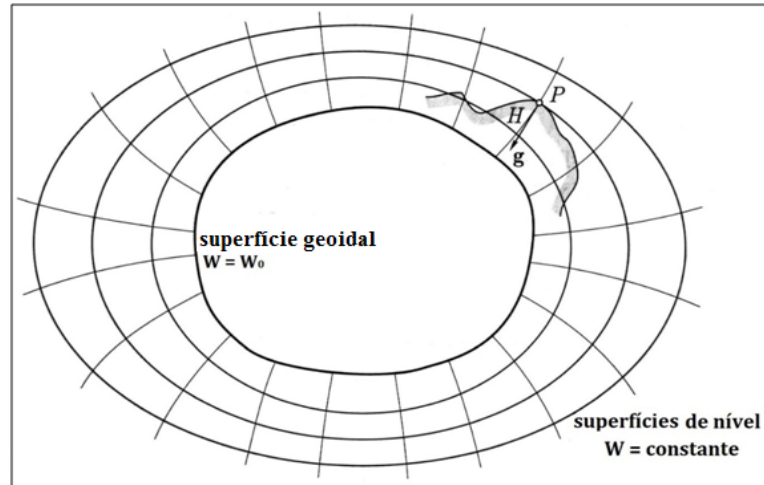
2.10 Sistema de altitude

2.10.1 Superfícies de Nível e Número Geopotencial

A representação geométrica do campo de gravidade é constituída pelas superfícies de nível e linhas de prumo (Figura 5). A primeira refere-se às superfícies cujo potencial de gravidade é constante, sendo perpendiculares às chamadas linhas de

prumo ou linhas de força. Tangente às linhas de prumo tem-se o vetor de gravidade real cuja direção é definida como vertical (TORGE, 2001).

Figura 5 - Superfícies de nível e linhas de prumo.



Fonte: Adaptado de Hofmann-Wellenhof e Moritz (2006).

A superfície geoidal, limitante à figura do geóide, foi proposta por Gauss como a principal superfície equipotencial do campo de gravidade e que melhor se ajusta ao nível médio do mar, no sentido do método dos mínimos quadrados. Após algumas idealizações, definiu-se um valor de potencial de gravidade, referido como W_0 .

A diferença do potencial de gravidade da Terra real (W_0) e o potencial em um determinado ponto na superfície física (W_p) denomina-se número geopotencial (C_p):

$$C_p = W_0 - W_p \quad (68)$$

Na prática, é conveniente calcular diferenças de potenciais entre pontos situados em distâncias pequenas, 3 a 4 km. A referida grandeza é obtida por meio de medidas da aceleração de gravidade e de desníveis, oriundos do nivelamento geométrico (69) (HOFMANN-WELLENHOF; MORITZ, 2006).

$$\Delta C_B = W_A - W_B = \int_A^B g dz \cong \sum g_i \Delta h_i \quad (69)$$

sendo:

dz : a separação entre duas superfícies (elemento infinitesimal).

g_i : a média dos valores da aceleração de gravidade, observados entre os pontos A e B.

Δh_i : os desníveis advindos do nivelamento entre A e B.

A unidade à qual o número geopotencial é expresso é o m^2s^{-2} . Apesar dos números geopotenciais possuírem unidade de medida pouco intuitiva para expressar distâncias, os mesmos são favoráveis para descrever o comportamento de massas, em especial da água. Porém, por conveniência divide-se C por um valor adequado da aceleração de gravidade, dando origem às altitudes físicas. Dentre essas, as mais usuais são: altitude ortométrica, dinâmica, normal e a normal-ortométrica.

2.10.2 Altitudes Físicas

2.10.2.1 Altitude Dinâmica

A altitude dinâmica (H_D), conhecida pela característica peculiar de se manter constante sobre as superfícies equipotenciais, é determinada pela divisão de C por um valor da aceleração de gravidade normal, calculado em função de uma latitude específica (γ_0) (70). Em geral, opta-se pela latitude de 45° ou um valor médio da aceleração de gravidade do local.

$$H_D = \frac{C}{\gamma_0} \quad (70)$$

onde, γ_0 é determinado por meio dos parâmetros do elipsoide GRS80 e do valor da latitude. As fórmulas clássicas para o cálculo de γ_0 são o teorema de Clairaut e a fórmula de Somigliana (24) cujo valor para a latitude de 45° é $980.619.920,3 \mu\text{Gal}$ (HOFMANN-WELLENHOF; MORITZ, 2006 p.71).

A diferença entre a altitude dinâmica e o número geopotencial reside apenas no fator de escala. Logo, as altitudes dinâmicas são constantes sobre uma mesma superfície equipotencial, possuindo características estritamente físicas. Evidentemente,

a água flui de um ponto de maior altitude dinâmica para outro de menor valor. Sua aplicação é recomendada nos estudos em lagos e na costa oceânica. Reitera-se que em áreas extensas a altitude dinâmica poderá apresentar distorções acentuadas de escala (FREITAS; BLITZKOW, 1999). Por outro lado, essa componente vertical não possui significado geométrico. Para fins específicos, é conveniente converter os desníveis medidos (Δn^{AB}) em altitudes dinâmicas, seguindo a expressão (71) HOFMANN-WELLENHOF; MORITIZ, 2006):

$$\Delta H_D^{AB} = \Delta n^{AB} + DC_{AB} \quad (71)$$

em que a correção dinâmica é dada por:

$$DC_{AB} = \int_A^B \frac{g - \gamma_0}{\gamma_0} dn = \sum_A^B \frac{g - \gamma_0}{\gamma_0} \delta n \quad (72)$$

onde, A e B são as RRNN.

2.10.2.2 Altitude Ortométrica

A altitude ortométrica (H) é definida como a distância linear entre a superfície geoidal e o ponto de interesse na superfície física, ao longo da vertical (Figura 2). Diferente da altitude dinâmica, a altitude ortométrica possui significado físico e geométrico. O comprimento da linha de prumo que liga as referidas superfícies ao longo da vertical estabelece o conceito geométrico intrínseco em sua definição. As características físicas são definidas pela vinculação da superfície origem das medições, a superfície geoidal, ao campo de gravidade e pela perpendicularidade da linha de projeção às demais superfícies equipotenciais nas quais ela passa (MEYER; ROMAN; ZILKOSKI, 2006).

A altitude ortométrica de um ponto é obtida por:

$$H = \frac{C}{\bar{g}} \quad (73)$$

com \bar{g} da forma:

$$\bar{g} = \frac{1}{H} \int_0^H g \partial H \quad (74)$$

Enquanto ΔC_B pode ser determinado por meio da expressão (69), o valor de \bar{g} deve ser conhecido ao longo da linha de prumo no interior da superfície topográfica. Para tanto, é necessário um modelo de distribuição de massa dentro da crosta. Visto que essas informações são ainda desconhecidas de forma exata, a altitude ortométrica possui significado puramente teórico.

Uma aproximação de \bar{g} é dada em função da chamada redução simplificada de Poincaré-Prey (HOFMANN-WELLENHOF; MORITZ, 2006):

$$\bar{g} = g + 0,0424 H \quad (75)$$

onde, g (gal) é a aceleração de gravidade mensurada na superfície terrestre e H (km) é a altitude ortométrica do ponto.

Nesta formulação \bar{g} é reduzido à crosta, removendo o chamado Platô de Bouguer e aplicando a redução ar-livre por meio do gradiente normal de gravidade e, em seguida, restaura o referido platô (JEKELI, 2000). Ao utilizar a redução simplificada de Prey em (73) a altitude pode ser obtida como (76), denominada altitude ortométrica de Helmert (H_H).

$$H_H = \frac{C}{g + 0,0424H} \quad (76)$$

Em aplicações práticas, como em redes de nivelamento, aplica-se a correção (DC_{oc}) (77) em função dos desníveis, determinados pelo nivelamento geométrico, e da aceleração de gravidade normal (HOFMANN-WELLENHOF; MORITZ, 2006):

$$DC_{oc}^{1-2} = \sum_1^2 \frac{g - \gamma_0}{\gamma_0} \delta n + \frac{\bar{g}_1 - \gamma_0}{\gamma_0} H_1 - \frac{\bar{g}_2 - \gamma_0}{\gamma_0} H_2 \quad (77)$$

onde, \bar{g}_1 e \bar{g}_2 são os valores médios de g ao longo da linha de prumo nas RRNN 1 e 2, H_1 e H_2 são os valores da altitude ortométrica nas respectivas RRNN, e γ_0 é a aceleração de gravidade normal na latitude de 45° .

Além disso, a altitude ortométrica (H) possui relação direta com a altitude geodésica (h) por meio da ondulação geoidal (N). De forma aproximada, as grandezas se associam como mostra a expressão (78).

$$H \cong h - N \quad (78)$$

2.10.2.3 Altitude Normal

A altitude normal, caracterizada por possuir significados físico e geométrico, apresenta vantagens comparadas às altitudes ortométricas. Sua determinação dispensa a utilização de um modelo de densidade da Terra a partir da introdução de uma aproximação do campo de gravidade real por meio do campo de gravidade normal (U).

Em termos de distância, ela é descrita de duas formas: a separação entre as superfícies elipsoidal e teluroidal, ou, entre as superfícies física e quase geoidal (Figura 2). A linha de projeção que liga as superfícies segue a direção da normal em P_0 e é perpendicular às superfícies equipotenciais do modelo da Terra normal.

A divisão de C por um valor médio de aceleração de gravidade normal ($\bar{\gamma}$), determinado ao longo da linha de prumo entre as superfícies elipsoidal e teluroidal, expressa a altitude normal como (HOFMANN-WELLENHOF; MORITZ, 2006):

$$H_N = \frac{C}{\bar{\gamma}} \quad (79)$$

com $\bar{\gamma}$ definido pela expressão (80):

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{H_N} \int_0^{H_N} \gamma \partial H_N \quad (80)$$

Usualmente, $\bar{\gamma}$ é calculado por:

$$\bar{\gamma} = \gamma \left[1 - (1 + f + m - 2f \operatorname{sen}^2 \varphi) \frac{H_N}{a} + \frac{H_N^2}{a^2} \right] \quad (81)$$

onde, f é o achatamento, m é o parâmetro geodésico referido à razão das forças gravitacional e centrífuga no equador, e φ é a latitude geodésica da RN.

O cálculo da aceleração de gravidade normal depende de H_N , mas de acordo com Hofmann-wellenhof e Moritz (2006) o cálculo de (82) não é altamente dependente, tornando possível resolver a expressão de forma iterativa, adotando como dado de entrada $H_N = 0$.

$$H_N = \frac{C}{\bar{\gamma}} \left[1 + \frac{1}{a} (1 + f + m - 2f \operatorname{sen}^2 \varphi) H_N + \left(\frac{H_N}{a} \right)^2 \right] \quad (82)$$

Por outro lado, assim como as altitudes dinâmicas e ortométricas, a altitude normal pode ser determinada em função dos desníveis oriundos do nivelamento geodésico, aplicando correção normal (NC_{AB}):

$$NC_{AB} = \sum_A^B \frac{g - \gamma_0}{\gamma_0} \delta n + \frac{\bar{\gamma}_A - \gamma_0}{\gamma_0} H_N^A - \frac{\bar{\gamma}_B - \gamma_0}{\gamma_0} H_N^B \quad (83)$$

sendo, γ_0 a aceleração de gravidade normal ao longo da linha de prumo.

A relação da correção NC_{AB} entre os desníveis Δn^{AB} é dada pela expressão (84):

$$\Delta H_N^{AB} = H_N^B - H_N^A = \Delta n^{AB} + NC_{AB} \quad (84)$$

Além disso, é possível relacionar a altitude normal com a altitude geodésica, a partir de um modelo quase geoidal:

$$H_N \cong h - \zeta \quad (85)$$

Por se tratar de uma grandeza associada ao número geopotencial, a altitude normal independe do trajeto entre dois pontos, percorrido pelo nivelamento. Contudo, ela está associada a superfícies que não são de nível e isto permite que dois locais com a mesma altitude possam estar em diferentes superfícies equipotenciais (BLITZKOW; CAMPOS; FREITAS, 2004).

2.10.2.4 Altitudes Ortométricas-Normais

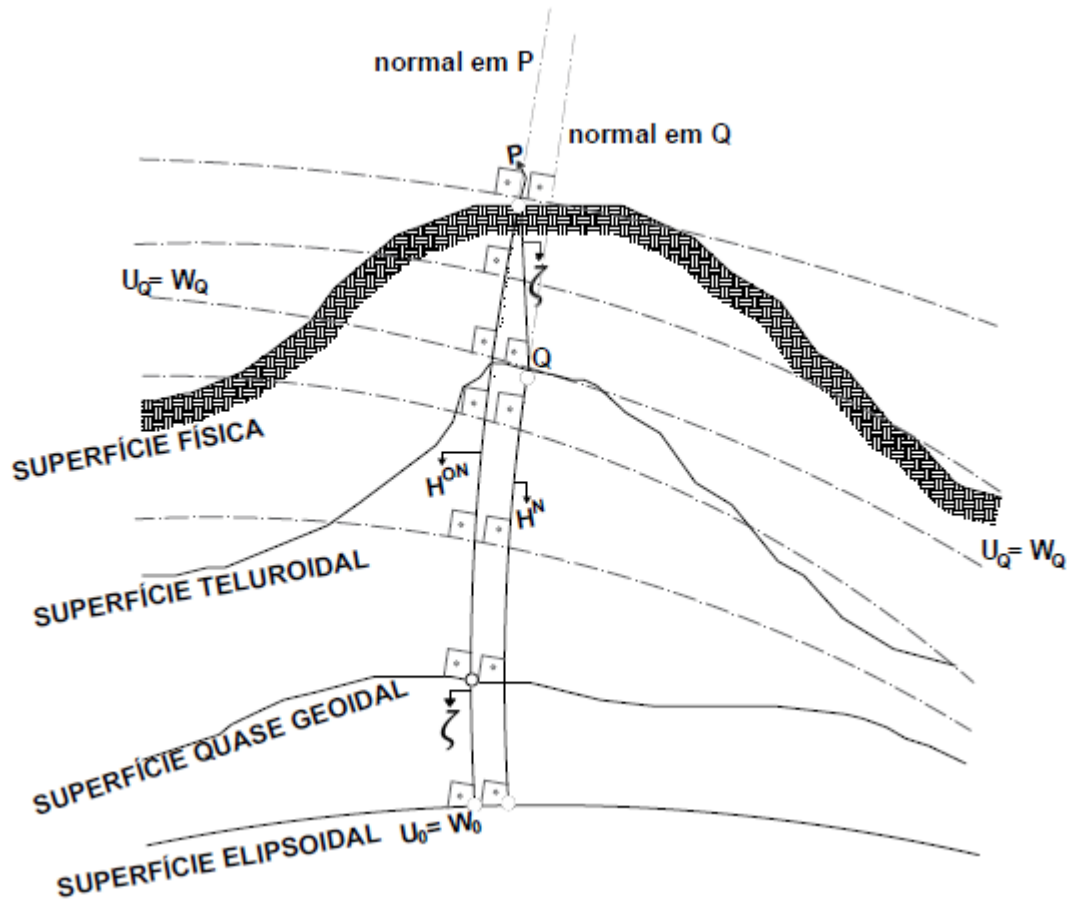
Em razão dos vazios gravimétricos no país até julho de 2018 o sistema brasileiro de altitude era estruturado com altitudes denominadas ortométricas-normais (H_{ON}), citadas também na literatura como normais-ortométricas. Este sistema possui como característica principal a substituição completa do campo de gravidade real pelo campo de gravidade normal. Isto é, os números geopotenciais, denotado por C_N , são determinados empregando a aceleração de gravidade normal.

A razão de C_N por um valor de $\bar{\gamma}$ expressa a altitude normal-ortométrica como:

$$H_{ON} = \frac{C_N}{\bar{\gamma}} \quad (86)$$

onde, o valor médio da aceleração de gravidade normal é determinado entre a superfície física e a superfície quase geoidal ao longo da normal (Figura 6).

Figura 6 – Altitudes ortométrica-normal e normal.



Fonte: Adaptado de Featherstone e Kuhn (2006).

Na interpretação geométrica das altitudes normais-ortométricas, a anomalia de altura passa a ser apenas a separação entre o elipsoide de referência e o quase geoide, mensurado ao longo da normal. Dessa forma, H_{ON} é definida como a distância contada entre um ponto na superfície física até a superfície quase geoidal, segundo a normal. Logo, a superfície de referência da altitude ortométrica-normal é a quase geoidal, seguindo o mesmo princípio das altitudes ortométricas, salvo as grandezas do campo de gravidade envolvidas nas respectivas determinações (FEATHERSTONE; KUHN, 2006).

Em aplicações práticas, desníveis do nivelamento são corrigidos do não paralelismo das superfícies equipotenciais aplicando correções denominadas correção normal-ortométrica. Em função das inúmeras correções existentes, têm-se diversos tipos de altitudes ortométricas-normais, dentre essas se destacam as correções de

Amos e Featherstone (2009), Heck (1995) apud Featherstone et al. (2018), Rapp (1961) e Bowie e Avers (1914).

As altitudes da RAAP, anterior ao reajustamento de 2018, eram corrigidas pela expressão descrita por Bowie e Avers (1914):

$$\delta H_{ON} \approx -2 \alpha_1 H_m \Delta \varphi \operatorname{sen}(2 \varphi_m) \left[1 + \left(\alpha_1 - \frac{2 \alpha_2}{\alpha_1} \right) \cos(2 \varphi_m) \right] \quad (87)$$

onde, φ_m é a latitude média da seção de nivelamento, H_m a altitude media da seção, α_1 e α_2 são os parâmetros da fórmula de Helmert para a aceleração de gravidade normal do elipsoide GRS80, com valores (IBGE, 2018):

$$\alpha_1 = 0,0053023655 \quad (88)$$

$$\alpha_2 = -0,0000059 \quad (89)$$

As utilizações das altitudes normais-ortométricas são recomendadas em regiões desprovidas de cobertura gravimétrica devido a sua aproximação com a altitude ortométrica. No entanto, as superfícies de referências envolvidas não possuem significado físico, o que torna tais altitudes dependentes do trajeto percorrido no nivelamento.

2.10.3 Altitudes Geométricas

2.10.3.1 Altitude Nivelada

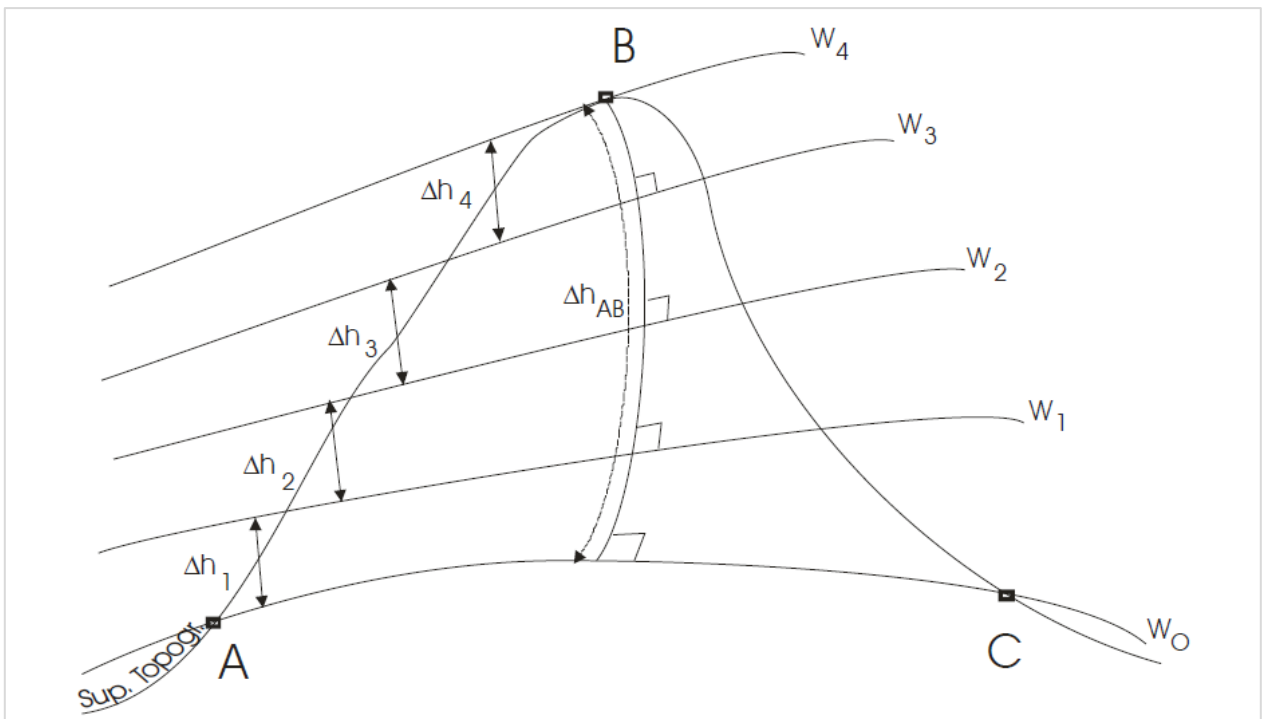
As altitudes niveladas são obtidas, comumente, pela técnica do nivelamento geométrico. A mesma consiste na determinação de desníveis a partir da utilização de instrumentos de medição, os níveis, sejam eles eletrônicos ou ópticos e réguas graduadas, também denominadas de miras. O desnível do local é obtido a partir das leituras de ré e vante das réguas graduadas, orientadas segundo a vertical. A diferença

de altitude é transferida para as estações de referência (RRNN), denominando-a como altitude nivelada (h_N).

No entanto, os desníveis obtidos com essa técnica são dependentes do trajeto percorrido no nivelamento. Em distâncias superiores a 3 km, as superfícies equipotenciais que passam pela base das réguas graduadas não são paralelas em razão da distribuição não homogênea de massa da Terra.

Conforme ilustrado na Figura 7, a linha de nivelamento deverá conectar as estações A e B. Considerando uma longa distância entre A e B, vários pontos (Δh_i) serão determinados entre as estações.

Figura 7 - Nivelamento Geométrico e as superfícies equipotenciais.



Fonte: (BLITZKOW; CAMPOS; FREITAS, 2004)

Assumindo Δh_i , com $i=1,2,3,4$, verifica-se que o somatório dos desníveis entre os pontos A e B difere da separação das superfícies equipotenciais W_0 e W_4 , quando analisadas no trajeto entre C e B. Com efeito, os desníveis determinados por meio do nivelamento geométrico entre A e B e entre B e C não coincidem com a diferença da altitude ortométrica dos referidos pontos.

Portanto, com o nivelamento geométrico se obtém a distância entre duas supostas superfícies equipotenciais paralelas que passam pela base da régua e não a diferença de altitude. Para retratar as altitudes com esta técnica, é necessário o equacionamento da aceleração de gravidade (g) com os desníveis Δh_i :

$$H_B - H_A = \sum_A^B g \Delta h_i \quad (90)$$

Cabe ressaltar que para fins específicos é suficiente a altitude nivelada sem a referida correção (90).

2.10.3.2 Altitude Geodésica

À distância contada da superfície física até a superfície elipsoidal ao longo da normal é definida como altitude geodésica (h) (Figura 2). Esta grandeza, obtida comumente por meio da técnica de posicionamento por satélites, é de caráter puramente matemático, mas de fundamental importância para o sistema de altitudes. Sua determinação é realizada por meio do rastreamento de satélites artificiais, proporcionando as três coordenadas geodésicas do ponto, a latitude, a longitude e a altitude, podendo alcançar precisão milimétrica.

O uso do posicionamento GNSS para a determinação da coordenada vertical tem facilitado consideravelmente os trabalhos de engenharia em razão de sua rapidez e eficiência. A altitude geodésica associada aos modelos geoidal e quase geoidal fornece, respectivamente, as altitudes normal ou ortométrica. As limitações de seu uso estão associadas à qualidade dos modelos geoidal e quase geoidal empregados.

Destaca-se que a não vinculação da altitude geodésica ao campo de gravidade faz com que pontos em diferentes níveis possam apresentar valores iguais para h ; como também, pontos situados na mesma superfície equipotencial podem conter valores distintos de altitude. Com isso, a altitude geodésica não possui relação com o fluxo da água (FREITAS; BLITZKOW, 1999).

3 MENSURAÇÃO DA ACELERAÇÃO DE GRAVIDADE

3.1 Gravimetria

O termo gravimetria é originário do latim *gravis*, peso, e do grego *metron*, que se refere à medida. Nas áreas de Geofísica, de Geodesia e de Metrologia, a gravimetria é definida como o conjunto de técnicas que visa mensurar a intensidade do campo de gravidade e o gradiente de gravidade de forma pontual na superfície da Terra ou próximo a ela (TORGE, 1989; MARSON, 2012).

A média da aceleração de gravidade na Terra é em torno de $9,8 \text{ m/s}^2$, contudo, esse valor varia no tempo e no espaço devido a fenômenos que afetam a distribuição de massa, a rotação da Terra e as marés (VAN CAMP et al., 2017). A variação de g na superfície terrestre se comporta de acordo com a ação da força centrífuga. Na região dos polos, a força centrífuga é nula e a aceleração de gravidade é de aproximadamente 983 Gal. Já na região do Equador, onde a força centrífuga age com maior intensidade, g é de aproximadamente 978 Gal. Logo, a diferença no Equador e nos Polos caracterizam o achatamento do planeta. Outros fatores característicos da Terra, como a velocidade de rotação, o movimento do polo, também afetam o valor da aceleração de gravidade. No entanto, por serem grandezas de naturezas periódica e secular, adotam-se modelos que satisfazem as necessidades das observações em termos de acurácia. Entre os efeitos que afetam a aceleração de gravidade, tem-se a atração de corpos celestes, em especial do Sol e da Lua, gerando a denominada perturbação lunissolar. Sua interferência acomete o módulo e a direção do vetor gravidade, afetando diretamente a gravimetria, e o desvio da vertical, que influencia no nivelamento geométrico. Por serem efeitos sistemáticos, são removidos por modelos durante o processamento dos dados (GEMAEL, 2012).

As variações do campo de gravidade são obtidas por meio da execução de levantamentos gravimétricos, em que a aceleração de gravidade é expressa como uma função de posição e tempo a partir da mensuração de g e do gradiente local de gravidade (TORGE, 1989). O instrumento empregado para aquisição de dados gravimétricos é denominado gravímetro. As referências e grandezas físicas envolvidas

no processo de medição caracterizam os gravímetros em relativos e absolutos. De forma semelhante, dois casos são considerados para as observações da aceleração de gravidade: determinações absolutas e determinações relativas. A primeira refere-se à mensuração de g baseando-se em padrões de comprimento e tempo, enquanto a segunda proporciona a diferença de g entre estações. Em ambos os casos, a força de gravidade em um ponto da superfície é traduzida em uma conveniente unidade de medida como módulo da aceleração de gravidade (GEMAEL, 2012). Comumente, a grandeza é dada em gal (Gal), que equivale ao cm/s^2 , e tem como submúltiplos o miliGal (mGal) e o microGal (μGal).

Esse capítulo tem como objetivo expor os aspectos teóricos na mensuração da aceleração de gravidade, discutindo as grandezas físicas envolvidas e os instrumentos de medição. A caracterização quanto à distribuição espacial e a classificação das determinações gravimétricas são apresentadas.

3.2 Gravímetros relativos

A aquisição de dados gravimétricos de forma expressiva aconteceu com o surgimento dos gravímetros relativos, baseados no princípio de mola. Esses aparelhos se diversificam pela forma de construção e o material empregado. O princípio elementar é a suspensão de uma massa por meio de um sistema elástico, o qual realiza uma força antagônica ao constatar uma mudança na aceleração de gravidade, alterando o comprimento da mola de modo a manter o equilíbrio estático da massa em função de g (TORGE, 1989).

Um dos importantes instrumentos da época foi o gravímetro Worden, desenvolvido em 1940 pela *Texas Instruments*. Em seguida, em 1959, a empresa norte-americana LaCoste & Romberg desenvolveu o gravímetro L&R, acrônimo do nome da referida companhia (Figura 8).

Figura 8 - Gravímetro L&R.



Fonte: (CASTRO JÚNIOR, 2005).

Por ser um instrumento mecânico, as leituras dos gravímetros L&R são dependentes do controle manual e óptico. No Brasil, esse equipamento participou extensivamente nas campanhas direcionadas ao estabelecimento das redes gravimétricas relativas e de densificação (CASTRO JÚNIOR, 2005).

Entre os atuais gravímetros relativos de mola, destacam-se duas características: os de mola de metal, como o gPhone e o Burris, e os de mola de quartzo, como os gravímetros da linha Scintrex, fabricados pela Micro-g LaCoste (Figura 9).

Figura 9 - Gravímetros relativos (esquerda para direita): Scintrex CG6 (Micro-g LaCoste), Burris (ZLS), gPhone (Micro-g LaCoste) e Scintrex CG5 (Micro-g LaCoste) .



Fonte:(MICROG LA COSTE, 2019; ZLS, 2019).

O gravímetro CG5 é um dos gravímetros mais utilizados no mundo. O diferencial desse aparelho em relação aos demais é a alta precisão do padrão de repetibilidade que o mesmo pode atingir ($5 \mu Gal$). O princípio de funcionamento do CG5 se baseia no tensionamento de uma mola vertical de quartzo fundido, induzida pela força de

gravidade. A mola se situa em uma câmara, isolada das variações de pressão. A força necessária para manter a massa de teste em uma posição de equilíbrio é convertida em voltagem, que se traduz numa leitura, gerando um arquivo de saída. A voltagem é transformada em aceleração por meio de um fator de calibração estimado pelo fabricante.

