

CARLOS RODRIGUES PEREIRA BELCHIOR

Engenheiro Naval, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1970

Mestre em Engenharia, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1978

UM ESTUDO SOBRE  
VIBRAÇÕES TORCIONAIS EM INSTALAÇÕES  
PROPULSORAS E AUXILIARES MARÍTIMAS

Tese apresentação à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, para a obtenção do Título de Doutor em Engenharia

Orientador: Prof. HERNANI LUIZ BRINATI  
Professor Assistente Doutor do  
Departamento de Engenharia Naval da EPUSP

São Paulo, 1982

Aos meus  
professores.

## AGRADECIMENTOS

À Marinha do Brasil, por me ter proporcionado a oportunidade de servir no Escritório Técnico de Construção Naval, gozando do incentivo e da amizade de Chefes, Colegas e Professores da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Ao Professor Hernani Luiz Brinati pela inteligente orientação que sempre imprimiu ao trabalho da tese. Demonstrando grande sensibilidade, entusiasmo, capacidade de trabalho e paciência, atuou, como um verdadeiro supervisor de toda pesquisa desenvolvida. Estou certo que sem a sua colaboração na correção da redação da tese, seria impossível uma apresentação correta de todo o texto.

Aos Professores Ronaldo de Breyne Salvagni, Carlos Alberto Nunes Dias e Octavio Maizza Neto pelos ensinamentos de vibrações prestados constantemente durante o desenvolvimento do trabalho.

Ao Professor Moyses Szajnbock pela cooperação na correção dos primeiros capítulos do texto, quando soube prestar a orientação adequada para uma correta apresentação de toda tese.

Ao Professor Tiago Alberto Piedras Lopes da COPPE - UFRJ, por sua participação interessada e eficiente nas realizações das medidas experimentais da tese.

Ao Engenheiro Oscar Brito Augusto pela sua inteligente cooperação nos programas de computador da tese.

Ao 3ºSG-ES Francisco Gomes da Silva pelo excelente trabalho de datilografia do texto.

Ao. Sr. Manoel Garcia Peres pelo ótimo trabalho em desenho e gráficos.

A minha esposa Ana Maria, pelo seu incentivo, compreensão e paciência.

## RESUMO

Este trabalho descreve uma pesquisa realizada sobre vibrações torcionais de instalações propulsoras e auxiliares marítimas acionadas por motor Diesel. Em instalações deste tipo tem ocorrido problemas sérios de vibração que podem ser evitados com o estudo cuidadoso do problema. É desenvolvido com este objetivo um procedimento de cálculo de vibração torcional e correspondente programa de computador para aplicação em projeto e análise das referidas instalações; adicionalmente, estabelece-se uma correlação entre as técnicas modernas usadas na formulação do procedimento e os métodos convencionais de cálculo. O procedimento é aplicado a alguns exemplos para analisar o comportamento dinâmico das instalações, bem como examinar métodos de controle e atenuação das vibrações. A realização de medidas de vibração em motores ensaiados em banco de provas é utilizada para comprovação do procedimento de cálculo.

## ABSTRACT

This work is concerned with the investigation on torsional vibration of marine propulsion and auxiliary power plants driven by Diesel engines. Severe vibration problems that have occurred in this type of systems could be avoided by a careful study in the design stage. It is developed with this purpose a calculation procedure of torsional vibrations, and a corresponding computer program, to be used in the design and analysis of the mentioned power plants; furthermore, a correlation

is established between the modern techniques, upon which the proposed procedure is based and the conventional calculation methods. The procedure is applied to some examples to analyze the system dynamic behavior as well as to evaluate different methods of vibration control and attenuation. Vibration measures taken from test-bed engine trials are used to check the calculation method.

I N D I C E

|            |   |  |      |
|------------|---|--|------|
| CAPÍTULO 1 | - | INTRODUÇÃO .....   | 1.1  |
| 1.1        | - | Descrição do problema.....   | 1.1  |
| 1.2        | - | Revisão bibliográfica.....   | 1.2  |
| 1.3        | - | Objetivo do trabalho.....  | 1.6  |
| CAPÍTULO 2 | - | VIBRAÇÃO TORCIONAL DE EIXOS.....   | 2.1  |
| 2.1        | - | Os Sistemas.....   | 2.1  |
| 2.2        | - | Modelagem.....   | 2.2  |
| 2.3        | - | Cuidados no Projeto.....   | 2.12 |
| CAPÍTULO 3 | - | MÉTODOS DE ANÁLISE.....  | 3.1  |
| 3.1        | - | Vibração de Sistemas de Múltiplos Graus de Liberdade.....                                  | 3.2  |
| 3.1.1      | - | Equação diferencial matricial do problema dinâmico.....                                    | 3.2  |
| 3.1.2      | - | Método de superposição modal.....  | 3.7  |
| 3.1.3      | - | Aplicação da superposição modal para análise dinâmica.....                                 | 3.16 |
| 3.2        | - | Equação do Movimento para Vibração Torcional de Sistemas Propulsores.....                  | 3.18 |
| 3.3        | - | Determinação de Frequências Naturais e Modos de Vibrar.....                                | 3.25 |
| 3.4        | - | Análise da Excitação.....  | 3.29 |
| 3.4.1      | - | Conjugado devido a pressão do gás.....   | 3.29 |
| 3.4.2      | - | Conjugado devido a variação do momento de inércia.....                                     | 3.35 |
| 3.4.3      | - | Conjugados secundários.....  | 3.41 |
| 3.4.4      | - | Conjugado devido ao hélice.....  | 3.42 |
| 3.4.5      | - | Velocidades Críticas.....  | 3.46 |
| 3.4.6      | - | Combinação dos efeitos - Energia introduzida.....  | 3.47 |
| 3.4.6.1    | - | Conjugados devido a pressão do gás e a variação de inércia em motores monocilíndricos..... | 3.47 |

|   |      |
|---|------|
| 3.4.6.2 - Motor Multicilíndrico.....                        | 3.50 |
| 3.4.6.3 - Interação entre motor e propulsor                 | 3.57 |
| 3.5 - Amortecimento.....                                    | 3.61 |
| 3.6 - Determinação das Respostas.....                       | 3.66 |
| 3.6.1 - Amplitudes de vibração.....                         | 3.66 |
| 3.6.2 - Correspondência entre métodos.....                  | 3.70 |
| 3.6.3 - Tensões de vibração.....                            | 3.72 |
| 3.6.4 - Critérios para determinação de valores máximos..... | 3.74 |
| 3.7 - Procedimento de Cálculo.....                          | 3.74 |
| 3.7.1 - Cálculo de frequências e modos de vibrar            | 3.75 |
| 3.7.2 - Cálculo de respostas.....                           | 3.75 |
| 3.7.3 - Cálculo de Resposta Total.....                      | 3.77 |
| 3.7.4 - Diagrama de Blocos de Programa de Computador.....   | 3.78 |
| <br>  |      |
| CAPÍTULO 4 - RESULTADOS.....                                | 4.1  |
| <br>  |      |
| 4.1 - Cálculo de Frequências Naturais.....                  | 4.1  |
| 4.2 - Determinação da Resposta do Sistema..                 | 4.7  |
| 4.2.1 - Instalação propulsora com redução....               | 4.7  |
| 4.2.2 - Instalação diesel direta.....                       | 4.14 |
| 4.2.3 - Sistema motor gerador.....                          | 4.20 |
| <br>  |      |
| CAPÍTULO 5 - COMPROVAÇÃO EXPERIMENTAL.....                  | 5.1  |
| <br>  |      |
| 5.1 - Considerações Gerais.....                             | 5.1  |
| 5.2 - Descrição dos Métodos de Medidas.....                 | 5.2  |
| 5.3 - Aparelhos de Medida.....                              | 5.6  |
| 5.4 - Realização dos Ensaios.....                           | 5.10 |
| 5.5 - Resultados Experimentais.....                         | 5.13 |
| 5.6 - Comparação dos Resultados.....                        | 5.31 |
| <br>  |      |
| CAPÍTULO 6 - MÉTODOS DE CONTROLE DE VIBRAÇÃO TORCIONAL..... | 6.1  |
| <br>  |      |
| 6.1 - Instalação Propulsora com Redução....                 | 6.1  |
| 6.2 - Motor com Acoplamento Direto.....                     | 6.6  |
| 6.3 - Motor Gerador.....                                    | 6.12 |



|              |   |      |
|--------------|---|------|
| CAPÍTULO 7 - | CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES.....                               | 7.1  |
| 7.1 -        | Resumo do Trabalho.....                                       | 7.1  |
| 7.2 -        | Conclusões.....   | 7.3  |
| 7.3 -        | Recomendações.....  | 7.5  |
| CAPÍTULO 8 - | REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....                               | 8.1  |
| APÊNDICES    |   |      |
| A -          | Sistemas Equivalentes.....                                    | A.1  |
| B -          | Método de Holzer.....   | B.1  |
| C -          | Método Tabular Para Cálculo da Somató-<br>ria de vetores..... | C.1  |
| D -          | Descrição do Programa de Computador..                         | D.1  |
| D.1 -        | Descrição do Programa de Computador..                         | D.1  |
| D.2 -        | Exemplo de Aplicação - Motor 14V23LU.                         | D.23 |
| D.3 -        | Listagens do Programa Principal.....                          | D.44 |
| D.4 -        | Listagem do Programa Autovalores.....                         | D.67 |
| D.5 -        | Programa Autovalores - SAPIV.....                             | D.68 |
| E -          | Fotografias dos Ensaios.....                                  | E.1  |
| F -          | Resultados dos Ensaios Não Aproveita-<br>dos.....             | F.1  |

## NOTAÇÃO

Os nomes das variáveis e o significado de cada uma são definidos à medida que aparecem nos diversos capítulos. Acredita-se que isto facilite a compreensão do texto e sua leitura.

Os símbolos matemáticos utilizados têm o significado usual.

## LISTA DE FIGURAS

|   | pág. |
|---|------|
| 2.1 - Sistema Propulsor Marítimo com Motor Diesel de Baixa Rotação. . . . .   | 2.3  |
| 2.2 - Sistema Propulsor com Motor Diesel de Média ou Alta Rotação. . . . .  | 2.3  |
| 2.3 - Sistema Propulsor com Dois Motores Diesel por Eixo.   | 2.4  |
| 2.4 - Instalação Propulsora Combinada Motor Diesel - Turbina à gás. . . . .   | 2.5  |
| 2.5 - Sistema Motor Gerador . . . . .   | 2.6  |
| 2.6 - Sistema Equivalente da Instalação Mostrada na Figura 2.1. . . . .   | 2.7  |
| 2.7 - Sistema Equivalente da Instalação Mostrada na Figura 2.2. . . . .   | 2.8  |
| 2.8 - Sistema Equivalente da Instalação Mostrada na Figura 2.3. . . . .   | 2.9  |
| 2.9 - Sistema Equivalente da Instalação Mostrada na Figura 2.4. . . . .   | 2.10 |
| 2.10 - Sistema Equivalente da Instalação Mostrada na Figura 2.5. . . . .  | 2.10 |
| 2.11 - Sistema Equivalente Completamente Modelado de uma Instalação Genérica Composta de n Massas (Discos) .        | 2.12 |
| 3.0 - a) Discretização dos Esforços que atuam num Sistema de n pontos. . . . .                                      | 3.3  |
| b) Deformação da Estrutura Definida por um Conjunto de Deslocamento $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ . . . . . | 3.3  |
| 3.1 - Sistema Torcional de n Massas . . . . .   | 3.18 |

|      |   |   |      |
|------|---|---|------|
| 3.2  | - | Modelo das Massas de um Cilindro em Movimento Harmônico . . . . .   | 3.19 |
| 3.3  | - | Sistema Torcional Equivalente. . . . .  | 3.25 |
| 3.4  | - | Representação Esquemática do Conjugado devido à pressão do gás . . . . .  | 3.29 |
| 3.5  | - | a) Diagrama Indicador do Motor . . . . .  | 3.32 |
|      |   | b) Decomposição dos Conjugados de Excitação do Motor em Harmônicos . . . . .  | 3.32 |
| 3.6  | - | Harmônicos do Conjugado em função da pressão média indicada . . . . .   | 3.33 |
| 3.7  | - | Programa da pressão tangencial em função do ângulo $\phi$ para diferentes condições de carga do motor .                     | 3.34 |
| 3.8  | - | Esquema do Mecanismo do Cilindro . . . . .  | 3.36 |
| 3.9  | - | Harmônicos do Conjugado de Excitação do Hélice . . .  | 3.45 |
| 3.10 | - | Frequências Naturais Versus rpm do Motor . . . . .  | 3.46 |
| 3.11 | - | Composição Gráfica da Combinação do Conjugado devido à Pressão de Gás com o devido ao Momento de Inércia Variável . . . . . | 3.48 |
| 3.12 | - | Sistema Equivalente de um Motor Monocilíndrico . .  | 3.49 |
| 3.13 | - | Curva Elástica do 1º modo de Vibração Torcional do Sistema . . . . .  | 3.51 |
| 3.14 | - | Deflexões Angulares Ocasionadas nas Diversas Massas de Sistema devido ao Conjugado no Cilindro 1 .                          | 3.52 |
| 3.15 | - | Ângulo de Fase entre o Deslocamento Angular e Conjugado em cada Cilindro. . . . .   | 3.53 |
| 3.16 | - | Soma dos Vetores de Excitação num Motor. . . . .  | 3.54 |
| 3.17 | - | Diagrama de Fases e de Somatório de Vetores para o 1º modo de vibrar de um Motor de 4 tempos e 6 cilindros. . . . .         | 3.56 |

|      |   |      |
|------|---|------|
| 3.18 | - Sistema Equivalente de 2 Massas (motor e hélice)  | 3.58 |
| 3.19 | - Efeito combinado das Excitações do hélice e motor. . . . .  | 3.60 |
| 4.1  | - Instalação Propulsora com Ramificações . . . . .  | 4.2  |
| 4.2  | - Instalação com Motor Diesel com Engrenagem Redutora e Reversão de Marcha. . . . .   | 4.4  |
| 4.3  | - Representação Esquemática de uma Instalação Propulsora Combinada Motor Diesel - Turbina à Gás . . . . .                   | 4.5  |
| 4.4  | - Curva Elástica de Motor 14V23LU. . . . .  | 4.8  |
| 4.5  | - Respostas em Tensão no Eixo de Manivelas do Motor 14V23LU. . . . .  | 4.12 |
| 4.6  | - Respostas em Tensão nas Caixas de Engrenagem do Motor 14V23LU. . . . .  | 4.13 |
| 4.7  | - Curva Elástica do Motor Sulzer 6RND90. . . . .  | 4.16 |
| 4.8  | - Respostas em Tensão do Motor Sulzer 6RND90 . . . . .  | 4.17 |
| 4.9  | - Curva Elástica do Motor Gerador. . . . .  | 4.21 |
| 4.10 | - Respostas em Tensão no Eixo de Manivelas do Motor Gerador. . . . .  | 4.22 |
| 4.11 | - Respostas em Tensão no Eixo Intermediário do Motor Gerador. . . . .   | 4.23 |
| 5.1  | - Sistema Motor-Freio-Localização da Região de Medidas Experimentais. . . . .   | 5.3  |
| 5.2  | - Representação do Elemento na Superfície do Eixo parado . . . . .  | 5.4  |
| 5.3  | - Representação do eixo onde atua o conjugado. . . . .  | 5.5  |
| 5.4  | - Representação do eixo sob ação de um conjugado - alternado onde se coloca extensômetros para medidas de tensões . . . . . | 5.5  |

|      |  |      |
|------|--|------|
| 5.5  | - Diagrama Esquemático do Sistema de Medida. . . .   | 5.7  |
| 5.6  | - Diagrama Esquemático da Parte Rotativa do Aparelho de Medidas . . . . .  | 5.8  |
| 5.7  | - Posicionamento das Partes Rotativas do Eixo. . .   | 5.8  |
| 5.8  | - Potência no Freio em Função da Rotação do Motor 14V23LU e 8V23LU . . . . .   | 5.12 |
| 5.9  | - Registro da Resposta Total das Tensões e Resultado de sua decomposição em harmônicos (motor 8V23LU a 564RPM) . . . . . | 5.14 |
| 5.10 | - Gráfico do Sinal de Resposta Total da Tensão devida a Vibração Torcional a 504RPM do Motor 8V23LU . . . . .            | 5.16 |
| 5.11 | - Gráfico do Sinal de Resposta Total de Tensão devida a Vibração Torcional a 600 RPM do Motor 14V23LU. . . . .           | 5.16 |
| 5.12 | - Respostas Totais Medidas e Calculadas do Motor 8V23LU . . . . .  | 5.17 |
| 5.13 | - Respostas Totais Medidas e Calculadas do Motor 14V23LU. . . . .  | 5.18 |
| 5.14 | - Conjugado Médio no Eixo em Função da Velocidade do Motor 8V23LU. . . . .   | 5.19 |
| 5.15 | - Conjugado Médio no Eixo em Função da Velocidade do Motor 14V23LU . . . . .   | 5.20 |
| 5.16 | - 1º Teste Motor Tipo 8V23LU Componente 5,5. . . .   | 5.21 |
| 5.17 | - 1º Teste Motor Tipo 8V23LU Componente 6 . . . .  | 5.22 |
| 5.18 | - 1º Teste Motor Tipo 8V23LU Componente 6,5. . . .   | 5.23 |
| 5.19 | - 1º Teste Motor Tipo 8V23LU Componente 8 . . . .  | 5.24 |
| 5.20 | - 2º Teste Motor Tipo 14V23LU, Componente 3,5 . . .  | 5.25 |

|      |   |  |      |
|------|---|--|------|
| 5.21 | - | 2º Teste Motor Tipo 14V23LU, Componente 5 . . .  | 5.26 |
| 5.22 | - | 2º Teste Motor Tipo 14V23LU, Componente 6 . . .  | 5.27 |
| 5.23 | - | 2º Teste Motor Tipo 14V23LU, Componente 6,5 . . .  | 5.28 |
| 5.24 | - | 2º Teste Motor Tipo 14V23LU, Componente 7 . . .  | 5.29 |
| 5.25 | - | 2º Teste Motor Tipo 14V23LU, Componente 7,5 . . .  | 5.30 |
| 5.26 | - | Determinação de Amortecimento Modal pela Análise da Curva de Resposta do 6º Harmônico no ensaio do Motor 8V23LU. . . . . | 5.35 |
| 6.1  | - | Respostas em Tensões Modais nas Engrenagens do Motor 14V23LU - 1º Modo . . . . .   | 6.3  |
| 6.2  | - | Respostas em Tensões Modais nas Engrenagens do Motor 14V23LU - 2º Modo . . . . .   | 6.4  |
| 6.3  | - | Respostas em Tensões Modais nas Engrenagens do Motor 8V23LU - 1º Modo. . . . .   | 6.7  |
| 6.4  | - | Respostas em Tensões Modais nas Engrenagens do Motor 8V23LU - 2º Modo. . . . .   | 6.8  |
| 6.5  | - | Respostas em Tensões do Motor Sulzer RND90 . . .   | 6.9  |
| 6.6  | - | Efeito do Diâmetro do Eixo Intermediário nas Tensões Modais do Motor Gerador . . . . .                                   | 6.13 |
| 6.7  | - | Influência do Momento de Inércia do Volante nas Tensões Modais do Motor Gerador . . . . .                                | 6.16 |
| 6.8  | - | Influência da Adição de um Volante (Absorvedor) nas Tensões Vibratórias Modais do Motor-Gerador . . . . .                | 6.18 |
| A.1  | - | Esquema de um Sistema com Redução . . . . .  | A.1  |
| A.2  | - | Sistema Equivalente Reduzido. . . . .  | A.2  |
| A.3  | - | Esquema de um Sistema com Ramificações. . . . .  | A.3  |

|     |   |      |
|-----|---|------|
| A.4 | - Sistema Equivalente com Ramificações Reduzido.  | A.4  |
| B.1 | - Sistema Equivalente de $n$ Massas (Discos). . . .   | B.1  |
| B.2 | - Sistema Equivalente com Redução. . . . .  | B.7  |
| B.3 | - Esquema de um Sistema com Ramificações. . . . .   | B.11 |
| C.1 | - Diagramas de Fases Para Motores de Cinco e Seis Cilindros. . . . .  | C.3  |
| C.2 | - Curva Elástica do Primeiro Modo de Vibrar de um Motor de Seis Cilindros. . . . .                          | C.5  |
| C.3 | - Diagrama da Somatória de Vetores Para um Motor de Seis Cilindros. . . . .                                 | C.5  |
| E.1 | - Mostra Detalhes do Motor 8V23LU, Vendo-se Ainda o Eixo Intermediário e o Freio Hidráulico .               | E.2  |
| E.2 | - Mostra o Dinamômetro Hidráulico Utilizado nos Ensaios dos Motores. . . . .                                | E.2  |
| E.3 | - Mostra Outra Vista do Sistema Motor-Eixo-Freio Hidráulico. . . . .  | E.3  |
| E.4 | - Mostra Alguns Aparelhos de Medida Utilizados no Ensaio, Bem Como a Figura E.5. . . . .                    | E.3  |
| E.6 | - Mostra o Eixo Intermediário e os Componentes dos Aparelhos de Medida que Funcionam Junto ao Eixo. . . . . | E.4  |
| E.7 | - Mostra o Osciloscópio em Operação Durante os Ensaios. . . . .   | E.5  |
| E.8 | - Mostra os Indicadores do Freio Hidráulico na Bancada de Teste. . . . .                                    | E.5  |
| F.1 | - Resultados dos Ensaios Não Aproveitados. . . .  | F.1  |



## LISTA DE TABELAS

|  | pág. |
|--|------|
| 4.1 - Comparação entre o Método de Cálculos - Tempo de Processamento (Segundos). . . . .             | 4.3  |
| 4.2 - Frequências Naturais do Sistema Propulsor com diferentes Configurações. . . . .                | 4.5  |
| 4.3 - Comparação entre os Resultados Calculados e os Publicados pela B & W . . . . .                 | 4.10 |
| 5.1 - Comparação entre Tensão de Ressonância Medida e Calculada . . . . .                            | 5.33 |
| 5.2 - Comparação entre as Razões de Amortecimentos Modais Calculadas e Medidas nos Ensaios . . . . . | 5.36 |
| 6.1 - Conjugados Alternados Máximos e Velocidades que Ocorrem no Motor 14V23LU. . . . .              | 6.2  |
| 6.2 - Exemplos de Variação do Diâmetro do Eixo Intermediário. . . . .                                | 6.12 |
| 6.3 - Exemplos de Variação do Momento de Inércia do Volante . . . . .                                | 6.14 |
| 6.4 - Características dos Volantes Adicionados na Instalação . . . . .                               | 6.17 |
| B.1 - Tabela de Holzer. . . . .  | B-5  |
| B.2 - Tabulação de Holzer para Sistema com Redução. . .  | B-10 |
| B.3 - Tabulação de Holzer para Sistemas com Ramificações. . . . .                                    | B-15 |
| C.1 - Método Tabular para Cálculo do Somatório dos Vetores do Harmônico $\ell$ no Modo $i$ . . . . . | C.7  |

## 1.0 INTRODUÇÃO

### 1.1 Descrição do Problema

Quando um eixo com uma determinada flexibilidade é submetido a conjugados oscilatórios, podem ocorrer vibrações torcionais cujos níveis dependem de uma série de parâmetros. Este é o caso de sistemas propulsores marítimos, principalmente quando a máquina principal é um motor Diesel. Devido às próprias características de operação - pressão nos cilindros variável com o tempo e movimento alternativo - esse tipo de motor introduz o risco de vibrações torcionais sérias.

O problema se manifesta de forma mais pronunciada em sistemas propulsores, que normalmente operam dentro de uma faixa de rotações, mas pode ocorrer também em sistemas auxiliares como conjunto motor-gerador.

A ocorrência de vibrações torcionais em eixos propulsores, além de prejudicar o desempenho dos diversos componentes da instalação, tem apresentado como problema mais grave a ruptura do eixo. Esta avaria que pode ocorrer em diferentes seções-eixo do propulsor, eixo intermediário ou mesmo eixo de manivelas, tem sérias consequências para a economia e segurança do navio. A ruptura do eixo é resultante da fadiga do material quando submetido a grande variação de tensões.

Nas instalações propulsoras com redução tem ocorrido avarias nos dentes das engrenagens ocasionados por reversão do conjugado. Em alguns casos as amplitudes entre os valores máximos e mínimos dos conjugados alternados atingem

valores superiores aos do conjugado médio. Trata-se pois de um aspecto do comportamento do sistema que deve ser analisado convenientemente.

Embora a ocorrência deste problema provenha de longa data - os navios com máquinas alternativas já apresentavam este problema - não se conseguiu eliminá-lo totalmente. Este fato pode ser explicado pela falta de um perfeito conhecimento de todas as variáveis que influem sobre o fenômeno. Em muitos casos, no entanto, as avarias resultaram da falta de cuidados na fase de projeto, onde a principal preocupação é evitar que dentro da região de operação do sistema ocorram casos críticos de ressonância. Porém, isto nem sempre é possível e nesses casos é necessário quantificar precisamente os parâmetros de excitação e amortecimento para prever o comportamento do sistema. Em alguns casos torna-se necessário incluir na instalação componentes que eliminem ou atenuem o problema de vibrações.

Os primeiros estudos, baseados em métodos empíricos, sobre o assunto, resultaram no desenvolvimento de uma série de medidas preventivas que eram aplicadas ao projeto das instalações. Foram então desenvolvidos absorvedores, amortecedores, acoplamentos flexíveis e hidráulicos e uma série de dispositivos de controle de vibrações.

No entanto, devido a inexistência de métodos de análise confiáveis o comportamento dinâmico do sistema modificado, não pode ser previsto com a confiabilidade exigida e continuaram ocorrendo problemas devidos às vibrações.

Devido a todas as causas aqui descritas faz-se ne-

cessário obter um procedimento de cálculo que permita realizar as análises desejadas tanto na fase de projeto básico das instalações, como também indicar soluções para os problemas que ocorram em instalações já existentes.

Torna-se também imprescindível o uso de técnicas precisas de medidas experimentais, a fim de aperfeiçoar os procedimentos citados e como meio de constatar a ocorrência de novos problemas que surgem em instalações modernas.

Apesar do problema de vibração torcional ter sido focalizado somente em instalações com motores diesel, não significa que também não ocorra em instalações com turbinas a gás ou a vapor. Nestes casos a fonte de excitação é o hélice propulsor somente.

## 1.2 Revisão Bibliográfica

As vibrações torcionais em instalações marítimas tem sido estudadas desde o início do século atual no Institute of Naval Architects da Grã-Bretanha [2]. Simultaneamente na Alemanha, Bauer e Fralm desenvolveram estudos de avarias em eixos de navios com a realização de medidas experimentais e análises teóricas [2].

Em 1954 Biezeno and Grammel [18] publicaram um texto completo sobre o assunto.

Mas foi com a publicação de Ker Wilson [2] em 1935

(com a edição revista em 5 volumes em 1956) que as vibrações torcionais foram estudadas em todos os seus aspectos, incluindo a modelagem dos sistemas, os esforços de excitação e amortecimento, o cálculo das frequências naturais, velocidades críticas e das respostas. O autor abordou o problema para diferentes tipos de motores e instalações de uma maneira bastante completa. Vários métodos apresentados nesta publicação ainda são recomendados atualmente pelas Sociedades Classificadoras, como regras aprovadas para serem adotadas no projeto; principalmente os procedimentos para cálculo das frequências naturais (Método de Holzer) e o cálculo de respostas dos sistemas pela superposição das respostas em cada modo de vibrar.

Den Hartog [1] associou o Método de Holzer aos estudos de Porter sobre esforços de excitação em motores, não desenvolvendo porém métodos de cálculo de resposta.

Em 1958 Nestorides [5] publicou um verdadeiro manual sobre vibrações torcionais, abordando os diversos aspectos do problema. Esta obra veio complementar todo o assunto apresentado em [2] e ressaltou com ênfase o Método de Holzer modificado (complexo), para cálculo das respostas de sistemas forçados.

Desta época em diante, o assunto foi apresentado de uma maneira sempre superficial nos vários compêndios sobre vibração de um modo geral [3], [4], [6], [12], [23], [24].

Nowack [8] reuniu alguns tópicos já apresentados por Den Hartog complementados por [5].

Na Europa, Draminsky [16] notabilizou-se não só pe

lo desenvolvimento matemático que aplicou ao estudo de vibrações torcionais, como pela tentativa de comprovação dos resultados de cálculo com a realização de medições. Este procedimento incentivou-o a pesquisar com mais profundidade os esforços de excitação em motores diesel, apresentando os chamados conjugados secundários, que para época (1961) constituiu-se em uma novidade notável e chegou a ser continuado por outros pesquisadores que apresentaram trabalhos sobre o mesmo tema [26].

Dentre os livros textos de vibração, Macduff [17] dá uma ênfase especial as vibrações torcionais de eixos motores.

Nos últimos anos, vários trabalhos surgiram sobre o assunto [11], [19], [21], mas que trouxeram pouca novidade sobre os métodos de análise empregados.

O estudo de vibrações por meio da análise matricial [12], [13], [15], [27] inovou completamente o assunto. As vibrações torcionais passaram a ser estudadas por métodos matriciais que apresentaram maior rapidez de cálculo e precisão.

No cálculo das respostas, a quantificação do amortecimento e excitação dos hélices foram recentemente estudados [20] e [28] com resultados positivos no aperfeiçoamento do cálculo de seus efeitos. Deve-se ressaltar o trabalho desenvolvido pelos Departamentos de Pesquisas de todas as Sociedades Classificadoras que recentemente desenvolveram métodos automatizados para cálculo e análise de instalações propulsoras de navios. As medidas experimentais realizadas contribuíram bastante para a análise dos problemas ocorridas em instalações propulsoras marítimas.

### 1.3 Objetivo do Trabalho

O objetivo fundamental do trabalho é o desenvolvimento de um procedimento de cálculo de vibrações torcionais para emprego em projeto e análise de sistemas propulsores e auxiliares marítimos. Para se atingir este objetivo são necessários a formulação de um método de cálculo da resposta, o estabelecimento de critérios para avaliação da resposta e a comprovação experimental.

Em uma etapa preliminar - Capítulo 2 - antes da abordagem teórica do problema de vibrações, são identificados os tipos de instalações a serem estudadas. Para estas instalações, que constituem sistemas contínuos e por vezes complexos, são apresentados modelos discretos adequados que permitem um estudo mais acessível do problema de vibrações torcionais.

O desenvolvimento do procedimento de cálculo é mostrado no Capítulo 3. São apresentados, em sequência, os fundamentos do método de superposição modal para cálculo da resposta de vibração forçada, as particularidades da excitação que atua nos sistemas em consideração com uma abordagem qualitativa do problema, o tratamento dado às propriedades de amortecimento. Apresenta-se, finalmente, o método de cálculo da resposta e sua sistematização através de programa de computador.

A aplicação do procedimento de cálculo é ilustrada no Capítulo 4 através de exemplos que representam sistemas propulsores e auxiliares. A análise dos resultados deste cálculo permite estabelecer conclusões sobre o comportamento de dife

rentes tipos de sistemas.

O Capítulo 5 contém os resultados de medições de vibração efetuadas com motores em banco de provas. A comparação destes resultados com aqueles obtidos pelo procedimento de cálculo é utilizada para propósito de comprovação do método e dos critérios adotados.

Como foi mencionado, o procedimento de cálculo se presta à análise do comportamento vibratório em instalações acionadas por motores Diesel. O Capítulo 6 apresenta alguns exemplos de análise quando se avalia a influência de certos dispositivos para controle da vibração, bem como o efeito da variação de certos parâmetros do sistema.

As conclusões sobre o estudo desenvolvido e recomendações para futuros trabalhos são apresentadas no Capítulo 7.



## 2. VIBRAÇÃO TORCIONAL DE EIXOS

O problema de vibração torcional de eixos é inerente a sistemas acionados por motores alternativos. As características operacionais destes motores, e em particular dos motores diesel, independentemente do tipo de carga acionada, induzem o fenômeno de vibração torcional.

São descritos, inicialmente, neste capítulo os tipos de sistemas que serão examinados no presente trabalho. Em seguida é apresentada a modelagem utilizada para representação dos sistemas na análise de vibração torcional do eixo. Finalmente, apresenta-se uma exposição dos cuidados que se deve ter no projeto dos sistemas para evitar vibrações indesejáveis do eixo.

### 2.1 - Os Sistemas

O problema de vibração torcional será analisado em

dois tipos básicos de instalações, a saber:

a) Sistemas propulsores marítimos, com os seguintes casos:

a.1 - emprego de motores Diesel de baixa rotação com acoplamento direto ao hélice;

a.2 - emprego de motores Diesel de média e alta rotação e acoplamento ao hélice através de redutores;

a.3 - emprego combinado de motores Diesel e turbina a gás.

b) Sistemas motores-geradores.

As Figuras 2.1 a 2.5 ilustram os tipos de sistemas que serão examinados no estudo de vibração torcional. Ocasionalmente, os sistemas poderão incluir acessórios, como amortecedores hidráulicos e acoplamentos flexíveis, que tem por finalidade reduzir as vibrações.

As Figuras 2.1 e 2.2 representam dois tipos de instalações propulsoras, mostrando os elementos que são geralmente considerados na composição do sistema para estudo de vibração torcional.

A Figura 2.1 é um arranjo esquemático de uma instalação propulsora com motor Diesel de baixa rotação, que constitui o tipo mais empregado nos navios atuais. Os componentes do motor envolvidos no movimento são, para cada cilindro, a manivela, conectora, cruzeta, haste de êmbolo e êmbolo, além do volante e bomba de lavagem. Os outros elementos do sistema são o eixo, hélice e flanges de acoplamento.

A Figura 2.2 corresponde a uma instalação com motor

Diesel de média ou alta rotação. Este tipo de motor tem o êmbolo ligado diretamente a conectora não existindo portanto a haste de êmbolo e cruzeta. Como elementos adicionais da instalação, aparecem a engrenagem redutora e acoplamento flexível.

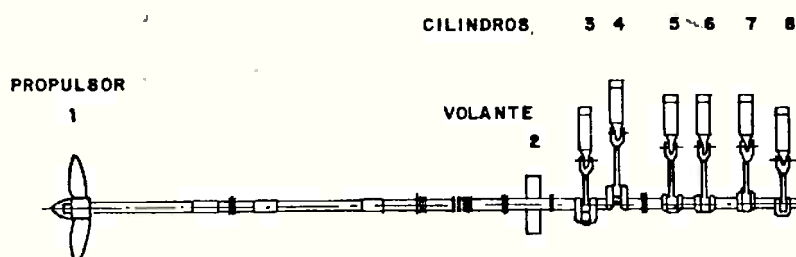


FIGURA 2.1- SISTEMA PROPULSOR MARÍTIMO COM MOTOR DIESEL DE BAIXA ROTAÇÃO

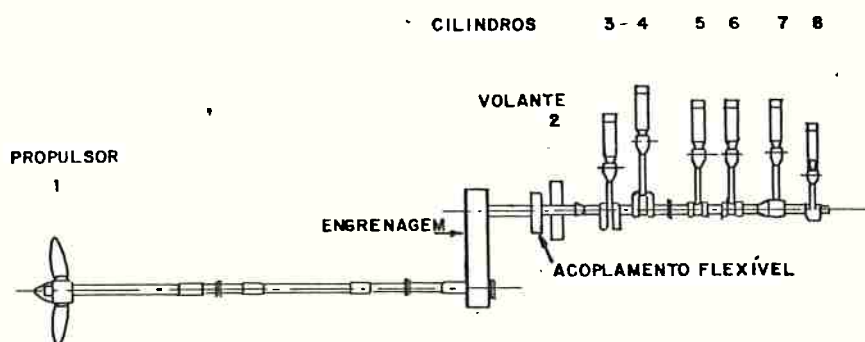


FIGURA 2.2- SISTEMA PROPULSOR COM MOTOR DIESEL DE MÉDIA OU ALTA ROTAÇÃO

A Figura 2.3 apresenta um esquema de uma outra instalação propulsora Diesel com redutor, que inclui dois motores acionando o mesmo eixo. Embora os elementos constituintes do sistema sejam praticamente os mesmos, a não ser pela introdução de uma embreagem, há uma diferença significativa em termos de vibração torcional do sistema, como será visto adiante.

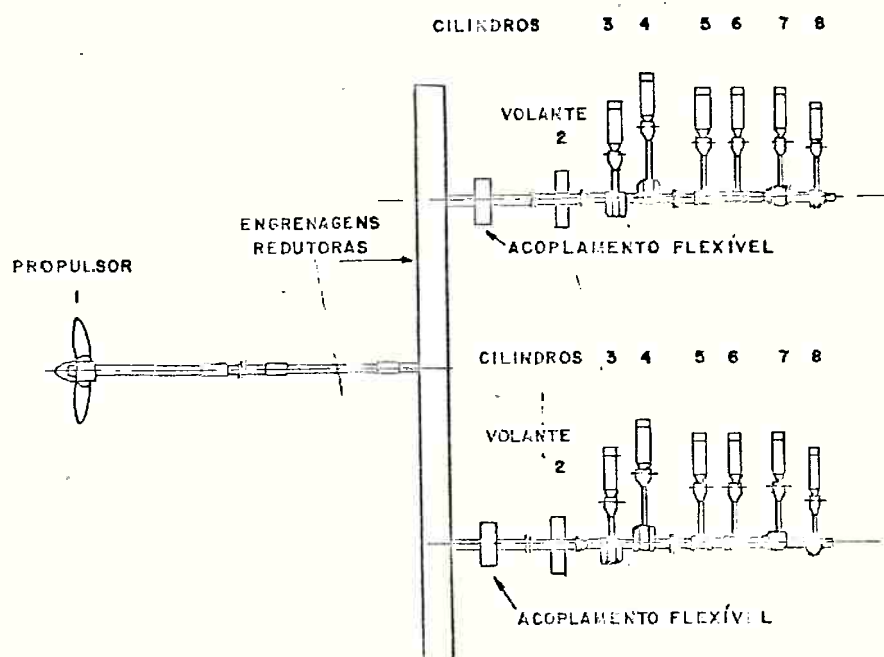


FIGURA 2.3- SISTEMA PROPULSOR COM DOIS MOTORES DIESEL POR EIXO

A Figura 2.4 mostra o esquema de uma instalação propulsora combinada, motor Diesel-turbina à gás, empregada em navios de guerra que possuem duas faixas de velocidades de operação distintas. A instalação pode empregar um ou dois motores por eixo e uma turbina à gás. Além dos componentes dos motores Diesel usual

almente considerados para o estudo de vibração torcional, são incluídos os elementos do rotor da turbina. Estas instalações possuem normalmente embreagens para acoplamento do motor e da turbina ao hélice, além de acoplamento fluido para conexão dos motores. Ela está representada de maneira menos detalhada por constituir-se de partes já mostradas nas outras figuras do texto.

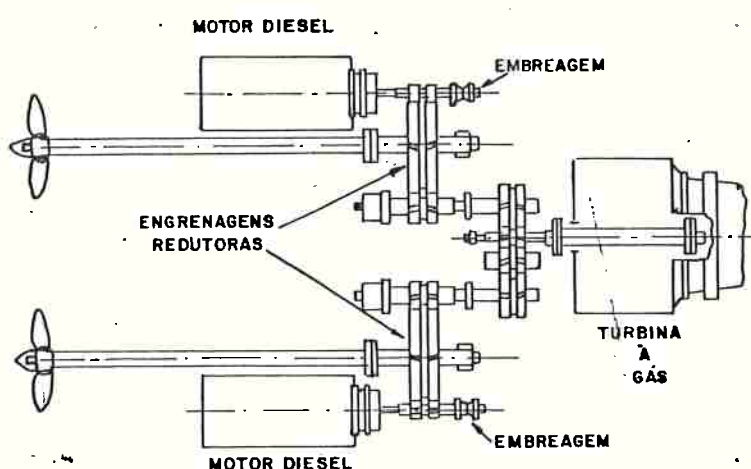
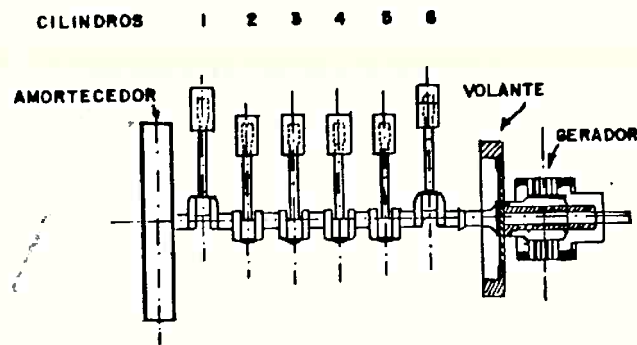


FIGURA 2.4 - INSTALAÇÃO PROPULSORA COMBINADO MOTOR DIESEL - TURBINA A GÁS

A Figura 2.5 mostra o esquema de um conjunto Diesel-gerador usado para produção de energia elétrica em instalações marítimas. O motor é de alta rotação acoplado diretamente ao rotor do gerador.

Neste trabalho é também examinado o caso do acoplamento do motor ao freio dinamométrico do tipo hidráulico, utilizado nos ensaios de desempenho do motor, realizados por ocasião



**FIGURA 2.5 - SISTEMA MOTOR GERADOR**

de sua entrega pelo fabricante. Este sistema motor-freio hidráulico foi empregado para comprovação experimental dos resultados obtidos com o procedimento de cálculo.

## 2.2 - Modelagem

Conforme se verifica do exame dos sistemas mostrados nas Figuras 2.1 a 2.5 eles são contínuos e complexos. Torna-se, então, muito trabalhoso e difícil desenvolver um modelo matemático que permita calcular suas características dinâmicas de vibração torcional.

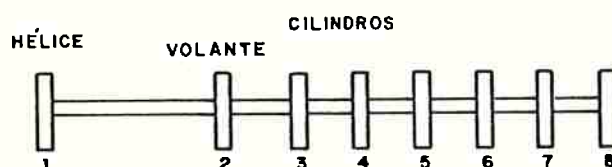
A técnica utilizada usualmente [1], [2], [4] e [5] consiste em substituir o sistema original por outro simplificado e composto de massas concentradas em determinados pontos, ligadas por seções de eixos sem massa e com apropriada rigidez torcional. A modelagem deve ser feita de maneira que no sistema equivalente as massas se situem o mais próximo possível

das regiões onde isto ocorre no sistema real; por exemplo, o hélice, os êmbolos e volantes do motor, etc. são representados por massas situadas em seus respectivos centros de massa. Com este procedimento o sistema equivalente poderá apresentar características as mais próximas possíveis do original.

A modelagem, isto é, a escolha do sistema simplificado equivalente, depende da sensibilidade do projetista e somente uma pesquisa que inclua os cálculos de velocidades críticas e respostas do sistema, e posterior comparação com medidas destas variáveis, poderá aperfeiçoar o método empregado.

As Figuras 2.6 a 2.10' mostram os chamados sistemas simplificados equivalentes aos sistemas representados nas Figuras 2.1 a 2.5.

A Figura 2.6 representa o sistema equivalente à instalação propulsora Diesel direta mostrada na Figura 2.1. Assim, correspondendo a cada conjunto de partes móveis e um cilindro do motor é definido um disco de momento de inércia constante  $I$ .



**FIGURA 2.6- SISTEMA EQUIVALENTE DA INTALAÇÃO  
MOSTRADA NA FIGURA 2.1**

o mesmo processo se aplica ao volante, bomba de lavagem e ao propulsor. Os discos estão ligados por trechos de eixos de rigidez torcional constante. Os valores de rigidez torcional e momento de inércia das partes do motor e do hélice são usualmente fornecidos pelo fabricante. Procedimentos para cálculo destes valores são indicados nas referências [1] e [5].

Para o sistema da Figura 2.1 poder-se-ia aperfeiçoar o modelo adicionando-se duas outras massas colocadas nas regiões dos flanges do eixo intermediário.

A Figura 2.7 representa o sistema equivalente à instalação propulsora Diesel com redução mostrada na Figura 2.2, e tem por finalidade mostrar as partes componentes de cada massa do sistema, com detalhes que não estão mostrados nas outras figuras. A modelagem utilizada neste sistema é a usualmente empregada pelos projetistas [1] , [5].

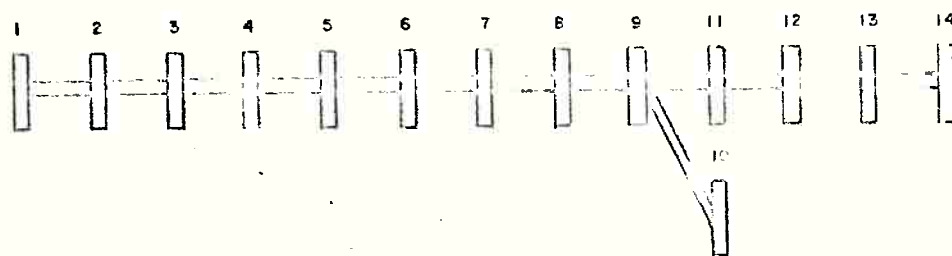


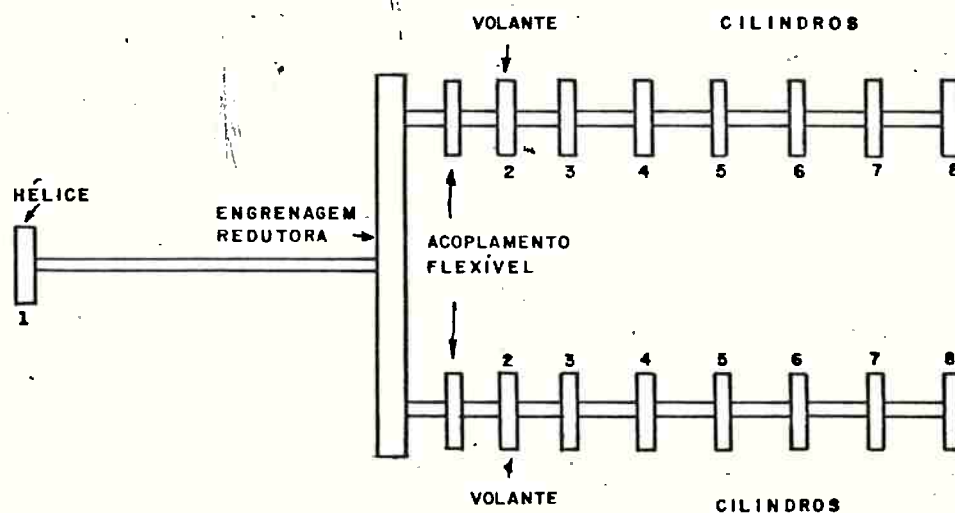
FIGURA 2.7 -- SISTEMA EQUIVALENTE DA INSTALAÇÃO MOSTRADA NA FIGURA 2.2

Nesta figura os diversos discos representam os seguintes componentes:

- 1-6 - massas alternativas e rotativas dos cilindros do motor.
- 7 - volante do motor.



- 8 - acoplamento flexível.
- 9 - engrenagens redutoras.
- 10 - engrenagens de marcha à ré.
- 11 - flange do redutor, flange do eixo,  
1/2 eixo intermediário.
- 12 - 1/2 eixo intermediário, flange,  
1/2 eixo telescópico.
- 13 - 1/2 eixo telescópico, flange,  
1/2 eixo propulsor.
- 14 - 1/2 eixo propulsor, hélice,  
massa virtual (25% do hélice).



**FIGURA 2.8— SISTEMA EQUIVALENTE DA INSTALAÇÃO  
MOSTRADA NA FIGURA 2.3**

O valor de 25% do momento de inércia do hélice para a massa virtual no sistema da Figura 2.7 é o usualmente adotado [1] e [5]. Para hélices não convencionais e os de passo variável, pode-se adotar valores publicados em [28].

