

**SONG WON PARK**

**APLICAÇÃO DE CONTROLADORES GEOMÉTRICOS  
NÃO-LINEARES EM PROCESSOS QUÍMICOS**

**Tese apresentada à Escola Politécnica da  
Universidade de São Paulo para obtenção  
do título de Doutor em Engenharia.**

**São Paulo  
1995**

SONG WON PARK

---

APLICAÇÃO DE CONTROLADORES GEOMÉTRICOS  
NÃO-LINEARES EM PROCESSOS QUÍMICOS

Tese apresentada à Escola Politécnica da  
Universidade de São Paulo para obtenção  
do título de Doutor em Engenharia.

Área de Concentração:  
Engenharia Química

Orientador:  
Darci Odloak

São Paulo  
1995

Park, Song Won

Aplicação de controladores geométricos não-lineares em processos químicos. São Paulo, 1995.  
178p.

Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da  
Universidade de São Paulo. Departamento de  
Engenharia Química.

1. Controle não-linear. I. Universidade de São  
Paulo. Escola Politécnica. Departamento de  
Engenharia Química. II. t

## AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Darci Odloak, pela orientação segura em controle aplicado aos processos químicos.

Ao Prof. Dr. Cláudio Augusto Oller de Nascimento, pelo constante incentivo aos trabalhos de pesquisa.

Ao Prof. Dr. Reinaldo Giudici, pelo constante incentivo e pelos trabalhos realizados em conjunto.

Ao Prof. Dr. Luis Valcov Loureiro, pelo constante incentivo e pelos trabalhos realizados em conjunto.

À Prof. Dra. Priscila Aya Shimizu Gunther, pelo seu apoio como Coordenadora de Pós-Graduação na Área de Engenharia Química.

À Engenheira e Mestre Míriam Trvzrska de Gouvea, pelo constante incentivo e troca de idéias.

Ao Engenheiro Ricardo Ni Kau Hsu pelo constante incentivo e pelos trabalhos realizados em conjunto.

À Cristina Jeroshenko Ziminiani, pelo constante incentivo e pelos trabalhos realizados em conjunto.

Aos alunos Frederico Augusto de Carvalho Neves, Maria Elisa Marciano Martinez, Mariana de Vasconcellos Guimarães e Rosana Kazuko Tomita pelo constante incentivo e pelos trabalhos realizados em conjunto.

## SUMÁRIO

Lista de Tabelas	iii
Lista de Figuras	iv
Resumo	ix
"Abstract"	x
1. INTRODUÇÃO	001
2. REVISÃO DA LITERATURA	004
3. REVISÃO DE CONTROLE NÃO LINEAR GEOMÉTRICO CONTÍNUO	008
3.1 Notações Básicas da Geometria Diferencial	008
3.2 Controle Não-linear Geométrico Contínuo	026
4. CONTROLE NÃO LINEAR GEOMÉTRICO DA COLUNA DE DESTILAÇÃO	047
4.1 Modelo Dinâmico da Coluna de Destilação Binária	047
4.2 Caracterização da Dinâmica Não Linear da Coluna	055
4.3 Síntese do Controle Não Linear da Coluna	058
4.4 Projeto do Controle Contínuo Não Linear da Coluna	070
4.5 Simulação do Controle Contínuo Não Linear da Coluna	084
5. REVISÃO DE CONTROLE NÃO LINEAR GEOMÉTRICO DISCRETO	099
6. CONTROLE NÃO LINEAR GEOMÉTRICO DO CONVERSOR FCC	115
6.1 Modelo Dinâmico do Conversor FCC	115
6.2 Caracterização da Dinâmica Não Linear do Conversor FCC	130

6.3 Síntese do Controle Não Linear Discreto do Conversor FCC	136
6.4 Projeto e Simulação do Controle Não Linear do Conversor FCC	147
6.5 Análise do Conversor FCC na Forma de Sistema Afim ou Linear em Entrada	157
7. CONCLUSÕES	169
8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	172

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 4.I. NOMENCLATURA E VALORES EM ESTADO ESTACIONÁRIO PARA COLUNA DE DESTILAÇÃO.</b>	<b>052</b>
<b>Tabela 4.II. PARÂMETROS DO CONTROLADOR NÃO LINEAR E OS VALORES DAS RESTRIÇÕES FÍSICAS NA COLUNA.</b>	<b>092</b>
<b>Tabela 6.I. NOMENCLATURA E VALORES EM ESTADO ESTACIONÁRIO PARA CONVERSOR FCC.</b>	<b>125</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1	Uma carta de coordenadas.	008
Figura 3.2	Transformação de coordenadas.	010
Figura 3.3	Um mapa entre duas variedades e as suas representações locais.	011
Figura 3.4	Espaço tangente no ponto $p$ .	012
Figura 3.5	Curvas tangentes e espaço tangente no ponto $p$ .	015
Figura 3.6	Um mapa tangente.	016
Figura 3.7	Projeções das variedades e dos feixes tangentes.	018
Figura 3.8	Mapas de uma variedade fibrada.	019
Figura 3.9	Projeção natural do feixe cotangente.	022
Figura 3.10	Projeções da variedade e do feixe tangente de um sistema dinâmico.	027
Figura 3.11	A função de retroalimentação de um sistema dinâmico.	028
Figura 4.1	Coluna de destilação binária com pressão variável e condensação total.	047
Figura 4.2	Perfil de concentração de tolueno na fase líquida em regime estacionário.	055
Figura 4.3	A resposta da composição do fundo na coluna de 30 pratos perante as perturbações na vazão da alimentação.	056
Figura 4.4	A resposta da composição do último prato na coluna de 30 pratos perante as perturbações na vazão da alimentação.	056
Figura 4.5	A comparação da resposta da composição do último prato na coluna de 30 pratos e na coluna de 8 pratos perante as perturbações na vazão da alimentação.	057
Figura 4.6	Esquema de controle não linear via rastreamento do erro.	078
Figura 4.7	Controle não linear via rastreamento do erro com ação integral e esquema "anti-windup".	080
Figura 4.8	Influência do fator ( $\epsilon$ ).	082
Figura 4.9	Resposta da composição do fundo perante degraus em $v_{xB}$ .	084

Figura 4.10	Resposta da composição do último prato perante degraus em $v_{xB}$ .	085
Figura 4.11	Resposta da composição do fundo perante degraus em $v_{xN}$ .	085
Figura 4.12	Resposta da composição do último prato perante degraus em $v_{xN}$ .	086
Figura 4.13	Simulação do Autotune para $x_B - v_{xB}$ .	087
Figura 4.14	Resposta da composição $x_B$ do fundo perante Autotune.	087
Figura 4.15	Sinal $v_{xB}$ em relé com tempo morto gerado pelo Autotune.	087
Figura 4.16	Resposta da concentração de tolueno no fundo perante degrau em "setpoint" para os coeficientes de Hurwitz calculados por Autotune.	088
Figura 4.17	Vazão do vapor vivo perante degrau em "setpoint" do $x_B$ para os coeficientes de Hurwitz calculados por Autotune.	088
Figura 4.18	Vazão de refluxo perante degrau em "setpoint" do $x_B$ para os coeficientes de Hurwitz calculados por Autotune.	089
Figura 4.19	Resposta da concentração de tolueno no fundo perante degrau em "setpoint" para os novos coeficientes de Hurwitz.	089
Figura 4.20	Resposta da concentração de tolueno no último prato perante degrau em "setpoint".	090
Figura 4.21	Vazão do vapor vivo perante degrau em "setpoint" do $x_N$ .	091
Figura 4.22	Vazão de refluxo perante degrau em "setpoint" do $x_N$ .	091
Figura 4.23	Composição de tolueno no fundo perante degraus simultâneos em "setpoints" do $x_B$ e $x_N$ .	092
Figura 4.24	Composição de tolueno no último prato perante degraus simultâneos em "setpoints" do $x_B$ e $x_N$ .	093
Figura 4.25	Vazão do vapor vivo perante degraus simultâneos em "setpoints" do $x_B$ e $x_N$ .	093
Figura 4.26	Vazão de refluxo perante degraus simultâneos em "setpoints" do $x_B$ e $x_N$ .	094
Figura 4.27	Composição de tolueno no fundo perante degraus simultâneos em "setpoints" do $x_B$ e $x_N$ , com erro de modelo em $\epsilon$ .	094
Figura 4.28	Composição de tolueno no último prato perante degraus simultâneos em "setpoints" do $x_B$ e $x_N$ , com erro de modelo em $\epsilon$ .	095

Figura 4.29	Vazão do vapor vivo perante degraus simultâneos em "setpoints" do $x_B$ e $x_N$ , com erro de modelo em $\epsilon$ .	095
Figura 4.30	Vazão do refluxo perante degraus simultâneos em "setpoints" do $x_B$ e $x_N$ , com erro de modelo em $\epsilon$ .	096
Figura 4.31	Distúrbios na alimentação.	096
Figura 4.32	Composição de tolueno no fundo perante distúrbio na alimentação.	097
Figura 4.33	Composição de tolueno no último prato perante distúrbio na alimentação.	097
Figura 4.34	Vazão do vapor vivo perante distúrbio na alimentação.	098
Figura 4.35	Vazão do refluxo perante distúrbio na alimentação.	098
Figura 5.1	Mapas de um sistema dinâmico não-linear geral.	099
Figura 5.2	Prolongação dos mapas de um sistema dinâmico não-linear geral.	100
Figura 5.3	Mapas de um sistema dinâmico não-linear geral.	101
Figura 5.4	A função de retroalimentação de um sistema dinâmico discreto.	101
Figura 5.5	Representação do mapa de um sistema dinâmico discreto e seu mapa tangente.	103
Figura 6.1	Conversor FCC Kellogg Orthoflow.	115
Figura 6.2	Resposta da temperatura $T_{rx}$ na saída de "riser", perante as perturbações em degrau na vazão de ar total $R_a$ .	131
Figura 6.3	Resposta da temperatura $T_{rg2}$ do leito do catalisador no 2º estágio do regenerador, perante as perturbações em degrau na vazão de ar total $R_a$ .	131
Figura 6.4	Resposta da temperatura $T_{rx}$ na saída de "riser", perante as perturbações em degrau na posição da válvula $C_{TC}$ .	132
Figura 6.5	Resposta da temperatura $T_{rg2}$ do leito do catalisador no 2º estágio do regenerador, perante as perturbações em degrau na posição da válvula $C_{TC}$ .	132
Figura 6.6	Resposta da temperatura $T_{rx}$ na saída de "riser", perante as perturbações em degrau na vazão de alimentação $R_f$ .	133
Figura 6.7	Resposta da temperatura $T_{rg2}$ do leito do catalisador no 2º estágio do regenerador, perante as perturbações em degrau na vazão de alimentação $R_f$ .	133

Figura 6.8	Resposta da temperatura $T_{rx}$ na saída de "riser", perante as perturbações em degrau na temperatura da alimentação $T_{fp}$ .	134
Figura 6.9	Resposta da temperatura $T_{rg2}$ do leito do catalisador no 2º estágio do regenerador, perante as perturbações em degrau na temperatura da alimentação $T_{fp}$ .	134
Figura 6.10	Resposta da temperatura $T_{rx}$ na saída de "riser", perante as perturbações em degrau na vazão $R_{rc}$ do catalisador que entra no "riser"	135
Figura 6.11	Resposta da temperatura $T_{rg2}$ do leito do catalisador no 2º estágio do regenerador, perante as perturbações em degrau na na vazão $R_{rc}$ do catalisador que entra no "riser".	135
Figura 6.12	Esquema de controle não linear discreto genérico para FCC.	147
Figura 6.13	Resposta da temperatura $T_{rx}$ na saída de "riser", perante as perturbações em degrau simultaneamente nos "setpoints" de $T_{rx}$ e $T_{rg2}$ .	147
Figura 6.14	Ação da vazão manipulada $R_{rc}$ do catalisador que entra no "riser", perante as perturbações em degrau simultaneamente nos "setpoints" de $T_{rx}$ e $T_{rg2}$ .	148
Figura 6.15	Resposta da temperatura $T_{rg2}$ do leito do catalisador no 2º estágio do regenerador, perante as perturbações em degrau simultaneamente nos "setpoints" de $T_{rx}$ e $T_{rg2}$ .	148
Figura 6.16	Ação da vazão manipulada $R_{aT}$ do ar total, perante as perturbações em degrau simultaneamente nos "setpoints" de $T_{rx}$ e $T_{rg2}$ .	149
Figura 6.17	Resposta da temperatura $T_{rx}$ na saída de "riser", perante a perturbação em degrau no "setpoint" de $T_{rx}$ .	152
Figura 6.18	Ação da vazão manipulada $R_{rc}$ do catalisador que entra no "riser", perante a perturbação em degrau "setpoint" de $T_{rx}$ .	153
Figura 6.19	Resposta da temperatura $T_{rg2}$ do leito do catalisador no 2º estágio do regenerador, perante a perturbação em degrau no "setpoint" de $T_{rx}$ .	153
Figura 6.20	Ação da vazão manipulada $R_{aT}$ do ar total, perante a perturbação em degrau no "setpoint" de $T_{rx}$ .	154
Figura 6.21	Resposta da temperatura $T_{rx}$ na saída de "riser", perante a perturbação em degrau no "setpoint" de $T_{rg2}$ .	154

- Figura 6.22 Ação da vazão manipulada  $R_{rc}$  do catalisador que entra no "riser",  
perante a perturbação em degrau no "setpoint" de  $T_{rg2}$  . 155
- Figura 6.23 Resposta da temperatura  $T_{rg2}$  do leito do catalisador  
no 2º estágio do regenerador,  
perante a perturbação em degrau no "setpoint" de  $T_{rg2}$  . 155
- Figura 6.24 Ação da vazão manipulada  $R_{aT}$  do ar total,  
perante a perturbação em degrau no "setpoint" de  $T_{rg2}$  . 156

## RESUMO

Para a abordagem do controle não-linear geométrico, a síntese do controle é elaborada diretamente a partir da descrição do processo com a dinâmica não-linear em espaço de estados. O presente trabalho trata da aplicação dos principais conceitos e formalismos do controle não-linear geométrico para os processos multivariáveis típicos da Engenharia Química : o controle não-linear contínuo da coluna de destilação e o controle não-linear discreto da unidade de craqueamento catalítico em leito fluidizado.

A síntese e o projeto do controlador não-linear são enfocados separadamente. O projeto do controlador tem importância prática para as aplicações industriais.

O presente trabalho apresenta metodologias para a abordagem dos seguintes aspectos da aplicação multivariável do controle geométrico não-linear : (a) como relaxar a sintonia do controlador interno de desacoplamento não-linear; (b) como definir o controlador externo como controle linear de alocação de polos com coeficientes de Hurwitz; (c) neste controlador externo, como incluir a ação integral com prevenção da saturação; e (d) como definir a dinâmica dos "setpoints" externos.

## ABSTRACT

For the geometric nonlinear control approach, the controller synthesis is elaborated directly from the nonlinear dynamic state space description of the process. This work concerns the application of the main concepts and formalisms of the geometric nonlinear control theory to typical multivariable (MIMO) chemical engineering process as illustrative case studies: the continuous nonlinear control of the distillation column and the discrete nonlinear control of the fluid catalytic cracking unit.

The synthesis and the project issues of the nonlinear controller are focused separately. The controller project has the practical importance for the industrial controller applications.

This work applies the methodologies to approach the following issues for the MIMO applications of the geometric nonlinear control: (a) to detune the internal nonlinear decoupling controller; (b) to define the external controllers as linear pole-placement controllers with Hurwitz coefficients; (c) to include the integral action with anti-reset windup on this external controllers and (d) to define the dynamics of the external setpoints.

## 1. INTRODUÇÃO.

A questão a ser respondida aqui consiste em três partes interligadas entre si : justificativa para o *controle não-linear*, justificativa para o controle não-linear *geométrico*, e a motivação para as *aplicações* em processos químicos.

Dado um *sistema dinâmico não-linear* considere-se que este sistema seja perfeitamente conhecido, isto é, tem-se um *modelo matemático* que representa este sistema de modo perfeito. Mesmo assumindo esta hipótese, a aplicação do controle linear significa que aproxima-se a representação do processo físico, ou o referido sistema dinâmico, por um modelo *linear*.

Uma das consequências do Primeiro Método de Lyapunov , também denominado *Método Direto*, é que uma vizinhança de um ponto de operação de um processo dinâmico pode ser bem representado por uma aproximação com um modelo linear; e tem servido como uma justificativa teórica para a aplicação do controle linear. A questão é se esta vizinhança está coerente com a faixa de operação de um processo dinâmico. Assim nas aplicações práticas temos uma percepção intuitiva dos processos "*fracamente*" não-lineares e "*fortemente*" não-lineares.

Para processos "fortemente" não-lineares , onde o *desempenho* das ações de controle ou mesmo o atendimento aos requisitos da *estabilidade* do sistema não sejam aceitáveis com o controle não-linear, deve-se buscar diretamente o controle não-linear.

Entre os sistemas de controle que *estruturalmente*, isto é, na própria aplicação do modelo matemático utilizam a abordagem não-linear, pode-se citar :

1. Controles que aplicam os métodos numéricos do *operador de inversão* e os controles que aplicam métodos numéricos de *otimização*, como podem ser vistos em Economou et al.(1986) , em Li et al.(1990) e em Eaton e Rawlings(1991).

2. Controles *adaptativos* onde um esquema de controle linear juntamente com um esquema de identificação dos parâmetros do modelo linear torna-se um esquema não-linear, como pode ser visto por exemplo em Astrom e Wittenmark(1989) e em Sastry e Bodson(1989).

3. Controles *não-lineares geométricos* onde a síntese do controle é feita diretamente a partir da descrição do processo em espaço de estados com funções não-lineares, que é o assunto do presente trabalho.

Nas teorias do controle linear já está relativamente bem compreendida a forte tautologia entre a abordagem sob a representação em entrada/saída no *domínio de variável complexa* como pode ser visto em MacFarlane e Karkanias(1976) e em MacFarlane e Alistair(1979) , a abordagem sob a representação do *espaço de estados* como pode ser visto em Callier e Desoer(1982) , e a abordagem sob o enfoque *geométrico* como pode ser visto em Wonham(1979). Assim, não há muitos ganhos com a abordagem geométrica pois todos os seus resultados podem ser demonstrados algebricamente no espaço de estados.

No controle não-linear geométrico a aplicação e a manipulação no espaço de estados é algébrico na *Álgebra de Lie*, mas muitos dos seus resultados só podem ser mais facilmente demonstrados ou percebidos na forma geométrica, ou seja, livre de coordenadas. O *controle não-linear geométrico* utiliza a teoria desenvolvida em *geometria diferencial* para a manipulação em espaço de estados. Recentemente foi apresentado por Fliess(1990) o *controle não-linear algébrico* que utiliza a *álgebra diferencial* , que parece mais adequado para as representações de entrada/saída.

Nas primeiras aplicações do controle não-linear geométrico aos processos químicos houve um enfoque exagerado sobre as *distribuições involutivas*, criando a impressão de que esta era uma restrição à aplicação. Porém a existência desta distribuição involutiva é apenas uma condição de equivalência à existência das *variedades integrais* (existência da solução das equações diferenciais) e da existência das correspondências duais *um-forma* (existência de diferenciais das funções), ou seja, é apenas uma justificativa teórica da geometria diferencial. Para efeito prático constrói-se esta distribuição (se houver) por um algoritmo.

Para a teoria é importante a caracterização das *variedades* e das *distribuições*, porém para as aplicações em processos industriais a caracterização das funções de retroalimentação que geram estas entidades desejadas , e como estas retroalimentações se inserem no contexto do controle aplicado, são igualmente (ou mais) importantes.

Adicionalmente, entre a síntese do controle não-linear e o seu projeto para a aplicação existem detalhes que não são bem explicados na literatura.

Portanto o presente trabalho visa a aplicação do controle não-linear geométrico em processos químicos complexos tais como uma coluna de destilação tratada como sistema contínuo afim em entrada, e um conversor FCC tratado como um sistema discreto não-afim.

## 2. REVISÃO DA LITERATURA.

A idéia de utilizar as ferramentas da geometria diferencial para o controle de sistemas não-lineares data de 1940, mas especialmente 1980-1990 foi uma época muito fértil para o desenvolvimento do controle não-linear geométrico.

Os trabalhos que despertaram o interesse da comunidade geral de controle de processos foram Hirschorn(1979a ,1979b) , e Hunt et al.(1983).

O problema da linearização exata das variáveis do estado e do desacoplamento da iteração de entrada e saída para sistemas *afins* é resolvido em trabalho bem conhecido de Isidori et al.(1981) e em Jakubczyk e Respondek(1980). O estudo do controle não-linear geométrico passa obrigatoriamente pelos livros de Isidori(1989) e de Nijmeijer e van der Schaft(1990) e em qualquer exposição do assunto é difícil evitar a influência destes autores.

A aplicação no controle de processos químicos deve-se a trabalhos de divulgação tais como Hoo e Kantor(1985) , Kantor(1987) , e Kravaris e Kantor(1990).

Como exemplos de aplicação tem-se os bioreatores cujas características não-lineares vem despertando interesse em aplicações de controle não-linear geométrico, como em Kravaris(1988) , Menawat e Balachander(1991) , e Henson e Seborg(1992).

O exemplo clássico de um reator contínuo de mistura perfeita (CSTR) foi utilizado como ilustração por Kravaris e Palanski(1988). O reator CSTR de polimerização é utilizado em Daoutidis et al.(1990), reator semi-contínuo de copolimerização em Kravaris e Soroush(1990) e o reator de batelada em Kravaris e Chung(1987).

Como aplicações experimentais tem-se o reator de polimerização em batelada de Soroush e Kravaris(1992a) e controle não-linear de pH de Wright et al.(1991).

Aoufoussi et al.(1992) aplicaram o controle não-linear para um reator de leito fluidizado para oxidação de benzeno produzindo anidrido maleico e óxidos de carbono.

Porém as aplicações citadas acima são apenas em SISO (monovariável) e em sistema afim ou linear em manipulada. Ou seja, as aplicações tornam-se triviais.

Para sistema multivariável, tem-se o trabalho de análise estrutural de Daoutidis e Kravaris(1992) e a aplicação em coluna de destilação binária simples de Castro et al.(1990).

Para a coluna de destilação, Levine e Rouchon(1991) publicaram um controle por eles denominado de controle via modelo agregado. Neste controle a coluna é dividida em cinco compartimentos: condensador, retificação, alimentação, extração e refeedor. Nesta coluna é imposto que as dinâmicas do condensador e do refeedor sigam uma trajetória conhecida. Como fisicamente o condensador não é um estágio, pode-se ver que o modelo dinâmico não é exatamente um modelo de processo e sim uma função de controle. Em todo caso, apesar destes autores citarem a literatura de controle não-linear geométrico, não aplicam os resultados desta teoria.

Também Alsop e Edgar(1990) apresentam um controle de coluna que, apesar de citarem os primeiros trabalhos da teoria de controle não-linear geométrico, na realidade utilizam transformações bilineares das funções não-lineares.

Já Castro et al.(1990) apresentam a aplicação de controle geométrico, porém em uma coluna de nove pratos com retenção e entalpia constantes nos pratos, e sem a variação de pressão. Além disso, estes autores estavam interessados na aplicação de controle com medidas de vazão de entrada (controle com sentido "*feedforward*") ao passo que estamos interessados em mostrar, além da coluna com características extremamente não-lineares citadas anteriormente, todos os detalhes de projeto de controlador.

As abstrações geométricas envolvem os conceitos de *variedades*, *transformação de coordenadas locais* destas variedades, *espaço linear de derivação ou espaço tangente*, *curvas integrais*, *campos vetoriais* e *distribuições*, *diferenciais um-forma* e *codistribuições* cujas explicações básicas podem ser obtidas dos excelentes livros textos de Abraham et al.(1988) e de Olver(1986).

Como pode ser visto em Isidori(1989) e em Nijmeijer e van der Schaft(1990), a equação de um sistema dinâmico não-linear pode ser interpretado como um *campo vetorial* e a solução do sistema dinâmico como um *fluxo ou curva integral maximal* deste campo vetorial. Assim, em analogia ao controle geométrico linear (Wonham,1979), tem-se a interpretação geométrica dos conceitos de *f-invariância*, *invariância sob controle*, *desacoplamento de distúrbios* e *desacoplamento de interação entrada-saída*.

Pode-se ver nos trabalhos de Isidori(1989) , Di Benedetto(1990) e Byrnes e Isidori(1991), a conexão entre as *distribuições involutivas invariantes sob controle desacoplador de distúrbios* e as *variedades integrais maximais* destes sistemas, ou seja, os conceitos de *Variedade de Zero*, *Dinâmica de Zero* e o *Algoritmo da Variedade da Dinâmica de Zero*.

Os conceitos de *linearização exata* do estado e *linearização exata* da entrada-saída são bem explicados formalmente com os conceitos de *sistemas primos lineares* pelo trabalho de Marino et al.(1994).

Em sistemas *afins* ou *lineares em entradas* a manipulação quantitativa destes conceitos é feita através das derivadas e colchetes de Lie. Mas Nijmeijer e van der Schaft(1982,1983 e 1984) mostram que para caso de sistemas não lineares gerais é necessário trabalhar com projeções de mapas tangentes, sob a forma de conceitos de *prolongações e levantamentos*. Uma lema importante para o aspecto teórico de existência de campos vetoriais nestas projeções foi dada por Lee et al.(1987). Como uma extensão, a teoria para caso de medidas parciais de distúrbios é dado pelo Isidori et al.(1981).

Em um sistema afim, caso não exista um grau relativo definido pelo fato da matriz característica ser *singular* , existe a possibilidade de fazer uma extensão de modo que o novo sistema estendido tenha a nova matriz característica definida, através de uma *retroalimentação dinâmica* .

Huijberts et al.(1992) , Huijberts(1992) e Di Benedetto e Isidori(1986) apresentam o desacoplamento de distúrbios através da retroalimentação dinâmica. Kang e Krener(1992) e Charlet et al.(1991) apresentam os trabalhos de linearização do estado. O artigo de Huijberts et al.(1992) é muito didático e ilustrativo em relação às condições algébricas e geométricas, às condições de "rank" (ver Di Benedetto et al.1989), e em relação à dinâmica interna de zero e aos algoritmos do cálculo da inversa do sistema de Singh(1981). McClamroch e Schumacher(1993) fazem a extensão de trabalhos para o caso de se ter *mais variáveis de entrada do que de saída*, ( $p < m$ ), o que é comum quando se deseja ter graus de liberdade extras nas variáveis manipuladas

Quando a linearização de entrada-saída é possível e a dinâmica interna (dinâmica de zero) resultante é estável ou existe a inversa (Huijberts,1992) no sentido de compensador de Singh , então temos as condições necessárias para que seja possível o controle do sistema não-linear afim em entrada (ver Di Benedetto e Grizzle,1994 e Grizzle et al.,1994). Quando estas condições não podem ser atendidas, por exemplo por não ter um

grau relativo definido, ainda assim tem-se a possibilidade de uma *linearização aproximada*, ou seja, de se usar um *modelo aproximado*. Das várias referências sobre o assunto, cita-se apenas Hauser et al.(1992) e Grizzle e Di Benedetto(1994). Também não passou despercebido de Isidori e Byrnes(1990) o Princípio do Modelo Interno apresentado por Francis e Wonham(1976) com a solução apresentada em Francis(1977) e cuja extensão não-linear é estabelecida por Hepburn e Wonham(1984). A extensão para o número de manipuladas maior que o das variáveis controladas é exposto em Castillo(1993). Huang e Rugh(1992) apresentam uma metodologia de aproximação polinomial para este problema.

Quando da implementação digital, isto é, controle com intervalo de amostragem, caso utilize-se do controlador calculado para sistemas contínuos, sabe-se que quanto maior o tempo de amostragem maior é a degradação do desempenho. No caso do controle não-linear geométrico, a linearização exata do sistema contínuo não necessariamente se reproduz como linearização exata dos sistemas amostrados e portanto não se garante a estabilidade. No caso de sistemas não-lineares afins uma maneira de preservar a capacidade de controle na implementação digital é *compensar* o controlador contínuo perante os efeitos de amostragem tal como tratado por Kimber e Gray(1992) e Barbot et al.(1992).

Para sistemas não-lineares gerais deve-se desenvolver a síntese do controlador diretamente dos modelos de sistemas discretos. O paralelo à *f-invariância* nos sistemas discretos pode ser visto em Grizzle(1985) e Nijmeijer e van der Schaft(1990). Análise da acessibilidade é exposto em Jakubczyk e Sontag(1990). A análise teórica de desacoplamento de entrada-saída em sistemas discretos pode ser visto em Grizzle(1986) e Chung e Grizzle(1992). Jayaraman e Chizek(1993) apresentam algoritmos de cálculo de distribuições para sistemas discretos. E finalmente, Soroush e Kravaris(1992b) e Soroush e Kravaris(1994) apresentam aplicações de controle não linear discreto ilustrando com um reator CSTR.

### 3. REVISÃO DE CONTROLE NÃO LINEAR GEOMÉTRICO CONTÍNUO

Este capítulo é apresentado aqui com o intuito de tornar o presente trabalho mais "auto-contido". Estabelece-se desde já que não se pretende aqui a construção formal e rigorosa da teoria de geometria diferencial, sempre sendo possível consultar as referências citadas ao longo do texto. O objetivo é tornar a nomenclatura mais "intuitiva". A familiarização com as noções de geometria diferencial apresenta duas principais vantagens : a motivação das várias abordagens torna-se mais clara, e o acesso aos resultados mais recentes da teoria torna-se mais fácil.

#### 3.1. NOTAÇÕES BÁSICAS DA GEOMETRIA DIFERENCIAL.

O espaço de estado  $x$  já não é mais considerado no espaço  $\mathbb{R}^n$  e sim de forma mais abstrata como uma *variedade*  $M$ . Variedades e prolongações podem ser vistas de modo mais completo em Abraham et al.(1988) e em Olver(1986)

Assim o ponto  $x \in \mathbb{R}^n$  é considerada uma *representação em coordenadas locais* do ponto  $p \in M$ . Isto significa que para cada *vizinhança aberta*  $U$  de um ponto  $p \in M$  existem a função bijetiva  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  e a sua correspondente função  $\varphi^{-1}$  inversa bijetiva, e o par  $(U, \varphi)$  é denominada uma *carta de coordenadas* , conforme a figura 3.1.

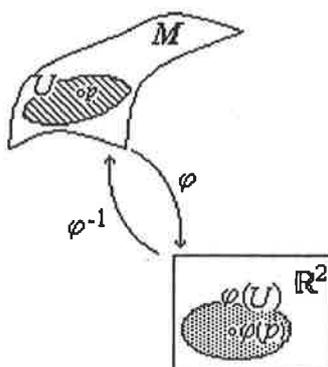


Figura 3.1. Uma carta de coordenadas.

Por um pequeno e sutil abuso de notação diz-se que  $x \in \mathbb{R}^n$  é a representação local de  $p$ . Para um ponto  $a \in \mathbb{R}^n$  , dadas as funções de *coordenadas naturais*  $r_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  , aqui

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \quad (3.1-1)$$

indicará que  $x_i = r_i(a)$ .

Assim, as funções de *coordenadas locais* de  $p \in M$

$$\mathbf{x} = (x_1(p), x_2(p), \dots, x_n(p))^T \quad (3.1-2)$$

resultam da composição

$$x_i(p) = (r_i \circ \varphi)(p) \quad (3.1-3)$$

porém é usual colocar simplesmente

$$x_i(p) = \varphi_i(p) \quad (3.1-4)$$

de onde subentende-se que

$$\varphi_i(p) = (r_i \circ \varphi)(p) = x_i(p) . \quad (3.1-5)$$

A Engenharia Química teve como tradição a utilização direta da representação local do espaço de estado diretamente como  $\mathbb{R}^n$ , do espaço de entrada como  $\mathbb{R}^m$ , do espaço de distúrbios como  $\mathbb{R}^d$ , e do espaço de resposta (saída) como  $\mathbb{R}^p$ . O conceito mais genérico do espaço definido como variedade pode parecer abstrato, árido e desnecessário. Porém existem algumas vantagens nesta abordagem. Uma delas é que o conceito de variedade é independente das coordenadas, e portanto passível de análise geométrica. Outra vantagem é que a manipulação quantitativa pela Álgebra de Lie pode ser compreendida de forma mais consistente.

Para o mesmo  $p \in M$  da equação (3.1-2) considere a existência de uma outra representação local

$$\mathbf{z} = (z_1(p), z_2(p), \dots, z_n(p))^T \quad (3.1-6)$$

dada pela outra carta  $(V, \psi)$  conforme a figura 3.2.

A *transformação de coordenadas* ou a passagem da coordenada local  $\mathbf{x}$  para a coordenada local  $\mathbf{z}$  é uma função  $S : \varphi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \psi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n$  dada por

$$S = (\psi \circ \varphi^{-1}) \quad ; \quad S^{-1} = (\varphi \circ \psi^{-1}) . \quad (3.1-7)$$

Esclarece-se aqui uma possibilidade de confusão : a transformação acima é uma interpretação geométrica, isto é, não se determinam  $\psi(p)$  e  $\varphi(p)$  para o posterior cálculo de  $S(p)$ . Já que  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $(z_1, z_2, \dots, z_n)$  são as representações em coordenadas locais, procura-se diretamente  $S(\mathbf{x})$  e  $S^{-1}(\mathbf{z})$  que resultem em

$$\mathbf{z} = S(\mathbf{x}) \quad ; \quad \mathbf{x} = S^{-1}(\mathbf{z}) . \quad (3.1-8)$$

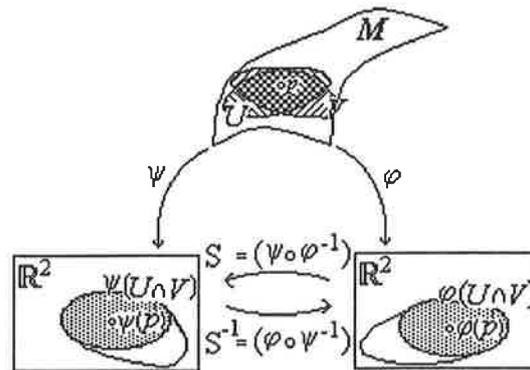


Figura 3.2. Transformação de coordenadas.

Um mapa  $h: M \rightarrow \mathbb{R}$  tem como *representação local* a função  $h: \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$h = (h \circ \varphi^{-1}) . \quad (3.1-9)$$

Para a teoria geométrica  $p$  é uma entidade verdadeira e  $\mathbf{x}$  é uma representação, ao passo que para a aplicação prática  $p$  é uma abstração geométrica e  $\mathbf{x}$  é uma entidade passível de manipulação algébrica. Também para a aplicação prática,  $h(p)$  é uma abstração, isto é, do ponto de vista de manipulação algébrica (*em Lie*) só se conhece  $h(x_1, \dots, x_n)$ .

Considere duas variedades  $M$  e  $N$  com as coordenadas locais dadas respectivamente pelas cartas  $(U, \varphi)$  e  $(V, \psi)$ . Assim um mapa entre duas variedades,  $F: M \rightarrow N$  tem a *representação local*  $\mathbf{F}: \varphi(U) \subset \mathbb{R}^{n_M} \rightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^{n_N}$  dada por

$$\mathbf{F} = (\psi \circ F \circ \varphi^{-1}) . \quad (3.1-10)$$

Aqui também estas considerações devem ser vistas como meras interpretações geométricas, uma vez que em termos locais usa-se diretamente

$$y_j = F_j(x_1, \dots, x_{n_M}) . \quad (3.1-11)$$

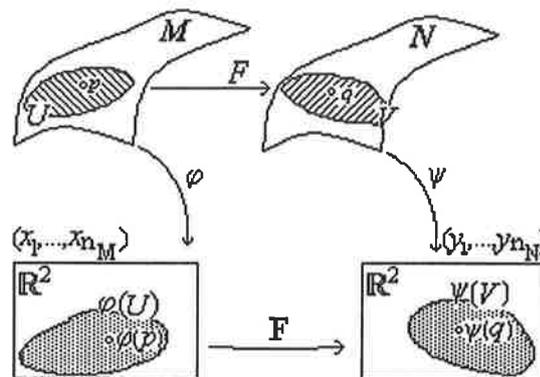


Figura 3.3. Um mapa entre duas variedades e as suas representações locais.

Nesta figura 3.3, considere que "rank" (ou posto) de  $[\partial F / \partial \mathbf{x}]$  é igual a  $\min(n_M, n_N)$ , isto é,  $[\partial F / \partial \mathbf{x}]$  não-singular.

Então como consequência direta do Teorema de Função Inversa sempre pode-se escolher  $V = F(U)$  de modo que exista a função  $F^{-1}: V \rightarrow U$  com  $F$  e  $F^{-1}$  bijetivas (ou seja,  $F$  é um difeomorfismo).

E como consequência direta do Teorema de Função Implícita, sempre existem coordenadas locais de modo que o mapa tenha a representação simples  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (y_1, \dots, y_{n_N})$  no caso de  $n_M \geq n_N$  e  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (y_1, \dots, y_{n_M}, 0, \dots, 0)$  no caso de  $n_M < n_N$ . Se  $\text{rank}[\partial F / \partial \mathbf{x}] = n_N$  no caso de  $n_M \geq n_N$ , sempre pode-se escolher as coordenadas locais de modo que  $F^{-1}(\mathbf{y}) = (0, \dots, 0, x_{n_N+1}, \dots, x_{n_M})$ , isto é,  $F^{-1}(V) \subset M$  é uma subvariedade de dimensão  $(n_M - n_N)$ .

Observe-se que as interpretações geométricas do Teorema da Função Inversa e do Teorema da Função Implícita, e as relações entre o "rank" das funções e as dimensões das variedades, são mais úteis para as demonstrações de outros teoremas do que para o entendimento das aplicações. Portanto para as suas descrições remete-se para Abraham et al.(1988), Olver(1986) ou Nijmeijer e van der Schaft(1990).

A segunda abstração geométrica é o conceito de *espaços tangentes* associados à variedade.

Considere um espaço de estado linear com  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  e assim tem-se o seu espaço vetorial associado com  $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , ou  $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , onde  $\mathbf{x}$  indica a posição e  $\mathbf{v}$  indica a direção. Note-se que por abuso de notação diz-se que o vetor  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ .

Agora com a variedade  $M$ , para cada ponto  $p \in M$  define-se o *espaço linear da operação de derivação* ou *espaço tangente*  $T_p M$  com o elemento vetor  $X_p(p) \in T_p M$  para o qual a aplicação  $X_p(h(p))$  pode ser entendida a partir de um mapa  $X_p: M \rightarrow T_p M$  chamado *campo vetorial* que dá as derivadas de uma função  $h: M \rightarrow \mathbb{R}$  ao longo da direção deste vetor.

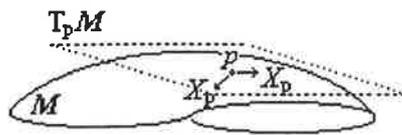


Figura 3.4. Espaço tangente no ponto  $p$ .

Assim, para um dado campo vetorial  $X_p$ , o vetor tangente  $X_p(q) \in T_p M$  em uma carta  $(U, \varphi)$  de coordenadas locais é expresso como

$$\mathbf{X}_p(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n (X_i(\mathbf{x})) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \quad (3.1-12)$$

Dada uma função  $h: M \rightarrow \mathbb{R}$ , a sua derivação ao longo de  $X_p$  é  $X_p(h(p)) = (X_p \circ h)(p)$ , que é expresso em uma carta  $(U, \varphi)$  de coordenadas locais como

$$\mathbf{X}_p(h(\mathbf{x})) = \sum_{i=1}^n (X_i(\mathbf{x})) \left( \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right) \quad (3.1-13)$$

Considere a função de derivação expressa em uma outra carta  $(V, \psi)$  de coordenadas,

$$\mathbf{X}_p(h(\mathbf{z})) = \sum_{j=1}^n (Z_j(\mathbf{z})) \left( \frac{\partial h(\mathbf{z})}{\partial z_j} \right) \quad (3.1-14)$$

Tem-se a relação entre estes coeficientes dada por :

$$Z_j = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial \mathcal{S}_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} \quad \text{ou} \quad X_i = \sum_{j=1}^n Z_j \frac{\partial \mathcal{S}_i^{-1}(\mathbf{z})}{\partial z_j} \quad (3.1-15)$$

Portanto para uma dada carta  $(U, \varphi) = (U, x_1, \dots, x_n)$ , a base natural em coordenadas locais para  $X_p$  é  $\left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$  em um espaço  $\mathbb{R}^n$ .

Aqui também ocorre o abuso de notação pois a base natural do espaço tangente  $\mathbf{T}_p M$  deveria ser expresso como  $\left( (r_1, \dots, r_n), \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \right)$  em um espaço  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  e o vetor  $X_p(p)$  deveria ser expresso por seus coeficientes  $((x_1, \dots, x_n), (X_1, \dots, X_n))$  onde os primeiros elementos indicam a posição e os últimos elementos indicam a direção.

Por abuso de notação, frequentemente na literatura denota-se  $X_p(p)$  como  $X(p)$  ou como  $X_p$ . Por outro lado, as notações do tipo  $X(h)(p) \equiv X_{(p)}(h)$  ou do tipo  $\mathbf{X}_p = T\varphi \circ X_p \circ \varphi^{-1}$  confunde-nos desnecessariamente.

Considere uma variedade  $M$ , um ponto  $p \in M$  e um espaço tangente  $\mathbf{T}_p M$  neste ponto  $p$ . Um *campo vetorial*  $X_p$  é um mapa  $X_p: M \rightarrow \mathbf{T}_p M$  que assinala pontos de  $M$  para pontos (*vetores*) de espaço tangente  $\mathbf{T}_p M$ . Dado um ponto  $q \in M$  (que poderia ser o próprio  $p$ ), a aplicação deste campo vetorial neste ponto resulta em um *vetor tangente*  $X_p(q) \in \mathbf{T}_p M$ .

Agora, o mapa  $X_p(h): M \rightarrow \mathbb{R}$  é a derivada total da função  $h: M \rightarrow \mathbb{R}$  ao longo do campo vetorial  $X_p: M \rightarrow \mathbf{T}_p M$ , também chamada de *derivada de Lie*  $L_{X_p} h$ , dada por

$$X_p(h)(p) = L_{X_p} h(p) = (X_p \circ h)(p), \quad (3.1-16)$$

que, como já mostrada na equação (3.1-13), em coordenadas locais é expressa como:

$$L_{X_p} h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_i} \quad (3.1-17)$$

Ao invés da função  $h: M \rightarrow \mathbb{R}$ , pode-se derivar um outro campo vetorial  $Y_p: M \rightarrow \mathbf{T}_p M$  ao longo do campo vetorial  $X_p: M \rightarrow \mathbf{T}_p M$ , resultando em um novo campo vetorial

$[X_p, Y_p] : M \rightarrow T_p M$ , também chamada de *colchete de Lie*. A aplicação do colchete de Lie em um ponto  $p \in M$  resulta no vetor  $[X_p, Y_p](p) \in T_p M$  definido por

$$[X_p, Y_p](p) = L_{X_p} Y_p(p) = X_p(Y_p(p)) - Y_p(X_p(p)) . \quad (3.1-18)$$

A sua representação em coordenadas locais é dada como :

$$\begin{aligned} [X_p, Y_p](\mathbf{x}) &= \frac{\partial Y_p(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} X_p(\mathbf{x}) - \frac{\partial X_p(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} Y_p(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial Y_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} X_i(\mathbf{x}) - \frac{\partial X_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} Y_i(\mathbf{x}) \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (3.1-19)$$

Sendo o colchete de Lie também um campo vetorial, é possível aplicar na função  $h: M \rightarrow \mathbb{R}$  para que  $[X_p, Y_p](h) : M \rightarrow \mathbb{R}$  resulte em

$$\begin{aligned} [X_p, Y_p](h)(p) &= ([X_p, Y_p] \circ h)(p) \\ &= [X_p(h(p)), Y_p(h(p))] \\ &= L_{X_p} Y_p(h(p)) \\ &= X_p(Y_p(h(p))) - Y_p(X_p(h(p))) \end{aligned} \quad (3.1-20)$$

o que na representação nas coordenadas locais resulta em

$$\begin{aligned} [X_p, Y_p](h(\mathbf{x})) &= [X_p(h(\mathbf{x})), Y_p(h(\mathbf{x}))] = L_{X_p} Y_p(h(\mathbf{x})) \\ &= X_p(Y_p(h(\mathbf{x}))) - Y_p(X_p(h(\mathbf{x}))) \\ &= \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial Y_p(h(\mathbf{x}))}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^n Y_j \frac{\partial X_p(h(\mathbf{x}))}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (3.1-21)$$

Outra interpretação geométrica do espaço tangente pode ser via curvas na variedade. Uma *curva*  $c$  em  $p \in M$  é um mapa  $c: [-a, +a] \in \mathbb{R} \rightarrow M$  com  $c(0) = p$ . A idéia é que um vetor tangente a uma superfície é o vetor velocidade de uma curva na superfície. Ou seja, na figura 3.5 diz-se que as curvas  $c_1$  e  $c_2$  são tangentes em  $p \in M$  em relação ao  $\varphi$  se  $\frac{d(\varphi \circ c_1)(0)}{dt} = \frac{d(\varphi \circ c_2)(0)}{dt}$  onde  $t \in [-a, +a]$ . Então o *espaço tangente*  $T_p M$  é a *classe* ou o conjunto de todas as curvas  $[c]$  tangentes ao ponto  $p \in M$ .

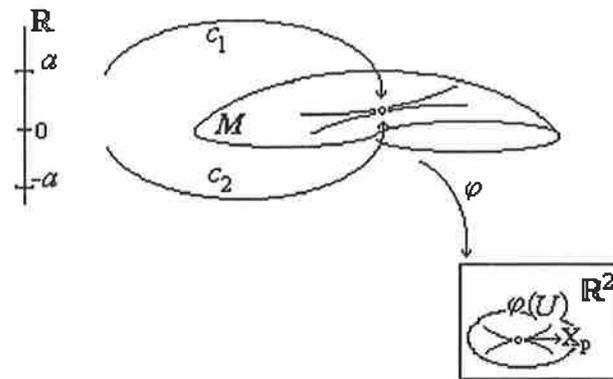


Figura 3.5. Curvas tangentes e espaço tangente no ponto  $p$ .

Assim interpreta-se o ponto  $p$  como sendo

$$p = c(0), \quad (3.1-22)$$

o campo vetorial como

$$X_p = \frac{dc(t=0)}{dt}, \quad (3.1-23)$$

e a derivada de Lie como

$$L_{X_p} h(p) = X_p(h(p)) = \frac{dh(c(t=0))}{dt} = \frac{d(h \circ c)(t=0)}{dt} \quad (3.1-24)$$

Lembre-se que  $c(t)$  é genérico e portanto pode ser admitido da classe  $C^\infty$ . O motivo de expor aqui o espaço tangente pela abordagem de derivadas é a introdução da idéia de *derivada de Lie*, e o motivo da abordagem por curvas é a introdução de sistema dinâmico como um *fluxo*.

Assim uma *curva integral*  $\Phi$ , chamada de *fluxo de*  $X_p$ , é a solução da seguinte equação :

$$\frac{d\Phi(p,t)}{dt} = X_p(\Phi(p,t)) \text{ com } \Phi(p,t=0) = p \quad (3.1-25)$$

Note-se que esta equação é exatamente a forma de um sistema dinâmico na engenharia de processos, representada usualmente como a equação :

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \quad (3.1-26)$$

Comparando as equações (3.1-25) e (3.1-26) entende-se agora a motivação para tratar os sistemas dinâmicos não-lineares através da geometria diferencial.

Tal como na equação (3.1-10) e na figura 3.3, considere as variedades  $M$  e  $N$  com as coordenadas locais dadas respectivamente pelas cartas  $(U, \varphi)$  e  $(V, \psi)$ , e a aplicação  $F: M \rightarrow N$  entre estas variedades. Para  $p \in M$  e para  $F(p) \in N$  considere os campos vetoriais  $X_p: M \rightarrow T_p M$  e  $Y_{F(p)}: N \rightarrow T_{F(p)} N$ , conforme a figura 3.6.

Um *mapa tangente* é uma aplicação  $TF_p: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$  sobre uma função  $h: N \rightarrow \mathbb{R}$  que é definida por :

$$Y_p(h(F(p))) = (TF_p \circ X_p)(h(F(p))) = X_p(h \circ F)(p) \quad (3.1-27)$$

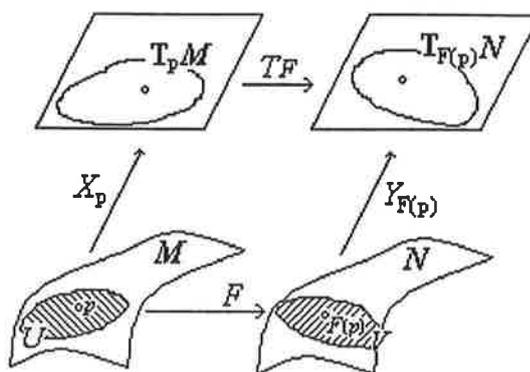


Figura 3.6. Um mapa tangente.

Na equação (3.1-27) o campo vetorial  $Y_{F(p)} = TF_p(X_p)$  é bem definida, e correspondentemente o diagrama da figura 3.6 comuta se a função  $F$  é um difeomorfismo. Pode-se provar também provar (Lee et al., 1987) que esta condição de

$$\text{rank}(TF_p) = \text{rank}\left(\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right) \text{ com posto cheio} \quad (3.1-28)$$

equivale a

$$[X_p, \ker(TF_p)] \subset \ker(TF_p) \quad (3.1-29)$$

onde

$$\ker(TF_p) = \text{span}\{X_p \mid TF_p(X_p) = 0 ; p \in M, X_p \in \mathbf{T}_p M, TF_p(X_p) \in T_{F(p)}N\} . \quad (3.1-30)$$

Por outro lado, a *diferencial um-forma* (que será explicada mais adiante)  $Y_p(h) = (TF_p \circ X_p)(h)$  com  $h: N \rightarrow \mathbb{R}$  é sempre bem definida.

Agora, considere o campo vetorial  $Y_p = (TF_p \circ X_p)$  bem definido. Pode-se adquirir a intuição sobre o diagrama comutativo da figura 3.6 através da representação em coordenadas locais. Considere o vetor  $X_p(q) \in \mathbf{T}_p M$  genericamente como um vetor  $\mathbf{v}$ . Lembre-se de que isto é um abuso de notação pois em coordenadas naturais  $\left( (r_1, \dots, r_n), \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \right)$  de  $\mathbf{T}_p M$ , na verdade a representação é  $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ . Assim o mapa tangente  $TF_p: \mathbf{T}_p M \rightarrow T_{F(p)}N$  em coordenadas locais é

$$\mathbf{TF}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \left( \mathbf{F}(\mathbf{x}), \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} \right) \quad (3.1-31)$$

Como a própria equação (3.1-12) indica, são vários os campos vetoriais  $X_{p,i}: M \rightarrow \mathbf{T}_p M$  que assinalam os pontos  $p \in M$  para os vetores  $X_{p,i}(q) \in \mathbf{T}_p M$ . Assim pode-se definir uma *distribuição*

$$D = \text{span}\{X_{p,1}, X_{p,2}, X_{p,3}, \dots\} \quad (3.1-32)$$

que tem como conjunto gerador finito os campos vetoriais linearmente independentes  $\{X_{p,1}, X_{p,2}, X_{p,3}, \dots, X_{p,n}\}$  se a dimensão de  $D$  for  $n$  constante.

Ressalta-se que uma distribuição é um mapa  $D: M \rightarrow \mathbf{T}_p M$ , ao passo que  $D(q) \subset \mathbf{T}_p M$  é um subespaço do espaço tangente. Duas distribuições  $D_1$  e  $D_2$  são linearmente independentes se  $(D_1 \cap D_2) = 0$ .

Não há motivos para que um conjunto gerador se restrinja às aplicações  $X_{p,i} \in \mathbf{T}_p M$  dos campos vetoriais pertencentes apenas ao espaço tangente  $\mathbf{T}_p M$ . Assim uma distribuição pode ser de um modo mais genérico uma aplicação  $D: M \rightarrow \mathbf{TM}$  onde define-se o *feixe tangente* ("tangent bundle") como :

$$\mathbf{TM} = \bigcup_{p \in M} \mathbf{T}_p M \quad (3.1-33)$$

Assim como existe uma aplicação do campo vetorial  $X: M \rightarrow TM$ , pode-se ter uma *projeção natural*  $\pi: TM \rightarrow M$  definida por

$$(\pi \circ X)(p) = \pi(X(p)) = p \quad (3.1-34)$$

ou seja,  $(\pi \circ X)(p)$  é uma identidade sobre a variedade  $M$ .

Qual a relação entre uma projeção natural e uma projeção canônica? Considere uma variedade  $M$  com o ponto  $p_M \in M$  e uma outra variedade  $N$  com o ponto  $p_N \in N$ . O espaço composto  $(M \times N)$  também é uma variedade com o ponto  $p = (p_M, p_N) \in (M \times N)$ . Pode-se ter então a *projeção canônica*  $\pi_M: (M \times N) \rightarrow M$  que assinala para variedade  $M$ , e a *projeção canônica*  $\pi_N: (M \times N) \rightarrow N$  que assinala para a variedade  $N$ .

Considere também um mapa de sistema  $F: (M \times N) \rightarrow TM$  e a projeção natural  $\pi: TM \rightarrow M$ . Então o diagrama da figura 3.7 comuta para o ponto  $p = (p_M, p_N) \in (M \times N)$  conforme a relação:

$$\pi_M(p) = (\pi \circ F)(p) \quad (3.1-35)$$

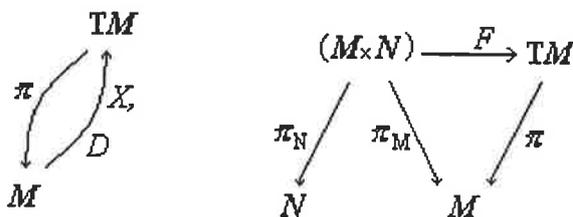


Figura 3.7. Projeções das variedades e dos feixes tangentes.

Diferente do descrito anteriormente, considere agora que  $p_M$  já não é mais independente de  $p_N$ , no sentido de que o ponto  $p$  não pode mais ser expresso como  $(p_M, p_N)$ . Neste caso,  $M, N$  já não podem mais ser obtidos via projeções canônicas e a variedade em questão é  $B \neq (M \times N)$ . Portanto  $\pi_M: B \rightarrow M$  e  $\pi_N: B \rightarrow N$  já não são mais projeções canônicas e sim subvariedades que são imersões surjetivas em  $B$ . O mapa inverso  $\pi_M^{-1}: M \rightarrow B$  quando aplicado em  $p_M \in M$  resulta em uma subvariedade  $\pi_M^{-1}(p_M) \subset B$  chamada de uma *fibra* de  $B$  em  $p_M$ . Assim  $B$  é chamada de *variedade fibrada*. Maiores detalhes podem ser vistos em Abraham et al.(1988) e em Olver(1986). Não se deve confundir os termos *(sub)variedade fibra* e *variedade fibrada* com o termo *feixes tangente*.

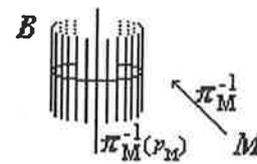
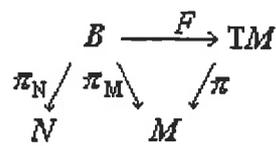


Figura 3.8.a. Mapas de sistema geral.

Figura 3.8.b. Um fibrado.

A terceira abstração geométrica é o conceito de *diferenciais um-forma* associados à variedade.

Toda a interpretação dada à derivação de uma função  $h: M \rightarrow \mathbb{R}$  através de conceitos de vetores tangentes  $X$  e de espaço de feixe tangente  $TM$  pode ser reinterpretado através do conceito da *diferencial de uma função*.

Assim, o que nas equações (3.1-13) e (3.1-17) foi interpretada como *derivação de uma função* ao longo de um vetor

$$L_{X_p} h(\mathbf{x}) = X_p(h(\mathbf{x})) = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n \left( X_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) (h(\mathbf{x})) \quad (3.1-36)$$

pode ser igualmente interpretada na sua forma dual como a *derivada direcional da função*  $h$  na direção do vetor, expressa em coordenadas locais como:

$$L_{X_p} h(\mathbf{x}) = (dh_p(\mathbf{x})) (X_p(\mathbf{x}))^\top = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_i} X_i(\mathbf{x}) = \left( \left( \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_1} \right) dx_1(\mathbf{X}_p(\mathbf{x})) + \dots + \left( \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right) dx_n(\mathbf{X}_p(\mathbf{x})) \right) \quad (3.1-37)$$

Ou seja, a equação (3.1-37) é a representação em coordenadas locais da seguinte definição. Para toda função  $h: M \rightarrow \mathbb{R}$  define-se uma função chamada *diferencial de  $h$  em  $p \in M$*  ou *forma diferencial linear* ou *um-forma* no modo dual à equação (3.1-16), isto é,  $dh_p: M \rightarrow T_p^*M$ . Aplicando esta *um-forma* na direção do vetor  $X_p(p)$  tem-se:

$$(dh_p(p))(X_p(p)) = L_{X_p} h(p) = (X_p \circ h)(p) = X_p(h)(p) \quad (3.1-38)$$

E de modo dual ao vetor tangente da equação (3.1-12), o vetor cotangente  $dh_p(p) \in \mathbf{T}_p^*M$  resultante da aplicação ao ponto  $p \in M$  tem a forma diferencial representada em coordenadas locais :

$$dh_p(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right) (dx_i) \quad (3.1-39)$$

Considere-se o espaço dual  $\mathbf{T}_p^*M$ , ou seja, o espaço das aplicações lineares de  $M$  em  $\mathbb{R}$ , também chamado de *espaço cotangente*. O mapa diferencial indicado geometricamente por  $dh_p: M \rightarrow \mathbf{T}_p^*M$  tem a sua representação em coordenadas locais como  $dh_p: \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n*}$  onde  $\mathbb{R}^{n*}$  ou  $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  indica o espaço dual de  $\mathbb{R}^n$ , isto é, o espaço das aplicações lineares de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}$ .

Assim como o espaço tangente  $\mathbf{T}_pM$  tem a base natural  $\left( \left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x_n} \right|_p \right)$ , o seu correspondente dual espaço cotangente  $\mathbf{T}_p^*M$  tem a base natural  $(dx_1|_p, \dots, dx_n|_p)$  de modo que :

$$(dx_i|_p) \left( \left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_p \right) = \delta_{ij} \quad \text{onde } \delta_{ij} \text{ é delta de Kroenecker.} \quad (3.1-40)$$

Um modo mais intuitivo de analisar os conceitos acima é considerar a base  $\{(\partial/\partial x_1), \dots, (\partial/\partial x_n)\}$  de um espaço vetorial, que por conveniência indicaremos como  $\{e_1, \dots, e_n\}$ . Considere um vetor  $\mathbf{v}$  neste espaço, dado por  $\mathbf{v} = v_1 e_1 + \dots + v_n e_n$ . Lembre-se que a base natural é  $\{(x_1, \dots, x_n), (e_1, \dots, e_n)\}$  do espaço vetorial  $\mathbb{R}^{n \times n}$ , que por abuso de notação diz-se que é base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  do espaço vetorial  $\mathbb{R}^n$ .

Considere as funções  $r_i$ , dadas por  $r_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$  na equação (3.1-1). Os  $\{dr_1, \dots, dr_n\}$  formam uma base de  $\mathbb{R}^{n*}$  que é dual à base natural  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $\mathbb{R}^n$  no sentido de que :

$$dr_i(e_j) = \delta_{ij} \quad \text{onde } \delta_{ij} \text{ é delta de Kroenecker.} \quad (3.1-41)$$

Assim a grandeza  $dh(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}$  é a derivada direcional da função  $h$  na direção do vetor  $\mathbf{v}$  :

$$dh(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_i} dr_i(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_i} v_i \quad (3.1-42)$$

que aplicado ao vetor tangente  $\mathbf{v} = \mathbf{X}(\mathbf{x}) = X_1(\mathbf{x})\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) + \dots + X_n(\mathbf{x})\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ , resulta em :

$$d\mathbf{h}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{X}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial x_i} dr_i(\mathbf{X}(\mathbf{x})) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial x_i} X_i(\mathbf{x}) \quad (3.1-43)$$

Por isso é que a *um-forma*  $d\mathbf{h}(\mathbf{x})$  nas coordenadas locais é representada por :

$$d\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial x_i} dr_i \quad (3.1-44)$$

E por abuso de notação, em lugar de  $dr_i$  escreve-se simplesmente  $dx_i$  :

$$d\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial x_i} dx_i \quad (3.1-45)$$

mas para evitar confusão deve-se sempre lembrar que  $dx_i$  não são "*diferenciais*" e sim *formas lineares* bem definidas pela equação (3.1-41).

