

AVELINO ALVES FILHO  
ENGENHEIRO NAVAL, ESCOLA POLITÉCNICA DA USP, 1974

ANÁLISE DE ESTRUTURAS COMPOSTAS POR  
PERFIS ABERTOS DE PAREDES DELGADAS:  
UMA APLICAÇÃO DA ANALOGIA FLEXÃO-  
RETORÇÃO

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Mestre em Engenharia

Orientador: Prof. Dr. CARLOS ALBERTO NUNES DIAS

SÃO PAULO / 1991

FD1211

À  
SILVANA, GABRIELA e PEDRO

AOS MEUS PAIS,  
AVELINO e LÍDIA e à CARMEN  
LÍDIA

## AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. CARLOS ALBERTO NUNES DIAS, pelo eficaz trabalho de orientação geral e nos pontos-chaves deste estudo, como a idealização do Modelo Híbrido, e pelo constante estímulo durante a execução do plano geral de trabalho no programa de pós-graduação.

Ao Prof. NIKOLAJ LEBEDEV, pelo incentivo constante no estudo da Teoria de Vlasov e na formação profissional.

Aos meus pais, AVELINO E LÍDIA, pelo apoio de sempre.

A minha esposa SILVANA, e aos meus filhos GABRIELA e PEDRO pelo apoio e compreensão.

Ao eng<sup>o</sup> VALTER CARMO DE OLIVEIRA, pela colaboração no processamento dos programas.

## RESUMO

O presente trabalho aborda os efeitos decorrentes do empenamento em perfis abertos de paredes delgadas, estabelecendo os procedimentos para o cálculo das tensões normais e de cisalhamento decorrentes da torção desses tipos de perfis (flexo-torção), ou de caixas estruturais abertas que devido às suas dimensões globais e espessura de parede, possam ser assimiladas primariamente ao comportamento estrutural de vigas. A resolução do problema de flexo-torção (retorção) é efetuada no caso de estruturas reais, por intermédio da introdução da Analogia Flexão-Retorção, que permite o cálculo das tensões normais devido à torção dos elementos de uma estrutura tipo grelha (chassis de veículo).

## ABSTRACT

This study describes the effects of warping in open thin-walled beams. The procedures for normal and shear stresses calculations, caused by torsion of this type of beam, are also described. The problem of warping in the case of real structures, as grillages, is solved by a introduction of warping-flexion analogy.

ÍNDICE

## CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO

|  |     |
|--|-----|
| 1.1 - ASPECTOS GERAIS.....             | 1.1 |
| 1.1.1 - CORPOS SÓLIDOS.....            | 1.1 |
| 1.1.2 - PLACAS E CASCAS.....           | 1.2 |
| 1.1.3 - VIGAS SÓLIDAS.....             | 1.2 |
| 1.1.4 - VIGAS DE PAREDES DELGADAS..... | 1.3 |
| 1.2 - ESCOPO DO TRABALHO.....          | 1.7 |

CAPÍTULO II - TEORIA DE VLASOV: O PROBLEMA DA  
RETORÇÃO

|   |      |
|---|------|
| 2.1 - RETORÇÃO OU EMPENAMENTO DA SEÇÃO-<br>PROBLEMA FÍSICO.....                           | 2.1  |
| 2.2 - O PRINCÍPIO DE SAINT VENANT E O PERFIL<br>DE PAREDES DELGADAS.....                  | 2.10 |
| 2.3 - REVISÃO DA TEORIA DE VLASOV PARA <u>PER</u><br>FIS ABERTOS DE PAREDES DELGADAS..... | 2.14 |
| 2.4 - TENSÕES NORMAIS NA FLEXO-TORÇÃO.....  | 2.22 |
| 2.5 - EQUAÇÃO DO BIMOMENTO.....   | 2.26 |
| 2.6 - TENSÕES DE CISALHAMENTO NA FLEXO-TORÇÃO.....  | 2.30 |
| 2.7 - EQUAÇÕES GERAIS DA TEORIA DE VLASOV.....  | 2.33 |
| 2.8 - ROTEIRO PARA APLICAÇÃO DA TEORIA.....   | 2.34 |

## CAPÍTULO III - ANALOGIA FLEXÃO-RETORÇÃO

|  |     |
|--|-----|
| 3.1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS.....            | 3.1 |
| 3.2 - ALTERNATIVAS PARA DISCRETIZAÇÃO..... | 3.3 |

|                                      |     |
|--------------------------------------|-----|
| 3.3 - ANALOGIA FLEXÃO-RETORÇÃO ..... | 3.8 |
|--------------------------------------|-----|

#### CAPÍTULO IV - TESTES DE CONFIABILIDADE

|   |      |
|---|------|
| 4.1 - INTRODUÇÃO.....   | 4.1  |
| 4.2 - EXEMPLO DE CÁLCULO.....   | 4.1  |
| 4.2.1 - TEORIA DE VLASOV.....   | 4.3  |
| 4.2.2 - ANÁLISE PELO MÉTODO DOS ELEMEN<br>TOS FINITOS COM ELEMENTOS DE<br>CASCA.....                  | 4.14 |
| 4.2.3 - ANALOGIA FLEXÃO-RETORÇÃO.....   | 4.14 |
| 4.2.4 - COMPARAÇÃO DOS VALORES OBTIDOS<br>PELOS DIVERSOS PROCEDIMENTOS .<br>CONCLUSÕES DO ESTUDO..... | 4.23 |
| 4.3 - CONSIDERAÇÕES ADICIONAIS À ANALOGIA<br>FLEXÃO-RETORÇÃO.....                                     | 4.25 |

#### CAPÍTULO V - EXEMPLO DE APLICAÇÃO - CHASSIS

|  |      |
|--|------|
| 5.1 - INTRODUÇÃO.....  | 5.1  |
| 5.2 - EXEMPLO PARA ESTUDO.....   | 5.1  |
| 5.2.1 - Análise pelo Método dos Elemen<br>tos Finitos com Elementos de<br>Casca (MEF-CASCAS).....            | 5.3  |
| 5.2.2 - Análise pelo Método dos Elemen<br>tos Finitos com "Modelo Híbr<br>do". Analogia Flexão-Retorção..... | 5.14 |
| 5.2.3 - Comparação dos Resultados obti<br>dos pelo "MEF-Cascas" e "Mode-                                     |      |

|   |      |
|---|------|
| lo Híbrido" - Analogia Flexão-Retorção..... | 5.25 |
|---|------|

## CAPÍTULO VI - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

|  |      |
|--|------|
| 6.1 - CONCLUSÕES FINAIS.....   | 6.1  |
| 6.2 - RECOMENDAÇÕES PARA FUTUROS TRABALHOS.....                            | 6.3  |
| APÊNDICE A - PROPRIEDADES SECTORIAIS.....                                  | A.1  |
| APÊNDICE B - DEFINIÇÃO DO MODELO ESTRUTURAL<br>POR ELEMENTOS DE CASCA..... | B.1  |
| APÊNDICE C - DEFINIÇÃO DO "MODELO HÍBRIDO".....                            | C.1  |
| REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....  | RB.1 |



ÍNDICE DAS TABELAS

CAPÍTULO II

|  |      |
|--|------|
| TABELA 2.1 - COMPARAÇÃO DAS FORMULAÇÕES<br>PARA CÁLCULO DE TENSÕES NOR<br>MAIS DE FLEXÃO E FLEXO-TOR-<br>ÇÃO.....          | 2.26 |
| TABELA 2.2 - COMPARAÇÕES DAS FORMULAÇÕES<br>PARA CÁLCULO DE TENSÕES DE<br>CISALHAMENTO NA FLEXÃO E NA<br>FLEXO-TORÇÃO..... | 2.32 |

CAPÍTULO IV

|   |      |
|---|------|
| TABELA 4.1 - DISTRIBUIÇÕES DE $M_{tu}$ , $M_{ft}$ ,<br>$M_{tt}$ E B.....  | 4.6  |
| TABELA 4.2 - COORDENADAS SECTORIAIS.....  | 4.7  |
| TABELA 4.3 - TENSÕES NORMAIS DE FLEXO-TOR<br>ÇÃO.....   | 4.7  |
| TABELA 4.4 - MOMENTO ESTÁTICO SECTORIAL.....  | 4.9  |
| TABELA 4.5 - TENSÕES DE CISALHAMENTO NA<br>FLEXO-TORÇÃO.....  | 4.11 |
| TABELA 4.6 - EQUILÍBRIO DE UM ELEMENTO DO<br>PERFIL.....  | 4.13 |
| TABELA 4.7 - TENSÕES NORMAIS PARA DIVERSAS<br>SEÇÕES DE COORDENADA X AO LON<br>GO DO COMPRIMENTO DA VIGA, CAL<br>CULADAS PELA TEORIA DE VLASOV<br>E PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS |      |

|               |   |      |
|---------------|---|------|
|               | FINITOS (MEF).....  | 4.16 |
| TABELA 4.8 -  | DEFINIÇÃO DAS PROPRIEDADES DO<br>MODELO FLEXÃO-RETORÇÃO, EM RE<br>LAÇÃO AOS EIXOS LOCAIS 1,2,3..... | 4.18 |
| TABELA 4.9 -  | ESFORÇOS NOS ELEMENTOS DE VI<br>GA DO "MODELO HÍBRIDO".....   | 4.20 |
| TABELA 4.10 - | COMPARAÇÃO DOS PROCESSOS DE<br>CÁLCULO.....   | 4.23 |

## CAPÍTULO V

|              |  |      |
|--------------|--|------|
| TABELA 5.1 - | TENSÕES AXIAIS NA LONGARINA A<br>E TRANSVERSAL (1) ..... | 5.10 |
| TABELA 5.2 - | ESFORÇOS NOS ELEMENTOS DE VI<br>GA-I.....                | 5.19 |
| TABELA 5.3 - | ESFORÇOS NOS ELEMENTOS DE VI<br>GA-II.....               | 5.20 |

## ÍNDICE DE FIGURAS

### CAPÍTULO I

|        |     |  |     |
|--------|-----|--|-----|
| FIGURA | 1.1 | - UM EXEMPLO DE PERFIL ABERTO<br>DE PAREDES DELGADAS.....      | 1.4 |
| FIGURA | 1.2 | - TENSÕES NORMAIS EM PERFIL<br>ABERTO DE PAREDES DELGADAS..... | 1.6 |
| FIGURA | 1.3 | - REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA<br>DA SEQUÊNCIA DE ESTUDO.....     | 1.9 |

### CAPÍTULO II

|        |     |   |      |
|--------|-----|---|------|
| FIGURA | 2.1 | - TORÇÃO DE UM PERFIL ABERTO<br>DE PAREDES DELGADAS.....  | 2.2  |
| FIGURA | 2.2 | - DEFORMAÇÕES AXIAIS $u$ DEVIDO<br>AO FENÔMENO DE EMPENAMENTO.....  | 2.2  |
| FIGURA | 2.3 | - TORÇÃO RESTRINGIDA DE UM<br>PERFIL ABERTO DE PAREDES<br>DELGADAS.....   | 2.3  |
| FIGURA | 2.4 | - TENSÕES DE CISALHAMENTO <u>SE</u><br>CUNDÁRIAS ORIGINADAS PELO <u>A</u><br>PARECIMENTO DE TENSÕES <u>NOR</u><br>MAIS NA TORÇÃO..... | 2.5  |
| FIGURA | 2.5 | - TORÇÃO DE PERFIL I DE <u>PA</u><br><u>RE</u> S DELGADAS.....  | 2.8  |
| FIGURA | 2.6 | - FLEXÃO NA TORÇÃO.....   | 2.9  |
| FIGURA | 2.7 | - FLEXÃO DE UMA VIGA.....   | 2.11 |
| FIGURA | 2.8 | - SOLICITAÇÕES EM VIGA DE <u>PA</u><br><u>RE</u> S DELGADAS E VIGA <u>SÓLI</u><br><u>DA</u> .....                                     | 2.11 |

|             |   |      |
|-------------|---|------|
| FIGURA 2.9  | - CARGAS EXCÊNTRICAS EM VIGAS DE PAREDES DELGADAS.....  | 2.11 |
| FIGURA 2.10 | - ESQUEMA DA DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES NORMAIS EM VIGAS DE PAREDES DELGADAS E CARGA EXCÊNTRICA..... | 2.13 |
| FIGURA 2.11 | - A SEÇÃO ELEMENTAR $d_x$ É UM CORPO RÍGIDO EM RELAÇÃO AO MOVIMENTO TRANSVERSAL.....              | 2.15 |
| FIGURA 2.12 | - DEFORMAÇÕES EM PERFIL ABERTO DE PAREDES DELGADAS TORÇÃO RESTRINGIDA.....                        | 2.16 |
| FIGURA 2.13 | - TORÇÃO DE PERFIL ABERTO E PERFIL FECHADO.....   | 2.19 |
| FIGURA 2.14 | - PAR DE FORÇAS $F$ QUE EQUILIBRAM O MOMENTO TORÇOR $M_x$ .....                                   | 2.19 |
| FIGURA 2.15 | - DIAGRAMA DE MOMENTOS TORÇORES.....  | 2.19 |
| FIGURA 2.16 | - DISTRIBUIÇÃO DAS TENSÕES DE CISALHAMENTO DEVIDO À TORÇÃO UNIFORME E FLEXO-TORÇÃO.....           | 2.21 |
| FIGURA 2.17 | - ÁREA VARRIDA PELO RAIO VETOR $\overline{CO}$ .....  | 2.21 |
| FIGURA 2.18 | - EQUILÍBRIO DE UM ELEMENTO DE VIGA NA TORÇÃO.....  | 2.27 |
| FIGURA 2.19 | - ÁREA ASSOCIADA AO PONTO $i$ PARA CÁLCULO DO MOMENTO ESTÁTICO.....                               | 2.32 |

|   |      |
|---|------|
| FIGURA 2.20 - REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DA ROTINA DE CÁLCULO PARA OBTENÇÃO DE $\sigma_{ft}$ e $\tau_{ft}$ ..... | 2.35 |
|---|------|

## CAPÍTULO III

|  |      |
|--|------|
| FIGURA 3.1 - EXEMPLO DE CARGA APLICADA EM VIGA COM EXCENTRICIDADE $e$ , INTRODUZINDO MOMENTO TORÇOR.....                     | 3.2  |
| FIGURA 3.2 - TRANSMISSÃO DE MOMENTOS TORÇORES PARA OS CASOS DE EXISTÊNCIA OU NÃO DE EMPENAMENTO.....                         | 3.2  |
| FIGURA 3.3 - ESTRUTURA CONSTITUÍDA DE PERIFIS DE PAREDES DELGADAS-MODELO ESTRUTURAL COM ELEMENTOS DE VIGA CONVENCIONAIS..... | 3.4  |
| FIGURA 3.4 - MODELO ESTRUTURAL COM ELEMENTOS DE CASCA. REPRESENTAÇÃO DA REGIÃO A.....  | 3.5  |
| FIGURA 3.5 - IDÉIA INICIAL DE MODELO COM ELEMENTOS DE VIGAS CONVENCIONAIS PARA CÁLCULO DE FLEXO-TORÇÃO.....                  | 3.7  |
| FIGURA 3.6 - TORÇÃO DE PERFIL C E DISCRETIZAÇÃO POR MODELO DE 4 ELEMENTOS DE VIGA.....                                       | 3.9  |
| FIGURA 3.7 - ANALOGIA FLEXÃO-RETORÇÃO .....  | 3.14 |

## CAPÍTULO IV

|  |     |
|--|-----|
| FIGURA 4.1 - EXEMPLO PARA CÁLCULO DE FLEXO-TORÇÃO..... | 4.2 |
|--|-----|

|  |      |
|--|------|
| FIGURA 4.2 - REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DO PROBLEMA A SER ESTUDADO.....   | 4.2  |
| FIGURA 4.3 - DIAGRAMA DE ÁREA SECTORIAL PRINCIPAL.....   | 4.8  |
| FIGURA 4.4 - TENSÕES NORMAIS DE FLEXO-TORÇÃO PARA X=200 cm, NO ENGASTAMENTO.....   | 4.8  |
| FIGURA 4.5 - VARIACÃO DAS TENSÕES NORMAIS $\sigma_{ft}$ AO LONGO DO COMPRIMENTO DA VIGA. PONTOS EXTREMOS DO FLANGE SUPERIOR..... | 4.10 |
| FIGURA 4.6 - TENSÕES $\tau_{ft}$ PARA ABSCISSA X=200 cm.....   | 4.12 |
| FIGURA 4.7 - TENSÕES NORMAIS E DE CISALHAMENTO EM ELEMENTO DE PERFIL SUJEITO A FLEXO-TORÇÃO.....                                 | 4.12 |
| FIGURA 4.8 - MODELO ESTRUTURAL COM 816 PONTOS NODAIS E 750 ELEMENTOS DE CASCA.....   | 4.15 |
| FIGURA 4.9 - TENSÕES NORMAIS NA SEÇÃO X=200 cm PELA TEORIA DE VLASOV E PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.....                    | 4.17 |
| FIGURA 4.10 - MODELO PARA ANALOGIA FLEXÃO-RETORÇÃO.....  | 4.19 |
| FIGURA 4.11 - MOMENTOS FLETORES NOS FLANGES, OBTIDOS POR INTERMÉDIO DA ANALOGIA FLEXÃO-RETORÇÃO.....                             | 4.21 |
| FIGURA 4.12 - VIGA DE PAREDES DELGADAS COM FECHAMENTO DA EXTREMIDADE LIVRE.....  | 4.26 |

|   |      |
|---|------|
| FIGURA 4.13 - EMPENAMENTO DA VIGA DE PAREDES FINAS COM CAIXA DE REFORÇO EM EXTREMIDADE LIVRE..... | 4.27 |
| FIGURA 4.14 - DISCRETIZAÇÃO DA CAIXA DE REFORÇO DA VIGA DE PAREDES DELGADAS.....                  | 4.28 |
| FIGURA 4.15 - VISTA GERAL DO MODELO ESTRUTURAL COM REFORÇO .....                                  | 4.29 |
| FIGURA 4.16 - TENSÕES NORMAIS NA VIGA COM EXTREMIDADE LIVRE REFORÇADA.....                        | 4.31 |

## CAPÍTULO V

|   |     |
|---|-----|
| FIGURA 5.1 - ESTRUTURA CONSTITUÍDA POR PERFIS ABERTOS DE PAREDES DELGADAS.....  | 5.2 |
| FIGURA 5.2 - VISTA GERAL DO MODELO ESTRUTURAL.....  | 5.4 |
| FIGURA 5.3 - LONGARINA A.....   | 5.5 |
| FIGURA 5.4 - LONGARINA B.....   | 5.6 |
| FIGURA 5.5 - TRANSVERSAL (1) E INTERSECÇÃO COM LONGARINAS.....  | 5.7 |
| FIGURA 5.6 - REGIÃO DE PENETRAÇÃO DA ALMA DO TRANSVERSAL (1) NA LONGARINA A.....  | 5.8 |
| FIGURA 5.7 - ESTRUTURA TIPO CHASSIS SUJEITA À TORÇÃO.....   | 5.9 |
| FIGURA 5.8 - REPRESENTAÇÃO DA INTERSECÇÃO DOS FLANGES DO TRANSVERSAL (1) COM OS FLANGES DA LONGARINA A (ALMA DO TRANSVERSAL NÃO REPRESENTADA) NO MODELO |     |

|               |   |      |
|---------------|---|------|
|               | PELO MEF (CASCAS).....  | 5.11 |
| FIGURA 5.9 -  | MODELO PELO MEF (CASCAS) -<br>LONGARINA A NA REGIÃO DO EN-<br>GASTAMENTO.....                                   | 5.12 |
| FIGURA 5.10 - | DISTRIBUIÇÃO DAS TENSÕES<br>NORMAIS AO LONGO DO CONTORNO<br>DA SEÇÃO DOS PERFIS.....                            | 5.13 |
| FIGURA 5.11 - | MODELO ESTRUTURAL DE CHASSIS<br>PARA ANALOGIA FLEXÃO-RETOR-<br>ÇÃO.....   | 5.16 |
| FIGURA 5.12 - | LOCALIZAÇÃO DAS REGIÕES DE<br>EMPENAMENTO NULO PARA A ANA-<br>LOGIA FLEXÃO-RETORÇÃO.....                        | 5.17 |
| FIGURA 5.13 - | VISTA GERAL DO "MODELO HÍBRI-<br>DO" DEFORMADO.....   | 5.18 |
| FIGURA 5.14 - | TENSÕES NORMAIS OBTIDAS POR<br>INTERMÉDIO DO "MODELO HÍBRI-<br>DO" - ANALOGIA FLEXÃO-RETOR-<br>ÇÃO.....         | 5.24 |
| FIGURA 5.15 - | DIAGRAMAS DE TENSÕES NORMAIS<br>COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS DA<br>ANALOGIA FLEXÃO-RETORÇÃO COM<br>MEF-CASCAS..... | 5.28 |

## CAPÍTULO VI

|              |  |     |
|--------------|--|-----|
| FIGURA 6.1 - | CAIXAS ESTRUTURAIS COM ANTEPA-<br>RAS..... | 6.4 |
|--------------|--|-----|



NOMENCLATURA

- A - Área de seção transversal do perfil
- b - Largura do flange de perfil C
- b' - Largura de chapa
- B - Bimomento de Flexo-Torção
- C - Centro de Torção
- d - Braço de momento
- $d_w$  - Distância entre o ponto de empenamento nulo em flange de perfil C, e o ponto de cálculo de tensão normal de flexo-torção no mesmo flange
- E - Módulo de Elasticidade
- e - Excentricidade de carga aplicada em relação ao centro de torção C
- F - Força aplicada
- G - Módulo de Elasticidade em cisalhamento
- h - Altura de alma de perfil C de paredes delgadas
- $I_1$  - Momento de inércia de perfil em relação a eixo local 1
- $I_2$  - Momento de inércia de perfil em relação a eixo local 2
- $I_3$  - Momento de inércia de perfil em relação a eixo local 3
- $I_t$  - Momento de inércia à Torção (Saint-Venant)
- $I_y$  - Momento de inércia em relação ao eixo principal y

- $I_y^*$  - Momento de inércia para Analogia Flexão-Retorção  
 $I_w$  - Momento de inércia sectorial  
 $I_z$  - Momento de inércia em relação ao eixo principal z  
 $L$  - Comprimento de viga  
 $M_2$  - Momento Fletor em relação ao eixo local 2  
 $M_3$  - Momento Fletor em relação ao eixo local 3  
 $M_{ft}$  - Componente do momento torçor associado à flexo- torção  
 $M_o$  - Momento fletor atuante em flanges de perfil de paredes delgadas, decorrente de flexões diferenciais  
 $M_{tt}$  - Momento torçor total aplicado em perfil de paredes delgadas  
 $M_{tu}$  - Componente do momento torçor associado à torção uniforme  
 $M_{sw}(s)$  - Momento estático Sectorial ao longo do contorno S da seção transversal do perfil aberto de paredes delgadas  
 $M_x$  - Momento torçor  
 $M_y$  - Momento fletor atuante segundo o eixo y  
 $M_z$  - Momento fletor atuante segundo o eixo z  
 $m$  - Momento torçor por unidade de comprimento devido aos esforços externos atuantes em perfil de paredes delgadas  
 $m_1$  - Solução particular da equação diferencial do Bimomento

- N - Esforço normal
- O - Origem para medição de áreas varridas
- P - Pólo arbitrário para medição de área sectorial
- p - Força axial distribuída em seção transversal de perfil aberto de paredes delgadas
- $Q_z$  - Força cortante na direção z
- r - Comprimento da perpendicular traçada de pólo arbitrário à linha tangente ao contorno do perfil em ponto A
- s - Contorno da seção transversal de perfil aberto de paredes delgadas
- s - Arco em perfil de paredes delgadas
- t - Espessura
- t - Espessura da alma de perfil C
- $t_1$  - Espessura do flange de perfil C
- u - Deslocamentos axiais, segundo o eixo x
- $v_p$  - Deslocamento do ponto P segundo o eixo y transversal
- $W(s)$  - Área sectorial principal, função que caracteriza o empenamento ao longo do contorno do perfil
- $W_i$  - Área sectorial principal em ponto da seção onde atua carga axial  $P_i$
- $W_{si}$  - Área sectorial principal em ponto i do contorno de um perfil de paredes delgadas
- $W'_o$  - Área sectorial em relação à pólo e origem arbitrários

- $W_t$  - Módulo de resistência à torção  
 $y$  - Coordenada de um ponto em relação à linha neutra  
 $y_c$  - Coordenada do centro de torção em relação a pólo  $P'$   
 $y_p$  - coordenada do ponto P da seção transversal, em relação aos eixos  $(y,z)$  com origem no centro de torção  
 $z_p$  - Coordenada do ponto P da seção transversal, em relação aos eixos  $(y,z)$  com origem no centro de torção  
 $z$  - Coordenada de um ponto em relação à linha neutra  
 $z_c$  - Coordenada do centro de torção em relação a pólo  $P'$   
 $\alpha$  - Constante da equação diferencial do Bimomento  
 $\alpha_x$  - Distância do centro de torção à alma do perfil C ou distância do ponto de empenamento nulo em flange de perfil C à alma do perfil  
 $\Delta_p$  - Deslocamento do ponto P segundo o eixo  $z$  transversal  
 $\nu$  - Coeficiente de Poisson  
 $\epsilon$  - Deformação  
 $\sigma_{ft}$  - Tensão normal longitudinal de flexo-torção  
 $\sigma_o$  - Tensões normais atuantes nos flanges de perfil I de paredes delgadas, decorrente das flexões diferenciais.  
 $\sigma_x$  - Tensão normal atuante em ponto da seção transversal da viga

- $\tau_{fti}$  - Tensão de cisalhamento devido à flexo-torção em ponto i do contorno da seção transversal de perfil aberto de paredes delgadas
- $\tau_{m\acute{a}x}$  - Tensão de cisalhamento máxima devido à torção de Saint-Venant, em perfil de paredes delgadas
- $\tau_{tu}$  - Tensão de Cisalhamento na torção uniforme ou de Saint Venant
- $\theta$  - Ângulo de torção
- $\theta' = \frac{d\theta}{dx}$  - taxa de variação do ângulo de torção ou ângulo de torção unitário.

## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO

#### 1.1 - ASPECTOS GERAIS

Em diversas aplicações práticas são utilizados Perfis Abertos de Paredes Delgadas. Muitas vigas metálicas soldadas ou rebitadas, que são utilizadas amplamente em aplicações da engenharia estrutural, constituem exemplos desses tipos de perfis. Entre os vários tipos de estruturas que utilizam perfis de paredes delgadas, podemos citar: estruturas de navios, estruturas de aviões, estruturas de veículos rodoviários e estruturas de veículos ferroviários. Com a finalidade de situar esses elementos delgados na classificação geral da engenharia estrutural, convém inicialmente estabelecer uma divisão entre os elementos básicos estruturais de acordo com a sua respectiva característica espacial, de acordo com Vlasov (1). A saber:

- Corpos sólidos
- Placas e cascas
- Vigas sólidas
- Vigas de paredes delgadas

##### 1.1.1 - Corpos sólidos

A primeira classe compreende corpos cujas 3 dimensões são comparáveis, tal como uma esfera, um cubo, um paralelepípedo, ou mais genericamente um corpo contínuo elástico preenchendo as três dimensões do espaço, como alguns componentes de máquinas e estruturas. Os problemas relativos à determina

ção de tensões e deformações em corpos sólidos e os métodos para sua solução exata são tratados na Teoria da Elasticidade.

### 1.1.2 Placas e Cascas

A segunda classe compreende corpos tendo uma dimensão (por exemplo, altura) muito menor que as outras duas (largura e comprimento), que por sua vez são da mesma ordem de grandeza. São exemplos destes tipos de elementos as chapas, lajes finas (circulares, retangulares, trapezoidais, etc...), as cascas de várias formas (cilíndricas, cônicas, esféricas, etc...), amplamente utilizadas em engenharia estrutural, aviação, construção naval, etc.... A teoria geral de placas e cascas é baseada em hipóteses geométricas, e os métodos de cálculo exato e aproximado constituem um extenso campo da engenharia estrutural.

### 1.1.3 Vigas Sólidas

A terceira classe compreende corpos tendo duas de suas dimensões da mesma ordem de grandeza, e muito pequenas se comparadas à terceira dimensão. Por exemplo, um paralelepípedo delgado pode ser considerado uma viga sólida, quando as duas dimensões da sua seção transversal (altura e largura do retângulo) são comparáveis. A lei das seções planas, constitui a base da teoria elementar da flexão de vigas, estabelecendo que qualquer seção de uma viga que é inicialmente plana, mantém-se plana após a deformação. A teoria elementar da tração (compressão), flexão e torção pura é incluída na teoria geral de vigas sólidas, que é essencialmente baseada na aplicação do princípio de Saint-Venant.

#### 1.1.4 Vigas de Paredes Delgadas

A quarta classe compreende corpos tendo as suas três dimensões com ordem de grandeza diferentes, como por exemplo um corpo na forma de uma casca prismática longa. A espessura da casca é pequena quando comparada com qualquer dimensão característica da seção transversal, e as dimensões da seção transversal são pequenas quando comparadas ao comprimento da casca, como é representado na figura 1.1. Tais corpos são chamados de "Vigas de Paredes Delgadas" ou "Perfis de Paredes Delgadas". A análise das estruturas constituídas por esses tipos de perfis, merece sob certas circunstâncias algumas considerações especiais.

O cálculo adequado das tensões atuantes nos Perfis de Paredes Delgadas, deve considerar que durante o trabalho da estrutura submetida às solitações de flexão, tração e torção, ocorre o empenamento do elemento de viga ("warping"). Nesse caso, além dos esforços calculados pela Teoria Elementar de Vigas, que considera a Lei das Seções Planas, surgem efeitos secundários devido ao empenamento, que não são considerados quando se estudam perfis não delgados; tais efeitos podem ser da ordem de grandeza dos efeitos primários, e, em certos casos, até ultrapassá-los. As deformações por empenamento em viga de paredes delgadas, podem induzir tensões normais consideravelmente altas, as Tensões Normais Devido ao Empenamento, e em consequência, Tensões de Cisalhamento Secundárias devido ao empenamento. Assim, durante os procedimentos de cálculo de um elemento de viga da estrutura, para posterior análise de sua resistência e estabilidade, deve-se considerar adicionalmente os efeitos do empenamento.



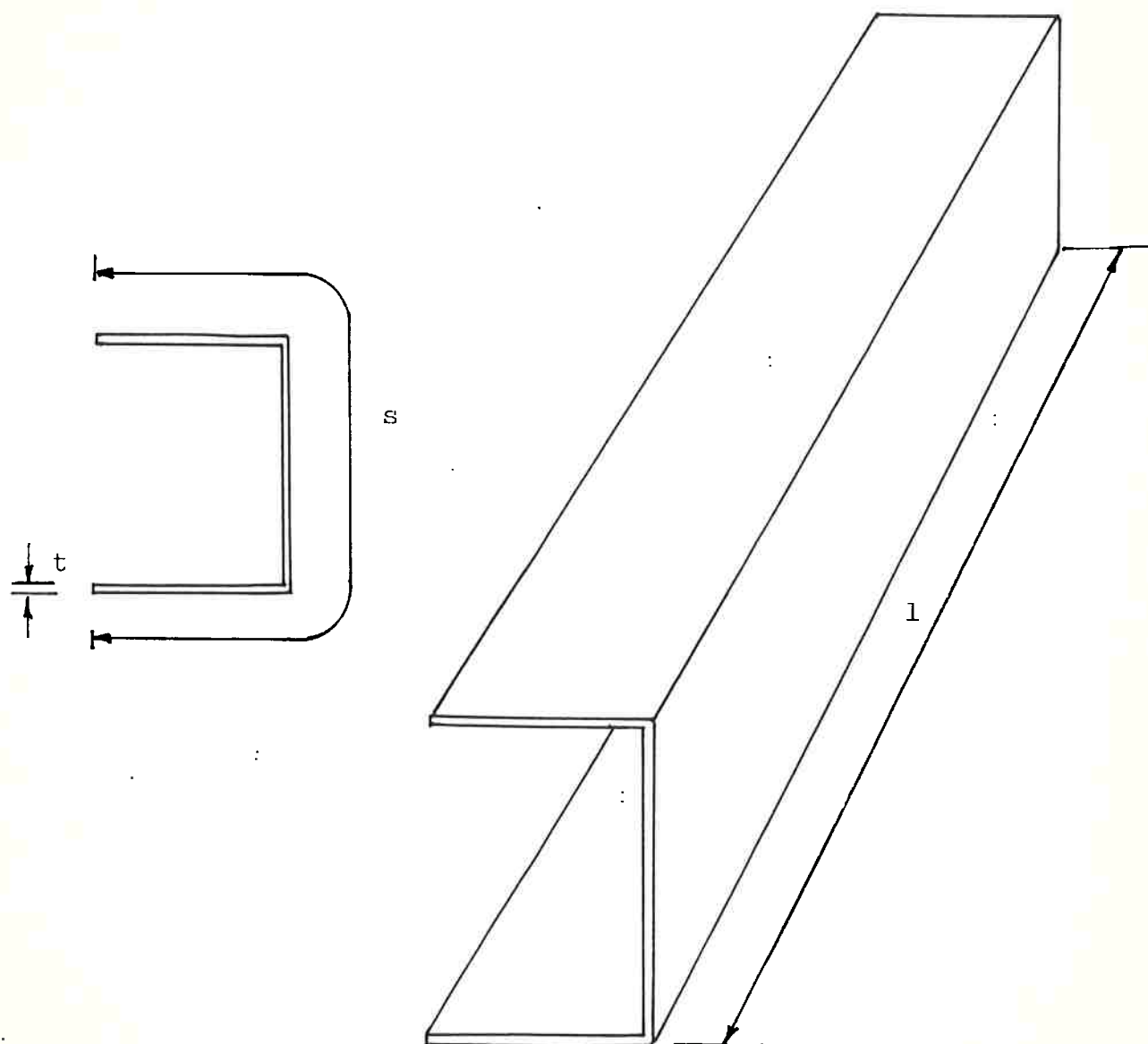


FIGURA 1.1. - UM EXEMPLO DE PERFIL ABERTO DE PAREDES DELGADAS. A ESPESSURA  $t$  É MUITO MENOR QUE O COMPRIMENTO DO CONTORNO  $s$ , QUE POR SUA VEZ É MUITO MENOR QUE O COMPRIMENTO DO PERFIL  $l$  ( $t \ll s$  e  $s \ll l$ ).

Por exemplo, no caso das tensões normais atuantes em um elemento de viga de uma estrutura, a tensão atuante em um ponto da seção transversal é dada segundo a Resistência dos Materiais Elementar por:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y \cdot z}{I_y} + \frac{M_z}{I_z} \cdot y \quad (1.1)$$

Os componentes de tensão referem-se respectivamente ao trabalho do elemento submetido à deformação axial uniforme, flexão no plano horizontal e flexão no plano vertical, conforme indicado na figura 1.2.

Considerando-se os efeitos do empenamento, a tensão normal será acrescida deste componente de tensão, e apresentará como expressão geral:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot z + \frac{M_z}{I_z} \cdot y + \sigma_{ft} \quad (1.2)$$

onde  $\sigma_{ft}$  representa a tensão normal longitudinal induzida devido ao empenamento do elemento de viga ("warping stress"), conforme indicado também na figura 1.2, e que será objeto de estudo ao longo deste trabalho.

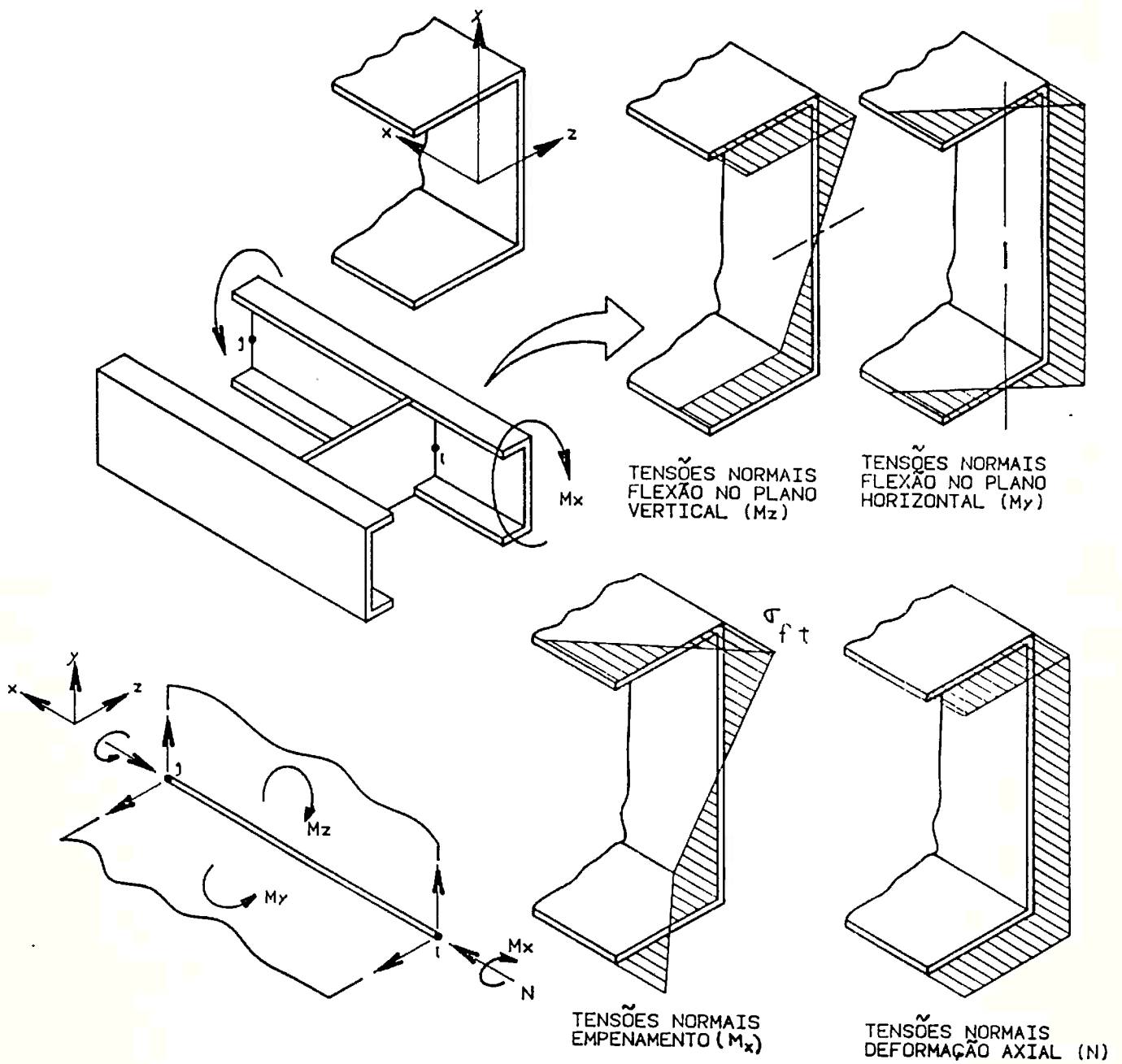


FIGURA 1.2 - TENSÕES NORMAIS EM PERFIL ABERTO DE PAREDES DELGADAS

## 1.2. - ESCOPO DO TRABALHO

O objetivo principal deste estudo é a aplicação de uma metodologia que permita o cálculo das tensões normais' de vido ao empenamento, atuantes em uma estrutura constituída' por perfis abertos de paredes delgadas. Para tanto, considera-se um "modelo híbrido" com elementos finitos de viga, que incorpora as propriedades geométricas usualmente utilizadas a partir da Resistência dos Materiais Elementar e concomitantemente considera as propriedades geométricas associadas ao estudo do empenamento dos perfis abertos de paredes delgadas. Tal modelo, com reduzido número de graus de liberdade, constitui alternativa interessante a um modelo em elementos finitos com elevado número de elementos de casca, e em consequência, elevado número de graus de liberdade, reduzindo acentuadamente o tempo e o custo da solução, e apresentando resultados satisfatórios.

Após a introdução ao estudo, feita neste capítulo, o Capítulo II aborda o problema da Retorção ou Empenamento , onde inicialmente o fenômeno é analisado do ponto de vista Físico, e em sequência é apresentada uma revisão da Teoria de Vlasov para a Retorção (ou também "Flexo-torção") , por meio da equação da torção restringida. Ainda neste capítulo é abordado o procedimento de cálculo de  $\sigma_{ft}$ , complementado pelo estudo da Equação do Bimomento de Flexo-Torção. O procedimento de cálculo das tensões de cisalhamento induzidas devido ao empenamento, também é revisado neste capítulo. No capítulo III é apresentada a Analogia Flexão-Retorção, que permite a adoção de um "modelo híbrido" em elementos finitos de viga para a resolução do problema da Retorção. No capítulo IV são efetuados testes de confiabilidade

com aplicações numéricas, verificando a metodologia aplicada. No Capítulo V é feita uma aplicação prática da metodologia introduzida, para uma estrutura tipo "chassis" de veículo constituída por perfis abertos de paredes delgadas, comparando-se os resultados obtidos por intermédio do "modelo híbrido" com um modelo em elementos finitos em que a estrutura é toda discretizada por elementos de casca. Finalmente, no capítulo VI são apresentadas as conclusões sobre este estudo, bem como as recomendações julgadas interessantes. Na figura 1.3 apresenta-se, de forma esquemática, a seqüência das diversas etapas desenvolvidas neste estudo. Faz parte ainda deste trabalho, uma revisão das Propriedades Sectoriais necessárias para a aplicação da Teoria de Vlasov, que é apresentada no Apêndice A, tais como : Área Sectorial ( $\text{cm}^2$ ), Momento Estático Sectorial ( $\text{cm}^4$ ), Momentos Lineares Sectoriais ( $\text{cm}^5$ ) e momento de Inércia Sectorial ( $\text{cm}^6$ ).

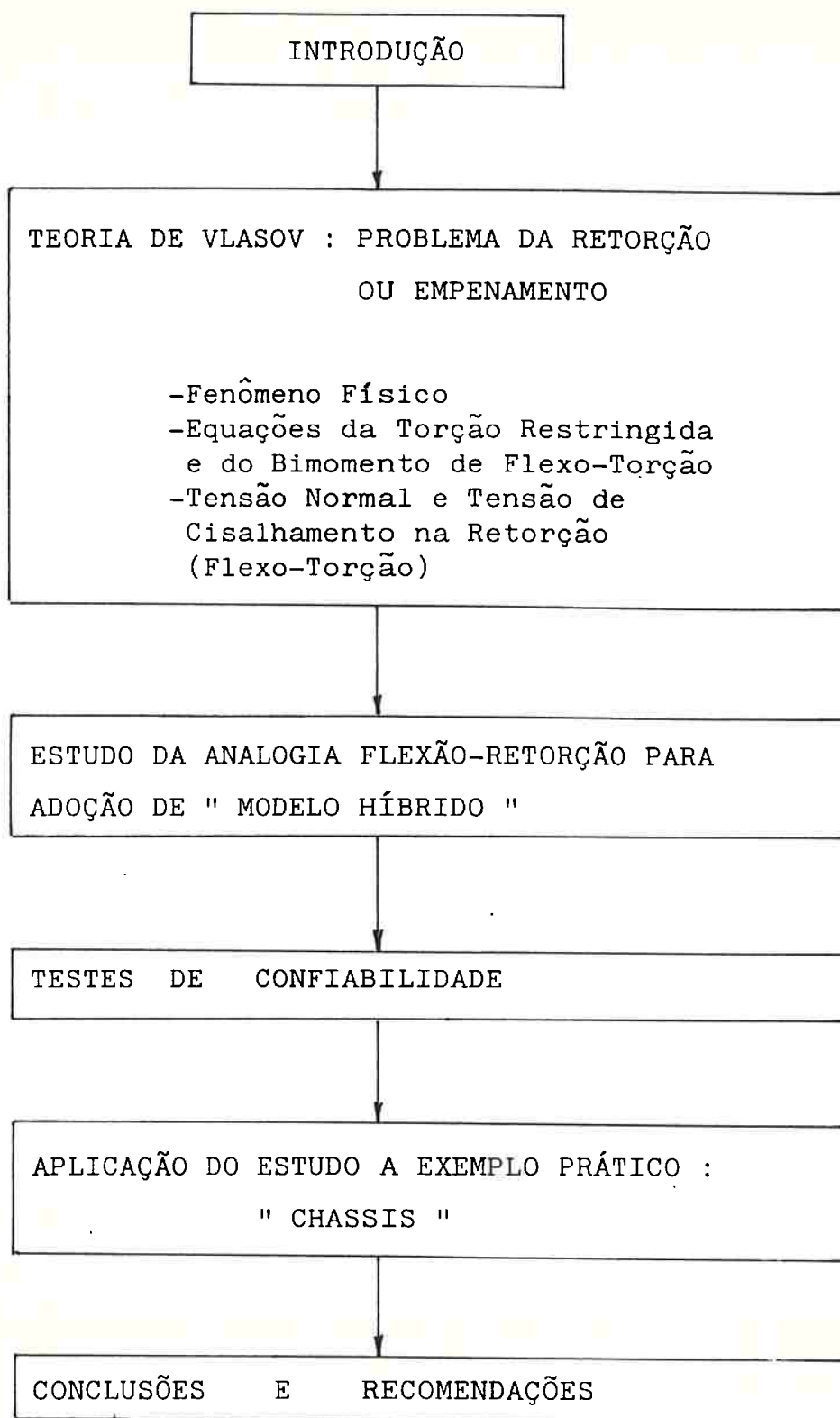


FIGURA 1.3 - REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DA SEQUÊNCIA DE ESTUDO

## CAPÍTULO II

TEORIA DE VLASOV: O PROBLEMA DA RETORÇÃO2.1 - RETORÇÃO OU EMPENAMENTO DA SEÇÃO -  
PROBLEMA FÍSICO

Os Perfis Abertos de Paredes Delgadas apresentam características torcionais que são bastante diferentes dos perfis fechados. Como sabemos, a rigidez à torção de um perfil aberto é bem menor que aquela apresentada por um perfil fechado; eles apresentam maior rotação para um dado momento torçor aplicado e podem experimentar extensão longitudinal não uniforme em uma seção transversal como resultado da torção, isto é, eles empenam. A figura 2.1 apresenta um perfil aberto de paredes delgadas sofrendo torção e a figura 2.2 representa os Deslocamentos Axiais não Uniformes u caracterizando o empenamento do perfil ("warping"). A linha de contorno da seção do perfil pertencente a um plano, deixa de pertencer a um plano após a torção.

Se o perfil sofrer torção, de modo que uma de suas extremidades esteja impedida de se deformar livremente, como representa a figura 2.3, essa restrição implicará os seguintes fenômenos:

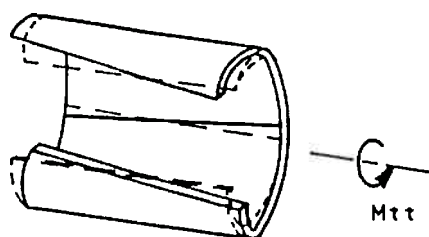


FIGURA 2.1 - TORÇÃO DE UM PERFIL ABERTO DE PAREDES DELGADAS

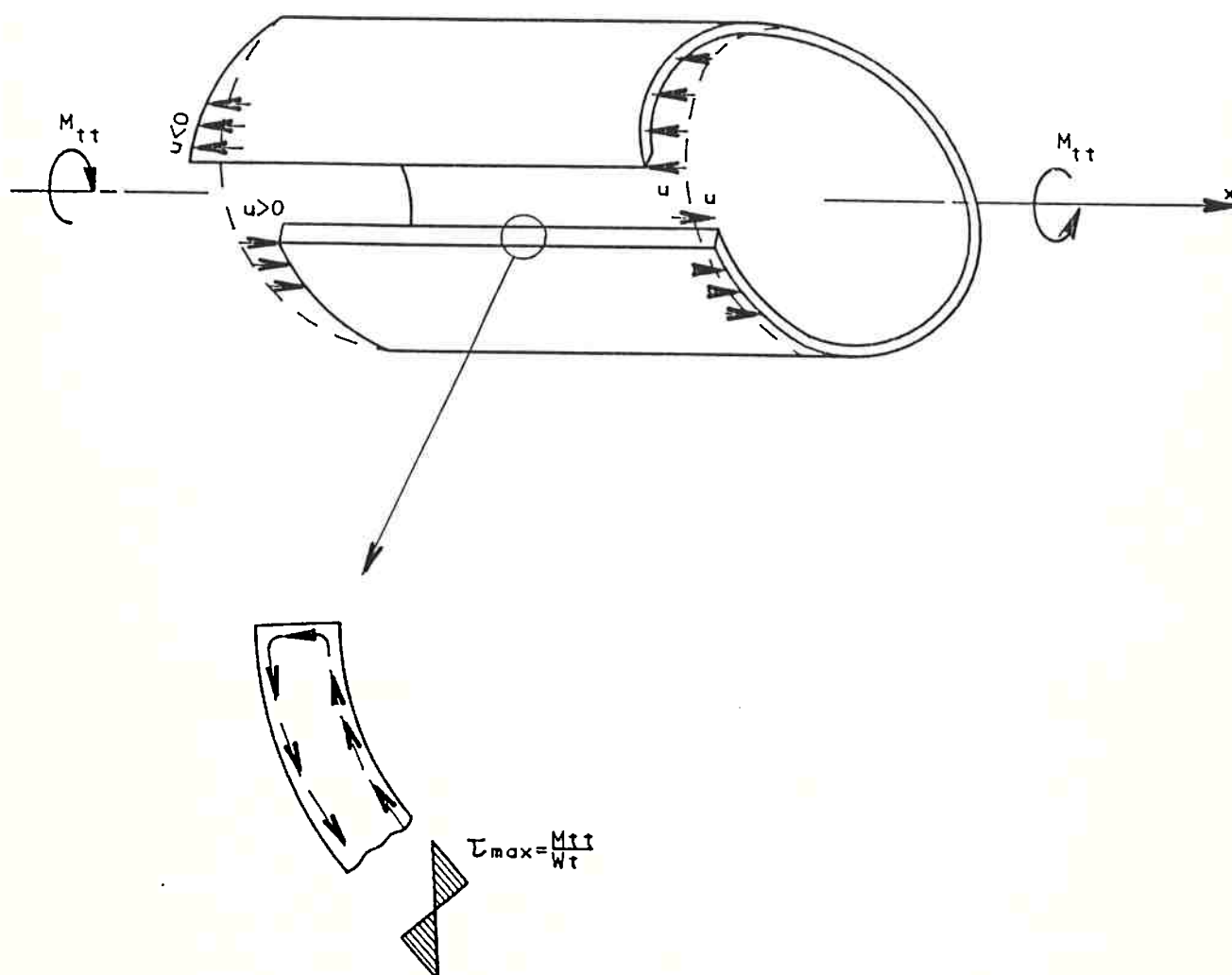


FIGURA 2.2 - DESLOCAMENTOS AXIAIS  $u$  DEVIDO AO FENÔMENO DE EMPENAMENTO



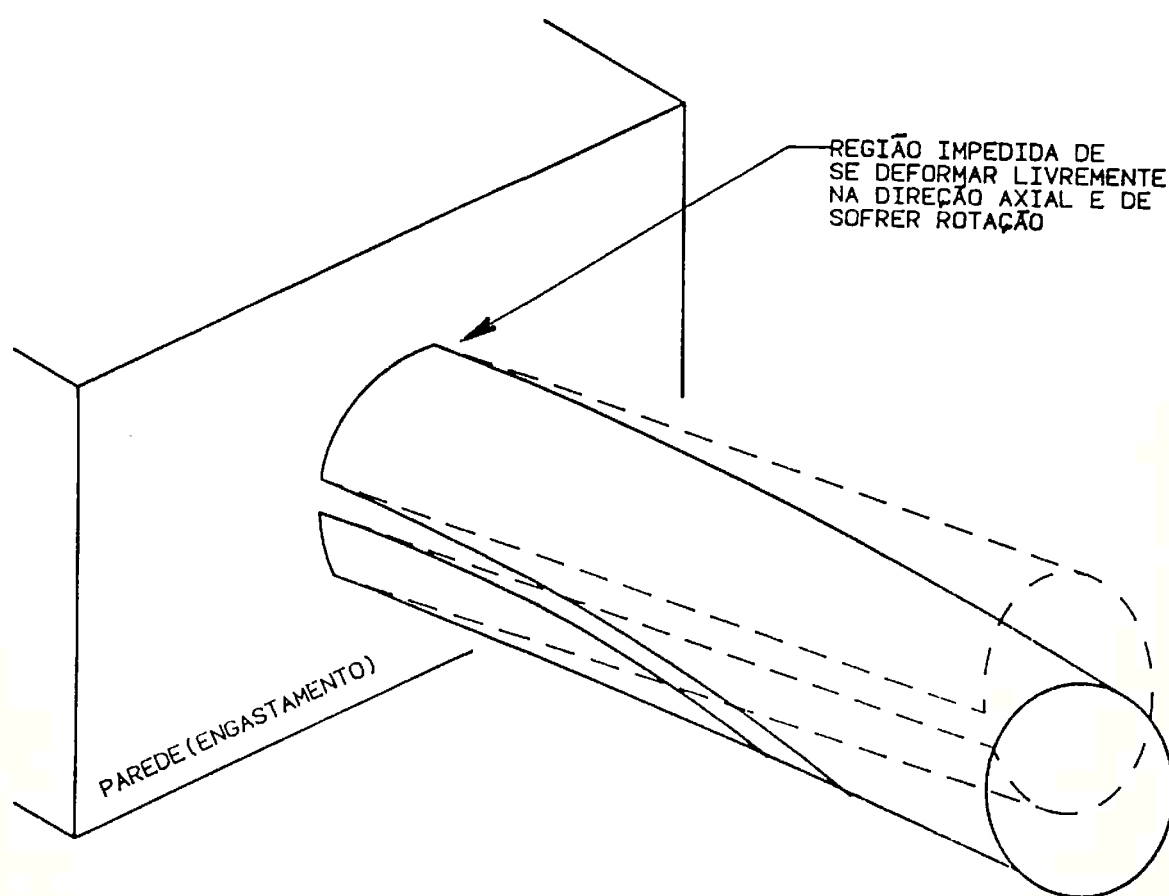


FIGURA 2.3 - TORÇÃO RESTRINGIDA DE UM PERFIL ABERTO DE PAREDES DELGADAS

- as regiões da seção transversal do perfil que se encontra vinculada à parede, e que apresentem tendência a se afastarem dela ( $u > 0$ ), serão tracionadas e impedidas de se deformarem livremente, dando origem em consequência a Tensões Normais de Tração;

- as regiões da seção transversal do perfil que se encontra vinculada à parede, e que apresentem tendência a se aproximarem dela ( $u < 0$ ), serão comprimidas e impedidas de se deformarem livremente, dando origem em consequência a Tensões Normais de Compressão;

- pelo estudo da Torção Uniforme, sabemos que as tensões de cisalhamento na torção são proporcionais ao ângulo de torção unitário da barra (ângulo de torção por unidade de comprimento). No caso da torção restringida, o ângulo de torção unitário da barra varia ao longo do seu comprimento (eixo  $x$ ) e na parede (engastamento) esse ângulo é nulo. Dessa forma, as tensões de cisalhamento devido à torção uniforme no engastamento serão nulas também, e não há significado físico na aplicação da expressão  $\tau_{\text{MÁX}} = \frac{M_{tt}}{w_t}$  para cálculo das tensões, como indicado na Figura 2.2;

- o aparecimento de tensões normais que variam ao longo do eixo axial  $x$ , impõe que para um elemento da estrutura estar em equilíbrio, como mostrado na Figura 2.4 deverão existir tensões tangenciais secundárias, que garantam o equilíbrio do elemento.