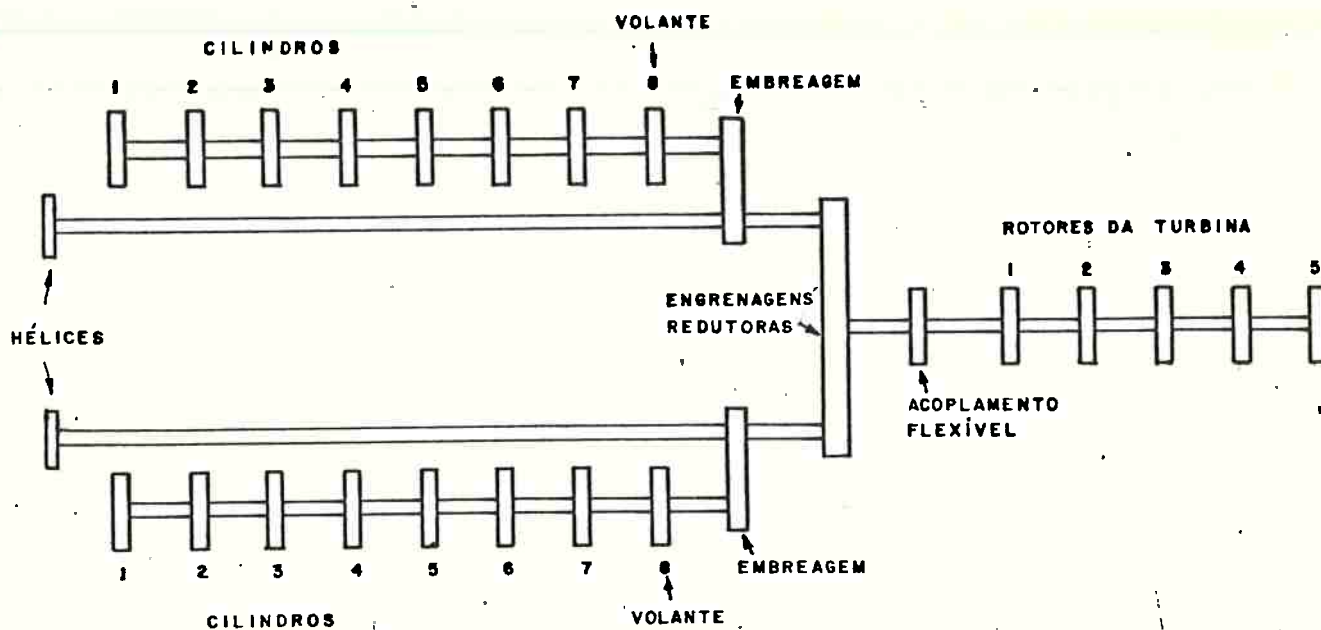


FIGURA 2.9 - SISTEMA EQUIVALENTE DA INSTALAÇÃO MOSTRADA NA FIGURA 2.4



FIGURA 2.10 - SISTEMA EQUIVALENTE DA INSTALAÇÃO MOSTRADA NA FIGURA 2.5

Os sistemas com engrenagens redutoras e ramificações mostrados nas Figuras 2.2, 2.3 e 2.4, devem ser transformados em sistemas equivalentes aos sistemas de acoplamento direto, através das transformações mostradas no Apêndice A.

Um sistema equivalente modelado para o cálculo de frequências naturais e respostas devidas a vibrações torcionais é descrito por:

- I - matriz de (momento de) inércia associada a cada massa e composta dos elementos  $I_1, I_2, \dots, I_n$ .
- K - matriz de rigidez torcional dos trechos dos eixos e composta dos elementos  $k_1, k_2, \dots, k_n$ .
- C - matriz de amortecimento viscoso associada a cada massa e composta dos elementos  $c_1, c_2, \dots, c_n$ .
- M(t) - vetor dos conjugados de excitação no sistema atuando basicamente nas massas equivalentes dos cilindros do motor e do hélice e composta dos conjugados  $T_1, T_2, \dots, T_n$ .

A determinação da matriz de amortecimento C e do vetor dos conjugados de excitação M(t) é mostrada no Capítulo 3.

A Figura 2.11 mostra um sistema equivalente modelado, de uma instalação genérica, composta dos elementos das matrizes I, K, C e M(t).

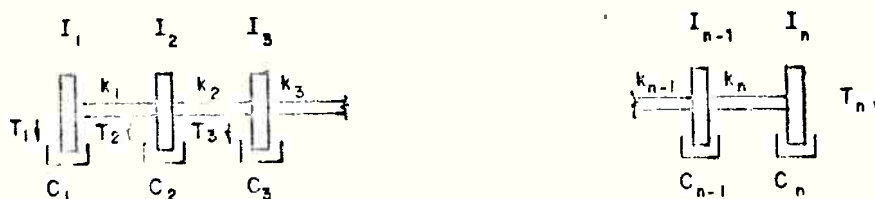


FIGURA 2.11- SISTEMA EQUIVALENTE COMPLETAMENTE MODELADO DE UMA INSTALAÇÃO GENÉRICA COMPOSTA DE  $n$  MASSAS. (DISCOS)

### 2.3 - Cuidados no Projeto

O primeiro passo do estudo de vibrações torcionais dos sistemas descritos na seção 2.1 consiste no levantamento dos problemas a serem analisados. Estes problemas, que dependem do tipo de instalação em consideração, podem ter consequências sérias sobre o desempenho e segurança da instalação. Como exemplos podem ser citados avarias em acoplamentos e engrenagens redutoras devido à magnitude dos conjugados oscilatórios e rupturas do eixo devido às elevadas tensões vibratórias.

Assim, por estas razões as Sociedades Classificadoras impõem uma série de regras e limites admissíveis nas respostas do sistema e no comportamento dinâmico das instalações que constituirão os requisitos a serem atendidos.

A verificação do atendimento desses requisitos exige inicialmente uma modelagem da instalação. A escolha do modelo adequado e a determinação dos seus parâmetros não fornecidos pelos fabricantes é uma etapa importante do estudo uma vez que o procedimento de cálculo de vibrações será aplicado a este modelo.

O estudo de vibrações propriamente se inicia considerando-se o sistema livre sem amortecimento. Nesta condição calculam-se as frequências naturais e as curvas dos modos naturais de vibrar. São considerados usualmente apenas os primeiros modos de vibrar por serem aqueles em que as respostas apresentam valores não desprezíveis e procura-se para cada modo determinar em que seção do sistema ocorrerão as máximas deflexões.

Em seguida, através do emprego da análise modal, determina-se a resposta forçada do sistema amortecido. São considerados neste cálculo as componentes oscilatórias do conjugado devidas ao motor e ao hélice.

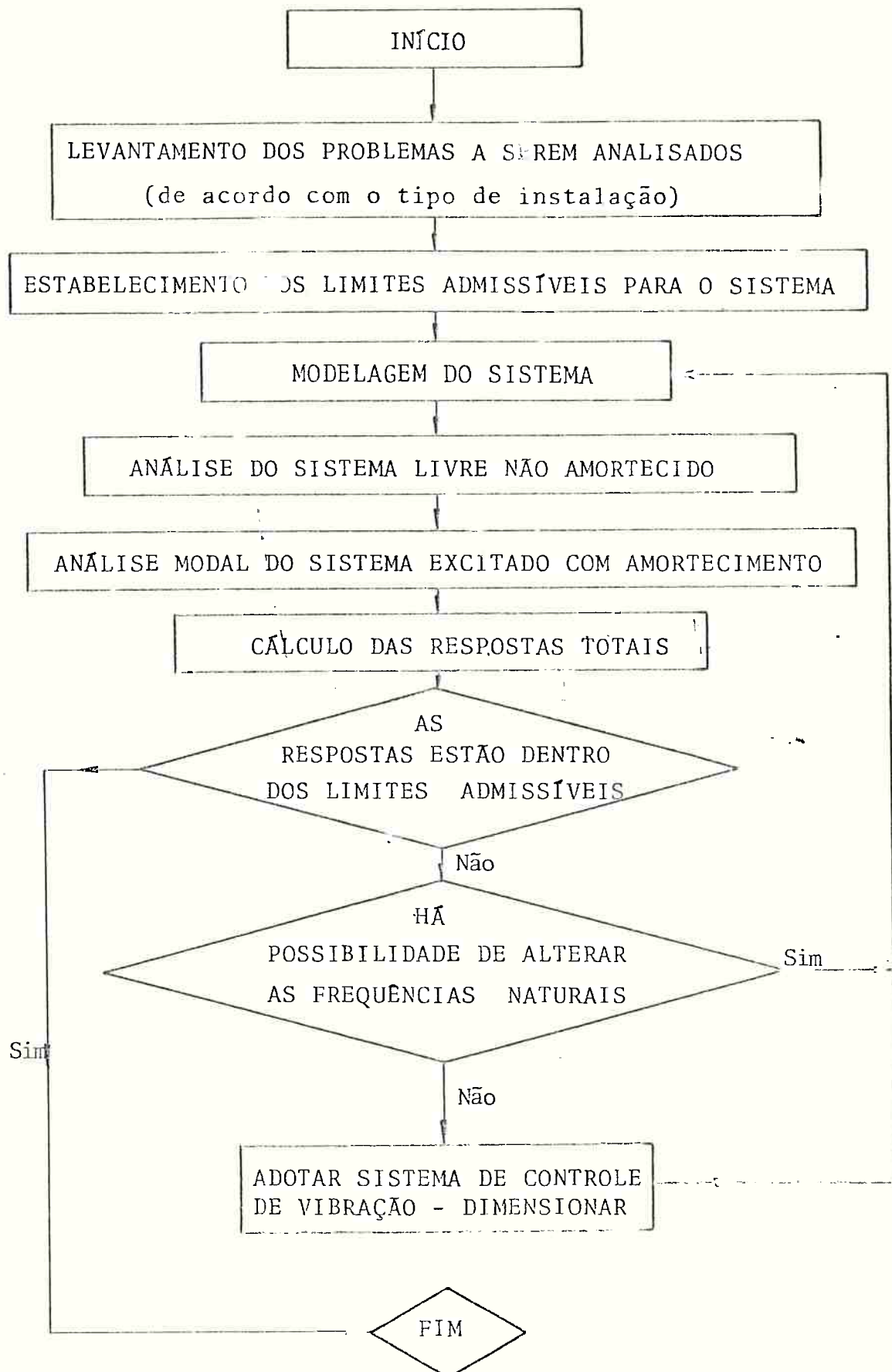
Como há uma série de termos de excitação, com diferentes frequências, e diversos modos de vibrar, é necessário estabelecer um critério para composição das respostas levando-se em consideração apenas as amplitudes de cada parcela.

A comparação destes resultados com os limites admissíveis estabelecidos para a instalação irá determinar a necessidade de modificações no sistema. Estas modificações podem envolver apenas alteração das características de inércia ou rigidez do sistema, para alterar as frequências naturais, ou então a inclusão de dispositivos para atenuação de vibrações.

A correta execução de todas as fases descritas permitirá analisar a ocorrência de vibrações indesejáveis durante

o projeto, evitando-se assim que problemas mais graves ocorram já com a instalação em funcionamento, quando então as soluções envolvem custos maiores do que aqueles que decorrem de uma análise prévia.

O fluxograma apresentado a seguir resume de uma maneira sistemática o procedimento a ser adotado.



### 3. MÉTODOS DE ANÁLISE

No capítulo anterior foi apresentado o problema de vibração torcional em sistemas acionados por motores de combustão interna, formulando-se os modelos para estudo e examinando-se os cuidados que se deve ter no projeto para evitar a ocorrência de vibrações indesejáveis.

Neste capítulo, apresenta-se inicialmente os fundamentos teóricos para a análise do problema de vibração em sistemas discretos com múltiplos graus de liberdade. É descrito, em particular, a técnica de superposição modal para cálculo da resposta de sistemas submetidos a esforços periódicos. Em seguida é examinada a aplicação desta teoria aos sistemas propulsores de navios acionados por motores Diesel; considera-se com bastante atenção o problema da excitação nestes sistemas.



### 3.1 - Vibração de Sistemas com Múltiplos Graus de Liberdade

Para uma melhor compreensão do estudo de vibração torcional de sistemas propulsores, são apresentados os fundamentos básicos do estudo de vibrações em sistemas com diversos graus de liberdade.

#### 3.1.1 - Equação diferencial matricial do problema dinâmico

Considere-se um sistema genérico discreto constituído por  $n$  massas mostrado na Figura 3.0. A equação de movimento pode ser estabelecida para cada massa, exprimindo-se o equilíbrio das forças efetivas associadas a cada grau de liberdade do sistema. Assim, associado a uma massa qualquer, aparecerão quatro tipos de esforços, a saber: o conjugado externo  $M_i(t)$ , e as que resultam do movimento, isto é, de inércia  $FI_i$ , de amortecimento  $FA_i$  e resistente  $FR_i$ .

A equação de movimento do sistema é obtida impondo-se o equilíbrio dos esforços efetivamente associados a cada um de seus graus de liberdade; obtém-se, assim:

$$\begin{array}{rcccc} FI_1 + FA_1 + FR_1 & = & M_1(t) & & \\ FI_2 + FA_2 + FR_2 & = & M_2(t) & & \\ \vdots & & \vdots & & \\ FI_n + FA_n + FR_n & = & M_n(t) & & \end{array} \quad (3.1.1)$$

ou então matricialmente:

$$FI + FA + FR = M(t) \quad (3.1.2)$$

onde:

FI - é o vetor de esforços de inércia ( $n \times 1$ ).

FA - é o vetor de esforços de amortecimento ( $n \times 1$ ).

FR - é o vetor de esforços resistentes ( $n \times 1$ ).

M(t) - é o vetor de esforços externos ou de carga aplicados ( $n \times 1$ ).

sendo  $n$  o número de graus de liberdade do sistema.

Chamando-se de  $\theta$  o vetor dos deslocamentos correspondentes às  $n$  massas equivalentes, as matrizes FI, FA e FR poderão ser obtidas em função destes deslocamentos e suas derivadas em relação ao tempo.

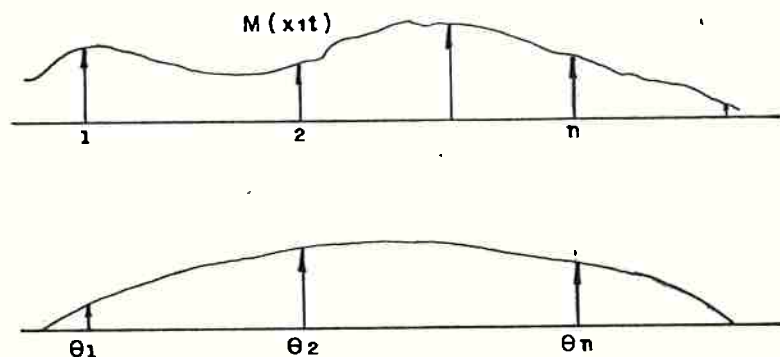


FIGURA 3.0- a) DISCRETIZAÇÃO DOS ESFORÇOS QUE ATUAM NUM SISTEMA DE  $n$  PONTOS

b) DEFORMAÇÃO DA ESTRUTURA DEFINIDA POR UM CONJUNTO DE DESLOCAMENTOS  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$

Seja o sistema representado na Figura 3.0. Cada um dos esforços pode ser expresso por um conjunto de coeficientes de influência. Assim, no ponto  $i$ , supondo-se que o comportamento do sistema seja linear, obtêm-se:

$$FR_1 = k_{11}\theta_1 + k_{12}\theta_2 + \dots + k_{1n}\theta_n \quad (3.1.3)$$

Da mesma maneira:

$$FR_2 = k_{21}\theta_1 + k_{22}\theta_2 + \dots + k_{2n}\theta_n \quad (3.1.4)$$

E para a massa  $i$ , tem-se:

$$FR_i = k_{i1}\theta_1 + k_{i2}\theta_2 + \dots + k_{in}\theta_n \quad (3.1.5)$$

ou então, matricialmente pode-se escrever que:

$$\begin{pmatrix} FR_1 \\ FR_2 \\ \vdots \\ FR_i \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \dots & k_{1i} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \dots & k_{2i} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{i1} & k_{i2} & k_{i3} & \dots & k_{ii} & \dots & k_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dots \\ \theta_i \\ \dots \end{pmatrix} \quad (3.1.6)$$

ou simbolicamente:

$$FR = K\theta \quad (3.1.7)$$

onde:

$K = |k_{ij}|$ ;  $i=1,n$ ;  $j=1,n$  é a matriz de coeficientes de influência de rigidez.

$k_{ij}$  é o esforço resistente associado ao grau de liberdade  $i$  proveniente de um deslocamento unitário do ponto  $j$ .

$\theta$  - é o vetor de deslocamentos, composto por um conjunto de  $n$  deslocamentos.

Supondo-se que o amortecimento é do tipo viscoso, os esforços de amortecimento do sistema poderão ser expressos de maneira semelhante:

$$\begin{pmatrix} FA_1 \\ FA_2 \\ \vdots \\ FA_i \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1i} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2i} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & c_{i2} & c_{i3} & \dots & c_{ii} & \dots & c_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_i \\ \dots \end{pmatrix} \quad (3.1.8)$$

ou então:

$$FA = C\dot{\theta} \quad (3.1.9)$$

onde:

$C = |c_{ij}|$ ;  $i=1,n$ ;  $j=1,n$  é a matriz de coeficientes de influência de amortecimento.

$c_{ij}$  é o esforço de amortecimento associado ao grau de liberdade  $i$ , proveniente de uma velocidade unitária no ponto  $j$ .

O ponto sobre a letra indica a derivada em relação ao tempo.

Analogamente, tem-se também:

$$\begin{pmatrix} FI_1 \\ FI_2 \\ \vdots \\ FI_i \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \dots & I_{1i} \dots & I_{1n} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \dots & I_{2i} \dots & I_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ I_{i1} & I_{i2} & I_{i3} \dots & I_{ii} \dots & I_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \vdots \\ \ddot{\theta}_i \\ \dots \end{pmatrix} \quad (3.1.10)$$

ou então:

$$FI = I\ddot{\theta} \quad (3.1.11)$$

onde:

$I = |I_{ij}|$ ;  $i=1,n$ ;  $j=1,n$  é a matriz de coeficientes de influência de inércia.

$I_{ij}$  é o esforço de inércia associado ao grau de liberdade  $i$  proveniente de uma aceleração unitária no ponto  $j$ .

Assim, substituindo-se os valores de (3.1.7), (3.1.9) e (3.1.11) em (3.1.2) pode-se reescrever a equação dinâmica completa de equilíbrio do sistema por:

$$I\ddot{\theta} + C\dot{\theta} + K\theta = M(t) \quad (3.1.12)$$

onde:

$$\theta = |\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n|^T \quad (3.1.13)$$

## 3.1.2 - Método da superposição modal

Para análise dinâmica do sistema representado pela equação (3.1.12) utiliza-se a combinação linear das suas formas de vibração. Para isto, aplica-se o método da superposição modal [12], [13], que é baseado no aproveitamento das propriedades de ortogonalidade dos modos normais em relação às matrizes de inércia e rigidez do sistema, permitindo assim efetuar o desacoplamento da equação citada.

Assim, o sistema de  $n$  graus de liberdade, representado na Figura 3.1, possui  $n$  autovalores  $\lambda_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) e  $n$  autovetores correspondentes  $\phi_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) (modos de vibrar). Pode-se, então, formar a matriz  $\Phi$  constituída destes autovetores ortonormalizados em relação à matriz de inércia, de tal maneira [12], que:

$$\Phi^T I \Phi = \mathcal{I} \quad (3.1.14)$$

onde  $\mathcal{I}$  é a matriz identidade ( $n \times n$ ) e  $\Phi$  é dada por:

$$\Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n] \quad (3.1.15)$$

em que:

$$\phi_j = \begin{bmatrix} \Delta_{1j} \\ \Delta_{2j} \\ \vdots \\ \Delta_{ij} \\ \vdots \\ \Delta_{nj} \end{bmatrix} \quad (3.1.16)$$

onde  $\Delta_{ij}$  é a amplitude adimensional relativa de vibração no grau de liberdade  $i$  no modo  $j$ .

Seja ainda:

$\Lambda = \text{diag} (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  - matriz de autovalores  $\lambda_i$  ( $i=1, \dots, n$ ).

Seja  $\theta$  a resposta do sistema, isto é, solução da equação (3.1.12).

Admite-se que a resposta possa ser descrita, adequadamente, pelos modos naturais normalizados correspondentes às  $p$  mais baixas frequências naturais, através da transformação:

$$\theta = \bar{\Phi} Y \quad (3.1.17)$$

onde  $\bar{\Phi}$  é a matriz dos  $p$  modos naturais mais baixos do sistema, de tal maneira que:

$$\bar{\Phi} = |\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p|$$

e  $Y$  é o vetor ( $p \times 1$ ) de amplitude que serve de coordenadas generalizadas, onde cada um de seus componentes pode ser obtido independentemente dos outros.

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} \quad (3.1.18)$$

Assim, a resposta do sistema é obtida como soma dos componentes modais.

$$\theta = \phi_1 y_1 + \phi_2 y_2 + \phi_3 y_3 + \dots + \phi_p y_p = \sum_{i=1}^p \phi_i y_i \quad (3.1.19)$$

Desta forma, a matriz das formas modais  $\Phi$  serve para transformar as coordenadas generalizadas  $Y$  (coordenadas normais) em coordenadas geométricas  $\theta$ . Estas amplitudes modais em coordenadas generalizadas são chamadas de coordenadas normais. Substituindo-se (3.1.19) e suas derivadas em relação ao tempo em (3.1.12) obtém-se:

$$I\ddot{\Phi}\theta + C\dot{\Phi}\dot{\theta} + K\Phi\theta = M(t) \quad (3.1.20)$$

Pré-multiplicando ambos os lados de (3.1.20) por  $\Phi^T$ , obtém-se:

$$\Phi^T I \ddot{\Phi}\theta + \Phi^T C \dot{\Phi}\dot{\theta} + \Phi^T K \Phi\theta = \Phi^T M(t) \quad (3.1.21)$$

As propriedades de ortogonalidades dos modos normais podem, então, ser usadas para simplificar a expressão (3.1.21). Considerando o primeiro termo dessa expressão, obtém-se, para o sistema em questão:

$$\begin{aligned} \Phi^T I \Phi &= |\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n|^T |I| |\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n| = \\ &= \begin{vmatrix} \phi_1^T I \phi_1 & \phi_1^T I \phi_2 & \dots & \phi_1^T I \phi_n \\ \phi_2^T I \phi_1 & \phi_2^T I \phi_2 & \dots & \phi_2^T I \phi_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_n^T I \phi_1 & \phi_n^T I \phi_2 & \dots & \phi_n^T I \phi_n \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (3.1.22)$$



Sabe-se que as formas modais exatas são ortogonais em relação às matrizes de inércia e rigidez [12], [15]. Resulta então:

$$\phi_m^T I \phi_n = 0 \quad ; \quad \text{para } m \neq n \quad (3.1.23)$$

$$\phi_m^T K \phi_n = 0 \quad ; \quad \text{para } m \neq n$$

Portanto, todos os termos fora da diagonal em (3.1.22) são nulos.

Introduzindo a notação de inércia generalizada do modo n.

$$I_n = \phi_n^T I \phi_n \quad (3.1.24)$$

pode-se expressar (3.1.24) da seguinte forma:

$$\phi_n^T I \phi_n = \begin{vmatrix} I_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_n \end{vmatrix} \quad (3.1.25)$$

É evidente que uma formulação análoga aplica-se também a matriz de rigidez K, resultando então em:

$$\phi_n^T K \phi_n = \begin{vmatrix} k_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_n \end{vmatrix} \quad (3.1.26)$$

em que os termos da diagonal representam a rigidez generalizada:

$$K_n = \phi_n^T K \phi_n \quad (3.1.27)$$

Da definição de autovalores e autovetores e da ortogonalidade da matriz  $\phi$ , [12] e [26], tem-se:

$$\phi^T I \phi = I \quad (\text{matriz identidade}) \quad (3.1.28)$$

$$\phi^T K \phi = \Lambda \quad (\text{matriz diagonal de autovetores}) \quad (3.1.29)$$

$$\text{Define-se } \Delta = \phi^T C \phi \quad (3.1.30)$$

Substituindo-se (3.1.28) a (3.1.30) em (3.1.21), obtém-se:

$$\ddot{\theta} + \Delta \dot{\theta} + \Lambda \theta = \phi^T M(t) \quad (3.1.31)$$

Para que se possa utilizar o método de superposição modal é necessário efetuar o desacoplamento da matriz de amortecimento, como foi visto com as matrizes de rigidez e inércia, isto é, a matriz  $\Delta$  deve ser diagonal. Para que isto ocorra, os modos naturais precisam ser ortogonais à matriz de amortecimento. Resulta portanto que:

$$\phi_m^T C \phi_n = 0 \quad ; \quad \text{para } m \neq n \quad (3.1.32)$$

Assim,

$$\phi^T C \phi = \Delta = \begin{vmatrix} \delta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \delta_p \end{vmatrix} \quad (3.1.33)$$

Na equação (3.1.33) os escalares  $\delta_i$  ( $i=1, \dots, p$ ) devem expressar as propriedades de amortecimento do sistema.

Rayleigh mostrou que uma matriz de amortecimento da forma:

$$C = a_1 I + a_2 K \quad (3.1.34)$$

(onde  $a_1$  e  $a_2$  são constantes arbitrárias) satisfaz as condições de ortogonalidade [12], [15], [24].

Mesmo que esta condição não ocorra, o efeito do acoplamento entre os modos poderá ser desprezado nos casos práticos [12]. Isto ocorrerá quando a razão de amortecimento  $\zeta = \frac{C}{C_r}$  (definido na seção 3.6) satisfizer a condição  $0 < \zeta < 0,2$  para todos os modos.

Se então for admitido que a condição expressa por (3.1.34) é válida ou então que  $C$  é desprezível, obtém-se de um conjunto de  $p$  equações diferenciais simultâneas acopladas pelas matrizes de inércia, rigidez e amortecimento, um outro conjunto de  $p$  equações diferenciais independentes em coordenadas normais (desacopladas). As equações obtidas são do tipo:

$$\ddot{y}_i + \delta_i \dot{y}_i + \lambda_i y_i = \Phi^T M(t); \quad (i=1, \dots, p) \quad (3.1.35)$$

Cada uma dessas equações corresponde a um sistema de um grau de liberdade, podendo ser tratada como tal. Para o sistema de um grau de liberdade [17], [23] e [24] vale a equação:

$$\ddot{x}_i + 2\zeta_i w_i \dot{x}_i + w_i^2 x_i = F(t) \quad (3.1.36)$$

Este sistema, sob a ação de uma excitação harmônica da forma  $F = F_0 \text{ sen } (wt + \zeta)$ , apresenta como resposta:

$$x_i = \frac{F_0}{w_n^2} \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \text{ sen } (wt + \gamma) \quad (3.1.37)$$

$$\theta = \text{arctg} \left[ \frac{-(2\zeta r) \cos \delta + (1-r^2) \text{sen } \delta}{(2\zeta r) \text{sen } \delta + (1-r^2) \cos \delta} \right] \quad (3.1.38)$$

onde  $r = \frac{w}{w_n}$ ; e  $w_n$  é a frequência natural do sistema.

Efetuando-se a comparação entre (3.1.35) e (3.1.36) resulta:

$$\lambda_i = -w_i^2$$

$$\delta_i = 2\zeta_i w_i$$

Desta forma, pode-se reescrever (3.1.35):

$$\ddot{y}_i + 2\zeta_i w_i \dot{y}_i + w_i^2 y_i = \phi_i^T M(t) \quad i=1,2,\dots,p \quad (3.1.39)$$

Conhecidos a expressão de  $M(t)$  e o autovetor  $\phi_i$  determina-se a solução para (3.1.39) que tem a mesma forma de (3.1.37).

De acordo com o método exposto, tendo-se obtido  $\phi_i$  ( $i=1,2,\dots,p$ ), determina-se:

$$\theta = \bar{\phi} Y \quad \text{conforme definido em (3.1.17).}$$

onde:

$$Y = \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{vmatrix}$$

Considere-se o caso de um sistema onde atua uma excitação periódica que pode ser decomposta em  $m$  harmônicos, cada um atuando em um ponto do sistema. Portanto, atua sobre o sistema com  $n$  graus de liberdade o vetor de carga  $M(t)$  tal que:

$$M(t) = \begin{vmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_n \end{vmatrix} = |T_j| ; \quad j=1, \dots, n \quad (3.1.40)$$

onde  $T_j$  é uma carga genérica expressa por:

$$T_j = \sum_{\ell=1}^m \left( T_{j\ell}^0 \operatorname{sen}(\bar{\omega}_{j\ell} t + \beta_{j\ell}) \right) = \sum_{\ell=1}^m T_{j\ell} \quad (3.1.41)$$

em que:

$\ell$  - indica o esforço periódico (índice do harmônico)

$$\ell=1, 2, \dots, m$$

$j$  - se refere ao ponto de aplicação da excitação

$T_{j\ell}^0$  - amplitude do  $\ell$ -ésimo harmônico do esforço aplicado no ponto  $j$

$\bar{\omega}_{j\ell}$  - frequência, idem

$\beta_{j\ell}$  - fase inicial, idem.

Pode-se, assim, definir um vetor de uma particular excitação:

$$T_{j\ell} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ T_{j\ell} \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix} ; \quad j \text{ é } s\text{ima linha} \quad (3.1.42)$$

Sendo então  $T_{j\ell}$  dado por:

$$T_{j\ell} = T_{j\ell}^0 \text{ sen}(\bar{\omega}_{j\ell} t + \beta_{j\ell}) \quad (3.1.43)$$

Portanto, o sistema sob efeito desta excitação, teria sua equação matricial da forma:

$$I \ddot{\theta}_{j\ell} + C \dot{\theta}_{j\ell} + K \theta_{j\ell} = T_{j\ell} \quad (3.1.44)$$

onde  $\theta_{j\ell}$  é o vetor de deslocamento produzido pela ação do  $\ell$ -ésimo harmônico do esforço aplicado no ponto  $j$ .

A equação de equilíbrio pode ser resolvida para todos os  $T_{j\ell}$  ( $\theta_{j,\ell}$ ), de modo que como vale o princípio da superposição, resulta:

$$\theta = \sum_{j=1}^n \sum_{\ell=1}^m \theta_{j\ell} \quad (3.1.45)$$

onde  $\theta$  é o vetor dos deslocamentos produzidos por todos os harmônicos de todos os esforços aplicados. Para que as somatórias desta última equação possam ser calculadas, é necessário que antes se calcule  $\theta_{j\ell}$  como solução de (3.1.44).

Pela aplicação do método de superposição modal tem-

se:

$$\theta_{j\ell} = \sum_{i=1}^p \phi_i y_{ij\ell} \quad (3.1.46)$$

onde:

- $\phi_i$  - é o  $i$ -ésimo autovetor  
 $y_{ij\ell}$  - é a  $i$ -ésima resposta normal (coordenada generalizada de amplitude modal), devido ao  $\ell$ -ésimo harmônico do esforço aplicado no ponto  $j$ , obtido pela solução da equação:

$$\ddot{y}_{ij\ell} + 2\zeta_i \omega_i \dot{y}_{ij\ell} + \omega_i^2 y_{ij\ell} = \phi_i^T T_{j\ell} = \phi_i^T \left[ T_{j\ell}^0 \sin(\bar{\omega}_{j\ell} t + \beta_{j\ell}) \right] \quad (3.1.47)$$

Esta equação é inteiramente equivalente a de um sistema de um grau de liberdade [23] e [24], obtendo-se  $y_{ij\ell}$  da mesma maneira. Tem-se então que:

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix} \quad \theta_m = \sum_j \sum_{\ell} \sum_i \phi_{mi} y_{ij\ell} \quad m=1, 2, \dots, n \quad (3.1.48)$$

### 3.1.3 - Aplicação da superposição modal para análise dinâmica

O desenvolvimento das equações da seção anterior, mostra como o método de superposição modal pode ser aplicado, para converter o conjunto de  $n$  equações acopladas em  $n$  equações decopladas pelo uso de coordenadas normais.

O método pode ser utilizado para determinar as res-

postas de um sistema em que o amortecimento é expresso por percentagens de amortecimento modais. Ele consiste das seguintes etapas:

- (1) Determinação das frequências naturais e modos normais para o sistema livre não amortecido. Obtêm-se os  $p$  nas baixas frequências naturais e respectivos modos, ortonormalizados em relação à matriz de inércia; obtêm-se ainda as velocidades críticas de operação do sistema.
- (2) Cálculo das excitações generalizadas  $M_i(t)$  a partir das cargas atuantes  $M(t)$ , obtêm-se:

$$M_i(t) = \Phi_i^T M(t) ; \quad i=1,2,\dots,p \quad (3.1.49)$$

- (3) Cálculo das respostas modais  $y_i$ . A solução da equação (3.1.35) é equivalente a solução de um sistema de um grau de liberdade.
- (4) Resposta total dos deslocamentos. A resposta é obtida pela transformação de coordenadas normais:

$$\theta = \sum_{i=1}^p \Phi_i y_i \quad (3.1.50)$$

Na prática as contribuições dos modos superiores têm pouca importância, nos casos práticos de vibrações torcionais como será visto nos capítulos 4 e 5.



### 3.2 Equação do Movimento para Vibração Torcional de Sistemas Propulsores.

Na seção anterior foi apresentada a equação do movimento para um sistema discreto de múltiplos graus de liberdade. Esta equação é linear e de coeficientes constantes. Cabe agora verificar se ela pode ser utilizada para representar o movimento em vibração torcional de sistemas propulsores e auxiliares marítimos.

É comum admitir para o estudo de vibração torcional que a equação do movimento seja linear e de coeficientes constantes. Será examinado aqui o grau de aproximação envolvido com esta hipótese.

Considere-se o sistema representada no Figura 3.1 utilizada como modelo para o estudo de vibração torcional de instalações propulsoras, conforme foi mostrado no capítulo 2.

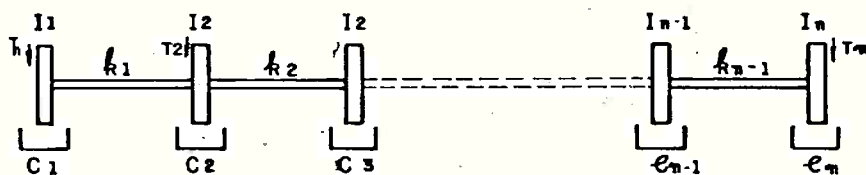


FIGURA 3.1 - SISTEMA TORCIONAL DE  $n$  MASSAS

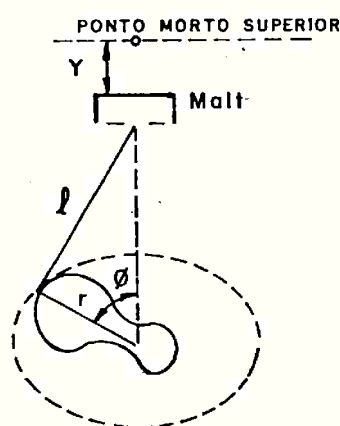
Os termos da matriz de rigidez são constantes por hipótese; os termos da matriz de amortecimento também o são, conforme será esclarecido adiante (na hipótese de não haver folga nos mancais do eixo de manivelas).

No entanto, os termos da matriz de inércia  $I$  nem

sempre serão constantes para as massas que constituem o sistema equivalente dos cilindros do motor, como é explicado a seguir. Os efeitos desta variação de inércia implica em modificações na equação do movimento [16].

Na modelagem das massas móveis correspondentes a cada cilindro, pode-se simplificadamente representá-las como se fossem constituídas de uma parte constante e de outra variável, função da posição relativa dos êmbolos ou das manivelas. É apresentado, então, a equação completa de movimento do sistema e a seguir sua linearização, para permitir a aplicação do método da superposição modal.

Para facilidade de raciocínio, considera-se o sistema de um cilindro em que as massas que compõem o sistema equivalente sejam constituídas do êmbolo, haste, cruzeta, conectora e eixo de manivelas, representado na Figura 3.2.



**FIGURA 3.2 - MODELO DAS MASSAS DE UM CILINDRO EM MOVIMENTO HARMONICO**

Nesta figura:

$l$  - é o comprimento da conectora,

$r$  - é o raio do eixo de manivelas,

$M_{alt}$  - são as massas que executam movimento alternativo,

$I_{alt}$  - é o momento de inércia destas massas.

Quando o mecanismo mostrado na Figura 3.2 estiver girando com uma velocidade angular constante  $\Omega$  e também sujeito a vibrações torcionais, tem-se que o ângulo  $\phi$  que define a posição da massa rotativa num instante  $t$ , será dado por:

$$\phi = \Omega t + \theta \quad (3.2.1)$$

onde:

$\theta$  - é a amplitude angular de vibração torcional.

Nesta posição  $Y$  será a distância da parte superior das massas alternativas ao ponto morto superior.

Aplicando-se a equação de Lagrange ao sistema composto pelas massas rotativas e alternativas da Figura 3.2, [16] e [23] tem-se:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial E}{\partial \phi} = Q_k, \quad k=0,1,\dots,n \quad (3.2.2)$$

onde:

$Q_k$  são os esforços generalizados do sistema associados a a coordenada  $\phi$ ,

$E$  é a energia cinética do sistema.

Para este caso, utilizando-se  $\phi$  como parâmetro tem-se:

$$E = \frac{1}{2} I \dot{\phi}^2 \quad (3.2.3)$$

O desenvolvimento de cada um dos termos de (3.2.2) é mostrado abaixo:

$$\frac{\partial E}{\partial \phi} = \frac{1}{2} \frac{dI}{d\phi} \dot{\phi}^2 \quad (3.2.4)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\phi}} = I \dot{\phi} \quad (3.2.5)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{\phi}} \right) = \frac{d}{dt} (I \dot{\phi}) = I \ddot{\phi} + \dot{I} \dot{\phi} = I \ddot{\phi} + \frac{dI}{d\phi} \dot{\phi}^2 \quad (3.2.6)$$

Substituindo-se estes valores em (3.2.2), tem-se:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial E}{\partial \phi} = I \ddot{\phi} + \frac{1}{2} \frac{dI}{d\phi} \dot{\phi}^2 \quad (3.2.7)$$

Como  $\phi = \Omega t + \theta$ , obtém-se:

$$\dot{\phi} = \Omega + \dot{\theta} \quad \ddot{\phi} = \ddot{\theta} \quad (3.2.8)$$

Com a substituição em (3.2.7), obtém-se:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial E}{\partial \phi} = I \ddot{\theta} + \frac{1}{2} \frac{dI}{d\phi} (\Omega^2 + 2\dot{\theta}\Omega + \dot{\theta}^2) \quad (3.2.9)$$

A inércia do sistema em estudo  $I$  é constituída da inércia das partes rotativas  $I_{rot}$  acrescida da contribuição da inércia das massas alternativas. Esta, por sua vez, pode ser expressa pela soma de um valor médio  $1/2 Malt r^2$  e de uma componente variável com a posição do êmbolo  $I_o(\phi)$ . Assim tem-se:

$$I_{alt} = \frac{1}{2} Malt r^2 + I_o(\phi) \quad (3.2.10)$$

Desta forma a inércia total é dada por:

$$I = I_{rot} + \frac{1}{2} Malt r^2 + I_o(\phi) = I_m + I_o(\phi) \quad (3.2.11)$$

onde  $I_m = I_{rot} + 1/2 Malt r^2$  não depende do movimento.

Substituindo-se os valores de  $I$  obtidos em (3.2.11) na equação (3.2.9), obtém-se:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial E}{\partial \phi} = I_m \ddot{\theta} + I_o \ddot{\theta} + \frac{1}{2} \frac{dI_o(\phi)}{d\phi} (\Omega^2 + \dot{\theta}^2 + 2\Omega\dot{\theta}) \quad (3.2.12)$$

O termo  $\frac{1}{2} \frac{dI_o(\phi)}{d\phi} (\Omega^2 + \dot{\theta}^2 + 2\Omega\dot{\theta})$  representa o impulso ocasionado pela inércia variável do sistema.

O primeiro membro da expressão (3.2.12) deve, então, substituir o termo  $I\ddot{\theta}$  na equação do movimento do sistema com coeficientes constantes (3.1.12). A equação correta, portanto, é:

$$I_m \ddot{\theta} + I_o \ddot{\theta} + \frac{1}{2} \frac{dI_o(\phi)}{d\phi} (\Omega^2 + \dot{\theta}^2 + 2\Omega\dot{\theta}) + C\dot{\theta} + k\theta = M(t) \quad (3.2.13)$$

Na maioria dos casos práticos em que os motores (de

baixa rotação) apresentam velocidade angular de ordem de 100 rpm e o valor de  $\Omega^2$  é muito maior que  $\dot{\theta}^2$ .

$$\Omega^2 \gg \dot{\theta}^2$$

Portanto é desprezível o efeito de  $\dot{\theta}$  no termo  $\frac{1}{2} \frac{dI_o(\phi)}{d\phi} (\Omega^2 + \dot{\theta}^2 + 2\Omega\dot{\theta})$ . Daí os termos da equação (3.2.13) reduzem-se a:

$$\frac{1}{2} \frac{dI_o(\phi)}{d\phi} (2\Omega\dot{\theta} + \dot{\theta}^2) + I_o \ddot{\theta} = \frac{dI_o(\phi)}{d\phi} \dot{\theta} \Omega + I_o \ddot{\theta} \quad (3.2.14)$$

porém,

$$\frac{dI_o(\phi)}{d\phi} \dot{\theta} \Omega = \frac{dI}{d(\Omega t)} \dot{\theta} \Omega = \dot{I}_o \dot{\theta} \quad (3.2.15)$$

Lógo da expressão (3.2.13) tem-se:

$$\dot{I}_o \dot{\theta} + I_o \ddot{\theta} = \frac{d}{dt} (I_o \dot{\theta}) = \Omega \frac{d}{d\phi} (I_o \dot{\theta}) \quad (3.2.16)$$

Portanto, a equação do movimento do sistema representado por (3.2.13) é dada por:

$$I_m \ddot{\theta} + \frac{1}{2} \frac{dI_o(\phi)}{d\phi} \Omega^2 + \frac{d}{d\phi} (I_o \dot{\theta}) \Omega + C\dot{\theta} + k\theta = M(t) \quad (3.2.17)$$

ou então,

$$I_m \ddot{\theta} + C\dot{\theta} + k\theta = M(t) - \frac{1}{2} \frac{dI_o(\phi)}{d\phi} \Omega^2 - \frac{d}{d\phi} (I_o \dot{\theta}) \Omega \quad (3.2.18)$$

Assim, foi vista a transformação da equação comple-

ta do movimento do sistema (3.2.13) que é não linear e de segunda ordem, para a equação (3.2.18), que será linear e de coeficientes constantes quando desprezamos o último termo da equação. Para efetuar esta transformação considera-se como excitação ao sistema todos os termos do lado direito da referida equação, quais sejam:

$M(t)$  é o conjugado devido a pressão do gás no interior do cilindro, que é variável como será mostrado em 3.4.2.

-  $1/2 \frac{dI_o(\phi)}{d\phi} \Omega^2$  é o conjugado devido ao momento de inércia variável das massas Malt constituintes do sistema equivalente.

-  $\Omega \frac{d}{d\phi} (I_o \dot{\theta})$  é o conjugado secundário [16], [25] e [26].

O conjugado secundário normalmente não aparece no desenvolvimento feito por outros autores [1], [5], etc. Os dois últimos termos são evidentemente excitações devidas a não linearidade da inércia do cilindro.

Estuda-se nas próximas seções os efeitos de cada um destes componentes na vibração torcional do sistema e especificamente nas respostas em amplitudes.

O estudo foi desenvolvido simplificadamente para um motor de um cilindro sendo, no entanto, válido para um caso genérico de  $n$  cilindros [2], [4], [16].

### 3.3 Determinação de Frequências Naturais e Modos de Vibrar

A aplicação do método de superposição modal pressupõe o conhecimento dos autovalores e autovetores do sistema. Nesta seção é tratado o problema de determinação dos autovalores, frequências naturais e modos naturais para o sistema em vibração torcional.

Considere-se o sistema torcional submetido a vibração livre não amortecido representado na Figura 3.3. Aplicando-se a equação do movimento ao sistema, tem-se [11], [13]:

$$\begin{aligned}
 I_1 \ddot{\theta}_1 + k_1 \theta_1 - k_1 \theta_2 &= 0 \\
 I_2 \ddot{\theta}_2 - k_1 \theta_1 + k_1 \theta_2 + k_2 \theta_2 - k_2 \theta_3 &= 0 \\
 I_3 \ddot{\theta}_3 - k_2 \theta_2 + k_2 \theta_3 + k_3 \theta_3 - k_3 \theta_4 &= 0 \\
 \dots & \\
 \dots & \\
 I_{n-1} \ddot{\theta}_{n-1} - k_{n-2} \theta_{n-2} + k_{n-2} \theta_{n-1} + k_{n-1} \theta_{n-1} - k_{n-1} \theta_n &= 0 \\
 I_n \ddot{\theta}_n - k_{n-1} \theta_{n-1} + k_{n-1} \theta_n &= 0
 \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

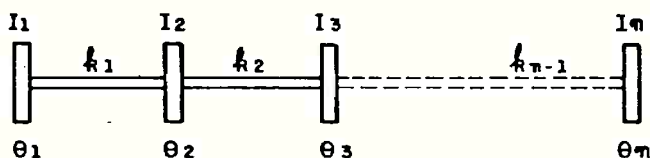


FIGURA 3.3 - SISTEMA TORCIONAL EQUIVALENTE



Este sistema de equações pode ser representado na forma matricial por:

$$\begin{vmatrix} I_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & 0 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & I_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & I_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \theta_n \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -k_1 & -k_1+k_2 & -k_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2+k_3 & k_4 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & -k_{n-2} & k_{n-2}+k_{n-1} & -k_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & -k_{n-1} & k_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \theta_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \theta_n \end{vmatrix} = 0 \quad (3.3.2)$$

Em forma simplificada seria representado por:

$$I\ddot{\theta} + K\theta = 0 \quad (3.3.3)$$

onde:  $I$  =  $|I|$  - é a matriz de inércia (no caso uma matriz diagonal) do sistema,

$K$  =  $|K|$  - é a matriz de rigidez do sistema,

$\theta$  =  $|\theta|$  - vetor de deslocamentos de vibrações do sistema (matriz coluna).

Admitindo que o sistema execute um movimento harmônico tem-se:

$$\theta_j = \theta_{0j} \cos \omega t$$

e, portanto,

$$\ddot{\theta}_j = -\omega^2 \theta_{0j} \quad (j=1,2,\dots,n) \quad (3.3.4)$$

Substituindo-se os valores obtidos em (3.3.4) nas equações (3.3.1), resulta:

$$\begin{aligned} -\omega^2 I_1 \theta_{01} + k_1 \theta_{01} - k_1 \theta_{02} &= 0 \\ -\omega^2 I_2 \theta_{02} - k_1 \theta_{01} + k_1 \theta_{02} + k_2 \theta_{02} - k_2 \theta_{03} &= 0 \\ -\omega^2 I_3 \theta_{03} - k_2 \theta_{02} + k_2 \theta_{03} + k_3 \theta_{03} - k_3 \theta_{04} &= 0 \\ \dots\dots\dots & \\ \dots\dots\dots & \\ -\omega^2 I_{n-1} \theta_{0n-1} - k_{n-2} \theta_{0n-2} + k_{n-2} \theta_{0n-1} + k_{n-1} \theta_{0n-1} - k_{n-1} \theta_{0n} &= 0 \\ -\omega^2 I_n \theta_{0n} - k_{n-1} \theta_{0n-1} + k_{n-1} \theta_{0n} &= 0 \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

O sistema (3.3.5) apresenta solução além da trivial se:

$$\begin{vmatrix}
 k_1 - w^2 I_1 & -k_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
 -k_1 & k_1 + k_1 - w^2 I_2 & -k_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
 0 & -k_2 & k_2 + k_3 - I_3 w^2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\
 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & k_{n-2} + k_{n-1} - w^2 I_n & -k_{n-1} \\
 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & -k_{n-1} & k_{n-1} - w^2 I_n
 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.3.6)$$

ou de forma sintética:

$$|K - w^2 I| = 0 \quad (3.3.7)$$

Chamando-se  $w^2 = \lambda$  as equações (3.3.5) e (3.3.6) definem um problema de autovalor. Os autovalores  $\lambda$  determinados a partir de (3.3.6) permitem obter em (3.3.5) os correspondentes autovetores.

A aplicação do método de autovalores foi desenvolvida para uso em computadores digitais, destacando-se como formas diferentes, conforme a dimensão do problema, o método de busca do determinante e o da iteração por sub-espço [10] e [15] no programa SAP IV. O primeiro método é empregado quando não se requer grande armazenagem de dados e o segundo quando isto se faz necessário.

O cálculo de frequências naturais também pode ser feito por outros métodos. Um destes, o de Holzer, especialmente desenvolvido para vibração torcional de sistemas discretos é apresentado no Apêndice B.

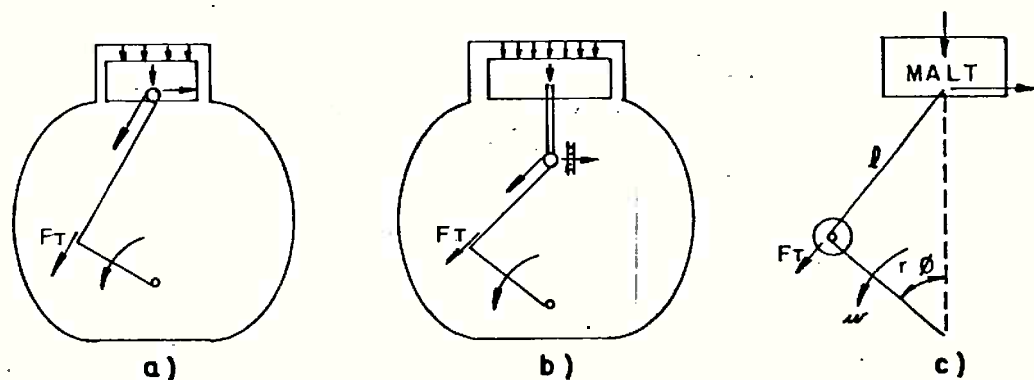
### 3.4 - Análise da Excitação

A natureza dos diversos esforços que atuam sobre o sistema de modo a executar vibrações torcionais é examinado nesta seção.

#### 3.4.1 - Conjugado devido à pressão do gás

O principal componente dos esforços que atuam sobre o sistema é o conjugado proveniente da pressão do gás no interior dos cilindros.

