

CESAREO DE LA ROSA SIQUEIRA

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO ESCOAMENTO AO
REDOR DE CILINDROS: APLICAÇÃO A PROBLEMAS
BI E TRIDIMENSIONAIS**

**Tese apresentada à Escola
Politécnica da Universidade
de São Paulo para obtenção
do título de Doutor em
Engenharia**

SÃO PAULO

1999

CESAREO DE LA ROSA SIQUEIRA

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO ESCOAMENTO AO
REDOR DE CILINDROS: APLICAÇÃO A PROBLEMAS
BI E TRIDIMENSIONAIS**

**Tese apresentada à Escola
Politécnica da Universidade
de São Paulo para obtenção
do título de Doutor em
Engenharia**

**Área de Concentração:
Engenharia Naval**

**Orientador:
Julio Romano Meneghini**

SÃO PAULO

1999

AGRADECIMENTOS

À FAPESP, que viabilizou financeiramente esta pesquisa através de um Projeto Temático, coordenados pelos Profs. Drs. José A. P. Aranha e Julio R. Meneghini e pela bolsa de estudos de Doutorado concedida. Tais projetos e auxílios possibilitaram a compra dos computadores e equipamentos sem os quais não seriam possíveis as simulações desta tese, além de promover valiosos intercâmbios de experiências no âmbito internacional.

À PETROBRÁS, que patrocinou esta pesquisa através do projeto CFD, coordenado pelo Prof. Dr. Julio R. Meneghini (USP) e pelo Dr. José A. Ferrari Jr. (PETROBRÁS).

Ao meu orientador Prof. Dr. Julio R. Meneghini pelas diretrizes seguras e liberdade de expressão.

Ao Laboratório de Computação Científica Avançada (LCCA) da USP, por ter disponibilizado seus equipamentos e o *software* ENSIGHT6 para a realização de muitas das visualizações desta pesquisa.

Ao meu caro colega Fábio Saltara, cujas contribuições de ordem técnica foram inestimáveis.

Aos alunos de iniciação científica do departamento, em especial aos colegas Arthur Leotta, Cássio Yamamoto, Clayton Ferraz, Fernando Yoshino, Humberto Gissoni e Humberto Miyoshi.

Aos meus pais, pelo inegável exemplo que eles têm sido em toda minha vida.

À minha esposa Maria pelo apoio e compreensão, vitais para a conclusão desta jornada.

"Education is what survives when what has been learnt has been forgotten"

Professor Skinner

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS	IX
LISTA DE TABELAS	XVII
LISTA DE SÍMBOLOS	XIX
RESUMO	XXI
ABSTRACT	XXII
FORMATO DA TESE	XXIII
1. INTRODUÇÃO	1
1.1. MOTIVAÇÃO PARA A ATUAL PESQUISA E OBJETIVOS	1
1.2. ASPECTOS FUNDAMENTAIS DO FENÔMENO DE EMISSÃO DE VÓRTICES OU “VORTEX SHEDDING” EM UM CILINDRO	8
1.2.1. REVISÃO HISTÓRICA E ASPECTOS FÍSICOS DO FENÔMENO	8
1.2.2. ASPECTOS TRIDIMENSIONAIS DO FENÔMENO DE EMISSÃO DE VÓRTICES	14
1.3. SÍNTESE DA BIBLIOGRAFIA FUNDAMENTAL	16
1.3.1. MÉTODO DOS VÓRTICES DISCRETOS (MVD)	16
1.3.2. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF)	21
1.3.3. MÉTODO DA RESOLUÇÃO POR PARTES OU FRACTIONAL STEP METHOD (FSM)	23

<u>2. APRESENTAÇÃO DOS SIMULADORES NUMÉRICOS APLICADOS À</u>	
<u>RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS BIDIMENSIONAIS</u> 25	
2.1. MVD + MEF COM FORMULAÇÃO FUNÇÃO DE CORRENTE-VORTICIDADE (MVD+MEF	
$\psi - \omega$)	26
2.1.1. FORMULAÇÃO DAS EQUAÇÕES PARA A FUNÇÃO DE CORRENTE E VORTICIDADE	27
2.1.2. O MÉTODO "AREA WEIGHTING SCHEME" PARA MALHAS NÃO-ESTRUTURADAS	31
2.1.3. ALGORITMO DE BUSCA DOS VÓRTICES: UTILIZAÇÃO DAS FUNÇÕES DE FORMA	33
2.1.4. CRIAÇÃO DE VÓRTICES DISCRETOS: PROCEDIMENTO DE REDISTRIBUIÇÃO DE	
VORTICIDADE E CIRCULAÇÃO	36
2.1.5. CÁLCULO DO CAMPO DE VELOCIDADES: UTILIZAÇÃO DAS FUNÇÕES DE FORMA E	
FUNÇÕES DE CORRENTE	38
2.1.6. RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE POISSON PARA A PRESSÃO E CÁLCULO DAS FORÇAS	41
2.2. MVD + MEF COM FORMULAÇÃO VELOCIDADE-VORTICIDADE (MVD+MEF $v - \omega$)	45
2.3. MÉTODO DA RESOLUÇÃO POR PARTES OU FRACTIONAL STEP METHOD (FSM)	49
2.3.1. FORMULAÇÃO NUMÉRICA	51
2.3.2. FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA AS EQUAÇÕES DE NAVIER-	
STOKES	53
<u>3. VALIDAÇÃO DOS SIMULADORES APLICADOS À RESOLUÇÃO DE</u>	
<u>PROBLEMAS BIDIMENSIONAIS</u> 55	
3.1. RESOLUÇÃO DO ESCOAMENTO BIDIMENSIONAL AO REDOR DO CILINDRO PARA $RE=200$ E	
$RE=100$	55
3.2. COMENTÁRIOS FINAIS SOBRE OS SIMULADORES NUMÉRICOS APLICADOS A PROBLEMAS	
BIDIMENSIONAIS	66
3.3. CONSOLIDAÇÃO DO FSM: OBTENÇÃO DA CURVA DO N^o DE STROUHAL EM FUNÇÃO DO N^o	
DE REYNOLDS : COMPARAÇÃO COM RESULTADOS EXPERIMENTAIS E NUMÉRICOS	68

3.4. CONSOLIDAÇÃO DO FSM: RESOLUÇÃO DO ESCOAMENTO AO REDOR DE UM AGRUPAMENTO DE CILINDROS	71
<u>4. APRESENTAÇÃO DO SIMULADOR NUMÉRICO APLICADO À RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS TRIDIMENSIONAIS</u>	87
4.1. INTRODUÇÃO E CONSIDERAÇÕES GERAIS	87
4.2. APRIMORAMENTO DO FSM PARA PROBLEMAS TRIDIMENSIONAIS	93
<u>5. VALIDAÇÃO DO SIMULADOR NUMÉRICO APLICADO À RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS TRIDIMENSIONAIS</u>	97
5.1. GERAÇÃO DE MALHAS NÃO-ESTRUTURADAS TRIDIMENSIONAIS PARA AS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS	97
5.2. RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES PARA $Re=200$ E $Re=100$ EM UM CILINDRO FIXO COM 2D DE COMPRIMENTO	105
5.3. RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES PARA $Re=200$ E $Re=250$ EM UM CILINDRO FIXO COM 5D DE COMPRIMENTO	120
5.4. RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES PARA $Re=200$ E $Re=250$ EM UM CILINDRO FIXO COM 6.28D DE COMPRIMENTO	141
5.5. COMENTÁRIOS FINAIS SOBRE A ETAPA DE VALIDAÇÃO DO SIMULADOR NUMÉRICO APLICADO A PROBLEMAS TRIDIMENSIONAIS	158
<u>6. RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES DO MOVIMENTO OSCILATÓRIO FORÇADO EM UM CILINDRO DE 5D DE COMPRIMENTO E $Re=250$</u>	164
<u>7. CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS</u>	182

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	195
--------------------------------------	------------

9. APÊNDICES	204
---------------------	------------

LISTA DE FIGURAS

Nome da figura	Página
<i>Capítulo 1. Introdução</i>	
1.1. Plataforma Offshore tipo “Tension Leg”. Observam-se a estrutura dos componentes cilíndricos tais como os tubos flexíveis (risers) que levam a produção do poço petrolífero para a superfície (NISHIMOTO(1997)).	3
1.2. Plataforma Offshore tipo “spar”. Nota-se a estrutura situada logo abaixo da linha d'água que protege os risers da ação da correnteza (RANDALL(1997)).	4
1.3. Mecanismos de atenuação de vibrações induzidas pelo escoamento reproduzida de ZDRAVKOVICH(1981).	5
1.4. Leonardo da Vinci: <i>O idoso e os vórtices</i> (provavelmente um auto-retrato), reproduzido de LUGT(1983)	8
1.5. a) Tela "Noite Estrelada", de Vincent Van Gogh. b) Detalhe da tela mostrando a visão do artista sobre o fenômeno da emissão de vórtices. Extraídos de ANDERSON(1995)	10
1.6. Regimes do escoamento e emissão de vórtices em cilindros, segundo BLEVINS(1990).	12
1.7. Modelo de formação de vórtices segundo GERRARD(1966).	13
1.8. Curva <i>S-Re</i> para os regimes laminar e transicional segundo WILLIAMSON(1991).	15
1.9. Evolução histórica do Método dos Elementos Finitos (MEF), extraída de ZIENKIEWICZ AND MORGAN(1983).	22
 <i>Capítulo 2. Apresentação dos simuladores numéricos aplicados à resolução de problemas bidimensionais</i>	
2.1. Esquematização das áreas internas de um dado elemento para utilização no “Area Weighting Scheme” em malhas não-estruturadas.	32

2.2. Exemplo numérico do algoritmo de busca de vórtices em uma malha não-estruturada através da utilização das funções de forma.	35
2.3. Cálculo da nova circulação de um dado vórtice após a resolução da equação de difusão.	38
2.4. Exemplo do cálculo de velocidades para um vórtice recém criado.	40

Capítulo 3. Validação dos simuladores numéricos aplicados à resolução de problemas bidimensionais

3.1. Malha computacional para a resolução do escoamento em torno de um cilindro para $Re = 200$ e $Re = 100$.	56
3.2. Detalhe da malha computacional em uma região próxima do cilindro	57
3.3. Coeficientes de arrasto (C_d) e Sustentação (C_l) para $Re = 200$. Utilização dos três simuladores bidimensionais.	58
3.4. Esteiras para $Re = 200$. Utilização de vórtices pontuais para os métodos MVD e traçadores para FSM.	60
3.5. Contornos de pressão e vorticidade para $Re = 200$. Utilização dos três simuladores bidimensionais.	61
3.6. Coeficientes de arrasto (C_d) e Sustentação (C_l) para $Re = 100$. Utilização dos três simuladores bidimensionais.	63
3.7. Esteiras para $Re = 100$. Utilização de vórtices pontuais para os métodos MVD e traçadores para FSM.	64
3.8. Contornos de pressão e vorticidade para $Re = 100$. Utilização dos três simuladores bidimensionais.	65
3.9. Curva Strouhal vs. Reynolds para “Vortex-shedding” bidimensional - Comparação entre resultados experimentais e numéricos, a partir dos dados compilados por Williamson (1991).	69
3.10. Esteiras do escoamento ao redor do cilindro fixo ($60 \leq Re \leq 180$).	70
3.11. Malha computacional típica para a resolução do escoamento ao redor dois cilindros em configuração Tandem. Distância entre centros igual a 3 diâmetros.	73
3.12. Detalhe da malha computacional em uma região próxima aos cilindros.	73

3.13. Coeficientes de força em função do tempo para o agrupamento de cilindros em configuração tandem.	76
3.14. Esteiras para o agrupamento de cilindros em configuração tandem. Utilização de traçadores.	77
3.15. Contornos de pressão para o agrupamento de cilindros em configuração tandem.	78
3.16. Contornos de vorticidade para o agrupamento de cilindros em configuração tandem.	79
3.17. Malha típica para a resolução do escoamento ao redor de dois cilindros em configuração Lado a Lado. Distância entre centros igual a 3 diâmetros.	80
3.18. Detalhe da malha computacional em uma região próxima aos cilindros.	80
3.19. Coeficientes de força em função do tempo para o agrupamento de cilindros em configuração lado a lado.	83
3.20. Esteiras para o agrupamento de cilindros em configuração lado a lado. Utilização de traçadores.	84
3.21. Contornos de pressão para o agrupamento de cilindros em configuração lado a lado.	85
3.22. Contornos de vorticidade para o agrupamento de cilindros em configuração lado a lado.	86

Capítulo 4. Apresentação do simulador numérico aplicado à resolução de problemas tridimensionais

4.1. Elemento tetraédrico típico.	89
4.2. Representação das condições de contorno implementadas no programa que resolve o escoamento tridimensional ao redor do cilindro.	92

Capítulo 5. Validação do simulador numérico aplicado à resolução de problemas tridimensionais

5.1. Malha computacional típica para um comprimento do cilindro de 5D.	100
--	-----

5.2. Detalhe da malha computacional para um comprimento do cilindro de 5D. Corte ao longo no plano x - y .	101
5.3. Detalhe da malha computacional para um comprimento do cilindro de 5D. Corte ao longo no plano x - z .	101
5.4. Detalhe do corte ao longo no plano x - y em uma região próxima ao cilindro de comprimento 5D.	102
5.5. Detalhe do corte ao longo no plano x - z em uma região próxima ao cilindro de comprimento 5D.	102
5.6. Vistas em perspectiva das malhas computacionais para comprimentos do cilindro igual a 2D e 6.28D.	103
5.7. Qualidade das malhas apresentadas em termos da razão de aspecto de seus elementos.	104
5.8. Esquema ilustrativo da escolha dos pontos de monitoramento das velocidades na direção do escoamento para a estimativa do número de Strouhal.	107
5.9. Componente da vorticidade w_x na direção do eixo do cilindro para $Re=200$ e comprimento do cilindro igual a 2D.	108
5.10. Planos y - z de contorno de pressão e componente da vorticidade w_x na direção do eixo do cilindro de comprimento 2D e $Re=200$. Cortes em $x=-2.00$, -1.00 e 0.00 .	109
5.11. Plano x - y de contorno de pressão para o cilindro de comprimento 2D e $Re=200$. Corte em $z=0.00$.	110
5.12. Plano x - y de contorno de vorticidade w_x para o cilindro de comprimento 2D e $Re=200$. Corte em $z=0.00$.	110
5.13. Superfície de vorticidade para um cilindro de 2D de comprimento e $Re=200$.	111
5.14. Coeficiente de pressão C_{pb} e velocidades dos pontos de monitoramento para um cilindro de 2D de comprimento e $Re=200$.	112
5.15. Variação do número de Strouhal em função do número Reynolds. oWilliamson (1989), • Hammache & Gharib (1991), + Resultados numéricos de Barkley and Henderson (1996). Gráfico obtido de BARKLEY AND HENDERSON(1996)	113

5.16. Variação do coeficiente "base pressure" em função do número Reynolds. •Williamson e Roshko(1990), o Norberg (1994), + Resultados numéricos de Barkley and Henderson (1996). Gráfico obtido de BARKLEY AND HENDERSON (1996)	114
5.17. Componente da vorticidade w_x na direção do eixo do cilindro para $Re=100$ e comprimento do cilindro igual a 2D.	116
5.18. Superfície de vorticidade para um cilindro de 2D de comprimento e $Re=100$.	116
5.19. Planos $y-z$ de contorno de pressão e componente da vorticidade w_x na direção do eixo do cilindro de comprimento 2D e $Re=100$. Cortes em $x=-2.00$, -1.00 e 0.00 .	117
5.20. Plano $x-y$ de contorno de pressão para o cilindro de comprimento 2D e $Re=100$. Corte em $z=0.00$.	118
5.21. Plano $x-y$ de contorno de vorticidade w_x para o cilindro de comprimento 2D e $Re=100$. Corte em $z=0.00$.	118
5.22. Coeficiente de pressão C_{pb} e velocidades dos pontos de monitoramento para um cilindro de 2D de comprimento e $Re=100$.	119
5.23. Modos A e B de emissão de vórtices tridimensional (WILLIAMSON(1992)). (a) Modo A ($Re \approx 200$) e (b) Modo B ($Re \geq 230$).	122
5.24. Componente da vorticidade w_x na direção do eixo do cilindro para $Re=200$ e comprimento do cilindro igual a 5D.	124
5.25. Planos $y-z$ de contorno de pressão e componente da vorticidade w_x na direção do eixo do cilindro de comprimento 5D e $Re=200$. Cortes em $x=-5.00$, -2.50 e 0.00 .	125
5.26. Plano $x-y$ de contorno de pressão para o cilindro de comprimento 5D e $Re=200$. Corte em $z=0.00$.	126
5.27. Plano $x-y$ de contorno de vorticidade w_x para o cilindro de comprimento 5D e $Re=200$. Corte em $z=0.00$.	126
5.28. Superfície de vorticidade para um cilindro de 5D de comprimento e $Re=200$.	127
5.29. Coeficiente de pressão C_{pb} e velocidades dos pontos de monitoramento para um cilindro de 5D de comprimento e $Re=200$.	128

5.30. Ciclo completo de emissão de vórtices para um cilindro de 5D de comprimento e $Re=200$. Quadros plotados a partir de $UT/D=62.50$.	130
5.31. Componente da vorticidade w_x na direção do eixo do cilindro para $Re=250$ e comprimento do cilindro igual a 5D.	134
5.32. Planos $y-z$ de contorno de pressão e componente da vorticidade w_x na direção do eixo do cilindro de comprimento 5D e $Re=250$. Cortes em $x=-5.00, -2.50$ e 0.00 .	135
5.33. Plano $x-y$ de contorno de pressão para o cilindro de comprimento 5D e $Re=250$. Corte em $z=0.00$.	136
5.34. Plano $x-y$ de contorno de vorticidade w_x para o cilindro de comprimento 5D e $Re=250$. Corte em $z=0.00$.	136
5.35. Superfície de vorticidade para um cilindro de 5D de comprimento e $Re=250$.	137
5.36. Coeficiente de pressão C_{pb} e velocidades dos pontos de monitoramento para um cilindro de 5D de comprimento e $Re=250$.	137
5.37. Ciclo completo de emissão de vórtices para um cilindro de 5D de comprimento e $Re=250$. Quadros plotados a partir de $UT/D=62.50$.	140
5.38. Componente da vorticidade w_x na direção do eixo do cilindro para $Re=200$ e comprimento do cilindro igual a 6.28D.	142
5.39. Planos $y-z$ de contorno de pressão e componente da vorticidade w_x na direção do eixo do cilindro de comprimento 6.28D e $Re=200$. Cortes em $x=-6.28, -3.14$ e 0.00 .	143
5.40. Plano $x-y$ de contorno de pressão para o cilindro de comprimento 6.28D e $Re=200$. Corte em $z=0.00$.	144
5.41. Plano $x-y$ de contorno de vorticidade w_x para o cilindro de comprimento 6.28D e $Re=200$. Corte em $z=0.00$.	144
5.42. Superfície de vorticidade para um cilindro de 6.28D de comprimento e $Re=200$.	145
5.43. Coeficiente de pressão C_{pb} e velocidades dos pontos de monitoramento para um cilindro de 6.28D de comprimento e $Re=200$.	146
5.44. Ciclo completo de emissão de vórtices para um cilindro de 6.28D de comprimento e $Re=200$. Quadros plotados a partir de $UT/D=62.50$.	149

5.45. Componente da vorticidade w_x na direção do eixo do cilindro para $Re=250$ e comprimento do cilindro igual a $6.28D$.	150
5.46. Planos $y-z$ de contorno de pressão e componente da vorticidade w_x na direção do eixo do cilindro de comprimento $6.28D$ e $Re=250$. Cortes em $x=-6.28$, -3.14 e 0.00 .	151
5.47. Plano $x-y$ de contorno de pressão para o cilindro de comprimento $6.28D$ e $Re=250$. Corte em $z=0.00$.	152
5.48. Plano $x-y$ de contorno de vorticidade w_x para o cilindro de comprimento $6.28D$ e $Re=250$. Corte em $z=0.00$.	153
5.49. Superfície de vorticidade para um cilindro de $6.28D$ de comprimento e $Re=250$.	153
5.50. Coeficiente de pressão C_{pb} e velocidades dos pontos de monitoramento para um cilindro de $6.28D$ de comprimento e $Re=250$.	154
5.51. Ciclo completo de emissão de vórtices para um cilindro de $6.28D$ de comprimento e $Re=250$. Quadros plotados a partir de $UT/D=62.50$.	157
5.52. Influência do comprimento do cilindro no número de Strouhal para as simulações tridimensionais.	159
5.53. Influência do comprimento do cilindro no coeficiente de pressão para as simulações tridimensionais.	160
5.54. Tempo computacional necessário para as simulações tridimensionais em função do comprimento do cilindro.	162

Capítulo 6. Resultados das simulações do movimento oscilatório forçado em um cilindro de $5D$ de comprimento e $Re=250$

6.1. Caso 1 ($f/f_v=0.80$): Coeficiente de pressão C_{pb} , velocidades dos pontos de monitoramento, deslocamento do cilindro e velocidade do escoamento oscilatório.	169
6.2. Caso 2 ($f/f_v=0.90$): Coeficiente de pressão C_{pb} , velocidades dos pontos de monitoramento, deslocamento do cilindro e velocidade do escoamento oscilatório.	169

6.3. Caso 3 ($f/f_v=0.975$): Coeficiente de pressão C_{pb} , velocidades dos pontos de monitoramento, deslocamento do cilindro e velocidade do escoamento oscilatório.	170
6.4. Caso 4 ($f/f_v=1.05$): Coeficiente de pressão C_{pb} , velocidades dos pontos de monitoramento, deslocamento do cilindro e velocidade do escoamento oscilatório.	170
6.5. Representação esquemática do deslocamento do cilindro e a posição dos 17 quadros escolhidos nos 4 casos para o estudo do movimento oscilatório forçado do cilindro.	172
6.6. Caso 1 ($f/f_v=0.80$). Desenvolvimento da esteira durante o movimento oscilatório forçado.	174
6.7. Caso 2 ($f/f_v=0.90$). Desenvolvimento da esteira durante o movimento oscilatório forçado.	175
6.8. Caso 3 ($f/f_v=0.975$). Desenvolvimento da esteira durante o movimento oscilatório forçado.	176
6.9. Caso 4 ($f/f_v=1.05$). Desenvolvimento da esteira durante o movimento oscilatório forçado.	177
6.10. Superfície de vorticidade. Caso 1 ($f/f_v=0.80$).	179
6.11. Superfície de vorticidade. Caso 2 ($f/f_v=0.90$).	179
6.12. Superfície de vorticidade. Caso 3 ($f/f_v=0.975$).	180
6.13. Superfície de vorticidade. Caso 4 ($f/f_v=1.05$).	180

LISTA DE TABELAS

Nome da tabela	Página
<i>Capítulo 1. Introdução</i>	
1.1. Outros exemplos de utilização de métodos computacionais no estudo do fenômeno de emissão de vórtices em cilindros (atualizada a partir de WILLIAMSON(1991)).	24
<i>Capítulo 3. Validação dos simuladores numéricos aplicados à resolução de problemas bidimensionais</i>	
3.1. Comparação de resultados do escoamento em torno de um cilindro liso e fixo para $Re = 200$.	59
3.2. Comparação de resultados do escoamento em torno de um cilindro liso e fixo para $Re = 100$.	62
3.3. Números de Strouhal obtidos através do FSM 2D ($60 \leq Re \leq 200$).	71
3.4. Resumo dos resultados do cálculo de forças para a configuração Tandem. Valores médios do coeficiente de sustentação (C_{l_m}) e arrasto (C_{d_m})	75
3.5. Resumo dos resultados do cálculo de forças para a configuração lado a lado. Valores médios do coeficiente de sustentação (C_{l_m}) e arrasto (C_{d_m})	82
<i>Capítulo 5. Validação do simulador numérico aplicado à resolução de problemas tridimensionais</i>	
5.1. Resumo da densidade nodal das malhas computacionais geradas para a resolução do escoamento tridimensional ao redor do cilindro.	99
5.2. Comparação de resultados para número de Strouhal S e C_{pb} ($Re=200$). Comprimento do cilindro = $2D$.	114
5.3. Comparação de resultados para número de Strouhal S e C_{pb} ($Re=100$). Comprimento do cilindro = $2D$.	119
5.4. Comparação de resultados para número de Strouhal S e C_{pb} ($Re=200$). Comprimento do cilindro = $5D$.	129

5.5. Comparação de resultados para número de Strouhal S e C_{pb} ($Re=250$). Comprimento do cilindro = $5D$.	138
5.6. Comparação de resultados para número de Strouhal S e C_{pb} ($Re=200$). Comprimento do cilindro = $6.28D$.	147
5.7. Comparação de resultados para número de Strouhal S e C_{pb} ($Re=250$). Comprimento do cilindro = $6.28D$.	155
5.8. Requisitos mínimos de memória para as simulações tridimensionais.	161
5.9. Características básicas dos equipamentos utilizados nas simulações tridimensionais.	161
 <i>Capítulo 6. Resultados das simulações do movimento oscilatório forçado em um cilindro de $5D$ de comprimento e $Re=250$</i>	
6.1. Valores médios do coeficiente de pressão e número de Strouhal após a ocorrência da oscilação forçada.	172
6.2. Descrição dos quadros plotados para a observação do desenvolvimento da esteira após a ocorrência da oscilação forçada.	173

LISTA DE SÍMBOLOS

A	amplitude do movimento oscilatório do cilindro
C_d	coeficiente de arrasto
C_l	coeficiente de sustentação
C_{pb}	coeficiente de pressão
L	comprimento do cilindro
D	diâmetro do cilindro
f_v	freqüência de emissão de vórtices
f	freqüência de oscilação
F_x	força de arrasto
F_y	força de sustentação
p	pressão
p_b	pressão em um ponto do cilindro situado a 180 graus da região frontal
p_∞	pressão do escoamento ao longe
Re	n° de Reynolds
S	n° de Strouhal
t	tempo
U	velocidade da corrente livre
U_∞	velocidade da corrente livre
u	velocidade na direção x
v	velocidade na direção y
v_s	velocidade tangencial
v_n	velocidade normal
W_a	amplitude do escoamento oscilatório

W_{osc}	velocidade do escoamento oscilatório
Z_b	deslocamento do cilindro na direção transversal ao escoamento
\bar{v}	vetor da velocidade
V	volume
w	velocidade na direção z
w_x	vorticidade na direção x
w_y	vorticidade na direção y
w_z	vorticidade na direção z
φ	potencial
ϕ	grandeza física
Γ	circulação
ν	viscosidade cinemática
μ	viscosidade dinâmica
ψ	função de corrente
ρ	massa específica do fluido
τ	tensão de cisalhamento
ω	vorticidade

RESUMO

O Método dos Vórtices Discretos (MVD) na formulação híbrida euleriana-lagrangeana e o Método da Resolução por Partes das equações de Navier-Stokes ("Fractional Step Method", FSM) são analisados quanto a sua capacidade para simular computacionalmente o escoamento ao redor de corpos submersos com emissão de vórtices para problemas bidimensionais. Já o método FSM foi estendido para a resolução de problemas tridimensionais. Os métodos foram implementados utilizando um esquema de elementos finitos para malhas não-estruturadas com elementos triangulares para casos bidimensionais e elementos tetraédricos nos casos tridimensionais. O FSM desenvolvido é usado para estudar o escoamento bidimensional ao redor de um ou mais cilindros fixos em baixos números de Reynolds e o escoamento tridimensional ao redor de um cilindro fixo e forçado a oscilar na direção transversal ao escoamento, também para baixos números de Reynolds.

ABSTRACT

The Discrete Vortex Method (DVM) in a hybrid eulerian-lagrangean formulation and the Fractional Step Method (FSM) for the solution of the Navier-Stokes equations are employed with a view to analyse their capabilities regarding the computational simulation of the flow around submerged bodies with vortex shedding for two-dimensional problems. The FSM was extended for the solution of three-dimensional problems. The methods were implemented by means of a finite element method using an unstructured three-noded triangular mesh for two-dimensional cases and an unstructured four-noded tetrahedral mesh for three-dimensional ones. The FSM developed is used to study the two-dimensional flow around one or more fixed cylinders at low Reynolds numbers and the three-dimensional flow around a fixed cylinder and a cylinder with forced oscillations in the transversal direction to the incoming flow, also for low Reynolds numbers.

FORMATO DA TESE

O trabalho desenvolvido nesta pesquisa é essencialmente numérico. Este documento está dividido em 9 capítulos, os quais buscam refletir a linha de pesquisa e os rumos por ela tomados ao longo do tempo:

- i. O capítulo 1 descreve os aspectos fundamentais que levaram à motivação para a execução do presente trabalho e apresenta uma revisão histórica bem como uma sucinta descrição da física do fenômeno de emissão de vórtices ou “vortex shedding”. Na seção seguinte deste capítulo é fornecida uma breve sinopse da bibliografia fundamental de trabalhos desenvolvidos no campo da análise numérica empregando o Método dos Vórtices Discretos (MVD), Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método da Resolução por Partes ou Fractional Step Method (FSM);
- ii. O capítulo 2 apresenta a formulação geral dos simuladores desenvolvidos na ordem em que foram concebidos visando a resolução de problemas bidimensionais utilizando-se malhas não-estruturadas: 1) MVD + MEF com formulação de função de corrente e vorticidade; 2) MVD + MEF com formulação de velocidade e vorticidade e 3) FSM + MEF para a resolução de campo de pressões e velocidade. Dessa forma, a formulação das equações utilizadas para a implementação do programas é mostrada;
- iii. O capítulo 3 apresenta a validação dos simuladores numéricos apresentados anteriormente para a resolução do escoamento bidimensional ao redor do cilindro;

- iv. O capítulo 4 apresenta o programa que resolve o escoamento tridimensional ao redor do cilindro.
- v. O capítulo 5 apresenta a validação dos simulador numérico tridimensional aplicado à resolução do escoamento tridimensional ao redor do cilindro fixo para diversos comprimentos de "span" ou comprimento do cilindro;
- vi. O capítulo 6 mostra os resultados do escoamento tridimensional ao redor do cilindro quando o mesmo sofre oscilações forçadas;
- vii. O capítulo 7 fornece as principais conclusões do trabalho e sugestões para pesquisas futuras;
- viii. O capítulo 8 fornece as referências bibliográficas adotadas neste trabalho.
- ix. O capítulo 9 apresenta os apêndices deste trabalho, contendo outros estudos de validação fundamental para problemas bi e tridimensionais e ainda informações adicionais sobre o Método dos Elementos Finitos e os métodos de resolução de matrizes esparsas desenvolvidos neste projeto de pesquisa: "Preconditioned Conjugate Gradient Method" (PCG) e o "Conjugate Gradient Method" (CG).

1. INTRODUÇÃO

1.1. MOTIVAÇÃO PARA A ATUAL PESQUISA E OBJETIVOS

O escoamento ao redor de corpos rombudos (“Bluff Body flows”) e em particular ao redor de cilindros têm sido objeto de estudos intensivos ao longo das últimas décadas. Seguindo MENEGHINI(1993), é uma tarefa considerável enumerar as aplicações práticas do escoamento ao redor de corpos rombudos, sendo essencial para a Dinâmica dos Fluidos conhecer os detalhes do escoamento para o projeto de instalações industriais tais como torres de resfriamento, pontes, plataformas oceânicas, veículos que se locomovem a altas velocidades, edifícios altos, etc.

Notadamente no campo da engenharia oceânica, a exploração de petróleo e gás começou a ser desenvolvida no hostil ambiente formado pelas grandes profundidades dos oceanos. Conforme pode ser visto em ARKELL(1995), desde o final da década de 1960 o Reino Unido têm-se envolvido com a exploração de petróleo e gás em larga escala em campos situados no Mar do Norte. Projeções do governo inglês indicam que as vastas reservas que se encontram nestas regiões representarão uma viável fonte econômica de hidrocarbonetos que deverá durar pelo menos até o final da segunda década do próximo século.

Os processos de extração de recursos naturais em outros campos mais acessíveis, tais como exploração de petróleo em lâminas d’água de pouca profundidade ou em águas sem a presença de fortes movimentos do mar como ondas severas, requerem soluções de engenharia mais simples e menos dispendiosas. Entretanto, muita pesquisa têm sido realizada para a exploração de petróleo em águas profundas, onde

problemas de excessivo carregamento hidrodinâmico devido a grandes ondas (“swell”) ocorrem no caso das plataformas do Mar do Norte e variação da corrente oceânica ao longo do comprimento dos “risers” no caso da Bacia de Campos, litoral do estado de Rio de Janeiro, onde estão localizadas diversas plataformas de prospeção da PETROBRÁS.

Segundo ARKELL(1995), a motivação para o estudo do escoamento ao redor de corpos rombudos também reside no fato de que, para muitas estruturas situadas na terra ou no mar, a preocupação principal muitas vezes acaba sendo a análise estrutural (estática) dessas estruturas, deixando para um segundo plano os carregamentos hidrodinâmicos. As conseqüências associadas com esta prática podem ser perigosas: um dos casos mais freqüentemente citados e certamente dos mais traumáticos foi o colapso da ponte suspensa Tacoma Narrows em 7 de Novembro de 1940: vórtices extremamente fortes, alimentados por ventos a altíssima velocidade, causaram oscilações torsionais crescentes na ponte até atingir a sua freqüência natural, obtendo-se finalmente movimentos rotacionais de grande escala levando ao inevitável colapso da estrutura. Foi possível somente na década de 1980, através de experimentos realizados em túnel de vento, provar que os severos movimentos rotacionais da ponte foram causados pelos efeitos de sincronização da força atuante e o deslocamento (“lock-in”) entre um certo modo estrutural de rotação da ponte e a freqüência de desprendimento de vórtices a partir da mesma.

A integridade das plataformas oceânicas (vide figura 1.1 fornecida por NISHIMOTO(1997)) também é afetada por este mecanismo de desprendimento alternado de vórtices, conforme descrito em BLEVINS(1990). A emissão ou desprendimento de

vórtices (“vortex shedding”) presente na esteira dos cilindros que compõem a estrutura da plataforma conduz a grandes flutuações das forças de pressão no sentido transversal do escoamento causando oscilações.

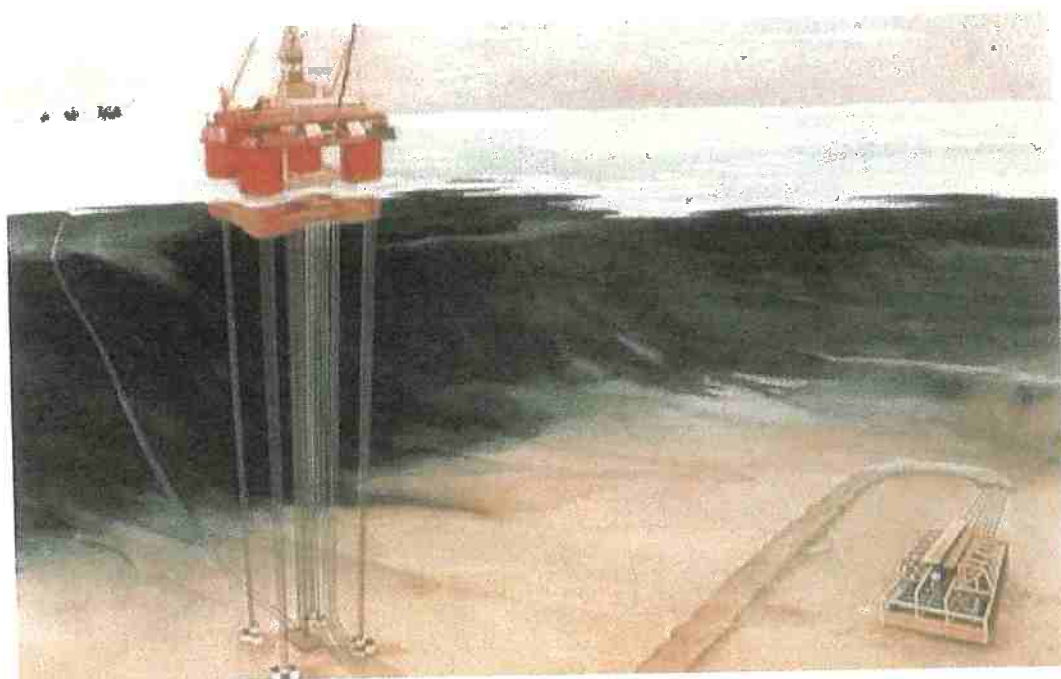


Fig. 1.1. Plataforma Offshore tipo “Tension Leg”. Observam-se a estrutura dos componentes cilíndricos tais como os tubos flexíveis (risers) que levam a produção do poço petrolífero para a superfície (NISHIMOTO(1997)).

Algumas soluções de engenharia têm sido propostas com o intuito de diminuir ou atenuar os efeitos do fenômeno de emissão ou desprendimento de vórtices e vibração induzida pelo escoamento em membros cilíndricos das plataformas oceânicas. Segundo pode ser visto na figura 1.2 extraída de RANDALL(1997), uma nova estrutura oceânica para prospeção de petróleo em águas profundas (acima de 1000 m) foi projetada e desenvolvida pela companhia norte-americana de exploração e prospeção de petróleo

CHEVRON. Tal estrutura, conhecida como "spar platform", visa basicamente proteger os risers que trazem a produção do poço petrolífero localizada no fundo do oceano da ação da vibração induzida pelo escoamento.

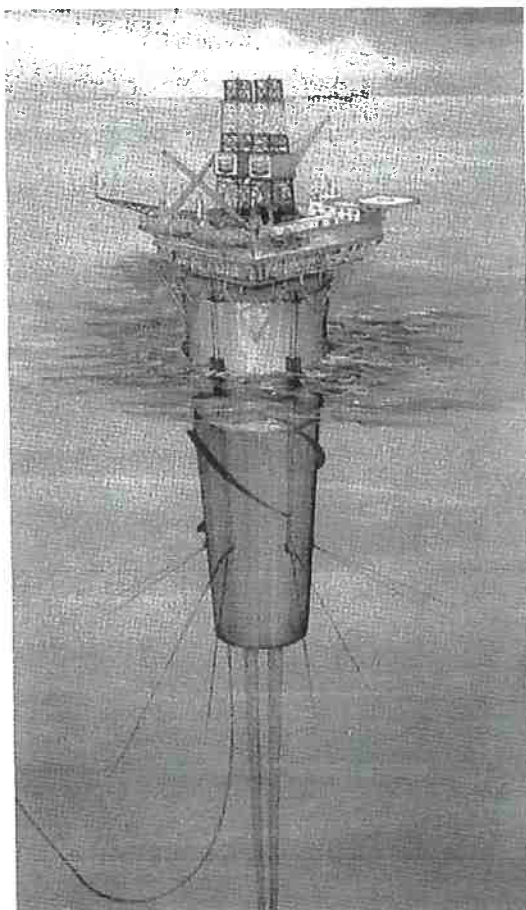


Fig. 1.2. Plataforma Offshore tipo “spar”. Nota-se a estrutura situada logo abaixo da linha d’água que protege os risers da ação da correnteza (RANDALL(1997)).

Outros mecanismos de supressão de emissão de vórtices em risers têm sido desenvolvidos, os quais afetam a posição do ponto de separação e como as camadas cisalhantes separam da parede do cilindro. Neste grupo pode-se incluir os “strakes”, dispositivos amplamente utilizados em estruturas cilíndricas sujeitas a vento e em tecnologia marítima. Atenuadores desta classe são apresentados na figura 1.3,

reproduzida de ZDRAVKOVICH (1981). Os "strakes" estão indicados no primeiro esquema à esquerda da figura.

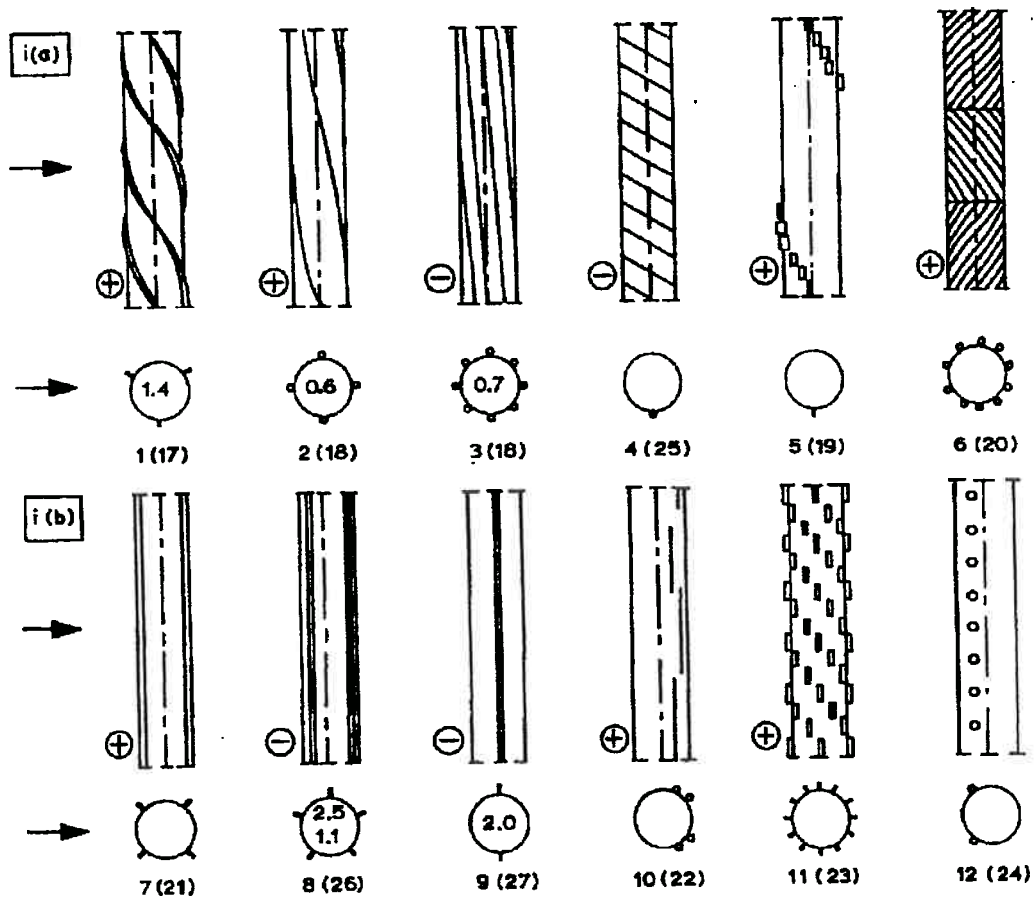


Fig. 1.3. Mecanismos de atenuação de vibrações induzidas pelo escoamento reproduzida de ZDRAVKOVICH(1981).

O princípio de operação dos strakes baseia-se no fato que na presença destes a correlação das forças fluido-dinâmicas ao longo da envergadura do cilindro, a qual ocorre na presença de "lock-in", é quebrada. A tridimensionalidade introduzida no escoamento interfere com a periodicidade da formação e desprendimento dos vórtices na esteira fazendo com que a intensidade destes seja menor quando comparada àquela de vórtices predominantemente bidimensionais.

Em resumo, a vibração induzida pelo escoamento é geralmente um indesejável e destrutivo fenômeno em engenharia, sendo amplificado com a ocorrência de “lock-in”. Muito esforço têm sido despendido no estudo dos efeitos da vibração induzida pelo escoamento através de mecanismos passivos e ativos. Nesse sentido, o progresso que têm sido observado nesta área advém da compreensão obtida através de estudos fundamentais.

A vantagem da utilização de métodos numéricos para a análise do problema é a possibilidade de estudar em detalhes e com condições controladas o escoamento, realizando estudos paramétricos a um custo factível quando comparado a estudos experimentais. Entretanto, o simulador numérico deve ser cuidadosamente validado e confrontado com resultados experimentais para que estudos inéditos possam ser considerados confiáveis.

Um exemplo do emprego bem sucedido da Dinâmica dos Fluidos Computacional como ferramenta de projeto e análise pode ser encontrado em MORGAN AND WEATHERILL(1996): no projeto do avião A330/A340 da companhia norte-americana AIRBUS, 800 tipos de asas foram analisados, levando-se um tempo de 2 anos a um custo de US\$1.000.000. Caso a mesma análise paramétrica fosse feita em túnel de vento, para instrumentar e ensaiar os 800 tipos de asas seriam necessários 150 anos a um custo de aproximadamente U\$130.000.000. Vale ressaltar entretanto que tal ferramenta de projeto somente tornou-se viável após a validação exaustiva do simulador numérico através da comparação com resultados experimentais.

Em face do que foi exposto, pode-se agora definir os objetivos do presente trabalho o qual é essencialmente de conteúdo numérico:

- 1) Desenvolver ferramentas computacionais para estudar os efeitos do escoamento ao redor de um ou mais corpos, em regime variado e para problemas bidimensionais, notadamente para números de Reynolds até 200;
- 2) Utilizar tal ferramenta para estudar a influência nos coeficientes de arrasto e sustentação de um cilindro quando da existência de outros cilindros próximos a este. Um estudo paramétrico sobre a variação da distância entre os centros dos cilindros para duas configurações básicas em relação à incidência do escoamento externo é apresentado;
- 3) Desenvolver ferramentas computacionais para estudar os efeitos do escoamento ao redor de um ou mais corpos de qualquer formato, em regime variado e para problemas tridimensionais, notadamente para números de Reynolds (Re) até 250;
- 4) Utilizar tal ferramenta para estudar a influência no campo de vorticidade, número de Strouhal e coeficiente de pressão do escoamento tridimensional ao redor do cilindro fixo para número de Reynolds próximos à faixa de transição do escoamento bidimensional para tridimensional (ligeiramente acima de $Re = 200$), variando-se o comprimento do cilindro;
- 5) Aplicar tal ferramenta no estudo do movimento oscilatório forçado do cilindro.

1.2. ASPECTOS FUNDAMENTAIS DO FENÔMENO DE EMISSÃO DE VÓRTICES OU “VORTEX SHEDDING” EM UM CILINDRO

1.2.1. REVISÃO HISTÓRICA E ASPECTOS FÍSICOS DO FENÔMENO

A primeira evidência da observação do fenômeno de emissão de vórtices parece ter ocorrido na Grécia antiga, onde, segundo BLEVINS(1990), cordas de harpa tensionadas soavam quando expostas à brisa noturna ("Aeolian Tones"). No século 15, *Leonardo da Vinci* desenhou o que seria uma fileira de vórtices na esteira de um pilar de uma ponte sujeito à ação da correnteza, conforme pode ser visto na figura 1.4, extraído de LUGT(1983).



Fig. 1.4. Leonardo da Vinci: *O idoso e os vórtices* (provavelmente um auto-retrato), reproduzido de LUGT(1983)

Entretanto, foi somente em 1878 que a primeira investigação formal foi conduzida pelo então cientista Checo *Strouhal* em Liepzig, onde a frequência do som produzida pela translação de cordas cilíndricas através do ar foi medida. Strouhal concluiu que os “Aeolian Tones” gerados pelas cordas dispostas ao vento eram proporcionais à velocidade da corrente dividida pelo diâmetro da corda. Observou ainda que o som aumentava consideravelmente quando os tons naturais das cordas coincidiam com os “Aeolian Tones”. Posteriormente, em 1879, *Lord Rayleigh* descobriu que a corda de um violino sujeito a uma corrente vibrava preferencialmente na direção transversal ao escoamento e não na direção do mesmo, como se supunha anteriormente. Definiu o *número de Strouhal*, S , como sendo a constante de proporcionalidade adimensional entre a frequência de emissão de vórtices e a velocidade da corrente livre dividida pelo diâmetro do cilindro, ou seja:

$$f_v = S \frac{U}{D}, \quad (1.1)$$

onde f_v é a frequência de emissão ou de desprendimento de vórtices em ciclos por segundo (hertz), U é a velocidade da corrente livre e D é o diâmetro do cilindro.

Em 1889 o pintor holandês *Vincent William Van Gogh* retratou em uma de suas obras o que seria o fenômeno de emissão de vórtices. O óleo sobre tela intitulado “Noite Estrelada” (fig. 1.5) feito na cidade de St. Rémy de Provence, sul da França, revela a interpretação do artista sobre a “impressionante grandeza e a turbulência do céu estrelado”. Escrevendo a seu irmão Théo, em Paris, teria dito: “*Esta é a eterna questão: a vida é apenas isto ou conhecemos apenas um hemisfério antes da morte? Quanto a mim, não sei responder, mas a visão das estrelas sempre me faz pensar.*”



a)



b)

Fig. 1.5. a) Tela "Noite Estrelada", de Vincent Van Gogh. b) Detalhe da tela mostrando a visão do artista sobre o fenômeno da emissão de vórtices. Extraídos de ANDERSON(1995)

Em 1902, segundo ARKELL(1995), *Ahlborn* publicou as primeiras figuras mostrando a disposição alternada de vórtices na esteira de um cilindro. Já em 1908 *Benard* associou a periodicidade da esteira de um cilindro com a formação de vórtices. Entretanto, foi somente em 1911 que a dinâmica da esteira de vórtices e as características de estabilidade da configuração alternada foram analisadas através do pioneiro trabalho de *von Kármán*. Representando a esteira como sendo formada por duas fileiras paralelas de vórtices pontuais, ele foi capaz de mostrar que uma configuração somente seria estável caso uma dada razão de espaçamento dos vórtices fosse igual a $b/a = 0.281$ (a = espaçamento dos vórtices no sentido longitudinal e b = espaçamento dos vórtices no sentido transversal). A análise de *von Kármán*, apesar de limitada, é importante na medida que os dados experimentais para esteiras finitas de vórtices de cilindros mostram razões de espaçamento de mesma ordem de magnitude.

O fenômeno de emissão de vórtices ou “vortex shedding” de um cilindro em um escoamento subsônico é função do *número de Reynolds (Re)*, dado por:

$$Re = \frac{U D}{\nu}, \quad (1.2)$$

onde U é a velocidade da corrente livre e D é o diâmetro do cilindro e ν a viscosidade cinemática do fluido. O número de Reynolds representa a razão entre as forças de inércia e forças viscosas presentes em um dado escoamento de um fluido.

A figura 1.6 fornece os principais regimes de “vortex shedding” para um cilindro, de acordo com BLEVINS(1990). Para baixos números de Reynolds (menores que 5), o fluido segue o contorno do cilindro e observa-se o escoamento denominado “creeping flow”. Na faixa $5 \leq Re \leq 45$, ocorre separação do escoamento e forma-se um par simétrico de vórtices próximo ao cilindro. O comprimento destes vórtices na direção do escoamento aumenta linearmente com o número de Reynolds, alcançando um comprimento de três cilindros para $Re \cong 45$. Aumentando-se ainda mais o número de Reynolds, a esteira torna-se instável e um dos vórtices se desprende. Surge então uma esteira periódica com vórtices de sinais opostos. Entre $Re = 150$ e $Re = 300$, a separação dos vórtices da esteira torna-se turbulenta, embora a camada limite no cilindro ainda permaneça em regime laminar.

Para o número de Reynolds entre 300 e 3.0×10^5 entra-se na faixa *subcrítica*. Nesta faixa a camada limite laminar separa a aproximadamente 80 graus a partir do ponto de estagnação frontal do cilindro e a emissão de vórtices é intensa e periódica. Já para a faixa considerada *transicional*, $3.0 \times 10^5 < Re < 3.5 \times 10^6$, a camada limite do cilindro torna-se turbulenta, os pontos de separação se movem a 140 graus e o

coeficiente de arrasto do cilindro cai a 0.3. Entretanto, conforme será visto adiante seguindo as observações de WILLIAMSON(1991), efeitos tridimensionais passam a influenciar o processo de emissão de vórtices já a partir de $Re = 180$.

Na faixa *supercrítica* ($Re > 3.5 \times 10^6$) a emissão de vórtices regular é restabelecida com a presença de uma camada limite turbulenta. Segundo BLEVINS(1990), fotos de satélite de nuvens próximas a ilhas mostram que o processo de “vortex shedding” persiste mesmo a altos números de Reynolds, tais como 10^{11} .

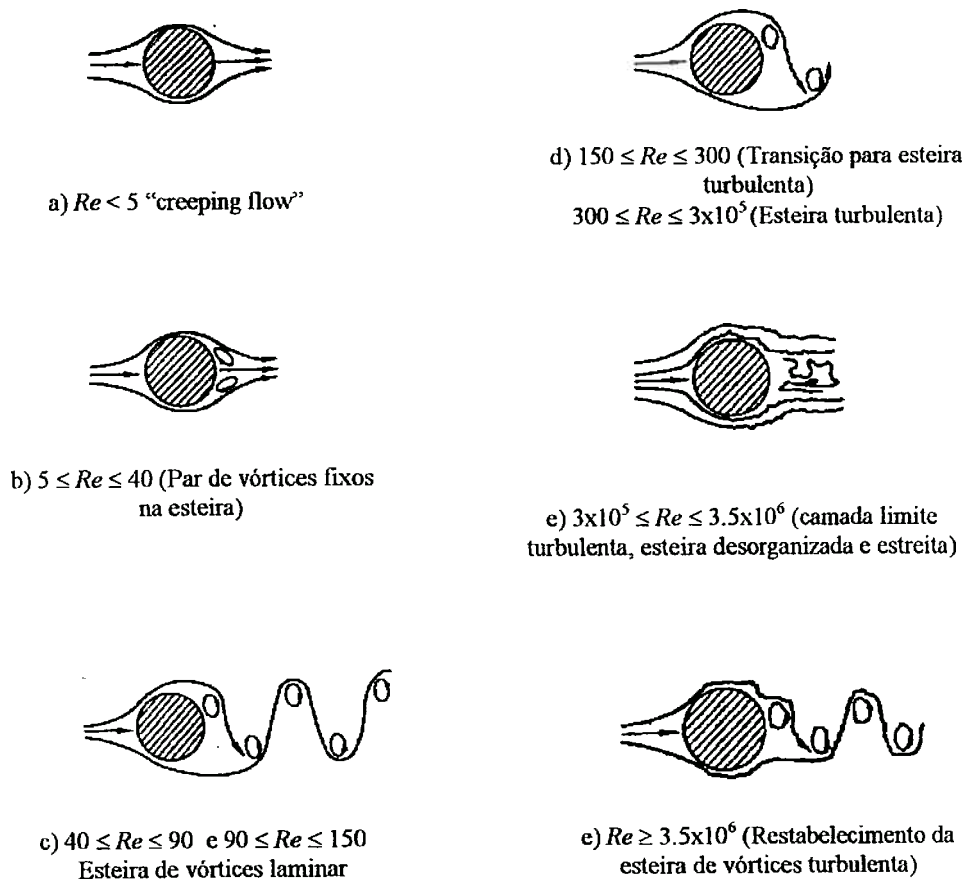


Fig. 1.6. Regimes do escoamento e emissão de vórtices em cilindros, segundo BLEVINS(1990).

Uma descrição física do mecanismo da formação de vórtices pode ser encontrado em GERRARD(1966). Ele postulou que a interação mútua entre as duas camadas cisalhantes (“shear-layers”) é o fator preponderante na formação dos vórtices na esteira. Segundo Gerrard, o vórtice cresce através do ganho de circulação obtido a partir da “shear-layer” a qual está conectada. Em um determinado instante, o vórtice em crescimento é forte o suficiente para atrair a “shear-layer” separando do lado oposto. A aproximação de vorticidade de sinal oposta, em suficiente concentração, corta o suprimento adicional de circulação ao vórtice em formação, o qual é ejetado e segue o escoamento a jusante.

A figura 1.7 mostra o modelo de formação de vórtices proposto por Gerrard. Segundo sua interpretação, as partículas de fluido de “shear-layers” opostas podem seguir um dos seguintes caminhos, indicados na figura:

- a) Podem se fundir ao vórtice em formação reduzindo sua circulação;
- b) Podem encontrar seu próprio caminho na “shear-layer” com vorticidade de sinal oposta ou
- c) Podem voltar à região da esteira próxima ao corpo.

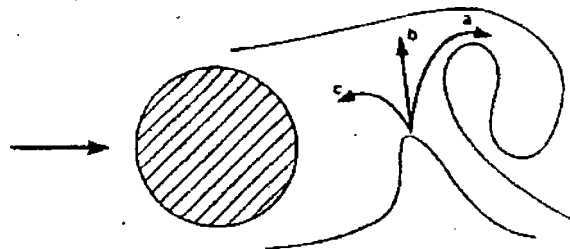


Fig. 1.7. Modelo de formação de vórtices segundo GERRARD(1966).

1.2.2. ASPECTOS TRIDIMENSIONAIS DO FENÔMENO DE EMISSÃO DE VÓRTICES

Experimentos conduzidos por WILLIAMSON(1991) mostraram que os efeitos da tridimensionalidade na esteira de um cilindro são notados quando o regime de emissão de vórtices é ainda laminar ($Re < 180$).

A existência de uma descontinuidade na curva *Strouhal-Reynolds* ($S-Re$) está relacionada, segundo WILLIAMSON(1991), à transição entre diferentes modos de “vortex-shedding” oblíquo. A emissão oblíqua é causada pelas condições de contorno no final do cilindro mesmo com comprimento da ordem de centenas de diâmetros. Manipulando as condições de contorno das extremidades do cilindro, o modo paralelo de emissão de vórtices pode ser induzido, o qual resulta em uma curva completa e contínua de $S-Re$, chamada de *universal*. A curva recebe este nome por considerar que tanto os modos oblíquo e paralelo podem ser colapsados em uma única curva contínua através de uma transformação simples. A importância em se definir uma curva universal para o estudo bidimensional do fenômeno de emissão de vórtices reside na possibilidade de poder se comparar os resultados experimentais com os resultados numéricos. Entretanto, a adoção de uma curva “colapsada” é válida apenas para $Re \leq 200$.

Para números de Reynolds elevados, a transição para a tridimensionalidade na esteira envolve dois estágios sucessivos, cada um correspondendo a uma descontinuidade no comportamento da formação da esteira e na curva $S-Re$. A primeira descontinuidade (próximo de $Re = 180$) está associada ao início dos “loops” de vórtices e tem o comportamento típico do fenômeno de histerese. Já a segunda descontinuidade (entre $Re = 230-260$) corresponde a uma mudança para uma escala mais fina referente à

estrutura vortical, sendo que neste caso não há histerese e sugere-se que os dois modos de emissão de vórtices (A e B) se alternem continuamente. Na época em que os trabalhos de WILLIAMSON(1991) foram conduzidos, não haviam ainda simulações numéricas envolvendo a transição tridimensional da esteira de um cilindro. A figura 1.8 mostra a curva $S-Re$ para os regimes de emissão de vórtices laminar e transicional (em direção aos efeitos tridimensionais).

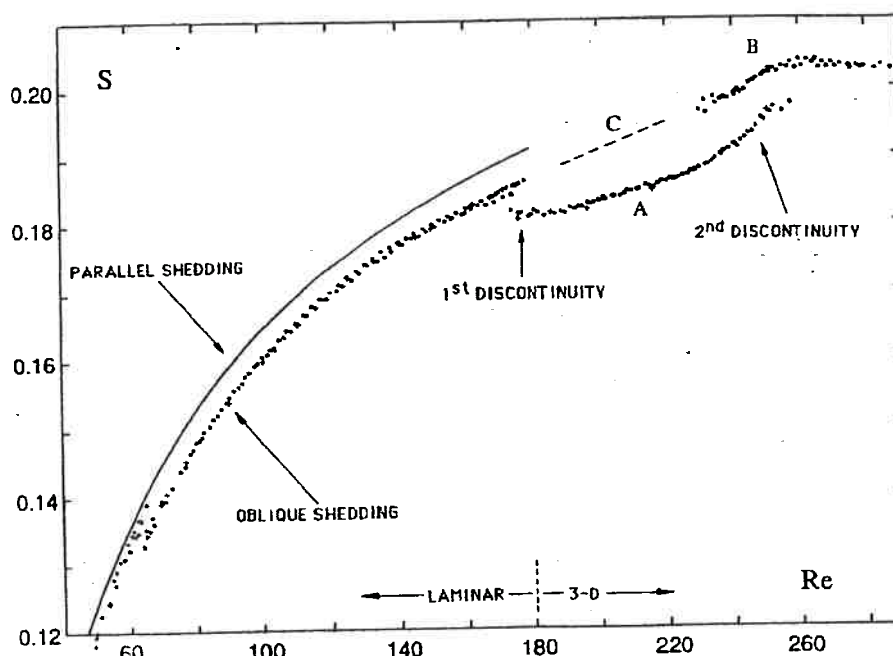


Fig. 1.8. Curva $S-Re$ para os regimes laminar e transicional segundo WILLIAMSON(1991).

A transição tridimensional envolve a formação de estruturas de larga escala, as quais possuem similaridades com indicações turbulentas encontradas na camada limite. Estas estruturas são causadas pelas interações de células ao longo do comprimento do cilindro de diferente frequência de emissão de vórtices.

1.3. SÍNTESE DA BIBLIOGRAFIA FUNDAMENTAL

Em função dos simuladores numéricos desenvolvidos neste trabalho e que serão apresentados adiante, a revisão bibliográfica será dividida em três categorias fundamentais: Método dos Vórtices Discretos (MVD), Método dos Elementos Finitos (MEF) e Método da Resolução por Partes ou Fractional Step Method (FSM).

1.3.1. MÉTODO DOS VÓRTICES DISCRETOS (MVD)

De uma forma geral, o Método dos Vórtices Discretos (MVD) difere dos métodos puramente Eulerianos tais como o Método das Diferenças Finitas (MDF), Método dos Volumes Finitos (MVF) e Método dos Elementos Finitos (MEF) na medida em que as propriedades do escoamento são transportadas através de partículas (vórtices) através de um enfoque Lagrangiano. O MVD têm sido utilizado para estudar escoamentos onde existem regiões com elevada vorticidade. Neste sentido, tal método é adequado para estudar o fenômeno da emissão de vórtices em corpos rombudos e, em especial, em cilindros.

As origens do MVD podem ser encontradas no trabalho de HELMHOLTZ(1858), o qual foi o primeiro a mostrar que escoamentos com regiões de elevada concentração de vorticidade poderiam ser modelados com vórtices de determinada circulação e seção transversal infinitesimal, i.e. linhas de vórtices. Todos os métodos dos vórtices discretos são baseados neste conceito, sendo que a evolução do campo discreto de vorticidade é feita convectando-se um a um os vórtices discretos. Tal convecção pode ser feita usando um método puramente Lagrangiano ou um esquema híbrido Lagrangiano-Euleriano.

KÁRMÁN(1911) utilizou o conceito de Helmholtz para representar uma esteira de vórtices. Entretanto, ele concentrou seu trabalho no estudo das propriedades de estabilidade dos vórtices pontuais. ROSENHEAD(1931) estudou a evolução temporal de uma distribuição particular de vórtices, integrando os vórtices discretos ao longo da trajetória. Em seu artigo, discutiu as instabilidades que se desenvolviam em uma superfície descontínua entre duas regiões com velocidades opostas. Esta superfície foi representada por vórtices discretos e uma posterior análise numérica para os primeiros instantes de tempo possibilitou a predição do desenvolvimento da linha de vórtices.

ABERNATHY e KRONAUER(1962) desenvolveram um estudo similar, mas consideraram duas superfícies de descontinuidades representadas pelos vórtices discretos. Aplicaram uma perturbação precedida de cálculos matemáticos até que a distribuição de vórtices possibilitasse a formação de uma esteira. Os resultados destes autores contribuíram de maneira importante para estudo de corpos rombudos na medida em que ficou constatado que a presença de duas “shear layers” era responsável pela formação do fenômeno de emissão de vórtices.

Seguindo o trabalho de Abernathy e Kronauer, outros pesquisadores desenvolveram o MVD para o estudo do escoamento ao redor de corpos rombudos. CLEMENTS(1973) desenvolveu um algoritmo para simular o escoamento ao redor de um corpo semi-infinito de seção quadrada. Em seu modelo foi empregada uma distribuição de vórtices discretos para a representação das “shear layers”. O fluido foi considerado invíscido e a velocidade de um dado vórtice calculada através da superposição da velocidade do escoamento ao longe e das velocidades induzidas pelos outros vórtices.

Seu trabalho conseguiu uma boa determinação do número de Strouhal quando comparado com os resultados experimentais obtidos por BEARMAN(1965).

SARPKAYA(1975) desenvolveu um MVD para simular o escoamento ao redor de uma placa inclinada. O número de Strouhal obtido foi muito bom mas o coeficiente de arrasto resultou maior que aquele observado nos experimentos de FAGE e JOHANSEN(1927). SPALART (1983) criou um algoritmo no qual os vórtices ao redor do corpo eram emitidos a cada instante de tempo. A convecção dos vórtices era feita diretamente no plano físico usando uma integração de Biot-Savart (BATCHELOR(1967)). Os resultados somente eram satisfatórios quando o corpo possuía o ponto de separação do escoamento fixado por fatores geométricos.

Em 1988, uma versão do MVD bidimensional que inclui difusão viscosa, cujos primeiros desenvolvimentos são atribuídos a GRAHAM(1988), foi desenvolvida no departamento de Engenharia Aeronáutica do Imperial College em Londres, Reino Unido. A inclusão dos efeitos viscosos pelo algoritmo permitiu simulações precisas do escoamento para baixos números de Reynolds. Embora este código seja relativamente rápido, sua desvantagem reside na impossibilidade de empregar qualquer tipo de malha (malhas não-estruturadas, por exemplo) uma vez que o mesmo utiliza uma transformação analítica de sistemas de coordenadas o que leva muitas vezes a dificuldades numéricas. Em sua forma básica o programa é restrito ao uso de malhas polares, as quais são ideais para a modelagem de problemas com escoamento oscilatório onde as estruturas vorticais permanecem, em geral, nas vizinhanças do corpo. Contudo, este tipo de malha não é eficiente na modelagem da esteira ao longe do cilindro onde os elementos da malha tornam-se maiores à medida que se caminha para jusante, fazendo

com que a simulação numérica seja prejudicada nestas regiões. Outro fato está associado à memória alocada: para simulações típicas de escoamento ao redor de cilindros, empregando malhas polares, aproximadamente 90% das células computacionais não possuem vórtices no seu interior, representando um alto custo computacional.

MENEGHINI(1993) utilizou o MVD bidimensional com difusão viscosa em malhas polares para estudar como a oscilação do cilindro afeta a emissão de vórtices e determinar numericamente para qual faixa de amplitude e frequência de oscilação a emissão de vórtices muda, caracterizando a região de 'lock-in' ou sincronização. Além disso, este trabalho buscou investigar também do ponto de vista numérico a súbita mudança no ângulo de fase entre o coeficiente de sustentação e o deslocamento do cilindro que ocorre quando a frequência de oscilação está próxima à frequência de emissão de vórtices. Outros aspectos estudados por MENEGHINI(1993) foi a ocorrência de diferentes modos de emissão de vórtices para grandes amplitudes de oscilação do cilindro e a dinâmica associada. Uma melhor compreensão de como a frequência de oscilação afeta os coeficientes de força e parâmetros da esteira como comprimento de formação e largura também constituíram tópicos de sua pesquisa.

O estudo da esteira de cilindros dispostos verticalmente os quais estão se movendo ao longo de um determinado fluido têm sido estudado por vários pesquisadores. Nesta área de pesquisa, ARKELL(1995) empregou o MVD com difusão viscosa para estudar o efeito da superfície livre no fenômeno de emissão de vórtices e o desenvolvimento de uma onda em um cilindro vertical para baixos números de Reynolds. Neste trabalho a superfície livre foi modelada como sendo uma onda senoidal, e, embora

não existam na prática ondas senoidais no oceano, em muitos casos esta aproximação é válida.

ARKELL(1995) desenvolveu um novo MVD bidimensional com difusão viscosa com emprego do Método dos Volumes Finitos (MVF) para malhas não-estruturadas de quadriláteros. A vantagem deste enfoque reside no fato da possibilidade de refinamento local da esteira, onde elevados gradientes são esperados, podendo assim controlar melhor a discretização da esteira também ao longe, melhorando a eficiência computacional do método. De maneira análoga, porém utilizando a metodologia dos elementos finitos, é o programa do MVD com difusão viscosa para malhas não-estruturadas desenvolvido por GIANNAKIDIS(1996).

Simulações tridimensionais de escoamentos viscosos através do MVD são relativamente escassos. Segundo ARKELL(1995), alguns autores usaram um método de filamento contínuo de vórtice para investigar numericamente a transição tridimensional em esteiras planas em placas. Outros estudaram a interação de um anel de vórtice em uma parede sólida usando uma extensão do MVD para três dimensões; neste caso a representação do campo de vorticidade é feita através de singularidades de vórtices tridimensionais – *vortons* – sendo que a difusão de vorticidade segue o modelo clássico desenvolvido por GRAHAM(1988). ARKELL(1995) desenvolveu um MVD tridimensional com difusão viscosa com emprego do Método dos Elementos Finitos (MEF) para malhas não-estruturadas de tetraedros. Empregou o conceito de *vortons* onde incluiu o efeito da superfície livre e comparou seus resultados com dados experimentais obtidos da literatura e experimentos desenvolvidos por ele próprio no tanque de provas do Imperial College em Londres, Reino Unido.

1.3.2. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF)

Especialmente entre as décadas de 40 e 60 desenvolveu-se o Método dos Elementos Finitos (MEF), cujas origens podem ser encontradas nos métodos matemáticos de aproximação tais como aqueles idealizados por RAYLEIGH, RITZ e GALERKIN.

O desenvolvimento da técnica de dividir uma estrutura em subestruturas menores de formas diferentes utilizando "elementos" foi iniciada por TURNER em 1956, em um estudo no qual apresentava as propriedades de um elemento triangular para problemas de estado plano de tensões. Posteriormente em 1960 CLOUGH utilizou pela primeira vez o termo *elementos finitos*.

Após a consagração do método na resolução de problemas mecânicos-estruturais lineares ou não, ZIENKIEWICZ E CHEUNG em 1965 começaram a empregá-lo na análise de problemas de meio contínuo. A partir daí o MEF passou a ser um método de aproximação para a obtenção da solução numérica de problemas físicos descritos por equações de campo em meios contínuos, utilizando em muitos casos os conceitos do Método da Diferenças Finitas.

Atualmente o MEF possui condições matemáticas precisas para a sua utilização, tais como critérios de convergência e funções de erro, consolidando dessa forma seu emprego como ferramenta na resolução de problemas de engenharia.

A figura 1.9 extraída de ZIENKIEWICZ AND MORGAN(1983) ilustra o processo de evolução que culminou nos atuais conceitos da técnica e análise do MEF.

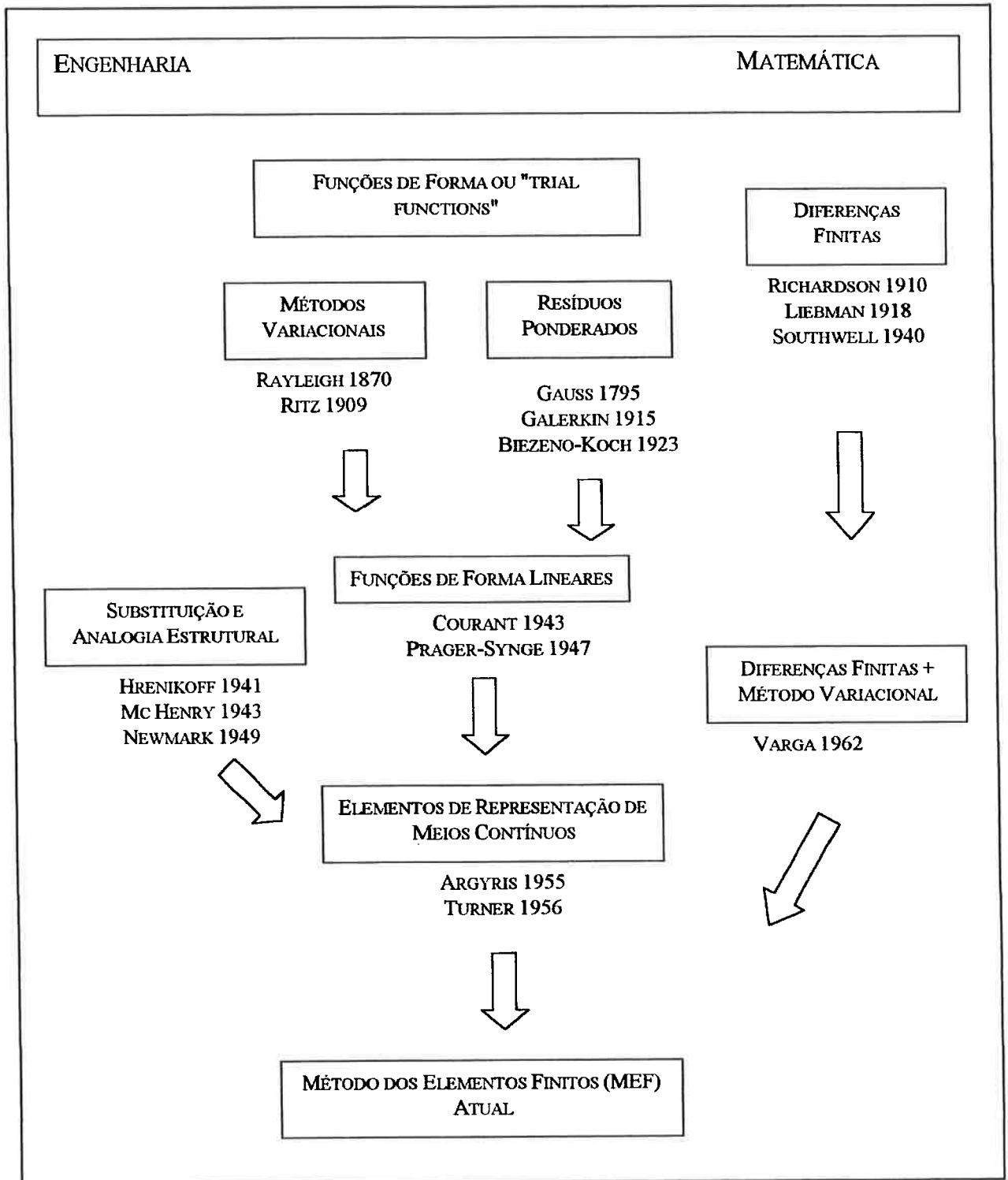


Fig. 1.9. Evolução histórica do Método dos Elementos Finitos (MEF), extraída de ZIENKIEWICZ AND MORGAN(1983).

1.3.3. MÉTODO DA RESOLUÇÃO POR PARTES OU FRACTIONAL STEP METHOD (FSM)

Assim como o MVD, o Método da Resolução por Partes das equações de quantidade de movimento ou Fractional Step Method (FSM) é um método eficiente para a resolução das equações de Navier-Stokes.

Uma descrição do método pode ser encontrada em FERZIGER AND PERIC(1996) assim como em DESPOTIS AND TSANGARIS (1996). Neste método um step intermediário é considerado a fim de resultar um campo de velocidades que satisfaça as equações da quantidade de movimento sem levar em conta o termo da pressão. Dessa forma, para que se obtenha a divergência da velocidade igual a zero, o campo de velocidade intermediário e a pressão são corrigidos seqüencialmente pelo gradiente de pressões e pela divergência do campo de velocidades intermediário. Este enfoque nada mais é que o Método da Projeção de CHORIN(1968), cujas idéias pioneiras foram adotadas por KIM AND MOIN(1985) em seus trabalhos.

Outros autores desenvolveram uma variante do método de CHORIN conhecido como o método da velocidade-pressão o qual calcula o campo intermediário de velocidades levando em conta o gradiente de pressões nas equações da quantidade de movimento. A pressão é então corrigida por um valor proporcional à divergência da velocidade e um novo campo de velocidade é obtido até que a divergência da velocidade tenda a zero.

SELVAM (1997), ESFAHANI(1998) e SALTARA(1999) utilizaram o FSM junto com simulação dos grandes vórtices (LES) para estudar o escoamento ao redor de corpos rombudos. ESFAHANI simulou o escoamento ao redor de cilindros de seção

retangular com número de Reynolds ao redor de 40.000. SELVAM e SALTARA estudaram o problema em cilindros de seção circular com número de Reynolds igual a 10.000.

MELING AND DALHEIM(1997) estudaram o movimento do cilindro livre para oscilar na direção transversal ao escoamento para baixos números de Reynolds. LU et al. (1997) usaram o FSM juntamente com o LES para estudar o escoamento tridimensional ao redor do cilindro para $Re = 20.000$ e $Re = 44.200$, usando uma malha polar.

A tabela 1.1 dada a seguir fornece informações suplementares sobre métodos computacionais recentes utilizados por diferentes pesquisadores no estudo da emissão do fenômeno de vórtices em um cilindro. A tabela apresentada é uma atualização das informações fornecidas por WILLIAMSON(1991).

Pesquisador	Método Numérico
Braza, Chassaing & Ha Minh (1986)	Método dos Volumes Finitos
Martinez (1987)	Método das Diferenças Finitas
Sa & Chang (1988)	Método das Diferenças Finitas
Lecoince & Piquet (1988)	Método das Diferenças Finitas
Karniadakis & Triantafyllou (1989)	Método Espectral
Young & Ni (1989)	Método dos Elementos Finitos
Dolan, Graham & Young (1990)	Método dos Elementos Finitos + Método dos Vórtices Discretos
Giannakidis (1996)	Método dos Elementos Finitos + Método dos Vórtices Discretos
Newman & Karniadakis (1996)	Método Espectral
Barkley & Henderson (1996)	Método Espectral
Saltara (1999)	Método dos Volumes Finitos (Voronoi) + Método dos Vórtices Discretos
Saltara (1999)	Método dos Volumes Finitos + Método da Resolução por Partes

Tabela 1.1. Outros exemplos de utilização de métodos computacionais no estudo do fenômeno de emissão de vórtices em cilindros (atualizada a partir de WILLIAMSON(1991)).

2. APRESENTAÇÃO DOS SIMULADORES NUMÉRICOS APLICADOS À RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS BIDIMENSIONAIS

Este capítulo tem por objetivo apresentar a formulação dos três simuladores desenvolvidos para a resolução de problemas bidimensionais utilizando malhas não-estruturadas. Os métodos são mostrados na ordem em que os simuladores foram concebidos, visando a obtenção de informações e experiências que pudessem levar ao desenvolvimento do simulador numérico aplicado ao escoamento tridimensional ao redor do cilindro.

