

Universidade de São Paulo  
Escola Politécnica  
Departamento de Engenharia de Produção

Quinhones Furtunato de Souza Dutra

**Problema de roteirização de veículos com frota heterogênea fixa, janelas de tempo, entregas fracionadas e limitações de acesso**

São Paulo  
2023

Quinhones Furtunato de Souza Dutra

**Problema de roteirização de veículos com frota heterogênea fixa, janelas de tempo, entregas fracionadas e limitações de acesso**

**Versão Corrigida**

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências

Área de Concentração: Engenharia de Produção

Orientadora: Profa. Dra. Débora Pretti Ronconi

Coorientador: Prof. Dr. Leonardo Junqueira

São Paulo

2023

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, 16 de setembro de 2023

Assinatura do autor: *Quinhones Furtunato de Souza*

Documento assinado digitalmente

Assinatura do orientador:  **DEBORA PRETTI RONCONI**  
Data: 18/09/2023 10:35:05-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

### Catologação-na-publicação

Dutra, Quinhones Furtunato de Souza

Problema de roteirização de veículos com frota heterogênea fixa, janelas de tempo, entregas fracionadas e limitações de acesso / Q. F. S. Dutra, D. P. Ronconi, L. Junqueira -- versão corr. -- São Paulo, 2023.  
107 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Produção.

1.Logística 2.Roteirização de veículos 3.Algoritmos de otimização 4.Aplicação em caso real de uma indústria cimenteira I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Produção II.t. III.Ronconi, Débora Pretti IV.Junqueira, Leonardo

Aos meus pais, José e Vanilda,  
fonte inesgotável de admiração e motivação.

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, sem o qual tudo isso não seria possível. Afinal, “*antes que o dia fosse, Ele era*”. Especialmente ao maravilhoso Espírito Santo, sempre presente em todos os momentos.

Aos meus pais José e Vanilda, maiores incentivadores dos meus estudos (desde sempre) e as pessoas mais especiais que tenho na vida.

Às minhas irmãs, sobrinhos e toda grande família que sempre me acolhe com tanto carinho.

Aos amigos, por trazer a leveza tão importante em momentos tão intensos. Especialmente à Mari Coelho (pela motivação), Lucas e Ramon (pela abertura e parceria) e a Lidy, pelas risadas e por me ajudar tanto nesse processo.

Aos amigos da Poli, especialmente a Lídia, cuja dedicação e afinho tem sido essenciais para o bom andamento do PPGEF.

À Profa. Dra. Débora Pretti Ronconi, pela orientação, paciência, compartilhamento de grandes ensinamentos e enorme auxílio no desenvolvimento dos métodos deste trabalho, o meu agradecimento especial.

Ao Prof. Dr. Leonardo Junqueira pela coorientação e contribuições que foram cruciais para o resultado deste trabalho.

## RESUMO

DUTRA, Q. F. S. **Problema de roteirização de veículos com frota heterogênea fixa, janela de tempo, entregas fracionadas e limitações de acesso**. 2023. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2023.

Diariamente empresas realizam enormes quantidades de viagens através do modal rodoviário, tornando impraticável a execução manual de um planejamento da distribuição eficiente. Nesse sentido, o roteamento de veículos encontra vasta área de pesquisa na literatura, mas ainda oferece oportunidade para contribuições e estudos dada sua importância, relevância em termos de custo e a elevada complexidade da execução. Alinhado a essa tendência, este trabalho tem por objetivo estudar o roteamento de veículos em uma rede de distribuição de uma empresa cimenteira utilizando técnicas de otimização discreta. O problema considerado apresenta frota heterogênea fixa, janelas de tempo, entregas fracionadas e limitações de acesso para as entregas aos clientes. Para resolução desse problema inicialmente foi desenvolvido um modelo de programação linear inteira mista, executado no *software* CPLEX e validado em instâncias reais. As instâncias executadas no modelo matemático apresentam, em média, redução de 24% no custo de transporte quando comparado a operação real. À medida em que se aumenta consideravelmente a quantidade de clientes nas instâncias, o *software* CPLEX utilizando o modelo de programação linear inteira mista não consegue fornecer soluções de qualidade em tempo computacional razoável. Para contornar esse fato, em um segundo momento, utilizou-se de técnicas heurísticas para a resolução do problema, buscando encontrar boas soluções em tempo computacional aceitável. A heurística de inserção sequencial proposta forneceu boas soluções em curto espaço de tempo para todas as instâncias que foram executadas no modelo matemático. Adicionalmente, foram testadas instâncias de maior porte, com resultados também satisfatórios.

Palavras-chave: Problema de Roteamento de Veículos. Frota Heterogênea. Janelas de Tempo. Entregas Fracionadas. Limitações de Acesso. Programação Linear Inteira Mista. Heurística.

## ABSTRACT

DUTRA, Q. F. S. **Vehicle Routing Problem with Heterogeneous Fixed Fleet, Time Windows, Split Deliveries and Site-Dependent**. 2023. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2023.

On a daily basis, companies undertake substantial volumes of trips using road transportation, rendering manual execution of efficient distribution planning impracticable. In this context, vehicle routing has garnered significant research attention in the literature; however, it still offers opportunities for contributions and studies given its importance, cost implications, and high execution complexity. Aligned with this trend, the objective of this study is to investigate vehicle routing in a distribution network of a cement company using discrete optimization techniques. The problem considered involves a fixed heterogeneous fleet, time windows, split deliveries, and site-dependent for customer deliveries. To address this problem, an initial mixed-integer linear programming model was developed, implemented in the CPLEX software, and validated using real instances. The instances executed in the mathematical model demonstrated an average transportation cost reduction of 24% compared to real-world operations. However, as the number of customers significantly increases in the instances, the CPLEX software when using the mixed-integer linear programming model fails to provide high-quality solutions within a reasonable computational time. To overcome this limitation, heuristic techniques were subsequently employed to solve the problem, aiming to find good solutions within an acceptable computational time. The proposed sequential insertion heuristic yielded favorable solutions in a short time frame for all instances executed in the mathematical model. Additionally, larger instances were tested, yielding satisfactory results as well. Keywords: Vehicle Routing Problem. Heterogeneous Fleet. Time Windows. Split Deliveries. Site-dependent. Mixed Integer Linear Programming. Heuristics.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Mapa de representação da dispersão dos clientes em relação ao CD. ...	15
Figura 2 – Realização de apenas uma entrega por veículo. ....	17
Figura 3 – Realização de entrega por um veículo em mais de um cliente. ....	17
Figura 4 – Realização de entrega fracionada. ....	18
Figura 5 – Realização de entrega por um veículo em mais de um cliente e entrega fracionada no Cliente B. ....	18
Figura 6 – Tipos de veículos comumente encontrados na operação. ....	19
Figura 7 – Representação do trajeto entre a origem e os destinos. ....	21
Figura 8 – Exemplo de grafo orientado. ....	29
Figura 9 – Representação dos clientes e CD (conjunto $N$ de nós). ....	40
Figura 10 – A matriz $R_j^v$ indica as restrições de acesso dos clientes $j_2$ e $j_4$ em relação ao veículo $v_1$ . ....	46
Figura 11 – Representação dos dados do exemplo. ....	52
Figura 12 – Resultado do teste do exemplo. ....	54
Figura 13 – Início dos atendimentos no Cliente 1. ....	56
Figura 14 – Exemplo de rota que ilustra as posições $m$ e as posições potenciais $h$ para inserção de $u$ . ....	71



## LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Trabalhos que abordaram variantes do CVRP.....	36
Quadro 2 – Exemplo de aplicação das restrições (17) quando há apenas um veículo em atendimento no cliente. ....	49
Quadro 3 – Exemplo de aplicação das restrições (17) quando há dois atendimentos no cliente.....	50

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Capacidade dos veículos que atendem o CD.....	19
Tabela 2 – Matriz $R_j^v$ de análise preliminar para as limitações de acesso do veículo $v$ ao cliente $j$ .....	41
Tabela 3 – Valores de distância (em km) e tempo (em horas) entre os nós, respectivamente. ....	52
Tabela 4 – Valores de demanda e tempos nos clientes. ....	53
Tabela 5 – Matriz $R_j^v$ do exemplo de aplicação. ....	53
Tabela 6 – Resultados do atendimento da fração de demanda. ....	55
Tabela 7 – Resultados do início do atendimento (em horas) por cliente e veículo....	55
Tabela 8 – Instâncias reais selecionadas.....	58
Tabela 9 – Tarifa de frete média por perfil de veículo. ....	59
Tabela 10 – Distância entre os pontos da malha para a instância I.30. ....	59
Tabela 11 – Tempo de viagem estimado entre os pontos da malha para a instância I.30. ....	60
Tabela 12 – Resultados dos testes das instâncias reais.....	61
Tabela 13 – Exemplo de matriz de distância e de restrições. ....	74
Tabela 14 – Exemplo de cálculo do numerador de $c_{1,4}$ . ....	82
Tabela 15 – Instâncias utilizadas na execução do pacote <i>irace</i> .....	86
Tabela 16 – Resultados da aplicação da $H_{sp}$ . ....	88
Tabela 17 – Resultados da aplicação da $H_{cp}$ . ....	90
Tabela 18 – Instâncias de porte superior. ....	92

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CD	<i>Centro de Distribuição</i>
CVRP	<i>Capacitated Vehicle Routing Problem</i>
DVRP	<i>Dynamic Vehicle Routing Problem</i>
FSMD	<i>Fleet Size and Mix Vehicle Routing Problem with Vehicle Dependent Routing Costs</i>
FSMF	<i>Fleet Size and Mix Vehicle Routing Problem with Fixed Costs</i>
FSMVRP	<i>Fleet Size and Mix Vehicle Routing Problem</i>
FSMVRPTWSD	<i>Fleet Size and Mix Vehicle Routing Problem with Time Windows and Split Deliveries</i>
HFFVRP	<i>Heterogeneous Fixed Fleet Vehicle Routing Problem</i>
HFFVRPTWSD	<i>Heterogeneous Fixed Fleet Vehicle Routing Problem with Time Windows and Split Deliveries</i>
HFVRP	<i>Heterogeneous Fleet Vehicle Routing Problem</i>
HVRP	<i>Heterogeneous Vehicle Routing Problem</i>
HVRPD	<i>Heterogeneous Vehicle Routing Problem with Vehicle Dependent Routing Costs</i>
HVRPFD	<i>Heterogeneous Vehicle Routing Problem with Fixed Costs and Vehicle Dependent Routing Costs</i>
MDPVRP	<i>Multi-Depot Vehicle Routing Problem with Due Dates and Time Windows</i>
MTSP	<i>Multiple Traveling Salesman Problem</i>
PDVRP	<i>Pickup and Delivery Vehicle Routing Problem</i>
PLIM	<i>Programação Linear Inteira Mista</i>
PVRP	<i>Periodic Vehicle Routing Problem</i>
SDVRP	<i>Site-Dependent Vehicle Routing Problem</i>
SDVRPTW	<i>Site-Dependent Vehicle Routing Problem with Time Windows</i>

SDVRPSTW	<i>Site-Dependent Vehicle Routing Problem with Soft Time Windows</i>
SDHFFVRPTWSD	<i>Site-Dependent Heterogeneous Fixed Fleet Vehicle Routing Problem with Time Windows and Split Deliveries</i>
TSP	<i>Traveling Salesman Problem</i>
VDP	<i>Vehicle Dispatching Problem</i>
VRP	<i>Vehicle Routing Problem</i>
VRPSD	<i>Vehicle Routing Problem with Split Deliveries</i>
VRPTW	<i>Vehicle Routing Problem with Time Windows</i>
H <sub>sp</sub>	Heurística sem considerar o pré-processamento
H <sub>cp</sub>	Heurística com consideração do pré-processamento

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>CARACTERIZAÇÃO DO PROBLEMA .....</b>	<b>15</b>
2.1	DEFINIÇÃO.....	15
2.2	OBJETIVO .....	23
2.3	JUSTIFICATIVA E CONTRIBUIÇÃO.....	24
<b>3</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>	<b>27</b>
3.1	PROBLEMAS DE ROTEIRIZAÇÃO DE VEÍCULOS .....	27
3.2	PROBLEMAS DE ROTEIRIZAÇÃO DE VEÍCULOS COM FROTA HETEROGÊNEA .....	30
3.3	PROBLEMAS DE ROTEIRIZAÇÃO DE VEÍCULOS COM JANELAS DE TEMPO.....	32
3.4	PROBLEMAS DE ROTEIRIZAÇÃO DE VEÍCULOS COM ENTREGAS FRACIONADAS .....	33
3.5	PROBLEMAS DE ROTEIRIZAÇÃO DE VEÍCULOS COM LIMITAÇÕES DE ACESSO.....	34
3.6	PROBLEMAS DE ROTEIRIZAÇÃO DE VEÍCULOS COM RESTRIÇÕES COMBINADAS.....	35
3.7	CLASSIFICAÇÃO DOS PROBLEMAS RELACIONADOS.....	37
<b>4</b>	<b>FORMULAÇÃO MATEMÁTICA .....</b>	<b>39</b>
4.1	ELEMENTOS DA FORMULAÇÃO.....	39
4.1.1	CLIENTES .....	39
4.1.2	VEÍCULOS.....	40
4.1.3	JANELAS DE TEMPO.....	40
4.1.4	LIMITAÇÕES DE ACESSO .....	41
4.1.5	CUSTO DE FRETE .....	42
4.2	MODELO PROPOSTO .....	42
4.2.1	DETALHAMENTO DA FORMULAÇÃO .....	45
4.3	EXPERIMENTOS NUMÉRICOS.....	51
4.3.1	APLICAÇÃO AO EXEMPLO-TESTE .....	51
4.3.2	APLICAÇÃO A DADOS REAIS DA EMPRESA CIME.....	57
<b>5</b>	<b>MÉTODOS HEURÍSTICOS .....</b>	<b>63</b>
5.1	CONSIDERAÇÕES GERAIS.....	64
5.2	SOLUÇÕES HEURÍSTICAS PARA OS CVRP.....	66

5.3	DETALHAMENTO DA HEURÍSTICA PROPOSTA.....	70
5.3.1	ÉTAPAS DO PROCEDIMENTO .....	72
5.4	DETALHAMENTO E DEFINIÇÃO DOS CRITÉRIOS DE ECONOMIA PARA INSERÇÃO.....	79
5.5	EXPERIMENTOS NUMÉRICOS.....	84
5.5.1	CALIBRAÇÃO DE PARÂMETROS.....	85
5.5.2	APLICAÇÃO DA HEURÍSTICA NAS INSTÂNCIAS-BASE .....	87
5.5.3	EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS EM INSTÂNCIAS DE MAIOR PORTE .....	91
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES .....</b>	<b>94</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>97</b>
	<b>APENDICE A – TEMPO DE EXECUÇÃO DAS HEURÍSTICAS PARA AS INSTÂNCIAS-BASE .....</b>	<b>103</b>
	<b>APENDICE B – TEMPO DE EXECUÇÃO DAS HEURÍSTICAS PARA AS INSTÂNCIAS DE MAIOR PORTE .....</b>	<b>104</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A logística de distribuição de mercadorias, além de essencial, é um ramo de atuação extremamente desafiador. Devido a escala, custos e sua relevância na economia e na vida das pessoas, este segmento oferece rico espaço para desenvolvimento de estudos e soluções que contribuam com redução de custos e otimização de recursos. Um dos temas centrais da logística de distribuição é a roteirização, isto é, construir de maneira eficiente o trajeto dos veículos ao longo de uma malha, do ponto inicial até o ponto final, seja para a operação coleta ou entrega.

O Problema de Roteirização de Veículos (*Vehicle Routing Problem – VRP*) pode ser definido como uma classe de problemas, para os quais se objetiva determinar rotas de entrega a partir de um depósito para um conjunto de clientes geograficamente dispersos, sujeito a restrições, buscando a minimização de custo (Laporte, 2009).

O Problema de Roteirização de Veículos Capacitado (*Capacitated Vehicle Routing Problem – CVRP*) é um dos principais casos particulares do VRP e trata da otimização de rotas de entrega de produtos a um conjunto de clientes, partindo de um único depósito, utilizando de veículos idênticos, de capacidade limitada e que são atribuídos cada um a uma rota (GENDREAU *et al.*, 1999) e (BRAEKERS *et al.*, 2016). Em sua abordagem clássica quando do seu estabelecimento por Dantzig e Ramser em 1959, no CVRP foi considerado apenas um tipo de veículo para a programação das viagens, cada cliente sendo visitado apenas uma vez e por apenas um veículo.

Na literatura é possível verificar a existência de diversas variantes dos CVRP. O FSMVRP (*Fleet Size and Mix Vehicle Routing Problem*) consiste na existência de uma frota de veículos heterogênea e ilimitada, sendo possível também determinar o tamanho e composição dessa frota (Golden *et al.*, 1984). De maneira semelhante, caso a frota possua tamanho limitado, a variante encontrada denomina-se HFFVRP (*Heterogeneous Fixed Fleet Vehicle Routing Problem*) (Taillard, 1999).

Outra variação possível consiste em as entregas precisarem ser feitas em intervalos de tempo pré-determinados. A esses intervalos é dado o nome de janelas de tempo, originando-se assim a variante VRPTW (*Vehicle Routing Problem with Time Windows*) (Solomon, 1987). Caso as entregas possam ser feitas por mais de um

veículo para o mesmo cliente, verifica-se a ocorrência do VRPSD (*Vehicle Routing Problem with Split Deliveries*) (Dror e Trudeau, 1989).

A classificação que aborda frota heterogênea, ilimitada, janelas de tempo e entregas fracionadas é encontrada na literatura e denominada FSMVRPTWSD (*Fleet Size and Mix Vehicle Routing Problem with Time Windows and Split Deliveries*) (Belfiore e Yoshizaki, 2013). Por se tratar de um problema originário do CVRP, um dos objetivos centrais é a minimização do custo total de distribuição.

Em relação aos locais nos quais as entregas devem ser realizadas, pode haver também considerações específicas. Para os casos nos quais um determinado tipo de cliente pode ser acessado apenas por algum veículo específico, existe a variante SDVRP (*Site-Dependent Vehicle Routing Problem*) (Chao *et al.*, 1999).

Apesar de existir vasta pesquisa a respeito dos VRP, os problemas de roteirização encontrados no mundo real são frequentemente mais complexos que aqueles abordados na literatura. As pesquisas se voltam para variantes mais específicas e ricas do CVRP, que partem do seu básico e podem ser estendidas pela consideração de restrições adicionais, diferentes funções objetivo e particularidades, de modo a representar melhor o mundo real. A família destes problemas é identificada como *Rich Vehicle Routing Problems* (RVRP) (RIECK e ZIMMERMANN, 2010). Verifica-se então a existência de numerosas variações do problema clássico, uma vez que as necessidades do mundo real podem requerer a combinação destas, a fim de construir-se um modelo que as represente forma adequada. Hoff *et al.* (2010) apresentam um extenso levantamento de cerca de 95 artigos sobre as diferentes metodologias e tipos de roteamento de veículos. Nesse estudo conclui-se que, apesar de existirem variadas pesquisas na literatura, ainda há espaço para o desenvolvimento de outras frentes que aproximem mais o CVRP da realidade cotidiana das indústrias e das necessidades atuais e futuras, dados o dinamismo, características particulares das operações e a rápida transformação do mundo contemporâneo.

Partindo da oportunidade da aplicação prática das técnicas de resolução do CVRP e observando as considerações feitas por Hoff *et al.* (2010), este trabalho tem por objetivo a modelagem e resolução de um problema real, utilizando algoritmos de otimização (um modelo de programação linear inteira mista (PLIM) e uma heurística) em um problema de roteirização de veículos com frota heterogênea e limitada, restrição nas janelas de tempo para entregas nos clientes, possibilidade de realização



de entregas fracionadas e a existência de limitações de acesso, nas quais alguns clientes com limitações podem ser acessados apenas por veículos específicos. Neste trabalho esse caso do CVRP é doravante denominado SDHFFVRPTWSD (*Site-Dependent Heterogeneous Fixed Fleet Vehicle Routing Problem with Time Windows and Split Deliveries*).

Os CVRP clássicos, em quase sua totalidade, podem ser classificados como NP-*hard* pelo fato de não serem obtidas soluções em tempo polinomial (Lenstra e Rinnooy, 1981). Dessa forma, por extensão, o SDHFFVRPTWSD também pode ser classificada como NP-*hard*. Problemas dessa natureza são enfrentados com a utilização de técnicas heurísticas e meta-heurísticas, ferramentas que oferecem soluções razoáveis em tempo computacional aceitável. Nesse sentido, este trabalho propõe também uma heurística de inserção sequencial para resolução do problema em questão.

Este trabalho está dividido em seis capítulos. No Capítulo 2 encontra-se a caracterização do problema, sua definição, contribuição e justificativa. No Capítulo 3 é apresentada a revisão bibliográfica com os principais trabalhos sobre o CVRP e variantes. A formulação matemática é descrita no Capítulo 4, composto pelo modelo de PLIM, seu detalhamento e os testes realizados com base nos dados reais de uma amostra da operação de uma empresa que fabrica e distribui cimento ensacado. Para manter a confidencialidade dos dados da organização, esta empresa será doravante denominada Empresa CIME. No Capítulo 5 são detalhados as características, etapas e construção da heurística de inserção sequencial proposta, calibrações dos parâmetros da heurística bem e os resultados de sua aplicação. Por fim, no Capítulo 6 são apresentadas as conclusões finais do trabalho.

## 2 CARACTERIZAÇÃO DO PROBLEMA

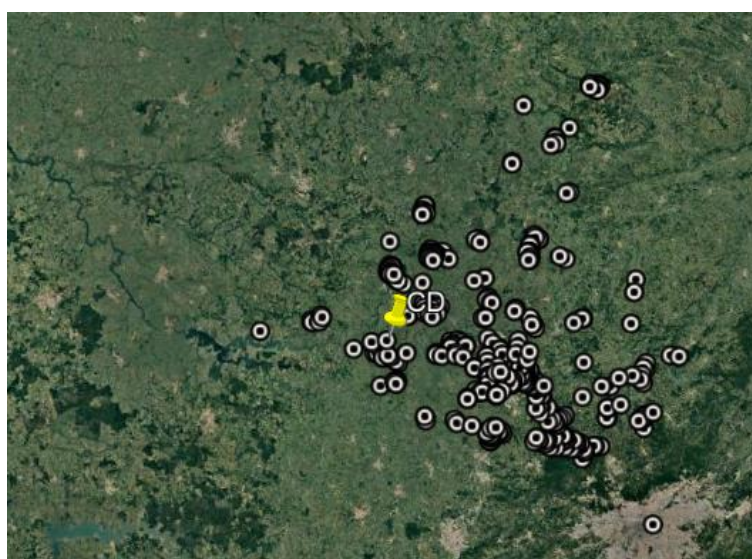
No presente capítulo é efetuada a caracterização do problema por meio de sua definição, escopo/contexto, características, hipóteses, justificativas e contribuições.

### 2.1 Definição

Como mencionado anteriormente, problema abordado neste trabalho faz parte da realidade da Empresa CIME. Em relação à sua estrutura, a empresa possui várias unidades pelo Brasil entre fábricas, centros de moagem e Centros de Distribuição (CD).

A partir de um ponto inicial, que pode se tratar de uma fábrica/moagem ou CD, os veículos devem realizar diariamente a distribuição dos produtos para os clientes. Para este trabalho, foi escolhido um CD situado em uma cidade do interior do estado de São Paulo, que realiza a expedição de cimento e argamassa ensacados, conforme ilustrado na Figura 1.

Figura 1 – Mapa de representação da dispersão dos clientes em relação ao CD.



Fonte: Google Earth Inc. 2023.

A frota de veículos e a mão-de-obra são totalmente terceirizadas, com perfis de veículos variados. A contratação de frete é feita caso a caso e não há garantia de disponibilização de volume por parte da Empresa CIME. A solicitação dos veículos ocorre de acordo com a demanda do dia, sem qualquer contrato formal ou vínculo empregatício entre contratante e contratado. Essa estratégia de contratação de transporte é largamente utilizada nesse segmento de indústria, comumente chamada de “contratação *spot*”.

Por definição, são chamados de embarcadores as empresas que contratam o serviço de transporte de um fornecedor. O termo é utilizado para as empresas proprietárias da carga e que utilizam o serviço de transporte realizado por terceiros<sup>1</sup>. O termo “autônomo” é atribuído para a pessoa física cuja atividade profissional é a realização do transporte de cargas. Quando essa atividade é desempenhada por pessoa jurídica, classifica-se como ETC – Empresa de Transporte Rodoviário de Cargas<sup>2</sup>.

O fato de o transporte ser totalmente terceirizado e sem vínculos contratuais formais entre as partes apresenta algumas vantagens para a operação da Empresa CIME, dentre as quais se destacam:

- a) sobre os ativos:
  - inexistência de custos fixos a serem financiados/depreciados;
  - inexistência de gastos com manutenção inerentes aos veículos;
- b) sobre a mão-de-obra:
  - inexistência de custos de folha salarial e seguridade social;
  - praticamente inexistem questões trabalhistas, salvo casos em que a justiça firmar entendimento de que a embarcadora opera de tal forma a constituir vínculo empregatício, mesmo que este não exista formalmente.

Tendo em vista que todo o serviço de transporte é terceirizado, relação de contratação de transporte é regulada, na prática, diretamente por demanda e oferta: demanda por transporte e oferta de frete por parte do embarcador. Apesar de não existir relação trabalhista formal entre a empresa e os transportadores/autônomos (a contratação do transporte é feita caso a caso), os veículos que realizam o transporte

---

<sup>1</sup> Lei federal número 10.209 de 23 de março de 2001, que dispõe sobre a instituição do vale-pedágio obrigatório sobre o transporte rodoviário de carga e outras providências.

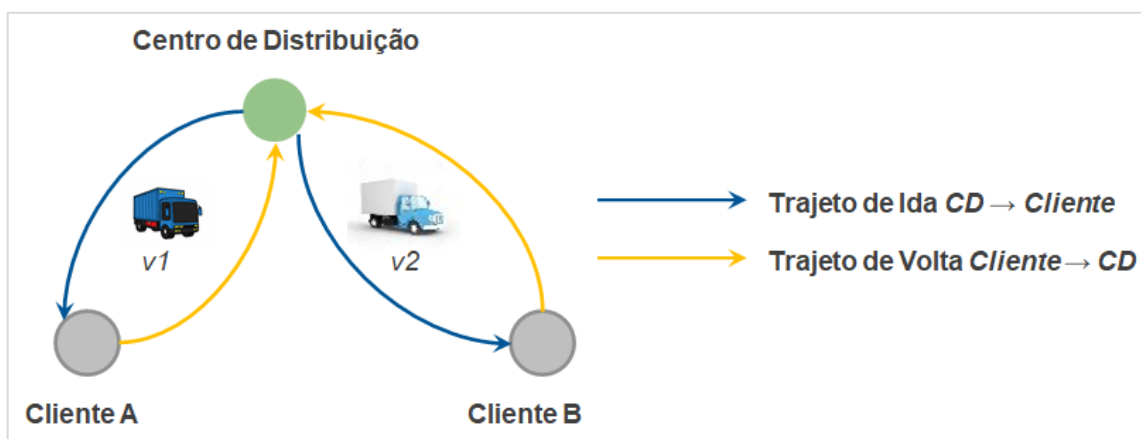
<sup>2</sup> Lei federal número 11.442 de 05 de janeiro de 2007, que dispõe sobre o transporte rodoviário de cargas por conta de terceiros e mediante remuneração.

do CD são, na prática, os mesmos durante os dias da semana. Os veículos são considerados fidelizados, ou seja, realizam com regularidade os transportes da empresa durante longos períodos.

