

ANTONIO RAFAEL NAMUR MUSCAT

Engenheiro Mecânico (modalidade Produção)

Escola Politécnica da USP, 1974

APLICAÇÕES DA PROGRAMAÇÃO DINÂMICA À
ANÁLISE DE PROJETOS INTERDEPENDENTES

(VOLUME I - TEXTO)

~~*~~
Dissertação apresentada à
Escola Politécnica da USP
para a obtenção do Título
de Mestre em Engenharia

Orientador: Prof. Dr. Alberto Ricardo von Ellenrieder
Professor Assistente Doutor do Departamento
de Engenharia de Produção da Escola Politéc
nica da USP.

São Paulo - 1982

FD-476
v.1

Este trabalho é dedicado
à JANETE, minha esposa, pelo amor,
compreensão e apoio constantes.

Os agradecimentos do autor

ao professor Alberto Ricardo von Ellenrieder, pela excelente orientação;

aos professores Gregório Bouer, Hêlio Mattar, Jairo Simon da Fonseca, Max Barcellos Correa, Miguel Cezar Santoro, Oswaldo Faddigas Fontes Torres, Paulo Kirschner Junior, Pedro Rodrigues Bueno Neto, Sérgio Baptista Zaccarelli e Walter Delázaro pelas valiosas críticas e sugestões feitas ao trabalho;

ao Nelson Machado pela colaboração na definição do problema abordado;

ã Heloisa Helena de Oliveira Martins, ao Liao Fu Fong, ao Nelson Loureiro Alves e ao Shih Li Chung pelo apoio na confecção dos programas de computador;

ao pessoal administrativo do Agrupamento de Economia Industrial do Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado de São Paulo S/A (IPT), ã Marili Bardes e ã Marlene Alexandrowitsch pela datilografia de textos preliminares da dissertação; ã Rute Miwa Tomida pela datilografia da versão final do trabalho;

aos técnicos do Centro de Documentação da Divisão de Economia e Engenharia de Sistemas do IPT, da Biblioteca Complementar de Engenharia, da Biblioteca do Instituto de Matemática e Estatística da USP e do Departamento de Engenharia de Produção da EPUSP pelo auxílio na localização e obtenção de referências bibliográficas para o trabalho;

ao IPT, ao Departamento de Engenharia de Produção da EPUSP e ao Departamento de Administração da FEAUSP, respectivamente nas pessoas dos professores Hêlio Mattar e Paolo Zaghen; Samsão Woiler; e Ruy Aguiar da Silva Leme e Claus Leon Warschauer, pelo apoio na realização do trabalho;

e aos meus pais - Emily Namur Muscat e Antonio Muscat, e sogra-Lydia de Mello Conard, pelo constante incentivo.

Finalmente, um registro de gratidão e saudade de Rosa Sabonge Namur e Adrien Jules Marcel Conard, que em muito colaboraram para que o autor chegasse até aqui.

SUMÁRIO

Esta pesquisa trata do desenvolvimento de um modelo de Programação Dinâmica para a análise de projetos interdependentes. As interdependências são causadas pela ocorrência de fluxo de material entre projetos integrados, fisicamente, em série. Sinergismos entre projetos consecutivos são também considerados. Tal modelo é chamado Básico.

Três fases seqüenciais são necessárias para gerar os dados e obter a solução ótima para o modelo Básico: análise do sistema físico, determinação de retornos e gastos de capital, e solução do problema de alocação de capital. Para esta última fase é desenvolvido um algoritmo de Programação Dinâmica baseado no enfoque de "*espaços de estado embutidos*". Para cada uma das três fases é elaborado um programa de computador em FORTRAN IV.

São, também, desenvolvidas variantes de decomposição do problema de alocação de capital, equivalentes ao modelo Básico no sentido de conduzirem à mesma solução ótima obtida com este modelo. A otimização das variantes emprega, fundamentalmente, o mesmo algoritmo do modelo Básico. Uma certa classe de variantes utiliza, adicionalmente, resultados da Programação Dinâmica Não-Serial.

Um exemplo numérico é apresentado para ilustrar a utilização do modelo Básico bem como de suas variantes.

Finalmente, é feita uma extensão ao modelo Básico referente ao desenvolvimento de um modelo de Programação Dinâmica que considera interdependências entre quaisquer pares de projetos, e não só entre projetos consecutivos.

ABSTRACT

This research deals with the development of a Dynamic Programming model for the analysis of interdependent projects. The interdependences are caused by the occurrence of material flow between serial projects. Consideration is given also to synergisms between consecutive projects. Such a model is called Basic.

Three sequential steps are needed for data generation and to acquire the optimal solution of the Basic model: analysis of the physical system, evaluation of returns and capital outlays, and solution of the capital allocation problem. For this last step a Dynamic Programming algorithm is developed based on the "imbedded state space" approach. For each step a FORTRAN IV computer routine is written.

Decomposition variants for the capital allocation problem are also analysed. They are equivalent to the Basic model, in the sense that both lead to the same optimal solution. The optimization of these variants use, in essence, the same algorithm as the Basic model. A particular class of variants uses, in addition, results from the Non-Serial Dynamic Programming.

A numerical example is presented in order to show the application of the Basic model as well as of its variants.

Finally, an extension of the Basic model is elaborated, referring to the development of a Dynamic Programming model which considers the interdependence between any pair of projects, not only between consecutive ones.

ÍNDICE

VOLUME I (texto)

	página
1. INTRODUÇÃO, OBJETIVOS E ESCOPO DA PESQUISA	01
2. REVISÃO DA LITERATURA	07
2.1. Modelos da classe A - Interdependências não dire_ tamente relacionadas a fluxos de materiais entre os projetos em análise	08
2.1.1. Modelos da categoria A.1 - Programação In_ teira	09
2.1.2. Modelos da categoria A.2 - Programação Quadrática	11
2.1.3. Modelo da categoria A.3 - Análise de Ati- vidades	14
2.1.4. Modelos da categoria A.4 - Programação Di_ nâmica	17
2.2. Modelos da clãsse B - Interdependências direta_ mente relacionadas a fluxos de materiais entre os projetos em análise	23
2.2.1. Modelo da categoria B.1 - Programação In_ teira	24
2.2.2. Modelo da categoria B.2 - Programação In_ teira-Mista	26
2.3. A Pesquisa e a Literatura	28
3. MODELO BÁSICO DE PROGRAMAÇÃO DINÂMICA PARA A ANÁLISE DE PROJETOS INTERDEPENDENTES	35
3.1. Definição do Problema	36
3.2. Análise do Sistema Físico	38
3.3. Determinação do valor presente líquido de cada projeto e da função de retorno do conjunto de projetos	44
3.4. Modelo de Programação Dinâmica com variável de estado ampliada	51

3.5. Solução do problema de alocação de capital por Programação Dinâmica	55
3.6. Consideração de outras interações entre projetos consecutivos	60
3.6.1. Determinação do valor presente líquido de cada projeto e da função de retorno do conjunto de projetos	61
3.6.2. Modelo de Programação Dinâmica com variável de estado ampliada (modificado)	64
3.6.3. Modelo Básico de Programação Dinâmica para a solução do problema de alocação de capital	66
3.7. Algoritmo de solução	69
3.8. Programas de Computador	88
3.9. Exemplo numérico	91
3.9.1. Programa I - Análise do Sistema Físico	92
3.9.2. Programa II - Determinação de Retornos e Gastos de Capital	95
3.9.3. Programa III - Solução do Problema de Alocação de Capital	110
3.10. Considerações finais	117
4. ESTUDO DE ALGUMAS VARIANTES EQUIVALENTES AO MODELO BÁSICO	118
4.1. Primeira forma alternativa de definição dos retornos e gastos de capital de projetos integrados em série, e modelo de Programação Dinâmica correspondente	119
4.2. Outras formas de definição dos retornos e gastos de capital de projetos integrados em série, e modelo de Programação Dinâmica correspondente	128
4.2.1. Definições alternativas para os retornos e gastos de capital de projetos integrados em série	129
4.2.2. Modelo de Programação Dinâmica com variável	

	página
vel de estado ampliada e com ramos diver <u>g</u> entes	133
4.2.3. Solução do problema de alocação de capi <u>t</u> al por Programação Dinâmica Não-Serial .	141
4.3. Considerações finais	151
5. UMA EXTENSÃO AO MODELO BÁSICO	155
5.1. Consideração de interações entre pares de proje <u>t</u> os.	156
5.1.1. Retornos e gastos de capital dos projetos e função retorno do conjunto de projetos.	157
5.1.2. Modelo de Programação Dinâmica com variá <u>v</u> el de estado ampliada (generalizado) . .	160
5.1.3. Solução do problema de alocação de capi <u>t</u> al por Programação Dinâmica	165
5.1.4. Algoritmo de solução e exemplo numérico .	167
5.2. Comparação com o modelo de Nemhauser e Ullmann (23) e Ullmann (30).	184
5.3. Considerações finais	188
6. SÍNTESE E CONCLUSÕES DA PESQUISA	190
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	194

VOLUME II (anexos)

	página
1. PROGRAMAS DE COMPUTADOR	01
1.1. Programa I	02
1.2. Programa II	07
1.3. Programa III	12
2. LISTAGENS DE SAÍDA - EXEMPLO NUMÉRICO DO CAPÍTULO 3 .	19
2.1. Listagens de saída - Programa I	20
2.2. Listagens de saída - Programa II	46

página

2.3. Listagem de saída - Programa III	58
3. LISTAGEM DE SAÍDA - EXEMPLO NUMÉRICO DO CAPÍTULO 4 .	142

NOTAÇÃO E NOMENCLATURA *

CAPÍTULO 1

- n : índice de um particular projeto (ou estágio).
- K_n : número de versões não nulas do projeto n .
- N : número total de projetos (ou estágios).

CAPÍTULO 2

- r_n : valor presente líquido do projeto n .
- t : um particular período de tempo.
- $a_n(t)$: gasto de capital do projeto n no período de tempo t .
- k_n : variável de decisão referente ao projeto n .
- $X_N(t)$: disponibilidade de capital, no período de tempo t , para aplicação em N projetos.
- C : conjunto de projetos mutuamente exclusivos.
- R_N : matriz triangular de retornos de N projetos.
- r_{nm} : interação nos retornos devido à aceitação dos projetos n e m .
- $k = (k_1, \dots, k_N)$: vetor de variáveis de decisão (ou de ativi

(*) Variáveis com mesmo significado nos diversos capítulos são definidas uma única vez.

dades) de N projetos.

- λ : multiplicador de Lagrange.
- z : vetor de características, definido para cada particular atividade.
- y : vetor que define, de forma unívoca, uma particular atividade.
- E : matriz $N \times 2^N$, cujas colunas formam todas as possíveis combinações de zeros e uns em N componentes.
- a : vetor de N componentes, cada uma representando o gasto de capital necessário à aceitação do projeto correspondente.
- $U(z)$: utilidade do vetor de características z .
- x : vetor de 2^N componentes, todos iguais a um.
- X_N : vetor cujos T componentes fornecem a disponibilidade de capital para aplicação em N projetos, em cada período de tempo (ou estado inicial).
- X_n : vetor cujos T componentes fornecem o capital restante para aplicação em n projetos, em cada período de tempo.
- A_n : vetor cujos T componentes representam os gastos de capital necessários à aceitação do projeto n, em cada período de tempo.
- $f_n(X_n)$: retorno ótimo dos projetos de índices 1 a n, para o capital restante X_n .
- V_{nm} : vetor de interdependências nos gastos de capital dos projetos n e m, em cada período de tempo.

- $H_n(X_n)$: vetor de n componentes, cada uma representada por uma variável bivalente 0/1.
- r'_{n+1} : valor presente líquido do projeto $n+1$ mais as interações deste com os projetos selecionados dentre os de índice $1, \dots, n$.
- A'_{n+1} : vetor de gastos de capital do projeto $n+1$ mais as interações deste com os projetos selecionados dentre os de índice $1, \dots, n$.
- $f_{n+1}(X_{n+1}, H_{n+1}(X_{n+1}))$: retorno ótimo para n projetos.
- Q_n^0 : capacidade existente da fábrica n .
- P_{nk} : projetos de expansão para a fábrica n .
- w_{nk} : variável bivalente (0/1) de decisão para cada fábrica n e cada possibilidade de projeto k .
- q_{nk} : adição de capacidade proporcionada pelo projeto P_{nk} .
- Q_n : capacidade da fábrica n após a expansão.
- α_{nj} : coeficiente técnico de transformação de uma unidade de produto da fábrica j em produto da fábrica n .
- Π_n : preço de venda do produto n .
- ΔS : lucro incremental após as expansões.
- J_0 : receita antes da expansão.
- θ_{nk} : custo total anual de operação associado com a adição de capacidade q_{nk} .

CAPÍTULO 3

- P_n : projeto de índice n .
- T : horizonte de planejamento, em anos.
- $P_n(k_n)$: projeto de índice n , na particular versão k_n .
- $\alpha_n(k_n, t)$: coeficiente técnico de transformação de uma unidade de de matéria-prima empregada por $P_n(k_n)$ em produto gerado por $P_n(k_n)$.
- $q_{n-1}^{tr}(k_n, k_{n-1}, t)$: quantidade de produto de $P_n(k_n)$, transferida a $P_{n-1}(k_{n-1})$, no período de tempo t .
- $q_n^c(k_{n+1}, k_n, t)$: quantidade de matéria-prima de $P_n(k_n)$ comprada no mercado, no período de tempo t .
- $q_n^v(k_n, k_{n-1}, t)$: quantidade de produto de $P_n(k_n)$ vendida no mercado, no período de tempo t .
- $q_n^s(k_n, t)$: produção total de $P_n(k_n)$, no período de tempo t .
- $q_n(k_n, t)$: quantidade total planejada de matéria-prima a ser processada por $P_n(k_n)$, no período de tempo t .
- $r_n(k_n, 0)$: valor presente incremental líquido de $P_n(k_n)$ se P_{n+1} foi rejeitado.
- $\Pi_n^v(k_n, t)$: preço unitário de venda do produto do projeto $P_n(k_n)$, no período de tempo t .
- $\Pi_n^c(k_n, t)$: preço unitário de compra da matéria-prima utilizada por $P_n(k_n)$, no período de tempo t .
- $c_n(k_n, t)$: demais custos operacionais de $P_n(k_n)$, no período de tempo t .

- $d_n(k_n, t)$: depreciação legal de $P_n(k_n)$, no período de tempo t .
- $a_n(k_n, t)$: gastos de capital de $P_n(k_n)$, no período de tempo t .
- $a_n(k_n, T)$: valor residual de $P_n(k_n)$, ao final do horizonte de planejamento.
- u : taxa de imposto de renda para a firma.
- $r_n(k_n, 0, t)$: fluxo de caixa de $P_n(k_n)$, no período de tempo t , se P_{n+1} foi rejeitado.
- i : taxa de desconto para cálculo de valores presentes.
- $r_n(k_n, k_{n+1})$: valor presente incremental líquido de $P_n(k_n)$ se P_{n+1} foi aceito na versão $k_{n+1} \neq 0$.
- $\Pi_n^C(k_n, k_{n+1}, t)$: preço unitário de compra da matéria-prima utilizada por $P_n(k_n)$, se P_{n+1} foi aceito na versão $k_{n+1} \neq 0$, no período de tempo t .
- $\Pi_{n+1}^V(k_n, k_{n+1}, t)$: preço unitário de venda do produto do projeto $P_{n+1}(k_{n+1})$ se P_n foi aceito na versão $k_n \neq 0$, no período de tempo t .
- $r_n(k_n, k_{n+1}, t)$: fluxo de caixa de $P_n(k_n)$, no período de tempo t , se P_{n+1} foi aceito na versão $k_{n+1} \neq 0$.
- $p_n(k_n, k_{n+1})$: valor líquido atualizado das interações entre $P_{n+1}(k_{n+1})$ e $P_n(k_n)$.
- $p_n(k_n, k_{n+1}, t)$: interação de $P_{n+1}(k_{n+1})$ e $P_n(k_n)$, no período de tempo t .
- R_N : função de retorno de N projetos (ou estágios).
- X_n : vetor cujos T componentes representam o capital restante

para aplicação em n projetos, em cada período de tempo (ou variável de estado para o estágio n).

- D_n : variável de controle do estágio n .
- $r_n(X_n, D_n, D_{n+1})$: retorno do estágio n , função do estado de entrada (X_n, D_{n+1}) e da decisão tomada no estágio n (D_n).
- $t_n(X_n, D_n)$: função de transição no estágio n .
- $f_n(X_n, D_{n+1})$: retorno ótimo de n estágios, função do estado de entrada.
- $f_N(X_N)$: retorno ótimo para N estágios (ou projetos).
- Γ_n : conjunto dos possíveis valores de D_n .
- $A_n(k_n)$: vetor cujos T componentes são os dispêndios de capital, em cada período de tempo, de $P_n(k_n)$.
- $f_n(X_n, k_{n+1})$: retorno ótimo de n projetos, função do capital restante e da decisão no projeto $n+1$.
- $\Pi_n^{tr}(k_n, k_{n+1}, t)$: preço unitário de transporte da matéria-prima utilizada em $P_n(k_n)$ e transferida de $P_{n+1}(k_{n+1})$, em cada período de tempo.
- $p_n^{(2)}(k_{n+1}, k_n, t)$: interação entre $P_n(k_n)$ e $P_{n+1}(k_{n+1})$ nos demais custos operacionais, em cada período de tempo.
- $p_n^{(3)}(k_{n+1}, k_n, t)$: interação entre $P_n(k_n)$ e $P_{n+1}(k_{n+1})$ na depreciação, em cada período de tempo.
- $v_n(k_{n+1}, k_n, t)$: interação entre $P_n(k_n)$ e $P_{n+1}(k_{n+1})$ nos gastos de capital ($t=0, \dots, T-1$) e nos valores re

siduais ($t=T$).

- $P_n^{(1)}(k_{n+1}, k_n, t)$: custo total de transporte da matéria-prima transferida de $P_{n+1}(k_{n+1})$ para $P_n(k_n)$, em cada período de tempo.
- $A_n(k_n, k_{n+1})$: vetor cujos T componentes são os dispêndios de capital, em cada período de tempo, de $P_n(k_n)$ se P_{n+1} foi aceito na versão k_{n+1} .
- $V_n(k_n, k_{n+1})$: vetor de T componentes que valem, para cada período de tempo ($t=0, \dots, T-1$) $v_n(k_{n+1}, k_n, t)$.
- \hat{k}_n : decisão ótima no projeto n .
- \hat{X}_n : estado ótimo para o projeto n (ou para o estágio n).
- \hat{D}_n : decisão ótima no estágio n .
- $F_n(k_{n+1})$: pontos de descontinuidade de $f_n(X_n, k_{n+1})$.
- $\mathcal{F}_{n-1}(k_n)$: conjunto de pontos eficientes de $f_{n-1}(X_{n-1}, k_n)$.
- $\beta_{n-1}^{(j)}(k_n)$: ponto de índice j , pertencente a $F_{n-1}(k_n)$.
- $f_{n-1}^{(j)}(\beta_{n-1}^{(j)}(k_n); k_n)$: retorno ótimo no estágio $n-1$, para o capital tal $\beta_{n-1}^{(j)}(k_n)$.
- \hat{l} : índice de \mathcal{F}_N que leva ao retorno máximo, para o capital inicial X_N .
- $\tau_n(k_{n+1})$: conjunto auxiliar, no estágio n , para a decisão k_{n+1} no estágio anterior, que permite traçar a política ótima de decisão.

CAPÍTULO 4

- $r_n(k_n, k_{n-1})$: valor presente incremental líquido de $P_n(k_n)$ se P_{n-1} foi aceito na versão k_{n-1} .
- $A_n(k_n, k_{n-1})$: vetor cujos T componentes são os dispêndios de capital, em cada período de tempo, de $P_n(k_n)$ se P_{n-1} foi aceito na versão k_{n-1} .
- Y_1 : vetor cujos T componentes representam a disponibilidade de capital para aplicação nos N projetos, em cada período de tempo.
- Y_n : vetor cujos T componentes representam o capital restante para aplicação em (N-n+1) projetos, em cada período de tempo.
- $g_n(Y_n, k_{n-1})$: retorno ótimo de (N-n+1) projetos, função do capital restante e da decisão no projeto n-1.
- $g_1(Y_1)$: retorno ótimo para N projetos.
- \hat{Y}_n : estado ótimo para o projeto n.
- $G_n(k_{n-1})$: pontos de descontinuidade de $g_n(Y_n, k_{n-1})$.
- $\tau_n(k_{n-1})$: conjunto auxiliar, no estágio n, para a decisão k_{n-1} no estágio seguinte, que permite traçar a política ótima de decisão.
- $X_{\ell 1}$: variável de estado para o estágio $\ell 1$.
- $D_{\ell 1}$: variável de controle do estágio $\ell 1$.
- $t_n(X_n, D_n, D_{n+1})$: função de transição no estágio n.
- $t_{\ell 1}(X_{\ell 1}, D_{\ell 1}, D_{(\ell+1)1})$: função de transição no estágio $\ell 1$.

- $r_{l1} = r_{l1}(X_{l1}, D_{l1}, D_{(l+1)1})$: retorno do estágio $l1$.
- $f_N(X_N)$: retorno ótimo para $N+L1$ estágios.
- Δ : índice de pseudo-estágio.
- $f_h(X_h)$: retorno ótimo para N projetos.

CAPÍTULO 5

- \bar{W}_n : conjunto de todas as variáveis de decisão de projetos com índice superior a n .
- W_n : conjunto de interações de P_n .
- $r_n(k_n, W_n)$: valor presente incremental líquido de $P_n(k_n)$, considerando as interações deste projeto com aqueles de índice superior a n .
- $P_n(k_n, k_{n+v})$: valor líquido atualizado das interações de $P_n(k_n)$ com $P_{n+v}(k_{n+v})$.
- $A_n(k_n, W_n)$: vetor cujos T componentes são os dispêndios de capital, em cada período de tempo, de $P_n(k_n)$, mais as interações deste projeto com aqueles de índice superior a n .
- $V_n(k_n, k_{n+v})$: interações nos gastos de capital, em cada período de tempo, de $P_n(k_n)$ com $P_{n+v}(k_{n+v})$.
- $t_n(X_n, D_n, W_n)$: função de transição no estágio n .
- $r_n(X_n, D_n, W_n)$: retorno do estágio n , função do estado de entrada (X_n, W_n) e da decisão no estágio n (D_n).
- $f_n(X_n, W_n)$: retorno ótimo de n estágios (ou projetos), função

do estado de entrada.

- $F_n(W'_n)$: pontos de descontinuidade de $f_n(X_n, W'_n)$.
- $F_{n-1}(W'_{n-1})$: conjunto de pontos eficientes de $f_{n-1}(X_{n-1}, W'_{n-1})$
- $\beta_{n-1}^{(j)}(W'_{n-1})$: ponto de índice j , pertencente a $F_{n-1}(W'_{n-1})$.
- $f_{n-1}^{(j)}(\beta_{n-1}^{(j)}(W'_{n-1}), W'_{n-1})$: retorno ótimo para o capital $\beta_{n-1}^{(j)}(W'_{n-1})$.
- $\tau_n(W'_n)$: conjunto auxiliar, no estágio n , que permite traçar a política ótima de decisão.

ÍNDICE DE TABELAS

número	página
3.1 - Coeficientes técnicos ($\alpha_n(k_n, t)$) e quantidade de matéria-prima a processar ($q_n(k_n, t)$)	93
3.2 - Preços de venda ($\Pi_n^V(k_n, t)$), preços de compra ($\Pi_n^C(k_n, t)$), custos operacionais ($c_n(k_n, t)$), depreciação ($d_n(k_n, t)$) e gastos de capital e valor residual ($a_n(k_n, t)$)	97
3.3 (A) - Preços de compra ($\Pi_n^C(k_n, k_{n+1}, t)$), preços de transporte ($\Pi_n^{tr}(k_n, k_{n+1}, t)$), interações nos custos operacionais ($p_n^{(2)}(k_{n+1}, k_n, t)$), interações na depreciação ($p_n^{(3)}(k_{n+1}, k_n, t)$) e interações nos gastos de capital e valores residuais ($v_n(k_{n+1}, k_n, t)$)	98
3.3 (B) - Preços de compra ($\Pi_n^C(k_n, k_{n+1}, t)$) e preços de transporte ($\Pi_n^{tr}(k_n, k_{n+1}, t)$)	99-100
3.4 - Preços de venda ($\Pi_{n+1}^V(k_n, k_{n+1}, t)$)	101-104
3.5 - Determinação de fluxos de caixa - $r_4(2, 0, t)$	106
3.6 - Determinação de fluxos de caixa - $p_4(2, 4, t)$	107-109
4.1 - Vetores de gastos de capital e retornos - exemplo numérico	125-127
4.2 - Pontos eficientes no pseudo-estágio (Δ), com decisão "0" no estágio 2	147-148
4.3 - Pontos eficientes no pseudo-estágio (Δ), com decisão "1" no estágio 2	149
4.4 - Pontos eficientes no pseudo-estágio (Δ), com decisão "2" no estágio 2	150
4.5 - Pontos eficientes no estágio de divergência (2).	152-153
5.1 - Retornos e gastos de capital de projetos - exemplo numérico	172

ÍNDICE DE FIGURAS

número	página
1.1 - Estágios de produção ligados por fluxo de material	02
2.1 - Complexo de mineração e processamento	27
3.1 - Projetos integrados em série	36
3.2 - Diagrama funcional para N estágios em série, variável de estado ampliada	52
4.1 - Diagrama funcional representativo do modelo Básico	131
4.2 - Diagrama funcional representativo da primeira variante ao modelo Básico	132
4.3 - Diagrama funcional representativo das variantes ao modelo Básico que empregam a Programação Dinâmica Não-Serial	132
4.4 - Diagrama funcional para (N+L1) estágios, com ramos divergentes e variável de estado ampliada . .	134
4.5 - Diagrama funcional com pseudo-estágio	141
5.1 - Diagrama funcional típico para N estágios, variável de estado ampliada e fluxo de informações entre pares de estágios	161
5.2 - Representação gráfica das interdependências entre os projetos do exemplo	171

ÍNDICE DE QUADROS

número	página
2.1 - Características gerais dos modelos da classe A e daqueles desenvolvidos na pesquisa	30
2.2 - Características gerais dos modelos da classe B e daqueles desenvolvidos na pesquisa	31

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO, OBJETIVOS E ESCOPO DA PESQUISA

Um projeto, no sentido econômico, pode ser definido como uma oportunidade de investimento que envolve desembolsos monetários e benefícios futuros (retornos) esperados.

As firmas industriais, que constituem o objeto desta pesquisa, possuem recursos monetários (capital) limitados, sendo que existem, em geral, numerosos e variados projetos que demandam e disputam tais recursos.

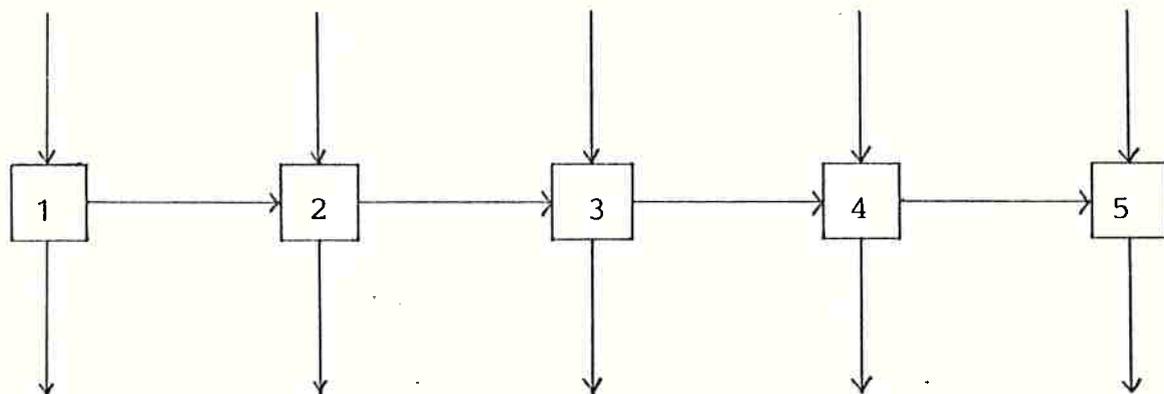
A Análise Econômica de Projetos Industriais, ou, simplesmente, a Análise de Projetos, tem como finalidade determinar como os recursos da firma serão alocados aos projetos que se lhe apresentam, de forma que os objetivos da mesma sejam atingidos.

Os projetos que concorrem pelo capital da firma guardam, entre si, alguma relação do ponto de vista econômico. Dado um par de projetos, eles poderão ser economicamente independentes ou interdependentes (interagentes). Serão independentes se os desembolsos e benefícios esperados de um deles forem sempre os mesmos, quer o outro projeto seja aceito, quer seja rejeitado, e vice-versa. Serão interdependentes no caso oposto, ou seja, se os desembolsos e retornos esperados de um dos projetos forem afetados pela decisão de aceitar ou rejeitar o outro, e vice-versa. Esta classificação tem utilidade na medida em que são diferentes as formas segundo as quais são analisados conjuntos que apenas contenham projetos independentes daqueles que contêm projetos interdependentes.

A motivação básica para esta pesquisa surgiu quando da participação do autor em trabalhos profissionais de análise de proje

tos em que, por diversas vezes, se se deparava com a seguinte situação: uma determinada matéria-prima era transformada em produto através de certo processo de produção. Este produto poderia ser comercializado e/ou servir como matéria-prima para outro processo de produção que, por sua vez, gerava um novo produto que também poderia ser comercializado e/ou ser processado adicionalmente, e assim por diante, durante um certo número de estágios de produção. Cada estágio de produção poderia receber matéria-prima do estágio anterior e/ou do mercado (através de compras). Na figura 1.1 é esquematizada a situação acima. Os retângulos representam os estágios de produção e as flechas representam fluxos de materiais. As flechas horizontais representam *transferências* entre os estágios. As flechas verticais superiores dizem respeito a compras de matéria-prima e, as inferiores, a vendas de produto. Na figura 1.1. foram representados cinco estágios de produção, apenas a título de exemplo.

FIGURA 1.1 ESTÁGIOS DE PRODUÇÃO LIGADOS POR FLUXO DE MATERIAL



Fonte: Elaborado pelo autor.

Algumas das perguntas que se colocaram acerca desta situação, foram: quais produtos deveriam ser produzidos e vendidos e/ou processados adicionalmente, quais as quantidades de produção para cada um dos produtos e qual processo de produção deveria ser

adotado em cada estágio, considerando um certo critério de preferência para avaliar as alternativas.

No problema acima descrito, observa-se que cada um dos estágios de produção pode ser considerado um projeto, de acordo com a definição apresentada anteriormente. Mais especificamente, tais projetos podem ser classificados como economicamente interdependentes, pois os benefícios esperados, relativos a um dado projeto, são afetados conforme o projeto anterior seja ou não aceito, e vice-versa, sendo que a ocorrência de transferências de material, de um projeto para outro, é a responsável por esta interdependência. Deve-se observar que o problema não consiste somente na aceitação ou rejeição de cada projeto, mas na sua rejeição ou na aceitação de uma das versões segundo as quais ele pode se apresentar, variando-se a quantidade produzida, o processo de fabricação, etc.

A integração física entre estágios de produção, através de fluxo de material, é encontrada, com maior frequência, dentro da chamada indústria de processamento. Abaixo são dados alguns exemplos:

- (a) a partir da cana-de-açúcar e de sua moagem, obtém-se um caldo rico em sacarose que, após ser tratado com nutrientes, é fermentado, obtendo-se um material intermediário denominado vinho. Este vinho, após sofrer destilação e retificação, resulta no álcool etílico hidratado que é um produto comercializável. O álcool hidratado pode sofrer uma desidratação, obtendo-se o etanol anidro que também é comercializável;
- (b) a partir do amendoim e tendo este sofrido operações de limpeza, trituração, laminação, cozimento e prensagem, obtém-se o óleo bruto, um produto que pode ser vendido para ser utilizado na fabricação de sabões, por exemplo. O óleo bruto pode ser, também, submetido a operações de decantação, filtração, neutralização, branqueamento e desodorização, produzindo-se o óleo refinado comestível;

- (c) em uma aciaria, utilizando o minério de ferro como matéria-prima, produz-se lingotes de aço que podem sofrer laminação, obtendo-se o aço laminado que, por sua vez, pode ser trefilado, produzindo-se aço trefilado. Este último, através de forjamento, dá origem a peças forjadas que, finalmente, podem ser usinadas. Após cada estágio de produção, obtém-se um produto que pode ser comercializado e/ou processado adicionalmente;
- (d) uma tecelagem, a partir de fios de algodão, por exemplo, produzirá tecidos. Estes, por sua vez, poderão ser vendidos e/ou processados adicionalmente para se obterem peças de vestuário.

Em todos os exemplos citados, os estágios de produção se apresentam integrados em *série*; no entanto, esta não é a única forma possível de integração física. Esta pesquisa analisa o caso em série, sendo que outras possibilidades serão citadas no Capítulo 6.

Um aspecto que desperta o interesse na busca de um meio para se resolver eficientemente o problema proposto é o número de alternativas resultantes do mesmo. Considerando que cada projeto n possa ser aceito em uma dentre K_n versões ou que possa ser rejeitado, e sendo N o número de projetos, haverá um total de $\prod_{n=1}^N (1 + K_n)$ alternativas a serem avaliadas. Por exemplo, para $N = 10$ e $K_1 = K_2 = \dots = K_{10} = 4$, o total de alternativas é de 5^{10} , ou, aproximadamente, 10 milhões, um número que torna praticamente impossível a busca exaustiva da melhor alternativa, se isto tiver que ser feito manualmente. Em problemas com maior número de projetos e de versões para cada projeto, a busca exaustiva da solução ótima pode se tornar muito demorada e custosa, mesmo para um moderno computador digital. Se o objetivo for a obtenção da solução ótima para o problema, deve-se procurar um meio para tal, no qual apenas uma pequena parcela das alternativas tenha que ser avaliada e que dela resulte a solução do problema.

A literatura de Análise Econômica de Projetos Industriais está voltada, principalmente, para o caso de projetos independentes. Apenas poucos trabalhos se dedicam à formulação e solução de problemas envolvendo projetos interdependentes, sendo que alguns deles modelam, através da Programação Dinâmica, situações que se assemelham àquela abordada nesta pesquisa. Retomando a figura 1.1, observa-se que ela lembra o tradicional "esquema das caixas" utilizado, entre outros, por Nemhauser (21), para representar, graficamente, um problema de decisões seqüenciais. Verifica-se que na figura 1.1 comparecem fluxos de materiais e estágios de produção, caracterizando um sistema físico, enquanto no "esquema das caixas" representam-se fluxos de informação e estágios de decisão. Esta pesquisa tem como objetivo transformar o sistema físico da figura 1.1 num sistema de informações associado e, utilizando a técnica da Programação Dinâmica, de terminar a decisão a tomar com relação a cada um dos estágios (projetos), de forma a se obter a alternativa ótima para o problema de alocação de capital.

Neste trabalho, a análise econômica da estrutura em série da figura 1.1 é feita considerando que cada projeto pode ser rejeitado ou aceito em uma dentre um conjunto discreto (finito e não-vazio) de versões. Além disso, assume-se a não-aleatoriedade das diversas variáveis envolvidas no problema, tais como os retornos dos projetos, os investimentos que tais projetos necessitam, etc. Algumas outras hipóteses assumidas para a solução do problema são apresentadas no decorrer dos demais capítulos do trabalho.

Esta pesquisa está apresentada em dois volumes. Este volume (I) está organizado da seguinte forma:

- O capítulo 2 apresenta uma revisão da literatura sobre Análise Econômica de Projetos Industriais. Pelo próprio objetivo do trabalho, deu-se especial destaque aos modelos empregados para a análise de projetos interdependentes.

- No capítulo 3 é desenvolvido o modelo Básico de Programação Dinâmica e o algoritmo de solução que permitem resolver o problema de análise de projetos integrados, fisicamente, em série. Um exemplo numérico, hipotético, é apresentado para ilustrar a utilização do algoritmo.
- No capítulo 4 são desenvolvidos modelos de Programação Dinâmica equivalentes (variantes) àquele do capítulo 3, no sentido de levarem à mesma solução obtida com o modelo Básico. O mesmo exemplo do capítulo 3 é resolvido através das variantes desenvolvidas.
- O capítulo 5 estende o modelo desenvolvido no capítulo 3 para incluir interações entre quaisquer pares de projetos e não apenas entre projetos consecutivos, como era admitido inicialmente.
- Do capítulo 6 constam o sumário do trabalho, as conclusões gerais do mesmo e alguns tópicos que poderão constituir alvo de pesquisas futuras.
- Finalmente, são listadas as referências bibliográficas citadas no texto.

No Volume II foram incluídas as listagens de computador relativas aos programas desenvolvidos para a solução do modelo Básico do capítulo 3, bem como ao exemplo numérico daquele mesmo capítulo e do capítulo 4.

CAPÍTULO 2

REVISÃO DA LITERATURA

Três importantes características do problema analisado neste trabalho constituem o referencial básico para a definição da literatura relevante para a pesquisa, discutida neste capítulo. São elas:

- (a) a ótica, segundo a qual os projetos são analisados, é a da empresa privada;
- (b) admite-se a não-aleatoriedade das diversas variáveis envolvidas no problema;
- (c) os projetos a serem considerados não são todos independentes entre si, havendo, necessariamente, interdependências entre alguns deles.

De acordo com essas características, foram identificados alguns trabalhos relevantes para a pesquisa. Tais trabalhos foram classificados, para fins de apresentação e discussão. Um primeiro critério, utilizado na classificação, diz respeito ao tipo de interdependência considerada. Como o principal interesse desta pesquisa se relaciona a interdependências causadas por fluxos de materiais entre os projetos, duas grandes classes de trabalhos foram obtidas, conforme a interdependência considerada estivesse diretamente ligada a fluxos de materiais ou não. Um segundo critério foi aplicado a cada uma das duas classes e diz respeito ao tipo de modelo formulado para representar o problema. As classes de interdependências consideradas, bem como as categorias de modelos, dentro de cada classe, são apresentadas abaixo:

- Classe A: Interdependências não diretamente relacionadas a fluxos de materiais entre os projetos em análise
 - . categoria A.1 - Modelos de Programação Inteira
 - . categoria A.2 - Modelos de Programação Quadrática
 - . categoria A.3 - Modelo de Análise de Atividades
 - . categoria A.4 - Modelos de Programação Dinâmica

- Classe B: Interdependências diretamente relacionadas a fluxos de materiais entre os projetos em análise
 - . categoria B.1 - Modelo de Programação Inteira
 - . categoria B.2 - Modelo de Programação Inteira - Mista

A discussão sobre a literatura é feita segundo cada uma das classes acima, nos itens 2.1 e 2.2.

No item 2.3 é feito um confronto entre os modelos apresentados na literatura e aqueles desenvolvidos na pesquisa.

2.1 MODELOS DA CLASSE A - INTERDEPENDÊNCIAS NÃO DIRETAMENTE RELACIONADAS A FLUXOS DE MATERIAIS ENTRE OS PROJETOS EM ANÁLISE

Neste item são abordados os modelos que consideram interdependências entre os projetos em análise, sendo que estas interdependências não são diretamente ligadas a fluxos de materiais entre os mesmos. São as seguintes as categorias de modelos, analisadas a seguir: Programação Inteira, Programação Quadrática, Análise de Atividades e Programação Dinâmica.

2.1.1 Modelos da categoria A.1 - Programação Inteira

Dois dos mais importantes trabalhos desta categoria são os de Weingartner (31 e 32). O ponto de partida da análise de Weingartner é o clássico problema de Lorie e Savage (14): seja r_n o valor presente líquido do projeto n , sendo a atualização feita segundo uma taxa de juros conveniente; seja $a_n(t)$ o gasto de capital demandado pelo projeto n no período de tempo t ; seja $X_N(t)$ a disponibilidade de capital no período de tempo t . Defina-se k_n como sendo a variável de decisão referente ao projeto n , com $k_n = 1$ se o projeto n for aceito e $k_n = 0$ caso o projeto n seja rejeitado. O problema de Lorie e Savage (14) é o seguinte:

$$\text{Maximizar } \sum_{n=1}^N r_n k_n, \text{ sujeita a} \quad (2.1)$$

$$\sum_{n=1}^N a_n(t) k_n \leq X_N(t), \quad t=0, \dots, T-1 \quad (2.2)$$

$$k_n = 0, 1, \quad n=1, \dots, N \quad (2.3)$$

Como pode ser observado, o modelo acima apenas inclui projetos independentes. A consideração de interdependências entre os projetos, no modelo acima, é feita por Weingartner (31 e 32), porém, são tratados apenas dois tipos: (1) Projetos Mutuamente Exclusivos - dois projetos são mutuamente exclusivos se a aceitação de um deles inviabilizar a aceitação do outro; (2) Projetos Dependentes - um projeto é dependente com relação a outro se sua aceitação estiver condicionada à aceitação daquele. É interessante acrescentar que as definições de projetos mutuamente exclusivos e de projetos dependentes podem ser estendidas a mais que dois projetos, o que é visto a seguir, de acordo com Weingartner (32):

- (1) Projetos Mutuamente Exclusivos - considere-se um conjunto C de projetos mutuamente exclusivos, do qual no máximo um projeto será selecionado. Esta restrição pode ser expressa por:

$$\sum_{n \in C} k_n \leq 1 \quad (2.4)$$

- (2) Projetos Dependentes - seja o projeto n_1 dependente do projeto n_2 , sendo este dependente do projeto n_3 , etc., formando uma cadeia de projetos dependentes até o projeto n_e , considerado como independente com relação aos demais que estão sendo analisados. Tem-se as seguintes restrições representando esta situação:

$$\begin{aligned} k_{n_1} &\leq k_{n_2} \\ k_{n_2} &\leq k_{n_3} \\ &\vdots \\ k_{n_{e-1}} &\leq k_{n_e} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Diversos exemplos de situações envolvendo projetos mutuamente exclusivos e dependentes, são dados por Weingartner (31 e 32).

Há vários outros autores que, analogamente a Weingartner (31 e 32), no que se refere a interdependências entre projetos, em modelos de programação inteira, apenas tratam de projetos mutuamente exclusivos e dependentes. Como exemplos, pode-se citar Bierman e Smidt (6), Bussey (8), Mao (15), Wilkes (36), Baumol (3), Sengupta e Fox (27) e Woiler (37, 38 e 39).

Deve-se notar que os dois tipos de interdependência citados são casos particulares da definição mais geral de interdependência entre projetos, apresentada no capítulo 1. A consideração, no

modelo, de interdependências segundo a definição geral, levaria à obtenção de uma função objetivo e de restrições de capital nas quais cada um dos termos envolvidos - retornos e gastos de capital dos projetos, respectivamente, depende da decisão tomada com relação ao projeto em questão e de outras decisões referentes a projetos com os quais aquele anterior interage. No item 2.1.2 é discutido um modelo que considera tais interações.

Finalmente, o tratamento de projetos que podem ser aceitos em uma dentre várias versões pode ser feito se se considerar que as versões são mutuamente exclusivas e, então, para cada versão se definir um novo projeto (ver, por exemplo, Woiler (38)).

2.1.2. Modelos da categoria A.2 - Programação Quadrática

A consideração de interdependências, segundo a definição apresentada no capítulo 1, é feita através de um modelo desenvolvido inicialmente por Reiter e Sherman (26) e, também, apresentado por Reiter (25), Weingartner (32), Sengupta e Fox (27) e Ullmann (30).

O modelo de Reiter e Sherman (26) é construído sem a consideração de restrições de capital e leva em conta a interação existente entre pares de projetos. A matriz triangular de retornos

$$R_N = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1N} \\ & r_{22} & r_{23} & \cdots & r_{2N} \\ & & r_{33} & \cdots & r_{3N} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & \bigcirc & & & r_{NN} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

é definida para o conjunto de N projetos de tal modo que o va

lor presente líquido do projeto n é r_{nn} e o valor presente adicional, devido à aceitação dos projetos n e m é r_{nm} , além do valor presente devido a n , r_{nn} , e devido a m , r_{mm} . O problema consiste em se determinar uma partição ótima do conjunto de índices de projetos em dois subconjuntos tal que o retorno total de um deles (chamado subconjunto ótimo) seja máximo.

Projetos mutuamente exclusivos e projetos dependentes são tratados como casos particulares de interações entre projetos. Se dois projetos forem mutuamente exclusivos, basta estabelecer $-\infty$ como sendo sua interação. Se o projeto 1 for dependente do projeto 2, faz-se r_{11} representar o valor presente dos desembolsos do projeto 1, enquanto r_{12} é fixado como sendo o valor presente dos benefícios de 1, adicionalmente a 2; r_{22} é definido como sendo o valor presente líquido do projeto 2 considerado isoladamente. Da mesma forma que no item 2.1.1, aqui também é possível estender as definições de projetos mutuamente exclusivos e de projetos dependentes a mais que dois projetos.

O problema, tal como definido acima, é um de programação quadrática inteira. Sua formulação também pode ser dada por:

$$\text{Maximizar } k' R_N k = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N r_{nm} k_n k_m, \text{ sujeita a} \quad (2.7)$$

$$k_n = 0, 1, n=1, \dots, N, \quad (2.8)$$

sendo r_{nm} dado por (2.6), $k = (k_1, k_2, \dots, k_N)$ e k' é a transposta de k .

A possibilidade de alterar o modelo visto, para incluir restrições de capital, foi discutida por Weingartner (32), Ullmann (30) e também apresentada por Sengupta e Fox (27). A forma de fazê-lo emprega a técnica de multiplicadores de Lagrange gene

realizados. Apenas para ilustrar a técnica, se existir uma única restrição de capital utiliza-se um único multiplicador. Os termos a_n da restrição

$$\sum_{n=1}^N a_n k_n \leq X_N \quad (2.9)$$

são introduzidos na matriz R_N de (2.6), com o multiplicador λ , da seguinte forma:

$$R_N = \begin{pmatrix} r_{11} - \lambda a_1 & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1N} \\ & r_{22} - \lambda a_2 & r_{23} & \dots & r_{2N} \\ & & r_{33} - \lambda a_3 & \dots & r_{3N} \\ & & & \dots & \vdots \\ & & & & r_{NN} - \lambda a_N \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

e o procedimento de otimização é repetido para valores variáveis de λ (não-negativos), até que a restrição (2.9) seja satisfeita. Pode-se mostrar, entretanto, que para determinados casos, embora o problema original tenha solução ótima, não existe λ que leve à mesma e, portanto, o método falha (ver, por exemplo, Dreyfus e Law (9) e Ullmann (30)).

Weingartner (32) discute, também, a possibilidade de alterar a matriz R_N de (2.10) para incluir interações entre os projetos no que se refere a gastos de capital.

Embora não tenha sido explicitamente discutido por nenhum dos trabalhos citados, o tratamento de projetos que podem ser aceitos em mais do que uma versão pode ser feito, dentro do contex

to apresentado, considerando-se que as versões de um mesmo projeto são mutuamente exclusivas.

2.1.3. Modelo da categoria A.3 - Análise de Atividades

Dentro desta categoria, um único trabalho - Goldwenger e Paroush (11), foi identificado na literatura pesquisada. Segundo aqueles autores, o enfoque de Análise de Atividades, para a seleção de projetos interdependentes, tem as seguintes características: (a) as variáveis de decisão não são os projetos, mas combinações de projetos, chamadas de atividades; (b) a função de utilidade do tomador de decisões não é definida sobre atividades, mas sobre características de atividades.

Resumidamente, a partir da definição dos projetos, são formadas as suas possíveis combinações (atividades). Paralelamente, são definidas as características a serem consideradas para seleção de atividades, por exemplo, valor presente, liquidez financeira, mão-de-obra empregada, etc. A cada atividade, então, são atribuídos valores numéricos, um para cada característica, sendo um particular valor, atribuído a uma dada característica, tanto maior quanto mais a atividade satisfizer a característica. Adicionalmente, como para cada projeto é definido o gasto de capital necessário para a sua aceitação, é possível determinar o gasto de capital exigido para a aceitação de cada uma das atividades, fazendo-se a soma dos gastos dos projetos que as compõem ⁽¹⁾. A seguir são determinadas, para cada nível de capital disponível, o conjunto de atividades viáveis e eficientes, ou seja, atividades que satisfazendo à restrição de capital, não guardam entre si nenhuma relação de dominância, sendo que aquelas não pertencentes àquele conjunto são dominadas por ao menos

(1) É interessante notar que o trabalho discutido, embora considere interdependências entre os projetos, quando da atribuição de valores às características das atividades, deixa de fazê-lo no que diz respeito ao gasto de capital de cada atividade.

uma das pertencentes ao mesmo. Finalmente, para se decidir sobre a atividade ótima, para cada nível de capital disponível, o tomador de decisões deverá associar, para cada atividade, um único valor numérico - a utilidade do conjunto de valores atribuídos às suas características.

A descrição formal do modelo é apresentada a seguir. Sejam:

- k : vetor de atividades (combinações de projetos), com N componentes, sendo N o número de projetos; cada componente pode assumir o valor zero ou o valor um, representando, respectivamente, a rejeição ou aceitação do projeto correspondente.
- z : vetor de características, com r componentes, sendo definido para cada atividade.
- y : vetor definido de tal forma que, para cada atividade k (há um total de 2^N atividades), um único y corresponderá. Tais vetores possuem 2^N componentes, sendo que apenas uma delas assume o valor um, as demais sendo iguais a zero. O componente que assume o valor um corresponde à atividade em questão. Cada componente de y é designada por y_m .

Tem-se:

$$k = Ey \quad (2.11)$$

onde E é uma matriz $N \times 2^N$, cujas colunas formam todas as possíveis combinações de zeros e uns em N componentes.

A seguir, são definidos:

- X_N : disponibilidade de capital (um escalar) para aplicação em N projetos.
- a : vetor de N componentes, cada uma representando o gasto

de capital necessário à aceitação do projeto correspondente.

- $U(z)$: utilidade do vetor de características z .

O modelo, usando as definições acima, é o seguinte:

maximizar $U(z)$, sujeita a

$$z = G y$$

$$b y \leq X_N \quad (2.12)$$

$$y_m = 0, 1 \quad m = 1, \dots, 2^N$$

$$x y = 1$$

onde G é uma matriz $r \times 2^N$, $b = aE$ e x é um vetor linha de 2^N componentes, todos iguais a um.

A possibilidade de inclusão, no modelo, de maior número de restrições de capital, assim como de projetos que podem ser aceitos em mais do que uma versão, é relativamente simples. A primeira extensão é feita através da redefinição da desigualdade $b y \leq X_N$, obtendo-se tantas desigualdades deste tipo quantas forem as restrições de capital. A segunda extensão é feita considerando a definição de projetos mutuamente exclusivos, como no item 2.1.2.

O modelo formado por (2.12) é um de programação inteira; entretanto, suas características são bastante distintas do que se viu no item 2.1.1, daí a sua apresentação em item à parte.

Deve-se atentar para o fato de que o modelo de (2.12) por tratar com variáveis de decisão relativas a atividades, ao invés

de projetos, deve requerer maior trabalho computacional do que modelos do tipo visto em 2.1.1, com mesmo número de projetos. Esta é, em consequência, a contrapartida para se obter um modelo mais refinado no que tange à medida do mérito da decisão tomada.