3.3 Gravímetros absolutos

A princípio, o grande desafio na produção de gravímetros absolutos consistiu na determinação com alta precisão do tempo e da distância de uma massa de teste em queda livre. Um grande passo foi dado com a inserção da técnica de interferometria para monitorar a trajetória de queda, utilizando os *lasers* a gás He-Ne com comprimento de onda de 632,8 *nm* (TORGE, 1989). Três mecanismos comumente compõem os gravímetros absolutos: a câmara de vácuo, os sistemas de medição de tempo e distância e a isolação sísmica para a massa de teste.

A interferometria se baseia em um feixe de *laser* dividido, em que parte é refletida do corpo em queda livre enquanto a outra parte é refletida de um corpo estacionário. O corpo em queda livre é uma massa de teste, também chamado de massa de prova, composto por um fragmento de vidro ou metal. No caso dos gravímetros de quantum, são utilizados átomos individuais, resfriados apropriadamente com *lasers* (VAN CAMP et al., 2017).

A partir da recombinação de dois feixes de *laser* coesos, isto é, feixes que possuem o mesmo comprimento de onda, mesma frequência e diferença de fase constante, geram-se as interferências ópticas ou franjas interferométricas. Uma interferência óptica é construtiva quando as duas ondas são agregadas vale com vale e crista com crista. Em contraste, quando se realiza a combinação das duas ondas através do vale com a crista, acontece a chamada interferência destrutiva. A distância em que a massa de teste cai corresponde à metade do comprimento de onda da luz. Com isso, o sistema óptico de interferência realiza ciclos continuamente, de modo a combinar as interferometrias construtivas e destrutivas, provendo uma medida precisa do deslocamento do objeto (NIEBAUER, 2015).

A trajetória do objeto em queda é mensurada por um interferômetro óptico, utilizando a distância da queda para modular a fase do *laser* refletido de uma massa de teste. Um feixe monocromático, porém, incoerente, é introduzido paralelamente no sistema de interferometria e é dividido em um retrorefletor, conhecido como olho de gato, enquanto o outro é refletido da superfície espelhada de um cubo com propriedades específicas. Os dois feixes são recombinados dentro de fotodiodo que os detecta e os converte em um sinal elétrico que pode ser utilizado como um contador das franjas. A mensuração precisa das franjas é feita utilizando relógios atômicos, geralmente de rubídio, devido à frequência e longa estabilidade (TORGE, 1989).

3.3.1 Gravímetro absoluto Micro-g LaCoste A-10

O gravímetro absoluto A-10 é composto por três módulos conectados por cabos coaxiais. A central é o módulo principal de controle, o segundo módulo é a interferometria a *laser* e o terceiro é a unidade de queda livre (Figura 10).

Figura 10 - Gravímetro absoluto A-10.



Fonte: (Micro-g LaCoste, 2019).

O aparelho mensura diretamente a aceleração de gravidade, baseando-se nos princípios de queda livre e interferometria citados anteriormente. Um prisma cai no vácuo e o tempo de queda é obtido por meio da interferometria a *laser*, o que fornece precisão da ordem de alguns microssegundos. O padrão de tempo é fornecido por um oscilador atômico de rubídio. As medidas são diretamente baseadas no Sistema Internacional de Unidades, em metros por segundo ao quadrado (SOUSA; SANTOS, 2010).

O equipamento se destina à aquisição rápida de dados, sendo de manejo e de transporte razoavelmente fáceis. Sua precisão nominal é de $\pm 10 \mu\text{Gal}$. Contudo, para alcançar tal precisão, alguns procedimentos necessitam ser adotados. Apesar de possuírem componentes para isolamento térmico, os gravímetros A-10 são sensíveis ao calor uma vez que altas temperaturas ocasionam o aquecimento da bomba de íon cujo funcionamento inadequado leva à perda de vácuo. Em função disso, o aparelho não pode ficar sujeito a temperaturas acima de 35°C . De acordo com a Micro-g LaCoste (2008), são necessárias quatro horas para gravímetros absolutos como o A-10, conquistar o equilíbrio térmico.

Em levantamentos de campo, o A-10 deve ser transportado em um veículo com o apropriado amortecimento e com a alimentação de energia proporcionada por uma bateria específica. As medições são realizadas apenas com as unidades de queda livre e de interferometria, posicionadas sobre a estação de interesse. Visto que os gravímetros absolutos são sensíveis à ruídos, as observações necessitam ser efetuadas o mais distante possível de perturbações e de vibrações; um prévio estudo geológico anterior ao levantamento de campo é recomendado. A distância média aconselhável entre estações é de 100 km , aproximadamente. O local precisa ser de fácil acesso e de presumível perdurabilidade.

A determinação absoluta da aceleração de gravidade com precisão próxima à precisão nominal do aparelho é considerada um desafio. Contudo, os usuários enfatizam que seguindo alguns cuidados durante a operação é possível conseguir precisão superior à precisão nominal do equipamento ($10 \mu\text{Gal}$) (KRYNSKI; SEKOWSKI, 2010; FALK et al., 2012; JIANG et al., 2012; KAZAMA et al., 2013; DYKOWSKI; KRYNSKI; SEKOWSKI, 2014; WANG et al., 2014). Para tanto, é

necessário a verificação de diversos parâmetros, como ajustes na temperatura, na verticalidade e na potência do *laser*, demandando experiência do operador. Ademais, fenômenos naturais, como as mudanças no nível do lençol freático, a carga oceânica e os efeitos atmosféricos, induzem às variações temporais da aceleração de gravidade. Nesse sentido, diversos modelos devem ser aplicados a fim de obter resultados apropriados.

3.4 Determinações gravimétricas

As informações gravimétricas se diferem pela distância entre estações e a precisão. O termo rede é designado ao conjunto de determinações gravimétricas relativas, vinculadas ao valor de g de uma estação de referência de precisão superior. Os valores finais dessas estações são usualmente determinados por algum método de ajustamento de observações. Esse é o caso das redes gravimétricas IGSN-71, RGFB, da linha de calibração Agulhas Negras, dentre outras. As demais informações gravimétricas constituem um sistema, como o SGR-SP, ou apenas pontos gravimétricos determinados com finalidades específicas, como os levantamentos de densificação.

Reitera-se que é importante e necessário que as determinações gravimétricas sejam derivadas de um sistema de referência global de gravidade, para que haja padronização das informações e a possibilidade de compatibilização de dados com outros países.

Historicamente, o primeiro sistema gravimétrico absoluto de referência reconhecido internacionalmente foi o *Vienna Gravity System*, estabelecido em 1890 baseando-se em medidas pendulares. O referido sistema, com precisão em torno de $10.000,00 \mu Gal$, foi substituído em 1909 pelas observações realizadas em Potsdam na Alemanha. O famoso *datum* de Potsdam determinado por um aparelho pendular e válido entre os anos de 1909 a 1971, corrigiu em $-16.000,00 \mu Gal$ o sistema de Viena (NOAA, 2019). Com o surgimento dos primeiros gravímetros de mola, inúmeros esforços foram conduzidos para estabelecer uma rede mundial empregando os gravímetros Worden, L&R, pêndulos e os recentes gravímetros absolutos. Segundo Morelli et al. (1972) foram totalizadas em 20 anos, 24.000 medidas de g oriundas de gravímetros relativos, 200 de dispositivos pendulares relativos e 10 provenientes dos

primeiros gravímetros balísticos. Após um processo de ajustamento, originou-se a IGSN-71 cujo resultado alterou em $-15.000,00 \mu Gal$ a estação de Potsdam. Gemael e Simões (2002) afirmam que as 20 observações da IGSN-71 em território brasileiro e as medições derivadas da mesma possuem precisão entre a 50 a $100 \mu Gal$ devido à extensão territorial do Brasil e dificuldade de acesso em áreas remotas.

Na atualidade, com o surgimento dos modernos gravímetros com precisão nominal inferior a $10 \mu Gal$, o IGRS será constituído por um conjunto de estações gravimétricas absolutas, representando o que de mais preciso existe em termos de referencial (CASTRO, 2017). Em se tratando de uma rede gravimétrica relativa homogênea é recomendado realizar um processo estatístico de ajustamento, em função das diferenças de aceleração de gravidade e adotando como inunção valores de estações gravimétricas absolutas.

3.4.1 Sistema Gravimétrico de Referência

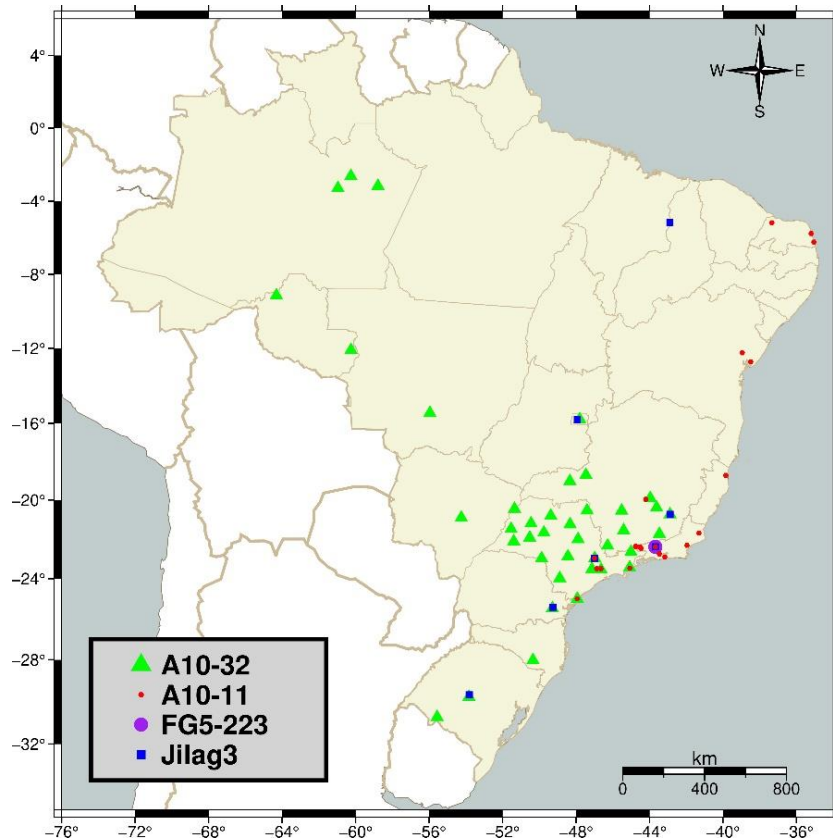
O sistema gravimétrico de referência é implementado com gravímetros absolutos e é o fundamento para os trabalhos de densificação gravimétrica. O mesmo serve de referência para as determinações relativas, para a calibração de gravímetros relativos e no auxílio aos estudos de variação da aceleração de gravidade com o tempo.

No Brasil, as primeiras medições absolutas foram realizadas pela parceria da Universidade Federal do Paraná com a Universidade de Hannover. Sete estações foram estabelecidas pelo gravímetro absoluto JILAG3, originando a RENEGA (GEMAE, 2012). No ano de 2004, o ON adquiriu o gravímetro absoluto FG-5, número 223. Por ser um aparelho de difícil transporte, ele se encontra instalado na cidade de Vassouras – RJ. Em 2006, o ON comprou um gravímetro absoluto A-10, número 11, e contribuiu até o ano de 2019 com cerca de 20 estações no país (SOUSA; SANTOS, 2010).

Em 2013, o LTG/EPUSP intermediou a compra do gravímetro absoluto A-10, número 32, pelo Instituto Geográfico Cartográfico do Estado de São Paulo. Desde então, foram estabelecidas dezesseis medições entre Manaus e Santana do Livramento, e dezoito observações no estado de São Paulo (Figura 11), além de

medições em outros países, como em Costa Rica, Argentina, Equador e Venezuela. O Sistema Gravimétrico de Referência do estado de Minas Gerais (SGR/MG) se encontra em fase de implantação.

Figura 11 – Distribuição espacial das estações gravimétricas absolutas.



Fonte: A autora

3.4.2 Rede relativa de referência

As estações que compõem a rede relativa de referência são estabelecidas por gravímetros relativos com precisão em torno de $50 \mu Gal$. As medições são conduzidas em referências materializadas, seu valor final comumente é ajustado pelo método dos mínimos quadrados e descritos para que sejam utilizados em outros projetos.

No Brasil, as referências, chamadas também de estações básicas, foram estabelecidas inicialmente pelo ON a partir das 20 observações da rede IGSN-71 no Brasil, dando origem à RGFB. O ON, desde então, ficou incumbido pela implantação e

manutenção da RGFB, totalizando hoje 620 estações (CASTRO JUNIOR; GUIMARÃES; FERREIRA, 2018).

Em 1956, o IBGE iniciou suas atividades de gravimetria e contribuiu com a medição de circuitos direcionados à calibração de gravímetros. Posteriormente, essa instituição dedicou-se a levantamentos voltados para o *datum* planimétrico de Chuá, determinando mais de 2000 pontos gravimétricos em Minas Gerais (IBGE, 2019b). A partir do ano de 1999, a gravimetria se tornou de caráter sistemático e diversos esforços foram conduzidos a fim de recobrir os vazios no país.

Entre as universidades, evidenciaram-se a Universidade Federal do Paraná (UFPR), compondo a rede paranaense de alta precisão, e a USP, que em conjunto com o IBGE realizou inúmeros esforços com vistas à produção de um modelo geoidal e à conexão da rede relativa brasileira com a rede de países liminhos (CASTRO JÚNIOR, 2005). Outras instituições, como a Agência Nacional do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis (ANP) e o Serviço Geológico do Brasil (CPRM), contribuem com levantamentos gravimétricos para fins geológicos e geofísicos. Detalhes sobre o histórico da gravimetria das instituições citadas são dados em Castro Júnior (2017).

3.4.3 Determinações gravimétricas de densificação

A densificação gravimétrica, realizada via medições relativas, tem fundamental importância na produção de modelos geoidal e quase geoidal uma vez que retrata o comportamento do campo de gravidade. A distância espacial entre as medições fica entre 5 a 10 km na América do Sul e Central. Em outros países como os Estados Unidos da América e Canadá, a mesma pode ser de até 1 km.

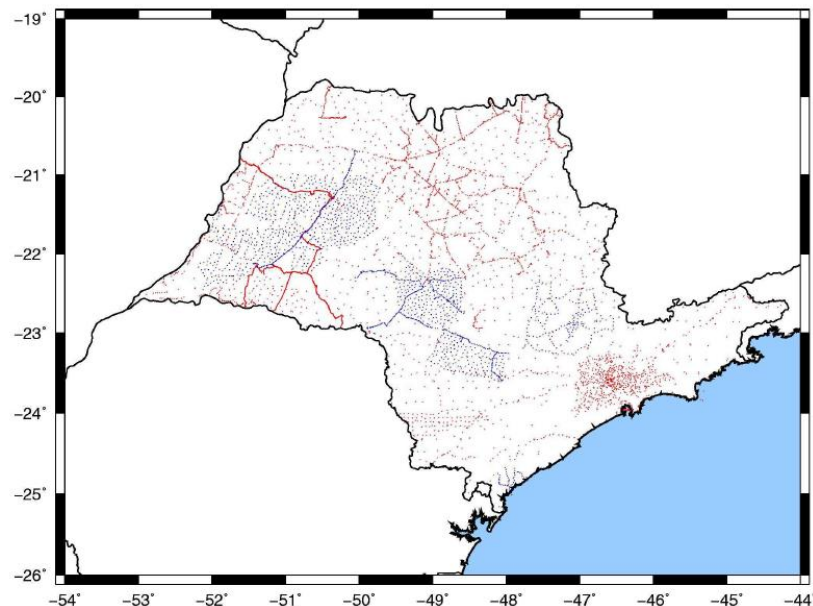
Os levantamentos de densificação são formados por circuitos, podendo ter o formato de polígonos ou linhas cujos pontos inicial e o final devem ser uma estação gravimétrica de ordem superior. A materialização dos locais de medição não é necessária, porém, é importante a determinação das coordenadas a fim de aplicá-las nas formulações do PVCG (GUIMARÃES; BLITZKOW, 2011).

3.4.4 Dados gravimétricos do estado de São Paulo

O estado de São Paulo possui no momento cerca de 9257 determinações gravimétricas. Os primeiros levantamentos foram conduzidos a partir da década de 70 por instituições como o IAG/USP, o ON, a Petrobrás, e o projeto *Anglo-Brazilian Gravity Project* (ABGP), realizado em conjunto com a Universidade de Leeds e o IBGE.

O projeto temático número 06/04008-2, da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, contribuiu com a concepção de levantamentos gravimétricos de densificação destinados à produção de um modelo geoidal avançado. As estações em cor vermelho são os pontos gravimétricos mensurados anterior ao ano de 2008 e em cor azul os dados determinados no âmbito do projeto temático, entre os anos de 2008 a 2013 (Figura 12). Tais levantamentos foram realizados através de medidas relativas da aceleração de gravidade (GUIMARÃES, 2010).

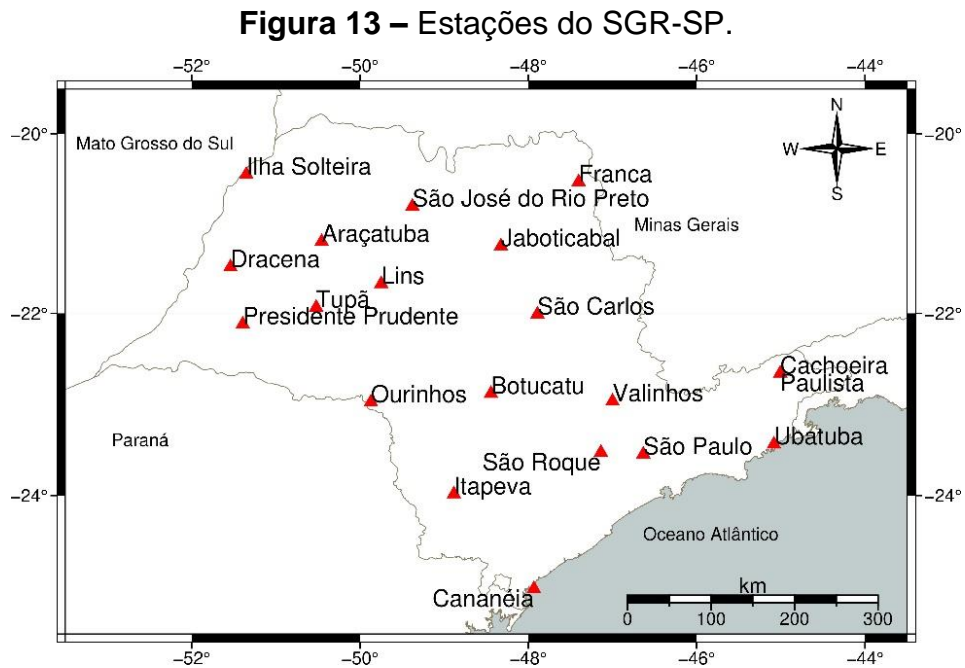
Figura 12 - Dados gravimétricos do estado de São Paulo em 2010.



Fonte: (GUIMARÃES, 2010).

Até o ano de 2013, o estado possuía somente quatro estações gravimétricas absolutas estabelecidas pelo ON, sendo elas Valinhos, São Paulo, Cananea e Ubatuba. Em seguida, implantou-se 15 novas estações absolutas e quatro reocupações nas estações previamente observadas pelo ON. As estações estão distribuídas de

forma homogênea, com espaçamento médio de 100 km e próximas às estações pertencentes à Rede Brasileira de Monitoramento Contínuo (RBMC). A localização das estações é mostrada na Figura 13.



Fonte: A autora.

4 A MODERNIZAÇÃO DAS COMPONENTES ALTIMÉTRICA E GRAVIMÉTRICA

Monitorar e investigar as mudanças da Terra com alta precisão e resolução de forma consistente, homogênea e com estabilidade são os principais objetivos da Geodesia moderna, estabelecidos pelas recentes resoluções da IAG. Nesse contexto, em 2003 a IAG criou o *Global Geodetic Observing System* (GGOS) a fim prover uma infraestrutura geodésica para monitorar o sistema Terra e auxiliar na detecção de fenômenos, como as variações do nível médio do mar, deslocamento de massas e processos associados ao fluxo de fluidos.

No contexto das componentes geométricas estão os referenciais celeste, CRS e terrestre, TRS, estabelecidos pelo IERS. As convenções determinadas para a realização desses sistemas viabilizam referências que proporcionam o posicionamento geodésico com exatidão na ordem de milímetros e monitoram os parâmetros de orientação da Terra no espaço. No entanto, o mesmo não ocorre com os sistemas altimétricos. Sánchez et al. (2015) destacam as principais deficiências encontradas nos atuais sistemas:

- A existência de mais de 100 realizações de sistemas verticais baseados em diferentes estações maregráficas pelo mundo, relacionadas a diferentes épocas de referência;
- A ausência das características inerentes à TNMM nas realizações;
- A aplicação de diferentes reduções gravimétricas;
- Erros sistemáticos no nivelamento geométrico;
- A consideração da altitude como sendo estática;
- A combinação de altitudes geodésicas imprecisas, aplicando a expressão (70).

À vista disso, a discrepância dos atuais sistemas verticais entre países e, até mesmo dentro de países de grandes extensões territoriais com mais de um *datum* vertical, como o Brasil, por exemplo, é da ordem do decímetro ao metro. Conseqüentemente, as informações provenientes desses sistemas, como as altitudes normais-ortométricas, modelos digitais de terreno e a ondulação geoidal, não

satisfazem os requisitos para contemplar os objetivos do projeto GGOS. A combinação das componentes físicas e geométricas carece de um referencial altimétrico físico global com infraestrutura equivalente à precisão e à homogeneidade dos sistemas CRS e TRS. Por outro lado, no que diz respeito ao significado físico das altitudes, surge a necessidade de informações gravimétricas referenciadas a padrões adequados de aceleração de gravidade.

Esse capítulo objetiva apresentar as últimas resoluções estabelecidas pela IAG direcionadas ao estabelecimento dos referenciais altimétrico e gravimétrico. Destacam-se também os esforços que o Brasil tem realizado para acompanhar a modernização dos sistemas.

4.1 International Height Reference System

A IAG, motivada pelo projeto GGOS, propôs na resolução número 1 de 2015 a criação do chamado *International Height Reference System* com as seguintes convenções para a definição (IAG, 2015):

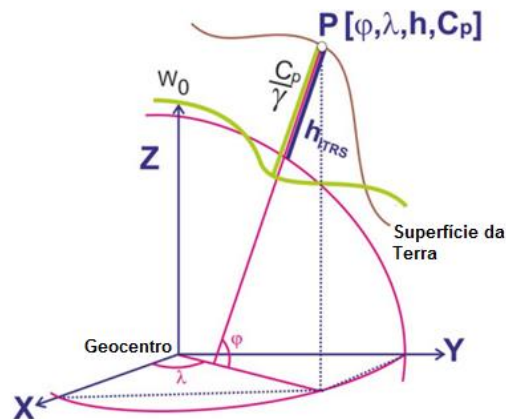
- a referência de nível vertical é uma superfície equipotencial do campo de gravidade da Terra, com o valor $W_0 = 62.636.853,4 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$;
- os parâmetros, observações e dados devem estar relacionados ao sistema médio de marés ou crosta média;
- a unidade de comprimento é o metro e a unidade do tempo é o segundo do Sistema Internacional de Unidades;
- as coordenadas verticais são diferenças $-\Delta W_p$, determinadas entre o potencial de gravidade em um determinado ponto P (W_p) e o W_0 ; tais diferenças de potencial de gravidade também são designadas como números geopotenciais (C_p);
- a referência espacial da posição P para o potencial $W_p = W(\mathbf{X})$ é relacionada às coordenadas \mathbf{X} do ITRS.

Segundo Ihde et. al., (2017) o IHRS é um sistema de referência geopotencial que co-rotaciona com a Terra. As coordenadas verticais devem ser dadas pelo potencial do

campo de gravidade $W(\mathbf{X})$ e suas modificações com o tempo \dot{W} , com coordenadas cartesianas geocêntricas \mathbf{X} e suas variações com o tempo $\dot{\mathbf{X}}$ no ITRS (Figura 14). Para fins práticos, os valores $W(\mathbf{X})$ são transformados em coordenadas verticais, destacando-se em componentes geométricas, dadas pelas coordenadas φ, λ, h associadas ao ITRF, e físicas, dadas pela diferença de potencial ($-\Delta W_p$) em relação ao valor de W_0 , ou seja, números geopotenciais C_p (SÁNCHEZ, et al., 2016).

A posição da grandeza geométrica deve ser dada segundo o tempo, a posição (t_0, \mathbf{X}) e sua velocidade $\partial h(\mathbf{X})/\partial t$, utilizando um elipsoide de nível com U_0 constante. A componente física é dada pelos números geopotenciais $C_p(t_0, \mathbf{X})$ e velocidade $\partial C_p(\mathbf{X})/\partial t$ expressas em função do valor de W_0 (SÁNCHEZ et al., 2016). Além disso, recomenda-se a utilização de altitudes normais uma vez que minimizam as discrepâncias entre os sistemas verticais, ocasionadas pela aplicação de diferentes reduções gravimétricas ao calcular a altitude ortométrica.

Figura 14 - Esquemática do IHRF pontual.



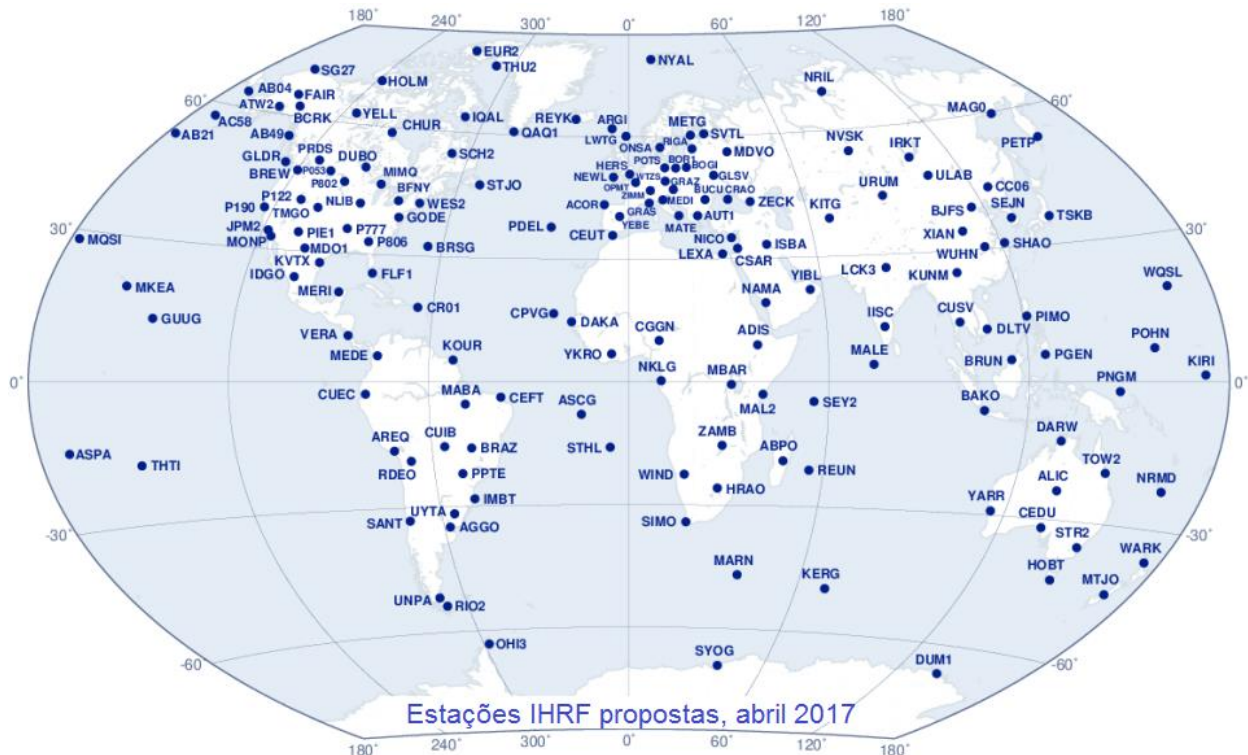
Fonte: (SÁNCHEZ, et al., 2015)

A realização do IHRF constitui o chamado *International Height Reference Frame* (IHRF) o qual materializará estações com os respectivos valores associados à superfície equipotencial do campo de gravidade. O conjunto de pontos irá compor a rede global e a regional seguindo uma hierarquia. A rede global dará origem à rede de referência primária que deverá garantir a viabilidade e a duradoura estabilidade.

Enquanto, as redes regionais e as redes de densificação nacional deverão prover acessibilidades locais (IHDE et al., 2017).

A primeira proposta para a concepção da rede global IHRF abarcou 163 estações (Figura 15).

Figura 15 - Estações IHRF.



Fonte: (SÁNCHEZ, et al., 2017).

Ihde et al. (2017) afirmam que o desafio do IHRF é prover uma estrutura similar ao ITRF, isto é, as coordenadas e velocidades das estações que compõe a rede global deverão ser monitoradas continuamente para a detecção de eventuais movimentos na crosta. Além disso, para unificar o sistema de altitudes, as estações IHRF deverão ter conexão com o *datum* altimétrico e com as respectivas estações maregráficas.