Para um vetor cotangente (*uma diferencial um-forma*) considere as representações em uma carta  $(U, (x_1, \dots, x_n))$  e em uma outra carta  $(U, (z_1, \dots, z_n))$  de coordenadas locais :

$$\sigma = \sum_i \sigma_{x,i} dx_i \quad \text{ou} \quad \sigma = \sum_j \sigma_{z,j} dz_j \quad (3.1-46)$$

então diferentemente da conversão de coeficientes dos vetores tangentes dada na equação (3.1-15), a relação entre os coeficientes são :

$$\sigma_{x,i} = \sum_{j=1}^n \sigma_{z,j} \frac{\partial \mathcal{S}_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} \quad \text{ou} \quad \sigma_{z,j} = \sum_{i=1}^n \sigma_{x,i} \frac{\partial \mathcal{S}_i^{-1}(\mathbf{z})}{\partial z_j} \quad (3.1-47)$$

Na equação (3.1-32) foi definida uma distribuição  $D: M \rightarrow T_p M$ . De modo dual, como existem várias formas diferenciais  $\sigma_{p,j}: M \rightarrow T_p^* M$ , pode-se definir uma *codistribuição*  $P: M \rightarrow T_p^* M$  :

$$P = \text{span}\{\sigma_{p,1}, \sigma_{p,2}, \sigma_{p,3}, \dots\} \quad (3.1-48)$$

E assim como uma distribuição  $D$  com dimensão constante ( $k$ ) sempre pode ser gerada por um conjunto finito de ( $k$ ) vetores tangentes independentes,

$$D = \text{span}\{X_{p,1}, X_{p,2}, \dots, X_{p,k}\} = \text{span}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k}\Big|_p\right\}, \quad (3.1-49)$$

Também uma codistribuição  $P$  com dimensão constante ( $\ell$ ) sempre pode ser gerada por um conjunto finito de ( $\ell$ ) vetores cotangentes independentes :

$$P = \text{span}\{\sigma_{p,1}, \sigma_{p,2}, \dots, \sigma_{p,\ell}\} = \text{span}\{dx_1|_p, dx_2|_p, \dots, dx_\ell|_p\} \quad (3.1-50)$$

Aqui também uma codistribuição é um mapa  $P: M \rightarrow T_p^*M$ , ao passo que  $P(q) \subset T_p^*M$  é um subespaço do espaço cotangente. Pode-se considerar a aplicação da codistribuição de modo mais genérico  $P: M \rightarrow T^*M$  definindo o *feixe cotangente* como :

$$T^*M = \bigcup_{p \in M} T_p^*M \quad (3.1-51)$$

Desde que existe uma aplicação da diferencial um-forma, pode-se ter uma *projeção natural*  $\pi^*: T^*M \rightarrow M$  definida por

$$(\pi^* \circ \sigma)(p) = \pi^*(\sigma(p)) = p \quad (3.1-52)$$

ou seja,  $(\pi^* \circ \sigma)(p)$  é uma identidade sobre a variedade  $M$ .

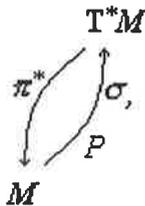


Figura 3.9. Projeção natural do feixe cotangente.

Diz-se que uma *distribuição*  $\ker(P)$  é um *mapa nulo*, ou *núcleo* ou "*kernel*" da *codistribuição*  $P$  se o subespaço :

$$\ker(P(p)) = \text{span}\{X(p) | X \text{ é um campo vetorial tal que } \sigma(X) = 0, \forall \sigma \in P\} \quad (3.1-53)$$

Uma *codistribuição*  $\text{ann}(D)$  é um *mapa anulador* da *distribuição*  $D$  se o subespaço :

$$\text{ann}(D(p)) = \text{span}\{\sigma(p) | \sigma \text{ é um -forma tal que } \sigma(X) = 0, \forall X \in D\} \quad (3.1-54)$$

Se  $D$  e  $P$  têm dimensões constantes, valem as relações  $D = \ker(\text{ann}(D))$  e  $P = \text{ann}(\ker(P))$ .

Uma distribuição  $D: M \rightarrow TM$  é chamada de *distribuição involutiva* se para todo campo vetorial pertencente a esta distribuição,  $X, Y \in D$ , o seu campo vetorial colchete de Lie definido pelas equações (3.1-18) e (3.1-19) também pertence a esta distribuição,  $[X, Y] \in D$ , ou seja,  $D(p)$  é fechada para a operação  $[X, Y](p)$ . Uma codistribuição  $P: M \rightarrow T^*M$  é dita *involutiva* se a distribuição  $\ker(P)$  é involutiva.

Agora, já que em coordenadas locais um campo vetorial aplicado a uma função significa uma expressão de derivadas parciais desta função, interessa saber quando é que esta expressão de derivadas parciais tem solução, isto é, quando uma distribuição é *integrável*.

Do ponto de vista geométrico, isto é, independente de coordenadas, uma distribuição  $D$  é dita *integrável* se para todo ponto  $p \in M$  existe uma subvariedade  $N \subset M$  na vizinhança de  $p$  (chamada de *subvariedade local integral* de  $D$  em  $p$ ), cujo feixe tangente  $TN$  é exatamente  $D|_N$  (distribuição  $D$  restrita à subvariedade  $N$ ), isto é, para cada ponto  $p \in N \subset M$  tem-se  $D_p = T_p N$ .

Esta definição da distribuição sugere que : (i) nem toda subvariedade de  $M$  é uma subvariedade integral; (ii) podem existir várias subvariedades integrais  $N$  de  $D$ , o que leva ao conceito da *subvariedade integral máxima* (contém todas as subvariedades integrais e não é contida em nenhum outro).

Dada uma variedade integral  $N$  (e portanto a distribuição integrável  $D$ ), pela própria definição da variedade integral ( $D = TN$ ) conclui-se que  $D$  é uma distribuição involutiva. Por isso é que é tão difícil para nós novatos imaginarmos uma distribuição não-involutiva, ou seja, uma distribuição sem uma variedade integral correspondente. Quando consideramos as coordenadas naturais  $(\partial/\partial x_i)$  instintivamente tendemos a imaginar uma integral.

O Teorema de Frobenius atualmente é mais conhecido por estabelecer as condições de equivalência entre :

- (i) a distribuição  $D$  é integrável;
- (ii) a distribuição  $D$  é involutiva;

(iii) o ideal  $I(D)$  da distribuição  $D$  (isto é, a codistribuição  $I(D) = \{ \sigma \in \mathbf{T}^*M \mid \sigma \text{ anula } D \}$ ) é um ideal diferencial (isto é,  $dI(D) \subset I(D)$ ).

Note-se pelo (iii) a motivação de se terem introduzidos mapas nulos e mapas anuladores pelas equações (3.1-53) e (3.1-54).

Em coordenadas locais, os aspectos do Teorema de Frobenius que mais interessam para as aplicações práticas do controle são as seguintes relações entre a variedade integral, a distribuição involutiva e a sua correspondente codistribuição :

Considere a distribuição *involutiva*  $D$  de dimensão  $(k)$  constante. Então para cada ponto  $p \in M$  existe uma carta  $(U, \varphi) = (U, x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$  com  $\varphi(p) = 0$  (isto é,  $\varphi(U)$  é uma bola centrada) tal que nesta coordenada a variedade  $N \subset M$ ,

$$N = \{ q \in U \mid (x_{k+1} = a_{k+1}), \dots, (x_n = a_n) \} \quad (3.1-55)$$

com constantes  $(a_{k+1}, \dots, a_n)$  é uma das variedades integrais da distribuição  $D$ .

Toda variedade integral pode ser representada pela equação (3.1-55) e é chamada de uma *folha*. O conjunto de todas as folhas, dadas pelos diferentes valores das constantes  $(a_{k+1}, \dots, a_n)$  é chamada de *folheação*.

Note-se que na maioria dos conceitos aqui descritos a interpretação geométrica, isto é, independente das coordenadas, tornam estes conceitos mais intuitivos. Não é o caso da interpretação da *folheação*. Portanto preferiu-se descrever as folhas apenas pela equação (3.1-55). Se desejável, ver Abraham et al.(1988).

Uma vez que na variedade  $N$  tem-se  $(x_{k+1}, \dots, x_n)$  constantes pela equação (3.1-55), a sua correspondente distribuição involutiva  $D$  de dimensão  $(k)$  constante é dada em coordenadas naturais por :

$$D(p) = \text{span} \left\{ \left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x_k} \right|_p \right\} \quad (3.1-56)$$

E a correspondente codistribuição  $P = \text{ann}(D)$  (equivalentemente ao  $D = \text{ker}(P)$ ) é involutiva de dimensão constante  $(n-k)$ , dada em coordenadas naturais por :

$$P = \text{span} \left\{ dx_{k+1}|_p, \dots, dx_n|_p \right\} \quad (3.1-57)$$

Porém nas aplicações práticas do controle não-linear geométrico não se definem distribuições para depois provar se são involutivas ou não. A partir dos campos vetoriais e das um-formas, via algoritmos e operações *ker(.)* e *ann(.)* chega-se às distribuições ou codistribuições involutivas (se existir).

Como observação final deste subcapítulo, note-se a coerência entre  $\mathbf{X}_p(\mathbf{x})$  da equação (3.1-12),  $d\mathbf{h}_p(\mathbf{x})$  da equação (3.1-39),  $\mathbf{X}_p(\mathbf{h}(\mathbf{x}))$  da equação (3.1-13) e  $(d\mathbf{h}_p(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{X}_p(\mathbf{x}))$  da equação (3.1-43). Por isso a derivada de Lie  $(L_{\mathbf{X}}h)(\mathbf{x}) = (d\mathbf{h}_p(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{X}_p(\mathbf{x}))$  (ou na notação geométrica  $(L_{\mathbf{X}_p}h)(p) = (d\mathbf{h}_p(p) \cdot \mathbf{X}_p(p))$ ) é muitas vezes definida na literatura simplesmente como um produto interno  $\langle d\mathbf{h}_p(\mathbf{x}), \mathbf{X}_p(\mathbf{x}) \rangle$  entre a diferencial de função  $d\mathbf{h}_p(\mathbf{x})$  e o vetor  $\mathbf{X}_p(\mathbf{x})$ .

Sendo a derivada de Lie uma nova função sobre a qual pode-se aplicar novamente a derivada, tem-se :

$$\begin{aligned} (L_{\mathbf{X}}^0 h)(\mathbf{x}) &= h(\mathbf{x}) \\ (L_{\mathbf{X}}^1 h)(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_i} X_i(\mathbf{x}) \\ &\dots \\ (L_{\mathbf{X}}^k h)(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial (L_{\mathbf{X}}^{k-1} h)(\mathbf{x})}{\partial x_i} X_i(\mathbf{x}) \end{aligned} \tag{3.1-58}$$

Sendo o colchete de Lie um novo campo vetorial sobre o qual pode-se aplicar novamente o colchete, tem-se :

$$\begin{aligned} (\text{ad}_{\mathbf{X}}^0 \mathbf{Y})(\mathbf{x}) &= \mathbf{Y}(\mathbf{x}) \\ (\text{ad}_{\mathbf{X}}^1 \mathbf{Y})(\mathbf{x}) &= [\mathbf{X}, \mathbf{Y}](\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{Y}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{X}(\mathbf{x}) - \frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{Y}(\mathbf{x}) \\ &\dots \\ (\text{ad}_{\mathbf{X}}^k \mathbf{Y})(\mathbf{x}) &= [\mathbf{X}, (\text{ad}_{\mathbf{X}}^{k-1} \mathbf{Y})](\mathbf{x}) = [\mathbf{X}, [\mathbf{X}, \dots [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]]](\mathbf{x}) \end{aligned} \tag{3.1-59}$$

### 3.2. CONTROLE NÃO-LINEAR GEOMÉTRICO CONTÍNUO.

O presente subcapítulo tem como objetivo a revisão dos principais resultados do controle não-linear geométrico. Considera-se fundamental já terem-se tornado "intuitivas" as *Notações Básicas da Geometria Diferencial* do subcapítulo anterior pelos seguintes motivos :

Pressupor os conceitos da geometria diferencial como "cosméticos" e partir diretamente para a manipulação algébrica de Lie tais como as derivadas de Lie e colchetes de Lie como na revisão de Kravaris e Kantor(1990) faz com que as aplicações na Engenharia de Processos Químicos tornem-se meras repetições mecânicas da álgebra, isto é, tentativa de aplicação por similaridade, e principalmente, *não aumenta o nosso entendimento dos processos não-lineares* . Por outro lado, entender um processo químico via conceitos da geometria diferencial abre as perspectivas da melhor compreensão dos sistemas dinâmicos não-lineares. Porém, a aridez das notações e o excesso de provas e de demonstrações dos teoremas na literatura obscurecem as motivações conceituais dos trabalhos em controle não-linear geométrico.

Portanto espera-se contribuir no presente texto de forma a tornar mais úteis os resultados da teoria.

Subjetivamente, tentou-se ser econômico nas citações bibliográficas, e as referências são descritas na medida em que auxiliam o entendimento da teoria, e não foram citadas pelo critério da primazia de publicação. Assim, onde não houver explicitamente uma citação bibliográfica, sempre pode-se recorrer a (Isidori,1989) e (Nijmeijer e van der Schaft,1990).

Considere um sistema dinâmico :

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad \text{com} \quad \mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}_0 \quad ; \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m \quad (3.2-1a)$$

$$y_j(t) = h_j(\mathbf{x}(t)) \quad \text{onde} \quad j = 1, 2, \dots, p \quad ; \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p \quad (3.2-1b)$$

Conforme dito anteriormente, a equação (3.2-1a) tem a mesma forma do fluxo ou *curva integral*  $\Phi$  do campo vetorial  $X_p$  introduzida na equação (3.1-25) :

$$\frac{d\Phi(p,t)}{dt} = X_p(\Phi(p,t)) \quad \text{com} \quad \Phi(p,t=0) = p \quad (3.2-2)$$

Assim, no sistema (3.2-1), para o ponto  $p = (p_M, p_U) \in M \times U$  com a representação local  $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ , tem-se o *campo vetorial*  $f: M \times U \rightarrow TM$  onde  $f(p) = f(p_M, p_U)$  tem a representação local  $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}, \mathbf{u}))$ . Por abuso de notação, diz-se simplesmente que  $f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  é o campo vetorial.

O que pode confundir-nos inicialmente é que a variável  $\mathbf{x}$  é utilizada ao longo do texto como uma variável de estado genérico  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , mas também  $(\mathbf{x}, \mathbf{u}^+)$  é utilizada como a solução  $\mathbf{x}(t)$  da equação (3.2-1) parametrizada por um dado  $\mathbf{u}^+$ , isto é, como o *fluxo* de  $f(\mathbf{x}, \mathbf{u}^+)$ .

Note-se que após as definições do subcapítulo anterior, não há mais perigo de confusão entre as variáveis geométricas ou livres de coordenadas e as suas representações locais. Assim às vezes utilizar-se-á indistintamente, por exemplo  $p \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  ou  $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in M \times U$ , pois discriminar sempre as representações pode atrapalhar por excesso de notação.

Além disso, existem as projeções canônicas  $\pi_M: (M \times U) \rightarrow M$ ,  $\pi_U: (M \times U) \rightarrow U$  e a projeção natural  $\pi: TM \rightarrow M$ . Então o diagrama da figura 3.12 abaixo comuta para o ponto  $p = (p_M, p_U) \in M \times U$  conforme a relação :

$$(\pi \circ f)(p) = \pi_M(p) \quad (3.2-3)$$

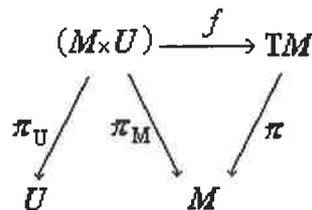


Figura 3.10. Projeções da variedade e do feixe tangente de um sistema dinâmico.

O campo vetorial  $(f \circ \gamma): M \times U \rightarrow TM$  indica o sistema sob a ação de controle, onde usualmente representa-se como  $\tilde{f}(p) = (f \circ \gamma)(p) = f(\gamma(p))$ . A ação de retroalimentação  $\gamma: M \times U \rightarrow M \times U$  é um difeomorfismo (é bijetiva e existe a inversa  $\gamma^{-1}$ ). Então o diagrama da figura 3.13 abaixo comuta conforme a relação :

$$(\pi_M \circ \gamma)(p) = \pi_M(p) \quad (3.2-4)$$

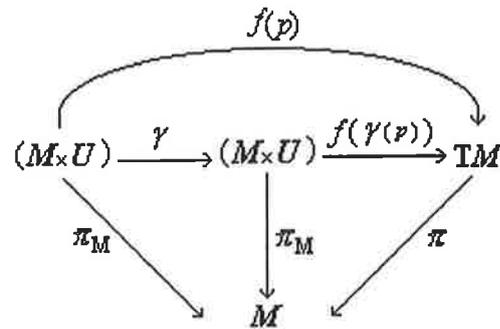


Figura 3.11. A função de retroalimentação de um sistema dinâmico.

Em coordenadas locais tem-se retroalimentação  $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \gamma(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  onde  $\mathbf{v}$  é uma nova entrada. Por abuso de notação escreve-se simplesmente  $\mathbf{u} = \gamma(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  e indica-se o sistema sob o controle retroalimentado como  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \gamma(\mathbf{x}, \mathbf{v}))$ , isto é,  $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \gamma(\mathbf{x}, \mathbf{v}))$ .

As respostas do sistema dinâmico são usualmente representadas na equação (3.2-1b) pelas funções  $h_i: M \times U \rightarrow \mathbb{R}$ . Assim, o campo vetorial  $f$  e as funções  $h_i$  (e por consequência as diferenciais um-forma exatas  $dh_i$ ) são dois elementos suscetíveis à toda a análise geométrica e manipulação em álgebra de Lie vistas anteriormente no subcapítulo 3.1.

Muitos sistemas dinâmicos de controle tem a forma *afim em entrada*, isto é, linear em entrada

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}_0(\mathbf{x}(t)) + \sum_{i=1}^m \mathbf{g}_i(\mathbf{x}(t)) \cdot u_i(t) \quad (3.2-5)$$

onde  $\mathbf{g}_0$  é o *campo vetorial de velocidade*, e  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_m$  são os *campos vetoriais de entrada* parametrizados respectivamente pelas variáveis de entrada  $u_1, u_2, \dots, u_m$ . Assim todos estes campos vetoriais são aplicações  $g_i: M \rightarrow TM$ , ainda que continue valendo a notação  $(\mathbf{g}_0 + \mathbf{g}_i u_i): M \times U \rightarrow TM$ .

Portanto estes campos vetoriais  $g_i$  e as diferenciais  $dh_i$  permitem a construção da distribuição  $D: M \rightarrow TM$  e da codistribuição  $P: M \rightarrow T^*M$  que tenham as condições de integrabilidade definidas pelo Teorema de Frobenius descrito anteriormente no subcapítulo 3.1, e que tenham as características de interesse para o controle.

Aqui também por abuso de notação dizemos simplesmente que  $\mathbf{g}_i(\mathbf{x})$  são os campos vetoriais. Ou seja, indica-se por exemplo  $\text{span}\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_m\}$  simplesmente como

$\text{span}\{\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \mathbf{g}_2(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{g}_m(\mathbf{x})\}$ . Conceitualmente deve-se lembrar que existe uma base natural para o campo vetorial, isto é, mesmo com abuso de notação convém sempre lembrar que a descrição do campo vetorial  $\mathbf{g}_i(\mathbf{x})$  é  $\left( g_{i,1}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + g_{i,n}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$ . Assim uma operação de colchete de Lie usualmente representada por  $[\mathbf{g}_i(\mathbf{x}), \mathbf{g}_k(\mathbf{x})]$  deve ser interpretada como  $\left[ \left( \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right), \left( \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \right]$ .

Qual a relação entre a *acessibilidade*, a *observabilidade* e os *campos vetoriais* ?

Nos sistemas afins em entrada, considere os campos vetoriais resultantes das operações repetidas do colchete de Lie  $\left[ \dots, [X_r, [X_{r-1}, [\dots, [X_2, X_1] \dots]] \dots \right]$ , onde  $X_i$  é qualquer um dos campos vetoriais  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_m$ . A combinação linear de todos estes campos vetoriais resultantes forma  $\mathcal{C}_o$ , que é a menor Álgebra de Lie dos campos vetoriais que contém  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_m$ . A distribuição formada por  $C_o = \text{span}\{X | X \text{ é campo vetorial em } \mathcal{C}_o\}$  é uma distribuição involutiva.

Se  $[g_o, X] \in \mathcal{C}_o$ , então  $\mathcal{C}_o$  é a *Álgebra de Acessibilidade Forte*, e  $C_o$  é a *Distribuição de Acessibilidade Forte*. Esta definição é intuitiva se considerarmos o caso linear, onde  $\mathcal{C}_o = \text{span}\{\mathbf{b}_i, \mathbf{A}\mathbf{b}_i, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}_i ; i = 1, 2, \dots, m\}$  e  $C_o = \text{Im}\{\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} ; i = 1, 2, \dots, m\}$ .

Se  $\dim(C_o(\mathbf{x}_0)) = n$  então o sistema é fortemente acessível a partir de  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{a}$ . Se  $\dim(C_o(\mathbf{x}_0)) = k < n$  então  $C_o = \text{span}\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k} \right\}$  e assim pode-se considerar a variedade integral ou folha  $S_e = \text{span}\{q \in U | x_{k+1}(q) = a_{k+1}, \dots, x_n(q) = a_n\}$ . Se  $g_o(\mathbf{x}_0) \in C_o(\mathbf{x}_0)$  então o sistema dinâmico restrito ao  $\mathbf{x} \in S_e$  em torno de  $\mathbf{x}_0$  é localmente fortemente acessível.

Agora considere as funções resultantes das operações repetidas da derivada de Lie  $(\dots L_{X_1} L_{X_2} \dots L_{X_{r-1}} L_{X_r} \dots) h_j$ . A combinação linear de todas estas funções resultantes forma o espaço linear de funções  $\mathcal{O}$ , chamado de *espaço de observabilidade*, que contém  $h_1, h_2, \dots, h_p$  e as suas derivadas  $(L_{g_o + \sum g_i \mu_i}^k) h_j$ . A codistribuição formada a partir da um-forma  $dH$ , ou seja,  $d\mathcal{O} = \text{span}\{dH | H \text{ é função em } \mathcal{O}\}$ , é uma codistribuição involutiva. Também esta definição é intuitiva se considerarmos o caso linear, onde  $\mathcal{O} = \text{span}\{\mathbf{c}_i \mathbf{x}, \mathbf{c}_i \mathbf{A} \mathbf{x}, \dots, \mathbf{c}_i \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{x} ; i = 1, 2, \dots, p\}$ .

Se  $\dim(d\mathcal{O}(\mathbf{x}_0)) = n$  então o sistema é fortemente observável a partir de  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{a}$ . Se  $\dim(d\mathcal{O}(\mathbf{x}_0)) = k < n$  então a distribuição  $\ker(d\mathcal{O})$  é involutiva desde que  $d\mathcal{O}$  é involutiva, e assim pode-se considerar a variedade integral ou folha  $S_\rho = \text{span}\{q \in U \mid x_{n-k+1}(q) = \alpha_{n-k+1}, \dots, x_n(q) = \alpha_n\}$ . Se  $g_0(\mathbf{x}_0) \in C_\rho(\mathbf{x}_0)$  então o sistema dinâmico restrito ao  $\mathbf{x} \in S_\rho$  em torno de  $\mathbf{x}_0$  é fortemente observável.

Um conceito importante para a aplicação do controle não-linear geométrico é a decomposição do sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  a partir de *f-invariância*, que pode ser demonstrado como uma consequência direta do Teorema de Frobenius (Isidori, 1989 e Nijmeijer e van der Schaft, 1990). Esta decomposição tem uma analogia muito imediata com o conceito de A-invariância do sistema linear  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ , isto é, o subespaço  $V$  tal que  $\mathbf{A}V \subset V$  (Wonham, 1979).

Dado um sistema não-linear  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ , uma distribuição  $D$  é *f-invariante* se

$$[f, X] \in D \text{ para os campos vetoriais } X \in D, \quad (3.2-6a)$$

isto é, se

$$[f, D] \subset D \quad (3.2-6b)$$

Agora, se a distribuição  $D$  é *involutiva e de dimensão constante*  $k$ , sempre pode-se escolher as coordenadas locais  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) = ((x_1, \dots, x_k), (x_{k+1}, \dots, x_n))$  de modo que

$D = \text{span}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k}\right\}$ , e assim o sistema (3.2-1a) pode ser decomposto em :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}^1 &= \mathbf{f}^1(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{u}) \\ \dot{\mathbf{x}}^2 &= \mathbf{f}^2(\mathbf{x}^2, \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (3.2-7)$$

onde  $\mathbf{x}^1$  não influencia  $\mathbf{x}^2$ .

Especializando para um sistema afim  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}_0 + \sum \mathbf{g}_i u_i$ , uma distribuição  $D$  é *f-invariante* se

$$[g_i, X] \in D, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m \text{ para os campos vetoriais } X \in D, \quad (3.2-8a)$$

isto é, se

$$[g_i, D] \subset D \quad (3.2-8b)$$

Se a distribuição  $D$  é involutiva e de dimensão constante  $k$ , sempre pode-se escolher  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) = ((x_1, \dots, x_k), (x_{k+1}, \dots, x_n))$  de modo que  $D = \text{span}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k}\right\}$  e assim o sistema afim (3.2-5) pode ser decomposto, de modo que  $\mathbf{x}^1$  não influencia  $\mathbf{x}^2$ , em :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}^1 &= \mathbf{g}^1_0(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) + \sum_{i=1}^m \mathbf{g}^1_i(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{u})u_i \\ \dot{\mathbf{x}}^2 &= \mathbf{g}^2_0(\mathbf{x}^2) + \sum_{i=1}^m \mathbf{g}^2_i(\mathbf{x}^2, \mathbf{u})u_i\end{aligned}\quad (3.2-9)$$

Como interpretar a  $f$ -invariância ? Se a distribuição  $D$  é  $f$ -invariante, então os novos campos vetoriais resultantes de todas as operações da Álgebra de Lie permanecem em  $D$ .

Adicionalmente, se  $D$  é uma distribuição involutiva de dimensão constante, então  $D$  é integrável e portanto existe uma variedade integral ou folha  $N = \{\mathbf{x} \in M \mid x_{k+1} = a_{k+1}, \dots, x_n = a_n\}$ . Pelo fato de  $D$  ser  $f$ -invariante, sempre tem-se  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in T_{\mathbf{x}}N$  para  $\mathbf{x}$  restrito ao  $N$ . Assim, se  $\mathbf{x}$  tiver a condição inicial  $\mathbf{x}_0 \in N$ , a sua órbita (ou seja, a solução da equação (3.2-1a) da dinâmica não-linear) será um  $\mathbf{x}$  que permanece na variedade integral  $N$ . Por isso este ponto  $\mathbf{x}$  pode ser particionado em  $(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) = ((x_1, \dots, x_k), (x_{k+1}, \dots, x_n))$ . Esta variedade integral  $N$  é dita  $f$ -invariante pois  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})|_{\mathbf{x} \in N} \in T_{\mathbf{x}}N$ .

A decomposição  $f = (f^1, f^2)^T = ((f_1, \dots, f_k), (f_{k+1}, \dots, f_n))^T$  também pode ser interpretada pela seguinte consideração algébrica :

Para a distribuição  $D$  involutiva e de dimensão constante, tem-se  $D = \text{span}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k}\right\}$ . Assim, a partir da condição  $[f, D] \subset D$  deve-se ter

$$\left[f, \frac{\partial}{\partial x_i}\right] \subset \text{span}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k}\right\} \quad \text{onde } i = 1, 2, \dots, k. \quad (3.2-10)$$

Portanto para  $i = 1, 2, \dots, k$ , tem-se

$$\left[f, \frac{\partial}{\partial x_i}\right] = -\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{u})}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} = -\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_k}\right) - \left(\frac{\partial f_{k+1}}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_{k+1}} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \quad (3.2-11)$$

e segue-se necessariamente que

$$\frac{\partial f_{k+1}}{\partial x_i} = \dots = \frac{\partial f_n}{\partial x_i} = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, k. \quad (3.2-12)$$

Ou seja,  $(f_{k+1}, \dots, f_n)$  não dependem  $(x_1, \dots, x_k)$ .

Também de modo dual, uma *codistribuição*  $P$  é *f-invariante* se  $L_f \sigma \in P$  para as diferenciais um-formas  $\sigma \in P$ , isto é, se

$$(L_f P) \subset P. \quad (3.2-13)$$

Especializando para os sistemas afins em entrada,  $P$  é uma *codistribuição f-invariante* se

$$(L_{g_i} P) \subset P, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m. \quad (3.2-14)$$

Se a *codistribuição*  $P$  é *f-invariante*, então a *distribuição*  $\ker(P)$  é *f-invariante*. Se a *distribuição*  $D$  é *f-invariante*, então a *codistribuição*  $\text{ann}(D)$  é *f-invariante*. Lembre-se também que se a *distribuição*  $D$  é *involutiva* de dimensão  $k$ , a *codistribuição*  $\text{ann}(D)$  é *involutiva* de dimensão  $(n-k)$  e tem-se  $D = \ker(\text{ann}(D))$ .

Agora, qual a relação entre a *acessibilidade* e a *observabilidade* e a *f-invariância* ?

No caso de sistemas afins em entrada,  $C_o$  é a menor *distribuição f-invariante* que contém  $\text{span}\{g_1, g_2, \dots, g_m\}$  onde  $m$  é o número de entradas (manipuladas) do sistema. Como  $C_o$  é *involutiva* com  $\dim(C_o) = k$  (*constante*), sempre pode-se escolher as coordenadas locais  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) = ((x_1, \dots, x_k), (x_{k+1}, \dots, x_n))$  de modo que  $C_o = \text{span}\left\{\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^1}\right\}$  e assim obtém-se  $\dot{\mathbf{x}}^1 = \mathbf{f}^1(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{u})$  e  $\dot{\mathbf{x}}^2 = \mathbf{f}^2(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{u})$  onde  $\dot{\mathbf{x}}^2$  é a parcela da dinâmica não-controlável a partir de  $\mathbf{u}$ .

A *codistribuição*  $d\mathcal{O}$  é a menor *codistribuição f-invariante* que contém  $\text{span}\{dh\} = \text{span}\{dh_1, dh_2, \dots, dh_p\}$  onde  $p$  é o número de saídas (controladas) do sistema. A *distribuição*  $\ker(d\mathcal{O})$  é a maior *distribuição f-invariante* contida em  $\ker(\text{span}\{dh\}) = \ker(\text{span}\{dh_1, dh_2, \dots, dh_p\})$ . Como  $d\mathcal{O}$  é *involutiva* com  $\dim(d\mathcal{O}) = (n - k)$  (*constante*), sempre pode-se escolher as coordenadas locais  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) = ((x_1, \dots, x_k), (x_{k+1}, \dots, x_n))$  de modo que  $\ker(d\mathcal{O}) = \text{span}\left\{\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^1}\right\}$  e assim

obtém-se  $\dot{\mathbf{x}}^1 = \mathbf{f}^1(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{u})$  e  $\dot{\mathbf{x}}^2 = \mathbf{f}^2(\mathbf{x}^2, \mathbf{u})$  onde  $\dot{\mathbf{x}}^2$  é a parcela da dinâmica não-observável a partir de  $\mathbf{x}^1$ .

Como uma decorrência natural, tem-se o segundo conceito importante que é a *invariância sob controle*.

No sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ , diz-se que a distribuição  $D$  é *invariante sob controle* se (e somente se) existe uma retroalimentação  $\bar{\mathbf{u}} = \gamma(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  com  $\text{rank}\left(\frac{\partial \gamma(\mathbf{x}, \mathbf{u}_0)}{\partial \mathbf{u}_0}\right) = m$ , tal que :

$$[f(\cdot, \bar{\mathbf{u}}), D] = [f(\cdot, \gamma(\cdot, \mathbf{v})), D] \subset D . \quad (3.2-15)$$

Para os sistemas afins em entrada  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}_0 + \sum \mathbf{g}_i u_i$ , considere uma função de retroalimentação, isto é, a ação de controle do tipo :

$$\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} \quad (3.2-16)$$

que aplicado no sistema resulta em

$$\dot{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{g}}_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \tilde{\mathbf{g}}_i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_i(t) \quad (3.2-17a)$$

com

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{g}}_0(\mathbf{x}) &= \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^m \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) \cdot \alpha_k(\mathbf{x}) \\ \tilde{\mathbf{g}}_i(\mathbf{x}) &= \sum_{k=1}^m \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) \cdot \beta_{ki}(\mathbf{x}), \quad i = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (3.2-17b)$$

Assim, nestes sistemas afins uma distribuição  $D$  é *invariante sob controle* se (e somente se) existe uma função de retroalimentação ( $\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}$ ) tal que

$$[\tilde{\mathbf{g}}_i, D] \subset D, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m \quad (3.2-18)$$

Porém não é necessário checar diretamente a condição (3.2-18). Considere a distribuição dos campos vetoriais de entrada  $G = \text{span}\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_m\} = \text{span}\{\tilde{\mathbf{g}}_1, \tilde{\mathbf{g}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{g}}_m\}$  com dimensão constante. Se a distribuição  $D$  é involutiva de dimensão constante e se a distribuição  $(D \cap G)$  tem dimensão constante, então a condição (3.2-18) é equivalente à condição :

$$[g_i, D] \subset (D + G) \quad , \quad i = 0, 1, 2, \dots, m \quad (3.2-19)$$

Já foi citado que os campos vetoriais  $f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  ou  $g_i(\mathbf{x})$  e as diferenciais um-formas exatas  $dh_j(\mathbf{x})$  são os elementos-chaves da análise geométrica. Assim, em sequência natural, a terceira questão importante para o controle é o *problema do desacoplamento de distúrbios*, que faz as considerações a respeito de  $dh_j(\mathbf{x})$ .

Para analisar a rejeição dos distúrbios, considere o caso dos sistemas afins :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}_0(\mathbf{x}(t)) + \sum_{i=1}^m \mathbf{g}_i(\mathbf{x}(t)) \cdot u_i(t) + \sum_{k=1}^{\ell} \mathbf{d}_k(\mathbf{x}(t)) \cdot w_k(t) \quad (3.2-20)$$

onde  $g_0: M \rightarrow TM$  é o *campo vetorial de velocidade*,  $g_i: M \rightarrow TM$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  são os *campos vetoriais de entrada* parametrizados pelas entradas  $u_i$ , e  $d_k: M \rightarrow TM$ ,  $k = 1, 2, \dots, \ell$  são os *campos vetoriais de distúrbios* parametrizados pelos distúrbios  $w_k$ . A distribuição dos campos vetoriais de entrada é  $G = \text{span}\{g_1, g_2, \dots, g_m\}$ .

Levando em consideração as interpretações anteriormente apresentadas a respeito da *observabilidade*, é intuitivo que para o sistema (3.2-19) não apresentar os efeitos das variáveis distúrbios  $w_k$  nas saídas do sistema, é necessário que :

$$\left( L_{d_k} \dots L_{X_1} L_{X_2} \dots L_{X_{r-1}} L_{X_r} \dots \right) h_j = 0 \quad , \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (3.2-21)$$

onde  $X_i$  é qualquer um dos campos vetoriais  $g_0, g_1, g_2, \dots, g_m, d_1, d_2, \dots, d_\ell$ .

Considere o espaço núcleo da observação  $\ker(dh) = \bigcap_{j=1}^p \ker(dh_j)$ . Também é intuitivo, devido à definição (3.1-53) de núcleos ou "*kernels*", que para satisfazer a equação (3.2-21) deve-se ter

$$\text{span}\{d_1, d_2, \dots, d_\ell\} \subset \ker(dh) \quad (3.2-22)$$

Qual a relação entre a *rejeição de distúrbios* e as *distribuições involutivas*? Como deseja-se que a rejeição aos distúrbios se efetue através da ação de controle, procura-se uma retroalimentação ( $\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}$ ) de modo que exista uma distribuição  $D^{\max}$  involutiva de dimensão constante e invariante sob controle (existem várias, deseja-se a maior contida em  $\ker(dh)$ ), com a distribuição  $(D^{\max} \cap G)$  de dimensão constante, e que obedeça a seguinte condição :

$$\text{span}\{d_1, d_2, \dots, d_\ell\} \subset D^{\max} \subset \ker(dh) \quad (3.2-23)$$

Esta condição (3.2-23) equivale às condições

$$\begin{cases} d_k \in D^{\max} \\ [d_k, D^{\max}] \subset D^{\max} \end{cases} \quad (3.2-24)$$

Com a forma dual, tem-se  $P^{\min} = \text{ann}(D^{\max})$  ou  $D^{\max} = \text{ker}(P^{\min})$  onde  $P^{\min}$  é a menor codistribuição involutiva de dimensão constante e invariante sob controle que contém  $\text{span}\{dh_1, dh_2, \dots, dh_p\}$ , com a codistribuição  $(P^{\min} \cap \text{ann}(G))$  de dimensão constante.

Considere os sistemas afins em entrada. Um modo óbvio de calcular esta distribuição  $D^{\max}$  involutiva de dimensão constante, invariante sob controle e desacoplado de distúrbios é utilizar diretamente as considerações anteriores :

- (1). Fazer  $D^1 = \text{span}\{g_1, g_2, \dots, g_m\}$  (é involutiva)
- (2). Dada  $D^k$ , fazer  $D^{k+1} = \text{ker}(\text{span}\{dh\}) \cap \{X \mid [g_i, X] \subset (D^k + G), i = 0, 1, 2, \dots, m\}$ .  
(Assim  $D^k$  é involutiva e invariante sob controle com  $D^{k+1} \subset D^k \subset \text{ker}(\text{span}\{dh\})$ ).
- (3). Checar se  $D^{k+1}$ ,  $(D^{k+1} \cap G)$  e  $G$  possuem dimensões constantes. (Equivale a  $\dim(D^{k+1} + G)$  constante). Senão o desacoplamento de distúrbios não tem solução.
- (4). Termina com  $D^{\max} = D^n$ , isto é, com  $(k+1) = n$ .

Para as distribuições e codistribuições involutivas de dimensões constantes tem-se  $P^k = \text{ann}(D^k)$  ou  $D^k = \text{ker}(P^k)$ . Assim pode-se utilizar do seguinte algoritmo :

- (1). Fazer  $P^0 = 0$  e  $P^1 = \text{span}\{dh\} = \text{span}\{dh_1, dh_2, \dots, dh_m\}$  (são involutivas)
- (2). Dada  $P^k$ , fazer  $P^{k+1} = P^k + \sum_{i=0}^m L_{g_i}(P^k \cap \text{ann}(G))$ .  
(Assim  $P^k$  é involutivo e invariante sob controle com  $\text{span}\{dh\} \subset D^{k+1} \subset D^k$ ).
- (3). Checar se  $P^{k+1}$ ,  $(P^{k+1} \cap \text{ann}(G))$  e  $\text{ann}(G)$  possuem dimensões constantes. (Equivale a  $\dim(P^{k+1} + \text{ann}(G))$  constante). Senão o desacoplamento de distúrbios não tem solução.
- (4). Termina com  $P^{\min} = P^n$ , isto é, com  $(k+1) = n$ .

Se por um lado os algoritmos apresentados anteriormente são úteis para entender conceitualmente o controle através da geometria diferencial por serem livres de coordenadas, por outro lado a implementação das ações de controle segue a construção desta codistribuição mínima  $P^{min}$  ou da distribuição máxima  $D^{max}$  sob a abordagem da Álgebra de Lie descrita a seguir.

Vários autores trabalharam na análise dos algoritmos da construção de  $D^{max}$  para os sistemas afins em entrada, porém vamos ilustrar concisamente seguindo Nijmeijer e van der Schaft(1990) :

(1). Calcula-se  $p_1 = \dim(\text{span}\{dh_1, dh_2, \dots, dh_m\})$ .

Faz-se  $P^0 = 0$  e  $P^1 = \text{span}\{dh_1, dh_2, \dots, dh_{p_1}\}$  (com permutação se necessário)

(2). (a) Define-se

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1(\mathbf{x}) &= \left( L_{g_i} h_j(\mathbf{x}) \right)_{\substack{i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,p_1}} & \dim(\mathbf{A}_1(\mathbf{x})) &= [p_1 \times m] \\ \mathbf{b}_1(\mathbf{x}) &= \left( L_{g_0} h_j(\mathbf{x}) \right)_{j=1,2,\dots,p_1} & \dim(\mathbf{b}_1(\mathbf{x})) &= p_1 \end{aligned}$$

(b) Se  $\dim(P^1 + \text{ann}(G))$  é constante, prosseguir com  $r_1 = \text{rank}(\mathbf{A}_1(\mathbf{x}))$ . Permuta-se  $\mathbf{A}_1(\mathbf{x})$  para que as suas primeiras  $r_1$ -linhas sejam linearmente independentes.

(c) Seleccionam-se as funções  $\alpha_1(\mathbf{x})$  de dimensão  $[m \times 1]$  e  $\beta_1(\mathbf{x})$  de dimensão  $[m \times m]$  tais que obtém-se  $\varphi_1(\mathbf{x})$  e  $\psi_1(\mathbf{x})$  de seguinte modo :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1(\mathbf{x})\alpha_1(\mathbf{x}) + \mathbf{b}_1(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \varphi_1(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \frac{\mathbb{I}_{r_1}}{\mathbb{I}_{(p_1 - r_1)}} \\ \mathbf{A}_1(\mathbf{x})\beta_1(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{r_1} & \mathbf{0} \\ \psi_1(\mathbf{x}) & \mathbf{0} \end{pmatrix} \frac{\mathbb{I}_{r_1}}{\mathbb{I}_{(p_1 - r_1)}} \end{aligned}$$

(d) Acha-se  $p_2 = \dim(\text{span}\{dh_1, dh_2, \dots, dh_{p_1}, d\varphi_1, d\psi_1\})$ . Assim selecciona-se  $P^2 = \text{span}\{dh_1, dh_2, \dots, dh_{p_1}, \dots, dh_{p_2}\}$  (permutação se necessário).

(3). Volta-se ao passo (2) para calcular  $\mathbf{A}_2(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{b}_2(\mathbf{x})$  com  $r_2 = \text{rank}(\mathbf{A}_2(\mathbf{x}))$ . Consequentemente calculam-se  $\alpha_2(\mathbf{x})$  e  $\beta_2(\mathbf{x})$  e assim calcula-se  $P^3$ .

(4). Termina em pelo menos  $(n - p_1 + 1)$  passos com  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ ,  $\alpha(\mathbf{x})$  e  $\beta(\mathbf{x})$ .

Porém pode-se calcular  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$  de modo mais direto se o sistema dinâmico tiver os números assim denominados de *índices característicos*.

Por simplicidade, considere que ( $m=p$ ), ou seja, o número de entradas (variáveis manipuladas) é igual ao número de saídas (variáveis controladas). Considere também que existem os chamados *índices característicos*  $\{\rho_1, \dots, \rho_m\}$ , isto é,  $\rho_j$  correspondentes a  $h_j$ ,  $j=1,2,\dots,(p=m)$ , definidos como números inteiros tais que :

$$\left[ L_{g_1} L_{g_0}^k h_j(\mathbf{x}) \quad \dots \quad L_{g_m} L_{g_0}^k h_j(\mathbf{x}) \right] = 0 \text{ para todos } k = 0, 1, 2, \dots, (\rho_j - 1) \quad (3.2-25a)$$

$$\left[ L_{g_1} L_{g_0}^{(\rho_j)} h_j(\mathbf{x}) \quad \dots \quad L_{g_m} L_{g_0}^{(\rho_j)} h_j(\mathbf{x}) \right] \neq 0 \text{ (existe um elemento não-zero)} \quad (3.2-25b)$$

Os *índices característicos*  $\{\rho_1, \dots, \rho_m\}$  também são mais conhecidos como *graus relativos*  $\{r_1, \dots, r_m\}$  com ( $\rho_j = r_j - 1$ ). Por isso, para evitar confusão, sempre é bom checar as equações (3.2-25a,b) antes de utilizar estes números da literatura.

O termo *grau relativo* é utilizado em analogia aos sistemas lineares, onde para uma função de transferência linear  $G(s) = N(s)D^{-1}(s)$  com  $D^{-1}(s)$  uma matriz coluna-reduzida, tem-se  $r_j = [\text{grau da } j\text{-ésima coluna de } D(s)] - [\text{grau da } j\text{-ésima coluna de } N(s)]$ , como também foi observado em Kravaris e Soroush(1990).

Assim, a matriz  $\left[ \mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad L_{g_0} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad \dots \quad L_{g_0}^{n-1} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \right]^T$  pode ser interpretada como análoga à matriz de observabilidade  $\left[ C \quad CA \quad \dots \quad CA^{n-1} \right]^T$  dos sistemas lineares; a matriz  $\left[ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (-1) \text{ad}_{g_0} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad \dots \quad (-1)^{n-1} \text{ad}_{g_0}^{n-1} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \right]$  é análoga à matriz de controlabilidade  $\left[ B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B \right]$ ; e os elementos  $\{L_g \mathbf{h}(\mathbf{x}), L_g L_{g_0} \mathbf{h}(\mathbf{x}), \dots, L_g L_{g_0}^{k-1} \mathbf{h}(\mathbf{x}), \dots\}$  são análogos aos elementos da expansão de Markov  $\{CB, CAB, \dots, CA^{k-1}B, \dots\}$ .

Pode-se também reinterpretar o grau relativo como a menor ordem da derivada de  $y_i$  em que aparece explicitamente a influência de  $u_j$ , pois da definição de  $r_j$  tem-se :

$$\begin{aligned}
\frac{dy_j}{dt} &= y_j^{(1)} = \frac{\partial h_j}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial h_j}{\partial \mathbf{x}} \left( \mathbf{g}_0 + \sum_{i=1}^m \mathbf{g}_i u_i \right) = \mathbf{L}_{\mathbf{g}_0} h_j(\mathbf{x}) + \underbrace{\sum_{i=1}^m (\mathbf{L}_{\mathbf{g}_i} h_j(\mathbf{x})) u_i}_{=0} \\
&\dots = \dots = \dots = \dots \\
\frac{d^{(r_j-1)} y_j}{dt^{(r_j-1)}} &= y_j^{(r_j-1)} = \dots = \dots = \mathbf{L}_{\mathbf{g}_0}^{(r_j-1)} h_j(\mathbf{x}) + \underbrace{\sum_{i=1}^m (\mathbf{L}_{\mathbf{g}_i} \mathbf{L}_{\mathbf{g}_0}^{(r_j-2)} h_j(\mathbf{x})) u_i}_{=0} \\
\frac{d^{(r_j)} y_j}{dt^{(r_j)}} &= y_j^{(r_j)} = \dots = \dots = \mathbf{L}_{\mathbf{g}_0}^{(r_j)} h_j(\mathbf{x}) + \underbrace{\sum_{i=1}^m (\mathbf{L}_{\mathbf{g}_i} \mathbf{L}_{\mathbf{g}_0}^{(r_j-1)} h_j(\mathbf{x})) u_i}_{\neq 0}
\end{aligned}
\tag{3.2-26}$$

Ou em termos da variedade

$$M_o = \left\{ \mathbf{x} \in M \mid \text{existe algum } \left( \mathbf{L}_{\mathbf{g}_i} \mathbf{L}_{\mathbf{g}_0}^{(r_j-1)} h_j(\mathbf{x}) \right)_{\substack{i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,m}} \neq 0 \right\},
\tag{3.2-27}$$

diz-se que nesta variedade  $M_o$  a entrada  $u_j$  afeta instantaneamente a saída  $y_j$ .

No caso da existência destes *índices característicos*  $\{\rho_1, \dots, \rho_m\}$  ou números de *grau relativo*  $\{r_1, \dots, r_m\}$ , define-se a *matriz característica* ou *matriz de desacoplamento*  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ :

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{\mathbf{g}_1} \mathbf{L}_{\mathbf{g}_0}^{\rho_1} h_1(\mathbf{x}) & \dots & \mathbf{L}_{\mathbf{g}_m} \mathbf{L}_{\mathbf{g}_0}^{\rho_1} h_1(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{L}_{\mathbf{g}_1} \mathbf{L}_{\mathbf{g}_0}^{\rho_m} h_m(\mathbf{x}) & \dots & \mathbf{L}_{\mathbf{g}_m} \mathbf{L}_{\mathbf{g}_0}^{\rho_m} h_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{\mathbf{g}_1} \mathbf{L}_{\mathbf{g}_0}^{(r_1-1)} h_1(\mathbf{x}) & \dots & \mathbf{L}_{\mathbf{g}_m} \mathbf{L}_{\mathbf{g}_0}^{(r_1-1)} h_1(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{L}_{\mathbf{g}_1} \mathbf{L}_{\mathbf{g}_0}^{(r_m-1)} h_m(\mathbf{x}) & \dots & \mathbf{L}_{\mathbf{g}_m} \mathbf{L}_{\mathbf{g}_0}^{(r_m-1)} h_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}
\tag{3.2-28}$$

Se a matriz característica for *não-singular*, isto é,  $\text{rank}(\mathbf{A}(\mathbf{x})) = m$ , pode-se utilizar o vetor  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ :

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{\mathbf{g}_0}^{r_1} h_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \mathbf{L}_{\mathbf{g}_0}^{r_m} h_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}
\tag{3.2-29}$$

e calcular diretamente as funções da retroalimentação  $\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}$  por:

$$\alpha(\mathbf{x}) = -\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{b}(\mathbf{x})
\tag{3.2-30a}$$

$$\beta(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \quad (3.2-30b)$$

As correspondentes codistribuição  $P^{min}$  e distribuição  $D^{max}$  são :

$$P^{min} = \text{span}\left\{ (dh_1, dL_{\mathbf{g}_0} h_1, \dots, dL_{\mathbf{g}_0}^{(r_1-1)} h_1), \dots, (dh_m, dL_{\mathbf{g}_0} h_m, \dots, dL_{\mathbf{g}_0}^{(r_m-1)} h_m) \right\} \quad (3.2-31a)$$

$$\begin{aligned} D^{max} &= \text{ker}(P^{min}) \\ &= \text{ker}\left(\text{span}\left\{ (dh_1, dL_{\mathbf{g}_0} h_1, \dots, dL_{\mathbf{g}_0}^{(r_1-1)} h_1), \dots, (dh_m, dL_{\mathbf{g}_0} h_m, \dots, dL_{\mathbf{g}_0}^{(r_m-1)} h_m) \right\}\right) \end{aligned} \quad (3.2-31b)$$

Pode-se notar pela equação (3.2-31b) que  $D^{max} \subset \text{ker}(\text{span}\{dh_1, \dots, dh_m\})$ , ou seja, geometricamente diz-se que  $D^{max} = \bigcap_{i=1}^m \bigcap_{k=1}^{r_i} \text{ker}(L_{\mathbf{g}_0}^{(k-1)} dh_i)$ .

Portanto para que a ação de controle  $\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}$  rejeite os distúrbios  $w_1, w_2, \dots, w_\ell$  em um sistema afim em entrada (3.2-20), basta pelas equações (3.2-23) e (3.2-24) que os seus campos vetoriais atendam às condições :

$$\begin{aligned} d_1, d_2, \dots, d_\ell &\in \left( D^{max} = \bigcap_{i=1}^m \bigcap_{k=1}^{r_i} \text{ker}(L_{\mathbf{g}_0}^{(k-1)} dh_i) \right) \\ [d_1, D^{max}], [d_2, D^{max}], \dots, [d_\ell, D^{max}] &\subset \left( D^{max} = \bigcap_{i=1}^m \bigcap_{k=1}^{r_i} \text{ker}(L_{\mathbf{g}_0}^{(k-1)} dh_i) \right) \end{aligned} \quad (3.2-32).$$

A quarta questão importante para o controle é o *problema do desacoplamento de entrada-saída*, cuja análise é similar ao desacoplamento de distúrbios, no sentido de que se  $i \neq j$ , a ação  $u_i$  não deve fazer efeito na resposta  $y_j$ , ou seja,

$$\left( L_{\mathbf{g}_i} \dots L_{X_1} L_{X_2} \dots L_{X_{r-1}} L_{X_r} \dots \right) h_{j \neq i} = 0, \quad (3.2-33)$$

onde  $X_i$  é qualquer um dos campos vetoriais  $\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_m$ .

Esta condição (3.2-33) equivale à existência da distribuição  $D_i^{max}$  (máxima pois existem várias) involutiva de dimensão constante e invariante sob controle tal que  $D_i^{max} \subset \text{ker}(dh_{\neq i}) = \bigcap_{j \neq i} \text{ker}(dh_j)$ . Deve-se ter  $\text{ker}(dh_{\neq i}) \neq 0$ , isto é, a distribuição procurada não deve ser trivial.

Por simplicidade considere o sistema (3.2-5) afim em entrada *quadrado*, isto é, ( $m = p$ ). Considere a distribuição dos campos vetoriais de entrada  $G = \text{span}\{g_1, g_2, \dots, g_m\}$  e as condições usuais de dimensões constantes para as distribuições  $G$ ,  $(G \cap D_i^{\max})$  e  $D_i^{\max}$ .

Considere também que o *fechamento involutivo*  $V_i$  (a menor distribuição involutiva que contém  $\sum_{j \neq i} D_j^{\max}$ ) tem dimensão constante, e que existe a condição de acessibilidade forte:

$$\dim(C_o(\mathbf{x}_0)) = n .$$

Então para os sistemas afins existe uma lei de controle  $\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}$  que faz este desacoplamento de entrada-saída se e somente se existe uma distribuição  $G$  tal que  $G = (G \cap D_1^{\max}) + \dots + (G \cap D_m^{\max})$ . Estas condições equivalentes (condição de *se e somente se*) abrem as possibilidades de se procurar um algoritmo para calcular a distribuição máxima correspondente ao desacoplamento de entrada e saída.

Porém, de modo mais fácil, para um sistema afim em entrada e com a matriz característica  $A(\mathbf{x})$  da equação (3.2-28) bem definida e não-singular, a ação  $\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}$  calculada pela (3.2-30) atende ao desacoplamento de entrada e saída. Isto é, a partir do sistema (3.2-5), aplicando a ação  $\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}$  calculada pela (3.2-30), tem-se :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \left( \mathbf{g}_0(\mathbf{x}(t)) + \sum_{k=1}^m \mathbf{g}_k(\mathbf{x}(t)) \cdot \alpha_k(\mathbf{x}(t)) \right) + \sum_{i=1}^m \left( \sum_{k=1}^m \mathbf{g}_k(\mathbf{x}(t)) \cdot \beta_{ki}(\mathbf{x}(t)) \right) \cdot \mathbf{v}_i(t) \\ &= \tilde{\mathbf{g}}_0(\mathbf{x}(t)) + \sum_{i=1}^m \tilde{\mathbf{g}}_i(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{v}_i(t) \end{aligned} \quad (3.2-34)$$

Como é provado que vale a igualdade

$$L_{\tilde{\mathbf{g}}_0}^k h_j = L_{\mathbf{g}_0}^k h_j, \quad k = 1, 2, \dots, (r_i - 1), \quad (3.2-35)$$

o novo sistema resultante da retroalimentação tem a matriz característica :

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \beta(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} L_{\tilde{\mathbf{g}}_1} L_{\tilde{\mathbf{g}}_0}^{(r_1-1)} h_1(\mathbf{x}) & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & & L_{\tilde{\mathbf{g}}_m} L_{\tilde{\mathbf{g}}_0}^{(r_m-1)} h_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (3.2-36)$$

Ou seja, o sistema é desacoplado e tem-se  $(y_i^{(r_i)} = v_i)$ .

Qual a conexão entre as *distribuições* (ou campos vetoriais) *involutivas invariantes sob controle desacoplada de distúrbios* e as *variedades topológicas* (ou órbitas) ?

Pelo Teorema de Frobenius, à uma distribuição involutiva corresponde uma variedade integral (não é única). Vamos analisar no sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ . Para sistemas afins em entrada basta substituir  $L_{\mathbf{f}}^k h_i(\mathbf{x})$  por  $L_{\mathbf{g}_0}^k h_i(\mathbf{x})$  com  $\rho_j = (r_j - 1)$ .

Conforme já citado anteriormente, dada uma distribuição  $D$   $f$ -invariante ( $[f, D] \subset D$  ou a equação (3.2-8)) existem variedades integrais  $N$  ditas  $f$ -invariantes pois  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})|_{\mathbf{x} \in N} \in T_{\mathbf{x}}N$ . Considere uma distribuição  $D$  que é invariante sob controle, isto é, existe  $\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  tal que  $[\tilde{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}), D] = [f(\mathbf{x}, \gamma(\mathbf{x}, \mathbf{v})), D] \subset D$  (ou a equação (3.2-18)).

Então existem variedades integrais  $N$  ditas *invariantes sob controle* pois  $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \mathbf{v})|_{\mathbf{x} \in N} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \gamma(\mathbf{x}, \mathbf{v}))|_{\mathbf{x} \in N} \in T_{\mathbf{x}}N$ . (porém dado  $\dim(T_{\mathbf{x}}N + G)$  constante, basta  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})|_{\mathbf{x} \in N} \in T_{\mathbf{x}}N$ ).

Interessa-nos a distribuição máxima  $D^{max}$  involutiva de dimensão constante e invariante sob controle que está contida em  $\ker(dh)$ , isto é,  $D^{max} \subset \ker(dh)$ . A esta distribuição corresponde a variedade integral máxima da dinâmica de zero  $Z^{max}$  contida no conjunto que resulta em  $h(0) = 0$ , isto é,  $Z^{max} \subset h^{-1}(0)$ .

Lembrando que para os sistemas com números característicos  $\rho_j \geq -1$  bem definidos :

$$\left[ \frac{\partial_{\mathbf{f}}^k h_j(\mathbf{x})}{\partial u_1} \quad \dots \quad \frac{\partial_{\mathbf{f}}^k h_j(\mathbf{x})}{\partial u_m} \right] = 0 \text{ para todos } k = 0, 1, 2, \dots, \rho_j \quad (3.2-37a)$$

$$\left[ \frac{\partial_{\mathbf{f}}^{(\rho_j+1)} h_j(\mathbf{x})}{\partial u_1} \quad \dots \quad \frac{\partial_{\mathbf{f}}^{(\rho_j+1)} h_j(\mathbf{x})}{\partial u_m} \right] \neq 0 \text{ (existe um elemento não-zero)} \quad (3.2-37b)$$

tem-se a matriz característica :

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial_{\mathbf{f}}^{(\rho_1+1)} h_1(\mathbf{x})}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial_{\mathbf{f}}^{(\rho_1+1)} h_1(\mathbf{x})}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial_{\mathbf{f}}^{(\rho_m+1)} h_m(\mathbf{x})}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial_{\mathbf{f}}^{(\rho_m+1)} h_m(\mathbf{x})}{\partial u_m} \end{bmatrix} \quad (3.2-38)$$

Se  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  é não singular, isto é,  $\text{rank}(\mathbf{A}(\mathbf{x})) = m$ , então existe a ação de controle  $\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{v})$

Para esta matriz característica bem definida, tem-se a *máxima distribuição* :

$$D^{max} = \ker\left(\text{span}\left\{\left(dh_1, dL_f h_1, \dots, dL_f^{(\rho_1)} h_1\right), \dots, \left(dh_m, dL_f h_m, \dots, dL_f^{(\rho_m)} h_m\right)\right\}\right) \quad (3.2-39)$$

para a qual tem-se a *máxima variedade integral de zero* correspondente :

$$Z^{max} = \left\{ \mathbf{x} \mid h_1 = 0, L_f h_1 = 0, \dots, L_f^{(\rho_1)} h_1 = 0, \dots, h_m = 0, L_f h_m = 0, \dots, L_f^{(\rho_m)} h_m = 0 \right\} \quad (3.2-40)$$

Portanto a análise apresentada no presente texto através da distribuição  $D^{max}$  obviamente poderia ser feita através da variedade  $Z^{max}$ . Dos muitos trabalhos relativos ao assim chamado pelo Isidori(1990) de *Algoritmo da Variedade da Dinâmica de Zero* (análise e construção de  $Z^{max}$ ), pode-se ver DiBenedetto(1990) e Byrnes e Isidori(1991) para os sistemas afins.

Assim, no sistema afim em entrada com a retroalimentação  $\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}$ , para a distribuição  $D^{max}$  assim construída, deve existir uma transformação de variáveis em coordenadas locais,  $\mathbf{z} = (\mathbf{z}^1, \mathbf{z}^2)$ , tais que

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}^1 &= \tilde{\mathbf{g}}_0^1(\mathbf{z}^1, \mathbf{z}^2) + \sum_{i=1}^m \tilde{\mathbf{g}}_i(\mathbf{z}^1, \mathbf{z}^2) \cdot v_i \\ \dot{\mathbf{z}}^2 &= \tilde{\mathbf{g}}_0^2(\mathbf{z}^2) \end{aligned} \quad (3.2-41)$$

onde  $\dot{\mathbf{z}}^2$  é a parcela da dinâmica não-controlável a partir de  $\mathbf{v}$  e é chamada de *dinâmica de zero*.