2.1.4 Modelos da categoria A.4 - Programação Dinâmica

Tem-se três trabalhos dentro desta categoria: Weingartner (32), Ullmann (30), e Nemhauser e Ullmann (23). De forma a apresentar e discutir tais trabalhos, retomar-se-á, inicialmente, o modelo representativo do problema de Lorie e Savage (14), dado por (2.1), (2.2) e (2.3):

$$\text{maximizar} \quad \sum_{n=1}^N r_n k_n, \text{ sujeita a} \quad (2.1)$$

$$\sum_{n=1}^N a_n(t) k_n \leq X_N(t), \quad t = 0, \dots, T-1 \quad (2.2)$$

$$k_n = 0, 1, \quad , n = 1, \dots, N \quad (2.3)$$

A decomposição do modelo acima, por Programação Dinâmica, requer as seguintes definições adicionais:

- X_N : vetor cujos T componentes fornecem a disponibilidade de capital para aplicação em N projetos, em cada período de tempo.
- X_n : vetor cujos T componentes fornecem o capital restante para aplicação em n projetos, em cada período de tempo, $n = 0, \dots, N-1$.

- A_n : vetor cujos T componentes representam os gastos de capital necessários à aceitação do projeto n, em cada período de tempo, $n = 1, \dots, N$. Evidentemente $A_n = (a_n(0), a_n(1), \dots, a_n(T-1))$.
- $f_n(X_n)$: retorno ótimo dos projetos de índices 1 a n, dado o capital restante X_n .

Das definições acima depreende-se a função de transição

$$X_n = X_{n+1} - A_{n+1} k_{n+1}, \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (2.13)$$

As equações recursivas para a solução do problema, são:

$$f_0(X_0) = 0, \quad \forall X_0 \geq \vec{0} \quad (2.14)$$

$$f_n(X_n) = \max [f_{n-1}(X_n), r_n + f_{n-1}(X_n - A_n)] , \quad \text{para } n = 1, \dots, N \quad (2.15)$$

$$\text{sendo } f_{n-1}(X_n - A_n) = -\infty \quad (2.16)$$

se algum componente de $(X_n - A_n)$ for negativo, $n = 1, \dots, N$.

Em (2.14) a desigualdade vetorial é tomada elemento a elemento. A equação (2.15) pode ser reescrita como

$$f_n(X_n) = \max_{k_n=0,1} [r_n k_n + f_{n-1}(X_n - A_n k_n)] , \quad n = 1, \dots, N \quad (2.15)$$

A condição (2.16) tem como finalidade tornar inviável a aceitação de determinado projeto, caso não haja capital suficiente para tal.

Como se disse no item 2.1.1, o modelo representativo do problema de Lorie e Savage (14) apenas inclui projetos independentes. Em consequência, também o faz o modelo formado por (2.13), (2.14), (2.15) e (2.16).

Weingartner (32) discute a possibilidade de consideração de projetos mutuamente exclusivos e projetos dependentes no modelo de Programação Dinâmica formado por (2.13), (2.14), (2.15) e (2.16). Abaixo é sumarizada tal discussão.

(1) Projetos Mutuamente Exclusivos - Retomando (2.4):

$$\sum_{n \in C} k_n \leq 1 \quad (2.4)$$

A restrição (2.4) deve ser considerada para o caso de um conjunto C de projetos mutuamente exclusivos, do qual no máximo um projeto será selecionado. Note-se que tal restrição é semelhante àquelas relativas ao capital disponível, dadas por (2.2), sugerindo que se use o mesmo tratamento dado a estas últimas. Assim, para cada conjunto de projetos mutuamente exclusivos, obtém-se uma restrição do tipo (2.4) que é tratada da mesma maneira que as restrições de capital (2.2).

(2) Projetos Dependentes - Estes podem ser tratados como conjuntos de alternativas compostas e mutuamente exclusivas. Dado um conjunto qualquer de projetos, uma alternativa composta é obtida ao se atribuir um particular valor para a variável de decisão relativa a cada um dos projetos. Entretanto, esta maneira de tratar projetos dependentes não é muito interessante pois o número de alternativas compostas pode se tornar muito grande, tornando muito trabalhosa a obtenção da solução do problema. A dificuldade no tratamento de projetos dependentes reside na forma de (2.5), da qual se tomou apenas uma desigualdade:

$$k_{n1} \leq k_{n2} \quad (2.5)$$

ou

$$k_{n1} - k_{n2} \leq 0 \quad (2.5)$$

Como pode ser visto em (2.5), o sinal negativo que antecede k_{n2} impede que se trate (2.5) como as restrições de capital (2.2). Segundo Weingartner (32), a condição de não-negatividade dos coeficientes das variáveis de decisão, deriva do requisito de que a função de gastos de capital deve ser monotonicamente não-decrescente com cada variável de decisão. Com esta condição imposta, não é possível aceitar o projeto dependente, num estágio, após sua rejeição devido a (2.5). A forma, proposta por Weingartner (32), de contornar a dificuldade, é pré-ordenar os projetos a analisar, de maneira que os membros independentes de um conjunto (com os coeficientes negativos), sempre precedam os dependentes.⁽²⁾

O trabalho de Weingartner (32) apenas discute os dois casos acima, que são casos particulares da definição mais geral de interdependência entre projetos, apresentada no capítulo 1. Já os trabalhos de Nemhauser e Ullmann (23) e de Ullmann (30), que também apresentam o modelo formado por (2.13), (2.14), (2.15) e (2.16), vão mais além e formulam um modelo que considera aquela definição, de início como um de programação quadrática inteira:

(2) Uma forma alternativa de obter o mesmo resultado consiste em tratar (2.5) na sua forma original, ou seja, $k_{n1} \leq k_{n2}$. Analisa-se, inicialmente, o projeto dependente (e não o independente, conforme proposto por Weingartner (32)), tendo-se, neste estágio, uma variável de estado a mais referente à decisão acerca do projeto independente. No estágio que corresponder ao projeto independente, escolhe-se o valor daquela variável.

Maximizar

$$kR_n k' = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N r_{nm} k_n k_m = \sum_{n=1}^N r_n k_n + \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=n+1}^N r_{nm} k_n k_m \quad (3)$$

(2.17)

sujeita a

$$\sum_{n=1}^N A_n k_n + \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=n+1}^N V_{nm} k_n k_m \leq X_N \quad (2.18)$$

$$k_n = 0,1 \quad n=1, \dots, N \quad (2.19)$$

No modelo acima, o vetor V_{nm} expressa interdependências no gasto de capital dos projetos n e m , caso ambos sejam aceitos, em cada período de tempo.

A desigualdade vetorial de (2.18) é tomada elemento a elemento.

Deve-se notar que a função objetivo é exatamente a mesma de (2.7).

A construção do modelo formado por (2.17), (2.18) e (2.19) é apenas uma fase intermediária para a obtenção de um equivalente de Programação Dinâmica.

No modelo, o tratamento dado a projetos mutuamente exclusivos e a projetos dependentes é o seguinte:

- (1) Projetos Mutuamente Exclusivos - se os projetos n e m são mutuamente exclusivos, estabelece-se:

$$V_{nm} = M \quad \text{com} \quad M \gg X_N \quad (2.20)$$

- (3) Está-se designando r_{nn} por r_n , simplesmente.

(2) Projetos Dependentes - se o projeto n for dependente do projeto m , faz-se:

$$A_n = M$$

$$V_{nm} = A_n - M \quad (2.21)$$

$$\text{com } M \gg X_N$$

A seguir é apresentada a construção do modelo de Programação Dinâmica, a partir do modelo formado por (2.17), (2.18) e (2.19): ignorando, momentaneamente, as interações do projeto $n+1$ com os demais projetos de índice maior que $n+1$, o problema pode ser resolvido pelas equações recursivas:

$$f_0(X_0, H_0) = 0, \quad \forall X_0 \geq \bar{0} \quad (2.22)$$

$$f_{n+1}(X_{n+1}, H_{n+1}(X_{n+1})) = \max [f_n(X_{n+1}, H_n(X_{n+1})), r'_{n+1} + \\ + f_n(X_{n+1} - A'_{n+1}, H_n(X_{n+1} - A'_{n+1}))] \quad (2.23)$$

onde

$$H_n(X_n) = (h_{0n}(X_n), \dots, h_{nn}(X_n)) \text{ e } h_{jn}(X_n) = 1 \text{ se o projeto } j$$

for selecionado dentre os projetos de índices $1, \dots, n$, da do o capital X_n , e igual a zero caso contrário, e

$$r'_{n+1} = r_{n+1} + \sum_{j=1}^n (r_{j,n+1}/h_{jn}(X_{n+1} - A'_{n+1}) = 1) \quad (2.24)$$

$$A'_{n+1} = A_{n+1} + \sum_{j=1}^n (V_{j,n+1}/h_{jn} (X_{n+1} - A'_{n+1}) = 1) \quad (2.25)$$

Deve-se notar que A'_{n+1} é o gasto de capital do projeto $n+1$ mais as interações deste projeto com os projetos selecionados dentre os de índice $1, \dots, n$, dada a disponibilidade de capital $(X_{n+1} - A'_{n+1})$, e r'_{n+1} é o valor presente líquido do projeto $n+1$ mais as interações deste com os projetos selecionados dentre os de índice $1, \dots, n$, dada a disponibilidade de capital $(X_{n+1} - A'_{n+1})$.

O modelo de Nemhauser e Ullmann (23), e de Ullmann (30) é, a seguir, completado para incluir as interações envolvendo os projetos de índice $n+2, \dots, N$ com os de índice $1, \dots, n+1$.

Por parecer pouco produtivo, a esta altura, postergou-se para o capítulo 5 a apresentação desta fase do modelo, bem como uma discussão sobre o mesmo e a indicação de algumas diferenças entre os importantes trabalhos de Nemhauser e Ullmann (23), e Ullmann (30).

Finalmente, deve-se observar que a consideração de projetos interdependentes que podem ser aceitos em mais do que uma versão é assunto tratado de forma superficial em Ullmann (30). Este caso será discutido no capítulo 5.

2.2 MODELOS DA CLASSE B - INTERDEPENDÊNCIAS DIRETAMENTE RELACIONADAS A FLUXOS DE MATERIAIS ENTRE OS PROJETOS EM ANÁLISE

Neste item são discutidos os modelos que consideram interdependências entre os projetos em análise, sendo que estas interdependências são diretamente ligadas a fluxos de materiais entre

os mesmos. São as seguintes as categorias de modelos, analisa das a seguir: Programação Inteira e Programação Inteira - Mista.

2.2.1 Modelo da categoria B.1 - Programação Inteira

O único modelo identificado dentro desta categoria é o de Hanssmann (12), a seguir descrito. Uma empresa fabrica N diferentes produtos em fábricas separadas $n=1, \dots, N$. O produto acabado de cada fábrica não só é vendido no mercado, mas também utilizado como matéria-prima por outras fábricas do conjunto. Admite-se que o mercado possa absorver quantidades adicionais de todos os produtos, sem dificuldades. Suponha-se que há vários projetos para expandir cada fábrica, não sendo os projetos mutuamente exclusivos. O problema consiste em: dada a disponibilidade de capital X_N , como deve a mesma ser alocada entre os diversos projetos, de forma a se maximizar o retorno.

Seja Q_n^0 a capacidade existente da fábrica n . Esta fábrica pode ser expandida por um ou mais projetos P_{nk} , $k=1, \dots, K_n$. A cada projeto, associa-se a variável de decisão $\omega_{nk} = 0,1$, para $n=1, \dots, N$ e $k=1, \dots, K_n$. Cada projeto proporciona uma adição de capacidade q_{nk} . Então, a capacidade da fábrica n , após a expansão, será:

$$Q_n = Q_n^0 + \sum_{k=1}^{K_n} q_{nk} \omega_{nk}, \quad n=1, \dots, N \quad (2.26)$$

De forma a garantir a viabilidade física do complexo, Q_n ($n=1, \dots, N$) deve ser suficiente para suprir, ao menos, os requisitos de matéria-prima de todas as outras fábricas j . Assume-se que todas as fábricas operem no nível de sua capacidade. Suponha-se que o requisito de matéria-prima da fábrica n para a fábrica j seja $\alpha_{nj} Q_j$, onde α_{nj} é uma constante. Tem-se, então, as seguintes restrições:

$$Q_n \geq \sum_{j=1}^N \alpha_{nj} Q_j, \quad n=1, \dots, N \quad (2.27)$$

Substituindo (2.26) em (2.27), vem:

$$Q_n^0 + \sum_{k=1}^{K_n} q_{nk} \omega_{nk} \geq \sum_{j=1}^N \alpha_{nj} (Q_j^0 + \sum_{k=1}^{K_j} q_{jk} \omega_{jk}), \quad n=1, \dots, N \quad (2.28)$$

Outra restrição, diz respeito ao capital disponível:

$$\sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{K_n} a_{nk} \omega_{nk} \leq X_N \quad (2.29)$$

onde a_{nk} é o gasto de capital associado ao projeto P_{nk} .

Deve-se notar que a diferença entre o 1º e 2º membros de (2.27), representa uma quantidade de produto n que pode ser vendida no mercado. Sendo Π_n o preço de venda do produto n , o lucro incremental, após as expansões será:

$$\Delta S = \sum_{n=1}^N \Pi_n (Q_n - \sum_{j=1}^N \alpha_{nj} Q_j) - J_0 - \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{K_n} \theta_{nk} \omega_{nk} \quad (2.30)$$

onde J_0 é a receita antes da expansão e θ_{nk} representa o custo total anual de operação (incluindo depreciação), associado com a adição de capacidade q_{nk} . O problema consiste em maximizar (2.30) sujeita às restrições (2.28), (2.29) e a $\omega_{nk} = 0,1$, para $n=1, \dots, N$ e $k=1, \dots, K_n$.

Para a construção do modelo acima, Hanssmann (12) assumiu uma série de hipóteses simplificadoras, como por exemplo a de que os preços dos produtos não variam com a quantidade colocada no mercado, a de que há uma única restrição de capital, etc. No

item 2.3, quando da comparação entre os trabalhos levantados na literatura e os modelos desenvolvidos nesta pesquisa, serão explicitadas e analisadas tais hipóteses, relativamente àquelas adotadas neste trabalho.

2.2.2 Modelo da categoria B.2 - Programação Inteira-Mista

Também nesta categoria, um único modelo foi identificado na literatura - Blau e Klimpel (7). Este modelo é desenvolvido para um caso numérico particular e, aqui, apenas as hipóteses e relações mais gerais serão apresentadas. Tal modelo é desenvolvido para a situação apresentada na figura 2.1.

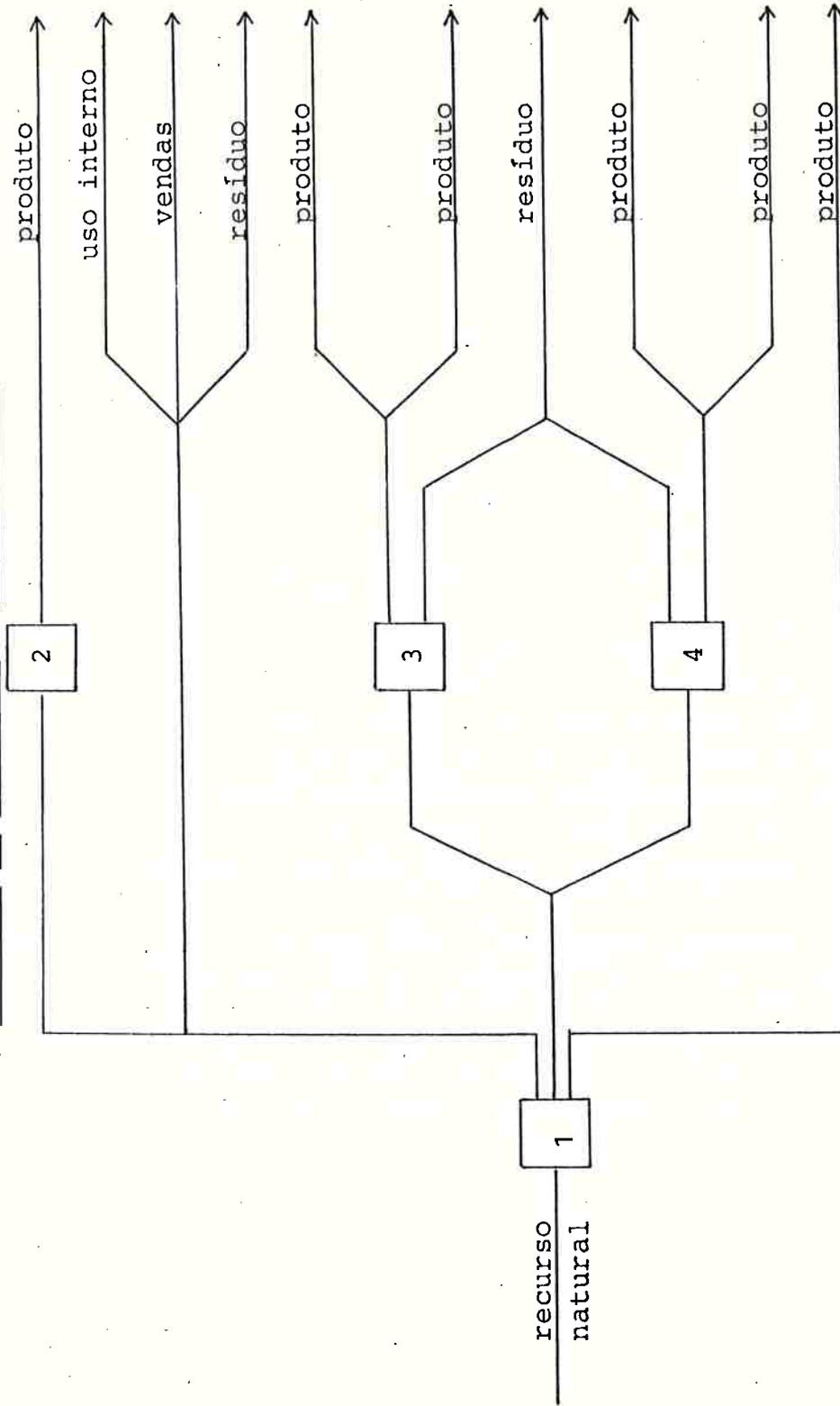
A figura 2.1 mostra, de forma esquemática, um complexo de mineração e processamento. Os retângulos representam unidades de processamento e, as linhas, fluxos de materiais.

Inicialmente, são formuladas equações de balanço material, assim como são estabelecidas restrições de mercado para os produtos.

A seguir são estabelecidas algumas hipóteses: as fábricas serão implantadas simultaneamente e no nível de sua capacidade de produção, sendo que operarão nesse mesmo nível. Assume-se um certo horizonte de planejamento, ao final do qual estima-se que os processos de produção terão se tornado obsoletos.

De forma a permitir a determinação da função objetivo, são estabelecidas, para cada uma das unidades de processamento, expressões que fornecem o gasto de capital e o custo operacional anual, ambos como função da capacidade de produção da unidade, sendo que estas funções são não-lineares. Além disso, a receita associada a cada produto é assumida como função linear da quantidade vendida, exceto no caso de um produto que apresenta uma forte elasticidade na sua curva de demanda. É obtida, então, a função de retorno (valor presente líquido) do complexo. Além

FIGURA 2.1 COMPLEXO DE MINERAÇÃO E PROCESSAMENTO



Fonte: Blau e Klimpel (7).

das restrições acima apontadas, esta função está sujeita a ou tras de não-negatividade de algumas variáveis. É necessário, da das as características do problema, o uso de variáveis "boolea nas", para representar a construção ou não das diversas unida des de processamento.

O modelo permite que se responda às seguintes questões: deve ser implantado o complexo ? em caso positivo, quanto de recur so natural deve ser processado por unidade de tempo ? quais uni dades de processamento devem ser construídas e quais deverão ser suas capacidades ?

Da mesma forma que no item anterior, o trabalho de Blau e Klimpel (7) assume certas hipóteses que serão apreciadas, rela tivamente àquelas adotadas nesta pesquisa, no item a seguir.

2.3 A PESQUISA E A LITERATURA

Embora o trabalho só se desenvolva efetivamente a partir do ca pítulo 3, é possível adiantar as suas principais característi cas que, colocadas perante aquelas dos modelos apresentados nos itens 2.1 e 2.2, permitem que se verifiquem as suas diferenças e possíveis vantagens e desvantagens relativas.

Como será visto no capítulo 3, o problema definido no capítulo 1 é tratado em três fases seqüenciais, abaixo descritas:

- (a) Análise do sistema físico - tem como finalidade a determina ção de fluxos de materiais entre projetos consecutivos e en tre projetos e mercados;
- (b) Determinação de retornos e gastos de capital - como o pró prio nome diz, a partir da fase anterior são calculados o retorno e os gastos de capital de cada versão de cada um

dos projetos, como função da versão escolhida no projeto anterior;

- (c) Solução do problema de alocação de capital - utilizando as informações geradas na fase anterior, esta fase fornece a solução ótima do problema de alocação de capital, expressa em termos de quais versões dos N projetos devem ser escolhidas de forma a se obter o máximo retorno, considerada a limitação de capital existente. Nesta fase é utilizado um modelo de Programação Dinâmica, com variável de estado ampla que inclui, a cada estágio, o capital restante e a decisão tomada no estágio anterior.

No capítulo 4 são desenvolvidas variantes equivalentes ao modelo do capítulo 3, no sentido de levarem à mesma solução obtida com aquele modelo.

No capítulo 5 é feita uma extensão ao modelo do capítulo 3, na qual são consideradas interdependências entre quaisquer pares de projetos.

Considerando as três fases acima, comuns a todos os modelos desenvolvidos na pesquisa, eles se enquadram na classe B. Entretanto, como será visto posteriormente, há a possibilidade de se considerar apenas a última das três fases e, neste caso, os modelos desenvolvidos passam a se enquadrar na classe A. Por isto e pelo fato das duas classes apresentarem aspectos diferentes a analisar, foram elaborados os quadros 2.1 e 2.2, o primeiro para a classe A e o segundo para a classe B, sendo que em ambos comparecem os modelos delineados na pesquisa. Nestes quadros são apresentados as principais características dos modelos de cada classe, bem como são feitos alguns comentários acerca dos modelos.

Dos quadros 2.1 e 2.2 extraem-se algumas conclusões, abaixo listadas.

CARACTERÍSTICAS	CATEGORIA A.1 PROGRAMAÇÃO INTEIRA	CATEGORIA A.2 PROGRAMAÇÃO QUADRÁTICA	CATEGORIA A.3 ANÁLISE DE ATIVIDADES	CATEGORIA A.4 PROGRAMAÇÃO DINÂMICA	MODELOS DE PROGRAMAÇÃO DINÂMICA DESENVOLVIDOS NOS CAPÍTULOS 3 E 4	MODELO DE PROGRAMAÇÃO DINÂMICA DESENVOLVIDO NO CAPÍTULO 5
FINALIDADE E FUNÇÃO OBJETIVO	Determinar quais projetos, dentro de um conjunto, deverão ser aceitos de forma a se obter a máxima soma de valores presentes.	Idêntico à categoria A.1	Determinar qual atividade ⁽⁴⁾ , dentre as que podem ser formadas com os projetos em análise, deve ser escolhida de forma a maximizar a utilidade definida a partir de características de atividades.	Idêntico à categoria A.1	Idêntico à categoria A.1	Idêntico à categoria A.1
VARIÁVEIS DE DECISÃO	Aceitar ou rejeitar projetos sendo cada um deles representado por uma variável bivalente (0/1)	Idêntico à categoria A.1	Atividades que guardam entre si, duas a duas, a relação de disjunção.	Idêntico à categoria A.1	Aceitar ou rejeitar projetos, sendo que a aceitação pode se dar em uma dentre um conjunto discreto (finito e não vazio) de versões.	Idêntico à coluna anterior.
INTERDEPENDÊNCIAS CONSIDERADAS	Apenas são considerados projetos mutuamente exclusivos e projetos dependentes.	São consideradas quaisquer interdependências nos retornos entre pares de projetos, incluindo projetos mutuamente exclusivos e projetos dependentes.	São consideradas interações entre projetos, quando da atribuição de valores às características das atividades.	São consideradas quaisquer interdependências nos retornos e gastos de capital entre pares de projetos, incluindo projetos mutuamente exclusivos e projetos dependentes.	São consideradas interações nos retornos e gastos de capital entre projetos consecutivos, podendo incluir projetos mutuamente exclusivos e projetos dependentes.	Idêntico à categoria A.4.
OUTRAS RESTRIÇÕES	São consideradas restrições de capital, sendo uma para cada período de tempo dentro do horizonte de planejamento.	Nenhuma	É considerada uma única restrição de capital. Além desta, são definidas outras restrições cuja necessidade provém do fato de não se trabalhar com projetos diretamente, mas com atividades.	Idêntico à categoria A.1	Idêntico à categoria A.1	Idêntico à categoria A.1
OBSERVAÇÕES	Relativamente simples a consideração de projetos que podem ser aceitos em mais do que uma versão.	1. A inclusão de restrições de capital é feita através da utilização de multiplicadores de Lagrange generalizados. Em certos casos, o método pode falhar; 2. É possível considerar interações no que se refere a gastos de capital; 3. É relativamente simples estender o modelo para incorporar projetos que possam ser aceitos em mais do que uma versão.	1. O modelo não leva em conta interdependências entre os projetos no que diz respeito a gastos de capital; 2. É relativamente simples considerar maior número de restrições de capital, bem como projetos que podem ser aceitos em mais do que uma versão.	É possível a consideração de projetos que podem ser aceitos em mais do que uma versão. O modelo desenvolvido no capítulo 5 da pesquisa leva em conta essa possibilidade, bem como o fez Ullmann (30), porém de modo diferente e sem detalhar o modelo.		
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	Weingartner (31,32), Bierman e Smidt (6), Bussey (8), Mao (15), Wilkes (36), Baumol (3), Sengupta e Fox (27) e Woiler (37,38 e 39)	Reiter e Sherman (26), Reiter (25), Weingartner (32), Sengupta e Fox (27) e Ullmann (30).	Goldwerger e Paroush (11)	Weingartner (32), Nemhauser e Ullmann (23), e Ullmann (30).		

FONTE: Elaborado pelo autor.

(4) Atividade é uma particular combinação de projetos.

CARACTERÍSTICAS	CATEGORIA B.1 PROGRAMAÇÃO INTEIRA	CATEGORIA B.2 PROGRAMAÇÃO INTEIRA-MISTA	MODELOS DE PROGRAMAÇÃO DINÂMICA DESENVOLVIDOS NOS CAPÍTULOS 3, 4 E 5
FINALIDADE E FUNÇÃO OBJETIVO	Determinar quais projetos, dentro de um conjunto, deverão ser aceitos de forma a se maximizar o lucro incremental anual, antes dos impostos. Os projetos aceitos de terminarão como será expandida a capacidade de cada estágio de produção.	Determinar quais unidades de processamento (projetos) devem ser construídas e quais deverão ser suas capacidades, de forma a se obter a máxima soma de valores presentes.	Determinar quais projetos, dentro de um conjunto, deverão ser aceitos de forma a se obter a máxima soma de valores presentes.
VARIÁVEIS DE DECISÃO	Aceitar ou rejeitar projetos, sendo cada um deles representado por uma variável bivalente (0/1). Cada estágio de produção pode ser expandido por um ou mais projetos.	Construir ou não uma particular unidade de processamento, o que é representado por uma variável bivalente (0/1). Cada unidade de processamento pode ser construída com qualquer capacidade superior a zero.	Aceitar ou rejeitar projetos, sendo que a aceitação pode se dar em uma dentre um conjunto discreto (finito e não vazio) de versões.
INTERDEPENDÊNCIAS CONSIDERADAS	São consideradas interdependências causadas por fluxos de materiais entre os estágios de produção.	Idêntico à categoria B.1.	São consideradas interdependências causadas por fluxo de material e devido a sinergismos entre estágios de produção consecutivos. Adicionalmente, o modelo do capítulo 5 considera possíveis sinergismos entre estágios não-consecutivos.
TIPO DE FLUXO DE MATERIAL	Cada estágio de produção gera um único produto, mas pode utilizar várias matérias-primas.	Cada unidade de processamento pode gerar mais do que um produto, e cada um deles pode seguir diferentes rotas de processamento.	Cada estágio de produção gera apenas um produto, que poderá ser transferido para o estágio seguinte, e pode receber do estágio anterior um único tipo de matéria-prima.
OUTRAS RESTRIÇÕES	É considerada uma única restrição de capital.	São consideradas restrições de mercado.	São consideradas restrições de capital, uma para cada período de tempo dentro do horizonte de planejamento.
PRINCIPAIS HIPÓTESES E OBSERVAÇÕES			
1. Aquisição de Matérias-Primas	Não são permitidas compras externas de produtos que, sendo oriundos de algum estágio de produção, são utilizados como matérias-primas em outros estágios de produção.	Idêntico à categoria B.1.	São permitidas compras de matéria-prima adicionalmente às transferências. Seus preços seguem o que está dito no item "preços dos produtos".
2. Quantidades Produzidas	Assume-se que todos os estágios operem no nível de sua capacidade de produção.	Idêntico à categoria B.1.	Não necessariamente os projetos selecionados operam à plena capacidade.
3. Coeficientes Técnicos	São admitidos como constantes.	Idêntico à categoria B.1.	São admitidos como variáveis dependendo da particular versão de projeto considerada e do período de tempo.
4. Transferências e Vendas	É imposta a seguinte condição: a capacidade de cada estágio de produção deve ser suficiente para suprir, ao menos, os requisitos de matéria-prima de todos os outros estágios que utilizem a saída daquele. As vendas, de cada estágio, são definidas como a capacidade de produção menos as transferências.	Transferências e vendas são definidas simultaneamente e podem assumir qualquer valor, desde que satisfaçam a restrições referentes a balanço material e de mercado.	É imposto que a transferência, entre dois estágios consecutivos, seja o mínimo entre a saída de material de um estágio e a entrada de material no seguinte. Venda e compra de um mesmo material não ocorrem, em consequência, simultaneamente.
5. Preços dos Produtos	Preços dos produtos são admitidos como constantes, independentemente, por exemplo, da quantidade vendida.	Preços dos produtos podem ser admitidos como variáveis com a quantidade vendida.	Admite-se que possam variar com a quantidade vendida, com o período de tempo considerado e com o particular mercado a que o produto se destina.
6. Outras	<ul style="list-style-type: none"> - O modelo pode ser utilizado para se tomar decisões de integração vertical. - O fator tempo não é considerado pelo modelo. - Embora explicitamente citada, a consideração de diferentes localizações para os projetos referentes a um mesmo estágio de produção parece ser remota, pois não são incluídos, na função objetivo, custos de transporte que diferenciem alternativas de expansão do complexo no que se refere à localização. 	<ul style="list-style-type: none"> - Não são consideradas restrições de capital. - Os investimentos, em cada unidade de processamento, são divididos em fixo e giro, e admite-se que ocorram na data zero. - São empregadas funções não-lineares da capacidade de produção para o cálculo dos investimentos e custos operacionais anuais. 	<ul style="list-style-type: none"> - Os projetos referentes a um mesmo estágio podem ter diferentes localizações. - Os investimentos relativos a cada projeto comportam gastos com capital fixo e de giro e podem incluir reposições de investimento. Valores residuais também são considerados.
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	Hanssmann (12)	Blau e Klimpel (7)	

1. Com relação aos modelos da classe A:

- (a) A finalidade de todos os modelos é a mesma. Quanto ao estabelecimento da função objetivo, apenas o modelo de Análise de Atividades difere dos demais, possibilitando a consideração de vários aspectos além daquele referente ao valor presente;
- (b) Excetuando o modelo de Análise de Atividades em que as variáveis de decisão se referem a combinações de projetos, nos demais casos aquelas variáveis dizem respeito a projetos, sendo que os modelos desenvolvidos nesta pesquisa incluem, explicitamente, a possibilidade de mais de uma versão para cada projeto, aspecto levado em conta apenas por Ullmann (30), de forma superficial;
- (c) Interdependências entre projetos são consideradas por todos os modelos, porém em níveis de generalização variáveis. O maior nível é atingido pela categoria A.4 - Programação Dinâmica e pelo modelo desenvolvido no capítulo 5 desta pesquisa;
- (d) Restrições adicionais, quando consideradas, dizem respeito a capital disponível. Novamente, a exceção é o modelo de Análise de Atividades que considera outras restrições pelo fato de não operar com projetos, mas com atividades;
- (e) À parte o modelo de Análise de Atividades, o modelo do capítulo 5 e o de Ullmann (30) ⁽⁵⁾, parecem ser os mais abrangentes de todos. O modelo de Análise de Atividades, caso consideradas as observações a ele referentes, feitas no quadro 2.1, pode cobrir uma gama maior de situações, embora pareça de solução mais trabalhosa em função de operar com atividades e não com projetos.

(5) Considerando, mais uma vez, que Ullmann (30) não dá tratamento completo ao modelo.

2. Com relação aos modelos da classe B:

- (a) A finalidade de todos os modelos é a mesma. A função objetivo da categoria B.1 - Programação Inteira é diferente da dos demais pois é definida como lucro incremental anual ao invés de valor presente de fluxos de caixa, considerado pelos outros modelos. Além disso, este modelo admite que já existam estágios de produção em operação e que se quer determinar como expandir suas capacidades;
- (b) As interdependências causadas por fluxos de materiais são definidas de forma mais restrita nos modelos desenvolvidos na pesquisa; entretanto, efeitos de sinergismo apenas são considerados nestes últimos;
- (c) O modelo da categoria B.1 - Programação Inteira emprega uma única restrição de capital e os modelos desenvolvidos na pesquisa empregam uma para cada período de tempo, dentro do horizonte de planejamento. O modelo da categoria B.2 - Programação Inteira-Mista apenas emprega restrições de mercado. Os modelos desenvolvidos na pesquisa permitem que este tipo de restrição seja levado em conta, através de preços variáveis com a quantidade;
- (d) Nos modelos das categorias B.1 e B.2 não são permitidas compras externas de matérias-primas que sejam geradas internamente ao complexo, ocorrendo o oposto nos modelos desenvolvidos na pesquisa;
- (e) Nos modelos das categorias B.1 e B.2 admite-se que as unidades de produção operem no nível de sua capacidade, sendo que nos modelos desenvolvidos na pesquisa isto não ocorre necessariamente;
- (f) Nos modelos das categorias B.1 e B.2 assume-se que os coeficientes técnicos sejam constantes, ao passo que na pesquisa permite-se que eles variem com a particular ver

são de projeto considerada e com o período de tempo;

- (g) Os preços dos produtos gerados pelo complexo são admitidos como constantes pelos modelos das categorias B.1 e B.2, podendo, na pesquisa, variar com a quantidade vendida, com o período de tempo e com o particular mercado a que o produto se destina, ocorrendo fato análogo com preços de matérias-primas;
- (h) Diferentes localizações para projetos referentes a um mesmo estágio de produção podem ser consideradas nos modelos desenvolvidos na pesquisa, sendo que este aspecto não é levado em conta nos outros modelos.

Além dos pontos acima, deve-se destacar que, dentro da classe B de modelos, não foi identificado nenhum trabalho na literatura que empregasse a técnica da Programação Dinâmica. Como será visto em capítulos posteriores, a utilização da Programação Dinâmica leva à obtenção da solução do problema de alocação de capital e a outros resultados que as outras técnicas não fornecem.

CAPÍTULO 3MODELO BÁSICO DE PROGRAMAÇÃO DINÂMICA PARA A
ANÁLISE DE PROJETOS INTERDEPENDENTES

Este capítulo apresenta o modelo Básico de Programação Dinâmica e correspondente algoritmo de solução para o problema de análise de projetos com integração física em série.

Inicialmente, é definido o problema. Uma análise do sistema físico é feita, a seguir, visando estabelecer algumas conclusões que servem de ponto de partida para a determinação do valor presente líquido de cada projeto e da função de retorno do conjunto de projetos.

Para a maximização da função de retorno do conjunto de projetos, sujeita a restrições de capital disponível, é desenvolvido o modelo de Programação Dinâmica.

Três casos particulares de análise de projetos são derivados do modelo desenvolvido, a saber:

- 1- Caso em que os projetos são independentes entre si, podendo cada projeto ser aceito em uma dentre várias versões;
- 2- Caso em que os projetos são dependentes mas cada um deles apenas pode ser aceito em uma versão;
- 3- Cada projeto só pode ser aceito em uma versão e há independência entre os projetos.

A seguir, os retornos dos projetos e, conseqüentemente, a função de retorno do conjunto de projetos, são redefinidos de forma a captar não só o efeito de transferências, mas também de sinergismos entre projetos consecutivos.

Completada a formulação do modelo Básico, é construído o algo

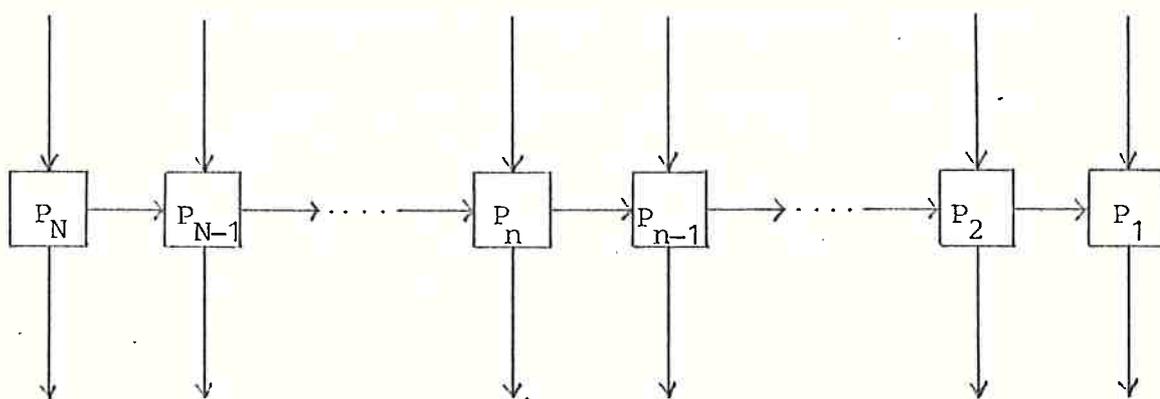
ritmo para a obtenção da solução ótima do problema. Este algoritmo explora as características do problema e é baseado no conceito de "espaços de estado embutidos"⁽¹⁾. Isto elimina, em grande parte, os problemas computacionais resultantes de modelos de Programação Dinâmica em que há diversas variáveis de estado.

Três programas de computador, usando a linguagem FORTRAN IV, foram desenvolvidos para a solução do modelo Básico, empregando o algoritmo acima citado. É apresentada a solução de um exemplo numérico, utilizando os programas referidos.

3.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Considere-se a situação em que N projetos, P_N, P_{N-1}, \dots, P_1 , possam ser integrados em *série*, conforme a figura 3.1.

FIGURA 3.1 PROJETOS INTEGRADOS EM SÉRIE



Fonte: Elaborado pelo autor.

(1) Tradução adotada para "imbedded state spaces".

Cada um dos retângulos representa um projeto e as flechas representam fluxos de materiais. As flechas horizontais têm como origem um projeto e como destino o projeto de índice imediatamente inferior. Estas flechas representam *transferências* entre projetos: o produto de um projeto pode ser utilizado como matéria-prima no projeto seguinte. O projeto P_N não recebe transferências e o projeto P_1 não as fornece. As flechas verticais representam transações entre projetos e mercados. As flechas superiores dizem respeito a *compras de matéria-prima* e, as inferiores, a *vendas de produto*. Excetuando os projetos P_N e P_1 , os demais podem receber matéria-prima do mercado e/ou do projeto anterior, e podem fornecer seu produto ao mercado e/ou ao projeto seguinte, caso sejam aceitos.

Cada projeto pode ser aceito ou não. A aceitação de um projeto se dará em uma dentre um conjunto discreto (finito e não-vazio) de *versões*. Para um mesmo projeto, uma versão diferirá das outras pela escala de produção, pelo processo de produção empregado, pelo "timing" de implantação, etc. A especificação das versões, para cada projeto, é feita externamente ao modelo de decisão.

Inicialmente, a análise é feita considerando uma *única localização* para todos os projetos. No item 3.6 esta restrição será eliminada.

Cada um dos projetos, em cada uma de suas versões, requer a realização de investimentos e gera um retorno anual.

O problema consiste em: *considerada uma certa disponibilidade de capital, quais projetos deverão ser selecionados, e em quais versões, de forma a se maximizar o retorno total, considerado um horizonte de planejamento de T anos, comum a todos os projetos.*

Neste trabalho, considera-se como retorno, de cada projeto, o valor presente líquido obtido com a sua aceitação. O retorno to

tal será obtido pela soma dos retornos dos projetos aceitos.

3.2 ANÁLISE DO SISTEMA FÍSICO

De forma a se obter o valor presente líquido de cada projeto e, também, a função de retorno do conjunto de N projetos, é analisado, a seguir, o sistema físico da figura 3.1.

O projeto \underline{n} , em cada uma de suas versões, será indicado por $P_n(k_n)$. Sendo K_n+1 o número de versões do projeto \underline{n} , $K_n \geq 1$, k_n poderá assumir os valores $0, 1, \dots, K_n$, com $k_n = 0$ denotando a rejeição do projeto \underline{n} . Os valores possíveis de \underline{n} são $1, 2, \dots, N$.

Seja \underline{t} um particular ano. Os valores possíveis de \underline{t} são $1, 2, \dots, T$.

Considerem-se as definições abaixo:

- $\alpha_n(k_n, t)$: coeficiente técnico de transformação de uma unidade de matéria-prima empregada por P_n , em produto gerado por P_n . Como esse coeficiente técnico pode variar dependendo da particular versão de P_n considerada, e também com o tempo, ele foi colocado como função de k_n e de t . A variação do coeficiente técnico com a versão poderá se dar pois, por exemplo, diferentes versões poderão empregar diferentes processos de produção com rendimentos diferentes. A variação com o tempo poderá ocorrer, por exemplo, em virtude de no início das operações da instalação haver vários ajustes a serem feitos para que ela seja eficiente e, ao final do horizonte de tempo con-

siderado, haver um menor rendimento em função do desgaste da instalação. Este coeficiente técnico deve ser definido para $n = 1, \dots, N$; $k_n = 1, \dots, K_n$ e para $t = 1, \dots, T$.

- $q_{n-1}^{tr}(k_n, k_{n-1}, t)$: quantidade de produto de P_n , transferida a P_{n-1} . A transferência de P_n para P_{n-1} depende das particulares versões segundo P_n e P_{n-1} estão sendo considerados e, também, de t . Assim, o termo $q_{n-1}^{tr}(k_n, k_{n-1}, t)$ deve ser definido para $n = 2, \dots, N$; $k_n = 0, \dots, K_n$; $k_{n-1} = 0, \dots, K_{n-1}$ e para $t = 1, \dots, T$.
- $q_n^c(k_{n+1}, k_n, t)$: quantidade de matéria-prima de P_n comprada no mercado. Este termo depende das particulares versões de P_n e P_{n+1} que estão sendo consideradas e do período de tempo. No caso de P_N , que não recebe transferências, o termo acima se reduz a $q_N^c(k_N, t)$, devendo ser definido para $k_N = 0, \dots, K_N$ e $t = 1, \dots, T$. Nos demais casos, isto é, para $n = 1, \dots, N-1$, deve-se definir $q_n^c(k_{n+1}, k_n, t)$ para $k_{n+1} = 0, \dots, K_{n+1}$; $k_n = 0, \dots, K_n$ e $t = 1, \dots, T$.
- $q_n^v(k_n, k_{n-1}, t)$: quantidade de produto de P_n vendida no mercado. Aqui, o termo $q_n^v(k_n, k_{n-1}, t)$ depende das versões de P_n e P_{n-1} que estão sendo consideradas e do período de tempo. No caso de P_1 , que não fornece transferências, o termo acima se reduz a $q_1^v(k_1, t)$, que deve ser definido para $k_1 = 0, \dots, K_1$ e $t = 1, \dots, T$. Para $n = 2, \dots, N$, deve-se definir $q_n^v(k_n, k_{n-1}, t)$ para $k_n = 0, \dots, K_n$; $k_{n-1} = 0, \dots, K_{n-1}$ e $t = 1, \dots, T$.

As definições acima permitem que se escreva a equação de balanço material para $P_n(k_n)$, para cada período de tempo t , admitin

do que todo o material recebido num ano, através de compras ou transferências, é transformado em produto que é, no mesmo ano, vendido ou transferido.

$$\alpha_n(k_n, t) [q_n^{\text{tr}}(k_{n+1}, k_n, t) + q_n^{\text{C}}(k_{n+1}, k_n, t)] = q_{n-1}^{\text{tr}}(k_n, k_{n-1}, t) + q_n^{\text{V}}(k_n, k_{n-1}, t) = \\ = q_n^{\text{S}}(k_n, t) , t = 1, \dots, T \quad (3.1)$$

onde $q_n^{\text{S}}(k_n, t)$ representa a *produção total* de $P_n(k_n)$, no período t . A *quantidade total planejada de matéria-prima a ser processada* por $P_n(k_n)$, no período t , é dada por:

$$q_n(k_n, t) = q_n^{\text{tr}}(k_{n+1}, k_n, t) + q_n^{\text{C}}(k_{n+1}, k_n, t) , t=1, \dots, T \quad (3.2)$$

As equações (3.1) e (3.2) são válidas para $k_n = 0, \dots, K_n$; $k_{n-1} = 0, \dots, K_{n-1}$ e $k_{n+1} = 0, \dots, K_{n+1}$, para todos os índices $n = 2, \dots, N-1$. Para os projetos P_N e P_1 , há algumas alterações em (3.1) e (3.2), resultando:

$$\alpha_N(k_N, t) q_N^{\text{C}}(k_N, t) = q_{N-1}^{\text{tr}}(k_N, k_{N-1}, t) + q_N^{\text{V}}(k_N, k_{N-1}, t) = q_N^{\text{S}}(k_N, t) , t=1, \dots, T \quad (3.3)$$

$$q_N(k_N, t) = q_N^{\text{C}}(k_N, t) , t = 1, \dots, T \quad (3.4)$$

$$\alpha_1(k_1, t) [q_1^{\text{tr}}(k_2, k_1, t) + q_1^{\text{C}}(k_2, k_1, t)] = q_1^{\text{V}}(k_1, t) = q_1^{\text{S}}(k_1, t) , t=1, \dots, T \quad (3.5)$$

$$q_1(k_1, t) = q_1^{\text{tr}}(k_2, k_1, t) + q_1^{\text{C}}(k_2, k_1, t) , t=1, \dots, T \quad (3.6)$$

As equações (3.3) e (3.4) são válidas para $k_N = 0, \dots, K_N$ e as equações (3.5) e (3.6) para $k_1 = 0, \dots, K_1$.

Tomando (3.1) e (3.3) para $P_{n+1}(k_{n+1})$, para qualquer $n = 1, \dots, N-1$, no período t , e considerando que

$$q_{n+1}^v(k_{n+1}, k_n, t) \geq 0 \quad (3.7)$$

obtêm-se

$$q_n^{tr}(k_{n+1}, k_n, t) \leq q_{n+1}^s(k_{n+1}, t) \quad \text{para } n = 1, \dots, N-1 ; t = 1, \dots, T ;$$

$$k_n = 0, \dots, K_n ; k_{n+1} = 0, \dots, K_{n+1} \quad (3.8)$$

A inequação (3.8) significa que a transferência de $P_{n+1}(k_{n+1})$ para $P_n(k_n)$, não pode superar a produção total de $P_{n+1}(k_{n+1})$, em cada período.

Agora, tomando (3.2) e (3.6) para $P_n(k_n)$, para qualquer $n = 1, \dots, N-1$, no período t , e considerando que

$$q_n^c(k_{n+1}, k_n, t) \geq 0 \quad (3.9)$$

obtêm-se

$$q_n^{tr}(k_{n+1}, k_n, t) \leq q_n(k_n, t) \quad \text{para } n = 1, \dots, N-1 ; t = 1, \dots, T ;$$

$$k_n = 0, \dots, K_n \quad \text{e } k_{n+1} = 0, \dots, K_{n+1} \quad (3.10)$$

A inequação (3.10) significa que a transferência de $P_{n+1}(k_{n+1})$ para $P_n(k_n)$, não pode ser maior que a entrada total de matéria-prima em $P_n(k_n)$, em cada período.

Combinando (3.8) e (3.10), vem:

$$q_n^{tr}(k_{n+1}, k_n, t) \leq \min [q_{n+1}^s(k_{n+1}, t) ; q_n(k_n, t)] , \text{ para}$$

$$n=1, \dots, N-1 ; t=1, \dots, T ; k_n=0, \dots, K_n \text{ e } k_{n+1}=0, \dots, K_{n+1}$$
(3.11)

A inequação (3.11) admite uma faixa de valores possíveis para a transferência. Num caso extremo, mesmo com $q_{n+1}^s(k_{n+1}, t) \neq 0$ e $q_n(k_n, t) \neq 0$, $q_n^{tr}(k_{n+1}, k_n, t)$ poderá ser zero, o que significa a não integração física entre os projetos $P_{n+1}(k_{n+1})$ e $P_n(k_n)$ e, também, que a firma, num mesmo período, estaria comprando e vendendo um mesmo produto.

Nesta pesquisa, não se admite a possibilidade da firma comprar e vender um mesmo material, num mesmo período de tempo. Embora isto possa ocorrer numa situação prática, envolveria não só a análise de investimentos em projetos, mas também a de alternativas de comercialização pura de produtos, o que está fora do es copo do estudo.

Assim, de (3.11), impondo a condição exposta no parágrafo precedente, vem:

$$q_n^{tr}(k_{n+1}, k_n, t) = \min [q_{n+1}^s(k_{n+1}, t) ; q_n(k_n, t)] \text{ para } n = 1, \dots, N-1 ;$$

$$t = 1, \dots, T ; k_n = 0, \dots, K_n \text{ e } k_{n+1} = 0, \dots, K_{n+1}$$
(3.12)

Combinando (3.1), (3.3) e (3.12) tem-se:

$$q_{n+1}^v(k_{n+1}, k_n, t) = q_{n+1}^s(k_{n+1}, t) - q_n^{tr}(k_{n+1}, k_n, t), \quad \text{para}$$

$$n=1, \dots, N-1 ; t=1, \dots, T ; k_n=0, \dots, K_n \text{ e } k_{n+1}=0, \dots, K_{n+1}$$
(3.13)

Para $P_1(k_1)$, tem-se:

$$q_1^v(k_1, t) = q_1^s(k_1, t) , \text{ para } t = 1, \dots, T \text{ e } k_1 = 0, \dots, K_1 \quad (3.14)$$

Combinando (3.2), (3.6) e (3.12), obtêm-se:

$$q_n^c(k_{n+1}, k_n, t) = q_n(k_n, t) - q_n^{tr}(k_{n+1}, k_n, t), \text{ para } n = 1, \dots, N-1;$$

$$t = 1, \dots, T ; k_n = 0, \dots, K_n \text{ e } k_{n+1} = 0, \dots, K_{n+1} \quad (3.15)$$

Para $P_N(k_N)$, vale o seguinte:

$$q_N^c(k_N, t) = q_N(k_N, t) , \text{ para } t=1, \dots, T \text{ e } k_N=0, \dots, K_N \quad (3.16)$$

A discussão feita até aqui permite que, dadas as versões dos N projetos, se possam estabelecer as origens da matéria-prima e os destinos do produto, para cada um dos projetos, em cada pe ríodo de tempo, utilizando (3.12) a (3.16). No item que se se gue, estas equações serão empregadas para a determinação do re torno dos projetos.