Dessa forma, foram desenvolvidos nesta etapa os seguintes simuladores:

- 1) Método dos Vórtices Discretos (MVD) + Método dos Elementos Finitos (MEF) com formulação vorticidade e função de corrente;
- 2) Método dos Vórtices Discretos (MVD) + Método dos Elementos Finitos (MEF) com formulação vorticidade e velocidade;
- 3) Método da Resolução por Partes (FSM) + Método dos Elementos Finitos (MEF) para a resolução da pressão e velocidade.

Os programas acima descritos possuem caráter absolutamente geral, ou seja, podem ser aplicados a quaisquer geometrias. As malhas computacionais utilizadas para discretizar o domínio de cálculo são malhas não-estruturadas de triângulos, as quais possuem a vantagem de não ter qualquer lei de formação, ou seja, o usuário está livre para refinar as regiões de interesse onde ocorrem elevados gradientes de determinadas variáveis em estudo.

2.1. MVD + MEF COM FORMULAÇÃO FUNÇÃO DE CORRENTE-VORTICIDADE (MVD+MEF $\psi - \omega$)

O método dos vórtices discretos foi utilizado CHORIN(1973) e CLEMENTS(1973) para a resolução de escoamentos externos, estudando de forma lagrangeana o movimento de vórtices pontuais que carregam uma dada circulação. Inicialmente, não se utilizavam malhas, pois ou o fluido era considerado invíscido, ou o processo de difusão era simulado através de técnicas como o aumento do tamanho do raio do vórtice, proposto por NAGANO et al.(1982), ou o deslocamento aleatório (“*random walk*”) proposto também por CHORIN(1973). As velocidades para determinar o deslocamento de um dado vórtice eram calculadas pela lei de Biot-Savart, considerando-se as influências de todos os outros vórtices, somadas à velocidade do escoamento ao longe. Conforme citado anteriormente, GRAHAM(1988) propôs uma técnica híbrida conhecida como “*vortex in cell*”, e é utilizada neste trabalho assim como em SALTARA(1999) e MENECHINI(1993).

A metodologia aplicada ao MVD com difusão viscosa para malhas não-estruturadas usando-se o MEF segue a estrutura dada por GIANNAKIDIS(1996). Entretanto, a formulação das equações fundamentais foi feita tomando-se como base o desenvolvimento realizado por MENECHINI(1993).

As equações bidimensionais de Navier-Stokes na forma de função de corrente ψ e vorticidade ω são resolvidas através de uma formulação híbrida. A convecção da vorticidade é resolvida seguindo os vórtices discretos na malha, de acordo com o método

Lagrangiano. Já a difusão de vorticidade é resolvida diretamente na malha usando-se uma formulação Euleriana.

A condição de aderência na parede do cilindro é satisfeita através da conservação do fluxo de vorticidade na mesma. Dessa forma, é possível resolver-se adequadamente a camada limite e obter-se por conseguinte uma solução precisa dos pontos de separação do escoamento. A formulação “vortex-in-cell” é empregada a fim de calcular as velocidades durante a convecção dos vórtices.

2.1.1. FORMULAÇÃO DAS EQUAÇÕES PARA A FUNÇÃO DE CORRENTE E VORTICIDADE

A equação de Poisson para a função de corrente e vorticidade é dada através da seguinte equação

$$\nabla^2 \psi = -\omega \quad (2.1)$$

Já a equação de transporte de vorticidade é dada por

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \nabla^2 \omega \quad (2.2)$$

A solução deste conjunto de equações deve ser obtida, de acordo com a metodologia do MVD, através da técnica do “*Time Split Approach*”. Isto significa resolver o conjunto de equações usando-se dois enfoques fundamentais:

- 1) Tratamento Euleriano para os termos difusivos;
- 2) Tratamento Lagrangiano para os termos convectivos das equações de Navier-Stokes.

Utilizando-se inicialmente o enfoque Euleriano, resolve-se a equação de Poisson obtendo-se a função de corrente nos nós da malha não-estruturada. Posteriormente calcula-se o campo de velocidades através de relações usuais. Em outras palavras, deve-se resolver o conjunto de equações

$$\nabla^2 \psi_{n+1} = \omega_n \quad (2.3)$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.4)$$

onde n é o instante anterior, $n+1$ o instante posterior.

Para a função da linha de corrente, a aproximação utilizada pelo MEF via Método dos Resíduos Ponderados conduz o problema, através do tratamento Euleriano, a um sistema de equações na forma discretizada (informações sobre o processo de montagem das matrizes fundamentais através do MEF são fornecidas no capítulo 9 - APÊNDICES)

$$[\mathbf{K}][\psi]^{n+1} = [\mathbf{f}]^n \quad (2.5)$$

onde \mathbf{K} é a matriz de rigidez do sistema (simétrica, esparsa e de banda) que depende somente da distribuição dos nós na malha computacional e \mathbf{f} é uma matriz de carregamento que depende das condições de contorno (tipo Dirichlet) dadas por

$$\psi = 0 \text{ na parede sólida do cilindro}$$

$$\psi_\infty = \psi_{\text{Free Stream}} \quad (2.6)$$

A equação de difusão de vorticidade é resolvida também dentro do enfoque Euleriano

$$\frac{\partial \omega_{n+1}}{\partial t} = \nu \left(\theta \nabla^2 \omega_{n+1} + (1 - \theta) \nabla^2 \omega_n \right) \quad (2.7)$$

onde θ é um número entre 0 e 1 que define o esquema numérico a ser utilizado. De maneira análoga, a formulação do MEF leva ao seguinte sistema para a equação de difusão de vorticidade (utilizando para a discretização do tempo formulação de diferenças finitas para frente)

$$\frac{\omega_{n+1} - \omega_n}{\Delta t} = \nu \nabla^2 \omega_{n+1} \quad (2.8)$$

obtendo-se finalmente para a forma discretizada

$$[\mathbf{K} + \mathbf{L}][\omega]^{n+1} = [\mathbf{f}']^n \quad (2.9)$$

onde \mathbf{L} é uma matriz conhecida como *matriz de massa* que surge na formulação do MEF para discretizações no domínio do tempo. As condições de contorno para a obtenção do vetor carregamento \mathbf{f}' são agora dadas através de

$$\omega = 0 \quad (\text{na fronteira externa do domínio}) \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial n} = - \frac{u_s}{\nu \Delta t} \quad (\text{na parede do cilindro}) \quad (2.11)$$

onde u_s é a velocidade tangencial nos nós da parede do cilindro.

As equações (2.5) e (2.9) devem ser resolvidas muitas vezes em uma simulação. Dessa forma, procurou-se implementar um método específico para resolução de matrizes esparsas, de banda e simétricas que fosse otimizado em relação a economia do tempo computacional utilizado e memória alocada. Para tal tarefa foi implementado o

“Preconditioned Conjugate Gradient Method” (PCG), o qual é apresentado no capítulo APÊNDICES através de uma análise numérica de validação através do MEF.

O enfoque Lagrangiano é responsável pela convecção da vorticidade através da utilização de vórtices discretos. Segue então que os vórtices são convectados através das seguintes equações seguindo a metodologia do MVD:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\partial \psi_{n+1}}{\partial y} \Delta t \quad (2.12)$$

$$y_{n+1} = y_n - \frac{\partial \psi_{n+1}}{\partial x} \Delta t \quad (2.13)$$

A localização dos vórtices durante a convecção dos mesmos na malha não-estruturada foi feita através de um algoritmo de busca especialmente desenvolvido utilizando a formulação do MEF. Através dessa rotina torna-se possível localizar para qual elemento o vórtice migrou com um número mínimo de iterações. Basicamente, o programa busca uma provável localização do vórtice através de uma direção fornecida pelas funções de forma, originadas da formulação do MEF. Detalhes da implementação deste algoritmo de busca serão fornecidos no desenvolvimento deste trabalho. Vale lembrar que no programa desenvolvido e testado por MENEGHINI(1993), o qual utiliza malhas estruturadas, os pontos vizinhos da malha no espaço físico são elementos vizinhos na matriz que contém informações da malha. Dessa forma, para o caso de malhas estruturadas, as coordenadas fornecem informação suficiente para a localização dos vórtices, não havendo necessidade de um algoritmo de busca.

No primeiro passo do enfoque Lagrangiano, os vórtices discretos são introduzidos nos nós onde houve uma variação no valor da vorticidade devido à difusão

da mesma na camada limite e quando não existem vórtices discretos em elementos contíguos a este nó. A convecção dos vórtices é realizada usando-se um esquema de primeira ordem conforme mostrado nas equações acima. A seguir a vorticidade é redistribuída aos nós usando o MEF (no caso, as *funções de forma* do elemento finito). Conforme será mostrado adiante, analisando-se as expressões das funções de forma lineares, observa-se que as mesmas são equivalentes às relações de áreas presentes no “Area Weighting Scheme” do MVD.

Nos passos subsequentes, após a solução da equação de difusão, a variação de vorticidade em cada nó é projetada de volta nos vórtices pontuais que contribuíram para este nó através da mesma ponderação anteriormente realizada, de tal forma que a conservação de vorticidade é satisfeita. Neste estágio novos vórtices são criados apenas onde houve variação de vorticidade porém não existindo previamente algum vórtice que pudesse ter contribuído para a mesma. Detalhes do MVD podem ser encontrados em MENEGHINI(1993).

2.1.2. O MÉTODO "AREA WEIGHTING SCHEME" PARA MALHAS NÃO-ESTRUTURADAS

A equação de Poisson, equação (2.1), é resolvida a cada “time step” na malha não-estruturada, da mesma forma que em MENEGHINI(1993). A circulação do *i-ésimo* vórtice é projetada para os nós do elemento que contém o vórtice em um dado instante através do método “Area Weighting Scheme”. Este método foi implementado neste trabalho seguindo o procedimento adotado por GIANNAKIDIS(1996) para malhas não-estruturadas via MEF. O código computacional trabalha em termos de vorticidade nos

nós da malha ao invés de circulação. Este procedimento é o mesmo adotado por ARKELL(1995).

Seguindo a esquematização mostrada na figura 2.1, o valor da vorticidade para cada nó calculada através do “Area Weighting Scheme” é definida por ($NV = n^o$ de vórtices, $A_{elemento}$ = área do elemento, $A_{influência}$ = área de influência de um dado nó).

$$\omega (elemento, j) = \sum_{i=1}^{NV\ total} \Gamma (vortice\ i) \frac{A_j}{(A_{elemento} * A_{influência(j)})}, \quad j=1, 2, 3 \quad (2.14)$$

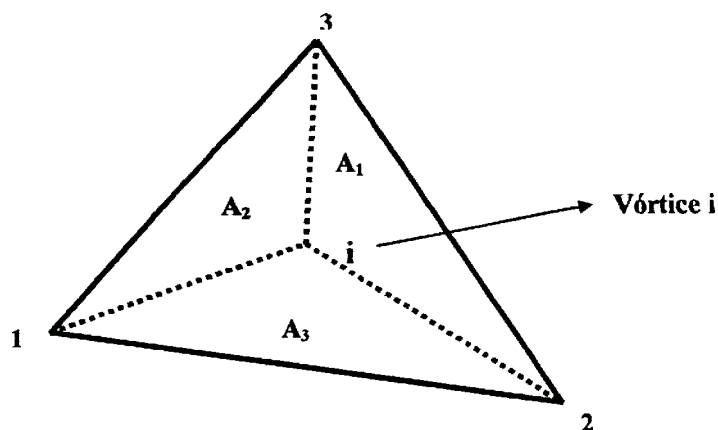


Fig. 2.1. Esquematização das áreas internas de um dado elemento para utilização no “Area Weighting Scheme” em malhas não-estruturadas.

A área de influência para um dado nó será definida, conforme sugerido por GIANNAKIDIS(1997), como sendo:

$$A_{influência} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{N\ Vizinhos} Area(i) \quad (2.15)$$

Conforme será visto adiante, no instante da criação do vórtice em uma dado nó admite-se que a circulação do mesmo será dada em função da vorticidade remanescente $d\omega$ e da área de influência. Já as áreas internas A_1 , A_2 e A_3 delimitadas pela presença de um determinado vórtice no elemento devem ser calculadas para o emprego da expressão (2.14). A técnica adotada seguindo o procedimento adotado por GIANNAKIDIS(1996) é a utilização das funções de forma “shape functions” e coeficientes α , β e γ dados em ZIENKIEWICZ AND MORGAN(1983). Obtém-se através das propriedades das funções de forma:

$$\begin{aligned} N_i^e &= \alpha_i^e + \beta_i^e X + \gamma_i^e Y \\ &= \frac{A_i}{A_{\text{elemento}}}, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (2.16)$$

onde X e Y são as coordenadas do vórtice em determinado instante. Observa-se através da análise da equação acima que a função de forma calculada em um determinado nó do elemento após a substituição das coordenadas do vórtice fornece a relação entre a área interna oposta a este nó e a área total do elemento.

2.1.3. ALGORITMO DE BUSCA DOS VÓRTICES: UTILIZAÇÃO DAS FUNÇÕES DE FORMA

Para a distribuição de vorticidade via “Area Weighting Scheme”, conforme apresentada anteriormente, torna-se necessário determinar para qual elemento o vórtice se moveu ou se, apesar de possuir novas coordenadas, este permanece no mesmo elemento em que se localizava anteriormente.

O algoritmo de busca implementado neste trabalho também adota o procedimento sugerido por GIANNAKIDIS(1996) e, de maneira análoga ao que foi apresentado para o método “Area Weighting Scheme”, utiliza as propriedades das funções de forma segundo ZIENKIEWICZ AND MORGAN(1983). De uma forma geral, realiza-se um teste inicial para verificar se o vórtice ainda permanece no elemento em que se localizava na iteração anterior. Caso isto seja verificado, a distribuição de vorticidade é realizada segundo a equação (2.14) de acordo com o “Area Weighting Scheme”. Caso contrário, dá-se início a uma busca nos prováveis elementos onde pode estar agora localizado o vórtice. Esta busca oferece como resultado uma direção em relação a um dos lados do último elemento onde estava o vórtice.

Para verificar inicialmente se o vórtice **está no interior** de um determinado elemento, utiliza-se o seguinte procedimento (considerando que os nós do elemento estejam numerados no sentido **anti-horário**):

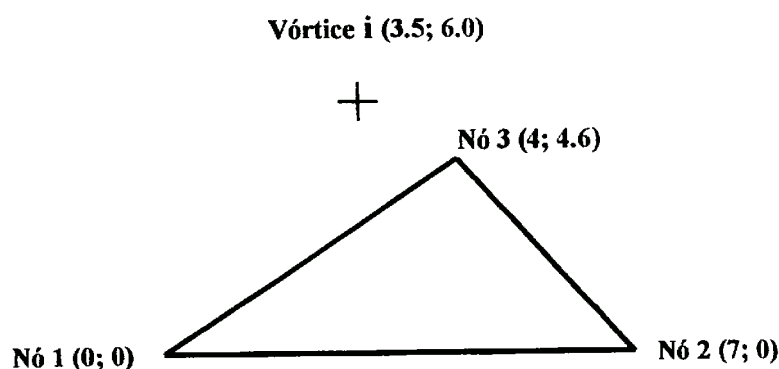
- 1) Substitui-se o valor das coordenadas X e Y do vórtice nas equações (2.16) para um dado elemento;
- 2) Caso **todas** as funções de forma forem **maiores que zero** ($N_i > 0, i = 1, 2, 3.$), o vórtice **está no interior** do elemento.

Para determinar qual a provável localização do vórtice caso a condição dada anteriormente não seja satisfeita (pelo **menos** uma função de forma N_i calculada com as coordenadas do vórtice resultou **negativa**) adota-se o seguinte procedimento:

1) Substitui-se o valor das coordenadas X e Y do vórtice nas equações (2.16) para um dado elemento e verifica-se qual das funções de forma N_i resultou **negativa**. Para o caso de **mais de uma função** resultar **negativa**, observa-se qual delas é **mais negativa**.

2) Caso, por exemplo, a função de forma N_1 tenha resultado **mais negativa**, o vórtice caminhou na **direção da aresta oposta ao nó 1** e assim sucessivamente. Neste caso, o programa irá apontar para o elemento vizinho ao nó 1 como provável elemento onde está localizado este vórtice. O processo se repete até a condição “estar no interior do elemento” seja satisfeita. Neste ponto o método “Area Weighting Scheme” é acionado.

A figura 2.2 dada a seguir fornece um exemplo numérico onde o vórtice não se encontra no interior do elemento. Após a verificação dos valores fornecidos pelas funções de forma, observa-se a correta direção de busca fornecida pelo algoritmo.



Funções de forma: $N_1 = -0.0589$, $N_2 = -0.245$, $N_3 = 1.303$. Resultado: N_2 é a função de forma mais negativa: o vórtice se moveu na direção oposta ao nó 2.

Fig. 2.2. Exemplo numérico do algoritmo de busca de vórtices em uma malha não-estruturada através da utilização das funções de forma.

Em termos de custo computacional, a busca dos vórtices é da ordem do número de vórtices. Embora o esforço de busca dos vórtices aumente na medida em que novos vórtices discretos são introduzidos no domínio da solução, o trabalho computacional realizado pelo algoritmo é extremamente pequeno face ao gasto computacional total para uma dada iteração do programa.

2.1.4. CRIAÇÃO DE VÓRTICES DISCRETOS: PROCEDIMENTO DE REDISTRIBUIÇÃO DE VORTICIDADE E CIRCULAÇÃO

A criação de um vórtice ocorre nos nós da malha e está relacionada ao valor da diferença de vorticidade $d\omega$ que ocorre após a solução da equação de difusão de vorticidade em regime transitório. De uma forma geral, caso um dado nó ainda não tenha recebido a contribuição de vorticidade oriunda de um vórtice discreto e se aquele ainda possuir um valor diferente de vorticidade após a etapa de resolução da equação de difusão, um novo vórtice surgirá naquele nó.

A fim de evitar que haja uma produção excessiva de novos vórtices, um valor numérico denominado “cut-off” é utilizado para limitar o processo de criação dos mesmos. O valor de cut-off prescrito no programa é baseado em um valor mínimo de circulação Γ (mesmo procedimento adotado por MENEGHINI(1993)). Dessa forma, têm-se o seguinte procedimento para a criação de um dado vórtice e redistribuição de circulação e vorticidade:

- 1) Após a determinação do novo valor de $d\omega$ oriundo da equação de vorticidade, testa-se a seguinte condição:

se $(d\omega(\text{nó}) * A_{\text{influência}}(\text{nó})) > \text{cut-off}$

então

$$\Gamma(\text{vórtice}) = d\omega(\text{nó}) * A_{\text{influência}}(\text{nó}) \quad (2.17)$$

$$x(\text{vórtice}) = x(\text{nó})$$

$$y(\text{vórtice}) = y(\text{nó})$$

- 2) Após ocorrer a movimentação dos vórtices na malha através do esquema Lagrangiano, ocorre a distribuição de vorticidade ω através do “Area Weighting Scheme”. A nova vorticidade nos nós será dada através de:

$$\omega_{(j)} = \sum_{i=1}^{NVórtices} \Gamma_i \frac{A_{(j)}}{A_{\text{elemento}} * A_{\text{Influência}(j)}}, j=1, 2, 3 \quad (2.18)$$

- 3) A nova circulação dos vórtices após a resolução da equação de difusão será dada através da seguinte expressão, levando-se em conta a somatória das áreas (A_g) que contribuíram para a formação de um novo vórtice:

$$\Gamma_{i_{\text{novo}}} = \Gamma_{i_{\text{anterior}}} + \sum_{i=1}^{NVórtices} d\omega_i * A_{\text{Influência}(j)} \frac{A_{(j)}}{A_{g(j)}}, j=1, 2, 3 \quad (2.19)$$

A figura 2.3 dada a seguir esquematiza o cálculo da nova circulação para um dado vórtice.

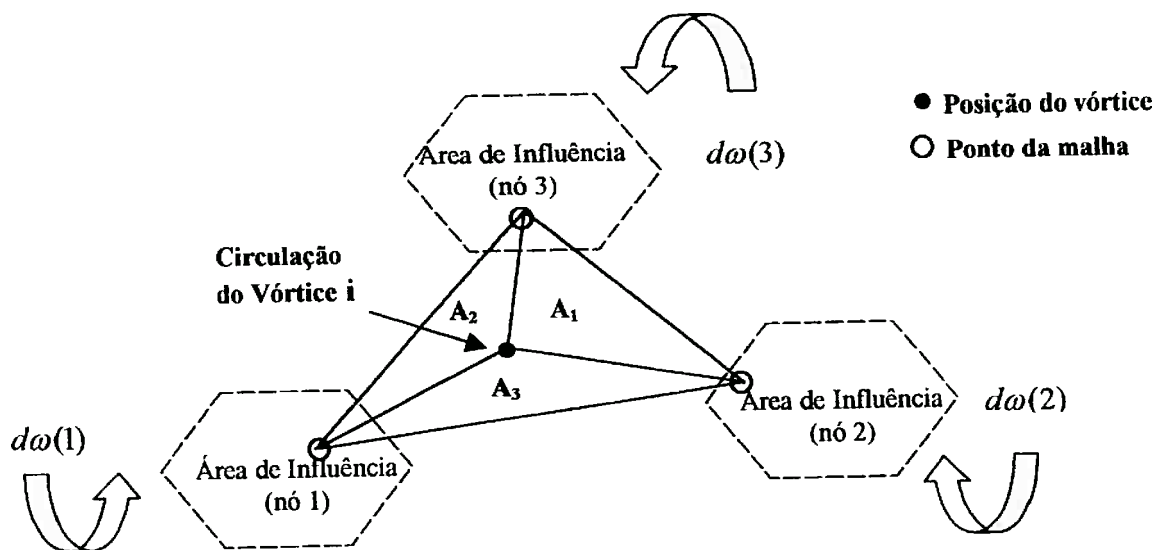


Fig. 2.3. Cálculo da nova circulação de um dado vórtice após a resolução da equação de difusão.

2.1.5. CÁLCULO DO CAMPO DE VELOCIDADES: UTILIZAÇÃO DAS FUNÇÕES DE FORMA E FUNÇÕES DE CORRENTE

O procedimento que será apresentado nesta seção possibilita o cálculo do campo de velocidades em todos os pontos da malha. Sabe-se que, a partir da definição de função de corrente, as velocidades nas direções x e y , respectivamente u e v , tomadas em relação a um eixo cartesiano ortogonal, serão dadas através das seguintes relações:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.20)$$

Considerando-se um elemento triangular qualquer, com valores de linha de corrente ψ_1, ψ_2 e ψ_3 respectivamente nos nós 1, 2 e 3 e funções de forma N_1, N_2 e N_3 , segue que:

$$\psi = N_1 \psi_1 + N_2 \psi_2 + N_3 \psi_3 \quad (2.21)$$

Derivando a expressão acima em relação a x e a y e levando-se em conta a definição das funções de forma N_1 , N_2 e N_3 , obtém-se o campo de velocidades no interior do elemento, considerado constante:

$$u = \gamma_1 \psi_1 + \gamma_2 \psi_2 + \gamma_3 \psi_3 \quad (2.22)$$

$$v = -(\beta_1 \psi_1 + \beta_2 \psi_2 + \beta_3 \psi_3) \quad (2.23)$$

onde os β 's e os γ 's são definidos de acordo com ZIENKIEWICZ AND MORGAN(1983).

Duas situações distintas, no tocante à cinemática dos vórtices discretos, poderão ocorrer, entretanto implicando em situações análogas para o cálculo do campo de velocidades:

- 1) Quando um vórtice é criado, o mesmo situa-se inicialmente num dado nó da malha. Para este caso, os vórtices “novos” mover-se-ão com velocidades u e v tomadas como sendo a média das velocidades u e v dos elementos que contém este dado vórtice. Segue então que (vide exemplo na figura 2.4):

$$u = \frac{1}{N \text{ vizinhos}} \sum_{i=1}^{N \text{ vizinhos}} u(i) \quad (2.24)$$

$$v = \frac{1}{N \text{ vizinhos}} \sum_{i=1}^{N \text{ vizinhos}} v(i) \quad (2.25)$$

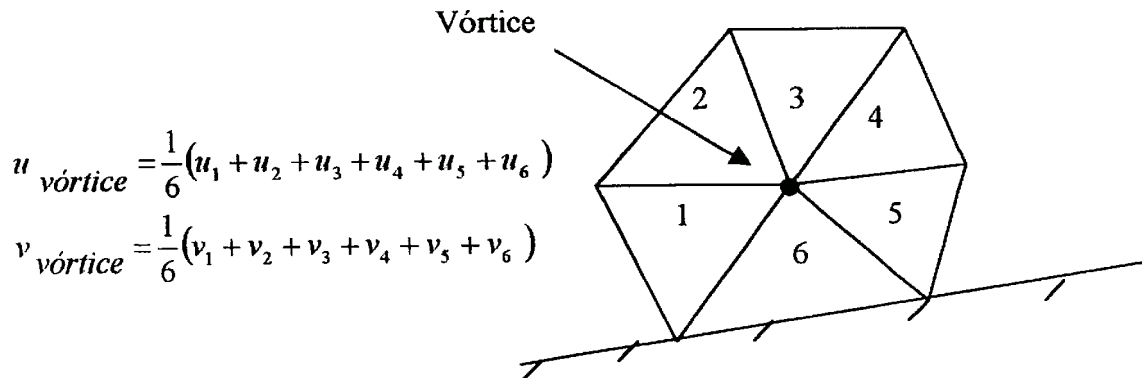


Fig. 2.4. Exemplo do cálculo de velocidades para um vórtice recém criado.

- 2) Para os vórtices já criados e que após realizarem movimentos ao longo do domínio computacional localizar-se-ão no interior de um dado elemento, será necessário o estabelecimento de uma função de interpolação para o cálculo de velocidades. O procedimento aqui adotado é o mesmo sugerido por MALISKA(1995) e trata-se de uma função de interpolação linear. Dessa forma, têm-se, para o campo de velocidades:

$$(u, v) = A(u, v) * x_{\text{vórtice}} + B(u, v) * y_{\text{vórtice}} + C(u, v) \quad (2.26)$$

Através dos valores de u e v nos três nós do triângulo (u_1, u_2, u_3 , e v_1, v_2 e v_3) e dos valores das coordenadas (x, y) dos vértices 1, 2 e 3 (x_1, x_2, x_3 e y_1, y_2 e y_3) encontram-se as constantes $A(u, v)$, $B(u, v)$ e $C(u, v)$ como sendo

$$A(u, v) = \frac{[(y_2 - y_3) * (u_1, v_1) + (y_3 - y_1) * (u_2, v_2) + (y_1 - y_2) * (u_3, v_3)]}{D} \quad (2.27)$$

$$B(u, v) = \frac{[(x_3 - x_2) * (u_1, v_1) + (x_1 - x_3) * (u_2, v_2) + (x_2 - x_1) * (u_3, v_3)]}{D} \quad (2.28)$$

$$C(u, v) = \frac{[(x_2 y_3 - x_3 y_2) * (u_1, v_1) + (x_3 y_1 - y_3 x_1) * (u_2, v_2) + (x_1 y_2 - x_2 y_1) * (u_3, v_3)]}{D} \quad (2.29)$$

onde D é dado por:

$$D = (x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - y_1 x_2 - y_2 x_3 - y_3 x_1) \quad (2.30)$$

2.1.6. RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE POISSON PARA A PRESSÃO E CÁLCULO DAS FORÇAS

O cálculo das forças ao longo da parede do cilindro será dado pela soma da integração do campo de pressão com a integração das forças de origem viscosa. Este tópico tratará inicialmente da determinação do campo de pressão.

A equação de interesse que deve ser resolvida pelo MEF para o cálculo do campo de pressão é a equação de Poisson para a pressão, obtida através do procedimento dado a seguir segundo ROACHE(1982).

As equações da quantidade de movimento em duas dimensões para escoamento incompressível podem ser dadas através de:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{Re} \nabla^2 u \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{Re} \nabla^2 v \quad (2.32)$$

Já a equação da continuidade pode ser escrita como sendo:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.33)$$

Derivando a equação (2.31) em relação a x têm-se que:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 u) \quad (2.34)$$

Derivando a equação (2.32) em relação a y têm-se que:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 v) \quad (2.35)$$

Somando as equações (2.34) e (2.35) chega-se a:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \\ & v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = -\nabla^2 P + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 u) + \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 v) \right] \end{aligned} \quad (2.36)$$

Algumas simplificações são obtidas utilizando-se a equação da continuidade:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (0) = 0 \quad (2.37)$$

$$u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.38)$$

$$v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.39)$$

Obtém-se ainda que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 u) + \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 v) &= \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.40)$$

Substituindo as equações (2.37) a (2.39) na equação (2.36) segue que:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\nabla^2 p \quad (2.41)$$

Considerando ainda que

$$0 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (2.42)$$

e substituindo-se esta última equação em (2.41) obtém-se finalmente que

$$\nabla^2 p = -2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (2.43)$$

As condições de contorno para esta equação são dadas por

$$p = 0 \quad (\text{na fronteira externa do domínio - tipo Dirichlet})$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{\text{parede}} = -v \left. \frac{\partial \omega}{\partial s} \right|_{\text{parede}} = -q \quad (\text{na parede do cilindro - tipo Neumann})$$

(2.44)

As derivadas parciais das velocidades dadas na equação (2.43) são calculadas utilizando-se as expressões dadas em (2.26) a (2.30), de tal forma que:

$$\frac{\partial (u, v)}{\partial x} = A(u, v) \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial (u, v)}{\partial y} = B(u, v) \quad (2.46)$$

De forma análoga ao que foi apresentado anteriormente para a discretização da equação de Poisson para a função de corrente-vorticidade e equação de difusão de vorticidade em regime transitório através da utilização do MEF, chega-se a um de equações que, em última análise, encontrar-se-á na forma adequada para a utilização do PCG.

A contribuição da tensão de cisalhamento na parede (“skin friction”) deve ser somada à contribuição devido ao campo de pressões para fornecer a força total agindo no cilindro. Utilizando a definição da tensão de cisalhamento na parede e a definição da vorticidade obtemos

$$\tau = -\mu \omega_{parede} \quad (2.47)$$

onde τ é a tensão de cisalhamento na parede, e μ é a viscosidade dinâmica.

Após integrar a contribuição da pressão e da tensão de cisalhamento na parede e projetando a soma delas nas direções x e y obtemos as componentes de força F_x e F_y .

Estas forças são então adimensionalizadas da seguinte maneira:

$$C_l = \frac{F_y}{\frac{1}{2}\rho U^2 D} \quad C_d = \frac{F_x}{\frac{1}{2}\rho U^2 D} \quad (2.48)$$

onde D é o diâmetro do cilindro.

2.2. MVD + MEF COM FORMULAÇÃO VELOCIDADE-VORTICIDADE (MVD+MEF $v-\omega$)

Segundo BATCHELOR(1967), a vorticidade não pode ser criada nem destruída no interior de um fluido homogêneo, e somente é produzida nas fronteiras sólidas. A geração de vorticidade é o resultado dos gradientes de pressão tangenciais que atuam ao longo da fronteira sólida.

Em um fluido incompressível, o teorema de Kelvin garante que a circulação ao redor de qualquer caminho fechado é constante. Em um fluido viscoso a circulação contida em uma região que se move com o fluido dependerá do contorno de integração adotado.

Pode-se então definir a velocidade do escoamento de um fluido como a soma de uma parcela devida à influência dos vórtices \vec{u}_ω , e uma parcela devida a um escoamento potencial irrotacional \vec{u}_φ . Têm-se portanto que:

$$\vec{u} = \vec{u}_\omega + \vec{u}_\varphi \quad (2.49)$$

Tomando-se um domínio limitado no qual toda a vorticidade próxima está concentrada, pode-se calcular a velocidade induzida pelos vórtices em qualquer ponto desse domínio através da lei de Biot-Savart. Considerando que o campo de vorticidade é

composto de filamentos de circulação, pode-se escrever, em duas dimensões, o campo de velocidades induzido pelos vórtices:

$$\vec{u}_\omega = -\frac{1}{2\pi} \int_V \frac{\vec{\omega} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^2} dV \quad (2.50)$$

onde \times representa produto vetorial e \vec{r} é o vetor (P-O), onde P é o ponto onde se deseja estimar a velocidade e O é o ponto onde se encontra o vórtice discreto.

A principal dificuldade relacionada com a utilização deste enfoque é que os vórtices discretos são singularidades e dessa forma criam grandes velocidades na sua vizinhança. Conforme pode ser visto em SARPKEYA(1989), em um fluido real a viscosidade tende a concentrar qualquer singularidade próximo ao centro da região de elevada vorticidade. A segunda dificuldade está relacionada com o custo computacional da avaliação numérica da lei de Biot-Savart. O custo cresce na forma $N(N-1) \cong N^2$, onde N é o número de vórtices discretos envolvidos no cálculo. Já no MVD + MEF o custo computacional cresce na razão $M \log M$, onde M é o número de nós da malha.

A velocidade do escoamento irrotacional pode ser calculada através de um potencial de velocidades φ , dado por:

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (2.51)$$

onde o campo de velocidades é dado por:

$$u_\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad v_\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (2.52)$$

As velocidades dos nós da malha podem ser obtidas através das equações (2.50), (2.51) e (2.52) caso seja conhecido o campo de vorticidade. Entretanto, tal procedimento envolve um trabalho computacional muito elevado, uma vez que, para cada nó da malha, é necessário calcular as contribuições, pela lei de Biot-Savart, dos $N-1$ outros nós.

Dessa forma, deve-se calcular as velocidades induzidas pelos vórtices apenas nos nós sobre a parede do cilindro. Como sobre os contornos sólidos a velocidade normal deve ser nula, o potencial de velocidade deve ser resolvido com uma condição de contorno do tipo Neumann (condição de fluxo), dada por:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\vec{u}_\omega \cdot \vec{n} \quad (2.53)$$

Conforme visto em SALTARA(1999), a componente normal da velocidade do escoamento potencial deve cancelar a componente normal do escoamento induzido pelo campo de vorticidade sobre as paredes.

Deve-se, portanto, calcular as velocidades induzidas pela vorticidade apenas sobre os N nós que se encontram sobre a parede. Tais velocidades, somadas com as velocidades obtidas através do potencial de velocidades, fornecem as velocidades finais sobre as paredes, que devem ter componentes normais nulas, e, provavelmente, componentes tangenciais não nulas, que servem como condições de fluxo (Neumann), em cada ponto das paredes, para a resolução da equação de difusão de vorticidade mostrada em SIQUEIRA(1997a).

Após resolver a equação da vorticidade, as velocidades podem ser calculadas através de equações de Poisson para a formulação da velocidade-vorticidade:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial \omega}{\partial y} \quad (2.54)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial \omega}{\partial x} \quad (2.55)$$

Estas equações podem ser obtidas derivando a equação da continuidade e a equação que define a vorticidade e somando ambas. Após obter-se o campo de vorticidade com a condição de fluxo de vorticidade na parede anula-se a circulação da velocidade tangencial em cada nó da parede, satisfazendo portanto a condição de aderência. Depois da etapa de convecção dos vórtices, obtém-se um novo campo de vorticidade e o cálculo pode ser feito para um novo intervalo de tempo.

Devido ao acúmulo de erros que pode ocorrer durante a simulação computacional, utiliza-se o mesmo procedimento adotado por GIANNAKIDIS(1996) para que haja conservação da circulação total. A seguinte condição é imposta:

$$\oint u_s ds = -v \Delta t \oint \frac{\partial \omega}{\partial n} ds = 0 \quad (2.56)$$

De tal forma que $\frac{d\Gamma}{dt} = 0$, onde Γ é a circulação.

2.3. MÉTODO DA RESOLUÇÃO POR PARTES OU FRACTIONAL STEP METHOD (FSM)

Nesta seção o Método da Resolução por Partes (“Fractional Step Method” ou FSM) das equações de Navier-Stokes é apresentado. Este método tem sido muito utilizado para a resolução de problemas relacionados à emissão de vórtices, tratando-se de um método desenvolvido especialmente para problemas em regime variado. De uma forma geral, possui as mesmas características do método SIMPLE e seus derivados.

O tratamento do termo convectivo foi feito utilizando interpolação do tipo diferenças centradas. Apesar de tal interpolação provocar instabilidades, especialmente em altos números de Reynolds, manteve-se este procedimento devido ao fato de tratar-se neste projeto de pesquisa de escoamentos com regimes de esteira laminares ($Re=200$), inclusive para o caso tridimensional. Uma interpolação adequada para Reynolds elevado pode ser vista em SALTARA(1999). Nesta referência é apresentada a interpolação mista parabólica-bilinear, oriunda do método Quick (MALISKA(1995)). Entretanto, vale ressaltar que a interpolação do tipo diferenças centradas também poderia ser utilizada para números de Reynolds elevados, porém a malha computacional deveria ser refinada criteriosamente até a obtenção de soluções adequadas, comprometendo a otimização do tempo computacional.

O conceito do Método da Resolução por Partes ou “Fractional Step Method” (FSM) é absolutamente geral e muitas variações ocorrem na literatura. Conforme pode ser visto em MANNA(1997), o FSM pode ser aplicado ainda que partes diferentes da equação são avançadas no tempo usando diferentes métodos, geralmente explícito para os termos convectivos e implícito para os termos viscosos, e algumas vezes implícito

somente na direção normal à parede e explícito em outras direções. Já a discretização espacial pode ser feita em qualquer ordem. Deve-se notar, entretanto, que não ocorrem determinadas iterações que estão presentes nos métodos tradicionais de correção de pressão, uma vez que após o último passo no FSM a solução para o passo seguinte é obtida e segue sucessivamente para o próximo incremento de tempo.

Para escoamentos em regime transitório, pode ser adotado um procedimento de discretização no tempo como o Método de Runge-Kutta de 3ª ou 4ª ordem (caso um método explícito seja adequado) ou Crank-Nicholson ou de 2ª ordem de diferenças finitas para trás (caso haja necessidade de uma maior estabilidade no método).

As equações que governam o escoamento de um fluido incompressível viscoso e Newtoniano são duas: equação de conservação da massa e conservação da quantidade de movimento. As equações de Navier-Stokes adimensionalizadas através do enfoque Euleriano e que devem ser resolvidas pelo FSM são (onde $Re = U_\infty D/\nu$ é o número de Reynolds, U_∞ velocidade do escoamento ao longe, D diâmetro do cilindro e ν viscosidade cinemática do fluido)

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2 \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (2.58)$$

Nas equações anteriores o campo de velocidade é adimensionalizado pela velocidade ao longe, a pressão pela pressão dinâmica e as coordenadas espaciais por um comprimento característico.

2.3.1. FORMULAÇÃO NUMÉRICA

O Método da Resolução por Partes (“Fractional Step Method”) é aplicado para uma discretização do tempo das equações que governam o fenômeno, equações (2.57) e (2.58). Inicialmente, um campo intermediário de velocidades é calculado sem levar em conta a pressão. O campo de pressões é então avaliado através da equação de Poisson; o campo de velocidades é corrigido posteriormente incluindo o efeito da pressão. Já para o campo intermediário de velocidades utiliza-se uma formulação Taylor-Galerkin explícita.

Conforme pode ser visto em MELING AND DALHEIM(1997), para um incremento de tempo $\Delta t = t^{(n+1)} - t^{(n)}$, o algoritmo do método é dado através dos seguintes passos:

- 1) Um campo de velocidades \tilde{u}_i é calculado no instante $t^{(n+1)}$ através da integração da equação da conservação da quantidade de movimento a menos da pressão:

$$\tilde{u}_i^{(n+1)} = u_i^{(n)} - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \right] dt \quad i, j = 1, 2 \quad (2.59)$$

- 2) O campo de velocidades completo u_i no instante $t^{(n+1)}$ é avaliado através da inclusão do campo de pressão:

$$u_i^{(n+1)} = \tilde{u}_i^{(n+1)} - \frac{1}{\rho} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{\partial p}{\partial x_i} dt \quad (2.60)$$

- 3) A equação da continuidade deve ser satisfeita pelo campo final de velocidades, ou seja:

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^{n+1} = 0 \quad (2.61)$$

O primeiro passo deste algoritmo é feito através do uso da metodologia “*predictor-corrector*”:

$$\tilde{u}_i^{(n+1/2)} = u_i^{(n)} - \frac{\Delta t}{2} (u_j)^{(n)} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^{(n)} \quad (2.62)$$

$$\tilde{u}_i^{(n+1)} = u_i^{(n)} - \Delta t \left[(u_j)^{(n)} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right)^{(n+1/2)} - \nu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \right)^{(n)} \right] \quad (2.63)$$

A variável $\tilde{u}_i^{(n+1/2)}$ denota o valor intermediário calculado para a convecção de $u_i^{(n)}$ com um incremento de tempo $\Delta t/2$, sendo que este valor é usado para a convecção no passo seguinte.

Os passos (2) e (3) do algoritmo acima, ou seja, a determinação do campo completo de velocidades que satisfaz a equação da continuidade, são combinados através da equação de Poisson para a pressão. Tomando-se o divergente da forma discretizada da equação (2.60)

$$u_i^{(n+1)} = \tilde{u}_i^{(n+1)} - \frac{\Delta t}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right)^{(n+1)} \quad (2.64)$$

e introduzindo a equação da continuidade (2.61), a equação de Poisson resultante pode ser escrita da seguinte forma:

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial x_j} \right)^{(n+1)} = \frac{\rho}{\Delta t} \left(\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_j} \right)^{(n+1)} \quad (2.65)$$

Uma forma alternativa do algoritmo seria incluir o valor da pressão conhecida durante a etapa de predição da velocidade intermediária e determinar a diferença de pressão ao invés do campo completo de pressão. Entretanto, segundo RAMASWAMY AND

KAWAHARA(1987) e REN AND UTNES(1993) apud MELING AND DALHEIM(1997), observou-se que a remoção do termo da pressão na equação (2.59) é vantajosa uma vez que modos de pressão espúrios (ondulações no campo de pressão, MALISKA(1995)) não são obtidos independente da ordem de interpolação que é usada para a velocidade e a pressão.

As condições de contorno são obtidas através das seguintes relações:

a) Sobre a parede do cilindro: $u_i = 0, \frac{\partial p}{\partial n} = 0;$

b) Nos limites do domínio computacional: $u_i = U_\infty, p = 0.$

2.3.2. FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA AS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é aplicado juntamente com o Método de Galerkin(ZIENKIEWICZ AND MORGAN(1983)) para a discretização espacial do algoritmo mostrado anteriormente. A velocidade e a pressão são interpoladas utilizando-se as mesmas funções de forma:

$$u_i \approx \mathbf{N} \mathbf{U}_i, p \approx \mathbf{N} \mathbf{P} \quad (2.66)$$

onde \mathbf{N} é o vetor das funções de forma, \mathbf{U}_i e \mathbf{P} representam os valores das componentes da velocidade e a pressão, respectivamente. Introduzindo estas expressões na formulação do Método dos Resíduos Ponderados nas equações que governam o fenômeno, obtém-se o seguinte conjunto de equações discretizadas na forma matricial:

$$\mathbf{C}^n \tilde{\mathbf{U}}_i^{n+1/2} = \mathbf{C}^n \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{A}^n \mathbf{U}_i^n \quad (2.67)$$

$$\mathbf{C}^n \tilde{\mathbf{U}}_i^{n+1} = \mathbf{C}^n \mathbf{U}_i^n - \Delta t [\mathbf{A}^n \tilde{\mathbf{U}}_i^{n+1/2} + \nu \mathbf{K}^n \mathbf{U}_i^n] \quad (2.68)$$

$$\mathbf{K}^n \mathbf{P}^{n+1} = -\frac{\rho}{\Delta t} \mathbf{D}_j^n \tilde{\mathbf{U}}_j^{n+1} \quad (2.69)$$

$$\mathbf{C}^n \mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{C}^n \tilde{\mathbf{U}}_i^{n+1} - \frac{\Delta t}{\rho} \mathbf{D}_i^n \mathbf{P}^{n+1} \quad (2.70)$$

onde as integrais do contorno resultantes da integração por partes do termo difusivo e da equação de Poisson são omitidas devido à inserção das condições de contorno. As matrizes globais são dadas a seguir, de acordo com a metodologia usual do MEF:

$$\mathbf{C}^n = \int_{\Omega^n} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \quad (2.71)$$

$$\mathbf{A}^n = \sum_{e=1}^n (\bar{C}_j)_e \int_{\Omega_e^n} \mathbf{N}^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_j} d\Omega \quad (2.72)$$

$$\mathbf{D}_j^n = \int_{\Omega^n} \mathbf{N}^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_j} d\Omega \quad (2.73)$$

$$\mathbf{K}^n = \int_{\Omega^n} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_j} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_j} d\Omega \quad (2.74)$$

onde $(\bar{C}_j)_e$ é velocidade calculada no centróide do elemento, segundo GRESHO et al.(1984) apud MELING AND DALHEIM(1997).

3. VALIDAÇÃO DOS SIMULADORES APLICADOS À RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS BIDIMENSIONAIS

Esta seção tem por objetivo mostrar os resultados dos estudos de validação aplicados aos simuladores numéricos apresentados na seção anterior. Dessa forma, os três programas resolveram o escoamento bidimensional ao redor do cilindro para os números de Reynolds igual a 200 e 100. Os resultados em termos de número de Strouhal e coeficientes de arrasto e sustentação foram comparados a resultados numéricos e experimentais obtidos da literatura. Contornos de pressão e vorticidade são fornecidos, além da esteira formada pelo escoamento tanto para o MVD como para o FSM.

O FSM foi o método escolhido para a resolução do escoamento tridimensional ao redor do cilindro, pelos motivos expostos no capítulo 4. Dessa forma, decidiu-se consolidar o emprego do FSM bidimensional na resolução do escoamento ao redor de cilindros para as configurações Tandem e Lado a Lado. Este estudo também é apresentado neste capítulo.

3.1. RESOLUÇÃO DO ESCOAMENTO BIDIMENSIONAL AO REDOR DO CILINDRO PARA $Re=200$ E $Re=100$

Nesta seção serão apresentados os resultados das simulações do escoamento bidimensional ao redor do cilindro obtidos com o uso dos três simuladores numéricos bidimensionais: MVD + MEF função de corrente-vorticidade, MVD + MEF velocidade-vorticidade e FSM pressão-velocidade.

Após uma criteriosa análise de convergência de malhas, a qual notabilizou-se pela otimização da região da camada limite e esteira, chegou-se a uma malha não-estruturada de 27062 elementos e 13696 nós com 228 nós sobre a parede do cilindro e 100 nós na fronteira externa. O nó mais próximo à parede do cilindro situa-se a uma distância de 1% do raio do mesmo.

O centro do cilindro de raio R igual a 1.0 corresponde ao ponto de coordenadas $(0,0)$ e a malha se estende por $50 R$ à jusante e $15R$ à montante do cilindro. Na direção vertical a malha se estende a $21.3 R$ acima e abaixo do cilindro e um intervalo de tempo adimensional $UT/D = 5e-3$ foi utilizado para todas as simulações onde a velocidade é $U= 1.0$. Detalhes da malha utilizada podem ser vistos na figura 3.1 e 3.2.

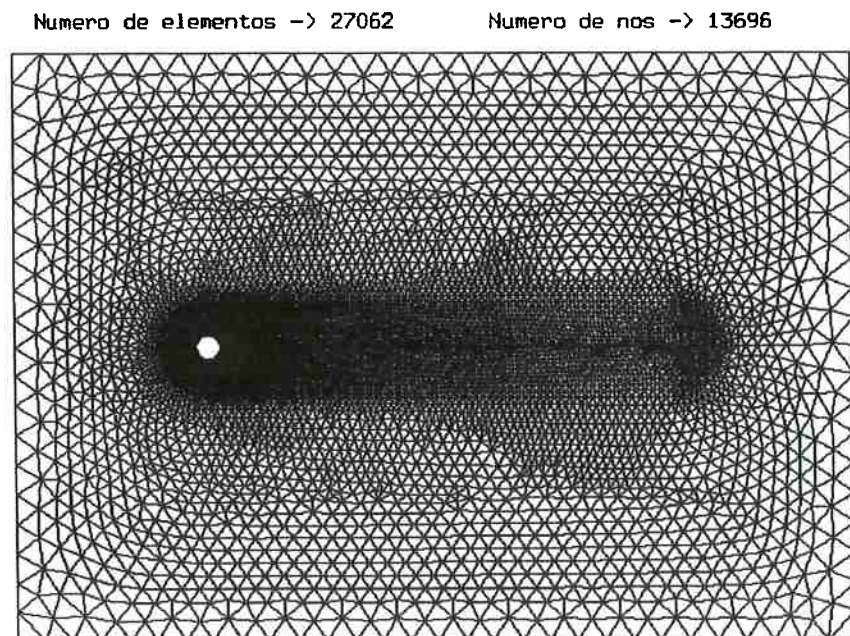


Fig. 3.1. Malha computacional para a resolução do escoamento em torno de um cilindro para $Re = 200$ e $Re = 100$.

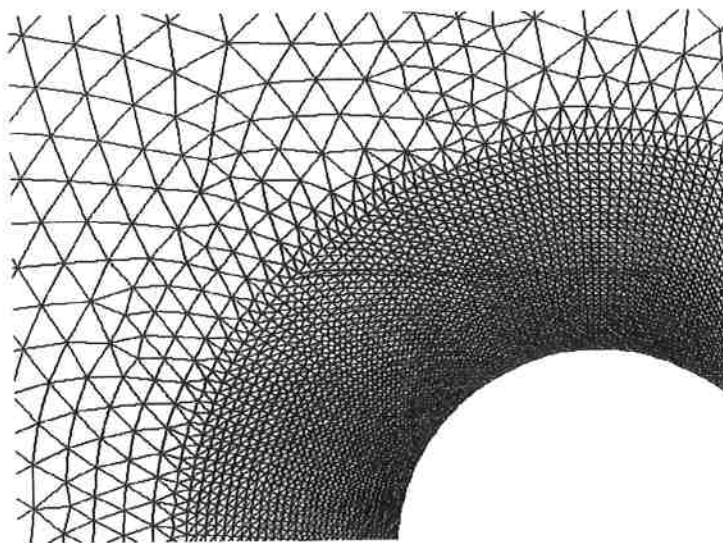


Fig. 3.2. Detalhe da malha computacional em uma região próxima do cilindro.

A seguir são fornecidos os resultados para $Re = 200$. Os coeficientes de arrasto $C_d(t)$ e $C_l(t)$ são apresentados na figuras 3.3. As esteiras do escoamento representadas por vórtices pontuais e por traçadores (no caso do FSM) são dadas na figura 3.4. Contornos de pressão e vorticidade são fornecidos na figura 3.5, obtidos através das facilidades oferecidas pelo Laboratório de Computação Avançada da USP (LCCA).

De uma forma geral, os três simuladores conseguiram estimar de maneira satisfatória os coeficientes de força médios e número de Strouhal, os quais podem ser vistos e comparados com simulações numéricas de outros pesquisadores e resultados experimentais obtidos da literatura. A tabela 3.1 fornece um resumo dos resultados obtidos onde se destaca a boa qualidade dos mesmos. Nota-se uma pequena diferença em relação ao coeficiente de arrasto médio na versão MVD+MEF função de corrente-vorticidade, o qual situou-se um pouco abaixo do valor conhecido da literatura.

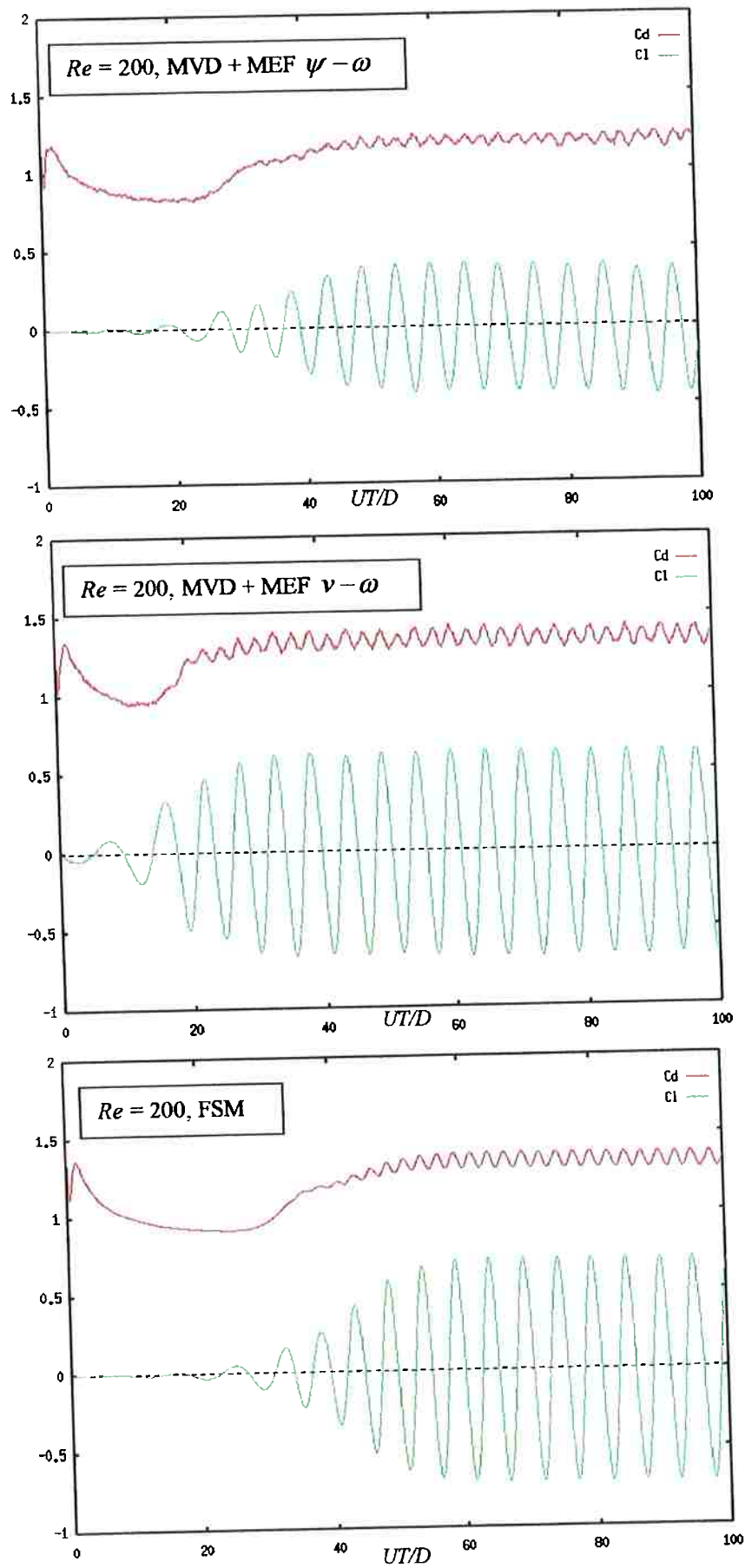


Fig. 3.3. Coeficientes de arrasto (C_d) e Sustentação (C_l) para $Re = 200$. Utilização dos três simuladores bidimensionais.

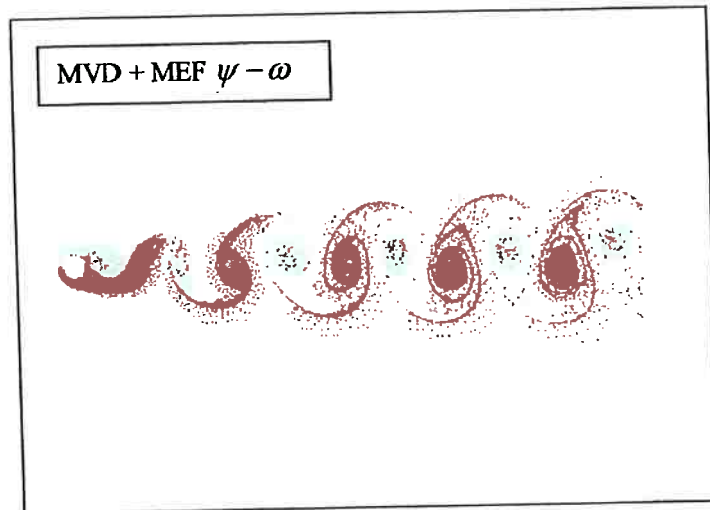
	S (Número de Strouhal)	Cd_m (Coeficiente de Arrasto Médio)
Resultados Obtidos		
Resultado com MVD+MEF $\psi - \omega$	0.196	1.20
Resultado com MVD+MEF $\nu - \omega$	0.196	1.30
Resultado com FSM	0.196	1.30
Resultados de Outras Simulações		
Ha Minh <i>et al.</i> (1980)	0.190	1.30
Borthwick (1986)	0.188	1.02
Braza <i>et al.</i> (1986)	0.200	1.35
Sa e Chang (1991)	0.186	1.13
Meneghini (1993)	0.196	1.25
Arkell (1995)	0.196	1.30
Giannakidis (1997)	0.190	1.25
Saltara (1999) MVD + MVF $\psi - \omega$	0.190	1.30
Saltara (1999) MVD + MVF $\nu - \omega$	0.190	1.25
Saltara (1999) FSM	0.190	1.25
Experimentos:		
Roshko (1954)	0.17-0.19	
Williamson (1991)	0.196	
Norberg (1993)		1.30

Tabela 3.1. Comparação de resultados do escoamento em torno de um cilindro liso e fixo para $Re = 200$.

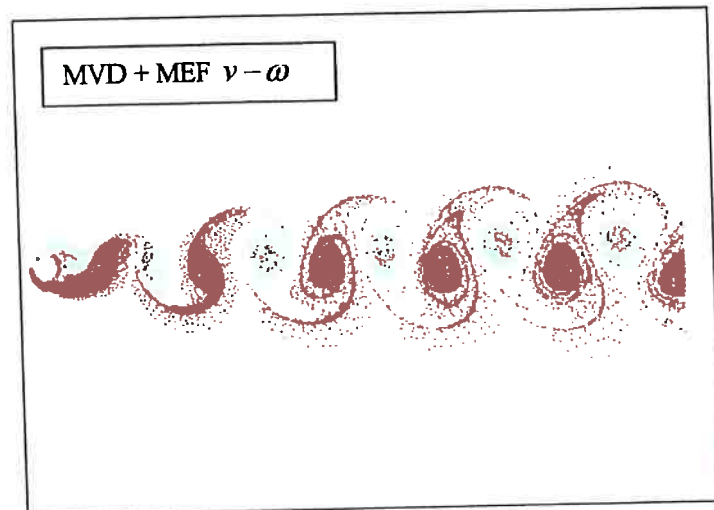
Observando-se a figura 3.3 nota-se que o FSM possibilitou a obtenção de uma curva de arrasto com menores perturbações ou "ruído" quando comparada às simulações obtidas com o MVD em suas duas versões.

De uma forma geral, os resultados são bastante satisfatórios ao considerar aqueles obtidos pelos demais pesquisadores conforme pode ser visto na tabela 3.1.

Re=200



Re=200



Re=200

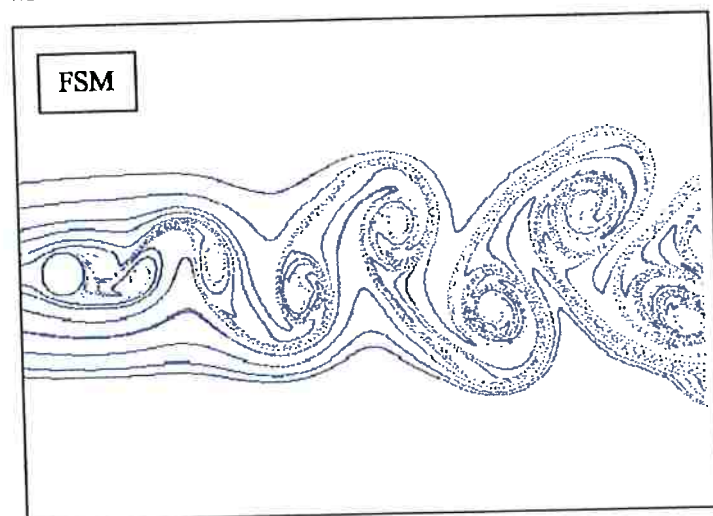


Fig. 3.4. Esteiras para $Re = 200$. Utilização de vórtices pontuais para os métodos MVD e traçadores para FSM.

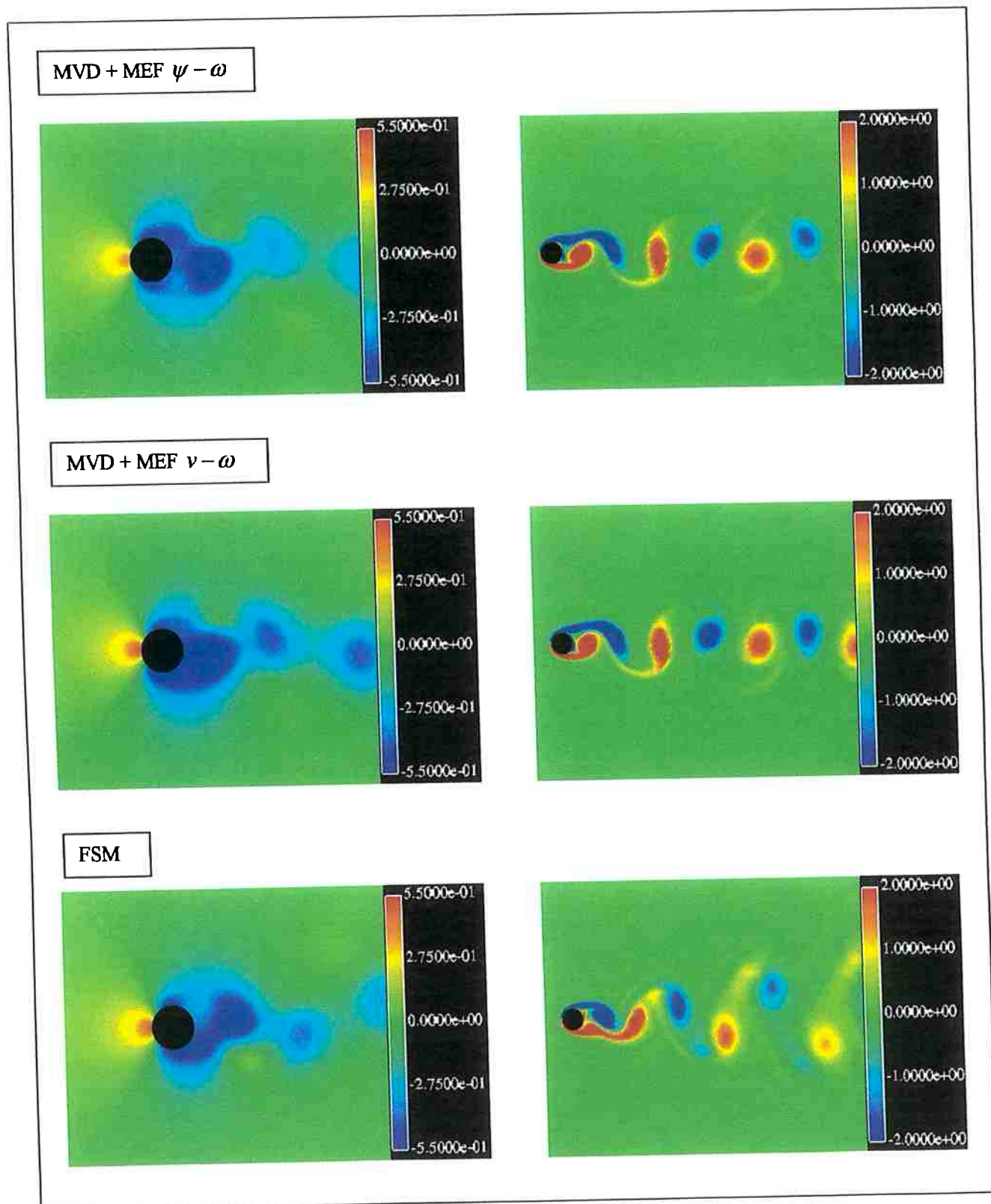


Fig. 3.5. Contornos de pressão e vorticidade para $Re = 200$. Utilização dos três simuladores bidimensionais.

A seguir são fornecidos os resultados para $Re = 100$. Os coeficientes de arrasto $C_d(t)$ e $C_l(t)$ são apresentados na figuras 3.6. As esteiras do escoamento representadas por vórtices pontuais e por traçadores (no caso do FSM) são dadas na figura 3.7. Contornos de pressão e vorticidade são fornecidos na figura 3.8, enquanto que a tabela 3.2. fornece um resumo dos resultados obtidos comparados àqueles fornecidos por outros pesquisadores em simulações numéricas e resultados experimentais.

	S (Número de Strouhal)	C_{d_m} (Coeficiente de Arrasto Médio)
Resultados Obtidos		
Resultado com MVD+MEF $\psi - \omega$	0.165	1.40
Resultado com MVD+MEF $\nu - \omega$	0.165	1.50
Resultado com FSM	0.165	1.37
Resultados de Outras Simulações		
Borthwick (1986)	0.188	1.21
Braza <i>et al.</i> (1986)	0.160	1.37
Sa e Chang (1991)	0.155	1.23
Meneghini (1993)	0.162	1.52
Saltara (1999) MVD + MVF $\psi - \omega$	0.160	1.50
Saltara (1999) MVD + MVF $\nu - \omega$	0.170	1.30
Saltara (1999) FSM	0.160	1.33
Experimentos:		
Roshko (1954)	0.16-0.17	
Triton (1959)		1.25
Nishioka e Sato (1978)	0.151	
Williamson (1991)	0.164	

Tabela 3.2. Comparação de resultados do escoamento em torno de um cilindro liso e fixo para $Re = 100$.

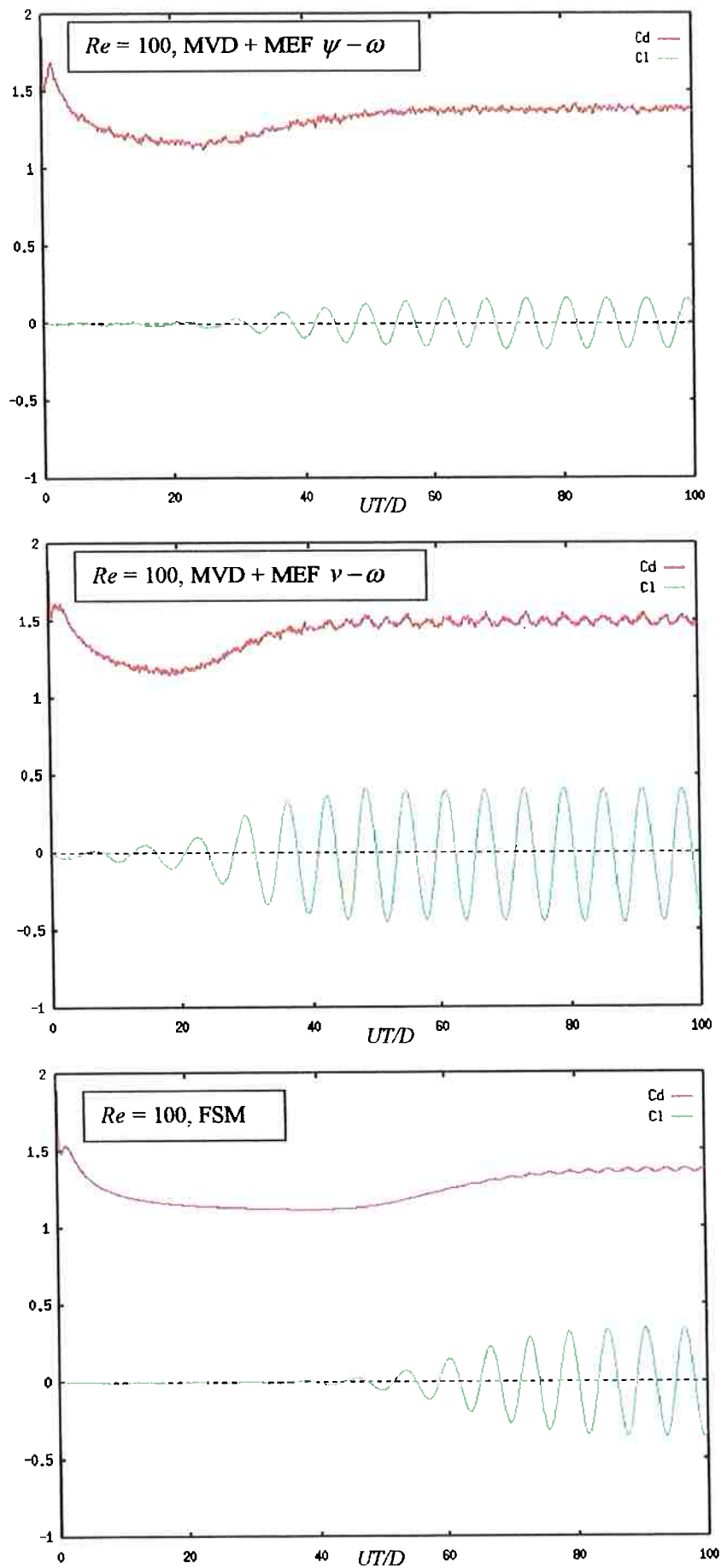
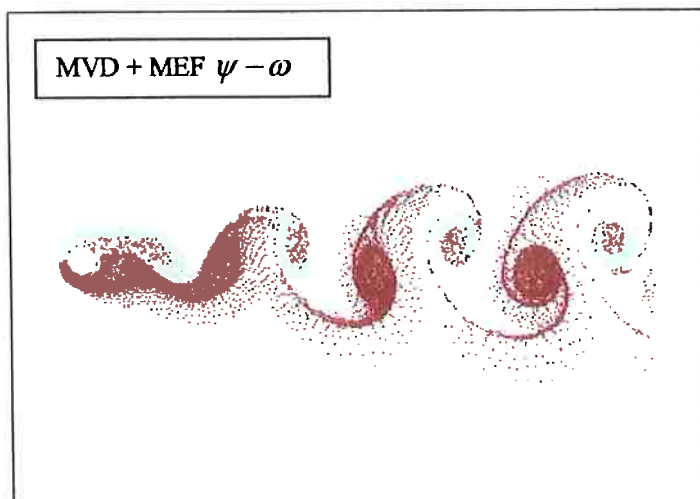
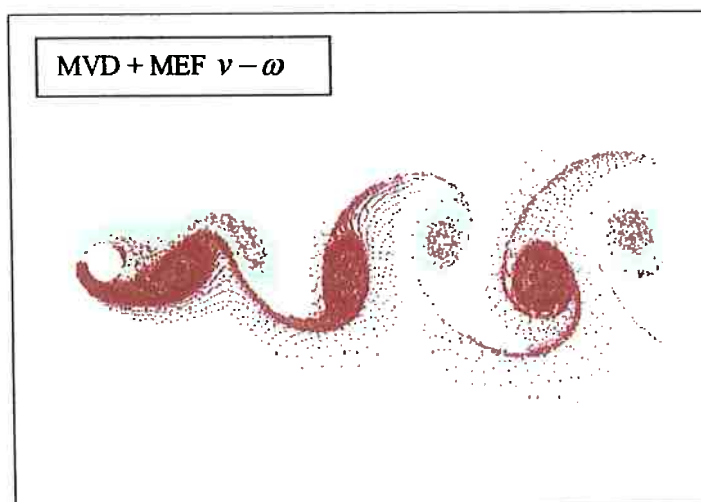


Fig. 3.6. Coeficientes de arrasto (C_d) e Sustentação (C_l) para $Re = 100$. Utilização dos três simuladores bidimensionais.

Re=100



Re=100



Re=100

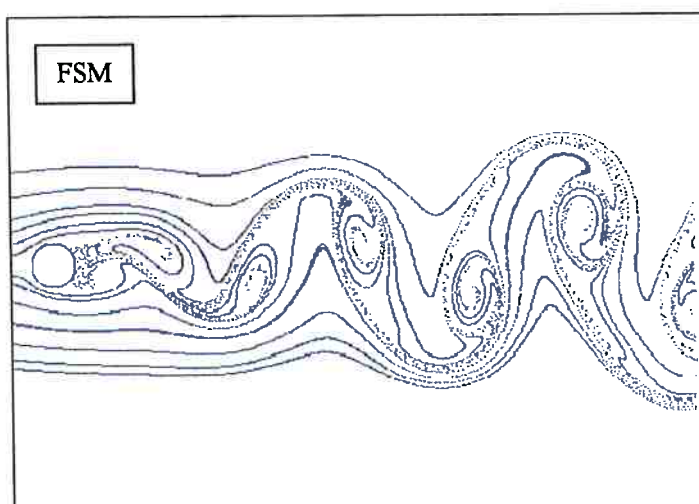


Fig. 3.7. Esteiras para $Re = 100$. Utilização de vórtices pontuais para os métodos MVD e traçadores para FSM.

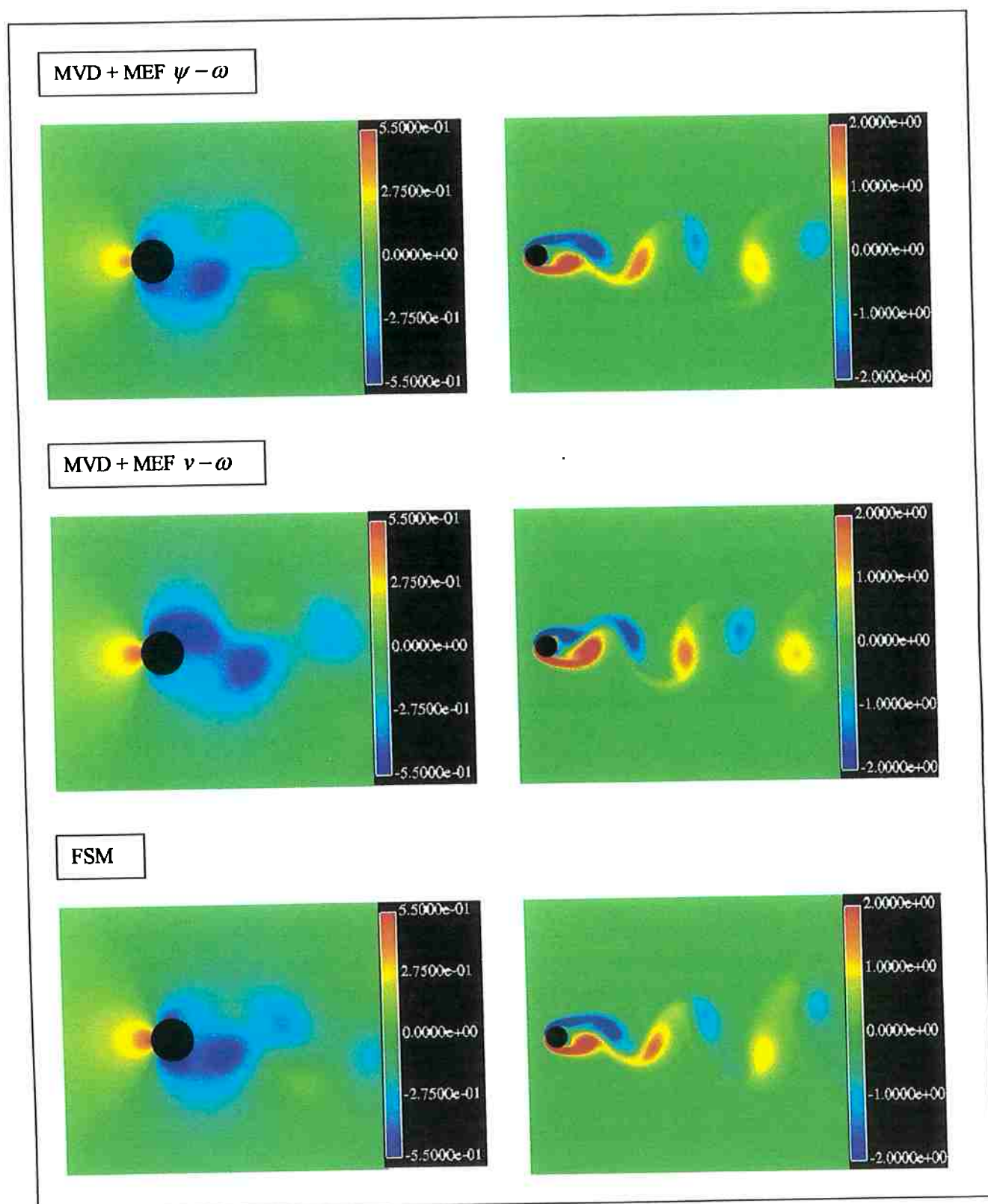


Fig. 3.8. Contornos de pressão e vorticidade para $Re = 100$. Utilização dos três simuladores bidimensionais.

3.2. COMENTÁRIOS FINAIS SOBRE OS SIMULADORES NUMÉRICOS APLICADOS A PROBLEMAS BIDIMENSIONAIS

A principal vantagem do FSM sobre os métodos MVD reside no tempo gasto para a resolução computacional. No MVD + MEF usando a formulação *função de corrente-vorticidade* resolve-se duas equações de Poisson: uma para a função de corrente e outra para a pressão, e uma equação de difusão para a vorticidade.

No MVD + MEF usando a formulação *velocidade-vorticidade* têm-se a utilização da lei de Biot-Savart, a resolução de três equações de Poisson para as componentes da velocidade e a pressão, uma equação de Laplace para o potencial de velocidades e uma equação de difusão para a vorticidade. Já no FSM têm-se apenas a resolução de duas equações de convecção-difusão para as velocidades e uma única equação de Poisson para a pressão.

A obtenção do programa do MVD + MEF para três dimensões tornar-se-ia possível, em tese, devido aos seguintes fatores: o potencial de velocidades existe em três dimensões, ao contrário da função de corrente; a lei de Biot-Savart também pode ser estendida para três dimensões, e existe ainda a possibilidade de resolução de domínios multiplamente conexos (vários cilindros), caso de interesse prático quando se trata de agrupamentos de “risers”. Entretanto, o uso da Lei de Biot-Savart implica em um elevado custo computacional, mesmo quando existe a restrição de utilizar-se os nós sobre as paredes sólidas. Além disso, deve-se determinar o campo de velocidades através de equações adicionais.

