

CARLOS ALBERTO NUNES DIAS

Engenheiro Naval, Escola Politécnica da USP, 1975

Mestre em Engenharia, Escola Politécnica da USP, 1978

MÉTODO PARA A PREVENÇÃO DE
VIBRAÇÕES DA ESTRUTURA DO NAVIO

Tese apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, para a obtenção do Título de Doutor em Engenharia.

Orientador: Prof.Dr. Miguel Angel Buelta Martinez
Professor Assistente Doutor do Departamento de Engenharia Naval da EPUSP.

SÃO PAULO, 1984

VERBA VOLANT,

SCRIPTA MANENT ...

FECI QUOD POTUI,

FACIANT MELIORA POTENTES ...

AGRADECIMENTOS

Ao prof. *Alfredo Coaracy Brazil Gandolfo* (in memoriam) que durante longos anos soube dar, como incentivo, o exemplo do seu trabalho.

Ao prof. *Miguel Angel Buelta Martinez* que, antes de tudo como amigo, aceitou a espinhosa tarefa de orientar a conclusão deste trabalho. Seus conselhos e sugestões, procurando dar sentido àquilo que desordenadamente jorrava de nosso raciocínio, em muito contribuíram para a unidade e a clareza dos temas abordados.

Ao Alnte. *Elcio de Sã Freitas* que, exercendo as funções de professor visitante no Departamento, iluminou desde o início o caminho que deveríamos percorrer em nossa formação profissional.

Aos pesquisadores *Yoshio Ochi* e *Koji Tanida*, do Instituto de Pesquisas da Ishikawajima Harima Heavy Industries (Yokohara, Japão), pelo desprendimento com que nos auxiliaram com muitas das informações de que hoje dispomos.

Aos *funcionários* e *monitores* do Departamento, e do Escritório Técnico de Construção Naval, pelo apoio logístico indispensável na realização de um trabalho deste porte.

A *Marinha do Brasil* e à *FINEP* pelo suporte financeiro em projetos dos quais resultou o trabalho.

RESUMO

Este trabalho trata do desenvolvimento de um procedimento destinado à prevenção de vibrações indesejáveis da estrutura do navio. Atendendo aos casos de vibrações de natureza periódica, reúne métodos a serem utilizados como ferramenta de cálculo nas fases preliminares do projeto de embarcações. Sistematiza, para isso, o cálculo da resposta no domínio da frequência, com subsequente avaliação do nível de vibrações sob os pontos de vista de reação humana - e de equipamentos -, e de vida em fadiga do material resistente estrutural.

Para a avaliação do nível de vibrações, recorre-se à utilização de critérios para equivalência entre os resultados do cálculo e valores de normas e regras internacionalmente aceitos.

Tendo em vista a automatização do procedimento, desenvolveu-se um sistema de programas de computador que, para o cálculo de modos e frequências naturais da estrutura do navio, baseia-se na Técnica dos Elementos Finitos, e que, para o cálculo da resposta, baseia-se no Método de Superposição Modal.

ABSTRACT

This work focus a procedure for prevention of periodic ship vibrations. The prevention task includes frequency domain response calculation as a mean of vibration analysis under the points of view of human and equipments reaction, and fatigue life of ship structure.

The evaluation of vibration level is done under equivalence criterias between the calculated response of ship structure and international guideline recommendations.

All the calculations are done automatically by a computer program system which is founded on Finite Element Method for the natural frequencies extraction, and on the Modal Superposition Method for the ship structure response calculation.

ÍNDICE

Dedicatória.....	i
Agradecimentos.....	ii
Resumo/Abstract.....	iii
Índice.....	iv
Notação, Nomenclatura e Simbologia.....	ix
Lista de figuras.....	xvii
Lista de tabelas.....	xix

CAPÍTULO UM

INTRODUÇÃO.....	1
I.1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS.....	1
I.2 - O ESTUDO DOS PROBLEMAS DE VIBRAÇÕES.....	4
I.3 - CONDUÇÃO DO TRABALHO SOB A ÓTICA DA ABORDAGEM CLÁSSICA.....	6
I.4 - OBJETIVOS DO TRABALHO.....	8
I.5 - APRESENTAÇÃO ESCRITA DO TRABALHO.....	10

CAPÍTULO DOIS

CONCEITOS BÁSICOS DA ANÁLISE MATRICIAL DINÂMICA.....	14
II.1 - INTRODUÇÃO.....	14
II.1.1 - Objetivos da Análise Dinâmica de Estruturas.....	14
II.1.2 - Tipos de Carregamentos Determinís- ticos.....	16
II.1.3 - Métodos de Discretização.....	17
II.2 - SISTEMA DE UM GRAU DE LIBERDADE (UGLD).....	20
II.2.1 - Vibração Livre não Amortecida.....	21

II.2.2 - Resposta a um Carregamento Harmônico.....	22
II.2.3 - Resposta a um Carregamento Periódico.....	25
II.3 - SISTEMA DE VÁRIOS GRAUS DE LIBERDADE (MGLD)...	28
II.3.1 - Seleção dos Graus de Liberdade....	28
II.3.2 - Condição de Equilíbrio Dinâmico...	28
II.3.3 - Instituição das Propriedades Matriciais da Estrutura.....	30
II.3.3.1 - Matriz de rigidez....	30
II.3.3.2 - Matriz de massa.....	33
II.3.3.3 - Matriz de amortecimento.....	34
II.3.3.4 - Matriz de carga. Carregamentos dinâmicos determinísticos.....	36
II.3.4 - Problema de Autovalor. Vibrações Livres não Amortecidas.....	37
II.3.4.1 - Condições de ortogonalidade. Normalização.	39
II.3.4.2 - Forma compacta do problema de autovalor...	41
II.3.5 - Análise da Resposta Dinâmica.....	43
II.3.5.1 - Desacoplamento da equação diferencial matricial.....	44
II.3.5.2 - Condições para ortogonalidade do amortecimento.....	46
II.3.5.3 - Sumário do método de superposição modal...	49
II.3.6 - Esforços Nodais Elásticos.....	53
II.3.7 - Trabalho Realizado por Ciclo.....	56

CAPÍTULO TRÊS

CÁLCULO DE MODOS E FREQUÊNCIAS NATURAIS.....	60
III.1 - INTRODUÇÃO.....	60
III.2 - MÉTODO DE ITERAÇÃO POR SUBESPAÇOS.....	63
III.3 - MÉTODO GENERALIZADO DE JACOBI.....	68
III.4 - VETORES DE PARTIDA PARA O MÉTODO DE ITERAÇÃO POR SUBESPAÇOS.....	74
III.4.1 - M-normalização.....	75
III.4.2 - Ortogonalização de Gram-Schmidt.....	76
III.4.3 - Matriz dos Vetores de Partida.....	78
III.5 - VETORES DE ENTRADA PARA O MÉTODO DE ITERAÇÃO POR SUBESPAÇOS.....	81

CAPÍTULO QUATRO

RESPOSTA NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA.....	84
IV.1 - INTRODUÇÃO.....	84
IV.2 - MODELAGEM DO CARREGAMENTO PERIÓDICO.....	85
IV.3 - PARÂMETROS DAS RESPOSTAS NORMAIS.....	89
IV.4 - VELOCIDADES CRÍTICAS.....	91
IV.5 - TRABALHO REALIZADO POR CICLO.....	93
IV.6 - PARÂMETROS CINEMÁTICOS.....	97
IV.7 - ESFORÇOS NODAIS ELÁSTICOS.....	106

CAPÍTULO CINCO

LIMITES PERMISSÍVEIS, EFEITOS DAS VIBRAÇÕES ESTRUTURAIS..	108
V.1 - INTRODUÇÃO.....	108
V.2 - ANÁLISE DE FADIGA.....	113
V.2.1 - Origem da Fadiga.....	113
V.2.2 - Fatores que Afetam a Vida em Fadiga..	114

V.2.3 - Testes de Fadiga. Critério de Fadiga.....	116
V.2.4 - Tensões Multiaxiais. Critério de Resistência.....	117
V.2.5 - Efeito do Valor Médio (Estático)...	119
V.2.6 - Excitação Multiharmônica.....	124
V.2.7 - Restrições ao Procedimento de Análise de Fadiga.	131
V.2.8 - Cálculo da Vida em Fadiga no Domínio da Freqüência.....	136
V.2.9 - Dano Acumulado na Fadiga.....	141
V.3 - ANÁLISE DA REAÇÃO HUMANA.....	144
V.3.1 - Conceituação da Reação Humana à Vibração.....	144
V.3.2 - Normas Para Avaliação.....	145
V.3.3 - Representação Simplificada das Normas.....	151
V.3.4 - Excitação Multiharmônica.....	153

CAPÍTULO SEIS

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO.....	156
VI.1 - VIBRAÇÕES DA VIGA NAVIO.....	157
VI.1.1 - Estabelecimento do Problema e a Modelagem Estrutural.....	157
VI.1.2 - Verificação das Ressonâncias.....	165
VI.1.3 - Cálculo da Resposta e Análise dos Resultados.....	171
VI.2 - VIBRAÇÕES LOCAIS DO PISO DA PRAÇA DE MÁQUINAS..	177
VI.2.1 - Estabelecimento do Problema e a Modelagem Estrutural.....	177
VI.2.2 - Cálculo de Modos e Freqüências Naturais.....	178
VI.2.3 - Cálculo da Resposta e Análise dos Resultados.....	182

CAPÍTULO SETE

COMENTÁRIOS FINAIS E RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	188
VII.1 - O ESTADO DA ARTE E O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINI TOS.....	189
VII.2 - QUANTO A CAPACIDADE DO SISTEMA DE ANÁLISE.....	191
VII.3 - CONTRIBUIÇÕES DO TRABALHO.....	192
APÊNDICE A	
INTEGRAÇÃO DO PRODUTO DE DUAS FUNÇÕES HARMÔNICAS.....	193
APÊNDICE B	
PROVA DA EQUIVALÊNCIA ENTRE AS EXPRESSÕES PARA $a_{k\ell}^{(N)}$ E $\theta_{k\ell}^{(N)}$	194
APÊNDICE C	
PROPRIEDADES PROBABILÍSTICAS DE UMA SENÓIDE.....	196
APÊNDICE D	
SOLUÇÃO DA INTEGRAL DE a_k^2	198
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	199

NOTAÇÃO, NOMENCLATURA E SIMBOLOGIA

NOTAÇÃO

De modo geral, reservamos letras maiúsculas do alfabeto português, ou grego, para designação de matrizes e vetores; ficando as letras minúsculas para escalares. No entanto, em alguns itens, onde o não cumprimento dessa regra seja irrelevante para o perfeito entendimento do texto, usamos, indistintamente, letras minúsculas e maiúsculas na designação de escalares.

Sempre que duas ou mais entidades possuírem significados correlatos, procurar-se-á adotar a mesma letra em suas designações, diferenciando-as pelo acréscimo de um caráter gráfico especial (circunflexo, barra, asterisco, ponto, etc.).

A indicação do cálculo de determinante de matrizes quadradas será feita pelo acréscimo do prefixo det, quando se fizer referência ao nome.

Matrizes diagonais, quando referenciadas pelos elementos da diagonal, receberão em sua designação o prefixo diag.

Quando se fizer referência a matrizes e vetores por seus elementos, estes virão cercados por colchetes e chaves, respectivamente. No caso de matrizes diagonais empregar-se-á, alternativamente, os delimitadores: []

NOMENCLATURA

Os nomes são escolhidos de modo a que se possa, rapidamente, identificar o assunto nas referências bibliográficas. Para que o presente trabalho e suas referências tenham consistência de nomenclatura procuramos, na medida do possível, não alterar a essência da simbologia original. Como consequência disso, grande parte dos símbolos aqui utilizados encontram jus-

tificativa quando considerados seus significados na língua inglesa.

SUBSCRITOS E ÍNDICES. CONVENÇÃO DE SOMA

Sempre que necessário fazer a distinção de um elemento particular genérico de uma família de entidades, com mesmo significado físico ou matemático, utilizar-se-ão índices ou subscritos colocados à frente do nome, acima ou abaixo deste, conforme a conveniência.

Eventualmente, entidades com significados correlatos podem vir diferenciadas, apenas, pela quantidade de índices ou subscritos opostos em cada uma. Redundantemente, ainda assim, poder-se-á acrescentar um caráter especial ao nome de uma das entidades como reforço de representação.

Para facilidade de escrita, os símbolos de somatórias nas expressões poderão ser suprimidos; ficando estas subentendidas de acordo com a seguinte regra:

"Numa identidade, subscritos (índices) que aparecem do lado direito da igualdade, mas não do lado esquerdo subentendem somatórias para todos os seus possíveis valores".

Exemplos:

$$a_{kijl} = p_{jl}^0 / w_i^2 \cdot \psi_{ki} \cdot \psi_{ji} \cdot D_{ijl} \text{ (não há } \Sigma \text{ s subentendidos)}$$

$$W_{kl} = \pi p_{kl}^0 a_{kijl} \text{ sen}(\delta_{kl} - \theta_{ijl}) = (\text{subentendidas } \sum_j \text{ e } \sum_i)$$

$$= \pi p_{kl}^0 \sum_j \sum_i a_{kijl} \text{ sen}(\delta_{kl} - \theta_{ijl})$$

SIMBOLOGIA

m : constante de massa.

k : constante de rigidez.

c	: constante de amortecimento.
ω_n	: freqüência natural do sistema de um grau de liberdade.
ω	: freqüência de excitação.
p_0	: amplitude do esforço harmônico de excitação.
δ	: fase inicial do esforço harmônico de excitação.
ω_d	: freqüência natural amortecida do sistema de um grau de liberdade.
ζ	: grau de amortecimento.
ρ	: amplitude da resposta permanente.
θ	: fase inicial da resposta permanente.
d	: fator de amplificação dinâmica.
β	: relação de freqüências.
p_m	: valor médio do esforço periódico de excitação.
$p_\ell^0, \omega_\ell, \delta_\ell$: amplitudes, freqüências e fases iniciais, respectivamente, dos harmônicos do esforço periódico de excitação.
T	: período.
$\rho_\ell^d, \beta_\ell, \theta_\ell$: amplitudes, fatores de amplificação dinâmica, relações de freqüências e fases iniciais, respectivamente, da resposta permanente periódica.
n	: número de graus de liberdade. Deve-se notar que a distinção entre graus de liberdade cinemáticos e dinâmicos fica perceptível no desenvolvimento do texto.
t	: tempo.
$V(t)$: vetor dos deslocamentos nodais. Elementos: $v_i(t)$, $i=1,2,\dots,n$.
$\dot{V}(t)$: vetor das velocidades nodais. Elementos: $\dot{v}_i(t)$, $i=1,2,\dots,n$.
$\ddot{V}(t)$: vetor das acelerações nodais. Elementos: $\ddot{v}_i(t)$, $i=1,2,\dots,n$.
$F_I(t)$: vetor dos esforços de inércia.
$F_A(t)$: vetor dos esforços de amortecimento.
$F_E(t)$: vetor dos esforços elásticos.
$P(t)$: vetor dos esforços externos aplicados.

M	: matriz de massa.
C	: matriz de amortecimento.
K	: matriz de rigidez.
F	: matriz de flexibilidade.
ϕ_i	: i-ésimo autovetor. Elementos: $\phi_{1i}, \phi_{2i}, \dots, \phi_{ni}$.
Φ	: matriz dos autovetores.
Φ_k	: k-ésima aproximação para Φ .
Λ	: matriz diagonal dos autovalores. Elementos escalares: $\lambda_i, i=1, \bar{n}$.
\bar{n}	: número total de autovalores ($\bar{n} \leq n$).
m^*	: massa generalizada.
k^*	: rigidez generalizada.
Λ_k	: k-ésima aproximação para Λ .
I	: matriz identidade.
Ψ	: matriz das formas assumidas. ψ_i : vetores de Ritz.
$Y(t), Z(t)$: vetor dos deslocamentos, em coordenadas generalizadas.
Φ^Z	: matriz dos autovetores em coordenadas generalizadas ϕ_i^Z .
K^*	: matriz de rigidez generalizada.
M^*	: matriz de massa generalizada.
p	: número de autovalores procurados.
q	: número inteiro positivo tal que, $p < q \leq n$.
\hat{K}	: matriz de rigidez deslocada.
β	: constante real para deslocamento.
$\hat{\Lambda}$: matriz diagonal dos autovalores do problema deslocado.
$\hat{\Lambda}_k$: k-ésima aproximação para $\hat{\Lambda}$.
λ_i	: autovalor, $i=1, 2, \dots, \bar{n}$.
$\hat{\lambda}_i$: autovalor do problema deslocado, $i=1, 2, \dots, \bar{n}$.
ω_i	: frequência (circular) natural, $i=1, 2, \dots, \bar{n}$.
$\hat{\omega}_i$: frequência (circular) natural do problema deslocado, $i=1, 2, \dots, \bar{n}$.

- m_i : i -ésimo elemento da matriz diagonal de massas discretas.
- k_{ij} : coeficiente de influência de rigidez.
- m_{ij} : coeficiente de influência de massa.
- k_{ij}^* : coeficiente de influência de rigidez generalizada.
- m_{ij}^* : coeficiente de influência de massa generalizada.
- \tilde{k}_{ij} : coeficiente de influência de rigidez do problema deslocado.
- $P_{(r)}$: matriz de transformação de rotação. Método gen. de Jacobi, $r=1,2,\dots,\infty$.
- $M_{(r)}$: matriz de massa transformada, $r=1,2,\dots,\infty$.
- $K_{(r)}$: matriz de rigidez transformada, $r=1,2,\dots,\infty$.
- $m_{ij}^{(r)}$: coeficiente de influência de massa transformada.
- $k_{ij}^{(r)}$: coeficiente de influência de rigidez transformada.
- $\tilde{\lambda}_i^{(r)}$: autovalores do problema deslocado e transformado por rotação.
- Γ_m : forma arbitrada para o m -ésimo modo.
- $\bar{\Gamma}_m$: versão M -ortonormalizada de Γ_m .
- $\beta_m, \tilde{\beta}_m$: constantes de M -normalização.
- γ_{im}, γ_{jm} : elementos de Γ_m .
- $\tilde{\Gamma}_m$: versão depurada de Γ_m .
- α_{mj} : coeficiente de depuração.
- $\bar{\Gamma}$: versão M -ortonormalizada (dipurada) de Γ_m .
- Φ_0 : matriz dos Vetores de Partida.
- N : rotação fundamental (rpm).
- $p_j(N,t)$: esforço periódico aplicado segundo o j -ésimo grau de liberdade.
- $p_j^m(N)$: valor médio de $p_j(N,t)$.
- $p_{j\ell}^0(N)$: amplitude do ℓ -ésimo harmônico de $p_j(N,t)$.
- $w_\ell(N)$: frequência circular do ℓ -ésimo harmônico de $p_j(N,t)$.
- $\delta_{j\ell}(N)$: fase inicial do ℓ -ésimo harmônico de $p_j(N,t)$.
- $f(N), g(N)$: funções de frequências.
- $\eta_{j\ell}, \epsilon_{j\ell}$: constantes de proporcionalidade das funções de frequências.

- w_0 : freqüência fundamental (rad/s).
 θ : fator de formação da gama de freqüências de excitação.
 y_{ijl} : resposta normal.
 ρ_{ijl} : amplitude da resposta normal.
 θ_{ijl} : fase inicial da resposta normal.
 β_{il} : relação de freqüências.
 X_{ijl} : deslocamento estático.
 d_{il} : fator de amplificação dinâmica.
 $a_{kijl}, a_{kjl}, a_{k\ell}, a_k(N)$: amplitudes das componentes dos deslocamentos nodais.
 $\dot{a}_{kijl}, \dot{a}_{kjl}, \dot{a}_{k\ell}, \dot{a}_k(N)$: amplitudes das componentes das velocidades nodais.
 $\ddot{a}_{kijl}, \ddot{a}_{kjl}, \ddot{a}_{k\ell}, \ddot{a}_k(N)$: amplitudes das componentes das acelerações nodais.
 N_{il} : velocidade crítica de ordem l no i -ésimo modo (rpm).
 $w_{kijl}, w_{k\ell}, w_k(N)$: trabalho realizado por ciclo pelas componentes dos esforços de excitação.
 $\theta_{kjl}, \theta_{k\ell}(N)$: fases iniciais das componentes dos deslocamentos nodais.
 $e_k^m(N, t)$: k -ésimo esforço elástico de extremidade do m -ésimo elemento.
 $a_{kijl}^m, a_{k\ell}^m(N)$: amplitudes das componentes de $e_k^m(N, t)$.
 $\theta_{k\ell}^m(N)$: fases iniciais das componentes de $e_k^m(N, t)$.
 b_{ki}^m : k -ésimo elemento do vetor dos esforços elásticos de extremidade em coordenadas normais.
 σ_e : tensão equivalente.
 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$: tensões principais.
 σ_m : tensão média (estática).
 k : fator de concentração de tensões.
 σ_y : tensão de escoamento do material.
 σ_u : tensão de ruptura do material.
 S : tensão limite de fadiga.
 S_c : tensão limite de fadiga corrigida por σ_m .

$S_{f, \alpha}^n$: propriedades da curva de fadiga do material.
σ_a	: amplitude da tensão normal alternada.
τ_a	: amplitude da tensão de cisalhamento alternada.
$u(N)$: vida em fadiga.
$d_i(N)$: dano acumulado na tensão alternada σ_{a_i} .
$\sigma_{rs}^m(N, t)$: tensão no plano r na direção s , num ponto do m-ésimo elemento.
α_{rsk}^m	: constantes de proporcionalidade para o cálculo de $\sigma_{rs}^m(N, t)$.
$\sigma^m(N, t)$: tensão alternada equivalente no m-ésimo elemento.
$\sigma_\ell^m(N)$: amplitude do ℓ -ésimo harmônico de $\sigma^m(N, t)$.
$\theta_\ell^m(N)$: fase inicial do ℓ -ésimo harmônico de $\sigma^m(N, t)$.
β_{rsrs}^-	: constantes de proporcionalidade do critério de resistência.
$\sigma_i^m(N)$: flutuações significativas do histórico de tensões (Método Rain-Flow).
$u^m(N)$: vida em fadiga do m-ésimo elemento.
$CF^m(N)$: coeficiente de segurança à fadiga do m-ésimo elemento.
I^m	: índice de segurança à fadiga no cômputo do dano acumulado para o m-ésimo elemento.
f	: frequência em hz.
$f_{o, \alpha}$: propriedades das curvas de reação humana à vibração.
\ddot{a}_k^e	: amplitude equivalente da aceleração na frequência f_o .
Δ	: deslocamento (peso) da embarcação.
$z(t)$: deslocamento do motor.
$\Phi^*(a)$: vetor dos deslocamentos modais do piso, $\phi_i^*(a)$.
m_i^*	: massas generalizadas do piso.
Ω	: frequência natural do subsistema motor-mancais.
Λ^*	: matriz dos autovalores do piso; $(w_i^*)^2$.
ϕ_j	: formas modais do piso com o motor.
z_{oj}	: amplitudes modais do deslocamento do motor.

λ_j : autovalores do sistema motor-mancais-piso.
 ζ_j, ζ_j^*, ξ : graus de amortecimento.

Os símbolos estão relacionados, aproximadamente, na mesma ordem em que aparecem no texto. Procuramos listar aqui apenas aqueles que receberam definição no texto, de modo que alguns símbolos auxiliares não estão na relação.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA		PÁGINA
1.1	Classificação das vibrações do navio.....	12
1.2	O sistema NAVDIN-NAVRAP para a análise automatizada de vibrações do navio.....	13
2.1	Tipos de carregamentos determinísticos.....	16
2.2	Sistema UGLD idealizado.....	20
2.3	Variação da amplificação dinâmica com a frequência e o amortecimento.....	24
2.4	Resposta no domínio da frequência para o sistema UGLD.....	27
3.1	Sumário do método de iteração por subespaços. Problema generalizado de autovalor.....	79
3.2	Sumário do método de iteração por subespaços. Método generalizado de Jacobi.....	80
4.1	Registro de um sinal aleatório.....	105
4.2	Registro da aceleração, segundo o k-ésimo grau de liberdade, e representação gráfica do RMS, na rotação N.....	105
4.3	Exemplo esquemático da avaliação do nível de vibrações.....	105
5.1	Limites para vibrações do navio.....	112
5.2	Exame visual, ou macroscópico, de uma peça rompida por fadiga.....	115
5.3	Tensões em membros estruturais devidas a cargas cíclicas.....	115
5.4	Diagrama s-n esquemático. Caso típico do aço estrutural.....	115
5.5	Tensões Multiaxiais num ponto P.....	121
5.6	Efeito da tensão média na vida em fadiga.....	121
5.7	Efeito da tensão estática (σ_m).....	121
5.8	Exemplos de contagem de picos e vales. Método "Rain-Flow" - Solicitação uniaxial.....	127

FIGURA		PÁGINA
5.9	Técnica de rastreamento de picos e vales.....	130
5.10	Direções principais - Solicitação biaxial.....	134
5.11	Esquema indicando a variação da sensibilidade da reação humana com a amplitude da vibração e com a freqüência. Dieckmann.....	147
5.12	Direções dos ensaios de vibração do corpo huma no. ISO/TC 108/UG7(D5).....	147
5.13	Comparação de várias regras para avaliação de habitabilidade.....	149
5.14	Norma para avaliação de vibrações verticais e horizontais. ISO Draft Proposal nº 6954.....	150
5.15	Critério de magnitude equivalente (a^e).....	155
6.1	Variação do empuxo em cada propulsor.....	159
6.2	Modelo para a vibração longitudinal da linha de eixos.....	160
6.3	Forças alternadas no mancal de escora.....	161
6.4	Modelo de vigas-vibração da viga navio.....	162
6.5	Propriedades de rigidez da viga navio.....	163
6.6	Propriedades de massa da viga navio.....	164
6.7	Vibrações naturais da viga navio.....	168
6.8	Previsão de ressonâncias para a viga navio.....	170
6.9	Acelerações equivalentes x limites permissíveis	175
6.10	Análise da sensibilidade ao amortecimento.....	176
6.11	O sistema motor-mancais-piso.....	180
6.12	Compatibilidades de força e deslocamento na sín tese modal.....	180
6.13	Solução do problema de autovalor da síntese mo dal.....	181
6.14	Freqüências naturais do sistema motor-mancais - pico.....	183
6.15	Coefficiente de segurança à fadiga.....	187

LISTA DE TABELAS

TABELA		PÁGINA
4.1	Aplicação do conceito de amplitudes nulas na mo- delagem de esforços de excitação simultânea por motor e propulsor.....	88
5.1	Limites máximos aceitáveis para a viga navio...	110
5.2	Coefficientes $\beta_{rs\bar{s}}$ da forma (5.13) para as ten- sões equivalentes (critério de Von Mises).....	119
5.3	Correção do diagrama s-n como função da tensão média (σ_m).....	122
5.4	Limite de fadiga para alguns materiais selecio- nados.....	122
5.5	Coefficientes α_{rsk}^m para um elemento de viga.....	138
5.6	Freqüências naturais do corpo humano.....	148
5.7	Forma tabular das normas IRCN e Dieckmann.....	148
5.8	Elaboração de um método simplificado para a ava- liação das vibrações, sob o ponto de vista de reação humana.....	152
6.1	Características principais da embarcação.....	158
6.2	Freqüências naturais de vibração da viga navio.	167
6.3	Velocidades críticas para a vibração longitudi- nal do casco, excitada pelo empuxo do hélice...	172

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

I.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

As vibrações numa estrutura ocorrem sempre que a natureza temporal do carregamento a ela imposta coloque em jogo — pela magnitude das acelerações produzidas — esforços de inércia. Enquanto a inércia ora resiste, ora colabora, com a ação do movimento, os esforços elásticos de deformação agem sempre no sentido de restaurar a posição do sistema.

Assim, como decorrência do balanço de energias cinética, potencial de deformação e trabalho realizado pelo carregamento, a estrutura deforma-se continuamente no tempo ao redor de sua posição de equilíbrio estático.

Da complexibilidade da estrutura do navio, aliada à existência de inúmeras fontes de excitação, podem advir vibrações indesejáveis de caráter local (limitadas a uma pequena porção da estrutura) ou global. Por vibrações indesejáveis caracterizam-se aquelas que, em ocorrendo, possam vir a comprometer a operação do navio, quer seja pelo aparecimento de ruídos e acelerações em níveis não recomendáveis ao organismo humano e aos equipamentos, quer seja pela deterioração a médio e longo prazos da resistência estrutural.

Alguns aspectos essenciais devem ser considerados nos problemas de vibração:

- esforços de excitação como fonte das vibrações;
- resposta da estrutura às excitações; e
- limites permissíveis para as vibrações sob os pontos de vista de segurança e conforto da tripulação, de operação de equipamentos e de vida em

fadiga do material resistente estrutural.

As combinações das variadas características desses aspectos tipificam uma série de casos particulares de vibrações que, como ilustra a figura 1.1, usualmente ocorrem na estrutura do navio.

O estudo de problemas de vibrações em navios remonta à segunda metade do século dezanove [B21] e, ainda hoje, apesar do esforço de vários centros de pesquisa em todo o mundo, soluções inteiramente adequadas são de difícil obtenção.

Historicamente, pelas condições nas quais os problemas de vibrações vem surgindo e a evolução da tecnologia vem se processando, os projetistas navais tem se baseado em métodos semi-empíricos adquiridos de experiências anteriores [B21]. Este procedimento, visando fundamentalmente a cura de vibrações indesejáveis detectadas quando o navio já em operação, mostrou-se adequado apenas enquanto a evolução do veículo vinha sendo gradual.

Nos tempos modernos a rápida evolução do navio, ao não permitir extrapolações de dados básicos de semelhantes em pequenos passos, tem exigido mudança de procedimento. Com a crise de energia iniciada em 1973, houve rápida alteração do perfil típico dos navios, implicando no projeto de novos cascos, mais rápidos e mais econômicos, e motores com menor número de cilindros e maior potência por cilindro.

Os efeitos desse processo evolutivo, que nos navios mercantes apenas mais recentemente tem se feito sentir, seguem o compasso do caso dos navios não convencionais — como os navios de guerra — onde, a pouca informação disponível de semelhantes, exige do engenheiro naval maior capacidade de avaliação teórica sobre o comportamento vibratório da estrutura que está projetando.

Se de um lado a concepção moderna de conforto e segurança evoluiu, de outro a evolução tecnológica do veículo propiciou condições mais favoráveis ao aparecimento de vibrações.

O resultado disso é que, em relação ao que se tinha no passado, novos problemas de vibrações tem surgido. Vários armadores [B15], inclusive em âmbito nacional [B3], tem amargado experiências com vibrações indesejáveis, dispendendo enorme esforço econômico na sua cura. Por isso a mudança de procedimento encaminha-se no sentido de prevenir a ocorrência de vibrações indesejáveis, ainda durante a fase de projeto da embarcação. É cada vez mais comum nos dias de hoje que, dentre os requisitos tradicionais do armador, recomendações quanto ao nível de vibrações estejam presentes [B3].

Projetar um navio totalmente livre de vibrações é tarefa impossível pois, em maior ou menor grau, estas sempre existirão. Como única medida viável, resta ao projetista a tentativa de arrefecer os efeitos indesejáveis das vibrações, propondo soluções que as limitem sob valores considerados aceitáveis [B5], [B22].

I.2 O ESTUDO DOS PROBLEMAS DE VIBRAÇÕES

Para obter uma visão ampla do estado da arte no campo de problemas de vibrações em navios, e das ferramentas utilizáveis para suas soluções, o leitor pode recorrer a textos editados em diversos simpósios e conferências realizados pelo mundo (|B18|, |B23|). Recentemente, coletâneas atualizadas de regras e métodos para projeto foram publicadas (|B5|, |B22|) com enfoques diferentes que, em alguma extensão, se complementam.

No aspecto filosófico da questão, a tendência contemporânea corre no sentido de aprimorar as ferramentas de cálculo a empregar em estágios preliminares do projeto. Procura-se, assim, evitar que os problemas de vibrações sejam constatados numa fase adiantada do projeto, ou com o navio já em operação, onde as soluções implicariam em grandes montas de custos adicionais. A cada etapa, desde os primeiros passos da espiral de projeto, deve-se, a bem da economia, promover investigações sobre as possíveis ocorrências de vibrações indesejáveis, propondo soluções ainda de fácil execução.

Quando se tem em mira a solução de problemas de vibrações causadas por esforços de natureza periódica (caso do presente estudo), o fenômeno da "ressonância" é de primordial importância. Devido ao pouco amortecimento do sistema, na prática basta que ocorra proximidade entre freqüências natural e de excitação para que a ressonância possa vir a causar pico pronunciado de resposta da estrutura.

Costuma-se estabelecer, então, como medida contra o aparecimento de vibrações indesejáveis, a operação do sistema em pontos longe das proximidades das ressonâncias |B6|. Em boa parte dos casos, contudo, esse procedimento não se revela apropriado porque, evidentemente, sendo o sistema estrutural contínuo — portanto com infinitas freqüências naturais — e a excitação composta de várias freqüências, fica difícil evitar completamente todas as possíveis ressonâncias. O projetista acaba

tendo que decidir por uma solução de compromisso, onde apenas as ressonâncias potencialmente perigosas — sob seu julgamento — são evitadas.

Se for possível evitar todas as ressonâncias julgadas perigosas, é bastante provável que não surjam vibrações indesejáveis. Resta, contudo, o dilema de como decidir pela periculosidade de cada caso, considerando apenas os aspectos qualitativos do problema da ressonância: modo excitado, harmônico ressonante de excitação e localização física do carregamento.

A solução dessa questão crucial — quando exequível e tanto mais apropriadamente resolvida quanto maior a experiência do projetista — pode vir a chocar-se, contudo, com requisitos de projeto, tornando indesejável sua adoção, sem que fique absolutamente comprovada sua necessidade.

Por essas razões o processo de simples verificação das ressonâncias, embora venha servindo como método de prevenção de vibrações indesejáveis, não é absolutamente completo, tampouco sempre conveniente. Deve-se entender que a condição de ressonância é apenas potencialmente perigosa. De per si não é suficiente* para provocar níveis excessivos de vibração. Como demonstração do fato podemos lembrar que a ressonância favorece apenas a amplificação da resposta, enquanto a amplitude desta dependerá, ainda, da magnitude e da localização do carregamento, e do amortecimento.

*Por um raciocínio matemático, poder-se-ia dizer, simplificadamente, que a condição de ressonância é necessária, mas não suficiente, para a existência de vibrações estruturais indesejáveis.

I.3 CONDUÇÃO DO TRABALHO SOB A ÓTICA DA ABORDAGEM CLÁSSICA

Nos problemas de vibração do navio, o cálculo de modos e frequências naturais é feito considerando-se o sistema estrutural como não amortecido. Isto decorre da constatação prática da pequena magnitude dos esforços de amortecimento.

O cálculo da resposta, contudo, não leva a bons re-sultados se o amortecimento, mesmo sendo pequeno, não for considerado. Este segundo fato prende-se à grande importância do a-mortecimento no fenômeno da ressonância*, reduzindo significativamente a amplificação dinâmica.

Matematicamente, o cálculo de modos e frequências naturais recai na solução de equações que representam o sistema estrutural em "vibrações livres não amortecidas", enquanto o cálculo da resposta recai em "vibrações forçadas amortecidas"**. A isto pode-se caracterizar como uma abordagem clássica dos problemas de vibração da estrutura do navio^{***}.

Esta maneira aproximada de contabilizar os efeitos do amortecimento justifica-se, em primeiro lugar, porque este é pequeno e, em segundo lugar, pela impossibilidade de avaliar e modelar precisamente os esforços dissipativos, que na estrutura do navio originam-se de diversas causas, tais como: histerese do material resistente estrutural, atrito entre juntas estruturais, entre itens de carga e causado por líquidos.

**Simplificadamente, num pico de ressonância a amplitude da resposta varia com o recíproco do amortecimento. A ausência deste causaria instabilidade do sistema, levando a amplitude ao infinito.*

***Um segundo efeito importante do amortecimento é o de dissipar as parcelas transitórias da resposta (que vibram nas frequências naturais), tal que, nos casos de excitação periódica, apenas as parcelas permanentes (que vibram nas frequências de excitação) apresentam relevância.*

****Como exemplo de abordagem moderna do problema, pode-se citar o caso de cálculo de modos e frequências naturais pela solução das equações de "vibrações livres amortecidas". O problema de autovalor "amortecido", que disso decorre, é citado em [A2] (pág.199) e resolvido em [A9] (capítulo 9).*

O que se procura, com a abordagem clássica, é introduzir os efeitos dissipativos no cálculo da resposta, na exata medida em que isso é necessário para garantir a confiabilidade das previsões teóricas. O caminho adotado, no cumprimento de fal finalidade, resume-se basicamente em atribuir um caráter viscoso comum a todas as fontes de dissipação de energia, independentemente de sua origem. A partir disso os parâmetros teóricos, que nas equações do método representam os esforços de amortecimento, são avaliados experimentalmente para cada caso de vibração.

Essa dependência de resultados experimentais seguramente é o maior inconveniente do presente estágio de desenvolvimento dos métodos para análise de vibrações do navio. Como consequência da escassez de informações de um modo geral, e das particularidades específicas de cada caso de vibração do navio, é extremamente difícil, a quem não dispõe de meios para realizar suas próprias experiências, obter apenas da literatura os dados de que necessita.

Acreditamos, contudo, que, como decorrência da crescente necessidade de métodos de prevenção que se estendam até o cálculo da resposta, os próximos anos verão surgir cada vez mais publicações tratando especificamente dos problemas de avaliação experimental do amortecimento.

Presentemente resta ao analista a alternativa de, nos moldes da abordagem clássica, empregar procedimentos que lhe sirvam condições seguras de cálculo, pela obtenção de resultados a favor da segurança. É sempre possível realizar a análise de sensibilidade dos resultados à variação do amortecimento, optando por um valor deste menor do que daquilo que se estima como limite inferior do caso em estudo.

O desenvolvimento deste trabalho, de sorte a cumprir os objetivos propostos a seguir, conduziu-se sob a ótica da abordagem clássica dos problemas de vibrações do navio, cujas linhas gerais acabamos de descrever.

I.4 OBJETIVOS DO TRABALHO

A investigação de todos os tipos de vibrações no navio é tarefa por demais laboriosa para ser amplamente desenvolvida aqui. Este trabalho visa, tão somente, o estabelecimento de um método de cálculo que, baseado no uso do computador, sirva como ferramenta para a prevenção de vibrações indesejáveis. O método, partindo do conhecimento da excitação por seus componentes harmônicos, tem seu âmbito limitado àqueles casos de vibrações, em estruturas com comportamento linear, causadas por esforços de natureza periódica. Aplica-se, portanto, a boa parte dos possíveis casos de vibrações do navio (figura 1.1).

Já vimos que a prevenção de vibrações indesejáveis pode ser mais satisfatoriamente realizada se não se limitar à etapa de verificação de ressonância. Desde que se disponha de meios, é importante estender a tarefa de prevenção até o cálculo teórico da resposta para aí, então, decidirmos pela aceitabilidade do nível de vibrações produzidas. Isto, como objetivo principal deste trabalho, segue a linha daquilo que, provavelmente, se está elaborando de mais avançado nos dias de hoje em todo o mundo.

Como ferramenta de cálculo, apropriada ao emprego do método proposto, adotamos a Técnica dos Elementos Finitos na sua forma estendida a análise dinâmica de estruturas [A2]. O cálculo de modos e frequências naturais, cujos resultados — além de servirem numa pré-avaliação de ressonâncias — prestam-se ao cálculo de resposta por Superposição Modal ([A2], [A9]), é etapa intermediária natural do método de prevenção, que propomos sejam estabelecido nos moldes da abordagem clássica.

Para definição de sua aceitabilidade, a resposta é obtida no domínio da frequência, sendo comparada com os valores limites estabelecidos por estudos e normas, formulados sob os pontos de vista de reação humana e de equipamentos às vibrações, e de vida em fadiga do material resistente estrutural.

A cada etapa de aplicação do método — esquematizado à figura 1.2 — prevê-se a possibilidade de intervenção do analista, no sentido de promover alterações viáveis no sistema excitação-estrutura, atenuando paulatinamente os riscos de problemas com vibrações indesejáveis.

Para cumprir tais objetivos, elaboramos dois programas em linguagem FORTRAN (NAVDIN e NAVRAP) que, como esteios do sistema de análise, foram implantados no computador "Burroughs B-6900" do Centro de Computação Eletrônica da USP. O programa NAVDIN, uma versão ampliada e otimizada* do programa SAP-IV [E2], presta-se ao cálculo de modos e frequências naturais. O programa NAVRAP, usando os resultados do NAVDIN, destina-se ao cálculo da resposta no domínio da frequência, e comparação desta com limites permissíveis ditados por normas.

Como objetivo paralelo do trabalho — mas nem por isso menos importante —, procuramos estabelecer aqui um texto que abordasse no seu todo os problemas mais comuns de vibrações da estrutura do navio, servindo de fonte de consulta para os cursos ministrados no Departamento de Engenharia Naval da EPUSP. Neste contexto, o presente trabalho deve ser interpretado como uma extensão dos assuntos tratados em [B19].

*As principais alterações, desde o início com [B1], foram.

- introdução da capacidade de análise de estruturas hipostáticas.
- otimização do método de Iteração por Subespaços [A11].
- introdução da capacidade de armazenagem de dados e resultados em arquivos em discos e fitas magnéticas.

I.5 APRESENTAÇÃO ESCRITA DO TRABALHO

O texto, ao longo de seus capítulos, segue a diretriz do método que propusemos. No capítulo dois, que serve como fundamento para os demais, descrevemos as bases teóricas da Técnica dos Elementos Finitos, introduzindo os conceitos e formulações que estabelecem os princípios da modelagem matemática.

No capítulo três tratamos da solução do problema de vibrações livres que, segundo a abordagem clássica, presta-se ao cálculo de modos e frequências naturais para o sistema não amortecido. O problema de autovalor que se estabelece tem solução matemática obtida pelo método de Iteração por Subespaços $|A_{11}|$ numa forma por nós otimizada, constituindo-se na base do programa NAVDIN.

De sorte a utilizar os resultados previamente obtidos para os modos e frequências naturais, o problema de cálculo da resposta do sistema amortecido é abordado no capítulo quatro pelo emprego do método de Superposição Modal $|A_2|$. Parte-se da modelagem dos esforços de excitação, pela suposição de que a decomposição destes em harmônicos pode ser feita com o emprego de uma única gama de frequências — comum a todos os esforços — introduzindo o que chamamos de "Conceito de Amplitudes Nulas". As vantagens desse enfoque, no estabelecimento das equações do método, ficam evidenciadas no decorrer do próprio capítulo. Suas limitações, embora existentes num contexto global, não diminuem de forma significativa a aplicabilidade do método na solução dos problemas mais comuns de vibrações do navio.

No intuito de dar um tratamento final àquilo que se obtém da teoria do capítulo quatro, as normas, regras e procedimentos para avaliação do nível de vibrações são vistos no capítulo cinco.

O método para a definição da aceitabilidade das vibrações foi estabelecido sob as óticas de reação humana à vibração e de fadiga do material resistente estrutural. Consideran-

do os modos pelos quais os limites experimentais são definidos, tivemos de recorrer a algumas aproximações de ordem prática, à luz do que se propunha em várias referências ([C], [D]).

Para contabilizar a natureza multiaxial da solicitação, a análise de fadiga baseia-se no cálculo de tensões equivalentes pelo critério de resistência da máxima energia de distorção (von Mises [C3]) associado ao critério de Sines [C1]. Para contabilizar a natureza multiharmônica da solicitação, elaboramos uma técnica que recai na aplicação do método de "Rain-Flow" [C1].

Na análise sob o ponto de vista de reação humana à vibração, introduzimos o conceito de acelerações equivalentes que, reduzindo todas as componentes harmônicas da resposta a seus equivalentes numa mesma frequência, permite o uso das normas obtidas de ensaios simples de laboratório.

Com os capítulos quatro e cinco estabelecemos as bases do programa NAVRAP, destinado ao cálculo e à avaliação da resposta do sistema estrutural.

Finalmente, no capítulo seis apresentamos dois exemplos de aplicação, cobrindo casos típicos de vibrações do navio: acelerações produzidas pela vibração global da viga navio como causa, eventual, de desconforto à tripulação; e análise da vida em fadiga das fundações de um motor auxiliar.

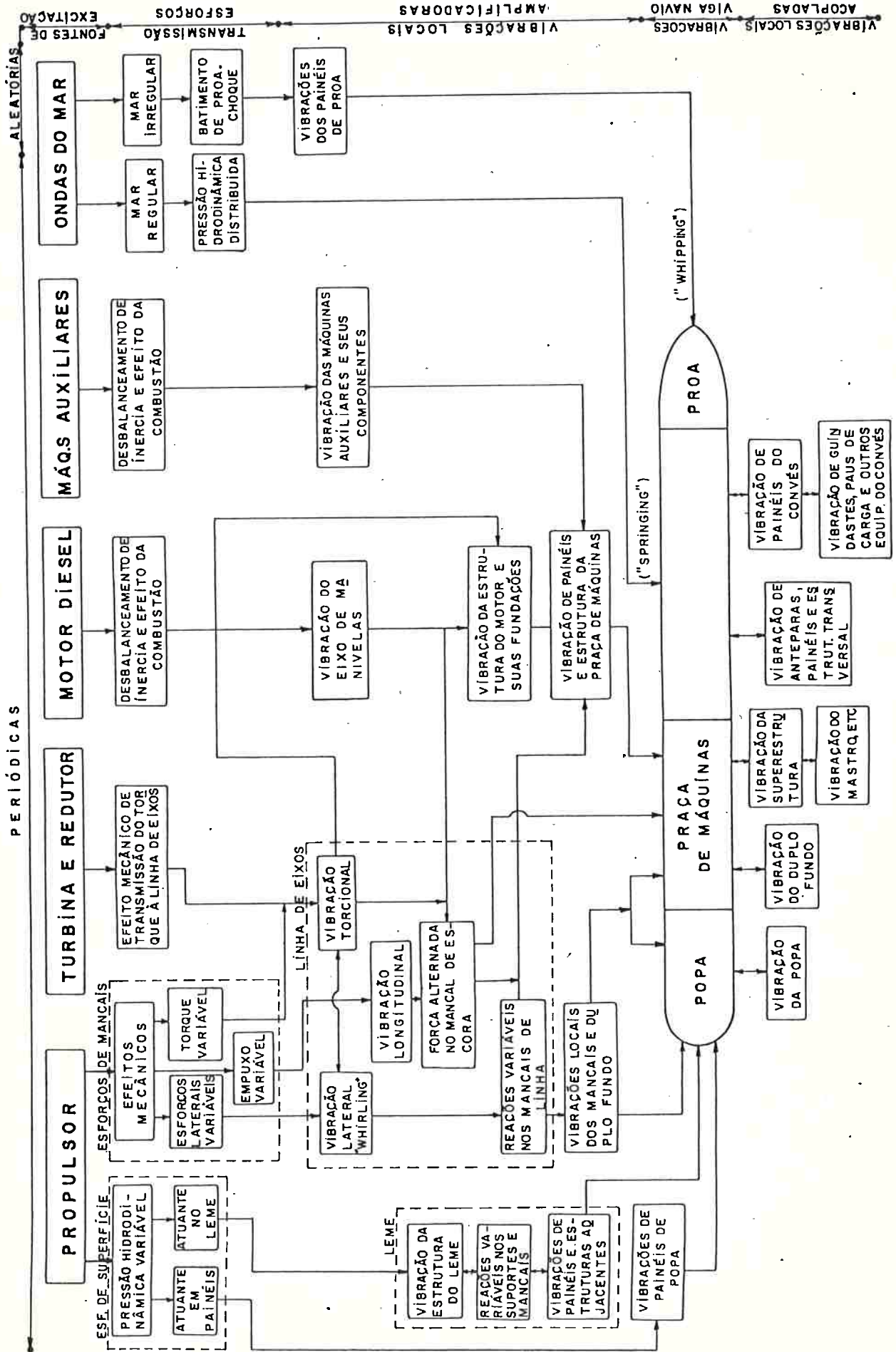


FIGURA 1.1 - CLASSIFICAÇÃO DAS VIBRAÇÕES DO NAVIO

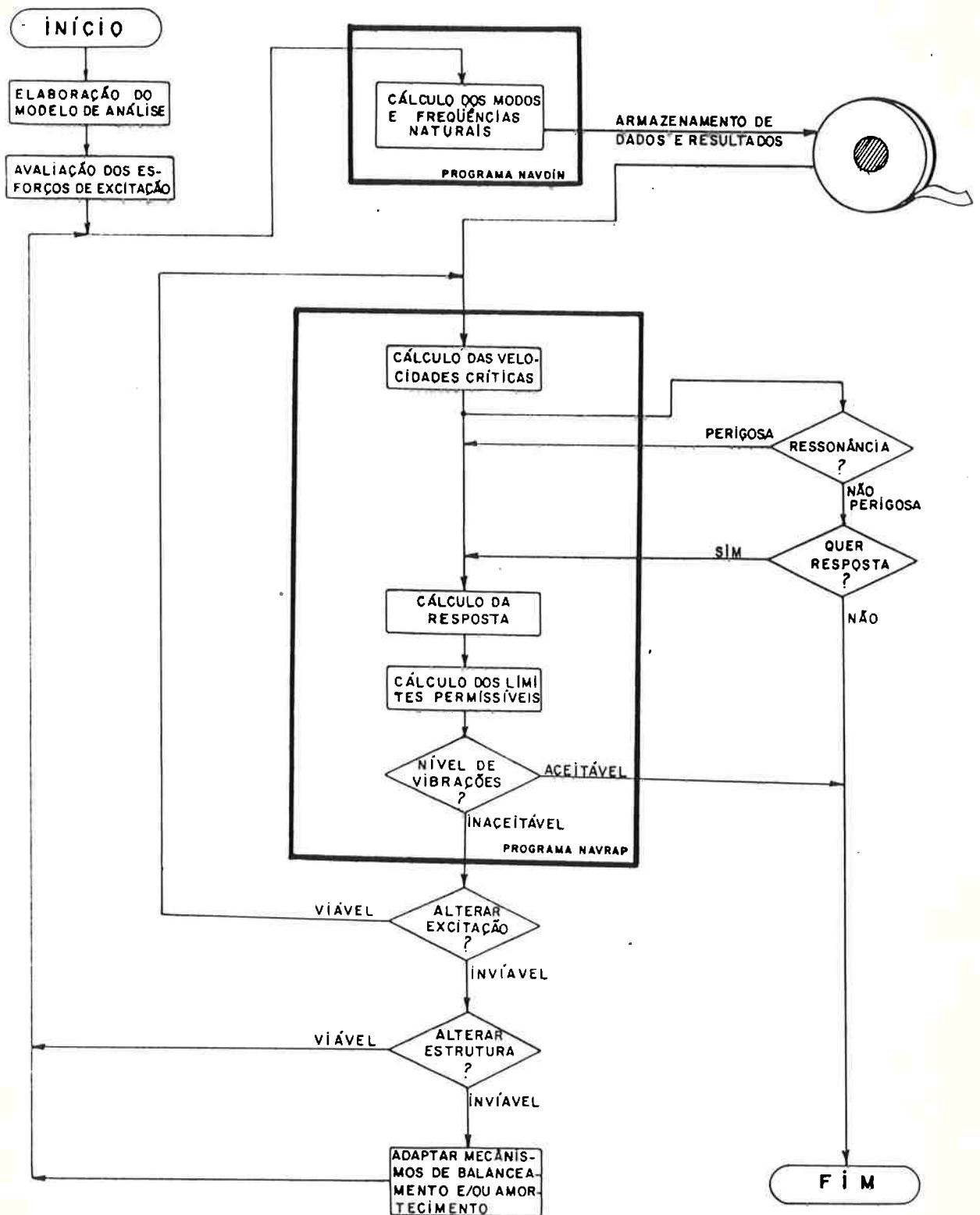


FIGURA 1.2 - O SISTEMA NAVDIN-NAVRAP PARA ANÁLISE AUTOMATIZADA DE VIBRAÇÕES DO NAVIO

CAPITULO 2

CONCEITOS BÁSICOS DA ANÁLISE MATRICIAL DINÂMICA

II.1 INTRODUÇÃO

Com este capítulo procura-se estabelecer as bases da análise dinâmica matricial. Muitos dos conceitos básicos, aqui relacionados, servem como fundamento para o desenvolvimento das teorias dos capítulos que se seguem.

Partindo do equacionamento e da solução de um sistema de um grau de liberdade, estabelecendo definições e firmando conceitos, chega-se a discutir o caso dos sistemas de vários graus de liberdade, até o ponto em que isso funcione como introdução para os capítulos seguintes.

De início tratamos de conceituar, o mais precisamente possível, o significado do problema de análise dinâmica de estruturas: sua caracterização e sua solução. A seguir, então, abordamos os casos dos sistemas de um (UGLD) e vários (MGLD) graus de liberdade, tocando em aspectos de fundamental importância para a compreensão das particularidades da teoria, e do modo pelo qual esta insere-se no contexto geral do trabalho.

II.1.1 Objetivos da Análise Dinâmica de Estruturas

De modo geral, o propósito fundamental das teorias de análise dinâmica é o de apresentar métodos para cálculo de tensões e deflexões desenvolvidas em qualquer tipo de estrutura, quando estas são submetidas a um carregamento dinâmico arbitrário. De certo modo, tem-se como objetivo a extensão dos métodos padrões de análise estrutural — originariamente desenvolvidos para a análise estática — também para o caso de carre

gamentos dinâmicos. Neste contexto, o caso estático pode ser entendido como uma particularização do caso dinâmico. Contudo, na análise de estruturas com comportamento linear, é conveniente fazer distinção entre as parcelas estática e dinâmica do carregamento total, de sorte a avaliar isoladamente as respostas de ambas as parcelas, para no final somar seus efeitos. Sob tal ponto de vista, as análises estática e dinâmica são fundamentalmente distintas.

O adjetivo "dinâmico" indica a natureza temporal do carregamento cujas magnitude, direção ou posição podem variar com o tempo. A resposta da estrutura ao carregamento dinâmico é de natureza também temporal, podendo ser adjetivada, portanto, como dinâmica.

Basicamente, duas diferentes abordagens são empregadas na avaliação da resposta dinâmica da estrutura devida a carregamentos dinâmicos: determinística e não determinística. A escolha de uma dessas abordagens iniciais depende de como o carregamento é definido. Se ele é conhecido — mesmo que de natureza fortemente irregular — é dito "prescrito" e a análise da resposta, seja qual for a estrutura sobre a qual está aplicado, é dita "determinística". Por outro lado, se a variação do carregamento no tempo não é completamente conhecida, mas pode ser definida através de propriedades estatísticas, ele é dito "aleatório".

No presente trabalho, como já mencionado no capítulo 1, interessa-nos estabelecer o cálculo da resposta da estrutura para aqueles casos em que o carregamento é inteiramente prescrito e, portanto, a análise determinística. Casos há, na estrutura do navio, onde a natureza não determinística do carregamento requer análise da resposta aleatória — a exemplo de excitação por mar irregular (figura 1.1). Isto, contudo, foge ao âmbito deste trabalho.

II.1.2 Tipos de Carregamentos Determinísticos

Em primeiro lugar é importante fazer a distinção entre carregamento dinâmico e resposta dinâmica. O carregamento dinâmico varia com o tempo em magnitude, direção e/ou posição. A resposta dinâmica, que resulta da ação do carregamento, depende da rigidez (como no caso estático) e adicionalmente da massa e do amortecimento do sistema estrutural.