Relembrando a transformação de coordenadas locais  $\mathbf{S}(\mathbf{x})$  pela equação (3.1-8), como é possível ter o sistema dinâmico não linear transformado em um sistema linear ? Ou seja, quando é possível obter uma *linearização exata* ou *linearização por uma retroalimentação*  $\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  ? Em sistemas afins em entrada com a matriz característica bem definida, considere as novas coordenadas definidas por :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z}^1 \\ \mathbf{z}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}^1(\mathbf{x}) \\ \mathbf{S}^2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(\mathbf{x}) \\ \dots \\ \mathbf{L}_{\mathbf{g}_0}^{(r_1-1)} h_1(\mathbf{x}) \\ \dots \\ h_m(\mathbf{x}) \\ \dots \\ \mathbf{L}_{\mathbf{g}_0}^{(r_m-1)} h_m(\mathbf{x}) \\ \mathbf{S}^2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (3.2-42)$$

Note-se que foi adotada como a função de transformação  $\mathbf{S}^1(\mathbf{x})$  justamente aqueles elementos que deveriam compor a variedade integral máxima da dinâmica de zero  $\mathcal{Z}^{max}$ . Considere o sistema quadrado afim em entrada da equação (3.2-5) com a retroalimentação  $\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}$  da equação (3.2-30). Neste caso, o sistema (3.2-34) nas novas coordenadas  $\mathbf{z} = (\mathbf{z}^1, \mathbf{z}^2)$  tem a forma :

$$\dot{\mathbf{z}}^1 = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}\mathbf{v} \quad (3.2-43a)$$

$$\dot{\mathbf{z}}^2 = \mathbf{f}(\mathbf{z}^1, \mathbf{z}^2) \quad (3.2-43b)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{z}^1 \quad \text{pois pela (3.2-42) tem-se} \quad \begin{cases} y_1 = z_1^1 = h_1(\mathbf{x}) \\ \dots = \dots \\ y_m = z_{(r_1-1)+\dots+(r_{m-1}-1)+1}^1 = h_m(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (3.2-44)$$

onde as matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são matrizes canônicas de Brunovsky da teoria de sistemas lineares.

Esta linearização exata, chamada de *forma normal* pelo Isidori(1989), foi muito útil para a análise da dinâmica forçada de zero (valores de  $\mathbf{u}$  que geram  $\mathbf{y}$  prescritos), da dinâmica não-forçada de zero (valores de  $\mathbf{u}$  que geram  $\mathbf{y}=\mathbf{0}$ ), dos zeros ao infinito, dos operadores de inversas à esquerda, dos operadores de inversa à direita e outros, *em analogia aos sistemas lineares* e seus zeros de bloqueio, zeros de transmissão, zeros ao infinito, mapas inversos, e outros .

Atualmente o conceito da *linearização exata* é melhor entendido pelo conceito da *equivalência às formas primas* tal como em Marino et al.(1994). Antes de considerar uma linearização exata, é conveniente saber quando um sistema linear é equivalente ao sistema originalmente considerado. Sejam dois sistemas afins em entrada :

$$\Sigma_{\mathbf{x}} \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}_{\mathbf{x}0}(\mathbf{x}) + \sum \mathbf{g}_{\mathbf{x}i}(\mathbf{x})u_i \\ y_{xj} = h_{xj}(\mathbf{x}) \end{cases}, \quad \Sigma_{\mathbf{z}} \begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) = \mathbf{g}_{\mathbf{z}0}(\mathbf{z}) + \sum \mathbf{g}_{\mathbf{z}i}(\mathbf{z})u_i \\ y_{zj} = h_{zj}(\mathbf{z}) \end{cases} \quad (3.2-45)$$

O sistema  $\Sigma_x$ , com  $\mathbf{x} \in M_x$ ,  $\mathbf{y}_x \in W_x$  e o ponto de equilíbrio  $(\mathbf{x}_0 | \mathbf{f}_x(\mathbf{x}_0) = 0)$ , é equivalente ao sistema  $\Sigma_z$ , com  $\mathbf{z} \in M_z$ ,  $\mathbf{y}_z \in W_z$  e o ponto de equilíbrio  $(\mathbf{z}_0 | \mathbf{f}_z(\mathbf{z}_0) = 0)$ , se existem :

- (1). um difeomorfismo  $\varphi: M_x \rightarrow M_z$  com  $\varphi(\mathbf{x}_0) = \mathbf{z}_0$  ;
- (2). uma retroalimentação  $\gamma: M_x \rightarrow M_x$ ,  $\mathbf{u} = \gamma(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}$  com  $\alpha(\mathbf{x}_0) = 0$  e  $\det(\beta(\mathbf{x})) \neq 0$  ;
- (3). um difeomorfismo  $\psi: W_x \rightarrow W_z$  com  $\psi(\mathbf{h}_x(\mathbf{x}_0)) = \mathbf{h}_z(\mathbf{z}_0)$ , isto é,  $\psi(\mathbf{y}_{x_0}) = \mathbf{y}_{z_0}$  ;

tais que o sistema  $\Sigma_x$  definido na variedade  $M_x$ , sob as transformações  $(\varphi, \gamma, \psi)$ , resulta em um novo sistema definido em  $M_z$ , que é igual ao  $\Sigma_z$ .

Note-se que  $\gamma$  é o único difeomorfismo na própria variedade  $M_x$ . (1) é transformação de estado via mudança de coordenadas locais, (2) é a transformação do estado via retroalimentação, e (3) é a transformação dos mapas de saída via mudança de coordenadas.

A denominada *linearização total de um sistema não-linear*  $\Sigma_x$  significa a transformação deste sistema em um sistema linear primo  $\Sigma_p$  :

$$\Sigma_p \begin{cases} \dot{z}_{j1} = z_{j2} \\ \vdots \\ \dot{z}_{j(\kappa_j-1)} = z_{j\kappa_j} \\ \dot{z}_{j\kappa_j} = u_j \\ y_j = z_{j1} \end{cases}, \quad j = 1, \dots, m \quad (3.2-46)$$

onde  $\kappa_j$  são as ordens dos zeros ao infinito ou os graus relativos e coincidem com os índices de controlabilidade e observabilidade. Se não for necessário impor a linearização dos mapas de saída  $(y_j = z_{j1})$ , tem-se a linearização exata do estado.

Diz-se que um sistema linear  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$  tem  $(\ell)$  zeros ao infinito de ordem  $n_1, \dots, n_\ell$  se a função  $G(1/s)$  tem  $(\ell)$  zeros de ordem  $n_1, \dots, n_\ell$  em  $s = 0$ .

A *linearização da entrada-saída* significa a transformação deste sistema  $\Sigma_x$  em um sistema primo em entrada-saída  $\Sigma_{P/E/S}$  :

$$\Sigma_{P_{E/S}} \left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_{j1}^1 = z_{j2}^1 \\ \vdots \\ \dot{z}_{j(\mu_j-1)}^1 = z_{j\mu_j}^1 \\ \dot{z}_{j\mu_j}^1 = u_j \end{array} \right. , \quad j = 1, \dots, m \quad (3.2-47)$$

$$\dot{z}^2 = a(z^1, z^2) + \sum_{i=1}^m b_i(z^1, z^2) \cdot u_i$$

$$y_j = z_{j1}^1$$

onde  $\mu_j$  são as ordens dos zeros ao infinito ou os graus relativos e coincidem com os índices de observabilidade. Se  $\dot{z}^2 = a(z^2, y)$  tem-se o caso de sistema primo em entrada-saída com forma especial.

Agora, considere a sequência das distribuições :

$$(i) \quad G^1 = G = \text{span}\{g_1, \dots, g_m\} ; \quad G^{k+1} = G^k + [g_0, G^k]$$

$$(ii) \quad S^1 = G = \text{span}\{g_1, \dots, g_m\} ; \quad S^{k+1} = S^k + \sum_{i=0}^m [g_i, (S^k \cap \ker(dh))] ; \quad S^{min} = \bigcup_{k \geq 1} S^k$$

$$(iii) \quad D^k = \ker(P^k) ; \quad D^{max} = \ker(P^{min})$$

e a sequência das codistribuições

$$(iv) \quad P^1 = dh ; \quad P^{k+1} = P^k + \sum_{i=0}^m L_{g_i} (P^k \cap \text{ann}(G)) , \quad P^{min} = \bigcup_{k \geq 1} P^k$$

Assim, um sistema não-linear  $\Sigma_x$  é equivalente ao sistema linear primo  $\Sigma_p$ , isto é,  $\Sigma_x$  é *linearizável totalmente* se (e somente se) as distribuições  $G^1, \dots, G^{(n-1)}$ ,  $(G^1 + \ker(dh)), \dots, (G^{(n-1)} + \ker(dh))$  são involutivas de dimensão constante, e se (e somente se) valem  $(G^1 = S^1), \dots, (G^n = S^n)$ , e  $G^n = \mathbf{TM}_x$ .

Um sistema não-linear  $\Sigma_x$  é equivalente ao sistema primo em entrada-saída  $\Sigma_{P_{E/S}}$ , isto é,  $\Sigma_x$  é *linearizável em entrada-saída* se (e somente se) as codistribuições  $P^1, \dots, P^n$  e as distribuições  $(G^1 + D^{max}), \dots, (G^{(n-1)} + D^{max})$  possuem dimensões constantes, e as distribuições  $(G^1 + \ker(dh)), \dots, (G^{(n-1)} + \ker(dh))$  são involutivas de dimensão constante, e se (e somente se) valem  $(G^1 + D^{max} = S^1), \dots, (G^n + D^{max} = S^n)$ , e  $(G^n + D^{max}) = \mathbf{TM}_x$ .

Foram apresentados aqui os conceitos mais caros ao controle não linear geométrico. Na tentativa de mostrar que, apesar de uma nomenclatura nova e árida para a Engenharia de Processos Químicos, as motivações para a linguagem em geometria diferencial são simples e claras, cometeu-se aqui uma série de abusos de descrição formal.

O primeiro exemplo do abuso mais aparente é a falta da descrição das condições para a existência das funções. Para todos os efeitos práticos, caso se manipule uma função é porque existem todas as condições de domínio e de contradomínio para tanto, e se necessário, existe a condição da função injetora e de difeomorfismo.

O segundo exemplo do abuso é a falta da definição de quando um resultado é local ou global. Considerou-se sempre que existe um ponto de equilíbrio,  $\{x_0 | f(x_0) = 0\}$  e que sempre existe uma variedade que é uma vizinhança aberta em torno de  $x_0$ , na qual valem os resultados aqui apresentados. Ou seja, de imediato interessa-nos apenas os resultados locais.

Também muitas vezes apresentam-se as condições apenas na forma que nos interessa, mesmo que na realidade sejam condições equivalentes, isto é, condições de (*se e somente se*) muitas vezes são apresentados apenas como uma condição de suficiência (*se*) ou de necessidade (*somente se*).

#### 4. CONTROLE NÃO LINEAR GEOMÉTRICO DA COLUNA DE DESTILAÇÃO.

##### 4.1. MODELO DINÂMICO DA COLUNA DE DESTILAÇÃO BINÁRIA.

Nas colunas de destilação a vácuo, onde as pressões absolutas e as diferenças de pressões nos pratos variam significativamente, a representação exige um modelo dinâmico rigoroso que leve em conta a pressão hidráulica na coluna.

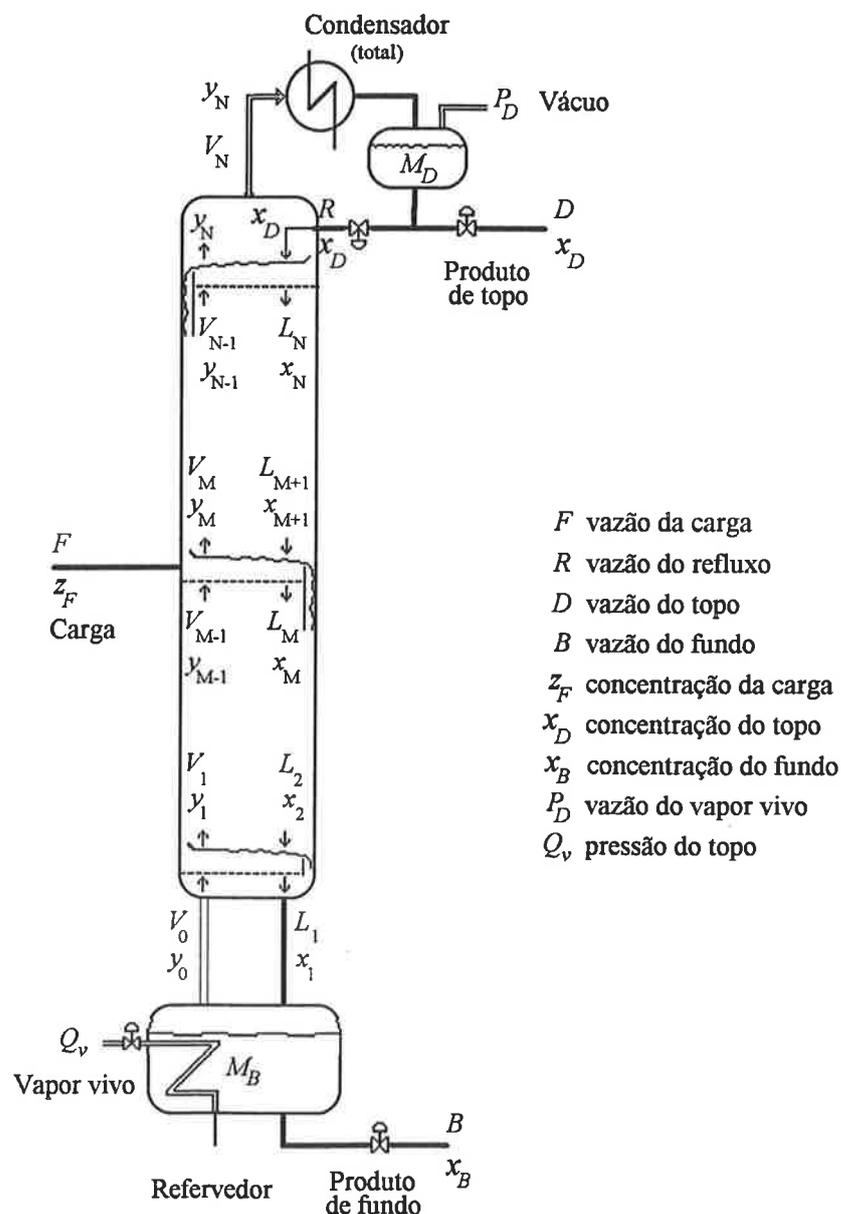


Figura 4.1 Coluna de destilação binária com pressão variável e condensação total.

Maiores detalhes do modelo dinâmico de destilação de tolueno/*o*-xileno podem ser vistos em Luyben(1990). Detalhes descritivos das colunas de destilação podem ser vistos em Kister(1990).

A dinâmica da coluna de destilação binária de condensação total de destilado com variação de retenção nos pratos e variação de pressão é representada por :

### EQUAÇÕES DAS DINÂMICAS :

Refervedor ( $k=0$ ) :

$$\frac{d(M_B)}{dt} = L_1 - B - V_0 \quad (4.1-1a)$$

$$\frac{d(M_B x_B)}{dt} = L_1 x_1 - B x_B - V_0 y_0 \quad (4.1-1b)$$

$$\frac{d(M_B h_B)}{dt} = L_1 h_1 - B h_B - V_0 H_0 + (dh_v) Q_v \quad (4.1-1c)$$

Seção de Esgotamento - primeiro prato ( $k=1$ ) :

$$\frac{d(M_1)}{dt} = L_2 + V_0 - L_1 - V_1 \quad (4.1-1d)$$

$$\frac{d(M_1 x_1)}{dt} = L_2 x_2 + V_0 y_0 - L_1 x_1 - V_1 y_1 \quad (4.1-1e)$$

$$\frac{d(M_1 h_1)}{dt} = L_2 h_2 + V_0 H_0 - L_1 h_1 - V_1 H_1 \quad (4.1-1f)$$

Esgotamento ( $k=2, \dots, (M-1)$ ) :

$$\frac{d(M_k)}{dt} = L_{k+1} + V_{k-1} - L_k - V_k \quad (4.1-1g)$$

$$\frac{d(M_k x_k)}{dt} = L_{k+1} x_{k+1} + V_{k-1} y_{k-1} - L_k x_k - V_k y_k \quad (4.1-1h)$$

$$\frac{d(M_k h_k)}{dt} = L_{k+1} h_{k+1} + V_{k-1} H_{k-1} - L_k h_k - V_k H_k \quad (4.1-1i)$$

Alimentação ( $k=M$ ) :

$$\frac{d(M_M)}{dt} = L_{M+1} + V_{M-1} - L_M - V_M + F \quad (4.1-1j)$$

$$\frac{d(M_M x_M)}{dt} = L_{M+1} x_{M+1} + V_{M-1} y_{M-1} - L_M x_M - V_M y_M + F z_F \quad (4.1-1k)$$

$$\frac{d(M_M h_M)}{dt} = L_{M+1} h_{M+1} + V_{M-1} H_{M-1} - L_M h_M - V_M H_M + F h_F \quad (4.1-1l)$$

Retificação ( $k=(M+1), \dots, (N-1)$ ) :

$$\frac{d(M_k)}{dt} = L_{k+1} + V_{k-1} - L_k - V_k \quad (4.1-1m)$$

$$\frac{d(M_k x_k)}{dt} = L_{k+1} x_{k+1} + V_{k-1} y_{k-1} - L_k x_k - V_k y_k \quad (4.1-1n)$$

$$\frac{d(M_k h_k)}{dt} = L_{k+1} h_{k+1} + V_{k-1} H_{k-1} - L_k h_k - V_k H_k \quad (4.1-1o)$$

Retificação último prato ( $k=N$ ) :

$$\frac{d(M_N)}{dt} = R + V_{N-1} - L_N - V_N \quad (4.1-1p)$$

$$\frac{d(M_N x_N)}{dt} = R x_D + V_{N-1} y_{N-1} - L_N x_N - V_N y_N \quad (4.1-1q)$$

$$\frac{d(M_N h_N)}{dt} = R h_D + V_{N-1} H_{N-1} - L_N h_N - V_N H_N \quad (4.1-1r)$$

Condensador total (não é estágio) :

$$\frac{d(M_D)}{dt} = V_N - (R + D) \quad (4.1-1s)$$

$$\frac{d(M_D x_D)}{dt} = V_N y_N - (R + D) x_D \quad (4.1-1t)$$

onde  $M_B$ ,  $M_D$ ,  $M_k$  indicam a massa de líquido no refeedor, no tanque do condensador de topo e no  $k$ -ésimo prato. A variável  $B$  é a vazão de retirada do produto de fundo com a concentração do composto mais volátil  $x_B$  e entalpia específica  $h_B$ . A variável  $D$  é a vazão de retirada de produto de topo com a concentração do composto mais volátil  $x_D$  e entalpia específica  $h_D$ . A variável  $R$  é a vazão de refluxo com a concentração do composto mais volátil  $x_D$  e entalpia específica  $h_D$ . As variáveis  $L_k$ ,  $x_k$ ,  $h_k$  são a vazão, concentração do mais volátil, e entalpia específica do líquido que sai do  $k$ -ésimo estágio e  $V_k$ ,  $y_k$ ,  $H_k$  são a vazão, concentração do mais volátil, e entalpia específica do vapor que sai do  $k$ -ésimo estágio. O refeedor é aquecido com vapor vivo de vazão  $Q_v$  e entalpia ( $dh_v$ ) e portanto a carga térmica no refeedor corresponde ao ( $dh_v Q_v$ ). A carga de alimentação ocorre no  $M$ -ésimo prato com vazão  $F$ , concentração  $z_F$  e entalpia específica  $h_F$ .

### EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS :

A massa molecular média do líquido em cada prato ( $k=0,1,\dots,N$ ) é dada por :

$$M_k^{avg} = x_k M^1 + (1 - x_k) M^2 \quad (4.1-2a)$$

onde  $M^1$  é a massa molecular do composto mais volátil e  $M^2$  é a massa molecular do composto menos volátil.

A altura total do líquido em cada prato é dada por :

$$h_k^{tot} = \frac{M_k M_k^{avg}}{\rho_{sp} \rho_{ag} A_p} \quad (4.1-2b)$$

onde por simplicidade podemos considerar a densidade específica do líquido  $\rho_{sp}$  e a massa específica da água  $\rho_{ag}$  constantes.

A altura do líquido em cima do vertedouro é simplesmente a diferença entre a altura total do líquido e a altura  $h^w$  do vertedouro :

$$h_k^{ow} = h_k^{tot} - h^w \quad (4.1-2c)$$

Assim, a vazão do líquido nos pratos ( $k=1,2,\dots,N$ ) é dada pela equação de Francis :

$$L_k = 3,33 (60) (3,281 L^w) (3,281 h_k^{ow})^{1,5} \left( \frac{28,32 \rho_{sp}}{M_k^{avg}} \right) \quad (4.1-2d)$$

onde  $L^w$  é o comprimento do vertedouro.

A partir de  $x_k$  e  $h_k$  pode-se calcular a temperatura  $T_k$  para  $k=0,1,2,\dots,N$  incluindo o refeedor :

$$T_k = \frac{h_k + x_k M^1 c^1 T_b^1 + (1 - x_k) M^2 c^2 T_b^2}{x_k M^1 c^1 + (1 - x_k) M^2 c^2} \quad (4.1-2e)$$

onde, para o componente (1) mais volátil e o componente (2) menos volátil, (c) indica o calor específico e  $T_b$  indica a temperatura de ebulição.

Com a temperatura  $T_k$  determinam-se as pressões parciais  $p_k^1$ ,  $p_k^2$  e a pressão total  $P_k$  no prato ( $k=0,1,\dots,N$ ) por cálculo de ponto de bolha :

$$p_k^1 = \exp\left(\frac{A_1}{T_k + 273} + B_1\right) \quad (4.1-2f)$$

$$p_k^2 = \exp\left(\frac{A_2}{T_k + 273} + B_2\right) \quad (4.1-2g)$$

$$P_k = x_k p_k^1 + (1 - x_k) p_k^2 \quad (4.1-2h)$$

onde  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $A_2$ ,  $B_2$  são os constantes de Antoine.

Assim a concentração do componente mais volátil em fase vapor no refervedor e nos pratos ( $k=0,1,2,\dots,N$ ) são dados por equilíbrio ideal :

$$y_k = \frac{x_k p_k^1}{P_k} \quad (4.1-2i)$$

A massa específica da fase vapor em cada estágio ( $k=0,1,2,\dots,(N-1)$ ) é considerada com a relação de gases ideais :

$$\rho_k^v = \frac{P_{k+1}}{R_G (T_k + 273)} \quad (4.1-2j)$$

A queda de pressão entre um estágio e outro ( $k=0,1,2,\dots,(N-1)$ ) é calculada por :

$$dP_k = P_k - P_{k+1} - h_{k+1}^{tot} \rho_p 73,06 \quad (4.1-2k)$$

Assim a vazão do vapor em cada estágio ( $k=0,1,2,\dots,(N-1)$ ) é dado por :

$$V_k = \left(\frac{dP_k}{\rho_k^v K_{dh}}\right)^{1/2} (60) \rho_k^v A_h \quad (4.1-2l)$$

onde  $K_{dh}$  é o coeficiente de perda de pressão em cada prato e  $A_h$  é a área correspondente aos furos no prato.

No último estágio ( $k=N$ ) a vazão é calculada por :

$$V_N = K_N \left( \frac{P_N - P_D}{4} \right)^{1/2} \quad (4.1-2m)$$

A entalpia específica  $H_k$  do vapor em cada estágio ( $k=0,1,\dots,N$ ) é calculado por :

$$H_k = y_k M^1 (c^1 (T_k - T_b^1) + dh_1) + (1 - y_k) M^2 (c^2 (T_k - T_b^2) + dh_2) \quad (4.1-2n)$$

onde  $dh_1$  e  $dh_2$  são as entalpias específicas de evaporação do componente (1) e (2) .

E a entalpia específica  $h_D$  do líquido do refluxo, se em condições de líquido saturado, pode ser calculado determinando antes a temperatura  $T_D$  tal que :

$$x_D \exp \left( \frac{A_1}{T_D + 273} + B_1 \right) + (1 - x_D) \exp \left( \frac{A_2}{T_D + 273} + B_2 \right) = P_D \quad (4.1-2o)$$

$$h_D = x_D M^1 c^1 (T_k - T_b^1) + (1 - x_D) M^2 c^2 (T_k - T_b^2) \quad (4.1-2p)$$

Porém efetivamente no presente caso a entalpia  $h_D$  pode ser considerada uma perturbação que entra no processo.

Tabela 4.I. NOMENCLATURA E VALORES EM ESTADO ESTACIONÁRIO.

$A_h$	1,233 $m^2$	área dos furos do prato.
$A_p$	12,33 $m^2$	área do prato.
$A_1$	-4346,157	constante de Antoine para componente mais volátil (tolueno).
$A_2$	-4802,433	constante de Antoine para componente menos volátil (o-xileno).
$B$	$kmol/min$	vazão da retirada do líquido do fundo.
$B_1$	17,98086	constante de Antoine para componente mais volátil (tolueno).
$B_2$	18,15414	constante de Antoine para componente menos volátil (o-xileno).
$c^1$	0,5 $kcal/(kg^\circ C)$	calor específico componente mais volátil (tolueno).
$c^2$	0,5 $kcal/(kg^\circ C)$	calor específico componente menos volátil (o-xileno).
$F$	$kmol/min$	vazão da alimentação.
$D$	$kmol/min$	vazão da retirada do líquido do topo.
$dh_1$	86,8 $kcal/kg$	entalpia específica de evaporação do componente mais volátil (tolueno).
$dh_2$	82,9 $kcal/kg$	entalpia específica de evaporação do componente menos volátil (o-xileno).
$dh_v$	527,7 $kcal/kg$	entalpia específica de condensação do vapor vivo.
$h_B$	$kcal/kg$	entalpia específica do líquido no refeedor.
$h_D$	$kcal/kg$	entalpia específica do líquido no tanque do topo.

$h_F$	$kcal/kg$	entalpia específica da alimentação.
$h_k$	$kcal/kg$	entalpia específica do líquido em cada prato.
$H_k$	$kcal/kg$	entalpia específica do vapor em cada prato.
$h^w$	$0,0306\ m$	altura do retentor ("weir").
$h_k^{ow}$	$m$	altura do líquido acima do retentor em cada prato.
$h_k^{tot}$	$m$	altura total do líquido em cada prato.
$K_{dh}$	$0,134\ mmHg\ m^3s^2/(kmol\ m)$	coeficiente de perda de pressão no prato.
$L_k$	$kmol/min$	vazão do líquido que sai de cada prato.
$L^w$	$3,78\ m$	comprimento do retentor ("weir").
$M_B$	$kmol$	retenção ("hold-up") de líquido no refeedor.
$M_D$	$kmol$	retenção ("hold-up") de líquido no tanque do topo.
$M_k$	$kmol$	retenção ("hold-up") de líquido em cada prato.
$M_k^{avg}$	átomo – grama	massa molecular média do líquido em cada prato.
$M^1$	$92,1\ atm-gr$	massa molecular do componente mais volátil (tolueno).
$M^2$	$92,1\ atm-gr$	massa molecular do componente menos volátil (o-xileno).
$M$	(índice)	( $k=M$ representa o prato onde entra a carga de alimentação).
$N$	(índice)	número total de estágios ( $k=0$ : o refeedor ; $k=N$ : o último prato).
$P_D$	$mmHg$	pressão absoluta no tanque de topo da coluna.
$P_k$	$mmHg$	pressão absoluta total em cada estágio da coluna.
$p_k^1$	$mmHg$	pressão parcial do componente mais volátil (tolueno) em cada estágio.
$p_k^2$	$mmHg$	pressão parcial do componente menos volátil (o-xileno) em cada estágio.
$dP_k$	$mmHg$	queda de pressão entre um estágio e o seguinte estágio.
$Q_v$	$kg/min$	vazão do vapor vivo de aquecimento do refeedor.
$R$	$kmol/min$	vazão do líquido de refluxo.
$R_G$	$62,36\ mmHg\ m^3/(kmol\ ^\circ C)$	constante universal de gases.
$T_B$	$^\circ C$	temperatura no refeedor.
$T_D$	$^\circ C$	temperatura no tanque do topo.
$T_F$	$^\circ C$	temperatura da carga de alimentação.
$T_k$	$^\circ C$	temperatura em cada prato.
$T_b^1$	$110,8\ ^\circ C$	temperatura de ebulição do componente mais volátil (tolueno) puro.
$T_b^2$	$144,0\ ^\circ C$	temperatura de ebulição do componente menos volátil (o-xileno) puro.
$V_k$	$kmol/min$	vazão do vapor que sai de cada prato.
$x_B$	(fração)	fração molar do componente mais volátil no refeedor.
$x_D$	(fração)	fração molar do componente mais volátil no tanque do topo.
$x_k$	(fração)	fração molar do comp. mais volátil no líquido de cada prato.
$y_k$	(fração)	fração molar do componente mais volátil no vapor de cada prato.
$z_F$	(fração)	fração molar do componente mais volátil na alimentação.
$\rho_{sp}$	$0,85$	peso específico do líquido.
$\rho_{ag}$	$1000,0\ kg/m^3$	massa específica da água.
$\rho_k^v$	$kg/m^3$	massa específica do vapor em cada estágio.

COLUNA DE 30 PRATOS COM ALIMENTAÇÃO NO DÉCIMO QUARTO PRATO :  $F=18,0$ ;  
 $z_F=0,33$ ;  $h_F=1983,37$ ;  $T_F=95,0$ ;  $P_D=90,0$ ;  $B=12,06233$ ;  $Q_v=286,7018$ ;  $R=13,29173$ ;  $D=5,935123$

$M_B = 89,720000$	$x_B = 0,0005$	$h_B = -1983,045$	$T_B = 106,63$
$M_1 = 7,197135$	$x_1 = 0,00102487$	$h_1 = -2017,767$	$T_1 = 105,96$
$M_2 = 7,192684$	$x_2 = 0,00188311$	$h_2 = -2053,507$	$T_2 = 105,26$
$M_3 = 7,188279$	$x_3 = 0,00328434$	$h_3 = -2090,501$	$T_3 = 104,51$
$M_4 = 7,184013$	$x_4 = 0,00556505$	$h_4 = -2129,101$	$T_4 = 103,71$
$M_5 = 7,180042$	$x_5 = 0,00925651$	$h_5 = -2169,819$	$T_5 = 102,82$
$M_6 = 7,176631$	$x_6 = 0,0151740$	$h_6 = -2213,356$	$T_6 = 101,79$
$M_7 = 7,174216$	$x_7 = 0,0245092$	$h_7 = -2260,580$	$T_7 = 100,58$
$M_8 = 7,173512$	$x_8 = 0,0388631$	$h_8 = -2312,302$	$T_8 = 99,10$
$M_9 = 7,175595$	$x_9 = 0,0600748$	$h_9 = -2368,749$	$T_9 = 97,28$
$M_{10} = 7,181857$	$x_{10} = 0,0896389$	$h_{10} = -2428,727$	$T_{10} = 95,09$
$M_{11} = 7,193552$	$x_{11} = 0,127639$	$h_{11} = -2489,106$	$T_{11} = 92,57$
$M_{12} = 7,210803$	$x_{12} = 0,171686$	$h_{12} = -2545,730$	$T_{12} = 89,88$
$M_{13} = 7,231705$	$x_{13} = 0,216985$	$h_{13} = -2595,844$	$T_{13} = 87,23$
$M_{14} = 7,252671$	$x_{14} = 0,258130$	$h_{14} = -2639,869$	$T_{14} = 84,82$ M=14
$M_{15} = 5,393659$	$x_{15} = 0,257856$	$h_{15} = -2675,695$	$T_{15} = 84,13$
$M_{16} = 5,396547$	$x_{16} = 0,258658$	$h_{16} = -2712,470$	$T_{16} = 83,38$
$M_{17} = 5,400807$	$x_{17} = 0,261704$	$h_{17} = -2750,139$	$T_{17} = 82,53$
$M_{18} = 5,407850$	$x_{18} = 0,269350$	$h_{18} = -2788,409$	$T_{18} = 81,49$
$M_{19} = 5,420528$	$x_{19} = 0,286195$	$h_{19} = -2826,205$	$T_{19} = 80,10$
$M_{20} = 5,444375$	$x_{20} = 0,320522$	$h_{20} = -2859,980$	$T_{20} = 78,10$
$M_{21} = 5,489013$	$x_{21} = 0,384759$	$h_{21} = -2879,655$	$T_{21} = 75,17$
$M_{22} = 5,566826$	$x_{22} = 0,490141$	$h_{22} = -2864,897$	$T_{22} = 71,19$
$M_{23} = 5,681990$	$x_{23} = 0,630695$	$h_{23} = -2798,488$	$T_{23} = 66,66$
$M_{24} = 5,813834$	$x_{24} = 0,772598$	$h_{24} = -2700,890$	$T_{24} = 62,53$
$M_{25} = 5,926095$	$x_{25} = 0,879263$	$h_{25} = -2622,625$	$T_{25} = 59,42$
$M_{26} = 6,000130$	$x_{26} = 0,942277$	$h_{26} = -2590,292$	$T_{26} = 57,23$
$M_{27} = 6,041664$	$x_{27} = 0,974125$	$h_{27} = -2597,333$	$T_{27} = 55,60$
$M_{28} = 6,063760$	$x_{28} = 0,988894$	$h_{28} = -2628,731$	$T_{28} = 54,23$
$M_{29} = 6,076163$	$x_{29} = 0,995446$	$h_{29} = -2673,899$	$T_{29} = 52,94$
$M_{30} = 6,084198$	$x_{30} = 0,998286$	$h_{30} = -2727,428$	$T_{30} = 51,65$
$M_D = 65,000000$	$x_D = 0,999500$	$h_D = -2828,636$	$T_D = 49,39$

COLUNA DE 08 PRATOS COM ALIMENTAÇÃO NO TERCEIRO PRATO :  $F=18,119$ ;  
 $z_F=0,328062$ ;  $h_F=1987,01$ ;  $T_F=95,0$ ;  $P_D=90,0$ ;  $B=12,5213$ ;  $Q_v=285,3338$ ;  $R=14,57674$ ;  $D=5,59801$

$M_B = 15,010950$	$x_B = 0,048319$	$h_B = -2858,45$	$T_B = 88,42$
$M_1 = 7,263795$	$x_1 = 0,095575$	$h_1 = -2944,15$	$T_1 = 85,04$
$M_2 = 7,285313$	$x_2 = 0,157918$	$h_2 = -3024,63$	$T_2 = 81,17$
$M_3 = 7,317073$	$x_3 = 0,227118$	$h_3 = -3091,01$	$T_3 = 77,23$ M=3
$M_4 = 5,614425$	$x_4 = 0,271673$	$h_4 = -3140,92$	$T_4 = 74,52$
$M_5 = 5,674603$	$x_5 = 0,361474$	$h_5 = -3169,33$	$T_5 = 70,37$
$M_6 = 5,787169$	$x_6 = 0,512200$	$h_6 = -3136,37$	$T_6 = 64,80$
$M_7 = 5,950513$	$x_7 = 0,699710$	$h_7 = -3024,38$	$T_7 = 59,00$
$M_8 = 6,114011$	$x_8 = 0,858903$	$h_8 = -2901,88$	$T_8 = 54,40$
$M_D = 6,000000$	$x_D = 0,953759$	$h_D = -2892,34$	$T_D = 50,19$

#### 4.2. CARACTERIZAÇÃO DA DINÂMICA NÃO LINEAR DA COLUNA.

A figura 4.2 mostra o perfil de concentração de tolueno no líquido de cada estágio nesta coluna de destilação de 30 pratos, e para efeito de comparação, em uma coluna de 8 pratos. Note-se que para a coluna de 30 pratos o perfil é acentuadamente não linear.

Uma perturbação na vazão  $F$  de alimentação ou na vazão  $R$  de refluxo é sentida na coluna de destilação de forma principalmente convectiva, isto é, nota-se com maior sensibilidade o deslocamento deste perfil verticalmente para cima ou para baixo. Uma perturbação na concentração  $z_F$  é sentida na forma convectiva e difusiva, isto é, percebe-se notadamente o deslocamento vertical e também a mudança na curva deste perfil.

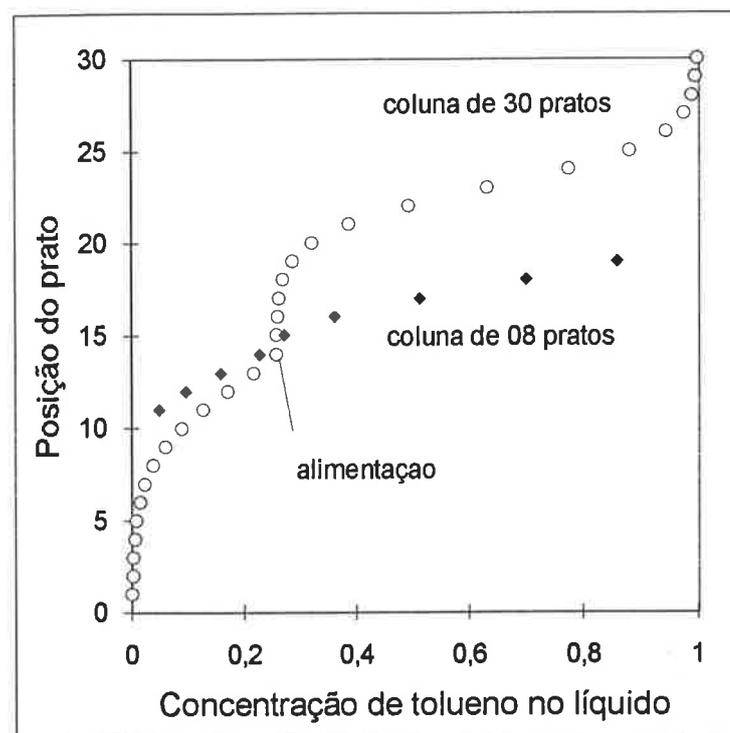


Figura 4.2. Perfil de concentração de tolueno na fase líquida em regime estacionário.

Considere-se para a vazão  $F$  de alimentação uma perturbação em degrau de +5% aos 100 minutos, seguido de uma volta à vazão  $F$  original aos 2100 minutos, e depois uma perturbação de -5% aos 4100 minutos, seguidos de uma volta à vazão  $F$  original aos 6100 minutos. Este mesmo tipo de perturbação foi testada para  $\pm 1\%$  na vazão  $F$  de alimentação.

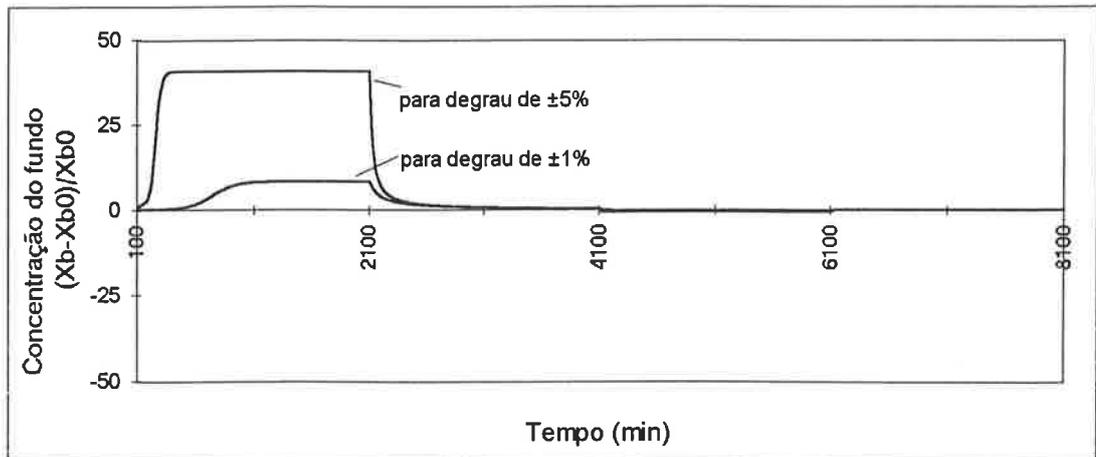


Figura 4.3. A resposta da composição do fundo na coluna de 30 pratos perante as perturbações na vazão da alimentação.

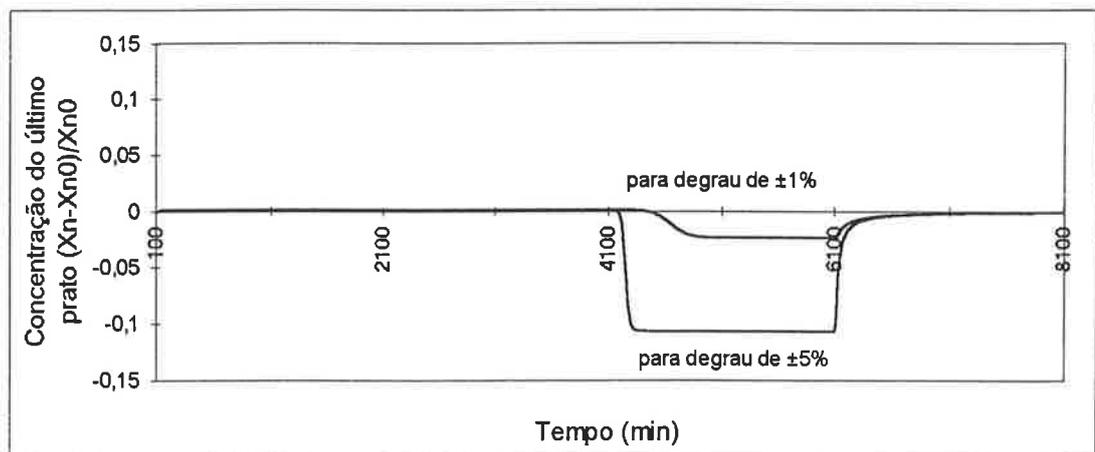


Figura 4.4. A resposta da composição do último prato na coluna de 30 pratos perante as perturbações na vazão da alimentação.

As respostas das composições do fundo e do último prato perante estas perturbações da vazão  $F$  de alimentação estão ilustradas para a coluna de 30 pratos nas figuras 4.3 e 4.4 . Nestas figuras as concentrações foram normalizadas para facilitar a comparação.

Nas figuras acima existem três comportamentos relevantes que caracterizam a dinâmica não linear. O primeiro aspecto é o comportamento notadamente não simétrico em relação ao sentido da perturbação, evidenciados nas figuras 4.3 e 4.4 .

Considere agora a resposta de uma coluna de 8 pratos, comparada com a coluna de 30 pratos. Na figura 4.5 a coluna de destilação de 8 pratos ainda apresenta uma relativa simetria nas respostas das perturbações na direção positiva e negativa. Na coluna de 30 pratos, a assimetria é acentuada, o que ilustra que a não-linearidade da coluna de destilação de alta pureza é devida a combinação das não linearidades de cada estágio.

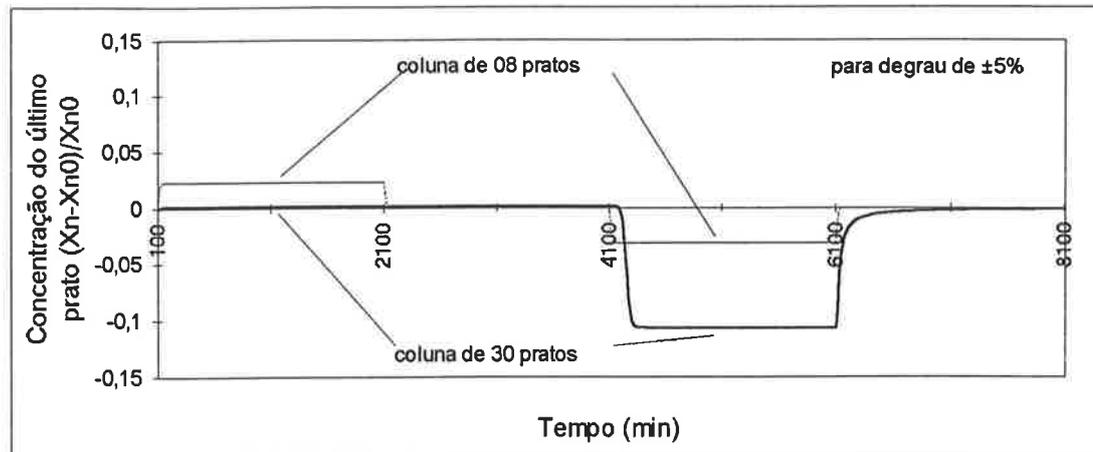


Figura 4.5. A comparação da resposta da composição do último prato na coluna de 30 pratos e na coluna de 8 pratos perante a perturbações na vazão da alimentação.

O segundo aspecto é que o ganho estacionário é diferente para cada amplitude da perturbação.

Finalmente, o terceiro aspecto é que, analisando atentamente as figuras 4.3, 4.4 e 4.5, nota-se que a maneira como as respostas da coluna de destilação saem do seu estado estacionário inicial para o novo estado estacionário é diferente da sua volta para o estado estacionário inicial, ou seja, existe histerese na dinâmica da coluna de destilação.

### 4.3. SÍNTESE DO CONTROLE CONTÍNUO NÃO LINEAR DA COLUNA.

Nesta coluna de destilação as variáveis controladas são  $(M_B, x_B, x_N, M_D)$ . Selecionam-se  $(D, R, Q_v, B)$  como as variáveis manipuladas. As variáveis  $(F, z_F, h_F, h_D)$  são variáveis definidas externamente, ou seja, são os distúrbios externos que entram no sistema. Porém podemos redefinir estas variáveis como  $(F, Fz_F, Fh_F, Rh_D)$  para que o modelo dinâmico da coluna seja também *afim* em relação às variáveis distúrbios.

Portanto o vetor das variáveis manipuladas, o vetor das variáveis distúrbios e o vetor das funções de resposta de saída do sistema são respectivamente :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} B \\ Q_v \\ R \\ D \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} F \\ Fz_F \\ Fh_F \\ Rh_D \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} M_B \\ x_B \\ x_N \\ M_D \end{pmatrix}. \quad (4.3-1)$$

Assim o modelo dinâmico da coluna de destilação pode ser equivalentemente representado sob a forma de sistema de equações *afim* ou *linear em entrada* :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^4 \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) u_i + \sum_{i=1}^4 \mathbf{d}_i(\mathbf{x}) w_i \quad (4.3-3)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$$

onde o vetor de estado  $\mathbf{x}$  tem dimensão  $(3N+2)$  . A partir deste sistema elabora-se o controle não-linear desacoplador de interações.

Por simplicidade, assume-se a seguinte hipótese: considera-se aqui que a parcela dinâmica  $\left(x_k \frac{dM_k}{dt}\right)$  e  $\left(h_k \frac{dM_k}{dt}\right)$  são desprezíveis frente às parcelas dinâmicas  $\left(M_k \frac{dx_k}{dt}\right)$  e  $\left(M_k \frac{dh_k}{dt}\right)$ .

Assim as equações dinâmicas da coluna de destilação são :

$$\begin{bmatrix} \dot{M}_B \\ \dot{x}_B \\ \dot{h}_B \\ \dot{M}_1 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{h}_1 \\ \vdots \\ \dot{M}_M \\ \dot{x}_M \\ \dot{h}_M \\ \vdots \\ \dot{M}_N \\ \dot{x}_N \\ \dot{h}_N \\ \dot{M}_D \\ \dot{x}_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 - V_0 \\ (1/M_B)[L_1(x_1 - x_B) - V_0(y_0 - x_B)] \\ (1/M_B)[L_1(h_1 - h_B) - V_0(H_0 - h_B)] \\ L_2 + V_0 - L_1 - V_1 \\ (1/M_1)[L_2(x_2 - x_1) + V_0(y_0 - x_1) - V_1(y_1 - x_1)] \\ (1/M_1)[L_2(h_2 - h_1) + V_0(H_0 - h_1) - V_1(H_1 - h_1)] \\ \vdots \\ L_{M+1} + V_{M-1} - L_M - V_M \\ (1/M_M)[L_{M+1}(x_{M+1} - x_M) + V_{M-1}(y_{M-1} - x_M) - V_M(y_M - x_M)] \\ (1/M_M)[L_{M+1}(h_{M+1} - h_M) + V_{M-1}(H_{M-1} - h_M) - V_M(H_M - h_M)] \\ \vdots \\ V_{N-1} - L_N - V_N \\ (1/M_N)[V_{N-1}(y_{N-1} - x_N) - V_N(y_N - x_N)] \\ (1/M_N)[V_{N-1}(H_{N-1} - h_N) - V_N(H_N - h_N)] \\ V_N \\ (1/M_D)[V_N(y_N - x_D)] \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +(1/M_B)(dh_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +(1/M_N)(x_D - x_N) & 0 \\ 0 & 0 & -(1/M_N)h_N & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ +1 & 0 & 0 & 0 \\ -(1/M_M)x_M & +(1/M_M) & 0 & 0 \\ -(1/M_M)h_M & 0 & +(1/M_M) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +(1/M_N) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ Q_v \\ R \\ D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F \\ Fz_F \\ Fh_F \\ Rh_D \end{bmatrix}$$

(4.3-3)

A partir de  $h(x)$  tem-se :

$$\frac{\partial h(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.3-4)$$

de onde resulta a seguinte derivada primeira de Lie para o campo vetorial  $\mathbf{g}_0$  de velocidade :

$$\mathbf{L}_{\mathbf{g}_0} \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} L_1 - V_0 \\ (1/M_B)[L_1(x_1 - x_B) - V_0(y_0 - x_B)] \\ (1/M_N)[V_{N-1}(y_{N-1} - x_N) - V_N(y_N - x_N)] \\ V_N \end{bmatrix} \quad (4.3-5)$$

Chamando de  $\mathbf{g} = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4]$  o conjunto de campos vetoriais de entrada, tem-se :

$$\mathbf{L}_{\mathbf{g}} \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1/M_N)(x_D - x_N) & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.3-6)$$

E chamando de  $\mathbf{d} = [\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3, \mathbf{d}_4]$  o conjunto de campos vetoriais de distúrbios, tem-se :

$$\mathbf{L}_{\mathbf{d}} \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{d}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.3-7)$$

Note-se na equação (4.3-6) que  $\mathbf{L}_{\mathbf{g}} \mathbf{h}(\mathbf{x})$  é uma matriz de dimensão  $[4 \times 4]$  mas devido à sua segunda linha da matriz possui posto ("rank") de terceiro grau.

Para as derivadas segundas de Lie, não é necessário calcular todos os elementos. Basta calcular  $\mathbf{L}_{\mathbf{g}_0}^2 \mathbf{h}_2(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{L}_{\mathbf{g}_2} \mathbf{L}_{\mathbf{g}_0} \mathbf{h}_2(\mathbf{x})$  pois utilizando-se das informações :

$$L_k = f(M_k, x_k) \quad (k=1,2,\dots,N) \quad (4.3-8a)$$

$$y_k = f(x_k, h_k) \quad (k=0,1,2,\dots,N) \quad (4.3-8b)$$

$$V_k = f(x_k, h_k, M_{k+1}, x_{k+1}, h_{k+1}) \quad (k=0,1,2,\dots,N) \quad (4.3-8c)$$

$$V_N = f(x_N, h_N, P_D) \quad (k=N) \quad (4.3-8d)$$

$$H_k = f(x_k, h_k) \quad (k=0,1,2,\dots,N) \quad (4.3-8e)$$

tem-se :

$$\frac{\partial(L_{g_0} h(x))}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial L_{g_0} h_1}{\partial x_B} & \frac{\partial L_{g_0} h_1}{\partial h_B} & \frac{\partial L_{g_0} h_1}{\partial M_1} & \frac{\partial L_{g_0} h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial L_{g_0} h_1}{\partial h_1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial L_{g_0} h_2}{\partial x_B} & \frac{\partial L_{g_0} h_2}{\partial h_B} & \frac{\partial L_{g_0} h_2}{\partial M_1} & \frac{\partial L_{g_0} h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial L_{g_0} h_2}{\partial h_1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial L_{g_0} h_3}{\partial x_{N-1}} & \frac{\partial L_{g_0} h_3}{\partial h_{N-1}} & \frac{\partial L_{g_0} h_3}{\partial M_N} & \frac{\partial L_{g_0} h_3}{\partial x_N} & \frac{\partial L_{g_0} h_3}{\partial h_N} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial L_{g_0} h_4}{\partial x_N} & \frac{\partial L_{g_0} h_4}{\partial h_N} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(4.3-9)

Assim as derivadas segundas de Lie são :

$$L_g L_{g_0} h(x) = \frac{\partial(L_{g_0} h(x))}{\partial x} g(x) = \begin{bmatrix} 0 & L_{g_2} L_{g_0} h_1 & 0 & 0 \\ 0 & L_{g_2} L_{g_0} h_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_{g_3} L_{g_0} h_3 & 0 \\ 0 & 0 & L_{g_3} L_{g_0} h_4 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.3-10)$$

$$L_{g_0}^2 h(x) = \frac{\partial(L_{g_0} h(x))}{\partial x} g_0(x) = \begin{bmatrix} L_{g_0}^2 h_1 \\ L_{g_0}^2 h_2 \\ L_{g_0}^2 h_3 \\ L_{g_0}^2 h_4 \end{bmatrix} \quad (4.3-11)$$

Portanto a matriz característica ou matriz de desacoplamento  $A(x)$ , que tem o grau relativo ( $r=2$ ), é :

$$A(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1} h_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_{g_2} L_{g_0} h_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_{g_3} h_3 & 0 \\ 0 & 0 & L_{g_3} h_4 & L_{g_4} h_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_{g_2} L_{g_0} h_2(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1/M_N)(x_D - x_N) & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.3-12)$$

ou seja,

$$\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\mathcal{L}_{\mathbf{g}_2} \mathcal{L}_{\mathbf{g}_0} h_2(\mathbf{x}))^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_N(x_D - x_N)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -M_N(x_D - x_N)^{-1} & -1 \end{bmatrix} \quad (4.3-13)$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{\mathbf{g}_0} h_1 \\ \mathcal{L}_{\mathbf{g}_0}^2 h_2 \\ \mathcal{L}_{\mathbf{g}_0} h_3 \\ \mathcal{L}_{\mathbf{g}_0} h_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (L_1 - V_0) \\ \mathcal{L}_{\mathbf{g}_0}^2 h_2(\mathbf{x}) \\ (1/M_N)[V_{N-1}(y_{N-1} - x_N) - V_N(y_N - x_N)] \\ (V_N) \end{bmatrix} \quad (4.3-14)$$

Assim :

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) = -\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{b}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} (L_1 - V_0) \\ -(\mathcal{L}_{\mathbf{g}_2} \mathcal{L}_{\mathbf{g}_0} h_2(\mathbf{x}))^{-1} (\mathcal{L}_{\mathbf{g}_0}^2 h_2(\mathbf{x})) \\ -(x_D - x_N)^{-1} (V_{N-1}(y_{N-1} - x_N) - V_N(y_N - x_N)) \\ (x_D - x_N)^{-1} (V_{N-1}(y_{N-1} - x_N) - V_N(y_N - x_N)) + (V_N) \end{bmatrix} \quad (4.3-15)$$

$$\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\mathcal{L}_{\mathbf{g}_2} \mathcal{L}_{\mathbf{g}_0} h_2(\mathbf{x}))^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_N(x_D - x_N)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -M_N(x_D - x_N)^{-1} & -1 \end{bmatrix} \quad (4.3-16)$$

onde as derivadas segundas de Lie são:

$$\mathcal{L}_{\mathbf{g}_2} \mathcal{L}_{\mathbf{g}_0} h_2(\mathbf{x}) = \frac{\partial (\mathcal{L}_{\mathbf{g}_0} h_2(\mathbf{x}))}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) = \left( (dh_v / M_B) \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathbf{g}_0} h_2}{\partial h_B} \right) \quad (4.3-17)$$

$$\begin{aligned}
L_{\mathbf{g}_0}^2 h_2(\mathbf{x}) &= \frac{\partial(L_{\mathbf{g}_0} h_2(\mathbf{x}))}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) = \\
&= (1/M_B)(L_1(x_1 - x_B) - V_0(y_0 - x_B)) \frac{\partial L_{\mathbf{g}_0} h_2}{\partial x_B} \\
&\quad + (1/M_B)(L_1(h_1 - h_B) - V_0(H_0 - h_B)) \frac{\partial L_{\mathbf{g}_0} h_2}{\partial h_B} \\
&\quad + (L_2 + V_0 - L_1 - V_1) \frac{\partial L_{\mathbf{g}_0} h_2}{\partial M_1} \\
&\quad + (1/M_1)(L_2(x_2 - x_1) + V_0(y_0 - x_1) - V_1(y_1 - x_1)) \frac{\partial L_{\mathbf{g}_0} h_2}{\partial x_1} \\
&\quad + (1/M_1)(L_2(h_2 - h_1) + V_0(H_0 - h_1) - V_1(H_1 - h_1)) \frac{\partial L_{\mathbf{g}_0} h_2}{\partial h_1}
\end{aligned} \tag{4.3-18}$$