3.3 DETERMINAÇÃO DO VALOR PRESENTE LÍQUIDO DE CADA PROJETO E DA FUNÇÃO DE RETORNO DO CONJUNTO DE PROJETOS

A determinação do valor presente líquido de cada projeto será feita através da geração do *fluxo de caixa* do mesmo, em cada período, para cada versão, e do desconto desse fluxo de caixa, segundo uma taxa de juros conveniente.

Considera-se que todos os valores monetários, envolvidos na análise, estejam expressos em moeda de uma única data e, portanto, a taxa a ser empregada para o desconto do fluxo de caixa será uma *taxa real*.

Utiliza-se, no trabalho, a convenção do "*final de período*" para situar os componentes do fluxo de caixa. Isto significa que as diversas entradas e saídas de caixa que ocorrem durante um ano, devido à operação da firma, são admitidas como se concentrando ao final do mesmo, para fins de desconto. Os gastos de capital são assumidos como ocorrendo no início do período a que se referem.

Para a determinação do retorno de cada projeto, o que leva à função de retorno do conjunto de projetos, deve-se notar quatro aspectos importantes:

- (a) Suponha-se que um determinado projeto apenas forneça seu produto sob a forma de transferências, embora este produto possa ser vendido no mercado. Este projeto não pode ser simplesmente rejeitado por não gerar receitas pois, através das transferências, permite que o projeto seguinte reduza suas compras de matéria-prima. A análise deve levar em consideração que aquele projeto inicial pode vender a sua produção e que o projeto seguinte deve sofrer uma *penalização* por estar reduzindo as entradas de caixa do projeto anterior de forma a reduzir suas saídas de caixa (compras);

- (b) Suponha-se a rejeição de determinado projeto. Então, seu subsequente não receberá transferências, não terá suas compras reduzidas, bem como não reduzirá receitas e, portanto, não deverá sofrer penalização;
- (c) Como conseqüência de (a) e (b), o retorno de um dado projeto depende da decisão tomada com relação ao projeto anterior (2);
- (d) Entre projetos não consecutivos não ocorrem transferências, por isso, o retorno de um dado projeto independe da decisão tomada com relação aos projetos que não são seus antecessores imediatos.

As funções de retorno, a seguir determinadas, refletem o que foi dito acima. Elas representam o valor presente incremental líquido de um dado projeto, em uma certa versão, conhecida a decisão tomada com relação ao projeto anterior, sendo i a taxa de desconto utilizada no cálculo do valor presente.

(a) Valor presente incremental líquido de $P_n(k_n)$ se P_{n+1} foi rejeitado: $r_n(k_n, 0)$

- componentes:

$$\cdot \text{receita com a venda do produto} = \Pi_n^V(q_n^S(k_n, t), t) q_n^S(k_n, t) \quad (3.17)$$

onde $\Pi_n^V(q_n^S(k_n, t), t)$ é o preço unitário de venda do produto do projeto P_n , como função da quantidade vendida e do período de tempo. Estes preços já devem se encontrar descontados de eventual custo de transporte em que a firma incorra para colocar o produto no mercado.

(2) Esta dependência também pode ser vista de forma inversa, ou seja, dependência do retorno de um projeto com relação à decisão tomada no projeto seguinte. Esta maneira de considerar interações entre projetos é assunto tratado no capítulo 4 da pesquisa.

A expressão (3.17) é válida para $n = 1, \dots, N$; $k_n = 0, \dots, K_n$ e $t = 1, \dots, T$.

De forma a tornar mais simples a notação empregada, o termo $\Pi_n^V(q_n^S(k_n, t), t)$ será apresentado simplesmente como $\Pi_n^V(k_n, t)$.

$$\cdot \text{ custos com a compra de matéria-prima} = \Pi_n^C(q_n(k_n, t), t) q_n(k_n, t) \quad (3.18)$$

onde $\Pi_n^C(q_n(k_n, t), t)$ é o preço unitário de compra da matéria-prima utilizada por P_n , como função da quantidade comprada e do período de tempo⁽³⁾. Analogamente ao preço de venda, o preço de compra deve se encontrar acrescido de eventual custo de transporte que a firma incorra para adquirir a matéria-prima no mercado. A expressão (3.18) é válida para $n = 1, \dots, N$; $k_n = 0, \dots, K_n$ e $t = 1, \dots, T$. Pelo mesmo motivo exposto no item acima, o termo $\Pi_n^C(q_n(k_n, t), t)$ será denotado por $\Pi_n^C(k_n, t)$.

$$\cdot \text{ demais custos operacionais} = c_n(k_n, t), \quad (3.19)$$

incluindo itens como energia, mão-de-obra, administração, depreciação legal, etc. Em particular, $c_n(k_n, t)$ deve conter os gastos com todos os outros insumos que não a matéria-prima e, também, ser diminuído da receita gerada por todos os subprodutos que puderem ser comercializados. O termo $c_n(k_n, t)$ deve ser definido para $n = 1, \dots, N$; $k_n = 0, \dots, K_n$ e $t = 1, \dots, T$.

$$\cdot \text{ depreciação legal} = d_n(k_n, t), \quad (3.20)$$

devendo ser definida para $n = 1, \dots, N$; $k_n = 0, \dots, K_n$ e $t = 1, \dots, T$.

(3) A variação dos preços de venda e dos preços de compra, com o tempo, é considerada uma variação real, pois se está trabalhando com valores monetários deflacionados.

$$\text{gastos de capital} = a_n(k_n, t), \quad (3.21)$$

incluindo investimentos em capital fixo, em capital de giro e reposições de capital fixo. O termo $a_n(k_n, t)$ é admitido como sendo não-negativo e deve ser definido para $n = 1, \dots, N$; $k_n = 0, \dots, K_n$ e $t = 0, \dots, T-1$.

$$\text{valor residual} = a_n(k_n, T) \quad (3.22)$$

incluindo o valor residual do capital fixo e do capital de giro. Deve ser definido para $n = 1, \dots, N$ e $k_n = 0, \dots, K_n$.

$$\text{taxa do imposto de renda para a firma} = u, \quad (3.23)$$

que incidirá sobre o lucro tributável de cada período.

- *fluxo de caixa num período t qualquer* ⁽⁴⁾:

$$r_n(k_n, 0, t) = (1 - u) \left[\Pi_n^V(k_n, t) q_n^S(k_n, t) - \Pi_n^C(k_n, t) q_n(k_n, t) - c_n(k_n, t) \right] + d_n(k_n, t) - a_n(k_n, t) \quad (3.24)$$

- *valor presente líquido*:

$$r_n(k_n, 0) = \sum_{t=0}^T r_n(k_n, 0, t) (1 + i)^{-t} \quad (3.25)$$

(4) Tanto em (3.24) como em (3.28), o imposto de renda foi considerado como incidindo sobre o lucro tributável de cada ano, qualquer que seja o valor desse lucro tributável. Isto é uma aproximação com relação à legislação brasileira atual do imposto de renda (ver, por exemplo, Latorraca (13) e Tebechrani, Machado e Campos (29)), mas capta o que há de essencial no imposto, sem se prender a uma legislação específica.

(b) Valor presente incremental líquido de $P_n(k_n)$ se P_{n+1} foi aceito na versão $k_{n+1} \neq 0 : \pi_n(k_n, k_{n+1})$

- componentes (apenas aqueles que, adicionalmente aos já de finidos em (a), são necessários):

. custos com a compra de matéria-prima =

$$= \Pi_n^C(q_n^C(k_{n+1}, k_n, t), t) q_n^C(k_{n+1}, k_n, t), \quad (3.26)$$

onde $q_n^C(k_{n+1}, k_n, t)$ é definido de acordo com (3.15) e

$\Pi_n^C(q_n^C(k_{n+1}, k_n, t), t)$ é análogo ao que foi definido em

(3.18). A expressão (3.26) é válida para $n = 1, \dots, N-1$; $k_n = 0, \dots, K_n$; $k_{n+1} = 1, \dots, K_{n+1}$ e $t = 1, \dots, T$.

O termo $\Pi_n^C(q_n^C(k_{n+1}, k_n, t), t)$ será denotado por:

$$\Pi_n^C(k_n, k_{n+1}, t),$$

$$\begin{aligned} \text{penalização} &= \Pi_{n+1}^V(q_{n+1}^S(k_{n+1}, t), t) q_{n+1}^S(k_{n+1}, t) - \\ &\quad - \Pi_{n+1}^V(q_{n+1}^V(k_{n+1}, k_n, t), t) q_{n+1}^V(k_{n+1}, k_n, t) \quad (3.27) \end{aligned}$$

onde $q_{n+1}^V(k_{n+1}, k_n, t)$ é definido de acordo com (3.13) e

$\Pi_{n+1}^V(q_{n+1}^S(k_{n+1}, t), t)$, bem como $\Pi_{n+1}^V(q_{n+1}^V(k_{n+1}, k_n, t), t)$

são definidos analogamente ao que foi feito em (3.17), porém com relação ao projeto P_{n+1} . A expressão (3.27) é válida para $n = 1, \dots, N-1$; $k_n = 0, \dots, K_n$; $k_{n+1} = 1, \dots, K_{n+1}$ e $t = 1, \dots, T$.

Os termos $\Pi_{n+1}^V(q_{n+1}^S(k_{n+1}, t), t)$ e $\Pi_{n+1}^V(q_{n+1}^V(k_{n+1}, k_n, t), t)$

serão denotados, respectivamente, por $\Pi_{n+1}^V(k_{n+1}, t)$ e

$$\Pi_{n+1}^V(k_n, k_{n+1}, t).$$

- fluxo de caixa num período t qualquer:

$$\begin{aligned} r_n(k_n, k_{n+1}, t) = & (1-u) [\Pi_n^V(k_n, t) q_n^S(k_n, t) - \Pi_n^C(k_n, k_{n+1}, t) q_n^C(k_{n+1}, k_n, t) - \\ & - \Pi_{n+1}^V(k_{n+1}, t) q_{n+1}^S(k_{n+1}, t) + \\ & + \Pi_{n+1}^V(k_n, k_{n+1}, t) q_{n+1}^V(k_{n+1}, k_n, t) - c_n(k_n, t)] + \\ & + d_n(k_n, t) - a_n(k_n, t) \end{aligned} \quad (3.28)$$

- valor presente líquido:

$$r_n(k_n, k_{n+1}) = \sum_{t=0}^T r_n(k_n, k_{n+1}, t) (1+i)^{-t} \quad (3.29)$$

Subtraindo, membro a membro, (3.24) de (3.28), obtêm-se:

$$\begin{aligned} r_n(k_n, k_{n+1}, t) = & r_n(k_n, 0, t) + (1-u) [\Pi_n^C(k_n, t) q_n^C(k_n, t) - \\ & - \Pi_n^C(k_n, k_{n+1}, t) q_n^C(k_{n+1}, k_n, t) - \\ & - \Pi_{n+1}^V(k_{n+1}, t) q_{n+1}^S(k_{n+1}, t) + \\ & + \Pi_{n+1}^V(k_n, k_{n+1}, t) q_{n+1}^V(k_{n+1}, k_n, t)] \end{aligned} \quad (3.30)$$

Designando a segunda parcela do 2º membro de (3.30) por $p_n(k_n, k_{n+1}, t)$, tem-se:

$$r_n(k_n, k_{n+1}, t) = r_n(k_n, 0, t) + p_n(k_n, k_{n+1}, t) \quad (3.31)$$

Em termos de valor presente líquido:

$$r_n(k_n, k_{n+1}) = r_n(k_n, 0) + p_n(k_n, k_{n+1}), \quad (3.32)$$

onde

$$p_n(k_n, k_{n+1}) = \sum_{t=0}^T p_n(k_n, k_{n+1}, t) (1+i)^{-t} \quad (3.33)$$

A parcela $p_n(k_n, k_{n+1})$ mede a vantagem/desvantagem (interação) de se ter $P_n(k_n)$ e $P_{n+1}(k_{n+1})$, sendo igual a zero se P_{n+1} for rejeitado. Seu valor reflete o benefício líquido atualizado das transferências de $P_{n+1}(k_{n+1})$ para $P_n(k_n)$.

A expressão (3.25) é válida para $n = 1, \dots, N$ e $k_n = 0, \dots, K_n$. Para $n = N$ tem-se $r_N(k_N, 0)$, neste caso particular significando a inexistência de projeto anterior. Para $k_n = 0$, segue que $r_n(0, 0) = 0$.

A expressão (3.29) é válida para $n = 1, \dots, N-1$; $k_n = 0, \dots, K_n$ e $k_{n+1} = 1, \dots, K_{n+1}$. Novamente, para $k_n = 0$, tem-se $r_n(0, k_{n+1}) = 0$.

De posse de (3.24), (3.25), (3.28) e (3.29) ou, o que é equivalente, de (3.24), (3.25), (3.30), (3.33) e (3.32), pode-se determinar o retorno de um dado projeto, em uma certa versão, conhecida a decisão tomada com relação ao projeto anterior.

A função de retorno do conjunto de N projetos que se quer maximizar, R_N , sujeita a restrições de capital, é dada por:

$$R_N = R_N(k_N, k_{N-1}, \dots, k_1) = r_N(k_N, 0) + r_{N-1}(k_{N-1}, k_N) + \dots + r_n(k_n, k_{n+1}) + \dots + r_1(k_1, k_2) \quad (3.34)$$

ou

$$R_N = R_N(k_N, k_{N-1}, \dots, k_1) = r_N(k_N, 0) + \sum_{n=1}^{N-1} r_n(k_n, k_{n+1}) \quad (3.35)$$

De (3.34) ou (3.35), verifica-se que a função de retorno do conjunto de projetos é formada por N componentes sendo que, exceto o de índice N , o valor de cada um deles depende da decisão tomada com relação ao projeto que ele representa e daquela tomada

com relação ao projeto anterior.

O item seguinte trata do desenvolvimento de um modelo de Programação Dinâmica com variável de estado ampliada que permite tratar com funções de retorno do tipo de (3.35). Este modelo é dotado de um certo grau de generalização com relação ao problema específico que se está resolvendo, a título de embasamento teórico, podendo ser aplicado a outras situações semelhantes à que la abordada.

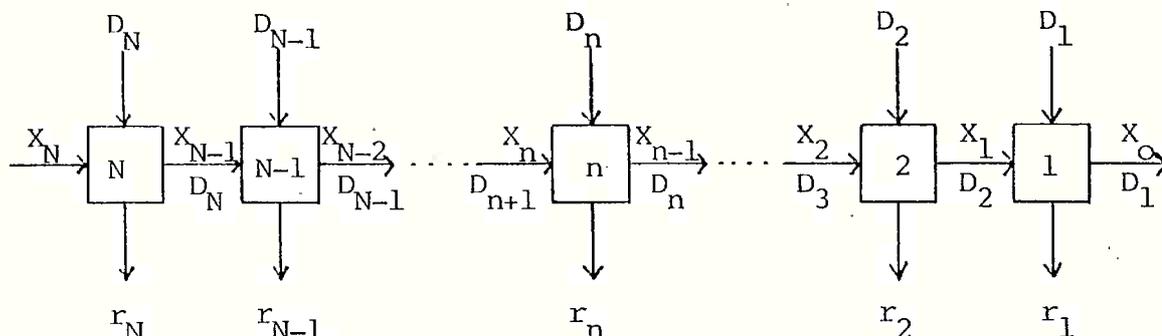
3.4 MODELO DE PROGRAMAÇÃO DINÂMICA COM VARIÁVEL DE ESTADO AMPLIADA

As conclusões a que se chegou no item anterior mostram a necessidade de se trabalhar com um modelo em que cada estágio recebe, como informação de entrada, dois tipos de variável de estado: capital disponível para aplicação e decisão tomada no estágio anterior.

Neste item será desenvolvido um modelo geral para tomada de decisões seqüenciais com *variável de estado ampliada* e, no item seguinte, ele será aplicado ao problema de alocação de capital.

Seja o diagrama funcional da figura 3.2, representando um sistema de decisões com múltiplos estágios ligados em série.

FIGURA 3.2 DIAGRAMA FUNCIONAL PARA N ESTÁGIOS EM SÉRIE, VARIÁVEL DE ESTADO AMPLIADA



Fonte: Elaborado pelo autor.

Supõe-se que o diagrama da figura 3.2 seja representativo de um problema do estado inicial, ou seja, X_N é dado, e que se quer maximizar a função objetivo, na qual comparecem os retornos dos estágios - r_n , $n = 1, \dots, N$, compostos de alguma forma.

Para um estágio genérico n , $n \neq N$, tem-se:

- (X_n, D_{n+1}) : estado de entrada, sendo X_n determinado por X_N e por transformações deste através dos estágios $N, N-1, \dots, n+1$, e D_{n+1} a decisão tomada no estágio anterior. X_n e D_{n+1} são, em geral, vetores.
- (X_{n-1}, D_n) : estado de saída, após a decisão D_n , sendo X_{n-1} determinado por X_n e por uma transformação no estágio n .
- D_n : variável de controle do estágio n , cuja fixação leva a uma decisão.
- r_n : retorno do estágio n (um escalar).

Além das definições acima, as relações funcionais abaixo são necessárias.

$$X_{n-1} = t_n(X_n, D_n), \quad n = 1, \dots, N \quad (5) \quad (3.36)$$

é a função de transição (ou de transformação).

$$r_n = r_n(X_n, D_n, D_{n+1}), \quad n = 1, \dots, N-1 \quad (3.37)$$

é a função expressando o retorno do estágio n, tendo como argumentos o estado de entrada e a decisão tomada no estágio n.

No estágio N, o estado de entrada é X_N , o estado de saída é (X_{N-1}, D_N) e o retorno é $r_N(X_N, D_N)$.

De forma a se processar a maximização da função objetivo, é necessário especificar como os retornos dos estágios serão compostos. Seja R_N a função de retorno dos N estágios, definida abaixo:

$$R_N = r_N * r_{N-1} * \dots * r_2 * r_1, \quad (3.38)$$

onde o símbolo (*) é o *operador composição* que estipula a separabilidade de R_N (ver, por exemplo, Nemhauser (21)), não necessariamente significando a mesma operação entre os retornos dos vãrios estágios.

Utilizando (3.37), obtém-se:

(5) A rigor, a função de transição deveria ser escrita como $X_n = t_n(X_n, D_n, D_{n+1})$; no entanto, está sendo feita a suposição de que a variável D_{n+1} não afeta o valor de X_n , o que, como será visto, é coerente com o problema de alocação de capital, dadas as hipóteses feitas até então.

$$R_N = r_N(X_N, D_N) * r_{N-1}(X_{N-1}, D_{N-1}, D_N) * r_{N-2}(X_{N-2}, D_{N-2}, D_{N-1}) * \dots * r_2(X_2, D_2, D_3) * \\ * r_1(X_1, D_1, D_2) \quad (3.39)$$

Agora, empregando (3.36), vem:

$$R_N = r_N(X_N, D_N) * r_{N-1}(X_N, D_N, D_{N-1}) * r_{N-2}(X_N, D_N, D_{N-1}, D_{N-2}) * \dots * r_2(X_N, D_N, \dots, D_2) * \\ * r_1(X_N, D_N, \dots, D_1) \quad (3.40)$$

ou

$$R_N = R_N(X_N, D_N, D_{N-1}, \dots, D_1) \quad (3.41)$$

A interpretação de (3.41) é que o retorno de N estágios depende do estado inicial e das decisões tomadas em todos os estágios.

O problema, agora, consiste em maximizar R_N com relação às variáveis D_N, \dots, D_1 , pois X_N é dado, ou seja, encontrar o retorno ótimo para os N estágios como função do estado inicial X_N .

Adicionalmente à condição de separabilidade de R_N , admite-se também que esta função satisfaça à condição de *monotonicidade* (ver Nemhauser (21)). As condições de monotonicidade e separabilidade são suficientes para que o problema possa ser decomposto e, então, seja possível empregar a Programação Dinâmica. A função R_N , dada por (3.34) ou (3.35), satisfaz as condições acima.

O procedimento de otimização será iniciado no estágio 1 e se dirigirá para o estágio N ("backward"), com $f_0(X_0, D_1)$ uma função conhecida. O símbolo f_n será usado para indicar o retorno ótimo de n estágios, $n = 0, \dots, N$, sendo seu argumento o estado de entrada correspondente ao estágio em análise. O retorno ótimo pa

ra N estágios, ou seja, o valor da função objetivo referente à solução do problema, em função de X_N , é obtido em $f_N(X_N)$. As equações recursivas, para a obtenção da solução do problema, são dadas a seguir.

$f_0(X_0, D_1)$ dada

$$f_n(X_n, D_{n+1}) = \max_{D_n \in \Gamma_n} [r_n(X_n, D_n, D_{n+1}) * f_{n-1}(t_n(X_n, D_n), D_n)] \quad \text{obtendo-se}$$

$$D_n = D_n(X_n, D_{n+1}), \quad n = 1, \dots, N-1 \quad (3.42)$$

$$f_N(X_N) = \max_{D_N \in \Gamma_N} [r_N(X_N, D_N) * f_{N-1}(t_N(X_N, D_N), D_N)] \quad \text{obtendo-se}$$

$$\hat{D}_N = D_N(X_N) \quad (3.43)$$

onde Γ_n é o conjunto dos valores possíveis de D_n , $n = 1, \dots, N$.

A partir da obtenção de $\hat{D}_N = D_N(X_N)$ em (3.43), isto é, da decisão ótima no estágio N , são determinadas as demais decisões e estados ótimos, através de (3.36) e (3.42), ou seja,

$$\hat{X}_{n-1} = t_n(\hat{X}_n, \hat{D}_n), \quad n = N, \dots, 1, \quad \text{e}$$

$$\hat{D}_n = D_n(\hat{X}_n, \hat{D}_{n+1}), \quad n = N-1, \dots, 1$$

No item seguinte são aplicados os resultados aqui obtidos, para se resolver o problema de alocação de capital definido em 3.1.

3.5 SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE ALOCAÇÃO DE CAPITAL POR PROGRAMAÇÃO DINÂMICA

A aplicação dos resultados do item 3.4 ao problema de alocação de capital, requer as seguintes definições adicionais:

- $A_n(k_n)$: vetor cujos T componentes são os dispêndios de capital, em cada período de tempo, de $P_n(k_n)$.

$$A_n(k_n) = (a_n(k_n, 0), a_n(k_n, 1), \dots, a_n(k_n, T-1)),$$

$$n = 1, \dots, N \text{ e } k_n = 0, \dots, K_n, \text{ com } a_n(k_n, t)$$

definido de acordo com (3.21), sendo

$$A_n(0) = (0, \dots, 0) = \vec{0}$$

- X_N : vetor cujos T componentes representam a disponibilidade de capital para aplicação nos N projetos, em cada período de tempo.
- X_n : vetor cujos T componentes representam o capital restante para aplicação em n projetos, em cada período de tempo.

$$X_n = X_{n+1} - A_{n+1}(k_{n+1}), \quad n = 0, \dots, N-1; \quad k_{n+1} = 0, \dots, K_{n+1} \quad (3.44)$$

As equações recursivas, para resolver o problema, são:

$$f_0(X_0, k_1) = 0, \quad \forall X_0 \geq \vec{0} \text{ e } \forall k_1 \quad (3.45)$$

$$f_n(X_n, k_{n+1}) = \max_{k_n=0, \dots, K_n} [r_n(k_n, k_{n+1}) + f_{n-1}(X_n - A_n(k_n), k_n)],$$

obtendo-se $k_n = k_n(X_n, k_{n+1})$, $n = 1, \dots, N-1$ (3.46)

$$f_N(X_N) = \max_{k_N=0, \dots, K_N} [r_N(k_N, 0) + f_{N-1}(X_N - A_N(k_N), k_N)],$$

obtendo-se $\hat{k}_N = k_N(X_N)$ (3.47)

sendo $r_n(k_n, k_{n+1})$ definido por (3.24), (3.25), (3.28) e (3.29) e $r_N(k_N, 0)$ definido por (3.24) e (3.25), com

$$f_{n-1}(X_n - A_n(k_n), k_n) = -\infty \quad (3.48)$$

se algum componente de $(X_n - A_n(k_n))$ for negativo, $n = 1, \dots, N$. A finalidade de (3.48) é a eliminação de projetos inviáveis.

Em (3.45), a desigualdade vetorial é tomada elemento a elemento.

Deve-se notar que a cada projeto corresponde um estágio de decisão.

Quando da avaliação de $f_n(X_n, k_{n+1})$ por (3.46), X_n pode assumir valores viáveis numa região, cujo limite inferior é o vetor nulo e cujo limite superior é dado por $(X_N - A_{n+1}(k_{n+1}))$. Uma região será estabelecida para cada particular valor de k_{n+1} , $k_{n+1} = 0, \dots, K_{n+1}$.

Utilizando (3.47), (3.46) e (3.44), pode-se determinar a política ótima de decisão para o problema, como foi apontado no item anterior.

A seguir, são analisados três casos particulares de alocação de capital, derivados do modelo desenvolvido.

Caso particular 1 - Projetos independentes, cada um com várias versões

De (3.32), tem-se:

$$r_n(k_n, k_{n+1}) = r_n(k_n, 0) + p_n(k_n, k_{n+1})$$

De (3.33) e (3.30), vem:

$$\begin{aligned}
p_n(k_n, k_{n+1}) = & \sum_{t=0}^T (1-u) [\Pi_n^C(k_n, t) q_n(k_n, t) - \Pi_n^C(k_n, k_{n+1}, t) q_n^C(k_{n+1}, k_n, t) - \\
& - \Pi_{n+1}^V(k_{n+1}, t) q_{n+1}^S(k_{n+1}, t) + \\
& + \Pi_{n+1}^V(k_n, k_{n+1}, t) q_{n+1}^V(k_{n+1}, k_n, t)] (1+i)^{-t} \quad (3.49)
\end{aligned}$$

Suponha-se que:

$$\Pi_n^C(k_n, t) = \Pi_n^C(k_n, k_{n+1}, t) = \Pi_{n+1}^V(k_{n+1}, t) = \Pi_{n+1}^V(k_n, k_{n+1}, t) = \Pi_n(t) \quad (3.50)$$

Em (3.50), está-se admitindo que o preço de compra da matéria-prima usada no projeto P_n é igual ao preço de venda do produto do projeto P_{n+1} e que este preço independe da quantidade comprada ou vendida.

Então, combinando (3.50) e (3.49), e utilizando (3.15), (3.12) e (3.13), resulta que $p_n(k_n, k_{n+1}) = 0$ e, portanto, de (3.32), vem

$$r_n(k_n, k_{n+1}) = r_n(k_n, 0) \quad (3.51)$$

O significado de (3.51) é que o retorno de $P_n(k_n)$ independe da decisão tomada no estágio anterior. Caso (3.51) valha para $n=1, \dots, N-1$, os projetos são todos independentes entre si. Designando o retorno de cada projeto por $r_n(k_n)$, $n=1, \dots, N$, obtém-se as seguintes equações recursivas para o problema de alocação de capital:

$$f_0(x_0) = 0, \quad \forall x_0 \geq \delta \quad (3.52)$$

$$f_n(X_n) = \max_{k_n=0, \dots, K_n} [r_n(k_n) + f_{n-1}(X_n - A_n(k_n))] , \text{ para } n=1, \dots, N \quad (3.53)$$

$$\text{com } f_{n-1}(X_n - A_n(k_n)) = -\infty \quad (3.54)$$

se algum componente de $(X_n - A_n(k_n))$ for negativo, $n=1, \dots, N$.

O modelo formado por (3.52), (3.53) e (3.54) é conhecido, tendo sido estudado por Nemhauser e Ullmann (23), e Ullmann (30), embora de uma forma direta e não como caso particular de outro modelo.

Caso particular 2 - Projetos interdependentes, cada um com apenas duas versões possíveis

A única modificação a ser feita nas equações recursivas (3.46) e (3.47) é a seguinte: k_n apenas pode assumir o valor zero ou o valor um, $n=1, \dots, N$.

A utilização deste modelo pode ser de interesse, por exemplo, se se quiser analisar a possibilidade de integração física entre projetos, sendo que cada um deles apenas pode ser aceito em uma única versão e essas versões, referentes à aceitação dos projetos, se encontram definidas de tal forma que, se dois projetos consecutivos forem aceitos, o primeiro não venderá produto ao mercado e o segundo não comprará matéria-prima no mercado, havendo um "balanceamento" entre as capacidades de produção dos diversos projetos. Neste caso, se o emprego do modelo indicar a rejeição de um projeto, tendo sido seu antecessor aceito, bem como seu sucessor, significará que o produto gerado pelo antecessor será integralmente vendido no mercado e o sucessor adquirirá quantidade equivalente de matéria-prima no mercado, existindo um vazio na cadeia de projetos que, de forma indireta, é preenchido por outras unidades produtoras existentes no mercado,

que possuem melhor economicidade que aquele projeto rejeitado.

Caso particular 3 - Projetos independentes, cada um com apenas duas versões possíveis

Neste caso, k_n apenas poderá assumir o valor zero ou o valor um e as equações recursivas são dadas por (3.53). Este modelo é clássico na literatura de Análise de Projetos, tendo sido estudado por Weingartner (32), Weingartner e Ness (33), Nemhauser (22), Nemhauser e Ullmann (23), e Ullmann (30), de acordo com o que foi visto no capítulo 2.

No item seguinte, os retornos dos projetos e, conseqüentemente, a função de retorno do conjunto de projetos, são revistos de forma a captar não só o efeito de transferências, mas também de sinergismos entre projetos consecutivos.

3.6 CONSIDERAÇÃO DE OUTRAS INTERAÇÕES ENTRE PROJETOS CONSECUTIVOS

Além da interação já considerada, que se refere exclusivamente às transferências, podem existir outras que dizem respeito a *efeitos de sinergismo* (positivos ou não) que ocorrem quando dois projetos são aceitos, em alguma de suas versões. Estes efeitos, na literatura, são também chamados de *economias externas* (Reiter e Sherman (26)) e podem ocorrer nos gastos de capital (por exemplo, dois projetos podem utilizar equipamento comum) e/ou nos itens operacionais (por exemplo, ao invés de se ter duas administrações para dois projetos, pode-se ter uma única que seria menos custosa que as duas anteriores somadas). Será considerado que tais efeitos apenas possam ocorrer entre projetos consecutivos. Esta restrição será relaxada no capítulo 5.

De forma a abranger um maior número de situações, elimina-se a restrição imposta no item 3.1 de que todos os projetos eram considerados numa única localização. Agora, permite-se a existência de diferentes localizações para as versões dos projetos. A especificação da localização de cada versão, para cada projeto, é feita externamente ao modelo de decisão.

A análise do sistema físico permanece a mesma feita no item 3.2; entretanto, o retorno de cada projeto, a função de retorno do conjunto de projetos e, portanto, a formulação do modelo de Programação Dinâmica são alterados. Em função disto, no item 3.6.1 são analisados o retorno de cada projeto e a função de retorno do conjunto de projetos; no item 3.6.2 é revisto o modelo de Programação Dinâmica com variável de estado ampliada, à luz dos resultados de 3.6.1 e, finalmente, no item 3.6.3, é aplicado o modelo de 3.6.2 ao problema de alocação de capital.

3.6.1 Determinação do valor presente líquido de cada projeto e da função de retorno do conjunto de projetos

De forma a determinar o retorno de cada projeto, abaixo é retomado o primeiro dos quatro aspectos levantados para o mesmo fim no item 3.3. A alteração naquele aspecto é a seguinte: a penalização a ser feita no retorno do projeto que recebe transferências deve não só considerar a redução nas entradas de caixa do projeto anterior devido àquelas, mas também o custo de transporte das transferências e todos os demais itens de interação, sejam estes operacionais ou de investimento.

Os outros três aspectos, citados no item 3.3, permanecem inalterados.

O cálculo do valor presente incremental líquido de $P_n(k_n)$ se P_{n+1} foi rejeitado, isto é, a determinação de $r_n(k_n, 0)$ segue o que foi feito no item 3.3, obtendo-se as expressões (3.24) e (3.25) já apresentadas. Há, entretanto, uma diferença de inter

pretação nessas expressões, com relação à situação anterior: agora, os preços são funções da quantidade (vendida ou comprada), do período de tempo e da versão em consideração, pois estas não se situam, necessariamente, na mesma localização e, portanto, os preços de venda e os de compra, referentes a um mesmo produto, poderão variar conforme a versão considerada, por exemplo devido ao custo de transporte. Para manter a maior simplicidade possível na notação, as funções de preço, apresentadas neste item, são as mesmas já utilizadas no item 3.3.

A determinação do valor presente incremental líquido de $P_n(k_n)$ se P_{n+1} foi aceito na versão $k_{n+1} \neq 0$, ou seja, a determinação de $r_n(k_n, k_{n+1})$, é feita a partir das seguintes definições adicionais:

- $\Pi_n^{tr}(k_n, k_{n+1}, t)$: preço unitário de transporte da matéria-prima utilizada em $P_n(k_n)$ e transferida de $P_{n+1}(k_{n+1})$. Este preço é função da quantidade transferida, da localização das duas versões em questão e do período de tempo. ⁽⁶⁾
- $p_n^{(2)}(k_{n+1}, k_n, t)$: interação entre $P_n(k_n)$ e $P_{n+1}(k_{n+1})$ nos demais custos operacionais, como função do período de tempo.
- $p_n^{(3)}(k_{n+1}, k_n, t)$: interação entre $P_n(k_n)$ e $P_{n+1}(k_{n+1})$ na depreciação, como função do período de tempo.
- $v_n(k_{n+1}, k_n, t)$: interação entre $P_n(k_n)$ e $P_{n+1}(k_{n+1})$ nos gastos de capital, como função do período de tempo, para $t=0, \dots, T-1$. Para $t = T$, representa interação nos valores residuais.

(6) Rigorosamente, a forma funcional do preço de transporte é a seguinte:

$$\Pi_n^{tr}(q_n^{tr}(k_{n+1}, k_n, t), k_{n+1}, k_n, t).$$

A expressão de $r_n(k_n, k_{n+1})$, utilizando as definições acima, é a seguinte:

$$r_n(k_n, k_{n+1}) = \sum_{t=0}^T \left\{ (1-u) \left[\Pi_n^V(k_n, t) q_n^S(k_n, t) - \Pi_n^C(k_n, k_{n+1}, t) q_n^C(k_{n+1}, k_n, t) - \right. \right. \\ \left. - \Pi_{n+1}^V(k_{n+1}, t) q_{n+1}^S(k_{n+1}, t) + \Pi_{n+1}^V(k_n, k_{n+1}, t) q_{n+1}^V(k_{n+1}, k_n, t) - \right. \\ \left. - \Pi_n^{\text{tr}}(k_n, k_{n+1}, t) q_n^{\text{tr}}(k_{n+1}, k_n, t) - c_n(k_n, t) - p_n^{(2)}(k_{n+1}, k_n, t) \right] + \\ \left. + d_n(k_n, t) + p_n^{(3)}(k_{n+1}, k_n, t) - a_n(k_n, t) - v_n(k_{n+1}, k_n, t) \right\} (1+i)^{-t}$$

$$\text{válida para } n = 1, \dots, N-1 ; k_n = 0, \dots, K_n \text{ e } k_{n+1} = 1, \dots, K_{n+1} \quad (3.55)$$

Designando $\Pi_n^{\text{tr}}(k_n, k_{n+1}, t) q_n^{\text{tr}}(k_{n+1}, k_n, t)$ por $p_n^{(1)}(k_{n+1}, k_n, t)$, tem-se:

$$r_n(k_n, k_{n+1}) = r_n(k_n, 0) + \sum_{t=0}^T \left\{ (1-u) \left[\Pi_n^C(k_n, t) q_n^C(k_n, t) - \right. \right. \\ \left. - \Pi_n^C(k_n, k_{n+1}, t) q_n^C(k_{n+1}, k_n, t) - \Pi_{n+1}^V(k_{n+1}, t) q_{n+1}^S(k_{n+1}, t) + \right. \\ \left. + \Pi_{n+1}^V(k_n, k_{n+1}, t) q_{n+1}^V(k_{n+1}, k_n, t) - p_n^{(1)}(k_{n+1}, k_n, t) - \right. \\ \left. - p_n^{(2)}(k_{n+1}, k_n, t) \right] + p_n^{(3)}(k_{n+1}, k_n, t) - v_n(k_{n+1}, k_n, t) \right\} (1+i)^{-t} \quad (3.56)$$

Chamando a segunda parcela do 2º membro de (3.56) por $p_n(k_n, k_{n+1})$, vem:

$$r_n(k_n, k_{n+1}) = r_n(k_n, 0) + p_n(k_n, k_{n+1}), \quad (3.57)$$

sendo que a parcela $p_n(k_n, k_{n+1})$ mede a interação de se ter $P_n(k_n)$ e $P_{n+1}(k_{n+1})$, sendo igual a zero se P_{n+1} for rejeitado.

De posse de (3.24), (3.25), e (3.55) ou (3.56), pode-se determinar o retorno de um dado projeto, em uma certa versão, conhecida a decisão tomada com relação ao projeto anterior.

A função de retorno do conjunto de N projetos tem a mesma forma que aquela apresentada em (3.35), ou seja:

$$R_N = R_N(k_N, k_{N-1}, \dots, k_1) = r_N(k_N, 0) + \sum_{n=1}^{N-1} r_n(k_n, k_{n+1}) \quad (3.35)$$

Esta forma de função retorno poderia sugerir que o mesmo modelo desenvolvido no item 3.4 fosse empregado para a solução do problema aqui proposto. Entretanto, isto não é possível diretamente e a razão para tal se prende ao fato de, agora, se ter interações nos gastos de capital. No item 3.6.2 são feitas as devidas adaptações no modelo do item 3.4 para se poder tratar com estas interações.

3.6.2 Modelo de Programação Dinâmica com variável de estado ampliada (modificado)

A modificação básica a ser introduzida no modelo do item 3.4 diz respeito à função de transição (3.36). Tem-se:

$$X_{n-1} = t_n(X_n, D_n, D_{n+1}), \quad n=1, \dots, N-1 \text{ e } X_{N-1} = t_N(X_N, D_N) \quad (3.58)$$

O diagrama funcional da figura 3.2, as demais definições e reornos dos estágios permanecem os mesmos já apresentados no item 3.4.

A função de retorno dos N estágios é dada por (3.39):

$$R_N = r_N(X_N, D_N) * r_{N-1}(X_{N-1}, D_{N-1}, D_N) * r_{N-2}(X_{N-2}, D_{N-2}, D_{N-1}) * \dots * r_2(X_2, D_2, D_3) * r_1(X_1, D_1, D_2) \quad (3.39)$$

Agora, empregando (3.58), obtêm-se:

$$R_N = r_N(X_N, D_N) * r_{N-1}(X_N, D_N, D_{N-1}) * r_{N-2}(X_N, D_N, D_{N-1}, D_{N-2}) * \dots * r_2(X_N, D_N, \dots, D_2) * r_1(X_N, D_N, \dots, D_1) \quad (3.59)$$

ou

$$R_N = R_N(X_N, D_N, D_{N-1}, \dots, D_1) \quad (3.60)$$

As funções obtidas em (3.59) e (3.60) são as mesmas de (3.40) e (3.41), respectivamente.

Admitindo a hipótese de monotonicidade de R_N e as demais definições do item 3.4, obtêm-se as seguintes equações recursivas para a solução do problema:

$$f_0(X_0, D_1) \text{ dada}$$

$$f_n(X_n, D_{n+1}) = \max_{D_n \in \Gamma_n} [r_n(X_n, D_n, D_{n+1}) * f_{n-1}(t_n(X_n, D_n, D_{n+1}), D_n)] ,$$

$$\text{obtendo-se } D_n = D_n(X_n, D_{n+1}), \quad n=1, \dots, N-1 \quad (3.61)$$

$$f_N(X_N) = \max_{D_N \in \Gamma_N} [r_N(X_N, D_N) * f_{N-1}(t_N(X_N, D_N), D_N)] , \quad \text{obtendo-se}$$

$$\hat{D}_N = D_N(X_N) \quad (3.62)$$

onde Γ_n é o conjunto dos valores possíveis de D_n , $n=1, \dots, N$.

A partir da obtenção de $\hat{D}_N = D_N(X_N)$ em (3.62), isto é, da decisão ótima no estágio N, como função do estado inicial, são de terminadas as demais decisões e estados ótimos, através de (3.58) e (3.61), ou seja, $\hat{X}_{n-1} = t_n(\hat{X}_n, \hat{D}_n, \hat{D}_{n+1})$, $n = N, \dots, 1$ ⁽⁷⁾ e $\hat{D}_n = D_n(\hat{X}_n, \hat{D}_{n+1})$, $n = N-1, \dots, 1$.

No item 3.6.3 são aplicados os resultados acima para a solução do problema de alocação de capital.

3.6.3 Modelo Básico de Programação Dinâmica para a solução do problema de alocação de capital

A aplicação dos resultados do item 3.6.2 ao problema de alocação de capital, requer algumas definições adicionais:

(7) para $n = N$, tem-se $\hat{X}_{N-1} = t_N(\hat{X}_N, \hat{D}_N)$.

- $A_n(k_n, 0)$: vetor cujos T componentes são os dispêndios de capital, em cada período de tempo, de $P_n(k_n)$ se P_{n+1} foi rejeitado.

$$A_n(k_n, 0) = (a_n(k_n, 0, 0), a_n(k_n, 0, 1), \dots, a_n(k_n, 0, T-1)),$$

$n = 1, \dots, N$ e $k_n = 0, \dots, K_n$, com $a_n(k_n, 0, t)$ definido analogamente a (3.21), sendo

$$A_n(0, 0) = (0, \dots, 0) = \vec{0}$$

- $A_n(k_n, k_{n+1})$: vetor cujos T componentes são os dispêndios de capital, em cada período de tempo, de $P_n(k_n)$ se P_{n+1} foi aceito na versão $k_{n+1} \neq 0$.

$$A_n(k_n, k_{n+1}) = (a_n(k_n, k_{n+1}, 0), a_n(k_n, k_{n+1}, 1), \dots, a_n(k_n, k_{n+1}, T-1)),$$

para $n=1, \dots, N-1$; $k_n=0, \dots, K_n$ e $k_{n+1}=1, \dots, K_{n+1}$,

com

$$a_n(k_n, k_{n+1}, t) = a_n(k_n, 0, t) + v_n(k_{n+1}, k_n, t), t=0, \dots, T-1 \quad (3.63)$$

sendo $A_n(0, k_{n+1}) = \vec{0}$

Definindo

$$V_n(k_n, k_{n+1}) = (v_n(k_{n+1}, k_n, 0), v_n(k_{n+1}, k_n, 1), \dots, v_n(k_{n+1}, k_n, T-1)), \quad \text{para} \\ n=1, \dots, N-1; k_n=0, \dots, K_n \text{ e } k_{n+1}=1, \dots, K_{n+1} \quad (3.64)$$

obtém-se:

$$A_n(k_n, k_{n+1}) = A_n(k_n, 0) + V_n(k_n, k_{n+1}) \quad (3.65)$$

Em (3.21) admitiu-se que $a_n(k_n, t) \geq 0$ o que implica em $A_n(k_n, 0) \geq \vec{0}$, sendo a desigualdade vetorial tomada elemento a elemento. Para (3.65) é admitido que $A_n(k_n, k_{n+1}) \geq \vec{0}$, ou seja, a interação nos gastos de capital, existente entre projetos consecutivos, nunca é suficiente para anular $A_n(k_n, 0)$ e ainda aumentar o capital disponível.

Adicionalmente, sejam X_N e X_n tal como definidos no item 3.5. Agora, tem-se:

$$\begin{aligned} X_n &= X_{n+1} - A_{n+1}(k_{n+1}, k_{n+2}), \quad n=0, \dots, N-2; \quad k_{n+1}=0, \dots, K_{n+1}; \quad k_{n+2}=0, \dots, K_{n+2} \text{ e} \\ X_{N-1} &= X_N - A_N(k_N, 0), \quad k_N=0, \dots, K_N \end{aligned} \quad (3.66)$$

As equações recursivas para resolver o problema são:

$$f_0(X_0, k_1) = 0, \quad \forall X_0 \geq \vec{0} \text{ e } \forall k_1 \quad (3.67)$$

$$f_n(X_n, k_{n+1}) = \max_{k_n=0, \dots, K_n} [r_n(k_n, k_{n+1}) + f_{n-1}(X_n - A_n(k_n, k_{n+1}), k_n)],$$

$$\text{obtendo-se } k_n = k_n(X_n, k_{n+1}), \text{ para } n=1, \dots, N-1 \quad (3.68)$$

$$f_N(X_N) = \max_{k_N=0, \dots, K_N} [r_N(k_N, 0) + f_{N-1}(X_N - A_N(k_N, 0), k_N)],$$

$$\text{obtendo-se } \hat{k}_N = k_N(X_N) \quad (3.69)$$

sendo $r_n(k_n, k_{n+1})$ definido por (3.24), (3.25) e (3.55) ou (3.56), $r_N(k_N, 0)$ definido por (3.24) e (3.25), $A_n(k_n, k_{n+1})$ definido por (3.65), $A_N(k_N, 0)$ definido a partir de (3.21), com

$$f_{n-1}(X_n - A_n(k_n, k_{n+1}), k_n) = -\infty \quad (3.70)$$

se algum componente de $(X_n - A_n(k_n, k_{n+1}))$ for negativo, $n=1, \dots, N$.

Em (3.67), a desigualdade vetorial é tomada elemento a elemento.

Quando da avaliação de $f_n(X_n, k_{n+1})$ por (3.68), X_n pode assumir valores viáveis numa região, cujo limite inferior é o vetor nulo e cujo limite superior é dado por $(X_N - A_{n+1}(k_{n+1}, 0))$. Uma região será estabelecida para cada particular valor de k_{n+1} , $k_{n+1} = 0, \dots, K_{n+1}$. Embora o limite superior da região seja o mesmo que o apresentado no item 3.5, sua determinação não é tão imediata como aquela de 3.5, e isto será feito no item 3.7.

A obtenção da política ótima de decisão é feita de forma análoga ao que foi apresentado no item 3.5. Uma vez determinada $\hat{k}_N = k_N(X_N)$ em (3.69) utilizam-se, alternadamente, as funções $\hat{X}_n = \hat{X}_{n+1} - A_{n+1}(\hat{k}_{n+1}, \hat{k}_{n+2})$ e $\hat{k}_n = k_n(\hat{X}_n, \hat{k}_{n+1})$.

Os três casos particulares de alocação de capital apresentados em 3.5 podem, logicamente, ser derivados do modelo aqui desenvolvido, pois este é mais geral ainda que o do item 3.5.

No item 3.7 a seguir é desenvolvido o algoritmo de solução para o modelo do item 3.6.3.

3.7 ALGORITMO DE SOLUÇÃO

Retomando as equações recursivas (3.68), deve-se notar que, a cada estágio, há um total de $(T+1)$ variáveis de estado a considerar: T dessas variáveis referem-se às restrições de capital e

uma delas à decisão no estágio anterior. No estágio N , como X_N é dado, isto não ocorre.

Em geral, a utilização do algoritmo convencional da Programação Dinâmica, em problemas nos quais o número de variáveis de estado é maior do que três, é seriamente limitada, pois a quantidade de operações necessárias à solução do problema cresce rapidamente. Este algoritmo convencional consiste no cálculo do retorno ótimo para todos os possíveis valores das variáveis de estado.

No caso em questão, embora se esteja trabalhando com um problema que pode ter bem mais do que três variáveis de estado, é possível resolvê-lo com um esforço bem menor do que aquele que seria necessário se se utilizasse o algoritmo convencional. Isto é conseguido através da construção de um outro algoritmo que explora a seguinte característica de $f_n(X_n, k_{n+1})$ definida em (3.68): *fixada k_{n+1} , $f_n(X_n, k_{n+1})$ é uma função escada, não-decrescente, de X_n .* Considere-se (3.67):

$$f_0(X_0, k_1) = 0, \quad \forall X_0 \geq \vec{0} \quad \text{e} \quad \forall k_1 \quad (3.67)$$

A aplicação de (3.68) para $n = 1$, k_2 fixado, e para o capital restante $X_1^{(1)} \geq \vec{0}$, com a desigualdade vetorial tomada elemento a elemento, fornece:

$$f_1(X_1^{(1)}, k_2) = \max_{k_1=0, \dots, K_1} [r_1(k_1, k_2) + f_0(X_1^{(1)} - A_1(k_1, k_2), k_1)] \quad (3.71)$$

Suponha-se que, para $X_1 = X_1^{(1)}$ em (3.71), a decisão ótima seja $k_1 = k_1^{(1)}$. Considere-se, agora, o capital restante $X_1^{(2)} \geq X_1^{(1)}$, com ao menos uma desigualdade estrita. Então, para o mesmo k_2 , poderá ocorrer:

- (a) $f_1(x_1^{(2)}, k_2) = f_1(x_1^{(1)}, k_2)$ se exatamente os mesmos pontos⁽⁸⁾ viáveis com capital restante $x_1^{(2)}$, também o forem para $x_1^{(1)}$; neste caso, $k_1^{(2)} = k_1^{(1)}$.
- (b) $f_1(x_1^{(2)}, k_2) = f_1(x_1^{(1)}, k_2)$ se a decisão ótima $k_1^{(2)} = k_1^{(1)}$; embora o número de pontos viáveis agora seja maior, isto pode ocorrer se os pontos viáveis adicionais tiverem retorno menor ou igual⁽⁹⁾ àquele referente a $k_1^{(1)}$.
- (c) $f_1(x_1^{(2)}, k_2) > f_1(x_1^{(1)}, k_2)$ se a decisão ótima $k_1^{(2)} \neq k_1^{(1)}$; isto podendo ocorrer se, dentre os pontos viáveis adicionais, houver ao menos um com retorno maior que aquele gerado por $k_1^{(1)}$.

De (a), (b) e (c) conclui-se que para $x_1^{(2)} \geq x_1^{(1)}$, com ao menos uma desigualdade estrita, tem-se

$$f_1(x_1^{(2)}, k_2) \geq f_1(x_1^{(1)}, k_2), \text{ com } k_2 \text{ fixado.}$$

O resultado acima foi obtido, basicamente, pelo fato de que os projetos viáveis com capital $x_1^{(1)}$ também são viáveis com capital $x_1^{(2)}$.

A mesma conclusão pode ser obtida para cada valor de k_2 .

Agora, seja $f_{n-1}(x_{n-1}, k_n)$ uma função não-decrescente de x_{n-1} , para cada k_n .

(8) De forma geral, o termo "ponto" significa o total de capital necessário à aceitação de uma determinada combinação de projetos.

(9) Evidentemente, poderá ocorrer a existência de ótimos alternativos. Sua consideração, entretanto, não é relevante neste momento.

Suponha-se que, para $X_n = X_n^{(1)}$ em (3.68), a decisão ótima seja $k_n = k_n^{(1)}$. Considere-se, agora, o capital restante $X_n^{(2)} \geq X_n^{(1)}$, com ao menos uma desigualdade estrita. Então, para o mesmo k_{n+1} , ter-se-á:

$$f_{n-1}(X_n^{(2)} - A_n(k_n^{(1)}, k_{n+1}), k_n^{(1)}) \geq f_{n-1}(X_n^{(1)} - A_n(k_n^{(1)}, k_{n+1}), k_n^{(1)}) \quad (3.72)$$

pois $f_{n-1}(X_{n-1}, k_n)$ é função não-decrescente de X_{n-1} , para k_n fixado.