Carregamento dinâmico é todo aquele que tem apreciável variação no tempo. Sendo determinístico (prescrito e inteiramente determinável), pode ser subdividido em duas categorias: periódico por que se repete em intervalos regulares de tempo, e não periódico pela razão inversa. Os esforços de desbalanceamento de um motor alternativo de combustão interna enquadram-se na primeira dessas categorias. Como exemplo da segunda categoria podemos citar o caso dos esforços decorrentes de explosões submarinas (figura 2.1).

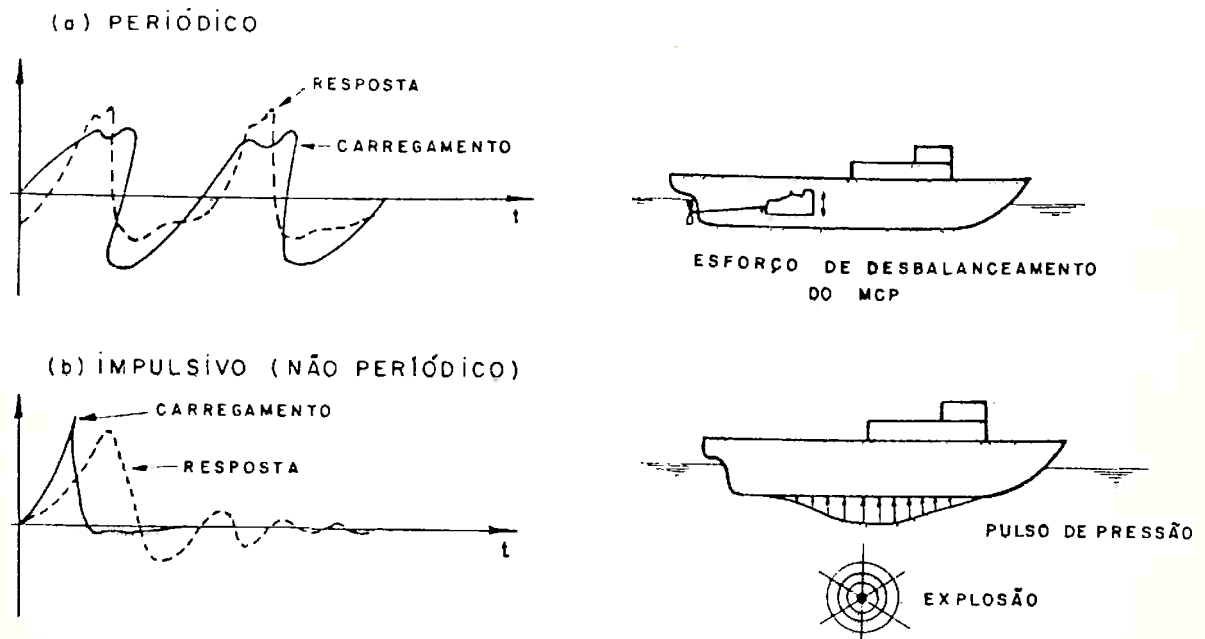


FIGURA 2.1 - TIPOS DE CARREGAMENTOS DETERMINÍSTICOS.

Na realidade, todos os esforços produzidos pelo meio ambiente variam no tempo, porém, para propósitos práticos de projeto, é comum considerá-los em termos de seus equivalentes estáticos. A validade desta hipótese é função de ambos: tipo da estrutura e natureza do carregamento. Emprega-se, contudo, o termo dinâmico para aqueles casos de carregamento que não podem ser convenientemente representados por seus equivalentes estáticos, por que requerem a consideração de sua variação no tempo. A resposta da estrutura em tais casos depende não apenas da rigidez desta, mas também de suas propriedades de massa (inércia) e, na maioria das vezes, de sua capacidade em absorver e dissipar energia. A importante distinção entre os problemas estático e dinâmico é que neste último os esforços necessários para acelerar (ou desacelerar) as massas da estrutura são relevantes, e precisam ser levados em conta na consideração do equilíbrio da estrutura.

Os esforços de inércia são, portanto, a mais importante característica de distinção de um problema estrutural dinâmico. Em geral, se os esforços de inércia representam uma parcela significativa do carregamento total, equilibrado pelos esforços elásticos internos da estrutura, o caráter dinâmico do problema precisa ser levado em consideração na sua solução. Por outro lado, se o movimento é tão lento, que os esforços de inércia são comparativamente pequenos, a análise pode ser feita pelo procedimento estático comum, mesmo quando carregamento e resposta apresentem variação no tempo.

II.1.3 Métodos de Discretização

Num sistema dinâmico, a análise é substancialmente dificultada pelo fato de os esforços de inércia resultarem dos deslocamentos que, por sua vez, são influenciados pela magnitude desses mesmos esforços. Este ciclo fechado de causa e efeito pode ser resolvido apenas pela formulação do problema

em termos de equação diferencial. Como a massa do sistema é continuamente distribuída, os deslocamentos e acelerações precisam ser definidos continuamente ao longo da estrutura. Assim, porque posição na estrutura e tempo são variáveis independentes, o problema deve ser formulado em termos de equação diferencial de derivadas parciais.

Por outro lado, se as massas da estrutura forem concentradas num conjunto finito de pontos discretos (massa não distribuída), o problema analítico fica substancialmente simplificado, já que os esforços de inércia desenvolvem-se apenas nesses pontos com massa. Neste caso, basta definir os deslocamentos e acelerações no conjunto finito de pontos discretos.

O número total de componentes de deslocamento que deve ser tomado, de modo a bem representar todos os esforços de inércia mais significativos da estrutura, é dito: "número de graus de liberdade dinâmicos". Genericamente falando, se a estrutura pode deformar-se em três dimensões no espaço, em cada ponto resultante da discretização poderemos ter até seis graus de liberdade com "massas" (inércias) a eles associadas (três de translação, mais três de rotação). Com base nesta consideração, fica evidente perceber que um sistema com distribuição contínua de massa tem, na verdade, infinitos graus de liberdade.

A idealização do sistema dinâmico por massas discretas fornece um meio simples de limitar o número de graus de liberdade a considerar na análise dinâmica de estruturas. O processo de concentrar massas é bastante eficiente no tratamento de sistemas nos quais grandes porções da massa total estão realmente concentradas em alguns poucos pontos. Pode-se, assim, fazer com que a massa própria da estrutura seja distribuída por esses mesmos pontos (nós), e a estrutura suposta sem peso. Este procedimento pode ser seguido, sem grandes ressalvas, mesmo nos casos onde a maior parte da massa é continuamente dis-

tribuída sobre a estrutura; para tanto, basta tomar um número suficientemente grande de graus de liberdade.

Alternativamente, um outro método de expressar os deslocamentos da estrutura, em termos de um número finito de graus de liberdade, pode ser usado. Nesta abordagem, que é a base do método dos Elementos Finitos, e propicia uma idealização conveniente e adequada para o sistema, os esforços de inércia que ocorrem fora dos nós da discretização são convertidos em seus equivalentes, nos mesmos nós, via função de forma adequadamente selecionada [A2]. De modo geral, a abordagem por elementos finitos torna mais eficiente o processo de representação dos deslocamentos de uma configuração estrutural arbitrária — por meio de um conjunto discreto (finito) de coordenadas nodais.

II.2 SISTEMA DE UM GRAU DE LIBERDADE (UGLD)

As propriedades físicas essenciais em qualquer sistema estrutural, sujeito a ação de carregamentos dinâmicos, são: massa, rigidez (ou flexibilidade), amortecimento e a fonte externa de excitação [A2]. No caso simples de um sistema de um grau de liberdade (UGLD), cada uma dessas propriedades está concentrada num único elemento físico.

Como exemplo, temos o sistema UGLD da figura 2.2 onde toda a massa m está contida no bloco rígido. O bloco tem a liberdade de mover-se numa única direção, de sorte que uma única coordenada x define completamente sua posição. O esforço elástico de resistência ao deslocamento do bloco é propiciado pela mola sem peso de rigidez k , enquanto o amortecimento, como mecanismo de dissipação de energia, é representado pelo amortecedor c .

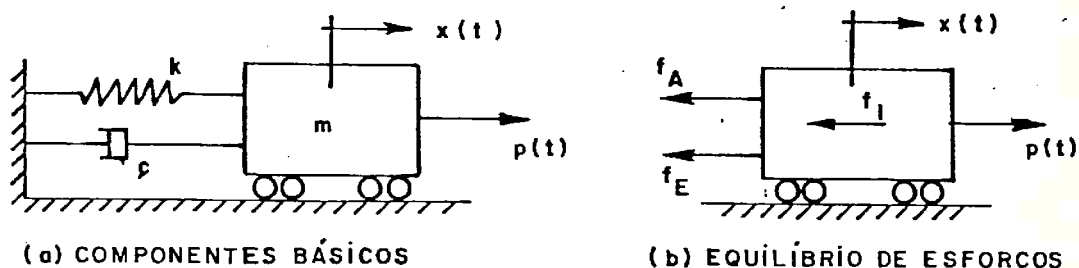


FIGURA 2.2 - SISTEMA UGLD IDEALIZADO

A equação de movimento do sistema pode ser obtida por, pelo menos, três distintos métodos: princípio de D'Alembert, princípio dos trabalhos virtuais ou princípio de Hamilton ([A2], [A8], [A9]). No presente caso, contudo, é bastante simples formular a equação de movimento pela imposição direta do equilíbrio dos esforços atuantes sobre o bloco. Assim, observando a figura 2.2.b, podemos escrever:

$$f_I + f_A + f_E = p(t) \quad (2.1)$$

Cada um desses esforços, que equilibram $p(t)$, é função do deslocamento x ou de suas derivadas. A força elástica (f_E) é o produto da rigidez (k) pelo deslocamento; a força de inércia (f_I) é o produto da massa (m) pela aceleração; e, finalmente, se amortecimento do tipo viscoso é adotado, a força de amortecimento (f_A) é o produto de c pela velocidade. Assim, (2.1) reduz-se a:

$$m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + k x(t) = p(t) \quad (2.2)$$

Nos moldes da abordagem clássica, de que já tratamos no capítulo 1, a solução de (2.2) deve ser desenvolvida em duas etapas. Na primeira, para efeito de cálculo da frequência natural do sistema, supõe-se o sistema livre ($p(t)=0$) e não amortecido ($c=0$); configurando-se o problema de vibração livre não amortecida. Na segunda etapa, (2.2) deve ser resolvida na sua forma completa, uma vez definida a excitação $p(t)$.

II.2.1 Vibração Livre não Amortecida

Nesse caso, como condição de equilíbrio, temos:

$$m \ddot{x}(t) + k x(t) = 0 \quad (2.3)$$

que é uma equação diferencial ordinária de ordem dois, homogênea associada de (2.2) na forma não amortecida. Sua solução matemática é:

$$x(t) = A \operatorname{sen} \omega t + B \operatorname{cos} \omega t \quad (2.4)$$

onde as constantes de integração A e B devem ser expressas como função das condições iniciais $x(0)$ e $\dot{x}(0)$, que dão início ao processo de vibração livre do sistema. Portanto, resulta:

$$x(t) = \frac{\dot{x}(0)}{w} \text{sen } wt + x(0) \text{ cos } wt \quad (2.5)$$

Essa solução representa um movimento harmônico simples, de freqüência circular w . O sistema em vibração livre, deve, necessariamente, vibrar numa freqüência única e característica. Visualiza-se tal fato quando se observa que (2.3) tem solução não trivial apenas sob essa condição. Substituindo (2.4) em (2.3) obtém-se:

$$(-mw^2+k) (A \text{ sen } wt + B \text{ cos } wt) = 0 \quad (2.6)$$

Portanto, apenas o valor $w = (k/m)^{0,5}$ permite a existência de $x(t) \neq 0$. Este valor específico de w é dito freqüência natural do sistema (w_n), caracterizando sua maneira peculiar de vibrar livremente. Temos, então, como propriedade dinâmica do sistema UGDL,

$$w_n = (k/m)^{0,5} \text{ — freqüência natural} \quad (2.7)$$

II.2.2 Resposta a um Carregamento Harmônico

Consideremos, agora, o caso de solução de (2.2) para quando o carregamento é harmônico de freqüência \bar{w} ,

$$m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + k x(t) = p_0 \text{ sen}(\bar{w}t + \delta) \quad (2.8)$$

As teorias de cálculo mostram que a solução, desta equação diferencial ordinária, é composta de duas parcelas. A primeira (x_h) como solução de sua homogênea associada, e a segunda (x_p) uma solução particular qualquer para sua forma completa. Assim, admitindo que o sistema é subcriticamente amortecido — como é o caso das estruturas (capítulo 1) —, temos:

$$x_h(t) = e^{-\zeta w_n t} (A \text{ sen } w_d t + B \text{ cos } w_d t) \quad (2.9.a)$$

$$x_p(t) = \rho \cdot \text{sen} [\bar{w}t + \theta] \quad (2.9.b)$$

com

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (2.9.c)$$

onde, w_n é dada por (2.7) e,

$$w_d = w_n (1 - \zeta^2)^{0,5} \text{ -- freqüência natural amortecida} \quad (2.9.d)$$

$$\zeta = c / (2mw_n) \text{ -- grau de amortecimento} \quad (2.9.e)$$

$$\rho = (p_0/k) d \text{ -- amplitude da resposta permanente} \quad (2.9.f)$$

$$d = [(1 - \beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2]^{-0,5} \text{ -- amplificação dinâmica} \quad (2.9.g)$$

$$\beta = \bar{w} / w_n \text{ -- relação de freqüências} \quad (2.9.h)$$

$$\theta = \delta - \text{arctag} [2\zeta\beta / (1 - \beta^2)] \text{ -- ângulo de fase da resposta permanente} \quad (2.9.i)$$

As constantes de integração A e B são determinadas pela aplicação das condições iniciais $x(0)$ e $\dot{x}(0)$.

Nota-se que a resposta total do sistema é composta de duas parcelas. Uma delas (2.9.a), decrescentes no tempo, oscila na freqüência natural w_d ; e a outra (2.9.b), permanente no tempo (enquanto persistir o carregamento), oscila na freqüência de excitação \bar{w} . Por essas razões, a primeira é dita "transitória" e a segunda "permanente".

De modo geral nas estruturas, quando excitadas por esforços contínuos no tempo, é a parcela permanente da resposta que causa problemas de vibração. Isso por que, enquanto a parcela transitória desaparece paulatinamente por ação do amortecimento, a parcela permanente tem amplitude constante e tanto maior quanto maior for a proximidade entre freqüências natural e de excitação ($\beta \rightarrow 1$). Na figura 2.3.a mostramos como varia

a amplitude da resposta permanente como função da relação de frequências (β), e do grau de amortecimento (ζ).

Esse fenômeno de amplificação elevada da resposta, quando coincidem as frequências natural e de excitação, é o que se chama de ressonância.

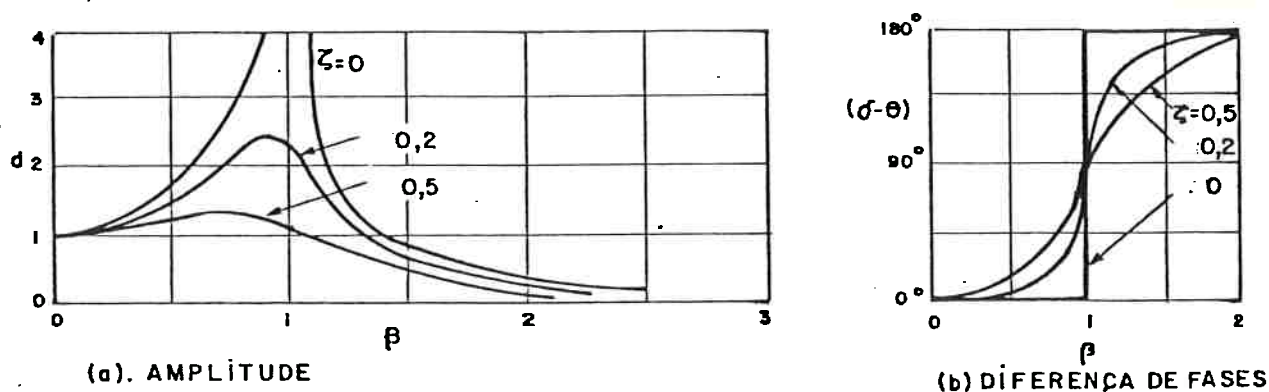


FIGURA 2.3 - VARIACÃO DA AMPLIFICAÇÃO DINÂMICA COM A FREQUÊNCIA E O AMORTECIMENTO

Observa-se, então, que a resposta permanente tende a infinito quando o sistema não amortecido está em ressonância. Um resultado mais geral pode ser obtido da equação (2.9.g) que mostra que, para $\beta=1$, a amplificação dinâmica é inversamente proporcional ao grau de amortecimento:

$$d_{\beta=1} = \frac{1}{2\zeta} \quad (2.10)$$

Contudo, apesar deste resultado estar próximo do máximo da amplificação, como mostra a figura 2.3.a, isso não representa a máxima resposta de um sistema amortecido. O valor da relação de frequências (β) para o pico de resposta precisa ser obtido pela diferenciação de (2.9.g), em relação à β , igualando o resultado a zero. Em casos práticos de estruturas com grau de amortecimento menores do que $1/\sqrt{2}$, a referência $|A_2|$ indica:

$$\beta_{\text{pico}} = \sqrt{1-2\zeta^2} \quad (2.11.a)$$

que corresponde a máxima amplificação dinâmica.

$$d_{\max} = [2\zeta (1-\zeta^2)^{0,5}]^{-1} \quad (2.11.b)$$

Para propósitos práticos de análise, contudo, a diferença de resultados entre (2.10) e (2.11.b) é desprezível. Por essa razão, na abordagem clássica dos problemas de vibração no navio — como discutida no capítulo 1 —, considera-se, simplesmente, a ocorrência de ressonância para $\beta=1$, ao invés do valor dado por (2.11.a).

É importante que se ressalte a importância do amortecimento no mecanismo de dissipação de energia, reduzindo substancialmente o pico de resposta na ressonância. Se o baixo valor do amortecimento permite que se despreze no cálculo da frequência natural do sistema (como fizemos no item precedente deste capítulo), a sua importância no fenômeno da ressonância exige que o consideremos, ainda que simplificada, no cálculo da resposta.

Um estudo mais completo, sobre a resposta ressonante de sistemas UGLD excitados harmonicamente, pode ser visto na referência [A2] em seu capítulo 4, item 4.3.

II.2.3 Resposta a um Carregamento Periódico

Equações expressando a resposta de um sistema UGLD no caso de excitação harmônica foram desenvolvidas no item precedente. Agora, sob a consideração de que a estrutura tem comportamento linear, e portanto vale o princípio de superposição de efeitos, vamos mostrar como essas mesmas equações são usadas para o cálculo da resposta no caso de excitação periódica.

Para tratar o carregamento periódico é necessário, apenas, expressá-lo em série de Fourier; a resposta do sistema para cada termo da série é, como consequência, a resposta de um UGLD excitado harmonicamente. A resposta total,

portanto, obtém-se da soma das respostas para cada um dos termos da série.

Definida a excitação periódica $p(t)$, esta pode ser expressa por sua série de Fourier [E1],

$$p(t) = p^m + \sum_{\ell} p_{\ell}^0 \text{sen}(w_{\ell} t + \delta_{\ell}) \quad (2.12.a)$$

onde p^m é o valor médio, p_{ℓ}^0 , w_{ℓ} e δ_{ℓ} as amplitudes, frequências e fases iniciais de cada um dos harmônicos da excitação. Sendo o período igual a T , tem-se:

$$w_{\ell} = 2\pi\ell/T \quad (2.12.b)$$

A resposta permanente do sistema é, então, dada por:

$$x(t) = (p^m/k) + \sum_{\ell} \rho_{\ell} \text{sen}(w_{\ell} t + \theta_{\ell}) \quad (2.13.a)$$

onde:

$$\rho_{\ell} = (p_{\ell}^0/k) \cdot d_{\ell} \quad (2.13.b)$$

$$d_{\ell} = [(1-\beta_{\ell})^2 + (2\zeta\beta_{\ell})^2]^{-0,5} \quad (2.13.c)$$

$$\beta_{\ell} = w_{\ell}/w_n = 2\pi\ell/(Tw_n) \quad (2.13.d)$$

$$\theta_{\ell} = \delta_{\ell} - \text{arctag}[2\zeta\beta_{\ell}/(1-\beta_{\ell}^2)] \quad (2.13.e)$$

A resposta do sistema é composta de parcelas harmônicas — tantas quantas são as parcelas harmônicas da excitação — vibrando nas frequências de excitação. É, portanto, periódica com mesmo período da excitação.

O fenômeno de ressonância manifesta-se, nesse caso, sempre que ocorrer a coincidência entre a frequência de um

dos harmônicos de excitação (w_ℓ) e a frequência natural do sistema (w_n): $\beta_\ell = 1$ para algum ℓ .

Usualmente, na análise de estruturas, os esforços periódicos de excitação tem período variável, de sorte que as frequências de excitação, em variando, podem estabelecer ressonâncias as mais diversas. Sob esta situação é importante que se faça a análise da resposta, não no domínio do tempo — observando $x(t)$ —, mas sim no domínio da frequência, observando a evolução das amplitudes das componentes da resposta (ρ_ℓ), como ilustra o exemplo da figura 2.4.

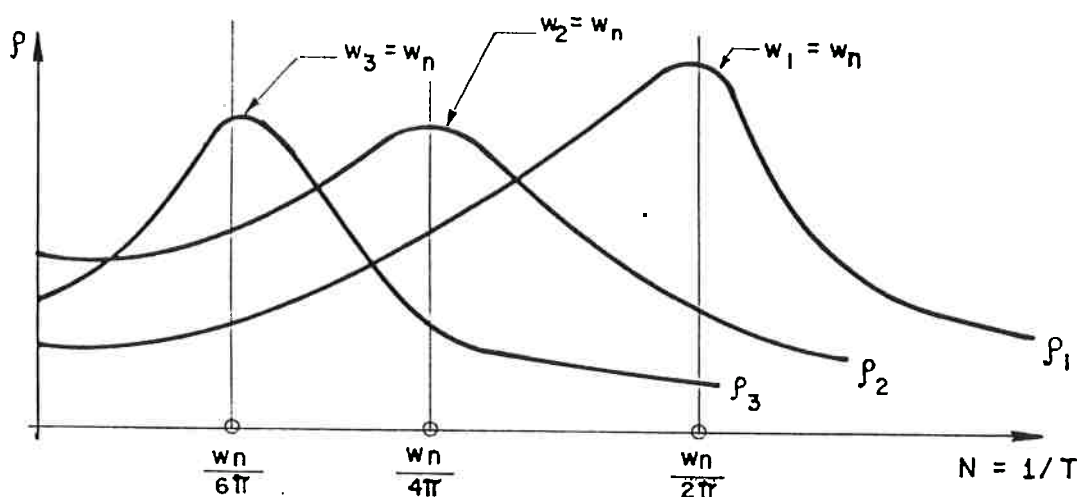


FIGURA 2.4 - RESPOSTA NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA PARA O SISTEMA UGLD, SOB UMA EXCITAÇÃO PERIÓDICA COM TRES COMPONENTES HARMÔNICAS.

Quando se dispõe da resposta calculada no domínio da frequência, é simples verificar para que valores do período T da excitação ocorrerão picos de resposta do sistema. No exemplo da figura 2.4, identificam-se os picos de resposta que ocorrem em cada uma das possíveis ressonâncias, facilitando a tarefa de análise dos resultados.

II.3 SISTEMA DE VÁRIOS GRAUS DE LIBERDADE (MGLD)

II.3.1 Seleção dos Graus de Liberdade

Na maioria das vezes, a resposta dinâmica de uma estrutura não pode ser adequadamente descrita por um modelo de um grau de liberdade (UGLD); usualmente seu comportamento precisa ser representado por mais do que um grau de liberdade. Como vimos em II.1, os graus de liberdade num sistema de parâmetros discretizados são os deslocamentos de certos pontos (nós) selecionados da estrutura. Assim, a deformação da estrutura é definida por um conjunto de, digamos, n deslocamentos, num número finito de pontos:

$$v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t) \quad (2.14)$$

Em princípio, os nós podem ser selecionados arbitrariamente, porém, na prática, devem estar associados às características das propriedades físicas de massa, rigidez e amortecimento, de modo a prover boa definição para as deformações da estrutura. O número de graus de liberdade (componentes dos deslocamentos) n é função da discretização proposta pelo analista. Quanto maior n , melhor será a aproximação que se obtém para o comportamento dinâmico da estrutura. Contudo, em muitos casos, excelentes resultados podem ser obtidos com alguns poucos graus de liberdade.

II.3.2 Condição de Equilíbrio Dinâmico

A equação de movimento do sistema (MGLD) é obtida impondo-se o equilíbrio de cada um dos esforços, efetivamente associados a cada um de seus graus de liberdade. Matricialmente, temos:

$$F_I(t) + F_A(t) + F_E(t) = P(t) \quad (2.15)$$

sendo:

$F_I(t)$ - vetor dos esforços de inércia (nx1)

$F_A(t)$ - vetor dos esforços de amortecimento (nx1)

$F_E(t)$ - vetor dos esforços elásticos (nx1)

todos eles resultantes do movimento, e

$P(t)$ - vetor dos esforços externos aplicados (nx1)

Cada um dos vetores F_I , F_A e F_E pode ser obtido a partir dos deslocamentos e suas derivadas temporais, tomando um conjunto apropriado de coeficientes de influência ($|A2|$, $|A3|$). Supondo, agora, amortecimento do tipo viscoso e, ainda, comportamento linear para a estrutura, a equação de equilíbrio pode ser obtida na seguinte forma, parcela a parcela, correspondente a (2.15):

$$M.\ddot{V}(t) + C.\dot{V}(t) + K.V(t) = P(t) \quad (2.16)$$

onde:

$M = [m_{ij}]$; $i=1,n$; $j=1,n$ - matriz dos coeficientes de influência de massa:

m_{ij} - esforço de inércia associado ao grau de liberdade i , proveniente de uma aceleração unitária, isolada, segundo o grau de liberdade j .

$C = [c_{ij}]$; $i=1,n$; $j=1,n$ - matriz dos coeficientes de influência de amortecimento:

c_{ij} - esforço de amortecimento associado ao grau de liberdade i , proveniente de uma velocidade unitária, isolada, segundo o grau de liberdade j .

$K = [k_{ij}]$; $i=1,n$; $j=1,n$ - matriz dos coeficientes de influência de rigidez:

k_{ij} - esforço elástico associado ao grau de liberdade i , proveniente de um deslocamento unitário, isolado, segundo o grau de liberdade j .

ou, simplesmente,

M - matriz de massa ($n \times n$)

C - matriz de amortecimento ($n \times n$)

K - matriz de rigidez ($n \times n$)

e

$V(t) = \{v_i(t)\}; i=1, n \rightarrow$ vetor dos deslocamento nodais

$\dot{V}(t) = \{\dot{v}_i(t)\}; i=1, n \rightarrow$ vetor das velocidades nodais

$\ddot{V}(t) = \{\ddot{v}_i(t)\}; i=1, n \rightarrow$ vetor das acelerações nodais

$P(t) = \{P_i(t)\}; i=1, n \rightarrow$ vetor das cargas nodais

portanto, (2.16) é um sistema de n equações de movimento, de cuja solução obtém-se a resposta dinâmica da estrutura discretizada por n graus de liberdade.

II.3.3 Instituição das Propriedades Matriciais da Estrutura

II.3.3.1 Matriz de rigidez

Não temos a intenção de apresentar aqui o que é prática corrente no cálculo da matriz de rigidez, dentro da técnica dos elementos finitos. Tanto numa análise estática, como numa análise dinâmica, esse cálculo é efetuado segundo os mesmos moldes. Preocupar-nos-emos, apenas, em fazer considerações visando a análise de estruturas com movimentos de corpo rígido*.

A forma mais simples de (2.16) que estabelece, apenas, o equilíbrio estático entre esforços elásticos e esforços externos, é dada por:

*Como demonstrado em [B1], o estabelecimento de um procedimento matemático especial, que viabilize o cálculo de estruturas hipostáticas (matriz de rigidez singular), é essencial para a análise dinâmica.

$$K \cdot V = P = F_E \quad (2.17)$$

Para o caso de estruturas externamente não hipostáticas, o mesmo equilíbrio estático pode ser, ainda, estabelecido através dos coeficientes de influência de flexibilidade

$$V = F \cdot P = F \cdot F_E \quad (2.18)$$

onde F é a matriz de flexibilidade:

$$F = [f_{ij}] ; \quad i=1,n; \quad j=1,n \quad (2.19)$$

cujo termo genérico é definido por:

f_{ij} - deslocamento associado ao grau de liberdade i , proveniente de uma carga unitária, isolada, segundo o grau de liberdade j

A energia de deformação, armazenada em qualquer estrutura, pode ser expressa em termos das matrizes de rigidez, ou de flexibilidade, sendo igual ao trabalho dos esforços externos ($|A3|, |A12|$):

$$e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i \cdot v_i = \frac{1}{2} P^T \cdot V \quad \text{- energia de deformação} \quad (2.20)$$

Introduzindo (2.18) em (2.20), resulta:

$$e = \frac{1}{2} P^T \cdot F \cdot P \quad (2.21)$$

Alternativamente, usando o fato de que K é simétrica ($K^T=K$), temos:

$$e = \frac{1}{2} P^T \cdot V = \frac{1}{2} F_E^T \cdot V = \frac{1}{2} (K \cdot V)^T \cdot V = \frac{1}{2} V^T \cdot K^T \cdot V = \frac{1}{2} V^T \cdot K \cdot V$$

$$e = \frac{1}{2} V^T \cdot K \cdot V \quad (2.22)$$

Por outro lado, a energia de deformação armazenada numa estrutura, sem possibilidade de movimentos de corpo rígido, durante qualquer estado de deformação ($V \neq 0$), é positiva; daí torna-se evidente que:

$$V^T K \cdot V > 0 \quad \text{e} \quad P^T \cdot F \cdot P > 0 \quad (2.23)$$

Matrizes que satisfaçam (2.23) são ditas positivas definidas, são não singulares e podem ser invertidas. Neste caso, prova-se que:

$$K^{-1} = F \quad (2.24)$$

ou seja: a flexibilidade é a inversa da rigidez.

No capítulo 3 veremos como o programa NAVDIN aborda a solução do problema de autovalor decorrente de (2.16). Os métodos matemáticos que utiliza baseiam-se na hipótese inicial de a matriz de rigidez ser positiva definida. Quando isto não acontecer — caso das estruturas com movimentos de corpo rígido — é necessário que, a priori, o problema de autovalor seja modificado pela remoção da singularidade da matriz de rigidez.

Um processo, bastante eficiente nessa remoção de singularidade, baseia-se no tratamento matemático conhecido como "deslocamento de autovalores" ("Eigenvalue Shift", |B1|, |A2|). A aproximação física determinada pelo processo reside no fato de que, a cada grau de liberdade da estrutura, é adicionada uma rigidez concentrada "fictícia" proporcional à massa aí existente. A matriz de rigidez assim modificada é não singular. Se a proporcionalidade, entre massas nodais e rigezas concentradas, é mantida constante por todos os graus de liberdade da estrutura, então, o processo de deslocamento apresenta as vantagens de

não implicar em mudanças nas formas modais, e de permitir uma avaliação exata do desvio entre frequências naturais reais e calculadas com a matriz de rigidez modificada $|B_1|$.

III.3.3.2 Matriz de massa

No cálculo dos coeficientes de influência de massa, dois processos são usualmente empregados. O primeiro processo, e mais simples, consiste em supor que as massas do sistema (massas e momentos de inércia de massa) estão concentradas nos nós resultantes da discretização do sistema, ficando a cargo do analista a escolha, conveniente, das mesmas em cada nó e segundo cada grau de liberdade. Constrói-se, assim, o que se convençiona chamar de Matriz de Massas Discretas.

Então, pela própria definição de coeficientes de influência, se segundo cada grau de liberdade existem apenas esforços de inércia associados a acelerações dadas segundo esse mesmo grau de liberdade, a matriz de massa discreta é do tipo diagonal:

$$m_{ij} = 0; \quad \forall i, j / i=1, n; j=1, n \text{ e } i \neq j$$

$$m_{ij} = m_i; \quad \forall i, j / i=1, n; j=1, n \text{ e } i=j$$

portanto,

$$M = \text{diag}[m_i]; \quad i=1, n \text{ (Matriz de Massas Discretas) (2.25)}$$

onde m_i ; $i=1, n$ é o esforço de inércia associado ao grau i , proveniente de uma aceleração unitária, isolada, segundo o próprio grau de liberdade i ; sendo, portanto, igual a massa concentrada que atua segundo esse grau de liberdade.

Numa análise pelo programa NAVDIN, que trabalha a-

penas com matriz de massas discretas, é possível especificar seis massas em cada nó do modelo (sistema discretizado dentro da Técnica dos Elementos Finitos). Três delas relativas a deslocamentos lineares (massas propriamente ditas) e outras três relativas a deslocamentos angulares (momentos de inércia de massa), segundo um terno de eixos globais (X,Y,Z) previamente definido.

No segundo processo, usualmente empregado, utiliza-se o conceito de elementos finitos no cálculo dos coeficientes de influência de massa— para cada elemento da estrutura discretizada — por um método semelhante à obtenção dos coeficientes de influência de rigidez. Constrói-se, assim, o que se convençiona chamar de Matriz de Massa Consistente ($|A12|$, $|A13|$).

II.3.3.3 *Matriz de amortecimento*

Como veremos adiante, o conhecimento das propriedades de massa e de rigidez do sistema permite o cálculo de frequências e modos naturais de vibração. No entanto, se estamos interessados em conhecer a resposta do sistema à excitação, é necessário que se considere, também, suas propriedades de amortecimento.

Na realidade, a mudança contínua de energia de potencial para cinética, de modo que a energia mecânica total conserve-se, ocorre apenas em sistemas ideais. Na prática, com a presença de amortecimento, à cada ciclo de vibração uma parcela da energia armazenada é dissipada de modo que, na ausência de esforços externos compensando tal dissipação, a amplitude de vibração reduz-se progressivamente até a parada.

Enquanto as propriedades de massa e rigidez podem ser consideradas como características próprias do sistema estrutural, as propriedades de amortecimento, na realidade, não podem ser consideradas como tal, a menos que assim sejam idea-

lizadas. Os esforços de amortecimento dependem tanto das características do sistema estrutural bem como de elementos exteriores a ele |A9|.

Assim, formulações para introduzir no modelo características de amortecimento são, ainda hoje, motivo de extensas pesquisas em todo o mundo. Do ponto de vista prático, o amortecimento (admitido como sendo do tipo viscoso) tem sido expresso em termos de porcentagens de amortecimento crítico, estabelecidas a partir de experiências com estruturas semelhantes.

A natureza do amortecimento na estrutura do navio é usualmente classificada segundo os seguintes casos:

- i) Amortecimento estrutural, devido ao atrito interno no material, ou entre juntas dos elementos do sistema estrutural. Portanto, resultantes da deformação na estrutura.
- ii) Amortecimento viscoso, devido ao fato de o sistema vibrar em contato com fluidos (água, ar, óleo), gerando formas de dissipação de energia por atrito ou por formação de ondas.
- iii) Amortecimento por atrito seco, devido ao movimento de corpos em superfícies secas, tais como os itens de carga.

Assim, como decorrência da complexibilidade dos fenômenos envolvidos, é impraticável, via de regra, a determinação racional direta da matriz de amortecimento. Considerações sobre a introdução do amortecimento no cálculo da resposta, serão vistas adiante.

II.3.3.4 *Matriz de carga. Carregamentos dinâmicos determinísticos*

Em geral a distribuição espacial de cargas pela estrutura é tal que se tem esforços concentrados e/ou distribuídos. Se os esforços concentrados estão associados a graus de liberdade estabelecidos no sistema discretizado, o vetor de carregamento de (2.6) é formado de modo imediato. Porém, no caso de esforços distribuídos, ou concentrados fora dos nós, é necessário que se realize cálculos intermediários para a transformação do carregamento geral em carregamento nodal equivalente. Dois processos podem ser usados com essa finalidade: aplicação simples da estática, por procedimento semelhante ao cálculo de cargas nodais equivalentes da análise estática; ou a partir do conceito de elementos finitos $[A2]$, de modo semelhante à determinação da matriz de massa consistente, já mencionado anteriormente.

O processo de elementos finitos estabelece bases mais precisas para a determinação do vetor de cargas nodais, representando mais adequadamente o carregamento real sobre a estrutura. Em grande parte dos casos práticos de análise de vibrações, contudo, não se justifica o esforço computacional necessário à sua utilização. Cargas distribuídas podem ser transformadas em cargas nodais do mesmo modo que se faz na análise estática, e cargas concentradas não nodais — pela criação de nós adicionais — podem ser transformadas em cargas nodais. Com isso, obtém-se distribuição de cargas puramente nodais pela estrutura, aproximando o carregamento real sem grandes imprecisões.

O programa NAVRAP, que foi desenvolvido para o cálculo da resposta, parte da premissa básica de que o carregamento sobre a estrutura é determinístico, periódico e concentrado apenas segundo os graus de liberdade resultantes da discretização do sistema estrutural. Em II.3.5 veremos como este fato é utilizado na solução da condição de equilíbrio (2.16) em

sua forma completa; enquanto no capítulo 4 trataremos de estabelecer o cálculo, assim formulado, no domínio da frequência.

II.3.4 Problema de Autovalor. Vibrações Livres Não Amortecidas

Já vimos que, segundo a abordagem clássica dos problemas de vibrações do navio, a solução do caso de vibrações livres não amortecidas serve à avaliação de modos e frequências naturais.

Neste caso, a equação de movimento do sistema obtém-se de (2.16) pela omissão da parcela de amortecimento, e do carregamento, resultando:

$$M \cdot \ddot{V} + K \cdot V = 0 \quad (2.26)$$

O problema de análise de vibração consiste, então, em determinar as condições para as quais (2.26) permite movimento. Por analogia com o comportamento do sistema UGLD, admite-se que o movimento de vibração livre seja harmônico, e expresso por:

$$V(t) = V_0 \text{ sen}(wt + \theta) \quad (2.27)$$

Nesta expressão, V_0 representa a forma pela qual o sistema vibra, sendo θ o ângulo de fase. Tomando-se a segunda derivada de (2.27) e, junto com esta, substituindo em (2.26), obtém-se:

$$[K - w^2M] \cdot V_0 = 0 \quad (2.28)$$

Agora, pela aplicação da regra de Cramer, a solução do sistema de equações simultâneas (2.28) é dada por:

$$V_0 = 0 / \det[K - w^2M] \quad (2.29)$$

Assim, uma solução não trivial — que represente efetivamente um estado de movimento — é possível apenas para os valores de w que anulem o denominador de (2.29). Em outras palavras, vibrações livres com amplitudes finitas são possíveis apenas quando:

$$\det [K - w^2 M] = 0 \quad (2.30)$$

Esta equação é dita "equação de frequências" do sistema. Sua expansão, pelo cálculo do determinante, leva a uma equação algébrica de grau \bar{n} ($\bar{n} \leq n$)*, na variável $\lambda = w^2$. As \bar{n} raízes dessa equação ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{\bar{n}}$)* representam os autovalores do problema, cujas raízes quadradas são as frequências naturais de cada um dos \bar{n} modos naturais de vibrar do sistema estrutural. O modo de menor frequência é chamado primeiro modo, o próximo de menor frequência de segundo, e assim por diante até \bar{n} . A matriz diagonal composta pelos λ_i , arranjados em ordem crescente, é chamada de matriz dos autovalores Λ :

$$(**) \quad \Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{\bar{n}}] \quad (2.31)$$

Uma vez determinados os autovalores, a equação (2.28) de movimento pode ser expressa por:

$$[K - \lambda_i M] \cdot V_0 = 0 \quad (2.32)$$

Portanto, desde que depende da frequência, (2.32) é diferente para cada modo. Como o sistema de equações (2.32) é possível e indeterminado — pois os autovalores foram avaliados para esta condição — as amplitudes de vibração

*Um sistema estrutural discretizado com n graus de liberdade possui, no máximo, n frequências naturais, quando segundo todos os graus de liberdade existirem massas associadas.

**Pode-se mostrar [A2] que, se as matrizes de massa e rigidez são reais, simétricas e positivas definidas — caso de estruturas não hipostáticas estáveis — todas as raízes de equação de frequências são reais e positivas. Estruturas hipostáticas — com possíveis movimentos de corpo rígido — terão tantas frequências nulas quantos forem estes movimentos.

são indeterminadas. Contudo, a forma de vibrar pode ser determinada pela solução de todos os deslocamentos em termos de um arbitrariamente fixado.

O vetor de amplitudes (V_0), que assim obtém-se, constitui-se na forma modal associada à i -ésimo frequência natural de vibração do sistema. O vetor corresponde, então, ao i -ésimo modo natural de vibração (ϕ_i)

$$\phi_i = \{\varphi_{1i}, \varphi_{2i}, \varphi_{3i}, \dots, \varphi_{ki}, \dots, \varphi_{ni}\}^T \quad (2.33)$$

onde o termo genérico φ_{ki} representa a amplitude modal segundo o k -ésimo grau de liberdade, no i -ésimo modo.

A forma de cada um dos \bar{n} modos naturais de vibração pode ser obtida por esse mesmo processo e, depois, todos reunidos numa única matriz dita matriz dos autovetores (Φ)

$$\Phi = [\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_{\bar{n}}] \quad (2.34)$$

II.3.4.1 Condições de ortogonalidade. Normalização

As formas modais ϕ_i têm certas propriedades especiais, que são muito úteis na análise dinâmica de estruturas. Essas propriedades, ditas de ortogonalidade, podem ser demonstradas pela aplicação do Teorema de Betti ($|A_2|, |A_{12}|, |A_{13}|$). São elas:

$$\phi_i^T \cdot M \cdot \phi_j = 0 \quad \text{para } i \neq j \quad (2.35.a)$$

$$\phi_i^T \cdot K \cdot \phi_j = 0 \quad \text{para } i \neq j \quad (2.35.b)$$

A primeira delas expressa a ortogonalidade de dois modos naturais distintos (de frequências distintas), tendo como "peso" a matriz de massa. A segunda expressa o mesmo, tendo como peso

a matriz de rigidez.

Ambas as propriedades podem ser reunidas numa única família, com a seguinte forma geral $|A2|$:

$$\phi_i^T M [M^{-1}K]^b \phi_j = 0 \quad \text{para } i \neq j \text{ e,} \quad (2.36)$$

$$-\infty < b < \infty$$

donde as duas condições básicas, (2.35.a) e (2.35.b), são obtidas fazendo $b=0$ e $b=1$, respectivamente.

Vimos anteriormente que as amplitudes de um modo de vibrar, obtidas da solução do problema de autovalor, são arbitrariamente determinadas pela fixação de um de seus pares; apenas a forma modal é univocamente definida. No desenvolvimento do processo de cálculo, a amplitude de um certo grau de liberdade pode ser feita igual a unidade, e os outros deslocamentos determinados relativamente a este valor de referência. Isto é chamado de normalização das formas modais em relação a uma coordenada de referência.

Outro processo de normalização é frequentemente empregado. Em muitos programas de computador, a exemplo do NAV-DIN, os modos naturais são normalizados tal que seja satisfeita a seguinte identidade.

$$\phi_i^T M \phi_i = 1 \quad \text{para todo } i=1,2,3,\dots,\bar{n} \quad (2.37)$$

Qualquer vetor ϕ_i previamente calculado — digamos $\hat{\phi}_i$ — pode ser multiplicado por uma constante — digamos α_i —, sem que se altere, obviamente, a forma modal representada e de modo a satisfazer (2.37). Usando este fato, obtém-se:

$$\alpha_i = \{\hat{\phi}_i^T M \hat{\phi}_i\}^{-0,5} \quad (2.38.a)$$

$$\phi_i = \alpha_i \hat{\phi}_i \quad (2.38.b)$$

Assim, cada modo tem sua própria constante de normalização, de sorte que, em forma compacta, temos:

$$\begin{matrix} \Phi^T & \cdot & M & \cdot & \Phi & = & I & \text{(matriz identidade)} & (2.39) \\ (\bar{n} \times n) & & (n \times n) & & (n \times \bar{n}) & & (\bar{n} \times \bar{n}) & & \end{matrix}$$

uma vez que valem as propriedades de ortogonalidade em relação à massa (2.35.a), e a condição de normalização (2.37).

As formas modais normalizadas nesse âmbito são ditas "ortonormais em relação à matriz de massa" ou, simplesmente, "M-ortonormalizadas". O uso de modos M-ortonormalizados é bastante conveniente para o desenvolvimento de programas de computador, contudo, não tem nenhum mérito particular quando os cálculos forem realizados manualmente.

II.3.4.2 Forma compacta do problema de autovalor

O programa NAVDIN resolve o problema de autovalor pelo emprego da técnica de Iteração por Subespaços, que veremos no capítulo seguinte.

Neste caso, é necessário que a condição de equilíbrio dinâmico expressa por:

$$[K - \lambda_i M] \phi_i = 0 \quad \text{para todo } i=1,2,3,\dots,\bar{n} \quad (2.40)$$

seja reunida numa forma compacta, pelo emprego das matrizes dos autovalores (Λ) e dos autovetores (Φ); respectivamente definidas em (2.31) e (2.34).

Se (2.40) vale para todos os modos naturais, e respectivas frequências, do sistema estrutural, decorre imediatamente

$$\begin{matrix} K & \cdot & \Phi & = & M & \cdot & \Phi & \cdot & \Lambda & (2.41) \\ (n \times n) & & (n \times \bar{n}) & & (n \times n) & & (n \times \bar{n}) & & (\bar{n} \times \bar{n}) & \end{matrix}$$

como forma compacta do problema de autovalor.

Pré-multiplicando (2.41) por Φ^T , e usando as propriedades de ortogonalidade, resulta:

$$[k_i^*] = [m_i^*] \cdot \Lambda \quad (2.42.a)$$

onde $[k_i^*] = \Phi^T K \Phi$ - matriz diagonal das rigezas generalizadas: (2.42.b)

$$k_i^* = \phi_i^T K \phi_i$$

e

$[m_i^*] = \Phi^T M \Phi$ - matriz diagonal das massas generalizadas: (2.42.c)

$$m_i^* = \phi_i^T M \phi_i$$

Para o caso de modos naturais M-ortonormalizados:

$$[m_i^*] = \Phi^T M \Phi = I \quad (2.43)$$

tal que de (2.42.a) conclui-se:

$$k_i^* = \phi_i^T K \phi_i = \omega_i^2 \quad \text{para } i=1,2,3,\dots,\bar{n} \quad (2.44)$$

ou seja: "Se a normalização dos modos naturais é tal que todas as massas generalizadas são iguais a unidade, então, as rigezas generalizadas são iguais ao quadrado das respectivas frequências naturais em cada modo".

Este fato, como veremos adiante, em conjunto com as propriedades de ortogonalidade, pode ser usado na simplificação das equações de movimento, quando do cálculo da resposta do sistema.

II.3.5 Análise da Resposta Dinâmica

Na análise da resposta dinâmica das estruturas é necessário obter a solução da equação de equilíbrio (2.16) na sua forma completa

$$M.\ddot{V}(t)+C.\dot{V}(t)+K.V(t)=P(t) \quad (\text{rep.2.16}) \quad (2.45)$$

onde, no âmbito do presente trabalho, consideramos $P(t)$ como um vetor de cargas nodais (determinísticas), variando periodicamente no tempo.

Casos há, na análise dinâmica da estrutura do navio — como vimos no capítulo 1 —, onde o carregamento não se enquadra sob as premissas acima formuladas. Em tais casos, recomenda-se ao leitor recorrer à literatura relacionada nas referências bibliográficas, dentre as quais destacamos aquelas classificadas sob denominação A.

Como solução de (2.45) pode-se pretender obter o vetor $V(t)$ — e suas derivadas — expresso no domínio do tempo. Neste caso denomina-se a resposta, assim obtida, como histórico de resposta em deslocamento — velocidade ou aceleração —. Contudo, conforme já mencionado anteriormente, para excitações de natureza periódica é bastante mais conveniente expressar a resposta no domínio da frequência. Sob tal consideração é que desenvolveremos este item, estabelecendo as bases daquilo que se aborda no capítulo 4.

Do ponto de vista puramente matemático, é sempre possível integrar numericamente (2.45) na forma em que esta se encontra, sem transformações preliminares. A este procedimento denomina-se "Integração Direta". Se para o caso geral de uma excitação qualquer, a "Integração Direta" da equação de equilíbrio dinâmico apresenta-se como único recurso viável, no presente caso ela não é, seguramente, apropriada $|B1|$. Não se justifica a integração numérica de (2.45) quando se sabe que a natureza pe

riódica da excitação permite a obtenção de solução puramente analítica.

Muito mais conveniente é utilizar um processo de integração que se pautar na propriedade periódica da excitação e nas propriedades de ortogonalidade dos modos naturais do sistema estrutural. Como veremos a seguir, pelo emprego do que se chama de "Superposição Modal", é possível transformar a equação matricial de ordem n (2.45) em equações escalares desacopladas, quando se considera as propriedades de ortogonalidade. Cada uma dessas equações escalares — equivalentes à equação de um sistema de um grau de liberdade — é resolvida analiticamente do modo que já vimos em II.2.3.

II.3.5.1 Desacoplamento da equação diferencial matricial

A idéia básica do método de superposição modal reside no aproveitamento das propriedades de ortogonalidade, dos modos naturais em relação às matrizes de massa e rigidez do sistema, a fim de promover o desacoplamento de (2.45).

Admite-se que a resposta estrutural pode ser descrita, adequadamente, pelas formas modais correspondentes às p mais baixas frequências naturais, através da transformação:

$$\begin{aligned} V(t) &= \Phi \cdot Y(t) = \Phi \cdot \{y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)\} = \\ &= \sum_{i=1}^p \phi_i y_i(t) \end{aligned} \quad (2.46)$$

As formas modais (ϕ_i) formam um espaço de vetores, linearmente independentes, cujas amplitudes ($y_i(t)$) servem como coordenadas generalizadas, capazes de expressar qualquer forma de deformação da estrutura. Servem, portanto, com os mesmos propósitos das funções trigonométricas numa série de Fourier, sendo vantajosas pelas mesmas razões: ortogonalidade entre os termos

da série e capacidade de descrição apropriada dos deslocamentos, tal que boas aproximações são obtidas com alguns poucos termos.

Em (2.46) é perceptível que a matriz das formas modais (Φ) serve para transformar as coordenadas generalizadas (Y) nas coordenadas geométricas (deslocamentos nodais) V . Essas coordenadas generalizadas de amplitudes modais são chamadas coordenadas normais da estrutura.

A ortogonalidade dos modos naturais pode, então, ser usada para simplificar a equação geral do movimento. Introduzindo (2.46), e suas derivadas temporais, em (2.45), e pré-multiplicando por Φ^T , resulta:

$$\ddot{Y}(t) + \Delta \dot{Y}(t) + \Lambda Y(t) = \Phi^T \cdot P(t) \quad (2.47.a)$$

onde:

$$\Delta = \Phi^T \cdot C \cdot \Phi \quad (2.47.b)$$

Nesta derivação das equações do movimento em coordenadas normais, costuma-se admitir que as formas modais (ou autovetores) do sistema não amortecido tem, também, a propriedade de ortogonalidade em relação à matriz de amortecimento*. Isto é:

$$\phi_i^T \cdot C \cdot \phi_j = 0 \quad ; \quad i \neq j \quad (2.48)$$

Sob a luz desta hipótese, torna-se evidente que a matriz Δ , definida em (2.47.b), é da forma diagonal,

$$\Delta = \Phi^T \cdot C \cdot \Phi = \text{diag}[\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_p] \quad (2.49)$$

*Justifica-se tal procedimento tendo em vista a dificuldade em avaliar as propriedades de amortecimento.

onde os escalares δ_i , $i=1,2,\dots,p$, devem expressar, de alguma maneira, as propriedades de amortecimento do sistema discretizado.

Então, (2.47.a) representa uma derivação das equações de movimento, onde p equações desacopladas, em coordenadas normais, foram obtidas:

$$\ddot{y}_i(t) + \delta_i \dot{y}_i(t) + \lambda_i y_i(t) = \phi_i^T \cdot P(t) ; i=1,2,3,\dots,p \quad (2.50)$$

sendo que, cada uma destas equações é correspondente a de um sistema de um grau de liberdade (UGLD), e como tal pode ser tratada. Assim, por analogia a equação do movimento amortecido de um sistema UGLD, as constantes δ_i são definidas por:

$$\delta_i = 2 \cdot \xi_i \cdot w_i \quad (2.51)$$

onde w_i é a frequência natural não amortecida ($w_i = \sqrt{\lambda_i}$), para o i -ésimo modo, e onde ξ_i representa uma porcentagem do amortecimento crítico em cada modo.

Portanto, (2.50) reduz-se a:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_i(t) + 2 \cdot \xi_i \cdot w_i \cdot \dot{y}_i(t) + w_i^2 \cdot y_i(t) = \\ = \phi_i^T \cdot P(t) ; i=1,2,\dots,p \end{aligned} \quad (2.52)$$

que é a forma final das equações de movimento, em coordenadas normais desacopladas, do método de superposição modal.

II.3.5.2 Condições para ortogonalidade do amortecimento

Na derivação das equações do movimento em coordenadas normais, admitiu-se que as propriedades de ortogonalidade dos modos naturais prestam-se ao desacoplamento dos esfor-

ços de amortecimento, da mesma maneira que para os esforços elásticos e de inércia. As formas modais do sistema não amortecido serão, então, as mesmas que no sistema amortecido. Será útil, portanto, estabelecer as condições para as quais ocorre o desacoplamento do amortecimento.

Rayleigh [A2] mostrou que uma matriz de amortecimento da forma:

$$C = a_0 \cdot M + a_1 \cdot K \quad (2.53)$$

onde a_0 e a_1 são constantes arbitrárias de proporcionalidade, satisfaz (2.48). Isto é facilmente verificável aplicando as condições de ortogonalidade (2.35) a ambos os lados de (2.53).

Podemos dizer, então, que uma matriz de amortecimento proporcional às matrizes de massa e de rigidez leva ao desacoplamento das equações de movimento [A9]. É possível mostrar que a forma geral da matriz de amortecimento proporcional [A2] é dada por:

$$C = M \cdot \sum_b a_b \cdot [M^{-1} \cdot K]^b \quad (2.54)$$

onde b é uma constante inteira no intervalo $(-\infty, \infty)$, podendo ser incluída tantas parcelas quanto as desejadas.

A matriz de amortecimento de Rayleigh (2.53) é, naturalmente, um caso particular de (2.54), tomando-se $b=0$ e $b=1$.

Amortecimento do tipo proporcional é meramente arbitrado, sem que se disponha de razões, pautadas no fenômeno de amortecimento, que justifiquem sua adoção. Esta deve-se, unicamente, às facilidades matemáticas decorrentes no equacionamento do problema. De qualquer modo, contudo, é sempre possível escolher constantes a_b de proporcionalidade, de sorte que do cálculo obtenham-se boas aproximações para a resposta do sistema.

Demonstra-se, também $|A2|$, que as relações entre graus de amortecimento modais e as constantes a_b são:

$$\xi_i = \frac{1}{2w_i} \cdot \sum_b a_b \cdot w_i^{2b} ; \quad i=1,2,\dots,\bar{n} \quad (2.55)$$

As relações (2.55) proporcionam meios de se calcular as constantes a_b a partir de graus de amortecimentos modais, especificados em um número de modos qualquer. Toma-se, em geral, um número de parcelas na série igual ao número de graus de amortecimentos modais especificados.