Dessa forma, em comparação com métodos tradicionais que resolvem o escoamento através do acoplamento pressão-velocidade, o MVD representa um considerável aumento de tempo computacional. No MVD + MEF 3D haveria a necessidade de resolver 4 equações de Poisson (uma para cada componente da velocidade e uma para a pressão), 3 equações de difusão (uma para cada componente do vetor vorticidade) e uma equação de Laplace para o potencial de velocidades. Ainda seria preciso realizar a convecção e busca dos vórtices na malha tridimensional, usar a lei de Biot-Savart para avaliar as velocidades tangenciais nos pontos sobre superfícies sólidas que devem ser canceladas pelos fluxos de vorticidade. Dever-se-ia ainda projetar as velocidades em um sistema local sobre a parede do cilindro, uma vez que o fluxo de vorticidade utiliza a velocidade tangencial na parede. Já no FSM em três dimensões resolvem-se, a cada intervalo de tempo, três equações de convecção-difusão (uma para cada componente da velocidade) e uma equação de Poisson para a pressão.

A resolução do escoamento bidimensional ao redor do cilindro para $Re=200$ utilizando o MVD + MEF com a formulação velocidade-vorticidade mostrou a inviabilidade da extensão do método para três dimensões: simulações típicas (40.000 intervalos de tempo) mostraram que esta última versão do método demora praticamente o dobro da versão MVD + MEF com formulação função de corrente-vorticidade.

SAFFMAN AND MEIRON(1986) apud ARKELL(1995) criticam o MVD + MEF 3D com o emprego de vortons na medida em que a divergência do vetor vorticidade não é igual a zero. Algumas questões ainda seriam difíceis de serem resolvidas:

- Discretização da equação em questão mediante o MEF para problemas tridimensionais: tratamento do termo de estiramento de vórtices ou “stretching”;
- Determinação do plano local de coordenadas na parede do cilindro para cálculo de forças.

Em face do que foi exposto decidiu-se adotar o código com enfoque Euleriano (FSM) que pode ser estendido para 3 dimensões e é mais atraente do ponto de vista computacional em relação às versões anteriores no tocante à resolução das equações de Navier-Stokes. A seguir são apresentados dois estudos de interesse prático que consolidaram a utilização do FSM visando o estudo de problemas tridimensionais: 1) obtenção da curva Strouhal em função do número de Reynolds (entre 60 e 200) comparando-se os valores obtidos com resultados experimentais e numéricos de outros pesquisadores e 2) resolução do escoamento ao redor de um agrupamento de cilindros para configuração tandem e lado a lado.

3.3. CONSOLIDAÇÃO DO FSM: OBTENÇÃO DA CURVA DO N^o DE STROUHAL EM FUNÇÃO DO N^o DE REYNOLDS : COMPARAÇÃO COM RESULTADOS EXPERIMENTAIS E NUMÉRICOS

Nesta seção serão apresentados os valores do número de Strouhal S em função do número de Reynolds Re para a faixa $60 \leq Re \leq 200$. Os resultados foram obtidos através do FSM 2D apresentado na seção anterior utilizando-se a malha apresentada na figura 3.1 empregada nas simulações do escoamento ao redor do cilindro para $Re = 200$ e $Re = 100$. Este estudo visa consolidar a utilização do FSM para problemas bidimensionais e foi motivado pela compilação de resultados experimentais e numéricos feita por WILLIAMSON(1991). A concordância entre os resultados numéricos aqui

apresentados e os dados experimentais é excelente, conforme pode ser visto na figura 3.9. As esteiras para os seis novos casos ($Re=60, 80, 120, 140$ e 160), representadas pelos traçadores, são fornecidas na figura 3.10. A tabela 3.3 fornece os valores numéricos obtidos para o número de Strouhal para a faixa de Reynolds analisada.

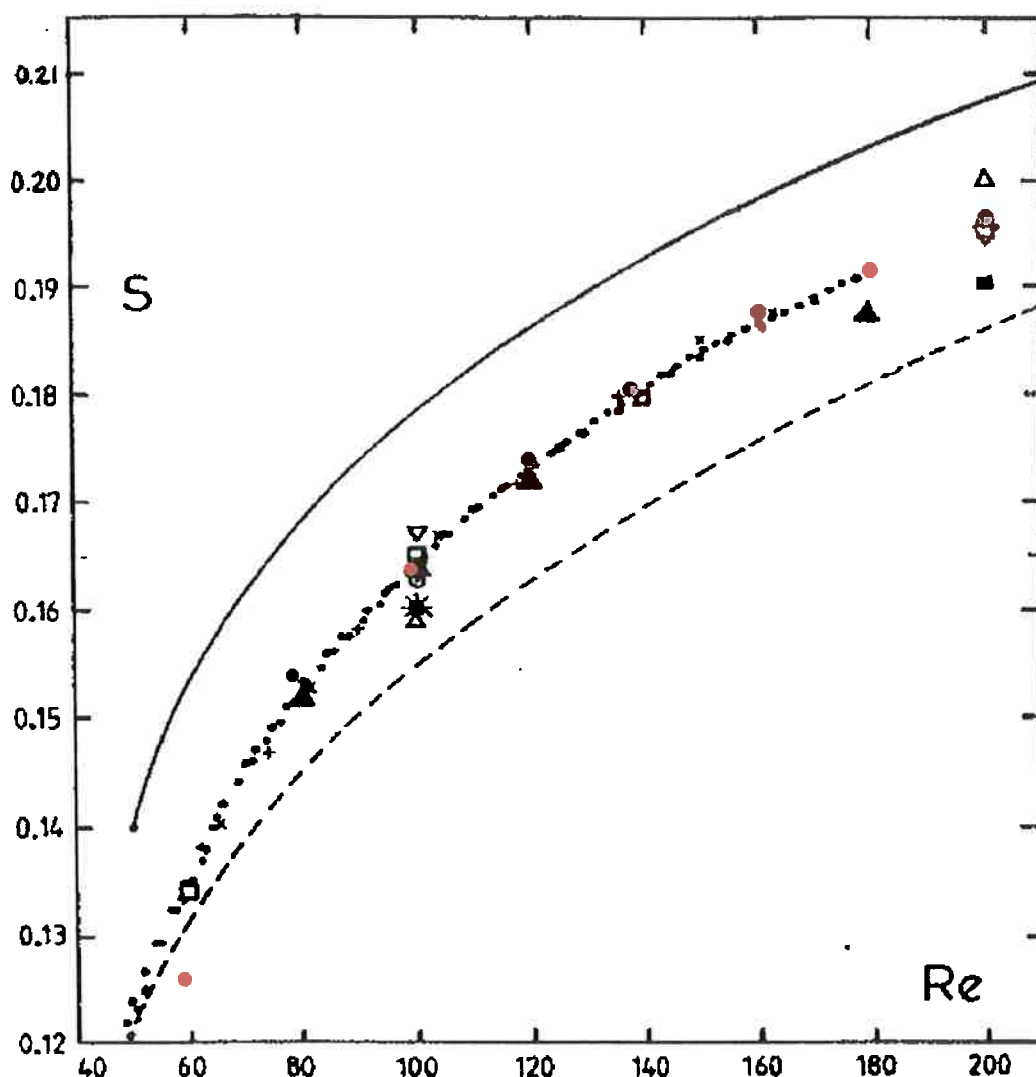


Fig. 3.9. Curva Strouhal vs. Reynolds para “Vortex-shedding” bidimensional – Comparação entre resultados experimentais e numéricos, a partir dos dados compilados por Williamson (1991). - **Resultados experimentais** : • Túnel de vento, shedding paralelo; o Túnel de vento, shedding oblíquo; × Tanque de provas (reboque); + Tanque de provas (reboque). **Resultados numéricos** : – Karniadakis and Triantafyllou (1989); — Sa and Chang (1988); Δ Braza, et al. (1986); \square Lecoite & Piquet (1988); \blacksquare Martinez (1987); ∇ Koschel et al. (1989); \square Young & Ni (1989); * Dolan, Graham & Young (1990); \blacktriangle Shariff & Pullman (1990). • FSM 2D, C. Siqueira(1999).

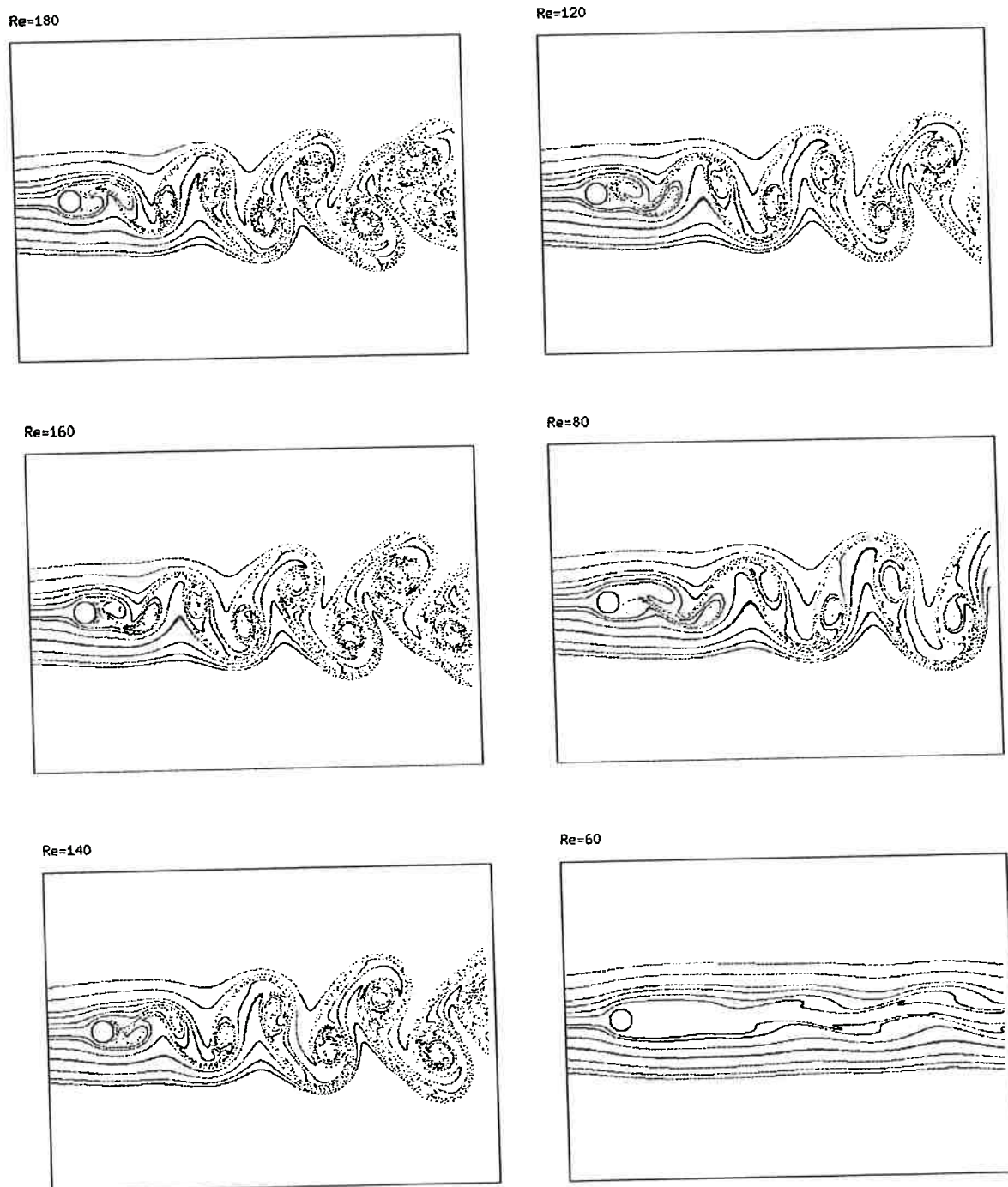


Fig. 3.10. Esteiras do escoamento ao redor do cilindro fixo ($60 \leq Re \leq 180$).

Resultados Obtidos (FSM 2D)	
<i>Re</i> (Número de Reynolds)	<i>S</i> (Número de Strouhal)
200	0.196
180	0.190
160	0.186
140	0.178
120	0.174
100	0.165
80	0.154
60	0.125

Tabela 3.3. Números de Strouhal obtidos através do FSM 2D ($60 \leq Re \leq 200$).

3.4. CONSOLIDAÇÃO DO FSM: RESOLUÇÃO DO ESCOAMENTO AO REDOR DE UM AGRUPAMENTO DE CILINDROS

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos com o simulador baseado no FSM 2D para a resolução do escoamento bidimensional ao redor do agrupamento de dois cilindros para $Re=200$.

Apesar de existirem infinitas possibilidades para o arranjo de cilindros, foram consideradas duas configurações no tocante à disposição dos corpos em relação ao escoamento incidente. Na configuração TANDEM um dos cilindros é colocado à frente do outro em relação ao escoamento. Já na configuração LADO A LADO ambos os cilindros recebem o escoamento incidente sem interferências a montante. Para cada configuração, variou-se a distância entre os centros de cada cilindro e foram obtidos contornos de

pressão, cálculo de forças, contornos de vorticidade e esteiras para as distâncias 1.5D, 2D, 3D e 4D.

O objetivo aqui é avaliar, para cada tipo de configuração, a interferência que ocorre no escoamento à medida que se altera o valor da distância entre os centros dos cilindros ("gap") e observar em termos quantitativos a natureza das forças que surgem em cada cilindro e a análise do escoamento do ponto de vista do fenômeno de emissão de vórtices. Tal estudo é de fundamental importância para a análise de membros cilindros de plataformas oceânicas, onde os "risers" estão dispostos em configurações semelhantes e a possibilidade de choque entre os mesmos devido à vibração induzida pelo escoamento é um fator relevante.

Deve-se salientar que simulações bidimensionais para este tipo de problema, ainda que a um baixo número de Reynolds, fornecem uma primeira aproximação ao estudo do fenômeno, sendo que alguns detalhes da dinâmica de interação de vórtices na esteira e colisão entre os mesmos ("vortex impingement") podem ser melhor observados e analisados. Ainda assim, são poucos os estudos deste tipo que podem ser encontrados na literatura.

Conforme pode ser visto em ZDRAVKOVICH(1987), quando mais de um cilindro são posicionados em um dado escoamento, as forças resultantes e o padrão de emissão de vórtices pode ser completamente diferente daqueles encontrados em um único cilindro para o mesmo número de Reynolds. Quando a distância entre os centros dos cilindros é variada, uma faixa de regimes de escoamento, caracterizada pelo comportamento da região da esteira, foram observados por BEARMAN & WADCOCK(1973) e KIM & DURBIN(1988).

Inicialmente serão mostrados os resultados para a configuração TANDEM. A figura 3.11 mostra uma típica malha não-estruturada para este arranjo para um gap de 3 diâmetros entre os centros do cilindro. Já a figura 3.12 mostra detalhes da malha em uma região próxima aos dois cilindros. A concentração de pontos nesta região é necessária para uma boa discretização da camada limite.

Numero de elementos -> 26084

Numero de nos -> 13219

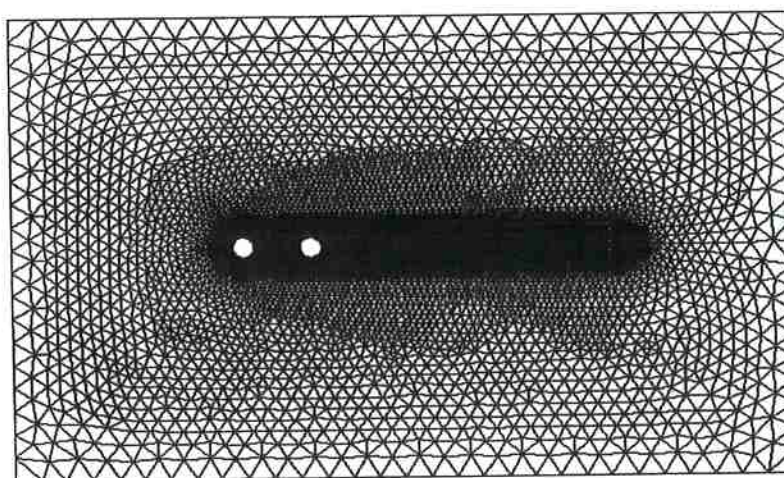


Fig. 3.11. Malha computacional típica para a resolução do escoamento ao redor de dois cilindros em configuração Tandem. Distância entre centros igual a 3 diâmetros.

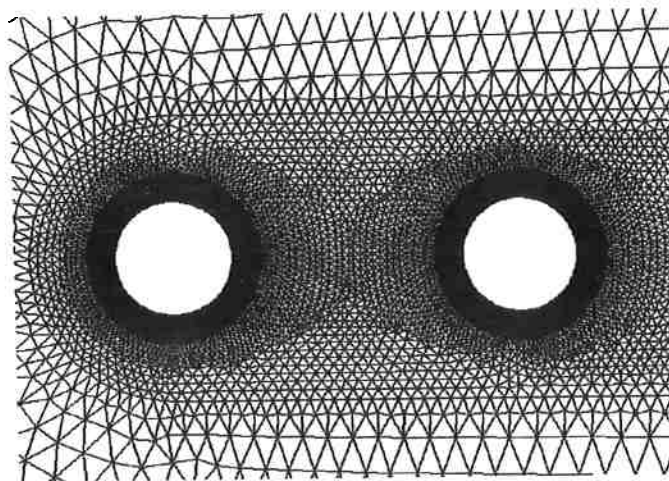


Fig. 3.12. Detalhe da malha computacional em uma região próxima aos cilindros.

A figura 3.13 mostra o gráfico dos coeficientes de arrasto e sustentação em função do tempo para os quatro valores de gap na configuração Tandem. Um resumo dos valores médios de forças de sustentação (C_{l_m1} e C_{l_m2}) e arrasto (C_{d_m1} e C_{d_m2}) é dado na tabela 3.4 juntamente com a relação entre os coeficientes de arrasto de cada cilindro e o coeficiente de arrasto do cilindro único mostrado no capítulo 3 ($C_{d_{isolado}} = 1.30$). Já a figura 3.14 mostra o conjunto das esteiras do agrupamento de cilindros obtidas através do método dos traçadores. Contornos de pressão são dados na figura 3.15 e contornos de vorticidade na figura 3.16.

A figura que contém os contornos de pressão mostra que para valores de espaçamento entre centros entre $1.5 D$ e $3D$ forma-se uma região de baixa pressão entre os cilindros. Para valores de gap entre $1.5D$ e $2D$, nota-se que somente no cilindro situado a montante ocorrem zonas de baixa pressão próxima à parede, podendo-se verificar que o cilindro à jusante encontra-se sob a influência da emissão de vórtices do primeiro. Já para um espaçamento igual a $4D$ a figura dos contornos de pressão sugere que a influência do primeiro cilindro sobre o segundo torna-se menor, uma vez que os cilindros passam a possuir um comportamento próximo àquele observado quando somente um cilindro se encontra sob a ação do escoamento.

A figura 3.16 ilustra o fato de que, para a distância entre centros igual a 1.5 , 2.0 e $3.0D$, nota-se que os cilindros adotam um comportamento similar ao de um único corpo, com a formação de uma esteira de vórtices atrás apenas do cilindro posterior. A esteira de vórtices que se forma atrás do segundo cilindro é na verdade formada pelas camadas cisalhantes oriundas do cilindro situado à montante do escoamento.

Em relação aos coeficientes de força, o coeficiente de arrasto é positivo para o cilindro frontal (chamado no gráfico de forças como cilindro número 1) e negativo para o cilindro posterior (cilindro 2), evidenciando a existência de uma força média de atração entre os cilindros. O arrasto do cilindro posterior tende a ficar menos negativo e a amplitude da oscilação da sustentação tende a aumentar a medida que se aumenta o gap. As considerações e observações de ZDRAVKOVICH (1987) corroboram tal fato.

Considerando-se o aumento de gap de 3.0 para 4.0 observa-se uma alteração no padrão do escoamento. O cilindro frontal passa também a emitir vórtices. Dessa forma, os cilindros apresentam oscilação na força de sustentação (com amplitude maior no cilindro posterior) e o arrasto no cilindro posterior torna-se positivo (mas, ainda assim, bem menor que no cilindro frontal). O arrasto no cilindro frontal também aumenta, de aproximadamente 1.0 para aproximadamente 1.2. Deve-se notar a grande variação observada para o número de Strouhal dos cilindros, de maneira análoga ao que foi notado por BEARMAN & WADCOCK(1973).

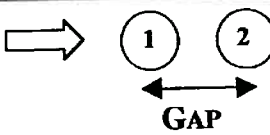
COEFICIENTES DE FORÇA MÉDIOS CONFIGURAÇÃO TANDEM							
GAP	$C_{d_m 1}$	$C_{d_m 2}$	$C_{d_m 1}/C_{d_{isolado}}$	$C_{d_m 2}/C_{d_{isolado}}$	St_1	St_2	
1.5D	1.06	-0.18	0.82	-0.14	0.167	0.167	
2.0D	1.03	-0.17	0.79	-0.13	0.130	0.130	
3.0D	1.0	-0.08	0.77	-0.06	0.125	0.125	
4.0D	1.18	0.38	0.91	0.29	0.174	0.174	

Tabela 3.4. Resumo dos resultados do cálculo de forças para a configuração tandem. Valores médios do coeficiente de sustentação (C_{l_m}) e arrasto (C_{d_m}).

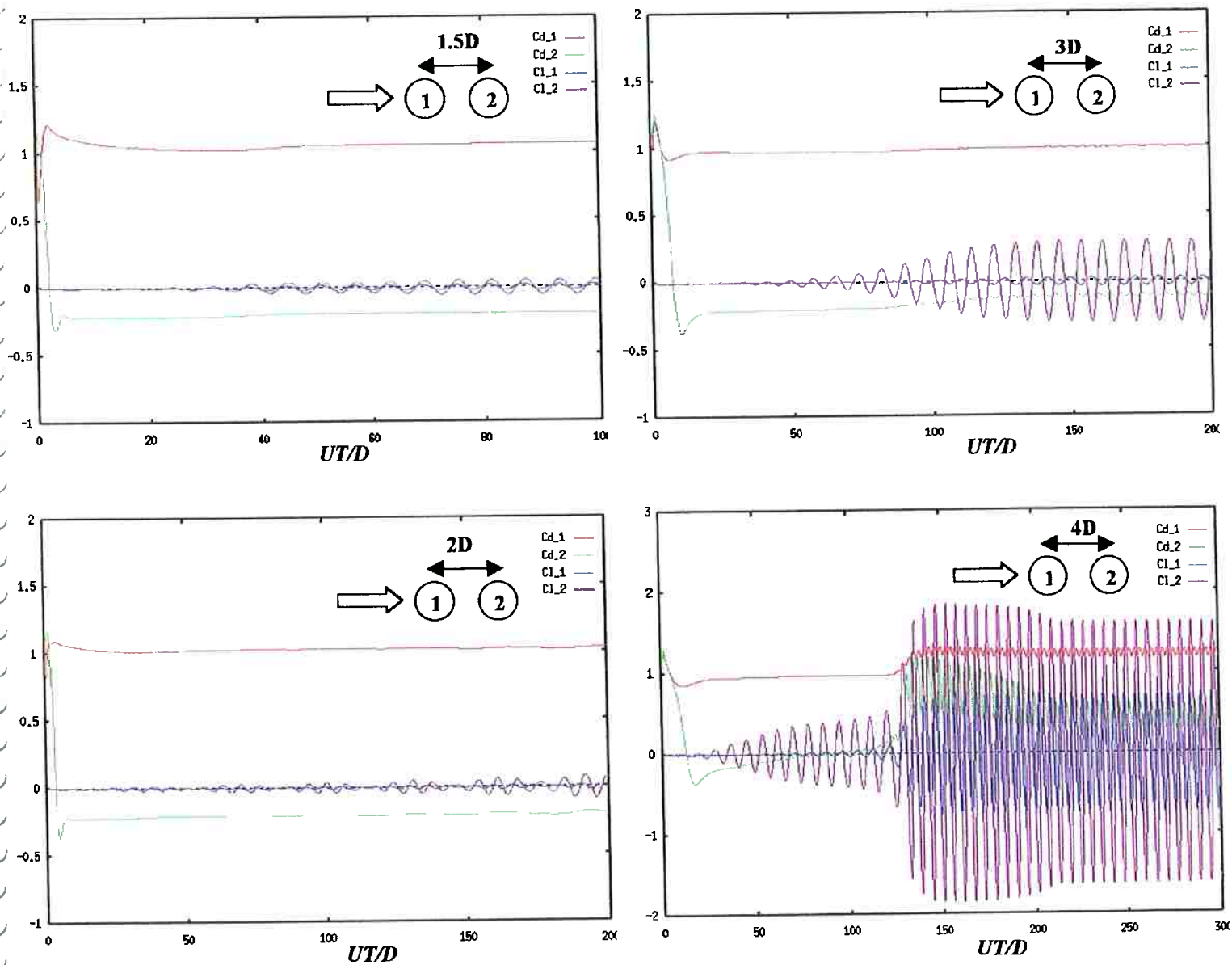


Fig. 3.13. Coeficientes de força em função do tempo para o agrupamento de cilindros em configuração tandem.

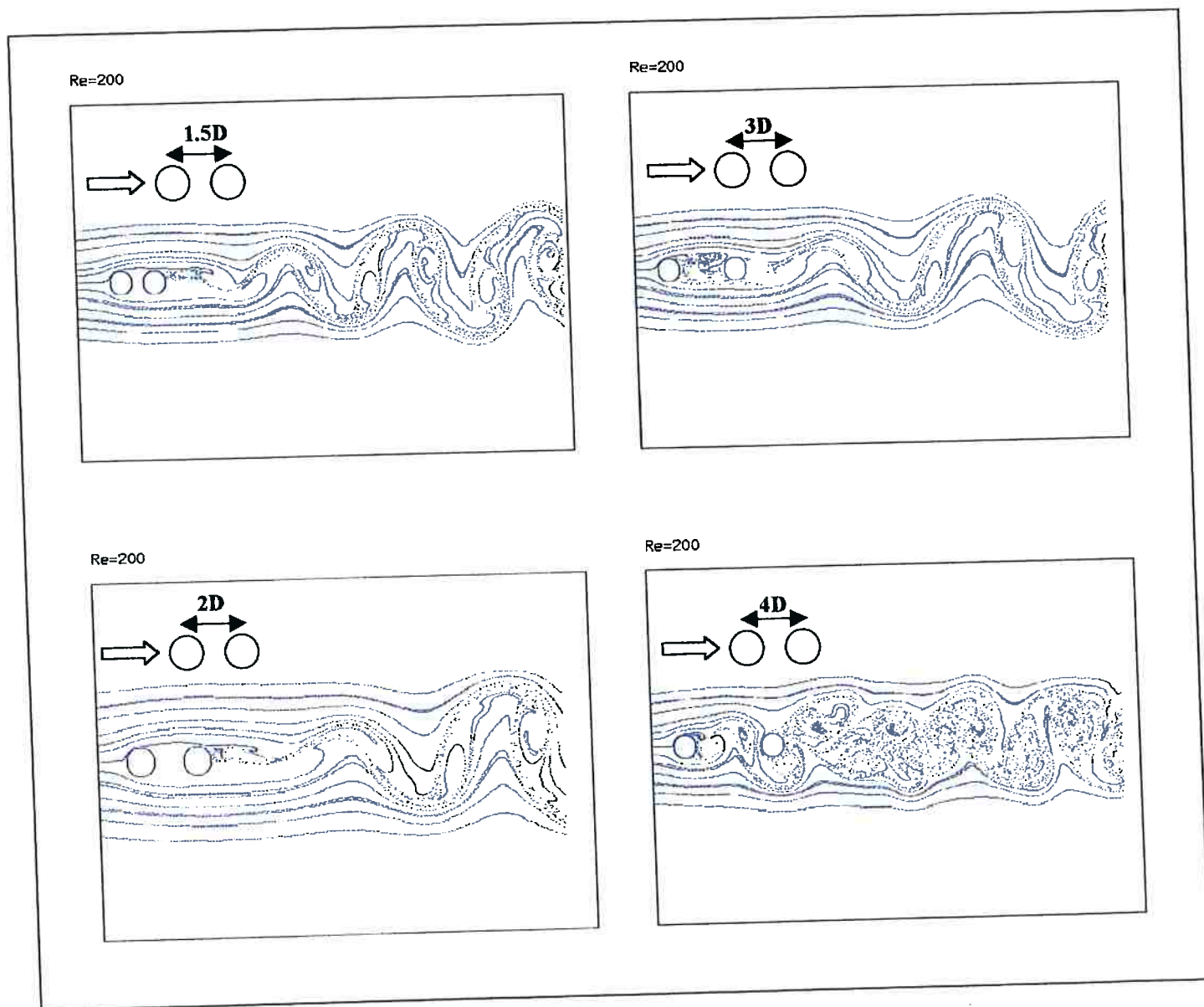


Fig. 3.14. Esteiras para o agrupamento de cilindros em configuração tandem. Utilização de traçadores.

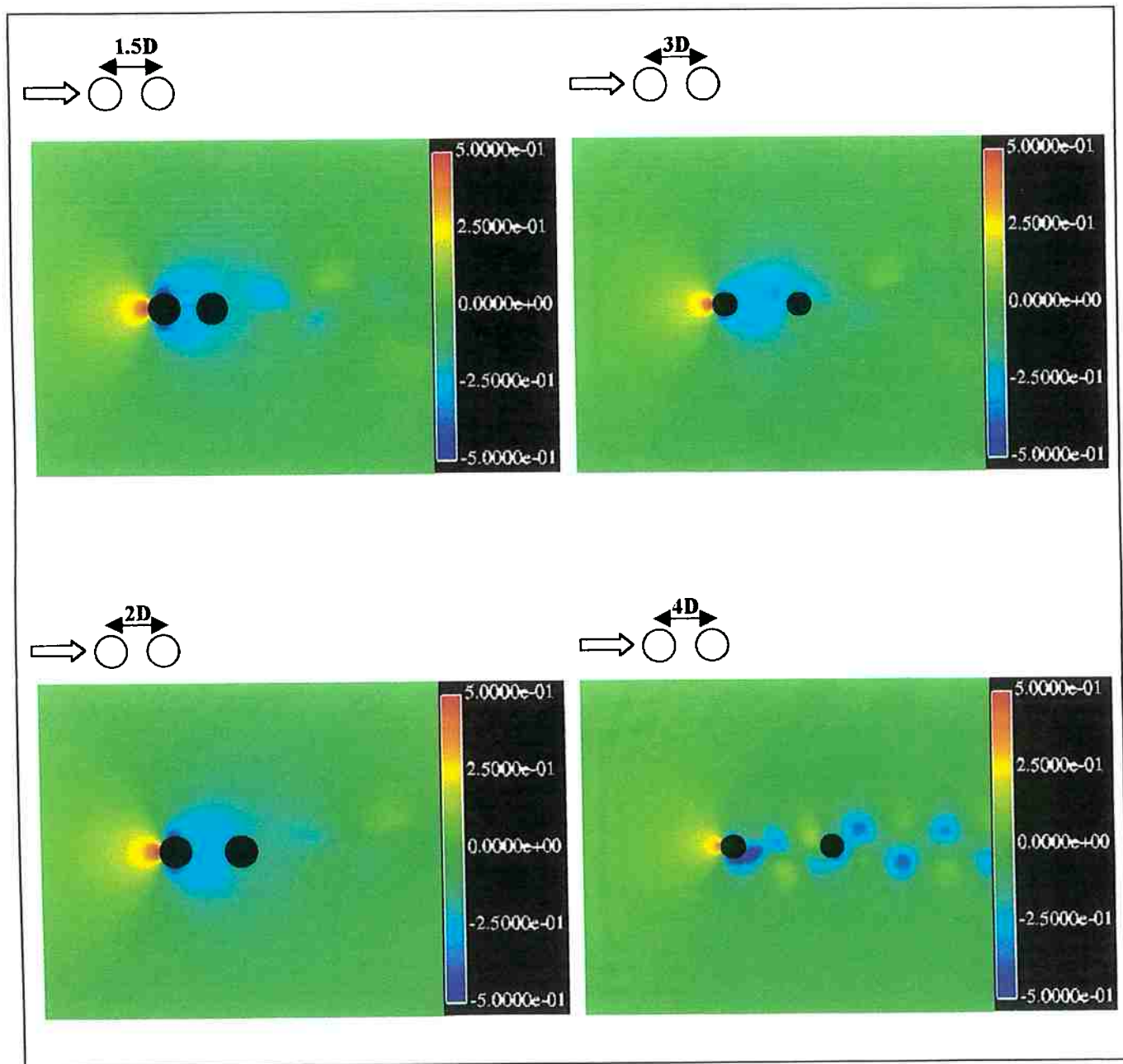


Fig. 3.15. Contornos de pressão para o agrupamento de cilindros em configuração tandem.

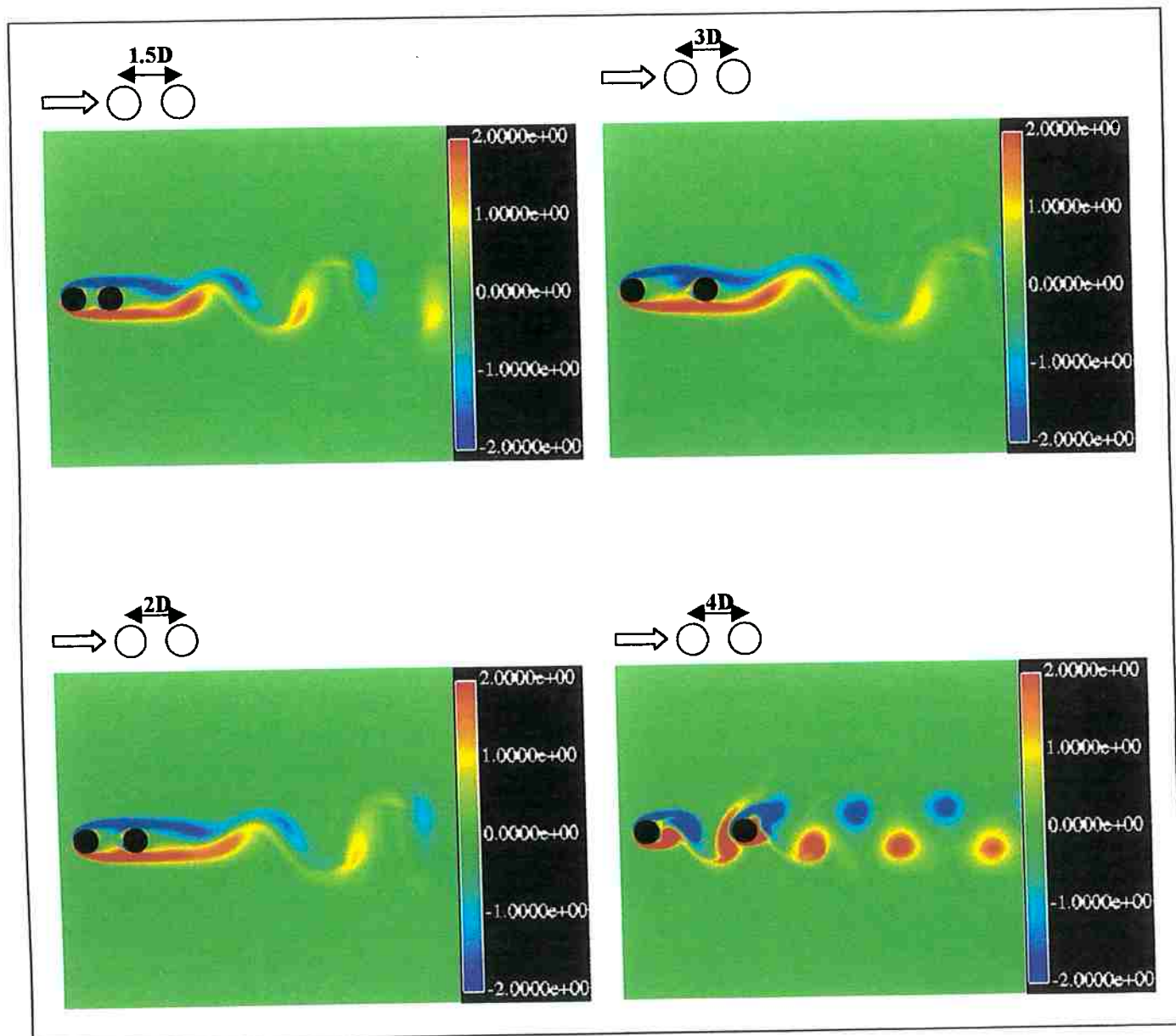


Fig. 3.16. Contornos de vorticidade para o agrupamento de cilindros em configuração tandem.

Serão mostrados agora os resultados para a configuração LADO A LADO. A figura 3.17 mostra uma típica malha não-estruturada para este arranjo para um gap de 3 diâmetros entre os centros do cilindro. Já a figura 3.18 mostra detalhes da malha em uma região próxima aos dois cilindros. De maneira análoga, a concentração de pontos nesta região é necessária para uma boa discretização da camada limite.

Numero de elementos -> 27672 Numero de nos -> 14013

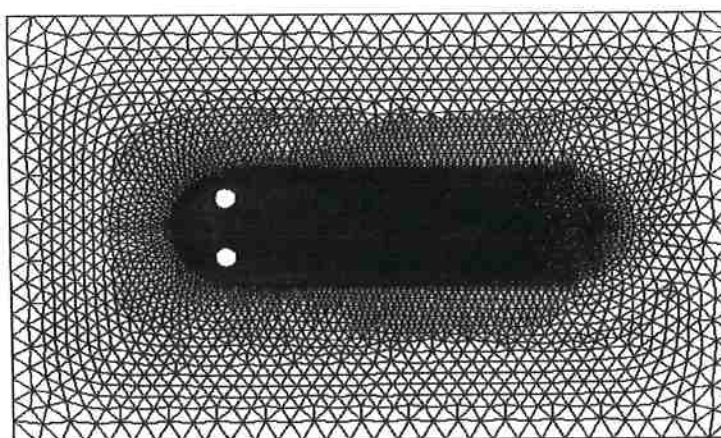


Fig. 3.17. Malha típica para a resolução do escoamento ao redor de dois cilindros em configuração Lado a Lado. Distância entre centros igual a 3 diâmetros.

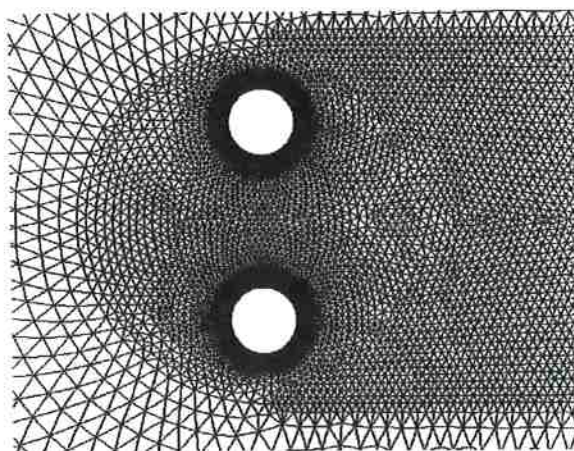


Fig. 3.18. Detalhe da malha computacional em uma região próxima aos cilindros.

A figura 3.19 mostra o gráfico dos coeficientes de arrasto e sustentação em função do tempo para os quatro valores de gap na configuração lado a lado. Um resumo dos valores médios de forças de sustentação ($C_{l,m1}$ e $C_{l,m2}$) e arrasto ($C_{d,m1}$ e $C_{d,m2}$) é dado na tabela 3.5 juntamente com a relação entre o coeficiente de arrasto do agrupamento e do cilindro isolado. Já a figura 3.20 mostra o conjunto das esteiras do agrupamento de cilindros obtidas através do método dos traçadores. Contornos de pressão são dados na figura 3.21 e contornos de vorticidade na figura 3.22.

Observa-se que para uma distância entre centros igual a $1.5D$ uma força de repulsão entre os cilindros, como observado por BEARMAN E WADCOCK(1973) e SALTARA(1999). Uma possível explicação para tal fenômeno pode ser vista nos contornos de pressão da figura 3.21. Forma-se uma região de alta pressão na frente da passagem entre os cilindros e uma queda de pressão ao longo da mesma. A pressão na passagem continua maior que a pressão que age sobre os lados dos cilindros opostos à passagem. Os pontos de estagnação se movem em direção à região entre os cilindros, ocorrendo o mesmo com os pontos de separação externos à esta (ponto de separação superior no cilindro de cima e ponto de separação no cilindro de baixo). O resultado líquido desse fenômeno é a ocorrência de uma força de repulsão entre os cilindros. O fenômeno de “*flopping*”, ou seja, a deflexão da esteira ora para trás do cilindro de cima e ora para o cilindro de baixo, causa a diferença no sinal do coeficiente dos dois cilindros. Entretanto, o fenômeno de “*flopping*” observado experimentalmente por KIM E DURBIN(1988) apresentava uma escala de tempo consideravelmente maior (da ordem de mil vezes a escala de tempo de emissão de vórtices). Segundo SALTARA(1999), a explicação para esta diferença pode estar no fato das simulações serem bidimensionais.

Já para um gap de 2D o fenômeno de “flopping” ainda é visível no sinal dos coeficientes de arrasto, mas nota-se que a escala de tempo de flopping diminuiu e se aproximou do período de emissão de vórtices. Ocorre também uma diminuição da força de repulsão entre os cilindros. Segundo SUMNER ET AL (1998) o “flopping” se mantém até um valor de gap igual a 2.2. Quando se alcança um valor de gap igual a 3.0, observa-se que o “flopping” desaparece, também notado por SUMNER ET AL (1998). Os coeficientes de arrasto são idênticos para ambos os cilindros neste caso e os coeficientes de sustentação estão em anti-fase. Na figura 3.20 vê-se uma esteira em anti-fase como aquela observada experimentalmente por WILLIAMSON(1985). Tal comportamento se repete para um gap igual a 4.0 onde ocorre a sincronização perfeita entre as esteiras. À medida que se aumenta o mesmo sugere-se que fique difícil de notar que ainda exista uma interferência entre os cilindros.

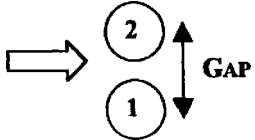
COEFICIENTES DE FORÇA MÉDIOS CONFIGURAÇÃO LADO A LADO					
					
GAP	$Cd_m 1$	$Cd_m 2$	$Cl_m 1$	$Cl_m 2$	$Cd_{agrupamento}/$ $Cd_{isolado}$
1.5D	1.32	1.32	-0.40	0.40	1.02
2.0D	1.42	1.42	-0.22	0.22	1.09
3.0D	1.41	1.41	-0.10	0.10	1.08
4.0D	1.34	1.34	-0.05	0.05	1.03

Tabela 3.5. Resumo dos resultados do cálculo de forças para a configuração lado a lado. Valores médios do coeficiente de sustentação (Cl_m) e arrasto (Cd_m).

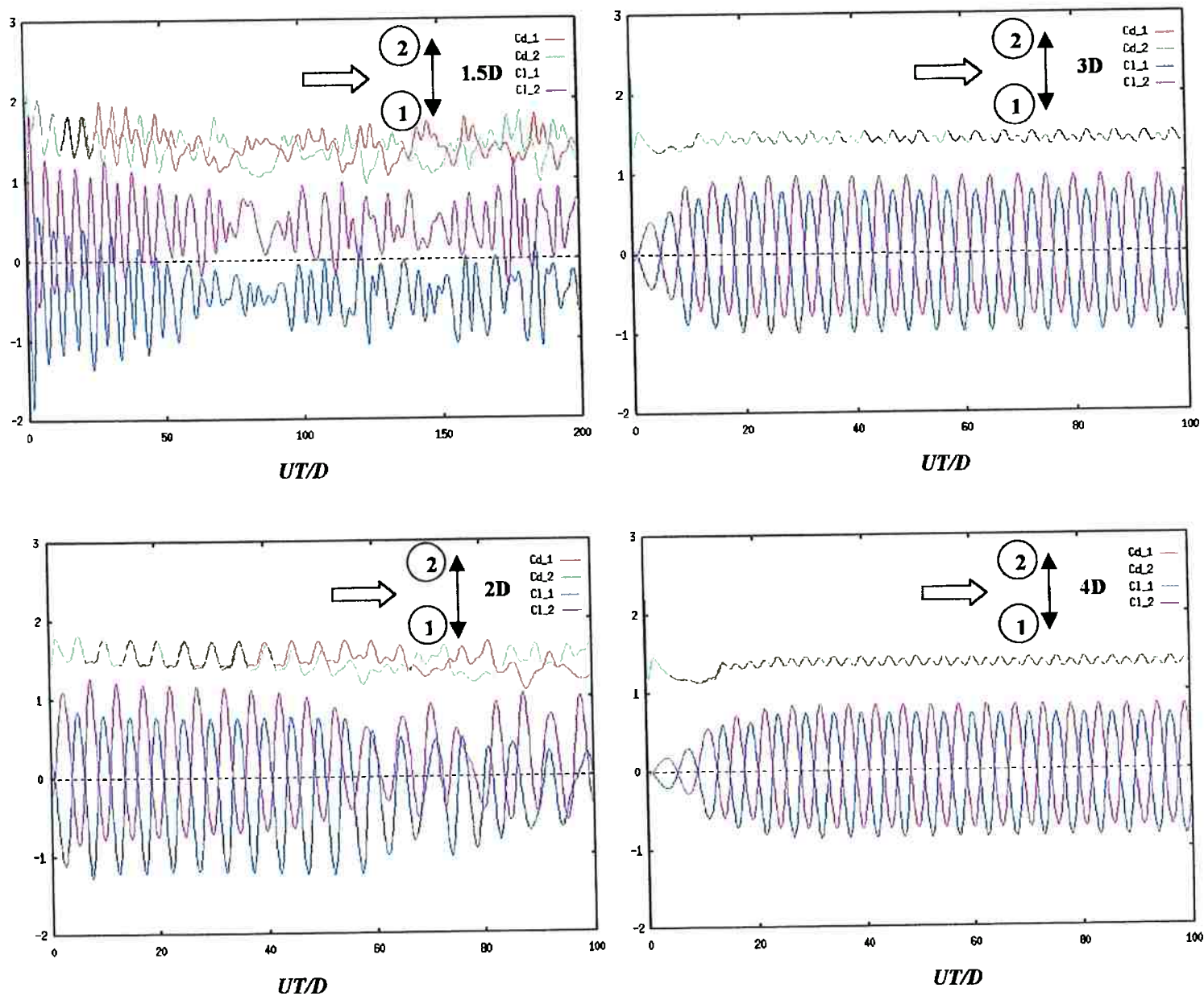


Fig. 3.19. Coeficientes de força em função do tempo para o agrupamento de cilindros em configuração lado a lado.

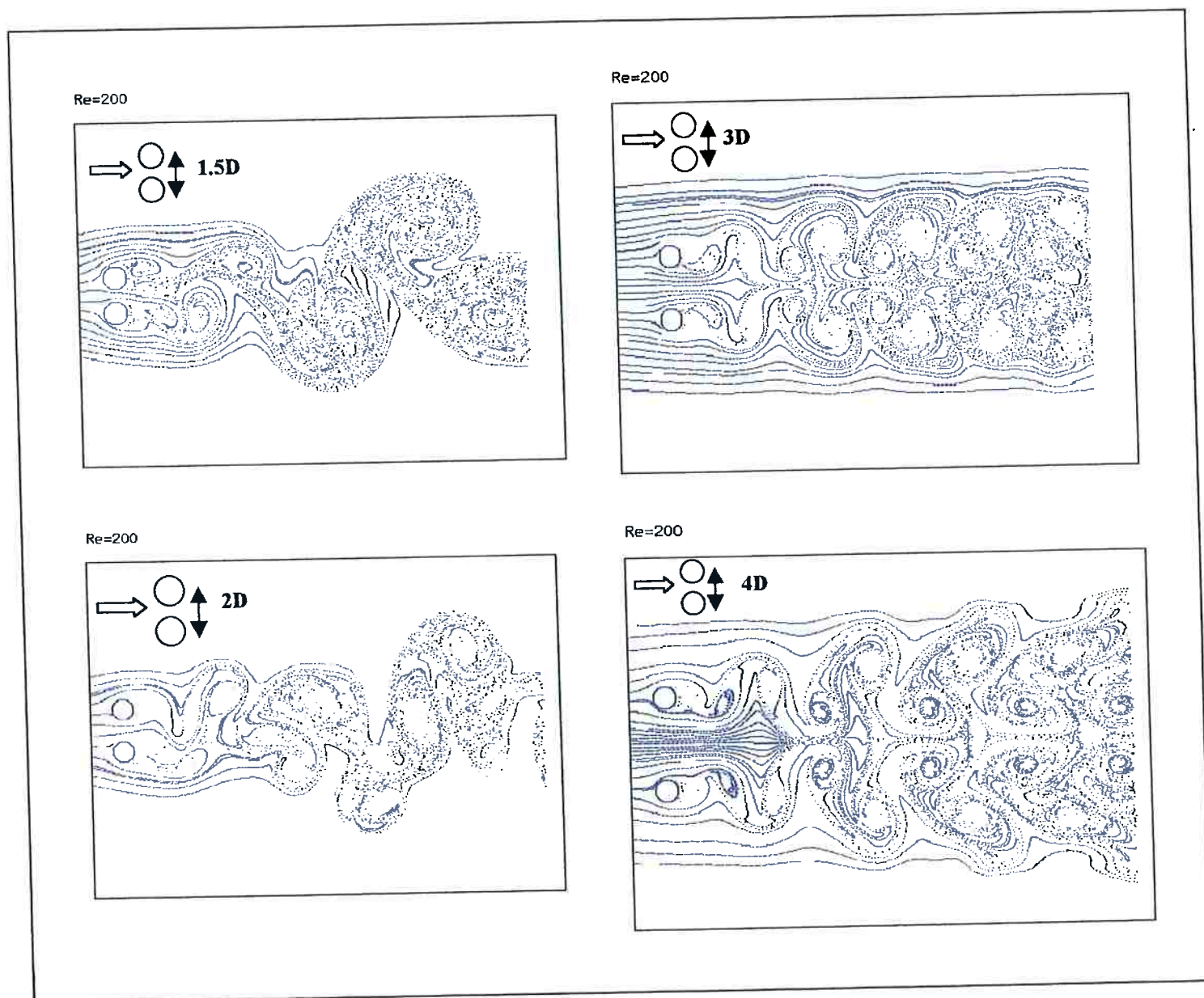


Fig. 3.20. Esteiras para o agrupamento de cilindros em configuração lado a lado. Utilização de traçadores.

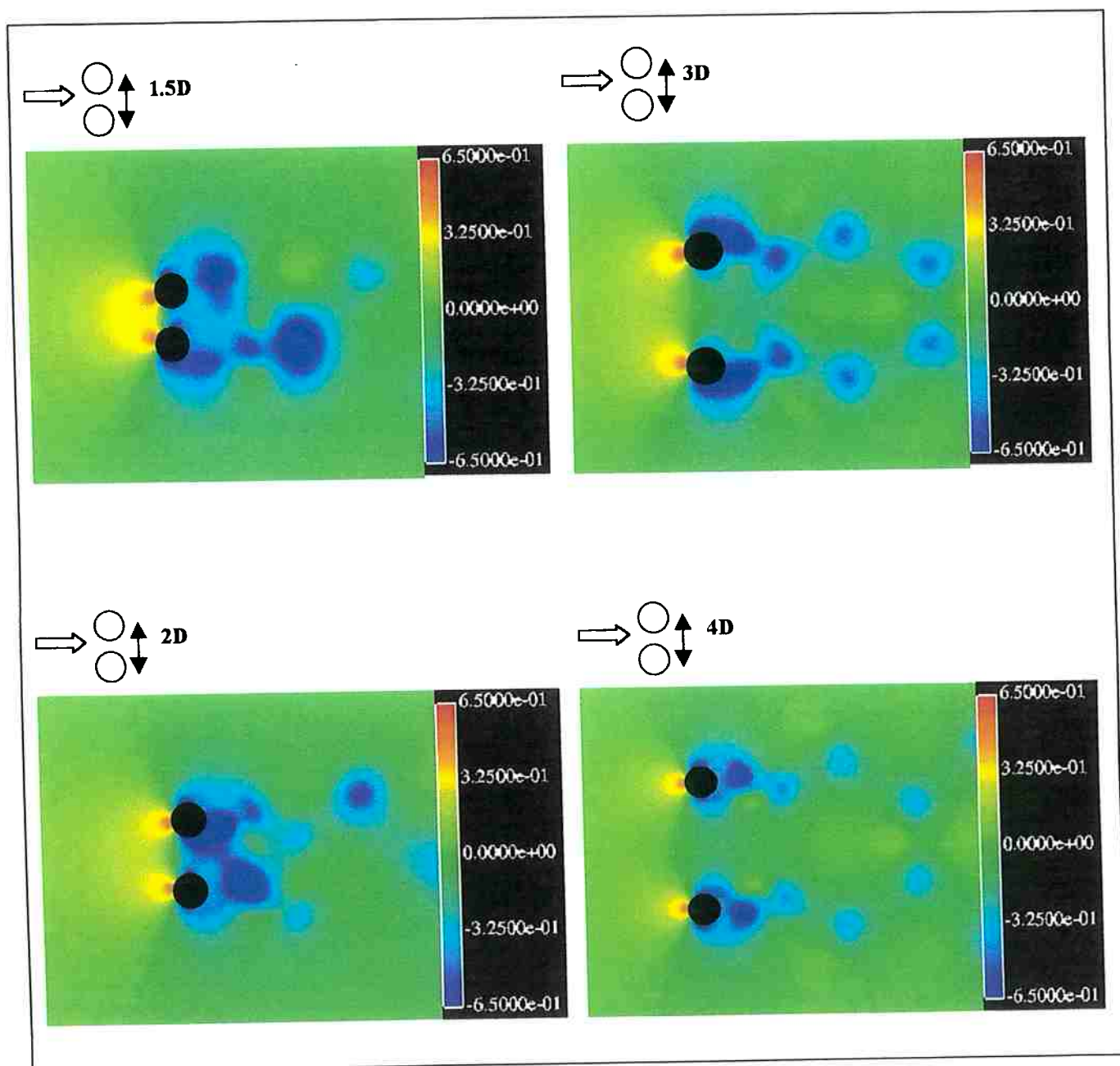


Fig. 3.21. Contornos de pressão para o agrupamento de cilindros em configuração lado a lado.

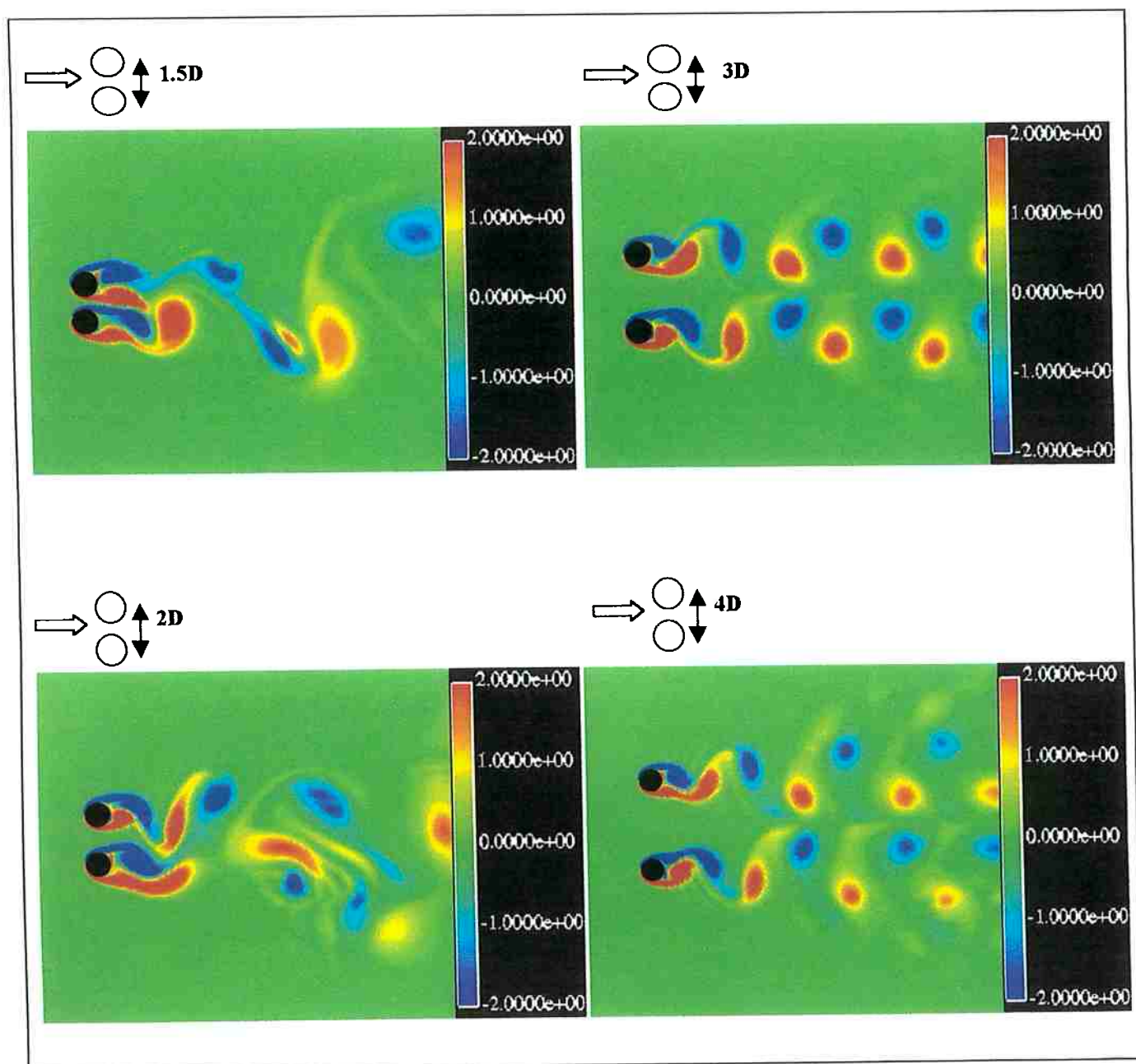


Fig. 3.22. Contornos de vorticidade para o agrupamento de cilindros em configuração lado a lado.

4. APRESENTAÇÃO DO SIMULADOR NUMÉRICO APLICADO À RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS TRIDIMENSIONAIS

4.1. INTRODUÇÃO E CONSIDERAÇÕES GERAIS

A rigor, o algoritmo que descreve o FSM para três dimensões utilizando uma malha não-estruturada é o mesmo descrito na seção que se refere ao FSM bidimensional. Entretanto, algumas considerações devem ser feitas, principalmente em relação à imposição da condição de contorno cíclica ou periódica (descrita adiante) e à montagem das matrizes fundamentais na etapa de pré-processamento. Em relação à condição de contorno cíclica, nós e elementos que pertencem a estas faces terão os mesmos elementos vizinhos na matriz de conectividade, uma vez os mesmos devem representar fisicamente o mesmo ponto no espaço. Detalhes de como a condição de contorno foi implementada no programa que resolve o escoamento tridimensional serão dados a seguir.

Além da implementação da condição de contorno cíclica, o programa que resolve o escoamento tridimensional ao redor de corpos rombudos de qualquer formato incluiu o esquema Adams-Bashforth para a parte convectiva das equações de Navier-Stokes, garantindo assim precisão de 2ª ordem no tempo.

As equações de interesse serão resolvidas em uma malha tridimensional não-estruturada de tetraedros. Segundo ARKELL(1995), existem diversas justificativas para a adoção de tetraedros para a análise tridimensional: a integração analítica e os algoritmos são em geral menos complexos para elementos com quatro nós e, em termos de precisão,

a compactação espacial e discretização de um determinado domínio oferecida pelos tetraedros é superior àquela alcançada, por exemplo, com hexaedros (seis nós).

O procedimento de solução das equações é baseado no MEF via Método de Galerkin “piecewise-linear”, de forma análoga ao que foi implementado no código bidimensional. Usando-se as funções de forma como sendo as próprias funções teste, a discretização dos operadores de Laplace conduzirá, de maneira similar ao caso bidimensional, a matrizes de rigidez simétricas.

As equações na forma discretizada recuperam mais uma vez a aparência usual já apresentada quando da resolução da equações discretizadas para problemas bidimensionais. Consequentemente, as equações estão na forma clássica para o emprego do PCG com Diagonal Scalling para a resolução de sistemas de equações lineares com matrizes esparsas. ARKELL(1995) implementou também em seu trabalho, além do PCG + Diagonal Scalling, o CG + decomposição Incompleta de Cholesky. Conforme este pesquisador, os resultados obtidos através da implementação deste último método para problemas tridimensionais não compensam os custos computacionais relacionados à sua implementação e gerenciamento da alocação de memória empregada.

Ainda segundo ARKELL(1995), observa-se de uma forma geral que em uma malha não-estruturada de tetraedros o número de elementos é cinco vezes superior ao número de nós. Dessa forma, os “loops” computacionais realizados sobre os elementos da malha demandarão até cinco vezes mais tempo de processamento quando comparado aos tempo gasto nos “loops” sobre os nós. Já no caso bidimensional têm-se que a relação entre o número de elementos e nós é em geral aproximadamente igual a 2.

Conforme visto em ARKELL(1995), os campos de velocidade e vorticidade são aproximados por uma variação espacial (“piecewise-linear”) ao longo dos elementos do domínio. A representação é dada através do seguinte conjunto de equações:

$$\vec{\omega} = \sum_{i=1}^{N_p} \vec{\omega}_i N_i \quad (4.1)$$

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{N_p} \vec{u}_i N_i \quad (4.2)$$

onde N_p é o número de nós e N_i a função de forma no nó i . Um elemento do tipo tetraedro típico(e) é apresentado na figura 4.1.

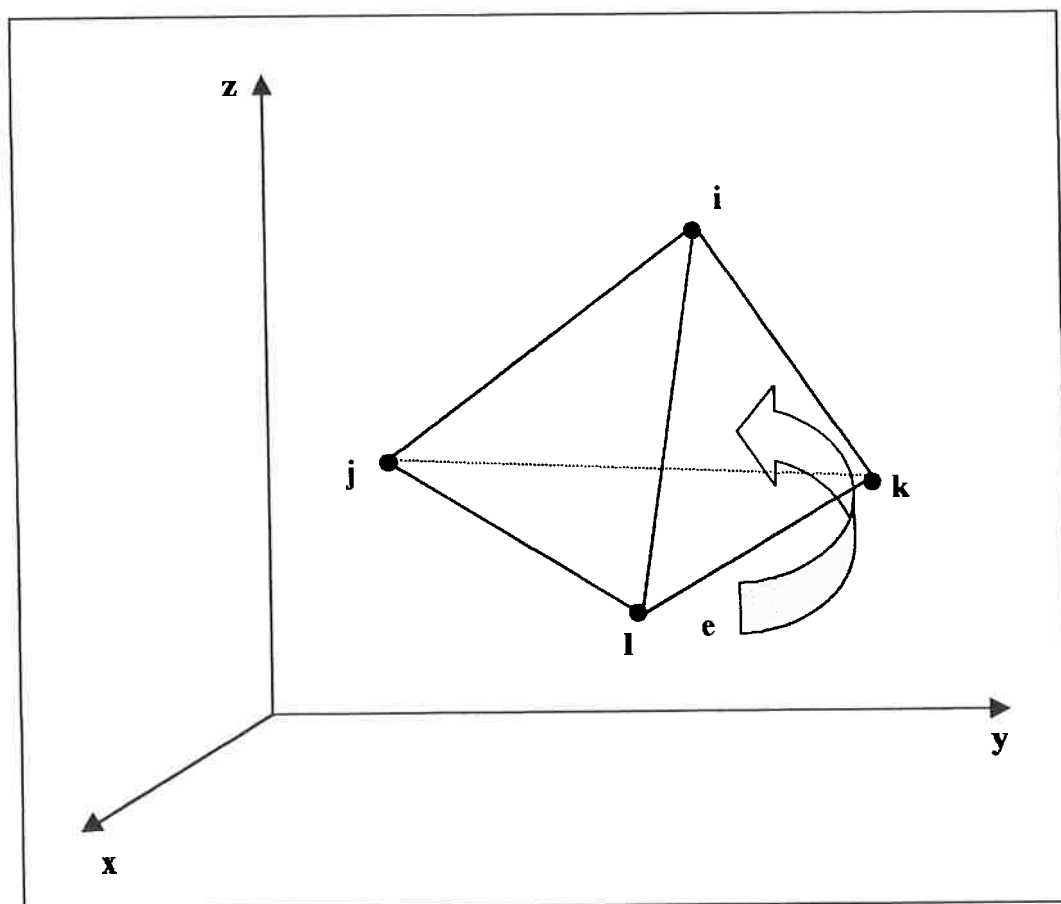


Fig. 4.1. Elemento tetraédrico típico.

A conectividade entre os elementos e nós é obtida através de um sistema de numeração consistente no sentido anti-horário. As funções de forma são lineares sobre o elemento tetraedro e são dadas através de (ZIENKIEWICZ AND MORGAN(1983)):

$$N_i^e = \alpha_i^e + \beta_i^e x + \gamma_i^e y + \delta_i^e z \quad (4.3)$$

$$N_j^e = \alpha_j^e + \beta_j^e x + \gamma_j^e y + \delta_j^e z \quad (4.4)$$

$$N_k^e = \alpha_k^e + \beta_k^e x + \gamma_k^e y + \delta_k^e z \quad (4.5)$$

$$N_l^e = \alpha_l^e + \beta_l^e x + \gamma_l^e y + \delta_l^e z \quad (4.6)$$

De maneira análoga ao que foi considerado no caso bidimensional, a variação da vorticidade será considerada linear ao longo do elemento em consideração, dada pela relação (V^e = volume do tetraedro em consideração):

$$\begin{aligned} \omega^e = \frac{1}{6V^e} [& (\alpha_i^e + \beta_i^e x + \gamma_i^e y + \delta_i^e z) \omega_i + \\ & (\alpha_j^e + \beta_j^e x + \gamma_j^e y + \delta_j^e z) \omega_j + \\ & (\alpha_k^e + \beta_k^e x + \gamma_k^e y + \delta_k^e z) \omega_k + \\ & (\alpha_l^e + \beta_l^e x + \gamma_l^e y + \delta_l^e z) \omega_l] \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde

$$6V^e = \det \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_k & y_k & z_k \\ 1 & x_l & y_l & z_l \end{vmatrix} \quad (4.8)$$

Expandindo os demais determinantes em seus cofatores obter-se-á:

$$\begin{aligned}
\alpha_i^e &= \det \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \\ x_l & y_l & z_l \end{vmatrix} & \beta_i^e &= -\det \begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_k & z_k \\ 1 & y_l & z_l \end{vmatrix} \\
\gamma_i^e &= -\det \begin{vmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_k & 1 & z_k \\ x_l & 1 & z_l \end{vmatrix} & \delta_i^e &= -\det \begin{vmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \\ x_l & y_l & 1 \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Os coeficientes restantes são definidos através de arranjos cíclicos dos demais coeficientes. De acordo com ARKELL(1995), expressões similares são utilizadas para a determinação do campo de velocidades ao longo de um dado elemento.

A matriz de massa \mathbf{C} , que também é simétrica no caso tridimensional, é obtida usando-se novamente o método de Galerkin, tendo-se para a contribuição c^e de um dado elemento a seguinte expressão:

$$c^e = \int_{\Omega^e} \begin{bmatrix} (N_i^e)^2 & N_i^e N_j^e & N_i^e N_k^e & N_i^e N_l^e \\ N_j^e N_i^e & (N_j^e)^2 & N_j^e N_k^e & N_j^e N_l^e \\ N_k^e N_i^e & N_k^e N_j^e & (N_k^e)^2 & N_k^e N_l^e \\ N_l^e N_i^e & N_l^e N_j^e & N_l^e N_k^e & (N_l^e)^2 \end{bmatrix} dx dy dz \tag{4.10}$$

As contribuições que constituem a matriz \mathbf{C} podem ser determinadas por integração numérica. De maneira análoga ao caso bidimensional, é de interesse pratico diagonalizar a matriz \mathbf{C} por um processo conhecido como *lumping*. Dessa forma, 25% do carregamento total é concentrado em cada nó do tetraedro, tornando a matriz diagonal e facilitando a resolução numérica.

A figura 4.2 dada a seguir fornece um esquema da imposição da condição de contorno cíclica no estudo do escoamento tridimensional ao redor do cilindro. Nesta

figura são mostradas as condições de contorno para as faces, arestas e paredes sólidas que compõem o domínio computacional. Deve-se lembrar que nas faces onde ocorre a condição de contorno cíclica, os pontos possuem rigorosamente as mesmas cotas y e z dos pontos homólogos que se situam na outra face. As matrizes fundamentais devem agora incorporar a nova informação de que os nós que se encontram em uma das faces de condição de contorno cíclica deve possuir como vizinhos os respectivos pontos homólogos da outra face.

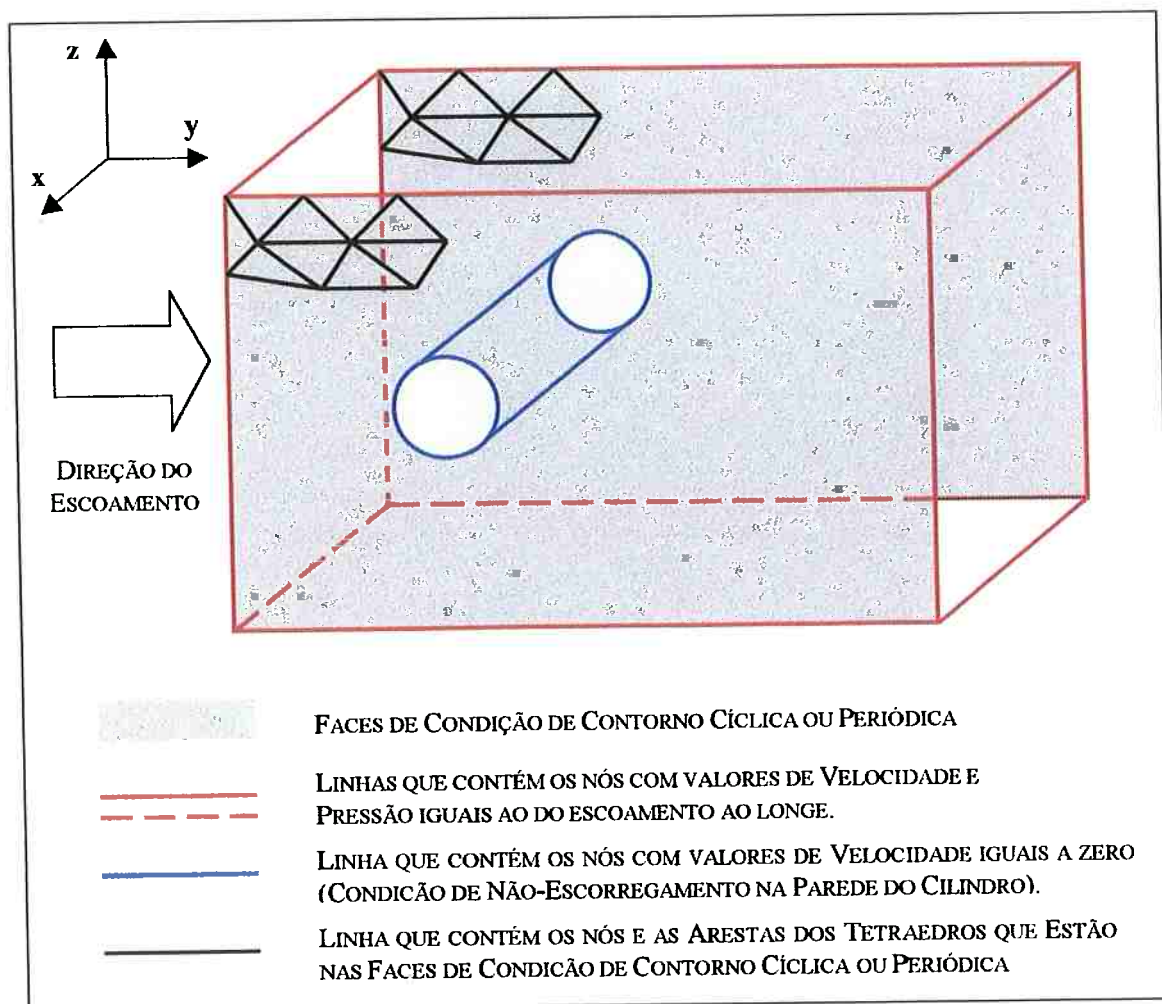


Fig. 4.2. Representação das condições de contorno implementadas no programa que resolve o escoamento tridimensional ao redor do cilindro.

4.2. APRIMORAMENTO DO FSM PARA PROBLEMAS TRIDIMENSIONAIS

Esta seção tem por objetivo apresentar o aprimoramento do FSM levando-se em conta sua aplicação para problemas tridimensionais. Basicamente, a nova versão originada a partir daquela mostrada nos casos bidimensionais incluiu o esquema de Adams-Bashforth para a parte convectiva das equações de Navier-Stokes (precisão de 2ª ordem no tempo). Já para a parte difusiva das equações utilizou-se o esquema de Crank-Nicholson.

De uma maneira geral, conforme pode ser visto em SALTARA(1999), um dos aspectos importantes na resolução de problemas em regime variado é relativo à variação temporal de uma grandeza genérica ϕ em um intervalo de tempo Δt levando-se em consideração os efeitos difusivos e convectivos. Segundo mostrado em SIQUEIRA(1997a), a equação fundamental discretizada através do MEF aplicada para o cálculo de velocidades é dada através de:

$$\left(\frac{\mathbf{C}}{\Delta t_n} + \theta \nu \mathbf{K} \right) \mathbf{V}^{n+1} + \left(-\frac{\mathbf{C}}{\Delta t_n} + (1-\theta) \nu \mathbf{K} \right) \mathbf{V}^n = (1-\theta) \mathbf{f}^n + \theta \mathbf{f}^{n+1} \quad (4.11)$$

onde \mathbf{C} é a matriz de massa, \mathbf{K} a matriz de rigidez, \mathbf{V} o vetor velocidade, \mathbf{f}^n e \mathbf{f}^{n+1} os vetores carregamentos (função da condição de contorno) e θ o parâmetro que define o esquema numérico adotado. O sistema é resolvido em termos da variação de velocidade $d\mathbf{V}$, definida como sendo a diferença de velocidade entre os instantes posterior e anterior, ou seja,

$$d\mathbf{V} = \mathbf{V}^{n+1} - \mathbf{V}^n \quad (4.12)$$

Dessa forma, pode-se voltar à expressão fundamental dada em (4.11) e obter uma nova equação em função das matrizes \mathbf{C} , \mathbf{K} e \mathbf{f} para um dado valor de θ :

$$\left(\frac{\mathbf{C}}{\Delta t_n} + \theta \cdot \nu \cdot \mathbf{K} \right) d\mathbf{V} = (1-\theta)\mathbf{f}^n + \theta \mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{K} \cdot \nu \cdot \mathbf{V}^n \quad (4.13)$$

Os diferentes valores de θ na expressão acima definem os vários esquemas numéricos conhecidos na literatura. Para $\theta = 0$ obtém-se o **esquema explícito** ou diferenças para frente (método de Euler). Para $\theta = 0.5$ obtém-se o **esquema semi-implícito** ou diferenças centradas (método de Crank-Nicholson). Já para $\theta = 1.0$ obtém-se o **esquema implícito** ou diferenças para trás.

Os esquemas implícito e semi-implícito são preferíveis devido à estabilidade do processo de solução. Apenas o esquema semi-implícito tem precisão temporal de 2ª ordem, sendo os esquemas implícito e explícito esquemas de 1ª ordem. Dessa forma, a solução recomendada para garantir que o método de resolução tenha precisão temporal de 2ª ordem é utilizar o esquema de Crank-Nicholson apenas na parte difusiva, e usar o esquema de Adams-Bashforth para a parte convectiva. Tal esquema determina o valor de uma variável em um dado instante a partir dos valores dessa variável em dois instantes anteriores, e tem precisão de 2ª ordem, segundo pode ser visto em ROACHE(1982). Em face do que foi exposto, volta-se a equação 4.13 e rescreve-se a mesma considerando esquema de Crank-Nicholson para os termos difusivos e Adams-Bashforth para os termos convectivos:

$$\left(\frac{\mathbf{C}}{\Delta t_n} + \frac{1}{2} \nu \cdot \mathbf{K} \right) d\mathbf{V} = \frac{1}{2} \mathbf{f}^n - \frac{3}{2} \mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{K} \nu \cdot \mathbf{V}^n \quad (4.14)$$

Pode-se agora então rescrever o algoritmo do FSM tridimensional com precisão de 2ª ordem no tempo. Nestas equações, o sobrescrito 1 refere-se ao valor da velocidade no instante $t_0 + \Delta t$, o sobrescrito 0 refere-se ao valor no instante t_0 , e o sobrescrito -1 refere-se ao valor dessa variável no instante $t_0 - \Delta t$.