Adicionando $r_n(k_n^{(1)}, k_{n+1})$ aos dois membros de (3.72), vem:

$$r_n(k_n^{(1)}, k_{n+1}) + f_{n-1}(X_n^{(2)} - A_n(k_n^{(1)}, k_{n+1}), k_n^{(1)}) \geq r_n(k_n^{(1)}, k_{n+1}) + f_{n-1}(X_n^{(1)} - A_n(k_n^{(1)}, k_{n+1}), k_n^{(1)}) \quad (3.73)$$

O 2º membro de (3.73) é igual a $f_n(X_n^{(1)}, k_{n+1})$, logo:

$$r_n(k_n^{(1)}, k_{n+1}) + f_{n-1}(X_n^{(2)} - A_n(k_n^{(1)}, k_{n+1}), k_n^{(1)}) \geq f_n(X_n^{(1)}, k_{n+1}) \quad (3.74)$$

Quando da operação de maximização, em (3.68), para se determinar $f_n(X_n^{(2)}, k_{n+1})$, um dos termos candidatos ao máximo é exatamente o 1º membro de (3.74). Então:

$$f_n(X_n^{(2)}, k_{n+1}) \geq r_n(k_n^{(1)}, k_{n+1}) + f_{n-1}(X_n^{(2)} - A_n(k_n^{(1)}, k_{n+1}), k_n^{(1)}) \quad (3.75)$$

Finalmente, combinando (3.74) e (3.75), obtém-se:

$$f_n(X_n^{(2)}, k_{n+1}) \geq f_n(X_n^{(1)}, k_{n+1}) \quad (3.76)$$

A desigualdade (3.76) pode ser estendida, também, para o caso em que $n = N$ pois $f_N(X_N)$ é o mesmo que $f_N(X_N, 0)$.⁽¹⁰⁾

Até aqui, mostrou-se que $f_n(X_n, k_{n+1})$ de (3.68), bem como $f_N(X_N)$ de (3.69), são funções não-decrescentes de X_n e de X_N , respectivamente, sendo que, no primeiro caso, isto ocorre para cada k_{n+1} .

Agora, retomando (3.67), pode-se verificar que $f_0(X_0, k_1)$ é uma função escada com uma única descontinuidade no ponto $\vec{0}$.

De (3.68), para $n = 1$, observa-se que, para $X_1 = \vec{0}$, $f_1(X_1, k_2) = 0$, para cada k_2 .

Seja, agora, o capital restante $X_1^{(1)} \geq \vec{0}$, com ao menos uma desigualdade estrita e k_2 fixada. Utilizando (3.70) em combinação com (3.68) para $n = 1$, pode-se separar as versões k_1 em dois conjuntos: o daquelas que levam a pontos viáveis (B) e o daquelas que levam a pontos inviáveis (\bar{B}). Logicamente, B e \bar{B} são complementares com relação ao conjunto de todas as versões k_1 . O conjunto B conterá, ao menos, a versão $k_1 = 0$. Com esta separação, a operação de maximização se reduz a:

$$f_1(X_1^{(1)}, k_2) = \max_{k_1 \in B} [r_1(k_1, k_2)] \quad (3.77)$$

Sendo B não vazio, a operação de maximização levará à decisão ótima $k_1^{(1)}$. Dois casos, basicamente, poderão ocorrer:

(10) No caso de $f_N(X_N)$, como X_N é dado, a desigualdade (3.76) deve ser considerada para quaisquer $X_N^{(2)}$ e $X_N^{(1)}$ que não superem X_N , em cada um dos períodos de tempo.

- (a) $k_1^{(1)} = 0$. Esta será a solução de (3.77) se \underline{B} contiver apenas a versão $k_1 = 0$, ou, se \underline{B} contiver outras versões além da versão $k_1 = 0$, mas estas outras versões tiverem retorno $r_1(k_1, k_2) \leq 0$ (neste caso pode haver ótimos alternativos). Entretanto, $k_1^{(1)} = 0$ é alcançada com $X_1 = \vec{0}$, o que leva à conclusão de que qualquer capital restante pertencente ao intervalo $[\vec{0}, X_1^{(1)}]$ ⁽¹¹⁾, em cada período de tempo, levará à mesma solução $k_1^{(1)} = 0$ e ao mesmo $f_1(X_1, k_2) = 0$. Como $\vec{0}$ é um ponto de descontinuidade de $f_1(X_1, k_2)$, entre este ponto e $X_1^{(1)}$, $f_1(X_1, k_2)$ não mudará de valor, sendo contínua neste intervalo. Acima foi dito que $k_1^{(1)} = 0$, mesmo se outras versões viáveis levarem a $r_1(k_1, k_2) = 0$, o que implicaria em $f_1(X_1^{(1)}, k_2) = 0$. Entretanto, como qualquer versão $k_1 \neq 0$ exige um capital $A_1(k_1, k_2) \geq \vec{0}$, com ao menos um período em que a desigualdade é estrita, significa que a versão leva ao mesmo retorno que $k_1 = 0$ e exige maior gasto de capital que a mesma. Esta versão não dará origem a ponto de descontinuidade pois corresponderá a um ponto pertencente ao intervalo $(\vec{0}, X_1^{(1)}]$;
- (b) $k_1^{(1)} \neq 0$. Esta será a solução de (3.77) se \underline{B} contiver mais do que um elemento e ao menos um deles levar a $r_1(k_1^{(1)}, k_2) > 0$. Então, para qualquer capital restante pertencente ao intervalo $[A_1(k_1^{(1)}, k_2), X_1^{(1)}]$, em cada período de tempo, ter-se-á a mesma solução $k_1^{(1)}$. O ponto $A_1(k_1^{(1)}, k_2)$ será ponto de descontinuidade de $f_1(X_1, k_2)$ e, entre este ponto e $X_1^{(1)}$, $f_1(X_1, k_2)$ será contínua. Da mesma forma que no item (a), poderá haver outros pontos que levem ao mesmo $r_1(k_1^{(1)}, k_2)$. Caso isto ocorra, pode-se ter novos pontos de descontinuidade ou pontos que se localizam em patamares de $f_1(X_1, k_2)$.

(11) Os símbolos "[" e "]" significam a inclusão do limite inferior e superior de um intervalo, respectivamente. Os símbolos "(" e ")" significam a exclusão dos mesmos.

De acordo com (a) e (b) é possível obter-se uma conclusão geral: fixado k_2 , e considerando o ponto de descontinuidade de $f_0(X_0, k_1)$, pode-se dizer que $f_1(X_1, k_2)$ apenas poderá mudar de valor (sofrer uma descontinuidade) nos pontos correspondentes aos vetores de gastos de capital de k_1 , ou seja, $A_1(k_1, k_2)$, $k_1 = 1, \dots, K_1$, além do ponto $\vec{0}$, que corresponde a $k_1 = 0$. Nos pontos intermediários, $f_1(X_1, k_2)$ será contínua ⁽¹²⁾.

Designando por $F_0(k_1)$ o conjunto dos pontos de descontinuidade de $f_0(X_0, k_1)$, tem-se:

$$F_0(k_1) = \{\vec{0}\}, \forall k_1 \quad (3.78)$$

Chamando de $F_1(k_2)$ os pontos de descontinuidade de $f_1(X_1, k_2)$, tem-se:

$$F_1(k_2) \subset \{\vec{0}, A_1(1, k_2), A_1(2, k_2), \dots, A_1(K_1, k_2)\} \quad (3.79)$$

para cada $k_2 = 0, 1, \dots, K_2$. Utilizou-se o símbolo " \subset " ao invés de "=" pois, dentre os pontos possíveis, alguns poderão ser inviáveis, enquanto que outros poderão ser dominados. Genericamente, um ponto é dominado por outro se, exigindo um gasto de capital maior ou igual ao do outro, em cada período de tempo, gera um retorno menor que o do outro ponto ⁽¹³⁾.

(12) Isto pode ser interpretado da seguinte forma: se X_1 não corresponder a um dos pontos $A_1(k_1, k_2)$ e como necessariamente um desses pontos (inclusive $\vec{0}$) fornecerá o retorno ótimo $f_1(X_1, k_2)$, haverá, então, uma sobra de capital que será aplicada no mercado à taxa i de juros e que terá zero como valor presente, correspondendo a $f_0(X_0, k_1)$.

(13) Esta definição será formalizada, posteriormente, em termos matemáticos.

Uma vez eliminados, do segundo membro da relação (3.79), os pontos inviáveis e os dominados, ter-se-á o conjunto $F_1(k_2)$.

Agora, sejam $F_{n-1}(k_n)$, $k_n = 0, 1, \dots, K_n$, os conjuntos de pontos, no domínio de $f_{n-1}(X_{n-1}, k_n)$, dada por (3.68), em que esta sofre descontinuidade. Considerando o projeto P_n , k_{n+1} fixado, o capital restante $X_n^{(1)}$ e o conjunto B de versões k_n viáveis, a equação recursiva (3.68) fica:

$$f_n(X_n^{(1)}, k_{n+1}) = \max_{k_n \in B} [r_n(k_n, k_{n+1}) + f_{n-1}(X_n^{(1)} - A_n(k_n, k_{n+1}), k_n)] \quad (3.80)$$

Sendo $k_n^{(1)}$ a solução de (3.80), ter-se-á:

$$f_n(X_n^{(1)}, k_{n+1}) = r_n(k_n^{(1)}, k_{n+1}) + f_{n-1}(X_n^{(1)} - A_n(k_n^{(1)}, k_{n+1}), k_n^{(1)}) \quad (3.81)$$

A $k_n = k_n^{(1)}$ corresponderá o conjunto de pontos $F_{n-1}(k_n^{(1)})$. Caso $(X_n^{(1)} - A_n(k_n^{(1)}, k_{n+1}))$ corresponda a um elemento de $F_{n-1}(k_n^{(1)})$, estar-se-á combinando o gasto de capital de $k_n^{(1)}$ com um ponto de descontinuidade de $f_{n-1}(X_{n-1}, k_n^{(1)})$. Caso a condição acima não se verifique, o ponto $(X_n^{(1)} - A_n(k_n^{(1)}, k_{n+1}))$ se localizará em um dos patamares de $f_{n-1}(X_{n-1}, k_n^{(1)})$, que foi gerado por algum ponto de descontinuidade da mesma e que requer gasto de capital menor ou igual a $(X_n^{(1)} - A_n(k_n^{(1)}, k_{n+1}))$, com ao menos uma desigualdade estrita. Isto leva à conclusão de que apenas devem ser considerados como possíveis pontos de descontinuidade de $f_n(X_n, k_{n+1})$, aqueles dados pela seguinte relação recursiva:

$$F_n(k_{n+1}) \subset \left\{ [A_n(0, k_{n+1}) \oplus F_{n-1}(0)] \cup [A_n(1, k_{n+1}) \oplus F_{n-1}(1)] \cup \dots \cup [A_n(K_n, k_{n+1}) \oplus F_{n-1}(K_n)] \right\},$$

$$\text{para } k_{n+1} = 0, 1, \dots, K_{n+1} \text{ e } n = 1, \dots, N-1 \quad (3.82)$$

onde o símbolo " \oplus " significa formar todas as somas possíveis de exatamente um elemento de $F_{n-1}(k_n)$ com o $A_n(k_n, k_{n+1})$ correspondente, $k_n = 0, 1, \dots, K_n$.

Reescrevendo (3.82) de forma mais compacta, vem:

$$F_n(k_{n+1}) \subset \bigcup_{k_n=0}^{K_n} [A_n(k_n, k_{n+1}) \oplus F_{n-1}(k_n)] \quad (3.83)$$

Para $n = N$, tem-se:

$$F_N(0) = F_N \subset \bigcup_{k_N=0}^{K_N} [A_N(k_N, 0) \oplus F_{N-1}(k_N)] \quad (3.84)$$

A obtenção de $F_n(k_{n+1})$ de acordo com (3.82) ou (3.83), e a de F_N segundo (3.84) é feita como foi apontado para $F_1(k_2)$, ou seja, eliminando-se pontos inviáveis e pontos dominados.

Uma vez obtido F_N , a solução do problema de alocação de capital é feita selecionando o ponto $Z \in F_N$, tal que:

$$f_N(Z) = \max (f_N(\beta_N) \mid \beta_N \in F_N) = f_N(X_N) \quad (3.85)$$

Os conjuntos F 's são chamados, na literatura (Morin e Esogbue (18), Morin e Marsten (19), e Morin e Marsten (20)), de *espaços de estado embutidos*. O nome provém do fato de cada um dos F 's estar realmente embutido no espaço T -dimensional dado por:

$$\bar{F}_n(k_{n+1}) = \left\{ X_n \mid (\text{para todo } t \in [0, T-1]), X_n(t) \in [0, X_N(t) - a_{n+1}(k_{n+1}, 0, t)] \right\},$$

para $n=1, \dots, N-1$ e $k_{n+1}=0, 1, \dots, K_{n+1}$ (3.86)

sendo $X_n(t)$ e $X_N(t)$ as componentes de X_n e X_N , respectivamente, correspondentes ao período de tempo t . No último estágio, embora X_N seja dado, são gerados todos os pontos de descontinuidade viáveis e não-dominados, isto é, F_N contém a solução do problema para qualquer capital inicial menor ou igual, vetorialmente, que X_N e, por isso, tem-se também um espaço \bar{F}_N no qual F_N está embutido, definido de forma análoga a $\bar{F}_n(k_{n+1})$ em (3.86).

A identificação dos espaços F 's, a cada estágio, tem como objetivo eliminar a busca exaustiva que seria necessária pelo algoritmo convencional da Programação Dinâmica, que se daria sobre os \bar{F} 's.

O uso de espaços de estado embutidos para a solução de problemas de alocação de capital a projetos, através da Programação Dinâmica, foi feito, inicialmente, por Weingartner (32) e Weingartner e Ness (33) ao Caso Particular 3 - Projetos Independentes, cada um com apenas duas versões possíveis, descrito no item 3.5. Posteriormente a esses dois trabalhos, Nemhauser (22), Nemhauser e Ullmann (23) e Ullmann (30) também o empregaram. O trabalho de Weingartner e Ness (33) procura identificar meios para tornar mais eficiente a busca da solução ótima do problema, mas o algoritmo básico lá empregado segue aquele desenvolvido em Weingartner (32). O trabalho de Nemhauser (22) contém, em síntese, a formulação das equações recursivas para o mesmo problema analisado por Weingartner (32) e a solução de um exemplo numérico, sendo que em Nemhauser e Ullmann (23), e Ullmann (30) foi desenvolvida uma forma diferente daquela utilizada por Weingartner (32), para gerar os conjuntos F 's. Nemhauser e Ullmann (23), e Ullmann (30), também estenderam o modelo referente ao Caso Particular 3 de forma a considerar projetos independentes com várias versões para cada projeto, ou seja, o Caso Particular 1, descrito no item 3.5, e, também, projetos interdependentes (com interações entre quaisquer pares de projetos), cada

projeto podendo ser aceito numa única versão. Em ambas as extensões, foi usada a idéia de espaços de estado embutidos.

A designação "espaços de estado embutidos" em problemas semelhantes ao que se está estudando, onde é empregada a Programação Dinâmica, foi feita nos trabalhos de Morin e Esogbue (18), Morin e Marsten (19) e Morin e Marsten (20).

Em Morin e Esogbue (18) é desenvolvido um modelo geral utilizando espaços de estado embutidos. Esse modelo geral é, então, empregado na solução de dois casos particulares, a saber: (a) Problema da mochila com várias restrições, não-linear e com função objetivo e restrições separáveis; (b) Problema de otimização combinatório com aplicações na análise de expansão da capacidade de sistemas de recursos hídricos de larga escala. O caso particular (a), acima, adaptado à análise de projetos, leva a uma classe especial de problemas que pode ser considerada como sendo contida pelo Caso Particular 1 definido no item 3.5.

A pesquisa de Morin e Marsten (19) analisa detalhadamente o problema da mochila citado no parágrafo precedente, apresenta um algoritmo para resolvê-lo bem como experiência computacional com o mesmo. Possíveis formas de redução de tempo de processamento, assim como outras possíveis áreas de aplicação do enfoque de espaços de estado embutidos, são lá apresentadas.

O trabalho de Morin e Marsten (20) trata da utilização de critérios de relaxação e eliminação para identificar e eliminar estados cujas correspondentes subpolíticas não podem levar a políticas ótimas, de forma a reduzir armazenagem de dados e tempo de processamento em problemas de Programação Dinâmica com variáveis discretas. Um dos problemas analisados é o da mochila, já citado, em que também é utilizado o enfoque de espaços de estado embutidos.

O uso de espaços de estado embutidos que se faz neste trabalho, embora a um problema específico de alocação de capital, pode

ser visto como tendo um maior grau de generalização do que aquele feito no problema da mochila acima citado.

Retomando a construção do algoritmo de solução, são explicitados, a seguir, dois testes necessários à eliminação, em cada estágio, de pontos inviáveis e pontos dominados para que se possa determinar os conjuntos $F_n(k_{n+1})$. Para que isto seja feito, é introduzida a seguinte definição:

$$F_{n-1}(k_n) = \left\{ \left[\beta_{n-1}^{(0)}(k_n); f_{n-1}^{(0)}(\beta_{n-1}^{(0)}(k_n), k_n) \right], \left[\beta_{n-1}^{(1)}(k_n); f_{n-1}^{(1)}(\beta_{n-1}^{(1)}(k_n), k_n) \right], \dots, \right. \\ \left. \left[\beta_{n-1}^{(\ell)}(k_n); f_{n-1}^{(\ell)}(\beta_{n-1}^{(\ell)}(k_n), k_n) \right] \right\},$$

para $n = 2, \dots, N+1$, $k_n = 0, 1, \dots, K_n$, ⁽¹⁴⁾ sendo

$$F_0(k_1) = \{(\vec{0}, 0)\}, \quad \forall k_1 \quad (3.87)$$

onde:

- $\beta_{n-1}^{(j)}(k_n)$: ponto de índice j , pertencente a $F_{n-1}(k_n)$, $j=0, \dots, \ell$
- $f_{n-1}^{(j)}(\beta_{n-1}^{(j)}(k_n), k_n)$: retorno ótimo para o capital $\beta_{n-1}^{(j)}(k_n)$,
 $j = 0, \dots, \ell$

Os testes são os seguintes:

(14) Exceto para $n = N+1$ em que $k_{N+1} = 0$, necessariamente.

(a) Teste de viabilidade

Para k_{n+1} fixado, o ponto $A_n(k_n, k_{n+1}) + \beta_{n-1}^{(j)}(k_n)$ é viável se:

$$A_n(k_n, k_{n+1}) + \beta_{n-1}^{(j)}(k_n) \leq X_N - A_{n+1}(k_{n+1}, 0), \quad \text{para } n=1, \dots, N-1;$$

$$k_n=0, \dots, K_n; \quad k_{n+1}=0, \dots, K_{n+1} \quad \text{e } j=0, \dots, \ell \quad (3.88)$$

sendo que para $n = N$, vale o seguinte

$$A_N(k_N, 0) + \beta_{N-1}^{(j)}(k_N) \leq X_N, \quad (3.89)$$

sendo as desigualdades vetoriais tomadas elemento a elemento, para $t = 0, \dots, T-1$.

O segundo membro da desigualdade de (3.88) já surgiu em (3.86) e, para cada período de tempo, vale $X_N(t) - a_{n+1}(k_{n+1}, 0, t)$.

A justificativa para (3.88) está ligada, diretamente, à avaliação de $f_n(X_n, k_{n+1})$ por (3.68) e de $f_N(X_N)$ por (3.69). Quando se vai determinar $f_n(X_n, k_{n+1})$, deve-se considerar que, para cada k_{n+1} , conhece-se a decisão tomada no estágio anterior. Isto significa que o capital restante, X_n , informação de entrada para o estágio n , deve levar em conta que algum capital (eventualmente nenhum) foi gasto no estágio $(n+1)$.

Substituindo em (3.66) as expressões de $X_{n+1}, X_{n+2}, \dots, X_{N-1}$, obtém-se:

$$X_n = X_N - A_N(k_N, 0) - A_{N-1}(k_{N-1}, k_N) - \dots - A_{n+1}(k_{n+1}, k_{n+2}) \quad (3.90)$$

Utilizando (3.65) em (3.90) e rearranjando, vem:

$$X_n = X_N - A_{n+1}(k_{n+1}, 0) - \sum_{n=n+2}^N [A_n(k_n, 0) + V_{n-1}(k_{n-1}, k_n)] \quad (3.91)$$

Os termos entre colchetes de (3.91) representam o gasto de capital de cada projeto isoladamente mais a interação com o projeto seguinte. Assim como foi feito para (3.65), aqui admite-se que cada uma dessas somas seja maior ou igual ao vetor nulo, desigualdade válida para cada período de tempo. Com k_{n+1} fixado, $A_{n+1}(k_{n+1}, 0)$ é dado e, para se saber o valor máximo de X_n , X_n^{\max} , é necessário minimizar o termo englobado pela somatória. Como todos os termos abrangidos são $\geq \vec{0}$, o seu mínimo é alcançado para $k_N = k_{N-1} = k_{N-2} = \dots = k_{n+2} = 0$, o que leva a:

$$X_n^{\max} = X_N - A_{n+1}(k_{n+1}, 0), \text{ para } n = 0, \dots, N-1 \quad (3.92)$$

Um ponto será viável se, em cada período de tempo, dispende menos capital que o segundo membro de (3.92), isto é, nas condições de (3.88) e (3.89).

(b) *Teste de dominância*

Uma vez obtida a lista de pontos viáveis, para um dado estágio, considerando uma decisão específica no estágio anterior, deve-se eliminar, desta lista, pontos dominados, ou seja, pontos que não poderão fazer parte da solução do problema de alocação de capital, para qualquer capital inicial menor ou igual, vetorialmente, que X_N .

Especificamente, para k_{n+1} fixado, considere-se dois pontos candidatos ao conjunto $F_n(k_{n+1})$. Sejam eles dados por

$$A_n(k'_n, k_{n+1}) + \beta_{n-1}^{(j')} (k'_n) \quad e \quad A_n(k''_n, k_{n+1}) + \beta_{n-1}^{(j'')} (k''_n) .$$

O ponto $A_n(k'_n, k_{n+1}) + \beta_{n-1}^{(j')} (k'_n)$ domina $A_n(k''_n, k_{n+1}) + \beta_{n-1}^{(j'')} (k''_n)$

se

$$(3.93) \left\{ \begin{array}{l} r_n(k'_n, k_{n+1}) + f_{n-1}^{(j')} (\beta_{n-1}^{(j')} (k'_n), k'_n) > r_n(k''_n, k_{n+1}) + f_{n-1}^{(j'')} (\beta_{n-1}^{(j'')} (k''_n), k''_n) \\ e \\ A_n(k'_n, k_{n+1}) + \beta_{n-1}^{(j')} (k'_n) \leq A_n(k''_n, k_{n+1}) + \beta_{n-1}^{(j'')} (k''_n) \end{array} \right.$$

sendo a desigualdade vetorial considerada elemento a elemento.

Uma vez que, dos candidatos ao conjunto $F_n(k_{n+1})$, tenham sido eliminados os pontos inviáveis e dominados, obtém-se $F_n(k_{n+1})$, ou seja, a lista de pontos eficientes para o estágio n , com decisão anterior k_{n+1} . Os pontos de $F_n(k_{n+1})$ serão pontos de descontinuidade de $f_n(x_n, k_{n+1})$ ou pontos que se localizam em patamares de $f_n(x_n, k_{n+1})$ que será definido, para um ponto eficiente genérico:

$$f_n(A_n(k_n, k_{n+1}) + \beta_{n-1}^{(j)} (k_n), k_{n+1}) = r_n(k_n, k_{n+1}) + f_{n-1}^{(j)} (\beta_{n-1}^{(j)} (k_n), k_n) \quad (3.94)$$

O conjunto de pares formados por um ponto de $F_n(k_{n+1})$ e o correspondente retorno ótimo, dará origem ao conjunto $\mathcal{F}_n(k_{n+1})$.

O conseguimento da solução do problema se dá quando da obtenção de F_N e, conseqüentemente, de \mathcal{F}_N . Em \mathcal{F}_N são obtidos os pontos eficientes para o conjunto de N estágios. A partir daí é possível, para cada ponto eficiente, traçar a política ótima de deci

são. Se apenas o ponto que leva ao maior retorno possível for de interesse ⁽¹⁵⁾, então utiliza-se (3.85) ou, o que é equivalente, dentre os índices constantes de \mathcal{F}_N , seleciona-se $\hat{\ell}$ tal que

$$f_N^{(\hat{\ell})}(\beta_N^{(\hat{\ell})}(0),0) = \max_{j=0,1,\dots,\ell} [f_N^{(j)}(\beta_N^{(j)}(0),0)] = f_N(x_N) \quad (3.95)$$

Para que, a partir da determinação de $\hat{\ell}$, se possa traçar a política ótima de decisão, a cada estágio, obtidos $F_n(k_{n+1})$ e $\mathcal{F}_n(k_{n+1})$, é também gerado o conjunto $\tau_n(k_{n+1})$. Para cada ponto de $F_n(k_{n+1})$ faz-se corresponder um elemento de $\tau_n(k_{n+1})$. Inicialmente, com $F_0(k_1) = \{ \vec{0} \}$ e $\mathcal{F}_0(k_1) = \{ (\vec{0},0) \}$, para $\forall k_1$, estabelece-se $\tau_0(k_1) = \{ 0 \}$, também para k_1 qualquer. Nos demais estágios, cada elemento de $\tau_n(k_{n+1})$ é formado por dois números: o primeiro é a versão escolhida no estágio n e, o segundo, é o número de ordem de $\tau_{n-1}(k_n)$ que fornece a versão, no estágio $(n-1)$, com a qual k_n se combina. De acordo com (3.94), sendo $[A_n(k_n, k_{n+1}) + \beta_{n-1}^{(j)}(k_n)]$ um ponto de $F_n(k_{n+1})$, então ter-se-á o seguinte elemento de $\tau_n(k_{n+1})$: $(k_n, j+1)$.

Desta forma, de acordo com (3.95), sendo $\hat{\ell}$ o índice correspondente à solução ótima do problema, o elemento de ordem $(\hat{\ell} + 1)$ pertencente a $\tau_N(0)$ fornecerá a decisão ótima no estágio N , o que permitirá, utilizando os conjuntos τ , que se descreva a solução do problema. ⁽¹⁶⁾

(15) Se apenas esse ponto for de interesse, os pontos que se situam em patamares não precisam ser considerados e somente os pontos de descontinuidade devem ser levados em conta, em todos os estágios. Neste trabalho, são obtidos tanto os pontos de descontinuidade como aqueles que se situam em patamares.

(16) A forma apresentada para traçar a política ótima de decisão constitui uma maneira alternativa àquela apontada no item 3.6.3 e foi adaptada de Morin e Marsten (19).

Caso se tenham ótimos alternativos, deve-se traçar tantas políticas ótimas quantos pontos ótimos alternativos existirem.

Com o intuito de sintetizar a discussão do algoritmo desenvolvido, abaixo é apresentada a estrutura lógica do mesmo, em termos dos seus principais passos:

Passo 1. Para $n = 0$ e k_1 qualquer, estabelecer a condição inicial do problema: $F_0(k_1) = \{\vec{0}\}$, $\mathcal{F}_0(k_1) = \{(\vec{0}, 0)\}$ e $\tau_0(k_1) = 0$. Definir $IP_0(k_1) + 1$ como o número de elementos (um, no caso), de $\mathcal{F}_0(k_1)$.

Passo 2. $n = n + 1$. Se $n > N$, vá para o *Passo 14*; se $n \leq N$, estabelecer $k_{n+1} = 0$.

Passo 3. $k_n = 0$ e $j = 0$. Definir o número inicial de elementos de $\mathcal{F}_n(k_{n+1})$ como sendo $IP_n(k_{n+1}) + 1 = IP_{n-1}(k_n) + 1$.

Passo 4. Testar a viabilidade do ponto $\beta_{n-1}^{(j)}(k_n)$. Caso não seja viável, para ao menos um período de tempo, subtraia um de $IP_n(k_{n+1})$ e vá ao *Passo 6*.

Passo 5. Incluir um elemento em $F_n(k_{n+1})$, $\mathcal{F}_n(k_{n+1})$ e $\tau_n(k_{n+1})$. Isto é feito definindo-se o seu gasto de capital como sendo igual a $\beta_{n-1}^{(j)}(k_n)$ e retorno igual a $f_{n-1}^{(j)}(\beta_{n-1}^{(j)}(k_n), k_n)$.

Passo 6. $j = j + 1$. Se $j \leq IP_{n-1}(k_n)$, vá ao *Passo 4*.

Passo 7. $k_n = k_n + 1$. Se $k_n \leq K_n$, faça $j = 0$ e vá ao *Passo 9*.

Passo 8. Comparar n com N . Se $n = N$, vá ao *Passo 2*; se $n < N$, fazer $k_{n+1} = k_{n+1} + 1$. Comparar k_{n+1} com K_{n+1} . Se $k_{n+1} > K_{n+1}$, vá ao *Passo 2*; se $k_{n+1} \leq K_{n+1}$, vá ao *Passo 3*.

Passo 9. Gerar o ponto $A_n(k_n, k_{n+1}) + \beta_{n-1}^{(j)}(k_n)$ e testar sua via

bilidade. Caso não seja viável, para ao menos um período de tempo, vá ao *Passo 13*.

Passo 10. Verificar se o elemento $(A_n(k_n, k_{n+1}) + \beta_{n-1}^{(j)}(k_n), r_n(k_n, k_{n+1}) + f_{n-1}^{(j)}(\beta_{n-1}^{(j)}(k_n), k_n))$ é dominado por aqueles já em $\mathcal{F}_n(k_n + 1)$. Caso seja dominado, para ao menos um elemento, vá ao *Passo 13*.

Passo 11. O ponto gerado no *Passo 9* é viável e não dominado, dando origem a mais um elemento em $F_n(k_{n+1})$, $\mathcal{F}_n(k_{n+1})$ e $\tau_n(k_{n+1})$. Isto é feito definindo-se o seu gasto de capital como sendo igual a $A_n(k_n, k_{n+1}) + \beta_{n-1}^{(j)}(k_n)$ e retorno igual a $r_n(k_n, k_{n+1}) + f_{n-1}^{(j)}(\beta_{n-1}^{(j)}(k_n), k_n)$. Acrescentar um a $IP_n(k_{n+1})$.

Passo 12. Verificar se o elemento recém incluído em $\mathcal{F}_n(k_{n+1})$ domina algum(ns) do(s) ponto(s) que já estava(m) em $\mathcal{F}_n(k_{n+1})$. Os elementos dominados, caso existam, devem ser retirados de $\mathcal{F}_n(k_{n+1})$, e seus correspondentes devem sofrer o mesmo tratamento em $F_n(k_{n+1})$ e $\tau_n(k_{n+1})$. De $IP_n(k_{n+1})$ deve ser subtraído o número de pontos dominados pelo novo elemento de $\mathcal{F}_n(k_{n+1})$.

Passo 13. $j = j + 1$. Se $j \leq IP_{n-1}(k_n)$, vá ao *Passo 9*; se $j > IP_{n-1}(k_n)$, vá ao *Passo 7*.

Passo 14. Dentre os índices $j = 0, \dots, \ell$, determinar $\hat{\ell}$ tal que

$$f_N^{(\hat{\ell})}(\beta_N^{(\hat{\ell})}(0), 0) = \max_j [f_N^{(j)}(\beta_N^{(j)}(0), 0)] = f_N(x_N).$$

Identificar, no elemento de ordem $(\hat{\ell} + 1)$ de $\tau_N(0)$, a decisão ótima no estágio N . Utilizar os demais conjuntos τ e traçar a política ótima de decisão para o problema. Repetir o procedimento se houver ótimos alternativos.

Com relação ao algoritmo, cabem as seguintes observações importantes:

- (a) Os passos 3, 4, 5 e 6, para todo k_{n+1} e para $k_n = 0$, procedem a uma transferência de pontos viáveis (entre os quais não existam relações de dominância) do estágio (n-1) para o estágio n . A finalidade é a obtenção de conjuntos iniciais para $F_n(k_{n+1})$, $J_n(k_{n+1})$ e $\tau_n(k_{n+1})$. A justificativa para estes conjuntos iniciais está diretamente ligada às relações recursivas (3.82), ou (3.83), e (3.84) pois, para $k_n=0$, $A_n(0, k_{n+1}) \oplus F_{n-1}(0) = F_{n-1}(0)$ e, para $k_N=0$, obtém-se $F_{N-1}(0)$;
- (b) Conforme dito anteriormente, o conjunto F_N contém a solução do problema para qualquer capital inicial menor ou igual, vetorialmente, que X_N . Devido às características do algoritmo apresentado, isto não só ocorre para o N-ésimo estágio, mas também para todos os demais, ou seja, um importante subproduto do algoritmo empregado é a análise de sensibilidade da solução do problema, tanto no que se refere à disponibilidade inicial de capital quanto com relação ao número de estágios considerados. Os programas de computador, descritos no item 3.8, apesar de fornecerem a solução do problema apenas para N estágios, considerando a disponibilidade de capital X_N , permitem, devido à impressão intermediária de resultados, que se faça os dois tipos de análise de sensibilidade acima citados.⁽¹⁷⁾

No item 3.8 são apresentados os programas de computador elaborados para a solução do modelo básico do item 3.6.3, empregando o algoritmo acima descrito.

(17) A impressão intermediária de resultados ocorre entre os Passos 7 e 8. A impressão da(s) política(s) ótima(s) para N estágios, bem como de seu retorno, é feita após o Passo 14.

3.8 PROGRAMAS DE COMPUTADOR

Para a solução do modelo básico, desenvolveram-se três programas de computador utilizando a linguagem FORTRAN IV, a saber:

- (a) *Programa I* - Trata da *análise do sistema físico* apresentado na figura 3.1. Tem como finalidade a determinação de fluxos de materiais entre projetos consecutivos e entre projetos e mercados. Estes fluxos constituem informações de entrada para o Programa II. Como informações de entrada, o Programa I recebe as seguintes: horizonte de planejamento, número de projetos, número de versões de cada projeto, quantidades de matéria-prima a processar e coeficientes técnicos para cada versão de cada projeto;
- (b) *Programa II* - Tem como objetivo a *determinação dos retornos e gastos de capital* de cada versão de cada um dos projetos, em função da versão escolhida no projeto anterior. Estas informações constituem entradas para o Programa III. Além das informações fornecidas pelo Programa I, o Programa II necessita, ainda, das seguintes: horizonte de planejamento, número de projetos, número de versões de cada projeto, fatores de desconto para cálculo de valores presentes, taxa do imposto de renda, quantidades de matéria-prima a processar para cada versão de cada projeto, preços de venda, de compra e de transporte, custos operacionais bem como depreciação e gastos de capital e valor residual para cada versão de cada projeto e, finalmente, interações nos custos operacionais, na depreciação e nos gastos de capital e valor residual entre as versões de projetos consecutivos;
- (c) *Programa III* - Fornece a *solução do problema de alocação de capital* através da utilização do algoritmo do item 3.7. Além das informações fornecidas pelo Programa II, aqui são necessárias, adicionalmente, as seguintes: horizonte de planejamento, número de projetos, número de versões de cada proje

to e limitação de capital em cada período de tempo. Há duas informações de saída deste programa: a primeira é a solução ótima do problema de alocação de capital, expressa em termos de quais versões dos N projetos devem ser escolhidas de forma a se obter o máximo retorno, considerada a limitação de capital existente; a segunda é o conjunto de pontos eficientes para cada estágio adicional considerado, ou seja, resultados que permitem estudar a sensibilidade do máximo retorno com relação ao número de estágios e, fixado o número de estágios, para qualquer disponibilidade de capital menor ou igual, em cada período de tempo, que aquela inicialmente fixada.

Embora os programas apresentados pudessem constituir um único, preferiu-se sua segmentação pelas razões abaixo:

- (a) O número de retornos de versões de projetos, que devem ser determinados, é relativamente grande. Considerando um estágio genérico $n \neq N$, é necessário calcular, primeiramente, $r_n(k_n, 0)$ e isto deve ser feito para $k_n = 1, \dots, K_n$, ou seja, K_n retornos devem ser obtidos. A seguir, deve ser determinado $r_n(k_n, k_{n+1})$, para $k_n = 1, \dots, K_n$ e $k_{n+1} = 1, \dots, K_{n+1}$, ou seja, $K_n K_{n+1}$ retornos a serem determinados. Assim, um total de $(K_n + K_n K_{n+1})$ retornos deverão ser obtidos e isto vale para $n = 1, 2, \dots, N-1$, sendo que para $n = N$ apenas K_N retornos são necessários à análise. Para os N estágios ter-se-á um total de $\sum_{n=1}^N K_n + \sum_{n=1}^{N-1} K_n K_{n+1}$ retornos a determinar. Para que cada retorno possa ser estabelecido, é necessário que se disponha de $(T+1)$ fluxos de caixa sendo que em T deles ocorrem, ao menos em princípio, itens operacionais. Considerando este aspecto; um total de $T \sum_{n=1}^N K_n + T \sum_{n=1}^{N-1} K_n K_{n+1}$ fluxos de caixa referentes à operação dos projetos, devem ser conhecidos. Os $T \sum_{n=1}^N K_n$ fluxos de caixa, para serem determinados, requerem o fornecimento dos valores numéricos de $\Pi_n^V(k_n, t)$ e de $\Pi_n^C(k_n, t)$, ou seja, de dois preços; os

$T \cdot \sum_{n=1}^{N-1} K_n K_{n+1}$ fluxos de caixa restantes requerem dados referentes a $\Pi_n^C(k_n, k_{n+1}, t)$, $\Pi_{n+1}^V(k_n, k_{n+1}, t)$ e $\Pi_n^{tr}(k_n, k_{n+1}, t)$, isto é, de três preços. A necessidade total máxima de preços a determinar para que todos os retornos possam ser calculados é de $T \left(2 \sum_{n=1}^N K_n + 3 \sum_{n=1}^{N-1} K_n K_{n+1} \right)$. Por exemplo, supondo $T = 10$, $N = 5$, $K_1 = K_2 = \dots = K_5 = 4$, um total de 2320 preços deverão ser fornecidos para que todos os retornos possam ser calculados, ou seja, um número relativamente alto para um problema de proporções modestas. Evidentemente, este número é o máximo possível, pois vários dos preços necessários podem ser idênticos. Em virtude disto, o Programa I tem como finalidade fornecer, ao usuário, a análise do sistema físico, o que resulta na determinação de fluxos de materiais, informação essencial para que se determinem preços e para que o Programa II possa ser alimentado das informações necessárias ao cálculo dos retornos. Resumidamente, o Programa I tem como finalidade prover o analista de informações para que destas possam ser derivadas outras que são essenciais ao cálculo de retornos;

- (b) O Programa III pode ser empregado na solução de outros problemas que não são o de alocação de capital, como por exemplo o problema da mochila, analisado por Morin e Esogbue (18), Morin e Marsten (19) e Morin e Marsten (20), daí o interesse em separá-lo do Programa II que diz respeito, exclusivamente, ao problema de alocação de capital.

Na Parte 1 do Volume II desta pesquisa encontram-se as listas referentes aos três programas desenvolvidos, respectivamente nas Seções 1, 2 e 3. Todos os programas foram processados no computador B-6900 do Centro de Computação Eletrônica da Universidade de São Paulo.

Os três programas encontram-se comentados. Os comentários seguem os programas em seus principais passos, incluindo a leitura de dados e a impressão de resultados. Os comentários refe-

rentes à leitura de dados, listam todas as variáveis lidas pelo programa, incluindo sua denominação e símbolo correspondente.

Os passos constantes da listagem do Programa III são exatamente os mesmos do algoritmo apresentado no item 3.7. Os passos listados para os Programas I e II são auto-explicativos. Os cálculos feitos no Programa I empregam as expressões (3.1) a (3.6) e (3.12) a (3.16); no Programa II são utilizadas as expressões (3.24), (3.25) e (3.56).

3.9. EXEMPLO NUMÉRICO

O exemplo numérico selecionado possui 10 estágios (projetos) a analisar. Numerando os projetos de 1 a 10, no mesmo sentido apresentado na figura 3.1, o número de versões de cada projeto (incluindo a versão zero), naquela seqüência é: 3,3,3,3,5,5,5,6,4 e 5. Neste exemplo há, portanto, 1.215.000 alternativas de combinações de projetos. O horizonte de planejamento, considerado no exemplo, é de 5 anos. A disponibilidade de capital, para aplicação nos projetos é, em cada ano (1 a 5, respectivamente), a seguinte: 20.000, 20.000, 20.000, 15.000 e 10.000, em unidades monetárias. (18)

A seguir, o exemplo numérico é descrito e comentado segundo cada um dos três Programas já citados.

(18) Todos os dados numéricos, do exemplo, são hipotéticos.

3.9.1 Programa I - Análise do Sistema Físico

Como pode ser visto na listagem do Programa I (Seção 1 da Parte 1 do Volume II da pesquisa), os dados de entrada adicionais para a Análise do Sistema Físico são: coeficientes técnicos por estágio (projeto), versão e período de tempo ($\alpha_n(k_n, t)$), e quantidade de matéria-prima a processar por estágio, versão e período ($q_n(k_n, t)$). Na tabela 3.1 são apresentados esses dados.

Observando-se os dados da tabela 3.1 verifica-se que algumas versões de alguns projetos, por exemplo a 2ª versão do projeto 2, não processa matéria-prima alguma (e, portanto, não produz), durante alguns períodos. Esta situação poderá ocorrer se se de sejar analisar diferentes "timings" de implantação de projetos. Há também o caso oposto ao anterior, em que a implantação de de terminado projeto se dá na data zero, mas seu período de operação é inferior ao horizonte adotado, como ocorre na versão 2 do projeto 4. Estes são os únicos casos notáveis da tabela 3.1.

As informações de saída do Programa I constam da Seção 1 da Parte 2 do Volume II da pesquisa. Há três tabelas básicas, que contém os resultados da Análise do Sistema Físico, e que são, segundo a ordem em que são apresentadas, as seguintes: quantidade produzida ($q_n^S(k_n, t)$), quantidades transferida e comprada (respectivamente, $q_n^{tr}(k_{n+1}, k_n, t)$ e $q_n^C(k_{n+1}, k_n, t)$), e quantidade vendida ($q_{n+1}^V(k_{n+1}, k_n, t)$).

A tabela de quantidade produzida apresenta os resultados por estágio (projeto), decisão no estágio (versão) e em cada período de tempo. ⁽¹⁹⁾ Como exemplo, considere-se o projeto 4 na versão 2. Da tabela 3.1, na linha correspondente a esse caso, extraem-se os seguintes pares de valores de coeficientes técnicos e

(19) A coluna "período = 0", desta e das outras duas tabelas, é irrelevante para a análise.

TABELA 3.1 - COEFICIENTES TÉCNICOS ($\alpha_n(k_n, t)$) E QUANTIDADE DE MATÉRIA-PRIMA A PROCESSAR ($q_n(k_n, t)$)

estágio	versão	COEFICIENTES TÉCNICOS E QUANTIDADE DE MATÉRIA-PRIMA									
		$\alpha_n(k_n, 1)$	$q_n(k_n, 1)$	$\alpha_n(k_n, 2)$	$q_n(k_n, 2)$	$\alpha_n(k_n, 3)$	$q_n(k_n, 3)$	$\alpha_n(k_n, 4)$	$q_n(k_n, 4)$	$\alpha_n(k_n, 5)$	$q_n(k_n, 5)$
1	1	1,00	1000,0	1,00	1000,0	1,00	1000,0	1,00	1000,0	1,00	1000,0
	2	1,50	2000,0	1,50	2000,0	1,50	2000,0	1,50	2000,0	1,50	2000,0
2	1	0,75	4000,0	0,75	4000,0	0,75	4000,0	0,75	4000,0	0,75	4000,0
	2	-	-	-	-	0,80	10000,0	0,80	10000,0	0,80	10000,0
3	1	0,70	10000,0	0,80	10000,0	0,80	10000,0	0,70	10000,0	0,60	10000,0
	2	0,50	12000,0	0,50	10000,0	0,50	8000,0	0,50	8000,0	0,50	6000,0
4	1	2,00	1000,0	2,00	1000,0	2,00	2000,0	2,00	2000,0	2,00	3000,0
	2	2,00	3000,0	2,00	3000,0	2,00	3000,0	-	-	-	-
5	1	5,00	2000,0	6,00	2000,0	6,0	2000,0	6,00	2000,0	5,00	1000,0
	2	4,00	5000,0	4,00	5000,0	4,00	4000,0	4,00	4000,0	4,00	3000,0
	3	4,50	2000,0	5,00	2000,0	5,00	2000,0	5,00	2000,0	5,00	2000,0
	4	5,00	1000,0	5,00	1000,0	5,00	1000,0	4,00	2000,0	4,00	2000,0
6	1	0,10	20000,0	0,10	20000,0	0,10	20000,0	0,10	20000,0	0,10	20000,0
	2	0,30	40000,0	0,30	50000,0	0,30	50000,0	0,30	50000,0	0,30	60000,0
	3	0,20	15000,0	0,20	15000,0	0,30	20000,0	0,30	20000,0	0,30	20000,0
	4	0,20	20000,0	0,20	20000,0	0,20	20000,0	0,20	20000,0	-	-
7	1	1,00	5000,0	1,00	5000,0	0,80	5000,0	0,80	5000,0	0,60	5000,0
	2	1,50	2000,0	1,50	2000,0	1,50	2000,0	1,50	2000,0	1,50	2000,0
	3	2,00	4000,0	2,50	4000,0	2,50	4000,0	2,00	4000,0	2,00	3000,0
	4	1,50	10000,0	1,50	10000,0	1,20	10000,0	1,20	10000,0	1,20	5000,0
8	1	0,50	4000,0	0,50	4000,0	0,50	4000,0	0,50	4000,0	0,50	4000,0
	2	0,60	5000,0	0,50	4000,0	0,50	4000,0	0,50	4000,0	0,40	5000,0
	3	0,40	10000,0	0,40	10000,0	-	-	-	-	-	-
	4	-	-	-	-	0,50	8000,0	0,50	8000,0	0,40	10000,0
	5	0,50	10000,0	0,60	10000,0	0,70	10000,0	-	-	-	-
9	1	8,00	1000,0	8,00	1000,0	8,00	1000,0	8,00	1000,0	8,00	1000,0
	2	7,00	1000,0	7,00	1000,0	6,00	1000,0	6,00	2000,0	5,00	2000,0
	3	6,00	1000,0	7,00	1000,0	8,00	1000,0	8,00	1000,0	7,00	1000,0
10	1	3,00	1000,0	2,50	2000,0	2,50	2000,0	2,00	2000,0	2,00	1000,0
	2	2,00	2000,0	2,00	2000,0	2,00	2000,0	2,00	2000,0	2,00	2000,0
	3	4,00	1000,0	4,00	1000,0	4,00	2000,0	4,00	2000,0	4,00	2000,0
	4	2,50	2000,0	2,50	2000,0	2,50	2000,0	2,00	3000,0	2,00	3000,0

Fonte: Elaborado pelo autor.

quantidade de matéria-prima a processar: $(2,00;3000,0)$, $(2,00;3000,0)$, $(2,00;3000,0)$, $(0,00;0,0)$ e $(0,00;0,0)$. Fazendo-se o produto dos valores constantes de cada par, obtêm-se os seguintes resultados: $6000,0$; $6000,0$; $6000,0$; $0,0$ e $0,0$. Tomando como outro exemplo o projeto 5 na versão 4 e fazendo o mesmo tipo de operação anterior, obtêm-se: $5000,0$; $5000,0$; $5000,0$; $8000,0$ e $8000,0$.

A tabela de quantidades transferida e comprada apresenta os resultados por estágio (projeto), decisão (versão) no estágio anterior, decisão no estágio e em cada período de tempo. Cada célula da tabela apresenta dois números, sendo que o superior representa quantidade transferida e o inferior representa quantidade comprada. Tomando novamente como exemplo o projeto 4 na versão 2 e admitindo que no estágio anterior (5) a versão escolhida foi a de número 4, a análise é feita como a seguir: Da tabela 3.1 tem-se as quantidades a processar de matéria-prima para o projeto 4 na versão 2 como sendo, em cada período de tempo, $3000,0$; $3000,0$; $3000,0$; $0,0$ e $0,0$; o projeto 5 na versão 4 produzirá as seguintes quantidades, já determinadas no parágrafo anterior, em cada período de tempo: $5000,0$; $5000,0$; $5000,0$; $8000,0$ e $8000,0$. Empregando a expressão (3.12) para o cálculo das quantidades transferidas, em cada período de tempo, tem-se: $\min(5000,0; 3000,0) = 3000,0$; $\min(5000,0; 3000,0) = 3000,0$; $\min(5000,0; 3000,0) = 3000,0$; $\min(8000,0; 0,0) = 0,0$ e $\min(8000,0; 0,0) = 0,0$. Agora, a determinação da quantidade comprada é feita através da expressão (3.15) e, em cada período de tempo, tem-se: $3000,0 - 3000,0 = 0,0$; $3000,0 - 3000,0 = 0,0$; $3000,0 - 3000,0 = 0,0$; $0,0 - 0,0 = 0,0$; $0,0 - 0,0 = 0,0$.

A tabela de quantidade vendida fornece os resultados por estágio, decisão no estágio posterior, decisão no estágio e em cada período de tempo. Utilizando o mesmo exemplo, a quantidade vendida pelo projeto 5 na versão 4, supondo que no estágio posterior (4) a versão escolhida foi a de número 2, em cada período de tempo, é calculada empregando-se a expressão (3.13): $5000,0 - 3000,0 = 2000,0$; $5000,0 - 3000,0 = 2000,0$;

$5000,0 - 3000,0 = 2000,0$; $8000,0 - 0,0 = 8000,0$ e
 $8000,0 - 0,0 = 8000,0$.

Todos os outros resultados apresentados nas três tabelas citadas são obtidos da mesma maneira expressa pelos exemplos. Estes resultados constituem informação de entrada para o Programa II, discutido a seguir.

3.9.2 Programa II - Determinação de Retornos e Gastos de Capital

Na listagem do Programa II (Seção 2 da Parte 1 do Volume II da pesquisa), os dados de entrada adicionais para a Determinação de Retornos e Gastos de Capital são: fatores de desconto para cálculo de valores presentes $((1+i)^{-t})$, taxa do imposto de renda (u), preços de venda ($\Pi_n^V(k_n, t)$ e $\Pi_{n+1}^V(k_n, k_{n+1}, t)$), preços de compra ($\Pi_n^C(k_n, t)$ e $\Pi_n^C(k_n, k_{n+1}, t)$), custos operacionais ($c_n(k_n, t)$), depreciação ($d_n(k_n, t)$), gastos de capital e valor residual ($a_n(k_n, t)$), preço de transporte ($\Pi_n^{tr}(k_n, k_{n+1}, t)$), interações nos custos operacionais ($p_n^{(2)}(k_{n+1}, k_n, t)$), interações na depreciação ($p_n^{(3)}(k_{n+1}, k_n, t)$) e interações nos gastos de capital e valores residuais ($v_n(k_{n+1}, k_n, t)$).

No exemplo numérico foi adotada a taxa de desconto de 10% ao ano; em consequência os fatores de desconto para cálculo de valores presentes, para $t = 0, \dots, 5$, são, respectivamente, os seguintes: 1,00; 0,91; 0,83; 0,75; 0,68 e 0,62. A taxa do imposto de renda foi fixada em 0,35.

Os demais dados numéricos necessários ao exemplo foram organizados nas tabelas 3.2, 3.3 e 3.4 a seguir.