O interesse de se tomar um número maior de parcelas na somatória de b reside no fato de que, incluindo termos a adicionais, é possível obter um maior grau de controle sobre as porcentagens de amortecimento em cada modo.

Essa forma de introduzir o amortecimento justifica-se pelo fato de facilitar o desenvolvimento da análise em ter mos de utilização do computador, uma vez que não são necessários espaços de memória para armazenar a matriz de amortecimento.

Nos parágrafos precedentes vimos que, quando a matriz de amortecimento da estrutura tem a forma que satisfaz as condições de ortogonalidade, a transformação para coordena das normais, das equações de movimento, conduz a um conjunto de equações desacopladas. Como a resposta do sistema pode ser obtida por superposição das soluções dessas equações (equiva-lentes, cada uma, a equação de um sistema de um grau de liber-dade) este desacoplamento é uma das grandes vantagens do uso de coordenadas normais. Outra vantagem, igualmente apreciável, fundamenta-se no fato de a resposta dinâmica essencial (de in-teresse prático) frequentemente estar associada com poucas co-ordenadas normais de ordem mais baixa; tal que uma boa aproxi-mação para a resposta pode ser obtida com um número pequeno de formas modais.

Quando a resposta dinâmica está toda contida apenas em poucos modos de ordem mais baixa, é vantajoso aplicar a transformação para coordenadas normais mesmo quando a matriz de amortecimento não satisfaz à condição de ortogonalidade.

II.3.5.3 *Sumário do método de superposição modal*

A transformação para as coordenadas normais, que serve para mudar o conjunto de n equações acopladas num conjunto de n equações desacopladas, é a base do método de Superposição Modal na análise dinâmica. O método pode ser usado para avaliar a resposta dinâmica de qualquer estrutura, com comportamento linear, para a qual os deslocamentos nodais sejam expressos em termos de um conjunto de n coordenadas discretas, e onde o amortecimento pode ser representado por porcentagens (ou graus) de amortecimento modais.

No caso particular da análise da resposta dinâmica de estruturas hipostáticas, o método apresenta particular importância pois é possível, sem grande esforço computacional, eliminar as contribuições (indesejáveis) de modos correspondentes a movimentos de corpo rígido.

Suponhamos que no sistema discretizado as r frequências mais baixas correspondam a modos que não implicam em deformações (modos de corpo rígido). Assim,

$$\lambda_i = 0 \quad ; \quad i=1,2,\dots,r \quad (2.56)$$

O método de superposição modal consiste, então, das seguintes etapas:

- i) Cálculo das frequências e modos naturais para o sistema em vibrações livres não amortecidas, podendo ser empregada a técnica que veremos no capítulo 3. Como resultados serão

obtidas as p mais baixas frequências naturais (incluindo as r frequências nulas) e respectivos modos M -ortonormalizados.

ii) Cálculo dos carregamentos generalizados $p_i(t)$

$$p_i(t) = \phi_i^T \cdot P(t) \quad ; \quad i=r+1, r+2, \dots, p \quad (2.57)$$

Para $i < r$, esse cálculo, embora possa ser efetuado, não apresenta interesse. Obviamente, a análise só tem relevância para $p > r$.

iii) Cálculo das respostas normais $y_i(t)$

$$\ddot{y}_i(t) + 2\xi_i \cdot \dot{w}_i \cdot \dot{y}_i(t) + w_i^2 \cdot y_i(t) = p_i(t) \quad ; \quad (2.58)$$

$$i=r+1, r+2, \dots, p$$

A solução de cada uma das equações de (2.58) é equivalente a solução de um sistema de um grau de liberdade, podendo ser obtida por um processo qualquer. Para excitação periódica aplica-se o exposto em II.2.2 e II.2.3.

iv) Histórico de resposta em deslocamento. Quando a resposta normal para cada modo, $y_i(t)$, foi obtida na solução de (2.58), os deslocamentos são dados pela transformação de coordenadas (2.46):

$$V(t) = \sum_{i=r}^p \phi_i \cdot y_i(t) \quad (2.59)$$

onde as contribuições dos modos correspondentes a movimentos de corpo rígido não são contabilizadas. Deve ser notado que, para maior parte dos carregamentos de prática, as contribuições de modos de ordem superior tem pouca importância [A2]; de maneira que da somatória

em i não precisam constar muitos termos. Mesmo porque, a discretização de um sistema estrutural complexo tende a representar os modos de ordem superior com pouca precisão*.

Históricos de velocidades e de acelerações são obtidos por derivação de (2.59).

- v) Esforços elásticos na estrutura. O histórico de deslocamento da estrutura pode ser considerado como a medida básica de sua resposta ao carregamento dinâmico. Adicionalmente, a partir desse histórico, pode ser avaliado o histórico de resposta em tensões, com cálculo intermediário dos esforços elásticos por:

$$F_E(t) = K \cdot V(t) \quad (2.60)$$

sendo $V(t)$ dada por (2.59), e K a matriz de rigidez do sistema.

Deve ser notado que para o cálculo dos esforços elásticos resistentes é irrelevante a consideração das contribuições de modos de corpo rígido; uma vez que a esses modos não estão associadas deformações

A aplicação do método de Superposição Modal, como meio para a obtenção da resposta dinâmica do sistema estrutural no domínio da frequência, e de sorte a atender os propósitos deste trabalho, será mais apropriadamente abordada no capítulo 4. Presentemente, estabelecemos, tão somente, as bases para tal aplicação.

Considerando o caso de excitação periódica — previamente decomposta em série de Fourier — e o fato de a estrutura com comportamento linear poder ter sua resposta descrita por uma combinação linear dos modos naturais (ϕ_i) — o histórico de resposta em deslocamento é dado por:

*A medida que aumenta a ordem, mais deformada torna-se a forma modal, de sorte que um maior número de graus de liberdade torna-se necessário para bem descrevê-la.

$$V(t) = \sum_j \sum_l V_{jl}(t) = \sum_j \sum_l \sum_i \phi_i \cdot y_{ijl}(t) \quad (2.61.a)$$

onde $V_{jl}(t)$ é a parcela da resposta total do sistema que se deve, isoladamente, à ação do l -ésimo harmônico do esforço periódico aplicado segundo o j -ésimo grau de liberdade. O escalar $y_{ijl}(t)$ representa a resposta normal, no i -ésimo modo, devida à ação do mesmo harmônico do mesmo esforço.

Por derivação sucessiva de (2.61.a) obtém-se os históricos de resposta em velocidade e em aceleração, respectivamente, descritos por:

$$\dot{V}(t) = \sum_j \sum_l \sum_i \phi_i \cdot \dot{y}_{ijl}(t) \quad (2.61.b)$$

$$\ddot{V}(t) = \sum_j \sum_l \sum_i \phi_i \cdot \ddot{y}_{ijl}(t) \quad (2.61.c)$$

Usando, agora, nossa convenção de soma, estas expressões podem ser resumidas como a seguir

$$V(t) = V_{jl}(t) = \phi_i y_{ijl}(t) \quad (2.62.a)$$

$$\dot{V}(t) = \dot{V}_{jl}(t) = \phi_i \dot{y}_{ijl}(t) \quad (2.62.b)$$

$$\ddot{V}(t) = \ddot{V}_{jl}(t) = \phi_i \ddot{y}_{ijl}(t) \quad (2.62.c)$$

onde as somatórias em i , j e l ficam subentendidas.

É importante enfatizar que, como resultado das características da excitação, do comportamento do sistema estrutural e do método utilizado para o cálculo, a resposta total do sistema é composta de várias parcelas; uma para cada harmônico de cada esforço periódico-existente como excitação — e segundo cada modo incluído na análise. A somatória em j percorre os graus de liberdade nos quais há esforço periódico de excitação; a somatória em l esgota o número total de harmônicos de

cada um desses esforços; a somatória em i estende-se pelos modos naturais considerados representativos para a descrição do movimento do sistema.

Do ponto de vista prático, alguns poucos termos de cada somatória são suficientes para que se obtenha boa aproximação para a resposta. Contudo, ainda assim, o cálculo é substancialmente laborioso para não tornar fácil sua realização manual. Justifica-se, portanto, o desenvolvimento de um programa de computador que, a partir dos resultados conhecidos de modos e frequências naturais, calcule automaticamente a resposta dinâmica do sistema. No capítulo 4 complementamos as bases do programa NAVRAP desenvolvido para tal finalidade.

II.3.6 Esforços Nodais Elásticos

Já vimos que a resposta do sistema pode ser expressa em termos de parâmetros cinemáticos: deslocamentos, velocidades e acelerações. Sob o ponto de vista de análise de resultados, as acelerações — como veremos no capítulo 5 — tem importância fundamental para o estabelecimento da aceitabilidade do nível de vibrações, sob a ótica de reação humana e de equipamentos.

Frequentemente, contudo, quando se trata de verificar a aceitabilidade do nível de vibrações sob a ótica de resistência à fadiga da estrutura, é necessário expressar a resposta do sistema em termos de tensões nos elementos estruturais. O primeiro passo para tal fim consiste, então, em estabelecer o cálculo prévio dos esforços nodais elásticos nos elementos que compõem o modelo da estrutura discretizada.

Uma vez determinados os deslocamentos nodais ($V(t)$), o cálculo dos esforços elásticos processa-se à semelhança daquilo que é prática corrente na análise matricial estática por Elementos Finitos $[A3]$, $[A12]$. Deste modo, podemos escrever:

$$E^m(t) = S^m \cdot V^m(t) \quad (2.63)$$

$$\begin{matrix} (p \times 1) & & (p \times q) & / & (q \times 1) \end{matrix}$$

onde $E^m(t)$ é o vetor dos esforços elásticos, em coordenadas locais, do m -ésimo elemento da estrutura discretizada, e

p - número total de graus de liberdade do elemento, compatível com sua formulação (Exemplos: viga espacial, $p=12$; elemento quadrilátero de estado plano, $p=8$). Graus de liberdade definidos no sistema local de coordenadas.

q - número total de graus de liberdade dos nós do elemento, definidos no sistema global de coordenadas (de modo geral: $q=6 \times$ número de nós do elemento)..

$V^m(t)$ - vetor dos deslocamentos dos nós do elemento. É um subvetor do $V(t)$ conhecido, montado a partir deste, via matriz de conexão ($[A3], [A11]$),

S^m - matriz de rigidez do elemento.

A matriz de rigidez (S^m) em (2.63) deve estar na forma em que, pós-multiplicada pelos deslocamentos em coordenadas globais, reproduza os esforços de extremidades do elemento em coordenadas locais. Sendo K^m a matriz de rigidez do elemento, em coordenadas puramente locais, temos:

$$S^m = K^m \cdot R^m \quad (2.64)$$

$$\begin{matrix} & & (p \times p) & & (p \times q) \\ (p \times q) & & & & \end{matrix}$$

A matriz K^m é aquela que se emprega na derivação da matriz de rigidez global (K) do sistema, como é prática corrente* na técnica dos Elementos Finitos $[A11]$. R^m é a ma-

*Obtêm-se a matriz de rigidez do sistema em coordenadas globais por:

$$K = \sum_m (R^m)^T K^m (R^m)$$

triz de rotação* que, pós-multiplicando K^m , reproduz a matriz de rigidez do elemento na forma que importa em (2.63).

As matrizes K^m e R^m , para cada elemento do modelo, devem ser introduzidas como dados de entrada para o programa NAVRAP. Contudo, quando se o usa como pós-processador do programa NAVDIN, tais informações são transferidas, automaticamente, via arquivo em fita ou disco magnéticos (veja figura 1.2).

Aplicando, então, o método de Superposição Modal na obtenção de $V^m(t)$ de (2.63), vem:

$$\begin{aligned} E^m(t) &= S^m V^m(t) = S^m \sum_j \sum_l \sum_i \phi_i^m y_{ijl}(t) = \\ &= \sum_j \sum_l \sum_i S^m \phi_i^m y_{ijl}(t) \end{aligned}$$

ou, resumidamente

$$E^m(t) = S^m \phi_i^m y_{ijl}(t) \quad (2.65)$$

onde ϕ_i^m , por analogia com o significado de $V^m(t)$, é o vetor das amplitudes modais correspondentes aos graus de liberdade dos nós do elemento em questão.

Definindo, então,

$$B_i^m = S^m \cdot \phi_i^m \quad (2.66)$$

(p x 1) (p x q) (q x 1)

como sendo o vetor dos esforços elásticos em coordenadas normais (generalizadas) no i -ésimo modo e para o m -ésimo elemento, resulta

$$E^m(t) = B_i^m y_{ijl}(t) \quad (2.67.a)$$

ou, para a k -ésima componente deste vetor:

* R^m relaciona, através de cossenos diretores, as coordenadas locais com as globais.

$$e_k^m(t) = \sum_j \sum_l \sum_i e_{kijl}^m(t) = b_{ki}^m y_{ijl}(t) \quad (2.67.b)$$

onde:

$e_{kijl}^m(t)$ é a k -ésima componente do vetor dos esforços elásticos do m -ésimo elemento. Esforços estes devidos ao l -ésimo harmônico do esforço aplicado ao j -ésimo grau de liberdade, e quando se considera, apenas, a influência do i -ésimo modo.

b_{ki}^m é o elemento da k -ésima linha do vetor B_i^m ,

e y_{ijl} a resposta normal, como visto anteriormente.

A partir deste ponto, então, pelo conhecimento dos esforços elásticos, estamos em condições de formular o cálculo de tensões. Esta tarefa, já com o intuito de estabelecer a resposta no domínio da frequência, fica reservada ao capítulo 4 deste trabalho.

II.3.7 Trabalho Realizado por Ciclo

Um conceito importante, para nossas aplicações, é o de trabalho efetuado por uma força de variação harmônica em um movimento harmônico:

Conforme demonstrado em [A7], o conceito fundamenta-se em dois aspectos:

- i) O trabalho executado por uma força harmônica, que atua durante um deslocamento harmônico de frequência diferente daquela da força, é nulo durante um intervalo de tempo que contenha um número inteiro de ciclos da força, e um número inteiro de ciclos do deslocamento.

- ii) O trabalho executado durante um ciclo completo por uma força harmônica de amplitude p_0 , e frequência w , defasada de φ com um deslocamento harmônico de mesma frequência, e amplitude x_0 , é: $\pi p_0 x_0 \sin \varphi$

Assim, no caso de um sistema amortecido de um grau de liberdade (UGLD) excitado harmonicamente, o trabalho da força é máximo na ressonância, por que aí força e deslocamento (ambos com mesma frequência) estão defasados de 90° graus (figura 2.3.b). Sabe-se, por outro lado que, em sendo o sistema não amortecido, força e deslocamento estarão sempre em fase ou em oposição de fase (figura 2.3.b), de sorte que o trabalho realizado por ciclo será sempre nulo.

As relações de energia envolvidas no processo de vibração servem para melhor compreensão do fenômeno físico. Para movimentos "muito lentos" ($\beta \ll 1$, figura 2.3.b) a diferença de fase é nula e nenhum trabalho é executado em todo o ciclo. Em outras palavras, durante cada ciclo o trabalho da força é meramente convertido em energia potencial de deformação, de sorte que não há transformação desse em calor. Na ressonância ($\beta=1$) o trabalho dissipado por ciclo é igual a $\pi p_0 x_0$ por que, neste caso, a força externa é igual e oposta à força de amortecimento, e o trabalho é dissipado no amortecedor em forma de calor.

Essa conclusão pode ser usada na estima da amplitude de ressonância. A força de amortecimento tem amplitude cwx_0 e está defasada de 90° em relação ao deslocamento. Consequentemente, o trabalho dissipado no amortecimento, por ciclo, é πcwx_0^2 . Assim, como o trabalho realizado por ciclo pelo esforço externo $\pi p_0 x_0$ deve ser igual à energia dissipada, conclui-se que a amplitude de ressonância é p_0/cw .

Matematicamente falando, essa amplitude ocorre na frequência em que a diferença de fase é 90° , que não é exatamente, como já vimos, a frequência de máxima amplitude. Contu-

do, essas duas frequências são tão próximas — por que o amortecimento é baixo — que se pode obter uma boa aproximação da máxima amplitude igualando o trabalho realizado pela força externa ao trabalho dissipado pelo amortecimento. Para sistemas de um grau de liberdade esse processo aproximado não é de grande interesse, porém, para os sistemas estruturais mais complicados, em que um cálculo exato é laborioso, o método é uma alternativa.

Neste estudo a conceituação de trabalho realizado por ciclo, pelos esforços externos, será usada de modo a estabelecer um parâmetro que se preste à análise, ainda que aproximada, do comportamento vibratório da estrutura. Sua utilidade fica patente, quando se observa que permite a obtenção da medida da ação conjunta de todos os esforços de excitação, por que a energia introduzida no sistema pelos esforços é igual à soma das contribuições isoladas de cada um deles. O mecanismo de amortecimento deve ser capaz de dissipar o montante total da energia introduzida a cada ciclo, minimizando a energia de deformação armazenada na estrutura.

Para excitação periódica, a resposta permanente do sistema estrutural, também periódica, é composta da mesma gama de frequências da excitação. Fica patente, então, a utilidade do primeiro aspecto abordado, pois seu emprego implica em dizer que: apenas resultará em trabalho a ação das componentes harmônicas do esforço externo que se processa sobre a parcela dos deslocamentos de mesma frequência.

Num sistema de vários graus de liberdade (MGLD), o cálculo do trabalho deve ser desenvolvido tomando-se esforço e deslocamento que ocorrem segundo o mesmo grau de liberdade. Quando houver mais de uma excitação periódica, basta que as frequências, entre as gamas de cada um dos esforços, sejam comensuráveis para que o cálculo do trabalho total realizado por ciclo (período da resposta) possa ser simplificado. Neste caso, dentre todos os produtos entre cada uma das componentes harmô-

nicas do esforço e do deslocamento* — que ocorrem segundo um mesmo grau de liberdade — apenas aqueles de mesma frequência realizam trabalho.

A utilização dos fatos aqui mencionados será apropriadamente desenvolvida no capítulo 4 deste trabalho.

*Note-se que o deslocamento, no ponto de aplicação do esforço, contém parcelas que se devem a todos os esforços aplicados sobre a estrutura, até mesmo em graus de liberdade distintos daquele do deslocamento.

CAPÍTULO 3

CÁLCULO DE MODOS E FREQUÊNCIAS NATURAIS

III.1 INTRODUÇÃO

De início, devemos enfatizar a importância do conhecimento das características dinâmicas de vibração natural da estrutura, como meio prático de análise do comportamento estrutural. O conhecimento prévio de modos e frequências naturais é de vital importância, não apenas para o cálculo da resposta da estrutura — quando submetida à excitações que a façam vibrar — como também na avaliação da efetividade de eventuais medidas que venham a colocá-la sob limites aceitáveis.

Estabelecido que um bom método de análise dinâmica da estrutura do navio engloba, obrigatoriamente, o cálculo de modos e frequências, resta definir o modo pelo qual isso pode ser eficientemente realizado. Já discutimos, anteriormente, as razões de ordem prática — sobre as características de amortecimento da estrutura — que nos conduzem à abordagem clássica do problema. Esta fundamenta-se na solução do problema de autovvalor, representado pela equação matricial do equilíbrio dinâmico da estrutura em vibrações livres não amortecidas.

O equilíbrio, para vibrações livres não amortecidas, é estabelecido por (|B19|):

$$M.\ddot{V}(t) + K.V(t) = 0 \quad (3.1)$$

onde, somente soluções não triviais interessam-nos. Assim, sob a consideração de que as vibrações são harmônicas ($\ddot{V} = -\lambda V$) e de frequência $w = \sqrt{\lambda}$, devemos impor a condição:

$$\det (K - \lambda M) = 0 \quad (3.2)$$

A ordem das matrizes de massa e rigidez (M e K) é igual ao número total de graus de liberdade da estrutura discretizada (n). Portanto, (3.2) representa uma equação polinomial na variável λ , com \bar{n} ($\bar{n} \leq n$) raízes reais (λ_i), ditas autovalores. Para cada um dos autovalores, (3.1) possui solução não trivial obtida do seguinte sistema de equações possível e indeterminado:

$$(K - \lambda_i \cdot M) \cdot \phi_i = 0 ; \quad i=1,2,3,\dots,\bar{n} \quad (3.3)$$

As frequências naturais da estrutura discretizada — considerada não amortecida — são as raízes quadradas de cada um dos autovalores, e as soluções de (3.3), para cada i , os respectivos autovetores ou formas modais de vibração.

As equações (3.2) e (3.3) estabelecem um meio para, a partir do conhecimento das propriedades de massa e rigidez da estrutura, avaliarmos suas características de vibração natural. Muitos métodos de solução do problema estrutural de autovalor, desenvolvendo-se a partir dessas equações, fornecem isoladamente cada uma das frequências naturais e respectivos modos. A solução de (3.2) resume-se na extração das raízes de um polinômio, de grau $\bar{n} \leq n$, que pode ser efetuada por qualquer das técnicas disponíveis no cálculo numérico [E1] — à semelhança do que se faz no conhecido método de Holzer [A7]. Para cada λ_i extraído, o respectivo ϕ_i é obtido, da condição de equilíbrio dinâmico na forma (3.3), por iteração de vetores (método de Stodola [A2], [B19]) ou por triangularização da matriz $(K - \lambda_i \cdot M)$ (método da triangularização de Gauss [A1]).

Métodos que se pautem na procura isolada de autovalores, e respectivos autovetores, são viáveis quando o número de graus de liberdade (n) não é muito grande. À medida que cresce o número de graus de liberdade, as operações com as matrizes tornam-se cada vez mais laboriosas, aumentando de modo proibitivo o custo da análise.

Tais métodos, portanto, quando se considera as di-

mensões da maioria dos casos complexos de análise de vibrações da estrutura do navio, apresentam interesse predominantemente acadêmico.

Um método alternativo, apropriado à solução do problema de autovalor com muitos graus de liberdade, parte da compactação de (3.3) na forma ($|B19|$):

$$\begin{matrix} K & \cdot & \Phi & = & M & \cdot & \Phi & \cdot & \Lambda \\ (nxn) & & (nxp) & & (nxn) & & (nxp) & & (pxp) \end{matrix} \quad (3.4.a)$$

onde, Φ e Λ são, respectivamente, as matrizes dos autovetores e dos autovalores, dadas por:

$$\Phi = |\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p| \quad (3.4.b)$$

$$\Lambda = |\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p|$$

sendo p o número de autovalores, e respectivos autovetores, procurados como solução do problema ($p < \bar{n} \leq n$).

Resolver o problema na forma compacta significa encontrar as matrizes Λ e Φ da solução não trivial de (3.4.a), obtendo, simultaneamente, todos os p modos de vibrar. Uma vantagem de sua aplicação reside na possibilidade de promover-se "redução" na dimensão do problema de autovalor, como veremos adiante.

O método assim formulado possibilita solução iterativa pela aplicação, a cada iteração, da condição de equilíbrio dinâmico representada por (3.4.a). No modo pelo qual será aqui apresentado, costuma ser denominado na literatura ($|A1|$, $|E2|$): "Método de Iteração por Subespaços".

III.2 MÉTODO DE ITERAÇÃO POR SUBESPAÇOS

Considerando a possibilidade de o sistema discretizado ser semi-definido* (matriz de rigidez não necessariamente positiva-definida), o método resume-se nas seguintes etapas:

(1) Remoção da singularidade da matriz de rigidez:

$$\hat{K} = K + \beta M \quad (3.5)$$

β - constante real positiva

\hat{K} - matriz de rigidez deslocada

(2) Solução do problema de autovalor deslocado:

$$\hat{K} \cdot \hat{\Phi} = M \cdot \hat{\Phi} \cdot \hat{\Lambda}$$

(2.1) Estabelecimento de q vetores de partida.

Vetores de "Ritz" para o primeiro passo do processo iterativo.

(2.2) Processo iterativo até a obtenção de p autovalores com precisão pré-especificada.

(2.2.a) Análise de "Rayleigh-Ritz": redução do problema de autovalor de ordem n em coordenadas geométricas, para um problema de autovalor de ordem q em coordenadas generalizadas ($p < q \leq \bar{n} \leq n$).

*Como exemplo, citamos o caso da análise de vibrações da Viga Navio |B1| que, como estrutura não inteiramente vinculada, é hipostática.

(2.2.b) Extração dos autovalores, e respectivos autovetores, do problema reduzido, em coordenadas generalizadas, pelo "Método Generalizado de Jacobi" ($|A1|, |A11|$).

(2.2.c) Conversão dos modos, obtidos em coordenadas generalizadas, para coordenadas geométricas.

(2.3) Verificação de se os autovetores encontrados são os \underline{p} de mais baixa ordem ("Sturm Sequence Check", $|A1|, |E2|$).

(3) Cálculo da solução do problema original não deslocado:

$$\Lambda = \hat{\Lambda} - \beta \cdot I \quad (\because \lambda_i = \hat{\lambda}_i - \beta; i=1,2,\dots,p) \quad (3.6.a)$$

$$(*) \quad \Phi = \hat{\Phi} \quad (\because \phi_i = \hat{\phi}_i; i=1,2,\dots,p) \quad (3.6.b)$$

O método de energia de "Rayleigh", como é sabido, proporciona uma boa aproximação para o primeiro modo de vibrar. Se desejarmos avaliar mais de um modo, além do primeiro, podemos aplicar a extensão de "Ritz" ao método de "Rayleigh", cuja hipótese básica é supor o vetor de deslocamentos como sendo expresso por uma combinação linear de formas assumidas (vetores de "Ritz"). Desse modo a matriz dos autovetores em coordenadas geométricas é obtida de:

$$\begin{array}{ccc} \Phi & = & \Psi \cdot \Phi^Z \\ (nxq) & & (nxq) \quad (qxq) \end{array} \quad (3.7)$$

*O deslocamento da matriz de rigidez não altera os autovetores $|B1|$, de sorte que os modos naturais dos problemas deslocado e não deslocado são os mesmos.

onde Ψ é a matriz das formas assumidas, e Φ^Z a matriz dos autovetores em coordenadas generalizadas.

Se estamos à procura de p autovetores, é necessário que se trabalhe com um número maior (q) de formas assumidas, de sorte a garantir a precisão pré-estabelecida para os autovetores procurados. Como regra prática, deve-se adotar $|A|$:

$$q = \min \{p+8; 2.p\} \quad (3.8)$$

Assim, o problema de autovalor em coordenadas geométricas é estabelecido por:

$$\begin{matrix} \hat{K} & \cdot & \Phi & = & M & \cdot & \Phi & \cdot & \hat{\Lambda} \\ (nxn) & & (nxq) & & (nxn) & & (nxq) & & (qxq) \end{matrix} \quad (3.9)$$

Aplicando (3.7) em (3.9), e premultiplicando esta por Ψ^T , obtém-se a expressão do problema de autovalor em coordenadas generalizadas:

$$\begin{matrix} K^* & \cdot & \Phi^Z & = & M^* & \cdot & \Phi^Z & \cdot & \hat{\Lambda} \\ (qxq) & & (qxq) & & (qxq) & & (qxq) & & (qxq) \end{matrix} \quad (3.10.a)$$

onde:

$$\begin{matrix} K^* & = & \Psi^T & \cdot & \hat{K} & \cdot & \Psi & - & \text{rigidez gene} \\ (qxq) & & (qxn) & & (nxn) & & (nxq) & & \text{larizada} \end{matrix} \quad (3.10.b)$$

$$\begin{matrix} M^* & = & \Psi^T & \cdot & M & \cdot & \Psi & - & \text{massa genera} \\ (qxq) & & (qxn) & & (nxn) & & (nxq) & & \text{lizada} \end{matrix} \quad (3.10.c)$$

Se as formas assumidas coincidirem exatamente com as formais modais, como decorrência das propriedades de ortogonalidade dos modos naturais as matrizes generalizadas K^* e M^* serão diagonais. Na prática tais matrizes tendem à forma diagonal à medida que, num processo iterativo, cada vez melhores for

mas assumidas vão sendo obtidas. A convergência processa-se tão mais rapidamente quanto melhores forem as formas assumidas. Estas são melhoradas sempre que se impuser a condição de equilíbrio dinâmico.

Com base nestas considerações, estabelece-se o seguinte algoritmo para a segunda etapa do Método de Iteração por Subespaços (Solução do Problema de Autovalor Deslocado):

$$\hat{K} \cdot \Psi_k = M \cdot \Phi_{k-1} \quad - \text{condição de equilíbrio dinâmico} \quad (3.11.a)$$

$$M_k^* = \Psi_k^T \cdot M \cdot \Psi_k \quad - \text{massa generalizada} \quad (3.11.b)$$

$$K_k^* = \Psi_k^T \cdot \hat{K} \cdot \Psi_k \quad - \text{rigidez generalizada} \quad (3.11.c)$$

$$K_k^* \cdot \Phi_k^Z = M_k^* \cdot \Phi_k^Z \cdot \tilde{\Lambda}_k \quad - \text{problema generalizado de autovalor} \quad (3.11.d)$$

$$\Phi_k = \Psi_k \cdot \Phi_k^Z \quad - \text{expansão de "Ritz"} \quad (3.11.e)$$

onde k é o número de ordem da iteração corrente, Φ_k e $\tilde{\Lambda}_k$ as aproximações obtidas para os autovetores, e respectivos autovalores do problema deslocado.

O algoritmo tem início para k=1, sendo Φ_0 (dito Ve tor de Partida) escolhido, como proporemos adiante, de modo a acelerar a convergência. De (3.11.e) retorna-se a (3.11.a) até atingir-se a precisão especificada para os autovetores |B1|:

$$(*) \quad |\hat{\lambda}_i^{(k)} - \hat{\lambda}_i^{(k-1)}| / (\hat{\lambda}_i^{(k)} - \beta) < 10^{-2S} \quad (3.12)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, p < q$$

*A expressão impõe que as aproximações corrente ($\hat{\lambda}_i^{(k)}$) e anterior ($\hat{\lambda}_i^{(k-1)}$) não difiram mais do que 2S dígitos. Como, na verdade, esta condição deve ser imposta sobre os autovalores do problema não deslocado, de (3.6.a) percebe-se, claramente, a razão da existência da constante β no denominador.

Assim, obtêm-se aproximações para os autovalores com precisão de 25 dígitos, enquanto para os autovetores esta é de S dígito.

Deve-se notar que a iteração é feita com q vetores ($q > p$), mas a convergência só é testada para as aproximações dos p mais baixos autovalores.

As formas assumidas (Ψ), quando estabelecidas na condição de equilíbrio, representam uma melhor aproximação das formas modais. Logo, pode-se esperar melhor convergência se a cada iteração (3.11.a) for imposta. Embora tal procedimento implique na resolução de uma equação matricial de ordem n, a melhora introduzida, pela aceleração da convergência, torna-o vantajoso em termos de tempo de processamento.

Do que foi exposto, conclui-se que a análise de "Rayleigh-Ritz" proporciona, fundamentalmente, uma redução do número de graus de liberdade (n) do problema de autovalor em coordenadas geométricas, transformando-o num problema de autovalor de ordem q ($q < n$) em coordenadas generalizadas.

A cada iteração, por (3.11.a) são estimados os vetores de "Ritz" (Ψ) que, a seguir, prestam-se ao cálculo das matrizes generalizadas de massa e rigidez. Da solução de (3.11.d) obtêm-se as formas modais generalizadas (Φ^Z), e as aproximações para os autovalores do problema. Finalmente, a partir de Φ^Z , por (3.11.e), encontram-se aproximações para as formas modais em coordenadas geométricas, que realimentam o processo em (3.11.a).

Tal seqüência de cálculo é a base do Método de Iteração por Subespaços que, inserido no contexto da Análise Dinâmica da Estrutura do Navio proposta neste trabalho (programa NAVDIN), tem demonstrado ser, ao longo de uma série de aplicações, altamente eficiente. Seu sucesso decorre, também da eficiência da técnica empregada na solução do problema generalizado de autovalor (3.11.d) que veremos no item seguinte.

$$\gamma = \frac{\bar{k}_{ii}^{(r)}}{\chi} \quad ; \quad \alpha = \frac{\bar{k}_{jj}^{(r)}}{\chi}$$

$$\chi = \frac{\bar{k}^{(r)}}{2} + \text{sign}|\bar{k}^{(r)}| \cdot \left\{ \left(\frac{\bar{k}^{(r)}}{2} \right)^2 + \bar{k}_{ii}^{(r)} \cdot \bar{k}_{jj}^{(r)} \right\}^{0,5}$$

$$\bar{k}_{ii}^{(r)} = k_{ii}^{(r)} \cdot m_{ij}^{(r)} - m_{ii}^{(r)} \cdot k_{ij}^{(r)} \quad (3.15)$$

$$\bar{k}_{jj}^{(r)} = k_{jj}^{(r)} \cdot m_{ij}^{(r)} - m_{jj}^{(r)} \cdot k_{ij}^{(r)}$$

$$\bar{k}^{(r)} = k_{ii}^{(r)} \cdot m_{jj}^{(r)} - k_{jj}^{(r)} \cdot m_{ii}^{(r)}$$

Tais relações valem para o caso geral de a matriz de massa ser positiva definida, completamente cheia ou de banda. Embora a matriz de massa do sistema possa vir a ser diagonal (massas discretas), a matriz de massa generalizada não o é, de modo que, em geral, os elementos $m_{ij}^{(r)}$ não são nulos.

A transformação, ora apresentada, deve ser aplicada sucessivamente de maneira a reduzir as matrizes $M_{(r)}$ e $K_{(r)}$ à forma diagonal. Assim, quando $r \rightarrow \infty$, prova-se que $(|A|)$:

$$K_{(r+1)} \rightarrow \hat{\Lambda} = \text{diag} [\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_q]$$

$$M_{(r+1)} \rightarrow I \quad (\text{matriz identidade})$$

$$\Phi^Z = P_{(1)} \cdot P_{(2)} \cdot P_{(3)} \cdot \dots \cdot P_{(\infty)}$$

Na prática não é necessário que $M_{(r+1)}$ convirja para I e nem que $K_{(r+1)}$ para $\hat{\Lambda}$, mas somente que ambas convirjam para a forma diagonal. Se \underline{q} indica a última iteração do processo, temos:

$$\bar{\Lambda} = \text{diag} \left[\frac{k_{11}^{(\ell+1)}}{m_{11}^{(\ell+1)}}, \frac{k_{22}^{(\ell+1)}}{m_{22}^{(\ell+1)}}, \dots, \frac{k_{qq}^{(\ell+1)}}{m_{qq}^{(\ell+1)}} \right] \quad (3.16)$$

$$\Phi^Z = P_{(1)} \cdot P_{(2)} \dots P_{(\ell)} \cdot \text{diag} \left[(m_{11}^{(\ell+1)})^{-1/2}, (m_{22}^{(\ell+1)})^{-1/2}, \dots, (m_{qq}^{(\ell+1)})^{-1/2} \right]$$

É importante enfatizar que, pela aplicação sucessiva de (3.14), devemos procurar tornar nulos todos os elementos de fora da diagonal de $M_{(r)}$ e $K_{(r)}$. Porém, alguns desses elementos já podem estar suficientemente (segundo precisão pré-estabelecida) próximos de zero. Para propósitos práticos de análise num algoritmo real, é necessário decidir, então, quais elementos devem ser zerados. Assim, antes de efetuar-se a transformação de rotação para um determinado elemento de $K_{(r)}$ ou $M_{(r)}$, verifica-se sua necessidade. A medida para tal fato é dada pelas relações:

$$\left[\frac{|m_{ij}^{(r)}|^2}{m_{ii}^{(r)} \cdot m_{jj}^{(r)}} \right]^{1/2} < 10^{-2m} \quad (3.17)$$

$$\left[\frac{|k_{ij}^{(r)}|^2}{k_{ii}^{(r)} \cdot k_{jj}^{(r)}} \right]^{1/2} < 10^{-2m}$$

onde m é uma constante inteira positiva, definida como veremos adiante.

Se tais relações são satisfeitas, a rotação especificada por (3.14), para os elementos (i,j) , não precisa ser efetuada.

Por outro lado, como já exposto, a matriz $K_{(r)}$ tende à matriz dos autovalores à medida que o número de rotações tende a infinito. Contudo, num processo numérico, é ne-

cessário definir uma aproximação para os autovalores e respectivos autovetores. Assim, podemos estabelecer que o processo convergiu quando:

$$\left| \frac{\hat{\lambda}_i^{(\ell+1)} - \hat{\lambda}_i^{(\ell)}}{\hat{\lambda}_i^{(\ell+1)}} \right| < 10^{-s}, \quad \forall i/i=1,2,3,\dots,q \quad (3.18)$$

onde:

$$\hat{\lambda}_i^{(\ell)} = \frac{k_{ii}^{(\ell)}}{m_{ii}^{(\ell)}} \quad \text{e} \quad \hat{\lambda}_i^{(\ell+1)} = \frac{k_{ii}^{(\ell+1)}}{m_{ii}^{(\ell+1)}}$$

e quando:

$$\left[\frac{|k_{ij}^{(\ell+1)}|^2}{k_{ii}^{(\ell+1)} \cdot k_{jj}^{(\ell+1)}} \right]^{1/2} < 10^{-s}, \quad \left[\frac{|m_{ij}^{(\ell+1)}|^2}{m_{ii}^{(\ell+1)} \cdot m_{jj}^{(\ell+1)}} \right]^{1/2} < 10^{-s}, \quad (3.19)$$

$$\forall i,j/i,j=1,2,3,\dots,q \quad \text{e} \quad i < j$$

sendo s a tolerância desejada ($|A1|, |E1|$), $(\ell+1)$ a rotação corrente e (ℓ) a precedente.

A relação (3.18) deve ser satisfeita porque os valores $\hat{\lambda}_i^{(\ell+1)}$ são as aproximações correntes dos autovalores (λ_i) do problema (3.11.d). A relação estabelece que as aproximações correntes ($\hat{\lambda}_i^{(\ell+1)}$), e precedentes ($\hat{\lambda}_i^{(\ell)}$), não difiram dos s primeiros dígitos ($|A1|, |E1|$).

As relações de (3.19) asseguram que os termos de fora da diagonal principal de $M_{(\ell+1)}$ e $K_{(\ell+1)}$ sejam realmente pequenos, quando comparados com os termos da diagonal.

Um caminho lógico de execução de rotações sucessivas é percorrer em ordem (linha por linha, ou coluna por coluna) os elementos de fora da diagonal principal, até que se tenha passado por todos eles (efetuando o que se convencionou cha

mar de varredura). Porém, quando se promove um zero numa determinada posição, altera-se o valor dos elementos anteriormente zerados. No final de uma varredura, dispomos de matrizes $K_{(r)}$ e $M_{(r)}$ com elementos de fora da diagonal principal significativamente menores do que os elementos da diagonal, porém, não absolutamente nulos. Assim, uma nova varredura deve ser iniciada desde que as precisões estabelecidas por (3.18) e (3.19) não tenham sido atingidas.

Após discutidos os principais aspectos do método de Jacobi, podemos sumarizar as etapas em que este se desenvolve:

- (1) Inicia-se a primeira varredura com $m=1$ em (3.17). Como regra prática, na u -ésima varredura faz-se $m=u$. Portanto, m representa o número de ordem da varredura corrente.
- (2) Para todos i e j tal que $i=1,2,\dots,j-1$ e $j=2,3,\dots,q$, verifica-se (3.17), aplicando a rotação (3.14) onde tal relação não for satisfeita.
- (3) Terminada a varredura verifica-se se (3.18) é satisfeita. Se não, inicia-se nova varredura. Se (3.18) é satisfeita verifica-se se (3.19) o é. Se sim, o processo convergiu; se não, inicia-se nova varredura.

O método generalizado de Jacobi apresenta uma série de vantagens em relação a outros métodos. Por não requerer a transformação do problema estrutural de autovalor numa forma padrão (como é o caso dos métodos de triangularização), trabalha diretamente com as matrizes de massa e rigidez generalizadas. Tal fato é particularmente vantajoso quando os elementos de fora da diagonal principal, das matrizes K^* e M^* , são pequenos ou há um grande número desses elementos com valor nulo. Neste caso, o problema de autovalor estará quase praticamente resolvido, sem a necessidade de muitas rotações.

Deve-se notar, ainda, que o método encontra aproxima-

mações para todos os autovalores e respectivos autovetores do problema generalizado (3.11.d). Como numa análise por elementos finitos desejamos, na maioria dos casos, obter somente alguns poucos autovalores e respectivos autovetores, justifica-se a aplicação do método de Jacobi como parte de um algoritmo que antes promova a redução do número de graus de liberdade, como é o caso do que propusemos em III.2.

III.4 VETORES DE PARTIDA PARA O MÉTODO DE ITERAÇÃO POR SUBESPAÇOS

O início do algoritmo de Iteração por Subespaços reside na adoção de formas modais aproximadas, que dão partida às iterações. Em correspondência a cada um dos q modos necessários ao cálculo, devem ser estabelecidos vetores como primeiras aproximações para as formas modais.

O número de iterações a realizar até a convergência é função não apenas da tolerância prescrita, como também do grau de aproximação entre Vetores de Partida e formas modais reais. Se para os Vetores de Partida forem atribuídas as formas modais exatas, o algoritmo converge numa única iteração. Pode-se, portanto, conseguir substancial redução no tempo de processamento, se os Vetores de Partida forem convenientemente escolhidos.

Nesse sentido, o seguinte elenco de medidas ditam boa norma:

- i. Usar, sempre que possível, aproximações das formas modais obtidas de um cálculo prévio. Na impossibilidade disso, estabelecer "intuitivamente" formas modais aproximadas, a exemplo do que se espera sejam as formas modais exatas.

e, como adiante justificaremos:

- ii. Todos os Vetores de Partida devem obedecer à mesma condição de normalização, preferencialmente estabelecida à semelhança das propriedades de ortogonalidade dos modos naturais.
- iii. Vetores de Partida de ordem mais alta devem ser depurados daqueles de ordem mais baixa, de sorte a estabelecer-se um espaço ortogonal de vetores.

Propõe-se, por conseguinte, a M -ortonormalização dos Vetores de Partida (via ortogonalização de Gram-Schmidt $[A]$),

nos moldes que veremos adiante. Não dispomos, entretanto, de prova matemática cabal que estabeleça a real efetividade desta medida na convergência, e na aceleração da convergência, do método. A conveniência em adotá-la é meramente intuitiva, e corroborada pelos resultados de testes realizados.

Já vimos que as formas modais exatas possuem a propriedade de ortogonalidade em relação à matriz de massa (2.35). Satisfazem, além disso, evidentemente, a condição de equilíbrio dinâmico. Nada impede, porém, que formas arbitradas — mesmo sem satisfazerem a condição de equilíbrio — sejam normalizadas de sorte a possuírem a propriedade de ortogonalidade em relação à massa. É disso que trataremos a seguir.

III.4.1 M-normalização

A forma arbitrada para o m-ésimo modo

$$\Gamma_m = \{\gamma_{1m}, \gamma_{2m}, \dots, \gamma_{nm}\}^T \quad (3.20)$$

é convertida para a sua versão M-normalizada

$$\bar{\Gamma}_m = (\beta_m)^{-1/2} \cdot \Gamma_m = \{\bar{\gamma}_{1m}, \bar{\gamma}_{2m}, \dots, \bar{\gamma}_{nm}\}^T \quad (3.21)$$

pela imposição da condição

$$\bar{\Gamma}_m^T \cdot M \cdot \bar{\Gamma}_m = 1 \quad (3.22)$$

Substituindo (3.21) em (3.22), resulta:

$$\beta_m = \Gamma_m^T \cdot M \cdot \Gamma_m = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \gamma_{im} \gamma_{jm} \quad (3.23)$$

A partir do vetor arbitrado (Γ_m) — doravante dito de entrada — obtém-se sua representação M-normalizada multipli

cando-o pelo inverso da raiz quadrada da constante β_m , calculada por (3.23). Se a matriz de massa for diagonal (massas discretas), o cálculo da constante reduz-se a:

$$\beta_m = \sum_{i=1}^n m_i \gamma_{im}^2 \quad (3.24)$$

Nossa proposta é a de que todos os q Vetores de Entrada sejam M -normalizados, de modo que (3.22) seja satisfeita para todo m . O fato de todo o espaço de vetores obedecer à mesma normalização é de vital importância para o bom andamento das iterações do Método de Iteração por Subespaços. O problema de não fazê-lo encontra paralelo no exemplo de tentar-se somar dois números sem prévia conversão para a mesma unidade. A M -normalização dos Vetores de Entrada leva a valores relativos, entre os elementos desses, da mesma ordem de grandeza, contribuindo para a estabilidade numérica das iterações do algoritmo.

III.4.2 Ortogonalização de Gram-Schmidt [A1]

O princípio deste processo de ortogonalização baseia-se, também, nas propriedades de ortogonalidade dos modos naturais em relação à matriz de massa. Se como "peso" é usada a matriz de massa, duas formas modais exatas, quaisquer e distintas, são "perpendiculares" entre si. Matematicamente, esse fato é representado por:

$$\phi_i^T \cdot M \cdot \phi_j = 0 \quad \text{para } i \neq j \quad (\text{rep.2.35})$$

Um espaço de vetores, mesmo que não sejam autovetores, pode ser modificado — sem alteração das formas por eles representadas — de modo a torná-los ortogonais.

A condição de ortogonalidade será satisfeita se o vetor genérico de ordem m for "depurado" das formas de ordem

menor do que essa. Algebricamente, isso é estabelecido por:

$$\tilde{\Gamma}_m = \bar{\Gamma}_m - \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_{mj} \tilde{\Gamma}_j \quad (3.26)$$

onde α_{mj} são os coeficientes de depuração.

A expressão (3.26) é recursiva de sorte que o processo de depuração de $\bar{\Gamma}_m$ usa formas já depuradas e normalizadas ($\tilde{\Gamma}_j$) dos vetores de ordem inferior a m . O vetor de ordem mais baixa ($\bar{\Gamma}_1$) serve como gerador do espaço ortogonal de vetores. O segundo vetor ($\bar{\Gamma}_2$) é depurado de $\bar{\Gamma}_1$; o terceiro de $\bar{\Gamma}_1$ e do segundo já na forma depurada ($\tilde{\Gamma}_2$); e assim por diante até $m=q$.

Do processo de ortogonalização, ditado por (3.26) para cada valor de m , não resulta necessariamente um vetor M-normalizado. Assim, cada vetor após depurado deve ser M-normalizado:

$$\tilde{\Gamma}_m = (\tilde{\beta}_m)^{-0,5} \tilde{\Gamma}_m \quad (3.27.a)$$

onde, para que $\tilde{\Gamma}_m^T \cdot M \cdot \tilde{\Gamma}_m = 1$, devemos tomar:

$$\tilde{\beta}_m = \tilde{\Gamma}_m^T \cdot M \cdot \tilde{\Gamma}_m \quad (3.27.b)$$

Os coeficientes de depuração são obtidos da pré-multiplicação de (3.26) por $\tilde{\Gamma}_m^T \cdot M$, sob as considerações de que:

$$(1) \tilde{\Gamma}_m \text{ é depurado} \quad \therefore \tilde{\Gamma}_j^T \cdot M \cdot \tilde{\Gamma}_m = 0 \quad (j \neq m)$$

$$(2) \tilde{\Gamma}_j \text{ é M-normalizado} \quad \therefore \tilde{\Gamma}_j^T \cdot M \cdot \tilde{\Gamma}_j = 1$$

resultando:

$$\alpha_{mj} = \tilde{\Gamma}_j^T \cdot M \cdot \bar{\Gamma}_m \quad (3.28)$$

III.4.3 Matriz dos Vetores de Partida

Pela reunião, e transformação algébrica, dos resultados anteriores, a matriz dos Vetores de Partida é definida por:

$$\Phi_0 = |\tilde{\Gamma}_1, \tilde{\Gamma}_2, \dots, \tilde{\Gamma}_m, \dots, \tilde{\Gamma}_q|_{n \times q} \quad (3.29)$$

onde os vetores $\tilde{\Gamma}_m = \{\tilde{\gamma}_{1m}, \tilde{\gamma}_{2m}, \dots, \tilde{\gamma}_{nm}\}^T$ são obtidos de:

$$\tilde{\Gamma}_1 = \bar{\Gamma}_1 = (\beta_1)^{-0,5} \cdot \Gamma_1 \quad (3.30.a)$$

$$\tilde{\Gamma}_m = (\tilde{\beta}_m)^{-0,5} \cdot [(\beta_m)^{-0,5} \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_{mj} \cdot \tilde{\Gamma}_j] \quad (3.30.b)$$

$$m=2, 3, 4, \dots, q$$

com,

$$\beta_m = \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n m_{rs} \cdot \gamma_{rm} \cdot \gamma_{sm} \quad (3.31)$$

$$\alpha_{mj} = (\beta_m)^{-0,5} \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n m_{rs} \frac{\tilde{\gamma}_{rj}}{\tilde{\gamma}_{rj}} \gamma_{sm} \quad (3.32)$$

$$\tilde{\beta}_m = 1 + \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_{mj} \quad (3.33)$$

Portanto, a partir de vetores arbitrários, ditos de Entrada (Γ_m), estabelecem-se Vetores de Partida M-ortonormalizados ($\tilde{\Gamma}_m$), pois:

$$\tilde{\Gamma}_i^T \cdot M \cdot \tilde{\Gamma}_j = \begin{cases} 0 & \text{para } i \neq j \text{ (ortogonalidade)} \\ 1 & \text{para } i = j \text{ (M-normalização)} \end{cases} \quad (3.34)$$

Vetores de Partida ($\tilde{\Gamma}_m$), assim estabelecidos a partir dos Vetores de Entrada (Γ_m), colaboram para o bom andamento das iterações do Método de Iteração por Subespaços — sumarizado nas figuras 3.1 e 3.2 — que serviu de base para o desenvolvimento do programa NAVDIN.

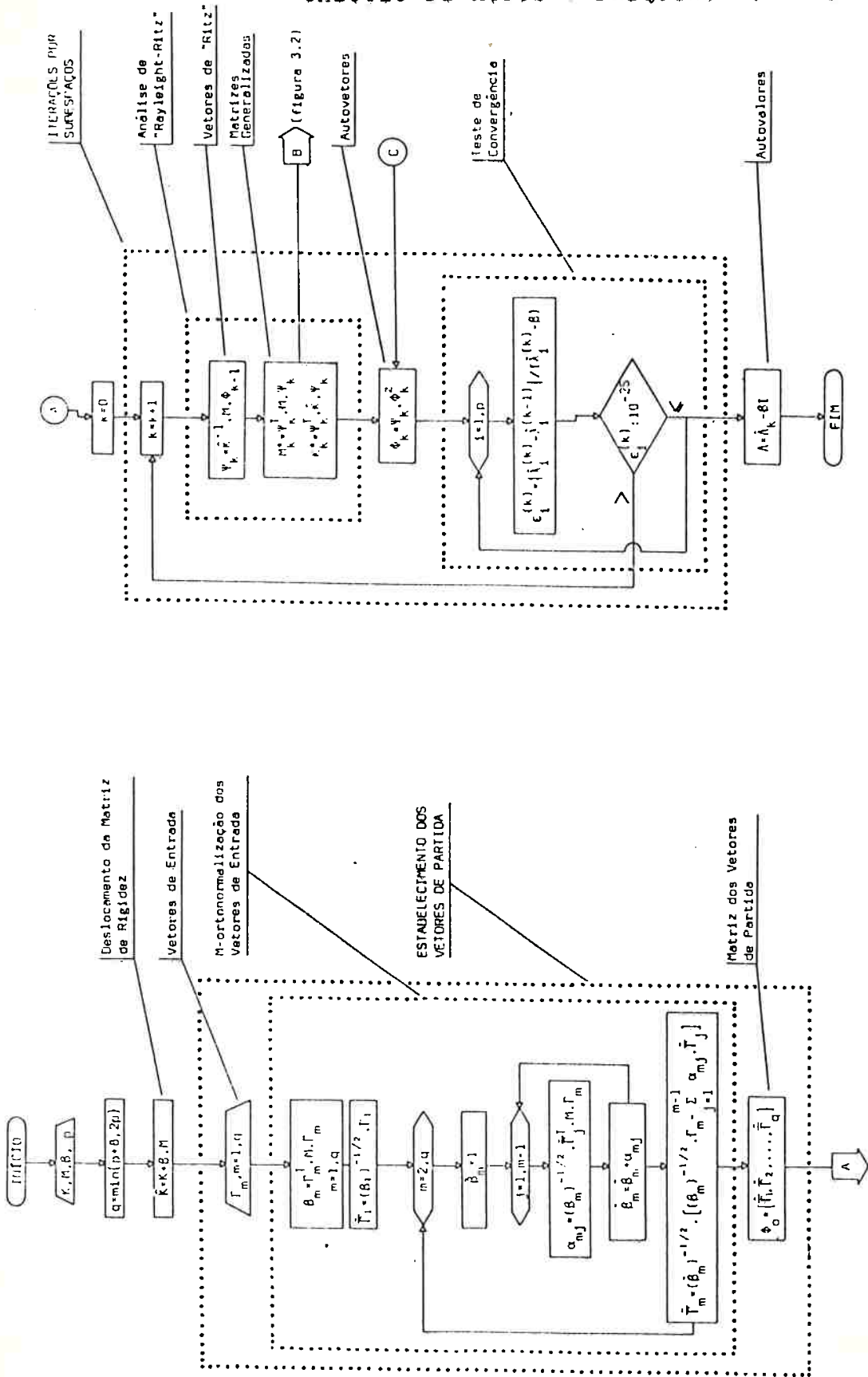


FIGURA 3.1 - SUMÁRIO DO MÉTODO DE ITERAÇÃO POR SUBESPAÇOS
 Problema Generalizado de Autovalor

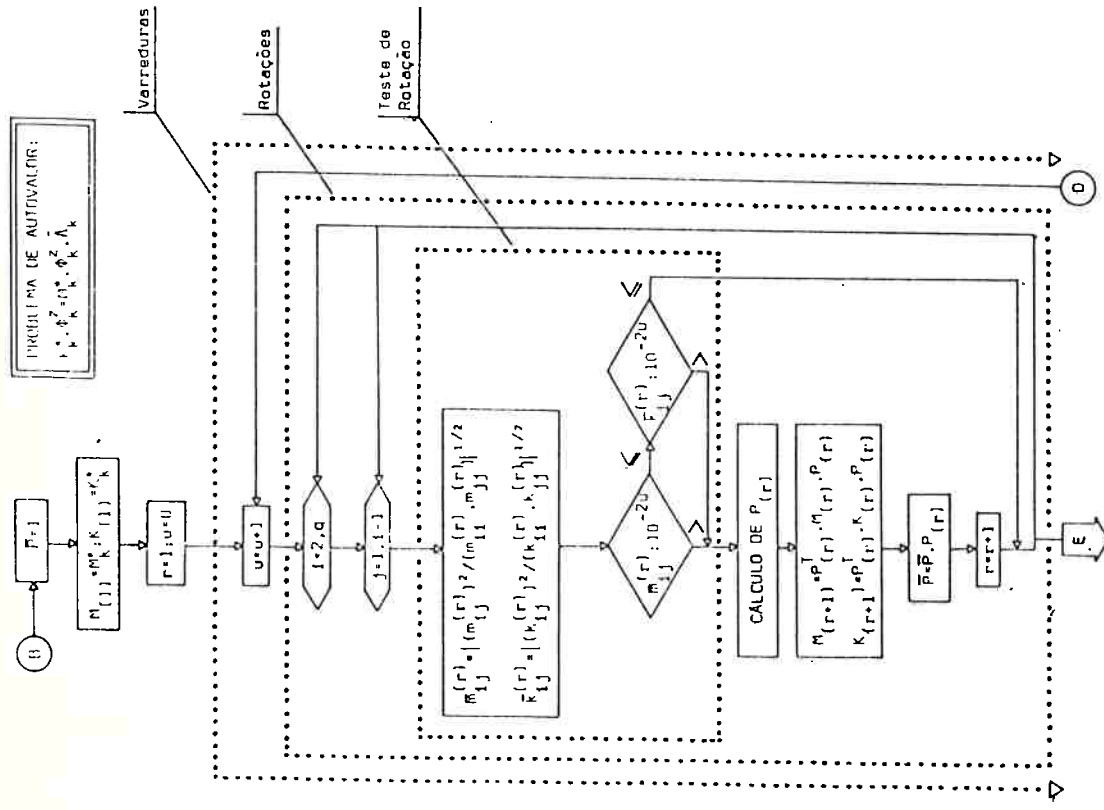
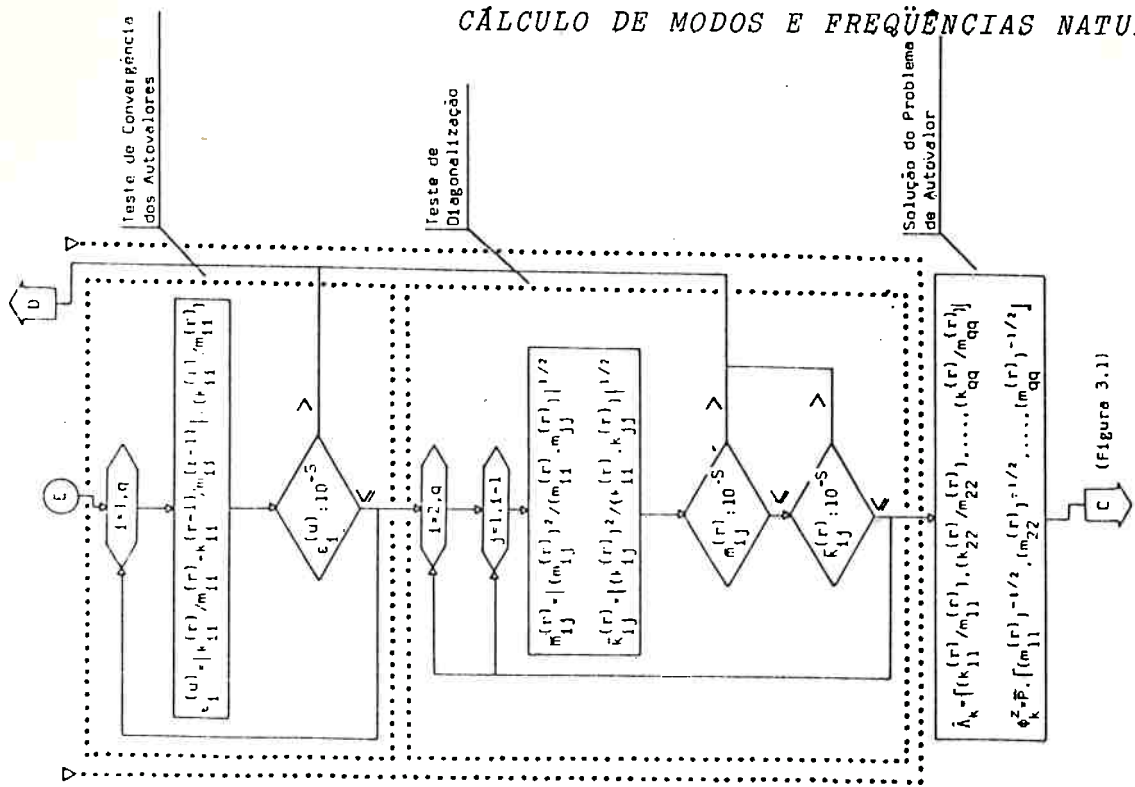


FIGURA 3.2 - SUMÁRIO DO MÉTODO DE ITERAÇÃO POR SUBESPAÇOS
 Método Generalizado de Jacobi

III.5 VETORES DE ENTRADA PARA O MÉTODO DE ITERAÇÃO POR SUBESPAÇOS

Os Vetores de Partida, como vimos no item precedente, são a forma M-ortonormalizada dos Vetores de Entrada arbitrariamente estabelecidos. Se a M-ortonormalização dos Vetores de Entrada propicia condições para um bom andamento do Método de Iteração por Subespaços, o estabelecimento criterioso desses o corrobora.