1) Determina-se o campo de velocidades intermediário (sobrescrito *) para o primeiro instante de tempo da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} (u^* - u^0) &= \frac{1}{2} \nu \nabla^2 u^0 + \frac{1}{2} \nu \nabla^2 u^1 - \left(u^0 \frac{\partial u^0}{\partial x} + v^0 \frac{\partial u^0}{\partial y} + w^0 \frac{\partial u^0}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{\Delta t} (v^* - v^0) &= \frac{1}{2} \nu \nabla^2 v^0 + \frac{1}{2} \nu \nabla^2 v^1 - \left(u^0 \frac{\partial v^0}{\partial x} + v^0 \frac{\partial v^0}{\partial y} + w^0 \frac{\partial v^0}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{\Delta t} (w^* - w^0) &= \frac{1}{2} \nu \nabla^2 w^0 + \frac{1}{2} \nu \nabla^2 w^1 - \left(u^0 \frac{\partial w^0}{\partial x} + v^0 \frac{\partial w^0}{\partial y} + w^0 \frac{\partial w^0}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Para os demais instantes de tempo, resolve-se dentro do passo 1 o seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} (u^* - u^0) &= \frac{1}{2} \nu \nabla^2 u^0 + \frac{1}{2} \nu \nabla^2 u^1 - \frac{3}{2} \left(u^0 \frac{\partial u^0}{\partial x} + v^0 \frac{\partial u^0}{\partial y} + w^0 \frac{\partial u^0}{\partial z} \right) + \\ &\quad \frac{1}{2} \left(u^{-1} \frac{\partial u^{-1}}{\partial x} + v^{-1} \frac{\partial u^{-1}}{\partial y} + w^{-1} \frac{\partial u^{-1}}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Delta t}(v^* - v^o) &= \frac{1}{2}v \nabla^2 v^o + \frac{1}{2}v \nabla^2 v^1 - \frac{3}{2} \left(u^o \frac{\partial v^o}{\partial x} + v^o \frac{\partial v^o}{\partial y} + w^o \frac{\partial v^o}{\partial z} \right) + \\
&\quad \frac{1}{2} \left(u^{-1} \frac{\partial v^{-1}}{\partial x} + v^{-1} \frac{\partial v^{-1}}{\partial y} + w^{-1} \frac{\partial v^{-1}}{\partial z} \right) \\
\frac{1}{\Delta t}(w^* - w^o) &= \frac{1}{2}v \nabla^2 w^o + \frac{1}{2}v \nabla^2 w^1 - \frac{3}{2} \left(u^o \frac{\partial w^o}{\partial x} + v^o \frac{\partial w^o}{\partial y} + w^o \frac{\partial w^o}{\partial z} \right) + \\
&\quad \frac{1}{2} \left(u^{-1} \frac{\partial w^{-1}}{\partial x} + v^{-1} \frac{\partial w^{-1}}{\partial y} + w^{-1} \frac{\partial w^{-1}}{\partial z} \right)
\end{aligned}
\tag{4.16}$$

2) Neste passo são calculados os erros da conservação da massa em cada volume elementar e resolve-se a equação de Poisson para a pressão utilizando-se o campo de velocidades intermediário obtido no passo anterior:

$$\nabla^2 p = \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial y} + \frac{\partial w^*}{\partial z} \right)
\tag{4.17}$$

3) O campo de velocidades final corrigido é obtido através da resolução do seguinte conjunto de equações:

$$\frac{1}{\Delta t}(u^1 - u^*) = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad \frac{1}{\Delta t}(v^1 - v^*) = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad \frac{1}{\Delta t}(w^1 - w^*) = -\frac{\partial p}{\partial z}
\tag{4.18}$$

Após o passo 3 inicia-se um novo intervalo de tempo, recomeçando o passo 1.

Uma vantagem adicional da utilização do esquema de Adams-Bashforth é que não se tem uma contribuição dos fluxos convectivos nos coeficientes das equações algébricas. Assim, obtém-se um sistema de equações com matriz simétrica, o que possibilita a utilização do método do gradiente conjugado.

5. VALIDAÇÃO DO SIMULADOR NUMÉRICO APLICADO À RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS TRIDIMENSIONAIS

Esta seção tem por objetivo mostrar os estudos de validação do simulador numérico tridimensional para a resolução do escoamento ao redor do cilindro. Foi simulado o escoamento ao redor de um cilindro fixo variando-se o comprimento do mesmo na direção transversal do escoamento. Os resultados para o número de Strouhal e coeficiente de pressão (definido na seção 5.2) foram comparados aos resultados experimentais de WILLIAMSON AND ROSHKO(1990) e NORBERG(1994) e também aos resultados numéricos obtidos por HENDERSON AND BARKLEY(1996) e THOMPSON et al.(1995). Primeiro serão mostrados detalhes das malhas computacionais não-estruturadas de tetraedros obtidas através da utilização do programa GAMBIT v1.0. Nas seções subsequentes serão apresentados os resultados das simulações numéricas tridimensionais.

5.1. GERAÇÃO DE MALHAS NÃO-ESTRUTURADAS TRIDIMENSIONAIS PARA AS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS

Para a simulação de escoamento tridimensional através de um cilindro foram escolhidas três malhas computacionais, variando-se o comprimento do cilindro "span" na direção transversal ao escoamento. As três malhas não-estruturadas geradas no programa "GAMBIT 1.0/ Fluent" possuem comprimento do cilindro de 2, 5 e 6.28D, onde D é o diâmetro do cilindro (igual a 2.0). Segundo observado em NEWMAN AND KARNIADAKIS(1997), nota-se que estas malhas possuem na região da entrada do

escoamento um formato arredado (malha tipo C), característica escolhida para a melhoria da razão de aspecto de seus elementos. Este formato de domínio é mais adequado que a malha tipo O, onde o domínio computacional envolvente também seria um cilindro. Entretanto, para este último tipo de malha não há uma boa caracterização da esteira do escoamento.

De maneira similar ao que foi realizado para as malhas não-estruturadas bidimensionais, procedeu-se a uma criteriosa análise de convergência de malhas, a qual notabilizou-se pela otimização da região da camada limite e esteira.

As malhas computacionais possuem uma boa discretização da camada limite e para os quatro casos escolhidos têm-se uma divisão de 108 pontos na parede do cilindro e o nó mais próximo à parede do cilindro situa-se a uma distância de 4% do raio do mesmo. Tal divisão proporciona uma grande densidade de tetraedros ao longo do comprimento do cilindro, característica intrínseca do gerador de malhas.

O centro do cilindro de raio R igual a 1.0 corresponde ao ponto de coordenadas $(0,0,0)$ e a malha se estende por $45R$ à jusante e $20R$ à montante do cilindro. Na direção vertical a malha se estende a $20.0R$ acima e abaixo do cilindro e intervalos de tempo adimensional $UT/D = 5e-3$ e $UT/D = 1e-2$ foram utilizados nas simulações onde a velocidade é igual a 1.0 na direção do eixo y (observar figura 5.1).

Para uma melhor caracterização da região da esteira e camada limite do cilindro, foram criados subdomínios para concentração de pontos nestas regiões, garantido-se dessa forma uma maior uniformidade dos elementos em relação à razão de aspecto e concentração de células em áreas de elevados gradientes de vorticidade.

A tabela 5.1 dada a seguir fornece o número de elementos e nós para as três malhas geradas. Nota-se a grande densidade de nós obtida, em especial para a malha com cilindro de comprimento igual a 6.28D, cujo número de elementos é superior a 1.5 milhão.

	Comprimento do cilindro ou "span"		
	2D	5D	6.28D
Número de elementos	713.632	1.266.299	1.538.109
Número de nós	131.539	230.329	278.602

Tabela 5.1. Resumo da densidade nodal das malhas computacionais geradas para a resolução do escoamento tridimensional ao redor do cilindro.

As figuras a seguir mostram detalhes das malhas computacionais geradas. A figura 5.1 mostra uma malha computacional típica para um comprimento do cilindro de 5D. Tipicamente, são mostradas nas figuras seguintes (5.2 e 5.3) detalhes desta malha por meio de cortes em dois planos distintos. Já nas figuras 5.4 e 5.5 percebe-se a boa discretização da camada limite através de um detalhe de aproximação das figuras 5.2 e 5.3, característica presente nas demais malhas. Para as demais malhas computacionais (2D e 6.28D) são mostradas na figura 5.6 apenas as vistas em perspectiva do domínio completo, uma vez que a densidade nodal próximo à camada limite e esteira comportam-se de maneira análoga.

O cilindro com comprimento $6.28D$ foi escolhido tomando-se como referência o trabalho numérico desenvolvido por HENDERSON AND BARKLEY(1996) e THOMPSON et al.(1995). Estes autores escolherem tal comprimento ou "span" baseando-se em informações de que o comprimento das instabilidades vorticiais que aparecem no escoamento ao redor do cilindro para $Re = 200$ ou ligeiramente acima deste é da ordem de πD . Dessa forma, os referidos autores puderam observar duas regiões de instabilidade na esteira do cilindro, motivando a construção de tal malha computacional para a aplicação do simulador numérico desenvolvido neste trabalho.

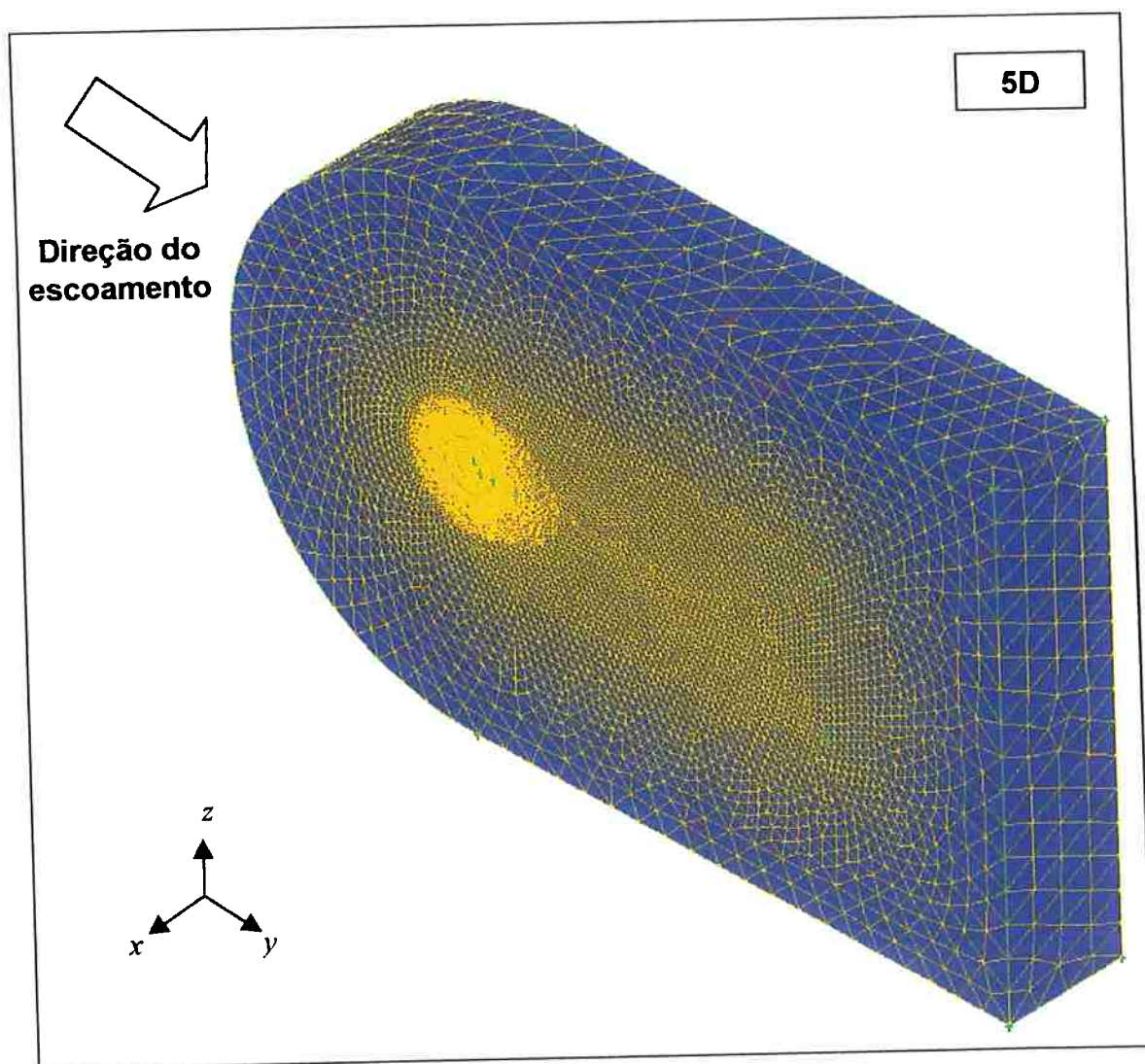


Fig. 5.1. Malha computacional típica para um comprimento do cilindro de $5D$.

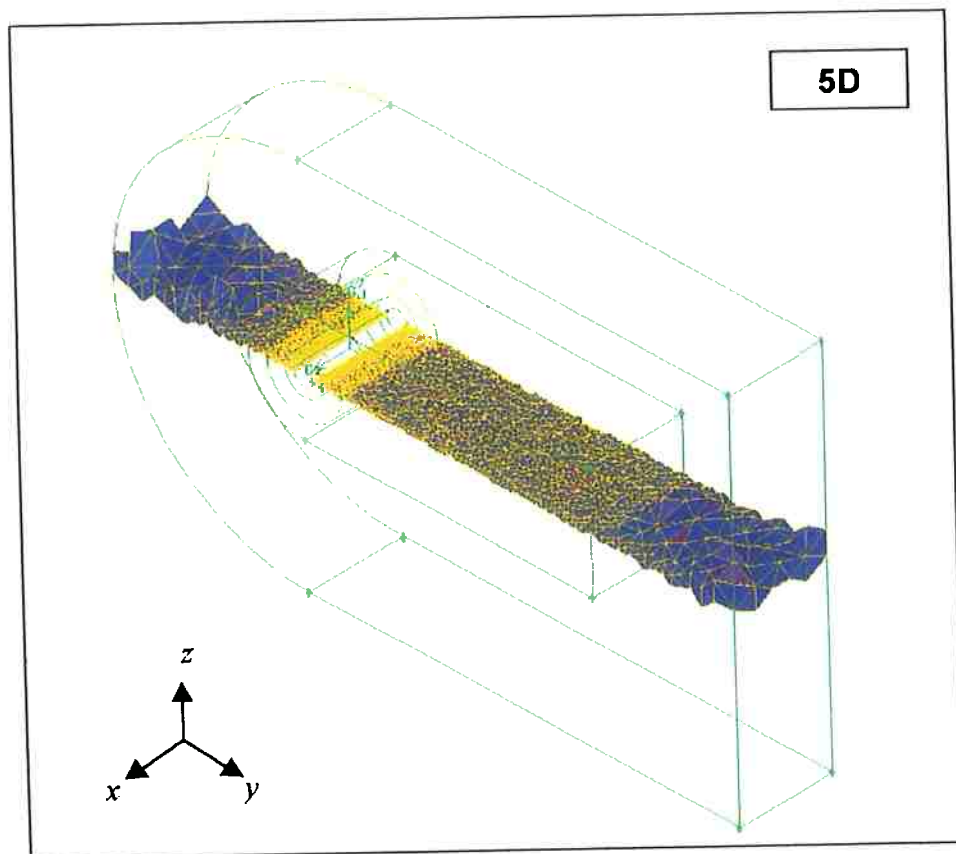


Fig. 5.2. Detalhe da malha computacional para um comprimento do cilindro de 5D.
Corte ao longo no plano $x-y$.

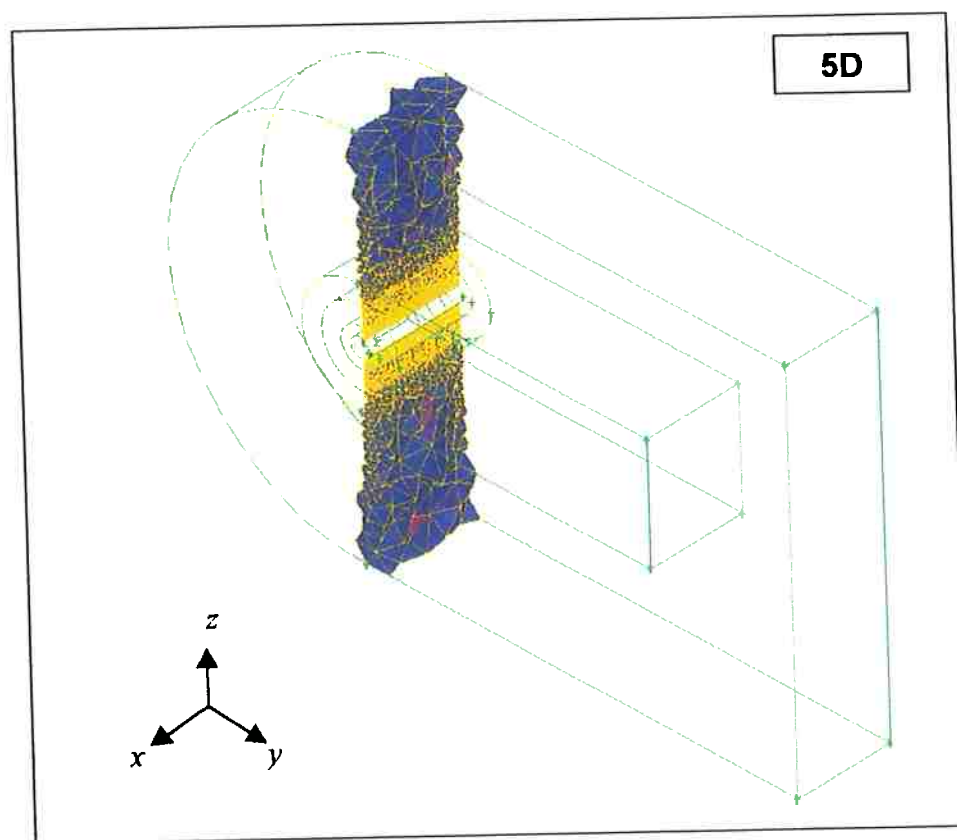


Fig. 5.3. Detalhe da malha computacional para um comprimento do cilindro de 5D.
Corte ao longo no plano $x-z$.

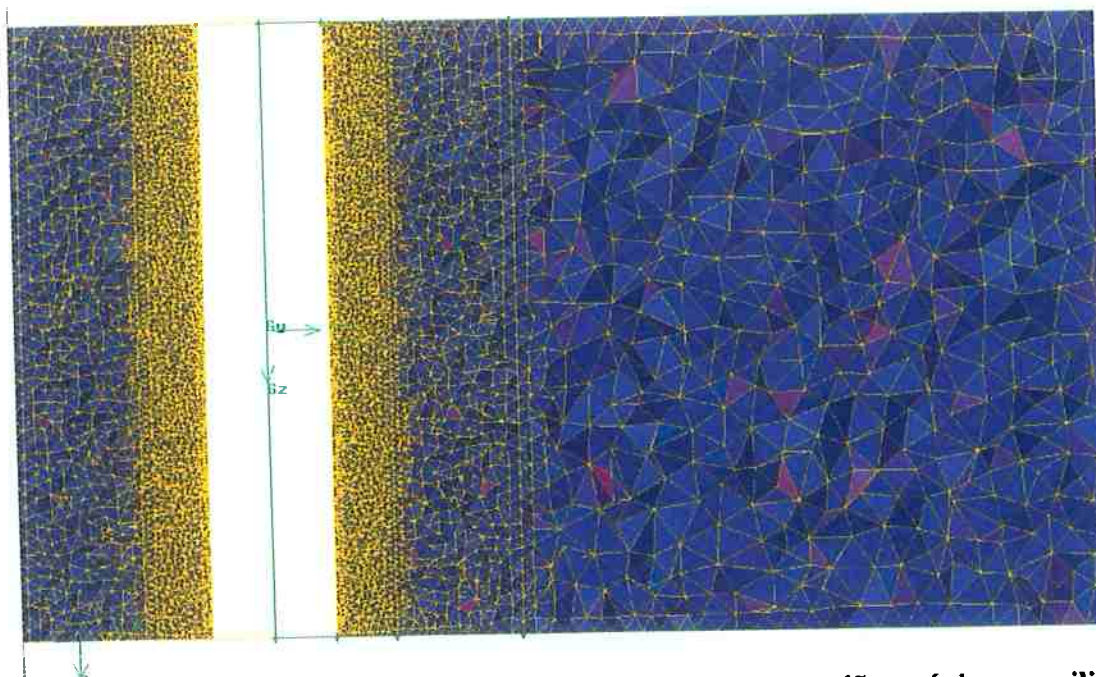


Fig. 5.4. Detalhe do corte ao longo no plano x - y em uma região próxima ao cilindro de comprimento $5D$.

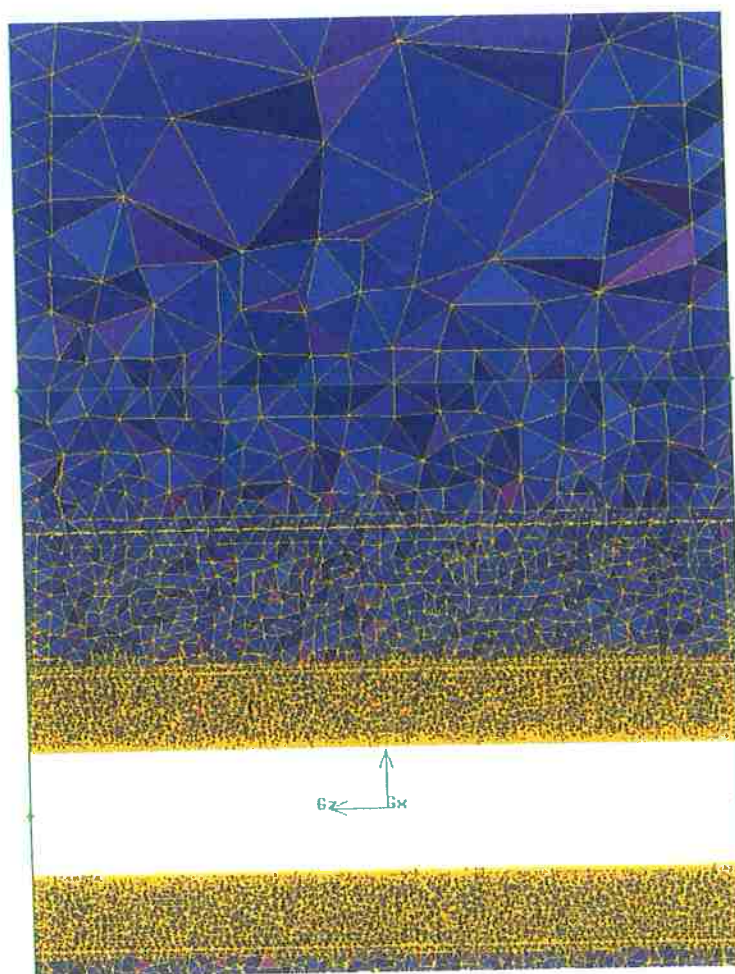


Fig. 5.5. Detalhe do corte ao longo no plano x - z em uma região próxima ao cilindro de comprimento $5D$.

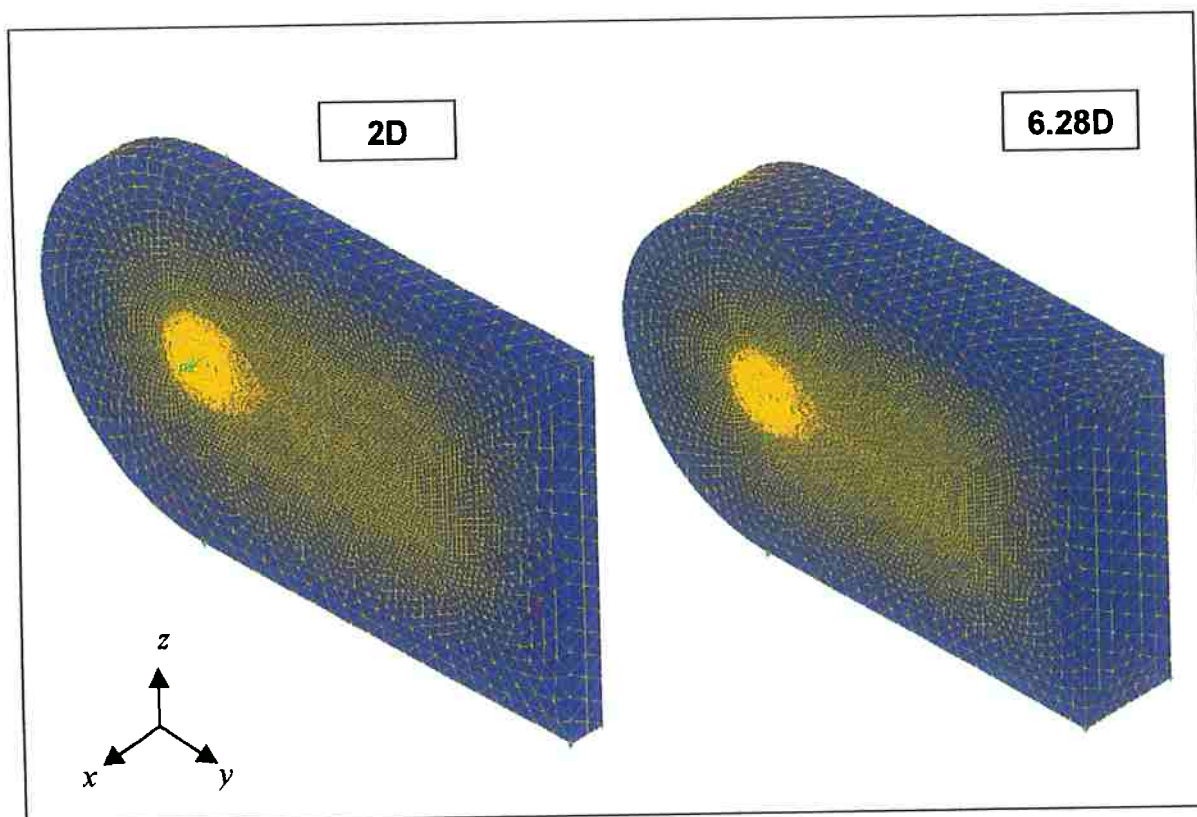


Fig. 5.6. Vistas em perspectiva das malhas computacionais para comprimentos do cilindro igual a 2D e 6.28D.

A qualidade da malha é dada em função da razão de aspecto de seus elementos. A razão de aspecto Q_{AR} para elementos triangulares e tetraédricos é definida através da seguinte relação, encontrada no manual do usuário do programa GAMBIT v1.0:

$$Q_{AR} = f \left(\frac{R}{r} \right) \quad (5.1)$$

onde f é um fator de escala, r e R representam o raio das circunferências (para elementos triangulares) ou esferas (para elementos tetraédricos) que estão inscritas e circunscritas, respectivamente, em um dado elemento da malha. Para elementos triangulares $f = 1/2$ e para elementos tetraédricos $f = 1/3$. Por definição, $Q_{AR} \geq 1$, onde $Q_{AR} = 1$ representa um elemento equilátero.

Tomando-se por base o conceito apresentado, são mostrados na figura 5.7 os histogramas representativos da qualidade das malhas apresentadas. Nota-se que a vasta maioria dos seus elementos situa-se à esquerda do diagrama, com elementos extremamente uniformes ou mesmo equiláteros.

Entretanto, vale lembrar que próximo à parede os elementos podem possuir razão de aspecto diferente da unidade, uma vez que os gradientes na direção normal à parede exigem elementos com altura pequena, fazendo com que o valor da razão de aspecto para estes elementos seja superior a unidade.

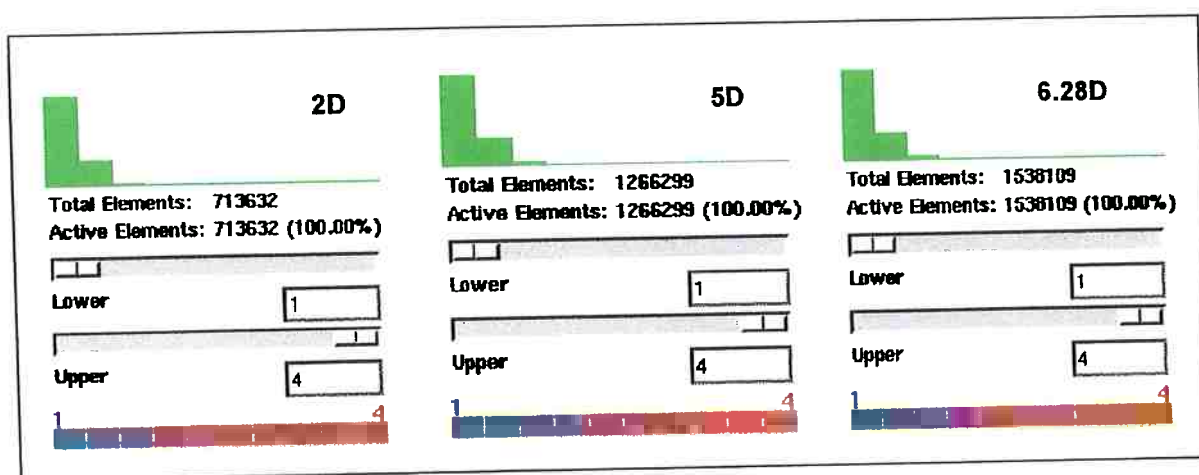


Fig. 5.7. Qualidade das malhas apresentadas em termos da razão de aspecto de seus elementos.

5.2. RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES PARA $Re=200$ E $Re=100$ EM UM CILINDRO COM 2D DE COMPRIMENTO

Nesta seção serão mostrados os resultados obtidos para a resolução do escoamento ao redor de um cilindro liso e fixo com 2 diâmetros de comprimento, cuja malha computacional utilizada para as simulações foi mostrada na seção 5.1. Tal caso foi escolhido para os testes de consistência do programa (análise do coeficiente de pressão "base pressure" e número de Strouhal) por apresentar um número menor de elementos e nós e possuir consequentemente o menor comprimento do cilindro dentre os 3 casos existentes (2D, 5D e 6.28D).

Os testes de consistência do método foram caracterizados através de:

- Análise da influência da malha na qualidade dos resultados, notadamente na região da camada limite (número de camadas e divisões do cilindro para posterior discretização por elementos tetraédricos);
- Análise do número de Strouhal e coeficiente de pressão "Base pressure", definido adiante, tomado em um ponto situado a 180 graus da região frontal do cilindro para número de Reynolds 200 e 100;
- Observação da evolução da esteira para os casos acima mencionados, buscando-se observar a natureza da mesma em relação à ocorrência de vortex-shedding oblíquo ou paralelo;

- Análise da magnitude das componentes do vetor vorticidade nas três direções e dos contornos de vorticidade e pressão (verificando-se a consistência da física do problema).

A velocidade do escoamento ao longe é igual a 1.0 na direção y e zero (0.0) nas direções x e z . De forma análoga aos casos bidimensionais, um intervalo de tempo igual a $5e-3$ foi utilizado para as simulações em questão e os resultados referem-se aos números de Reynolds 200 e 100. Os campos de vorticidade para os casos desta seção e capítulos posteriores são adimensionalizados pelo diâmetro do cilindro e velocidade do escoamento ao longe.

Para a determinação do número de Strouhal foram monitorados três pontos (nomeados `control_1`, `control_2` e `control_3`) da esteira do cilindro e as séries temporais da componente da velocidade na direção do escoamento são apresentadas. Após o estabelecimento da esteira verificou-se a flutuação da velocidade nestes pontos de forma a estimar o número de Strouhal. A figura 5.8 mostra uma representação esquemática de como foram escolhidos esses pontos de monitoramento de velocidades. Já para o coeficiente de pressão C_{pb} , utilizou-se a seguinte definição:

$$C_{pb} = \frac{(p_b - p_\infty)}{\frac{1}{2}\rho U^2} \quad (5.2)$$

onde p_b é a pressão em um ponto do cilindro situado a 180 graus da região frontal, ou seja, um ponto que, de acordo com o sistema de referência adotado e lembrando que o raio do cilindro é igual a 1.0, tem as seguintes coordenadas: $x = 0.0$, $y = 1.0$ e $z = 0.0$. Já

p_∞ é a pressão do escoamento ao longe, U a velocidade ao longe e ρ a densidade do fluido.

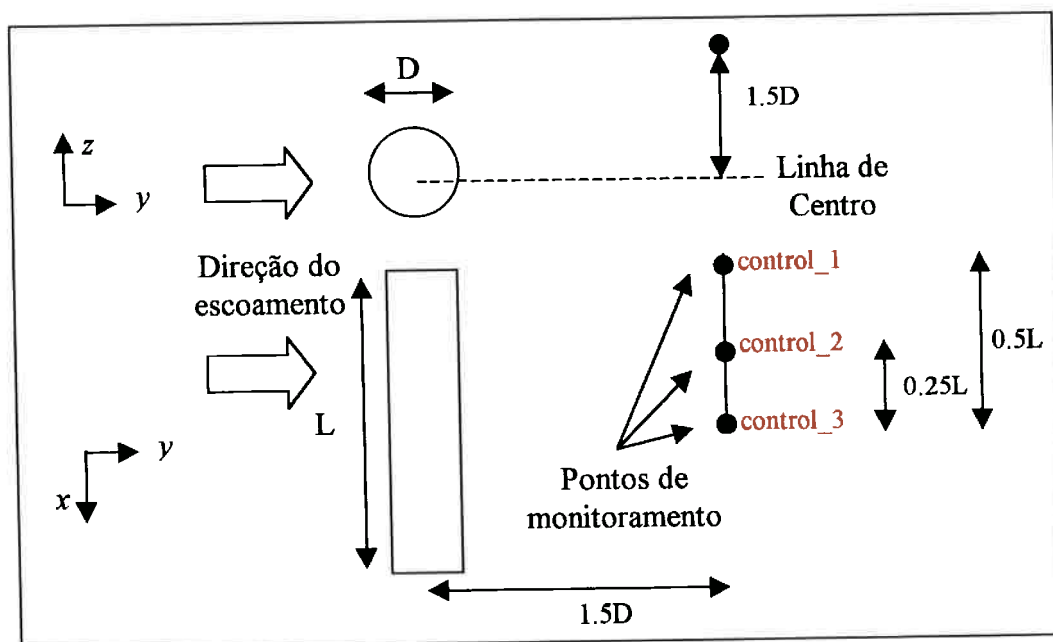


Fig. 5.8. Esquema ilustrativo da escolha dos pontos de monitoramento das velocidades na direção do escoamento para a estimativa do número de Strouhal.

As figuras 5.9 a 5.14 dadas seguir fornecem os resultados obtidos para o escoamento tridimensional ao redor do cilindro com $Re=200$. Após a apresentação destas figuras são mostrados os resultados para $Re=100$. A simulação apresentada para $Re=200$ compreendeu um tempo adimensional total UT/D igual a 80, correspondendo a 32.000 iterações. Todas as figuras dadas nesta seção correspondem a $UT/D = 75$.

A figura 5.9 mostra em perspectiva o contorno da componente de vorticidade (w_x) na direção transversal ao escoamento, ou seja, na direção do eixo do cilindro. Já a figura 5.10 mostra os contornos de pressão (a) e componente da vorticidade w_x (b) em

cortes feitos nos planos que contém a face com condição de contorno periódica ou cíclica e os pontos de monitoramento das velocidades. A figura 5.11 apresenta um corte no plano x - y mostrando w_x e a evolução da esteira ao longo da envergadura para $Re = 200$. Já a figura 5.12 fornece um corte no plano x - y apresentando o campo de pressão.

A figura 5.13 mostra uma superfície de vorticidade ressaltando a esteira do cilindro apenas com valores positivos e negativos de w_x . Conforme pode ser visto em BARKLEY AND HENDERSON (1996), esta é uma maneira usual de visualização de esteiras tridimensionais de cilindros.

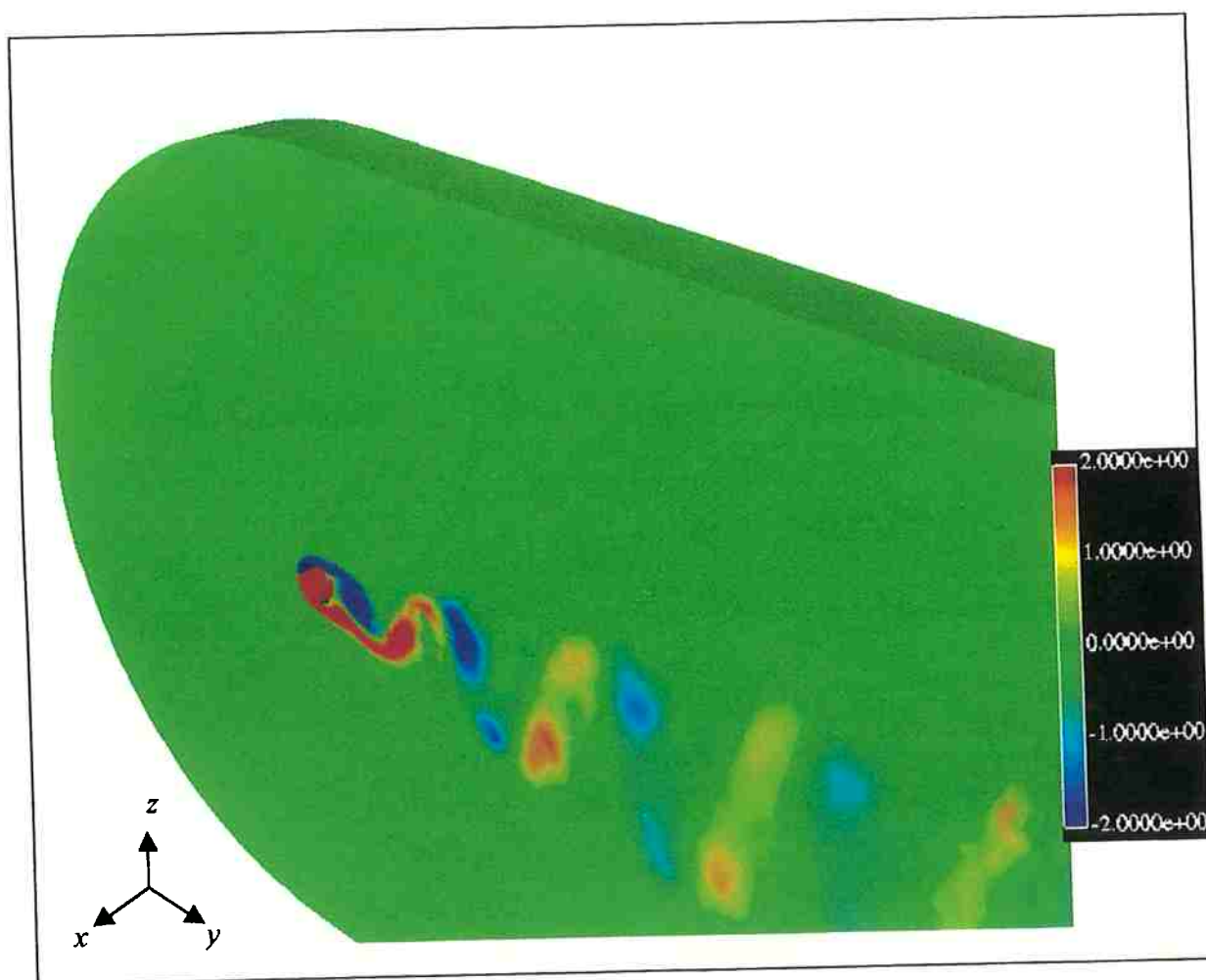
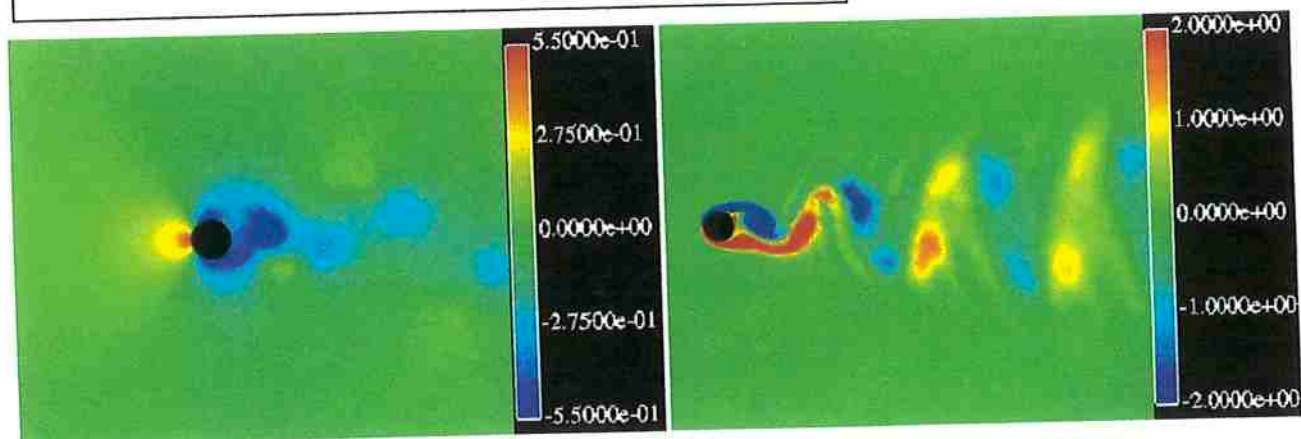
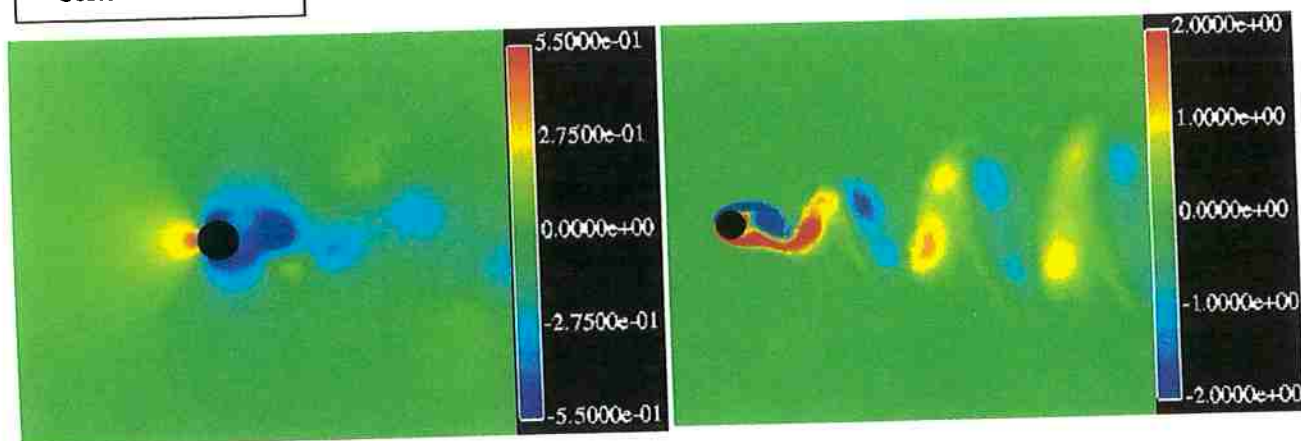


Fig. 5.9. Componente da vorticidade w_x na direção do eixo do cilindro para $Re=200$ e comprimento do cilindro igual a $2D$.

Face cíclica ou de condição de contorno periódica (corte em $x = -2.00$)



Corte em $x = -1.00$



Corte em $x = 0.00$

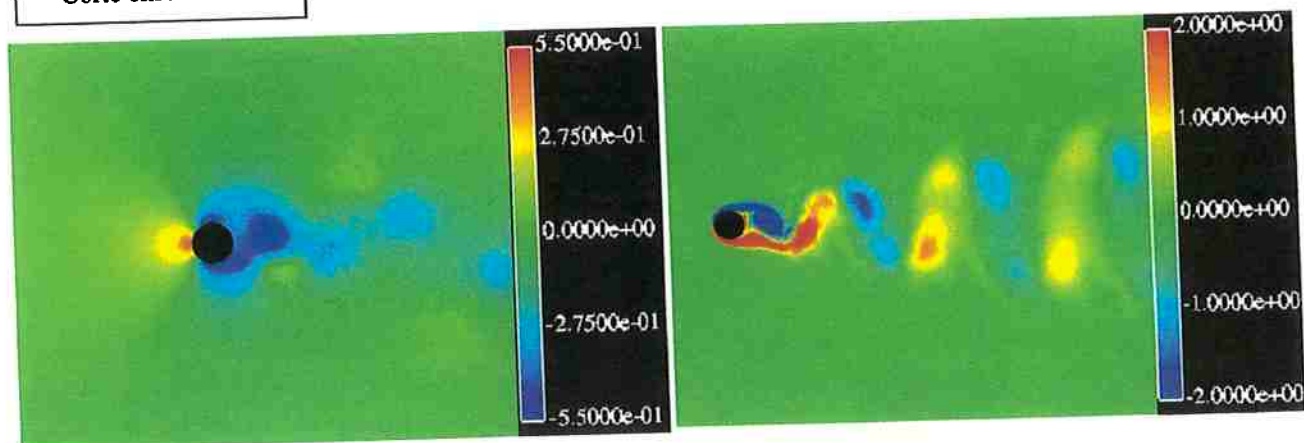


Fig. 5.10. Planos y - z de contorno de pressão e componente da vorticidade w_x na direção do eixo do cilindro de comprimento 2D e $Re=200$. Cortes em $x=-2.00$, -1.00 e 0.00 .

Da análise da figura 5.10 observa-se que não há diferença entre os contornos obtidos para as três seções de monitoramento analisadas, consolidando uma emissão de vórtices paralelo com uma esteira que caracteriza o escoamento bidimensional. As figuras 5.11 e 5.12 corroboram tal fato, através de cortes feitos no plano diametral do cilindro ao longo do plano x - y .

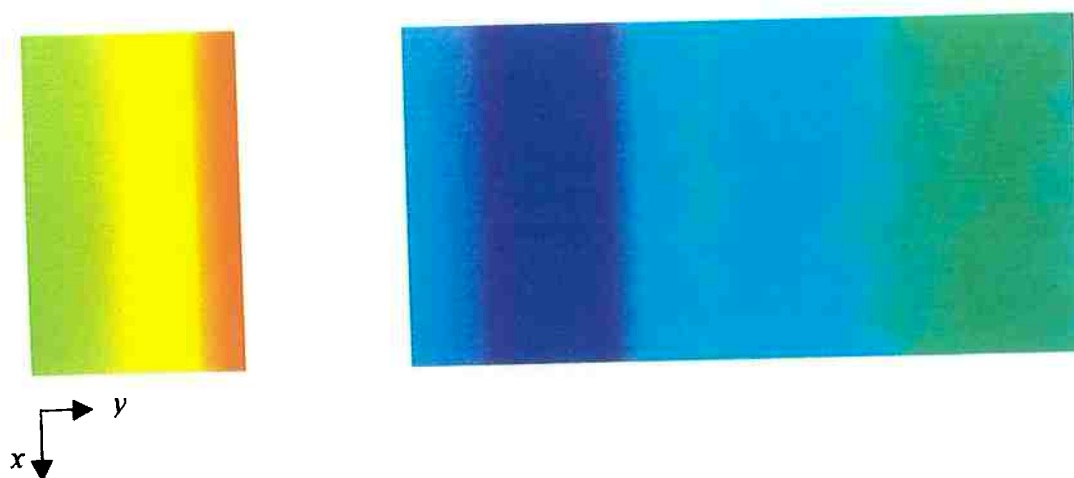


Fig. 5.11. Plano x - y de contorno de pressão para o cilindro de comprimento $2D$ e $Re=200$. Corte em $z=0.00$.

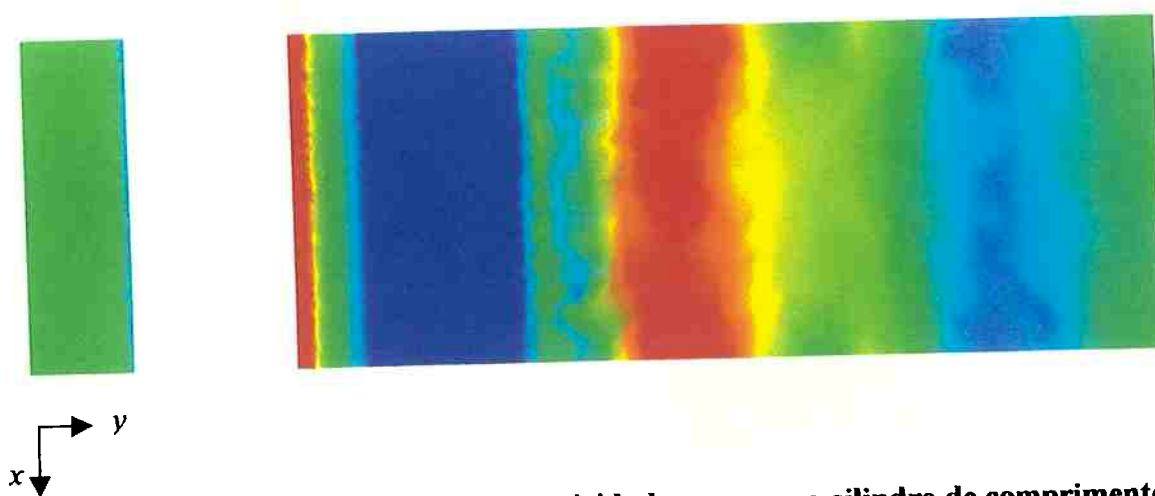


Fig. 5.12. Plano x - y de contorno de vorticidade w_x para o cilindro de comprimento $2D$ e $Re=200$. Corte em $z=0.00$.

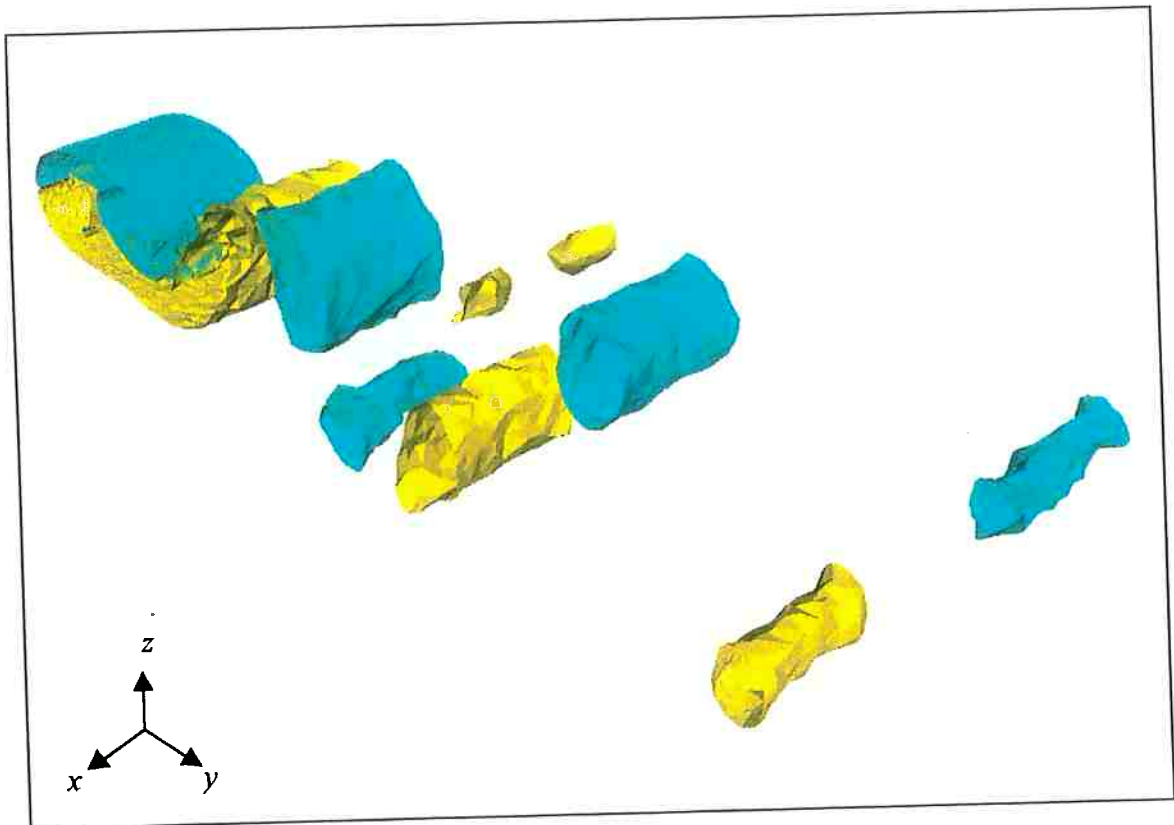


Fig. 5.13. Superfície de vorticidade para um cilindro de 2D de comprimento e $Re=200$.

A figura 5.13 também ilustra a obtenção de superfícies de vorticidade paralelas ao eixo do cilindro para $Re=200$ e comprimento do cilindro igual a 2D.

A figura 5.14 dada a seguir mostra o coeficiente de pressão C_{pb} para $Re=200$ e as velocidades dos pontos de monitoramento control_1, control_2 e control_3 na direção do escoamento em função do tempo adimensional UT/D .

A tabela 5.2 fornece uma comparação entre os resultados obtidos para números de Reynolds 200 e valores experimentais e numéricos dados por WILLIAMSON AND ROSHKO (1990) e NORBERG(1994) apud BARKLEY AND HENDERSON (1996).

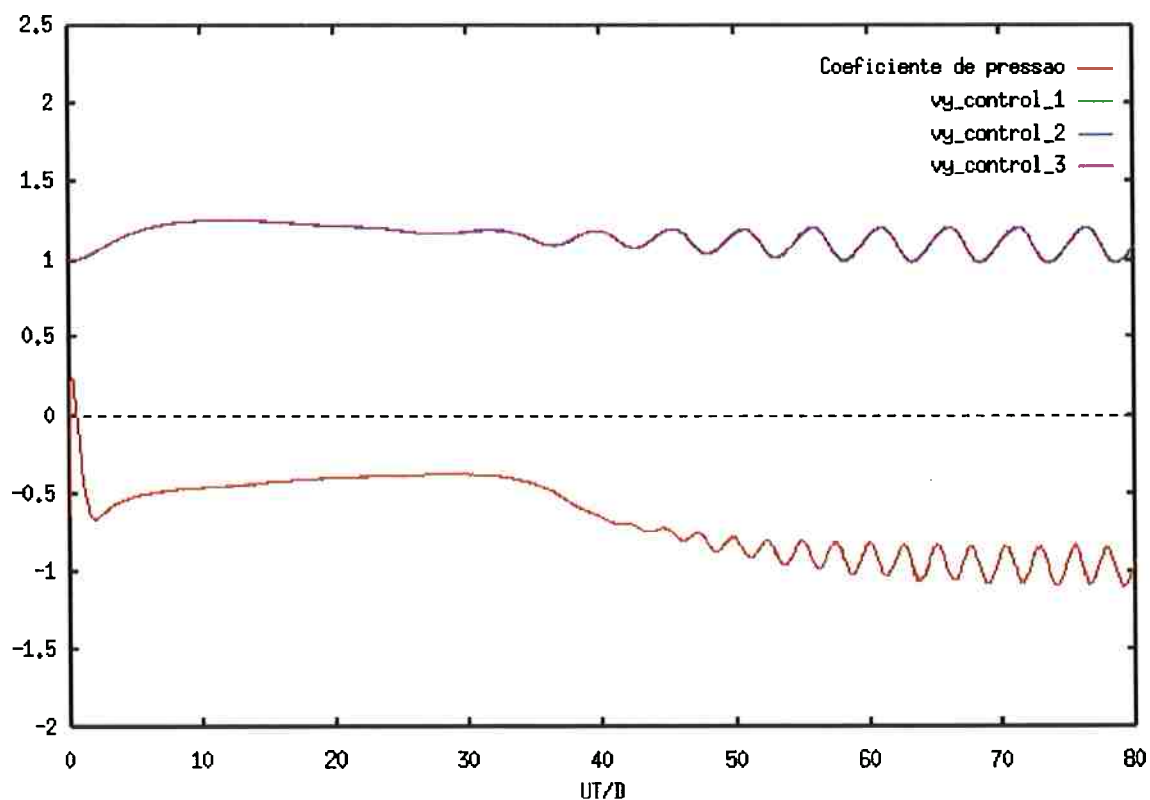


Fig. 5.14. Coeficiente de pressão C_{pb} e velocidades dos pontos de monitoramento para um cilindro de 2D de comprimento e $Re=200$.

Para a determinação do número de Strouhal S calcula-se o tempo adimensional em um ciclo tomando-se a média obtida nos últimos três ciclos de "vortex shedding" na curva de velocidades dos pontos de monitoramento. A frequência de emissão de vórtices ou número de Strouhal S será dada pelo inverso do tempo adimensional médio, ou seja:

$$S = \frac{1}{(UT/D)_{\text{médio}}} \quad (5.2)$$

Nota-se da análise da figura 5.14 que não há diferença entre as velocidades dos pontos de monitoramento, consolidando o número de Strouhal obtido.

As figuras 5.15 e 5.16 obtidas de BARKLEY AND HENDERSON (1996) mostram o comportamento do número de Strouhal e C_{pb} em função do número de Reynolds antes e após a ocorrência das primeiras instabilidades tridimensionais no escoamento do cilindro, notadamente no limiar da ocorrência dos modos A e B. Nestes gráficos, a linha sólida representa a curva obtida por tais pesquisadores para interpolar os resultados numéricos por eles obtidos para simulações bidimensionais, as quais fizeram parte dos estudos preliminares visando a solução de casos tridimensionais.

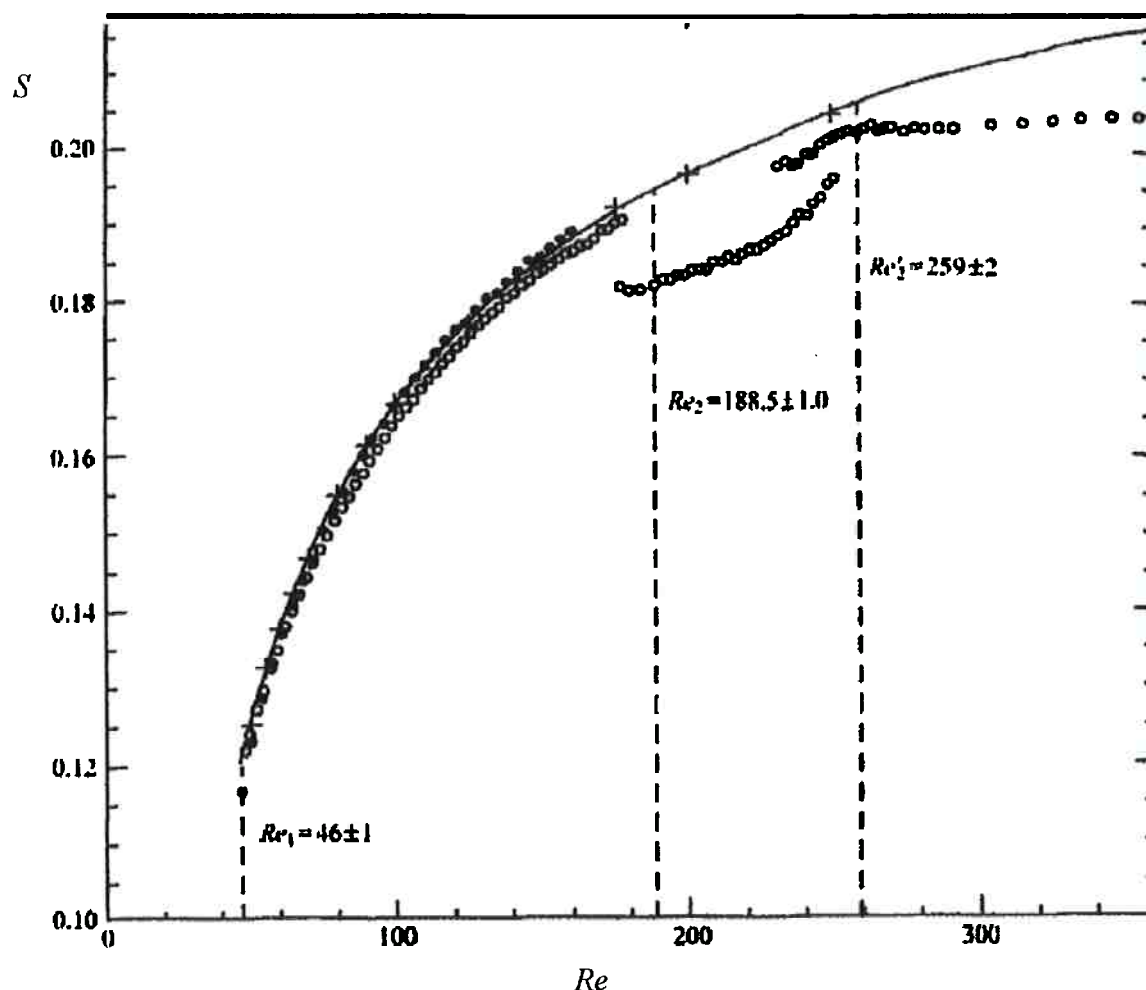


Fig. 5.15. Variação do número de Strouhal em função do número Reynolds.
 ○ Williamson (1989), ● Hammache & Gharib (1991), + Resultados numéricos de
 Barkley and Henderson (1996). Gráfico obtido de BARKLEY AND
 HENDERSON(1996)

	S (Número de Strouhal)	$-C_{pb}$ (Coeficiente de Pressão)
Resultados Obtidos		
Re = 200 FSM 3D	0.196	0.957
Resultados de Outras Simulações		
Barkley and Henderson(1996)	0.196	0.933
Thompson et al.(1994)	0.2107	1.250
Experimentos:		
Williamson and Roshko(1990)*	0.196	
Williamson and Roshko(1990)**	0.185	0.85
Norberg (1994)		0.90
* vortex shedding paralelo		** vortex shedding oblquo

Tabela 5.2. Comparação de resultados para número de Strouhal S e C_{pb} ($Re=200$).
Comprimento do cilindro = $2D$.

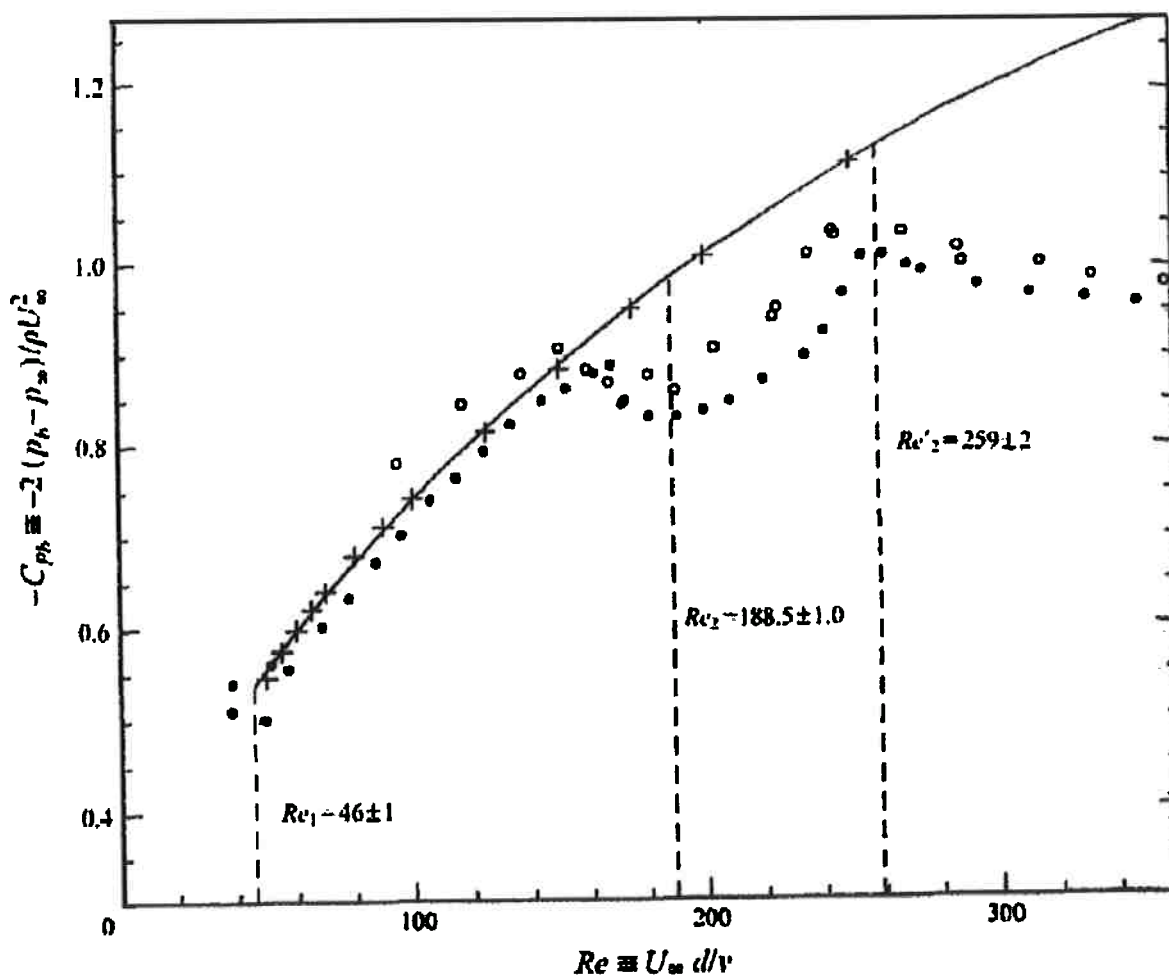


Fig. 5.16. Variação do coeficiente "base pressure" em função do número Reynolds.
•Williamson e Roshko(1990), o Norberg (1994), + Resultados numéricos de
Barkley and Henderson (1996). Gráfico obtido de BARKLEY AND HENDERSON
(1996).

Analisando-se os resultados fornecidos na tabela 5.2 nota-se que há uma conformidade entre os resultados numéricos aqui obtidos para o número de Strouhal com os resultados experimentais (quando se considera "vortex shedding paralelo"). Já para o coeficiente de pressão as diferenças são da ordem 10% quando os resultados são comparados àqueles obtidos por WILLIAMSON E ROSHKO(1990) e da ordem de 5% quando comparados aos resultados de NORBERG(1994). Em relação a outros resultados numéricos, verifica-se a aderência com os resultados fornecidos por BARKLEY AND HENDERSON(1996).

De maneira análoga quando da validação do programa FSM para malhas não-estruturadas aplicados a problemas bidimensionais, são fornecidos a seguir os resultados para o escoamento tridimensional ao redor do cilindro e $Re = 100$. Para este caso a simulação completa compreendeu um tempo adimensional total igual a 95 (correspondendo a 38.000 iterações), sendo que as figuras dadas a seguir correspondem a $UT/D = 75$. Um número maior de iterações foram necessárias para a estabilização do coeficiente de pressão para $Re=100$ quando comparado a $Re=200$.

A figura 5.17 mostra em perspectiva o contorno da componente de vorticidade na direção do eixo do cilindro (w_x). Já a figura 5.18 mostra uma superfície de vorticidade ressaltando a esteira do cilindro apenas com valores positivos e negativos de w_x . A figura 5.19 mostra os contornos de pressão (a) e componente da vorticidade w_x (b) em cortes feitos nos planos que contém a face com condição de contorno periódica ou cíclica e os pontos de monitoramento das velocidades.

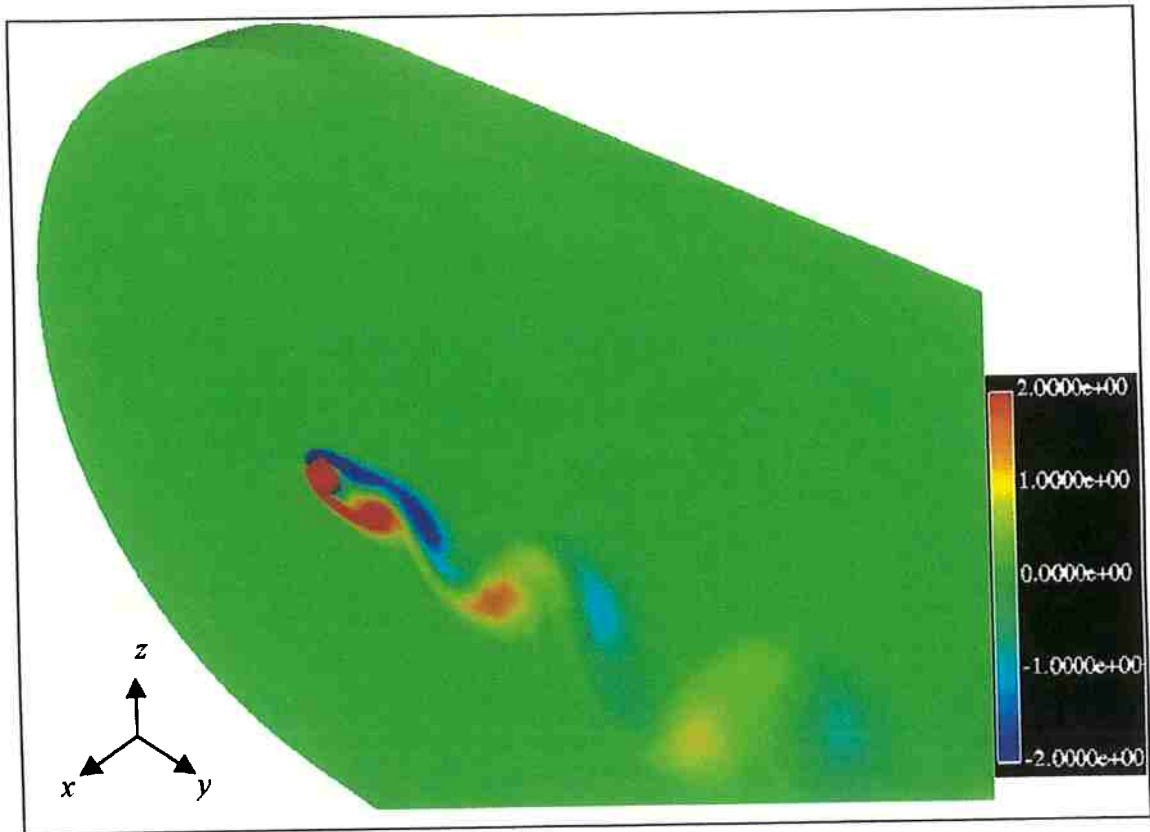


Fig. 5.17. Componente da vorticidade w_x na direção do eixo do cilindro para $Re=100$ e comprimento do cilindro igual a 2D.

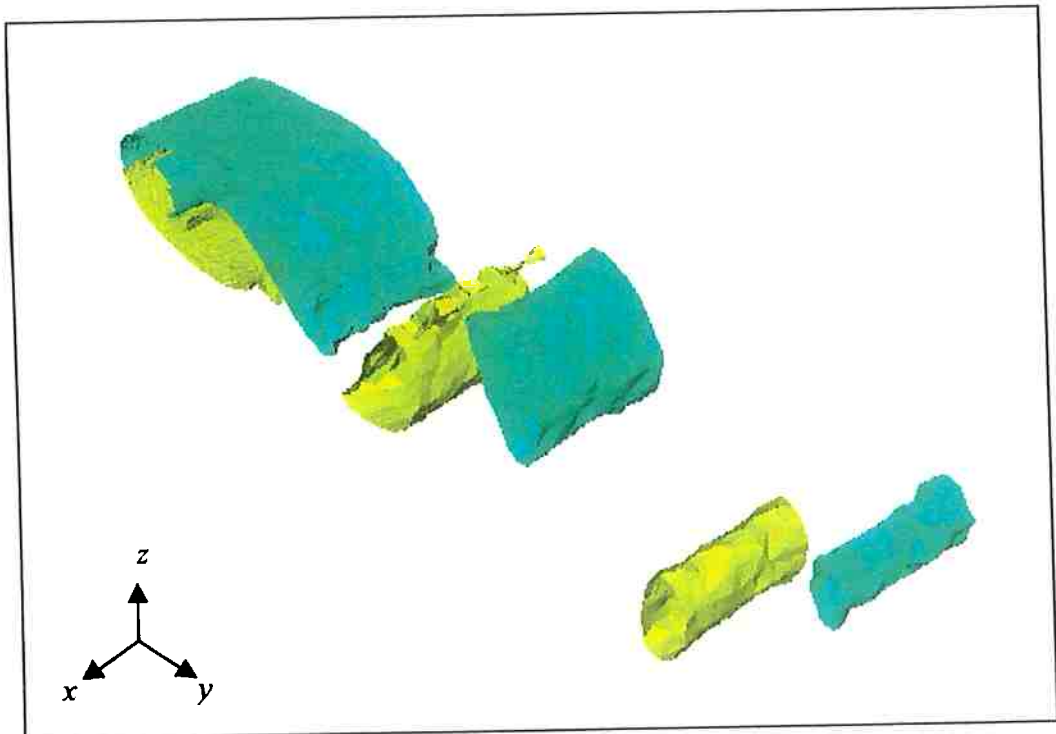
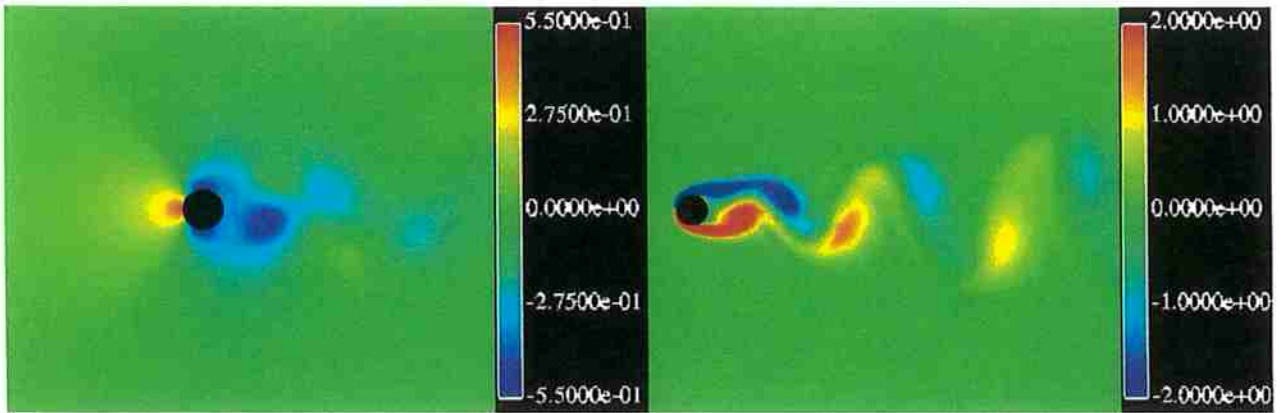
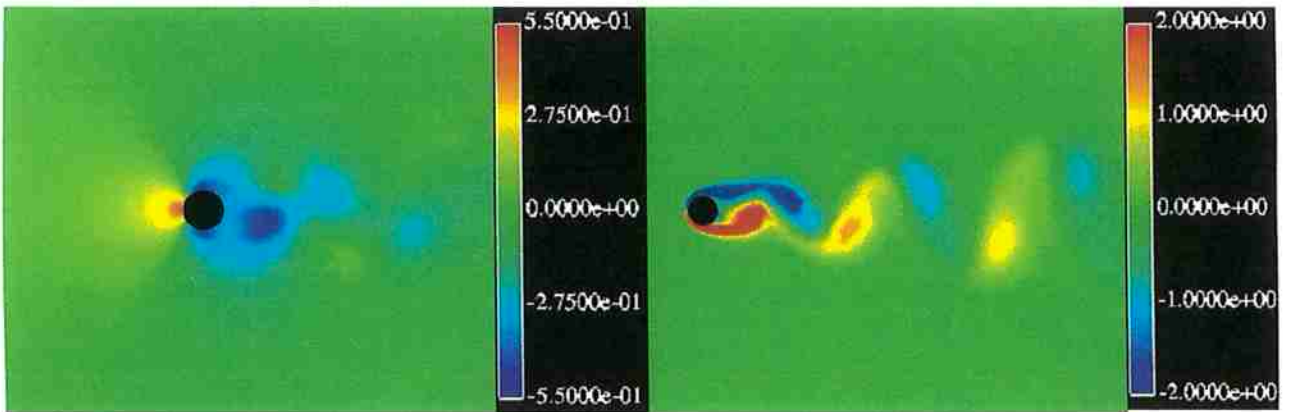


Fig. 5.18. Superfície de vorticidade para um cilindro de 2D de comprimento e $Re=100$.

Face cíclica ou de condição de contorno periódica (corte em $x = -2.00$)



Corte em $x = -1.00$



Corte em $x = 0.00$

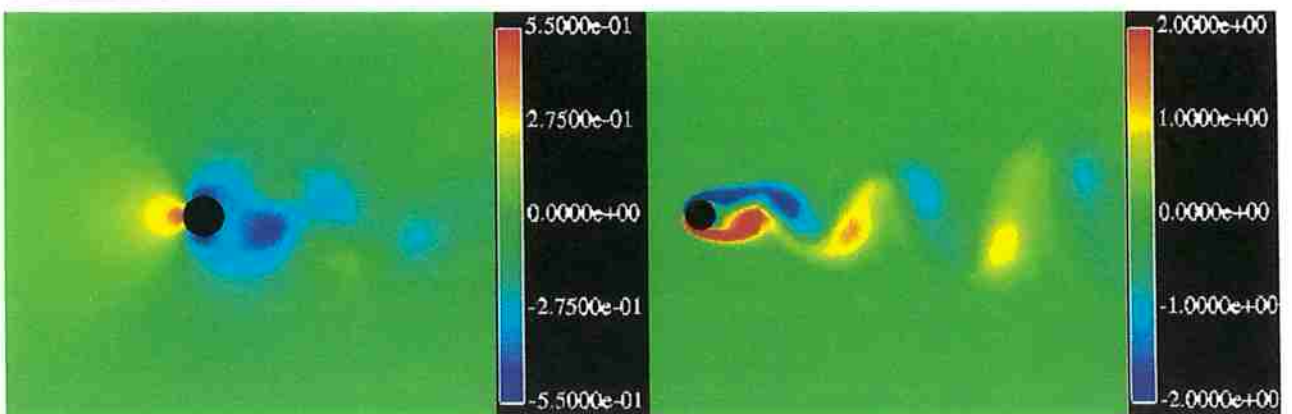


Fig. 5.19. Planos y - z de contorno de pressão e componente da vorticidade w_x na direção do eixo do cilindro de comprimento $2D$ e $Re=100$. Cortes em $x=-2.00$, -1.00 e 0.00 .