O exemplo qualitativo considerado anteriormente, caracteriza o problema físico do Empenamento ou Retorção, e evidencia a existência de tensões normais, que segundo a teo

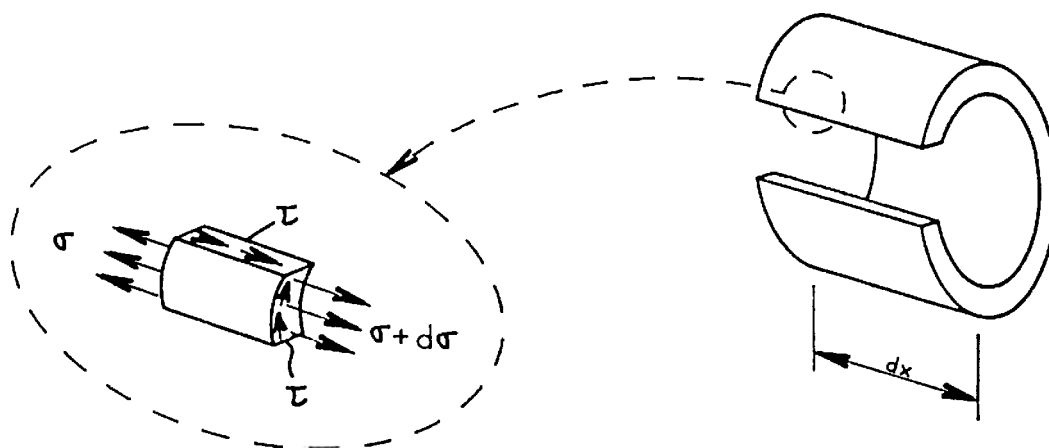


FIGURA 2.4 - TENSÕES DE CISALHAMENTO SECUNDÁRIAS ORIGINADAS PELO APARECIMENTO DE TENSÕES NORMAIS NA TORÇÃO

ria elementar não são usuais no fenômeno de torção.

Outras características importantes associadas ao problema da Retorção, podem ser identificadas por intermédio do exemplo de um perfil I de paredes delgadas submetido à torção, como é representado na figura 2.5. Os flanges sofrem flexões em sentidos opostos, nos seus próprios planos. O resultado é que a seção transversal não se mantém plana; ocorre um fenômeno de Flexão na Torção. Se não existisse a alma do perfil I, os flanges se deformariam independentemente um do outro, e para uma determinada seção as tensões normais teriam uma distribuição conforme representado na figura 2.6. No caso de um perfil de paredes delgadas a rigidez da união entre os flanges (alma) é pequena no plano perpendicular à alma, e a propagação do efeito representado na figura 2.6, ao longo da viga, é bastante acentuado.

Embora às tensões atuantes nos dois flanges (sujeitos à flexão horizontal devido à atuação de Dois Momentos  $M_0$  e  $-M_0$ ), constituam um Sistema de Tensões Mutuamente Balanceadas, os seus efeitos não poderão ser considerados como esforços locais simplesmente. Eles irão se superpor aos outros esforços aos quais a viga usualmente pode estar submetida em trabalho, e serem até mais intensos que os mesmos, provocando perda da resistência ou estabilidade, e comprometendo o trabalho da estrutura.

A propagação destas tensões normais no fenômeno de flexão na torção (Flexo-Torção), como ilustrado na Figura 2.6, será revista adiante juntamente com o conceito de Bimomento de Flexo-Torção ou simplesmente Bimomento, que tem a dimensão do produto ( $\text{Kgf.cm}^2$ ). A aplicação desse conceito a os elementos de paredes delgadas de uma estrutura (aos quais nem sempre pode-se aplicar o Princípio de Saint-Venant),

requer a utilização de Propriedades que caracterizam a geometria da seção da viga, além daquelas usualmente utilizadas em projeto de acordo com a teoria elementar. Essas propriedades são:

- . Momento Estático Sectorial..... [ cm<sup>4</sup> ]
- . Momentos Lineares Sectoriais..... [ cm<sup>5</sup> ]
- . Momento de Inércia Sectorial..... [ cm<sup>6</sup> ]

e são revisadas no Apêndice A

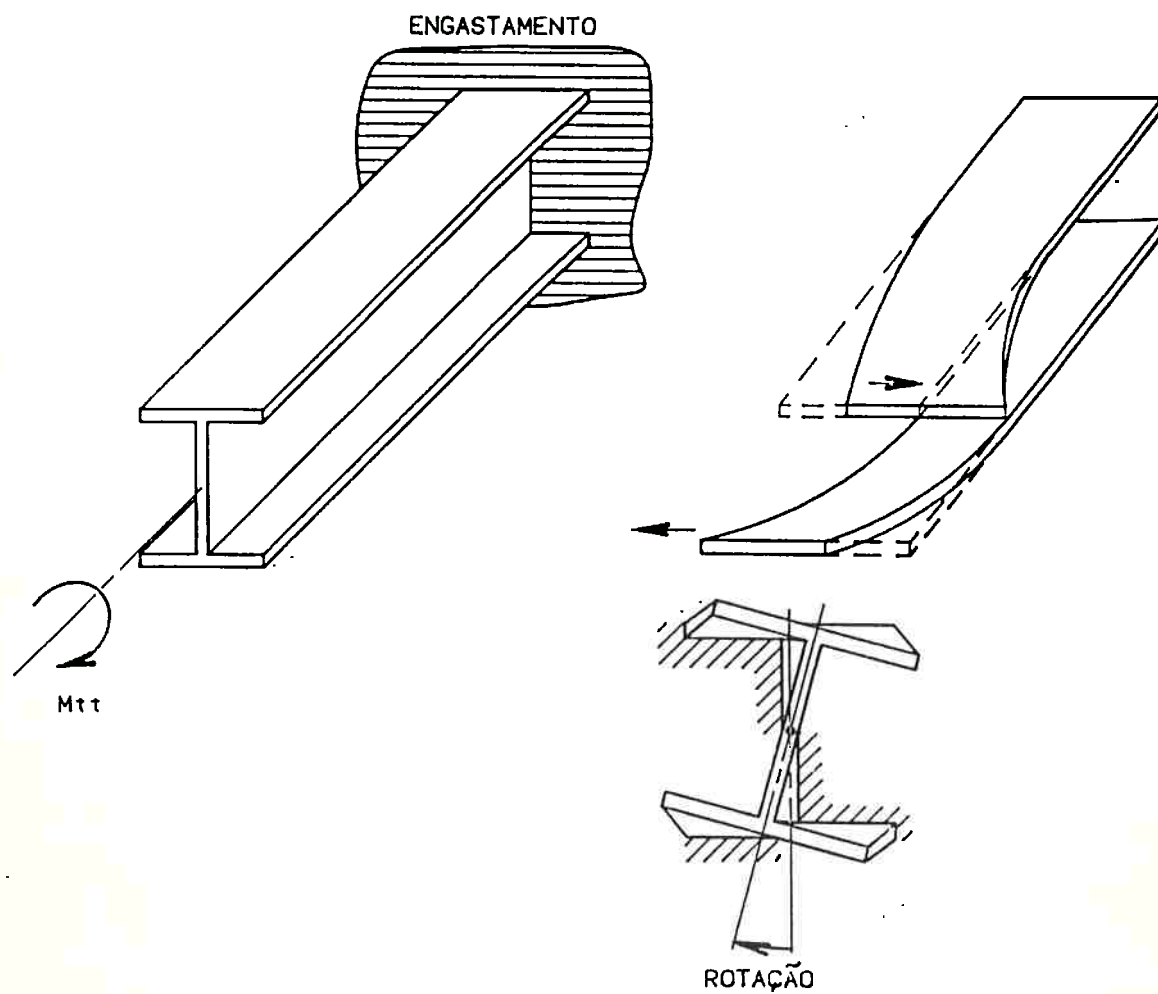


FIGURA 2.5 - TORÇÃO DE PERFIL I DE PAREDES DELGADAS

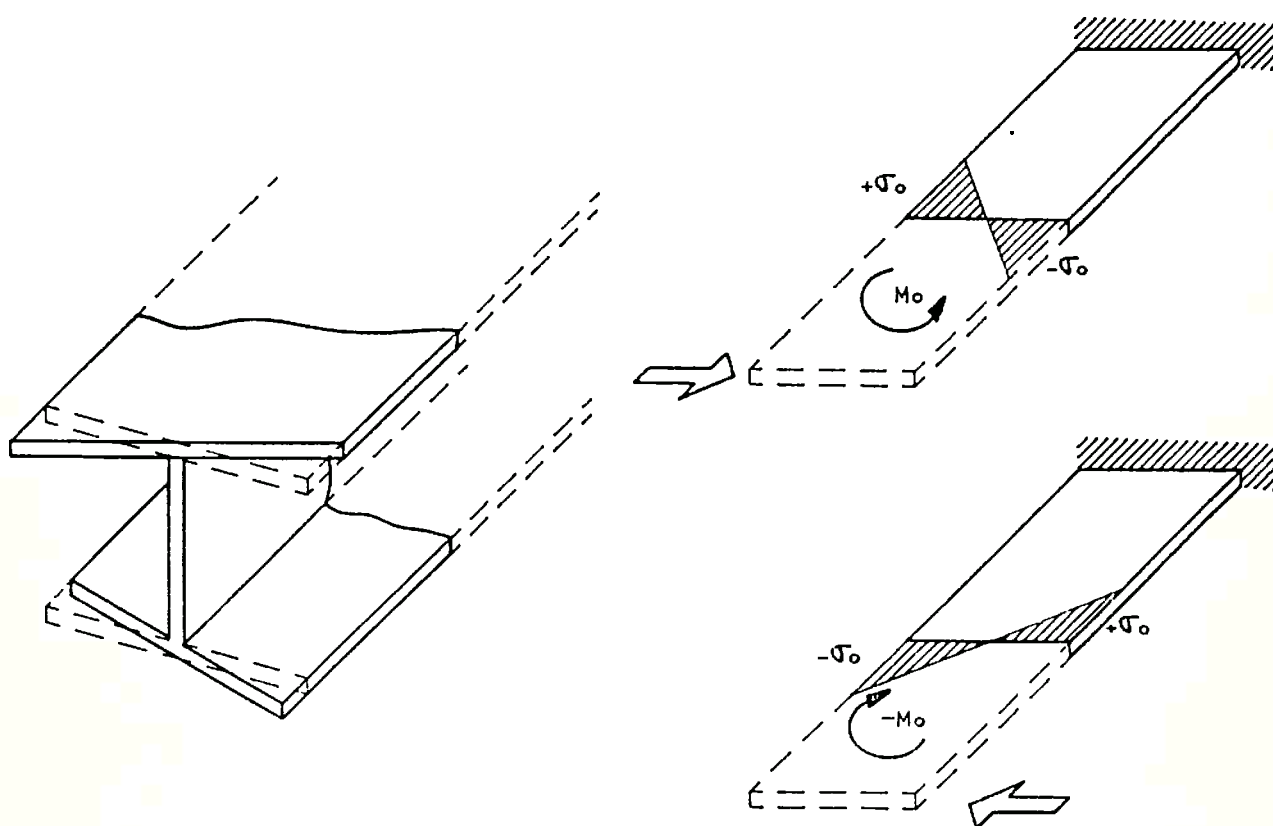


FIGURA 2.6 - FLEXÃO NA TORÇÃO

## 2.2 - O PRINCÍPIO DE SAINT VENANT E O PERFIL DE PAREDES DELGADAS

O princípio de Saint Venant afirma que: "Se nos limites de certa região de um corpo elástico se aplica um sistema de forças, a distâncias substancialmente superiores às às dimensões características desta região, as tensões e deformações são praticamente iguais para todos os sistemas , estaticamente equivalentes de forças". Dessa forma, ao considerarmos o problema de flexão de uma viga, conforme a figura 2.7, não se questiona como se aplica a força  $F$ , e, em regiões suficientemente afastadas dos pontos de aplicação' das forças, as tensões e deformações na viga se determinam somente pelas resultantes, isto é, pela força  $F$  e pelas reações que esta provoca nos apoios. A distância em que as peculiaridades de aplicação das forças perdem a sua importância, tem um valor da ordem de grandeza da seção transversal da viga. A figura 2.8 representa a solicitação de uma viga de paredes delgadas e uma viga sólida, por uma força  $F$ . Nos dois casos, na região vizinha à extremidade, as tensões apresentam distribuições não uniformes na seção transversal, e, geralmente admite-se que esta tem importância somente para regiões que se estendem axialmente sobre a viga a uma distância aproximadamente igual as dimensões da seção transversal; esta admissão é correta para a viga sólida. Para o caso da viga de paredes delgadas, a região de distribuição de tensões não uniformes será sensiivelmente maior, isto é, em um perfil de paredes delgadas a penetração das particularidades de extremidade é muito mais acentuada.

Do ponto de vista físico, a explicação é semelhante



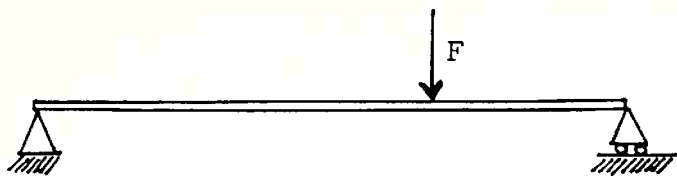


FIGURA 2.7 - FLEXÃO DE UMA VIGA

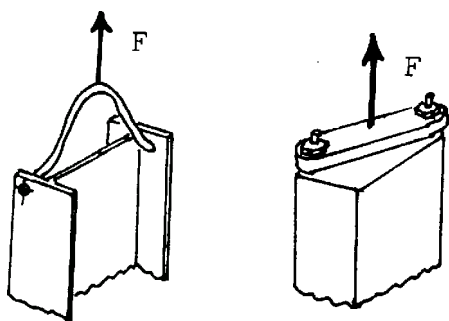


FIGURA 2.8 - SOLICITAÇÕES EM VIGA DE PAREDES DELGADAS E VIGA SÓLIDA

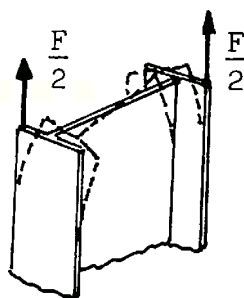


FIGURA 2.9 - CARGAS EXCÊNTRICAS EM VIGA DE PAREDES DELGADAS

ao exemplo da torção do perfil I analisado em 2.1, que considerou as flexões dos flanges; o fenômeno depende da rigidez da alma que une os flanges, e para o caso da viga sólida, a ligação é muito rígida e como consequência a não uniformidade da distribuição de tensões na seção transversal se estende a uma pequena região, o que não ocorre para uma viga de paredes delgadas. Quanto menor a espessura de parede, maiores os efeitos descritos. A figura 2.10 representa (1) a atuação de uma carga excêntrica e a decomposição da mesma em diversas solicitações. A figura 2.10. e representa o componente de solicitação responsável pelo empenamento ou retorção do perfil, para o qual não se aplica a Lei das Seções Planas, ou seja, não é válida a hipótese de Navier. As figuras 2.10.b, 2.10.c e 2.10.d representam respectivamente os diagramas de tensões normais associados à tração uniaxial, flexão no plano vertical e flexão no plano horizontal estudados pela Resistência dos Materiais Elementar.

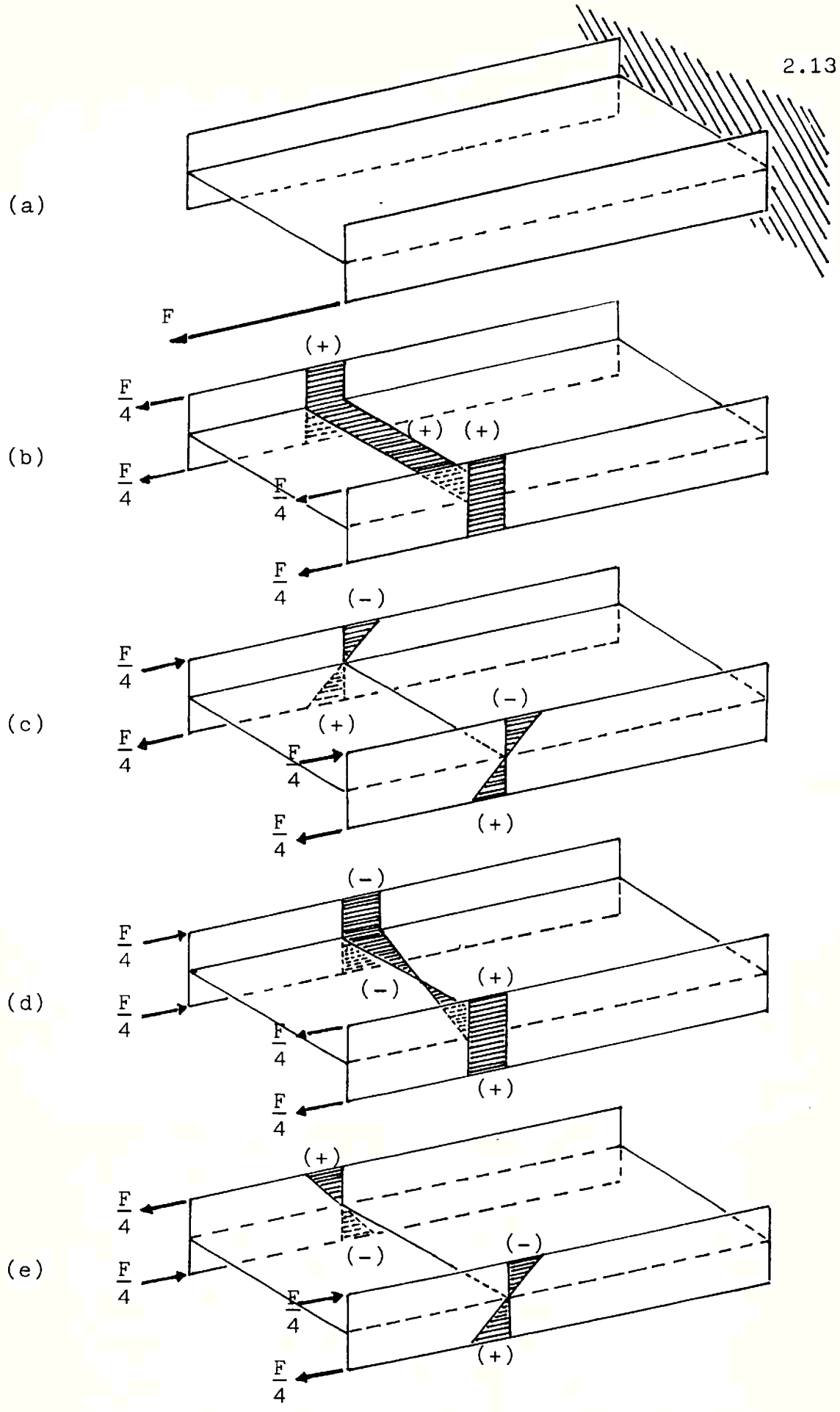


FIGURA 2.10 - ESQUEMA DA DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES NORMAIS EM VIGA DE PAREDES DELGADAS E CARGA EXCÊNTRICA

### 2.3 - REVISÃO DA TEORIA DE VLASOV PARA PERFIS DE PAREDES DELGADAS

Quando um perfil de seção não circular sofre torção ocorrem deformações longitudinais da seção, e esta não se mantém plana. O estudo analítico desse fenômeno se baseia na hipótese do Contorno Rígido, isto é, o contorno da seção transversal do perfil mantém a sua forma durante a torção, embora ocorra rotação da seção transversal e diferentes deformações longitudinais dos Pontos da seção. Em outras palavras, a seção elementar da Figura 2.11 é um corpo rígido em relação aos deslocamentos no plano transversal, porém esta seção é considerada deformável em relação aos deslocamentos fora desse plano. Os pontos de uma seção qualquer da viga com  $x$  constante, podem ter deslocamentos longitudinais, que são relacionados com o empenamento da seção em adição a qualquer deslocamento indicado na Lei da Seções Planas.

Durante a torção da barra, as seções transversais giram em relação ao Centro de Torção  $C$  (Figura 2.12). Se não há restrição ao livre empenamento, a torção de qualquer tipo de seção - aberta ou fechada - é governada pela equação

$$M_x = G \cdot I_t \cdot \frac{d\theta}{dx} \quad (2.1)$$

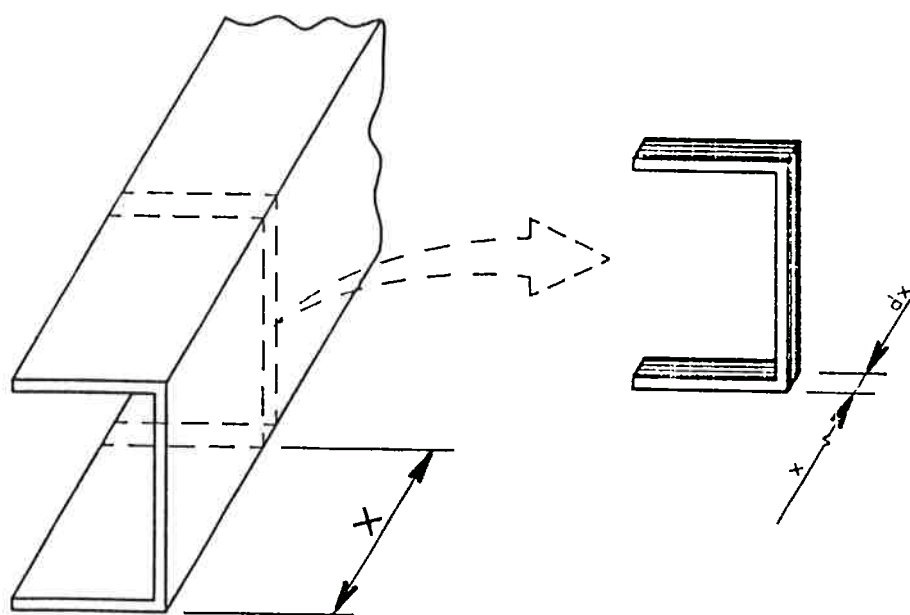


FIGURA 2.11 - A SEÇÃO ELEMENTAR  $dx$  É UM CORPO RÍGIDO EM RELAÇÃO AO MOVIMENTO TRANSVERSAL

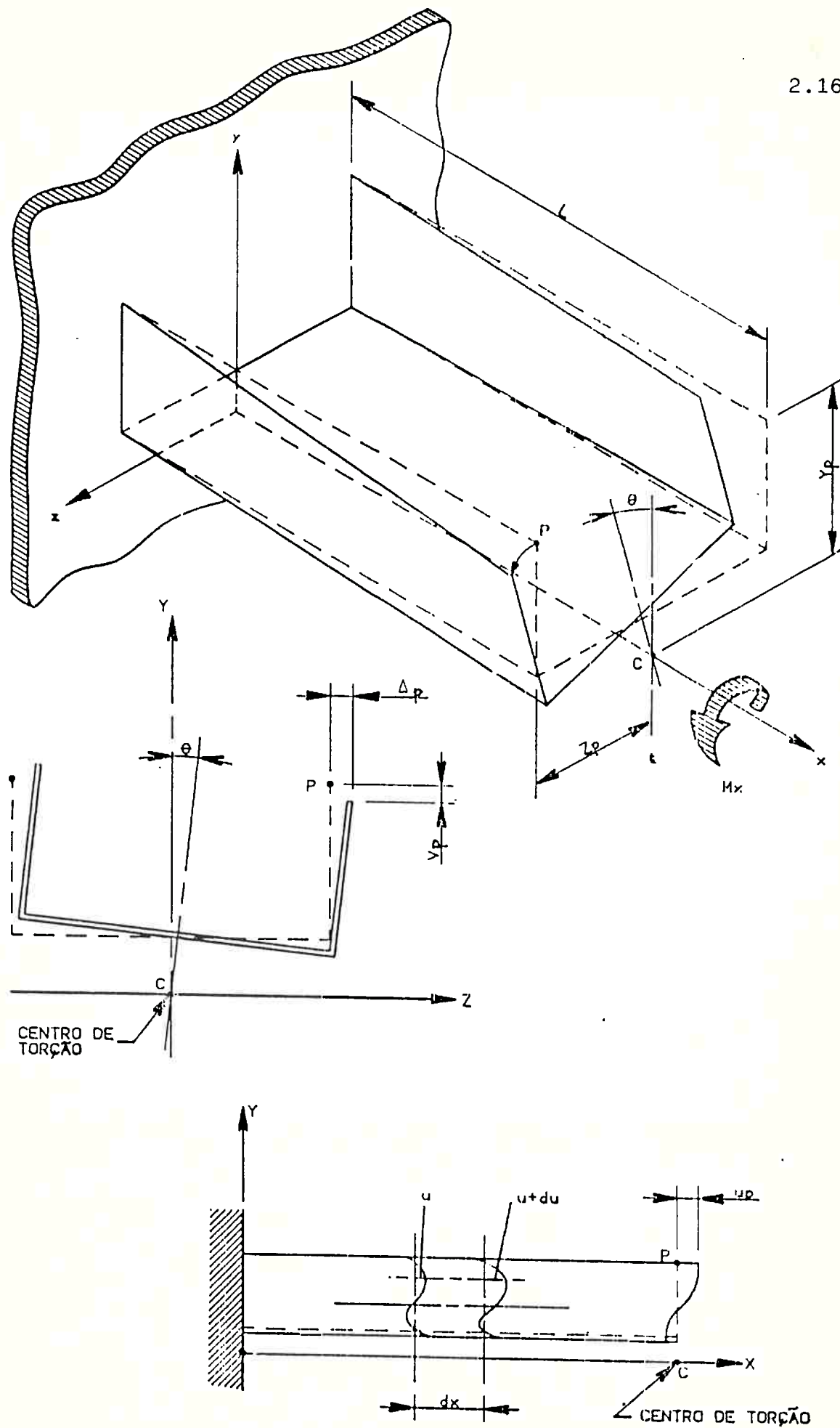


FIGURA 2.12 - DEFORMAÇÕES EM PERFIL ABERTO DE PAREDES DELGA DAS-TORÇÃO RESTRINGIDA

segundo a Resistência dos Materiais Elementar, onde:

$M_x$  - Momento Torçor

$G$  - Módulo de Elasticidade em Cisalhamento

$I_t$  - Momento de Inércia à Torção (Saint Venant)

$\theta' = \frac{d\theta}{dx}$  - Taxa de Variação do ângulo de Torção ou ângulo de Torção Unitário

A Figura 2.12 ilustra a convenção de sinais utilizada no estudo da torção. O momento Torçor  $M_x$  e o ângulo de torção  $\theta$  são positivos no sentido horário quando olhamos ao longo do sentido positivo do eixo  $x$ .

As seções abertas e fechadas diferem acentuadamente quanto à distribuição de tensões de cisalhamento e quanto ao grau de empenamento; a seção fechada envolve muito menos rotação e tensão de cisalhamento para um dado momento torçor, como é representado na figura 2.13. A distribuição de tensões de cisalhamento em uma seção aberta é linear ao longo da espessura, apresentando semelhança com uma chapa plana de largura  $b'$  e espessura  $t$ , onde  $b'$  no caso da figura 2.13 seria o comprimento total do arco. Portanto, tem-se na realidade uma seção transversal "sólida" muito esbelta, e a tensão de cisalhamento pode "circular" somente dentro desta área confinada, e então equilibrar o momento torçor aplicado. Para equilibrar o momento torçor  $M_x$ , deve-se ter tensões  $\tau$  elevadas, pois  $d$  e  $t$  indicados na figura 2.14 são muito pequenos. A análise das figuras 2.13 e 2.14 permite colocar também alguns aspectos importantes relativos à Torção não Restringida, ou Torção de Saint-Venant. Em seção aberta, o empenamento não é causado pelo cisalhamento, visto que o valor médio das tensões de cisalhamento através da es

essura é nulo; é causado inteiramente por rotação de corpo rígido da parede do membro no seu próprio plano (2). Esta rotação é o complemento cinemático direto da rotação axial do membro.

No caso da seção fechada, como é representado na figura 2.13, a "circulação" ocorre em trajetória fechada, apresentando duas vantagens: A tensão de cisalhamento é constante ao longo da espessura, o que representa melhor utilização do material, e, um braço de momento muito maior em relação ao centro de giro, implicando valores de tensões de cisalhamento menores para equilibrar  $M_x$ , justificando os ângulos de rotação menores.

Quando o perfil está submetido à Torção Restringida, como ilustra a Figura 2.12, existe uma resistência adicional ao momento torçor  $M_x$ , e para qualquer tipo de perfil - aberto ou fechado - a equação (2.1) recebe mais um termo que leva em conta esse efeito, e portanto:

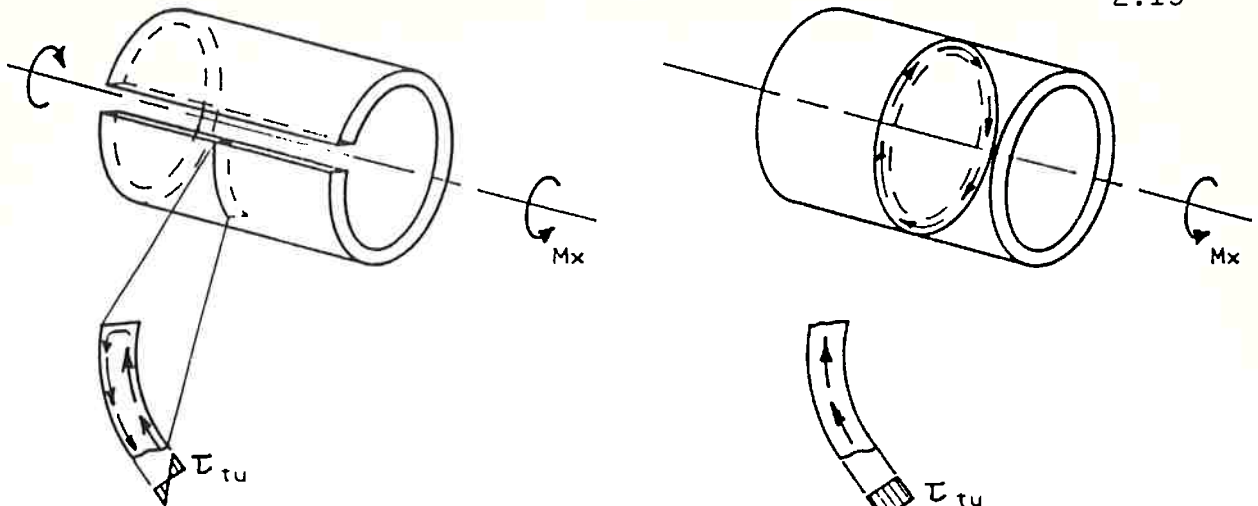
$$M_x = G \cdot I_t \cdot \frac{d\theta}{dx} - E \cdot I_w \cdot \frac{d^3\theta}{dx^3} \quad (2.2)$$

onde  $I_w$  é o Momento de Inércia Sectorial ( $\text{cm}^6$ ), cuja revisão é dada no Apêndice A. A explicação física das parcelas' do 2º membro da equação anterior é a seguinte:

Quando na extremidade da viga da Figura 2.15 aplica-se o momento torçor  $M_x = M_{tt}$ , temos o diagrama de momentos torçores ilustrado. O momento torçor atuante na seção transversal admite dois componentes:

. a parcela componente do Momento Torçor  $M_{tt}$ , que é respon





TENSÃO DE CISALHAMENTO NA  
TORÇÃO- PERFIL ABERTO

TENSÃO DE CISALHAMENTO NA  
TORÇÃO- PERFIL FECHADO

FIGURA 2.13 - TORÇÃO DE PERFIL ABERTO E PERFIL FECHADO

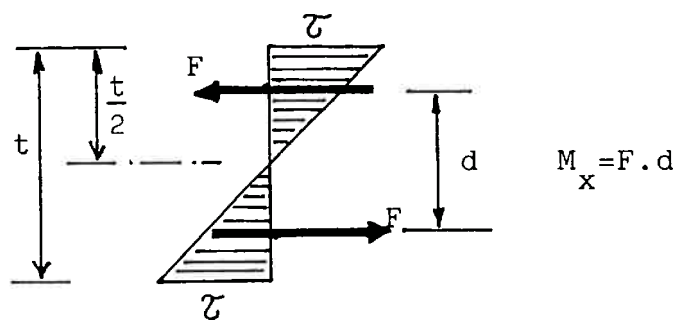


FIGURA 2.14 - PAR DE FORÇAS F QUE EQUILIBRAM O MOMENTO  
TORÇOR  $M_x$

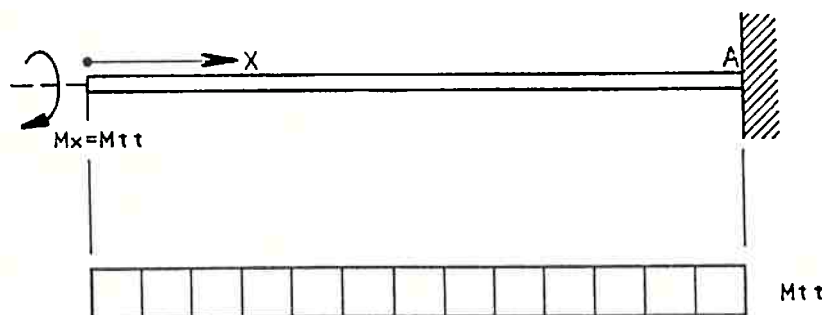


FIGURA 2.15 - DIAGRAMA DE MOMENTOS TORÇORES

sável pela rotação da seção, e que provoca ângulo unitário detorção. Este componente é tratado como responsável pela Torção Uniforme da Viga ( $M_{tu}$ ), aplicando-se a teoria Elemental da Torção. Como a restrição à rotação e ao empenamento são progressivamente maiores à medida que a seção se aproxima do engastamento, o componente  $M_{tu}$  diminui com a distância ao engastamento, tornando-se nula em A;

a parcela componente do Momento Torçor  $M_{tt}$  que está associada à restrição apresentada pela seção ao empenamento, ou seja, associada à Flexo-Torção. Como a restrição ao empenamento é progressivamente maior próximo ao engastamento, o componente de flexo-torção  $M_{ft}$  também o será, atingindo seu valor máximo em A.

Portanto, para uma seção qualquer da viga, pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
 M_{tt} &= M_x = M_{tu} + M_{ft} \\
 M_{tt} &= M_x = G \cdot I_t \cdot \frac{d\theta}{dx} - E \cdot I_w \cdot \frac{d^3\theta}{dx^3} \quad (2.3)
 \end{aligned}$$

As tensões tangenciais resultam em um momento torçor atuante na seção ( $M_x = M_{tt}$ ), que pode ser interpretado como a soma de dois momentos, conforme a figura 2.16:

- a) momento causado pelas tensões de cisalhamento linearmente distribuídas ao longo da espessura do perfil, e oriundas da Torção Uniforme ( $\mathcal{T}_{tu} \rightarrow M_{tu}$ );

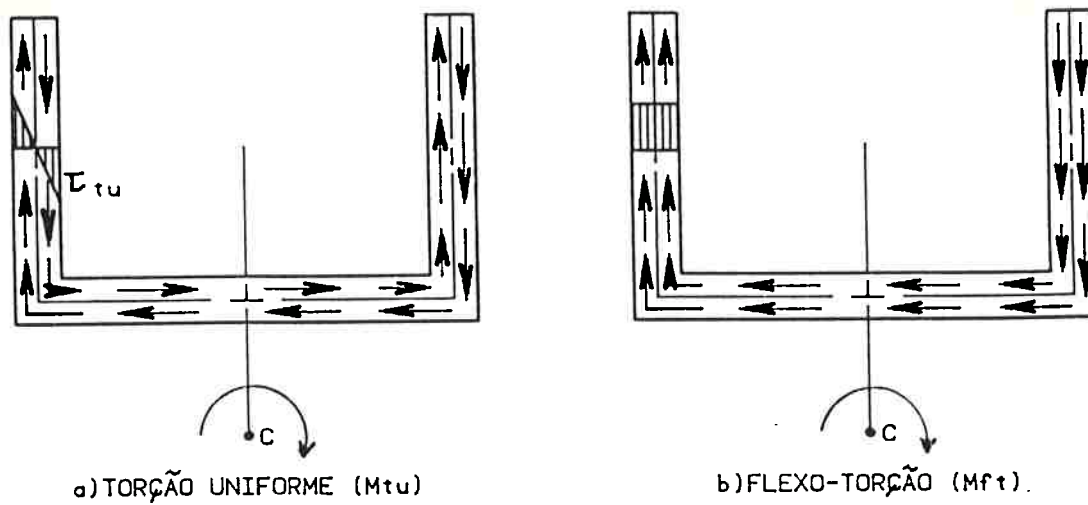


FIGURA 2.16 - DISTRIBUIÇÃO DAS TENSÕES DE CISALHAMENTO DEVIDO A TORÇÃO UNIFORME E FLEXO-TORÇÃO

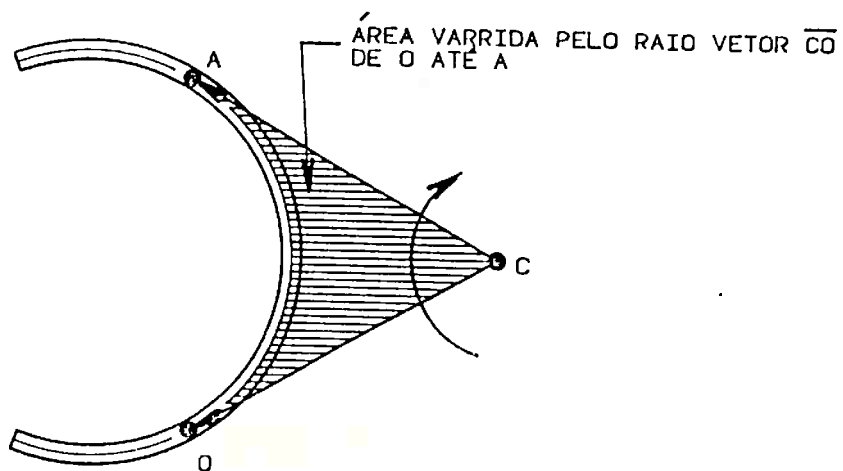


FIGURA 2.17 - ÁREA VARRIDA PELO RAI O VETOR  $\overline{CO}$

- b) momento causado pelas tensões de cisalhamento uniforme mente distribuídas ao longo da espessura do perfil, e o riundas da Flexo-Torção ( $\zeta_{ft} \rightarrow M_{ft}$ ).

#### 2.4 - TENSÕES NORMAIS NA FLEXO-TORÇÃO

O estudo analítico completo, com o desenvolvimento das expressões para cálculo das tensões normais e tensões de cisalhamento devido à flexo-torção, pode ser encontrado nas referências (1), (2), (3) e (4). Na figura 2.12 é representada a rotação da seção transversal e diferentes deslocamentos longitudinais  $u$  dos pontos da seção da viga. Como as seções giram em relação ao Centro de Torção  $C$ , podemos escrever:

$$\begin{aligned} v &= -\theta \cdot z \text{ (segundo o eixo } y) \\ \Delta &= \theta \cdot y \text{ (segundo o eixo } z) \end{aligned} \quad (2.4)$$

No caso do ponto  $P$ , da seção extrema, temos:

$$\begin{aligned} v_p &= -\theta \cdot z_p \\ \Delta_p &= \theta \cdot y_p \end{aligned} \quad (2.5)$$

A variação dos deslocamentos axiais por empenamento ( $u$ ) ao longo do contorno da seção transversal é dada por uma função  $w(s)$  que caracteriza o empenamento ao longo desse contorno. Essa função não varia na direção axial da barra prismática e é conhecida como Área Sectorial Principal, pois está associada à área do Setor, varrida pelo raio vetor que une o centro de torção  $C$  ao contorno do perfil, como mostra a Figura 2.17. Tal definição é recordada no Apê

dice A.

Adicionalmente, verifica-se que a intensidade do empenamento é proporcional à taxa de variação do ângulo de torção. Assim:

$$u = w \cdot \theta' \quad (2.6)$$

Quando um elemento da viga sofre um deslocamento axial  $du$ , teremos:

$$\epsilon = \frac{du}{dx} \rightarrow \epsilon = \frac{d}{dx} [w \cdot \theta'] \rightarrow \epsilon = w \cdot \frac{d^2 \theta}{dx^2} = w \cdot \theta'' \quad (2.7)$$

Como

$$\sigma = \epsilon \cdot E \rightarrow \sigma_{ft} = E \cdot \theta'' \cdot w \quad (2.8)$$

Portanto, a tensão normal na seção, ocasionada pela flexo-torção varia de acordo com  $w(s)$ . Tais tensões estão associadas à parcela das deformações longitudinais que não obedecem à lei das seções planas, e são resultantes da torção.

Se na seção transversal da viga não agem momento fletor e nem força normal que possam provocar o aparecimento de tensões normais, as tensões  $\sigma_{ft}$  são Auto-Equilibradas na seção como foi mostrado na Figura 2.6, e portanto ao longo da área A da seção transversal, podemos escrever:

Equilíbrio de Forças

$$\int_A \sigma_{ft} \cdot dA = \int_A E \cdot \theta'' \cdot w \cdot dA = 0 \quad (2.9)$$

## Equilíbrio de Momentos

$$\int_A \sigma_{ft} \cdot y \cdot dA = \int_A E \cdot \theta'' \cdot w \cdot y \cdot dA = 0 \quad (2.10)$$

$$\int_A \sigma_{ft} \cdot z \cdot dA = \int_A E \cdot \theta'' \cdot w \cdot z \cdot dA = 0$$

Como  $E \cdot \theta''$  é constante para uma seção transversal, temos :

$$\int_A w \cdot dA = 0 \quad (2.11)$$

$$\int_A w z \cdot dA = 0$$

$$\int_A w \cdot y \cdot dA = 0$$

As conclusões de (2.11) constituem propriedades da função  $w$ , chamada Área Sectorial Principal, revisada no Apêndice A.

A determinação das tensões normais devido a flexo-torção ( $\sigma_{ft}$ ), pode ser efetuada por meio do conhecimento do Bimomento. O Bimomento agente na seção é definido por :

$$B = \int_A \sigma_x \cdot w \cdot dA \quad (2.12)$$

Substituindo-se (2.8) em (2.12), considerando a viga sujeita apenas ao momento torçor ( $\sigma_x = \sigma_{ft}$ ), temos :

$$B = \int_A E \cdot \theta'' \cdot w \cdot w \cdot dA \quad B = E \cdot \theta'' \int_A w^2 \cdot dA$$

Como  $I_w = \int_A w^2 \cdot dA$  é o momento de Inércia Sectorial ( $\text{cm}^6$ ) revisado no Apêndice A, temos:

$$B = E \cdot \Theta'' \cdot I_w \quad (2.13)$$

sendo  $E \cdot \Theta'' = \frac{\sigma_{ft}}{w}$ , vem:

$$B = \frac{\sigma_{ft}}{w} \cdot I_w \longrightarrow \sigma_{ft} = \frac{B}{I_w} \cdot w$$

Para um ponto  $i$  do contorno  $s$  da seção transversal, a Área Sectorial (ou Coordenada Sectorial) nesse ponto será denotada por  $W_{si}$ , e dessa forma teremos para a expres-são anterior:

$$\sigma_{ft} = \frac{B}{I_w} \cdot W_{si} \quad (2.14)$$

Portanto, o cálculo da tensão normal devido aos efeitos do empenamento, é feito operacionalmente de forma semelhante àquele da flexão, onde:

- . em substituição ao Momento Fletor ( $\text{kgf.cm}$ ) considera-se o Bimomento ( $\text{kgf.cm}^2$ );
- . em substituição ao Momento de Inércia ( $\text{cm}^4$ ) de área considera-se o Momento de Inércia Sectorial ( $\text{cm}^6$ );
- . em substituição a Coordenada do Ponto Considerado  $y$  ou  $z$  ( $\text{cm}$ ) considera-se a Coordenada Sectorial  $w$  ( $\text{cm}^2$ ).

A tabela 2.1 ilustra esse procedimento.

TABELA 2.1 - COMPARAÇÃO DAS FORMULAÇÕES PARA CÁLCULO DE TENSÕES NORMAIS DE FLEXÃO E FLEXO-TORÇÃO

|  | FLEXÃO  | FLEXO-TORÇÃO  |
|--|---|---|
| Esforço Atuante na Seção                       | Momento Fletor [M]<br>kgf.cm  | Bimomento [B]<br>kgf.cm <sup>2</sup>                              |
| Propriedade da Seção                           | Momento de Inércia [I]<br>cm <sup>4</sup>                                 | Momento de Inércia Sectorial [I <sub>w</sub> ]<br>cm <sup>6</sup> |
| Coordenada do Ponto em que se calcula a Tensão | Coordenada [y ou z]<br>cm   | Coordenada Sectorial [w]<br>cm <sup>2</sup>                       |
| Cálculo da Tensão Normal                       | $\sigma = \frac{M}{I} \cdot y \qquad \sigma_{ft} = \frac{B}{I_w} \cdot w$ |   |

As propriedades  $w$  e  $I_w$ , dependem da forma da seção transversal do perfil de paredes delgadas. Resta portanto, determinar  $B$  e dessa forma calcular  $\sigma_{ft}$ , o que será feito no item seguinte.

### 2.5 - EQUAÇÃO DO BIMOMENTO

A determinação da tensão normal  $\sigma_{ft}$  nos diversos pontos de uma seção transversal, requer o conhecimento do Bimomento nesta seção.