O número de iterações necessárias para haver convergência é função precípua do grau de aproximação entre as formas representadas pelos Vetores de Partida e as formas modais exatas. Assim, melhores Vetores de Entrada são obtidos se resultados conhecidos de uma análise prévia da estrutura, de uma sua semelhante, ou de uma sua versão anterior forem usados. Se, por exemplo, num processo de otimização a estrutura é modificada aos poucos, as formas modais encontradas, na solução do problema prévio, podem ser uma excelente aproximação para o problema de autovalor da estrutura modificada. Analogamente, se alguns autovetores já são conhecidos, ou foram avaliados num cálculo anterior, podem ser usados como medida eficiente para a construção dos Vetores de Entrada numa nova análise da estrutura, onde se deseje obter um maior número de autovalores.

Dessas considerações, fica explícita a importância de se trabalhar o Método de Iteração por Subespaços de sorte a possibilitar ao usuário as duas seguintes alternativas:

- i) usar Vetores de Entrada "manualmente" estabelecidos, à luz de sua experiência na análise de estruturas semelhantes.
- ii) usar modos naturais obtidos de cálculo prévio e convenientemente armazenados em arquivos.

Portanto, a automação do Método de Iteração por Subespaços, no programa NAVDIN, prevê a leitura dos Vetores de

Entrada (figura 3.1) a partir de arquivos criados pelo próprio usuário, ou de arquivos criados previamente pelo programa numa execução anterior. Neste último caso, é necessário que, em havendo modificações na estrutura, seja preservado o número total de graus de liberdade.

Evidentemente, casos há em que o analista deseja eximir-se da tarefa de estabelecer os Vetores de Entrada, e não dispõe de resultados anteriores. Deve-se, portanto, em adição, dispor de um meio para a geração automática desses vetores a partir das propriedades de massa e rigidez da estrutura discretizada.

Pode-se mostrar que, na tentativa de assegurar boa convergência, os Vetores de Entrada gerados devem ser construídos de maneira a excitar todos os graus de liberdade, aos quais grandes massas e pequenos coeficientes de rigidez estão associados. Baseado nestas observações, o seguinte procedimento tem sido usado eficientemente: "A primeira coluna do produto $M \cdot \Phi_0$ é simplesmente a diagonal da matriz de massa M , assegurando que todas as massas são excitadas. As outras colunas de $M \cdot \Phi_0$ (da segunda até a q -ésima) são vetores com apenas um elemento não nulo, e unitário, nas posições sequencialmente correspondentes às menores relações entre os termos da diagonal da matriz de rigidez e da diagonal da matriz de massa (k_{ii}/m_{ii})". Vejamos um exemplo:

$$\text{matriz de rigidez } K = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{matriz de massa } M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, as relações (k_{ii}/m_{ii}) em ordem crescente ocorrem para: $i=5,4,2,3$ e 1 .

Supondo, então, que $p=2$ autovalores são procurados e, portanto, $q=4^*$ vetores são necessários ao cálculo, temos:

$$M \cdot \Phi_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Testes tem mostrado que, com esta geração de Vetores de Entrada, são necessárias, em média, dez iterações para calcular-se os p autovalores de ordem mais baixa com precisão de seis dígitos.

Em resumo, o analista dispõe de três alternativas a combinar no estabelecimento dos Vetores de Entrada. As duas já mencionadas anteriormente, em adição à geração automática. De início, todos os q vetores são gerados. Estes, no todo ou em parte, podem ser substituídos por vetores fornecidos pelo analista à luz de sua intuição, ou por que disponha de resultados prévios.

O conjunto de vetores assim combinados deve passar, a seguir, pelo processo de M-ortonormalização aludido no item precedente, obtendo-se a matriz dos Vetores de Partida, numa forma conveniente ao bom desempenho do Método de Iteração por Subespaços.

Testes realizados com o programa NAVDIN demonstraram a eficiência do presente processo de otimização. Como exemplo, podemos citar o caso de uma viga de secção constante e biapoiada (discretizada por 24 nós e-quispaçados, com 46 graus de liberdade) para o qual o processo de otimização conduziu a uma economia de 30% no tempo de processamento. Outras considerações, sobre convergência e otimização do Método de Iteração por Subespaços, podem ser obtidas na referência |A11| em seu capítulo 12.

* $q = \min \{2p; p+8\}$ (rep. 3.8).

CAPÍTULO 4

RESPOSTA NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

IV.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo abordaremos o que deve ser considerado como o centro de nossa proposta. Esta, como extensão do trabalho realizado em [B1], visa o estabelecimento de um método automatizado para a maior parte dos casos possíveis de análise dinâmica da estrutura do navio. Em termos práticos, consubstanciam-se aqui as bases do programa NAVRAP.

O ponto de partida do desenvolvimento do método — estabelecida a premissa de que as excitações são periódicas — consiste na modelagem do carregamento sob hipóteses que, sem significativa perda de generalidade, permitam o equacionamento do problema.

Numa segunda etapa, então, procuramos estabelecer parâmetros fundamentais da resposta do sistema estrutural, descritos do modo que, mais convenientemente, sirvam ao analista. O aspecto básico desta etapa reside na representação não temporal da resposta, estabelecendo parâmetros expressos no domínio da frequência.

Os itens iniciais do capítulo servem de preparação ao tratamento matemático que se usa na obtenção dos seguintes parâmetros da resposta:

- i) Trabalho realizado por ciclo pelos esforços externos.
- ii) Parâmetros cinemáticos: deslocamento, velocidade e aceleração.
- iii) Tensões.

sendo a cada um deles dedicado um item específico no texto.

IV.2 MODELAGEM DO CARREGAMENTO PERIÓDICO

Considerando os propósitos das aplicações do método, tomaremos as seguintes hipóteses:

- i) "A estrutura está sujeita à ação de esforços externos de natureza periódica".
- ii) "Cada um dos esforços pode ser convenientemente representado por um número finito de componentes harmônicos, com variação discreta de frequências". Ou seja, cada esforço será aproximado por uma série finita de Fourier, como de resto é prática bastante comum em vários campos da engenharia.
- iii) "Todos os esforços devem ter componentes harmônicos com frequências geradas de uma mesma fundamental". Esta hipótese, associada ao "Conceito de Amplitudes Nulas" que abordaremos adiante, embora reduza o espectro de aplicação do método, não causa excessiva perda de generalidade, quando se consideram os casos mais comuns de vibrações da estrutura do navio (figura 1.1).
- iv) "As amplitudes e fases iniciais de cada harmônico de cada esforço são geradas como frações de certas funções — ditas funções de frequência — definidas como dependentes da frequência (ou rotação) dita fundamental". Assim, amplitudes e fases iniciais podem ter magnitudes variando com o valor da rotação fundamental. Esta hipótese, na verdade, amplia o campo de utilização do método, sendo de vital importância para o seu sucesso.

Estabelecidas tais hipóteses básicas, o carregamento é matematicamente expresso por:

$$p_j(N,t) = p_j^m(N) + \sum_{\ell} p_{j\ell}(N,t) =$$

$$= p_j^m(N) + p_{j\ell}^0(N) \cdot \text{sen}[w_{\ell}(N) \cdot t + \delta_{j\ell}(N)] ; \quad (4.1.a)$$

tal que:

$$p_j^m(N) - \text{valor médio.}$$

$$w_{\ell}(N) = w_0 \cdot \ell \cdot \theta = (2\pi/60 \cdot N) \cdot (\ell \cdot \theta) \quad (4.1.b)$$

$$p_{j\ell}^0(N) = \eta_{j\ell} f(N) \quad (4.1.c)$$

$$\delta_{j\ell}(N) = \varepsilon_{j\ell} g(N) \quad (4.1.d)$$

onde:

θ - fator para a formação incremental da gama de frequências.

N (rpm) - rotação fundamental.

w_0 (rad/s) - frequência fundamental.

e ainda,

j - número de identificação do grau de liberdade da estrutura discretizada, onde está aplicado algum esforço externo. Existem tantos valores de j quantos forem os esforços que compõem o carregamento.

ℓ - número de ordem do ℓ -ésimo harmônico dos esforços que compõem o carregamento.

w_{ℓ} (rad/s) - frequência circular dos ℓ -ésimos harmônicos, comum, por hipótese, a todos os esforços.

Assim, para cada harmônico (ℓ) de cada esforço, aplicado segundo j , temos:

$p_{j\ell}^0(N)$ - amplitude

$\delta_{j\ell}(N)$ - fase inicial em radianos

As variações com a rotação fundamental (N) das amplitudes e fases iniciais são definidas, pelo emprego das funções de frequência: $f(N)$ e $g(N)$, através dos fatores constantes $\eta_{j\ell}$ e $\epsilon_{j\ell}$ das equações (4.1.c) e (e.1.d), respectivamente.

Como ilustração, consideremos o caso da tabela 4.1 de vibrações excitadas, simultaneamente, por dois componentes do sistema propulsor: empuxo alternado de um hélice de três pás e momento vertical alterado de um motor de dois tempos. O motor gera esforços periódicos, com componentes harmônicos numa gama de frequências variando de um em um em relação à frequência fundamental de rotação do eixo ($\theta=1$); enquanto os harmônicos do empuxo no propulsor variam na razão do número de pás, de três em três, em relação à mesma frequência fundamental.

Assim, sendo a gama de frequências a mesma para ambos os esforços, deve-se tomar $p_{j\ell}^0=0$ (amplitude nula) se um determinado esforço não contiver o ℓ -ésimo harmônico, como se vê na tabela 4.1. As magnitudes das amplitudes não nulas podem ser definidas como porcentagens dos valores médios dos esforços correspondentes. Os valores médios podem ser definidos, por suas vezes, por curvas como função da frequência fundamental de rotação do eixo - tais curvas seriam as funções de frequência -. De modo semelhante pode-se definir as fases iniciais para cada um dos harmônicos de ambos os esforços.

TABELA 4.1 - APLICAÇÃO DO CONCEITO DE AMPLITUDES NULAS NA MODELAGEM DE ESFORÇOS DE EXCITAÇÃO SIMULTÂNEA POR MOTOR E PROPULSOR

ORDEM	MOMENTO VERTICAL ALTERADO DO MOTOR	EMPUXO NO PROPULSOR
$\ell =$	ton x m	% do valor médio
1	13	-
2	6	-
3	41	1,50
4	22	-
5	10	-
6	8	0,05
7	18	-
8	1	-
9	0	0,01

IV.3 PARÂMETROS DAS RESPOSTAS NORMAIS

Pela aplicação da técnica de superposição modal, a bordada no capítulo 2, e tomando-se o tipo de modelagem do carregamento descrita em IV.2, as respostas normais são dadas por:

$$y_{ijl}(N,t) = \rho_{ijl}(N) \cdot \text{sen}[w_l(N) \cdot t + \theta_{ijl}(N)] \quad (4.2.a)$$

onde ρ_{ijl} e θ_{ijl} são, respectivamente, amplitude e fase da resposta normal no i -ésimo modo natural, devida ao l -ésimo harmônico do esforço aplicado segundo o j -ésimo grau de liberdade. Como cada uma destas respostas é equivalente à de um sistema com um grau de liberdade subcriticamente amortecido, temos:

$$\rho_{ijl}(N) = \chi_{ijl}(N) \cdot d_{il}(N) \quad (4.2.b)$$

$$\theta_{ijl}(N) = \delta_{jl}(N) - \text{arctag}\{2\xi_i \beta_{il}(N) / [1 - \beta_{il}^2(N)]\} \quad (4.2.c)$$

como, respectivamente, amplitudes e fases iniciais das respostas normais, e onde:

$$\beta_{il}(N) = w_l(N) / w_i \quad \text{-relação de frequências.} \quad (4.2.d)$$

$$\chi_{ijl}(N) = \varphi_{ji} \cdot p_{jl}^0(N) / w_i^2 \quad \text{-deslocamento estático.} \quad (4.2.e)$$

$$d_{il}(N) = \{ [1 - \beta_{il}^2(N)]^2 + [2 \cdot \xi_i \cdot \beta_{il}(N)]^2 \}^{-0,5} \quad \text{-fator de amplificação.} \quad (4.2.f)$$

w_i , ξ_i e φ_{ji} são, respectivamente, frequência natural, grau de amortecimento e amplitude modal segundo o grau de liberdade j , do i -ésimo modo natural (ϕ_i).

Conhecidas todas as $ixjxl$ respostas normais, a resposta em deslocamento do sistema, segundo o grau de liberdade k genérico, é dada por:

$$\begin{aligned}
v_k(N,t) &= \sum_{\ell} v_{k\ell}(N,t) = \\
&= \sum_{j\ell} \sum v_{kj\ell}(N,t) = \sum_{j\ell} \sum_i \sum v_{kij\ell}(N,t) \quad (4.3.a) \\
&= a_{kij\ell}(N) \cdot \text{sen}[w_{\ell}(N) \cdot t + \theta_{ij\ell}(N)]
\end{aligned}$$

donde, pela utilização das expressões (4.2), deduz-se:

$$\begin{aligned}
a_{kij\ell}(N) &= \varphi_{ki} \cdot \rho_{ij\ell}(N) = \\
&= \varphi_{ki} \cdot \varphi_{ji} \cdot \rho_{j\ell}^0(N) \cdot d_{i\ell}(N) / w_i^2 \quad (4.3.b)
\end{aligned}$$

Por derivação, para as velocidades temos:

$$\begin{aligned}
\dot{v}_k(N,t) &= \dot{a}_{kij\ell}(N) \cdot \text{sen}[w_{\ell}(N) \cdot t + \\
&\quad + \theta_{ij\ell}(N) + \pi/2] \quad (4.4.a)
\end{aligned}$$

$$\text{com} \quad \dot{a}_{kij\ell}(N) = w_{\ell}(N) \cdot a_{kij\ell}(N) \quad (4.4.b)$$

e para as acelerações:

$$\ddot{v}_k(N,t) = \ddot{a}_{kij\ell}(N) \cdot \text{sen}[w_{\ell}(N) \cdot t + \theta_{ij\ell}(N)] \quad (4.5.a)$$

$$\begin{aligned}
\text{com} \quad \ddot{a}_{kij\ell}(N) &= -w_{\ell}(N) \cdot \dot{a}_{kij\ell}(N) = \\
&= -w_{\ell}^2(N) \cdot a_{kij\ell}(N) \quad (4.5.b)
\end{aligned}$$

Assim, a resposta total do sistema é obtida pela soma de várias parcelas harmônicas, de modo geral com amplitudes, frequências e fases iniciais distintas. A resposta será periódica por que o período das parcelas de frequência w_{ℓ} está contido ℓ vezes* no maior período dentre todos os componentes.

* $T_{\ell} = 2\pi/w_{\ell} = 2\pi/(\ell\theta w)$. $T_1 = \ell \cdot T_{\ell}$. Como ℓ é inteiro, T_1 e T_{ℓ} são comensuráveis; portanto, a resposta é periódica de período T_1 .

IV.4 VELOCIDADES CRÍTICAS

O conceito de velocidade crítica está relacionado à ocorrência de ressonância entre harmônicos dos esforços de excitação e modos naturais de vibração. A ressonância ocorre sempre que houver igualdade entre uma frequência de excitação e uma frequência natural.

Um sistema de \bar{n} graus de liberdade com massa associada possui a mesma quantidade de frequências naturais, de sorte que, considerando-se a variação das frequências de excitação com a rotação fundamental, visualiza-se a existência de certos valores da rotação para os quais ocorre ressonância com um dos modos naturais. Este fato é matematicamente representado impondo-se valor unitário para a relação de frequências das respostas normais,

$$\beta_{i\ell} = w_{\ell}/w_i = 1 \quad (4.6)$$

Assim, a velocidade crítica ($N_{i\ell}$) é o valor da rotação fundamental para a qual o ℓ -ésimo harmônico dos esforços de excitação entra em ressonância com o i -ésimo modo natural. Portanto, usando a relação (4.1.b) com $N=N_{i\ell}$ e substituindo em (4.6), resulta:

$$N_{i\ell}(\text{rpm}) = 60/2\pi \cdot w_i/(\theta\ell) \quad (4.7)$$

usualmente dita: "velocidade crítica de ordem ℓ no i -ésimo modo".

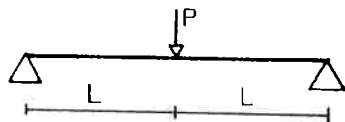
A introdução deste conceito é de fundamental importância quando se sabe que, nos valores de rotação fundamental correspondentes às velocidades críticas — por ação da ressonância que isso caracteriza —, devem ser esperados picos de amplificação dinâmica da resposta do sistema.

A tabela 4.2 ilustra o conjunto de velocidades crí

ticas para o caso de uma viga biapoiada, excitada por um esforço periódico a meio vão.

TABELA 4.2 - VELOCIDADES CRÍTICAS NUMA VIGA BIAPOIADA, EXCITADA POR ESFORÇO PERIÓDICO DE QUATRO COMPONENTES HARMÔNICOS.

MODOS NATURAIS		VELOCIDADES CRÍTICAS EM RPM			
ORDEM	FREQUÊNCIA	$\ell = 1$	2	3	4
-	w_i (rad/s)	$\theta \ell = 1/2$	1	1 1/2	2
1	1,9748	37,7	18,9	12,6	9,4
2	7,8955	150,8	75,4	50,3	37,7
3	17,765	339,3	169,6	113,1	84,8
4	31,582	603,1	301,6	201,1	150,8
5	49,347	942,5	471,2	314,2	235,6
6	71,059	1357,1	678,6	452,4	339,3
7	96,715	1847,1	923,6	615,7	461,8
8	126,32	2412,5	1206,3	804,2	603,1



$$P = \sum_{\ell=1}^4 P_{\ell} \sin[(2\pi/60)(\ell\theta N)t]$$

Obs.:

1. Até a oitava ordem modal, existem 32 velocidades críticas: valores da rotação (N) que causam a ocorrência de ressonância.
2. A 9,4 rpm ocorre a mais baixa velocidade crítica que é a de ordem 4 no primeiro modo; a seguir vem a de ordem 3 também no primeiro modo a 12,6 rpm, até a mais alta de ordem 1 no oitavo modo a 2412,5 rpm.
3. Neste exemplo específico, as velocidades críticas nos modos pares — embora estejam caracterizadas ocorrências de ressonância — não causam vibrações excessivas pois a carga está aplicada exatamente sobre os nós modais, a meio vão ($\psi_{ji} = 0$, na equação 4.2).
4. Veja equação (4.7) que estabelece o cálculo das velocidades críticas, e onde arbitramos $\theta = 0,5$.

IV.5 TRABALHO REALIZADO POR CICLO

Para sistemas vibrando em equilíbrio estável, o trabalho realizado por ciclo pelos esforços externos é numericamente igual à energia dissipada por ciclo pelos esforços de amortecimento. Na dinâmica das estruturas, apenas a situação hipotética de ressonância sem amortecimento leva ao desequilíbrio do sistema, quando as amplitudes de vibração crescem a cada ciclo até o infinito.

Na prática a limitação do trabalho implica na limitação das vibrações para um dado amortecimento. Disso decorre a relevância da utilização do trabalho realizado por ciclo como uma medida do nível de vibrações.

Por analogia a um sistema de um grau de liberdade, toma-se o trabalho realizado por ciclo como sendo proporcional ao produto da amplitude do esforço pela amplitude do deslocamento no ponto de aplicação desse, vezes o seno da diferença de fase. Aplicando-se este raciocínio, pelo uso de coordenadas generalizadas, obtém-se:

$$W_{kijl}^{(N)} = \pi [\varphi_{ki} \cdot p_{kl}^0(N)] [\rho_{ijl}^{(N)}] \cdot \text{sen}[\delta_{kl}^{(N)} - \theta_{ijl}^{(N)}] \quad (4.8)$$

como sendo: "O trabalho generalizado elementar, realizado por ciclo, pelo l -ésimo harmônico do esforço aplicado segundo o grau de liberdade k , sobre o deslocamento que ocorre segundo k , no modo i , devido ao l -ésimo harmônico (de mesma frequência) do esforço aplicado segundo j ".

Como está dito, cada componente de um determinado esforço realiza trabalho, apenas, sobre parcelas do deslocamento que tenham a sua frequência (fato mencionado no capítulo 2). Uma dessas parcelas do deslocamento deve-se ao próprio esforço ($j=k$), enquanto as outras devem-se aos outros esforços que porventura existam — representando os termos cruzados de (4.8) ($j \neq k$).

Isto posto, é interessante que se promova o agrupamento de alguns dos termos representados por (4.8), efetuando-se a soma dos efeitos dos l -ésimos harmônicos de todos os esforços, e a soma dos efeitos em todos os modos naturais (composição modal). Temos, então:

$$\begin{aligned}
 W_{k\ell} &= \sum_j \sum_i W_{kij\ell} = \\
 &= \pi p_{k\ell}^0 |\Psi_{ki} \rho_{ij\ell}| \text{sen}(\delta_{k\ell} - \theta_{ij\ell}) = \\
 &= \pi p_{k\ell}^0 a_{kij\ell} \text{sen}(\delta_{k\ell} - \theta_{ij\ell}) = \quad (4.9) \\
 &= \pi p_{k\ell}^0 [\text{sen } \delta_{k\ell} (a_{kij\ell} \cos \theta_{ij\ell}) - \\
 &\quad - \cos \delta_{k\ell} (a_{kij\ell} \text{sen } \theta_{ij\ell})]
 \end{aligned}$$

portanto,

$$W_{k\ell}(N) = \pi p_{k\ell}^0(N) \bar{a}_{k\ell}(N) \text{sen}[\delta_{k\ell}(N) - \bar{\theta}_{k\ell}(N)] \quad (4.10.a)$$

com

$$\begin{aligned}
 \bar{a}_{k\ell}(N) &= \{ [a_{kij\ell}(N) \cos \theta_{ij\ell}(N)]^2 + \\
 &\quad + [a_{kij\ell}(N) \text{sen } \theta_{ij\ell}(N)]^2 \}^{0.5} \quad (4.10.b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{tag } \bar{\theta}_{k\ell}(N) &= [a_{kij\ell}(N) \text{sen } \theta_{ij\ell}(N)] / \\
 &\quad [a_{kij\ell}(N) \cos \theta_{ij\ell}(N)] \quad (4.10.c)
 \end{aligned}$$

Assim, o trabalho total por ciclo, realizado pelo l -ésimo harmônico do esforço aplicado segundo o grau de liberdade k , é dado pelas expressões (4.10).

Outro caminho para a obtenção do trabalho ($W_{k\ell}$) parte da simples integração, no tempo de um ciclo, do produto da

força pelo deslocamento:

$$\begin{aligned}
 W_{k\ell} &= \frac{1}{\ell} \int_0^{T_1 = \ell T_\ell = 2\pi\ell/\omega_\ell} p_{k\ell}^0 \operatorname{sen}(\omega_\ell t + \delta_{k\ell}) \cdot d[a_{kijm} \operatorname{sen}(\omega_m t + \theta_{ijm})] \\
 &= p_{k\ell}^0 a_{kijm} \frac{\omega_m}{\ell \omega_\ell} \int_0^{2\pi\ell} \operatorname{sen}(\omega_\ell t + \delta_{k\ell}) \cdot \cos(\omega_m t + \theta_{ijm}) d(\omega_\ell t) \quad (4.11) \\
 &= p_{k\ell}^0 a_{kijm} \frac{\omega_m}{\omega_\ell} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}[\ell(\theta_{w_0} t) + \delta_{k\ell}] \cdot \cos[m(\theta_{w_0} t) + \theta_{ijm}] d(\theta_{w_0} t)
 \end{aligned}$$

Uma tabela de integrais mostrará (veja Apêndice A) que o resultado da integração acima é nulo quando $m \neq \ell^*$, de sorte que todos os termos da somatória em m , subentendida em (4.11), reduzem-se a um único valor:

$$W_{k\ell} = \pi p_{k\ell}^0 a_{kij\ell} \operatorname{sen}(\delta_{k\ell} - \theta_{ij\ell}) \quad (4.12)$$

expressão que coincide com (4.9). Disso conclui-se que, como indica o bom senso, o trabalho realizado por ciclo não depende do conceito de coordenadas tomado. A expressão (4.9) foi obtida em coordenadas generalizadas, pela utilização das respostas normais do sistema, enquanto (4.12) foi obtida em coordenadas geométricas.

A dedução encaminhada em (4.11) evidencia o fato

*Para $m = \ell$, o resultado da integração é:

$$\pi \operatorname{sen}(\delta_{k\ell} - \theta_{ijm})$$

de $W_{k\ell}$ ser um valor médio do trabalho por ciclo do ℓ -ésimo harmônico. Se for desejado o valor total num período da resposta (T_1), tal resultado deve ser multiplicado por ℓ , que é o número de vezes em que o ℓ -ésimo harmônico está contido numa rotação fundamental.

Assim, o trabalho por ciclo fundamental de todos os harmônicos do esforço aplicado segundo o k -ésimo grau de liberdade — ou, simplesmente, o trabalho por ciclo desse esforço —, é obtido por:

$$W_k(N) = \ell W_{k\ell}(N) = \pi \ell p_{k\ell}^0(N) \bar{a}_{k\ell}(N) \text{sen} [\delta_{k\ell}(N) - \bar{\theta}_{k\ell}(N)] \quad (4.13)$$

com $\bar{a}_{k\ell}(N)$ e $\bar{\theta}_{k\ell}(N)$ definidos, respectivamente, por (4.10.b) e (4.10.c).

Da análise das expressões aqui desenvolvidas, conclui-se*:

- i) O trabalho é máximo nas velocidades críticas.
- ii) O trabalho tende a diminuir com o aumento da ordem do modo ressonante. Na prática, isto justifica, em parte, o fato de não se incluir modos de alta ordem no cômputo da resposta.
- iii) A posição do ponto de aplicação do esforço na estrutura tem influência significativa sobre o trabalho. O esforço excitará, predominantemente, modos cujas amplitudes, no ponto de aplicação, sejam maiores.
- iv) Considerando os demais fatores, a influência da magnitude do esforço não assume importância especial. Medidas de ordem prática, visando a redução do nível de vibrações, são mais efetivas se alterarem as características de rigidez, de massa ou de amortecimento do sistema.

*A formulação das conclusões relacionadas, partindo das equações até aqui desenvolvidas, fica como exercício de compreensão do assunto pelo leitor.

IV.6 PARÂMETROS CINEMÁTICOS

O histórico de resposta em deslocamento, para o k-ésimo grau de liberdade da estrutura, é dado por:

$$v_k(N,t) = a_{kijl}(N) \cdot \text{sen}[w_l(N) \cdot t + \theta_{ijl}(N)] \quad (\text{rep.4.3.a}) \quad (4.14)$$

com amplitude e fase inicial como definidas no item IV.3.

O histórico é, portanto, estabelecido em termos de somatórias de várias parcelas harmônicas, de modo geral, com amplitudes, frequências e fases iniciais distintas. No entanto, à semelhança do que foi feito para o trabalho realizado por ciclo no item anterior, é possível agrupar as parcelas, de mesma frequência, correspondentes ao l-ésimo harmônico dos esforços de excitação.

O agrupamento é feito pela soma algébrica das contribuições de todos os modos (composição modal) e de todos os esforços aplicados à estrutura (composição de esforços). Como apenas parcelas de mesma frequência são agrupadas, o resultado obtido é exato e, ainda, composto de parcelas harmônicas.

Assim, a composição modal é feita como a seguir.

$$\begin{aligned} v_k &= a_{kijl} \text{sen}(w_l t + \theta_{ijl}) = \\ &= (a_{kijl} \text{sen } \theta_{ijl}) \cos w_l t + \\ &+ (a_{kijl} \cos \theta_{ijl}) \text{sen } w_l t = \\ &= \bar{a}_{kjl} \text{sen}(w_l t + \bar{\theta}_{kjl}) \end{aligned}$$

e, continuando, a composição de esforços faz-se por:

$$\begin{aligned}
 v_k &= \bar{a}_{kjl} \operatorname{sen}(w_\ell t + \bar{\theta}_{kjl}) = \\
 &= (\bar{a}_{kjl} \operatorname{sen} \bar{\theta}_{kjl}) \cos w_\ell t + (\bar{a}_{kjl} \cos \bar{\theta}_{kjl}) \operatorname{sen} w_\ell t = \\
 &= \bar{a}_{k\ell} \operatorname{sen}(w_\ell t + \bar{\theta}_{k\ell})
 \end{aligned}$$

As barras sobrepostas sobre as variáveis a e θ , servem como um reforço de escrita, na tentativa de bem diferenciar amplitudes e fases iniciais que vão resultando das composições. Este recurso é pleonástico, pois a diferenciação fica bem caracterizada quando se observam os subscritos que acompanham tais variáveis. Por exemplo, \bar{a}_{kjl} diferencia-se de a_{kijl} por que o subscrito i desaparece de uma para a outra por ação da composição modal.

Eliminando-se, portanto, a utilização redundante das barras, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 v_k(N, t) &= \sum_{\ell} v_{k\ell}(N, t) = \\
 &= a_{k\ell}(N) \operatorname{sen}[w_\ell(N) \cdot t + \theta_{k\ell}(N)]
 \end{aligned} \tag{4.15.a}$$

com:

$$\begin{aligned}
 a_{k\ell}(N) &= \{ [a_{kjl}(N) \operatorname{sen} \theta_{kjl}(N)]^2 + \\
 &+ [a_{kjl}(N) \cos \theta_{kjl}(N)]^2 \}^{0,5}
 \end{aligned} \tag{4.15.b}$$

$$\operatorname{tag} \theta_{k\ell}(N) = [a_{kjl}(N) \operatorname{sen} \theta_{kjl}(N)] / [a_{kjl}(N) \cos \theta_{kjl}(N)] \tag{4.15.c}$$

onde:

$$\begin{aligned}
 a_{kjl}(N) &= \{ [a_{kijl}(N) \operatorname{sen} \theta_{ijl}(N)]^2 + \\
 &+ [a_{kijl}(N) \cos \theta_{ijl}(N)]^2 \}^{0,5}
 \end{aligned} \tag{4.15.d}$$

$$\operatorname{tag} \theta_{kjl}(N) = [a_{kijl}(N) \operatorname{sen} \theta_{ijl}(N)] / [a_{kijl}(N) \operatorname{cos} \theta_{ijl}(N)] \quad (4.15.e)$$

Se as composições modal e de esforços forem feitas simultaneamente, chega-se a expressões equivalentes* a estas, porém numa forma mais simples:

$$a_{k\ell}(N) = \{ [a_{kijl}(N) \operatorname{sen} \theta_{ijl}(N)]^2 + [a_{kijl}(N) \operatorname{cos} \theta_{ijl}(N)]^2 \}^{0,5} \quad (4.16.a)$$

$$\operatorname{tag} \theta_{k\ell}(N) = [a_{kijl}(N) \operatorname{sen} \theta_{ijl}(N)] / [a_{kijl}(N) \operatorname{cos} \theta_{ijl}(N)] \quad (4.16.b)$$

Cuidado especial deve ser tomado na interpretação literal dessas expressões pois, de acordo com a nossa Convenção de Soma, existem somatórias subentendidas. Por exemplo, em (4.16.b) o termo a_{kijl} do numerador não se cancela com o mesmo do denominador, por que em ambos os lugares está subentendida somatória dupla em j e i , correspondente às composições simultâneas em modos e esforços. Do mesmo modo, o lado direito de (4.16.b) não expressa o mesmo que o lado direito de (4.15.e), onde apenas somatória em i está subentendida.

Amplitude e fase inicial, dadas por $a_{k\ell}(N)$ e $\theta_{k\ell}(N)$, representam a resposta do k -ésimo grau de liberdade do sistema, para cada um dos harmônicos dos esforços de excitação.

A apresentação dos resultados nessa forma já tem utilidade prática, pois dá uma medida da ação de cada componente harmônico, isoladamente. Se, no entanto, for desejado outra forma de tais parâmetros, de modo a combinar os efeitos de to-

*Através de transformações trigonométricas, prova-se facilmente (Apêndice B) que:

$$\sum_j a_{kjl} \operatorname{sen} \theta_{kjl} = \sum_j \sum_i a_{kijl} \operatorname{sen} \theta_{ijl}$$

$$\sum_j a_{kjl} \operatorname{cos} \theta_{kjl} = \sum_j \sum_i a_{kijl} \operatorname{cos} \theta_{ijl}$$

relações que garantem a equivalência mencionada.

dos os harmônicos, é necessário que se prossiga a dedução.

Evidentemente (4.15.a) é a forma mais simples que representa exatamente o histórico de resposta. Nessa expressão, todas as somas algébricas de parcelas de mesma frequência já foram feitas, restando, apenas, harmônicos com frequências distintas. Assim sendo, não é possível representar de modo exato o resultado por uma única amplitude e uma única fase inicial, já que a natureza do histórico é periódica* mas não harmônica.

Antes, no entanto, de prosseguirmos em caminho à realização da composição em harmônico dos esforços de excitação, faz-se apropriado que estaleçamos os fundamentos dos outros parâmetros cinemáticos: velocidade e aceleração.

O histórico de resposta em velocidade é obtido pela simples derivação temporal do deslocamento, de sorte que nada impede que a façamos sobre a forma simplificada (4.15.a), resultando:

$$\dot{v}_{k\ell}(N, t) = a_{k\ell}(N)w_{\ell}(N)\text{sen}[w_{\ell}(N).t + \theta_{k\ell}(N) + \pi/2] \quad (4.17)$$

e, analogamente, para aceleração, uma segunda derivação produz:

$$\ddot{v}_{k\ell}(N, t) = -a_{k\ell}(N)w_{\ell}^2(N)\text{sen}[w_{\ell}(N).t + \theta_{k\ell}(N)] \quad (4.18)$$

onde, para $a_{k\ell}$ e $\theta_{k\ell}$, continuam valendo as expressões (4.16), resultantes das composições em modos e esforços.

Com isso obtivemos expressões para os históricos de resposta em velocidade e aceleração — do k-ésimo grau de liberdade da estrutura — nas suas formas exatas mais simples.

Neste ponto estamos interessados em obter formas especiais para os parâmetros cinemáticos que agrupem, também, as ações conjuntas de todos os harmônicos dos esforços. Já vi

*O período da resposta é igual ao período do primeiro harmônico ($\ell=1$) das excitações ($T_1=2\pi/\theta\omega_0=60/N\theta$)

mos que, ao contrário das composições em modos e esforços, a composição em harmônicos dos esforços não pode ser feita como uma simples soma algébrica. É necessário, portanto, que recorramos a um outro tipo de conceito.

Um histórico de resposta pode ser encarado como o registro $(h(t))$ de um sinal aleatório de período finito, de sorte que sobre ele é possível aplicar certos conceitos estatísticos.

Recorramos, então, ao que se constitui em prática comum na análise dinâmica de estruturas $|B|$. Três propriedades probabilísticas de um sinal aleatório (figura 4.1) interessam-nos presentemente:

- valor médio $\langle h(t) \rangle$
- valor médio quadrático $\langle h^2(t) \rangle$
- desvio padrão σ_h

definidas por:

$$\langle h(t) \rangle = 1/T \int_0^T h(t) dt \quad (4.19)$$

$$\langle h^2(t) \rangle = 1/T \int_0^T h^2(t) dt \quad (4.20)$$

$$\sigma_h = \left\{ 1/T \int_0^T [h(t) - \langle h(t) \rangle]^2 dt \right\}^{0,5} \quad (4.21)$$

Como o valor médio dos esforços de excitação, por não produzirem vibrações, podem ser eliminados no cômputo da resposta, os valores médios de nossos sinais são nulos, tal que podemos tomar nas expressões anteriores: $\langle h(t) \rangle = 0$. Nesse caso o desvio padrão é exatamente igual à raiz quadrada do valor médio quadrático, quantidade que, por sua vez, costuma-se chamar de "Root Mean Square (RMS)". Assim, como propriedade probabilística que nos interessa, resta:

$$\text{RMS} = [\langle h^2(t) \rangle]^{0,5} = \left[\frac{1}{T} \int_0^T h^2(t) dt \right]^{0,5} \quad (4.22.a)$$

onde T é o período do sinal.

A amplitude de uma senóide equivalente — com mesmo RMS de $h(t)$ — é dada por (veja Apêndice C):

$$a = \sqrt{2} \text{ RMS} = \sqrt{2} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T h^2(t) dt \right\}^{0,5} \quad (4.22.b)$$

Aplicando, então, (4.22) ao histórico de resposta em deslocamento temos:

$$\begin{aligned} a_k^2 &= \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1} [a_{k\ell} \text{ sen}(w_\ell t + \theta_{k\ell})] [a_{km} \text{ sen}(w_m t + \theta_{km})] dt = \\ (*) &= \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} a_{k\ell}^2 \text{ sen}^2(w_\ell t + \theta_{k\ell}) dt = \frac{2}{T_1} a_{k\ell}^2 \frac{T_1}{2} \end{aligned} \quad (4.23)$$

portanto, o resultado da composição dos harmônicos dos esforços de excitação, pela aplicação do critério RMS, é:

$$a_k(N) = \left[\sum_{\ell} a_{k\ell}^2(N) \right]^{0,5} \quad (4.24)$$

Fazendo-se o mesmo para velocidade e aceleração, obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{a}_k(N) &= \left[\sum_{\ell} w_\ell^2(N) a_{k\ell}^2(N) \right]^{0,5} = \\ &(2\pi/60) N \theta \left[\sum_{\ell} \ell^2 \cdot a_{k\ell}^2(N) \right]^{0,5} \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \ddot{a}_k(N) &= \left[\sum_{\ell} w_\ell^4(N) a_{k\ell}^2(N) \right]^{0,5} = \\ &(2\pi/60)^2 N^2 \theta^2 \left[\sum_{\ell} \ell^4 \cdot a_{k\ell}^2(N) \right]^{0,5} \end{aligned} \quad (4.26)$$

*O resultado da integração é nulo para os termos de $m \neq \ell$ (ver Apêndice D).
Note-se, também, que, como resultado da integração, a_k não depende das fases iniciais $\theta_{k\ell}$.

O que se obtém, pela aplicação do critério RMS, não são limites superiores para os parâmetros cinemáticos mas, sim, valores médios nominais (figura 4.2) que dão uma medida do nível de vibrações. A definição da aceitabilidade desse nível será função do que se dispuser como informação de limites permisíveis, como ilustrado no exemplo da figura 4.3.

Por vezes, pode vir a ser interessante obter os valores estáticos dos deslocamentos causados pela ação quasi-estática dos esforços de excitação (quando velocidades e acelerações são desprezíveis). O estabelecimento desta ação fica matematicamente caracterizado quando se impõe:

$$(*) \quad w_{\ell}(N) \rightarrow 0 \quad \therefore \quad T_{\ell}(N) \rightarrow \infty ; \quad \forall \ell, N \quad (4.27)$$

Disso resultam as seguintes identidades para os parâmetros das respostas normais:

$$\beta_{i\ell}(N) = 0 ; \quad \forall i, \ell, N \quad (4.28.a)$$

$$d_{i\ell}(N) = 1 ; \quad \forall i, \ell, N \quad (4.28.b)$$

$$\rho_{ij\ell}(N) = \chi_{ij\ell}(N) = \psi_{ji} \cdot p_{j\ell}^0(N) / w_i^2 ; \quad \forall i, j, \ell \quad (4.28.c)$$

Assim, o valor estático do deslocamento segundo o k-ésimo grau de liberdade, no modo i, sob ação do ℓ -ésimo harmônico do esforço aplicado segundo j, é:

$$|v_{kij\ell}|_{\text{est}}(N) = \psi_{ki} \psi_{ji} p_{j\ell}^0(N) / w_i^2 \quad (4.29)$$

O valor total do deslocamento estático, segundo o grau de liberdade k, é obtido pela simples soma algébrica de ca

* Deve ser entendido que \bar{e} a aproximação $\theta=0$ em (4.1.b) — e não $N=0$ — que representa a ação quasi-estática mencionada:

$$\theta=0 \rightarrow w_{\ell} \equiv 0 \rightarrow \dot{v}_k(N, t) = \ddot{v}_k(N, t) = 0, \quad \forall t, N$$

da um dos termos representados em (4.29), já que as diferenças de fase são irrelevantes quando os esforços são aplicados quasi-estaticamente. Assim, os resultados das composições sucessivas em modos, esforços e harmônicos dos esforços são dados, respectivamente, por:

$$|v_{kjl}|_{est}^{(N)} = \sum_i |v_{kijl}|_{est}^{(N)} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} |v_{k\ell}|_{est}^{(N)} &= \sum_j |v_{kjl}|_{est}^{(N)} \\ &= \sum_i \sum_j |v_{kijl}|_{est}^{(N)} \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} |v_k|_{est}^{(N)} &= \sum_{\ell} |v_{k\ell}|_{est}^{(N)} = \\ &= \sum_i \sum_j \sum_{\ell} |v_{kijl}|_{est}^{(N)} = \\ &= \psi_{ki} \psi_{ji} p_{j\ell}^0(N) / w_i^2 \end{aligned} \quad (4.32)$$

Se forem desejadas formas adimensionais para as respostas em frequências dos deslocamentos, podemos fazer:

$$||a_{k\ell}(N)|| = a_{k\ell}(N) / |v_{k\ell}|_{est}^{(N)} \quad (4.33)$$

$$||a_k(N)|| = a_k(N) / |v_k|_{est}^{(N)} \quad (4.34)$$

Veremos no capítulo 5 que a verificação da aceitabilidade do nível de vibrações pode ser feita diretamente pelo uso isolado dos harmônicos da aceleração, sem necessidade de expressá-la na forma do RMS. Ainda assim, contudo, persiste a importância do RMS com um indicador compacto, mesmo que aproximado, do nível de vibrações.

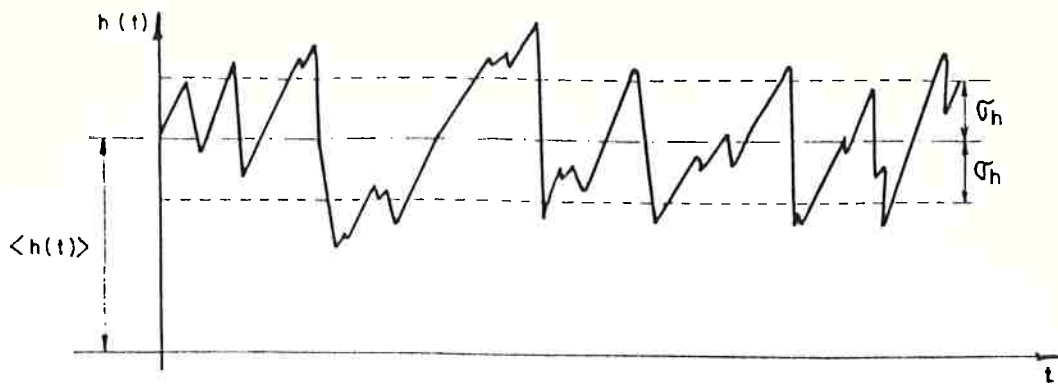


FIGURA 4.1- REGISTRO DE UM SINAL ALEATÓRIO

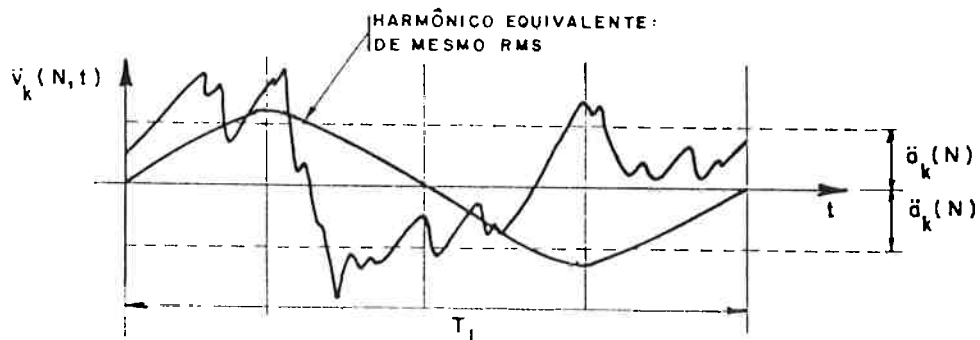
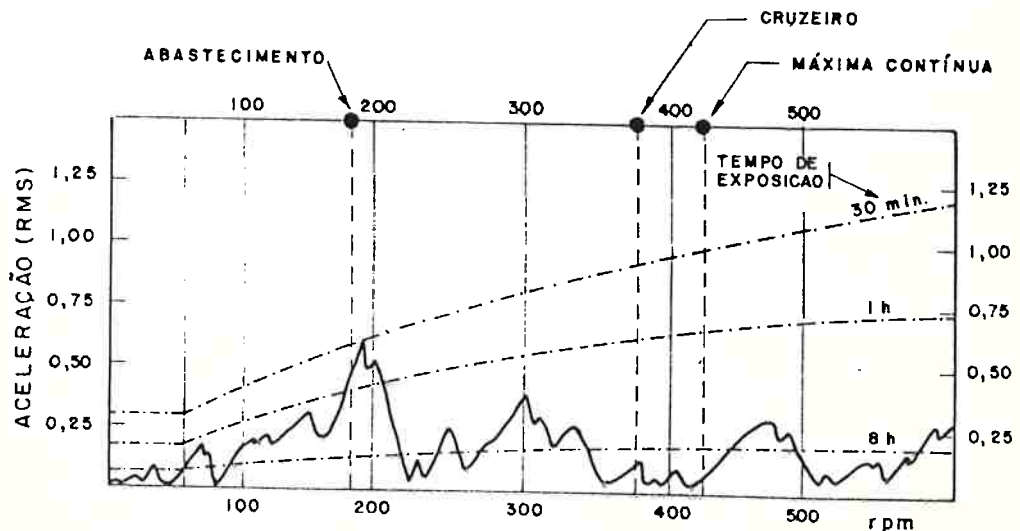


FIGURA 4.2- REGISTRO DA ACELERAÇÃO, SEGUNDO O k-ÉSIMO GRAU DE LIBERDADE, E REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO RMS, NA ROTAÇÃO N.




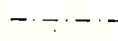
 : RMS DA ACELERAÇÃO (\ddot{a}_k/g) NA PONTE DE COMANDO
 : LIMITE DE EXPOSIÇÃO - REAÇÃO HUMANA [B14]

FIGURA 4.3- EXEMPLO ESQUEMÁTICO DA AVALIAÇÃO DO NÍVEL DE VIBRAÇÕES

IV.7 ESFORÇOS NODAIS ELÁSTICOS

Consideremos o m -ésimo elemento da estrutura discretizada. O histórico de resposta para o k -ésimo esforço nodal elástico, como visto no capítulo 2, é:

$$\begin{aligned}
 e_k^m(N,t) &= \sum_{\ell} e_{k\ell}^m(N,t) = \sum_j \sum_{\ell} e_{kj\ell}^m(N,t) = \\
 &= \sum_i \sum_j \sum_{\ell} e_{kij\ell}^m(N,t) = \quad (4.35) \\
 &= b_{ki}^m \rho_{ij\ell}(N) \cdot \text{sen}[w_{\ell}(N) \cdot t + \theta_{ij\ell}(N)]
 \end{aligned}$$

Matematicamente falando, a expressão (4.35) é inteiramente semelhante à expressão (4.3.a) do histórico de resposta em deslocamento; bastando substituir ψ_{ki} (amplitude do modo i segundo o grau de liberdade global k) por b_{ki}^m (k -ésima linha do vetor dos esforços elásticos em coordenadas normais, no modo i).

Portanto, as deduções que fizemos, nos capítulos precedentes para os deslocamentos, são válidas aqui, obtendo-se:

$$a_{kij\ell}^m(N) = b_{ki}^m \rho_{ij\ell}(N) = b_{ki}^m \psi_{ji} \rho_{j\ell}^0(N) \cdot d_{i\ell}(N) / w_i^2 \quad (4.36)$$

como amplitude do k -ésimo esforço elásticos do elemento m , no i -ésimo modo, devida ao ℓ -ésimo harmônico do esforço externo aplicado segundo j .

E, ainda, como resultado das composições em modos e esforços:

$$\begin{aligned}
 e_k^m(N,t) &= \sum_{\ell} e_{k\ell}^m(N,t) = \\
 &= a_{k\ell}^m(N) \text{sen}[w_{\ell}(N) \cdot t + \theta_{k\ell}^m(N)] \quad (4.37.a)
 \end{aligned}$$

com

$$a_{k\ell}^m(N) = \{ [a_{kij\ell}^m(N) \text{sen } \theta_{ij\ell}(N)]^2 + [a_{kij\ell}^m(N) \text{cos } \theta_{ij\ell}(N)]^2 \}^{0,5} \quad (4.37.b)$$

$$\text{tag } \theta_{k\ell}^m(N) = [a_{kij\ell}^m(N) \text{sen } \theta_{ij\ell}(N)] / [a_{kij\ell}^m(N) \text{cos } \theta_{ij\ell}(N)] \quad (4.37.c)$$

Continuando, a composição em harmônicos dos esforços de excitação, pela aplicação do critério RMS, obtém-se por:

$$a_k^m(N) = [\sum_{\ell} a_{k\ell}^m(N) \cdot a_{k\ell}^m(N)]^{0,5} \quad (4.38)$$

E os valores estáticos por:

$$|e_{kij\ell}^m|_{\text{est}}(N) = b_{ki}^m \psi_{ji} p_{j\ell}^0(N) / w_i^2 \quad (4.39.a)$$

$$|e_{k\ell}^m|_{\text{est}}(N) = \sum_i \sum_j |e_{kij\ell}^m|_{\text{est}}(N) \quad (4.39.b)$$

$$\begin{aligned} |e_k^m|_{\text{est}}(N) &= \sum_i \sum_j \sum_{\ell} |e_{kij\ell}^m|_{\text{est}}(N) = \\ &= b_{ki}^m \psi_{ji} p_{j\ell}^0(N) / w_i^2 \end{aligned} \quad (4.39.c)$$

Tendo em mente a verificação do nível de vibrações sob o ponto de vista de fadiga do material resistente estrutural, estabelecemos aqui as bases para o cálculo de tensões, a ser apropriadamente abordado no capítulo 5. A semelhança do que ocorre para os parâmetros cinemáticos da resposta, na avaliação final do nível de tensões alternadas não será necessário recorrer ao uso do critério RMS. Isto, contudo, não elimina a importância deste como mais um meio, ainda que aproximado, de expressar a resposta dinâmica do sistema.

CAPÍTULO 5

LIMITES PERMISSÍVEIS. EFEITOS DAS VIBRAÇÕES ESTRUTURAIS

V.1 INTRODUÇÃO

Em qualquer tipo de análise de estruturas, o resultado do cálculo deve ser comparado com algum parâmetro disponível, de sorte a estabelecer-se a aceitabilidade do comportamento estrutural. Numa análise estática, por exemplo, as tensões obtidas costumam ser confrontadas com a tensão de escoamento do material, obtida num ensaio simples, em condições substancialmente diversas daquelas enfrentadas pela estrutura.

Assim, temos, por um lado os resultados da análise que, como consequência das hipóteses adotadas na teoria, representam uma aproximação daquilo que se acredita ser o comportamento da estrutura; de outro os limites nominais permissíveis que, se espera, uma estrutura bem projetada venha a satisfazer.

Na análise dinâmica, embora num nível mais elaborado do que no caso estático, o procedimento a seguir enquadra-se na mesma linha de raciocínio.