Esta pressão sobre a cabeça do êmbolo, resulta numa força que projetada na direção da conectora exerce um conjugado sobre o eixo de manivelas como ilustrado na Figura 3.4.



**FIGURA 3.4 - REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DO CONJUGADO DEVIDO À PRESSÃO DO GÁS**

- a) motor tipo "trunk".
- b) motor tipo cruzeta.
- c) modelo para os dois tipos de motor.

A Figura 3.4 mostra esquematicamente o efeito da pressão do gás na geração do conjugado motor em motores tipo "Trunk" e tipo cruzeta. Adicionalmente, é apresentado um modelo que representa os referidos motores.

Pode-se mostrar que o conjugado  $M(t)$  devido a força tangencial  $F_t$  pode ser expresso por [5]:

$$M(t) = p A r \left\{ \sin \phi \left( 1 + \frac{r}{\ell} \cos \phi \right) \right\} \quad (3.4.1)$$

onde:

- $p$  - é a pressão que atua sobre a cabeça do êmbolo,
- $A$  - é a área da cabeça do êmbolo,
- $r$  - é o raio da manivela,
- $\ell$  - é o braço da conectora,
- $\phi$  - é o ângulo da manivela a partir do ponto morto superior.

Seja  $p_t$  a pressão tangencial definida por:

$$p_t = \frac{M(t)}{A r} \quad (3.4.2)$$

A pressão exercida pelo gás no interior do cilindro é variável ao longo do ciclo de operação do motor sendo, porém, periódica. Assim, para cada cilindro existe um ciclo de pressão, e portanto de conjugado, cujo período depende do tipo de motor. Para motores de dois tempos o período do ciclo corresponde ao tempo de uma rotação do motor e para motores de quatro tempos o período corresponde ao tempo de duas rotações.

Como a função pressão, ou conjugado, é periódica e-

la pode ser representada ao longo do tempo por uma série de Fourier. Assim, pode-se expressá-la por:

$$\begin{aligned}
 p(t) &= p_{t_0} + \sum_{m=1}^{\infty} p_{t_m} e^{i\epsilon m} e^{im\omega t} = \\
 &= p_{t_0} + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos m\omega t + B_m \sin m\omega t) \quad (3.4.3)
 \end{aligned}$$

Na expressão (3.4.3), tem-se que:

$$A_m = p_{t_m} \cos \epsilon m \quad (3.4.4)$$

$$B_m = p_{t_m} \sin \epsilon m \quad (3.4.5)$$

$$p_{t_m} = \sqrt{A_m^2 + B_m^2} \quad (3.4.6)$$

$$\epsilon m = \arctan \frac{B_m}{A_m} \quad (3.4.7)$$

é o ângulo de fase do harmônico normalmente medida em relação ao ponto morto superior do êmbolo.

$p_{t_0}$  - é o valor médio da pressão ao longo do ciclo.

$m$  - é o índice do harmônico ( $m=1, \dots$ .)

A determinação dos termos da série acima é feita através de uma análise harmônica da função  $p(t)$  registrada por indicadores instalados nos cilindros dos motores.

A Figura 3.5 mostra a decomposição de  $p(t)$  em seus principais harmônicos para um motor de quatro tempos. Nesta figura estão representados harmônicos de ordem fracionária pois é

comum adotar como frequência de referência, em vez da frequência fundamental da pressão, a velocidade angular do motor. Nesta condição, como o motor é de quatro tempos, a frequência fundamental da pressão é a metade da velocidade angular do motor.

Do diagrama indicado calcula-se a pressão média efetiva conforme mostrada na Figura 3.5.

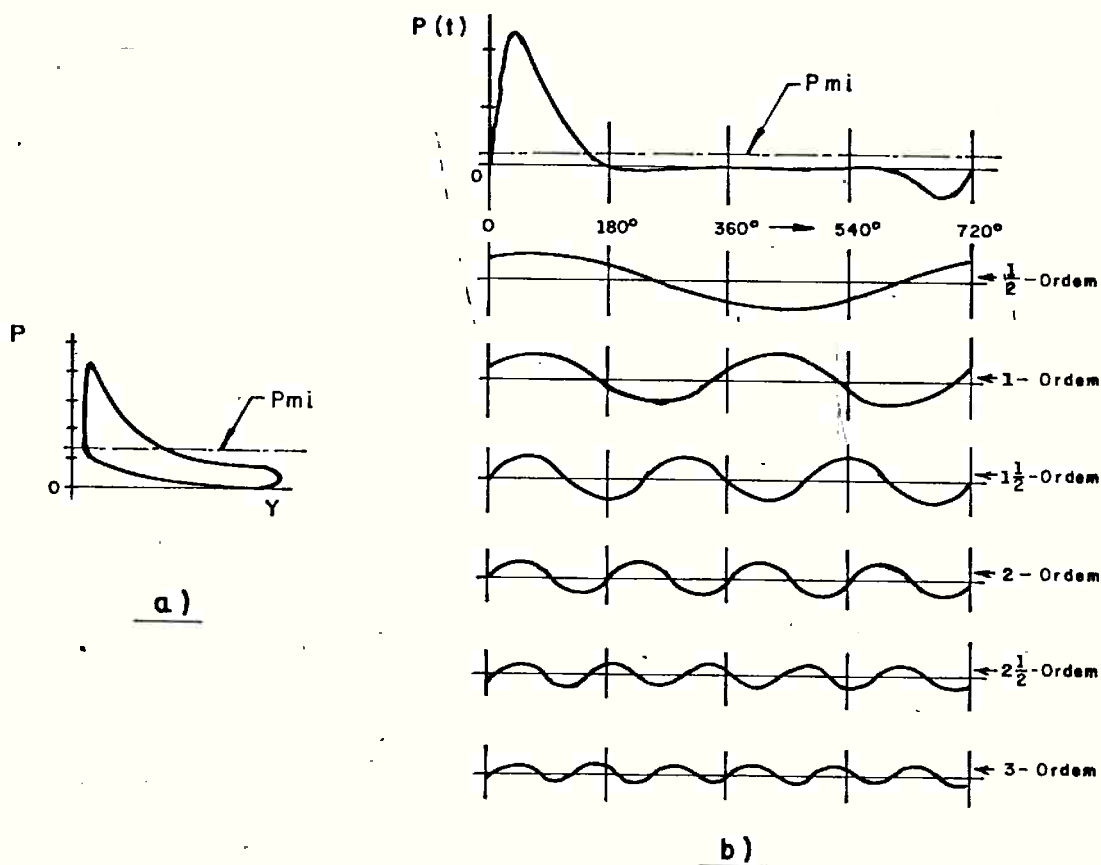


FIGURA 3.5 - a) DIAGRAMA INDICADOR DO MOTOR  
b) DECOMPOSIÇÃO DOS CONJUGADOS DE  
EXCITAÇÃO DO MOTOR EM HARMÔNICOS

A análise harmônica do conjugado variável de  $p(t)$  pode ser realizada por vários processos [2] e [5]. Destas análises obtêm-se os valores dos componentes harmônicos de  $p(t)$  em função de  $P_{mi}$  (pressão média indicada) obtida do diagrama, adotando-se como origem o ponto morto superior do cilindro nº 1.

As Figuras 3.6 e 3.7 mostram para um motor de quatro tempos a variação dos harmônicos em função da pressão média indicada ( $p_{mi}$ ) e do ângulo  $\phi$ . Assim, quando varia a carga do motor variará o diagrama  $p(t) = f(\phi)$  e o valor de  $p_{mi}$ , conforme é mostrado nas referidas figuras.

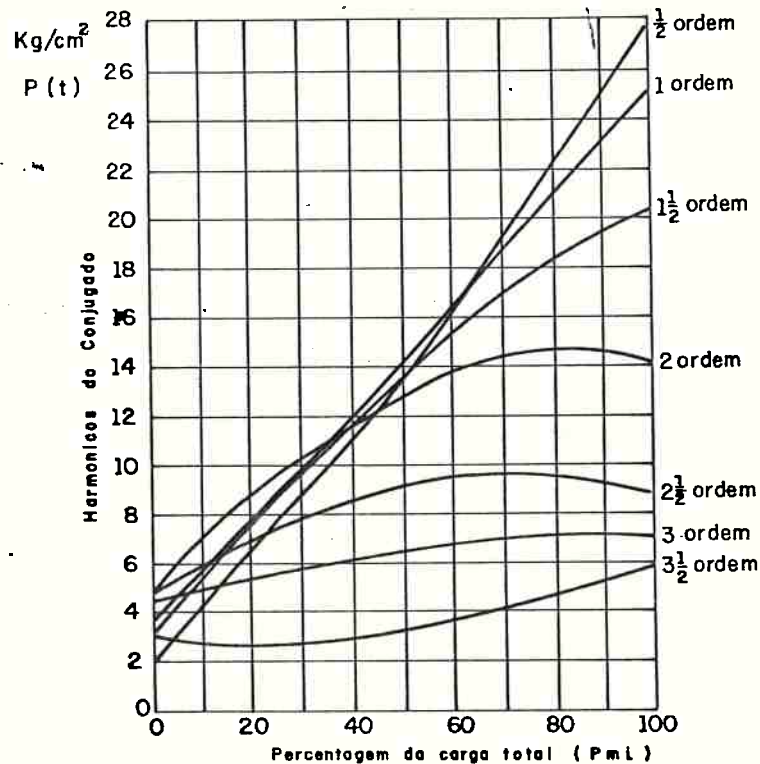


FIGURA 3.6 - HARMÔNICOS DO CONJUGADO EM FUNÇÃO DA PRESSÃO MÉDIA INDICADA



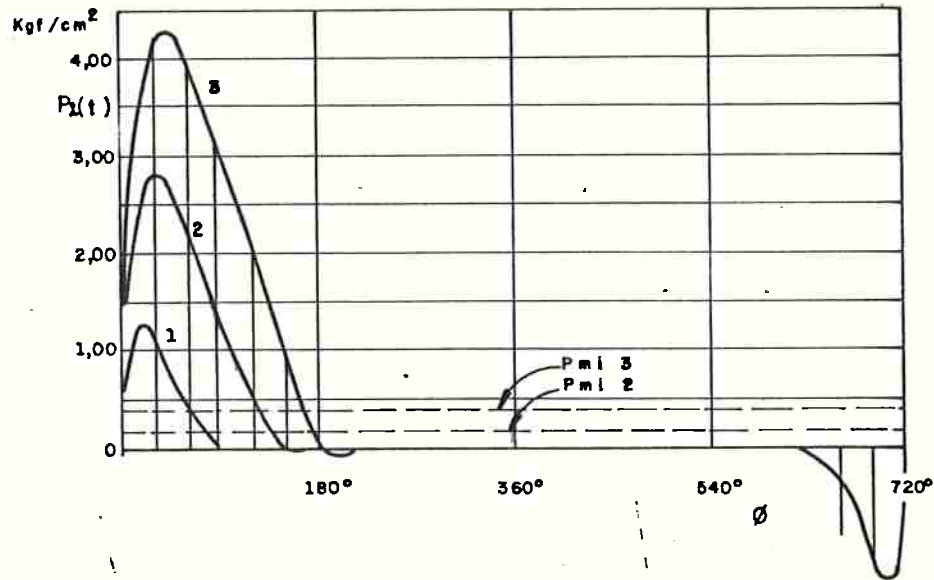


FIGURA 3.7- DIAGRAMA DA PRESSÃO TANGENCIAL EM FUNÇÃO DO ANGULO  $\phi$  PARA DIFERENTES CONDIÇÕES DE CARGA DO MOTOR

Nos casos em que deseja-se calcular as respostas modais nas velocidades críticas do motor deve-se então correlacionar as suas velocidades com a pressão indicada. Um método simplificado consiste em admitir que em um sistema propulsor marítimo o conjugado médio do motor é aproximadamente proporcional ao quadrado da rotação. Na realidade o expoente a ser elevada a rotação deverá ser superior a 2, dependendo das formas do navio e variará ainda com as condições de carga e rugosidade do casco.

Alguns autores [2] admitindo que permanece constante o rendimento mecânico do motor, hipótese válida para motores marítimos e estacionários de baixa e média rotação, adotam a seguinte expressão:

$$P_{mi} = 0,96 \left( \frac{N}{N_n} \right) + 0,04 P_{me} + P_{mt} \quad (3.4.9)$$

onde:

$P_{mi}$  - é a pressão média efetiva indicada na velocidade crítica,

$P_{mi_n}$  - é a pressão média indicada na rotação nominal,

$P_{me}$  - é a pressão média efetiva na rotação nominal

$P_{mt} = P_{mi_n} - P_{me}$ ,

$N_n$  - é a rotação nominal,

$N$  - é a rotação crítica genérica.

Em motores estacionários, como sistemas motores geradores que funcionam em regime de velocidade constante, bastará calcular as forças de excitação do motor na pressão média efetiva indicada, correspondente a velocidade nominal ou 10% acima deste valor (sobrecarga) [2].

### 3.4.2 Conjugado devido a variação do momento de inércia

Como foi visto na seção 3.2 a existência deste conjugado de excitação é devida aos impulsos gerados pela variação das inércias das massas alternativas do motor que ocasionam efeitos de não linearidade na equação do movimento do sistema.

Para se analisar o efeito do conjugado das massas alternativas na excitação do motor, faz-se necessário modelar o sistema êmbolo, haste, cruzetas, conectora, eixo de manivelas por uma massa Malt com movimento alternativo e uma massa rotati

va  $M_{rot}$  girando uniformemente em torno do ponto  $O$  e representado pela Figura 3.8, semelhante a 3.4.

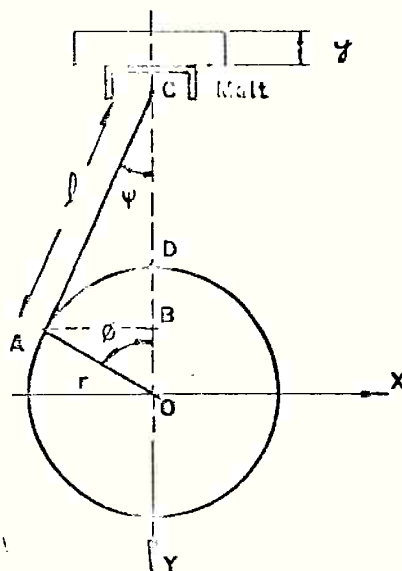


FIGURA 3.8 - ESQUEMA DO MECANISMO DO CILINDRO.

Admitindo-se que o eixo de manivelas gira com velocidade angular uniforme  $\Omega$ , tem-se:

$$\phi = \Omega t$$

A distância  $y$  que define a posição da massa alternativa é dada por  $|1|$ :

$$y = DB - (AC - BC) \quad (3.4.10)$$

Na mesma Figura 3.3 tem-se que:

$$DB = r(1 + \cos \phi) \quad (3.4.11)$$

$$AC - BC = l(1 - \cos \psi) \quad (3.4.12)$$

Além disso, observa-se que:

$$AB = l \operatorname{sen} \psi = r \operatorname{sen} \phi$$

$$\therefore \operatorname{sen} \psi = \frac{r}{l} \operatorname{sen} \phi \quad (3.4.13)$$

Consequentemente:

$$\cos \psi = \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \operatorname{sen}^2 \phi} \quad (3.4.14)$$

e obtêm-se então:

$$y = r(1 - \cos \phi) + l \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \operatorname{sen}^2 \phi} \right) \quad (3.4.15)$$

Examinando o termo sob a raiz de valor igual a  $1 - \frac{r^2}{l^2}$ , verifica-se que em motores usuais  $\frac{r}{l}$  é bem menor do que 1 e o termo  $\sqrt{1 - \left(\frac{r^2}{l^2}\right) \operatorname{sen}^2 \phi} \ll 1$ . Expandindo-se em série de potências e considerando-se apenas o 1º termo, tem-se:

$$\sqrt{1 - \left(\frac{r^2}{l^2}\right) \operatorname{sen}^2 \phi} = 1 - \frac{r^2}{2l^2} \operatorname{sen}^2 \phi \quad (3.4.16)$$

Substituindo-se este valor na expressão (3.4.15), ob-  
têm-se:

$$y = r(1 - \cos \phi) + \frac{\Omega^2}{2l} \operatorname{sen}^2 \phi t \quad (3.4.17)$$

como,

$$\cos 2\Omega t = 1 - 2\text{sen}^2 \Omega t$$

$$\text{e} \quad (3.4.18)$$

$$\text{sen}^2 \Omega t = \frac{1 - \cos 2\Omega t}{2}$$

A expressão (3.4.16) transforma-se em:

$$y = \left(r + \frac{r^2}{4\ell}\right) - r \left[ \cos \phi + \frac{r}{4\ell} \cos 2\phi \right] \quad (3.4.19)$$

$$y = r(1 - \cos \phi) + \frac{1}{4} \frac{r}{\ell} r(1 - \cos 2\phi) \quad (3.4.20)$$

Assim, derivando-se em relação a  $\phi$ , tem-se:

$$\frac{dy}{d\phi} = r(\text{sen } \phi + \frac{1}{2} \frac{r}{\ell} \text{sen } 2\phi) \quad (3.4.21)$$

e

$$\frac{dy}{r d\phi} = \text{sen } \phi + \frac{1}{2} \frac{r}{\ell} \text{sen } 2\phi \quad (3.4.22)$$

Na seção 3.2 foi mostrado que a inércia total das massas que compõem o sistema equivalente de um cilindro, constituídas pelo êmbolo, haste, cruzeta, conectora e eixo de manivelas, pode ser representada simplificadaamente pelo sistema mostrado na Figura 3.2. Neste caso a inércia do sistema I é constituída pela inércia das partes rotativas  $I_{rot}$  acrescida da contribuição da inércia das massas alternativas  $I_{alt}$ .

Por sua vez as massas alternativas, quando estiverem ocupando uma posição qualquer definida pela coordenada Y e

pelo ângulo  $\phi$  mostrados na Figura 3.6, tem o seu momento de inércia dado por [16]:

$$I_{alt} = Malt r^2 \left( \frac{dy}{rd\phi} \right)^2 \quad (3.4.23)$$

Substituindo-se o valor de (3.4.22) em (3.4.23), ob-  
tém-se:

$$\begin{aligned} I_{alt} &= Malt r^2 \left( \text{sen } \phi + \frac{1}{2} \frac{r}{\ell} \text{sen } 2\phi \right)^2 = \\ &= Malt r^2 \left( \text{sen}^2 \phi + \frac{r}{\ell} \text{sen } \phi \text{sen } 2\phi + \frac{1}{4} \left( \frac{r}{\ell} \right)^2 \text{sen}^2 2\phi \right) = \\ &= \frac{1}{2} Malt r^2 \left( 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{r}{\ell} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} Malt r^2 \left( \frac{r}{\ell} \cos \phi - \cos 2\phi - \right. \\ &\quad \left. - \frac{r}{\ell} \cos 3\phi - \frac{(r/\ell)^2}{4} \cos 4\phi \right) \quad (3.4.24) \end{aligned}$$

Desprezando-se o termo  $\frac{1}{4} \left( \frac{r}{\ell} \right)^2$  no parêntese  $\left( \frac{1}{4} \left( \frac{r}{\ell} \right)^2 + 1 \right)$ ,

tem-se:

$$\begin{aligned} I_{alt} &= \frac{1}{2} Malt r^2 + \frac{1}{2} Malt r^2 \left( \frac{r}{\ell} \cos \phi - \cos 2\phi - \frac{r}{\ell} \cos 3\phi - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(r/\ell)^2}{4} \cos 4\phi \right) = \frac{1}{2} Malt r^2 + I_O(\phi) \quad (3.4.25) \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} I_O &= \frac{1}{2} Malt r^2 \left( \frac{r}{\ell} \cos \phi - \cos 2\phi + \frac{r}{\ell} \cos 3\phi - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(r/\ell)^2}{4} \cos 4\phi \right) \quad (3.4.26) \end{aligned}$$

Então o conjugado devido ao momento de inércia variável das massas alternativas é dado por:

$$-\frac{1}{2} \Omega^2 \frac{dI_0}{d\phi} = \Omega^2 Malt r^2 \left( \frac{r}{\ell} \frac{1}{4} \text{sen } \phi - \frac{1}{2} \text{sen } 2\phi - \frac{3}{4} \frac{r}{\ell} \text{sen } 3\phi - \frac{(r/\ell)^2}{4} \text{sen } 4\phi \right) \quad (3.4.27)$$

A expressão (3.4.27) dá então o valor da influência do momento de inércia variável no conjugado de excitação dada em (3.2.18); quatro harmônicos então devem ser considerados.

Analogamente, ao que se fez para o conjugado devido a pressão do gás, pode-se definir a pressão tangencial, devida a esta nova excitação.

$$P_I(t) = \frac{Malt}{A} \Omega^2 r \left\{ \frac{r}{\ell} \frac{1}{4} \text{sen } \phi - \frac{1}{2} \text{sen } 2\phi - \frac{3}{4} \frac{r}{\ell} \text{sen } 3\phi - \frac{(r/\ell)^2}{4} \text{sen } 4\phi \right\} = Malt \Omega^2 r \cdot \left\{ \left( \frac{r}{\ell} \right) \text{sen } \Omega t + \frac{1}{2} \text{sen } 2\Omega t - \frac{3}{4} \frac{r}{\ell} \text{sen } 3\Omega t - \frac{(r/\ell)^2}{4} \text{sen } 4\Omega t \right\} \quad (3.4.27)$$

Convém lembrar que a expressão (3.4.27) foi deduzida a partir de uma simplificação adotada. Muitos autores desprezam inclusive o valor do quarto termo |1|, |2| e |5| considerando somente os três primeiros como significativos. No en

tanto, em motores Diesel de baixa e média rotação, o valor do 4º termo corresponde de 5 a 10% do 2º termo e ainda deve ser considerado [17]. Assim, as amplitudes dos quatro primeiros componentes de  $P_I(t)$  são dadas por:

$$\begin{aligned}
 P_{I_1}(t) &= \frac{r}{\ell} \frac{M\ell\alpha t}{4A} r\Omega^2 \\
 P_{I_2}(t) &= - \frac{M\ell\alpha t}{2A} r\Omega^2 \\
 P_{I_3}(t) &= \frac{3rM\ell\alpha t}{\ell 4A} r\Omega^2 \\
 P_{I_4}(t) &= \frac{(r/\ell)^2 M\ell\alpha t}{4A} r\Omega^2
 \end{aligned}
 \tag{3.4.28}$$

### 3.4.3 Conjugados secundários

O assunto foi inicialmente estudado por Draminsky [16] quando em certos tipos de motores de dois tempos e dez cilindros, as respostas calculadas das vibrações torcionais de 8ª ordem apresentaram uma discrepância em relação aos resultados medidos, acima dos valores usuais. Felizmente as conseqüências não foram sérias, pelo fato dessas vibrações ocorrerem em velocidades acima das normais de operação do motor.

No entanto, foi desenvolvido uma teoria de vibração não linear para explicar e tentar quantificar o fenômeno [16]. Conclui-se que o impulso devido ao momento de inércia variável



do motor conforme visto em 3.4.1 em ressonância com componentes secundários das vibrações livres do sistema produzirá vibrações forçadas por meio de um mecanismo especial de não linearidade . Verificou-se também que na maioria dos motores, os amortecimentos existentes eram suficientes para tornar estes efeitos de pequeno valor proporcionalmente às respostas totais que ocorriam normalmente.

O mesmo assunto foi pesquisado recentemente [26] e [27], chegando-se a conclusão que sendo menor que 0,3 a razão entre o momento de inércia médio das massas alternativas do cilindro e o momento de inércia do sistema equivalente, e se as ordens de vibrar forem superiores a 8ª os efeitos dos conjugados secundários podem não ser desprezíveis em motores com configurações geométricas especiais (como os recentes motores de longo curso).

Estes efeitos são desprezíveis na maioria dos motores convencionais, porém pesquisas devem ser desenvolvidas para quantificá-los nos motores modernos.

#### 3.4.4 Conjugado devido ao hélice

Um sistema propulsor genérico, semelhante ao representado na Figura 2.1 apresentará uma fonte de excitação no hélice da mesma maneira que no motor.

Se fosse possível obter-se um hélice com um número infinito de pás, hidrodinamicamente semelhantes, colocado em uma profundidade de imersão adequada e ainda operando sob um con

jugado constante e em uma esteira homogênea, não haveria flutuações de conjugado e empuxo no propulsor. No entanto, como nos casos reais estas condições não ocorrem, surgem então conjugados de excitação torcionais, cujas magnitudes dependem das características dos hélices e dos campos de esteira em que eles funcionam. Deve-se ressaltar ainda outros fatores importantes como a posição do hélice em relação ao casco, a forma da popa e apêndices do navio (que influenciam na esteira), o número e geometria das pás dos hélices, que também irão ter uma influência marcante nas magnitudes das excitações.

Foram realizados estudos aprofundados sobre as frequências de excitação para vibração torcional devido ao propulsor, tanto para navios mono-hélices como bi-hélices [2], [20]. De um modo geral, a frequência fundamental de excitação dos hélices é dada pela expressão:

$$F_1 = Z \times N_p \quad (3.4.29)$$

onde:

Z - é o número de pás do hélice,

$N_p$  - é a rotação do hélice.

Apesar desta frequência fundamental ser a principal a ser considerada, outras múltiplas dela também devem ser levadas em consideração, apesar de excitarem o sistema propulsor com magnitudes menores [20].

No caso de existirem engrenagens redutoras entre o motor e o hélice a frequência de excitação referida à rotação do

motor é expressa por:

$$F_r = \frac{Z}{r} \times N_m \quad (3.4.30)$$

onde:

$r$  - é a razão de redução da engrenagem,

$N_m$  - é a rotação do motor.

As amplitudes de excitação do hélice tem sido medidas em modelos e provas de mar de navios existentes [2], [20] e [21]. Estes valores podem servir de base para uma estimativa inicial dos conjugados de excitação devidas a propulsores. Eles variam em relação ao conjugado médio de valores no máximo iguais a  $\pm 15\%$  para navios mono-hélices e de  $\pm 8\%$  para navios de 2 hélices, nas suas respectivas frequências fundamentais.

Da mesma maneira que foi estudado para o motor, os conjugados de excitação do hélice também podem ser expressos em série de Fourier. Assim tem-se para o conjugado  $M_p(t)$ , genérico [8]:

$$M_p(t) = \sum_{n=1}^{\infty} t_{on} e^{-i\epsilon n} \cdot e^{in\omega t} \quad (3.4.31)$$

onde:

$t_{on}$  - é a amplitude do harmônico de ordem  $n$  do conjugado,

$\epsilon n$  - é o ângulo de fase do harmônico de ordem  $n$ ,

$\omega$  - é a frequência de excitação,

$t$  - é o tempo.

A Figura 3.9 mostra os dois harmônicos principais

da excitação do hlice de um navio, determinados na fase de projeto de instalaçõ propulsora.

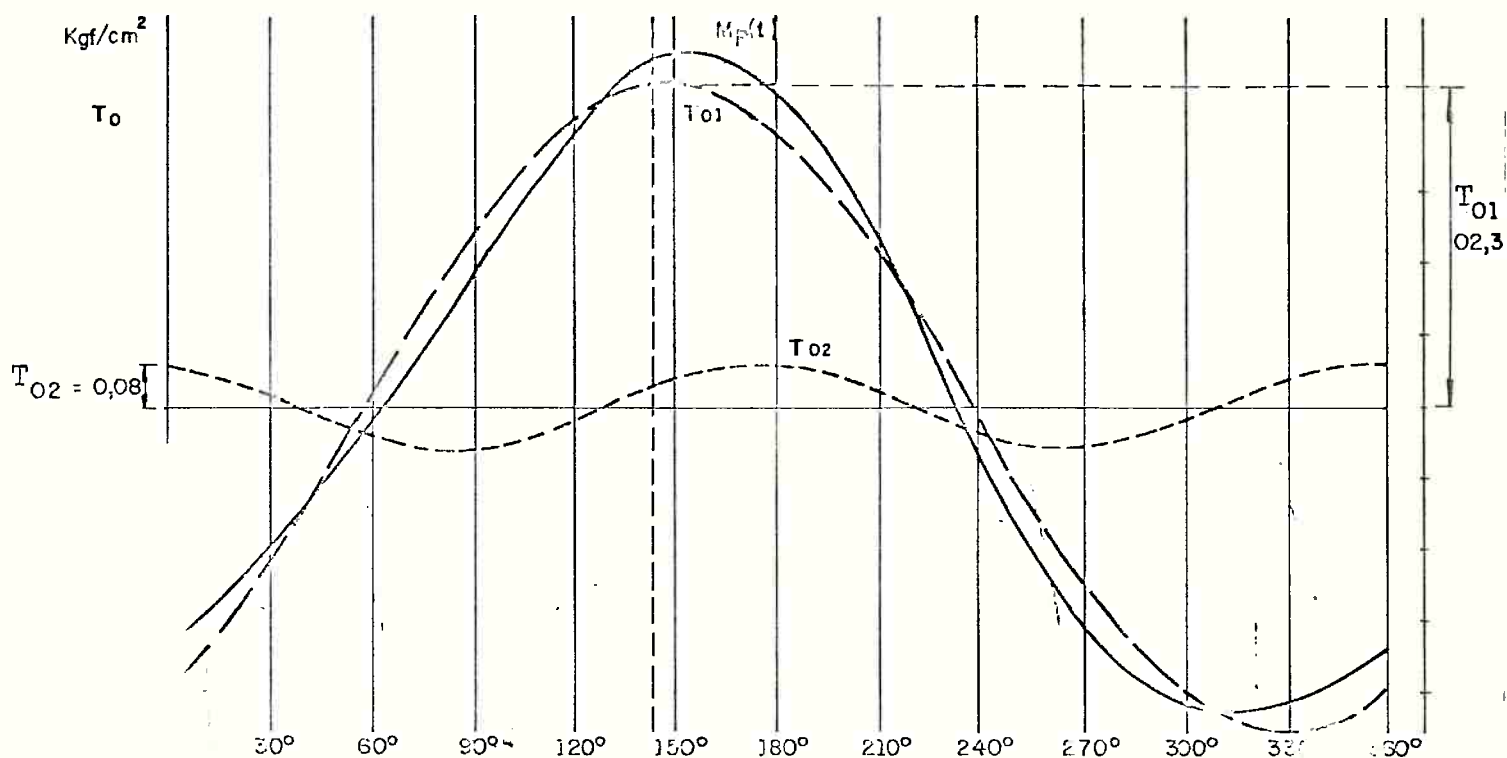


FIGURA 3.3 - HARMÔNICOS DO MOMENTO DE EXCITAÇÃO DO HILICE

Nesta figura:

$M_p(t)$  - é o conjugado de excitação,

$T_{O1}$  - é o harmônico na frequência fundamental,

$T_{O2}$  - é o harmônico no dobro da frequência fundamental.

Observa-se na referida figura que a amplitude de  $T_{O2}$  é muito inferior a de  $T_{O1}$ , podendo ser desprezada nos cálculos, no presente caso.

## 3.4.5 Velocidades críticas

Cada um dos diversos harmônicos dos conjugados de excitação podem provocar ressonância com os diversos modos naturais do sistema. Toda velocidade angular do motor em que o produto da ordem de um harmônico por esta velocidade for igual a uma frequência natural é chamada de velocidade crítica. Assim, tem-se diversas velocidades críticas em que ocorrem ressonância em um sistema propulsor.

A Figura 3.10 mostra através de um diagrama de frequência natural contra rotação do motor, as diversas velocidades críticas do sistema para as excitações produzidas pelo motor. As interseções das retas que representam as ordens dos harmônicos, que tem coeficiente angular igual a ordem, com as retas horizontais que representam as frequências naturais determinam as velocidades críticas do sistema. Estas velocidades estão mostradas para o primeiro modo de vibrar pelos pontos 1, 2, 3, ..., n e para o segundo modo pelos pontos 1', 2', 3', ..., n'.

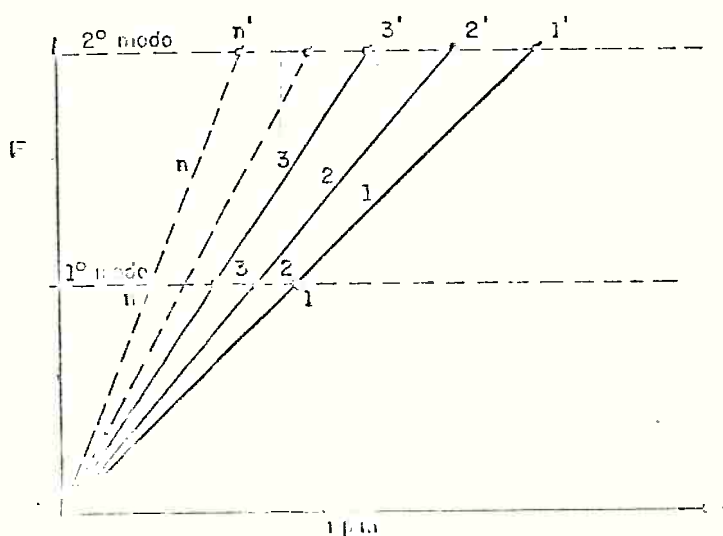


FIGURA 3.10 - VELOCIDADES CRÍTICAS NATURAIS VERSUS RPM DO MOTOR

### 3.4.6 Combinação dos efeitos - Energia introduzida

Foram examinadas em seções anteriores as diferentes excitações que atuam no sistema propulsor. Antes de apresentar um procedimento para determinação da resposta em vibração torsional produzida por estas excitações, é analisada a interação dos diversos conjugados que atuam na mesma frequência.

#### 3.4.6.1 Conjugados devido a pressão do gás e a variação de inércia em motores monocilíndricos

Como foi visto anteriormente, o conjugado devido à pressão do gás tem componentes em séries de senos e cossenos, para diversas frequências. Estas frequências são múltiplas da velocidade angular do motor. Estes múltiplos são de ordem inteira  $1, 2, 3, \dots, n$ , para motores de dois tempos e fracionários  $1/2, 1, 1\ 1/2, 2, \dots, n$  para motores de quatro tempos.

O conjugado devido à variação do momento de inércia tem apenas componentes em séries de seno em um número menor de frequências; são considerados normalmente apenas os múltiplos da velocidade angular do motor de ordem  $1, 2, 3$  e  $4$ , conforme foi mostrado na seção 3.4.2.

Desta forma os efeitos da pressão do gás e de inércia só são adicionados para frequências de ordem  $1, 2, 3$  e  $4$ , sendo que o termo de inércia é somado algebricamente ao termo de seno da pressão devido ao gás para depois se efetuar a composição trigonométrica com o termo de cosseno.

Assim, usando-se as expressões obtidas nas seções 3.4.1 e 3.4.2 o valor dos quatro primeiros termos de  $pt_n$  ( $n=1, 2, 3, 4$ ) seriam:

$$pt_n = (B_n + P_I(t)) \text{sen } n \omega t + A_n \text{cos } n \omega t \quad (3.4.32)$$

onde  $P_I(t)$  é o termo do conjugado devido a variação do momento de inércia ( $n=1, 2, 3, 4$ ).

A Figura 3.11 mostra a composição gráfica destes efeitos.

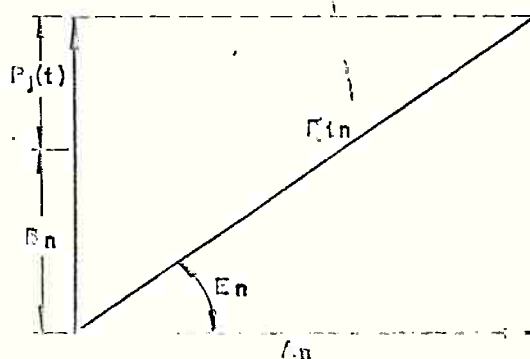


FIGURA 3.11-- COMPOSIÇÃO GRÁFICA DA COMBINAÇÃO DO EFEITO DO CONJUGADO DEVIDO A PRESSÃO DE GÁS COM O DO MOMENTO DE INÉRCIA VARIÁVEL

Um motor monocilíndrico quando operando em velocidade crítica sempre apresentará problemas sérios de vibração torsional a menos que exista um amortecimento significativo no sistema, pois a energia introduzida no processo de vibração nunca se anula.

Considere-se o sistema equivalente a um motor monocilíndrico acionando uma carga, que está mostrado na Figura 3.12.



FIGURA 3.12 - SISTEMA EQUIVALENTE A UM MOTOR MONOCILINDRICO

Nesta figura:

$I_c$  - é o momento de inércia equivalente do sistema a  
cionado,

$I_m$  - é o momento de inércia equivalente do motor,

$k$  - é o coeficiente de rigidez torcional do eixo.

Sejam:

$\Omega$  - é a velocidade angular do motor,

$\omega_n$  - é a frequência natural para vibração torcional do sistema.

Considerando-se a velocidade crítica de ordem  $m$ , tem

se:

$$\Omega = \frac{\omega_n}{m} \quad (3.4.33)$$

Pode-se mostrar [1], [2], [5] e [17], que a energia introduzida durante um ciclo de vibração é dada por:

$$E = \pi T_{mgi} \beta_m \quad (3.4.34)$$



onde:

$T_{mgi}$  - é a amplitude do conjugado de excitação resultante da soma dos conjugados devidos a pressão do gás e de inércia,

$\beta_m$  - é a amplitude da vibração no motor.

Como nenhum dos termos é nulo, sempre há energia introduzida no sistema e a amplitude resultante é tanto maior quanto menor for a energia dissipada pelo amortecimento [1] e [5].

#### 3.4.6.2 Motor multicilíndrico

Foi vista a combinação dos efeitos da pressão do gás e da variação do momento de inércia para um motor monocilíndrico. O caso de um motor de vários cilindros já oferece uma complexidade maior, pois para as diferentes velocidades críticas é necessário considerar as diversas excitações devida a pressão do gás, e, quando for o caso, devido a inércia variável nos cilindros.

Neste caso, para uma dada velocidade crítica as excitações harmônicas do conjugado do gás em cada cilindro tem a mesma frequência. Porém, há uma diferença de fase entre elas que depende do tipo de motor, número de cilindros e ordem de ignição. Devido a estas diferenças de fases, em conjunção com as amplitudes de vibração de cada cilindro, a energia total introduzida no movimento vibratório ser nula [2], [5] e [17].

Em um motor de dois tempos o arranjo geométrico do

eixo de manivelas, que define a ordem de ignição, é a variável que, além de afetar o problema de balanceamento de inércia, influi sobre as amplitudes de vibração torcional.

Em motores de quatro tempos para um dado arranjo geométrico do eixo de manivelas, a ordem de ignição pode ser selecionada para minimizar a energia introduzida no processo vibratório e em consequência, as amplitudes de resposta.

Deve-se agora analisar, para generalizar, o trabalho total realizado para o motor de  $n$  cilindros.

O conjugado que atua em cada cilindro ocasiona uma deflexão angular em todos os outros cilindros do motor. Assim, considere-se por exemplo a curva elástica do primeiro modo de vibração do sistema motor de  $n$  cilindros, representado na Figura 3.13.

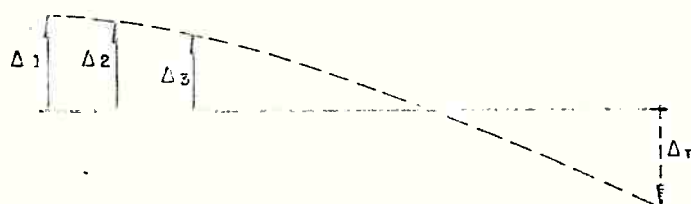


FIGURA 3.13 - CURVA ELÁSTICA DO 1º MODO DE VIBRAÇÃO TORCIONAL DO SISTEMA

Para este modo de vibração, o conjugado em qualquer dos cilindros causa uma amplitude de deflexão em todas as massas do sistema que é proporcional as deflexões desta mesma curva elástica. Tem-se então, como é mostrado no exemplo da Figura 3.14, para a condição de ressonância, amplitudes  $\theta_{1/1}$ ,  $\theta_{2/1}$ ,

...,  $\theta_{n/1}$ , que ocorrem nas massas 1, 2, ..., n devido ao conjugado do cilindro 1. Desenvolvendo-se uma análise semelhante para os conjugados atuando nos outros cilindros do motor, conclui-se que em cada cilindro atuará uma série de harmônicos superpostos e variáveis.

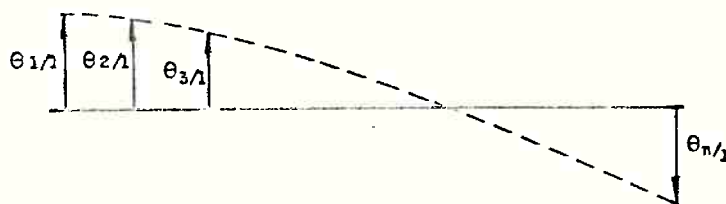


FIGURA 3.14 - DEFLEXÕES ANGULARES OCASIONADAS NAS DIVERSAS MASSAS DO SISTEMA DEVIDO AO CONJUGADO NO CILINDRO 1

O conjugado devido a um harmônico de ordem de frequência  $m\omega$  que atua nos cilindros do motor pode ser representado por  $M_m(t)$ , de tal maneira que tem-se:

$$M_m(t) = \begin{vmatrix} T_1 \text{sen} |m(\omega t + \epsilon_m)| \\ T_j \text{sen} |m(\omega t + \epsilon_m) - \gamma_j| \\ \vdots \\ T_n \text{sen} |m(\omega t + \epsilon_m) - \gamma_n| \end{vmatrix} \quad (3.4.35)$$

$$M_m(t) = \sum_{j=1}^n T_j \text{sen } m(\omega t + \beta) \quad (3.4.36)$$

onde:

- $\epsilon_m$  - é o ângulo de fase entre o harmônico  $m$  e o movimento no cilindro,
- $n$  - é o número de cilindros,
- $m$  - é o número de ordem do harmônico (índice do harmônico),

$T_1, T_2, T_j, \dots, T_n$  são as amplitudes dos conjugados harmônicos de  $M_m(t)$  que atua no sistema de  $n$  cilindros do motor; tem-se |1| e |5|:

$$T_1 = T_2 = T_j, \dots, T_n = T_m$$

$\gamma_j$  - é o ângulo de queima do cilindro  $j$ , em relação ao cilindro 1 (medido no eixo de manivelas),

$T_m$  - é a amplitude do harmônico de ordem  $m$ .

Seja:

$$\beta_{mj} = \epsilon_m - \gamma_j$$

Como foi mencionado, os conjugados harmônicos em cada cilindro possuem mesma magnitude, porém fase diferentes, pois a ignição dá-se em momentos diferentes.

As deflexões  $\theta_1, \dots, \theta_n$  por sua vez, variam de magnitude de cilindro para cilindro, mas têm a mesma fase pois todos os cilindros atingem simultaneamente seu máximo ou mínimo valor de deflexão. Esta variação de amplitude ocorre de acordo com a curva elástica do sistema. Portanto, há um ângulo de fase  $\beta$  entre o conjugado  $M(t)$  e a amplitude  $\theta$  em cada cilindro, conforme mostrado na Figura 3.15.

Assim se a frequência natural for  $w$ , a velocidade angular do eixo de manivelas será  $w/m$  para a velocidade crítica de ordem  $m$ .



A energia introduzida pelo conjugado do cilindro não será modificada considerando-se o caso fictício dos conjugados em fase e as amplitudes torcionais defasadas. Nestes caso, pode-se somar o trabalho realizado nos vários cilindros pela representação gráfica da Figura 3.16.

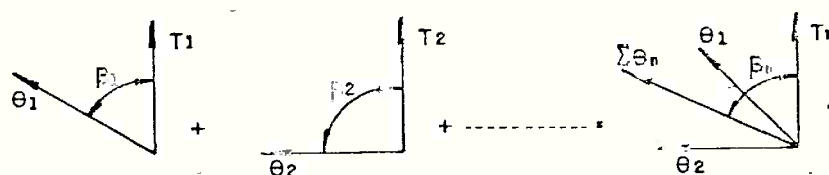


FIGURA 3.16 - SOMA DO VETORES DE EXCITAÇÃO NUM MOTOR

Nesta figura  $\Sigma\theta_n$  é o vetor resultante.

A energia introduzida por todos os cilindros será [1], [2] e [5]:

$$EI = \pi T_m (\Sigma\theta_n) \text{sen } \beta_n \quad (3.4.37)$$

Na ressonância sabe-se que  $\beta_n = 90^\circ$ ; nesta condição a energia será máxima e seu valor será dado por:

$$EI = \pi T_m \Sigma\theta_n \quad (3.4.38)$$

A equação (3.4.38) exprime a energia introduzida em função dos valores reais de amplitude nos cilindros  $\theta_j$ . Pode-se expressar a energia introduzida em função dos valores relativos das amplitudes modais, uma vez que:

A energia introduzida pelo conjugado do cilindro não será modificada considerando-se o caso fictício dos conjugados em fase e as amplitudes torcionais defasadas. Neste caso, pode-se somar o trabalho realizado nos vários cilindros pela representação gráfica da Figura 3.16.

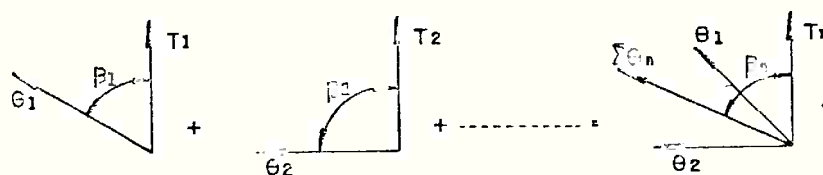


FIGURA 3.16 - SOMA DO VETORES DE EXCITAÇÃO NUM MOTOR

Nesta figura  $\Sigma\theta_n$  é o vetor resultante.

A energia introduzida por todos os cilindros será  $|1|$ ,  $|2|$  e  $|5|$ :

$$EI = \pi T_m (\Sigma\theta_n) \text{sen } \beta_n \quad (3.4.37)$$

Na ressonância sabe-se que  $\beta_n = 90^\circ$ ; nesta condição a energia será máxima e seu valor será dado por:

$$EI = \pi T_m \Sigma\theta_n \quad (3.4.38)$$

A equação (3.4.38) exprime a energia introduzida em função dos valores reais de amplitude nos cilindros  $\theta_j$ . Pode-se expressar a energia introduzida em função dos valores relativos das amplitudes modais, uma vez que:

$$\frac{\theta_j}{\theta_1} = \frac{\Delta_j}{\Delta_1} \quad \text{ou então} \quad \frac{\theta_{ji}}{\theta_{1i}} = \frac{\Delta_{ji}}{\Delta_{1i}}$$

onde:

$\Delta_{ji}$  é a amplitude relativa no modo de vibrar  $i$  da massa  $j$ ,

$\Delta_{1i}$  é a amplitude relativa do modo de vibrar  $i$  da massa de referência (massa.1).

Desta forma, resulta que a energia introduzida pelo harmônico de ordem  $m$  no  $n$  cilindros é dada por:

$$EI = T_m \theta_{1i} \sum_{j=1}^n \frac{\Delta_{ji}}{\Delta_{1i}} \quad (3.4.39)$$

pois faz-se  $\Delta_1 = 1$ .

Simplificadamente, representa-se esta energia por:

$$EI = T_m \theta_{1i} \Sigma \vec{\Delta}_{ji}$$

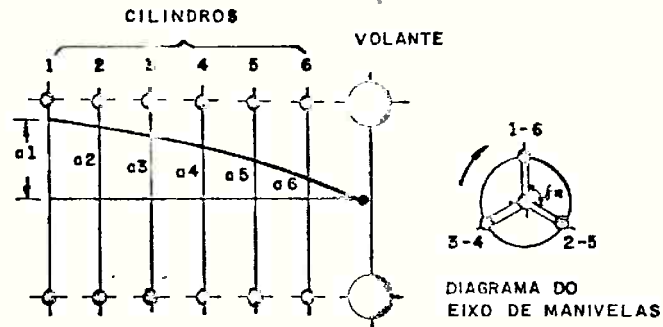
sendo  $\Sigma \vec{\Delta}_{ji}$  chamado de somatório dos vetores.

No caso particular de motores em V em que a ordem de queima é a mesma nas duas bancadas (como é usual), a soma dos vetores será calculada por  $|1|$ :

$$a \times 2 \cos \left( \frac{mb}{2} \right) \quad (3.4.40)$$

onde:  $a$  é a soma dos vetores de cada bancada,  
 $m$  é a ordem de vibrar (vibrações/revolução),  
 $b$  é o intervalo de queima entre dois cilindros correspondentes (mesmo número) de bancadas diferentes.