A figura 5.20 mostra para $Re=100$ um corte no plano x - y apresentando o campo de pressão. Já a figura 5.21 mostra para o mesmo corte a evolução da esteira ao longo da envergadura. A figura 5.22 mostra o coeficiente de pressão C_{pb} para $Re=100$ e as velocidades dos pontos de monitoramento na direção do escoamento em função do tempo adimensional UT/D . Da análise da figura 5.19 observa-se que não há diferença entre os contornos obtidos para as três seções de monitoramento analisadas. As figuras 5.20 e 5.21 corroboram tal fato. A figura 5.18 também ilustra a obtenção de superfícies de vorticidade paralelas ao eixo do cilindro para $Re=100$ e comprimento do cilindro igual a 2D.

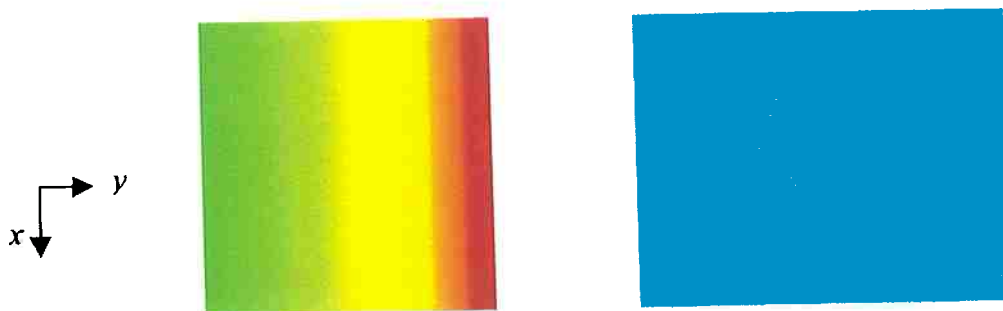


Fig. 5.20. Plano x - y de contorno de pressão para o cilindro de comprimento 2D e $Re=100$. Corte em $z=0.00$.

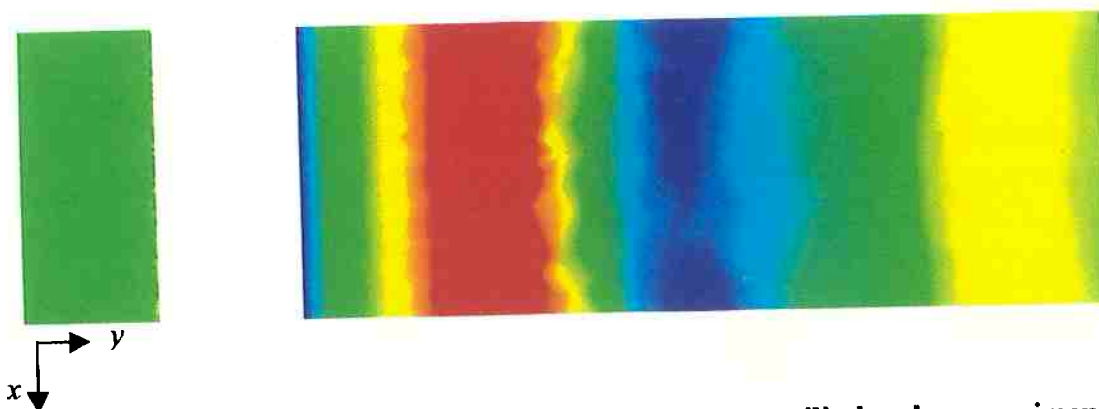


Fig. 5.21. Plano x - y de contorno de vorticidade w_x para o cilindro de comprimento 2D e $Re=100$. Corte em $z=0.00$.

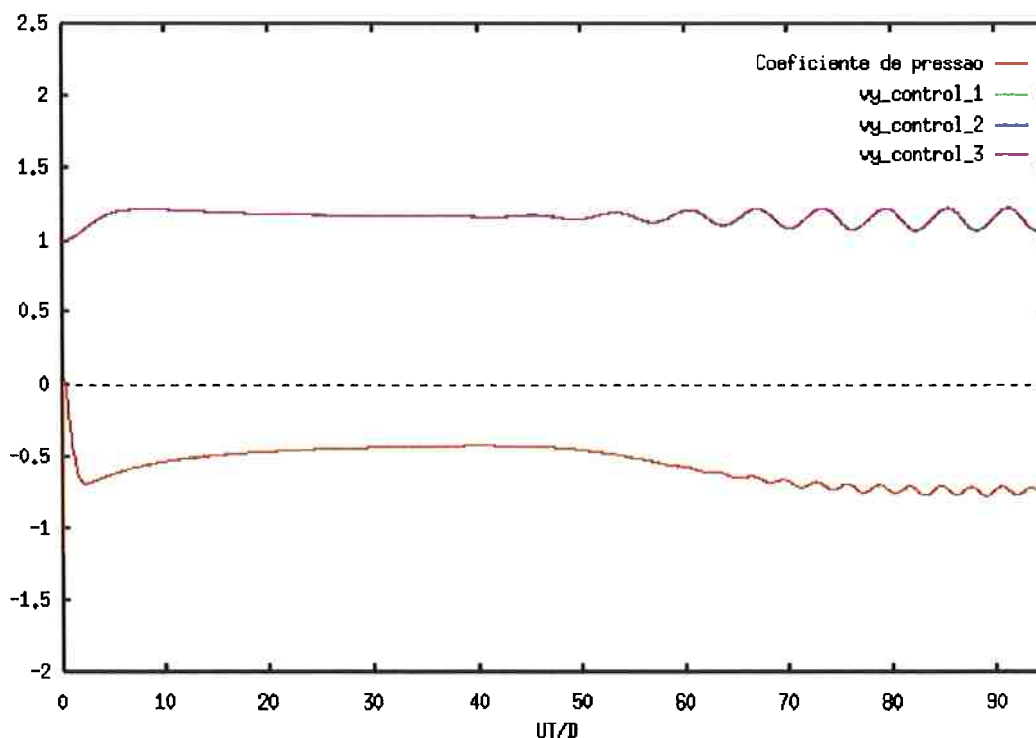


Fig. 5.22. Coeficiente de pressão C_{pb} e velocidades dos pontos de monitoramento para um cilindro de 2D de comprimento e $Re=100$.

	S (Número de Strouhal)	$-C_{pb}$ (Coeficiente de Pressão)
Resultados Obtidos		
Re = 100 FSM 3D	0.165	0.74
Experimentos:		
Williamson and Roshko(1990)	0.165	0.70
Norberg (1994)		0.77

Tabela 5.3. Comparação de resultados para número de Strouhal S e C_{pb} ($Re=100$). Comprimento do cilindro = 2D.

Finalmente, a tabela 5.3 fornece uma comparação entre os resultados obtidos para números de Reynolds 100 e valores experimentais e numéricos. Nota-se a boa aderência dos resultados: diferença de apenas 5.4% para C_{pb} quando comparado a WILLIAMSON AND ROSHKO(1990) e 3.9% quando comparado a NORBERG(1994). Verifica-se a concordância completa para o número de Strouhal.

5.3. RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES PARA $Re=200$ E $Re=250$ EM UM CILINDRO FIXO COM 5D DE COMPRIMENTO

Nesta seção serão mostrados os resultados obtidos para a resolução do escoamento tridimensional ao redor de um cilindro liso e fixo com 5 diâmetros de comprimento para $Re=200$ e $Re=250$, cuja malha computacional utilizada para as simulações foi mostrada na seção 5.1.

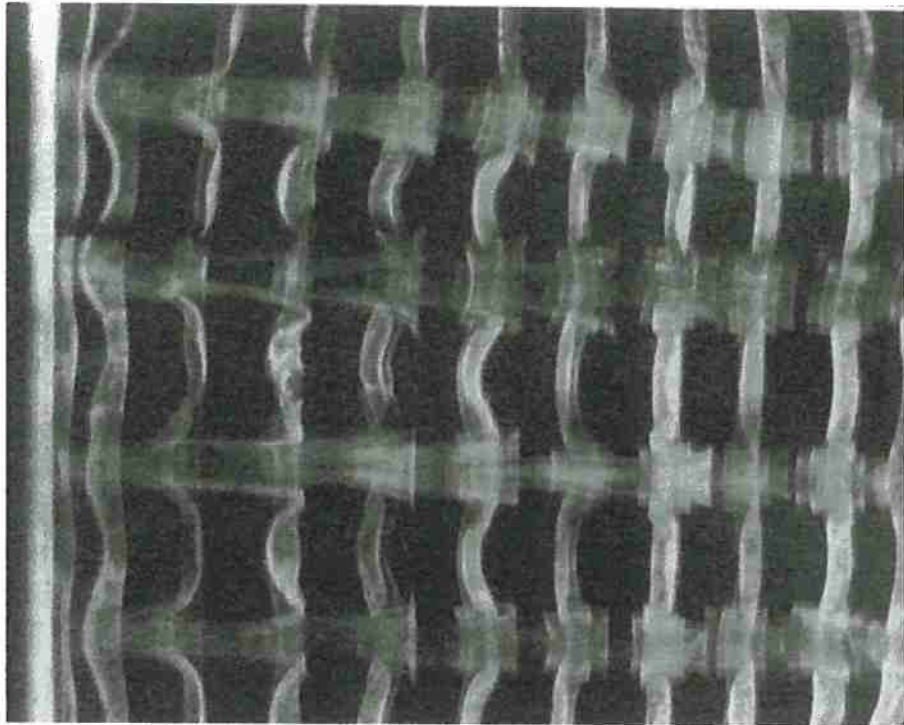
A seção anterior mostrou os resultados relativos ao escoamento ao redor de um cilindro com 2 diâmetros de comprimento. Notou-se que para $Re=200$ e $Re=100$ os resultados obtidos para o número de Strouhal e coeficiente de pressão estão mais próximos dos valores encontrados para simulações bidimensionais, fato este esperado em função do pequeno comprimento do cilindro. Conforme foi visto nos contornos de vorticidade e pressão (figuras 5.11, 5.12, 5.20 e 5.21), o padrão de emissão de vórtices na esteira é paralelo, caracterizando a natureza de um escoamento tipicamente bidimensional.

O propósito desta seção é observar a ocorrência dos diferentes regimes de emissão de vórtices encontrados experimentalmente (modo A ou modo B), bem como situar os valores do número de Strouhal e coeficiente de pressão em relação a valores experimentais encontrados na literatura e resultados numéricos obtidos por outros pesquisadores. Entretanto, antes de serem apresentados os resultados obtidos julgou-se necessário revisar alguns aspectos teóricos relacionados à transição tridimensional da esteira do cilindro, fundamentados no gráfico extraído de WILLIAMSON (1991) apresentado no capítulo 1 (figura 1.8).

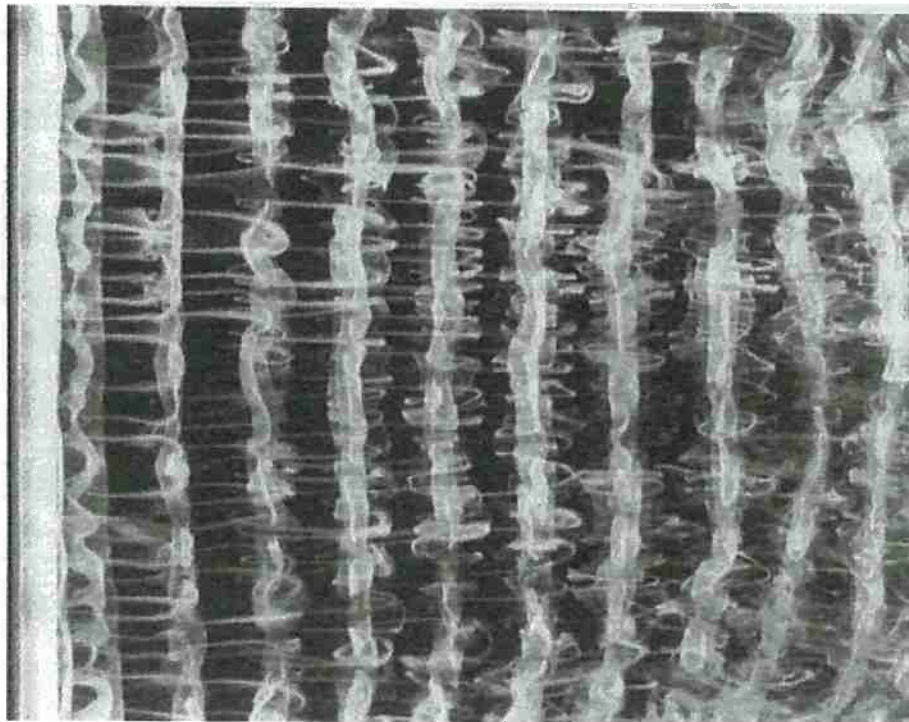
Segundo WILLIAMSON(1992), o surgimento de perturbações de grande escala é o aspecto fundamental da tridimensionalidade da esteira do cilindro. Acima de $Re=180$, ocorre uma descontinuidade na formação da esteira que caracteriza o modo A de emissão de vórtices o qual apresenta um comportamento típico de histerese. O comprimento de onda típico observado neste caso (modo A) para as estruturas vorticais na direção do comprimento do cilindro variam em torno de *3 a 4 diâmetros do cilindro*.

Já para $230 \leq Re \leq 260$ ocorre a transição para o modo B o qual envolve o aparecimento de estruturas vorticais de pequena escala. Para esta faixa não ocorre histerese (tal como é observada experimentalmente no modo A) e observa-se que os dois modos de emissão de vórtices A e B alternam-se com o tempo. As estruturas vorticais na direção do comprimento do cilindro possuem um comprimento igual a aproximadamente *1 diâmetro do cilindro*.

A figura 5.23 extraída de WILLIAMSON(1992) ilustra os modos A e B descritos aqui. Visualizações experimentais com laser tornaram possível a caracterização dos dois modos de emissão. A figura 5.23a) mostra o modo A ($Re \approx 200$) e a figura 5.23b) é característica do modo B. Esta última é representativa para os padrões vorticais observados para $Re \geq 230$. Vale notar que as figuras não se encontram em escala, mas corroboram o comprimento das estruturas vorticais na direção do comprimento do cilindro, conforme salientado anteriormente.



(a)



(b)

Fig. 5.23. Modos A e B de emissão de vórtices tridimensional (WILLIAMSON(1992)).

(a) Modo A ($Re \approx 200$) e (b) Modo B ($Re \geq 230$).

Conforme pode ser visto em BARKLEY AND HENDERSON (1996), existe do ponto de vista experimental uma ampla faixa de valores relacionados à determinação do modo A de emissão de vórtices, variando entre $Re=140$ a $Re=190$. Diversos fatores tais como rugosidade do cilindro, nível de turbulência da corrente livre, efeitos de bloqueio e condição de contorno nas extremidades do cilindro ("end effects") tendem a fazer com que a transição tridimensional seja obtida a valores menores do número de Reynolds. Experimentos que utilizam cilindros com grandes razões de aspecto (L/D) não estão livres de problemas causados pela condição de contorno na extremidade do cilindro, os quais se propagam por toda a extensão do mesmo. As primeiras tridimensionalidades do escoamento aparecem para $Re=180$, mas detalhes de como a transição ocorre não são facilmente determinados pelos experimentos.

Ainda segundo BARKLEY AND HENDERSON (1996) em relação ao procedimento experimental, têm sido difícil para os pesquisadores separar os *efeitos extrínsecos* da tridimensionalidade presente nos experimentos dos *efeitos intrínsecos* que surgem das propriedades naturais de estabilidade da esteira. Controlando as extremidades do cilindro, é possível reproduzir em laboratório com boa aproximação o escoamento ao redor de um cilindro infinito, conforme pode ser visto em WILLIAMSON(1989) e HAMMACHE & GHARIB(1991). Com o auxílio de uma placa ("end plate") cria-se nas extremidades do cilindro regiões de sucção que permitem obter um escoamento paralelo em relação ao eixo do mesmo para $Re=200$. Já para $Re=250$ isto não se torna possível, ainda que seja empregado tal artifício.

Serão mostrados agora os resultados das simulações computacionais para $Re=200$, o qual caracteriza o modo A de emissão de vórtices. A simulação apresentada

para $Re=200$ compreendeu um tempo adimensional total UT/D igual a 80, correspondendo a 32.000 iterações. As figuras dadas a seguir correspondem a um tempo adimensional igual a $UT/D = 75$ e foi utilizado um intervalo de tempo igual a $5e-3$. A figura 5.24 mostra em perspectiva o contorno de vorticidade (w_x) na direção transversal do escoamento, ou seja, na direção do eixo do cilindro. A figura 5.25 mostra os contornos de pressão e componente da vorticidade w_x em cortes feitos nos planos que contém a face com condição de contorno periódica ou cíclica e os pontos de monitoramento das velocidades. Da análise desta figura observa-se que ocorrem diferenças entre os contornos obtidos para as três seções de monitoramento analisadas, consolidando uma emissão de vórtices oblíqua, esteira que caracteriza o escoamento tridimensional para este número de Reynolds. A figura 5.26 apresenta um corte no plano x - y apresentando o campo de pressão. Já a figura 5.27 fornece um corte no plano x - y mostrando w_x e a evolução da esteira ao longo da envergadura para $Re = 200$.

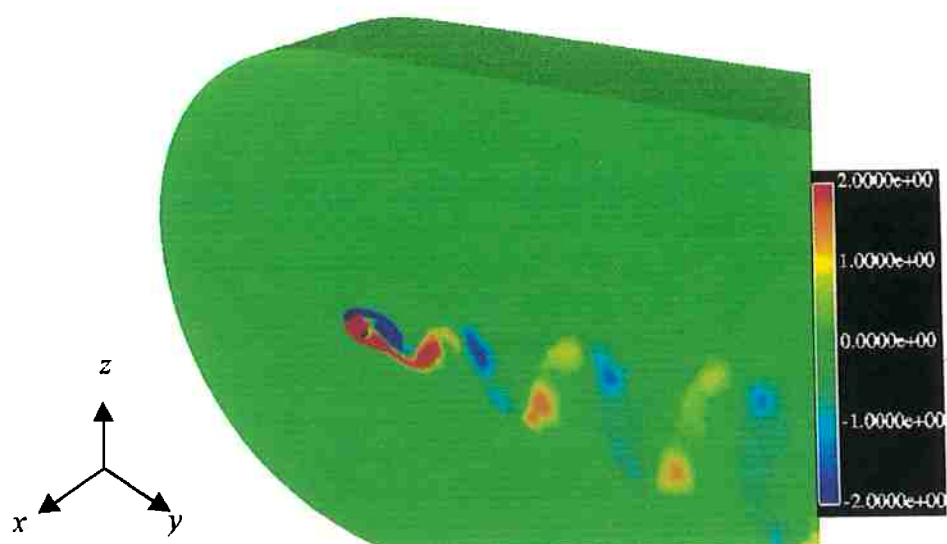
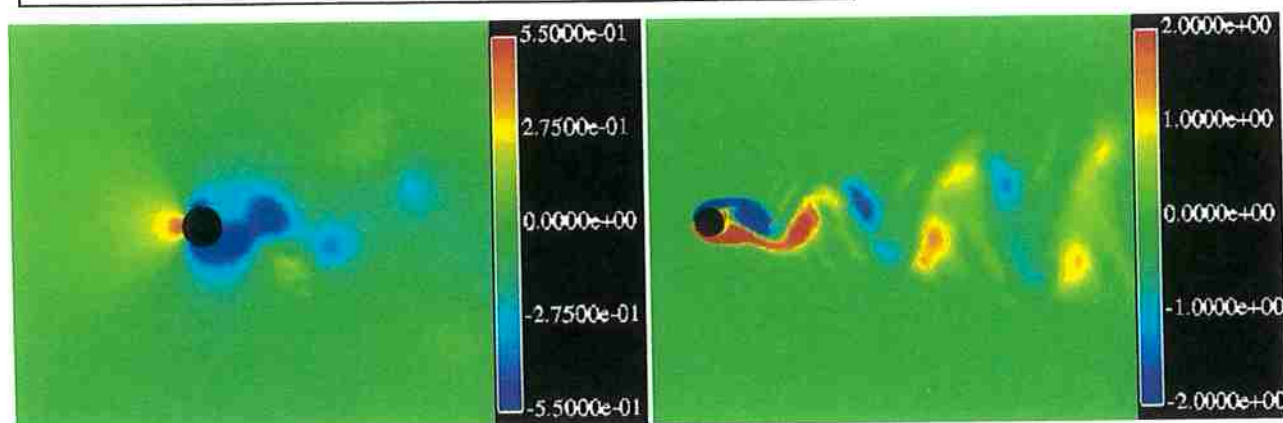
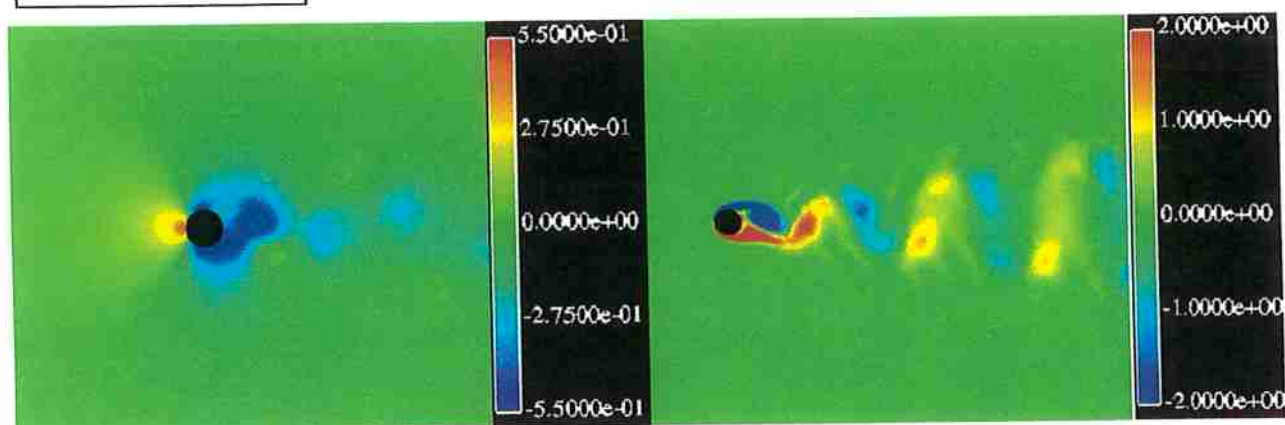


Fig. 5.24. Componente da vorticidade w_x na direção do eixo do cilindro para $Re=200$ e comprimento do cilindro igual a $5D$.

Face cíclica ou de condição de contorno periódica (corte em $x = -5.00$)



Corte em $x = -2.5$



Corte em $x = 0.00$

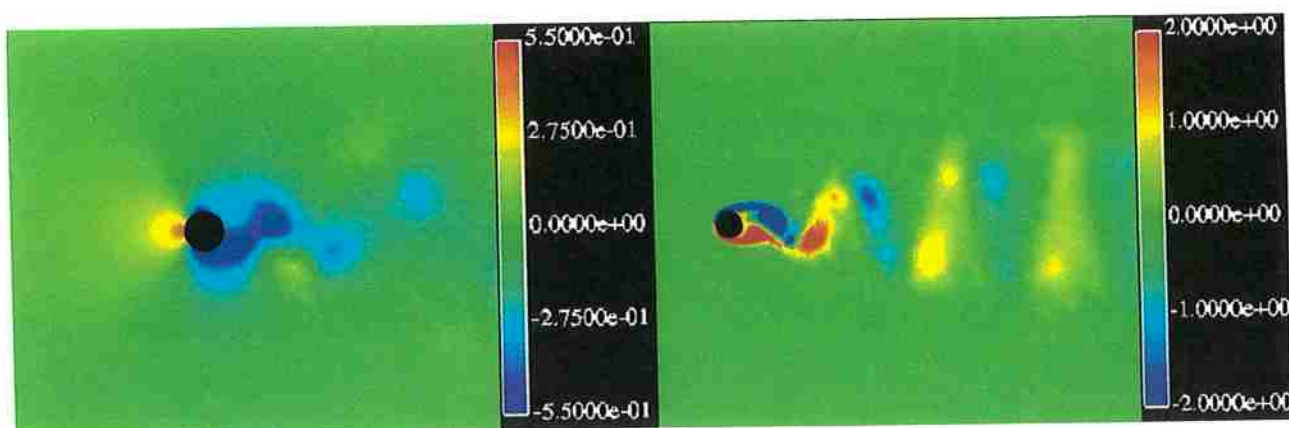


Fig. 5.25. Planos y - z de contorno de pressão e componente da vorticidade w_x na direção do eixo do cilindro de comprimento $5D$ e $Re=200$. Cortes em $x=-5.00$, -2.50 e 0.00 .

As figuras 5.26 e 5.27 corroboram o fato de que o padrão de emissão de vórtices não é mais paralelo como ocorre quando o cilindro possui um comprimento igual a $2D$. Utilizando medidas feitas em escala para o contorno de vorticidade dado na figura 5.27 chega-se a um comprimento de onda para as estruturas vorticiais na direção do comprimento do cilindro aproximadamente igual a $4D$, estando de acordo com a faixa delimitada por WILLIAMSON(1992) para o modo A de emissão de vórtices ($Re \approx 200$).

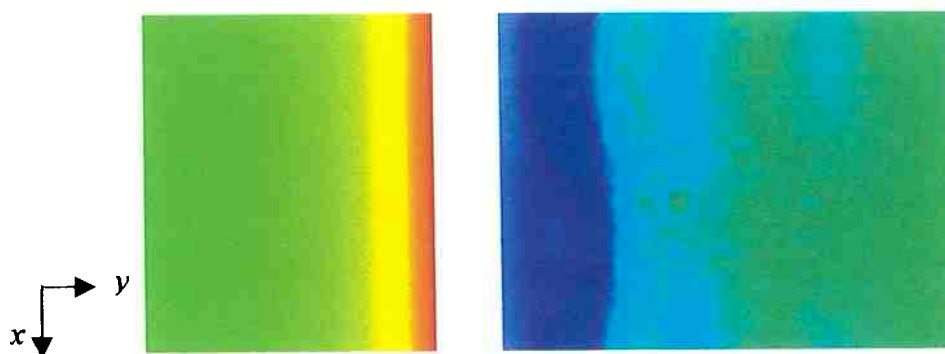


Fig. 5.26. Plano x - y de contorno de pressão para o cilindro de comprimento $5D$ e $Re=200$. Corte em $z=0.00$.

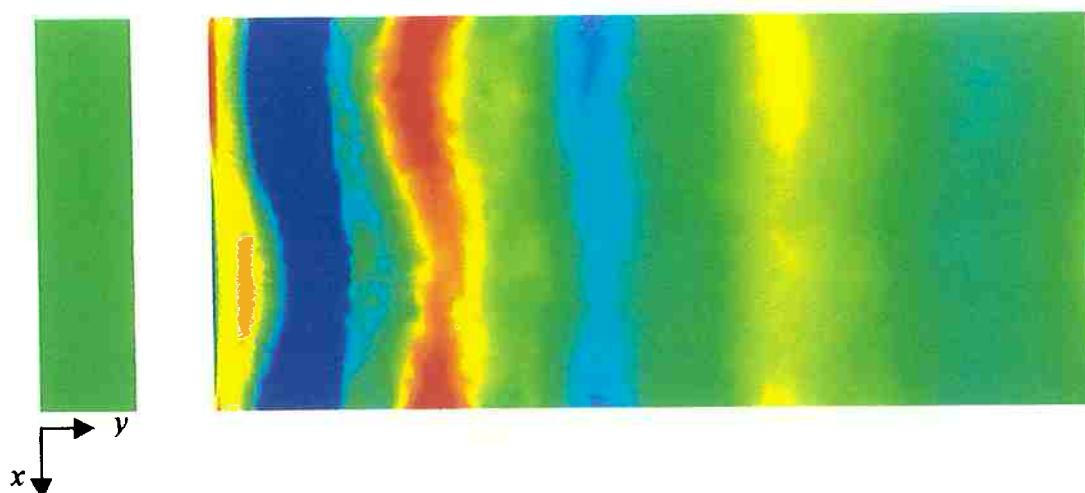


Fig. 5.27. Plano x - y de contorno de vorticidade w_x para o cilindro de comprimento $5D$ e $Re=200$. Corte em $z=0.00$.

A figura 5.28 dada a seguir mostra a superfície de vorticidade ressaltando a esteira do cilindro apenas com valores positivos e negativos de w_x .

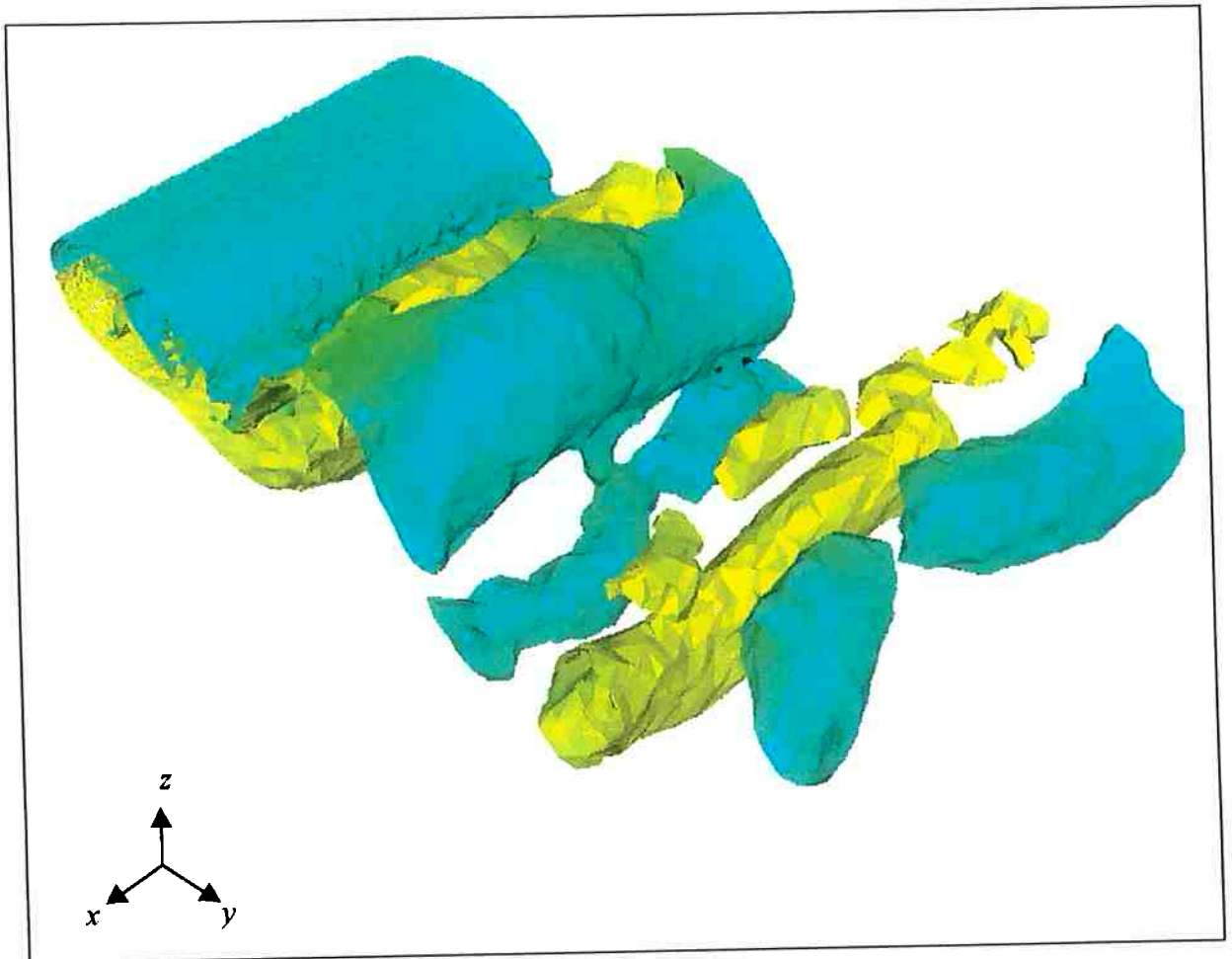


Fig. 5.28. Superfície de vorticidade para um cilindro de SD de comprimento e $Re=200$.

De modo análogo aos resultados apresentados na seção anterior, mostra-se na figura 5.29 dada a seguir o coeficiente de pressão C_{pb} para este caso e as velocidades dos pontos de monitoramento control_1, control_2 e control_3 na direção do escoamento em função do tempo adimensional UT/D .

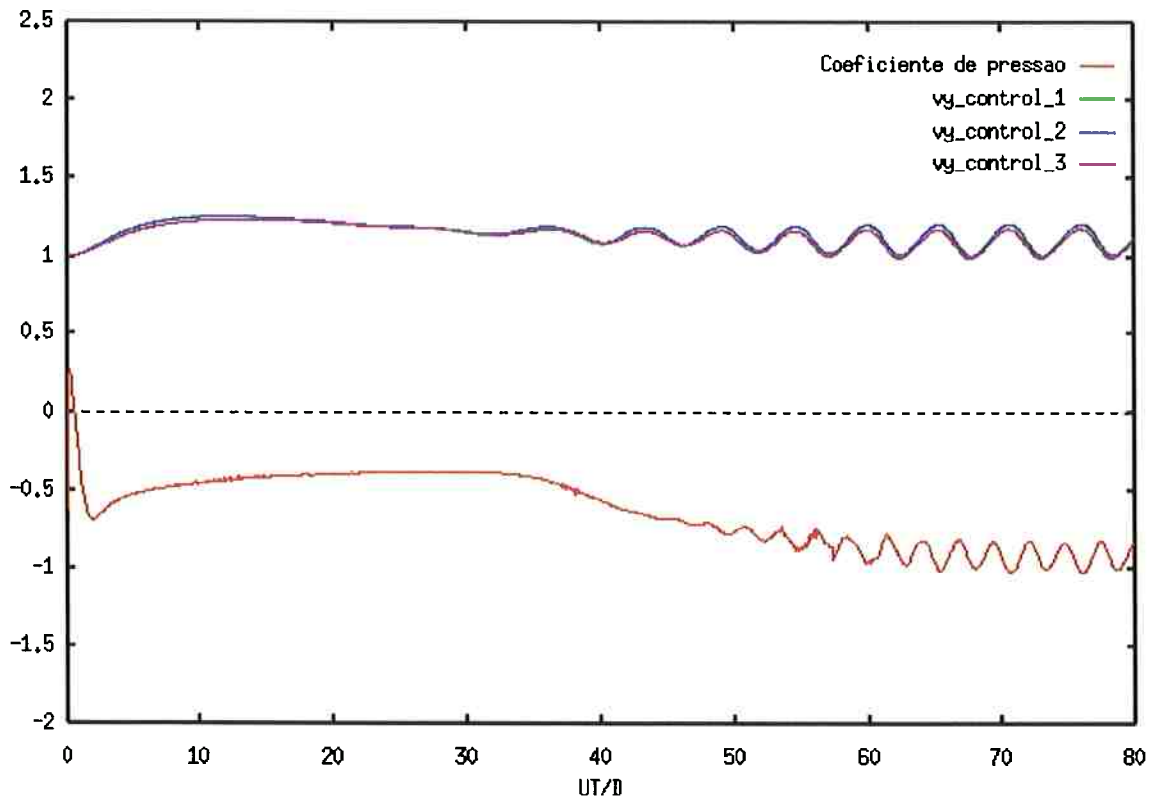


Fig. 5.29. Coeficiente de pressão C_{pb} e velocidades dos pontos de monitoramento para um cilindro de $5D$ de comprimento e $Re=200$.

Nota-se da análise da figura 5.29 que apesar de haver uma diferença de magnitude entre o ponto de monitoramento que se encontra exatamente no meio do vão do cilindro (curva $vy_control_3$) e os demais pontos (curvas $vy_control_1$ e $vy_control_2$), não há diferença entre a frequência observada para os mesmos, consolidando-se o número de Strouhal obtido para o escoamento.

A tabela 5.4 dada a seguir fornece uma comparação entre os resultados obtidos para número de Reynolds 200 e valores experimentais e numéricos dados por WILLIAMSON AND ROSHKO(1990) e NORBERG(1994) apud BARKLEY AND HENDERSON(1996) e THOMPSON et al.(1994).

	S (Número de Strouhal)	$-C_{pb}$ (Coeficiente de Pressão)
Resultados Obtidos		
Re = 200 FSM 3D	0.188	0.921
Resultados de Outras Simulações		
Barkley and Henderson(1996)	0.196	0.933
Thompson et al.(1994)	0.2107	1.250
Experimentos:		
Williamson and Roshko(1990)*	0.196	
Williamson and Roshko(1990)**	0.185	0.85
Norberg (1994)		0.90
* vortex shedding paralelo	** vortex shedding oblquo	

**Tabela 5.4. Comparação de resultados para número de Strouhal S e C_{pb} ($Re=200$).
Comprimento do cilindro = $5D$.**

Analisando-se os resultados fornecidos na tabela 5.4 nota-se que há uma conformidade entre os resultados numéricos aqui obtidos para o número de Strouhal com os resultados experimentais (diferença de 1.6% considerando-se agora "vortex shedding oblquo"). Já para o coeficiente de pressão as diferenças são da ordem 7.5% quando os resultados são comparados àqueles obtidos por WILLIAMSON E ROSHKO(1990) e da ordem de 2.5% quando comparados aos resultados de NORBERG(1994). Em relação a outros resultados numéricos, verifica-se que os coeficientes aqui obtidos possuem uma melhor aderência aos resultados experimentais quando comparados aos coeficientes fornecidos por BARKLEY AND HENDERSON(1996). Observa-se que houve uma queda do número de Strouhal e coeficiente de pressão (em módulo) em relação aos valores obtidos para o cilindro de comprimento 2D (de $S=0.196$ para $S=0.188$ e $C_{pb} = -0.957$ para $C_{pb}=-0.921$ respectivamente), o que torna os resultados para as simulações tridimensionais aqui obtidos mais próximos dos resultados experimentais.

Para uma melhor compreensão da formação da esteira que caracteriza o modo A de emissão de vórtices, será mostrada a seguir uma figura que contém o valor da vorticidade w_x em 8 quadros de um ciclo completo de emissão de vórtices, numerados de Q1 a Q8 e plotados a partir do instante $UT/D = 62.50$. A partir da frequência de emissão de vórtices obtida, foram plotados os quadros Q1 a Q8 com os seguintes valores do tempo adimensional: 62.50, 63.11, 63.72, 64.33, 64.94, 65.55, 66.16 e 66.77. Os quadros Q1 a Q4 representam a primeira metade do ciclo de emissão de vórtices, iniciado quando o valor do coeficiente de pressão possuía o maior valor em módulo.

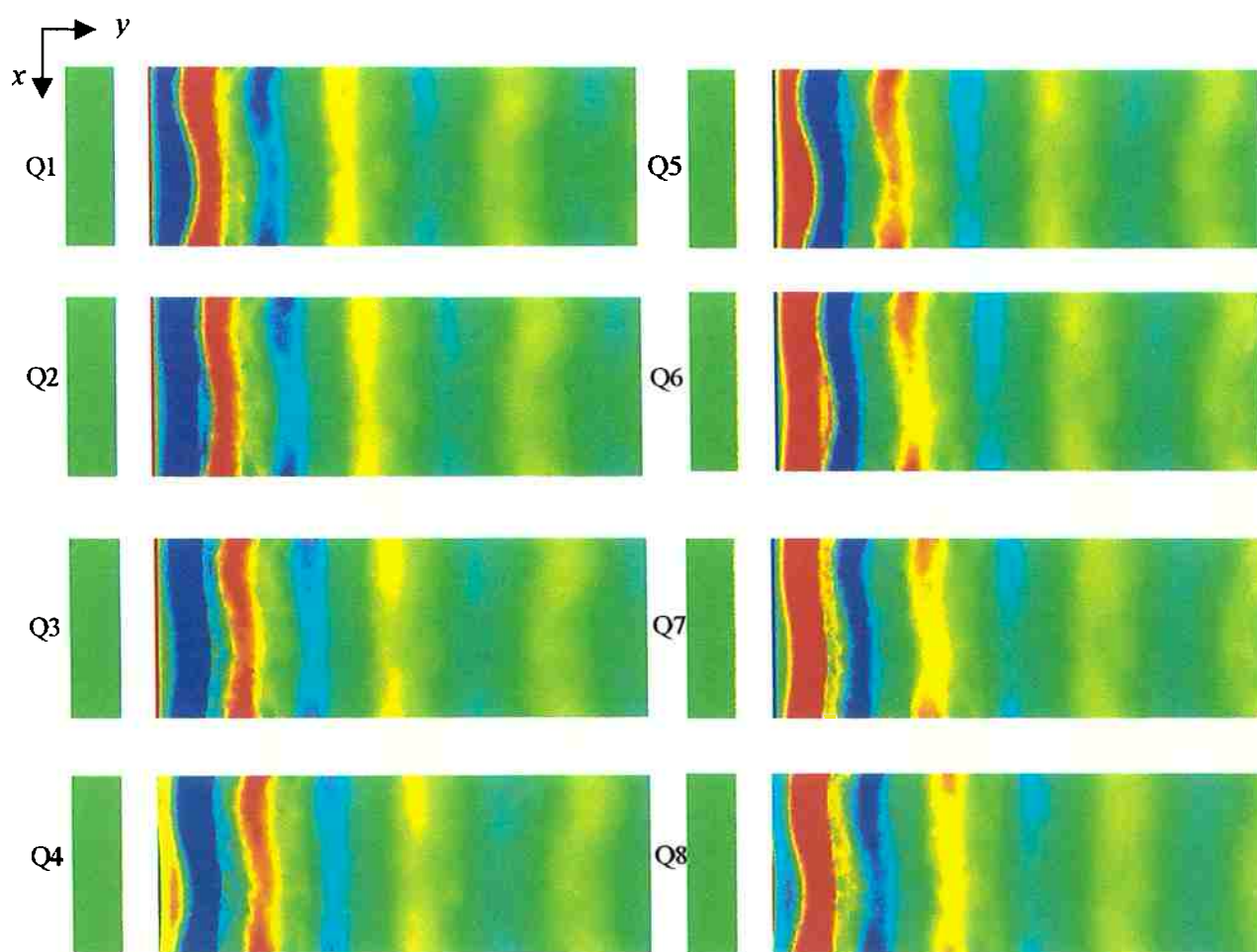


Fig. 5.30. Ciclo completo de emissão de vórtices para um cilindro de $5D$ de comprimento e $Re=200$. Quadros plotados a partir de $UT/D=62.50$.

A análise da figura 5.30 mostra o desenvolvimento da esteira em total concordância com o padrão observado por WILLIAMSON(1992) conforme foi visto na figura 5.23a). Na primeira metade do ciclo (quadros Q1 a Q4) ocorre o desenvolvimento da superfície de vorticidade com circulação no sentido horário (cor azul). Vale lembrar que a convenção para o sentido horário e anti-horário refere-se ao plano $y-z$ no sistema de referência adotado, o qual deve ser observado no sentido decrescente dos valores do eixo de coordenadas x . O último quadro da primeira metade do ciclo mostra o início da formação da superfície de vorticidade com circulação no sentido anti-horário (cor vermelha). Nos quadros subsequentes, nota-se a total correspondência entre os quadros do primeira e segunda metade do ciclo de emissão de vórtices, onde Q1 é o quadro homólogo de Q5, Q2 o homólogo de Q6 e assim sucessivamente. A natureza da circulação das superfícies alterna-se periodicamente, mantendo o comprimento de onda na direção do eixo do cilindro igual a aproximadamente 4 diâmetros em um claro desenvolvimento de uma esteira de padrão de emissão de vórtices oblíquo.

As seguir serão fornecidos os resultados para a simulação ao redor de um cilindro com $5D$ de comprimento e $Re=250$. De maneira análoga, buscou-se observar o padrão de emissão de vórtices obtido com as simulações computacionais e comparar o mesmo com aquele observado por Williamson(1992) em seus experimentos, bem como situar o número de Strouhal e o coeficiente de pressão em face aos valores obtidos através de experimentos (WILLIAMSON(1990) e NORBERG(1994)) e simulações numéricas realizadas por outros pesquisadores (BARKLEY AND HENDERSON(1996) e THOMPSON et al.(1994)).

Principalmente em função do tempo computacional gasto para as simulações tridimensionais, assunto que será abordado com mais detalhes no final do capítulo (seção 5.5), aumentou-se o intervalo de tempo ("time step") para a simulação do escoamento ao redor do cilindro com comprimento $5D$ e $Re=250$ de $5e-3$ para $1e-2$. Tal procedimento fez com que o tempo computacional total fosse reduzido à metade. Entretanto, conforme pode ser visto em ROACHE(1982), é possível estabelecer um requisito mínimo de estabilidade para problemas bidimensionais em função do intervalo de tempo Δt e a distância mínima entre os nós em direções típicas, Δy e Δz , onde Δy é a distância entre dois nós consecutivos na parede do cilindro e Δz é a menor distância entre dois nós situados na camada limite do cilindro. Em um *problema bidimensional de difusão pura e método explícito*, o requisito estabelecido por ROACHE(1982) para o intervalo de tempo é (considerando que as direções preponderantes no estudo do problema sejam a direção do escoamento y e a direção z):

$$\Delta t \leq \frac{1}{2\nu \left(\frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2} \right)} \quad (5.3)$$

onde $\Delta y = 2\pi R/108$, $\Delta z = 0.04 R$, $\nu = 0.80e-2 \text{ m}^2/\text{s}$, $\Delta y = 0.05818$ e $\Delta z = 0.04$. Como a velocidade do escoamento incidente é unitária, o valor da viscosidade resulta do número de Reynolds que se pretende simular e o do valor do diâmetro do cilindro através da relação dada no capítulo 1 (equação 1.2). Substituindo os valores na expressão (5.3) chega-se a

$$\Delta t \leq 6.8e-2 \quad (5.4)$$

Apesar da restrição acima ser recomendada para problemas bidimensionais e de difusão pura, o valor serve como guia na avaliação da ordem de grandeza do intervalo de tempo a ser usado para as simulações tridimensionais. Ainda assim, não foram utilizados valores maiores de Δt que obedecem a restrição dada em (5.4) e que poderiam diminuir ainda mais o custo computacional das simulações. Acredita-se que a influência do intervalo de tempo e a menor distância entre nós da malha computacional merece um estudo mais detalhado e fora do escopo do atual projeto de pesquisa, uma vez que uma análise ainda mais extensiva sobre os efeitos da influência da malha para um dado comprimento do cilindro consumiria um tempo ainda maior. Conforme poderá ser visto adiante, os coeficientes de pressão e número de Strouhal estão de acordo com os resultados experimentais fornecidos pela literatura assim como o padrão de emissão de vórtices, consistente com aquele observado por WILLIAMSON(1992) em seus experimentos. Dessa forma, a redução do tempo computacional através do aumento do intervalo de tempo não comprometeu a qualidade dos resultados obtidos e passou a ser adotado para as simulações subsequentes deste trabalho.

A simulação apresentada para $Re=250$ compreendeu um tempo adimensional total UT/D igual a 75, correspondendo a 15.000 iterações (observar que o intervalo de tempo agora é o dobro). De forma análoga ao que foi apresentado anteriormente, as figuras dadas a seguir correspondem a um tempo adimensional igual a $UT/D = 75$.

A figura 5.31 mostra em perspectiva o contorno de vorticidade (w_x) na direção transversal do escoamento, ou seja, na direção do eixo do cilindro. A figura 5.32 mostra os contornos de pressão e componente da vorticidade w_x em cortes feitos nos planos que contém a face com condição de contorno periódica ou cíclica e os pontos de

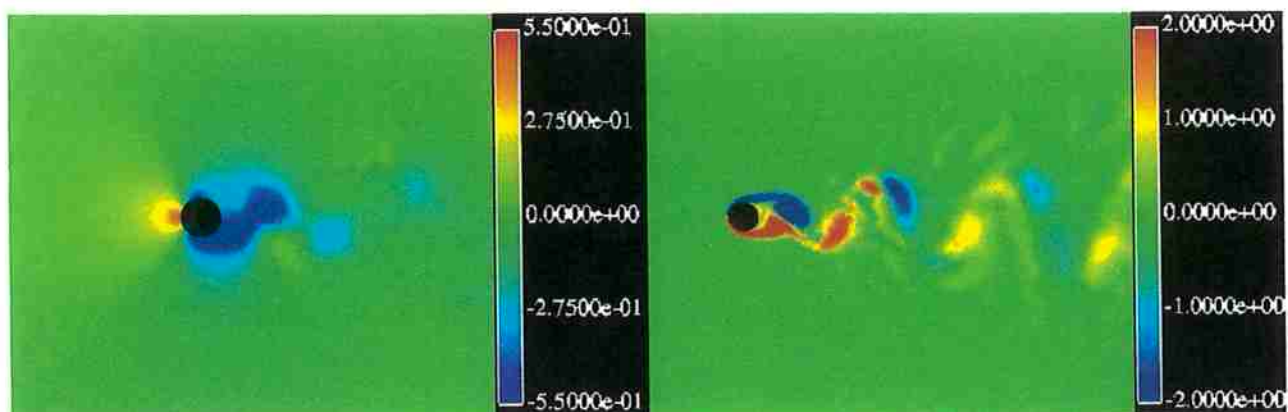
monitoramento das velocidades. Da análise desta figura observa-se que ocorrem diferenças entre os contornos obtidos para as três seções de monitoramento analisadas, consolidando uma emissão de vórtices oblíqua, tipo de esteira que também caracteriza o escoamento tridimensional para este número de Reynolds. A figura 5.33 apresenta um corte no plano x - y mostrando o campo de pressão e a figura 5.34 um corte no plano x - y apresentando w_x e a evolução da esteira ao longo da envergadura para $Re=250$.



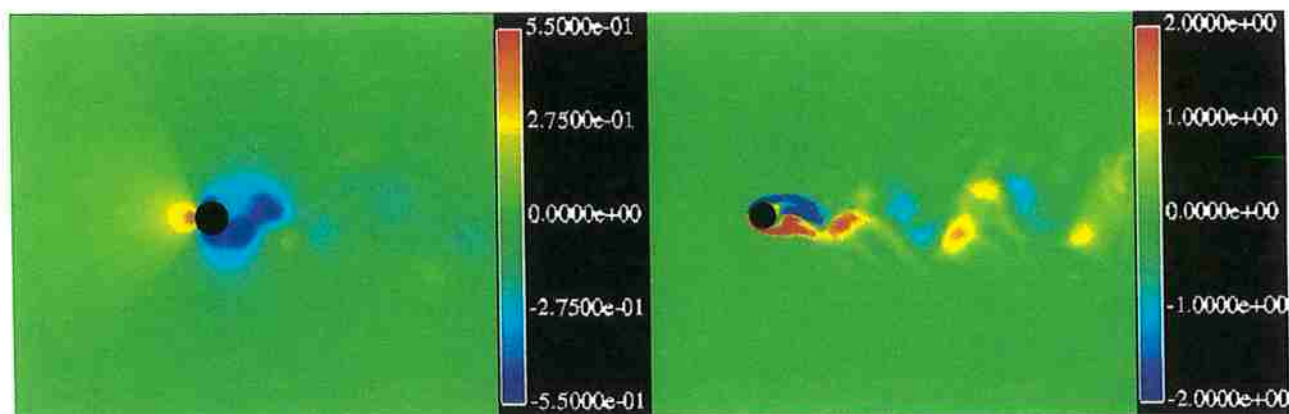
Fig. 5.31. Componente da vorticidade w_x na direção do eixo do cilindro para $Re=250$ e comprimento do cilindro igual a $5D$.

Utilizando medidas feitas em escala para o contorno de vorticidade dado na figura 5.34 chega-se a um comprimento para as estruturas vorticais na direção do comprimento do cilindro aproximadamente igual a $1D$, estando de acordo com a faixa delimitada por WILLIAMSON(1992) para o modo B de emissão de vórtices ($Re \geq 230$).

Face cíclica ou de condição de contorno periódica (corte em $x = -5.00$)



Corte em $x = -2.5$



Corte em $x = 0.00$

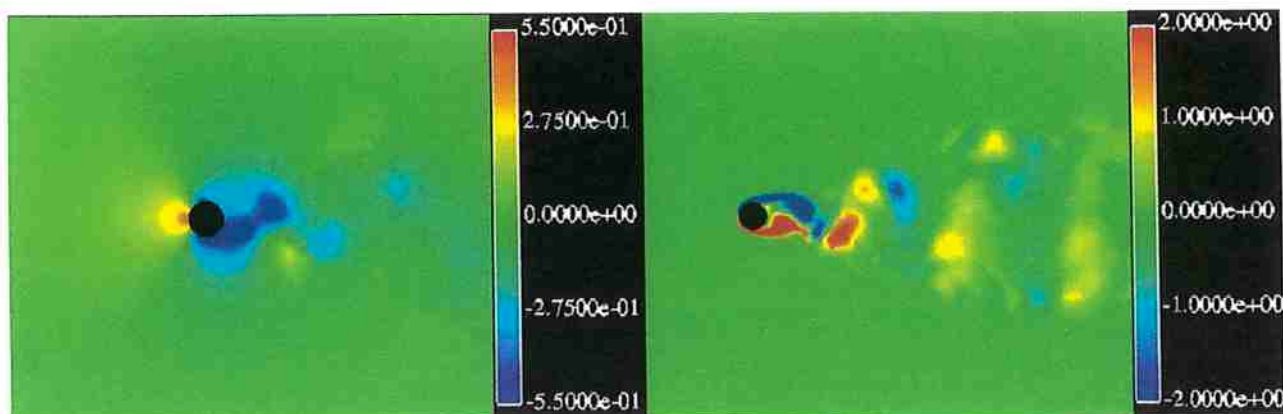


Fig. 5.32. Planos y - z de contorno de pressão e componente da vorticidade w_x na direção do eixo do cilindro de comprimento $5D$ e $Re=250$. Cortes em $x=-5.00$, -2.50 e 0.00 .

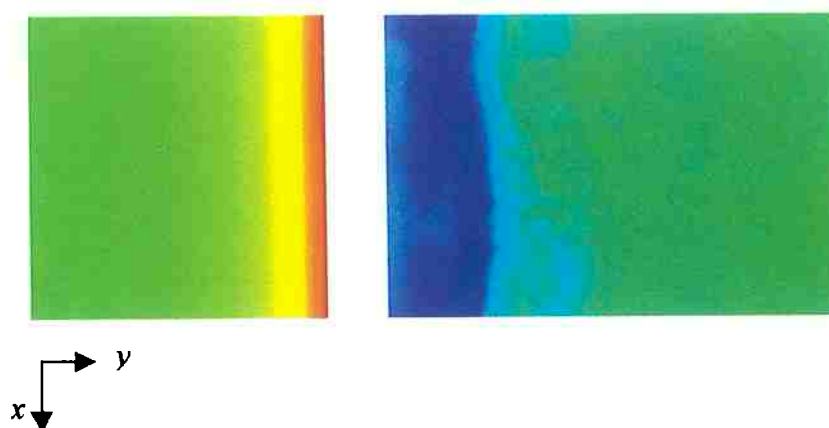


Fig. 5.33. Plano x - y de contorno de pressão para o cilindro de comprimento $5D$ e $Re=250$. Corte em $z=0.00$.

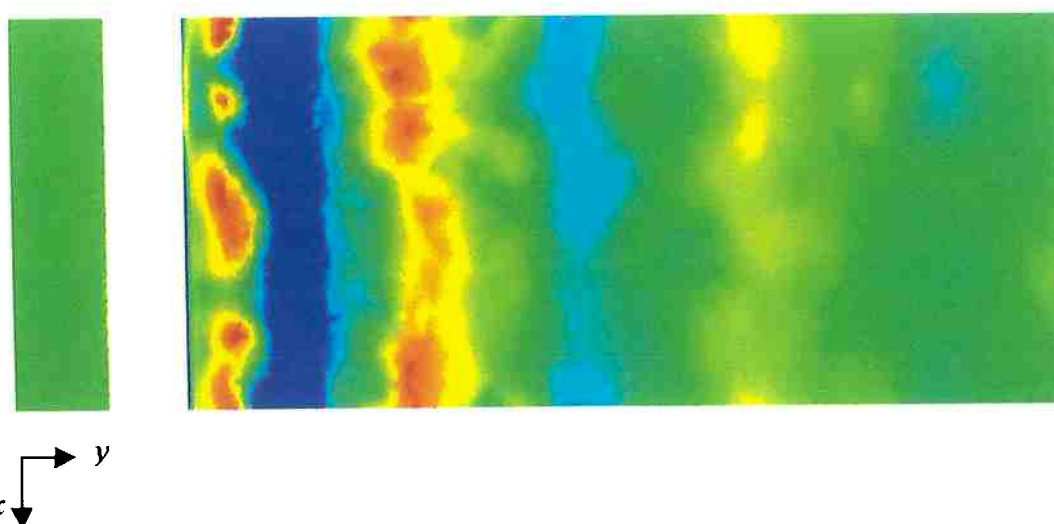


Fig. 5.34. Plano x - y de contorno de vorticidade w_x para o cilindro de comprimento $5D$ e $Re=250$. Corte em $z=0.00$.

A figura 5.35 dada a seguir mostra a superfície de vorticidade ressaltando a esteira do cilindro apenas com valores positivos e negativos de w_x . De modo análogo aos resultados apresentados na seção anterior, mostra-se na figura 5.36 coeficiente de pressão C_{pb} para este caso e as velocidades dos pontos de monitoramento control_1, control_2 e control_3 na direção do escoamento em função do tempo adimensional UT/D .

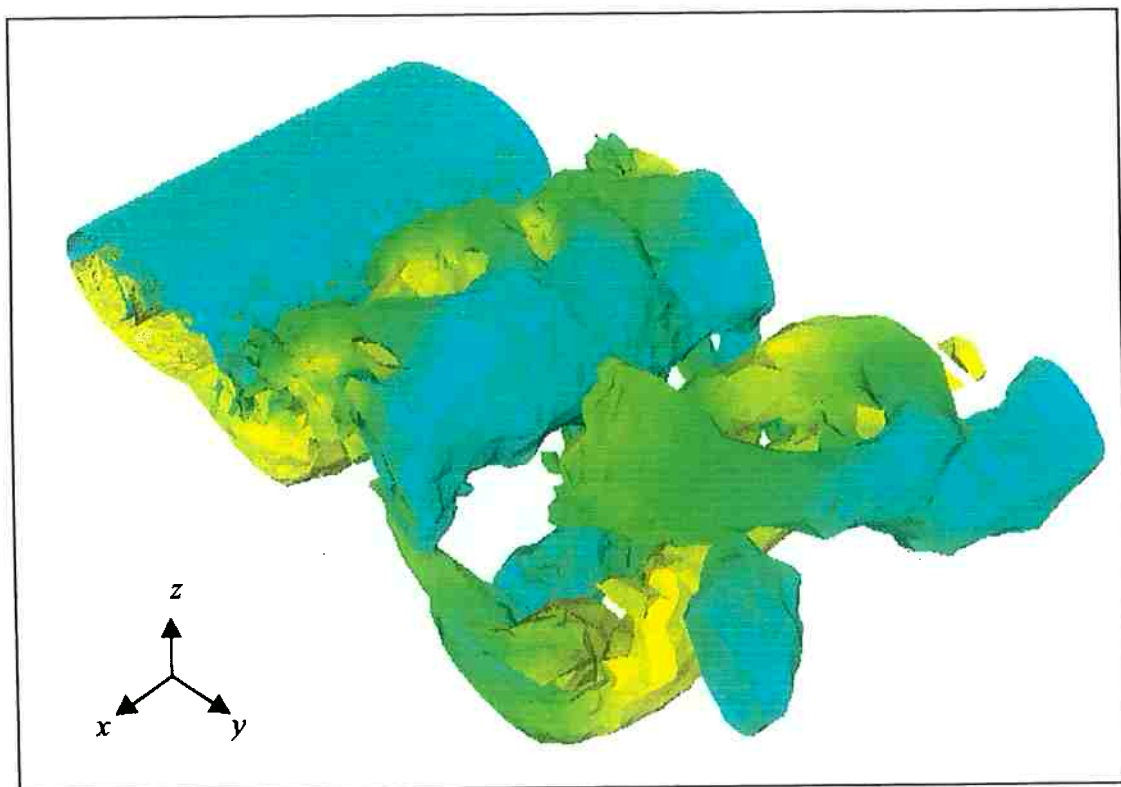


Fig. 5.35. Superfície de vorticidade para um cilindro de $5D$ de comprimento e $Re=250$.

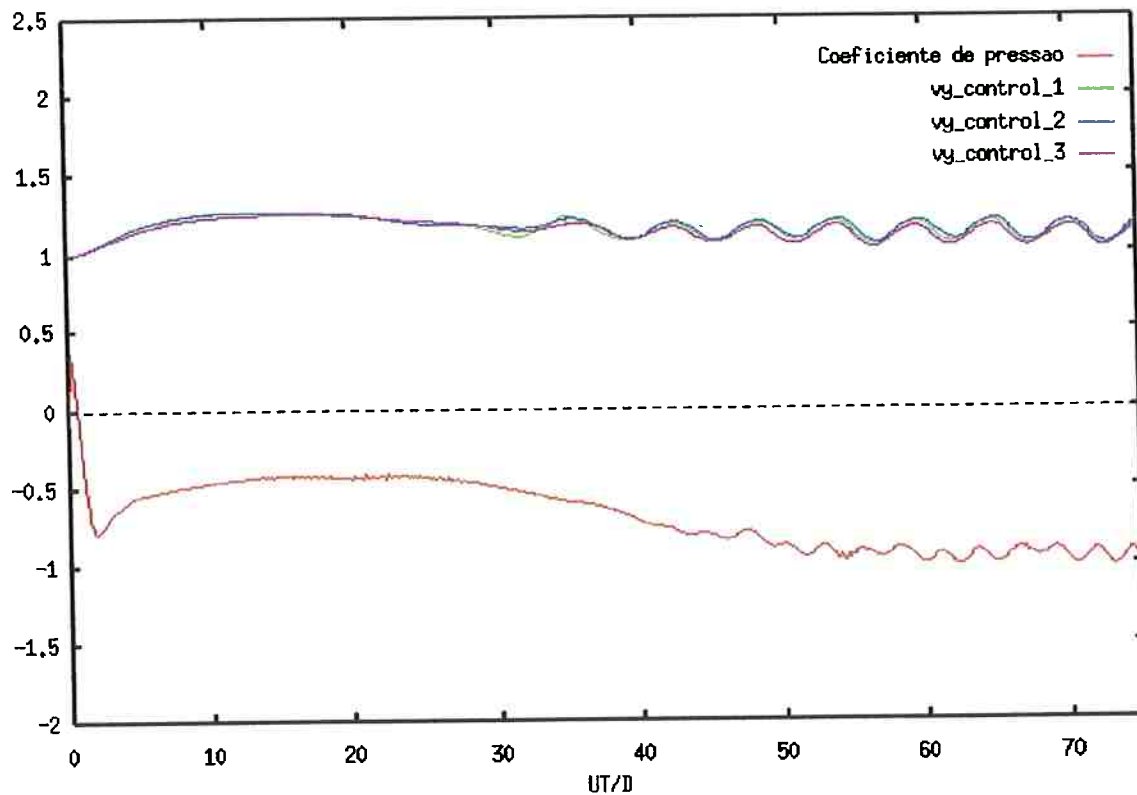


Fig. 5.36. Coeficiente de pressão C_{pb} e velocidades dos pontos de monitoramento para um cilindro de $5D$ de comprimento e $Re=250$.

Nota-se da análise da figura 5.36 que, contrariamente ao que foi observado para a simulação do escoamento para $Re=200$, ocorrem diferenças de magnitude e fase entre os três pontos de monitoramento control_1, control_2 e control_3. Dessa forma, três diferentes valores do número de Strouhal puderam ser avaliados de acordo com o ponto considerado: $S_1 = 0.182$, $S_2 = 0.195$, $S_3 = 0.190$, respectivamente calculados em control_1, control_2 e control_3. Para efeitos de comparação com resultados experimentais, será considerado o maior valor da frequência obtida.

A tabela 5.5 dada a seguir fornece uma comparação entre os resultados obtidos para número de Reynolds 250 e valores experimentais dados por WILLIAMSON AND ROSHKO(1990) e NORBERG(1994) apud BARKLEY AND HENDERSON(1996).

	S (Número de Strouhal)	$-C_{pb}$ (Coeficiente de Pressão)
Resultados Obtidos		
Re = 250 FSM 3D	0.195*	0.954
Experimentos:		
Williamson and Roshko(1990)	0.200	1.05
Norberg (1994)		0.975
* considerando maior frequência obtida		

Tabela 5.5. Comparação de resultados para número de Strouhal S e C_{pb} ($Re=250$). Comprimento do cilindro = 5D.

Analisando-se os resultados fornecidos na tabela 5.5 nota-se que há uma conformidade entre os resultados numéricos aqui obtidos para o número de Strouhal com os resultados experimentais (diferença de 2.5%). Já para o coeficiente de pressão as diferenças são da ordem 9% quando os resultados são comparados àqueles obtidos por

WILLIAMSON E ROSHKO(1990) e da ordem de 2.2% quando comparados aos resultados de NORBERG(1994). Observa-se que houve um aumento do número de Strouhal e coeficiente de pressão (em módulo) em relação aos valores obtidos para o cilindro de comprimento $5D$ e $Re=200$ (de $S=0.188$ para $S=0.195$ e $C_{pb} = -0.921$ para $C_{pb}=-0.954$ respectivamente), o que torna os resultados para as simulações tridimensionais aqui obtidos concordantes com os resultados experimentais.

De maneira análoga ao procedimento adotado para o modo A e visando uma melhor compreensão da formação da esteira que caracteriza o modo B de emissão de vórtices, será mostrada a seguir uma figura que contém o valor da vorticidade w_x em 8 quadros de um ciclo completo de emissão de vórtices, numerados de Q1 a Q8 e plotados a partir do instante $UT/D = 62.50$. A partir da frequência de emissão de vórtices obtida, foram plotados os quadros Q1 a Q8 com os seguintes valores do tempo adimensional: 62.50, 63.16, 63.82, 64.48, 65.14, 65.80, 66.46 e 67.12. Os quadros Q1 a Q4 representam a primeira metade do ciclo de emissão de vórtices, iniciado quando o valor do coeficiente de pressão possuía o maior valor em módulo.

A análise da figura 5.37 mostra o desenvolvimento da esteira em total concordância com o padrão observado por WILLIAMSON(1992) conforme foi visto na figura 5.23b). Na primeira metade do ciclo (quadros Q1 a Q4) ocorre o desenvolvimento de uma superfície de vorticidade preponderante com circulação no sentido horário (cor azul). O último quadro da primeira metade do ciclo mostra o início da formação da superfície de vorticidade com circulação no sentido anti-horário (cor vermelha). Nos quadros subsequentes, nota-se que não ocorre uma correspondência completa entre os quadros da primeira e segunda metade do ciclo de emissão de vórtices

como ocorreu para $Re=200$. A natureza da circulação das superfícies alterna-se de forma não periódica, característico do modo B segundo observado por WILLIAMSON(1992). Observa-se no quadro Q4 e Q8 surgimento de células com comprimento na direção do eixo do cilindro igual a aproximadamente 1 diâmetro. Novamente, à medida que se caminha à jusante do escoamento as células computacionais vão se tornando maiores e a intensidade da circulação dos vórtices diminui.

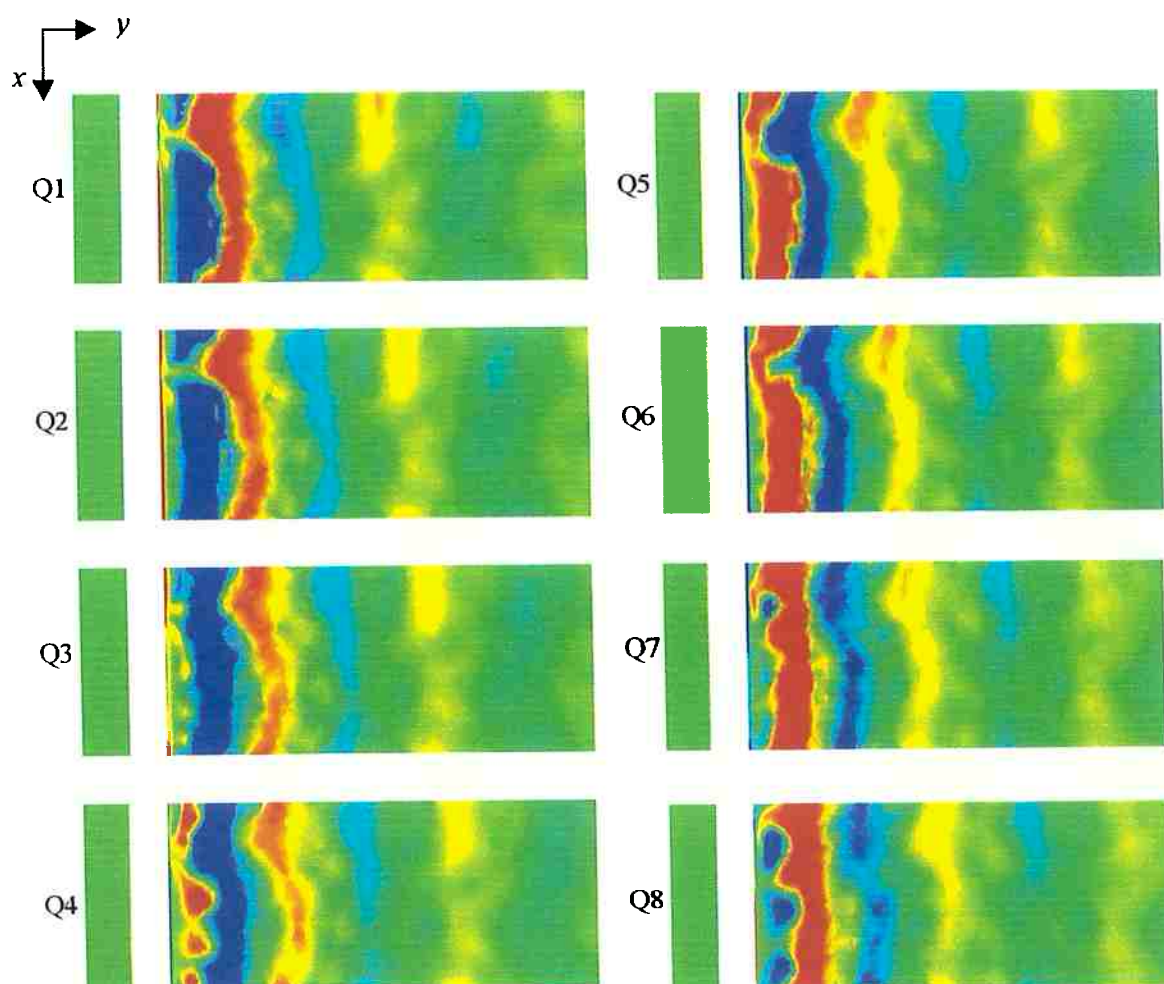


Fig. 5.37. Ciclo completo de emissão de vórtices para um cilindro de $5D$ de comprimento e $Re=250$. Quadros plotados a partir de $UT/D=62.50$.

5.4. RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES PARA $Re=200$ E $Re=250$ EM UM CILINDRO FIXO COM $6.28D$ DE COMPRIMENTO

Nesta seção serão mostrados os resultados obtidos para a resolução do escoamento tridimensional ao redor de um cilindro liso e fixo com 6.28 diâmetros de comprimento para $Re=200$ e $Re=250$, cuja malha computacional utilizada para as simulações foi mostrada na seção 5.1.

O propósito desta seção é observar a influência do aumento do comprimento do cilindro no coeficiente de pressão e número de Strouhal para as simulações com $Re=200$ e $Re=250$, bem como notar novamente ocorrência dos diferentes regimes de emissão de vórtices encontrados experimentalmente (modo A ou modo B), além de situar os valores do número de Strouhal e coeficiente de pressão em relação a valores experimentais encontrados na literatura e resultados numéricos obtidos por outros pesquisadores, de maneira análoga ao que foi realizado anteriormente.

Serão mostrados agora os resultados das simulações computacionais para $Re=200$. A simulação apresentada para $Re=200$ compreendeu um tempo adimensional total UT/D igual a 75 , correspondendo a 15.000 iterações. As figuras dadas a seguir correspondem a um tempo adimensional igual a $UT/D = 75$ e foi utilizado um intervalo de tempo igual a $1e-2$.

A figura 5.38 mostra em perspectiva o contorno de vorticidade (w_x) na direção transversal do escoamento, ou seja, na direção do eixo do cilindro. A figura 5.39 mostra os contornos de pressão e componente da vorticidade w_x em cortes feitos nos planos

que contém a face com condição de contorno periódica ou cíclica e os pontos de monitoramento das velocidades.

Da análise da figura 5.39 também observa-se, de maneira semelhante ao que foi notado para um cilindro de comprimento $5D$, que ocorrem diferenças entre os contornos obtidos para as três seções de monitoramento analisadas, consolidando uma emissão de vórtices oblíqua, esteira que caracteriza o escoamento tridimensional para este número de Reynolds. A figura 5.40 apresenta um corte no plano x - y apresentando o campo de pressão. Já a figura 5.41 fornece um corte no plano x - y mostrando w_x e a evolução da esteira ao longo da envergadura para $Re = 200$.

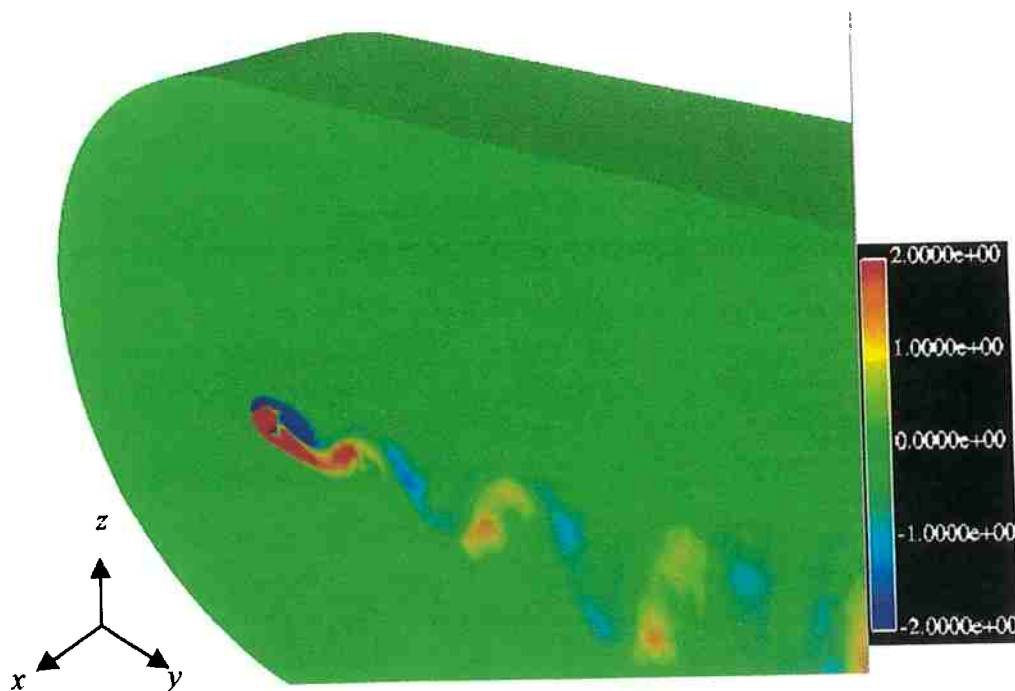
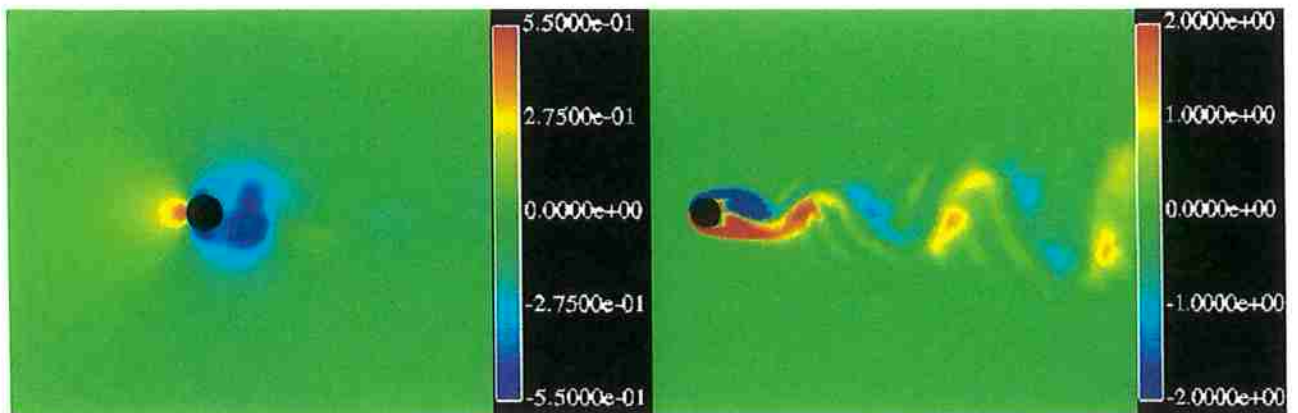
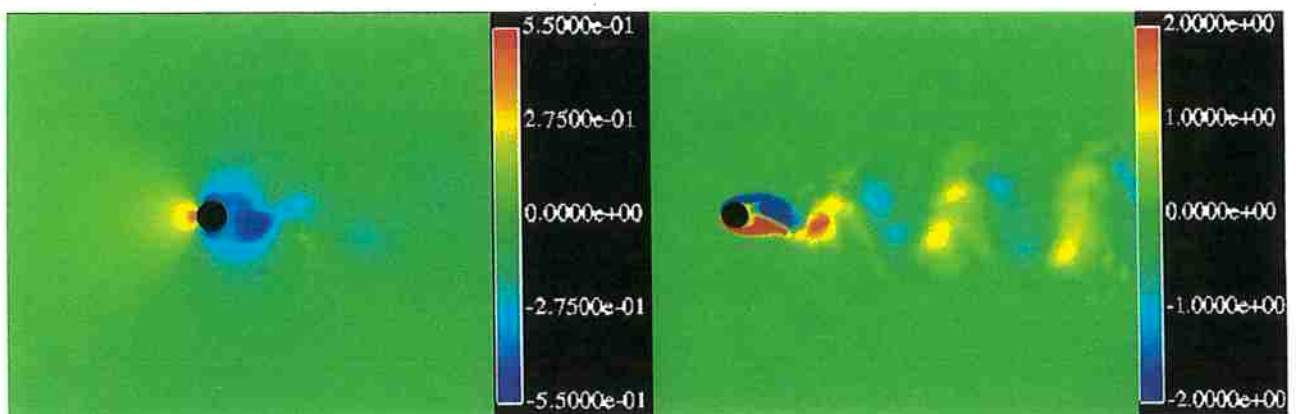


Fig. 5.38. Componente da vorticidade w_x na direção do eixo do cilindro para $Re=200$ e comprimento do cilindro igual a $6.28D$.