A seguir são ilustradas as possibilidades de trajeto que os veículos possuem. Ao sair do CD é possível a realização de:

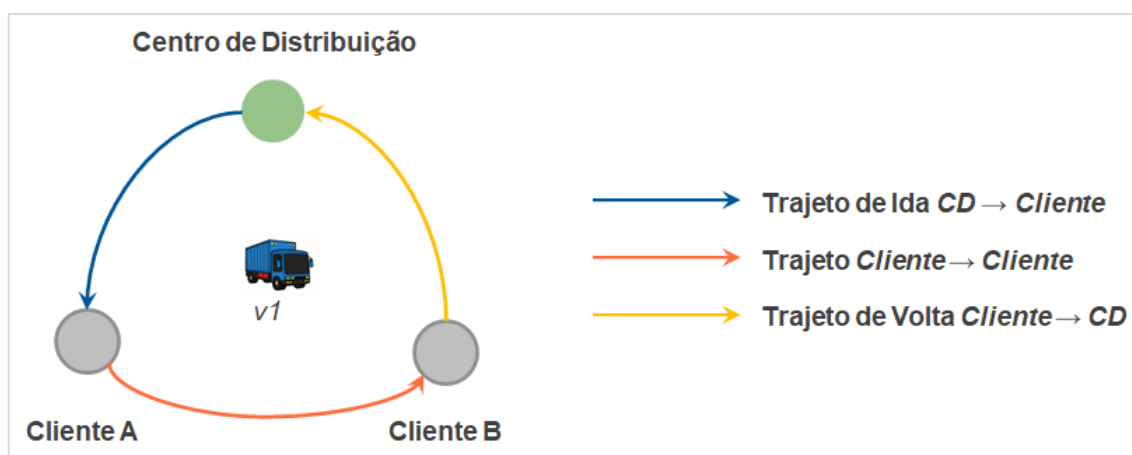
- apenas uma entrega (Figura 2);
- mais de uma entrega por veículo e retorno ao CD (Figura 3);
- entrega fracionada, onde um cliente recebe os produtos de mais de um veículo (Figura 4);
- mais de uma entrega por veículo e entrega fracionada (Figura 5).

Figura 2 – Realização de apenas uma entrega por veículo.



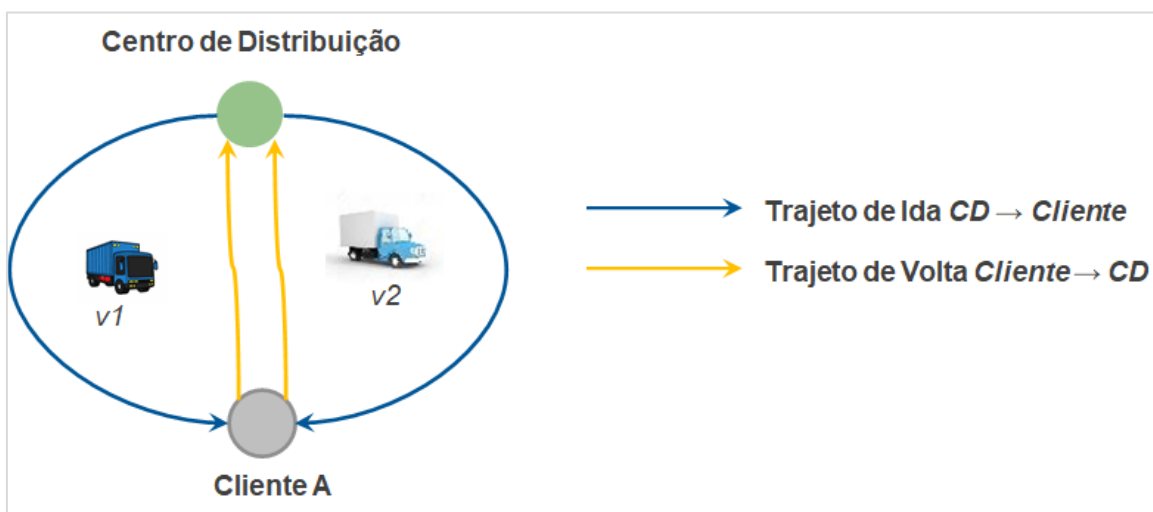
Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 3 – Realização de entrega por um veículo em mais de um cliente.



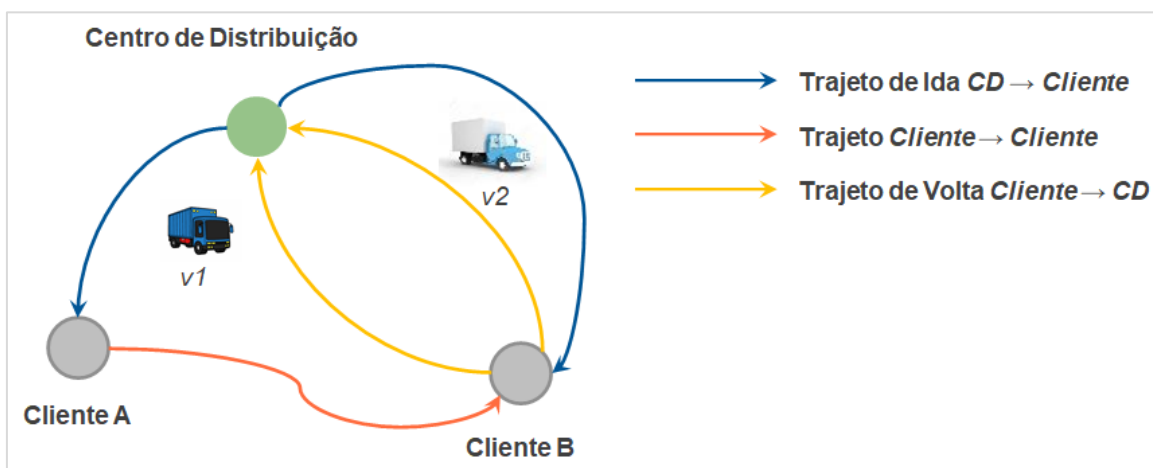
Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 4 – Realização de entrega fracionada.



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 5 – Realização de entrega por um veículo em mais de um cliente e entrega fracionada no Cliente B.



Fonte: elaborado pelo autor.

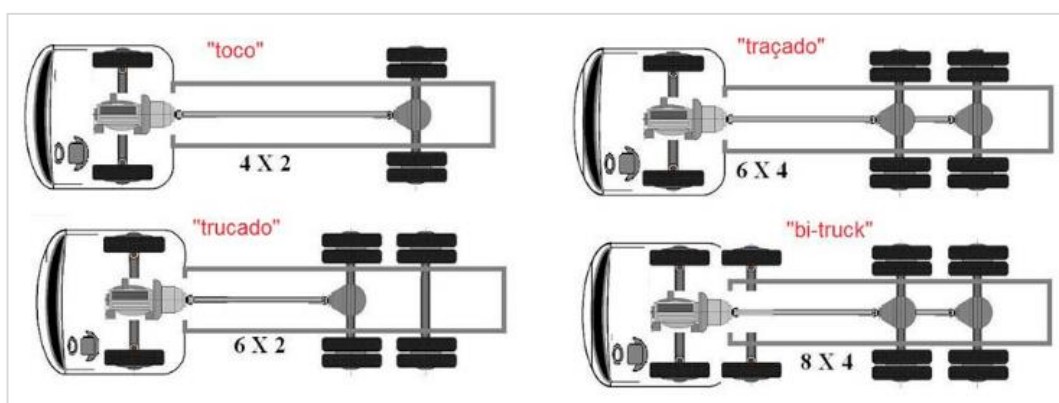
O trajeto do transporte é definido pelo trecho origem-destino, cujas distâncias (dada em quilômetros) podem ser variadas a depender da malha de distribuição da empresa. Neste trabalho o CD considerado possui raio de atuação relativamente baixo pois os clientes se concentram em distâncias inferiores a 50km.

Em relação ao perfil da frota, o CD é atendido por veículos de dimensões diferentes. Dessa forma, neste trabalho a frota é classificada como heterogênea. Apesar de o perfil de frota disponível sofrer influência de vários fatores – alguns dos quais mencionados anteriormente –, os tipos de veículos são, geralmente, os mesmos todos os dias. Essa estrutura de perfis recorrentes será doravante nomeada de perfil padrão. Baseado nas informações desse perfil padrão são realizadas as roteirizações

diárias. Por esse motivo, considera-se nesse trabalho que a frota tem tamanho limitado.

Existem vários tipos de veículos e suas especificações. Os tipos de veículos brutos mais comuns são os perfis *toco*, *truck*, *traçado* e *bi-truck* (Blog da IVECO, 2023). Na Figura 6 são ilustradas as características básicas de alguns tipos de veículos que comumente atendem a Empresa CIME.

Figura 6 – Tipos de veículos comumente encontrados na operação.



Fonte: <https://www.blogiveco.com.br>. Acessado em 27 de abril de 2023.

Para o problema em questão, os veículos atendem o CD possuem três tipos de perfis, conforme verificado Tabela 1.

Tabela 1 – Capacidade dos veículos que atendem o CD.

Perfil de veículo	Capacidade (toneladas)
Truck (trucado)	14
Truck (trucado)	16
Bi-truck	22

Fonte: elaborado pelo autor.

Em relação a precificação do transporte, o frete, são várias as alternativas possíveis. Comumente, existe a precificação do transporte levando-se em consideração os seguintes aspectos:

- capacidade de transporte do veículo;
- distância a ser percorrida;
- condições da estrada (se pavimentada, em boas condições etc.);

- d) em alguns casos, dificuldade de acesso aos locais de entrega podem acarretar custos extras ao transporte.

Atualmente a Empresa CIME calcula o frete em reais por tonelada ( $R\$/ton$ ), uma forma bastante utilizada na negociação de fretes de *commodities* no Brasil. Essa medida leva em consideração os aspectos listados anteriormente e determina o frete em um trajeto, independentemente do tipo de veículo. Contudo, após a intensa greve dos caminhoneiros ocorrida em maio de 2018, a Agência Nacional de Transportes Terrestres (ANTT) instituiu o piso mínimo de frete, uma política de precificação de frete dada em reais por quilômetro ( $R\$/km$ ). Através da Resolução nº 5.820<sup>3</sup> publicada em 30 de maio de 2018, foram definidos parâmetros específicos para que o frete mínimo fosse estipulado nas viagens. Esses parâmetros são calculados por faixas de distância e consideram ainda algumas características das cargas e dos veículos. A Resolução nº 5.820 foi atualizada em 16 de julho de 2019 para a de nº 5.849<sup>4</sup>. A principal alteração se deu em relação a metodologia de cálculo, que agora considera dois coeficientes (de carga/descarga e de deslocamento). Esses dois coeficientes são somados e multiplicados pela distância, resultando no valor do frete daquela viagem.

Apesar de o piso mínimo de frete ainda estar em discussão até o momento da finalização deste trabalho, há grandes chances de essa ser a nova metodologia a ser adotada no cálculo de frete de transporte de carga rodoviária no país, ou pelo menos será utilizada como um referencial balizador para o cálculo de fretes. Centenas de empresas – dentre elas a Empresa CIME – estão em fase de adequação a essa nova realidade.

Nesse sentido, visando ir ao encontro da futura metodologia de cálculo que provavelmente será utilizada pela Empresa CIME devido as definições governamentais, neste estudo utilizou-se a medida  $R\$/km$ . Com base na amostra fornecida pela Empresa CIME calculou-se o valor médio de reais por quilômetro para cada perfil de veículo, que é posteriormente utilizado na resolução de um caso real. Esse indicador  $R\$/km$  foi calculado levando-se em conta a distância, frete e

---

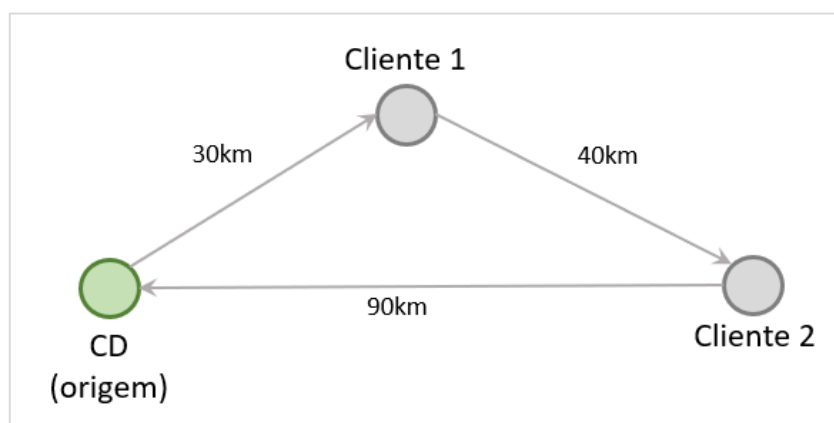
<sup>3</sup> Resolução nº 5.820, de 30 de maio de 2018, que dispõe sobre metodologia e publica a tabela com preços mínimos vinculantes, referentes ao quilômetro rodado na realização de fretes, por eixo carregado, instituído pela Política de Preços Mínimos do Transporte Rodoviário de Cargas.

<sup>4</sup> Resolução nº 5.849, de 16 de julho de 2019, que estabelece as regras gerais, a metodologia e os coeficientes dos pisos mínimos, referentes ao quilômetro rodado na realização do serviço de transporte rodoviário remunerado de cargas, por eixo carregado, instituído pela Política Nacional de Pisos Mínimos do Transporte Rodoviário de Cargas - PNPM-TRC.

capacidade de carga dos veículos. Como resultado, cada perfil de veículo possui um valor de  $R\$/km$  próprio.

A programação das viagens feitas atualmente leva sempre em consideração o seguinte trecho: origem (que neste trabalho é o CD), clientes a serem visitados e o destino final (retorno ao CD). Essa é a distância utilizada para estimativa do valor do frete e do tempo de viagem. Na Figura 7 representa-se de uma situação hipotética.

Figura 7 – Representação do trajeto entre a origem e os destinos.



Fonte: elaborado pelo autor.

Nesse caso, por exemplo, se houver uma entrega de um veículo primeiro no Cliente 1 e depois no Cliente 2, a distância total utilizada pela empresa para efeitos de cálculo inicia-se na origem, segue-se para o Cliente 1 e depois para o Cliente 2, perfazendo o total de 70km para a distância de ida e 90km para a volta. Neste trabalho, admitir-se a possibilidade de entregas fracionadas e a contabilização da distância por trecho percorrido, refletindo a realidade da empresa atualmente.

O planejamento da distribuição é construído diariamente na manhã do dia D (assume-se dia atual, a partir de 06h), de maneira totalmente manual por um operador de expedição. No dia D o operador realiza a roteirização de todos os pedidos que foram alocados em carteira no dia anterior (D-1) até as 21h. Nessa manhã do dia D, no momento da programação do transporte já existem vários veículos disponíveis no pátio da empresa. A presença dos veículos é refletida no sistema através da marcação biométrica dos motoristas: eles chegam na empresa, realizam a marcação no sistema e são organizados em uma fila virtual, onde aguardam a disponibilização da carga. Para realizar a roteirização utiliza-se a referência histórica do perfil padrão – dado que os perfis são recorrentes. Caso os veículos que aparecerem após a confecção do roteiro possuam capacidades diferentes das consideradas no perfil padrão, admite-se



a ocorrência de anomalias operacionais tal como o pagamento de “frete morto”, que ocorre quando a capacidade do veículo não é totalmente ocupada, mas o valor do frete é pago integralmente. Outra possibilidade é não conseguir roteirizar toda a demanda devido a falta de capacidade. Para os raros casos em que isso ocorre, os clientes restantes são roteirizados na próxima rodada, quando ocorre uma nova leva de veículos que podem ser utilizados. A ordem para roteirização é a mesma da entrada de pedidos em carteira, na modalidade FIFO (*First In First Out*), sem priorização. Caso reste no pátio algum veículo sem volume alocado, o motorista pode aguardar a próxima rodada de roteirização ou mesmo buscar algum outro carregamento em outra empresa, dado que a contratação é *spot* e a necessidade de veículos varia de acordo com as vendas, ou seja, não há garantia por parte da Empresa CIME que exista viagem para todos os veículos todos os dias.

Dada a demanda de determinado dia, a tarefa do operador de expedição é realizar a alocação dos veículos em rotas, das quantidades de produtos que devem ser entregues a cada cliente em sua respectiva janela de horário, obedecendo as particularidades de cada cliente e de cada veículo, de forma a minimizar o custo de transporte, respeitando as restrições do problema.

A tarefa de roteirizar as cargas pode ser desempenhada de maneira mais eficiente com o uso de técnicas de otimização, tais como as aplicadas no presente trabalho. Ressalta-se que não pertence ao escopo desse estudo a realização do dimensionamento da frota. Os custos fixos, do ponto de vista do detentor do ativo, também são desconsiderados, uma vez que a viagem é integralmente realizada por terceiros e o pagamento de todo o transporte concentra-se no valor do frete negociado.

As hipóteses e características do problema são:

a) Clientes:

- dispersos pelo espaço com posição e demanda pré-determinados para a programação das rotas;
- alguns clientes específicos podem ser acessados apenas por determinados veículos (limitações de acesso – *site-dependent*);
- em caso de entregas fracionadas cada cliente pode receber, no máximo, duas entregas por dia (condição operacional do problema), de maneira não-concomitante;

- b) Janelas de tempo, que é intervalo no qual a operação (carregamento ou descarregamento) deve ser realizada. As janelas de tempo possuem início e fim, e o tempo de serviço deve ser compreendido neste intervalo.
- c) Frota heterogênea e limitada: a composição da frota está representada no perfil padrão e é diversa;
- d) Custos de transporte: os custos de frete são calculados em  $R\$/km$  e dependem do tipo de veículo e da distância da viagem;
- e) Demanda determinística;
- f) Os produtos podem ser diferentes. Contudo, tendo em vista que as quantidades/embalagens são semelhantes e a operação de carga/descarga é a mesma, para fins de programação de rotas essa diferenciação não se faz relevante. Dessa forma todos os produtos podem ser classificados como similares ao cimento ensacado (principal produto);
- g) O horizonte de planejamento é diário. O corte da quantidade de demanda ocorre em D-1 e a roteirização é feita no dia D. Ao longo do dia, caso haja demanda para ser atendida, são realizadas outras rodadas de roteirização;
- h) Os veículos devem finalizar a entrega que lhe foi atribuída;
- i) O frete é contratado por transporte individual e o custo de retorno já está embutido no valor pago ao frete;
- j) A expedição no ponto de origem (CD) opera em horário comercial, de segunda à sexta das 08h às 18h e aos sábados das 08h às 13h;
- k) Os clientes geralmente funcionam no mesmo horário comercial do ponto de origem, havendo poucas exceções que são irrelevantes do ponto de vista da modelagem.

## 2.2 Objetivo

O objetivo da pesquisa é determinar a alocação dos veículos nos itinerários de entregas, diariamente, definindo suas rotas, clientes, volumes e horários de atendimento, de forma a minimizar o custo total de distribuição, garantindo que as restrições do problema sejam respeitadas. As variantes do CVRP que foram identificadas neste estudo são as seguintes:

- a) HFFVRP: frota heterogênea e limitada;
- b) VRPTW: cliente recebe a mercadoria em janelas de tempo pré-determinadas;
- c) VRPSD: há a possibilidade de realização de entregas fracionadas;
- d) SDVRP: possíveis limitações de acesso de clientes a determinados veículos.

Tendo em vista as variantes contempladas no problema e as suas especificidades, verifica-se a oportunidade de desenvolver e aplicar estratégias de resolução de problemas de roteirização para veículos tal como a proposta neste trabalho: SDHFFVRPTWSD (*Site-Dependent Heterogeneous Fixed Fleet Vehicle Routing Problem with Time Windows and Split Deliveries*). Dada a complexidade de problemas derivados do CVRP, suas variantes e a magnitude de algumas instâncias analisadas, em alguns casos (geralmente à medida em que a quantidade de clientes aumenta) o modelo de PLIM não é capaz de oferecer solução em tempo computacional razoável. Com o objetivo de contornar este fato, neste trabalho são adotados procedimentos heurísticos para encontrar soluções de boa qualidade em tempo computacional aceitável. O modelo matemático de PLIM é utilizado para aplicação em instâncias de pequeno porte e é também utilizado posteriormente para validação dos procedimentos heurísticos que foram desenvolvidos.

Dessa forma, avaliando a literatura disponível e partindo da oportunidade da aplicação prática de técnicas comumente utilizadas para o CVRP, este trabalho tem por objetivo a modelagem e resolução de um problema real, utilizando algoritmos de otimização discreta em um problema de roteirização de veículos de variante SDHFFVRPTWSD.

### **2.3 Justificativa e contribuição**

O CVRP tem sido amplamente estudado na literatura, mas a combinação de suas variantes ainda oferece vasto espaço para contribuições. Os autores Belfiore e Yoshizaki (2013) estudaram uma variante do problema de FSMVRPTWSD (*Fleet Size and Mix Vehicle Routing Problem with Time Windows and Split Deliveries*), de perfil de frota heterogêneo e número de veículos ilimitado. Por se tratar de um problema originário do CVRP, um dos objetivos centrais permanece sendo a minimização de

custo. Apesar de o FSMVRPTWSD possibilitar a definição do tamanho e composição da frota, isso não fez parte do escopo do referido estudo.

O trabalho de Cantu-Funes *et al.* (2017) apresenta um problema de roteirização de depósitos múltiplos, datas de entrega e janelas de tempo MDPVRP (*Multi-Depot Vehicle Routing Problem with Due Dates and Time windows*). O objetivo central desse estudo é determinar o número de veículos extras e a roteirização entre as plantas, buscando a minimização do custo. Contudo, este trabalho não aborda especificidades como restrição no local de recebimento e entregas parciais.

No trabalho de Penna *et al.* (2019) é proposta uma heurística geral para a resolução de uma família de VRP, incluindo depósitos múltiplos, viagens múltiplas, janelas de tempo, entregas fracionadas, particularidades de locais de entrega e outras especificidades. A proposta é bastante ampla e abarca uma grande quantidade de particularidades presentes nas variantes dos problemas de roteirização de veículos. Embora seja de escopo abrangente, não são mencionadas particularidades contidas nas atualizações da ANTT que propõe que custo de frete no Brasil seja calculado em por real por quilômetro, bem como não menciona limitações de acesso.

Os autores Koç *et al.* (2015) propõem em seu trabalho um algoritmo evolucionário para resolução de problemas de roteirização com frota heterogênea e janelas de tempo, considerando possibilidades combinadas de frotas limitadas e ilimitadas, estruturas de custos do itinerário e apenas avaliados pela distância. Contudo, as entregas fracionadas não são abordadas nesse trabalho.

De maneira mais específica, a combinação de variantes que conjuguem problemas que levem em consideração as particularidades do HFFVRPTWSD (*Heterogeneous Fixed Fleet Vehicle Routing Problem with Time Windows and Split Deliveries*), somadas às limitações de acesso, ainda é timidamente explorada na literatura, ainda mais quando aplicada a situações reais de uma indústria de base. Essa combinação específica é classificada neste trabalho como sendo SDHFFVRPTWSD (*Site-Dependent Heterogeneous Fixed Fleet Vehicle Routing Problem with Time Windows and Split Deliveries*).

Até o momento, o estudo que mais guarda relação com o presente trabalho é o elaborado por Souza (2017), o qual aborda o SDHFFVRPTWSD por meio da aplicação de um método exato para a solução do problema em um caso real de entregas de uma empresa de serviços postais. Apesar de relacionados, existem diferenças significativas entre os dois. O trabalho de Souza (2017) estuda o caso de

uma empresa de serviços postais, com frota própria (considerando custos fixos e variáveis), não há limitação de quantidade máxima de entregas, não há restrições de não-concomitância e para sua resolução é proposto um método exato. O presente trabalho estuda o caso da distribuição de uma empresa cimenteira, com frota totalmente terceirizada (sem custos fixos), há limitação de quantidade máxima de entregas por cliente, há restrições de não-concomitância e são propostos um modelo exato e uma heurística para a resolução do problema.

Vale ressaltar que, no contexto deste trabalho, as limitações de acesso estão presentes em áreas específicas, nas quais determinadas localidades só podem ser acessadas por algum tipo específico de veículo (seja por conta dos veículos, por conta do motorista ou outras características). Para um dado cliente, quanto menor a quantidade de veículos que podem atendê-lo, menos “flexível” ele é. Essas áreas podem sofrer influência de organizações para-governamentais que restringem o acesso aos seus locais. Apesar disso, possuem uma vida cotidiana normal e consomem produtos cimentícios para construção civil local.

### 3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

No presente capítulo são apresentadas as principais abordagens dos problemas de roteirização de veículos estudadas na literatura e que possuem interface com o problema retratado neste trabalho. Na primeira seção são apresentados trabalhos sobre importantes problemas de roteirização de veículos. As Seções 3.2 a 3.6 abordam as diferentes variantes do CVRP: janelas de tempo, entregas fracionadas, limitações de acesso e a combinação entre elas. Na seção 3.7 é discutida a dificuldade de resolução dos problemas NP-*hard*, especialmente a resolução exata para os CVRP e seus derivados.

#### 3.1 Problemas de roteirização de veículos

O tema roteirização de veículos encontra vasta área de estudo na literatura, seja pela sua enorme possibilidade de aplicação, abrangência ou pela relevância em termos financeiros. Geralmente, o custo de transporte representa de um a dois terços dos custos logísticos totais, o que faz com que seja direcionada atenção especial no planejamento dessas operações (BALLOU, 2006).

As origens do problema de roteirização de veículos têm raízes no clássico problema do caixeiro viajante (*Traveling-Salesman Problem* – TSP), abordado no estudo de Flood (1956), no qual conceitua o TSP e apresenta suas semelhanças e diferenças em relação aos problemas de designação de pessoas e problemas de transporte. Para Bodin *et al.* (1983), o TSP trata-se de um problema que visa a determinação de um caminho único, com menor custo possível, que permita ao veículo visitar todos os nós de uma rede uma vez apenas (circuito hamiltoniano).

Com base no TSP, Dantzig e Ramser (1959) definem o problema de despacho de caminhões (*Truck Dispatching Problem*), considerado como a generalização do TSP (LAPORTE, 2009). A principal contribuição desse trabalho é que os veículos possuem capacidades idênticas e inferior a demanda total, ou seja, não conseguem satisfazê-la por completo em apenas uma viagem, sendo necessário retornar ao

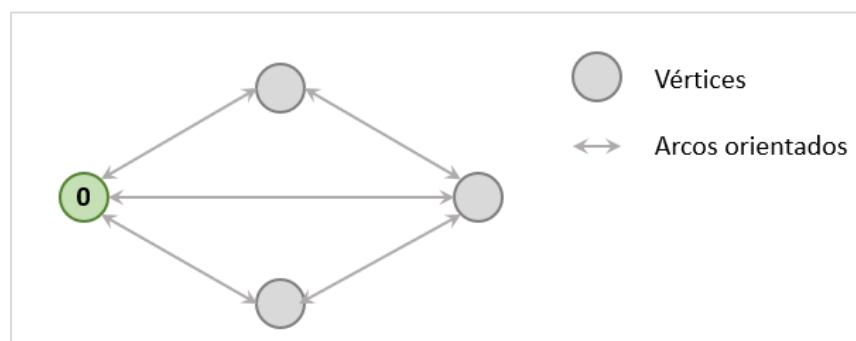
depósito e realizar novos trajetos a fim de atender a demanda em sua totalidade. De maneira secundária, são aventadas as possibilidades de demanda por diferentes produtos e diferentes capacidades dos veículos. O problema de despacho de caminhões de Dantzig e Ramser (1959) é mais comumente conhecido como CVRP (LAPORTE e OSMAN, 1995).

Dentre as várias subclasses do VRP, o CVRP tem sido descrito como um dos casos particulares mais estudados na literatura, além de o mais comum problema de gestão na distribuição de alimentos, combustíveis e produtos de varejo (FAULIN; JUAN; LERA; GRASMAN, 2011). Para Gendreau *et al.* (2008) o CVRP se caracteriza pela busca da otimização da entrega de produtos para um conjunto de clientes, partindo de um depósito, realizada por uma frota de veículos de capacidade idêntica e limitada.

Para Golden *et al.* (2008) o CVRP é definido como um dos problemas de otimização combinatória mais estudados, com objetivo de realizar o atendimento de clientes por meio da determinação de rotas ótimas a serem percorridas por uma frota de veículos. Para Laporte *et al.* (2000) o CVRP consiste no projeto de rotas que minimizem o custo total de atendimento dos clientes pelos veículos, com cada rota sendo iniciada e finalizada no depósito. Laporte (2009) define o CVRP como sendo o problema determinação de rotas que minimizem os custos de entrega do depósito até os clientes dispersos em uma rede, sujeito a determinadas restrições. Esse é um problema central no gerenciamento de distribuição e deve ser resolvido rotineiramente.

Os grafos são representações frequentemente utilizadas no estudo dos VRP. Sendo  $G = (V, A)$  um grafo orientado onde  $V = \{0, \dots, n\}$  é o conjunto de vértices e  $A = \{(i, j): i, j \in V, i \neq j\}$  o conjunto de arcos. O vértice 0 representa o depósito enquanto os demais representam os clientes. Uma frota de veículos idênticos está baseada no depósito. O tamanho da frota é dado *a priori* ou é definido como sendo uma variável de decisão. Cada consumidor tem uma demanda não-negativa (LAPORTE, 2009). A Figura 8 ilustra um exemplo de grafo orientado descrito acima.