Considerando um trecho de viga de comprimento  $dx$  e sendo  $m$  o momento dos esforços externos por unidade de comprimento, em relação a linha dos centros de torção, o equilíbrio do elemento impõe que (figura 2.18) :



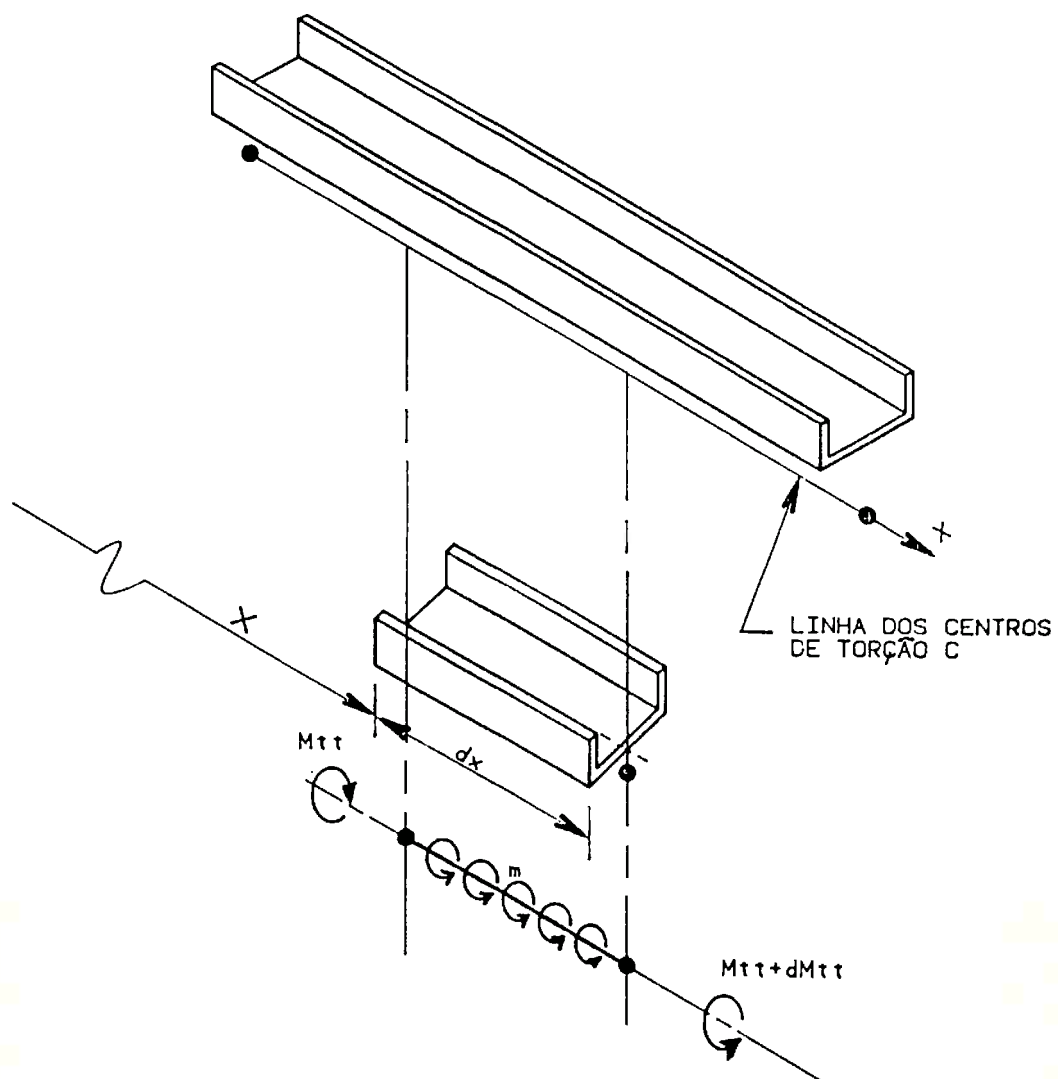


FIGURA 2.18 - EQUILÍBRIO DE UM ELEMENTO DE VIGA NA TORÇÃO

$$(M_{tt} + dM_{tt}) + m \cdot dx - M_{tt} = 0 \rightarrow \frac{dM_{tt}}{dx} = -m \quad (2.15)$$

Da equação (2.2):

$$M_x = M_{tt} = G \cdot I_t \cdot \frac{d\theta}{dx} - E \cdot I_w \cdot \frac{d^3\theta}{dx^3},$$

e derivando em relação a x, temos:

$$\frac{dM_{tt}}{dx} = G \cdot I_t \cdot \theta'' - E \cdot I_w \cdot \theta'''' \quad (2.16)$$

de (2.13) temos que  $\theta'' = \frac{B}{E \cdot I_w}$  e em (2.16)

$$\frac{dM_{tt}}{dx} = G \cdot I_t \cdot \frac{B}{E \cdot I_w} - E \cdot I_w \cdot \left(\frac{B}{E \cdot I_w}\right)'', \quad \text{e de 2.15}$$

$$-m = \frac{G \cdot I_t}{E \cdot I_w} \cdot B - B'' \rightarrow B'' - \frac{G \cdot I_t}{E \cdot I_w} \cdot B = m \quad (2.17)$$

$$\text{Fazendo } \alpha^2 = \frac{G \cdot I_t}{E \cdot I_w} \quad (2.18)$$

teremos:

Equação Diferencial do Bimomento

$$B'' - \alpha^2 \cdot B = m \quad (2.19)$$

A solução da equação (2.19) permite-nos obter o diagrama dos Bimomentos em função da posição x da seção da viga, e calcular em seguida  $\sigma_{ft}$ . A solução geral da equação (2.19) é conhecida na Teoria de Equações Diferenciais; e é dada por:

$$B = C_1 \cdot \text{sh}[\alpha \cdot x] + C_2 \text{ ch } [\alpha \cdot x] + m_1 \quad (2.20)$$

onde  $m_1$  é uma solução particular da equação (2.19). Nos casos em que  $m = 0$ ,  $m = \text{constante}$  ou  $m$  variar linearmente com  $x$ , solução particular da equação (2.19) será dada por:

$$m_1 = -\frac{m}{\alpha^2} \quad (2.21)$$

As constantes  $C_1$  e  $C_2$  da equação (2.20) são determinadas considerando-se as condições de contorno de cada viga a ser estudada. Assim:

#### Extremidades Engastadas

$$\theta' = \frac{d\theta}{dx} = 0 \quad M_{tu} = G \cdot I_t \cdot \frac{d\theta}{dx} = 0 \quad (2.22)$$

#### Extremidades Livres para Empenar

Nas extremidades livres o Bimomento é conhecido, pois pode-se aplicar a expressão:

$$B = \int_A \sigma \cdot w \cdot dA = \int_A w \cdot (\alpha dA) = \int_A w \cdot d(\text{força}), \text{ isto é:}$$

se são aplicadas Forças Axiais Concentradas na extremidade o Bimomento será igual ao produto da força pelo valor da função  $w$  no ponto de aplicação, somando-se todos os efeitos, ou seja:

$$\sum_{i=1}^n P_i \cdot W_i \quad n \text{ Forças Axiais Concentradas} \quad 2.30$$

. se houver Forças Axiais Distribuídas  $p$  ao longo do contorno da seção teremos:

$$\int_A p \cdot w \cdot dA$$

Assim, na extremidade livre teremos:

$$B = \int_A p \cdot w \cdot dA + \sum_{i=1}^n P_i \cdot W_i \quad (2.23)$$

onde  $p$  e  $P$  são positivos quando forem de tração.

No caso de não ocorrência de Forças Axiais na Extremidade Livre, teremos:

$$B = 0$$

## 2.6 - TENSÕES DE CISALHAMENTO NA FLEXO-TORÇÃO

A existência de tensões normais que variam ao longo da direção axial da barra, devido ao fenômeno de flexo-torção, resulta no aparecimento de tensões de cisalhamento, como já observado anteriormente. O estudo teórico com o desenvolvimento analítico que permite a obtenção da expressão para cálculo de  $\tau_{ft}$  devido a flexo-torção pode ser encontrado nas referências (1), (2), (3) e (4).

Verifica-se que para um ponto  $i$  do contorno da seção, extremo do arco  $AB$ , a tensão de cisalhamento devido à flexo-torção é dada por:

$$\tau_{ft_i} = - \frac{M_{ft}}{I_w \cdot t} \int_{\widehat{AB}} w \cdot dA \quad (2.24)$$

onde  $M_{sw} = \int_{AB} w \cdot dA$  é o Momento Estático Sectorial da área hachurada da Figura 2.19 (arco AB).

assim,

$$\tau_{ft} = - \frac{M_{ft}(x) \cdot M_{sw}(s)}{I_w \cdot t} \quad (2.25)$$

dessa forma, o cálculo da tensão de cisalhamento devido aos efeitos do empenamento, é feito operacionalmente de forma semelhante ao cálculo das tensões de cisalhamento na flexão, onde:

- . em substituição à força Cortante (kgf) considera-se o Momento Torçor  $M_{ft}$ , componente de flexo-torção (kgf.cm) ;
- . em substituição ao Momento Estático ( $\text{cm}^3$ ) de área, considera-se o Momento Estático Sectorial ( $\text{cm}^4$ );
- . em substituição ao Momento de Inércia ( $\text{cm}^4$ ) de área, considera-se o Momento de Inércia Sectorial ( $\text{cm}^6$ ).

A Tabela 2.2 ilustra esse procedimento.



FIGURA 2.19 - ÁREA ASSOCIADA AO PONTO  $i$  PARA CÁLCULO DO MOMENTO ESTÁTICO

TABELA 2.2 - COMPARAÇÃO DAS FORMULAÇÕES PARA CÁLCULO DE TENSÕES DE CISALHAMENTO NA FLEXÃO E NA FLEXTORÇÃO

|                                   | FLEXÃO  | FLEXTORÇÃO   |
|-----------------------------------|---|--|
| Esforço Atuante na Seção          | Força Cortante [Q]<br>kgf                     | Momento Torçor [ $M_{ft}$ ],<br>componente de $M_{tt}$<br>kgf.cm |
| Propriedades da Seção             | Momento Estático [ $M_B$ ]<br>cm <sup>3</sup> | Momento Estático Sectorial [ $M_{sw}$ ]<br>cm <sup>4</sup>       |
|                                   | Momento de Inércia [I]<br>cm <sup>4</sup>     | Momento de Inércia Sectorial [ $I_w$ ]<br>cm <sup>6</sup>        |
| Cálculo da Tensão de Cisalhamento | $\tau = \frac{Q \cdot M_B}{t \cdot I}$        | $\tau_{ft} = \frac{-M_{ft} \cdot M_{sw}}{t \cdot I_w}$           |

2.7 - EQUAÇÕES GERAIS DA TEORIA DE VLASOV

Nas referências (1), (2), (3) e (4), como já mencionado, encontra-se o estudo analítico completo da flexo-torção. Foi elaborado um sumário das Equações da Teoria de Vlasov, que são apresentadas a seguir:

$$\sigma_{ft} = E \cdot w \cdot \theta'' \quad (2.26)$$

$$M_{ft} = - \frac{dB}{dx} = - B' \quad (2.27)$$

$$\frac{dM_{tt}}{dx} = -m \quad (2.28)$$

$$E \cdot I_w \cdot \theta' = \frac{M_{tu}}{\alpha^2} \quad (2.29)$$

$$E \cdot I_w \cdot \theta'' = B \quad (2.30)$$

$$E \cdot I_w \cdot \theta''' = - M_{ft} \quad (2.31)$$

$$E \cdot I_w \cdot \theta'''' = \frac{dM_{tu}}{dx} + m = \alpha^2 B + m \quad (2.32)$$

$$E \cdot I_w \cdot \theta'''' - G \cdot I_t \cdot \theta'' - m = 0 \quad (2.33)$$

$$M_{tt} = G \cdot I_t \cdot \theta' - E \cdot I_w \cdot \theta''' \quad (2.34)$$

$$\frac{dM_{tu}}{dx} = \alpha^2 \cdot B \quad (2.35)$$

$$\frac{d^2 M_{tu}}{dx^2} = -\alpha^2 \cdot M_{ft} \quad (2.36)$$

## 2.8 - ROTEIRO PARA APLICAÇÃO DA TEORIA

No Apêndice A é apresentado um exemplo prático de cálculo das propriedades sectoriais necessárias ao estudo das tensões normais e de cisalhamento da flexo-torção. Para o caso mais geral, pode-se estabelecer uma rotina de cálculo visando a obtenção de  $\sigma_{ft}$  e  $\tau_{ft}$ , como é mostrado a seguir na figura 2.20



PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS PARA ESTUDO DA FLEXO-TORÇÃO (Apêndice A)

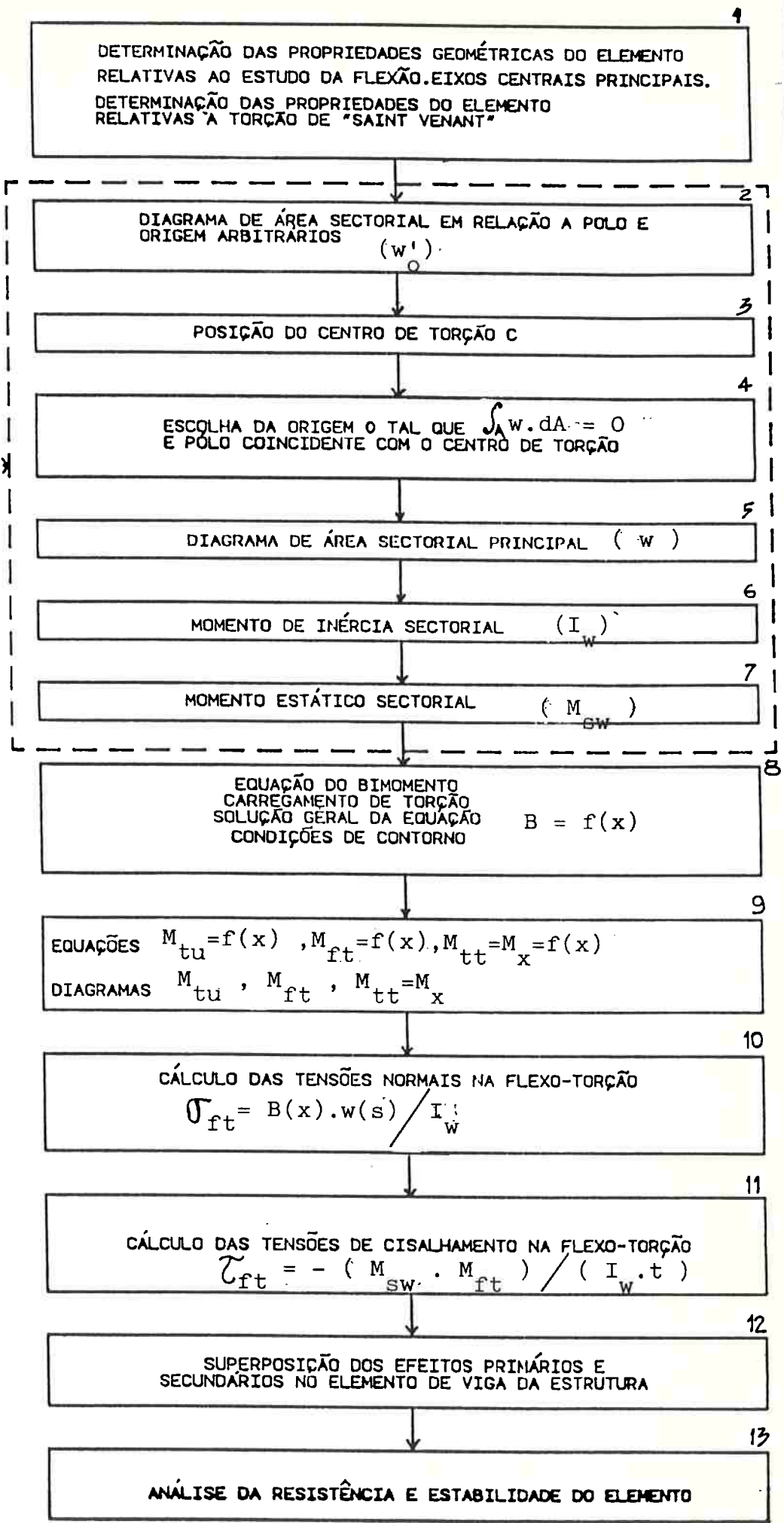


FIGURA 2.20 - REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DA ROTINA DE CÁLCULO PARA OBTENÇÃO DE  $\sigma$  E  $\tau$

## CAPÍTULO III

ANALOGIA FLEXÃO-RETORÇÃO3.1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS

A teoria de Vlasov revisada no Capítulo II, permite o equacionamento do problema da Retorção (ou Flexo-Torção) para perfis abertos de paredes delgadas, por intermédio da Equação Diferencial do Bimomento de Flexo-Torção. Vlasov (1) encontrou a solução desta equação para diversas condições de contorno e para vários casos de carregamentos aplicados a uma viga isolada, e que ocasionavam torção na viga, decorrente da existência de excentricidade da carga em relação ao centro de torção, como representado na figura 3.1. Tais condições englobam os casos clássicos de vigas em condições de vínculos ideais já conhecidos da Resistência dos Materiais Elementar, e portanto, até certo ponto, com um espectro limitado de aplicação. Para uma estrutura real constituída por perfis abertos de paredes delgadas, as condições de extremidade de cada viga objeto de análise, não são perfeitamente conhecidas como nos casos ideais mencionados anteriormente; cada elemento está vinculado a outros elementos estruturais que apresentam características de rigidez a serem consideradas em função do tipo de ligação entre eles, e em função da rigidez dos próprios elementos.

A figura 3.2.a representa um exemplo de transmissão de esforços entre duas vigas perpendiculares de seções circulares. O perfil circular não sofre empenamento durante a torção de forma que o momento torçor na viga 1 está em equilíbrio com o momento fletor na viga 2. Este caso, correspon

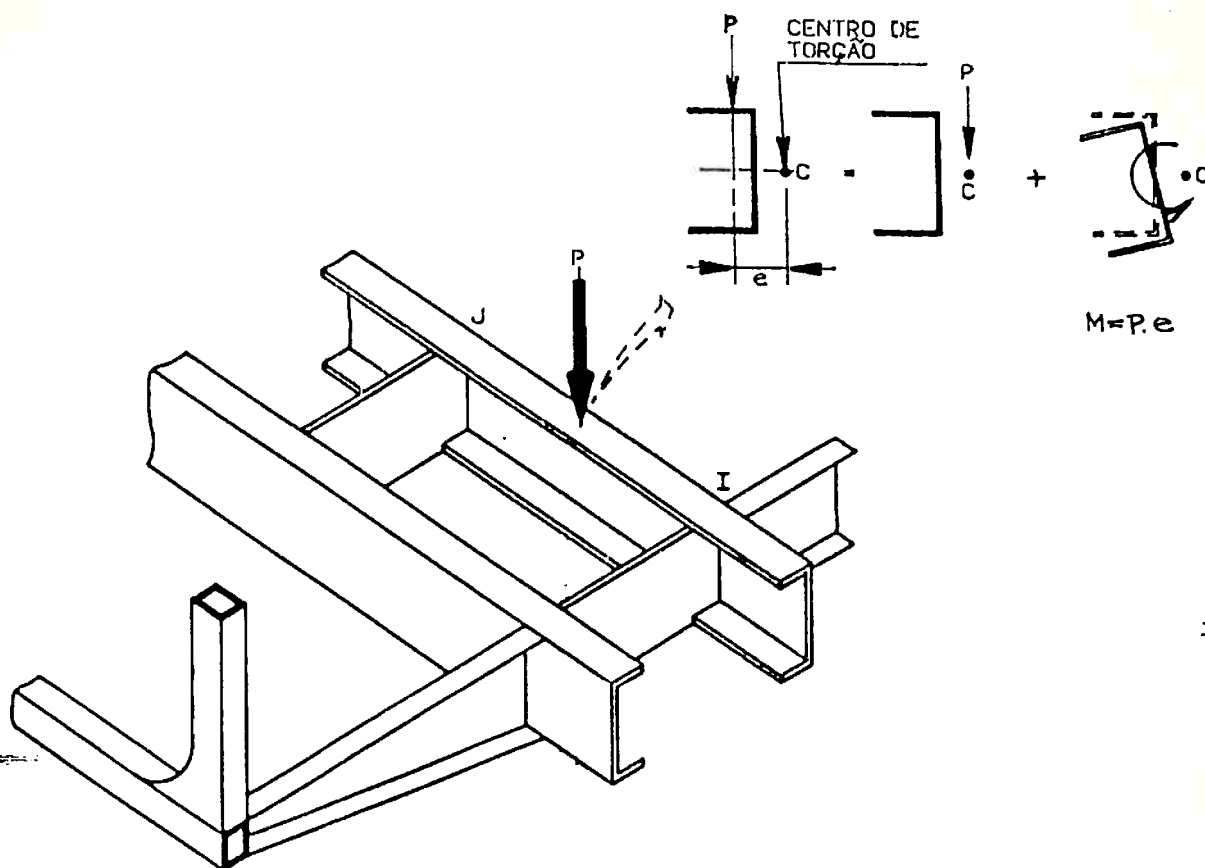


FIGURA 3.1 - EXEMPLO DE CARGA APLICADA EM VIGA COM EXCENTRICIDADE  $e$ , INTRODUZINDO MOMENTO TORÇOR

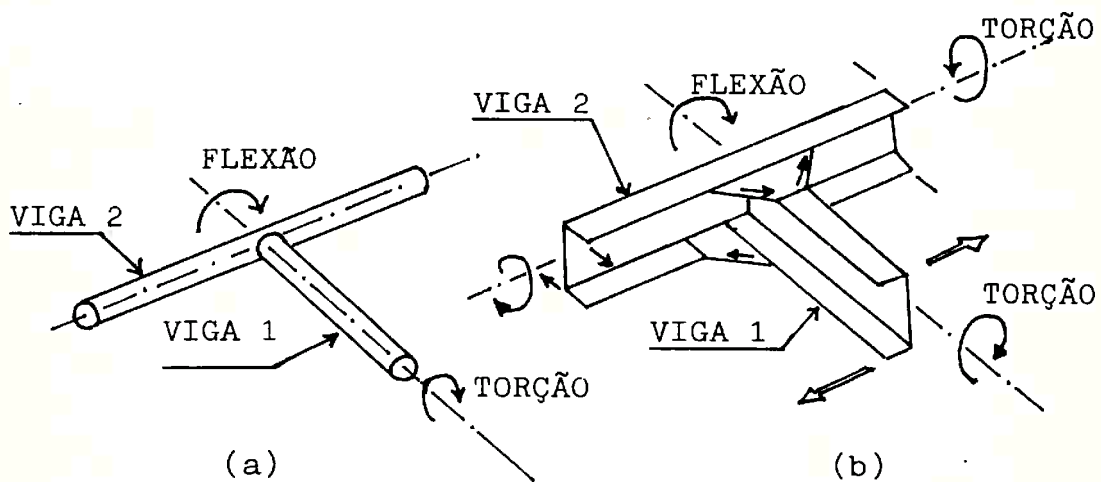


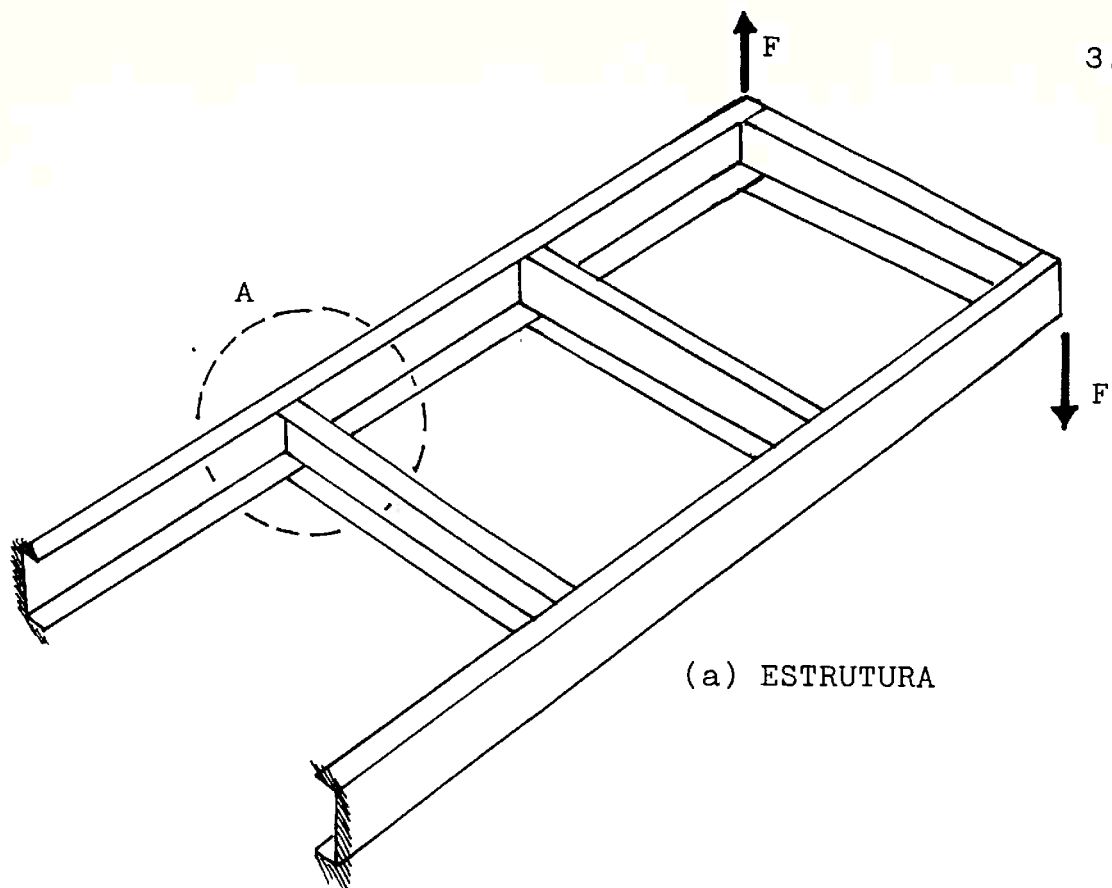
FIGURA 3.2 - TRANSMISSÃO DE MOMENTOS TORÇORES PARA OS CASOS DE EXISTÊNCIA OU NÃO DE EMPENAMENTO

de à abordagem clássica da Resistência dos Materiais Elementar. A figura 3.2.b representa a transmissão de esforços entre duas vigas C perpendiculares. No membro 1 a torção provoca a flexão dos flanges em sentidos opostos. Essas flexões diferenciais são transmitidas aos flanges superior e inferior da viga 2, de modo que a viga sofre também torção. Assim, a torção do membro 1 também provoca torção no membro 2, e não apenas flexão, como no exemplo citado na figura 3.2.a. O exemplo da união de perfis C, tal como ocorre em uma estrutura real, evidencia que o empenamento nesse caso não é perfeitamente restrito nem completamente livre, mas situa-se em uma condição intermediária entre esses casos ideais. Portanto, a aplicação da teoria explanada no capítulo 2, considerando uma viga da estrutura com a condição de restrição total ao empenamento, ou liberdade total ao empenamento, poderia levarnos a resultados bastante distintos da realidade.

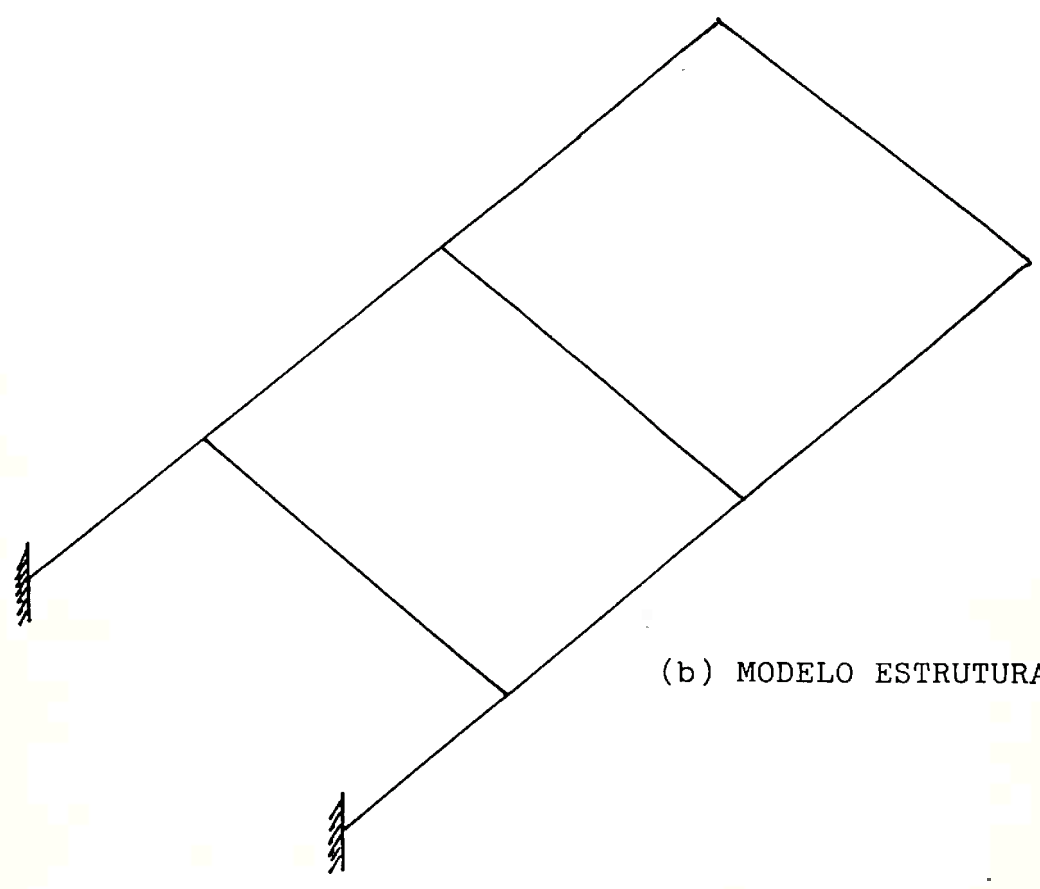
### 3.2 - ALTERNATIVAS PARA DISCRETIZAÇÃO

As dificuldades mencionadas em 3.1 poderiam ser superadas, por intermédio da utilização de uma ferramenta poderosa de análise, tal como o Método dos Elementos Finitos, que considera um modelo matemático discreto equivalente ao problema contínuo real. A discretização de problemas em engenharia, visa superar a intratabilidade do tipo de problema contínuo como citado em 3.1, porém, a modelagem desse tipo de problema, merece cuidados especiais, como é mencionado a seguir.

A figura 3.3.a representa uma estrutura constituída



(a) ESTRUTURA



(b) MODELO ESTRUTURAL

FIGURA 3.3 - ESTRUTURA CONSTITUÍDA DE PERFIS DE PAREDES DELGADAS E MODELO ESTRUTURAL COM ELEMENTOS DE VIGA CONVENCIONAIS

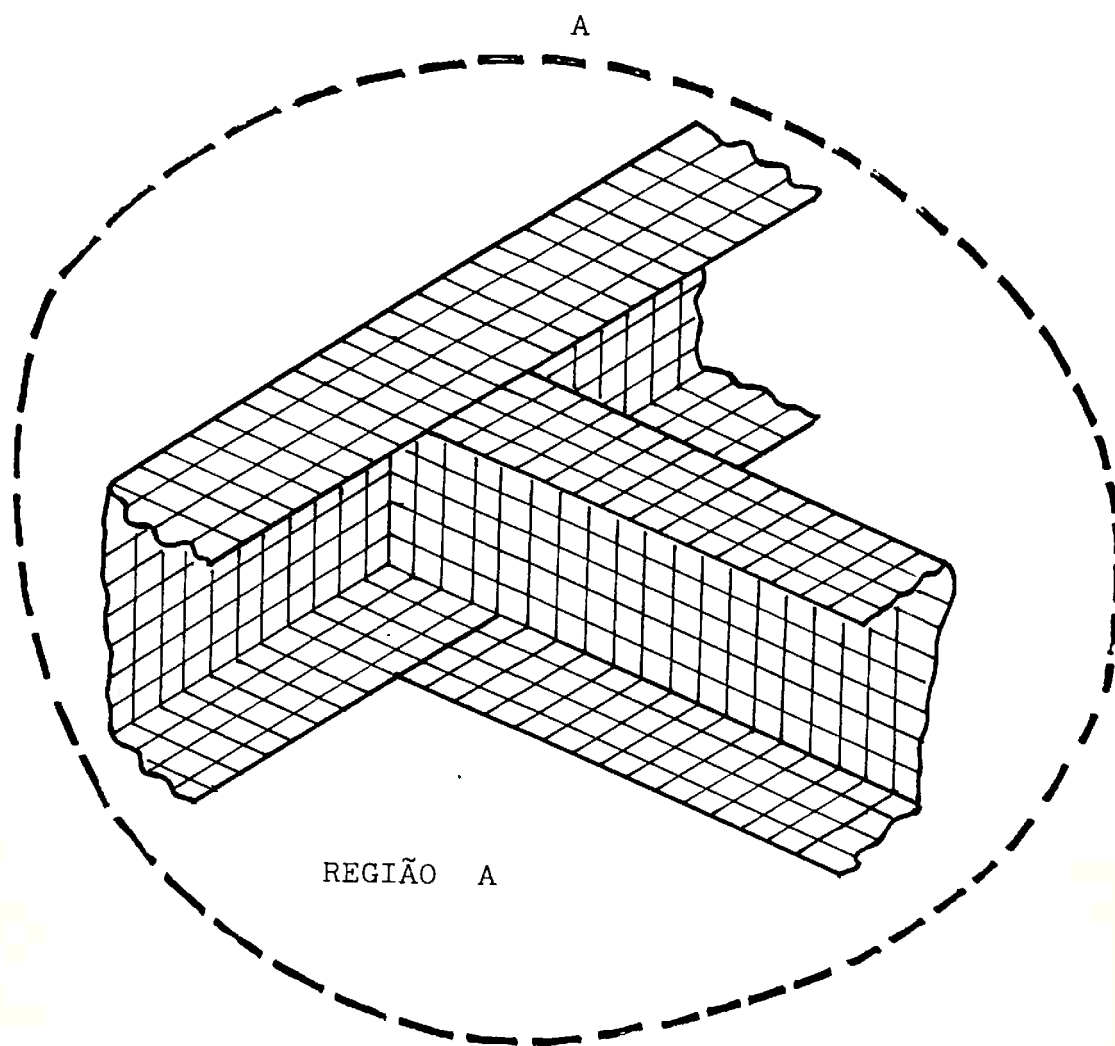


FIGURA 3.4 - MODELO ESTRUTURAL COM ELEMENTOS DE CASCA. REPRESENTAÇÃO DA REGIÃO A

por perfis abertos de paredes delgadas e a figura 3.3.b representa um modelo estrutural da mesma, utilizando-se para essa discretização elementos finitos de viga convencionais, isto é, com 6 graus de liberdade por nó. Como a matriz de rigidez do elemento de viga em consideração não incorpora os componentes de deslocamento associados ao empenamento do elemento, decorrente da torção, esse tipo de modelo estrutural não se presta a resolver o problema de flexo-torção. Essa limitação poderia ser superada se discretizássemos a estrutura por intermédio de elementos finitos de casca, levando em conta as particularidades das ligações entre elementos. Os pontos do contorno dos perfis C, seriam discretizados por diversos pontos nodais, permitindo a determinação dos componentes axiais de deslocamento associados ao empenamento. A região A da estrutura representada na figura 3.3.a é discretizada na figura 3.4. Tal solução, para a estrutura inteira, embora satisfatória, é extremamente trabalhosa.

A solução desse problema por intermédio de um modelo com elementos de viga pode ser proposta (7) considerando-se o comportamento na torção de cada uma das vigas de paredes delgadas. Como já foi mencionado na análise física do problema de retorção, a viga C de paredes delgadas pode ser analisada como sujeita a flexões diferenciais dos seus flanges. Uma tentativa seria elaborar um modelo que considerasse essas flexões dos flanges, por intermédio de elementos de viga diferentes. Essas flexões diferenciais estariam interagindo através de algum elemento de ligação que corresponderia o papel da alma do perfil C; tal modelo poderia incluir as propriedades associadas à flexo-torção já conhecidas da teoria de Vlasov, utilizando elementos de viga convencionais. A figura 3.5 representa a idéia conceitual desse modelo. Tal "mo

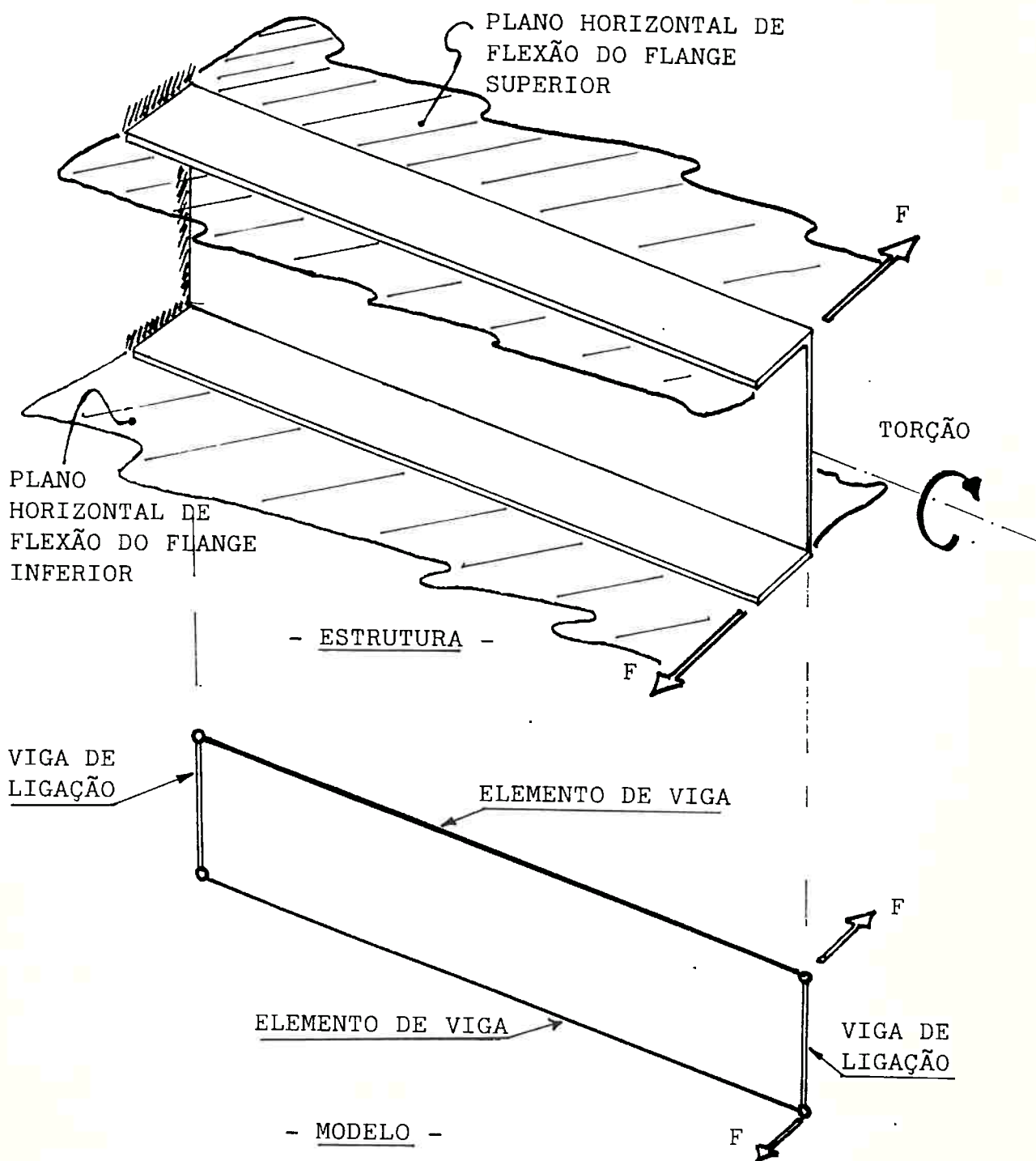


FIGURA 3.5 - IDÉIA INICIAL DE MODELO COM ELEMENTOS DE VIGAS CONVENCIONAIS PARA CÁLCULO DE FLEXO-TORÇÃO



delo híbrido" será explanado no ítem 3.3 por intermédio da Analogia Flexão-Retorção. Portanto, a solução do problema' de flexo-torção, utilizando elementos de viga convencionais, não implica em alterações na formulação do elemento finito de viga, e não altera o núcleo do programa de computador utilizado para esse fim. Uma outra alternativa, que não está sendo considerada neste trabalho, é o desenvolvimento de um elemento de viga não convencional que incorpore em sua matriz de rigidez os componentes de deslocamento associados ao empenamento do elemento; tal solução além de seguir uma filosofia diferente deste trabalho, necessitaria para sua implementação, o acesso do analista ao núcleo do programa de elementos finitos, o que nem sempre é possível ao se trabalhar com os programas comerciais disponíveis. O desenvolvimento desta última idéia é encontrado no trabalho de Hughes (2).

### 3.3 - ANALOGIA FLEXÃO-RETORÇÃO

A figura 3.6 representa um perfil aberto de paredes delgadas tipo C sujeito à torção, e o modelo estrutural constituído por 4 elementos de viga. O modelo estrutural considerado deve portanto exibir características de rigidez e de tensões atuantes - similares à estrutura real. No exemplo considerado, uma das extremidades do perfil C está engastada, e portanto o empenamento nessa extremidade é restrito. Na extremidade oposta, o perfil tem liberdade total ao empenamento. Os elementos de viga horizontais  $H_1$  e  $H_2$  sofrem flexões nos planos horizontais paralelos ao plano xz, eles se deslocam lateralmente na direção z, devido à atuação do momento torçor. As vigas verticais V apresen

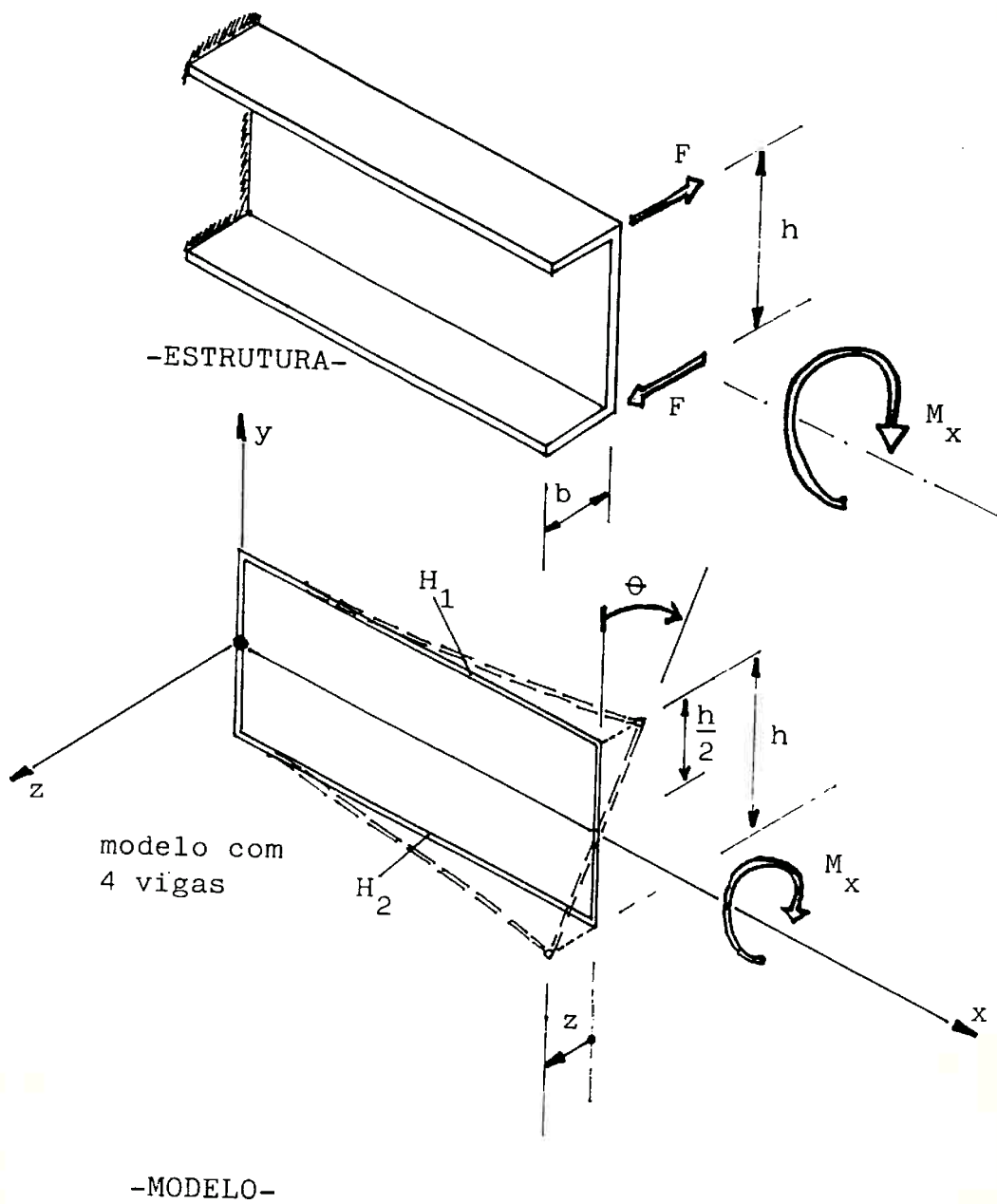


FIGURA 3.6 - TORÇÃO DE PERFIL C E DISCRETIZAÇÃO POR MODELO DE 4 ELEMENTOS DE VIGA

tam rigidez infinita às flexões nos planos xy e yz, movimentando-se como corpo rígido. Como a extremidade livre do ' perfil pode sofrer empenamento, ocorrendo extensão longitudinal dos flanges, admite-se para a viga vertical da extremidade livre, rigidez à torção nula. De acordo com a figura 3.6, e pela definição de ângulo em radianos, tem-se para  $\theta$  pequeno:

$$\frac{z}{h/2} = \theta \quad (3.1)$$

resultando,

$$\theta = \frac{2.z}{h} \quad (3.2)$$

Pela Equação da Torção Restringida (2.2) tem-se

$$M_x = G.I_t \cdot \frac{d\theta}{dx} - E.I_w \cdot \frac{d^3\theta}{dx^3}$$

e substituindo (3.2) na equação (2.2) resulta:

$$M_x = G.I_t \cdot \frac{d}{dx} \left( \frac{2.z}{h} \right) - E.I_w \cdot \frac{d^3}{dx^3} \left( \frac{2.z}{h} \right)$$

$$M_x = \frac{2}{h} \cdot G.I_t \cdot \frac{dz}{dx} - \frac{2}{h} \cdot E.I_w \cdot \frac{d^3 z}{dx^3}$$

Sendo  $M_x = F.h$ , resultará :

$$F = \frac{2}{h^2} \cdot G \cdot I_t \cdot \frac{dz}{dx} - \frac{2}{h^2} \cdot E \cdot I_w \cdot \frac{d^3 z}{dx^3}, \text{ ou}$$

$$F = G \cdot \frac{2 \cdot I_t}{h^2} \cdot \frac{dz}{dx} - E \cdot \frac{2 \cdot I_w}{h^2} \cdot \frac{d^3 z}{dx^3}$$

Para o perfil aberto tipo C tem-se

$$I_t = \frac{2 \cdot b \cdot t^3}{3} + \frac{h \cdot t^3}{3}$$

e nas condições de um perfil de paredes delgadas

$$\frac{I_t}{h^2} \approx 0, \text{ e assim:}$$

$$F \approx - E \cdot \frac{2 \cdot I_w}{h^2} \cdot \frac{d^3 z}{dx^3} = - E \cdot I_y^* \cdot \frac{d^3 z}{dx^3} \quad (3.3)$$

que representa o esforço cortante nas vigas H, onde

$$I_y^* = \frac{2 \cdot I_w}{h^2}$$

Da resistência dos materiais elementar pode-se escrever

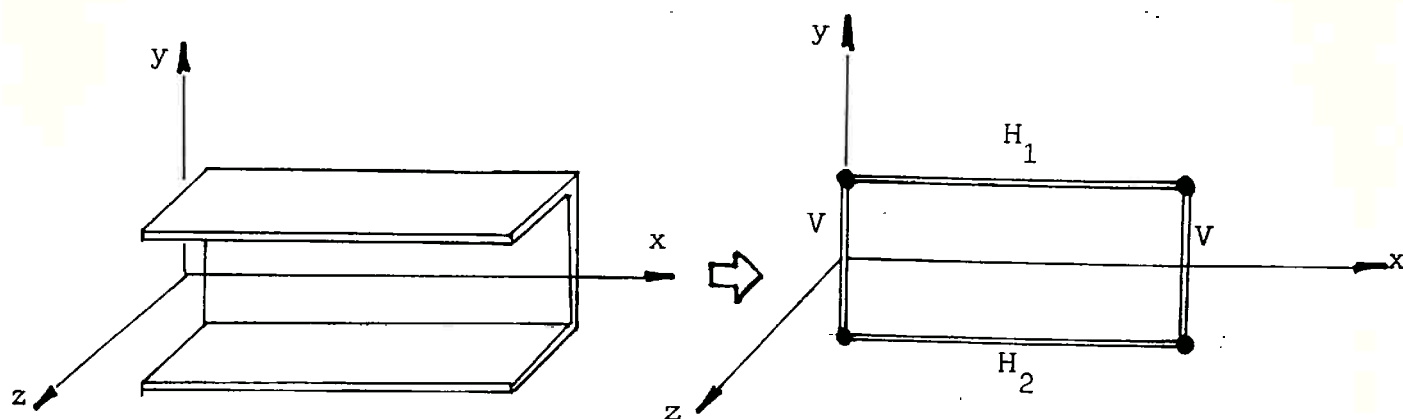
$$Q_z = \frac{dM_y}{dx} = E \cdot I_y \cdot \frac{d^3 z}{dx^3} \quad (3.4)$$

Comparando (3.3) e (3.4) e considerando que  $M_x$  aplicado nesse exemplo é negativo resulta:

$$I_y = \frac{2 \cdot I_w}{h^2} = I_y^* \quad (3.5)$$

A expressão (3.5), juntamente com as condições estabelecidas anteriormente para as vigas verticais V, permitem o estabelecimento de uma Analogia Flexão-Retorção, de forma que com um modelo estrutural constituído por elementos de viga convencionais, o fenómeno da Retorção pode ser levado em conta. Nesse modelo, as vigas  $H_1$  e  $H_2$  são caracterizadas pelo momento de inércia  $I_y^*$ , que considera a propriedade sectorial  $I_w$  e a altura  $h$ . Considerando rigidez axial infinita para as vigas verticais V e rigidez à flexão infinita para essas mesmas vigas V, a flexão vertical pode ser representada por apenas uma das vigas H, por intermédio da respectiva rigidez à essa flexão. Quanto as rigidezes axiais das vigas horizontais, serão consideradas nulas, por dois motivos: Primeiro, a torção da grelha representada na figura 3.3.a gera flexões e torções nos membros que a compõe mas não ocasiona o aparecimento de forças axiais associadas a deformações axiais uniformes nas seções das vigas; segundo, a rigidez axial das vigas H, distanciadas de  $h$ , ocasionaria o equilíbrio de momentos fletores verticais

por um par de forças horizontais aplicadas axialmente nas vigas H e com braço de momento  $h$ . Atribuindo rigidez axial nula às vigas horizontais, as flexões verticais serão equilibradas somente pelos momentos fletores internos associados à rigidez à flexão de uma das vigas H. A figura 3.7 resume as idéias conceituais envolvidas na montagem da Analogia Flexão-Retorção, de forma a permitir por intermédio de um modelo estrutural constituído por elementos de viga convencionais, a análise do fenômeno de Flexo-Torção (ou Retorção).



(a) ESTRUTURA REAL

(b) MODELO PARA CÁLCULO DE FLEXÃO NO PLANO  $xy$  E RETORÇÃO, ATRAVÉS DAS FLEXÕES DIFERENCIAIS DOS FLANGES.

|                                | ESTRUTURA REAL | MODELO PARA ANALOGIA FLEXÃO-RETORÇÃO |              |                        |                        |
|--------------------------------|----------------|--------------------------------------|--------------|------------------------|------------------------|
|                                |                | membro $H_1$                         | membro $H_2$ | membro $V^{(i)}$       | membro $V^{(j)}$       |
| RIGIDEZ À FLEXÃO NO PLANO $xy$ | $EI_z$         | 0                                    | $EI_z$       | $\infty$               | $\infty$               |
| RIGIDEZ À FLEXÃO NO PLANO $xz$ | $EI_y$         | $EI_y^*$                             | $EI_y^*$     | $\infty$ (plano $yz$ ) | $\infty$ (plano $yz$ ) |
| RIGIDEZ AXIAL                  | $EA$           | 0                                    | 0            | $\infty$               | $\infty$               |
| RIGIDEZ TORCION                | $GI_t$         | $GI_t/2$                             | $GI_t/2$     | 0                      | $\infty$               |

(<sup>i</sup>) A Extremidade é Livre para Empenar

(<sup>j</sup>) A Extremidade é Impedida de Empenar

FIGURA 3.7 - ANALOGIA FLEXÃO-RETORÇÃO

## CAPÍTULO IV

TESTES DE CONFIABILIDADE4.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão consideradas diversas alternativas de solução do problema de Retorção, tomando-se como referência um exemplo numérico. O mesmo problema será resolvido pela Teoria de Vlasov, pelo Método dos Elementos Finitos considerando a discretização do problema por elementos casca, e, finalmente, utilizando-se a Analogia Flexão-Retorção considerando-se elementos de viga convencionais. Será considerado um exemplo de tal forma que a sua solução possa ser estabelecida de forma exata por meio de equações diferenciais, e posteriormente, em comparação com a solução dada pela Analogia Flexão-Retorção, fique caracterizada a validade da Analogia, por intermédio de aplicação numérica. Estabelecida a confiabilidade da Analogia introduzida, poder-se-á partir para a solução de problemas envolvendo muitos elementos, o que constitui uma aplicação prática de interesse tal como em estruturas tipo chassis de veículos.

4.2 - EXEMPLO DE CÁLCULO

A viga de aço representada na figura 4.1, está sujeita a um momento torçor  $M = F.h = 20.20 = 400$  Kgf. cm, e engastada em uma de suas extremidades. Para esse perfil, estabeleceremos a solução do problema de Flexo-Torção, calculando as tensões normais de flexo-torção, pelos processos já mencionados.