A Figura 3.17 indica o diagrama do eixo de manivelas e os diagramas de fase para as várias ordens de vibrar construídos para motores de seis cilindros (quatro tempos). O diagrama de fase expressa a defasagem de um mesmo harmônicos nos diversos



SISTEMA EQUIVALENTE - 1º MODO

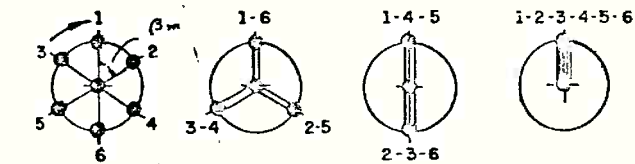
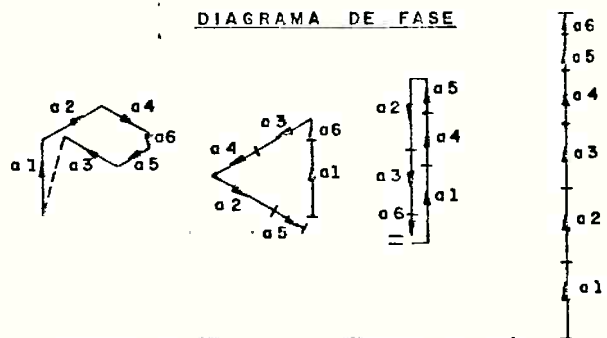


DIAGRAMA DE FASE



ORDEM —  $\frac{1}{2}$  -  $\frac{3}{2}$  -  $\frac{5}{2}$  -  $\frac{7}{2}$  -  $\frac{9}{2}$  -  $\frac{11}{2}$  || 1 - 4 - 7 - 10 ||  $\frac{1}{2}$  - 4 -  $\frac{1}{2}$  - 7 -  $\frac{1}{2}$  - 10 -  $\frac{1}{2}$  || 3 - 6 - 9 - 12 (PRINCIPAIS)

DIAGRAMA VETORIAIS

FIGURA 3.17- DIAGRAMA DE FASES E DE SOMAÇÃO DE VINGLES PARA O 1º MODO DE VIBRAÇÃO DE UM MOTOR DE 4 TEMPOS E 6 CILINDROS



cilindros do motor. Através do exame da Figura 3.17 pode-se generalizar que a cada diagrama de fase destes motores corresponde um grupo de número de ordem de vibrar.

De um modo geral tem-se:

$$\beta_{mn} = m \gamma_n \quad (3.4.41)$$

onde:

- $\beta_{mn}$  - é a defasagem do harmônico  $m$  do cilindro  $n$  em relação ao harmônico  $m$  do cilindro nº 1,
- $\gamma_n$  - é a defasagem geométrica da manivela entre os cilindros nº 1 e nº  $n$ ,
- $m$  - é o número do harmônico.

Um estudo detalhado de diversos motores com configurações diferentes é mostrado no Apêndice C, onde chega-se a uma formulação tabular que permite generalizar o cálculo do somatório dos vetores para qualquer tipo de motor marítimo.

#### 3.4.6.3 Interação entre o motor e propulsor

Da mesma forma que a defasagem entre os harmônicos do conjugado em cada cilindro do motor influi sobre as amplitudes de vibração a defasagem entre os conjugados no motor e no hélice podem ter significativo efeito sobre a energia introduzida no fenômeno vibratório.

Para visualizar melhor a interação entre as amplitudes e fases dos conjugados de excitação do motor e hélice, con-

vêm analisar-se o problema através do estudo de um modelo simplificado constituído de duas massas, conforme mostrado na Figura 3.18.



FIGURA 3.18 - SISTEMA EQUIVALENTE DE 2 MASSAS (MOTOR E HÉLICE)

Nesta figura:

$I_1$  - é o momento de inércia das partes móveis do motor,

$I_2$  - é o momento de inércia do hélice (incluindo o efeito da massa adicional hidrodinâmica),

$k$  - é o coeficiente de rigidez torcional do eixo,

$T_1$  - é a amplitude de um dado harmônico do conjugado de excitação do motor,

$T_2$  - é a amplitude de um harmônico, de mesma frequência, do conjugado de excitação do hélice.

De uma maneira geral existe um ângulo de fase entre  $T_1$  e  $T_2$ . Pode-se calcular para este sistema simplificado o ângulo de torção no eixo  $\theta_{sh}$  para o 1º modo [2]:

$$\theta_{sh} = (\theta_1 - \theta_2) = \frac{\sqrt{[(I_2 T_1)^2 + (-I_1 T_2)^2 - 2(I_1 I_2 T_1 T_2) \cos \alpha]}}{[k(I_1 + I_2) - I_1 I_2 \omega^2]} \quad (3.4.42)$$

Pode-se determinar a influência da defasagem  $\alpha$  sobre o ângulo de torção do eixo e, portanto, sobre as tensões

que atuam no sistema.

1. Considere-se um primeiro caso em que  $\alpha$  é zero, isto é, os conjugados no motor e no propulsor estão em fase. Resulta de (3.4.42):

$$\theta_{sh} = \frac{I_1 T_2 - I_2 T_1}{[k(I_1 + I_2) - I_1 I_2 w^2]} \quad (3.4.43)$$

2. Como segundo caso admita-se a defasagem de  $180^\circ$ ; nesta situação tem-se:

$$\theta_{sh} = \frac{I_1 T_2 + I_2 T_1}{[k(I_1 + I_2) - I_1 I_2 w^2]} \quad (3.4.44)$$

Vê-se, assim, que, dependendo do ângulo de fase  $\alpha$  entre as excitações do hélice e do motor, ocorrerão valores diferentes para os ângulos de torção e conseqüentemente, para as tensões máximas nos eixos. Este ângulo dependerá em termos práticos do ângulo entre as pás do hélice e a posição do eixo de manivelas do motor quando o êmbolo do cilindro nº 1 estiver no seu ponto morto superior.

A Figura 3.19 mostra as tensões máximas na condição em que se tem a combinação dos efeitos entre o harmônico fundamental de um hélice de 3 pás e o 3º harmônico do motor. São mostrados dois casos, para defasagem nula e não nula, respectivamente.

O exame das expressões (3.4.43) e (3.4.44) mostra que o caso mais favorável ocorre quando os conjugados de excitação do motor e do hélice estão em fase. O fato pode também ser

explicado fisicamente pois o ângulo de torção no eixo será menor quando os conjugados aplicados em cada extremidade tenderem a guiá-lo numa mesma direção. Da mesma maneira, o conjugado máximo (e a tensão, conseqüentemente) no eixo ocorrerá quando o ângulo  $\alpha$  for igual a  $180^\circ$ .

Deve-se ressaltar que a presente análise foi realizada para o 1º modo de vibração do sistema, quando as amplitudes do hélice serão as maiores encontradas, bem como a sua energia introduzida.

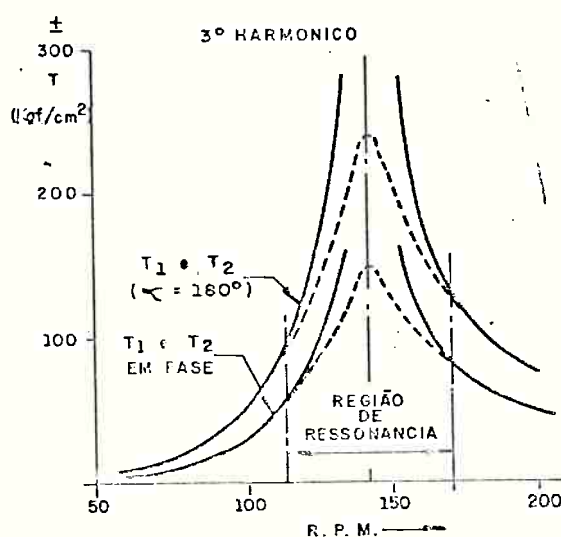


FIGURA 3.19 - EFEITO COMBINADO DAS EXCITAÇÕES DO HÉLICE E MOTOR

Quando, então, ocorrer superposição de um dos harmônicos fundamentais de excitação do hélice com um dos harmônicos de excitação do motor, dentro da faixa de velocidades de operação normal do sistema propulsor, faz-se necessário determinar com precisão o ângulo de fase  $\alpha$ , já citado. Desta maneira, pode-se minimizar as tensões finais que atuarão no eixo nestas velocidades críticas. Isto só se pode determinar com precisão por a

justes na prova de mar do navio [2]. Experiências em tanques de prova podem fornecer dados aproximados que seriam utilizados no cálculo preliminar de vibrações torcionais na fase de projeto do sistema [20].

Convém examinar-se o caso da ressonância da excitação do hélice em uma velocidade de operação do motor em que a energia introduzida pela excitação do motor seja máxima. Isto ocorre nas velocidades críticas principais.

### 3.5 Amortecimento

Na seção 3.1, considera-se que no sistema atua um amortecimento puramente viscoso, chegando-se pelo desacoplamento a resposta dos modos individuais de vibrar.

Pode-se considerar também um conjugado de amortecimento não linear  $M_D$  que seja proporcional a velocidade e frequência de tal maneira que se tenha:

$$M_D = - (C*w) \dot{\theta} \quad (3.5.1)$$

onde:

$C^*$  - é a matriz de amortecimento não linear (nxn),

$\dot{\theta}$  - é o vetor coluna de velocidades (nx1),

$w$  - é a frequência de vibração do sistema.

Neste caso a matriz de amortecimento  $C = |c_{ij}|$  ;  
 $j = 1, n$  e  $i = 1, n$ , definida no Capítulo 3, será igual a:

$$C = C^* w \quad (3.5.2)$$

Para um sistema torcional esta matriz pode ser representado por [13]:

$$C = \begin{vmatrix} c_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & c_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & c_3 & \dots \end{vmatrix}$$

logo,

$$C = 2wZI \quad (3.5.3)$$

onde Z é a matriz de razão de amortecimento  $\xi$  e os outros termos da expressão já foram definidos anteriormente.

De (3.5.3), tem-se:

$$Z = \frac{1}{2w} I^{-1} C \quad (3.5.4)$$

Comparando-se as expressões (3.5.2) e (3.5.3), obtêm-se:

$$C^* w = C = 2wZI \therefore Z = \frac{1}{2} C^* I^{-1} \quad (3.5.5)$$

Examinando-se a expressão (3.5.3) conclui-se que existirá uma matriz de amortecimento C para cada frequência w o que dificulta o cálculo das respostas de um sistema submetido a vibrações torcionais.

No entanto, utilizando-se o fator de amortecimento  $\xi$ , associado a cada massa do sistema, tem-se a matriz Z independente de w, conforme mostrado na expressão (3.5.5).

Convém recordar que para sistemas de uma massa, a razão de amortecimento é definida por [1], [16], [23]:

$$\rho = \frac{C}{C_{\text{crit}}} = \frac{C}{2wI}$$

De acordo com as equações dinâmicas já desacopladas (3.1.11), para um sistema de várias massas, o amortecimento crítico modal de um determinado modo  $p$  será:

$$C_{\text{crit},p} = 2w_p \phi_p^T I \phi_p = 2w_p \quad (3.5.6)$$

onde  $\phi_p^T I \phi_p = \mathcal{I}$  de acordo com (3.1.14) para qualquer valor de  $p$ .

Se os autovalores não forem normalizados em relação a  $I$ , tem-se:

$$C_{\text{crit},p} = 2w_p \phi_p^T I \phi_p = 2w_p \sum_{i=1}^n (\Delta_{i,p})^2 I_i \quad (3.5.7)$$

da definição de inércia generalizada ou modal.

O amortecimento modal será:

$$C_p = \phi_p^T C \phi_p = \phi_p^T 2w_p Z I \phi_p = 2w_p \sum_{i=1}^n \Delta_{i,p}^2 \xi_{ii} I_i \quad (3.5.8)$$

( $i=1,2,\dots,n$ )

da definição de amortecimento generalizado.

A razão de amortecimento será no modo  $p$ :

$$\xi_p = \frac{C_p}{C_{\text{crit},p}} = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta_{i,p} \xi_{ii} I_i}{\sum_{i=1}^n \Delta_{i,p} I_i} \quad (3.5.9)$$

Multiplicando-se o numerador e o denominador da expressão (3.5.9) por  $w_p^2$  obtêm-se:

$$\xi_p = \frac{w_p^2 \sum_{i=1}^n \Delta_{i,p}^I \xi_{ii}}{w_p^2 \sum_{i=1}^n \Delta_{i,p}^I} = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta_{i,p}^T \xi_{ii}}{\sum_{i=1}^n \Delta_{i,p}^T} \quad (3.5.10)$$

onde  $w_p^2 \Delta_{i,p}^I$  é o conjugado de inércia do sistema em vibração livre sem amortecimento, denominado de  $TI$ .

A energia dissipada por ciclo pelo amortecimento  $W_d$  será dada para a condição de ressonância segundo [23] e [24] por:

$$W_d = \pi C w \theta^2 \quad (3.5.11)$$

A formulação apresentada é válida para os casos em que o amortecimento externo é o principal fator e pode-se então descrevê-lo por uma razão de amortecimento  $\xi$ .

Se o sistema contiver elementos com amortecimentos internos significativos como acoplamentos flexíveis, deve-se alterar o valor de  $C_p$  (modal). Neste caso o amortecimento será proporcional a diferença de velocidade entre as duas massas adjacentes. Por conseguinte, a matriz de amortecimento terá termos fora da diagonal. Algumas vezes o fabricante do acoplamento fornece o valor de  $\xi$ . Neste caso, este valor deve ser entendido como aquele que ele apresentaria se o acoplamento fosse a única massa do sistema. Adotando-se esta hipótese, obtêm-se o



valor de C por:

$$C_{\text{crit}} = 2wI = 2 \frac{k}{w} \quad (3.5.12)$$

e

$$C_{\text{acopl.}} = 2\xi \frac{k}{w} \quad (3.5.13)$$

Este valor de  $C_{\text{acopl.}}$  seria incluído então na matriz C do sistema. Poder-se-ia também obter um valor de  $\xi_{\text{eq}}$  (razão de amortecimento equivalente) para o acoplamento flexível.

O conjugado de amortecimento seria dado por  $|2|$  e  $|16|$ :

$$\frac{(\Delta x)^2}{2} w C \quad (3.5.14)$$

onde  $\Delta x$  é a diferença entre as deflexões angulares nas massas adjacentes do acoplamento. Tem-se então:

$$\frac{(\Delta x)^2}{2} w C_{\text{acopl.}} = \frac{(\Delta x)^2}{2} w 2\xi \frac{k}{w} = (\Delta x)^2 \xi k \quad (3.5.15)$$

O valor de  $\xi_{\text{eq}}$  seria então dado, semelhantemente a (3.5.9) por:

$$\xi_{\text{eq}} = \frac{(\Delta x)^2 \xi k}{\Delta^2 I w^2} \quad (3.5.16)$$

### 3.6 Determinação das Respostas

Apresenta-se nesta seção a determinação da resposta do sistema com ênfase para o cálculo das amplitudes. Mostra-se a correspondência entre o método de superposição modal e métodos convencionais usados no tratamento de vibração de eixos propulsores. Mostra-se também a determinação de tensões vibratórias e finalmente são analisados critérios para cálculo de tensões máximas.

#### 3.6.1 Amplitudes de vibração

Considere-se o sistema constituído por um motor e uma carga, com  $n$  graus de liberdade sob a ação de um conjugado oscilatório. A resposta para o grau de liberdade  $k$  do sistema  $\theta_k$  seria dada pela equação (3.1.48).

$$\theta_k(t) = \sum_i \sum_j \sum_l \phi_{ki} y_{ijl} \quad (3.6.1)$$

onde:

$\phi_{ki}$  é a  $k$ -ésima componente do autovetor  $\phi_i$ ,

$y_{ijl}$  é a  $i$ -ésima resposta generalizada, devida ao harmônico  $l$  do conjugado aplicado segundo o grau de liberdade  $j$ ;  $y_{ijl}$  constitui solução de:

$$\ddot{y}_{ijl} + 2\xi_{ijl} \dot{y}_{ijl} + \omega_{ijl}^2 y_{ijl} = \frac{1}{m_{ijl}} \left[ y_{ijl}^0 + (v_{ijl}^0 + f_{ijl}^0) \right] \quad (3.6.2)$$

Considerando a resposta em regime permanente tem-se:

$$y_{ijl} = y_{ijl}^0 \text{ sen}(\bar{\omega}_{jl} t + \delta_{ijl}) \quad (3.6.3)$$

onde:

$y_{ijl}^0$  é a amplitude da resposta  $y_{ijl}$ ,  
 $\delta_{ijl}$  é o ângulo de fase.

Portanto,  $\theta_k(t)$  pode ser expresso por:

$$\theta_k(t) = \sum_i \phi_{ki} \sum_j \sum_l y_{ijl}^0 \text{ sen}(\bar{\omega}_{jl} t + \delta_{ijl}) \quad (3.6.4)$$

Embora (3.6.4) represente a solução em regime permanente do sistema, ela tem pouco interesse prático. De fato, não é possível calcular os valores máximos de  $\theta_k$  pois ela resulta de uma série de termos oscilatórios com frequências e ângulos de fase diferentes.

É possível efetuar uma modificação em (3.6.4) de modo a agrupar alguns dos termos, eliminando-se uma das somatórias. Como foi visto na seção 3.4, os harmônicos de uma mesma ordem tem a mesma frequência em todos os cilindros; isto é:

$$\bar{\omega}_{jl} = \bar{\omega}_l \quad ; \quad j=1,2,\dots,n$$

Pode se, então, definir:

$$y_{il} = \sum_j y_{ijl} \quad (3.6.5)$$

De (3.6.3) e (3.6.5) resulta:

$$y_{il} = \left( \sum_j y_{ijl}^0 \cos \delta_{ijl} \right) \sin \bar{\omega}_l t + \left( \sum_j y_{ijl}^0 \sin \delta_{ijl} \right) \cos \bar{\omega}_l t$$

ou

$$y_{il} = y_{il}^0 \sin(\bar{\omega}_l t + \delta_{il}) \quad (3.6.6)$$

onde:

$$y_{il}^0 = \sqrt{\left( \sum_j y_{ijl}^0 \cos \delta_{ijl} \right)^2 + \left( \sum_j y_{ijl}^0 \sin \delta_{ijl} \right)^2}$$

$$\operatorname{tg} \delta_{il} = \frac{\sum_j y_{ijl}^0 \sin \delta_{ijl}}{\sum_j y_{ijl}^0 \cos \delta_{ijl}} \quad (3.6.7)$$

Introduzindo este resultado em (3.6.4), tem-se:

$$\theta_k(t) = \sum_i \phi_{ki} \sum_l y_{il}^0 \sin(\bar{\omega}_l t + \delta_{il}) \quad (3.6.8)$$

Assim, a resposta num determinado ponto do sistema  $\theta_k(t)$  pode ser entendida como uma somatória de componentes que são função da ordem do harmônico e do modo de vibrar. Cabe agora examinar as amplitudes de cada componente.

Pode-se escrever para  $\bar{\omega}_{jl} = \bar{\omega}_l$ , de acordo com a seção 3.1:

$$y_{ijl}^0 = X_{ijl} D_{il} \quad (3.6.9)$$

sendo:

$$X_{ijl} = \frac{\phi_{ji} T_{jl}^0}{w_i^2} \quad (3.6.10)$$

$$D_{il} = \left[ (1-r_{il}^2)^2 + (2\xi_i r_{il})^2 \right]^{-1/2} \quad (3.6.11)$$

$$r_{il} = \frac{\bar{w}_l}{w_i} \quad (3.6.12)$$

onde:

$y_{ijl}^0$  é a amplitude da  $i$ -ésima resposta normal devida ao  $l$ -ésimo harmônico do esforço aplicado segundo o  $j$ -ésimo grau de liberdade;

$X_{ijl}$  é o deslocamento estático, idem;

$D_{il}$  é o fator de amplificação no  $i$ -ésimo modo devido ao  $l$ -ésimo harmônico dos esforços.

Adicionalmente, tem-se:

$$T_{jl}^0 = T_l^0 \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.6.13)$$

isto é, a amplitude de todos os harmônicos é igual em todos os cilindros.

Então, introduzindo as equações (3.6.9) a (3.6.13) em (3.6.7), obtém-se:

$$y_{ijl}^0 = \frac{T_l^0}{w_i^2} \frac{1}{\sqrt{(1-r_{il}^2)^2 + (2\xi_i r_{il})^2}} \sqrt{\left( \sum_j \phi_{ji} \cos \delta_{ijl} \right)^2 + \left( \sum_j \phi_{ji} \sin \delta_{ijl} \right)^2} \quad (3.6.14)$$

A equação (3.6.14) fornece a amplitude da  $i$ -ésima resposta devido ao  $\ell$ -ésimo harmônico dos esforços aplicado segundo os  $n$  graus de liberdade do sistema.

### 3.6.2 Correspondência entre métodos

Em textos clássicos de vibrações torcional de eixos [2] é utilizada uma notação diferente para expressar o resultado de (3.6.14). Define-se a resposta estática,  $a_s$ :

$$(a_s)_{i\ell} = \frac{T_{\ell}^0 \sum_{j=1}^n \Delta_{ij}}{w_i^2 \sum_{j=1}^n I_j \Delta_{ij}^2} \quad (3.6.15)$$

e a resposta dinâmica,  $a_d$ :

$$(a_d)_{i\ell} = (a_s)_{i\ell} \frac{1}{\sqrt{(1-r_{i\ell}^2)^2 + (2\xi_i r_{i\ell})^2}} \quad (3.6.16)$$

onde os índices  $i$  e  $\ell$  em  $a_d$  e  $a_s$  se referem ao modo e ao harmônico considerados, respectivamente;  $\Delta_{ij}$  é a amplitude de vibração na massa  $j$  no modo de vibrar  $i$  obtida da curva elástica;  $I_j$  é a inércia da  $j$ -ésima massa do sistema.

É fácil mostrar a equivalência das expressões (3.6.15) e (3.6.16) com (3.6.14). De fato, tem-se:

$$\sum_{j=1}^n (\epsilon_{ji} \cos \delta_{ij\ell})^2 + (\epsilon_{ji} \sin \delta_{ij\ell})^2 = \sum_{j=1}^n \Delta_{ij}^2 \quad (3.6.17)$$

onde  $\sum_{j=1}^n \vec{\Delta}_{ij}$  representa a somatória vetorial de  $\Delta_{ij}$ , conforme definida na seção 3.4.

Por outro lado, no tratamento clássico adota-se uma outra normalização dos modos de vibrar, de forma que:

$$\phi^T I \phi \neq I \quad (3.6.18)$$

ou

$$\phi_i^T I \phi_i \neq 1$$

Adota-se, comumente, neste tratamento para cada modo de vibrar amplitude unitária  $\Delta_{ik_r} = 1$  em uma das extremidades do sistema chamada normalmente de ponto de referência.

Esta consideração explica a diferença entre o termo  $1/w_i^2$  em (3.6.14) e o termo  $1/w_i^2 \sum_{j=1}^n I_j \Delta_{ij}^2$  em (3.6.15); convém observar que valendo as desigualdades (3.6.18) o termo  $1/w_i^2$  se transformaria em  $1/w_i^2 \sum_{j=1}^n I_j \phi_{ji}^2$ .

Finalmente, no tratamento clássico a expressão correspondente a (3.6.8) para o ponto de referência utiliza sempre o valor unitário para  $\phi_{k_r i}$  ( $i=1,2,\dots,n$ ;  $k_r$  índice da massa de referência).

Mostrou-se, portanto, a correspondência entre os dois métodos para cálculo das amplitudes produzidas em cada modo de vibrar por cada harmônico do conjugado.

Na condição de ressonância:

$$r_{i\ell} = 1$$

Logo,

$$D_{i\ell} = \frac{1}{2\xi_i}$$

e obtém-se de (3.6.9):

$$y_{ij\ell} = x_{ij\ell} \frac{1}{2\xi_i} \quad (3.6.19)$$

Da mesma forma, tem-se:

$$(a_d)_{i\ell_{res}} = (a_s)_{i\ell} \times \frac{1}{2\xi_i} \quad (3.6.20)$$

### 3.6.3 Tensões de vibração

Uma vez determinadas as amplitudes de vibração em cada ponto do sistema, para um dado modo de vibrar e um dado harmônico, é possível calcular as tensões vibratórias correspondentes.

Para um determinado sistema que executa movimento de vibração torcional a seção mais crítica é aquela que apresenta maior ângulo de torção. Para cada trecho de eixo entre duas massas tem-se um ângulo de torção denominado  $\theta_{sh}$ .

O conjugado em um trecho de eixo intermediário  $j$  em



tre as massas  $j+1$  e  $j$ , será dado por:

$$k_j (\theta_{sh})_{ij\ell} = (\phi_{j+1})_i - \phi_{ji}) k_j \quad (3.6.21)$$

onde:

$(\theta_{sh})_{ij}$  é o ângulo de torção no eixo entre as massas  $j$  e  $j+1$  no  $i$ -ésimo modo de vibrar devido ao  $\ell$ -ésimo harmônico do conjugado.

Pode-se obter da Tabela de Holzer para o sistema em estudo, o valor da tensão de referência  $\tau_{ref}$  para cada seção  $j$  do eixo do sistema equivalente modelado, definido por:

$$\tau_{ref} = \frac{w^2 \sum_{i=1}^j I_i \Delta_i^2}{W_j} = \frac{(T_{in})_{j\ell}}{W_j} \quad (3.6.22)$$

(para  $\Delta_1 = 1$ )

onde:

$W_j$  é o módulo da seção considerada;

$(T_{in})_{j\ell}$  é o conjugado de inércia atuando na seção  $j$  quando o sistema está em vibração livre não amortecida (Apêndice B).

A tensão de ressonância  $\tau_{res}$  será dada por:

$$(\tau_{res})_{i\ell j} = (a_d)_{i\ell_{res}} \cdot \frac{(T_{in})_{j\ell}}{W_j} \quad (3.6.23)$$

Nos pontos afastados da condição de ressonância, de tem-se as tensões de flanco  $\tau_{fl}$ . Nesta condição  $r_{i\ell} \neq 1$  e tem-se:

$$(\tau_{fl})_{i\ell j} = (a_d)_{i\ell} \cdot \frac{(T_{in})_{j\ell}}{W_j} \quad (3.6.24)$$

### 3.6.4 Critérios para determinação de valores máximos

Como foi visto, calculam-se as amplitudes de vibração em regime permanente, e as correspondentes tensões no eixo, para cada modo de vibrar causadas por cada harmônico do conjugado. Pode-se utilizar alguns critérios para composição destas respostas na resposta total do sistema.

Para cada velocidade de operação do motor, a resposta total é calculada pela soma aritmética dos três maiores valores de respostas devidas aos harmônicos do conjugado de excitação em cada modo significativo de vibrar. Neste caso entende-se por modo significativo aquele que apresenta valores de respostas não desprezíveis em cada velocidade crítica [2] e [5].

A resposta total também pode ser calculada pela raiz quadrada da soma dos quadrados das respostas devidas a todos os harmônicos de todos os modos significativos de vibrar. Este critério de avaliação da resposta total [26] é bastante utilizado em vibrações de estruturas como sendo um limite superior para o valor calculado e é conhecido pela notação RMS (Root Mean Square).

### 3.7 Procedimento de Cálculo

Foi desenvolvido um programa de computador para permitir realizar todos os cálculos necessários à obtenção das respostas modais. A combinação destas respostas de acordo com os critérios mostrados na seção 3.6 permite avaliar a resposta total.

Os dados de entrada do programa constam do Manual do Usuário no Apêndice D.

São descritos a seguir as diversas fases do procedimento de cálculo após a obtenção do sistema equivalente mostrado no Capítulo 2.

### 3.7.1 Cálculo de frequências e modos de vibrar

A partir das matrizes de inércia e rigidez torcional, fornecidas como dados de entrada, calculam-se as frequências e modos de vibrar.

O procedimento permite o cálculo destas frequências naturais e respectivos modos de vibrar usando um dos seguintes métodos:

- a) Método de Holzer para aplicação em sistemas com ramificação;
- b) Método dos autovalores.

O programa produz como saídas as frequências naturais, um modelo da Tabela de Holzer ou os modos de vibrar, quando empregando o método de autovalores, além das velocidades críticas para cada modo de vibrar.

### 3.7.2 Cálculo das respostas

Para o cálculo das respostas do sistema sob a ação do conjugado de excitação considera-se inicialmente para cada modo de vibrar as diversas velocidades críticas, admitindo-se

em cada uma destas velocidades a ressonância entre os harmônicos de ordem  $j$  e o modo  $i$ . Pode-se, assim, escrever:

$$\ddot{y}_i + 2w_i \zeta_i \dot{y}_i + w_i^2 y_i = \phi_i^T M_j(t) \quad (3.7.1)$$

$$j=1,2,\dots,m \quad ; \quad i=1,2,\dots,p$$

Para cada seção do eixo intermediário do sistema equivalente, para a qual obteve-se a Tabela de Holzer, calcula-se o valor da tensão de referência pela expressão (3.6.22).

Determina-se a seguir a seção em que a tensão de referência apresenta valor máximo, que será designado por  $\tau_{ref} = \max \left( \frac{T_{in}}{W} \right)$ .

Obtém-se a matriz  $Z$  formada pela razão de amortecimento  $\zeta$  associada a cada massa do sistema equivalente. Este dado é obtido experimentalmente ou fornecido pelo fabricante. Como foi mostrado na seção 3.5, estes valores serão independentes da frequência natural  $w_i$  do sistema.

Procede-se então ao cálculo da razão de amortecimento modal, que será obtida pela expressão (3.5.10), para o modo  $k$ .

Se o sistema tiver acoplamento flexível o valor de  $\zeta_{eq}$  é obtido pela expressão (3.5.16).

Para cada velocidade crítica calcula-se para a seção onde ocorre  $\left( \frac{T_{in}}{W} \right)_{max}$ , o valor da resposta estática  $(a_s)_{il}$  dada pela expressão (3.6.15). Nesta expressão, a amplitude do conjugado  $T_\ell$  é obtida em função da pressão média indicada  $P_{mi}$

na velocidade crítica, dada pela expressão (3.4.9). Quanto aos outros termos,  $\sum_{j=1}^n \tilde{\Delta}_{ij}$  é obtido pelo processo mostrado no Apêndice C, e

$$w_i^2 \sum_{j=1}^n I_j \Delta_{ij}^2 \text{ é obtido na Tabela de Holzer.}$$

A seguir calcula-se a resposta dinâmica  $(a_d)_{il}$  para a condição de ressonância pela expressão (3.6.20) em que  $\zeta_i$  já foi obtido por (3.5.10).

A tensão de ressonância  $(\tau_{res})_{il}$  será obtida pela expressão (3.6.23).

O valor da tensão de ressonância em qualquer outra seção  $j$  pertencente ao sistema será dado por:

$$(\tau_{res})_{ilj} = (a_s)_{il} \cdot \frac{1}{2\zeta_i} \cdot \frac{(T_{in})_j}{W_j}$$

As tensões de flanco para as diversas velocidades do motor diferentes da de ressonância são calculadas pela expressão (3.6.24).

### 3.7.3 Cálculo da resposta total

O cálculo da resposta modal é efetuado para a seção onde  $(\frac{T_{in}}{W})$  seja máximo. Neste ponto, para cada velocidade crítica em cada modo de vibrar calcula-se a tensão de ressonância  $(\tau_{res})_{il}$  pela expressão (3.6.23), conforme já foi dito. Da mesma forma para cada velocidade de operação do motor calcula-se a tensão de flanco dada por (3.6.24).

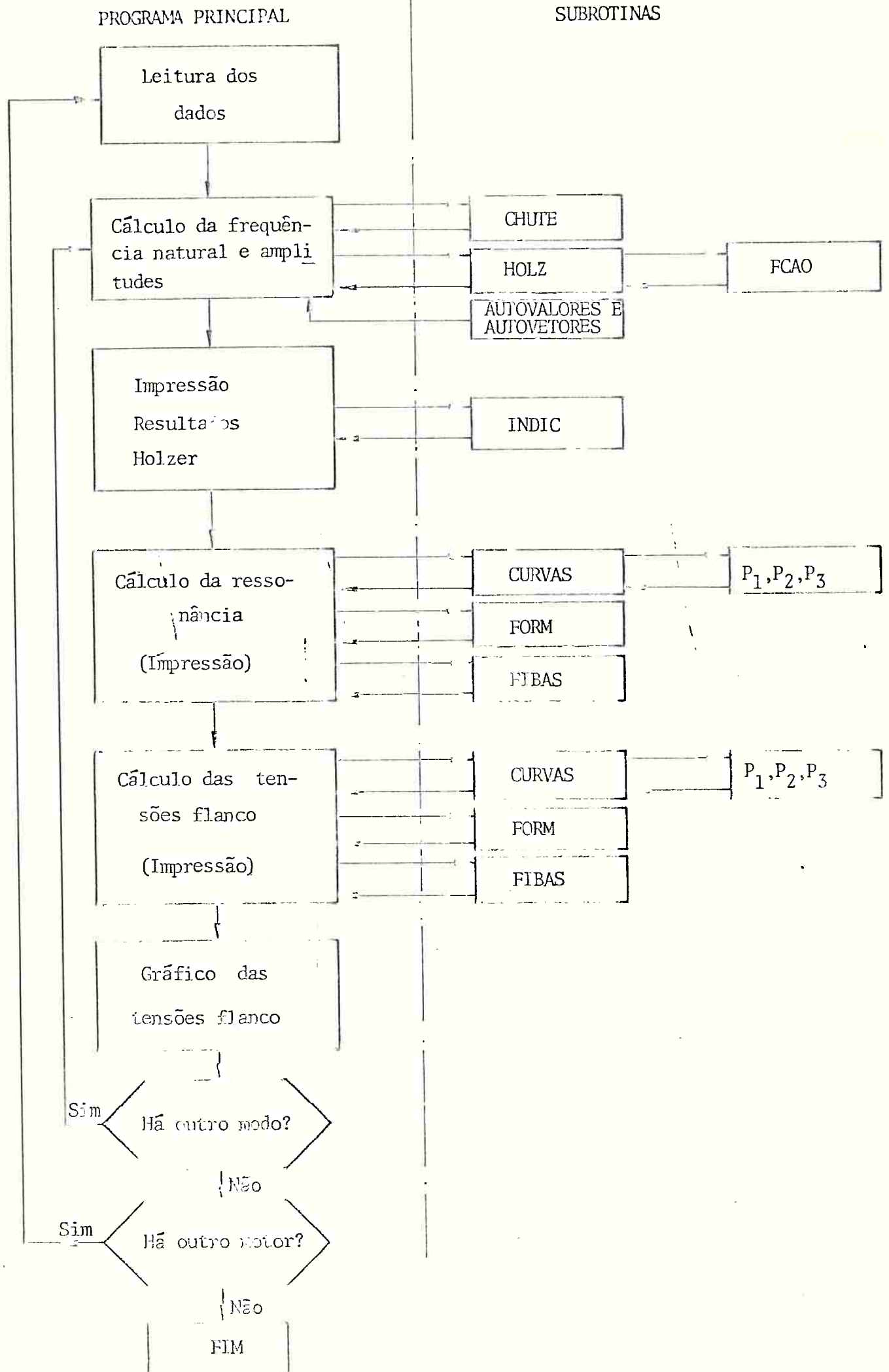
O procedimento de cálculo engloba dois critérios apresentados na subseção 3.6.4, para cálculo da resposta total em amplitude ou tensão.

O cálculo de cada componente da resposta é efetuado na ordem crescente dos modos e dos harmônicos. A partir de um dado harmônico em cada modo e para todos os harmônicos a partir de um determinado modo as respostas são pouca significativas e não são consideradas para o cálculo da resposta total.

#### 3.7.4 Diagrama de blocos do programa de computador

Foi desenvolvido um programa de computador para cálculo das respostas dos sistemas propulsores e auxiliares marítimos submetidos a vibrações torcionais, de acordo com o procedimento de cálculo descrito na seção 3.7.

A descrição dos Programas, Manual do Usuário, Lista gem e Exemplos de Aplicação encontram-se no Apêndice D.



## 4.0 RESULTADOS

No capítulo anterior foram apresentados os métodos de análise para o problema de vibrações torcionais de eixos propulsores levando em consideração as especificidades desses sistemas. Definiram-se, ao final, um procedimento de cálculo de amplitudes de vibração e consequentes tensões e critérios para avaliação da resposta total.

Neste capítulo são mostrados e discutidos os resultados de aplicação do procedimento de cálculo a sistemas propulsores e auxiliares de navios existentes.

### 4.1 Cálculo de Frequências Naturais

São apresentados nesta seção alguns exemplos de cálculo de frequências naturais para vibração torcional de sistemas propulsores.

Inicialmente efetua-se uma comparação de diferentes métodos usados no cálculo das frequências naturais, utilizando-se como referência as instalações propulsoras mostradas nas Figuras 4.1 e 4.2.



Na Figura 4.1 o disco de inércia  $I_1$  representa o propulsor, os discos de inércias  $I_2$ ,  $I_3$  e  $I_4$  representam as engrenagens do redutor, enquanto que os discos de inércia  $I_5$  e  $I_6$  representam os motores.

A rigidez torcional dos diversos segmentos de eixo é representada pelas constantes de mola  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_3$ .

Conhecidos os valores de inércia dos diversos discos, os coeficientes de rigidez torcional dos trechos do eixo e a razão de redução do redutor, é possível determinar a frequência natural do sistema.

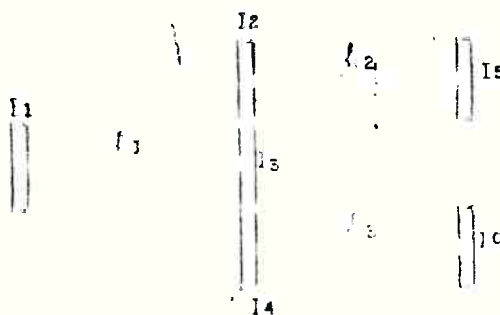


FIGURA 4.1 - SISTEMA DE TRANSMISSÃO DE TORÇÃO

Foram utilizados dois diferentes métodos para cálculo das frequências:

1. Método de Holzer - empregando o Programa Holzer;

2a. Método de Autovalores - empregando o Programa SAPIV;

2b. Método de Autovalores - empregando o Programa AUTOVALORES.

O mesmo tratamento foi aplicado ao sistema da Figura 4.2 que mostra uma instalação diesel com ramificação.

Os resultados dos cálculos efetuados estão apresentados na Tabela 4.1 com o objetivo de comparar o tempo de processamento gasto com cada método. Convém ressaltar que em termos de precisão, os três métodos fornecem praticamente os mesmos resultados para as frequências naturais dos modos calculados, com diferenças nunca maior de 1%.

TABELA 4.1 - COMPARAÇÃO ENTRE MÉTODOS DE CÁLCULOS  
- Tempo de Processamento (segundos)

| SISTEMA    | MÉTODO APLICADO |                     |             | NÚMERO DE FREQUÊNCIAS CALCULADAS |
|------------|-----------------|---------------------|-------------|----------------------------------|
|            | HOLZER          | AUTOVALORES (SAPIV) | AUTOVALORES |                                  |
| Figura 4.1 | 2,3             | 5,8                 | 1,4         | 4                                |
| Figura 4.2 | 13,3            | 28,9                | 4,8         | 19                               |

Nota-se a grande vantagem do método de autovalores sobre o método de Holzer, quando aplicados em sistemas com ramificações.

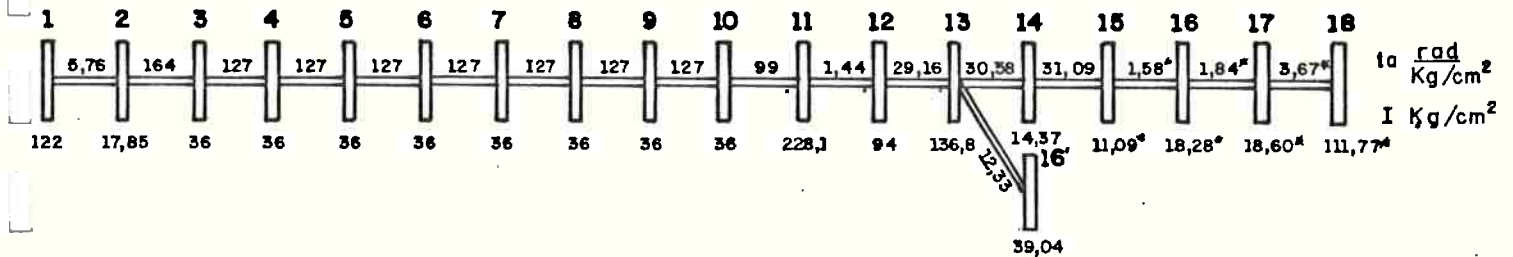


FIGURA 4.2 - INSTALAÇÃO COM MOTOR DIESEL COM ENGRENAGEM REDUTORA E REVERÇÃO DE MARCHA

Nesta figura os diversos discos representam os seguintes componentes:

- 1 e 2 - Partes externa e interna, respectivamente do amortecedor.
- 3 a 10 - Massas alternativas e rotativas dos cilindros do motor.
- 11 - Volante do motor.
- 12 - Acoplamento flexível.
- 13, 14, 16 e 16' - Engrenagens redutoras.
- 15 - Flange do redutor, flange do eixo, 1/2 eixo intermediário.
- 16 - 1/2 eixo intermediário, flange, 1/2 eixo telescópico.
- 17 - 1/2 eixo telescópico, flange, 1/2 eixo propulsor.
- 18 - 1/2 eixo propulsor, hélice, massa virtual (25% do hélice).

O método de autovalores torna-se extremamente útil na fase de um projeto preliminar de uma instalação propulsora com ramificações, quando se deseja analisar a existência de ressonância entre a frequência fundamental de excitação do hélice com uma das frequências naturais do sistema, conforme será mostrado a seguir.

A Figura 4.3 mostra uma instalação propulsora de navio de guerra, com um eixo propulsor que é acionada alternativamente por um motor diesel ou turbina à gás. O navio dispõe de dois eixos propulsores que são acionados simultaneamente pela turbina à gás. Alternativamente pode funcionar com cada eixo separadamente acionado por um motor diesel.

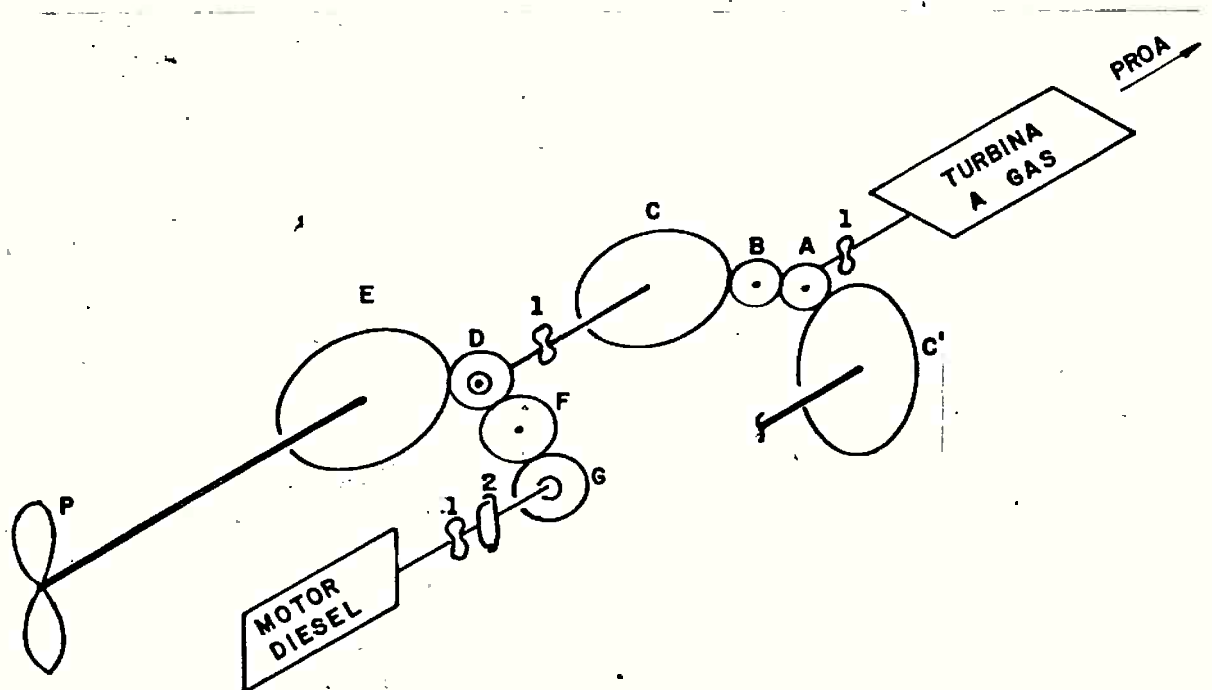


FIGURA 4.3 - REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DE UMA INSTALAÇÃO PROPULSORA COMBINADA MOTOR DIESEL - TURBINA A GAS

Na Figura 4.3, P representa o propulsor, A, B e F são enbreagens auto-sincronizadas; C, C', D, E e G representam as diversas engrenagens do redutor, ① representa cada um dos acoplamentos flexíveis da instalação, ② representa cada um dos acoplamentos hidráulicos.

Modelou-se o sistema com as diversas configurações da unidade acionadora, diferentes engrenagens redutoras e utilizando-se acoplamentos flexíveis diversos, também. A Tabela 4.2 mostra os valores das três primeiras frequências naturais de cada sistema, obtidas pela aplicação do programa SAPIV (Método dos AUTOVALORES).

TABELA 4.2 - FREQUÊNCIAS NATURAIS DO SISTEMA PROPULSOR COM DIFERENTES CONFIGURAÇÕES

| CASO | CONFIGURAÇÃO DA PROPULSÃO               | (I ENGRENAGENS)<br>(Kgm <sup>2</sup> ) | ACOPLAMENTO FLEXÍVEL  |  | FREQUÊNCIAS NATURAIS (Hertz) |                |                |
|------|---|--|-----------------------|--|------------------------------|----------------|----------------|
|      |   |  | I (Kgm <sup>2</sup> ) | K (10 <sup>-3</sup> $\frac{Nm}{rad}$ ) | W <sub>1</sub>               | W <sub>2</sub> | W <sub>3</sub> |
| A1   | TURBINA A GÁS SEM ACOPLAMENTO FLEXÍVEL  | 5050                                   | -                     | -                                      | 5,74                         | 6,28           | 47,6           |
| A2   |   | 4050                                   | -                     | -                                      | 5,74                         | 6,32           | 47,6           |
| A3   |   | 6050                                   | -                     | -                                      | 5,74                         | 6,23           | 47,6           |
| B1   | MOTOR DIESEL COM ACOPLAMENTO HIDRÁULICO | 5050                                   | -                     | -                                      | 7,22                         | 48,23          | 88,79          |
| B2   |   | 4050                                   | -                     | -                                      | 7,53                         | 48,28          | 88,82          |
| B3   |   | 6050                                   | -                     | -                                      | 7,01                         | 48,18          | 88,78          |
| C1   | MOTOR DIESEL SEM ACOPLAMENTO            | 5050                                   | 973                   | 4,72                                   | 5,75                         | 8,79           | 35,94          |
| C2   |   | 5050                                   | 973                   | 15                                     | 6,46                         | 13,45          | 36,53          |
| C3   | HIDRÁULICO COM ACOPLAMENTO FLEXÍVEL     | 4050                                   | 800                   | 4,72                                   | 5,81                         | 9,3            | 36,41          |
| C4   |   | 4050                                   | 800                   | 15                                     | 6,43                         | 14,3           | 37,05          |

Foi previamente selecionado para a instalação um hélice com 5 pás. A frequência fundamental de excitação na rotação máxima do eixo é de 23,2 Hertz.

Para evitar ressonância é necessário que a frequência de excitação seja diferente das diversas frequências naturais do sistema. A análise da Tabela 4.2 mostra que se utilizar acoplamento hidráulico quando a instalação é acionada pelo motor Diesel (caso B3) a frequência fundamental de excitação do hélice está abaixo da 2a. e 3a. frequências naturais do sistema e suficientemente longe da primeira; não há, portanto, perigo de ressonância por influência do hélice.

#### 4.2 Determinação da Resposta do Sistema

Nesta seção são apresentados os resultados de cálculo das amplitudes de vibração de sistemas sob a ação de conjuntos de excitação do motor. São utilizados três exemplos para ilustrar os diferentes tipos de instalações consideradas. O programa de computador mostrado em 3.7 foi utilizado para a realização destes cálculos.

##### 4.2.1 Instalação propulsora com redução

A instalação considerada consiste de um motor de média rotação com amortecedor, volante e acoplado a um hélice de passo fixo através de acoplamento flexível e engrenagem redutora dotada de uma embreagem. A Figura 4.4 mostra o esquema do

sistema equivalente empregado para estudo de vibração torcional com os valores dos parâmetros utilizados no cálculo. São incluídas nesta figura as curvas elásticas determinadas para os três primeiros modos de vibrar.

Dados do motor:

Modelo 23LU da Burmeister & Wain, 4 tempos; 14 cilindros em V.

Ângulo entre as bancadas:  $45^{\circ}$ .

Potência: 2139 HP a 825 rpm com uma pressão média indicada de  $16,7 \text{ kg/cm}^2$ .

Ordem de queima: 1-2-4-6-7-5-3.