Na tabela 3.2 são apresentados, por estágio, versão e período de tempo, as seguintes informações: preços de venda ($\Pi_n^V(k_n, t)$), preços de compra ($\Pi_n^C(k_n, t)$), custos operacionais ($c_n(k_n, t)$), depreciação ($d_n(k_n, t)$), e gastos de capital e valor residual

$(a_n(k_n, t))$.

Na tabela 3.3 tem-se os seguintes dados, por estágio, versão no estágio, versão no estágio anterior e período de tempo: preços de compra ($\Pi_n^C(k_n, k_{n+1}, t)$), preços de transporte ($\Pi_n^{tr}(k_n, k_{n+1}, t)$), interações nos custos operacionais ($p_n^{(2)}(k_{n+1}, k_n, t)$), interações na depreciação ($p_n^{(3)}(k_{n+1}, k_n, t)$), e interações nos gastos de capital e valores residuais ($v_n(k_{n+1}, k_n, t)$). A tabela 3.3 foi dividida em duas partes: na parte A comparecem todas as informações acima citadas e, na parte B, apenas as duas primeiras informações, atribuindo-se valor zero às demais, em todos os casos. Na parte A da tabela 3.3, observando-se as três últimas colunas, referentes a interações, nota-se a ocorrência de valores numéricos com sinais variáveis. De acordo com a expressão (3.56), um valor positivo para as interações nos custos operacionais diminui o retorno do projeto, o mesmo ocorrendo com as interações nos gastos de capital e valores residuais. Logicamente, um valor negativo tem efeito oposto nestes dois casos. Para as interações na depreciação ocorre o inverso, relativamente aos dois casos anteriores.

Na tabela 3.4 são fornecidos os preços de venda ($\Pi_{n+1}^V(k_n, k_{n+1}, t)$), por estágio, versão no estágio posterior, versão no estágio e período de tempo.

As informações de saída do Programa II constam da Seção 2 da Parte 2 do Volume II do trabalho. Há uma única tabela que contém os resultados da Determinação de Retornos e Gastos de Capital. Segundo o estágio, a decisão no estágio e a decisão no estágio anterior são apresentados o vetor de gastos de capital ($A_n(k_n, k_{n+1})$) e o retorno ($r_n(k_n, k_{n+1})$) do projeto.

A título de exemplo, considere-se, novamente, o projeto 4 na versão 2. Inicialmente, será calculado $r_4(2, 0)$. Utilizando informações da tabela 3.1, da tabela de quantidades produzidas da listagem de saída do Programa I e da tabela 3.2, montou-se a tabela 3.5 para calcular os fluxos de caixa $r_4(2, 0, t)$ segundo a

TABELA 3.2 - PREÇOS DE VENDA ($\Pi_n^V(k_n, t)$), PREÇOS DE COMPRA ($\Pi_n^C(k_n, t)$), CUSTOS OPERACIONAIS ($c_n(k_n, t)$), DEPRECIACÃO ($d_n(k_n, t)$)E GASTOS DE CAPITAL E VALOR RESIDUAL ($a_n(k_n, t)$)

ESTÁGIO	VERSÃO	PREÇOS DE VENDA					PREÇOS DE COMPRA					CUSTOS OPERACIONAIS					DEPRECIACÃO					GASTOS DE CAPITAL E VALOR RESIDUAL ⁽²⁰⁾					
		t=1	t=2	t=3	t=4	t=5	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5	t=0	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5
1	1	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	95,0	95,0	95,0	95,0	95,0	2000,0	2000,0	2000,0	2000,0	2000,0	600,0	600,0	600,0	600,0	600,0	1000,0	1000,0	1000,0	1000,0	1000,0	-2000,0
	2	95,0	95,0	95,0	95,0	95,0	97,0	97,0	97,0	97,0	97,0	45000,0	45000,0	45000,0	45000,0	45000,0	2000,0	2000,0	2000,0	2000,0	2000,0	3000,0	3000,0	3000,0	3000,0	3000,0	-5000,0
2	1	95,0	95,0	95,0	95,0	95,0	60,0	60,0	60,0	60,0	60,0	10000,0	10000,0	10000,0	10000,0	10000,0	4000,0	4000,0	4000,0	4000,0	4000,0	5000,0	5000,0	5000,0	5000,0	5000,0	-5000,0
	2	-	-	90,0	90,0	90,0	-	-	70,0	70,0	70,0	-	-	15000,0	15000,0	15000,0	-	-	6000,0	6000,0	6000,0	-	-	8000,0	8000,0	8000,0	-6000,0
3	1	70,0	70,0	70,0	70,0	70,0	50,0	50,0	50,0	50,0	50,0	9000,0	9000,0	9000,0	9000,0	9000,0	4000,0	4000,0	4000,0	4000,0	4000,0	4000,0	4000,0	4000,0	4000,0	4000,0	-
	2	75,0	75,0	75,0	75,0	75,0	35,0	35,0	30,0	30,0	30,0	9000,0	8000,0	7000,0	7000,0	6000,0	4000,0	4000,0	4000,0	4000,0	4000,0	4000,0	4000,0	4000,0	4000,0	4000,0	-
4	1	35,0	35,0	35,0	35,0	30,0	60,0	60,0	65,0	65,0	70,0	6000,0	6000,0	7000,0	7000,0	8000,0	2000,0	2000,0	2000,0	2000,0	2000,0	8000,0	2000,0	2000,0	2000,0	2000,0	-6000,0
	2	30,0	30,0	30,0	-	-	70,0	70,0	70,0	-	-	10000,0	10000,0	10000,0	-	-	7000,0	7000,0	7000,0	-	-	10000,0	10000,0	1000,0	-	-	-
5	1	65,0	65,0	65,0	65,0	70,0	250,0	250,0	250,0	250,0	230,0	10000,0	10000,0	10000,0	10000,0	7000,0	3000,0	3000,0	3000,0	3000,0	3000,0	8000,0	6000,0	4000,0	-	-	-3000,0
	2	60,0	60,0	60,0	60,0	65,0	260,0	260,0	260,0	260,0	250,0	25000,0	25000,0	20000,0	20000,0	15000,0	6000,0	6000,0	6000,0	6000,0	6000,0	16000,0	12000,0	8000,0	-	-	-6000,0
	3	65,0	65,0	65,0	65,0	65,0	250,0	250,0	250,0	250,0	250,0	10000,0	10000,0	10000,0	10000,0	10000,0	3000,0	3000,0	3000,0	3000,0	3000,0	8000,0	6000,0	4000,0	-	-	-3000,0
	4	70,0	70,0	70,0	65,0	65,0	270,0	270,0	270,0	290,0	290,0	7000,0	7000,0	7000,0	10000,0	10000,0	3000,0	3000,0	3000,0	3000,0	3000,0	9000,0	5000,0	4000,0	-	-	-3000,0
6	1	230,0	230,0	230,0	230,0	230,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	9000,0	9000,0	9000,0	9000,0	9000,0	5000,0	5000,0	5000,0	5000,0	5000,0	7000,0	6000,0	5000,0	4000,0	3000,0	-
	2	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	40,0	40,0	40,0	40,0	40,0	20000,0	25000,0	25000,0	25000,0	30000,0	7000,0	7000,0	7000,0	7000,0	7000,0	14000,0	14000,0	10000,0	10000,0	2000,0	-5000,0
	3	230,0	230,0	210,0	210,0	210,0	17,0	17,0	19,0	19,0	20,0	9000,0	9000,0	10000,0	10000,0	10000,0	7000,0	7000,0	7000,0	7000,0	7000,0	10000,0	8000,0	7000,0	4000,0	6000,0	-
	4	215,0	215,0	215,0	215,0	-	22,0	22,0	22,0	22,0	-	20000,0	20000,0	20000,0	20000,0	-	10000,0	10000,0	10000,0	10000,0	-	10000,0	10000,0	10000,0	10000,0	-	-
7	1	21,0	21,0	22,0	22,0	25,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	12000,0	12000,0	12000,0	12000,0	12000,0	7000,0	7000,0	7000,0	7000,0	7000,0	8000,0	8000,0	8000,0	8000,0	8000,0	-5000,0
	2	24,0	24,0	24,0	24,0	24,0	18,0	18,0	18,0	18,0	18,0	9000,0	9000,0	9000,0	9000,0	9000,0	5000,0	5000,0	5000,0	5000,0	5000,0	6000,0	6000,0	6000,0	6000,0	6000,0	-5000,0
	3	19,0	18,0	18,0	19,0	20,0	19,0	19,0	19,0	19,0	18,0	20000,0	20000,0	20000,0	20000,0	18000,0	9000,0	9000,0	9000,0	9000,0	9000,0	10000,0	12000,0	12000,0	10000,0	6000,0	-5000,0
	4	16,0	16,0	17,0	17,0	18,0	25,0	25,0	25,0	25,0	20,0	25000,0	25000,0	25000,0	25000,0	15000,0	16000,0	16000,0	16000,0	16000,0	16000,0	20000,0	20000,0	20000,0	15000,0	10000,0	-5000,0
8	1	18,0	18,0	18,0	18,0	18,0	5,0	5,0	5,0	5,0	5,0	9000,0	9000,0	9000,0	9000,0	9000,0	5000,0	5000,0	5000,0	5000,0	5000,0	4000,0	5000,0	6000,0	5000,0	5000,0	-
	2	18,0	18,0	18,0	18,0	18,0	5,0	5,0	5,0	5,0	5,0	10000,0	9000,0	9000,0	9000,0	10000,0	5000,0	5000,0	5000,0	5000,0	5000,0	4000,0	5000,0	6000,0	5000,0	5000,0	-
	3	16,0	16,0	-	-	-	7,0	7,0	-	-	-	18000,0	18000,0	-	-	-	10000,0	10000,0	-	-	-	10000,0	10000,0	-	-	-	-
	4	-	-	16,0	16,0	16,0	-	-	6,0	6,0	7,0	-	-	15000,0	15000,0	15000,0	-	-	8000,0	8000,0	8000,0	-	-	10000,0	10000,0	5000,0	-1000,0
	5	16,0	16,0	15,0	-	-	7,0	7,0	7,0	-	-	17000,0	17000,0	17000,0	-	-	9000,0	9000,0	9000,0	-	-	10000,0	10000,0	7000,0	-	-	-
9	1	5,0	5,0	5,0	5,0	5,0	30,0	30,0	30,0	30,0	30,0	5000,0	5000,0	5000,0	5000,0	5000,0	2000,0	2000,0	2000,0	2000,0	2000,0	2000,0	2000,0	2000,0	2000,0	2000,0	-
	2	5,0	5,0	6,0	4,0	4,0	30,0	30,0	30,0	35,0	35,0	4000,0	4000,0	4000,0	6000,0	5000,0	1000,0	1000,0	1000,0	1000,0	1000,0	2000,0	2000,0	2000,0	2000,0	-	-3000,0
	3	6,0	5,0	5,0	5,0	5,0	30,0	30,0	30,0	30,0	30,0	5000,0	5000,0	5000,0	5000,0	5000,0	2000,0	2000,0	2000,0	2000,0	2000,0	2000,0	2000,0	2000,0	2000,0	-	-
10	1	30,0	27,0	27,0	28,0	31,0	60,0	65,0	65,0	65,0	60,0	5000,0	7000,0	7000,0	6000,0	4000,0	2000,0	2000,0	2000,0	2000,0	2000,0	7000,0	3000,0	2000,0	2000,0	1000,0	-5000,0
	2	28,0	28,0	28,0	28,0	28,0	65,0	65,0	65,0	65,0	65,0	6000,0	6000,0	6000,0	6000,0	6000,0	2000,0	2000,0	2000,0	2000,0	2000,0	7000,0	4000,0	-	-	-	-5000,0
	3	28,0	28,0	25,0	25,0	25,0	60,0	60,0	65,0	65,0	65,0	12000,0	12000,0	20000,0	20000,0	20000,0	7000,0	7000,0	7000,0	7000,0	7000,0	10000,0	10000,0	10000,0	5000,0	5000,0	-5000,0
	4	27,0	27,0	27,0	26,0	26,0	65,0	65,0	65,0	68,0	68,0	7000,0	7000,0	7000,0	8000,0	8000,0	4000,0	4000,0	4000,0	4000,0	4000,0	8000,0	7000,0	7000,0	3000,0	3000,0	-8000,0

FONTE: Elaborado pelo autor.

(20) Os valores residuais, correspondentes à coluna t=5, surgem em geral com valor negativo por se tratarem de recebimentos, opostamente aos gastos de capital.

TABELA 3.3 (A) - PREÇOS DE COMPRA ($u_n^c(k_n, k_{n+1}, t)$), PREÇOS DE TRANSPORTE ($u_n^{tr}(k_n, k_{n+1}, t)$), INTERAÇÕES NOS CUSTOS OPERACIONAIS ($p_n^{(2)}(k_{n+1}, k_n, t)$), INTERAÇÕES NA DEPRECIÇÃO ($p_n^{(3)}(k_{n+1}, k_n, t)$) E INTERAÇÕES NOS GASTOS DE CAPITAL E VALORES RESIDUAIS ($v_n(k_{n+1}, k_n, t)$)

ESTÁGIO	VERSÃO NO ESTÁGIO	VERSÃO NO ESTÁGIO ANTERIOR	PREÇOS DE COMPRA					PREÇOS DE TRANSPORTE					INTERAÇÕES NOS CUSTOS OPERACIONAIS					INTERAÇÕES NA DEPRECIÇÃO					INTERAÇÕES NOS GASTOS DE CAPITAL E VALORES RESIDUAIS					
			t=1	t=2	t=3	t=4	t=5	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5	t=0	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5
1	1	1	-	-	-	-	-	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	60,0	60,0	60,0	60,0	60,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	-200,0
		2	95,0	95,0	-	-	-	-	-	1,0	1,0	1,0	-	-	80,0	80,0	80,0	-	-	100,0	100,0	100,0	-	-	100,0	100,0	100,0	-
2	2	1	-	-	-	-	-	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	-700,0	-700,0	-700,0	-700,0	-700,0	-500,0	-500,0	-500,0	-500,0	-500,0	-500,0	-500,0	-500,0	-500,0	-500,0	-
		2	97,0	97,0	-	-	-	-	-	1,0	1,0	1,0	-	-	-2000,0	-2000,0	-2000,0	-	-	-1000,0	-1000,0	-1000,0	-	-	-1000,0	-1000,0	-1000,0	-
2	1	1	-	-	-	-	-	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	-1000,0	-1000,0	-1000,0	-1000,0	-1000,0	-1000,0	-1000,0	-1000,0	-1000,0	-1000,0	-1000,0	-1000,0	-1000,0	-1000,0	-1000,0	-
		2	-	-	-	-	65,0	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	-1000,0	-1000,0	-1000,0	-1000,0	-1000,0	-500,0	-500,0	-500,0	-500,0	-500,0	-500,0	-500,0	-500,0	-500,0	-500,0	-
2	2	1	-	-	65,0	65,0	65,0	-	-	1,0	1,0	1,0	-	-	500,0	500,0	500,0	-	-	500,0	500,0	500,0	-	-	500,0	500,0	500,0	-
		2	-	-	68,0	68,0	68,0	-	-	1,0	1,0	1,0	-	-	400,0	400,0	400,0	-	-	500,0	500,0	500,0	-	-	500,0	500,0	500,0	-
3	1	1	45,0	45,0	42,0	42,0	40,0	1,0	1,0	2,0	2,0	2,0	-800,0	-800,0	-800,0	-800,0	-800,0	-600,0	-600,0	-600,0	-600,0	-600,0	-1000,0	-500,0	-500,0	-500,0	-500,0	-
		2	40,0	40,0	40,0	50,0	50,0	2,0	2,0	2,0	-	-	-3000,0	-3000,0	-3000,0	-	-	-2000,0	-2000,0	-2000,0	-	-	-3000,0	-3000,0	-	-	-	-
3	2	1	35,0	30,0	30,0	30,0	-	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	-1000,0	-1000,0	-1000,0	-1000,0	-1000,0	-500,0	-500,0	-500,0	-500,0	-500,0	-500,0	-500,0	-500,0	-500,0	-500,0	-
		2	30,0	30,0	28,0	30,0	30,0	1,0	1,0	1,0	-	-	-2000,0	-2000,0	-2000,0	-	-	-1000,0	-1000,0	-1000,0	-	-	-2000,0	-1000,0	-	-	-	-
4	1	1	-	-	-	-	-	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	-1000,0	-1000,0	-1000,0	-1000,0	-1000,0	-1000,0	-1000,0	-1000,0	-1000,0	-1000,0	-3000,0	-2000,0	-	-	-	-
		2	-	-	-	-	-	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	-3000,0	-3000,0	-3000,0	-3000,0	-3000,0	-1200,0	-1200,0	-1200,0	-1200,0	-1200,0	-4000,0	-1000,0	-1000,0	-	-	-
4	3	1	-	-	-	-	-	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	2000,0	2000,0	2000,0	2000,0	2000,0	1000,0	1000,0	1000,0	1000,0	1000,0	2000,0	2000,0	1000,0	-	-	-
		4	-	-	-	-	-	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	-	-	-	-	-	800,0	800,0	800,0	800,0	800,0	2000,0	3000,0	-	-	-	-1000,0
4	2	1	-	-	-	-	-	2,0	2,0	2,0	-	-	-4000,0	-4000,0	-4000,0	-	-	-3000,0	-3000,0	-3000,0	-	-	-4000,0	-4000,0	-1000,0	-	-	-
		2	-	-	-	-	-	2,0	2,0	2,0	-	-	-1000,0	-1000,0	-1000,0	-	-	-2000,0	-2000,0	-2000,0	-	-	-3000,0	-3000,0	-	-	-	-
4	3	3	-	-	-	-	-	2,0	2,0	2,0	-	-	1000,0	1000,0	1000,0	-	-	1000,0	1000,0	1000,0	-	-	1000,0	2000,0	-	-	-	-
		4	-	-	-	-	-	2,0	2,0	2,0	-	-	2000,0	2000,0	2000,0	-	-	1000,0	1000,0	1000,0	-	-	2000,0	1000,0	-	-	-	-
5	1	1	-	-	-	-	-	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		2	-	-	-	-	-	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	2	3	-	-	-	-	-	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		4	-	-	-	-	230,0	1,0	1,0	1,0	1,0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	3	1	250,0	250,0	240,0	240,0	230,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		2	-	-	-	-	-	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	4	3	240,0	240,0	-	-	-	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		4	230,0	230,0	-	-	250,0	4,0	4,0	4,0	4,0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	3	1	-	-	-	-	-	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		2	-	-	-	-	-	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	4	3	-	-	-	-	-	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		4	-	-	-	-	250,0	2,0	2,0	2,0	2,0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	4	1	-	-	-	-	-	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		2	-	-	-	-	-	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	4	3	-	-	-	-	-	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		4	-	-	-	-	290,0	3,0	3,0	3,0	3,0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

TABELA 3.3 (B) - PREÇOS DE COMPRA ($\Pi_n^C(k_n, k_{n+1}, t)$) E PREÇOS DE TRANSPORTE

$$(\Pi_n^{tr}(k_n, k_{n+1}, t))$$

ESTÁGIO	VERSÃO NO ESTÁGIO	VERSÃO NO ESTÁGIO ANTERIOR	PREÇOS DE COMPRA					PREÇOS DE TRANSPORTE				
			t=1	t=2	t=3	t=4	t=5	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5
6	1	1	18,0	18,0	18,0	18,0	18,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
		2	18,0	18,0	18,0	18,0	18,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
		3	17,0	17,0	17,0	17,0	17,0	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0
		4	15,0	15,0	15,0	15,0	17,0	3,0	3,0	3,0	3,0	2,0
	2	1	38,0	38,0	38,0	38,0	38,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
		2	38,0	38,0	38,0	38,0	38,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
		3	38,0	38,0	38,0	38,0	38,0	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0
		4	36,0	38,0	38,0	38,0	38,0	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0
	3	1	13,0	13,0	17,0	17,0	17,0	-	-	-	-	-
		2	13,0	13,0	17,0	17,0	17,0	-	-	-	-	-
		3	12,0	12,0	13,0	14,0	17,0	-	-	-	-	-
		4	-	-	12,0	12,0	17,0	-	-	-	-	-
4	1	20,0	20,0	20,0	20,0	-	1,0	1,0	1,0	1,0	-	
	2	21,0	21,0	21,0	21,0	-	1,0	1,0	1,0	1,0	-	
	3	18,0	18,0	18,0	18,0	-	2,0	2,0	2,0	2,0	-	
	4	16,0	16,0	17,0	17,0	-	3,0	3,0	2,0	2,0	-	
1	1	16,0	16,0	16,0	16,0	16,0	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	
	2	15,0	16,0	16,0	16,0	16,0	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	
	3	14,0	14,0	20,0	20,0	20,0	2,0	2,0	-	-	-	
	4	20,0	20,0	14,0	14,0	14,0	-	-	2,0	2,0	2,0	
	5	-	-	-	20,0	20,0	2,0	2,0	2,0	-	-	
2	1	-	-	-	-	-	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	
	2	-	-	-	-	-	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	
	3	-	-	18,0	18,0	18,0	1,0	1,0	-	-	-	
	4	18,0	18,0	-	-	-	-	-	1,0	1,0	1,0	
	5	-	-	-	18,0	18,0	1,0	1,0	1,0	-	-	
3	1	17,0	17,0	17,0	17,0	16,0	5,0	5,0	5,0	5,0	5,0	
	2	16,0	17,0	17,0	17,0	16,0	6,0	5,0	5,0	5,0	5,0	
	3	-	-	19,0	19,0	18,0	5,0	5,0	-	-	-	
	4	19,0	19,0	-	-	-	-	-	5,0	5,0	5,0	
	5	-	-	-	19,0	18,0	5,0	5,0	5,0	-	-	
4	1	23,0	23,0	23,0	23,0	18,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	
	2	23,0	23,0	23,0	23,0	18,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	
	3	21,0	21,0	25,0	25,0	20,0	4,0	4,0	-	-	-	
	4	25,0	25,0	21,0	21,0	15,0	-	-	3,0	3,0	3,0	
	5	20,0	19,0	18,0	25,0	20,0	4,0	4,0	4,0	-	-	

TABELA 3.3(B) (cont.) - PREÇOS DE COMPRA ($\Pi_n^c(k_n, k_{n+1}, t)$) E PREÇOS DE TRANSPORTE
 ($\Pi_n^{tr}(k_n, k_{n+1}, t)$)

ESTÁGIO	VERSÃO NO ESTÁGIO	VERSÃO NO ESTÁGIO ANTERIOR	PREÇOS DE COMPRA					PREÇOS DE TRANSPORTE				
			t=1	t=2	t=3	t=4	t=5	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5
8	1	1	-	-	-	-	-	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
		2	-	-	-	-	-	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4
		3	-	-	-	-	-	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3
	2	1	-	-	-	-	-	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
		2	-	-	-	-	-	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
		3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	3	1	4,0	4,0	-	-	-	0,5	0,5	-	-	-
		2	5,0	5,0	-	-	-	0,6	0,6	-	-	-
		3	5,0	5,0	-	-	-	0,4	0,4	-	-	-
	4	1	-	-	-	-	4,0	-	-	0,3	0,3	0,3
		2	-	-	4,0	-	-	-	-	0,4	0,4	0,4
		3	-	-	-	-	4,0	-	-	0,3	0,3	0,3
5	1	5,0	5,0	5,0	-	-	0,2	0,2	0,2	-	-	
	2	5,0	5,0	5,0	-	-	0,3	0,3	0,3	-	-	
	3	5,0	5,0	5,0	-	-	0,5	0,5	0,5	-	-	
1	1	-	-	-	-	-	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	
	2	-	-	-	-	-	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	
	3	-	-	-	-	-	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	
	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
9	2	1	-	-	-	-	-	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0
		2	-	-	-	-	-	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
		3	-	-	-	-	-	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
		4	-	-	-	-	-	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
3	3	1	-	-	-	-	-	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0
		2	-	-	-	-	-	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
		3	-	-	-	-	-	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0
		4	-	-	-	-	-	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5

FONTE: Elaborado pelo autor.

TABELA 3.4 - PREÇOS DE VENDA ($\Pi_{n+1}^V(k_n, k_{n+1}, t)$)

estágio	versão no estágio posterior	versão no estágio	PREÇOS DE VENDA				
			t = 1	t = 2	t = 3	t = 4	t = 5
2	1	1	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0
		2	-	-	95,0	95,0	95,0
	2	1	105,0	105,0	105,0	105,0	105,0
		2	-	-	100,0	100,0	100,0
3	1	1	90,0	90,0	90,0	90,0	90,0
		2	80,0	85,0	-	-	-
	2	1	70,0	70,0	-	-	-
		2	75,0	75,0	-	-	-
4	1	1	-	-	-	-	-
		2	-	-	-	-	-
	2	1	-	-	-	-	-
		2	-	-	-	-	-
5	1	1	65,0	65,0	65,0	65,0	75,0
		2	60,0	60,0	60,0	60,0	70,0
		3	65,0	65,0	65,0	65,0	70,0
		4	75,0	75,0	75,0	75,0	75,0
	2	1	70,0	65,0	65,0	65,0	70,0
		2	60,0	60,0	65,0	60,0	65,0
		3	70,0	70,0	70,0	65,0	65,0
		4	80,0	80,0	80,0	65,0	65,0
6	1	1	-	-	-	-	270,0
		2	210,0	210,0	210,0	210,0	210,0
		3	250,0	250,0	240,0	240,0	210,0
		4	235,0	235,0	235,0	235,0	-
2	1	-	-	-	-	-	
	2	220,0	200,0	200,0	200,0	200,0	
	3	-	-	240,0	240,0	230,0	
	4	-	-	-	-	-	

TABELA 3.4 (cont.) - PREÇOS DE VENDA ($\Pi_{n+1}^V(k_n, k_{n+1}, t)$)

estágio	versão no estágio posterior	versão no estágio	PREÇOS DE VENDA					
			t = 1	t = 2	t = 3	t = 4	t = 5	
6	3	1	-	-	-	-	-	
		2	220,0	200,0	200,0	200,0	200,0	
		3	250,0	250,0	220,0	220,0	220,0	
		4	235,0	235,0	235,0	235,0	-	
	4	1	270,0	270,0	270,0	-	-	
		2	210,0	200,0	200,0	200,0	200,0	
		3	250,0	250,0	210,0	220,0	220,0	
		4	230,0	230,0	230,0	235,0	-	
	7	1	1	-	-	-	-	-
			2	-	-	-	-	-
			3	-	-	-	-	-
			4	-	-	-	-	-
2		1	-	-	-	-	-	
		2	-	-	-	-	-	
		3	-	-	-	-	-	
		4	-	-	-	-	-	
3		1	-	-	-	-	-	
		2	-	-	-	-	-	
		3	-	-	-	-	-	
		4	-	-	-	-	-	
4	1	-	-	-	-	25,0		
	2	-	-	-	-	24,0		
	3	-	-	-	-	20,0		
	4	-	-	-	-	18,0		
8	1	1	-	-	-	-	-	
		2	-	-	-	-	-	
		3	-	-	-	-	-	
		4	-	-	-	-	-	
		5	-	22,0	20,0	-	-	

TABELA 3.4 (cont.) - PREÇOS DE VENDA ($ll_{n+1}^V(k_n, k_{n+1}, t)$)

estágio	versão no estágio posterior	versão no estágio	PREÇOS DE VENDA				
			t = 1	t = 2	t = 3	t = 4	t = 5
		1	-	-	-	-	-
		2	19,0	-	-	-	-
	2	3	20,0	20,0	-	-	-
		4	-	-	20,0	20,0	20,0
		5	18,0	17,0	16,0	-	-
		1	-	-	-	-	-
		2	-	-	-	-	-
8	3	3	-	-	-	-	-
		4	-	-	-	-	22,0
		5	19,0	18,0	17,0	-	-
		1	-	-	-	-	-
		2	-	-	-	-	-
	4	3	-	-	-	-	-
		4	-	-	-	-	-
		5	-	-	-	-	-
		1	8,0	8,0	8,0	8,0	8,0
	1	2	7,0	7,0	7,0	5,0	6,0
		3	7,0	7,0	7,0	7,0	7,0
		1	8,0	8,0	8,0	8,0	8,0
	2	2	7,0	7,0	7,0	5,0	6,0
		3	7,0	7,0	7,0	7,0	7,0
		1	-	-	5,0	5,0	5,0
9	3	2	-	-	6,0	4,0	4,0
		3	-	-	5,0	5,0	5,0
		1	5,0	5,0	-	-	-
	4	2	5,0	5,0	-	7,0	-
		3	6,0	5,0	-	-	-
		1	-	-	-	5,0	5,0
	5	2	-	-	-	4,0	4,0
		3	-	-	-	5,0	5,0

TABELA 3.4 (cont.) - PREÇOS DE VENDA ($\Pi_{n+1}^V(k_n, k_{n+1}, t)$)

estágio	versão no estágio posterior	versão no estágio	PREÇOS DE VENDA				
			t = 1	t = 2	t = 3	t = 4	t = 5
10	1	1	31,0	28,0	28,0	30,0	32,0
		2	30,0	30,0	30,0	30,0	30,0
		3	29,0	29,0	26,0	26,0	26,0
		4	28,0	28,0	28,0	27,0	27,0
	2	1	31,0	28,0	28,0	31,0	-
		2	30,0	30,0	30,0	31,0	31,0
		3	29,0	29,0	26,0	27,0	27,0
		4	28,0	28,0	28,0	28,0	28,0
	3	1	31,0	28,0	28,0	30,0	32,0
		2	30,0	30,0	30,0	30,0	30,0
		3	29,0	29,0	26,0	26,0	26,0
		4	28,0	28,0	28,0	27,0	27,0

Fonte: Elaborado pelo autor.

expressão (3.24). De posse desses valores obtêm-se o valor presente líquido, $r_4(2,0)$, utilizando-se os fatores de desconto já definidos, de acordo com a expressão (3.25):

$$r_4(2,0) = - 10000,0 \times 1,00 - 29000,0 \times 0,91 - 20000,0 \times 0,83 - \\ - 19000,0 \times 0,75 = - 67240,00$$

Suponha-se, agora, que no estágio anterior (5), a versão escolhida tenha sido a de número 4. O cálculo de $r_4(2,4)$ utiliza, além do valor $r_4(2,0)$, informações das tabelas 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4, e de todas as tabelas da listagem de saída do Programa I. Na tabela 3.6 são calculados os fluxos de caixa que resultam em $p_4(2,4,t)$. Utilizando os fatores de desconto, obtêm-se o valor presente das interações entre o projeto 4 na versão 2 e o projeto 5 na versão 4:

$$p_4(2,4) = - 2000,0 \times 1,00 + 7800,0 \times 0,91 + 8800,0 \times 0,83 + 8800,0 \times 0,75 = \\ = 19002,0$$

Empregando a expressão (3.56), vem:

$$r_4(2,4) = r_4(2,0) + p_4(2,4) = - 67240,0 + 19002,0 = - 48238,0$$

Resta calcular os gastos de capital do projeto em questão. O vetor $A_4(2,0)$ é obtido diretamente da tabela 3.2 e vale:

$$A_4(2,0) = (10000,0; 10000,0; 1000,0; 0,0; 0,0)$$

O vetor $A_4(2,4)$ é obtido através do uso da expressão (3.63), o que requer o uso de dados da tabela 3.3:

$$A_4(2,4) = (10000,0 + 2000,0; 10000,0 + 1000,0; 1000,0 + 0,0; 0,0; 0,0) = \\ = (12000,0; 11000,0; 1000,0; 0,0; 0,0)$$

TABELA 3.5 - DETERMINAÇÃO DE FLUXOS DE CAIXA- $r_4(2,0,t)$

período	(1) = $\pi_4^V(2,t)$	(2) = $d_4^S(2,t)$	(3) = (1)x(2)	(4) = $\pi_4^C(2,t)$	(5) = $c_4(2,t)$	(6) = (4)x(5)	(7) = (3)-(6)- $c_4(2,t)$	(8) = (1-u)(7)	(9) = $d_4(2,t)$	(10) = $a_4(2,t)$	(11) = $r_4(2,0,t) =$ (8)+(9)-(10)
0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	10000,0	-10000,0
1	30,0	6000,0	180000,0	70,0	3000,0	210000,0	-40000,0	-26000,0	7000,0	10000,0	-29000,0
2	30,0	6000,0	180000,0	70,0	3000,0	210000,0	-40000,0	-26000,0	7000,0	1000,0	-20000,0
3	30,0	6000,0	180000,0	70,0	3000,0	210000,0	-40000,0	-26000,0	7000,0	-	-19000,0
4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Fonte: Elaborado pelo autor

TABELA 3.6 - DETERMINAÇÃO DE FLUXOS DE CAIXA - $P_4(2,4,t)$

PERÍODO	(1) = $\Pi_4^C(2,t)$	(2) = $q_4(2,t)$	(3) = $(1) \times (2)$	(4) = $\Pi_4^C(2,4,t)$	(5) = $q_4(4,2,t)$	(6) = $(4) \times (5)$	(7) = $\Pi_5^V(4,t)$	(8) = $q_5^S(4,t)$	(9) = $(7) \times (8)$
0	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1	70,0	3000,0	210000,0	-	-	-	70,0	5000,0	350000,0
2	70,0	3000,0	210000,0	-	-	-	70,0	5000,0	350000,0
3	70,0	3000,0	210000,0	-	-	-	70,0	5000,0	350000,0
4	-	-	-	-	-	-	65,0	8000,0	520000,0
5	-	-	-	-	-	-	65,0	8000,0	520000,0

FONTE: Elaborado pelo autor

TABELA 3.6 (cont.) - DETERMINAÇÃO DE FLUXOS DE CAIXA - $p_4(2,4,t)$

PERÍODO	(10) = $\Pi_5^V(2,4,t)$	(11) = $q_5^V(4,2,t)$	(12) = $(10) \times (11)$	(13) = $(3) - (6) - (9) + (12)$	(14) = $\Pi_4^{tr}(4,2,t)$	(15) = $q_4^{tr}(4,2,t)$	(16) = $P_4^{(1)}(4,2,t) = (14) \times (15)$
0	-	-	-	-	-	-	-
1	80,0	2000,0	160000,0	20000,0	2,0	3000,0	6000,0
2	80,0	2000,0	160000,0	20000,0	2,0	3000,0	6000,0
3	80,0	2000,0	160000,0	20000,0	2,0	3000,0	6000,0
4	65,0	8000,0	520000,0	-	-	-	-
5	65,0	8000,0	520000,0	-	-	-	-

TABELA 3.6 (cont.) - DETERMINAÇÃO DE FLUXOS DE CAIXA - $P_4(2,4,t)$

PERÍODO	(17) = (13) - (16) - $P_4^{(2)}(4,2,t)$	(18) = (1-u)(17)	(19) = $P_4^{(3)}(4,2,t) + (18)$	(20) = $V_4(4,2,t)$	(21) = $P_4(2,4,t) - (19) - (20)$
0	-	-	-	2000,0	-2000,0
1	12000,0	7800,0	8800,0	1000,0	7800,0
2	12000,0	7800,0	8800,0	-	8800,0
3	12000,0	7800,0	8800,0	-	8800,0
4	-	-	-	-	-
5	-	-	-	-	-

Todos os demais valores constantes da listagem de saída do Programa II são obtidos da mesma maneira exemplificada. Tais valores constituem informações de entrada para o Programa III, a seguir discutido.

3.9.3 Programa III - Solução do Problema de Alocação de Capital

Como pode ser constatado a partir da listagem do Programa III (Seção 3 da Parte 1 do Volume II do trabalho), todos os dados de entrada para o mesmo já surgiram em itens anteriores.

As informações de saída do Programa III, referentes ao exemplo numérico, constam da Seção 3 da Parte 2 do Volume II. Neste item será ilustrada a utilização do algoritmo desenvolvido, considerando-se alguns estágios do exemplo numérico.

A solução do problema começa com o estabelecimento da condição inicial: $F_0(k_1) = \{\vec{0}\}$, $J_0(k_1) = \{(\vec{0}, 0)\}$ e $\tau_0(k_1) = 0$, para qualquer k_1 .

Agora, será considerado o 1º estágio, para cada versão do estágio anterior (2º).

(a) Análise do 1º estágio, para $k_2 = 0$.

Sendo $k_2 = 0$, o capital máximo disponível é o próprio capital inicial, ou seja, 20000,0; 20000,0; 20000,0; 15000,0 e 10000,0.

Adicionando os vetores de gastos de capital e retornos do projeto 1, em todas as suas versões, com decisão zero no projeto 2, ao ponto correspondente à condição inicial do problema, são gerados os seguintes pontos:

$((0,0; 0,0; 0,0; 0,0; 0,0); 0,0)$
 $((1000,0; 1000,0; 1000,0; 1000,0; 1000,0); 6735,0)$
 $((3000,0; 3000,0; 3000,0; 3000,0; 3000,0); 111491,0)$

Os cinco primeiros números de cada ponto correspondem a gastos de capital e, o último, corresponde ao retorno. No caso em questão, o 1º ponto corresponde a $k_1 = 0$, o 2º ponto corresponde a $k_1 = 1$ e o 3º ponto a $k_1 = 2$. Como pode ser observado, nenhum dos três pontos é inviável e, além disso, não há relações de dominância entre eles, sendo todos, portanto, eficientes. Com isso, todos esses pontos devem ser armazenados, bem como o seguinte conjunto: $\tau_1(k_2 = 0) = \{(0,1), (1,1), (2,1)\}$. O elemento $(2,1)$, por exemplo, significa que um ponto eficiente é obtido se for combinado o vetor de gastos de capital e retorno correspondentes a $k_1 = 2$, com o vetor de gastos de capital e retorno, respectivamente, do 1º ponto do conjunto $\tau_0(k_1 = 2)$ que, no caso, é dado pela condição inicial do problema.

(b) Análise do 1º estágio, para $k_2 = 1$.

Com $k_2 = 1$, o capital máximo disponível é dado por
 $(20000,0; 20000,0; 20000,0; 15000,0; 10000,0) -$
 $- (5000,0; 5000,0; 5000,0; 5000,0; 5000,0) =$
 $= (15000,0; 15000,0; 15000,0; 10000,0; 5000,0).$

O vetor que foi subtraído do capital inicial é dado por $A_2(1,0)$.

Os pontos gerados, agora, são os seguintes:

$((0,0; 0,0; 0,0; 0,0; 0,0); 0,0)$
 $((1100,0; 1100,0; 1100,0; 1100,0; 1100,0); 28594,0)$
 $((2500,0; 2500,0; 2500,0; 2500,0; 2500,0); 142967,0)$

Nenhum dos pontos acima é inviável e não há relações de dominância entre os mesmos, sendo, portanto, todos eficientes. Todos deverão ser armazenados, assim como o conjunto

$\tau_1(k_2 = 1) = \{(0,1), (1,1), (2,1)\}$

(c) Análise do 1º estágio, para $k_2 = 2$.

Agora, o capital máximo disponível é dado por:

$$\begin{aligned}
 & (20000,0; 20000,0; 20000,0; 15000,0; 10000,0) - \\
 & - (0,0; 0,0; 8000,0; 8000,0; 8000,0) = \\
 & = (20000,0; 20000,0; 12000,0; 7000,0; 2000,0).
 \end{aligned}$$

Os pontos gerados são os seguintes:

$$\begin{aligned}
 & ((0,0; 0,0; 0,0; 0,0; 0,0); 0,0) \\
 & ((1000,0; 1000,0; 1100,0; 1100,0; 1100,0); 58574,0) \\
 & ((3000,0; 3000,0; 2000,0; 2000,0; 2000,0); 210306,0)
 \end{aligned}$$

Como nenhum dos pontos é inviável e não há relações de domi
nância, todos devem ser armazenados, assim como o conjunto
 $\tau_1(k_2 = 2) = \{(0,1), (1,1), (2,1)\}$.

A seguir, será considerado o 2º estágio, para cada versão do esta
tagio anterior (3º).

(d) Análise do 2º estágio, para $k_3 = 0$.

O capital máximo disponível é o próprio capital inicial.

A geração de pontos é feita combinando-se o vetor de gastos de capital e retorno do 2º projeto, numa certa versão, com os gastos de capital e retornos dos pontos já gerados cor
respondentes àquela versão. Por exemplo, toma-se os dispên
dios de capital e retorno para $k_2 = 0$, ou seja,
 $((0,0; 0,0; 0,0; 0,0; 0,0); 0,0)$ e combina-se o mesmo com os pontos eficientes do item (a). Repete-se a mesma operação para $k_2 = 1$ e $k_2 = 2$, com relação aos itens (b) e (c), res
pectivamente, obtendo-se:

$$\begin{aligned}
 & ((0,0; 0,0; 0,0; 0,0; 0,0); 0,0) \\
 & ((1000,0; 1000,0; 1000,0; 1000,0; 1000,0); 6735,0) \\
 & ((3000,0; 3000,0; 3000,0; 3000,0; 3000,0); 111491,0) \\
 & ((5000,0; 5000,0; 5000,0; 5000,0; 5000,0); 83633,0) \\
 & ((6100,0; 6100,0; 6100,0; 6100,0; 6100,0); 112227,0) \\
 & ((7500,0; 7500,0; 7500,0; 7500,0; 7500,0); 226600,0) \\
 & ((0,0; 0,0; 8000,0; 8000,0; 8000,0); 4603,0) \\
 & ((1000,0; 1000,0; 9100,0; 9100,0; 9100,0); 63177,0)
 \end{aligned}$$

((3000,0; 3000,0; 10000,0; 10000,0; 10000,0); 214909,0)

Nenhum dos pontos acima é inviável. Neste caso, o 4º ponto da lista é dominado pelo 3º ponto e, portanto, deve ser descartado. Os pontos restantes são eficientes. O conjunto τ fica:

$$\tau_2(k_3 = 0) = \{(0,1), (0,2), (0,3), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3)\}$$

(e) Análise do 2º estágio para $k_3 = 1$.

O capital máximo disponível é dado por

$$\begin{aligned} & (20000,0; 20000,0; 20000,0; 15000,0; 10000,0) - \\ & - (4000,0; 4000,0; 4000,0; 4000,0; 4000,0) = \\ & = (16000,0; 16000,0; 16000,0; 11000,0; 6000,0) \end{aligned}$$

Os pontos gerados são os seguintes:

((0,0; 0,0; 0,0; 0,0; 0,0); 0,0)
 ((1000,0; 1000,0; 1000,0; 1000,0; 1000,0); 6735,0)
 ((3000,0; 3000,0; 3000,0; 3000,0; 3000,0); 111491,0)
 ((4000,0; 4000,0; 4000,0; 4000,0; 4000,0); 128518,0)
 ((5100,0; 5100,0; 5100,0; 5100,0; 5100,0); 157112,0)
 ((6500,0; 6500,0; 6500,0; 6500,0; 6500,0); 271485,0)
 ((0,0; 0,0; 8500,0; 8500,0; 8500,0); 13984,0)
 ((1000,0; 1000,0; 9600,0; 9600,0; 9600,0); 72558,0)
 ((3000,0; 3000,0; 10500,0; 10500,0; 10500,0); 224290,0)

Dos pontos gerados, os quatro últimos são inviáveis (no último período todos excedem o capital máximo disponível). Os pontos restantes são todos eficientes. Tem-se, então:

$$\tau_2(k_3 = 1) = \{(0,1), (0,2), (0,3), (1,1), (1,2)\}$$

(f) Análise do 2º estágio para $k_3 = 2$.

O capital máximo disponível é dado por:

$$\begin{aligned}
 & (20000,0; 20000,0; 20000,0; 15000,0; 10000,0) - \\
 & - (4000,0; 4000,0; 4000,0; 4000,0; 4000,0) = \\
 & = (16000,0; 16000,0; 16000,0; 11000,0; 6000,0)
 \end{aligned}$$

Os pontos gerados são os seguintes:

$$\begin{aligned}
 & ((0,0; 0,0; 0,0; 0,0; 0,0); 0,0) \\
 & ((1000,0; 1000,0; 1000,0; 1000,0; 1000,0); 6735,0) \\
 & ((3000,0; 3000,0; 3000,0; 3000,0; 3000,0); 111491,0) \\
 & ((4500,0; 4500,0; 4500,0; 4500,0; 4500,0); - 65086,0) \\
 & ((5600,0; 5600,0; 5600,0; 5600,0; 5600,0); - 36492,0) \\
 & ((7000,0; 7000,0; 7000,0; 7000,0; 7000,0); 77881,0) \\
 & ((0,0; 0,0; 8500,0; 8500,0; 8500,0); - 8802,0) \\
 & ((1000,0; 1000,0; 9600,0; 9600,0; 9600,0); 49772,0) \\
 & ((3000,0; 3000,0; 10500,0; 10500,0; 10500,0); 201504,0)
 \end{aligned}$$

Os quatro últimos pontos gerados são inviáveis. O 4º ponto e o 5º ponto são dominados pelo 1º. Apenas são eficientes, portanto, os 3 primeiros pontos da lista. Tem-se, então:

$$\tau_3(k_3 = 2) = \{(0,1), (0,2), (0,3)\}$$

Como ilustração final, será agora analisado o 3º estágio, apenas para $k_4 = 0$. Caso fosse de interesse obter a solução do problema para apenas os 3 primeiros estágios, ela seria obtida exatamente nesta fase. É neste sentido que a técnica empregada possibilita a análise de sensibilidade ao número de estágios considerados.

Considerando $k_4 = 0$, o capital máximo disponível é igual ao capital inicial. Os pontos gerados são os seguintes:

$$\begin{aligned}
 & ((0,0; 0,0; 0,0; 0,0; 0,0); 0,0) \\
 & ((1000,0; 1000,0; 1000,0; 1000,0; 1000,0); 6735,0) \\
 & ((3000,0; 3000,0; 3000,0; 3000,0; 3000,0); 111491,0) \\
 & ((6100,0; 6100,0; 6100,0; 6100,0; 6100,0); 112227,0) \\
 & ((7500,0; 7500,0; 7500,0; 7500,0; 7500,0); 226600,0)
 \end{aligned}$$

((0,0; 0,0; 8000,0; 8000,0; 8000,0); 4603,0)
 ((1000,0; 1000,0; 9100,0; 9100,0; 9100,0); 63177,0)
 ((3000,0; 3000,0; 10000,0; 10000,0; 10000,0); 214909,0)
 ((4000,0; 4000,0; 4000,0; 4000,0; 4000,0); - 4647,0)
 ((5000,0; 5000,0; 5000,0; 5000,0; 5000,0); 2088,0)
 ((7000,0; 7000,0; 7000,0; 7000,0; 7000,0); 106844,0)
 ((8000,0; 8000,0; 8000,0; 8000,0; 8000,0); 123871,0)
 ((9100,0; 9100,0; 9100,0; 9100,0; 9100,0); 152465,0)
 ((4000,0; 4000,0; 4000,0; 4000,0; 4000,0); 85054,0)
 ((5000,0; 5000,0; 5000,0; 5000,0; 5000,0); 91789,0)
 ((7000,0; 7000,0; 7000,0; 7000,0; 7000,0); 196545,0)

Nenhum dos pontos acima é inviável. O 9º ponto é dominado pelo 1º; o 10º ponto é dominado pelo 2º; o 11º ponto é dominado pelo 3º; o 12º ponto é dominado pelo 5º ponto; o 13º ponto é dominado pelo 5º ponto; o 14º ponto é dominado pelo 3º ponto e, finalmente, o 15º ponto também é dominado pelo 3º ponto. O conjunto τ fica sendo:

$$\tau_3(k_4 = 0) = \{(0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (0,5), (0,6), (0,7), (0,8), (2,3)\}$$

A solução ótima para apenas três estágios corresponde ao retorno de 226600,0. Tem-se: $\hat{\tau}_3(k_4=0) = (0,5) \rightarrow \hat{k}_3 = 0$ e $\hat{\tau}_2(\hat{k}_3=0) = (1,3) \rightarrow \hat{k}_2 = 1$ e $\hat{\tau}_1(\hat{k}_2=1) = (2,1) \rightarrow \hat{k}_1 = 2$.

A análise feita até aqui, bem como sua continuação até o 10º estágio, encontra-se na Seção 3 da Parte 2 do Volume 2. Lá podem ser vistos dois tipos de tabela: o primeiro tipo contém os pontos eficientes em cada estágio, para cada decisão no anterior (incluindo o número de ordem de cada ponto, o vetor de gastos de capital e o retorno do ponto, a decisão no estágio e o número de ordem do ponto, no estágio seguinte, que deu origem àquele em questão), o segundo tipo fornece o retorno máximo que pode ser conseguido com o capital inicial, bem como apresenta a(s) política(s) ótima(s) de decisão.

No exemplo apresentado, observa-se que a última tabela do pri

meiro tipo (estágio 10 com decisão zero no estágio anterior) possui 69 pontos eficientes. A tabela do segundo tipo indica um retorno máximo de 2.473.934,0 e que há uma única política ótima de decisão que leva a esse retorno. Tal política corresponde a escolher a versão 2 para o projeto 1, a versão 2 para o projeto 6 e a versão 1 para o projeto 9. Nos demais estágios, a versão nula deve ser escolhida. Na tabela correspondente ao estágio 10, o ponto que leva ao retorno máximo é o de ordem 45. O vetor de gastos de capital, para esse ponto, é o seguinte: (19000,0; 19000,0; 15000,0; 15000,0; 7000,0). Há, portanto, com relação a esse ponto, um capital restante de (1000,0; 1000,0; 5000,0; 0,0; 3000,0) que será aplicado no mercado à taxa de 10% ao ano e que resultará num valor presente igual a zero.

Deve-se notar que, para o ponto que leva ao retorno máximo, não há integração física direta entre os projetos que o compõem. Pode-se dizer que a integração entre os projetos é feita via mercado.

Com o intuito de verificar a solução ótima obtida, pode-se retomar as informações de saída do Programa II. Tomando-se os dados referentes às versões de interesse dos projetos selecionados, recai-se na seguinte soma:

$$\begin{aligned} & ((3000,0; 3000,0; 3000,0; 3000,0; 3000,0); 111491,0) + \\ & + ((14000,0; 14000,0; 10000,0; 10000,0; 2000,0); 2350885,0) + \\ & + ((2000,0; 2000,0; 2000,0; 2000,0; 2000,0); 11558,0) = \\ & = ((19000,0; 19000,0; 15000,0; 15000,0; 7000,0); 2473934,0) \end{aligned}$$

De posse da tabela correspondente ao estágio 10, pode-se fazer a análise de sensibilidade ao capital disponível. Por exemplo, suponha-se que o capital disponível seja (20000,0; 12000,0; 9000,0; 5000,0; 2000,0). Com esse capital a melhor opção corresponde ao ponto de ordem 69 na tabela do estágio 10. Na linha correspondente a esse ponto, verifica-se que o retorno é de 537414,0, que a decisão no estágio 10 corresponde à versão 1 e o ponto que originou aquele em questão é o 31º da tabela relativa ao projeto 9, com decisão 1 no estágio 10. Agora, na tabela

do projeto 9 com decisão 1 no estágio anterior, verifica-se que o 31º ponto leva à versão 3 no projeto 9 e que se deve buscar o 12º ponto da tabela do projeto 8 com decisão 3 no estágio 9. Procedendo desta forma para os estágios restantes, traça-se a política ótima de decisão para aquele capital: $\hat{k}_{10} = 1$; $\hat{k}_9 = 3$, $\hat{k}_5 = 1$ e $\hat{k}_1 = 1$, sendo as demais decisões iguais a zero.