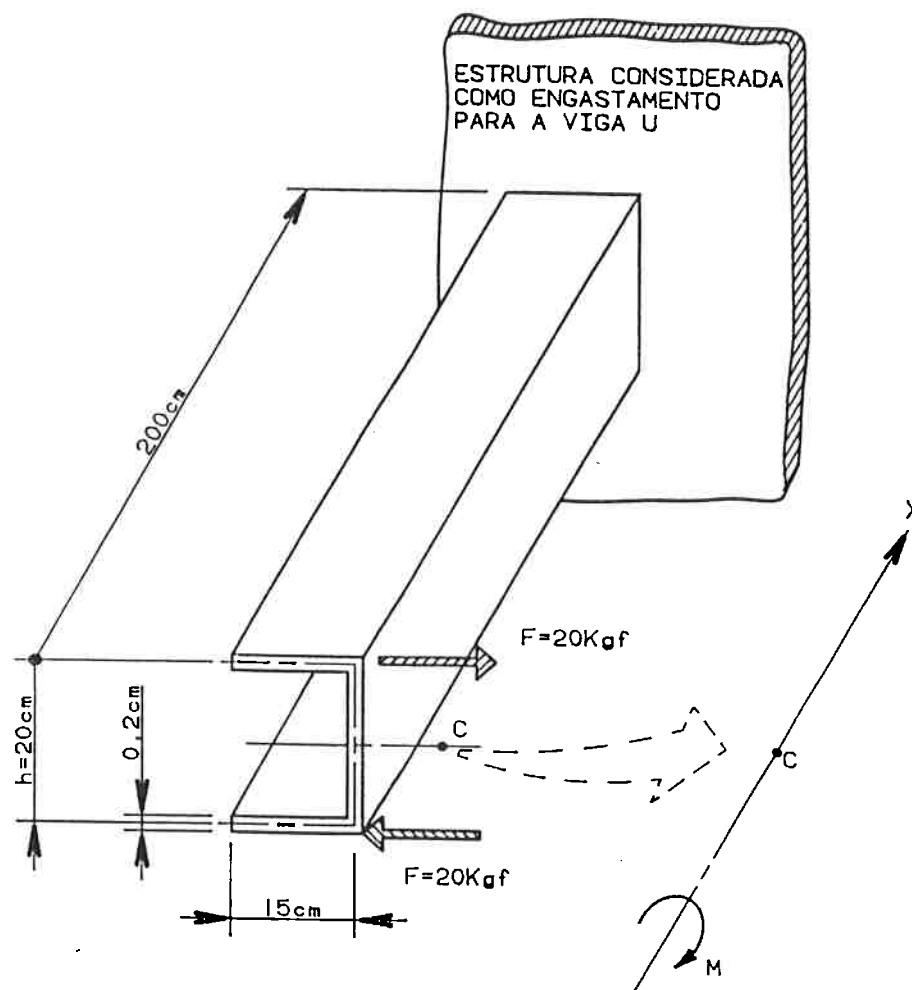


FIGURA 4.1 - EXEMPLO PARA CÁLCULO DE FLEXP-TORÇÃO

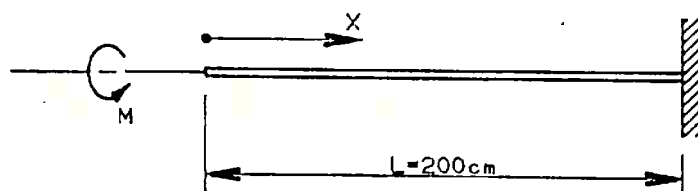


FIGURA 4.2 - REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DO PROBLEMA A SER ESTUDADO

## 4.2.1 - Teoria de Vlasov

As propriedades geométricas associadas à viga em estudo foram determinadas no Apêndice A. Portanto, os passos 1 a 7 representados na figura 2.20, que definem um Roteiro para Aplicação da Teoria de Vlasov já estão executados. O próximo passo constitui o estudo do Bimomento de Flexo-Torção. Nesse caso o único esforço externo agente na viga é o Momento Torçor  $M$ , como representado na figura 4.2 de forma esquemática, e portanto,:

$$M_{tt} = M$$

De acordo com a equação (2.3):

$$M_{tt} = M_{tu} + M_{ft} \longrightarrow M_{tt} = M_{tu} + M_{ft} = M = \text{constante}$$

A equação Diferencial do Bimomento é (2.19):

$$B'' - \alpha^2 \cdot B = m \quad \text{onde} \quad \alpha^2 = \frac{G \cdot I_t}{E \cdot I_w}$$

A solução desta Equação Diferencial é dada por (2.20):

$$B = C_1 \cdot \text{sh}(\alpha \cdot x) + C_2 \cdot \text{ch}(\alpha \cdot x) + m_1$$

$$\text{de (2.15)} \quad m = - \frac{dM_{tt}}{dx} \longrightarrow m = 0 \quad , \quad \text{pois} \quad M_{tt} = \text{constante},$$

$$\text{de (2.21)} \quad m_1 = - \frac{m}{\alpha^2} \longrightarrow m_1 = 0 \quad . \quad \text{Assim} \quad :$$

$$B = C_1 \cdot \text{sh}(\alpha \cdot x) + C_2 \cdot \text{ch}(\alpha \cdot x) \quad :$$

Apliquemos as Condições de Contorno:

Extremidade Livre (x=0)

$B = 0$  pois não há forças axiais aplicadas. Assim:

$$B = 0 = C_1 \cdot \text{sh}(\alpha \cdot 0) + C_2 \cdot \text{ch}(\alpha \cdot 0)$$

$$0 = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 \longrightarrow C_2 = 0$$

$$\text{Portanto } B = C_1 \cdot \text{sh}(\alpha \cdot x)$$

Extremidade Engastada (x = L)

$$\text{De (2.27) : } M_{ft} = - \frac{dB}{dx} = - B'$$

$$\text{derivando } B, \text{ temos } B' = C_1 \cdot \alpha \cdot \text{ch}(\alpha \cdot x)$$

Assim,

$$M_{ft} = -\alpha \cdot C_1 \cdot \text{ch}(\alpha \cdot x)$$

$$\text{Portanto } M = M_{tu} + M_{ft} = M_{tu} - \alpha \cdot C_1 \cdot \text{ch}(\alpha \cdot x)$$

(na extremidade engastada  $M_{tu} = 0$ )

$$M = 0 - \alpha \cdot C_1 \cdot \text{ch}(\alpha \cdot x) \longrightarrow C_1 = - \frac{M}{\alpha \cdot \text{ch}(\alpha \cdot L)}$$

A equação do Bimomento fica então:

$$B = C_1 \cdot \text{sh}(\alpha \cdot x) = - \frac{M}{\alpha \cdot \text{ch}(\alpha \cdot L)} \cdot \text{sh}(\alpha \cdot x)$$

$$B = -\frac{M}{\alpha \cdot \text{ch}(\alpha \cdot L)} \cdot \text{sh}(\alpha \cdot x) \quad e$$

4.5

$$M_{ft} = -\alpha \cdot C_1 \cdot \text{ch}(\alpha \cdot x) = -\alpha \cdot \left( \frac{-M}{\alpha \cdot \text{ch}(\alpha \cdot L)} \right) \cdot \text{ch}(\alpha \cdot x)$$

$$M_{ft} = \frac{M}{\text{ch}(\alpha \cdot L)} \cdot \text{ch}(\alpha \cdot x)$$

como  $M_{tt} = M_{tu} + M_{ft}$  tem-se

$$M_{tu} = M - \frac{M}{\text{ch}(\alpha \cdot L)} \cdot \text{ch}(\alpha \cdot x) \longrightarrow$$

$$M_{tu} = M \cdot \left( 1 - \frac{\text{ch}(\alpha \cdot x)}{\text{ch}(\alpha \cdot L)} \right)$$

no exemplo em estudo:

$$M = 400 \text{ kgf.cm}$$

$$L = 200 \text{ cm}$$

$$I_t = 0,133 \text{ cm}^4$$

$$I_w = 17386,4 \text{ cm}^6$$

$\nu = 0,3$  - coeficiente de Poisson

$$\alpha^2 = \frac{G \cdot I_t}{E \cdot I_w} = \frac{E}{2(1+\nu)E} \cdot \frac{0,133}{17386,4} \longrightarrow \alpha = 0,0017153 \text{ cm}^{-1}$$

$$\alpha \cdot L = 0,34306$$

o que permite determinar:

$$M_{ft} = \frac{M}{\text{ch}(0,34306)} \cdot \text{ch}(0,0017153 \cdot x)$$

$$M_{tu} = M \left( 1 - \frac{\text{ch}(0,0017153 \cdot x)}{\text{ch}(0,34306)} \right)$$

$$B = -\frac{M}{0,0017153 \cdot \text{ch}(0,34306)} \cdot \text{sh}(0,0017153 \cdot x)$$

com essas expressões, podemos calcular as distribuições de  $M_{tu}$ ,  $M_{ft}$ ,  $M_{tt}$  e B ao longo do comprimento da viga, como é indicado na Tabela 4.1.

TABELA 4.1 - DISTRIBUIÇÕES DE  $M_{tu}$ ,  $M_{ft}$ ,  $M_{tt}$  e B

| X        | 0       | 50        | 100       | 150        | 200       |
|----------|---------|-----------|-----------|------------|-----------|
| $M_{tu}$ | 0,056.M | 0,053.M   | 0,042.M   | 0,025.M    | 0         |
| $M_{ft}$ | 0,944.M | 0,947.M   | 0,958.M   | 0,975.M    | M         |
| $M_{tt}$ | 1,000.M | 1,000.M   | 1,000.M   | 1,000.M    | M         |
| B        | 0       | -47,25 .M | -94,85 .M | -143,15 .M | -192,51.M |

[x]=cm; [ $M_{tu}$ ]=[ $M_{ft}$ ]=[ $M_{tt}$ ]=kgf.cm; [B]=kgf.cm<sup>2</sup>

Passemos ao cálculo das tensões Normais na Flexo-Torção ( $\sigma_{ft}$ ), que são dadas por:

$$\sigma_{ft} = \frac{B(x) \cdot w(s)}{I_w}$$

Nesta expressão,  $I_w$  é válido para toda a seção e é constante ao longo do comprimento da viga, que é prismática, w varia ao longo do contorno s da seção, mas para um ponto do contorno o seu valor é constante ao longo do eixo axial x.

Considerando a seção transversal de abscissa x=200cm, onde o Bimomento é máximo, teremos:

$$B = - 192,51 \cdot M$$

$$B = - 192,51 \cdot 400$$

$$B = - 77004 \text{ kgf.cm}^2$$

Considerando 16 pontos para cálculo das tensões normais devido a flexo-torção (figura 4.3), teremos as coordenadas sectoriais dadas pela tabela 4.2.

TABELA 4.2 - COORDENADAS SECTORIAIS

| Pontos              | 1      | 2      | 3      | 4    | 5     | 6     | 7      | 8      | 9       | 10      | 11     | 12     | 13    | 14    | 15    | 16    |
|---------------------|--------|--------|--------|------|-------|-------|--------|--------|---------|---------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|
| W(cm <sup>2</sup> ) | -88,63 | -58,63 | -28,63 | 1,37 | 31,37 | 61,37 | 96,822 | 12,274 | -12,274 | -36,822 | -61,37 | -31,37 | -1,37 | 28,63 | 58,63 | 88,63 |

Para cada um desses pontos, pode-se calcular as tensões normais:

$$\sigma_{ft} = - \frac{77004}{17386,4} \cdot w$$

Os resultados dessas tensões são apresentados na TABELA 4.3 e o respectivo diagrama na figura 4.4

TABELA 4.3 - TENSÕES NORMAIS DE FLEXP-TORÇÃO

| Ponto | $\sigma_{ft}$ (kgf/cm <sup>2</sup> ) |
|-------|--------------------------------------|
| 1     | + 392,54                             |
| 2     | + 259,67                             |
| 3     | + 126,80                             |
| 4     | - 6,07                               |
| 5     | - 138,94                             |
| 6     | - 271,81                             |
| 7     | - 163,08                             |
| 8     | - 54,36                              |
| 9     | + 54,36                              |
| 10    | + 163,08                             |
| 11    | + 271,81                             |
| 12    | + 138,94                             |
| 13    | + 6,07                               |
| 14    | - 126,80                             |
| 15    | - 259,67                             |
| 16    | - 392,54                             |

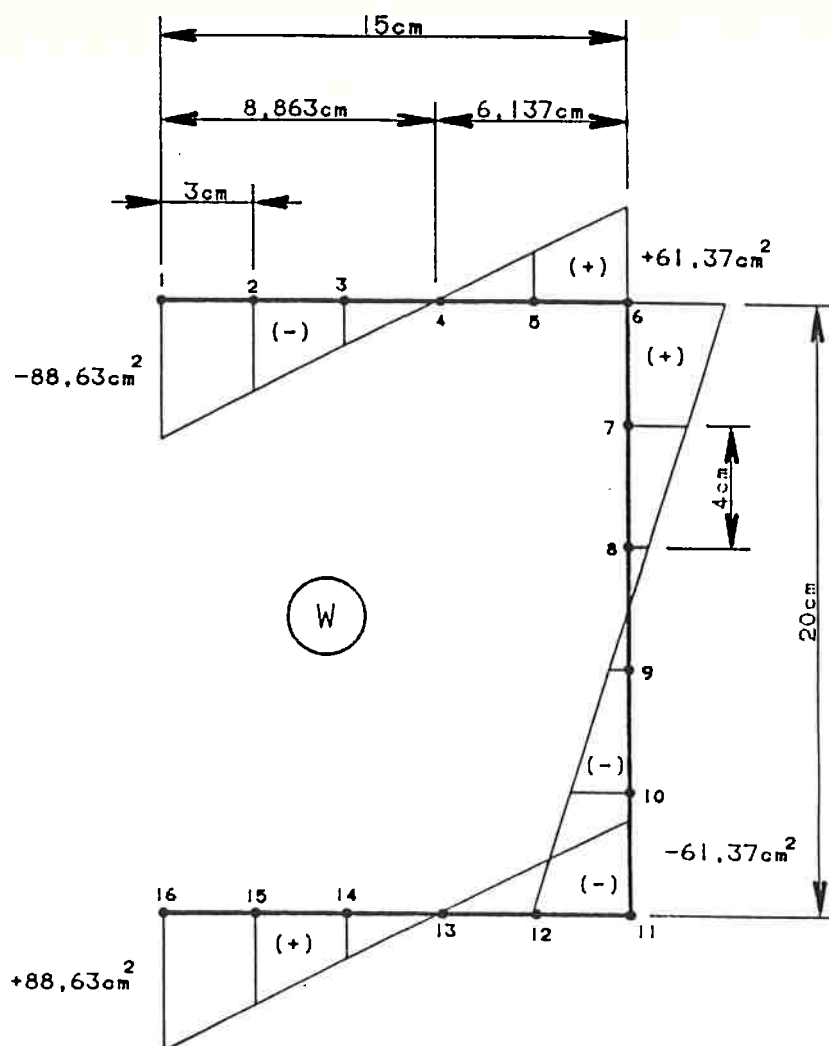


FIGURA 4.3 - DIAGRAMA DE ÁREA SECTORIAL PRINCIPAL

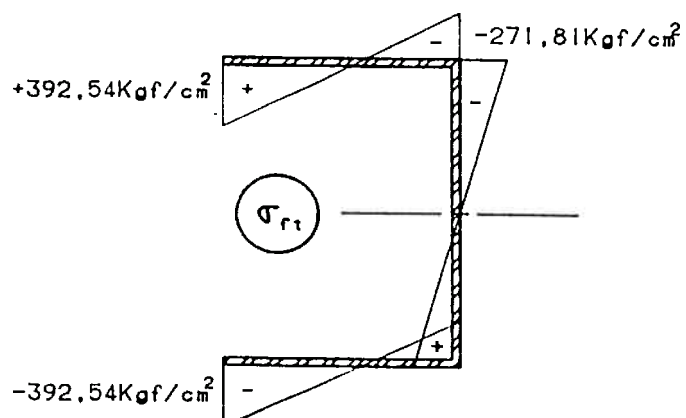


FIGURA 4.4 - TENSÕES NORMAIS DE FLEXP-TORÇÃO PARA X=200 cm, NO ENGASTAMENTO

Considerando as diferentes seções da viga, podemos calcular os valores do Bimomento em função de  $x$ , e as consequentes tensões normais de flexo-torção.

A Figura 4.5 representa a variação dessas tensões normais ao longo do comprimento da viga, para os pontos do flange superior.

As Tensões de Cisalhamento na Flexo-Torção ( $\tau_{ft}$ ), podem ser calculadas pela Teoria de Vlasov por (2.25):

$$\tau_{ft} = - \frac{M_{ft}(x) \cdot M_{sw}(s)}{I_w \cdot t}$$

Nesta expressão,  $I_w$  é válido para toda a seção e é constante ao longo do comprimento da viga, que é prismática,  $M_{sw}$  varia ao longo do contorno  $s$  da seção, mas para um ponto do contorno o seu valor é constante ao longo do eixo axial  $x$ .

Considerando a seção transversal de abscissa  $x=200\text{cm}$ , onde  $M_{ft}$  é máximo, teremos:

$$M_{ft} = M = 400 \text{ Kgf.cm}$$

Considerando os pontos N, R, M, B, O, B', O', R' e L para cálculo das tensões de cisalhamento devido à flexo-torção (Figura A.20 - Apêndice A), teremos o diagrama do Momento Estático Sectorial cujos pontos são dados na Tabela 4.4.

TABELA 4.4 - MOMENTO ESTÁTICO SECTORIAL

| Pontos                | N | R      | M      | B | O      | B' | O'     | R'     | L |
|-----------------------|---|--------|--------|---|--------|----|--------|--------|---|
| $M_{sw}(\text{cm}^4)$ | 0 | -78,55 | -40,89 | 0 | +20,45 | 0  | -40,89 | -78,55 | 0 |



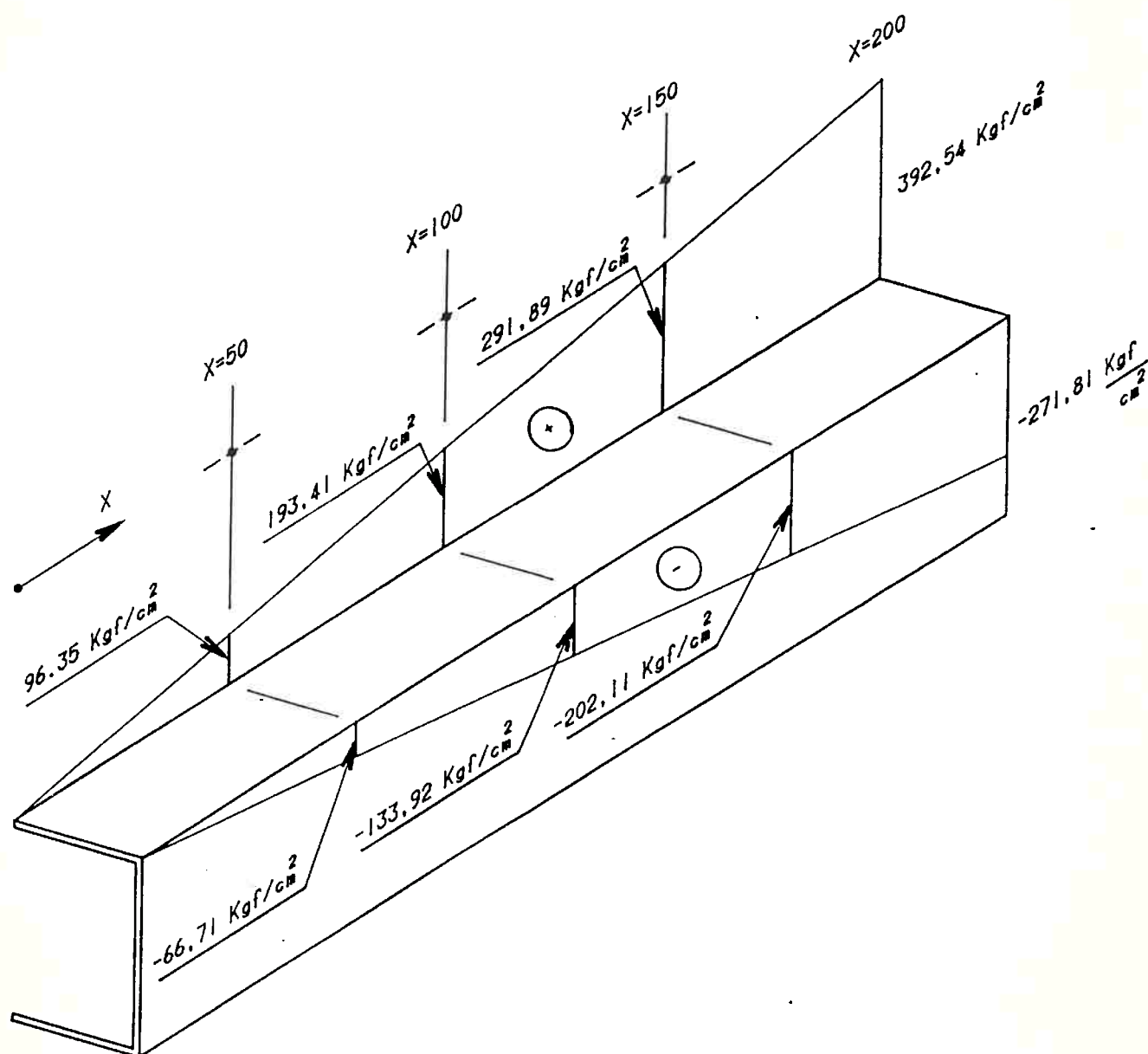


FIGURA 4.5 - VARIAÇÃO DAS TENSÕES NORMAIS  $\sigma_{ft}$  AO LONGO DO COMPRIMENTO DA VIGA.  
PONTOS EXTREMOS DO FLANGE SUPERIOR

Para cada um desses pontos, pode-se calcular as tensões de cisalhamento, dadas na Tabela 4.5, e cujo diagrama é representado na figura 4.6.

$$\tau_{ft} = - \frac{400}{17386,4 \cdot 0,2} \cdot M_{sw}(s) \quad , \text{ resultando:}$$

TABELA 4.5 TENSÕES DE CISALHAMENTO  
NA FLECO-TORÇÃO

| Ponto | $\tau_{ft}$ (kgf/cm <sup>2</sup> ) |
|-------|------------------------------------|
| N     | 0                                  |
| R     | + 9,04                             |
| M     | + 4,70                             |
| B     | 0                                  |
| O     | - 2,35                             |
| B'    | 0                                  |
| O'    | + 4,70                             |
| R'    | + 9,04                             |
| L     | 0                                  |

Os valores de  $\tau_{ft}$  determinados podem ser interpretados fisicamente:

As tensões de cisalhamento decorrentes da flexo-torção, garantem o equilíbrio de um elemento da estrutura quando sujeito a tensões de flexo-torção, como indica a Figura 4.7. As tensões  $\sigma_{ft}$  e  $\tau_{ft}$  calculadas, por exemplo, para os pontos N, N', N'' e N''', devem garantir o equilíbrio desse elemento.

Dessa forma, a equação

$$\left[ \frac{(\sigma_n + \sigma_{n'})}{2} \cdot a \cdot t - \frac{(\sigma_{n''} + \sigma_{n'''})}{2} \cdot a \cdot t - \frac{(\tau_{n'} + \tau_{n'''})}{2} \cdot a \cdot t \right] = 0$$

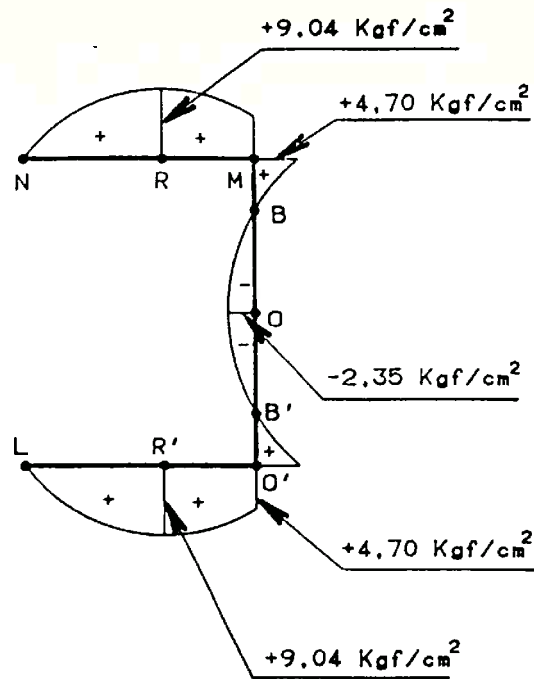


FIGURA 4.6 - TENSÕES  $\tau_{ft}$  PARA ABCISSA X=200 cm

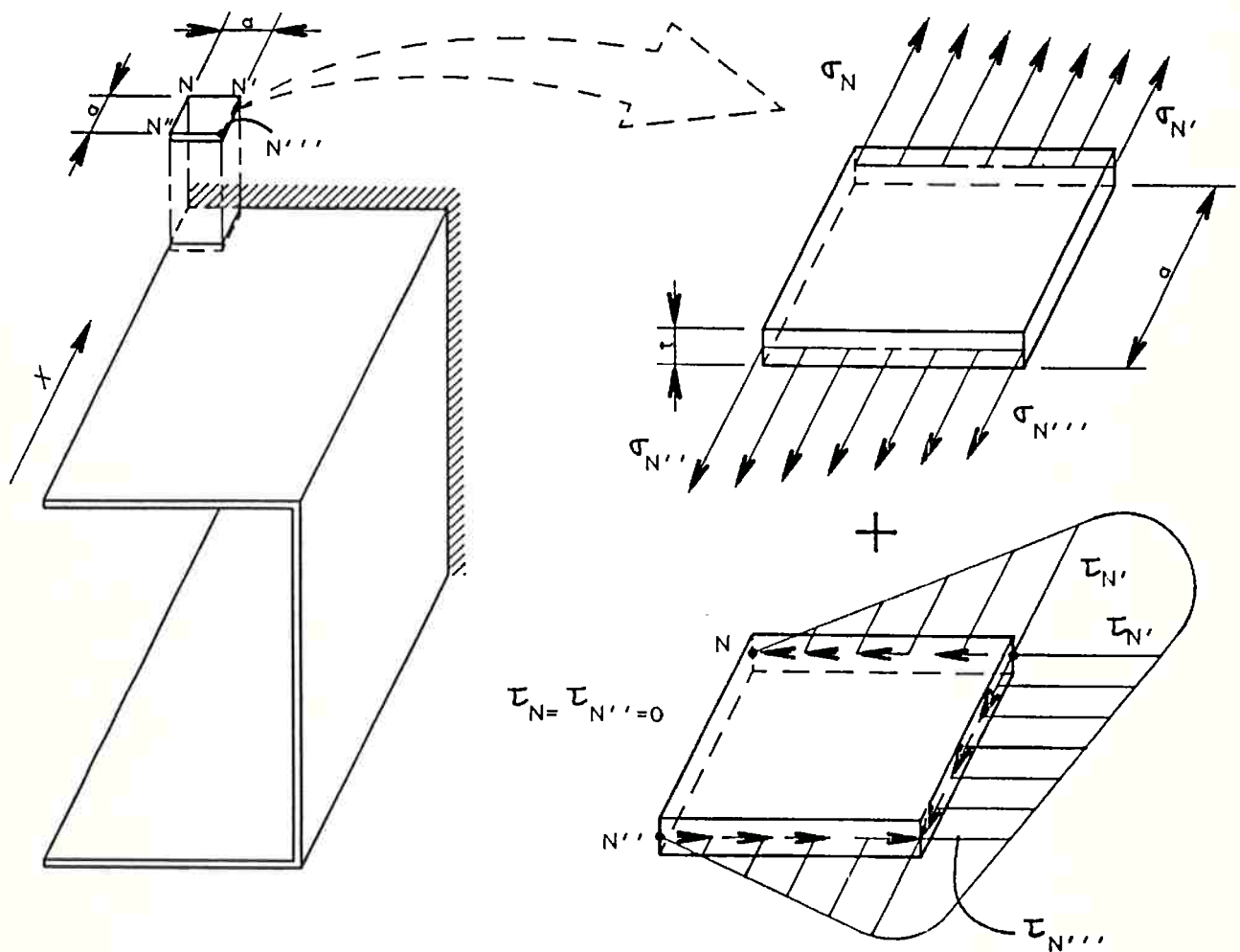


FIGURA 4.7 - TENSÕES NORMAIS E DE CISALHAMENTO EM ELEMENTO DE PERFIL SUJEITO A FLEXTORÇÃO

garante o equilíbrio do elemento, segundo o eixo longitudinal  $x$ .

Considerando os Pontos do elemento de lado  $a$  tal que  $a = 2\text{cm}$ , e portanto,  $x_n'' = x_n''' = 198\text{cm}$  e  $x_n' = x_n'' = 200\text{cm}$ , a Tabela 4.6 seguinte indica os valores das propriedades sectoriais e tensões associadas a esse elemento, calculadas de acordo com o procedimento já utilizado neste exemplo.

TABELA 4.6 - EQUILÍBRIO DE UM ELEMENTO DO PERFIL

| Ponto | $x[\text{cm}]$ | $w[\text{cm}^2]$ | $B(x) [\text{kgf.cm}^2]$ | $M_{sw}[\text{cm}^4]$ | $M_{ft}(x) [\text{kgf.cm}]$ | $\sigma_{ft}[\text{kgf/cm}^2]$ | $\tau_{ft}[\text{kgf/cm}^2]$ |
|-------|----------------|------------------|--------------------------|-----------------------|-----------------------------|--------------------------------|------------------------------|
| N     | 200            | -88,63           | -77.004,00               | 0                     | +400,00                     | +392,54                        | 0                            |
| N'    | 200            | -68,63           | -77.004,00               | -31,45                | +400,00                     | +303,96                        | +3,62                        |
| N''   | 198            | -88,63           | -76.203,07               | 0                     | +399,55                     | +388,46                        | 0                            |
| N'''  | 198            | -68,63           | -76.203,07               | -31,45                | +399,55                     | +300,80                        | +3,61                        |

PORTANTO,

$$\left[ \frac{(392,54 + 303,96)}{2} \cdot 2 \cdot 0,2 - \frac{(388,46 + 300,80)}{2} \cdot 2 \cdot 0,2 - \frac{(3,62 + 3,61)}{2} \cdot 2 \cdot 0,2 \right] = 0$$

$$(348,25 - 344,63 - 3,615) \cdot 2 \cdot 0,2 = 0$$

$$(3,62 - 3,615) \cdot 2 \cdot 0,2 = 0$$

$0,005 \approx 0$ , verificando assim o equilíbrio longitudinal do elemento.

#### 4.2.2 - Análise pelo Método dos Elementos Finitos Com Elementos de Casca

A viga de aço estudada em 4.2.1 pela Teoria de Vlasov, foi analisada pelo Método dos Elementos Finitos (MEF), que considera um Modelo Matemático Discreto equivalente ao problema contínuo resolvido anteriormente. No procedimento de discretização a estrutura foi subdividida em 750 elementos discretos de casca ("Shell Elements"), definidos por intermédio de 816 pontos nodais, como indica a Figura 4.8.

Tal modelo, permitiu a determinação das tensões normais devido as deformações axiais não uniformes experimentadas pela viga, decorrentes da flexo-torção.

O programa de computador utilizado como Programa de Análise para obtenção da solução pelo MEF foi o SAP 80/ Versão 86, desenvolvido pela Computers & Structures Inc., Berkeley, Califórnia, implantado em microcomputador PC-XT.

A Tabela 4.7 mostra os resultados obtidos para o cálculo de tensões normais nas seções transversais da viga para várias abscissas  $x$ , utilizando a Teoria de Vlasov e o Método dos Elementos Finitos. A Figura 4.9 representa a variação dessas tensões ao longo do contorno da seção que corresponde a  $x = 200$  cm.

#### 4.2.3 - Analogia Flexão-Retorção

O problema já resolvido anteriormente em 4.2.1 e 4.2.2. será resolvido por intermédio da Analogia Flexão-Retorção. A figura 4.10 representa o modelo estrutural concebido segundo as hipóteses estabelecidas em 3.3 e resumidas na figura 3.7. A Tabela 4.8 resume as condições de defini -

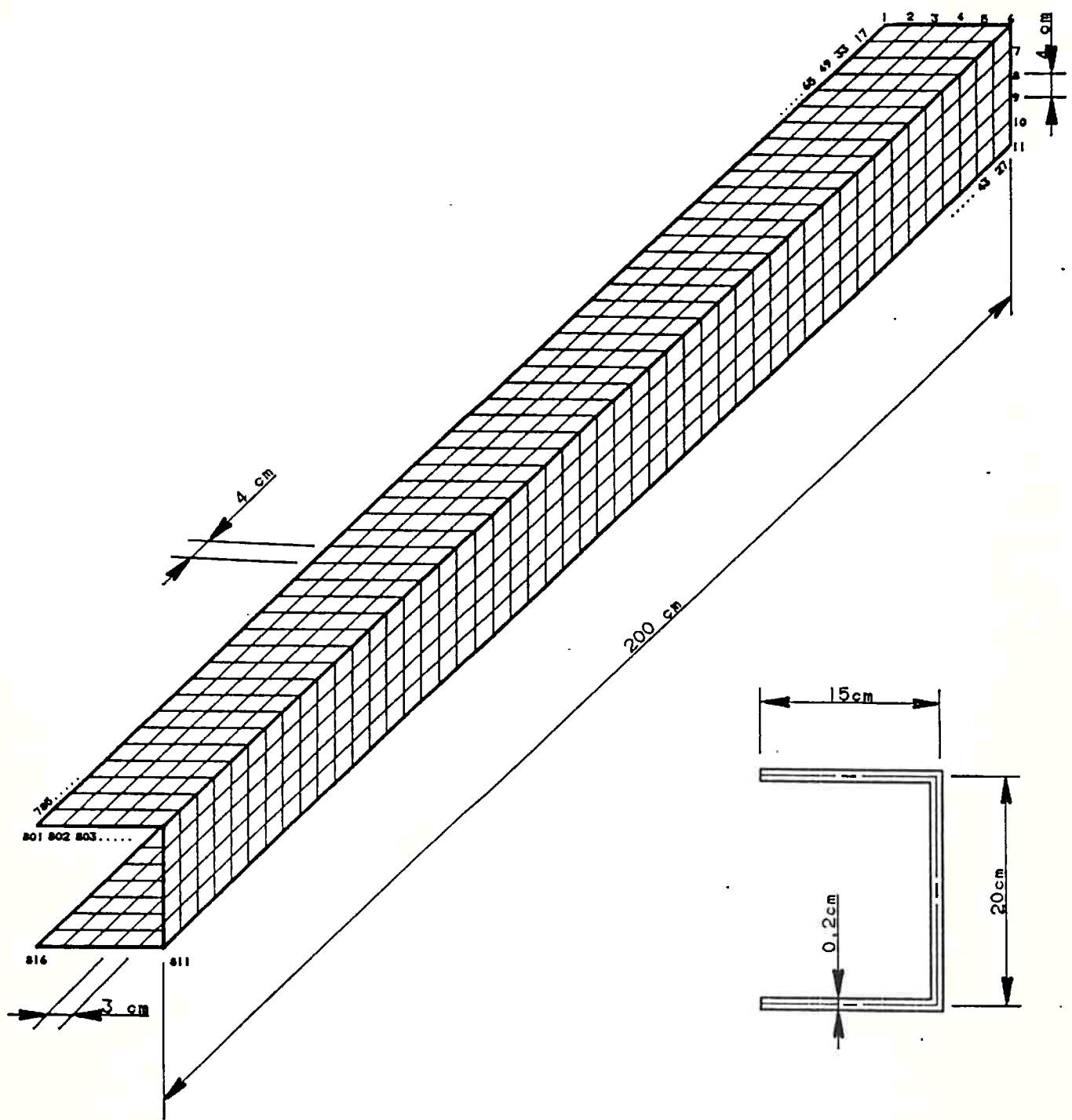


FIGURA 4.8 - MODELO ESTRUTURAL COM 816 PONTOS NODAIS E 750 ELEMENTOS DE CASCA

TABELA 4.7

Tensões Normais para Diversas Seções de Coordenada x ao longo do comprimento da viga, calculadas pela Teoria de Vlasov e pelo Método dos Elementos Finitos (MEF).

Os Pontos de Cálculo de Tensão para cada Seção, corresponde às posições 1, 2, 3, ..... 15, 16

| Coordenadas Sectoriais (cm <sup>2</sup> ) para os Pontos do Contorno da Seção |            | 1  | 2      | 3      | 4      | 5     | 6       | 7       | 8       | 9       | 10      | 11     | 12     | 13     | 14    | 15      | 16      |         |
|---|------------|--|--------|--------|--------|-------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|--------|--------|-------|---------|---------|---------|
|   |            | -88,63   | -58,63 | -28,63 | 1,37   | 31,37 | 61,37   | 36,822  | 12,274  | -12,274 | -36,822 | -61,37 | -31,37 | -1,37  | 28,63 | 58,63   | 88,63   |         |
| Seção Transversal de Coordenada x (cm)  |            | TENSÕES NORMAIS NOS DIVERSOS PONTOS (kgf/cm <sup>2</sup> ) |        |        |        |       |         |         |         |         |         |        |        |        |       |         |         |         |
| Momento Máximo B (kgf.cm <sup>2</sup> )                                       |            | 1  | 2      | 3      | 4      | 5     | 6       | 7       | 8       | 9       | 10      | 11     | 12     | 13     | 14    | 15      | 16      |         |
| 200   | -77.004,00 | Vlasov   | 392,5  | 359,67 | 126,80 | -6,07 | -138,94 | -271,91 | -163,08 | -54,36  | 54,36   | 163,08 | 271,91 | 138,94 | 6,07  | -125,80 | -259,67 | -392,54 |
|   |            | MEF  | 427,44 | 260,70 | 124,75 | -7,66 | -140,31 | -288,46 | -158,70 | -52,63  | 52,63   | 158,70 | 288,46 | 140,31 | 7,66  | -124,75 | -260,70 | -427,44 |
| 192   | -73.809,77 | Vlasov   | 376,26 | 248,90 | 121,54 | -5,81 | -133,17 | -260,53 | -156,32 | -52,11  | 52,11   | 156,32 | 260,53 | 133,17 | 5,81  | -121,54 | -248,90 | -376,26 |
|   |            | MEF  | 378,59 | 253,16 | 122,83 | -6,31 | -135,76 | -265,52 | -160,10 | -52,72  | 52,72   | 160,10 | 265,52 | 135,76 | 6,31  | -122,83 | -253,16 | -378,59 |
| 184   | -70.630,82 | Vlasov   | 360,05 | 238,18 | 116,31 | -5,56 | -127,44 | -249,31 | -149,59 | -49,56  | 49,56   | 149,59 | 249,31 | 127,44 | 5,56  | -116,31 | -238,18 | -360,05 |
|   |            | MEF  | 366,23 | 239,39 | 116,91 | -4,98 | -127,24 | -255,46 | -150,11 | -50,10  | 50,10   | 150,11 | 255,46 | 127,24 | 4,98  | -116,91 | -239,39 | -366,23 |
| 164   | -62.740,33 | Vlasov   | 319,53 | 211,57 | 103,31 | -4,94 | -113,20 | -221,46 | -132,68 | -44,29  | 44,29   | 132,68 | 221,46 | 113,20 | 4,49  | -103,31 | -211,57 | -319,53 |
|   |            | MEF  | 325,73 | 211,96 | 103,54 | -4,88 | -113,29 | -226,56 | -133,04 | -44,35  | 44,35   | 133,04 | 226,56 | 113,29 | 4,88  | -103,54 | -211,96 | -325,73 |
| 144   | -54.923,68 | Vlasov   | 279,98 | 185,21 | 90,44  | -4,33 | -97,10  | -193,87 | -116,32 | -38,77  | 38,77   | 116,32 | 193,87 | 99,10  | 4,33  | -90,44  | -185,21 | -279,98 |
|   |            | MEF  | 285,24 | 185,61 | 90,58  | -4,27 | -94,31  | -198,42 | -116,50 | -38,84  | 38,84   | 116,50 | 198,42 | 99,21  | 4,27  | -90,68  | -185,61 | -285,24 |
| 124   | -47.171,68 | Vlasov   | 240,47 | 159,07 | 77,65  | -3,72 | -85,11  | -166,51 | -99,90  | -33,30  | 33,30   | 99,90  | 166,51 | 85,11  | 3,72  | -77,68  | -159,07 | -240,47 |
|   |            | MEF  | 245,09 | 159,49 | 77,91  | -3,66 | -85,24  | -170,49 | -100,10 | -33,37  | 33,37   | 100,10 | 170,49 | 85,24  | 3,66  | -77,91  | -159,49 | -245,09 |
| 100   | -37.941,77 | Vlasov   | 193,41 | 127,95 | 62,49  | -2,99 | -65,46  | -133,93 | -80,36  | -26,79  | 26,79   | 80,36  | 133,93 | 68,46  | 2,99  | -62,48  | -127,95 | -193,41 |
|   |            | MEF  | 193,00 | 125,55 | 61,33  | -2,88 | -67,10  | -134,27 | -78,80  | -26,27  | 26,27   | 78,80  | 134,27 | 67,10  | 2,88  | -61,33  | -125,55 | -193,00 |
| 52  | -19.659,35 | Vlasov   | 100,22 | 66,29  | 32,37  | -1,55 | -35,27  | -69,34  | -41,64  | -13,88  | 13,88   | 41,64  | 69,34  | 35,27  | 1,55  | -32,37  | -66,29  | -100,22 |
|   |            | MEF  | 98,37  | 63,97  | 31,25  | -1,47 | -34,20  | -68,44  | -40,15  | -13,38  | 13,38   | 40,15  | 68,44  | 34,20  | 1,47  | -31,25  | -63,97  | -98,37  |
| 20  | -7.552,75  | Vlasov   | 38,50  | 25,47  | 12,44  | -0,60 | -13,63  | -26,66  | -16,00  | -5,33   | 5,33    | 16,00  | 26,66  | 13,63  | 0,60  | -12,44  | -25,47  | -38,50  |
|   |            | MEF  | 35,52  | 23,01  | 11,55  | -0,33 | -12,84  | -24,84  | -14,78  | -4,95   | 4,95    | 14,78  | 24,84  | 12,84  | 0,33  | -11,55  | -23,01  | -35,52  |
| 0   | 0          | Vlasov   | 0      | 0      | 0      | 0     | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0      | 0      | 0      | 0     | 0       | 0       | 0       |
|   |            | MEF  | 0,34   | 2,21   | 2,53   | 5,79  | 18,42   | -19,86  | 3,89    | 0,44    | -0,24   | -3,89  | 19,86  | -18,42 | -5,79 | -2,53   | -2,21   | -0,34   |

0 100 200 300 400 500  $\text{Kg}/\text{cm}^2$

4.17

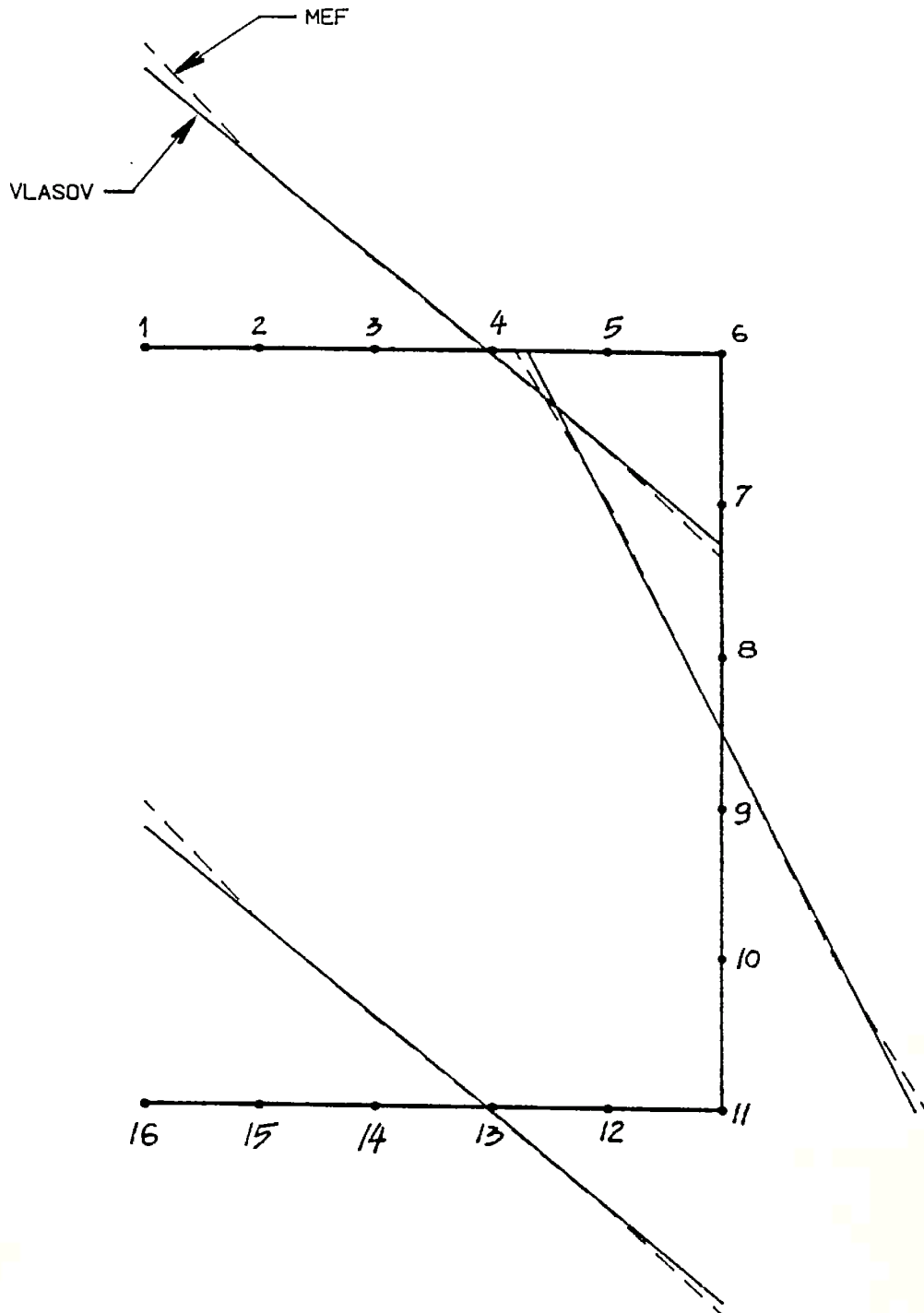


FIGURA 4.9 - TENSÕES NORMAIS NA SEÇÃO X=200 cm PELA TEORIA DE VLASOV (—) E PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (---)



ção do modelo estrutural da figura 4.10, que será resolvido com auxílio do programa SAP-80.

TABELA 4.8 DEFINIÇÃO DAS PROPRIEDADES DO MODELO FLEXÃO-RETORÇÃO, EM RELAÇÃO AOS EIXOS LOCAIS 1, 2, 3.

|        |  |
|--------|--|
| VIGA 1 | $I_3=0$ ; $I_2=I_y^* = \frac{2 \cdot I_w}{h^2} = 86,932 \text{ cm}^4$ ; $A=0$ ; $I_1 = \frac{I_t}{2} = 0,06665 \text{ cm}^4$ |
| VIGA 2 | $I_3=733,39 \text{ cm}^4$ ; $I_2=86,932 \text{ cm}^4$ ; $A=0$ ; $I_1 = \frac{I_t}{2} = 0,06665 \text{ cm}^4$                 |
| VIGA 3 | $I_3 = \infty$ ; $I_2 = \infty$ ; $A = \infty$ ; $I_t = 0$   |
| VIGA 4 | $I_3 = \infty$ ; $I_2 = \infty$ ; $A = \infty$ ; $I_t = \infty$  |

A tabela 4.9 apresenta os valores obtidos por intermédio do programa SAP-80, para os esforços nos elementos de viga do "Modelo Híbrido", e que serão utilizados para o cálculo das tensões normais de flexo-torção.