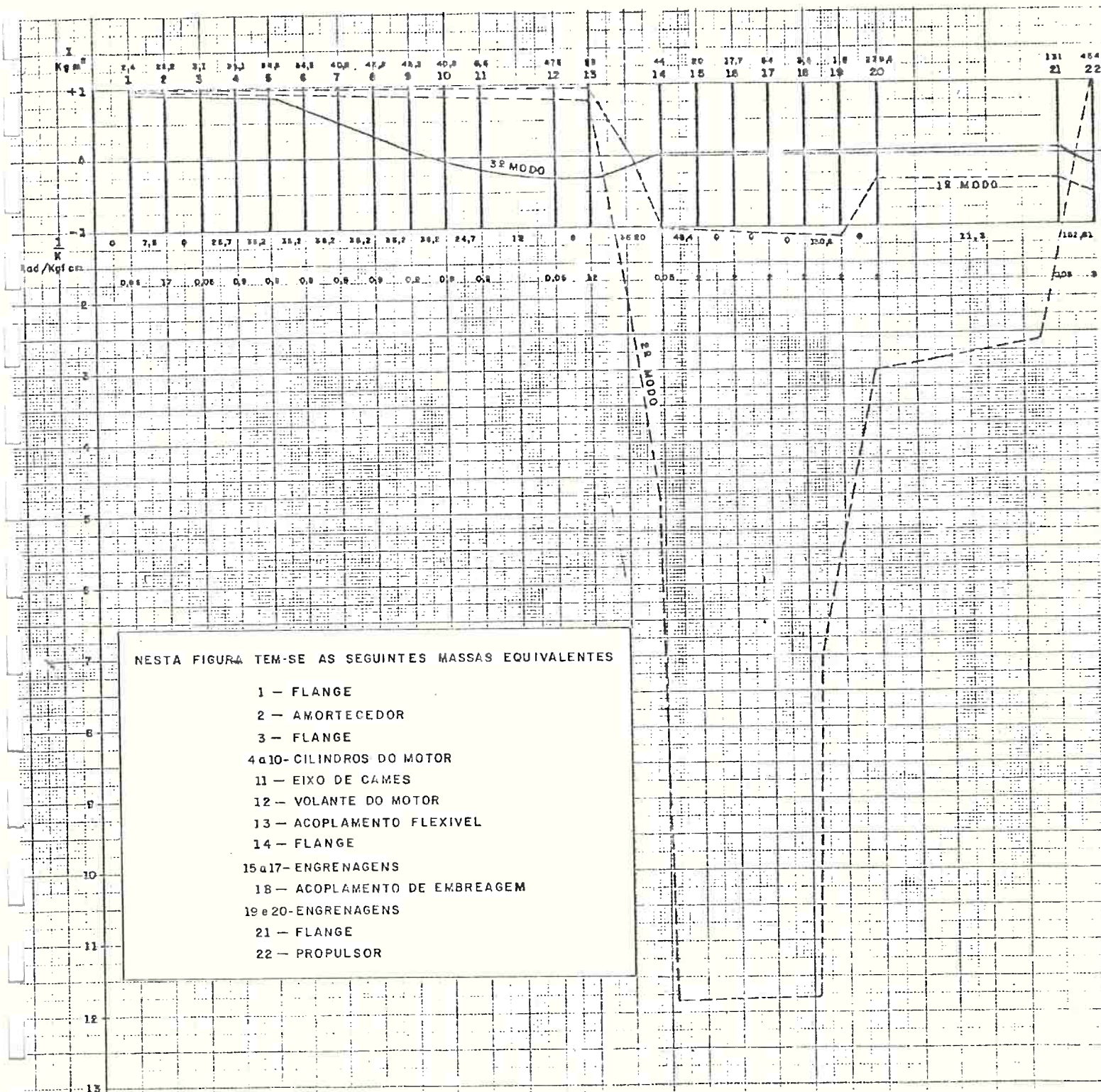
São fornecidos pelo fabricante os outros dados de entrada no programa de cálculo, como módulos de seções W, massas alternativas (Malt), etc.

Razão de redução: 4/1.

Diâmetro do eixo intermediário é de 30cm.

As respostas foram calculadas, desprezando-se qualquer excitação proveniente do hélice, procedimento geralmente adotado na fase de projeto preliminar, quando ainda não se dispõe de dados precisos sobre a configuração do escoamento da água na região da popa do navio próximo ao hélice. Por outro lado, verifica-se pelas curvas elásticas que as amplitudes de vibrações no hélice são pequenas em relação às amplitudes nos cilindros. Desta forma a não ser que o conjugado oscilatório no propulsor atinja valores muito elevados, o que não é comum [2], a energia de excitação neste ponto é pequena.

A Tabela 4.3 mostra os valores de tensão de vibra



NESTA FIGURA TEM-SE AS SEGUINTE MASSAS EQUIVALENTES

- 1 - FLANGE
- 2 - AMORTECEDOR
- 3 - FLANGE
- 4 a 10 - CILINDROS DO MOTOR
- 11 - EIXO DE CAMES
- 12 - VOLANTE DO MOTOR
- 13 - ACOPLAMENTO FLEXIVEL
- 14 - FLANGE
- 15 a 17 - ENGRENAGENS
- 18 - ACOPLAMENTO DE EMBREAGEM
- 19 e 20 - ENGRENAGENS
- 21 - FLANGE
- 22 - PROPULSOR

FIGURA 4.4 - CURVA ELÁSTICA DO MOTOR PROPULSOR 24V 23LU



ção no trecho de eixo antes da massa (19) (engrenagem), obtida para diversas velocidades críticas (ressonância com diferentes harmônicos) para o primeiro e segundo modos de vibrar. São incluídas na tabela para objetivo de comparação os valores divulgados pela Burmeister & Wain para o mesmo sistema |32|.

TABELA 4.3 - COMPARAÇÃO ENTRE OS RESULTADOS CALCULADOS E OS PUBLICADOS PELA BURMEISTER & WEIN |32|

|  | ORDEM DE VIBRAR | TENSOES DE RESSONÂNCIA (Kgf/m <sup>2</sup> ) |       | VELOCIDADE CRÍTICA (rpm) |
|--|-----------------|--|-------|--------------------------|
|  |                 | PROGRAMA                                     | B&W   |                          |
| 1º MODO<br>FREQUÊNCIA NATURAL 486<br>(Vibrações/minuto)  | 0,5             | 9,75   | 9,79  | 972                      |
|  | 1,0             | 1,32   | 1,32  | 486                      |
|  | 1,5             | 0,47   | 0,51  | 324                      |
|  | 2,0             | 0,24   | 0,21  | 243                      |
|  | 2,5             | 0,37   | 0,4   | 194                      |
|  | 3,0             | 0,98   | 0,99  | 162                      |
|  | 3,5             | 69,76  | 70,3  | 138                      |
| 2º MODO<br>FREQUÊNCIA NATURAL 1333<br>(Vibrações/minuto) | 0,5             | 16,37  | 16,32 | 2666                     |
|  | 1,0             | 5,37   | 5,20  | 1333                     |
|  | 1,5             | 1,87   | 1,84  | 888,8                    |
|  | 2,0             | 0,24   | 0,20  | 666,6                    |
|  | 2,5             | 0,85   | 0,82  | 533,3                    |
|  | 3,0             | 1,2  | 1,32  | 444,4                    |
|  | 3,5             | 17,98  | 17,75 | 380,9                    |

Foram efetuadas comparações para outras instalações, cujos resultados estão apresentados em [34].

As Figuras 4.5 e 4.6 mostram as tensões vibratórias produzidas pelos harmônicos do conjugado para os três primeiros modos de vibrar ao longo da faixa de rotações do motor. Fora da faixa de ressonância as tensões são chamadas de flanco e calculadas como está mostrado na seção 3.7.

Enquanto a Figura 4.5 mostra as tensões no eixo de manivelas, a Figura 4.6 mostra as tensões na caixa de engrenagens.

As tensões obtidas nos cálculos para o segundo e terceiro modos de vibrar apresentaram valores desprezíveis.

Nestas figuras a curva J/L representa a resposta provocada pelo harmônico L do conjugado no modo de vibrar J.

Verifica-se na Figura 4.4 que para este sistema nos três primeiros modos de vibrar há um nó da curva elástica próximo ao acoplamento flexível e as amplitudes relativas são muito altas no segundo modo de vibrar nas engrenagens.

Verifica-se nas Figuras 4.5 e 4.6 que:

1. os maiores valores de tensão em ressonância ocorreram no eixo de manivelas. Esta região deverá ser objeto de cuidados especiais na análise de vibrações;

2. em toda a região de operação do motor existe uma grande intersecção entre as respostas de diversos harmônicos segundo os primeiro, segundo e terceiros modos de vibrar. Assim, torna-se necessário desenvolver critérios confiáveis de avaliação das respostas totais devidas a todas as excitações que apre

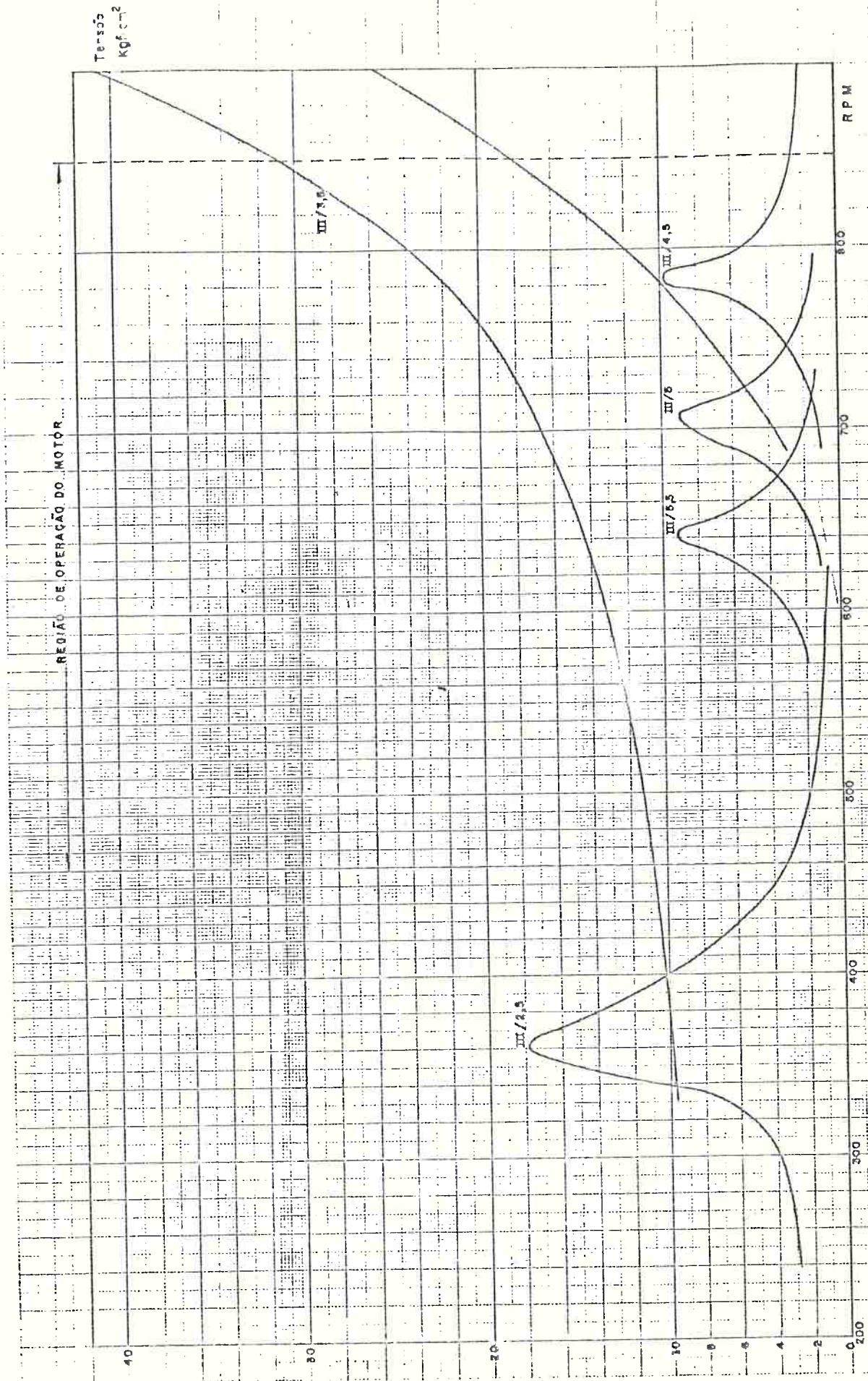
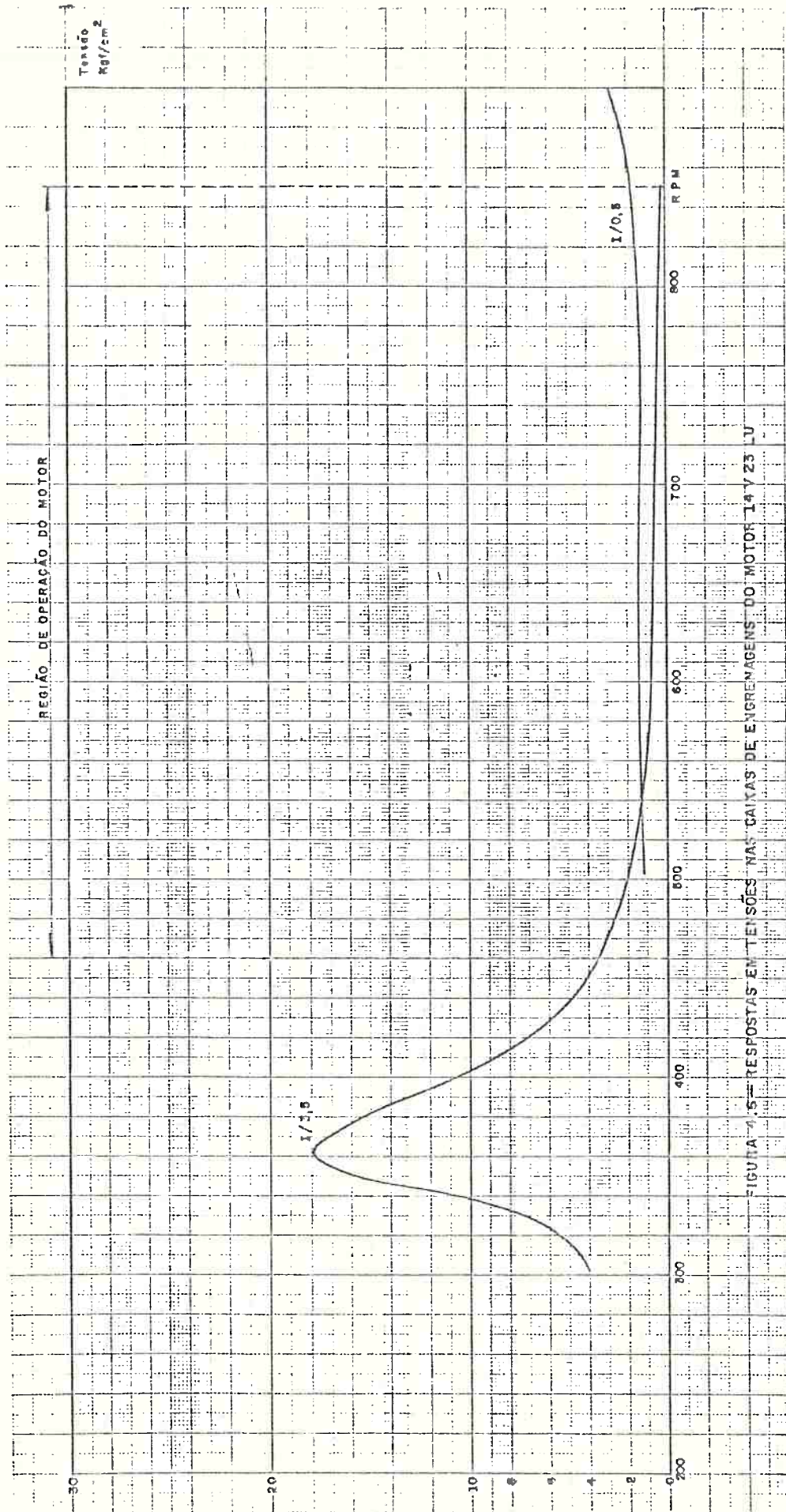


FIGURA 4.5 - RESPOSTAS EM TENSÕES NO EIXO DE MANIVELAS DO MOTOR 14V 23 LU



sentam respostas em uma determinada velocidade de operação do motor [2];

3. O hélice não constitui um fator preponderante nas respostas do sistema. Seu amortecimento constitui uma pequena parcela do amortecimento total e as amplitudes que ocorrem neles são baixas para os dois primeiros modos. Assim, tanto a energia introduzida como a dissipada por ele não afeta sensivelmente as respostas do sistema.

#### 4.2.2 Instalação diesel direta

A instalação considerada consiste de um motor de baixa rotação acoplado diretamente ao hélice. O motor é Sulzer modelo RND90 de dois tempos, 6 cilindros em linha com potência máxima contínua de 17.400 BHP a 122 rpm na pressão média indicada de 12,06 Kg/cm<sup>2</sup>.

Ordem de queima: 1 - 6 - 2 - 4 - 3 - 5 .

Diâmetro do eixo intermediário é de 55cm.

Módulos das seções dos eixos foram fornecidos pelo fabricante.

O fabricante forneceu as curvas de amplitudes dos harmônicos do conjugado em função da pressão média indicada e os amortecimentos modais  $\xi_{m1}$  e  $\xi_{m2}$  nos dois primeiros modos.

$$(\xi_{m1} = 0,07 \text{ e } \xi_{m2} = 0,05)$$

Os resultados de cálculo das respostas das tensões nas velocidades críticas e igualmente das tensões de flanco em

várias velocidades do motor, no eixo intermediário estão mostrados na Figura 4.8. As respostas calculadas para o terceiro modo de vibrar apresentaram valores desprezíveis.

O sistema equivalente modelado para cálculo das frequências naturais está mostrado na Figura 4.7 onde estão incluídas as curvas elásticas dos dois primeiros modos. As frequências naturais obtidas são:

$$w_1 = 461,7 \text{ vibrações/minuto}$$

$$w_2 = 1573,07 \text{ vibrações/minuto}$$

As velocidades críticas principais, onde o somatório dos vetores apresenta valores máximos, ocorrem nos harmônicos múltiplos do número de cilindros (6,12,18,24). Dentre estes, somente o 6º harmônico está em ressonância na região de operação do motor.

Na Figura 4.7 como nas anteriores, a curva J/L representa a resposta excitada pelo harmônico L do conjugado no modo de vibrar J.

Neste exemplo para o primeiro modo a amplitude no hélice é maior do que a do cilindro nº 1 e a energia introduzida pelo hélice na vibração deve ser considerada.

Uma das velocidades críticas perigosas, como já foi mencionado, é de ressonância do 6º harmônico de valor igual a:

$$v_c = \frac{461,7}{6} = 76,95 \text{ rpm}$$

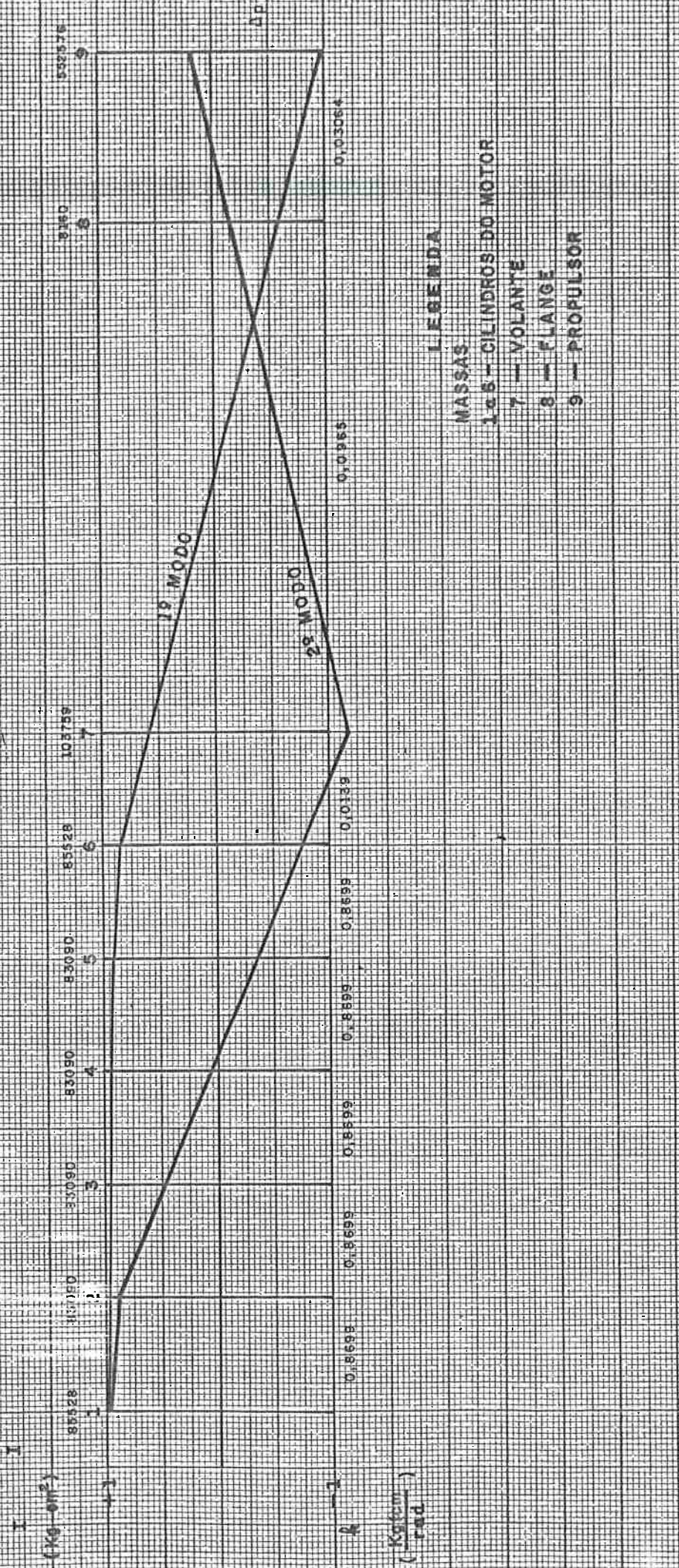


FIGURA 4.7 - CURVA ELÁSTICA DO MOTOR SULZER 6RND96

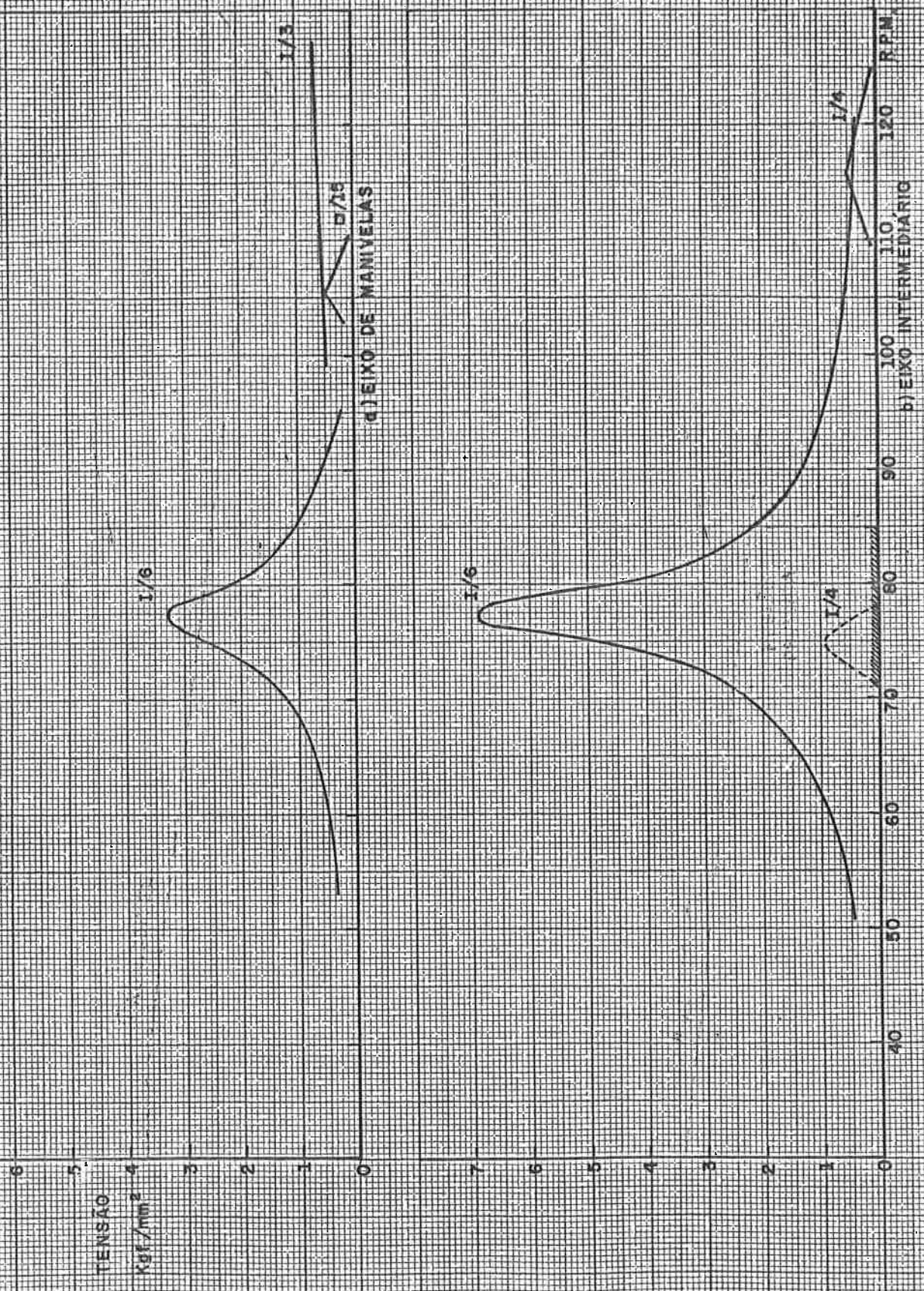


FIGURA 4.8 - RESPOSTAS EM TENSÃO DO MOTOR SULZER 6 RND 90 NOS PONTOS:  
c) EIXO DE MANIVELAS  
b) EIXO INTERMEDIÁRIO



como mostrado na Figura 4.8.

O hélice de 6 pás, quando estiver nesta mesma velocidade terá sua frequência fundamental dada por:

$$F = 6 \times 76,95 = 461,7 = \omega_1 \text{ (1a. frequência natural)}$$

Haverá assim coincidência da frequências do 6º harmônico com a fundamental do hélice.

O fabricante forneceu a amplitude de excitação do harmônico fundamental do hélice. Isto permitiu calcular a amplitude de ressonância, tensões de ressonância e de flanco, supondo-se que o sistema esteja excitado somente pelo hélice. Estas tensões estão mostradas na Figura 4.8 com o símbolo I/H significando as tensões devida ao hélice no primeiro modo de vibrar; verifica-se que suas magnitudes são pequenas quando comparadas com as produzidas pelo 6º harmônico do motor.

Escolhendo-se convenientemente um ângulo de fase entre as excitações provenientes do 6º harmônico do motor e as do hélice, ambas na mesma frequência, pode-se minimizar o efeito combinado, obtendo-se um valor aceitável para a resposta total, conforme foi discutido na seção 3.4.

Verifica-se na Figura 4.7 que:

- No motor de propulsão de dois tempos com acoplamento direto, o nó da curva elástica do primeiro modo de vibrar ocorre no eixo intermediário, resultando em alta amplitude no hélice. No segundo modo os nós se situam no eixo de manivelas do motor e próximo ao hélice. Estes resultados estão de acordo

com os publicados |2|, |31|.

Verifica-se na Figura 4.8 que:

1. as maiores tensões de ressonância no primeiro modo ocorrem no eixo intermediário e no segundo modo no eixo de manivelas;

2. as respostas devido aos harmônicos são afastadas uma das outras e raramente ocorre intersecção entre elas. A avaliação da resposta total torna-se portanto bem mais simples;

3. normalmente a frequência fundamental de excitação do hélice coincide com a frequência de ressonância de um dos harmônicos de excitação do motor. Neste caso tem-se uma velocidade crítica na região de operação do sistema propulsor e nestas condições deve-se selecionar um ângulo de fase adequado entre o conjugado do propulsor e o dos cilindros do motor, de modo a minimizar a resposta total. Isto está de acordo com observação apresentada em |2|;

4. no primeiro modo de vibrar, as maiores tensões de ressonância ocorrem nas ordens de vibrar igual ou múltipla do número de cilindros (críticas principais), quando o somatório dos vetores é máximo. Por esta razão, deve-se procurar evitar que estas velocidades críticas estejam dentro da região de operação do motor, como aconteceu no caso mostrado. Bastaria, que se adotasse um motor de mesma potência e maior número de cilindros. Os resultados obtidos estão de acordo com os publicados em |2|, |31|.

### 4.2.3 Sistema motor-gerador

O sistema considerado consiste de um motor de média rotação acoplado diretamente ao gerador. O motor é B&W, modelo 528LH, quatro tempos, 8 cilindros em linha, com potência máxima contínua de 1420 BHP a 720 rpm (com uma pressão média efetiva de  $17,7 \text{ Kg/cm}^2$ ), ordem de queima 1-2-4-6-8-7-5-3.

A curva elástica do sistema está mostrada na Figura 4.9 e foi construída de acordo com os mesmos princípios e métodos mostrados no 1º e 2º exemplos. A Figura 4.10 mostra as tensões devidas as vibrações torcionais no eixo de manivelas e a Figura 4.11 mostra as tensões no eixo intermediário.

Verifica-se nas Figuras 4.10 e 4.11 que:

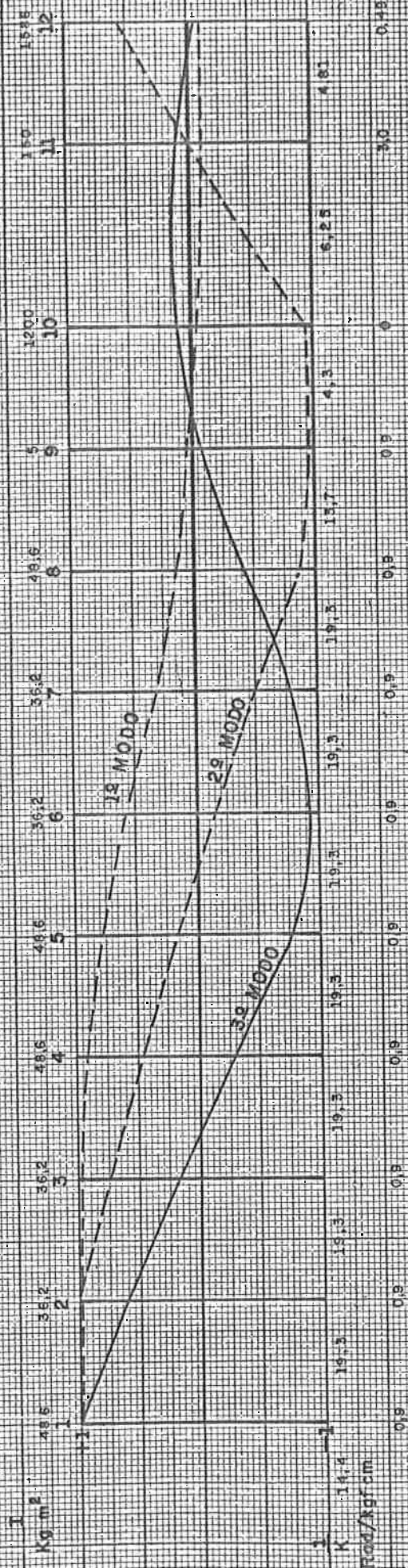
1. para este sistema aparecem valores altos de tensões de ressonância no segundo modo de vibrar no eixo intermediário. Deve-se evitar que as velocidades críticas em que elas ocorrem se situem próximas da velocidade de serviço do motor. Esta conclusão coincide com as publicadas em [2]. No exemplo mostrado as tensões de ressonância devida aos harmônicos de números 5,  $8 \frac{1}{2}$ , 9 e 10, ocorrem em velocidades afastadas da velocidade de serviço do motor;

2. observou-se uma superposição de respostas de vários harmônicos em diferentes modos de vibrar na região de velocidade de operação do motor. Desta maneira, uma avaliação da resposta total segundo os critérios já mencionados em 3.7.3, faz-se necessária;

3. próximo a velocidade de serviço a resposta total

obtida pela combinação das três maiores tensões devidas a vários harmônicos apresenta valores altos no eixo de manivelas.

A nomenclatura que caracteriza as curvas de ressonância das figuras mostradas neste exemplo é a mesma adotada para os outros dois exemplos mostrados em 4.2.1 e 4.2.2.



LEGENDA

MASSAS

10.8 - CLINDROS

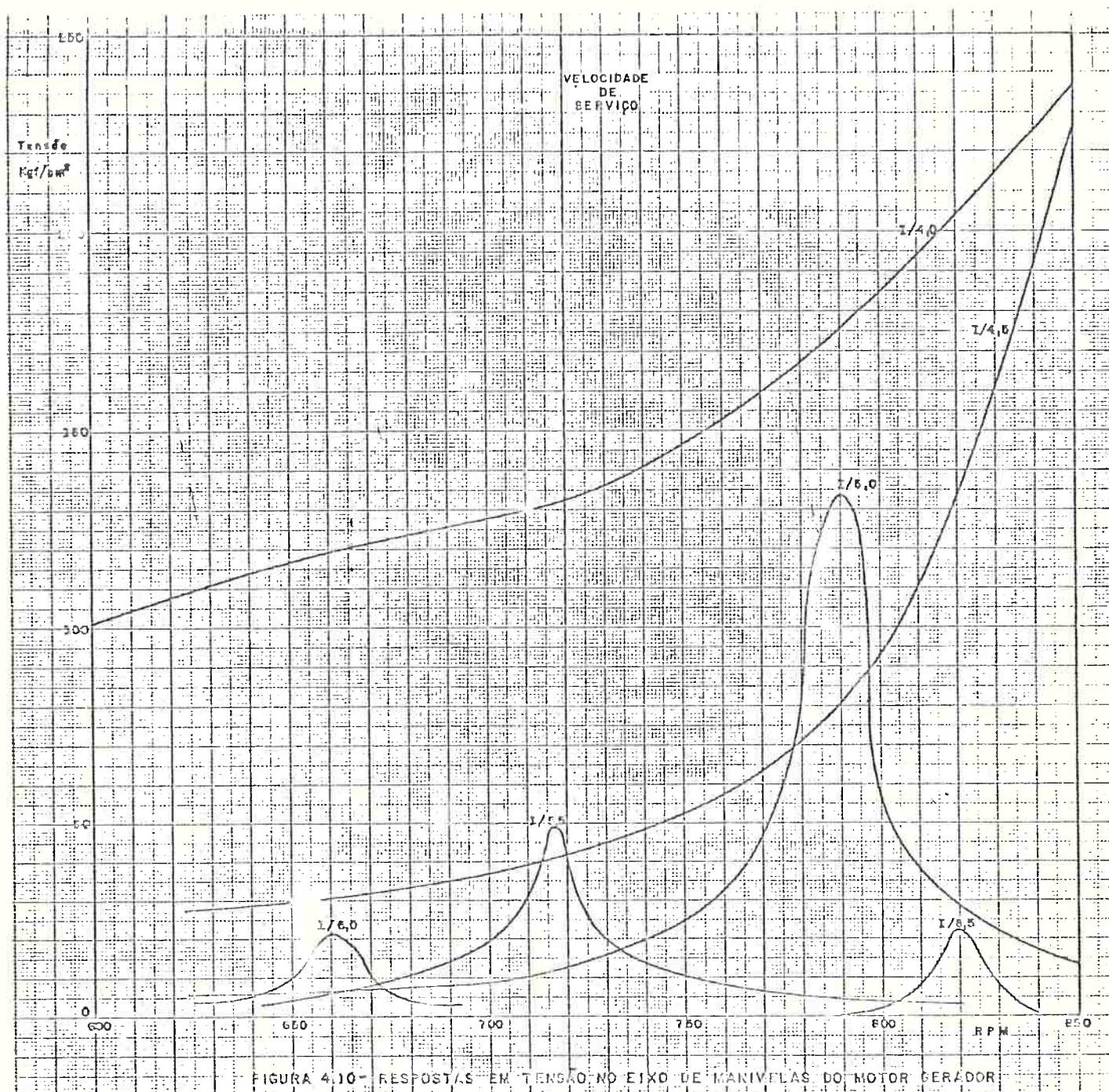
9 - EIXO DOS CAMES

10 - VOLANTE

11 - VENTILADOR DO GERADOR

12 - ROTOR DO GERADOR

FIGURA 4.9 - CURVA ELÁSTICA DO ROTOR GERADOR



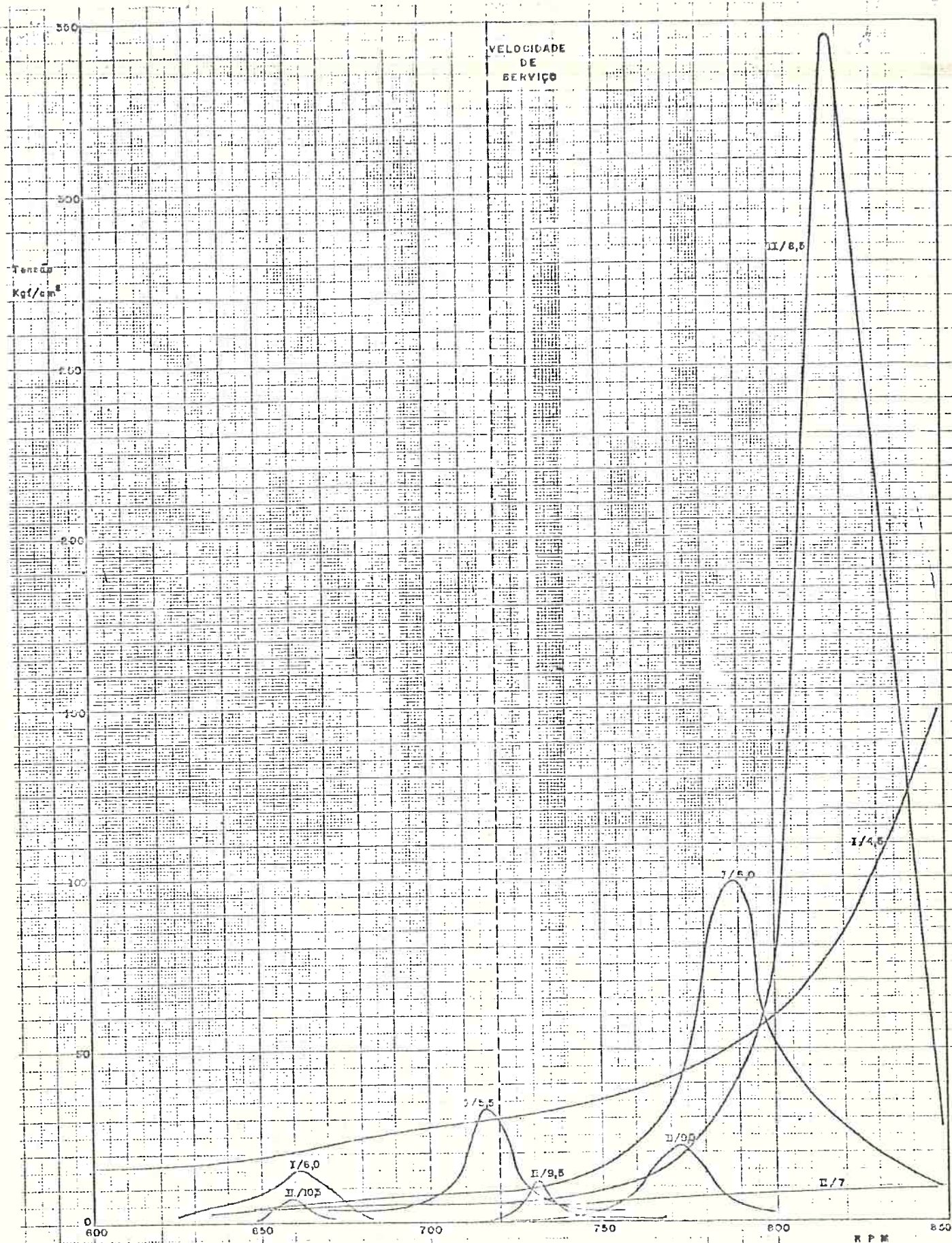


FIGURA 4.11— RESPOSTAS EM TENSÕES NO EIXO INTERMEDIÁRIO DO MOTOR GERADOR

## 5.0. COMPROVAÇÃO EXPERIMENTAL

### 5.1 Considerações Gerais

No Capítulo 3 foi desenvolvido um procedimento de cálculo para vibração torcional de eixos. Este procedimento foi aplicado no Capítulo 4 a alguns exemplos práticos para determinações de frequências naturais e amplitudes de vibração. Como um primeiro teste de validação do procedimento, os resultados em alguns exemplos foram comparados a resultados obtidos por outros métodos (autores). Contudo, uma validação mais completa do procedimento deve ser realizada através de comparação com resultados experimentais.

Para a comprovação experimental foram programadas medições de vibração torcional em motores ensaiados em freios dinamométricos. Os ensaios foram realizados no banco de provas da Indústria Villares com os motores Burmeister & Wein.

Conhecidas as características de rigidez, inércia e amortecimento do motor e do freio hidráulico usado no teste, bem como as características do conjugado de excitação, foi utilizado o procedimento de cálculo para determinação das frequências naturais e tensões vibratórias. Esses resultados devem ser comparados com os valores medidos para comprovação do método.

Para a realização das medidas, tentou-se inicialmente, utilizar o torquímetro do Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado de São Paulo (IPT) utilizado normalmente para me-



dição de conjugado transmitido pelo eixo. Após a realização do primeiro ensaio, em julho de 1981, constatou-se que o sistema de medida possuía um filtro exatamente para cortar os sinais devidos a variação da tensão em torno de seu valor médio e ocasionados pela vibração torcional. Uma vez detectada esta restrição, procedeu-se à modificação do sistema de filtragem e a sensibilidade do aparelho foi aperfeiçoada. Realizou-se então, um novo ensaio em agosto de 1981. Nesta ocasião verificou-se que o aparelho já modificado só media tensões acima de 200 Kgf/cm<sup>2</sup> quando aplicado na instalação motor-freio hidráulico. Estes valores raramente ocorrem nas instalações propulsoras e auxiliares marítimas o que tornou impossível o seu emprego para comprovação experimental desejada.

Constatada a impossibilidade da utilização deste equipamento, procurou-se outro aparelho de medidas mais adequado. Manteve-se, então, entendimentos com o Laboratório de Vibrações da COPPE da U.F.R.J. que possui um torquímetro de fabricação da Philips (Alemã). Uma vez acertados os detalhes para utilização desta instrumentação, programou-se novamente os ensaios. Nesta segunda fase, as medidas foram realizadas por ocasião da regulação e dos ensaios de desempenho dos motores B&W fabricados pela Villares Equipamentos em sua fábrica de São Bernardo do Campo, conforme discriminado a seguir.

1º Teste - 23/03/82

Sistema - motor 8V23LU (1200 BHP, 825 rpm) acoplado ao freio FA-6 (Heenam and Froude).

2º Teste - 26/04/82

Motor 14V23LU (2139 BHP, 825 rpm) acoplado ao freio FA-6 (Heenam and Froude).

Além dos ensaios citados, foram posteriormente realizadas medidas em mais dois sistemas semelhantes ao do 1º teste em maio de 1982, com o objetivo de localizar com maior precisão os pontos onde ocorriam a tensão máxima de ressonância. Estas medidas quando comparadas com os resultados experimentais anteriormente obtidos mostraram grandes discrepâncias.

## 5.2 Descrição dos Métodos de Medidas

Para a realização das medidas de tensões foram colocados extensômetros elétricos no eixo localizado entre o motor e o freio hidráulico conforme mostrado na Figura 5.1.

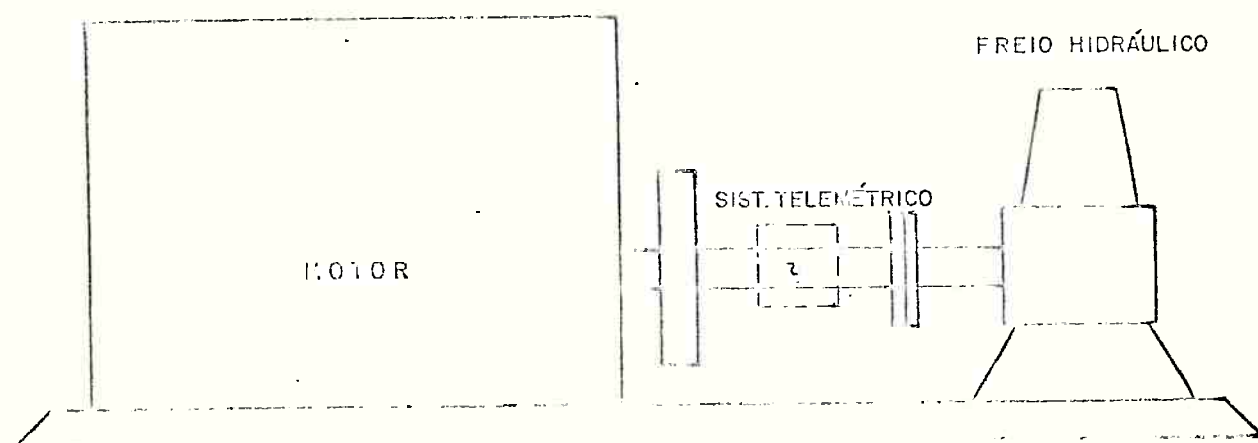


FIGURA 5.1 - SISTEMA MOTOR-FREIO. LOCALIZAÇÃO DO PONTO DE MEDIDAS EXPERIMENTAIS

Para uma melhor compreensão do método de medidas utilizado, são apresentados, de forma sucinta e simplificada, os princípios básicos sobre o assunto.

Na Figura 5.2 estão representadas uma vista de perfil e um corte transversal de um eixo de raio igual a  $R$ , que não está submetido a qualquer esforço de conjugado externo, de maneira que se tem  $M(t) = 0$ .

Considere-se neste eixo, um elemento de diagonal  $a$  localizado na superfície do eixo.

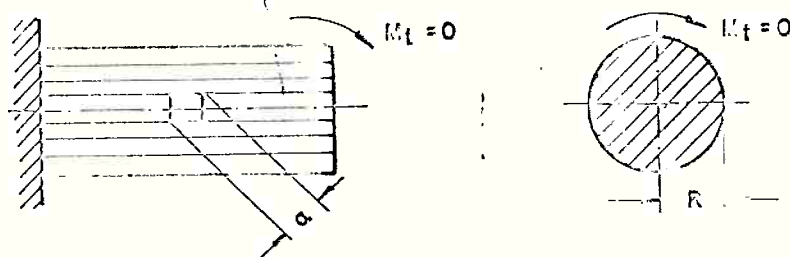


FIGURA 5.2 - REPRESENTAÇÃO DO ELEMENTO NA SUPERFÍCIE DO EIXO PARADO

Quando aplica-se um conjugado de valor  $M(t) \neq 0$  em um plano normal ao eixo longitudinal da peça, cada seção plana girará em torno deste mesmo eixo. Nesta condição, em cada ponto existirá uma tensão de cisalhamento cujo valor é proporcional a sua distância ao centro do eixo, conforme está mostrado na Figura 5.3. Assim, o seu valor máximo ocorrerá na superfície do eixo, onde serão realizadas as medidas pelos extensômetros elétri

cos. Nesta condição, o mesmo elemento representado na Figura 5.2 terá agora a sua diagonal de valor igual a  $a + \Delta a$ , onde  $\Delta a$  é a sua deformação linear que será denominada de  $\underline{e}$

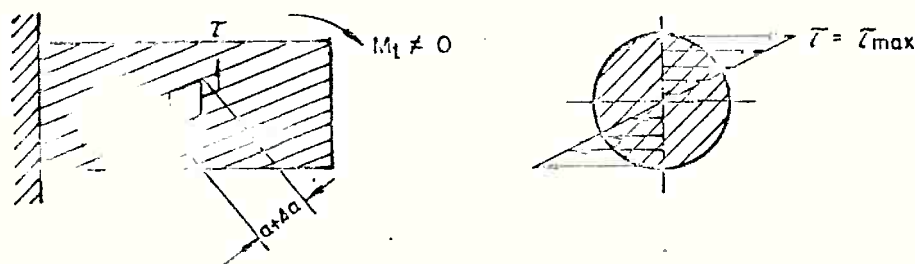


FIGURA 5.3 - REPRESENTAÇÃO DO NEXO ONDE ATUA UM CONJUGADO

Os extensômetros elétricos são colocados na superfície da peça, formando um ângulo de  $45^\circ$  com seu eixo longitudinal e medem a deformação linear devida às tensões de compressão e tração (de valores iguais e sentidos opostos) que atuam no elemento considerado. A Figura 5.4 representa esta condição.