Apesar da padronização adotando o valor de W_0 para a realização das estações, o alinhamento da rede implica em algumas dificuldades, sobretudo na interligação das mesmas entre os continentes. Ihde et al. (2017) sugerem as possíveis metodologias para unificação e realização do IHRF:

- o nivelamento geométrico para a conexão das redes entre países e o ajuste das redes existentes para interligá-las entre os continentes;
- em áreas desfavoráveis para a execução do nivelamento geométrico, a unificação e a realização poderão ser efetuadas aplicando a expressão (70), combinando posicionamento GNSS, o nivelamento geométrico e modelos geoidais;
- a combinação de registros maregráficos com a TNMM do mar, determinada pela altimetria por satélite, possibilitará a compatibilização entre diferentes continentes.

O componente fundamental do IHRF é o modelo global do geopotencial. O mesmo é composto pelos coeficientes da função do potencial gravitacional complementados com dados gravimétricos terrestres e expressos em série de funções harmônicas esféricas. Nos últimos anos modelos de alta resolução, tais como, XGM2016, EIGEN-6C4 e EGM2008, possibilitaram o cálculo direto de W_p a partir da introdução das coordenadas X (ITRF). A precisão média, após utilização dos referidos modelos, varia desde ± 4 cm em regiões providas de dados gravimétricos a ± 100 cm em casos extremos. A aplicação de MGGs em regiões com informações gravimétricas escassas, traz à tona o denominado erro de omissão, responsável por afetar a precisão do mesmo acima do grau 300 (RUMMEL et al. 2014 apud IHDE et al., 2017). Neste sentido, as informações gravimétricas terrestres são de suma importância e devem estar dispostas de forma adequada em torno das estações IHRF. Para isso, Sánchez et al., (2016) recomendam que:

- as observações de aceleração de gravidade devem estar distribuídas em torno da estação de referência do IHRF em torno de 210 Km;
- a acurácia mínima dos referidos valores deve ser ± 20 μ Gal;
- a posição dos dados gravimétricos deve ser coletada via posicionamento GNSS;
- em áreas montanhosas deve haver aproximadamente 50% a mais de observações gravimétricas;
- as incertezas dos MGGs e MDTs devem ser consideradas na realização.

Cabe ressaltar que a distribuição gravimétrica em um raio de 210 km é aplicável apenas em situações otimizadas; isto é, regiões não montanhosas e distantes da costa.

4.2 International Gravity Reference System

O estabelecimento de IGRS é contemplado na resolução número 2 da IAG (2015), motivada pelo projeto GGOS. Para estabelecer a infraestrutura do IGRS, a IAG recomenda as instituições internacionais e nacionais e agências responsáveis pela infraestrutura geodésica a:

- estabelecer um conjunto de estações de referência à nível nacional;
- efetuar observações absolutas de aceleração de gravidade nestas estações;
- participar de comparações de gravímetros absolutos para garantir sua compatibilidade;
- tornar os resultados das medições disponíveis em plataforma aberta.

A criação do IGRS se justifica visto que a rede IGSN-71, referência mundial para medidas de aceleração de gravidade, foi constituída em sua maior parte por observações gravimétricas efetuadas por dispositivos pendulares e gravímetros de mola entre os anos 1950 e 1960. Wilmes, Wziontek e Falk (2015) afirmam que as observações realizadas entre os anos de 1960 e 1970 empregando gravímetros absolutos sobre algumas estações IGSN-71, determinaram a incerteza da rede em torno de $100 \mu Gal$. Não obstante, os autores mencionados reforçam que tais aparelhos na época citada estavam cobertos de incertezas instrumentais na ordem de $100 \mu Gal$.

Hoje, com os modernos gravímetros absolutos é desejável na definição e realização do IGRS, o alcance da precisão entre 1 a $2 \mu Gal$ na mensuração da aceleração de gravidade (WILMES; WZIONTEK; FALK, 2015); ressalta-se que com base na tecnologia existente, essa precisão é considerada otimista. Neste sentido, estratégias estão sendo traçadas por centros de metrologia e de comparação a fim de garantir a padronização e reprodução das medidas de aceleração de gravidade e propor uma nova referência de gravimetria por meio da comparação de medidas

baseadas em regras metrológicas. O Comitê Consultivo de Massa e Quantidades Relacionadas (CCM) e a IAG estão no encargo da coordenação das atividades, as quais se baseiam na resolução número 2 da IAG (2015).

Dois métodos são propostos por Marti et al. (2014) para garantir e promover a reprodução das medidas de g com gravímetros absolutos:

- observações independentes do SI de unidades de tempo e frequência;
- calibração por comparação mediante um gravímetro de referência ou uma estação de referência.

No primeiro método os gravímetros realizam medições independentes através da calibração da frequência do laser e do relógio de referência. As incertezas do aparelho são calculadas combinando todas as inconsistências associadas às estações. Posteriormente, é necessário realizar comparações entre gravímetros absolutos com os padrões primários mantidos pelos *National Metrology Institutes* (NMIs) ou por um outro instituto definido pelo NMI e com a declaração da Capacidade de Medição de Calibração (CMCs) do *International Committee for Weights and Measures Mutual Recognition Arrangement* (CIPM MIP). A comparação também pode ser feita utilizando um valor de aceleração de gravidade de uma estação de referência já mensurada com os mesmos parâmetros. Por fim, os resultados precisam ser comparados ao invés de calibrados. Essa análise demonstra se os resultados são ou não metrologicamente equivalentes.

No segundo método, os gravímetros absolutos realizam medidas e as comparam diretamente com gravímetros do NMI ou um instituto previamente designado pelo NMI, ou ainda, utilizando um valor de aceleração de gravidade de uma estação de referência apropriada.

4.3 Esforços no Brasil para adequar o SGB ao IHRF

A componente vertical no Brasil advém da RAAP, oriunda do nivelamento geométrico e materializada por RRNN. A RAAP é referida ao nível médio do mar,

estimado por estações maregráficas localizadas no porto de Imbituba-SC e Santana-PA cuja materialização constituem os *data* altimétricos oficiais do país. A conexão da RAAP a um único *datum* ainda não foi possível devido à dificuldade de cruzar a região do rio Amazonas, utilizando o nivelamento geométrico de alta precisão. Por consequência, a maior parte das RRNN é vinculada ao *datum* Imbituba e cerca de cinco por cento ao *datum* de Santana (JARAMILLO; FREITAS; LUZ, 2019). Além de Imbituba e Santana, um conjunto de estações maregráficas monitora continuamente o nível médio do mar em diferentes pontos da costa. As estações constituem a Rede Maregráfica Permanente para a Geodesia (RMPG) (Figura 16).

Figura 16 - Rede Altimétrica de Alta Precisão e RMPG.



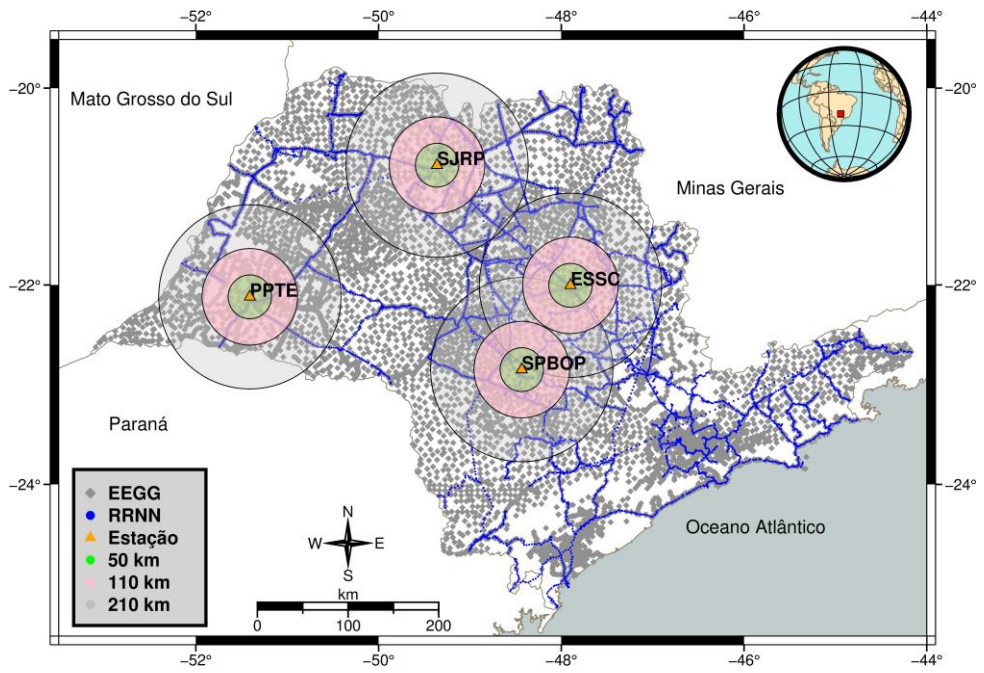
Fonte: (IBGE, 2019c)

Em razão dos vazios gravimétricos, até o ano de 2018 as altitudes niveladas eram corrigidas do não paralelismo das superfícies equipotenciais por meio do cálculo da aceleração de gravidade teórica e disponibilizadas após o ajustamento pelo método dos mínimos quadrados como altitudes normais-ortométricas. Devido às novas recomendações da IAG (2015) e a significativa melhoria na cobertura gravimétrica do país, o IBGE, responsável pelo referido sistema, conduziu uma nova realização da componente altimétrica a partir de um novo ajustamento, disponibilizando números geopotenciais e altitudes normais.

A altitude normal foi determinada equacionando a aceleração de gravidade normal de forma iterativa, conforme as equações (79), (81) e (82). Já os números geopotenciais das RRNN primárias aos *data* altimétricos foram estabelecidos a partir das antigas altitudes normais-ortométricas, baseadas no nível médio do mar (IBGE, 2018a).

A vantagem do novo ajuste reside na utilização de valores da aceleração de gravidade real para conversão dos desníveis em números geopotenciais. Com isso, as altitudes normais possuem um maior significado físico, comparado às altitudes anteriores, mas ainda vinculadas aos *data* verticais de Imbituba e Santana. Em busca de substituir os *data* referenciados ao nível médio do mar e modernizar o SGB, seis localidades foram definidas para a materialização das estações IHRF: Fortaleza-CE, Marabá-PA, Brasília-DF, Cuiabá-MT, Imbituba-SC e Presidente Prudente-SP (Figura 15). As referidas estão situadas em locais com estações da RBMC e dados gravimétricos conforme preconizam Sánchez et al., (2016).

Por outro lado, a EPUSP em parceria com o IGCSP estuda implantar três estações no estado de São Paulo, além da estação de Presidente Prudente (PPTE). As cidades escolhidas foram: São José do Rio Preto (SJRP), São Carlos (EESC) e Botucatu (SPBOP). As quatro estações tendem a alcançar uma precisão favorável na realização do IHRF, visto que possuem estações gravimétricas absolutas, RBMC e densificação gravimétrica adequada (Figura 17).

Figura 17 - Estações IHRF em São Paulo.

Fonte: A autora.

5 ATUALIZAÇÃO DAS INFORMAÇÕES GRAVIMÉTRICAS

5.1 Observações do SGR-SP utilizadas para a atualização

As informações gravimétricas foram atualizadas a partir da substituição das referências baseadas no padrão IGSN-71 por nove estações (Tabela 1) do SGR-SP (Figura 13). Os valores de g foram reduzidos da referência na câmara de queda-livre ao ponto de medição, utilizando o gradiente ar-livre da Terra normal ($0,3086h$), em função da altura de transferência de 70,5 cm do gravímetro A10-32.

Tabela 1 - Observações utilizadas do SGR-SP (μGal).

Nome	Ano	g	Precisão
Cananéia	2015	978.934.212	11,89
Dracena	2016	978.583.040	10,90
Jaboticabal	2013	978.512.661	10,72
Lins	2013	978.589.261	11,61
Ourinhos	2016	978.638.570	11,72
São José do Rio Preto	2013	978.516.283	13,08
Presidente Prudente	2016	978.606.283	10,87
São Paulo	2018	978.641.826	11,06
Valinhos	2018	978.563.661	10,75
Média			11,40
Desvio Padrão			0,72

Fonte: (CENEGEO, 2019).

A estabilidade e a acurácia do gravímetro absoluto A10, número 32, interesse do presente estudo, é assegurada pelas constantes manutenções realizadas pela Micro-g LaCoste. Uma estação de referência situada no interior da fábrica possui o valor de g determinado dentro das recomendações metrológicas. Dessa forma, o A10-32 é certificado a partir da comparação da medição realizada pelo mesmo e o valor de g estabelecido em um pilar por outros gravímetros.

5.2 Metodologia de conexão da estrutura gravimétrica de São Paulo ao SGR

A atualização das informações gravimétricas consistiu no reprocessamento dos dados originais de campo, substituindo as estações de referência vinculadas à IGSN-71 pelas observações do SGR-SP. Nos casos onde não foi possível resgatar os arquivos brutos do levantamento aplicou-se uma correção aos valores de g , correspondente à discrepância encontrada na conexão da estação de referência utilizada nas determinações, a uma estação absoluta.

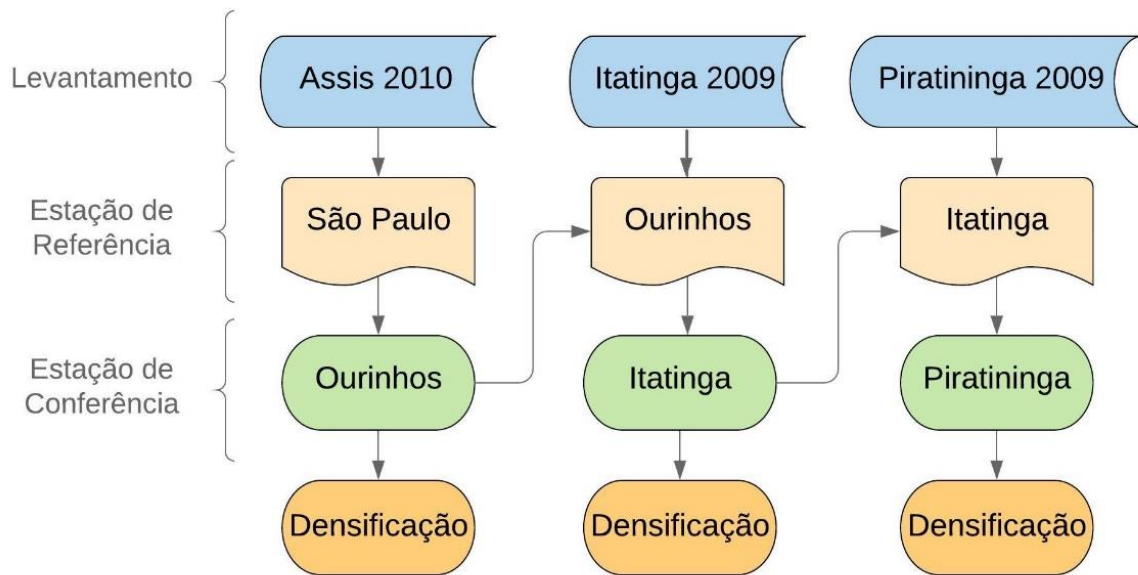
As informações gravimétricas provenientes do projeto temático constituem o principal material deste trabalho uma vez que se tratam de informações recentes, sendo possível seu reprocessamento. O estado de São Paulo possui até o momento 9.257 determinações gravimétricas. Cerca de 3.800 foram resultado do projeto temático e o restante observado por instituições públicas e privadas, tais como, Petrobras, IBGE, ON e o IAG/USP (GUIMARÃES, 2010). Parte deste dado precede à década de 90, enquanto outros foram observados recentemente com fins específicos. A atualização dos mesmos não foi possível por completo em razão da dificuldade de identificar as estações utilizadas como referência nos antigos levantamentos. Com isso, cerca de 49,6 % das informações gravimétricas foram atualizadas.

Os arquivos de densificação gravimétrica, disponibilizados em formato .grv ou .date, foram reprocessados no software GravSur, desenvolvido por Amarante (2012). Em primeira instância, identificaram-se as estações utilizadas como ponto de partida e chegada em cada levantamento. Quando necessário foi realizada a correção dos parâmetros, como o fuso, o fator de escala, a tabela do fator de calibração do gravímetro e as correções referentes à deriva e à atração lunisolar.

O reprocessamento dos dados gravimétricos baseando-se no valor de g das estações do SGR-SP foi possível visto que algumas campanhas partiram do valor absoluto de g da estação de São Paulo. Durante o levantamento é usual medir estações relativas previamente determinadas a fim de conferir a consistência das medições. Dessa forma, as mesmas passam a estar conectadas a uma estação absoluta, tornando possível atualizar os pontos de densificação em levantamentos em que tais estações relativas se tornam a referência. Os dados que não apresentaram a

referida conexão foram selecionados para um levantamento de campo. O esquema da atualização a partir de uma estação absoluta (São Paulo) é apresentado na Figura 18, utilizando as campanhas de Assis, Itatinga e Piratininga.

Figura 18 - Esquema da atualização dos dados gravimétricos.



Fonte: A autora.

A atualização dos dados gravimétricos precedentes ao projeto temático consistiu na investigação dos pontos de referência utilizados no levantamento, a partir do contato de pessoas que participaram das campanhas gravimétricas. Dessa forma, as medições da densificação foram atualizadas baseando-se na discrepância encontrada na conexão da estação de referência a uma estação do SGR-SP.

Os levantamentos gravimétricos para a conexão dos pontos de referência às estações absolutas foram conduzidos com os gravímetros L&R e Scintrex CG5, ambos com precisão de $50 \mu Gal$. Para a execução dos levantamentos escolheu-se a estação absoluta mais próxima do ponto a ser mensurado.

5.3 Resultado da conexão das informações gravimétricas ao SGR

As discrepâncias encontradas com a atualização das estações de referência em função dos valores absolutos do SGR-SP são apresentadas na Tabela 2.

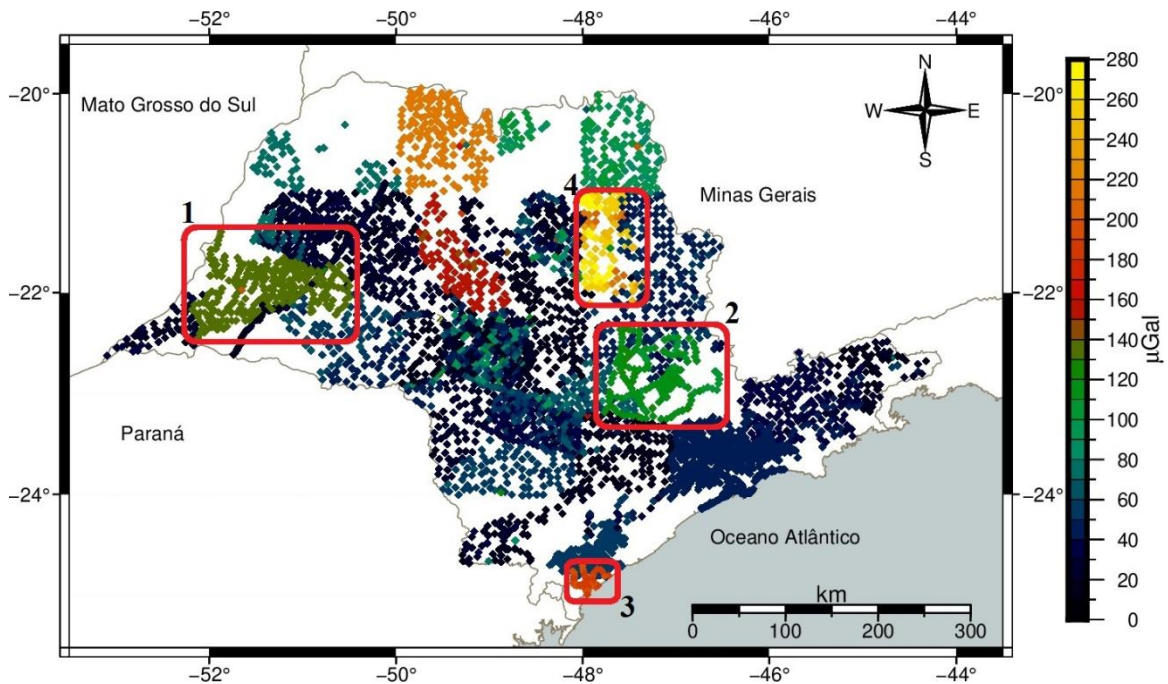
Tabela 2 - Estações relativas com conexão às estações do SGR-SP (μGal).

Estações relativas	g anterior	g atualizado	 \Delta g
Estátua do Ipiranga	978.644.990	978.644.910	80
Frutal	978.486.570	978.486.500	70
IAG- Água Funda	978.638.080	978.638.040	40
Jales	978.513.500	978.513.590	90
Leme	978.553.100	978.553.150	50
Mococa	978.526.280	978.526.240	40
Museu do Ipiranga	978.636.560	978.636.450	110
Penápolis	978.559.610	978.559.590	20
Presidente Epitácio	978.627.240	978.627.360	120
Presidente Prudente	978.596.780	978.596.650	130
Queluz	978.639.740	978.639.710	30
Registro	978.876.580	978.876.530	50
Rinópolis	978.579.980	978.579.960	20
Santa Rita do Pardo	978.577.080	978.577.090	10
São José dos Campos	978.605.580	978.605.590	10
São Carlos	978.490.180	978.489.930	250
Diferença padrão			63,75
Média da diferença padrão			70

O levantamento de conexão demonstrou que 56,25% das estações relativas estabelecidas pelo ON e pelo IBGE estão dentro da precisão nominal ($50 \mu Gal$) dos gravímetros utilizados. As exceções ocorreram para as estações: Estátua do Ipiranga, Frutal, Jales, Museu do Ipiranga, Presidente Epitácio, Presidente Prudente e São Carlos.

Com os valores de g da Tabela 2 e as conexões existentes na densificação gravimétrica, 4.595 pontos gravimétricos foram atualizados. A distribuição das discrepâncias encontradas com a conexão dos valores absolutos de g à densificação é apresentada na Figura 19.

Figura 19 - Substituição da referência IGSN-71 pelas estações do SGR-SP.



Fonte: A autora.

A conexão dos valores absolutos às determinações evidenciou discrepâncias inferiores a $50 \mu\text{Gal}$ para 58% das informações gravimétricas. Esses pontos não apresentaram modificações significativas, pois estão em sua maioria referidos à estação absoluta de São Paulo, a qual foi determinada anteriormente pelo ON com o gravímetro absoluto A10-11. A diferença do valor de g desta estação em relação às determinações realizadas pelo gravímetro absoluto A10-32 é de apenas $10 \mu\text{Gal}$. As principais modificações estão destacadas em áreas para a melhor identificação.

As informações na área 1 (Figura 19) estão referidas às estações em Presidente Prudente e Presidente Epitácio, implantadas pelo ON. O levantamento de conexão entre esses pontos e as estações absolutas (Tabela 2) revelou uma discrepância de $130 \mu\text{Gal}$ e de $120 \mu\text{Gal}$, respectivamente. Já a densificação localizada na área 4 retratam as determinações que apresentaram a maior modificação, $250 \mu\text{Gal}$. Essas medições foram estabelecidas tendo como referência o valor $978.490.180 \mu\text{Gal}$ de uma estação relativa na cidade de São Carlos, atualizada para $978.489.930 \mu\text{Gal}$ (Tabela 2).

As informações na área 2 se referem ao levantamento realizado pela Universidade de Campinas, tendo como referência a estação absoluta de Valinhos. O

valor de g mensurado em 1989, 978.563.770 μGal , foi determinado pelo gravímetro Jilag-3. As medições recentes sobre a estação de Valinhos, local de testes para o gravímetro A10-32 devido à estabilidade do pilar, confirmam o valor de 978.563.687 μGal . A discrepância entre os dois gravímetros é de aproximadamente 82 μGal para essa estação. Reitera-se que o valor de g determinado pelo gravímetro Jilag-3 fez uso do gradiente local de gravidade, mensurado a partir de gravímetros relativos, podendo atribuir à medição uma incerteza de 50 μGal além da incerteza do próprio instrumento absoluto.

Um estudo realizado por Timmen et al. (2008) analisou a variação da aceleração de gravidade com o tempo ao longo de 21 anos na estação de Hannover (HAN103), utilizando gravímetros Jilag-3 e FG5 (número 101). Devido às características geológicas e hidrológicas do local, verificou-se um decréscimo linear na aceleração de gravidade de 25,2 μGal . Os referidos autores afirmam que apenas medições absolutas contínuas, adotando se possível gravímetros específicos para a detecção da carga hidrológica, como o Burris e o gPhone, e discussões com especialistas em geodinâmica podem confirmar decréscimos ou acréscimos nas variações seculares da aceleração de gravidade.

A densificação na área 3 ao sul de São Paulo está referida à estação absoluta de Cananéia. O valor de referência utilizado neste levantamento foi 978.934.397 μGal , disponibilizado pelo ON, utilizando o gradiente local de gravidade. Já no ano de 2015, a estação de Cananéia foi reocupada com o gravímetro A10-32, obtendo o valor de 978.934.212 μGal , reduzido da câmara de queda-livre ao solo com o gradiente ar-livre. A discrepância apresentada entre os valores absolutos é de 185 μGal . A causa da diferença pode estar associada às correções aplicadas no processamento do valor de g , visto que regiões próximas à costa estão sujeitas a um deslocamento vertical de até dezenas de centímetros devido à carga oceânica (Van Camp et al., 2017).

A justificativa das discrepâncias apresentadas pelos valores absolutos de Cananéia e Valinhos exige uma análise rigorosa quanto à formação geológica, cargas hidrológica e oceânica, maré oceânica, e parâmetros e correções adotados na medição. A aceleração de gravidade é dependente de fenômenos naturais como, mudanças no nível do lençol freático, nas características geológicas, na carga oceânica e nos efeitos

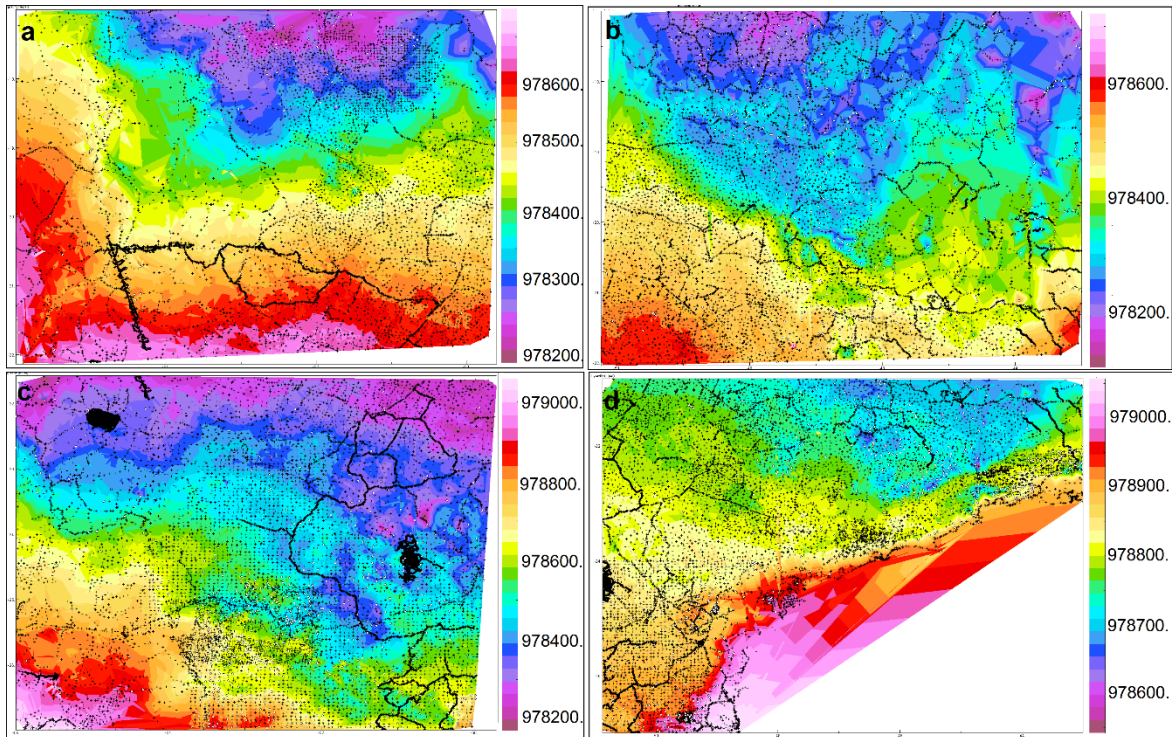
atmosféricos. Portanto, os mesmos podem influenciar em longo prazo as variações verificadas no valor de g . Nesse sentido, a apropriada comparação das observações absolutas por diferentes aparelhos requer medições contínuas e a aplicação de modelos para os fenômenos periódicos que interferem na variação de g .

5.4 Validação dos dados gravimétricos e reconstrução dos dados altimétricos

A validação, após a atualização dos dados gravimétricos, foi efetuada no programa DIVA, desenvolvido pelo *Bureau Gravimétrique International* (BGI). Os dados de entrada são as coordenadas, latitude e longitude, altitude ortométrica ou normal e as observações gravimétricas. Este software analisa os dados pelo método de colocação por mínimos quadrados. A previsão dos pontos que podem conter erro no valor de g é realizada utilizando a anomalia residual. Um arquivo de saída apresenta a estatística da validação e a quantidade de pontos sujeitos a diferentes interpretações, denominados como pontos dúbios.