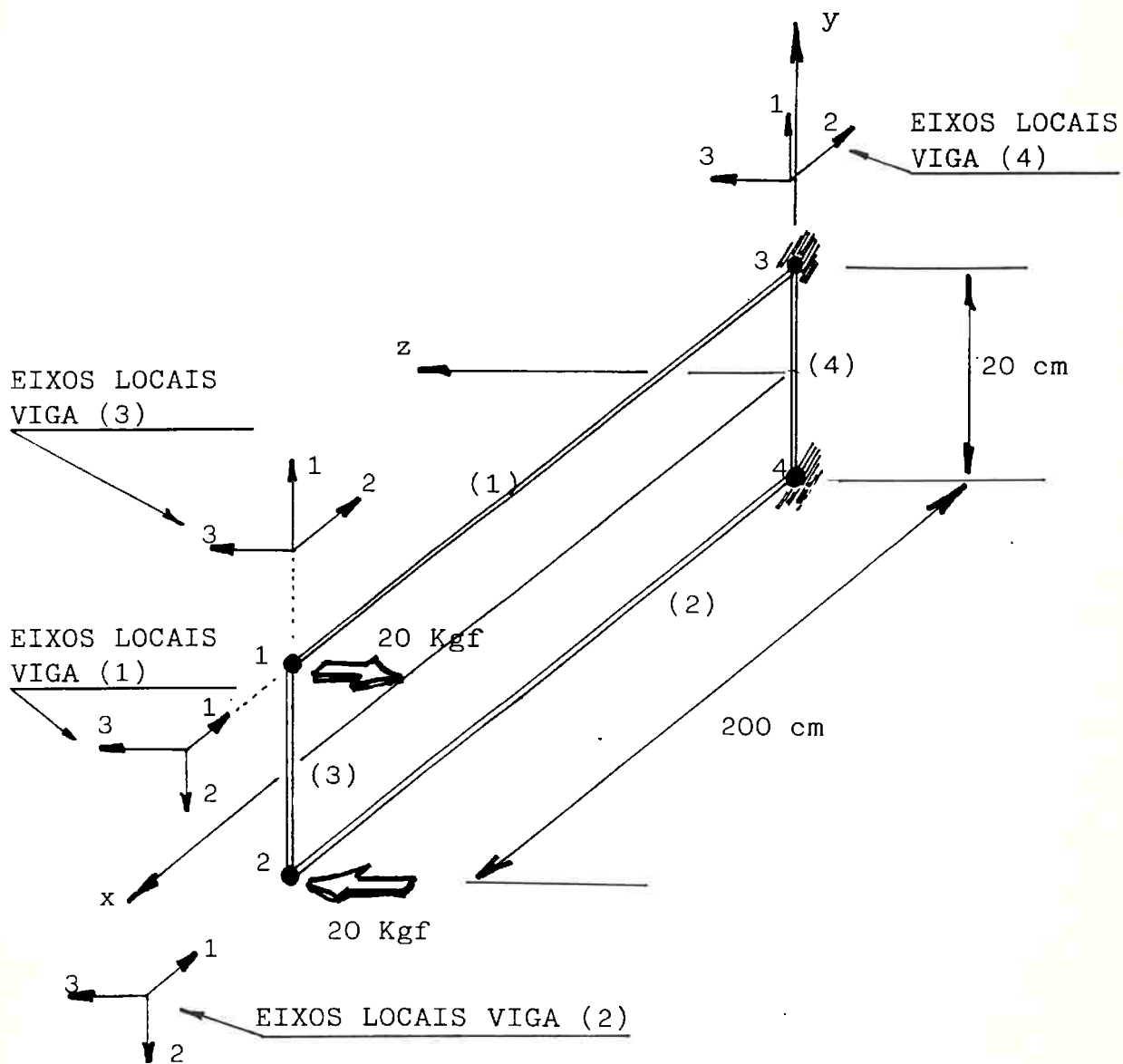


FIGURA 4.10 - MODELO PARA ANALOGIA FLEXÃO-TORÇÃO

TABELA 4.9 - ESFORÇOS NOS ELEMENTO DE VIGA DO  
MODELO HÍBRIDO.

| ANALISE DE PERFIL ABERTO-TORÇÃO-MODELO EM VIGAS |      |            |           |        |           |          |       | PAGE |
|---|------|------------|-----------|--------|-----------|----------|-------|------|
| FRAME ELEMENT FORCES                            |      |            |           |        |           |          |       |      |
| ELT   | LOAD | AXIAL DIST | 1-2 PLANE |        | 1-3 PLANE |          | AXIA  |      |
| ID  | COND | FORCE ENDI | SHEAR     | MOMENT | SHEAR     | MOMENT   | TOR   |      |
| 1   |      | .00        |           |        |           |          |       |      |
|   | 1    | .00        | .00       | .00    | -19.25    | .00      | -7.18 |      |
|   |      | 200.0      | .00       | .00    | -19.25    | -3849.01 |       |      |
| 2   |      | .00        |           |        |           |          |       |      |
|   | 1    | .00        | .00       | .00    | 19.25     | .00      | -7.18 |      |
|   |      | 200.0      | .00       | .00    | 19.25     | 3849.01  |       |      |
| 3   |      | .00        |           |        |           |          |       |      |
|   | 1    | .00        | .00       | .00    | .75       | -7.55    |       |      |
|   |      | 20.0       | .00       | .00    | .75       | 7.55     |       |      |
| 4   |      | .00        |           |        |           |          |       |      |
|   | 1    | .00        |           |        |           |          |       |      |

As vigas (1) e (2) do modelo apresentam para momentos fletores atuantes no plano 1-3 (ou  $M_2$ ) valores com intensidades 3849,01 kgf.cm. Esses momentos estão associados ao empenamento dos flanges e permitirão o cálculo das tensões de flexo-torção, que serão nulas nos pontos da seção que correspondem a empenamento nulo, como é representado na figura 4.11. Dessa forma com  $M_2, I_2 = I_y^*$  e os valores das coordenadas sectoriais  $w$ , poderemos calcular as tensões normais de flexo-torção na extremidade engastada.

$$\sigma_{ft} = \pm \frac{|M_2|}{I_2} \cdot d_w, \quad (4.1)$$

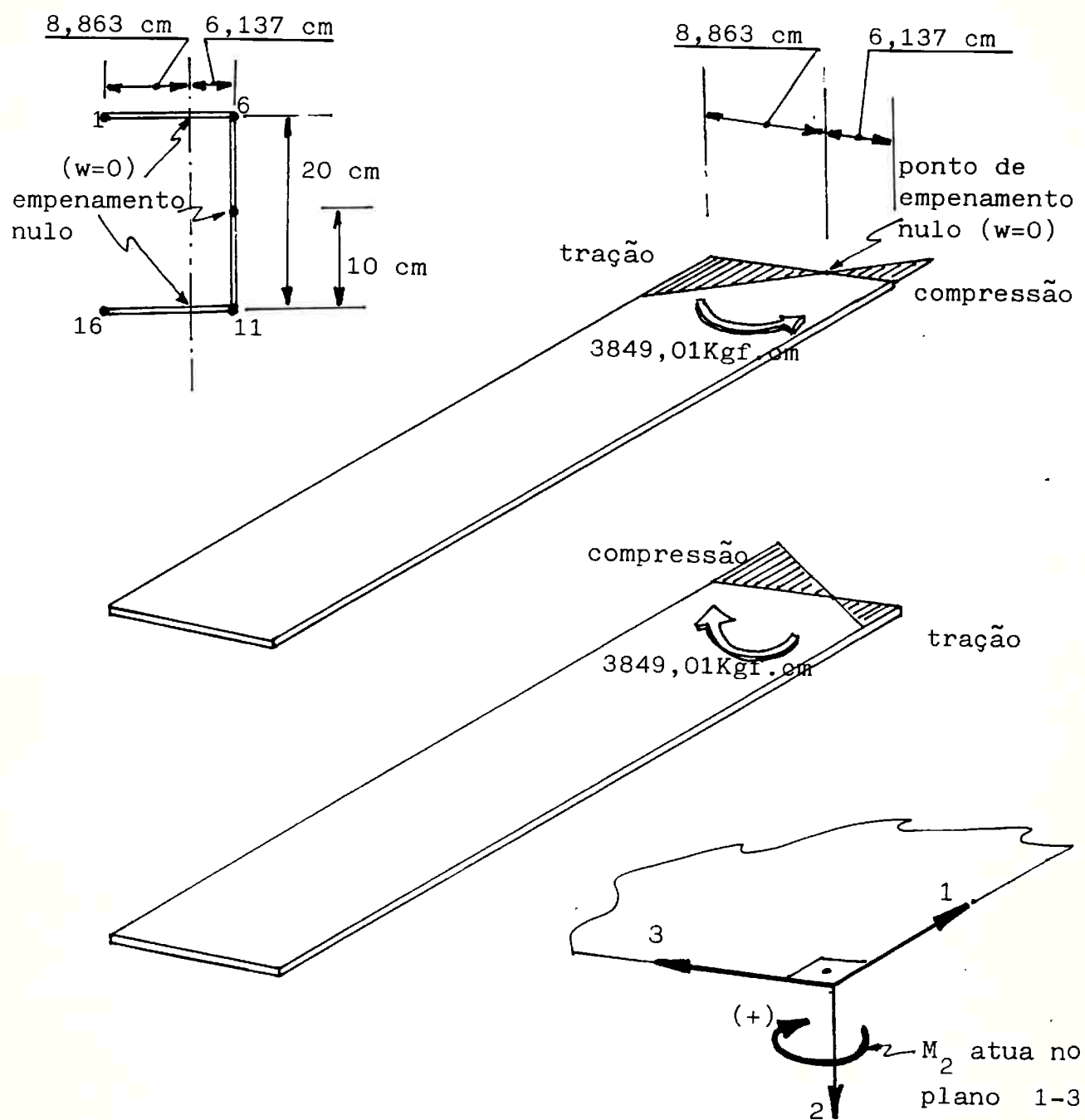


FIGURA 4.11 - MOMENTOS FLETORES NOS FLANGES, OBTIDOS POR INTERMÉDIO DA ANALOGIA FLEXÃO-RETORÇÃO

sendo  $d_w$  a distância entre o ponto considerado para o cálculo de  $\sigma_{ft}$  no flange superior e o ponto que corresponde à empenamento nulo nesse mesmo flange. Assim:

$$|M_2| = 3849,01 \text{ kgf.cm, e}$$

para os pontos 1 e 6 do flange superior, já foi determinado:

$$d_{w_1} = 8,863 \text{ cm e } d_{w_6} = 6,137 \text{ cm}$$

com  $I_2 = 86,932 \text{ cm}^4$  resultará:

$$\sigma_{ft_1} = \frac{|M_2|}{I_2} \cdot d_{w_1} = \frac{3849,01}{86,932} \cdot 8,863 \rightarrow \sigma_{ft_1} = +392,42 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_{ft_6} = \frac{M_2}{I_2} \cdot d_{w_6} = \frac{-3849,01}{86,932} \cdot 6,137 \rightarrow \sigma_{ft_6} = -271,72 \text{ Kgf/cm}^2$$

Para os pontos 16 e 11 do flange inferior, o procedimento de cálculo será análogo com  $|M_2| = 3849,01 \text{ kgf.cm}$ ;

$d_{w_{16}} = 8,863 \text{ cm}$ ;  $d_{w_{11}} = 6,137 \text{ cm}$ ;  $I_2 = 86,932 \text{ cm}^4$ ; o que resultará

$$\sigma_{ft_{16}} = -\frac{|M_2|}{I_2} \cdot d_{w_{16}} = -\frac{3849,01}{86,932} \cdot 8,863 \rightarrow \sigma_{ft_{16}} = -392,42 \text{ Kgf/cm}^2$$

$$\sigma_{ft_{11}} = -\frac{|M_2|}{I_2} \cdot d_{w_{11}} = \frac{3849,01}{86,932} \cdot 6,137 \rightarrow \sigma_{ft_{11}} = +271,71 \text{ Kgf/cm}^2$$

4.2.4 - Comparação dos valores obtidos pelos diversos procedimentos. Conclusões do Estudo.

Os procedimentos de cálculo utilizados em 4.2.1, 4.2.2 e 4.2.3 podem ser comparados de forma a se estabelecer a confiabilidade na utilização da Analogia Flexão-Retorção. A Tabela 4.10 resume os valores de  $\sigma_{ft}$  para os pontos 1, 6, 11, 16.

TABELA 4.10 - COMPARAÇÃO DOS PROCESSOS DE CÁLCULO

|          | TENSÕES NORMAIS DE FLEXO-TORÇÃO NA EXTREMIDADE ENGASTADA DA VIGA - $[\sigma_{ft}] = \text{kgf/cm}^2$ |                                |                            |
|----------|--|--------------------------------|----------------------------|
|          | TEORIA DE VLASOV   | ANALOGIA FLEXÃO-RETORÇÃO (MEF) | MEF COM ELEMENTOS DE CASCA |
| Ponto 1  | + 392,54   | + 392,42                       | + 427,44                   |
| Ponto 6  | - 271,81   | - 271,72                       | - 288,46                   |
| Ponto 11 | + 271,81   | + 271,72                       | + 288,46                   |
| Ponto 16 | - 392,54   | - 392,42                       | - 427,44                   |

A comparação dos valores obtidos segundo os três procedimentos diferentes, permite-nos estabelecer algumas conclusões importantes a respeito do estudo desenvolvido:

- i) Quanto à aplicabilidade da Analogia Flexão-Retorção, observamos que o "Modelo Híbrido" apresenta resultados coincidentes com os valores exatos pela teoria de Vlasov. Portanto, por intermédio de um modelo discreto bastante simples que incorpora as propriedades de flexo-torção do perfil, é obti

da a solução do problema. Tal conclusão constitui a base para resolução de problemas mais gerais envolvendo flexo-torção, como por exemplo estruturas contendo vários perfis de paredes delgadas, tal como em aplicações de estruturas tipo chassis de veículos. Este tipo de aplicação será objeto de análise no próximo capítulo, onde serão introduzidas algumas considerações a respeito da interligação entre esses elementos estruturais, e de que forma essas ligações poderiam alterar algumas hipóteses utilizadas na concepção da Analogia Flexão-Retorção.

- ii) Os valores de tensões calculados pela Teoria de Vlasov e pela Analogia Flexão-Retorção correspondem a ' Tensões Nominais. Nos pontos 1 e 16, de acordo com a Tabela 4.10 são verificadas diferenças de 8,9% para as Tensões Calculadas pelo MEF (Casca) quando comparadas aos valores dados por Vlasov e pela Analogia ' Flexão-Retorção. Tais pontos correspondem às extremidades dos Flanges do perfil. Como indica o diagrama da figura 4.9 essas diferenças praticamente não ocorrem para os outros pontos do contorno da seção. A diferença desses valores poderia ser justificada, em função de que as tensões calculadas pelo MEF (casca) indicaria não apenas as tensões nominais, mas as tensões atuantes com um fator de concentração de tensão teórico. O fato de que as majorações obtidas para  $\sigma_{ft}$  ocorram nos pontos extremos dos flanges está portanto de acordo com essa expectativa.

#### 4.3 - CONSIDERAÇÕES ADICIONAIS À ANALOGIA FLEXÃO-RETORÇÃO

Na conceituação da analogia flexão-retorção, foram introduzidas duas condições opostas em relação à rigidez à torção das vigas verticais V do modelo, segundo a figura 3.7. Quando a extremidade da viga era livre para empenar, a rigidez torcional do elemento V do modelo foi considerada nula; quando a extremidade da viga era impedida de empenar a rigidez torcional do elemento V foi considerada infinita. Entretanto, em muitas situações práticas, a restrição ao empenamento na extremidade de uma viga situa-se em uma condição intermediária entre a liberdade total ao empenamento e a restrição total ao empenamento. Com a finalidade de investigar esse efeito, procedeu-se a análise da viga considerada no item 4.2.2 pelo método dos elementos finitos, introduzindo-se alterações em sua extremidade livre, aumentando sua restrição ao empenamento. A viga foi reforçada por intermédio do fechamento de sua extremidade livre de acordo com a figura 4.12; o empenamento dos flanges do perfil estará associado à rigidez à rotação da caixa de reforço na extremidade livre, como indica a figura 4.13. A viga reforçada foi analisada pelo Método dos Elementos Finitos, sendo modelada por 820 elementos discretos de casca, definidos por intermédio de 918 pontos nodais, como é representado nas figuras 4.14 e 4.15. Utilizando-se a Analogia Flexão-Retorção, a mesma viga foi analisada pelo método dos elementos finitos, tal como no item 4.2.3., utilizando-se porém, para o elemento de viga nº 3 da figura 4.10,  $I_t = 743 \text{ cm}^4$ , que corresponde ao momento de inércia à torção da caixa representada na figura 4.13. (corte B-B),



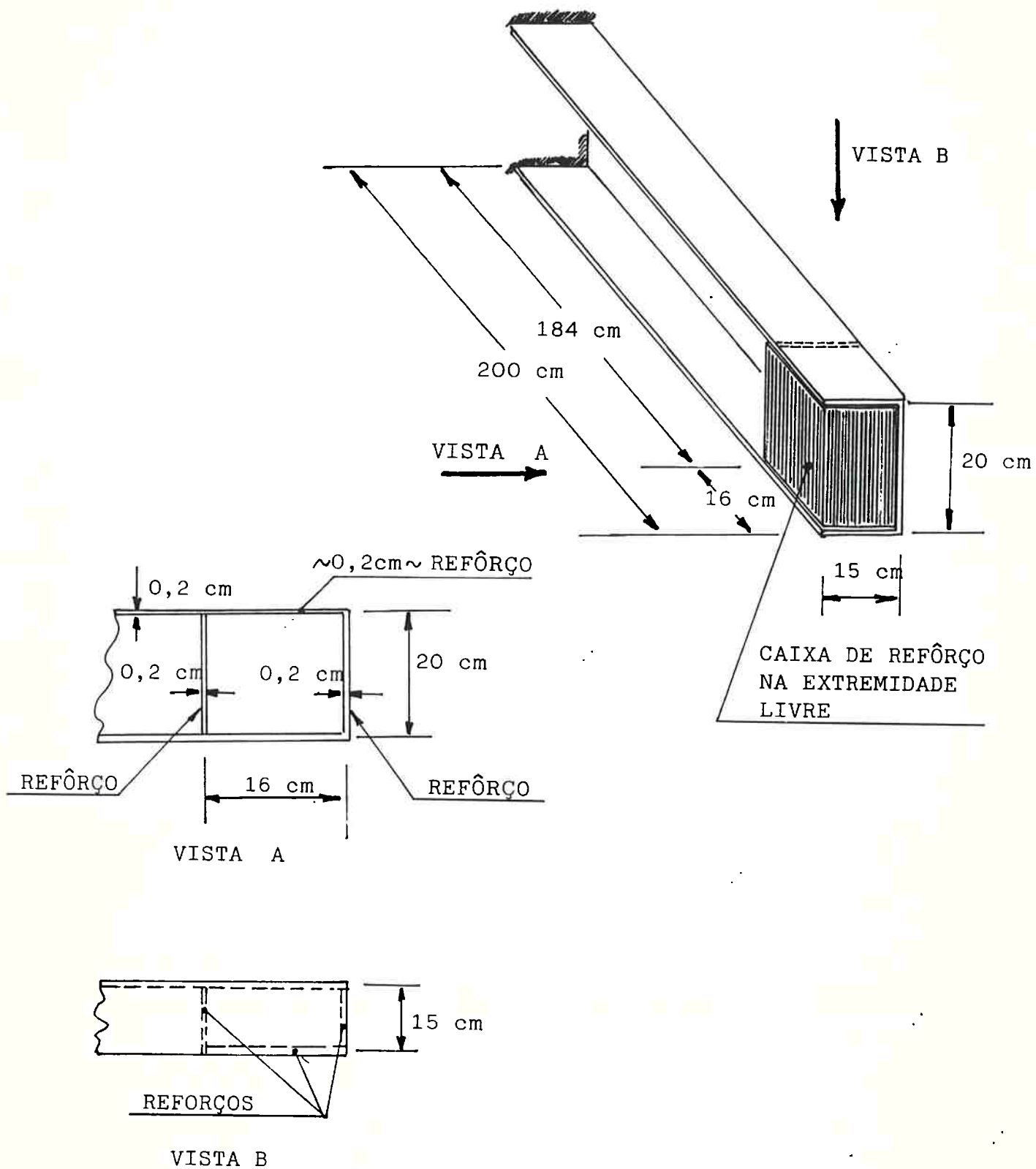


FIGURA 4.12 - VIGA DE PAREDES DELGADAS COM FÉCHAMENTO DA EXTREMIDADE LIVRE

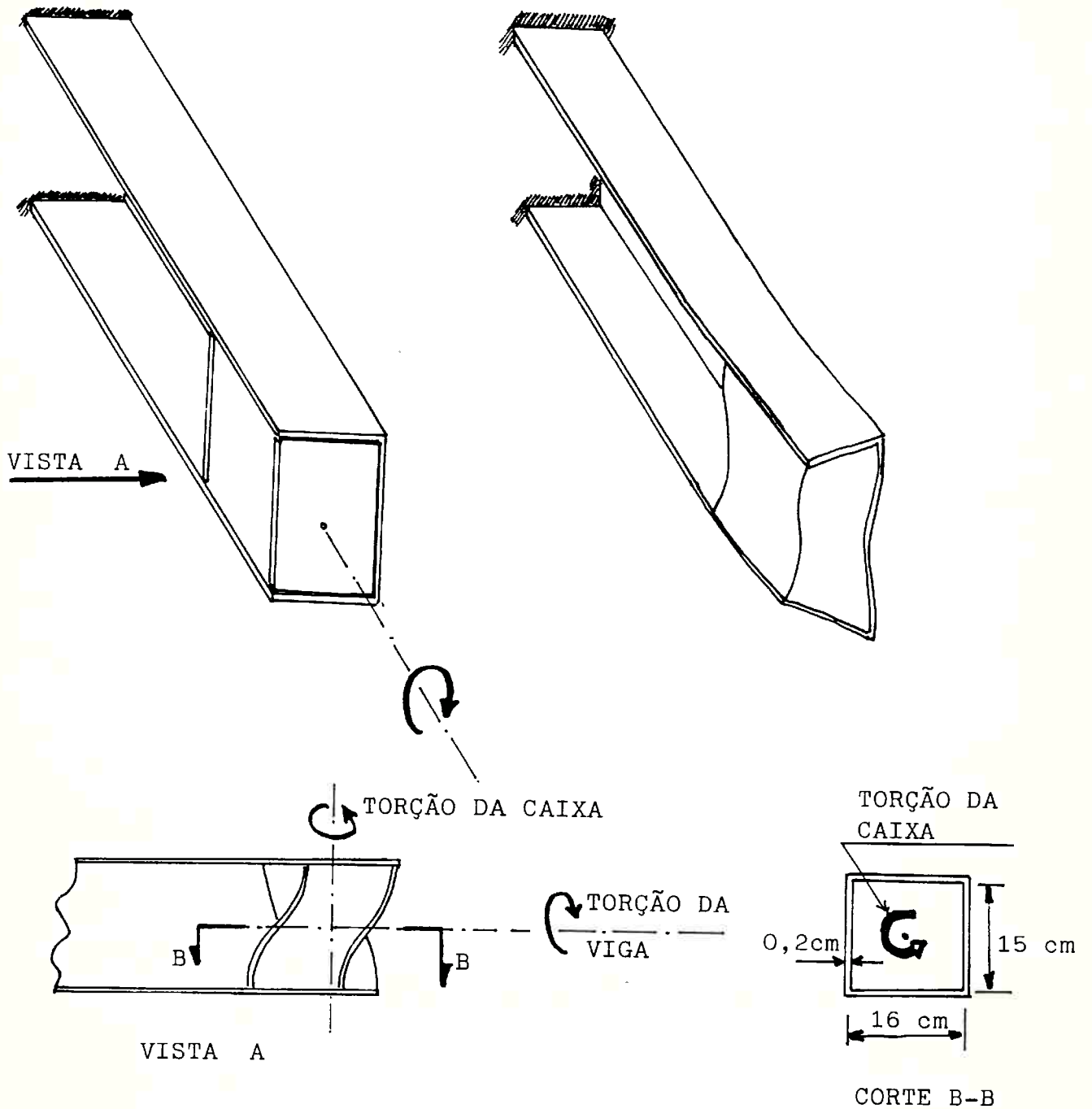


FIGURA 4.13 - EMPENAMENTO DA VIGA DE PAREDES FINAS COM CAIXA DE REFORÇO EM EXTREMIDADE LIVRE

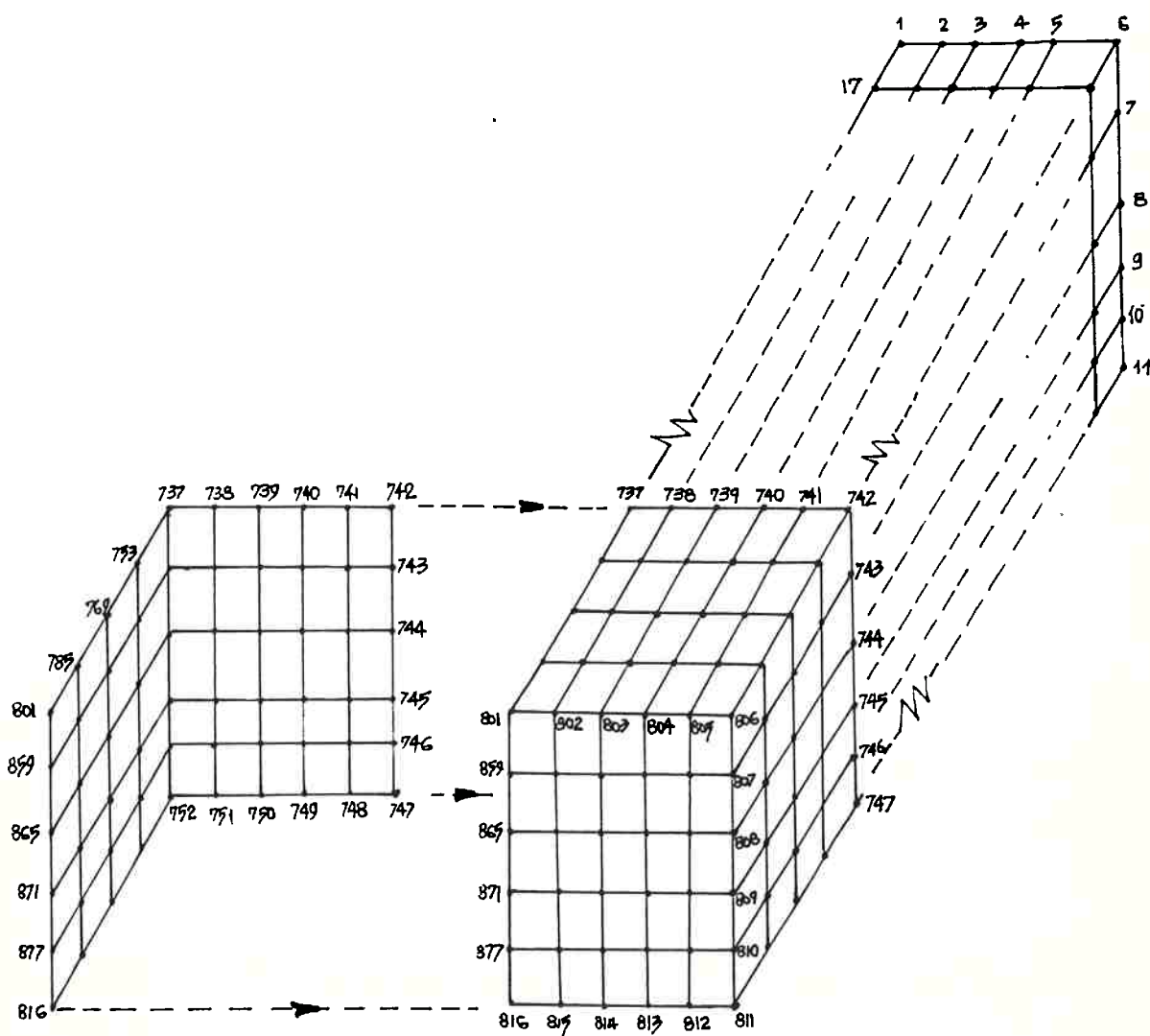
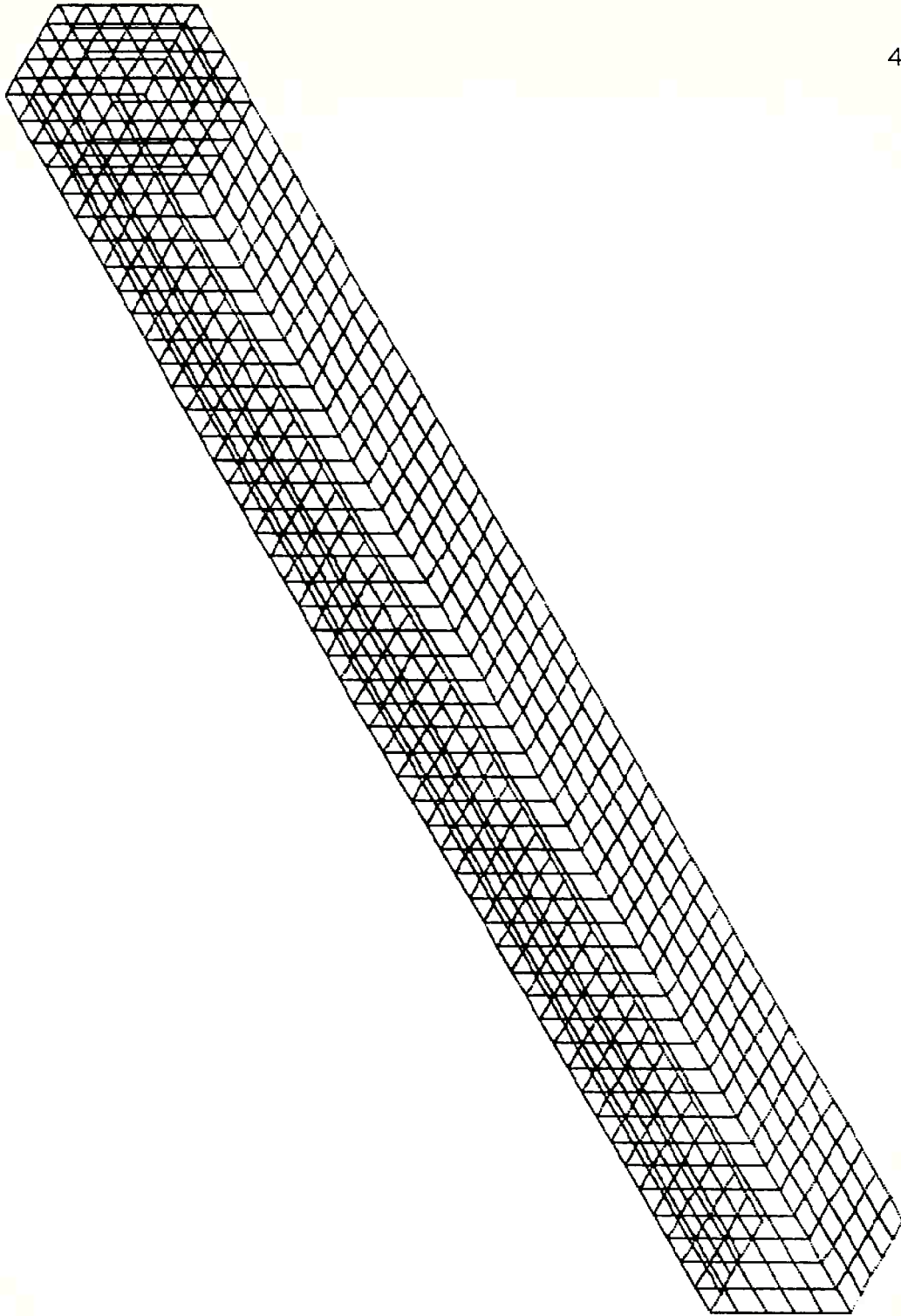


FIGURA 4.14 - DISCRETIZAÇÃO DA CAIXA DE REFORÇO DA VIGA DE PAREDES DELGADAS



SAP80

FILE : TESEVC  
UNDEFORMED GEOMETRY

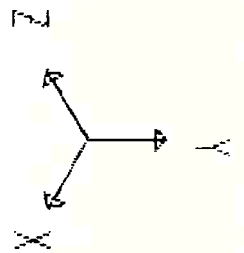


FIGURA 4.15 - VISTA GERAL DO MODELO ESTRUTURAL COM REFORÇO

como já explicado anteriormente.

A figura 4.16 representa as tensões normais no contorno da seção transversal da viga, para a região do engastamento e para a região de extremidade que corresponde a transição entre o perfil aberto e a caixa de reforço; são estabelecidas as comparações entre os valores calculados pelo MEF (casca) e pela Analogia Flexão-Retorção.

Portanto, a introdução do reforço na extremidade livre da viga, implicou no aparecimento de tensões normais nessa extremidade, o que não ocorria anteriormente quando a liberdade ao empenamento era total. Este resultado sugere que em aplicações práticas, como será apresentado no capítulo V, a rigidez à torção das vigas V da Analogia Flexão-Retorção, deve ser calculada a partir da rigidez à torção da ligação de extremidade da viga. Quando esta extremidade constituir uma ligação na forma de caixa, a repercussão deste reforço deverá ser significativa na resposta, em consequência da elevada rigidez à torção do perfil fechado.

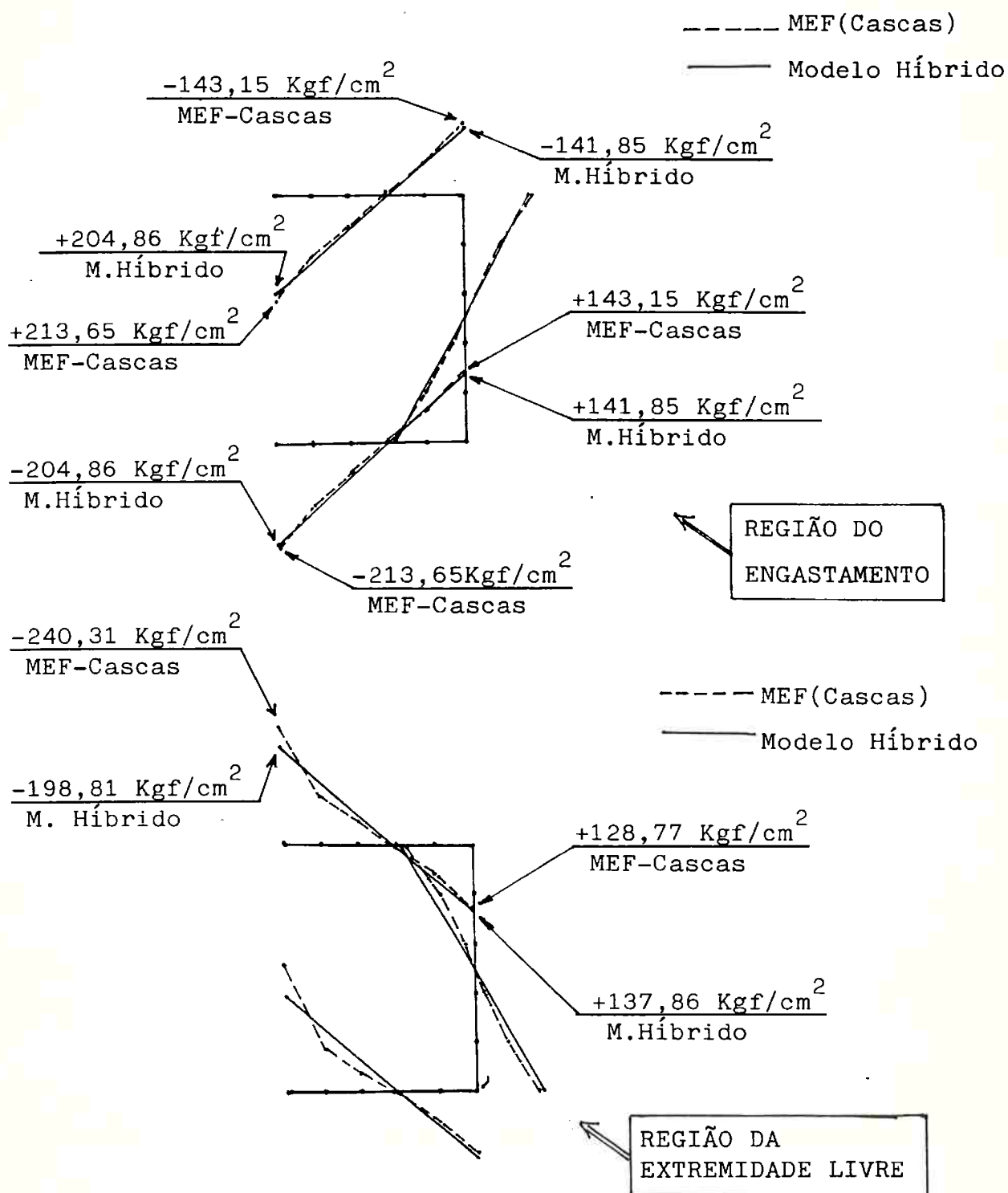


FIGURA 4.16 - TENSÕES NORMAIS NA VIGA COM EXTREMIDADE LIVRE REFORÇADA

## CAPÍTULO V

### EXEMPLO DE APLICAÇÃO - CHASSIS

#### 5.1 - INTRODUÇÃO

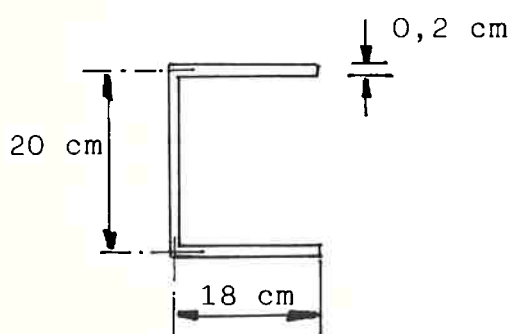
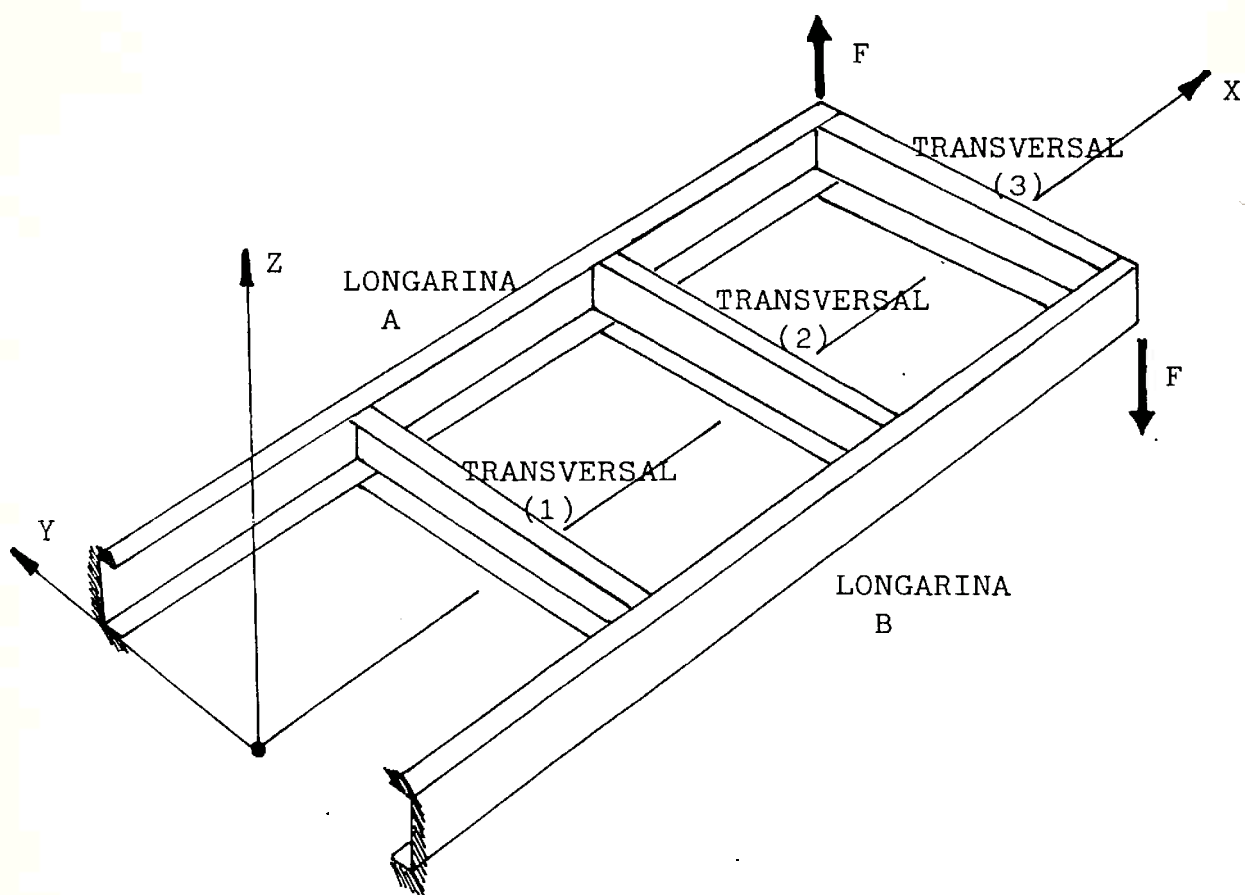
Neste capítulo será utilizada a Analogia Flexão-Retorção para um caso de aplicação prática, considerando uma estrutura tipo chassis de veículo, constituída por diversos perfis abertos de paredes delgadas interligados entre si. Inicialmente o problema será resolvido por intermédio do Método dos Elementos Finitos, considerando toda a estrutura discretizada por elementos de casca, portanto, utilizando um modelo bastante trabalhoso. Posteriormente, o mesmo problema será discretizado por intermédio do "Modelo Híbrido" já considerado anteriormente, estabelecendo-se assim a comparação dos resultados obtidos pelos dois processos, permitindo a verificação da validade da Analogia Flexão-Retorção nos casos mais gerais.

#### 5.2 - EXEMPLO PARA ESTUDO

A figura 5.1 representa uma estrutura constituída por perfis abertos de paredes delgadas.

As longarinas A e B são engastadas em uma de suas extremidades e sujeitas ao par de forças F, que ocasiona a retorção da estrutura como um todo.

Objetiva-se analisar a estrutura pelos dois processos citados em 5.1, o que será feito a seguir.



LONGARINAS A e B

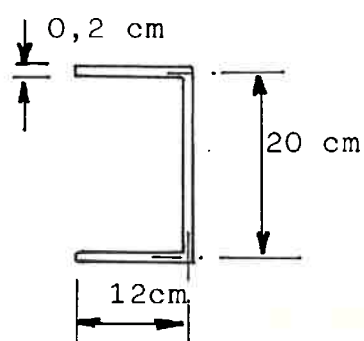
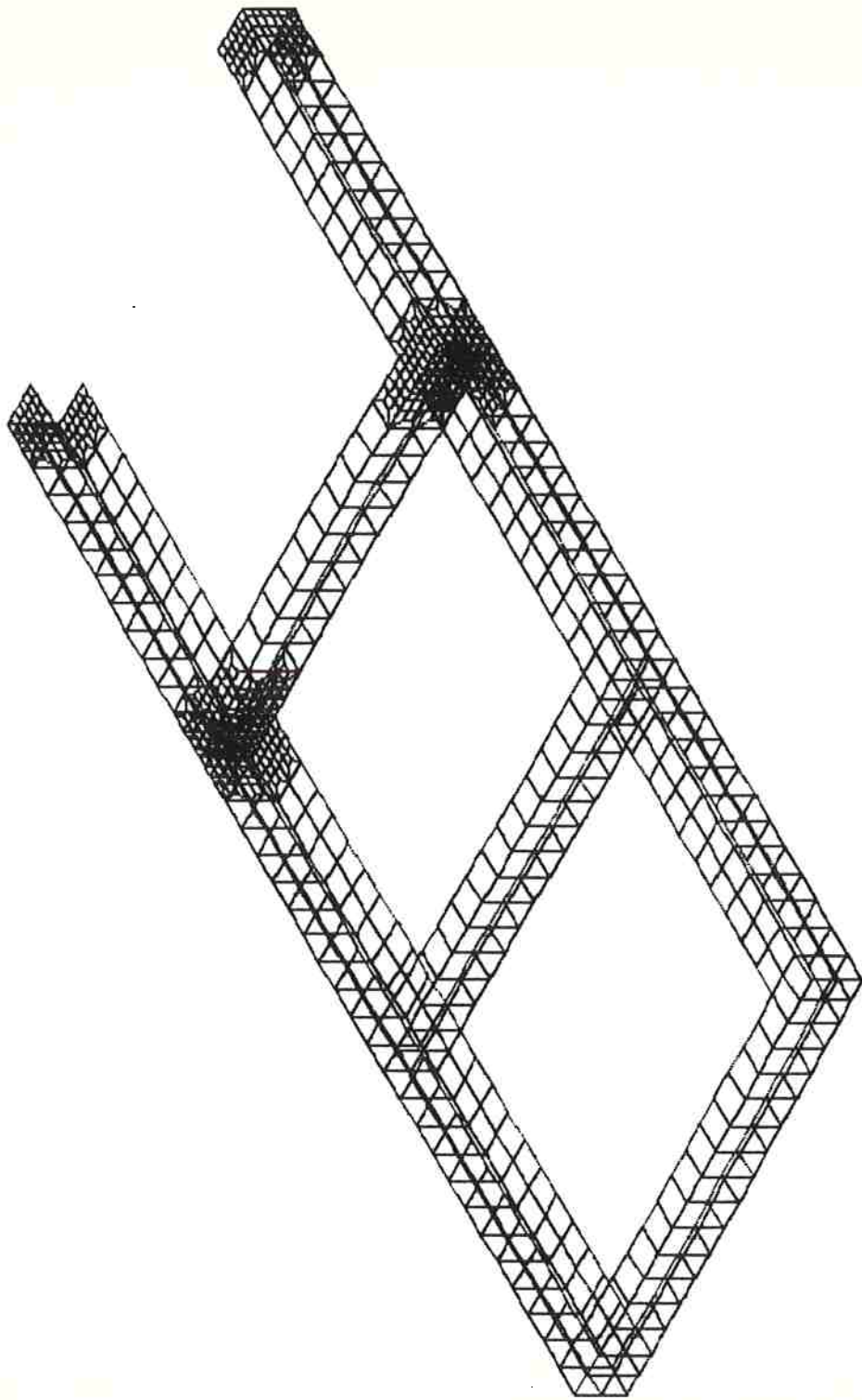
TRANSVERSAIS  
(1) , (2) e (3)

FIGURA 5.1 - ESTRUTURA CONSTITUÍDA POR PERFIS ABERTOS DE PAREDES DELGADAS



### 5.2.1 - Análise pelo Método dos Elementos Finitos com Elementos de Casca (MEF - Cascas).

A estrutura representada na figura 5.1 foi discretizada em 752 elementos de casca, definidos por intermédio de 1476 pontos nodais (entre ativos e inativos). As figuras 5.2 a 5.6 representam o modelo estrutural, apresentando uma vista geral do mesmo bem como algumas vistas que permitem uma idéia mais pormenorizada das diversas regiões. A definição completa das características do modelo em termos de geometria e propriedades é estabelecida no Apêndice B, que fornece os dados de entrada para o programa de elementos finitos para esse modelo. A observação dessas figuras indica algumas regiões onde se adotou uma malha mais refinada, com o propósito de se obter uma resposta mais acurada para essas regiões alvo de análise, tais como a intersecção da transversal (1) com as longarinas e as regiões dos engastamentos. A estrutura foi então analisada para  $F = 400$  kgf, aplicadas aos pontos nodais 474 e 1474; a figura 5.7 representa a configuração deformada do modelo estrutural para esse carregamento. Foram obtidas então, as tensões normais nos pontos do contorno das seções das longarinas e transversais, tensões estas uniformes ao longo da espessura para cada ponto considerado. As regiões de interesse para análise são representadas nas figuras 5.8 e 5.9; a distribuição das tensões atuantes para cada região é representada na figura 5.10, e os valores numéricos dessas tensões são apresentados na Tabela 5.1.



SAP80

FILE : TESE  
UNDEFORMED GEOMETRY

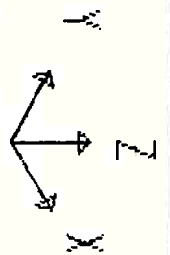
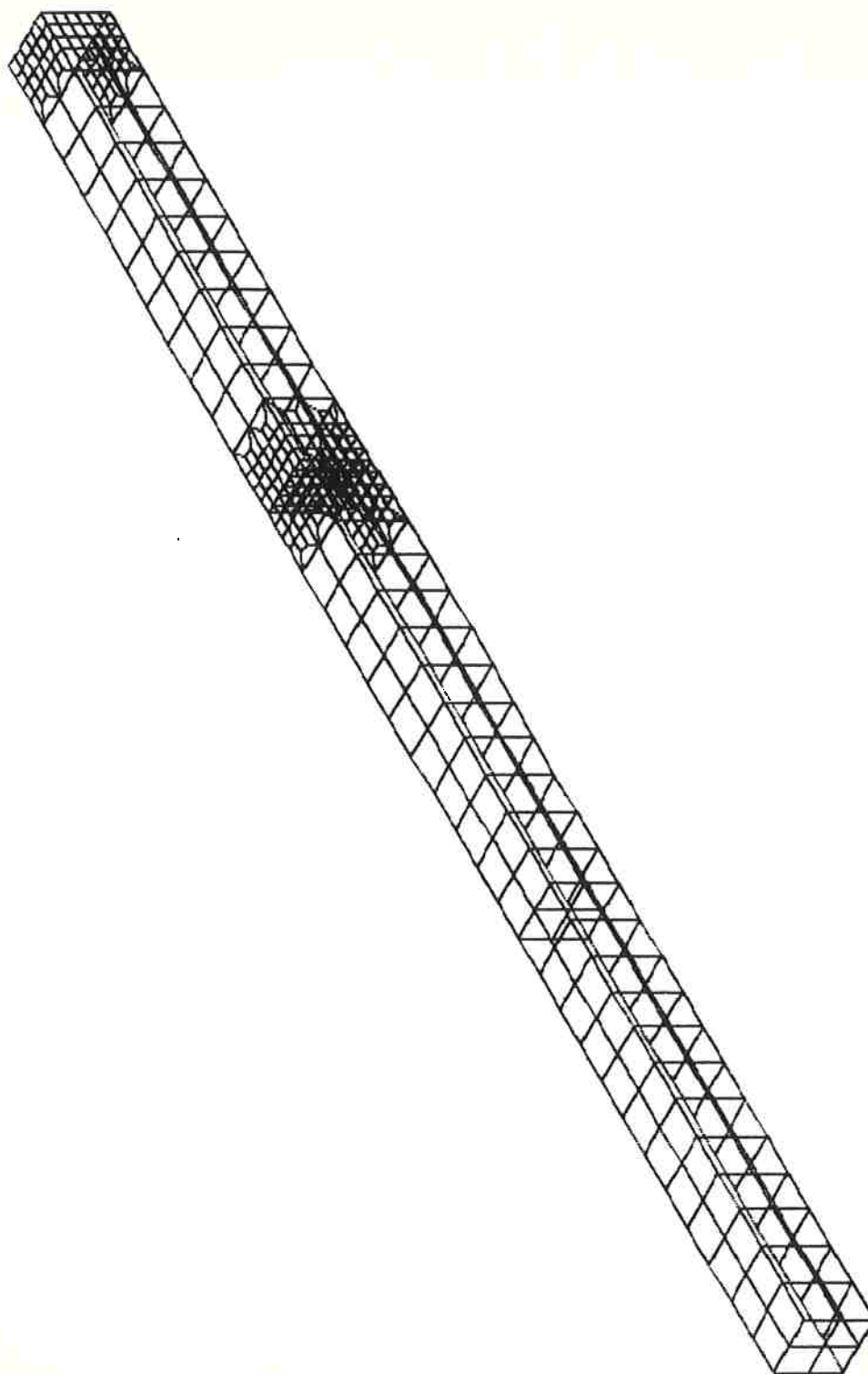


FIGURA 5.2 - VISTA GERAL DO MODELO ESTRUTURAL



SAP80

FILE : TESE  
UNDEFORMED GEOMETRY

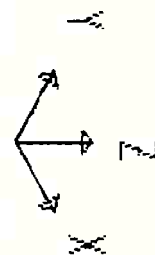
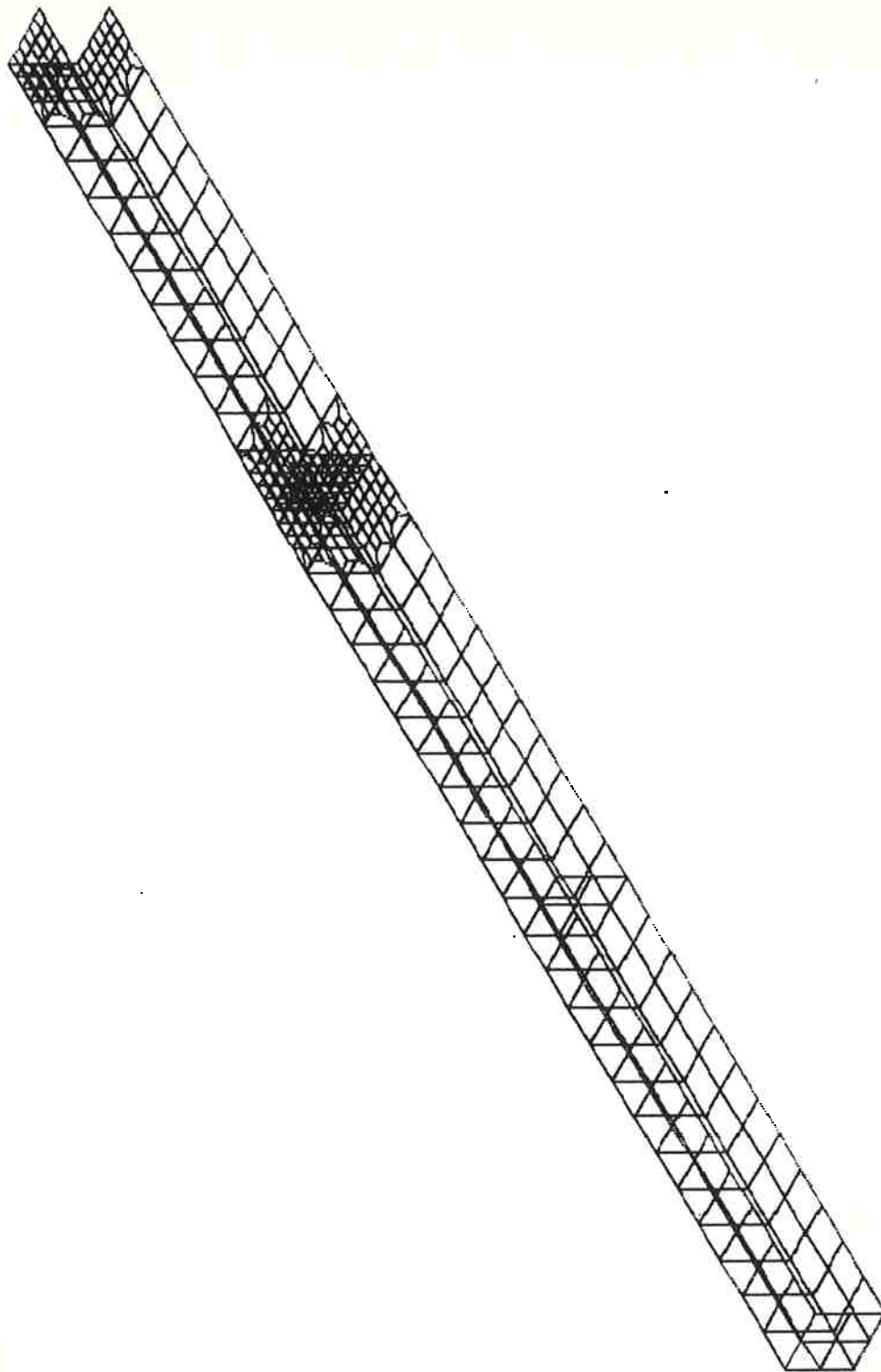