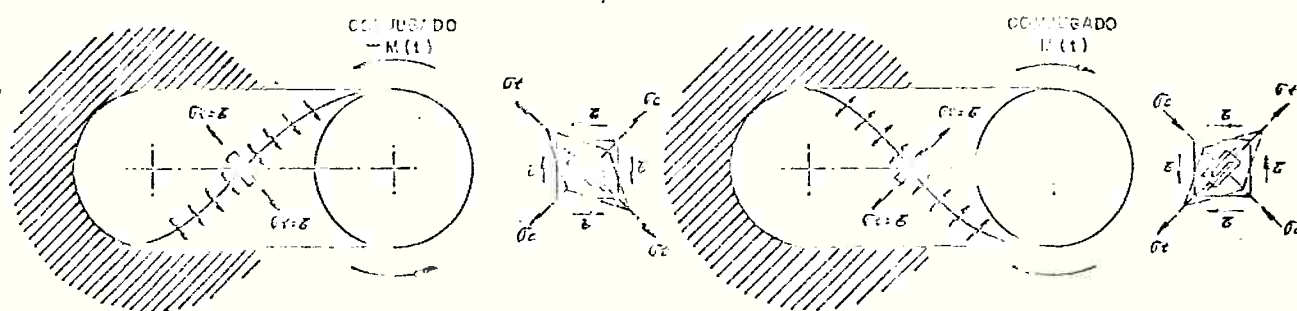


FIGURA 5.4 - POSICIONAMENTO DO ELEMENTO DE MATERIAL SOB TENSÃO E MOMENTO FLETOR DO QUAL SÃO COLADAS EXTENSÔMETROS PARA MEDIR AS TENSÕES

Na Figura 5.4 tem-se:

- $\tau$  = tensão de cisalhamento,
- $\sigma_t$  = tensão devida a tração,
- $\sigma_c$  = tensão devida a compressão.

Deseja-se obter inicialmente a deformação devida ao cisalhamento que denomina-se de  $\gamma_c$ . Tem-se então que |2|:

$$e = \frac{\gamma_c}{2} \quad (5.2.1)$$

A tensão de cisalhamento  $\tau$  que deseja-se medir será dada por |2|:

$$\tau = G \gamma_c = 2G e \quad (5.2.2)$$

onde  $G$  é o módulo de rigidez do material considerado.

Através dos aparelhos de medida, que serão descritos em 5.2, mede-se o valor da deformação  $e$ . Conhecida a deformação do material, obtém-se o valor do módulo de rigidez  $G$  e calcula-se o valor da tensão  $\tau$  pela expressão (5.2.2).

Para o aço do eixo em que foram efetuadas as medidas adotou-se um valor de  $G = 0,84 \text{ Kg/cm}^2$ .

### 5.3 Aparelhos de Medida

Na seção anterior foram descritos os métodos de medida, baseados no emprego de extensômetros elétricos que são colocados no eixo. Nesta seção será visto como estas medidas foram realizadas e transmitidas para registro durante os ensaios.

A Figura 5.5, retirada do catálogo do fabricante, mostra um diagrama esquemático dos aparelhos de medida utiliza

dos. O sistema consiste de duas partes distintas, uma rotativa que fica presa ao eixo e gira com ele e outra estacionária.

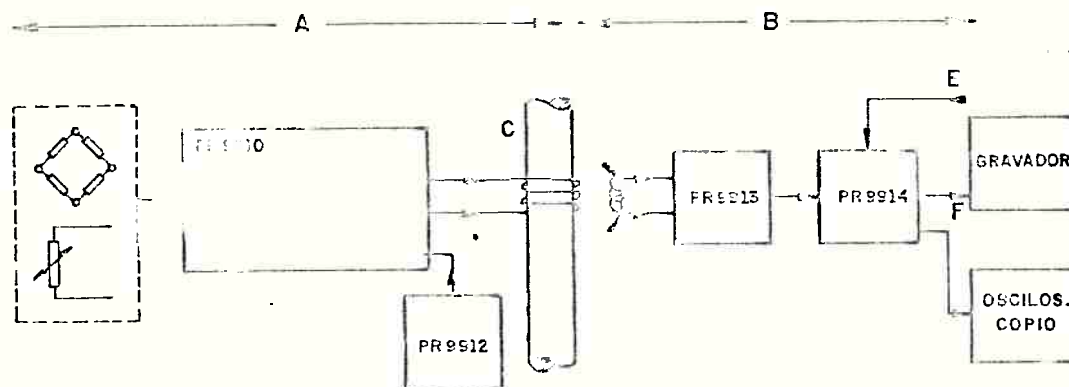


FIGURA 1.5 - DIAGRAMA ESQUEMÁTICO DO SISTEMA DE MEDIDA

No diagrama utilizou-se os mesmos símbolos usados pelo fabricante do aparelho para cada unidade do sistema.

O conjunto A compreende a parte rotativa do sistema constituída de:

- ponte formada pelos extensômetros elétricos indicado por (1) ,
- oscilador: modelo PR9910,
- bateria: modelo PR9912,
- antena transmissora do sinal, indicada por (2) .

O conjunto B compreende a parte estacionária do sistema, constituída de:

- antena receptora do sinal (captor): modelo PR9913,
- unidade demoduladora: modelo PR9914,
- gravador em fita magnética indicado por (3) ,
- osciloscópio indicado por (4) .

A parte rotativa do aparelho de medida está mostrada em detalhe no diagrama esquemático da Figura 5.6 e na Figura 5.7.

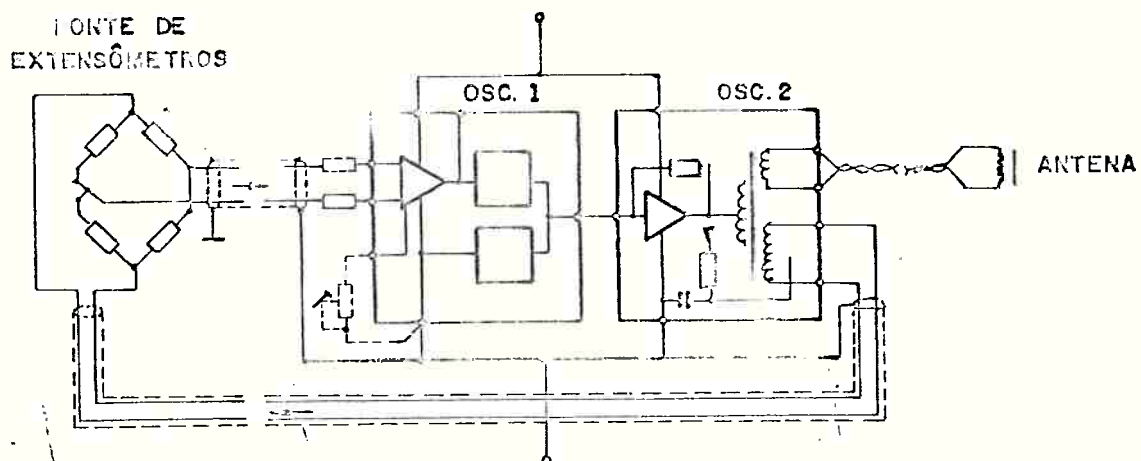


FIGURA 5.6 - DIAGRAMA ESQUEMÁTICO DA PARTE ROTATIVA DO APARELHO DE MEDIDA

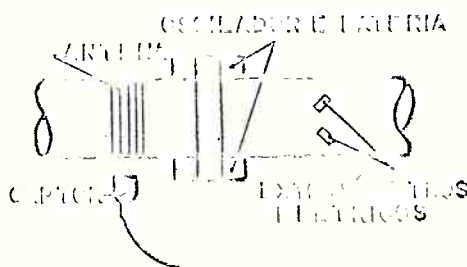


FIGURA 5.7 - POSIÇÃO RELATIVA DOS COMPONENTES ROTATIVOS DO FIXO

Na Figura 5.7 estão mostrados os componentes que operam presos ao eixo e constituem a parte rotativa do sistema, vendo-se os extensômetros elétricos, oscilador, bateria, antena transmissora. É mostrado também a antena receptora (captor) que já pertence a parte estacionária do aparelho.

Descrevo a seguir o funcionamento de todo o sistema já ilustrado pelas Figuras 5.5, 5.6 e 5.7.

A ponte formada pelos quatro extensômetros é alimentada pela bateria PR9912 através da unidade OSC2 do oscilador PR9910. O sinal desta ponte, que é proporcional a máxima tensão de cisalhamento, que ocorre na seção onde estão colocados os extensômetros é recebido em amplitude modulada pela unidade OSC1 (Figura 5.6) e transmitida a unidade de OSC2, ambas pertencentes ao oscilador PR9910. A partir daí o sinal, já transformado de amplitude modulada em frequência modulada, é enviado para a antena transmissora ② instalada em volta do eixo, conforme mostrado na Figura 5.7. O sinal transmitido por esta última unidade é recebido pela antena PR9913 da parte estacionária B do sistema de medida. Daí o sinal é enviado a unidade demoduladora PR9914, onde é novamente transformado para amplitude modulada. Nesta unidade existem filtros para separar os sinais indesejáveis de ruído do sinal a ser transmitido aos amplificadores, de onde ele é enviado para o gravador em fita magnética ③ e para o osciloscópio ④ que é utilizado para supervisionar as medições. Posteriormente, os sinais gravados são transmitidos a um registrador onde se obtém uma curva da resposta total devido às vibrações torcionais. Esta curva é colocada num analisador har-



mônico que decompõe a resposta em seus harmônicos.

#### 5.4 Realização dos Ensaios

Foram realizados ensaios com os motores 8V23LU e 14V23LU, conforme já foi citado na seção 5.2.

Observou-se certos cuidados antes da realização das medidas, conforme estão descritos a seguir:

1. Realizou-se um cálculo preliminar de frequências naturais do sistema a fim de prever as regiões de operação do motor onde se esperava que ocorressem as velocidades críticas.

2. Obteve-se a curva de potência do motor em função da rotação no eixo, quando funcionando acoplado ao freio FA-6, em ensaios anteriores. Os pontos desta curva são decorrentes da intersecção das curvas de desempenho do motor com a curva do sistema acionado (freio-hidráulico) e estão mostrados na Figura 5.7. Estas curvas são uma aproximação da curva de potência absorvida pelo hélice. Da mesma maneira obteve-se do fabricante os valores da pressão média efetiva no freio para determinados pontos da curva e da pressão média efetiva indicada, calculada para estes mesmos pontos. A finalidade destas providências era de procurar fazer com que nos ensaios a serem realizados, os pontos de operação do sistema ficassem o mais próximo possível dos pontos destas curvas, para as quais já se possuía os valores da pressão média efetiva indicada em função de diferentes velocidades do motor.

3. Após a fixação dos extensômetros no eixo intermediário, realizou-se a montagem, alimentação e calibração de todos os aparelhos de medida. Esta operação é demorada e exige cuidados especiais, afetando a precisão das medidas efetuadas.

Os ensaios foram realizados de acordo com o seguinte procedimento:

1. A velocidade do motor era variada atuando-se sobre a cremalheira de acionamento das bombas injetoras e a carga no sistema era controlada pela abertura da válvula de admissão de água no freio hidráulico. Por intermédio destes dois controles procurou-se colocar o motor funcionando o mais próximo possível dos pontos da curva mostrada na Figura 5.8.

2. Seguindo-se este procedimento, variou-se a velocidade do motor de 10 em 10 rpm. Em cada ponto selecionado para operação do motor, esperava-se que a velocidade se estabilizasse para realizar a medida por intermédio de um tacômetro digital colocado na extremidade do eixo. Esta operação com duração aproximada de 4 minutos era realizada ao mesmo tempo que os aparelhos descritos na seção 5.3 mediam os valores de tensões totais, que incluíam a tensão devida ao conjugado médio acrescidas das parcelas devido a vibração torcional.

3. Os indicadores de velocidade do motor e conjugado no freio, pertencentes a bancada de teste, serviam como referências para se colocar o sistema no ponto em que se desejava realizar a medida. No entanto, os valores mostrados nestes aparelhos não foram utilizados como resultados porque os seus ponteiros oscilavam constantemente, não permitindo obter a preci-

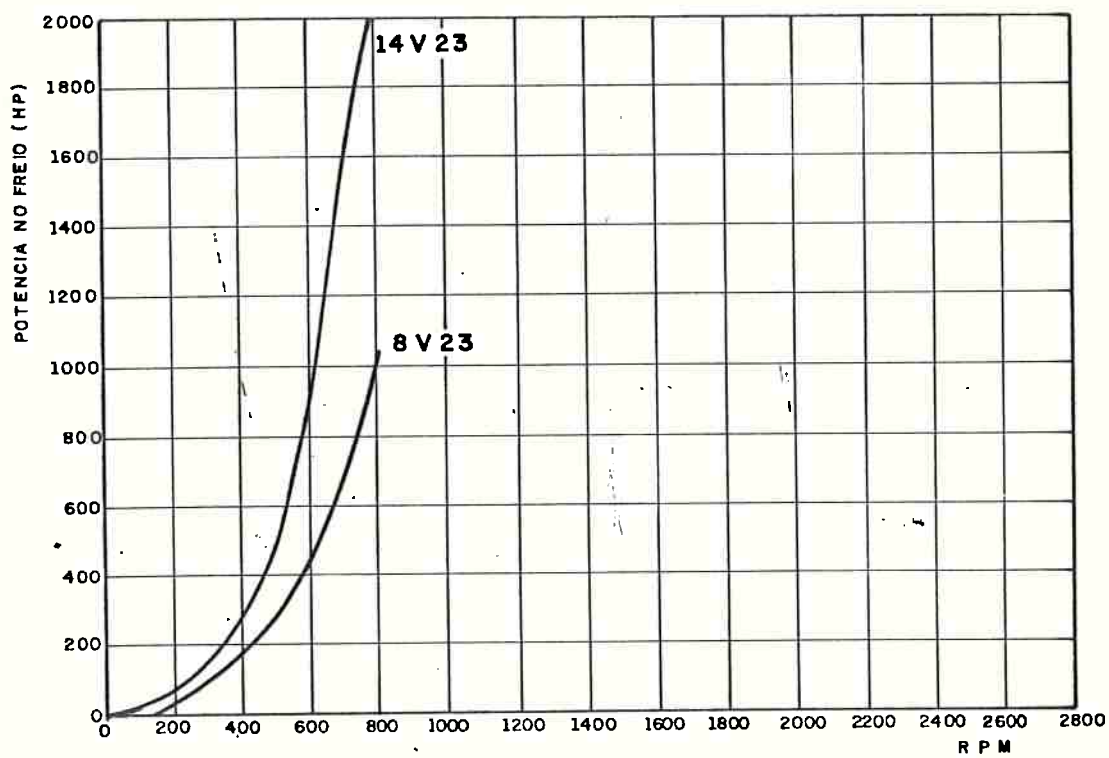


FIGURA 5.8 - POTENCIA NO FREIO EM FUNÇÃO DA ROTAÇÃO DO MOTOR  
14 V 23 LU E 8 V 23 LU

são de medida.

4. No ensaio do motor 14V23LU, que constituiu o segundo ensaio, o procedimento foi idêntico ao primeiro, com exceção de que foi adotado uma variação da velocidade do eixo de 5 rpm na região em que se esperava ocorrer uma velocidade crítica importante.

Deve-se ainda ressaltar que os ensaios dos motores foram realizados logo após o período de amaciamento e regulação, quando eles funcionam durante 20 a 25 horas.

### 5.5 Resultados Experimentais

São apresentados nesta seção os resultados das medidas realizadas com os motores 8V23LU e 14V23LU. Outros dois ensaios realizados com motores do tipo 8V23LU, conforme já foi mencionado, não produziram resultados satisfatórios, não sendo por isso aqui incluídos. Eles estão mostrados no Apêndice F.

Os resultados dos ensaios foram gravados e posteriormente transferidos para um registrador. Estes registros constam do Relatório Final de Medição de Vibração Torcional em Eixo de Motor Diesel do COPPE[30]. É mostrado como exemplo na parte superior da Figura 5.9 o registro da resposta total de tensão na velocidade de 564 rpm do eixo. Na parte inferior da Figura 5.9 está registrada a decomposição em harmônicos desta resposta por Técnicas de Transformada Rápida de Fourier executada pelo analisador harmônico.

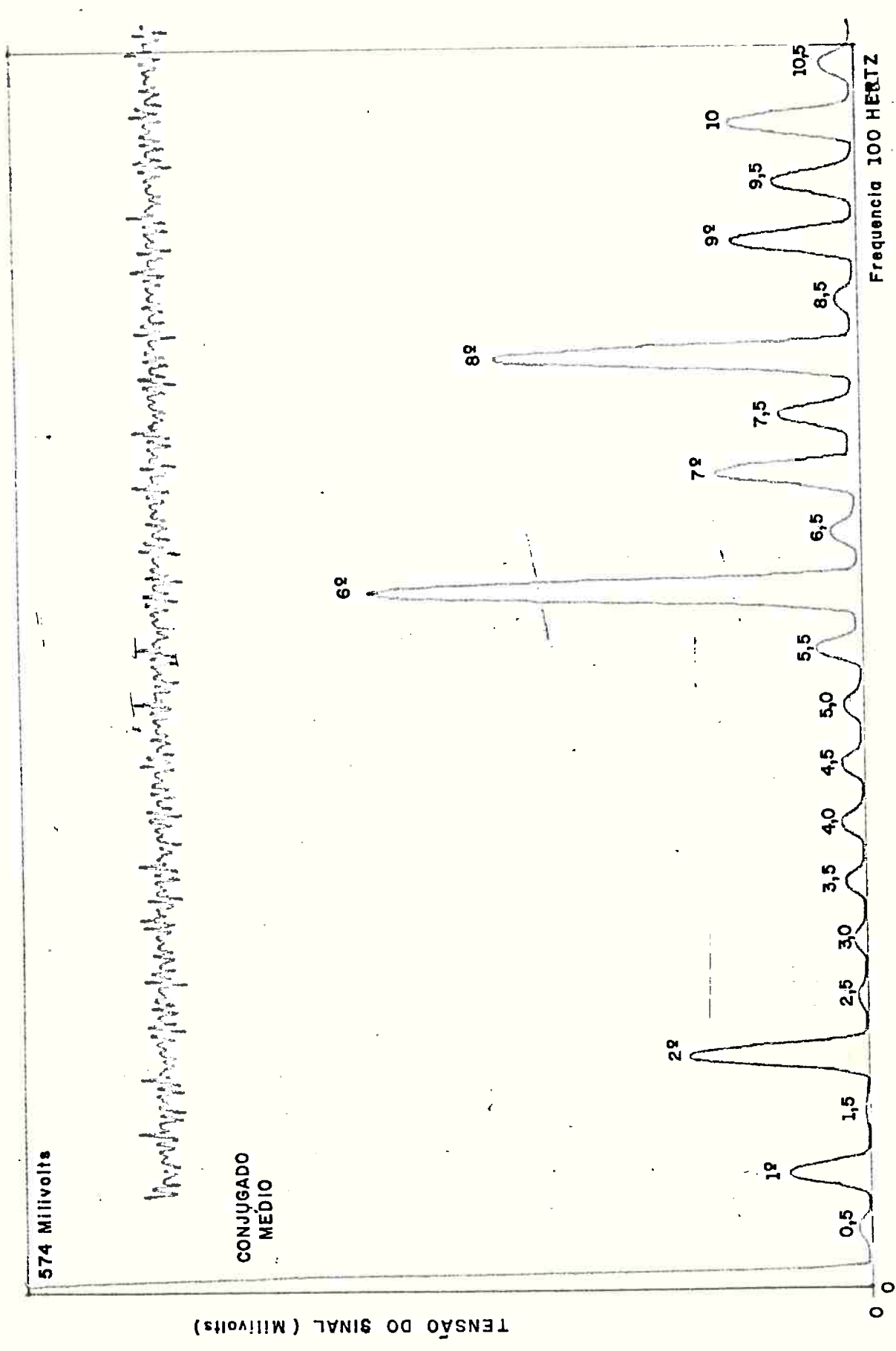


FIGURA 5.9 - REGISTRO DA RESPOSTA TOTAL DAS TENSÕES E RESULTADO DE SUA DECOMPOSIÇÃO EM HARMONICOS ( MOTOR 8V23LU A 564 RPM )

Na Figura 5.9 nota-se nitidamente os valores em escala de cada harmônico. Verifica-se, também, no ponto 0 à esquerda da figura o registro do sinal proporcional ao conjugado médio. Repetindo-se este procedimento em várias velocidades do eixo em que foram efetuadas as medidas, obtém-se o gráfico dos valores de resposta total que, decomposta no analisador harmônico, fornece o valor devido a cada harmônico em função destas mesmas velocidades. Estes gráficos servirão para se comparar os valores calculados pelo programa de computador com os medidos nos ensaios.

As Figuras 5.10 e 5.11 mostram exemplos dos gráficos da resposta total medida em determinadas velocidades do eixo do motor, para cada um dos ensaios realizados.

As Figuras 5.12 e 5.13 mostram os valores de respostas totais das tensões medidas no domínio das velocidades dos motores 8V23LU e 14V23LU, respectivamente, e as Figuras 5.14 e 5.15 mostram os valores dos conjugados médios medidos em função das velocidades destes mesmos motores.

As respostas totais mostradas nas Figuras 5.12 e 5.13 decompostas em harmônicos estão mostradas nas Figuras 5.16 a 5.25.

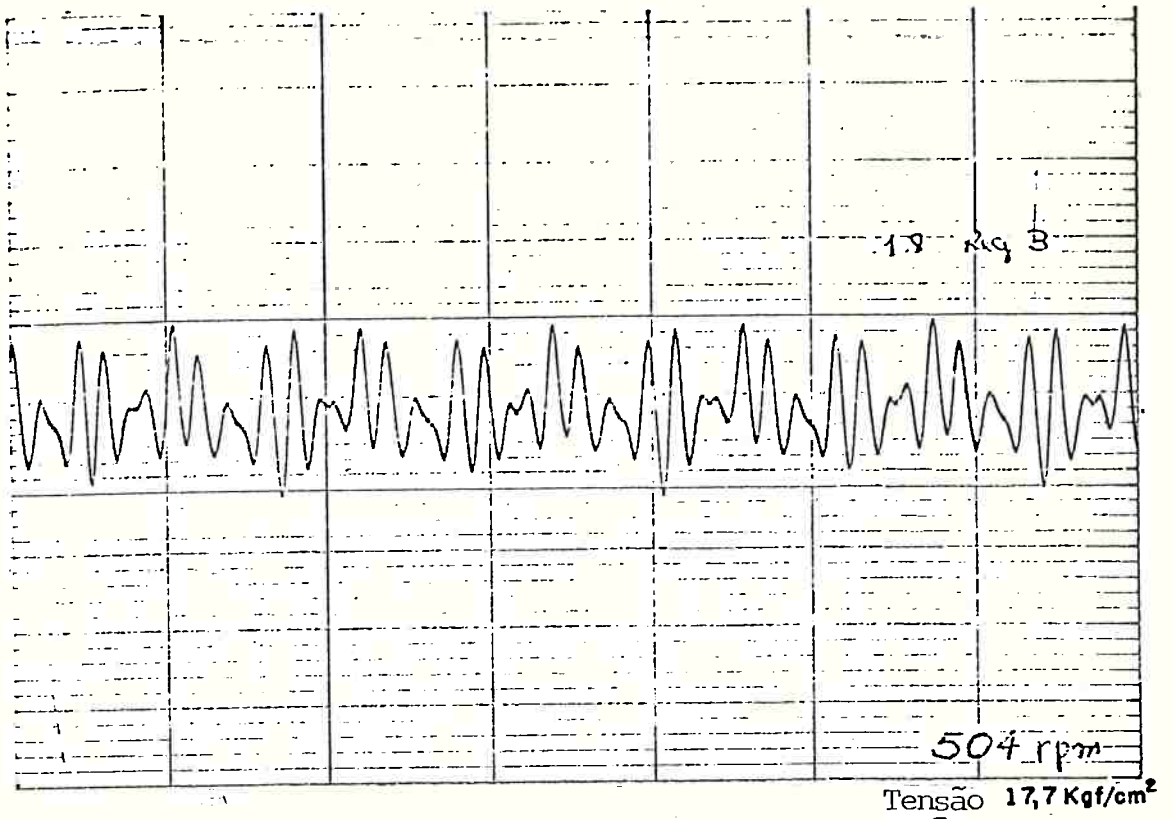
Tensão 17,7 Kgf/cm<sup>2</sup>

FIGURA 5.10 - GRAFICO DO SINAL DE RESPOSTA TOTAL DA TENSÃO DEVIDA A VIBRAÇÃO TORCIONAL A 504 RPM DO MOTOR 8V 23 LU

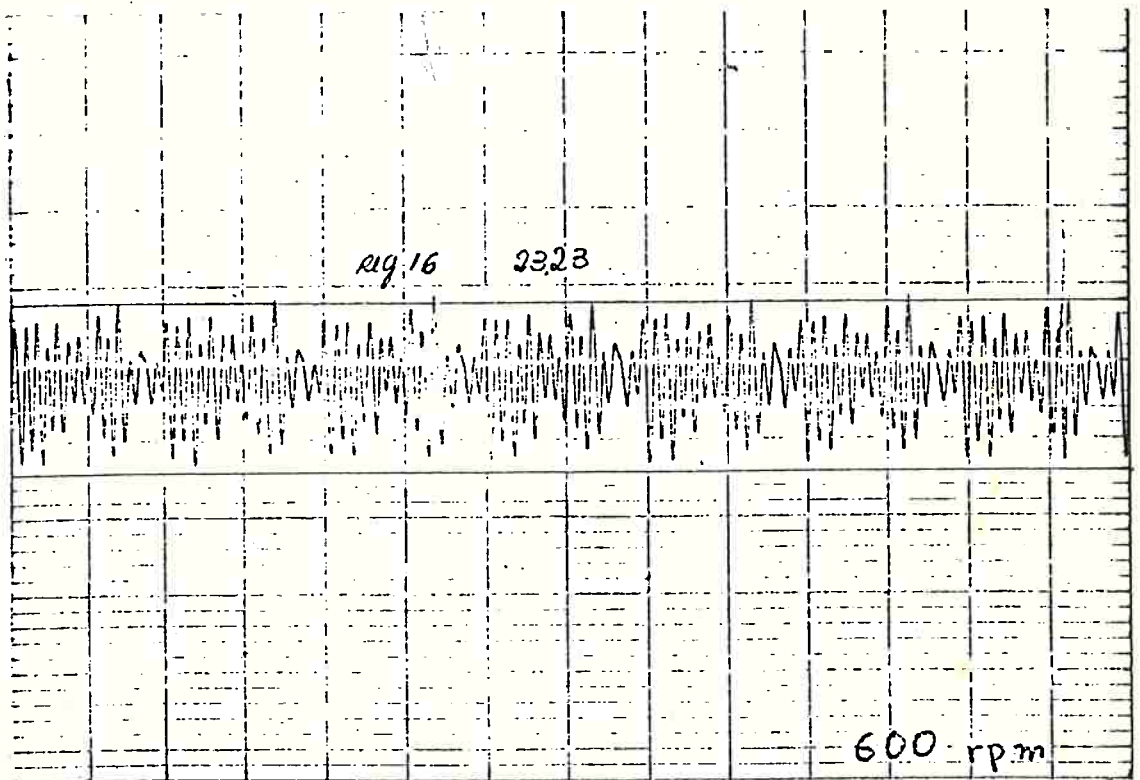
Tensão 23,2 Kgf/cm<sup>2</sup>

FIGURA 5.11 - GRAFICO DO SINAL DE RESPOSTA TOTAL DA TENSÃO DEVIDA A VIBRAÇÃO TORCIONAL A 600 RPM DO MOTOR 14V 23 LU

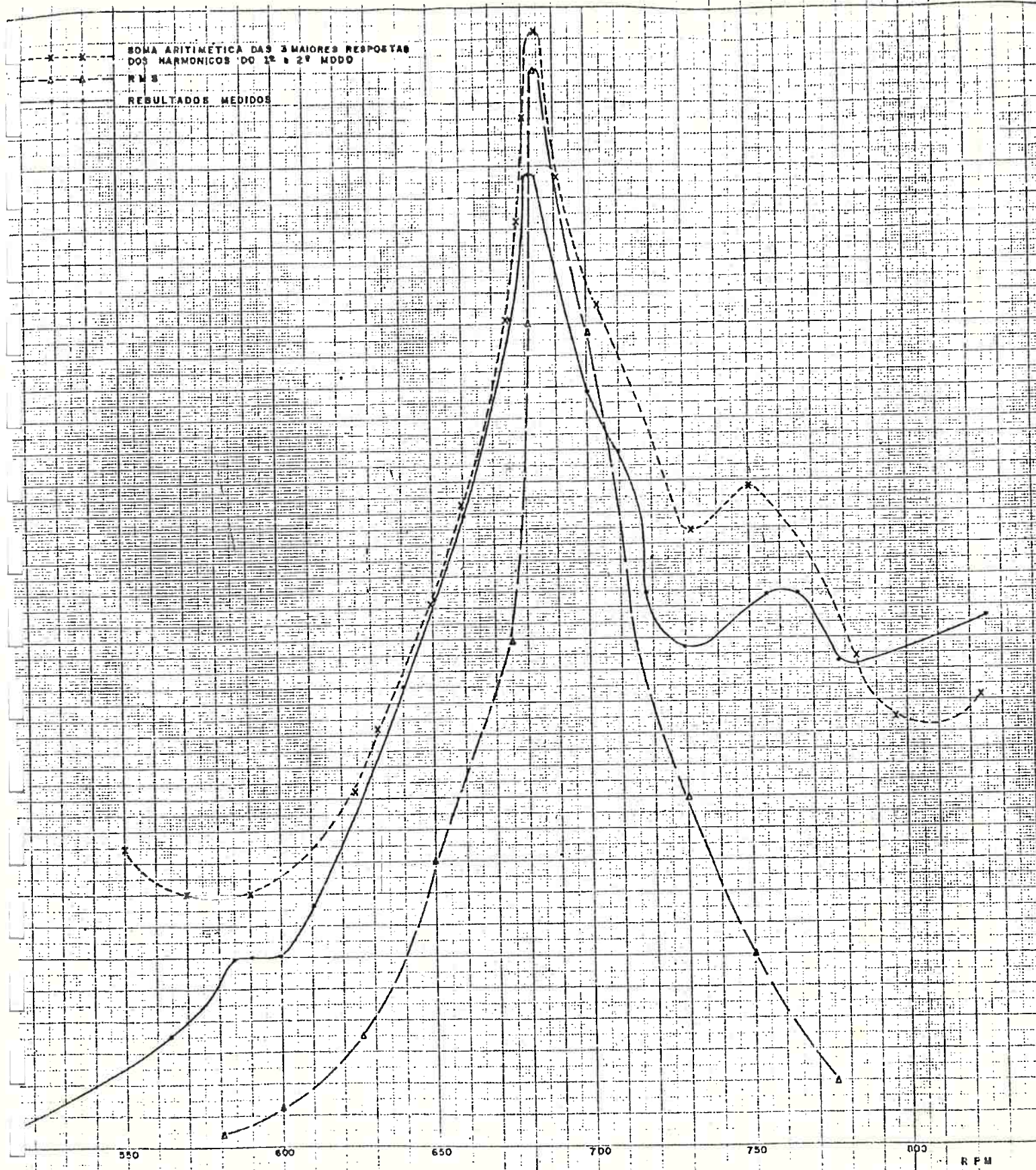


FIGURA 5.12-RESPOSTAS TOTAIS MEDIDAS E CALCULADAS DO MOTOR 6V 23 LU



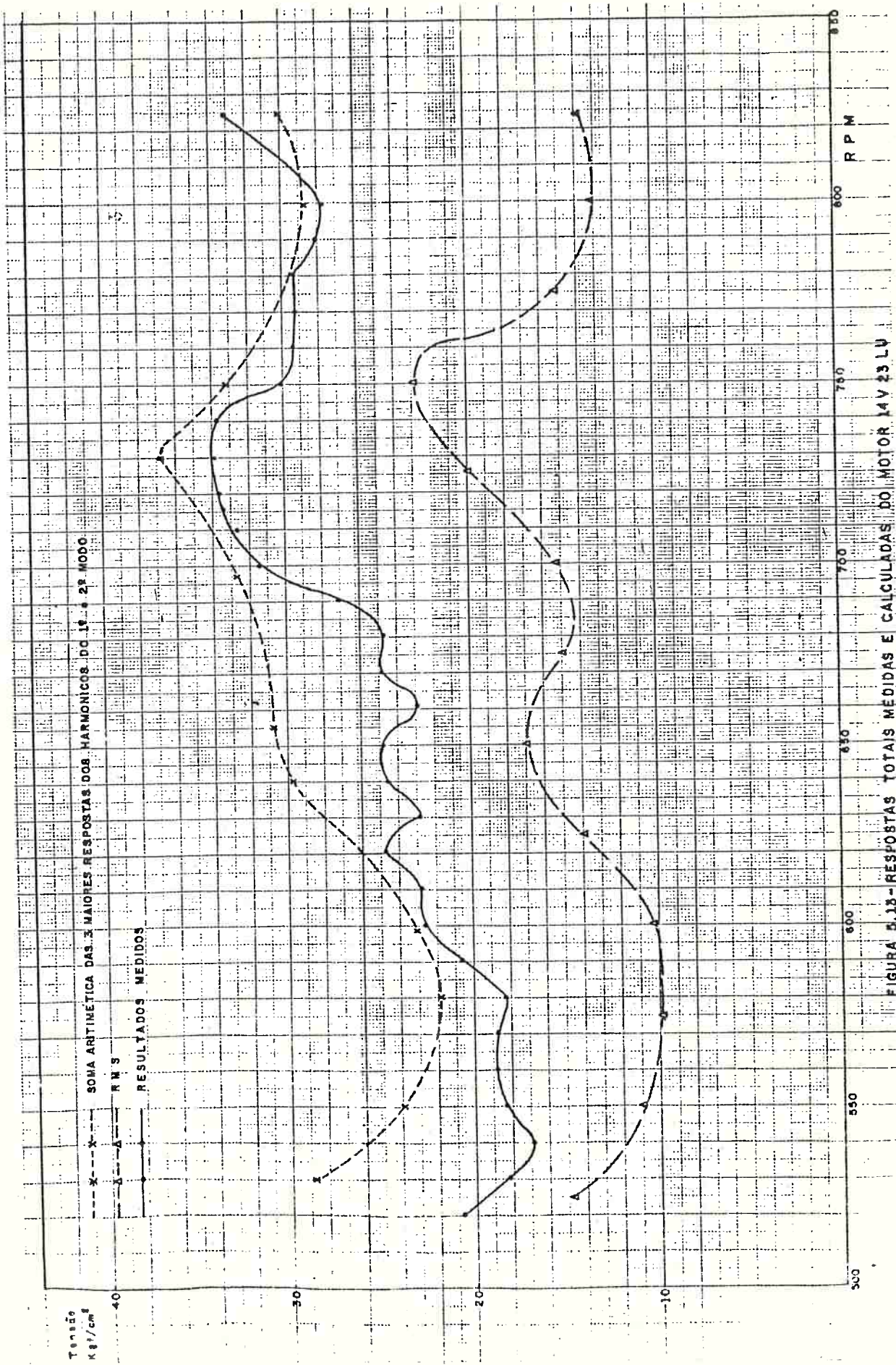


FIGURA 5.13 - RESPOSTAS TOTAIS MEDIDAS E CALCULADAS DO MOTOR 14V 23 LV

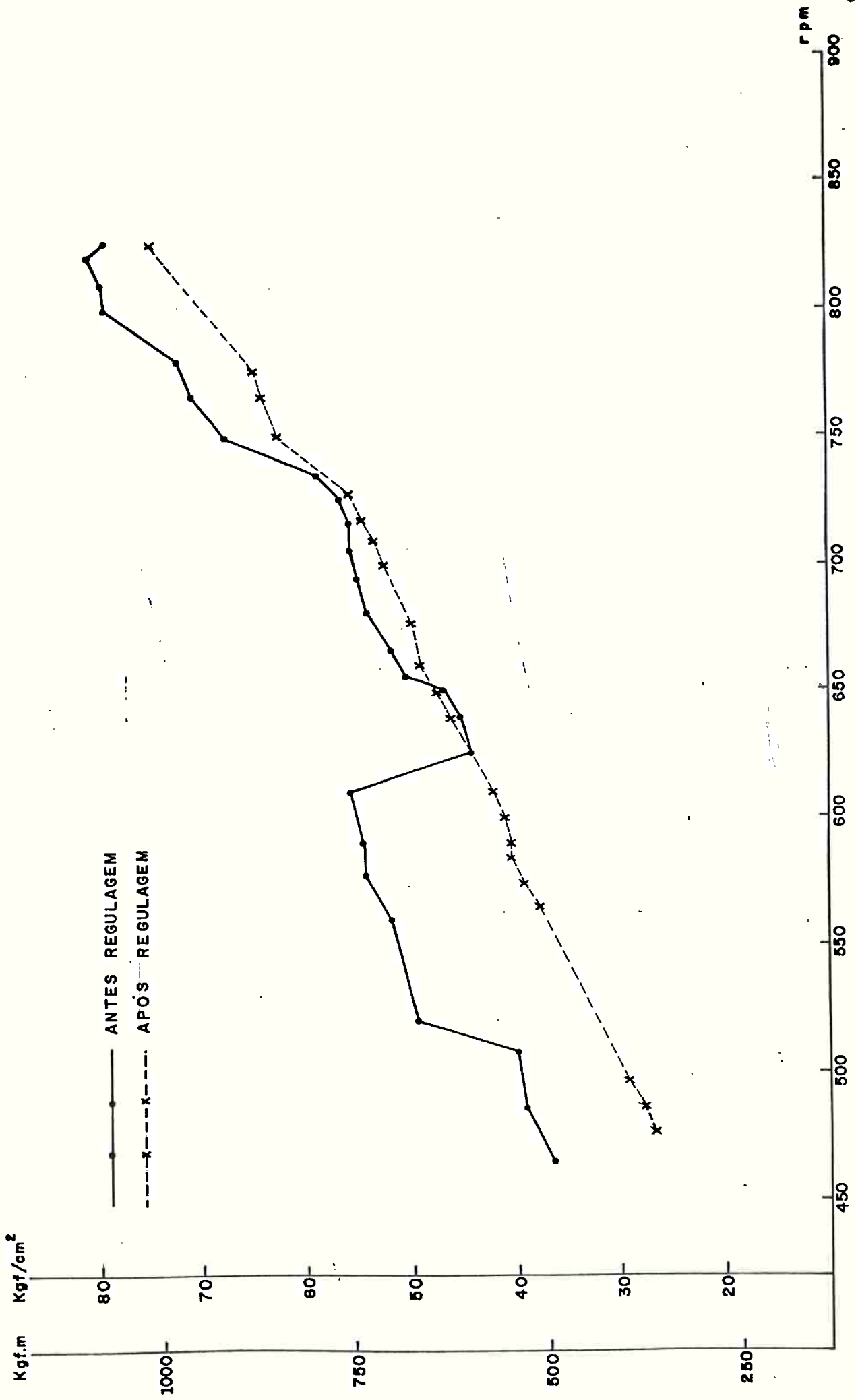


FIGURA 5.14 - CONJUGADO MÉDIO NO EIXO EM FUNÇÃO DA VELOCIDADE DO MOTOR 8CV23 LU

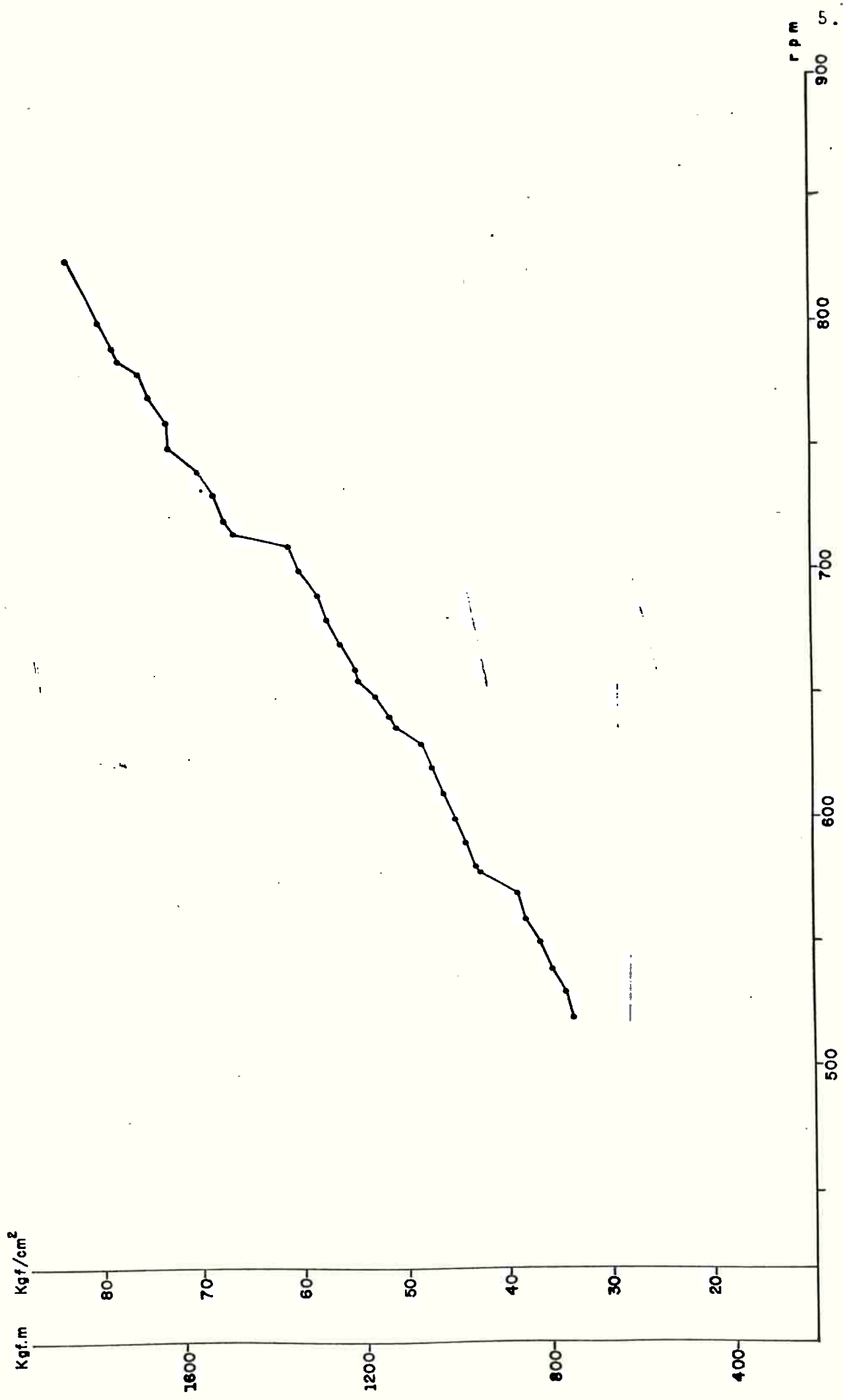


FIGURA 5.16 - CONJUGADO MEDIO NO EIXO EM FUNCAO DA VELOCIDADE DO MOTOR 14CV 23 LU

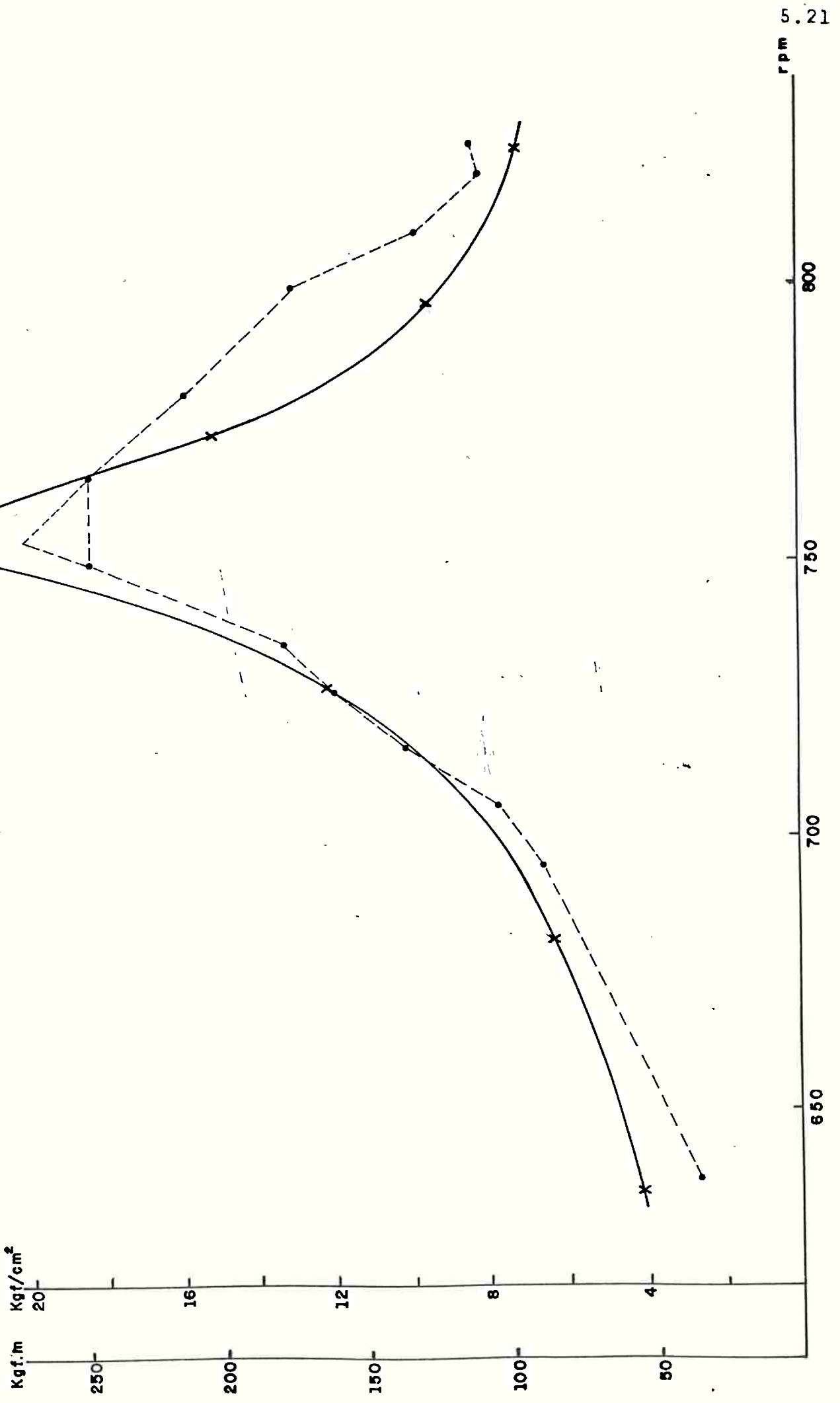


FIGURA 5.16-19 TESTE MOTOR TIPO 8CV 23 LU COMPONENTE ORDEM 5,5

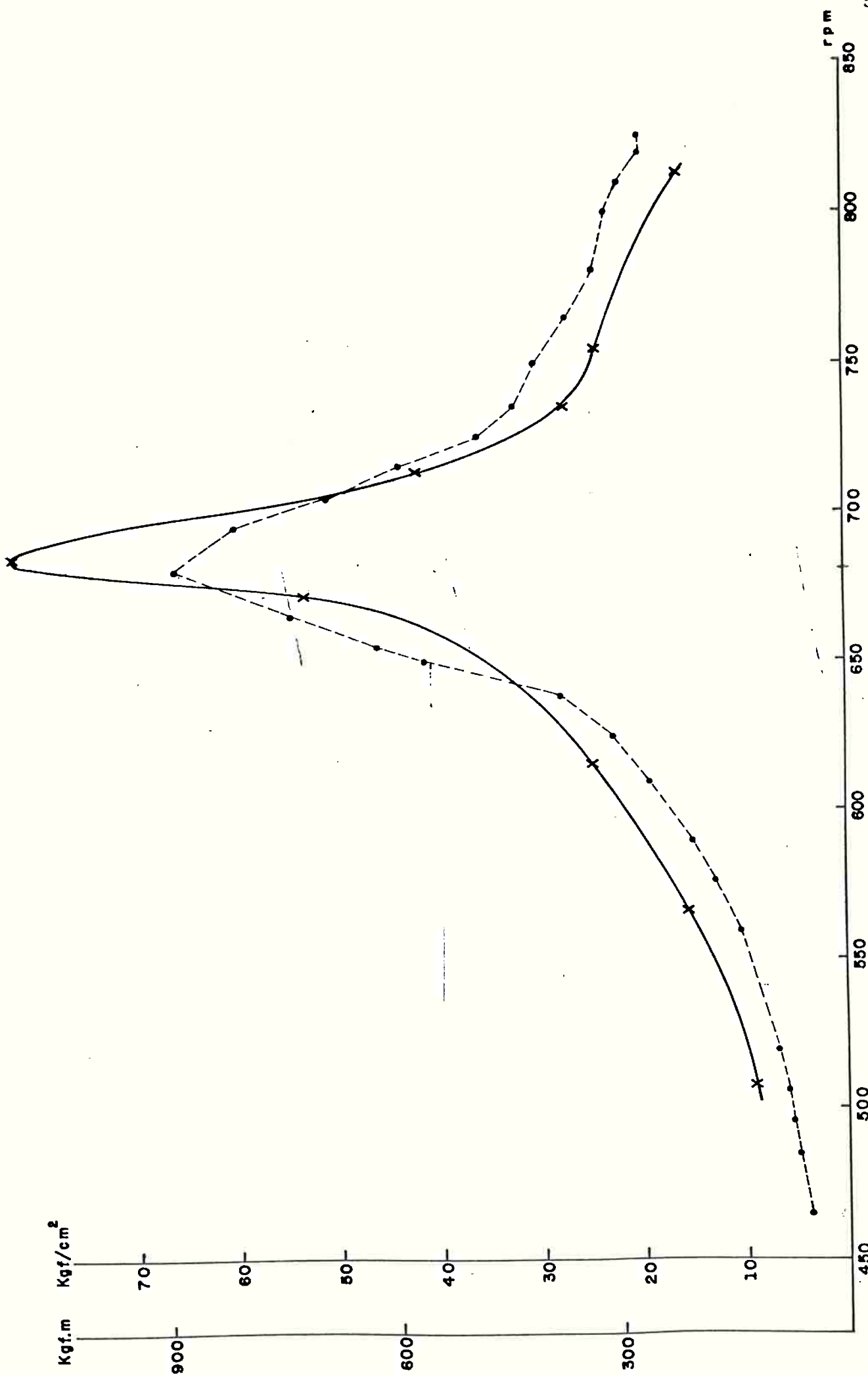


FIGURA 5.17 - 19 TESTE MOTOR TIPO 8CV 23 LU COMPONENTE ORDEM 6.