O DIVA permite gerar figuras da elevação, da aceleração de gravidade, das anomalias, utilizando a triangulação de Delaunay (Guibas et al., 1990), apresentando os pontos dúbios destacados em círculos brancos. A partir desses pontos, realizou-se verificações nos valores dos pontos adjacentes e nas características altimétricas do local onde os mesmos estão localizados. Na existência de consideráveis discrepâncias, examinou-se também os arquivos de campo e de reprocessamento. Essa análise foi efetuada para cada levantamento gravimétrico e por fim com todos os dados na área limitada à -27° a -17° em latitude e -56° a -43° em longitude. A Figura 20 ilustra o modelo da aceleração de gravidade gerada no DIVA para todos os dados, separados nas regiões nordeste, noroeste, sudeste e sudoeste, devido à capacidade de 25.000 pontos por análise.

Figura 20 - Modelo de aceleração de gravidade na área de estudo (a: noroeste; b: nordeste; c: sudoeste e d: sudeste).



Fonte: A autora.

O cálculo do potencial de gravidade para o IHRF e a determinação dos modelos geoidal e quase geoidal requer que os dados gravimétricos contêm altitudes normais e geodésicas, compatíveis com a atual realização da RAAP. Anterior ao reajustamento do sistema altimétrico de 2018, a maioria das informações da densificação gravimétrica possuía h advindo do posicionamento GNSS e H_{ON} determinado através da ondulação geoidal do MAPGEO2015. O contrário ocorria para parte das RRNN, onde h era determinado pela conversão de H_{ON} com N do MAPGEO2015 a partir de (78).

A fim de reconstruir o banco de dados do presente trabalho utilizou-se a anomalia de altura do MGG XGM2019 (ZINGERLE et al., 2019), com grau e ordem máximo (nmax) 2190, como substituição da ondulação geoidal do MAPGEO2015. Esse modelo foi escolhido em razão de sua consistência com as determinações GNSS sobre nivelamento no estado de São Paulo, conforme mostra o estudo de Gruber et al. (2019).

Reitera-se que não foi possível definir a origem das informações altimétricas de cerca de 0,50% dos dados antigos. Nesse caso, os valores utilizados anteriormente foram mantidos.

6 CÁLCULO DO POTENCIAL DE GRAVIDADE DAS ESTAÇÕES IHRF DO ESTADO DE SÃO PAULO E A DETERMINAÇÃO DOS MODELOS QUASE GEOIDAL E GEOIDAL

Esse capítulo apresenta os procedimentos metodológicos para a determinação das superfícies geoidal e quase geoidal e do cálculo de W_p nas estações do IHRF. Os dados de entrada, utilizados na produção do modelo quase geoidal, são as anomalias de gravidade de Molodensky (Δg_{MO}), definidas em (36). No cálculo do potencial de gravidade empregou-se o distúrbio de gravidade (δg), conforme (22). A modelagem das altas frequências de Δg_{MO} e δg requer quantificar os efeitos topográficos. Para tanto, é apresentado nessa seção a abordagem utilizada para a modelagem dos MDTs, utilizando a técnica RTM.

Os elementos do campo anômalo dos MGGs foram calculados no site do ICGEM⁴, com os parâmetros do elipsoide GRS80, considerado a referência geodésica elipsoidal até o momento, o sistema de maré zero, devido às recomendações da IAG e a compatibilidade com o sistema de maré da maioria das variáveis utilizadas e sem o termo de ordem zero.

Os cálculos do IHRF e a determinação dos modelos geoidal e quase geoidal, foram realizados no pacote computacional GRAVSOFT (FORSBERG; TSCHERNING, 2008) desenvolvido na *Technical University of Denmark* (DTU) e em rotinas desenvolvidas na EPUSP. As figuras foram geradas no software *Generic Mapping Tools* (GMT) (WESSEL et al., 2019) e na versão estudantil do AutoCAD Civil 3D (AUTODESK, 2020).

Os MGGs aplicados aos cálculos são o *Experimental Gravity Field Model 2019* (XGM2019) e o *Gravity Observation Combination* (GOCO05S). O modelo GOCO05S, derivado da missão GOCE e GRACE, abarcou órbitas cinemáticas de 8 satélites e 6 órbitas do *Satellite Laser Ranging* (SLR). Por ser um modelo de baixa frequência seu desenvolvimento máximo é até grau e ordem 280. Uma nova versão deste modelo, o GOCO06S foi disponibilizada em 2019, com o diferencial do acréscimo de 4 satélites (PAIL; HUGENTOBLE, 2019).

⁴ <http://icgem.gfz-potsdam.de/home>

O XGM2019 é um modelo combinado com os dados satelitais do modelo GOCO06S e medidas gravimétricas terrestres. A topografia do continente é derivada do modelo EARTH2014 e a oceânica do modelo DTU13. Seus coeficientes na série de funções harmônicas esféricas atingem o grau e ordem 5399, com uma resolução espacial de 4 km (ZINGERLE et al., 2019). Segundo Gruber et al. (2019) a consistência do modelo com as determinações GNSS sobre a rede de nivelamento é de até 30 cm para o estado de São Paulo.

6.1 A modelagem das superfícies topográficas para o RTM

O MDT, SRTM15_PLUS com resolução de 15 arcseg, foi o modelo escolhido para a aplicação da técnica RTM em razão de sua disponibilidade para a área do continente e do oceano. O SRTM15_PLUS é derivado da *Shuttle Radar Topography Mission* (SRTM), executada pela antiga *National Imagery and Mapping Agency* (NIMA), hoje *National Geospatial-Intelligence Agency* (NGA), e a *National Aeronautics and Space Administration* (NASA), e complementado com dados da missão *Advanced Spaceborne Thermal Emission and Reflection Radiometer* (ASTER), resultado da parceria entre a NASA e o *Japan's Ministry of Economy Trade and Industry* (METI). Já no oceano esse modelo possui dados derivados da missão *CryoSat-2* e *Jason-1* (CATALOG, 2020).

Como mencionado, o cálculo do RTM requer três MDTs. O modelo irregular, formatado em uma grade de 3', foi determinado no programa SELECT, desenvolvido por Forsberg e Tscherning (2008), a partir do MDT de alta resolução, o SRTM15_PLUS. Já o de referência foi produzido no programa TCGRID, em função dos dois modelos anteriores. Esse último trata-se de uma grade das altitudes médias, gerado a partir de um filtro passa-baixa filtrada com o operador de média móvel.

A produção do MDT de referência é dependente da resolução espacial do MGG cujo cálculo é função da escolha do grau e da ordem dos coeficientes desenvolvidos em série de funções harmônicas esféricas do potencial gravitacional. Visando calcular o potencial de gravidade escolheu-se o MGG GOCO05S com n_{max} : 100 e 200. Enquanto que para determinar os modelos quase geoidal e geoidal adotou-se o modelo XGM2019

com n_{max} : 250, 720 e 2190. A relação da resolução espacial e do grau e da ordem do MGG pode ser expressa de acordo com a expressão (91), considerando que 1" é equivalente a 30,87 m (TORGE; MULLER, 2012):

$$RES_{MGG} = \frac{180^\circ}{n_{max}} \quad (91)$$

A partir do grau e da ordem dos MGGs escolhidos efetuou-se testes nos programas TCGRID e TC (FORSBERG; TSCHERNING, 2008). A rotina TCGRID calcula a superfície de referência em função do MDT irregular (3') e da escolha de valores ímpares para a janela móvel. Em primeira instância, foram calculadas 16 superfícies de referência utilizando valores ímpares de 1 a 31. Tais valores determinam o raio de busca da janela para a aplicação do filtro passa baixa. Para otimizar esse cálculo, utilizou-se o programa MDTREF-RTM desenvolvido na EPUSP. A resolução em quilômetros de cada fator é apresentada na Tabela 3.

Tabela 3 - Resolução espacial da janela móvel.

Fator	Minutos	Graus	km
1	3	0,05	5,6
3	9	0,15	16,7
5	15	0,25	27,8
7	21	0,35	38,9
9	27	0,45	50,0
11	33	0,55	61,1
13	39	0,65	72,2
15	45	0,75	83,3
17	51	0,85	94,5
19	57	0,95	105,6
21	63	1,05	116,7
23	69	1,15	127,8
25	75	1,25	138,9
27	81	1,35	150,0
29	87	1,45	161,1
31	93	1,55	172,3

Em seguida, com o programa TC realizou-se o cálculo do RTM inserindo como dados de entrada os MDTs, de alta resolução, de baixa resolução e de referência e os

residuais do campo anômalo. Para os modelos geoidal e quase geoidal, esses residuais se referem às anomalias de gravidade de Molodensky, reduzidas dos longos comprimentos de onda utilizando o modelo XGM2019 com n_{max} : 250 e n_{max} : 720. Além disso, o RTM foi utilizado para contribuir às altas frequências da Δg_{MO} advindas do XGM2019, empregadas nas regiões de vazios gravimétricos. Nessa tarefa utilizou-se XGM2019 com n_{max} : 2190. Já para a determinação do potencial de gravidade, os residuais correspondem aos distúrbios de gravidade subtraídos do modelo GOCO05S com n_{max} : 100 e 200. A avaliação da melhor superfície de referência para cada modelo foi efetuada analisando a Raiz Média Quadrática do Desvio (RMQD), do inglês *Root Mean Square Deviation* (RMSD), dos residuais Δg_{MO} e δg resultados da remoção do RTM e dos longos comprimentos de onda dos MGGs.

Uma das finalidades da remoção dos efeitos topográficos com o RTM é obtenção de resíduos suaves. Neste sentido, qualifica-se como melhor MDT de referência para esse estudo, aquele que apresente o menor RMQD dos resíduos finais da anomalia de Molodensky (92) e do distúrbio de gravidade (93).

$$\Delta g_{MO \text{ res}} = \Delta g_{MO} - \Delta g_{MO}MGG - \Delta g_{MO}RTM \quad (92)$$

$$\delta g \text{ res} = \delta g - \delta gMGG - \delta gRTM \quad (93)$$

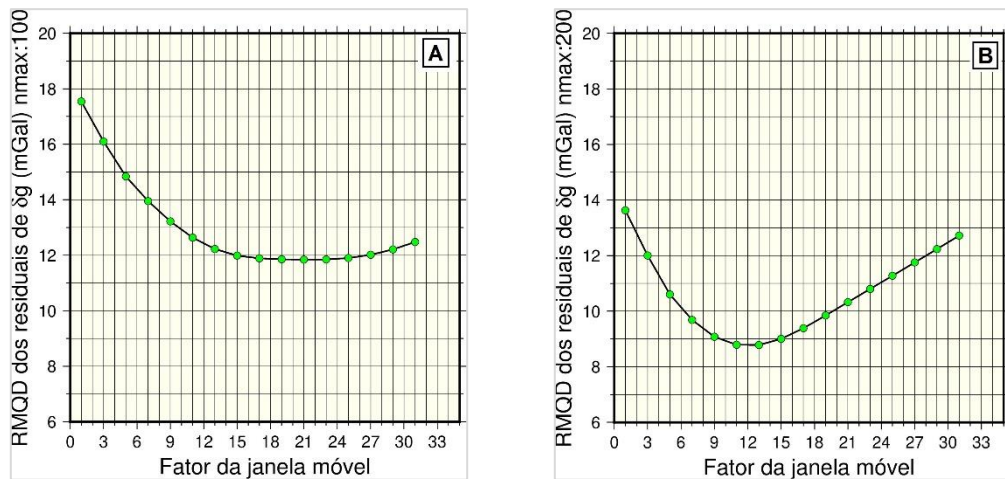
A partir dos residuais da área de estudo referentes aos distúrbios de gravidade e às anomalias de gravidade, obtiveram-se os fatores ótimos para as janelas móveis (Tabela 4). O comportamento da RMQD para cada fator e residual do distúrbio de gravidade é apresentado nas Figuras 21-A e 21-B.

Tabela 4 - Melhor janela móvel para a produção do MDT de referência.

MGG	nmax	Fator da janela de média móvel	RMQD
GOCO05S	100	21	11,84
GOCO05S	200	13	8,74
XGM2019	250	9	8,08
XGM2019	720	3	6,99
XGM2019	2190	1	7,41

Os distúrbios de gravidade foram reduzidos com o modelo GOCO05S com n_{max} : 100 e 200, de acordo com a área de integração para a realização do IHRF, conforme o descrito na seção 6.3. Os testes efetuados constataram que para n_{max} : 100 o melhor fator é o 21 e para n_{max} : 200 o fator 13 corresponde a melhor solução.

Figura 21- RMQD dos residuais em relação à janela móvel ideal (A: GOCO05S n_{max} : 100; B: GOCO05S n_{max} : 200).

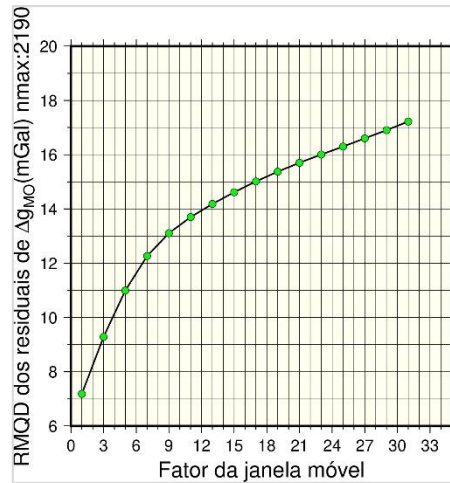


Fonte: A autora.

A determinação do modelo quase geoidal requer o preenchimento dos vazios gravimétricos com um MGG de alto grau e ordem e o complemento dos curtos comprimentos de onda com a técnica RTM (94), conforme apresentado por Vu, Bruinsma e Bonvalot (2019). Para tanto, identificou-se o fator 1 (Figura 22) como o ideal para a produção do MDT de referência utilizando as anomalias de gravidade do MGG XGM2019 n_{max} : 2190.

$$\Delta g_{M0} vazios = \Delta g_{M0} MGG + \Delta g_{M0} RTM \quad (94)$$

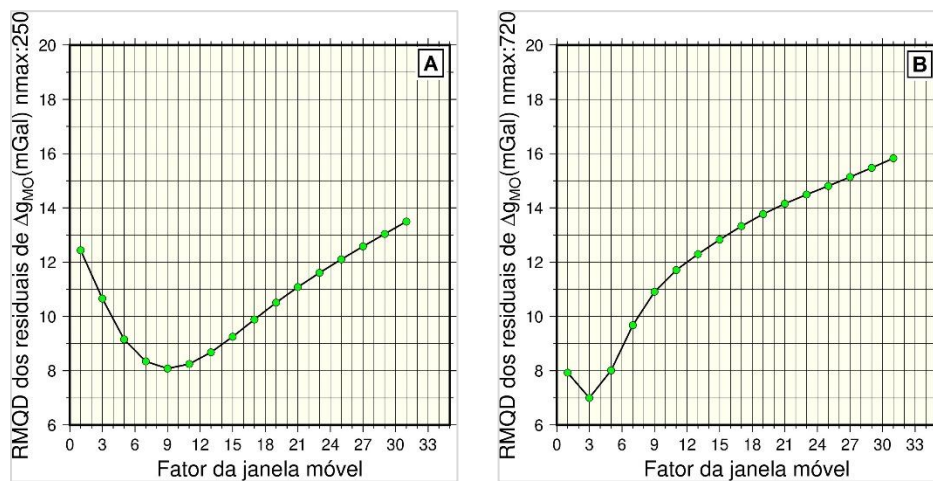
Figura 22- RMQD dos residuais de Δg_{MO} para o XGM2019 nmax: 2190.



Fonte: A autora.

A remoção e a restauração das anomalias de gravidade para a determinação do modelo geoidal foi realizada utilizando o modelo XGM2019 com nmax: 250 e nmax: 720. Os fatores ideais para o MDT de referência são, de acordo com os testes, o 9 e o 3. O comportamento destes modelos de acordo com os fatores é apresentado nas Figuras 23-A e 23-B.

Figura 23- RMQD dos residuais em relação à janela móvel ideal (A: XGM2019 nmax: 250; B: XGM2019 nmax: 720).



Fonte: A autora.

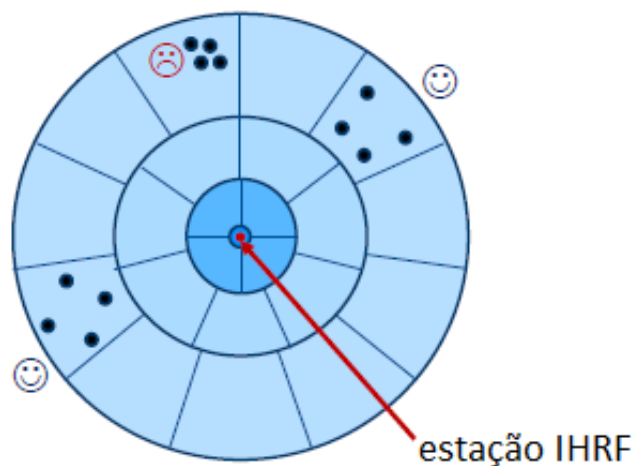
Em função dos resultados obtidos, Tabela 4, efetuou-se os cálculos do RTM para a determinação do potencial de gravidade e para o cálculo dos modelos geoidal e quase geoidal.

6.2 Determinação do potencial de gravidade para as estações IHRF

A determinação do potencial de gravidade para as estações IHRF requer solucionar o segundo problema de valor de contorno da Geodesia, caracterizado como problema fixo. Dessa forma, o potencial de gravidade fora das massas atrativas da Terra deve ser determinado, assumindo que a superfície de contorno é conhecida. Em geral, utilizam-se distúrbios de gravidade, calculados a partir dos dados pontuais da aceleração de gravidade e das coordenadas (latitude, longitude e altitude geodésicas). O ponto de referência das estações, Botucatu, Presidente Prudente, São Carlos e São José do Rio Preto são as coordenadas das estações da RBMC.

As atuais recomendações da IAG para a realização do IHRF sugerem que a distribuição dos dados gravimétricos atenda ao diagrama de Hammer com a seguinte configuração (Figura 24) (Tabela 5).

Figura 24 - Distribuição dos dados gravimétricos para o cálculo do potencial de gravidade.



Fonte: (SÁNCHEZ et al., 2016).

Tabela 5 - Distribuição de dados gravimétricos para o IHRF.

Distância (km)	Compartimento	Número de pontos plano/montanoso
10	1	4/8
50	4	20/30
110	7	30/45
210	11	50/75
Soma	23	100/150

Fonte: (SÁNCHEZ et al., 2016)

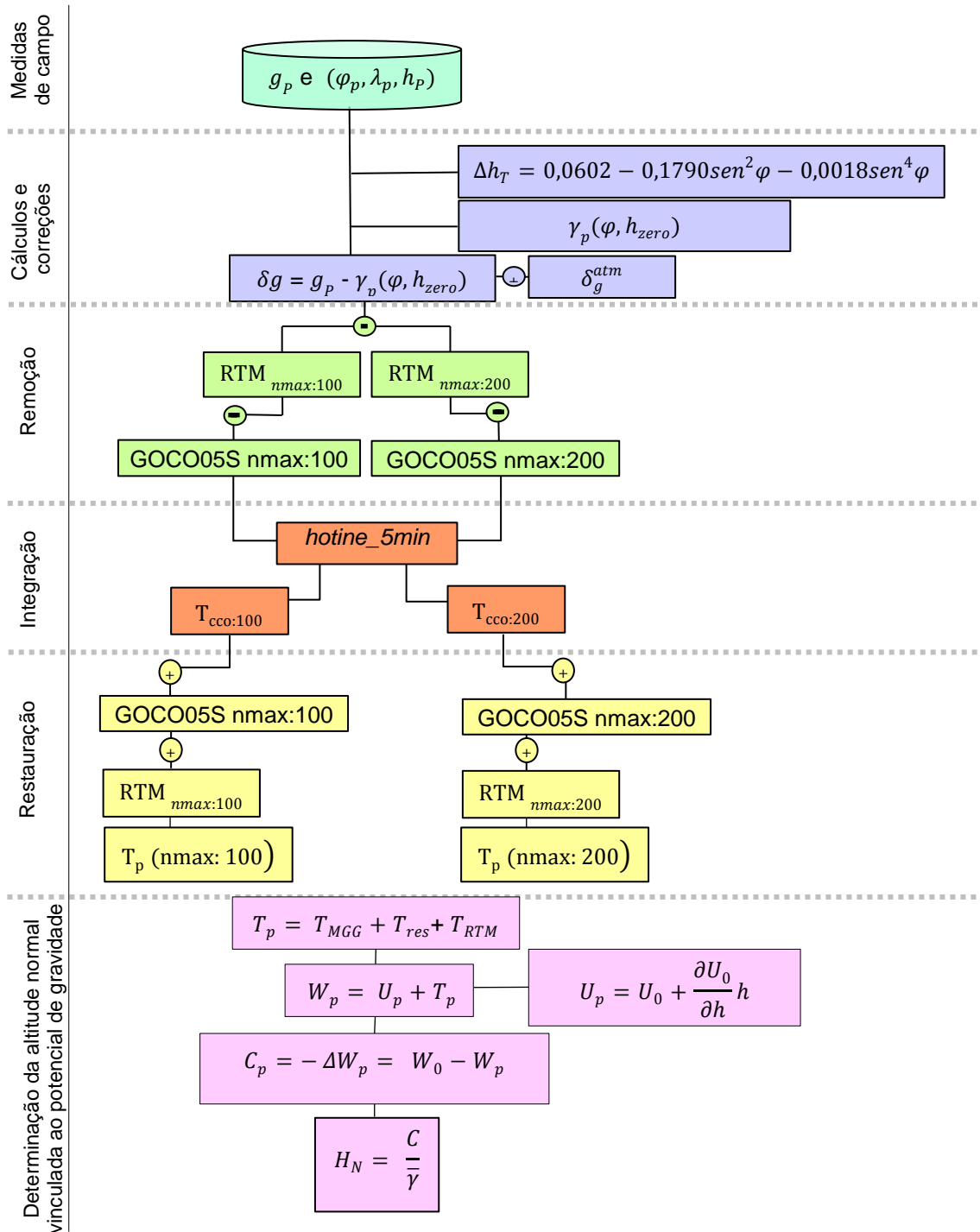
O raio ideal de distribuição dos dados gravimétricos é de 210 km. A extensão estabelecida oferece limitações para países de menores dimensões, regiões de difícil acesso e litorâneas, como a estação IHRF de Imituba. Em casos como esses se pressupõe efetuar o cálculo em uma área de 110 km. A escolha do raio de abrangência implica no grau e na ordem do MGG e de uma interpretação sobre sua influência e sua contribuição no cálculo.

Os satélites das missões espaciais modelam o campo gravitacional por meio da expansão em série da função potencial. Os coeficientes da série, expressos em grau e ordem, representam a resolução espectral do MGG e podem também ser traduzidos para uma resolução espacial, conforme a expressão (91).

Em regiões que dispõem de dados gravimétricos em uma área de 210 km, utiliza-se um MGG com n_{max} : 100, de acordo com a expressão (91), considerando a boa representatividade do modelo para o local de estudo. O conceito inverso é aplicado para um raio de 110 km de informações gravimétricas, pressupondo que o MGG até n_{max} : 200 possui resolução espacial equivalente à referida área.

O presente trabalho objetivou aplicar as duas situações ao cálculo do potencial de gravidade em cada estação, considerando a disponibilização de informações gravimétricas em um raio de 110 km e 210 km. Com isso, os longos comprimentos de onda até 100 e até 200 foram removidos dos distúrbios de gravidade pontuais de acordo com a região de integração. O estudo também objetivou investigar a influência do RTM na região das estações, tendo assim dois tipos de dados para cada área (110 km e 210 km): com a aplicação do RTM e sem a aplicação RTM. A abordagem adotando o RTM é apresentada na Figura 25.

Figura 25 - Fluxograma da metodologia aplicada para o IHRF.



Fonte: A autora.

O sistema de maré no qual as coordenadas geodésicas estão vinculadas, denominado livre de maré, pressupõe a remoção de todos os efeitos ocasionados pela atração lunissolar e por outros corpos celestes. No entanto, as grandezas vinculadas à

Terra estão sobre a presença do Sol e da Lua e devem adotar sistemas de maré condizentes com a influência dos mesmos. A resolução de 2015 para a realização do IHRF definiu que os parâmetros, observações e dados devem adotar o sistema de maré médio para o desenvolvimento do cálculo. A resolução 16 de 1983 enfatiza que o sistema de maré zero é o sistema mais adequado para a aceleração e o potencial de gravidade da Terra (IAG, 1983). Esse sistema elimina apenas o potencial de maré gerado, mantendo os efeitos indiretos. Considerando o mencionado, as altitudes geodésicas foram transformadas do sistema livre de maré para maré zero, seguindo a expressão (95) (SÁNCHEZ; SIDERIS, 2017):

$$\Delta h_T = 0,0602 - 0,1790 \operatorname{sen}^2 \varphi - 0,0018 \operatorname{sen}^4 \varphi \quad (95)$$

Para calcular os distúrbios de gravidade com o valor da aceleração de gravidade normal num ponto na superfície física, utilizou-se a rotina ANOMALIA_MOLODENSKY, desenvolvida na EPUSP. Esse programa realiza o cálculo adotando a fórmula rigorosa da continuação para cima (96), descritos em Heiskanen e Moritz (1967), com os parâmetros do elipsoide GRS-80.

$$\gamma_p(\varphi) = - \frac{2\gamma_0(\varphi)}{a} [1 + f + m - 2f \operatorname{sen}^2 \varphi] h + \frac{3\gamma_0(\varphi)}{a^2} h^2 \quad (96)$$

com, $\gamma_0(\varphi)$ determinado pela fórmula da Somigliana (xx):

Os distúrbios de gravidade foram corrigidos dos efeitos atmosféricos, aplicando a expressão (97) (WENZEL, 1985 apud TENZER et al., 2010).

$$\delta_g^{atm} = 0,874 - 9,9 * 10^{-5} H_n + 3,5625 * 10^{-9} H_n^2 \quad (97)$$

A técnica remover-restaurar foi aplicada ao cálculo para remover as componentes de baixa frequência, oriundos de um MGG, e de alta frequência, derivados dos efeitos topográficos. Os valores pontuais, calculados pela expressão (22), foram reduzidos utilizando os distúrbios de gravidade do modelo GOCO05S com

grau e ordem máxima 100 e 200. Segundo Ihde et al., (2017) para a realização do IHRF, bem como as aplicações que envolvem alta precisão, é suficiente escolha de um modelo que contenha apenas dados de satélite e que possua uma homogênea aproximação do longo comprimento de onda do potencial de gravidade da Terra.

O segundo passo consistiu na remoção parcial dos curtos comprimentos de onda a partir da aplicação da técnica RTM. Nessa abordagem a topografia é suavizada, removendo ou compensando as massas, utilizando um modelo das elevações médias do terreno. Segundo Forsberg (1984), a densidade das anomalias corresponde à distribuição de massa da Terra normal com uma topografia suave, definidas pela expansão em série dos coeficientes das funções harmônicas esféricas de alta ordem. A escolha do MDT de referência ideal foi realizada no item 6.1, de acordo com o grau e ordem do MGG.

Para cada estação obteve-se dois tipos de dados. No primeiro caso os distúrbios de gravidade residuais, resultado da remoção dos longos (GOCO05S n_{max} : 100 e n_{max} : 200) e dos curtos comprimentos de onda (RTM) (93); no segundo os distúrbios de gravidade residuais, reduzidos apenas dos longos comprimentos de onda (n_{max} : 100 e n_{max} : 200). Ambos os dados foram interpolados utilizando o operador média móvel em uma grade 5'x5' com o programa SELECT .

A rotina HOTINE_5MIN, desenvolvido pela EPUSP, foi utilizada para calcular o potencial perturbador referente aos curtos comprimentos de onda (T_{cco}) no raio de interesse, por meio da integral de Hotine modificada. Os dados de entrada são os distúrbios de gravidade residuais com a respectiva latitude e longitude, em minutos e fração. O arquivo de saída fornece um valor do T_{cco} para cada estação IHRF.

A restauração dos longos comprimentos de onda foi realizada com o programa HARMEXP_PONTUAL_RESTAURA, pertencente ao pacote computacional GRAVSOFT (FORSBERG; TSCHERNING, 2008). A rotina determina a ondulação geoidal a partir do desenvolvimento em série da função potencial. Analogamente à etapa de remoção, o modelo utilizado foi o GOCO05S com o grau e ordem 100 e 200, de acordo com o raio de integração. O programa calcula a aceleração de gravidade teórica para cada estação e converte N , aplicando a expressão (28), tendo assim o potencial perturbador referente aos longos comprimentos de onda.

A restauração parcial dos curtos comprimentos de onda referente ao RTM foi efetuada com o programa TC. Nessa etapa calcula-se o RTM com a anomalia de altura residual de cada estação, utilizando os mesmos MDTs da fase de remoção. A partir do valor da aceleração de gravidade teórica referenciada à superfície do teluroide, calculados pela expressão (45), utilizando a altitude normal, transforma-se o RTM calculado para ζ em potencial perturbador residual, aplicando a expressão (48).