FIGURA 5.3 - LONGARINA A



SAP80

FILE : TESE  
UNDEFORMED GEOMETRY

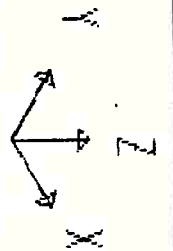
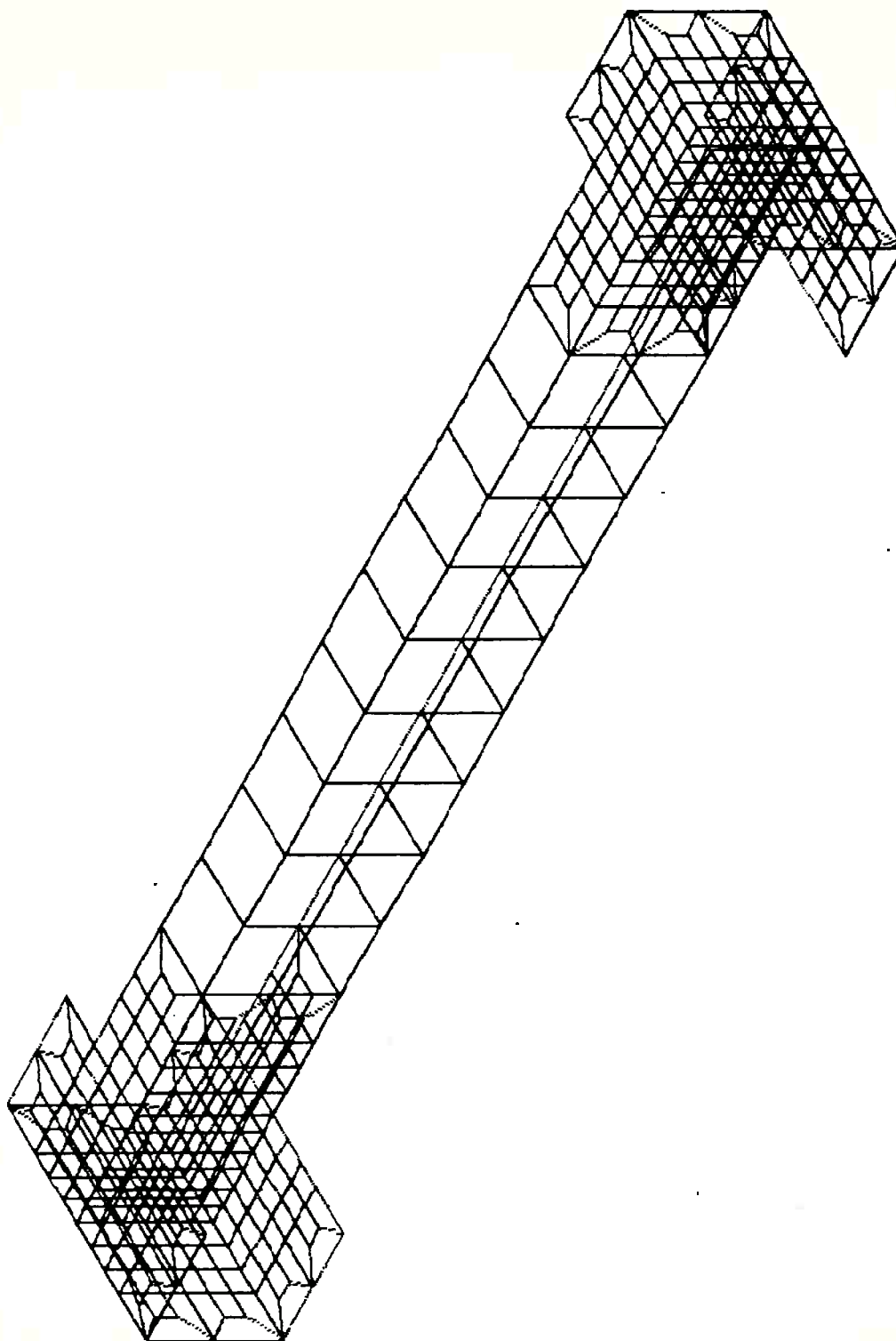


FIGURA 5.4 - LONGARINA B



SAP80

FILE : TESE  
UNDEFORMED GEOMETRY

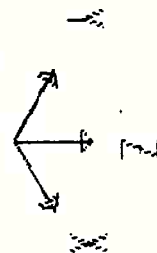
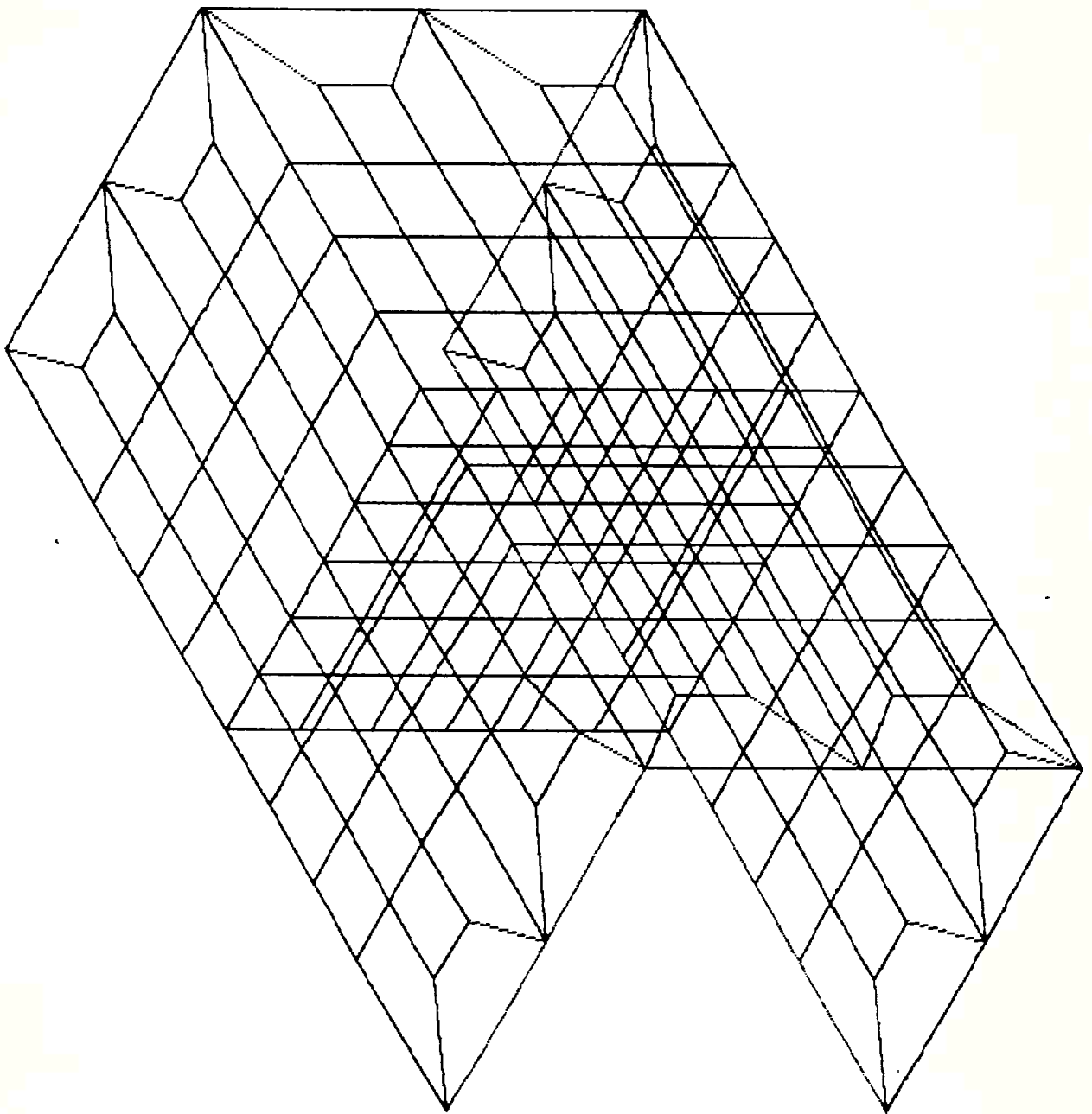


FIGURA 5.5 - TRANSVERSAL (1) E INTERSECÇÃO COM LONGARINAS



SAP80

FILE : TESE

UNDEFORMED GEOMETRY

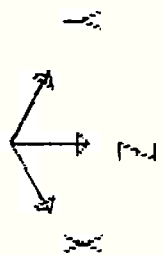
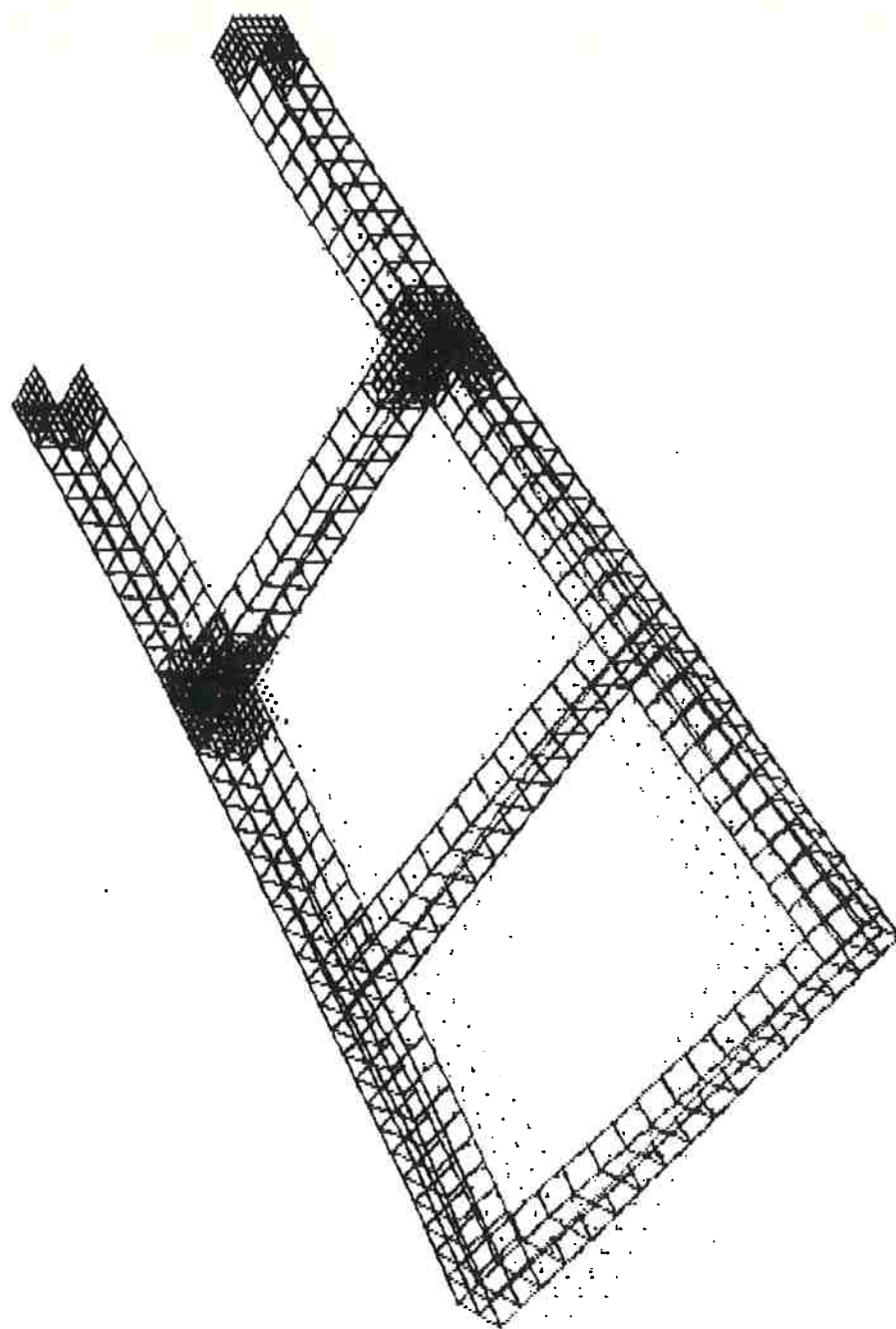


FIGURA 5.6 - REGIÃO DE PENETRAÇÃO DA ALMA DO TRANSVERSAL (1)  
NA LONGARINA A





SAP80

FILE : TESE

LOAD CONDITION : 1

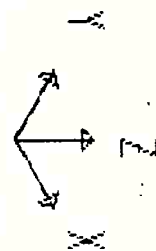


FIGURA 5.7 - ESTRUTURA TIPO CHASSIS SUJEITA À TORÇÃO

TABELA 5.1 - TENSÕES AXIAIS NA LONGARINA A E TRANSVERSAL (1)

| LONGARINA A NA REGIÃO DO ENGASTAMENTO (figura 5.9) |                                 | LONGARINA A NA REGIÃO DE ENCONTRO COM TRANSVERSAL (1) |                                 | TRANSVERSAL (1) NA REGIÃO DE ENCONTRO COM LONGARINA A (INTERSECÇÃO ENTRE FLANGES) |                                 |
|--|---------------------------------|---|---------------------------------|---|---------------------------------|
| PONTO NODAL  | $\sigma$ (kgf/cm <sup>2</sup> ) | PONTO NODAL   | $\sigma$ (kgf/cm <sup>2</sup> ) | PONTO NODAL   | $\sigma$ (kgf/cm <sup>2</sup> ) |
| 1  | 2370,50                         | 228   | 1138,8                          | 543   | -1322,30                        |
| 2  | 1923,00                         | 229   | 1194,48                         | 544   | -237,14                         |
| 3  | 1781,65                         | 230   | 1120,33                         | 545   | 200,95                          |
| 4  | 1684,85                         | 231   | 1086,68                         | 546   | 957,35                          |
| 5  | 1619,40                         | 232   | 1040,95                         | 552   | -958,30                         |
| 6  | 1584,20                         | 233   | 993,85                          | 553   | -200,96                         |
| 7  | 1728,65                         | 234   | 959,05                          | 554   | 237,64                          |
| 8  | 1017,25                         | 235   | 630,00                          | 555   | 1324,10                         |
| 9  | 503,25                          | 236   | 317,61                          |   |                                 |
| 10   | 0,08                            | 237   | 0,16                            |   |                                 |
| 11   | -503,25                         | 238   | -317,28                         |   |                                 |
| 12   | -1017,05                        | 239   | -629,65                         |   |                                 |
| 13   | -1728,45                        | 240   | -958,58                         |   |                                 |
| 14   | -1584,15                        | 241   | -993,65                         |   |                                 |
| 15   | -1619,40                        | 242   | -1040,98                        |   |                                 |
| 16   | -1684,95                        | 243   | -1086,88                        |   |                                 |
| 17   | -1781,85                        | 244   | -1120,7                         |   |                                 |
| 18   | -1923,30                        | 245   | -1195,18                        |   |                                 |
| 19   | 2370,90                         | 246   | -1139,73                        |   |                                 |



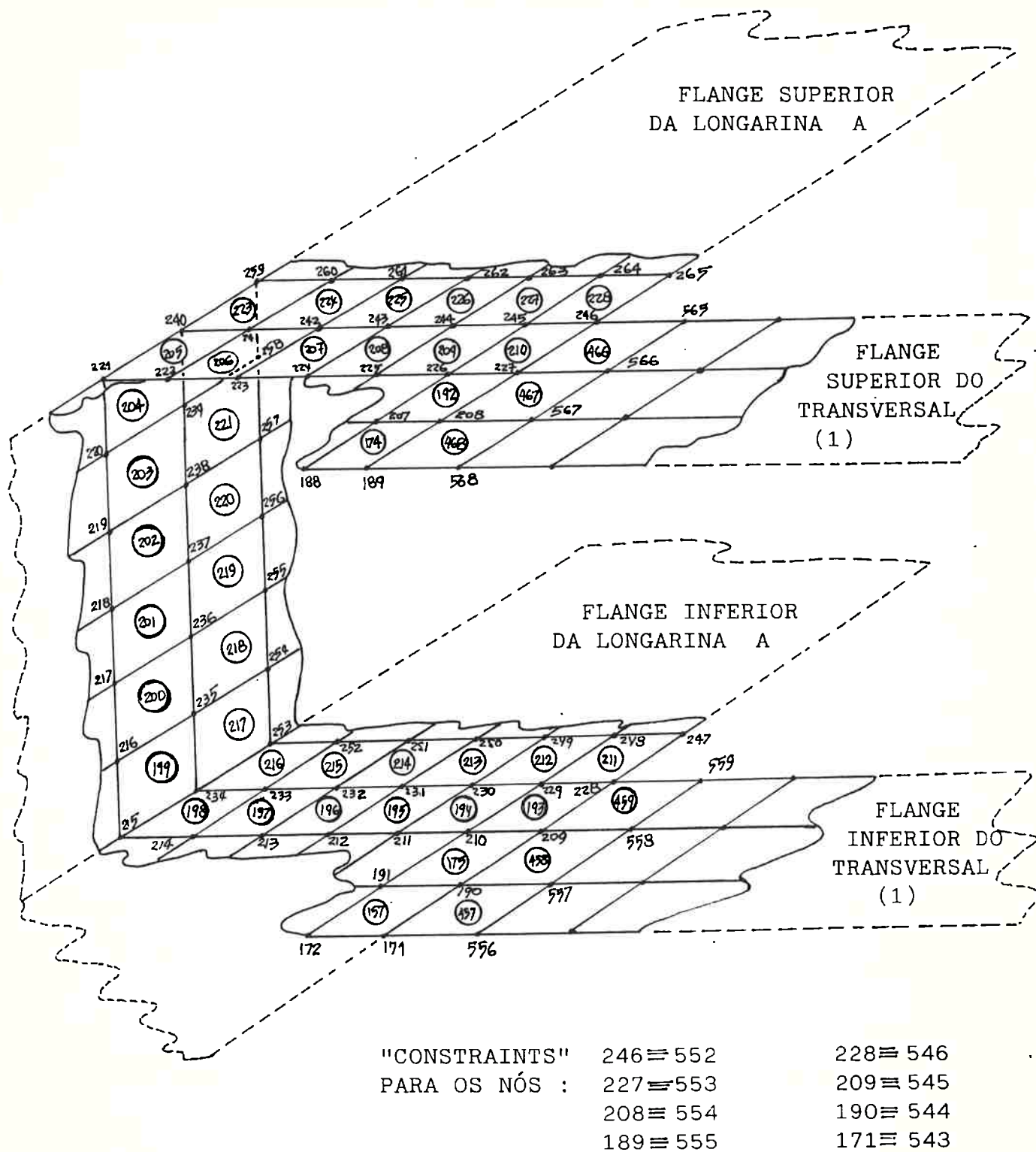


FIGURA 5.8 - REPRESENTAÇÃO DA INTERSECÇÃO DOS FLANGES DO TRANSVERSAL (1) COM OS FLANGES DA LONGARINA A (ALMA DO TRANSVERSAL NÃO REPRESENTADA) NO MODELO PELO MEF (CASCA)

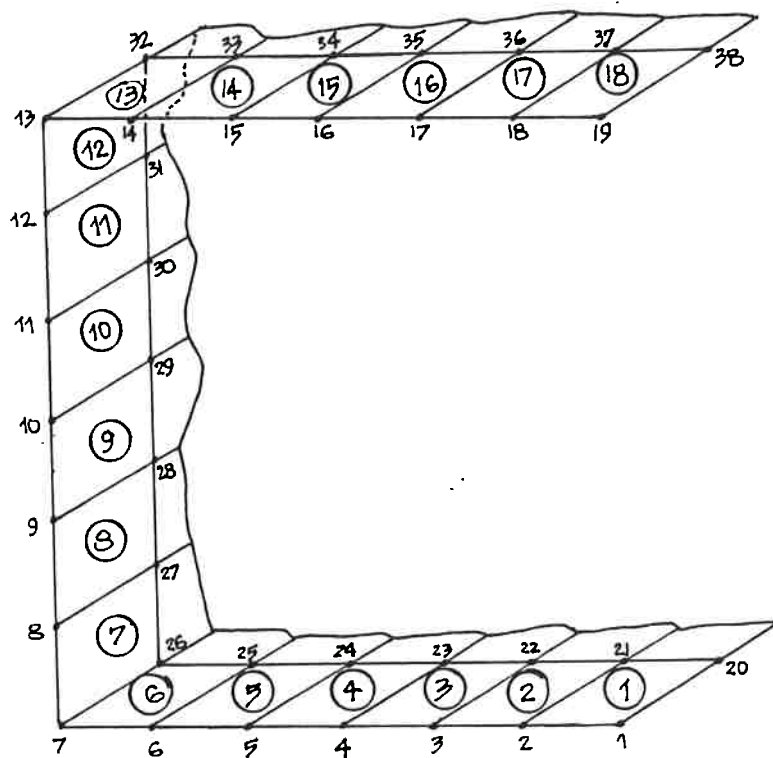
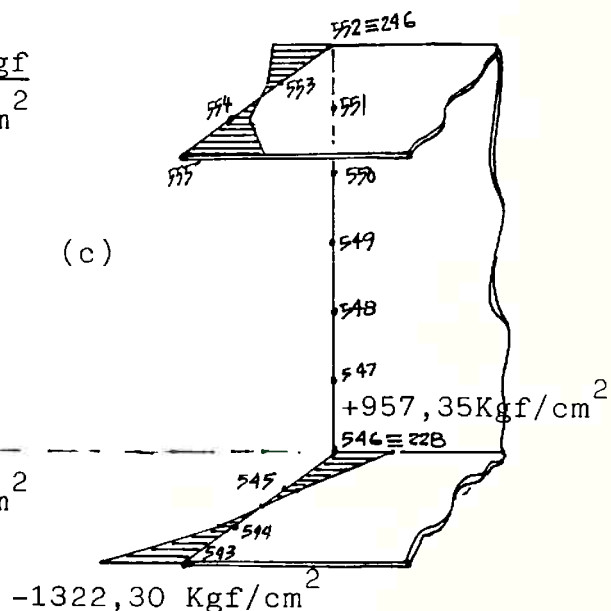
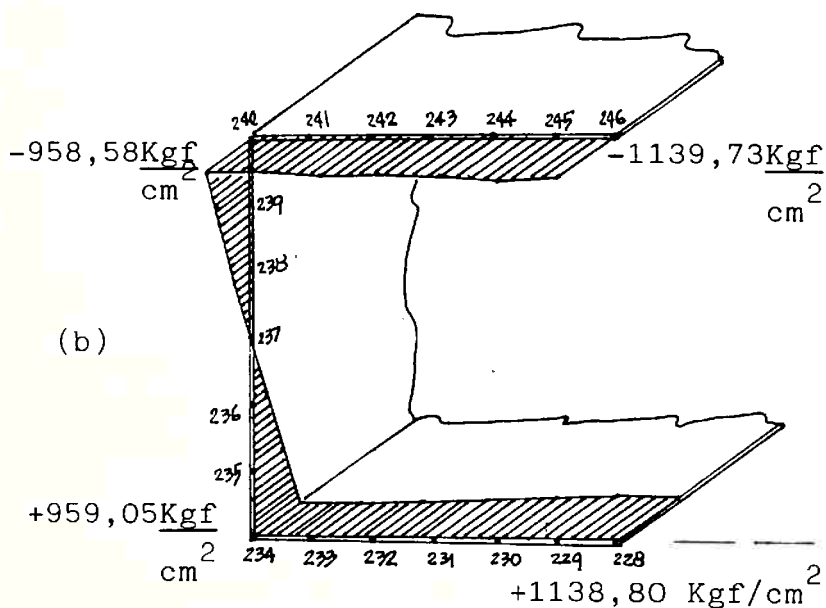
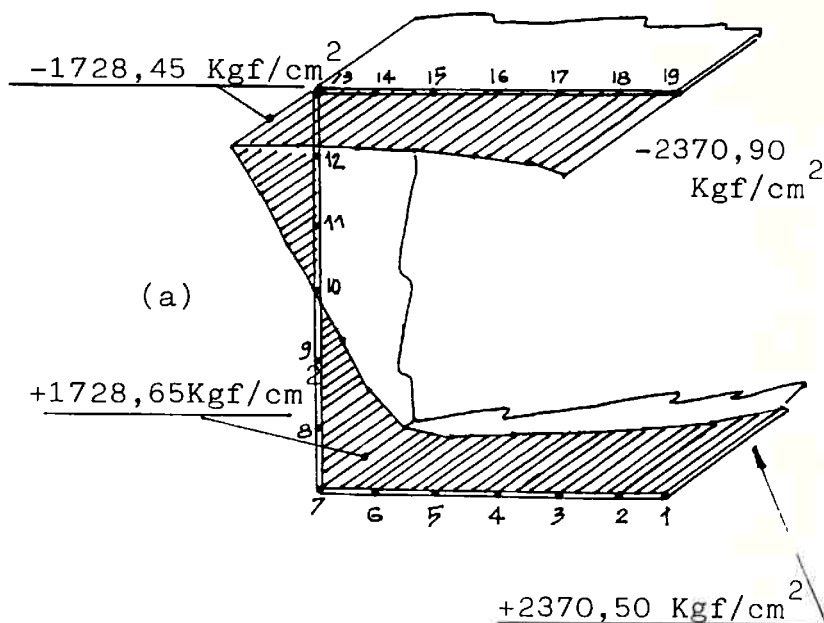
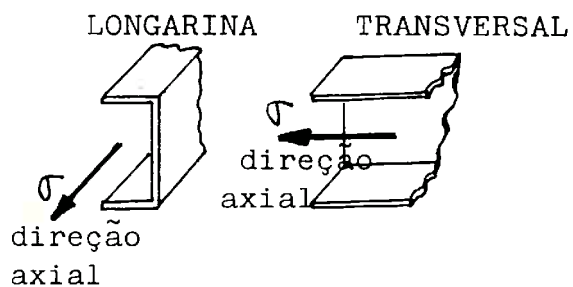


FIGURA 5.9 - MODELO PELO MEF (CASCA) - LONGARINA A NA REGIÃO DO ENGASTAMENTO

TENSÕES NORMAIS AXIAIS  
PARA LONGARINA E  
TRANSVERSAL



TENSÕES NOS FLANGES

FIGURA 5.10 - DISTRIBUIÇÃO DAS TENSÕES NORMAIS AO LONGO DO CONTORNO DA SEÇÃO DOS PERFIS

### 5.2.2 - Análise pelo Método dos Elementos Finitos com "Modelo Híbrido". Analogia Flexão- Retorção .

A estrutura representada na figura 5.1 foi discretizada considerando as hipóteses introduzidas anteriormente na concepção da Analogia Flexão-Retorção. A figura 5.11 representa o Modelo Estrutural; como as flexões horizontais dos elementos de viga do Modelo estão associadas às flexões diferenciais dos flanges (retorção ou flexo-torção), que provocam o empenamento, os pontos extremos dos elementos de viga foram posicionados nos pontos correspondentes a empenamento nulo das vigas a que estão ligadas, conforme representado nessa mesma figura. A figura 5.12 representa as vistas lateral e frontal da longarina, e as regiões de intersecção com os transversais, permitindo a definição dos pontos nodais por intermédio dos eixos de empenamento nulo. O cálculo dos pontos de empenamento nulo foi efetuado para as longarinas e transversais, utilizando-se a expressão deduzida por Vlasov (1), que decorre do procedimento apresentado no Apêndice A. Para perfis com seções usuais em aplicações práticas, a formulação para cálculo do centro de torção e pontos de empenamento nulo são conhecidas, e disponíveis nas referências (1) e (4), por exemplo. De (1):

$$\alpha_x = \frac{b^2 \cdot t_1}{2 \cdot t_1 \cdot b + \frac{t \cdot h}{3}}, \text{ resultando para as longarinas:}$$

$$b = 18 \text{ cm}$$

$$t_1 = t = 0,2 \text{ cm} \longrightarrow \alpha_x = 7,594 \text{ cm}$$

$$h = 20 \text{ cm}$$

e para as transversais:

$$b = 12 \text{ cm}$$

$$t_1 = t = 0,2 \text{ cm}$$

$$h = 20 \text{ cm}$$

$$\alpha_x = 4,696 \text{ cm}$$

A definição completa das características do modelo em termos de geometria e propriedades é estabelecida no A pêndice C, que fornece os dados de entrada para o programa de elementos finitos para esse modelo. Foram consideradas as seguintes propriedades, calculadas a partir das formulações já conhecidas para perfis tipo C e disponíveis nas referências (1) e (4):

$$\text{longarinas} - I_w = 28553,86 \text{ cm}^6; I_t = 0,1493 \text{ cm}^4;$$

$$I_y^* = 142,77 \text{ cm}^4; I_3 = 853,36 \text{ cm}^4$$

$$\text{transversais} - I_w = 9516,87 \text{ cm}^6; I_t = 0,1173 \text{ cm}^4$$

$$I_y^* = 47,58 \text{ cm}^4; I_3 = 613,35 \text{ cm}^4$$

As vigas verticais V de ligação do modelo híbrido foram consideradas com momento de inércia à torção  $J \approx 0$ . Isto decorre da inexistência de um reforço na forma de caixa no encontro das vigas longitudinais e transversais, de acordo com o ítem 4.3, e com conseqüente rigidez à torção muito pequena, se comparada com a rigidez à flexão das vigas transversais e longitudinais no plano de empenamento.

A figura 5.13 apresenta uma vista geral da deformação do "modelo híbrido", para  $F = 400 \text{ kgf}$  aplicadas aos nós 8 e 16 conforme indicado na figura 5.11. As tabelas 5.2

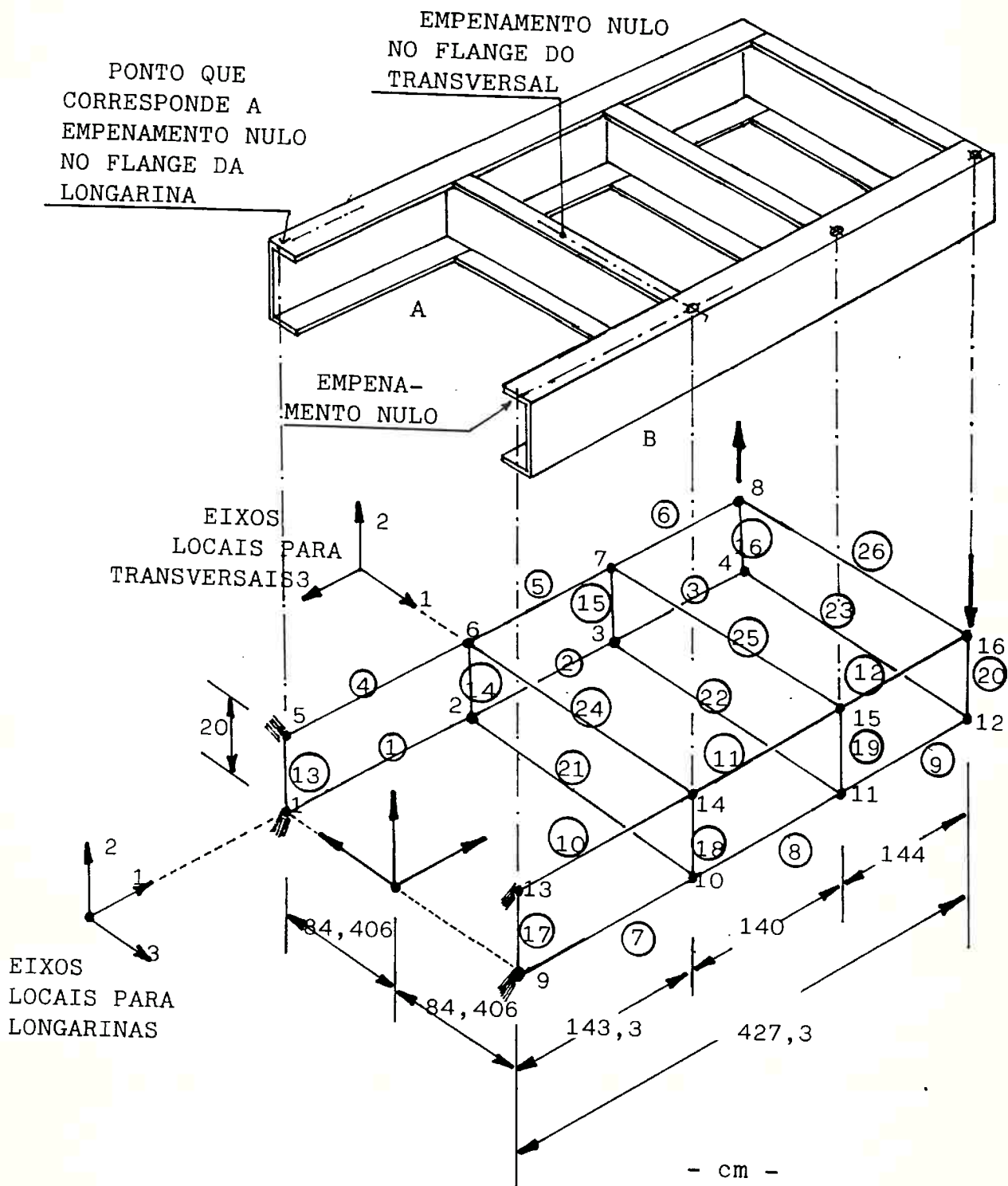
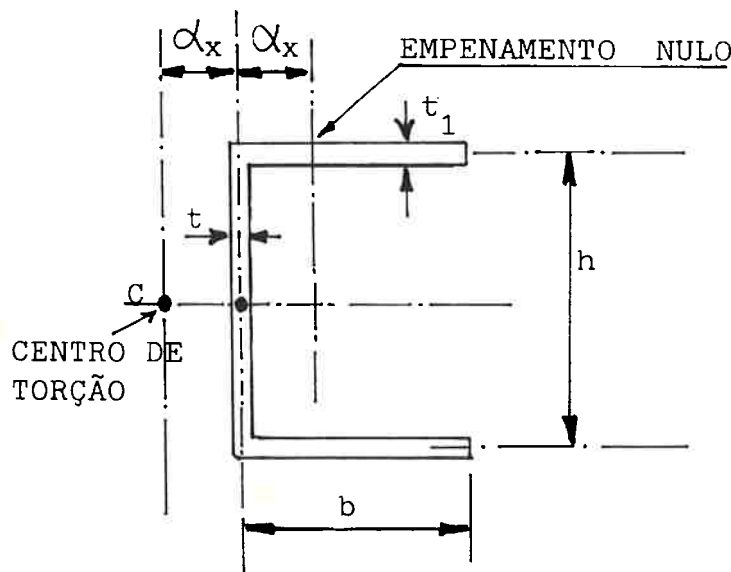
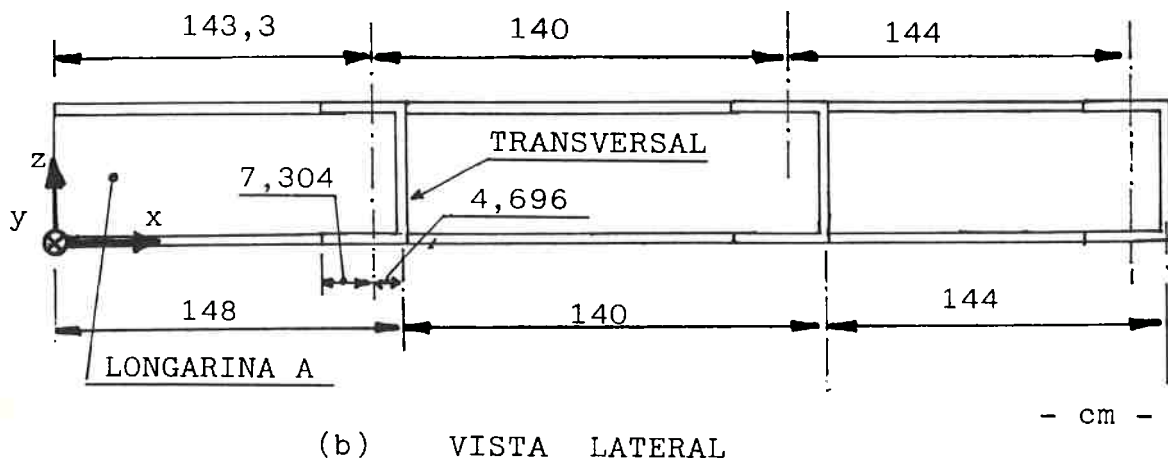
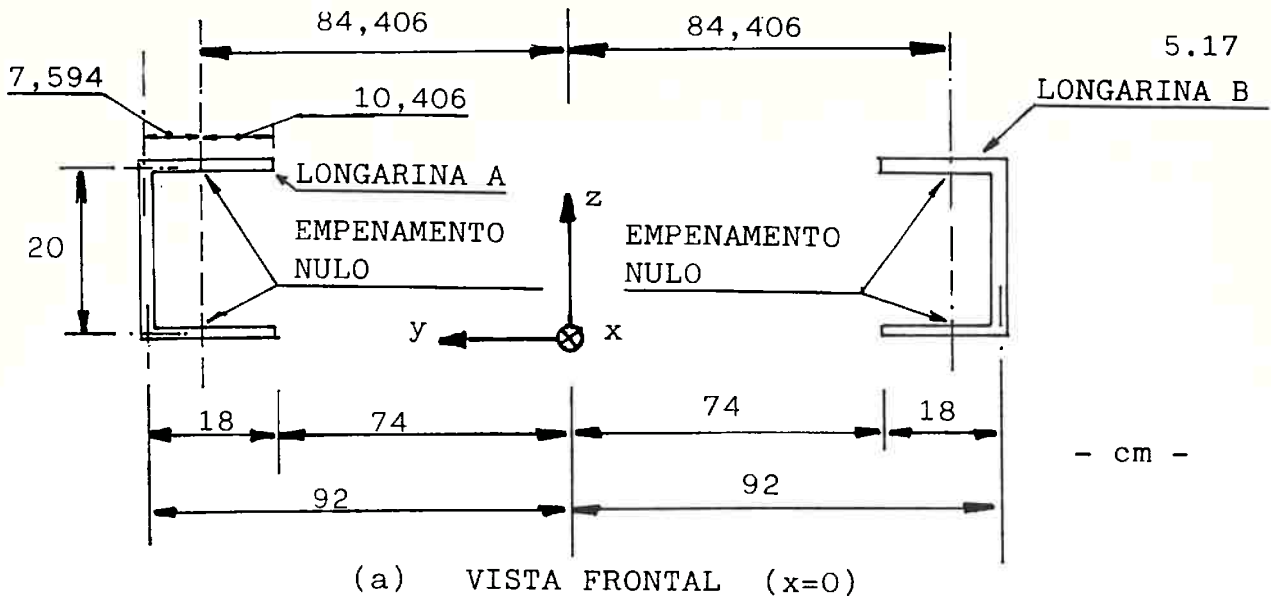
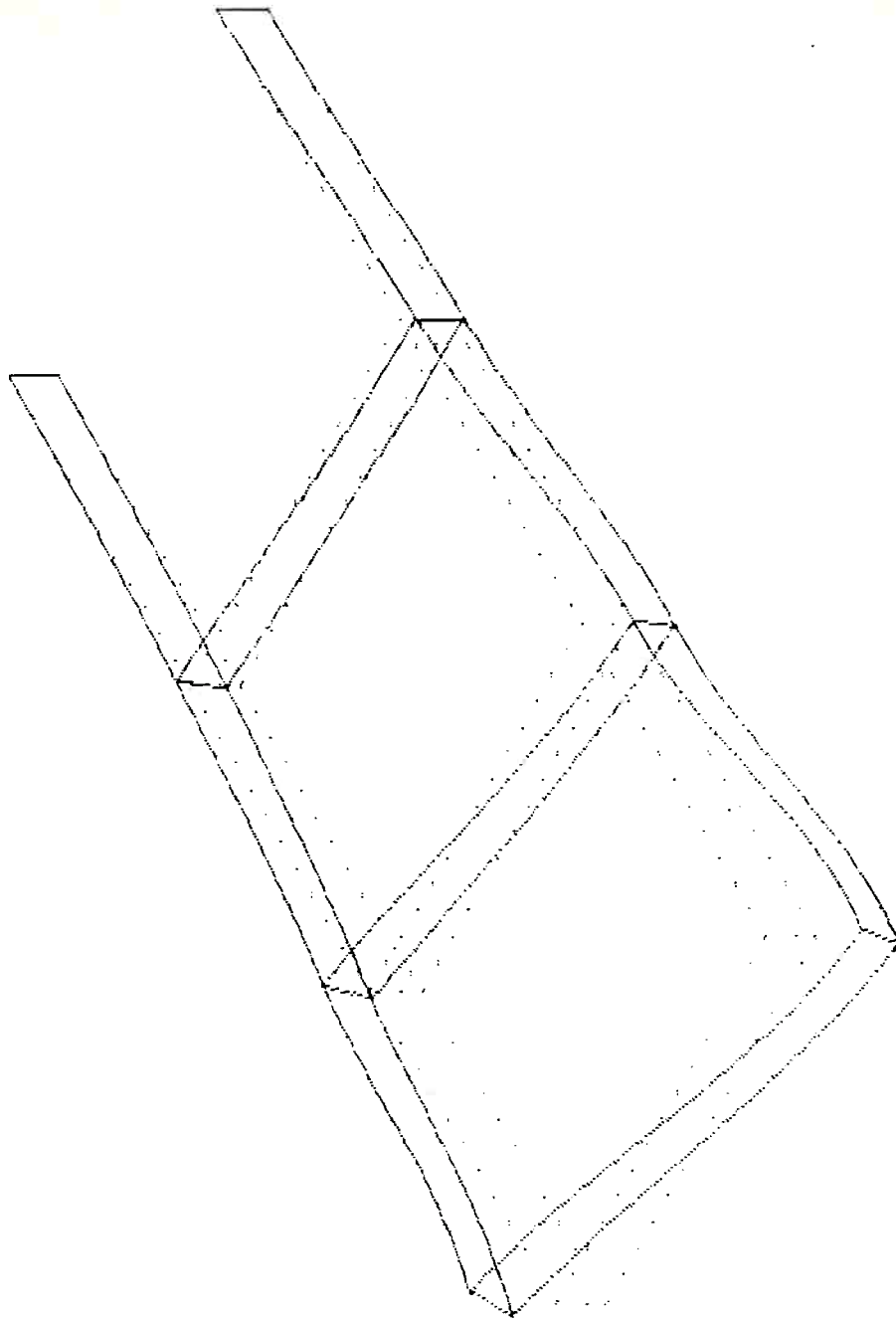


FIGURA 5.11 - MODELO ESTRUTURAL DE CHASSIS PARA ANALOGIA FLEXÃO-RETORÇÃO



(c) POSIÇÃO DO CENTRO DE TORÇÃO E DOS PONTOS DE EMPENAMENTO NULO NOS FLANGES DE PERFIL C

FIGURA 5.12 - LOCALIZAÇÃO DAS REGIÕES DE EMPENAMENTO NULO PARA A ANALOGIA FLEXÃO-RETORÇÃO



SAP80

FILE : teted

LOAD CONDITION : 1

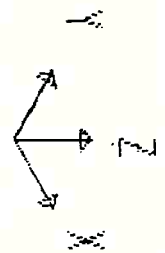


FIGURA 5.13 - VISTA GERAL DO "MODELO HÍBRIDO" DEFORMADO



TABELA 5.2 - ESFORÇOS NOS ELEMENTOS DE VIGA - I

ANALISE DE ESTRUTURA COM PERFIS ABERTOS \* FLEXO-TORCAO/VIGAS ARQ:TESEF

PROGRAMA ELEMENT FORCES

| ELT | LOAD | AXIAL | DIST  | 1-2 PLANE |            | 1-3 PLANE |           | AXIAL |
|-----|------|-------|-------|-----------|------------|-----------|-----------|-------|
| ID  | COND | FORCE | END1  | SHEAR     | MOMENT     | SHEAR     | MOMENT    | TORQ  |
| 1   | 1    | .01   | .0    | -390.90   | 155233.24  | 37.82     | -4517.73  | 3.91  |
|     |      |       | 143.3 | -390.90   | 99217.26   | 37.82     | 901.90    |       |
| 2   | 1    | .01   | .0    | -382.79   | 100969.97  | 71.47     | -6447.80  | 9.59  |
|     |      |       | 140.0 | -382.79   | 47378.81   | 71.47     | 3557.37   |       |
| 3   | 1    | .00   | .0    | -367.40   | 50283.47   | 136.18    | -8627.43  | 12.31 |
|     |      |       | 144.0 | -367.40   | -2621.87   | 136.18    | 10982.03  |       |
| 4   | 1    | -.01  | .0    | -.05      | 18.19      | -37.82    | 4517.73   | 3.91  |
|     |      |       | 143.3 | -.05      | 11.63      | -37.82    | -901.90   |       |
| 5   | 1    | -.01  | .0    | -.04      | 11.83      | -71.47    | 6447.80   | 9.59  |
|     |      |       | 140.0 | -.04      | 5.55       | -71.47    | -3557.37  |       |
| 6   | 1    | .00   | .0    | -.04      | 5.89       | -136.18   | 8627.43   | 12.31 |
|     |      |       | 144.0 | -.04      | -.31       | -136.18   | -10982.03 |       |
| 7   | 1    | -.01  | .0    | 390.90    | -155233.24 | 37.82     | -4517.73  | 3.91  |
|     |      |       | 143.3 | 390.90    | -99217.26  | 37.82     | 901.90    |       |
| 8   | 1    | -.01  | .0    | 382.79    | -100969.97 | 71.47     | -6447.80  | 9.59  |
|     |      |       | 140.0 | 382.79    | -47378.81  | 71.47     | 3557.37   |       |
| 9   | 1    | .00   | .0    | 367.40    | -50283.47  | 136.18    | -8627.43  | 12.31 |
|     |      |       | 144.0 | 367.40    | 2621.87    | 136.18    | 10982.03  |       |
| 10  | 1    | .01   | .0    | .05       | -18.19     | -37.82    | 4517.73   | 3.91  |
|     |      |       | 143.3 | .05       | -11.63     | -37.82    | -901.90   |       |
| 11  | 1    | .01   | .0    | .04       | -11.83     | -71.47    | 6447.80   | 9.59  |
|     |      |       | 140.0 | .04       | -5.55      | -71.47    | -3557.37  |       |
| 12  | 1    | .00   | .0    | .04       | -5.89      | -136.18   | 8627.43   | 12.31 |
|     |      |       | 144.0 | .04       | .31        | -136.18   | -10982.03 |       |
| 13  | 1    | .00   |       |           |            |           |           |       |
| 14  | 1    | .00   |       |           |            |           |           | -1.56 |

TABELA 5.3 - ESFORÇOS NOS ELEMENTOS DE VIGA - II

ANALISE DE ESTRUTURA COM PERFIS ABERTOS \* FLEXO-TORCAO/VIGAS ARQ:TESEF

## PROGRAMA ELEMENT FORCES

| ELEM<br>ID | LOAD<br>COND | AXIAL<br>FORCE | DIST<br>ENDI | 1-2 PLANE |          | 1-3 PLANE |           | AXIAL<br>TORQ |
|------------|--------------|----------------|--------------|-----------|----------|-----------|-----------|---------------|
|            |              |                |              | SHEAR     | MOMENT   | SHEAR     | MOMENT    |               |
| 15         | 1            | .00            | .0           | 87.08     | -1747.01 | -33.65    | 678.48    |               |
|            |              |                | 20.0         | 87.08     | -5.50    | -33.65    | 5.58      |               |
| 16         | 1            | .00            | .0           | 144.35    | -2895.69 | -64.71    | 1296.73   | -1.99         |
|            |              |                | 20.0         | 144.35    | -8.62    | -64.71    | 2.50      |               |
| 17         | 1            | 399.95         | .0           | 130.10    | -2611.83 | 136.18    | -2735.40  | -1.63         |
|            |              |                | 20.0         | 130.10    | -9.73    | 136.18    | -11.86    |               |
| 18         | 1            | .00            | .0           | -87.08    | 1747.01  | -33.65    | 678.48    | -1.86         |
|            |              |                | 20.0         | -87.08    | 5.50     | -33.65    | 5.58      |               |
| 19         | 1            | .00            | .0           | -144.35   | 2895.69  | -64.71    | 1296.73   | -1.99         |
|            |              |                | 20.0         | -144.35   | 8.62     | -64.71    | 2.50      |               |
| 20         | 1            | -399.95        | .0           | -130.10   | 2611.83  | 136.18    | -2735.40  | -1.63         |
|            |              |                | 20.0         | -130.10   | 9.73     | 136.18    | -11.86    |               |
| 21         | 1            | .00            | .0           | -8.11     | 684.17   | -87.07    | 7349.14   | -5.71         |
|            |              |                | 168.8        | -8.11     | -684.17  | -87.07    | -7349.14  |               |
| 22         | 1            | .00            | .0           | -15.40    | 1299.44  | -144.35   | 12183.81  | -3.96         |
|            |              |                | 168.8        | -15.40    | -1299.44 | -144.35   | -12183.81 |               |
| 23         | 1            | .00            | .0           | 32.55     | -2747.71 | -130.10   | 10981.40  | -10.04        |
|            |              |                | 168.8        | 32.55     | 2747.71  | -130.10   | -10981.40 |               |
| 24         | 1            | .00            | .0           | .00       | .11      | 87.07     | -7349.14  | -5.71         |
|            |              |                | 168.8        | .00       | -.11     | 87.07     | 7349.14   |               |
| 25         | 1            | .00            | .0           | .00       | .21      | 144.35    | -12183.81 | -8.96         |
|            |              |                | 168.8        | .00       | -.21     | 144.35    | 12183.81  |               |
| 26         | 1            | .00            | .0           | .01       | -.45     | 130.10    | -10981.40 | -10.04        |
|            |              |                | 168.8        | .01       | .45      | 130.10    | 10981.40  |               |

e 5.3 apresentam os esforços nos 26 elementos de viga do modelo. A partir dos momentos fletores nos planos locais 1-2 e 1-3 definidos pelos eixos locais 1-2-3 da figura 5.11 para longarinas e transversais, obtém-se as tensões normais de flexão e de flexo-torção, que superpostas fornecerão a tensão nas diversas seções dos elementos de viga. Tais tensões poderão ser comparadas àquelas calculadas pelo modelo MEF-cascas desenvolvido em 5.2.1, e são apresentadas a seguir:

i) Tensões Normais na Longarina A na região do Engastamento

A tensões normais na Longarina A para a seção correspondente ao engastamento, poderão ser obtidas por intermédio do "Modelo Híbrido" considerando os Momentos Fletores obtidos para os elementos de viga 1 e 4. Para a viga 1, nó 1, o momento fletor atuante no plano 1-2 representa o componente associado à flexão da viga, como já discutido na introdução da Analogia Flexão-Retorção. Para a mesma viga e ponto nodal, o momento fletor atuante no plano 1-3 representa o componente associado à flexo-torção da viga, e que provoca flexão diferencial dos flanges. Sendo os momentos nos planos 1-2 e 1-3 (em intensidade) respectivamente iguais a 155233,24 kgf.cm e 4517,73 kgf.cm (Tabela 5.2) e levando em conta a convenção de sinais do programa em elementos finitos, calcula-se as tensões normais nos pontos da seção que correspondem aos nós 1, 7, 13, 19 do MEF-cascas, como representado na figura 5.14, após a composição das mesmas.

$$\text{flexão: } \sigma_{13} = \sigma_{19} = -\sigma_7 = -\sigma_1 = -\frac{155233,24}{853,36} \cdot 10 = -1819,08 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\text{flexo-torção: } \sigma_{13} = -\sigma_7 = \frac{4517,73}{142,77} \cdot 7,594 = +240,30 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_{19} = -\sigma_1 = -\frac{4517,73}{142,77} \cdot 10,406 = -329,28 \text{ kgf/cm}^2$$

A composição das tensões obtidas de flexão e flexo-torção resulta:

$$\sigma_{13} = -1819,08 + 240,30 = -1578,78 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_{19} = -1819,08 - 329,28 = -2148,36 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_7 = 1819,08 - 240,30 = +1578,78 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_1 = 1819,08 + 329,28 = +2148,36 \text{ kgf/cm}^2$$

ii) Tensões Normais na Longarina A, na região de Encontro com Transversal (1).