Estas derivadas segundas de Lie podem ser facilmente calculadas em computador, ou apesar de tedioso em uma lista de expressões como a seguir :

$$L_{\mathbf{g}_2} L_{\mathbf{g}_0} h_2(\mathbf{x}) = (1/M_B)(dh_1) \left( -(1/M_B)(y_0 - x_B) \frac{\partial V_0}{\partial h_B} - (1/M_B)V_0 \frac{\partial y_0}{\partial h_B} \right) \tag{4.3-19}$$

$$\begin{aligned}
L_{\mathbf{g}_0}^2 h_2(\mathbf{x}) &= (1/M_B)[L_1(x_1 - x_B) - V_0(y_0 - x_B)] \left( (1/M_B)[-L_1 - (y_0 - x_B)] \frac{\partial V_0}{\partial x_B} - (1/M_B)V_0 \frac{\partial y_0}{\partial x_B} + (1/M_B)V_0 \right) \\
&\quad + (1/M_B)[L_1(h_1 - h_B) - V_0(H_0 - h_B)] \left( -(1/M_B)(y_0 - x_B) \frac{\partial V_0}{\partial h_B} - (1/M_B)V_0 \frac{\partial y_0}{\partial h_B} \right) \\
&\quad + [L_2 + V_0 - L_1 - V_1] \left( (1/M_B)(x_1 - x_B) \frac{\partial L_1}{\partial M_1} - (1/M_B)(y_0 - x_B) \frac{\partial V_0}{\partial M_1} \right) \\
&\quad + (1/M_1)[L_2(x_2 - x_1) + V_0(y_0 - x_1) - V_1(y_1 - x_1)] \left( (1/M_B)(x_1 - x_B) \frac{\partial L_1}{\partial x_1} + (1/M_B)L_1 - (1/M_B)(y_0 - x_B) \frac{\partial V_0}{\partial x_1} \right) \\
&\quad + (1/M_1)[L_2(h_2 - h_1) + V_0(H_0 - h_1) - V_1(H_1 - h_1)] \left( -(1/M_B)(y_0 - x_B) \frac{\partial V_0}{\partial h_1} \right)
\end{aligned} \tag{4.3-20}$$

com

$$\frac{\partial L_1}{\partial M_1} = 3,33 (60)(3,281 L^w)(3,281^{1,5})(1,5) \left( \frac{M_1 M_1^{avg}}{\rho_{sp} \rho_{ag} A_p} - h^w \right)^{0,5} \left( \frac{M_1^{avg}}{\rho_{sp} \rho_{ag} A_p} \right) \left( \frac{28,32 \rho_{sp}}{M_1^{avg}} \right) \quad (4.3-21a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_1}{\partial x_1} &= 3,33 (60)(3,281 L^w)(3,281^{1,5}) \left( \frac{28,32 \rho_{sp}}{M_1^{avg}} \right) \cdot \\ &\cdot \left[ (1,5) \left( \frac{M_1 M_1^{avg}}{\rho_{sp} \rho_{ag} A_p} - h^w \right)^{0,5} \left( \frac{M_1 (M^1 - M^2)}{\rho_{sp} \rho_{ag} A_p} \right) - \left( \frac{M_1 M_1^{avg}}{\rho_{sp} \rho_{ag} A_p} - h^w \right)^{1,5} \left( \frac{(M^1 - M^2)}{M_1^{avg}} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.3-21b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_0}{\partial x_B} &= \frac{p_0^1}{P_0} + \frac{x_B}{P_0} p_0^1 \left( \frac{-A_1}{(T_B + 273)^2} + B_1 \right) \frac{\partial T_B}{\partial x_B} - \frac{x_B p_0^1}{(P_0)^2} (p_0^1 - p_0^2) \\ &- \frac{x_B p_0^1}{(P_0)^2} x_B p_0^1 \left( \frac{-A_1}{(T_B + 273)^2} + B_1 \right) \frac{\partial T_B}{\partial x_B} - \frac{x_B p_0^1}{(P_0)^2} (1 - x_B) p_0^2 \left( \frac{-A_2}{(T_B + 273)^2} + B_2 \right) \frac{\partial T_B}{\partial x_B} \end{aligned} \quad (4.3-21c)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_0}{\partial h_B} &= \frac{x_B}{P_0} p_0^1 \left( \frac{-A_1}{(T_B + 273)^2} + B_1 \right) \frac{\partial T_B}{\partial h_B} \\ &- \frac{x_B p_0^1}{(P_0)^2} x_B p_0^1 \left( \frac{-A_1}{(T_B + 273)^2} + B_1 \right) \frac{\partial T_B}{\partial h_B} - \frac{x_B p_0^1}{(P_0)^2} (1 - x_B) p_0^2 \left( \frac{-A_2}{(T_B + 273)^2} + B_2 \right) \frac{\partial T_B}{\partial h_B} \end{aligned} \quad (4.3-21d)$$

$$\frac{\partial V_0}{\partial x_B} = \left( \frac{60 A_h}{K_{dh}^{1/2}} \right) \left( \frac{0,5}{(\rho_0^v dP_0)^{1/2}} \right) \left( \rho_0^v \frac{\partial (dP_0)}{\partial x_B} + dP_0 \frac{\partial (\rho_0^v)}{\partial x_B} \right) \quad (4.3-21e)$$

$$\frac{\partial V_0}{\partial h_B} = \left( \frac{60 A_h}{K_{dh}^{1/2}} \right) \left( \frac{0,5}{(\rho_0^v dP_0)^{1/2}} \right) \left( \rho_0^v \frac{\partial (dP_0)}{\partial h_B} + dP_0 \frac{\partial (\rho_0^v)}{\partial h_B} \right) \quad (4.3-21f)$$

$$\frac{\partial V_0}{\partial M_1} = \left( \frac{60 A_h}{K_{dh}^{1/2}} \right) \left( \frac{0,5}{(\rho_0^v dP_0)^{1/2}} \right) \left( \rho_0^v \frac{\partial (dP_0)}{\partial M_1} \right) \quad (4.3-21g)$$

$$\frac{\partial V_0}{\partial x_1} = \left( \frac{60 A_h}{K_{dh}^{1/2}} \right) \left( \frac{0,5}{(\rho_0^v dP_0)^{1/2}} \right) \left( \rho_0^v \frac{\partial (dP_0)}{\partial x_1} + dP_0 \frac{\partial (\rho_0^v)}{\partial x_1} \right) \quad (4.3-21h)$$

$$\frac{\partial V_0}{\partial h_1} = \left( \frac{60 A_h}{K_{dh}^{1/2}} \right) \left( \frac{0,5}{(\rho_0^v dP_0)^{1/2}} \right) \left( \rho_0^v \frac{\partial(dP_0)}{\partial h_1} + dP_0 \frac{\partial(\rho_0^v)}{\partial h_1} \right) \quad (4.3-21i)$$

$$\frac{\partial(dP_0)}{\partial x_B} = (p_0^1 - p_0^2) + x_B p_0^1 \left( \frac{-A_1}{(T_B + 273)^2} + B_1 \right) \frac{\partial T_B}{\partial x_B} + (1 - x_B) p_0^2 \left( \frac{-A_2}{(T_B + 273)^2} + B_2 \right) \frac{\partial T_B}{\partial x_B} \quad (4.3-21j)$$

$$\frac{\partial(dP_0)}{\partial h_B} = x_B p_0^1 \left( \frac{-A_1}{(T_B + 273)^2} + B_1 \right) \frac{\partial T_B}{\partial h_B} + (1 - x_B) p_0^2 \left( \frac{-A_2}{(T_B + 273)^2} + B_2 \right) \frac{\partial T_B}{\partial h_B} \quad (4.3-21k)$$

$$\frac{\partial(dP_0)}{\partial M_1} = - \left( \frac{73,06 M_1^{avg}}{\rho_{ag} A_p} \right) \quad (4.3-21l)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(dP_0)}{\partial x_1} = & -(p_1^1 - p_1^2) - x_1 p_1^1 \left( \frac{-A_1}{(T_1 + 273)^2} + B_1 \right) \frac{\partial T_1}{\partial x_1} - (1 - x_1) p_1^2 \left( \frac{-A_2}{(T_1 + 273)^2} + B_2 \right) \frac{\partial T_1}{\partial x_1} \\ & - \left( \frac{73,06 M_1 (M^1 - M^2)}{\rho_{ag} A_p} \right) \end{aligned} \quad (4.3-21m)$$

$$\frac{\partial(dP_0)}{\partial h_1} = -x_1 p_1^1 \left( \frac{-A_1}{(T_1 + 273)^2} + B_1 \right) \frac{\partial T_1}{\partial h_1} - (1 - x_1) p_1^2 \left( \frac{-A_2}{(T_1 + 273)^2} + B_2 \right) \frac{\partial T_1}{\partial h_1} \quad (4.3-21n)$$

$$\frac{\partial(\rho_0^v)}{\partial x_B} = - \frac{P_1}{R_G (T_B + 273)^2} \frac{\partial T_B}{\partial x_B} \quad (4.3-21o)$$

$$\frac{\partial(\rho_0^v)}{\partial h_B} = - \frac{P_1}{R_G (T_B + 273)^2} \frac{\partial T_B}{\partial h_B} \quad (4.3-21p)$$

$$\frac{\partial(\rho_0^v)}{\partial x_1} = \left( \frac{1}{R_G (T_B + 273)} \right) \left[ (p_1^1 - p_1^2) + x_1 p_1^1 \left( \frac{-A_1}{(T_1 + 273)^2} + B_1 \right) \frac{\partial T_1}{\partial x_1} + (1 - x_1) p_1^2 \left( \frac{-A_2}{(T_1 + 273)^2} + B_2 \right) \frac{\partial T_1}{\partial x_1} \right] \quad (4.3-21q)$$

$$\frac{\partial(\rho_0^v)}{\partial h_1} = \left( \frac{1}{R_G (T_B + 273)} \right) \left[ x_1 p_1^1 \left( \frac{-A_1}{(T_1 + 273)^2} + B_1 \right) \frac{\partial T_1}{\partial h_1} + (1 - x_1) p_1^2 \left( \frac{-A_2}{(T_1 + 273)^2} + B_2 \right) \frac{\partial T_1}{\partial h_1} \right] \quad (4.3-21r)$$

$$\frac{\partial T_B}{\partial x_B} = \frac{(M^1 c^1 T_b^1 - M^2 c^2 T_b^2)(x_B M^1 c^1 + (1-x_B)M^2 c^2) - (h_B + x_B M^1 c^1 T_b^1 + (1-x_B)M^2 c^2 T_b^2)(M^1 c^1 - M^2 c^2)}{(x_B M^1 c^1 + (1-x_B)M^2 c^2)} \quad (4.3-21s)$$

$$\frac{\partial T_B}{\partial h_B} = \frac{1}{(x_B M^1 c^1 + (1-x_B)M^2 c^2)} \quad (4.3-21t)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial x_1} = \frac{(M^1 c^1 T_b^1 - M^2 c^2 T_b^2)(x_1 M^1 c^1 + (1-x_1)M^2 c^2) - (h_1 + x_1 M^1 c^1 T_b^1 + (1-x_1)M^2 c^2 T_b^2)(M^1 c^1 - M^2 c^2)}{(x_1 M^1 c^1 + (1-x_1)M^2 c^2)} \quad (4.3-21u)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial h_1} = \frac{1}{(x_1 M^1 c^1 + (1-x_1)M^2 c^2)} \quad (4.3-21v)$$

Observe que  $(g\alpha)(\mathbf{x})$  tem a forma :

$$(g\alpha)(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -(L_1 - V_0) \\ 0 \\ -(1/M_B)(dh_v)(L_{g_2} L_{g_0} h_2(\mathbf{x}))^{-1} (L_{g_0}^2 h_2(\mathbf{x})) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -(x_D - x_N)^{-1} [V_{N-1}(y_{N-1} - x_N) - V_N(y_N - x_N)] \\ -(1/M_N) [V_{N-1}(y_{N-1} - x_N) - V_N(y_N - x_N)] \\ (1/M_N)(h_N)(x_D - x_N)^{-1} [V_{N-1}(y_{N-1} - x_N) - V_N(y_N - x_N)] \\ -(V_N) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.3-22)$$

O campo vetorial de dinâmica de zero  $\mathbf{g}_0^* = (\mathbf{g}_0 + \mathbf{g}\alpha)(\mathbf{x})$  onde  $\mathbf{x}$  é restrito ao  $\mathbf{x} \in Z^*$ , é dado por :

$$\mathbf{g}_0^* = (\mathbf{g}_0 + \mathbf{g}\alpha)(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ (1/M_B)[L_1(x_1 - x_B) - V_0(y_0 - x_B)] \\ (1/M_B)[L_1(h_1 - h_B) - V_0(H_0 - h_B)] - (dh_1/M_B)(L_{B_2}^{-1}h_2(\mathbf{x}))^{-1}(L_r^2 h_2(\mathbf{x})) \\ L_2 + V_0 - L_1 - V_1 \\ (1/M_1)[L_2(x_2 - x_1) + V_0(y_0 - x_1) - V_1(y_1 - x_1)] \\ (1/M_1)[L_2(h_2 - h_1) + V_0(H_0 - h_1) - V_1(H_1 - h_1)] \\ \vdots \\ L_{M+1} + V_{M-1} - L_M - V_M \\ (1/M_M)[L_{M+1}(x_{M+1} - x_M) + V_{M-1}(y_{M-1} - x_M) - V_M(y_M - x_M)] \\ (1/M_M)[L_{M+1}(h_{M+1} - h_M) + V_{M-1}(H_{M-1} - h_M) - V_M(H_M - h_M)] \\ \vdots \\ (V_{N-1} - L_N - V_N) - (x_D - x_N)^{-1}[V_{N-1}(y_{N-1} - x_N) - V_N(y_N - x_N)] \\ 0 \\ (1/M_N)V_{N-1}(H_{N-1} - h_N) - (1/M_N)V_N(H_N - h_N) + (1/M_N)(h_N)(x_D - x_N)^{-1}[V_{N-1}(y_{N-1} - x_N) - V_N(y_N - x_N)] \\ 0 \\ (1/M_D)V_N(y_N - x_D) \end{bmatrix} \quad (4.3-23)$$

Assim  $Z^*$  é a subvariedade máxima de dinâmica de zero dada por :

$$Z^* = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : h_1(\mathbf{x}) = 0, h_2(\mathbf{x}) = 0, L_{\mathbf{g}_0} h_2(\mathbf{x}) = 0, h_3(\mathbf{x}) = 0, h_4(\mathbf{x}) = 0 \right\} \quad (4.3-24)$$

ou seja,

$$Z^* = \left\{ M_B, x_B, h_B, M_1, x_1, h_1, x_N, M_D : (M_B = 0), (x_B = 0), (L_1 x_1 = V_0 y_0), (x_N = 0), (M_D = 0) \right\} \quad (4.3-25)$$

Esta subvariedade tem a sua distribuição invariante máxima definida como :

$$D^* = \left\{ \ker(dh_1(\mathbf{x})) \cap \ker(dh_2(\mathbf{x})) \cap \ker(dL_r h_2(\mathbf{x})) \cap \ker(dh_3(\mathbf{x})) \cap \ker(dh_4(\mathbf{x})) \right\} \quad (4.3-26)$$

ou explicitando melhor o conjunto distribuição,  $D^*$  é um subconjunto do espaço tangente  $T_x \mathbb{R}^n$  onde para cada campo vetorial  $\tau(\mathbf{x})$  desta distribuição  $D^*$ , tem-se :

$$\tau(\mathbf{x}) \in D^* \Rightarrow \tau(\mathbf{x}) \in T_x \mathbb{R}^n \text{ tal que}$$

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{\partial \mathcal{L}_{g_0} h_2}{\partial x_B} & \frac{\partial \mathcal{L}_{g_0} h_2}{\partial h_B} & \frac{\partial \mathcal{L}_{g_0} h_2}{\partial M_1} & \frac{\partial \mathcal{L}_{g_0} h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathcal{L}_{g_0} h_2}{\partial h_1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
& & & & & & & & & & & & & \tau_{3N+2}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\tau_1 \\
\tau_2 \\
\tau_3 \\
\tau_4 \\
\tau_5 \\
\tau_6 \\
\vdots \\
\tau_{3N-1} \\
\tau_{3N} \\
\tau_{3N+1} \\
\tau_{3N+2}
\end{bmatrix}
= \mathbf{0}$$

(4.3-27)

ou seja,

$$D^* = \left\{ \begin{array}{l}
\tau(\mathbf{x}) \in T_{\mathbf{x}} \mathbb{R}^n : [\tau_1 = 0], [\tau_2 = 0], \\
\left[ \begin{array}{l}
\left( -(y_0 - x_B) \frac{\partial V_0}{\partial h_B} - V_0 \frac{\partial y_0}{\partial h_B} \right) \tau_3 + \left( (x_1 - x_B) \frac{\partial L_1}{\partial M_1} - (y_0 - x_B) \frac{\partial V_0}{\partial M_1} \right) \tau_4 \\
+ \left( (x_1 - x_B) \frac{\partial L_1}{\partial x_1} - (y_0 - x_B) \frac{\partial V_0}{\partial x_1} \right) \tau_5 + \left( -(y_0 - x_B) \frac{\partial V_0}{\partial h_1} \right) \tau_6 = 0 \\
[\tau_{3N-1} = 0], [\tau_{3N+1} = 0]
\end{array} \right. \right\} \quad (4.3-28)$$

A maneira como foi definida a distribuição  $D^*$  garante que esta distribuição máxima seja invariante sob controle, ou seja,

$$[(\mathbf{g}_0 + \mathbf{g}\alpha), D^*](\mathbf{x}) \subset D^*(\mathbf{x}) \quad (4.3-29a)$$

$$[(\mathbf{g}\beta), D^*](\mathbf{x}) \subset D^*(\mathbf{x}) \quad (4.3-29b)$$

Porém o fato mais relevante é que, uma vez que os campos vetoriais de distúrbios são :

$$\mathbf{d}_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ +1 \\ -\left(\frac{x_M}{M_M}\right) \\ -\left(\frac{h_M}{M_M}\right) \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ +\left(\frac{1}{M_M}\right) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}_3(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ +\left(\frac{1}{M_M}\right) \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}_4(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ +\left(\frac{1}{M_N}\right) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.3-31)$$

Claramente os campos vetoriais dos distúrbios pertencem à distribuição máxima :

$$\mathbf{d}_i(\mathbf{x}) \in D^* \quad (i=1,2,3,4) \quad (4.3-32)$$

e esta distribuição máxima  $D^*$  é invariante sob os campos vetoriais  $\mathbf{d}_i(\mathbf{x})$  :

$$\left( \frac{\partial \tau}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{d}_i - \frac{\partial \mathbf{d}_i}{\partial \mathbf{x}} \tau \right) = 0 \Rightarrow [\mathbf{d}_i, \Delta^*] \subset D^* \quad (4.3-33)$$

Portanto a aplicação da lei de controle via retroalimentação estática do estado :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x})\mathbf{v}(t) \quad (4.3-34)$$

produz um sistema linear em entrada/saída, ( resposta linear entre  $\mathbf{y}(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{v}$  ), com desacoplamento de interação (  $y_i(\mathbf{x})$  é afetada apenas por  $v_i$  ), e que rejeita completamente os distúrbios  $\mathbf{w}$  anteriormente definidos.

#### 4.4. PROJETO DO CONTROLE CONTÍNUO NÃO LINEAR DA COLUNA .

Dado que o sistema da coluna de destilação possui um grau relativo bem definido, com grau (1) para  $M_B$ ,  $x_N$ ,  $M_D$ , e grau (2) para  $x_B$ , considere-se a resposta das trajetórias lineares desejados  $y^R$  perante a entrada dos "setpoints" desejados  $y^{sp}$  :

$$\frac{y^R(s)}{y^{sp}(s)} = \begin{bmatrix} \frac{\omega_{MB}}{(s + \omega_{MB})} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\omega_{xB}^2}{(s^2 + 2(0,7)\omega_{xB}s + \omega_{xB}^2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\omega_{xN}}{(s + \omega_{xN})} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\omega_{MD}}{(s + \omega_{MD})} \end{bmatrix} \quad (4.4-1)$$

Estas funções estão na forma padrão de Butterworth e foram escolhidas por serem ótimas em performance (ITAE) perante dinâmica em degrau para  $y^{sp}$ . Porém  $y^R$  deve ser calculado para qualquer dinâmica dos "setpoints" desejados  $y^{sp}(t)$  e para tanto, deve-se obter as correspondentes equações do espaço de estado, sob a forma do tipo :

$$\begin{aligned} \dot{x}^R(t) &= A x^R(t) + B y^{sp}(t) \\ y^R(t) &= C x^R(t) \end{aligned} \quad (4.4-2)$$

Utilizou-se aqui o algoritmo proposto por Shaked e Dixon(1977) para a realização mínima generalizada das matrizes de funções de transferência :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1^R \\ \dot{x}_2^R \\ \dot{x}_3^R \\ \dot{x}_4^R \\ \dot{x}_5^R \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\omega_{MB} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(0,7)\omega_{xB} & -\sqrt{0,51}\omega_{xB} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{0,51}\omega_{xB} & -(0,7)\omega_{xB} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_{xN} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_{MD} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^R \\ x_2^R \\ x_3^R \\ x_4^R \\ x_5^R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{MB} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\omega_{xB}}{\sqrt{0,51}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{xN} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_{MD} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{MB}^{sp} \\ y_{xB}^{sp} \\ y_{xN}^{sp} \\ y_{MD}^{sp} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_{MB}^R \\ y_{xB}^R \\ y_{xN}^R \\ y_{MD}^R \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^R \\ x_2^R \\ x_3^R \\ x_4^R \\ x_5^R \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.4-3)$$

Este sistema deverá ser integrado numericamente para obter  $y^R(t)$  em relação ao  $y^{sp}(t)$  com as seguintes condições iniciais :

$$\begin{bmatrix} X_{1,0}^R \\ X_{2,0}^R \\ X_{3,0}^R \\ X_{4,0}^R \\ X_{5,0}^R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{MB}^{sp}(0) \\ 0,7 \\ \sqrt{0,51} y_{xB}^{sp}(0) \\ y_{xB}^{sp}(0) \\ y_{xV}^{sp}(0) \\ y_{MD}^{sp}(0) \end{bmatrix} \quad (4.4-4)$$

Tem-se então as matrizes A , B , C definidas como :

$$A = \begin{bmatrix} -\omega_{MB} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(0,7)\omega_{xB} & -\sqrt{0,51}\omega_{xB} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{0,51}\omega_{xB} & -(0,7)\omega_{xB} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_{xV} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_{MD} \end{bmatrix} \quad (4.4-5a)$$

$$B = \begin{bmatrix} \omega_{MB} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\omega_{xB}}{\sqrt{0,51}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{xV} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_{MD} \end{bmatrix} \quad (4.4-5b)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4-5c)$$

e definindo a matriz D como :

$$D = \begin{bmatrix} (C)_{11} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & (CA)_{22} & (CA)_{23} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & (C)_{34} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & (C)_{45} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{0,51}\omega_{xB} & -(0,7)\omega_{xB} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4-5d)$$

Pode-se calcular as seguintes matrizes que serão utilizadas para determinar as derivadas das trajetórias de referência :

$$(CA) = \begin{bmatrix} -\omega_{MB} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{0,51}\omega_{xB} & -(0,7)\omega_{xB} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_{xV} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_{MD} \end{bmatrix} \quad (4.4-6a)$$

$$(CA^2) = \begin{bmatrix} (\omega_{MB})^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2(0,7)\sqrt{0,51}(\omega_{xB})^2 & -(0,51)(0,7)^2(\omega_{xB})^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\omega_{xV})^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\omega_{MD})^2 \end{bmatrix} \quad (4.4-6b)$$

$$(CB) = \begin{bmatrix} \omega_{MB} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{xV} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_{MD} \end{bmatrix} \quad (4.4-6c)$$

$$(CAB) = \begin{bmatrix} -(\omega_{MB})^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\omega_{xB})^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\omega_{xV})^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\omega_{MD})^2 \end{bmatrix} \quad (4.4-6d)$$

$$(DA) = \begin{bmatrix} -\omega_{MB} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2(0,7)\sqrt{0,51}(\omega_{xB})^2 & -(0,51)(0,7)^2(\omega_{xB})^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_{xV} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_{MD} \end{bmatrix} \quad (4.4-7a)$$

$$(DB) = \begin{bmatrix} \omega_{MB} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\omega_{xB})^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{xV} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_{MD} \end{bmatrix} \quad (4.4-7b)$$

Lembrando a analogia em relação à matriz de observabilidade, tem-se :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{L}_{\mathbf{g}_0} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{L}_{\mathbf{g}_0}^2 \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{b}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{\mathbf{g}_0} h_1(\mathbf{x}) \\ \mathbf{L}_{\mathbf{g}_0}^2 h_2(\mathbf{x}) \\ \mathbf{L}_{\mathbf{g}_0} h_3(\mathbf{x}) \\ \mathbf{L}_{\mathbf{g}_0} h_4(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \Leftrightarrow (\text{DA}) \quad (4.4-8)$$

Lembrando a analogia em relação aos elementos da expansão de Markov, tem-se :

$$\{(\mathbf{L}_{\mathbf{g}} \mathbf{h}(\mathbf{x})), (\mathbf{L}_{\mathbf{g}} \mathbf{L}_{\mathbf{g}_0} \mathbf{h}(\mathbf{x}))\} \leftrightarrow \{(\mathbf{CB}), (\mathbf{CAB})\} \Leftrightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{\mathbf{g}} h_1(\mathbf{x}) \\ \mathbf{L}_{\mathbf{g}} \mathbf{L}_{\mathbf{g}_0} h_2(\mathbf{x}) \\ \mathbf{L}_{\mathbf{g}} h_3(\mathbf{x}) \\ \mathbf{L}_{\mathbf{g}} h_4(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \Leftrightarrow (\text{DB}) \quad (4.4-9)$$

Pretende-se com estas comparações que as ordens das dinâmicas da trajetória de referência e a resposta do sistema sejam coerentes. As trajetórias de referência  $\mathbf{y}^R$  são os valores efetivamente utilizados pelo presente controle não linear. Os "setpoints" desejados  $\mathbf{y}^{sp}$  são somente entradas externas.

Apresenta-se aqui dois métodos de projeto do controlador para que a resposta do sistema acompanhe a trajetória desejada : ajuste ao modelo de referência ("*model matching*") e rastreamento do erro ("*error tracking*").

No "*model matching*" de Isidori(1985) associa-se o modelo da dinâmica do sistema não linear com o modelo da trajetória prescrita, re-escrevendo sob a forma de um modelo estendido :

$$\dot{\mathbf{x}}^E = \mathbf{g}_0^E(\mathbf{x}) + \mathbf{g}^E(\mathbf{x})\mathbf{u}^E \quad (4.4-10)$$

$$\mathbf{y}^E = \mathbf{h}^E(\mathbf{x})$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}}^R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) \\ \mathbf{Ax}^R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{g}(\mathbf{x}) & | & 0 \\ 0 & | & \mathbf{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \quad (4.4-11)$$

$$(\mathbf{y} - \mathbf{y}^R) = (\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{Cx}^R)$$

Pode-se notar intuitivamente que agora o problema de acompanhamento da trajetória tornou-se um problema de dinâmica de zero do novo sistema estendido. Ou seja, a solução de regulação é uma propriedade da dinâmica de zero. Isidori(1985,1989) apresenta o algoritmo de estrutura, que ao mesmo tempo é uma demonstração e um procedimento, da qual resulta que a lei de controle procurada é :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x})(DA)\mathbf{x}^R + \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x})(DB)\mathbf{y}^{sp} \quad (4.4-12)$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} B \\ Q_v \\ R \\ D \end{pmatrix} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x})(DA) \begin{pmatrix} x_1^R \\ x_2^R \\ x_3^R \\ x_4^R \\ x_5^R \end{pmatrix} + \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x})(DB) \begin{pmatrix} y_{MB}^{sp} \\ y_{xB}^{sp} \\ y_{xN}^{sp} \\ y_{MD}^{sp} \end{pmatrix} \quad (4.4-13)$$

Porém preferiu-se utilizar aqui o segundo método, de rastreamento de erro. O "*error tracking*" é a aplicação imediata do sentido físico do significado do grau relativo e das derivadas de Lie. Sempre é interessante relembrar o significado intuitivo da matriz característica  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  e da lei de controle não linear .

Para cada variável resposta considere o rastreamento do erro em relação ao sinal de referência  $y^R(t)$  a partir da imposição :

$$\frac{d^r(y^R - y)}{dt^r} + \delta_{r-1} \frac{d^{r-1}(y^R - y)}{dt^{r-1}} + \dots + \delta_1 \frac{d(y^R - y)}{dt} + \delta_0(y^R - y) = 0 \quad (4.4-14)$$

ou seja,

$$\frac{d^r e(t)}{dt^r} + \delta_{r-1} \frac{d^{r-1} e(t)}{dt^{r-1}} + \dots + \delta_1 \frac{de(t)}{dt} + \delta_0 e(t) = 0 \quad (4.4-15)$$

onde  $(r)$  é o grau relativo e  $\delta_k$  são coeficientes do polinomial de Hurwitz, isto é,  $\delta_k$  são os zeros do polinomial

$$s^r + \delta_{r-1}s^{r-1} + \dots + \delta_1 s + \delta_0 = 0 \quad (4.4-16)$$

que pertencem ao semiplano complexo esquerdo e conseqüentemente o erro e as suas derivadas vão assintoticamente à zero :

$$\frac{d^r e(t)}{dt^r} \rightarrow 0, \quad \frac{d^{r-1} e(t)}{dt^{r-1}} \rightarrow 0, \quad \frac{de(t)}{dt} \rightarrow 0, \quad e(t) \rightarrow 0 \text{ em } t \rightarrow \infty. \quad (4.4-17)$$

Portanto da imposição acima da dinâmica do rastreamento do erro em relação à trajetória de referência tem-se :

$$\frac{d^r y}{dt^r} = \frac{d^r y^R}{dt^r} + \delta_{r-1} \left( \frac{d^{r-1} y^R}{dt^{r-1}} - \frac{d^{r-1} y}{dt^{r-1}} \right) + \dots + \delta_1 \left( \frac{dy^R}{dt} - \frac{dy}{dt} \right) + \delta_0 (y^R - y) \quad (4.4-18)$$

Lembrando que para cada saída  $h(\mathbf{x})$  vale :

$$\begin{aligned} y &= h(\mathbf{x}) + 0 \\ \frac{dy}{dt} &= L_{\mathbf{g}_0} h(\mathbf{x}) + 0 \\ &\vdots \\ \frac{d^{r-1} y}{dt^{r-1}} &= L_{\mathbf{g}_0}^{r-1} h(\mathbf{x}) + 0 \\ \frac{d^r y}{dt^r} &= L_{\mathbf{g}_0}^r h(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{g}_0}^{r-1} h(\mathbf{x}) u(t) \end{aligned} \quad (4.4-19)$$

tem-se da última expressão acima referente ao  $\left( \frac{d^r y}{dt^r} \right)$  :

$$u(t) = - \left( L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{g}_0}^{r-1} h(\mathbf{x}) \right)^{-1} \left( L_{\mathbf{g}_0}^r h(\mathbf{x}) \right) + \left( L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{g}_0}^{r-1} h(\mathbf{x}) \right)^{-1} \left( \frac{d^r y}{dt^r} \right). \quad (4.4-20)$$

Generalizando para sistema multivariável e lembrando que a matriz  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  tem grau relativo definido, tem-se :

$$\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}) \begin{pmatrix} \frac{d^{r_1} y_1}{dt^{r_1}} \\ \frac{d^{r_2} y_2}{dt^{r_2}} \\ \vdots \\ \frac{d^{r_n} y_n}{dt^{r_n}} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(t) \quad (4.4-21)$$

Para cada  $\frac{d^{r_i} y_i}{dt^{r_i}}$  da expressão anterior podemos substituir pela equação decorrente da imposição da dinâmica de rastreamento do erro em relação à trajetória de referência :

$$\frac{d^{r_i} y_i}{dt^{r_i}} = \frac{d^{r_i} y_i^R}{dt^{r_i}} + \delta_{r_i-1} \left( \frac{d^{r_i-1} y_i^R}{dt^{r_i-1}} - \frac{d^{r_i-1} y_i}{dt^{r_i-1}} \right) + \dots + \delta_1 \left( \frac{dy_i^R}{dt} - \frac{dy_i}{dt} \right) + \delta_0 (y_i^R - y_i) \quad (4.4-22)$$

Substituindo cada termo  $\frac{d^k y_i}{dt^k}$  ( $k=1,2,\dots,(r_i-1)$ ) da expressão acima por equações expressas em derivadas de Lie , tem-se :

$$\frac{d^{r_i} y_i}{dt^{r_i}} = \frac{d^{r_i} y_i^R}{dt^{r_i}} + \delta_{r_i-1} \left( \frac{d^{r_i-1} y_i^R}{dt^{r_i-1}} - L_{\mathbf{g}_0}^{r_i-1} h_i(\mathbf{x}) \right) + \dots + \delta_1 \left( \frac{dy_i^R}{dt} - L_{\mathbf{g}_0} h_i(\mathbf{x}) \right) + \delta_0 (y_i^R - y_i) \quad (4.4-22)$$

Então o vetor  $\mathbf{v}(t)$  da lei de controle (  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(t)$  ) é dado por :

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} \frac{d^{r_1} y_1^R}{dt^{r_1}} \\ \frac{d^{r_2} y_2^R}{dt^{r_2}} \\ \vdots \\ \frac{d^{r_n} y_n^R}{dt^{r_n}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_{1,r_1-1} \left( \frac{d^{r_1-1} y_1^R}{dt^{r_1-1}} - L_{\mathbf{g}_0}^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) \right) \\ \delta_{2,r_2-1} \left( \frac{d^{r_2-1} y_2^R}{dt^{r_2-1}} - L_{\mathbf{g}_0}^{r_2-1} h_2(\mathbf{x}) \right) \\ \vdots \\ \delta_{n,r_n-1} \left( \frac{d^{r_n-1} y_n^R}{dt^{r_n-1}} - L_{\mathbf{g}_0}^{r_n-1} h_n(\mathbf{x}) \right) \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} \delta_{1,1} \left( \frac{dy_1^R}{dt} - L_{\mathbf{g}_0} h_1(\mathbf{x}) \right) \\ \delta_{2,1} \left( \frac{dy_2^R}{dt} - L_{\mathbf{g}_0} h_2(\mathbf{x}) \right) \\ \vdots \\ \delta_{n,1} \left( \frac{dy_n^R}{dt} - L_{\mathbf{g}_0} h_n(\mathbf{x}) \right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_{1,0} (y_1^R - y_1) \\ \delta_{2,0} (y_2^R - y_2) \\ \vdots \\ \delta_{n,0} (y_n^R - y_n) \end{pmatrix} \quad (4.4-23)$$

Portanto para a coluna de destilação tem-se :

$$v_{MB}(t) = \frac{dy_{MB}^R}{dt} + \delta_{MB,0} e_{MB}(t) = \frac{dy_{MB}^R}{dt} + \delta_{MB,0} (y_{MB}^R - M_B)$$

$$\begin{aligned}
v_{xB}(t) &= \frac{d^2 y_{xB}^R}{dt^2} + \delta_{xB,1} \frac{de_{xB}(t)}{dt} + \delta_{xB,0} e_{xB}(t) \\
&= \frac{d^2 y_{xB}^R}{dt^2} + \delta_{xB,1} \left( \frac{dy_{xB}^R}{dt} - L_{\mathbf{g}_0} h_2(\mathbf{x}) \right) + \delta_{xB,0} (y_{xB}^R - x_B) \\
&= \frac{d^2 y_{xB}^R}{dt^2} + \delta_{xB,1} \left( \frac{dy_{xB}^R}{dt} - (1/M_B)(L_1(x_1 - x_B) - V_0(y_0 - x_B)) \right) + \delta_{xB,0} (y_{xB}^R - x_B)
\end{aligned}$$

$$v_{xN}(t) = \frac{dy_{xN}^R}{dt} + \delta_{xN,0} e_{xN}(t) = \frac{dy_{xN}^R}{dt} + \delta_{xN,0} (y_{xN}^R - x_N)$$

$$v_{MD}(t) = \frac{dy_{MD}^R}{dt} + \delta_{MD,0} e_{MD}(t) = \frac{dy_{MD}^R}{dt} + \delta_{MD,0} (y_{MD}^R - M_D)$$

(4.4-24a,b,c,d)

onde as derivadas  $\frac{d^2 y_i^R}{dt^2}$ ,  $\frac{dy_i^R}{dt}$  das trajetórias de referência são dadas por :

$$\begin{pmatrix} \frac{dy_{MB}^R}{dt} \\ \frac{dy_{xB}^R}{dt} \\ \frac{dy_{xN}^R}{dt} \\ \frac{dy_{MD}^R}{dt} \end{pmatrix} = (\mathbf{CA}) \begin{pmatrix} x_1^R \\ x_2^R \\ x_3^R \\ x_4^R \\ x_5^R \end{pmatrix} + (\mathbf{CB}) \begin{pmatrix} y_{MB}^{sp} \\ y_{xB}^{sp} \\ y_{xN}^{sp} \\ y_{MD}^{sp} \end{pmatrix} \quad (4.4-25a)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{d^2 y_{MB}^R}{dt^2} \\ \frac{d^2 y_{xB}^R}{dt^2} \\ \frac{d^2 y_{xN}^R}{dt^2} \\ \frac{d^2 y_{MD}^R}{dt^2} \end{pmatrix} = (\mathbf{CA}^2) \begin{pmatrix} x_1^R \\ x_2^R \\ x_3^R \\ x_4^R \\ x_5^R \end{pmatrix} + (\mathbf{CAB}) \begin{pmatrix} y_{MB}^{sp} \\ y_{xB}^{sp} \\ y_{xN}^{sp} \\ y_{MD}^{sp} \end{pmatrix} \quad (4.4-25b)$$

Os coeficientes  $\delta_{\cdot,k}$  são escolhidos tais que os polinomiais em (s) obedecem às seguintes relações de Hurwitz :

$$s + \delta_{MB,0} = 0$$

$$s^2 + \delta_{xB,1}s + \delta_{xB,0} = 0 \quad (4.4-26)$$

$$s + \delta_{xV,0} = 0$$

$$s + \delta_{MD,0} = 0$$

Isto é, os coeficientes são todos de Hurwitz, ou seja, com zeros no semiplano complexo esquerdo e consequentemente assintótico a zero em  $t \rightarrow \infty$ . De fato, os coeficientes  $\delta_{\cdot,k}$  são também utilizados como parâmetros de ajuste.

Assim, pode-se interpretar o presente sistema de controle não-linear conforme ilustrado na figura 4.6 :

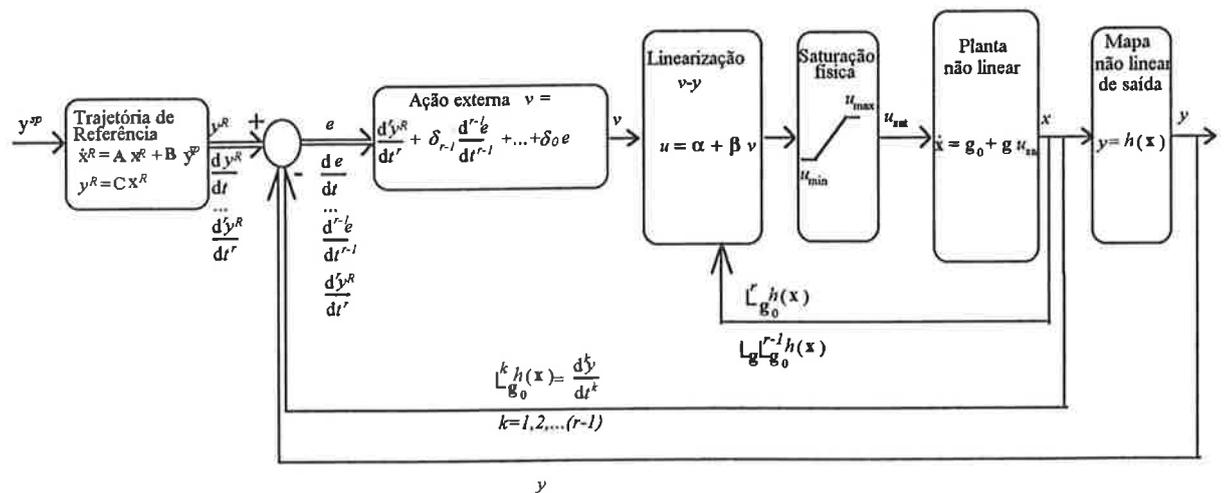


Figura 4.6. Esquema de controle não linear via rastreamento do erro.

Uma limitação aparente do esquema de controle acima é a possibilidade de ocorrer "offset" devido à incerteza do modelo. Porém, lembrando-se de que esta incerteza do modelo será sempre menor do que aquela cometida na aplicação de um controle linear, é intuitivo que este "offset" será menor do que o "offset" que ocorre em um controle linear baseado apenas no erro e nas derivadas de erro. Além disso, o controle não linear acima permite utilizar os ganhos  $\delta_{\cdot,k}$  maiores que os ganhos de um controle linear, e em muitas aplicações este "offset" é imperceptível.

A segunda e efetiva limitação é que os coeficientes  $\delta_{\cdot,k}$  são escolhidos apenas com a imposição do erro e suas derivadas evoluírem assintoticamente para zero. Portanto para uma resposta dinâmica adequada pode ser necessário a escolha de valores de  $\delta_{\cdot,k}$

exageradamente grandes. Deve-se lembrar que em uma implementação real os ganhos  $\delta_{\cdot,k}$  são limitados pela sensibilidade da ação perante os ruídos das medições.

Por isso incorpora-se a ação integral com esquema "anti-windup" tal como proposto pelo Aoufoussi et al.(1992) :

$$\frac{d^r e(t)}{dt^r} + \delta_{r-1} \frac{d^{r-1} e(t)}{dt^{r-1}} + \dots + \delta_1 \frac{de(t)}{dt} + \delta_0 e(t) + \delta_I \int (e(t) - \delta_S (I_{sat} - I)) dt = 0 \quad (4.4-27)$$

onde  $\delta_S (I_{sat} - I)$  previne contra a saturação da ação integral e  $I$  é o próprio termo integral  $I = \delta_I \int (e(t) - \delta_S (I_{sat} - I)) dt$

Chamando de  $u_{sat}$  a variável manipulada após as restrições físicas, isto é,

$$\begin{aligned} u_{sat} &= u_{min} & , \text{ se } u \leq u_{min} \\ u_{sat} &= u & , \text{ se } u_{min} < u < u_{max} \\ u_{sat} &= u_{max} & , \text{ se } u \geq u_{max} \end{aligned} \quad (4.4-28)$$

pode-se calcular o valor  $I_{sat}$  do termo integral que satura a ação de controle pelo cálculo em ordem reversa :

$$\begin{aligned} I_{sat} &= \left( \frac{-1}{\delta_S} \right) \left[ L_g L_r^{r-1} h(x) u_{sat} + \left( \frac{d^r y^R}{dt^r} - L_r^r h(x) \right) \right] \\ &+ \left( \frac{-1}{\delta_S} \right) \left[ \delta_{r-1} \left( \frac{d^{r-1} y^R}{dt^{r-1}} - L_r^{r-1} h(x) \right) + \dots + \delta_1 \left( \frac{dy^R}{dt} - L_r h(x) \right) + \delta_0 (y^R - y) \right] \end{aligned} \quad (4.4-29)$$

Quando  $u_{sat} = u$  tem-se  $I_{sat} = I$  , ou seja, cancela-se o termo  $\delta_S (I_{sat} - I)$  em  $u_{sat} = u$  . A figura 4.7 ilustra o esquema deste controle não linear com ação integral.

Note-se que a adição do termo integral não é arbitrária, e o sistema não linear pode ser reformulado como um novo sistema estendido na qual deve valer a estabilidade assintótica da nova dinâmica de zero.

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{I}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) \\ (\mathbf{y}^R - \mathbf{h}(\mathbf{x})) + \delta_s(I_{sat} - I) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{u} \quad (4.4-30)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$$

Uma vez que as retenções  $M_B$  e  $M_D$  da coluna são processos de capacitância pura, incluiu-se a ação integral apenas nos controles das composições  $x_B$  e  $x_N$ .

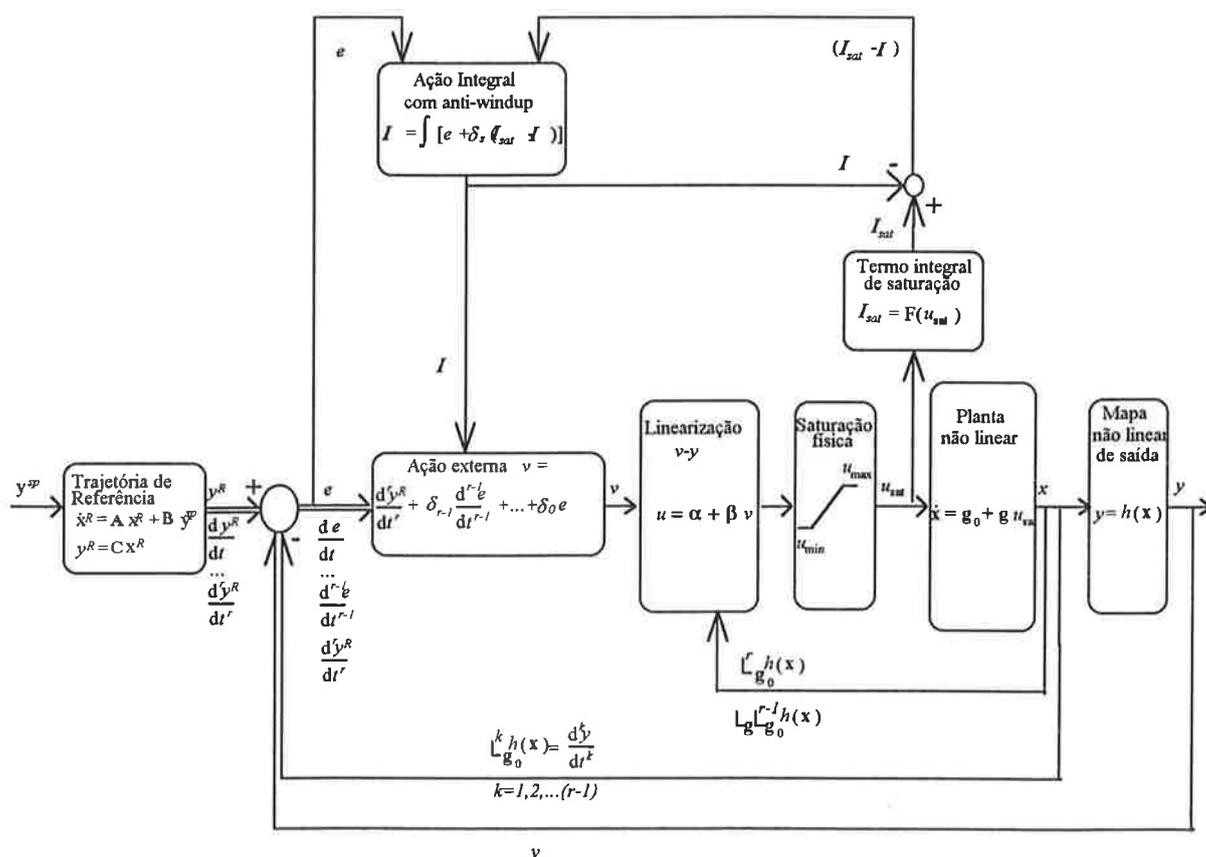


Figura 4.7. Controle não linear via rastreamento do erro com ação integral e esquema "anti-windup".

Finalmente, as matrizes de retroalimentação estática de estado  $\alpha(\mathbf{x})$  e  $\beta(\mathbf{x})$  não são implementados no controle da coluna na sua forma original. Em algumas variações operacionais de grande amplitude, principalmente na vazão da carga de alimentação, a matriz característica  $A(\mathbf{x})$  atravessa uma região das variáveis de estado onde esta matriz é mal-condicionada.

Para eliminar este problema, parte-se da equação

$$\frac{d^r y}{dt^r} = L_{g_0}^r h(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{g}} L_{g_0}^{r-1} h(\mathbf{x}) u(t) \quad (4.4-31)$$

na sua forma matricial para sistemas multivariáveis :

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{b}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(t) \quad (4.4-32)$$

rearranjando e pré-multiplicando por  $\mathbf{A}^T(\mathbf{x})$  tem-se :

$$\mathbf{A}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{u}(t) = -\mathbf{A}^T(\mathbf{x})\mathbf{b}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}^T(\mathbf{x})\mathbf{v}(t) \quad (4.4-33)$$

Assim pode-se incorporar a matriz diagonal de *fator de decretação* ( $\epsilon$ ) para evitar problemas com  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$  mal condicionada :

$$(\epsilon + \mathbf{A}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}))\mathbf{u}(t) = -\mathbf{A}^T(\mathbf{x})\mathbf{b}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}^T(\mathbf{x})\mathbf{v}(t) \quad (4.4-34)$$

Este fator foi utilizado pelo Rangel e Wang(1992) a partir do trabalho de Lien e Wang(1990).

Portanto tem-se :

$$\alpha(\mathbf{x}) = -\left[ (\epsilon + \mathbf{A}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{-1} \mathbf{A}^T(\mathbf{x}) \right] \mathbf{b}(\mathbf{x}) \quad (4.4-35a)$$

$$\beta(\mathbf{x}) = \left[ (\epsilon + \mathbf{A}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{-1} \mathbf{A}^T(\mathbf{x}) \right] \quad (4.4-35b)$$

onde ( $\epsilon$ ) é uma matriz diagonal :

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \epsilon_n \end{bmatrix} \quad (4.4-36)$$

Note-se que quando  $\epsilon \rightarrow 0$  tem-se  $\left[ (\epsilon + \mathbf{A}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{-1} \mathbf{A}^T(\mathbf{x}) \right] \rightarrow (\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{-1}$ . A escolha adequada de ( $\epsilon$ ) impede que  $(\epsilon + \mathbf{A}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}))$  seja singular.

De fato,  $(\epsilon)$  serve adicionalmente como mais um fator de ajuste de controlador pois este termo faz "detuning" do controlador não linear original.

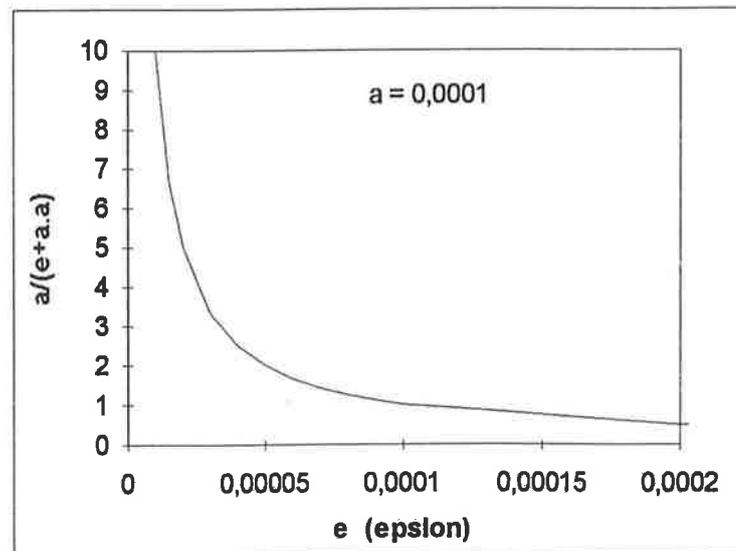
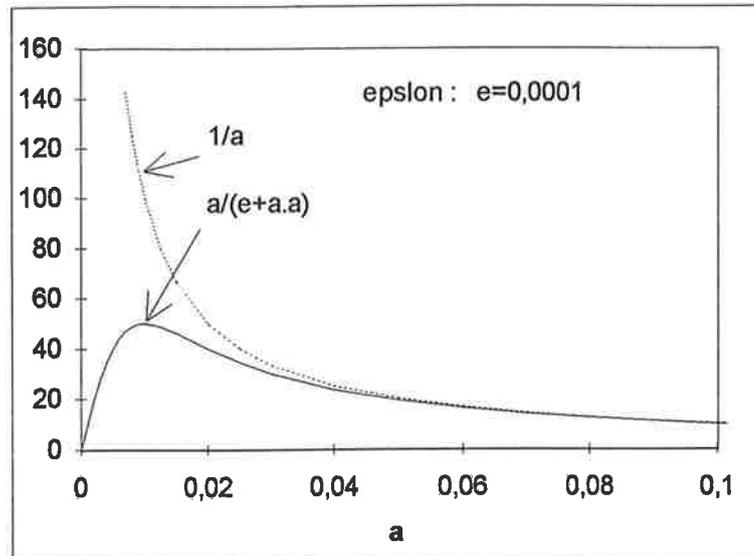


Figura 4.8. Influência do fator  $(\epsilon)$  .

Portanto aplicando este conceito do fator de decretação no controle da coluna de destilação, tem-se :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.4-37)$$

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} (L_1 - V_0) \\ - \left( \frac{L_{g_2} L_{g_0} h_2(\mathbf{x})}{\varepsilon_2 + (L_{g_2} L_{g_0} h_2(\mathbf{x}))^2} \right) [L_{g_0}^2 h_2(\mathbf{x})] \\ - \left( \frac{(x_D - x_N)/M_N}{\varepsilon_3 + (x_D - x_N)^2/M_N^2} \right) [V_{N-1}(y_{N-1} - x_N) - V_N(y_N - x_N)] \\ \left( \frac{(x_D - x_N)/M_N}{\varepsilon_3 + (x_D - x_N)^2/M_N^2} \right) [V_{N-1}(y_{N-1} - x_N) - V_N(y_N - x_N)] + [V_N] \end{bmatrix} \quad (4.4-38a)$$

$$\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left( \frac{L_{g_2} L_{g_0} h_2(\mathbf{x})}{\varepsilon_2 + (L_{g_2} L_{g_0} h_2(\mathbf{x}))^2} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left( \frac{(x_D - x_N)/M_N}{\varepsilon_3 + (x_D - x_N)^2/M_N^2} \right) & 0 \\ 0 & 0 & - \left( \frac{(x_D - x_N)/M_N}{\varepsilon_3 + (x_D - x_N)^2/M_N^2} \right) & -1 \end{bmatrix} \quad (4.4-38b)$$

#### 4.5. SIMULAÇÃO DO CONTROLE CONTÍNUO NÃO LINEAR DA COLUNA .

Considere-se inicialmente nulas as variáveis externas à linearização geométrica :

$$\begin{aligned} v_{MB}(t) &= 0 \\ v_{xB}(t) &= 0 \\ v_{xN}(t) &= 0 \\ v_{MD}(t) &= 0 \end{aligned} \tag{4.5-1}$$

A partir de 60 minutos, é aplicado em  $v_{xB}$  um degrau constante de  $v_{xB}(t) = +0,05$ . Em iguais condições, a partir de 60 minutos é aplicado em  $v_{xB}$  um degrau constante em sentido oposto, de  $v_{xB}(t) = -0,05$ . As respostas obtidas pela simulação da coluna estão representadas nas figuras 4.9 e 4.10 mostrando os resultados já esperados do ponto de vista teórico. O primeiro aspecto relevante é que a dinâmica de zero, mostrada nos primeiros 60 minutos, é estável. Várias simulações adicionais mostraram que a dinâmica de zero é assintoticamente estável. O segundo aspecto é que a composição do fundo responde linearmente ao  $v_{xB}$ . O terceiro é que a composição  $x_N$  do último prato é desacoplado de  $v_{xB}$ .

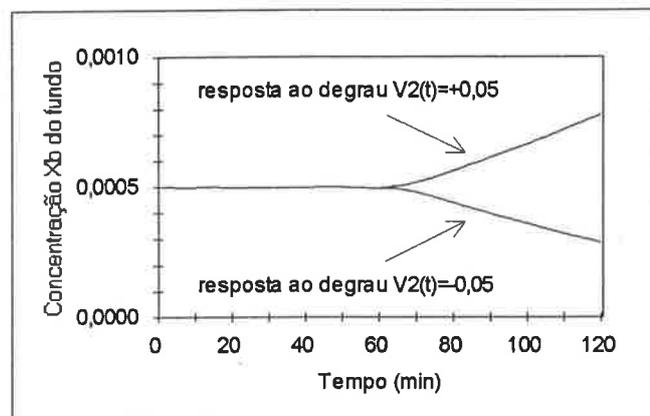


Figura 4.9. Resposta da composição do fundo perante degraus em  $v_{xB}$ .

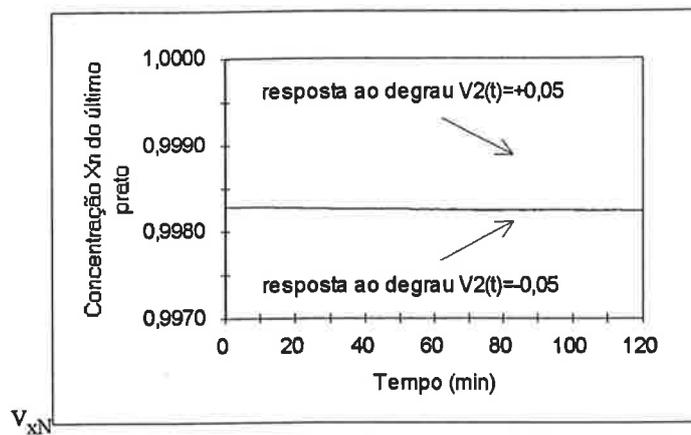


Figura 4.10. Resposta da composição do último prato perante degraus em  $v_{xB}$ .

Agora, considere o mesmo tipo de simulação para degrau em  $v_{xN}$ . Os resultados estão indicados nas figuras 4.11 e 4.12. Valem as mesmas observações do caso anterior. Na figura 4.11, a aparente interação entre a composição  $x_B$  do fundo e os degraus em  $v_{xN}$  é devido à grande diferença nos tempos característicos da dinâmica do fundo e da dinâmica do topo. Esta diferença será mais facilmente notada nos gráficos posteriores. As várias simulações ao longo de um tempo maior mostram que efetivamente a composição do fundo é desacoplado da variável  $v_{xN}$ .

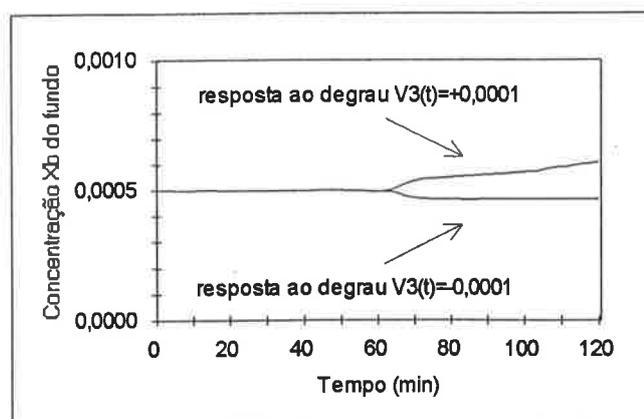


Figura 4.11. Resposta da composição do fundo perante degraus em  $v_{xN}$ .

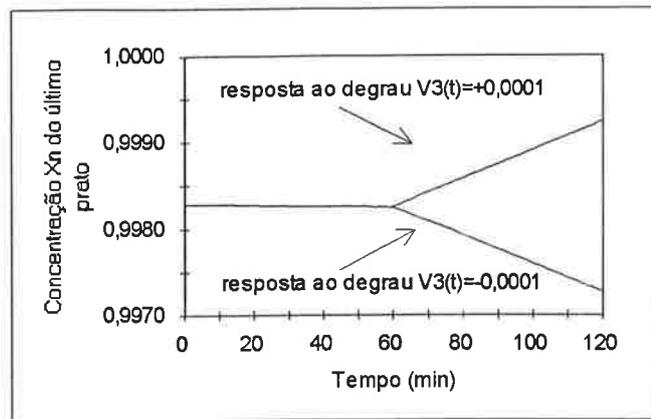


Figura 4.12. Resposta da composição do último prato perante degraus em  $v_{xN}$ .

Na literatura do controle não linear é comum gerar os coeficientes  $\delta_{.,k}$  de Hurwitz via forma binomial padrão  $(s + \omega_\delta)^r$  para controle sem ação integral e via  $(s + \omega_\delta)^{r+1}$  para controle com ação integral, onde ( $r$ ) indica o grau relativo. Pode-se lembrar do controle linear que a comparação com a forma padrão é o meio mais simples de ajuste para gerar performance (ITAE) perante perturbação de "setpoint" em degrau. Porém para o presente caso os coeficientes assim gerados apresentam um grande ganho para a ação integral e conseqüentemente a resposta será muito oscilatória ou com um sobresinal ("overshoot") não tolerável.

Motivado pelos resultados da figura 4.9, pode-se experimentar o método de Autotune de Åstrom e Hägglund(1988) indicado na figura 4.13 para a composição do fundo aplicando um sistema de relé com tempo morto na variável  $v_{xB}$ . Os resultados são mostrados nas figuras 4.14 e 4.15.

Dos resultados desta simulação calculou-se os ajustes de Ziegler-Nichols :  
 $\delta_{xB,2} = 2542,8$  ,  $\delta_{xB,1} = 25428$  ,  $\delta_{xB,0} = 23654$  e  $\delta_{xB,I} = 5500$

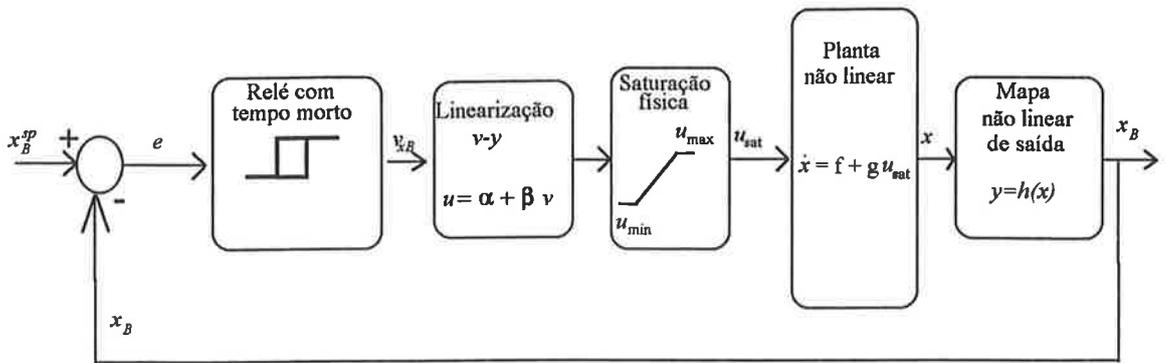


Figura 4.13. Simulação do Autotune para  $x_B - v_{xB}$ .

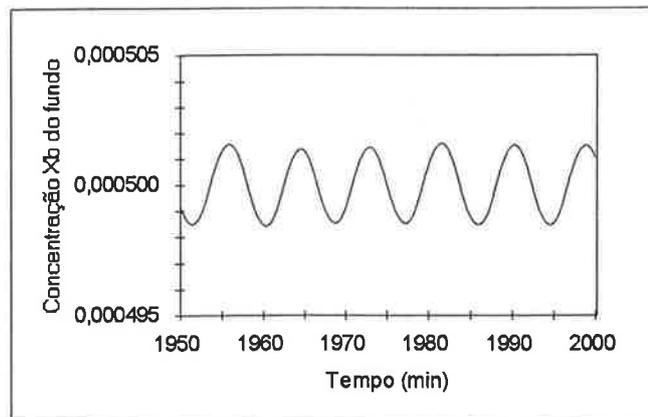


Figura 4.14 Resposta da composição  $x_B$  do fundo perante Autotune.

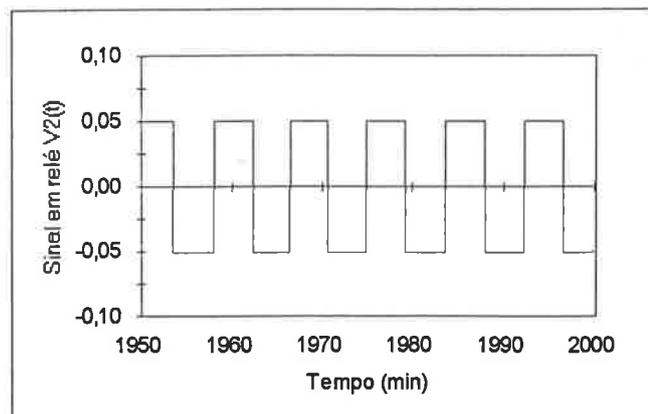


Figura 4.15 Sinal  $v_{xB}$  em relé com tempo morto gerado pelo Autotune.

Na figura 4.16 estão indicadas as respostas da concentração  $x_B$  de tolueno no fundo perante um degrau no "setpoint". A curva assintótica é resultado do controle quando o valor do ganho do termo integral é  $\delta_{x_B,I} = 0$ . As figuras 4.17 e 4.18 mostram as respectivas dinâmicas das variáveis manipuladas. Note-se que este degrau em "setpoint" é considerado de amplitude muito grande para este tipo de coluna. Note-se também que a resposta dinâmica da concentração  $x_B$  de tolueno no fundo é muito lenta.

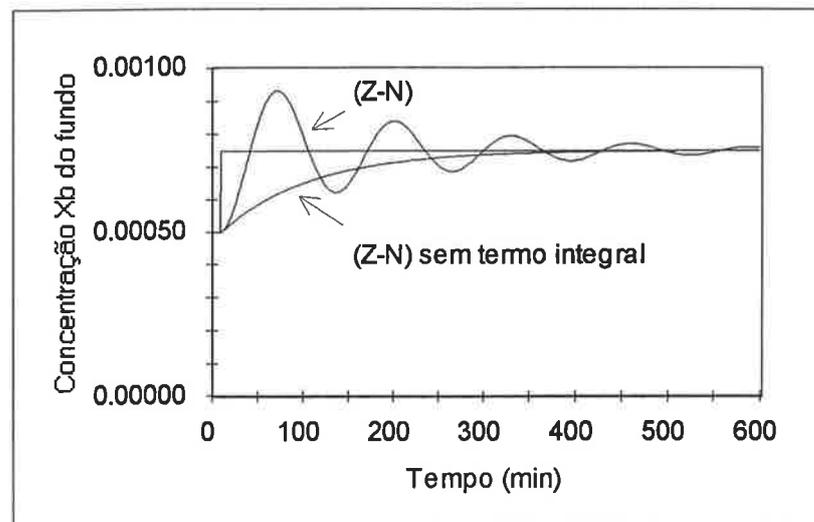


Figura 4.16 Resposta da concentração de tolueno no fundo perante degrau em "setpoint" para os coeficientes de Hurwitz calculados por Autotune.