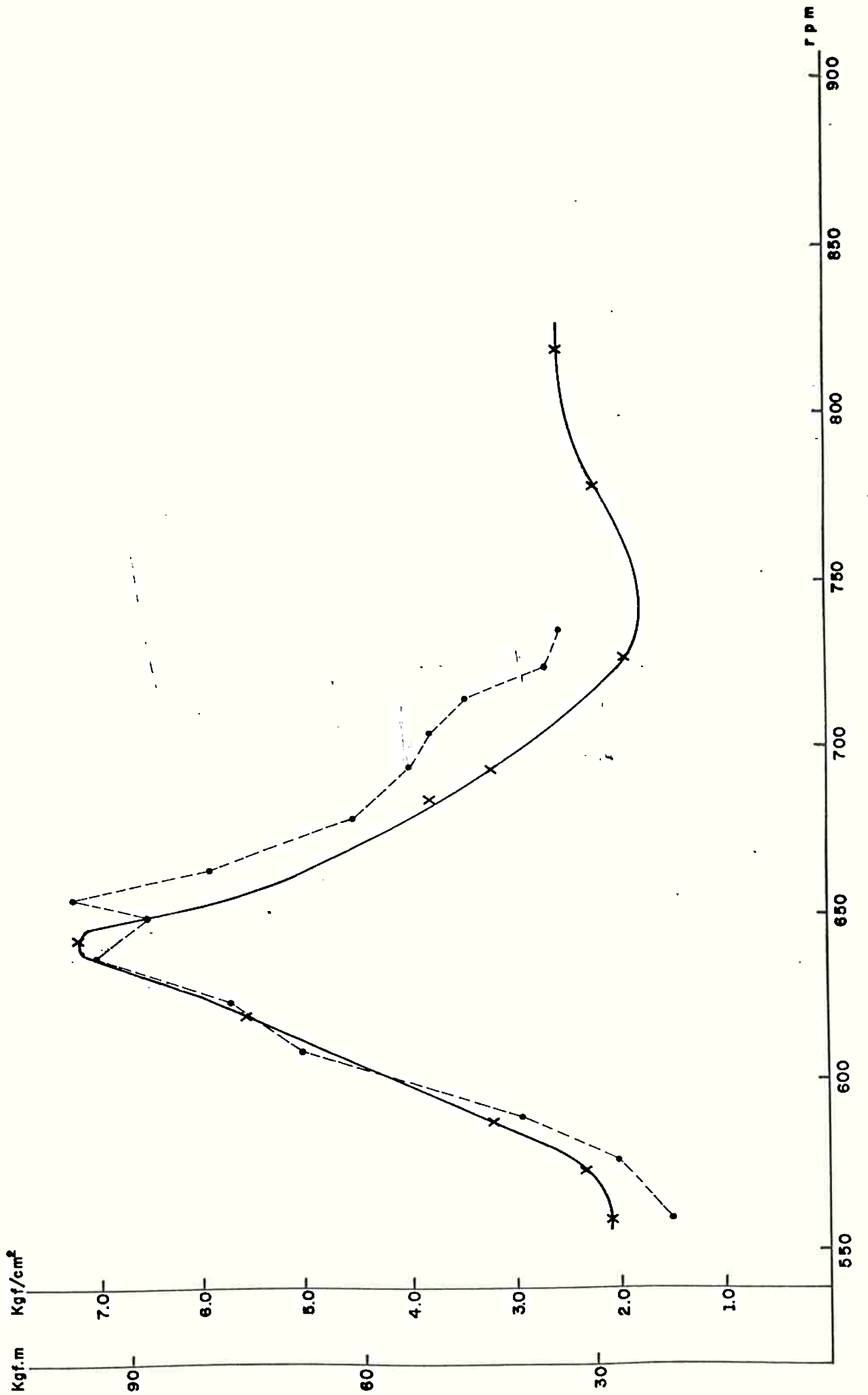


FIGURA 5.18 - 12 TESTE MOTOR TIPO 8 CV 23 LU COMPONENTE ORDEM 6,5

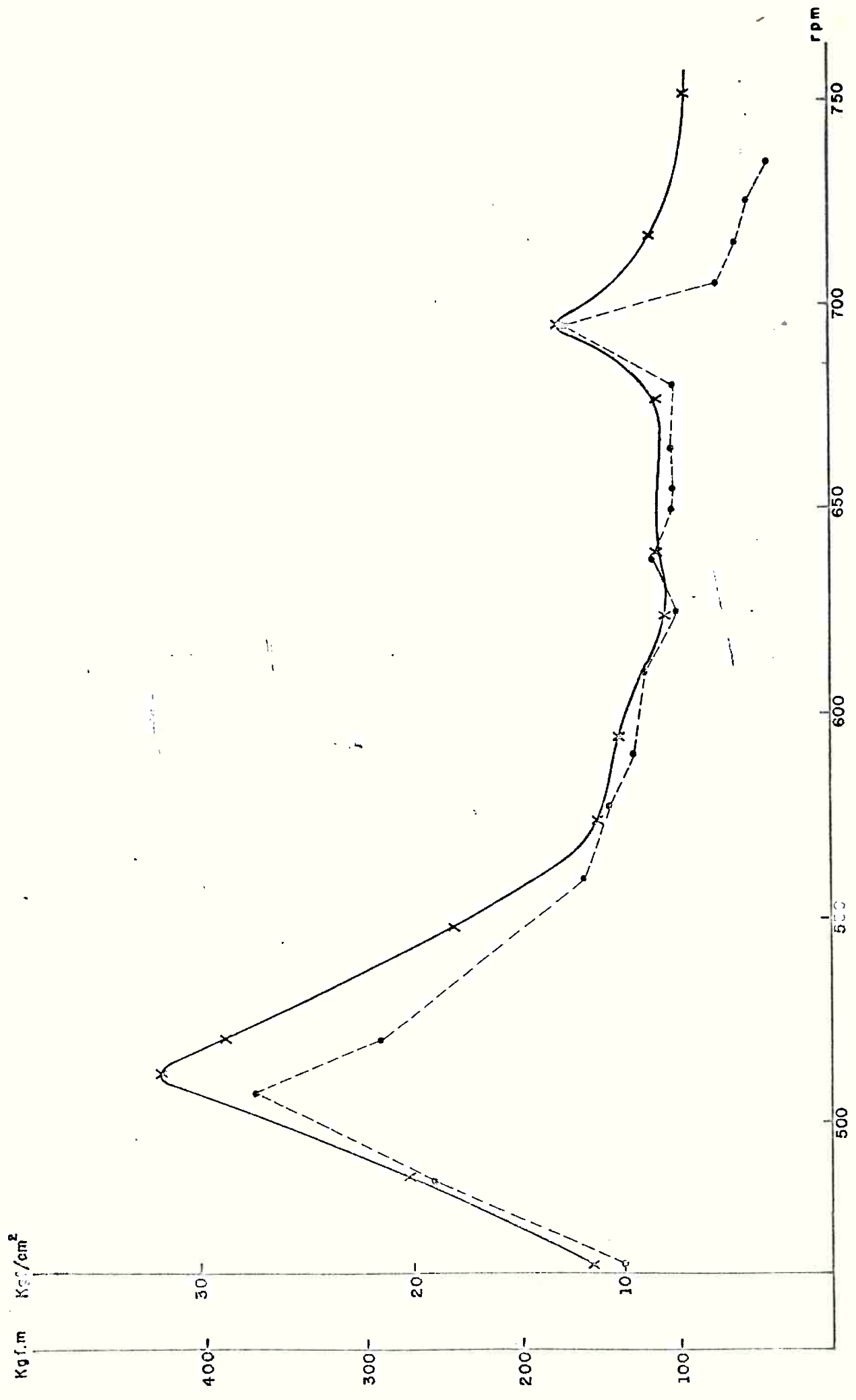


FIGURA 6.19 - 1ª TESTE MOTOR TIPO 8CV 23LU COMPONENTE ORDEM 8.

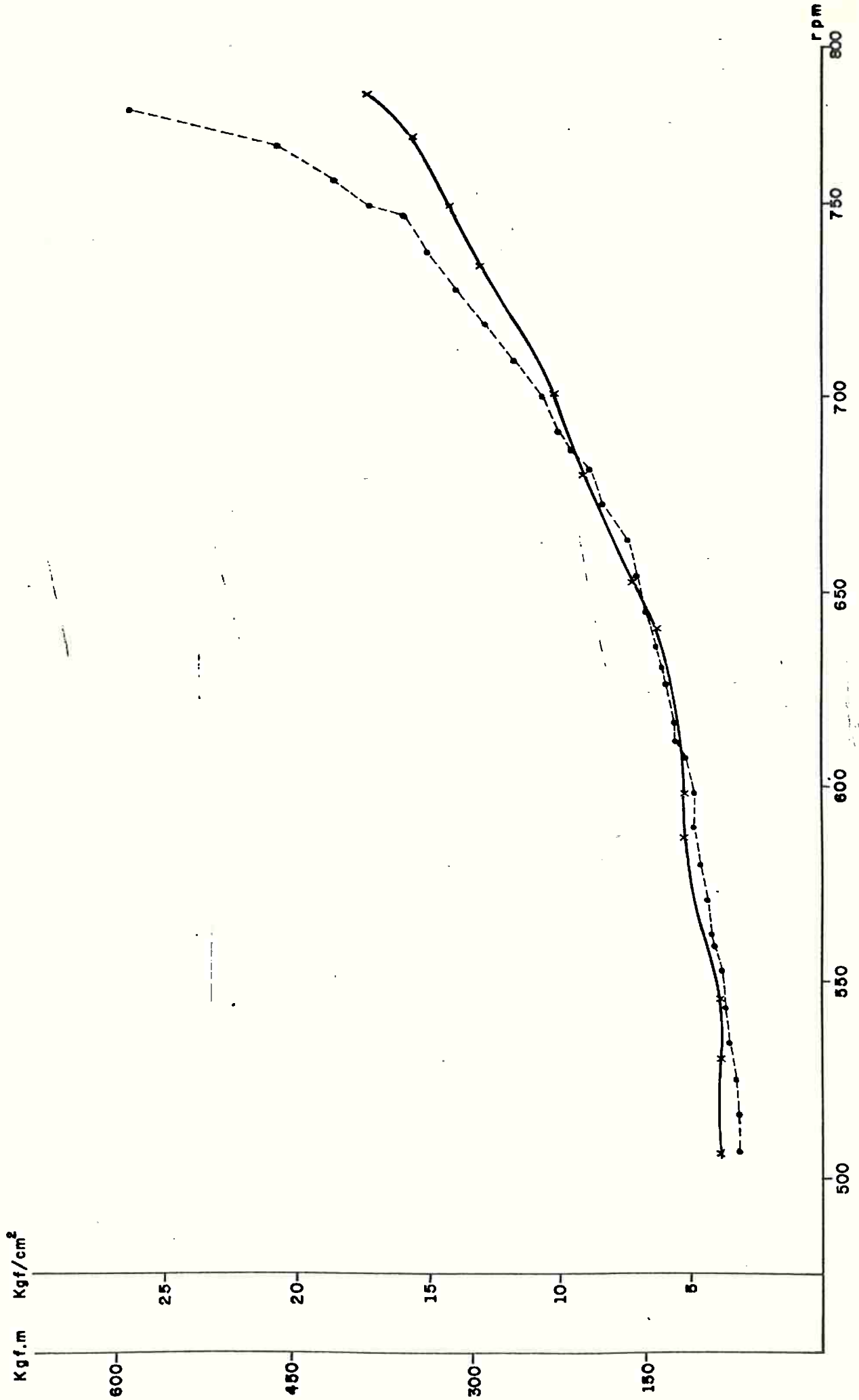


FIGURA 5.20 - 2º TESTE MOTOR TIPO 14 CV 23 LU - COMPONENTE ORDEM 3,5



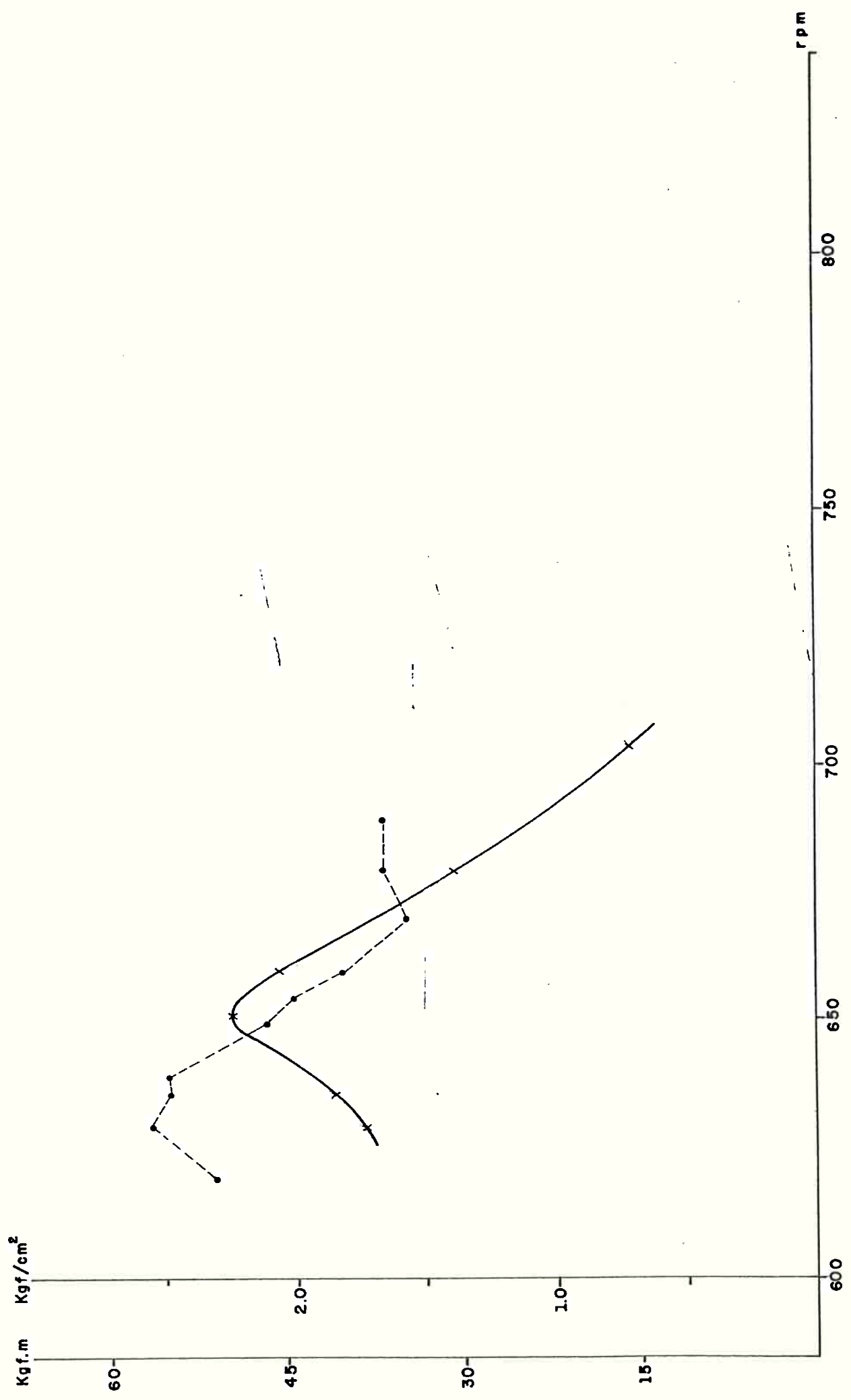


FIGURA 5.21 - 2ª TESTE MOTOR TIPO 14 CV 23LU - COMPONENTE ORDEM 5.

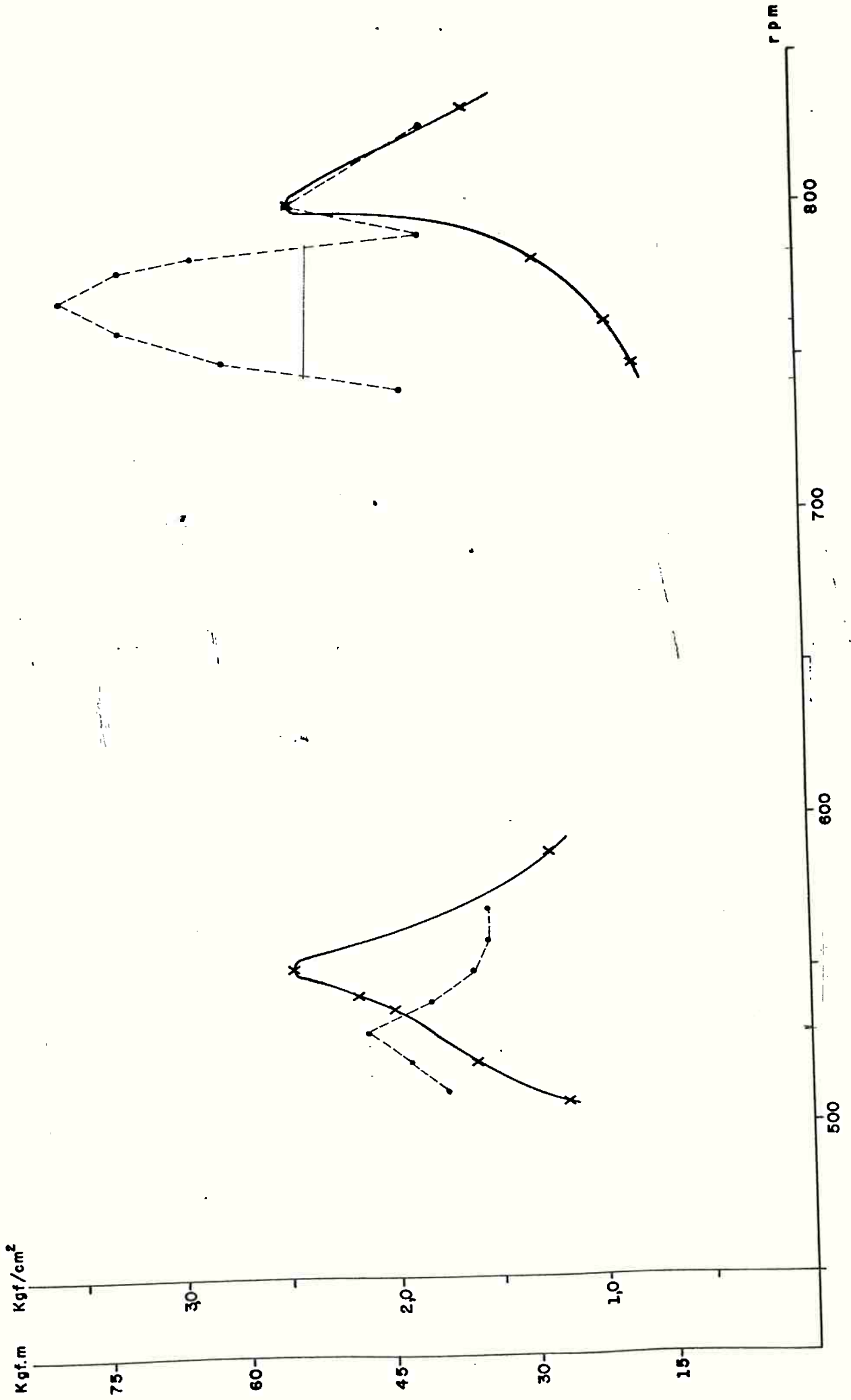


FIGURA 5.22 - 28 TESTE MOTOR TIPO 14 CV 23LU - COMPONENTE ORDEM 6.

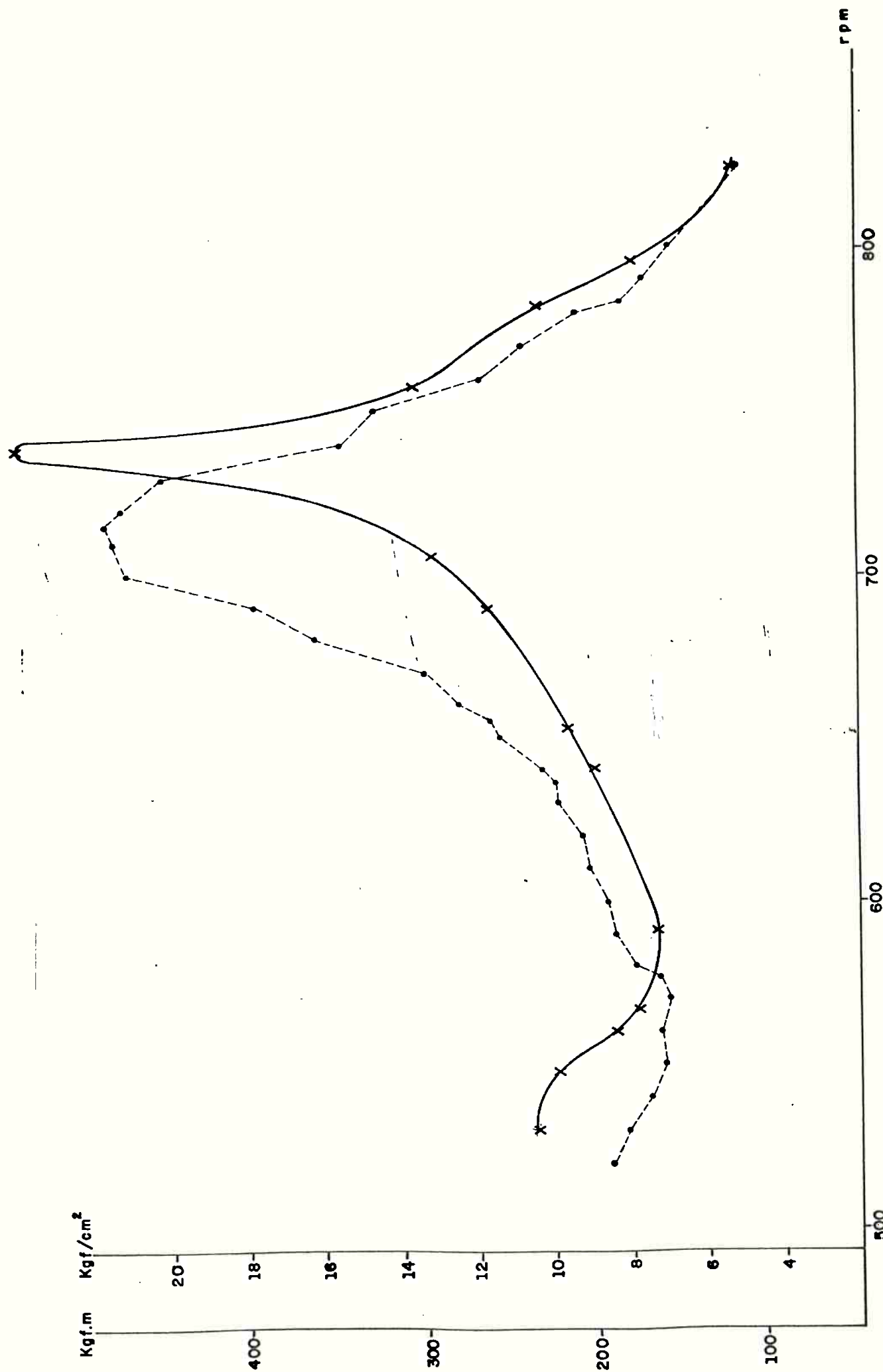


FIGURA 5.23 - 2º TESTE MOTOR TIPO 14 CV 23 LU - COMPONENTE ORDEM 6,5

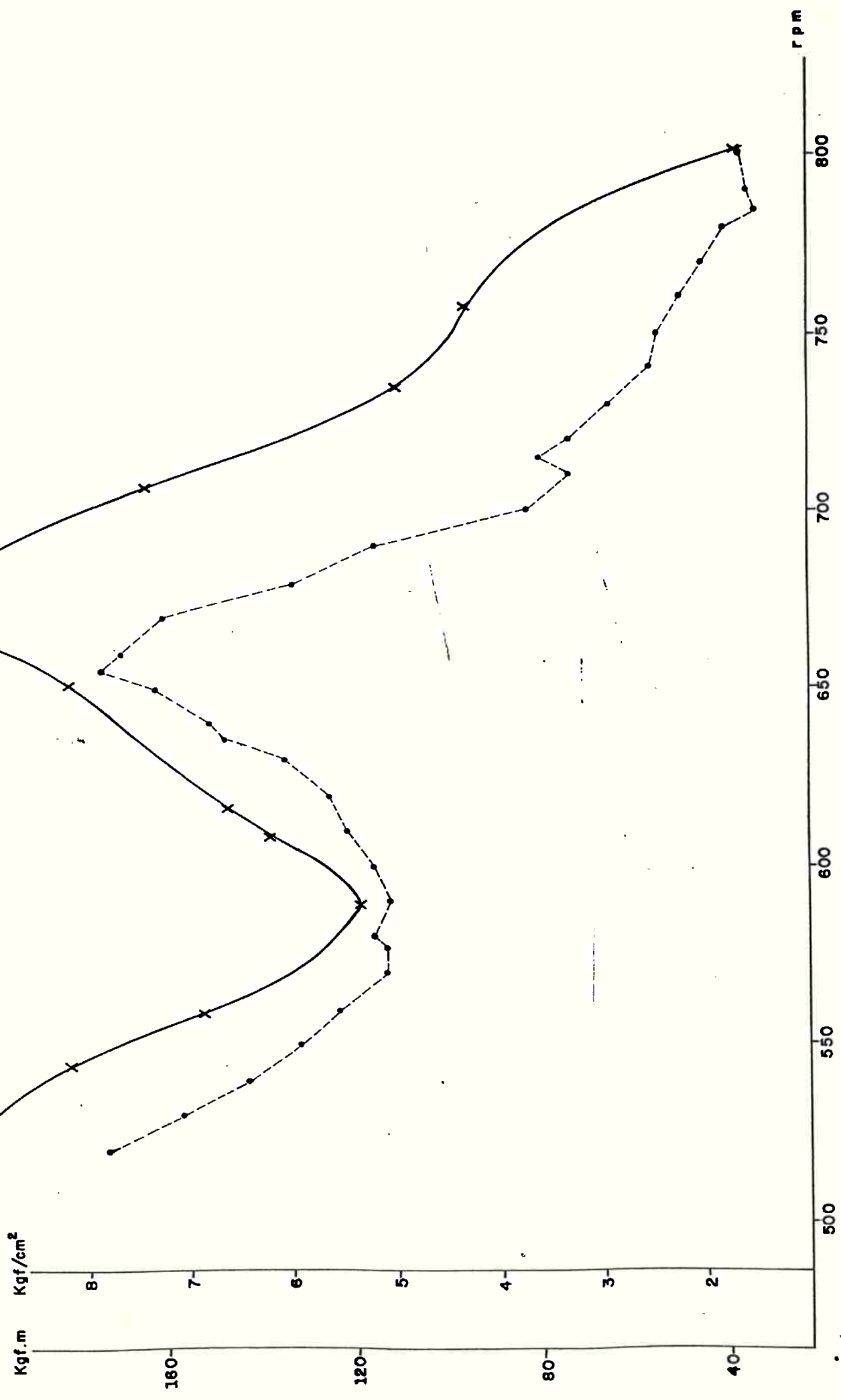


FIGURA 5.24 - 2º TESTE MOTOR TIPO 14 CV 23 LU - COMPONENTE ORDEM 7.

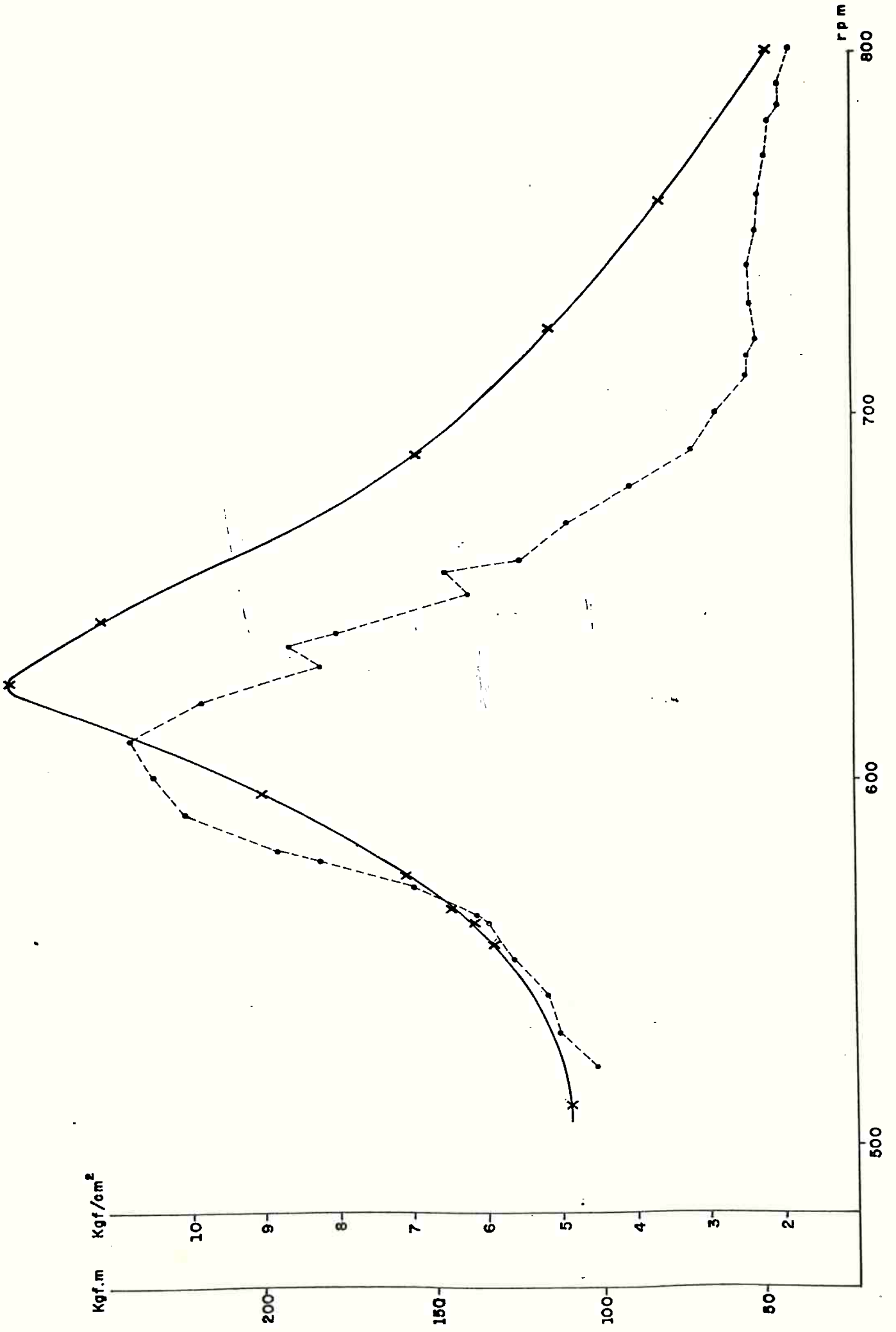


FIGURA 5.25 - 2ª TESTE MOTOR TIPO 14 CV 23 LU - COMPONENTE ORDEM 7,5

## 5.6 Comparação dos Resultados

Foram modelados os sistemas motor-freio hidráulico utilizados nos ensaios. Para os motores foram usadas as características de inércia, rigidez e amortecimento fornecidas pelo fabricante. As características do conjugado de excitação foram determinadas com base em pressões médias indicadas, obtidas em função das velocidades medidas. Os manuais do freio hidráulico definem as propriedades de inércia e de amortecimento do sistema. As propriedades de rigidez do eixo intermediário foram calculadas em função de suas dimensões e do módulo de rigidez do material.

Uma vez conhecido os parâmetros do modelo aplicou-se o procedimento de cálculo desenvolvido no Capítulo 3 para determinação das frequências naturais e das tensões vibratórias. Assim, para cada rotação do eixo foram determinadas as tensões produzidas por cada um dos harmônicos do conjugado na seção do eixo em que foram realizadas as medidas.

Podem-se, assim, comparar as respostas produzidas por cada harmônico obtidas através de medições e cálculos, respectivamente, mostradas nas Figuras 5.16 a 5.25.

Para comparação das tensões totais aplicou-se os dois critérios mencionados no Capítulo 3 para o qual destes valores. O primeiro baseia-se na soma aritmética, em cada rotação, das três maiores tensões dadas nos harmônicos dos dois primeiros modos de vibração. O segundo baseia-se na raiz quadrada da soma dos quadrados das respostas em tensões dadas a todos

os harmônicos de excitação nos dois primeiros modos de vibrar (RMS).

No que diz respeito às frequências naturais, verificou-se uma boa precisão do procedimento de cálculo, como já era previsto, pois o cálculo dos parâmetros de inércia e rigidez do modelo não oferece maiores dificuldades.

Assim, para o primeiro sistema as frequências calculadas para os dois primeiros modos são:

$$w_1 = 4110 \text{ vibrações/minuto}$$

$$w_2 = 5722 \text{ vibrações/minuto}$$

A análise das curvas de respostas dos diversos harmônicos nos dois primeiros modos, levantadas nos ensaios, mostra que as frequências de ressonância observadas ocorrem dentro da seguinte faixa:

$$w_{c1} = 4080 \pm 40 \text{ vibrações/minuto}$$

$$w_{c2} = 5520 \text{ vibrações/minuto}$$

Para o segundo sistema, as frequências calculadas para os dois primeiros modos são:

$$w_1 = 3283 \text{ vibrações/minuto}$$

$$w_2 = 4832 \text{ vibrações/minuto}$$

Da mesma maneira, as curvas de respostas dos harmônicos nos ensaios mostram que as frequências de ressonâncias observadas ocorrem na seguinte faixa:

$$w_c = 3200 \pm 80 \text{ vibrações/minuto}$$

$$w_c = 4680 \pm 100 \text{ vibrações/minuto}$$

Em ambos os casos os amortecimentos modais são pequenos e as frequências de ressonâncias estão próximas das frequências naturais. Portanto o método de cálculo apresenta resultados aceitáveis.

No que se refere as respostas, comparam-se na Tabela 5.1 os resultados das tensões de ressonância.

TABELA 5.1 - COMPARAÇÃO ENTRE TENSÃO DE RESSONÂNCIA MEDIDA E CALCULADA

| MOTOR   | NÚMERO DO HARMÔNICO | MODO DE VIBRAR | TENSÕES DE RESSONÂNCIA (Kg/cm <sup>2</sup> ) |        |
|---------|---------------------|----------------|--|--------|
|         |                     |                | CALCULADA                                    | MEDIDA |
| 8V23LU  | 5                   | 1º             | 2,8  | 2,7    |
|         | 5,5                 | 1º             | 22   | 19     |
|         | 6                   | 1º             | 81   | 70     |
|         | 6,5                 | 1º             | 7,4  | 7,0    |
|         | 8                   | 1º             | 32   | 27     |
|         | 8                   | 2º             | 12   | 12     |
| 14V25LU | 6                   | 1º             | 2,5  | 2,0    |
|         | 6,5                 | 2º             | 25   | 22     |
|         | 7                   | 2º             | 10   | 8,0    |
|         | 7,5                 | 2º             | 15   | 11     |

Nota-se pelo exame da Tabela 5.1 que os resultados calculados apresentam valores quase sempre superiores aos medidos.



Este fato poderia ser explicado por ter sido observado em diversas experiências realizadas, que as respostas medidas aumentam de 10 a 20% depois de 100 horas de funcionamento dos motores [2].

A análise das respostas dos harmônicos nos dois ensaios realizados permitem o cálculo aproximado do amortecimento modal pelo método gráfico [2].

É mostrado como exemplo o cálculo realizado da curva de resposta do 6º harmônico para o primeiro modo de vibrar do motor 8V23LU na Figura 5.26. Este método baseia-se no procedimento de desenhar-se uma linha horizontal paralela a ordenada da Figura 5.26 e numa altura igual a  $0,7071 \theta_c$ , onde  $\theta_c$  é a amplitude máxima da resposta.

Esta linha corta a curva de resposta em dois pontos correspondentes às velocidades  $N_2$  e  $N_1$ , respectivamente. Denomina-se de  $N_n$  a velocidade crítica correspondente ao harmônico.

Cálculo do grau de amortecimento modal  $\zeta_m$ :

$$\zeta_m = \frac{N_2 - N_1}{2N_n} = \frac{708 - 658}{1370} = 0,037$$

Cálculos semelhantes foram realizados em curvas de respostas de harmônicos resultantes do primeiro e segundo ensaios. Foram utilizadas apenas as curvas dos harmônicos que apresentavam características que permitiam resultados mais confiáveis pelo método gráfico. Obteve-se os seguintes resultados mostrados na Tabela 5.2.

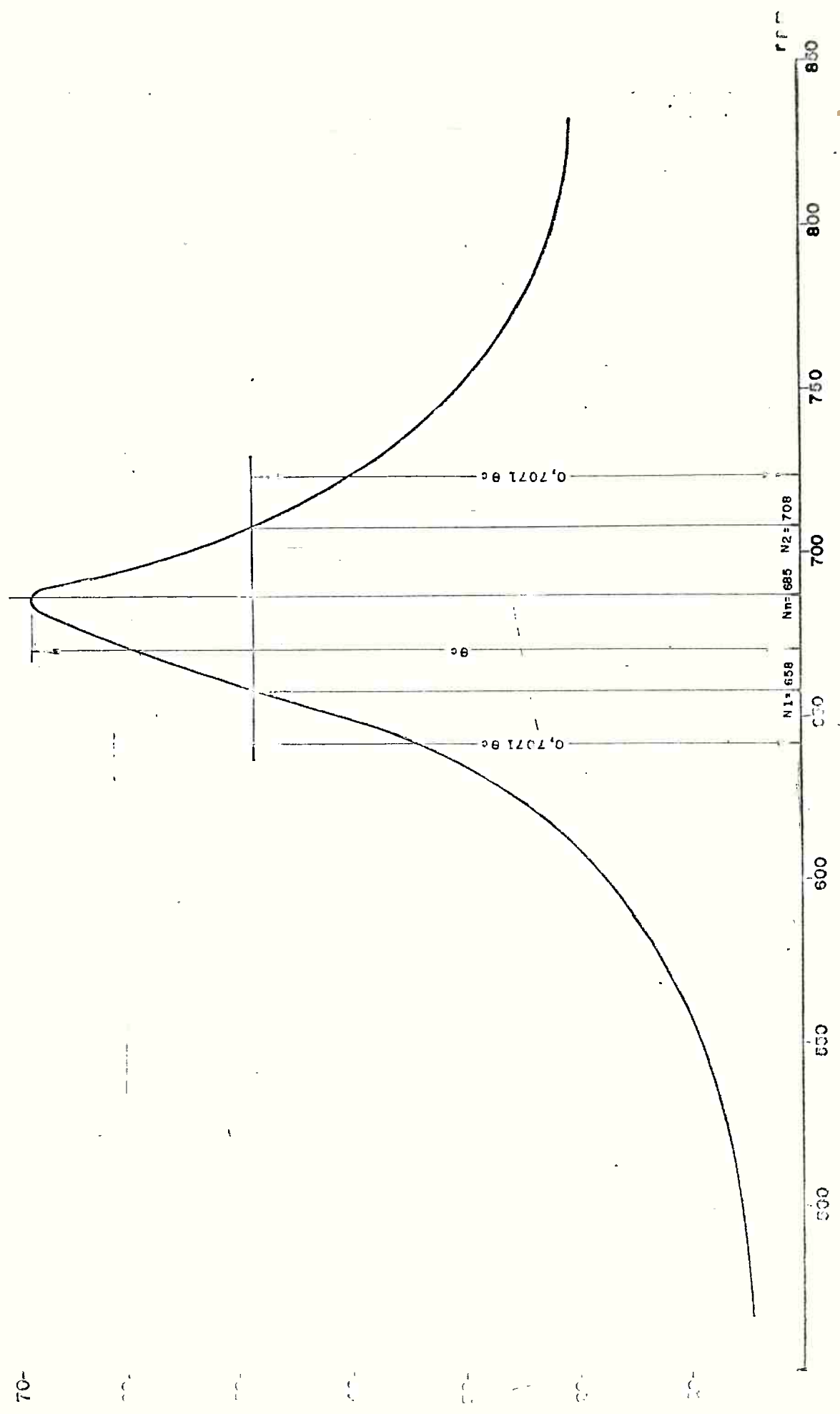


FIGURA 5.26-- DETERMINAÇÃO DE AMORTECIMENTO MODAL PELA ANALISE DA CURVA DE RESPOSTA DO 6º HARMONICO NO ENSAIO DO MOTOR 8 V 23 LU

TABELA 5.2 - COMPARAÇÃO ENTRE AS RAZÕES DE AMORTECIMENTOS MODAIS CALCULADOS E MEDIDOS NOS ENSAIOS

| ENSAIO/<br>MOTOR | 1º MODO   |        | 2º MODO   |        |
|------------------|-----------|--------|-----------|--------|
|                  | CALCULADO | MEDIDO | CALCULADO | MEDIDO |
| 1º/8V23LU        | 0,030     | 0,037  | 0,040     | 0,032  |
| 2º/14            | 0,040     | 0,050  | 0,028     | 0,030  |

Observa-se na Tabela 5.2 que os valores de razões de amortecimentos modais calculados estão menores do que os medidos, com exceção dos que ocorrem no 2º modo de vibrar do motor 8V23LU.

Isto também explica o fato das respostas em tensões de ressonância calculadas apresentarem valores de um modo geral acima dos valores medidos.

Convém ainda efetuar uma comparação entre as respostas totais calculadas de acordo com os dois critérios mencionados anteriormente e os resultados medidos, mostrados nas Figuras 5.11 e 5.12.

Nota-se que a soma aritmética dos três maiores valores de tensões nos dois primeiros modos de vibrar apresentam quase sempre resultados superiores aos medidos, podendo-se caracterizar como um limite superior dos resultados esperados, em cada velocidade do motor.

Por outro lado o RMS (raiz quadrada da soma dos quadrados das respostas em tensão devida a todos os harmônicos calculados nos dois primeiros modos de vibrar), apresenta sempre

resultados inferiores aos medidos, com exceção da região de ressonância máxima do motor 8V23LU.

Como os valores calculados das tensões devidas a cada harmônico são maiores que os valores obtidos experimentalmente, isto pode explicar porque a curva de resposta total calculada, segundo o primeiro critério usado, situa-se acima da curva experimental.

Convém ainda ressaltar o fato de que o freio hidráulico não deve apresentar esforços de excitação nas frequências de operação do motor, que pudessem alterar os valores das respostas medidas. Ele é construído propositadamente com um número elevado de pás, de modo que sua frequência fundamental de excitação dado pelo produto do número de pás pelas rotações por minuto do freio seja superior às duas primeiras frequências naturais do sistema.

## 6.0 MÉTODOS DE CONTROLE DE VIBRAÇÃO TORCIONAL

Apresenta-se neste capítulo uma análise do efeito da modificação de determinados parâmetros do sistema na resposta em tensão em cada modo de vibrar. Para isto, utilizou-se o procedimento de cálculo desenvolvido na seção 3.7, que permitiu uma análise sistematizada e rápida dos diferentes sistemas resultantes, avaliando-se a resposta total em cada modo, na região de operação do motor.

São apresentados a seguir três exemplos em que se mostra a aplicação dos métodos de controle de vibração torcional.

### 6.1 Instalação Propulsora com Redução

Considere-se o caso de uma instalação propulsora com redução, utilizando um motor de média rotação BMW, modelo 14V23LU, com 14 cilindros em V. O sistema equivalente desta instalação e sua descrição foi apresentado na seção 4.2.1.

É considerado que a instalação esteja funcionando de acordo com as seguintes configurações:

- a) sem amortecedor e acoplamento flexível;
- b) com amortecedor e sem acoplamento;
- c) sem amortecedor e com acoplamento flexível;
- d) com amortecedor e acoplamento flexível;

Estuda-se também o caso de uma instalação com amor-

tecedor flexível e funcionando com o cilindro nº 1 falhando.

A Tabela 6.1 mostra os conjugados alternados devidos a vibração torcional que ocorrem em algumas regiões importantes do sistema, para as várias configurações citadas.

TABELA 6.1 - CONJUGADOS ALTERNADOS MÁXIMOS E VELOCIDADES EM QUE OCORREM NO MOTOR 14V23LU

| CONFIGURAÇÕES DO SISTEMA | CONJUGADOS (Kgf/cm) MÁXIMOS     |         |                      |         |                  |         |
|--------------------------|---------------------------------|---------|----------------------|---------|------------------|---------|
|                          | ENTRADA DA CAIXA DE ENGRENAGENS |         | ACOPLAMENTO FLEXÍVEL |         | VELOCIDADE (rpm) |         |
|                          | 1º Modo                         | 2º Modo | 1º Modo              | 2º Modo | 1º Modo          | 2º Modo |
| a                        | 2524                            | 33603   | -                    | -       | 220              | 536     |
| b                        | 2326                            | 7598    | -                    | -       | 220              | 494     |
| c                        | 10                              | 2687    | 13                   | -284    | 409              | 382     |
| d                        | 9                               | 2563    | 12                   | -279    | 406              | 380     |
| CILINDRO Nº 1 FALHANDO   | 1131                            | 2168    | 1480                 | -236    | 486              | 380     |

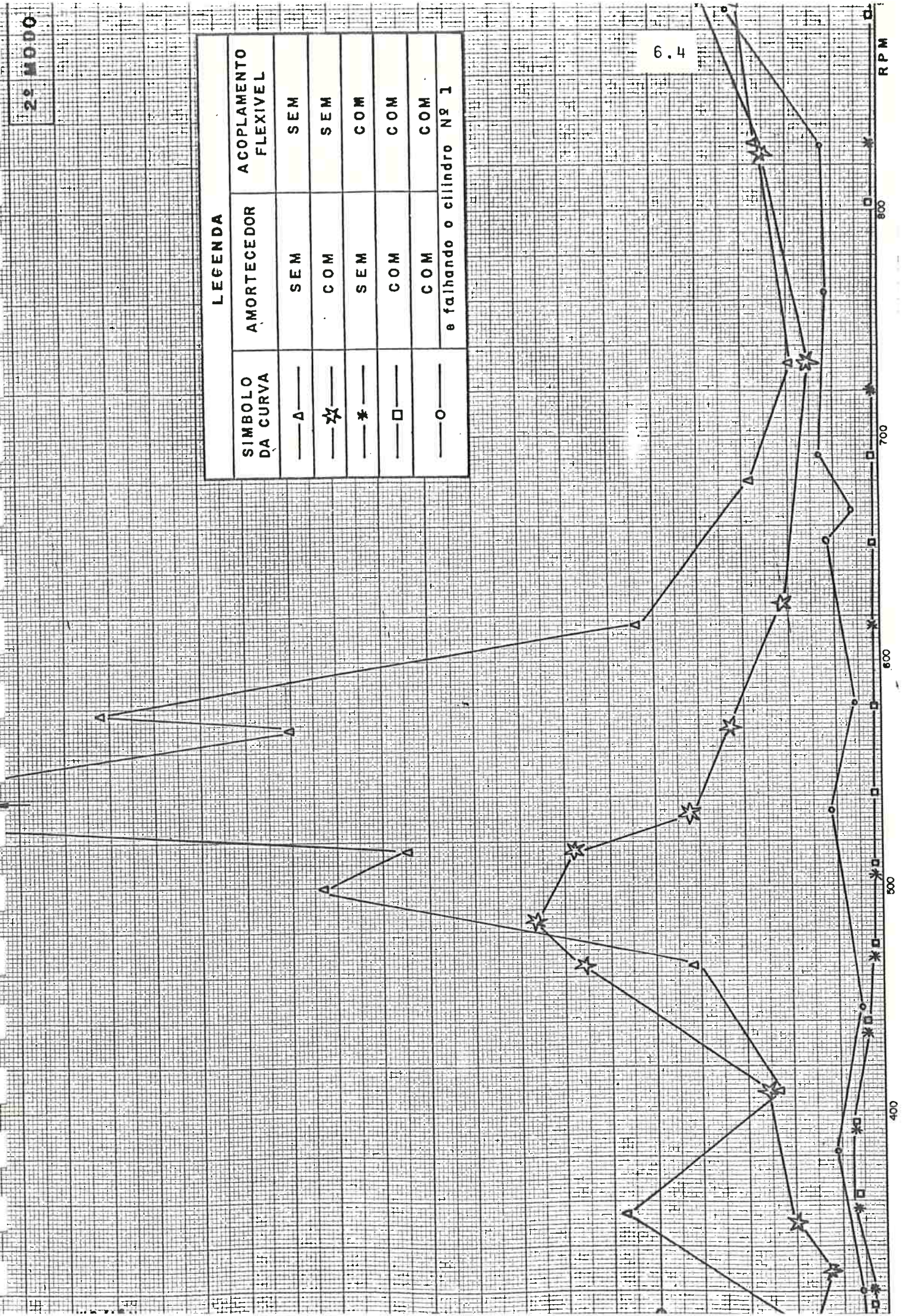
As Figuras 6.1 e 6.2 mostram as tensões totais modais que ocorrem nestes motores em função da velocidade do motor, variando-se os componentes do sistema. A análise dos gráficos destas figuras e dos valores mostrados na Tabela 6.1, permite obter-se as seguintes conclusões:

1. Quando a instalação propulsora funciona sem amortecedor e acoplamento flexível, as tensões totais devidas ao segundo modo de vibrar, na região de velocidade do motor em torno

| LEGENDA                    |             |                      |
|----------------------------|-------------|----------------------|
| SIMBOLO DA CURVA           | AMORTECEDOR | ACOPLAMENTO FLEXIVEL |
| —Δ—                        | SEM         | SEM                  |
| —*—                        | COM         | SEM                  |
| —*—                        | SEM         | COM                  |
| —□—                        | COM         | COM                  |
| —○—                        | COM         | COM                  |
| e falhando o cilindro Nº 1 |             |                      |



| LEGENDA          |                            |                      |
|------------------|----------------------------|----------------------|
| SIMBOLO DA CURVA | AMORTECEDOR                | ACOPLAMENTO FLEXIVEL |
| —△—              | SEM                        | SEM                  |
| —☆—              | COM                        | SEM                  |
| —*—              | SEM                        | COM                  |
| —□—              | COM                        | COM                  |
| —○—              | COM                        | COM                  |
|                  | e falhando o cilindro Nº 1 |                      |





de 530 rpm, apresentam valores acima dos admissíveis (600Kg/cm) calculados de acordo com as Regras de Sociedades Classificadoras [2], [5] e [33]. Os conjugados alternados na entrada da caixa de engrenagens devidos às vibrações também atingem valores altos, ocorrendo até o perigo de ultrapassarem os valores dos conjugados médios o que provocará danos irreversíveis às engrenagens. Conclui-se que a utilização de sistemas de amortecimento (amortecedores ou acoplamentos flexíveis) é imprescindível nestas instalações.