Logo, o potencial perturbador final para cada estação IHRF foi expresso por:

$$T_p = T_{MGG} + T_{res} + T_{RTM} \quad (98)$$

Ressalta-se que apenas a estação de Presidente Prudente possui um valor de altitude normal, derivado do nivelamento geométrico e associada com a aceleração de gravidade, referenciada ao *datum* de Imbituba. As demais estações tiveram os valores de H_N determinados pela anomalia de altura do modelo XGM2019 com nmax: 2190, aplicando a equação (85).

O potencial de gravidade normal foi calculado pelo programa POTENCIAL_NORMAL desenvolvido pela EPUSP. A rotina determina U_p , equação (99), a partir da aceleração de gravidade teórica, a altitude geodésica e os parâmetros do elipsoide GRS80.

$$U_p = U_0 + \frac{\partial U_0}{\partial h} h \quad (99)$$

O potencial de gravidade pontual foi expresso por:

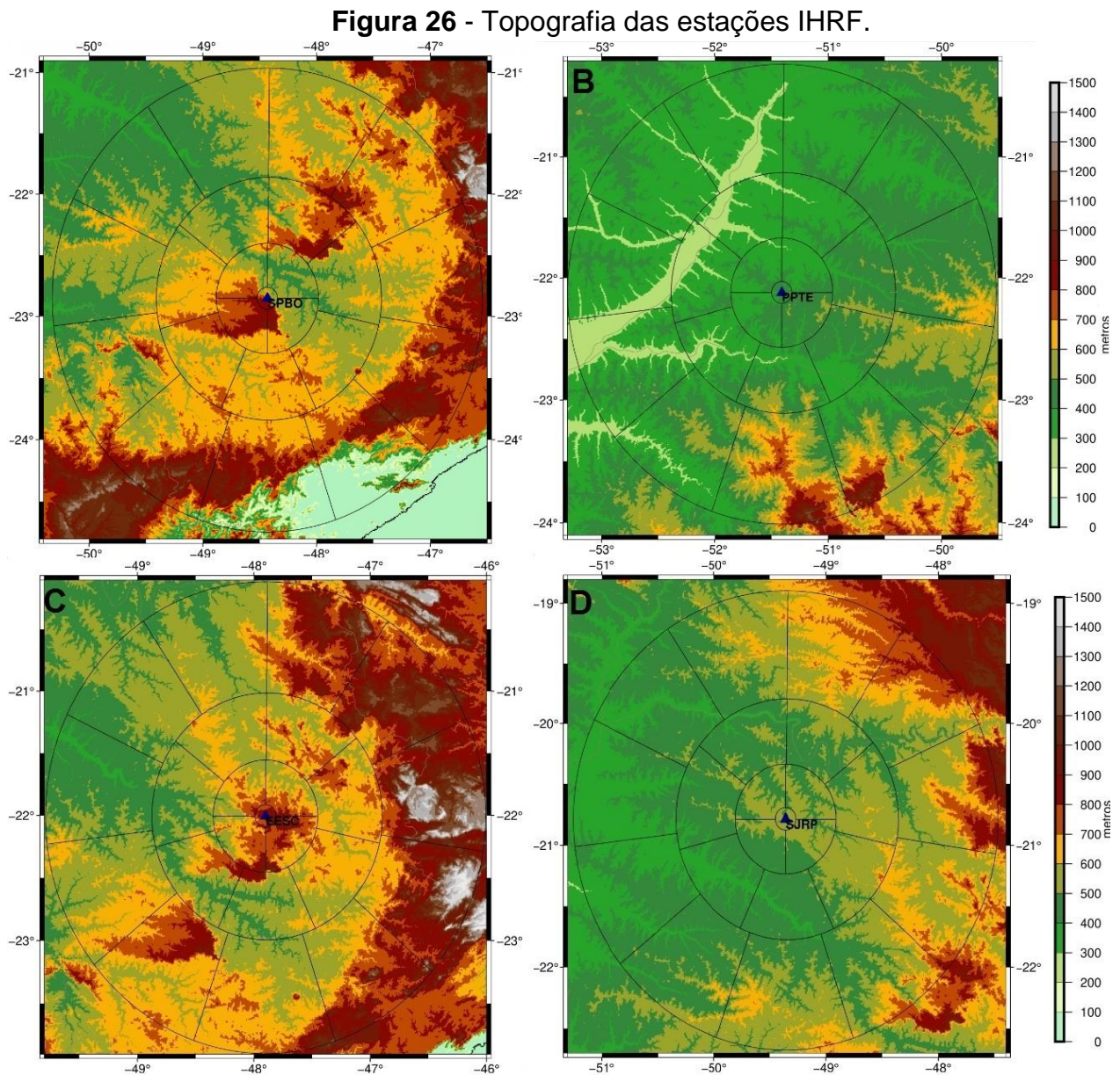
$$W_p = U_p + T_p \quad (100)$$

Por fim, a diferença de potencial ou número geopotencial foi obtida por:

$$C_p = -\Delta W_p = W_0 - W_p \quad (101)$$

6.2.1 Características topográficas das estações IHRF

A Figura 26 apresenta a topografia das estações IHRF derivada a partir do modelo SRTM15_PLUS com resolução de 15 arcseg.



Fonte: A autora.

A região da estação de Botucatu é caracterizada por irregularidades topográficas de aproximadamente 1000 metros (Figura 26-A). Devido às áreas montanhosas, existem pequenos trechos de vazios gravimétricos, conforme apresentados na Figura

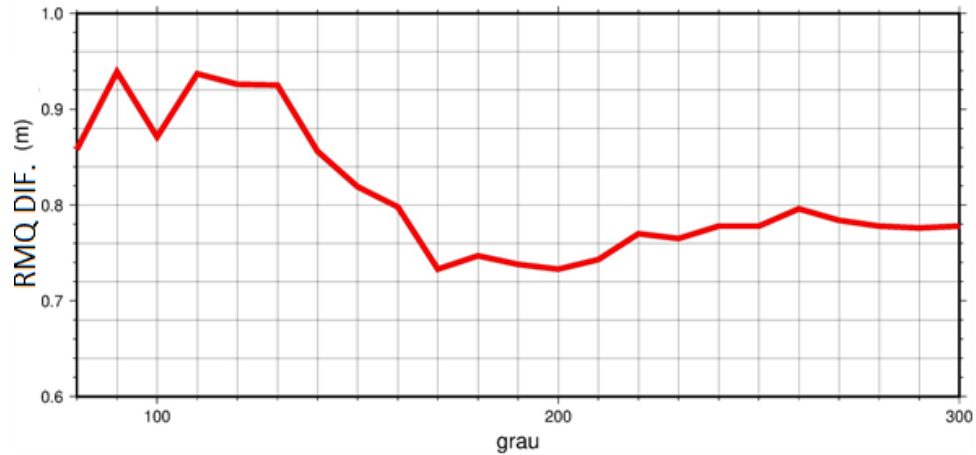
31. A estação de Presidente Prudente (PPTTE) que é localizada em uma área de topografia homogênea comparada à estação de Botucatu, possui na região sul elevações de aproximadamente 900 metros (Figura 26-B). A estação de São Carlos apresenta irregularidades topográficas de até 1500 metros (Figura 26-C) e pequenos vazios gravimétricos ao sudeste (Figura 35), em um raio de 210 km. A estação de São José do Rio Preto é a estação que possui as menores irregularidades topográficas (Figura 26-D) e se encontra adequadamente densificada (Figura 37), caracterizando a estação IHRF ideal.

6.2.2 Características dos MGGs no estado São Paulo

Os modelos do geopotencial comportam-se de formas distintas conforme o grau e ordem. Na Figura 27 é apresentada a Raiz Média Quadrática (RMQ) da diferença entre anomalias de altura, obtidas das determinações GNSS sobre as RRNN, e altura geoidal do GOCO06S de 86 pontos localizados na área. Na mesma figura observa-se que entre os graus 100 e 200, essa diferença é de aproximadamente 20 cm.

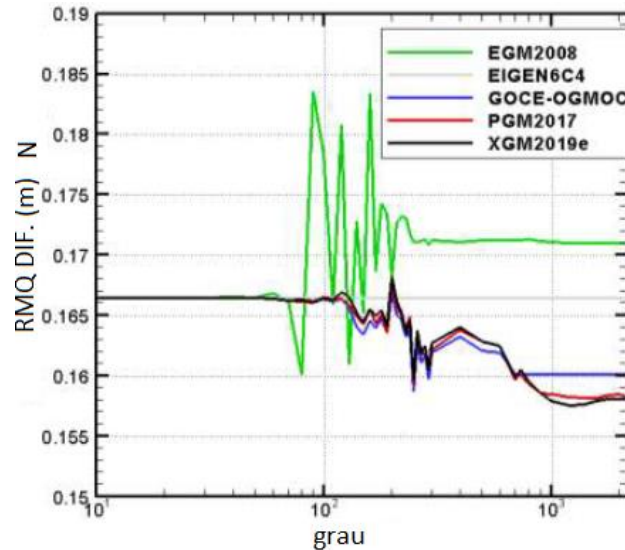
O mesmo estudo realizado por Gruber et al. (2019), Figura 28, demonstrou que ocorre comportamento similar para os modelos EIGEN6C4, GOCO-OGMOC, PGM2017 e XGM2019 em relação ao GOCO06S. Nesse caso, os autores realizaram a correção da superfície em relação a 102 determinações GNSS sobre a rede de nivelamento no estado de São Paulo e posteriormente efetuaram a análise, conforme mostrado na Figura 28.

Figura 27 – RMQ da diferença entre N derivado do GOCO06-S com diferentes grau e ordem e as determinações GNSS sobre a rede de nivelamento no estado de São Paulo.



Fonte: A autora.

Figura 28 - RMQ da diferença entre N derivado de distintos MGGs com diferentes grau e ordem e as determinações GNSS/ nivelamento.



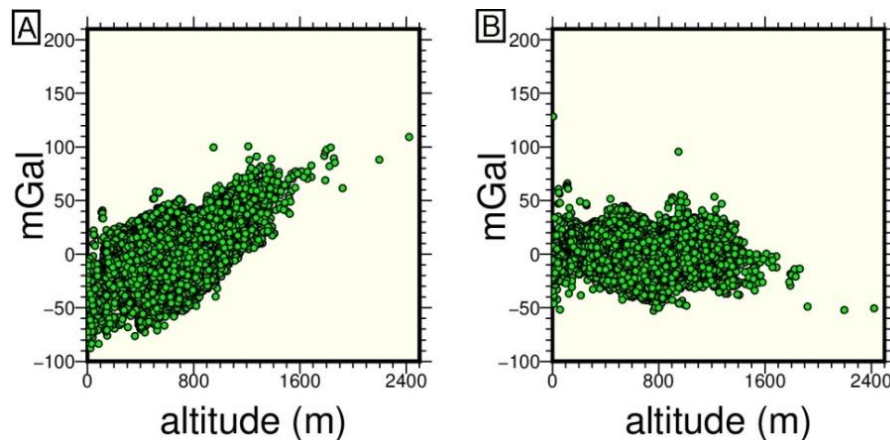
Fonte: Adaptado de Gruber et al., (2019).

A partir do comportamento e da diferença padrão entre a ondulação geoidal dos modelos do geopotencial em relação às determinações GNSS sobre nivelamento no estado, aqui apresentadas, justificou-se os resultados obtidos na seção 6.2.4.

6.2.3 Efeito da modelagem RTM sobre os distúrbios residuais de gravidade no estado São Paulo

A técnica RTM tem por objetivo reduzir a influência das massas topográficas sobre os residuais do distúrbio de gravidade, resultantes da remoção dos longos comprimentos de onda. A Figura 29-A apresenta a relação entre os distúrbios de gravidade reduzidos do GOCO05S $n_{max}: 100$ e a altitude normal. Ao aplicar o RTM, evidencia-se uma significativa redução da dependência da componente vertical, conforme mostrado na Figura 29-B.

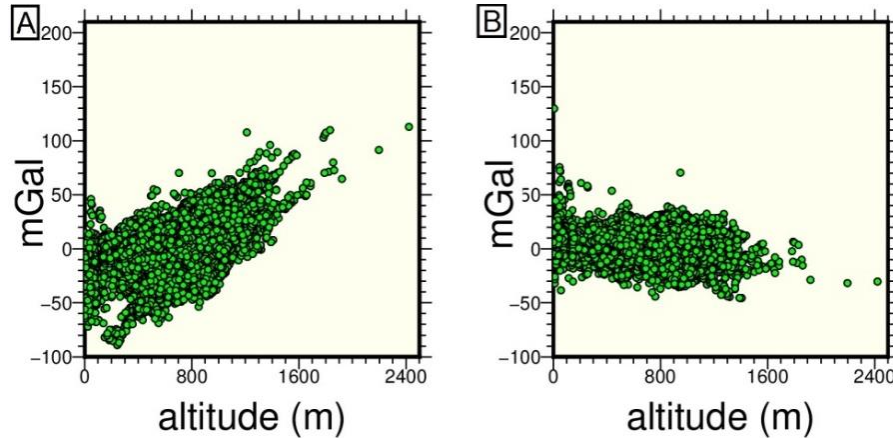
Figura 29 - Distúrbios residuais de gravidade no estado de São Paulo - A: δg reduzido com MGG GOCO05S $n_{max}:100$; B: δg reduzido com MGG GOCO05S $n_{max}:100$ e RTM.



Fonte: A autora.

A Figura 30-A apresenta a relação entre os distúrbios da gravidade residuais, calculados em função da contribuição do modelo GOCO05S desenvolvido até grau e ordem 200, e a altitude. Percebe-se que os valores estão mais dispersos, quando comparados aos apresentados na Figura 29-A. Com a inclusão da consideração do efeito RTM, Figura 30-B, o comportamento dos residuais assemelha-se à Figura 29-B.

Figura 30 - Distúrbios residuais de gravidade no estado de São Paulo - A: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:200; B: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:200 e RTM.



Fonte: A autora.

6.2.4 Distúrbios residuais de gravidade e o potencial perturbador nas estações de estudo

- **Botucatu (SPBOP)**

A Tabela 6 apresenta a estatística dos distúrbios residuais de gravidade para a estação de Botucatu, considerando o raio de 210 km, após a remoção dos longos comprimentos de onda do MGG e do RTM.

Tabela 6 - Distúrbios residuais de gravidade em SPBOP com e sem o RTM (mGal).

Método	Com RTM		Sem RTM	
	nmax: 100	nmax: 200	nmax: 100	nmax: 200
Média	-0,78	0,56	-2,30	-0,85
DP	8,80	8,63	14,64	12,22
RMQD	8,84	8,65	14,82	12,25

Conforme mencionado anteriormente, os MGGs contribuem de forma distinta em função do grau e da ordem. Obtêm-se residuais dos distúrbios de gravidade mais suaves ao remover o MGG com nmax: 200. Nesse caso, a componente sistemática é menor, comparando à utilização do MGG com nmax: 100. Esse comportamento é

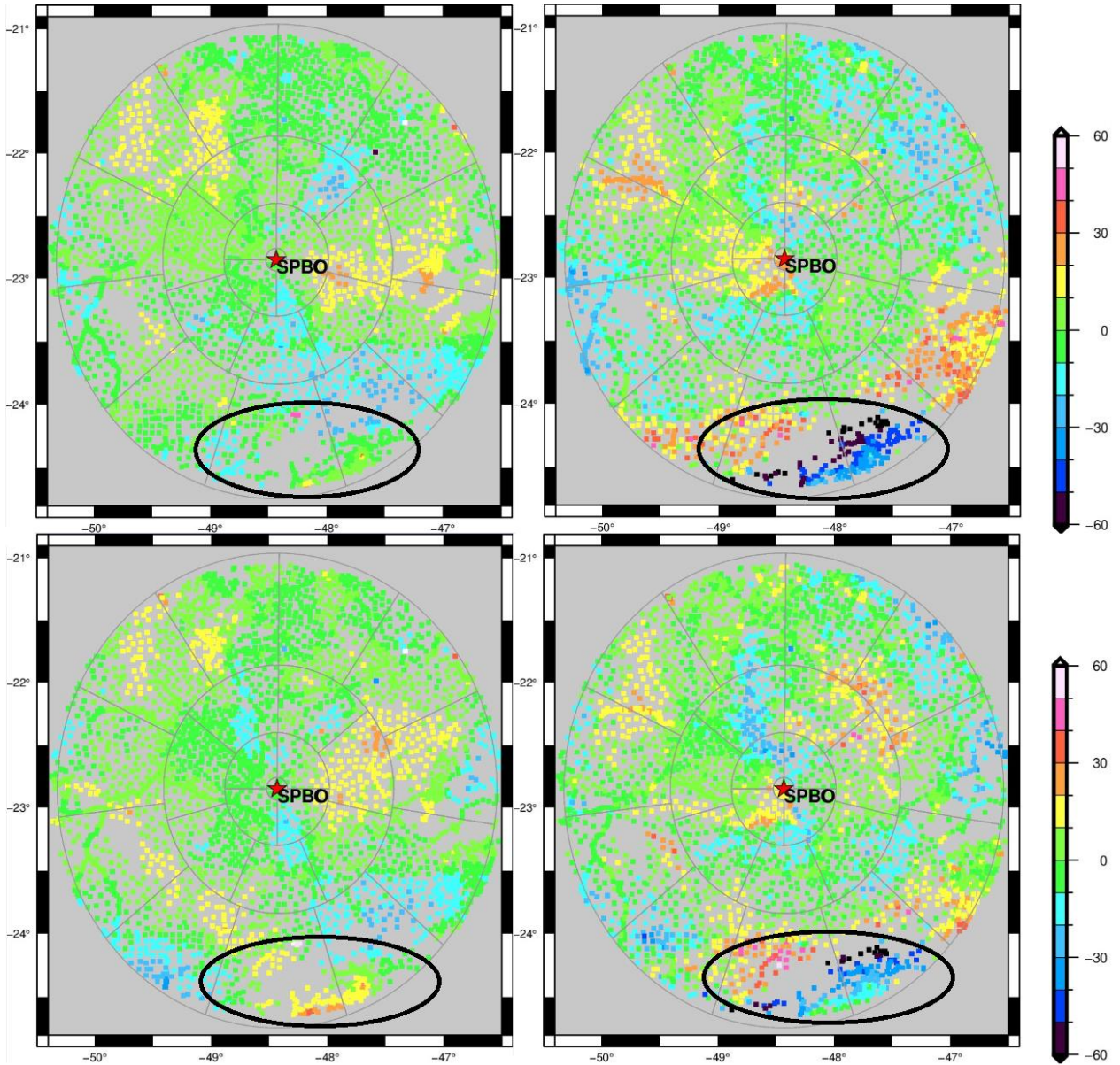
observado na Tabela 6 com relação à média dos residuais do δg , de forma explícita para o caso sem RTM.

Ao passo que, a aplicação do RTM permite reduzir a tendência desses resíduos, suavizando os efeitos gerados pela atração das massas topográficas nas componentes de alta frequência, sobretudo quando se utiliza um MGG com baixo grau de desenvolvimento, como o n_{max} : 100. A Tabela 6 mostra que ao aplicar a técnica RTM, as médias para n_{max} : 100 e 200 (linha 3, colunas 2 e 3 da Tabela 6) tornam-se menores em valores absolutos, conforme o esperado. A referida alteração é de 1,41 mGal para o n_{max} : 100 e -1,52 mGal para o n_{max} : 200.

Em termos de dispersão, observa-se que ocorre um decréscimo de -5,84 mGal e -3,59 mGal no desvio-padrão (DP) para n_{max} : 100 (linha 4, colunas 4 e 2 da Tabela 6) e 200 (linha 4, colunas 5 e 3 da Tabela 6), entre a aplicação ou não da técnica do RTM, respectivamente. No caso em que se aplicou a técnica, resulta em uma diferença de apenas 0,17 entre os DPs das soluções n_{max} : 100 e 200 (linha 4, colunas 2 e 3 da Tabela 6).

As modificações nos distúrbios residuais de gravidade com a aplicação do RTM podem ser visualizadas na Figura 31. As regiões com mudanças significativas, áreas com altas altitudes como demonstrado na Figura 26, estão demarcadas em preto.

Figura 31 - Distúrbios residuais de gravidade SPBO – A: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:100; B: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:100 e RTM; C: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:200; D: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:200 e RTM.

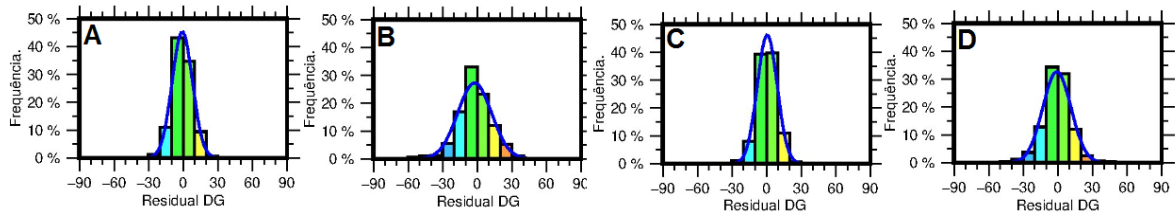


Fonte: A autora.

Conforme mostra a estatística dos residuais do distúrbio de gravidade, Figura 32 a seguir, fica evidente a contribuição da técnica RTM na distribuição normal de δg . Com

o RTM a distribuição se concentra mais em torno da média, apresentando um padrão similar para ambos grau e ordem de desenvolvimento.

Figura 32 - Distribuição dos distúrbios residuais de gravidade da estação SPBO – A: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:100 e RTM; B: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:100; C: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:200 e RTM; D: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:200.



Fonte: A autora.

Como resultado da integração numérica e da restauração das componentes de curto e longo comprimentos de onda, obteve-se o potencial perturbador para a estação de SPBO, apresentado na Tabela 7.

Tabela 7 - Potencial perturbador da estação SPBO (m^2s^{-2}).

Método	Com RTM		Sem RTM	
	nmax: 100	nmax: 200	nmax: 100	nmax: 200
Botucatu	-48,60	-49,83	-48,43	-49,55

Os resultados de T_p para a estação de Botucatu demonstram com a utilização do RTM uma diferença de 1,23, m^2s^{-2} entre grau e ordem 100 e 200 (colunas 3 e 2 da Tabela 7), equivalente a 13 cm. Observa-se que sem a aplicação do RTM essa diferença é de 1,12 m^2s^{-2} ou 11 cm (colunas 5 e 4 da Tabela 7). Salienta-se que para essa estação os valores do T_{MGG} , utilizados na fase de restauração, expressão (98), diferem-se em -1,5 m^2s^{-2} entre o nmax: 100 e 200.

Ao analisar a influência do RTM nos valores de T_p , nota-se que para o nmax: 100 a aplicação ou não do RTM significou um decréscimo de -0,17 m^2s^{-2} (colunas 4 e 2 da Tabela 7). Para a solução com o nmax: 200, considerando os efeitos topográficos, o valor de T_p alterou-se em -0,28 m^2s^{-2} (colunas 5 e 3 da Tabela 7).

- **Presidente Prudente (PPTE)**

Os distúrbios residuais de gravidade de Presidente Prudente, apresentados na Tabela 8, demonstram que, após a redução dos longos comprimentos de onda e do RTM, ainda perdura uma componente sistemática aos dados pois se esperava que as médias dos residuais fossem próximas a zero.

Tabela 8 – Distúrbios residuais de gravidade em PPTE com e sem RTM (mGal).

Método	Com RTM		Sem RTM	
	nmax: 100	nmax: 200	nmax: 100	nmax: 200
GOCO05S				
Média	3,08	1,30	2,28	1,59
DP	7,86	6,42	12,30	10,53
RMQD	8,44	6,55	12,51	10,65

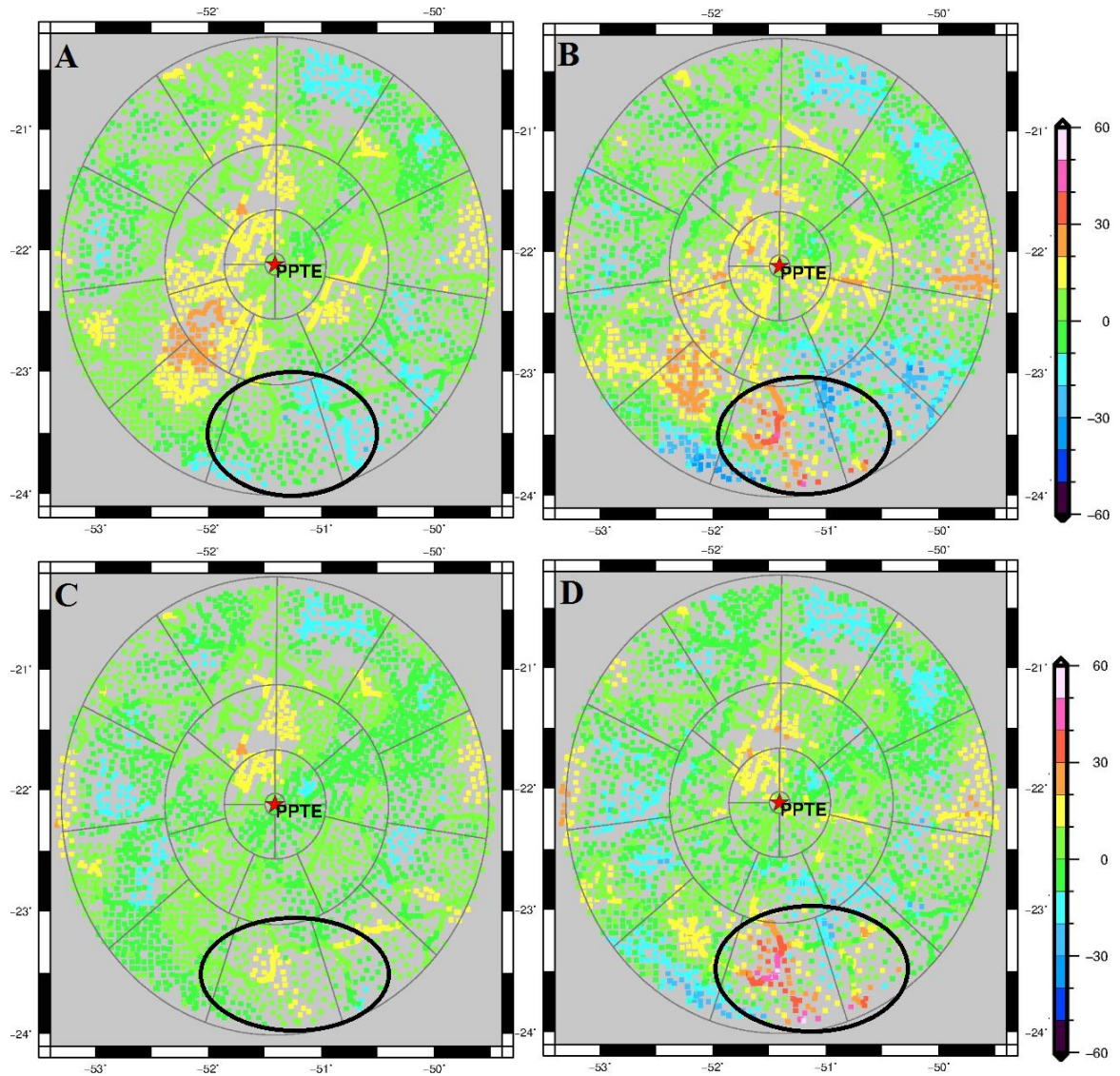
A média dos residuais de δg sem a aplicação da técnica RTM mostra que a redução dos longos comprimentos com o nmax: 200 resulta em 1,59 mGal (linha 3, coluna 5 da Tabela 8). O referido valor é o maior de todas as estações para a referida ordem, sem a aplicação do RTM.

Verifica-se que a redução dos residuais do distúrbio de gravidade, Tabela 8, considerando a influência das massas topográficas, apresenta um comportamento, em termos de diferença, contrário à estação de Botucatu. Com a redução do RTM e sem chega-se à diferença de 0,80 mGal (linha 3, colunas 4 e 2 da Tabela 8) para nmax: 100. As tendências apontadas pela média dos residuais (Tabela 8), apontam que os modelos MGG e MDT não estão contribuindo para remoção da componente sistemática na região.

Ao analisar o desvio-padrão com a aplicação do RTM percebe-se uma melhoria na dispersão dos dados de -4,44 mGal, para nmax: 100 (linha 4, colunas 4 e 2 da Tabela 8) e -4,11 mGal para nmax: 200 (linha 4, colunas 5 e 3 da Tabela 8).

O comportamento dos residuais para esta estação é apresentado na Figura 33. Visto que a área de Presidente Prudente é pouco irregular, o RTM modificou menos os residuais do δg , comparado a Botucatu. Regiões com alterações significativas estão destacadas em preto.

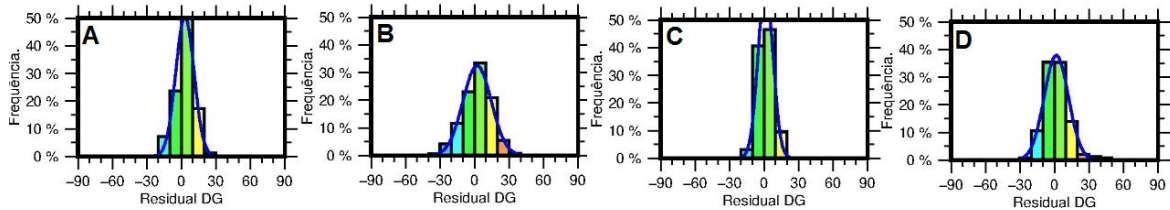
Figura 33 - Distúrbios residuais de gravidade PPTe - A: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:100; B: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:100 e RTM; C: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:200; D: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:200 e RTM.