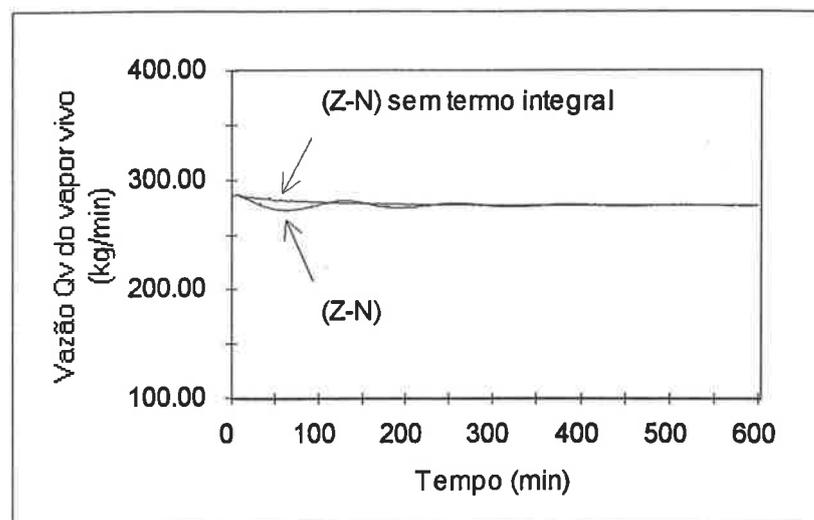


Figura 4.17 Vazão do vapor vivo perante degrau em "setpoint" do  $x_B$  para os coeficientes de Hurwitz calculados por Autotune.

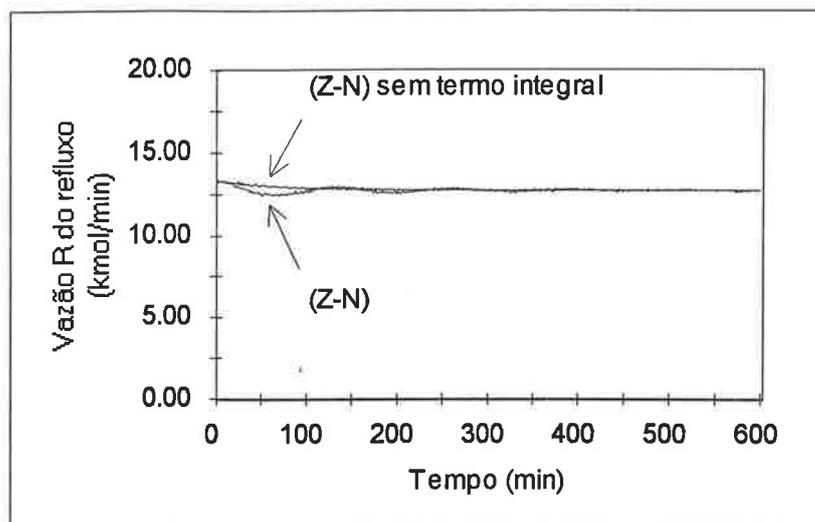


Figura 4.18 Vazão de refluxo perante degrau em "setpoint" do  $x_B$  para os coeficientes de Hurwitz calculados por Autotune.

Considerando que com este ajuste a resposta ainda é muito oscilatório, fez-se um "detuning" nos ganhos através de algumas simulações, resultando em  $\delta_{x_B,0} = 30000$  e  $\delta_{x_B,I} = 440$ . A resposta com estes novos ajustes está indicada na figura 4.19.

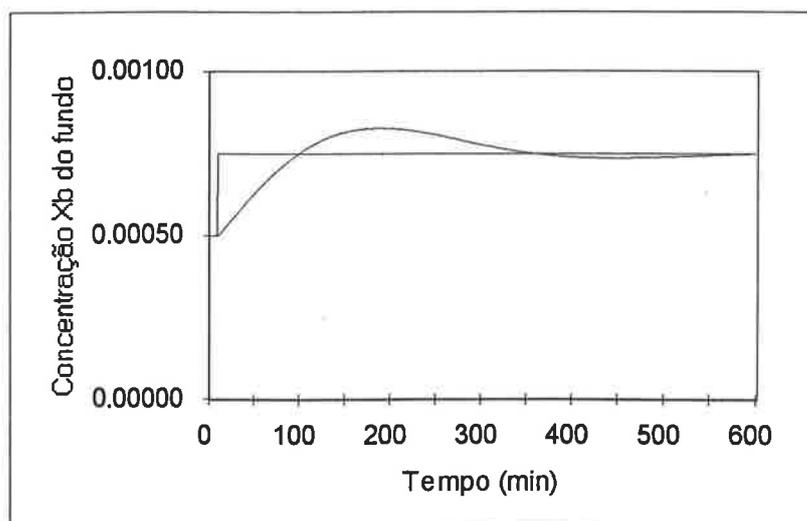


Figura 4.19 Resposta da concentração de tolueno no fundo perante degrau em "setpoint" para os novos coeficientes de Hurwitz.

Para o controle da composição  $x_N$  do último prato foi considerado satisfatório o ajuste com os valores  $\delta_{x_N,0} = 10$  e  $\delta_{x_N,I} = 5$ .

Note-se também na figura 4.20 que a mudança deste "setpoint" é considerado de amplitude muito grande para este tipo de coluna. A dinâmica da composição  $x_N$  do tolueno no último prato é muito rápida comparada ao da composição  $x_B$  do tolueno do fundo, e que a figura 4.20 tem a escala de tempo de 0-100 minutos ao passo que a figura 4.19 tem a escala de 0-600 minutos.

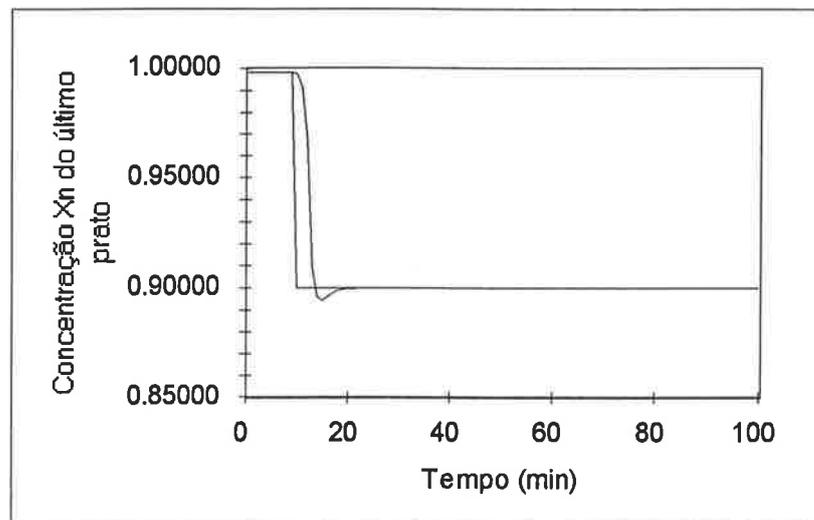


Figura 4.20 Resposta da concentração de tolueno no último prato perante degrau em "setpoint" .

As figuras 4.21 e 4.22 mostram as dinâmicas das variáveis manipuladas correspondentes a esta mudança de "setpoint". Naturalmente estas dinâmicas poderiam ser mais suaves à custa da performance da variável controlada, porém os presentes ganhos foram considerados suficientes para a ilustração. Na figura 4.22 pode-se ver que a vazão de refluxo inicialmente atingiu restrição física.

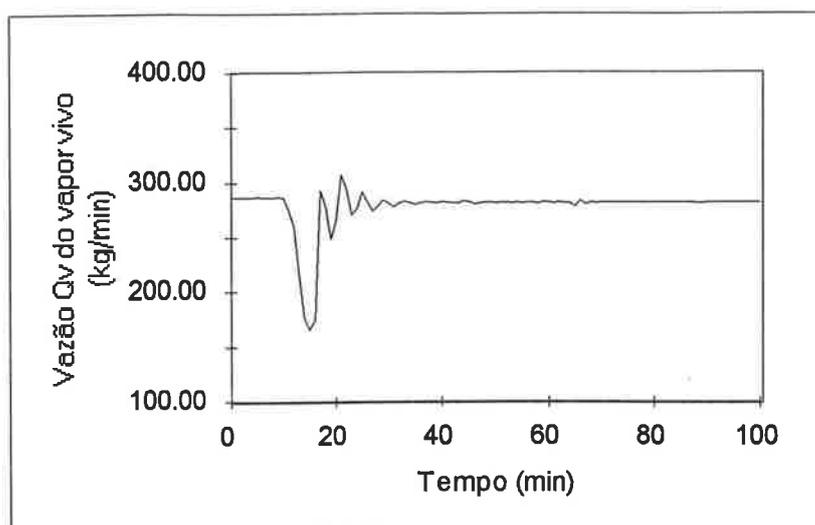


Figura 4.21 Vazão do vapor vivo perante degrau em "setpoint" do  $x_N$ .

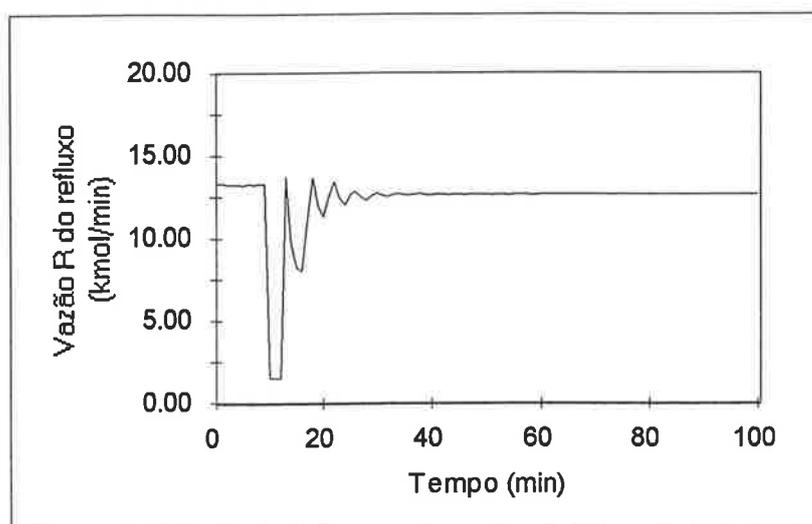


Figura 4.22 Vazão do refluxo perante degrau em "setpoint" do  $x_N$ .

Os parâmetros do controlador não linear da coluna e os valores das restrições físicas para as vazões de retirada do fundo, vapor vivo, refluxo e retirada do topo estão listadas na Tabela 4.II.

Tabela 4.II. PARÂMETROS DO CONTROLADOR NÃO LINEAR E OS VALORES DAS RESTRIÇÕES FÍSICAS.

$\omega_{MB} = 0,85$	$\omega_{xB}^2 = 0,85$	$\omega_{xN} = 0,85$	$\omega_{MD} = 0,85$
$\delta_{xB,2} = 2542,8$	$\delta_{xB,1} = 25428$	$\delta_{MB,0} = 0,85$	$\delta_{xB,I} = 440$ $\delta_{xB,S} = 0,5$
		$\delta_{xB,0} = 30000$	$\delta_{xN,I} = 5$ $\delta_{xI,S} = 0,5$
		$\delta_{xN,0} = 10$	
		$\delta_{MD,0} = 0,85$	
	$\epsilon_2 = 10^{-16}$	$\epsilon_3 = 10^{-16}$	
-----			
$B_{min} = 1,5$	$B_{max} = 30,0$		
$Q_{vmin} = 30,0$	$Q_{vmax} = 600,0$		
$R_{min} = 1,5$	$R_{max} = 30,0$		
$D_{min} = 1,5$	$D_{max} = 30,0$		

Agora, é interessante ver o resultado da simulação quando ocorre uma mudança simultânea de "setpoints", conforme ilustrado na sequência das figuras 4.23, 4.242, 4.25 e 4.26 :

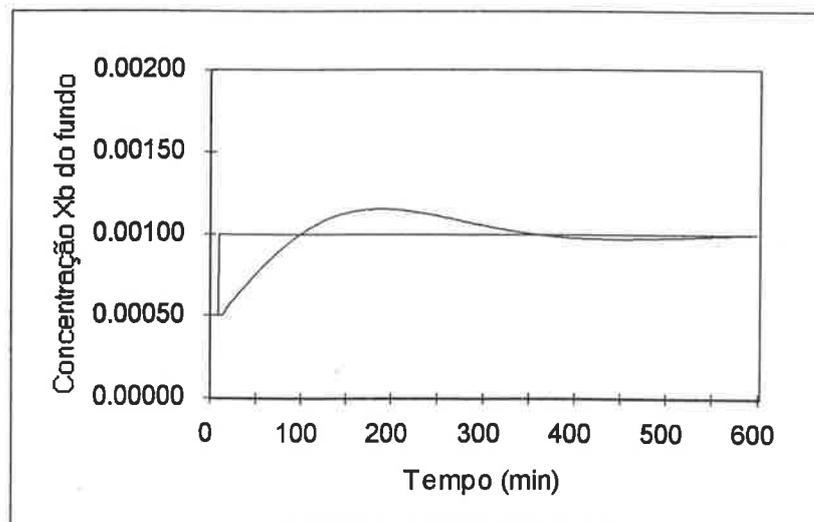


Figura 4.23 Composição de tolueno no fundo perante degraus simultâneos em "setpoints" do  $x_B$  e  $x_N$ .

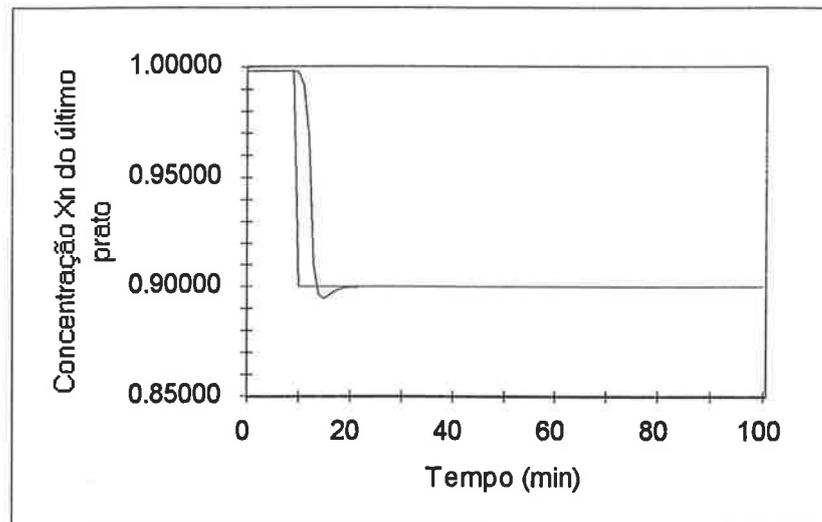


Figura 4.24 Composição de tolueno no último prato perante degraus simultâneos em "setpoints" do  $x_B$  e  $x_N$ .

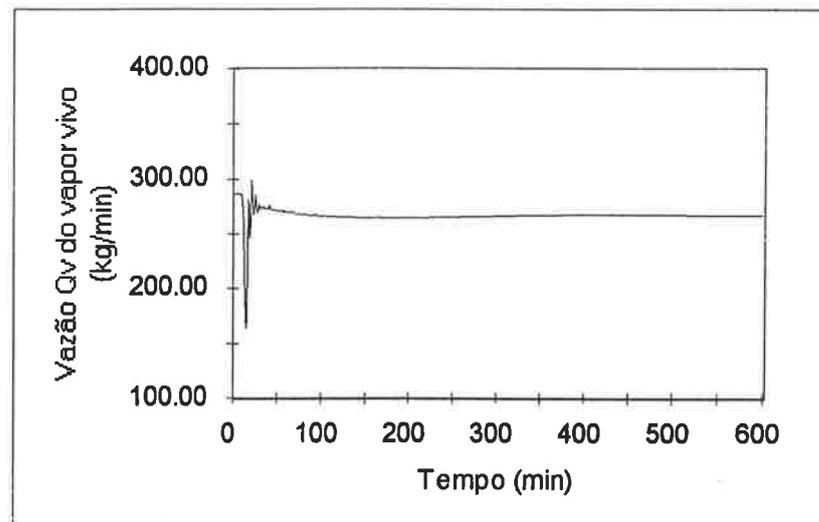


Figura 4.25 Vazão do vapor vivo perante degraus simultâneos em "setpoints" do  $x_B$  e  $x_N$ .

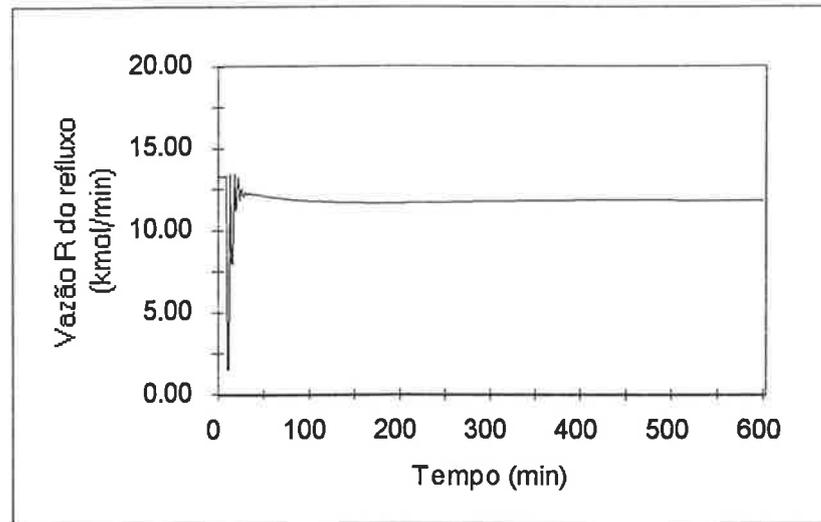


Figura 4.26 Vazão do refluxo perante degraus simultâneos em "setpoints" do  $x_B$  e  $x_N$ .

Considere-se agora os fatores  $\varepsilon$  modificados para  $\varepsilon_2 = 10^{-1}$  e  $\varepsilon_2 = 10^{-4}$ . Estes valores correspondem aproximadamente a um erro de modelo de 10% na matriz característica  $\mathbf{A}(x)$ . Compare-se o resultado da simulação para este caso, nas figuras 4.27, 4.28, 4.29 e 4.30, com a situação original das figuras 4.23 - 4.26.

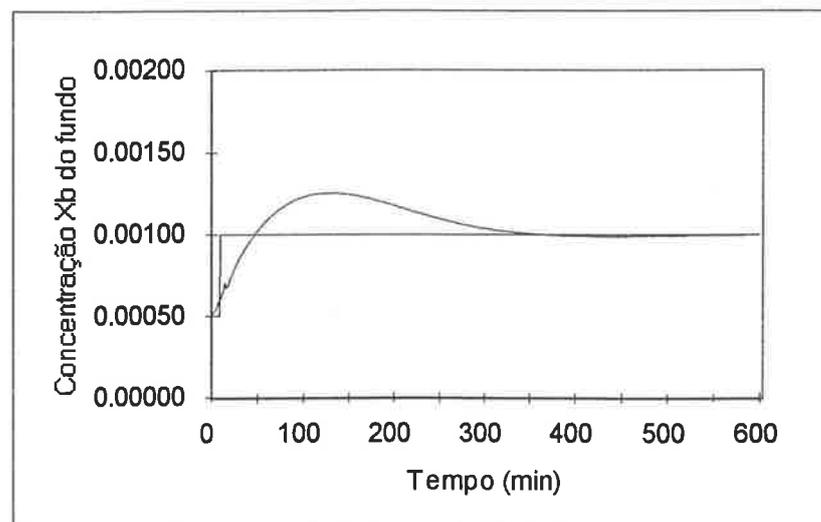


Figura 4.27 Composição de tolueno no fundo perante degraus simultâneos em "setpoints" do  $x_B$  e  $x_N$ , com erro de modelo em  $\varepsilon$ .

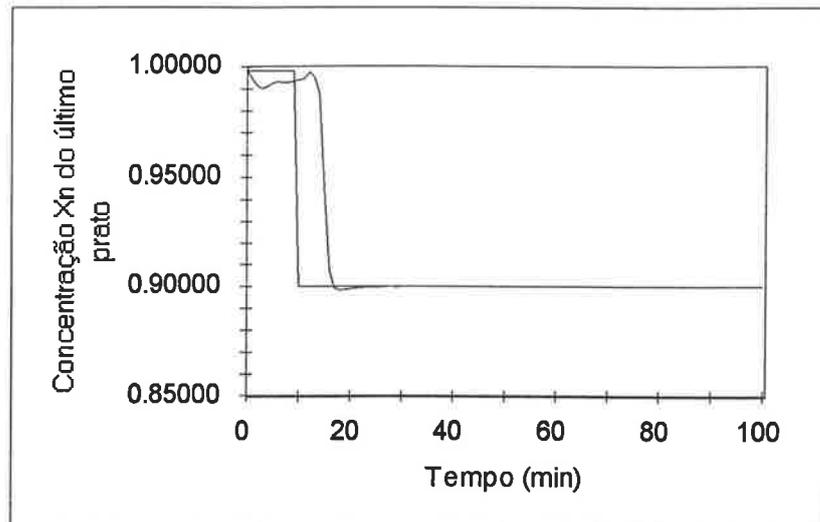


Figura 4.28 Composição de tolueno no último prato perante degraus simultâneos em "setpoints" do  $x_B$  e  $x_N$ , com erro de modelo em  $\epsilon$ .

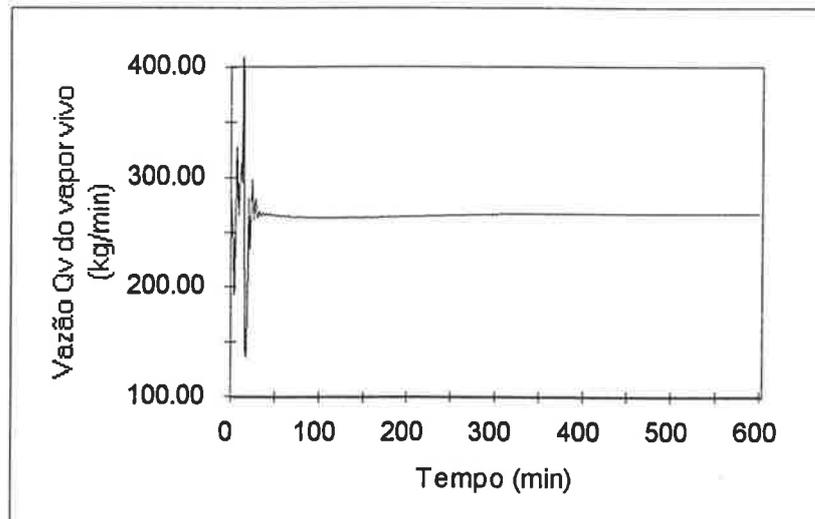


Figura 4.29 Vazão do vapor vivo perante degraus simultâneos em "setpoints" do  $x_B$  e  $x_N$ , com erro de modelo em  $\epsilon$ .

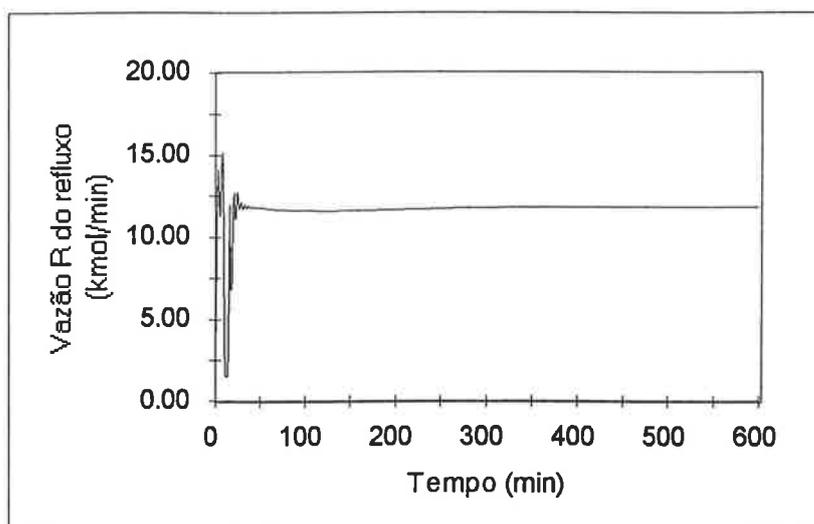


Figura 4.30 Vazão do refluxo perante degraus simultâneos em "setpoints" do  $x_B$  e  $x_N$ , com erro de modelo em  $\epsilon$ .

Finalmente, considere-se um distúrbio na vazão  $F$  de alimentação em duplo pulso, ocorrendo com amplitude de -10% do valor original da vazão aos 60 minutos e com amplitude de +10% do valor original da vazão aos 240 minutos. Adicionalmente, inicia-se aos 420 minutos uma perturbação aleatória na concentração  $z_F$  da alimentação com amplitude máxima de 3%. Estas perturbações podem ser visualizadas na figura 4.31.

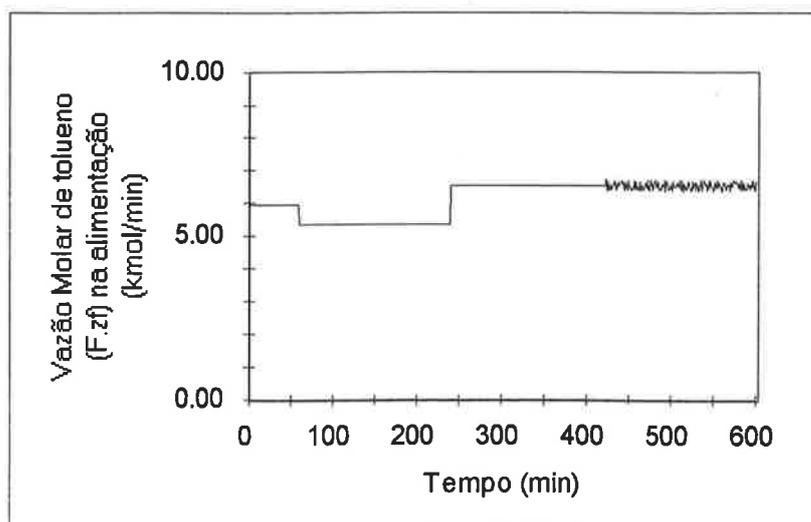


Figura 4.31 Distúrbios na alimentação.

Os resultados desta simulação são apresentados nas figuras 4.32, 4.33, 4.34 e 4.35 .  
Conforme já previsto, ocorre uma boa rejeição a estes distúrbios.

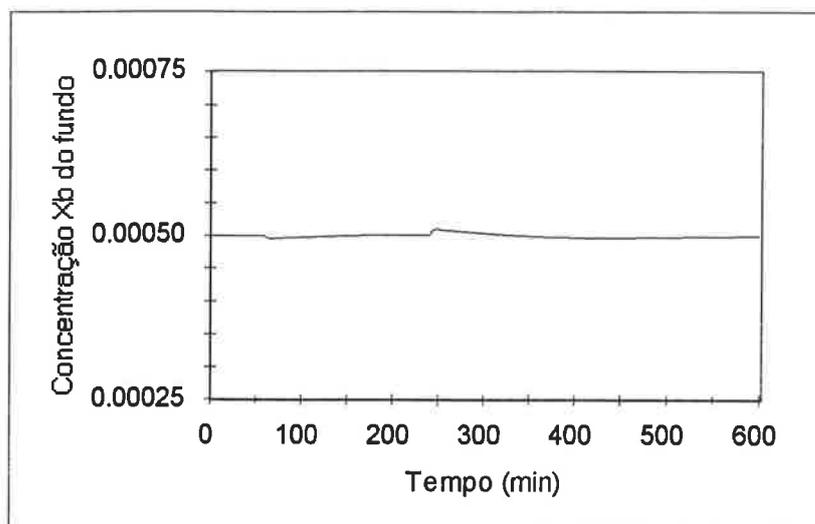


Figura 4.32 Composição de tolueno no fundo perante distúrbio na alimentação.

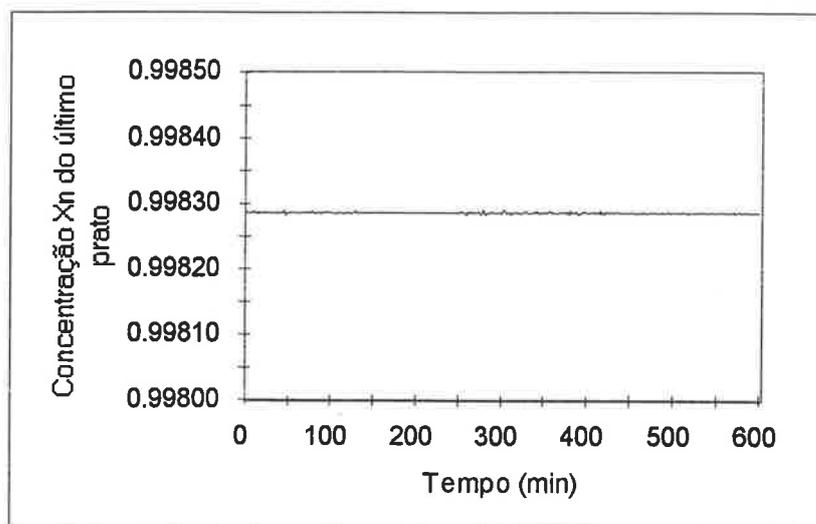


Figura 4.33 Composição de tolueno no último prato perante distúrbio na alimentação.

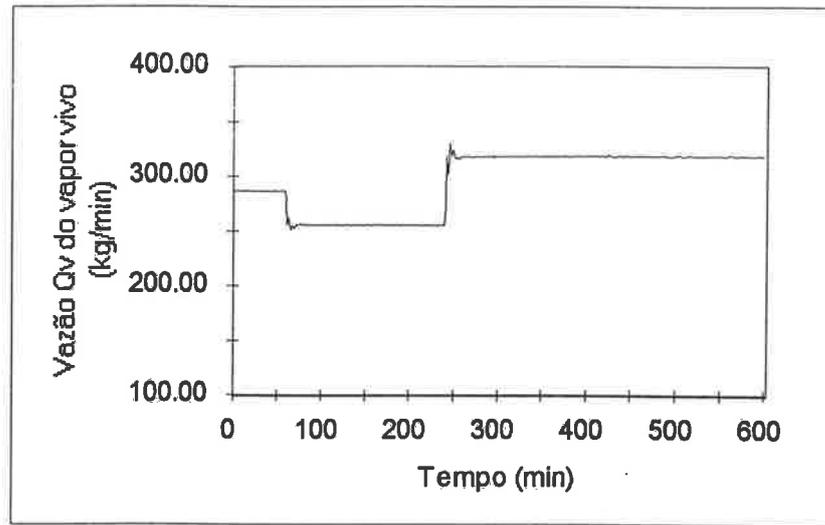


Figura 4.34 Vazão do vapor vivo perante distúrbio na alimentação.

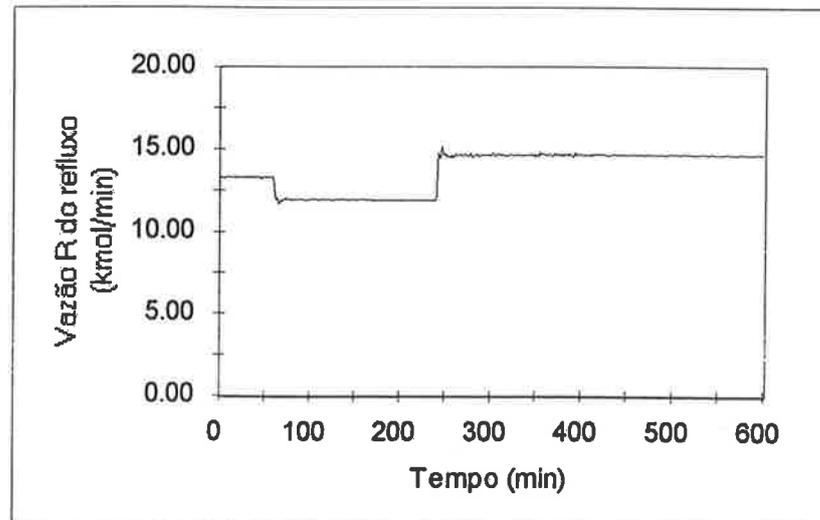


Figura 4.35 Vazão do refluxo perante distúrbio na alimentação.



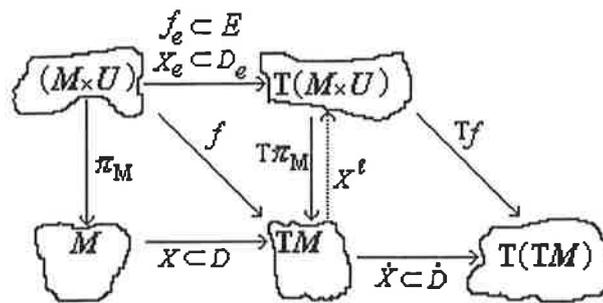


Figura 5.2. Prolongação dos mapas de um sistema dinâmico não-linear geral.

No caso de sistemas discretos, modelos *não-lineares discretos* podem ser obtidos da integração exata do modelo contínuo no intervalo de amostragem, da aproximação decorrente de métodos numéricos ou da identificação não-linear. Em todo caso, o modelo não-linear discreto obtido geralmente não é afim em entradas.

Considere o seguinte sistema não-linear discreto :

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) \quad \text{com } \mathbf{x}(k=0) = \mathbf{x}_0 ; \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m \quad (5-1a)$$

$$y_j(k) = h_j(\mathbf{x}(k)) \quad \text{onde } j = 1, 2, \dots, p ; \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p \quad (5-1b)$$

As respostas do sistema dinâmico são as usuais funções  $h_j: M \rightarrow \mathbb{R}$ .

Mantém-se as notações usuais para as projeções canônicas que são os mapas  $\pi_M: (M \times U) \rightarrow M$  e  $\pi_U: (M \times U) \rightarrow U$ , e a projeção natural representada como o mapa  $\pi: TM \rightarrow M$ , conforme esquematizado na figura 5.3.

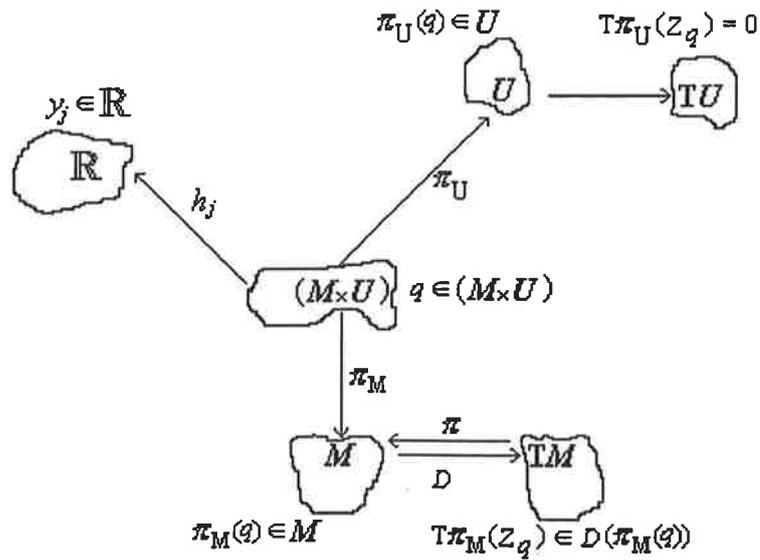


Figura 5.3. Mapas de um sistema dinâmico não-linear geral.

A ação de retroalimentação  $\gamma: M \times U \rightarrow M \times U$  continua sendo um difeomorfismo onde vale a relação  $(\pi_M \circ \gamma)(p) = \pi_M(p)$ , conforme esquematizado na figura 5.4 .

Também nos sistemas discretos, em coordenadas locais tem-se retroalimentação  $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \gamma(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  onde  $\mathbf{v}$  é uma nova entrada, e por abuso de notação escreve-se simplesmente  $\mathbf{u} = \gamma(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ , indicando o sistema sob o controle retroalimentado como  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \gamma(\mathbf{x}, \mathbf{v}))$ , isto é,  $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \gamma(\mathbf{x}, \mathbf{v}))$  .

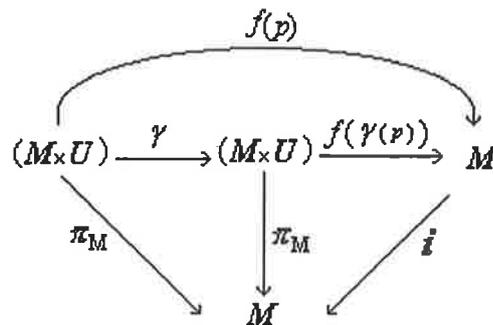


Figura 5.4. A função de retroalimentação de um sistema dinâmico discreto.

Lembre-se de que no caso de um sistema não-linear geral contínuo é necessário introduzir prolongações e levantamentos. Para o sistema *não-linear geral discreto* o tratamento torna-se mais simples, desde que em  $f:(M \times U) \rightarrow M$  não é mais necessário usar prolongações e sim *mapas tangentes* tal como definido na equação (3.1-27) do subcapítulo 3.1 .

Considere a dinâmica  $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k))$  dada na equação (5-1a) . Agora a função  $f:(M \times U) \rightarrow M$  , que representa a dinâmica do estado, não é mais um campo vetorial e sim uma *aplicação* (mapa) da variedade  $(M \times U)$  para a variedade  $M$  . A *subvariedade*  $M$  da variedade  $(M \times U)$  agora é considerada uma *submersão* .

Assim, por ser  $\mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k))$  uma função não-linear genérica, deve-se utilizar de sistemas estendidos sobre a variedade fibrada  $(M \times U)$  através de campos vetoriais estendidos  $\left( \left( \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right), \left( \frac{\partial}{\partial u_1} \right), \dots, \left( \frac{\partial}{\partial u_m} \right) \right)$  .

Em contraste à interpretação da *Álgebra de Acessibilidade e Condição de Controlabilidade Forte* comentada no subcapítulo 3.2 , pode-se ver em Jakubczyk e Sontag(1990) os conceitos de controlabilidade para sistemas discretos a partir da interpretação de submersões sucessivas .

E em contraste com a distribuição *f-invariante* das equações (3.2-6) e (3.2-8), e com a distribuição *invariante sob controle* das equações (3.2-15) e (3.2-18) para sistemas contínuos, pode-se ver o seu paralelo discreto em Grizzle(1985) e Nijmeijer e van der Schaft (1990).

Obviamente, como o mapa  $f(\cdot)$  e o mapa tangente  $Tf(\cdot)$  não são campos vetoriais, não se pode usar colchetes de Lie para as definições de *f-invariância*. Porém conceitualmente (Grizzle,1985) pode-se interpretar a invariância via *uma relação de equivalência* . Isto é, se  $\mathfrak{R}$  é uma relação de equivalência (Hoffman e Kunze,1961) em uma variedade  $M$  , então vale  $x_1 \mathfrak{R} x_2$  com  $x_1, x_2 \in M$  para cada  $\bar{u} \in U$  . Diz-se que  $\mathfrak{R}$  é *invariante* se também vale  $f(x_1, \bar{u}) \mathfrak{R} f(x_2, \bar{u})$  . Diz-se que  $\mathfrak{R}$  é *invariante sob controle* se existe uma retroalimentação  $u = \gamma(x, v)$  tal que também vale  $(f \circ \gamma)(x_1, v) \mathfrak{R} (f \circ \gamma)(x_2, v)$ , ou seja, também vale a relação  $\tilde{f}(x_1, v) \mathfrak{R} \tilde{f}(x_2, v)$ . Portanto pode-se redefinir as *invariâncias* em termos das *distribuições* conforme se segue :

Define-se uma distribuição  $D: M \rightarrow \mathbf{TM}$  como sendo *f*-invariante se para o mapa  $f: (M \times U) \rightarrow M$  tem-se o seu mapa tangente  $Tf: \mathbf{T}(M \times U) \rightarrow \mathbf{TM}$  com a seguinte propriedade para qualquer  $u \in U$ :

$$Tf(\cdot, u) \cdot D \subset D \quad (5-2a)$$

isto é, para  $(M \times U) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ , a equação (5-2a) torna-se :

$$\frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \cdot v \subset D(f(x, u)) \quad \text{para cada } v \in D(x) \quad (5-2b)$$

E define-se a distribuição  $D: M \rightarrow \mathbf{TM}$  como sendo *invariante sob controle* se existe uma retroalimentação  $\bar{u} = \gamma(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  com  $\text{rank}\left(\frac{\partial \gamma(\mathbf{x}, \mathbf{u}_0)}{\partial \mathbf{u}_0}\right) = m$ , de modo que

$$Tf(\cdot, \bar{u}) \cdot D = Tf(\cdot, \gamma(\cdot, v)) \cdot D \subset D \quad (5-3)$$

Lembre-se da equação (3.2-19), onde menciona-se que a condição  $[g_i, D] \subset (D+G)$  é necessária e suficiente para a invariância sob controle de sistemas afins contínuos. Analogamente, para sistemas discretos, dado  $Tf^{-1}(D) \cap T\pi_M^{-1}(0)$  com dimensão constante, a distribuição  $D$  (involutiva e de dimensão constante) é invariante sob controle *se e só se* :

$$Tf(T\pi_M^{-1}(D)) \subset D + Tf(T\pi_M^{-1}(0)) \quad (5-4)$$

Considere os mapas ilustrados na figura 5.5, onde  $f(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k))$  já não é um campo vetorial.

$$\begin{array}{ccc} (M \times U) & \xrightarrow{f} & M \\ E \swarrow & & \searrow D \\ \mathbf{T}(M \times U) & \xrightarrow{Tf} & \mathbf{TM} \end{array}$$

Figura 5.5. Representação do mapa de um sistema dinâmico discreto e o seu mapa tangente.

Em primeiro lugar, dada a distribuição  $E:(M \times U) \rightarrow T(M \times U)$ , a distribuição  $D:M \rightarrow TM$  e o mapa  $f:(M \times U) \rightarrow M$  analítico tal que o mapa tangente  $Tf:T(M \times U) \rightarrow TM$  é sobrejetor, tem-se

$$Tf(E(x, u)) = D(f(x, u)) \quad (5-5)$$

se e só se (Lee et al.(1987), lema 2) valer a condição :

$$[E, \ker(Tf)] \subset \ker(Tf) . \quad (5-6)$$

Portanto qualquer algoritmo para gerar a distribuição involutiva invariante sob controle desejada procurará obedecer a este lema.

Em segundo lugar, dado o mapa tangente  $T\pi_M:T(M \times U) \rightarrow TM$  da projeção canônica  $\pi_M:(M \times U) \rightarrow M$ , sempre pode-se escolher

$$\ker(T\pi_M) = T\pi_M^{-1}(0) = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u_m} \right\} . \quad (5-7)$$

Em terceiro lugar, considere a partição  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2)$  de modo que

$$D = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^1} \right\} , \text{ e} \quad (5-8)$$

Assim sempre pode-se particionar  $\mathbf{f} = (\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2)$  com :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^1_{(k+1)} &= \mathbf{f}^1(\mathbf{x}^1_{(k)}, \mathbf{x}^2_{(k)}, \mathbf{u}_{(k)}) \\ \mathbf{x}^2_{(k+1)} &= \mathbf{f}^2(\mathbf{x}^2_{(k)}, \mathbf{u}_{(k)}) \end{aligned} \quad (5-9)$$

Adicionalmente deve-se checar se

$$\ker \left( \frac{\partial \mathbf{f}^2}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{du} \right) = Tf^{-1}(D) \cap T\pi_M^{-1}(0) \quad (5-10)$$

tem dimensão constante.

A partir da codistribuição

$$P = \text{ann}(D) = \text{span}\{dx^2\}, \quad (5-11)$$

tem-se a codistribuição involutiva de dimensão constante  $(T^*f + T^*\pi_M)(P): (M \times U) \rightarrow T^*(M \times U)$  dada por :

$$(T^*f(P) + T^*\pi_M(P)) = \text{span}\{(dx^2), (df^2)\} = \text{span}\left\{(dx^2), \left(\frac{\partial^2}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial^2}{\partial u} du\right)\right\} \quad (5-12)$$

Dáí fazendo-se

$$E = \text{ker}(T^*f(P) + T^*\pi_M(P)) \quad (5-13)$$

segue-se que a distribuição  $E: (M \times U) \rightarrow T(M \times U)$  é involutiva de dimensão constante, com a seguinte propriedade :

$$\begin{aligned} T\pi_M(E) &\subset D \\ Tf(E) &\subset D \end{aligned} \quad (5-14)$$

o que caracteriza completamente a comutação do diagrama da figura 5.5 , isto é, procura-se caracterizar a distribuição  $E: (M \times U) \rightarrow T(M \times U)$  através da distribuição  $D: M \rightarrow TM$  .

Considere agora o problema de *desacoplamento de distúrbios de um sistema não-linear discreto genérico*

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \mathbf{w}(k)) \quad (5-15a)$$

$$y_j(k) = h_j(\mathbf{x}(k)) \quad \text{onde } j=1,2,\dots,p ; \quad (5-15b)$$

Agora a função discreta é uma aplicação  $f: (M \times U \times W) \rightarrow M$  entre a variedade fibrada  $(M \times U \times W)$  e a variedade do espaço de estado  $M$  , com a projeção natural  $\pi: TM \rightarrow M$  e as projeções canônicas  $\pi_M: (M \times U \times W) \rightarrow M$  ,  $\pi_U: (M \times U \times W) \rightarrow U$  e  $\pi_W: (M \times U \times W) \rightarrow W$  .

Considere a retroalimentação

$$\mathbf{u} = \gamma(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \quad (5-16)$$

e o correspondente sistema em malha fechada sob o controle retroalimentado :

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \gamma(\mathbf{x}(k), \mathbf{v}(k)), \mathbf{w}(k)) = \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(k), \mathbf{v}(k), \mathbf{w}(k)) \quad (5-17)$$

Para que a saída do sistema rejeite os distúrbios, isto é,  $\mathbf{y}(k) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(k))$  seja insensível perante  $\mathbf{w}(k)$ , a distribuição  $D$  (que atende à equação (5-4)) também deve obedecer às seguintes condições (Grizzle, 1985) :

$$Th(D) = 0, \text{ isto é, } D \subset \ker\left(\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{x}\right) \quad (5-18a)$$

$$T(f \circ \gamma)(\cdot, u, w) \cdot D = T\tilde{f}(\cdot, v, w) \cdot D \subset D, \text{ isto é, invariante sob controle} \quad (5-18b)$$

$$T(f \circ \gamma)(\mathbf{T}W) = T\tilde{f}(\cdot, v, \mathbf{T}W) \subset D \quad (5-18c)$$

Para uma distribuição que atende às condições (5-4), (5-18a) e (5-18b), tem-se esta última condição (5-18c) como *necessária e suficiente* para a solução de desacoplamento dos distúrbios.

Note-se também que para se obter a solução de *desacoplamento de entrada-saída*, as condições (5-18) são substituídas (Grizzle, 1986), (Chung e Grizzle, 1992) por :

$$Th_i(D_i) = 0, \text{ isto é, } D_i \subset \ker\left(\frac{\partial h_i}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{x}\right) \quad (5-19a)$$

$$T(f \circ \gamma)(\cdot, u) \cdot D_i \subset D_i \quad (5-29b)$$

$$T(f \circ \gamma)\left(\text{span}\left\{\frac{\partial}{\partial u_{j \neq i}}\right\}\right) \subset D_i \quad (5-19c)$$

Por existirem várias distribuições involutivas de dimensão constante e contidas no núcleo da observabilidade, os algoritmos procuram a distribuição máxima  $D^{max}$  (ou a correspondente distribuição máxima  $E^{max}$ ). Considere por exemplo o algoritmo proposto por Grizzle(1985) :

- (1). Fazer  $\bar{G}^0 = T\pi_M^{-1}(0)$ .
- (2). Dada a distribuição  $\bar{G}^k: (M \times U) \rightarrow \mathbf{T}(M \times U)$ , fazer  $\bar{G}^{k+1} = (T\pi_M^{-1}(Tf(\bar{G}^k)))$ .
- (3). Checar se  $(\bar{G}^k + \ker(Tf))$  é involutivo, e se  $(\bar{G}^k \cap \ker(Tf))$  tem dimensão constantes. Senão fazer  $\bar{G}^{max} = \bar{G}^{k+1} = \bar{G}^k$  e parar.

Se terminar com  $\bar{G}^{max} = \bar{G}^n$ , isto é, com  $(k+1) = n$  e com  $\dim(\bar{G}^n) = (n+m)$  então é possível uma linearização exata das variáveis de estado e de entrada.

Podemos agora definir o grau relativo como um conjunto de números inteiros  $(r_1, r_2, \dots, r_m)$  tais que

$$(a) \quad \left\langle dh_j, D_f^k g_i \right\rangle_{\substack{i,j=1,2,\dots,(p=m) \\ k=0,1,\dots,(r_j-1)}} = 0; \quad (5-20a)$$

$$(b) \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \langle dh_1, D_f^{r_1} g_1 \rangle & \langle dh_1, D_f^{r_1} g_m \rangle \\ \langle dh_m, D_f^{r_m} g_1 \rangle & \langle dh_m, D_f^{r_m} g_m \rangle \end{bmatrix} \text{ é não-singular.} \quad (5-20b)$$

Se  $(r_1 + r_2 + \dots + r_m) = n$  então é possível uma linearização exata das variáveis de estado e de entrada. Se  $(r_1 + r_2 + \dots + r_m) < n$ , ainda é possível uma linearização de entrada-saída pois o grau relativo é bem definido.

Aqui também os algoritmos apresentados são úteis para entender conceitualmente o controle através da geometria diferencial por ser livre de coordenadas, mas a implementação das ações de controle sugere uma construção algébrica.

Porém, é conveniente mostrar primeiro o sistema discreto (5-1) como uma composição de mapas e depois redefinir a matriz de desacoplamento de um sistema discreto e assim considerar o análogo discreto de desacoplamento entrada-saída.

Considere as equações de diferenças (5-1) que representam o sistema discreto não-linear, onde por simplicidade o número de entradas é igual ao número de saídas ( $p = m$ ):

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) \quad \text{com} \quad \mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}_0; \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m \quad (5-1a)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(k)) \quad ; \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{p=m} \quad (5-1b)$$

Assim a equação (5-1a) significa que :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\
 \mathbf{x}(1) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(0), \mathbf{u}(0)) \\
 \mathbf{x}(2) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(1), \mathbf{u}(1)) = \mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{x}(0), \mathbf{u}(0)), \mathbf{u}(1)) \\
 &\vdots \\
 \mathbf{x}(k) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(k-1), \mathbf{u}(k-1)) = \mathbf{f}(\mathbf{f}(\dots(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{x}(0), \mathbf{u}(0)), \mathbf{u}(1)), \dots, \mathbf{u}(k-2)), \mathbf{u}(k-1)) \\
 \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) = \mathbf{f}(\mathbf{f}(\dots(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{x}(0), \mathbf{u}(0)), \mathbf{u}(1)), \dots, \mathbf{u}(k-1)), \mathbf{u}(k))
 \end{aligned} \tag{5-21}$$

Ou utilizando, por conveniência, a notação  $\mathbf{f}_{\mathbf{u}_k}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(k))$  tem-se :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\
 \mathbf{x}(1) &= \mathbf{f}_{\mathbf{u}_0}(\mathbf{x}(0)) \\
 \mathbf{x}(2) &= \underbrace{\mathbf{f}_{\mathbf{u}_1} \circ \mathbf{f}_{\mathbf{u}_0}}_{2\text{-vezes}}(\mathbf{x}(0)) \\
 &\vdots \\
 \mathbf{x}(k) &= \underbrace{\mathbf{f}_{\mathbf{u}_{k-1}} \circ \mathbf{f}_{\mathbf{u}_{k-2}} \circ \dots \circ \mathbf{f}_{\mathbf{u}_1} \circ \mathbf{f}_{\mathbf{u}_0}}_{k\text{-vezes}}(\mathbf{x}(0)) \\
 \mathbf{x}(k+1) &= \underbrace{\mathbf{f}_{\mathbf{u}_k} \circ \mathbf{f}_{\mathbf{u}_{k-1}} \circ \dots \circ \mathbf{f}_{\mathbf{u}_1} \circ \mathbf{f}_{\mathbf{u}_0}}_{(k+1)\text{-vezes}}(\mathbf{x}(0))
 \end{aligned} \tag{5-22}$$

Ou analisando de modo reverso, tem-se :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{f}_{\mathbf{u}_k}(\mathbf{x}(k)) \\
 &= \mathbf{f}_{\mathbf{u}_k} \circ \mathbf{f}_{\mathbf{u}_{k-1}}(\mathbf{x}(k-1)) \\
 &\vdots \\
 &= \underbrace{\mathbf{f}_{\mathbf{u}_k} \circ \mathbf{f}_{\mathbf{u}_{k-1}} \circ \dots \circ \mathbf{f}_{\mathbf{u}_1} \circ \mathbf{f}_{\mathbf{u}_0}}_{(k+1)\text{-vezes}}(\mathbf{x}(0))
 \end{aligned} \tag{5-23}$$

Assim, da equação (5-1b) tem-se para a resposta do sistema :

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(k) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}(k)) \\
&= \mathbf{h}\left(\mathbf{f}\left(\mathbf{f}\left(\dots\left(\mathbf{f}\left(\mathbf{f}(\mathbf{x}(0), \mathbf{u}(0)), \mathbf{u}(1)\right), \dots, \mathbf{u}(k-2)\right), \mathbf{u}(k-1)\right)\right)\right) \\
&= \mathbf{h}\left(\underbrace{\mathbf{f}_{u_{k-1}} \circ \mathbf{f}_{u_{k-2}} \circ \dots \circ \mathbf{f}_{u_1} \circ \mathbf{f}_{u_0}}_{k\text{-vezes}}(\mathbf{x}(0))\right) \\
&= \mathbf{h} \circ \underbrace{\mathbf{f}_{u_{k-1}} \circ \mathbf{f}_{u_{k-2}} \circ \dots \circ \mathbf{f}_{u_1} \circ \mathbf{f}_{u_0}}_{k\text{-vezes}}(\mathbf{x}(0))
\end{aligned} \tag{5-24}$$

Ou analisando de modo reverso, tem-se :

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(k) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}(k)) = \mathbf{h} \circ \mathbf{f}_{u_{k-1}}(\mathbf{x}(k-1)) \\
&= \mathbf{h} \circ \mathbf{f}_{u_{k-1}} \circ \mathbf{f}_{u_{k-2}}(\mathbf{x}(k-2)) \\
&\vdots \\
&= \mathbf{h} \circ \underbrace{\mathbf{f}_{u_{k-1}} \circ \mathbf{f}_{u_{k-2}} \circ \dots \circ \mathbf{f}_{u_1} \circ \mathbf{f}_{u_0}}_{k\text{-vezes}}(\mathbf{x}(0))
\end{aligned} \tag{5-25}$$

Considere , por simplicidade em SISO, que  $y(k)$  não depende de  $u(k-1)$ . Assim :

$$\frac{\partial[y(k)]}{\partial[u(k-1)]} = \frac{\partial[h(x(k))]}{\partial[u(k-1)]} = \frac{\partial[h(x(k))]}{\partial[x(k)]} \cdot \frac{\partial[x(k)]}{\partial[u(k-1)]} = \frac{\partial[h(x(k))]}{\partial[x(k)]} \cdot \frac{\partial[f_{u_{k-1}}(x(k-1))]}{\partial[u(k-1)]} = 0 \tag{5-26a}$$

Suponha que  $y(k)$  não depende também de  $u(k-2)$  :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial[y(k)]}{\partial[u(k-2)]} &= \frac{\partial[h(x(k))]}{\partial[u(k-2)]} = \frac{\partial[h(x(k))]}{\partial[x(k)]} \cdot \frac{\partial[x(k)]}{\partial[x(k-1)]} \cdot \frac{\partial[x(k-1)]}{\partial[u(k-2)]} = \\
&= \frac{\partial[h(x(k))]}{\partial[x(k)]} \cdot \frac{\partial[f_{u_{k-1}}(x(k-1))]}{\partial[x(k-1)]} \cdot \frac{\partial[f_{u_{k-2}}(x(k-2))]}{\partial[u(k-2)]} = 0
\end{aligned} \tag{5-26b}$$

E assim sucessivamente até que  $y(k)$  depende de  $u(k-r)$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial[y(k)]}{\partial[u(k-r)]} &= \frac{\partial[h(x(k))]}{\partial[u(k-r)]} = \frac{\partial[h(x(k))]}{\partial[x(k)]} \cdot \frac{\partial[x(k)]}{\partial[x(k-1)]} \cdots \frac{\partial[x(k-(r-2))]}{\partial[x(k-(r-1))]} \cdot \frac{\partial[x(k-(r-1))]}{\partial[u(k-r)]} = \\ &= \frac{\partial[h(x(k))]}{\partial[x(k)]} \cdot \underbrace{\left[ \frac{\partial[f_{u_{k-1}}(x(k-1))]}{\partial[x(k-1)]} \cdots \frac{\partial[f_{u_{k-(r-1)}}(x(k-(r-1)))]}{\partial[x(k-(r-1))]} \right]}_{(r-1) \text{ vezes}} \cdot \frac{\partial[f_{u_{k-r}}(x(k-r))]}{\partial[u(k-r)]} \neq 0 \end{aligned} \quad (5-26c)$$

Considere agora a outra interpretação do *grau relativo* ( $r$ ) através da definição de uma nova função composta  $h^r(x)$ :

$$y(k) = h^0(x(k)) = h(x(k)) \quad (5-27a)$$

Checar se  $\frac{\partial h^0(f(x(k), u(k)))}{\partial u(k)} = 0$ . (isto é,  $h^1(x(k))$  não depende explicitamente de  $u(k)$ ).

Neste caso, define-se :

$$y(k+1) = h^1(x(k)) = h^0(f(x(k), u(k))) \quad (5-27b)$$

Checar se  $\frac{\partial h^1(f(x(k), u(k)))}{\partial u(k)} = 0$ . (isto é,  $h^2(x(k))$  não depende explicitamente de  $u(k)$ ).

Neste caso, define-se :

$$y(k+2) = h^2(x(k)) = h^1(f(x(k), u(k))) \quad (5-27c)$$

E sucessivamente até que  $\frac{\partial h^{(r-1)}(f(x(k), u(k)))}{\partial u(k)} \neq 0$ . Assim :

$$y(k+r) = h^r(x(k)) = h^{(r-1)}(f(x(k), u(k))) \quad (5-27d)$$

Assim o grau relativo pode ser interpretado como o número de passos necessários para que a saída  $y(k+r)$  apresente o efeito da entrada  $u(k)$ .

Deste modo, para um sistema multivariável pode-se definir uma matriz característica

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1^{(r_1-1)}(f(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)))}{\partial u_1(k)} & \dots & \frac{\partial h_1^{(r_1-1)}(f(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)))}{\partial u_m(k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_m^{(r_m-1)}(f(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)))}{\partial u_1(k)} & \dots & \frac{\partial h_m^{(r_m-1)}(f(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)))}{\partial u_m(k)} \end{bmatrix} \quad (5-28a)$$

Definindo os números  $\rho_i = (r_i - 1)$ , Nijmeijer e van der Schaft(1990) apresentam esta matriz como :

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1^{(\rho_1+1)}(\mathbf{x}(k))}{\partial u_1(k)} & \dots & \frac{\partial h_1^{(\rho_1+1)}(\mathbf{x}(k))}{\partial u_m(k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_m^{(\rho_m+1)}(\mathbf{x}(k))}{\partial u_1(k)} & \dots & \frac{\partial h_m^{(\rho_m+1)}(\mathbf{x}(k))}{\partial u_m(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1^{\rho_1}(f(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)))}{\partial u_1(k)} & \dots & \frac{\partial h_1^{\rho_1}(f(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)))}{\partial u_m(k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_m^{\rho_m}(f(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)))}{\partial u_1(k)} & \dots & \frac{\partial h_m^{\rho_m}(f(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)))}{\partial u_m(k)} \end{bmatrix} \quad (5-28b)$$

Considere agora que a matriz  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  é não-singular. Então a ação de controle  $\mathbf{u}(k) = \gamma(\mathbf{x}(k), \mathbf{v}(k))$  que desacopla a interação de entrada-saída é calculada como a solução do seguinte sistema de equações algébricas não-lineares :

$$\begin{bmatrix} h_1^{\rho_1}(f(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k))) \\ \vdots \\ h_m^{\rho_m}(f(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k))) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_1(\mathbf{x}(k)) \\ \vdots \\ y_m(\mathbf{x}(k)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1(k) \\ \vdots \\ v_m(k) \end{bmatrix} \quad (5-29)$$

O controle não-linear discreto pode ser interpretado como controle "*dead-beat*" não-linear . Considere novamente  $y(k+r) = h^r(x(k)) = h^{(r-1)}(f(x(k), u(k)))$  dada na equação (5-27d). Considere também que a ( $r$ )-passos futuros , onde  $r$  é o grau relativo, deseja-se que a saída seja  $y(k+r) = y^{SP}$ .

Para tanto,  $u(k)$  deve ser a solução da equação :

$$y^{SP} = h^{(r-1)}(f(x(k), u(k))) \quad (5-30)$$

O cálculo de  $u(k)$  pela equação (5-30) é um controle "*deadbeat*" de um passo. Este tipo de controlador para sistemas não-lineares também pode ser visto em Bastin et al.(1993).