Figura 8 – Exemplo de grafo orientado.



Fonte: elaborado pelo autor.

O CVRP possui muitas variantes, dentre as quais podem ser destacadas: Problema de Roteirização Dinâmica de Veículos (*Dynamic Vehicle Routing Problem – DVRP*), Problema de Roteirização de Veículos com Coleta e Entrega (*Pickup and Delivery Vehicle Routing Problem - PDVRP*), Problema de Roteamento de Veículos Periódico (*Periodic Vehicle Routing Problem - PVRP*) (IBRAHIM; LO; ABDULAZIZ; ISHAYA, 2019).

Na literatura são muitos os trabalhos sobre CVRP e suas variantes. Christofides e Eilon (1969) apresentam exemplos de utilização e evidenciam muitas das aplicações do problema de despacho de veículos (*Vehicle Dispatching Problem – VDP*), desde roteirização de navios até sequenciamento de atividades em máquinas. Os autores apresentam três formas diferentes de resolução do CVRP: algoritmo *branch-and-bound*, *the savings approach* e *the 3-optimal tour method*. Uma das principais referências no tema é o trabalho de Bodin *et al.* (1983), no qual os autores abordam, de forma abrangente, as principais modelagens do CVRP. Laporte e Osman (1995) apresentam uma extensa bibliografia de 500 referências sobre problemas clássicos de roteirização e estratégias de solução. Dentre os quatro problemas abordados pelos autores estão o CVRP e suas subclassificações.

Laporte (2009) traz em seu trabalho um importante levantamento das principais evoluções dos CVRP em 50 anos de existência (a contar do seu marco inicial dado pelos trabalhos de Dantzig e Ramser em 1959). O autor elenca os principais trabalhos, dentre livros e artigos, que abordam o CVRP e suas principais estratégias de resolução: métodos exatos, heurísticas e meta-heurísticas.

Eksioglu *et al.* (2009) apresentam a evolução da taxonomia dos VRP e de suas classes constantes na literatura. Dada a vasta quantidade de trabalhos, os autores propõem uma metodologia para sua classificação. Baseada na classificação de



Eksioglu *et al.* (2009), Braekers *et al.* (2016) realizam a classificação de 277 trabalhos publicados entre 2009 e junho de 2015, de acordo com uma taxonomia adaptada.

### 3.2 Problemas de Roteirização de Veículos com frota Heterogênea

Os Problemas de Roteirização de Veículos com Frota Heterogênea (*Heterogeneous Fleet Vehicle Routing Problem* – HFVRP) são uma subclasse do CVRP nos quais a frota de veículos é heterogênea. Os autores Koç *et al.* (2016) apresentam as evoluções ocorridas em trinta anos de estudo da variante HVRP - *Heterogeneous Vehicle Routing Problem*, cujas raízes estão no trabalho de Golden *et al.* (1984). Para Gendreau *et al.* (1999) e Tarantilis (2007), o HVRP (ou HFVRP) são classificados em duas principais categorias. A primeira é o problema de roteirização de veículos de frota mista e heterogênea (*Fixed Size and Mix Vehicle Routing Problem* – FSMVRP), cuja origem é identificada no trabalho de Golden *et al.* (1984). Nessa variante, a frota de veículos é considerada heterogênea e de tamanho ilimitado. Dessa forma são possíveis as abordagens que estudem, para além da roteirização dos veículos, a composição e o dimensionamento do tamanho da frota. A segunda categoria abriga o problema de roteirização de veículos de frota fixa e heterogênea (*Heterogeneous Fixed Fleet Vehicle Routing Problem* – HFFVRP), introduzido por Taillard (1999). Nessa variante a frota de veículos é limitada e heterogênea e, para além da roteirização dos veículos, o objetivo é determinar a composição da frota.

Baldacci *et al.* (2008) apresentam uma classificação das diferentes variantes do HVRP descritas na literatura, sendo elas:

- a) *Heterogeneous Vehicle Routing Problem with Fixed Costs and Vehicle Dependent Routing Costs* – HVRPFD, no qual consideram-se custos fixos e variáveis (custos dependentes da roteirização) para uma frota de tamanho limitado;
- b) *Heterogeneous Vehicle Routing Problem with Vehicle Dependent Routing Costs* – HVRPD, no qual considera-se apenas os custos variáveis dependentes da roteirização (desconsiderando-se, portanto, os custos fixos) para uma frota de tamanho limitado;

- c) *Fleet Size and Mix Vehicle Routing Problem with Fixed Costs and Vehicle Dependent Routing Costs* – FSMFD, no qual consideram-se custos fixos e variáveis (custos dependentes da roteirização) para uma frota de tamanho ilimitado;
- d) *Fleet Size and Mix Vehicle Routing Problem with Vehicle Dependent Routing Costs* – FSMD, no qual considera-se apenas os custos variáveis dependentes da roteirização (desconsiderando-se, portanto, os custos fixos) para uma frota de tamanho ilimitado;
- e) *Fleet Size and Mix Vehicle Routing Problem with Fixed Costs* – FSMF, no qual considera-se apenas os custos fixos (desconsiderando-se, portanto, os custos variáveis dependentes da roteirização) para uma frota de tamanho ilimitado.

Para além das classificações, os autores Baldacci *et al.* (2008) salientam o fato de não existirem à época formas exatas de resolução para muitas variantes do HVRP, apresentando no trabalho uma revisão de várias heurísticas utilizadas e seus limites inferiores.

Hoff *et al.* (2010) revisaram trabalhos sobre composição de frota e roteirização nos ambientes marítimo e rodoviário, apresentando as principais formulações presentes na literatura, bem como as principais classificações. Irnich *et al.* (2014) apresentam uma breve revisão de publicações sobre o HVRP de 2008 a 2014, contribuindo com a extensa revisão que foi realizada por Baldacci *et al.* (2008), que apresentava os principais resultados até 2007.

Subramanian *et al.* (2012) propõem um algoritmo híbrido composto por uma heurística baseada em busca local iterativa (*Iterated Local Search* – ILS) e uma formulação *Set-Partitioning* (SP) para determinar a melhor composição de frota e um conjunto de rotas que minimizem o custo total, em um problema de frota heterogênea.

Os autores Kramer *et al.* (2016) utilizam uma adaptação da heurística de busca local iterativa para resolver um problema de Problema de Roteamento de Veículos Assimétrico com Frota Heterogênea Limitada (PRVAFHL) em um caso real de uma indústria de bebidas. Mais recentemente Malheiros *et al.* (2021) também utilizam algoritmo híbrido (baseado na meta-heurística ILS e a abordagem SP) para resolver o DARP (*Dial-a-Ride Problem*), onde tanto a demanda quanto a frota de veículos eram heterogêneas. Os DARP são um conjunto de problemas relativos ao transporte de usuários de um ponto de origem para um ponto de destino específicos.

### 3.3 Problemas de Roteirização de Veículos com Janelas de Tempo

Na classe dos problemas de roteirização de veículos com janelas de tempo (*Vehicle Routing Problem with Time Windows – VRPTW*) adiciona-se ao tradicional CVRP o incremento de complexidade devido ao fato de ser necessário respeitar o intervalo de tempo de entrega, que deve obedecer a limites de início e de finalização impostos pelo cliente. Esses períodos são denominados de janelas de tempo. Nestes problemas os custos totais de roteirização e sequenciamento não compreendem apenas os custos de trajeto, mas também os custos da espera, que decorrem da chegada do veículo antes do horário inicial pré-determinado (SOLOMON, 1987). Para Cordeau e Laporte (2001) o VRPTW é obtido a partir do CVRP, impondo-se a condição adicional de que o serviço no cliente deve ser iniciado dentro de um determinado intervalo de tempo e, caso o veículo chegue ao cliente mais cedo, deverá aguardar para iniciar o serviço dentro da janela de tempo pré-determinada. O problema foi estudado por Solomon (1986) considerando a análise de pior caso como forma de abordagem, no qual foram desenvolvidas heurísticas construtivas para a sua resolução.

Liu e Shen (1999) implementam uma heurística de inserção sequencial para o problema FSMVRPTW. Inicialmente, determina-se uma solução factível, através de um método construtivo inspirado na heurística das economias de Clarke e Wright (1964). Posteriormente, é aplicada uma técnica de melhoria da solução, através da mudança da posição dos consumidores nas rotas. Esse trabalho contribui com a geração de 168 instâncias de problemas de FMSVRPTW, que se tornaram referência para todos os problemas dessa classe. Dullaert *et al.* (2002) e Dell’amico *et al.* (2007) também apresentam importantes trabalhos em relação a heurísticas para o FMSVRPTW.

Zhen *et al.* (2020) investigam um problema de roteamento de veículos com múltiplos depósitos e viagens, janelas de tempo e datas de lançamento, formulado como um modelo de PLIM e resolvido por duas estratégias: algoritmo de otimização de enxame de partículas híbrido e um algoritmo genético híbrido. Pan *et al.* (2021) estudam o problema de *Multi-Trip Time-Dependent Vehicle Routing Problem with Time Windows* (MT-TDVRPTW), cuja forma de resolução é a utilização de uma meta-heurística híbrida, aproveitando a busca adaptativa de vizinhança ampla (*Adaptive*

*Large Neighborhood Search* – ALNS) para exploração guiada e a descida de vizinhança variável (*Variable Neighborhood Descent* – VND) para exploração intensiva. Vega *et al.* (2023) estudam o problema de roteamento de veículos com janelas de tempo e demandas estocásticas (*Vehicle Routing Problem with Time Windows and Stochastic Demands* – VRPTWSD), problema é modelado como um programa estocástico de dois estágios com recurso, no qual as rotas são projetadas na primeira etapa e executados na segunda.

### 3.4 Problemas de Roteirização de Veículos com Entregas Fracionadas

Os autores Dror e Trudeau (1989) introduzem na literatura o conceito de entregas fracionadas nos problemas de roteirização de veículos (VRPSD - *Vehicle Routing Problem with Split Deliveries*). Nessa abordagem, a entrega de um determinado cliente pode ser fracionada, sendo realizada por qualquer número de veículos. Apesar dessa relaxação, as características originais do CVRP se mantiveram as mesmas. Para Tavakkoli-Moghaddam *et al.* (2007) as entregas fracionadas nos problemas de roteirização de veículos ocorrem quando a demanda dos clientes pode ser atendida por múltiplos veículos, sendo uma necessidade real em muitos casos práticos, especialmente no transporte urbano.

Os autores Archetti *et al.* (2008) apresentam um estudo no qual são avaliadas as vantagens da possibilidade de fracionamento de cargas em relação ao não fracionamento. Um dos principais benefícios aponta para a diminuição da quantidade do número total de rotas que precisam ser percorridas para realizar todas as entregas. Os autores apontam também que essa redução de rotas pode oferecer benefícios adicionais, como a possibilidade de utilização de veículos de menor capacidade.

Silva *et al.* (2015) conduzem um estudo para o problema de VRPSD para frotas limitadas e ilimitadas, apresentando bons resultados para o problema quando utilizada a meta-heurística de busca local iterativa.

Para construção de um modelo que represente de maneira adequada o funcionamento no mundo real, em vários casos faz-se necessária a combinação de variantes do CVRP. Belfiore e Yoshizaki (2013) apresentam uma extensão do tipo de

problema que considera frota heterogênea, janelas de tempo e entregas fracionadas (FSMVRPTWSD).

Qiu *et al.* (2018) abordam o problema de roteamento de veículos com entregas e coletas fracionadas, fazem a proposta de um modelo matemático e a subsequente resolução do problema através do algoritmo *Tabu Search (TS)*. Bortfeldt e Yi (2020) estudam o problema de roteamento de veículos com entregas fracionadas com três dimensões espaciais relevantes (*The Split Delivery Vehicle Routing Problem with Three-Dimensional Loading Constraints – 3L-SDVRP*), e para resolução são propostos um algoritmo híbrido que de busca local (para o roteamento) e um algoritmo genético e várias heurísticas de construção (para empacotamento). Em seu artigo os autores Ren *et al.* (2023) apresentam o estudo sobre o problema de roteamento de veículos com coletas e entregas fracionadas e simultâneas, e a resolução do problema se dá pela combinação de três heurísticas: uma nova abordagem para a heurística de colônia de formigas (*Ant Colony Optimization – ACO*) para prover a solução inicial, uma busca local (TS) é utilizada para melhorar a busca local e, por fim, utilizam a heurística *Simulated Annealing (SA)* para atualizar os feromônios globais e aumentar a diversidade da população.

### **3.5 Problemas de Roteirização de Veículos com Limitações de Acesso**

Nos problemas de roteirização de veículos com limitações de acesso (*Site-Dependent Vehicle Routing Problem – SDVRP*) cada cliente pode ser acessado apenas por um determinado grupo específico de veículos (IRNICH *et al.*, 2014). Um tipo de veículo (ou apenas determinado veículo) é selecionado para atender um cliente específico e só é permitido a um veículo viajar de um determinado cliente a outro se ambos puderem ser atendidos por esse tipo de veículo. Nessa extensão as características dos CVRP se mantêm preservadas (CHAO *et al.*, 1999). Os autores ainda apresentam uma nova heurística para resolução do SDVRP e a aplicam em 23 instâncias. Cordeau e Laporte (2001) apresentam a heurística baseada na Busca Tabu para a resolução do SDVRPTW - *Site-Dependent Vehicle Routing Problem with Time Windows*. De maneira alternativa, Zare-Reisabadi e Mirmohammadi (2015) apresentam em seu trabalho a aplicação de duas meta-heurísticas, Busca Tabu e

Colônia de Formigas, para a resolução do SDVRPSTW – *Site-Dependent Vehicle Routing Problem with Soft Time Windows*.

Mais recentemente, os autores Vieira *et al.* (2023) estudaram um problema de roteirização de veículos com limitações de acesso, múltiplos depósitos e viagens periódicas *Heterogeneous Site-Dependent Multi-depot Multi-trip Periodic Vehicle Routing Problem* (HSDMDMTPVRP), para o qual propõem duas meta-heurística para resolução: *Unified Hybrid Genetic Search* (UHGS) e *Adaptive Variable Neighborhood Race* (AVNR).

### 3.6 Problemas de Roteirização de Veículos com Restrições Combinadas

Conforme abordado nessa revisão de literatura, existem diversos trabalhos que abarcam o CVRP e suas variantes. Para além disso, o mundo real apresenta tamanha complexidade que, não raras as vezes, podem ser necessárias combinações dessas variantes, de modo a retratar os problemas de maneira mais adequada. Por exemplo, Belfiore (2006) apresenta a combinação FSMVRPTWSD, estudo no qual combina as características do problema de roteirização capacitado, frota heterogênea, janelas de tempo e entregas fracionadas. Como estratégia de resolução, a autora empregou o uso de heurística construtiva em conjunto com a meta-heurística *Scatter Search* (SS). Posteriormente, os autores Belfiore e Yoshizaki (2009) utilizam o mesmo método de resolução para o FSMVRPTWSD, mas nesse trabalho foi realizada a aplicação em um problema real em uma grande empresa do segmento varejista. Souza (2017) realiza um estudo da combinação de variantes que resulta em um problema de roteirização de veículos com frota limitada e heterogênea, janelas de tempo, entregas fracionadas e limitações de acesso (*Site-Dependent Heterogeneous Fixed Fleet Vehicle Routing Problem with Time Windows and Split Deliveries - SDHFFVRPTWSD*).

O Quadro 1 apresenta trabalhos que consideram variantes do CVRP clássico e que possuem ao menos uma característica em comum com o problema abordado neste trabalho.

Quadro 1 – Trabalhos que abordaram variantes do CVRP.

<b>Referência Bibliográfica</b>	<b>Tipo de Problema</b>	<b>Tipo Frota</b>	<b>Quantidade de Veíc.</b>	<b>Metodo de Solução</b>
<b>Golden et al. (1984)</b>	FSMVRP	Heterogênea	Ilimitada	Heurístico
<b>Solomon (1987)</b>	VRPTW	Homogênea	Ilimitada	Heurístico
<b>Dror e Trudeau (1989)</b>	VRPSD	Homogênea	Ilimitada	Heurístico
<b>Dror et al. (1994)</b>	VRPSD	Homogênea	Ilimitada	Exato
<b>Frizzell e Griffin (1995)</b>	SDVRPTW	Heterogênea	Ilimitada	Heurístico
<b>Taillard (1999)</b>	HFFVRP	Heterogênea	Limitada	Heurístico
<b>Chao et al. (1999)</b>	SDVRP	Heterogênea	Ilimitada	Heurístico
<b>Cordeau Laporte (2001)</b>	SDVRPTW	Heterogênea	Limitada	Heurístico
<b>Belfiore e Yoshizaki (2006)</b>	FSMVRPTWSD	Heterogênea	Ilimitada	Heurístico
<b>Oliveira e Santos (2008)</b>	VRPTW	Homogênea	Ilimitada	Exato
<b>Baldacci e Mingozzi (2009)</b>	HFVRP	Heterogênea	Limitada	Exato
<b>Belfiore e Yoshizaki (2009)</b>	FSMVRPTWSD	Heterogênea	Ilimitada	Heurístico
<b>Belfiore e Yoshizaki (2013)</b>	FSMVRPTWSD	Heterogênea	Ilimitada	Heurístico
<b>Silva et al. (2015)</b>	VRPSD	Homogênea	Ilimitada	Heurístico
<b>Zare-Reisabadi e Mirmohammadi (2015)</b>	SDVRPSTW	Heterogênea	Ilimitada	Heurístico
<b>Souza (2017)</b>	SDHFFVRPTWSD	Heterogênea	Limitada	Exato

Fonte: elaborado pelo autor.

Na literatura avaliada, a combinação de variantes abordadas no estudo de Souza (2017) é a que apresenta maior relação com o presente trabalho. O referido estudo consistiu em realizar a aplicação de um método exato para a solução do SDHFFVRPTWSD em um caso real de entregas de uma empresa de serviços postais. O autor realizou o estudo de quatro modelos: HFFVRP, HFFVRPTW, HFFVRPTWSD, SDHFFVRPTWSD, apresentando a modelagem e a resolução de forma gradativa. O modelo foi construído na linguagem GAMS e utilizou o CPLEX para resolução dos problemas.

Apesar de ambos os trabalhos estudarem o SDHFFVRPTWSD, vale reiterar que existem diferenças significativas entre os dois. O problema de Souza (2017) está relacionado a uma empresa de serviços postais, que utiliza frota própria (lidando,

portanto, com custos fixos e variáveis), não há limitações de entregas para os clientes, não há restrições de não-concomitância nas entregas e a resolução é realizada por meio de método exato. Por outro lado, o presente trabalho estuda o problema de uma empresa que produz e distribui cimento ensacado, a frota é totalmente tercerizada (inexistem custos fixos), há a restrição de até duas entregas por cliente, há restrições de não-concomitância e utilizou-se métodos exatos e heurísticos para a resolução.

### 3.7 Classificação dos problemas relacionados

O esforço computacional para a resolução de um problema é um fator importante a ser levado em consideração. Todo problema NP-*hard* pode ser resolvido por busca exaustiva. Infelizmente, quando o tamanho das instâncias aumenta o tempo de execução para busca exaustiva logo se torna proibitivamente grande, mesmo para instâncias de tamanho razoavelmente pequeno (WOEGINGER, 2003).

Lenstra e Rinnooy Kan (1981) apresentam um importante estudo analisando a complexidade dos problemas de roteirização de veículos, no qual concluem que quase todos os VRP são da classe NP-*hard* sendo, portanto, improvável que sua solução possa ser fornecida em tempo polinomial.

Para Solomon e Desrosiers (1988) os problemas de roteirização de veículos com janelas de tempo (VRPTW), por redução, também são classificados NP –, uma vez que os VRP já são classificados dessa forma.

Os problemas de roteirização de veículos com frotas heterogêneas HVRP são todos da classe NP-*hard* uma vez que derivam do também NP-*hard* TSP (BALDACCI; BATARRA; VIGO, 2008). Para Gendreau *et al.* (1999) e Taillard (1999) os FSMVRP e HFFVRP são, respectivamente, problemas também da classe NP-*hard* por serem extensões do VRP.

Para Dror e Trudeau (1990) o problema de roteamento de veículos com entregas fracionadas (VRPSD), apesar de ser uma relaxação do VRP, mantém as



características de difícil tratativa computacional sendo, portanto, da classificado como *NP-hard*.

Em relação ao problema de roteirização de veículos com restrição de acesso (SDVRP), Cordeau e Laporte (2001) o consideram também do tipo *NP-hard*.

Tendo em vista o exposto, o problema de roteirização de veículos com frota fixa, heterogênea, janelas de tempo, entregas fracionadas e limitações de acesso (SDHFFVRPTWSD) também se classifica como *NP-hard*, uma vez que é uma combinação dos problemas roteirização de veículos que assim o são: com frota heterogênea fixa (HFFVRP), problema de roteirização com janelas de tempo (VRPTW), problema de roteirização com entregas fracionadas (VRPSD) e do problema de roteirização com restrição de acesso (SDVRP).

Para a classe de problema *NP-hard* é comum o emprego de heurísticas para fornecimento de boas soluções em tempo computacional razoável (BODIN et al., 1983).

## 4 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Neste capítulo são descritos os elementos e a formulação matemática (PLIM) para o SDHFFVRPTWSD. Essa formulação tem como alicerce a junção de três diferentes abordagens para o CVRP. A modelagem inicial foi baseada no trabalho de Belfiore e Yoshizaki (2013), no qual foi trabalhado o FSMVRPTWSD. As características de frota fixa heterogênea foram baseadas no trabalho sobre o HFFVRP de Taillard (1999). As contribuições para modelagem de limitações de acesso foram inspiradas no trabalho de Zare-Reisabadi e Mirmohammadi (2015), que apresentaram uma modelagem de PLIM e propuseram duas meta-heurísticas (colônia de formigas e busca tabu) para solucionar o SDVRPSTW.

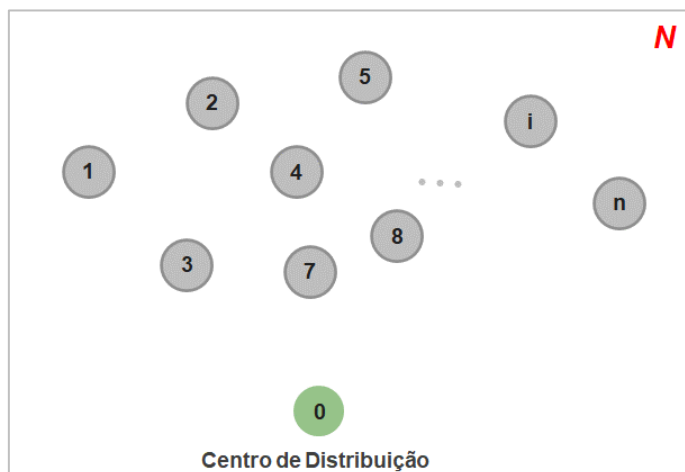
### 4.1 Elementos da Formulação

Para a formulação da modelagem, foi considerado um grafo completo  $G = (N, A)$  no qual os nós são representados pelo conjunto  $N = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ , onde o nó 0 representa o depósito. O conjunto de todos os arcos do grafo é representado por  $A = \{(i, j): 0 \leq i, j \leq n, i \neq j\}$ , onde para cada par de nós  $(i, j)$  existe uma distância  $d_{ij}$  associada a ser percorrida pelo veículo  $v$ .

#### 4.1.1 Clientes

Na Figura 9 são representados os clientes do conjunto  $N = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ . O CD é identificado pelo valor 0. Ao trajeto origem-destino são associados custos de frete, tempo de deslocamento, distância e demanda, todos reais e positivos.

Figura 9 – Representação dos clientes e CD (conjunto  $N$  de nós).



Fonte: elaborado pelo autor.

#### 4.1.2 Veículos

A frota de veículos consiste em um total de  $V$  veículos  $v$  sendo, portanto, de tamanho limitado. A frota é heterogênea. Os veículos podem realizar entregas em mais de um cliente e os clientes podem ser atendidos por mais de um veículo.

#### 4.1.3 Janelas de Tempo

As janelas de tempo são intervalos compreendidos entre o início e o fim do atendimento no nó. O atendimento deve, necessariamente, ocorrer neste intervalo de tempo.

De forma a importar para o modelo as condições de operação que mais se aproximem da realidade, são feitas três considerações em relação ao tempo de serviço no nó:

- a) O tempo de serviço para a operação de carregamento dos veículos no CD se torna desprezível para o modelo, tendo em vista que a operação no CD é realizada de forma bastante ágil por empilhadeira e irrelevante quando

comparados aos demais tempos da operação, fato pelo qual foi desconsiderado na modelagem;

- b) O tempo de serviço, na prática, tem baixa sensibilidade à quantidade de produto que deve ser entregue ao cliente, tendo em vista que as operações de posicionamento dos veículos e preparação para a descarga são mais relevantes;
- c) O tempo de serviço é fixado em 1,5h para qualquer cliente ou quantidade de demanda, que é o valor atual que a Empresa CIME considera em sua roteirização. Esse parâmetro foi adotado de forma a tornar o modelo o mais próximo possível da realidade.

#### 4.1.4 Limitações de Acesso

As limitações de acesso existem devido a características particulares das regiões onde está localizada a demanda. Nesses casos os clientes podem possuir limitações de acessos em relação aos veículos. Para modelar essa restrição foi utilizada uma matriz de restrições  $R_j^v$  que contém os parâmetros que indicam quais clientes podem ser acessados por quais veículos:

$$R_j^v: \begin{cases} 1, & \text{se o cliente } j \text{ pode ser acessado pelo veículo } v; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

No exemplo da Tabela 2 o cliente  $n = 3$  não pode ser acessado pelo veículo  $v = 1$ , já o cliente  $n = 3$  só pode ser acessado pelo veículo  $v = 2$ .

Tabela 2 – Matriz  $R_j^v$  de análise preliminar para as limitações de acesso do veículo  $v$  ao cliente  $j$ .

	veículo 1	veículo 2
cliente 1	1	0
cliente 2	1	0
cliente 3	0	1

Fonte: elaborado pelo autor.

#### 4.1.5 Custo de frete

Os custos de frete advêm dos dados reais do problema. As tarifas foram calculadas dividindo-se o frete efetivamente pago (em reais) pela distância percorrida (em quilômetros). Dessa forma, o custo de frete é dado em reais por quilômetro,  $R\$/km$ , e está também relacionado à capacidade dos veículos: aqueles que conseguem transportar mais carga possuem custos menores, dado ganho de escala na movimentação. A cada veículo  $v$  é atribuído um custo de frete  $cf^v$  em  $R\$/km$ .

#### 4.2 Modelo Proposto

A solução para o SDHFFVRPTWSD neste trabalho visa encontrar o menor custo de transporte para uma roteirização de veículos de frota heterogênea e limitada, atendendo a demanda nas janelas de tempo definidas, utilizando-se os veículos compatíveis com as especificidades dos clientes e com a possibilidade de utilização de entregas fracionadas. Apesar do objetivo primordial ser a redução do custo de transporte, foi identificada a oportunidade de atuar em um segundo nível: minimizar a ociosidade entre as chegadas dos veículos. Esse item está definido na segunda parcela da função objetivo, a ser descrita posteriormente. Em relação aos percursos, o tamanho de cada rota é determinado através do somatório de todos os trechos percorridos. As distâncias foram estimadas com base em suas coordenadas geográficas e são dadas em quilômetros.

Com base nas características do problema descritas anteriormente, apresenta-se a seguir o modelo de PLIM. Inicialmente, são descritos os índices, parâmetros e variáveis do modelo:

**Índices:**

$i, j, p$ : depósito e clientes (nós); (1)

$k, v$ : veículos; (2)

**Parâmetros:**

$n$ : número total de clientes; (1)

$V$ : número total de veículos; (2)

$t_{ij}$  tempo de viagem do nó  $i$  ao nó  $j$ ; (3)

$R_j^v$  matriz que indica se o nó  $j$  pode ser atendido ( $R_j^v = 1$ ) ou não ( $R_j^v = 0$ ) pelo veículo  $v$ ; (4)

$q_j$  demanda no nó  $j$ ; (5)

$a_v$  capacidade do veículo  $v$  em toneladas; (6)

$cf^v$  custo do frete, em R\$/km, do veículo  $v$ ; (7)

$d_{ij}$  distância, em quilômetros, do percurso do nó  $i$  até o nó  $j$ ; (8)

$M, L$  constantes de valor positivo suficientemente grande; (9)

$e_j$  limite inferior para o início do atendimento do nó  $j$ ; (10)

$s_j$  tempo de serviço do nó  $j$ ; (11)

$l_j$  limite superior para o fim do atendimento do nó  $j$ ; (12)

**Variáveis:**

$x_{ij}^v$  1, se o nó  $j$  é atendido após o nó  $i$  pelo veículo  $v$ ; (1)  
0, caso contrário.