Fonte: A autora.

A distribuição normal dos distúrbios residuais de gravidade, Figura 34, demonstra as modificações que a aplicação do RTM resultou.

Figura 34 - Distribuição distúrbios residuais de gravidade da estação PPTE - A: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:100 e RTM; B: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:100; C: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:200 e RTM; D: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:200.



Fonte: A autora.

Visualiza-se que para o GOCO05S nmax: 100 (Figura 34-A) a frequência dos residuais aumentou em 15% comparado à Figura 34-B, devido ao uso do RTM. Já para o GOCO05S nmax: 200 (Figura 34-C) a modificação com a aplicação do RTM foi de 10%, comparado à Figura 34-D.

A Tabela 9 apresenta o potencial perturbador obtido para a estação de PPTE.

Tabela 9 - Potencial perturbador da estação PPTE (m^2s^{-2}).

Método	Com RTM		Sem RTM	
	nmax: 100	nmax: 200	nmax: 100	nmax: 200
Presidente Prudente	-52,05	-47,04	-51,31	-47,03

Os resultados de T_p para Presidente Prudente evidenciam que sem o uso do RTM (colunas 5 e 4 da Tabela 9) a diferença entre grau e ordem é de $-4,28 m^2s^{-2}$ e com a aplicação do mesmo (colunas 3 e 2 da Tabela 9) a discrepância é de $-5,01 m^2s^{-2}$. Com e sem a aplicação do RTM tem-se uma diferença em $-0,73 m^2s^{-2}$ ($-5,01 - (-4,28)$), equivalente a 7 cm. Reitera-se que para a estação PPTE, os valores de T_{MGG} utilizados na fase de restauração, expressão (98), se diferem entre grau e ordem 100 e 200, $3,8 m^2s^{-2}$.

Estudos realizados por Ribeiro (2019) para a estação de Presidente Prudente, utilizando o modelo GOCO05C desenvolvido até nmax: 250 sem aplicação do RTM, determinaram um resultado de $-48,299 m^2s^{-2}$ através da colocação por mínimos quadrados. Considerando a realização do IHRF em um raio de 210 km (coluna 4 da Tabela 9), o presente estudo se difere em $-3,01 m^2s^{-2}$ ou -31 cm.

O cálculo de T_p foi efetuado para Presidente Prudente por Blitzkow, Matos e Costa (2017) aplicando a mesma metodologia, utilizando o MGG GOCO05S para a remoção e restauração, porém sem a atualização dos dados gravimétricos, sem a aplicação do RTM e com o banco de dados altimétricos reconstruído em função das antigas altitudes ortométricas-normais e com MGG EGM2008 com nmax: 150. Como resultado, obteve-se para o potencial perturbador para nmax: 100 o valor de $-51,52 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$ e para nmax: 200 o valor de $-46,98 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$. Considerando a solução com nmax: 100 (coluna 4 da Tabela 9), estima-se que as atualizações gravimétricas e altimétricas contribuíram para essa estação IHRF cerca de $-0,21 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$ ($-51,52 - (-51,31)$), correspondente a 2 centímetros. Já com nmax: 200 (coluna 5 da Tabela 9) a contribuição é de apenas $-0,05 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$ ($-46,98 - (-47,03)$), equivalente a 0,52 cm.

- **São Carlos (EESC)**

A estatística dos distúrbios residuais de gravidade para a área de São Carlos é apresentada na Tabela 10.

Tabela 10 - Distúrbios residuais de gravidade em EESC com e sem RTM (mGal).

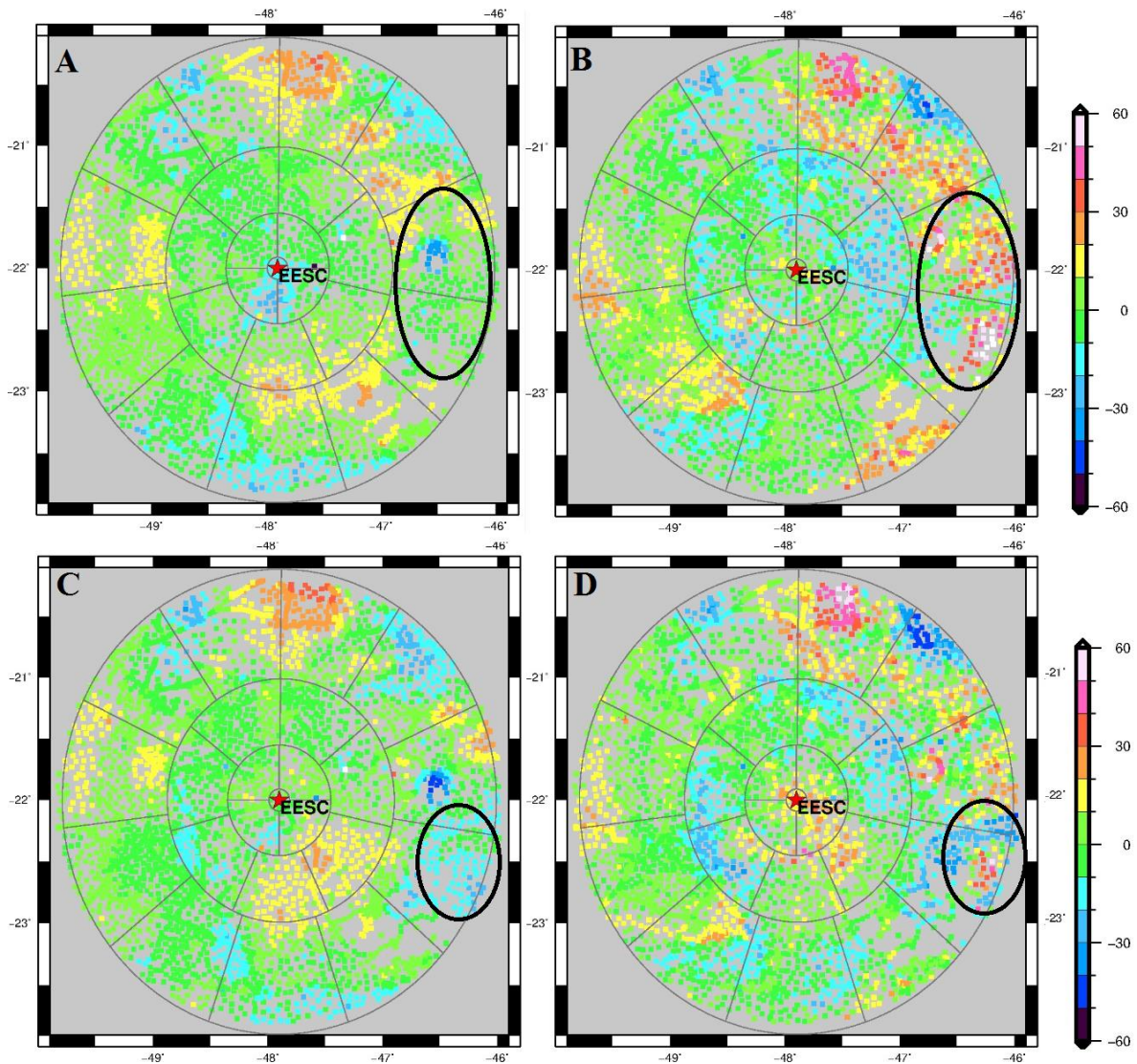
Método	Com RTM		Sem RTM	
	nmax: 100	nmax: 200	nmax: 100	nmax: 200
GOCO05S				
Média	1,39	0,82	1,67	0,80
DP	10,32	10,36	14,46	13,51
RMQD	10,41	10,39	14,56	13,53

A média dos residuais mostra que o RTM alterou em $-0,28 \text{ mGal}$ a solução com o nmax: 100 (linha 3, colunas 4 e 2 da Tabela 10) e somente $-0,02 \text{ mGal}$ o nmax: 200 (linha 3, colunas 5 e 3 da Tabela 10). Esse resultado demonstra que o RTM não influencia significativamente na média, comparado às estações anteriores.

Ao passo que, aplicando o RTM a dispersão dos distúrbios residuais de gravidade do nmax: 100 foi reduzida em $-4,14 \text{ mGal}$ (linha 4, colunas 4 e 2 da Tabela 10). Já para o nmax: 200 (linha 4, colunas 5 e 3 da Tabela 10) a redução foi de $-3,12 \text{ mGal}$.

A Figura 35 evidencia as modificações pontuais em preto com a aplicação do RTM sobre os residuais da área de São Carlos.

Figura 35 - Distúrbios residuais de gravidade EESC - A: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:100; B: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:100 e RTM; C: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:200; D: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:200 e RTM.

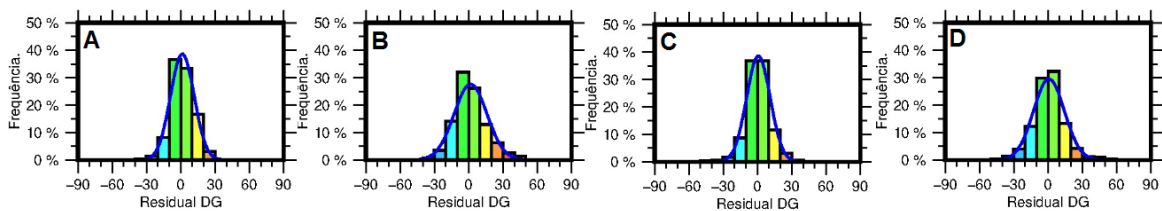


Fonte: A autora.

A distribuição normal dos residuais (Figura 36) denota que apesar de São Carlos possuir uma região topográfica mais irregular, a aplicação do RTM na região do estudo

contribuiu menos, comparada à estação de Presidente Prudente. Para o modelo GOCO05S nmax: 100 (Figura 36-A) a aplicação do RTM modificou em menos de 10% a frequência da amostra em torno da média. Para o nmax: 200 (Figura 40-C) essa diferença foi ainda menor, 5% aproximadamente.

Figura 36 - Distribuição distúrbios residuais de gravidade da estação EESC - A: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:100 e RTM; B: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:100; C: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:200 e RTM ; D: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:200.



Fonte: A autora.

O potencial perturbador para a estação de São Carlos é apresentado na Tabela 11.

Tabela 11 - Potencial perturbador da estação EESC (m^2s^{-2}).

Método	Com RTM		Sem RTM	
	nmax: 100	nmax: 200	nmax: 100	nmax: 200
São Carlos	-56,31	-60,57	-56,45	-60,56

Obteve-se uma diferença de $-4,06 m^2s^{-2}$, correspondente a -41 cm, entre nmax: 100 e nmax: 200 (colunas 3 e 2 da Tabela 11), com o uso do RTM. Enquanto que a diferença entre grau e ordem sem o uso do RTM foi de $-4,11 m^2s^{-2}$ (colunas 5 e 4 da Tabela 11), equivalente a -42 cm. As referidas discrepâncias estão relacionadas ao modelo GOCO05S uma vez que os valores de T_{MGG} , utilizados na etapa de restauração (98) apresentam uma diferença de $-5 m^2s^{-2}$, ou -50 cm, entre grau e ordem 100 e 200.

- **São José do Rio Preto (SJRP)**

A estatística dos residuais do distúrbio de gravidade segue na Tabela 12.

Tabela 12 - Distúrbios residuais de gravidade em SJRP com e sem RTM (mGal).

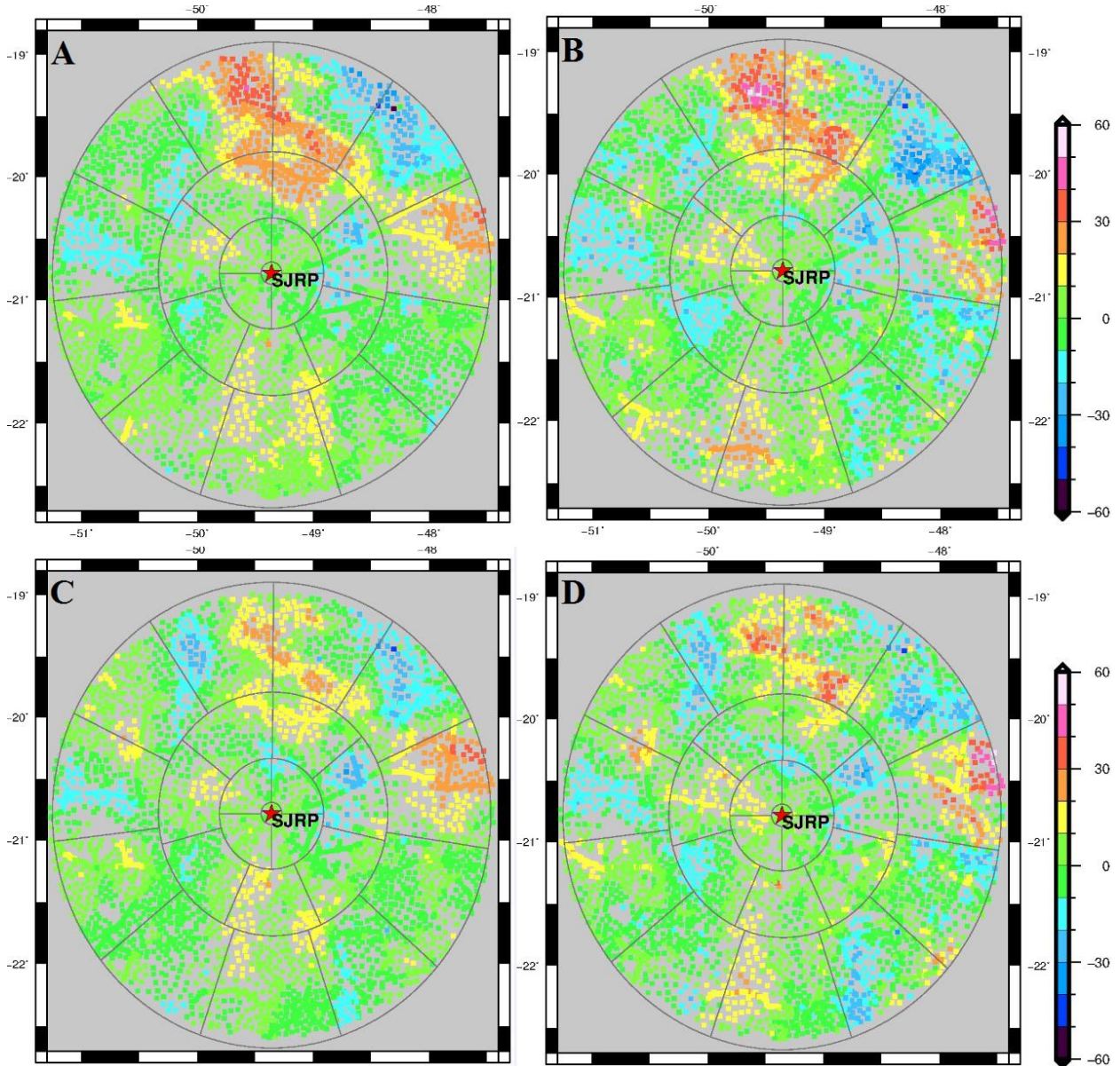
Método	Com RTM		Sem RTM	
	nmax: 100	nmax: 200	nmax: 100	nmax: 200
GOCO05S				
Média	1,92	0,67	0,17	0,05
DP	10,34	8,80	12,26	10,76
RMQD	10,52	8,82	12,26	10,76

A média dos distúrbios residuais de gravidade para a estação de São José do Rio Preto demonstra que o modelo GOCO05S com grau e ordem 100 e 200 está contribuindo melhor para eliminar a parte sistemática na área (linha 3, colunas 4 e 5 da Tabela 12). Constata-se que semelhante à estação de Presidente Prudente, a redução de δg com o RTM aumenta o valor da média.

Por outro lado, a aplicação do RTM auxilia na redução do desvio-padrão e do RMQD de δg . O desvio padrão dos distúrbios de gravidade reduzidos com o nmax: 100 modificou-se em -1,92 mGal (linha 4, coluna 4 e 2 da Tabela 12) e para o nmax: 200 o DP alterou-se em -1,96 mGal (linha 4, coluna 5 e 3 da Tabela 12).

A Figura 37 mostra as modificações nos residuais dos distúrbios com o RTM. Percebe-se que o RTM ocasionou suaves modificações, comparado às estações IHRF anteriores.

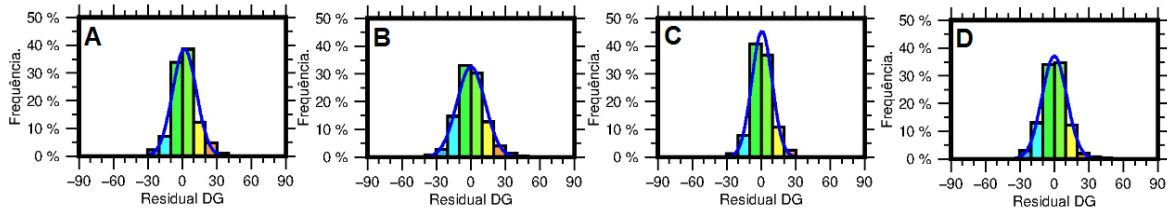
Figura 37 - Distúrbios residuais de gravidade SJRP- A: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:100; B: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:100 e RTM; C: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:200; D: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:200 e RTM.



Fonte: A autora.

A distribuição normal (Figura 38) evidencia que a estação de São José do Rio Preto apresenta residuais mais homogêneos em todas as soluções (com RTM/sem RTM/nmax: 100/nmax: 200), diferentemente dos residuais das estações anteriores.

Figura 38 - Distribuição distúrbios residuais de gravidade da estação SJRP – A: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:100 e RTM; B: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:100; C: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:200 e RTM; D: δg reduzido com MGG GOCO05S nmax:200.



Fonte: A autora.

A Tabela 13 apresenta os resultados encontrados na estação de São José do Rio Preto para o potencial perturbador.

Tabela 13 - Potencial perturbador da estação SJRP (m^2s^{-2}).

Método	Com RTM		Sem RTM	
	nmax: 100	nmax: 200	nmax: 100	nmax: 200
São José do Rio Preto	-65,30	-65,28	-63,43	-64,63

Os resultados do potencial perturbador com RTM apresentaram a discrepância de $0,02 m^2s^{-2}$, correspondente a 0,2 cm, entre as soluções de diferentes grau e ordem (colunas 3 e 2 da Tabela 13). Diferentemente, das outras estações a convergência dos resultados em SJRP foi possível em razão da pequena diferença entre os longos comprimentos de onda do GOCO05S nmax: 100 e 200. Nota-se que esse modelo se encontra bem representativo para a região visto que os valores de T_{MGG} , utilizados na etapa de restauração (98), possui diferença entre grau e ordem de $0,5 m^2s^{-2}$, correspondente a 5 cm.

Em função dos valores residuais dos distúrbios de gravidade e do valor restaurado do potencial perturbador de todas as estações IHRF, cabem as seguintes considerações:

- A média dos residuais de δg de todas as estações mostrou que o MGG nmax: 200 reduz significativamente as componentes sistemáticas, conforme o esperado, tornando a média próxima ao valor zero. Ocorreu uma exceção para a média dos

distúrbios residuais de gravidade da estação de Presidente Prudente. A mesma após a redução com o n_{\max} : 200, resultou em 1,59 mGal. Esse valor pode indicar uma má representatividade do MGG na região de estudo ou inconsistências nos dados gravimétricos e altimétricos da região.

- Verificou-se que a média dos residuais de δg com o n_{\max} : 100 fica próxima ao valor zero com a aplicação do RTM. Ocorreram exceções para as estações de Presidente Prudente e São José do Rio Preto, em que a média dos residuais (Tabelas 8 e 12) aumentaram com a redução do RTM. As referidas estações apresentam as menores irregularidades topográficas, com pequenas regiões de altitudes maiores. Visto que a técnica RTM é executada a partir de um modelo de elevações médias do terreno, a existência de pequenas regiões mais elevadas pode prejudicar a média e influenciar os resíduos de δg .
- Os valores encontrados para T_p nas diferentes metodologias de remover-restaurar possuem uma alta dependência dos longos comprimentos de onda. Em específico, as estações de São Carlos e Presidente Prudente possuem discrepâncias de -42 cm (linha 3, colunas 5 e 4 da Tabela 11) e 51 cm (linha 3, colunas 3 e 2 da Tabela 9) aproximadamente, entre as soluções n_{\max} : 100 e n_{\max} : 200.
- Como mencionado anteriormente, o RMQ da diferença (Figura 31) entre as determinações GNSS sobre a rede de nivelamento do estado e o modelo GOCO06S com n_{\max} : 100 e 200 se diferem em torno de 20 cm. Constata-se que as estações de São Carlos e Presidente Prudente estão acima do RMQ da diferença na referida análise.
- A homogênea distribuição de dados gravimétricos e o uso do RTM tendem a contribuir para a convergência entre as soluções com diferentes grau e ordem. No entanto, isso somente ocorreu para a estação de São José do Rio Preto, onde a diferença entre grau e ordem foi de apenas 5 cm.

- Visto que a estação de Presidente Prudente refere-se a uma estação IHRF proposta para a rede global, evidencia-se a necessidade da escolha de um MGG que seja representativo à área e que não apresente discrepâncias demasiadas entre os coeficientes. A justificativa das variações nas grandezas do campo anômalo em função do grau e da ordem do MGG carece de uma análise detalhada de diversos fatores como a formação geomorfológica e as características hidrológicas da região.
- Os resultados da estação de São José do Rio Preto com a aplicação do RTM (linha 3, colunas 3 e 2 da Tabela 13) mostraram a proximidade dos resultados de T_p para n_{max} : 100 e 200. Com isso, constata-se que é aceitável a realização do IHRF em uma área constituída de dados gravimétricos homogêneos em um raio de 110 km, desde que o MGG esteja bem representativo para a área.

6.2.5 Potencial de gravidade e altitudes normais

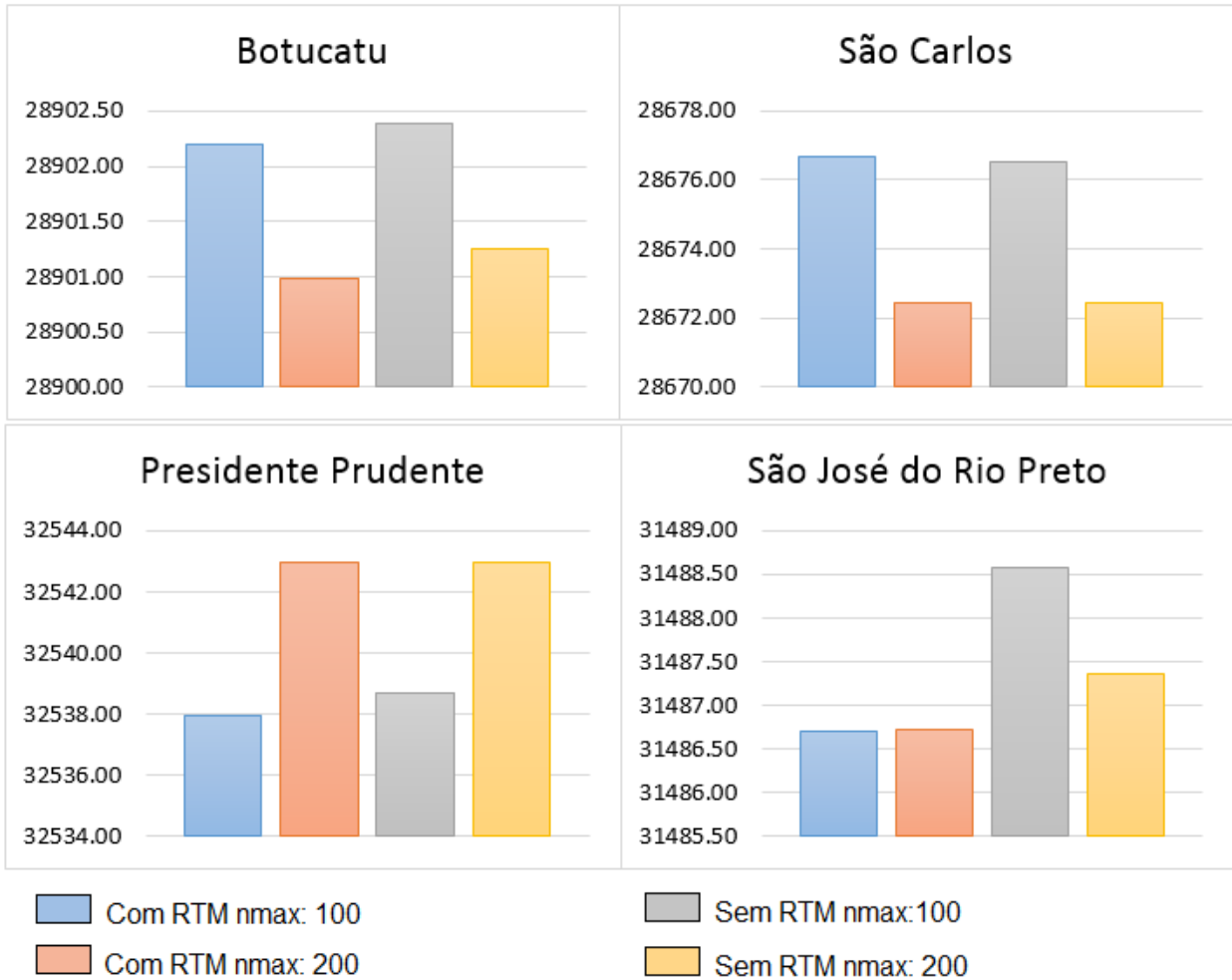
Considerando o potencial de gravidade de referência da Terra W_0 como $62636853,4 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$, definido pela IAG (2015), obtiveram-se os resultados de W_p apresentados na Tabela 14.

Tabela 14 - Potencial de gravidade das estações IHRF (m^2s^{-2}).

Método	Com RTM		Sem RTM	
	n_{max} : 100	n_{max} : 200	n_{max} : 100	n_{max} : 200
SPBO	62.628.902,20	62.628.900,98	62.628.902,38	62.628.901,25
EESC	62.628.676,70	62.628.672,44	62.628.676,55	62.628.672,45
PSTE	62.632.537,93	62.632.542,94	62.632.538,68	62.632.542,96
SJRP	62.631.486,70	62.631.486,72	62.631.488,57	62.631.487,36

A Figura 39 apresenta o comportamento do potencial de gravidade para cada estação.

Figura 39 - W_p das estações IHRF (adicione 62.600.000 m^2s^{-2} aos valores do gráfico).



Fonte: A autora.

Os valores obtidos para o potencial de gravidade, demonstram discrepâncias equivalentes às encontradas para o potencial perturbador. A estação de Presidente Prudente apresenta um comportamento contrário às demais em relação ao grau e à ordem do MGG utilizado na etapa remover-restaurar. Os resultados com a solução aplicando o GOCO05S nmax: 200 é numericamente superior para essa estação, enquanto para as demais estações os maiores valores de W_p são decorrentes da solução aplicando GOCO05S nmax: 100.

A partir dos resultados do potencial de gravidade pontual, obtiveram-se os valores de altitudes normais apresentados na Tabela 15.

Tabela 15 - Altitude normal das estações IHRF (m).

Método	Com RTM		Sem RTM	
	nmax: 100	nmax: 200	nmax: 100	nmax: 200
Botucatu	812,539	812,664	812,521	812,636
São Carlos	835,635	836,070	835,650	836,069
Presidente Prudente	440,970	440,458	440,894	440,456
São José do Rio Preto	548,453	548,451	548,262	548,385

Avaliando os valores de altitude constata-se que a estação de Botucatu foi a que apresentou a menor discrepância entre todas as soluções, 14 cm (linha 3, colunas 3 e 4 da Tabela 15). Ao passo que Presidente Prudente apresenta 51 cm de diferença entre nmax: 100 com o uso do RTM e nmax: 200 sem aplicação do RTM (linha 5, colunas 2 e 5 da Tabela 15). A referida estação é a única a possuir um valor de altitude normal determinada pelo IBGE⁵. Acrescentando o termo de ordem zero (-0,937 m) o valor médio das soluções para a estação de Presidente Prudente é 439,758 m. Isso resulta em uma diferença de 3,390 m, entre o valor calculado pelo IBGE, 436,367 m.

Ressalta-se que o sistema altimétrico a que as altitudes normais estão vinculadas é baseado no *datum* de Imbituba. Considerando o valor de 8,662 m para a altitude normal da RRNN 4X, ponto de partida para a referência altimétrica e fazendo uma alusão que o nível médio do mar em Imbituba corresponde à altitude zero, evidencia-se uma diferença de 12,052 m entre a realização de IHRF em Presidente Prudente e o *datum* realizado em função do nível médio do mar.