Caso se considere a ação de "deadbeat" muito violenta, sempre pode-se substituir  $y^{SP}$  por  $y^R$  com o filtro de dinâmica de primeira ordem :

$$y^R(k+1) = (a)y^R(k) + (1-a)y^{SP}(k) \quad (5-31)$$

Soroush e Kravaris(1992b) apresentam o controlador com base nas equações (5-29), (5-30) e (5-31), dentro da estrutura por eles denominado de GLC.

Analogamente ao sistema contínuo, como as variáveis de estado de um sistema discreto podem ser transformadas para se obter linearização exata. Considere novamente a notação sintética :

$$\begin{aligned} f^0(x,u) &= \text{identidade} \\ f^1(x,u) &= f(x,u) \\ &\vdots \\ f^k &= \underbrace{f\left(f\left(\dots\left(f\left(f(x(0),u(0)),u(1)\right),\dots,u(k-2)\right),u(k-1)\right)\right)}_{k \text{ vezes}} = \underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f \circ f)}_{k \text{ vezes}}(x,u) \end{aligned} \quad (5-32)$$

Se considerarmos, para simplificar, o sistema discreto da equação (5-1) monovariável (SISO) na entrada  $u$  e saída  $y$  :

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), u(k)) \quad \text{com } \mathbf{x}(k=0) = \mathbf{x}_0 ; \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R} \quad (5-33a)$$

$$y(k) = h(\mathbf{x}(k)) \quad ; \quad y \in \mathbb{R} \quad (5-33b)$$

Podemos reinterpretar o grau relativo ( $r$ ) da equação (5-26) e da equação (5-27) como um número inteiro para o qual tem-se :

$$\frac{\partial(h \circ f^k)(\mathbf{x}, u)}{\partial u} = 0 \quad ; \quad k = 0, 1, 2, \dots, (r-1) \quad (5-34a)$$

$$\frac{\partial(h \circ f^r)(\mathbf{x}_0, u_0)}{\partial u} \neq 0 \quad (5-34b)$$

Também por definição tem-se :

$$h^r(x(k)) = h^{(r-1)}(f(x(k), u(k))) = h \circ f^r(x(k), u(k)) \quad (5-35)$$

Os vetores  $\left[ \frac{\partial(h(\mathbf{x}))}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial(h \circ f(\mathbf{x}, u))}{\partial \mathbf{x}}, \dots, \frac{\partial(h \circ f^{(r-1)}(\mathbf{x}, u))}{\partial \mathbf{x}} \right]_{(\mathbf{x}_0, u_0)}$  são linearmente independentes.

Deste modo, escolhendo as  $(r)$  seguintes funções  $S(\mathbf{x}, u)$  como mudanças de coordenadas conforme Castillo e Di Gennaro(1991), tem-se:

$$\begin{aligned} z_1 &= S_1(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}) \\ z_2 &= S_2(\mathbf{x}) = h \circ f(\mathbf{x}, u) \\ &\vdots \\ z_r &= S_r(\mathbf{x}) = h \circ f^r(\mathbf{x}, u) \end{aligned} \quad (5-36)$$

Assim basta arbitrar a escolha das  $(n-r)$  funções remanescentes :

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_{(n-r)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{(r+1)}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ S_{(n)}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (5-37)$$

E assim obtém-se a forma normal, que para sistemas discretos não é única :

$$\begin{aligned} z_1(k+1) &= z_2(k) \\ z_2(k+1) &= z_3(k) \\ &\vdots \\ z_{(r-1)}(k+1) &= z_r(k) \\ z_r(k+1) &= a(\mathbf{z}(k), \boldsymbol{\eta}(k), u(k)) \\ \boldsymbol{\eta}(k+1) &= q(\mathbf{z}(k), \boldsymbol{\eta}(k), u(k)) \\ y(k) &= z_1(k) \end{aligned} \quad (5-38)$$

Existe um único  $u(k) = u^*(k)$  tal que todo estado inicialmente dentro da variedade da dinâmica de zero :

$$H^* = \left\{ \mathbf{x} \mid h(\mathbf{x}) = 0, (h \circ f)(\mathbf{x}, u_0) = 0, \dots, (h \circ f^{(r-1)})(\mathbf{x}, u_0) = 0 \right\} \quad (5-39)$$

permanece em  $H^*$ . Se esta variedade é a máxima contida em  $h^{-1}(0)$ , então é chamada de variedade  $H^{max}$  máxima da dinâmica de zero.

Finalmente, a evolução nesta variedade é caracterizada pela seguinte dinâmica de zero:

$$\eta(k+1) = q(0, \eta, \gamma^*(\eta)) \quad (5-40a)$$

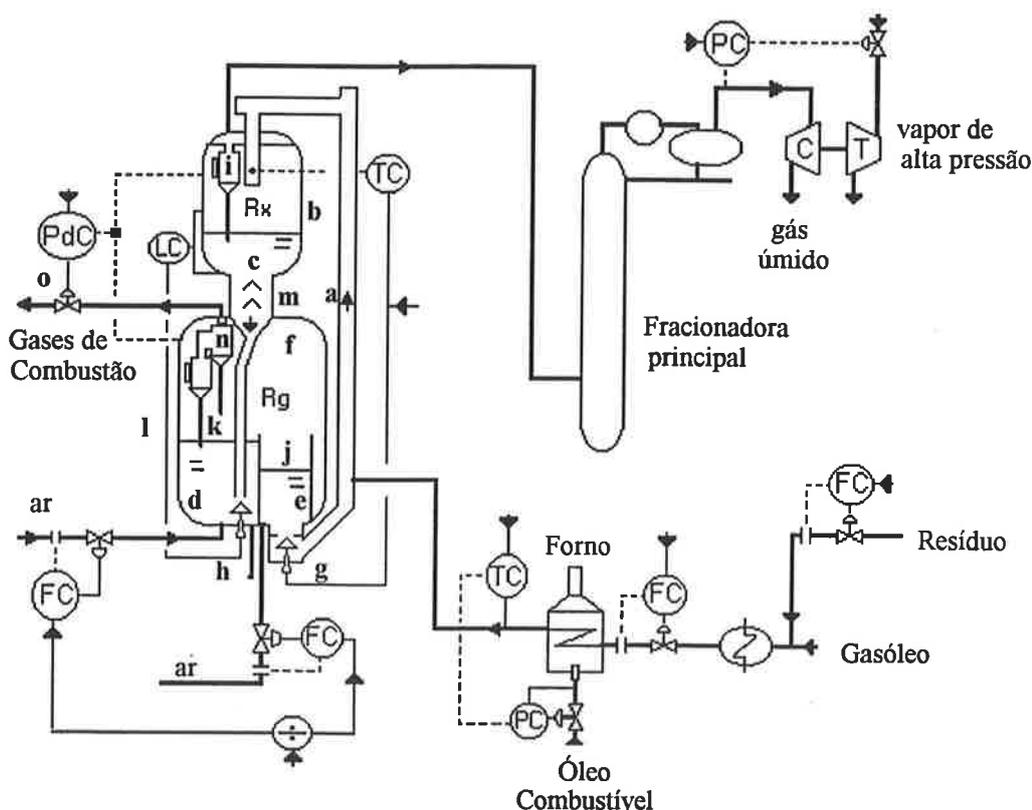
$$\text{onde } \gamma^*(\eta) = u^*(S^{-1}(0, \eta)) \quad (5-40b)$$

Obviamente (analogamente ao caso contínuo) esta dinâmica de zero (5-40) deve ser assintoticamente estável para que o sistema seja controlável pela ação de controle  $u(k) = \gamma(x(k), v(k))$  que é gerada como solução da equação (5-29).

## 6. CONTROLE NÃO LINEAR GEOMÉTRICO DO CONVERSOR FCC.

### 6.1. MODELO DINÂMICO DO CONVERSOR FCC.

O conversor de craqueamento catalítico em leito fluidizado (FCC) transforma os hidrocarbonetos de alto peso molecular, tais como gasóleo e resíduos, para os de menor peso, tais como gasolina, óleo leve de reciclo, butano e gases. Detalhes gerais podem ser vistos em Avidan et al.(1990). O presente modelo dinâmico do conversor tipo Kellogg Orthoflow é uma versão do modelo original de Moro e Odloak(1994).



- (a) - Riser (reator tubular)      (b) - Reator      (c) - Leito de reator  
 (d) - Leito (fase densa) do 1º estágio do regenerador  
 (e) - Leito (fase densa) do 2º estágio do regenerador  
 (f) - Fase diluída geral do regenerador      (g) - Válvula do catalisador regenerado (TCV)  
 (h) - Válvula do catalisador gasto (LCV)      (i) - Ciclones do reator  
 (j) - Fase diluída do 2º estágio do regenerador  
 (k) - Fase diluída do 1º estágio do regenerador  
 (l) - Regenerador      (m) - Retificador  
 (n) - Ciclones do regenerador      (o) - Válvula de diferencial de pressão (PdCV)

Figura 6.1. Conversor FCC Kellogg Orthoflow.

### EQUAÇÕES DAS DINÂMICAS DO CONVERSOR FCC :

A dinâmica da temperatura  $T_{rx}$  na saída de "riser" é dada por :

$$\frac{dT_{rx}}{dt} = \frac{S_c R_{rc} (T_{rg2} - T_{rx}) + S_f D_{yf} (R_{yf}/1440) (T_{fp} - T_{rx}) - \Delta H_{fv} D_{yf} (R_{yf}/1440) - \Delta H_{cr} R_{oc}}{S_c H_{ris}} \quad (6.1-1a)$$

onde a alimentação é atomizada e sofre um "flasheamento" no início do "riser". A retenção  $H_{ris}$  da massa de catalisador no "riser" é considerada constante, mas no vaso reator o inventário  $H_{ra}$  de catalisador é dado pelo o balanço :

$$\frac{dH_{ra}}{dt} = R_{rc} - R_{sc} \quad (6.1-1b)$$

O teor  $C_{cat}$  de carbono gerado por reação de craqueamento, chamado de coque catalítico, tem a sua dinâmica no reator representada por :

$$\frac{dC_{cat}}{dt} = \frac{-R_{rc} C_{cat} + 100 R_{cf}}{H_{ra}} \quad (6.1-1c)$$

O total  $C_{sc}$  de teor de coque no catalisador gasto, é a soma do teor  $C_{cat}$  de coque catalítico e do teor  $C_{rc2}$  de coque já presente no catalisador, *não utilizando aqui a equação de consistência*,  $C_{sc} = C_{cat} + C_{rc2}$ , é dado pela seguinte equação dinâmica :

$$\frac{dC_{sc}}{dt} = \frac{R_{rc} (C_{rc2} - C_{sc}) + 100 R_{cf}}{H_{ra}} \quad (6.1-1d)$$

A temperatura  $T_{ra}$  do catalisador no vaso reator é dada por :

$$\frac{dT_{ra}}{dt} = \frac{R_{rc} (T_{rx} - T_{ra})}{H_{ra}} \quad (6.1-1e)$$

O balanço da massa  $H_{rg1}$  de catalisador no primeiro estágio do regenerador é dado por :

$$\frac{dH_{rg1}}{dt} = R_{sc} - R_{rc1} \quad (6.1-1f)$$

O teor  $C_{rc1}$  de coque presente no catalisador do leito (fase densa) do primeiro estágio do regenerador é dado por :

$$\frac{dC_{rc1}}{dt} = \frac{R_{sc}(C_{stp} - C_{rc1})}{H_{rg1}} - R_{cb1} \quad (6.1-1g)$$

A dinâmica da temperatura  $T_{rg1}$  do primeiro leito do regenerador é dada por :

$$\frac{dT_{rg1}}{dt} = \frac{S_c R_{sc}(T_{ra} - T_{rg1}) + S_a(1,29)\left(\frac{R_{d1}}{60}\right)(T_{d1} - F_{12}T_{rg1}) - S_a\left(\frac{F_{gk1}}{1000}\right)T_{rg1} - \Delta H_{c1}(12)\left(\frac{C_{arb1}}{1000}\right)}{S_c H_{rg1}} \quad (6.1-1h)$$

Apesar do catalisador atravessar uma seção de retificação com vapor vivo, assumiu-se que o catalisador entra no regenerador com a mesma temperatura  $T_{ra}$  com que deixa o vaso reator. Por simplicidade assumiu-se que todo o coque queimado é carbono.

Na fase densa ou leito do primeiro estágio do regenerador, o balanço de oxigênio  $O_{fg1}$  no produto de combustão resulta em :

$$\frac{dO_{fg1}}{dt} = \frac{21R_{am1} - F_{gm1}O_{fg1} - 100F_{d1}C_{arb1}}{V_1 \frac{P_{rg}}{R_G(T_{rg1} + 273)}} \quad (6.1-1i)$$

Na fase diluída do primeiro estágio do regenerador, o balanço de oxigênio  $O_{d1}$  no produto de combustão resulta em :

$$\frac{dO_{d1}}{dt} = \frac{F_{gm1}(O_{fg1} - O_{d1}) - 100V_{d1}\left(\frac{60}{2}\right)R_{col}}{V_{d1} \frac{P_{rg}}{R_G(T_{d1} + 273)}} \quad (6.1-1j)$$

A temperatura  $T_{d1}$  da fase diluída do primeiro estágio do regenerador é dada por :

$$\frac{dT_{d1}}{dt} = \frac{F_{gk1}S_a(T_{rg1} - T_{d1}) + (67636)(60)V_{d1}R_{col}}{V_{d1} \frac{M_{d1}P_{rg}}{R_G(T_{d1} + 273)}S_a} \quad (6.1-1k)$$

Analogamente ao primeiro estágio, o balanço da massa  $H_{rg2}$  de catalisador no segundo estágio do regenerador é dado por :

$$\frac{dH_{rg2}}{dt} = R_{rc1} - R_{rc} \quad (6.1-1l)$$

O teor de carbono  $C_{rc2}$  presente no catalisador do leito (fase densa) do segundo estágio do regenerador é dado por :

$$\frac{dC_{rc2}}{dt} = \frac{R_{rc1}(C_{rc1} - C_{rc2})}{H_{rg2}} - R_{cb2} \quad (6.1-1m)$$

A dinâmica da temperatura  $T_{rg2}$  do segundo leito do regenerador é dada por :

$$\frac{dT_{rg2}}{dt} = \frac{S_c R_{rc1}(T_{rg1} - T_{rg2}) + S_a(1,29) \left( \left( \frac{R_{a2}}{60} \right) T_{ai} + \left( \frac{R_{a1}}{60} \right) F_{12} T_{rg1} \right) - S_a \left( \frac{F_{gk2}}{1000} \right) T_{rg2} - \Delta H_{c2}(12) \left( \frac{C_{arb2}}{1000} \right)}{S_c H_{rg2}} \quad (6.1-1n)$$

Na fase densa ou leito do segundo estágio do regenerador, o balanço de oxigênio  $O_{fg2}$  no produto de combustão resulta em :

$$\frac{dO_{fg2}}{dt} = \frac{21R_{ma2} - F_{gm2}O_{fg2} - 100F_{at2}C_{arb2}}{V_2 \frac{P_{rg}}{R_G(T_{rg2} + 273)}} \quad (6.1-1o)$$

Na fase diluída do segundo estágio do regenerador, o balanço de oxigênio  $O_{d2}$  no produto de combustão resulta em :

$$\frac{dO_{d2}}{dt} = \frac{F_{gm2}(O_{fg2} - O_{d2}) - 100V_{d2} \left( \frac{60}{2} \right) R_{co2}}{V_{d2} \frac{P_{rg}}{R_G(T_{d2} + 273)}} \quad (6.1-1p)$$

A temperatura  $T_{d2}$  da fase diluída do segundo estágio do regenerador é dada por :

$$\frac{dT_{d2}}{dt} = \frac{F_{gk2} S_a (T_{rg2} - T_{d2}) + (67636)(60) V_{d2} R_{co2}}{V_{d2} \frac{M_{d2} P_{rg}}{R_G(T_{d2} + 273)} S_a} \quad (6.1-1q)$$

Na fase diluída geral do regenerador tem-se o percentual  $O_{dg}$  de oxigênio e a temperatura  $T_{dg}$  que são dados pelos seguintes balanços:

$$\frac{dO_{dg}}{dt} = \frac{(F_{gm1}O_{d1} + F_{gm2}O_{d2}) - (F_{gm1} + F_{gm2})O_{dg} - 100V_{dg} \left( \frac{60}{2} \right) R_{cog}}{V_{dg} \frac{P_{rg}}{R_G(T_{dg} + 273)}} \quad (6.1-1r)$$

$$\frac{dT_{dg}}{dt} = \frac{S_a(F_{gk1}T_{d1} + F_{gk2}T_{d2}) - S_a(F_{gk1} + F_{gk2})T_{dg} + (67636)(60)V_{dg}R_{cog}}{V_{dg} \frac{M_{dg}P_{rg}}{R_G(T_{dg} + 273)} S_a} \quad (6.1-1s)$$

A dinâmica da pressão  $P_{rg}$  no regenerador é dada simplificada pela lei dos gases ideais junto com a lei de conservação de massa :

$$\frac{dP_{rg}}{dt} = \frac{((F_{gk1} + F_{gk2}) - F_{out})R_G(T_{dg} + 273)}{M_{dg}(V_{d1} + V_{d2} + V_{dg} + V_c)} \quad (6.1-1t)$$

Para calcular a vazão  $R_{rc}$  de circulação de catalisador no "riser" não se utiliza diretamente a pressão no regenerador  $P_{rg}$  e sim a pressão  $P_{ri}$  na válvula (TCV) de alimentação de catalisador no "riser" que por simplicidade tem a dinâmica de primeira ordem :

$$\frac{dP_{ri}}{dt} = \frac{P_{rg} - P_{ri}}{\tau_{Pri}} \quad (6.1-1u)$$

Considerando que a variação de pressão ( $dP/dt$ ) deve ser proporcional à variação da massa no lado vapor do vaso reator na forma  $(R_G/(V_G M_G))T(dM/dt)$ , aproximou-se a dinâmica da pressão  $P_{ra}$  no vaso do reator por :

$$\frac{dP_{ra}}{dt} = \frac{(T_{rx} + 273)(R_{oc} - W_{gas})}{\tau_{Pra}} \quad (6.1-1v)$$

A dinâmica da pressão  $P_{comp}$  de sucção no compressor também foi aproximada por :

$$\frac{dP_{comp}}{dt} = \frac{(W_{gas} - W_{comp})}{\tau_{comp}} \quad (6.1-1w)$$

Assumiu-se dinâmicas de primeira ordem para a abertura  $A_{TCV}$  da válvula (TCV) do catalisador regenerado que sai para o "riser", para a abertura  $A_{LCV}$  da válvula (LCV) de nível de catalisador no reator, e para a abertura  $A_{PdCV}$  da válvula (PdCV) do diferencial de pressão entre o reator e o regenerador :

$$\frac{dA_{TCV}}{dt} = \frac{C_{TC} - A_{TCV}}{\tau_{TCV}}, \quad \frac{dA_{LCV}}{dt} = \frac{C_{LC} - A_{LCV}}{\tau_{LCV}}, \quad \frac{dA_{PdCV}}{dt} = \frac{C_{PdC} - A_{PdCV}}{\tau_{PdCV}} \quad (6.1-1x)$$

Como variáveis auxiliares, calculam-se também os seguintes termos de integrais de erro  $I_{LC}$  do controle de nível do catalisador,  $I_{PdC}$  do controle do diferencial de pressão entre o reator e o regenerador, e  $I_{PC}$  do controle de pressão no compressor :

$$\frac{dI_{LC}}{dt} = H_{set} - H_{ra}, \quad \frac{dI_{PC}}{dt} = P_{suc} - P_{comp}, \quad \frac{dI_{PdC}}{dt} = dP_{set} - (P_{rg} - P_{ra}) \quad (6.1-1y)$$

EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS DO SISTEMA :

A vazão de recirculação  $R_{rc}$  de catalisador no "riser" e a vazão  $R_{sc}$  do catalisador gasto, ou seja, a vazão do catalisador que passa na válvula (LCV), são dadas pelas equações :

$$R_{rc} = \left( \frac{125,5(P_{ri} - P_{ra} - 0,52)}{\rho_{rc} \left( \frac{1}{(60S_{TCV}\rho_{rc})^2} - \frac{1}{(60S_{TCV0}\rho_{rc})^2} \right)} \right)^{1/2}, \quad R_{sc} = \left( \frac{125,5(P_{ra} - P_{rg} + 0,005H_{ra} + 0,4)}{\rho_{rc} \left( \frac{1}{(60S_{LCV}\rho_{rc})^2} - \frac{1}{(60S_{LCV0}\rho_{rc})^2} \right)} \right)^{1/2} \quad (6.1-2a)$$

com as seções  $S_{TCV}$  da passagem na válvula (TCV) e  $S_{LCV}$  da passagem na válvula (LCV) dadas por :

$$S_{TCV} = 0,3973 - 0,785398(0,7112 - (0,8924)(0,4064 A_{TCV}))^2$$

$$S_{LCV} = 0,3973 - 0,785398(0,7112 - (0,8924)(0,4064 A_{LCV}))^2 \quad (6.1-2b)$$

A vazão molar  $F_{out}$  dos gases de combustão que saem do regenerador é definida pela válvula da saída de gases de combustão :

$$F_{out} = S_{PdC0} A_{PdCV} (P_{rg} - 2,6)^{1/2} \quad (6.1-2c)$$

A vazão  $R_{rc1}$  do catalisador do primeiro para o segundo estágio é dada por :

$$R_{rc1} = K_w \left( \frac{H_{rg1}}{\rho_{cat} A_1} - h_{v1} \right)^{1/2} \quad (6.1-2d)$$

A fração  $F_{12}$  da vazão do ar primário que entra no segundo estágio misturado com o catalisador é dada por :

$$F_{12} = C_{12} R_{rci} \quad (6.1-2e)$$

Portanto as vazões molares  $R_{am1}$  de ar no primeiro estágio e  $R_{am2}$  de ar no segundo estágio, já levando em consideração este arraste de ar, e as suas respectivas vazões molares  $\langle N_2 \rangle_1$ ,  $\langle O_{2ar} \rangle_1$ ,  $\langle N_2 \rangle_2$ ,  $\langle O_{2ar} \rangle_2$  de nitrogênio e oxigênio, são :

$$\begin{aligned} R_{am1} &= 0,744 R_{a1} (1 - F_{12}), & \langle N_2 \rangle_1 &= 0,79 R_{am1}, & \langle O_{2ar} \rangle_1 &= 0,21 R_{am1} \\ R_{am2} &= 0,744 (R_{a2} + F_{12} R_{a1}), & \langle N_2 \rangle_2 &= 0,79 R_{am2}, & \langle O_{2ar} \rangle_2 &= 0,21 R_{am2} \end{aligned} \quad (6.1-2f)$$

A vazão  $W_{gas}$  dos gases que saem para a fracionadora principal é dada simplificada por :

$$W_{gas} = \left( \frac{P_{ra} - P_{comp} - 1}{D_{gas}} \right)^{1/2} \quad (6.1-2g)$$

Também a vazão  $W_{comp}$  dos gases no compressor é dada simplificada por :

$$W_{comp} = C_{comp} \left( \frac{A_{pc}}{D_{comp} - P_{comp}} \right) \quad (6.1-2h)$$

O catalisador que sai do vaso separador (reator) passa por uma retificação por vapor vivo, e portanto o teor  $C_{stp}$  de coque do catalisador que vem da zona de retificação é corrigida como :

$$C_{stp} = C_{sc} - \left( \frac{T_{ra} - C_{stp}}{D_{stp}} \right) \quad (6.1-2i)$$

Considere-se que o coque no catalisador tem uma composição ( $CH_\chi$ ) e que a queima deste coque segue a seguinte estequiometria :



No primeiro e segundo estágios do regenerador as relações molares  $\beta_1$  e  $\beta_2$  entre ( $CO_2$ ) e ( $CO$ ) são dadas como funções da temperatura :

$$\beta_1 = k_{Rco} \exp\left(\frac{-E_{Rco}}{R_G(T_{rg1} + 273)}\right) , \quad \beta_2 = k_{Rco} \exp\left(\frac{-E_{Rco}}{R_G(T_{rg2} + 273)}\right) \quad (6.1-2k)$$

Os calores de combustão  $\Delta H_{c1}$  e  $\Delta H_{c2}$  de coque no primeiro e segundo estágios são dados por :

$$\Delta H_{c1} = -\frac{7831 + 5416\beta_1}{(\beta_1 + 1)} , \quad \Delta H_{c2} = -\frac{7831 + 5416\beta_2}{(\beta_2 + 1)} \quad (6.1-2l)$$

As relações molares  $F_{at1}$  e  $F_{at2}$  entre o oxigênio consumido e o coque queimado nos estágios do regenerador são dadas, devido à estequiometria, por :

$$F_{at1} = \frac{\beta_1 + 2}{2(\beta_1 + 1)} + \frac{\chi}{4} , \quad F_{at2} = \frac{\beta_2 + 2}{2(\beta_2 + 1)} + \frac{\chi}{4} \quad (6.1-2m)$$

A relação mássica  $\langle \text{Cat}/\text{Óleo} \rangle$  entre o catalisador e a alimentação é :

$$\langle \text{Cat}/\text{Óleo} \rangle = \frac{R_{rc}}{D_{rf}(R_{rf}/1440)} \quad (6.1-2n)$$

A velocidade espacial horária  $\langle \text{WHSV} \rangle$  da alimentação é definida como :

$$\langle \text{WHSV} \rangle = \frac{(R_{rf}/24)D_{rf}}{H_{ris}} \quad (6.1-2o)$$

Assim a taxa  $R_{cf}$  de formação de coque utiliza estas duas relações acima :

$$R_{cf} = k_{cc} \frac{P_{ra}}{C_{cat} C_{rc2}^{0,06}} \frac{\langle \text{Cat}/\text{Óleo} \rangle^{0,65}}{\langle \text{WHSV} \rangle^{0,35}} \exp\left(\frac{-E_{cc}}{R_G(T_{rx} + 273)}\right) \frac{(R_{rf}/1440)D_{rf}}{100} \quad (6.1-2p)$$

A severidade modificada de reação  $A_{sx}$  é definida como :

$$A_{sx} = k_{sx} \frac{P_{ra}}{C_{cat} C_{rc2}^{0,15}} \frac{\langle \text{Cat}/\text{Óleo} \rangle^{0,65}}{\langle \text{WHSV} \rangle^{0,35}} \exp\left(\frac{-E_{cr}}{R_G(T_{rx} + 273)}\right) \quad (6.1-2q)$$

Este termo  $A_{sx}$  é utilizada para o cálculo da taxa  $R_{oc}$  da reação de craqueamento :

$$R_{oc} = k_{cr} \frac{A_{sx}}{1 + A_{sx}} \left(\frac{R_{rf}}{1440}\right) D_{rf} \quad (6.1-2r)$$

A taxa  $R_{cb1}$  e a taxa  $R_{cb2}$  de combustão de coque no primeiro e segundo estágios do regenerador são dadas por :

$$R_{cb1} = k_{or} \exp\left(\frac{-E_{or}}{R_G(T_{rg1} + 273)}\right) C_{rc1} O_{fg1} P_{rg}, \quad R_{cb2} = k_{or} \exp\left(\frac{-E_{or}}{R_G(T_{rg2} + 273)}\right) C_{rc2} O_{fg2} P_{rg} \quad (6.1-2s)$$

Assim a taxa molar  $C_{arb1}$  e a taxa molar  $C_{arb2}$  de queima de coque nas fases densas do primeiro e segundo estágio são dadas por :

$$C_{arb1} = \left(\frac{1}{12}\right) \left(\frac{R_{cb1}}{100}\right) (1000 H_{rg1}), \quad C_{arb2} = \left(\frac{1}{12}\right) \left(\frac{R_{cb2}}{100}\right) (1000 H_{rg2}) \quad (6.1-2t)$$

Como consequência, as vazões molares de produtos de combustão são dadas por :

$$\begin{aligned} \langle O_2 \rangle_1 &= \langle O_{2ar} \rangle_1 - F_{at1} C_{arb1}, & \langle O_2 \rangle_2 &= \langle O_{2ar} \rangle_2 - F_{at2} C_{arb2} \\ \langle CO \rangle_1 &= \left(\frac{\beta_1}{1 + \beta_1}\right) C_{arb1}, & \langle CO_2 \rangle_1 &= \left(\frac{1}{1 + \beta_1}\right) C_{arb1}, & \langle H_2O \rangle_1 &= \left(\frac{\chi}{2}\right) C_{arb1} \\ \langle CO \rangle_2 &= \left(\frac{\beta_2}{1 + \beta_2}\right) C_{arb2}, & \langle CO_2 \rangle_2 &= \left(\frac{1}{1 + \beta_2}\right) C_{arb2}, & \langle H_2O \rangle_2 &= \left(\frac{\chi}{2}\right) C_{arb2} \end{aligned} \quad (6.1-2u)$$

Assim, as vazões molares  $F_{gm1}$ ,  $F_{gm2}$  e as vazões mássicas  $F_{gk1}$ ,  $F_{gk2}$  dos gases produtos de combustão são :

$$\begin{aligned} F_{gm1} &= \langle N_2 \rangle_1 + \langle O_2 \rangle_1 + \langle CO \rangle_1 + \langle CO_2 \rangle_1 + \langle H_2O \rangle_1 \\ F_{gm2} &= \langle N_2 \rangle_2 + \langle O_2 \rangle_2 + \langle CO \rangle_2 + \langle CO_2 \rangle_2 + \langle H_2O \rangle_2 \\ F_{gk1} &= 28 \langle N_2 \rangle_1 + 32 \langle O_2 \rangle_1 + 28 \langle CO \rangle_1 + 44 \langle CO_2 \rangle_1 + 18 \langle H_2O \rangle_1 \\ F_{gk2} &= 28 \langle N_2 \rangle_2 + 32 \langle O_2 \rangle_2 + 28 \langle CO \rangle_2 + 44 \langle CO_2 \rangle_2 + 18 \langle H_2O \rangle_2 \end{aligned} \quad (6.1-2v)$$

As taxas  $R_{CO1}$ ,  $R_{CO2}$  de oxidação de (CO) na fases diluídas do primeiro e segundo estágios são dadas por :

$$\langle CO \rangle_{d1} = \left(\frac{100}{F_{gm1}}\right) \left(\langle CO \rangle_1 - \frac{2F_{gm1}(O_{fg1} - O_{d1})}{100}\right)$$

$$R_{CO1} = k_{CO} \exp\left(\frac{-E_{CO}}{R_G(T_{d1} + 273)}\right) O_{d1}^{1/2} \langle CO \rangle_{d1} P_{rg}^{1,5}$$

$$\langle CO \rangle_{d2} = \left(\frac{100}{F_{gm2}}\right) \left(\langle CO \rangle_2 - \frac{2F_{gm2}(O_{fg2} - O_{d2})}{100}\right)$$

$$R_{CO2} = k_{CO} \exp\left(\frac{-E_{CO}}{R_G(T_{d2} + 273)}\right) O_{d2}^{1/2} \langle CO \rangle_{d2} P_{rg}^{1,5} \quad (6.1-2w)$$

Para a fase diluída geral tem-se :

$$\langle CO \rangle_{dg} = \left(\frac{100}{F_{gm1} + F_{gm2}}\right) \left[\left(\langle CO \rangle_1 - \frac{2F_{gm1}(O_{fg1} - O_{d1})}{100}\right) + \left(\langle CO \rangle_2 - \frac{2F_{gm2}(O_{fg2} - O_{d2})}{100}\right) - \left(\frac{2}{100}\right)(F_{gm1}O_{d1} + F_{gm2}O_{d2} + (F_{gm1} + F_{gm2})O_{dg})\right]$$

$$R_{COg} = k_{CO} \exp\left(\frac{-E_{CO}}{R_G(T_{dg} + 273)}\right) O_{dg}^{1/2} \langle CO \rangle_{dg} P_{rg}^{1,5} \quad (6.1-2x)$$

Finalmente, as leis  $C_{LC}$  de ação de controle da válvula (LCV) de nível, a lei  $C_{PdC}$  de ação de controle da válvula (PdCV) de diferencial de pressão, e a abertura  $C_{PC}$  da válvula (PCV) de sucção do compressor são dadas como controladores (PI) :

$$C_{LC} = C_{LC0} + K_{LC} \left( (H_{set} - H_{ra}) + \frac{I_{LC}}{\tau_{LC}} \right)$$

$$C_{PdC} = C_{PdC0} + K_{PdC} \left( (dP_{set} - (P_{rg} - P_{ra})) + \frac{I_{PdC}}{\tau_{PdC}} \right)$$

$$A_{PC} = C_{PC} = C_{PC0} - K_{PC} \left( P_{suc} - P_{comp} + \frac{I_{PC}}{\tau_{PC}} \right) \quad (6.1-2y)$$

Tabela 6.I. NOMENCLATURA E VALORES EM ESTADO ESTACIONÁRIO PARA O CONVERTOR FCC.

$A_{sx}$	(fração)	severidade auxiliar da reação de formação de coque.
$A_{LCV}$	0,628183 (fração)	abertura da válvula (LCV).
$A_{PCV}$	0,7 (fração)	abertura da válvula (PCV).
$A_{PdCV}$	0,723940 (fração)	abertura da válvula (PdCV).
$A_{TCV}$	0,820000 (fração)	abertura da válvula (TCV).
$C_{arb1}$	kmol/min	taxa de queima de coque no leito do 1º estágio do regenerador.
$C_{arb2}$	kmol/min	taxa de queima de coque no leito do 2º estágio do regenerador.
$C_{cat}$	0,8916351 % massa	coque catalítico, carbono gerado por reação de craqueamento.
$C_{rc1}$	0,3922535 % massa	coque no catalisador no leito do 1º estágio do regenerador.
$C_{rc2}$	0,2394395 % massa	coque no catalisador no leito do 2º estágio do regenerador.
$C_{sc}$	1,130906 % massa	total de coque no catalisador gasto, a soma de $C_{cat}$ e $C_{rc2}$ .
$C_{stp}$	% massa	coque do catalisador que sai da seção de retificação a vapor.
$C_{LC}$		signal de saída do controlador de nível do catalisador no vaso reator.
$C_{LC0}$	0,628183	"bias" do signal do controlador de nível do catalisador no vaso reator.
$C_{PC}$		signal na saída do controlador da pressão de sucção do compressor.
$C_{PC0}$	0,7	"bias" do signal do controlador da pressão de sucção do compressor.
$C_{PdC}$		signal na saída do controlador de diferencial de pressão reator-regenerador.
$C_{PdC0}$	0,72394	"bias" do signal de saída do controlador de diferencial de pressão.
$C_{TC}$		signal na saída do controlador de temperatura do "riser".
$C_{TC0}$	0,82	"bias" do signal do controlador de temperatura do "riser".
$dP_{set}$	kgf/cm <sup>2</sup> abs	"setpoint" da diferença de pressão entre o reator e o regenerador.
$dPT_{set}$	kgf/cm <sup>2</sup> abs	"setpoint" do combustível no forno de preaquecimento.
$F_{at1}$	(-)	relação molar estequiométrica entre o oxigênio consumido e o coque queimado no leito do 1º estágio do regenerador.
$F_{at2}$	(-)	relação molar estequiométrica entre o oxigênio consumido e o coque queimado no leito do 2º estágio do regenerador.
$F_{gk1}$	kg/min	vazão mássica dos gases produtos de combustão no leito (fase densa) do 1º estágio do regenerador.
$F_{gk2}$	kg/min	vazão mássica dos gases produtos de combustão no leito (fase densa) do 2º estágio do regenerador.
$F_{gm1}$	kmol/min	vazão molar dos gases produtos de combustão no leito (fase densa) do 1º estágio do regenerador.
$F_{gm2}$	kmol/min	vazão molar dos gases produtos de combustão no leito (fase densa) do 2º estágio do regenerador.
$F_{out}$	kg/min	vazão mássica dos gases de combustão que saem do regenerador.
$F_{12}$	(fração)	fração da vazão do ar que entra no 2º estágio misturado ao catalisador.
$H_{ra}$	89,96221 ton	massa de catalisador no vaso do reator.
$h_{ra}$	m	altura do leito do catalisador no vaso reator.
$H_{rg1}$	282,8234 ton	massa de catalisador na fase densa do 1º estágio do regenerador.
$H_{rg2}$	86,74113 ton	massa de catalisador na fase densa do 2º estágio do regenerador.
$H_{set}$	ton	"setpoint" da massa de catalisador no vaso do reator (controle de nível).
$h_{sp}$	m	altura do "stand-pipe".
$I_{LC}$	1,0	termo da ação integral do controle de nível de leito no reator.
$I_{PC}$	1,0	termo da ação integral do controle de pressão do compressor.

$I_{PdC}$	1,0	termo da ação integral do controle de diferença de pressão.
$O_{fg1}$	0,2953826 % molar	teor de oxigênio no produto de combustão na fase densa do 1º estágio do regenerador.
$O_{fg2}$	0,3475252 % molar	teor de oxigênio no produto de combustão na fase densa do 2º estágio do regenerador.
$O_{fgi}$	0,25 % molar	teor de oxigênio nos gases produtos de combustão enviado para caldeira de (CO). Não é utilizado.
$O_{d1}$	0,2163463 % molar	teor de oxigênio no produto de combustão na fase diluída do 1º estágio do regenerador.
$O_{d2}$	0,1164867 % molar	teor de oxigênio no produto de combustão na fase diluída do 2º estágio do regenerador.
$O_{dg}$	0,1215279 % molar	teor de oxigênio no produto de combustão na fase diluída geral (ciclones) do regenerador.
$P_{comp}$	0,9995498 kgf/cm <sup>2</sup> <sub>man</sub>	pressão de sucção do compressor.
$P_{ra}$	2,805796 kgf/cm <sup>2</sup> <sub>abs</sub>	pressão no vaso reator.
$P_{rg}$	3,455827 kgf/cm <sup>2</sup> <sub>abs</sub>	pressão no regenerador.
$P_{ri}$	3,456245 kgf/cm <sup>2</sup> <sub>abs</sub>	pressão na válvula (TCV) de alimentação de catalisador no "riser".
$P_{suc}$	kgf/cm <sup>2</sup> <sub>abs</sub>	"setpoint" de pressão de sucção do compressor.
$R_a$	221,0 kNm <sup>3</sup> /hr	vazão volumétrica total de ar injetado no regenerador.
$R_{a1}$	200,5 kNm <sup>3</sup> /hr	vazão volumétrica de ar injetado no 1º estágio do regenerador.
$R_{a2}$	20,5 kNm <sup>3</sup> /hr	vazão volumétrica de ar injetado no 2º estágio do regenerador.
$R_{am1}$	kmol/min	vazão molar de ar no 1º estágio.
$R_{am2}$	kmol/min	vazão molar de ar no 2º estágio.
$R_{cb1}$	% massa/min	taxa de queima do coque do catalisador no 1º estágio.
$R_{cb2}$	% massa/min	taxa de queima do coque do catalisador no 2º estágio.
$R_{cf}$	ton/min	taxa de formação de coque.
$R_{CO1}$	kmol/(m <sup>3</sup> s)	taxa de oxidação de (CO) na fase diluída do 1º estágio do regenerador.
$R_{CO2}$	kmol/(m <sup>3</sup> s)	taxa de oxidação de (CO) na fase diluída do 2º estágio do regenerador.
$R_{COg}$	kmol/(m <sup>3</sup> s)	taxa de oxidação de (CO) na fase diluída geral (ciclones) do regenerador.
$R_{oc}$	ton/min	taxa de reação de craqueamento.
$R_{rc}$	ton/min	vazão mássica de circulação do catalisador para o "riser".
$R_{rc1}$	ton/min	vazão do catalisador que sai do 1º para 2º estágio do regenerador.
$R_{sc}$	44,0 ton/min	vazão mássica do catalisador gasto que sai pela seção de retificação.
$R_f$	9700,0 m <sup>3</sup> /dia	vazão volumétrica da carga de alimentação.
$S_{LCV}$	ton/min $\left(\frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}\right)^{1/2}$	seção da passagem na válvula (LCV).
$S_{TCV}$	ton/min $\left(\frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}\right)^{1/2}$	seção da passagem na válvula (TCV).
$T_{ai}$	190,0 °C	temperatura do ar injetado.
$T_{d1}$	682,7811 °C	temperatura da fase diluída no 1º estágio do regenerador.
$T_{d2}$	702,8421 °C	temperatura da fase diluída no 2º estágio do regenerador.
$T_{dg}$	698,3665 °C	temperatura da fase diluída geral (ciclones) do regenerador.
$T_{fp}$	235,0 °C	temperatura da carga de alimentação.
$T_{ra}$	542,9279 °C	temperatura do catalisador no vaso do reator.
$T_{rg1}$	670,4183 °C	temperatura do leito do catalisador no 1º estágio do regenerador.

$T_{rg2}$	701,626 °C	temperatura do leito do catalisador no 2º estágio do regenerador.
$T_{rx}$	542,8984 °C	temperatura na saída de "riser".
$T_{rxset}$	°C	"setpoint" da temperatura na saída de riser.
$T_{rg1set}$	°C	"setpoint" da temperatura do leito do 1º estágio do regenerador.
$T_{rg2set}$	°C	"setpoint" da temperatura do leito do 2º estágio do regenerador.
$T_{dgset}$	°C	"setpoint" da temperatura da fase diluída geral do regenerador.
$W_{comp}$	ton/min	vazão de gases no compressor.
$W_{gas}$	ton/min	vazão de gases de craqueamento que saem do reator para a fracionadora.
$W_{gasco}$	ton/min	vazão de gases que saem do fracionador para o compressor.
$\beta_1$	mol/mol	relação molar intrínseca entre (CO) e (CO <sub>2</sub> ) no catalisador do 1º estágio.
$\beta_2$	mol/mol	relação molar intrínseca entre (CO) e (CO <sub>2</sub> ) no catalisador do 2º estágio.
$\langle \text{Cat}/\text{Óleo} \rangle$	(fração)	relação mássica entre o catalisador e o óleo.
$\langle \text{WHSV} \rangle$	$\frac{\text{ton}_{\text{alimentação}}}{\text{hr ton}_{\text{catalisador}}}$	velocidade espacial horária da alimentação.
$\langle \text{N}_2 \rangle_1$	kmol/min	vazão molar de nitrogênio que entra no 1º estágio.
$\langle \text{N}_2 \rangle_2$	kmol/min	vazão molar de nitrogênio que entra no 2º estágio.
$\langle \text{O}_{2ar} \rangle_1$	kmol/min	vazão molar de oxigênio que entra no 1º estágio.
$\langle \text{O}_{2ar} \rangle_2$	kmol/min	vazão molar de oxigênio que entra no 2º estágio.
$\langle \text{CO} \rangle_1$	kmol/min	vazão molar de (CO) nos gases de combustão do 1º estágio de regenerador.
$\langle \text{CO}_2 \rangle_1$	kmol/min	vazão molar de (CO <sub>2</sub> ) nos gases de combustão do 1º estágio de regenerador.
$\langle \text{H}_2\text{O} \rangle_1$	kmol/min	vazão molar de (H <sub>2</sub> O) nos gases de combustão do 1º estágio de regenerador.
$\langle \text{O}_2 \rangle_1$	kmol/min	vazão molar de (O <sub>2</sub> ) nos gases de combustão do 1º estágio de regenerador.
$\langle \text{CO} \rangle_2$	kmol/min	vazão molar de (CO) nos gases de combustão do 2º estágio de regenerador.
$\langle \text{CO}_2 \rangle_2$	kmol/min	vazão molar de (CO <sub>2</sub> ) nos gases de combustão do 2º estágio de regenerador.
$\langle \text{H}_2\text{O} \rangle_2$	kmol/min	vazão molar de (H <sub>2</sub> O) nos gases de combustão do 2º estágio de regenerador.
$\langle \text{O}_2 \rangle_2$	kmol/min	vazão molar de (O <sub>2</sub> ) nos gases de combustão do 2º estágio de regenerador.
$\langle \text{CO} \rangle_{d1}$	% molar	teor de CO na fase diluída do 1º estágio do regenerador.
$\langle \text{CO} \rangle_{d2}$	% molar	teor de CO na fase diluída do 2º estágio do regenerador.
$\langle \text{CO} \rangle_{dg}$	% molar	teor de CO na fase diluída geral do regenerador.
$\Delta H_{c1}$	kcal/kg	calor de combustão do coque no 1º estágio do regenerador.
$\Delta H_{c2}$	kcal/kg	calor de combustão do coque no 2º estágio do regenerador.
$\Delta P_{LCV}$	kgf/cm <sup>2</sup> <sub>abs</sub>	diferença de pressão disponível para a válvula (LCV) do catalisador gasto que vai para o 1º estágio do regenerador.

Parâmetros fixos com os valores para a simulação :

$A_{ra}$	m <sup>2</sup>	área da seção do reator. Não é utilizado.
$A_1$	77,0 m <sup>2</sup>	área seccional do 1º estágio do regenerador.
$C_{wcp}$	25,0	constante para cálculo da vazão de gases no compressor .
$C_{stp}$	540,0	constante para cálculo do teor de coque do catalisador que vem da retificação .
$E_{cc}$	1300,0 kcal/kmol	energia de ativação da taxa de formação de coque.
$E_{cr}$	15000,0 kcal/kmol	energia de ativação de reação de craqueamento.
$E_{or}$	18900,0 kcal/kmol	energia de ativação de reação de combustão do coque.
$D_{gas}$	0,037	constante para cálculo da vazão de gases que vão para a fracionadora principal .
$D_{wcp}$	5,0	constante para cálculo da vazão de gases no compressor .

$D_{stp}$	400,0	constante para cálculo do teor de coque do catalisador que vem da retificação .
$D_{if}$	0,946 ton/m <sup>3</sup>	massa específica da carga de alimentação.
$h_{v1}$	4,0 m	altura do vertedouro entre o 1° e o 2° estágio do regenerador.
$k_{cc}$	4,2	constante da taxa de reação de formação de coque.
$k_{cr}$	1,216	constante da taxa de reação de craqueamento.
$k_{or}$	1,5 10 <sup>8</sup>	constante da taxa de reação de combustão do coque.
$k_{CO}$	1,5	constante da taxa de reação de conversão de (CO) em (CO <sub>2</sub> ).
$k_{Rco}$	600,0	constante da relação $\beta_1$ e $\beta_2$ .
$k_{sx}$	4040	constante da relação de severidade .
$K_{TC}$	-0,00	ganho do controlador de temperatura na saída do "riser".
$K_{LC}$	-0,04	ganho do controlador de nível do catalisador no vaso reator.
$K_{PC}$	-0,80	ganho do controlador da pressão de sucção do compressor.
$K_{PdC}$	-0,50	ganho do controlador de diferencial de pressão entre o reator e o regenerador.
$K_w$	35,0 ton/(m min)	constante para o cálculo da vazão $R_{rc1}$ .
$R_G$	1,987 kcal/(kmol K)	= 0,082 (m <sup>3</sup> atm)/(kmol K) constante de gases.
$S_a$	0,30 kcal/(kg°C)	calor específico do ar e dos gases de combustão.
$S_c$	0,27 kcal/(kg°C)	calor específico do catalisador.
$S_f$	0,7 kcal/(kg°C)	calor específico da carga de alimentação e do produto.
$S_{LCV0}$	1,167 ton/min $\left(\frac{kgf}{cm^2}\right)^{1/2}$	seção da tubulação à montante da (LCV) (≈ ao $C_v$ da válvula).
$S_{PdC0}$	7700,0 ton/min $\left(\frac{kgf}{cm^2}\right)^{1/2}$	seção da tubulação à montante da (PdCV) (≈ ao $C_v$ da válvula).
$S_{TCV0}$	1,167 ton/min $\left(\frac{kgf}{cm^2}\right)^{1/2}$	seção da tubulação à montante da (TCV) (≈ ao $C_v$ da válvula).
$V_1$	420,0 m <sup>3</sup>	volume da fase densa do 1° estágio do regenerador.
$V_2$	74,0 m <sup>3</sup>	volume da fase densa do 2° estágio do regenerador.
$V_{d1}$	695,0 m <sup>3</sup>	volume da fase diluída do 1° estágio do regenerador.
$V_{d2}$	116,0 m <sup>3</sup>	volume da fase diluída do 2° estágio do regenerador.
$V_{dg}$	850,0 m <sup>3</sup>	volume da fase diluída geral do regenerador.
$V_c$	500,0 m <sup>3</sup>	volume dos ciclones do regenerador.
$\Delta H_{cr}$	90,0 kcal/kg	calor de reação de craqueamento.
$\Delta H_{fv}$	30,0 kcal/kg	calor de vaporização da carga.
$\rho_{cat}$	0,69 ton/m <sup>3</sup>	massa específica "bulk" do catalisador no leito do 1° estágio.
$\rho_{rc}$	0,5 ton/m <sup>3</sup>	peso específico "bulk" do catalisador fluidizado.
$\tau_{LC}$	20,0 min	constante de tempo integral do controlador de nível do catalisador no vaso.
$\tau_{LCV}$	2,0 min	constante de tempo da válvula (LCV).
$\tau_{PC}$	5,0 min	cte de tempo integral do controlador da pressão de sucção do compressor.
$\tau_{PdC}$	1,5 min	cte de tempo integral do controlador de diferencial pressão.
$\tau_{PdCV}$	0,2 min	constante de tempo da válvula (PdCV).
$\tau_{TCV}$	2,0 min	constante de tempo da válvula (TCV).
$\tau_{Pcomp}$	10,0 min	cte de tempo da pressão $P_{comp}$ de sucção no compressor.
$\tau_{Pra}$	244,0 min	cte de tempo da pressão $P_{ra}$ do vaso separador (reator).
$\tau_{Pri}$	2,0 min	cte de tempo da pressão $P_{ri}$ na válvula alimentação de catalisador no riser.
$\chi$	0,9 (fração)	relação de números de átomos Hidrogênio/Carbono no coque.

Restrições físicas das válvulas.

$$(0,0) \leq A_{LCV} \leq (1,0)$$

$$(0,0) \leq A_{PCV} \leq (1,0)$$

$$(0,0) \leq A_{PdCV} \leq (1,0)$$

$$(0,0) \leq A_{TCV} \leq (1,0)$$

Restrições impostas pelo modelo.

$$C_{rc1} \geq (0,0)$$

$$C_{rc2} \geq (0,0001)$$

$$O_{fg1} \geq (0,0)$$

$$O_{fg2} \geq (0,0)$$

$$O_{d1} \geq (0,0)$$

$$O_{d2} \geq (0,0)$$

$$(P_{ra} - P_{rg} - 0,005H_{ra} + 0,4) \geq (0,0001)$$

$$(P_{ri} - P_{ra} - 0,52) \geq (0,0001)$$

$$R_{cb1} \geq (0,0)$$

$$R_{cb2} \geq (0,0)$$

$$\langle \text{Cat/Óleo} \rangle \leq (1,0)$$

Variáveis controladas e monitoradas e suas restrições operacionais.

$$640,0 \leq T_{rg1} \leq 710,0$$

$$660,0 \leq T_{rg2} \leq 710,0$$

$$74,0 \leq A_{se} \leq 90,0$$

$$520,0 \leq T_{rx} \leq 545,0$$

$$690,0 \leq T_{d2} \leq 730,0$$

Variáveis manipuladas e suas restrições operacionais.

$$150,0 \leq R_a \leq 225,0$$

*máximo incremento ou decremento : 75,0*

$$0,3 \leq C_{TC} \leq 0,95$$

*máximo incremento ou decremento : 0,65*

$$5000,0 \leq R_{ff} \leq 9840,0$$

*máximo incremento ou decremento : 4840,0*

$$220,0 \leq T_{fp} \leq 300,0$$

*máximo incremento ou decremento : 80,0*

## 6.2. CARACTERIZAÇÃO DA DINÂMICA NÃO LINEAR DO CONVERSOR FCC.

No modelo anteriormente apresentado, considere-se a variação da vazão total  $R_a$  do ar de alimentação. Conforme pode ser visto na figura 6.2 e figura 6.3, as respostas das temperaturas  $T_{rx}$  na saída de "riser" e  $T_{rg2}$  do leito do catalisador no 2º estágio do regenerador ainda são lineares para as perturbações de +1% e -1% na vazão total de ar. Porém nestas mesmas figuras evidenciam-se as respostas não lineares para as perturbações de +5% e -5% .

Nas figuras 6.4 e 6.5 ilustram-se os efeitos da variação da posição da válvula  $C_{TC}$  da vazão de catalisador para o "riser". Note-se a boa qualidade de resposta para a temperatura  $T_{rx}$  na saída de "riser" e uma resposta não sensível para a temperatura  $T_{rg2}$  do leito do catalisador no 2º estágio do regenerador .

Como para o presente sistema serão consideradas como distúrbios a vazão de alimentação  $R_f$  e a temperatura da alimentação  $T_{fp}$  , as figuras 6.6, 6.7, 6.8 e 6.9 ilustram os efeitos das perturbações destas variáveis nas respostas das temperaturas  $T_{rx}$  na saída de "riser" e  $T_{rg2}$  do leito do catalisador no 2º estágio do regenerador .

Para o presente sistema, deseja-se controlar as temperaturas  $T_{rx}$  e  $T_{rg2}$  perante as manipulações da vazão de ar total  $R_a$  e da vazão  $R_{rc}$  (ou da posição da válvula  $C_{TC}$  ) do catalisador que entra no "riser" .

Por simplicidade, pretende-se manipular diretamente a vazão  $R_{rc}$  do catalisador que entra no "riser" , ao invés da posição  $C_{TC}$  da válvula . Assim, mostram-se nas figuras 6.10 e 6.11 os efeitos da variação da vazão do catalisador nas temperaturas.

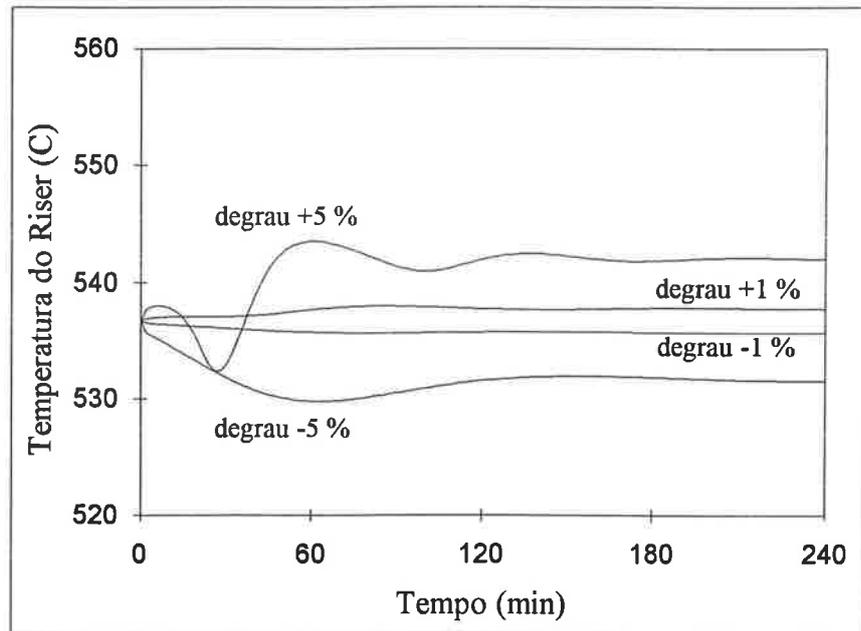


Figura 6.2. Resposta da temperatura  $T_{rx}$  na saída de "riser", perante as perturbações em degrau na vazão de ar total  $R_a$ .

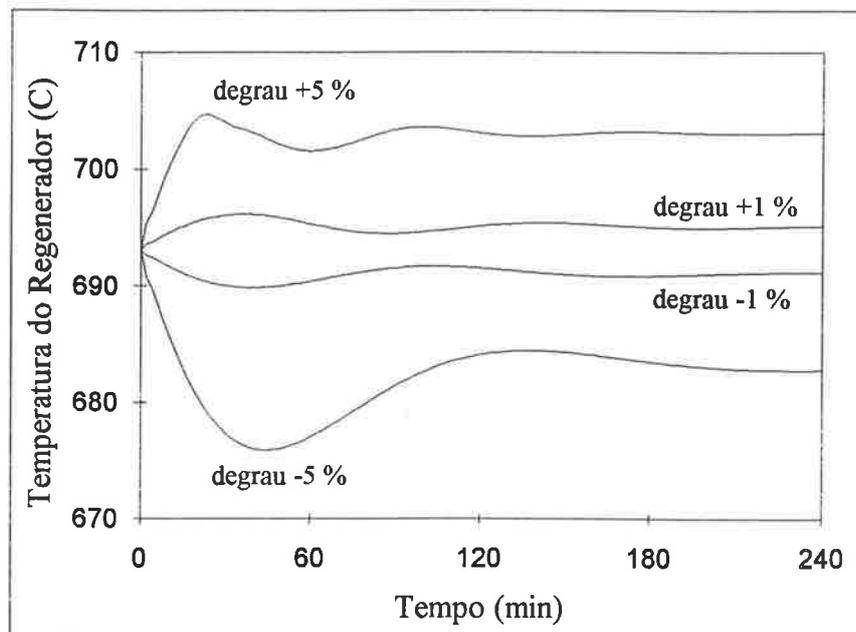


Figura 6.3. Resposta da temperatura  $T_{rg2}$  do leito do catalisador no 2º estágio do regenerador, perante as perturbações em degrau na vazão de ar total  $R_a$ .

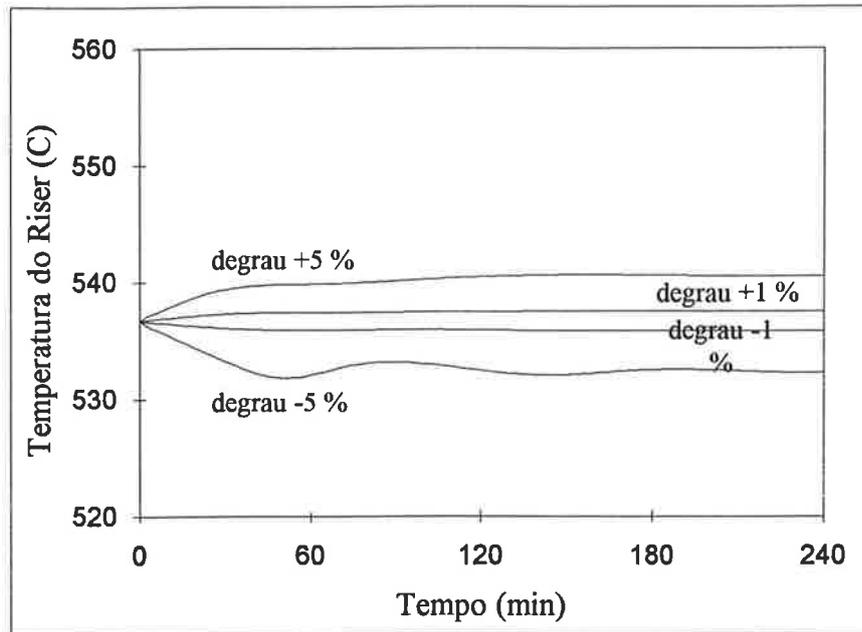


Figura 6.4. Resposta da temperatura  $T_{rx}$  na saída de "riser", perante as perturbações em degrau na posição da válvula  $C_{TC}$ .

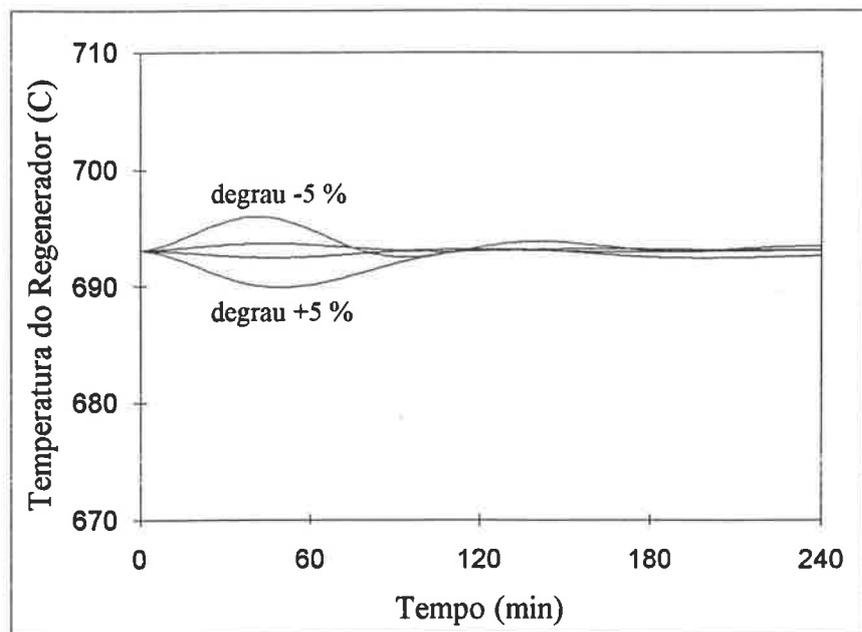


Figura 6.5. Resposta da temperatura  $T_{rg2}$  do leito do catalisador no 2º estágio do regenerador, perante as perturbações em degrau na posição da válvula  $C_{TC}$ .