$b_j^v$  instante de início de atendimento do nó  $j$  pelo veículo  $v$ ; (2)

$f_j^v$  fração da demanda do nó  $j$  atendida pelo veículo  $v$ ; (3)

$Y_j^{vk}$  1, se o veículo  $v$  antecede o veículo  $k$  no atendimento ao nó  $j$ ; (4)  
0, caso contrário

**Modelo de PLIM:**

$$\min \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{v=1}^V cf^v d_{ij} x_{ij}^v + \left[ \sum_{v=1}^V \sum_{j=0}^n b_j^v / \left( V \sum_{j=1}^n l_j \right) \right] \quad (1)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^n x_{0j}^v \leq 1 \quad v = 1, \dots, V \quad (2)$$

$$\sum_{i=0}^n x_{ij}^v \leq R_j^v \quad j = 1, \dots, n; v = 1, \dots, V \quad (3)$$

$$\sum_{v=1}^V \sum_{i=0}^n x_{ij}^v \leq 2 \quad j = 1, \dots, n \quad (4)$$

$$\sum_{i=0}^n x_{ip}^v - \sum_{j=0}^n x_{pj}^v = 0 \quad p = 0, \dots, n; v = 1, \dots, V \quad (5)$$

$$\sum_{j=1}^n q_j f_j^v \leq a_v \quad v = 1, \dots, V \quad (6)$$

$$\sum_{v=1}^V f_j^v = 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (7)$$

$$\sum_{i=0}^n x_{ij}^v \geq f_j^v \quad j = 1, \dots, n; v = 1, \dots, V \quad (8)$$

$$b_i^v + s_i + t_{ij} - M(1 - x_{ij}^v) \leq b_j^v \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n; v = 1, \dots, V \quad (9)$$

$$b_i^v - t_{0i} + M(1 - x_{0i}^v) \geq e_0 \quad i = 1, \dots, n; v = 1, \dots, V \quad (10)$$

$$b_i^v - t_{0i} - M(1 - x_{0i}^v) \leq l_0 \quad i = 1, \dots, n; v = 1, \dots, V \quad (11)$$

$$b_j^v \geq \sum_{i=0}^n x_{ij}^v e_j \quad j = 1, \dots, n; v = 1, \dots, V \quad (12)$$

$$b_j^v \leq \sum_{i=0}^n x_{ij}^v (l_j - s_j) \quad j = 1, \dots, n; v = 1, \dots, V \quad (13)$$

$$b_j^v \geq b_j^k + s_j - L(1 - Y_j^{kv}) \quad j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, V; v = 1, \dots, V; v \neq k \quad (14)$$

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq v}}^V Y_j^{vk} \leq \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n x_{ij}^v \quad j = 1, \dots, n; v = 1, \dots, V \quad (15)$$

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq v}}^V Y_j^{kv} \leq \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n x_{ij}^v \quad j = 1, \dots, n; v = 1, \dots, V \quad (16)$$

$$Y_j^{vk} + Y_j^{kv} \geq \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n x_{ij}^v + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n x_{ij}^k - 1 \quad j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, V; v = 1, \dots, V; v \neq k \quad (17)$$

$$0 \leq f_j^v \leq 1 \quad j = 1, \dots, n; v = 1, \dots, V \quad (18)$$

$$b_j^v \geq 0, b_j^v \in R \quad j = 0, \dots, n; v = 1, \dots, V \quad (19)$$

$$Y_j^{vk} \in \{0, 1\} \quad j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, V; v = 1, \dots, V; v \neq k \quad (20)$$

$$x_{ij}^v \in \{0, 1\} \quad i = 0, \dots, n; j = 0, \dots, n; v = 1, \dots, V \quad (21)$$

### 4.2.1 Detalhamento da formulação

Função Objetivo (1)

$$\text{minimizar } \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{v=1}^V cf^v d_{ij} x_{ij}^v + \left[ \sum_{v=1}^V \sum_{j=0}^n b_j^v / (V \sum_{j=1}^n l_j) \right]$$

A função objetivo (1) cumpre dois propósitos: minimizar a soma dos custos das viagens entre os nós da rede (primeira parcela) e reduzir o tempo ocioso entre entregas (segunda parcela), para os casos em que houver mais de uma entrega. Na primeira parcela cada veículo  $v$  recebe seu respectivo custo  $cf^v$ , a ser multiplicado pela distância  $d_{ij}$  do percurso  $(i, j)$ , quando houver. O custo total é a soma destes custos. Na segunda parcela da expressão o somatório dos tempos de início do atendimento  $b_j^v$  é dividido pelo somatório dos tempos finais das janelas de atendimento  $l_j$ , ou seja, quanto mais cedo se iniciar o atendimento no(s) cliente(s) menor é esse resultado. Buscando minimizar essa razão  $b_j^v/l_j$  essa parcela busca fazer com que o atendimento seja iniciado o mais rápido possível, mitigando no cliente o impacto da ociosidade entre as chegadas dos veículos, para os casos em que houver mais de uma entrega.

Restrições (2)

$$\sum_{j=1}^n x_{0j}^v \leq 1 \quad v = 1, \dots, V$$

As restrições (2) indicam que os veículos podem ou não deixar o depósito para atendimento da demanda, *i.e.*, nem todos os veículos precisam ser utilizados. Caso haja a saída de depósito,  $x_{0j}^v = 1$ ; caso contrário, seu valor é zero.

Restrições (3)

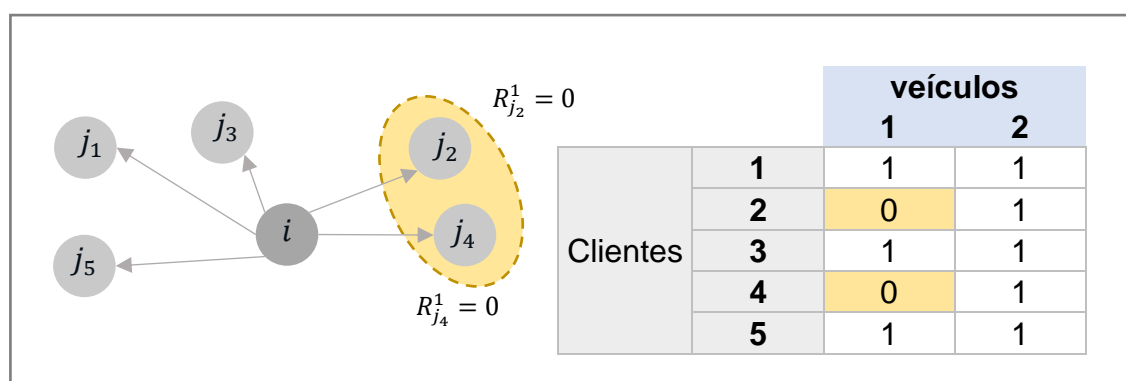
$$\sum_{i=0}^n x_{ij}^v \leq R_j^v \quad j = 1, \dots, n; \quad v = 1, \dots, V$$

A matriz  $R_j^v$  indica se um cliente  $j$  pode ( $R_j^v = 1$ ) ou não ( $R_j^v = 0$ ) ser acessado pelo veículo  $v$ . As restrições (3) referem-se a característica *site-dependent* do problema, no qual determinados nós só podem ser acessados por determinados veículos.



A Figura 10 é uma exemplificação do uso da matriz  $R_j^v$ . Da origem  $i$  saem os dois veículos  $v_1$  e  $v_2$  para os cinco diferentes destinos. Há limitações de acesso para os clientes  $j_2$  e  $j_4$ , que não podem ser acessados por  $v_1$ . As limitações estão hachuradas na cor amarela, tanto na elipse do diagrama à esquerda quanto na representação matricial à direita. Neste caso, o veículo  $v_2$  pode acessar todos os nós, enquanto o veículo  $v_1$  pode acessar apenas os nós  $j_1, j_3$  e  $j_5$ .

Figura 10 – A matriz  $R_j^v$  indica as restrições de acesso dos clientes  $j_2$  e  $j_4$  em relação ao veículo  $v_1$ .



Fonte: elaborado pelo autor.

Restrições (4)

$$\sum_{v=1}^V \sum_{i=0}^n x_{ij}^v \leq 2 \quad j = 1, \dots, n$$

As restrições (4) estabelecem a possibilidade de ocorrência de entregas fracionadas em, no máximo, duas entregas por cliente. Essa é uma característica real, específica do problema em questão. Os clientes são de pequeno porte, muita das vezes localizados em pequenos estabelecimentos no interior dos bairros ou em ruas sem grandes condições de trafegabilidade. Dessa forma, os clientes preferem que a entrega seja realizada no menor número de viagens possível. Em caso de fracionamento, admite-se no máximo duas entregas no total.

Restrições (5)

$$\sum_{i=0}^n x_{ip}^v - \sum_{j=0}^n x_{pj}^v = 0 \quad p = 0, \dots, n; \quad v = 1, \dots, V$$

As restrições (5) garantem a conservação de fluxo no sistema. Cada veículo que chega em um destino  $p$  obrigatoriamente deve deixá-lo.

Restrições (6)

$$\sum_{j=1}^n q_j f_j^v \leq a_v \quad v = 1, \dots, V$$

A capacidade do veículo  $a_v$  deve ser respeitada, conforme garantem as restrições (6). A multiplicação da demanda  $q_j$  por  $f_j^v$  – fração de demanda dos clientes atendidos pelo veículo  $v$  – deve ser menor ou igual à capacidade do veículo  $a_v$ .

Restrições (7)

$$\sum_{v=1}^V f_j^v = 1 \quad j = 1, \dots, n$$

As restrições (7) garantem que a demanda de cada cliente deve ser completamente atendida. Dessa forma, o somatório das frações de cada veículo que atende o nó  $j$  deve ser igual a 100%.

Restrições (8)

$$\sum_{i=0}^n x_{ij}^v \geq f_j^v \quad j = 1, \dots, n; \quad v = 1, \dots, V$$

As restrições (8) garantem que se a demanda do nó  $j$  for total ou parcialmente atendida pelo veículo  $v$ , este veículo deve passar por este nó.

Restrições (9)

$$b_i^v + s_i + t_{ij} - M(1 - x_{ij}^v) \leq b_j^v \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, n; \quad v = 1, \dots, V$$

As restrições (9) impõem que o instante inicial de atendimento do nó  $j$  pelo veículo  $v$  ( $b_j^v$ ) deve ser igual ou superior ao início de atendimento do nó anterior ( $b_i^v$ ), adicionado dos tempos de serviço  $s_i$  e de trajeto  $t_{ij}$ . As restrições cumprem também a função de evitar a formação de *subtours*, sendo a constante  $M$  um número positivo suficientemente grande como, por exemplo  $M = \max(0, l_j + s_i + t_{ij} - e_j)$ .

Restrições (10) e (11)

$$b_j^v - t_{0j} + M(1 - x_{0j}^v) \geq e_0 \quad j = 1, \dots, n; \quad v = 1, \dots, V$$

$$b_j^v - t_{0j} - M(1 - x_{0j}^v) \leq l_0 \quad j = 1, \dots, n; \quad v = 1, \dots, V$$

As restrições (10) e (11) garantem que o início do atendimento no CD esteja condicionado ao horário de abertura e de fechamento do CD.

Restrições (12) e (13)

$$b_j^v \geq \sum_{i=0}^n x_{ij}^v e_j \quad j = 1, \dots, n; \quad v = 1, \dots, V$$

$$b_j^v \leq \sum_{i=0}^n x_{ij}^v (l_j - s_j) \quad j = 1, \dots, n; \quad v = 1, \dots, V$$

As restrições (12) e (13) garantem que o início e o fim do atendimento dos clientes estejam dentro das janelas de tempo determinadas.

Restrições (14)

$$b_j^v \geq b_j^k + s_j - L(1 - Y_j^{kv}) \quad j = 1, \dots, n; \quad k = 1, \dots, V; \quad v = 1, \dots, V; \quad v \neq k$$

As restrições (14) garantem a não-concomitância dos dois veículos  $v$  e  $k$  no nó  $j$ . Caso haja apenas um atendimento em  $j$  a restrição torna-se sem efeito (vide restrições (15) e (16)). Caso haja dois atendimentos, a restrição garante que um veículo irá operar apenas após a finalização do anterior. Cabe ressaltar que para a variável  $Y$  não é possível obter as duas coexistindo simultaneamente ( $Y_j^{vk} = Y_j^{kv} = 1$ ) dadas as relações de precedência indicadas nas restrições (17). A constante é  $L$  um número positivo suficientemente grande, como por exemplo  $L = \max(l_j + s_j)$ .

Restrições (15) e (16)

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq v}}^V Y_j^{vk} \leq \sum_{\substack{i=0 \\ j \neq i}}^n x_{ij}^v \quad j = 1, \dots, n; \quad v = 1, \dots, V$$

$$\sum_{\substack{v=1 \\ v \neq k}}^V Y_j^{kv} \leq \sum_{\substack{i=0 \\ j \neq i}}^n x_{ij}^k \quad j = 1, \dots, n; \quad v = 1, \dots, V$$

As restrições (15) e (16) garantem que apenas poderá haver precedência do veículo  $v$  antes de  $k$  (e vice-versa) no nó  $j$  se o veículo  $v$  (respectivamente,  $k$ ) chega em  $j$ .

Restrições (17)

$$Y_j^{vk} + Y_j^{kv} \geq \sum_{\substack{i=0 \\ j \neq i}}^n x_{ij}^v + \sum_{\substack{i=0 \\ j \neq i}}^n x_{ij}^k - 1 \quad j = 1, \dots, n; \quad k = 1, \dots, V; \quad v = 1, \dots, V; \quad v \neq k$$

A variável  $Y_j^{vk}$  assume valor 1 se o veículo  $v$  antecede  $k$  no atendimento ao nó  $j$  ( $Y_j^{kv}$  opera de modo análogo). Dessa forma, a função das restrições (17) é garantir que exista uma relação de precedência entre os veículos  $v$  e  $k$  se ocorrerem dois atendimentos em  $j$  (limitada em dois atendimentos pelas restrições (4)). Sendo assim, tem-se no máximo duas relações de precedência possíveis:  $v$  antecede  $k$  ou o contrário. Este fato está presente na primeira parcela das restrições (17), representado pelas variáveis  $Y_j^{vk}$  e  $Y_j^{kv}$ .

Por outro lado, nos casos em que houver apenas um veículo em atendimento em  $j$ , como não há relação de precedência as restrições (17) tornam-se sem efeito, conforme segue o exemplo do Quadro 2 :

Quadro 2 – Exemplo de aplicação das restrições (17) quando há apenas um veículo em atendimento no cliente.

$x_{ij}^v$	$x_{ij}^k$	$Y_j^{vk} + Y_j^{kv}$
1	0	$\geq 0$

Ao aplicar os valores acima nas restrições (17), verifica-se que o lado direito da equação assumirá o valor 0, ilustrando a perda de efeito das restrições (17) nesse caso:

$$Y_j^{vk} + Y_j^{kv} \geq \sum_{\substack{i=0 \\ j \neq i}}^n x_{ij}^v + \sum_{\substack{i=0 \\ j \neq i}}^n x_{ij}^k - 1$$

1      0 - 1      = 0

Para os casos em que existam dois atendimentos, a restrição cumpre o seu papel de garantir a precedência entre eles, conforme abordado no Quadro 3 .

Quadro 3 – Exemplo de aplicação das restrições (17) quando há dois atendimentos no cliente.

$x_{ij}^v$	$x_{ij}^k$	$Y_j^{vk} + Y_j^{kv}$
1	1	$\geq 1$

Para o exemplo acima, o lado direito das restrições (17) resultará no valor 1, conforme ilustrado a seguir:

$$Y_j^{vk} + Y_j^{kv} \geq \sum_{\substack{i=0 \\ j \neq i}}^n x_{ij}^v + \sum_{\substack{i=0 \\ j \neq i}}^n x_{ij}^k - 1$$

Sendo assim, a soma das variáveis  $Y_j^{vk}$  e  $Y_j^{kv}$  também deverá ser, no mínimo, igual a 1. Contudo, as restrições (14) garantem que apenas uma das variáveis  $Y_j^{vk}$  e  $Y_j^{kv}$  assumam o valor 1 simultaneamente. Dessa forma, a conjugação das restrições (16) com as restrições (14) garante que exista a relação de precedência entre os veículos  $v$  e  $k$ , quando houver dois atendimentos, quantidade limitada pelas restrições (4).

Restrições (18), (19), (20) e (21)

$$0 \leq f_j^v \leq 1 \quad j = 1, \dots, n; \quad v = 1, \dots, V$$

$$b_j^v \geq 0, b_j^v \in R \quad j = 0, \dots, n; \quad v = 1, \dots, V$$

$$Y_j^{vk} \in \{0,1\} \quad j = 1, \dots, n; \quad k = 1, \dots, V; \quad v = 1, \dots, V; \quad v \neq k$$

$$x_{ij}^v \in \{0,1\} \quad i = 0, \dots, n; \quad j = 0, \dots, n; \quad v = 1, \dots, V; \quad i \neq j$$

As restrições (18), (19), (20) e (21) definem o domínio das variáveis.

### 4.3 Experimentos numéricos

Nesta seção são apresentados os resultados dos experimentos numéricos da aplicação do modelo de PLIM proposto.

Procedendo-se a validação do modelo proposto foram utilizadas duas frentes de testes. A primeira considerou um exemplo-teste e na segunda utilizou-se dados reais da Empresa CIME. Na Subseção 4.3.1 são descritos os detalhes e resultados da utilização do exemplo-teste. Na Subseção 4.3.2 são apresentados e avaliados os resultados da aplicação do modelo nos dados reais da empresa.

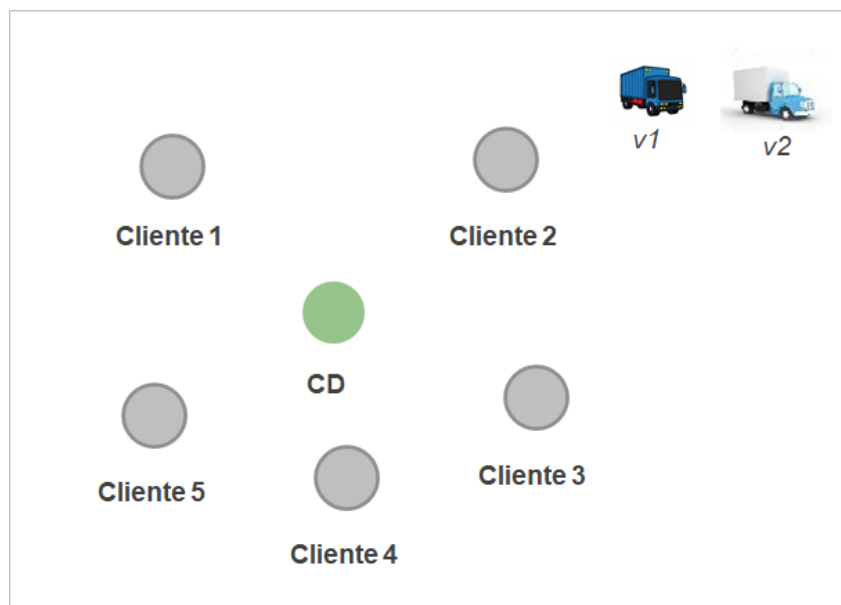
#### 4.3.1 Aplicação ao exemplo-teste

Para a resolução exemplo-teste foi utilizado o *software* IBM ILOG CPLEX *OptimizationStudio* 20.1, em um computador com processador Intel Core i5-3210M, 2.50 GHz e 6 GB de memória *RAM*.

Nesse exemplo cinco clientes são atendidos a partir do CD. Dois veículos realizam o atendimento: o veículo  $v_1$  possui capacidade de 14 toneladas e custo de frete de R\$ 4,54/km, enquanto  $v_2$  possui capacidade de 16 toneladas e custo de frete de R\$ 3,13/km.

A representação pode ser avaliada na Figura 11.

Figura 11 – Representação dos dados do exemplo.



Fonte: elaborado pelo autor.

Para realizar a viagem entre a origem e o destino os veículos percorrem os valores de distância e tempo representados na Tabela 3.

Tabela 3 – Valores de distância (em km) e tempo (em horas) entre os nós, respectivamente.

		Destino (distância em km)					
		0	1	2	3	4	5
Origem	0	-	106	116	047	57	058
	1	106	-	21	117	127	127
	2	116	21	-	119	128	128
	3	47	117	119	-	11	12
	4	57	127	128	11	-	2
	5	58	127	128	12	2	-

		Destino (tempo em horas)					
		0	1	2	3	4	5
Origem	0	-	2,64	2,91	1,17	1,41	1,44
	1	2,64	-	0,54	2,92	3,16	3,16
	2	2,91	0,54	-	2,98	3,20	3,19
	3	1,17	2,92	2,98	-	0,28	0,30
	4	1,41	3,16	3,20	0,28	-	0,04
	5	1,44	3,16	3,19	0,30	0,04	-

Fonte: elaborado pelo autor.

Os cinco clientes possuem valores próprios de demanda e tempos de início, serviço e término. Os tempos de início e término das atividades nos clientes são retratados, respectivamente, por abertura e fechamento. O intervalo de atendimento do cliente é o tempo de serviço. Os dados estão ilustrados na Tabela 4.

Tabela 4 – Valores de demanda e tempos nos clientes.

	Referência	Demanda (ton)	Abertura (hora)	Tempo de Serviço (hora)	Fechamento (hora)
<b>0</b>	CD	0,00	8,0	0,0	18,0
<b>1</b>	cliente 1	18,00	12,0	2,5	18,0
<b>2</b>	cliente 2	0,80	10,0	1,0	18,0
<b>3</b>	cliente 3	0,80	12,0	1,5	14,0
<b>4</b>	cliente 4	6,00	8,0	1,5	12,0
<b>5</b>	cliente 5	4,00	8,0	1,0	13,0

Fonte: elaborado pelo autor.

Adicionalmente, devido às restrições de acesso certos clientes não podem ser acessados por determinados veículos. Esse fato é ilustrado na Tabela 5. Conforme explicado anteriormente, quando é permitido o acesso do veículo ao cliente o elemento da matriz é 1 ( $R_j^v = 1$ ), o elemento é 0 caso contrário.

Tabela 5 – Matriz  $R_j^v$  do exemplo de aplicação.

	veículo 1	veículo 2
cliente 1	1	1
cliente 2	0	1
cliente 3	0	1
cliente 4	1	1
cliente 5	1	0

Fonte: elaborado pelo autor.

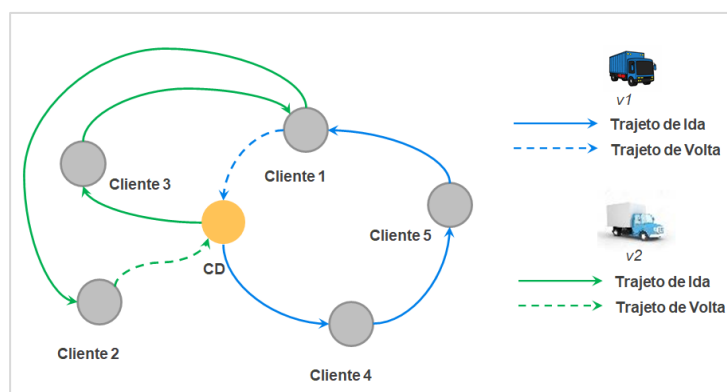
Nesse caso, o veículo 1 não pode acessar os clientes 2 e 3, enquanto o veículo 2 não pode acessar o cliente 5.



Em relação aos valores das constantes suficientemente grandes do problema tem-se  $M = 26$  e  $L = 23$ , cujos cálculos estão explicitados no detalhamento das restrições (9) e (14), respectivamente.

O roteiro percorrido pelos dois veículos está representado na Figura 12. O veículo 1 percorre o roteiro 0-4-5-1-0 e o veículo 2 percorre 0-3-1-2-0. O valor da função objetivo é o custo de transporte de R\$ 2.267,82.

Figura 12 – Resultado do teste do exemplo.



Fonte: elaborado pelo autor.

A resposta do modelo evidencia que as viagens impossibilitadas pelas limitações de acesso (veículo 1 visitar os clientes 2 e 3 e o veículo 2 visitar o cliente 5) retratadas nas restrições (3) são satisfeitas. O único nó visitado mais de uma vez é o cliente 1, recebendo duas visitas, conforme definido nas restrições (4).

A conservação de fluxo do sistema se mantém, dado que nenhum veículo fica no destino, sempre retornando ao CD, como apontam as restrições (5).

As duas últimas colunas da Tabela 6 mostram, respectivamente, a fração de demanda e o volume de atendimento de cada cliente, por veículo. Verifica-se que as capacidades dos veículos foram respeitadas bem como o atendimento à fração de demanda, conforme modelado nas restrições (6) e (7).

Tabela 6 – Resultados do atendimento da fração de demanda.

Veículo	Cliente	Demanda Total	Valor $f$	Demanda Atendida
1	0	0,0	0,0	0,0
1	1	18	0,2	3,6
1	2	0,8	0,0	0,0
1	3	0,8	0,0	0,0
1	4	6,0	1,0	6,0
1	5	4,0	1,0	4,0
2	0	0,0	0,0	0,0
2	1	18,0	0,8	14,4
2	2	0,8	1,0	0,8
2	3	0,8	1,0	0,8
2	4	6,0	0,0	0,0
2	5	4,0	0,0	0,0

Fonte: elaborado pelo autor.

Ainda para os resultados da Tabela 6 percebe-se que sempre há atendimento ao cliente quando há uma fração de volume a ele atribuído. Por exemplo: o cliente 1 é visitado pelo veículo 1, e há atribuição de fração de demanda para o cliente. Por outro lado, o cliente 3 não possui fração de demanda oriunda do veículo 1, e de fato não há essa visita. Esse fato ilustra o funcionamento das restrições (8), que preconizam que existe atendimento caso alguma fração de demanda seja atribuída ao cliente para aquele veículo.

A Tabela 7 traz os resultados dos tempos de serviço no cliente por cada veículo. Tendo em vista que o trajeto do veículo 2 é 0-3-1-2-0, verifica-se que o tempo de início do atendimento do próximo cliente é superior aos tempos de início do atual cliente, somados ainda o atendimento e trajeto, conforme descrito nas restrições (9).

Tabela 7 – Resultados do início do atendimento (em horas) por cliente e veículo.

Veículo	Cliente	Valor
1	1	16,09
1	4	9,41
1	5	10,95
2	1	13,59
2	2	16,63
2	3	9,17

Fonte: elaborado pelo autor.

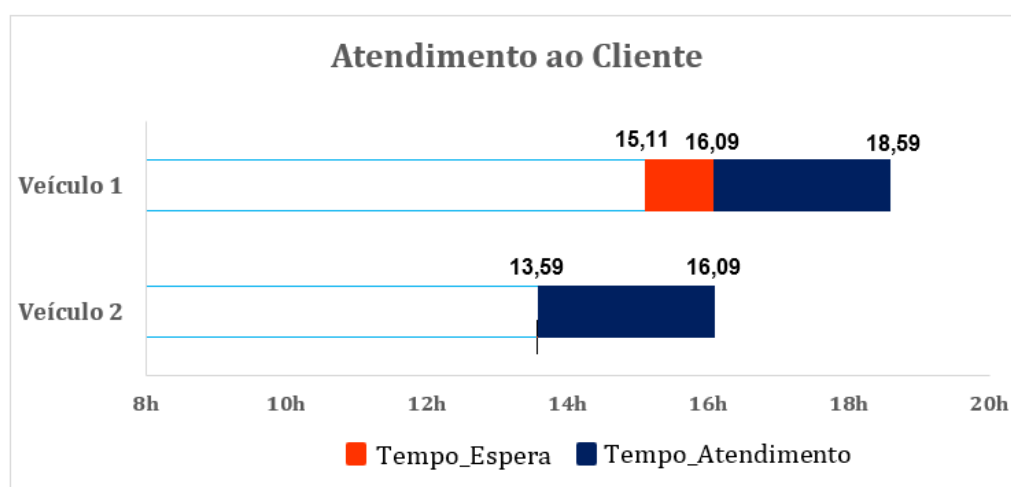
Em relação às janelas de atendimento do CD, toma-se de exemplo o veículo 1. A chegada no cliente 4 se deu às 9,41h: dado que o tempo de trajeto do CD ao cliente é de 1,41h (conforme descrito na Tabela 3) e o início do atendimento no CD se deu às 08h, respeitando o tempo de início do CD no exemplo, apontado na Tabela 4. O último atendimento do veículo 1 foi para o cliente 1, com início às 16,09h. Tendo em vista que o tempo de trajeto do CD até o cliente 1 é de 2,64h, o veículo deixou o CD às 13,45h, estando ainda dentro da janela de atendimento do CD (08h às 18h). O exposto retrata o que foi definido pelas restrições (10) e (11).