⁵ <http://www.bdg.ibge.gov.br/appbdg/>

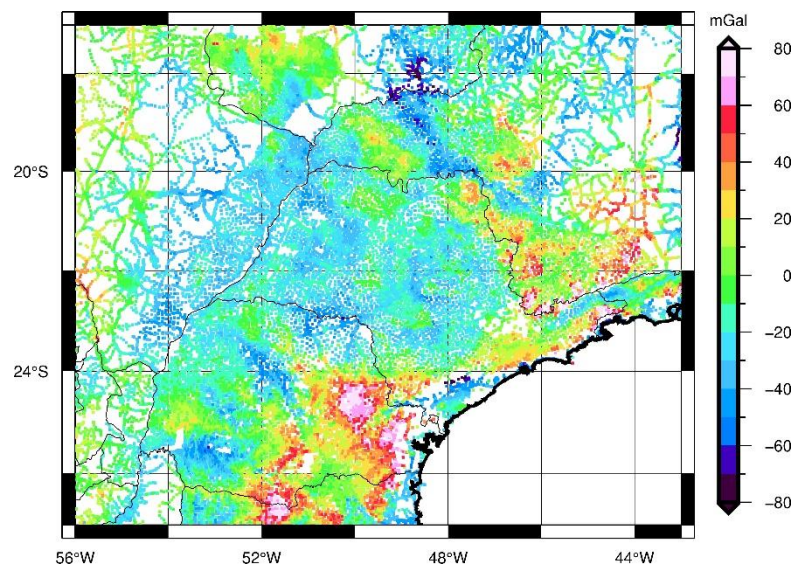
6.3 Determinação do modelo quase geoidal e geoidal

6.3.1 Modelo quase geoidal

A determinação da superfície quase geoidal reside na solução do primeiro PVCG cujo dado de entrada é a anomalia de gravidade, definidas com g na superfície física e γ na superfície teluroidal. As anomalias de gravidade de Molodensky foram calculadas pela expressão (36), adotando γ_Q determinado por (45) a partir da altitude normal. A correção atmosférica (97) também foi atribuída ao cálculo (WENZEL, 1985 apud TENZER et al., 2010).

O cálculo abrangeu uma área de aproximadamente 2° a mais que a região do estado de São Paulo. Foram utilizados 61145 pontos gravimétricos para a determinação das anomalias de gravidade de Molodensky, conforme apresentado na Figura 40. Salienta-se que a unidade comumente utilizada para as anomalias é o miligal (mGal). Os valores de Δg_{MO} calculados se concentram entre -20 a 20 mGal, com desvio-padrão de 26,02 mGal (Tabela 16).

Figura 40 – Anomalias de gravidade de Molodensky.

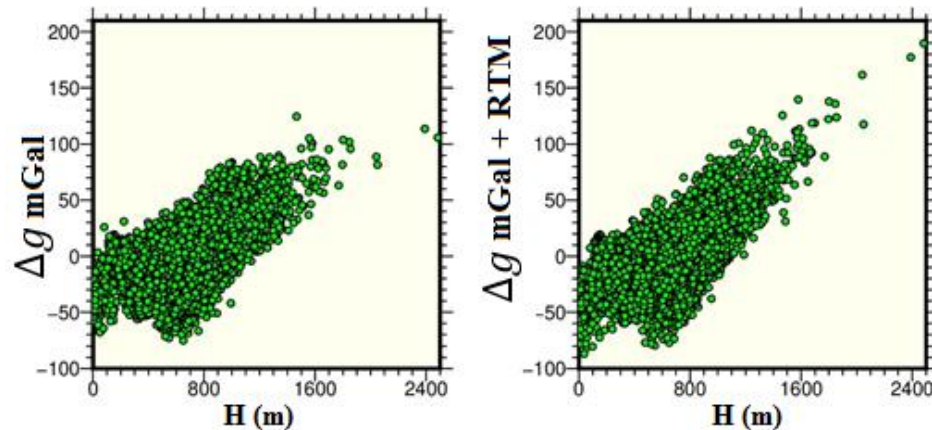


Fonte: A autora.

Tabela 16 -Estatística das anomalias de gravidade de Molodensky (mGal).

Estatística	Mínimo	Máximo	Média	DP	RMQD
Δg_{MO}	-83,76	133,58	-3,55	26,02	26,26

A determinação dos modelos geoidal e quase geoidal requer uma distribuição de dados gravimétricos em uma área superior a 100 km de distância da área de interesse. A fim de cobrir as áreas de vazios gravimétricos nos estados ao entorno de São Paulo, utilizou-se a anomalia de gravidade de Molodensky do MGG XGM2019 com nmax: 2190, complementadas com os efeitos topográficos do terreno, determinados pela técnica RTM. A contribuição do RTM sobre os longos comprimentos de onda da Δg_{MO} em relação à altitude é apresentada na Figura 41.

Figura 41 - Relação das anomalias de gravidade com altitude.

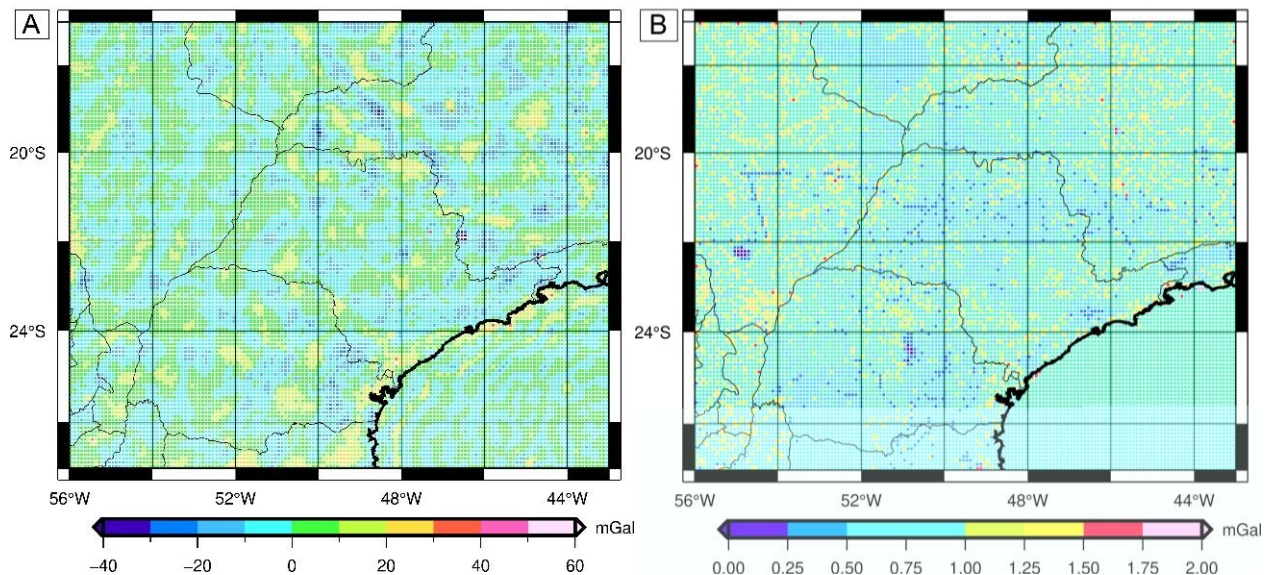
Fonte: A autora.

A decomposição dos comprimentos de onda seguiu a técnica remover-restaurar. Comumente, em regiões providas de dados gravimétricos é suficiente o emprego apenas das baixas frequências derivadas de um MGG. Um estudo realizado por Vu, Bruinsma e Bonvalot, (2019) determinou um modelo quase geoidal para o Vietnã, aplicando a metodologia do presente trabalho, removendo e restaurando com os longos e os médios comprimentos de onda, utilizando nmax: 720. No intuito de avaliar a discrepância do modelo quase geoidal, empregando distintos grau e ordem, duas abordagens foram adotadas: o uso dos longos comprimentos de onda da anomalia de

gravidade, derivados do modelo XGM2019 com n_{max} : 250, e os longos e médios comprimentos de onda do XGM2019 com n_{max} : 720.

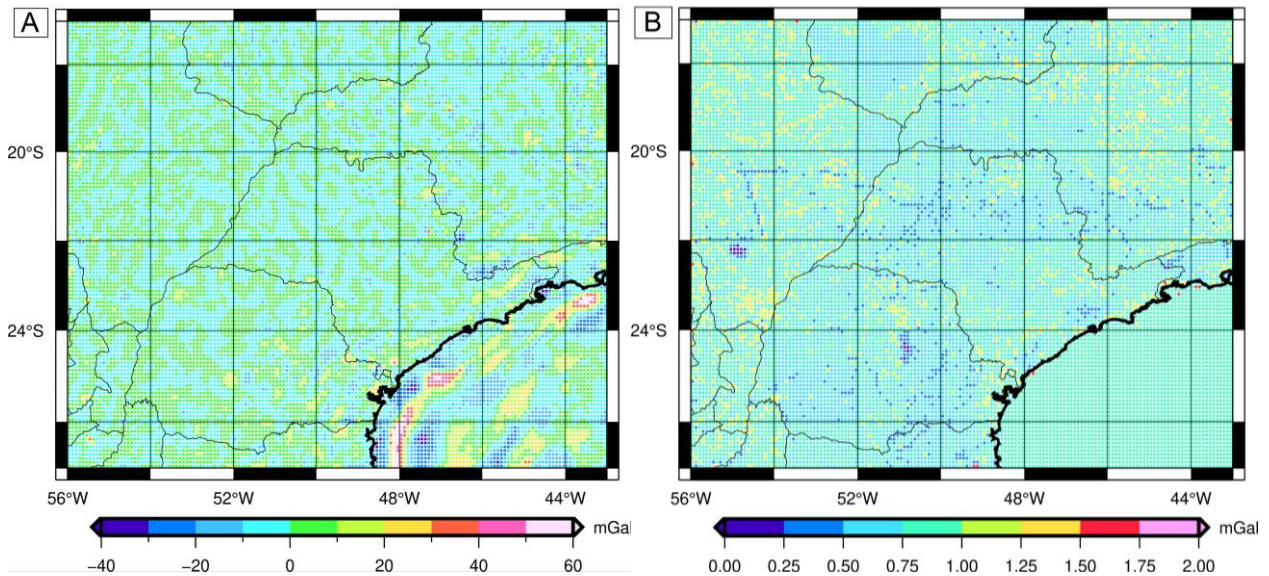
Os residuais resultados da remoção do RTM e do MGG, foram interpolados em uma grade de 5' com o software GEOGRID (FORSBERG; TSCHERNING, 2008), através da colocação por mínimos quadrados. Uma célula de busca é utilizada internamente no programa para prever pontos, baseando-se nos valores dos vizinhos mais próximos dos quatro quadrantes ao entorno da área de cálculo. Atribuiu-se a quantidade mínima de 5 pontos para realizar a interpolação. O programa fornece como arquivo de saída uma grade com os valores residuais e um arquivo com o desvio-padrão pontual. Duas grades foram geradas com a remoção dos longos comprimentos de onda com n_{max} : 250 (Figura 42) e n_{max} : 720 (Figura 43).

Figura 42 - A anomalia de gravidade residual com RTM e XGM2019 n_{max} : 250 (A: grade 5'x5'; B: Erros da colocação).



Fonte: A autora.

Figura 43 - A anomalia de gravidade residual com RTM e XGM2019 nmax: 720 (A: grade 5'x5'; B: Erros da colocação).



Fonte: A autora.

Para a área oceânica utilizou-se anomalias de gravidade do modelo DTU13, produzido a partir de dez satélites diferentes: TOPEX/POSEIDON, Jason-1, Jason-2, Geosat, ICESAT, ERS-1 e 2, ENVISAT, Cryosat-2 e GOCE. A resolução do DTU13 é entre 1 minuto a $1/8^\circ$ (ANDERSEN; KNUDSEN; STENSENG, 2015). A técnica remover-restaurar também foi aplicada aos dados, de forma análoga ao caso do continente, reduzindo e restaurando o RTM, considerando a densidade da água igual a $1,030 \text{ g/cm}^3$.

A integração numérica foi realizada pela Transforma Rápida de Fourier, do inglês *Fast Fourier Transform* (FFT), com o kernel modificado de Stokes, no programa SPFOUR (FORSBERG; TSCHERNING, 2008). A aplicação dessa abordagem oferece vantagens uma vez que permite que funções como Stokes e Hotine sejam calculadas no espaço da frequência através de integrais de convolução. O produto de duas funções de convolução resulta em uma terceira função que representa a forma de uma modificada pela outra. Em Geodesia, aplica-se a integral de convolução utilizando uma superfície esférica, com dados de entrada no formato de grade. No caso específico da FFT, o sinal espectral é processado no domínio da frequência de forma rápida (BLITZKOW, 1973). Na rotina SPFOUR utilizou-se como dado de entrada as anomalias

residuais de Molodensky e obteve-se como resultado anomalias de altura no formato de grade, referentes aos curtos comprimentos de onda.

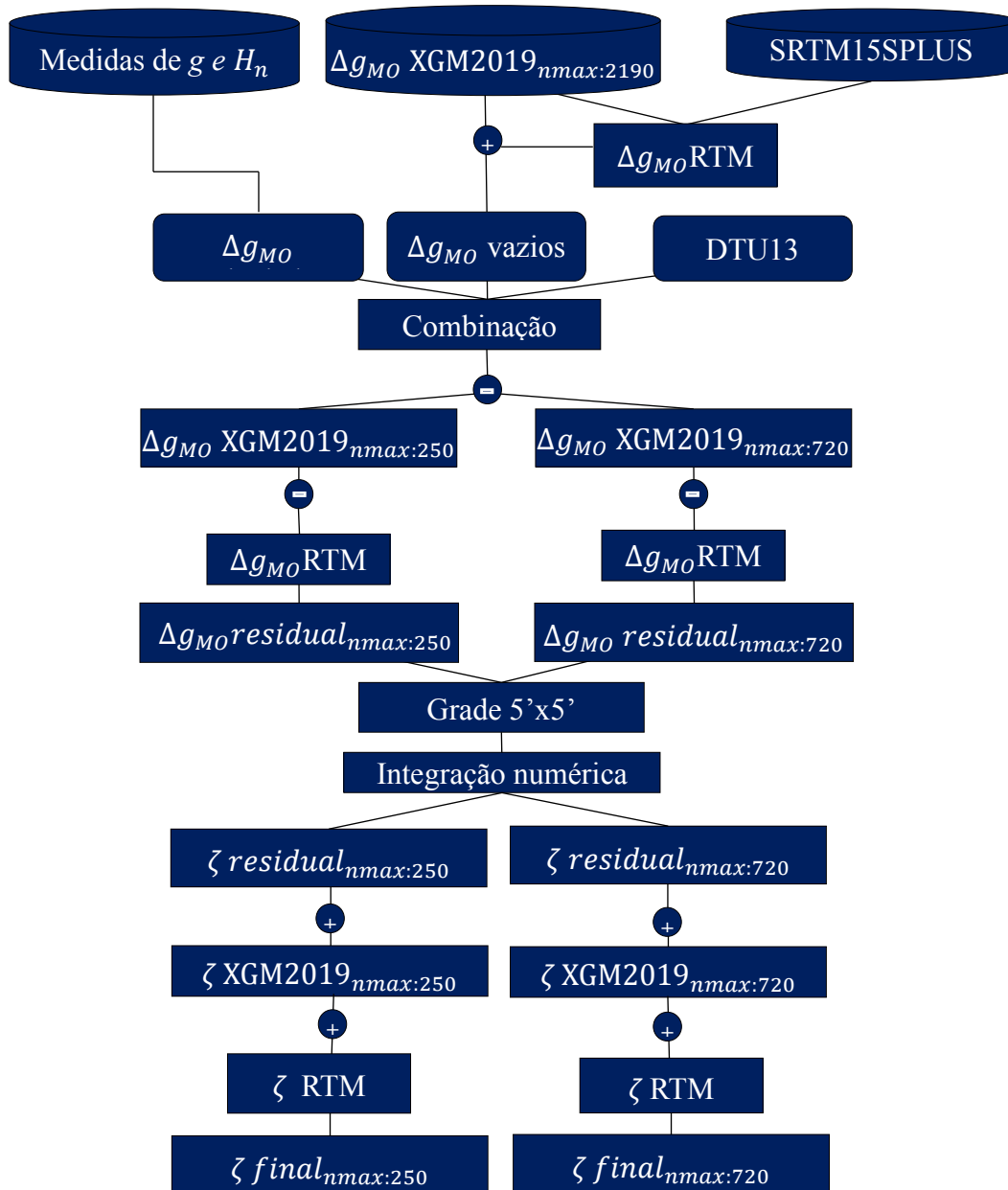
Em seguida, a anomalia de altura foi restaurada, expressão (102), com a contribuição dos elementos removidos anteriormente.

$$\zeta_p = \zeta_{MGG} + \zeta_{res} + \zeta_{RTM} \quad (102)$$

Na etapa de restauração é necessário que os dados oriundos da integração numérica, formatados em grade, possuam um valor de altitude do terreno. Para tanto, efetuou-se uma interpolação utilizando um MDT detalhado, o SRTM15_PLUS. A restauração dos efeitos do RTM sobre a anomalia de altura foi realizada empregando os MDTs detalhado, irregular e de referência, utilizados na etapa de remoção, com o programa TC.

De forma análoga à etapa de remoção, a restauração dos longos comprimentos de onda foi realizada com a anomalia de altura do modelo GOCO05S nmax: 250 e nmax: 720. Por fim, a anomalia de altura final é obtida pela soma dos longos comprimentos de onda e do RTM. Ao cálculo final atribuiu-se o valor de -0,93 referente ao termo de ordem zero a fim de compatibilizar o cálculo ao sistema local de referência. A Figura 44 apresenta a metodologia adotada.

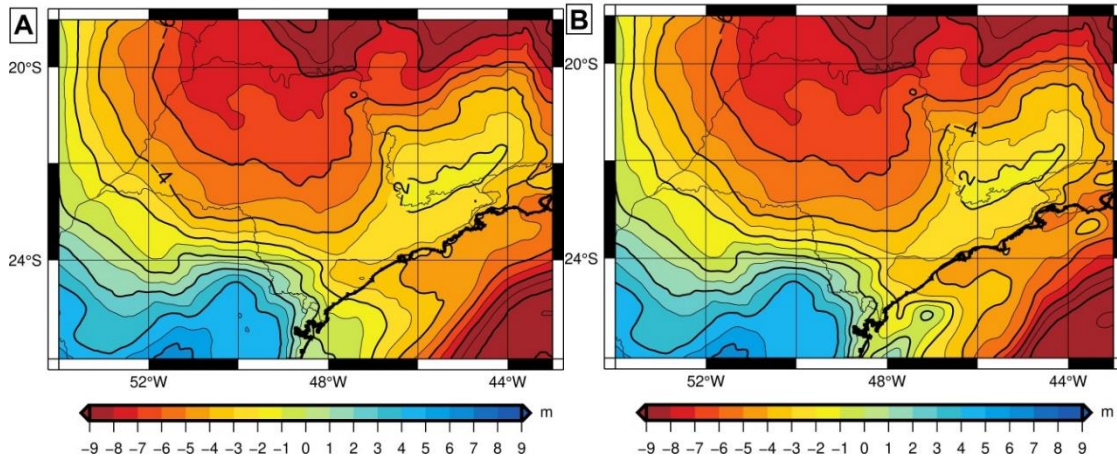
Figura 44 - Fluxograma da determinação do modelo quase geoidal.



Fonte: A autora.

Os modelos quase geoidais determinados com o XGM2019 com $n_{max}: 250$ e $n_{max}: 720$ são apresentados na Figura 45.

Figura 45 - Modelo quase geoidal de São Paulo (A-nmax: 250; B-nmax: 720).



Fonte: A autora.

As soluções nmax: 250 e nmax: 720 são significativamente similares para o continente em razão da homogênea distribuição de dados gravimétricos no estado. As diferenças são visíveis na região oceânica e próximo à costa, demonstrando uma má representatividade dos MGGs nessa área. Isso ocorre visto que a modelagem em alta resolução das regiões costeiras requer gravimetria e a mensuração de fenômenos como temperatura, salinidade, velocidade das correntes, dentre outros fatores que caracterizam a chamada TNMM.

6.3.2 Modelo geoidal

A conversão da superfície quase geoidal para a geoidal envolve a aplicação de uma correção relacionando a anomalia de Bouguer e um valor de altitude. As relações entre a altitude normal e a anomalia de altura, e, a altitude ortométrica e a ondulação geoidal, são inferidas, respectivamente, pelas expressões (85) e (78). Associando as altitudes normal e ortométrica, tem-se:

$$\zeta - N = H - H_N \quad (103)$$

A definição das altitudes em termos de números geopotenciais com as respectivas reduções gravimétricas é dada conforme as expressões (104) e (105)(FORSBERG, 1997).

$$H = \frac{C}{\bar{g}} = \frac{C}{g_p + 0.0424[mGal/m]H} \quad (104)$$

$$H_N = \frac{C}{\bar{\gamma}} = \frac{C}{\gamma_o - 0.1543[mGal/m]H_N} \quad (105)$$

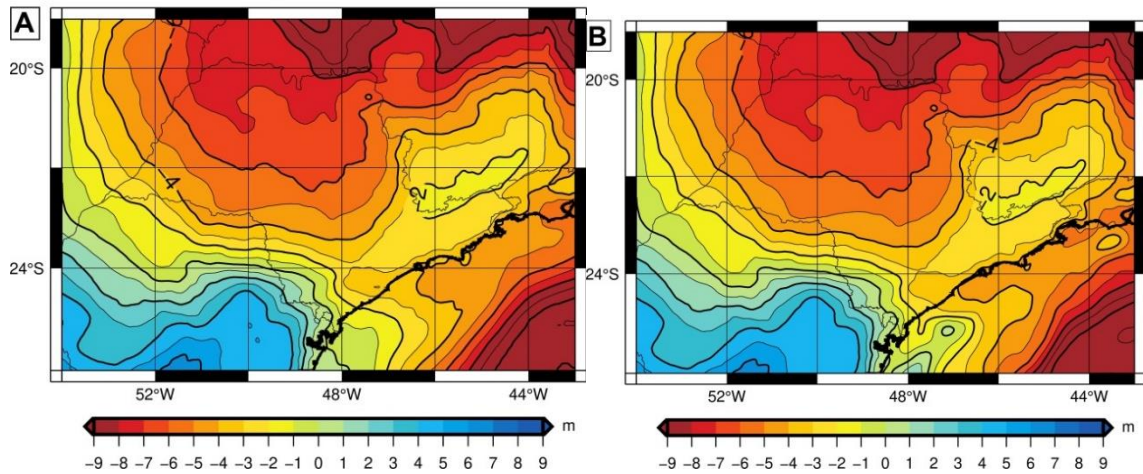
Reescrevendo a diferença entre a anomalia de altura e a ondulação geoidal sobre um mesmo denominador, resulta em:

$$\zeta - N = H - H_N \cong -\frac{g_p - \gamma_o + 0,1967[mGal/m]H}{\gamma_o} H = -\frac{\Delta g_B}{\gamma_o} H \quad (106)$$

A expressão (106) deduz a correção aplicada à anomalia de altura para a obtenção das ondulações geoidais. Essa conversão foi realizada pelo programa N2ZETA (FORSBERG; TSCHERNING, 2008), com anomalias de Bouguer derivadas do MGG XGM2019 com nmax: 2190. A altitude definida por H corresponde à altitude ortométrica clássica cuja aproximação pode ser dada pelo SRTM15_PLUS. A rotina efetua o cálculo em função da anomalia de altura determinada no item 6.3.1, da altitude e da anomalia de Bouguer e como arquivo de saída, tem-se a grade com as ondulações geoidais.

O modelo geoidal, produzido a partir do quase geoidal, é apresentado na Figura 46.

Figura 46 - Modelo geoidal do estado de São Paulo (A-nmax: 250; B-nmax: 720).

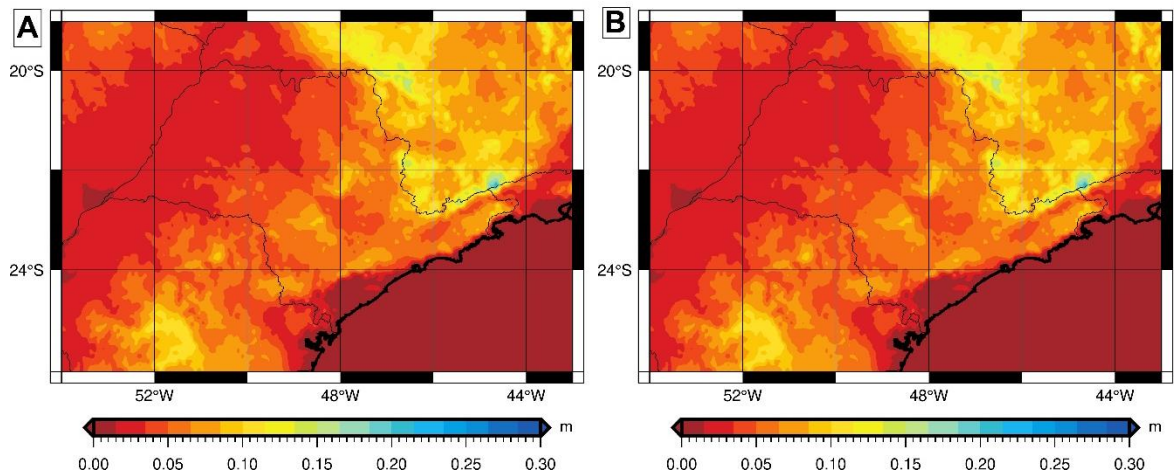


Fonte: A autora.

Visto que as superfícies quase-geoidal e geoidal diferem entre si em menos de 30 cm, percebe-se que as iso-linhas, ilustradas em unidades métricas, são similares entre os modelos. Já na região oceânica, como esperado, os mesmos são idênticos.

A diferença entre as superfícies é apresentada na Figura 47.

Figura 47 - Diferença entre o modelo geoidal e quase geoidal (A-nmax: 250; B-nmax: 720).



Fonte: A autora.

As superfícies quase geoidal e geoidal apresentam discrepâncias máximas de 21 cm, na região. A média da diferença entre modelos é de 5 cm.

6.3.3 Validação do modelo quase geoidal com as determinações GNSS sobre a rede de nivelamento

A validação dos modelos geoidal e quase-geoidal é realizada avaliando a consistência da ondulação geoidal ou da anomalia de altura em relação aos valores derivados das altitudes geodésicas em conjugação com as altitudes nas RRNN do sistema vertical. No Brasil as altitudes normais permitem avaliar o modelo quase geoidal em razão de sua compatibilidade com a anomalia de altura.

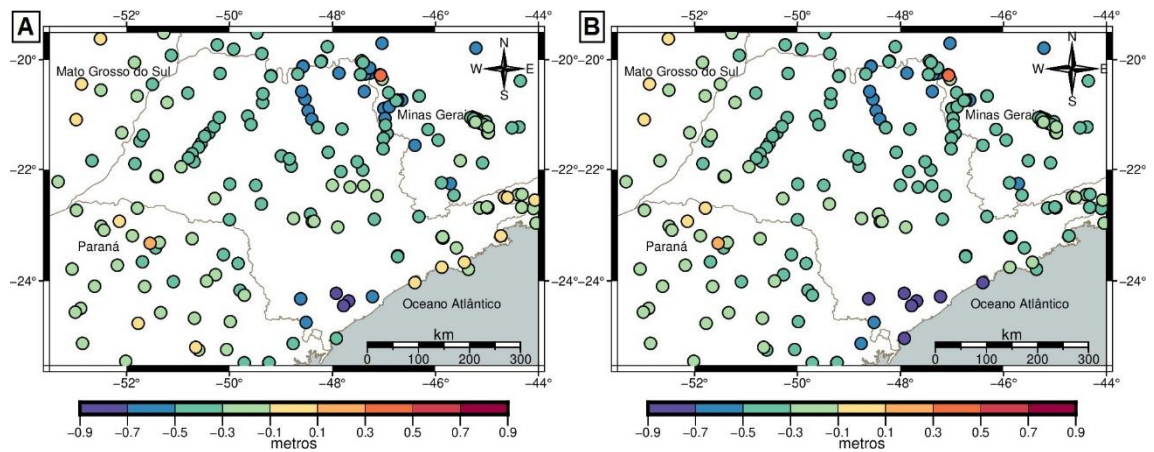
Para a mencionada avaliação do modelo foram utilizadas 295 determinações GNSS sobre a rede de nivelamento, distribuídas em uma área de 1° menor que a região utilizada no cálculo. Os modelos com nmax:250 e nmax:720 foram avaliados separadamente. A Tabela 17 apresenta a estatística dos dados.

Tabela 17 - Consistência GNSS/nivelamento com 295 pontos (m).

nmax	Mínimo	Máximo	Média	Desvio-padrão
250	-0,78	0,36	-0,33	0,18
720	-0,88	0,37	-0,40	0,18

Os desvios-padrão dos modelos, produzido com o XGM2019 com nmax: 250 e nmax: 720, indicam que há consistência entre as duas soluções. A média apresentada pelo modelo XGM nmax: 250 demonstra uma tendência menor, comparado ao nmax: 720. A Figura 48 ilustra o comportamento do modelo em relação às RRNN na região de São Paulo.