O procedimento é análogo ao aplicado em i. As tensões normais na longarina A para a seção correspondente ao encontro com o Transversal 1, poderão ser obtidas com o elemento de viga 1, nó 2, considerando novamente os momentos nos planos 1-2 e 1-3, de acordo com a Tabela 5.2. Calcula-se então as tensões normais nos pontos da seção que correspondem aos nós 228, 234, 240, 246 do MEF-cascas, como representado na figura 5.14, após a composição dos efeitos de flexão e flexo-torção.

flexão:

$$\sigma_{240} = \sigma_{246} = -\sigma_{234} = -\sigma_{228} = -\frac{99217,26}{853,36} \cdot 10 = -1162,67 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\text{flexo-torção: } \sigma_{240} = -\sigma_{234} = \frac{901,90}{142,77} \cdot 7,594 = +47,97 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_{246} = -\sigma_{228} = -\frac{901,90}{142,77} \cdot 10,406 = -65,74 \text{ kgf/cm}^2$$

A composição das tensões de flexão e flexo-torção resulta:

$$\sigma_{240} = -1162,67 + 47,97 = -1114,70 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_{246} = -1162,67 - 65,74 = -1228,41 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_{234} = 1162,67 - 47,97 = 1114,70 \text{ kgf/cm}^2$$

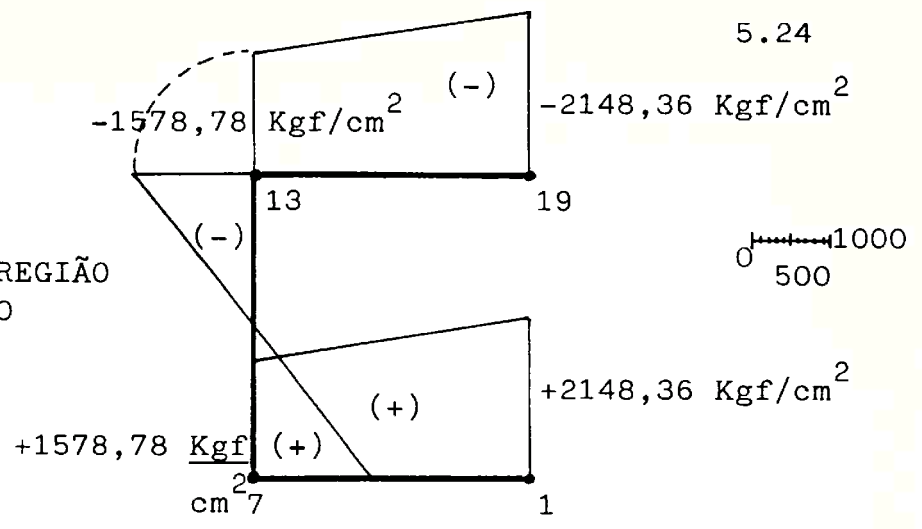
$$\sigma_{228} = 1162,67 + 65,74 = 1228,41 \text{ kgf/cm}^2$$

iii) Tensões Normais no Transversal (1) na região de encontro com Longarina A

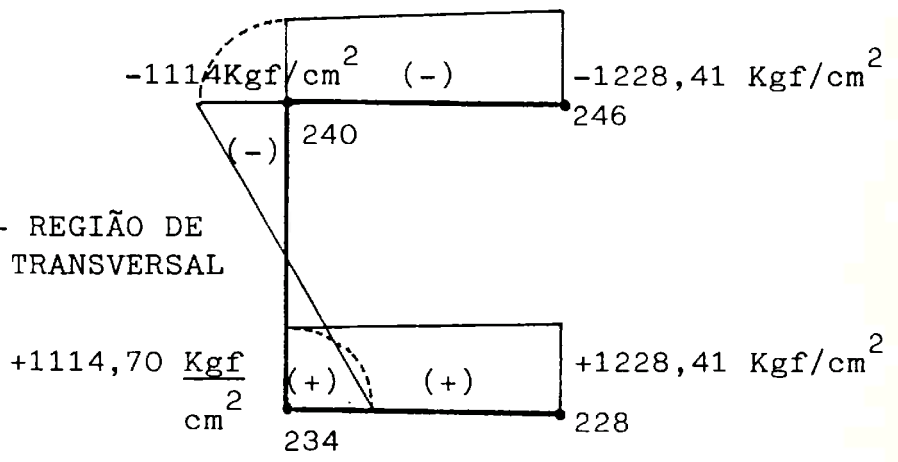
O procedimento é análogo ao aplicado em i e ii. As tensões normais no Transversal (1) para a seção correspondente ao encontro com a longarina A, poderão ser obtidas por intermédio do elemento de viga 21, nó 2, considerando os momentos nos planos 1-2 e 1-3, de acordo com a Tabela 5.3. Calcula-se então as tensões normais nos pontos da seção que correspondem aos nós 543, 546, 552 e 555 do MEF-cascas, como representado na figura 5.14, após a composição dos efeitos de flexão e flexo-Torção.

$$\text{flexão: } \sigma_{555} = \sigma_{552} = -\sigma_{543} = -\sigma_{546} = \frac{684,17}{613,35} \cdot 10 = 11,15 \text{ kgf/cm}^2$$

(a) LONGARINA A - REGIÃO DO ENGASTAMENTO



(b) LONGARINA A - REGIÃO DE ENCONTRO COM TRANSVERSAL



(c) TRANSVERSAL (1) - REGIÃO DE ENCONTRO COM LONGARINA A

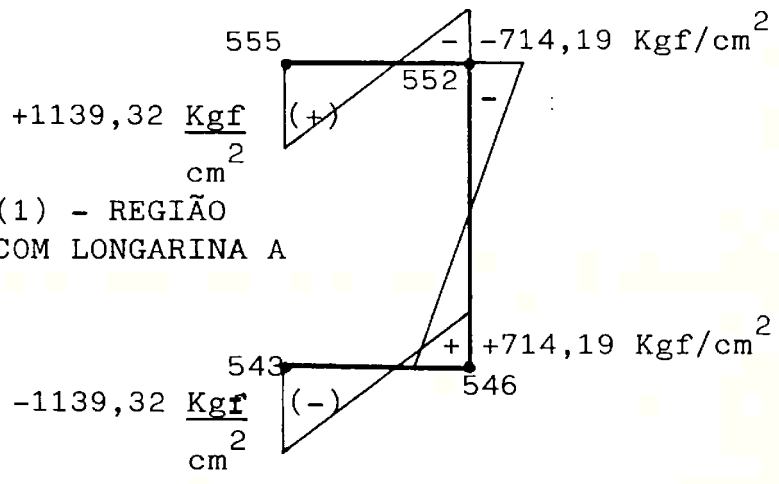


FIGURA 5.14 - TENSÕES NORMAIS OBTIDAS POR INTERMÉDIO DO "MODELO HÍBRIDO" - ANALOGIA FLEXÃO-RETORÇÃO

$$\text{flexo-torção: } \sigma_{555} = -\sigma_{543} = \frac{7349,14}{47,58} \cdot 7,304 = 1128,17 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_{552} = -\sigma_{546} = -\frac{7349,14}{47,58} \cdot 4,696 = -725,34 \text{ kgf/cm}^2$$

A composição das tensões de flexão e flexo-torção' resulta:

$$\sigma_{555} = 11,15 + 1128,17 = 1139,32 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_{552} = 11,15 - 725,34 = -714,19 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_{546} = -11,15 + 725,34 = +714,19 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_{543} = -11,15 - 1128,17 = -1139,32 \text{ kgf/cm}^2$$

### 5.2.3 - Comparação dos Resultados obtidos pelo "MEF-Cascas" e "Modelo Híbrido - Analogia Flexão-Retorção.

Os dois modelos de análise utilizados em 5.2.1 e ' 5.2.2 são comparados no que se refere ao cálculo de ten sões normais. A figura 5.15 apresenta para as 3 regiões a nalisadas anteriormente o diagrama dessas tensões, inclu indo os efeitos de flexão e flexo-torção, permitindo por tanto o confronto dos resultados obtidos pela Analogia ' Flexão-Retorção e pelo MEF-cascas. A análise da figura ' 5.15, permite estabelecer algumas conclusões importantes' a respeito das análises efetuadas:

- i) As figuras 5.15.a e 5.15.b apresentam os resul- tados das tensões normais atuantes na Longarina

A em duas regiões diferentes, respectivamente na região do engastamento e no encontro com o Transversal (1). Vale observar em primeiro lugar que os resultados obtidos por intermédio dos dois modelos de cálculo, estão bastante consistentes, justificando a aplicação da Analogia Flexão-Retorção. Em segundo lugar, é interessante observar que o efeito de flexo-torção na longarina não é muito acentuado, mas sim o efeito de flexão. Isto pode ser concluído, pois nos flanges superior e inferior, as tensões normais não sofrem uma variação acentuada de um extremo ao outro do flange, nota-se porém que esta variação é mais intensa no caso (a), pois corresponde à região de engastamento, onde a restrição ao empenamento é máxima.

- ii) A figura 5.15.c apresenta os resultados das tensões normais atuantes no Transversal (1), na região de encontro com a longarina A. Vale ressaltar inicialmente, que devido às flexões em sentidos opostos das longarinas A e B, o Transversal (1) está sujeito à Torção. Como já foi explicado anteriormente, um modelo convencional com elementos de viga, não permitiria o cálculo de tensões normais decorrente da torção. A variação das tensões normais ao longo dos flanges do perfil C do transversal, indica uma variação acentuada das mesmas, inclusive em valor algébrico, caracterizando a flexão diferencial dos flanges, o que caracteriza o fenômeno de flexo-torção. As tensões calculadas pelos dois modelos de cálculo neste caso, indicam resultados bastante con



sistentes, justificando a aplicação da Analogia Flexão-Retorção, para cálculo das Tensões Normais decorrentes da Torção do perfil transversal.

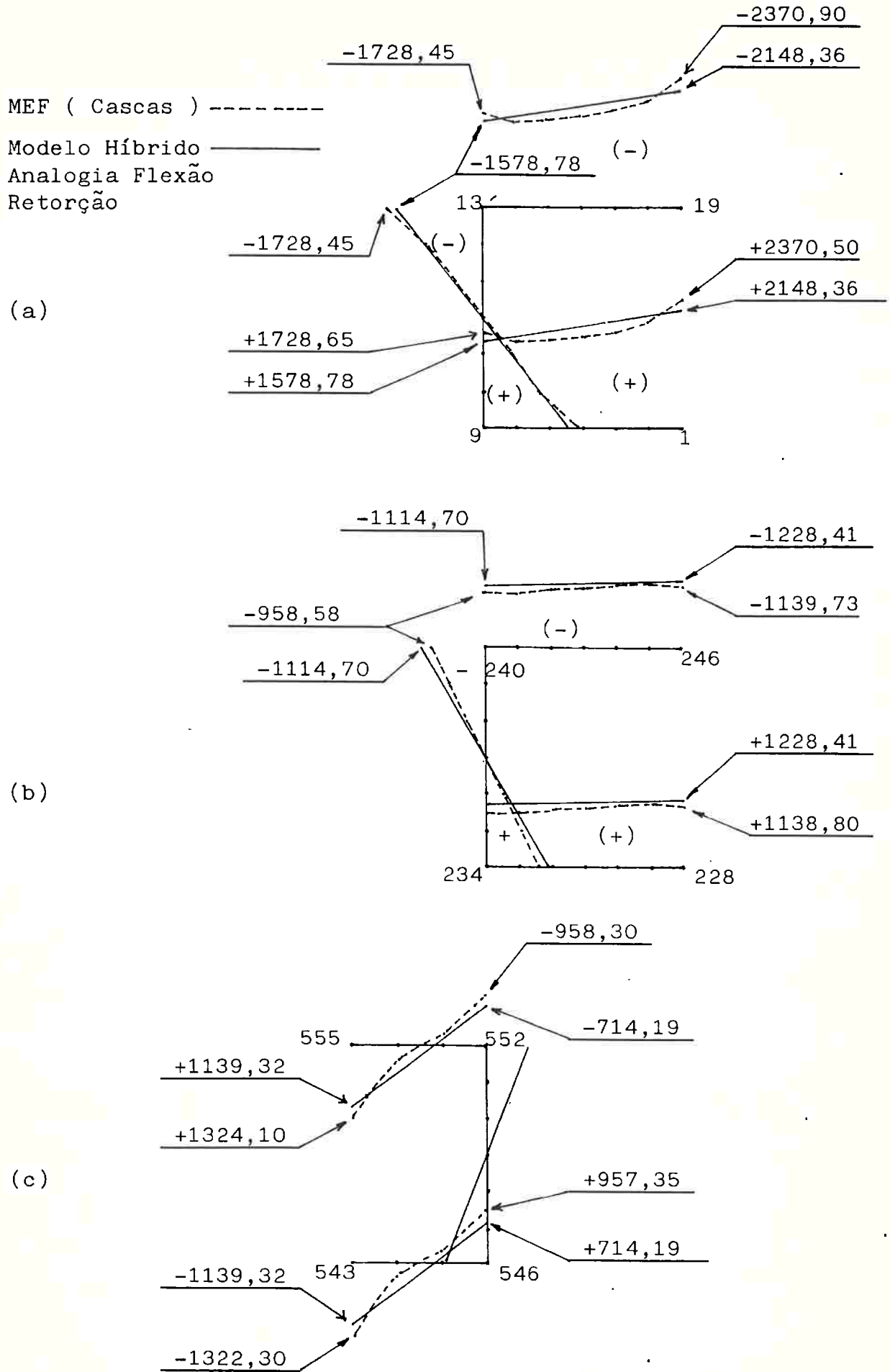


FIGURA 5.15 - DIAGRAMAS DE TENSÕES NORMAIS - COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS DA ANALOGIA FLEXÃO-RETORÇÃO COM MEF CASCAS - ( Kg / cm<sup>2</sup> )

## CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES6.1 - CONCLUSÕES FINAIS

O cálculo de estruturas constituídas por perfis abertos de paredes delgadas, ou caixas estruturais que devido as suas dimensões globais e espessura de parede pos-sam ser assimiladas primariamente ao comportamento estrututural de vigas, deve merecer especial atenção no que diz ' respeito a atuação de momentos torçores, e, em consequên - cia, tensões normais de flexo-torção.

Por exemplo, em se tratando de estruturas reticuladas de veículos, é usual proceder-se ao cálculo de toda a estrutura pelo Método dos Elementos Finitos. A resposta estrutural inclui para cada elemento de viga os esforços de extremidade, tais como: Momentos Fletores em dois planos ' perpendiculares, Força Axial, Forças Cortantes em dois planos perpendiculares e Momentos Torçores; e as consequentes tensões calculadas considerando a Resistência dos Materiais Elementar. Deve-se proceder adicionalmente ao cálculo das tensões normais de flexo-torção que não obedecem a Lei das Seções Planas, não seguindo portanto a hipótese de Navier. Em uma estrutura discretizada por muitos elementos ' de viga, o cálculo dessas tensões normais de flexo-torção, em princípio, poderia ser efetuado para cada elemento segundo uma das alternativas:

- i) Discretizando adicionalmente cada viga por e elementos de casca, adotando o mesmo procedidi-

dimento utilizado no ítem 4.2.2., e solicitada por momento torçor obtido do cálculo global de toda a estrutura. Tal procedimento seria extremamente laborioso, pois cada elemento de viga definido entre dois pontos nodais no modelo da estrutura completa, daria origem a um novo modelo com um grande número de nós e elementos, para análise local

- ii) Considerando para cada elemento de viga, a solução da Equação Diferencial do Bimomento, por intermédio da Teoria de Vlasov, sob efeito da aplicação de momentos torçores de extremidade, decorrentes do trabalho da estrutura como um todo e cargas locais no vão de viga que apresentem excentricidade em relação ao centro de torção

As alternativas i e ii oferecem, porém, restrições de ordem prática. Em estruturas reais, a restrição ao empenamento nas extremidades dos elementos de viga não é absoluta, de modo que a estrutura contínua (global) fornece apenas certa resistência a esse empenamento.

Portanto, a alternativa mais adequada, seria a adoção de um modelo utilizando o Método dos Elementos Finitos que simulasse de forma mais real possível, a restrição ao empenamento na extremidade de cada viga, já no próprio modelo global. Este foi o objetivo do presente trabalho por intermédio da utilização do Modelo Híbrido, cujos resultados foram bastante aceitáveis de acordo com as comparações e conclusões estabelecidas no ítem 5.2.3. A aplicação desta metodologia

foi desenvolvida dentro do escopo deste trabalho, para uma estrutura típica de chassi de veículo ou estrutura tipo grelha. Entretanto, de forma mais geral, estruturas tridimensionais com efeito de torção contabilizado em apenas um único plano, poderiam ser resolvidas com a abordagem proposta neste trabalho.

## 6.2 - RECOMENDAÇÕES PARA FUTUROS TRABALHOS

O desenvolvimento do presente trabalho, permitiu avaliar a existência de alguns tópicos de pesquisa que mereciam considerações mais profundas em futuros estudos. A saber:

- i) A generalização da definição dos parâmetros do Modelo Híbrido para estruturas reticuladas tridimensionais que permita considerar os efeitos de flexo-torção em diferentes planos.
- ii) A presença de reforçadores no perfil aberto, como ilustram os casos a e b da figura 6.1, ou até o caso c da combinação dos dois efeitos, o que sugere o estudo de caixas estruturais abertas com anteparas transversais, que sujeitas à torção permite-nos o cálculo do componente  $\sigma_{ft}$  de flexo-torção.

Os tópicos de pesquisa i e ii têm como ponto de partida os conceitos e conclusões estabelecidos neste trabalho.

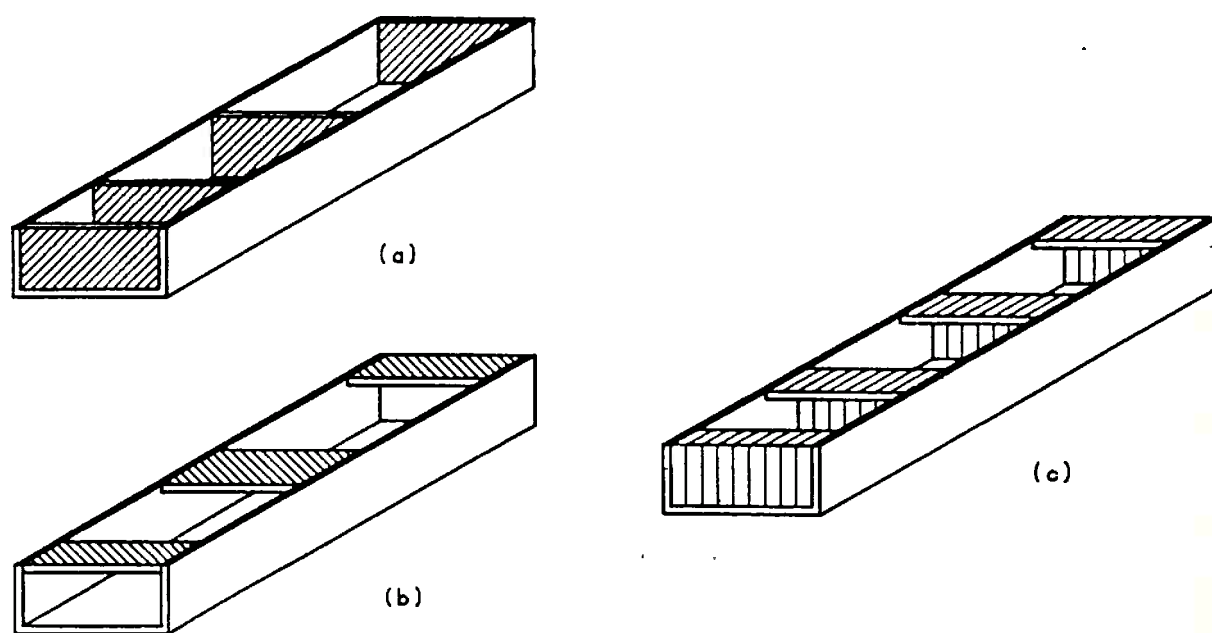


FIGURA 6.1 - CAIXAS ESTRUTURAIS COM ANTEPARAS

APÊNDICE A - PROPRIEDADES SECTORIAIS

## A.1-ÁREA SECTORIAL

Na linha média do contorno do perfil de paredes delgadas, escolhe-se uma origem arbitrária  $O$ , para medição de arcos  $S$ . Escolhe-se um pólo arbitrário  $P$ , pertencente ou não à linha média do contorno (figura A.1).

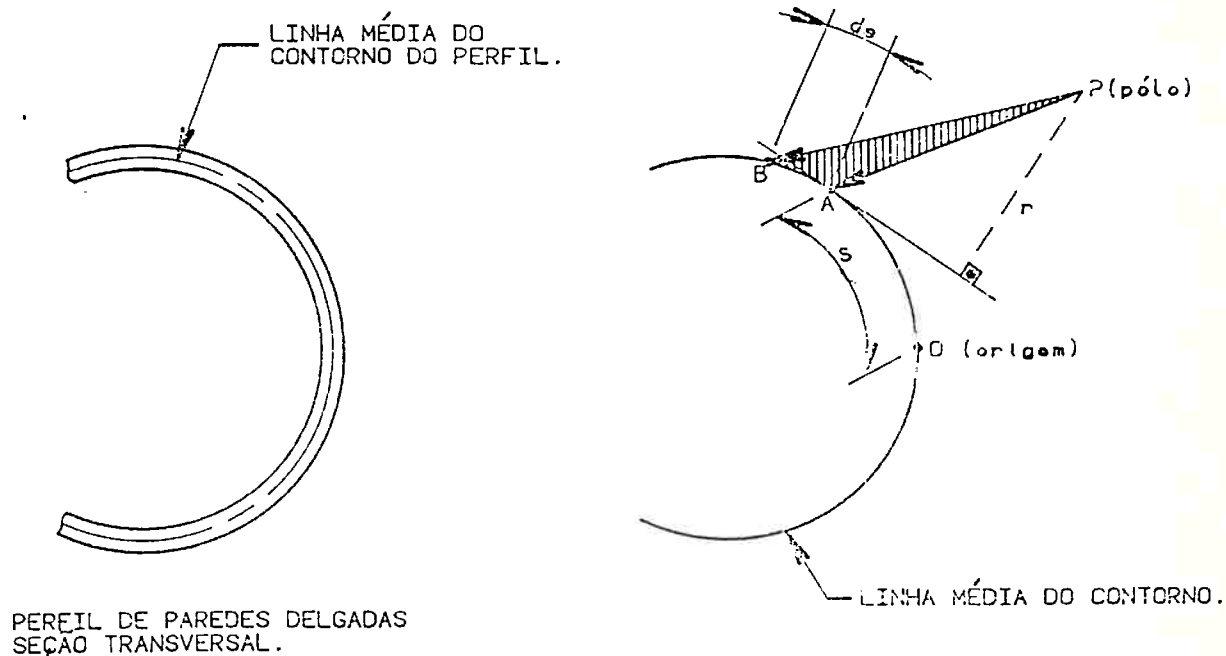


Figura A.1 -ÁREA DO SETOR PAB

Unindo-se o pólo  $P$  ao segmento  $AB$ , define-se o triângulo elementar (ou o Setor)  $PAB$ , cuja base é o elemento de arco  $ds$  e cuja altura  $r$  é o comprimento da perpendicular traçada de  $P$  até a linha tangente ao contorno do perfil em  $A$ . O dobro da Área do Setor  $PAB$  é dada por:

$$dw = r \cdot ds$$

Quando o raio vetor  $PA$  se move desde a origem  $O$  até o ponto  $A$ , cuja posição é definida pelo arco  $S$ , a Área do Setor  $POA$  é varrida pelo mesmo raio vetor (figura A.2).

Define-se Área Sectorial, como sendo:

$$w = \int_0^S r \cdot ds \quad [\text{cm}^2], \quad (\text{A.1})$$

que constitui o dobro da área do setor  $POA$ .



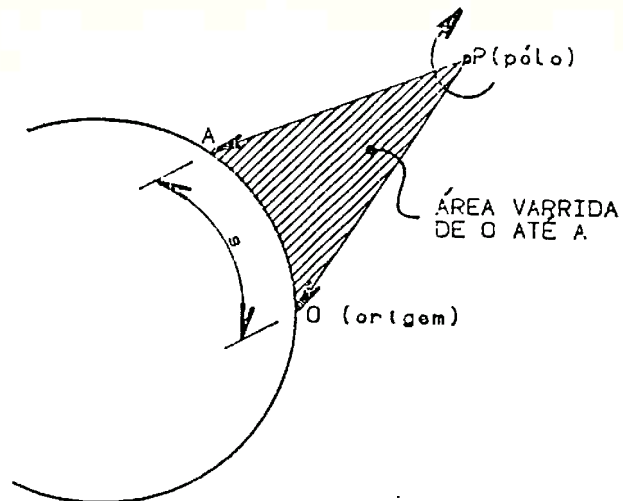


Figura A.2 - ÁREA VARRIDA PELO RAIOS VETOR, PARA PÓLO E ORIGENS ARBITRÁRIAS.

A Área Sectorial é função da posição  $S$  e depende da posição da origem  $O$  e da posição do pólo  $P$ . Se:

- . Raio vetor gira no sentido horário  $\rightarrow dw > 0$
  - . Raio vetor gira no sentido anti-horário  $\rightarrow dw < 0$
- (figura A.3)

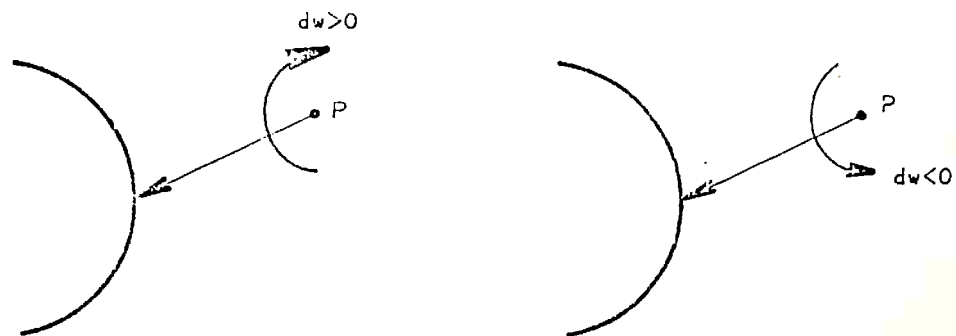


Figura A.3 - CONVENÇÃO DE SINAIS PARA ÁREA SECTORIAL.

A.2-MOMENTO ESTÁTICO SECTORIAL, MOMENTOS LINEARES SECTORIAIS E  
MOMENTO DE INÉRCIA SECTORIAL

Conhecendo-se o diagrama de  $w$  (Área Sectorial ou Coordenadas Sectoriais) ao longo do contorno da seção, e sendo  $dA$  um elemento de área, define-se:

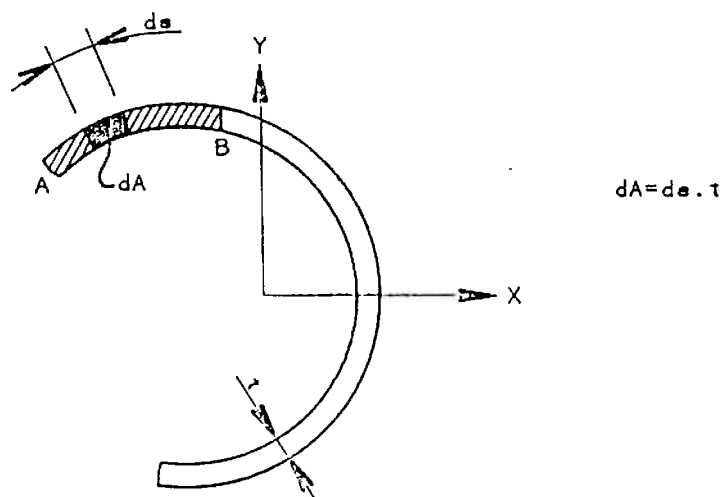


Figura A.4

Momento Estático Sectorial do Arco AB

$$M_{sw} = \int_{AB} w \cdot dA \quad [cm^4] \quad (A.2)$$

Momentos Lineares Sectoriais do Arco AB

$$\int_{AB} z \cdot w \cdot dA \quad [cm^5] \quad (A.3)$$

$$\int_{AB} y \cdot w \cdot dA$$

Momento de Inércia Sectorial

$$I_w = \int_A w^2 \cdot dA \quad [cm^6] \quad (A.4)$$

$A$  = Área Total da Seção

Quando os eixos  $y$  e  $z$  são Eixos Centrais Principais e o pólo  $P$  coincide com o centro de Torção, os Momentos Lineares Sectoriais são nulos. Assim:

. Eixos Centrais Principais ( $y$  e  $z$ )

. Pólo  $\equiv$  Centro de Torção  $\rightarrow \int_A z.w.dA = \int_A y.w.dA = 0$  (A.5)

### A.3- ÁREA SECTORIAL PRINCIPAL E MOMENTO DE INÉRCIA SECTORIAL PRINCIPAL

O diagrama de  $w$  que satisfaz as condições de A.5 e cuja origem  $O$  para medição de arcos  $S$  é escolhida de tal forma que  $\int_A w.dA = 0$  é denominado Diagrama de Área Sectorial Principal. Assim, se:

.  $y$  e  $z$  são Eixos Centrais Principais

. Pólo  $P \equiv$  Centro de Torção

. Origem  $O$  é tal que  $\int_A w.dA = 0$

$w$  é o diagrama de Área Sectorial Principal

O Momento de inércia  $I_w = \int_A w^2.dA$  é denominado Momento de Inércia Sectorial Principal.

#### Observações Importantes

No caso geral, para construir o diagrama de área sectorial principal, procede-se da seguinte forma:

a) determinar os eixos centrais principais do perfil;

b) determinar a posição do centro de torção.

Em relação a um pólo  $P'$  e uma origem  $O'$  arbitrárias, constrói-se um diagrama de áreas sectoriais  $w'_O$ . Tendo os diagramas  $w'_O$ ,  $y$  e  $z$  determina-se as coordenadas do centro de torção  $y_c$  e  $z_c$ . Pode-se demonstrar que:

$$y_c = \frac{\int_A z.w'_O.dA}{I_y} \quad (A.6)$$

e

$$z_c = \frac{-\int_A y.w'_O.dA}{I_z} \quad (A.7)$$

(ver exemplo resolvido a seguir)

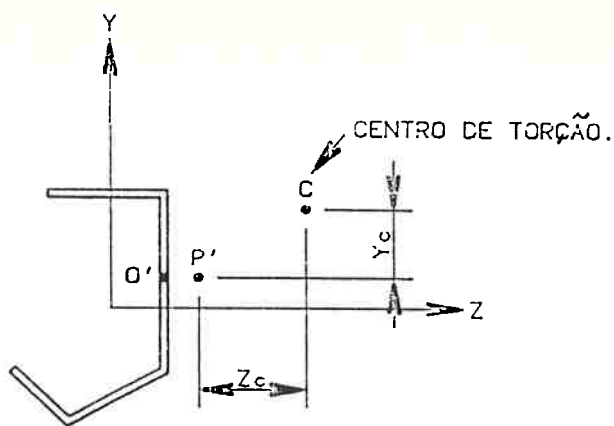


Figura A.5 - POSIÇÃO DO CENTRO DE TORÇÃO C EM RELAÇÃO AO POLO P'

- c) escolher pólo coincidente com o centro de torção;
- d) escolher origem arbitrária 0 e determinar o diagrama  $w_0$  em relação ao centro de torção e origem 0;
- e) como no diagrama de  $w$  (principal) temos  $\int_A w \cdot dA = 0$  e fazendo  $w = w_0 + k$ , teremos:

$$\int_A w \cdot dA = \int_A (w_0 + k) \cdot dA = 0$$

$$\int_A w \cdot dA = \int_A w_0 \cdot dA + \int_A k \cdot dA = 0$$

$$\int_A w \cdot dA = \int_A w_0 \cdot dA + k \cdot A = 0$$

$$k = -\frac{\int_A w_0 \cdot dA}{A}$$

- f) tendo-se calculado  $k$ , da expressão anterior, podemos obter  $w$  em todos os pontos do contorno do perfil, fazendo  $w = w_0 + k$ , e estará obtido o Diagrama de Área Sectorial Principal  $w$ ;
- g) no caso de um perfil simétrico, o ponto inicial 0 deverá situar-se sobre o eixo de simetria para que  $\int_A w \cdot dA = 0$ ;

- h) a sequência apresentada, aplica-se ao caso mais geral de seção transversal de um perfil de paredes delgadas. No caso de seções usuais mais utilizadas na prática, tais como perfis I, C, etc. essa sequência não necessitará ser executada, pois os valores  $w$  são tabelados.

#### A.4-EXEMPLOS

Como exemplo de determinação de propriedades sectoriais, vamos considerar a seção transversal da Figura A.6. Embora este seja um exemplo de seção bastante simples, cujas propriedades poderiam ser obtidas diretamente de uma tabela, objetiva-se com este exemplo aplicar a metodologia completa de cálculo, dando ênfase aos seus aspectos conceituais, sem a preocupação da extensão numérica do exemplo. Uma seção transversal mais complexa, não apresentaria nenhuma novidade em termos de sequência de cálculo, apenas maior trabalho numérico.

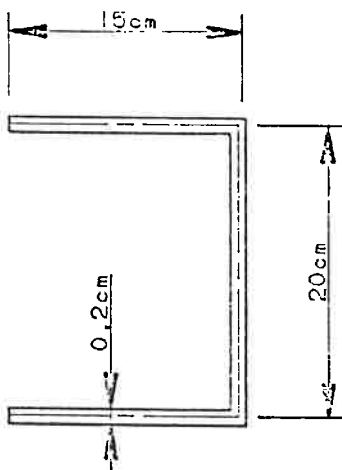


Figura A.6- Perfil para Cálculo de Propriedades Sectoriais

#### a) Eixos Centrais Principais

Do estudo da resistência dos Materiais Elementar, resulta:

$$I_z = 733,39 \text{ cm}^4$$

$$I_y = 247,53 \text{ cm}^4$$

$$I_t = 0,133 \text{ cm}^4 \text{ (momento de Inércia à Torção de "Saint Venant")}$$

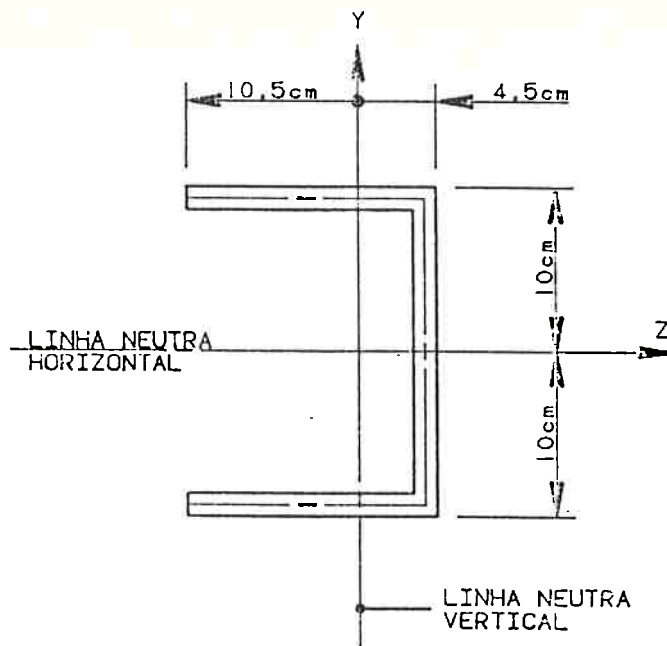


Figura A.7 - Posição dos Eixos Centrais Principais

b) Posição do Centro de Torção

Adota-se o pólo arbitrário  $P'$  e a origem arbitrária  $O'$ , como indica a Figura A.8 e constrói-se o diagrama de áreas sectoriais  $w'_{O'}$ .

$$w'_{O'} = \int_0^S r \cdot ds$$

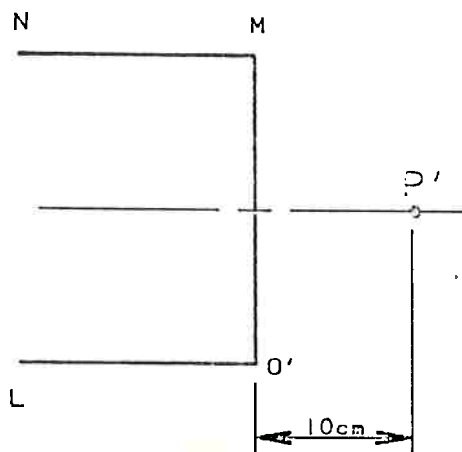


Figura A.8 - Escolha de Polo Arbitrário e Origem Arbitrária  $O'$

Trecho  $O'$  a  $M$  (Figuras

$$w'_{O'} = \int_{O'}^M r \cdot ds = \int_{\text{zero}}^S r \cdot ds$$

$$w'_{O} = \int_{\text{zero}}^S 10 ds = 10 \cdot S \Big|_{\text{zero}} \rightarrow w'_{O} = 10 \cdot S$$

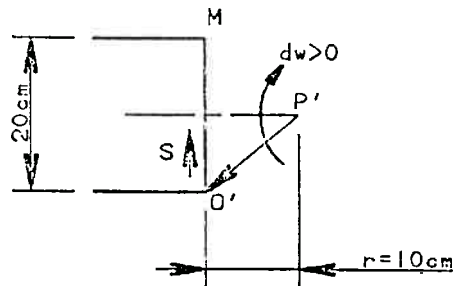


Figura A.9 - Cálculo da Área Varrida de O' a M

para  $S = 20,00\text{cm}$ , temos:

$$w'_{O} = 200 \text{ cm}^2$$

$(S = 20)$

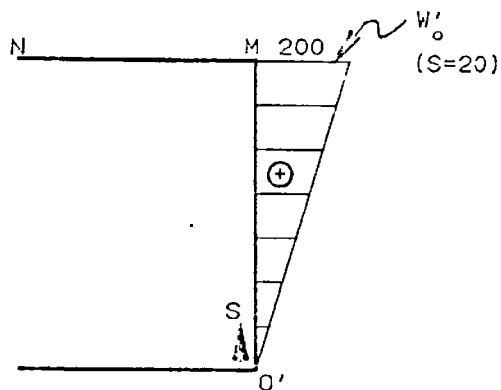


Figura A.10- Diagrama de Área Varrida de O' a M

Trecho M a N (Figuras A.11 e A.12)

$$w'_{O} = w'_{O} - \int_M^N r \cdot ds$$

$(S=20)$

$$w'_{O} = 200 - \int_{20}^S 10 \cdot ds$$

$$w'_{O} = 200 - 10 \cdot S \Big|_{20}^S$$

$$w'_{O} = 200 - 10 (S - 20)$$

para o ponto N,  $S = 35\text{cm}$

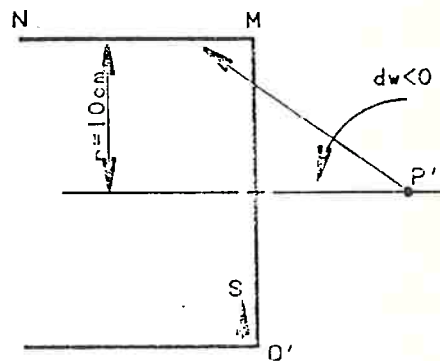


Figura A.11 - Cálculo da Área Varrida de M a N

$$w'_{O'} = 200 - 10 (35-20)$$

(S=35)

$$w'_{O'} = 50 \text{ cm}^2$$

(S=35)

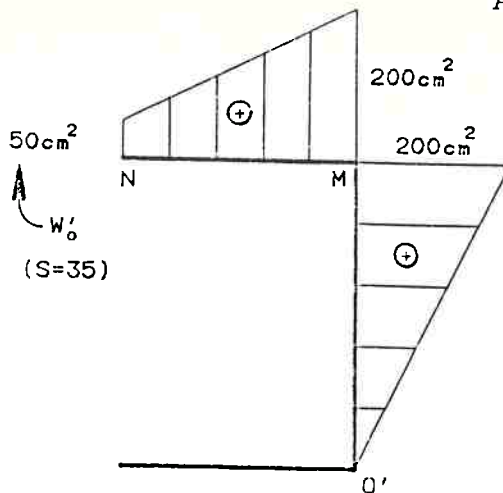


Figura A.12 - Diagrama de Área Varrida de O' a N

Trecho O' a L (Figura A.13)

$$w'_{O'} = \int_{O'}^L r \cdot ds$$

no ponto L,  $w'_{O'} = 10 \times 15 \text{ cm}^2 = 150 \text{ cm}^2$

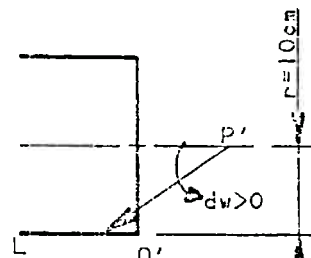


Figura A.13- Cálculo de Área Varrida de O' a L

A Figura 14 representa os diagramas  $w'_{O'}$  que acabamos de determinar, bem como os diagramas das coordenadas y e z dos pontos da seção, considerando os Eixos Centrais Principais.

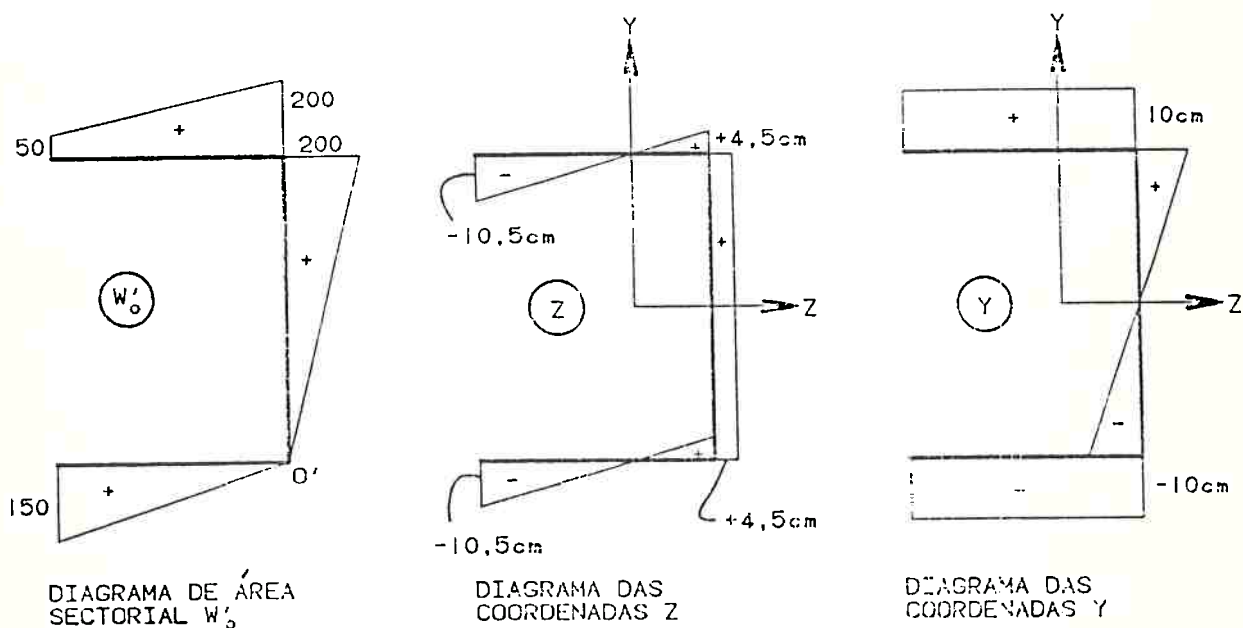


Figura A.14 - Diagramas  $w'_{O'}$ , y e z



Tendo os diagramas  $w'_0$ ,  $z$  e  $y$ , pode-se determinar as coordenadas do centro de torção.

$$y_c = \frac{\int z \cdot w'_0 \cdot dA}{I_y} \quad e \quad z_c = -\frac{\int y \cdot w'_0 \cdot dA}{I_z}$$

As integrais que fazem parte dos numeradores das expressões de  $y_c$  e  $z_c$ , representam o "produto dos diagramas" tramo a tramo ao longo da seção. A integração do produto de duas funções como aquelas representadas anteriormente, pode ser obtida, por exemplo, pela Tabela de Kurt Beyer. Assim:

$$y_c = 0 \text{ cm}$$

$$z_c = -3,863 \text{ cm}$$

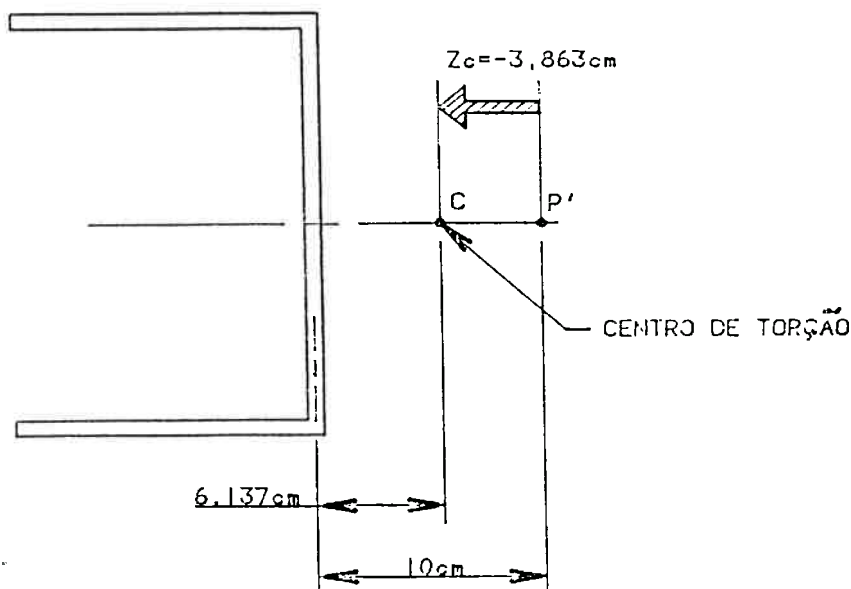


Figura A.15 - Posição do Centro de Torção

- c) Escolher Pólo P coincidente com o Centro de Torção

Na Figura anterior fazer  $P \equiv C$ .

- d) Diagrama  $w_0$

Com pólo em C, adotamos origem arbitrária 0, e construímos o diagrama  $w_0$ .

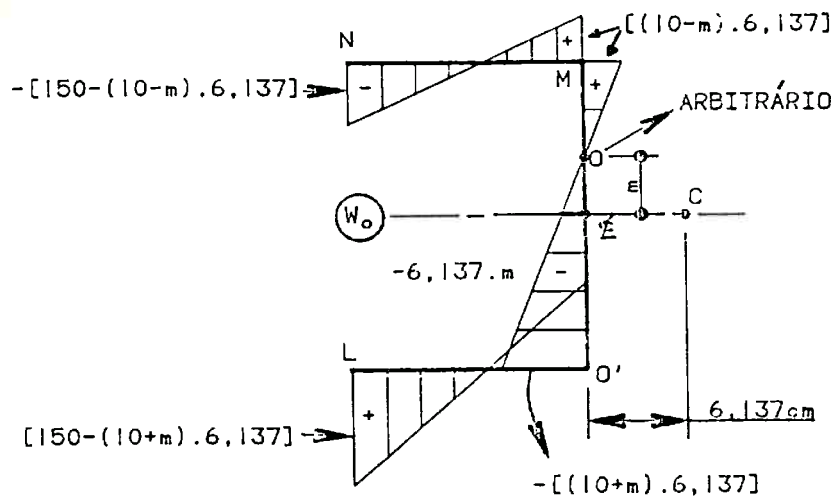


Figura A.16 - Diagrama de Área Sectorial para Pólo Coincidente com o Centro de Torção e Origem Arbitrária

e) Calcular k

$$k = - \frac{\int_A w_0 \cdot dA}{A}$$

A integração  $\int_A w_0 \cdot l \cdot dA$ , pode ser feita por exemplo, com o auxílio da Tabela de Kurt Beyer (produto das funções  $w_0$  e  $l$ , considerando  $dA = t \cdot ds$ , sendo  $t$  a espessura do perfil).

Assim resulta:

$$k = 6,137m$$

f) Diagrama de Área Sectorial Principal w

Em todos os pontos do contorno do perfil, devemos ao diagrama  $w_0$ , fazer  $w = w_0 + k$ . Assim:

Ponto L

$$w_L = [150 - (10+m) \cdot 6,137] + 6,137m = 88,63 \text{ cm}^2$$

$$w_{O'} = [-(10+m) \cdot 6,137] + 6,137m = -61,37 \text{ cm}^2$$

$$w_E = -6,137m + 6,137m = 0 \text{ cm}^2$$

$$w_M = [(10-m) \cdot 6,137] + 6,137m = 61,37 \text{ cm}^2$$

$$w_N = -[150 - (10-m) \cdot 6,137] + 6,137m = -38,63 \text{ cm}^2$$

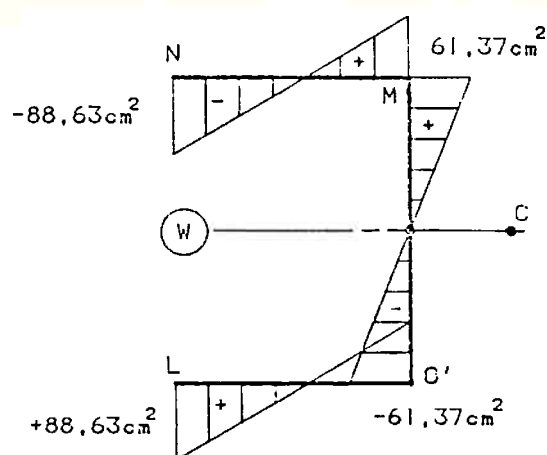


Figura A.17 -DIAGRAMA DE ÁREA SECTORIAL PRINCIPAL W

g) Perfil Simétrico

O diagrama de área sectorial principal obtido, poderia ser determinado considerando a origem 0 sobre o eixo de simetria (perfil simétrico), o que forneceria a condição  $\int_A w \cdot dA = 0$ , e o pólo coincidente com o centro de torção C.