Em relação às janelas de atendimento nos clientes descritas nas restrições (12) e (13), verifica-se que, quando há atendimento, as janelas são respeitadas. Os clientes 3, 4 e 5 têm o início de atendimento após às 08h. O cliente 1 que inicia às 12h e o cliente 2 que inicia às 10h possuem o primeiro atendimento às 16,09h e 16,63h, respectivamente, sendo assim todas as janelas de início são respeitadas. Isso é verificado nas janelas de fechamento dos clientes.

Avaliando-se Figura 12 verifica-se que o cliente 1 é o único que recebe duas visitas. Dessa forma, apenas nesse cliente pode haver relação de precedência entre os veículos, conforme apontado pelas restrições (15) e (16).

A Figura 13 ilustra o papel das restrições (14). No instante  $t = 15,11$ h o veículo 1 se encontra pronto para atender o cliente 1. Contudo, o veículo 2 ainda está em operação de descarga.

Figura 13 – Início dos atendimentos no Cliente 1.



Fonte: elaborado pelo autor.

Dessa forma, o veículo 1 aguarda o término da descarga do veículo 2 e só depois inicia seu processo, no instante  $t = 16,09h$ .

#### 4.3.2 Aplicação a dados reais da Empresa CIME

Para a resolução do problema foi utilizado o *software* IBM ILOG CPLEX *OptimizationStudio* 20.1, em um computador com processador Intel Core i5-3210M, 2.50 GHz e 6 GB de memória *RAM*, o mesmo utilizado para resolução do exemplo-teste.

Em relação aos testes e validação, foram avaliados dados reais da operação da Empresa CIME para a construção de 32 instâncias de teste, doravante denominadas instâncias-base. Essa avaliação teve por objetivo tomar um conjunto de instâncias que representasse de forma mais verossimilhante possível a operação real, levando-se em consideração as diferentes possibilidades de tipos de veículo, janelas de tempo, limitações de acesso, quantidade de clientes e de entregas. Nesse conjunto de instâncias há clientes com limitações de acesso a determinados veículos, e as janelas de tempo são consideradas fixas, com intervalo de 1,5h para cada entrega, que é um dado real da Empresa CIME, replicado neste trabalho para considerar as mesmas condições da operação.

Em relação ao desempenho da resolução computacional do modelo, para sua avaliação considerou-se um período máximo de 4 horas de execução do *solver* para cada uma das 32 instâncias. Isso se deve ao fato de que o CD, na prática, não pode aguardar demasiado tempo para efetuar o despacho das cargas. O período máximo de 4 horas possibilita o cálculo de, no mínimo, duas roteirizações por dia, considerando o horário das 08h às 18h, refletindo a realidade da Empresa CIME, que atualmente faz os roteiros conforme demanda. Este intervalo é entendido como “razoável” para que os sistemas possam fornecer soluções. As 32 instâncias selecionadas estão descritas na Tabela 8.

Tabela 8 – Instâncias reais selecionadas.

Instância	Clientes	Nº Veíc. Disponíveis
I.1	5	2
I.2	5	3
I.3	5	2
I.4	5	2
I.5	5	4
I.6	5	3
I.7	5	2
I.8	6	2
I.9	6	4
I.10	6	5
I.11	6	3
I.12	6	4
I.13	6	6
I.14	7	6
I.15	7	3
I.16	7	4
I.17	7	6
I.18	7	5
I.19	7	6
I.20	7	3
I.21	8	2
I.22	8	4
I.23	8	4
I.24	8	2
I.25	8	5
I.26	9	4
I.27	9	4
I.28	10	4
I.29	10	4
I.30	10	5
I.31	15	3
I.32	20	4

Fonte: elaborado pelo autor.

Conforme visto na Seção 2.1, visando atender às novas diretrizes da ANTT sobre precificação de frete em  $R\$/km$  e em linha com o processo de adaptação da Empresa CIME, este trabalho segue o mesmo raciocínio, considerando distância e capacidade do veículo na utilização do cálculo de  $R\$/km$ . Com base nas informações das instâncias reais, foram calculados os valores médios das tarifas  $R\$/km$ , para os três perfis de veículos mencionados anteriormente, de maneira a refletir na tarifa de frete as características de distância e capacidade do veículo. O modelo de PLIM

proposto está adaptado a essa forma de precificação. As tarifas médias estão resumidas na Tabela 9.

Tabela 9 – Tarifa de frete média por perfil de veículo.

Perfil de veículo	Capacidade (toneladas)	Tarifa média R\$/km
VC-TRUCK C SECA 14	14	4,54
VC-TRUCK C SECA 16	16	3,13
VC-BITRUCK C SE 22	22	2,57

Fonte: elaborado pelo autor.

As distâncias entre os pontos da malha foram estimadas com base nos cálculos de distância geodésica. Para fins de ilustração das instâncias, escolhe-se a instância I.30 indicada na Tabela 8, que possui 10 clientes e 5 veículos. Na Tabela 10 são ilustradas as informações das distâncias, em quilômetros, em números inteiros. Os clientes são representados pela abreviação “CL.” e seu respectivo número.

Tabela 10 – Distância entre os pontos da malha para a instância I.30.

	CD	CL.1	CL.2	CL.3	CL.4	CL.5	CL.6	CL.7	CL.8	CL.9	CL.10
CD	0	16	11	11	9	10	22	27	48	72	76
C.1	16	0	5	7	18	6	14	33	40	58	62
C.2	11	5	0	5	15	2	17	29	40	61	66
C.3	11	7	5	0	11	4	12	33	45	65	69
C.4	9	18	15	11	0	14	18	35	55	76	80
C.5	10	6	2	4	14	0	16	29	42	63	67
C.6	22	14	17	12	18	16	0	46	53	65	68
C.7	27	33	29	33	35	29	46	0	35	71	76
C.8	48	40	40	45	55	42	53	35	0	38	44
C.9	72	58	61	65	76	63	65	71	38	0	6
C.10	76	62	66	69	80	67	68	76	44	6	0

Fonte: elaborado pelo autor.

Na Tabela 11 são ilustrados os tempos de percurso entre os pontos da malha, também em relação a instância trinta (I.30). Esses valores foram calculados com base na distância geodésica apresentada na Tabela 10 e considerando a velocidade média de 40 km/h para realização dos trajetos.

Tabela 11 – Tempo de viagem estimado entre os pontos da malha para a instância I.30.

	CD	C.1	C.2	C.3	C.4	C.5	C.6	C.7	C.8	C.9	C.10
CD	0,00	0,40	0,28	0,28	0,23	0,25	0,55	0,68	1,20	1,80	1,90
C.1	0,40	0,00	0,13	0,18	0,45	0,15	0,35	0,83	1,00	1,45	1,55
C.2	0,28	0,13	0,00	0,13	0,38	0,05	0,43	0,73	1,00	1,53	1,65
C.3	0,28	0,18	0,13	0,00	0,28	0,10	0,30	0,83	1,13	1,63	1,73
C.4	0,23	0,45	0,38	0,28	0,00	0,35	0,45	0,88	1,38	1,90	2,00
C.5	0,25	0,15	0,05	0,10	0,35	0,00	0,40	0,73	1,05	1,58	1,68
C.6	0,55	0,35	0,43	0,30	0,45	0,40	0,00	1,15	1,33	1,63	1,70
C.7	0,68	0,83	0,73	0,83	0,88	0,73	1,15	0,00	0,88	1,78	1,90
C.8	1,20	1,00	1,00	1,13	1,38	1,05	1,33	0,88	0,00	0,95	1,10
C.9	1,80	1,45	1,53	1,63	1,90	1,58	1,63	1,78	0,95	0,00	0,15
C.10	1,90	1,55	1,65	1,73	2,00	1,68	1,70	1,90	1,10	0,15	0,00

Fonte: elaborado pelo autor.

As janelas de tempo e o tempo de serviço são particulares de cada cliente. Em geral, o início das operações se dá pela manhã (em torno de 08h) e o encerramento ao fim do dia, por volta das 18h, variando de acordo com as características individuais de cada um. Em termos de limitações de acesso, das 32 instâncias citadas 11 possuem alguma limitação associada.

Os resultados dos testes de validação são resumidos na Tabela 12. Os valores reais de custo foram multiplicados por um fator numérico para manter a confidencialidade dos dados da Empresa CIME. As instâncias estão indicadas na primeira coluna “Inst”. Os números de clientes e veículos (disponíveis, utilizados e ociosos) estão descritos nas colunas dois até a cinco, respectivamente. Os custos reais da empresa são apresentados na coluna “Custo Real” (com o frete real do percurso). O custo apresentado pela execução do modelo está contido na coluna “Custo Modelo”. A coluna “ $(Custo\ Modelo/Custo\ Real) - 1$ ” apresenta percentualmente a razão entre o resultado obtido na solução retornada pelo modelo e o encontrado na realidade. Por fim, na última coluna é apresentado o tempo de execução computacional do modelo, em segundos.

Tabela 12 – Resultados dos testes das instâncias reais.

Inst.	Clientes	Nº veíc. disp.	Nº veíc. util.	Nº veíc. ociosos	Custo Real	Custo Modelo	$\left(\frac{\text{Custo Modelo}}{\text{Custo Real}}\right) - 1$	Tempo Exec. (s)
I.1	5	2	2	0	2.804	2.485	-11%	0,28
I.2	5	3	2	1	4.416	3.241	-27%	0,52
I.3	5	2	2	0	473	446	-6%	0,20
I.4	5	2	2	0	2.586	2.338	-10%	0,19
I.5	5	4	4	0	5.443	4.789	-12%	1,99
I.6	5	3	3	0	3.933	3.133	-20%	0,56
I.7	5	2	2	0	2.795	1.663	-41%	0,39
I.8	6	2	2	0	3.280	2.765	-16%	0,43
I.9	6	4	4	0	3.280	3.259	-1%	8,82
I.10	6	5	5	0	8.254	4.673	-43%	2,25
I.11	6	3	3	0	4.839	2.604	-46%	0,64
I.12	6	4	4	0	6.231	4.983	-20%	47,66
I.13	6	6	6	0	8.835	8.629	-2%	189,97
I.14	7	6	5	1	8.074	7.244	-10%	48,76
I.15	7	3	3	0	2.811	2.346	-17%	11,00
I.16	7	4	4	0	5.742	4.733	-18%	1,47
I.17	7	6	6	0	6.690	4.869	-27%	13,34
I.18	7	5	4	1	6.047	3.544	-41%	4,19
I.19	7	6	6	0	6.360	4.389	-31%	13,76
I.20	7	3	3	0	3.362	3.280	-2%	1,18
I.21	8	2	2	0	2.068	1.453	-30%	0,82
I.22	8	4	4	0	8.004	6.912	-14%	16,20
I.23	8	4	3	1	4.902	2.347	-52%	12,59
I.24	8	2	2	0	2.962	1.768	-40%	1,58
I.25	8	5	5	0	6.256	4.154	-34%	268,14
I.26	9	4	4	0	5.732	5.202	-9%	552,58
I.27	9	4	3	1	5.693	2.698	-53%	3,55
I.28	10	4	4	0	3.380	3.249	-4%	824,11
I.29	10	4	4	0	8.433	5.925	-30%	3.310,02
I.30	10	5	5	0	6.430	4.268	-34%	888,08
I.31*	15	3	3	0	4.492	4.455	-1%	>4h
I.32*	20	4	4	0	7.798	5.825	-25%	>4h
<b>Média</b>					5.075	3.865	<b>-24%</b>	207,69

Fonte: elaborado pelo autor.

Nos resultados apresentados na Tabela 12 estão destacadas duas instâncias: I.31 e I.32. Para esses casos a resolução do modelo não encontrou solução ótima para o problema no período de até 04 horas de execução, premissa inicial dos testes. Os resultados do “ $(\text{Custo Modelo}/\text{Custo Real}) - 1$ ” para as duas últimas instâncias



referem-se à melhor solução retornada pela execução do modelo ao findar das 04 horas.

Nos testes realizados com os valores reais da Empresa CIME verifica-se que a resolução do modelo de PLIM proposto oferece soluções melhores do que encontradas na realidade para todos os casos, inclusive naqueles em que a solução encontrada é a subótima (I.31 e I.32). Um tempo de execução acima de 04 horas é considerado, para a operação da Empresa CIME, muito elevado e impraticável na realidade, uma vez que as decisões de despacho diárias devem ser tomadas em pouco tempo. A configuração das instâncias retratadas na Tabela 12 podem ser consideradas relativamente de pequeno porte quando comparadas às verificadas na realidade. Na prática o CD em questão pode possuir pico de atendimento de 40 clientes atendidos diariamente, valores consideravelmente maiores que os apresentados nas 32 instâncias testadas. Dessa forma verifica-se que para os problemas reais existe a necessidade de buscar técnicas alternativas ao modelo de PLIM para encontrar uma boa solução em tempo computacional razoável. Neste trabalho foram utilizadas técnicas heurísticas para contornar esse fato, tema abordado no Capítulo 5.

## 5 MÉTODOS HEURÍSTICOS

Conforme apresentado anteriormente, o SDHFFVRPTWSD é do tipo NP-*hard*. Neste sentido, apesar de o modelo de PLIM proposto ter apresentado bons resultados na busca da solução ótima para o problema para a maioria das instâncias, isso se aplica àquelas de pequeno porte. No caso do problema em estudo, os resultados da Tabela 12 revelam que o modelo de PLIM retornou solução ótima em até 04 horas apenas para as instâncias de até 10 clientes. Para as duas últimas instâncias I.31 e I.32, que possuem respectivamente 15 e 20 clientes, não foi possível encontrar a solução ótima nesse intervalo de tempo. Estas instâncias podem ser consideradas de pequeno porte quando se compara ao pico de atendimento do CD (que pode chegar a 40 clientes), e ainda mais quando se compara a problemas encontrados na realidade das empresas que possuem grandes redes de distribuição.

Dessa forma, estratégias como a utilização métodos heurísticos são úteis para fornecimento de soluções de boa qualidade (sem garantia de otimalidade) em tempo computacional aceitável, cenário compatível com a realidade de empresas que necessitam fazer roteamento de veículos em malhas complexas, com consideráveis quantidade de veículos, clientes e restrições.

Neste capítulo são apresentados os métodos heurísticos utilizados na resolução deste problema. Na Seção 5.1 encontra-se o contexto e características gerais. Na Seção 5.2 são abordados procedimentos heurísticos para a determinação de soluções, especialmente os construtivos do tipo inserção sequencial, que são utilizados neste trabalho. Na Seção 5.3 faz-se o detalhamento da heurística proposta e suas etapas. Na Seção 5.4 são abordados os critérios utilizados na heurística proposta, fórmulas de cálculo e adaptações. Na Seção 5.5 são apresentados as calibrações de parâmetros e experimentos numéricos.

## 5.1 Considerações gerais

O método heurístico considerado neste trabalho classifica-se como sendo do tipo construtivo e sequencial. Ele é baseado nas heurísticas de inserção sequencial de Dullaert *et al.* (2002) e Manguino e Ronconi (2021). Os primeiros autores inspiraram-se nos métodos de Solomon (1987). Os segundos trabalharam com a adaptação das heurísticas de Dullaert *et al.* (2002) para o FSMVRPTW que trata de custos escalonados.

Antes de prosseguir ao método principal, no procedimento proposto existe a possibilidade de realizar um pré-processamento dos dados. Essa etapa consiste em avaliar se existem veículos disponíveis que possam ser totalmente ocupados com a demanda (parcial ou total) de algum cliente. Caso exista, esse veículo é carregado com a demanda do cliente e executa uma rota exclusiva do CD ao cliente. Define-se “rota exclusiva” quando o veículo faz uma viagem do CD diretamente ao cliente  $j$ , sem paradas intermediárias, carregado apenas com a demanda do cliente  $j$ , sendo esta sua primeira e única entrega.

Dentre as vantagens da utilização do pré-processamento, destacam-se duas: aproveitamento da ocupação dos veículos (diminuição da ociosidade) e, após o pré-processamento, resta para o método principal apenas os clientes com demandas inferiores às capacidades dos demais veículos, diminuindo a quantidade de clientes a serem roteirizados. Detalhes da etapa de pré-processamento são descritos na Subseção 5.2.1. Destaca-se que a utilização do pré-processamento é opcional e que neste trabalho optou-se por utilizar as duas opções, com e sem pré-processamento, para fins de comparação. Após esta etapa (quando utilizada), segue-se para o método principal.

Em linhas gerais, por se tratar de um método de inserção sequencial, cria-se uma rota por vez e a ela são adicionados clientes até a exaustão, desde que respeitadas as restrições do problema. A cada iteração avaliam-se todos os clientes que podem ser adicionados à rota, a existência de veículo que atenda e o benefício gerado de atribuir clientes à essa rota. Isso ocorre até a sua finalização, seja por violação de alguma restrição ou devido aos critérios utilizados na heurística apontarem para a não-inserção.

A escolha do cliente e da sua posição dentro da rota é determinada pelos critérios  $c_1$  e  $c_2$ , que neste trabalho são nomeados por  $C_1$  e  $C_2$ . Conforme abordado por Solomon (1987) e Dullaert *et al.* (2002) o critério  $C_1$  indica o custo adicional de inserção de um cliente na rota. Esse custo pode estar relacionado ao eventual incremento da distância percorrida, à posição, ao aumento no tempo de atendimento total da rota (pois são inseridas novas janelas de tempo ou outras podem sofrer atraso), eventual incremento no preço de frete devido a necessidade de mudança do perfil do veículo, novas limitações de acesso na rota devido à inserção de clientes, dentre outros. Os fatores que mensuram os impactos adicionais na rota devido a inserção do cliente são contabilizados no critério  $C_1$ . Dessa forma, quanto menor  $C_1$ , melhor a possibilidade de inserção.

O critério  $C_2$ , em contrapartida, avalia qual o benefício de se adicionar o cliente à rota, quando comparado à criação de uma rota exclusiva para tal. Este critério realiza uma análise relativa, comparando o custo da inserção na rota com o custo de criar-se uma rota exclusiva para o mesmo cliente (no caso da rota exclusiva, utiliza-se no cálculo o veículo de menor capacidade possível). Sendo assim, tendo em vista que todos os clientes devem ser roteados, quanto maior  $C_2$  mais vantajosa é a inserção do cliente na rota em avaliação (comparado à criação de uma rota exclusiva).

O procedimento heurístico faz o cálculo dos valores de  $C_1$  (avaliando-se todas as posições possíveis) e os valores de  $C_2$  (os clientes com maiores benefícios de inserção) para todos os clientes não-roteados. Avaliando o conceito dos dois critérios e admitindo que há clientes possíveis de serem inseridos,  $C_1$  indica qual melhor posição da rota para inclusão do cliente, enquanto  $C_2$  avalia qual cliente apresenta maior benefício de inserção.

O procedimento sequencial segue com a avaliação de todos os clientes e posições possíveis até que a rota seja exaurida (seja por ineficiência ou seja por critérios  $C_1$  e  $C_2$  desfavoráveis). Quando não há mais possibilidade de inserção, a rota atual é fechada e uma nova rota é criada, recomeçando o procedimento. A rotina é executada até que todos os clientes e veículos disponíveis sejam roteirizados. Caso haja demanda superior à capacidade de transporte, esses clientes restantes ficarão para a próxima rodada de roteirização (seguindo a modalidade FIFO de entrada de pedidos em carteira).

As etapas do método proposto são descritas na Subseção 5.3.1.

## 5.2 Soluções heurísticas para os CVRP

Devido à complexidade dos problemas de roteirização de veículos, a vasta maioria das abordagens empregadas em sua resolução são procedimentos heurísticos (BALDACCI; BATARRA; VIGO, 2008; LAPORTE, 2009). Para Bodin *et al.*, (1983), ao se estudar a classe de problemas NP-*hard* é comum o emprego de heurísticas para fornecimento de boas soluções em tempo computacional razoável.

Clarke and Wright (1964) propuseram a utilização de uma heurística de economias (*Savings Heuristics*) para a resolução do clássico CVRP. Esse estudo foi o marco histórico da utilização desse tipo de procedimento para problemas clássicos de roteirização de veículos. Pela sua flexibilidade e aplicabilidade, essa heurística ainda é utilizada em vários estudos.

Conforme apontado por Manguino (2020), a resolução pode ocorrer de duas formas:

- a) paralela, na qual busca-se a máxima economia possível considerando a totalidade das rotas. A cada iteração unem-se em par as rotas, desde que não seja extrapolada a capacidade do veículo e que gere máxima economia. Nesta forma é possível que rotas diferentes sejam juntadas em paralelo;
- b) sequencial, na qual uma rota por vez é realizada até o seu fim, para após isso iniciar a próxima.

Golden *et al.* (1984) foram os primeiros a abordar os problemas de roteirização de veículos adicionando-se as particularidades de possibilidade de dimensionamento do tamanho e composição da frota (FSMVRP). Nesse trabalho são apresentadas algumas heurísticas baseadas nas heurísticas das economias de Clarke e Wright (1964), observando-se a ociosidade do veículo em diferentes níveis de “otimismo”. São elas CW (Clarke e Wright), CS (*Combined Savings*), OS (*Opportunity Savings*), OOS (*Optimistic Opportunity Savings*), ROS (*Realistic Opportunity Savings*) e ROS- $\gamma$  (*Realistic Opportunity Savings* e a letra “ $\gamma$ ” indica um parâmetro de ajuste de curva) e GT (*Giant Tour*). Para avaliação dos métodos propostos os autores procederam com a geração de vinte instâncias para teste, sendo o melhor desempenho atribuído à heurística ROS.

Vários trabalhos que abordam procedimentos heurísticos para a resolução de variantes derivadas do CVRP, como FSMVRP e HFFVRP, são detalhados no trabalho de Hoff *et al.* (2010).

Para o caso do problema de roteirização envolvendo restrições de janela de tempo, no trabalho de Solomon (1987) são encontradas as primeiras heurísticas para a resolução do VRPTW. São elencados, portanto, quatro procedimentos baseados em heurísticas construtivas:

- a) *Savings Heuristics*: uma extensão da heurística das economias originalmente proposta por Clarke e Wright (1964);
- b) *The Nearest-neighbor heuristic*: uma heurística de vizinho mais próximo, do tipo construtiva sequencial. A cada iteração busca-se encontrar o cliente ainda não visitado que esteja mais próximo ao último adicionado à rota. A busca é feita considerando-se todos os clientes factíveis (ou seja, que respeitem a janela de tempo do roteiro);
- c) *Insertion Heuristics*: na heurística de inserção sequencial uma rota é iniciada utilizando um critério específico: cliente mais distante não-roteirizado ou o cliente não-roteirizado com janela de tempo mais próxima do encerramento. Após a inicialização o método utiliza dois outros critérios  $c_1(i, u, j)$  e  $c_2(i, u, j)$  para inserir um novo cliente  $u$  na rota atual entre os dois clientes adjacentes  $i$  e  $j$ . O critério  $c_1$  está relacionado ao impacto adicional (em termos de distância e de janela de tempo) de se inserir um cliente na rota, portanto,  $c_1$  avalia duas características (distância e janela de tempo) e busca o custo da posição que gera o menor impacto. O critério  $c_2$  está relacionado a economia gerada ao se utilizar uma rota exclusiva para o cliente  $u$  ao invés de inserí-lo na rota atual que contém os clientes  $i$  e  $j$ .
- d) *Time-Oriented Sweep Heuristic*: uma adaptação da heurística de varredura abordada por Gillett e Miller (1974). Na primeira das duas fases desse método agrupa-se clientes observando-se o método de varredura, na segunda fase procede-se à roteirização de um veículo para cada grupo de clientes.

Apresentados os quatro procedimentos abordados por Solomon (1987), é relevante detalhar a heurística de inserção (do tipo sequencial), que é utilizado neste trabalho. Este procedimento possui três abordagens:

- a) A primeira busca maximizar o benefício de incluir um cliente  $u$  em uma rota parcial ao invés de criar uma rota unicamente para ele. A melhor posição

- factível para a inserção de um cliente não-roteado é aquela que minimiza os tempo e distância extras devido à sua inserção;
- b) A segunda objetiva selecionar clientes cujo custo de inserção minimize as distância e tempo totais da rota;
  - c) Na terceira abordagem o aspecto temporal do critério usado para a inserção também é levado em conta, pois considera a urgência de se atender o cliente  $u$ .

A seguir faz-se o detalhamento da abordagem a) citada acima, que é utilizada como uma das bases para o procedimento heurístico proposto neste trabalho. Nesta abordagem o cálculo de  $c_1$  é subdividido em duas parcelas  $c_{1,1}$  e  $c_{1,2}$  e indica o impacto em termos de distância e janela de tempo, respectivamente, ao adicionar o  $u$  entre os clientes adjacentes  $i$  e  $j$ . O  $c_{1,1}$  apresenta o impacto em termos de incremento de distância e de frete e é dado por  $c_{1,1}(i, u, j) = d_{iu} + d_{uj} - \mu d_{ij}$ , onde  $d$  indica as distâncias entre os pontos, e  $\mu$  é um ponderador não-negativo. O  $c_{1,2}$  retrata o impacto nas janelas de tempo (atrasos nas janelas posteriores a  $u$ ) causados pela sua inserção e é dado por  $c_{1,2}(i, u, j) = b_{ju} - b_j$ , onde  $b_{ju} - b_j$  indica o atraso na janela de tempo do cliente  $j$ , calculando-se a diferença entre os novos tempos de início de atendimento  $b_{ju}$  e o tempo de início atual  $b_j$ . O critério  $c_1$  é então calculado da seguinte forma:  $c_1(i, u, j) = \alpha_1 c_{1,1}(i, u, j) + \alpha_2 c_{1,2}(i, u, j)$ , sendo os pesos  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  não-negativos e de soma igual 1, ou seja,  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ .

O critério  $c_2(i, u, j)$  avalia o benefício de se inserir o cliente  $u$  na rota parcial atual comparado a realizar uma rota exclusiva do CD ao cliente  $u$  e é dado por  $c_2(i, u, j) = \lambda d_{0,u} - c_1(i, u, j)$ , sendo  $\lambda$  é um ponderador não-negativo.

Solomon (1987) gera seis grupos de instâncias referência para aplicação dos métodos, tendo em vista que não havia anteriormente problemas teste para o VRPTW. Esses grupos consideram variações na distribuição geográfica e nas janelas de tempo dos clientes. Os autores Tan *et al.* (2001) elencam uma série de procedimentos heurísticos para resolução do VRPTW, incluindo utilização de meta-heurísticas como SA, TS e *Genetic Algorithm* (GA).

Baseados em uma extensão da heurística de inserção sequencial de Solomon (1987), Dullaert *et al.* (2002) realizaram o estudo e implementação de três novas heurísticas para o FSMVRPTW. A contribuição em relação ao trabalho de Solomon (1987) é a adição de um terceiro componente no critério  $c_1$ , inspirado no conceito

economias com oportunidades de Golden *et al.* (1984), mais especificamente em uma das três abordagens: CS, OOS e ROS. No contexto da adaptação feita por Dullaert *et al.* (2002) estas são nomeadas como:

- a) *Adaptated Combined Savings* (ACS): definido como a diferença entre os custos fixos do veículo que é capaz de transportar a carga, antes e depois da inserção do cliente  $u$  na rota;
- b) *Adapted Optimistic Opportunity Savings* (AOOS): conceito estendido da ACS, subtraindo-se o custo fixo do menor veículo capaz de atender a capacidade ociosa remanescente após a inserção do cliente  $u$  na rota;
- c) *Adapted Realistic Opportunity Savings* (AROS): conceito estendido da ACS, subtraindo o custo fixo do maior veículo capaz de atender a capacidade ociosa remanescente após a inserção do cliente  $u$  na rota.