A representação, do que se espera ser o comportamento dinâmico da estrutura, pode ser obtida pelo método proposto no capítulo 4. Usualmente, de acordo com o tipo de aplicação, os parâmetros obtidos precisam ser confrontados com outros, de naturezas equivalentes, estabelecidos em ensaio simples de laboratório. É comum que se confrontem um ou mais dos seguintes parâmetros com seus respectivos limites permissíveis:

- i) tensões cíclicas nas juntas estruturais x valores máximos permissíveis, considerando-se a vida em fadiga do material.
- ii) acelerações cíclicas em compartimentos habitáveis x valores máximos permissíveis, tendo em

- vista os limites de exposição do corpo humano.
- iii) acelerações cíclicas nas fundações dos diversos equipamentos x valores máximos permissíveis, considerando-se o não comprometimento das funções desses equipamentos.

A estrutura pode ser considerada como livre de vibrações indesejáveis se tais limites não forem ultrapassados. O desempenho do navio, como um sistema no todo, não será satisfatório se os fatores estrutura, humano e de equipamentos, por ação de vibrações indesejáveis, não puderem realizar suas funções a contento por toda sua vida útil.

Neste capítulo definiremos limites permissíveis para as vibrações, à luz do que se dispõe na literatura sobre o assunto, sem intenção, contudo, de esgotá-lo ou de transformá-lo no âmago do trabalho. Objetiva-se, tão somente, o estabelecimento de relações simples que permitam a verificação do nível de vibrações de uma forma útil ao analista.

Portanto, as três principais razões que justificam a prevenção — ainda no estágio de projeto —, via análise e avaliação das vibrações do navio, são:

- a) Vibrações resultam em tensões dinâmicas que costumam causar danos por fadiga nas juntas de importantes membros estruturais, comprometendo a capacidade de resistência da estrutura.
- b) Vibrações podem causar incômodo e desconforto à tripulação (e passageiros), podendo reduzir a eficiência e a segurança na realização de suas tarefas.
- c) Vibrações podem deteriorar seriamente o funcionamento apropriado de máquinas e equipamentos, essenciais ao bom funcionamento do navio.

De modo geral, as vibrações afetam em primeira lugar as pessoas antes de afetar os equipamentos, os componentes mecânicos ou a estrutura. Vibrações da viga-navio causam desconforto considerável às pessoas antes de causar um nível alto de tensões dinâmicas (veja figura 5.1). Vibrações locais são mais comumente problemáticas quando causam ressonância de painéis, perfis e pequenas porções da estrutura, ou de componentes de equipamentos como mastros e consoles. Disso podem resultar danos estruturais pelo aparecimento e propagação de fissuras.

Assim, quase sempre é possível adotar, como limite de vibrações da estrutura como um todo (viga-navio), aquele tolerado pelo homem; enquanto os limites das vibrações locais estão mais associados à vida em fadiga dos membros estruturais. Como demonstrativo desses fatos temos o que vai na tabela 5.1 e na figura 5.1.

TABELA 5.1 - LIMITES MÁXIMOS ACEITÁVEIS PARA A VIGA-NAVIO |B15|

		% ACEL.GRAVIDADE
a) PARA CONFORTO DA TRIPULAÇÃO	VERTICAL	3,1
	HORIZONTAL	2,3
b) PARA NÃO CAUSAR DANO NA ESTRUTURA	VERTICAL	9,3
	HORIZONTAL	9,3

Ao longo dos últimos anos um grande número de critérios ou normas, sobre vários aspectos da avaliação dos limites de vibração, tem sido propostos. Em alguns casos, as normas são ditadas sem apresentar claramente os conceitos e hipóteses, e sem estabelecer os limites e condicionantes de sua a-

plicação. Assim, ocasionalmente, um analista desavisado pode vir a usar um determinado diagrama, obtido num contexto bastante particularizado e não explícito, em circunstâncias não apropriadas para o seu caso. A necessidade de um estudo cuidadoso do âmbito, e das condições de aplicação, de cada critério não deve ser esquecida.

No item seguinte deste capítulo estudaremos a abordagem do problema de fadiga, como usualmente esta ocorre no caso de vibrações do navio. Visa-se o estabelecimento de um critério simplificado que complemente o uso da teoria abordada no capítulo 4.

Na última parte deste capítulo estudaremos meios de estabelecer limites para as vibrações, quando estas forem potencialmente causadoras de desconforto à pessoa humana. É evidente que a presença simultânea de ruído tem influência sobre a reação humana à vibração. Porém, como o problema de ruído no navio pode, e costuma, ser tratado independentemente por métodos distintos dos vistos aqui, proporemos limites que contem com a total ausência de ruídos fortes, na suposição de que medidas construtivas apropriadas garantam tal fato.

O caso da análise de reação de equipamentos às vibrações enquadra-se, inteiramente, nos princípios aqui formulados. Embora no texto, de agora em diante, façamos referência aos estudos de fadiga e de reação humana, a análise para o caso de equipamentos fica implicitamente contida no âmbito do trabalho. Para tanto, basta que se disponha dos limites permissíveis — obtidos de ensaios em laboratório — para cada equipamento. Ainda assim, contudo, se o navio é suficientemente bem projetado, dos pontos de vista de vida em fadiga e reação humana, a prática tem demonstrado ser bastante improvável que ele venha a ter um comportamento vibratório danoso ao bom funcionamento dos equipamentos. Este fato reduz a importância deste caso particular de análise.

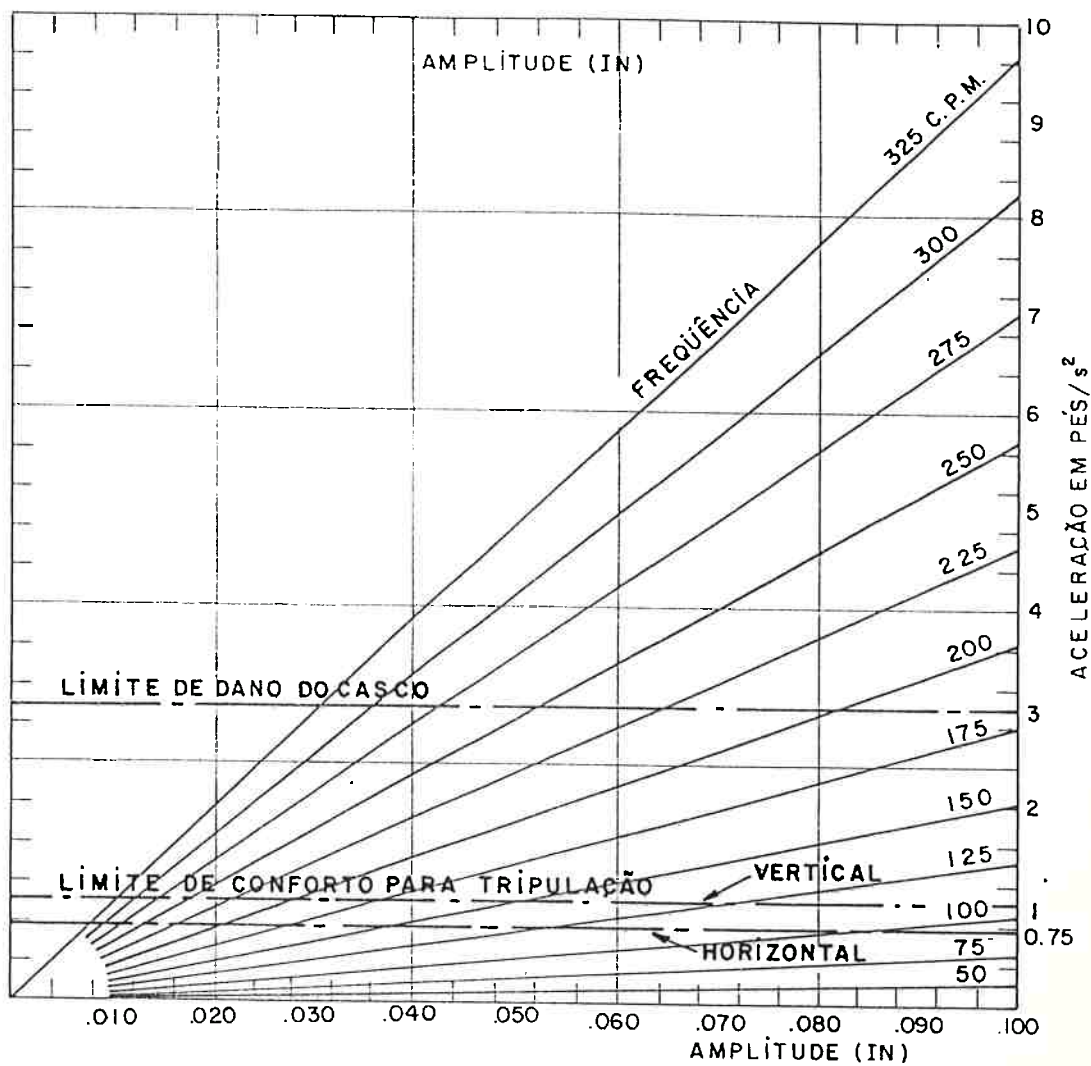


FIGURA 5.1 - LÍMITES PARA VIBRAÇÕES DO NAVIO [B 15]

V.2 ANÁLISE DE FADIGA

É fato sabido que, numa estrutura soldada como a do navio |C2|, as juntas, sujeitas a condições de carga que produzam tensões alteradas, podem vir a romper sob estado de sollicitação consideravelmente menos severo do que aqueles que causariam ruptura em condições estáticas.

A fratura pode ocorrer mesmo que os picos de tensões alternadas sejam substancialmente menores do que limite de escoamento do aço estrutural. Este fenômeno, de comprometimento da resistência por ação da flutuação do valor das tensões, é o que se chama de "fadiga".

V.2.1 Origem da Fadiga |C3|

O fenômeno da fadiga relaciona-se com a existência de fissuras microscópicas que, por ação dos esforços cíclicos — com efeitos amplificados pela elevada concentração de tensões — propagam-se pelo interior do material, ganhando dimensões macroscópicas: ruptura frágil progressiva. O processo caminha rapidamente até que a redução da porção resistente da junta estrutural provoque, num dos ciclos, a ruptura final por falta de resistência: ruptura estática instantânea (figura 5.2). Neste instante, então, finda a vida em fadiga da junta.

Pode-se dizer, a grosso modo, que apenas 10% da vida em fadiga são gastos no fissuramento macroscópico e subsequente ruptura. Os 90% iniciais são gastos — quando não forem grandes as imperfeições de fabricação — num período de estriamento e aglutinação de fissuras submicroscópicas. Daí a dificuldade em se estabelecer métodos de verificação, in loco, da iminência do final da vida em fadiga, pois apenas 10% desta oferecem condições de fácil constatação.

V.2.2 Fatores que Afetam a Vida em Fadiga [C10]

O comportamento em fadiga da estrutura é afetado por fatores outros, que não dizem respeito, diretamente, ao valor do carregamento dinâmico aplicado; tais como:

- composição química do material;
- propriedades físicas e mecânicas do material;
- métodos de fabricação;
- tamanho dos grãos;
- rugosidade superficial;
- recobrimento;
- corrosão;
- geometria e dimensões da estrutura;
- tensões residuais, tensões estáticas e concentração de tensões; e
- casos prévios de solicitação.

Com isto percebe-se, claramente, a complexibilidade do estudo da fadiga na tentativa de se estabelecer parâmetros de análise. Não existe, evidentemente, formulação analítica disponível que relacione precisa e completamente tais fatores com a vida em fadiga; mesmo por que muitos deles são dificilmente equacionáveis.

O impasse é contornado pela realização de estudos experimentais com espécimes em laboratório, através de ensaios normalizados que definem a vida em fadiga para vários níveis e configurações de solicitação. Evidentemente, ensaios realizados em condições ideais, não reproduzem o comportamento real do material quando na estrutura. Porém, mesmo assim, deste que se tenha conhecimento da existência desta limitação, nada impede que se toma os resultados dos ensaios como limites nominais para a vida em fadiga da peça estrutural. Por outro lado resta, sempre, a alternativa de se procurar reproduzir em laboratório — quando isto for viável — o maior número possível de condições reais.

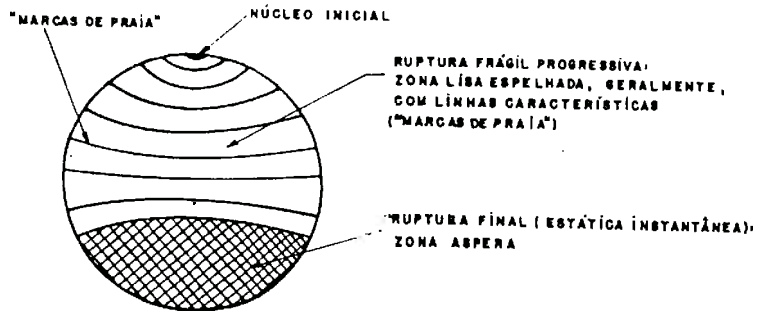


FIGURA 5.2- EXAME VISUAL, OU MACROSCÓPICO, DE UMA PEÇA ROMPIDA POR FADIGA [C].

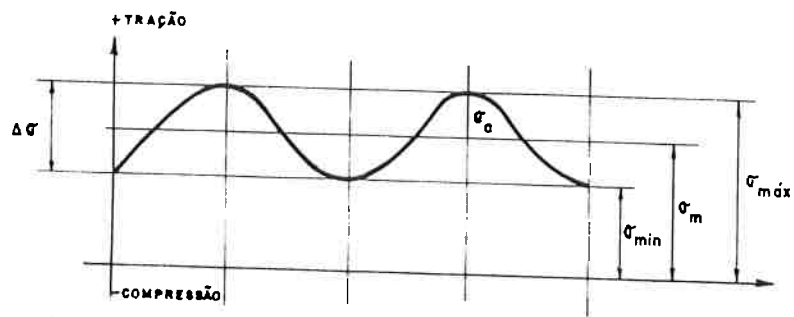


FIGURA 5.3- TENSÕES EM MEMBROS ESTRUTURAIS DEVIDAS A CARGAS CÍCLICAS

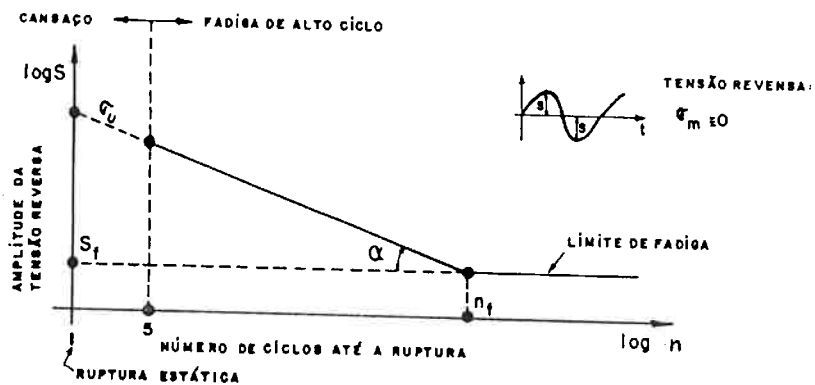


FIGURA 5.4 - DIAGRAMA s-n ESQUEMÁTICO. CASO TÍPICO DO AÇO ESTRUTURAL ENSAIO UNIAXIAL, REVERSO E HARMÔNICO

V.2.3 Testes de Fadiga. Critério de Fadiga

Como já dissemos, não há ainda uma teoria sobre fadiga que nos permita avaliar o comportamento de uma junta considerando seus estados reais de manufatura, de geometria e de tensões. Por isso, podemos, apenas, estabelecer previsões como extrapolação de dados experimentais disponíveis. Estes caracterizam-se por uma enorme dispersão das condições gerais dos ensaios mas, inegavelmente, contém informações que se prestam à verificação da vida em fadiga do caso real.

Nos ensaios os espécimes são submetidos, de modo geral, a estados de tensões uniaxiais e harmônicos (figura 5.3), sob diversas relações de tensão máxima, tensão mínima e tensão média. Os resultados indicam que a vida em fadiga é função não apenas da amplitude da tensão alternada, mas também de seu valor médio. A dependência do valor médio é particularmente sensível quando este é de tração; condição que favorece a propagação da fissura.

Numerosos métodos que levam em conta a interdependência entre amplitude da tensão alternada*, seu valor médio (tensão estática) e o número de ciclos até a ocorrência da falha por fadiga, tem sido propostos [C]. O propósito aqui é o de apresentar uma formulação simplificada, que possa vir a dar bons resultados desde que convenientemente empregada.

Tomemos, portanto, como dado experimental o que na literatura costuma-se chamar de diagrama s-n (figura 5.4), obtido de ensaios simples (uniaxial harmônico) de flexão pura reversa ($\sigma_m = 0$). O problema prático reduz-se, agora, ao emprego de um critério onde se estabeleça a equivalência entre um parâme

*Neste trabalho designamos por tensão alternada (ou cíclica) a função tensão expressa no domínio do tempo. Eventualmente, contudo, o mesmo termo pode ser empregado para designar a amplitude dessa mesma função. Nas equações a distinção entre ambas as designações fica explicitamente evidenciada porque a amplitude não é função do tempo.

tro, calculado para o caso em estudo, com o mesmo parâmetro obtido das experiências. Assim, o critério formulado deve conter três fatores de equivalência:

- i) Critério de Resistência. Este deve traduzir a ação de esforços combinados (estado multiaxial de sollicitação) para um valor de tensão equivalente uniaxial.
- ii) Caráter Periódico (Multiharmônico) da Sollicitação. O registro periódico de tensões deve ser interpretado pelo emprego de uma das técnicas de contagem |C1| de picos e vales.
- iii) Efeito do Valor Médio (Estático). O efeito do valor médio (σ_m) na fadiga deve ser computado através de correção apropriada, promovida sobre os valores do diagrama s-n; tendo sido este obtido de ensaios com tensão reversa ($\sigma_m=0$).

As discussões sobre estes fatores de equivalência, entre condições dos ensaios simples e condições reais, constituem-se nos temas dos itens que se seguem.

V.2.4 Tensões Multiaxiais. Critério de Resistência

O caráter uniaxial dos ensaios padrão de fadiga, em comparação com o caráter geralmente multiaxial de sollicitação da estrutura, leva à necessidade de utilização de um critério de resistência. A função deste critério é a de promover a tradução do caso real de esforços combinados em termos de uma quantidade uniaxial equivalente.

Visualizando-se a estrutura como um espaço de tensões, em cada ponto o estado de sollicitação fica univocamente determinado por três tensões principais (σ_1, σ_2 , e σ_3). Assim, cada ponto pode ter seu estado de tensão caracterizado pelo va

lor da tensão equivalente (σ_e) que, segundo proposta de von Mises [E3] (critério do escoamento plástico de von Mises), é dada por:

$$\sigma_e = \{0,5 [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]\}^{1/2} \quad (5.1.a)$$

ou

$$\sigma_e = \{0,5 [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)]\}^{1/2} \quad (5.1.b)$$

onde, $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{xz}$ são as tensões definidas num terno arbitrário (x,y,z) de eixos cartesianos (figura 5.5).

Estas expressões podem ser postas na forma compacta:

$$\sigma_e = \{0,5 \{ \beta_{rs\bar{r}\bar{s}} \sigma_{rs} \sigma_{\bar{r}\bar{s}} \} \}^{1/2} \quad (5.1.c)$$

onde, dentro das chaves, estão subentendidas quatro somatórias respectivamente em r, s, \bar{r} e \bar{s} variando no conjunto {1,2,3}. Os valores das constantes $\beta_{rs\bar{r}\bar{s}}$ são dados na tabela 5.2 (dos oitenta e um possíveis, apenas doze são não nulos).

O critério de von Mises estabelece que, num ponto da estrutura, inicia-se o escoamento quando a energia de distorção iguala-se àquela do instante de escoamento num ensaio simples de tração-compressão do material. É particularmente empregado para estruturas em aço, sendo recomendado (|C1|, |C3|) para o caso da fadiga. A tensão (de escoamento) equivalente, dada pelas expressões (5.1), é proporcional a uma série de outras quantidades relacionadas na literatura, dentre as quais destacamos:

- tensão de cisalhamento octaédrica: $\sqrt{2/3} \sigma_e$;
- RMS das tensões de cisalhamento por todos os

planos que passam pelo ponto: $\sqrt{2/15} \sigma_e$;

- segundo invariante do tensor de tensões: $1/3 \sigma_e^2$.

O emprego dessas quantidades, como alternativas para o critério de resistência, tem sido proposto na literatura, porém, o critério de Von Mises é o mais aceito até o presente [C1].

TABELA 5.2 - COEFICIENTES $\beta_{rs\bar{r}\bar{s}}$ DA FORMA (5.1.c) PARA AS TENSÕES EQUIVALENTES (CRITÉRIO DE VON MISES)

r	s	\bar{r}	\bar{s}	β
1	1	1	1	1
2	2	2	2	1
3	3	3	3	1
1	1	2	2	-1
2	2	1	1	-1
2	2	3	3	-1
3	3	2	2	-1
1	1	3	3	-1
3	3	1	1	-1
1	2	1	2	6
2	3	2	3	6
1	3	1	3	6

$r, s, \bar{r}, \bar{s} \in \{1, 2, 3\}$

$$\beta_{rs\bar{r}\bar{s}} = \beta_{\bar{r}\bar{s}rs}$$

$\beta_{rs\bar{r}\bar{s}} = 0$ para todas as combinações de índices não relacionadas na tabela.

V.2.5 Efeito do Valor Médio (Estático)

A teoria exposta no capítulo 4 não se destina ao cálculo do valor estático das tensões*. Entretanto, estas não podem ser ignoradas por que existem e têm significativa influência na vida em fadiga, em vários casos de vibrações da estrutura do navio**.

*As tensões estáticas, por vezes com causas diversas daquelas dos esforços alternados, devem ser calculadas segundo a prática comum para esses casos.
 **Como exemplo citamos o caso da vibração de um painel de convés sob ação da tensão estática primária da viga-navio.

Não desejamos entrar, aqui, no mérito da mecânica pela qual o valor médio exerce influência sobre a fadiga — o leitor interessado nisso deve recorrer à bibliografia recomendada. A nós, nos basta, por ora, entender que uma tensão estática de tração oferece melhores condições para a propagação da fissura, reduzindo, por conseguinte, o número de ciclos até o rompimento final. Evidentemente, uma tensão média de compressão produz efeito inverso (figura 5.6).

Com o intuito de prover ao analista condições de avaliar a influência do valor médio, várias leis tem sido propostas e corroboradas (|C1|, |B13|). A idéia é: usar o diagrama s-n de um ensaio de tensão reversa ($\sigma_m=0$), corrigindo os resultados pelo emprego de uma das leis propostas. As mais comuns destas leis podem ser postas na seguinte forma geral:

$$S_c(n) = [1 - (\frac{\sigma_m}{\sigma_R})^\eta] \cdot S(n)/k \quad (5.2)$$

onde:

- n - número de ciclos até a ruptura final.
- S - limite de resistência à fadiga obtido num ensaio com reversão completa de tensão ($\sigma_m=0$) : Diagrama s-n.
- S_c - limite de resistência corrigido.
- σ_R - tensão característica do material.
- η - expoente.
- k - coeficiente de concentração de tensões e/ou fator de segurança.

Os valores de σ_R e η , que variam de acordo com a lei tomada, estão indicados na tabela 5.3, para as três leis mais comumente usadas: Goodman, Soderberg e Gerber (|C1|, |C14|, |B13|).

A figura 5.7 mostra o tipo de correção que cada lei propicia, indicando seus limites de aplicação. Se existe alguma evidência experimental apontando que a lei de Soderberg é muito conservadora, pode-se usar a lei de Goodman Modificada .

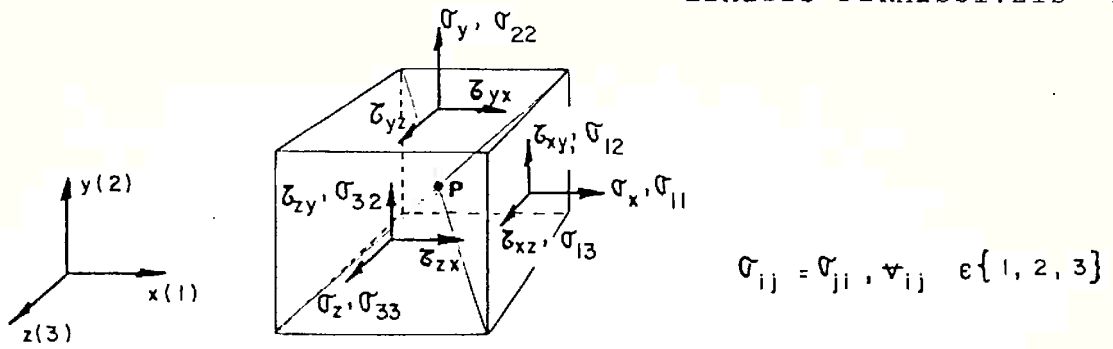


FIGURA 5.5 - TENSÕES MULTIAXIAIS NUM PONTO P.

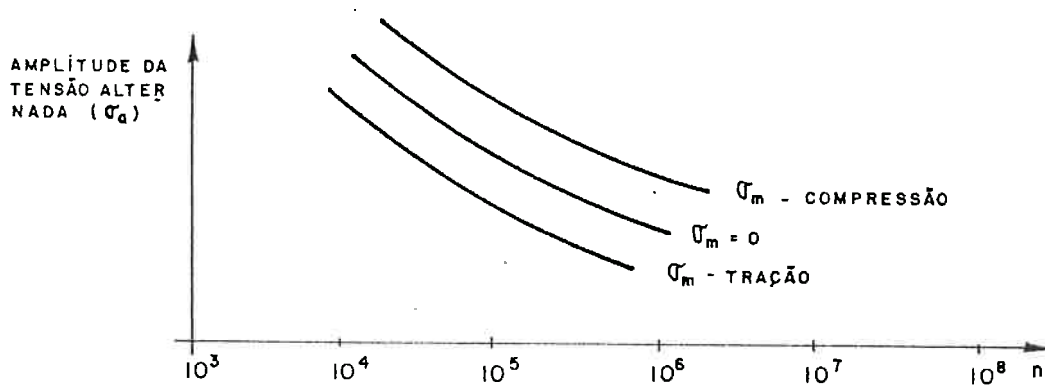


FIGURA 5.6 - EFEITO DA TENSÃO MÉDIA DA VIDA EM FADIGA

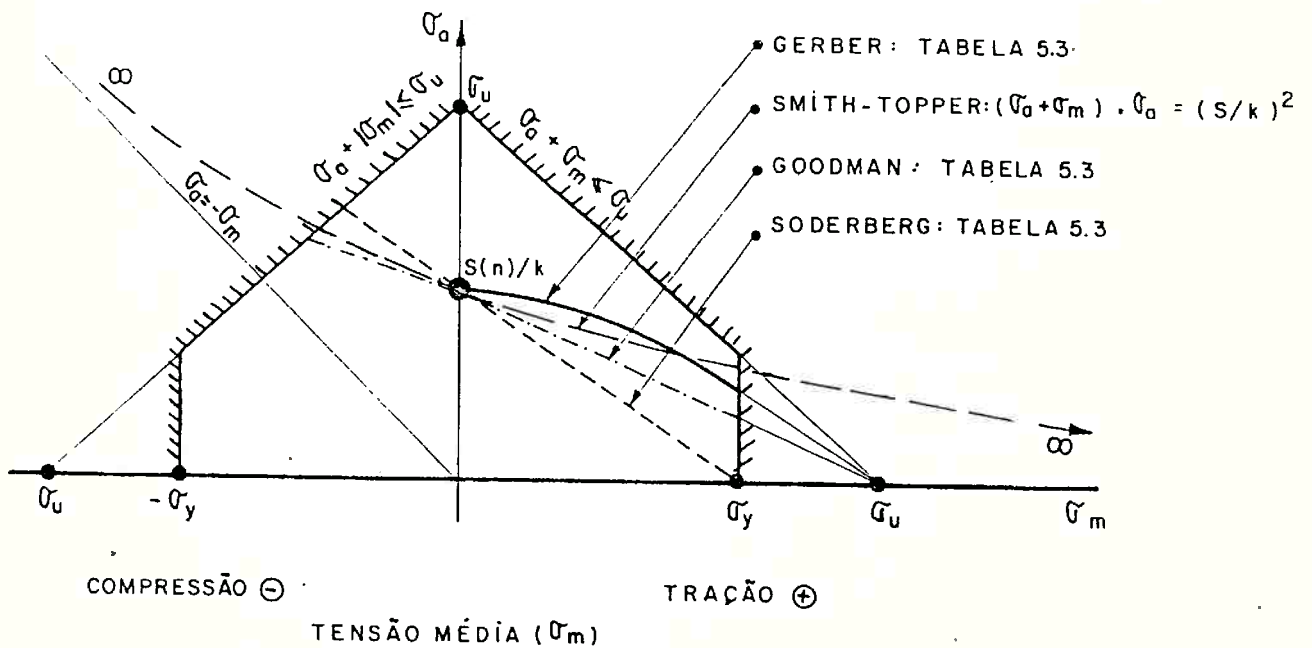


FIGURA 5.7 - EFEITO DA TENSÃO ESTÁTICA (σ_m)

TABELA 5.3 - CORREÇÃO DO DIAGRAMA s-n COMO FUNÇÃO DA TENSÃO MÉDIA (σ_m)

LEI	n	σ_R
Goodman Modificada	1	tensão de ruptura (σ_u)
Soderberg	1	tensão de escoamento (σ_y)
Gerber	2	tensão de ruptura (σ_u)

$$S_c = [1 - (\sigma_m/\sigma_R)^n] \cdot S$$

TABELA 5.4 - LIMITE DE FADIGA PARA ALGUNS MATERIAIS SELECIONADOS |C1|

MATERIAL	RUPTURA (σ_u)	ESCOAMENTO (σ_y)	FADIGA (S_f)	n_f	α^{***}
<u>AÇO*</u>	(t/cm ²)	(t/cm ²)	(t/cm ²)	$\times 10^7$ CICLOS	$\times 10^{-4}$
1020	4,5	2,6	1,5	1	661
1040	6,3	3,5	1,7	1	793
4142	14,4	14,0	5,1	1	764
4340	8,4	6,4	2,8	1	685
9262	9,4	4,6	3,5	1	606
<u>ALUMÍNIO*</u>					
1100-0	1,1	1,0	0,37	1	676
7075-T6	5,9	4,7	1,8	1	739
<u>OUTROS**</u>					
Cobre	2,4	0,76	0,76	-	-
Latão	3,2	0,96	0,86	-	-
Bronze	3,4	1,5	1,7	-	-

*Ensaio de flexão com reversão completa ($\sigma_m=0$) e espécimens lisos. SAE J 1099, 1975

**Informações incompletas. Os valores não representam limites para projeto. Metals Handbook, ASM, 1961

***Veja figura 5.3

Se a evidência for mais forte ainda, pode-se apelar para a correção parabólica menos conservadora de Gerber.

A correção representada por (5.2) — nas três leis aqui consideradas — é útil para se incluir o efeito do valor médio naqueles casos onde não se dispõe de dados experimentais a este respeito. Contudo, o grau de precisão que se obtém é função de inúmeros fatores não considerados no método. Não há garantias, portanto, de que, mesmo tomando a mais conservadora das leis, ficaremos a favor da segurança [B13].

Não há, ainda, uma lei que possa ser considerada tão boa que elimine a necessidade de resultados experimentais, ou a necessidade de se embutir no coeficiente de segurança uma parcela devida à incerteza deste cálculo. O analista, sempre que possível, deve partir da utilização de um diagrama s-n mais apropriado ao seu caso, onde preferencialmente a questão do valor médio já tenha sido resolvida experimentalmente.

Uma vez estabelecida a correção (5.2), e tecidas algumas considerações sobre ela, podemos prosseguir em nosso equacionamento. Se idealizarmos a forma do diagrama s-n, como esquematizada na figura 5.4, podemos escrever:

$$S/S_f = \left(\frac{n}{n_f} \right)^{-\alpha} \quad (5.3)$$

onde S_f , n_f e α são propriedades da curva s-n e, por conseguinte para nós, dados de material obtidos de ensaios (a tabela 5.4 relaciona valores desses parâmetros para alguns materiais mais comuns).

Substituindo (5.3) em (5.2), obtém-se finalmente:

$$S_c(n) = [1 - (\sigma_m / \sigma_R)^\eta] \cdot (S_f / k) \cdot (n_f / n)^\alpha; \quad 1 < n < n_f \quad (5.4)$$

Assim, estabelecidos os valores de σ_m , σ_R , η , S_f , n_f e α , para

o caso em estudo, dispomos da expressão (5.4) para o limite de resistência à fadiga, como função do número de ciclos n até a ruptura final. Se chamarmos de u a vida em fadiga da peça submetida à tensão alternada de amplitude σ_a , obtém-se:

$$u(N) = (n_f/N) \{ [S_f / (k \cdot \sigma_a)] \cdot [1 - (\sigma_m / \sigma_R)^\eta] \}^{1/\alpha} \quad (5.5)$$

(em minutos)

onde N é a frequência da tensão em ciclos por minuto.

Quando for o caso de tensões multiaxiais, σ_a em (5.5) representa "amplitudes" da tensão equivalente uniaxial, calculadas com base no critério de resistência de V.2.4 — como veremos em V.2.6. A tensão estática (σ_m) deve ser obtida pela soma das tensões normais estáticas de cada uma das direções do terno de eixos cartesianos (figura 5.5): $\sigma_m = \sigma_{mx} + \sigma_{my} + \sigma_{mz}$; 1º invariante das tensões estáticas ($|C1|, |C13|, |C17|$).

V.2.6 Excitação Multiharmônica

Nos itens anteriores apresentamos as duas primeiras fases do processo de equivalência entre o caso real de sollicitação e o caso dos ensaios de fadiga. Se o carregamento sobre a estrutura fosse harmônico — embora multiaxial e com valor estático não nulo — o processo estaria completo. No entanto isso não ocorre. É necessário que traduzamos a natureza periódica — multiharmônica — da sollicitação para valores comuns aos dos ensaios.

A questão fundamental é: como contabilizar a influência de cada harmônico considerando que ele age simultaneamente com os demais? Como isso pode ser feito de modo a melhor representar o comportamento do material sob sollicitação multiharmônica?

Atualmente não se dispõe de uma solução absolutamente segura para tal problema. Todas as soluções

propostas envolvem algum teor de subjetividade [C12]. Tem-se, no entanto, considerando com aceitáveis os métodos ditos de "contagem de picos", dentre os quais a referência [C1] destaca: "Range-Pair", "Rain Flow" e "Racetrack"; todos primordialmente pautados em características de resolução gráfica, a partir do conhecimento do histórico de tensões. Dentro da precisão que se espera, e pode-se obter, por esses métodos, é razoável admitir que todos apresentem resultados semelhantes. A decisão pela escolha de um, ou de outro, é questão de mera conveniência, de acordo com os recursos de cálculo que se pretende empregar.

A título de fundamento para o que proporemos adiante, o método "Rain Flow", por ser o mais empregado, será aqui visto em detalhes. Um bom método de contagem precisa considerar o ciclo que se desenvolve do valor máximo (maior pico) ao valor mínimo (maior cavado ou vale), para depois computar os outros ciclos, maximizando as distâncias de pico a vale que são contadas. Estas regras justificam-se pelas evidências experimentais de que o dano na fadiga é função da magnitude do ciclo de histerese no material, e de que flutuações intermediárias — de frequências mais altas — são menos importantes do que a flutuação maior, do maior pico ao maior vale.

O método de contagem deve ser aplicado sobre um período da resposta, sendo usual que se filtre pequenos ciclos de alta frequência.

O modus operandi do método "Rain Flow" é esquematizado no exemplo da figura 5.8. Suas regras são:

- a. Comece a contagem a partir do maior pico, caminhando sobre o histórico.
- b. Desça monotonicamente até encontrar o maior cavado. No trajeto, alcançado um vale intermediário, prossiga horizontalmente até encontrar novo trecho descendente do histórico.
- c. Volte do maior cavado ao maior pico, subindo monotonicamente. No trajeto, alcançando um pico intermediário, prossiga horizontalmente até en-

contrar novo trecho ascendente do histórico.

- d. Repita as operações para os trechos do histórico que ainda não foram percorridos.

Como resultado (vide figura 5.8) obtém-se um conjunto de variações, de pico a vale, com suas respectivas flutuações médias (σ_{a_i}). Cada um destes valores representa uma amplitude de tensão alternada a usar como dado de entrada no diagrama s-n; causando, portanto, o dano isolado dado por:

$$d_i(N) = [u(N) |_{\sigma = \sigma_{a_i}}]^{-\theta_i} = [(N \cdot \sigma_{a_i}^{1/\alpha}) / \gamma]^{\theta_i} \quad (5.6.a)$$

onde, por comparação com (5.5), tem-se:

$$(*) \quad \gamma = n_f \{ (S_f/k) \cdot [1 - (\sigma_m/\sigma_R)^\eta] \}^{1/\alpha} \quad (5.6.b)$$

e, onde o expoente θ_i (positivo) pode ser usado para ponderar o efeito relativo de σ_{a_i} .

O dano total, acumulado por todas as variações de pico a vale, é obtido pela soma dos respectivos danos isolados. Se, em adição, empregarmos a regra linear** ($\theta_i=1, \forall i$) como proposta em [C1], obtém-se para a vida em fadiga total:

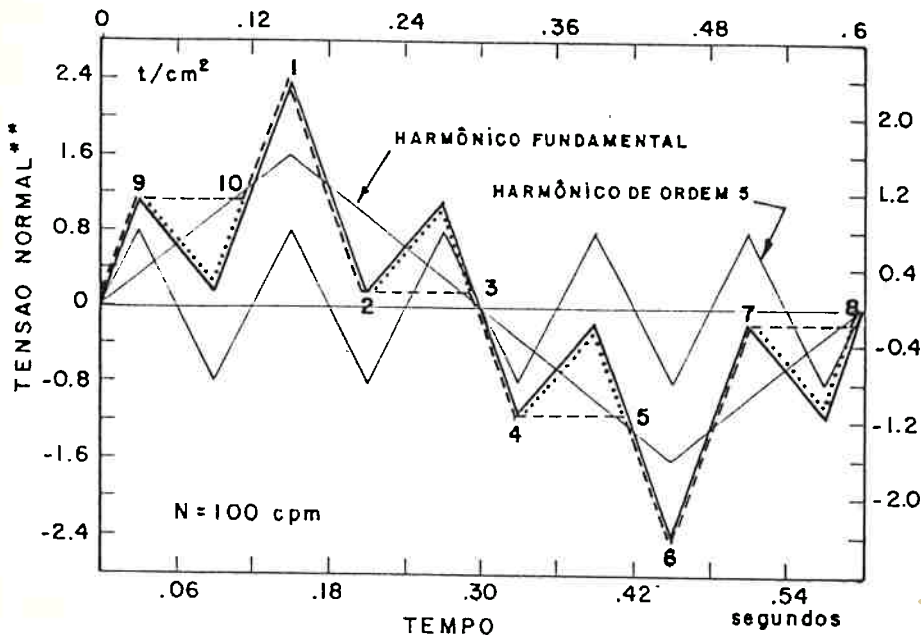
$$(***) \quad u(N) = \left[\sum_i d_i(N) \right]^{-1} = (\gamma/N) / \left(\sum_i \sigma_{a_i}^{1/\alpha} \right) \text{ (em minutos)} \quad (5.7)$$

* γ é a função do material (n_f, S_f, α), do estado de sollicitação estática (σ_m); e da lei considerada para inclusão deste estado (σ_p, η -tabela 5.3).

**A regra linear é conhecida pelo nome de Palmgren-Miñer. Outras regras, não lineares, são apresentadas em [C13] que expõe, também, as razões particulares que podem levar à necessidade de se tomar $\theta_i > 1$. Tendo em vista, porém, as finalidades de nossas aplicações e o caráter extremamente controverso da matéria — como constatado nas referências —, a regra linear faz-se apropriada.

***Na somatória em σ_{a_i} entram apenas valores destes que sejam maiores do que o limite de fadiga S_f . Se todos os σ_{a_i} forem menores do que S_f a vida em fadiga é infinita.

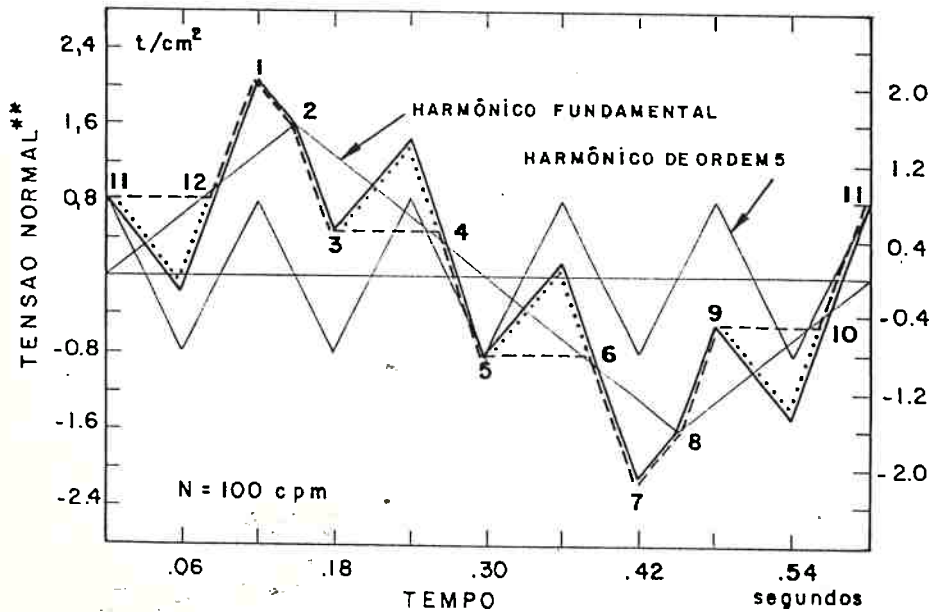
a) FASES INICIAIS NULAS: $\psi = 0$



PICO / VALE	σ_{ai} (t/cm ²)
2.40 / -2.40	2.40
1.12 / -0.16	0.48
1.12 / 0.16	0.48
-0.16 / -1.12	0.48
-0.16 / -1.12	0.48

* $u = 1307$ min.

b) DIFERENÇA DE FASE: $\psi = \pi/2$



PICO / VALE	σ_{ai} (t/cm ²)
2.08 / -2.08	2.08
0.80 / -0.16	0.48
1.44 / 0.48	0.48
0.16 / -0.80	0.48
-0.48 / 1.44	0.48

* $u = 7930$ min.

• $p / \psi = \pi$ TERÍAMOS:
 $u = 65075$ min.

* SUPOSTO AÇO 1040: $\sigma_u = 6,3$; $\sigma_y = 3,5$; $S_F = 1,7$; $\alpha = 0,0793$ (TAB.5.4)
DONDE $u = 8,07 \times 10^7 / (\sum \sigma_{ai}^{12,6})$

** SOLICITAÇÃO UNIAXIAL: $\sigma = 1,6 \text{ sen}(10,47t) + 0,8 \text{ sen}(52,36t + \psi)$

FIGURA 5.8 - EXEMPLOS DE CONTAGEM DE PÍCOS E VALES.
MÉTODO RAINFLOW - SOLICITAÇÃO UNIAXIAL

De (5.7) verificamos que a vida em fadiga diminui quando:

- i) mantido o nível de tensões, aumenta a rotação (N).
- ii) diminui o limite de fadiga (S_f ou n_f).
- iii) aumenta a tensão estática de tração (σ_m).
- iv) aumenta o fator de concentração de tensões (k).

O leitor deve notar que a consideração isolada de harmônicos do histórico de tensões não reproduz os resultados do método de contagem. Neste a amplitude de cada harmônico é influenciada pelos demais e, ainda, as diferenças de fase tem influência sobre o resultado, como ilustra o exemplo da figura 5.8.

Como se vê no exemplo da figura 5.8, o método de contagem parte do conhecimento gráfico de picos e vales. Quando, como no caso deste estudo, dispõe-se da equação do histórico de resposta, é necessário, a priori, que se promova a busca desses pontos de derivada nula.

Uma busca, no sentido matemático, envolve solução de equação trigonométrica, via de regra, por processo numérico iterativo. O custo desta solução será tanto maior quanto maior for a precisão requerida. Seja $f(t)$ a equação que define o histórico de resposta,

$$f(t) = \sum_{\ell} a_{\ell} \text{sen}(\ell \omega_0 t + \psi_{\ell}) \quad (5.8)$$

Os máximos e mínimos locais são obtidos de:

$$\frac{df}{dt} = \sum_{\ell} \ell a_{\ell} \omega_0 \cos(\ell \omega_0 t + \psi_{\ell}) = 0 ; 0 < t < 2\pi/\omega_0 \quad (5.9)$$

A equação trigonométrica assim obtida, de modo geral, não tem solução analítica factível. Deve-se, então, apelar para uma das soluções numéricas disponíveis na literatu-

ra $|E_1|$, se for necessário conhecer com absoluta precisão os zeros da função.

Seja t_i o conjunto de raízes de (5.9). A cada t_i corresponde um máximo ou um mínimo local de (5.8). Se no ponto $t_i - dt$, tivermos $df/dt > 0$ então $f(t_i)$ é um pico. Caso contrário é um vale. Determinados os picos e vales, a função (5.8) pode ser aproximada por seguimentos de reta unindo esses pontos e, sobre o resultado, pode-se aplicar o método de contagem.

Alternativamente, podemos empregar um método de rastreamento de picos e vales diretamente sobre a função $f(t)$, sem trabalhar sobre sua derivada. O método, embora menos preciso, apresenta a vantagem de não implicar na necessidade de solução de equação trigonométrica, reduzindo, por conseguinte, o custo da análise.

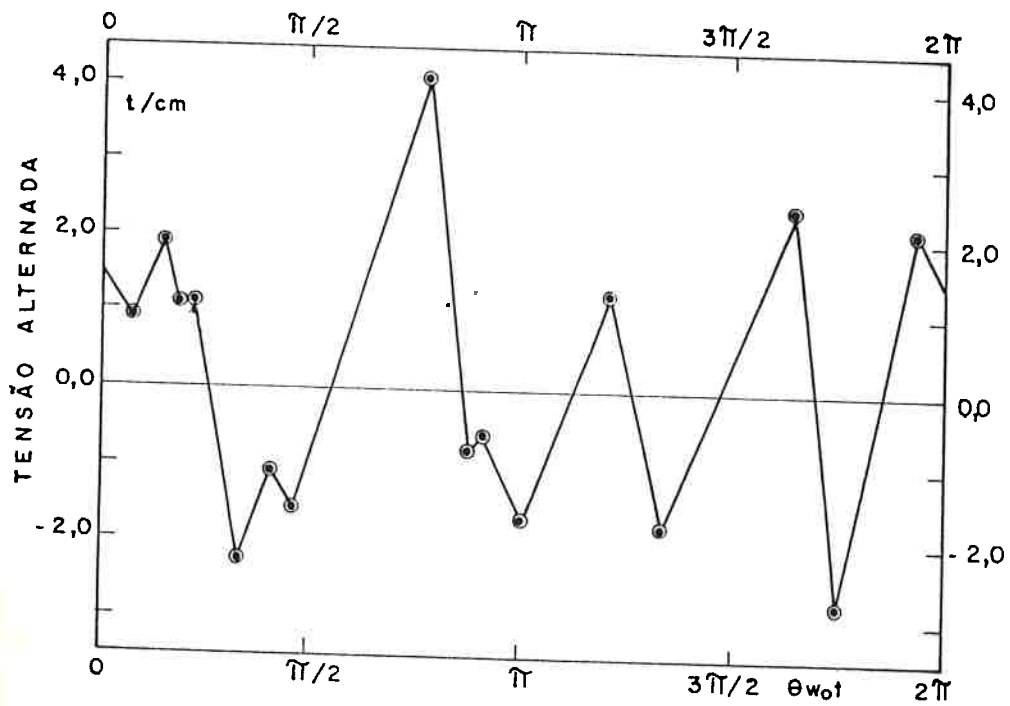
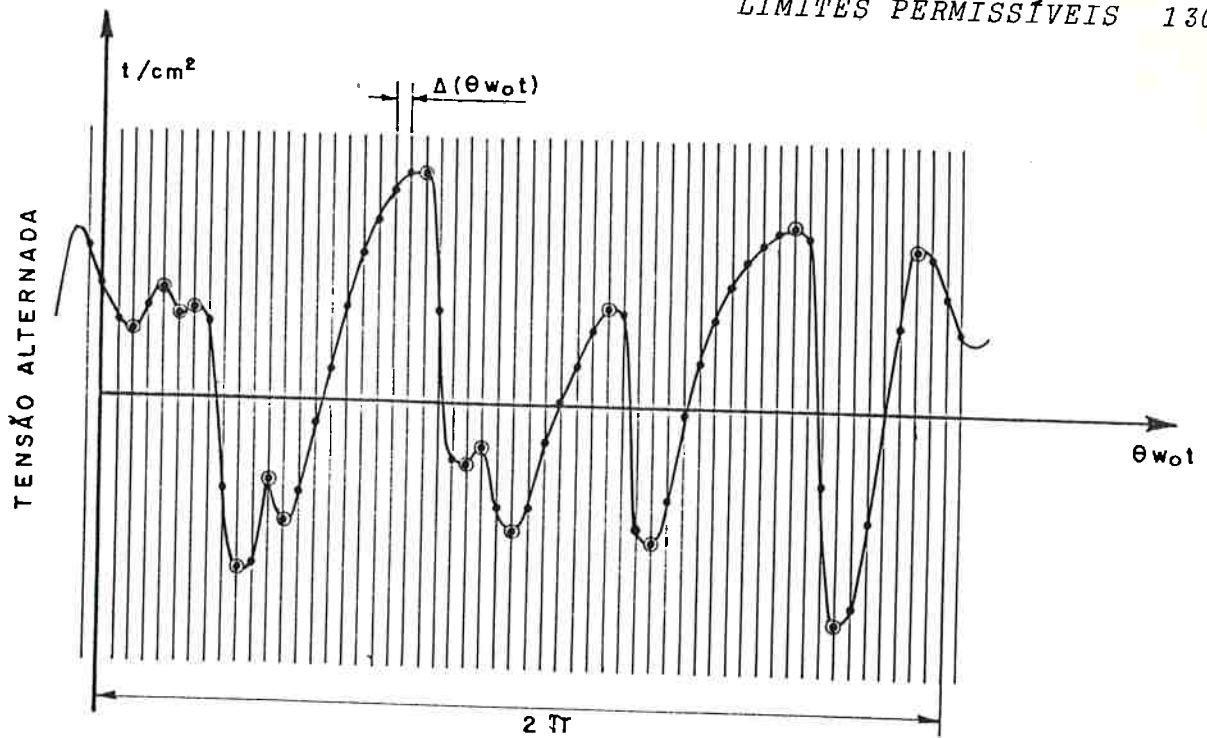
Pelo método de rastreamento (figura 5.9), a função $f(t)$ é avaliada a intervalos constantes, num espaço de tempo compreendido por um período da resposta mais dois intervalos: um antes de $t=0$ e outro depois de $t=2\pi/\omega_0$. Como resultado obtém-se pontos que, quando unidos por segmentos de reta, representam uma aproximação para a função $f(t)$.

Considerando-se, então, três pontos consecutivos teremos:

- i) um pico em t_j se: $f(t_{j-1}) < f(t_j) > f(t_{j+1})$
- ii) um vale em t_j se: $f(t_{j-1}) > f(t_j) < f(t_{j+1})$
- iii) nem pico nem vale em t_j se:
 - $f(t_{j-1}) > f(t_j) > f(t_{j+1})$
 - ou $f(t_{j-1}) < f(t_j) < f(t_{j+1})$

Obtidos os picos e vales, aplica-se o método de contagem, à semelhança do que se fez nos casos da figura 5.8.

O baixo custo do método de rastreamento permite que se tome intervalos $\Delta(\theta\omega_0 t)$ suficientemente pequenos para dimi-







-  FUNÇÃO PRIMITIVA
-  PONTOS DO RASTREAMENTO
-  PÍCOS E VALES DETECTADOS
-  APROXIMAÇÃO PARA A FUNÇÃO

FIGURA 5.9- TÉCNICA DE RASTREAMENTO DE PÍCOS E VALES

nuir o risco de não se encontrar um pico ou um vale importante. Como regra, pode-se recomendar:

$$\Delta(\theta_{w_0} t) < 0,05 (2\pi/L) \quad (5.10)$$

onde L é o mais alto número de ordem harmônica da resposta. Deste modo o número total de pontos do rastreamento é maior do que vinte vezes o valor de L. Assim, se, por exemplo, a resposta tem três harmônicos, deve-se rastreá-la por um mínimo de sessenta pontos.

V.2.7 Restrições ao Procedimento de Análise de Fadiga

Desenvolvemos os assuntos anteriores calcados na suposição de que estamos tratando do estudo de fadiga de alto ciclo (número de ciclos maior do que digamos, 10^5). Evidentemente, casos existem, no âmbito da análise dinâmica da estrutura do navio, onde a fadiga é de baixo ciclo. Esta caracteriza-se pela ocorrência de picos de tensões, num número baixo de ciclos, que, superpostas aos valores estáticos, com frequência ultrapassam o limite de escoamento.

O estudo da fadiga de baixo ciclo só pode ser conveniente encaminhado, quando for abordado por considerações de deformação e não apenas de tensão. Assim, o correspondente prático do diagrama s-n na fadiga de baixo ciclo costuma ser o diagrama ϵ -n: deformação x número de ciclos até a ruptura. Portanto, a extrapolação, da teoria aqui reunida, para fadiga de baixo ciclo não é recomendada.

As aplicações do critério de resistência de Von Mises e da técnica de contagem "Rain Flow", nos moldes até agora formulados, são triviais em dois casos:

- i) solicitação uniaxial multiharmônica, com ou sem diferenças de fases (caso dos exemplos da

figura 5.8).

- ii) sollicitação multiaxial proporcional, quando todos os componentes do tensor das tensões vibram harmonicamente na mesma freqüência, em fase ou oposição de fase.

Para exemplificar, consideremos o caso de vigas em flexão, onde a tensão equivalente é dada por:

$$\sigma_e(t) = [\sigma^2(t) + 3\tau^2(t)]^{1/2}$$

Para o caso particular de sollicitação uniaxial ($\tau=0$ ou $\sigma=0$), a tensão equivalente pode ser posta numa forma simples igual a $\sigma(t)$, no primeiro caso, ou a $\sqrt{3} \tau$ no segundo; seja lá quantos forem os harmônicos com freqüências e fases iniciais distintas.

Se, no entanto, as tensões normal e de cisalhamento existirem simultaneamente, somente sob a hipótese de que ambas vibrem harmonicamente na mesma freqüência, em fase ou oposição de fase, pode-se obter uma representação exata simples para a tensão equivalente; ou seja:

$$\sigma = \sigma_0 \text{ sen } wt \quad \text{e} \quad \tau = \tau_0 \text{ sen}(wt \pm \frac{\theta}{\pi})$$

leva a

$$\sigma_e(t) = (\sigma_0^2 + 3\tau_0^2)^{1/2} \text{ sen } wt$$

O que corresponde a aplicar o critério de Von Mises diretamente sobre as amplitudes das tensões.