3.10 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo apresentou-se uma estrutura, composta de três fases sequenciais, para se resolver o problema de Análise de Projetos Integrados em Série.

Dois aspectos são de extrema importância na elaboração da estrutura acima: a maneira de se definir os retornos e os gastos de capital dos projetos, e a formação das listas de pontos eficientes. A definição de retornos e gastos de capital é feita através da consideração das interdependências entre projetos consecutivos. A formação das listas de pontos eficientes utiliza o enfoque de "espaços de estado embutidos", o que simplifica sobremaneira a solução do problema com relação ao algoritmo tradicional de Programação Dinâmica.

No capítulo 4, a seguir, são vistas formas alternativas de resolver o mesmo problema tratado neste capítulo, utilizando, também, a Programação Dinâmica.

CAPÍTULO 4ESTUDO DE ALGUMAS VARIANTES EQUIVALENTES AO MODELO BÁSICO

Este capítulo trata do estudo de modelos de Programação Dinâmica equivalentes (variantes) àquele do capítulo 3, denominado Básico, no sentido de levarem à mesma solução obtida com o modelo Básico.

A construção das variantes gira em torno da forma de se definir os retornos e os gastos de capital dos projetos, através da análise incremental (marginal).

Neste trabalho, são obtidas duas classes de modelos equivalentes. A primeira contém, além do modelo desenvolvido no capítulo 3, um outro em que a ordem de análise dos projetos é invertida com relação àquela do modelo Básico. A segunda classe de modelos é derivada da primeira e combina os resultados dos dois modelos lá definidos.

A análise da variante ao modelo Básico, contida na primeira classe, é feita de forma análoga àquela empregada para o modelo Básico, isto é, utiliza os resultados do item 3.6.2.

A análise das variantes contidas na segunda classe se baseia na utilização da *Programação Dinâmica Não-Serial*, que constitui uma generalização da Programação Dinâmica para sistemas de decisão em que os estágios não se encontram ligados em série.

Neste capítulo não se desenvolvem algoritmos específicos, mas são mostradas as modificações que devem ser feitas naquele do modelo Básico, de forma a permitir a solução de suas variantes.

O mesmo exemplo numérico do capítulo 3 é aqui utilizado para

ilustrar as variantes do modelo Básico.

4.1 PRIMEIRA FORMA ALTERNATIVA DE DEFINIÇÃO DOS RETORNOS E GASTOS DE CAPITAL DE PROJETOS INTEGRADOS EM SÉRIE, E MODELO DE PROGRAMAÇÃO DINÂMICA CORRESPONDENTE

Retomando a discussão feita no item 3.6.1, para a determinação do retorno de cada projeto e da função de retorno do conjunto de projetos, foram apontados quatro aspectos a serem considerados naquela determinação. Como resultado, concluiu-se que o retorno de um dado projeto dependia não só da decisão tomada com relação ao mesmo mas, também, daquela tomada com relação ao projeto anterior. Este resultado apenas difere ligeiramente para o projeto P_N que, por definição, não possui antecessor. A argumentação apresentada e o resultado obtido são uma consequência direta da utilização da análise incremental (marginal). No caso do modelo Básico, o emprego da análise marginal, para definir o retorno de cada projeto, foi feito no mesmo sentido do fluxo de material entre aqueles. No entanto, o mesmo tipo de análise pode ser utilizada em sentido inverso. Seja a função de retorno do conjunto de N projetos, que se quer maximizar, dada por (3.35):

$$R_N = R_N(k_N, k_{N-1}, \dots, k_1) = r_N(k_N, 0) + \sum_{n=1}^{N-1} r_n(k_n, k_{n+1}) \quad (3.35)$$

O retorno de cada projeto, de acordo com (3.57), é dado, compactamente, por:

$$r_n(k_n, k_{n+1}) = r_n(k_n, 0) + p_n(k_n, k_{n+1}) \quad (3.57)$$

Substituindo (3.57) em (3.35) e rearranjando, obtém-se:

$$R_N = r_1(k_1, 0) + \sum_{n=2}^N [r_n(k_n, 0) + p_{n-1}(k_{n-1}, k_n)] \quad (4.1)$$

Em (4.1), cada um dos termos entre colchetes é igual ao retorno do projeto em consideração, tomado isoladamente, mais a interação com o projeto seguinte.

Definindo-se

$$r_n(k_n, k_{n-1}) = r_n(k_n, 0) + p_{n-1}(k_{n-1}, k_n), \quad (4.2)$$

para $n = 2, \dots, N$; $k_n = 0, \dots, K_n$ e $k_{n-1} = 0, \dots, K_{n-1}$

e empregando (4.2) em (4.1), vem:

$$R_N = r_1(k_1, 0) + \sum_{n=2}^N r_n(k_n, k_{n-1}) \quad (4.3)$$

A expressão (4.3), equivalente a (3.35), considera o retorno de cada projeto como dependente da versão do projeto seguinte.

Usando a mesma notação do item 3.6.3, pode-se definir os gastos de capital de cada projeto, em cada uma de suas versões, como abaixo:

$$A_n(k_n, k_{n-1}) = A_n(k_n, 0) + V_{n-1}(k_{n-1}, k_n), \quad (4.4)$$

$n = 2, \dots, N$; $k_n = 0, \dots, K_n$; $k_{n-1} = 0, \dots, K_{n-1}$

sendo

$$V_{n-1}(k_{n-1}, k_n) = \vec{0} \quad (4.5)$$

se $k_{n-1} = 0$ e

$$A_n(k_n, k_{n-1}) = \vec{0} \quad (4.6)$$

se $k_n = 0$

Para o projeto P_1 tem-se, simplesmente, $A_1(k_1, 0)$.

De posse de (4.3), (4.4), (4.5) e (4.6) ⁽¹⁾, pode-se construir um modelo equivalente àquele denominado Básico, utilizando os resultados do item 3.6.2, com uma alteração: ao invés de se re solver o problema do estágio 1 para o estágio N, faz-se exata mente o inverso, pois, agora, o retorno e os gastos de capital, de cada projeto, dependem da versão escolhida para o projeto se guinte, contrariamente ao que ocorria com o modelo Básico.

A seguinte notação adicional será empregada:

- Y_1 : vetor cujos T componentes representam a disponibilidade de capital para aplicação nos N projetos, em cada período de tempo.
- Y_n : vetor cujos T componentes representam o capital restante para aplicação em $(N - n + 1)$ projetos, em cada período de tempo.

$$Y_n = Y_{n-1} - A_{n-1}(k_{n-1}, k_{n-2}), \quad n = 3, \dots, N+1; \quad k_{n-1} = 0, \dots, K_{n-1};$$

$$k_{n-2} = 0, \dots, K_{n-2} \quad e$$

(1) O cálculo dos retornos é feito, agora, da seguinte forma:
 (a) $r_{n+1}(k_{n+1}, 0)$ é obtido por (3.24) e (3.25); (b) $r_{n+1}(k_{n+1}, k_n)$ requer a obtenção de $p_n(k_n, k_{n+1})$ que deve ser feito segundo (3.56).

$$Y_2 = Y_1 - A_1(k_1, 0) \quad , \quad k_1 = 0, \dots, K_1 \quad (4.7)$$

Designando por g_n o retorno ótimo de $(N-n+1)$ projetos, $n=1, \dots, N+1$ e empregando os resultados do item 3.6.2, obtêm-se as seguintes equações recursivas para resolver o problema de alocação de capital:

$$g_{N+1}(Y_{N+1}, k_N) = 0 \quad , \quad \forall Y_{N+1} \geq \bar{0} \quad \text{e} \quad \forall k_N \quad (4.8)$$

$$g_n(Y_n, k_{n-1}) = \max_{k_n=0, \dots, K_n} [r_n(k_n, k_{n-1}) + g_{n+1}(Y_n - A_n(k_n, k_{n-1}), k_n)] \quad ,$$

$$\text{obtendo-se } k_n = k_n(Y_n, k_{n-1}) \quad , \quad \text{para } n = N, \dots, 2 \quad (4.9)$$

$$g_1(Y_1) = \max_{k_1=0, \dots, K_1} [r_1(k_1, 0) + g_2(Y_1 - A_1(k_1, 0), k_1)] \quad ,$$

$$\text{obtendo-se } \hat{k}_1 = k_1(Y_1) \quad (4.10)$$

Adicionalmente,

$$g_{n+1}(Y_n - A_n(k_n, k_{n-1}), k_n) = -\infty \quad (4.11)$$

Se algum componente de $(Y_n - A_n(k_n, k_{n-1}))$ for negativo, $n=1, \dots, N$.

Em (4.8), a desigualdade vetorial é tomada elemento a elemento.

Como pode ser visto, o procedimento de otimização ocorre em ordem inversa com relação àquela do item 3.6.3, sendo equivalen

tes se $Y_1 = X_N$, em cada período de tempo.

Quando da avaliação de $g_n(Y_n, k_{n-1})$ por (4.9), Y_n pode assumir valores viáveis numa região, cujo limite inferior é o vetor \underline{nu} lo e cujo limite superior é dado por $(Y_1 - A_{n-1}(k_{n-1}, 0))$. Uma região será estabelecida para cada particular valor de k_{n-1} , $k_{n-1} = 0, \dots, K_{n-1}$.

Uma vez determinado $\hat{k}_1 = k_1(Y_1)$ em (4.10), a obtenção da política ótima de decisão é feita utilizando-se, alternadamente, as funções $\hat{Y}_n = \hat{Y}_{n-1} - A_{n-1}(\hat{k}_{n-1}, \hat{k}_{n-2})$ e $\hat{k}_n = k_n(\hat{Y}_n, \hat{k}_{n-1})$.

Também aqui o modelo pode ser particularizado para os três casos de alocação de capital apresentados no item 3.5.

Quanto ao algoritmo de solução, ele é totalmente análogo àquele desenvolvido para o modelo Básico no item 3.7. Designando por $G_{N+1}(k_N)$ os pontos de descontinuidade de $g_{N+1}(Y_{N+1}, k_N)$, tem-se:

$$G_{N+1}(k_N) = \{\emptyset\}, \quad \forall k_N \quad (4.12)$$

Chamando de $G_n(k_{n-1})$ os pontos de descontinuidade de $g_n(Y_n, k_{n-1})$, obtém-se:

$$G_n(k_{n-1}) \subset \bigcup_{k_n=0}^{K_n} [A_n(k_n, k_{n-1}) \oplus G_{n+1}(k_n)] \quad (4.13)$$

Para $n = 1$, tem-se:

$$G_1(0) = G_1 \subset \bigcup_{k_1=0}^{K_1} [A_1(k_1, 0) \oplus G_2(k_1)] \quad (4.14)$$

A obtenção de $G_n(k_{n-1})$ de acordo com (4.13) e a de G_1 , segundo

(4.14) é feita através da eliminação de pontos inviáveis e pontos dominados. Obtidos os conjuntos G , bem como o retorno de cada um de seus pontos, tem-se as listas de pontos eficientes para cada estágio, fixada uma certa versão no estágio seguinte. A obtenção da política que leva ao retorno máximo e a cada um dos pontos eficientes, também é feita utilizando os conjuntos τ que, agora, são representados por $\tau_n(k_{n-1})$.

Como pode ser observado, uma vez determinados os retornos e gastos de capital dos projetos, emprega-se o mesmo algoritmo desenvolvido para o modelo Básico, com uma única diferença: ao invés de se caminhar do projeto 1 para o projeto N, caminha-se no sentido oposto. O Programa III desenvolvido para o modelo Básico pode ser utilizado na variante apresentada. Deve-se apenas observar que haverá uma inversão na numeração dos estágios.

O mesmo exemplo numérico utilizado para ilustrar o modelo Básico, foi também tratado através da variante descrita. Inicialmente, foram determinados os retornos e gastos de capital dos projetos ⁽²⁾, em cada uma de suas versões, em função da versão escolhida no projeto seguinte. Esses resultados estão apresentados na tabela 4.1. Deve-se observar, nesta tabela, que os resultados foram apresentados do projeto 10 para o projeto 1, em função da decisão tomada no estágio em consideração e da decisão tomada no estágio seguinte (por exemplo, o estágio 9 é seguinte ao 10). A seguir, alimentou-se o Programa III com as informações da tabela 4.1. Foi, também, utilizada a mesma restrição de capital do exemplo numérico apresentado para o modelo Básico. Os resultados do processamento podem ser vistos na Parte 3 do Volume II do trabalho. Na última tabela de pontos eficientes correspondente ao projeto 1 (designado, na listagem, como projeto 10, devido à inversão da numeração dos projetos, já citada), surgem exatamente os mesmos 69 pontos que haviam sido obtidos

(2) A análise do sistema físico permanece a mesma já feita para o modelo Básico. Isto é válido para todas as variantes do modelo Básico.

TABELA 4.1 - VETORES DE GASTOS DE CAPITAL E RETORNOS - EXEMPLO NUMÉRICO

ESTÁGIO	DECISÃO NO ESTÁGIO	DECISÃO NO ESTÁGIO SEGUINTE	VETOR DE GASTOS DE CAPITAL					RETORNO
			t = 0	t = 1	t = 2	t = 3	t = 4	
10	1	0	7000,0	3000,0	2000,0	2000,0	1000,0	-1570,0
		1	7000,0	3000,0	2000,0	2000,0	1000,0	2947,0
		2	7000,0	3000,0	2000,0	2000,0	1000,0	12249,0
		3	7000,0	3000,0	2000,0	2000,0	1000,0	5411,0
	2	0	7000,0	4000,0	4000,0	0	0	-62404,0
		1	7000,0	4000,0	4000,0	0	0	-47623,0
		2	7000,0	4000,0	4000,0	0	0	-35864,0
		3	7000,0	4000,0	4000,0	0	0	-45159,0
	3	0	10000,0	10000,0	10000,0	5000,0	5000,0	106945,0
		1	10000,0	10000,0	10000,0	5000,0	5000,0	126126,0
		2	10000,0	10000,0	10000,0	5000,0	5000,0	142182,0
		3	10000,0	10000,0	10000,0	5000,0	5000,0	121200,0
4	0	8000,0	7000,0	7000,0	3000,0	3000,0	-54907,0	
	1	8000,0	7000,0	7000,0	3000,0	3000,0	-35973,0	
	2	8000,0	7000,0	7000,0	3000,0	3000,0	-23262,0	
	3	8000,0	7000,0	7000,0	3000,0	3000,0	-37204,0	
9	1	0	2000,0	2000,0	2000,0	2000,0	2000,0	11558,0
		1	2000,0	2000,0	2000,0	2000,0	2000,0	36193,0
		2	2000,0	2000,0	2000,0	2000,0	2000,0	35966,0
		3	2000,0	2000,0	2000,0	2000,0	2000,0	31916,0
		4	2000,0	2000,0	2000,0	2000,0	2000,0	24663,0
		5	2000,0	2000,0	2000,0	2000,0	2000,0	41338,0
9	2	0	2000,0	2000,0	2000,0	2000,0	0	-25705,0
		1	2000,0	2000,0	2000,0	2000,0	0	-12034,0
		2	2000,0	2000,0	2000,0	2000,0	0	-10813,0
		3	2000,0	2000,0	2000,0	2000,0	0	-7835,0
		4	2000,0	2000,0	2000,0	2000,0	0	-3485,0
		5	2000,0	2000,0	2000,0	2000,0	0	487,0
8	3	0	4000,0	2000,0	2000,0	2000,0	0	3839,0
		1	4000,0	2000,0	2000,0	2000,0	0	12790,0
		2	4000,0	2000,0	2000,0	2000,0	0	13758,0
		3	4000,0	2000,0	2000,0	2000,0	0	19980,0
		4	4000,0	2000,0	2000,0	2000,0	0	17467,0
		5	4000,0	2000,0	2000,0	2000,0	0	27047,0
8	1	0	4000,0	5000,0	6000,0	5000,0	5000,0	15515,0
		1	4000,0	5000,0	6000,0	5000,0	5000,0	45077,0
		2	4000,0	5000,0	6000,0	5000,0	5000,0	10588,0
		3	4000,0	5000,0	6000,0	5000,0	5000,0	4049,0
	2	4	4000,0	5000,0	6000,0	5000,0	5000,0	66579,0
		0	4000,0	5000,0	6000,0	5000,0	5000,0	20195,0
		1	4000,0	5000,0	6000,0	5000,0	5000,0	48574,0
		2	4000,0	5000,0	6000,0	5000,0	5000,0	15859,0
8	2	3	4000,0	5000,0	6000,0	5000,0	5000,0	3997,0
		4	4000,0	5000,0	6000,0	5000,0	5000,0	72442,0

TABELA 4.1 (cont.) - VETORES DE GASTOS DE CAPITAL E RETORNOS - EXEMPLO NUMÉRICO

ESTÁGIO	DECISÃO NO ESTÁGIO	DECISÃO NO ESTÁGIO SEGUINTE	VETOR DE GASTOS DE CAPITAL					RETORNO
			t = 0	t = 1	t = 2	t = 3	t = 4	
		0	10000,0	10000,0	0	0	0	-28844,0
		1	10000,0	10000,0	0	0	0	-13010,0
	3	2	10000,0	10000,0	0	0	0	-17534,0
		3	10000,0	10000,0	0	0	0	-37892,0
		4	10000,0	10000,0	0	0	0	20920,0
		0	0	0	10000,0	10000,0	5000,0	-9714,0
		1	0	0	10000,0	10000,0	5000,0	8941,0
8	4	2	0	0	10000,0	10000,0	5000,0	3611,0
		3	0	0	10000,0	10000,0	5000,0	-18359,0
		4	0	0	10000,0	10000,0	5000,0	38529,0
		0	10000,0	10000,0	7000,0	0	0	6990,0
		1	10000,0	10000,0	7000,0	0	0	33724,0
	5	2	10000,0	10000,0	7000,0	0	0	19346,0
		3	10000,0	10000,0	7000,0	0	0	2850,0
		4	10000,0	10000,0	7000,0	0	0	96411,0
		0	8000,0	8000,0	8000,0	8000,0	8000,0	-48866,0
		1	8000,0	8000,0	8000,0	8000,0	8000,0	-1208,0
	1	2	8000,0	8000,0	8000,0	8000,0	8000,0	354472,0
		3	8000,0	8000,0	8000,0	8000,0	8000,0	6852,0
		4	8000,0	8000,0	8000,0	8000,0	8000,0	11090,0
		0	6000,0	6000,0	6000,0	6000,0	6000,0	63545,0
		1	6000,0	6000,0	6000,0	6000,0	6000,0	110351,0
	2	2	6000,0	6000,0	6000,0	6000,0	6000,0	402202,0
		3	6000,0	6000,0	6000,0	6000,0	6000,0	127460,0
		4	6000,0	6000,0	6000,0	6000,0	6000,0	80029,0
7		0	10000,0	12000,0	12000,0	10000,0	6000,0	158238,0
		1	10000,0	12000,0	12000,0	10000,0	6000,0	230076,0
	3	2	10000,0	12000,0	12000,0	10000,0	6000,0	764922,0
		3	10000,0	12000,0	12000,0	10000,0	6000,0	255140,0
		4	10000,0	12000,0	12000,0	10000,0	6000,0	277734,0
		0	20000,0	20000,0	20000,0	15000,0	10000,0	-117511,0
		1	20000,0	20000,0	20000,0	15000,0	10000,0	-18165,0
	4	2	20000,0	20000,0	20000,0	15000,0	10000,0	749394,0
		3	20000,0	20000,0	20000,0	15000,0	10000,0	-4424,0
		4	20000,0	20000,0	20000,0	15000,0	10000,0	37956,0
		0	7000,0	6000,0	5000,0	4000,0	3000,0	122939,0
		1	7000,0	6000,0	5000,0	4000,0	3000,0	216955,0
	1	2	7000,0	6000,0	5000,0	4000,0	3000,0	327078,0
		3	7000,0	6000,0	5000,0	4000,0	3000,0	211625,0
		4	7000,0	6000,0	5000,0	4000,0	3000,0	343893,0
6		0	14000,0	14000,0	10000,0	10000,0	2000,0	2350885,0
		1	14000,0	14000,0	10000,0	10000,0	2000,0	2883131,0
	2	2	14000,0	14000,0	10000,0	10000,0	2000,0	3014197,0
		3	14000,0	14000,0	10000,0	10000,0	2000,0	2705681,0
		4	14000,0	14000,0	10000,0	10000,0	2000,0	2671419,0

TABELA 4.1 (cont.) - VETORES DE GASTOS DE CAPITAL E RETORNOS - EXEMPLO NUMÉRICO

ESTÁGIO	DECISÃO NO ESTÁGIO	DECISÃO NO ESTÁGIO SEGUINTE	VETOR DE GASTOS DE CAPITAL					RETORNO
			t = 0	t = 1	t = 2	t = 3	t = 4	
6	3	0	10000,0	8000,0	7000,0	4000,0	6000,0	1629381,0
		1	10000,0	8000,0	7000,0	4000,0	6000,0	1886677,0
		2	10000,0	8000,0	7000,0	4000,0	6000,0	2057341,0
		3	10000,0	8000,0	7000,0	4000,0	6000,0	1847287,0
		4	10000,0	8000,0	7000,0	4000,0	6000,0	1908185,0
5	4	0	10000,0	10000,0	10000,0	10000,0	0	821000,0
		1	10000,0	10000,0	10000,0	10000,0	0	1043534,0
		2	10000,0	10000,0	10000,0	10000,0	0	1192852,0
		3	10000,0	10000,0	10000,0	10000,0	0	1039413,0
		4	10000,0	10000,0	10000,0	10000,0	0	1059322,0
4	1	0	8000,0	6000,0	4000,0	0	0	521429,0
		1	5000,0	4000,0	4000,0	0	0	519099,0
		2	4000,0	2000,0	3000,0	0	0	564172,0
		0	16000,0	12000,0	8000,0	0	0	-235380,0
		1	12000,0	11000,0	7000,0	0	0	-197521,0
3	2	2	13000,0	9000,0	8000,0	0	0	-162480,0
		0	8000,0	6000,0	4000,0	0	0	302893,0
		1	10000,0	8000,0	5000,0	0	0	307402,0
		2	9000,0	8000,0	4000,0	0	0	369201,0
		0	9000,0	5000,0	4000,0	0	0	55361,0
2	4	1	11000,0	8000,0	4000,0	0	0	116547,0
		2	11000,0	6000,0	4000,0	0	0	74363,0
		0	8000,0	2000,0	2000,0	2000,0	2000,0	-11042,0
		1	7000,0	1500,0	1500,0	1500,0	1500,0	220742,0
		2	7500,0	1500,0	1500,0	1500,0	1500,0	-13797,0
1	2	0	10000,0	10000,0	10000,0	0	0	-67240,0
		1	7000,0	7000,0	1000,0	0	0	177904,0
		2	8000,0	9000,0	1000,0	0	0	-8879,0
		0	4000,0	4000,0	4000,0	4000,0	4000,0	-4647,0
		1	3000,0	3000,0	3000,0	3000,0	3000,0	40238,0
0	3	2	4000,0	4000,0	4500,0	4500,0	4500,0	4734,0
		0	4000,0	4000,0	4000,0	4000,0	4000,0	85054,0
		1	3500,0	3500,0	3500,0	3500,0	3500,0	-63665,0
		2	4000,0	4000,0	4500,0	4500,0	4500,0	71649,0
		0	5000,0	5000,0	5000,0	5000,0	5000,0	83633,0
0	1	1	5100,0	5100,0	5100,0	5100,0	5100,0	105492,0
		2	4500,0	4500,0	4500,0	4500,0	4500,0	115109,0
		0	0	0	8000,0	8000,0	8000,0	4603,0
		1	0	0	8100,0	8100,0	8100,0	56442,0
		2	0	0	7000,0	7000,0	7000,0	103418,0
1	1	0	1000,0	1000,0	1000,0	1000,0	1000,0	6735,0
		2	3000,0	3000,0	3000,0	3000,0	3000,0	111491,0

FONTE: Elaborado pelo autor.

com o modelo Básico. Na tabela "soluções ótimas", o retorno máximo obtido é, evidentemente, o mesmo encontrado para o modelo Básico. Há uma única política de decisão que leva àquele retorno máximo. Mais uma vez, devido à inversão na numeração dos estágios, deve-se tomar o devido cuidado na interpretação dos resultados. As decisões não nulas, que levam ao retorno máximo, são as seguintes: $\hat{k}_1 = 2$, $\hat{k}_6 = 2$ e $\hat{k}_9 = 1$. Os resultados obtidos com o exemplo numérico ilustram a equivalência entre o modelo Básico e a sua variante descrita.

4.2 OUTRAS FORMAS DE DEFINIÇÃO DOS RETORNOS E GASTOS DE CAPITAL DE PROJETOS INTEGRADOS EM SÉRIE, E MODELO DE PROGRAMAÇÃO DINÂMICA CORRESPONDENTE

A variante desenvolvida no item 4.1, juntamente com o modelo Básico do capítulo 3, formam a primeira das duas classes de modelos equivalentes, citadas no início do capítulo 4. Neste item, é desenvolvida a segunda delas.

A segunda classe de modelos é derivada da primeira e combina os resultados dos modelos lá definidos, através da *Programação Dinâmica Não-Serial*, que constitui uma generalização da Programação Dinâmica para sistemas de decisão em que os estágios não se encontram ligados em série.

No item 4.2.1 é, novamente, discutida a função de retorno do conjunto de N projetos. Essa discussão leva às outras formas de definição dos retornos e gastos de capital de projetos integrados em série. São apresentados, também, diagramas funcionais representativos dos modelos contidos na primeira e segunda classes acima citadas.

No item 4.2.2 é desenvolvido um modelo de Programação Dinâmica com variável de estado ampliada para um sistema de decisão de

vários estágios, com ramos divergentes, de forma a servir como apoio teórico à solução do problema de alocação de capital definido no item 4.2.1. O modelo desenvolvido constitui uma adaptação de um outro apresentado na literatura sobre Programação Dinâmica Não-Serial.

A aplicação do modelo desenvolvido no item 4.2.2, ao problema de alocação de capital, é feita no item 4.2.3. Neste mesmo item, são apresentadas as modificações necessárias no algoritmo relativo ao modelo Básico do capítulo 3, de forma a se poder resolver o modelo a ele equivalente. O mesmo exemplo numérico utilizado na primeira classe de variantes também é empregado para ilustrar a segunda classe.

4.2.1 Definições alternativas para os retornos e gastos de capital de projetos integrados em série

No capítulo 3 e no item 4.1, mostraram-se duas formas de resolver o problema de alocação de capital a projetos ligados em série. Além dessas duas formas existem outras, calcadas na idéia de se considerar como base, para os cálculos incrementais, outro projeto que não seja o primeiro e nem o último da cadeia.

A função de retorno do conjunto de N projetos, que se quer maximizar, é dada por (3.35):

$$R_N = r_N(k_N, 0) + \sum_{n=h}^{N-1} r_n(k_n, k_{n+1}) + \sum_{n=1}^{h-1} r_n(k_n, k_{n+1}) \quad (3.35)$$

Substituindo (3.57) em (3.35), para os retornos de índices $h, h+1, h+2, \dots, N-1$, e utilizando (4.2), obtém-se:

$$R_N = \sum_{n=h+1}^N r_n(k_n, k_{n-1}) + r_h(k_h, 0) + \sum_{n=1}^{h-1} r_n(k_n, k_{n+1}) \quad (4.15)$$

A expressão de R_N , dada por (4.15), possui três componentes: a primeira, função de k_N, k_{N-1}, \dots, k_h , considera os retornos dos projetos tal como a variante do item (4.1); a segunda, função apenas de k_h , representa o retorno do projeto $P_h(k_h)$, sem interação com qualquer outro projeto; a terceira, função de k_h, k_{h-1}, \dots, k_1 , considera os retornos dos projetos tal como o modelo Básico do capítulo 3. Considerando a maximização de R_N sujeita a restrições de capital, a sua decomposição em três componentes, de acordo com (4.15), sugere o seguinte procedimento de otimização:

- (a) Otimizar a primeira componente de R_N , obtendo o retorno ótimo da mesma como função de k_h e do capital restante para aplicação em $P_N, P_{N-1}, \dots, P_{h+1}$, usando a variante do item 4.1;
- (b) Otimizar a terceira componente de R_N , obtendo o retorno ótimo da mesma como função de k_h e do capital restante para aplicação em $P_{h-1}, P_{h-2}, \dots, P_1$, usando o modelo Básico do capítulo 3;
- (c) Otimizar a soma dos retornos ótimos da primeira e terceira componentes de R_N e do retorno da segunda componente de R_N , decidindo-se sobre k_h e sobre a divisão do capital inicial entre as três componentes de R_N .

No item (a), os gastos de capital dos projetos serão definidos como em 4.1; no item (b) como em 3.6.3; o gasto de capital de P_h será dado por $A_h(k_h, 0)$.

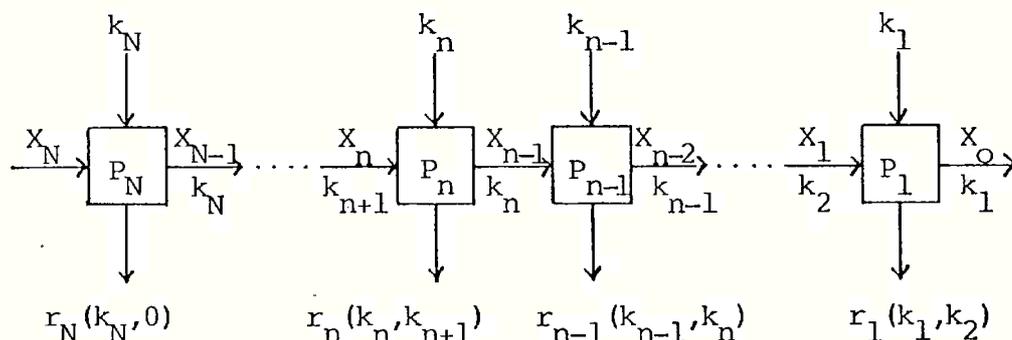
O procedimento de otimização acima não se identifica com o tradicionalmente utilizado em Programação Dinâmica. Na realidade, ele se classifica dentro da chamada *Programação Dinâmica Não-Serial* - uma extensão da Programação Dinâmica para tratar dos sistemas de decisão em que os estágios não se encontram ligados em série. É importante notar que o sistema físico em análise é o mesmo, seja para o modelo Básico do capítulo 3, seja para a va

riante do item 4.1, seja para o procedimento acima descrito, isto é, ele é formado por projetos ligados em série, embora possa ser transformado num sistema de informações, para a tomada de decisões, em que os estágios não se ligam, necessariamente, em série.

De forma a ilustrar melhor o significado do procedimento acima são apresentados, nas figuras 4.1, 4.2 e 4.3, respectivamente, diagramas funcionais representativos: (a) Do modelo Básico do capítulo 3; (b) Da variante do item 4.1; (c) Do procedimento segundo a Programação Dinâmica Não-Serial.

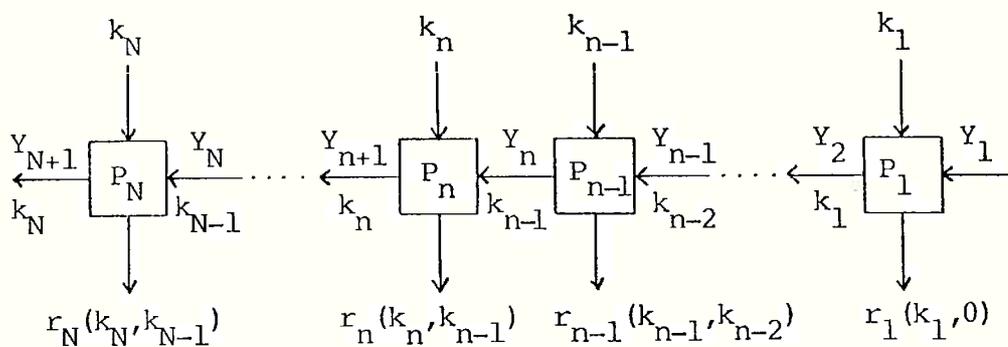
Segundo a figura 4.1, observa-se que o fluxo de informações se dá no mesmo sentido do fluxo de materiais entre os projetos, enquanto que na figura 4.2 o fluxo de informações se dá no sentido contrário ao do fluxo de materiais. Por isso, o modelo Básico é denominado, nesta pesquisa, de modelo SF (mesmo sentido do fluxo de materiais), enquanto que a variante do item 4.1 é denominada de modelo CF (sentido contrário ao fluxo de materiais).

FIGURA 4.1 DIAGRAMA FUNCIONAL REPRESENTATIVO DO MODELO BÁSICO



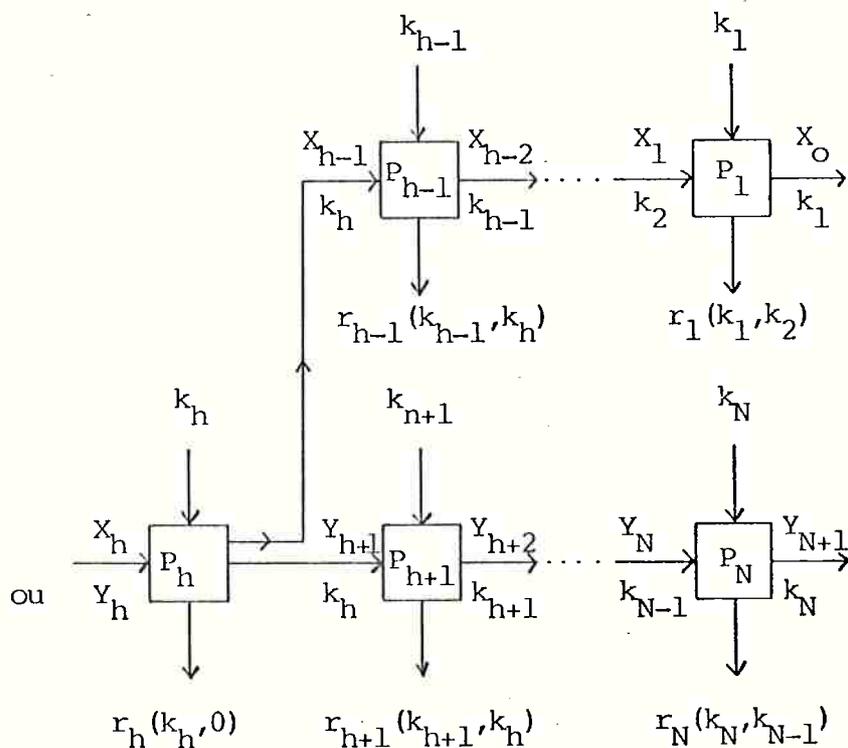
Fonte: Elaborado pelo autor.

FIGURA 4.2 DIAGRAMA FUNCIONAL REPRESENTATIVO DA PRIMEIRA VARIANTE AO MODELO BÁSICO



Fonte: Elaborado pelo autor.

FIGURA 4.3 DIAGRAMA FUNCIONAL REPRESENTATIVO DAS VARIANTES AO MODELO BÁSICO QUE EMPREGAM A PROGRAMAÇÃO DINÂMICA NÃO-SERIAL



Fonte: Elaborado pelo autor.

Como pode ser visto na figura 4.3, combina-se o modelo SF e o modelo CF. Nesta figura, identifica-se uma estrutura típica da Programação Dinâmica Não-Serial, dita de *vários estágios de decisão, com ramos divergentes*.

Deve-se notar que o *ramo divergente superior* corresponde à terceira componente de R_N (definida por (4.15) em que os retornos e gastos de capital dos projetos são definidos como no modelo SF, enquanto que o *ramo divergente inferior* corresponde à primeira componente de R_N , na qual os retornos e gastos de capital dos projetos são definidos de acordo com o modelo CF. No *estágio de divergência* (projeto P_h , $h=2, \dots, N-1$), o retorno e gastos de capital de cada versão não dependem da decisão tomada em nenhum outro estágio. Nesse estágio vale a seguinte equação vetorial:

$$X_h - A_h(k_h, 0) = X_{h-1} + Y_{h+1} \quad (4.16)$$

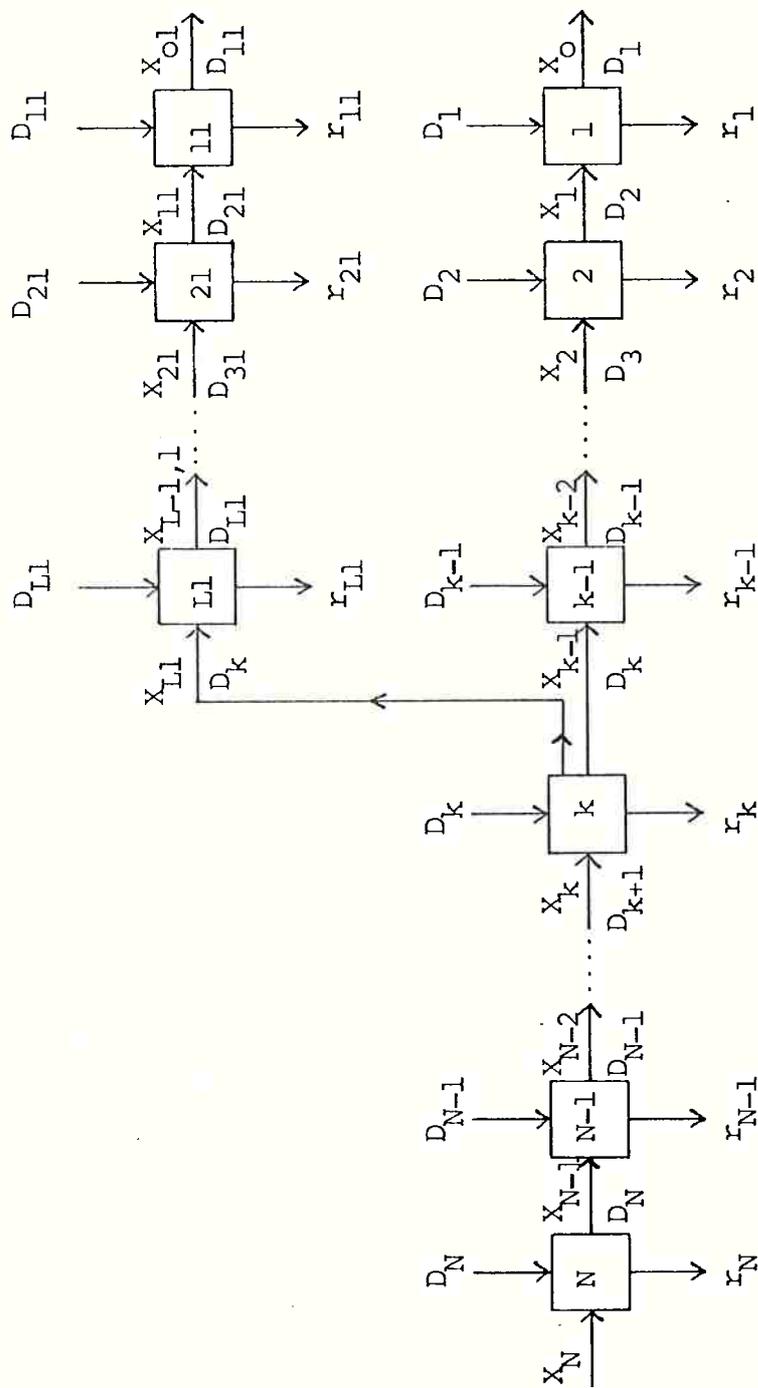
No item 4.2.2 é desenvolvido um modelo de Programação Dinâmica com variável de estado ampliada para um sistema de decisão de vários estágios com ramos divergentes, formando a base teórica para a solução do problema de alocação de capital acima descrito.

4.2.2 Modelo de Programação Dinâmica com variável de estado ampliada e com ramos divergentes

Para o desenvolvimento do modelo foram utilizados resultados dos itens 3.4, 3.6.2 e 4.1, bem como a formulação das equações recursivas feita por Nemhauser (21) para um sistema de decisão de vários estágios com ramos divergentes que, no entanto, não considera a necessidade de variável de estado ampliada.

Seja o diagrama funcional da figura 4.4, representando um siste

FIGURA 4.4 - DIAGRAMA FUNCIONAL PARA (N+L1) ESTÁGIOS, COM RAMOS DIVERGENTES E VARIÁVEL DE ESTADO AMPLIADA



FONTE: Adaptado de Nemhauser (21).

ma de decisão com múltiplos estágios, ramos divergentes e variável de estado ampliada.

Da mesma forma que no item 3.4, supõe-se que o diagrama da figura 4.4 seja representativo de um problema do estado inicial, ou seja, X_N é dado, e que se quer maximizar a função objetivo, na qual comparecem os retornos dos estágios r_n , $n=1, \dots, N$ e $r_{\ell 1}$, $\ell=1, \dots, L$, compostos de alguma forma.

Para a resolução do problema, são necessárias as seguintes relações funcionais:

$$X_{n-1} = t_n(X_n, D_n, D_{n+1}), \quad n=1, \dots, N-1 \quad \text{e} \quad X_{N-1} = t_N(X_N, D_N) \quad (4.17)$$

$$X_{(\ell-1)1} = t_{\ell 1}(X_{\ell 1}, D_{\ell 1}, D_{(\ell+1)1}), \quad \ell=1, \dots, L-1 \quad \text{e} \quad X_{(L-1)1} = t_{L1}(X_{L1}, D_{L1}, D_k) \quad (4.18)$$

$$X_{L1} = t_{(L+1)1}(X_k, D_k, D_{k+1}) \quad (4.19)$$

$$r_n = r_n(X_n, D_n, D_{n+1}), \quad n=1, \dots, N-1 \quad \text{e} \quad r_N = r_N(X_N, D_N) \quad (4.20)$$

$$r_{\ell 1} = r_{\ell 1}(X_{\ell 1}, D_{\ell 1}, D_{(\ell+1)1}), \quad \ell=1, \dots, L-1 \quad \text{e} \quad r_{L1} = r_{L1}(X_{L1}, D_{L1}, D_k) \quad (4.21)$$

Uma característica dos sistemas de decisão de múltiplos estágios em série, é a de que o estado de saída de um estágio constitui o estado de entrada para o estágio seguinte. Nos sistemas não-em-série tal não ocorre entre todos os estágios. No diagrama funcional da figura 4.4, isto pode ser constatado quando se analisam os estágios k , $k-1$ e $L1$: o estágio de divergência k fornece informações de saída tanto para $(k-1)$ como para $L1$.

Seja R_{N+L1} a função de retorno dos $(N+L1)$ estágios:

$$\begin{aligned}
R_{N+L1} = & \left[r_N(X_N, D_N) * r_{N-1}(X_{N-1}, D_{N-1}, D_N) * \dots * r_{k+1}(X_{k+1}, D_{k+1}, D_{k+2}) \right] * \\
& * \left[r_k(X_k, D_k, D_{k+1}) \right] * \left[r_{k-1}(X_{k-1}, D_{k-1}, D_k) * \dots * r_1(X_1, D_1, D_2) \right] * \\
& * \left[r_{L1}(X_{L1}, D_{L1}, D_k) * r_{(L-1)1}(X_{(L-1)1}, D_{(L-1)1}, D_{L1}) * \dots * r_{11}(X_{11}, D_{11}, D_{21}) \right]
\end{aligned}
\tag{4.22}$$

A expressão de R_{N+L1} , dada por (4.22), é formada de quatro parcelas, contidas nos colchetes: a primeira diz respeito aos retornos dos estágios $k+1, k+2, \dots, N$, a segunda considera apenas o estágio k , a terceira inclui os retornos dos estágios $1, 2, \dots, k-1$ e, a quarta, é constituída pelos retornos dos estágios $11, 21, \dots, L1$.

Inicialmente, considerando a terceira parcela (R_{k-1}) e utilizando (4.17), vem:

$$R_{k-1} = R_{k-1}(X_{k-1}, D_k, D_{k-1}, \dots, D_1) \tag{4.23}$$

Agora, considerando a quarta parcela (R_{L1}) e utilizando (4.18), analogamente ao que foi feito para R_{k-1} , obtêm-se:

$$R_{L1} = R_{L1}(X_{L1}, D_k, D_{L1}, \dots, D_{11}) \tag{4.24}$$

Analisando (4.23) e (4.24), pode-se dar interpretação semelhante àquela feita no item 3.4 para o sistema em série, ou seja, tanto o retorno de $L1$ estágios como o de $(k-1)$ estágios, dependem dos respectivos estados iniciais e das decisões tomadas nos seus diversos estágios.

A composição de R_{k-1} , R_{L1} e r_k , leva a R_{k+L1} :

$$R_{k+L1} = r_k(X_k, D_k, D_{k+1}) * R_{k-1} * R_{L1} \quad (4.25)$$

Usando (4.17) e (4.19) em (4.25), vem:

$$R_{k+L1} = R_{k+L1}(X_k, D_{k+1}, D_k, \dots, D_1, D_{L1}, \dots, D_{11}) \quad (4.26)$$

A expressão (4.26) pode-se dar interpretação análoga àquela feita para (4.23) e (4.24).

Finalmente, considerando a primeira parcela de R_{N+L1} , obtém-se:

$$R_{N+L1} = R_{N+L1}(X_N, D_N, D_{N-1}, \dots, D_1, D_{L1}, D_{(L-1)1}, \dots, D_{11}) \quad (4.27)$$

Novamente, também para (4.27) é possível dar interpretação semelhante àquela feita para (4.23) e (4.24).

O sistema da figura 4.4 pode ser otimizado usando o procedimento do item 3.6.2 para os ramos divergentes, a seguir compondo seus retornos com o do estágio k e, finalmente, usando o procedimento de 3.6.2 para obter o ótimo do sistema como um todo. Isto é feito a seguir, admitindo-se a hipótese de monotonicidade de R_{N+L1} e a notação e demais definições empregadas em 3.62:

(a) *Otimização do ramo inferior até o estágio (k-1)*

É iniciada com $f_0(X_0, D_1)$ dada e vai até a obtenção de $f_{k-1}(X_{k-1}, D_k)$:

$$f_{k-1}(X_{k-1}, D_k) = \max_{D_{k-1} \in \Gamma_{k-1}} [r_{k-1}(X_{k-1}, D_{k-1}, D_k) * f_{k-2}(t_{k-1}(X_{k-1}, D_{k-1}, D_k), D_{k-1})],$$

$$\text{obtendo-se } D_{k-1} = D_{k-1}(X_{k-1}, D_k) \quad (4.28)$$

(b) *Otimização do ramo superior até o estágio L1*

É iniciada com $f_{01}(X_{01}, D_{11})$ dada e vai até a obtenção de $f_{L1}(X_{L1}, D_k)$:

$$f_{L1}(X_{L1}, D_k) = \max_{D_{L1} \in \Gamma_{L1}} [r_{L1}(X_{L1}, D_{L1}, D_k) * f_{(L-1)1}(t_{L1}(X_{L1}, D_{L1}, D_k), D_{L1})] ,$$

$$\text{obtendo-se } D_{L1} = D_{L1}(X_{L1}, D_k) \quad (4.29)$$

(c) *Absorção do ramo superior no inferior e composição com o retorno do estágio k*

Utilizando (4.17) para $n=k$ e (4.19), obtêm-se a seguinte equação recursiva no estágio de divergência:

$$f_k(X_k, D_{k+1}) = \max_{D_k \in \Gamma_k} [r_k(X_k, D_k, D_{k+1}) * f_{k-1}(t_k(X_k, D_k, D_{k+1}), D_k) * f_{L1}(t_{(L+1)1}(X_k, D_k, D_{k+1}), D_k)] , \text{ obtendo-se}$$

$$D_k = D_k(X_k, D_{k+1}) \quad (4.30)$$

(d) *Otimização até o estágio N*

Obtida $f_k(X_k, D_{k+1})$, o restante do procedimento é o mesmo apresentado no item 3.6.2. No estágio N obtêm-se, finalmente:

$$f_N(X_N) = \max_{D_N \in \Gamma_N} [r_N(X_N, D_N) * f_{N-1}(t_N(X_N, D_N), D_N)] , \text{ obtendo-se } \hat{D}_N = D_N(X_N) \quad (4.31)$$

A partir da obtenção de \hat{D}_N em (4.31), pode-se determinar as demais decisões e estados ótimos, de forma análoga ao apresentado no item 3.6.2.

Em determinados casos, não se dispõem das transformações (4.17), para $n = k$, e (4.19), mas tão somente do estado de saída do estágio k , Y_k , sendo:

$$Y_k = X_{L1} + X_{k-1} \quad (4.32)$$

e

$$Y_k = t_k(X_k, D_k, D_{k+1}) \quad (4.33)$$

Nesta situação, deve-se decidir sobre X_{L1} e X_{k-1} , sendo um determinado pelo outro através de (4.32).

O procedimento de otimização, neste caso, sofre alteração apenas na parte (c). A equação recursiva para o estágio de divergência assume a forma:

$$f_k(X_k, D_{k+1}) = \max_{D_k, X_{k-1}} [r_k(X_k, D_k, D_{k+1}) * f_{k-1}(X_{k-1}, D_k) * \\ * f_{L1}(t_k(X_k, D_k, D_{k+1}) - X_{k-1}, D_k)] \\ \text{com } D_k \in \Gamma_k \text{ e } \vec{0} \leq X_{k-1} \leq t_k(X_k, D_k, D_{k+1}) \quad (4.34)$$

Deve-se observar que, no estágio de divergência, deve-se decidir sobre D_k e X_{k-1} . Ao invés disso, aplicando o Princípio de Otimidade de Bellman, pode-se decompor este problema de um estágio e dois vetores de decisão, num outro de dois estágios com um vetor de decisão cada um. Para isso, cria-se um estágio adicional aos já existentes, dito *pseudo-estágio*. A introdução do

pseudo-estágio tem como finalidade reduzir o esforço computacional necessário para se resolver (4.34). Alguns trabalhos têm utilizado a idéia do pseudo-estágio. Meier e Beightler (16) aplicaram-na à otimização de sistemas de decisão de múltiplos estágios com ramos divergentes e, também, com ramos convergentes. Beightler, Phillips e Fowler (4), bem como Phillips, Beightler e Parker (24) utilizaram pseudo-estágios na análise de sistemas de decisão de múltiplos estágios com "loops" em "feed-back" e em "feedforward" ("bypass").