Os métodos de inserção sequencial possuem, em geral, estrutura similar: parte-se de uma rota em aberto e inicializada, realiza-se inserções sequenciais adicionando-se clientes até que a inserção de novos clientes retorne solução infactível, seja devido às restrições do problema ou aos respectivos critérios utilizados apontarem para a não-inserção. Importante ressaltar que enquanto Solomon (1987) requer que a soma dos ponderadores  $\alpha_i$  para o cálculo de  $c_1$  totalizem o valor 1, Dullaert *et al.* (2002) removem essa restrição, permitindo que os componentes dos critérios de inserção sejam ponderados, por exemplo, por dados de custo.

Aplicações bem sucedidas da heurística de inserção em variantes do CVRP podem ser encontradas na literatura. Os autores Ioannou, Kritikos e Prastacos (2001) propuseram uma outra heurística de inserção para resolver o VRPTW. Denominada *IMPACT*, a técnica contém princípios dos procedimentos de inserção de Solomon (1987) e expande a procura prevenindo não-factibilidade (por janela de tempo) de maneira similar a Atkinson (1994). Baseado nos estudos de Golden (1984) e Solomon (1987), Kritikos e Ioannou (2013) propuseram uma heurística de inserção sequencial para o HFVRPTW, em uma abordagem em que é admitida a violação da capacidade máxima, com penalização para os casos em que ocorrer, limitando-se a um valor superior pré-definido. Manguino e Ronconi (2021) fazem a utilização de heurísticas construtivas (do tipo inserção sequencial) para solucionar o FSMVRPTWSC (*Fleet Size and Mix Vehicle Routing Problem with Time Windows and Step Costs*).



Dessa forma, dado o exposto neste capítulo, o presente trabalho endereça a proposição de um modelo de PLIM e um método heurístico para a resolução do problema de roteirização de um caso real de uma indústria de cimentos do Brasil.

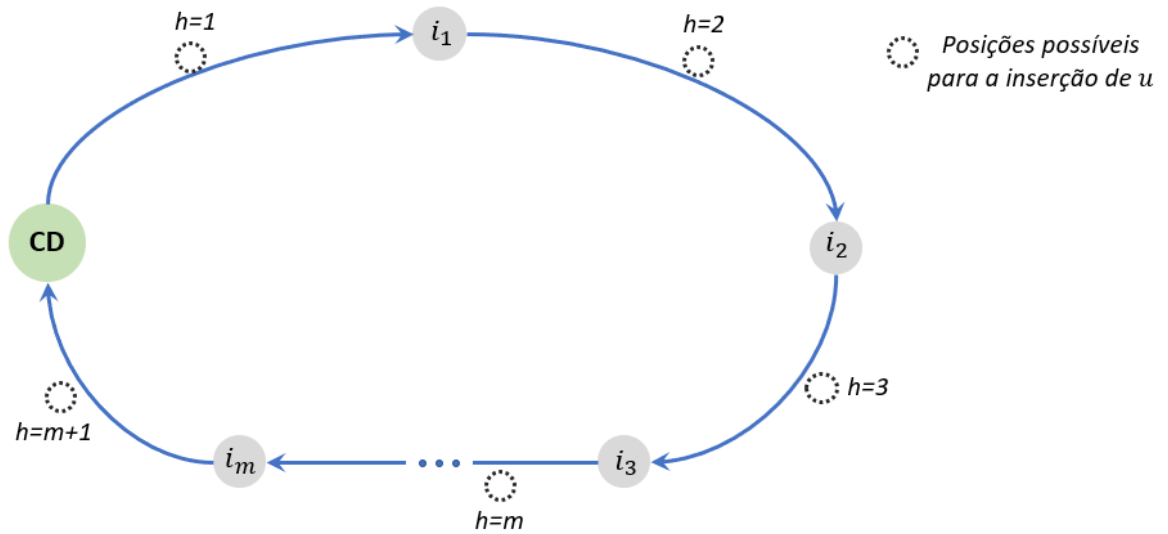
### 5.3 Detalhamento da heurística proposta

Nesta seção são abordados os detalhes do método proposto. Na Subseção 5.3.1 são descritas as etapas do procedimento e o pseudocódigo.

Considere a rota  $o$ , de demanda atual  $Q$  e um cliente não-roteado  $u$  de demanda  $q_u$ . A rota  $o$  é dita “em avaliação” pois se está avaliando a possibilidade da inserção de  $u$ . Ela pode ser uma rota em fase inicial de construção ou já conter outros clientes. Considere ainda um veículo  $v$  de capacidade  $a_v$  pertencente ao conjunto de veículos não-roteados  $S = (1, \dots, V)$ . A heurística avalia se é possível inserir  $u$  na rota  $o$  atribuindo-se a ela um veículo  $v$ . As condições para que um veículo possa ser atribuído à rota são: se a demanda atual da rota em avaliação pode ser atendida por  $v$ , isto é,  $\sum Q + q_u \leq a_v$ , e se todos os clientes da rota em avaliação não possuem limitação de acesso em relação a  $v$ .

Considere a rota  $i_1, i_2, \dots, i_m$ , onde  $i_1$  é o cliente atendido na primeira posição e  $i_m$  o cliente atendido na posição  $m$ . Considere  $h$  o número de posições potenciais para a inserção do cliente não-roteado  $u$  na rota  $o$ , e a existência de  $m + 1$  posições  $h$  ( $h = 1, \dots, m + 1$ ) conforme ilustra a Figura 14.

Figura 14 – Exemplo de rota que ilustra as posições  $m$  e as posições potenciais  $h$  para inserção de  $u$ .



Fonte: elaborado pelo autor.

Suponha que a posição  $h$  recebe  $u$  antes de outro cliente  $i_h$  já presente na rota, então a sequência que segue é  $i_1, \dots, i_{h-1}, u, i_h, \dots, i_{m+1}$ . O início de atendimento mais cedo no cliente  $i_1$  é dado por  $b_{i_1} = \max\{e_0 + t_{0,1}, e_1\}$ , ou seja, o máximo entre a soma dos tempos  $e_0 + t_{0,1}$  (de início do depósito e tempo de trânsito do depósito ao cliente  $i_1$ , respectivamente) e  $e_1$  (tempo de início do cliente  $i_1$ ). Note que não existe tempo de serviço  $s_0$  no CD, motivo pelo qual ele não faz parte desta equação. Para qualquer outro cliente  $i_h$  ( $h = 2, \dots, m + 1$ ), o tempo de início mais cedo é dado por  $b_{i_h} = \max\{b_{i_{h-1}} + s_{i_{h-1}} + t_{i_{h-1},i_h}, e_{i_h}\}$ .

De maneira análoga ao descrito acima, as equações (22) a (25) descrevem as possibilidades de impacto dos inícios de atendimento dos clientes da rota  $o$  devido a inserção de  $u$ :

$$b_{i_z}^{new} = b_{i_z}, \quad \text{para } z = 1, \dots, h - 1 \quad (22)$$

$$b_u(u, h) = \max\{b_{i_{h-1}} + s_{i_{h-1}} + t_{i_{h-1},u}, e_u\} \quad (23)$$

$$b_{i_h}^{new}(u, h) = \max\{b_u + s_u + t_{u,i_h}, e_{i_h}\} \quad (24)$$

$$b_{i_z}^{new}(u, h) = \max\{b_{i_{z-1}} + s_{i_{z-1}} + t_{i_{z-1},i_z}, e_{i_z}\}, \quad \text{para } z = h + 1, \dots, m \quad (25)$$

Para os clientes que estão antes de  $h$  não há impacto no início de atendimento, conforme aponta a equação (21). Para o cliente  $u$  inserido na posição  $h$ , calcula-se

normalmente o início de atendimento (equação (22)). A equação (23) descreve o impacto causado no cliente  $i_h$  dada a inserção de  $u$  e a equação (24) descreve os impactos causados em todas as posições subsequentes a  $i_h$ . A variável de início de atendimento  $b_i$  recebe o identificador  $b_i^{new}$  por avaliar quais seriam os novos tempos de início se a rota  $o$  fosse modificada devido a inserção de  $u$ .

Uma característica do método proposto que vale ser ressaltada é a estratégia utilizada para diminuir a ociosidade entre a primeira e a segunda entregas, similar ao retratado na Função Objetivo (1) da Subseção 4.2.1. Tendo em vista que até duas entregas são possíveis, caso ocorra a segunda entrega o método busca aproximar os intervalos das duas, desde que respeitados os limites das janelas de tempo e a não-sobreposição. A estratégia garante a não-concomitância de dois veículos na mesma janela de tempo e reduz a ociosidade entre as entregas, tornando-as tão próximas quanto possível.

### 5.3.1 Etapas do procedimento

As principais etapas do procedimento são descritas a seguir, entre as Etapas 1 a 6.

**Etapa 1 – Pré-processamento:** avalia-se a existência de veículos  $v$  cuja capacidade seja inferior à demanda individual dos clientes  $j$ , ou seja,  $a_v \leq q_j$ . Caso existam veículos nessa condição, eles são carregados com a demanda de  $j$  de duas formas possíveis: parcialmente se  $a_v < q_j$  ou totalmente se  $a_v = q_j$ . Em seguida o veículo  $v$  percorre uma rota exclusiva até o cliente  $j$ .

Considere o conjunto de clientes  $j = 1, \dots, n$ , que são percorridos no primeiro laço do Algoritmo 1, conforme indicado na linha 3. Considere o conjunto de  $v$  veículos  $S_d = \{V, \dots, 1\}$ , ordenado de maneira decrescente em relação à capacidade  $a_v$ , ou seja:  $a_v \geq \dots a_2 \geq a_1$ . Percorra todo o conjunto de veículos  $S_d$  conforme indicado na linha 4 (segundo laço do Algoritmo 1). A ideia é a seguinte: partindo-se da avaliação de um cliente  $j$ , procura-se pelo maior veículo disponível e sem limitações de acesso (conforme linha 5) que seja totalmente ocupado pela demanda de um cliente. Procura-se pelo maior veículo pois, como indicado na Tabela 9, veículos maiores são

proporcionalmente mais baratos (ganho de escala) e, além disso, ao tomarem-se veículos maiores na etapa de pré-processamento, restaria menos demanda para ser roteirizada posteriormente. Caso exista algum veículo  $v$  de capacidade  $a_v$  que possa ser totalmente ocupado pela demanda de um cliente  $j$ , este veículo é atribuído ao cliente em uma rota exclusiva e a demanda  $q_j$  do cliente é atualizada por  $q_j = q_j - a_v$ . Sendo assim  $v$  é retirado do conjunto dos disponíveis  $S_d$ ; encerra-se essa etapa e retorna-se para o laço inicial, que continua percorrendo o conjunto de clientes  $j$ . A rotina é executada até percorrer-se todos os clientes. Após a execução do pré-processamento, os veículos e clientes remanescentes (os clientes com a demanda atualizada, caso aplicável) seguem para a próxima etapa da heurística.

O Algoritmo 1 apresenta o pseudocódigo para o processo de pré-processamento, que será detalhado a abaixo:

---

**Algoritmo 1** – Pseudocódigo da fase de pré-processamento

---

```

1: Entrada:  $n, q_j$  ( $i = 1, \dots, n$ ),  $V, R_j^v$  ( $j = 0, \dots, n$  e  $v = 1, \dots, V$ ),  $a_v$  ( $v = 1, \dots, V$ )
2: Saída: conjunto de rotas exclusivas roteirizadas.
3: para  $j = 1$  até  $n$ 
4:   para  $v = V$  até  $1$ 
5:     se ( $a_v \leq q_j$  e  $R_j^v = 1$ )
6:        $q_j = q_j - a_v$  (atualiza-se a demanda  $q_j$ )
7:        $S_d = (V, \dots, 1) \setminus \{v\}$  (retira-se  $v$  do conjunto dos disponíveis)
8:        $v = 1$  (com esse valor, o laço da linha 4 é interrompido)
9:     fim se
10:   fim para
11: fim para

```

---

Finalizada a etapa de pré-processamento (quando utilizada), segue-se para a execução da heurística principal.

**Etapa 2 – Início de rota:** inicie uma nova rota com um cliente. Se houver algum cliente que já foi roteirizado, mas ainda reste alguma demanda para ser roteirizada, esse é o cliente escolhido para iniciar a rota. Caso não exista, faz-se um cálculo para inicialização de rota, que contempla duas parcelas: a distância do CD ao cliente e um cálculo que contemplo a limitação de acesso do cliente, conforme descrito a seguir:

- a) a primeira parcela é a distância do CD ao cliente. Esse valor é extraído diretamente da matriz de distâncias. Conforme verificado à esquerda na Tabela 13, por exemplo, a distância do CD ao cliente 2 é de 30km;

- b) a segunda parcela é composta por um cálculo, definido para considerar as limitações de acesso dos clientes no momento da criação da rota. Nesta parcela faz-se a multiplicação da média aritmética de todas as distâncias da matriz de distâncias pela quantidade de limitações de acesso que o cliente possui. As quantidades de limitações de acesso são dadas em número de veículos que não podem acessá-lo. Por exemplo, à direita na Tabela 13 verifica-se que o cliente 1 possui uma limitação de acesso em relação a  $v_2$  dado que  $R_1^2 = 0$ ;

O cálculo é feito para cada cliente e aquele que apresentar maior valor da soma das duas parcelas será o escolhido para iniciar a rota. Portanto, cada cliente tem um resultado específico atribuído a si.

As informações da Tabela 13 são utilizadas para exemplificar o cálculo da inicialização de rota.

Tabela 13 – Exemplo de matriz de distância e de restrições.

	Matriz de distâncias			Matriz de Restrições $R_j^v$	
	CD	Cliente 1	Cliente 2	Restrição v1	Restrição v2
CD	0	20	30	1	1
Cliente 1	20	0	15	1	0
Cliente 2	30	15	0	1	1

Fonte: elaborado pelo autor.

A média aritmética das distâncias dadas na matriz da Tabela 13 é dada por:  $(0+20+30 + 20+0+15 + 30+15+0) / 9 = 14,44\text{km}$ . O cliente 2 (destacado na Tabela 13) é o mais distante do CD, com distância de 30km. Ao avaliar a parte à direita da tabela, percebe-se que o cliente 2 não possui restrição de acesso ( $R_2^1 = R_2^2 = 1$ ), ou seja, considerando a soma da primeira com a segunda parcelas, o cálculo para o cliente 2 é  $30\text{km} + 0 \cdot 14,44\text{km} = 30\text{km}$ . Em contrapartida o cliente 1 possui 01 limitação de acesso ( $R_1^2 = 0$ , destacado na matriz), dessa forma o seu cálculo de inicialização é  $20\text{km} + 1 \cdot 14,44\text{km} = 34,44\text{km}$ . Ou seja, nesse exemplo essa rota hipotética seria iniciada pelo cliente 1, que possui maior valor para o cálculo da inicialização de rota.

Ao se levar em conta a flexibilidade do cliente na inicialização da rota espera-se que clientes menos flexíveis sejam escolhidos primeiro. Dessa forma aumenta-se a chance de que estes clientes sejam roteirizados nas primeiras rodadas, pois a

quantidade de veículos disponíveis é maior, e se diminui as chances de que clientes pouco flexíveis fiquem para o final.

Iniciada a rota, atribui-se a ela o menor veículo disponível que seja capaz de atendê-la.

**Etapa 3 – Avaliação prévia dos próximos candidatos:** para cada cliente não-roteirizado avalia-se a possibilidade de inserção na rota. Essa nova inserção requer que o veículo até então atribuído seja reavaliado devido às possíveis limitações de acesso do novo cliente ou mesmo a demanda total da rota. Caso existam veículos disponíveis que comportem a totalidade da demanda ( $Q + q_u$ ) escolhe-se o menor deles, visando diminuição da ociosidade. Caso não exista esse veículo, é escolhido o maior veículo disponível, pois ele é capaz de carregar a maior quantidade de demanda, diminuindo o resto de demanda a ser roteirizada posteriormente. Dado que o método faz a inserção de um cliente por vez e de maneira sequencial, a eventual demanda remanescente que é roteirizada na próxima rodada é a do cliente em inserção  $u$ .

**Etapa 4 – Cálculo dos critérios  $C_1$  e  $C_2$ :** para os clientes e veículo selecionados na Etapa 3, calcula-se o critério  $C_1$  para cada cliente e posição possível dentro da rota. Em seguida calcula-se o critério  $C_2$  para cada cliente. Caso pelo menos um cliente apresente  $C_2 > 0$ , segue-se para a Etapa 5, considerando aquele veículo escolhido na Etapa 3. Caso nenhum cliente apresente  $C_2 > 0$  não há inserção de novos clientes, rota é encerrada com os clientes atuais já alocados e com o menor veículo disponível que comporte a demanda da rota. Uma nova rota é aberta, retornando então à Etapa 2;

**Etapa 5 – Inserção dos clientes:** escolhe-se o cliente que apresenta o maior valor para  $C_2$  e insere-se na posição indicada (via cálculo e escolha do menor  $C_1$ ). Após a alocação do cliente à rota verifica-se qual foi o veículo atribuído a ela, conforme indicado na Etapa 3. Tendo em vista que o veículo escolhido pode não comportar toda a demanda da rota (deixando de carregar parte da demanda do cliente  $u$ ), existem três situações possíveis: o veículo possuir capacidade maior, igual ou inferior a demanda da rota. Para o caso de a capacidade ser maior que a demanda da rota ( $a_v \geq Q + q_u$ ) o cliente é alocado à rota, retirado do conjunto de disponíveis e retorna-se à Etapa 3. Para o caso de o veículo possuir capacidade igual à demanda da rota ( $a_v = Q + q_u$ ), os cliente e veículo são alocados à rota, retirados do conjunto de

disponíveis, fecha-se a rota e retorna-se à Etapa 2. Caso contrário, se o veículo possuir capacidade inferior à demanda ( $a_v < Q + q_u$ ) ele é alocado à rota e retirado do conjunto dos disponíveis. Como a capacidade é inferior, na rota atual resta demanda sem ser roteirizada, e isso ocorre com cliente em inserção  $u$ . Nesse caso a demanda de  $u$  é atualizada por  $q_u = (Q + q_u) - a_v$ , pois é o que resta de demanda quando se aloca  $u$  à rota a ser executada pelo veículo  $v$ . A demanda remanescente é roteirizada em uma próxima rodada. Conforme indicado na Etapa 2, esse cliente é o prioritário para iniciar a nova rota, garantindo que ele seja roteirizado.

**Etapa 6 – Finalização:** caso não haja mais cliente para ser roteirizado, finaliza-se a rota em aberto com o veículo escolhido até então. Quando não houver mais clientes para serem roteirizados, finaliza-se o procedimento.

Convém reiterar que, para os raros casos em que a demanda for maior que a capacidade dos veículos, os clientes restantes são roteirizados na próxima rodada, seguindo a ordem FIFO de pedidos em carteira.

Os parâmetros e variáveis da heurística são semelhantes aos utilizados no modelo de PLIM, adicionados de alguns outros. Destaca-se a presença de variáveis como  $H(u)$ , que é o conjunto de posições possíveis para o cliente  $u$ ; a de não-concomitância  $NC_j$ , que registra quando ocorre atendimento no cliente  $j$  por um veículo  $v$ , avaliando a situação das duas posições de descarga (se já estão ocupadas ou não há mais espaço para alocação). Essa variável é inicializada com valor nulo e incrementada com valor 1 quando ocorre uma entrega. Na execução do método, ela é verificada continuamente para avaliar a possibilidade de realização de mais entregas no cliente  $j$ . Dessa forma a heurística busca construir uma solução que respeite essa limitação, impedindo que sejam retornadas soluções com mais de duas entregas por cliente.

Por fim, salienta-se a existência dos ponderadores  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma_u$ , que estão detalhados na Subseção 5.4.1. As demais variáveis são autoexplicativas. A heurística proposta é representada no pseudocódigo do Algoritmo 2 a seguir.

---

**Algoritmo 2 – Pseudocódigo da heurística de inserção sequencial**


---

**Input:**  $n, q_j (j = 1, \dots, n), e_j, l_j, s_j (j = 1, \dots, n), d_{ij}, t_{ij} (i, j = 0, \dots, n), V, a_v (v = 1, \dots, V), R_j^v (j = 1, \dots, n \text{ e } v = 1, \dots, V), \alpha_t, \beta_t \in [0, 1] (t = 1, \dots, 4)$  e  $\gamma_u$ .

**Output:** conjunto de rotas  $O$ .

```

1:   Seja  $U$  o conjunto de clientes  $U = \{1, \dots, n\}$ , e  $S$  o conjunto de veículos  $S = \{1, \dots, V\}$  ordenados de forma crescente de capacidade. Faça  $o = \langle i_1 \rangle = \langle u \rangle$ :
2:   se houver algum cliente já roteirizado, mas que ainda exista demanda para ser roteirizada, inicia-se a rota por esse cliente; caso contrário, a rota será
3:   inicializada pelo cliente  $u \in \{1, \dots, n\}$  não-roteado escolhido pelo critério que considera distância e limitação de acesso. Seja  $P_o$  o conjunto de clientes
4:   roteirizados da rota  $o$ . Encontre o menor veículo  $v$  que atenda a rota  $o$ . Faça  $m = 1$  e  $Q = q_u$ . Faça  $U = \{1, \dots, n\} \setminus \{u\}$  ser a lista de clientes
5:   não-roteados e  $O = \emptyset$  ser a lista de rotas fechadas.
6:   para  $i = 1$  até  $n$  faça  $NC_u = 0$ 
7:   enquanto  $U \neq \emptyset$  faça
8:      $C_2^{best} \leftarrow 0$ 
9:     para  $u \in U$  faça:
10:       $H(u) \leftarrow \emptyset$ 
11:      para  $h = 1$  até  $m + 1$  faça:
12:        Calcule as variáveis de tempo  $b_u$  e  $b_{i_1}^{new}(u, h), \dots, b_{i_m}^{new}(u, h)$ , conforme indicado nas equações (21) a (24)
13:        se  $NC_u \leq 1$  e  $b_u \leq l_u$  e  $b_{i_j}^{new} \leq l_{i_j}$  para  $j = 1, \dots, m$  então
14:           $H(u) \leftarrow H(u) \cup \{h\}$ 
15:        se  $H(u) \neq \emptyset$  então
16:          Faça  $aux_1 \leftarrow 0$  e  $aux_2 \leftarrow 0$ 
17:          para  $v = 1$  até  $V$  faça  $v = 1 \dots V$ 
18:            para  $i = 1$  até  $i \leq |P_o| + 1$  faça  $i = 1 \dots |P_o| + 1$ 
19:              se  $a_v \geq Q + q_u$  e  $(R_{j \in P_o \cup \{u\}}^v = 1)$  então  $aux_1 \leftarrow aux_1 + 1$ 
20:            se  $aux_1 = |P_o| + 1$  então
21:              escolha  $v$  corrente como o veículo a ser utilizado na avaliação da inserção de  $u$  na rota  $o$ 
22:               $aux_2 \leftarrow 1$ 
23:              break
24:            se  $aux_2 = 0$  escolha o veículo  $v$  de maior capacidade  $a_v$  e que  $(R_j^v = 1, \forall j \in P_o \cup \{u\})$  para ser utilizado na avaliação da
25:            inserção de  $u$  na rota  $o$ .
26:            Atribua  $v$  escolhido à rota  $o$ .
27:            Calculando  $C_1$ : para cada  $h \in H(u)$  compute  $C_1(u)$  como definido na equação (33) e faça:
28:               $h^*(u) = \operatorname{argmin}_{h \in H(u)} \{ \alpha_1 C_{1,1}(u, h) + \alpha_2 C_{1,2}(u, h) + \alpha_3 C_{1,3}(u, h) - \alpha_4 C_{1,4}(u, h) \}$ 
29:            Calculando  $C_2$ : Encontre o veículo de menor capacidade disponível  $a_v$  capaz de atender a demanda apenas do cliente  $u$ 
30:            (rota exclusiva) e cujo  $R_u^v = 1$ . Compute  $C_2(u)$  como definido na descrição da equação (38).
31:            se  $C_2(u) > C_2^{best}$  então defina  $u_{best} \leftarrow u$  e  $h_{best} \leftarrow h^*(u)$ .
32:   se  $C_2^{best} \neq 0$  então

```



33: Insira  $u_{best}$  na posição  $h_{best}$  da rota  $o$ , i.e, defina  $o = \langle i_1, \dots, i_{m+1} \rangle = \langle i_1, \dots, i_{h_{best}-1}, u, i_{h_{best}+1}, \dots, i_m \rangle$ ,  $P_o = P_o \cup \{u_{best}\}$  e defina

34:  $m \leftarrow m + 1, Q \leftarrow Q + q_{u_{best}}$ .  $NC_u = NC_u + 1$ .

35: **se**  $a_v > Q + q_{u_{best}}$

36:      $U \leftarrow U \setminus \{u_{best}\}$

37: **senão**

38:     **se**  $a_v = Q + q_{u_{best}}$

39:          $U \leftarrow U \setminus \{u_{best}\}$

40:          $S \leftarrow S \setminus \{v\}$

41:     **senão**

42:         **se**  $a_v < Q + q_{u_{best}}$

43:              $q_{u_{best}} = (Q + q_{u_{best}}) - a_v$

44:              $S \leftarrow S \setminus \{v\}$

45: **senão**

46:     Encontre o menor veículo  $v$  tal que  $a_v \geq Q$  e que não possua limitação de acesso para nenhum cliente da rota  $o$ , i.e,  $R_j^v = 1, \forall j \in o$ .

47:     Atribua o veículo  $v$  à rota  $o$ .

48:     Feche a rota  $o$  e a salve no grupo de rotas finalizadas, i.e.,  $O \leftarrow O \cup \{o\}$  e faça  $S \leftarrow S \setminus \{v\}$ .

49:     Crie uma nova rota  $o = \langle i_1 \rangle = \langle u \rangle$  onde  $u \in U$  seja o cliente  $u \in \{1, \dots, n\}$  não-roteado escolhido pelo critério que considera distância e

50:     limitação de acesso, defina  $m = 1, Q = q_u$  e  $U = \{1, \dots, n\} \setminus \{u\}$ .

51:     Encontre o veículo  $v$  tal que  $a_v \geq Q$  e que não possua limitação de acesso para nenhum cliente da rota  $o$ , i.e,  $R_j^v = 1, \forall j \in o$ . Atribua o veículo  $v$  à rota  $o$ .

52:     Feche a rota  $o$  e salve no grupo de rotas finalizadas, i.e.  $O \leftarrow O \cup \{o\}$  e faça  $S \leftarrow S \setminus \{v\}$ .

---

#### 5.4 Detalhamento e definição dos critérios de economia para inserção

Conforme apontado anteriormente na revisão bibliográfica, Dullaert *et al.* (2002), Kritikos e Ioannou (2013) e Manguino e Ronconi (2021) apresentaram adaptações da heurística de Solomon (1987) adicionando parcelas ao cálculo de  $C_1$  e  $C_2$  a fim de adequá-lo melhor às características dos respectivos problemas. Os autores Arnold e Sörensen (2019) chamam atenção para a importância de explorar as características do problema quando se trabalha com aplicação de métodos heurísticos para resolução. Neste sentido o presente trabalho adotou estratégia semelhante: estender os conceitos de cálculo de  $C_1$  e  $C_2$  incorporando novas particularidades que explorem da melhor maneira possível as características do problema trabalhado.

Na heurística proposta neste trabalho cada um dos dois critérios possui quatro parcelas na formulação do seu cálculo, que estão relacionados aos seguintes impactos na inserção do cliente  $u$ :

- a) distâncias (e custos), dadas em termos de  $R\$/km$
- b) janelas de tempo, dadas em horas;
- c) capacidade ociosa remanescente, dada em toneladas;
- d) ponderação dos clientes que possuem mais limitações de acesso, dado em quantidade de veículos que não podem acessá-los.

Nos itens c) e d) supracitados encontram-se propostas de novos termos especialmente desenvolvidos para considerar características particulares do problema abordado. O item c) está relacionado à busca de diminuição da ociosidade do veículo, ou seja, alcançar a maior ocupação possível. O item d) está relacionado à característica específica do problema: priorizar a escolha de um cliente menos flexível, para mitigar o risco de restar para o final clientes com muitas limitações de acesso.