Face cíclica ou de condição de contorno periódica (corte em $x = -6.28$)



Corte em $x = -3.14$



Corte em $x = 0.00$

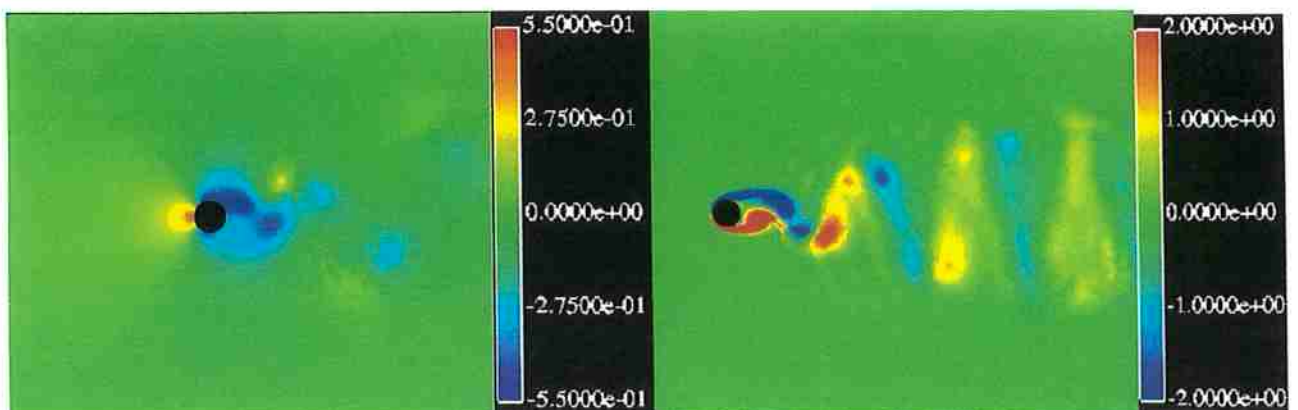


Fig. 5.39. Planos y - z de contorno de pressão e componente da vorticidade w_x na direção do eixo do cilindro de comprimento $6.28D$ e $Re=200$. Cortes em $x=-6.28$, -3.14 e 0.00 .

As figuras 5.40 e 5.41 corroboram o fato de que o padrão de emissão de vórtices não é mais paralelo, assim como ocorre quando o cilindro possui um comprimento igual a $5D$. Utilizando medidas feitas em escala para o contorno de vorticidade dado na figura 5.41 chega-se a um comprimento de onda para as estruturas vorticais na direção do comprimento do cilindro aproximadamente igual a $4D$, estando as simulações de acordo com a faixa delimitada por WILLIAMSON(1992) para o modo A de emissão de vórtices ($Re \approx 200$).

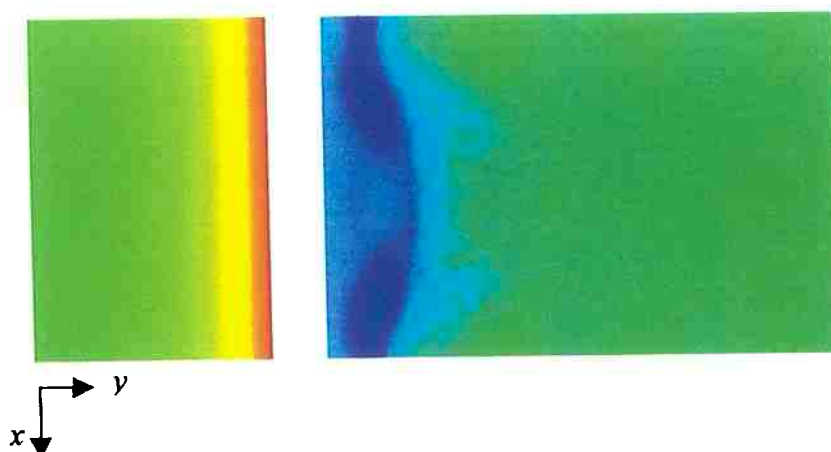


Fig. 5.40. Plano x - y de contorno de pressão para o cilindro de comprimento $6.28D$ e $Re=200$. Corte em $z=0.00$.

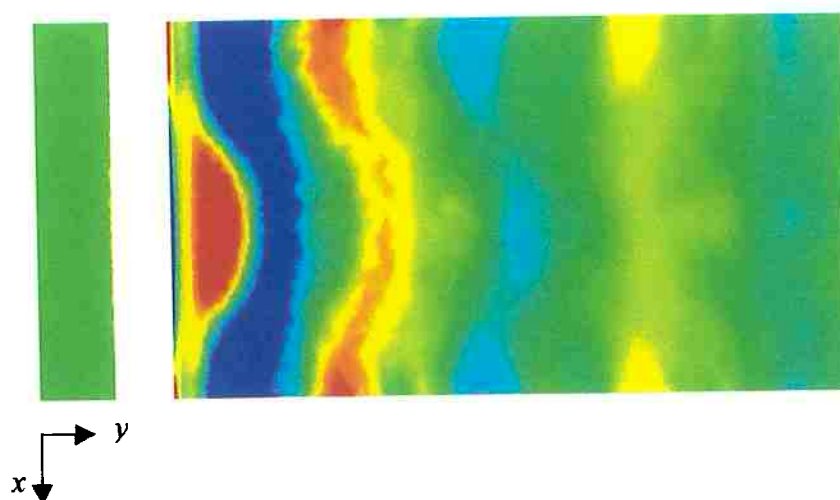


Fig. 5.41. Plano x - y de contorno de vorticidade w_x para o cilindro de comprimento $6.28D$ e $Re=200$. Corte em $z=0.00$.

A figura 5.42 dada a seguir mostra a superfície de vorticidade ressaltando a esteira do cilindro apenas com valores positivos e negativos de w_x .

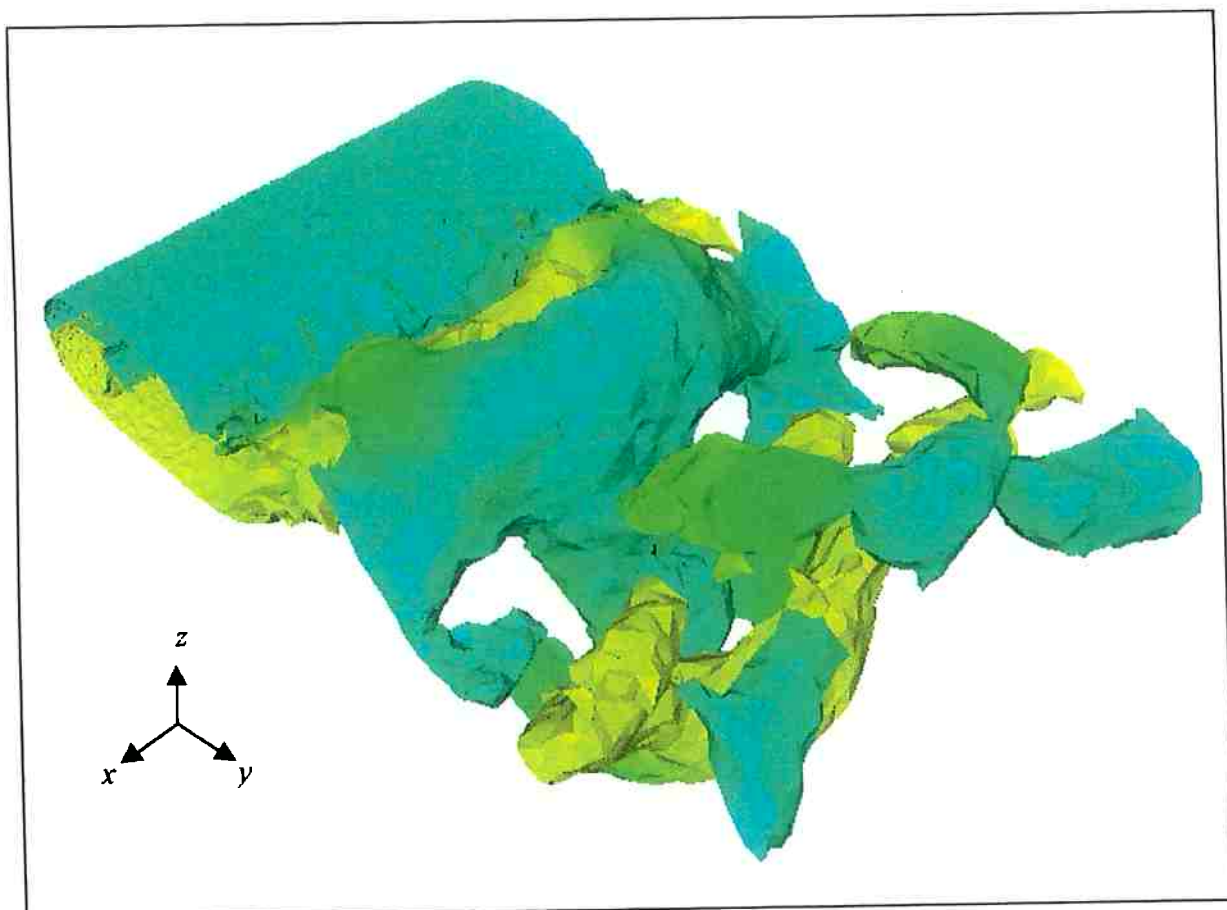


Fig. 5.42. Superfície de vorticidade para um cilindro de $6.28D$ de comprimento e $Re=200$.

De modo análogo aos resultados apresentados na seção anterior, mostra-se na figura 5.43 dada a seguir o coeficiente de pressão C_{pb} para este caso e as velocidades dos pontos de monitoramento control_1, control_2 e control_3 na direção do escoamento em função do tempo adimensional UT/D .

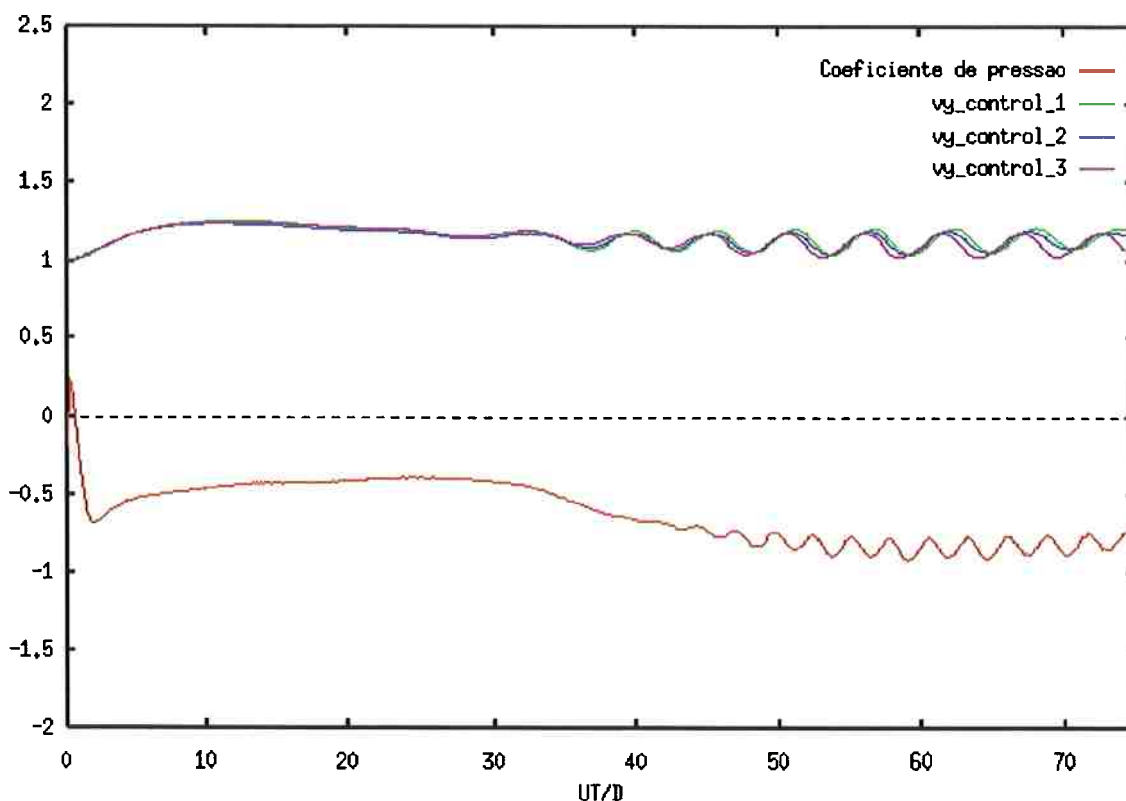


Fig. 5.43. Coeficiente de pressão C_{pb} e velocidades dos pontos de monitoramento para um cilindro de $6.28D$ de comprimento e $Re=200$.

Nota-se da análise da figura 5.43 que apesar de haver uma diferença de magnitude entre os pontos de monitoramento, não há diferença entre a frequência observada para os mesmos, consolidando-se o número de Strouhal obtido para o escoamento.

A tabela 5.6 dada a seguir fornece uma comparação entre os resultados obtidos para número de Reynolds 200 e valores experimentais e numéricos dados por WILLIAMSON AND ROSHKO(1990) e NORBERG(1994) apud BARKLEY AND HENDERSON(1996) e THOMPSON et al(1994).

	S (Número de Strouhal)	$-C_{pb}$ (Coeficiente de Pressão)
Resultados Obtidos		
Re = 200 FSM 3D	0.180	0.830
Resultados de Outras Simulações		
Barkley and Henderson(1996)	0.196	0.933
Thompson et al.(1994)	0.2107	1.250
Experimentos:		
Williamson and Roshko(1990)*	0.196	
Williamson and Roshko(1990)**	0.185	0.85
Norberg (1994)		0.90
* vortex shedding paralelo	** vortex shedding oblquo	

**Tabela 5.6. Comparação de resultados para número de Strouhal S e C_{pb} ($Re=200$).
Comprimento do cilindro = 6.28D.**

Analisando-se os resultados fornecidos na tabela 5.6 nota-se que há uma diferença de 2.7% entre os resultados numéricos aqui obtidos para o número de Strouhal com os resultados experimentais (considerando-se agora "vortex shedding oblquo"). Já para o coeficiente de pressão as diferenças são da ordem 2.4% quando os resultados são comparados àqueles obtidos por WILLIAMSON E ROSHKO(1990) e da ordem de 7.7% quando comparados aos resultados de NORBERG(1994). Em relação a outros resultados numéricos, verifica-se que os coeficientes aqui obtidos possuem uma melhor aderência aos resultados experimentais quando comparados aos coeficientes fornecidos por BARKLEY AND HENDERSON(1996). Observa-se que houve uma queda do número de Strouhal e coeficiente de pressão (em módulo) em relação aos valores obtidos para o cilindro de comprimento 5D (de $S=0.188$ para $S=0.180$ e $C_{pb} = -0.921$ para $C_{pb}=-0.830$ respectivamente). Entretanto, a obtenção de um número de Strouhal um pouco menor que o esperado pode indicar a leve ocorrência de difusão numérica nas simulações para a presente malha computacional (6.28D).

Novamente, para uma melhor compreensão da formação da esteira que caracteriza o modo A de emissão de vórtices, será mostrada a seguir uma figura que contém o valor da vorticidade w_x em 8 quadros de um ciclo completo de emissão de vórtices, numerados de Q1 a Q8 e plotados a partir do instante $UT/D = 62.50$. A partir da frequência de emissão de vórtices obtida, foram plotados os quadros Q1 a Q8 com os seguintes valores do tempo adimensional: 62.50, 63.16, 63.82, 64.48, 65.14, 65.80, 66.46 e 67.12. Os quadros Q1 a Q4 representam a primeira metade do ciclo de emissão de vórtices, iniciado quando o valor do coeficiente de pressão possuía o maior valor em módulo.

A análise da figura 5.44 mostra o desenvolvimento da esteira em total concordância com o padrão observado por WILLIAMSON(1992) conforme foi visto na figura 5.23a). Na primeira metade do ciclo (quadros Q1 a Q4) ocorre o desenvolvimento da superfície de vorticidade com circulação no sentido anti-horário (cor vermelha). O último quadro da primeira metade do ciclo mostra o início da formação da superfície de vorticidade com circulação no sentido horário (cor azul). Nos quadros subsequentes, nota-se a total correspondência entre os quadros da primeira e segunda metade do ciclo de emissão de vórtices, onde Q1 é o quadro homólogo de Q5, Q2 o homólogo de Q6 e assim sucessivamente. A natureza da circulação das superfícies alterna-se periodicamente, mantendo o comprimento de onda na direção do eixo do cilindro igual a aproximadamente 4 diâmetros em um claro desenvolvimento de uma esteira de padrão de emissão de vórtices oblíqua. À medida que se caminha à jusante do escoamento as células computacionais vão se tornando maiores e a intensidade da circulação dos vórtices diminui.

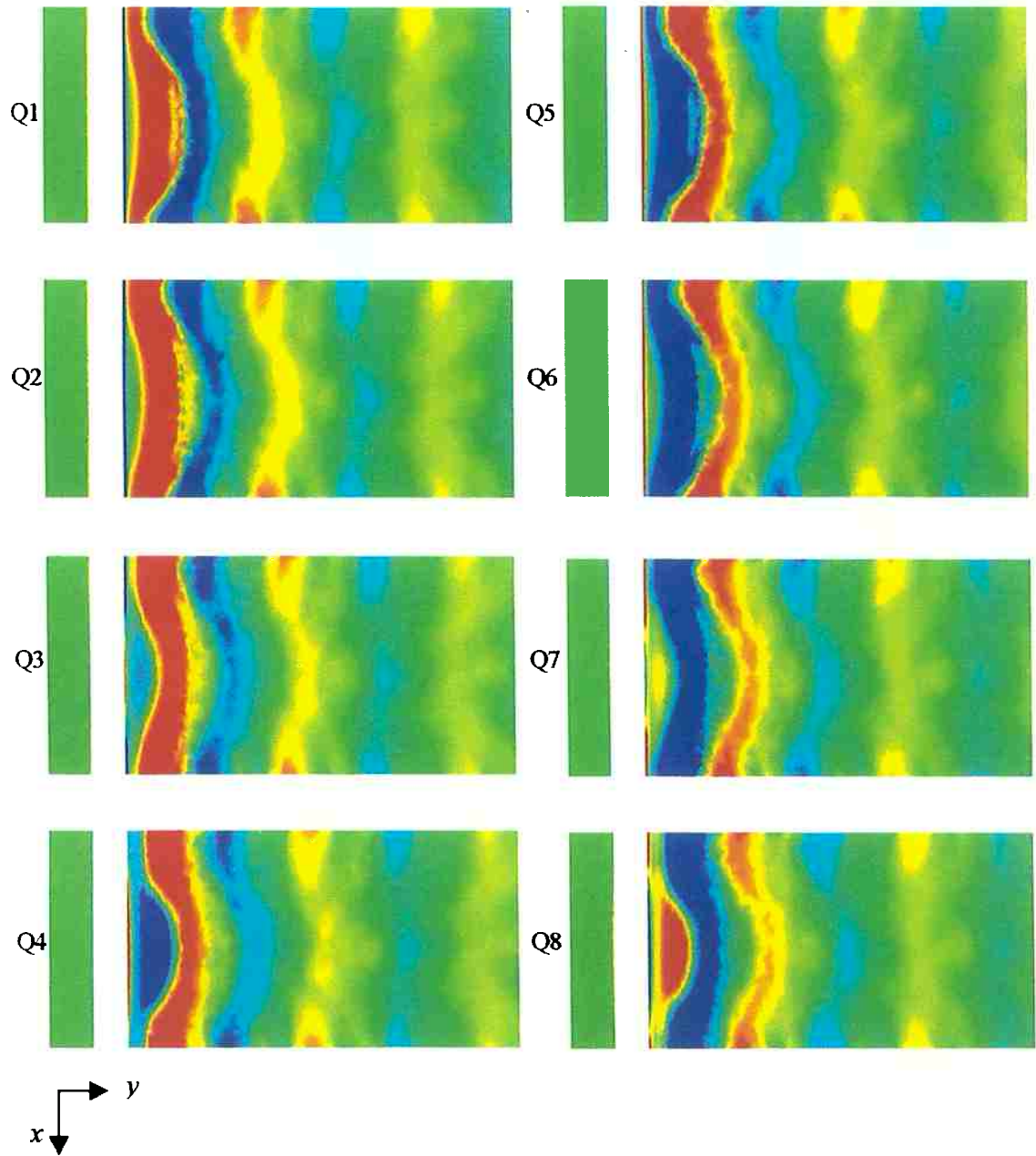


Fig. 5.44. Ciclo completo de emissão de vórtices para um cilindro de $6.28D$ de comprimento e $Re=200$. Quadros plotados a partir de $UT/D=62.50$.

Serão mostrados agora os resultados das simulações computacionais para $Re=250$. A simulação apresentada para $Re=250$ também compreendeu um tempo adimensional total UT/D igual a 75, correspondendo a 15.000 iterações. As figuras dadas a seguir correspondem a um tempo adimensional igual a $UT/D = 75$ e foi utilizado um intervalo de tempo igual a $1e-2$.

A figura 5.45 mostra em perspectiva o contorno de vorticidade (w_x) na direção transversal do escoamento, ou seja, na direção do eixo do cilindro. A figura 5.46 mostra os contornos de pressão e componente da vorticidade w_x em cortes feitos nos planos que contém a face com condição de contorno periódica ou cíclica e os pontos de monitoramento das velocidades.

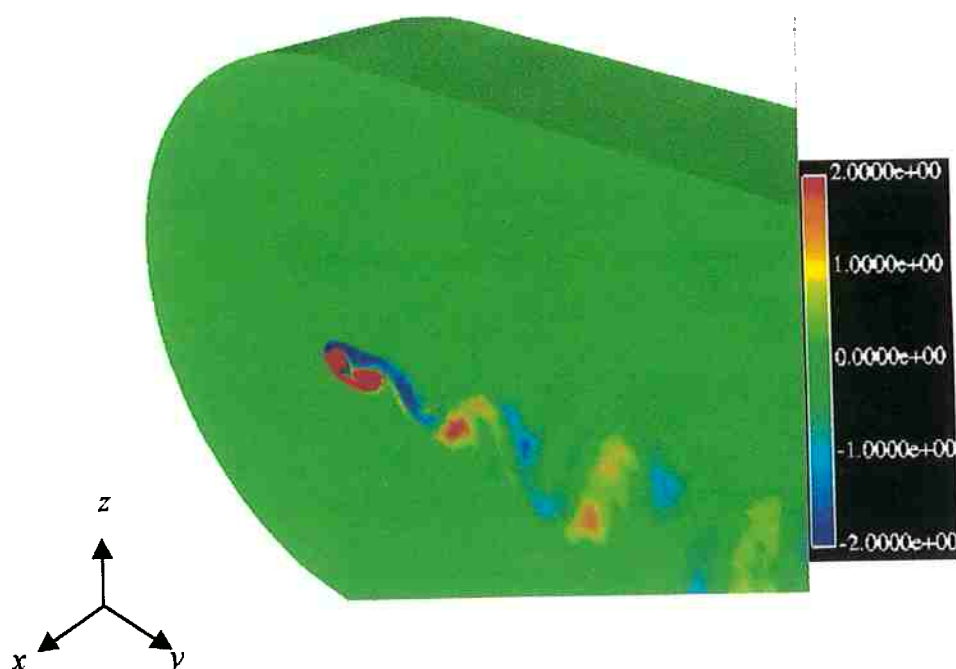
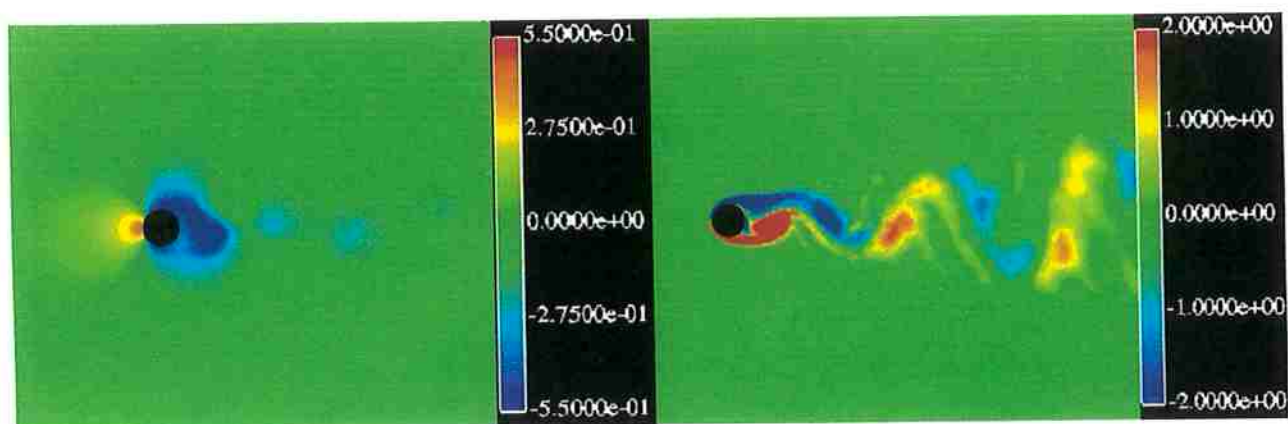
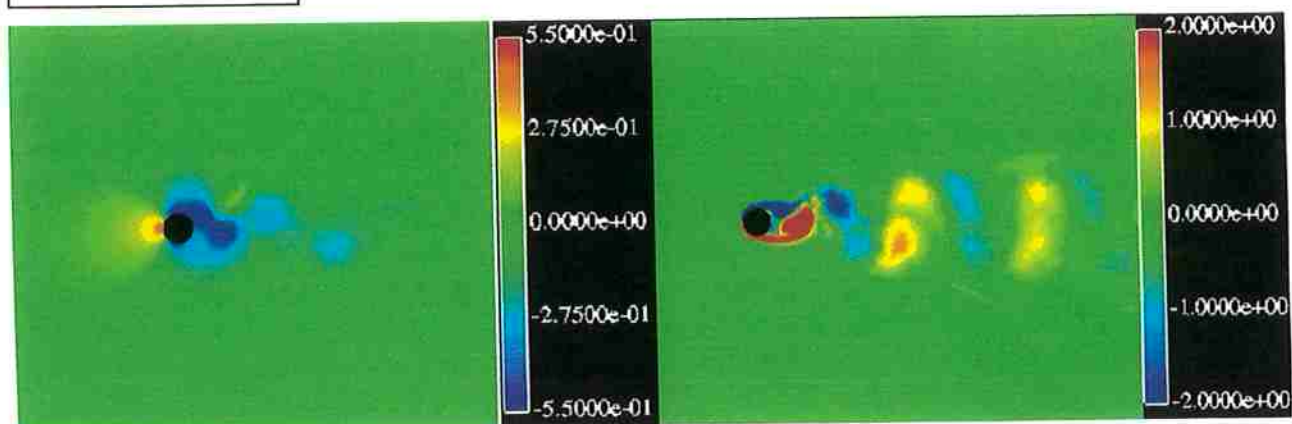


Fig. 5.45. Componente da vorticidade w_x na direção do eixo do cilindro para $Re=250$ e comprimento do cilindro igual a $6.28D$.

Face cíclica ou de condição de contorno periódica (corte em $x = -6.28$)



Corte em $x = -3.14$



Corte em $x = 0.00$

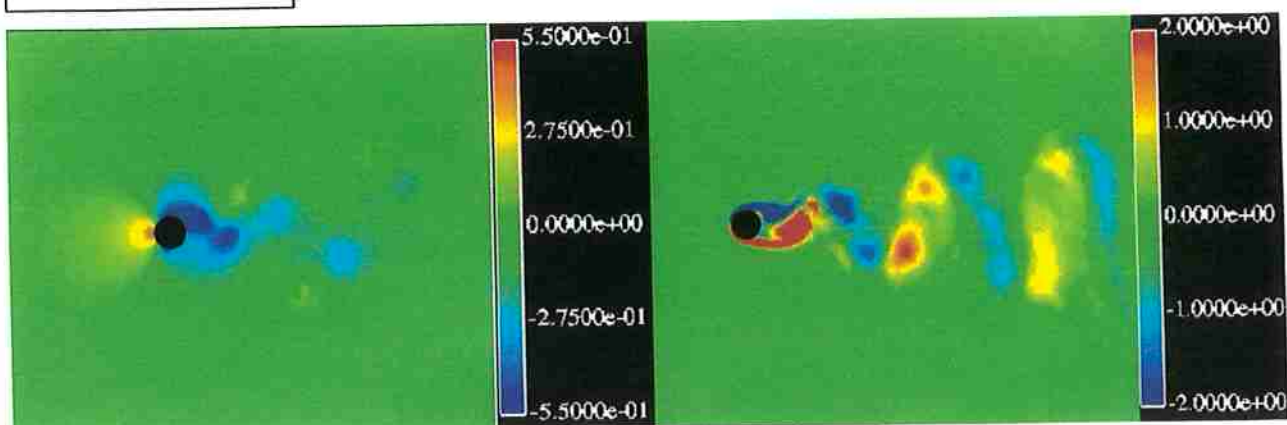


Fig. 5.46. Planos y - z de contorno de pressão e componente da vorticidade w_x na direção do eixo do cilindro de comprimento $6.28D$ e $Re=250$. Cortes em $x=-6.28$, -3.14 e 0.00 .

Da análise da figura 5.46 também observa-se, de maneira semelhante ao que foi notado para um cilindro de comprimento $5D$, que ocorrem diferenças entre os contornos obtidos para as três seções de monitoramento analisadas, consolidando uma emissão de vórtices oblíqua, esteira que caracteriza o escoamento tridimensional para este número de Reynolds. A figura 5.47 apresenta um corte no plano x - y apresentando o campo de pressão. Já a figura 5.48 fornece um corte no plano x - y mostrando w_x e a evolução da esteira ao longo da envergadura para $Re = 250$.

As figuras 5.47 e 5.48 corroboram o fato de que o padrão de emissão de vórtices não é mais paralelo, assim como ocorre quando o cilindro possui um comprimento igual a $5D$. Utilizando medidas feitas em escala para o contorno de vorticidade dado na figura 5.48 chega-se a um comprimento para algumas estruturas vorticais na direção do comprimento do cilindro aproximadamente igual a $1D$, estando de acordo com a faixa delimitada por WILLIAMSON(1992) para o modo B de emissão de vórtices ($Re \geq 230$).

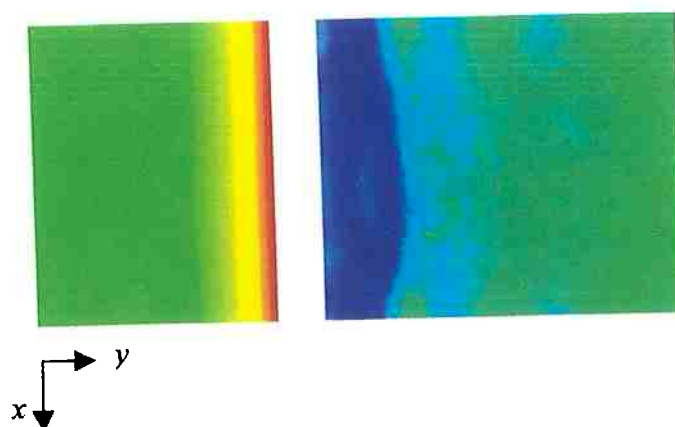


Fig. 5.47. Plano x - y de contorno de pressão para o cilindro de comprimento $6.28D$ e $Re=250$. Corte em $z=0.00$.

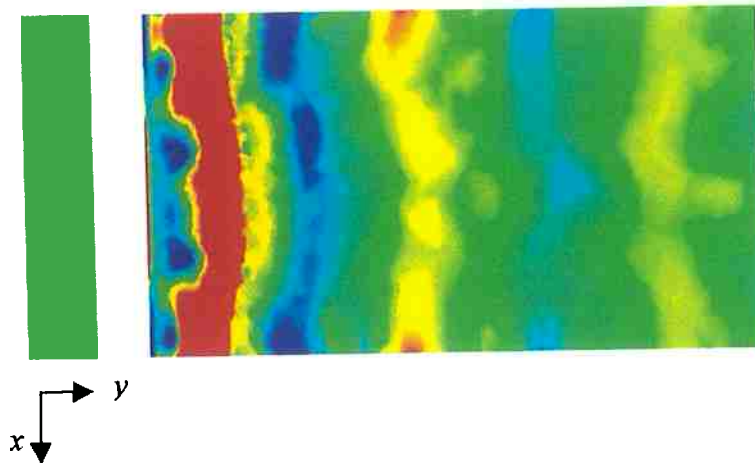


Fig. 5.48. Plano x - y de contorno de vorticidade w_x para o cilindro de comprimento $6.28D$ e $Re=250$. Corte em $z=0.00$.

A figura 5.49 dada a seguir mostra a superfície de vorticidade ressaltando a esteira do cilindro apenas com valores positivos e negativos de w_x .

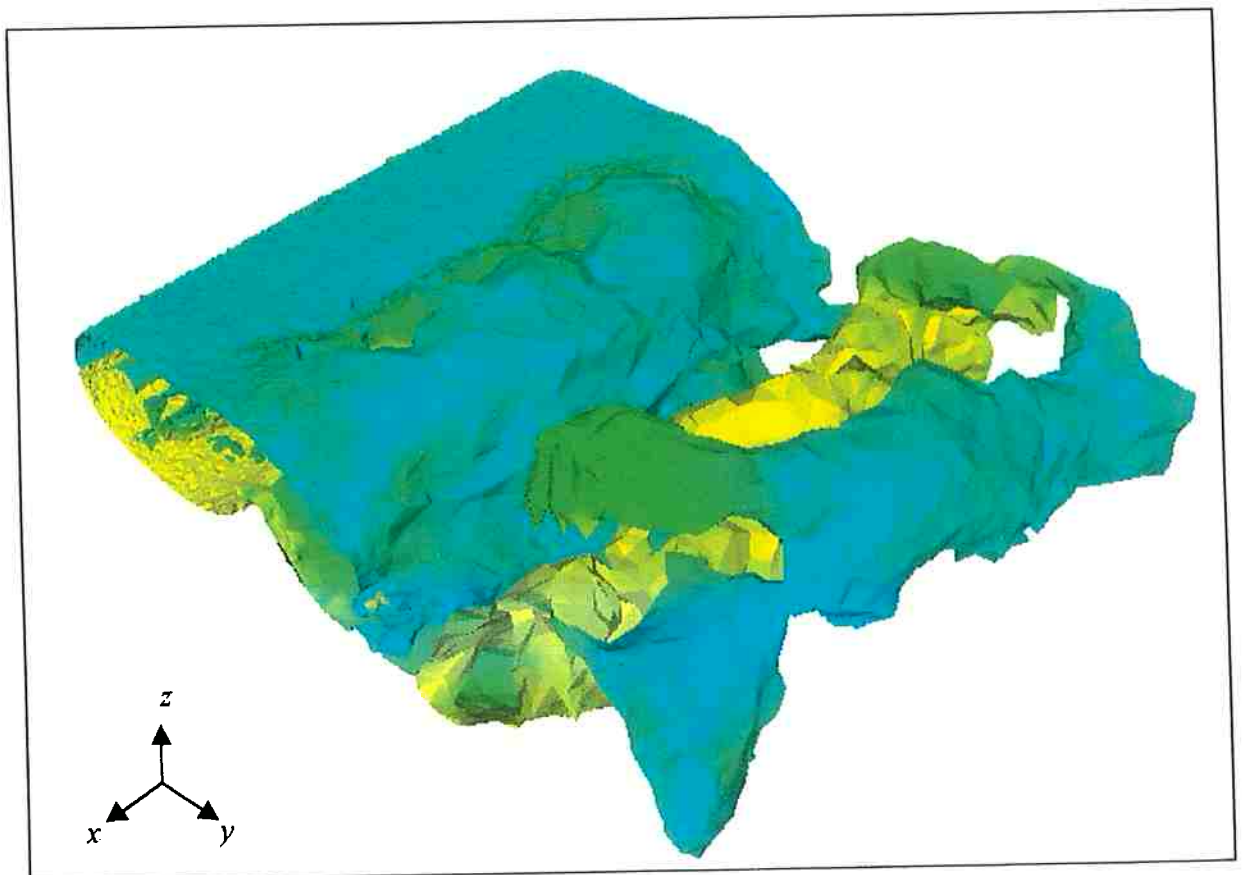


Fig. 5.49. Superfície de vorticidade para um cilindro de $6.28D$ de comprimento e $Re=250$.

De modo análogo aos resultados apresentados na seção anterior, mostra-se na figura 5.50 dada a seguir o coeficiente de pressão C_{pb} para este caso e as velocidades dos pontos de monitoramento control_1, control_2 e control_3 na direção do escoamento em função do tempo adimensional UT/D .

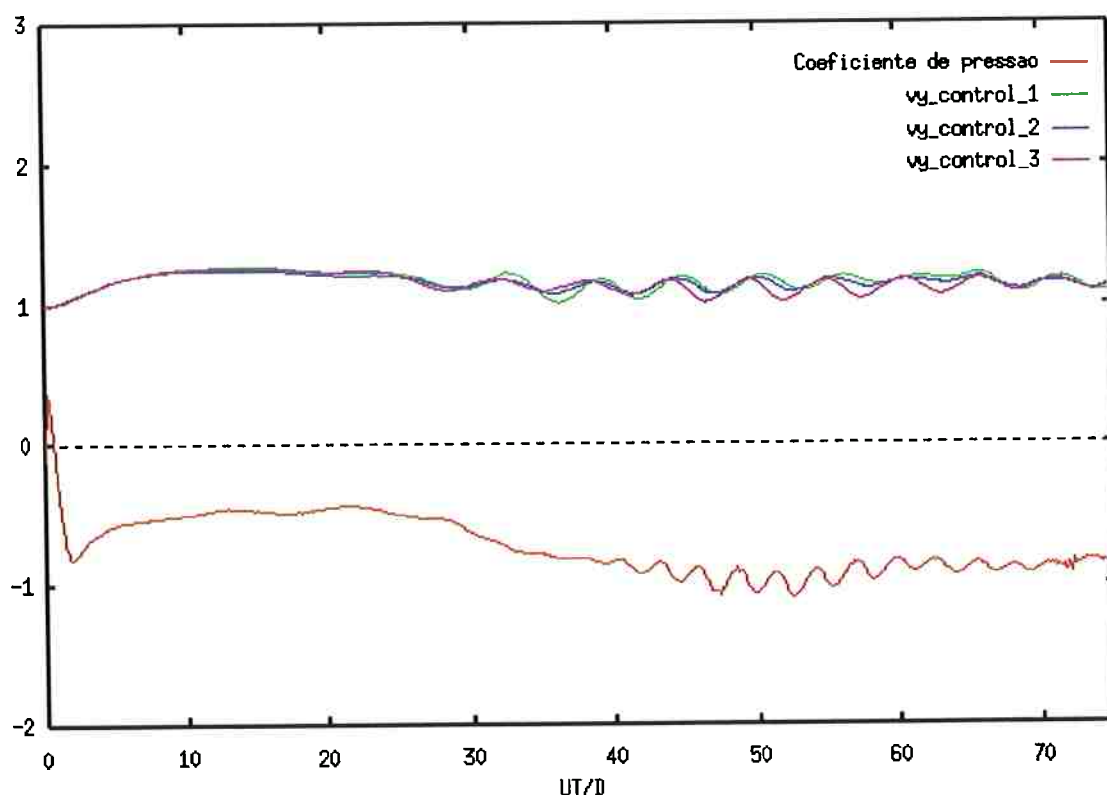


Fig. 5.50. Coeficiente de pressão C_{pb} e velocidades dos pontos de monitoramento para um cilindro de $6.28D$ de comprimento e $Re=250$.

Nota-se da análise da figura 5.50 que, contrariamente ao que foi observado para a simulação do escoamento para $Re=200$, ocorrem diferenças de magnitude e fase entre os três pontos de monitoramento control_1, control_2 e control_3. Dessa forma, três diferentes valores do número de Strouhal puderam ser avaliados de acordo com o ponto considerado: $S1 = 0.180$, $S2 = 0.180$, $S3 = 0.190$, respectivamente calculados em

control_1, control_2 e control_3. Para efeitos de comparação com resultados experimentais, será considerado o maior valor da frequência obtida.

A tabela 5.7 dada a seguir fornece uma comparação entre os resultados obtidos para número de Reynolds 250 e valores experimentais dados por WILLIAMSON AND ROSHKO(1990) e NORBERG(1994) apud BARKLEY AND HENDERSON(1996).

	S (Número de Strouhal)	$-C_{pb}$ (Coeficiente de Pressão)
Resultados Obtidos		
Re = 250 FSM 3D	0.190	0.890
Experimentos:		
Williamson and Roshko(1990)	0.20	1.05
Norberg (1994)		0.975

**Tabela 5.7. Comparação de resultados para número de Strouhal S e C_{pb} ($Re=250$).
Comprimento do cilindro = 6.28D.**

Analisando-se os resultados fornecidos na tabela 5.7 nota-se que há uma diferença de 5% entre os resultados numéricos aqui obtidos para o número de Strouhal com os resultados experimentais. Já para o coeficiente de pressão as diferenças são maiores: da ordem 15% quando os resultados são comparados àqueles obtidos por WILLIAMSON E ROSHKO(1990) e de 8.7% quando comparados aos resultados de NORBERG(1994). Observa-se que houve um aumento do número de Strouhal e aumento do coeficiente de pressão (em módulo) em relação aos valores obtidos para $Re=200$ e comprimento 6.28D (de $S=0.180$ para $S=0.190$ e $C_{pb} = -0.830$ para $C_{pb}=-0.890$ respectivamente). A obtenção de um número de Strouhal um pouco menor que o esperado assim como uma maior diferença entre os valores experimentais e numéricos

para o coeficiente de pressão indica a intensificação da ocorrência de difusão numérica nas simulações para a presente malha computacional (6.28D).

Novamente, para uma melhor compreensão da formação da esteira que caracteriza o modo B de emissão de vórtices, será mostrada a seguir uma figura que contém o valor da vorticidade w_x em 8 quadros de um ciclo completo de emissão de vórtices, numerados de Q1 a Q8 e plotados a partir do instante $UT/D = 62.50$. A partir da frequência de emissão de vórtices obtida, foram plotados os quadros Q1 a Q8 com os seguintes valores do tempo adimensional: 62.50, 63.16, 63.82, 64.48, 65.14, 65.80, 66.46 e 67.12. Os quadros Q1 a Q4 representam a primeira metade do ciclo de emissão de vórtices, iniciado quando o valor do coeficiente de pressão possuía o maior valor em módulo.

A análise da figura 5.51 mostra que o desenvolvimento da esteira se encontra em total concordância com o padrão observado por WILLIAMSON(1992) conforme foi visto na figura 5.23 b). Na primeira metade do ciclo (quadros Q1 a Q4) ocorre o desenvolvimento de uma superfície de vorticidade preponderante com circulação no sentido horário (cor azul). O último quadro da primeira metade do ciclo (Q4) mostra a formação de estruturas vorticais de 1D de comprimento, circulação no sentido anti-horário (cor vermelha). Nos quadros subsequentes (quadros Q5 a Q8), nota-se que ocorre uma correspondência os quadros do primeira e segunda metade do ciclo de emissão de vórtices como ocorreu para $Re=200$. A natureza da circulação das superfícies alterna-se de forma não periódica, característico do modo B segundo observado por WILLIAMSON(1992). Observa-se agora que também no quadro Q8 ocorre o surgimento de células com comprimento na direção do eixo do cilindro igual a aproximadamente 1

diâmetro. Novamente, à medida que se caminha à jusante do escoamento as células computacionais vão se tornando maiores e a intensidade da circulação dos vórtices diminui.

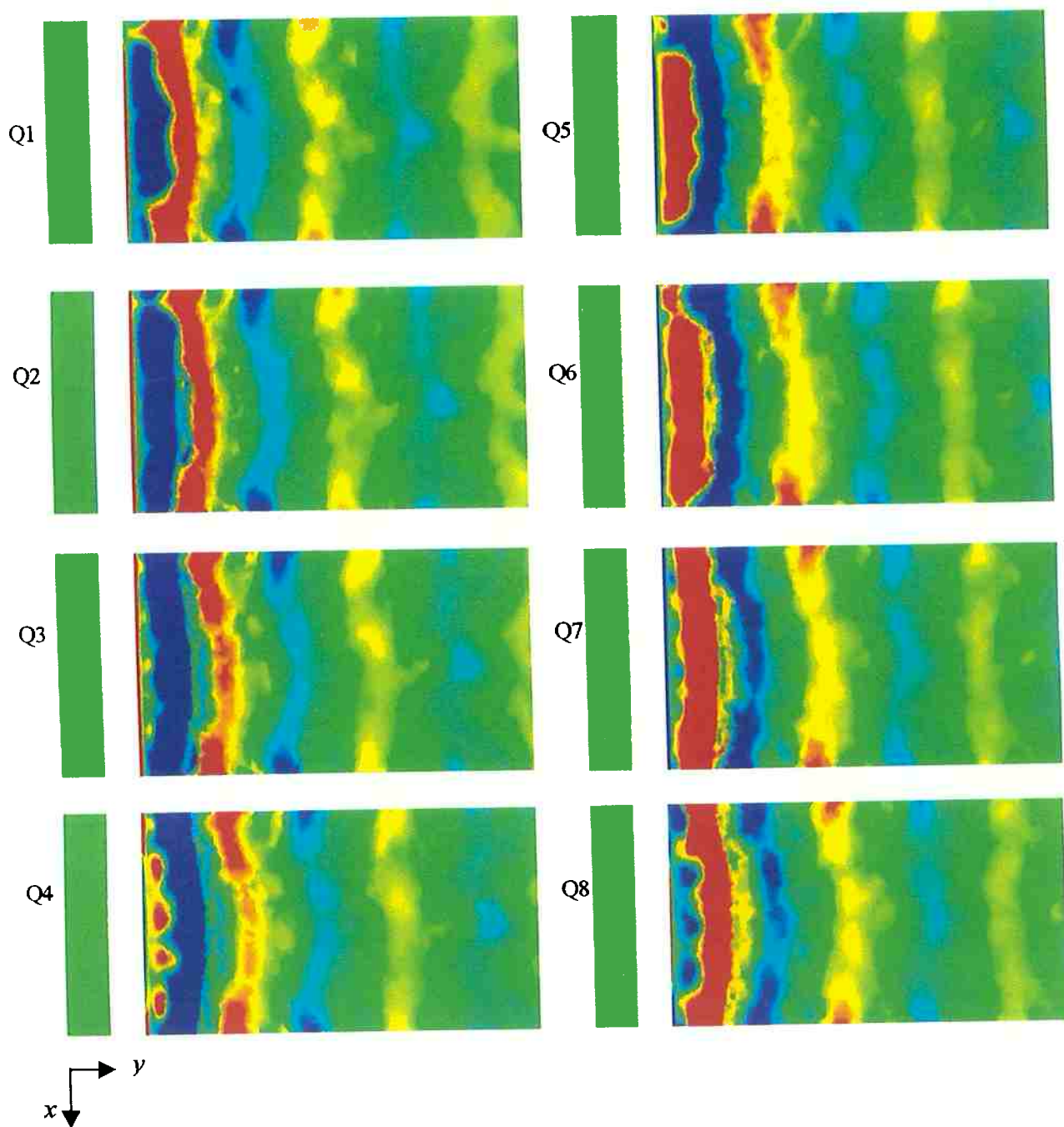


Fig. 5.51. Ciclo completo de emissão de vórtices para um cilindro de $6.28D$ de comprimento e $Re=250$. Quadros plotados a partir de $UT/D=62.50$.

5.5. COMENTÁRIOS FINAIS SOBRE A ETAPA DE VALIDAÇÃO DO SIMULADOR NUMÉRICO APLICADO A PROBLEMAS TRIDIMENSIONAIS

Esta seção tem por objetivo apresentar alguns comentários a respeito da etapa de validação do simulador numérico aplicado a problemas tridimensionais. Dessa forma, é mostrado um levantamento final dos resultados obtidos em termos do número de Strouhal e coeficiente de pressão parametrizados em função do comprimento do cilindro, os quais são comparados aos resultados experimentais de WILLIAMSON AND ROSHKO(1990) e NORBERG(1994) apud BARKLEY AND HENDERSON(1996).

O tempo computacional gasto para as simulações tridimensionais é um tema extremamente importante e também é analisado nesta seção. Através da apresentação de um gráfico de performance, o qual mostra o desempenho das três diferentes plataformas utilizadas para as simulações em função da malha computacional empregada, notar-se-á o grande custo computacional envolvido neste trabalho, já previsto por SALTARA(1999) em sua pesquisa.

De uma forma geral, os resultados obtidos nas seções anteriores no tocante às simulações tridimensionais encontraram respaldo nas observações e medições realizadas por WILLIAMSON AND ROSHKO(1990) e NORBERG(1994). Nota-se que os coeficientes medidos (coeficiente de pressão e número de Strouhal) variam em função do comprimento do cilindro quando se considera uma simulação tipicamente tridimensional, sendo que os valores numéricos das simulações bidimensionais para $Re=200$ somente são válidos quando se compara os mesmos aos resultados experimentais na condição de emissão de vórtices paralela ("parallel shedding").

A figura 5.52 dada a seguir mostra a influência do comprimento do cilindro no número de Strouhal obtido nas seções anteriores para os diferentes números de Reynolds das simulações tridimensionais, a saber: $Re=100$, $Re=200$ e $Re = 250$. De maneira análoga, a figura 5.53 mostra a influência do comprimento do cilindro no coeficiente de pressão obtido nas seções anteriores para estes números de Reynolds (Re).

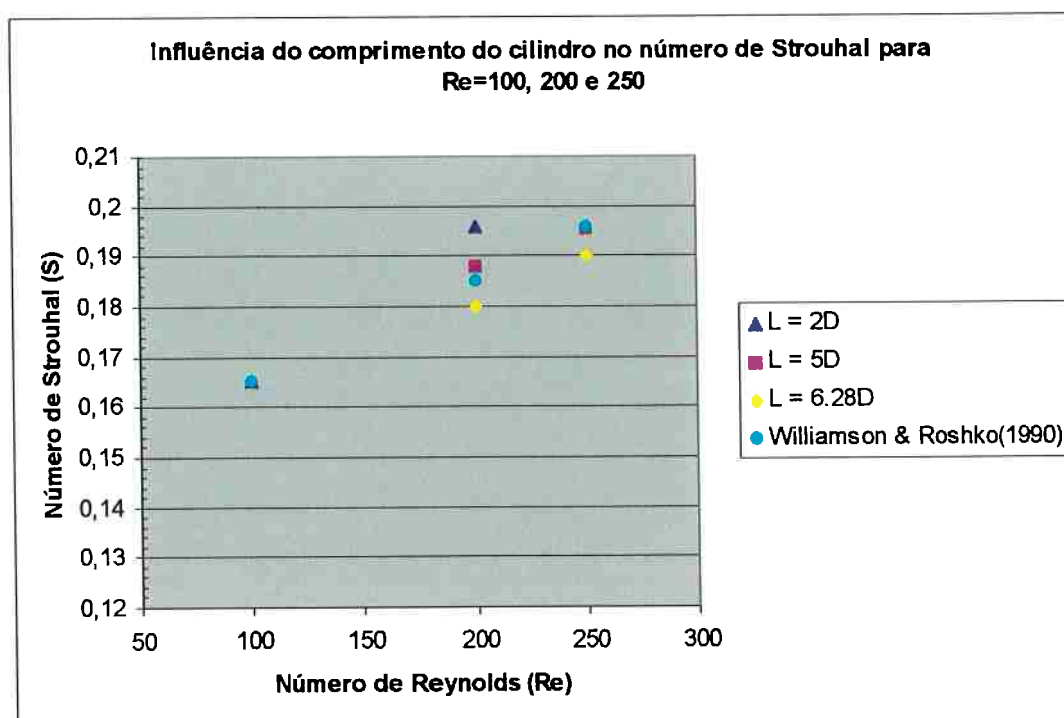


Fig. 5.52. Influência do comprimento do cilindro no número de Strouhal para as simulações tridimensionais.

Da análise da figura 5.52 nota-se, para $Re=200$, que ao se aumentar o comprimento do cilindro de 2D para 5D o número de Strouhal se aproxima melhor do valor experimental obtido por WILLIAMSON & ROSHKO(1990). Ao se passar para $L=6.28D$ ocorreu novamente um decréscimo do número de Strouhal, mas um pouco mais distante do valor encontrado para a simulação com o cilindro de 5D de comprimento. Para $Re=250$, a concordância entre os resultados obtidos das simulações

para os cilindros de comprimento 5D e 6.28D é boa, em especial para o cilindro de comprimento 5D. Vale ressaltar, conforme salientado nas seções anteriores para $Re=250$, que os valores do número de Strouhal escolhidos foram aqueles de maior valor dentre os observados nos pontos de monitoramento control_1, control_2 e control_3.

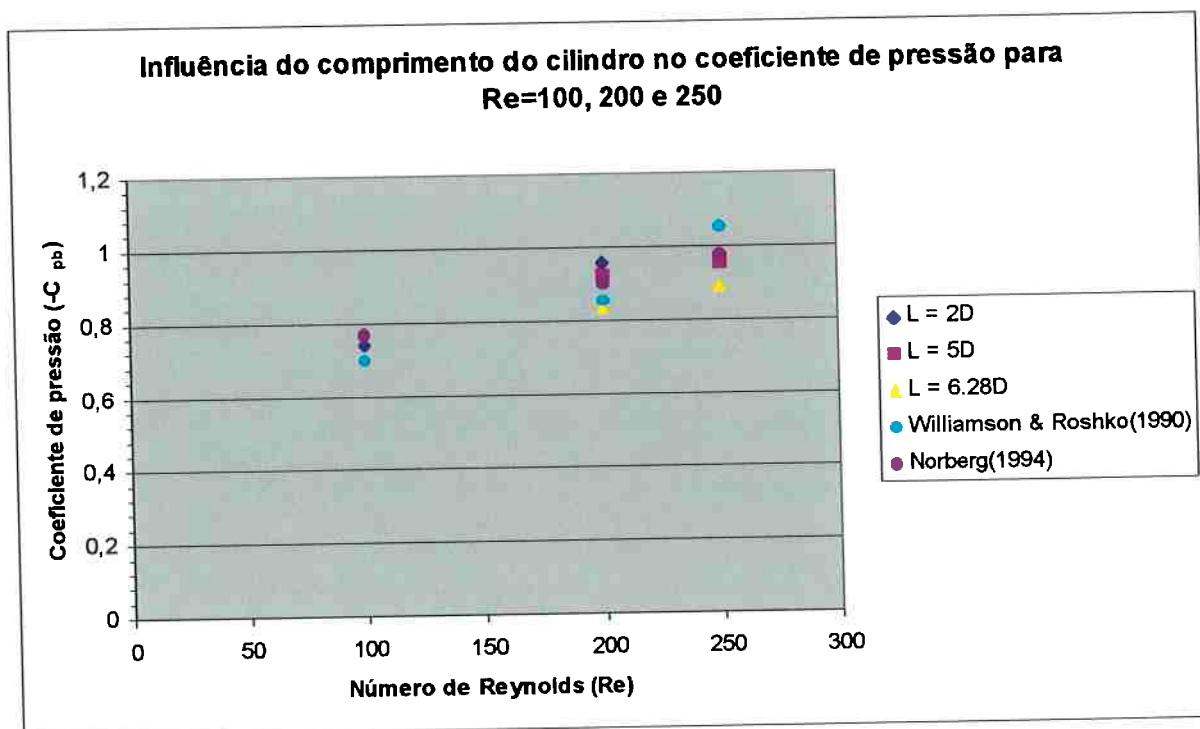


Fig. 5.53. Influência do comprimento do cilindro no coeficiente de pressão para as simulações tridimensionais.

Em se tratando do coeficiente de pressão, nota-se da análise da figura acima a boa concordância entre os resultados numéricos e experimentais para o cilindro de comprimento 5D. De uma forma geral, os resultados para um cilindro de comprimento 5D estão mais próximos daqueles obtidos por NORBERG(1994). Para $Re=200$ os resultados para o cilindro de comprimento 6.28D encontram-se mais próximos dos resultados obtidos por WILLIAMSON & ROSHKO(1990). Observou-se para $L=6.28D$ e

$Re=250$ a intensificação da difusão numérica, especialmente ao se analisar os contornos de vorticidade, acompanhada da diferença notada no número de Strouhal.

Será mostrado a seguir um gráfico de performance para a análise do tempo computacional total gasto para as simulações. A análise compreenderá o tempo real de CPU ("Central Processing Unit") necessário para a simulação de um tempo adimensional total $UT/D=80$ considerando as malhas computacionais para o cilindro de comprimento 2D, 5D e 6.28D com o emprego de três plataformas (duas estações de trabalho e um microcomputador) dedicadas às simulações tridimensionais. Inicialmente deve-se mostrar os requisitos mínimos de memória exigidos em RAM ("Read Access Memory") para cada malha computacional em função da sua densidade nodal. Estes valores podem ser vistos na tabela 5.8 dada a seguir em Megabytes (MB). As características básicas dos equipamentos disponíveis que atendem a estes requisitos são descritas na tabela 5.9.

Malha Computacional	Memória mínima requerida RAM (MB)
2D (713.632 elementos, 131.539 nós)	264
5D (1.266.299 elementos, 230.329 nós)	334
6.28D (1.538.109 elementos, 278.602 nós)	483

Tabela 5.8. Requisitos mínimos de memória para as simulações tridimensionais.

Equipamento	Características	Sistema Operacional
Alpha Server DS20 Dual Processor	2 processadores (2x500 Mhz) 1GB* memória RAM	UNIX
Dec AlphaStation 600 5/266	1 processador 266 Mhz 500 MB RAM	UNIX
Microcomputador Pentium II	1 processador 350 Mhz 384 MB RAM	LINUX
*1GB = 1000 MB		

Tabela 5.9. Características básicas dos equipamentos utilizados nas simulações tridimensionais.

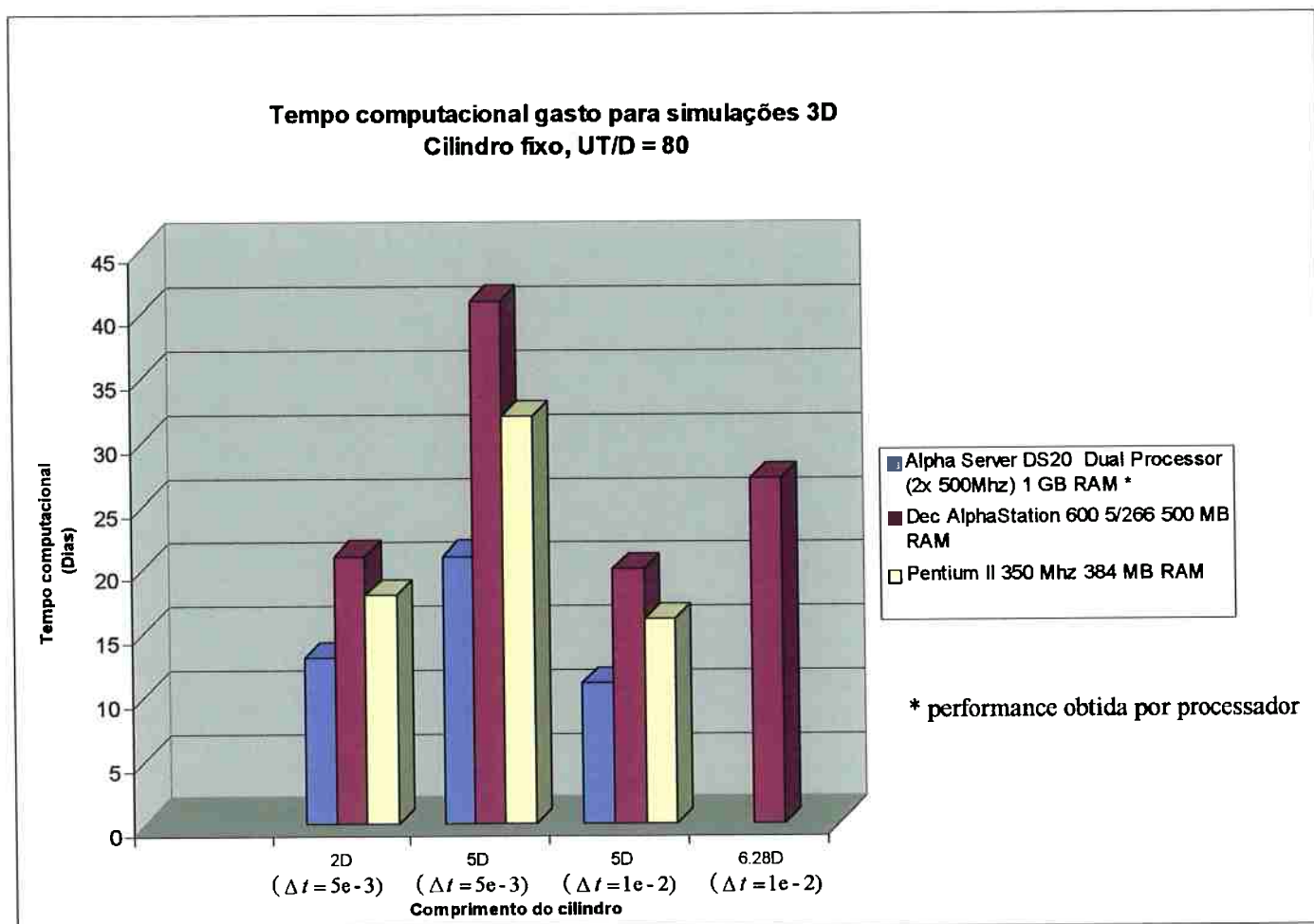


Fig. 5.54. Tempo computacional necessário para as simulações tridimensionais em função do comprimento do cilindro.

Alguns esclarecimentos devem ser feitos em relação às informações dadas nas tabelas 5.8 e 5.9. Apesar da estação de trabalho Alpha Server DS20 possuir, em tese, memória suficiente para executar dois casos utilizando a malha para $L=6.28D$, requisitos mínimos de memória para o sistema operacional impedem que isto seja possível. De maneira análoga, um caso com $L=5D$ e outro caso com $L=6.28D$ na estação de trabalho mencionada não podem ser realizados simultaneamente. Dessa forma, dois casos simultâneos com $L=5D$ foram executados de maneira sistemática e simultânea durante a fase de obtenção de resultados.

A possibilidade de utilizar os dois processadores desta plataforma para um único caso (o que reduziria o tempo computacional à metade) somente seria possível caso o código computacional desenvolvido neste projeto de pesquisa fosse *paralelizado* (em outras palavras, permitir que a arquitetura do programa pudesse compartilhar a performance dos dois processadores de maneira integral em um único caso). Entretanto, tal mudança está fora do escopo do atual trabalho e constituirá certamente tópicos de futuras pesquisas. Vale ressaltar que este enfoque é uma tendência mundial, na medida que novas estações de trabalho são desenvolvidas com mais de uma dezena de processadores e exigem que o programa seja paralelizado a fim de que se possa utilizar o potencial total da máquina de uma só vez. Já a estação de trabalho Dec AlphaStation 600 (que possui somente um processador) pôde executar os casos com a malha para o cilindro de 6.28D, uma vez que os requisitos mínimos de memória para o sistema operacional foram cumpridos e a capacidade de utilização é total.

Da análise da figura 5.54 nota-se o grande custo envolvido nas simulações computacionais. Para se ter uma base de comparação, em uma simulação bidimensional típica usando-se o FSM, são necessárias aproximadamente 3 horas na Alpha Server DS20 para obter-se um tempo adimensional total (UT/D) igual a 100. Em contrapartida, o FSM para problemas tridimensionais necessita de 10 dias para simular o escoamento ao redor de um cilindro de comprimento 5D nas observações mais otimistas. Em tempo: para uma dada malha, os tempos computacionais apresentados não apresentam diferenças considerando mudanças no número de Reynolds dentro da faixa aqui estudada ($Re \leq 250$). Será mostrado a seguir um estudo sobre o movimento oscilatório forçado do cilindro para problemas tridimensionais, etapa final deste projeto de pesquisa.

6. RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES DO MOVIMENTO OSCILATÓRIO FORÇADO EM UM CILINDRO DE 5D DE COMPRIMENTO E $RE=250$

Após a etapa de validação do simulador aplicado a problemas tridimensionais, será apresentado nesta seção um estudo sobre o movimento oscilatório forçado do cilindro. A análise deste tipo de escoamento é, seguramente, um dos casos mais importantes que ocorrem nas interações fluido-estrutura.

De uma forma geral, segundo pode ser visto em MENEGHINI(1993), o escoamento ao redor de um cilindro forçado a oscilar transversalmente em relação à corrente livre é cinematicamente equivalente ao escoamento ao redor de um cilindro fixo com um escoamento oscilatório superposto ao mesmo. A invariância do campo de vorticidade sob aceleração linear é o que torna estes escoamentos cinematicamente equivalentes.

O escoamento ao redor de um cilindro que oscila na direção transversal à corrente livre é simulado considerando um sistema de referência fixo ao cilindro com um escoamento oscilatório superposto ao mesmo. As oscilações transversais consideradas nas simulações são senoidais com frequência de oscilação f e amplitude A . A velocidade W_{osc} do escoamento oscilatório superposto na direção z é dada através de:

$$W_{osc} = W_a \text{ sen } 2\pi f t \quad (6.1)$$

onde W_a é a amplitude do escoamento oscilatório. Considerando a equação 6.1, a posição oscilatória do cilindro na direção transversal (Z_b) é dada através de

$$Z_b = \frac{W_a}{2\pi f} \cos 2\pi f t \quad (6.2)$$

A partir desta expressão, pode-se calcular:

$$\frac{dZ_b}{dt} = -W_a \sin 2\pi f t \quad (6.3)$$

$$\frac{d^2Z_b}{dt^2} = -2\pi f W_a \cos 2\pi f t \quad (6.4)$$

A expressão (6.3) mostra que $dZ_b / dt = -W_{osc}$, devido ao movimento relativo entre o corpo e o escoamento superposto. A amplitude do movimento oscilatório A está relacionada com a amplitude do escoamento oscilatório através da expressão

$$\frac{A}{D} = \frac{W_a}{2\pi f D} \quad (6.5)$$

onde A/D é a amplitude adimensional da oscilação.

Em face do que foi exposto, pode-se agora descrever os objetivos e as condições escolhidas para a análise do movimento oscilatório forçado do cilindro. Primeiramente, buscou-se analisar o movimento oscilatório forçado do cilindro através da simulação de quatro casos, impondo-se uma pequena amplitude de oscilação e quatro valores da relação entre a frequência de oscilação f e a frequência de emissão de vórtices f_v .

Dessa forma, procurou-se delimitar uma região de sincronização para pequenas amplitudes de oscilação, estudar a influência do movimento forçado no número de

Strouhal e coeficiente de pressão. Objetivou-se ainda observar como o padrão de emissão de vórtices é alterado após o surgimento da perturbação através da análise de dois ciclos completos.

Em função da qualidade dos resultados apresentados nas seções anteriores, decidiu-se desenvolver o estudo do movimento oscilatório para o cilindro de comprimento $5D$ e $Re=250$. A qualidade dos resultados obtidos para o cilindro fixo em termos de coeficiente de pressão e número de Strouhal, aliada ao tempo computacional necessário para as simulações e à estrutura de emissão de vórtices (modo B), foram fatores determinantes para a escolha deste cenário. Em relação ao último item, acredita-se que as estruturas vorticiais que caracterizam este modo tendam a desaparecer ou diminuir de intensidade após a imposição do movimento oscilatório, uma vez que o escoamento deve tornar-se paralelo e mais próximo de uma simulação bidimensional. De maneira análoga, espera-se que o valor médio do coeficiente de pressão aumente após a perturbação, alcançando valores típicos de uma simulação bidimensional para este número de Reynolds.

Vale lembrar, entretanto, que uma análise semelhante poderia ser feita para o modo A de emissão de vórtices onde os efeitos resultantes da perturbação seriam parecidos em termos da "bidimensionalização" do escoamento descrita anteriormente. Por outro lado, a não periodicidade do modo B incentivou a escolha final.

Os 4 casos analisados foram:

1) $A/D = 0.25$ e $\frac{f}{f_v} = 0.80$;

$$2) A/D = 0.25 \text{ e } \frac{f}{f_v} = 0.90;$$

$$3) A/D = 0.25 \text{ e } \frac{f}{f_v} = 0.975;$$

$$4) A/D = 0.25 \text{ e } \frac{f}{f_v} = 1.05.$$

Seguindo MENEGHINI(1993), os valores escolhidos correspondem à região de sincronização primária ("primary lock-in"). Este tipo de sincronização ocorre próximo à frequência de emissão de vórtices de tal forma que dois vórtices de circulação oposta são desprendidos caracterizando uma esteira clássica de Von Kármán.

A seguir são apresentados os resultados das simulações computacionais. Para todos os quatro casos um tempo adimensional total $UT/D = 100$ foi utilizado, o qual correspondeu a 20.000 iterações com um intervalo de tempo igual a $1e-2$. O instante do início do movimento oscilatório ocorreu para $UT/D = 75$, pois neste instante o escoamento estava plenamente desenvolvido bem como as estruturas vorticais próprias do modo B de emissão de vórtices.

De maneira similar ao que foi apresentado nos casos do cilindro fixo, gráficos do coeficiente de pressão em função do tempo adimensional UT/D são fornecidos, assim como as velocidades dos pontos de monitoramento control_1, control_2 e control_3 na direção do escoamento. São fornecidas ainda nestes gráficos a curva do deslocamento do cilindro Z_b e a velocidade do escoamento W_{osc} também em função do tempo adimensional. Tais gráficos podem ser vistos nas figuras 6.1, 6.2, 6.3 e 6.4.

Para uma melhor compreensão da formação da estrutura da esteira, serão mostradas figuras que contêm o valor da vorticidade w_x em 16 quadros para os dois primeiros ciclos de emissão de vórtices, numerados de Q1 a Q16 a partir do instante $UT/D = 75$ (figuras 6.6, 6.7, 6.8 e 6.9). A partir da frequência de emissão de vórtices obtida do cilindro fixo e da relação f/f_v , foram plotados os quadros sendo que Q1 a Q8 representam o primeiro ciclo de emissão de vórtices e Q9 a Q16 o segundo ciclo. O quadro Q0 representa o instante em que é aplicada a perturbação ($UT/D=75$). Em função da melhor qualidade da malha computacional próxima ao cilindro e em especial no plano diametral situado na cota $z = 0.0$, tais quadros foram plotados na mesma posição em relação àqueles obtidos para a análise do cilindro fixo, ou seja, a estrutura da esteira é vista em um referencial inercial (fixo ao cilindro) em um plano $x-y$ situado em $z = 0.0$.

Para todos os 4 casos, no início da perturbação ($UT/D = 75$) o cilindro encontrava-se na sua posição máxima ($Z_b = 0.50$) com velocidade mínima ($W_{osc} = 0.0$). Esta condição inicial é essencial pois um alto valor de velocidade no instante da perturbação acarretaria uma situação indesejável, uma vez que o objetivo é observar a influência do escoamento oscilatório na tridimensionalidade do escoamento de maneira gradual. Um súbito deslocamento levaria a um movimento impulsivo do cilindro, assunto fora do escopo deste projeto de pesquisa.

Durante a apresentação dos resultados, é fornecida uma tabela com os valores médios do coeficiente de pressão e número de Strouhal antes e depois da perturbação, bem como a variação do valor do coeficiente de pressão e número de Strouhal obtido com o estudo do movimento oscilatório forçado para os quatro casos.

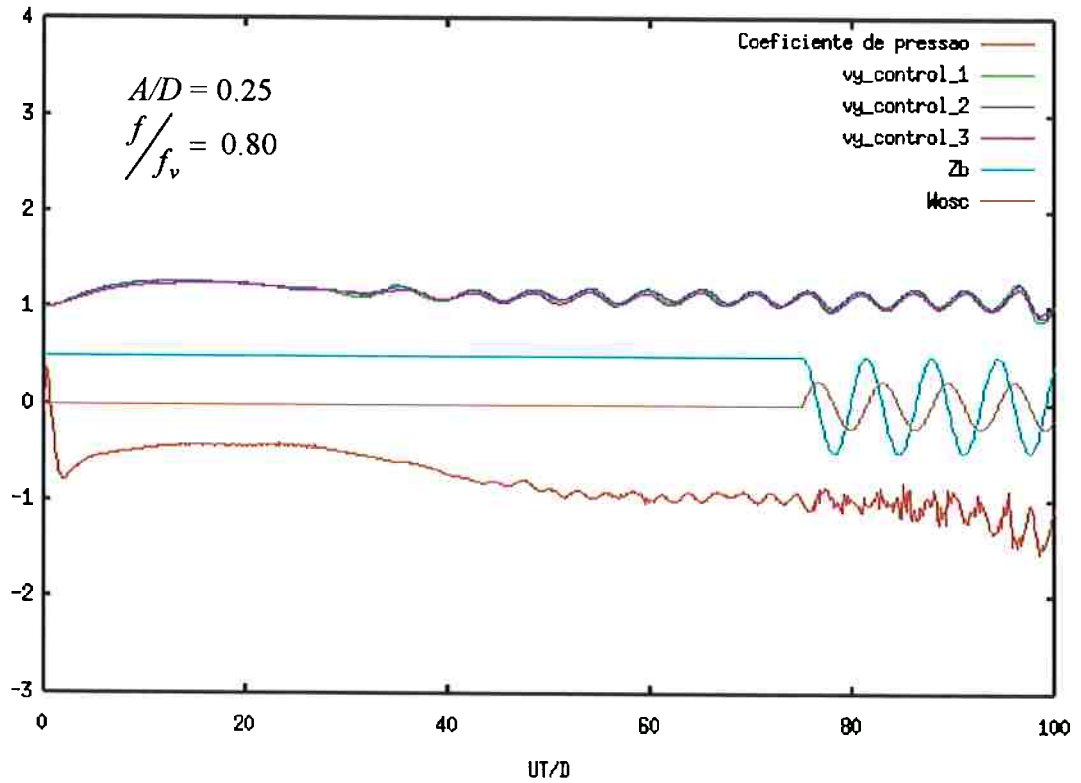


Fig. 6.1. Caso 1 ($f/f_v=0.80$): Coeficiente de pressão C_{pb} , velocidades dos pontos de monitoramento, deslocamento do cilindro e velocidade do escoamento oscilatório.

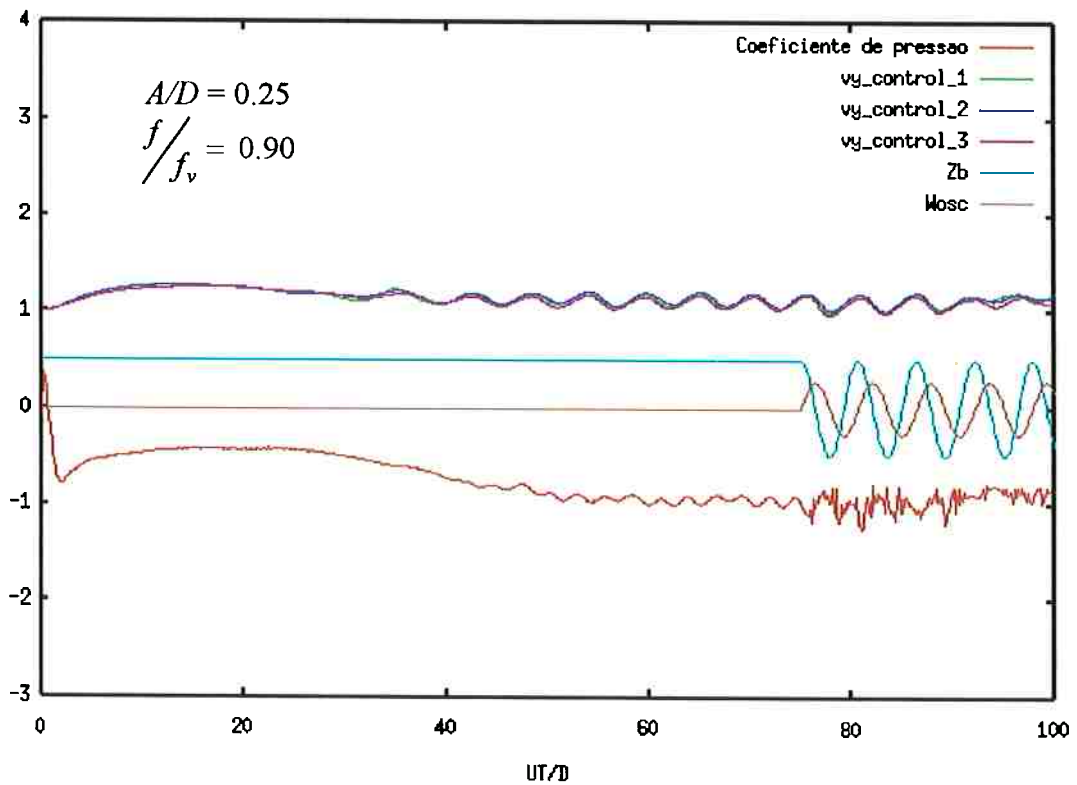


Fig. 6.2. Caso 2 ($f/f_v=0.90$): Coeficiente de pressão C_{pb} , velocidades dos pontos de monitoramento, deslocamento do cilindro e velocidade do escoamento oscilatório.