2. Adicionando-se à instalação um amortecedor viscoso as tensões máximas totais já apresentam valores abaixo dos admissíveis citadas anteriormente, porém o conjugado alternado nas engrenagens continua a apresentar valores elevados.

3. Colocando-se um acoplamento flexível na instalação (sem o amortecedor) as tensões totais assumem valores baixos e quase constantes em todas as velocidades do motor. Além disso, os conjugados alternados nas engrenagens apresentam valores abaixo de dez por cento dos apresentados no primeiro caso mostrado na Tabela 6.1, não ocorrendo, portanto, riscos para as engrenagens.

4. A adição do amortecedor, quando já existe acoplamento flexível na instalação, não modifica as respostas totais em cada modo. Isto significa que sua instalação não é mais necessária para o bom comportamento do sistema em termos de vibrações torcionais.

Tem sido registrado casos de avarias em instalações propulsoras quando ocorre a falha em um cilindro do motor. Este

caso foi também analisado e conforme está mostrado nas Figuras 6.1 e 6.2. Observa-se que ocorrendo a falha no cilindro nº 1 do motor, que foi adotado como exemplo, as tensões totais devidas ao primeiro modo atingem valores bastante superiores aos observados nas outras configurações e os conjugados nos acoplamentos flexíveis aumentam consideravelmente. Este fato explica a razão de alguns acoplamentos flexíveis se romperem nestas condições.

Comportamentos semelhantes aos descritos para o motor 14V23LU são encontrados no motor 8V23LU (4 tempos), conforme estão mostrados nas Figuras 6.3 e 6.4, confirmando assim que as conclusões citadas para o primeiro motor se aplicam geralmente a instalações do mesmo tipo.

## 6.2 Motor com Acoplamento Direto

Considere-se o caso de uma instalação propulsora com acoplamento direto, utilizando um motor de baixa rotação modelo RDN90, de 6 cilindros. O arranjo desta instalação foi apresentado na seção 4.2.2, onde foi citado que este sistema em sua configuração original apresenta problema de elevadas tensões dentro da faixa de rotações do motor. Na Figura 6.5 verifica-se que o 6º harmônico do 1º modo ultrapassa as tensões admissíveis determinadas pelo Loyd's Register [33] em uma região que se torna proibida a operação do motor.

Foram então analisadas algumas soluções para reduzir o problema. Os métodos de controle empregados na instalação

| LEGENDA                    |             |                      |
|----------------------------|-------------|----------------------|
| SIMBOLO DA CURVA           | AMORTECEDOR | ACOPLAMENTO FLEXIVEL |
| —Δ—                        | SEM         | SEM                  |
| —✱—                        | COM         | SEM                  |
| —*—                        | SEM         | COM                  |
| —□—                        | COM         | COM                  |
| —○—                        | COM         | COM                  |
| e falhando o cilindro Nº 1 |             |                      |

6.7

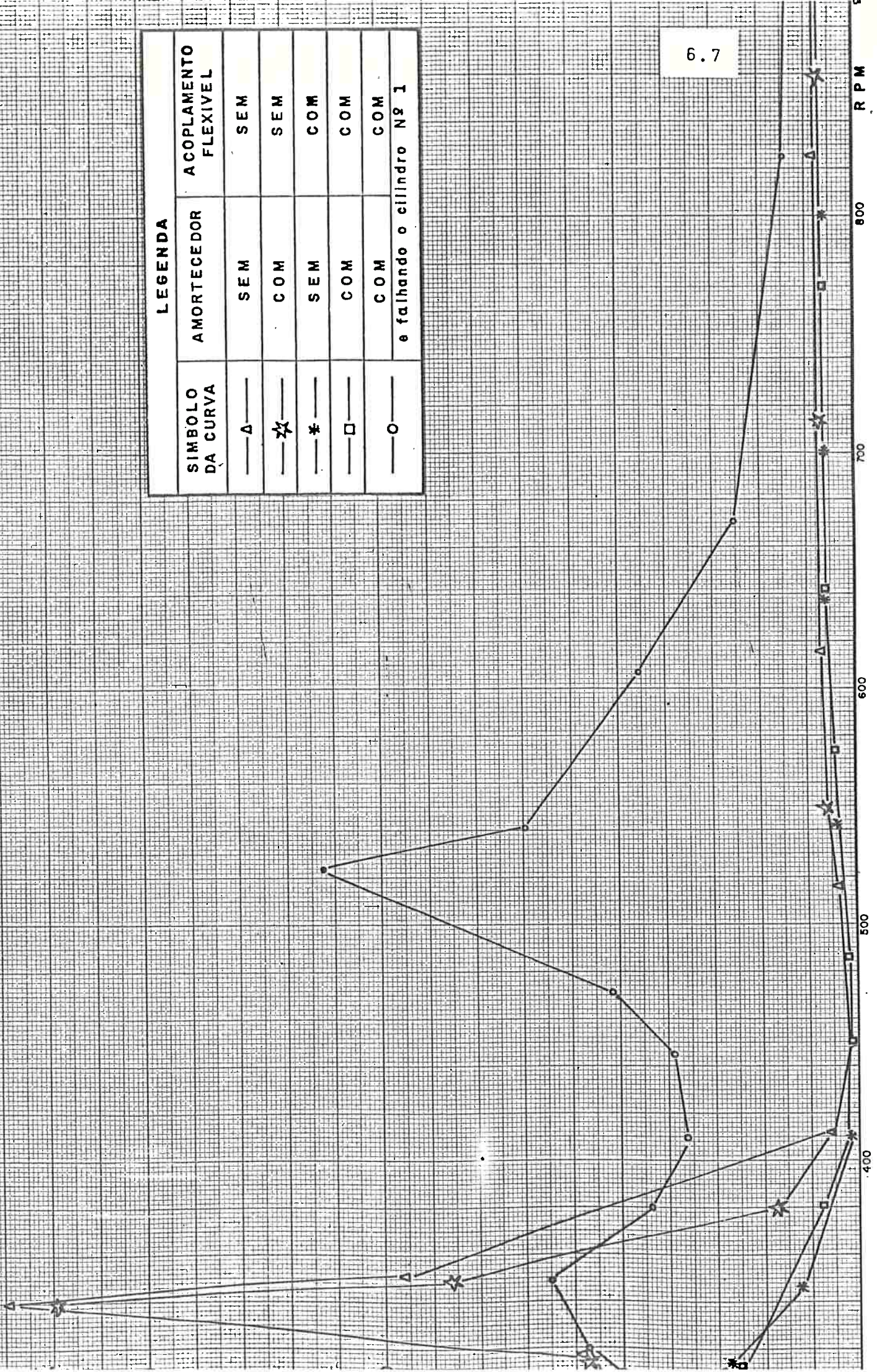


FIGURA 6.3 - RESPOSTAS EM TENSÕES MODAIS NAS ENGENHAGENS DO MOTOR 8 V 23 LU

R P M

800

700

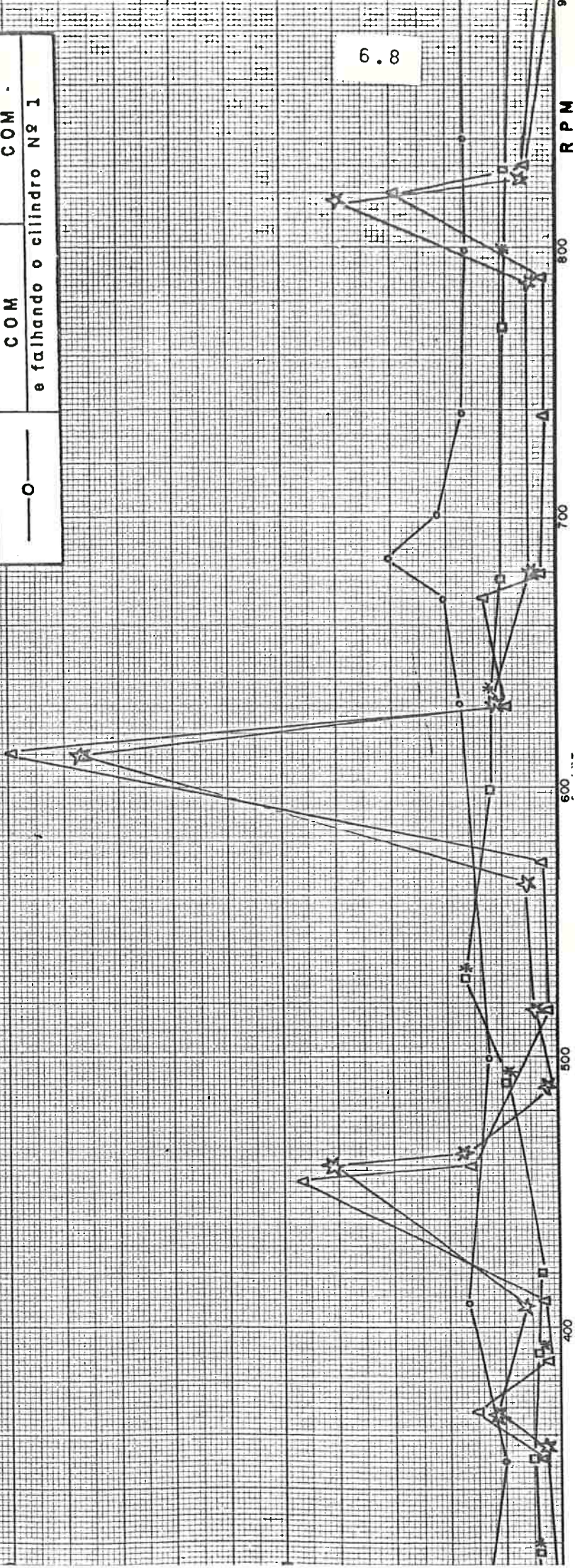
600

500

400

| LEGENDA          |                            |                      |
|------------------|----------------------------|----------------------|
| SIMBOLO DA CURVA | AMORTECEDOR                | ACOPLAMENTO FLEXIVEL |
| —Δ—              | SEM                        | SEM                  |
| —☆—              | COM                        | SEM                  |
| —*—              | SEM                        | COM                  |
| —□—              | COM                        | COM                  |
| —○—              | COM                        | COM                  |
|                  | e falhando o cilindro Nº 1 |                      |

6.8



**LEGENDA**

— RESULTADOS CALCULADOS

—●— RESULTADOS MEDIDOS EM PROVA DE MAR

- - - RESULTADOS CALCULADOS COM A ADIÇÃO DO VOLANTE

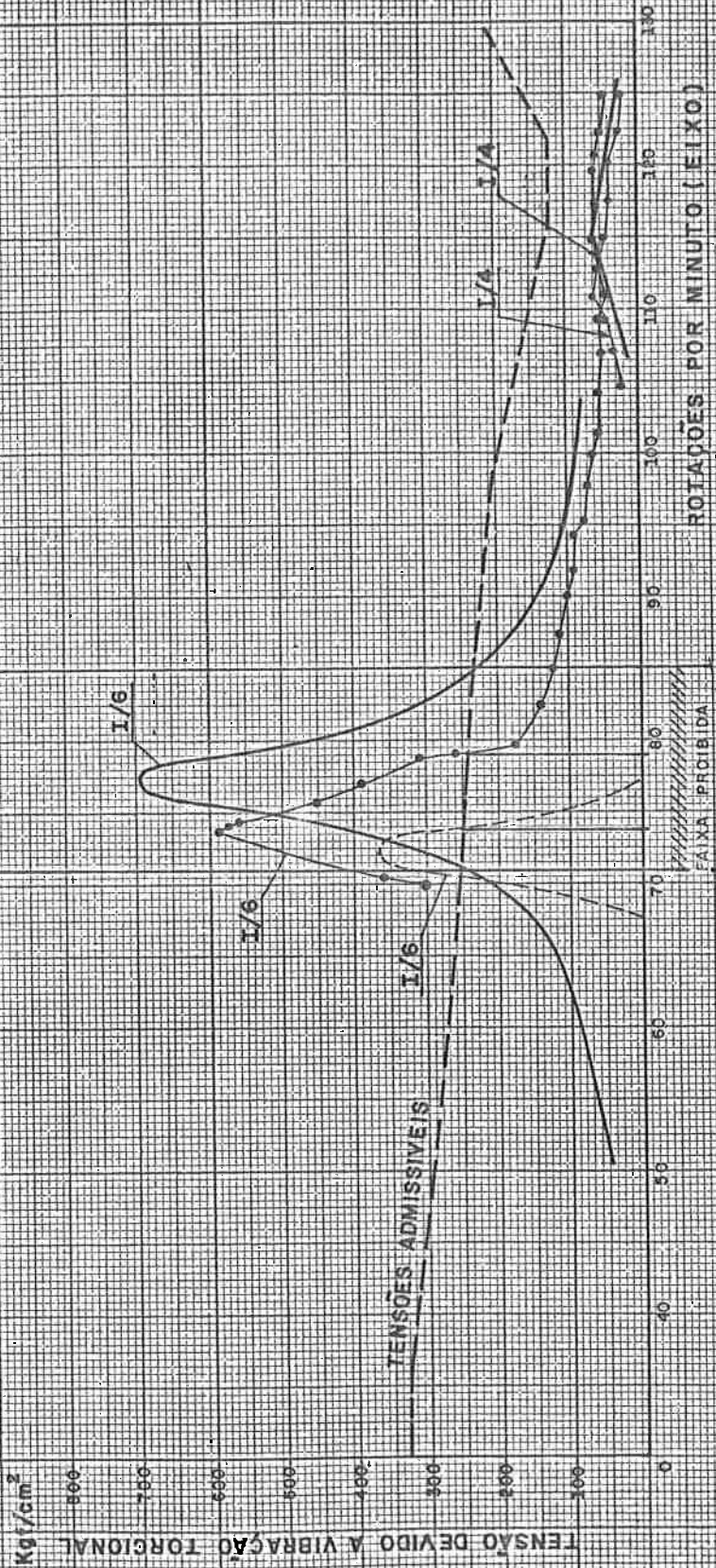


FIGURA 6.5 - RESPOSTAS EM TENSÕES DO MOTOR SULZER RND 90

mostrado no exemplo anterior tornam-se muito complexos e caros quando são dimensionados para motores de grande potência e baixa velocidade, como é o caso presente.

Como o único problema ocorre nas respostas em tensão de um único harmônico, analisou-se duas formas de atenuação destas respostas, não exigindo a inclusão de sistemas de amortecimento, que constitui certamente uma solução mais dispendiosa para obter-se os mesmos efeitos.

Como primeira alternativa foi estudada a possibilidade de definir a melhor configuração para o posicionamento do hélice, tendo em vista que ocorre a ressonância do 6º harmônico no primeiro modo com a excitação proveniente da frequência fundamental do hélice, conforme mostrado na seção 4.2.1.

A combinação das fases de excitação do motor e do hélice de uma maneira adequada de modo a minimizar a resposta no eixo intermediário, conforme foi mostrado na seção 3.4, foi realizada com os dados fornecidos pelo fabricante.

As medições efetuadas em provas de mar, determinaram os valores reais da curva de resposta em tensão mostrada na Figura 6.5, onde pode ser notado o efeito benéfico da ação do conjugado de excitação do propulsor, que permitiu reduzir o valor da tensão máxima de ressonância na velocidade crítica de 6a. ordem de vibrar; desta forma, ficou reduzida a região de velocidades proibidas para operação do motor.

Como segunda alternativa pode-se examinar a colocação de um volante antes do primeiro cilindro do motor com um momento de inércia igual ao do volante existente originalmente na

outra extremidade do motor. Consegue-se, assim, uma redução da primeira frequência natural do sistema  $w_1$  e conseqüentemente do valor da velocidade crítica correspondente a sexta ordem de vibrar dado por:  $w_1/6$ . Além disso, a massa de maior amplitude na primeira ordem de vibrar passa a ser o volante adicionado, o que faz diminuir as amplitudes da curva elástica nas massas do motor e o valor do chamado somatório dos vetores no motor. Tem-se um menor valor da resposta em tensão de ressonância do harmônico, conforme é mostrado na Figura 6.5. Há também uma redução na região de velocidades proibida de operação do motor. É certamente uma modificação menos onerosa do que a colocação de amortecedores de vibração do tipo viscoso ou de atrito.

Existem outras formas de se atenuar as vibrações de uma instalação propulsora com acoplamento direto, como por exemplo:

1. aumento do diâmetro do eixo propulsor;
2. instalação de amortecedores;
3. aumento do momento de inércia do volante do motor já existente na instalação original.

As duas primeiras formas são muito onerosas e por isto deixaram de ser examinadas no exemplo presente.

A terceira forma apresenta atenuação bem menor do que a adição do novo volante a ré do motor.

### 6.3 Motor-Gerador

É estudado nesta seção o problema de controle de vibração para o sistema motor-gerador, apresentado na seção 4.2.3.

Como este tipo de instalação opera constantemente numa região de pequena variação em torno da velocidade de serviço, o controle dos valores máximos de tensões correspondentes torna-se mais fácil do que nos outros casos examinados nas seções anteriores. Assim, foi analisada a alteração das respostas em tensões nos dois primeiros modos de vibrar, com a variação de:

1. diâmetro do eixo intermediário;
2. momento de inércia do volante;
3. adição de um volante na extremidade do motor (absorvedor de vibração).

Na Figura 6.6 estão mostrados o efeito da variação do diâmetro do eixo nas tensões totais nos diversos modos de vibrar. A Tabela 6.2 indica como foi realizado esta variação.

TABELA 6.2 - EXEMPLOS DE VARIAÇÃO DO DIÂMETRO DO EIXO INTERMEDIÁRIO

| EXEMPLO Nº | DIÂMETRO DO EIXO (cm) |
|------------|-----------------------|
| 1          | 20                    |
| 2          | 23                    |
| 3          | 25                    |
| 4          | 27                    |
| 5          | 30                    |



TENSÕES Kgf/cm<sup>2</sup>

500

400

300

200

100

0

6.13

1/II

1/I

$\sigma_{admissivel (LR)}$

$\sigma_{admissivel (LR)}$

5.I

2.I

3.I

4.I

5.II

2.II

3.II

4.II

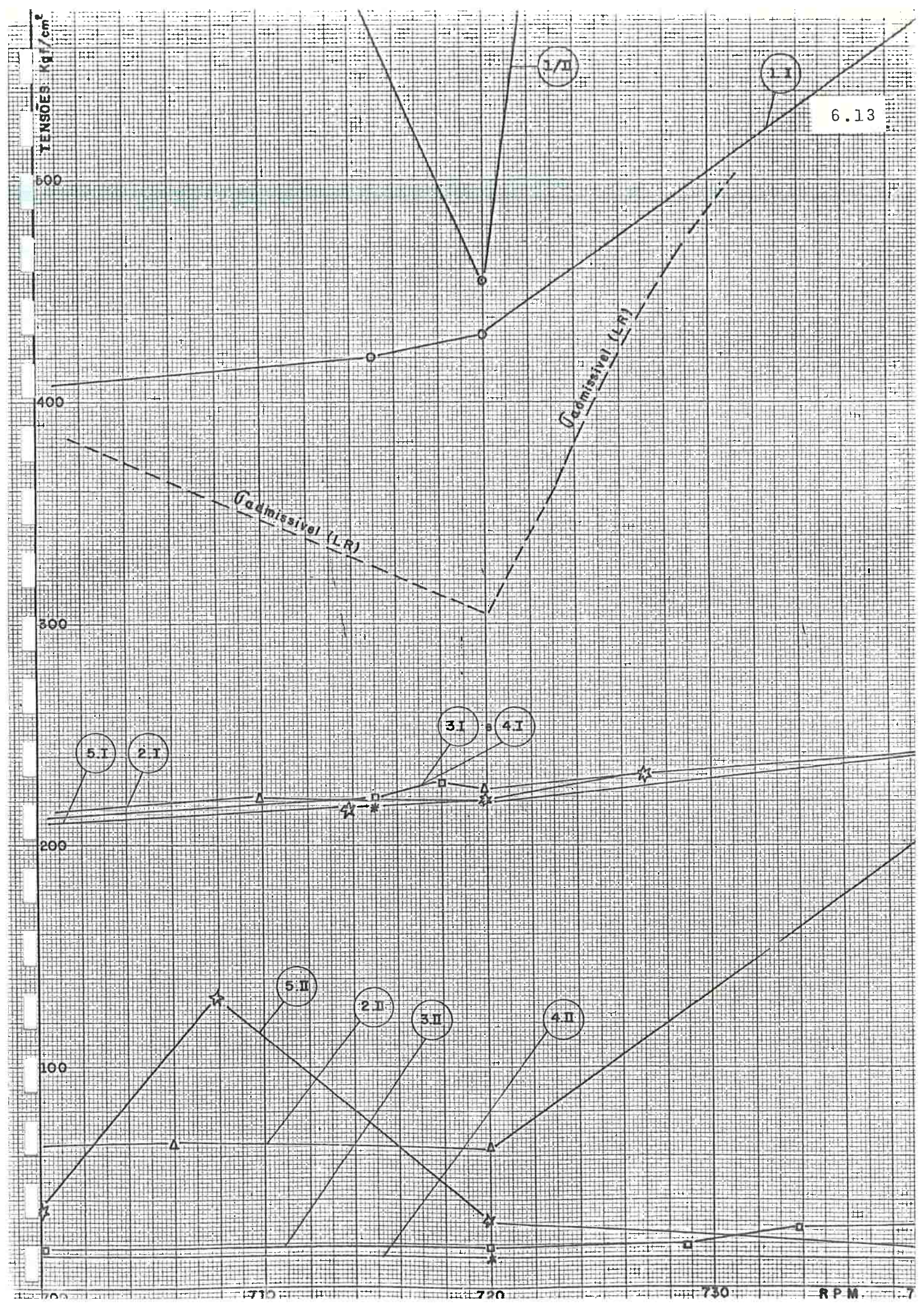
710

720

730

RPM

7



Neste exemplo o símbolo  $J/L$  na Figura 6.6 representa a resposta do sistema representado no exemplo  $J$ , ( $J=1,2,3,4,5$ ) no modo de vibrar  $L$ , ( $L=I,II$ ):

O exame da Figura 6.6 permite extrair as seguintes conclusões para o primeiro modo de vibrar.

1 - Os diâmetros 23 e 30cm produzem valores quase constantes da resposta total. Para um diâmetro do eixo de 20cm ocorre um aumento considerável destas tensões, sendo pois desaconselhável sua adoção.

2 - Para o segundo modo de vibrar os valores de 25 e 27cm de diâmetro do eixo ocasionam tensões baixas e quase constantes com a variação da velocidade do motor. No entanto, para o diâmetro de 23cm os valores de tensões estão acima dos limites admissíveis pelo Loyd's Register [33] e ainda ocorre brusca variação das tensões com a mudança da velocidade do motor. Assim, os valores de 25 e 27cm de diâmetro do eixo são os valores mais indicados para este motor.

Foi estudada também a influência do momento de inércia do volante nas respostas em tensão do sistema, variando-se o seu valor conforme mostrado na Tabela 6.3.

TABELA 6.3 - EXEMPLOS DE VARIAÇÃO DO MOMENTO DE INÉRCIA DO VOLANTE

| EXEMPLO Nº | INÉRCIA DO VOLANTE (Kg.m <sup>2</sup> ) |
|------------|---|
| 1          | 960                                     |
| 2          | 1080                                    |
| 3          | 1200                                    |
| 4          | 1320                                    |
| 5          | 1440                                    |

A instalação original funciona com o volante nas condições do exemplo nº 3 da Tabela 6.3. Nota-se pelos gráficos da Figura 6.7, que se o sistema funcionar com um volante de momento de inércia igual a  $1080 \text{ kg.m}^2$  (exemplo nº 2 da Tabela 6.3), apresentará tensões totais no primeiro modo de vibrar cerca de 25% inferiores ao do sistema original. Este exemplo é, então, uma solução mais adequada para o sistema.

Foi examinada finalmente a alternativa de inclusão de um volante na extremidade do motor próxima do cilindro nº 1. Este dispositivo ocasiona uma maior modificação da frequência natural do sistema do que a ocorrida nos casos anteriormente examinados e, conseqüentemente, uma maior alteração das velocidades críticas perigosas que podem ser afastadas da velocidade de serviço do sistema.

A Tabela 6.4 mostra os casos considerados.

TABELA 6.4 - CARACTERÍSTICAS DOS VOLANTES ADICIONADOS À INSTALAÇÃO

| EXEMPLO<br>Nº | INÉRCIA DO VOLANTE<br>ADICIONADO ( $\text{Kg.m}^2$ ) | COEFICIENTE DE RIGIDEZ<br>TORCIONAL DO EIXO DE LI<br>GAÇÃO<br>( $\frac{\text{Kgf.cm}}{\text{rad}} \times 10^{10}$ ) |
|---------------|--|---|
| 1             | 394  | 0,56818   |
| 2             | 2363   | 3,4483  |
| 3             | 50   | 0,06944   |
| 4             | 787  | 1,13  |

O valor do coeficiente de rigidez do eixo de ligação do volante foi determinado de modo a evitar que ocorres-

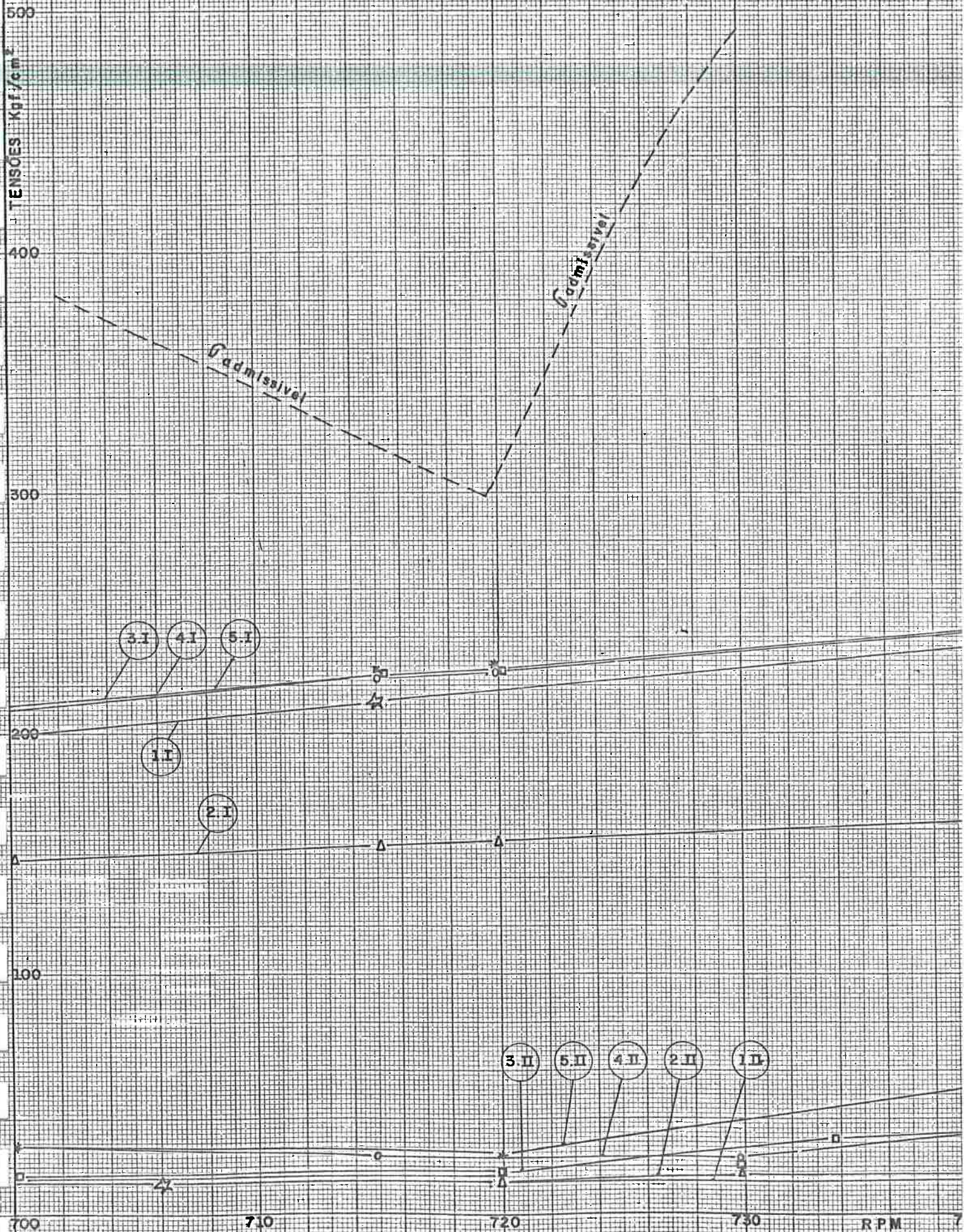


FIGURA 6.7 - INFLUENCIA DO MOMENTO DE INERCIA DO VOLANTE NAS TENSOES

sem nele tensões vibratórias excessivas.

A análise dos gráficos da Figura 6.8 fornece as seguintes conclusões:

1. a influência da adição do volante nas tensões do 2º modo de vibrar é muito pequena. No entanto, no 1º modo esta influência é bastante elevada e para os exemplos nºs 1, 3 e 4 o sistema apresenta valores de tensões no eixo de manivelas acima dos admissíveis e piora inclusive as condições do sistema original (sem a adoção do volante);

2. o exemplo nº 2 que corresponde a adição de um volante de momento de inércia mais elevado, melhora sensivelmente as condições do sistema original e as tensões vibratórias apresentam baixos valores nos 1º e 2º modos de vibração.

Nota-se que esta é a solução que apresenta maior atenuação das respostas do sistema, dentre todas as examinadas para o motor-gerador.

INTENSÕES em Kg/cm<sup>2</sup>

400

300

200

100

700

710

720

730

RPM

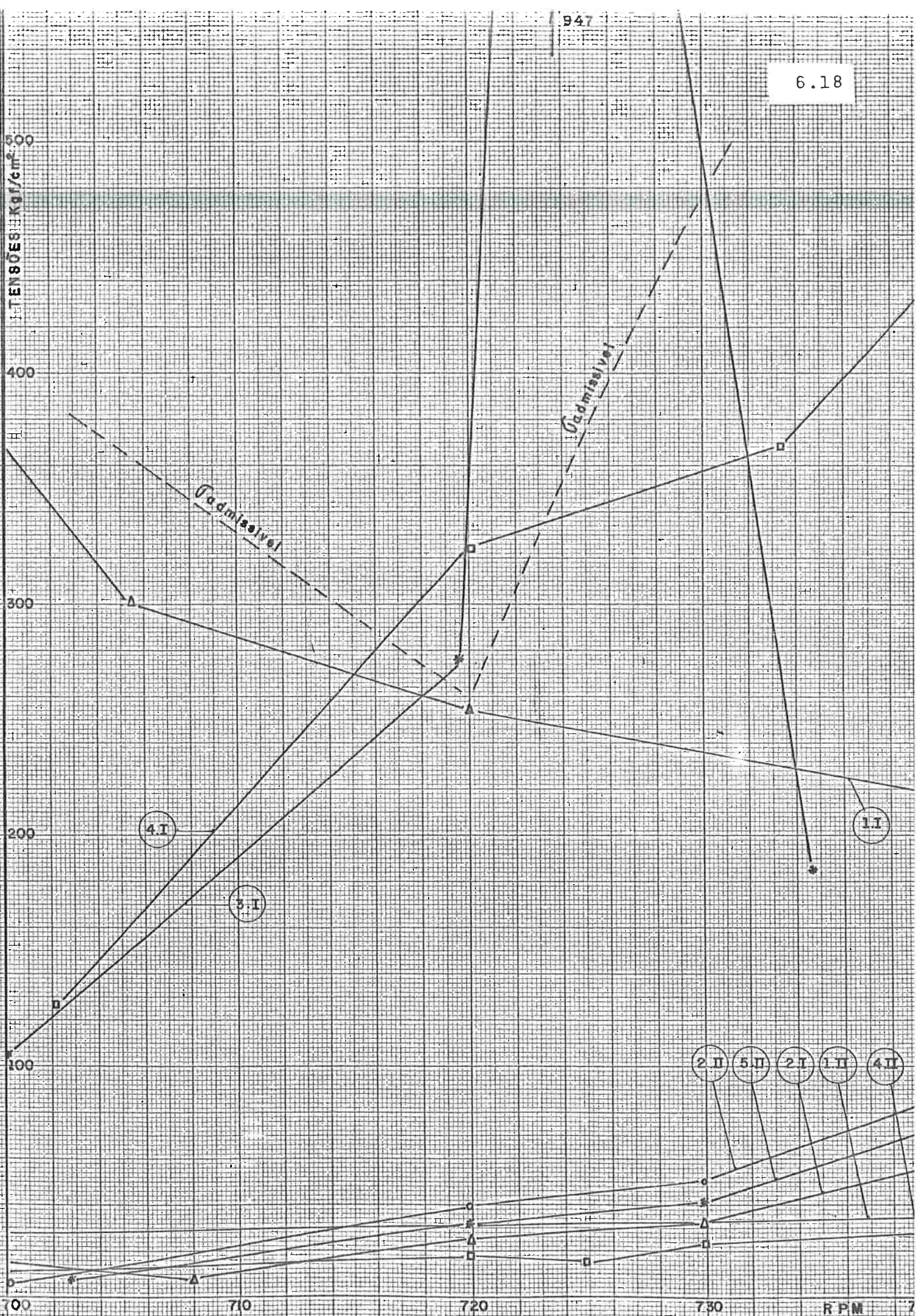


FIGURA 6.8 - INFLUENCIA DA ADICAO DE UM VOLANTE ABSORVEDOR NAS TENSÕES

## 7.0 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

O objetivo deste capítulo é fazer uma apreciação crítica do trabalho realizado, apontando as conclusões mais importantes obtidas na investigação e recomendando, por outro lado, algumas sugestões para continuação da pesquisa. É apresentado um resumo da investigação desenvolvida destacando a contribuição aportada ao estudo de vibração torcional de eixos.

### 7.1 Resumo do Trabalho

Foi estabelecido como objetivo da pesquisa a obtenção de um procedimento de cálculo de vibrações torcionais para aplicação em projeto e análise de sistemas propulsores e auxiliares marítimos.

A parte inicial do trabalho, uma vez selecionados os tipos de sistemas a serem examinados, consistiu na modelagem desses sistemas para estudo de vibrações torcionais. Nesta atividade preocupou-se, inicialmente, mais com a estrutura do modelo que com a determinação dos parâmetros.

Efetuuou-se, a seguir, um estudo detalhado dos diversos métodos de análise de vibrações, estabelecendo-se uma correlação entre o método de análise modal e procedimentos convencionais empregados no cálculo de vibrações torcionais em sistemas propulsores marítimos.

Como etapa complementar ao estudo de modelagem, desenvolveu-se uma análise aprofundada dos conjugados de excitação provenientes dos cilindros do motor e do hélice, e apresentou-se uma formulação das propriedades de amortecimento do sistema que fosse adequada para os objetivos de cálculo da resposta.

Como resultado do estudo dos métodos de análise e da modelagem completa do sistema, definiu-se um procedimento de cálculo, que incorpora ainda muitas características dos métodos convencionais, e preparou-se um programa de computador que permite automatizar o cálculo de vibrações torcionais.

A aplicação do procedimento de cálculo foi ilustrada com alguns exemplos efetuando-se para um deles uma comparação com resultados de cálculo de outra referência.

Para uma comprovação experimental do procedimento programou-se a realização de ensaios. Depois de um insucesso inicial devido a deficiências da instrumentação utilizada, conseguiu-se com outra aparelhagem bons resultados. Esta etapa, que consiste na contribuição mais significativa do estudo, permitiu avaliar a eficiência do método desenvolvido no cálculo de frequências naturais e amplitudes e tensões máximas de resposta.

Finalmente como complementação do trabalho examinou-se os processos de controle de vibração empregando-se o procedimento de cálculo para analisar diferentes configurações e a influência de valores dos parâmetros.



## 7.2 Conclusões

A comprovação teórica entre o método de superposição modal e os convencionais, para cálculo da resposta, mostrou a vantagem do primeiro sobre o segundo, pois permite obter as respostas devidas aos vários esforços em todos os modos de vibrar simultaneamente. Isto evita a necessidade de utilizar-se de critérios para cálculo da resposta total, por meio de composição das várias respostas devido aos diversos harmônicos do conjugado em cada modo de vibrar. Os diversos fatores que influem sobre a defasagem destas respostas tornam difícil a utilização do método de superposição modal.

Os resultados da aplicação do procedimento de cálculo a sistemas propulsores e auxiliares de navios existentes, permitiram extrair algumas conclusões sobre o comportamento dinâmico destas instalações quando sujeitas a vibrações torcionais.

Nas análises realizadas em instalações propulsoras com ramificações verificou-se a grande vantagem do Método de Autovalores sobre o Método de Holzer para cálculo de frequências e amplitudes naturais. Verificou-se que o cálculo das respostas totais de motores em instalações Diesel direta era mais simples que para outros tipos de sistemas, pois a resposta devido a um dado harmônico do conjugado de excitação sobre um modo de vibrar não se superpõe com a de outros harmônicos no mesmo modo ou mesmo em outros modos de vibrar.

Verificou-se também que a influência dos esforços de excitação do hélice nas respostas dos sistemas é bem mais

## 7.2 Conclusões

A comprovação teórica entre o método de superposição modal e os convencionais, para cálculo da resposta, mostrou a vantagem do primeiro sobre o segundo, pois permite obter as respostas devidas aos vários esforços em todos os modos de vibrar simultaneamente. Isto evita a necessidade de utilizar-se de critérios para cálculo da resposta total, por meio de composição das várias respostas devido aos diversos harmônicos do conjugado em cada modo de vibrar. Os diversos fatores que influem sobre a defasagem destas respostas tornam difícil a utilização do método de superposição modal.

Os resultados da aplicação do procedimento de cálculo a sistemas propulsores e auxiliares de navios existentes, permitiram extrair algumas conclusões sobre o comportamento dinâmico destas instalações quando sujeitas a vibrações torcionais.

Nas análises realizadas em instalações propulsoras com ramificações verificou-se a grande vantagem do Método de Autovalores sobre o Método de Holzer para cálculo de frequências e amplitudes naturais. Verificou-se que o cálculo das respostas totais de motores em instalações Diesel direta era mais simples que para outros tipos de sistemas, pois a resposta devido a um dado harmônico do conjugado de excitação sobre um modo de vibrar não se superpõe com a de outros harmônicos no mesmo modo ou mesmo em outros modos de vibrar.

Verificou-se também que a influência dos esforços de excitação do hélice nas respostas dos sistemas é bem mais

pronunciada em instalações propulsoras Diesel direta do que em instalações com redução. Nestes últimos sistemas existe uma superposição grande de respostas devidas a diversos harmônicos do conjugado numa mesma velocidade de operação do motor. Pode-se afirmar que as seções destes sistemas que requerem uma análise mais profunda da resposta são as da engrenagem redutora e dos dispositivos de controle de vibração. Isto deve-se a que as tensões de ressonância máximas geralmente ocorrem nestas regiões e também ao problema de reversão do conjugado.

A realização da comprovação do procedimento de cálculo adotado através de medidas experimentais mostrou a importância de um delineamento prévio dos ensaios e métodos de medidas. Tendo em vista que os aparelhos de medida são muito sensíveis, há necessidade de um treinamento adequado dos operadores para emprego e calibragem da instrumentação. A inadequada regulagem destes aparelhos acarretam erros nas medidas, ocasionando a falta de confiabilidade dos resultados.

É conveniente o emprego de um analisador harmônico durante o ensaio a fim de permitir uma localização mais precisa da região de ressonância para cada harmônico.

Na comprovação experimental verificou-se que as medidas de velocidades críticas e frequências naturais são mais precisas do que os valores das tensões de ressonância, que dependem de uma série de parâmetros de excitação e amortecimento do sistema, sujeitas as condições de operações do motor.

Os critérios de avaliação das respostas totais foram comparados com os medidos e mostraram uma correlação aceitá

vel. Analizando-se o resultado das experiências, o critério da soma aritmética das três maiores respostas dos harmônicos do conjugado dos primeiros modos de vibrar parece poder ser considerada a mais adequada pois estabelece um limite superior para as tensões máximas do sistema o que confirma os critérios utilizados em [2], [5].

Finalmente, o emprego do procedimento de cálculo na análise dos métodos de controle mostrou o acerto do desenvolvimento do programa de computador para automatizar o referido procedimento. Modelando-se os diversos tipos de instalações estudadas pode-se avaliar o efeito da variação de determinados parâmetros e configurações possíveis de serem adotadas nas respostas dos sistemas. Este procedimento permite um melhor dimensionamento dos componentes da instalação a fim de se evitar ou atenuar vibrações indesejáveis. Torna-se também uma ferramenta importante para análise da necessidade de adotar-se sistemas de amortecimento nas instalações.

### 7.3 Recomendações

Recomenda-se a realização de um maior número de ensaios para a comprovação do procedimento de cálculo. Durante os ensaios seria importante levantar o diagrama indicador de cada cilindro para determinar os esforços de excitação efetivos com as medidas simultâneas de respostas em tensão num determinado ponto do sistema.

A realização dos ensaios com este procedimento poderá aperfeiçoar o cálculo dos esforços de amortecimento do sis-

tema, bem como avaliar melhor os critérios de composição das respostas.

A realização de medidas em provas de mar, poderá contribuir para aperfeiçoar o modelo no que se refere aos parâmetros do hélice.

O desenvolvimento de outros procedimentos de cálculo principalmente baseados nas modernas teorias de Análise Modal e Elementos Finitos é recomendável. Sua aplicação para cálculo de respostas em instalações propulsoras e auxiliares marítimas deverá propiciar um progresso apreciável na precisão dos resultados de cálculo.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- |1| - DEN HARTOG, J.P. Vibração nos sistemas mecânicos, Edgar Blucher, Ed. da U.S.P., 1972
- |2| - KER WILSON, W. Practical solution of torsional vibration problems, John Wiley and Sons Inc., New York, vol.1, 1956.
- |3| - VOLTERRA, ENRICO & ZACHMANOGLU, E.C. Dynamics of vibrations, Charles E. Merrill Books, Inc., Columbus, Ohio, 1965.
- |4| - SETO, William W. Mechanical vibrations, SCHAUM'S OUTLINE SERIES, McGraw Book Company, New York, USA.
- |5| - NESTORIDES, E.J. A handbook on torcional vibrations, BICERA, Cambridge at the University, Press London.
- |6| - TSE FRANCIS S., MORSE IVAN E. & HINKLE ROLLAND T. Mechanical vibrations, Allyn and Bacon Inc., Boston, 1966.
- |7| - BJADJO-BORISLAV, A. Frequency calculation and analysis of discrete torsional systems, Journal of Ship Research, 1962
- |8| - NOWACKI-HORST, Ship vibrations. University of Michigan, Ann Harbor, 1969.
- |9| - GERE JAMES, M., WEAVER WILLIAM Jr. Matrix algebra for engineers. Litton Educational Publishing Inc., New York, 1965.
- |10| - K.J. BATTLE, E.L. WILSON, Numerical methods in finite element analysis. Printice Hall Inc., New Jersey, 1976.

- [11] - SALZMAN, R.H., PAMIDI, P.R. Machinery vibrations in marine systems. American Bureau of Shipping, New York.
- [12] - TIMOSHENKO, S., YOUNG, D.H. & WERVER Jr. W. Vibration problems in engineering. John Wiley & Sons, New York, 1974.
- [13] - BISHOP R.E.D., GLADWELL, G.M.L. & MICHAELSON, S. The matrix analysis of vibration. Cambridge University Pres, 1979.
- [14] - DAWSON, B., SIDWELL, J.M. The vibrational properties of branched torsional systems having one or more, branch points. Transactions The Institute of Marine Engineers, vol. 86, 1974.
- [15] - NUNES DIAS, C.A. Introdução ao estudo de vibrações da viga navio. Técnica dos elementos finitos. Adaptação do programa SAP-IV. Tese de Mestrado, EPUSP, 1978.
- [16] - DRAMINSKY, P. Secondary resonance and subharmonics in torcional vibrations. Acta Polytechnica Scandinavica, Mechanical Engineering, Series 10, Copenhagen, 1961.
- [17] - MACDUFF, JOHN, N., CURRERI JOHN R. Vibration Control. McGraw Hill Book Company Inc., 1958
- [18] - BIEZENO & GRAMMEL Engineering dynamics. Blackie & Son Limited, London, 1954
- [19] - PANAGOPULOS, EUGENE. Design stage calculations of torcional, axial an lateral vibrations of marine shafting. Transactions SNAME, vol. 58, 1950.

- [20] - CHRISTESEN, HJALMAR. Experimental determination of propeller torque variations on ship models. International Shipbuilding Progress, vol. 3, nº 20, 1966.
- [21] - LONG, C.L. Propellers, shafting and shafting system vibration analysis. Cap. XI do Marine Engineering, Editado por Roy L. Harrington, SNAME, 1971
- [22] - JOHSON, A.J. & McCLIMONT, W. Machinery induced vibrations. The Institute of Marine Engineers, Transaction, Vol. 75, 1963.
- [23] - VIERCK, ROBERT K. Vibration analysis. Harper & Row Publisheer, 1979.
- [24] - THONSON, WILLIAN T. Teoria da vibração com aplicações. Editora Interciência, 1973.
- [25] - MOLER, e BAND STEWARD, G.W. An algorithm for generalized matrix eingevalue problems. SIAMJ Numerical Anal., 10/1973.
- [26] - MEIROVITCH, Leonard. Analytical methods in vibrations. The Maxmillan Co., 1967.
- [27] - CLOUGH, Rayw & PENSIEN, Joseh. Dynamics of structures. McGraw Hill, 1975.
- [28] - SUGAWARA, TOSHIBUMI, OCHI SHIGENOBU, INOHARA YOSHIYUKI. Consideration on propeler damping in torsional vibration of recente propulsion system. Journal of the Society of Naval Architects of Japan, 1970.



- |29| - BISHOP, R.E.D., PRICE, W.G., TAM, P.K.Y. On damping of torsional vibration in a propulsion system having fluid drive. Transaction IME, vol. 91, 1979.
- |30| - Relatório de ensaio para medidas de vibrações torcionais em motores Diesel-Burmeister & Wain. COPPE, agosto 1982.
- |31| - ISHIKAWAJIMA-HARINA Heaby Industries Co. Ltd. Shafting torsional vibration calculation. Work 2491, 1980.
- |32| - BURMEISTER & WAIN. Torcional vibration calculation on diesel engines. 1979.
- |33| - LLOYD'S Register of Shipping. Guidance notes on torsional vibration characteristics of main and auxiliary oil engines.
- |34| - BELCHIOR, C.R.P. Vibrações torcionais em sistemas motores. Congresso Panamericano de Engenharia Naval-IPEN, 1981.