Conforme pode se verificar no detalhamento anterior, as quatro medidas descritas nos itens de a) a d) possuem dimensões diferentes, o que pode comprometer a isonomia do impacto destas no cálculo dos critérios. Dessa forma, para contornar esse fato foi considerado um racional de normalização dos dados para cada caso. Com a utilização desse racional todas as medidas possuirão valores entre 0 e 1,

tornando-se, portanto, comparáveis e passíveis de serem utilizadas no modelo de maneira adequada.

Os critérios  $C_1$  e  $C_2$  propostos neste trabalho são dados pelas equações (26) e (27):

$$C_1(i, u, j) = \alpha_1 c_{1,1}(i, u, j) + \alpha_2 c_{1,2}(i, u, j) + \alpha_3 c_{1,3}(i, u, j) + \alpha_4 c_{1,4}(i, u, j) \quad (26)$$

$$C_2(i, u, j) = [\beta_1 c_{2,1}(i, u, j) + \beta_2 c_{2,2}(i, u, j) + \beta_3 c_{2,3}(i, u, j) + \beta_4 c_{2,4}(i, u, j) - C_1](1 + \gamma_u) \quad (27)$$

Nas equações (26) e (27) todos os ponderadores  $\alpha_1, \dots, \alpha_4; \beta_1, \dots, \beta_4$  e  $\gamma_u$  são não-negativos. Este trabalho segue a mesma abordagem de Dullaert *et al.* (2002) para a soma dos ponderadores  $\alpha_i$ , e remove a condição de que os  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  devam necessariamente totalizar 1.

No critério  $C_1$  parte-se das duas primeiras parcelas propostas por Solomon (1987) e adiciona-se  $c_{1,3}$  e  $c_{1,4}$ . Em  $C_2$  parte-se do mesmo conceito do autor, mas o critério é adaptado às características do problema em questão. Logo abaixo são detalhados os cálculos dos critérios  $C_1$  e  $C_2$ .

A parcela  $c_{1,1}$  indicada na equação (28) mensura o impacto do incremento de distância na rota devido a inserção de  $u$ . Ela é bastante similar à de Solomon (1987), com exceção de três itens: não utilizar o peso  $\mu$ , realizar normalização dos dados e de o resultado ser em termos de frete (em reais) e não em distância.

$$c_{1,1}(i, j, u, v) = \left[ \left( \frac{d_{i,u} + d_{u,j} - d_{i,j}}{d_{i,u} + d_{u,j}} \right) cf^v \right] / (\max cf^v) \quad cf^v \geq 0 \quad (28)$$

Nesse caso o processo de normalização é feito em dois passos. Primeiro normaliza-se a distância, e em seguida o frete. No primeiro passo (entre os parênteses da equação (28)) divide-se o impacto gerado pela inserção pelo total da nova distância após a inserção, cujo resultado fica entre 0 e 1. Logo após esse resultado é multiplicado pela tarifa de frete  $cf^v$  do veículo que foi atribuído à rota (dada em  $R\$/km$ ). Essa transformação traz a medida para frete (em reais) mas pode ser superior a 1 (a depender do resultado). Dessa forma, divide-se novamente esse resultado pela maior tarifa disponível no problema, o que traz novamente a razão para dentro do intervalo entre 0 e 1.

O critério  $c_{1,2}$  avalia o impacto devido aos atrasos nas janelas de tempo dos clientes subsequentes a  $u$  devido a inserção, cujo cálculo é detalhado na equação (28):

$$c_{1,2}(u) = \left( \sum_{j=u}^n b_j^{new} - \sum_{j=u}^n b_j \right) / \left( \sum_{j=u}^n b_j^{new} \right) \quad (29)$$

No numerador da equação (29) calcula a diferença entre os novos tempos de início  $b_j^{new}$  e os tempos originais de início  $b_j$  de todos os clientes da rota, causada pela inserção de  $u$ , conforme apontados nas equações (22 a 25). Como só há impacto nos clientes subsequentes a  $u$ , este é o ponto inicial para o cálculo do somatório.

De modo análogo ao feito para  $c_{1,1}$ , prossegue-se com a normalização do impacto das janelas de tempo. Para tanto, dividiu-se o impacto do atraso causado na rota devido à inserção do cliente  $u$  pelo somatório de todos os novos tempos de início, cujo resultado fica entre 0 e 1.

O critério  $c_{1,3}$  está relacionado à capacidade ociosa remanescente do veículo alocado à rota em avaliação, ou seja, calcula a ociosidade quando  $a_v > (Q + q_u)$ . Sua função é contribuir com utilização dos veículos de forma mais eficiente, com menor ociosidade possível. Além de impacto em dimensionamento de frota, a diminuição da quantidade de veículos necessários gera menos impacto no tráfego, no meio ambiente e torna a operação mais efetiva. O seu cálculo é detalhado na equação (30).

$$c_{1,3}(u, v) = [a_v - (Q + q_u)] / a_v \quad (30)$$

Conforme abordado na Etapa 3, pode haver situações em que a capacidade do veículo atribuído à rota seja inferior à demanda  $a_v < (Q + q_u)$ . Essa é a última alternativa, dado que primeiramente busca-se veículos que possam atender a rota por completo. Nestas situações o resultado de  $c_{1,3}$  é negativo, situação possível e que não prejudica o cálculo de  $C_1$ . A normalização é direta, dividindo-se o numerador pela capacidade total do veículo.

O critério  $c_{1,4}$  está relacionado às características de limitações de acesso específicas deste problema. Nele é calculado um fator que é utilizado como peso para priorizar os clientes menos flexíveis, análogo à ideia utilizada na inicialização de rotas, cujo cálculo é apresentado na equação (31). Como a heurística avalia todos os

veículos disponíveis, é interessante que os clientes menos flexíveis sejam priorizados, para mitigar o risco de restar para o fim clientes com muitas limitações de acesso.

$$c_{1,4}(u) = \left( \sum_{v=1}^V R_u^v - V \right) / (V) \quad (31)$$

Para sua normalização calcula-se a razão entre a quantidade de limitações de acesso do cliente  $u$  e o total de veículos.

Conforme mencionado anteriormente, o critério  $C_1$  avalia o custo adicional de inserção  $u$ . De acordo com equação (26) todas as suas quatro parcelas que compõem  $C_1$  possuem sinal positivo, ou seja, contribuem para o aumento do custo da inserção. Para o caso de  $c_{1,4}$ , quanto mais limitações tiver o cliente  $u$ , menor é  $c_{1,4}$  e conseqüentemente  $C_1$ . Esta é a estratégia para priorizar os clientes menos flexíveis, dado que quanto menos flexível for o cliente, menor é  $c_{1,4}$ .

Um exemplo do cálculo deste critério é ilustrado na Tabela 14. Para o cliente 1, sem limitações, tem-se  $c_{1,4} = 0$ , enquanto para o cliente 2 se  $c_{1,4} = -0,66$ .

Tabela 14 – Exemplo de cálculo do numerador de  $c_{1,4}$ .

	Veíc. 1	veíc. 2	veíc. 3	$\left( \sum_{v=1}^V R_u^v - V \right)$	$V$	$\left( \sum_{v=1}^V R_u^v - V \right) / (V)$
Cliente 1	1	1	1	3-3 = 0	3	0 / 3 = 0
Cliente 2	1	0	0	1-3 = -2	3	-2 / 3 = -0,66

Fonte: elaborado pelo autor.

No caso do cliente 2 a parcela  $c_{1,4}$  contribui para diminuir o custo de inserção  $C_1$ .

O critério  $C_2$  da equação (27) visa avaliar o benefício de se inserir o cliente em uma rota quando comparado à criação de uma rota exclusiva para tal. Os cálculos de  $C_1$  e  $C_2$  são semelhantes, conforme pode ser notado nas equações (26 e 27). Abaixo faz-se o detalhamento as parcelas de  $C_2$ .

A parcela  $c_{2,1}$  é detalhada na equação (32).

$$c_{2,1}(u) = \left[ \left( \frac{d_{0,u} + d_{u,0}}{d_0} \right) cf^v \right] / (\max cf^v) \quad d_o, cf^v \geq 0 \quad (32)$$

O denominador  $d_o$  é a soma de todas as distâncias da rota  $o$ . Nesse caso foram também realizados dois processos de normalização de maneira similar ao que foi feito para  $c_{1,1}$ .

O critério  $c_{2,2}$  descrito na equação (33) está relacionado ao tempo de trânsito da rota exclusiva, incluindo o tempo de serviço  $s_u$ .

$$c_{2,2}(u) = (t_{0,u} + s_u + t_{u,0}) / (l_0 - e_0) \quad (33)$$

No numerador tem-se o tempo total do percurso da rota exclusiva. Para a normalização dividiu-se o tempo total de trajeto pela diferença entre as janelas de fim e de início de atendimento no CD. Esse valor está entre 0 e 1.

O critério  $c_{2,3}$  descrito na equação (34) está relacionado à capacidade ociosa remanescente do veículo, quando realiza a rota exclusiva. A diferença para a parcela  $c_{1,3}$  é que aqui considera-se apenas a demanda  $q_u$  do cliente da rota exclusiva.

$$c_{2,3}(u, v) = (a_v - q_u) / a_v \quad (34)$$

Durante a execução do método, caso tenha se optado pela escolha da Etapa 1 (pré-processamento), todas as demandas  $q_u$  restantes são inferiores às capacidades dos veículos ( $q_u < a_v$ ). Caso não se utilize o pré-processamento, existe a possibilidade de alguma demanda ser superior à capacidade do veículo ( $q_u > a_v$ ), o que torna o resultado de  $c_{2,3}$  negativo. Esta situação é análoga ao descrito para o critério  $c_{1,3}$ : é possível e não prejudica o cálculo de  $C_2$ . A normalização é direta, dividindo-se o numerador pela capacidade total do veículo.

O critério  $c_{2,4}$ , descrito na equação (35), está diretamente relacionado às características específicas do problema e o raciocínio é semelhante ao descrito para  $c_{1,4}$  na equação (30). A diferença em relação ao anterior é que para  $c_{2,4}$  considera-se o menor veículo capaz de atender a demanda  $q_u$  do cliente.

$$c_{2,4}(u) = \left( \sum_{v=1}^V R_u^v - V \right) / (V) \quad (35)$$

A normalização é semelhante à realizada para  $c_{1,4}$ .

Como descrito anteriormente, quanto maior o valor de  $C_2$ , melhor é o resultado da inserção do cliente  $u$  na rota em relação a criação de uma rota exclusiva. Pela

equação (27) verifica-se esse pressuposto:  $C_1$  é subtraído de  $C_2$ , ou seja, quanto menor for  $C_1$  maior será  $C_2$ . Essa estrutura é semelhante à utilizada por Manguino e Ronconi (2021).

Tendo em vista a oportunidade de aproveitar as características do problema para proposição de uma heurística eficiente, na adaptação do cálculo de  $C_2$  utiliza-se ponderador de limitação de acesso  $\gamma_u$ . Este peso não-negativo atua elevando o valor de  $C_2$  de um determinado cliente  $u$ , para priorizar o cliente com maior limitação de acesso. O conceito é similar ao utilizado no cálculo de  $c_{2,4}$ , mas com uma diferença importante: em  $c_{2,4}$  utilizam-se todos os veículos  $V$  o cálculo do critério, enquanto para  $\gamma_u$  é utilizada a quantidade de veículos disponíveis  $|S|$ . O conjunto de veículos disponíveis sem limitações de acesso em relação ao cliente  $u$  será dado por  $S_{R_u^v=1}$ , ou seja,  $|S_{R_u^v=1}|$  é a quantidade de veículos disponíveis sem limitação de acesso a  $u$ . O fator  $\gamma_u$  é aplicado em todo o valor de  $C_2$  e é sempre recalculado com os dados da fase atual da execução da heurística. Em  $\gamma_u$  avalia-se a limitação do cliente  $u$  em relação a todos os veículos disponíveis, atribuindo maior peso quando há maior limitação de acesso. O cálculo do ponderador  $\gamma_u$  é dado pela equação (36).

$$\gamma_u = \frac{(|S| - |S_{R_u^v=1}|)}{|S|} \quad (36)$$

Conforme definido na equação (36), do total de veículos disponíveis  $|S|$  subtraem-se os de veículos disponíveis sem limitação de acesso  $|S_{R_u^v=1}|$ , cujo resultado é dividido pelo total de veículos disponíveis (realizando-se, portanto, a normalização). Para fins de exemplificação, caso não haja limitação de acesso,  $|S| = |S_{R_u^v=1}|$ , o numerador torna-se nulo e portanto  $\gamma_u = 0$ . Caso haja alguma limitação de acesso, tem-se  $|S| > |S_{R_u^v=1}|$ , logo  $\gamma_u > 0$ . Dessa forma o ponderador  $\gamma_u$  torna mais atrativo o cliente  $u$  menos flexível no momento da avaliação.

## 5.5 Experimentos numéricos

Nesta seção são apresentados os experimentos numéricos, resultantes da aplicação da heurística proposta. Na Subseção 5.4.1 encontra-se a estratégia de

calibração dos parâmetros  $\alpha_i$  e  $\beta_i$ , seus métodos e resultados. Na Subseção 5.4.2 são abordados os resultados da aplicação da heurística nas instâncias-base submetidas ao modelo de PLIM (conforme apontado na Tabela 8). Na Subseção 5.4.3 apresenta-se os resultados da aplicação do método em instâncias de porte superior no contexto deste trabalho (acima de vinte clientes).

Para a resolução do problema com a aplicação da heurística proposta foi desenvolvido um código na linguagem C, utilizando o editor DevC++ 5.1.1, em um computador com processador Intel Core i5-3210M, 2.50 GHz e 6 GB de memória RAM, o mesmo utilizado para a resolução do modelo de PLIM pelo *software* IBM ILOG CPLEX *Optimization Studio* 20.1.

### 5.5.1 Calibração de parâmetros

Na utilização de heurísticas, apesar de ganhos em versatilidade, um ponto bastante crucial é a calibração dos parâmetros do método. Na heurística em questão foram considerados oito parâmetros para realização do cálculo de  $C_1$  e  $C_2$ :  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ , todos não-negativos. Para uma calibração de qualidade é conveniente a escolha de um método para definição dos melhores parâmetros possíveis ao invés de escolhas empíricas. Neste trabalho adotou-se a utilização da ferramenta de calibração *irace*, que realiza a configuração automática de parâmetros de heurísticas e é baseado no algoritmo *Iterated Racing*, desenvolvido em R por López-Ibáñez *et al.* (2016).

De acordo com López-Ibáñez *et al.* (2020), com base nas instâncias fornecidas para avaliação, testes estatísticos são utilizados para verificar quais as melhores configurações e, com base nesses resultados, configurações são mantidas ou descartadas e novas são geradas com base em distribuição de probabilidade específica. As configurações são o conjunto de parâmetros de uma instância que serão avaliados. Os testes novamente são realizados e a rotina segue com o objetivo de direcionar o caminho para as melhores configurações, até o atendimento de um critério de parada específico.



Para a calibração, o *irace* toma instâncias de problemas reais e realiza combinações de parâmetros nessas instâncias, avaliando o resultado etapa por etapa. Neste trabalho, para cada um dos oito parâmetros foi disponibilizada uma faixa de valores de 0 até 1, com passo incremental de 0,05, ou seja {0; 0,05; 0,1; 0,15; ...; 1), totalizando 21 valores possíveis para cada parâmetro, totalizando um conjunto total de 21<sup>8</sup> combinações possíveis para cada instância.

Em relação às instâncias utilizadas, dentre as 32 disponíveis (conforme apontado na Tabela 8) é utilizado um subconjunto de 16 instâncias. Esse subconjunto representa satisfatoriamente o conjunto total de instâncias e, adicionalmente, essa estratégia mitiga o risco de *overfitting* dos dados. As escolhas estão apresentadas na Tabela 15.

Tabela 15 – Instâncias utilizadas na execução do pacote *irace*.

Inst.	Clientes	Nº veíc. disp.
<b>I.1</b>	5	2
<b>I.5</b>	5	4
<b>I.6</b>	5	3
<b>I.7</b>	5	2
<b>I.9</b>	6	4
<b>I.11</b>	6	3
<b>I.12</b>	6	4
<b>I.15</b>	7	3
<b>I.17</b>	7	6
<b>I.18</b>	7	5
<b>I.20</b>	7	3
<b>I.22</b>	8	4
<b>I.23</b>	8	4
<b>I.25</b>	8	5
<b>I.27</b>	9	4
<b>I.29</b>	10	4

Fonte: elaborado pelo autor.

Ao submeter as instâncias apontadas na Tabela 15 ao teste do *irace*, obteve-se o seguinte conjunto de valores para os parâmetros:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (0,60; 0,40; 0,70; 1,0) \text{ e}$$

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = (0,90; 0,80; 0,40; 0,80).$$

Inicialmente, verifica-se que todos os parâmetros possuem peso relevante, ou seja, são importantes e impactam na solução final.

Na avaliação dos critérios  $C_1$  verifica-se o relevante peso do fator  $\alpha_4$ . Esse fato evidencia que, para o problema em questão e tendo em vista suas características, a estratégia de priorizar os clientes menos flexíveis tem considerável impacto na determinação de boas soluções. Em segundo lugar destaca-se os pesos dos primeiros fatores de cada grupo,  $\alpha_1$  e  $\beta_1$ , que estão relacionados diretamente ao impacto de distância e frete. No geral seu peso é maior do que aquele apresentado pelo impacto das janelas de tempo,  $\alpha_2$  e  $\beta_2$ . Por fim verifica-se que o fator relacionado a ociosidade do veículo ( $\alpha_3$  em  $C_1$  e  $\beta_3$  em  $C_2$ ) é mais relevante em  $C_1$ . Isso é intuitivo de se imaginar, uma vez que a ociosidade é mais importante em uma rota compartilhada (e em formação) do que em uma rota exclusiva.

### 5.5.2 Aplicação da heurística nas instâncias-base

Conforme abordado na Tabela 12 da Subseção 4.3.2, duas das trinta e duas instâncias de teste do modelo de PLIM não apresentaram solução ótima em tempo computacional razoável. Para a aplicação, validação e avaliação da heurística e dos seus resultados são utilizadas estas mesmas trinta e duas instâncias-base. Conforme abordado no item Etapa 1 da Subseção 5.2.1, a heurística oferece a possibilidade de realizar-se o pré-processamento dos dados no início de sua resolução. Neste trabalho utilizou-se as duas possibilidades para a avaliação dos resultados da heurística. A da heurística sem pré-processamento é denominada  $H_{sp}$  e a com pré-processamento recebe a sigla  $H_{cp}$ .

Os resultados da aplicação da heurística sem o uso do pré-processamento são mostrados na Tabela 16. Vale ressaltar que aqui considerou-se todas as instâncias para avaliação do desempenho da heurística, incluindo aquelas que não apresentaram solução ótima (I.31 e I.32).

Tabela 16 – Resultados da aplicação da  $H_{sp}$ .

Inst.	Custo			Gap%	
	Real	Modelo	$H_{sp}$	$\left(\frac{H_{sp}}{\text{Custo Real}}\right) - 1$	$\left(\frac{H_{sp}}{\text{Custo Modelo}}\right) - 1$
I.1	2.804	2.485	2.485	-11%	0%
I.2	4.416	3.241	4.503	2%	39%
I.3	473	446	446	-6%	0%
I.4	2.586	2.338	3.042	18%	30%
I.5	5.443	4.789	5.734	5%	20%
I.6	3.933	3.133	3.269	-17%	4%
I.7	2.795	1.663	1.674	-40%	1%
I.8	3.280	2.765	3.467	6%	25%
I.9	3.280	3.259	4.325	32%	33%
I.10	8.254	4.673	6.639	-20%	42%
I.11	4.839	2.604	3.174	-34%	22%
I.12	6.231	4.983	5.925	-5%	19%
I.13	8.835	8.629	10.317	17%	20%
I.14	8.074	7.244	9.731	21%	34%
I.15	2.811	2.346	2.772	-1%	18%
I.16	5.742	4.733	5.957	4%	26%
I.17	6.690	4.869	6.538	-2%	34%
I.18	6.047	3.544	4.759	-21%	34%
I.19	6.360	4.389	5.708	-10%	30%
I.20	3.362	3.280	3.348	0%	2%
I.21	2.068	1.453	1.464	-29%	1%
I.22	8.004	6.912	8.751	9%	27%
I.23	4.902	2.347	4.000	-18%	70%
I.24	2.962	1.768	2.081	-30%	18%
I.25	6.256	4.154	5.554	-11%	34%
I.26	5.732	5.202	6.741	18%	30%
I.27	5.693	2.698	5.259	-8%	95%
I.28	3.380	3.249	4.531	34%	39%
I.29	8.433	5.925	6.549	-22%	11%
I.30	6.430	4.268	5.051	-21%	18%
I.31*	4.492	4.455	4.992	11%	12%
I.32*	7.798	5.825	8.852	14%	52%
<b>Média</b>	<b>5.004</b>	<b>3.865</b>	<b>4.926</b>	<b>-2%</b>	<b>27%</b>

Fonte: elaborado pelo autor.

Avaliando-se os resultados da Tabela 16 nota-se que a utilização da  $H_{sp}$  demonstra vantagem em relação ao custo da Empresa CIME, em média 2%. Por outro lado, quando comparado ao custo fornecido pelo modelo de PLIM (valor ótimo para as 30 primeiras instâncias e sub-ótimo para as duas últimas) verifica-se a desvantagem de 27% em média. Os dois resultados são razoáveis do ponto de vista prático. Na comparação com o resultado do modelo de PLIM, a utilização de heurísticas tende a apresentar resultados piores, uma vez que o objetivo é o fornecimento de soluções boas em tempo computacional razoável. Nesse caso apenas nas instâncias I.1 e I.3 os resultados de  $H_{sp}$  foram equivalentes aos do modelo de PLIM, em todas as demais instâncias a heurística apresentou valores mais elevados. Tendo em vista que a  $H_{sp}$  é uma heurística construtiva e de inserção, faz ainda mais sentido resultados piores que o ótimo para as trinta primeiras instâncias.

Em relação ao custo da Empresa CIME a heurística apresentou, em média, ganho em relação ao real. Houve alguns casos em que o resultado foi inferior, em outros foi superior. A  $H_{sp}$  foi capaz de fornecer resposta em intervalo de tempo muito curto, em média 3,89 segundos, cujos detalhes estão apontados no Apêndice A. Apesar de a redução não ser tão pronunciada (2%) quanto ao resultado do modelo de PLIM, enaltece-se o fato de haver economia e de os resultados serem retornados em tempo consideravelmente inferior ao modelo de PLIM e do que seria realizado manualmente por um operador, que pode levar horas construindo a roteirização do dia. Reitera-se o fato de que despesas de frete possuem grande peso na estrutura de custos dos produtos, especialmente aqueles de baixo valor agregado, e a otimização de custo é uma busca incessante.

A heurística  $H_{cp}$  utiliza o pré-processamento (detalhado na Subseção 5.2.1) em sua execução. Isso gera alguns benefícios para o problema em questão. Quando se realiza uma rota exclusiva, a quantidade de demanda a ser roteirizada pela heurística diminui, o que pode otimizar seu desempenho em relação ao tempo de execução. Por outro lado, caso o veículo que foi roteirizado no pré-processamento apresente muitas limitações de acesso em relação aos clientes, sua saída já no início do problema diminui a complexidade da execução do restante da  $H_{cp}$ . Os resultados a utilização da  $H_{cp}$  são apresentados na Tabela 17.

Tabela 17 – Resultados da aplicação da H<sub>cp</sub>.

Inst.	Custo			Gap%	
	Real	Modelo	H <sub>cp</sub>	$\left(\frac{H_{cp}}{\text{Custo Real}}\right) - 1$	$\left(\frac{H_{cp}}{\text{Custo Modelo}}\right) - 1$
I.1	2.804	2.485	2.485	-11%	0%
I.2	4.416	3.241	4.304	-3%	33%
I.3	473	446	446	-6%	0%
I.4	2.586	2.338	3.042	18%	30%
I.5	5.443	4.789	4.972	-9%	4%
I.6	3.933	3.133	3.235	-18%	3%
I.7	2.795	1.663	2.924	5%	76%
I.8	3.280	2.765	3.467	6%	25%
I.9	3.280	3.259	3.661	12%	12%
I.10	8.254	4.673	5.411	-34%	16%
I.11	4.839	2.604	2.604	-46%	0%
I.12	6.231	4.983	4.983	-20%	0%
I.13	8.835	8.629	9.284	5%	8%
I.14	8.074	7.244	9.325	15%	29%
I.15	2.811	2.346	2.847	1%	21%
I.16	5.742	4.733	5.766	0%	22%
I.17	6.690	4.869	5.142	-23%	6%
I.18	6.047	3.544	5.062	-16%	43%
I.19	6.360	4.389	5.038	-21%	15%
I.20	3.362	3.280	3.280	-2%	0%
I.21	2.068	1.453	1.464	-29%	1%
I.22	8.004	6.912	8.751	9%	27%
I.23	4.902	2.347	4.418	-10%	88%
I.24	2.962	1.768	2.081	-30%	18%
I.25	6.256	4.154	4.643	-26%	12%
I.26	5.732	5.202	6.369	11%	22%
I.27	5.693	2.698	4.600	-19%	70%
I.28	3.380	3.249	3.404	1%	5%
I.29	8.433	5.925	6.254	-26%	6%
I.30	6.430	4.268	4.358	-32%	2%
I.31*	4.492	4.455	4.992	11%	12%
I.32*	7.798	5.825	8.852	14%	52%
<b>Média</b>	<b>5.004</b>	<b>3.865</b>	<b>4.536</b>	<b>-9%</b>	<b>17%</b>

Fonte: elaborado pelo autor.

Conforme apontado pela Tabela 17, os resultados de  $H_{cp}$  apresentaram resultados com bom desempenho e consideravelmente superior em relação à  $H_{sp}$ , inclusive no tempo médio de execução, resultando em 3,46 segundos, conforme mostrado no Apêndice A. Na aplicação de  $H_{cp}$  obteve-se cinco valores iguais ao ótimo (instâncias I.1, I.3, I.11, I.12 e I.20), enquanto a anterior apresentou apenas dois. A redução média de  $H_{cp}$  foi de 9% em relação ao custo real da Empresa CIME e o tempo de execução foi levemente inferior à  $H_{sp}$ . Em relação ao ótimo, seu resultado foi 17% pior (enquanto  $H_{sp}$  apresentou o valor de 27%). Dessa forma, a utilização de pré-processamento oferece benefícios em sua utilização a um baixo custo computacional.

### 5.5.3 Experimentos computacionais em instâncias de maior porte

No cotidiano da Empresa CIME, a depender da demanda alocada para determinado dia, a quantidade de clientes pode ser numerosa, com pico de até 40 clientes, como abordado na introdução deste capítulo. Conforme visto anteriormente, dada a natureza NP-*hard* do tipo de problema abordado neste trabalho, quanto maior a quantidade de clientes menores são as chances de o modelo de PLIM proposto obter soluções em tempo computacional razoável. Na prática, há grande dificuldade também por parte do operador para criar roteiros manuais com tantos nós envolvidos.

Para seguir na avaliação da heurística proposta, utilizou-se um conjunto de vinte instâncias de maior porte para realizar a execução do método proposto. Foram tomadas 20 instâncias de considerável maior porte, variando de 25 a 40 clientes. O raciocínio para a escolha das instâncias é similar ao aplicado para as instâncias-base, o de definir cenários que retratem da melhor forma a realidade da Empresa CIME. Neste conjunto de instâncias as janelas de tempo são fixas em 1,5h e para cada instância há alguma limitação de acesso em algum cliente. Os pesos dos fatores  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  foram os mesmos apresentados na Seção 5.3. Na Tabela 18 são apresentados os resultados.

Tabela 18 – Instâncias de porte superior.