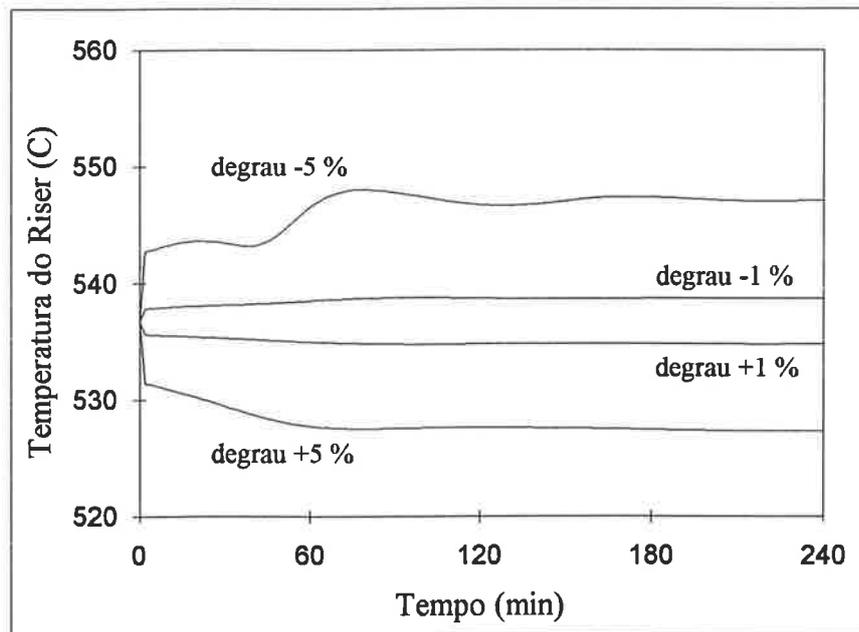


Figura 6.6. Resposta da temperatura  $T_{rx}$  na saída de "riser", perante as perturbações em degrau na vazão de alimentação  $R_f$ .

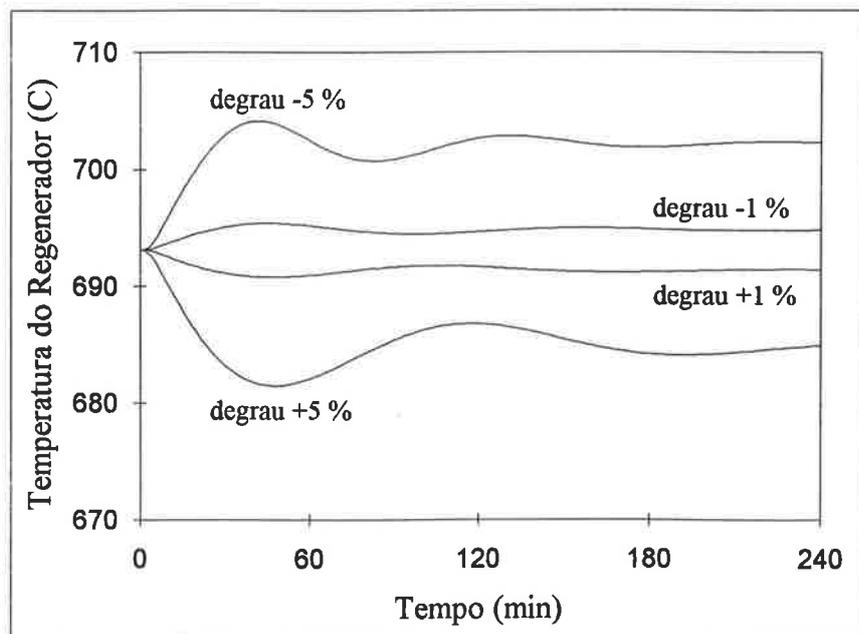


Figura 6.7. Resposta da temperatura  $T_{rg2}$  do leito do catalisador no 2º estágio do regenerador, perante as perturbações em degrau na vazão de alimentação  $R_f$ .

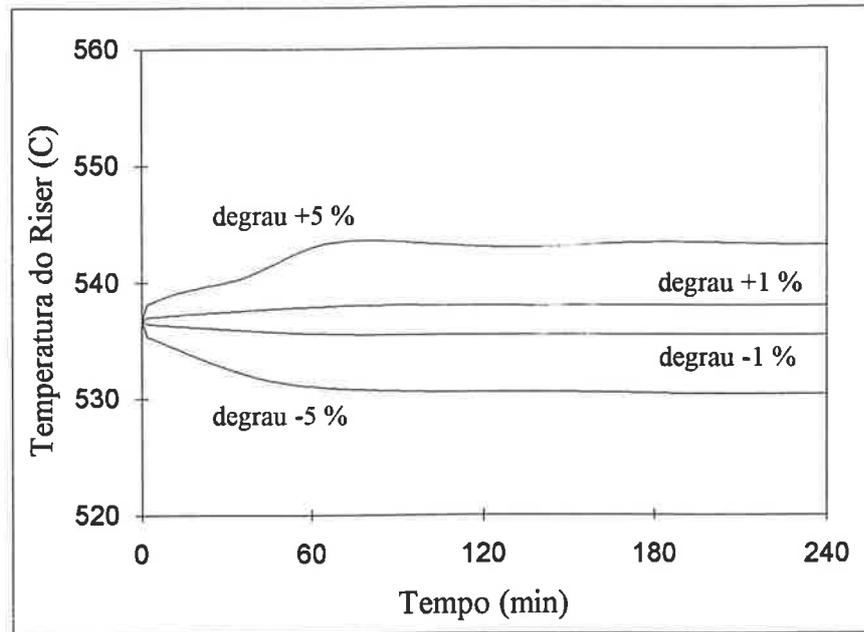


Figura 6.8. Resposta da temperatura  $T_{rx}$  na saída de "riser", perante as perturbações em degrau na temperatura da alimentação  $T_{fp}$ .

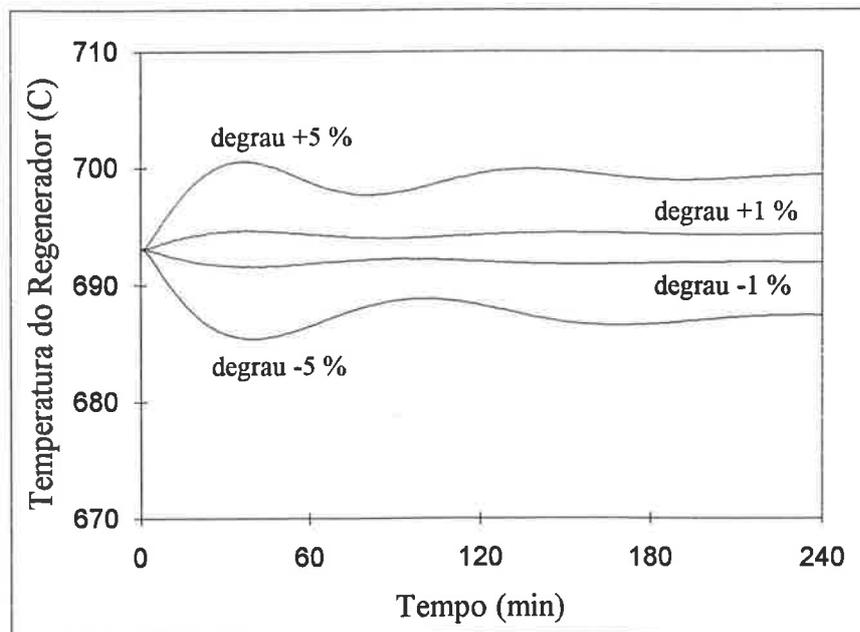


Figura 6.9. Resposta da temperatura  $T_{rg2}$  do leito do catalisador no 2º estágio do regenerador, perante as perturbações em degrau na temperatura da alimentação  $T_{fp}$ .

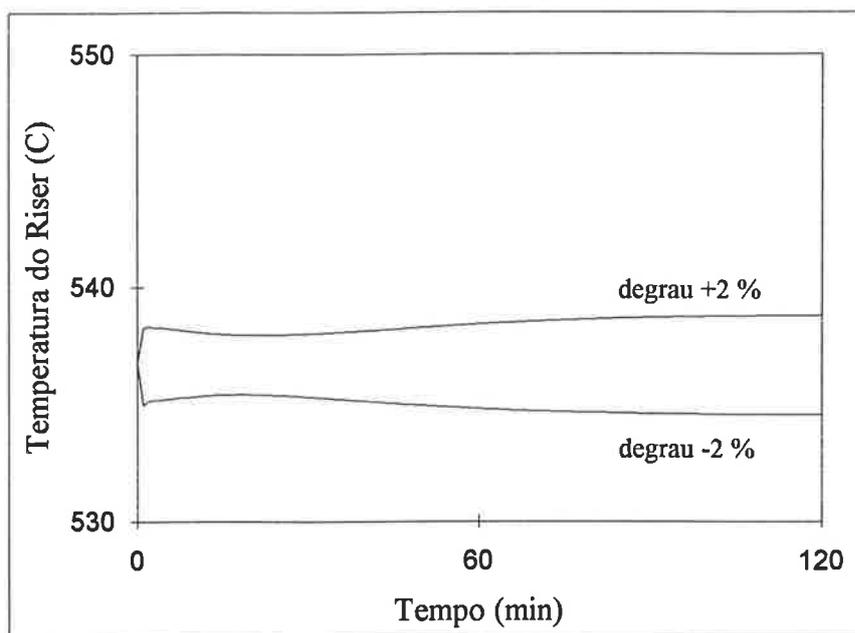


Figura 6.10. Resposta da temperatura  $T_{rx}$  na saída de "riser", perante as perturbações em degrau na vazão  $R_{rc}$  do catalisador que entra no "riser"

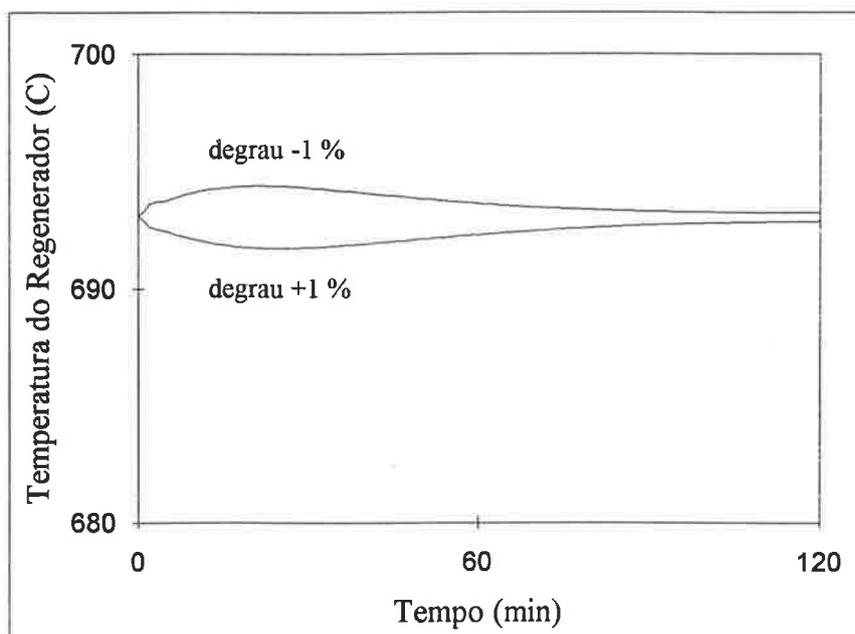


Figura 6.11. Resposta da temperatura  $T_{rg2}$  do leito do catalisador no 2º estágio do regenerador, perante as perturbações em degrau na vazão  $R_{rc}$  do catalisador que entra no "riser".

### 6.3. SÍNTESE DO CONTROLE NÃO LINEAR DISCRETO DO CONVERSOR FCC.

As variáveis a serem controladas são as temperaturas  $(T_{rx}, T_{rg2})$  respectivamente da saída do "riser" e do catalisador no segundo estágio do regenerador. Para tanto, considere escolhidas como variáveis manipuladas  $(R_a, R_{rc})$ , respectivamente a vazão volumétrica total de ar injetado no regenerador e a vazão mássica de circulação de catalisador no "riser".

Note-se, pelas equações (6.1-2n), (6.1-2q) e (6.1-2r) apresentadas anteriormente, que a taxa de reação de craqueamento  $R_{oc}$  é uma função que depende da vazão de catalisador  $R_{rc}$  do seguinte modo :

$$R_{oc} = k_{cr} \left[ \frac{k_{sx} \frac{P_{ra}}{C_{cat} C_{rc}^{0,15}} \left( \frac{R_{rc}}{D_{rf} (R_{rf}/1440)} \right)^{0,65} e^{\left( \frac{-E_{cr}}{R_G (T_{rx} + 273)} \right)}}{\langle WHSV \rangle^{0,35}} \right] \left( \frac{R_{rf}}{1440} \right) D_{rf} \quad (6.3-1)$$

$$\left[ 1 + k_{sx} \frac{P_{ra}}{C_{cat} C_{rc}^{0,15}} \left( \frac{R_{rc}}{D_{rf} (R_{rf}/1440)} \right)^{0,65} e^{\left( \frac{-E_{cr}}{R_G (T_{rx} + 273)} \right)} \right]$$

Assim, devido à taxa  $R_{oc}$ , a seguinte equação dinâmica da temperatura  $T_{rx}$  não pode ser colocada na forma *afim em entrada* ou *linear em relação à variável de entrada  $R_{rc}$*  :

$$\frac{dT_{rx}}{dt} = \frac{S_c R_{rc} (T_{rg2} - T_{rx}) + S_f D_{rf} (R_{rf}/1440) (T_{fp} - T_{rx}) - \Delta H_{fv} D_{rf} (R_{rf}/1440) - \Delta H_{cr} R_{oc}}{S_c H_{ris}} \quad (6.3-2)$$

Por simplicidade, considere-se que todas as retenções  $H_{ra}$ ,  $H_{rg1}$  e  $H_{rg2}$  são mantidas constantes. Neste caso deve-se ter as vazões de catalisador  $R_{rc}$ ,  $R_{rc1}$ ,  $R_{sc}$  iguais entre si.

Assim a equação (6.1-2e) torna-se

$$F_{12} = C_{12} R_{rc} \quad (6.3-3)$$

E adicionalmente, com a razão ("ratio")  $F_{ar} = \frac{R_{a1}}{R_a}$  constante, tem-se :

$$F_{gk2} = 21,45696((1 - F_{ar}) + F_{ar} C_{12} R_{rc}) R_a - 32 F_{at2} C_{arb2} + 28 \langle CO \rangle_2 + 44 \langle CO_2 \rangle_2 + 18 \langle H_2O \rangle_2 \quad (6.3-4)$$

Analogamente tem-se uma equação dinâmica da temperatura  $T_{rg2}$  que também não é *afim em entrada* ou *linear em relação às variáveis de entrada*  $R_{rc}$  e  $R_a$  :

$$\frac{dT_{rg2}}{dt} = \frac{S_c(T_{rg1} - T_{rg2})R_{rc} + S_a(1,29)\left(\left(\frac{1-F_{ar}}{60}\right)T_{ai} + \left(\frac{F_{ar}C_{12}R_{rc}}{60}\right)T_{rg1}\right)R_a - S_a\left(\frac{F_{gk2}}{1000}\right)T_{rg2} - \Delta H_{c2}(12)\left(\frac{C_{arb2}}{1000}\right)}{S_c H_{rg2}} \quad (6.3-5)$$

Portanto a formulação do controle geométrico não-linear deverá seguir o caso geral de sistemas não lineares gerais. No presente caso, esta formulação será feita no modo discreto no tempo.

O modelo dinâmico anteriormente apresentado pode ser re-escrito na forma discreta como equações de diferenças do método de Euler . Adicionalmente, reduz-se a ordem das variáveis do estado indicando apenas as variáveis relevantes para as dinâmicas das temperaturas  $T_{rx}$  do "riser" e da temperatura  $T_{rg2}$  do catalisador no segundo estágio do regenerador. Por simplicidade, as densidades  $\rho_{rg1}$  e  $\rho_{rg2}$  e as massas moleculares dos gases também foram consideradas constantes.

Assim, das equações dinâmicas anteriormente apresentadas em (6.1-1), tem-se :

$$\begin{aligned} T_{rx}(k+1) = & T_{rx}(k) + \left(\frac{\Delta t_s}{S_c H_{ris}}\right) \left( S_f D_{yf} (R_{yf}(k)/1440) (T_{fp}(k) - T_{rx}(k)) \right) \\ & + \left(\frac{\Delta t_s}{S_c H_{ris}}\right) \left( -\Delta H_{fv} D_{yf} (R_{yf}(k)/1440) \right) \\ & + \left(\frac{\Delta t_s}{H_{ris}}\right) (T_{rg2}(k) - T_{rx}(k)) R_{rc}(k) + \left(\frac{\Delta t_s}{S_c H_{ris}}\right) (-\Delta H_{cr}) R_{oc}(k) \end{aligned} \quad (6.3-6a)$$

$$C_{cat}(k+1) = C_{cat}(k) + \left(\frac{\Delta t_s}{H_{ra}}\right) (-C_{cat}(k)) R_{rc}(k) + \left(\frac{\Delta t_s}{H_{ra}}\right) (100) R_{cf}(k) \quad (6.3-6b)$$

$$C_{sc}(k+1) = C_{sc}(k) + \left(\frac{\Delta t_s}{H_{ra}}\right) (C_{rc2}(k) - C_{sc}(k)) R_{rc}(k) + \left(\frac{\Delta t_s}{H_{ra}}\right) (100) R_{cf}(k) \quad (6.3-6c)$$

$$T_{ra}(k+1) = T_{ra}(k) + \left(\frac{\Delta t_s}{H_{ra}}\right) (T_{rx}(k) - T_{ra}(k)) R_{rc}(k) \quad (6.3-6d)$$

$$C_{rc1}(k+1) = C_{rc1}(k) - (\Delta t_s) R_{cb1}(k) + \left(\frac{\Delta t_s}{H_{rg1}}\right) (C_{stp}(k) - C_{rc1}(k)) R_{rc}(k) \quad (6.3-6e)$$

$$\begin{aligned}
T_{rg1}(k+1) = & T_{rg1}(k) - \left( \frac{\Delta t_s}{S_c H_{rg1}} \right) (\Delta H_{c1}(k)) (12) \left( \frac{C_{arb1}(k)}{1000} \right) \\
& - \left( \frac{\Delta t_s}{S_c H_{rg1}} \right) S_a \left( \frac{F_{gk1}(k)}{1000} \right) T_{rg1}(k) + \left( \frac{\Delta t_s}{H_{rg1}} \right) (T_{ra}(k) - T_{rg1}(k)) R_{rc}(k) \\
& + \left( \frac{\Delta t_s}{S_c H_{rg1}} \right) S_a (1,29) (T_{ai}(k) - F_{12}(k) T_{rg1}(k)) \left( \frac{R_{a1}(k)}{60} \right)
\end{aligned} \tag{6.3-6f}$$

$$\begin{aligned}
O_{fg1}(k+1) = & O_{fg1}(k) - \left( \frac{\Delta t_s}{V_1 \rho_{rg1}} \right) (100) F_{at1}(k) C_{arb1}(k) - \left( \frac{\Delta t_s}{V_1 \rho_{rg1}} \right) F_{gm1}(k) O_{fg1}(k) \\
& + \left( \frac{\Delta t_s}{V_1 \rho_{rg1}} \right) (21) R_{am1}(k)
\end{aligned} \tag{6.3-6g}$$

$$C_{rc2}(k+1) = C_{rc2}(k) - (\Delta t_s) R_{cb2}(k) + \left( \frac{\Delta t_s}{H_{rg2}} \right) (C_{rc1}(k) - C_{rc2}(k)) R_{rc}(k) \tag{6.3-6h}$$

$$\begin{aligned}
T_{rg2}(k+1) = & T_{rg2}(k) - \left( \frac{\Delta t_s}{S_c H_{rg2}} \right) (\Delta H_{c2}(k)) (12) \left( \frac{C_{arb2}(k)}{1000} \right) \\
& - \left( \frac{\Delta t_s}{S_c H_{rg2}} \right) S_a \left( \frac{F_{gk2}(k)}{1000} \right) T_{rg2}(k) + \left( \frac{\Delta t_s}{H_{rg2}} \right) (T_{rg1}(k) - T_{rg2}(k)) R_{rc}(k) \\
& + \left( \frac{\Delta t_s}{S_c H_{rg2}} \right) S_a (1,29) \left( \left( \frac{R_{a2}(k)}{60} \right) T_{ai}(k) + \left( \frac{R_{a1}(k)}{60} \right) F_{12}(k) T_{rg1}(k) \right)
\end{aligned} \tag{6.3-6i}$$

$$\begin{aligned}
O_{fg2}(k+1) = & O_{fg2}(k) - \left( \frac{\Delta t_s}{V_2 \rho_{rg2}} \right) (100) F_{at2}(k) C_{arb2}(k) - \left( \frac{\Delta t_s}{V_2 \rho_{rg2}} \right) F_{gm2}(k) O_{fg2}(k) \\
& + \left( \frac{\Delta t_s}{V_2 \rho_{rg2}} \right) (21) R_{am2}(k)
\end{aligned} \tag{6.3-6j}$$

$$P_{ri}(k+1) = P_{ri}(k) + \left( \frac{\Delta t_s}{\tau_{Pri}} \right) (P_{rg}(k) - P_{ri}(k)) \tag{6.3-6k}$$

$$P_{ra}(k+1) = P_{ra}(k) + \left( \frac{\Delta t_s}{\tau_{Pra}} \right) (T_{rx}(k) + 273) (R_{oc}(k) - W_{gas}(k)) \tag{6.3-6l}$$

E para as equações constitutivas necessárias para o cálculo das equações (6.3-6) tem-se :

$$F_{12}(k) = C_{12} R_{rc}(k) \tag{6.3-7a}$$

$$R_{am1}(k) = 0,744 R_{a1}(k) (1 - F_{12}(k)) \tag{6.3-7b}$$

$$\langle N_2 \rangle_1(k) = 0,79R_{aml}(k) , \quad \langle O_{2ar} \rangle_1(k) = 0,21R_{aml}(k) \quad (6.3-7c)$$

$$R_{am2}(k) = 0,744(R_{a2}(k) + F_{12}(k)R_{a1}(k)) \quad (6.3-7d)$$

$$\langle N_2 \rangle_2(k) = 0,79R_{am2}(k) , \quad \langle O_{2ar} \rangle_2(k) = 0,21R_{am2}(k) \quad (6.3-7e)$$

$$W_{gas}(k) = (1) \left( \frac{P_{ra}(k) - P_{comp}(k) - 1}{D_{gas}} \right)^{1/2} \quad (6.3-7f)$$

$$C_{stp}(k) = C_{sc}(k) - \left( \frac{T_{ra}(k) - C_{stp}(k)}{D_{stp}} \right) \quad (6.3-7g)$$

$$\beta_1(k) = k_{Rco} \exp \left( \frac{-E_{Rco}}{R_G(T_{rg1}(k) + 273)} \right) , \quad \beta_2(k) = k_{Rco} \exp \left( \frac{-E_{Rco}}{R_G(T_{rg2}(k) + 273)} \right) \quad (6.3-7h)$$

$$\Delta H_{c1}(k) = -\frac{7831 + 5416\beta_1(k)}{(\beta_1(k) + 1)} , \quad \Delta H_{c2}(k) = -\frac{7831 + 5416\beta_2(k)}{(\beta_2(k) + 1)} \quad (6.3-7i)$$

$$F_{a1}(k) = \frac{\beta_1(k) + 2}{2(\beta_1(k) + 1)} + \frac{\chi}{4} , \quad F_{a2}(k) = \frac{\beta_2(k) + 2}{2(\beta_2(k) + 1)} + \frac{\chi}{4} \quad (6.3-7j)$$

$$\langle \text{Cat/Óleo} \rangle(k) = \frac{R_{rc}(k)}{D_{rf}(R_{rf}(k)/1440)} \quad (6.3-7k)$$

$$\langle \text{WHSV} \rangle(k) = \frac{(R_{rf}(k)/24)D_{rf}(k)}{H_{ris}} \quad (6.3-7l)$$

$$R_{rf}(k) = k_{cc} \frac{P_{ra}(k)}{C_{cat}(k)C_{rc2}^{0,06}(k)} \frac{\langle \text{Cat/Óleo} \rangle^{0,65}(k)}{\langle \text{WHSV} \rangle^{0,35}(k)} \exp \left( \frac{-E_{cc}}{R_G(T_{rx}(k) + 273)} \right) \frac{(R_{rf}(k)/1440)D_{rf}}{100} \quad (6.3-7m)$$

$$A_{sx}(k) = k_{sx} \frac{P_{ra}(k)}{C_{cat}(k)C_{rc2}^{0,15}(k)} \frac{\langle \text{Cat/Óleo} \rangle^{0,65}(k)}{\langle \text{WHSV} \rangle^{0,35}(k)} \exp \left( \frac{-E_{cr}}{R_G(T_{rx}(k) + 273)} \right) \quad (6.3-7n)$$

$$R_{oc}(k) = k_{cr} \frac{A_{sx}(k)}{1 + A_{sx}(k)} \left( \frac{R_{rf}(k)}{1440} \right) D_{rf} \quad (6.3-7o)$$

$$R_{cb1}(k) = k_{or} \exp \left( \frac{-E_{or}}{R_G(T_{rg1}(k) + 273)} \right) C_{rc1}(k) O_{fg1}(k) P_{rg}(k) \quad (6.3-7p)$$

$$R_{cb2}(k) = k_{or} \exp\left(\frac{-E_{or}}{R_G(T_{rg2}(k) + 273)}\right) C_{rc2}(k) O_{fg2}(k) P_{rg}(k) \quad (6.3-7q)$$

$$C_{arb1}(k) = \left(\frac{1}{12}\right)(R_{cb1}(k)/100)(1000H_{rg1}), \quad C_{arb2}(k) = \left(\frac{1}{12}\right)(R_{cb2}(k)/100)(1000H_{rg2}) \quad (6.3-7r)$$

$$\langle o_2 \rangle_1(k) = \langle o_{2ar} \rangle_1(k) - F_{at1}(k) C_{arb1}(k), \quad \langle o_2 \rangle_2(k) = \langle o_{2ar} \rangle_2(k) - F_{at2}(k) C_{arb2}(k) \quad (6.3-7s)$$

$$\langle co \rangle_1(k) = \left(\frac{\beta_1(k)}{1 + \beta_1(k)}\right) C_{arb1}(k), \quad \langle co_2 \rangle_1(k) = \left(\frac{1}{1 + \beta_1(k)}\right) C_{arb1}(k) \quad (6.3-7t)$$

$$\langle H_2O \rangle_1(k) = \left(\frac{\chi}{2}\right) C_{arb1}(k) \quad (6.3-7u)$$

$$\langle co \rangle_2(k) = \left(\frac{\beta_2(k)}{1 + \beta_2(k)}\right) C_{arb2}(k), \quad \langle co_2 \rangle_2(k) = \left(\frac{1}{1 + \beta_2(k)}\right) C_{arb2}(k) \quad (6.3-7v)$$

$$\langle H_2O \rangle_2(k) = \left(\frac{\chi}{2}\right) C_{arb2}(k) \quad (6.3-7x)$$

$$\begin{aligned} F_{gm1}(k) &= \langle N_2 \rangle_1(k) + \langle o_2 \rangle_1(k) + \langle co \rangle_1(k) + \langle co_2 \rangle_1(k) + \langle H_2O \rangle_1(k) \\ F_{gm2}(k) &= \langle N_2 \rangle_2(k) + \langle o_2 \rangle_2(k) + \langle co \rangle_2(k) + \langle co_2 \rangle_2(k) + \langle H_2O \rangle_2(k) \\ F_{gk1}(k) &= 28\langle N_2 \rangle_1(k) + 32\langle o_2 \rangle_1(k) + 28\langle co \rangle_1(k) + 44\langle co_2 \rangle_1(k) + 18\langle H_2O \rangle_1(k) \\ F_{gk2}(k) &= 28\langle N_2 \rangle_2(k) + 32\langle o_2 \rangle_2(k) + 28\langle co \rangle_2(k) + 44\langle co_2 \rangle_2(k) + 18\langle H_2O \rangle_2(k) \end{aligned} \quad (6.3-7y)$$

As simulações em malha aberta mostram que, a partir do sistema com acesso total aos valores das variáveis do espaço de estado no instante  $(k)$ , as predições para os instantes  $(k+1)$  e  $(k+2)$  utilizando as equações (6.3-6) e (6.3-7) são satisfatórias para  $\Delta t_s = 1.0$  min e  $\Delta t_s = 0.1$  min.

Uma vez que as variáveis manipuladas escolhidas são :

$$\begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{rc}(k) \\ R_a(k) \end{bmatrix} \quad (6.3-8)$$

E as variáveis controladas são :

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(k) \\ h_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{rx}(k) \\ T_{rg2}(k) \end{bmatrix}, \quad (6.3-9)$$

note-se que, obviamente, com

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{h}^0(\mathbf{x}(k)) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(k)) = \begin{bmatrix} T_{rx}(k) \\ T_{rg2}(k) \end{bmatrix} \quad (6.3-10)$$

tem-se :

$$\frac{\partial \mathbf{h}^0(\mathbf{x}(k))}{\partial \mathbf{u}(k)} = \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}(k))}{\partial \mathbf{u}(k)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_{rx}(k)}{\partial R_{rc}(k)} & \frac{\partial T_{rx}(k)}{\partial R_a(k)} \\ \frac{\partial T_{rg2}(k)}{\partial R_{rc}(k)} & \frac{\partial T_{rg2}(k)}{\partial R_a(k)} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (6.3-11)$$

isto é, as temperaturas  $T_{rx}(k)$  e  $T_{rg2}(k)$  não dependem explicitamente de  $R_{rc}(k)$  e  $R_a(k)$ .

Em seqüência, note-se que na equação

$$\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{h}^1(\mathbf{x}(k)) = \mathbf{h}^0(\mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k))) = \begin{bmatrix} T_{rx}(k+1) \\ T_{rg2}(k+1) \end{bmatrix}, \quad (6.3-12)$$

utilizando-se das equações (6.3-6a) e (6.3-6i), conclui-se que :

$$\frac{\partial \mathbf{h}^1(\mathbf{x}(k))}{\partial \mathbf{u}(k)} = \frac{\partial \mathbf{h}^0(\mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)))}{\partial \mathbf{u}(k)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_{rx}(k+1)}{\partial R_{rc}(k)} & 0 \\ \frac{\partial T_{rg2}(k+1)}{\partial R_{rc}(k)} & \frac{\partial T_{rg2}(k+1)}{\partial R_a(k)} \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}, \quad (6.3-13)$$

isto é, as temperaturas  $T_{rx}(k+1)$  e  $T_{rg2}(k+1)$  dependem explicitamente de  $R_{rc}(k)$  e  $R_a(k)$ .

Assim o grau relativo do sistema é  $\{(r_{T_{rx}} = 1), (r_{T_{rg2}} = 1)\}$ , ou seja, é um sistema de previsão de um passo, isto é, sem tempo morto.

Dada a matriz característica

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_{rx}(k+1)}{\partial R_{rc}(k)} & 0 \\ \frac{\partial T_{rg2}(k+1)}{\partial R_{rc}(k)} & \frac{\partial T_{rg2}(k+1)}{\partial R_a(k)} \end{bmatrix}, \quad (6.3-14)$$

considere, para cada instante  $(k)$ , os valores das variáveis manipuladas  $R_{rc}(k)$  e  $R_a(k)$  calculadas como soluções do seguinte sistema de equações algébricas não-lineares :

$$\begin{bmatrix} h_1^0(\mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k))) \\ h_2^0(\mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k))) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1(k) \\ v_2(k) \end{bmatrix} \quad (6.3-15)$$

Isto é,

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{rx}(k) + \\ + \left( \frac{\Delta t_s}{S_c H_{ris}} \right) (S_f D_{yf} (R_{yf}(k)/1440) (T_{fp}(k) - T_{rx}(k))) + \left( \frac{\Delta t_s}{S_c H_{ris}} \right) (-\Delta H_{fv} D_{yf} (R_{yf}(k)/1440)) \\ + \left( \frac{\Delta t_s}{H_{ris}} \right) (T_{rg2}(k) - T_{rx}(k)) R_{rc}(k) + \left( \frac{\Delta t_s}{S_c H_{ris}} \right) (-\Delta H_{cr}) R_{oc}(k) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} T_{rg2}(k) + \\ - \left( \frac{\Delta t_s}{S_c H_{rg2}} \right) (\Delta H_{c2}(k)) (12) \left( \frac{C_{ar12}(k)}{1000} \right) - \left( \frac{\Delta t_s}{S_c H_{rg2}} \right) S_a \left( \frac{F_{gk2}(k)}{1000} \right) T_{rg2}(k) \\ + \left( \frac{\Delta t_s}{H_{rg2}} \right) (T_{rg1}(k) - T_{rg2}(k)) R_{rc}(k) + \left( \frac{\Delta t_s}{S_c H_{rg2}} \right) S_a (1,29) \left( \left( \frac{R_{a2}(k)}{60} \right) T_{ai}(k) + \left( \frac{R_{a1}(k)}{60} \right) F_{12}(k) T_{rg1}(k) \right) \end{bmatrix} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} T_{rx}(k) \\ T_{rg2}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1(k) \\ v_2(k) \end{bmatrix} \quad (6.3-16)$$

Se  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  da equação (6.3-14) for não-singular, então  $R_{rc}(k)$  e  $R_a(k)$  podem ser calculadas como soluções da equação (6.3-16) e são as variáveis manipuladas internas que desacoplam o sistema, isto é,  $y_1$  fica dependendo apenas de  $v_1$  e  $y_2$  fica dependendo apenas de  $v_2$ .

Como a partir da equação (6.3-15) não se obteve explicitamente as ações de controle do tipo

$$\begin{aligned} u_1(k) &= \varphi_1(\mathbf{x}(k), \mathbf{v}(k)) \\ u_2(k) &= \varphi_2(\mathbf{x}(k), \mathbf{v}(k)) \end{aligned} \quad (6.3-17)$$

os valores de  $R_{rc}(k)$  e  $R_a(k)$  são calculados por um método numérico (no presente caso foi utilizado método de Newton-Raphson amortecido) como solução de (6.3-16), e a estabilidade da malha fechada neste ponto foi verificada via simulação fazendo-se  $\mathbf{v}(k) = \mathbf{0}$ .

#### 6.4. PROJETO E SIMULAÇÃO DO CONTROLE NÃO LINEAR DISCRETO DO CONVERSOR FCC.

Uma vez que o sistema do conversor FCC tem um grau relativo bem definido, tem-se a ação de "deadbeat" como sendo o valor da manipulada  $u(k)$  que resolve a equação :

$$y^{SP} = h^{(r-1)}(f(x(k), u(k))) \quad (6.4-1)$$

Como geralmente a ação de "deadbeat" é muito violenta, substitue-se  $y^{SP}$  por  $y^R$ , que pode ser dado por um filtro. Ou seja, redefinindo as variáveis como :

$$\begin{aligned} y^R(k) &= x_1^R(k) \\ y^R(k+1) &= x_2^R(k) = x_1^R(k+1) \\ &\dots = \dots = \dots \\ y^R(k+r-1) &= x_r^R(k) = x_{r-1}^R(k+1) \\ y^R(k+r) &= \dots = x_r^R(k+1) \end{aligned} \quad (6.4-2)$$

tem-se a dinâmica dos valores de referência de "setpoint" na forma canônica regular :

$$\begin{bmatrix} x_1^R(k+1) \\ x_2^R(k+1) \\ \vdots \\ x_r^R(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_r & -a_{r-1} & -a_{r-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^R(k) \\ x_2^R(k) \\ \vdots \\ x_r^R(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \left(1 + \sum_{i=1}^r a_i\right) \end{bmatrix} y^{SP} \quad (6.4-3)$$

Ou equivalentemente,

$$y^R(k+r) + a_1 y^R(k+r-1) + \dots + a_{r-1} y^R(k+1) + a_r y^R(k) = \left(1 + \sum_{i=1}^r a_i\right) y^{SP}(k) \quad (6.4-4)$$

No caso de ( $r = 1$ ), tem-se :

$$y^R(k+1) = -a_1 y^R(k) + (1 + a_1) y^{SP}(k) \quad (6.4-5)$$

Estes coeficientes  $a_i$  também fazem parte do ajuste do controlador.

Por outro lado, em lugar de utilizar diretamente a equação (6.4-1), considere a equação original da definição de grau relativo :

$$y(k+r) = h^{(r-1)}(f(x(k), u(k))) \quad (6.4-6)$$

Considere também a definição do erro do sistema

$$e = (y^R - y) \quad (6.4-7)$$

Pode-se desejar que os erros sigam assintoticamente para o zero via coeficientes de Hurwitz :

$$e(k+r) + \delta_{r-1}e(k+r-1) + \dots + \delta_1e(k+1) + \delta_0e(k) = 0 \quad (6.4-8)$$

ou explicitando o erro :

$$\begin{aligned} (y^R(k+r) - y(k+r)) + \delta_{r-1}(y^R(k+r-1) - y(k+r-1)) \\ + \dots + \delta_1(y^R(k+1) - y(k+1)) + \delta_0(y^R(k) - y(k)) = 0 \end{aligned} \quad (6.4-9)$$

Ou melhor,

$$y(k+r) = y^R(k+r) + \delta_{r-1}e(k+r-1) + \dots + \delta_1e(k+1) - \delta_0e(k) = 0 \quad (6.4-10)$$

Chamando de  $v(k+r)$  a este valor de  $y(k+r)$  imposto pela equação de Hurwitz (6.4-10), tem-se :

$$v(k+r) = y(k+r) = y^R(k+r) + \delta_{r-1}e(k+r-1) + \dots + \delta_1e(k+1) + \delta_0e(k) = 0 \quad (6.4-11)$$

E se desejarmos incorporar a integral do erro para eliminar eventuais "offsets" decorrentes dos erros de modelo, tem-se

$$v(k+r) = y^R(k+r) + \delta_{r-1}e(k+r-1) + \dots + \delta_1e(k+1) + \delta_0e(k) + \delta_I \sum_{i=1}^k e(i) \quad (6.4-12)$$

Considerando que no instante  $(k-1)$  tem-se :

$$v(k+r-1) = y^R(k+r-1) + \delta_{r-1}e(k+r-2) + \dots + \delta_1e(k) + \delta_0e(k-1) + \delta_I \sum_{i=1}^{k-1} e(i) \quad (6.4-13)$$

Assim, das equações (6.4-12) e (6.4-13) tem-se

$$\begin{aligned}
v(k+r) &= v(k+r-1) \\
&\quad + (y^R(k+r) - y^R(k+r-1)) \\
&\quad + \delta_{r-1}(e(k+r-1) - e(k+r-2)) \\
&\quad + \dots \\
&\quad + \delta_0(e(k) - e(k-1)) \\
&\quad + \delta_I e(k)
\end{aligned} \tag{6.4-14}$$

Assim, no presente modelo do conversor FCC, com  $\{(r_{T_{rx}} = 1), (r_{T_{rg2}} = 1)\}$ , tem-se :

$$T_{rx}^R(k+1) = -\alpha_{T_{rx}} T_{rx}^R(k) + (1 + \alpha_{T_{rx}}) T_{rx}^{SP}(k) \quad , \quad T_{rx}^R(k=0) = T_{rx}(k=0) \tag{6.4-15a}$$

$$T_{rg2}^R(k+1) = -\alpha_{T_{rg2}} T_{rg2}^R(k) + (1 + \alpha_{T_{rg2}}) T_{rg2}^{SP}(k) \quad , \quad T_{rg2}^R(k=0) = T_{rg2}(k=0) \tag{6.4-15b}$$

$$e_{T_{rx}}(k) = (T_{rx}^R(k) - T_{rx}(k)) \tag{6.4-16a}$$

$$e_{T_{rg2}}(k) = (T_{rg2}^R(k) - T_{rg2}(k)) \tag{6.4-16b}$$

E as ações externas de controle, com os componentes de ação integral, são :

$$v_{T_{rx}}(k+1) = v_{T_{rx}}(k) + (T_{rx}^R(k+1) - T_{rx}^R(k)) + \delta_{0,T_{rx}}(e_{T_{rx}}(k) - e_{T_{rx}}(k-1)) + \delta_{I,T_{rx}} e_{T_{rx}}(k) \tag{6.4-17a}$$

$$v_{T_{rg2}}(k+1) = v_{T_{rg2}}(k) + (T_{rg2}^R(k+1) - T_{rg2}^R(k)) + \delta_{0,T_{rg2}}(e_{T_{rg2}}(k) - e_{T_{rg2}}(k-1)) + \delta_{I,T_{rg2}} e_{T_{rg2}}(k) \tag{6.4-17b}$$

com as condições iniciais

$$\begin{aligned}
v_{T_{rx}}(k=0) &= T_{rx}(k=0) \\
v_{T_{rg2}}(k=0) &= T_{rg2}(k=0)
\end{aligned} \tag{6.4-18}$$

onde os coeficientes de Hurwitz  $\delta_{\cdot,T_{rx}}$  e  $\delta_{\cdot,T_{rg2}}$  são também utilizados como parâmetros de ajuste.

Assim as variáveis manipuladas  $R_c(k)$  e  $R_a(k)$  são calculados como as soluções do seguinte sistema de equação algébrica :

$$\begin{aligned}
 (v_{T_{rx}}(k) - T_{rx}(k)) = & + \left( \frac{\Delta t_s}{S_c H_{ris}} \right) \left( S_f D_{vf} (R_v(k)/1440) (T_{fp}(k) - T_{rx}(k)) \right) \\
 & + \left( \frac{\Delta t_s}{S_c H_{ris}} \right) \left( -\Delta H_{fv} D_{vf} (R_v(k)/1440) \right) \\
 & + \left( \frac{\Delta t_s}{H_{ris}} \right) (T_{rg2}(k) - T_{rx}(k)) R_c(k) \\
 & + \left( \frac{\Delta t_s}{S_c H_{ris}} \right) (-\Delta H_{cr}) R_{oc}(k)
 \end{aligned}$$

(6.4-19a)

$$\begin{aligned}
 (v_{T_{rg2}}(k) - T_{rg2}(k)) = & - \left( \frac{\Delta t_s}{S_c H_{rg2}} \right) (\Delta H_{c2}(k)) (12) \left( \frac{C_{arb2}(k)}{1000} \right) \\
 & - \left( \frac{\Delta t_s}{S_c H_{rg2}} \right) S_a \left( \frac{F_{gt2}(k)}{1000} \right) T_{rg2}(k) \\
 & + \left( \frac{\Delta t_s}{H_{rg2}} \right) (T_{rg1}(k) - T_{rg2}(k)) R_c(k) \\
 & + \left( \frac{\Delta t_s}{S_c H_{rg2}} \right) S_a(1,29) \left( \left( \frac{R_{a2}(k)}{60} \right) T_{ai}(k) + \left( \frac{R_{a1}(k)}{60} \right) F_{12}(k) T_{rg1}(k) \right)
 \end{aligned}$$

(6.4-19b)

A figura 6.12 ilustra este esquema de controle.

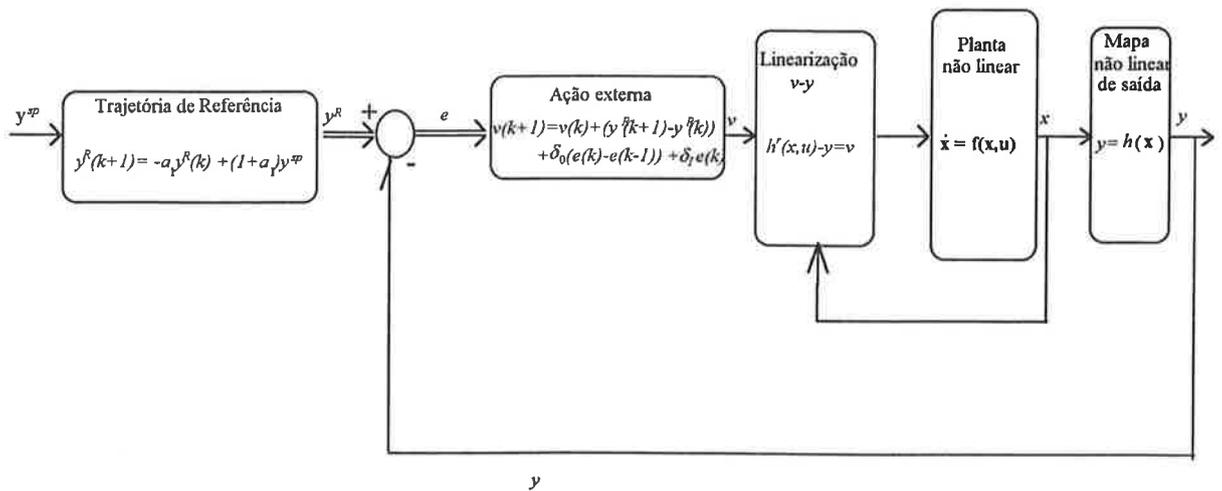


Figura 6.12. Esquema de controle não linear discreto genérico para FCC.

As figuras 6.13, 6.14, 6.15 e 6.16 mostram os resultados da simulação de uma mudança simultânea de "setpoints" de  $T_{rx}^{SP} = 536,74$  e  $T_{rg2}^{SP} = 693,08$  para  $T_{rx}^{SP} = 531,57$  e  $T_{rg2}^{SP} = 683,02$ , com  $a_{Trx} = -0,85$ ,  $\delta_{0,Trx} = 0,01$ ,  $\delta_{1,Trx} = 0,001$ ,  $a_{Trg2} = -0,85$ ,  $\delta_{0,Trg2} = 0,001$ ,  $\delta_{1,Trg2} = 0,001$ , e  $\Delta t_s = 1,0$  min.

Estes dois novos valores de "setpoints" foram escolhidos porque estão em uma região fisicamente possível da operação do conversor FCC.

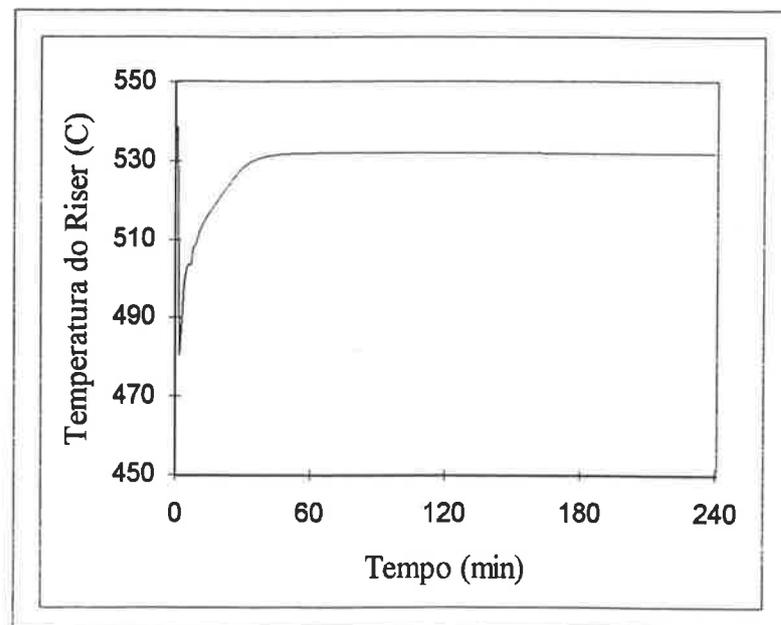


Figura 6.13. Resposta da temperatura  $T_{rx}$  na saída de "riser", perante as perturbações em degrau simultaneamente nos "setpoints" de  $T_{rx}$  e  $T_{rg2}$ .

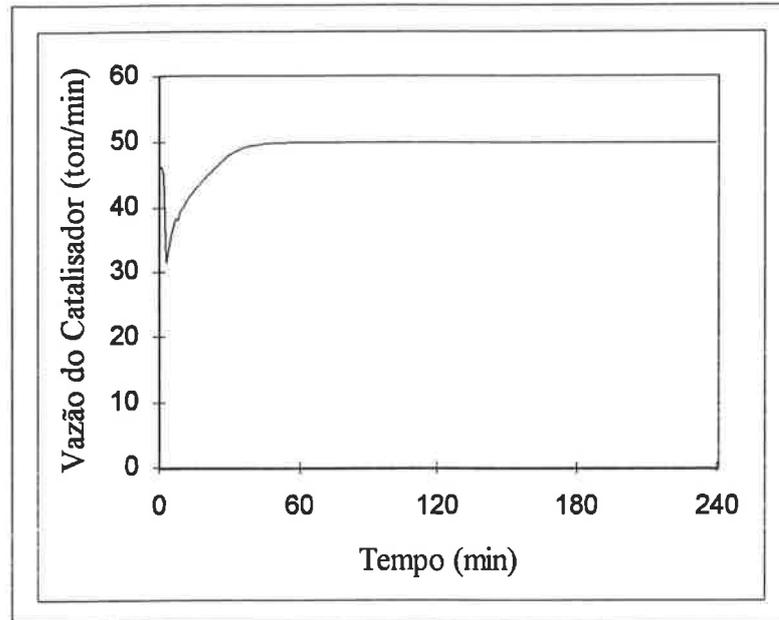


Figura 6.14. Ação da vazão manipulada  $R_{rc}$  do catalisador que entra no "riser", perante as perturbações em degrau simultaneamente nos "setpoints" de  $T_{rx}$  e  $T_{rg2}$ .

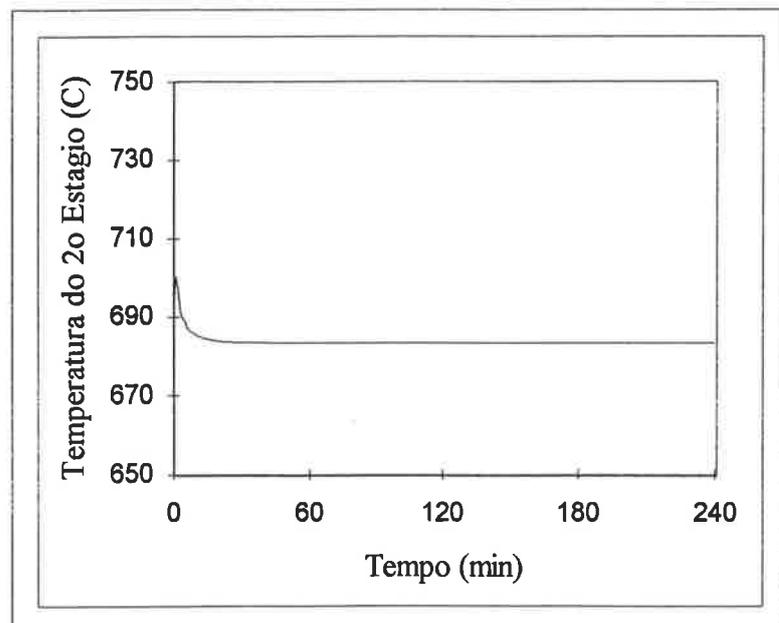


Figura 6.15. Resposta da temperatura  $T_{rg2}$  do leito do catalisador no 2º estágio do regenerador, perante as perturbações em degrau simultaneamente nos "setpoints" de  $T_{rx}$  e  $T_{rg2}$ .

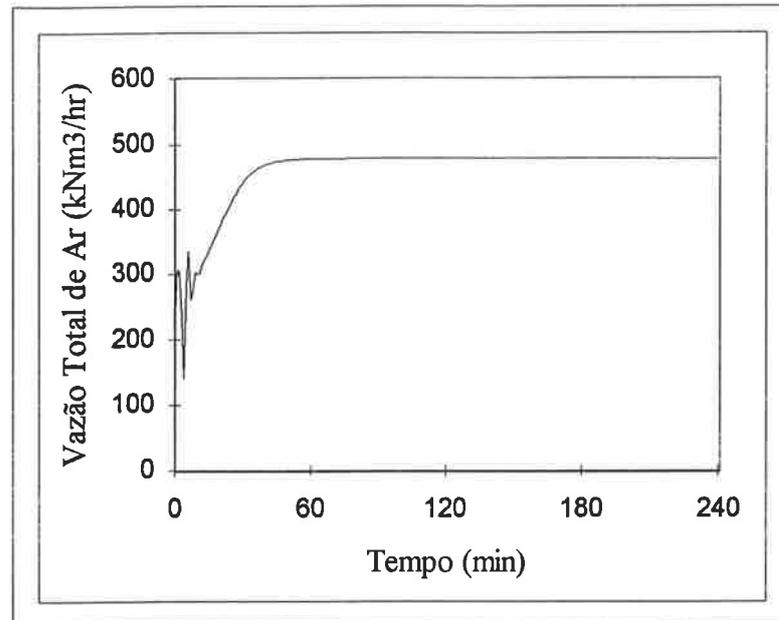


Figura 6.16. Ação da vazão manipulada  $R_{aT}$  do ar total, perante as perturbações em degrau simultaneamente nos "setpoints" de  $T_{rx}$  e  $T_{rg2}$ .

Notem-se as violentas ações de controle e as suas respostas. Portanto, diferentemente do que a teoria induz-nos a pensar, como as ações de controle são calculadas apenas como as soluções das equações (6.4-19a) e (6.4-19b), os resultados a cada passo discreto podem levar a direções e regiões fisicamente impossíveis na operação do conversor FCC, antes de estabilizar nos "setpoints" finais.

Em outras palavras, neste conversor FCC em particular, se não houvesse restrições físicas, este controlador teria um desacoplamento perfeito de interações e teria uma linearização exata. Como as restrições físicas tais como concentrações positivas, vazões não negativas e outras, sempre devem existir no conversor FCC, na verdade este controlador falhou para todos as mudanças de "setpoint", com exceção do caso ilustrado nas figuras 6.13 a 6.16.

Uma primeira medida para tornar o controle mais "robusto" é substituir a equação (6.4-5) do caso de ( $r = 1$ ), por  $y^R(k+1)$  que é resultante da ponderação entre o valor atual e o "setpoint" desejado :

$$y^R(k+1) = -a_1 y(k) + (1+a_1) y^{SP}(k) \quad (6.4-20)$$

Este tipo de filtro já é comum em esquemas de controle preditivo e o seu uso já está fartamente justificado na literatura. Assim para o conversor FCC tem-se :

$$T_{rx}^R(k+1) = -a_{T_{rx}}^{GLC} T_{rx}(k) + (1+a_{T_{rx}}^{GLC}) T_{rx}^{SP}(k) \quad , \quad T_{rx}^R(k=0) = T_{rx}(k=0) \quad (6.4-21a)$$

$$T_{rg2}^R(k+1) = -a_{T_{rg2}}^{GLC} T_{rg2}(k) + (1+a_{T_{rg2}}^{GLC}) T_{rg2}^{SP}(k) \quad , \quad T_{rg2}^R(k=0) = T_{rg2}(k=0) \quad (6.4-21b)$$

Para uma segunda modificação simplificadora , em lugar da equação (6.4-14), pode-se considerar a evolução

$$y(k+1) = v(k+1) = v(k) + \delta_I e(k) \quad (6.4-22)$$

que ainda conserva a capacidade de levar assintoticamente o erro para o valor zero, e ainda mantém o termo integral de erro.

Assim as ações externas de controle do FCC tornam-se :

$$\begin{aligned} v_{T_{rx}}(k+1) &= v_{T_{rx}}(k) + \delta_{I,T_{rx}}^{GLC} e_{T_{rx}}(k) & v_{T_{rx}}(k=0) &= T_{rx}(k=0) \\ v_{T_{rg2}}(k+1) &= v_{T_{rg2}}(k) + \delta_{I,T_{rg2}}^{GLC} e_{T_{rg2}}(k) & v_{T_{rg2}}(k=0) &= T_{rg2}(k=0) \end{aligned} \quad (6.4-23)$$

onde os coeficientes de Hurwitz  $\delta_{I,T_{rx}}$  e  $\delta_{I,T_{rg2}}$  são também utilizados como parâmetros de ajuste.

Agora, suponha que  $y(k+1)$  possa ser expressa em termos de  $y(k)$  de seguinte forma :

$$y(k+1) = y(k) + h^*(f(x(k), u(k))) \quad (6.4-24)$$

o que é possível no presente modelo discreto do conversor FCC, conforme visto nas equações (6.3-6a) e (6.3-6i) .

Assim, das equações (6.4-22) e (6.4-24) tem-se :

$$v(k) + \delta_1 e(k) = y(k) + h^*(f(x(k), u(k))) \quad (6.4-25)$$

Ou seja, a ação de controle  $u(k)$  desejada é aquela que resolve a equação

$$(v(k) - y(k)) + \delta_1 e(k) = h^*(f(x(k), u(k))) \quad (6.4-26)$$

Uma terceira modificação é adequar um parâmetro adicional de sintonia, na forma de  $\delta_0$ , de modo que :

$$\delta_0 (v(k) - y(k)) + \delta_1 e(k) = h^*(f(x(k), u(k))) \quad (6.4-27)$$

Deste modo, agora a ação de controle  $u(k)$  procurada é aquela que resolve a equação (6.4-27) acima. Esta é a equação apresentada como "*GLC básico*" por Soroush e Kravaris(1992), e é a razão pelo qual utilizou-se o índice (*GLC*) nas equações anteriores (6.4-21) e (6.4-23) .

Assim, para o conversor FCC, tem-se as variáveis manipuladas  $R_{rc}(k)$  e  $R_a(k)$  calculados como as soluções do seguinte sistema de equação algébrica :

$$\begin{aligned} \delta_{0,Trx}^{GLC} (v_{Trx}(k) - T_{rx}(k)) + \delta_{1,Trx}^{GLC} e_{Trx}(k) = & + \left( \frac{\Delta t_s}{S_c H_{ris}} \right) \left( S_f D_{yf} (R_{yf}(k)/1440) (T_{fp}(k) - T_{rx}(k)) \right) \\ & + \left( \frac{\Delta t_s}{S_c H_{ris}} \right) \left( -\Delta H_{fv} D_{yf} (R_{yf}(k)/1440) \right) \\ & + \left( \frac{\Delta t_s}{H_{ris}} \right) \left( T_{rg2}(k) - T_{rx}(k) \right) R_{rc}(k) \\ & + \left( \frac{\Delta t_s}{S_c H_{ris}} \right) \left( -\Delta H_{cr} \right) R_{oc}(k) \end{aligned}$$

(6.4-28a)

$$\begin{aligned}
\delta_{0,Trg2}^{GLC} (v_{Trg2}(k) - T_{rg2}(k)) + \delta_{1,Trg2}^{GLC} e(k) = & - \left( \frac{\Delta t_s}{S_c H_{rg2}} \right) (\Delta H_{c2}(k)) (12) \left( \frac{C_{arb2}(k)}{1000} \right) \\
& - \left( \frac{\Delta t_s}{S_c H_{rg2}} \right) S_a \left( \frac{F_{gk2}(k)}{1000} \right) T_{rg2}(k) \\
& + \left( \frac{\Delta t_s}{H_{rg2}} \right) (T_{rg1}(k) - T_{rg2}(k)) R_{rc}(k) \\
& + \left( \frac{\Delta t_s}{S_c H_{rg2}} \right) S_a (1,29) \left( \left( \frac{R_{a2}(k)}{60} \right) T_{ai}(k) + \left( \frac{R_{a1}(k)}{60} \right) F_{12}(k) T_{rg1}(k) \right)
\end{aligned}$$

(6.4-28b)

As figuras 6.17, 6.18, 6.19 e 6.20 mostram os resultados da simulação de uma mudança em 5 graus, do "setpoint" de  $T_{rx}^{SP} = 536,74$  °C para  $T_{rx}^{SP} = 531,74$  °C, mantido o "setpoint" de  $T_{rg2}^{SP} = 693,08$  °C constante. Utilizou-se  $a_{Trx}^{GLC} = -0,55$ ,  $\delta_{0,Trx}^{GLC} = 0,10$ ,  $\delta_{1,Trx}^{GLC} = 0,100416$ ,  $a_{Trg2}^{GLC} = -0,55$ ,  $\delta_{0,Trg2}^{GLC} = 0,10$ ,  $\delta_{1,Trg2}^{GLC} = 0,010306$ , e  $\Delta t_s = 0,1$  min .

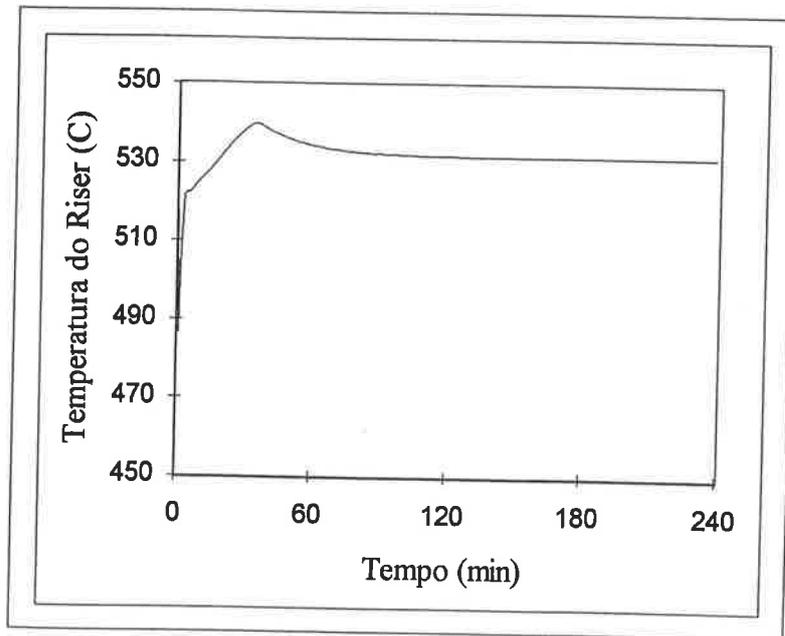


Figura 6.17. Resposta da temperatura  $T_{rx}$  na saída de "riser", perante a perturbação em degrau no "setpoint" de  $T_{rx}$ .