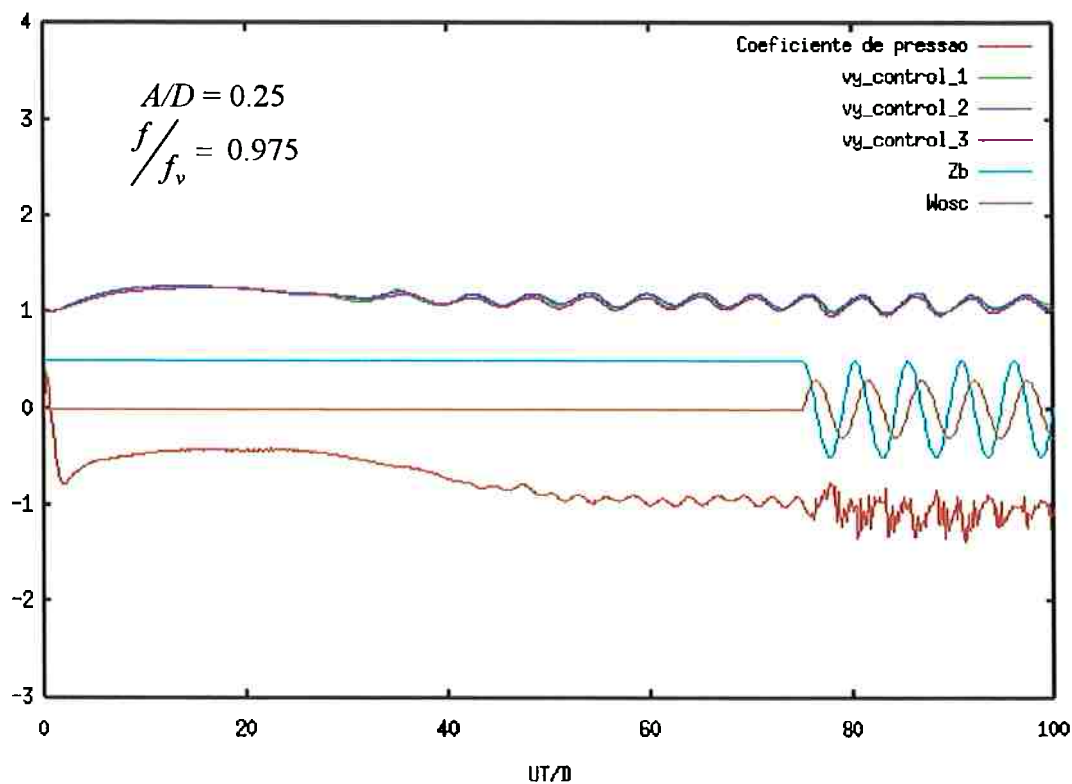


Fig. 6.3. Caso 3 ($f/f_v=0.975$): Coeficiente de pressão C_{pb} , velocidades dos pontos de monitoramento, deslocamento do cilindro e velocidade do escoamento oscilatório.

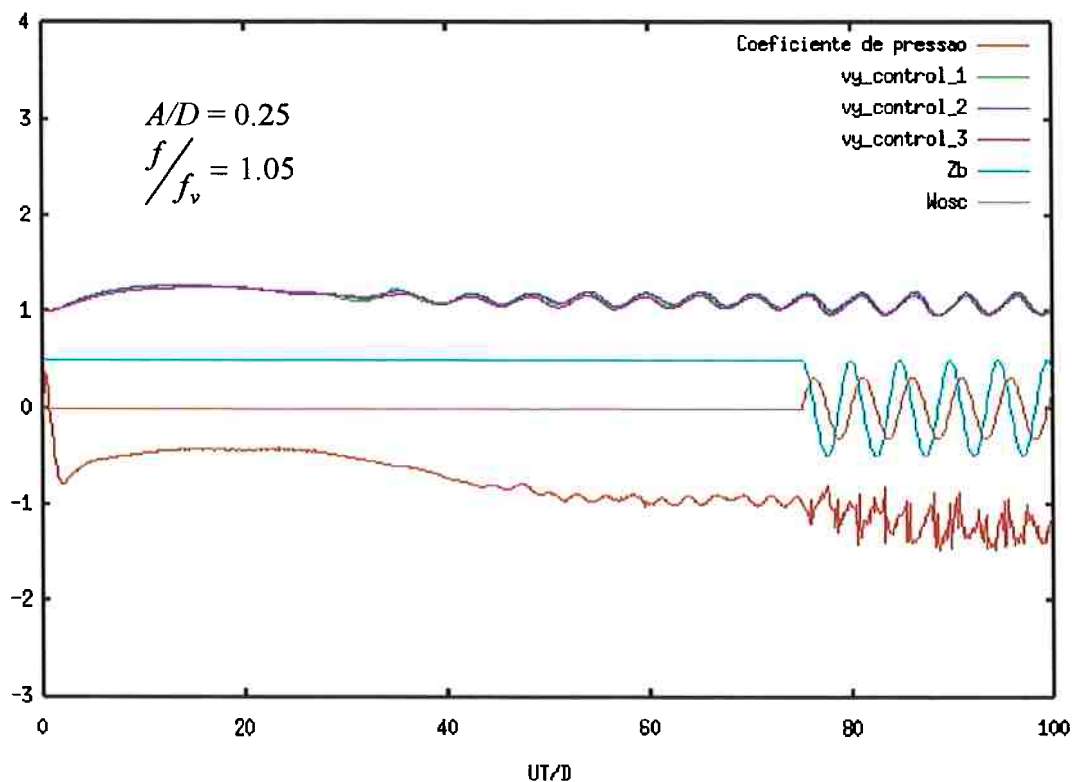


Fig. 6.4. Caso 4 ($f/f_v=1.05$): Coeficiente de pressão C_{pb} , velocidades dos pontos de monitoramento, deslocamento do cilindro e velocidade do escoamento oscilatório.

Inicialmente nota-se, a partir da análise dos gráficos anteriores, que a curva do coeficiente de pressão apresenta um "ruído" maior para os quatro casos quando comparada à curva do cilindro fixo. Acredita-se que o fato de o coeficiente de pressão estar por definição associado ao valor obtido para um único ponto do cilindro possa ter contribuído para a ocorrência deste tipo de comportamento, onde variações mais intensas no campo de pressão durante o movimento forçado refletem-se com maior intensidade na parede do corpo. Em especial, o coeficiente de pressão para o caso 2 pouco variou após a ocorrência da perturbação, sendo que o valor médio antes e após o movimento oscilatório é praticamente o mesmo. Para os demais casos (1, 3 e 4), observou-se um acréscimo no valor médio de tal coeficiente, levando a valores típicos da curva mostrada no capítulo 5 (fig. 5.16) para situações bidimensionais (curva sólida). Neste sentido, o caso 4 apresentou o maior acréscimo observado (em torno de 24%), seguido pelo caso 1 (14.8%) e caso 3 (11.5 %). A tabela 6.1 mostra o resumo destes resultados. Em se tratando dos pontos de monitoramento das velocidades, de uma forma geral ocorreu uma maior aderência entre os pontos control_1, control_2 e control_3 após o movimento oscilatório, o que levou a uma consolidação no número de Strouhal. Apenas no caso 2, o qual não apresentou variação relevante de C_{pb} , notou-se que próximo ao final da simulação houve uma mudança de magnitude e fase na curva de velocidades na direção do escoamento. De forma análoga, o caso 1 apresentou uma variação ainda maior próximo ao término da simulação em termos do coeficiente de pressão e velocidades de monitoramento. Esta constatação sugere que um tempo total maior de simulação deveria ser usado para estes casos, porém por questões estritamente ligadas ao tempo computacional esta análise será realizada em pesquisas futuras.

Casos ($Re=250$ e $L = 5D$)	$-C_{pb}$ (Coeficiente de pressão)	S (Número de Strouhal)	Variação* C_{pb} (%)	Variação* S (%)
Cilindro fixo	0.954	0.195		
$A/D=0.25$ $f/f_v = 0.80$	1.095	0.190	14.8	-2.6
$A/D=0.25$ $f/f_v = 0.90$	0.952	0.188	-0.2	-3.6
$A/D=0.25$ $f/f_v = 0.975$	1.064	0.187	11.5	-4.1
$A/D=0.25$ $f/f_v = 1.05$	1.184	0.188	24.1	-3.6

* variação percentual em relação ao resultados do cilindro fixo

Tabela 6.1. Valores médios do coeficiente de pressão e número de Strouhal após a ocorrência da oscilação forçada.

A figura 6.5 serve de referência para a análise do desenvolvimento da esteira para os casos simulados, onde uma descrição completa do tempo adimensional tomado em cada quadro em função da relação de frequências f e f_v , posição do cilindro e velocidade do escoamento oscilatório é fornecida na tabela 6.2.

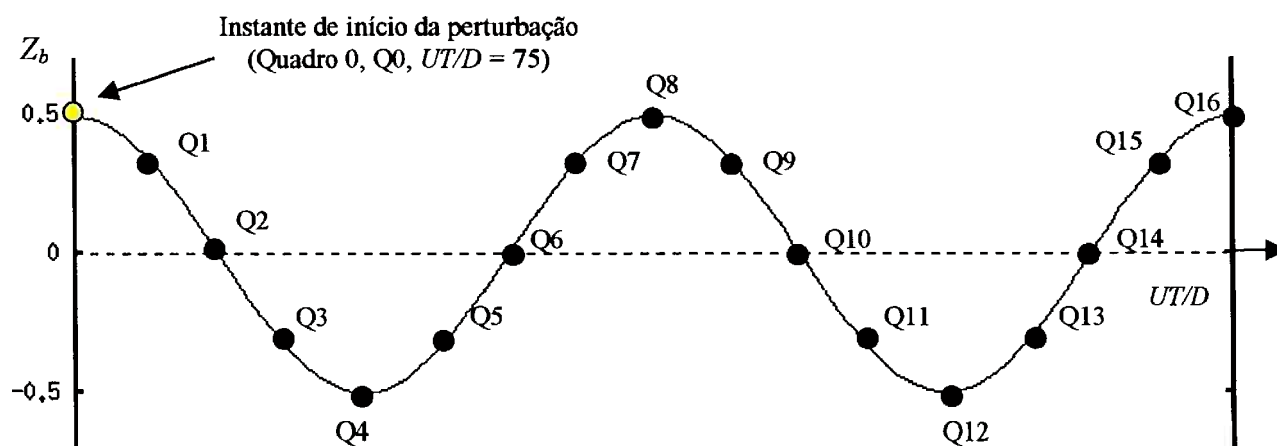


Fig. 6.5. Representação esquemática do deslocamento do cilindro e a posição dos 17 quadros escolhidos nos 4 casos para o estudo do movimento oscilatório forçado do cilindro.

Nota-se da tabela 6.1 que para os 4 casos ocorreu um decréscimo do valor do número de Strouhal quando comparado ao cilindro fixo. Para os casos 2 e 4 o número de Strouhal é o mesmo obtido para o caso do cilindro fixo com $L=5D$ e $Re=200$ (modo A de "vortex shedding"). A diferença é de apenas 0.5% e 1.0% para os casos 3 e 1 respectivamente.

Quadro (Q)	<i>Caso 1</i>			<i>Caso 2</i>			<i>Caso 3</i>			<i>Caso 4</i>		
	UT/D	Z_b	W_{osc}	UT/D	Z_b	W_{osc}	UT/D	Z_b	W_{osc}	UT/D	Z_b	W_{osc}
0	75.00	0.500	0.000	75.00	0.500	0.000	75.00	0.500	0.000	75.00	0.500	0.000
1	75.80	0.354	0.173	75.71	0.354	0.194	75.66	0.354	0.211	75.61	0.354	0.227
2	76.60	0.000	0.245	76.42	0.000	0.276	76.32	0.000	0.299	76.22	0.000	0.322
3	77.40	-0.352	0.174	77.13	-0.351	0.196	76.98	-0.350	0.213	76.83	-0.353	0.228
4	78.20	-0.500	0.000	77.84	-0.500	0.000	77.64	-0.500	0.000	77.44	-0.500	0.000
5	79.00	-0.356	-0.172	78.55	-0.358	-0.192	78.30	-0.359	-0.208	78.05	-0.355	-0.227
6	79.80	0.000	-0.245	79.26	0.000	-0.276	78.96	0.000	-0.299	78.66	0.000	-0.322
7	80.60	0.351	-0.175	79.97	0.347	-0.198	79.62	0.346	-0.215	79.27	0.352	-0.228
8	81.40	0.500	0.000	80.68	0.500	0.000	80.28	0.500	0.000	79.88	0.500	0.000
9	82.20	0.357	0.171	81.39	0.361	0.190	80.94	0.363	0.206	80.49	0.356	0.226
10	83.00	0.000	0.245	82.10	0.000	0.276	81.60	0.000	0.299	81.10	0.000	0.322
11	83.80	-0.349	0.175	82.81	-0.344	0.200	82.26	-0.342	0.218	81.71	-0.351	0.229
12	84.60	-0.500	0.000	83.52	-0.500	0.000	82.92	-0.500	0.000	82.32	-0.500	0.000
13	85.40	-0.359	-0.170	84.23	-0.365	-0.189	83.58	-0.367	-0.203	82.93	-0.356	-0.226
14	86.20	0.000	-0.245	84.94	0.000	-0.276	84.24	0.000	-0.298	83.54	0.000	-0.322
15	87.00	0.347	-0.177	85.65	0.340	-0.202	84.90	0.338	-0.220	84.15	0.350	-0.230
16	87.80	0.500	0.000	86.36	0.500	0.000	85.56	0.500	0.000	84.76	0.500	0.000

Tabela 6.2. Descrição dos quadros plotados para a observação do desenvolvimento da esteira após a ocorrência da oscilação forçada.

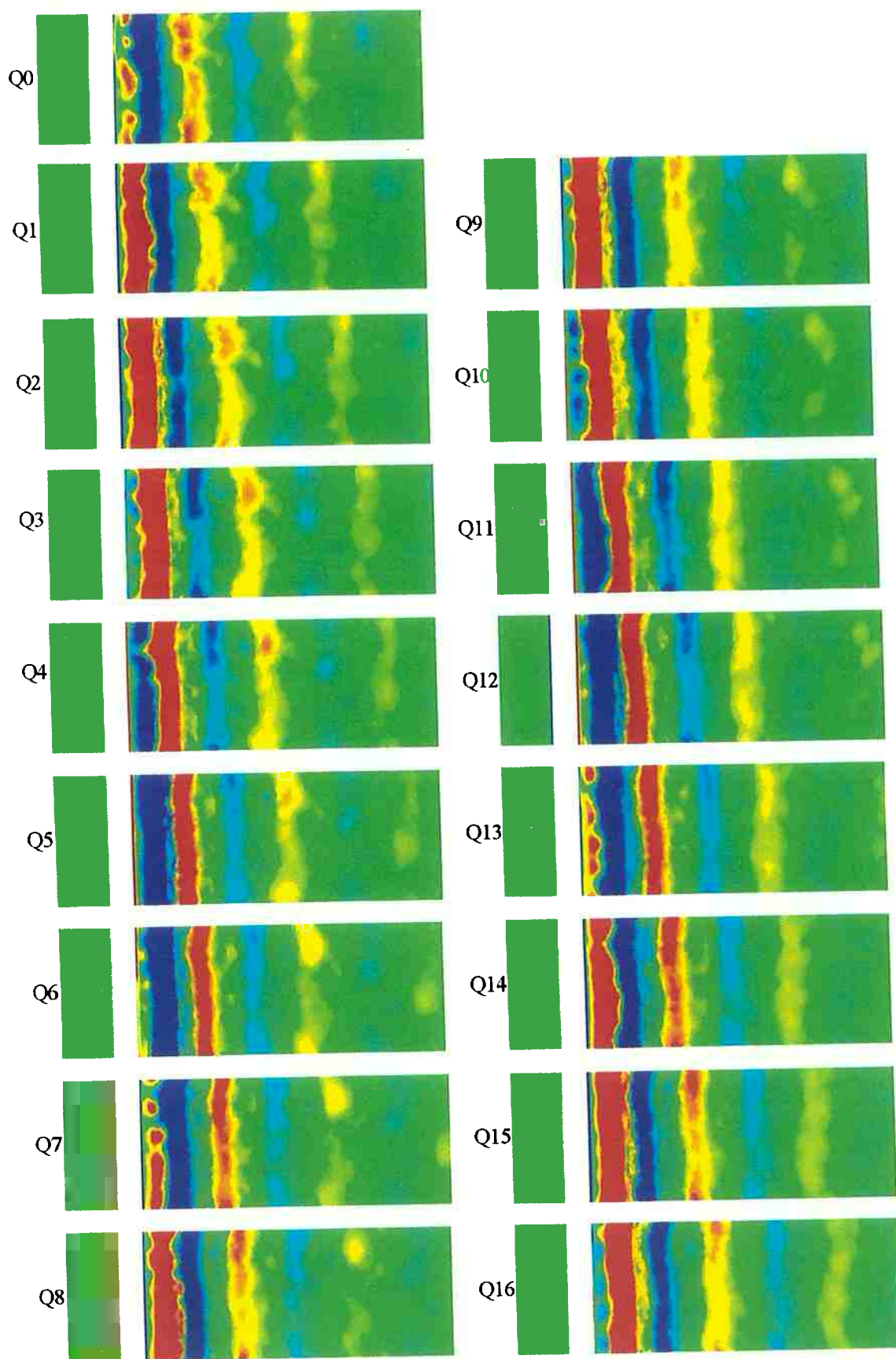


Fig. 6.6. Caso 1 ($f/f_v=0.80$). Desenvolvimento da esteira durante o movimento oscilatório forçado.

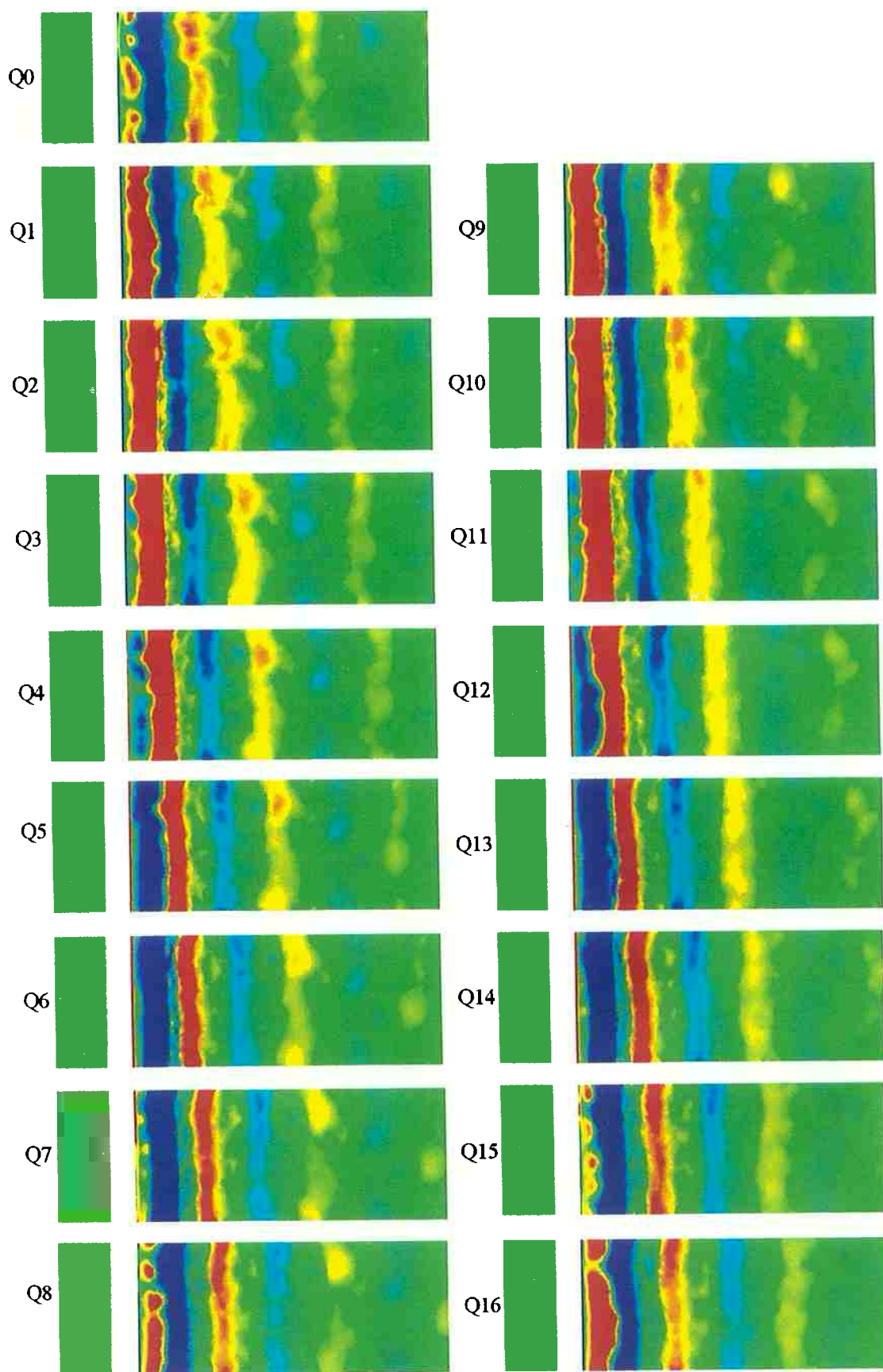


Fig. 6.7. Caso 2 ($f/f_c=0.90$). Desenvolvimento da esteira durante o movimento oscilatório forçado.

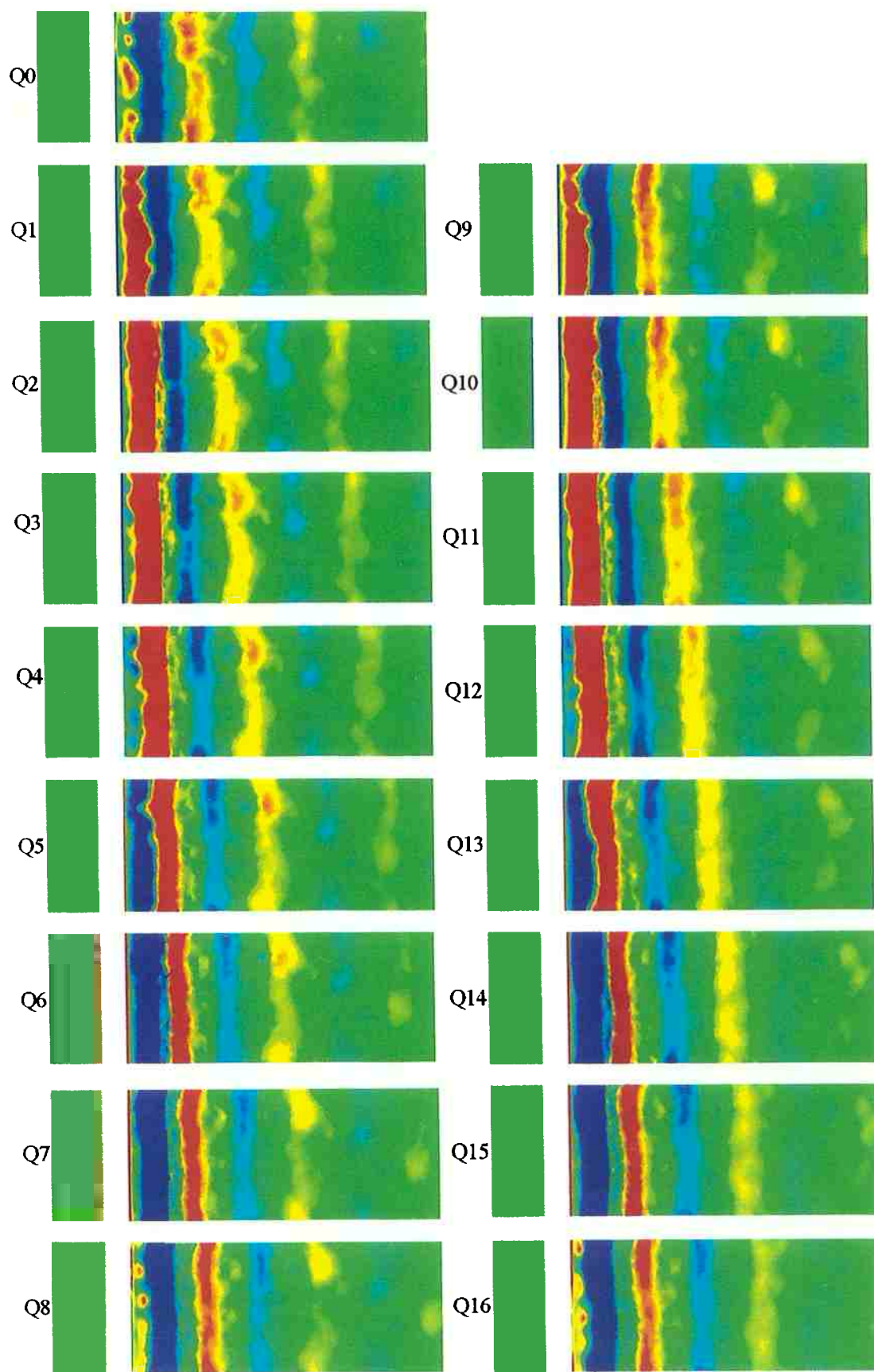


Fig. 6.8. Caso 3 ($f/f_v=0.975$). Desenvolvimento da esteira durante o movimento oscilatório forçado.

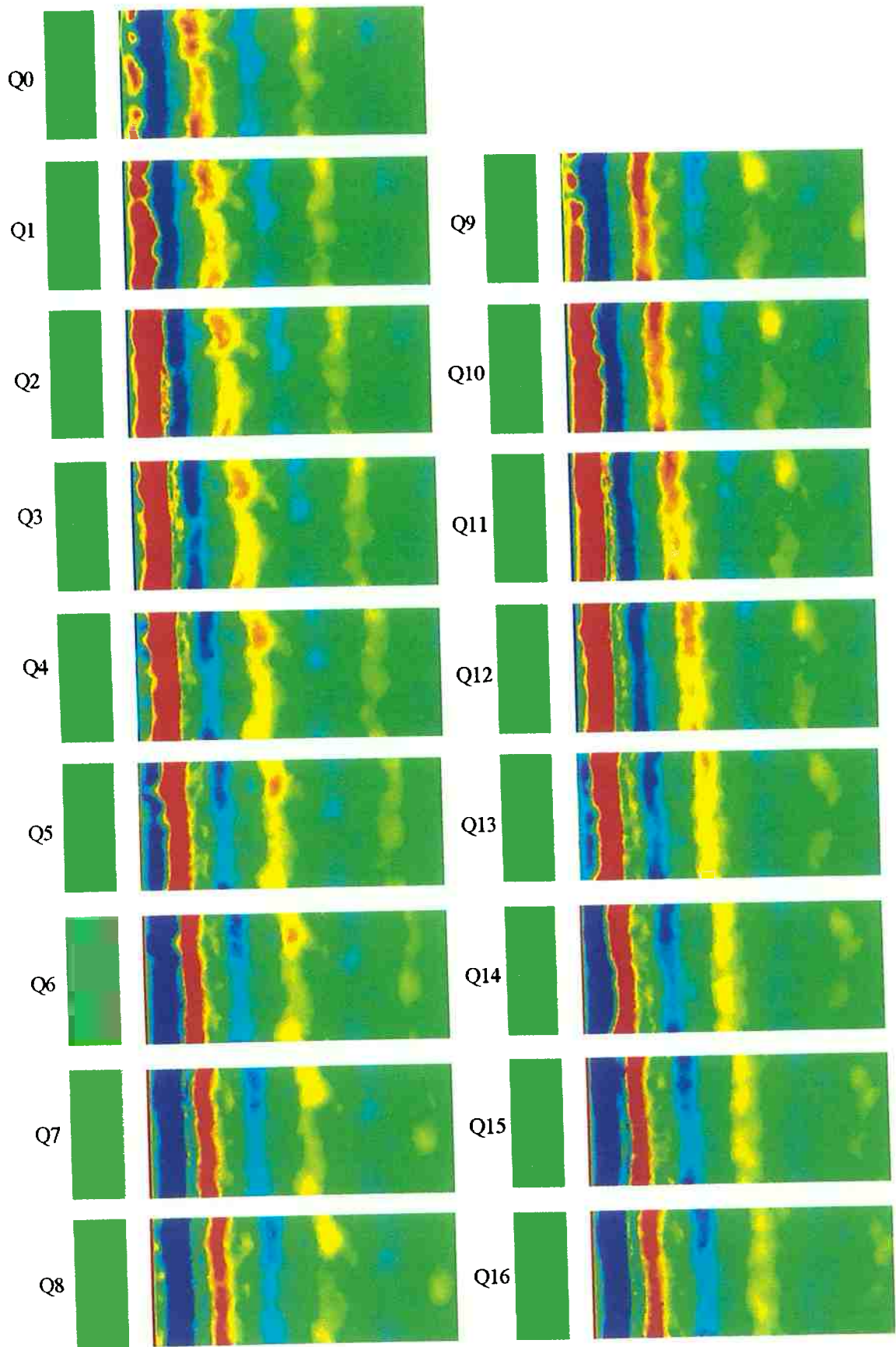


Fig. 6.9. Caso 4 ($f/f_v=1.05$). Desenvolvimento da esteira durante o movimento oscilatório forçado.

De uma forma geral, o desenvolvimento da esteira para os 4 casos simulados no estudo do movimento oscilatório do cilindro são equivalentes. Nota-se claramente que as superfícies de vorticidade, sejam elas de valor positivo (cor vermelha nas figuras) ou negativo (cor azul), comportam-se de maneira diferente em relação ao caso do cilindro fixo, cujo desenvolvimento foi apresentado na figura 5.37. Escolhendo-se ao acaso qualquer um dos 4 casos, percebe-se que as superfícies de vorticidade localizadas próximas ao cilindro em geral são paralelas na maior parte dos dois ciclos de emissão de vórtices. Este fato não ocorre para o cilindro fixo, onde as superfícies estão distorcidas e existe a formação de estruturas vorticais na direção do cilindro de 1 diâmetro de comprimento. Por exemplo, para o primeiro caso (figura 6.6), vê-se que já a partir do quadro Q1 ocorre uma paralelização da estrutura vortical de cor vermelha, intensificando-se no quadro Q3. Na primeira metade do primeiro ciclo, nota-se em Q4 a formação de uma estrutura muito parecida àquela encontrada no quadro Q1 da figura 5.37 (cilindro fixo). Entretanto, os quadros subsequentes Q5, Q6, Q7 e Q8 mostram que ocorre uma atenuação das instabilidades vorticais em comparação com aquelas mostradas para o caso do cilindro fixo. Durante o segundo ciclo após a ocorrência da perturbação, observa-se, de maneira análoga, o desenvolvimento das superfícies de vorticidade negativas e positivas em um padrão paralelo de emissão com surgimento de estruturas vorticais bem atenuadas se comparadas mais uma vez ao caso do cilindro fixo. Considerações similares podem ser feitas em relação aos casos 2, 3 e 4 (figuras 6.7, 6.8 e 6.9), sendo que para este último a paralelização é ainda mais acentuada, em especial nos quadros do final de cada ciclo (Q6, Q7, Q8 e Q14, Q15, Q16 respectivamente). As figuras dadas a seguir mostram as superfícies de vorticidade tridimensional para cada caso, de maneira similar ao que foi mostrado ao longo deste trabalho.

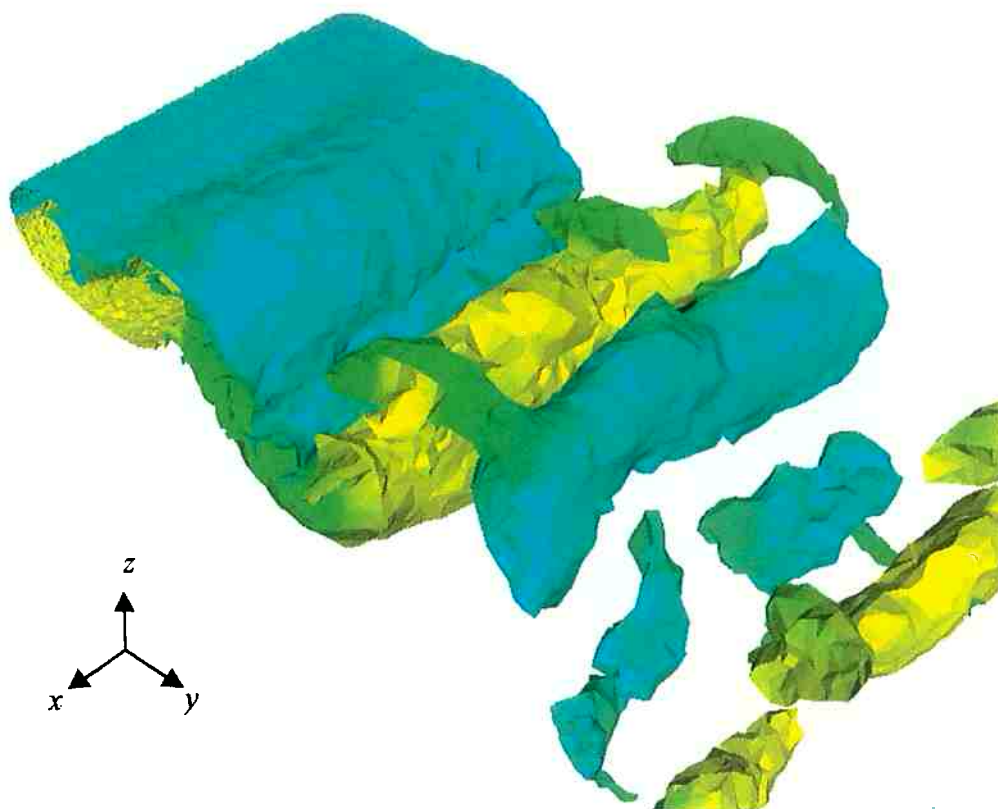


Fig. 6.10. Superfície de vorticidade. Caso 1 ($f/f_v=0.80$).

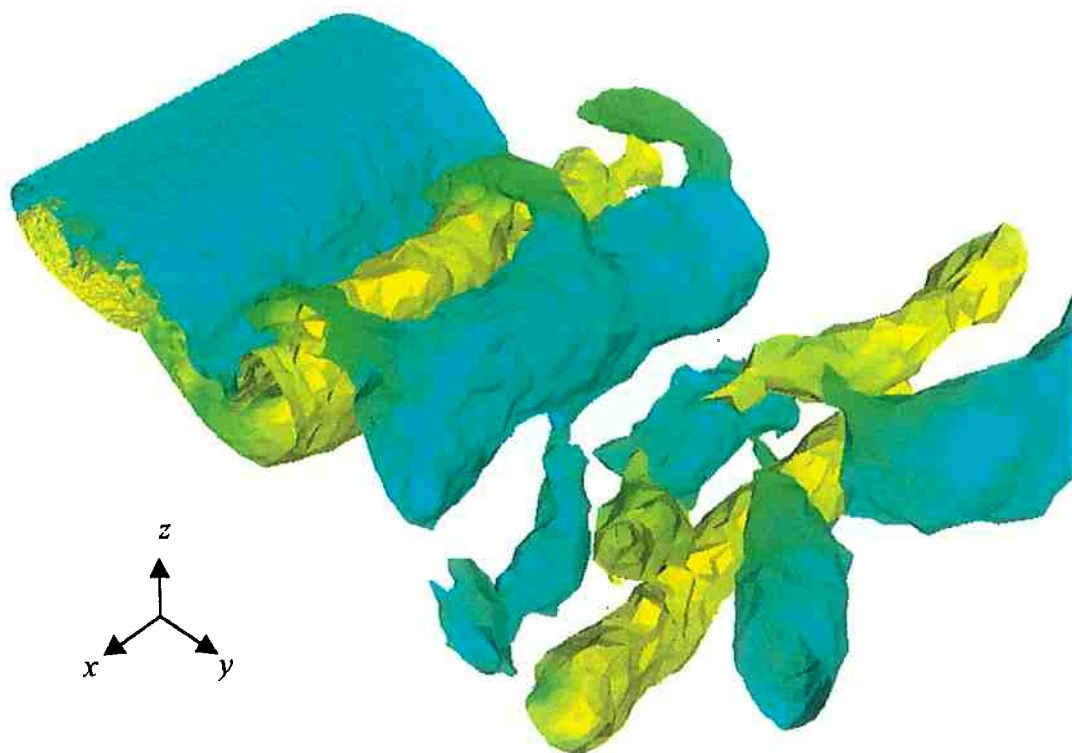


Fig. 6.11. Superfície de vorticidade. Caso 2 ($f/f_v=0.90$).

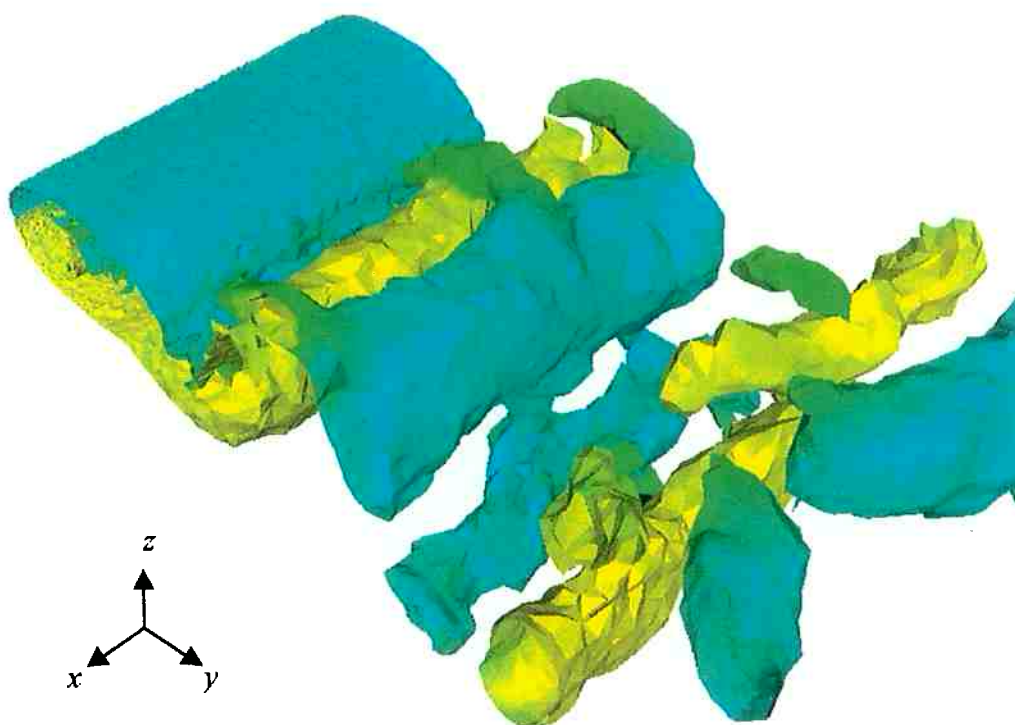


Fig. 6.12. Superfície de vorticidade. Caso 3 ($f/f_v=0.975$).

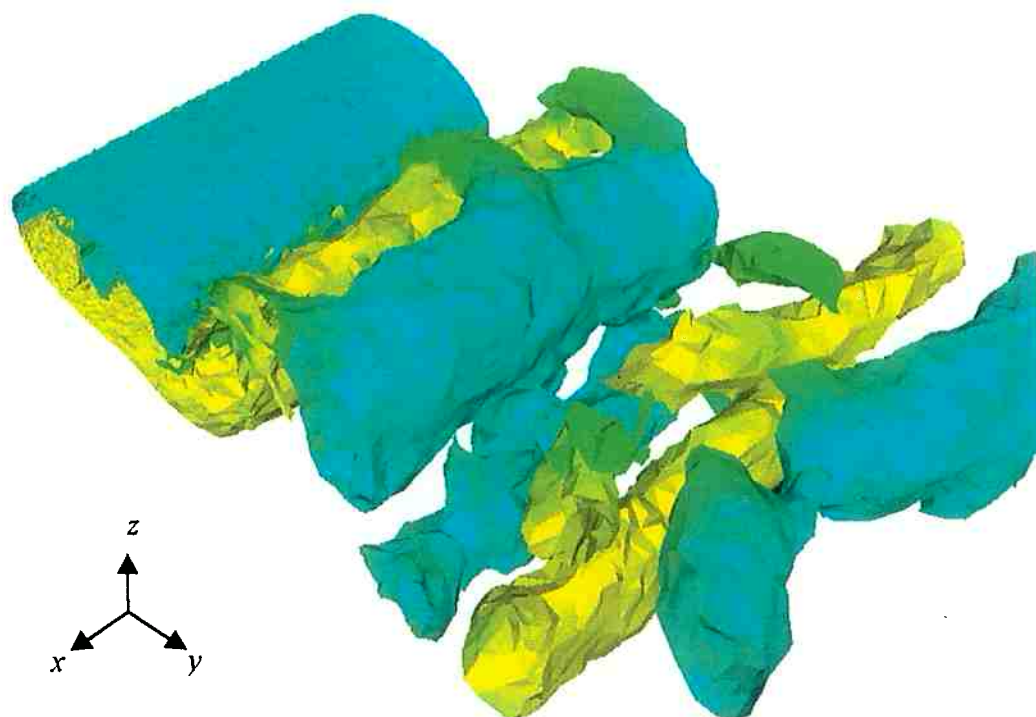


Fig. 6.13. Superfície de vorticidade. Caso 4 ($f/f_v=1.05$).

As figuras dadas anteriormente correspondem em cada caso ao quadro 16, último quadro do segundo ciclo de emissão de vórtices. Mais uma vez nota-se a imediata correspondência entre as superfícies de vorticidades apresentadas nestas figuras. Do ponto de vista qualitativo vê-se que estas superfícies são diferentes daquela mostrada na figura 5.35, a qual corresponde ao caso do cilindro fixo e $Re=250$. A rigor, as estruturas apresentadas aproximam-se bastante do caso do cilindro fixo e $Re=200$ (modo A), conforme pôde ser observado na figura 5.28. Vale ressaltar que esta análise refere-se às estruturas vorticais da esteira presentes na região próxima ao corpo e servem de referência para uma visão global do desenvolvimento do campo de vorticidade, notadamente quando o cilindro sofre oscilações forçadas.

Em resumo, observou-se que em termos do coeficiente de pressão houve na maioria dos casos um acréscimo que tornou tal coeficiente próximo da curva de simulações bidimensionais. Em relação ao desenvolvimento da esteira, observou-se um padrão de emissão mais paralelo e uma atenuação das estruturas vorticais típicas do escoamento ao redor do cilindro fixo de $5D$ de comprimento e $Re=250$. As superfícies de vorticidade tridimensionais se aproximaram do modo A de emissão de vórtices, corroborado pela faixa de número de Strouhal obtida para os quatro casos, com valores muito próximos ou mesmo idênticos em relação àquele encontrado para a simulação do escoamento ao redor do cilindro fixo de $5D$ de comprimento e $Re=200$.

Com estes comentários encerram-se os casos do movimento oscilatório forçado do cilindro para problemas tridimensionais, tópico importante no estudo das interações fluido-estrutura. A seguir serão fornecidas as considerações finais sobre esta pesquisa e sugestões para trabalhos futuros.

7. CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS

A utilização de métodos numéricos constitui uma poderosa ferramenta para a resolução de problemas de engenharia, devido principalmente à rápida evolução dos algoritmos e a crescente capacidade computacional. Entretanto, notadamente no campo da engenharia oceânica, a simulação completa de um "riser" em um cenário real está muito longe de ser alcançada pelas técnicas atuais da Dinâmica dos Fluidos Computacional, não obstante o esforço da comunidade científica internacional em desenvolver novas pesquisas e métodos para a solução de tal problema.

Ainda que grandes recursos computacionais estejam disponíveis, como o caso de utilização de supercomputadores, as soluções analíticas e as experiências de laboratório nunca deixarão de ser necessárias, pois o processo de validação de ferramentas numéricas é um item indispensável.

Por outro lado, a obtenção de informações minuciosas sobre o campo de determinado escoamento é muito difícil de ser realizada através de métodos experimentais. Visualizações mais detalhadas do escoamento só são possíveis, através de métodos experimentais, usando técnicas muito sofisticadas e extremamente custosas como o PIV (*Particle Image Velocimetry*). Dessa forma, a vantagem da utilização de métodos numéricos para a análise do problema reside na possibilidade de estudar em detalhes e com condições controladas o escoamento, realizando estudos paramétricos a um custo factível quando comparado a estudos experimentais.

Neste trabalho foram desenvolvidas e validadas ferramentas computacionais para estudar o escoamento bidimensional ao redor de cilindros, considerando cilindros lisos e estacionários em baixo número de Reynolds, pares de cilindros em arranjo lado a lado e em tandem também para baixos números de Reynolds.

No campo da simulação de problemas tridimensionais, foi desenvolvida e validada uma ferramenta computacional capacitada para estudar o escoamento completo ao redor de um cilindro a baixos números de Reynolds, cujo comprimento do corpo a ser simulado é livre, limitado pelos recursos computacionais disponíveis (velocidade de processamento e memória da plataforma computacional). Foi estudado ainda o caso do movimento oscilatório forçado do cilindro para problemas tridimensionais, tópico importante no estudo das interações fluido-estrutura. Vale lembrar que o código permite a simulação de escoamentos em cilindros de seção variável ("*tapered cylinder*"), extremamente importantes na análise de "end effects" e do escoamento com perfil de velocidades não uniforme ("*shear flow*").

Conforme pode ser visto em SALTARA(1999), a principal vantagem do Método da Resolução por Partes ou Fractional Step Method (FSM) sobre o Método dos Vórtices Discretos (MVD) está no tempo gasto para a resolução computacional.

No MVD + MEF usando a formulação *função de corrente-vorticidade* resolve-se duas equações de Poisson: uma para a função de corrente e outra para a pressão, e uma equação de difusão para a vorticidade. No MVD + MEF usando a formulação *velocidade-vorticidade* têm-se a utilização da lei de Biot-Savart, a resolução de três equações de Poisson para as componentes da velocidade e a pressão, uma equação de

Laplace para o potencial de velocidades e uma equação de difusão para a vorticidade. Já no FSM têm-se apenas a resolução de duas equações de convecção-difusão para as velocidades e uma única equação de Poisson para a pressão.

A obtenção do programa do MVD + MEF para três dimensões tornar-se-ia possível, em tese, devido aos seguintes fatores: o potencial de velocidades existe em três dimensões, ao contrário da função de corrente; a lei de Biot-Savart também pode ser estendida para três dimensões, e existe ainda a possibilidade de resolução de domínios multiplamente conexos (vários cilindros), caso de interesse prático quando se trata de agrupamentos de “risers”. Entretanto, o uso da Lei de Biot-Savart implica em um elevado custo computacional, mesmo quando existe a restrição de utilizar-se os nós sobre as paredes sólidas. Além disso, deve-se determinar o campo de velocidades através de equações adicionais.

Dessa forma, em comparação com métodos tradicionais que resolvem o escoamento através do acoplamento pressão-velocidade, o MVD representa um considerável aumento de tempo computacional. No MVD + MEF 3D haveria a necessidade de resolver 4 equações de Poisson (uma para cada componente da velocidade e uma para a pressão), 3 equações de difusão (uma para cada componente do vetor vorticidade) e uma equação de Laplace para o potencial de velocidades. Ainda seria preciso realizar a convecção e busca dos vórtices na malha tridimensional, usar a lei de Biot-Savart para avaliar as velocidades tangenciais nos pontos sobre superfícies sólidas que devem ser canceladas pelos fluxos de vorticidade. Dever-se-ia ainda projetar as velocidades em um sistema local sobre a parede do cilindro, uma vez que o fluxo de vorticidade utiliza a velocidade tangencial na parede. Já no FSM em três dimensões

resolvem-se, a cada intervalo de tempo, três equações de convecção-difusão (uma para cada componente da velocidade) e uma equação de Poisson para a pressão.

A resolução do escoamento bidimensional ao redor do cilindro para $Re=200$ utilizando o MVD + MEF com a formulação velocidade-vorticidade mostrou a inviabilidade da extensão do método para três dimensões: simulações típicas (40.000 intervalos de tempo) mostraram que esta última versão do método demora praticamente o dobro da versão MVD + MEF com formulação função de corrente-vorticidade.

SAFFMAN AND MEIRON(1986) apud ARKELL(1995) criticam o MVD + MEF 3D com o emprego de vortons na medida em que a divergência do vetor vorticidade não é igual a zero. Algumas questões ainda seriam difíceis de serem resolvidas:

- Discretização da equação em questão mediante o MEF para problemas tridimensionais: tratamento do termo de estiramento de vórtices ou “stretching”;
- Determinação do plano local de coordenadas na parede do cilindro para cálculo de forças.

Em face ao que foi exposto decidiu-se adotar o código com enfoque Euleriano (FSM) que pôde ser estendido para 3 dimensões e é mais atraente do ponto de vista computacional em relação às versões anteriores no tocante à resolução das equações de Navier-Stokes. Além deste fato, o FSM mostrou ser mais simples que o MVD no que tange a implementação computacional e, ainda, ao se retirar o gradiente de pressão da equação de transporte evita-se a ocorrência de campos de pressão oscilatórios descritos por MALISKA(1995).

Antes de estudar problemas tridimensionais, decidiu-se consolidar o uso do FSM para problemas bidimensionais através da construção da curva Strouhal vs. Reynolds para $60 \leq Re \leq 200$. Os resultados obtidos foram comparados a resultados experimentais e revelaram-se excelentes. O estudo do agrupamento de cilindros também fez parte desta etapa de consolidação e buscou-se analisar os resultados com os dados provenientes de experimentos e as considerações realizadas por SALTARA(1999) em suas pesquisas.

Para o arranjo *tandem* foram obtidos resultados em total concordância com as observações experimentais e os resultados numéricos de SALTARA(1999). Observou-se o aparecimento de uma força de arrasto negativa no cilindro posterior (cilindro 2) para uma distância entre centros ("gap") abaixo de 4.0D e de uma força de arrasto positiva para um "gap" igual a 4.0D. Para um "gap" abaixo de 4.0D, verificou-se que ocorre emissão de vórtices apenas a partir do cilindro 2 (posterior), ao passo que para uma distância entre centros acima de 4.0D os vórtices emitidos pelo cilindro frontal (cilindro 1) chocam-se com o cilindro posterior (cilindro 2) e ajudam a formar os vórtices que se destacam deste.

Para o arranjo lado a lado, observou-se sempre o aparecimento de uma força de repulsão entre os cilindros, de maneira idêntica ao que foi observado por SALTARA(1999). Para um valor de gap acima de 2.0D observou-se o aparecimento de esteiras em anti-fase, e para um gap igual ou abaixo de 2.0D notou-se o surgimento do fenômeno de "*flopping*". Porém, tal fenômeno ocorreu com uma escala de tempo muito baixa, quando, na realidade, sua escala de tempo é da ordem de mil vezes a escala de tempo de emissão de vórtices. Assim, dever-se-ia ter observado apenas o aparecimento

de uma esteira defletida na direção de um dos dois cilindros. Levando-se em conta a análise feita por SALTARA(1999), é provável que, se a simulação continuasse por um longo tempo, seria possível observar tal comportamento.

Em relação à validação do simulador tridimensional, foram realizados testes de consistência do método caracterizados através de:

- 1) Análise da influência da malha na qualidade dos resultados, notadamente na região da camada limite (número de camadas e divisões do cilindro para posterior discretização por elementos tetraédricos);
- 2) Análise do número de Strouhal e coeficiente de pressão em um ponto situado a 180 graus da região frontal do cilindro para número de Reynolds 200 e 100;
- 3) Observação da evolução da esteira para os casos analisados, buscando-se observar a natureza da mesma em relação à ocorrência de "vortex-shedding" oblíquo ou paralelo e
- 4) Análise da magnitude das componentes do vetor vorticidade nas três direções e dos contornos de vorticidade e pressão (verificando-se a consistência da física do problema).

De uma forma geral, os resultados obtidos nas seções anteriores no tocante às simulações tridimensionais encontraram respaldo nas observações e medições realizadas por WILLIAMSON AND ROSHKO(1990) e NORBERG(1994). Nota-se que os coeficientes medidos (coeficiente de pressão e número de Strouhal) variam em função do comprimento do cilindro quando se considera uma simulação tipicamente tridimensional, sendo que os valores numéricos das simulações bidimensionais para $Re=200$ somente são

válidos quando se compara os mesmos aos resultados experimentais na condição de emissão de vórtices paralela ("parallel shedding").

Em relação ao cilindro de 2D de comprimento, observou-se que para $Re=200$ e $Re=100$ os resultados obtidos para o número de Strouhal e coeficiente de pressão estão mais próximos dos valores encontrados para simulações bidimensionais, fato este esperado em função do pequeno comprimento do cilindro. Conforme foi visto nos contornos de vorticidade e pressão, o padrão de emissão de vórtices na esteira é paralelo, caracterizando a natureza de um escoamento tipicamente bidimensional.

Notou-se, para $Re=200$, que ao se aumentar o comprimento do cilindro de 2D para 5D o número de Strouhal se aproximou melhor do valor experimental obtido por WILLIAMSON & ROSHKO(1990). Ao se passar para $L=6.28D$ ocorreu novamente um decréscimo do número de Strouhal, mas um pouco mais distante do valor encontrado para a simulação com o cilindro de 5D de comprimento. Para $Re=250$, a concordância entre os resultados obtidos das simulações para os cilindros de comprimento 5D e 6.28D é muito boa, em especial para o cilindro de comprimento 5D.

Em relação ao coeficiente de pressão, observou-se novamente uma boa concordância entre os resultados numéricos e experimentais para $L=5D$. De uma forma geral, os resultados para um cilindro de comprimento 5D estão mais próximos daqueles obtidos por NORBERG(1994). Para $Re=200$ os resultados para o cilindro de comprimento 6.28D encontram-se mais próximos dos resultados obtidos por WILLIAMSON & ROSHKO(1990).

Em relação ao padrão de emissão de vórtices, a análise do desenvolvimento da esteira para os casos do cilindro fixo para $Re=200$ e $Re=250$ e comprimento do cilindro igual a $5D$ e $6.28D$ evidencia a total concordância com o padrão observado por WILLIAMSON(1992). Para $Re=200$, chega-se a um comprimento de onda para as estruturas vorticais na direção do comprimento do cilindro aproximadamente igual a $4D$, estando de acordo com a faixa delimitada por WILLIAMSON(1992) para o modo A de emissão de vórtices ($Re \approx 200$). Já para $Re=250$, obteve-se a um comprimento para as estruturas vorticais na direção do comprimento do cilindro aproximadamente igual a $1D$, também estando de acordo com a faixa delimitada por WILLIAMSON(1992) para o modo B de emissão de vórtices ($Re \geq 230$). Entretanto, a difusão numérica manifestou-se mais intensamente para $L=6.28D$ e $Re=250$, corroborado pelos contornos de vorticidade.

Conforme pode ser visto em BARKLEY AND HENDERSON (1996), existe do ponto de vista experimental uma ampla faixa de valores relacionados à determinação do modo A de emissão de vórtices, variando entre $Re=140$ a $Re=190$. Diversos fatores tais como rugosidade do cilindro, nível de turbulência da corrente livre, efeitos de bloqueio e condição de contorno nas extremidades do cilindro ("end effects") tendem a fazer com que a transição tridimensional seja obtida a valores menores do número de Reynolds. Experimentos que utilizam cilindros com grandes razões de aspecto (L/D) não estão livres de problemas causados pela condição de contorno na extremidade do cilindro, os quais se propagam por toda a extensão do mesmo. As primeiras tridimensionalidades do escoamento aparecem para $Re=180$, mas detalhes de como a transição ocorre não são facilmente determinados pelos experimentos.

Ainda segundo BARKLEY AND HENDERSON (1996) em relação ao procedimento experimental, têm sido difícil para os pesquisadores separar os *efeitos extrínsecos* da tridimensionalidade presente nos experimentos dos *efeitos intrínsecos* que surgem das propriedades naturais de estabilidade da esteira. Controlando as extremidades do cilindro, é possível reproduzir em laboratório com boa aproximação o escoamento ao redor de um cilindro infinito, conforme pode ser visto em WILLIAMSON(1989) e HAMMACHE & GHARIB(1991). Com o auxílio de uma placa ("end plate") cria-se nas extremidades do cilindro regiões de sucção que permitem obter um escoamento paralelo em relação ao eixo do mesmo para $Re=200$. Já para $Re=250$ isto não se torna possível, ainda que seja empregado tal artifício.

Em relação ao estudo do movimento oscilatório forçado do cilindro, observou-se que em termos do coeficiente de pressão houve na maioria dos 4 casos simulados um acréscimo que tornou tal coeficiente próximo da curva de simulações bidimensionais. Em relação ao desenvolvimento da esteira, observou-se um padrão de emissão mais paralelo e uma atenuação das estruturas vorticiais típicas do escoamento ao redor do cilindro fixo de $5D$ de comprimento e $Re=250$. As superfícies de vorticidade tridimensionais se aproximaram do modo A de emissão de vórtices, corroborado pela faixa de número de Strouhal obtida para os quatro casos, com valores muito próximos ou mesmo idênticos em relação aquele encontrado para a simulação do escoamento ao redor do cilindro fixo de $5D$ de comprimento e $Re=200$.

O tempo computacional gasto para as simulações tridimensionais é extremamente elevado. Para se ter uma base de comparação, em uma simulação bidimensional típica usando-se o FSM, são necessárias aproximadamente 3 horas na

Alpha Server DS20 para obter-se um tempo adimensional total (UT/D) igual a 100. Em contrapartida, o FSM para problemas tridimensionais necessita de 10 dias para simular o escoamento ao redor de um cilindro de comprimento $5D$ nas observações mais otimistas. Dessa forma, o código computacional desenvolvido neste projeto de pesquisa deve ser *paralelizado* (em outras palavras, permitir que a arquitetura do programa pudesse compartilhar a performance dos dois processadores de maneira integral em um único caso) e constituirá certamente tópicos de futuras pesquisas. Vale ressaltar que este enfoque é uma tendência mundial, na medida que novas estações de trabalho são desenvolvidas com mais de uma dezena de processadores e exigem que o programa seja paralelizado a fim de que se possa utilizar o potencial total da máquina de uma só vez.

Uma continuidade natural do projeto de pesquisa desenvolvido neste trabalho e que tornaria as simulações numéricas um pouco mais próximas do caso real seria a inclusão de um modelo de turbulência para a simulação do escoamento tridimensional ao redor do cilindro o qual estaria livre oscilar transversalmente na direção transversal ao escoamento incidente. Para a conclusão de tal tarefa, existem etapas anteriores fundamentais que necessitam ser executadas, as quais devem constituir tópicos de futuras pesquisas:

- 1) Elaborar rotinas para cálculo dos coeficientes de sustentação e arrasto do cilindro para problemas tridimensionais;
- 2) Melhorar o tratamento dos termos convectivos das equações de Navier-Stokes como mecanismo de combate à difusão numérica: a interpolação híbrida bilinear-parabólica desenvolvida por SALTARA(1999) mostrou ser capaz de minimizar a difusão numérica e

mostrou-se estável para altos Re . Esta é uma opção que poderá ser implementada no FSM 3D, ou utilizar ainda uma simulação direta dos termos convectivos através do *Método Espectral* que será comentado mais adiante. Existe ainda uma terceira alternativa, fornecida na nova edição do livro de ZIENKIEWICZ & MORGAN: o método fundamentado nas "características" do problema ou "*Characteristic-based Method*", o qual se baseia na determinação das derivadas de primeira ordem do problema consideradas na *direção característica* do problema. Este método faz com que os termos convectivos de primeira ordem desapareçam tornando o cálculo restrito a um problema puramente difusivo para o qual o procedimento padrão com aproximação espacial de Galerkin possa ser aplicado. De uma forma geral, deve-se atualizar a posição dos pontos da malha de uma maneira lagrangeana. Entretanto, o processo de atualização contínua da malha e resolução do problema difusivo na nova malha é impraticável, sabendo-se da necessidade da resolução de problemas tridimensionais. Em função disso, os autores ZIENKIEWICZ & MORGAN sugerem que após completar um único passo no tempo deve-se retornar à malha original e interpolar a partir dos valores atualizados. De uma forma geral, este método ainda irá requerer uma etapa de amadurecimento teórico por parte do aluno para que possa ser implementado com sucesso;

3) Mecanismos de redução do tempo computacional através da utilização do presente método: neste tópico está reservado o estudo da paralelização do código aqui desenvolvido, tarefa que já conta com o suporte técnico da equipe do Laboratório de Computação Avançada da USP para sua realização. Outra idéia é a mudança dos elementos computacionais utilizados no código atual: utilização de elementos prismáticos (prismas triangulares de 6 nós ou cúbicos de 4 nós) no lugar de elementos

tetraédricos. Dessa forma, haveria um controle do número de elementos gerados ao longo da "span" do cilindro, o qual não foi possível de ocorrer neste trabalho através do emprego de tetraedros. De uma forma geral, seria gerada uma malha bidimensional cujos elementos seriam "extrudados" ao longo do comprimento do cilindro. Além do controle do número de elementos na direção da "span", a qualidade dos mesmos também poderia ser facilmente monitorada. A rigor, bastaria atualizar e montar as matrizes fundamentais através da construção das funções de forma para estes novos elementos e utilizar toda a estrutura de programação que foi utilizada com sucesso nesta pesquisa.

O professor G. Karniadakis da Brown University, EUA, foi um dos primeiros pesquisadores a implementar o Método Espectral para a análise de problemas bi e tridimensionais em malhas não-estruturadas na análise de escoamento ao redor de corpos com geometria complexa. O pioneiro trabalho desenvolvido para a resolução das equações de Navier-Stokes para problemas tridimensionais utilizando o Método Espectral foi feito por Karniadakis em seu doutorado na Universidade de Princeton, EUA. Em linhas gerais, tal método emprega séries de Fourier para a obtenção do código tridimensional a partir do programa bidimensional, o que tornaria o programa mais atraente do ponto de vista computacional.

Entretanto, o cenário do problema real de um riser no oceano envolve um número maior de situações extremamente complexas, se não vejamos: a razão L/D típica de um riser na bacia de campos ou em ambientes de exploração de águas profundas é muito elevado, em torno de 500. Tal riser está livre para oscilar, é flexível, possui um movimento no topo que corresponde ao movimento da plataforma no oceano ou ao navio de prospecção associado, existe uma onda considerável na superfície livre, sendo

que deveria ser considerado que o escoamento é turbulento. Existe a influência do fundo do oceano próximo a uma região do riser que possui um raio de curvatura crítico, o qual poderá ocasionar o rompimento da estrutura caso se exceda um valor de tensão máximo neste ponto. Além de todos estes efeitos, deve-se considerar os risers não estão isolados, mas sim em agrupamento de cilindros que colidem e que dessa forma podem ter sua vida útil diminuída.

Em face do que foi exposto, nota-se o grande e imenso esforço a ser despendido pela Dinâmica dos Fluidos computacional para se aproximar do problema real. A curto prazo, acredita-se ser possível simular o escoamento completo ao redor de determinadas seções do riser em situações mais realistas. Com a obtenção dos coeficientes de arrasto, sustentação e amplitude do movimento do cilindro, pode-se fornecer parâmetros de entrada para outros códigos numéricos que estimam a vida útil do riser e que utilizam formulações mais simplificadas. Dessa forma, uma análise mais confiável da estimativa de fadiga poderia ser obtida e factível do ponto de vista do projeto.

Finalmente, espera-se que este trabalho tenha contribuído para melhorar a compreensão geral sobre o mecanismo das instabilidades vorticais que surgem na esteira de cilindros, bem como ratificar a importância da utilização da Dinâmica dos Fluidos Computacional para a solução de problemas de engenharia e ferramenta de projeto, a qual deve ser criteriosamente validada. As dificuldades citadas não devem servir de obstáculo mas sim fonte de motivação adicional para a solução de problemas de engenharia extremamente complexos, tais como os que são encontrados no hostil ambiente formado pelas grandes profundidades dos oceanos.

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABERNATHY, F. H. E KRONAUER, R. E. (1962). *The formation of vortex streets*. J. Fluid Mech. 13, 1-20.
- ANAGNOSTOPOULOS, P., and BEARMAN, P. W., (1992). *Response characteristics of a vortex-excited cylinder at low Reynolds Numbers*, Journal of Fluids and Structures, vol. 6, 39-50.
- ANDERSON, J., (1995). *Vida e Obra de Vincent Van Gogh*, tradução de Talita M. Rodrigues, Editora Ediouro, Rio de Janeiro.
- ARKELL, R. H., (1995). *Wake dynamics of cylinders encountering free surface gravity waves*. Tese submetida para a obtenção do grau de "Doctor of Philosophy in the Faculty of Engineering, University of London and for the Diploma of Imperial College", Departamento de Aeronáutica, Imperial College, Londres.
- ARKELL, R. H., (1997). *Comunicação pessoal*.
- AUADA, R. B., (1997). *Utilização de malhas não-estruturadas em dinâmica dos fluidos computacional*. Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Mestre em Engenharia, sob orientação do prof. Dr. Julio R. Meneghini.
- BARKLEY D. AND HENDERSON R. (1996). *Three-dimensional Floquet stability analysis of the wake of a circular cylinder*. Journal of Fluid Mechanics, vol. 322, pp 215-241.
- BARRETT, R. *et al.*, (1992). *Templates for the solution of linear systems: building blocks for iterative methods*, (2.3. Nonstationary Iterative Methods, p. 15). National Science Foundation.
- BATCHELOR, G.K., (1967). *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge University.
- BEARMAN, P.W.; WADCOCK, A.J. (1973). *The interaction between a pair of circular cylinders normal to a stream*. Journal of Fluid Mechanics, vol. 61, pp 499-511.
- BEARMAN, P.W. (1965). *Investigation of the flow behind a two-dimensional model with a blunt trailing edge field with splitter plates*. Journal of Fluid Mechanics, vol. 21, pp 241-255.
- BISHOP, R. E. D. AND HASSAN, A. Y., (1964). *The lift and drag forces on a circular cylinder oscillating in a flowing fluid*. Proceedings of the Royal Society (London), Series A 277, 51-75.
- BLEVINS, R. D., (1990). *Flow-induced Vibration*, second edition.

- BORTHWICK, A. (1986) *Comparison between two finite-difference schemes for computing the flow around a cylinder*. Int. J. for Numerical Methods in Fluids 6, 275.
- BRAZA, M., CHASSAING, P., and HA MINH, H. (1986). *Numerical study and physical analysis of the pressure and velocity fields in the near wake of a circular cylinder*, Journal of Fluid Mechanics 165, 79-130.
- BRIKA, D., and LANEVILLE, A., (1993). *Vortex-induced vibration of a long flexible circular cylinder*. Journal of Fluid Mechanics, Vol. 259, pp.481-508.
- CARDOSO, A. A., (1997). *Simulação realizada no programa ALGOR para o problema bidimensional de condução de calor*.
- CHORIN, A. J. (1973), *Numerical Study of slightly viscous flow*. Journal of Fluid Mechanics, vol. 57, pp 785-796.
- CHORIN, A. J. (1968), *Numerical Solution of Navier-Stokes equations*. Math. Comput., 22, 745.
- CLEMENTS, R. R. (1973). *An Inviscid Model of Two-dimensional Vortex Shedding*. Journal of Fluid Mechanics, vol. 57, part 2, pp 321-336.
- DESPOTIS AND TSANGARIS (1996). *A fractional step method for unsteady incompressible Navier-Stokes equations on unstructured triangular meshes*, aceito para publicação no International Journal of Numerical Methods in Fluids.
- DOORLY, D. J. and LIU, C. H., (1995). *Tracking the Development of Vortex Flow Structures using Vortex particle-in-cell Methods*, Numerical methods for Fluid Dynamics, pp 391-397, Oxford University Press.
- DÜETSCH H., DURST F. AND BRENNER, G. (1998), *Three-Dimensional Vorticity Structure in the Flow Around an Oscillating Circular Cylinder at Low Reynolds and Keulegan-Carpenter Numbers*. Proceedings of FEDSM'98, ASME Fluids Engineering Division Summer Meeting, ASME, Washington, D.C.
- ESFAHANI, A.S. (1998). *Numerical Study of laminar, transitional and turbulent flow past rectangular cylinders*. PhD Thesis, Chalmers University of Technology, Göteborg, Suécia.
- FAGE, A. AND JOHANSEN, F. C. (1927). *On the flow of air behind an inclined plate of infinite span*. Proceedings of the Royal Society London A, vol.116, 170-197.
- FERZIGER, J.H.; PERIC, M. (1996). *Computational Methods for Fluid Dynamics*, Springer, Berlin 1996.
- FUJARRA, A.C. (1997). *Estudo em modelo reduzido de tubo, flexível e liso, submetido ao fenômeno de vibração induzida pela emissão de vórtices*. Dissertação apresentada à Escola Politécnica da USP para obtenção do título de mestre em Engenharia. São Paulo.

- GERRARD, J. H. (1966). *The mechanics of the formation region of vortices behind bluff-bodies*, Journal of Fluid Mechanics, vol.25, part 2, pp 401-413.
- GIANNAKIDIS, G., (1996). *Viscous Vortex Method on an Unstructured Finite Element Mesh for Unsteady Flow Calculations*,. Palestra realizada na Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, Departamento de Engenharia Mecânica.
- GIANNAKIDIS, G., (1997). *comunicação pessoal*.
- GIANNAKIDIS, G. AND J.M.R. GRAHAM. (1997b) *Prediction of the loading on a Horizontal Axis Wind Turbine Rotor including effects of stall* European Wind Energy Conference.
- GOLUB, G. H. & VAN LOAN, C. F. (1989). *Matrix Computations*, The Johns Hopkins University Press.
- GRAHAM, J. M. R., (1988). *Computation of Viscous Separated Flow Using a Particle Method*, Numerical Methods in Fluid Mechanics, Ed. K. W. Morton, vol. 3, Oxford University Press, 310-317.
- HAMMACHE, M. & GHARIB, M. (1991). *An experimental study of the parallel and oblique vortex shedding from circular cylinders*, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 232, pp.567-590.
- HELMHOLTZ, H. (1858). *Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen*. Crelle-Borchardt, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Berlin, Vol. LV, 25-55. Ver também *On integrals of the Hydrodynamical equations which express vortex-motion*, Phil. Mag. (4), 1867, vol. 33, 485-512.
- HOLMAN, J. P. (1983). *Transferência de Calor*, Editora McGraw-Hill do Brasil.
- KARMAN, TH. VON. (1911) *Über den Mechanismus des Widerstandes dein ein bewegter Körper in einer Flüssigkeit erfährt*. Gottinger Nachrichten, math-phys. Kl. Pp. 509-17.
- KARNIADAKIS, G. E. & TRIANTAFYLLOU(1992) *Three-dimensional dynamics and transition to turbulence in the wake of bluff objects*, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 238, pp.1-30.
- KEULEGAN, G.H. & CARPENTER, L.H., (1958). *Forces on cylinders and plates in an oscillating fluid*, Journal of Research of the National Bureau of Standards, vol.60, N° 5, Research Paper 2857.
- KHALAK A. & WILLIAMSON C. H. K. (1996). *Dynamics of a Hydroelastic Cylinder with Very Low Mass and Damping*, submetido ao Journal of Fluids and Structures, Academic Press.
- KIM, H. J.; DURBIN, P.A. (1988). *Investigation of the flow between a pair of circular cylinders in the flopping regime*. Journal of Fluid Mechanics, vol. 196, pp.431-448.

- KIM, H. J.; MOIN P. (1985). *Application of a fractional-step method to incompressible Navier-Stokes equations*, Journal Comput. Phys., 59, 308.
- LAM, K.; LO, S. C. (1992). *A visualisation study of cross-flow around four cylinders in a square configuration*. Journal of Fluids and Structures, N° 6, pp. 109-131.
- LIGHTHILL, J. (1986). *Fundamentals concerning wave loading on offshore structures*. Journal of Fluid Mechanics, vol. 173, pp. 667-681.
- LU, X.; DALTON, C.; ZHANG J. (1997). *Application of large eddy simulation to flow past a circular cylinder*. ASME journal of offshore mechanics and arctic engineering, vol. 119, pp. 219-225.
- LUGT, H. J. (1983). *Vortex Flow in Nature and Technology*, Wiley, New York.
- MALISKA, C. R., (1995). *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional*, LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S. A.
- MANNA, M. (1997). *Introduction to the Modelling of Turbulence*, von Karman Institute for Fluid Dynamics, Lecture Series 1997-03, Bélgica.
- MELING, T. S., DALHEIM, J., (1997). Numerical Prediction of the Response of a Vortex-Excited Cylinder at Low Reynolds Numbers, 7th International Offshore and Polar Engineering Conference (ISOPE 97), de 25 a 30 de Maio de 1997, Honolulu, EUA.
- MENEGHINI, J. R. (1993). *Numerical simulation of bluff body flow control using a discrete vortex method*. Tese submetida para a obtenção do grau de “Doctor of Philosophy in the Faculty of Engineering, University of London and for the Diploma of Imperial College”, Departamento de Aeronáutica, Imperial College, Londres.
- MENEGHINI, J. R., BEARMAN, P. W., (1995). *Numerical Simulation of High Amplitude Oscillatory Flow about a Circular Cylinder*, Journal of Fluids and Structures, vol. 9, 435-455.
- MENEGHINI, J. R., SALTARA, F. AND BEARMAN, P. W., (1997) *Numerical simulation of vortex shedding from an oscillating circular cylinder*, Proc. Computational Methods and Experimental Measurements VIII, Grécia.
- MENEGHINI, J. R., SIQUEIRA, C., BEARMAN, P. W., (1997a). *Numerical Simulation of the Effect of Wave Form and Sudden Transverse Displacement on Vortex Shedding from a Circular Cylinder*, Control of Free Shear Layers and Wakes, 4th AIAA Shear Flow Conference, Aspen, Colorado, EUA.
- MENEGHINI, J. R., SIQUEIRA, C., BEARMAN, P. W., (1997b). *Numerical Simulation of Oscillatory Flow and Current around a Circular Cylinder*, X International Symposium on Offshore Engineering, Brazil Offshore’ 97, Rio de Janeiro, Brasil.

- MENECHINI, J. R., SIQUEIRA, C., SALTARA, F. and FERRARI, J. A., (1999b). *An investigation of the flow around two circular cylinders in tandem arrangements*, 15^o Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica (COBEM 99), de 22 a 26 de Novembro de 1999, Águas de Lindóia, São Paulo, Brasil.
- MITTAL, S., KUMAR V., RAGHUVANSHI, A. (1997). *Unsteady Incompressible Flows Past Two Cylinders Tandem and Staggered Arrangements patterns of the near-wake vortices behind a circular cylinder*. Int. J. for Numerical Methods in Fluids, vol. 25, 1315-1344.
- MIYOSHI, H. Y. (1996). *Método dos volumes finitos utilizando malhas não-estruturadas para a simulação do escoamento em passagens e dutos com geometria complexa*, 2^o relatório de iniciação científica, FAPESP, processo n^o. 95/4895-2.
- MORGAN, K. AND WEATHERILL, N. P. (1996). *Introduction to Computational Fluid Dynamics*, curso oferecido no Centro Tecnológico da Aeronáutica, de 11 a 15 de Março de 1996.
- MURAKAMI, S.; MOCHIDA, A. (1995). *On turbulent vortex shedding past 2D square cylinder predicted by CFD*. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, vol. 54/55, pp. 191-211.
- MURAKAMI, S.; MOCHIDA, A.; SAKAMOTO, S. (1997). *CFD analysis of wind-structure interaction for oscillating square cylinders*, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, vol. 72, pp. 33-46.
- NAGANO, S.; NAITO, M.; TANAKA, H. (1982). *A Numerical Analysis of Two-dimensional Flow past a Rectangular Prism by a Discrete Vortex Model*. Computers and Fluids, vol. 10 , N^o 4, pp. 243-259.
- NEWMAN, D. J., and KARNIADAKIS, G. E., (1997). *A direct numerical simulations study of a flow past a freely vibrating cable*, J. Fluid Mech., vol. 344, pp. 95-136.
- NG, C.W.; KO, N.W.M. (1995). *Flow interaction behind two circular cylinders of equal diameter - a numerical study*. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, vol. 54/55, pp. 277-287.
- NISHIMOTO, K. (1997). *Comunicação pessoal*, <http://www.naval.ep.usp.br/DEN>.
- NORBERG, C. (1987). *Reynolds number and free stream turbulence effects on the flow and fluid forces for a circular cylinder in cross flow*. PhD Thesis, Department of Thermo-and Fluid Dynamics, Chalmers University of Technology, Gothenburg, Sweden.
- NORBERG, C. (1993). *comunicação pessoal*.
- PARK, W.C.; HIGUCHI, H. (1989). *Computation of Flow past Single and Multiple Bluff Bodies by a Vortex Tracing Method*. Report, St. Anthony Falls Hydraulic Laboratory, University of Minnesota.