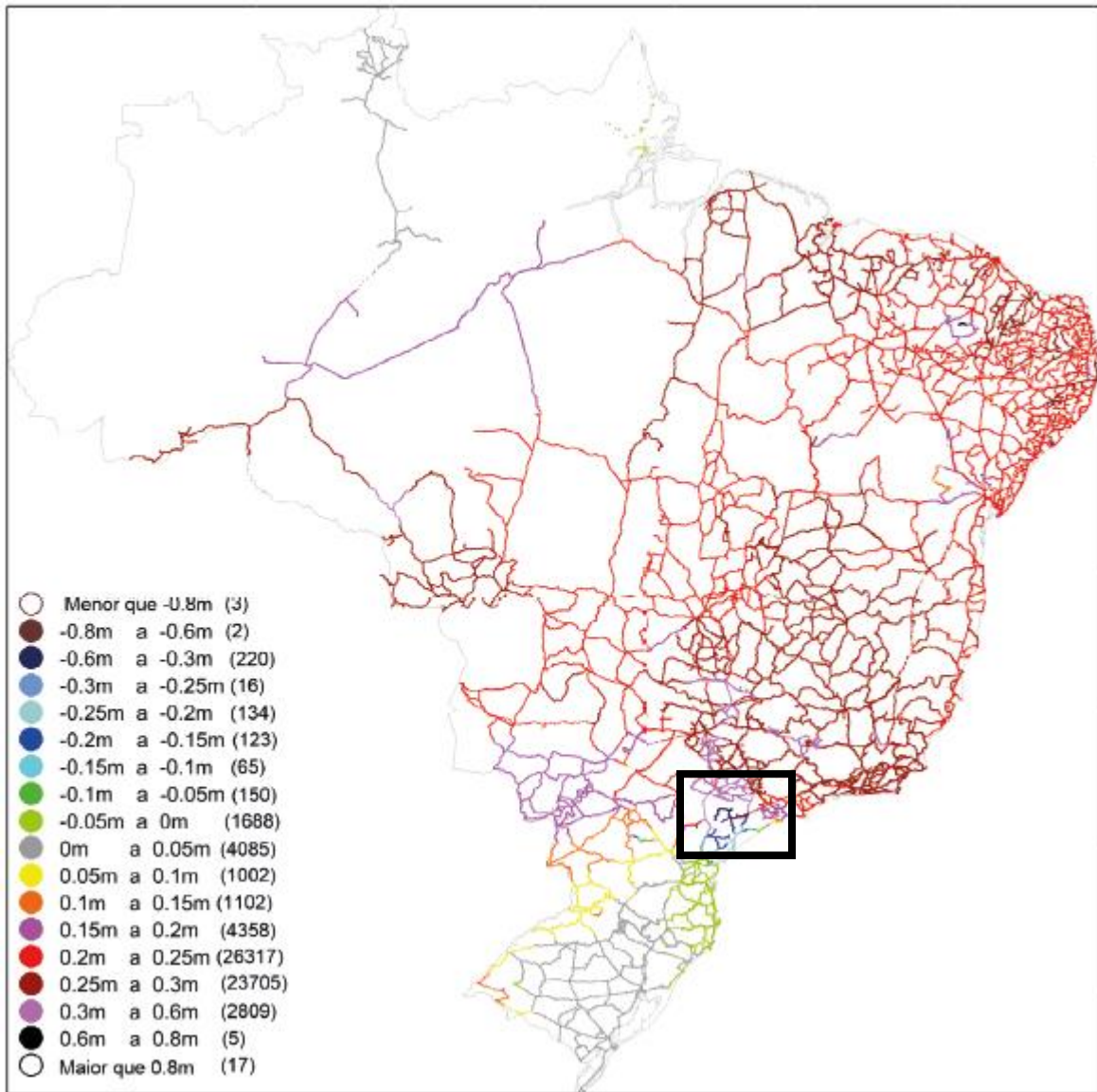
Figura 48 - Avaliação GNSS/nivelamento com 295 pontos (A-nmax: 250; B:nmax: 720).



Fonte: A autora.

A Figura 48 indica que o modelo produzido com o nmax:250 se adequa melhor à região costeira. As discrepâncias encontradas para ambos os modelos demonstram que a região ao sul do estado possui um conjunto de RRNN que diferem entorno de 88 cm dos modelos determinados. O reajustamento da rede de nivelamento realizado pelo IBGE evidencia que essa mesma região apresentou modificações de até 60 cm entre as antigas altitudes normais-ortométricas e as atuais altitudes normais (Figura 49).

Figura 49 - Diferença das altitudes normais-ortométricas e as altitudes normais.



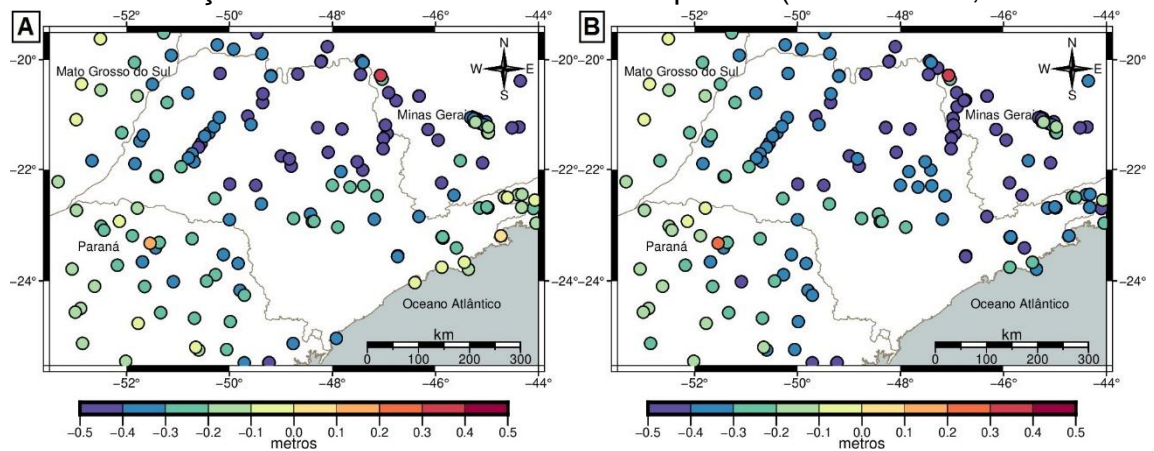
Fonte: (IBGE, 2018).

As informações utilizadas na produção dos modelos, tais como a aceleração de gravidade, o MGG e o MDT, as altitudes podem possuir inconsistências afetando o resultado da validação. Nesse sentido, outra análise foi realizada retirando 45 determinações que apresentavam discrepâncias superiores a 50 cm, incluindo as referidas RRNN ao sul do estado. A análise segue na Tabela 18.

Tabela 18 - Consistência GNSS/nivelamento com 246 pontos (m).

nmax	Mínimo	Máximo	Média	Desvio-padrão
250	-0,50	0,36	-0,28	0,15
720	-0,50	0,37	-0,30	0,14

Essa avaliação resultou em desvios-padrão de 15 cm para a superfície quase geoidal, utilizando o XGM2019 com nmax: 250 e 14 cm para o XGM2019 com nmax: 720. A Figura 50 demonstra as diferenças entre as soluções.

Figura 50- Avaliação GNSS/nivelamento com 246 pontos (A-nmax: 250; B:nmax: 720).

Fonte: A autora.

Por meio das avaliações, pôde-se concluir que o emprego de um MGG com grau e ordem 720 não apresenta vantagens em relação ao uso dos longos comprimentos de onda para o estado de São Paulo. Apesar dos desvios-padrão em relação à rede de nivelamento e as determinações GNSS serem consistentes entre ambas as soluções, a média indica que a superfície quase geoidal com nmax: 250 possui uma componente sistemática menor. Além disso, um MGG desenvolvido até 720 contém informações gravimétricas terrestres que serão duplamente introduzidas ao modelo.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS E RECOMENDAÇÕES

Dentre as atribuições, cabe à Geodesia estabelecer referenciais e constantemente prover melhorias da qualidade e da precisão dos mesmos, diante ao surgimento de tecnologias computacionais e instrumentos de mensuração. Sendo assim, existe uma busca contínua no aperfeiçoamento dos sistemas geodésicos de referência, bem como nos elementos utilizados em sua determinação.

O trabalho objetivou contribuir ao sistema gravimétrico de São Paulo por meio da conexão das observações absolutas à densificação gravimétrica do estado. A substituição das referências vinculadas ao padrão IGSN-71 no estado de São Paulo demonstrou que apenas 12% das informações gravimétricas estavam com discrepância superior a $100 \mu Gal$, em relação às antigas determinações. A média das alterações nos valores de g atualizados indicam que o valor da aceleração de gravidade determinada na única estação IGSN-71, referência para outras determinações no estado, está consistente em $60 \mu Gal$ com as observações dos gravímetros atuais. Por outro lado, as discrepâncias encontradas nos valores absolutos de g , determinados por diferentes gravímetros, demonstram a necessidade de padronização e de divulgação das correções aplicadas à medição para a apropriada comparação. Ademais, a avaliação das variações da aceleração de gravidade com o tempo requer inúmeros estudos, incluindo a maré terrestre, a hidrologia e a geomorfologia. A inexistência de tais informações impossibilita a avaliação de medidas determinadas em diferentes épocas. Apesar das dificuldades encontradas nas comparações entre os valores absolutos mensurados com diferentes correções, a atualização gravimétrica segue as recomendações da IAG, sendo fundamental para a melhoria dos referenciais altimétricos.

Anterior à adoção do sistema de altitudes normais, o modelo geoidal de São Paulo se encontrava com 14 cm de consistência em relação às determinações GNSS sobre a rede de nivelamento (GUIMARÃES, 2010). Embora essa compatibilidade não signifique a real precisão das duas grandezas, alcançar a referida consistência exigiu um longo trabalho. Esforços foram realizados para a melhoria das redes de nivelamento e das determinações GNSS, a produção e a avaliação de diferentes modelos geoidais a

fim de determinar H para as informações de densificação, a determinação da melhor metodologia de cálculo, dentre outros. Neste contexto, modernizar a componente altimétrica adotando um novo sistema de altitude exige a identificação dos elementos a serem aprimorados e do desenvolvimento de estudos e metodologias.

A determinação dos modelos geoidal e quase geoidal foi realizada em função das informações gravimétricas atualizadas do estado de São Paulo, com altitudes normais advindas do reajustamento da rede nivelamento e das informações do MGG XGM2019. Os resultados da avaliação do modelo quase geoidal de São Paulo demonstram uma consistência de 18 cm, considerando todas as determinações GNSS sobre a rede de nivelamento. Visto que esse é o primeiro modelo quase geoidal produzido em função da realização da RAAP de 2018 e da atualização da rede gravimétrica, os resultados são satisfatórios. A região ao sul do estado, local de maior discrepância, é caracterizada por trechos de vazios gravimétricos e por um conjunto de RRNN com significativas discrepâncias em relação às altitudes ortométrica-normal, anteriormente adotadas. Nesse sentido, o aperfeiçoamento do modelo quase geoidal demanda uma melhoria da infraestrutura geodésica na referida região.

O cálculo do potencial de gravidade foi efetuado para quatro estações IHRF do estado, sendo três de caráter regional, Botucatu, São Carlos, São José do Rio Preto e uma a nível global, Presidente Prudente. Os métodos de cálculo discutidos pelo grupo de estudo da IAG, enfatizam a importância da distribuição de informações gravimétricas no raio de 210 km. No entanto, os resultados demonstraram uma significativa dependência dos longos comprimentos de onda, derivados dos MGGs. Verificou-se que os mesmos se comportam de formas distintas de acordo com a região. Um exemplo disso foram os resultados das estações de Presidente Prudente e São José do Rio Preto, analisando o MGG com o mesmo grau e ordem. Notou-se para a primeira estação a permanência da componente sistemática na etapa de remoção. Já a estação de São José do Rio Preto os modelos se encontram representativos uma vez que retiram a tendência sistemática na média dos resíduos.

Os resultados com a técnica RTM para a estação de São José do Rio Preto, onde o MGG apresentou a menor discrepância entre grau e ordem, evidenciaram a importância da consideração das altas frequências do campo de gravidade para a

redução dos resíduos e a convergência dos resultados entre as realizações em um raio de 110 e 210 km (Tabela 13). Para melhores resultados, sugere-se que novos estudos com o RTM sejam realizados com MDTs de alta resolução espacial, com a combinação de outros satélites e de produtos derivados da fotogrametria.

A estação de Presidente Prudente possui um valor de altitude normal, que permitiu avaliar o sistema vertical brasileiro referido aos registros maregráficos em relação ao potencial de gravidade da Terra. No entanto, a discrepância de 12,052 m, identificada entre as realizações, pode ser considerada como apenas uma aproximação, visto que a referida estação apresentou inconsistência entre as soluções. A apropriada avaliação do sistema vertical requer a realização do IHRF na estação de Imbituba, combinando dados de densificação gravimétrica terrestre com a aerogravimetria na região oceânica. Além disso, recomenda-se o prolongamento da rede de nivelamento às estações IHRF do presente estudo. Dessa forma, as demais estações IHRF de caráter global poderiam ser avaliadas a partir do cálculo já efetuado nas estações regionais do Brasil.

REFERÊNCIAS

AMARANTE, R. R. **Sistematização do processamento de dados gravimétricos aplicados à determinação do modelo geoidal**. 2012. 183 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil). Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da Universidade Estadual de Campinas, 2012.

AMOS, M. J.; FEATHERSTONE, W. E. **Unification of New Zealand's local vertical datums: Iterative gravimetric quasigeoid computations**. *Journal of Geodesy*, v. 83, n. 1, p. 57–68, 2009.

ANDERSEN, O.; KNUDSEN, P.; STENSENG, L. **The DTU13 MSS (Mean Sea Surface) and MDT (Mean Dynamic Topography) from 20 Years of Satellite Altimetry**. *International Association of Geodesy Symposia*, n. 2009, 2015.

AUTODESK. **Autocad**. 2020. Disponível em: <<https://www.autodesk.com/education/free-software/autocad>>. Acesso em: 20 out. 2018.

BARTHELMES, F. **Definition of Functionals of the Geopotential and Their Calculation from Spherical Harmonic Models**. Potsdam, Germany, 2013.

BLITZKOW, D. **Função de transferência de modulação - aplicação ao estudo do desempenho dos sistemas aerofotográficos**. 1973. 115 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Geodésicas). Instituto de Geociências da Universidade Federal do Paraná como, 1973.

BLITZKOW, D. **Problema de valor de contorno da geodesia: resultados práticos para a América do Sul**. 1996. 83 f. Tese (Livre Docência no Departamento de Engenharia de Transportes). Departamento de Topografia e Geodesia. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1996.

BLITZKOW, D. et al. **O conceito atual dos referenciais usados em geodésia**. *Revista Brasileira de Cartografia*, v. 635, p. 633–648, 2011.

BLITZKOW, D.; CAMPOS, I.; FREITAS, S. R. C. **Altitude: o que interessa e como equacionar?** In: ANAIS DO I SIMPÓSIO DE CIÊNCIAS GEODÉSICAS E TECNOLOGIA DA GEOINFORMAÇÃO, Recife. Anais... Recife: 2004.

BLITZKOW, D.; MATOS, A. C. O. C.; COSTA, S. M. A. **Primeros esfuerzos para el establecimiento de IHRF en Brasil**. In: SIMPOSIO SIRGAS 2017. Mendoza, Argentina, Anais...2017.

BOWIE, W.; AVERS, H. G. **Fourth general adjustment of the precise level net in the United States and the resulting standard elevations**. Washington, USA, 1914.

BUREAU GRAVIMÉTRIQUE INTERNATIONAL. **Gravity Databases**. Disponível em:

<<http://bgi.obs-mip.fr/data-products/Gravity-Databases>>. Acesso em: 05 out. 2019.

CASTRO JÚNIOR, C. A. C. **Contribuição ao Estabelecimento de um Sistema Gravimétrico para a América do Sul**. 2005. 158 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Transportes). Departamento de Topografia e Geodesia. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2005.

CASTRO JÚNIOR, C. A. C. **Arcabouço Gravimétrico Brasileiro e o Meio Ambiente: possibilidades e perspectivas**. 2017. 226 f. Tese (Doutorado em Ciências Ambientais). Programa de Doutorado em Ciências Ambientais. Universidade Federal de Goiás. 2017.

CASTRO JUNIOR, C. A. C.; GUIMARÃES, G. N.; FERREIRA, N. C. **Evolução da infraestrutura gravimétrica no Brasil**. *Geociências*, v. 37, n. 2, p. 361–384, 2018.

CATALOG. SRTM15_PLUS: **Data fusion of Shuttle Radar Topography Mission (SRTM) land topography with measured and estimated seafloor topography**. Disponível em: <<https://catalog.data.gov/dataset/srtm15-plus-data-fusion-of-shuttle-radar-topography-mission-srtm-land-topography-with-measured->>. Acesso em: 5 jan. 2020.

DYKOWSKI, P.; KRYNSKI, J.; SEKOWSKI, M. **Testing the Suitability of the A10-020 Absolute Gravimeter for the Establishment of New Gravity Control in Poland**. *International Association of Geodesy Symposia*, v. 141, 2014.

ESCOBAR, I. P. **Métodos de levantamento e ajustamento de observações gravimétricas visando a implantação da rede gravimétrica fundamental brasileira**. Rio de Janeiro. Observatório Nacional, 1980.

FALK, R. et al. A-10, **Precise Gravimetric Surveys with the Field Absolute Gravimeter**. *International Association of Geodesy Symposia*, v. 136, n. 2006, p. 273–279, 2012.

FEATHERSTONE, W. E. et al. **The first Australian gravimetric quasigeoid model with location-specific uncertainty estimates**. *Journal of Geodesy*, v. 92, n. 2, p. 149–168, 2018.

FEATHERSTONE, W. E.; KUHN, M. **Height systems and vertical datums: A review in the australian context**. *Journal of Spatial Science*, v. 51, n. 1, p. 21–41, 2006.

FORSBERG, R. **A study of terrain reductions, density anomalies and geophysical inversion methods in gravity field modelling**. Columbus, Ohio. Scientific Report No5. Ohio State University, 1984.

FORSBERG, R. **Terrain effects in geoid computations**. International Geoid School. Rio de Janeiro, 1997.

FORSBERG, R.; TSCHERNING, C. **An overview manual for the GRAVSOFT geodetic gravity field modelling programs**. Copenhagen, Denmark, 2008.

FREITAS, S. R. C.; BLITZKOW, D. **Altitudes e geopotencial**. International Geoid Service, n. June, 1999.

GEMAEL, C. **Introdução à Geodesia Física**. Paraná: UFPR, 2012.

GEMAEL, C.; SIMÕES, K. **Concepção dos Levantamentos Gravimétricos para o Estabelecimento de Rede Gravimétrica de Alta precisão no Estado do Paraná**. In: ANAIS DO SIMPÓSIO BRASILEIRO DE GEOMÁTICA, 1999, Anais...2002.

GREAVES, M.; CLARKE, P. **National Report of Great Britain 2017**. p. 7, 2017.

GRUBER, T. et al. **High Resolution Gravity Field Models as Global Reference Surface for Height**. In: SIRGAS 2019. Anais... Rio de Janeiro: 2019.

GUIBAS, L. J.; KNUTH, D. E.; SHARIR, M. **Randomized incremental construction of delaunay and voronoi diagrams**. Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics), v. 443 LNCS, p. 414–431, 1990.

GUIMARÃES, G. do N. **A altimetria e o modelo geoidal no Estado de São Paulo**. 2010. 121 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Transportes). Departamento de Topografia e Geodesia. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2010.

GUIMARÃES, G.; BLITZKOW, D. **Problema de valor de contorno da geodésia: uma abordagem conceitual**. Boletim de Ciências Geodésicas, v. 17, n. 4, p. 607–624, 2011.

HEISKANEN, W. A.; MORITZ, H. **Physical Geodesy**. San Francisco and London: W. H. Freeman and Company, 1967.

HOFMANN-WELLENHOF, B.; MORITZ, H. **Physical Geodesy**. New York: SpringerWien, 2006.

IHDE, J. et al. **Definition and Proposed Realization of the International Height Reference System (IHR)**. Surveys in Geophysics, v. 38, n. 3, p. 549–570, 2017.

INTERNATIONAL ASSOCIATION OF GEODESY. **Resolutions adopted by the International Association of Geodesy**. Hamburg, 1983.

INTERNATIONAL ASSOCIATION OF GEODESY. **IAG Resolution (No. 1) for the definition and realization of an International Height Reference System (IHR)**, 2015.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Reajustamento da Rede Altimétrica com Números Geopotenciais REALT-2018**. Rio de Janeiro, Brasil, 2018.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Saiba mais - Rede Altimétrica**. Disponível em: <<https://www.ibge.gov.br/geociencias/informacoes-sobre-posicionamento-geodesico/rede-geodesica/16283-rede-altimetrica.html?=&t=saiba-mais-geociencias>>. Acesso em: 10 out. 2019a.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Rede Gravimétrica**. Disponível em: <<https://ww2.ibge.gov.br/home/geociencias/geodesia/gravimetrica.shtm>>. Acesso em: 28 jun. 2019b.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **National Committee Report 2015-2019-Brazil**. Montreal, Canadá, 2019c. . Disponível em: <<https://iag.dgfi.tum.de/en/iag-national-reports/>>. Acesso em: 12 jul. 2019.

JARAMILLO, A. S.; FREITAS, S. R. C.; LUZ, R. T. **Physical connection between BVRF segments based on leveling associated with gravimetry**. Boletim de Ciencias Geodesicas, v. 25, n. 1, p. 1–16, 2019.

JEKELI, C. **Heights, the Geopotential, and Vertical Datums**. Ohio State University, Geodetic Science and Surveying, n. 459, p. 35, 2000. Disponível em: <<http://icgem.gfz-potsdam.de/str-0902-revised.pdf>>. Acesso em: 20 jul. 2019.

JEKELI, C. **Potential Theory and Static Gravity Field of the Earth**. Reference Module in Earth Systems and Environmental Sciences, p. 11–42, 2007. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780444527486000547>>. Acesso em: 05 jun. 2019.

JIANG, Z. et al. **The 8th International Comparison of Absolute Gravimeters 2009: The first Key Comparison (CCM.G-K1) in the field of absolute gravimetry**. Metrologia, v. 49, n. 6, p. 666–684, 2012.

KAZAMA, T. et al. **Gravity measurements with a portable absolute gravimeter A10 in Syowa Station and Langhovde, East Antarctica**. Polar Science, v. 7, n. 3–4, p. 260–277, 2013. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.polar.2013.07.001>>. Acesso em: 25 jul. 2019.

KRYNSKI, J.; SEKOWSKI, M. **Surveying with the A10-20 Absolute Gravimeter for Geodesy and Geodynamics – first results**. Warsaw, Poland, 2010.

LUZ, R. T. **Estratégias para Modernização da Componente Vertical do Sistema Geodésico Brasileiro e sua Integração ao Sirgas**. 2008. 228f. Tese (Doutorado em Ciências Geodésicas). Pós-Graduação em Ciências Geodésicas. Universidade Federal do Paraná, 2008.

MÄKINEN, J.; IHDE, J. **The Permanent Tide in Height Systems**. International Association of Geodesy Symposia, v. 133, p. 81–87, 2009.

MARTI, U. et al. **CCM – IAG Strategy for Metrology in Absolute Gravimetry Role of**

CCM and IAG. Paris, France, 2014. . Disponível em: <<http://www.iag-commission2.ch/WG21.pdf>>. Acesso em: 15 out. 2018.

MARSON, I. **A Short Walk along the Gravimeters Path.** International Journal of Geophysics, v. 12, p. 1–9, 2012.

MEYER, T. H.; ROMAN, D. R.; ZILKOSKI, D. B. **Basic Surveying Concepts: What does height really mean? Part III: Height systems.** Surveying and Land Information Science, v. 66, n. 2, p. 149–160, 2006.

MICRO-G LACOSTE. **A-10 Portable Gravimeter User's Manual.** Lafayette, USA, 2008.

MICROG LA COSTE. **Gravimeters.** Disponível em: <<http://microglacoste.com/product-category/land/>>. Acesso em: 15 jun. 2019.

MIYAHARA, B. **Case Study of Japan : Current situation and challenges in Vertical Reference Frame of Japan.** In: VERTICAL REFERENCES FRAME IN PRACTICE. Anais... Singapore: 2015.

MORELLI, C. G. et al. **The International Gravity Standardization Net (I.G.S.N.71).** Bureau Central de Association Internationale de Geodesie, p. 192, 1972.

NATIONAL GEODETIC SURVEY. **GEOID18 Technical Details.** Disponível em: <https://www.ngs.noaa.gov/GEOID/GEOID18/geoid18_tech_details.shtml>. Acesso em: 15 dez. 2019.

NATIONAL OCEANIC AND ATMOSPHERIC ADMINISTRATION. **Gravity Datums.** Disponível em: <https://celebrating200years.noaa.gov/foundations/gravity_surveys/side.html>. Acesso em: 9 jun. 2019.

NIEBAUER, T. **Gravimetric Methods - Absolute and Relative Gravity Meter: Instruments Concepts and Implementation.** Treatise on Geophysics: Second Edition, v. 3, p. 37–57, 2015.

PAIL, R.; HUGENTOBLE, U. **Gravity Observation Combination (GOCO).** Disponível em: <<https://www.bgu.tum.de/iapg/forschung/schwerefeld/goco/>>. Acesso em: 10 dez. 2019.

RAPP, R. H. **The orthometric height.** 1961. 122 f. Thesis (Master of Science). Department of Geodetic Science. Ohio State University, 1961.

RAPP, R. H.; SANSÒ, F. **Determination of the Geoid: Present and Future.** 1. ed. New York: Springer-Verlag New York, 1991.

RIBEIRO, L. C. **Contribuição para o estabelecimento do IHRF no estado de São Paulo.** 2019. 98 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Cartográficas). Programa de

Pós-Graduação em Ciências Cartográficas. Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências e Tecnologia. 2019.

SÁNCHEZ, L. et al. **Establishment of an International Height Reference System in the frame of GGOS**. In: SYMPOSIUM SIRGAS 2015. Santo Domingo, Dominican Republic, Anais...2015.

SÁNCHEZ, L. et al. **Strategy for the Realization of the International Height Reference System (IHR)**. In: SYMPOSIUM SIRGAS 2016. Quito, Ecuador, Anais...2016.

SÁNCHEZ, L. et al. **Towards a first realization of the International Height Reference System (IHR)**. In: EUROPEAN GEOSCIENCES UNION GENERAL ASSEMBLY. Vienna, Austria. Anais...2017.

SERWAY, R. A.; JEWETT JUNIOR, J. W. **Princípios de Física -Volume 1**. São Paulo: Cengage Learning, 2014.

SILVA, M. A. **Obtenção de um modelo geoidal para o estado de São Paulo**. 2002. 105 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Transportes). Departamento de Topografia e Geodesia. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2002.

SOUSA, M. A.; SANTOS, A. A. **Absolute Gravimetry on the Agulhas Negras Calibration Line**. Revista Brasileira de Geofísica (2010), v. 28, p. 165–174, 2010.

TENZER, R. et al. **Computation of the atmospheric gravity correction in New Zealand**. New Zealand Journal of Geology and Geophysics, v. 53, n. 4, p. 333–340, 2010.

TIMMEN, L. et al. **Absolute gravimetry with the Hannover meters JLA_g-3 and FG5-220, and their deployment in a Danish-German cooperation**. ZfV - Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement, v. 133, n. 3, p. 149–163, 2008.

TZIAVOS, I. N.; SIDERIS, M. G. Topographic Reductions in Gravity and Geoid Modeling. In: F. Sansò; M. G. Sideris (Orgs.); **Geoid Determination: Theory and Methods**. p.337–400, 2013. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

TORGE, W. **Gravimetry**. Berlim: de Gruyter, 1989.

TORGE, W. **Geodesy**. Berlim: de Gruyter, 2001.

TORGE, W.; MULLER, J. **Geodesy**. 4th. ed. Berlin: Degruyter, 2012.

UNITED NATIONS. **A global geodetic reference frame for sustainable development**. In: GLOBAL GEODETIC REFERENCE FRAME WORKING GROUP. Anais...2015. Disponível em: <http://ggim.un.org/documents/A_69_L53_E.pdf>. Acesso em: 5 abr. 2019.

- VAN CAMP, M. et al. **Geophysics from Terrestrial Time-Variable Gravity Measurements**. *Reviews of Geophysics*, v. 55, n. 4, p. 938–992, 2017.
- VANICEK, P.; KRAKIWSKI, E. **Geodesy: the concepts**. USA and Canada: North Holland Publishing Co, 1982.
- VERMEER, M. **Physical Geodesy**. Aalto: Aalto University, 2018.
- VU, D. T.; BRUINSMA, S.; BONVALOT, S. **A high - resolution gravimetric quasigeoid model for Vietnam**. *Earth, Planets and Space*, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1186/s40623-019-1045-3>>.
- WANG, L. S. et al. **The use of the A10-022 absolute gravimeter to construct the relative gravimeter calibration baselines in China**. *Metrologia*, v. 51, n. 3, p. 203–211, 2014.
- WESSEL, P. et al. **THE GENERIC MAPPING TOOLS GMT - GMT Tutorial**, 2019.
- WILMES, H.; WZIONTEK, H.; FALK, R. Global Absolut Gravity Reference System as replacement of IGSN 71. In: GEOPHYSICAL RESEARCH ABSTRACTS. **Resumo...**2015.
- YILDIZ, H. et al. **Comparison of remove-compute-restore and least squares modification of Stokes' formula techniques to quasi-geoid determination over the Auvergne test area**. *Journal of Geodetic Science*, v. 2, n. 1, 2012.
- ZINGERLE, P. et al. **The experimental gravity field model XGM2019e**. Disponível em: <<http://dataservices.gfz-potsdam.de/icgem/showshort.php?id=escidoc:4529896>>. Acesso em: 10 out. 2019.
- ZLS. **Burris gravity meter for land applications**. Disponível em: <http://zlscorp.com/?page_id=33>. Acesso em: 15 ago. 2019.