Uma característica importante deste caso é o fato de que, sob as condições estabelecidas, as direções principais manterem-se invariantes durante todo o tempo. No exemplo da figura 5.10.a, o ângulo entre o plano em que se mede σ e τ , e o plano das tensões principais, mantém-se constante. O mesmo não

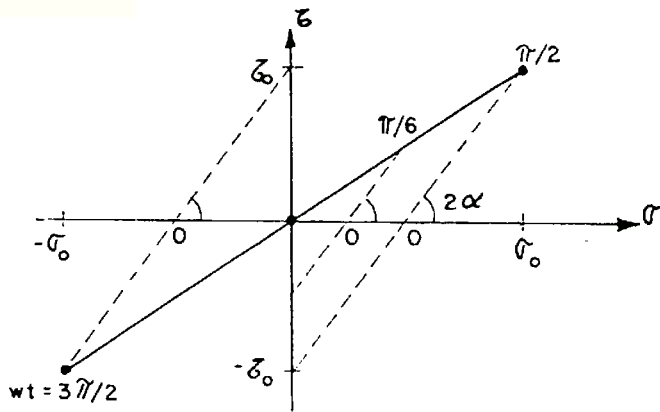
acontece quando existe diferença de fase (figura 5.10.b), ou quando as frequências são diferentes (figura 5.10.c).

Para os casos complexos onde as direções principais não permanecem constantes, não existe, ainda, uma solução sobre a qual não se possa vir a colocar restrições [C1]. É possível encontrar na literatura pelo menos vinte critérios diferentes [C12] propostos até o momento. A tendência moderna encaminha-se no sentido de estabelecer um critério diretamente baseado no ciclo de histerese, pelo cômputo do trabalho plástico por ciclo [C11]. No entanto, isso exige um enfoque diverso do aqui admitido para a introdução das propriedades de fadiga do material, tornando muito restrito o campo de procura de dados experimentais já disponíveis. Por essa razão, propõe-se aqui o emprego de uma extensão do método de Sines ([C1], [C12], [C17]) que nos permite continuar abordando o problema a partir de diagramas s-n do material.

Diante da impossibilidade de obtenção de uma solução exata, pretende-se encontrar um limite superior seguro, que torne os resultados do método conservadores (a favor da segurança).

Acredita-se que isso possa ser obtido se, ao invés de aplicar o critério de Von Mises — como seria "correto" — sobre os históricos das tensões alternadas, este seja aplicado sobre as amplitudes das componentes de mesma frequência desses históricos (critério de Sines, [C12]). A generalização desta idéia será vista no item seguinte. Por ora, a bem da clareza, limitar-nos-emos a aplicá-la sobre os exemplos da figura 5.10.

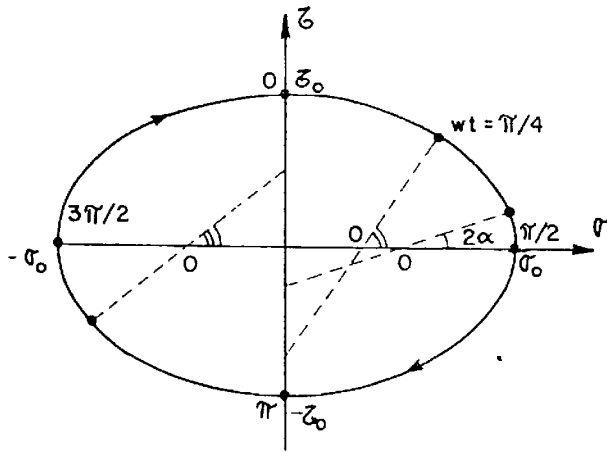
Nesta figura, σ_e representa o valor correto e σ_e^* o que se obtém pela aplicação do critério de Sines. Note-se que não é possível aplicar método de contagem sobre σ_e quando o plano das tensões principais varia; enquanto para σ_e^* isso sempre é possível. A conveniência de se apelar para o uso de σ_e^* reside exatamente neste fato.



a) TENSÕES PROPORCIONAIS

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_0 \operatorname{sen} wt \\ \tau &= \tau_0 \operatorname{sen} wt \\ \alpha &= 26,6^\circ (\text{constante}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_e &= (\sigma_0^2 + 3\tau_0^2)^{1/2} / \operatorname{sen} wt \\ \sigma_e^* &= (\sigma_0^2 + 3\tau_0^2)^{1/2} \operatorname{sen} wt \end{aligned}$$

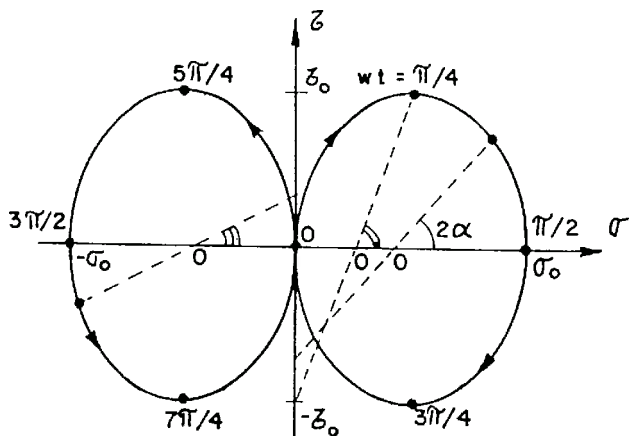


b) TENSÕES DEFASADAS DE $\pi/2$

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_0 \operatorname{sen} wt \\ \tau &= \tau_0 \cos wt \\ \alpha &= \alpha(t) \begin{cases} \alpha_{\min} = 0 \\ \alpha_{\max} = 90^\circ \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_e &= (\sigma_0^2 \operatorname{sen}^2 wt + 3\tau_0^2 \cos^2 wt)^{1/2} \\ \sigma_e^* &= (\sigma_0^2 + 3\tau_0^2)^{1/2} \operatorname{sen}(wt + \psi); \end{aligned}$$

$$\operatorname{tag} \psi = \sqrt{3} \tau_0 / \sigma_0$$



c) TENSÕES COM FREQUÊNCIAS DISTÍNTAS

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_0 \operatorname{sen} wt \\ \tau &= \tau_0 \operatorname{sen} 2wt \\ \alpha &= \alpha(t) \begin{cases} \alpha_{\min} = 0 \\ \alpha_{\max} = 45^\circ \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_e &= (\sigma_0^2 \operatorname{sen}^2 wt + 3\tau_0^2 \operatorname{sen}^2 2wt)^{1/2} \\ \sigma_e^* &= \sigma_0 \operatorname{sen} wt + \sqrt{3} \tau_0 \operatorname{sen} 2wt \end{aligned}$$

O - CENTRO DO CÍRCULO DE MOHR
 α - ÂNGULO ENTRE O PLANO σ, τ
 E O PLANO DA TENSÃO PRINCIPAL σ_1

FIGURA 5.10- DIREÇÕES PRINCIPAIS-SOLICITAÇÃO BIAIXIAL

A título de simplificação, particularizemos os exemplos pela adoção de $\sigma_0 = 3\tau_0$. Assim, obtém-se:

$$\begin{aligned} (\sigma_e^*/\sigma_e)_{\max} &= 1,000 && \text{caso a} \\ &= 1,414 && \text{caso b} \\ &= 1,064 && \text{caso c} \end{aligned}$$

o que indica que, pelo menos nesses casos, o critério é conservador.

Não se dispõe, entretanto, de prova cabal assegurando ser o critério de Sines conservador para o caso geral multiaxial. Parece, contudo, não existir um caso particular que negue o fato. O que se pode ver é a possibilidade de, como no caso b, ocorrer um excesso a favor da segurança. Este, no entanto, é o preço que se deve pagar quando se tenta estabelecer um critério de amplo espectro.

Felizmente, grande parte de nossas aplicações apresentam características que reduzem os riscos do uso generalizado do critério de Sines. Muitas vezes, procurar-se-á investigar a ocorrência de ruptura por fadiga em pontos que se situam na superfície dos membros estruturais, por que aí é mais provável a existência de fissuras por defeitos de fabricação. Na superfície, a inexistência de tensões de cisalhamento torna mais precisa a aplicação do critério.

Muitas vezes, também, a ruptura por fadiga está relacionada com a ocorrência de ressonância, de sorte que um, dentre todos os harmônicos da resposta, será o dominante. Com isso as maiores componentes de flutuações de tensões ocorrem na mesma frequência, fato que favorece um bom resultado na aplicação do critério.

No entanto, casos há em que a complexibilidade da solicitação possa vir a requerer, até, a utilização de adequado coeficiente de segurança, a despeito de se crer no caráter conservador do critério.

V.2.8 Cálculo da Vida em Fadiga no Domínio da Frequência

A priori é necessário que se estabeleçam relações entre os esforços de extremidade — cujo cálculo já foi definido no capítulo 4 — e as tensões que ocorrem num ponto do m -ésimo elemento da estrutura discretizada. Consideremos, para tanto, a notação tensorial clássica [A12] das tensões agentes num ponto (figura 5.5). Nas seis fases do cubo elementar, centrado no referido ponto, temos:

$\sigma_{rs}^m(N,t)$ → tensão superficial agente no plano r , paralela — mente à direção s ($r, s \in \{x, y, z\} \equiv \{1, 2, 3\}$)

Na ausência de não linearidades, cada uma das tensões — obtidas pelas variações de r, s no conjunto $\{1, 2, 3\}$ — pode ser calculada por uma combinação linear dos esforços de extremidade

$$\sigma_{rs}^m(N,t) = \sum_k \alpha_{rsk}^m \sum_{\ell} e_{k\ell}^m(N,t) = \quad (5.11)$$

$$(*) \quad = \alpha_{rsk}^m \cdot a_{k\ell}^m(N) \cdot \text{sen}\{w_{\ell}(N) \cdot t + \theta_{k\ell}^m(N)\}$$

onde α_{rsk}^m são constantes de proporcionalidade do m -ésimo elemento, definidas para cada r , cada s e cada grau de liberdade k (veja exemplo da tabela 5.5). Os demais parâmetros já foram definidos no capítulo 4.

Podemos, a seguir, promover o agrupamento das parcelas de mesma frequência em (5.11), obtendo:

**Convém lembrar que, de acordo com nossa convenção de soma, as somatórias em k e ℓ estão subentendidas na segunda parte de (5.11). Devê-se acrescentar, ainda, que $\sigma_{rs}^m(N,t)$, como resultado da ação do carregamento periódico nos moldes deste trabalho, tem valor médio nulo; é, portanto, uma tensão alternada reversa.*

$$\begin{aligned} \sigma_{rs}^m(N, t) &= \sigma S_{rs\ell}^m(N) \cdot \text{sen } w_\ell(N)t + \\ (*) &+ \sigma C_{rs\ell}^m(N) \cdot \text{cos } w_\ell(N)t \end{aligned} \quad (5.12.a)$$

onde:

$$\sigma S_{rs\ell}^m(N) = \alpha_{rsk}^m \cdot a_{k\ell}^m(N) \cdot \text{cos } \theta_{k\ell}^m(N) \quad (5.12.b)$$

$$\sigma C_{rs\ell}^m(N) = \alpha_{rsk}^m \cdot a_{k\ell}^m(N) \cdot \text{sen } \theta_{k\ell}^m(N) \quad (5.12.c)$$

Aplicando, agora, o critério de Von Mises (5.1.c) para a determinação de uma amplitude equivalente, para cada componente da tensão combinada (Critério de Sines), podemos escrever:

$$\begin{aligned} \sigma^m(N, t) &= \sigma S_\ell^m(N) \cdot \text{sen } w_\ell(N) \cdot t + \\ &+ \sigma C_\ell^m(N) \cdot \text{cos } w_\ell(N) \cdot t = \end{aligned} \quad (5.13.a)$$

$$(*) \quad = \sigma_\ell^m(N) \cdot \text{sen } [w_\ell(N) \cdot t + \theta_\ell^m(N)]$$

onde:

$$\sigma_\ell^m(N) = \{ [\sigma S_\ell^m(N)]^2 + [\sigma C_\ell^m(N)]^2 \}^{1/2} \quad (5.13.b)$$

$$\text{tag } \theta_\ell^m(N) = [\sigma C_\ell^m(N)] / [\sigma S_\ell^m(N)] \quad (5.13.c)$$

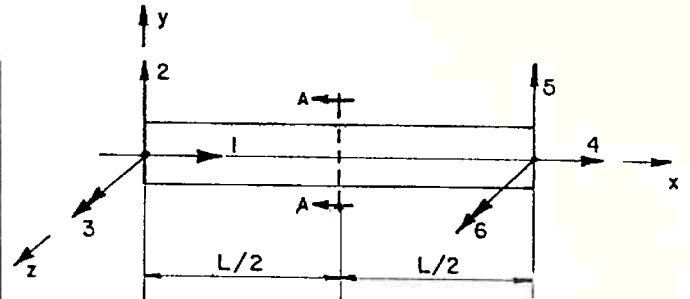
$$\sigma S_\ell^m(N) = [0,5 \beta_{rs\bar{r}\bar{s}} \cdot \sigma S_{rs\ell}^m(N) \cdot \sigma S_{\bar{r}\bar{s}\ell}^m(N)]^{1/2} \quad (5.13.d)$$

$$\sigma C_\ell^m(N) = [0,5 \beta_{rs\bar{r}\bar{s}} \cdot \sigma C_{rs\ell}^m(N) \cdot \sigma C_{\bar{r}\bar{s}\ell}^m(N)]^{1/2} \quad (5.13.e)$$

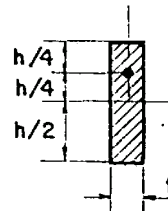
*Note-se que nestas equações os símbolos σ , que tem como argumento apenas a variável N , representam amplitudes das tensões alternadas; enquanto os mesmos símbolos, com ambos os argumentos N e t , são as próprias tensões alternadas. Por esta razão, a bem da clareza, julgamos desnecessário acrescentar aposto algum com a função de distinguir as tensões alternadas de suas amplitudes.

TABELA 5.5 - COEFICIENTES α_{rsk}^m PARA UM ELEMENTO DE VIGA

		GRAU DE LIBERDADE k=					
r	s	1	2	3	4	5	6
1	1	-1/A	-L/2w	1/w	0	0	0
1	2	0	q	0	0	0	0
1	3	0	0	0	0	0	0
2	2	0	0	0	0	0	0
2	3	0	0	0	0	0	0
3	3	0	0	0	0	0	0



SEÇÃO A-A



$$A = h \cdot t$$

$$w = h^2 t / 3$$

$$q = M_s / bJ = 9/8ht$$

$$*\alpha_{rsk}^m = \alpha_{srk}^m$$

** σ_{rs}^m → tensão no plano r, paralela a s.

Usando as definições de (5.12) em (5.13), as seguintes transformações algébricas simplificam o cálculo:

$$\begin{aligned} \sigma_{\ell}^m &= \{0,5 \beta_{rsrs} \sigma_{rs\ell}^m \sigma_{rs\ell}^m + \\ &+ 0,5 \beta_{rs\bar{r}\bar{s}} \sigma_{rs\ell}^m \sigma_{\bar{r}\bar{s}\ell}^m\}^{1/2} = \\ &= \{0,5 \beta_{rs\bar{r}\bar{s}} [\alpha_{rsk}^m \cdot \alpha_{\bar{r}\bar{s}k}^m \cdot (a_{k\ell}^m)^2 \cdot \cos^2 \theta_{k\ell}^m + \\ &+ \alpha_{rsk}^m \cdot \alpha_{\bar{r}\bar{s}k}^m \cdot (a_{k\ell}^m)^2 \cdot \text{sen}^2 \theta_{k\ell}^m]\}^{1/2} = \\ &= [0,5 \beta_{rs\bar{r}\bar{s}} \alpha_{rsk}^m \alpha_{\bar{r}\bar{s}k}^m \cdot (a_{k\ell}^m)^2]^{1/2} \end{aligned}$$

e, ainda,

$$\begin{aligned} \operatorname{tag} \theta_{\ell}^m &= [0,5 \beta_{rs\bar{r}\bar{s}} \sigma_{rs\ell}^m \sigma_{\bar{r}\bar{s}\ell}^m]^{1/2} / \\ & / [0,5 \beta_{rs\bar{r}\bar{s}} \sigma_{rs\ell}^m \sigma_{\bar{r}\bar{s}\ell}^m]^{1/2} = \\ & = [\beta_{rs\bar{r}\bar{s}} \alpha_{rsk}^m \alpha_{rsk}^m (a_{k\ell}^m)^2 \operatorname{sen}^2 \theta_{k\ell}^m]^{1/2} / \\ & / [\beta_{rs\bar{r}\bar{s}} \alpha_{rsk}^m \alpha_{\bar{r}\bar{s}k}^m (a_{k\ell}^m)^2 \operatorname{cos}^2 \theta_{k\ell}^m]^{1/2} \end{aligned}$$

Assim, o histórico de tensões equivalentes é simplesmente dado por:

$$\sigma_{\ell}^m(N, t) = \sigma_{\ell}^m(N) \cdot \operatorname{sen}[w_{\ell}(N) \cdot t + \theta_{\ell}^m(N)] \quad (5.14.a)$$

onde, as amplitudes equivalentes e fases iniciais equivalentes, para cada uma de suas componentes harmônicas, são dadas por:

$$\sigma_{\ell}^m(N) = [0,5 \beta_{rs\bar{r}\bar{s}} \cdot \alpha_{rsk}^m \cdot \alpha_{\bar{r}\bar{s}k}^m \cdot a_{k\ell}^m(N) \cdot a_{k\ell}^m(N)]^{1/2} \quad (5.14.b)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tag} \theta_{\ell}^m(N) &= [\beta_{rs\bar{r}\bar{s}} \cdot \alpha_{rsk}^m \cdot \alpha_{\bar{r}\bar{s}k}^m \cdot a_{k\ell}^m(N) \cdot a_{k\ell}^m(N) \operatorname{sen}^2 \theta_{k\ell}^m(N)]^{1/2} / \\ & / [\beta_{rs\bar{r}\bar{s}} \cdot \alpha_{rsk}^m \cdot \alpha_{\bar{r}\bar{s}k}^m \cdot a_{k\ell}^m(N) \cdot a_{k\ell}^m(N) \operatorname{cos}^2 \theta_{k\ell}^m(N)]^{1/2} \end{aligned} \quad (5.14.c)$$

Assim, o caso complexo de tensões combinadas não proporcionais (solicitação multiaxial e multiharmônica) foi reduzido a um caso simples uniaxial, considerado equivalente. Embora não exista, ainda, comprovação experimental suficientemente ampla, que assegure a validade do método, sua aplicabilidade é aceita como viável desde que se tome adequado coeficien

te de segurança.

A aplicação computacional de (5.14) apresenta características que merecem ser enfatizadas. Os coeficientes β são, na sua grande maioria, nulos (tabela 5.2), são invariantes e existem apenas como decorrência do critério de resistência.

Os coeficientes α são característicos de cada elemento da estrutura e, de acordo com o ponto escolhido para o cálculo de tensões, devem ser definidos pelo analista para cada um dos graus de liberdade (vide exemplo da tabela 5.5). De modo geral, são em sua maioria nulos, restando poucos a considerar como função do estado de solicitação imposto pelos esforços de extremidade.

Por essas razões, o cômputo das amplitudes e fases iniciais equivalentes, para cada um dos harmônicos de $\sigma^m(N, t)$ reduz-se à soma de algumas poucas parcelas não nulas, perfeitamente identificáveis. Das doze combinações de r, s, \bar{r} e \bar{s} que tem $\beta \neq 0$, algumas não contribuirão como decorrência de os respectivos valores de α serem nulos. Para o exemplo da tabela 5.5 restariam, portanto, quatro parcelas correspondentes às seguintes combinações de k, r, s, \bar{r} e \bar{s} , respectivamente: 11111, 21111, 31111 e 21212. As amplitudes dos esforços de extremidades ($a_{kl}^m(N)$) necessitam, apenas, serem calculadas para os valores de k que contribuem na soma ($k=1, 2$ e 3 no exemplo).

Resta, agora, estabelecer o cálculo da vida em fadiga. O histórico de tensões obtido de (5.14) representa um caso de solicitação uniaxial tal que, fixada uma rotação N , sobre ele é possível aplicar a técnica de contagem de picos e vales já vista anteriormente. Assim, após o processo de rastreamento e subsequente aplicação do método "Rain Flow", obtém-se um conjunto de flutuações médias representativas: $\sigma_i^m(N)$. A vida em fadiga será, então, dada por (5.7):

$$u^m(N) = \{(\gamma^m/N) / \sum_i [\sigma_i^m(N)]^{1/\alpha}\} / 1440 \quad (\text{em dias}) \quad (5.15.a)$$

onde α é uma propriedade do material (tabela 5.4) e γ^m avaliada, para o elemento estrutural em questão (m), de acordo com (5.6.b).

Evidentemente (5.15.a) aplica-se nos casos em que a tensão de ruptura (σ_u) não é ultrapassada por nenhum $\sigma_i^m(N)$, e desde que pelo menos um destes seja maior do que o limite de fadiga (S_f). Frequentemente, contudo, como função da rotação N, é comum acontecer de todos os valores $\sigma_i^m(N)$ serem menores do que S_f e, portanto, a vida em fadiga infinita. Torna-se interessante definir, então, um novo parâmetro, mais apropriado a essa situação. Seguindo prática comum nesses casos, definimos:

$$(*) \quad CF^m(N) = (S_f/k) [1 - (\sigma_m/\sigma_R)^n] / \max\{\sigma_i^m(N)\} \quad (5.15.b)$$

como sendo o coeficiente de segurança à fadiga.

O cálculo do coeficiente de segurança pode ser entendido, sem restrições, à toda faixa de operação do sistema, fornecendo, em conjunto com o cálculo da vida em fadiga, importantes subsídios para a análise do comportamento da estrutura.

V.2.9 Dano Acumulado na Fadiga

Nas discussões anteriores admitimos que as juntas estruturais estejam sujeitas a tensões que se repetem continuamente no tempo, sob mesmas condições. As estruturas, no entanto, são raramente sujeitas à este tipo de carregamento durante toda a sua vida.

Na vida útil do navio, a estrutura será submeti-

*Relação entre a tensão limite de fadiga (S_f) (figura 5.4) — corrigido como função do valor da tensão estática (média) (σ_m) (tabela 5.3) — e a máxima flutuação média obtida do método de "Rain-Flow".

da, intermitentemente, a níveis diferentes de tensões estáticas e alternadas, de sorte que torna-se necessário a estima do quanto cada situação "gasta" da vida em fadiga, acumulando-se tais resultados.

Muitos métodos de estimação do dano acumulado tem sido propostos na literatura ([B13], [C15]), alguns dos quais bastante complexos. Aqui, entretantes, seguindo a linha inicialmente traçada de estabelecer relações simples para o método de cálculo, optamos pela teoria linear de "Miner" (Palmgren-Miner) como proposto em [C1], e largamente empregada por muitos pesquisadores.

Admitamos que cada evento durante a vida útil do navio tenha a duração de u_j dias na rotação N_j , consumindo, portanto, uma parte da vida em fadiga $|u^m(N_j)|$ nessa rotação. Se conhecermos, ou propusermos, um histórico de eventos para a vida do navio — pelo estabelecimento de vários pares (u_j, N_j) — a teoria linear indica a seguinte relação com um índice de segurança à fadiga:

$$I^m = \sum_j u_j / u^m(N_j) < 1 \quad (5.16)$$

Se I^m for menor do que a unidade, não ocorrerá fratura por fadiga no m-ésimo elemento. O analista deve, evidentemente, pesquisar mais de uma junta da estrutura, para vários históricos de carregamento ao longo da vida do navio, determinando em cada caso o índice acima. Se todos satisfizerem a relação, a estrutura não apresentará dano por fadiga.

Na prática, tendo em vista as incertezas do cálculo, é recomendável que se adote valores limites para I^m menores do que a unidade (por exemplo: 0,5).

A título de elucidação, suponhamos que ao longo da vida útil de um certo navio (digamos, vinte anos) ocorram os eventos: em 20% de sua vida a estrutura do navio está sob um certo estado de sollicitação; em 60% sob outro estado, distinto do

primeiro; e no restante do tempo o navio permanece docado. No ponto crítico para a ocorrência de fratura por fadiga, os cálculos determinaram, respectivamente para cada um dos eventos, os seguintes valores para a vida em fadiga: u_1^m , u_2^m e ∞ . Não ocorrerá fratura se:

$$\left(\frac{0,2}{u_1^m} + \frac{0,6}{u_2^m} \right) \times 20 \times 365 < 0,5$$

V.3 ANÁLISE DA REAÇÃO HUMANA

Sob o ponto de vista de habitabilidade, a consideração de vibrações no navio atém-se às formas pelas quais estas ocorrem em acomodações, locais de trabalho e de recreação à bordo. Num navio mercante moderno, por exemplo, isso pode significar a verificação do nível de vibração da viga navio na popa, onde normalmente fica instalada a superestrutura. Em outras inúmeráveis posições — como nos tanques de colisão à vante, etc... — verificações dos níveis de vibrações locais devem ser feitas sob o ponto de vista de fadiga, como discutido no item precedente.

V.3.1 Conceituação da Reação Humana à Vibração

O comportamento do corpo humano à vibração, e consequente reação de sensibilidade, são funções de uma série de fatores externos e internos ao indivíduo, tais como:

- temperatura ambiente.
- umidade do ar.
- nível de ruído.
- forma e direção da vibração.
- características biodinâmicas do corpo humano.
- atitudes psicológicas, etc.

Esta relação já basta para caracterizar a dificuldade em se obter limites para as vibrações, numa forma sistemática e não subjetiva.

O desconforto pode ocorrer quando uma pessoa, sujeita às vibrações a ela transmitidas pelo apoio que a sustem, manifesta incapacidade de prosseguir em suas atividades normais. As mais desconfortáveis vibrações à bordo costumam ocorrer na faixa de frequências de 1 a 90Hz, onde uma série de ressonâncias com as partes de um corpo humano, de características médias, po

dem ocorrer (tabela 5.6). Conseqüentemente, a sensibilidade do corpo é alta nessa faixa de frequências.

Abaixo de 1 (um) Hz o problema escapa ao âmbito do estudo de vibrações, representando um caso especial, com sintomas de desconforto semelhantes ao de enjôo (Kinetosis). Usualmente, portanto, investigações da reação humana na faixa de 1 (um) a, digamos, 100 Hz são suficientes. Experiências de laboratório [02] têm demonstrado que, no início da faixa, a sensibilidade depende apenas da amplitude da aceleração (figura 5.11). Na parte intermediária, depende apenas da amplitude da velocidade e, para frequências mais altas, passa a depender da amplitude do deslocamento. Isto implica em dizer que para frequências baixas a sensibilidade à aceleração não depende da frequência; para frequências intermediárias depende apenas da razão aceleração/frequência, e para altas frequências apenas da razão aceleração/frequência ao quadrado.

Os resultados esquematizados na figura 5.11 foram obtidos, de ensaios de laboratório, pela submissão de pessoas a vibrações harmônicas unidirecionais. O esquema é válido qualitativamente para qualquer posição do corpo (sentado, em pé ou deitado) e qualquer direção da vibração em relação ao corpo (vertical, horizontal-frontal ou horizontal-lateral - figura 5.12). Pela própria natureza da constituição do corpo, vibrações no plano horizontal, na posição em pé, são as mais desfavoráveis.

V.3.2 Normas Para Avaliação

Nos últimos anos várias propostas têm sido apresentadas como limites para a avaliação da reação humana à vibração. Algumas delas foram obtidas em laboratório, à semelhança do que se expôs para a figura 5.11; enquanto outras baseiam-se na experiência acumulada de observações à bordo do navio. De qualquer modo, contudo, o aspecto básico das várias propostas

segue o esquema da figura 5.11, com pequenas variações de ordem prática.

A figura 5.13 expõe várias dessas propostas em comparação com a norma ISO |D5|, que costuma ser empregada como regra por vários Institutos de Pesquisa e Sociedades Classificadoras, a exemplo do DNV |B5|. Pode ser notado que a maioria das normas usa o fato de a vibração vertical ser menos severa do que a horizontal, enquanto a norma ISO define limites iguais para ambos os casos. É comum, também, simplificar a avaliação na faixa de altas frequências, extrapolando linearmente o limite para a velocidade da faixa intermediária. A norma ISO fundamenta-se, também, em dados colhidos em medidas efetuadas à bordo em vários navios ainda hoje em operação. Acreditamos, portanto, que deva refletir o estado atual da arte.

Uma alternativa ao uso da norma ISO é tomar outra baseada unicamente em ensaios de laboratório. Dentre as que têm sido mais comumente empregadas destacamos duas: IRCN |D4| e Dieckmann |D11| — esquema da figura 5.11 —, que a título de comparação estão postas de forma tabular na tabela 5.7. Nota-se que os níveis de sensibilidade, de uma e de outra propostas, apresentam definições algo diferenciadas, ressaltando o caráter extremamente subjetivo deste tipo de avaliação.

Na tentativa de estabelecer normas internacionalmente aceitas, um grupo de trabalho da ISO tem produzido alguns trabalhos desde 1971. Nesse sentido, documentos sugerindo limites de vibração |D5| têm sido propostos como normas internacionais, tais como o que se vê na figura 5.14. Como parâmetro de entrada é definido o valor de pico de uma quantidade harmônica (deslocamento, velocidade ou aceleração). No caso de resposta composta de vários harmônicos, a norma sugere considerar aquele mais severo no tocante à relação frequência/amplitude.

Como características óbvias da norma ISO, observa-se que ela não faz menção ao nível de sensibilidade (tipo de sensação), nem delimita nitidamente a transição entre as zonas onde

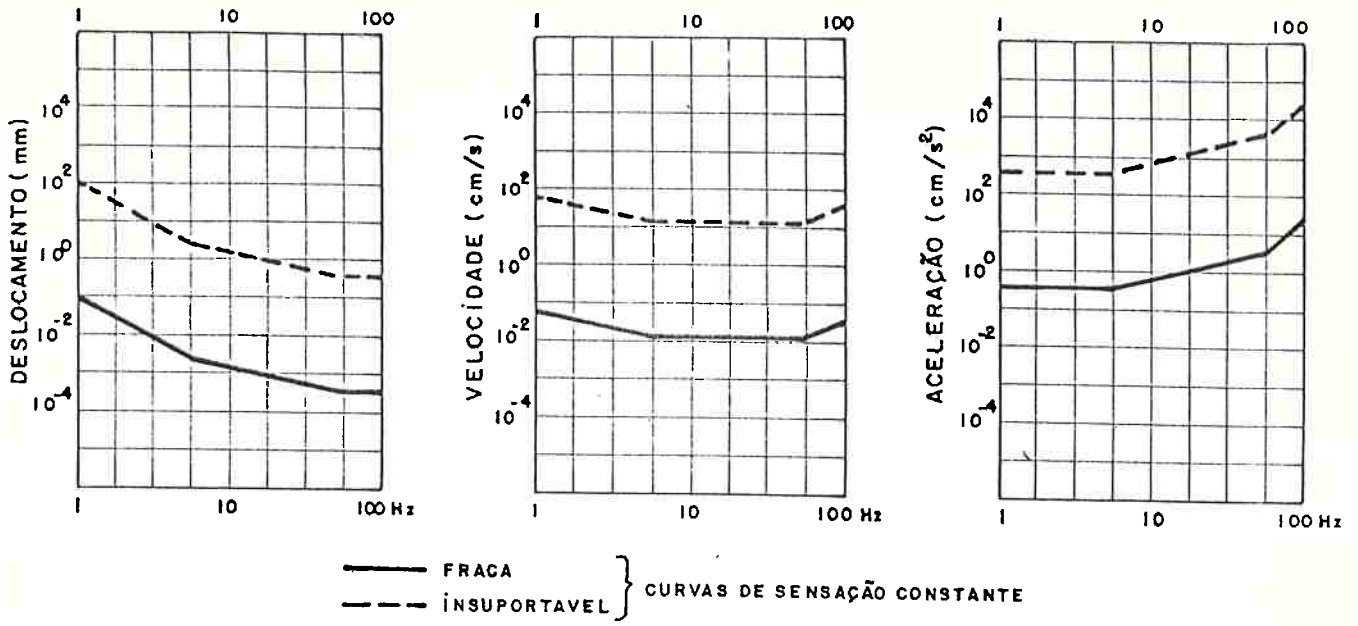


FIGURA 5.11 - ESQUEMA INDICANDO A VARIACÃO DA SENSIBILIDADE DA REACÇÃO HUMANA COM A AMPLITUDE DA VIBRAÇÃO E COM A FREQUÊNCIA. A SEMELHANÇA DO QUE É PROPOSTO POR DIECKMANN (DII)

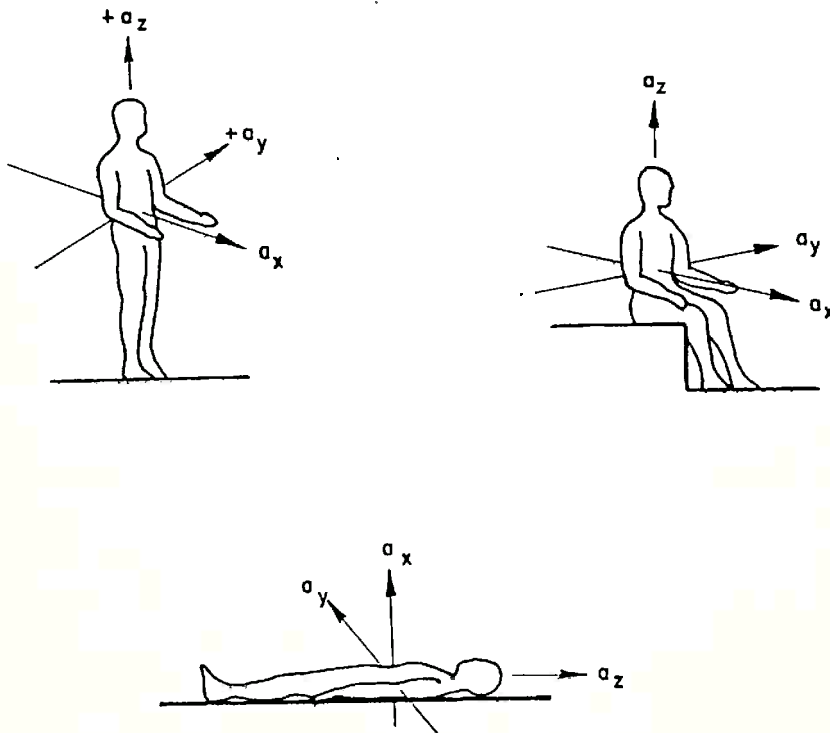


FIGURA 5.12 - DIREÇÕES DOS ENSAIOS DE VIBRAÇÃO DO CORPO HUMANO ISO/ TC 108/WG7 (D5)

TABELA 5.6 - FREQUÊNCIAS NATURAIS DO CORPO HUMANO |D2| PESSOA EM PÉ, VIBRAÇÃO VERTICAL*

ITEM	Hz
Parte baixa da coluna vertebral, pelvis	4-6
Parte alta da coluna vertebral	10-14
Cabeça e ombros	20-30
Globo ocular	60-90

*Para as posições sentada ou em pé, na vibração horizontal, as frequências naturais situam-se entre 1 e 3 Hz.

TABELA 5.7 - FORMA TABULAR PADRONIZADA DAS NORMAS IRCN E DIECKMANN
*PADRONIZADAS EM RELAÇÃO AO VALOR K=1000

IRCN D4	K (HOR.)	K (VERT)	DIECKMANN D11	K (HOR&VERT)
Muito Fraca	-10	-10	Limiar	-1
Fraca	10-20	10-20	Início Percepção	1-3
Perceptível	20-40	20-50	Prontamente } Perceptível	3-10
Levemente Inconfortável	40-100	50-100	Fortemente	
Muito Inconfortável	100-200	100-250	Perceptível } Desagradável	10-30
Extremamente Inconfortável	200-500	250-500	Intolerável	
Difícilmente Suportável	500-1000	500-1000	Extremamente } Desagradável	30-100
Insuportável	1000-	1000-	Intolerável	
<u>VERTICAL:</u> até 9Hz , $K=2,04.a$ 9-80Hz , $K=2,04.a.(9/f)^{1,18}$ 80-100Hz , idem extrapolado			<u>VERTICAL:</u> até 5Hz, $K=2,53.a$ 5-40Hz, $K=12,67.(a/f)$ 40-100Hz, $K=506,6.(a/f^2)$	
<u>HORIZONTAL:</u> até 5Hz, $K=4,08.a$ 5-50Hz , $K=4,08.a.(5/f)^{1,18}$ 50-100Hz , idem extrapolado			<u>HORIZONTAL:</u> até 2Hz, $K=5,07.a$ 2-25Hz, $K=10,13.(a/f)$ 25-50Hz, $K=253,3.(a/f^2)$	

a - aceleração em cm/s^2

f - frequência em Hz

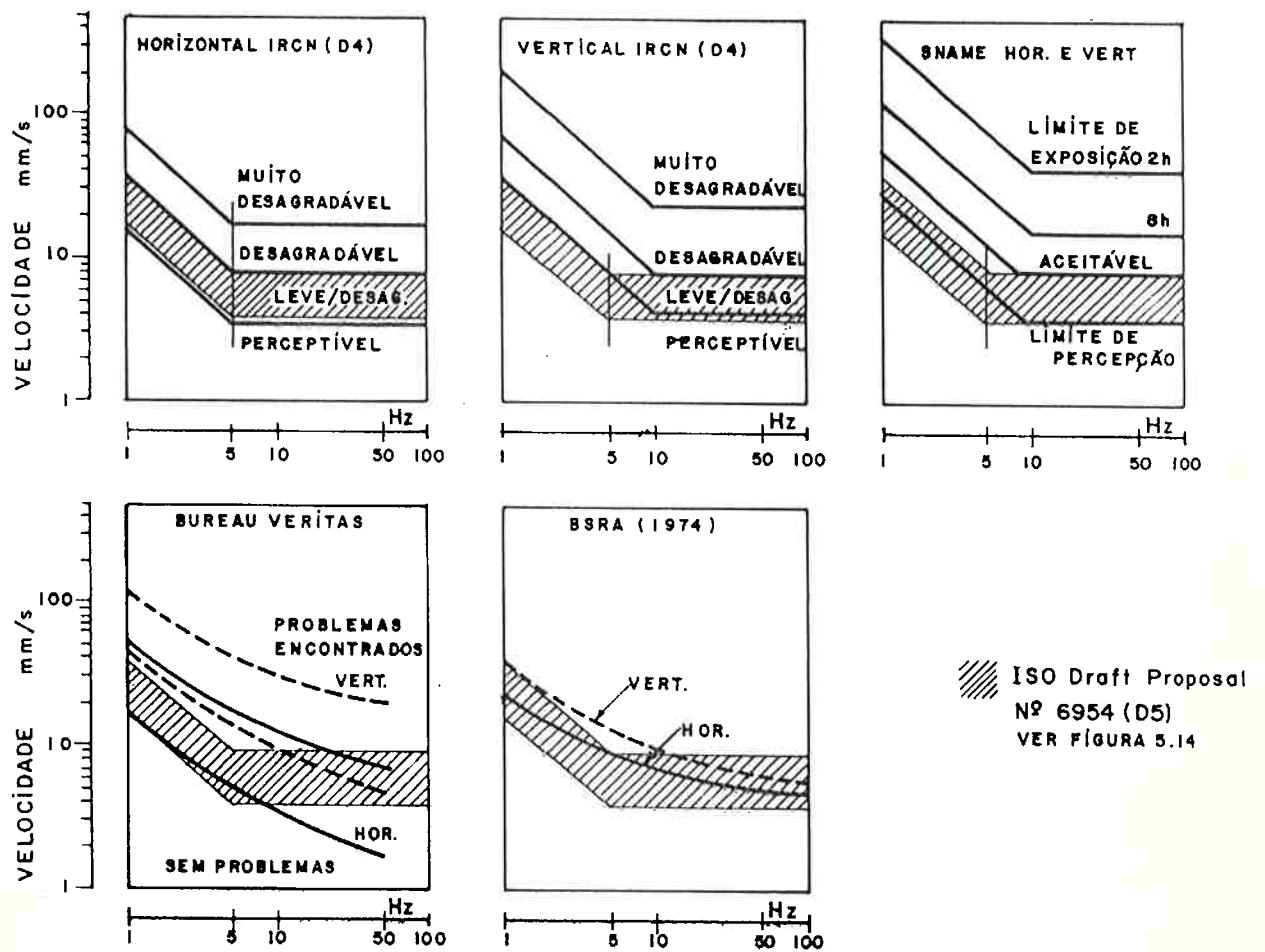


FIGURA 5.13 - COMPARAÇÃO DE VÁRIAS REGRAS PARA AVALIAÇÃO DE HABITABILIDADE.

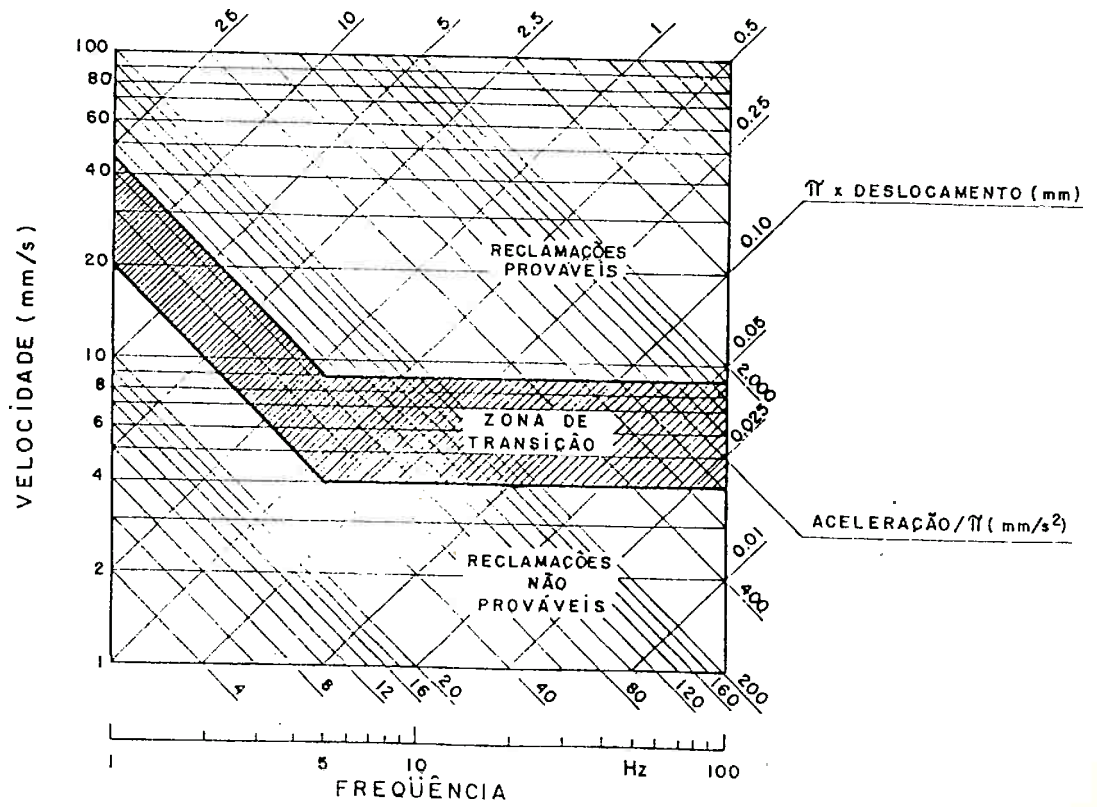


FIGURA 5.14 - NORMA PARA AVALIAÇÃO DE VIBRAÇÕES VERTICAIS E HORIZONTAIS
ISO Draft Proposal N° 6954

as vibrações podem ou não ser indesejáveis. Conserva, porém, propriedades similares às de outras normas: para frequências até 5 Hz a sensibilidade é proporcional à aceleração; torna-se a seguir proporcional à velocidade. Como mantém a proporcionalidade em relação à velocidade, à medida que a frequência aumenta, é conservadora na faixa de altas frequências.

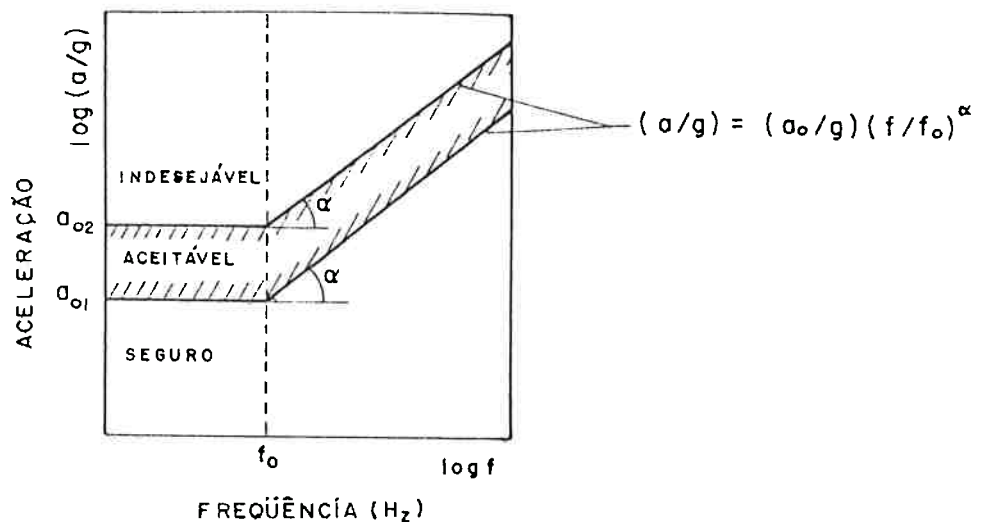
V.3.3 Representação Simplificada das Normas

Resta, agora, estabelecer um meio prático que nos permita fixar de modo simples limites aceitáveis para as vibrações. A grande diversidade de opiniões, não em tudo concordantes, autoriza-nos a elaborar um método simplificado. Como julgamos que o uso de vários níveis de sensibilidade, por seu caráter subjetivo, deve ser evitado, proporemos que sejam estabelecidas duas únicas curvas divisórias tal que: acima da superior as vibrações são consideradas indesejáveis, abaixo da inferior sob condições seguras e, entre ambas, aceitáveis.

Fixada, então, essa idéia, podemos aplicá-la de modo a estabelecer os parâmetros a_{01} , a_{02} , f_0 e α (tabela 5.8) para cada uma das normas aqui mencionadas. Na figura da tabela, uma única curva limita o início de vibrações indesejáveis, quer estas ocorram na direção vertical ou horizontal. Uma segunda curva, paralela à primeira, limita o início de uma zona de transição dentro da qual as vibrações podem ser consideradas aceitáveis. Na terceira região, abaixo da curva inferior, as vibrações não causam problemas. Propõe-se, finalmente, curvas limites que satisfaçam todas as normas (última linha da tabela 5.8).

Considerando o caso específico que estuda, cabe ao analista decidir sobre a conveniência em adotar nossa proposta, à luz do que aqui discutimos e pela leitura das referências indicadas. Não tivemos a pretensão de estabelecer um meio infalível, porém acreditamos que seu uso sirva às necessidades de grande parte dos casos de avaliação do nível de vibrações, sob

TABELA 5.8 - ELABORAÇÃO DE UM MÉTODO SIMPLIFICADO PARA A AVALIAÇÃO DAS VIBRAÇÕES SOB O PONTO DE VISTA DA REAÇÃO HUMANA



NORMA	α ⁽⁹⁾	f_0 (Hz)	a_{01}/g	a_{02}/g
ISO 6954	20 dB/década	5	0,013 ⁽⁵⁾	0,029 ⁽⁶⁾
ISO/TC8/SC4	2 dB/1/3 oitava	8	0,014 ⁽⁷⁾	0,032 ⁽⁸⁾
IRCN	7,1 dB/oitava	10	0,010 ⁽¹⁾	0,025 ⁽²⁾
DIECKMANN	20 dB/década	5	0,006 ⁽³⁾	0,020 ⁽⁴⁾
PROPOSTA	20 dB/década	5	0,012	0,020

NOTAS:

- (1) Horizontal no máximo perceptível . Vertical no máximo fraca.
- (2) Horizontal levemente inconfortável. Vertical perceptível.
- (3) Horizontal fortemente perceptível. Vertical fortemente perceptível.
- (4) Horizontal desconfortável . Vertical desconfortável.
- (5) Início da zona de transição.
- (6) Início da zona de prováveis reclamações.
- (7) Horizontal até 12 horas de exposição. Vertical até mais de 24 horas.
- (8) Horizontal até 8 horas de exposição. Vertical até 16 horas.
- (9) 1 década=20 decibéis(dB) $\rightarrow \alpha=1,0000$ (ISO6954 e Dieckmann)
 1 oitava=6,0206 dB $\rightarrow \alpha=1,1793$ (IRCN)
 1/3 oitava=2,0069 dB $\rightarrow \alpha=0,9966$ (ISO/TC8/SC4)

o ponto de vista da reação humana.

V.3.4 Excitação Multiharmônica

A exemplo do que acontece no estudo de fadiga, aqui também é necessário que se apele para o uso de um critério, com a finalidade de estender o uso das normas ao caso real de sollicitação multiharmônica.

O caso de sollicitação composta de mais de um harmônico não tem solução "exata". Dentre as alternativas propostas, julgamos que o critério de "magnitude equivalente", mencionado em [B15], representa uma aproximação aceitável.

Admitamos, para tanto, que as curvas de sensação constante — no contra domínio da aceleração — tenham a forma já aqui sugerida: reta horizontal até a frequência f_0 e reta de inclinação α para as frequências maiores. Quando se caminha sobre uma dessas curvas, a relação entre amplitude da aceleração (a) e frequência (f) é tal que se produz aproximadamente a mesma sensação. É possível, portanto, substituir um harmônico de amplitude a , na frequência f , por um de amplitude equivalente, na frequência f_0 , que produza o mesmo tipo de reação humana (figura 5.15).

Se a frequência for menor do que f_0 , a amplitude equivalente é igual à amplitude do harmônico considerado. Se for maior, a amplitude equivalente é dada por:

$$a^e = a \cdot (f_0/f)^\alpha \quad (5.17)$$

Este processo reduz todos os harmônicos da resposta à seus respectivos equivalentes na frequência f_0 . Daí, tor-

nar-se possível obter, por simples adição das amplitudes equivalentes*, uma amplitude total equivalente. No caso geral do capítulo 4, esta é dada por:

$$\ddot{a}_k^e = \sum_{\ell} \eta_{\ell}(N) \cdot \ddot{a}_{k\ell}(N) \quad (5.18)$$

onde:

$\ddot{a}_{k\ell}(N)$ é a amplitude da aceleração no grau de liberdade k , devida aos ℓ -ésimos harmônicos dos esforços de excitação, na rotação fundamental N (rpm).

e

$$\eta_{\ell}(N) = 1 \quad \text{se } f_{\ell} = \theta \ell N / 60 \leq f_0 \quad (5.19.a)$$

$$\eta_{\ell}(N) = (f_0 / f_{\ell})^{\alpha} \quad \text{se } f_{\ell} = \theta \ell N / 60 > f_0 \quad (5.19.b)$$

Usando a relação entre amplitudes de aceleração e de deslocamento (veja capítulo 4), finalmente obtém-se:

$$\ddot{a}_k^e(N) = \eta_{\ell}(N) \cdot w_{\ell}^2(N) \cdot a_{k\ell}(N) \quad (5.20)$$

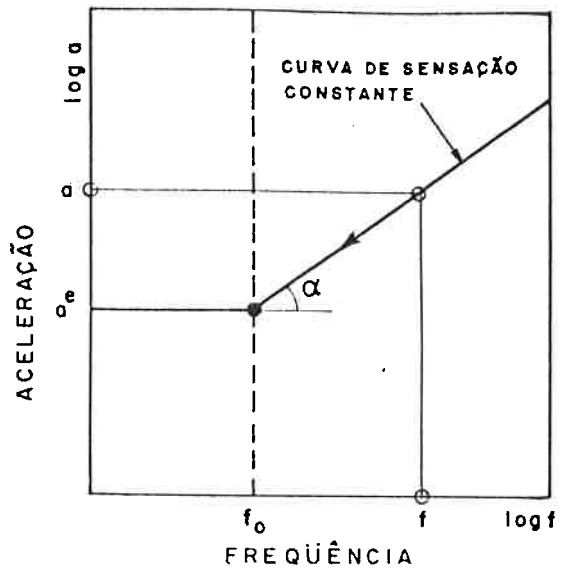
onde $a_{k\ell}(N)$ - amplitude dos deslocamentos - é dada por (4.16.a).

O resultado de (5.20) deve ser confrontado com os limites estabelecidos, de sorte a decidir-se pela aceitabilidade do nível de vibrações. Assim, se:

$$\begin{aligned} \ddot{a}_k^e(N) < a_{01} & \quad \text{a vibração é não problemática} \\ a_{01} < \ddot{a}_k^e(N) < a_{02} & \quad \text{a vibração é aceitável em condições especiais} \\ a_{02} < \ddot{a}_k^e(N) & \quad \text{a vibração é indesejável} \end{aligned}$$

*A não consideração das diferenças de fases, quando se faz a soma direta das amplitudes, torna o critério conservador.

À luz de sua experiência, considerando o que aqui discutimos, o analista deve tomar valores apropriados para os parâmetros α , f_0 , a_{01} e a_{02} (tabela 5.8). Sugerimos, como valores confiáveis, os já propostos anteriormente. 1; 5; 1,2%g e 2%g, respectivamente; onde g é a aceleração da gravidade.



FÍGURA 5.15 - CRITÉRIO DE MAGNITUDE EQUIVALENTE (a^e)

CAPÍTULO 6

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

No âmbito da linha de orientação traçada neste trabalho, trataremos a seguir de dois casos distintos de aplicação das teorias propostas. No primeiro abordaremos um estudo de vibrações globais do casco, como esse usualmente ocorre nas etapas preliminares da espiral de projeto de uma embarcação não convencional. No segundo, a título de exemplo dentre as inúmeras situações similares que costumam ocorrer na estrutura do navio, abordaremos o estudo de vibrações locais das fundações de um motor auxiliar da mesma embarcação.

Para definição de sua aceitabilidade, o nível de vibrações da Viga Navio será verificado sob o ponto de vista de reação humana. No caso da vibração local, a aceitabilidade será estabelecida sob a ótica de viga em fadiga das juntas estruturais.

Na apresentação de ambos os estudos, contudo, limitaremos-nos a aprofundar o assunto na exata medida do necessário ao entendimento do mecanismo de utilização do sistema de análise proposto. Aspectos de adequabilidade do projeto, de compreensão dos fenômenos físicos e de modelagem estrutural, embora relevantes para a qualidade dos resultados obtidos, serão considerados questões acessórias e, como tal, a bem da brevidade, apenas suscintamente abordados.

VI.1 VIBRAÇÕES DA VIGA NAVIO

VI.1.1 Estabelecimento do Problema e a Modelagem Estrutural

Consideremos o caso do estudo de vibrações globais da Viga Navio, para a embarcação não convencional cujas características principais estão descritas na tabela 6.1. Temos como objetivo principal, promover a verificação do nível de vibrações produzido pelo sistema de propulsão (hélices-eixos-MCP), de sorte a colher subsídios para a escolha de uma dentre duas posições possíveis do mancal de escora.

Os dois propulsores (de BB e de BE), ao operarem em regiões de esteira não uniforme, geram empuxos alternados (figura 6.1) que, como veremos adiante, constituem-se na principal fonte de excitação de vibrações no navio.

O empuxo total alternado, resultante da soma dos empuxos de cada um dos propulsores, excita vibrações de Viga Navio nos planos vertical e horizontal, e na direção longitudinal. Quando um adequado processo de ajuste de fases é providenciado, as parcelas alternadas do empuxo total atingem o valor máximo simultaneamente, eliminando, portanto, a excitação da Viga Navio no plano horizontal. Isto, em contrapartida, representa a pior condição para os outros dois casos de vibração (vertical e longitudinal), justificando a necessidade do estudo na forma em que este vem a seguir.