Denotando o pseudo-estágio por Δ , nele decidirá-se sobre X_{k-1} ; no estágio k , sobre D_k . Tem-se:

$$f_{\Delta}(Y_k, D_k) = \max_{0 \leq X_{k-1} \leq Y_k} [f_{L1}(Y_k - X_{k-1}, D_k) * f_{k-1}(X_{k-1}, D_k)] ,$$

$$\text{obtendo-se } X_{k-1} = X_{k-1}(Y_k, D_k) \text{ e } X_{L1} = Y_k - X_{k-1} \quad (4.35)$$

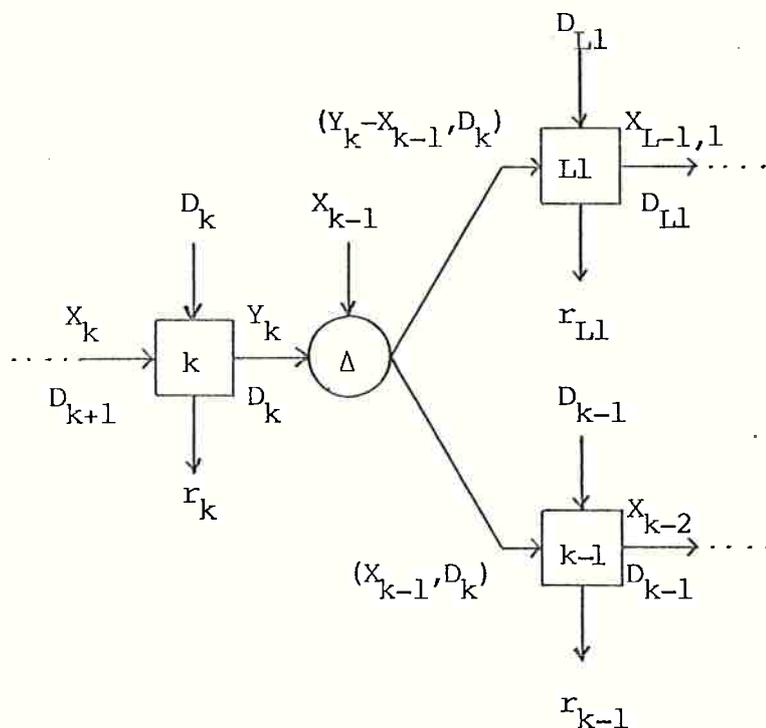
$$f_k(X_k, D_{k+1}) = \max_{D_k \in I_k} [r_k(X_k, D_k, D_{k+1}) * f_{\Delta}(t_k(X_k, D_k, D_{k+1}), D_k)] ,$$

$$\text{obtendo-se } D_k = D_k(X_k, D_{k+1}) \quad (4.36)$$

A utilização do pseudo-estágio Δ leva a uma alteração no diagrama funcional da figura 4.4. Na figura 4.5, apenas a parte de interesse do diagrama, já com a introdução do pseudo-estágio, é apresentada.

No item 4.2.3, a seguir, são utilizados os resultados aqui alcançados para a obtenção da solução do problema de alocação de capital definido em 4.2.1.

FIGURA 4.5 DIAGRAMA FUNCIONAL COM PSEUDO-ESTÁGIO



Fonte: Elaborado pelo autor

4.2.3 Solução do problema de alocação de capital por Programação Dinâmica Não-Serial

Neste item, são aplicados os resultados de 4.2.2 ao problema de finido em 4.2.1. Considerando o diagrama funcional da figura 4.3, tem-se o procedimento abaixo:

(a) *Otimização do ramo inferior até o estágio (h+1)*

$$g_{N+1}(Y_{N+1}, k_N) = 0, \quad \forall Y_{N+1} \geq \bar{0} \quad \text{e} \quad \forall k_N \quad (4.37)$$

$$g_n(Y_n, k_{n-1}) = \max_{k_n=0, \dots, K_n} [r_n(k_n, k_{n-1}) + g_{n+1}(Y_n - A_n(k_n, k_{n-1}), k_n)]$$

$$\text{obtendo-se } k_n = k_n(Y_n, k_{n-1}), \quad n = N, \dots, h+2 \quad (4.38)$$

$$g_{h+1}(Y_{h+1}, k_h) = \max_{k_{h+1}=0, \dots, K_{h+1}} [r_{h+1}(k_{h+1}, k_h) + g_{h+2}(Y_{h+1} - A_{h+1}(k_{h+1}, k_h), k_{h+1})],$$

$$\text{obtendo-se } k_{h+1} = k_{h+1}(Y_{h+1}, k_h) \quad (4.39)$$

considerando, também, (4.11).

(b) *Otimização do ramo superior até o estágio (h-1)*

$$f_0(X_0, k_1) = 0, \quad \forall X_0 \geq \bar{0} \quad \text{e} \quad \forall k_1 \quad (4.40)$$

$$f_n(X_n, k_{n+1}) = \max_{k_n=0, \dots, K_n} [r_n(k_n, k_{n+1}) + f_{n-1}(X_n - A_n(k_n, k_{n+1}), k_n)]$$

$$\text{obtendo-se } k_n = k_n(X_n, k_{n+1}), \quad n = 1, \dots, h-2 \quad (4.41)$$

$$f_{h-1}(X_{h-1}, k_h) = \max_{k_{h-1}=0, \dots, K_{h-1}} [r_{h-1}(k_{h-1}, k_h) + f_{h-2}(X_{h-1} - A_{h-1}(k_{h-1}, k_h), k_{h-1})],$$

$$\text{obtendo-se } k_{h-1} = k_{h-1}(X_{h-1}, k_h) \quad (4.42)$$

considerando, também, (3.70).

(c.1) *Pseudo-estágio Δ*

De acordo com (4.16):

$$X_h - A_h(k_h, 0) = X_{h-1} + Y_{h+1} \quad (4.16)$$

Seja Z_h o capital restante após a decisão acerca de P_h :

$$Z_h = X_h - A_h(k_h, 0) \quad (4.43)$$

Tem-se:

$$f_{\Delta}(Z_h, k_h) = \max_{\substack{0 < Y_{h+1} < Z_h \\ -Y_{h+1} < -Z_h}} [g_{h+1}(Y_{h+1}, k_h) + f_{h-1}(Z_h - Y_{h+1}, k_h)] ,$$

$$\text{obtendo-se } Y_{h+1} = Y_{h+1}(Z_h, k_h) \text{ e } X_{h-1} = Z_h - Y_{h+1} \quad (4.44)$$

(c.2) Estágio de divergência P_h

$$f_h(X_h) = \max_{k_h=0, \dots, K_h} [r_h(k_h, 0) + f_{\Delta}(X_h - A_h(k_h, 0), k_h)] ,$$

$$\text{obtendo-se } \hat{k}_h = k_h(X_h) \quad (4.45)$$

$$\text{sendo } f_{\Delta}(X_h - A_h(k_h, 0), k_h) = -\infty \quad (4.46)$$

se algum componente de $(X_h - A_h(k_h, 0))$ for negativo.

Tanto em (4.37) como em (4.40), a desigualdade vetorial é toma da elemento a elemento.

A obtenção da política ótima de decisão é feita utilizando-se

os resultados do item 3.6.3 e do item 4.1.

O procedimento acima descrito é equivalente àqueles dos modelos SF e CF, no sentido de levar à mesma solução que os outros dois, caso $X_h = Y_1 = X_N$, em cada período de tempo.

Quando do cômputo do retorno ótimo segundo (4.38), (4.39), (4.41) e (4.42), a variável de estado "capital restante para aplicação" poderá assumir valores numa região, cujos limites inferior e superior foram discutidos nos itens 3.6.3 e 4.1. Quanto ao pseudo-estágio, sendo X_h dado, Z_h dependerá apenas da particular versão k_h considerada, assumindo um único valor para cada k_h .

Esta variante, que emprega a Programação Dinâmica Não-Serial, também pode ser particularizada para os três casos de alocação de capital vistos no item 3.5.

O algoritmo de solução, para a segunda classe de variantes, combina aquele desenvolvido no item 3.7 para o modelo Básico e aquele correspondente ao item 4.1, referente à primeira variante ao modelo Básico. Os conjuntos de pontos eficientes são, então, obtidos como abaixo:

(a) Conjuntos de pontos eficientes para o ramo inferior, até o estágio $(h+1)$

$$G_{N+1}(k_N) = \{\emptyset\}, \quad \forall k_N \quad (4.12)$$

$$G_n(k_{n-1}) \subset \bigcup_{k_n=0}^{K_n} [A_n(k_n, k_{n-1}) \oplus G_{n+1}(k_n)], \quad n=N, \dots, h+2 \quad (4.13)$$

$$G_{h+1}(k_h) \subset \bigcup_{k_{h+1}=0}^{K_{h+1}} [A_{h+1}(k_{h+1}, k_h) \oplus G_{h+2}(k_{h+1})] \quad (4.47)$$

(b) Conjuntos de pontos eficientes para o ramo superior, até o estágio $(h-1)$

$$F_0(k_1) = \{\vec{0}\}, \quad \forall k_1 \quad (3.78)$$

$$F_n(k_{n+1}) \subset \bigcup_{k_n=0}^{K_n} [A_n(k_n, k_{n+1}) \oplus F_{n-1}(k_n)], \quad n=1, \dots, h-2 \quad (3.83)$$

$$F_{h-1}(k_h) \subset \bigcup_{k_{h-1}=0}^{K_{h-1}} [A_{h-1}(k_{h-1}, k_h) \oplus F_{h-2}(k_{h-1})] \quad (4.48)$$

(c.1) Conjuntos de pontos eficientes no pseudo-estágio Δ

$$F_\Delta(k_h) \subset \bigcup [G_{h+1}(k_h) \oplus F_{h-1}(k_h)] \quad (4.49)$$

(c.2) Conjunto de pontos eficientes no estágio de divergência P_h

$$F_h \subset \bigcup_{k_h=0}^{K_h} [A_h(k_h, 0) \oplus F_\Delta(k_h)] \quad (4.50)$$

Nos itens (a), (b), (c.1) e (c.2), a obtenção dos conjuntos F e G é feita a partir da eliminação de pontos inviáveis e pontos dominados, o que requer a consideração do retorno associado a cada ponto.

Em (4.49), fixado k_h , deve-se formar todas as somas possíveis entre um elemento de $G_{h+1}(k_h)$ e um elemento de $F_{h-1}(k_h)$.

De forma a se poder traçar a política ótima de decisão, são utilizados conjuntos τ do seguinte modo: $\tau_n(k_{n-1})$ para o item (a), até a obtenção de $\tau_{h+1}(k_h)$; $\tau_n(k_{n+1})$ para o item (b), até a obtenção de $\tau_{h-1}(k_h)$; $\tau_\Delta(k_h)$ no item (c.1) sendo que neste

conjunto, cada elemento possui dois números: a ordem de um ponto de $G_{h+1}(k_h)$ e a ordem de um ponto de $F_{h-1}(k_h)$; $\tau_h(0)$ no item (c.2).

A segunda classe de variantes apresentada será, a seguir, ilustrada com os mesmos dados numéricos utilizados na exemplificação do modelo Básico e de sua primeira variante. Será considerado como estágio de divergência o projeto P_2 . Desta forma, o projeto P_1 é analisado como no modelo SF (Básico), enquanto que os projetos P_3 a P_{10} o são como no modelo CF (primeira variante).

A análise do projeto P_1 , de acordo com o algoritmo exposto (item (b)), é obtida na listagem de saída do Programa III para o modelo Básico (tabelas de "pontos eficientes estágio 1", com decisões 0,1 e 2 no estágio anterior, da Seção 3 da Parte 2 do Volume II do trabalho). A análise dos projetos P_3 a P_{10} , seguindo o item (a) do algoritmo, está contida na listagem de saída do Programa III para a primeira variante (tabelas de "pontos eficientes estágio 8", com decisões 0,1 e 2 no estágio seguinte⁽³⁾, da Parte 3 do Volume II).

Obtidas as análises acima, seguindo o algoritmo, deve-se compor as mesmas para a formação dos conjuntos de pontos eficientes no pseudo-estágio Δ . De acordo com o item (c.1), isto deve ser feito para cada possível decisão no estágio de divergência. As tabelas 4.2, 4.3 e 4.4 apresentam os conjuntos acima, respectivamente para $k_2 = 0$, $k_2 = 1$ e $k_2 = 2$. As três tabelas possuem o número de ordem de cada ponto, o vetor de gastos de capital e o retorno do mesmo, e o número de ordem dos pontos, nos estágios 1 e 3, que geraram aquele anterior para o pseudo-estágio. Respectivamente para $k_2 = 0$, $k_2 = 1$ e $k_2 = 2$, foram identificados 63, 20 e 15 pontos eficientes.

(3) A tabela de interesse é aquela referente ao projeto 3 que, devido à inversão de numeração dos projetos, surge na listagem com o número 8.

TABELA 4.2 - PONTOS EFICIENTES NO PSEUDO-ESTÁGIO (Δ),
COM DECISÃO "0" NO ESTÁGIO 2

ORDEM	VETOR DE GASTOS DE CAPITAL					RETORNO	ORDEM NO ESTÁGIO 1	ORDEM NO ESTÁGIO 3
	DATA=0	DATA=1	DATA=2	DATA=3	DATA=4			
1	0	0	0	0	0	0	1	1
2	2000,0	2000,0	2000,0	2000,0	2000,0	11558,0	1	2
3	4000,0	2000,0	2000,0	2000,0	0	3839,0	1	3
4	2000,0	2000,0	12000,0	12000,0	7000,0	14949,0	1	4
5	7000,0	6000,0	5000,0	4000,0	3000,0	122939,0	1	5
6	14000,0	14000,0	10000,0	10000,0	2000,0	2350885,0	1	6
7	16000,0	16000,0	12000,0	12000,0	4000,0	2362443,0	1	7
8	18000,0	16000,0	12000,0	12000,0	2000,0	2354724,0	1	8
9	10000,0	8000,0	7000,0	4000,0	6000,0	1629381,0	1	9
10	12000,0	10000,0	9000,0	6000,0	8000,0	1640939,0	1	10
11	14000,0	10000,0	9000,0	6000,0	6000,0	1633220,0	1	11
12	10000,0	10000,0	10000,0	10000,0	0	821000,0	1	12
13	12000,0	12000,0	12000,0	12000,0	2000,0	832558,0	1	13
14	14000,0	12000,0	12000,0	12000,0	0	824839,0	1	14
15	8000,0	6000,0	4000,0	0	0	521429,0	1	15
16	10000,0	8000,0	6000,0	2000,0	2000,0	532987,0	1	16
17	12000,0	8000,0	6000,0	2000,0	0	525268,0	1	18
18	18000,0	16000,0	11000,0	0	0	528419,0	1	20
19	20000,0	18000,0	13000,0	2000,0	2000,0	569757,0	1	21
20	20000,0	18000,0	13000,0	2000,0	0	528906,0	1	22
21	15000,0	12000,0	9000,0	4000,0	3000,0	738384,0	1	23
22	17000,0	14000,0	11000,0	6000,0	5000,0	749942,0	1	24
23	19000,0	14000,0	11000,0	6000,0	3000,0	742223,0	1	25
24	18000,0	14000,0	11000,0	4000,0	6000,0	2408106,0	1	26
25	20000,0	16000,0	13000,0	6000,0	8000,0	2419664,0	1	27
26	18000,0	16000,0	14000,0	10000,0	0	1564963,0	1	28
27	9000,0	5000,0	4000,0	0	0	55361,0	1	29
28	19000,0	13000,0	11000,0	4000,0	6000,0	1963546,0	1	30
29	19000,0	15000,0	14000,0	10000,0	0	1114683,0	1	31
30	11000,0	5500,0	5500,0	5500,0	5500,0	216095,0	1	32
31	16000,0	9500,0	9500,0	5500,0	5500,0	735194,0	1	33
32	20000,0	11500,0	11500,0	7500,0	5500,0	739033,0	1	34
33	15000,0	13000,0	8000,0	4000,0	4000,0	737429,0	1	35

TABELA 4.2 (cont.) - PONTOS EFICIENTES NO PSEUDO-ESTÁGIO (A),
COM DECISÃO "0" NO ESTÁGIO 2

ORDEM	VETOR DE GASTOS DE CAPITAL					RETORNO	ORDEM	ORDEM
	DATA=0	DATA=1	DATA=2	DATA=3	DATA=4		NO ESTÁGIO 1	NO ESTÁGIO 3
34	1000,0	1000,0	1000,0	1000,0	1000,0	6735,0	2	1
35	5000,0	3000,0	3000,0	3000,0	1000,0	10574,0	2	3
36	15000,0	15000,0	11000,0	11000,0	3000,0	2357620,0	2	6
37	19000,0	17000,0	13000,0	13000,0	3000,0	2361459,0	2	8
38	11000,0	9000,0	8000,0	5000,0	7000,0	1636116,0	2	9
39	15000,0	11000,0	10000,0	7000,0	7000,0	1639955,0	2	11
40	11000,0	11000,0	11000,0	11000,0	1000,0	827735,0	2	12
41	15000,0	13000,0	13000,0	13000,0	1000,0	831574,0	2	14
42	9000,0	7000,0	5000,0	1000,0	1000,0	528164,0	2	15
43	13000,0	9000,0	7000,0	3000,0	1000,0	532003,0	2	18
44	20000,0	12000,0	9000,0	5000,0	2000,0	537414,0	2	19
45	19000,0	17000,0	12000,0	1000,0	1000,0	535154,0	2	20
46	16000,0	13000,0	10000,0	5000,0	4000,0	745119,0	2	23
47	20000,0	15000,0	12000,0	7000,0	4000,0	748958,0	2	25
48	19000,0	15000,0	12000,0	5000,0	7000,0	2414841,0	2	26
49	19000,0	17000,0	15000,0	11000,0	1000,0	1571698,0	2	28
50	16000,0	14000,0	9000,0	5000,0	5000,0	744164,0	2	35
51	3000,0	3000,0	3000,0	3000,0	3000,0	111491,0	3	1
52	5000,0	5000,0	5000,0	5000,0	5000,0	123049,0	3	2
53	7000,0	5000,0	5000,0	5000,0	3000,0	115330,0	3	3
54	5000,0	5000,0	15000,0	15000,0	10000,0	126440,0	3	4
55	17000,0	17000,0	13000,0	13000,0	5000,0	2462376,0	3	6
56	19000,0	19000,0	15000,0	15000,0	7000,0	2473934,0	3	7
57	13000,0	11000,0	10000,0	7000,0	9000,0	1740872,0	3	9
58	17000,0	13000,0	12000,0	9000,0	9000,0	1744711,0	3	11
59	13000,0	13000,0	13000,0	13000,0	3000,0	932491,0	3	12
60	11000,0	9000,0	7000,0	3000,0	3000,0	632920,0	3	15
61	13000,0	11000,0	9000,0	5000,0	5000,0	644478,0	3	16
62	15000,0	11000,0	9000,0	5000,0	3000,0	636759,0	3	18
63	7000,0	7000,0	7000,0	7000,0	7000,0	196545,0	3	37

FONTE: Elaborado pelo autor.

TABELA 4.3 - PONTOS EFICIENTES NO PSEUDO-ESTÁGIO (A),
COM DECISÃO "1" NO ESTÁGIO 2

ORDEM	VETOR DE GASTOS DE CAPITAL					RETORNO	ORDEM NO ESTÁGIO 1	ORDEM NO ESTÁGIO 3
	DATA=0	DATA=1	DATA=2	DATA=3	DATA=4			
1	0	0	0	0	0	0	1	1
2	4000,0	2000,0	2000,0	2000,0	0	3839,0	1	3
3	14000,0	14000,0	10000,0	10000,0	2000,0	2350885,0	1	5
4	10000,0	10000,0	10000,0	10000,0	0	821000,0	1	6
5	8000,0	6000,0	4000,0	0	0	521429,0	1	7
6	12000,0	8000,0	6000,0	2000,0	0	525268,0	1	9
7	9000,0	5000,0	4000,0	0	0	55361,0	1	10
8	10000,0	4500,0	4500,0	4500,0	4500,0	260980,0	1	17
9	15000,0	8500,0	8500,0	4500,0	4500,0	780079,0	1	18
10	14000,0	12000,0	7000,0	3000,0	3000,0	782314,0	1	19
11	1100,0	1100,0	1100,0	1100,0	1100,0	28594,0	2	1
12	5100,0	3100,0	3100,0	3100,0	1100,0	32433,0	2	3
13	9100,0	7100,0	5100,0	1100,0	1100,0	550023,0	2	7
14	13100,0	9100,0	7100,0	3100,0	1100,0	553862,0	2	9
15	2500,0	2500,0	2500,0	2500,0	2500,0	142967,0	3	1
16	4500,0	4500,0	4500,0	4500,0	4500,0	154525,0	3	2
17	6500,0	4500,0	4500,0	4500,0	2500,0	146806,0	3	3
18	10500,0	8500,0	6500,0	2500,0	2500,0	664396,0	3	7
19	12500,0	10500,0	8500,0	4500,0	4500,0	675954,0	3	8
20	14500,0	10500,0	8500,0	4500,0	2500,0	668235,0	3	9

FONTE: Elaborado pelo autor.

TABELA 4.4 - PONTOS EFICIENTES NO PSEUDO-ESTÁGIO (Δ),
COM DECISÃO "2" NO ESTÁGIO 2

ORDEM	VETOR DE GASTOS DE CAPITAL				RETORNO	ORDEM NO ESTÁGIO 1	ORDEM NO ESTÁGIO 3
	DATA=0	DATA=1	DATA=2	DATA=3			
1	0	0	0	0	0	1	1
2	4000,0	2000,0	2000,0	2000,0	3839,0	1	3
3	8000,0	6000,0	4000,0	0	521429,0	1	4
4	12000,0	8000,0	6000,0	2000,0	525268,0	1	6
5	19000,0	11000,0	8000,0	4000,0	530679,0	1	7
6	18000,0	16000,0	11000,0	0	528419,0	1	8
7	9000,0	5000,0	4000,0	0	55361,0	1	9
8	1000,0	1000,0	1100,0	1100,0	58574,0	2	1
9	5000,0	3000,0	3100,0	3100,0	62413,0	2	3
10	9000,0	7000,0	5100,0	1100,0	580003,0	2	4
11	13000,0	9000,0	7100,0	3100,0	583842,0	2	6
12	3000,0	3000,0	2000,0	2000,0	210306,0	3	1
13	7000,0	5000,0	4000,0	4000,0	214145,0	3	3
14	11000,0	9000,0	6000,0	2000,0	731735,0	3	4
15	15000,0	11000,0	8000,0	4000,0	735574,0	3	6

FONTE: Elaborado pelo autor.

No item (c.2) do algoritmo é obtido o conjunto de pontos eficientes para os dez estágios. Na tabela 4.5 estão apresentados tais pontos. Há um total de 69 pontos eficientes, exatamente os mesmos já determinados pelos modelos SF e CF. A tabela 4.5 apresenta o número de ordem de cada ponto, o vetor de gastos de capital e o retorno dos mesmos, a decisão no estágio de divergência e o número de ordem do ponto, no pseudo-estágio Δ , que gerou aquele em questão. Através de uma simples inspeção na tabela 4.5 verifica-se que o maior retorno que pode ser obtido vale 2.473.934,0, consumindo um capital de (19000,0;19000,0;15000,0;15000,0; 7000,0), correspondendo ao ponto de número 55. A decisão no estágio 2, de divergência, é zero e o ponto ótimo foi gerado pelo ponto de ordem 56 no pseudo-estágio Δ . Em função disto, na tabela 4.2, correspondente à decisão zero no estágio 2, busca-se as informações relativas ao ponto de ordem 56. Vê-se que o mesmo vetor de gastos de capital e retorno, acima colocados, constam daquelas informações e que o ponto de ordem 56 foi originado pelo 3º ponto do estágio 1 e 7º do estágio 3, obviamente com decisão zero no estágio 2. A partir daqui, o procedimento de montagem da política ótima de decisão é uma combinação daqueles já vistos para os modelos CF e SF, levando ao mesmo resultado obtido com aqueles.

4.3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo exploraram-se algumas possibilidades adicionais de se resolver o problema de análise de projetos integrados, fisicamente, em série. Essas possibilidades (variantes) levam aos mesmos resultados obtidos com o modelo Básico do capítulo 3 e constituem formas alternativas de decomposição do problema de otimização, através da Programação Dinâmica. A obtenção das variantes depende da maneira pela qual são definidos os retornos e os gastos de capital dos projetos.

TABELA 4.5 - PONTOS EFICIENTES NO ESTÁGIO DE DIVERGÊNCIA (2)

ORDEM	VETOR DE GASTOS DE CAPITAL					RETORNO	DECISÃO	ORDEM NO PSEUDO- ESTÁGIO Δ
	DATA=0	DATA=1	DATA=2	DATA=3	DATA=4			
1	0	0	0	0	0	0	0	1
2	2000,0	2000,0	2000,0	2000,0	2000,0	11558,0	0	2
3	4000,0	2000,0	2000,0	2000,0	0	3839,0	0	3
4	2000,0	2000,0	12000,0	12000,0	7000,0	14949,0	0	4
5	7000,0	6000,0	5000,0	4000,0	3000,0	122939,0	0	5
6	14000,0	14000,0	10000,0	10000,0	2000,0	2350885,0	0	6
7	16000,0	16000,0	12000,0	12000,0	4000,0	2362443,0	0	7
8	18000,0	16000,0	12000,0	12000,0	2000,0	2354724,0	0	8
9	10000,0	8000,0	7000,0	4000,0	6000,0	1629381,0	0	9
10	12000,0	10000,0	9000,0	6000,0	8000,0	1640939,0	0	10
11	14000,0	10000,0	9000,0	6000,0	6000,0	1633220,0	0	11
12	10000,0	10000,0	10000,0	10000,0	0	821000,0	0	12
13	12000,0	12000,0	12000,0	12000,0	2000,0	832558,0	0	13
14	14000,0	12000,0	12000,0	12000,0	0	824839,0	0	14
15	8000,0	6000,0	4000,0	0	0	521429,0	0	15
16	10000,0	8000,0	6000,0	2000,0	2000,0	532987,0	0	16
17	12000,0	8000,0	6000,0	2000,0	0	525268,0	0	17
18	18000,0	16000,0	11000,0	0	0	528419,0	0	18
19	20000,0	18000,0	13000,0	2000,0	2000,0	569757,0	0	19
20	20000,0	18000,0	13000,0	2000,0	0	528906,0	0	20
21	15000,0	12000,0	9000,0	4000,0	3000,0	738384,0	0	21
22	17000,0	14000,0	11000,0	6000,0	5000,0	749942,0	0	22
23	19000,0	14000,0	11000,0	6000,0	3000,0	742223,0	0	23
24	18000,0	14000,0	11000,0	4000,0	6000,0	2408106,0	0	24
25	20000,0	16000,0	13000,0	6000,0	8000,0	2419664,0	0	25
26	18000,0	16000,0	14000,0	10000,0	0	1564963,0	0	26
27	9000,0	5000,0	4000,0	0	0	55361,0	0	27
28	19000,0	13000,0	11000,0	4000,0	6000,0	1963546,0	0	28
29	19000,0	15000,0	14000,0	10000,0	0	1114683,0	0	29
30	11000,0	5500,0	5500,0	5500,0	5500,0	216095,0	0	30
31	16000,0	9500,0	9500,0	5500,0	5500,0	735194,0	0	31
32	20000,0	11500,0	11500,0	7500,0	5500,0	739033,0	0	32
33	15000,0	13000,0	8000,0	4000,0	4000,0	737429,0	0	33
34	1000,0	1000,0	1000,0	1000,0	1000,0	6735,0	0	34
35	5000,0	3000,0	3000,0	3000,0	1000,0	10574,0	0	35
36	15000,0	15000,0	11000,0	11000,0	3000,0	2357620,0	0	36
37	19000,0	17000,0	13000,0	13000,0	3000,0	2361459,0	0	37

TABELA 4.5 (cont.) - PONTOS EFICIENTES NO ESTÁGIO DE DIVERGÊNCIA (2)

ORDEM	VETOR DE GASTOS DE CAPITAL					RETORNO	DECISÃO	ORDEM NO PSEUDO- ESTÁGIO Δ
	DATA=0	DATA=1	DATA=2	DATA=3	DATA=4			
38	11000,0	9000,0	8000,0	5000,0	7000,0	1636116,0	0	38
39	15000,0	11000,0	10000,0	7000,0	7000,0	1639955,0	0	39
40	11000,0	11000,0	11000,0	11000,0	1000,0	827735,0	0	40
41	15000,0	13000,0	13000,0	13000,0	1000,0	831574,0	0	41
42	9000,0	7000,0	5000,0	1000,0	1000,0	528164,0	0	42
43	13000,0	9000,0	7000,0	3000,0	1000,0	532003,0	0	43
44	20000,0	12000,0	9000,0	5000,0	2000,0	537414,0	0	44
45	19000,0	17000,0	12000,0	1000,0	1000,0	535154,0	0	45
46	16000,0	13000,0	10000,0	5000,0	4000,0	745119,0	0	46
47	20000,0	15000,0	12000,0	7000,0	4000,0	748958,0	0	47
48	19000,0	15000,0	12000,0	5000,0	7000,0	2414841,0	0	48
49	19000,0	17000,0	15000,0	11000,0	1000,0	1571698,0	0	49
50	16000,0	14000,0	9000,0	5000,0	5000,0	744164,0	0	50
51	3000,0	3000,0	3000,0	3000,0	3000,0	111491,0	0	51
52	5000,0	5000,0	5000,0	5000,0	5000,0	123049,0	0	52
53	7000,0	5000,0	5000,0	5000,0	3000,0	115330,0	0	53
54	17000,0	17000,0	13000,0	13000,0	5000,0	2462376,0	0	55
55	19000,0	19000,0	15000,0	15000,0	7000,0	2473934,0	0	56
56	13000,0	11000,0	10000,0	7000,0	9000,0	1740872,0	0	57
57	17000,0	13000,0	12000,0	9000,0	9000,0	1744711,0	0	58
58	13000,0	13000,0	13000,0	13000,0	3000,0	932491,0	0	59
59	11000,0	9000,0	7000,0	3000,0	3000,0	632920,0	0	60
60	13000,0	11000,0	9000,0	5000,0	5000,0	644478,0	0	61
61	15000,0	11000,0	9000,0	5000,0	5000,0	636759,0	0	62
62	7000,0	7000,0	7000,0	7000,0	7000,0	196545,0	0	63
63	7500,0	7500,0	7500,0	7500,0	7500,0	226600,0	1	15
64	0	0	8000,0	8000,0	8000,0	4603,0	2	1
65	8000,0	6000,0	12000,0	8000,0	8000,0	526032,0	2	3
66	1000,0	1000,0	9100,0	9100,0	9100,0	63177,0	2	8
67	9000,0	7000,0	13100,0	9100,0	9100,0	584606,0	2	10
68	3000,0	3000,0	10000,0	10000,0	10000,0	214909,0	2	12
69	7000,0	5000,0	12000,0	12000,0	10000,0	218748,0	2	13

FONTE: Elaborado pelo autor.

Uma questão de interesse prático pode ser levantada em função das alternativas equivalentes desenvolvidas. Ela diz respeito ao custo de obtenção da solução do problema: sendo desejável obter a solução do problema, através da Programação Dinâmica, com o menor custo possível, qual deve ser a forma de decomposição do mesmo para que isto ocorra? Embora esta questão fuja do escopo do trabalho, é possível adiantar que a resposta à mesma dependerá da particular estrutura de dados de cada problema. Exemplificando com um caso extremo, suponha-se que em um problema com 10 estágios, apenas o 10º estágio possua retornos positivos, estabelecidos como no modelo Básico. Neste caso, excetuando a lista de pontos eficientes no 10º estágio, as demais apenas conteriam o ponto $(\vec{0}, 0)$. Neste mesmo problema, caso os retornos fossem estabelecidos como no modelo CF, 10 listas de pontos eficientes, uma em cada estágio, não conteriam apenas o ponto $(\vec{0}, 0)$. Isto significaria um aumento nas operações necessárias à obtenção da solução do problema, e também um acréscimo na quantidade de dados a armazenar.

No capítulo 5, a seguir, serão estudadas algumas extensões ao modelo Básico do capítulo 3.

CAPÍTULO 5UMA EXTENSÃO AO MODELO BÁSICO

Este capítulo tem como objetivo o desenvolvimento de uma extensão ao modelo Básico do capítulo 3.

A extensão, apresentada no item 5.1, diz respeito à consideração de *efeitos de sinergismo (interações)* entre quaisquer pares de projetos e não apenas entre projetos consecutivos, como foi admitido no item 3.6. Da mesma forma que no item 3.6, inicialmente é desenvolvido e discutido um modelo de *Programação Dinâmica Não-Serial* com maior nível de generalização do que o problema em questão. A seguir, esse modelo é utilizado na solução do problema de alocação de capital com interações entre pares de projetos. Embora não seja desenvolvido um algoritmo específico para a solução das equações recursivas, são apontadas as modificações necessárias no algoritmo do modelo Básico para que possa ser resolvido o problema em questão. É apresentado um exemplo numérico para ilustrar a extensão.

No item 5.2 é feita uma descrição completa do modelo apresentado em Nemhauser e Ullmann (23), e Ullmann (30), para a análise de projetos com interdependências entre pares de projetos. A introdução deste item na pesquisa se deve ao fato de que os trabalhos acima constituem, dentro da literatura pesquisada, os mais importantes a tratar da análise de projetos interdependentes, via Programação Dinâmica. Além da descrição citada, é feita uma comparação entre o modelo apresentado naqueles dois trabalhos e aquele desenvolvido no item 5.1.

5.1 CONSIDERAÇÕES DE INTERAÇÕES ENTRE PARES DE PROJETOS

No item 3.6 considerou-se, além de interações referentes às transferências, outras que dizem respeito a efeitos de sinergismo que ocorrem quando dois projetos são aceitos, em alguma de suas versões. Estes efeitos podem ocorrer nos gastos de capital e/ou nos itens operacionais dos projetos. Naquele item, admitiu-se que tais efeitos apenas pudessem ocorrer entre projetos consecutivos. Agora, considera-se que esses efeitos possam ocorrer, adicionalmente, entre pares de projetos quaisquer.

Como foi visto no capítulo 2, identificaram-se poucos trabalhos na literatura que tratam do problema de análise de projetos quando há interação entre pares de projetos de acordo com a definição geral apresentada no capítulo 1. Nenhum dos modelos vistos no capítulo 2 abordou completamente o problema na presença de projetos que podem ser aceitos em mais do que uma versão⁽¹⁾, com restrições de capital em todo o horizonte de tempo considerado e fornecendo a solução ótima para o problema, exatamente o que se pretende fazer neste item.

Da mesma forma que no item 3.6, permite-se diferentes localizações para os projetos, bem como para diferentes versões de um mesmo projeto.

A análise do sistema físico permanece a já feita no item 3.2, entretanto, o retorno de cada projeto, a função de retorno do conjunto de projetos e, portanto, a formulação do modelo de Programação Dinâmica são alterados. Assim, no item 5.1.1 são analisados o retorno e os gastos de capital de cada projeto, e a função de retorno do conjunto de projetos; no item 5.1.2 é apresentado um modelo de Programação Dinâmica com nível de generaliza

(1) Conforme citado no capítulo 2, Ullmann (30) trata este problema apenas de forma superficial.

ção maior do que o problema em questão, tendo em vista os resultados de 5.1.1; no item 5.1.3 o modelo é utilizado para se resolver o problema de alocação de capital; finalmente, no item 5.1.4, é abordado o algoritmo de solução para as equações recursivas do item 5.1.3 bem como é apresentado um exemplo numérico.

5.1.1 Retornos e Gastos de Capital dos Projetos e Função Retorno do Conjunto de Projetos

Na situação em que um projeto interage não só com seu antecessor, mas também com algum outro do conjunto que está sendo analisado, é preciso que se considere, na determinação do retorno e dos gastos de capital de um ou de outro projeto, a interação existente.

Considere-se o projeto $P_n(k_n)$, $n=1, \dots, n-1$ e $k_n=1, \dots, K_n$, e admita-se que, de uma forma conveniente para a análise, sejam consideradas, no cálculo do retorno e gastos de capital de $P_n(k_n)$, as interações deste projeto com aqueles pertencentes ao conjunto $\bar{W}_n = \{k_{n+1}, k_{n+2}, \dots, k_N\}$. Os conjuntos de interações serão W_n , com $W_n \subset \bar{W}_n$. Caso $W_n = \emptyset$ para todo n , os projetos não interagem e podem ser tratados como independentes, como já visto no item 3.5. Se $W_n = \{k_{n+1}\}$, para todo n , recai-se no modelo Básico desenvolvido no capítulo 3.

Para que se determine o retorno do projeto $P_n(k_n)$, deve-se conhecer a decisão k_n e aquelas referentes aos projetos de maior índice com os quais $P_n(k_n)$ interage. Então, o retorno de $P_n(k_n)$, $r_n(k_n, W_n)$, será dado por:

$$r_n(k_n, W_n) = r_n(k_n, \vec{0}) + \sum_{k_{n+v} \in W_n} p_n(k_n, k_{n+v}), \quad (5.1)$$

para $n=1, \dots, N-1$, $k_n=1, \dots, K_n$ e $k_{n+v}=0, \dots, K_{n+v}$, sendo

$$p_n(k_n, k_{n+v}) = 0 \quad (5.2)$$

se $k_{n+v} = 0$ e

$$r_n(k_n, W_n) = 0 \quad (5.3)$$

se $k_n = 0$

Em (5.1), $r_n(k_n, \vec{0})$ é medido por (3.24) e (3.25), embora seu significado, agora, tenha se alterado. No capítulo 3 significava que a decisão no estágio $n+1$ era $k_{n+1} = 0$; agora significa que todas as decisões, acerca dos projetos de índice maior que n , com os quais $P_n(k_n)$ interage, valem zero.

Ainda em (5.1), $p_n(k_n, k_{n+1})$ é medido pela 2ª parcela do segundo membro de (3.56). Os demais termos de interação envolvem itens operacionais e/ou gastos de capital.

Para o projeto N , tem-se $r_n(k_n, \vec{0})$, significando a inexistência de projeto anterior. A função de retorno do conjunto de N projetos, R_N , será dada por:

$$R_N = R_N(k_N, k_{N-1}, \dots, k_1) = r_N(k_N, \vec{0}) + \sum_{n=1}^{N-1} r_n(k_n, W_n) \quad (5.4)$$

Na função retorno (5.4), cada termo, excetuando aquele referente ao projeto N , depende de uma ou mais decisões anteriores, não sendo aplicável, portanto, o modelo do item 3.6.2.

Não só a função de retorno do conjunto de projetos apresenta diferença com relação àquela definida em 3.6.2, mas também os gastos de capital, de cada projeto, também apresentam diferença, relativamente ao que foi definido no item 3.6.3. Os gastos de capital do projeto $P_n(k_n)$, representados pelo vetor $A_n(k_n, W_n)$, serão dados por:

$$A_n(k_n, W_n) = A_n(k_n, \vec{0}) + \sum_{k_{n+v} \in W_n} V_n(k_n, k_{n+v}), \quad (5.5)$$

para $n=1, \dots, N-1$, $k_n=1, \dots, K_n$ e $k_{n+v}=0, \dots, K_{n+v}$, sendo

$$V_n(k_n, k_{n+v}) = \vec{0} \quad (5.6)$$

se $k_{n+v} = 0$ e

$$A_n(k_n, W_n) = \vec{0} \quad (5.7)$$

se $k_n = 0$

Em (5.5), $A_n(k_n, \vec{0})$ é medido como no item 3.6.3, embora tenha, aqui, significado diverso, da mesma maneira que $r_n(k_n, \vec{0})$ tem com relação a $r_n(k_n, 0)$.

Também em (5.5), $V_n(k_n, k_{n+v})$ é definido da mesma forma que $V_n(k_n, k_{n+1})$ em (3.64).

Para o projeto N tem-se $A_n(k_n, \vec{0})$, significando a inexistência de projeto anterior.

De forma análoga ao que foi feito em 3.6.3, admite-se que $A_n(k_n, W_n) \geq \vec{0}$ ⁽²⁾, sendo a desigualdade vetorial tomada elemento a elemento.

A definição dos gastos de capital de cada projeto vem a reforçar a conclusão anterior de que o modelo do item 3.6.2 não pode ser aplicado a esta nova situação.

(2) Admite-se, também, que esta desigualdade valha para qualquer subconjunto de W_n .

Apesar do modelo do item 3.6.2 não poder ser utilizado, ele sugere o caminho a seguir para que se possa resolver o problema em questão. Naquele caso, devido à interação existente entre um projeto e seu antecessor, a equação recursiva para um estágio genérico $n \neq N$ exigia a ampliação da variável de estado com a inclusão da decisão tomada no estágio (projeto) anterior. Agora, esta ampliação também é necessária e deve incluir as decisões tomadas nos estágios (projetos) com os quais o projeto n ($\neq N$) interage. No item 5.1.2, a seguir, é construído um modelo de Programação Dinâmica para esta situação, onde os estágios não representam, necessariamente, projetos.

5.1.2 Modelo de Programação Dinâmica com Variável de Estado Ampliada (generalizado)

No item anterior mostrou-se a necessidade de se trabalhar com um modelo em que cada estágio recebe, como informação de entrada, dois tipos de variável de estado: capital disponível para aplicação e decisões tomadas em estágios anteriores.

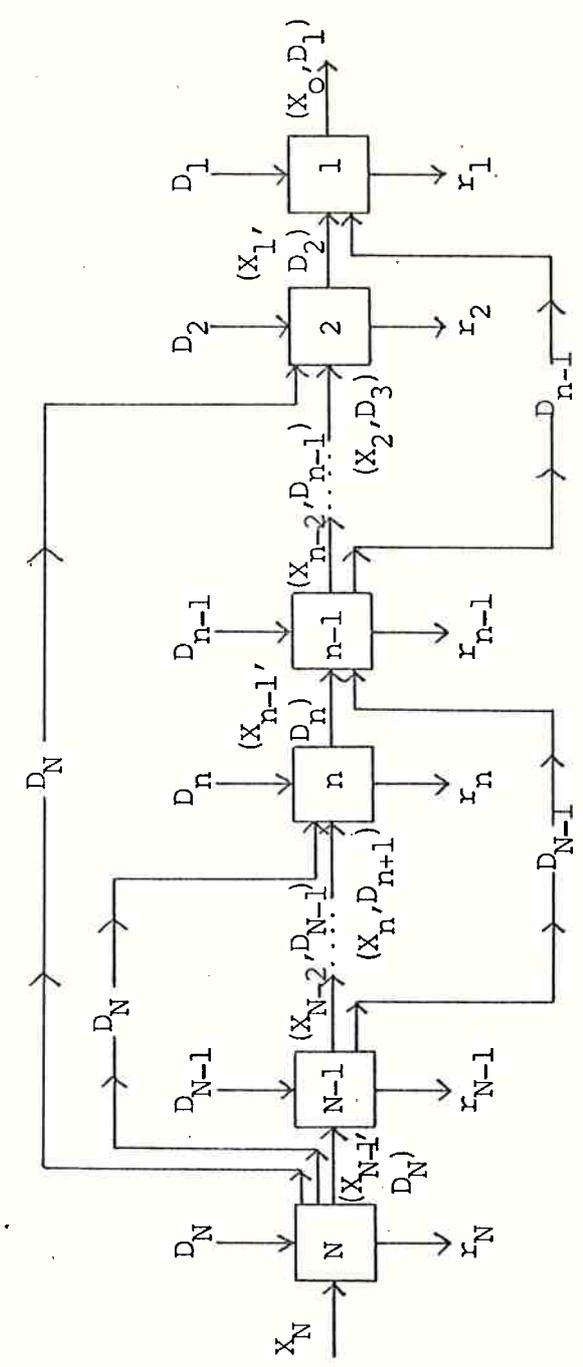
Neste item será desenvolvido um modelo para tomada de decisões seqüenciais com variável de estado ampliada (generalizado) e, no item seguinte, ele será aplicado ao problema de alocação de capital. Este modelo engloba aquele do item 3.6.2.

No diagrama funcional da figura 5.1 procurou-se representar uma situação típica, mas não geral, de estágios de decisão com fluxos de informação entre pares de estágios, incluindo estágios consecutivos.

Na figura 5.1, além dos fluxos de informação entre estágios consecutivos, já apresentados na figura 3.2, foram evidenciados outros quatro fluxos, a título de ilustração, entre estágios não consecutivos: N e n , $N-1$ e $n-1$, $n-1$ e 1 , e N e 2 .

Para a solução do problema geral, supor-se-á que X_N é dado, ou

FIGURA 5.1 - DIAGRAMA FUNCIONAL TÍPICO PARA N ESTÁGIOS, VARIÁVEL DE ESTADO AMPLIADA E FLUXO DE INFORMAÇÕES ENTRE PARES DE ESTÁGIOS



FONTE: Elaborado pelo autor.

seja, que se tem um problema do estado inicial e que se quer maximizar a função objetivo, na qual comparecem os retornos dos estágios - r_n , $n=1, \dots, N$, compostos de alguma forma.

Sejam os conjuntos $\bar{W}_n = \{D_{n+1}, D_{n+2}, \dots, D_N\}$, $n=0, 1, \dots, N-1$. O conjunto \bar{W}_1 contém todas as possibilidades de fluxos de informação para o estágio 1, provenientes de estágios de maior índice, \bar{W}_2 todas as do estágio 2, também provenientes de estágios de maior índice, etc. Na realidade, ter-se-ã conjuntos W_n , $n=0, \dots, N-1$, com $W_n \subset \bar{W}_n$ ⁽³⁾.

Para um estágio genérico n , $n \neq N$, tem-se:

- (X_n, W_n) : estado de entrada
- (X_{n-1}, D_n) : estado de saída
- D_n : variável de controle do estágio n
- r_n : retorno do estágio n

Além das definições acima, as seguintes relações funcionais são necessárias:

$$X_{n-1} = t_n(X_n, D_n, W_n), \quad n=1, \dots, N-1 \quad \text{e} \quad X_{N-1} = t_N(X_N, D_N) \quad (5.8)$$

são as funções de transição ou de transformação.

$$r_n = r_n(X_n, D_n, W_n), \quad n=1, \dots, N-1 \quad \text{e} \quad r_N = r_N(X_N, D_N) \quad (5.9)$$

são as funções de retorno dos estágios.

(3) O conjunto W_0 foi incluído apenas para se poder estruturar a condição inicial para a solução do problema.

No estágio N , o estado de entrada é X_N e o estado de saída é (X_{N-1}, D_N) .

Deve-se notar que a característica dos sistemas de múltiplos estágios de decisão em série, citada no item 4.2.2, segundo a qual o estado de saída de um estágio constitui o estado de entrada para o estágio seguinte, não é aqui satisfeita, o que pode ser constatado na figura 5.1. Embora existam fluxos de informação entre estágios consecutivos, os fluxos existentes entre estágios não consecutivos fazem com que o sistema, visto como um todo, não seja em série. Trata-se, na realidade, de um sistema de múltiplos estágios de decisão com fluxos de informação ("loops") em "feedforward" (ou "bypass"). O tratamento deste tipo de sistema, com vistas à tomada de decisões, é feito através da Programação Dinâmica Não-Serial. Foram identificados, na literatura, alguns trabalhos que analisam sistemas com "loops" em "bypass", formulando as equações recursivas para a sua solução: Esogbue e Marks (10), Wilde (34), Aris, Nemhauser e Wilde (2), Mitten e Nemhauser (17), Beightler, Phillips e Fowler (4), Phillips, Beightler e Parker (24), Nemhauser (21), Aris (1), Wilde e Beightler (35), Beightler, Phillips e Wilde (5), e Smith, Pike e Murrill (28). A maioria destes trabalhos cuida do tratamento de sistemas com apenas um ramo em "feedforward" sendo que neste ramo comparecem estágios de decisão, o que não ocorre em nenhum dos ramos da figura 5.1. Desta lista de trabalhos, o único que trata de sistemas semelhantes ao da figura 5.1 é o de Aris (1). No seu trabalho, Aris (1) tomou alguns exemplos para mostrar a aplicação da Programação Dinâmica à solução dos mesmos. A formulação obtida nesta pesquisa foi inspirada em Aris (1).

Sendo R_N a função de retorno dos N estágios, tem-se:

$$R_N = r_N * r_{N-1} * \dots * r_2 * r_1, \quad (5.10)$$

onde o símbolo (*) tem o significado apresentado em 3.4.

Empregando (5.8) e (5.9) em (5.10), obtêm-se a mesma conclusão do item 3.4, ou seja, o retorno de N estágios depende do estágio inicial e das decisões tomadas em todos os estágios.

O problema, também o mesmo de 3.4, consiste em maximizar R_N com relação às variáveis D_N, \dots, D_1 , como função do estado inicial X_N .

Adicionalmente à condição de separabilidade de R_N (estipulada pelo operador composição), admite-se também que esta função satisfaz a condição de monotonicidade.

Se f_n , $n=0, \dots, N$, o retorno ótimo de n estágios, tem-se as seguintes equações recursivas para a solução do problema:

$f_0(X_0, W_0)$ dada

$$f_n(X_n, W'_n) = \max_{D_n \in \Gamma_n} [r_n(X_n, D_n, W'_n) * f_{n-1}(t_n(X_n, D_n, W'_n), W'_{n-1})],$$

$$\text{sendo } W'_n = (W_n \cup W'_{n-1}) - \{D_n\} \text{ e obtendo-se } D_n = D_n(X_n, W'_n) \quad (5.11)$$

$$f_N(X_N) = \max_{D_N \in \Gamma_N} [r_N(X_N, D_N) * f_{N-1}(t_N(X_N, D_N), W'_{N-1})],$$

$$\text{obtendo-se } \hat{D}_N = D_N(X_N) \quad (5.12)$$

pois W'_{N-1} poderá conter D_N unicamente.

Em (5.11), para se iniciar a determinação dos conjuntos W'_n , faz-se $W'_1 = W_1$.

Nas equações acima, Γ_n é o conjunto dos possíveis valores de

$D_n, n=1, \dots, N.$

A partir da obtenção de $\hat{D}_N = D_N(X_N)$ em (5.12), isto é, da decisão ótima no estágio N, são determinadas as demais decisões e estados ótimos, através de (5.11) e (5.8), ou seja, $\hat{X}_{n-1} = t_n(\hat{X}_n, \hat{D}_n, \hat{W}_n)$ e $\hat{D}_n = D_n(\hat{X}_n, \hat{W}_n)$, respectivamente para $n=N, \dots, 1$ e $n=N-1, \dots, 1$.

No item 5.1.3, a seguir, o modelo desenvolvido é aplicado à análise de projetos com interações entre quaisquer pares de projetos.

5.1.3 Solução do Problema de Alocação de Capital por Programação Dinâmica

Para a solução do problema de alocação de capital, serão utilizados os itens 5.1.1 e 5.1.2, bem como as definições dadas a X_N e X_n em 3.6.3, com a seguinte alteração:

$$X_n = X_{n+1} - A_{n+1}(k_{n+1}, W_{n+1}), \quad n=0, \dots, N-2; \quad k_{n+1}=0, \dots, K_{n+1}; \quad k_{n+v}=0, \dots, K_{n+v},$$

para todo $k_{n+v} \in W_{n+1}$ (5.13)

e

$$X_{N-1} = X_N - A_N(k_N, \vec{0}), \quad k_N=0, \dots, K_N$$
 (5.14)

As equações recursivas para resolver o problema são:

$$f_0(X_0, W_0) = 0, \quad \forall X_0 \geq \vec{0} \quad \text{e} \quad \forall W_0$$
 (5.15)

$$f_n(X_n, W_n') = \max_{k_n=0, \dots, K_n} [r_n(k_n, W_n) + f_{n-1}(X_n - A_n(k_n, W_n), W_{n-1}')] ,$$

sendo $W_n' = (W_n \cup W_{n-1}') - \{k_n\}$, obtendo-se $k_n = k_n(X_n, W_n')$,

$$\text{para } n=1, \dots, N-1 \tag{5.16}$$

$$f_N(X_N) = \max_{k_N=0, \dots, K_N} [r_N(k_N, \vec{0}) + f_{N-1}(X_N - A_N(k_N, \vec{0}), W_{N-1}')] ,$$

$$\text{obtendo-se } \hat{k}_N = k_N(X_N) \tag{5.17}$$

$$\text{Sendo } f_{n-1}(X_n - A_n(k_n, W_n), W_{n-1}') = -\infty \tag{5.18}$$

se algum componente de $(X_n - A_n(k_n, W_n))$ for negativo, $n=1, \dots, N$.

Em (5.15), a desigualdade vetorial \tilde{e} é tomada elemento a elemento.

Em (5.16), para $n=1$, $W_1 = W_1'$.