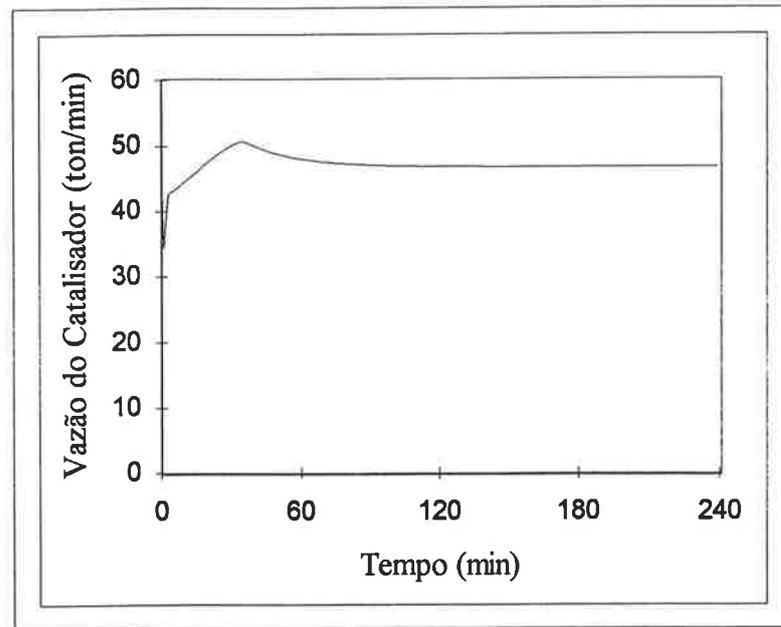


Figura 6.18. Ação da vazão manipulada  $R_{rc}$  do catalisador que entra no "riser", perante a perturbação em degrau "setpoint" de  $T_{rx}$ .

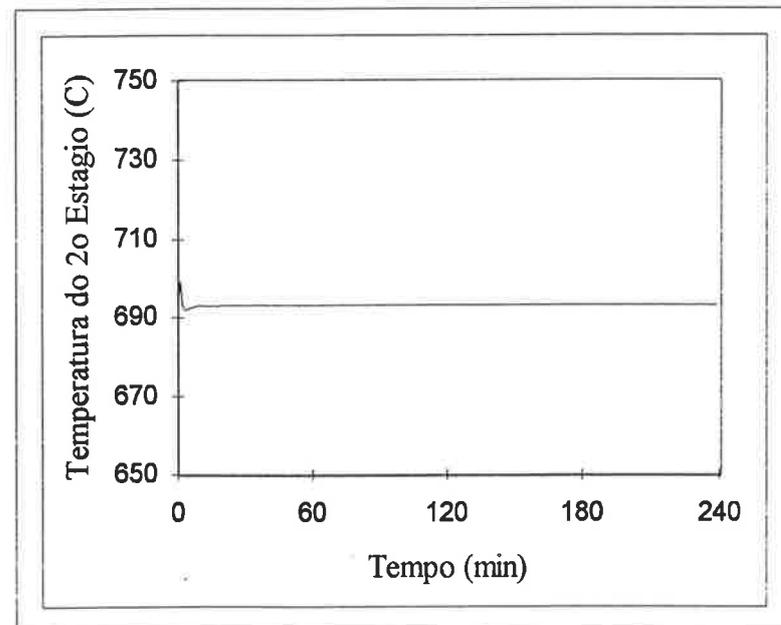


Figura 6.19. Resposta da temperatura  $T_{rg}$  do leito do catalisador no 2º estágio do regenerador, perante a perturbação em degrau no "setpoint" de  $T_{rx}$ .

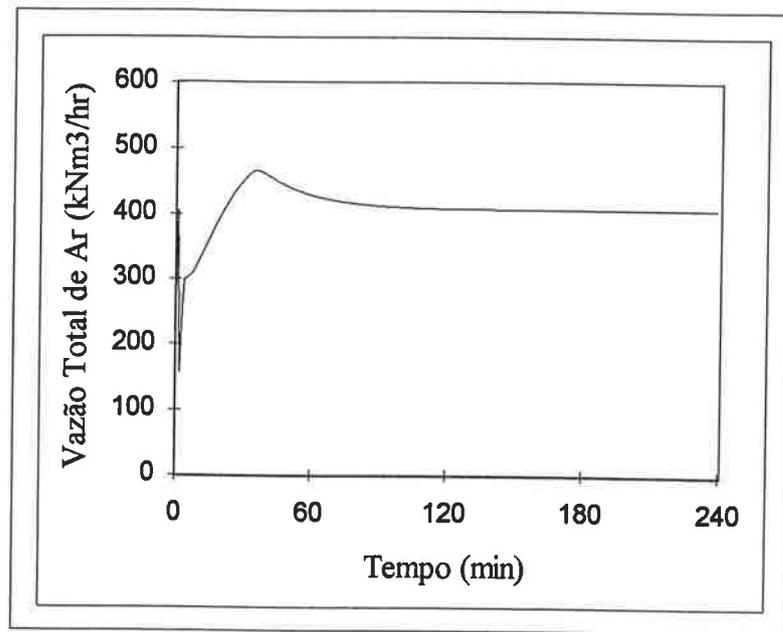
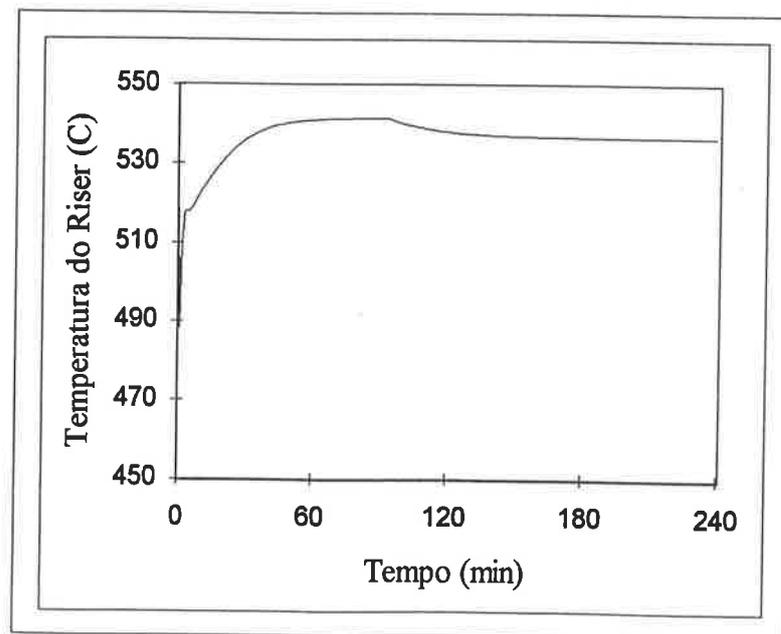


Figura 6.20. Ação da vazão manipulada  $R_{aT}$  do ar total, perante a perturbação em degrau no "setpoint" de  $T_{rx}$ .

As figuras 6.21, 6.22, 6.23 e 6.24 mostram os resultados da simulação de uma mudança em 5 graus do "setpoint" de  $T_{rg2}^{SP} = 693,08$  °C para  $T_{rg2}^{SP} = 688,08$  °C, mantido o "setpoint" de  $T_{rx}^{SP} = 536,74$  °C constante. Utilizou-se  $\alpha_{Trx}^{GLC} = -0.55$ ,  $\delta_{0,Trx}^{GLC} = 0,10$ ,  $\delta_{1,Trx}^{GLC} = 0,100416$ ,  $\alpha_{Trg2}^{GLC} = -0.55$ ,  $\delta_{0,Trg2}^{GLC} = 0,10$ ,  $\delta_{1,Trg2}^{GLC} = 0,010306$ , e  $\Delta t_s = 0.1$  min .



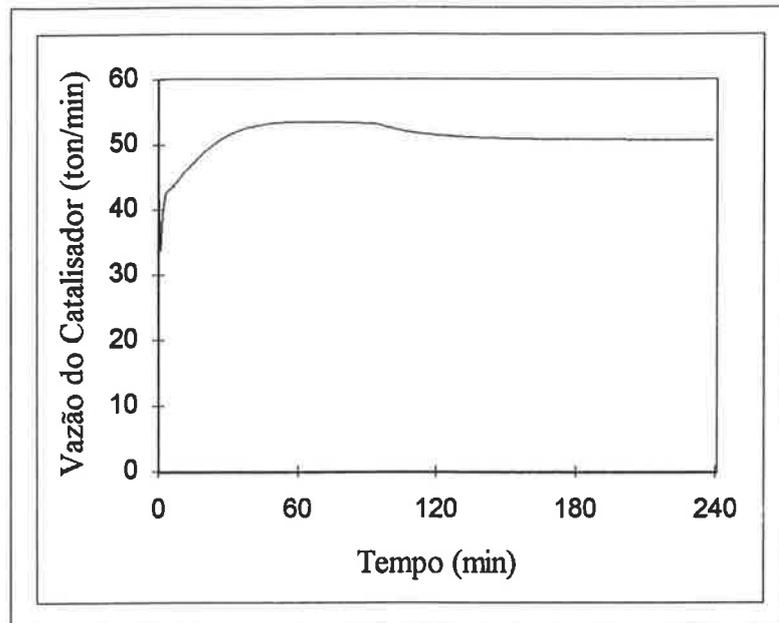


Figura 6.22. Ação da vazão manipulada  $R_{rc}$  do catalisador que entra no "riser", perante a perturbação em degrau no "setpoint" de  $T_{rg2}$ .

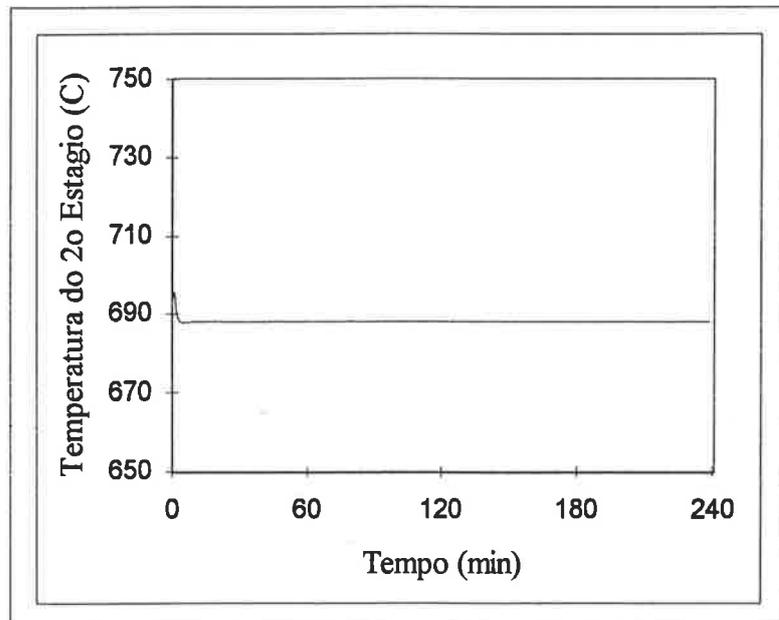


Figura 6.23. Resposta da temperatura  $T_{rg2}$  do leito do catalisador no 2º estágio do regenerador, perante a perturbação em degrau no "setpoint" de  $T_{rg2}$ .

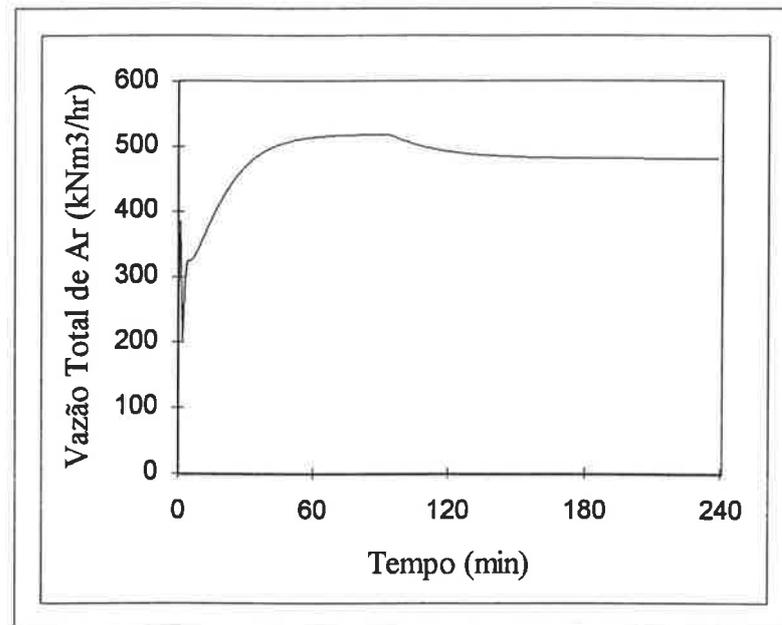


Figura 6.24. Ação da vazão manipulada  $R_{aT}$  do ar total, perante a perturbação em degrau no "setpoint" de  $T_{rg2}$ .

Este controlador também não se mostrou "*robusto*". O comportamento da malha fechada mostra-se extremamente sensível aos ajustes dos controladores, especialmente dos  $\delta_{1,Trx}^{alc}$  e  $\delta_{1,Trg2}^{alc}$ .

Além disso, note-se que os dois casos anteriores foram de degraus negativos para os setpoints. Com esta ação de controle conseguiu-se levar o sistema até estes valores desejados.

Porém para os degraus positivos em "*setpoints*", sistematicamente a simulação atravessa a região onde o jacobiano do sistema é singular.

Lembre-se de que quando este jacobiano, isto é, quando a matriz característica  $A(x)$  da equação (6.3-14) for singular, o cálculo do controlador pela equação (6.4-28) já não tem mais significado.

### 6.5. ANÁLISE DO CONVERSOR FCC NA FORMA DE SISTEMA AFIM OU LINEAR EM ENTRADAS

Como o último aspecto a ser comentado no presente capítulo, considere a implementação digital, isto é, o controle com intervalo de amostragem. Caso utilize-se da síntese do controlador contínuo, nos sistemas lineares sabe-se que quanto maior o tempo de amostragem, maior é a degradação do desempenho.

No caso do controle não-linear geométrico, a linearização exata do sistema contínuo não necessariamente se reproduz como linearização exata dos sistemas amostrados e portanto não se garante a estabilidade.

Uma tentativa de preservar a capacidade de controle na implementação digital é a *compensação* do controlador contínuo perante os efeitos de amostragem. Considere o controlador elaborado para sistemas contínuos afins em entrada, já descrito no capítulo 3.

$$\mathbf{u}_{cont}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{b}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} \quad (6.5-1)$$

O controle digital pode ser dado então (Kimber e Gray, 1992 e Barbot et al. 1992) por uma correção  $\mathbf{u}_{ext}(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  para um intervalo de amostragem  $T_s$ :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}_{cont}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) + (T_s) \cdot \mathbf{u}_{ext}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \quad (6.5-2)$$

A correção  $\mathbf{u}_{ext}(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  pode ser dada por exemplo como :

$$\mathbf{u}_{ext}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \frac{1}{3} \mathbf{L}_{\tilde{\mathbf{f}}} \mathbf{u}_{cont} \quad (6.5-3)$$

$$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{g}_0 + \sum \mathbf{g}_i \mathbf{u}_{cont,i}$$

Naturalmente, lembrando dos casos lineares, as equações (6.5-2) e (6.5-3) devem ser consideradas como uma aplicação da "força bruta", uma vez que não existe garantia de que um sistema amostrado com a malha fechada pela equação (6.5-2) seja estável.

Assim exposta a motivação para tratar o conversor FCC como um sistema *afim em entrada*, serão mostrados aqui como obter esta nova forma e porque esta síntese não funciona para a presente aplicação do conversor FCC.

Considere o seguinte modelo do conversor FCC :

$$\begin{bmatrix} \dot{T}_{rx} \\ \dot{H}_{ra} \\ \dot{C}_{cat} \\ \dot{C}_{sc} \\ \dot{T}_{ra} \\ \dot{H}_{rg1} \\ \dot{C}_{rc1} \\ \dot{T}_{rg1} \\ \dot{H}_{rg2} \\ \dot{C}_{rc2} \\ \dot{T}_{rg2} \\ \dot{P}_{ri} \\ \dot{P}_{ra} \\ \dot{A}_{TCV} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{S_c H_{ris}} \left[ S_c R_{rc} (T_{rg2} - T_{rc}) + S_f D_{ff} \left( \frac{R_{ff}}{1440} \right) (T_{fp} - T_{rx}) - \Delta H_{fv} D_{ff} \left( \frac{R_{ff}}{1440} \right) - \Delta H_{cr} R_{oc} \right] \\ R_{rc} - R_{sc} \\ \frac{1}{H_{ra}} [-R_{rc} C_{cat} + 100 R_{cf}] \\ \frac{1}{H_{ra}} [R_{rc} (C_{rc2} - C_{sc}) + 100 R_{cf}] \\ \frac{1}{H_{ra}} [R_{rc} (T_{rx} - T_{ra})] \\ R_{sc} - R_{rc1} \\ \frac{1}{H_{rg1}} [R_{sc} (C_{stp} - C_{rc1})] - R_{cb1} \\ \frac{1}{S_c H_{rg1}} \left[ S_c R_{sc} (T_{ra} - T_{rg1}) - S_a \left( \frac{F_{gk1}^*}{1000} \right) T_{rg1} - \Delta H_{c1} (12) \left( \frac{C_{carb1}}{1000} \right) \right] \\ R_{rc1} - R_{rc} \\ \frac{1}{H_{rg2}} [R_{rc1} (C_{rc1} - C_{rc2})] - R_{cb2} \\ \frac{1}{S_c H_{rg2}} \left[ S_c R_{rc1} (T_{rg1} - T_{rg2}) - S_a \left( \frac{F_{gk2}^*}{1000} \right) T_{rg2} - \Delta H_{c2} (12) \left( \frac{C_{carb2}}{1000} \right) \right] \\ \frac{1}{\tau_{Pri}} [P_{rg} - P_{ri}] \\ \frac{(T_{rx} + 273)}{\tau_{Pra}} [R_{oc} - W_{gas}] \\ \frac{1}{\tau_{TCV}} [-A_{TCV}] \end{bmatrix}$$



$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{O}_{fg1} \\ \dot{O}_{d1} \\ \dot{T}_{d1} \\ \dot{O}_{fg2} \\ \dot{O}_{d2} \\ \dot{T}_{d2} \\ \dot{O}_{dg} \\ \dot{T}_{dg} \\ \dot{P}_g \\ \dot{P}_{comp} \\ \dot{A}_{LCV} \\ \dot{A}_{PdCV} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{R_G(T_{rg1} + 273)}{V_1 P_{rg}} [-F_{gm1}^* O_{fg1} - 100 F_{d1} C_{arb1}] \\ \frac{R_G(T_{d1} + 273)}{V_{d1} P_{rg}} [F_{gm1}^* (O_{fg1} - O_{d1}) - 100 V_{d1} \left(\frac{60}{2}\right) R_{co1}] \\ \frac{R_G(T_{d1} + 273)}{V_{d1} (M_{d1} P_{rg}) S_a} [F_{gk1}^* S_a (T_{rg1} - T_{d1}) + (67636)(60) V_{d1} R_{co1}] \\ \frac{R_G(T_{rg2} + 273)}{V_2 P_{rg}} [-F_{gm2}^* O_{fg2} - 100 F_{d2} C_{arb2}] \\ \frac{R_G(T_{d2} + 273)}{V_{d2} P_{rg}} [F_{gm2}^* (O_{fg2} - O_{d2}) - 100 V_{d2} \left(\frac{60}{2}\right) R_{co2}] \\ \frac{R_G(T_{d2} + 273)}{V_{d2} (M_{d2} P_{rg}) S_a} [F_{gk2}^* S_a (T_{rg2} - T_{d2}) + (67636)(60) V_{d2} R_{co2}] \\ \frac{R_G(T_{dg} + 273)}{V_{dg} P_{rg}} [(F_{gm1}^* O_{d1} + F_{gm2}^* O_{d2}) - (F_{gm1}^* + F_{gm2}^*) O_{dg} - 100 V_{dg} \left(\frac{60}{2}\right) R_{cog}] \\ \frac{R_G(T_{dg} + 273)}{V_{dg} (M_{dg} P_{rg}) S_a} [S_a (F_{gk1}^* T_{d1} + F_{gk2}^* T_{d2}) - S_a (F_{gk1}^* + F_{gk2}^*) T_{dg} + (67636)(60) V_{dg} R_{cog}] \\ \frac{1}{M_{dg} (V_{d1} + V_{d2} + V_{dg} + V_c)} [(F_{gk1}^* + F_{gk2}^* - F_{out}) R_G (T_{dg} + 273)] \\ \frac{1}{\tau_{comp}} [W_{gas} - W_{comp}] \\ \frac{1}{\tau_{LCV}} [C_{LC} - A_{LCV}] \\ \frac{1}{\tau_{PdCV}} [C_{PdC} - A_{PdCV}] \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$



onde  $C_{TC}$  é o sinal da posição da válvula do catalisador regenerado. Adicionalmente tem-se as seguintes variáveis auxiliares :

$$\begin{aligned}
 F_{ar} &= \frac{R_{a1}}{R_a} = \text{relação de ar (constante)} \\
 F_{gm1}^* &= -F_{at1}C_{arb1} + \langle \text{CO} \rangle_1 + \langle \text{CO}_2 \rangle_1 + \langle \text{H}_2\text{O} \rangle_1 \\
 F_{gm2}^* &= -F_{at2}C_{arb2} + \langle \text{CO} \rangle_2 + \langle \text{CO}_2 \rangle_2 + \langle \text{H}_2\text{O} \rangle_2 \\
 F_{gk1}^* &= -32F_{at1}C_{arb1} + 28\langle \text{CO} \rangle_1 + 44\langle \text{CO}_2 \rangle_1 + 18\langle \text{H}_2\text{O} \rangle_1 \\
 F_{gk2}^* &= -32F_{at2}C_{arb2} + 28\langle \text{CO} \rangle_2 + 44\langle \text{CO}_2 \rangle_2 + 18\langle \text{H}_2\text{O} \rangle_2
 \end{aligned} \tag{6.5-5}$$

As outras equações constitutivas já foram listadas nas equações (6.1-2) .

Tal como nos casos anteriores, as variáveis controladas no conversor FCC são a temperatura  $T_{rx}$  da saída do "riser" e a temperatura  $T_{rg2}$  do catalisador no segundo estágio do regenerador :

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(\mathbf{x}) \\ h_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{rx} \\ T_{rg2} \end{bmatrix} \tag{6.5-6}$$

As variáveis manipuladas não são mais  $R_{rc}$  e  $R_a$  . Agora são escolhidas o sinal  $C_{TC}$  e a vazão total  $R_a$  de ar :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{TC} \\ R_a \end{bmatrix} \tag{6.5-7}$$

Portanto fazendo

$$\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial T_{rx}} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial T_{rg2}} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \tag{6.5-8}$$

Tem-se a primeira derivada de Lie em relação aos campos vetoriais de entrada :

$$\mathbf{L}_g \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) = \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{L}_{g_2} h \end{bmatrix} \tag{6.5-9}$$

onde

$$L_{g_2} h_2 = \frac{1}{S_c H_{rg2}} \left[ S_a (1,29) \left( \left( \frac{1-F_{ar}}{60} \right) T_{ai} + \left( \frac{F_{ar}}{60} \right) F_{12} T_{rg1} \right) - S_a \left( \frac{21,45696 \left( (1-F_{ar}) + F_{12} F_{ar} \right)}{1000} \right) T_{rg2} \right] \quad (6.5-10)$$

Note-se que a primeira linha é nula na matriz da equação (6.5-9). Portanto calculando a derivada de Lie do campo vetorial de velocidade :

$$\begin{aligned} L_{g_0} h(x, u, w) &= \\ &= \frac{\partial h(x, u, w)}{\partial x} g_0(x, u, w) \\ &= \begin{bmatrix} g_{01}(x, u, w) \\ g_{02}(x, u, w) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{S_c H_{ris}} \left[ S_c R_{rc} (T_{rg2} - T_{rx}) + S_f D_{yf} \left( \frac{R_{yf}}{1440} \right) (T_{fp} - T_{rx}) - \Delta H_{fv} D_{yf} \left( \frac{R_{yf}}{1440} \right) - \Delta H_{cr} R_{oc} \right] \\ \frac{1}{S_c H_{rg2}} \left[ S_c R_{rc1} (T_{rg1} - T_{rg2}) - S_a \left( \frac{F_{gk2}^*}{1000} \right) T_{rg2} - \Delta H_{c2} (12) \left( \frac{C_{arb2}}{1000} \right) \right] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.5-11)$$

Tem-se :

$$\frac{\partial(L_{g_0} h(x, u, w))}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L_{g_0} h_1}{\partial T_{rx}} & 0 & \frac{\partial L_{g_0} h_1}{\partial C_{cat}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial L_{g_0} h_1}{\partial C_{rc2}} & \frac{\partial L_{g_0} h_1}{\partial T_{rg2}} & \frac{\partial L_{g_0} h_1}{\partial P_{r1}} & \frac{\partial L_{g_0} h_1}{\partial P_{r2}} & \frac{\partial L_{g_0} h_1}{\partial A_{TCV}} & 0 & \dots & 0 \\ \times & \times \end{bmatrix} \quad (6.5-12)$$

Assim

$$L_g (L_{g_0} h(x, u, w)) = \frac{\partial(L_{g_0} h(x, u, w))}{\partial x} g(x, u, w) = \begin{bmatrix} L_{g_1} (L_{g_0} h_1) & L_{g_2} (L_{g_0} h_1) \\ \times & \times \end{bmatrix} \quad (6.5-13)$$

onde

$$L_{g_1} (L_{g_0} h_1) = \frac{\partial L_{g_0} h_1}{\partial A_{TCV}} \cdot \frac{1}{\tau_{TCV}} \quad (6.5-14)$$

$$\mathbf{L}_{g_2}(\mathbf{L}_{g_0} h_1) = \frac{\partial \mathbf{L}_{g_0} h_1}{\partial T_{rg2}} \cdot \frac{1}{S_c H_{rg2}} \left[ S_a(1,29) \left( \left( \frac{1-F_{ar}}{60} \right) T_{ai} + \left( \frac{F_{ar}}{60} \right) F_{12} T_{rg1} \right) - S_a \left( \frac{21,45696((1-F_{ar}) + F_{12} F_{ar})}{1000} \right) T_{rg2} \right]$$

(6.5-15)

E a segunda derivada de Lie do campo vetorial de velocidade é :

$$\mathbf{L}_{g_0}^2 \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) = \frac{\partial(\mathbf{L}_{g_0} \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}))}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{g_0}^2 h_1 \\ \times \end{bmatrix}$$

(6.5-16)

com

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{g_0}^2 h_1 = & \frac{\partial \mathbf{L}_{g_0} h_1}{\partial T_{rx}} \frac{1}{S_c H_{ris}} \left[ S_c R_{rc} (T_{rg2} - T_{rx}) + S_f D_{yf} \left( \frac{R_{yf}}{1440} \right) (T_{fp} - T_{rx}) - \Delta H_{fv} D_{yf} \left( \frac{R_{yf}}{1440} \right) - \Delta H_{cr} R_{oc} \right] \\ & + \frac{\partial \mathbf{L}_{g_0} h_1}{\partial C_{cat}} \frac{1}{H_{ra}} [-R_{rc} C_{cat} + 100 R_{cf}] \\ & + \frac{\partial \mathbf{L}_{g_0} h_1}{\partial C_{rc2}} \frac{1}{H_{rg2}} [R_{rc1} (C_{rc1} - C_{rc2})] - R_{cb2} \\ & + \frac{\partial \mathbf{L}_{g_0} h_1}{\partial T_{rg2}} \frac{1}{S_c H_{rg2}} \left[ S_c R_{rc1} (T_{rg1} - T_{rg2}) - S_a \left( \frac{F_{gk2}^*}{1000} \right) T_{rg2} - \Delta H_{c2} (12) \left( \frac{C_{carb2}}{1000} \right) \right] \\ & + \frac{\partial \mathbf{L}_{g_0} h_1}{\partial P_{ri}} \frac{1}{\tau_{Pri}} [P_{rg} - P_{ri}] \\ & + \frac{\partial \mathbf{L}_{g_0} h_1}{\partial P_{ra}} \frac{(T_{rx} + 273)}{\tau_{Pra}} [R_{oc} - W_{gas}] \\ & + \frac{\partial \mathbf{L}_{g_0} h_1}{\partial A_{TCV}} \frac{1}{\tau_{TCV}} [-A_{TCV}] \end{aligned}$$

(6.5-17)

Assim, tem-se a matriz característica

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} (\mathbf{L}_{g_1}(\mathbf{L}_{g_0} h_1)) & \mathbf{L}_{g_2}(\mathbf{L}_{g_0} h_1) \\ 0 & \mathbf{L}_{g_2} h_2 \end{bmatrix}$$

(6.5-18)

e com o vetor

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} L_{g_0}^2 h_1 \\ L_{g_0} h_2 \end{bmatrix} \quad (6.5-19)$$

pode-se calcular as funções de retroalimentação :

$$\alpha(\mathbf{x}) = -\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{b}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{-L_{g_0}^2 h_1}{L_{g_1} (L_{g_0} h_1)} + \frac{(L_{g_2} (L_{g_0} h_1))(L_{g_0} h_2)}{(L_{g_1} (L_{g_0} h_1))(L_{g_2} h_2)} \\ \frac{-L_{g_0} h_2}{L_{g_2} h_2} \end{bmatrix} \quad (6.5-20a)$$

$$\beta(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{+1}{L_{g_1} (L_{g_0} h_1)} & \frac{-L_{g_2} (L_{g_0} h_1)}{(L_{g_1} (L_{g_0} h_1))(L_{g_2} h_2)} \\ 0 & \frac{+1}{L_{g_2} h_2} \end{bmatrix} \quad (6.5-20b)$$

Porém as simulações mostram que com a aplicação da lei de controle gerada por

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{TC} \\ R_a \end{bmatrix} = \alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(t) \quad (6.5-21)$$

o sistema em malha fechada torna-se instável.

Portanto é necessário analisar a dinâmica de zero.

Como a demonstração "analítica" de que a dinâmica de zero deste sistema é instável torna-se extremamente tediosa, mostrar-se-á numericamente :

Considere-se a aplicação da equação (6.5-21) com  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{0}$  no sistema (6.1-1) com (6.1-2), que será denotada como :

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{g}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot \alpha(\mathbf{x})) = \mathbf{f}^*(\mathbf{x}) \quad (6.5-22)$$

A partir do cálculo numérico do jacobiano desta função  $\mathbf{f}^*(\mathbf{x})$ , calculam-se os autovalores de  $\frac{\partial \mathbf{f}^*(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$  :

$$\begin{array}{c}
 x_1 \\
 x_2 \\
 x_3 \\
 x_4 \\
 x_5 \\
 x_6 \\
 x_7 \\
 x_8 \\
 x_9 \\
 x_{10} \\
 x_{11} \\
 x_{12} \\
 x_{13} \\
 x_{14} \\
 x_{15} \\
 x_{16} \\
 x_{17} \\
 x_{18} \\
 x_{19} \\
 x_{20} \\
 x_{21} \\
 x_{22} \\
 x_{23} \\
 x_{24} \\
 x_{25} \\
 x_{26} \\
 x_{27} \\
 x_{28} \\
 x_{29} \\
 x_{30} \\
 x_{31}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 T_{rx} \\
 H_{ra} \\
 C_{oat} \\
 C_{sc} \\
 T_{ra} \\
 H_{rg1} \\
 C_{rc1} \\
 T_{rg1} \\
 O_{fg1} \\
 O_{d1} \\
 T_{d1} \\
 H_{rg2} \\
 C_{rc2} \\
 T_{rg2} \\
 O_{fg2} \\
 O_{d2} \\
 T_{d2} \\
 O_{dg} \\
 T_{dg} \\
 P_{rg} \\
 P_{ri} \\
 P_{ra} \\
 P_{comp} \\
 A_{TCV} \\
 A_{LCV} \\
 A_{PdCV} \\
 I_{Trx} \\
 I_{Hra} \\
 I_{PdC} \\
 I_{PCx} \\
 I_{Trg2}
 \end{array}
 ;
 \begin{array}{c}
 \lambda_1 \\
 \lambda_2 \\
 \lambda_3 \\
 \lambda_4 \\
 \lambda_5 \\
 \lambda_6 \\
 \lambda_7 \\
 \lambda_8 \\
 \lambda_9 \\
 \lambda_{10} \\
 \lambda_{11} \\
 \lambda_{12} \\
 \lambda_{13} \\
 \lambda_{14} \\
 \lambda_{15} \\
 \lambda_{16} \\
 \lambda_{17} \\
 \lambda_{18} \\
 \lambda_{19} \\
 \lambda_{20} \\
 \lambda_{21} \\
 \lambda_{22} \\
 \lambda_{23} \\
 \lambda_{24} \\
 \lambda_{25} \\
 \lambda_{26} \\
 \lambda_{27} \\
 \lambda_{28} \\
 \lambda_{29} \\
 x_{30} \\
 x_{31}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 -0.5 \\
 -0.5 \\
 +1757.4 \\
 -335.78 \\
 +90.003 \\
 -14.058 \\
 -4.8295 + 5.35260 \cdot i \\
 -4.8295 - 5.35260 \cdot i \\
 -6.233 + 0.17653 \cdot i \\
 -6.233 - 0.17653 \cdot i \\
 -5.1911 + 0.39443 \cdot i \\
 -5.1911 - 0.39443 \cdot i \\
 -5.0776 + 0.26697 \cdot i \\
 -5.0776 - 0.26697 \cdot i \\
 -2.4000 \\
 -1.1376 \\
 -0.6969 + 0.43151 \cdot i \\
 -0.6969 - 0.43151 \cdot i \\
 -0.6416 + 0.24974 \cdot i \\
 -0.6416 - 0.24974 \cdot i \\
 -0.3525 + 0.48699 \cdot i \\
 -0.3525 - 0.48699 \cdot i \\
 -0.3810 \\
 -0.2496 \\
 -0.0824 \\
 +0.0199 \\
 -0.0398 \\
 -0.0236 + 0.00475 \cdot i \\
 -0.0236 - 0.00475 \cdot i \\
 -0.0020 \\
 0
 \end{array}
 \quad (6.5-23)$$

Note-se que os autovalores  $\lambda_3$ ,  $\lambda_5$  e  $\lambda_{26}$  possuem parte real positiva, o que mostra que a dinâmica interna, ou a dinâmica de zero, é instável.

Assim ilustra-se na presente aplicação que não basta que o sistema tenha um grau relativo bem definido e que a matriz característica seja não-singular. Para que o sistema seja estabilizável pela retroalimentação  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  da equação (6.5-21), é também necessário que a dinâmica interna seja estável.

Não se deve concluir que todo e qualquer conversor FCC não é controlável pelo controle não-linear geométrico. O que se mostrou aqui é que o presente modelo deste específico conversor FCC, com estas variáveis manipuladas e controladas que foram escolhidas para a presente aplicação, resulta em controle não-linear geométrico contínuo que inerentemente não é estável em malha fechada.

Conforme já citado no capítulo 2, para um sistema não-linear afim que não tenha um grau relativo definido por ter a sua matriz característica singular, sempre pode-se tentar uma retroalimentação dinâmica.

Porém como proceder quanto aos sistemas que possuem um grau relativo bem definido, mas apresentam a dinâmica interna instável ?

Conceitualmente as soluções apresentadas são bem mais simples do que nos faz crer a literatura relativa às aplicações. Basicamente estas soluções trabalham com a *transformação não-linear do mapa de resposta*  $h(\mathbf{x})$  junto com um *modelo aproximado*  $\bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  do processo a ser controlado. Este modelo aproximado deve ter um comportamento dinâmico próximo do modelo original exceto pela parte da "inversa" instável. Além disso, o modelo aproximado deve ter o estado estacionário final próximo do modelo original, o que não significa que em aplicações práticas possa-se descartar da ação integral no controlador.

Hauser et al.(1992) introduzem a noção de grau relativo "robusto", porém do referido trabalho interessa-nos a ilustração de que um modelo aproximado pode ser obtido heurísticamente e também pode ser obtido via aproximação de Taylor, chamada pelos autores de linearização jacobiana.

Assim, os trabalhos de Kravaris et al.(1994) e Wright e Kravaris(1992) podem ser interpretados de modo bem mais fácil como uma linearização jacobiana da parcela da dinâmica de zero, junto com uma imposição da dinâmica da resposta e uma compensação do tipo de preditor de Smith. É sintomático que nestes referidos trabalhos a analogia linear seja no sistema multivariável, porém o exemplo da ilustração do controle não-linear seja mostrada no sistema monovariável. Isto é, os efeitos de uma linearização jacobiana da dinâmica de zero é uma questão a ser explorada com mais detalhes, e sob este ponto de vista remete-se à análise do Lawrence e Rugh(1994).

Motivado pela ilustração do Hauser et al.(1992) de que , quando se conhece bem um processo dinâmico não-linear, o modelo heurístico pode ser mais efetivo do que um modelo obtido pela linearização jacobiana, pode-se escolher este método heurístico.

Note-se agora que as equações (6.3-1) a (6.3-5) com as quais começamos a descrever o controle do conversor FCC *é justamente este modelo aproximado heurístico*. Infelizmente este modelo obtido não conserva mais a característica de sistema afim. Mas ao menos, como já foi citado anteriormente, por simulação verificou-se que a dinâmica de zero deste modelo aproximado é estável.

## 7. CONCLUSÕES.

No presente trabalho foram apresentados os conceitos básicos da geometria diferencial, a sua utilização na teoria do controle não-linear contínuo, a aplicação deste controle contínuo em uma coluna de destilação, a utilização da geometria diferencial na teoria do controle não-linear discreto, e a aplicação deste controle discreto em um conversor FCC.

A literatura da geometria diferencial preocupa-se mais com as chamadas variedades patológicas, ou possui um excesso de outras informações além daquelas necessárias para a teoria de controle. Por outro lado, a literatura da teoria do controle geométrico comete abusos de notação sem explicitar claramente, fazendo assim com que se perca a maior vantagem da geometria diferencial, que é o entendimento claro e abstrato (livre de coordenadas) das aplicações do controle geométrico.

Para notar que estas afirmações não são exageradas, basta ressaltar que nos primeiros estudos de aplicação do controle não-linear geométrico houve uma ênfase exagerada no conceito da involutividade, que é apenas uma condição de equivalência da integrabilidade.

Portanto descreveu-se no subcapítulo 3.1 sob a forma mais "intuitiva" possível, o que é um campo vetorial e uma distribuição, uma diferencial um-forma e uma codistribuição, variedades, espaços tangentes e mapas tangentes. E principalmente descreveu-se aqui, para cada conceito citado, o que é uma descrição geométrica ou livre de coordenadas e o que é a sua correspondente realização algébrica (em Lie) em coordenadas locais. Aparentemente banalizada, mas saber discriminar claramente estas duas descrições marca a diferença entre saber ou não aplicar o controle geométrico.

Conforme já foi citado, considera-se que passar ao largo da descrição da geometria diferencial e manipular diretamente as derivadas de Lie tornam-se meras repetições algébricas em coordenadas locais, ou seja, tentativas de aplicações por similaridade, e principalmente não aumenta o nosso entendimento dos processos não-lineares.

A ilustração mais contundente desta afirmação é que as primeiras aplicações de controle não-linear geométrico tinham uma ênfase exagerada em linearização exata, principalmente na assim chamada forma normal de Byrnes-Isidori. Porém a descrição explícita do *modelo* de um processo na sua forma linearizada só é importante quando se

deseja uma aplicação conjunta com outro controlador do tipo adaptativo, preditivo , e outros.

Assim, à luz da literatura mais recente, interpretou-se sucintamente a descrição do controle geométrico contínuo no subcapítulo 3.2 .

Entre a assim chamada síntese do controlador, utilizando os resultados do subcapítulo 3.2, e o projeto efetivo deste controlador aplicado a um processo específico, existem detalhes que devem ser explorados. Por isso é que surgem afirmações de que as "propriedades teóricas do sistema contínuo são agora bem entendidos" (Soroush e Kravaris,1992) e tem-se como mais uma contribuição relevante um trabalho do tipo de análise do sistema afim multivariável em Daoutidis e Kravaris(1994).

Assim, no capítulo 4 é mostrada a síntese do controlador, a análise da variedade da dinâmica de zero e a capacidade de rejeição de distúrbios, a mudança de "*setpoints*" sob a forma padrão de Butterworth, a regulação via variáveis externas dadas pela dinâmica de Hurwitz dos erros , a incorporação da ação integral nos controladores com mecanismos de prevenção de saturação, a incorporação de fator de decretação na matriz característica, e finalmente um método de ajuste destes coeficientes de Hurwitz via um teste simples como um Autotune de Astrom.

Surpreendentemente, um modelo da coluna de destilação binária publicada em um livro texto de graduação (Luyben,1989) tem resistido a controles lineares, pela sua extrema não-linearidade com 30 estágios, com pressão variável entre os estágios, e requerendo, para a perfeita descrição dinâmica, de balanços de retenção ("*hold-up*") e da entalpia além dos usuais balanços de composição. É justamente nesta coluna que é mostrada a eficácia do controle não-linear, conforme pode-se ver no subcapítulo 4.5 .

O controle não-linear geométrico discreto ainda é um assunto a ser explorado, tanto a nível de teoria quanto a nível de aplicação. Em processos químicos só existem os trabalhos de Soroush e Kravaris(1992) e Soroush e Kravaris(1994), ainda assim em sistema monovariável, e com a função de controle que pode ser expressa explicitamente.

Note-se que após as descrições geométricas do capítulo 3, a descrição do capítulo 5 torna-se extremamente intuitiva, concisa e elegante. Neste capítulo, mostram-se claramente a mudança de descrição que se deve ter por ser um sistema discreto, e reinterpretam-se os conceitos de invariância, de mapas tangentes, das distribuições, dos graus relativos, e das matrizes características.

Tal como no caso de sistemas contínuos afins, no sistema discreto pode-se notar que a síntese do controlador só se torna clara quando abordamos a etapa do projeto do controlador. Assim, utilizou-se do conversor FCC (conversor de craqueamento catalítico com leito fluidizado) para ilustração.

Mostrou-se neste controle discreto multivariável, como a partir de um sistema com grau relativo definido, mesmo sem as funções explícitas de controle, pode-se ajustar a dinâmica dos "setpoint" e tornar a evolução dos erros assintoticamente zeros no senso de Hurwitz.

Mostrou-se também como incorporar a ação integral no controlador externo e como incorporar um parâmetro de decretação ("detuning") nos controladores, tornando-os em controladores denominados de GLC pelo Soroush e Kravaris(1992).

Pelos modelos escolhidos para o conversor FCC e pelas variáveis manipuladas que foram selecionadas, o controle resultante não se mostrou robusto. Porém isto não invalida o caráter de ilustração de como pode-se implementar um controle não-linear geométrico discreto.

Finalmente, duas particularidades que devem ser ressaltadas, tanto nos controladores contínuos quanto nos discretos, são as dinâmicas dos "setpoints" dadas pelas equações (4.4-3) e (6.4-20), e os parâmetros de decretação das ações de controle, inclusas nas equações (4.4-38) e (6.4-28). Sem estes detalhes as ações de controle resultantes seriam extremamente violentas e portanto a aplicação destes controladores seriam impraticáveis.

Como continuação dos trabalhos, para a aplicação efetiva torna-se interessante o desenvolvimento de estudos de reconstrução do estado via observadores não-lineares exponenciais, que não foram abordados aqui por não fazerem parte do escopo do presente trabalho.

## 7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

- Abraham, R.; Marsden, J.E.; Ratiu, T. (1988) *Manifolds, Tensor Analysis and Applications*. Springer. New York.
- Alsop, A.W.; Edgar, T.F. (1990) Nonlinear Control of a High-Purity Distillation Column by the Use of Partially linearized Control Variables. *Computers and Chem. Engng.* 14(6)665-678.
- Aoufoussi, H.; Perrier, M.; Chaouki, J.; Chavarie, C.; Dochain, D. (1992) Feedback Linearizing Control of a Fluidized Bed reactor. *Can. J. Chem. Engng.* 70(4)356-367, April.
- Avidan, A.A.; Edwards, M.; Owen, H. (1990) Fluid Catalytic Cracking - Past and Future Challenges. *Rev. Chem. Engng.* 6(1)1-71.
- Åström, K.J.; Hägglund, T. (1984) Automatic Tuning of Simple Regulators with Specifications on Phase and Amplitude Margins. *Automatica* 20(3)645-651.
- Åström, K.J.; Hägglund, T. (1988) Automatic Tuning of PID Controllers. *ISA Monograph Series*. NC.
- Åstrom, K.J.; Wittenmark, B. (1989) *Adaptive Control*. Addison-Wesley. NY.
- Bastin, G.; Jarachi, F.; Mareels, I.M.Y. (1993) Dead Beat Control of Recursive Nonlinear Systems. *Proceedings of 32<sup>nd</sup> Conf. on Decision and Control*, San Antonio, Texas, December 1993. Paper FM1-1:30, p.2965-2971.
- Barbot, J.P.; Monaco, S.; Normand-Cyrot, D.; Pantalos, N. (1992) Some Comments about Linearization under Sampling. *Proceedings 31<sup>th</sup> Conference on Decision and Control*, TP10-17:50. p.2392-2397.
- Byrnes, C.I.; Isidori, A. (1991) Asymptotic Stabilization of Minimum Phase Nonlinear Systems. *IEEE Trans. Automatic Control* AC-36(10)1122-1137.
- Callier, F.M.; Desoer, C.A. (1982) *Multivariable Feedback Systems*. Springer Verlag. NY.
- Castillo, B. (1993) Output Regulation of Non-Linear Systems with More Inputs than Outputs. *Int. J. Control* 57(6)1343-1356.
- Castillo, B.; Di Gennaro, S. (1991) Asymptotic Output Tracking for SISO Nonlinear Discrete Systems. *Proceedings 30<sup>th</sup> Conference on Decision and Control*, T3-3-4:40. p.1802-1806.
- Castillo, B.; Di Gennaro, S.; Monaco, S.; Normand-Cyrot, D. (1993) Nonlinear Regulation for a Class of Discrete-Time Systems. *Systems & Control Letters* 20(1993)57-65.

- Castro,R.;Alvarez,J.;Alvarez,J.(1990) Nonlinear Disturbance Decoupling Control of a Binary Distillation Column. *Automatica* **26**(3)567-572.
- Charlet,B.;Lévine,J.;Marino,R.(1991) Sufficient Conditions for Dynamic State Feedback Linearization. *SIAM J. Control and Optimization* **29**(1)38-57.
- Chung,S-T.;Grizzle,J.W.(1992) Internally Exponentially aStable Non-Linear Discrete-Time Non-interacting Control via Static Feedback. *Int.J.Control* **55**(5)1071-1092.
- Daoutidis,P.;Kravaris,C.(1994) Dynamic Output Feedback of Minimum-Phase Multivariable Nonlinear Processes. *Chemical Engineering Science* **49**(4)433-447.
- Daoutidis,P.;Kravaris,C.(1992) Structural Evaluation of Control Configurations for Multivariable Nonlinear Processes. *Chemical Engineering Science* **47**(5)11091-1107.
- Daoutidis,P.;Kravaris,C.(1991) Inversion and Zero Dynamics in Nonlinear Multivariable Control. *AIChE J.* **37**(4)527-538.
- Daoutidis,P.;Kumar,A.(1994) Structural Analysis and Output Feedback Control of Nonlinear Multivariable Processes. *AIChE J.* **40**(4)647-668.
- Daoutidis,P.;Soroush,M.;Kravaris,C.(1990) Feedforward/feedback Control of Multivariable Nonlinear Process. *AIChE J.* **36**(10)1471-1484.
- Di Benedetto,M.D.(1990) Nonlinear Strong Model Matching. *IEEE Trans. Automatic Control* **AC-35**(12)1351-1355.
- Di Benedetto,D.M.;Grizzle,J.W.(1994) Asymptotic Model Matching for Nonlinear Systems. *IEEE Trans. Automatic Control* **AC-39**(8)1539-1550.
- Di Benedetto,M.D.;Grizzle,J.W.;Moog,C.H.(1989) Rank Invariants of Nonlinear Systems. *SIAM J. Control and Optimization* **27**(3)658-672.
- Di Benedetto,M.D.;Isidori,A.(1986) The Matching of Nonlinear Models via Dynamic State Feedback. *SIAM J. Control and Optimization* **24**(5)1063-1075.
- Eaton,J.W.;Rawlings,J.B.(1990) Feedback Control of Chemical Processes using On-line Optimization Techniques. *Computer & Chemical Engineering* **14**(4/5)469-479.
- Economou,C.G.;Morari,M.;Palsson,B.O.(1986) IMC. 5. Extension to Nonlinear Systems. *Ind.Eng.Chem.Process Des.Dev* **25**(2)403-411.
- Fliess,M.(1990) Generalized Controller Canonical Forms for Linear and Nonlinear Dynamics. *IEEE Trans. Automatic Control* **AC-35**(9)994-1001.
- Francis,B.A.;Wonham,W.M.(1976) The Internal Model principle of Control Theory. *Automatica* **12**(5)457-465.
- Francis,B.A.(1977) The Linear Multivariable Regulator Problem. *SIAM J. Control and Optimization* **15**(3)486-505.

- Grizzle, J.W. (1986) Local Input-Output Decoupling of Discrete-Time Non-linear Systems. *Int.J. Control* **43**(5)1517-1530.
- Grizzle, J.W. (1985) Controlled Invariance for Discrete-Time Nonlinear Systems with an Application to the Disturbance Decoupling Problem. *IEEE Trans. Automatic Control* **AC-30**(9)868-874.
- Grizzle, J.W.; Di Benedetto, D.M. (1992) Approximation by Regular Input-Output Maps. *IEEE Trans. Automatic Control* **AC-37**(7)1052-1055.
- Grizzle, J.W.; Di Benedetto, D.M.; Lamnabhi-Lagarrigue, F. (1994) Necessary Conditions for Asymptotic Tracking in Nonlinear Systems. *IEEE Trans. Automatic Control* **AC-39**(9)1782-1793.
- Hauser, J.; Sastry, S.; Kokotovic, P. (1992) Nonlinear Control via Approximate Input-Output Linearization : The Ball and Beam Example. *IEEE Trans. Automatic Control* **AC-37**(3)392-398.
- Hepburn, J.S.A.; Wonham, W.M. (1984) Error Feedback and Internal Models on Differentiable Manifolds. *IEEE Trans. Automatic Control* **AC-29**(5)397-402.
- Henson, M.A.; Seborg, D.E. (1992) Nonlinear Control Strategies for Continuous Fermenters. *Chemical Engineering Science* **47**(4)821-835.
- Hirschorn, R.M. (1979a) Invertibility of Nonlinear Control Systems. *SIAM J. Control and Optimization* **17**(2)289-297.
- Hirschorn, R.M. (1979b) Invertibility of Multivariable Nonlinear Control Systems. *IEEE Trans. Automatic Control* **AC-24**(8)855-865.
- Hoffman, K.; Kunze, R. (1961) Linear Algebra. *Prentice-Hall*. NY. p.318.
- Hoo, K.A.; Kantor, J.C. (1985) An Exothermic Continuous Stirred Tank Reactor in Feedback Equivalent to a Linear System. *Chemical Engineering Communication* **37**(1)1-10.
- Huang, J.; Rugh, W.J. (1992) Stabilization on Zero-Error Manifolds and the Nonlinear Servomechanism Problem. *IEEE Trans. Automatic Control* **AC-37**(7)1009-1013.
- Huijberts, H.J.C.; Nijmeijer, H. (1990) Local Nonlinear Model Matching : from Linearity to Nonlinearity. *Automatica* **26**(6)973-983.
- Huijberts, H.J.C.; Nijmeijer, H.; van der Wegen, L.L.M. (1992) Dynamic Disturbance Decoupling for Nonlinear Systems. *SIAM J. Control and Optimization* **30**(2)336-349.
- Huijberts, H.J.C. (1992) A Nonregular Solution of the Nonlinear Dynamic Disturbance Decoupling Problem with an Application to a Complete Solution of the Nonlinear Model Matching Problem. *SIAM J. Control and Optimization* **30**(2)350-366.

- Hunt,L.R.;Su,R.;Meyer,G.(1983) Global Transformations of Nonlinear Systems. *IEEE Trans. Automatic Control* **AC-28**(1)24-31.
- Isidori,A.(1985) The Matching of a Prescribed Linear Input-Output Behavior in a Nonlinear System. *IEEE Trans. Autom. Control.* **AC-30**(3)285-265. March.
- Isidori,A.(1989) Nonlinear Control Systems. 2<sup>nd</sup> edition. *Springer*. New York.
- Isidori,A.;Byrnes,C.I.(1990) Output Regulation of NonLinear Systems. *IEEE Trans. Automatic Control* **AC-35**(2)131-140.
- Isidori,A.;Krener,A.J.;Gori-Giorgi,C.;Monaco,S.(1981) Nonlinear Decoupling via feedback : A Differential Geometric Approach. *IEEE Trans. Automatic Control* **AC-26**(2)331-345.
- Jakubczyk,B.;Respondek,W.(1980) On Linearization of Nonlinear Control Systems. *Bull.Acad.Polon.Sci.Ser.Sci.Math.* **28**(1980)517-522. *Citado em* Marino;Respondek;van der Schaft(1994).
- Jakubczyk,B.;Sontag,E.D.(1990) Controllability of Nonlinear Discrete-time Systems : A Lie-Algebraic Approach. *SIAM J. Control and Optimization* **28**(1)1-33.
- Jayaraman,G.;Chizek,H.J.(1993) Feedback Linearization of Discrete-Time Systems. *Proceedings of 32<sup>nd</sup> Conf. on Decision and Control*, San Antonio, Texas, December 1993. Paper FM1-1:50, p.2972-2977.
- Kang,W.;Krener,A.J.(1992) Extended Quadratic Controller Normal Form and Dynamic State Feedback Linearization of Nonlinear Systems. *SIAM J. Control and Optimization* **30**(6)1319-1337.
- Kantor,J.C.(1987) An Overview of Nonlinear Geometrical Methods for Process Control. *in Prett;Morari(ed) The Shell Process Control Workshop* Butterworth Publ. p.225-250.
- Kimber,R.L.;Gray,W.S.(1992) On Sampled-Data Implementation of Feedback Linearizing Controllers. *Proceedings 31<sup>th</sup> Conference on Decision and Control*, T3-5-5:40. p.1873-1874.
- Kister,H.Z.(1990) Distillation Operation. *McGraw-Hill*. N. Y.
- Kravaris,C.(1988) Input/Output Linearization : a Nonlinear Analog of Placing Poles at Process Zeros. *AIChE J.* **34**(11)1803-1812.
- Kravaris,C.;Chung,C-B.(1987) Nonlinear State Feedback Synthesis by Global Input/Output Linearization. *AIChE J.* **33**(4)592-603.
- Kravaris,C.;Daoutidis,P.(1990) Nonlinear State Feedback Control of Second Order Nonminimum Phase Nonlinear Systems. *Computer & Chemical Engineering* **14**(4/5)439-449.

- Kravaris, C.; Daoutidis, P.; Wright, R. A. (1994) Output Feedback Control Non-minimum Phase Nonlinear Systems. *Chemical Engineering Science* **49**(13)2107-2122.
- Kravaris, C.; Kantor, J. C. (1990) Geometric Methods for Nonlinear Process Control. *Ind. Eng. Chem. Res.* **29**(12)2295-2323.
- Kravaris, C.; Palanski, S. (1988) Robust Nonlinear State Feedback under Structured Uncertainty. *AIChE J.* **34**(7)1119-1127.
- Kravaris, C.; Soroush, M. (1990) Synthesis of Multivariable Nonlinear Controllers by Input/Output Linearization. *AIChE J.* **36**(2)249-264.
- Lawrence, D. A.; Rugh, J. W. (1994) Input-Output Pseudolinearization for Nonlinear Systems. *IEEE Trans. Automatic Control* **AC-39**(11)2207-2217.
- Lee, H. G.; Arapostathis, A.; Marcus, S. I. (1987) Linearization of Discrete-Time Systems. *Int. J. Control* **45**(5)1803-1822.
- Lévine, J.; Rouchon, P. (1991) Quality Control of Binary Distillation Columns via Aggregated Models. *Automatica* **27**(3)463-480.
- Li, W. G.; Biegler, L. T.; Economou, C. G.; Morari, M. (1990) A Constrained Pseudo-Newtonian Control Strategy for Nonlinear Systems. *Computer & Chemical Engineering* **14**(4/5)451-464.
- Lien, C.-Y.; Wang, T.-W. (1990) Applications of Feedback Linearization to Bioreactor Control. *Proceedings ACC Conference*, San Diego, citado em Rangel, D.; Wang, T.-W. (1992)
- Luyben, W. L. (1990) Process Modeling, Simulation, and Control for Chemical Engineers. 2<sup>nd</sup> edition. *McGraw-Hill*. New York.
- Marino, R.; Respondek, W.; van der Schaft, A. J. (1994) Equivalence of Nonlinear Systems to Input-Output Prime Forms. *SIAM J. Control and Optimization* **32**(2)387-407.
- McClamroch, N. H.; Schumacher, D. (1993) An Asymptotic Output Tracking Problem for a Nonlinear Control System with Fewer Outputs than Inputs. *Proceedings FP5-4:30, IEEE 32<sup>nd</sup> Conference on Decision and Control*, San Antonio, Texas, December, 1993; p.3562.
- MacFarlane, A. S.; Alistair, G. J. (1979) Frequency-Response Methods in Control Systems. IEEE Press Selected Reprint Series *IEEE*. NY.
- MacFarlane, A. S.; Karkanias, N. (1976) Poles and Zeroes of Linear Multivariable Systems: A Survey of the Algebraic, Geometric and Complex Variable Theory. *Int. J. Control* **24**(3)33-74.
- McFarlane, R. C.; Reineman, R. C.; Bartee, J. F.; Georgakis, C. (1993) Dynamic Simulator for a Model IV Fluid Catalytic Cracking Unit. *Computers Chem. Engng.* **17**(3)275-300.

- Menawat, A.S.; Balachander, J. (1991) Alternate Control Structures for Chemostat. *AIChE J.* **37**(2)302-306.
- Moro, L.F.L.; Odloak, D. (1994) Constrained Multivariable Control of Fluid Catalytic Cracking Converters. *Submitted to the Journal of Process Control.*
- Nijmeijer, H.; van der Schaft, A.J. (1990) Nonlinear Dynamical Control Systems. *Springer*. New York.
- Nijmeijer, H.; van der Schaft, A.J. (1984) Controlled Invariance for Nonlinear Systems : Two worked examples. *IEEE Trans. Automatic Control* **AC-29**(4)361-364.
- Nijmeijer, H.; van der Schaft, A.J. (1983) The Disturbance Decoupling Problem for Nonlinear Control Systems. *IEEE Trans. Automatic Control* **AC-28**(5)621-623.
- Nijmeijer, H.; van der Schaft, A.J. (1982) Controlled Invariance for Nonlinear Systems. *IEEE Trans. Automatic Control* **AC-29**(4)361-364.
- Olver, J.P. (1986) Applications of Lie Groups to Differential Equations. *Springer*. New York.
- Rangel, D.; Wang, T-W. (1992) Optimization Approach to Controlling Constrained Nonlinear Systems. *Proceedings IEEE 31<sup>st</sup> Conference on Decision and Control*, Tucson, Arizona, December, 1992; FP1-16:30, p.3412-3417.
- Sastry, S.; Bodson, M. (1989) Adaptive Control. Stability, Convergence and Robustness. *Prentice Hall*. Englewood Cliffs. NJ.
- Shaked, U.; Dixon, M. (1977) Generalized Minimal Realization of Transfer-Function. *Int.J.Control.* **25**(5)785-803.
- Singh, S.N. (1981) A Modified Algorithm for Invertibility in Nonlinear System. *IEEE Trans. Automatic Control* **AC-26**(4)595-598.
- Soroush, M.; Kravaris, C. (1994) Synthesis of Discrete-Time Nonlinear Feedforward/Feedback Controller. *AIChE J.* **40**(3)473-495.
- Soroush, M.; Kravaris, C. (1992a) Discrete-Time Controller Synthesis by Input/Output Linearization. *AIChE J.* **38**(12)1923-1945.
- Soroush, M.; Kravaris, C. (1992b) Nonlinear Control of a Batch Polymerization Reactor : an Experimental Study. *AIChE J.* **38**(9)1429-1448.
- Wonham, W.M. (1979) Linear Multivariable Control : a Geometric Approach. *Springer Verlag*. NY.
- Wright, R.A.; Kravaris, C. (1992) Nonminimum Phase Compensation for Nonlinear Processes. *AIChE J.* **38**(1)26-40.

Wright, R. A.; Soroush, M.; Kravaris, C. (1991) Strong Acid Equivalent Control of pH Processes. *Ind. Eng. Chem. Res.* **30**(11)2437-2444.