A transmissão do empuxo ao mancal de escora faz-se dinamicamente pela vibração longitudinal (axial) da linha de eixos. Assim, a força, que efetivamente excita a Viga Navio na posição do mancal de escora, resulta da amplificação dinâmica do empuxo pela vibração dos eixos. Como as características de massa e rigidez do casco como um todo, em primeira aproximação, não interagem dinamicamente com o comportamento dos eixos, o cálculo das forças alternadas no mancal de escora pode ser fei

TABELA 6.1 - CARACTERÍSTICAS PRINCIPAIS DA EMBARCAÇÃO

Comprimento Total	= 95,77m
Comprimento entre Perpendiculares	= 90,00m
Calado de Projeto	= 3,50m
Boca Máxima	= 11,40m
Pontal	= 6,50m
Deslocamento Carregado	= 1835 ton
Sistema de Propulsão	= CODOG
Velocidade de Cruzeiro	= 10-17 nós no modo Diesel
Velocidade Máxima	= 26,5 nós no modo Turbina

Sistema de Propulsão CODOG

1) MOTORES

*2 motores de combustão interna: MTU 16V956TB91

Máxima Contínua: 2570 KW a 1470 rpm

Máxima Intermitente: 2680 KW a 1490 rpm

Cruzeiro a 10 nós: 340 KW a 755 rpm

Cruzeiro a 17 nós: 1630 KW a 1270 rpm

*1 turbina a gás: GE LM 2500

Máxima Contínua: 10250 KW a 3600 rpm

2) PROPULSORES

2 hélices de passo controlável

D = 3300m (diâmetro)

Z = 5 (cinco pás)

P/D = 1,363 (razão passo/diâmetros)

folga em relação ao casco >25%D

3) REDUTORES

Motor: relação de redução = 7,98913:1

Turbina: relação de redução = 12.94964:1

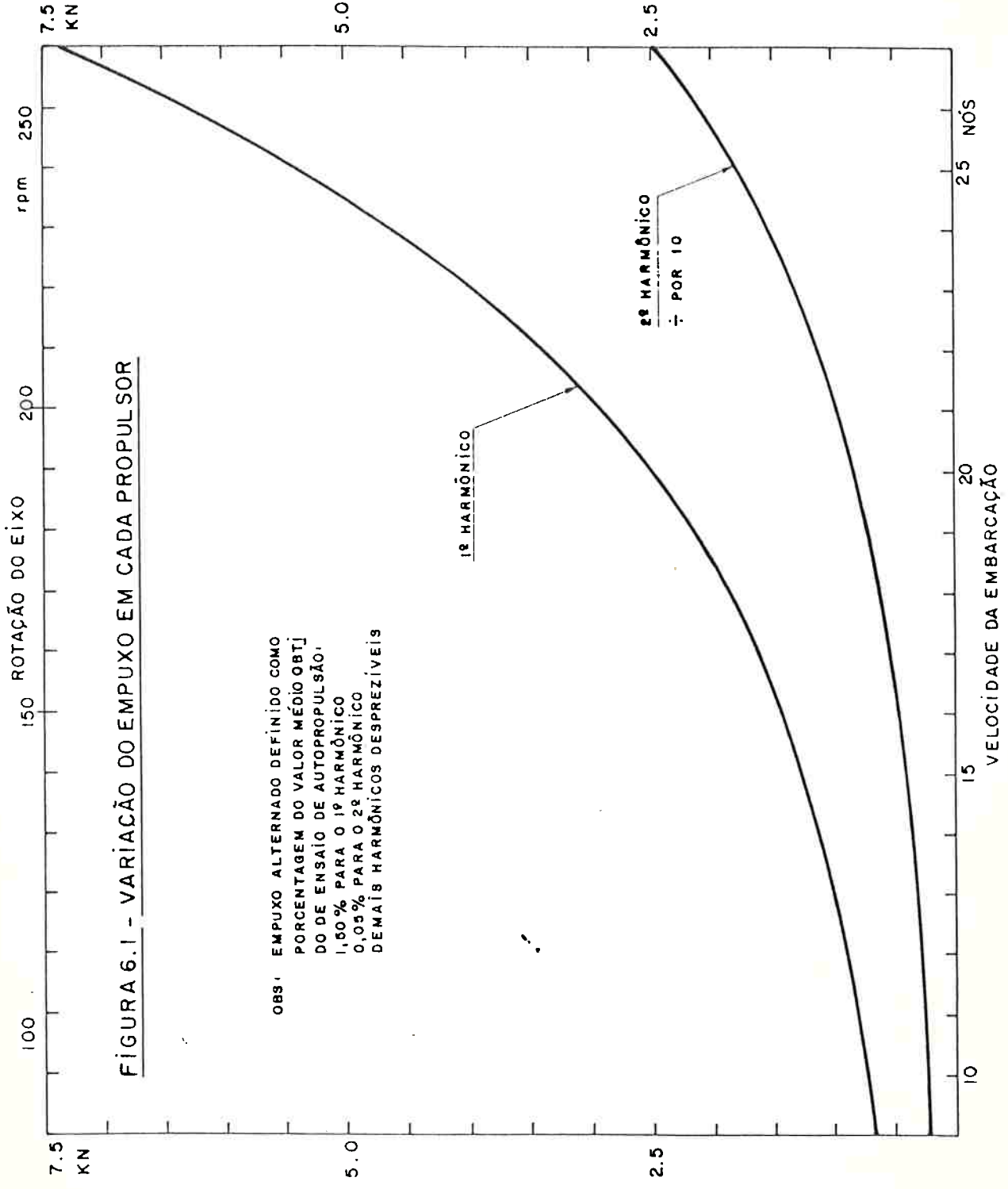
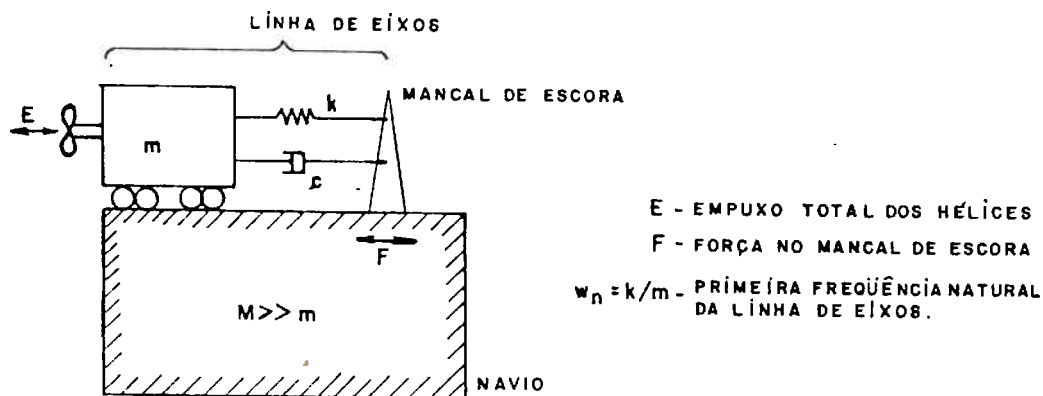


FIGURA 6.1 - VARIACÃO DO EMPUXO EM CADA PROPULSOR

OBS: EMPUXO ALTERNADO DEFINIDO COMO PORCENTAGEM DO VALOR MÉDIO OBTÍDO DE ENSAIO DE AUTOPROPULSÃO:
 1,50% PARA O 1º HARMÔNICO
 0,05% PARA O 2º HARMÔNICO
 DEMAIS HARMÔNICOS DESPREZÍVEIS

to pela análise isolada da linha (figura 6.2).



FÍGURA 6.2 - MODELO PARA A VIBRAÇÃO LONGITUDINAL DA LÍNGHA DE EIXOS

A linha de eixos, para efeitos de avaliação da amplificação do empuxo alternado, pode ser tomada como um sistema de um grau de liberdade (figura 6.2), pois, na faixa de operação do sistema de propulsão, apenas seu primeiro modo é excitado significativamente. Os valores finais das forças alternadas no mancal de escora, assim obtidas, estão levantados na figura 6.3.

A estrutura global do casco da embarcação — tomando-se as secções transversais como rígidas em seus planos |B1|, |B20| — comporta-se como uma viga de secção variável. O modelo físico de análise a empregar (figura 6.4) resulta, portanto, da subdivisão da Viga Navio em trechos de rigidez constante |B1|. Particularmente no presente caso, representamos a estrutura por trinta e dois elementos de viga prismática de secção constante, cujas propriedades de inércia à flexão, de rigidez ao cisalhamento e de rigidez à tração-compressão foram avaliadas — na posição do centro de cada elemento — a partir das respectivas distribuições levantadas para a embarcação.

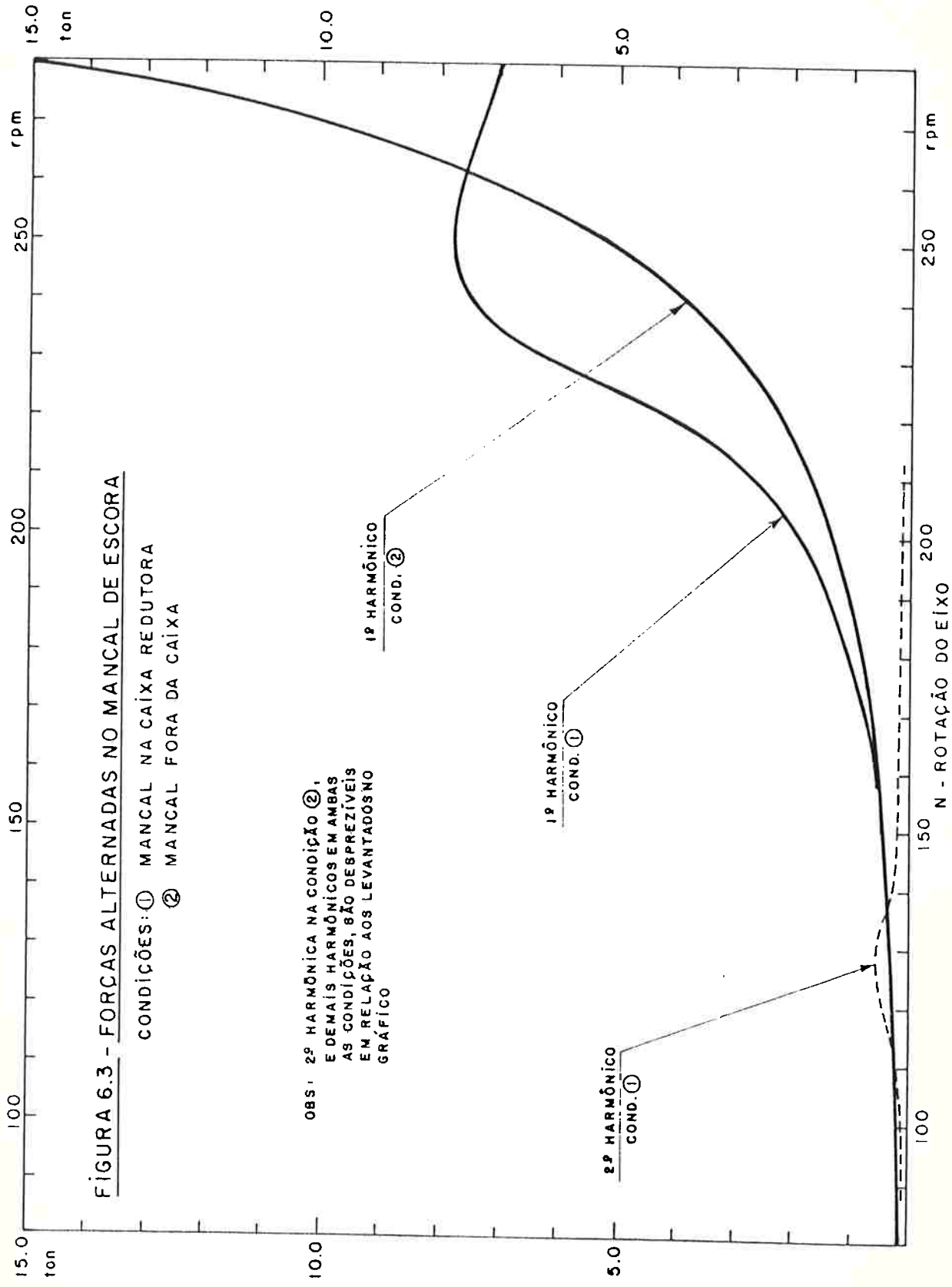


FIGURA 6.3 - FORÇAS ALTERNADAS NO MANCAL DE ESCORA

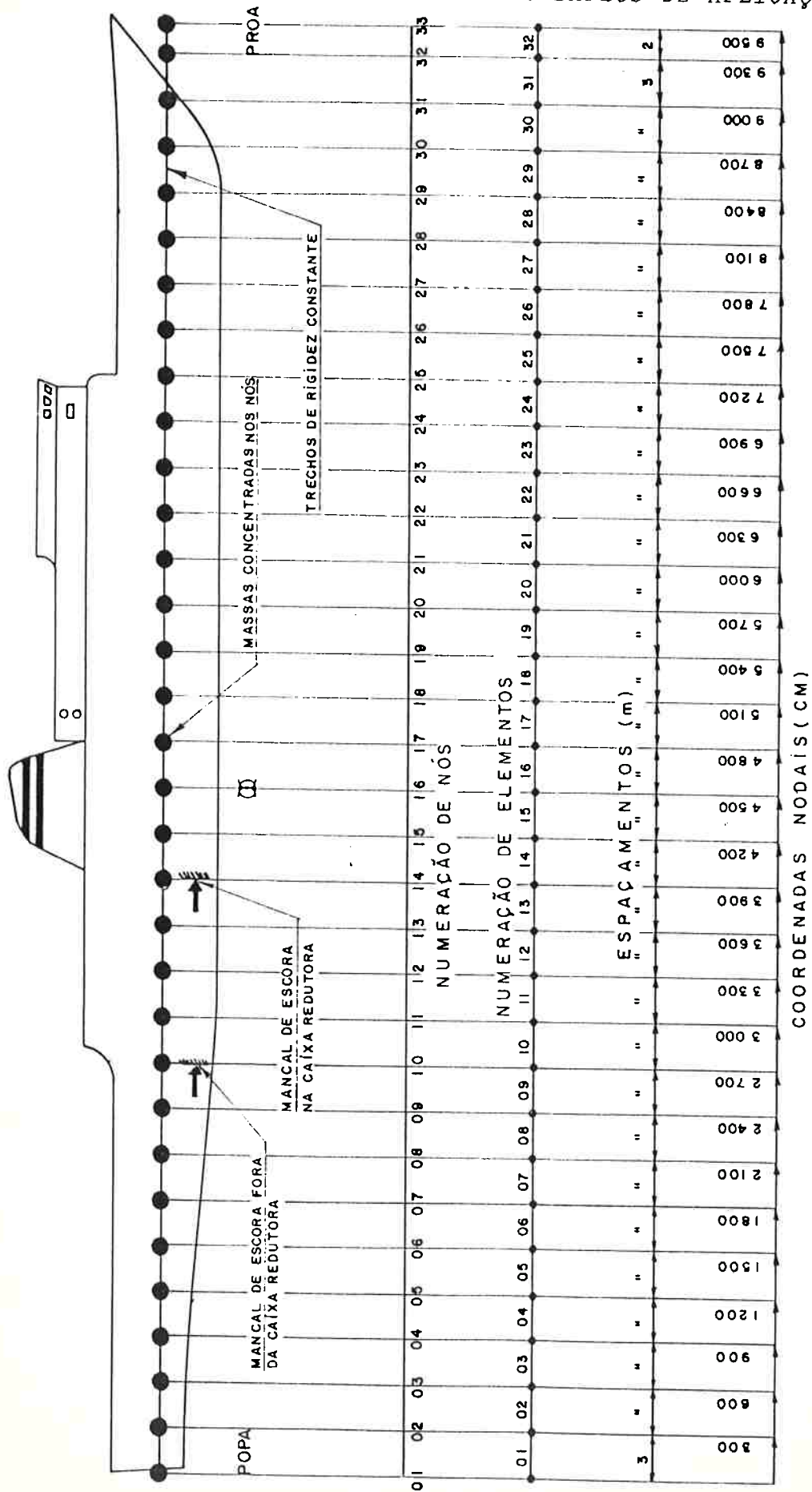
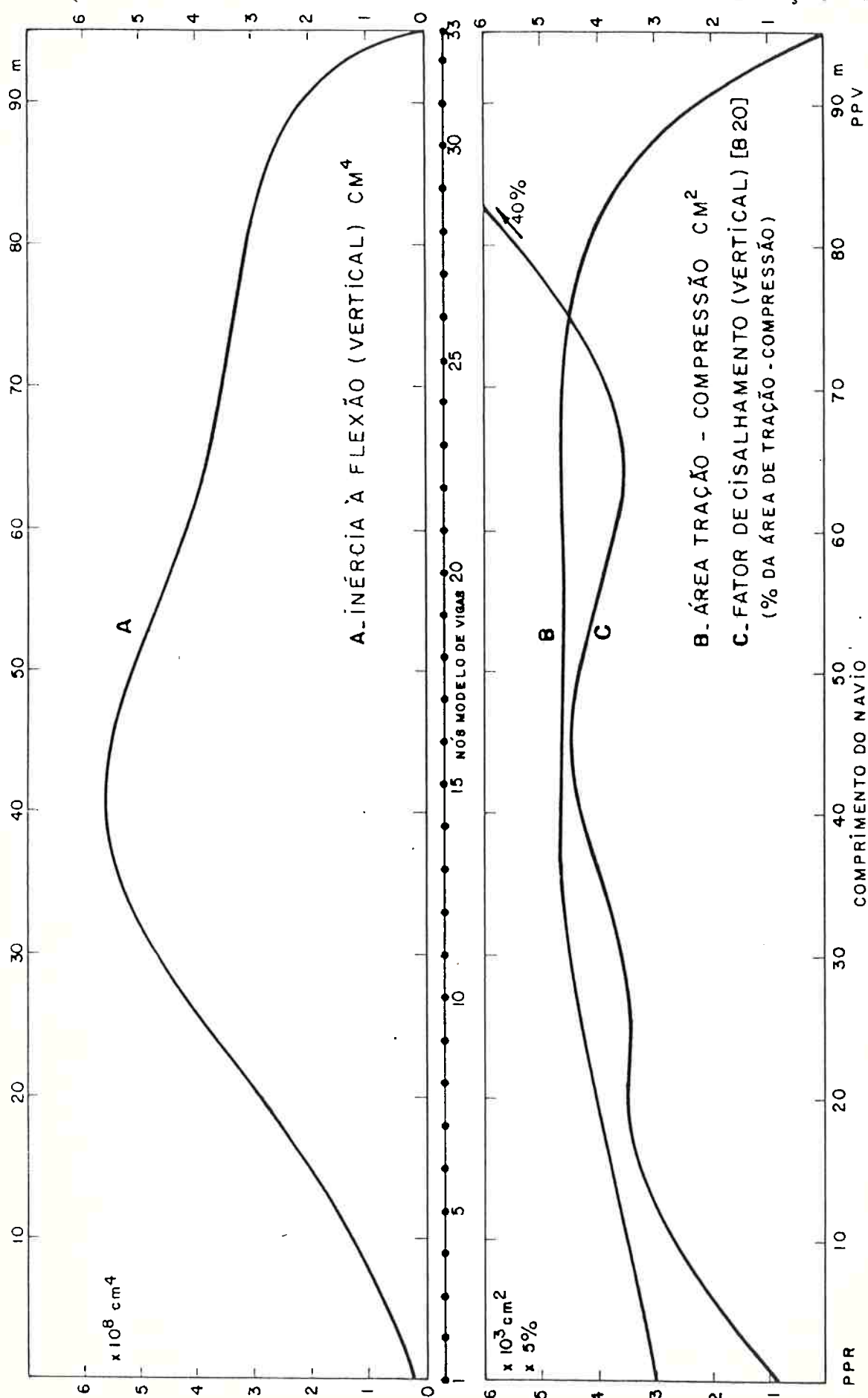


FIGURA 6.4 - MODELO DE VIGAS - VIBRAÇÃO DA VIGA NAVIO



FÍGURA 6.5 - PROPRIEDADES DE RIGIDEZ DA VIGA NAVIO

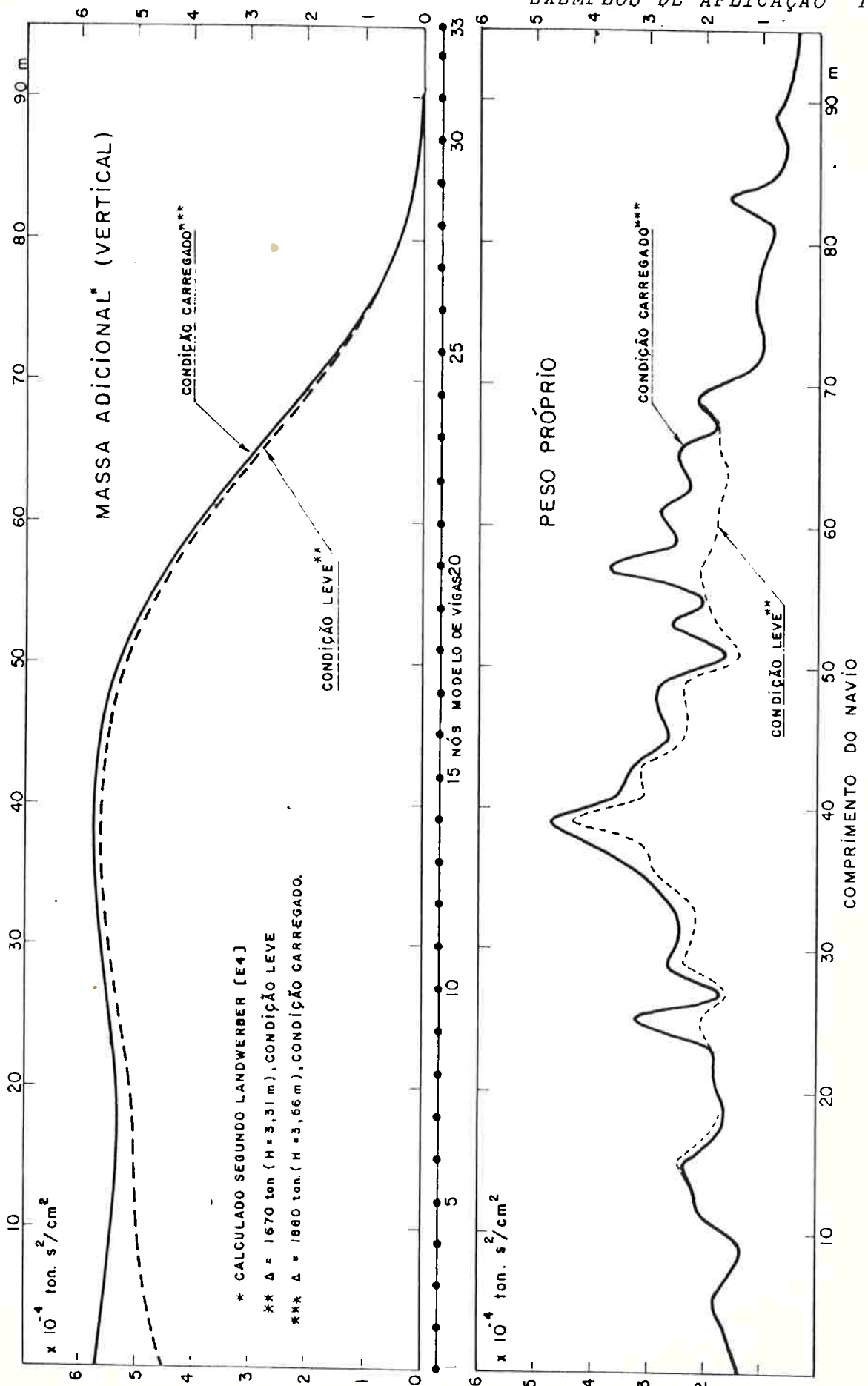


FIGURA 6.6 - PROPRIÉDADES DE MASSA DA VIGA NAVIO

No modelo, os elementos foram considerados sem mas sas e estas concentradas ao longo dos trinta e três nós. Não foram considerados os efeitos de: inércia de rotação de massa, redução da rigidez à flexão por "shear lag" e enrigecimento por variação de flutuação, na vibração vertical* .

Estabelecido o modelo, a primeira etapa do roteiro de análise consiste no levantamento das propriedades de massa e rigidez da Viga Navio. Na figura 6.5 estão apresentadas às distribuições de área seccionais do material resistente na vibração longitudinal, de inércia à flexão e do fator de cisalhamen to na vibração vertical**.

As distribuições de peso (massa) próprio e de massa adicional vertical estão levantadas na figura 6.6, para as duas condições extremas de carregamento da embarcação:

leve ($\Delta=1670\text{ton}$) e carregado ($\Delta=1880\text{ton}$)

VI.1.2 Verificação das Ressonâncias

O modelo de vigas submetido à teoria do capítulo 3 (programa NAVDIN) apresenta os resultados de vibrações livres relacionados na tabela 6.2 e na figura 6.7. Na figura estão mos trados os modos naturais para a condição "carregado" da embarcação que valem, qualitativamente, também para a condição "leve".

Com bases nesses resultados, estabelecemos limites considerados confiáveis — dentro da precisão oferecida pelos cálculos — entre os quais provavelmente devem estar inseridos os valores representativos das frequências naturais de vibração da Viga Navio. Esses limites, transportados para para a

*Os erros que disso decorrem são pequenos e irrelevantes face às demais incertezas introduzidas no cálculo. Os princípios que norteiam a análise de vibrações da Viga Navio podem ser mais detalhadamente vistos em [B1].

**Consideramos, na vibração vertical, deformações por flexão e por cisalhamento.

figura 6.8 — juntamente com as frequências de excitação do sistema de propulsão —, permitem a visualização das ressonâncias que potencialmente podem vir a causar vibrações indesejáveis.

Antes contudo de passarmos à análise da figura 6.8, é necessário relacionar alguns conhecimentos de natureza prática:

- a. O amortecimento em cada modo aumenta com a ordem modal, fato que torna ressonâncias com modos de ordem superior menos problemáticas.
- b. Por efeitos de acoplamento com vibrações locais de painéis e outros elementos estruturais, o casco passa a não se comportar como viga à medida que aumenta a ordem modal. Por isso as frequências naturais para modos de ordem superior são, de fato, menores do que as aqui previstas.
- c. Um motor diesel de dezesseis cilindros (como os do presente caso), por que pouco desbalanceado, não costuma ser causa de vibrações excessivas. A mesma afirmação vale para a turbina.
- d. Esforços advindos dos propulsores podem excitar as vibrações verticais e longitudinais do casco. Isto por que o empuxo é na direção longitudinal e fica fora do eixo neutro da Viga Navio.
- e. Outras fontes de excitação, não diretamente vinculadas ao sistema de propulsão, costumam ser causas de vibrações de natureza local, fugindo ao âmbito do que se está vendo neste exemplo.

TABELA 6.2 - FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO DA VIGA NAVIO

NÓS MODAIS	VERTICAL						LONGITUDINAL			
	CALCULADA		LIMITES		MAX.	MIN.	CALCULADA		MIN.	MAX.
	Δ_1	Δ_2	Δ_1	Δ_2			Δ_1	Δ_2		
01	-	-	-	-	-	-	13.24	13.71	12.98	13.98
02	1.886	1.953	1.793	2.051	2.051	2.051	23.56	24.17	23.09	24.65
03	3.791	3.954	3.602	4.152	4.152	4.152	34.76	37.33	34.07	38.08
04	5.680	5.930	5.396	6.227	6.227	6.227	44.72	46.80	43.83	47.74
05	7.923	8.228	7.527	8.639	8.639	8.639				
06	9.911	10.32	9.416	10.84	10.84	10.84				
07	11.83	12.34	11.24	12.96	12.96	12.96				
08	13.62	14.31	12.94	15.03	15.03	15.03				
09	15.52	16.15	14.74	16.96	16.96	16.96				

Obs.: i) valores em Hz
 ii) duas condições de carregamento. pesado $\Delta_1=1880\text{ton}$ ($H=3,56\text{m}$) leve $\Delta_2=1673\text{ton}$ ($H=3,31\text{m}$)
 iii) frequências verticais corrigidas para efeito tridimensional de massa virtual $|E20|$.
 iv) admitimos que os valores reais das frequências naturais estão entre os limites especificados na tabela. Esses limites foram tomados considerando-se a variação de deslocamento, e erros de cálculo e de avaliação de propriedades de massa, e de rigidez da Viga Navio. Para a vibração vertical adotamos 5% de margem de erro em ambos os limites (mínimo e máximo), enquanto para a longitudinal 2% foi adotado.

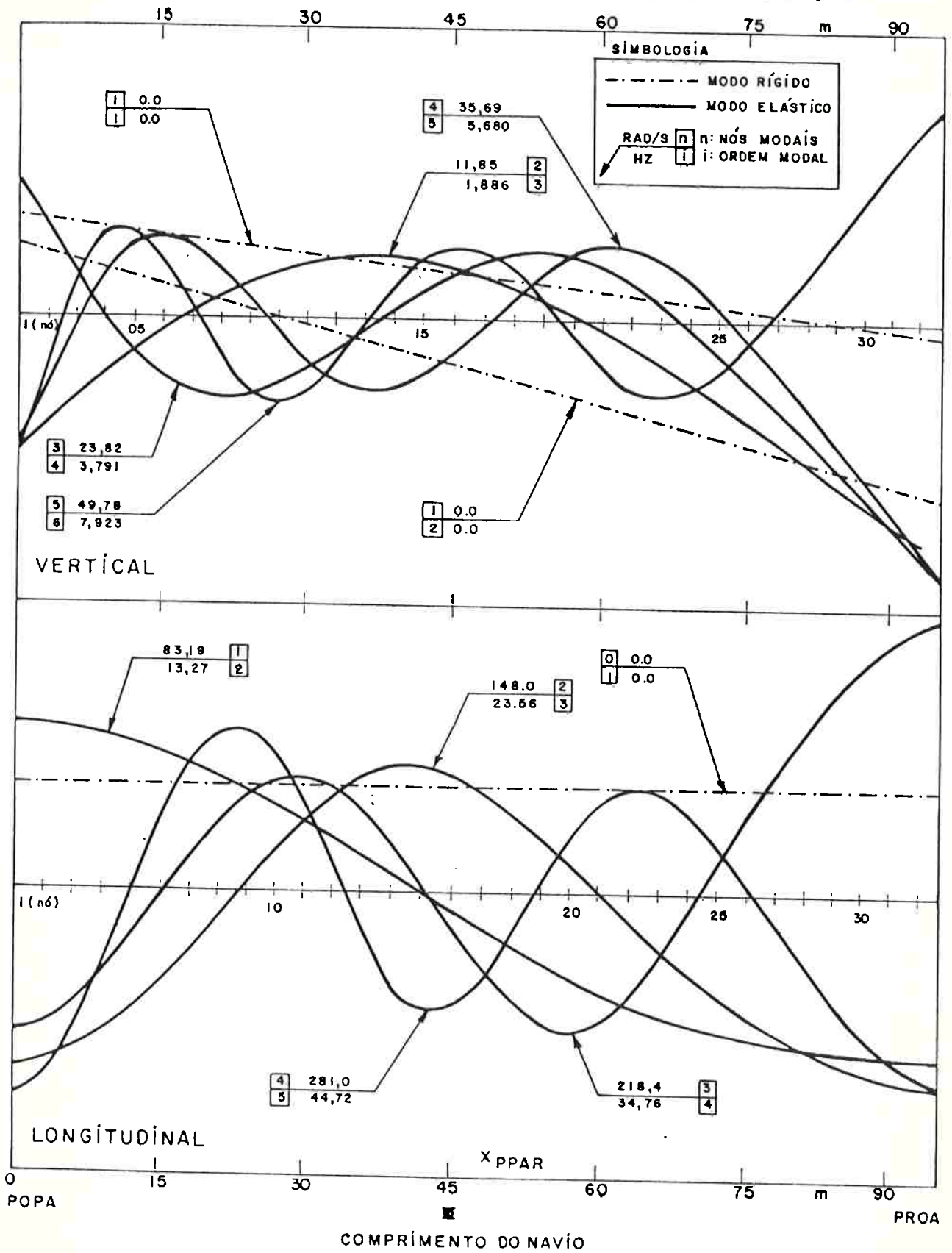


FIGURA 6.7 - VIBRAÇÕES NATURAIS DA VÍGA NAVIO
CONDICÃO DE CARREGAMENTO "CARREGADO"

Com base nessas considerações, o estudo da figura 6.8 indica dois casos de ressonância potencialmente perigosos:

1. O primeiro modo de vibração vertical (V2), por ação dos esforços decorrentes de vibração lateral da linha de eixos*, pode ser significativamente excitado quando a embarcação estiver entre as condições de "recebimento de óleo" e "passagem de carga leve".
2. A vibração longitudinal pode ser significativamente excitada pela ação do empuxo alternado. Note-se que, quando a embarcação estiver entre as condições de "passagem carga leve" e "cruzeiro", o segundo harmônico do empuxo alternado vibra na frequência do segundo modo longitudinal (L2). Analogamente, entre "cruzeiro" e "máxima recomendável diesel", o primeiro harmônico vibra na frequência do primeiro modo natural e, ainda, na condição "máxima contínua turbina" este mesmo primeiro harmônico vibra na frequência do segundo modo natural.

Neste ponto poder-se-ia alinhar sugestões propondo medidas que visassem evitar a ocorrência das ressonâncias detectadas. Como, entretanto, dispomos de meios que permitem a avaliação dos efeitos dessas ressonâncias, pelo cálculo da resposta, prosseguiremos nas avaliações.

O caso de vibração vertical do casco excitada pela vibração lateral da linha de eixos, embora de relevância, é menos crítico por que ocorre em baixa rotação, quando a magnitude dos esforços de excitação ainda não é muito grande.

A vibração longitudinal do casco excitada pela vibração, também longitudinal, da linha de eixos é particularmente problemática na velocidade máxima da embarcação, quan-

*Grifo V2 na reta dita EIXO na figura 6.8.

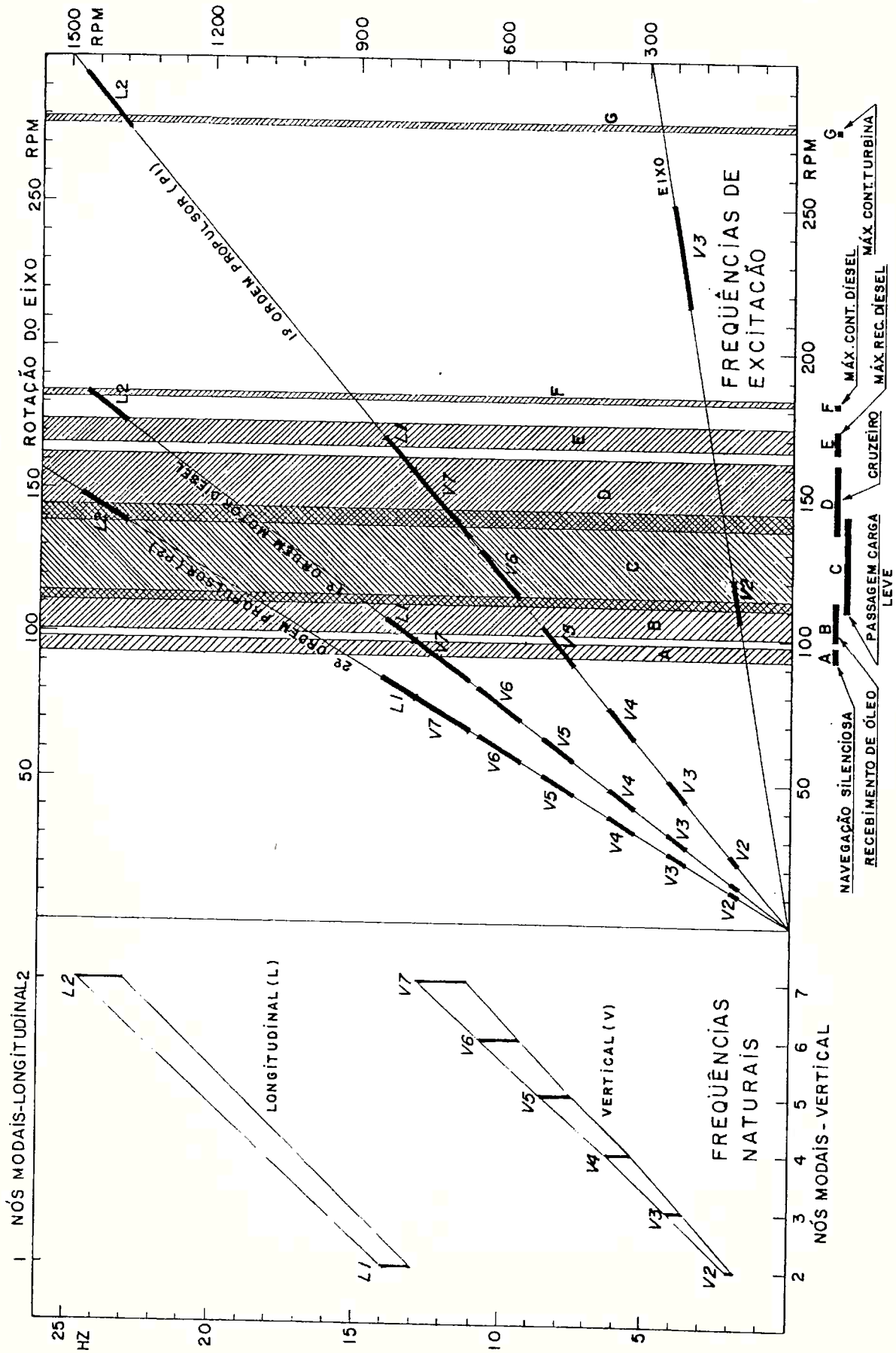


FIGURA 6.8 - PREVISÃO DE RESSONÂNCIAS PARA A VIGA NAVIO

do a magnitude das forças alternadas no mancal de escora (veja figura 6.3) atinge valor significativamente alto.

Assim, a título de brevidade, ater-nos-emos ao cálculo da resposta para este segundo caso. Na tabela 6.3 mostramos as diversas velocidades críticas de rotação do eixo, para cada uma das quais algum harmônico de excitação tem frequência igual à de um dos modos naturais de vibração longitudinal da Viga Navio. Nas velocidades críticas, que ficam na faixa de operação do sistema de propulsão, devem ser esperados picos importantes de resposta da estrutura.

VI.1.3 Cálculo da Resposta e Análise dos Resultados

A condição de carregamento mais desfavorável, sob o ponto de vista do comportamento vibratório do casco na direção longitudinal, é a de maior deslocamento (condição "carregado"). Os resultados aqui apresentados para esta condição, aplicam-se, contudo, qualitativamente para a condição "leve".

O critério para a avaliação do nível de vibração é definido sob a ótica de reação humana. Da aplicação da teoria desenvolvida neste trabalho (capítulos 4 e 5 - Programa NAVRAP) ao presente caso, resultam os gráficos da figura 6.9. Na faixa de operação do sistema propulsor ocorrem valores significativos de aceleração acima de 120 rpm de rotação do eixo, onde identificamos alguns picos pronunciados de resposta. O primeiro pico aparece na velocidade crítica de segunda ordem no segundo modo (P2L2 nos gráficos) a aproximadamente 141 rpm. A seguir sucedem-se outros picos nas velocidades críticas seguintes, até que no final da faixa de operação do sistema, devido à proximidade da velocidade crítica de primeira ordem no segundo modo (~283 rpm), as acelerações ultrapassam o limite considerado aceitável.

A conjugação de alguns fatores contribue para a o-

TABELA 6. 3- VELOCIDADES CRÍTICAS PARA A VIBRAÇÃO LONGITUDINAL DO CASCO EXCITADA PELO EMPUXO DO HÉLICE

		ROTAÇÃO DO EIXO		FREQUÊNCIAS DE PÁ			
ORDEM MODAL	HARM. EXCIT.	RPM	HZ	1ºHARM.	2ºHARM.	VELOCIDADE	
$l=$	$i=$	N_{il} (rpm)	F_{il} (hz)	F_{1z} (hz)	F_{2z} (hz)	NÓS	
CONDIÇÃO CARREGADO	1	2	79,44	1,324	6,62	13,24	8*
	2	2	141,33	2,356	11,78	23,56	15,0
	1	1	158,88	2,648	13,24	26,48	17,0
	3	2	208,56	3,476	17,38	34,76	21,7
	4	2	268,34	4,472	22,36	44,72	26,1
	2	1	282,66	4,711	23,56	47,11	27,2*
	3	1	417,11	6,952	34,76	69,52	- *
	4	1	536,67	8,945	44,73	89,45	- *

		ROTAÇÃO DO EIXO		FREQUÊNCIAS DE PÁ			
ORDEM MODAL	HARM. EXCIT.	RPM	HZ	1ºHARM.	2ºHARM.	VELOCIDADE	
$l=$	$i=$	N_{il} (rpm)	F_{il} (hz)	F_{1z} (hz)	F_{2z} (hz)	NÓS	
CONDIÇÃO LEVE	1	2	82,25	1,371	6,85	13,71	9*
	2	2	145,03	2,417	12,09	24,17	15,0
	1	1	164,50	2,742	13,71	27,42	18,0
	3	2	223,98	3,733	18,67	37,33	23,0
	4	2	280,82	4,680	23,40	46,80	27,0
	2	1	290,05	4,834	24,17	48,34	27,6*
	3	1	447,97	7,466	37,33	74,66	- *
	4	1	561,64	9,361	46,80	93,61	- *

*Velocidades fora da faixa de operação da embarcação.

corrência de vibrações indesejáveis na velocidade máxima da embarcação. Nesse ponto a parcela de 1ª ordem do empuxo alternado é máxima e substancialmente amplificada pela vibração longitudinal da linha de eixos. Isto, associado ao fato de que se está próximo de uma velocidade crítica, produz o alto nível de vibrações verificado.

Os resultados da figura 6.9 foram obtidos sob a hipótese de que o amortecimento modal, em todos os modos incluídos na resposta, é de 0,5%. Para o tipo de embarcação em estudo (por tratar-se de navio não convencional) não se dispõe de informações a respeito do amortecimento. Deve-se, então, efetuar avaliação da sensibilidade da resposta ao amortecimento, verificando como se reduz o pico de resposta na velocidade máxima (~27 nós) à medida que o amortecimento aumenta.

Pela observação da figura 6.10 verifica-se que, se o amortecimento for da ordem de 5%, o nível de vibrações cai para a faixa de valores aceitáveis.

Muito mais importante, no entanto, do que concluir pela aceitabilidade, ou não, das vibrações longitudinais da Viga Navio, como função do amortecimento, a análise do presente caso leva-nos a determinar que é a fonte de excitação no mancal de escora, seguramente, o fator a ser corrigido.

Como solução propõem-se medidas de ordem prática que, em alterando as frequências naturais da linha de eixos, diminuam a amplificação do empuxo alternado na velocidade máxima. Para tanto deve-se estabelecer a primeira frequência natural da linha numa posição suficientemente distante do limite superior da faixa de operação da embarcação: enrigecendo o mais possível as fundações do mancal de escora, ou pela instalação de um acoplamento flexível entre o eixo e o mancal de escora. A efetividade da primeira medida fica limitada pela rigidez da estrutura adjacente ao mancal, com o valor da frequência natural tendendo assintoticamente ao limite superior repre

sentado pelo caso de fundações infinitamente rígidas. A segunda medida visa trazer a 1ª frequência natural aquém do meio da faixa de operação do sistema de propulsão, onde o empuxo alternado é de pequena magnitude.

Continuando, é importante tecer comentários sobre as vantagens, ou desvantagens, relativas de cada uma das posições analisadas do mancal de escora, cumprindo aquilo que de início estabelecemos como objetivo deste exemplo de aplicação.

Quando o mancal de escora é colocado fora da caixa redutora, o encurtamento da linha de eixos, que disso decorre, torna-a mais rígida, levando o pico de amplificação do empuxo alternado para pouco além do limite superior de operação do sistema. Por isso neste caso a força alternada no mancal de escora atinge seu valor máximo na velocidade máxima da embarcação, sendo substancialmente mais elevado do que o valor máximo que se observa quando o mancal é colocado na caixa redutora (figura 6.3).

Seria, então, de esperar maiores acelerações na Viga Navio quando do mancal de escora fora da caixa redutora. Porém, como dessa posição para a outra, ocorre mudança do ponto de aplicação da excitação (do nó 10 para o nó 14 da Viga Navio, figura 6.4), e o modo predominantemente excitado tem pequena amplitude na posição mais a ré do mancal — atenuando a amplificação do empuxo —, sucede o inverso.

Assim, sob o ponto de vista único de vibrações globais do navio, devemos ficar com a opção do mancal de escora fora da caixa redutora.

Finalizando, queremos enfatizar a importância do método proposto neste trabalho, como ferramenta que estende a tarefa de prevenção de vibrações indesejáveis até o cálculo efetivo da resposta. Neste exemplo, fica patente a inconveniência de limitar os cálculos apenas à fase de verificação de ressonâncias, onde as conclusões obtidas não teriam igual amplitude.

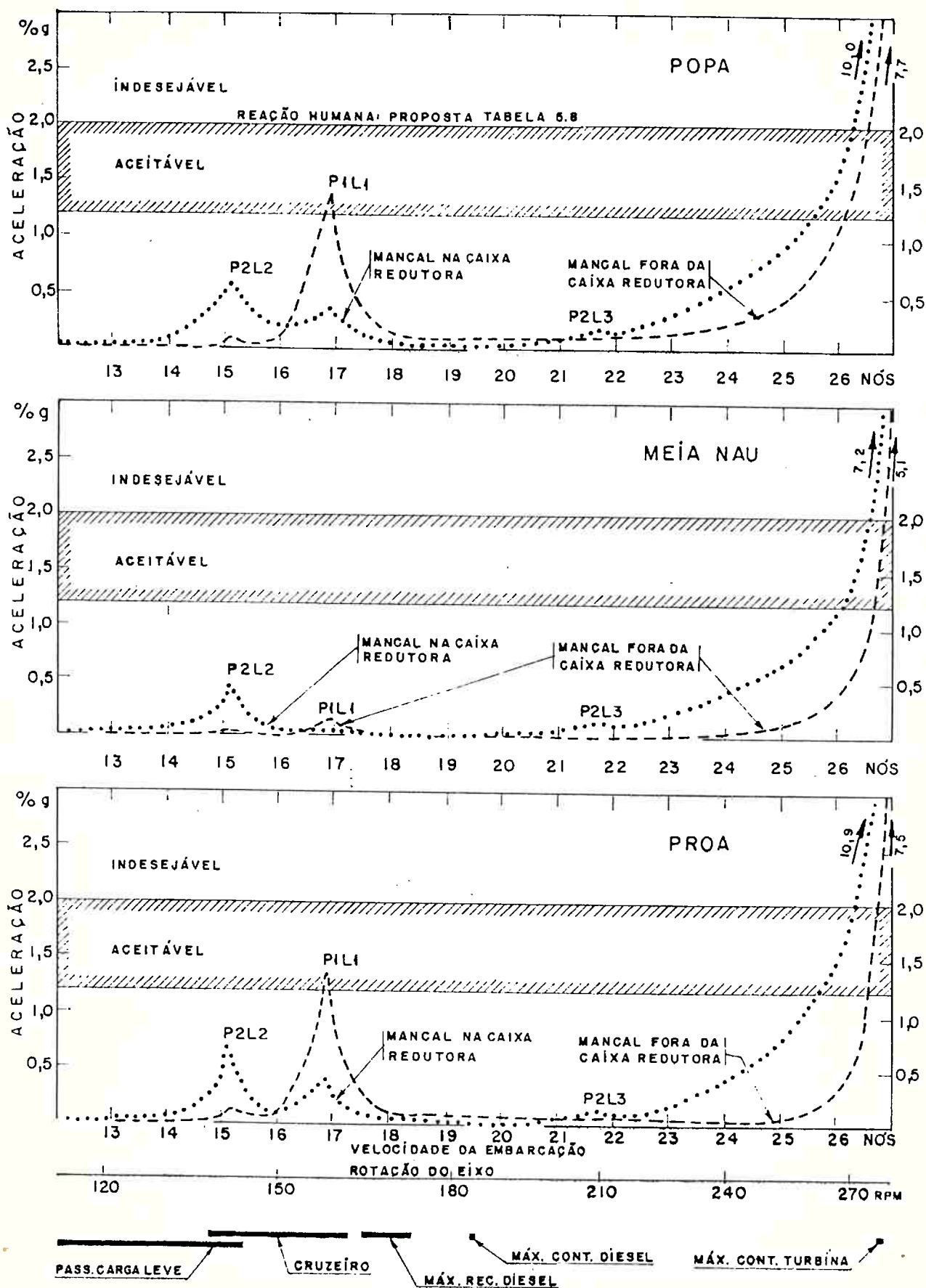


FIGURA 6.9 - ACELERAÇÕES EQUIVALENTES X LÍMITES PERMISSÍVEIS VIBRAÇÕES LONGITUDINAIS DA VIGA NAVÍO - CONDIÇÃO CARREGADO

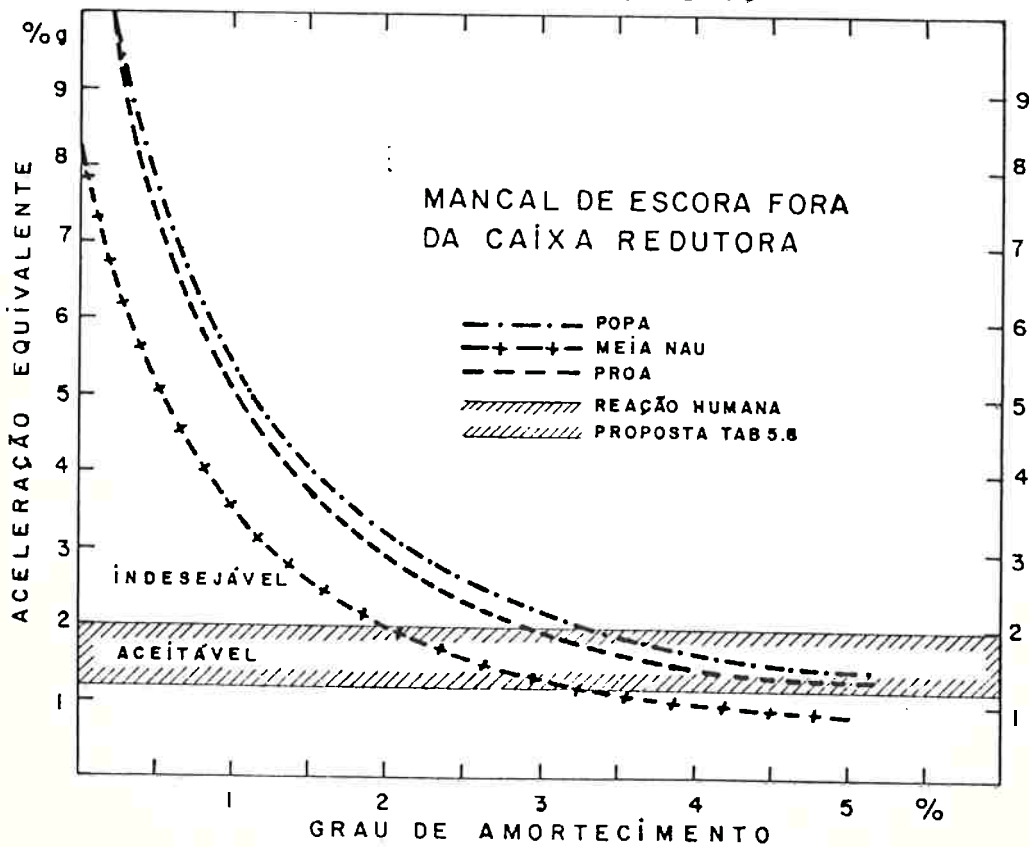
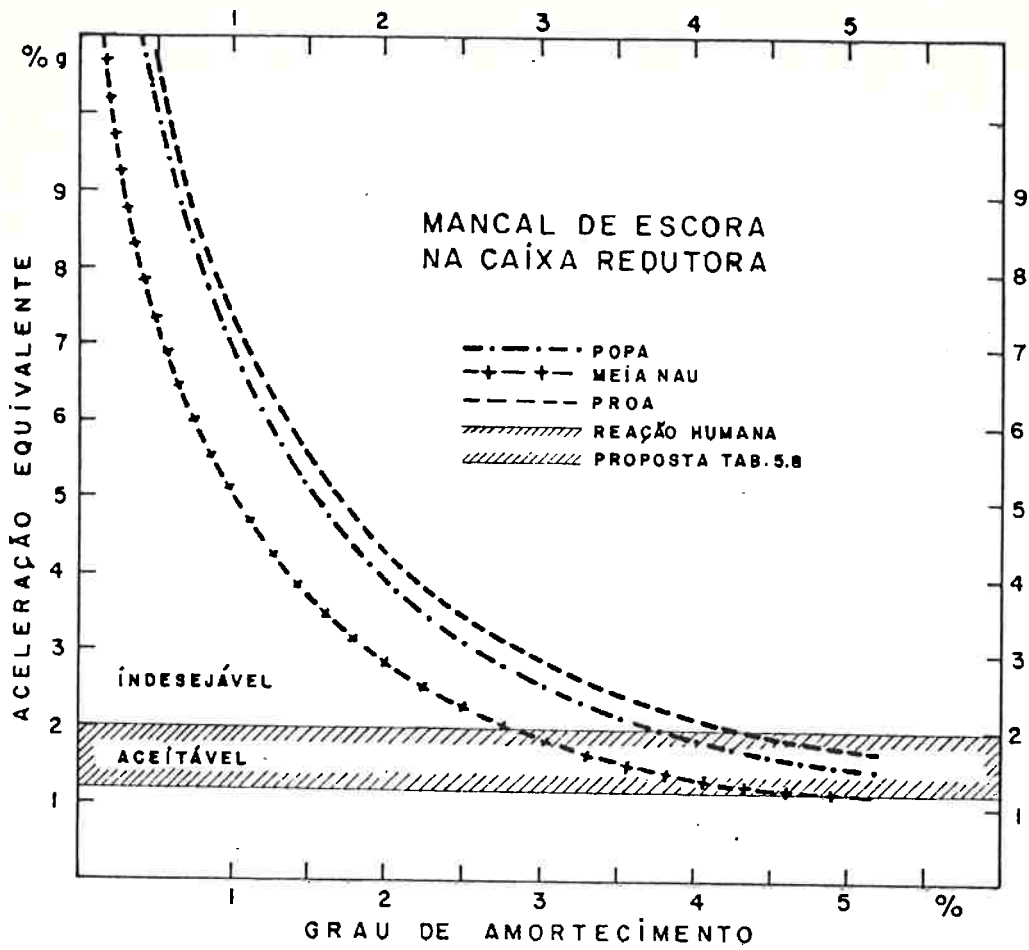


FIGURA 6.10- ANÁLISE DA SENSIBILIDADE AO AMORTECIMENTO VIBRAÇÕES LONGITUDINAIS DA VIGA NAVIO-COND. "CARREGADO" À 27 NÓS

VI.2 VIBRAÇÕES LOCAIS DO PISO DA PRAÇA DE MÁQUINAS

VI.2.1 Estabelecimento do Problema e a Modelagem Estrutural

O motor Diesel Auxiliar assenta-se sobre os longitudinais do piso que lhe servem como fundações (figura 6.11). Os esforços de desbalanceamento do motor, fazendo o piso vibrar, provocam tensões alternadas nas juntas dos longitudinais com os prumos da antepara, de sorte que essas juntas podem vir a romper por efeito de fadiga do material resistente estrutural.