Quando da avaliação de $f_n(X_n, W_n')$ por (5.16), X_n pode assumir valores viáveis numa região, cujo limite inferior é o vetor nulo e cujo limite superior é dado por:

$$X_N - \sum_{k_s \in W_n'} [A_s(k_s, \vec{0}) + \sum_{k_{s+v} \in (W_s \cap W_n')} V_s(k_s, k_{s+v})] ,$$

para $k_s = 0, \dots, K_s$ e $k_{s+v} = 0, \dots, K_{s+v}$.

A demonstração deste resultado é semelhante àquela feita no item 3.7 para o caso de interações entre projetos consecutivos.

A obtenção da política ótima de decisão é feita do seguinte modo: uma vez determinado $\hat{k}_N = k_N(X_N)$ em (5.17), utilizam-se, alternadamente, as funções $\hat{X}_n = \hat{X}_{n+1} - A_{n+1}(\hat{k}_{n+1}, \hat{W}_{n+1})$ e $\hat{k}_n = k_n(\hat{X}_n, \hat{W}'_n)$.

No item 5.1.4, a seguir, são feitas algumas considerações acerca do algoritmo de solução para as equações recursivas aqui apresentadas, bem como é mostrado um exemplo numérico.

5.1.4 Algoritmo de Solução e Exemplo Numérico

A discussão sobre o algoritmo de solução para as equações recursivas do item 5.1.3 será feita considerando os resultados do item 3.7 e abordará apenas a construção dos conjuntos F , \mathcal{J} e τ , bem como os testes de viabilidade e de dominância.

A construção de um algoritmo, neste caso, explora a seguinte característica de $f_n(X_n, W'_n)$ definida em (5.16): fixado um particular valor para cada componente de W'_n , $f_n(X_n, W'_n)$ é uma função esca da, não-decrescente, de X_n . A geração dos pontos de descontinuidade de $f_n(X_n, W'_n)$, $F_n(W'_n)$, é feita da seguinte forma:

$$F_0(W_0) = \{\vec{0}\}, \quad \forall W_0 \quad (5.19)$$

$$F_n(W'_n) \subset \bigcup_{k_n=0}^{K_n} [A_n(k_n, W'_n) \oplus F_{n-1}(W'_{n-1})], \quad (5.20)$$

para $n=1, \dots, N-1$ e para todos os possíveis valores de $W'_n = (W_n \cup W'_{n-1}) - \{k_n\}$

$$F_N(\vec{0}) = F_N \subset \bigcup_{k_N=0}^{K_N} [A_N(k_N, \vec{0}) \oplus F_{N-1}(W'_{N-1})] \quad (5.21)$$

Na relação recursiva (5.20), o símbolo \oplus significa formar to das as somas possíveis de exatamente um elemento de $F_{n-1}(W'_{n-1})$ com o $A_n(k_n, W_n)$ correspondente, $k_n=0, \dots, K_n$.⁽⁴⁾

A obtenção de $F_n(W'_n)$ e de F_N é feita eliminando-se pontos inviáveis e pontos dominados do 2º membro das relações (5.20) e (5.21).

Uma vez obtido F_N , a solução do problema de alocação de capital é feita como em (3.85).

Analogamente a (3.87), aqui são definidos os conjuntos \mathcal{J} , da seguinte forma:

$$\mathcal{J}_{n-1}(W'_{n-1}) = \{ [\beta_{n-1}^{(0)}(W'_{n-1}); f_{n-1}^{(0)}(\beta_{n-1}^{(0)}(W'_{n-1}), W'_{n-1})], \dots,$$

$$[\beta_{n-1}^{(\ell)}(W'_{n-1}); f_{n-1}^{(\ell)}(\beta_{n-1}^{(\ell)}(W'_{n-1}), W'_{n-1})] \} ,$$

para $n=2, \dots, N+1$, para todos os possíveis valores de W'_{n-1} ⁽⁵⁾ sendo $\mathcal{J}_0(W_0) = \{(\vec{0}, 0)\}$, $\forall W_0$ (5.22)

onde:

- $\beta_{n-1}^{(j)}(W'_{n-1})$: ponto de índice j , pertencente a $F_{n-1}(W'_{n-1})$, $j=0, \dots, \ell$.
- $f_{n-1}^{(j)}(\beta_{n-1}^{(j)}(W'_{n-1}), W'_{n-1})$: retorno ótimo para o capital $\beta_{n-1}^{(j)}(W'_{n-1})$, $j=0, \dots, \ell$.

Os testes utilizados para a obtenção de $F_n(W'_n)$ e de F_N , são descritos a seguir:

(4) O símbolo \oplus , colocado em (5.21), tem interpretação análoga àquele usado em (5.20).

(5) Exceto para $n = N+1$ em que $W'_N = \vec{0}$, necessariamente.

a) *Teste de viabilidade*

Para W'_n fixado, o ponto $A_n(k_n, W_n) + \beta_{n-1}^{(j)}(W'_{n-1})$ é viável se, em cada período de tempo, resultar menor ou igual a

$$X_N - \sum_{k_s \in W'_n} [A_s(k_s, \vec{0}) + \sum_{k_{s+v} \in (W_s \cap W'_n)} V_s(k_s, k_{s+v})] \quad (5.23)$$

para $n=1, \dots, N-1$; $k_n=0, \dots, K_n$, para todos os possíveis valores de W'_n , $j=0, \dots, 1$, sendo que para $n=N$, vale

$$A_N(k_N, \vec{0}) + \beta_{n-1}^{(j)}(W'_{N-1}) \leq X_N \quad (5.24)$$

sendo as desigualdades vetoriais tomadas elemento a elemento, para $t=0, \dots, T-1$.

O segundo membro de (5.23) já surgiu anteriormente e é igual ao valor máximo de X_n quando da avaliação de $f_n(X_n, W'_n)$.

b) *Teste de dominância*

Para W'_n fixado, uma vez obtida a lista de pontos viáveis, a eliminação de pontos dominados é feita da seguinte forma: o ponto

$$A_n(k_n^1, W_n) + \beta_{n-1}^{(j_1)}(W'_{n-1}) \text{ domina o ponto } A_n(k_n^2, W_n) + \beta_{n-1}^{(j_2)}(W'_{n-1}) \text{ se}$$

$$A_n(k_n^1, W_n) + \beta_{n-1}^{(j_1)}(W'_{n-1}) \leq A_n(k_n^2, W_n) + \beta_{n-1}^{(j_2)}(W'_{n-1})$$

e

$$r_n(k_n^1, W_n) + f_{n-1}^{(j_1)}(\beta_{n-1}^{(j_1)}(W'_{n-1}), W'_{n-1}) > r_n(k_n^2, W_n) + f_{n-1}^{(j_2)}(\beta_{n-1}^{(j_2)}(W'_{n-1}), W'_{n-1}) \quad (5.25)$$

sendo a desigualdade vetorial tomada elemento a elemento.

Uma vez que dos candidatos ao conjunto $F_n(W'_n)$ tenham sido eliminados os pontos inviáveis e os pontos dominados, obtém-se $F_n(W'_n)$, isto é, a lista de pontos eficientes para o estágio n , com decisões anteriores contidas em W'_n . Os pontos de $F_n(W'_n)$ serão pontos de descontinuidade de $f_n(X_n, W'_n)$ que será definido, para um ponto eficiente genérico:

$$f_n(A_n(k_n, W_n) + \beta_{n-1}^{(j)}(W'_{n-1}), W'_n) = r_n(k_n, W_n) + f_{n-1}^{(j)}(\beta_{n-1}^{(j)}(W'_{n-1}), W'_{n-1}) \quad (5.26)$$

O conjunto de pares formados por um ponto de $F_n(W'_n)$ e o correspondente retorno ótimo, dará origem ao conjunto $\mathcal{F}_n(W'_n)$.

A solução ótima do problema de alocação de capital será obtida de \mathcal{F}_N , selecionando-se o índice $\hat{\ell}$, tal que:

$$f_N^{(\hat{\ell})}(\beta_N^{(\hat{\ell})}(\vec{0}), \vec{0}) = \max_{j=0, \dots, l} [f_N^{(j)}(\beta_N^{(j)}(\vec{0}), \vec{0})] = f_N(X_N) \quad (5.27)$$

ou, alternativamente, pode-se usar (3.85).

Da mesma forma que em 3.7, também aqui é possível se traçar a política ótima de decisão. Isto é feito gerando-se o conjunto $\tau_n(W'_n)$. A cada ponto de $F_n(W'_n)$ associa-se um elemento de $\tau_n(W'_n)$. Inicialmente, com $F_0(W_0) = \vec{0}$, estabelece-se $\tau_0(W_0) = \{0\}$, para qualquer W_0 . Nos demais estágios, cada elemento de $\tau_n(W'_n)$ é formado por dois números: o primeiro apresenta a versão escolhida no estágio n e, o segundo, é o número de ordem de $\tau_{n-1}(W'_{n-1})$ que fornece a versão, no estágio $(n-1)$, com a qual k_n se combina. De acordo com (5.26), sendo $A_n(k_n, W_n) + \beta_{n-1}^{(j)}(W'_{n-1})$ um ponto de $F_n(W'_n)$, então ter-se-á o seguinte elemento de $\tau_n(W'_n)$: $(k_n, j+1)$.

O exemplo numérico selecionado para ilustrar o modelo é bastan

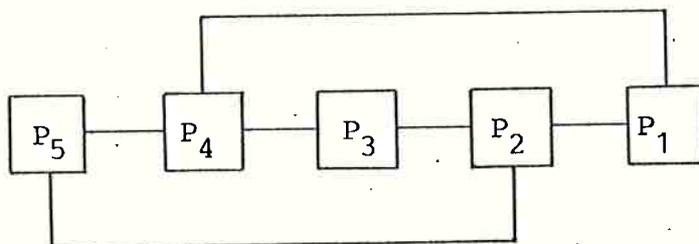
te simples. Sua definição inicia-se com o estabelecimento dos retornos e gastos de capital dos projetos, o que significa, em termos desta pesquisa, que a análise do sistema físico e a de terminação de retornos e gastos de capital dos projetos já foram feitas.

Na figura 5.2 estão representados, por intermédio de retângulos, os projetos considerados no exemplo. Uma linha ligando dois retângulos significa que os projetos, correspondentes aos retângulos, interagem.

O número de versões não nulas, de cada projeto, é o seguinte: $K_1 = 2$, $K_2 = 2$, $K_3 = 2$, $K_4 = 1$ e $K_5 = 1$. Há, portanto, um total de 108 alternativas de combinações de projetos.

Na tabela 5.1 são fornecidos os retornos e gastos de capital dos projetos, em cada uma de suas versões, bem como as interações entre os mesmos. Por exemplo, o projeto 1, na versão 1, requer gastos de capital de 20 e 30, para $t=0$ e $t=1$, e gera um retorno de 50. A interação do projeto 1 na versão 1, com o projeto 2 na versão 1 é de -5 e -10 nos gastos de capital, respectivamente para $t=0$ e $t=1$, e de 5 no retorno.

FIGURA 5.2 REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DAS INTERDEPENDÊNCIAS ENTRE OS PROJETOS DO EXEMPLO



Fonte: Elaborado pelo autor.

TABELA 5.1 - RETORNOS E GASTOS DE CAPITAL DE PROJETOS -
EXEMPLO NUMÉRICO

PROJETO E VERSÃO EN CONSIDERAÇÃO		INTERAÇÕES COM		GASTOS DE CAPITAL		RETORNO
PROJETO	VERSÃO	PROJETO	VERSÃO	t=0	t=1	
		-	-	20	30	50
1	1	2	1	-5	-10	5
			2	-	-	10
		4	1	10	15	-5
		-	-	15	40	60
	2	2	1	-	-5	5
2	2		2	5	-	-5
		4	1	-10	5	-10
		-	-	30	40	70
	1	3	1	-10	-10	20
			2	10	5	-20
3	1	5	1	-5	-5	-15
		-	-	25	45	65
	2	3	1	-	-	10
			2	5	10	30
		5	1	20	20	50
4	1	-	-	40	40	50
		4	1	-5	-5	15
		-	-	30	50	40
	2	4	1	-	-	-
5	1	-	-	35	35	50
		5	1	-5	-5	10
5	1	-	-	25	20	10

Fonte: Elaborado pelo autor.

Supor-se-ã restrições de capital de 70 no primeiro período e de 90 no segundo período.

A obtenção da solução é iniciada com $F_0(W_0) = \{\vec{0}\}$, $\mathcal{F}_0(W_0) = \{(\vec{0}, 0)\}$ e $\tau_0(W_0) = \{0\}$, para $\forall W_0$. A seguir, é feita a análise de cada estágio.

(a) Análise do 1º estágio

Neste caso, $W_1^i = \{k_2, k_4\}$. Assim, cada possível configuração de W_1^i leva a diferentes conjuntos de pontos eficientes. Tem-se:

(1) $W_{1,1}^i = \{k_2=0, k_4=0\}$. O capital máximo disponível é de $(70, 90) - (0, 0) = (70, 90)$. Os pontos gerados são os seguintes:

- $((0, 0), 0)$
- $((20, 30), 50)$
- $((15, 40), 60)$

Todos os pontos acima são viáveis e entre eles não há relações de dominância sendo todos, portanto, eficientes. O conjunto τ fica, neste caso, assim:

$$\tau_{1,1}(W_{1,1}^i) = \{(0, 1), (1, 1), (2, 1)\} .$$

(2) $W_{1,2}^i = \{k_2=1, k_4=0\}$. O capital máximo disponível é de $(70, 90) - (30, 40) = (40, 50)$. Os pontos gerados são os seguintes:

- $((0, 0), 0)$
- $((15, 20), 55)$
- $((15, 35), 65)$

Todos os pontos são viáveis e não há relações de dominância sendo, então, todos eficientes. Tem-se:

$$\tau_{1,2}(W_{1,2}^i) = \{(0, 1), (1, 1), (2, 1)\} .$$

(3) $W_{1,3}^i = \{k_2=1, k_4=1\}$. O capital máximo disponível é de

$(70,90) - (30,40) - (35,35) = (5,15)$. Os pontos gerados são:

- $((0,0),0)$
- $((25,35),50)$
- $((5,40),55)$

Aqui, apenas o 1º ponto é viável, logo

$$\tau_{1,3}(W'_{1,3}) = \{(0,1)\}$$

- (4) $W'_{1,4} = \{k_2=2, k_4=0\}$. O capital máximo para aplicação é de $(70,90) - (25,45) = (45,45)$. Os pontos gerados são:

- $((0,0),0)$
- $((20,30),60)$
- $((20,40),55)$

Todos os pontos são viáveis mas o 3º ponto é dominado pelo 2º ponto, logo deve ser eliminado. Tem-se:

$$\tau_{1,4}(W'_{1,4}) = \{(0,1), (1,1)\}$$

- (5) $W'_{1,5} = \{k_2=2, k_4=1\}$. O capital máximo disponível será de $(70,90) - (25,45) - (35,35) = (10,10)$. Os pontos gerados são:

- $((0,0),0)$
- $((30,45),55)$
- $((10,45),45)$

Dos pontos acima, apenas o 1º é viável, logo

$$\tau_{1,5}(W'_{1,5}) = \{(0,1)\}$$

- (6) $W'_{1,6} = \{k_2=0, k_4=1\}$. Capital máximo = $(70,90) - (35,35) = (35,55)$. Os pontos gerados são:

- $((0,0),0)$
- $((30,45),45)$
- $((5,45),50)$

Na lista acima, observa-se que todos os pontos são viáveis mas o 3º ponto domina o 2º. Tem-se:

$$\tau_{1,6}(W'_{1,6}) = \{(0,1), (2,1)\}$$

(b) Análise do 2º estágio

Aqui, $W'_2 = (W_2 \cup W'_1) - \{k_2\} = [\{k_3, k_5\} \cup \{k_2, k_4\}] - \{k_2\} = \{k_3, k_4, k_5\}$. Tem-se:

- (1) $W'_{2,1} = \{k_3=0, k_4=0, k_5=0\}$. O capital máximo disponível é de (70,90). Os pontos gerados devem, agora, considerar a configuração de $W'_{2,1}$ e os possíveis valores de k_2 . Como $k_4 = 0$, apenas $W'_{1,1}$, $W'_{1,2}$ e $W'_{1,4}$ serão aqui utilizados. Os pontos gerados são:

((0,0),0)
 ((20,30),50)
 ((15,40),60)
 ((30,40),70)
 ((45,60),125)
 ((45,75),135)
 ((25,45),65)
 ((45,75),125)

Todos os pontos acima são viáveis. O 8º ponto é dominado pelo 6º ponto, e deve ser eliminado. Tem-se:

$$\tau_{2,1}(W'_{2,1}) = \{(0,1), (0,2), (0,3), (1,1), (1,2), (1,3), (2,1)\}$$

- (2) $W'_{2,2} = \{k_3=1, k_4=0, k_5=0\}$. Capital máximo = (70,90) - (40,40) = (30,50). Os pontos gerados são:

((0,0),0)
 ((20,30),50)
 ((15,40),60)
 ((20,30),90)
 ((35,50),145)
 ((35,65),155)
 ((25,45),75)
 ((45,75),135)

Dos pontos acima, o 5º, o 6º e o 8º pontos são inviáveis. Dos pontos restantes, o 4º ponto domina o 2º e o

7º pontos. Tem-se:

$$\tau_{2,2}(W_{2,2}^1) = \{(0,1), (0,3), (1,1)\}$$

(3) $W_{2,3}^1 = \{k_3=0, k_4=1, k_5=0\}$. Capital máximo =
 $= (70,90) - (35,35) = (35,55)$. Os pontos gerados são:

$$((0,0), 0)$$

$$((5,45), 50)$$

$$((30,40), 70)$$

$$((25,45), 65)$$

Todos os pontos são viáveis e não há relações de domi
nância, logo

$$\tau_{2,3}(W_{2,3}^1) = \{(0,1), (0,2), (1,1), (2,1)\}$$

(4) $W_{2,4}^1 = \{k_3=0, k_4=0, k_5=1\}$. Capital máximo =
 $= (70,90) - (25,20) = (45,70)$. Pontos gerados:

$$((0,0), 0)$$

$$((20,30), 50)$$

$$((15,40), 60)$$

$$((25,35), 55)$$

$$((40,55), 110)$$

$$((40,70), 120)$$

$$((45,65), 115)$$

$$((65,95), 175)$$

Da lista acima, o 8º ponto é inviável. Entre os demais não há relações de dominância e, então:

$$\tau_{2,4}(W_{2,4}^1) = \{(0,1), (0,2), (0,3), (1,1), (1,2), (1,3), (2,1)\}$$

(5) $W_{2,5}^1 = \{k_3=1, k_4=1, k_5=0\}$. Capital máximo =
 $= (70,90) - [(40,40) + (-5,-5)] - (35,35) = (0,20)$. Pon
 tos gerados:

$$((0,0), 0)$$

$$((5,45), 50)$$

$$((20,30), 90)$$

$$((25,45), 75)$$

Da lista acima, apenas o 1º ponto é viável e

$$\tau_{2,5}(W'_{2,5}) = \{(0,1)\}$$

- (6) $W'_{2,6} = \{k_3=1, k_4=0, k_5=1\}$. Capital máximo =
 $= (70,90) - (40,40) - (25,20) = (5,30)$. Pontos gerados:
 $((0,0), 0)$
 $((20,30), 50)$
 $((15,40), 60)$
 $((15,25), 75)$
 $((30,45), 130)$
 $((30,60), 140)$
 $((45,65), 125)$
 $((65,95), 185)$

Dos pontos acima, apenas o 1º é viável e, portanto,

$$\tau_{2,6}(W'_{2,6}) = \{(0,1)\}$$

- (7) $W'_{2,7} = \{k_3=0, k_4=1, k_5=1\}$. Capital máximo =
 $= (70,90) - [(35,35) + (-5,-5)] - (25,20) = (15,40)$. Pon-
 tos gerados:
 $((0,0), 0)$
 $((5,45), 50)$
 $((25,35), 55)$
 $((45,65), 115)$

Apenas o 1º ponto é viável e, portanto,

$$\tau_{2,7}(W'_{2,7}) = \{(0,1)\}$$

- (8) $W'_{2,8} = \{k_3=1, k_4=1, k_5=1\}$. Capital máximo =
 $= (70,90) - [(40,40) + (-5,-5)] - [(35,35) + (-5,-5)] - (25,20) =$
 $= (-20,5)$. Neste caso, como o capital máximo disponí-
 vel resultou, no primeiro período, negativo, o conjunto
 de pontos eficientes é vazio, implicando em

$$\tau_{2,8}(W'_{2,8}) = \emptyset$$

(9) $W'_{2,9} = \{k_3=2, k_4=0, k_5=0\}$. Capital máximo =
 $= (70,90) - (30,50) = (40,40)$. Pontos gerados:

$((0,0),0)$
 $((20,30),50)$
 $((15,40),60)$
 $((40,45),50)$
 $((55,65),105)$
 $((55,80),115)$
 $((30,55),95)$
 $((50,85),155)$

Dos pontos gerados, os 5 últimos são inviáveis, não existindo relações de dominância entre os restantes. Tem-se:

$$\tau_{2,9}(W'_{2,9}) = \{(0,1), (0,2), (0,3)\}$$

(10) $W'_{2,10} = \{k_3=2, k_4=0, k_5=1\}$. Capital máximo =
 $= (70,90) - (30,50) - (25,20) = (15,20)$. Pontos gerados:

$((0,0),0)$
 $((20,30),50)$
 $((15,40),60)$
 $((35,40),35)$
 $((50,60),90)$
 $((50,75),100)$
 $((50,75),145)$
 $((70,105),205)$

Apenas o 1º ponto é viável e

$$\tau_{2,10}(W'_{2,10}) = \{(0,1)\}$$

(11) $W'_{2,11} = \{k_3=2, k_4=1, k_5=0\}$. Capital máximo =
 $= (70,90) - [(30,50) + (0,0)] - (35,35) = (5,5)$. Pontos gerados:

$((0,0),0)$
 $((5,45),50)$
 $((40,45),50)$
 $((30,55),95)$

Apenas o 1º ponto é viável e

$$\tau_{2,11}(W'_{2,11}) = \{(0,1)\}$$

$$\begin{aligned} (12) \quad W'_{2,12} &= \{k_3=2, k_4=1, k_5=1\} . \text{ Capital máximo} = \\ &= (70,90) - [(30,50) + (0,0)] - [(35,35) + (-5,-5)] - (25,20) = \\ &= (-15,-10) . \text{ Analogamente a } \tau_{2,8}, \text{ tem-se} \end{aligned}$$

$$\tau_{2,12}(W'_{2,12}) = \emptyset$$

(c) *Análise do 3º estágio*

$$W'_3 = (W_3 \cup W'_2) - \{k_3\} = [\{k_4\} \cup \{k_3, k_4, k_5\}] - \{k_3\} = \{k_4, k_5\}$$

(1) $W'_{3,1} = \{k_4=0, k_5=0\}$. Capital máximo = (70,90) . Pontos gerados:

((0,0),0)
 ((20,30),50)
 ((15,40),60)
 ((30,40),70)
 ((45,60),125)
 ((45,75),135)
 ((25,45),65)
 ((40,40),50)
 ((55,80),110)
 ((60,70),140)
 ((30,50),40)
 ((50,80),90)
 ((45,90),100)

Não há pontos inviáveis, mas o 8º e o 11º pontos são dominados pelo 3º ponto, o 9º, o 12º e o 13º pontos são dominados pelo 5º ponto. Tem-se:

$$\tau_{3,1}(W'_{3,1}) = \{(0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (0,5), (0,6), (0,7), (1,3)\}$$

$$(2) \quad W'_{3,2} = \{k_4=0, k_5=1\} . \text{ Capital máximo} = (70,90) - (25,20) =$$

= (45,70) . Pontos gerados:

((0,0),0)
 ((20,30),50)
 ((15,40),60)
 ((25,35),55)
 ((40,55),110)
 ((40,70),120)
 ((45,65),115)
 ((40,40),50)
 ((30,50),40)

Todos os pontos são viáveis, mas o 8º e 9º pontos são dominados pelo 3º ponto.

$$\tau_{3,2}(W'_{3,2}) = \{(0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (0,5), (0,6), (0,7)\}$$

(3) $W'_{3,3} = \{k_4=1, k_5=0\}$. Capital máximo =
 = (70,90) - (35,35) = (35,55) . Pontos gerados:

((0,0),0)
 ((5,45),50)
 ((30,40),70)
 ((25,45),65)
 ((35,35),65)
 ((30,50),40)

Todos os pontos são viáveis. O último ponto é dominado pelo 2º.

$$\tau_{3,3}(W'_{3,3}) = \{(0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (1,1)\}$$

(4) $W'_{3,4} = \{k_4=1, k_5=1\}$. Capital máximo =
 = (70,90) - [(35,35) + (-5,-5)] - (25,20) = (15,40) . O único ponto gerado, pelo fato de

$$\tau_{2,8}(W'_{2,8}) = \emptyset = \tau_{2,12}(W'_{2,12}) \text{ é } ((0,0),0).$$

$$\tau_{3,4}(W'_{3,4}) = \{(0,1)\}$$

(d) *Análise do 4º estágio.*

$$W_4' = (W_4 \cup W_3') - \{k_4\} = [\{k_5\} \cup \{k_4, k_5\}] - \{k_4\} = \{k_5\}$$

(1) $W_{4,1}' = \{k_5=0\}$. Capital máximo = (70,90). Pontos gerados:

((0,0),0)
 ((20,30),50)
 ((15,40),60)
 ((30,40),70)
 ((45,60),125)
 ((45,75),135)
 ((25,45),65)
 ((60,70),140)
 ((35,35),50)
 ((40,80),100)
 ((65,75),120)
 ((60,80),115)
 ((70,70),115)

Todos os pontos são viáveis, mas os três últimos são dominados pelo 5º ponto.

$$\tau_{4,1}(W_{4,1}') = \{(0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (0,5), (0,6), (0,7), (0,8), (1,1), (1,2)\}$$

(2) $W_{4,2}' = \{k_5=1\}$. Capital máximo = (70,90) - (25,20) = (45,70). Pontos gerados:

((0,0),0)
 ((20,30),50)
 ((15,40),60)
 ((25,35),55)
 ((40,55),110)
 ((40,70),120)
 ((45,65),115)
 ((30,30),60)

Todos os pontos são viáveis e não há relações de dominância, logo

$$\tau_{4,2}(W_{4,2}^1) = \{(0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (0,5), (0,6), (0,7), (1,1)\}$$

(e) *Análise do 5º estágio e solução do problema*

O capital disponível é de (70,90) e os pontos gerados são os seguintes:

((0,0), 0)
 ((20,30), 50)
 ((15,40), 60)
 ((30,40), 70)
 ((45,60), 125)
 ((45,75), 135)
 ((25,45), 65)
 ((60,70), 140)
 ((35,35), 50)
 ((40,80), 100)
 ((25,20), 10)
 ((45,50), 60)
 ((40,60), 70)
 ((50,55), 65)
 ((65,75), 120)
 ((65,90), 130)
 ((70,85), 125)
 ((55,50), 70)

Na lista acima não há ponto inviável, mas o 12º e o 14º pontos são dominados pelo 4º ponto; o 15º, o 16º e o 17º pontos são dominados pelo 6º ponto. Então $\tau_5 =$

$$= \{(0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (0,5), (0,6), (0,7), (0,8), (0,9), (0,10), (1,1), \\ , (1,3), (1,8)\}$$

O algoritmo utilizado permite, como no caso do modelo Básico, fazer a análise de sensibilidade da solução do problema tanto quanto à disponibilidade inicial de capital como com relação ao número de estágios considerados.

No exemplo, caso seja desejada a política ótima para o capital inicial de (70,90) e considerando os 5 estágios verifica-se, inicialmente, que o ponto de maior retorno no 5º estágio é dado por: $((60,70),140) \rightarrow \hat{\tau}_5 = (0,8) \rightarrow \hat{k}_5 = 0 \rightarrow \hat{\tau}_{4,1}(\hat{k}_5=0) = (0,8) \rightarrow \hat{k}_4 = 0 \rightarrow \hat{\tau}_{3,1}(\hat{k}_4=0, \hat{k}_5=0) = (1,2) \rightarrow \hat{k}_3 = 1 \rightarrow \hat{\tau}_{2,2}(\hat{k}_3=1, \hat{k}_4=0, \hat{k}_5=0) = (1,1) \rightarrow \hat{k}_2 = 1 \rightarrow \hat{\tau}_{1,2}(\hat{k}_2=1, \hat{k}_4=0) = (0,1) \rightarrow \hat{k}_1 = 0$. Assim, as decisões ótimas não nulas correspondem a $\hat{k}_2=1$ e $\hat{k}_3=1$. Da tabela 5.1, verifica-se que a aceitação dos projetos 2 e 3 naquelas versões, leva aos seguintes gastos de capital e retornos: $((30,40),70) + ((40,40),50) + ((-10),-10),20) = ((60,70),140)$, o que permite fazer uma verificação do resultado obtido.

Deve-se notar que o aumento do número de interdependências entre projetos faz aumentar drasticamente o número de operações necessárias à obtenção da solução ótima do problema.

Finalmente, pode-se dizer que é possível a obtenção de outros modelos de Programação Dinâmica equivalentes àquele desenvolvido neste item. Assim como foi feito no capítulo 4 com relação ao modelo Básico, pode-se ter uma variante equivalente ao modelo deste item em que os fluxos de informação entre os estágios são todos invertidos com relação à forma aqui adotada. Há, também, outras variantes. Uma classe dessas variantes é similar àquela do item 4.2.3, e emprega a estrutura com ramos divergentes da Programação Dinâmica Não-Serial. Nesta classe pode, entretanto, ocorrer um fator complicador: haver interdependências entre projetos de ramos diferentes. Este complicador pode ser enfrentado através de outra estrutura típica da Programação Dinâmica Não-Serial: a de estágios com "loops" em "feedback". Assim como foi citado no capítulo 4, poderá existir diferença no custo de obtenção da solução do problema, conforme seja utilizada uma ou outra variante.

No item a seguir é feita uma descrição completa do modelo desenvolvido por Nemhauser e Ullmann (23), e Ullmann (30), bem como uma comparação deste modelo com aquele aqui desenvolvido.

5.2 COMPARAÇÃO COM O MODELO DE NEMHAUSER E ULLMANN (23), E ULLMANN (30)

No item 2.1.4 foi iniciada a descrição do modelo de Programação Dinâmica para análise de projetos cuja variável de decisão apenas pode assumir o valor 0 ou o valor 1, com interdependências entre pares de projetos. Considerando a notação empregada naquele item, o modelo apresentado por Nemhauser e Ullmann (23) é o seguinte: ignorando, momentaneamente, as interações do projeto $n+1$ com os demais projetos de índice maior que $n+1$, o problema pode ser resolvido pelas equações recursivas

$$f_0(X_0, H_0) = 0, \quad \forall X_0 \quad (2.22)$$

$$f_{n+1}(X_{n+1}, H_{n+1}(X_{n+1})) = \max \left[f_n(X_{n+1}, H_n(X_{n+1})), r'_{n+1} + f_n(X_{n+1} - A'_{n+1}, H_n(X_{n+1} - A'_{n+1})) \right] \quad (2.23)$$

onde

$H_n(X_n) = (h_{on}(X_n), \dots, h_{nn}(X_n))$ e $h_{jn}(X_n) = 1$ se o projeto j for selecionado dentre os projetos de índices $1, \dots, n$, dado o capital X_n , e igual a zero caso contrário, e

$$r'_{n+1} = r_{n+1} + \sum_{j=1}^n (r_{j,n+1} / h_{jn}(X_{n+1} - A'_{n+1}) = 1) \quad (2.24)$$

$$A'_{n+1} = A_{n+1} + \sum_{j=1}^n (v_{j,n+1} / h_{jn}(X_{n+1} - A'_{n+1}) = 1) \quad (2.25)$$

A'_{n+1} é o gasto de capital do projeto $n+1$ mais as interações deste projeto com os projetos selecionados dentre os de índice $1, \dots, n$, dada a disponibilidade de capital $(X_{n+1} - A'_{n+1})$, e r'_{n+1} é o valor presente líquido do projeto $n+1$ mais as interações

deste com os projetos selecionados dentre os de índice $1, \dots, n$, dada a disponibilidade de capital $(X_{n+1} - A'_{n+1})$.

Para completar o algoritmo, deve-se considerar as interações envolvendo os projetos $1, \dots, n+1$ com os demais projetos. Isto é feito do seguinte modo: suponha que um ponto $R = (\beta_{nm}, f_n(\beta_{nm}))$ do conjunto de pontos eficientes para o estágio n seja tal que

$$\left. \begin{aligned} f_n(\beta_{nm}) &\geq f_n(\beta_{ns}) + r'_{n+1} \\ e \\ \beta_{nm} &\leq \beta_{ns} + A'_{n+1} \end{aligned} \right\} (5.28)$$

Caso não existam interações envolvendo os projetos $n+2, \dots, N$ e os projetos $1, \dots, n+1$, o ponto $\theta = (\beta_{ns} + A'_{n+1}, f_n(\beta_{ns}) + r'_{n+1})$ pode ser eliminado pois é dominado por R . Caso existam aquelas interações, o ponto θ só poderá ser eliminado se ainda for dominado por R mesmo que aquelas interações sejam consideradas da forma mais favorável a θ . Sejam

$$\left. \begin{aligned} r^*_\ell &= r_{n+1,\ell} + \sum_{j=1}^n (r_{j\ell}/h_{jn}(\beta_{ns}) = 1) - \sum_{j=1}^n (r_{j\ell}/h_{jn}(\beta_{nm}) = 1) \\ e \\ v^*_\ell &= v_{n+1,\ell} + \sum_{j=1}^n (v_{j\ell}/h_{jn}(\beta_{ns}) = 1) - \sum_{j=1}^n (v_{j\ell}/h_{jn}(\beta_{nm}) = 1) \\ \ell &= n+2, \dots, N \end{aligned} \right\} (5.29)$$

Se o projeto P_ℓ foi selecionado, r^*_ℓ e $v^*_\ell = (v^*_{0\ell}, \dots, v^*_{T-1,\ell})$ representam a diferença de interações de P_ℓ com os projetos associados aos pontos θ e R . Sejam

$$r^{n+1} = \sum_{\ell=n+2}^N \max(0, r_{\ell}^*)$$

e

$$v^{n+1} = \sum_{\ell=n+2}^N v'_{\ell}$$
} (5.30)

onde

$$v'_{\ell} = (v'_{0\ell}, \dots, v'_{T-1, \ell})$$

e

$$v'_{t\ell} = \min(0, v_{t\ell}^*)$$
} (5.31)

O retorno $r^{n+1} \geq 0$ e os gastos de capital $v^{n+1} \leq 0$ são mais favoráveis com relação a θ e menos favoráveis a R . O ponto θ é eliminado se

$$f_n(\beta_{nm}) \geq f_n(\beta_{ns}) + r'_{n+1} + r^{n+1}$$

e

$$\beta_{nm} \leq \beta_{ns} + A'_{n+1} + v^{n+1}$$
} (5.32)

De maneira análoga, um ponto do conjunto eficiente para o n -ésimo estágio que for dominado por um candidato ao $(n+1)$ -ésimo conjunto, deve ser testado, como acima, antes de ser eliminado.

Embora não esteja explicitamente citado no trabalho de Nemhaus e Ullmann (23), o modelo formulado emprega resultados da estrutura com "loops" em "feedback" da Programação Dinâmica Não-Serial. Este fato é citado em Ullmann (30).

Analisando a equação recursiva (2.23) e a hipótese assumida para a sua colocação (a não consideração das interações do projeto $n+1$ com os projetos $n+2, \dots, N$), observa-se que, além do capital restante, $H_{n+1}(X_{n+1})$ é colocada como variável de estado. Essa variável inclui $h_{n+1, n+1}(X_{n+1})$ referente ao projeto $n+1$. Devido à hipótese assumida, está-se decidindo sobre a aceitação ou não do projeto $n+1$ e, ao mesmo tempo, sua variável de decisão consta de $H_{n+1}(X_{n+1})$, o que parece contraditório. Além disso, o conjunto $H_{n+1}(X_{n+1})$ deveria conter apenas as variáveis de decisão referentes a projetos, de menor índice, que interagem com o projeto $n+1$, e/ou com os de índice $n+2, \dots, N$, mas não necessariamente todas as variáveis de decisão relativas a projetos de índice menor que $n+1$. O trabalho de Ullmann (30) não formula equações recursivas para o problema, abordando diretamente o algoritmo de solução do mesmo.

A fase seguinte do algoritmo, utilizada para a formação do conjunto de pontos eficientes a cada estágio, é, em essência, a mesma nos dois trabalhos acima. Cabe apenas um comentário referente a esta fase: no trabalho de Nemhauser e Ullmann (23) apenas são apresentadas as condições para a eliminação (ou não) de θ , candidato ao conjunto de pontos eficientes do estágio $n+1$, quando comparado aos pontos eficientes do estágio n , carecendo, portanto, de maior nível de generalização. Este nível é, no entanto, alcançado em Ullmann (30).

Na figura 5.1, caso fosse invertido o sentido de todos os fluxos de informação entre os estágios, que envolvem decisões nos estágios anteriores, recair-se-ia num modelo com estrutura de "loops" em "feedback", caracterizando uma variante ao modelo do item 5.1. A utilização desta variante, conforme os dois trabalhos já citados, leva à mesma solução obtida com o modelo de 5.1 (6). Deve-se notar, entretanto, que devido ao sentido dos

(6) O modelo do item 5.1 permite mais do que uma versão para a aceitação dos projetos, enquanto que aquele do item 5.2 apenas permite uma versão para a aceitação dos mesmos.

fluxos de informação, a eliminação de um ponto deve ser muito mais cuidadosa e trabalhosa do que no item 5.1. Tal como no item 5.1, é difícil afirmar se uma técnica é mais eficiente do que outra.

Com relação à análise de projetos interdependentes, com interações entre quaisquer pares de projetos e várias versões de aceitação para cada projeto, como o modelo do item 5.1, o trabalho de Ullmann (30) apenas cita que o algoritmo apresentado para projetos do tipo 0/1 deve ser modificado para considerar interações nos retornos e gastos de capital entre projetos, que variam conforme as particulares versões consideradas para os mesmos. Ullmann (30) não mostra como operacionalizar este aspecto.

5.3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo foi desenvolvido um modelo para a análise de projetos, com interdependências entre quaisquer pares de projetos, cada projeto podendo ser aceito em uma dentre várias versões possíveis. Embora não tenham sido detalhadas, foram apontadas algumas variantes equivalentes ao modelo desenvolvido. A escolha de uma ou outra variante depende do problema particular que se tem para resolver. Uma questão que permanece em aberto, tal como no capítulo 4, é a escolha de qual variante empregar na resolução de um problema de forma a se atingir o mínimo custo de obtenção da solução do problema.

Apresentou-se e discutiu-se o modelo de Nemhauser e Ullmann(23) e Ullmann (30), desenvolvido para projetos que possuem uma única versão diferente de zero. Este modelo, por empregar a estrutura com "loops" em "feedback", exige maior cuidado e trabalho computacional na eliminação de um ponto do que o modelo do item 5.1 que emprega a estrutura com "loops" em "bypass". É difícil, entretanto, julgar pela maior eficiência de um ou outro modelo

de forma genérica. A mesma questão levantada com relação às va
riantes citadas para o modelo do item 5.1 também é válida aqui.

CAPÍTULO 6SÍNTESE E CONCLUSÕES DA PESQUISA

Nesta pesquisa foi desenvolvido um modelo de Programação Dinâmica para a análise de projetos interdependentes. As interdependências são causadas pela ocorrência de fluxo de material entre projetos integrados, fisicamente, em série. Foram também considerados possíveis sinergismos entre projetos consecutivos. Este modelo foi chamado de Básico e seu desenvolvimento consta do capítulo 3.

Uma estrutura de análise, composta de três fases seqüenciais, é utilizada até se obter a solução ótima para o modelo Básico. As fases são as seguintes: análise do sistema físico, determinação de retornos e gastos de capital, e solução do problema de alocação de capital. Para esta última fase foi desenvolvido um algoritmo de Programação Dinâmica baseado no enfoque de "espaços de estado embutidos", o que simplifica sobremaneira a solução do problema com relação ao algoritmo tradicional da Programação Dinâmica. O algoritmo fornece, como informações de saída, as decisões ótimas a cada estágio (projeto) e o retorno (máximo) associado à política ótima de decisão, e a análise de sensibilidade da solução do problema, no que se refere ao número de estágios considerados e ao capital disponível para aplicação nos projetos.

Para cada uma das três fases acima, foi elaborado um programa de computador em FORTRAN IV. Apresentou-se um exemplo numérico, empregando tais programas, para ilustrar a utilização do modelo Básico.

No capítulo 4 foram desenvolvidas variantes equivalentes ao modelo Básico do capítulo 3, no sentido de conduzirem à mesma so

lução ótima obtida com aquele. Tais variantes constituem formas alternativas de decomposição do problema de otimização através da Programação Dinâmica. A obtenção das variantes depende da maneira pela qual são definidos os retornos e gastos de capital dos projetos.

A solução das variantes emprega o mesmo algoritmo do modelo Básico. Uma certa classe de variantes utiliza, adicionalmente, resultados da Programação Dinâmica Não-Serial.

O mesmo exemplo numérico apresentado no capítulo 3 é utilizado para mostrar a aplicação das variantes.

Uma extensão ao modelo Básico é feita no capítulo 5. Trata-se do desenvolvimento de um modelo de Programação Dinâmica Não-Serial cuja finalidade é a análise de projetos com interdependências entre quaisquer pares de projetos. O algoritmo para a solução do modelo também emprega o enfoque de "espaços de estado embutidos". É apresentado um exemplo numérico para ilustrar a técnica. Embora sem o mesmo nível de detalhe, foram identificadas algumas variantes equivalentes ao modelo desenvolvido.

Ainda no capítulo 5, foi feita a descrição completa e discussão do modelo de Nemhauser e Ullmann (23) e Ullmann (30) que abordam problema similar - análise de projetos do tipo 0/1 com interdependências entre pares de projetos, enquanto que mais do que uma versão não nula é admitida no modelo desenvolvido na pesquisa. O modelo apresentado naqueles dois trabalhos também emprega o enfoque de "espaços de estado embutidos" mas, devido à forma de considerar as interações entre os projetos, requer maior cuidado e trabalho computacional para a eliminação de pontos ineficientes do que o modelo aqui desenvolvido. Não é possível, entretanto, afirmar a superioridade de uma técnica sobre outra, o que dependerá de cada problema em particular e de uma análise mais profunda dos fatores que influenciam a eficiência das duas técnicas.

Considerando o trabalho como um todo e seu confronto com aqueles da literatura pertinente - assunto discutido no capítulo 2, po de-se concluir que alguma contribuição tenha sido conseguida com a realização da pesquisa.

Em parte devido aos objetivos e escopo fixados para o trabalho no capítulo 1, e em parte devido ao próprio desenvolvimento do trabalho, alguns assuntos não foram abordados e poderão consti tuir temas para pesquisas futuras. São eles:

(a) Como foi dito no capítulo 1, há outras formas de integração física de projetos, além daquela em série analisada neste trabalho, e que podem ser analisadas pela Programação Dinâmica:

- (1) Estrutura com ramos divergentes, ocorrendo em processos nos quais, a partir de uma matéria-prima, obtêm-se dois ou mais produtos que seguem rotas tecnológicas diferen tes;
- (2) Estrutura com ramos convergentes, em que, dois ou mais produtos, obtidos de processos diferentes, são adicionada dos para gerar um outro produto;
- (3) Estrutura com "loops" em "feedforward" ("bypass") na qual um produto, oriundo de certo estágio de produção, segue rotas de produção diferentes e, num certo estágio de produção posterior, os produtos obtidos naquelas ro tas são adicionados para gerar um outro produto;
- (4) Estrutura com "loops" em "feedback", na qual um produto, oriundo de certo estágio de produção, segue rotas de produção diferentes e, num certo estágio de produção an terior, o produto obtido numa das rotas é adicionado ao material que dá origem àquele produto inicial.

Esta última estrutura é característica das tecnologias de reciclagem. Evidentemente, num problema real pode-se ter combinações das estruturas acima.

(b) Uma hipótese assumida para a realização da pesquisa, no ca pítulo 1, é a de que todas as variáveis, envolvidas no pro

blema de análise de projetos, são determinísticas. Uma análise mais refinada do problema levaria à consideração de distribuições de probabilidade para algumas variáveis, como por exemplo o retorno dos projetos, o investimento associado aos mesmos, etc. A solução deste problema pela Programação Dinâmica pode constituir uma pesquisa.

- (c) Um aspecto apontado tanto no capítulo 4 como no capítulo 5 diz respeito ao custo de obtenção da solução do problema de análise de projetos, quando há alternativas equivalentes de decomposição do problema pela Programação Dinâmica. Para cada problema particular deve existir uma alternativa de decomposição que leve ao menor custo de obtenção da solução do problema (ou a alguma outra medida de eficiência). Embora não se possa adiantar, genericamente, qual a melhor alternativa, parece possível a construção de uma função que indique, para cada problema, qual a melhor forma de resolvê-lo. A identificação desta função, considerando a medida de eficiência desejada, pode ser assunto para outro trabalho.

- (d) Caso apenas a solução ótima do problema de análise de projetos seja desejada, ao invés da lista de pontos eficientes a cada estágio adicional considerado, pode-se desenvolver critérios de relaxação e eliminação de soluções parciais de forma a se reduzir o esforço computacional necessário à obtenção da solução ótima. A identificação de tais critérios seria um tema para trabalho futuro.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- (1) ARIS, Rutherford. Discrete dynamic programming: an introduction to the optimization of staged processes. New York, Blaisdell Publishing Co., 1964.
- (2) ARIS, Rutherford et alii. Optimization of multistage cyclic and branching systems by serial procedures. American Institute of Chemical Engineers Journal, 10(6): 913-919, Nov. 1964.
- (3) BAUMOL, William J. Economic theory and operations analysis. 3.ed. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall Inc., 1972.
- (4) BEIGHTLER, C.S. et alii. Compression and decomposition of feedback loops in multistage systems. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 38(2):497-500, 1972.
- (5) BEIGHTLER, C.S. et alii. Foundations of optimization. 2. ed. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall Inc., 1979.
- (6) BIERMAN, Harold & SMIDT, Seymour. The capital budgeting decision. 4. ed. New York, Macmillan Publishing Co. Inc., 1975.
- (7) BLAU, Gary E. & KLIMPEL, Richard R. The process industries. (In: MODER, Joseph J. & ELMAGHRABY, Salah E.; eds. Handbook of operations research. New York, Van Nostrand Reinhold Co., 1978. v. 2 - pt.7).
- (8) BUSSEY, Lynn, E. The economic analysis of industrial projects. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall Inc.,

1978.

- (9) DREYFUS, Stuart E. & LAW, Averill, M. The art and theory of dynamic programming. New York, Academic Press Inc., 1977.
- (10) ESOGBUE, Augustine O. & MARKS, Barry R. Non-serial dynamic programming: a survey. Operational Research Quarterly, 25(2):253-265, 1974.
- (11) GOLDWERGER, Juval & PAROUSH, Jacob. Capital budgeting of interdependent projects: activity analysis approach. Management Science, 23(11):1242-1246, Jul. 1977.
- (12) HANSSMANN, Fred. Operations research techniques for capital investment. New York, John Wiley & Sons Inc., 1968.
- (13) LATORRACA, Nilton. Legislação tributária: uma introdução ao planejamento tributário. 7. ed. São Paulo, Editora Atlas S/A, 1981.
- (14) LORIE, James H. & SAVAGE, Leonard J. Three problems in rationing capital. The Journal of Business, 28(4):229-239, Oct. 1955.
- (15) MAO, James C.T. Quantitative analysis of financial decisions. New York, Macmillan Publishing Co. Inc., 1969.
- (16) MEIER, W.L. & BEIGHTLER, C.S. Branch compression and absorption in nonserial multistage systems. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 21(2):426-430, Feb. 1968.
- (17) MITTEN, L.G. & NEMHAUSER, G.L. Multistage optimization. Chemical Engineering Progress, 59(1):52-60, Jan. 1963.

- (18) MORIN, Thomas L. & ESOGBUE, Augustine O. The Imbedded state space approach to reducing dimensionality in dynamic programs of higher dimensions. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 48:801-810, 1974.
- (19) MORIN, Thomas L. & MARSTEN, Roy E. An algorithm for non linear knapsack problems. Management Science, 22(10): 1147-1158, Jun. 1976.
- (20) MORIN, Thomas L. & MARSTEN, Roy E. Branch-and-Bound strategies for dynamic programming. Operations Research, 24(4):611-627, Jul.-Ago. 1976.
- (21) NEMHAUSER, George L. Introduction to dynamic programming. New York, John Wiley and Sons Inc., 1966.
- (22) NEMHAUSER, George L. A note on capital budgeting. The Journal of Industrial Engineering, 18(6):375-376.
- (23) NEMHAUSER, George L. & ULLMANN, Zev Discrete dynamic programming and capital allocation. Management Science, 15(9):494-505, May 1969.
- (24) PHILLIPS, Don T. et alii. Analysis of nonserial multi-staged systems using compression and decomposition. AIIE Transactions, 7(4):388-392, Dec. 1975.
- (25) REITER, Stanley Choosing an investment program among interdependent projects. The Review of Economic Studies, 30:32-36, 1963.
- (26) REITER, Stanley & SHERMAN, Gordon R. Allocating indivisible resources affording external economies or diseconomies. International Economic Review, 3(1):108-135, 1962.
- (27) SENGUPTA, Jati K. & FOX, Karl A. Economic analysis and

- operations research: optimization techniques in quantitative economic models. Amsterdam, North-Holland Publishing Co., 1969.
- (28) SMITH, Cecil L. et alii. Formulation and optimization of mathematical models. Scranton, Penn., International Textbook Co., 1970.
- (29) TEBECHRANI, Alberto et alii. Novo regulamento do imposto de renda anotado. São Paulo, Editora Resenha Tributária, 1981.
- (30) ULLMANN, Zev. Dynamic programming and the capital allocation problem. Baltimore, The Johns Hopkins University, 1967. (Tese de Doutorado).
- (31) WEINGARTNER, H. Martin. Mathematical programming and the analysis of capital budgeting problems. Chicago, Markham Publishing Co., 1967.
- (32) WEINGARTNER, H. Martin. Capital budgeting of interrelated projects: survey and synthesis. Management Science, 12 (7):485-516, Mar. 1966.
- (33) WEINGARTNER, H. Martin & NESS, David N. Methods for the solution of the multi-dimensional 0/1 knapsack problem. Operations Research, 15 (1):83-103, Jan.-Feb. 1967.
- (34) WILDE, Douglass J. Strategies for optimizing macro-systems. Chemical Engineering Progress, 61 (3):86-93, Mar. 1965.
- (35) WILDE, Douglass J. & BEIGHTLER, Charles, S. Foundations of optimization. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall Inc., 1967.
- (36) WILKES, F.M. Capital budgeting techniques. London,

John Willey and Sons Inc., 1977.

- (37) WOILER, Samsão. Enumeração implícita aplicada à seleção de investimentos. Revista de Administração de Empresas, 9(4):7-17, Out.-Dez. 1969.
- (38) WOILER, Samsão. Implicit enumeration algorithms for discrete optimization problems. Stanford, Stanford University / Dept. of Industrial Engineering, 1967. (Technical Report n. 4).
- (39) WOILER, Samsão. Programação linear com variáveis inteiras: algoritmos e aplicações. São Paulo, EPUSP, 1968. (Tese de Livre Docência).