- PARRA, P. H. C. C. (1996). *Modelo Semi-empírico de Vibrações Induzidas por Vortex-shedding – Análise teórica e Experimental*. Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Mestre em Engenharia, sob orientação do prof. Dr. J. A. P. Aranha.
- PERAIRE, J.; MORGAN, K.; PEIRO, J. (1990). *Unstructured Mesh Methods for CFD*. I. C. Aero Report 90-04, Imperial College of Science , Technology & Medicine, Department of Aeronautics.
- PRESS *et al.*, (1992). *Numerical Recipes*, Cambridge Press.
- RANDALL. R. E. (1997). *Elements of Ocean Engineering*, Society of Naval Architects and Marine Engineers (SNAME), USA.
- ROACHE, P. J. (1982). *Computational Fluid Dynamics*, Hermosa publishers.
- ROSENHEAD, L. (1931). *The formation of vortices from a surface of discontinuity*. Proc. of the Royal Society London A, 134-170.
- ROSHKO, A. (1954). *On the drag and shedding frequency of two dimensional bluff bodies*. Technical note 3169, National Advisory Committee for Aeronautics (NACA), July 1954, Washington.
- SA, J.Y. AND CHANG, K.S. (1991). *Shedding patterns of the near-wake vortices behind a circular cylinder*. Int. J. for Numerical Methods in Fluids 12, 463-474.
- SALTARA, F., (1999). *Simulação numérica do escoamento ao redor de cilindros*, Tese apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Doutor em Engenharia, sob orientação do prof. Dr. Julio R. Meneghini.
- SALTARA, F., (1997). *Comunicação pessoal*.
- SALTARA, F., MENEGHINI, J. R., and SIQUEIRA, C. (1998). *The simulation of vortex shedding from an oscillating circular cylinder with turbulence modelling*, Proceedings of FEDSM'98, ASME Fluids Engineering Division Summer Meeting, ASME, Washington, D.C.
- SALTARA, F., MENEGHINI, J. R., and SIQUEIRA, C. (1998a). *The Simulation of Vortex Shedding from an Oscillating Circular Cylinder*, 8th International Offshore and Polar Engineering Conference (ISOPE 98), de 24 a 29 de Maio de 1998, Montreal, Canada.
- SALTARA, F., MENEGHINI, J. R., and SIQUEIRA, C. (1998b). *The Simulation of Vortex Shedding from an Oscillating Circular Cylinder with Large Eddy Simulation*, 7th Brazilian Congress of Engineering and Thermal Sciences (ENCIT 98), de 3 a 6 de Novembro de 1998, Rio de Janeiro, Brasil.
- SARPKAYA, T. AND ISAACSON, M, (1981). *Mechanics of wave forces on offshore structures*, Van Nostrand Reinhold Company.

- SARPKAYA, T. (1989). *Computational methods with vortices – The 1988 freeman scholar lecture*, J. Fluids Engineering 111, 5-52.
- SARPKAYA, T. (1975). *An inviscid model of two-dimensional vortex-shedding for transient and asymptotically steady separated flow over inclined flat plane*, J. Fluid Mechanics. 68, 109-128.
- SCHLICHTING, H. (1978). *Boundary-layer theory*, 7th edition, McGraw-Hill Books Company.
- SELVAM, R.P. (1997) *Finite element modelling of flow around a circular cylinder using LES*. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, vol. 67/68, pp. 129-139.
- SIQUEIRA, C. (1996a). *1º relat. semestral, FAPESP*, proc. n°. 95/4898-1. Bolsa DR-I.
- SIQUEIRA, C. (1996b). *2º relat. semestral, FAPESP*, proc. n°. 95/4898-1. Bolsa DR-I.
- SIQUEIRA, C. (1997a). *3º relat. semestral, FAPESP*, proc. n°. 95/4898-1. Bolsa DR-II.
- SIQUEIRA, C. (1997b). *4º relat. semestral, FAPESP*, proc. n°. 95/4898-1. Bolsa DR-II.
- SIQUEIRA, C. (1998a). *5º relat. semestral, FAPESP*, proc. n°. 95/4898-1. Bolsa DR-III.
- SIQUEIRA, C. (1998b). *6º relat. semestral, FAPESP*, proc. n°. 95/4898-1. Bolsa DR-III.
- SIQUEIRA, C. (1999a). *7º relat. semestral, FAPESP*, proc. n°. 95/4898-1. Bolsa DR-IV.
- SIQUEIRA, C. (1999b). *8º relat. semestral, FAPESP*, proc. n°. 95/4898-1. Bolsa DR-IV.
- SIQUEIRA, C. AND MENEGHINI, J. R., (1997c). *The Preconditioned Conjugate Gradient Method for the Solution of Sparse Matrices: Finite Element Method Applications*, 14º Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica (COBEM 97), Bauru, São Paulo, Brasil.
- SIQUEIRA, C. MENEGHINI, J. R., and SALTARA, F., (1998). *Numerical Simulation of a Fixed and an Oscillating Circular Cylinder in Oscillatory Flow*, 8th International Offshore and Polar Engineering Conference (ISOPE 98), de 24 a 29 de Maio de 1998, Montreal, Canada.
- SIQUEIRA, C. MENEGHINI, J. R., and SALTARA, F., (1998a). *Three Dimensional Vortex Particle Method on an Unstructured Finite Element Mesh: Tracking the development of an Inviscid Vortex Ring*, 17º Congresso Nacional de Transportes Marítimos, Construção Naval e Offshore (SOBENA 98), de 14 a 18 de Setembro de 1998, Rio de Janeiro, Brasil.
- SIQUEIRA, C. MENEGHINI, J. R., and SALTARA, F., (1999). *Parametrical analysis of a rectangular cylinder with splitter plate using numerical simulation*, 9th International Offshore and Polar Engineering Conference (ISOPE 99), de 30 de Maio a 4 de Junho de 1999, Brest, França.

- SIQUEIRA, C. MENEGHINI, J. R., SALTARA, F. and FERRARI, J. A., (1999a). *Numerical simulation of flow interference between two circular cylinders in tandem and side-by-side arrangements*, 18^o Offshore Mechanics & Arctic Engineering- OMAE99, de 11 a 16 de Julho de 1999, St. John's, Newfoundland, Canada.
- SPALART, P. R. (1983). *Numerical simulation of separated flows*. PhD Thesis, Stanford University, California, NASA.
- STEGGEL, N., ROCKLIFF, N. (1997). *Simulation of the effects of body shape on lock-in characteristics in pulsating flow by the discrete vortex method*. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics 69-71, 317-329.
- SUMNER, D.; PRICE, S.J.; PAIDOUSSIS, M.P. (1998). *Investigation of side-by-side circular cylinders in steady cross-flow by Particle Image Velocimetry*, Proc. of the 1998 ASME Fluids Eng. Division Summer Meeting (FEDSM 98).
- SZEPESSY, S., BEARMAN, P. W. (1992). *Aspect ratio and end plate effects on vortex shedding from a circular cylinder*, J. Fluid Mechanics, vol.234, pp. 191-217.
- SZEPESSY, S., BEARMAN, P. W. (1991). *On the three-dimensionality of vortex shedding from a circular cylinder*. PhD Thesis, Chalmers University of Technology, Göteborg, Suécia.
- TAMURA, T.; ITOH, Y.; WADA, A.; KUWAHARA, K. (1955). *Numerical study of pressure fluctuations on a rectangular cylinder in aerodynamic oscillation*, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, vol. 54/55, pp. 239-250.
- THOMPSON C. M., HOURIGAN K., SHERIDAN J. (1994), *Three-dimensional instabilities in the wake of a circular cylinder*, International Colloquium on Jets, Wakes and Shear Layer, Victoria, Australia.
- THOMPSON C. M., HOURIGAN K., SHERIDAN J. (1995), *Three-dimensional mode development in low Reynolds number flow over a cylinder*, Australasian Fluid Mechanics Conference, Sydney, Australia.
- WIDNALL, S. E., BLISS, D. B. and TSAI, C.Y., (1974). *The Instability of Short waves on a vortex ring*, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 66, pp. 35-47.
- WILLIAMSON, C. H. K., (1992). *The natural and forced formation of spot-like 'vortex dislocations' in the transition of a wake*, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 243, pp.393-441.
- WILLIAMSON, C. H. K., (1991). *2-D and 3-D Aspects of the Wake of a Cylinder, and their Relation to Wake Computations*, C. R. Anderson and C. Greengard editors, Vortex Dynamics and Vortex Methods. Lectures in Applied Mathematics, 719-751.
- WILLIAMSON, C. H. K., (1989). *Oblique and parallel modes of vortex shedding in the wake of a circular cylinder at low Reynolds numbers*, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 206, pp.579-627.

- WILLIAMSON, C. H. K., (1985). *Sinusoidal flow relative to circular cylinders*, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 155, pp.141-174.
- WILLIAMSON, C. H. K. AND ROSHKO, A., (1988). *Vortex Formation in the Wake of an Oscillating Cylinder*, Journal of Fluids and Structures, vol. 2, 355-381.
- ZDRAVKOVICH, M.M. (1987). *The effects of interference between circular cylinders in cross flow*. Journal of Fluids and Structures, N° 1, pp. 239-261.
- ZDRAVKOVICH, M.M. (1981). *Review and classification of various aerodynamic and hydrodynamic means for suppressing vortex shedding*, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 7, 145-189.
- ZDRAVKOVICH, M.M. (1977). *Review of flow interference between two circular cylinders in various arrangements*. ASME Journal of Fluids Engineering, vol. 99, pp. 618-633.
- ZHANG, J.; DALTON, C. (1996) *Interactions of vortex-induced vibrations of a circular cylinder and a steady approach flow at a Reynolds number of 13,000*. Computers and Fluids, vol. 25, n° 3, pp 283-294.
- ZIENKIEWICZ O. C. & MORGAN K., (1983). *Finite Elements and Approximation*, University of Wales, United Kingdom, John Wiley & Sons.
- ZIENKIEWICZ O. C. (1977). *The Finite Element Method*, 3rd edition, McGraw-Hill Company.

9. APÊNDICES

1. O CONCEITO DE ELEMENTO FINITO PARA PROBLEMAS BIDIMENSIONAIS

A rigor, o triângulo possui uma forma adequada para qualquer análise bidimensional, uma vez que uma malha de triângulos pode facilmente representar de maneira precisa regiões delimitadas por fronteiras que possuem forma bastante complexa. Para um triângulo qualquer e , com os nós i, j, k numerados no sentido **anti-horário** e situados nos vértices do mesmo, foram escolhidas neste trabalho funções de interpolação (funções de forma) lineares $N_i^e(x, y)$ de tal modo que N_i^e tenha valor unitário no nó i e zero nos nós j e k . Além disto a função de forma global N_i deve ser contínua ao longo dos elementos da fronteira e diferente de zero apenas nos elementos associados com o nó i . Segundo pode ser visto em ZIENKIEWICZ & MORGAN(1983), este requisito de continuidade pode ser garantido assumindo uma forma linear para N_i^e da seguinte forma:

$$N_i^e = \alpha_i^e + \beta_i^e x + \gamma_i^e y, \text{ no elemento } e \quad (1.1)$$

As constantes da expressão acima são determinadas fazendo $N_i^e(x_i, y_i) = 1$ e $N_i^e(x_j, y_j) = N_i^e(x_k, y_k) = 0$, onde as coordenadas nodais são especificadas através do posicionamento dos nós no processo de subdivisão do domínio (geração da malha). Satisfazendo estas três condições obtém-se o seguinte conjunto de equações:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_i^e \\ \beta_i^e \\ \gamma_i^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

com solução:

$$\alpha_i^e = \frac{x_j y_k - x_k y_j}{2 \Delta^e}, \beta_i^e = \frac{y_j - y_k}{2 \Delta^e}, \gamma_i^e = \frac{x_k - x_j}{2 \Delta^e} \quad (1.3)$$

onde:

$$2\Delta^e = \det \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} = 2 \cdot \text{área do elemento } e \quad (1.4)$$

Com as funções de forma especificadas para o triângulo, pode-se rapidamente computar todas os elementos das matrizes necessárias para qualquer tipo de problema no qual apenas as derivadas de primeira ordem ocorrem. Sem especificar o problema ou as condições de contorno, observa-se que antes da inserção das mesmas a matriz \mathbf{K} terá a forma de uma matriz **esparsa**, ou seja, um número considerável de seus elementos possui o valor zero. Lembrando que se, por exemplo, os nós l e m não ocorrem em um dado elemento e então $k_{lm}^e = 0$, assim como somente as funções de forma que são diferentes de zero estão associadas com os nós daquele dado elemento.

A matriz de rigidez do sistema que se obtém através do MEF é uma matriz **esparsa** e de **banda**. Isto significa que a solução do sistema algébrico de equações requer menos operações quando comparada à solução do mesmo sistema se a matriz fosse completa. Dessa forma, poderá haver uma grande economia computacional caso se trabalhe apenas com os elementos não nulos da matriz. Caso o procedimento de resolução a ser utilizado empregue a estrutura de banda da matriz \mathbf{K} , então os nós devem ser numerados de uma tal forma a fim de garantir que a largura de semi-banda seja mínima, melhorando a eficiência computacional do processo de resolução. De uma

forma geral, caso a maior diferença entre a numeração de dois nós pertencentes a um determinado elemento seja $b - 1$, então a matriz \mathbf{K} terá uma largura de semi-banda de b . Até este ponto, assumindo que existam algumas fórmulas padrão para a determinação das contribuições k_{lm}^e e f_l^e para cada elemento, pode-se dizer que:

1. Estes cálculos devem ser feitos apenas uma vez para cada elemento.
2. Uma vez determinada a contribuição de cada elemento, pode-se imediatamente colocar este valor em sua posição apropriada na matriz \mathbf{K} .

2. RESOLUÇÃO DE SISTEMAS COM MATRIZES ESPARSAS

Um sistema de equações lineares é chamado de **esparso** se um número considerável de seus elementos possui o valor zero. Torna-se um desperdício utilizar métodos gerais de álgebra linear em tais problemas, uma vez que muitas das operações aritméticas de ordem N^2 necessárias para resolver o conjunto de equações envolvem operandos iguais a zero. Além disso, muitas vezes torna-se necessário trabalhar com matrizes muito grandes e não é interessante reservar espaço na memória para armazenar elementos nulos. Vale ressaltar que existem dois objetivos distintos (e nem sempre compatíveis) quando se tenta resolver uma matriz esparsa: economizar tempo e/ou economizar espaço na memória.

Segundo PRESS *et al.*(1992), o método de resolução não é, a princípio, diferente do método geral de decomposição LU; ele foi adaptado com o cuidado de tratar os elementos iguais a zero durante o processo de resolução. Muitos dos métodos de

resolução de matrizes esparsas possuem essa mesma característica. Eles são, fundamentalmente, esquemas de decomposição ou ainda de eliminação no estilo Gauss-Jordan, mas cuidadosamente otimizado a fim de minimizar o número de “*fill-ins*”, ou seja, elementos inicialmente iguais a zero os quais tornam-se diferentes de zero durante o processo de resolução do sistema e que devem possuir espaço reservado na memória.

O procedimento implementado computacionalmente neste trabalho para o armazenamento da matriz esparsa foi o seguinte:

1. Determinação da contribuição dos elementos não nulos para a matriz de rigidez;
2. Armazenamento dos elementos não-nulos acima da diagonal principal (a matriz de rigidez é simétrica);
3. Estabelecimento de relações de conectividade (baseada principalmente na determinação dos nós vizinhos a um dado nó) para a recuperação de sua posição dentro da matriz de rigidez global.

Métodos diretos para a resolução de matrizes esparsas dependem crucialmente do tipo de matriz esparsa a ser resolvida. Pode-se citar alguns tipos de matrizes esparsas, de acordo com PRESS *et al.*(1992):

- tridiagonal;
- banda diagonal ou de banda com largura de semi-banda M ;
- banda triangular;
- diagonal de bloco;
- tridiagonal de bloco;
- triangular de bloco;
- banda cíclica;
- etc.

2.1. O “CONJUGATE GRADIENT METHOD” (CG)

O campo matemático dos métodos iterativos para a resolução de sistemas de equações lineares está em constante desenvolvimento, com novos métodos continuamente sendo criados e modificados e alguns deles eventualmente descartados. De tempos em tempos estes novos métodos amadurecem e passam a constituir o estado da arte.

O termo “método iterativo” refere-se a uma grande variedade de técnicas que usam aproximações sucessivas para obter soluções mais precisas para um sistema linear a cada passo de resolução. Conforme pode ser visto em BARRETT *et al.*(1992), os métodos chamados de *estacionários* são antigos, relativamente simples de serem entendidos e implementados, mas normalmente não tão eficientes.

Já os métodos *não-estacionários* constituem um desenvolvimento recente; sua análise é usualmente mais complexa mas podem ser realmente efetivos no tocante a obtenção da solução correta do sistema. Estes métodos diferem fundamentalmente dos métodos estacionários no sentido de que os cálculos envolvem informações que são atualizadas a cada iteração. De uma forma geral, as constantes são calculadas através de produtos internos (produto de matriz por vetor) dos resíduos, ou através de vetores que surgem do método iterativo. Um exemplo desta classe de métodos iterativos é o “CONJUGATE GRADIENT METHOD” (CG), que é, fundamentalmente, um método baseado na idéia da construção de seqüência de vetores ortogonais.

De uma forma geral, o CG é um método iterativo que converge para o mínimo de uma dada função f com um vetor de variáveis x . O método estabelece que sejam realizadas as seguintes etapas fundamentais:

1. Calcular o gradiente da função $\nabla f(x)$ em um ponto arbitrário e
2. Minimizar f ao longo de uma dada direção, ou seja, encontrar o valor de λ que minimiza a expressão $f(x + \lambda u)$ para valores prefixados de x e u .

Seja a função dada por:

$$f(x) \equiv \frac{1}{2} |A \cdot x - b|^2 \quad (2.1)$$

Observa-se que esta função possui apenas um mínimo e é o valor de x que satisfaz o conjunto linear de equações $A \cdot x = b$. A minimização feita pelo método do gradiente conjugado irá resolver este conjunto de equações.

Pode ser verificado que as etapas fundamentais descritas em 1 e 2 podem ser descritas através das seguintes equações:

$$\nabla f(x) = A^T \cdot (A \cdot x - b) \quad (2.2)$$

$$\lambda = \frac{-u \cdot \nabla f}{|A \cdot u|^2} \quad (2.3)$$

As equações (2.2) e (2.3) fazem dois tipos de referência à matriz A , ou seja, multiplica a matriz A e sua transposta por um vetor. Como a matriz é esparsa, estas multiplicações não requerem as operações de ordem N^2 , mas um número menor, igual ao número de componentes da matriz diferente de zero.

Entretanto, duas considerações devem ser feitas a respeito deste método. Primeiro, como se trata de um método iterativo, não há garantias de quantas iterações serão necessárias para atingir a convergência, ou se a mesma irá ocorrer. Em segundo lugar, a função f é quadrática em \mathbf{A} . Isto significa que o “número de condicionamento” da matriz (razão entre o maior e o menor elemento da matriz) que ocorre na função f , $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$, é o quadrado do “número de condicionamento” da matriz \mathbf{A} . Um alto valor para o “número de condicionamento” aumenta o número de iterações requeridas e limita a precisão da solução obtida.

O CG fornece uma maneira geral para a resolução de um sistema linear $N \times N$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} . \quad (2.4)$$

Conforme pode ser visto em PRESS *et al.*(1992), a vantagem da utilização deste método para a resolução de grandes matrizes esparsas é que o mesmo referencia a matriz \mathbf{A} apenas através da sua multiplicação por um vetor, ou pela multiplicação da sua transposta e um vetor. Estas operações podem ser eficientes caso um adequado armazenamento da matriz esparsa seja realizado. Consequentemente, caso a matriz seja simétrica, apenas a sua parte superior ou inferior (somente os elementos não nulos) deve ser armazenada.

Segundo GOLUB & LOAN(1989), a dificuldade associada com outros métodos numéricos tais como o SOR ("Successive Over Relaxation"), método semi-iterativo de Chebyshev e métodos correlatos é que os mesmos dependem de parâmetros que muitas vezes são difíceis de serem escolhidos adequadamente. Por exemplo, para que o método de Chebyshev seja satisfatório são necessárias boas estimativas dos menores e maiores

autovalores da matriz resultante do produto $M^{-1}N$ da iteração prévia. Esta condição somente é satisfeita caso esta matriz seja suficientemente estruturada. Caso contrário, pode ser analiticamente impossível e/ou computacionalmente dispendioso que esta condição seja verificada.

Em resumo, o CG é um método efetivo para sistemas formados por matrizes simétricas e positiva definidas e garante a solução em até n iterações (através de aritmética “exata”). Conforme visto anteriormente, o método constrói seqüências de vetores através de várias iterações (aproximações sucessivas da solução) com cálculo de resíduos e busca de direções utilizadas na atualização das iterações e resíduos. Embora o comprimento dessas seqüências possa tornar-se grande, será necessário somente um pequeno número de vetores a serem armazenados na memória. Em cada iteração do método, dois produtos internos são realizados a fim de atualizar os escalares que garantem a condição de ortogonalidade. Em outras palavras, dado um sistema linear com uma matriz simétrica positiva definida, tal condição implica que a distância até a solução é minimizada em alguma norma.

As iterações $x^{(i)}$ são atualizadas em cada iteração por um fator de relaxação (α_i) na direção de busca do vetor $p^{(i)}$:

$$x^{(i)} = x^{(i-1)} + \alpha_i p^{(i)} \quad (2.5)$$

Os resíduos correspondentes $r^{(i)} = b - Ax^{(i)}$ são atualizadas da seguinte forma:

$$r^{(i)} = r^{(i-1)} - \alpha q^{(i)}, \text{ onde } q^{(i)} = Ap^{(i)} \quad (2.6)$$

A escolha do parâmetro $\alpha = \alpha_i = r^{(i)T} r^{(i)} / p^{(i)T} A p^{(i)}$ minimiza $r^{(i)T} = A^{-1} r^{(i)}$ para todas as possíveis escolhas de α na equação acima. As direções de busca são atualizadas usando-se os resíduos:

$$p^{(i)} = r^{(i)} + \beta_{i-1} p^{(i-1)} \quad (2.7)$$

onde a escolha $\beta_i = r^{(i)T} r^{(i)} / r^{(i-1)T} r^{(i-1)}$ assegura que $p^{(i)}$ e $A p^{(i-1)}$, - ou, de forma equivalente, $r^{(i)}$ e $-r^{(i-1)}$ - são ortogonais. De fato, pode-se demonstrar que esta escolha de β_i faz com que $p^{(i)}$ e $r^{(i)}$ sejam ortogonais a todos os $A p^{(j)}$ e $r^{(j)}$ anteriores respectivamente.

No CG dois termos acoplados são utilizados: um que atualiza os resíduos segundo uma direção de busca e outro que atualiza a direção de busca através de um novo resíduo computacional. Isto torna o CG atraente do ponto de vista de implementação computacional. Maiores detalhes podem ser encontrados em BARRETT *et al.*(1992).

2.2. O "PRECONDITIONED CONJUGATE GRADIENT METHOD" (PCG)

A taxa com que um método iterativo converge depende bastante do espectro da matriz dos coeficientes. Além disso, os métodos iterativos pressupõem uma segunda matriz que transforma a matriz dos coeficientes em uma outra que possua um espectro mais favorável. Esta matriz de transformação é chamada de *precondicionadora* ou "preconditioner". O uso de um bom "preconditioner" melhora a convergência do método

iterativo, de forma suficiente a compensar o custo extra de construção e implementação da matriz preconditionadora. Em relação a questões de eficiência na busca da solução correta do sistema linear, vale ressaltar que a ausência de um “preconditioner” pode fazer com que o método iterativo não convirja.

O algoritmo para o PCG é dado na figura 2.1. Tal método utiliza um preconditionador M ; para $M = I$ obtém-se a versão “unpreconditioned” do método. Para este caso o algoritmo pode ser simplificado ignorando-se a linha “resolver” e substituindo $z^{(i-1)}$ e $z^{(0)}$ por $r^{(i-1)}$ e $r^{(0)}$ respectivamente.

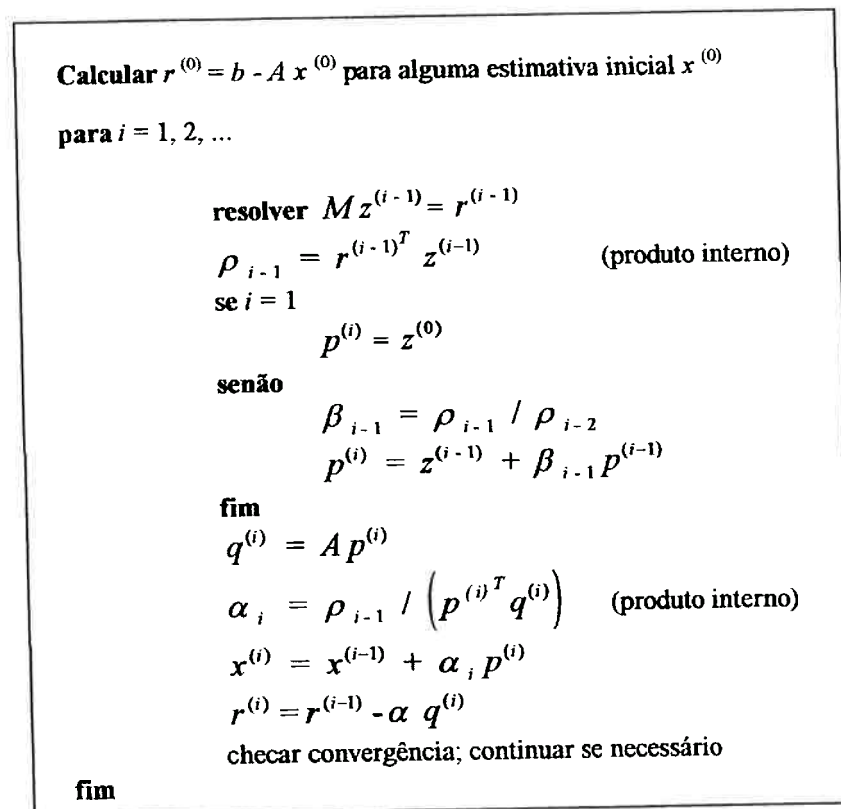


Fig. 2.1. Algoritmo do PCG (BARRETT *et al.*(1992))

A versão “precondicionada” do método utiliza um diferente sub-espaço para a construção das iterações quando comparada com o CG. Entretanto, satisfaz as mesmas propriedades de minimização. Outro requisito importante é que a matriz preconditionadora M seja simétrica e positiva definida. Conforme pode ser visto em GOLUB & LOAN(1989), o CG trabalha bem com matrizes que ou são bem condicionadas ou possuem poucos valores diferentes de “eigenvalues” (caso em que a matriz A é uma pequena perturbação da matriz identidade). Na busca por um preconditionador, existem basicamente duas opções:

- 1) Encontrar uma matriz M que aproxima a matriz esparsa dos coeficientes A , para a qual a solução do sistema é mais simples do que resolvê-lo com A apenas ou
- 2) Encontrar uma matriz M que aproxima A^{-1} de tal forma que apenas a multiplicação por M seja necessária (a maioria dos preconditionadores cai nesta categoria).

Neste trabalho o preconditionador utilizado foi o **Diagonal Scalling**, o qual aumentou a taxa de convergência dramaticamente. Este método foi sugerido por ARKELL(1997) via comunicação pessoal e consiste em tomar como matriz preconditionadora M a matriz formada pela diagonal dos coeficientes da matriz A .

Os estudos de validação das rotinas fundamentais mostrarão a seguir a grande diferença em relação ao número de iterações necessárias para o CG e o PCG no tocante a obtenção da solução convergida para um dado problema numérico; no caso, a equação diferencial que governa o fenômeno da condução de calor bidimensional em uma placa plana.

3. O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS APLICADO AO PROBLEMA DE CONDUÇÃO DE CALOR BIDIMENSIONAL

Nesta seção será apresentada a formulação básica do MEF para problemas bidimensionais em uma malha não-estruturada formada por elementos triangulares. Vale ressaltar que a formulação adotada aqui independe do tipo de discretização do domínio adotado, ou seja, tanto o emprego de malhas estruturadas como não-estruturadas se adequam perfeitamente ao conceito que foi empregado neste trabalho.

Decidiu-se inicialmente validar as rotinas fundamentais, principalmente em relação à montagem da matriz de rigidez do sistema (que depende somente da distribuição dos nós da malha), resolvendo a equação de calor bidimensional em regime permanente em uma placa plana, ou seja:

$$k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (3.1)$$

Esta equação possui resultado analítico segundo HOLMAN(1983) através de séries de Fourier, representando uma adequada referência para a validação do programa.

A formulação adotada para a implementação do programa será aquela que utiliza o método “*Point Collocation*” com a aproximação “*piecewise*” linear, ou seja, os nós onde serão calculadas as incógnitas são os vértices do triângulo, ao contrário da formulação “*Point Collocation*” com aproximação *piecewise* constante, onde os nós estão situados nos centróides dos triângulos da malha. Utilizou-se ainda a formulação fraca do *Método dos Resíduos ponderados* com o *Método de Galerkin*.

Será mostrado agora o processo de determinação dos coeficientes para a montagem das matrizes para o problema de condução de calor bidimensional. O problema a ser considerado é aquele onde se pretende resolver a equação de condução de calor em regime permanente em duas dimensões, ou seja:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + Q = 0 \text{ em } \Omega \quad (3.2)$$

com as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} \phi &= \bar{\phi} \text{ em } \Gamma_{\phi} \\ k \frac{\partial \phi}{\partial n} &= -\bar{q} \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde $\Gamma_{\phi} + \Gamma_q = \Gamma$. Aproximando a função desconhecida ϕ pela forma usual do elemento finito, têm-se:

$$\phi \cong \hat{\phi} = \sum_{m=1}^M \phi_m N_m \quad (3.4)$$

Pode-se notar que as condições de contorno em Γ_{ϕ} são imediatamente satisfeitas nos nós que estão em Γ_{ϕ} através da especificação dos valores nodais apropriados ϕ_m . Estes valores nodais são considerados desconhecidos neste estágio da formulação aqui apresentada, mas deverão ser especificados segundo seus valores logo mais adiante.

A forma fraca do **Método dos Resíduos Ponderados** usando **Galerkin**, ou seja, usando as funções de forma ou *shape functions* como sendo as funções de ponderação, fornece a seguinte expressão para o problema:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_l}{\partial x} k \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} + \frac{\partial N_l}{\partial y} k \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Omega} Q N_l dx dy - \int_{\Gamma_q} \bar{q} N_l d\Gamma, \quad l = 1, 2, 3, \dots, M \quad (3.5)$$

Inserindo as funções aproximadoras dadas pela equação (3.4) chega-se ao seguinte sistema de equações clássico:

$$\mathbf{K}\phi = \mathbf{f} \quad (3.6)$$

no qual as componentes das matrizes \mathbf{K} e \mathbf{f} são determinadas através da contribuição individual de cada elemento dadas através das seguintes relações:

$$K_{lm}^e = \int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial N_l^e}{\partial x} k \frac{\partial N_m^e}{\partial x} + \frac{\partial N_l^e}{\partial y} k \frac{\partial N_m^e}{\partial y} \right) dx dy \quad (3.7)$$

$$f_l^e = \int_{\Omega^e} Q N_l^e dx dy - \int_{\Gamma_q^e} N_l^e \bar{q} d\Gamma \quad (3.8)$$

Nestas expressões Ω^e é a superfície do elemento e , Γ_q^e é a parte do elemento que toca, ou de forma aproximada, uma porção de Γ_q . A integral ao longo de Γ_q^e na equação (3.8) somente aparecerá naqueles elementos que são adjacentes a Γ_q . Esta formulação de elementos finitos é completamente geral e para determinar os elementos

das matrizes em elementos triangulares ou retangulares deve-se inserir as funções de forma apropriadas.

As coordenadas nodais são especificadas subdividindo-se o domínio Ω através de triângulos. Considerando-se apenas as contribuições que são diferente de zero para $\mathbf{K}\phi$ na equação (3.6) para um elemento qualquer e , com nós i, j, k numerados no sentido **anti-horário** e situados nos vértices do mesmo, têm-se:

$$k^e \phi^e = \int_{\Omega^e} \overset{\text{Matriz A}}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}} dx dy \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

onde $\phi^e = \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \end{bmatrix}$ é vetor dos valores nodais para cada elemento, \mathbf{A} é uma matriz

simétrica e ainda:

$$\begin{aligned} a_{11} &= k \left[\left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right)^2 \right], a_{22} = k \left[\left(\frac{\partial N_j^e}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right)^2 \right], \\ a_{33} &= k \left[\left(\frac{\partial N_k^e}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial N_k^e}{\partial y} \right)^2 \right], a_{12} = a_{21} = k \left[\frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right], \\ a_{13} &= a_{31} = k \left[\frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_k^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_k^e}{\partial y} \right], \\ a_{23} &= a_{32} = k \left[\frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial N_k^e}{\partial x} + \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \frac{\partial N_k^e}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (3.10)$$

Os coeficientes das funções de forma de cada elemento são dados pelo sistema (1.2) e a área elementar Δ^e pode ser determinada através das equações (1.3) e (1.4). As derivadas das funções de forma requeridas nas equações (3.10) são calculadas diretamente através de:

$$\frac{\partial N_i^e}{\partial x} = \beta_i^e, \quad \frac{\partial N_i^e}{\partial y} = \gamma_i^e \quad (3.11)$$

As expressões para as derivadas das outras funções de forma elementares assumem formas semelhantes. Para a fronteira, será assumido nesta formulação que somente o lado do triângulo que une os nós i e j está situado no contorno do domínio. Caso k , Q e \bar{q} não sejam constantes, é conveniente, embora não seja essencial, considerá-los constantes no interior do elemento. Dessa forma k e Q podem ser substituídos pelos valores médios dentro do elemento k^e e Q^e respectivamente, enquanto \bar{q} pode ser trocado pela média \bar{q}^e ao longo do lado do elemento que representa parte da fronteira Γ_q . Observando-se que :

$$\int_{\Omega^e} dx dy = \Delta^e \quad (3.12)$$

a integração dada em (3.9) poderá ser realizada diretamente obtendo-se:

$$k^e \phi^e = k^e \Delta^e \begin{bmatrix} (\beta_i^e)^2 + (\gamma_i^e)^2 & \beta_i^e \beta_j^e + \gamma_i^e \gamma_j^e & \beta_i^e \beta_k^e + \gamma_i^e \gamma_k^e \\ \beta_i^e \beta_j^e + \gamma_i^e \gamma_j^e & (\beta_j^e)^2 + (\gamma_j^e)^2 & \beta_j^e \beta_k^e + \gamma_j^e \gamma_k^e \\ \beta_i^e \beta_k^e + \gamma_i^e \gamma_k^e & \beta_j^e \beta_k^e + \gamma_j^e \gamma_k^e & (\beta_k^e)^2 + (\gamma_k^e)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

A contribuição para o vetor de carregamento \mathbf{f} é obtida através da integração (3.8), notando que:

$$\int_{\Omega^e} N_i^e dx dy = \alpha_i^e + \beta_i^e \bar{X}^e + \gamma_i^e \bar{Y}^e \quad (3.14)$$

onde:

$$\bar{X}^e = \frac{x_i + x_j + x_k}{3}, \quad \bar{Y}^e = \frac{y_i + y_j + y_k}{3} \quad (3.15)$$

Obtém-se finalmente que:

$$f_i^e = \frac{1}{3} Q^e \Delta^e - \frac{1}{2} \bar{q}^e \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$

$$f_j^e = \frac{1}{3} Q^e \Delta^e - \frac{1}{2} \bar{q}^e \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$

$$f_k^e = \frac{1}{3} Q^e \Delta^e \quad (3.16)$$

Nas expressões acima os termos sublinhados somente surgirão nos nós i e j que estiverem no contorno do domínio, não aparecendo portanto nos elementos internos da malha.

3.1. ANÁLISE MATEMÁTICA DA CONDUÇÃO DE CALOR BIDIMENSIONAL

Será mostrado a seguir um método analítico segundo HOLMAN(1983) para a resolução do problema bidimensional da condução de calor. O desenvolvimento será realizado considerando a placa retangular mostrada na figura 3.1.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0 \quad (3.17)$$

Considerando K (condutividade térmica) constante, têm-se:

$$k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (3.18)$$

Em se tratando das condições de contorno, três lados da placa são mantidos a uma temperatura $T_1 = \text{cte}$ e sobre o outro lado existe uma dada distribuição de temperatura. Considerar-se-á para este último lado uma distribuição senoidal de temperatura.

O método de separação de variáveis é utilizado na resolução analítica da equação (3.18). O ponto fundamental deste método, segundo HOLMAN(1983), é que a solução da equação diferencial é admitida na forma do seguinte produto:

$$T = X Y, \text{ onde } X = X(x) \text{ e } Y = Y(y) \quad (3.19)$$

Voltando às condições de contorno, têm-se:

$$T = T_1 \quad \text{em } y = 0$$

$$T = T_1 \quad \text{em } x = 0$$

$$T = T_1 \quad \text{em } x = W$$

$$T = T_m \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{W} \right) + T_1 \quad \text{em } y = H \quad (3.20)$$

onde T_m é a amplitude da função seno. Substituindo a equação (3.19) na equação (3.18), têm-se:

$$-\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} \quad (3.21)$$

Observa-se que cada lado da equação acima é independente do outro, uma vez que x e y são variáveis independentes. Pode-se então obter duas equações diferenciais ordinárias em termos de uma constante, chamada de *constante de separação*:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \quad (3.22)$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} - \lambda^2 Y = 0 \quad (3.23)$$

A álgebra deste problema pode ser simplificada pela seguinte mudança de variáveis:

$$\theta = T - T_1 \quad (3.24)$$

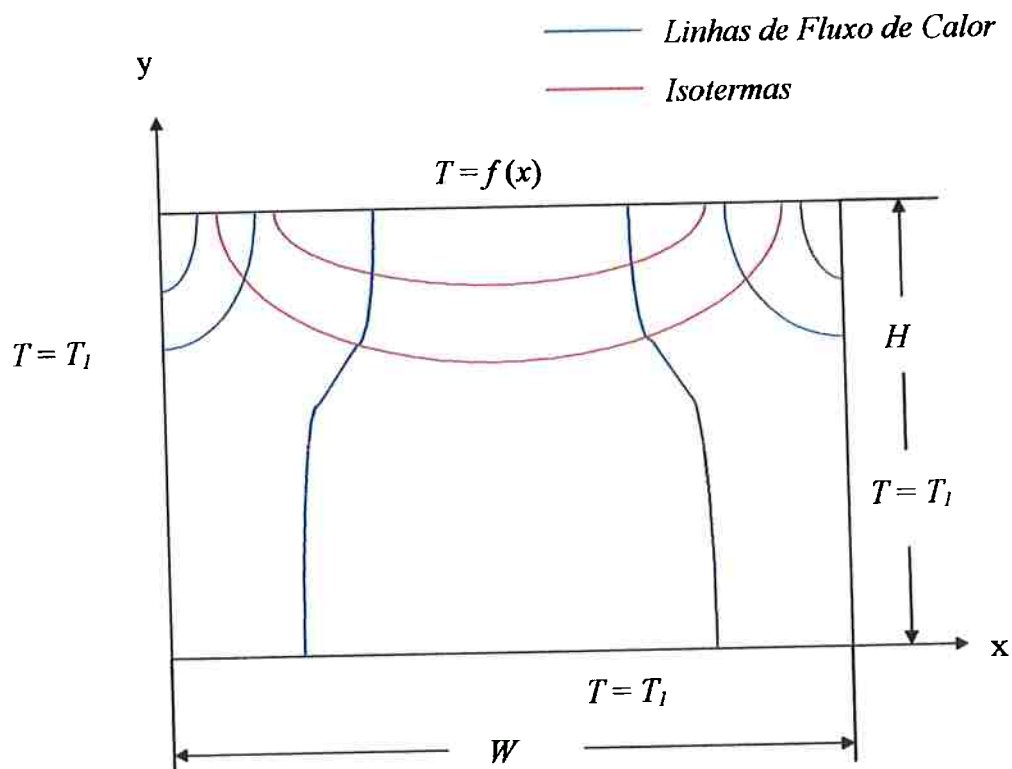


Fig. 3.1. Linhas de Fluxo de Calor e Isotermas em uma placa retangular. Ao longo de cada lado são mostradas as condições de contorno utilizadas.

Utilizando-se as 3 primeiras condições de contorno do problema (temperaturas constantes ao longo do lado da placa) e resolvendo-se as equações algébricas associadas chega-se à seguinte relação para o valor de λ :

$$\lambda = \frac{n \pi}{W} \quad (3.25)$$

Na equação acima n é um número inteiro. Dessa forma a solução da equação diferencial pode ser escrita como uma soma das soluções para cada valor de n . Uma vez que esta é uma soma infinita, a solução final será dada pela seguinte série infinita:

$$\theta = T - T_1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{W} \operatorname{senh} \frac{n\pi y}{W} \quad (3.26)$$

Nesta expressão as constantes foram combinadas e os termos exponenciais convertidos em uma função hiperbólica. Aplicando-se a condição de contorno final (distribuição senoidal), chega-se a:

$$T_m \operatorname{sen} \frac{\pi x}{W} - T_1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{W} \operatorname{senh} \frac{n\pi H}{W} \quad (3.27)$$

onde deve-se ter $C_n = 0$ para $n > 1$. A solução final será, portanto:

$$T = T_m \frac{\operatorname{senh}(\pi y / W)}{\operatorname{senh}(\pi H / W)} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{W}\right) + T_1 \quad (3.28)$$

Para a obtenção da distribuição de temperatura através da equação acima, foi realizado um programa em linguagem **FORTRAN** tomando-se uma malha não estruturada segundo AUADA(1997) e calculando-se o valor da temperatura nos nós da mesma. Foram utilizados os seguintes valores para os parâmetros T_m , T_1 , W e H :

$$T_m = 150^\circ\text{C}, T_1 = 30^\circ\text{C}, W = H = 40 \quad (3.29)$$

A visualização dos resultados foi feita através do programa **ENSIGHT** disponível no Laboratório de Computação Científica Avançada da USP (LCCA). A figura 3.2 mostra a malha onde foi calculada analiticamente a distribuição de temperatura. A visualização da malha foi feita através de programa específico elaborado por alunos de iniciação científica (MIYOSHI(1996)). A análise numérica que será apresentada posteriormente via MEF utilizou a mesma malha computacional.

3.2. ANÁLISE NUMÉRICA DA CONDUÇÃO DE CALOR BIDIMENSIONAL

Nesta etapa procurar-se-á mostrar os resultados obtidos para o problema bidimensional da condução de calor em uma placa plana em regime permanente, através do PCG. O domínio de interesse foi dividido em 3526 triângulos (1842 nós) através do gerador de malhas desenvolvido por AUADA(1997) baseado no método “Advancing Front”. Neste problema, o número de incógnitas (1686) corresponde às temperaturas dos nós internos que surgem quando da montagem da matriz de rigidez **K** e aplicação das condições de contorno.

A tabela 3.1 fornece uma análise detalhada dos resultados em termos das maiores e menores diferenças encontradas quando comparados mesmos com o resultado analítico e o resultado fornecido por CARDOSO(1997) através do código ALGOR, programa comercial que também utiliza o MEF.

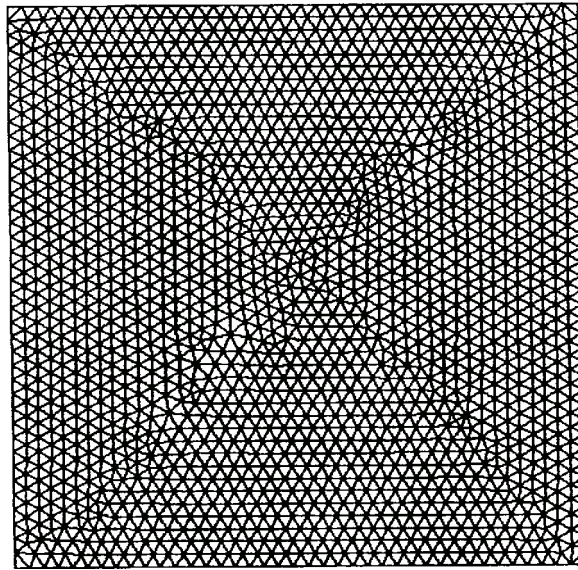


Fig. 3.2. Malha não-estruturada segundo AUADA(1997) utilizada para o problema bidimensional de condução de calor através do método numérico e plotada com o programa de visualização de malhas.

De uma forma geral, os resultados obtidos (figuras 3.4) estão de acordo com aqueles obtidos pelo método analítico (figura 3.3) dado por HOLMAN(1983) e pelo programa ALGOR (figura 3.5). A comparação foi feita em cada nó do domínio e o máximo erro encontrado entre a solução numérica e a analítica foi de 0.00954% e corresponde ao nó número 213, localizado próximo ao lado superior da placa.

Outro ponto interessante a ser observado é a eficiência do PCG em relação à obtenção da solução convergida. Dessa forma, uma comparação em termos de tempo real de CPU utilizado para a resolução do sistema linear de 1686 incógnitas do problema de condução de calor foi feita através do emprego de duas estações de trabalho com diferentes capacidades de processamento. Os resultados obtidos via PCG foram comparados com aqueles obtidos através da utilização do método CG e método clássico de Gauss-Seidel fornecido por SALTARA(1997).

A primeira estação de trabalho utilizada foi uma SparcStation 20 com 80MB de memória e a segunda uma DEC Alpha Station modelo 600 5/266 com 128MB de memória. A diferença em termos de tempo de processamento é considerável (aproximadamente 10 vezes mais rápida) quando se utiliza uma DEC Alpha Station conforme pode ser visto na figura 3.6. Este resultado é de importância prática quando se trata com problemas em regime transitório onde a economia de tempo é fundamental já que muitas iterações estão envolvidas durante a resolução do problema. Os resultados obtidos aqui também fazem parte do artigo intitulado "*The Preconditioned Conjugate Gradient Method for the Solution of Sparse Matrices: Finite Element Method Applications*" (SIQUEIRA & MENEGHINI(1997c)), publicado no Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica (COBEM 97) em Dezembro de 1997.

Segundo ARKELL(1997), mesmo o mais simples preconditionador obtido via "Diagonal Scalling" melhora drasticamente as taxas de convergência e quanto mais a diferença no tamanho dos elementos da malha maior a influência do preconditionador. Consequentemente, o "Diagonal Scalling" não é efetivo na taxa de convergência de um problema que possui elementos regulares e de mesmo tamanho. Outro tipo de preconditionador que pode ser empregado e é largamente utilizado é o ICCG (Incomplete Cholesky Factorisation) porém não é tão simples de ser implementado como o "Diagonal Scalling". Detalhes podem ser encontrados em BARRETT *et al.*(1992).

<i>Comparação Solução Analítica x Solução Numérica (PCG)*</i>	
Menor diferença percentual **	1.33E-06 %
Menor diferença absoluta	4.41E-07
Número do nó de ocorrência na malha não-estruturada	598
Temperatura do nó (solução analítica)	33.200
Temperatura do nó (solução PCG)	33.200
Maior diferença percentual **	9.54E-2 %
Maior diferença absoluta	0.043
Número do nó de ocorrência na malha não-estruturada	213
Temperatura do nó (solução analítica)	45.124
Temperatura do nó (solução PCG)	45.167
<i>Comparação Solução Numérica (ALGOR) x Solução Numérica (PCG)*</i>	
Menor diferença percentual ***	2.07E-06 %
Menor diferença absoluta	9.96E-07
Número do nó de ocorrência na malha não-estruturada	376
Temperatura do nó (solução ALGOR)	48.210
Temperatura do nó (solução PCG)	48.210
Maior diferença percentual ***	4.83E-03 %
Maior diferença absoluta	5.31E-3
Número do nó de ocorrência na malha não-estruturada	1157
Temperatura do nó (solução ALGOR)	109.950
Temperatura do nó (solução PCG)	109.955

Tabela 3.1. Comparação entre as soluções analítica, numérica (Preconditioned Conjugate Gradient Method)* e numérica via programa ALGOR para o problema bidimensional de condução de calor empregando uma malha não-estruturada.

$$** = \frac{|T_{analítica} - T_{PCG}|}{T_{analítica}} * 100, \quad *** = \frac{|T_{ALGOR} - T_{PCG}|}{T_{ALGOR}} * 100.$$

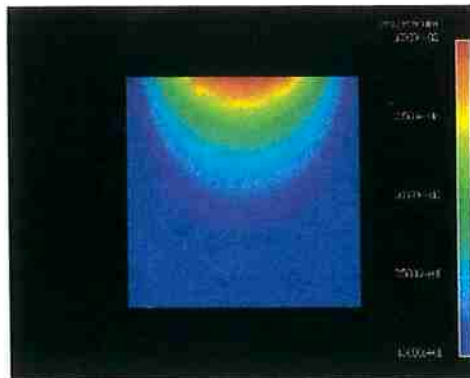


Fig. 3.3. Isothermas do problema bidimensional de condução de calor através do método analítico empregando uma malha não-estruturada.

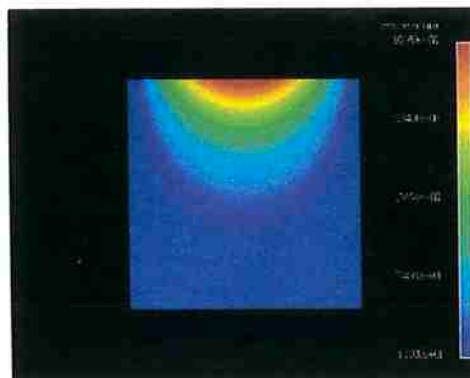


Fig. 3.4. Isothermas do problema bidimensional de condução de calor através do método numérico (PCG) empregando uma malha não-estruturada.

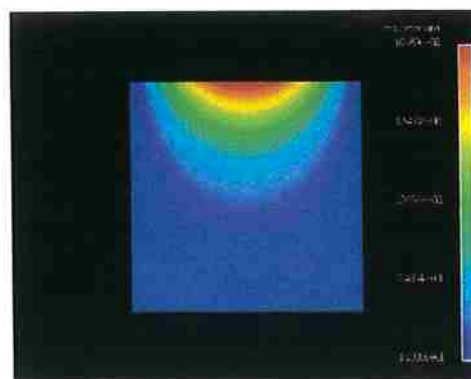
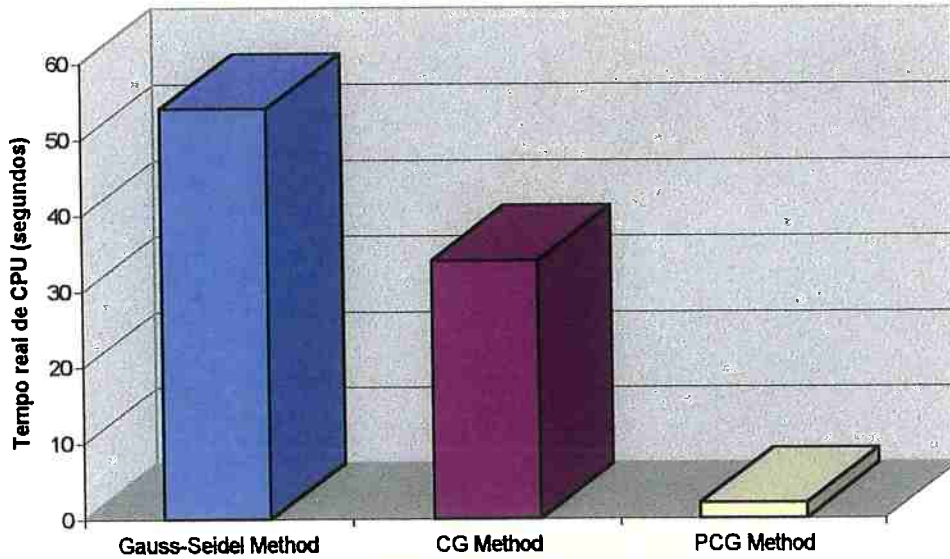


Fig. 3.5. Isothermas do problema bidimensional de condução de calor através do programa ALGOR empregando uma malha não-estruturada.

**Comparação de performance na resolução de um sistema linear de 1686 incógnitas
(Sun SparcStation 20)**



**Comparação de performance na resolução de um sistema linear de 1686 incógnitas
(DEC Alpha Station 600 modelo 5/266)**

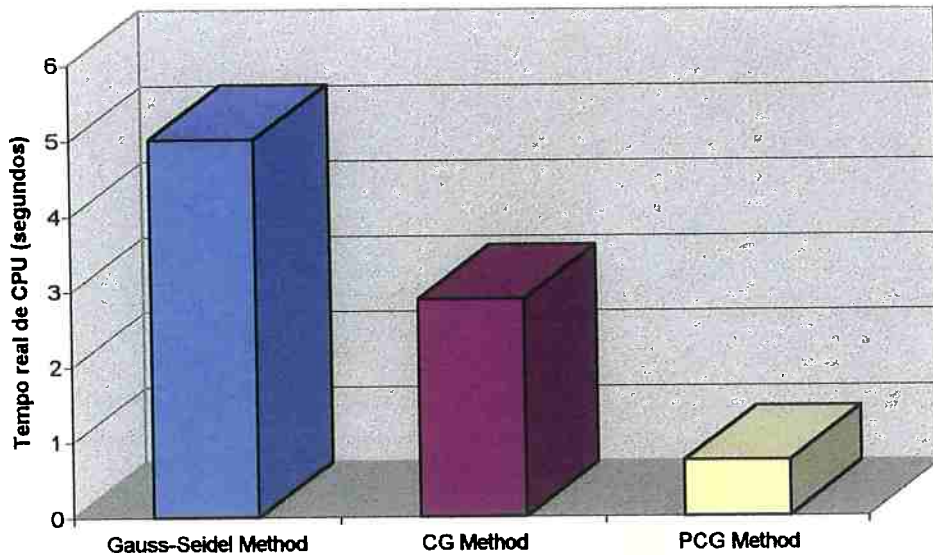


Fig. 3.6. Comparação de performance entre os métodos Gauss-Seidel, Conjugate Gradient (CG) e Preconditioned Conjugate Gradient (PCG) na resolução de um sistema linear de 1686 incógnitas. Utilização de duas estações de trabalho com diferentes capacidades de processamento.

4. APLICAÇÃO FUNDAMENTAL DO CONCEITO DE ELEMENTO FINITO PARA PROBLEMAS TRIDIMENSIONAIS

4.1. INTRODUÇÃO E CONSIDERAÇÕES GERAIS

Nesta seção são apresentados os estudos desenvolvidos para checar a validade das rotinas fundamentais preliminares para a resolução de problemas tridimensionais. Para tal tarefa foi estudado o caso fundamental da **modelagem e propagação tridimensional de um anel de vortons invíscido em uma malha não-estruturada**, comparando os resultados obtidos para a velocidade do anel com resultados analíticos fornecidos por WIDNALL et al.(1974). Dessa forma, através da resolução do problema do anel tridimensional de vortons invíscido, as seguintes etapas foram validadas:

- Montagem da matriz de rigidez \mathbf{K} para problemas tridimensionais envolvendo operadores de Laplace e/ou Poisson;
- Cálculo dos termos fonte nas equações da velocidade nas três direções;
- Resolução do campo de velocidade através da formulação *velocidade-vorticidade* nos nós da malha (lembrando que no caso tridimensional a formulação *função de corrente-vorticidade* não é válida);
- Interpolação do campo de velocidades para os vortons;
- Convecção dos vortons ao longo de um dado passo no tempo;
- Algoritmo de busca de vortons no espaço tridimensional;
- Interpolação das propriedades do vorton de volta à malha computacional.

Antes de serem apresentados os resultados obtidos para o problema do anel de vortons invíscido, será mostrado a seguir um estudo detalhado baseado no trabalho

desenvolvido por ARKELL(1995) sobre a representação do modelo de vortons para um filamento infinito. Este estudo é o ponto de partida para a compreensão fundamental do problema do anel de vortons invíscido tridimensional.

Os resultados obtidos aqui também fazem parte do artigo intitulado "*Three Dimensional Vortex Particle Method on an Unstructured Finite Element Mesh: Tracking the development of an Inviscid Vortex Ring*", publicado no 17º Congresso Nacional de Transportes Marítimos, Construção Naval e Offshore (SOBENA 98), em Setembro de 1998.

4.2. GENERALIZAÇÃO DO CONCEITO DE VORTON

Segundo pode ser visto em ARKELL(1995), o vorton é um objeto do tipo vórtice, sendo o análogo tridimensional do vórtice discreto bidimensional. O vórtice discreto é uma linha vortical infinitamente longa que quando intercepta um plano ortogonal faz aparecer um ponto nesta região. Uma vez que o mesmo se estende ao infinito e sua circulação é constante, ele representa um campo de vorticidade solenoidal onde a divergência da vorticidade é zero em qualquer região. O vorton, por sua vez, "termina" no espaço e é portanto um monopolo.

O problema da manutenção da divergência da vorticidade igual a zero através de um conjunto finito de vortons para um problema incompressível genérico é um dos principais argumentos contra o uso deste tipo de objeto, conforme pode ser visto em ARKELL(1995). Entretanto, o uso dos vortons está se tornando popular devido

principalmente à flexibilidade e simplicidade que os mesmos oferecem ao se estudar estruturas de fluido tridimensionais complexas. Além disso, os problemas que serão enfocados no atual projeto de pesquisa estão inseridos neste contexto, uma vez que possíveis erros na divergência de vorticidade são levados a jusante juntamente com o escoamento e não se acumulam nas vizinhanças do cilindro. Já os problemas de escoamentos internos recirculantes devem requerer um enfoque diferente segundo ARKELL(1995).

A vorticidade $\vec{\omega}$ é representada por um conjunto finito de vortons:

$$\vec{\omega}(\vec{x}, t) = \sum_{\alpha} \vec{k}_{\alpha}(t) \delta(\vec{x} - \vec{x}_{\alpha}) \quad (4.1)$$

A lei de Biot-Savart aplicada a esta representação elementar do campo de vorticidade fornece o campo de velocidades induzidas na vizinhança de um vorton α :

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \frac{\vec{k}_{\alpha} \wedge (\vec{x} - \vec{x}_{\alpha})}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}_{\alpha}|^3} \quad (4.2)$$

Na ausência de viscosidade, a intensidade dos vortons torna-se função do tempo devido ao termo de “stretching” que existe na equação de transporte tridimensional de vorticidade. Nos métodos puramente Lagrangianos, a evolução dos vortons poderia, segundo ARKELL(1995), ser representada da seguinte forma:

$$\frac{d\vec{x}_{\alpha}}{dt} = \vec{u}_0(\vec{x}_{\alpha}, t); \quad \frac{d\vec{k}_{\alpha}}{dt} = (\vec{k}_{\alpha} \cdot \nabla) \vec{u}_0(\vec{x}_{\alpha}, t) \quad (4.3)$$

onde a primeira equação representa as mudanças do campo de vorticidade devido à convecção dos vortons e a segunda devido ao estiramento dos vórtices. SAFFMAN e

MEIRON(1986) apud ARKELL(1995) mostraram que tal formulação não constitui uma solução fraca para a equação de transporte de vorticidade, violando a invariância da vorticidade e a conservação do *momentum*. Entretanto, WINCKELMANS e LEONARD(1988) apud ARKELL(1995) mostraram que usando uma expressão diferente para o termo de “stretching” obtém-se uma solução fraca. Estes autores implementaram a seguinte forma para a evolução dos vortons:

$$\frac{d \vec{x}_\alpha}{d t} = \vec{u}_0(\vec{x}_\alpha, t), \quad \frac{d \vec{k}_\alpha}{d t} = (\vec{k}_\alpha \cdot \nabla^T) \vec{u}_0(\vec{x}_\alpha, t) \quad (4.4)$$

A forma transposta é derivada da forma padrão (equação 4.3) por meio da relação $\vec{\omega} = \nabla \wedge \vec{u}$.

No presente método, o termo de estiramento de vórtices está incluído na solução da equação de transporte de vorticidade, a qual é obtida através do Método dos Elementos Finitos sobre o domínio discretizado. Dessa forma, a vorticidade é por definição uma solução fraca da equação de transporte.

Como idéia final da utilização de vortons na modelagem de escoamentos incompressíveis considerar-se-á o caso de uma linha de vortons. Esta linha pode ser modelada através de um conjunto de vortons equidistantes com espaçamento h .

A linha de vortons é paralela ao eixo z , a circulação da linha de vortons é dada (arbitrário) por $\Gamma = 2\pi$ e a intensidade de cada vorton é igual a Γh . Se $q = (u^2 + v^2)^{1/2}$, sabe-se que $q = \frac{\Gamma}{2\pi r}$, onde $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$, de tal forma que a integral da velocidade ao longo de qualquer contorno (em um plano ortogonal à linha de vortons) que contém o

Um dado vorton é igual a Γ . Este fato não se aplica para um vorton simples e qualquer integral de linha do campo de velocidades que inclui um dado vorton não será, de uma forma geral, igual a Γ (a integral de superfície ao redor de qualquer volume que contém um dado vorton possui um valor constante igual a $|\vec{k}|$, intensidade do vorton).

A questão que surge é a seguinte: quão bem uma série de vortons pode modelar uma linha de vortons? O problema é considerado através da análise da variação na velocidade q que é induzida a uma distância radial r do vorton em função do parâmetro de espaçamento h/r , comparando-se o resultado com a linha de vortons. A figura 4.1 apresenta de forma esquemática o problema em questão.

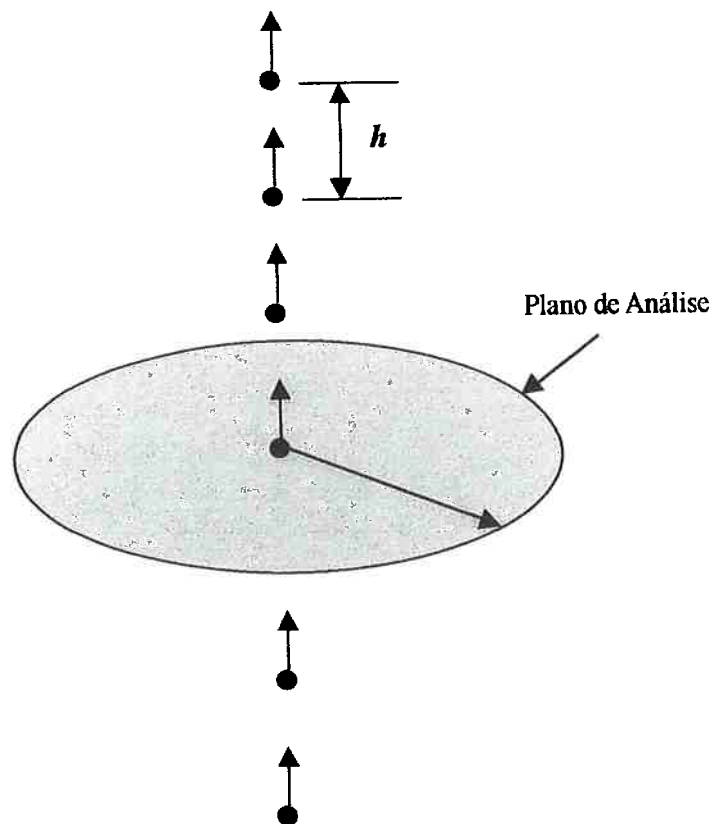


Fig. 4.1. Esquema do problema da linha de vortons.

Para o problema em questão $\vec{k} = (0, 0, k_z)$ e no caso da análise do plano que intercepta um dos vortons, têm-se, utilizando-se uma extensão da lei de Biot-Savart (ARKELL(1995)):

$$q(r) = \frac{k_z}{4\pi} \left[\frac{1}{r^2} + \frac{2r}{(r^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2r}{(r^2 + (2h)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2r}{(r^2 + (3h)^2)^{\frac{3}{2}}} + \dots \right] \quad (4.5)$$

no plano, onde o fator 2 surge da contribuição dos vortons acima e abaixo do plano. No caso de um modelo de uma linha de vortons infinita, a equação (4.5) é escrita na seguinte forma:

$$q(r) = \frac{k_z}{4\pi} \left[\frac{1}{r^2} + \frac{2}{r^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2r}{(1 + m^2 (h/r)^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \quad (4.6)$$

Para uma linha de vortons, têm-se $r q(r) = 1 \forall r$. Assim sendo, torna-se necessário saber de que forma a função dada abaixo se aproxima do valor 1.

$$f = \frac{1}{2} \left[\frac{h}{r} + 2 \frac{h}{r} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + m^2 (h/r)^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \quad (4.7)$$

A figura 4.2 mostra o comportamento da função f através da variação do parâmetro h/r segundo ARKELL(1995). Dois casos estão representados nesta figura: 1) caso em que o plano de análise intercepta um vorton (caso a) e 2) caso em que o plano equidista de dois vortons consecutivos (caso b). Para o primeiro caso (caso a) à medida que a velocidade tende ao infinito ($q \rightarrow \infty$) o raio r tende a zero. Já no segundo caso quando a velocidade q tende a zero r também tende a zero.

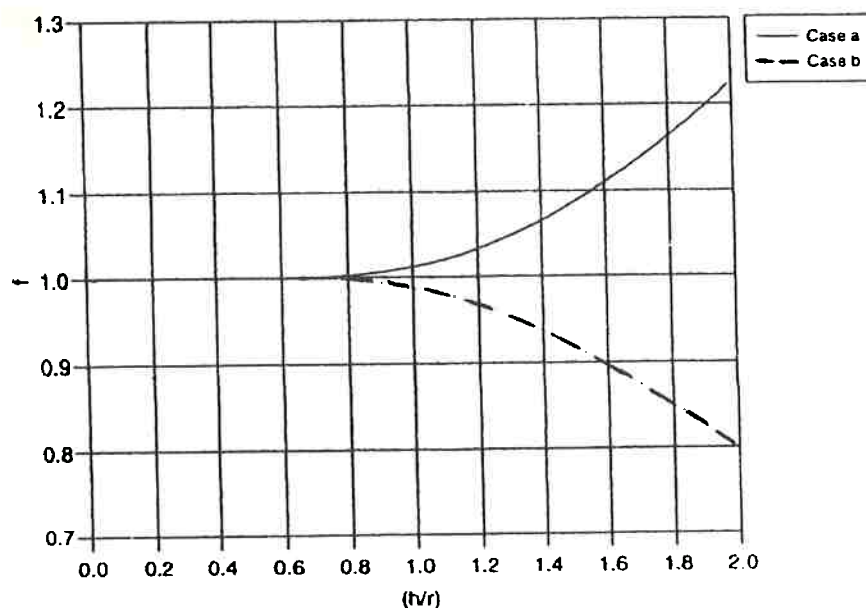


Fig. 4.2. Representação do modelo de vortons para uma linha infinita de vortons segundo ARKELL(1995). O parâmetro h/r é o espaçamento entre os vortons. Para o caso da linha de vortons $f=1 \forall r$.

Segundo ARKELL(1995), esta figura mostra as limitações do modelo do vorton: longe do eixo da linha de vortons, não se consegue distinguir o modelo da linha de vortons, mas, ao se aproximar do eixo, a qualidade “granular” do vorton torna-se aparente. Em qualquer caso, quando $r > 1.25 h$ para qualquer dos planos de análise citados, o conjunto de vortons modela o campo de velocidades de uma maneira satisfatória.

Vale ressaltar que o MVD não pode modelar estruturas vorticais menores que o tamanho do elemento da malha computacional. Dessa forma, pode parecer que para um espaçamento $h/r = 1.0$ o modelo aqui proposto não é adequado (isto possui implicações nas razões de aspecto dos elementos). Entretanto, a modelagem de um linha de vortons não é a meta principal do MVD.

4.3. PROPAGAÇÃO TRIDIMENSIONAL DE UM ANEL DE VORTONS INVÍSCIDO

Nesta seção serão apresentados os resultados para o caso fundamental da **propagação tridimensional de um anel de vortons invíscido em uma malha não-estruturada**, comparando-se os resultados obtidos para a velocidade do anel com os resultados analíticos fornecidos por WIDNALL et al.(1974).

Os dois primeiros termos da série que expressa a velocidade de um anel invíscido são dados através da seguinte expressão, segundo WIDNALL et al.(1974):

$$v = \frac{\Gamma}{4\pi R} \left[\ln\left(\frac{8R}{\sigma}\right) - \frac{1}{4} \right] \quad (4.8)$$

onde Γ é a circulação, R é o raio do anel e σ a espessura do anel (“core size”). A figura 4.3 ilustra o anel de vortons modelado e implementado via MVD + MEF 3D para malhas não-estruturadas.

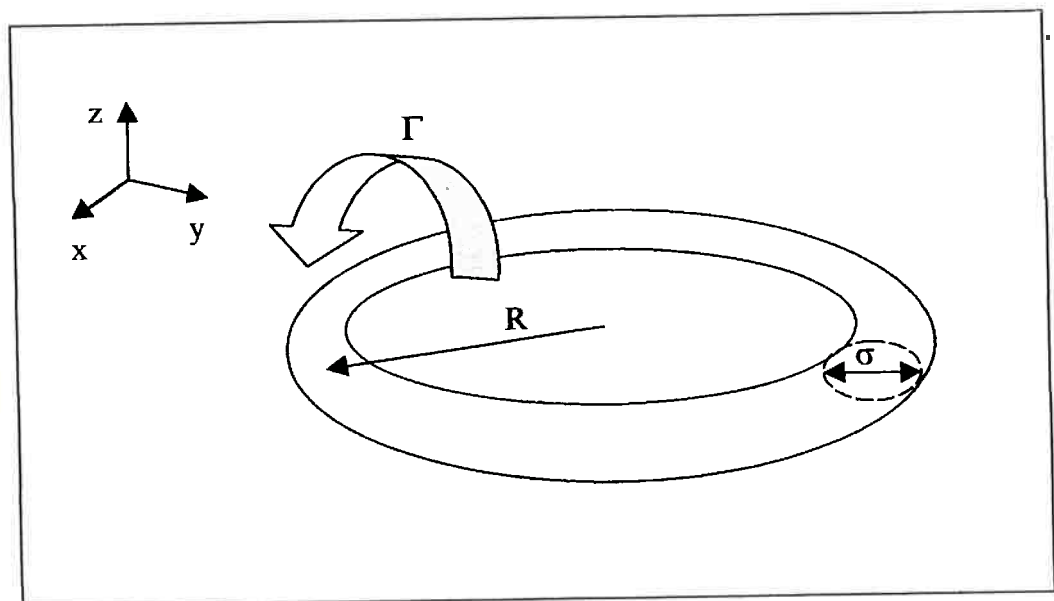


Fig. 4.3. Configuração do anel de vortons invíscido.

Analisando-se a expressão (4.8) nota-se que à medida que $\sigma \rightarrow 0$, $\nu \rightarrow \infty$. O anel de vortons foi modelado através da utilização de 100 vortons distribuídos no plano x - y de maneira regular (espaçamento constante). A espessura teórica do anel é zero, mas, devido à discretização do domínio computacional e o método de interpolação das propriedades do vorton para os nós do elemento (tetraedro) que o contém em determinado instante computacional, existe uma espessura efetiva do anel. De uma forma geral, o anel possuirá uma espessura proporcional a uma certa dimensão característica da malha, aqui considerada como sendo o espaçamento típico entre dois nós em um dado elemento. Assim, quanto maior o refinamento da malha, mais rápido o anel tenderá a se propagar.

Três malhas computacionais foram utilizadas para a determinação da propagação tridimensional do anel de vortons invíscido. Observar-se-á através do gráfico da distância percorrida pelo anel em função do tempo (figura 4.5) que, à medida que a malha é refinada, a curva tende de maneira assintótica a um par velocidade do anel e espessura, esta última podendo ser obtida analiticamente através do re-arranjo da expressão (4.8):

$$\sigma = 8 R \exp \left[- \left[\frac{4 \pi R \nu}{\Gamma} + \frac{1}{4} \right] \right] \quad (4.9)$$

Os valores obtidos através do uso da expressão acima são comparados com o espaçamento típico entre dois nós em um dado elemento. Também poderá ser visto adiante que a redução no tamanho dos elementos obtida através do refinamento da malha conduz a um aumento da velocidade, indicando que a espessura efetiva do anel é reduzida.

A figura 4.4 mostra as três malhas computacionais utilizadas. Deve-se ressaltar o grau de discretização obtido para a malha mais refinada, com quase 100.000 elementos. Para o problema em questão, adotou-se $R = 5.0$ e $\Gamma = 1.5$.

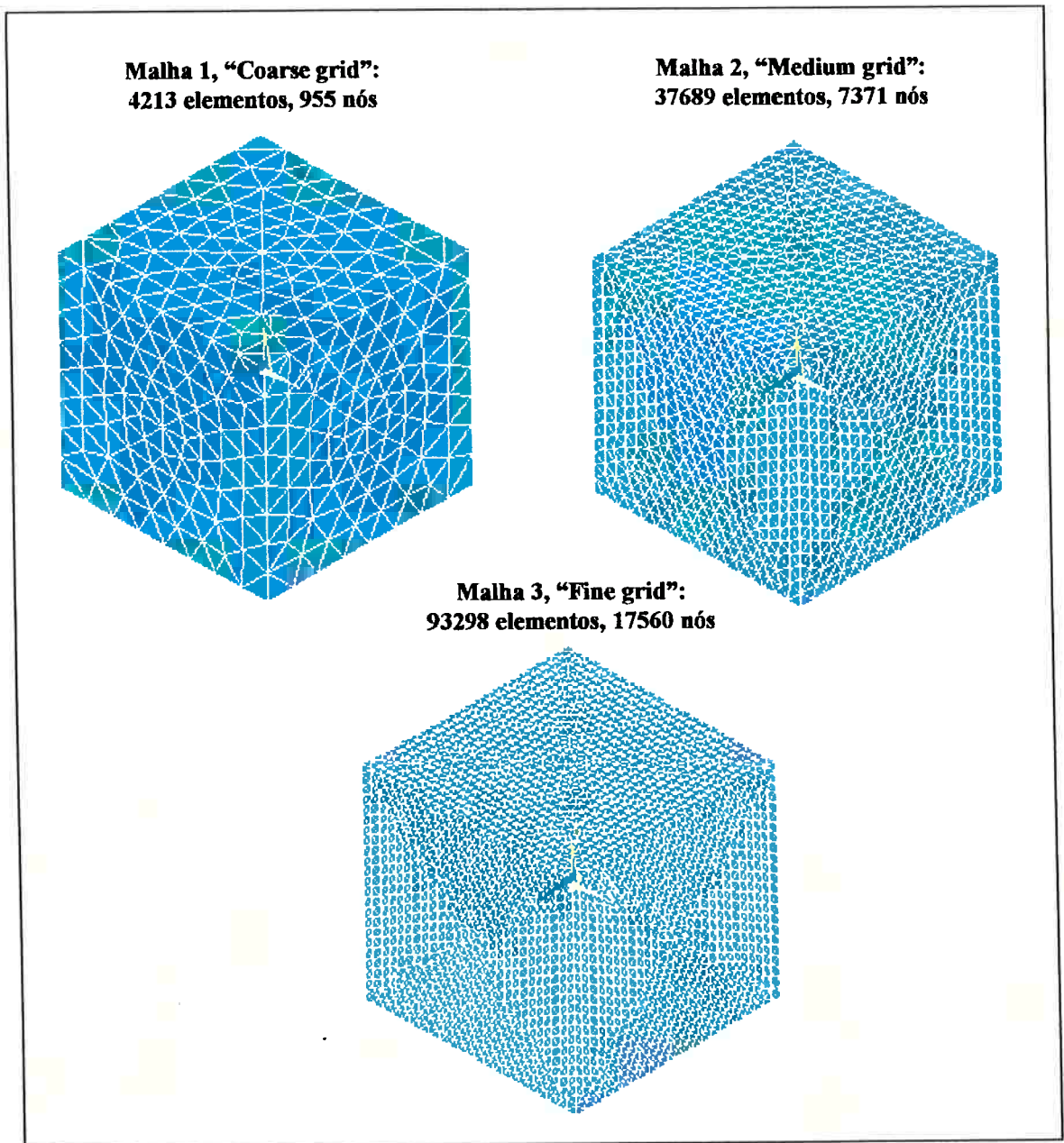


Fig. 4.4. Malhas computacionais para o problema da propagação tridimensional do anel de vortons invíscido.

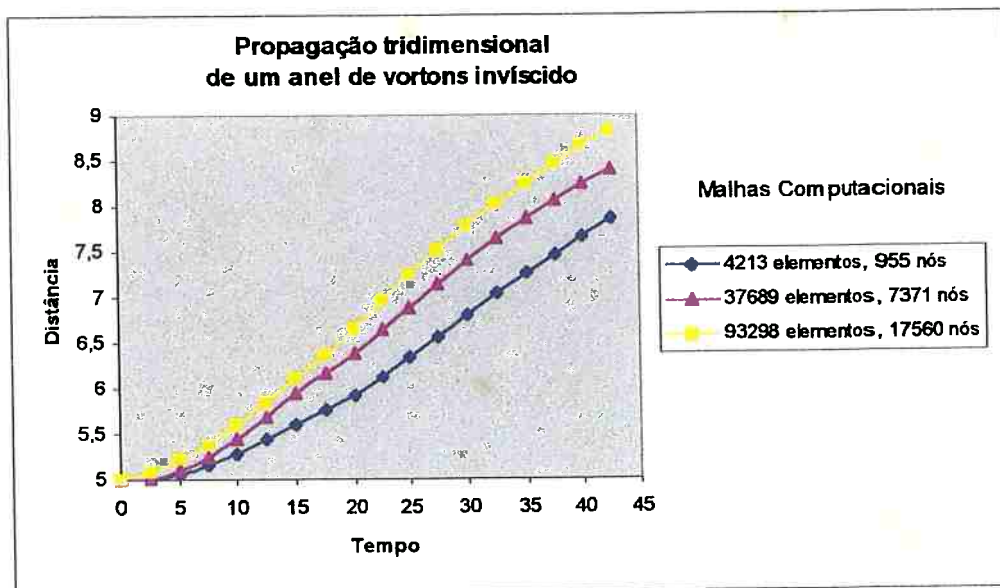


Fig. 4.5. Propagação tridimensional de um anel de vortons invíscido em função do tempo para três malhas não-estruturadas.

A tabela 4.1 dada a seguir mostra um resumo dos resultados. A partir da velocidade do anel, calculada de forma numérica, pode-se estimar a espessura do mesmo via expressão (4.9). A relação entre o tamanho típico do elemento e o “core size” resultou, em média, próximo do valor unitário (1.20), concluindo-se que a espessura do anel de vortons “colapsa” aproximadamente ao longo de um elemento.

	Velocidade	Core size	Tamanho típico do elemento	Tamanho típico do elemento/ Core size
“Coarse grid”	0.0673	1.859	2.5	1.34
“Medium grid”	0.0802	1.083	1.176	1.09
“Fine grid”	0.0901	0.715	0.833	1.17
			Média	1.20

Tabela 4.1. Resumo dos resultados para o problema da propagação tridimensional do anel de vortons invíscido