Deseja-se, neste exemplo de aplicação, verificar a vida em fadiga da estrutura do piso, analisando os efeitos de mancais resilientes colocados entre o motor e suas fundações. Para tanto, propõe-se a idealização do sistema pela suposição de que os mancais possam ser representados por um fator elástico (k na figura 6.11) e um fator de amortecimento (c na mesma figura). A estrutura do piso — idealizada como grelha por elementos finitos de viga — une-se, então, ao motor por um acoplamento flexível, cuja rigidez é o objetivo a determinar neste estudo.

A massa do motor (m) é suficientemente grande para interferir nas características de vibração do piso, alterando suas frequências naturais. Portanto, como parte do processo de cálculo da resposta por "Superposição Modal", deve-se, antes, obter modos e frequências naturais do sistema motor-mancais-piso.

A escolha dos mancais deve ser feita de sorte a eliminar velocidades críticas na região de alta rotação do motor, onde as amplitudes dos esforços de desbalanceamento são grandes. Um acoplamento suficientemente flexível, entre motor e piso, leva a primeira frequência natural do sistema na direção da faixa de baixa rotação do motor, onde os efeitos de amplifi

cação dinâmica, por ação da ressonância, são menos severos.

VI.2.2 Cálculo de Modos e Frequências Naturais

Um processo, bastante conveniente para a solução do problema, reside na aplicação da técnica de Síntese Modal ([B24], [B25]) que permite, a partir do conhecimento de modos e frequências naturais do piso isolado (sem motor), obter analiticamente os modos e frequências naturais do sistema motor-mancais piso completo. A partir disso, como veremos, torna-se relativamente simples estudar o comportamento do sistema, com a variação da propriedade de rigidez dos mancais.

O equacionamento do problema de autovalor parte do estabelecimento das equações de compatibilidade, de força e deslocamento, no ponto de contato entre motor e piso (figura 6.12). Desse modo, a condição de equilíbrio dinâmico do sistema fica expressa por:

$$\ddot{Y} + \Lambda^* \cdot Y = -m \ddot{z} \Psi^*(a) \quad (6.1.a)$$

$$\ddot{z} + \Omega^2 z = \Omega^2 \Phi^*(a) Y \quad (6.1.b)$$

onde:

$Y(t)$ - vetor das coordenadas normais do piso:

$$Y(t) = \{y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)\}^T$$

$z(t)$ - deslocamento do motor.

$\Phi^*(a)$ - vetor dos deslocamentos modais do piso nas coordenadas do motor:

$$\Phi^*(a) = \{\phi_1^*(a), \phi_2^*(a), \dots, \phi_n^*(a)\}$$

$$\Psi^*(a) = \{\phi_1^*(a)/m_1^*, \phi_2^*(a)/m_2^*, \dots, \phi_n^*(a)/m_n^*\}^T$$

m_i^* - massas generalizadas do piso

Ω = $(k/m)^{0,5}$ - frequência natural do sistema motor-mancais.

Λ^* - matriz diagonal dos autovalores do piso.

$$\Lambda^* = \text{diag} \{w_1^{*2}, w_2^{*2}, \dots, w_n^{*2}\}$$

Usando o princípio, segundo o qual o sistema oscila harmonicamente em vibração livre na frequência $w = \sqrt{\lambda}$:

$$\ddot{Y} = -\lambda \cdot Y \quad (6.2.a)$$

$$\ddot{z} = -\lambda \cdot z \quad (6.2.b)$$

resulta a seguinte equação para o cálculo dos autovalores:

$$\lambda \cdot [1 + k \cdot \alpha(\lambda)] - \Omega^2 = 0 \quad (6.3.a)$$

onde:

$$\alpha(\lambda) = \sum_{i=1}^n [\phi_i^*(a)]^2 \{m_i^* [(w_i^*)^2 - \lambda]\} \quad (6.3.b)$$

Se n modos naturais do piso são incluídos no cálculo, a equação (6.3.a) possui $n+1$ raízes (λ_j) representando os autovalores do sistema motor-mancais-piso (figura 6.13).

Pela técnica de Síntese Modal, os modos naturais do sistema completo são obtidos por uma combinação linear dos modos naturais do piso isolado, de sorte a satisfazer as condições de compatibilidade. Assim, para os modos do piso, já com o motor e mancais, temos:

$$\phi_j = \sum_{i=1}^n g_{ij} \cdot \phi_i^* \quad ; \quad j=1,2,3,\dots,n+1 \quad (6.4.a)$$

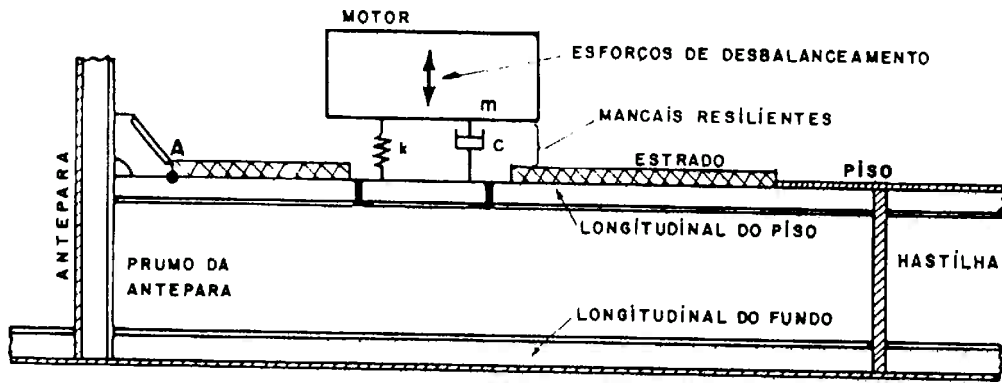
onde:

$$g_{ij} = \{m \cdot z_{oj} \cdot \lambda_j \cdot \phi_i^*(a)\} / \{m_i^* [(w_i^*)^2 - \lambda_j]\}; \quad i=1,2,\dots,n \quad (6.4.b)$$

$$j=1,2,\dots,n+1$$

sendo

- λ_j - as raízes de (6.3.a), e
- z_{oj} - a amplitude modal do deslocamento do motor no j -ésimo modo.



MATERIAL: AÇO MÉDIO 1020 (VÍDE TAB.5.4)

PONTO A: INÍCIO DE ROMPIMENTO POR FADIGA

FIGURA 6.11 - O SISTEMA MOTOR-MANCAIS-PISO

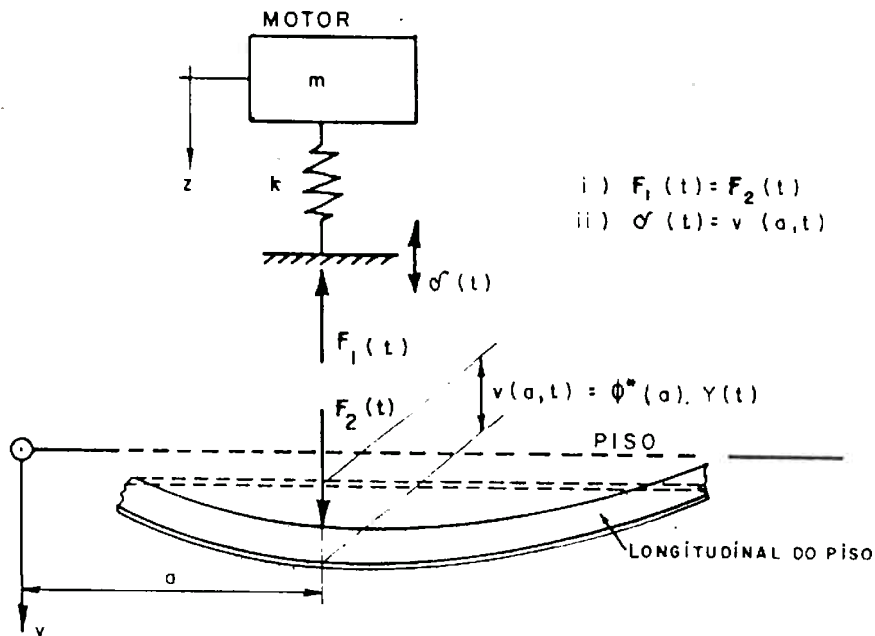


FIG. 6.12 - COMPATIBILIDADES DE FORÇA E DESLOCAMENTO NA SÍNTESE MODAL.

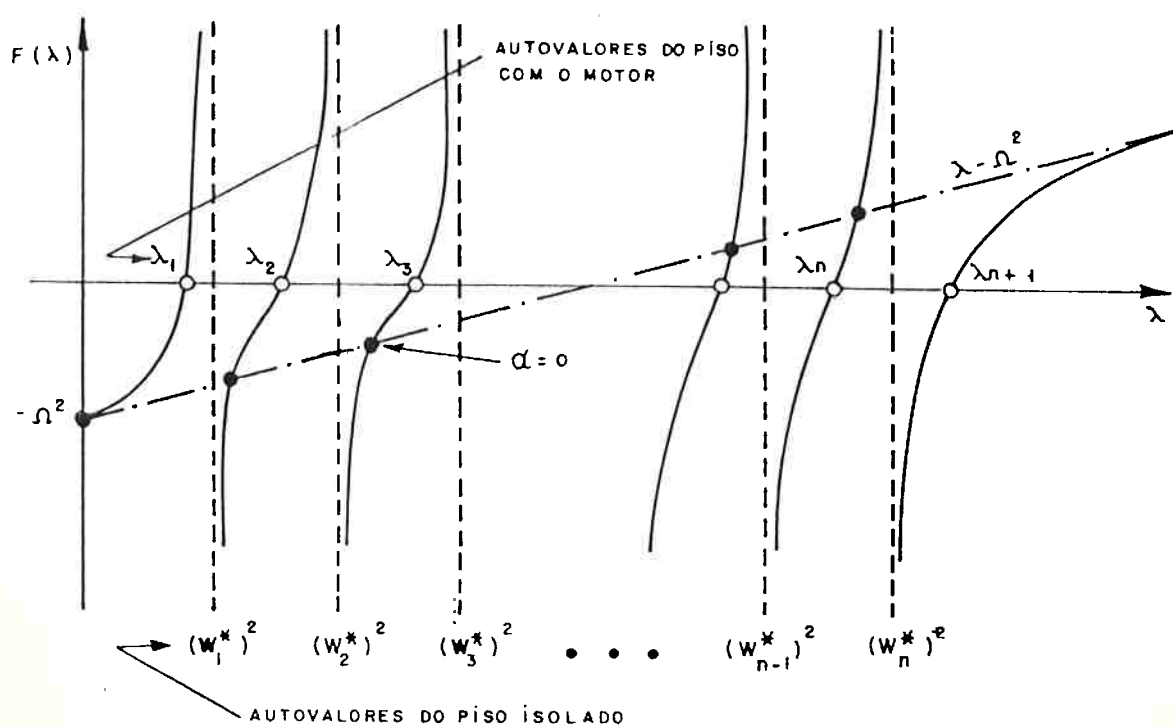


FIGURA 6.13 - SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE AUTOVALOR DA SÍNTESE MODAL.

FUNÇÃO: $F(\lambda) = \lambda \cdot [1 + k \cdot \alpha(\lambda)] - \Omega^2$

As equações (6.4) estabelecem relações entre as amplitudes modais do piso e do motor. Resta agora, visando a normalização dos modos obtidos, arbitrar um desses valores, estabelecendo os demais como função dele. Assim, fazendo $g_{ij}=1$ para i igual a um modo arbitrariamente escolhido (digamos, p), resulta:

$$z_{oj} = \{m_p^*[(w_p^*)^2 - \lambda_j]\} / \{m \phi_p^*(a) \lambda_j\} \quad (6.5)$$

O processo de cálculo de modos e frequências naturais do sistema motor-mancais-piso, desenvolve-se, então, partindo do cálculo prévio do problema de autovalor do piso isolado (sem o motor), pelo emprego da teoria do capítulo 3 (programa NAVDIN). Com os resultados desta solução, pelo emprego das equações (6.3), (6.4) e (6.5), obtém-se os modos e frequências naturais do piso com o motor, para os valores desejados de rigidez dos mancais resilientes. O resultado disso é mostrado na figura 6.14.

Quando a rigidez dos mancais atinge valores suficientemente grandes, tudo se passa como se o motor estivesse diretamente acoplado ao piso (figura 6.14). À medida que a rigidez diminui, cada vez mais faz-se sentir a influência do acoplamento flexível, pela diminuição do valor das frequências naturais.

VI.2.3 Cálculo da Resposta e Análise dos Resultados

Tendo sido resolvido o problema do cálculo de modos e frequências naturais, a tarefa de cálculo da resposta — em termos de tensões no ponto crítico da estrutura (ponto A da figura 6.11) — resume-se à aplicação direta da teoria desenvolvida nos capítulos 4 e 5 deste trabalho, ou mais especificamente, pelo uso do programa NAVRAP.

Antes disso, porém, faz-se necessário estabele -

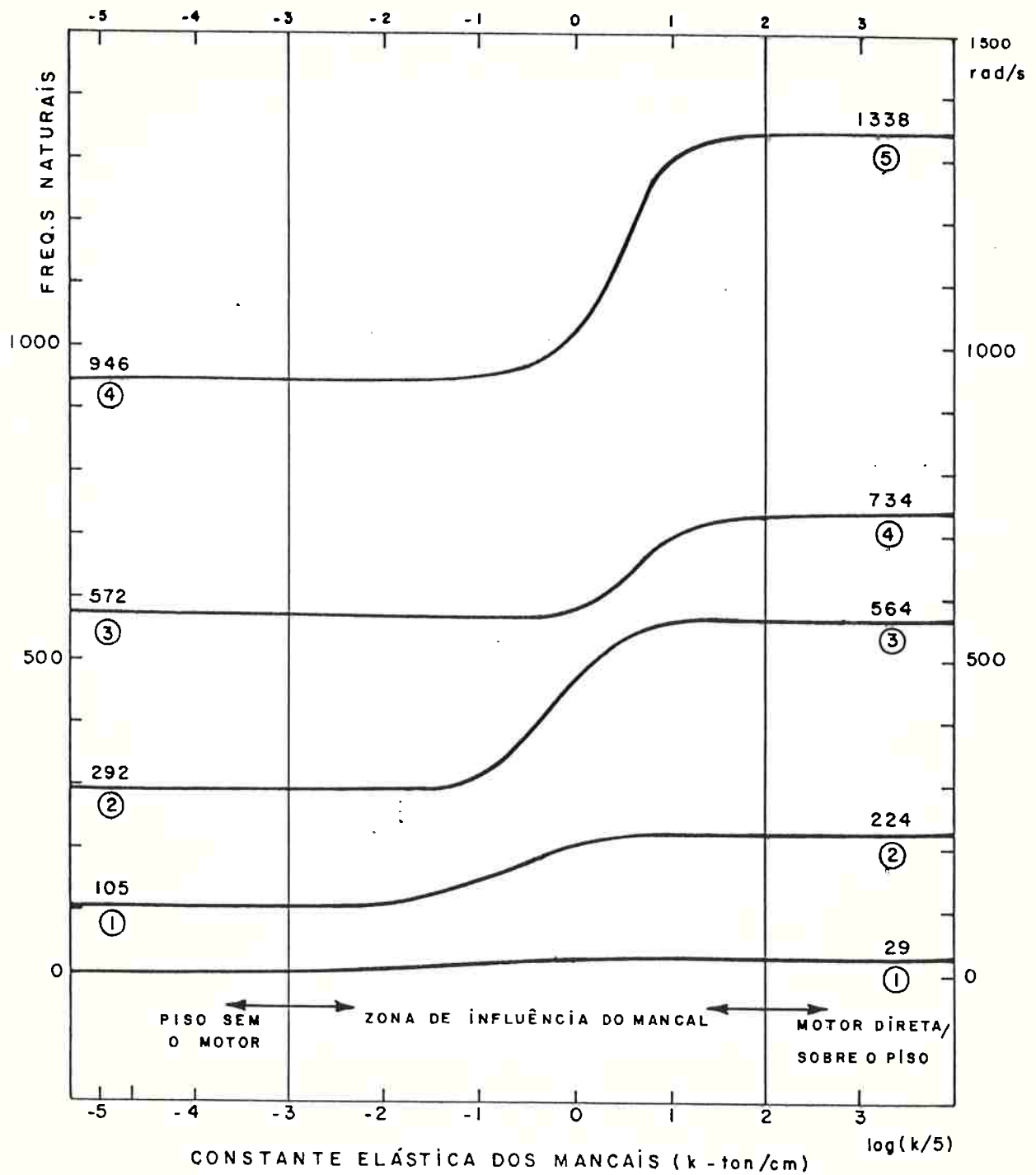


FIGURA 6.14 - FREQUÊNCIAS NATURAIS DO SISTEMA MOTOR-MANCAIS-PISO.

cer o valor do amortecimento em cada modo, adicionando ao amortecimento da estrutura aquele que decorre do amortecimento dos mancais. O amortecedor c do modelo da figura 6.11 atua sempre que houver movimento relativo entre motor e piso, de sorte que, pela conceituação de amortecimento generalizado $|A2|$, obtém-se:

$$\zeta_j = \zeta_j^* + 2\xi(km)^{0,5} [z_{oj} - \phi_j(a)]^2 / [2m_j^* \lambda_j^{0,5}] \quad (6.6)$$

onde:

ζ_j - grau de amortecimento do j -ésimo modo do sistema motor-mancais-piso.

ζ_j^* - grau de amortecimento do j -ésimo modo do piso sem o motor.

ξ - grau de amortecimento do subsistema motor-mancais:

$$\xi = c / (2m\Omega)$$

com:

$$\phi_j(a) = \sum_{i=1}^n g_{ij} \phi_i^*(a) \quad (6.7)$$

$$m_j^* = m \cdot z_{oj} + \sum_{i=1}^n m_i^* g_{ij}^2 \quad (6.8)$$

Na figura 6.15 apresentamos os resultados do programa NAVRAP, em termos do coeficiente de segurança à fadiga — definido pela equação (5.15.b) do capítulo 5 — no ponto A da estrutura do piso (figura 6.11). Antes contudo de passarmos à análise desses resultados, é necessário estabelecer algumas considerações preliminares sob três fatores importantes: valor do amortecimento, valor da tensão estática (média) e fator de concentração de tensões.

A tensão média, como o próprio nome indica, foi determinada por uma análise estática da estrutura, pelo emprego de um modelo semelhante ao da análise dinâmica. Como carregamento estático, neste caso, tem-se o peso do motor que, no re-

ferido ponto A, acarreta uma tensão de tração igual a 1,17 ton/cm². Como vimos no capítulo 5, essa tensão estática de tração afeta a capacidade da estrutura em resistir ao rompimento por fadiga, reduzindo substancialmente o limite de fadiga*.

A concentração de tensões, a exemplo da tensão média de tração, reduz também o coeficiente de segurança à fadiga. No presente caso contudo, pela própria natureza da junta em questão, estamos admitindo que um adequado processo de construção garanta a não concentração de tensões nas junções dos longitudinais com os prumos das anteparas. Fez-se, portanto, $k=1$ em (5.15.b).

Por último resta tratar do amortecimento. Este, como já dissemos, é de difícil determinação por requerer conhecimentos de natureza prática nem sempre, ou quase nunca, disponíveis na literatura. Resta-nos estabelecê-lo sob a consideração de que se deve ficar a favor da segurança. Admitimos, portanto, $\xi=0,01$ e $\zeta_j^*=0,005 \forall j$, como medida a favor da segurança, por que subestima a capacidade do sistema em dissipar energia**.

Passando, então agora, à análise dos resultados, nota-se que, quando o motor é colocado diretamente sobre o piso, sem mancais***, o coeficiente de segurança à fadiga, na velocidade crítica de ordem um no primeiro modo, é menor do que a unidade.

*Pela observação da equação (5.2) nota-se que a redução no limite da fadiga é de 26% quando se toma a lei de Goodman Modificada para o aço em questão ($\eta=1$: aço 1020, $\sigma_R=\sigma_u=4,5$ ton/cm²).

**De qualquer modo, nos picos de ressonância é sempre facilmente realizável uma correção dos resultados para outros valores de amortecimento, porquanto se sabe que, nesses picos, a resposta é inversamente proporcional ao grau de amortecimento modal (ζ_j) do modo natural predominantemente excitado.

***Fato numericamente caracterizado por rigidez dos mancais maior do que 500 ton/cm (veja figura 6.14).

Do ponto de vista estrito de análise da vida em fadiga, o coeficiente de segurança pode vir a ser menor do que a unidade, sem que isso implique no rompimento da peça estrutural. No presente caso, contudo, como decorrência de o pico de tensão ocorrer numa rotação alta (~280 rpm), a vida em fadiga tem valor muito baixo, o que, em termos práticos, implica no rompimento.

Deve-se, então, introduzir os mancais resilientes de sorte que, para todas as velocidades críticas na faixa de operação do motor, o coeficiente de segurança à fadiga tenha valores maiores do que a unidade. O valor de rigidez dos mancais $k=500$ kgf/cm, como mostra a curva da figura 6.15, satisfaz esse requisito, sem apresentar restrições de ordem prática.

Como conclusão, recomenda-se a utilização de mancais resilientes entre piso e motor, com rizezas somadas da ordem de 0,5 ton/cm.

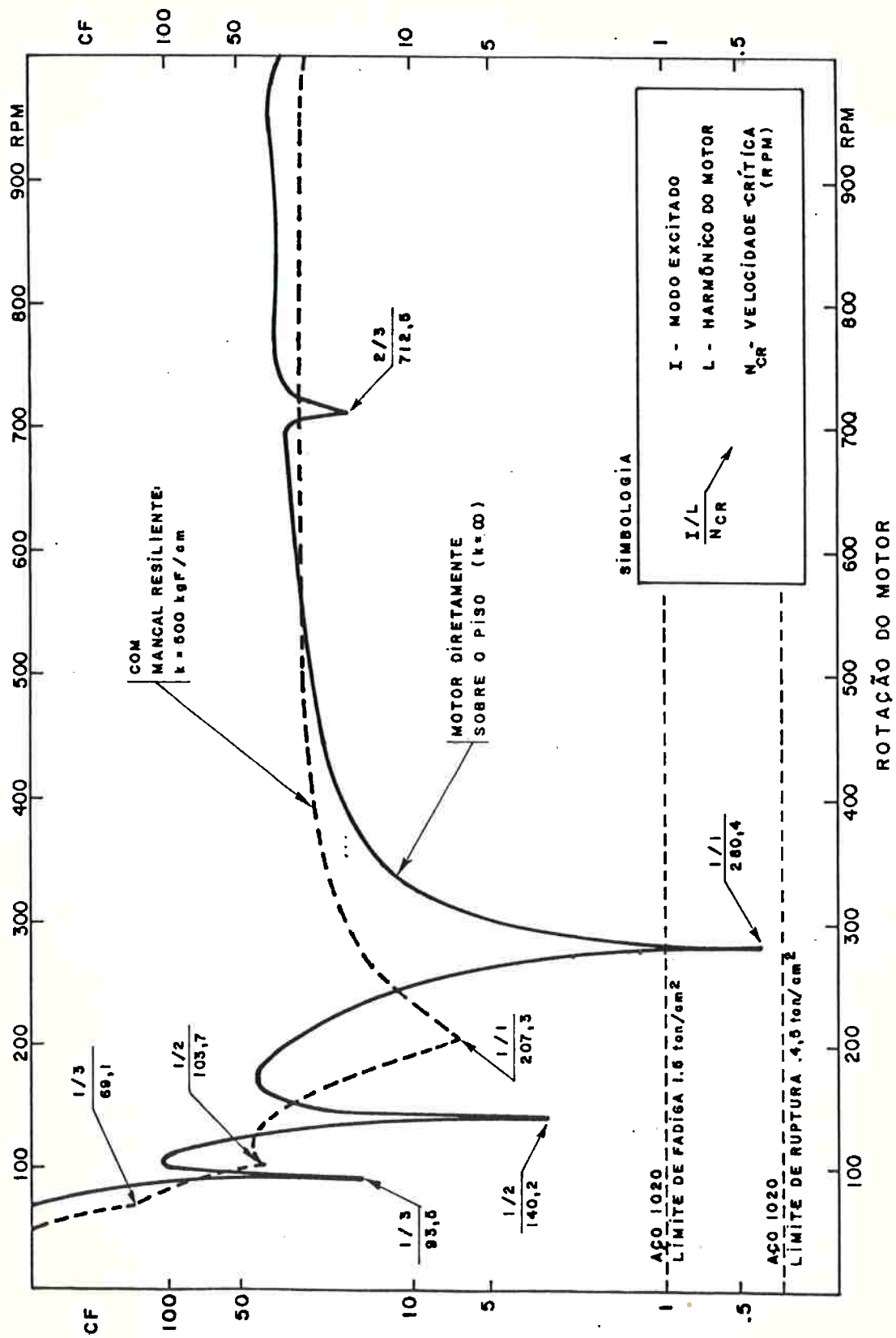


FIGURA 6.15 - COEFICIENTE DE SEGURANÇA À FADIGA (CF).

CAPÍTULO 7

COMENTÁRIOS FINAIS E RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Queremos ressaltar de antemão que, como continuação do trabalho iniciado em [B1], em 1978, cumprimos algumas das metas a época visualizadas como recomendações de trabalhos futuros. A realização global de tudo que se profetizava, contudo, não pode ainda ser completada neste trabalho. Resta o conforto de hoje, com maior experiência, termos uma visão mais precisa — e por isto mesmo, menos ambiciosa — do que seja o problema de vibrações na estrutura do navio.

Muitas são, ainda, as questões em aberto. Presentemente, abordamos, tão somente, o caso de vibrações determinísticas periódicas. Muito há, ainda, a realizar. Se no contexto internacional, as questões que não resolvemos estão, de certo modo, equacionadas, a âmbito nacional resta dominar este nível do conhecimento tecnológico. Portanto, muito se pôde indicar, ainda, como sugestões de trabalhos futuros.

Com o intuito de relacionar os tópicos abordados neste trabalho, que requeiram, ou necessitem, de estudos adicionais, e ainda, com o intuito de bem caracterizar a extensão do que propusemos, dividimos a apresentação deste capítulo nos itens que se seguem.

VII.1 O ESTADO DA ARTE E O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O estudo racional de um determinado caso de vibrações recai, na maioria das vezes, em problemas matemáticos de difícil solução. Como conseqüência, às hipóteses empregadas no estabelecimento do modelo físico, adicionam-se hipóteses necessárias à solução matemática. Por esta razão, só alguns casos simples possuem solução analítica que represente, com razoável propriedade, o comportamento vibratório da estrutura do navio.

Do exposto, depreende-se a importância da análise matricial por Elementos Finitos que, partindo da discretização do sistema estrutural, pode fornecer soluções satisfatórias nos casos que, por sua complexibilidade, tem solução analítica impraticável. Amplia-se, deste modo, o espectro de problemas dinâmicos que podem ser resolvidos.

Não é preciso nossa indicação pessoal para enfatizar a importância crescente do método dos Elementos Finitos. Para isto, basta verificar sua larga aceitação em todo o mundo. O emprego do método, apesar de exigir recurso técnico sofisticado (computadores de grande porte, sistemas gráficos, etc.) — com conseqüente custo elevado —, justifica-se plenamente na prevenção de vibrações da estrutura do navio. Qualquer outro processo seguro — de cura ou prevenção —, eventualmente utilizado, envolverá recurso econômico, no mínimo, igualmente elevado. Deve-se, no entanto, considerar algumas ressalvas.

O método é uma ferramenta sofisticada que deve ser operada por um especialista, com o máximo de conhecimento possível sobre as limitações que terá de enfrentar, e sobre as características do fenômeno físico que vai estudar. O ímpeto inicial de um analista, não familiarizado, é o de promover uma discretização, com grau de refinamento, muitas vezes superior ao necessário na obtenção de resultados satisfatórios. Com este procedimento, poderá estar ele estabelecendo condições para uma boa análise em termos numéricos, porém, terá grandes probabilidades

de esbarrar em empecilhos de natureza econômica (custo do processamento), e de capacidade do computador.

O método que propusemos não reduz a importância da análise experimental. Esta continua sendo útil na avaliação dos efeitos das hipóteses da modelagem do problema. Para promover a calibragem dos modelos de análise, é extremamente importante que se possa dispor de resultados experimentais. Isto é particularmente relevante, quando se sabe da dificuldade da avaliação das propriedades de amortecimento do sistema estrutural. O método apenas equaciona os esforços de amortecimento; não resolve a referida questão de avaliação.

A primeira tarefa do analista consiste na avaliação das propriedades do sistema estrutural, que tenham relevância para a análise dinâmica. A avaliação, a partir das características físicas e geométricas do sistema, deve ser feita considerando, também, as limitações do método de cálculo. Assim, ganham importância: a experiência obtida em análises com estruturas semelhantes e os métodos que serão utilizados na avaliação das referidas propriedades.

A comparação entre resultados da análise e experimentais, estabelecendo coeficientes de correção, tornam mais exato o estudo do comportamento vibratório de estruturas semelhantes.

VII.2 QUANTO À CAPACIDADE DO SISTEMA DE ANÁLISE

Dispomos, atualmente, de um sistema de programas (NAVDIN e NAVRAP) apto ao cálculo das respostas dinâmicas de estruturas lineares - discretizadas no âmbito da Técnica dos Elementos Finitos -, vibrando sob a ação de excitações determinísticas periódicas. Isto cobre a maioria dos casos de análise dinâmica da estrutura do navio. Adicionalmente, contudo, o potencial existente permite que se visualize alguns trabalhos a realizar num futuro próximo.

A natureza, de uma parcela dos esforços de excitação no navio, indica que a análise será melhor encaminhada se for considerado o caráter aleatório desses mesmos esforços (caso de vibrações excitadas por mar irregular). É interessante, portanto, que se disponha de um sistema de programas de análise espectral aleatória. Com tal finalidade, dois segmentos devem compor o sistema de análise: o primeiro que se encarregaria do levantamento do espectro de sollicitação, e do cálculo dos efeitos dinâmicos devidos aos movimentos de corpo rígido, e o segundo, como uma extensão do atual sistema NAVDIN/NAVRAP, que trataria do cálculo dos efeitos dinâmicos associados às deformações estruturais. Compondo os resultados de ambos os segmentos, obter-se-ia o espectro de resposta da estrutura.

Outro caso importante - embora não muito corriqueiro - de excitação da estrutura do navio é o decorrente de esforços impulsivos ocasionados por explosões subaquáticas. Aqui, ondas de pressão, de curta duração e alta magnitude, atingindo externamente o casco, geram grandes deformações dinâmicas, frequentemente além do limite elástico. A solução deste problema pode usar, como ponto de partida, o sistema de programas presentemente desenvolvido.

Finalizando resta ressaltar a importância do enfoque do método que propusemos, cujas características principais, representadas, basicamente, pela extensão da tarefa de preven-

ção das vibrações ao cálculo da resposta no domínio da frequência, fornecem meios seguros para uma análise aprofundada de vários casos de vibração na estrutura do navio, a exemplo daqueles abordados no capítulo 6.

VII.3 CONTRIBUIÇÕES DO TRABALHO

Com a finalidade de sumarizar as principais contribuições do trabalho, no que concerne ao estudo de vibrações da estrutura do navio, consideremos as três etapas em que o cálculo — conforme proposto — desenvolve-se:

1. Modelagem da estrutura — nos moldes da Técnica dos Elementos Finitos — visando a extração de modos e frequências naturais.
2. Cálculo da resposta no domínio da frequência pelo emprego do Método de Superposição Modal.
3. Avaliação do nível de vibrações sob os pontos de vista de reação humana às acelerações e de vida em fadiga do material resistente estrutural.

Assim, em cada uma dessas etapas, as principais contribuições do trabalho foram, respectivamente:

1. Otimização dos Vetores de Partida no Método de Iteração por Subespaços, procurando reduzir o alto custo do cálculo de modos e frequências naturais.
2. Introdução do conceito de Amplitudes Nulas na modelagem dos esforços de excitação, de maneira a simplificar o equacionamento do cálculo da resposta.
3. Generalização do critério de Sines com vistas à obtenção de tensões equivalentes uniaxiais, apropriadas à utilização das "técnicas de contagem" da análise de fadiga, e introdução do conceito de Aceleração Equivalente na análise da reação humana às vibrações.

APÊNDICE A

INTEGRAÇÃO DO PRODUTO DE DUAS FUNÇÕES HARMÔNICAS

Seja a integral definida por:

$$I = \int_0^{2\pi} \text{sen}(\ell\alpha + \theta_1) \cdot \cos(m\alpha + \theta_2) d\alpha \quad (\text{A.1})$$

com ℓ e m sendo números inteiros.

Através de fórmula trigonométrica apropriada, o integrando pode ser posto na forma de soma de duas funções harmônicas, resultando:

$$I = 0,5 \int_0^{2\pi} \{ \text{sen}[(\ell+m)\alpha + \theta_1 + \theta_2] + \text{sen}[(\ell-m)\alpha + \theta_1 - \theta_2] \} d\alpha \quad (\text{A.2})$$

Sendo $\ell \neq m$, como resultado da integração de (A.2) tem-se:

$$I = -0,5 \{ (\ell+m)^{-1} [\cos(\theta_1 + \theta_2) - \cos(\theta_1 + \theta_2)] + (\ell-m)^{-1} [\cos(\theta_1 - \theta_2) - \cos(\theta_1 - \theta_2)] \} \quad (\text{A.3.a})$$

logo:

$$\ell \neq m \rightarrow I = 0, \quad \forall \ell, m, \theta_1, \theta_2 \quad (\text{A.3.b})$$

Da integração para o caso $\ell = m$, resulta:

$$I = \pi \text{sen}(\theta_1 - \theta_2) \quad (\text{A.4})$$

Essas conclusões valem quando as freqüências dos harmônicos do integrando são comensuráveis ($\ell/m = n^\circ$ racional). Se no capítulo 4 não fosse usado o "Conceito de Amplitudes Nulas", permitindo-se a existência de mais de uma gama de freqüências, poderiam aparecer termos cruzados em (4.11) com freqüências não comensuráveis, complicando a dedução,

APÊNDICE B

PROVA DA EQUIVALÊNCIA ENTRE AS EXPRESSÕES
 PARA $a_{k\ell}(N)$ E $\theta_{k\ell}(N)$

De (4.15.b) temos:

$$a_{k\ell} = \left[\left(\sum_j a_{kjl} \operatorname{sen} \theta_{kjl} \right)^2 + \left(\sum_j a_{kjl} \cos \theta_{kjl} \right)^2 \right]^{0,5} \quad (\text{B.1})$$

Usando relações trigonométricas podemos escrever:

$$\operatorname{sen} \theta_{kjl} = \operatorname{tag} \theta_{kjl} / (1 + \operatorname{tag}^2 \theta_{kjl})^{0,5} \quad (\text{B.2.a})$$

$$\cos \theta_{kjl} = 1 / (1 + \operatorname{tag}^2 \theta_{kjl})^{0,5} \quad (\text{B.2.b})$$

substituindo (4.15.e) em (B.2.a) temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \theta_{kjl} &= \frac{(\sum_i a_{kijl} \operatorname{sen} \theta_{ijl}) / (\sum_i a_{kijl} \cos \theta_{ijl})}{\left\{ 1 + \left[(\sum_i a_{kijl} \operatorname{sen} \theta_{ijl}) / (\sum_i a_{kijl} \cos \theta_{ijl}) \right]^2 \right\}^{0,5}} = \\ &= \frac{\sum_i a_{kijl} \operatorname{sen} \theta_{ijl}}{\left\{ (\sum_i a_{kijl} \cos \theta_{ijl})^2 + (\sum_i a_{kijl} \operatorname{sen} \theta_{ijl})^2 \right\}^{0,5}} = \end{aligned}$$

tal que, usando (4.15.d) no denominador acima, resulta:

$$a_{k\ell} \operatorname{sen} \theta_{kjl} = \sum_i a_{kijl} \operatorname{sen} \theta_{ijl} \quad (\text{B.3.a})$$

Analogamente para (B.2.b) obtém-se:

$$a_{k\ell} \cos \theta_{kjl} = \sum_i a_{kijl} \cos \theta_{ijl} \quad (\text{B.3.b})$$

Elevando as relações (B.3) ao quadrado, somando ambas, e extraíndo a raiz do resultado, obtém-se:

$$a_{kjl} = [(\sum_i a_{kijl} \sin \theta_{ijl})^2 + (\sum_i a_{kijl} \cos \theta_{ijl})^2]^{0,5} \quad (\text{B.4})$$

que coincide com (4.16.a), quando se subentende as somatórias em \underline{i} .

Substituindo (B.3.a) no numerador de (4.15.c), e (B.3.b) no denominador, vem:

$$\text{tag } \theta_{kl} = (\sum_i a_{kijl} \sin \theta_{ijl}) / (\sum_i a_{kijl} \cos \theta_{ijl}) \quad (\text{B.5})$$

que, subentendida assomatórias em \underline{i} , coincide com a definição de θ_{kl} dada por (4.16.b).

Provamos, então, a equivalência entre as duas definições possíveis para a_{kl} e θ_{kl} .

⋮

APÊNDICE C

PROPRIEDADES PROBABILÍSTICAS DE UMA SENÓIDE

Seja:

$$h(t) = a \operatorname{sen}(wt + \delta) \quad (\text{C.1})$$

Então, o valor médio é calculado por:

$$\begin{aligned} \langle h(t) \rangle &= \frac{a}{T} \int_0^T \operatorname{sen}(wt + \delta) dt = \\ &= \frac{-a}{2\pi} [\cos(2\pi + \delta) - \cos \delta] = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

sendo nulo quaisquer que sejam amplitude (a), frequência (w) e fase inicial (δ).

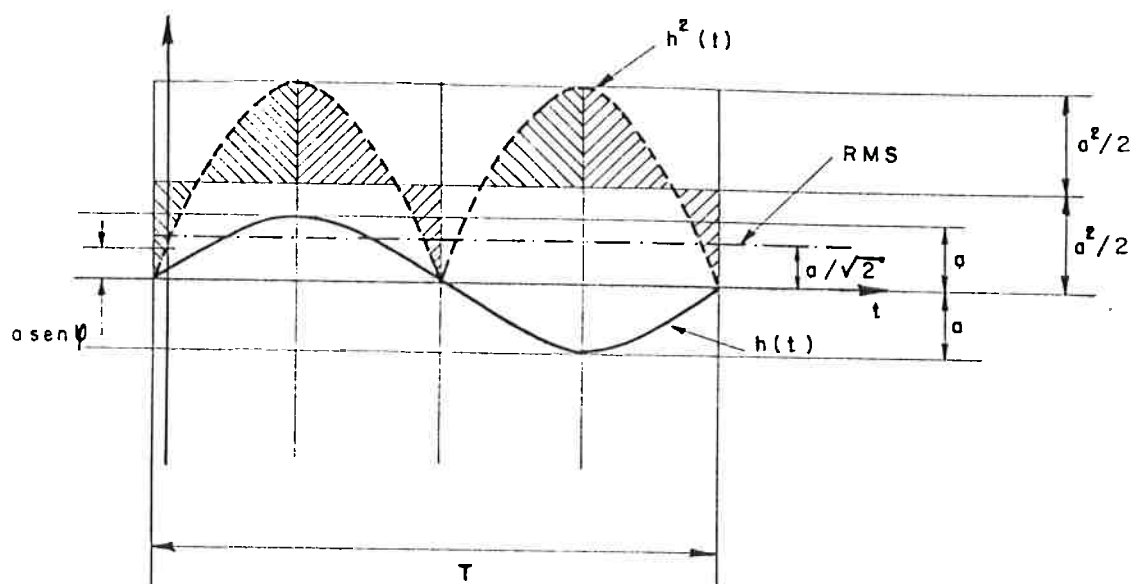
O valor médio quadrático é calculado por:

$$\begin{aligned} \langle h^2(t) \rangle &= \frac{a^2}{T} \int_0^T \operatorname{sen}^2(wt + \delta) dt = \\ &= \frac{a^2}{2} \left\{ T - \frac{1}{2w} [\operatorname{sen} 2(wT + \delta) - \operatorname{sen} 2\delta] \right\} = a^2/2 \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Sendo o valor médio nulo ($\langle h(t) \rangle = 0$), o RMS é a raiz do valor médio quadrático, assim:

$$\text{RMS} = a / \sqrt{2} \quad (\text{C.4})$$

Graficamente temos:



onde se observa dois fatos relevantes:

- i) equivalência de áreas: $a^2 T/2 = \int_0^T h^2(t) dt$
- ii) e que o RMS não é um limite superior para o pico de $h(t)$.

Numa função multiharmônica o valor médio quadrático total é obtido pela soma dos valores médios quadráticos das componentes:

$$h(t) = \sum_i a_i \text{ sen}(i\omega t + \delta_i) \quad (\text{C.5})$$

$$\langle h^2(t) \rangle = 0,5 \sum_i a_i^2 \quad (\text{C.6})$$

de sorte que o harmônico equivalente dessa função — ambos com mesmo valor médio quadrático e, portanto, mesmo RMS — tem amplitude:

$$a_e = \left(\sum_i a_i^2 \right)^{0,5} \quad (\text{C.7})$$

APÊNDICE D

SOLUÇÃO DA INTEGRAL DE a_k^2

Temos,

$$a_k^2 = \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1} \left[\sum_{\ell} a_{k\ell} \text{sen}(w_{\ell} t + \theta_{k\ell}) \right] \left[\sum_m a_{km} \text{sen}(w_m t + \theta_{km}) \right] dt \quad (\text{rep.4.23}) \quad (\text{D.1})$$

Aplicando a propriedade distributiva no produto das duas séries do integrando, recai-se numa série de integrais do tipo:

$$I = \int_0^{T_1} \text{sen}(w_{\ell} t + \theta_{k\ell}) \cdot \text{sen}(w_m t + \theta_{km}) dt \quad (\text{D.2})$$

Usando agora as relações:

$$\alpha = \theta w_0 t \quad \rightarrow \quad dt = d\alpha / \theta w_0 \quad (\text{D.3.a})$$

$$w_{\ell} = \ell \theta w_0 \quad \rightarrow \quad w_{\ell} t = \ell \alpha \quad (\text{D.3.b})$$

$$w_m = m \theta w_0 \quad ; \quad \rightarrow \quad w_m t = m \alpha \quad (\text{D.3.c})$$

$$T_1 = 2\pi \ell / w_{\ell} = 2\pi \ell / \theta \ell w_0 = 2\pi / \theta w_0 \quad (\text{D.3.d})$$

a integral de (D.2) reduz-se a:

$$I = T_1 / 2\pi \int_0^{2\pi} \text{sen}(\ell \alpha + \theta_{k\ell}) \text{sen}(m \alpha + \theta_{km}) d\alpha \quad (\text{D.4})$$

cuja solução, obtida de modo análogo ao desenvolvido no Apêndice A, é:

$$I = 0 \quad \text{para } \ell \neq m \quad (\text{D.5.a})$$

$$I = \frac{T_1}{2} \cos(\theta_{k\ell} - \theta_{km}) \quad \text{para } \ell = m \quad (\text{D.5.b})$$

Como para $\ell = m$ temos $\theta_{k\ell} = \theta_{km}$, (D.5.b) reduz-se a:

$$I = T_1 / 2 \quad \text{para } \ell = m \quad (\text{D.5.c})$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

A. LIVROS SOBRE ELEMENTOS FINITOS, VIBRAÇÕES E ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS

- [A1] WILSON, E.L., BATHE, K.J. Numerical methods in finite element analysis. 1^a ed. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, 1976.
- [A2] CLOUGH, R.W., PENZIEN, J. Dynamics of structures. 1^a ed., New York, Mc-Graw-Hill, 1975.
- [A3] ZIENKIEWSCZ, O.C. The finite element methods. 3^a ed., London, Mc-Graw-Hill, 1977.
- [A4] MEIROVITCH, L. Analytical methods in vibrations. 1^a ed., New York, Collier-Mc-Millan Canadá Ltd, 1967.
- [A5] NESTORIDES, E.J. A handbook on torsional vibrations. 1^a ed., London, Cambridge University Press, 1958.
- [A6] GERE, J.M., WEAVER, Jr., W. Analysis of framed structures. 1^a ed., New Jersey, Princeton, 1965.
- [A7] DEN HARTOG, J.P. Vibrações dos sistemas mecânicos. Tradução de Amorelli, M.O.C., 1^a ed., Editora da USP, Mc-Graw-Hill, 1956.
- [A8] TIMOSHENKO, S., YOUNG, D.H., WEAVER Jr., W. Vibrations problems in engineering. 4^a ed., John Wiley & Sons, New York, 1972.
- [A9] HURTY, W.C., RUBINSTEIN, M.F. Dynamics of structures. 1^a ed., New Jersey, Prentice-Hall, 1964.
- [A10] THOMSON, W.T. Theory of vibration with applications. 1^a ed., New Jersey, Prentice-Hall, 1972.
- [A11] BATHE, K.J. Finite element procedures in engineering Analysis. New Jersey, Prentice-Hall, 1982.

- |A12| VENÂNCIO, Fº, F. Análise matricial de estruturas. Almeida Neves-Editores, Rio de Janeiro, 1975.

B. PUBLICAÇÕES SOBRE ANÁLISE DINÂMICA DA ESTRUTURA DO NAVIO

- |B1| NUNES DIAS, C.A. Introdução ao estudo de vibrações da viga navio. Técnica dos Elementos finitos. Adaptação do programa SAP-IV. Dissertação de Mestrado, EPUSP, 1978.
- |B2| LAMPLOUGH, T.A. Some aspects of propeller excited vibration. Lloyd's Register of Shipping, nº 29, London, 1970.
- |B3| Vibrações a bordo de navios do ponto de vista do armador. Petrobrás-SENAI/DINAL/SETEC, Noise and vibration seminar, Rio de Janeiro, 1981.
- |B4| VINER, A.C. Ship vibration. Lloyd's Register of Shipping, nº 53, London, 1969.
- |B5| JOHANNESSEN, H., SKAAR, K.T. Guidelines for prevention of excessive ship vibration. Det Norske Veritas, nº80-P058, Oslo, 1981. ;
- |B6| FUJII, K., OCHI, Y., MANO, M. Prevention and remedy of ship vibration. Ishikawajima-Harima Heavy Industries Review, vol. 10, nº 3, Yokohama, 1975.
- |B7| ANDROULAKIS, M., CHEN, Y.N. Dynamic analysis of SL-7 Shafting system. American Bureau of Shipping, nºRD-75017, New York, 1975.
- |B8| KAWAKAMI, M. Advanced course of ship vibrations. COPPE/UFRJ, PDD 3/77, Rio de Janeiro, 1977.
- |B9| SMOGELI, H.A. Vibrations sources. Det Norske Veritas. Noise and Vibrations Seminar, Rio de Janeiro, 1981.

- |B10| SKAAR, K.T. Finite element analysis to investigate resonant vibration and forced response. Det Norske Veritas. Noise Vibration Seminar, Rio de Janeiro, 1981
- |B11| LOPES, T.A.P., TACQUES, R.R., TROYMAN, A.C.R. Medição de vibração e ruído a bordo de navios. COPPE/UFRJ. Noise and Vibration Seminar, Rio de Janeiro, 1981.
- |B12| LOPES, T.A.P. TACQUES, R.R. TROYMAN, A.C.R. Métodos para reduzir vibrações de navios em serviço. COPPE/UFRJ, Noise and Vibration Seminar, Rio de Janeiro, 1981.
- |B13| WAH, T. A guide for the analysis of ship structures. NTIS, Southwest Research Institute, Washington, 1960.
- |B14| HALLAM, M.G., HEAF, N.J., WOOTTON, L.R. Dynamics of marine structures. CIRIA, Underwater Engineering Group, London, 1978.
- |B15| HINSON, A.R. Some notes on vibration problems. Lloyd's Register of Shipping, n° 36, London, 1969.
- |B16| CHEN, Y.K., et alii. Ship hull and propulsion system vibration analysis. American Bureau of Shipping, n° RD-77011, New York, 1977.
- |B17| PETERSEN, J.W.E., et alii. Vibration in the afterbody of ships. Royal Institution of Naval Architects, London, 1971.
- |B18| HOGBEN, N., et alii. Steady-state dynamic loadings and response. Proceedings 7th International Ship Structures Congress, Paris, 1979.
- |B19| GANDOLFO, A.C.B., NUNES DIAS, C.A. Análise dinâmica da estrutura do navio. Apostila do Departamento de Engenharia Naval, EPUSP, 1980.
- |B20| KUMAI, T. On the estimation of natural frequencies of vertical vibration of ships. Research Institute for Applied Mechanics, n° 16(54), 1968.

- [B21] KLINE, R.G., DAIDOLA, J.C. Ship vibration prediction methods and evaluation of influence of hull stiffness variation on vibratory response. Ship Structures Committee, SSC-249, Project SR-214, U.S. Coast Guard Headquarters, Washington, 1975.
- [B22] Recommendations designed to limit the effects of vibration on board ships. Bureau Veritas, Guidance Note NI 138A-R03, Paris, 1979.
- [B23] NOONAN, E.F., FELDSMAN, S. State of the art for shipboard vibration and noise control. Ship Vibration Symposium SNAME and Ship Structure Committee, Washington, 1978.
- [B24] HURTY, W.C. Vibrations of structural systems by component mode synthesis. Journal of Engineering Mechanical, ASCE, 1960.
- [B25] CRAIG, R.R., BAMPTON, M.C.C. Coupling of substructures for dynamics analyses. AIAA Journal, vol. 6, n° 7, 1968.

C. PUBLICAÇÕES SOBRE FADIGA

- [C1] FUCHS, H.O., STEPHENS, R.I. Metal fatigue in engineering. New York, John Wiley & Sons, 1980.
- [C2] NIBBERING, J.J.W. The fatigue problem in shipbuilding in the light of new investigations. Royal Institute of Naval Architects, London, 1975.
- [C3] RICARDO, O.G.S. Estimativa da vida em fadiga de peças de máquinas. Apostila do Departamento de Engenharia Naval, EPUSP.
- [C4] HANSFORD, J.E., NOLTE, K.G. Closed-form expressions for determining the fatigue damage of structures due to ocean waves. Offshore Technology Conference, OTC, n° 2606, 1976.

- [C5] WILDENSTEIN, A.W., MADDOX, N.R. A spectral fatigue analysis for offshore structures. Offshore Technology Conference, OTC, n° 2261, 1975.
- [C6] MADDOX, N.R. Fatigue analysis for deepwater fixed-bottom platforms. Offshore Technology Conference, OTC, n°2051, 1974.
- [C7] MINER, M.A. Cumulative damage in fatigue. The American Society of Mechanical Engineers, ASME, 1945.
- [C8] OLBJORN, E., STAALSTROM, T. BAGLIETTO, M. Problemas de fadiga nas estruturas metálicas offshore. Sociedade Brasileira de Engenharia Naval, In: 6º Congresso, Rio de Janeiro, 1976.
- [C9] Tentative definitions of terms relating to fatigue testing and the structural analysis of fatigue data. ASTM, E206-62T.
- [C10] BEEDLE, L.S. et alii. Structural steel design. The Ronald Press Company, 1964.
- [C11] GARUD, Y.S. A new approach to the evaluation of fatigue under multiaxial loadings. Journal of Engineering Materials and Technology, ASME, vol. 103, n° 2, 1981.
- [C12] GARUD, Y.S. Multiaxial fatigue: A survey of the state of the art. Journal of Testing and Evaluation, JTEVA, vol. 9, n° 3, 1981.
- [C13] SINES, G., OHGI, G. Fatigue criteria under combined stresses or strain. Journal of Engineering Materials and Technology, ASME, vol. 103, n° 2, 1981.
- [C14] DOWLING, N.E. Fatigue life predictions for complex load versus time histories. Journal of Engineering Materials and Technology, ASME, vol. 105, n° 3, 1983.
- [C15] SUBRAMANYAN, S. A cumulative damage rule based on the knee point of the S-N curve. Journal of Engineering Materials and Technology, ASME, vol.98, n° 4, 1976.

- [C16] | WIRSCHING, P.H., SHEHATA, A.M. Fatigue under wide band random stresses using the rain-flow method. Journal of Engineering Materials and Technology, ASME, vol. 99, n° 3, 1977.

D. PUBLICAÇÕES SOBRE REAÇÃO HUMANA ÀS VIBRAÇÕES

- [D1] | GOLDMAN, D.E., Von GIERKE, H.E. The effects of shock and vibration on man. Naval Medical Research Institute, Lecture and Review Series, n° 60-3, 1960.
- [D2] | COERMANN, R.R., ZIEGENMECKER, G.H., Von GIERKE, H.E. The passive dynamic mechanical properties of the human thorax-abdomen system and the whole body system. Aerospace Medicine, n° 31(6), 1960.
- [D3] | KANAZAWA, T. A proposal for the vibration limits of ships. University of Tokio, SR-6101, 1961.
- [D4] | DIEUDONNÉ, J. The IRCN notes on the appraisal of human reaction to vibration. International Ship Structure Congress, vol. II, Committee 9, 1967.
- [D5] | Guide for the evaluation of human exposure to whole body vibration. ISO/TC108/WG7, n° 36, 1970.
- [D6] | KUMAI, T. Some notes on the local vibrations of ships. International Shipbuilding Progress, n° 3, 1956.
- [D7] | CHEN, P.W., ROBERTSON, L.E. Human perception thresholds of horizontal motion. Journal of the Structural Division, ASCE, vol, 98, n°ST8, 1972.
- [D8] | REED, F.E. Acceptable levels of vibration on Ships. Marine Technology, 1973.
- [D9] | Ship vibration and noise guidelines. Preliminary Proposal, SNAME, HS-7 panel, 1976.

- |D10| NOONAN, E.F., FELDSMAN, S. State of art for shipboard vibration and noise control. SNAME Ship Vibration Symposium, Washington, 1978.
- |D11| DIECKMANN, D. Einfluss vertikaler (horizontaler) mechanischer schwingungen auf den menschen. Internat. Zeits. Angew. Phisial. EinschArbeits phisial.
- |D12| Guide for the evaluation of human exposure to whole body vibration. ISO 2631, 1978.
- |D13| AYLING, J. On the vibration amplitudes of ship's hull. Institute of Engineers and Shipbuilders in Scotland, n° 105-301, 1961.
- |D14| Recommendations for limiting the effects of vibration on board ships. Bureau Veritas, note N1 138 BM3, 1970.
- |D15| FOTHERGILL, GRIFFIN. The Evaluation of discomfort produced by multiple frequency whole body vibration. Ergonomics, n° 20, 263-76, 1977.
- |D16| RUTHERFOR, Art end shaping to limit vibration. North East Coast Institute of Engineers and Shipbuilders, 1979.
- |D17| Vibration and shock, methods for analysis and prevention of data. ISO Draft Proposal, n° 4865, 1978.

E. OUTROS

- |E1| HILDEBRAND, F.B. Introduction to numerical analysis. 1ª ed., New York, Mc-Graw-Hill, 1956.
- |E2| WILSON, E.L, et alii. SAP-IV. A structural analysis program for static and dynamics response of linear systems. Berkeley, University of California, 1974.

- |E3| TIMOSHENKO, S.P. Resistência dos materiais. Tradução de Carvalho, J.R., 3^a ed. Editora da USP, Mc-Graw-Hill, 1974.
- |E4| LANDWEBER, L., MACAGND, M. Added mass of a three-parameter family of two-dimensional forces oscillating in a free surface. Journal of Ship Research, SNAME, 1959..