Inst.	Clientes	Real	H <sub>sp</sub>	H <sub>cp</sub>	$\left(\frac{H_{sp}}{\text{Custo Real}}\right) - 1$	$\left(\frac{H_{cp}}{\text{Custo Real}}\right) - 1$
I.33	25	6.589	4.438	4.427	-33%	-33%
I.34	25	17.763	14.676	15.406	-17%	-13%
I.35	25	12.674	14.153	14.153	12%	12%
I.36	25	11.729	9.865	9.865	-16%	-16%
I.37	25	10.798	11.918	11.883	10%	10%
I.38	30	24.140	21.225	17.990	-12%	-25%
I.39	30	7.520	9.520	9.066	27%	21%
I.40	30	13.862	14.499	14.555	5%	5%
I.41	30	10.944	12.800	10.927	17%	0%
I.42	30	14.638	16.795	12.469	15%	-15%
I.43	35	13.987	14.753	13.537	5%	- 3%
I.44	35	22.010	18.335	19.037	-17%	-14%
I.45	35	13.018	14.159	13.658	9%	5%
I.46	35	24.575	23.665	20.385	- 4%	-17%
I.47	35	22.001	19.366	17.399	-12%	-21%
I.48	40	15.507	16.648	18.560	7%	20%
I.49	40	22.732	19.943	19.420	-12%	-15%
I.50	40	21.880	18.386	18.160	-16%	-17%
I.51	40	29.896	26.881	26.380	-10%	-12%
I.52	40	24.390	21.519	21.547	-12%	-12%
<b>Média</b>	<b>17.033</b>	<b>16.177</b>	<b>15.441</b>		<b>-3%</b>	<b>-7%</b>

Fonte: elaborado pelo autor.

As instâncias maiores retratadas na Tabela 18 possuem quantidade de clientes consideravelmente superior às anteriores. Mesmo para essas instâncias a heurística de inserção sequencial proposta neste trabalho retornou soluções razoáveis em pouco tempo: em média 15,6 segundos para H<sub>cp</sub> e 17,3 segundos para H<sub>sp</sub>, conforme Anexo B. Em relação ao desempenho em termos de custo, a utilização da heurística sem pré-processamento H<sub>sp</sub> retornou uma economia média de 3% em relação ao custo real, em linha com o avaliado na Tabela 16, quando avaliadas as trinta e duas instâncias submetidas à execução do modelo de PLIM. A heurística H<sub>cp</sub> apresentou melhora de 7%, em média, em relação ao custo da Empresa CIME. Esse valor é menos pronunciado do que o que foi retornado na aplicação nas instâncias-base (de economia de 9%, apontado na Tabela 16), mas ainda assim indica uma melhora considerável em relação ao custo real.

Ao se comparar as duas heurísticas, com e sem o pré-processamento, verifica-se que a  $H_{cp}$  apresenta 13 instâncias com valores melhores, 2 com valores equivalentes e 5 instâncias com valores piores que  $H_{sp}$ , em linha com o desempenho geral das duas heurísticas em relação ao custo real, onde a  $H_{cp}$  obteve resultados melhores.

Apesar de ser intuitivo que a heurística com pré-processamento sempre forneça resultados melhores, não há a garantia de que isso ocorra, pois irá depender das características do problema como clientes, veículos e os custos envolvidos. A título de ilustração: se existir um conjunto de clientes muito próximos ao CD e com demanda capaz de ocupar totalmente o veículo, é possível que atender esse conjunto com um veículo (em uma rota compartilhada) seja mais vantajoso do que atender apenas um cliente que esteja muito distante (rota exclusiva), dado que o custo é dado em  $R\$/km$ . Nesse exemplo hipotético, seria intuitivo imaginar que uma rota exclusiva fosse a melhor solução (saída do pré-processamento), mas do ponto de vista do custo pode não necessariamente ser a melhor solução.

Em relação ao tempo de processamento das heurísticas ressalta-se novamente que a solução foi retornada, em média, em menos de 18 segundos de execução. Na prática, é bastante improvável que um operador consiga construir um roteiro para essa quantidade de clientes (entre 25 e 40) em um intervalo de tempo tão curto. Verifica-se então uma solução de rápida obtenção, de razoável qualidade em tempo computacional bem baixo.



## 6 CONCLUSÕES

Este trabalho abordou o problema de roteirização de veículos de um centro de distribuição para seus vários clientes – em sua maioria, de pequeno porte –, no contexto de uma indústria cimenteira. Faz-se necessário ressaltar que o cimento é uma *commodity* e possui valor agregado muito baixo, sendo a tarifa de frete um dos principais custos do produto. Dado o exposto, a formação de lucro nas cimenteiras requer, necessariamente, a movimentação de grandes volumes, de forma eficiente e com custos tão baixos quanto possível. Avaliando as características e particularidades do problema em questão é possível compreender a complexidade de um problema de roteirização real do tipo NP-*hard*, agravado pelos itens específicos constantes neste problema, tais como: forte preocupação com os custos, limitação de acesso aos clientes, veículos de perfil heterogêneo, restrições de janelas de tempo, possibilidade de fracionamento das entregas, quantidade máxima de duas entregas ou mesmo a impossibilidade de o cliente receber mais de um veículo de forma simultânea. Estes complicadores, aliados a uma rede de distribuição com grande quantidade potencial de clientes (o que é natural nesse tipo de indústria), torna ainda mais desafiadora a proposição de soluções que busquem minimizar o custo de transporte através de métodos matemáticos, ainda mais quando o tempo computacional para fornecimento de resposta é um fator decisivo.

Um modelo de PLIM foi desenvolvido neste trabalho com o objetivo de encontrar a solução ótima para a minimização do custo de transporte, observando-se todas as restrições práticas que o problema real apresenta. Por meio de um *solver* de propósito geral, o modelo foi aplicado e testado em 32 instâncias reais, com o objetivo de avaliação e validação, cujos resultados são satisfatórios. Para 32 instâncias submetidas a execução do modelo de PLIM, todas as restrições foram respeitadas e o resultado fornece soluções com redução média de 24% na comparação do custo apresentado pela resolução do modelo *versus* o custo real da empresa, considerando tanto os 30 resultados ótimos quanto os 2 sub-ótimos retornados pelo modelo.

Neste trabalho, nas instâncias de pequeno porte observa-se que as soluções fornecidas pela resolução do modelo foram encontradas em tempo computacional relativamente baixo e com resultados consistentemente melhores dos que os verificados na prática. Contudo, conforme cresce a quantidade de clientes (como no

caso das instâncias I.31 e I.32 da Tabela 8) não foi possível encontrar a solução ótima dentro do período de 04 horas. Na prática é pouco provável que se encontre soluções manuais ou ótimas (pela resolução do modelo de PLIM) dentro de 04 horas de execução quando se considera instâncias de 15 clientes ou superiores. Isto mostra a dificuldade prática de se tratar problemas do tipo NP-*hard* e evidencia a oportunidade da criação de abordagens que forneçam boas soluções em tempo computacional aceitável.

A aplicação de uma técnica de otimização discreta exata como o modelo de PLIM e sua resolução em um *software* computacional é conveniente pois, além de revelar a solução ótima para instâncias de problemas de tamanho razoável, gera uma base de comparação para demais técnicas e modelos (como por exemplo métodos heurísticos), uma vez que existe uma base para avaliar a qualidade das soluções encontradas.

Para contornar a limitação de que soluções ótimas podem levar muito tempo para serem encontradas, neste trabalho adotou-se uma técnica heurística para fornecimento de boas soluções em tempo aceitável. O método escolhido é uma heurística de inserção, do tipo sequencial, no qual elementos são adicionados à rota em avaliação até não ser mais possível adição de outro cliente, momento no qual a rota é finalizada e, caso restem clientes e veículos disponíveis, outra rota é iniciada, repetindo-se o procedimento até a roteirização de todos os clientes para todos os veículos disponíveis. Esse método é conveniente devido à relativa facilidade de implementação e o custo computacional de resolução é baixo. Em um problema complexo como o SDHFFVRPTWSD, a heurística proposta foi capaz de resolver todas as 32 instâncias-base em tempo médio de 3,5 segundos, inclusive para as duas instâncias que não retornaram solução em tempo de até 04 horas utilizando-se o *solver* CPLEX para a resolução do modelo de PLIM proposto. Com o intuito de expandir-se a análise da técnica proposta, a heurística foi testada em outras 20 instâncias de ordem superior, retornando soluções em tempo médio inferior a 18 segundos, conforme indicado na Tabela 18.

Os resultados dos dois grupos de instâncias revelam a grande versatilidade e aplicabilidade do método proposto, dado que os resultados médios foram melhores que os reais e o tempo de execução é consideravelmente menor do que a construção de roteiros de forma manual, que pode demorar horas a depender da quantidade de clientes e veículos.

Na construção da heurística as características do problema em questão foram densamente exploradas, seja pela formatação da etapa de pré-processamento (que pode ser utilizada ou não, sendo opcional), pela estratégia de inicialização de rotas ou pelos fatores dos critérios  $C_1$  e  $C_2$ . Os resultados satisfatórios em relativo baixo tempo comprovam que privilegiar as questões específicas do problema auxilia no fornecimento de boas e rápidas soluções.

Os dois grupos de instâncias testadas derivam diretamente da operação diária da Empresa CIME. Vale destacar dois itens em específico: a limitação de até duas entregas e a definição de uma janela de atendimento de 1,5h para todos os clientes, independentemente do seu porte ou demanda. Considera-se até duas entregas devido ao perfil de cliente atendido pelo CD: são lojas de pequeno porte, com poucos funcionários, localizadas em regiões de intensa circulação e com poucas opções de estacionamento. Não raras as vezes as vagas para estacionar são compartilhadas por todos que frequentam a loja: funcionários, clientes e fornecedores. Dessa forma, duas entregas já comprometeriam 3 horas o local de estacionamento, motivo pelo qual o cliente solicita limitação da quantidade de entregas. A definição de 1,5h de tempo de serviço é um dado do problema, considerado fixo para todas as vendas. Apesar de neste problema ter sido mantida a mesma premissa, tanto o modelo de PLIM quanto a heurística propostos possibilitam a adoção de tempos de serviço específicos para cada cliente.

A construção de um método que retorne boas soluções em tempo computacional baixo é de grande valor para o dia a dia de uma empresa com volumes consideráveis. Dessa forma, uma das possibilidades para trabalhos futuros é o desenvolvimento de uma interface amigável para essa ferramenta, com o código proposto subjacente a ela, com o objetivo de ser utilizada no dia a dia pelos operadores da empresa e possibilidade de expansão para problemas e maior porte. Dado que a heurística proposta é de construção de solução, uma outra possibilidade posterior seria a utilização de meta-heurísticas, partindo da solução construída inicialmente pelo procedimento proposto, e utilizando heurística de melhoria para refinar ainda mais as soluções encontradas, ainda mais quando há a possibilidade de aplicação em problemas maiores.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARCHETTI, C.; SAVELSBERGH, M.W.P.; SPERANZA, M.G. To split or not to split: that is the question. **Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review**, v.44, p. 114-123, 2008.

ARNOLD, F.; SÖRENSEN, K. What makes a vrp solution good? the generation of problem-specific knowledge for heuristics. **Computers & Operations Research**, v.106, p. 280-288, 2019.

ATKINSON, J.B. A greedy look-ahead heuristic for combinatorial optimisation: an application to vehicle scheduling with time windows. **Journal of the Operational Research Society**, v.45, p. 673–684, 1994.

BALDACCI, R.; BATARRA, M.; VIGO, D. Routing a heterogeneous fleet of vehicles. In **The vehicle routing problem: latest advances and new challenges**. GOLDEN, B.L.; RAGHAVAN S.; WASIL, E. A. (Eds), Operation Research/Computer Science Interfaces Series, 2008.p.3-27.

BALDACCI, R.; MINGOZZI, A. A unified exact method for solving different classes of vehicle routing problems. **Mathematical Programming**, v.120, n. 2, p. 347-380, 2009.

BALLOU, R. H. **Gerenciamento da Cadeia de Suprimentos / Logística Empresarial**. São Paulo: Bookman, 2006.

BELFIORE, P.P. **Scatter search para problemas de roteirização de veículos com frota heterogênea, janelas de tempo e entregas fracionadas**. 2006. 222f. (Doutorado em Engenharia) – Departamento de Engenharia de Produção, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006.

BELFIORE, P. P.; YOSHIZAKI, H.T.Y. Scatter search for a real-life heterogeneous fleet vehicle routing problem with time windows and split deliveries in Brazil. **European Journal of Operational Research**, v.199, p. 750-758, 2009.

BELFIORE, P.; YOSHIZAKI, H. T. Y. Heuristic methods for the fleet size and mix vehicle routing problem with time windows and split deliveries. **Computers & Industrial Engineering**, v.64, p. 589–601, 2013.

BODIN, L.D.; GOLDEN, B.; ASSAD, A.; BALL, M. Routing and scheduling of vehicles and crews: **The states of the art**. **Computers & Operations Research**, v.10, n. 2, p. 63-211, 1983.

BOERTFELDT, A.; Yi, J. The Split Delivery Vehicle Routing Problem with three-dimensional loading constraints. **European Journal of Operational Research**, v.282, p. 545-558, 2020.

BRAEKERS, K.; RAMAEKERS, K.; NIEUWENHUYSE, I.V. The vehicle routing problem: State of the art classification and review. **Computers & Industrial Engineering**, v.99, p. 300–313, 2016.

CANTU-FUNES, R.; SALAZAR-AGUILAR, M. A.; BOYER, V. Multi-Depot Periodic Vehicle Routing Problem with Due Dates and Time Windows. **Journal of the Operational Research Society**, v.69, n.2, p. 296–306, 2017.

CHAO M.; GOLDEN B.; WASIL E. A computational study of a new heuristic for the site-dependent vehicle routing problem. **INFOR**, v.37, n.3, p. 319–336, 1999.

CHRISTOFIDES N.; EILON S. An algorithm for the vehicle-dispatching problem. **Operational Research Quarterly**, v.20, n.3, p. 309–318, 1969.

CLARKE, G.; WRIGHT, J. Scheduling of vehicles from a central depot to a number of delivery points. **Operations Research**, v.12, p. 568–581, 1964.

CORDEAU, J.F.; LAPORTE, G. A Tabu Search algorithm for the site dependent vehicle routing problem with time windows. **INFOR**, v.39, n.3, p. 292–298, 2001.

DANTZIG G. B.; RAMSER, The truck dispatching problem, **Management Science**, v.6, p. 80–91, 1959.

DELL'AMICO, M.; MONACHI, M., PAGANI, C.; VIGO, D. Heuristic approaches for the fleet size and mix vehicle routing problem with time windows. **Transportation Science**, v.41, p. 516–526, 2007.

DROR, M.; TRUDEAU, P. Savings bi Split Delivery Routing. **Transportations Science**, v.23, p. 141–145, 1989.

DROR, M.; LAPORTE, G.; TRUDEAU, P. Split delivery routing. **Naval Research Logistic**, v.37, p. 383-402, 1990.

DROR, M.; LAPORTE, G.; TRUDEAU, P. Vehicle routing with split deliveries. **Discrete Applied Mathematics**, v.50, n.3, p.229-254, 1994.

DULLAERT, W.; JANSSENS, G.K.; SÖERENSEN, K.; VERNIMMEN, B. New heuristics for the fleet size and mix vehicle routing problem with time windows. **Journal of the Operational Research Society**, v.53, p. 1232–1238, 2002.

EKSIOGLU, B.; VURAL, A. V.; Reisman, A. The vehicle routing problem: A taxonomic review. **Computers & Industrial Engineering**, v.57, p.1472–1483, 2009.

FAULIN, J.; JUAN, A.; LERA, F.; GRASMAN, S. Solving the Capacitated Vehicle Routing Problem with Environmental Criteria Based on Real Estimations in Road Transportation: A Case Study. **Procedia – Social and Behavioral Sciences**, v.20, p.323-334, 2011.

FLOOD, M. B. The Traveling-Salesman Problem. **Operations Research**, v.4, p. 61–75, 1956.

FRIZZELL, P.W.; GIFFIN, J. W. The split delivery vehicle scheduling problem with time windows and grid network distances. **Computers & Operational Research**, v.22, n. 6, p. 655-667, 1995.

GENDREAU, M.; LAPORTE, G.; MUSARAGANYI, C.; TAILLARD, E.D. A tabu search heuristic for the heterogeneous fleet vehicle routing problem. **Computers & Operations Research**, v.26, n. 12, p. 1153-1173, 1999.

GENDREAU, M.; IORI, M.; LAPORTE, G.; MARTELLO, S. A Tabu search heuristic for the vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. **Networks**, v.51, p. 4-18. 2008.

GILLETT, B.; MILLER, L. A heuristic algorithm for the vehicle dispatching problem. **Operations Research**, v.22, p.340-349, 1974.

GOLDEN, B.L.; ASSAD, A.; LEVY, L.; GHEYSENS, F. The fleet size and mix vehicle routing problem. **Computers & Operations Research**, v.11, p. 49–66, 1984.

GOLDEN, B.L.; RAGHAVAN, S.; WASIL, E.A. The vehicle routing problem: latest advances and new challenges. **Springer Science & Business Media**, 2008.

HOFF, A.; ANDERSSON, H.; CHRISTIANSEN, M.; HASLE, G.; LOKKETAGEN, A. Industrial aspects and literature survey: fleet composition and routing. **Computers and Operations Research**, v.37, p. 2041–2061, 2010.

IBRAHIM, A.A.; LO, N.; ABDULAZIZ, R.O.; ISHAYA, J.A. Capacitated Vehicle Routing Problem. **International Journal of Research – Granthaalayah**, v.7, 2019.

IOANNOU, G.; KRITIKOS, M.; PRASTACOS, G. A greedy look-ahead heuristic for the vehicle routing problem with time windows. **Journal of the Operational Research Society**, v.52, p. 523–537, 2001.

IRNICH, S.; SCHNEIDER, M.; VIGO, D. For variants of vehicle routing problem. In: TOTH, P.; VIGO, D. (Coord.) **Vehicle Routing: problems, methods, and applications** 2ed. Mathematical Optimization Society. Philadelphia, 2014. p.241-360.

IVECO. Blog da IVECO. Disponível em: <https://www.blogiveco.com.br/toco-truck-tracado-bi-truck-entenda-diferenca>. Acesso em: 27 abr. 2023.

KOÇ, Ç.; BEKTAS, T.; JABALI, O.; LAPORTE, G. A hybrid evolutionary algorithm for heterogeneous fleet vehicle routing problems with time windows. **Computers & Operations Research**, v.64, p. 11–27, 2015.

KOÇ, Ç.; BEKTAS, T.; JABALI, O.; LAPORTE, G. Thirty years of heterogeneous vehicle routing. **European Journal of Operational Research**, v.249, p. 1–21, 2016.

KRAMER, R. H. F. R.; SUBRAMANIAN, A.; PENNA, P. H. V. Problema de roteamento de veículos assimétrico com frota heterogênea limitada: um estudo de caso em uma indústria de bebidas. **Gest. Prod.** São Carlos, v.23, n.1, p.165-176, 2016.

KRITIKOS, M. N.; IOANNOU, G. The heterogeneous fleet vehicle routing problem with overloads and time windows. *International Journal of Production Economics*, v.144, n. 1, p. 68-78, 2013.

LAPORTE, G.; OSMAN, I.H. Routing Problem: A bibliography. **Annals of Operations Research**, v.61, p. 277-262, 1995.

LAPORTE, G.; GENDREAU, M.; POTVIN, J.Y.; SEMET, F. Classical and modern heuristics for the vehicle routing problem. **International Transaction in Operational Research**, v.7, n. 4/5, p. 285-00, 2000.

LAPORTE, G. Fifty years of vehicle routing. **Transportation Science**, v.43, n. 4, p. 408-416, 2009.

LENSTRA, J.K.; RINNOOY KAN, A.H.G. Complexity of Vehicle Routing And Scheduling Problems. **Networks**, v.11, n.2, p. 221–227, 1981.

LIU, F.H.; SHEN, S.Y. The fleet size and mix vehicle routing problem with time windows. **Journal of Operational Research Society**, v.50, p. 721–732, 1999.

LÓPEZ-IBÁÑEZ, M.; DUBOIS-LACOSTE, J.; CÁCERES, L. P.; STÜTZLE, T.; BIRATTARI, M. The irace package: Iterated racing for automatic algorithm configuration. *Operations Research Perspectives*, v.3, p. 43 – 58, 2016.

LÓPEZ-IBÁÑEZ, M.; DUBOIS-LACOSTE, J.; CÁCERES, L. P.; STÜTZLE, T.; BIRATTARI, M. Irace: Iterated racing for automatic algorithm configuration. 2020. R package version 3.4.1. Disponível em: <<https://CRAN.R-project.org/package=irace>>.

MALHEIROS, I.; RAMALHO, R.; PASSETI, B.; BULHÕES, T.; SUBRAMANIAN, A. A hybrid algorithm for the multi-depot heterogeneous dial-a-ride problem. **Computers & Operations Research**, v.129, p. 196-208, 2021.

MANGUINO, J. L. V. **Métodos heurísticos aplicados ao problema de roteamento de veículos com frota mista, janelas de tempo e custos escalonados por faixa de distância**. 2020. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2020.

MANGUINO, J. L. V.; RONCONI, D. P. Step cost functions in a fleet size and mix vehicle routing problem with time windows. In: **Annals of Operations Research**, v, 2021.

OLIVEIRA, R. M.; SANTOS, R. Problema de Roteamento com Janelas de Tempo: Uma Abordagem via Geração de Colunas. **XL Anais do Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, Setembro**, 2008.

PAN, B.; ZHANG, Z.; LIM, A. Multi-trip time-dependent vehicle routing problem with time windows. **European Journal of Operational Research**, v.291, p. 218-231, 2021.

PARASKEVOPOULOS, D. C. *et al.* A reactive variable neighborhood tabu search for the heterogeneous fleet vehicle routing problem with time windows. *Journal of Heuristics*, Springer, v.14, n. 15, p. 425-455, 2008.

PENNA, P. H. V.; SUBRAMANIAN, A.; OCHI, L. S.; VIDAL, T.; PRINS, C. A hybrid heuristic for a broad class of vehicle routing problems with heterogeneous fleet. In: **Annals of Operations Research**, v.273, p. 5–74, 2019.

QIU, M.; FU, Z.; EGGLESE, R.; TANG, Q. A Tabu Search algorithm for the vehicle routing problem with discrete split deliveries and pickups. **Computers and Operations Research**, v.100, p. 102-116, 2018.

REN, T.; LUO, T.; JIA, B.; YANG, B.; WANG, L.; XING, L. Improved ant colony optimization for the vehicle routing problem with split pickup and split delivery. **Swarm and Evolutionary Computation**, v.77, p. 101-115, 2023.

RIECK, J.; ZIMMERMANN, J. A new mixed integer linear model for a rich vehicle routing problem with docking constraints. **Annals of Operations Research**, v. 181, p. 337-358, 2010.

SILVA, M.M.; SUBRAMANIAN, A.; OCHI, L.S. An iterated local search heuristic for the split delivery vehicle routing problem. **Computers & Operations Research**, v.53, p. 234–249, 2015.

SOLOMON, M.M. Algorithms for the vehicle routing and scheduling problems with time windows constraints. **Operations Research**, v.35, n.2, p. 254–265, 1987.

SOLOMON, M.M. On the worst-case performance of some heuristics for the vehicle routing and scheduling with time windows constraints. **Networks**, v.16, n. 2, p. 161-174, 1986.

SOLOMON, M.M.; DESROSIERS, J. Time windows constrained routing and scheduling problems. **Transportation Science**, v.22, n. 1, p. 1-13, 1988.

SOUZA, A. W. **Otimização da distribuição de carga expressa em uma empresa brasileira de serviços postais**. 2017. 129f. (Mestrado em Engenharia de Produção) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, Universidade Nove de Julho, São Paulo – SP, 2017.

SUBRAMANIAN, A.; PENNA, P.H.V.; UCHOA, E.; OCHI, L.S. A hybrid algorithm for the Heterogeneous Fleet Vehicle Routing Problem. **European Journal of Operational Research**, v.221, p. 285-295, 2012.

TAILLARD, É.D. A heuristic column generation method for the heterogeneous fleet VRP. **RAIRO Recherche Opérationnelle**, v.33, n.1, p. 1–14, 1999.

TAN, K. C.; LEE, L. H.; ZHU, Q. L.; OU, K. Heuristics methods for vehicle routing problem with time windows. **Artificial Intelligence in Engineering**, v.15, 281-295, 2001.



TARANTILIS, C.D.; KIRANOUDIS. A flexible adaptive memory-based algorithm for real-life transportation operations: Two case studies from dairy and construction sector. **European Journal of Operational Research**, v.179, p. 806-822, 2007.

TAVAKKOLI-MOGHADDAM, R.; SAFAEI, N.; KAH, M.M.O.; RABBANI. A New Capacitated Vehicle Routing Problem with Split Service for Minimizing Fleet Cost by Simulated Annealing. **Journal of the Franklin Institute**, v.344, p. 406-425, 2007.

VEGA, J.; GENDREAU, M.; MORABITO, R.; MUNARI, P. An integer L-shaped algorithm for the vehicle routing problem with time windows and stochastic demands. **European Journal of Operational Research**, v.308, p. 676-695, 2023.

VIEIRA, B. S.; RIBEIRO, G. M.; BAHIENSE, L. A Metaheuristics with variable diversity control and neighborhood search for the Heterogeneous Site-Dependent Multi-depot Multi-trip Periodic Vehicle Routing Problem. **Computers and Operations Research**, v.153, p. 106-128, 2023.

WÖEGINGER, G. J. Exact Algorithms for NP-Hard Problems: A Survey. In: **Jünger, M., Reinelt, G., Rinaldi, G. (eds) Combinatorial Optimization — Eureka, You Shrink!. Lecture Notes in Computer Science, vol 2570. Springer, Berlin, Heidelberg**, v. 2570, p. 185-207, 2003.

ZARE-REISABADI, E.; MIRMOHAMMADI, S.H. Site dependent vehicle routing problem with soft time window: Modeling and solution approach. **Computers & Industrial Engineering**, v.90, p. 177–185, 2015.

ZHEN, L.; MA C.; WANG, K.; XIAO, L.; ZHANG, W. Multi-depot multi-trip vehicle routing problem with time windows and release dates. **Transportation Research Part E**, v.135, p. 101-123, 2020.

## APENDICE A – TEMPO DE EXECUÇÃO DAS HEURÍSTICAS PARA AS INSTÂNCIAS-BASE

Abaixo são retrados os tempos de execução das heurísticas com e sem pré-processamento, quando aplicadas a instâncias-base, a mesma que utilizada no modelo de PLIM.

Inst.	H <sub>cp</sub> Tempo Exec. (s).	H <sub>sp</sub> Tempo Exec. (s).
I.1	2,97	3,17
I.2	2,95	3,03
I.3	2,99	3,62
I.4	2,97	3,00
I.5	2,88	3,10
I.6	2,94	3,05
I.7	2,97	3,54
I.8	3,03	3,20
I.9	3,03	3,70
I.10	3,04	3,78
I.11	3,00	3,55
I.12	3,02	3,71
I.13	3,02	3,67
I.14	3,12	3,63
I.15	3,59	3,65
I.16	3,19	3,63
I.17	3,19	3,72
I.18	3,14	3,20
I.19	3,15	3,61
I.20	3,10	3,59
I.21	3,43	4,15
I.22	3,37	3,75
I.23	3,25	4,05
I.24	3,67	3,74
I.25	3,28	3,90
I.26	3,40	3,69
I.27	3,48	4,00
I.28	3,68	4,21
I.29	3,99	4,56
I.30	3,80	4,48
I.31	5,77	6,33
I.32	8,33	8,56
<b>Média</b>	<b>3,46</b>	<b>3,89</b>

Fonte: elaborado pelo autor

**APENDICE B – TEMPO DE EXECUÇÃO DAS HEURÍSTICAS PARA AS  
INSTÂNCIAS DE MAIOR PORTE**

Abaixo são retrados os tempos de execução das heurísticas com e sem pré-processamento aplicadas as instâncias de porte superior.

Inst.	Clientes	Veículos	H <sub>cp</sub> Tempo Exec. (s).	H <sub>sp</sub> Tempo Exec. (s).
I.33	25	6	11,17	11,41
I.34	25	15	6,15	9,11
I.35	25	10	5,49	7,92
I.36	25	14	7,08	8,31
I.37	25	11	7,12	7,91
I.38	30	17	12,47	14,67
I.39	30	14	11,76	14,03
I.40	30	12	11,32	14,15
I.41	30	11	12,01	13,99
I.42	30	15	11,84	12,84
I.43	35	16	19,94	21,40
I.44	35	14	26,02	27,94
I.45	35	17	15,38	17,32
I.46	35	17	16,72	17,16
I.47	35	19	15,10	17,28
I.48	40	14	21,68	23,72
I.49	40	18	33,83	35,56
I.50	40	21	22,81	22,96
I.51	40	18	24,15	26,40
I.52	40	18	19,70	20,93
<b>Média</b>			15,6	17,3

Fonte: elaborado pelo autor