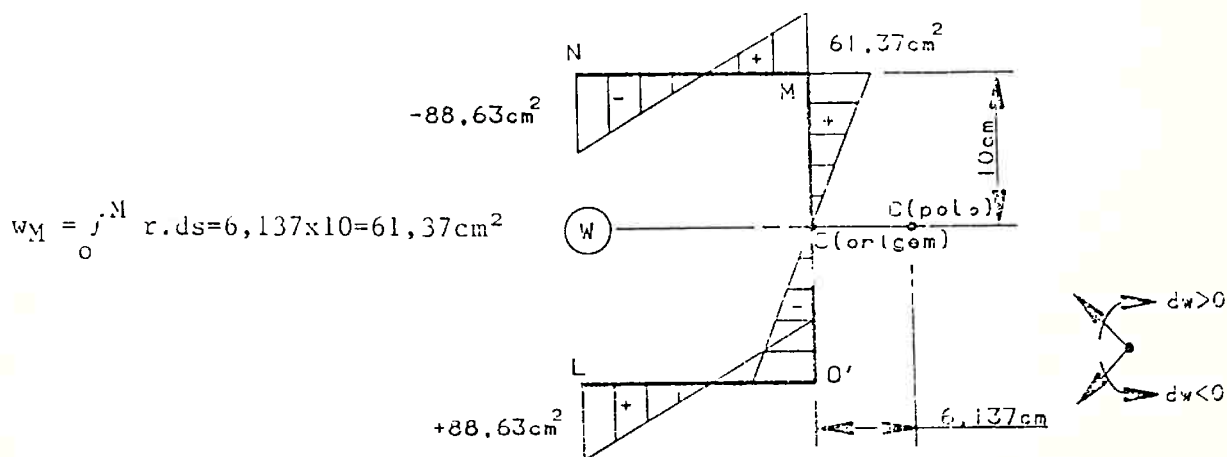


Figura A.18- Construção do Diagrama w, partindo da condição que C e O são conhecidos

$$w_N = 61,37 - \int_M^N r \cdot ds = 61,37 - 10 \times 15 = -88,63 \text{ cm}^2$$

h) A sequência de A a G, não seria necessária para este tipo de perfil, pois os resultados são tabelados, como já foi dito anteriormente.

i) Cálculo do Momento de Inércia Sectorial Principal

$I_w = \int_A w^2.dA = \int_A w.w.dA$ ; cuja integração pode ser efetuada considerando o produto da função  $w$  por ela mesma. Dessa forma:

$$I_w = 17386,4 \text{ cm}^6$$

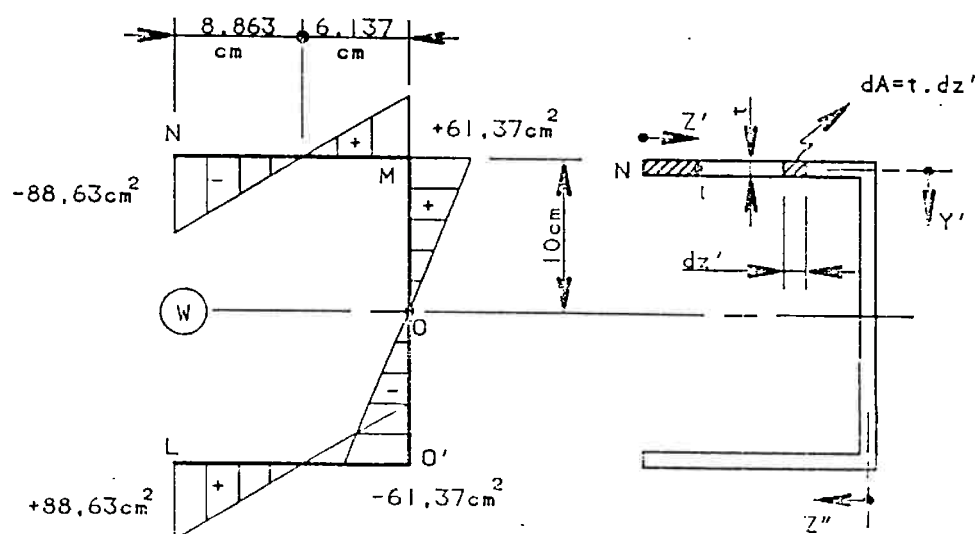
j) Diagrama do Momento Estático Sectorial

Figura A.19- Referências para construção do Diagrama do Momento Estático Sectorial

no trecho NM :  $w = -88,63 + 10 \cdot z'$

no trecho MO' :  $w = 61,37 - 6,137 \cdot y'$

no trecho O'L :  $w = -61,37 + 10 \cdot z''$

No Trecho NM

$$M_{sw} = \int_0^{z'} w \cdot dA = \int_0^{z'} (-88,63 + 10 \cdot z') \cdot t \cdot dz' = \int_0^{z'} (-88,63 + 10 \cdot z') 0,2 \cdot dz'$$

$$M_{sw} = -17,726 \int_0^{z'} dz' + 2 \int_0^{z'} z' \cdot dz' \quad \rightarrow \quad M_{sw} = -17,726 \cdot z' \Big|_0^{z'} + z'^2 \Big|_0^{z'}$$

$$M_{sw} = -17,726 \cdot z' + z'^2$$

$$\begin{aligned} \text{para } z' = 0 & \rightarrow M_{sw} = 0 \text{ cm}^4 \\ \text{para } z' = 8,863 \text{ cm} & \rightarrow M_{sw} = -78,55 \text{ cm}^4 \\ \text{para } z' = 15 \text{ cm} & \rightarrow M_{sw} = -40,89 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

No Trecho M0'

$$M_{sw} = \int_0^{y'} w \cdot dA + M_{sw_{M1}} = \int_0^{y'} w \cdot dA - 40,89 \rightarrow$$

$$M_{sw} = \int_0^{y'} (61,37 - 6,137 \cdot y') \cdot 0,2 \cdot dy' - 40,89 \rightarrow$$

$$M_{sw} = 12,274 \int_0^{y'} dy' - 1,227 \int_0^{y'} y' dy' - 40,89 \rightarrow$$

$$M_{sw} = -40,89 + 12,274 \left| y' \right|_0^{y'} - \frac{1,227}{2} y'^2 \left|_0^{y'} \rightarrow$$

$$M_{sw} = -40,89 + 12,274 y' - 0,6135 \cdot y'^2$$

$$\begin{aligned} \text{para } y' = 0 \text{ cm} & \rightarrow M_{sw} = -40,89 \text{ cm}^4 \\ \text{para } y' = 4,2227 \text{ cm} & \rightarrow M_{sw} = 0 \text{ cm}^4 \\ \text{para } y' = 10 \text{ cm} & \rightarrow M_{sw} = 20,45 \text{ cm}^4 \\ \text{para } y' = 15,7838 \text{ cm} & \rightarrow M_{sw} = 0 \text{ cm}^4 \\ \text{para } y' = 20 \text{ cm} & \rightarrow M_{sw} = -40,89 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

No Trecho 0''L

$$M_{sw} = \int_0^{z''} w \cdot dA + M_{sw_{0'}} = \int_0^{z''} w \cdot dA - 40,89$$

$$M_{sw} = \int_0^{z''} (-61,37 + 10 \cdot z'') \cdot 0,2 \cdot dz'' - 40,89$$

$$M_{sw} = -40,89 - 12,274 \cdot z''^2$$

|                               |               |                                |
|-------------------------------|---------------|--------------------------------|
| para $z'' = 0$                | $\rightarrow$ | $M_{sw} = -40,89 \text{ cm}^4$ |
| para $z'' = 6,137 \text{ cm}$ | $\rightarrow$ | $M_{sw} = -78,55 \text{ cm}^4$ |
| para $z'' = 15 \text{ cm}$    | $\rightarrow$ | $M_{sw} = 0 \text{ cm}^4$      |

Resultará portanto o diagrama:

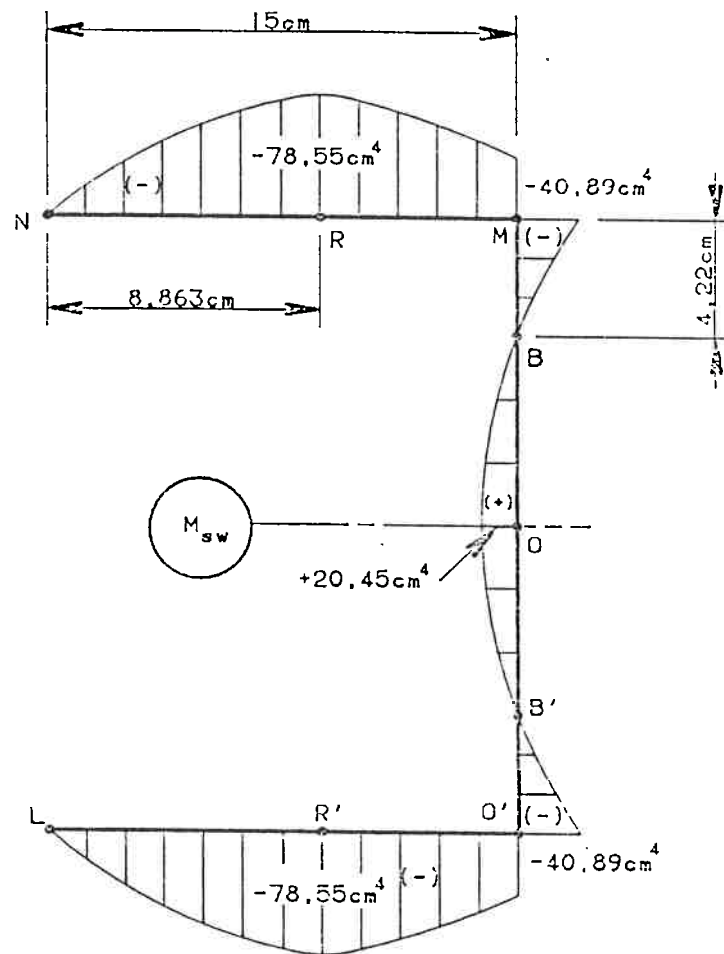


Figura A.20 - Diagrama do Momento Estático Sectorial

Para perfis usuais, o diagrama do momento estático sectorial pode ser obtido de tabelas.

APÊNDICE B - DEFINIÇÃO DO MODELO ESTRUTURAL  
POR ELEMENTOS DE CASCA.





ANALISE DE ESTRUTURA COM PERFIS ABERTOS \* FLEXO-TORCAO / CASCAS  
SYSTEM

N=1476 L=1

JOINTS

B.3

|     |       |      |          |                       |
|-----|-------|------|----------|-----------------------|
| 1   | X=0   | Y=74 | Z=0      |                       |
| 58  | X=12  | Y=74 | Z=0      |                       |
| 6   | X=0   | Y=89 | Z=0      |                       |
| 63  | X=12  | Y=89 | Z=0      | Q=1,58,6,63,19,1      |
| 7   | X=0   | Y=92 | Z=0      |                       |
| 64  | X=12  | Y=92 | Z=0      |                       |
| 13  | X=0   | Y=92 | Z=20     |                       |
| 70  | X=12  | Y=92 | Z=20     | Q=7,64,13,70,19,1     |
| 14  | X=0   | Y=89 | Z=20     |                       |
| 71  | X=12  | Y=89 | Z=20     |                       |
| 19  | X=0   | Y=74 | Z=20     |                       |
| 76  | X=12  | Y=74 | Z=20     | Q=14,71,19,76,19,1    |
| 77  | X=20  | Y=74 | Z=0      |                       |
| 78  | X=16  | Y=77 | Z=0      |                       |
| 79  | X=16  | Y=80 | Z=0      |                       |
| 80  | X=20  | Y=83 | Z=0      |                       |
| 81  | X=16  | Y=86 | Z=0      |                       |
| 82  | X=16  | Y=89 | Z=0      |                       |
| 83  | X=20  | Y=92 | Z=0      |                       |
| 84  | X=16  | Y=92 | Z=3.333  |                       |
| 85  | X=16  | Y=92 | Z=6.667  |                       |
| 86  | X=20  | Y=92 | Z=10     |                       |
| 87  | X=16  | Y=92 | Z=13.333 |                       |
| 88  | X=16  | Y=92 | Z=16.667 |                       |
| 89  | X=20  | Y=92 | Z=20     |                       |
| 90  | X=16  | Y=89 | Z=20     |                       |
| 91  | X=16  | Y=86 | Z=20     |                       |
| 92  | X=20  | Y=83 | Z=20     |                       |
| 93  | X=16  | Y=80 | Z=20     |                       |
| 94  | X=16  | Y=77 | Z=20     |                       |
| 95  | X=20  | Y=74 | Z=20     |                       |
| 96  | X=32  | Y=74 | Z=0      |                       |
| 145 | X=116 | Y=74 | Z=0      |                       |
| 97  | X=32  | Y=83 | Z=0      |                       |
| 146 | X=116 | Y=83 | Z=0      | Q=96,145,97,146,7,1   |
| 98  | X=32  | Y=92 | Z=0      |                       |
| 147 | X=116 | Y=92 | Z=0      |                       |
| 100 | X=32  | Y=92 | Z=20     |                       |
| 149 | X=116 | Y=92 | Z=20     | Q=98,147,100,149,7,1  |
| 101 | X=32  | Y=83 | Z=20     |                       |
| 150 | X=116 | Y=83 | Z=20     |                       |
| 102 | X=32  | Y=74 | Z=20     |                       |
| 151 | X=116 | Y=74 | Z=20     | Q=101,150,102,151,7,1 |
| 152 | X=128 | Y=74 | Z=0      |                       |
| 153 | X=132 | Y=77 | Z=0      |                       |
| 154 | X=132 | Y=80 | Z=0      |                       |
| 155 | X=128 | Y=83 | Z=0      |                       |
| 156 | X=132 | Y=86 | Z=0      |                       |
| 157 | X=132 | Y=89 | Z=0      |                       |
| 158 | X=128 | Y=92 | Z=0      |                       |
| 159 | X=132 | Y=92 | Z=3.333  |                       |
| 160 | X=132 | Y=92 | Z=6.667  |                       |
| 161 | X=128 | Y=92 | Z=10     |                       |
| 162 | X=132 | Y=92 | Z=13.333 |                       |
| 163 | X=132 | Y=92 | Z=16.667 |                       |
| 164 | X=128 | Y=92 | Z=20     |                       |
| 165 | X=132 | Y=89 | Z=20     |                       |
| 166 | X=132 | Y=86 | Z=20     |                       |
| 167 | X=128 | Y=83 | Z=20     |                       |
| 168 | X=132 | Y=80 | Z=20     |                       |
| 169 | X=132 | Y=77 | Z=20     | 169 X=132 Y=77 Z=20   |

|     |       |      |          |                             |     |
|-----|-------|------|----------|-----------------------------|-----|
| 170 | X=128 | Y=74 | Z=20     |                             |     |
| 171 | X=136 | Y=74 | Z=0      |                             |     |
| 285 | X=160 | Y=74 | Z=0      |                             |     |
| 176 | X=136 | Y=89 | Z=0      |                             |     |
| 290 | X=160 | Y=89 | Z=0      | Q=171, 285, 176, 290, 19, 1 | B.4 |
| 177 | X=136 | Y=92 | Z=0      |                             |     |
| 291 | X=160 | Y=92 | Z=0      |                             |     |
| 183 | X=136 | Y=92 | Z=20     |                             |     |
| 297 | X=160 | Y=92 | Z=20     | Q=177, 291, 183, 297, 19, 1 |     |
| 184 | X=136 | Y=89 | Z=20     |                             |     |
| 298 | X=160 | Y=89 | Z=20     |                             |     |
| 189 | X=136 | Y=74 | Z=20     |                             |     |
| 303 | X=160 | Y=74 | Z=20     | Q=184, 298, 189, 303, 19, 1 |     |
| 304 | X=168 | Y=74 | Z=0      |                             |     |
| 305 | X=164 | Y=77 | Z=0      |                             |     |
| 306 | X=164 | Y=80 | Z=0      |                             |     |
| 307 | X=168 | Y=83 | Z=0      |                             |     |
| 308 | X=164 | Y=86 | Z=0      |                             |     |
| 309 | X=164 | Y=90 | Z=0      |                             |     |
| 310 | X=168 | Y=92 | Z=0      |                             |     |
| 311 | X=164 | Y=92 | Z=3.333  |                             |     |
| 312 | X=164 | Y=92 | Z=6.667  |                             |     |
| 313 | X=168 | Y=92 | Z=10     |                             |     |
| 314 | X=164 | Y=92 | Z=13.333 |                             |     |
| 315 | X=164 | Y=92 | Z=16.667 |                             |     |
| 316 | X=168 | Y=92 | Z=20     |                             |     |
| 317 | X=164 | Y=89 | Z=20     |                             |     |
| 318 | X=164 | Y=86 | Z=20     |                             |     |
| 319 | X=168 | Y=83 | Z=20     |                             |     |
| 320 | X=164 | Y=80 | Z=20     |                             |     |
| 321 | X=164 | Y=77 | Z=20     |                             |     |
| 322 | X=168 | Y=74 | Z=20     |                             |     |
| 323 | X=180 | Y=74 | Z=0      |                             |     |
| 470 | X=432 | Y=74 | Z=0      |                             |     |
| 324 | X=180 | Y=83 | Z=0      |                             |     |
| 471 | X=432 | Y=83 | Z=0      | Q=323, 470, 324, 471, 7, 1  |     |
| 325 | X=180 | Y=92 | Z=0      |                             |     |
| 472 | X=432 | Y=92 | Z=0      |                             |     |
| 327 | X=180 | Y=92 | Z=20     |                             |     |
| 474 | X=432 | Y=92 | Z=20     | Q=325, 472, 327, 474, 7, 1  |     |
| 328 | X=180 | Y=83 | Z=20     |                             |     |
| 475 | X=432 | Y=83 | Z=20     |                             |     |
| 329 | X=180 | Y=74 | Z=20     |                             |     |
| 476 | X=432 | Y=74 | Z=20     | Q=328, 475, 329, 476, 7, 1  |     |
| 501 | X=148 | Y=92 | Z=0      |                             |     |
| 536 | X=148 | Y=77 | Z=0      |                             |     |
| 507 | X=148 | Y=92 | Z=20     |                             |     |
| 542 | X=148 | Y=77 | Z=20     | Q=501, 536, 507, 542, 7, 1  |     |
| 543 | X=136 | Y=74 | Z=0      |                             |     |
| 582 | X=136 | Y=62 | Z=0      |                             |     |
| 545 | X=144 | Y=74 | Z=0      |                             |     |
| 584 | X=144 | Y=62 | Z=0      | Q=543, 582, 545, 584, 13, 1 |     |
| 546 | X=148 | Y=74 | Z=0      |                             |     |
| 585 | X=148 | Y=62 | Z=0      |                             |     |
| 552 | X=148 | Y=74 | Z=20     |                             |     |
| 591 | X=148 | Y=62 | Z=20     | Q=546, 585, 552, 591, 13, 1 |     |
| 553 | X=144 | Y=74 | Z=20     |                             |     |
| 592 | X=144 | Y=62 | Z=20     |                             |     |
| 555 | X=136 | Y=74 | Z=20     |                             |     |
| 594 | X=136 | Y=62 | Z=20     | Q=553, 592, 555, 594, 13, 1 |     |
| 595 | X=136 | Y=54 | Z=0      |                             |     |
| 596 | X=140 | Y=58 | Z=0      |                             |     |
| 597 | X=144 | Y=58 | Z=0      |                             |     |
| 598 | X=148 | Y=54 | Z=0      |                             |     |
| 599 | X=148 | Y=58 | Z=3.333  |                             |     |
| 600 | X=148 | Y=58 | Z=6.667  |                             |     |

600 X=148 Y=58 Z=6.667

|     |       |       |          |                        |
|-----|-------|-------|----------|------------------------|
| 600 | X=148 | Y=54  | Z=0      |                        |
| 601 | X=148 | Y=54  | Z=10     |                        |
| 602 | X=148 | Y=58  | Z=13.333 |                        |
| 603 | X=148 | Y=58  | Z=16.667 |                        |
| 604 | X=148 | Y=54  | Z=20     |                        |
| 605 | X=144 | Y=58  | Z=20     |                        |
| 606 | X=140 | Y=58  | Z=20     |                        |
| 607 | X=136 | Y=54  | Z=20     |                        |
| 608 | X=136 | Y=42  | Z=0      |                        |
| 643 | X=136 | Y=-42 | Z=0      | G=608,643,5            |
| 609 | X=148 | Y=42  | Z=0      |                        |
| 644 | X=148 | Y=-42 | Z=0      |                        |
| 611 | X=148 | Y=42  | Z=20     |                        |
| 646 | X=148 | Y=-42 | Z=20     | Q=609,644,611,646,5,1  |
| 612 | X=136 | Y=42  | Z=20     |                        |
| 647 | X=136 | Y=-42 | Z=20     | G=612,647,5            |
| 648 | X=136 | Y=-54 | Z=0      |                        |
| 649 | X=140 | Y=-58 | Z=0      |                        |
| 650 | X=144 | Y=-58 | Z=0      |                        |
| 651 | X=148 | Y=-54 | Z=0      |                        |
| 652 | X=148 | Y=-58 | Z=3.333  |                        |
| 653 | X=148 | Y=-58 | Z=6.667  |                        |
| 654 | X=148 | Y=-54 | Z=10     |                        |
| 655 | X=148 | Y=-58 | Z=13.333 |                        |
| 656 | X=148 | Y=-58 | Z=16.667 |                        |
| 657 | X=148 | Y=-54 | Z=20     |                        |
| 658 | X=144 | Y=-58 | Z=20     |                        |
| 659 | X=140 | Y=-58 | Z=20     |                        |
| 660 | X=136 | Y=-54 | Z=20     |                        |
| 661 | X=136 | Y=-62 | Z=0      |                        |
| 700 | X=136 | Y=-74 | Z=0      |                        |
| 663 | X=144 | Y=-62 | Z=0      |                        |
| 702 | X=144 | Y=-74 | Z=0      | Q=661,700,663,702,13,1 |
| 664 | X=148 | Y=-62 | Z=0      |                        |
| 703 | X=148 | Y=-74 | Z=0      |                        |
| 670 | X=148 | Y=-62 | Z=20     |                        |
| 709 | X=148 | Y=-74 | Z=20     | Q=664,703,670,709,13,1 |
| 671 | X=144 | Y=-62 | Z=20     |                        |
| 710 | X=144 | Y=-74 | Z=20     |                        |
| 673 | X=136 | Y=-62 | Z=20     |                        |
| 712 | X=136 | Y=-74 | Z=20     | Q=671,710,673,712,13,1 |
| 713 | X=148 | Y=-77 | Z=0      |                        |
| 748 | X=148 | Y=-92 | Z=0      |                        |
| 719 | X=148 | Y=-77 | Z=20     |                        |
| 754 | X=148 | Y=-92 | Z=20     | Q=713,748,719,754,7,1  |
| 801 | X=288 | Y=92  | Z=0      |                        |
| 802 | X=288 | Y=92  | Z=10     |                        |
| 803 | X=288 | Y=92  | Z=20     |                        |
| 804 | X=288 | Y=83  | Z=0      |                        |
| 805 | X=288 | Y=83  | Z=10     |                        |
| 806 | X=288 | Y=83  | Z=20     |                        |
| 807 | X=276 | Y=74  | Z=0      |                        |
| 872 | X=276 | Y=-74 | Z=0      | G=807,872,5            |
| 808 | X=288 | Y=74  | Z=0      |                        |
| 873 | X=288 | Y=-74 | Z=0      |                        |
| 810 | X=288 | Y=74  | Z=20     |                        |
| 875 | X=288 | Y=-74 | Z=20     | Q=808,873,810,875,5,1  |
| 811 | X=276 | Y=74  | Z=20     |                        |
| 876 | X=276 | Y=-74 | Z=20     | G=811,876,5            |
| 877 | X=288 | Y=-83 | Z=0      |                        |
| 878 | X=288 | Y=-83 | Z=10     |                        |
| 879 | X=288 | Y=-83 | Z=20     |                        |
| 880 | X=288 | Y=-92 | Z=0      |                        |
| 881 | X=288 | Y=-92 | Z=10     |                        |
| 882 | X=288 | Y=-92 | Z=20     |                        |
| 901 | X=432 | Y=92  | Z=0      |                        |
| 902 | X=432 | Y=92  | Z=10     | X = 432 Y = 92 Z = 10  |

|      |       |       |          |                            |
|------|-------|-------|----------|----------------------------|
| 903  | X=432 | Y=92  | Z=20     |                            |
| 904  | X=432 | Y=83  | Z=0      |                            |
| 905  | X=432 | Y=83  | Z=10     |                            |
| 906  | X=432 | Y=83  | Z=20     |                            |
| 907  | X=420 | Y=74  | Z=0      |                            |
| 972  | X=420 | Y=-74 | Z=0      | G=907,972,5                |
| 908  | X=432 | Y=74  | Z=0      |                            |
| 973  | X=432 | Y=-74 | Z=0      |                            |
| 910  | X=432 | Y=74  | Z=20     |                            |
| 975  | X=432 | Y=-74 | Z=20     | Q=908,973,910,975,5,1      |
| 911  | X=420 | Y=74  | Z=20     |                            |
| 976  | X=420 | Y=-74 | Z=20     | G=911,976,5                |
| 977  | X=432 | Y=-83 | Z=0      |                            |
| 978  | X=432 | Y=-83 | Z=10     |                            |
| 979  | X=432 | Y=-83 | Z=20     |                            |
| 980  | X=432 | Y=-92 | Z=0      |                            |
| 981  | X=432 | Y=-92 | Z=10     |                            |
| 982  | X=432 | Y=-92 | Z=20     |                            |
| 477  | X=0   | Y=0   | Z=0      |                            |
| 500  | X=10  | Y=0   | Z=0      | G=477,500,1                |
| 755  | X=11  | Y=0   | Z=0      |                            |
| 800  | X=20  | Y=0   | Z=0      | G=755,800,1                |
| 883  | X=21  | Y=0   | Z=0      |                            |
| 900  | X=30  | Y=0   | Z=0      | G=883,900,1                |
| 983  | X=31  | Y=0   | Z=0      |                            |
| 1000 | X=40  | Y=0   | Z=0      | G=983,1000,1               |
| 1001 | X=0   | Y=-74 | Z=0      |                            |
| 1058 | X=12  | Y=-74 | Z=0      |                            |
| 1006 | X=0   | Y=-89 | Z=0      |                            |
| 1063 | X=12  | Y=-89 | Z=0      | Q=1001,1058,1006,1063,19,1 |
| 1007 | X=0   | Y=-92 | Z=0      |                            |
| 1064 | X=12  | Y=-92 | Z=0      |                            |
| 1013 | X=0   | Y=-92 | Z=20     |                            |
| 1070 | X=12  | Y=-92 | Z=20     | Q=1007,1064,1013,1070,19,1 |
| 1014 | X=0   | Y=-89 | Z=20     |                            |
| 1071 | X=12  | Y=-89 | Z=20     |                            |
| 1019 | X=0   | Y=-74 | Z=20     |                            |
| 1076 | X=12  | Y=-74 | Z=20     | Q=1014,1071,1019,1076,19,1 |
| 1077 | X=20  | Y=-74 | Z=0      |                            |
| 1078 | X=16  | Y=-77 | Z=0      |                            |
| 1079 | X=16  | Y=-80 | Z=0      |                            |
| 1080 | X=20  | Y=-83 | Z=0      |                            |
| 1081 | X=16  | Y=-86 | Z=0      |                            |
| 1082 | X=16  | Y=-89 | Z=0      |                            |
| 1083 | X=20  | Y=-92 | Z=0      |                            |
| 1084 | X=16  | Y=-92 | Z=3.333  |                            |
| 1085 | X=16  | Y=-92 | Z=6.667  |                            |
| 1086 | X=20  | Y=-92 | Z=10     |                            |
| 1087 | X=16  | Y=-92 | Z=13.333 |                            |
| 1088 | X=16  | Y=-92 | Z=16.667 |                            |
| 1089 | X=20  | Y=-92 | Z=20     |                            |
| 1090 | X=16  | Y=-89 | Z=20     |                            |
| 1091 | X=16  | Y=-86 | Z=20     |                            |
| 1092 | X=20  | Y=-83 | Z=20     |                            |
| 1093 | X=16  | Y=-80 | Z=20     |                            |
| 1094 | X=16  | Y=-77 | Z=20     |                            |
| 1095 | X=20  | Y=-74 | Z=20     |                            |
| 1096 | X=32  | Y=-74 | Z=0      |                            |
| 1145 | X=116 | Y=-74 | Z=0      |                            |
| 1097 | X=32  | Y=-83 | Z=0      |                            |
| 1146 | X=116 | Y=-83 | Z=0      | Q=1096,1145,1097,1146,7,1  |
| 1098 | X=32  | Y=-92 | Z=0      |                            |
| 1147 | X=116 | Y=-92 | Z=0      |                            |
| 1100 | X=32  | Y=-92 | Z=20     |                            |
| 1149 | X=116 | Y=-92 | Z=20     | Q=1098,1147,1100,1149,7,1  |
| 1101 | X=32  | Y=-80 | Z=20     |                            |

|      |       |       |          |
|------|-------|-------|----------|
| 1150 | X=116 | Y=-83 | Z=20     |
| 1102 | X=32  | Y=-74 | Z=20     |
| 1151 | X=116 | Y=-74 | Z=20     |
| 1152 | X=128 | Y=-74 | Z=0      |
| 1153 | X=132 | Y=-77 | Z=0      |
| 1154 | X=132 | Y=-80 | Z=0      |
| 1155 | X=128 | Y=-83 | Z=0      |
| 1156 | X=132 | Y=-86 | Z=0      |
| 1157 | X=132 | Y=-89 | Z=0      |
| 1158 | X=128 | Y=-92 | Z=0      |
| 1159 | X=132 | Y=-92 | Z=3.333  |
| 1160 | X=132 | Y=-92 | Z=6.667  |
| 1161 | X=128 | Y=-92 | Z=10     |
| 1162 | X=132 | Y=-92 | Z=13.333 |
| 1163 | X=132 | Y=-92 | Z=16.667 |
| 1164 | X=128 | Y=-92 | Z=20     |
| 1165 | X=132 | Y=-89 | Z=20     |
| 1166 | X=132 | Y=-86 | Z=20     |
| 1167 | X=128 | Y=-83 | Z=20     |
| 1168 | X=132 | Y=-80 | Z=20     |
| 1169 | X=132 | Y=-77 | Z=20     |
| 1170 | X=128 | Y=-74 | Z=20     |
| 1171 | X=136 | Y=-74 | Z=0      |
| 1285 | X=160 | Y=-74 | Z=0      |
| 1176 | X=136 | Y=-89 | Z=0      |
| 1290 | X=160 | Y=-89 | Z=0      |
| 1177 | X=136 | Y=-92 | Z=0      |
| 1291 | X=160 | Y=-92 | Z=0      |
| 1183 | X=136 | Y=-92 | Z=20     |
| 1297 | X=160 | Y=-92 | Z=20     |
| 1184 | X=136 | Y=-89 | Z=20     |
| 1298 | X=160 | Y=-89 | Z=20     |
| 1189 | X=136 | Y=-74 | Z=20     |
| 1303 | X=160 | Y=-74 | Z=20     |
| 1304 | X=168 | Y=-74 | Z=0      |
| 1305 | X=164 | Y=-77 | Z=0      |
| 1306 | X=164 | Y=-80 | Z=0      |
| 1307 | X=168 | Y=-83 | Z=0      |
| 1308 | X=164 | Y=-86 | Z=0      |
| 1309 | X=164 | Y=-90 | Z=0      |
| 1310 | X=168 | Y=-92 | Z=0      |
| 1311 | X=164 | Y=-92 | Z=3.333  |
| 1312 | X=164 | Y=-92 | Z=6.667  |
| 1313 | X=168 | Y=-92 | Z=10     |
| 1314 | X=164 | Y=-92 | Z=13.333 |
| 1315 | X=164 | Y=-92 | Z=16.667 |
| 1316 | X=168 | Y=-92 | Z=20     |
| 1317 | X=164 | Y=-89 | Z=20     |
| 1318 | X=164 | Y=-86 | Z=20     |
| 1319 | X=168 | Y=-83 | Z=20     |
| 1320 | X=164 | Y=-80 | Z=20     |
| 1321 | X=164 | Y=-77 | Z=20     |
| 1322 | X=168 | Y=-74 | Z=20     |
| 1323 | X=180 | Y=-74 | Z=0      |
| 1470 | X=432 | Y=-74 | Z=0      |
| 1324 | X=180 | Y=-83 | Z=0      |
| 1471 | X=432 | Y=-83 | Z=0      |
| 1325 | X=180 | Y=-92 | Z=0      |
| 1472 | X=432 | Y=-92 | Z=0      |
| 1327 | X=180 | Y=-92 | Z=20     |
| 1474 | X=432 | Y=-92 | Z=20     |
| 1328 | X=180 | Y=-83 | Z=20     |
| 1475 | X=432 | Y=-83 | Z=20     |
| 1329 | X=180 | Y=-74 | Z=20     |
| 1476 | X=432 | Y=-74 | Z=20     |

Q=1101,1150,1102,1151,7,1

B.7

Q=1171,1285,1176,1290,19,1

Q=1177,1291,1183,1297,19,1

Q=1184,1298,1189,1303,19,1

Q=1323,1470,1324,1471,7,1

Q=1325,1472,1327,1474,7,1

Q=1328,1475,1329,1476,7,1

RESTRAINTS

1, 19, 1 R=1,1,1,1,1,1  
 1001,1019, 1 R=1,1,1,1,1,1  
 477, 500, 1 R=1,1,1,1,1,1  
 755, 800, 1 R=1,1,1,1,1,1  
 883, 900, 1 R=1,1,1,1,1,1  
 983,1000, 1 R=1,1,1,1,1,1

B.8

CONSTRAINTS

501 C= 234, 234, 234, 234, 234, 234  
 502 C= 235, 235, 235, 235, 235, 235  
 503 C= 236, 236, 236, 236, 236, 236  
 504 C= 237, 237, 237, 237, 237, 237  
 505 C= 238, 238, 238, 238, 238, 238  
 506 C= 239, 239, 239, 239, 239, 239  
 507 C= 240, 240, 240, 240, 240, 240  
 508 C= 233, 233, 233, 233, 233, 233  
 515 C= 232, 232, 232, 232, 232, 232  
 522 C= 231, 231, 231, 231, 231, 231  
 529 C= 230, 230, 230, 230, 230, 230  
 536 C= 229, 229, 229, 229, 229, 229  
 514 C= 241, 241, 241, 241, 241, 241  
 521 C= 242, 242, 242, 242, 242, 242  
 528 C= 243, 243, 243, 243, 243, 243  
 535 C= 244, 244, 244, 244, 244, 244  
 542 C= 245, 245, 245, 245, 245, 245  
 543 C= 171, 171, 171, 171, 171, 171  
 544 C= 190, 190, 190, 190, 190, 190  
 545 C= 209, 209, 209, 209, 209, 209  
 546 C= 228, 228, 228, 228, 228, 228  
 552 C= 246, 246, 246, 246, 246, 246  
 553 C= 227, 227, 227, 227, 227, 227  
 554 C= 208, 208, 208, 208, 208, 208  
 555 C= 189, 189, 189, 189, 189, 189  
 711 C=1208,1208,1208,1208,1208,1208  
 748 C=1234,1234,1234,1234,1234,1234  
 749 C=1235,1235,1235,1235,1235,1235  
 750 C=1236,1236,1236,1236,1236,1236  
 751 C=1237,1237,1237,1237,1237,1237  
 752 C=1238,1238,1238,1238,1238,1238  
 753 C=1239,1239,1239,1239,1239,1239  
 754 C=1240,1240,1240,1240,1240,1240  
 713 C=1229,1229,1229,1229,1229,1229  
 720 C=1230,1230,1230,1230,1230,1230  
 727 C=1231,1231,1231,1231,1231,1231  
 734 C=1232,1232,1232,1232,1232,1232  
 741 C=1233,1233,1233,1233,1233,1233  
 719 C=1245,1245,1245,1245,1245,1245  
 726 C=1244,1244,1244,1244,1244,1244  
 733 C=1243,1243,1243,1243,1243,1243  
 740 C=1242,1242,1242,1242,1242,1242  
 747 C=1241,1241,1241,1241,1241,1241  
 700 C=1171,1171,1171,1171,1171,1171  
 701 C=1190,1190,1190,1190,1190,1190  
 702 C=1209,1209,1209,1209,1209,1209  
 703 C=1228,1228,1228,1228,1228,1228  
 709 C=1246,1246,1246,1246,1246,1246  
 710 C=1227,1227,1227,1227,1227,1227  
 712 C=1189,1189,1189,1189,1189,1189  
 801 C= 388, 388, 388, 388, 388, 388  
 802 C= 389, 389, 389, 389, 389, 389  
 803 C= 390, 390, 390, 390, 390, 390  
 804 C= 387, 387, 387, 387, 387, 387  
 806 C= 391, 391, 391, 391, 391, 391  
 807 C= 379, 379, 379, 379, 379, 379  
 808 C= 384, 384, 384, 384, 384, 384

386



810 C= 392, 392, 392, 392, 392, 392  
811 C= 385, 385, 385, 385, 385, 385  
872 C=1379, 1379, 1379, 1379, 1379, 1379  
873 C=1386, 1386, 1386, 1386, 1386, 1386  
875 C=1392, 1392, 1392, 1392, 1392, 1392  
876 C=1385, 1385, 1385, 1385, 1385, 1385  
877 C=1387, 1387, 1387, 1387, 1387, 1387  
879 C=1391, 1391, 1391, 1391, 1391, 1391  
880 C=1388, 1388, 1388, 1388, 1388, 1388  
881 C=1389, 1389, 1389, 1389, 1389, 1389  
882 C=1390, 1390, 1390, 1390, 1390, 1390  
901 C= 472, 472, 472, 472, 472, 472  
902 C= 473, 473, 473, 473, 473, 473  
903 C= 474, 474, 474, 474, 474, 474  
904 C= 471, 471, 471, 471, 471, 471  
906 C= 475, 475, 475, 475, 475, 475  
907 C= 463, 463, 463, 463, 463, 463  
908 C= 470, 470, 470, 470, 470, 470  
910 C= 476, 476, 476, 476, 476, 476  
911 C= 469, 469, 469, 469, 469, 469  
980 C=1472, 1472, 1472, 1472, 1472, 1472  
981 C=1473, 1473, 1473, 1473, 1473, 1473  
982 C=1474, 1474, 1474, 1474, 1474, 1474  
977 C=1471, 1471, 1471, 1471, 1471, 1471  
979 C=1475, 1475, 1475, 1475, 1475, 1475  
972 C=1463, 1463, 1463, 1463, 1463, 1463  
973 C=1470, 1470, 1470, 1470, 1470, 1470  
975 C=1476, 1476, 1476, 1476, 1476, 1476  
976 C=1469, 1469, 1469, 1469, 1469, 1469

SHELL

NM=:

1 E=2100000 U=.3

1 JQ= 1, 2, 20, 21 ETYPE=0 TH=0.2,0.2 G=18,4  
73 JQ= 78, 79, 77, 80 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
74 JQ= 81, 82, 80, 83 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
75 JQ= 84, 85, 83, 86 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
76 JQ= 87, 88, 86, 89 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
77 JQ= 90, 91, 89, 92 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
78 JQ= 93, 94, 92, 95 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
79 JQ= 77, 80, 96, 97 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
80 JQ= 80, 83, 97, 98 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
81 JQ= 83, 86, 98, 99 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
82 JQ= 86, 89, 99, 100 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
83 JQ= 89, 92, 100, 101 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
84 JQ= 92, 95, 101, 102 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
85 JQ= 96, 97, 103, 104 ETYPE=0 TH=0.2,0.2 G=6,7  
127 JQ= 145, 146, 152, 155 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
128 JQ= 146, 147, 155, 158 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
129 JQ= 147, 148, 158, 161 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
130 JQ= 148, 149, 161, 164 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
131 JQ= 149, 150, 164, 167 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
132 JQ= 150, 151, 167, 170 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
133 JQ= 152, 155, 153, 154 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
134 JQ= 155, 158, 156, 157 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
135 JQ= 158, 161, 159, 160 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
136 JQ= 161, 164, 162, 163 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
137 JQ= 164, 167, 165, 166 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
138 JQ= 167, 170, 168, 169 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
139 JQ= 152, 153, 171, 172 ETYPE=0 TH=0.2,0.2 G=18,8  
283 JQ= 305, 306, 304, 307 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
284 JQ= 308, 309, 307, 310 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
285 JQ= 311, 312, 310, 313 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
286 JQ= 314, 315, 313, 316 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
287 JQ= 317, 318, 316, 319 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
288 JQ= 320, 321, 319, 322 ETYPE=0 TH=0.2,0.2

JQ=320,321,319,322

288 JQ= 304, 307, 323, 324 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
289 JQ= 304, 307, 323, 324 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
290 JQ= 307, 310, 324, 325 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
291 JQ= 310, 313, 325, 326 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
292 JQ= 313, 316, 326, 327 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
293 JQ= 316, 319, 327, 328 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
294 JQ= 319, 322, 328, 329 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
295 JQ= 323, 324, 330, 331 ETYPE=0 TH=0.2,0.2 G=6,21  
1001 JQ=1001,1002,1020,1021 ETYPE=0 TH=0.2,0.2 G=18,4  
1073 JQ=1078,1079,1077,1080 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
1074 JQ=1081,1082,1080,1083 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
1075 JQ=1084,1085,1083,1086 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
1076 JQ=1087,1088,1086,1089 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
1077 JQ=1090,1091,1089,1092 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
1078 JQ=1093,1094,1092,1095 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
1079 JQ=1077,1080,1096,1097 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
1080 JQ=1080,1083,1097,1098 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
1081 JQ=1083,1086,1098,1099 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
1082 JQ=1086,1089,1099,1100 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
1083 JQ=1089,1092,1100,1101 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
1084 JQ=1092,1095,1101,1102 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
1085 JQ=1096,1097,1103,1104 ETYPE=0 TH=0.2,0.2 G=6,7  
1127 JQ=1145,1146,1152,1155 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
1128 JQ=1146,1147,1155,1158 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
1129 JQ=1147,1148,1158,1161 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
1130 JQ=1148,1149,1161,1164 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
1131 JQ=1149,1150,1164,1167 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
1132 JQ=1150,1151,1167,1170 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
1133 JQ=1152,1155,1153,1154 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
1134 JQ=1155,1158,1156,1157 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
1135 JQ=1158,1161,1159,1160 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
1136 JQ=1161,1164,1162,1163 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
1137 JQ=1164,1167,1165,1166 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
1138 JQ=1167,1170,1168,1169 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
1139 JQ=1152,1153,1171,1172 ETYPE=0 TH=0.2,0.2 G=18,8  
1283 JQ=1305,1306,1304,1307 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
1284 JQ=1308,1309,1307,1310 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
1285 JQ=1311,1312,1310,1313 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
1286 JQ=1314,1315,1313,1316 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
1287 JQ=1317,1318,1316,1319 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
1288 JQ=1320,1321,1319,1322 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
1289 JQ=1304,1307,1323,1324 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
1290 JQ=1307,1310,1324,1325 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
1291 JQ=1310,1313,1325,1326 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
1292 JQ=1313,1316,1326,1327 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
1293 JQ=1316,1319,1327,1328 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
1294 JQ=1319,1322,1328,1329 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
1295 JQ=1323,1324,1330,1331 ETYPE=0 TH=0.2,0.2 G=6,21  
421 JQ= 501, 502, 508, 509 ETYPE=0 TH=0.2,0.2 G=6,5  
451 JQ= 536, 537, 546, 547 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
452 JQ= 537, 538, 547, 548 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
453 JQ= 538, 539, 548, 549 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
454 JQ= 539, 540, 549, 550 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
455 JQ= 540, 541, 550, 551 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
456 JQ= 541, 542, 551, 552 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
457 JQ= 543, 544, 556, 557 ETYPE=0 TH=0.2,0.2 G=12,4  
505 JQ= 596, 597, 595, 598 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
506 JQ= 599, 600, 598, 601 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
507 JQ= 602, 603, 601, 604 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
508 JQ= 605, 606, 604, 607 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
509 JQ= 595, 598, 608, 609 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
510 JQ= 598, 601, 609, 610 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
511 JQ= 601, 604, 610, 611 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
512 JQ= 604, 607, 611, 612 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
513 JQ= 608, 609, 613, 614 ETYPE=0 TH=0.2,0.2 G=4,7  
641 JQ= 643, 644, 648, 651 ETYPE=0 TH=0.2,0.2 JQ=644,645,651,654  
642 JQ= 644, 645, 654, 654 ETYPE=0 TH=0.2,0.2



542 JQ= 644, 645, 646, 647 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
 543 JQ= 645, 646, 647, 648 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
 544 JQ= 646, 647, 648, 649 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
 545 JQ= 648, 651, 649, 650 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
 546 JQ= 651, 654, 652, 653 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
 547 JQ= 654, 657, 655, 656 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
 548 JQ= 657, 660, 658, 659 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
 549 JQ= 648, 649, 661, 662 ETYPE=0 TH=0.2,0.2 G=12,4  
 597 JQ= 703, 704, 713, 714 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
 598 JQ= 704, 705, 714, 715 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
 599 JQ= 705, 706, 715, 716 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
 600 JQ= 706, 707, 716, 717 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
 601 JQ= 707, 708, 717, 718 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
 602 JQ= 708, 709, 718, 719 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
 603 JQ= 713, 714, 720, 721 ETYPE=0 TH=0.2,0.2 G=6,5  
 633 JQ= 801, 802, 804, 805 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
 634 JQ= 802, 803, 805, 806 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
 635 JQ= 804, 805, 808, 809 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
 636 JQ= 805, 806, 809, 810 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
 637 JQ= 807, 808, 812, 813 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
 638 JQ= 808, 809, 813, 814 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
 639 JQ= 809, 810, 814, 815 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
 640 JQ= 810, 811, 815, 816 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
 641 JQ= 812, 813, 817, 818 ETYPE=0 TH=0.2,0.2 G=4,11  
 685 JQ= 867, 868, 872, 873 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
 686 JQ= 868, 869, 873, 874 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
 687 JQ= 869, 870, 874, 875 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
 688 JQ= 870, 871, 875, 876 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
 689 JQ= 873, 874, 877, 878 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
 690 JQ= 874, 875, 878, 879 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
 691 JQ= 877, 878, 880, 881 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
 692 JQ= 878, 879, 881, 882 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
 693 JQ= 901, 902, 904, 905 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
 694 JQ= 902, 903, 905, 906 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
 695 JQ= 904, 905, 908, 909 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
 696 JQ= 905, 906, 909, 910 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
 697 JQ= 907, 908, 912, 913 ETYPE=0 TH=0.2,0.2 G=4,13  
 749 JQ= 973, 974, 977, 978 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
 750 JQ= 974, 975, 978, 979 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
 751 JQ= 977, 978, 980, 981 ETYPE=0 TH=0.2,0.2  
 752 JQ= 978, 979, 981, 982 ETYPE=0 TH=0.2,0.2

LOADS

474 L=1 F=0,0,400  
 1474 L=1 F=0,0,-400

APÊNDICE C - DEFINIÇÃO DO "MODELO HÍBRIDO"

ANALISE DE ESTRUTURA COM PERFIS ABERTOS \* FLEXO-TORCAO/VIGAS ARQ:TESEF  
SYSTEM

N=16 L=1

C.2

JOINTS

|    |         |           |      |
|----|---------|-----------|------|
| 1  | X=0     | Y= 84.406 | Z=0  |
| 2  | X=143.3 | Y= 84.406 | Z=0  |
| 3  | X=283.3 | Y= 84.406 | Z=0  |
| 4  | X=427.3 | Y= 84.406 | Z=0  |
| 5  | X= 0    | Y= 84.406 | Z=20 |
| 6  | X=143.3 | Y= 84.406 | Z=20 |
| 7  | X=283.3 | Y= 84.406 | Z=20 |
| 8  | X=427.3 | Y= 84.406 | Z=20 |
| 9  | X=0     | Y=-84.406 | Z=0  |
| 10 | X=143.3 | Y=-84.406 | Z=0  |
| 11 | X=283.3 | Y=-84.406 | Z=0  |
| 12 | X=427.3 | Y=-84.406 | Z=0  |
| 13 | X=0     | Y=-84.406 | Z=20 |
| 14 | X=143.3 | Y=-84.406 | Z=20 |
| 15 | X=283.3 | Y=-84.406 | Z=20 |
| 16 | X=427.3 | Y=-84.406 | Z=20 |

RESTRAINTS

1 R=1,1,1,1,1,1  
5 R=1,1,1,1,1,1  
9 R=1,1,1,1,1,1  
13 R=1,1,1,1,1,1

FRAME

NM=6

1 A=0.000001 J=0.07467 I=0.1,142.77 E=2100000 G=807692  
2 A=0.000001 J=0.07467 I=853.36,142.77 E=2100000 G=807692  
3 A=0.000001 J=0.05867 I=0.1,47.58 E=2100000 G=807692  
4 A=0.000001 J=0.05867 I=613.25,47.58 E=2100000 G=807692  
5 A=2200 J=0.008 I=120000,120000 E=2100000 G=807692  
6 A=2200 J=0.008 I=120000,120000 E=2100000 G=807692  
1, 1, 2 M=2 LP=1, 9 G=2,1,1,1  
4, 5, 6 M=1 LP=5,13 G=2,1,1,1  
7, 9,10 M=2 LP=1, 9 G=2,1,1,1  
10,13,14 M=1 LP=5,13 G=2,1,1,1  
10, 1, 5 M=3 LP=1, 9  
14, 2, 6 M=6 LP=2,10  
15, 3, 7 M=6 LP=3,11  
16, 4, 8 M=6 LP=4,12  
17, 9,13 M=5 LP=1, 9  
18,10,14 M=6 LP=2,10  
19,11,15 M=6 LP=3,11  
20,12,16 M=6 LP=4,12  
21, 2,10 M=4 LP=2, 1 G=2,1,1,1  
24, 6,14 M=3 LP=6, 5 G=2,1,1,1

LOADS

8 L=1 F=0,0, 400  
16 L=1 F=0,0,-400

ANALISE DE ESTRUTURA COM PERFIS ABERTOS \* FLEXO-TORCAO/VIGAS ARQ:TESEF

## SYSTEM DATA

C.

|                                       |            |
|---------------------------------------|------------|
| EXECUTION CODE - - - - -              | 0          |
| NUMBER OF JOINTS - - - - -            | 16         |
| NUMBER OF LOAD CONDITIONS - - - - -   | 1          |
| STEADY STATE LOAD FREQUENCY - - - - - | .00000E+00 |
| NUMBER OF EIGENVALUES - - - - -       | 0          |
| EIGEN CONVERGENCE TOLERANCE - - - - - | .10000E-02 |
| EIGEN CUTOFF TIME PERIOD - - - - -    | .00000E+00 |

## ANALISE DE ESTRUTURA COM PERFIS ABERTOS \* FLEXO-TORCAO/VIGAS ARQUITESEF

## GENERATED JOINT COORDINATES

C.

| JOINT | X       | Y       | Z      |
|-------|---------|---------|--------|
| 1     | .000    | 84.406  | .000   |
| 2     | 143.300 | 84.406  | .000   |
| 3     | 286.300 | 84.406  | .000   |
| 4     | 427.300 | 84.406  | .000   |
| 5     | .000    | 84.406  | 20.000 |
| 6     | 143.300 | 84.406  | 20.000 |
| 7     | 286.300 | 84.406  | 20.000 |
| 8     | 427.300 | 84.406  | 20.000 |
| 9     | .000    | -84.406 | .000   |
| 10    | 143.300 | -84.406 | .000   |
| 11    | 286.300 | -84.406 | .000   |
| 12    | 427.300 | -84.406 | .000   |
| 13    | .000    | -84.406 | 20.000 |
| 14    | 143.300 | -84.406 | 20.000 |
| 15    | 286.300 | -84.406 | 20.000 |
| 16    | 427.300 | -84.406 | 20.000 |

ANALISE DE ESTRUTURA COM PERFIS ABERTOS \* FLEXO-TORCAO/VIGAS ARG-TESEF

RESTRAINT DATA

C

| JOINT | RX | RY | RZ | RXX | RYY | RZZ |
|-------|----|----|----|-----|-----|-----|
| 1     | 1  | 1  | 1  | 1   | 1   | 1   |
| 2     | 1  | 1  | 1  | 1   | 1   | 1   |
| 3     | 1  | 1  | 1  | 1   | 1   | 1   |
| 10    | 1  | 1  | 1  | 1   | 1   | 1   |

ANALISE DE ESTRUTURA COM PERFIS ABERTOS \* FLEXO-TORCAO/VIGAS ARG:TESEF

FRAME CONTROL DATA

C.1

NUMBER OF MEMBER SECTION PROPERTIES 6  
NUMBER OF SPAN LOADING PATTERNS 0

| LOAD | GRAVITATIONAL MULTIPLIERS |      |      | PRESTRESS   |
|------|---------------------------|------|------|-------------|
| COND | X                         | Y    | Z    | MULTIPLIERS |
| -    | .000                      | .000 | .000 | .000        |

ANALISE DE ESTRUTURA COM PERFIS ABERTOS \* FLEXO-TORCAO/VIGAS ARQ:TESEF

SECTION PROPERTY DATA

C.7

| PROP<br>ID | AREA     | TORSIONAL<br>INERTIA | MOMENTS OF INERTIA |            | SHEAR AREA |      |
|------------|----------|----------------------|--------------------|------------|------------|------|
|            |          |                      | I33                | I22        | A2         | A3   |
| 1          | .000     | .74679E-01           | .10000E+00         | .14277E+03 | .000       | .000 |
| 2          | .000     | .74679E-01           | .05336E+01         | .14277E+03 | .000       | .000 |
| 3          | .000     | .58679E-01           | .10000E+00         | .47580E+02 | .000       | .000 |
| 4          | .000     | .58679E-01           | .11035E+00         | .47580E+02 | .000       | .000 |
| 5          | 2200.000 | .80000E-02           | .12000E+06         | .12000E+06 | .000       | .000 |
| 6          | 2200.000 | .80000E-02           | .12000E+06         | .12000E+06 | .000       | .000 |



## ANALISE DE ESTRUTURA COM PERFIS ABERTOS \* FLEXO-TORCAO/VIGAS ARQ:TESEP

## M A T E R I A L P R O P E R T Y D A T A

C.8

| PROF<br>ID | MODULUS OF<br>ELASTICITY | SHEAR<br>MODULUS | WEIGHT PER<br>UNIT LEN | MASS PER<br>UNIT LEN | THERMAL<br>EXPANSION |
|------------|--------------------------|------------------|------------------------|----------------------|----------------------|
| 1          | .2100E+07                | .8077E+06        | .0000E+00              | .0000E+00            | .0000E+00            |
| 2          | .2100E+07                | .8077E+06        | .0000E+00              | .0000E+00            | .0000E+00            |
| 3          | .2100E+07                | .8077E+06        | .0000E+00              | .0000E+00            | .0000E+00            |
| 4          | .2100E+07                | .8077E+06        | .0000E+00              | .0000E+00            | .0000E+00            |
| 5          | .2100E+07                | .8077E+06        | .0000E+00              | .0000E+00            | .0000E+00            |
| 6          | .2100E+07                | .8077E+06        | .0000E+00              | .0000E+00            | .0000E+00            |

ANALISE DE ESTRUTURA COM PERFIS ABERTOS \* FLEXO-TORCAO/VIGAS ARG:TESEF

FRAME ELEMENT DATA

C.9

| ELT ID | JOINT END-1 | JOINT END-2 | LOC-AXIS N1 | LOC-AXIS N2 | PROP ID | REL CODES | RIGID-OFFSETS END-1 | RIGID-OFFSETS END-2 | REDUCT FACTOR | MASTER-JOINT END-1 | MASTER-JOINT END-2 |
|--------|-------------|-------------|-------------|-------------|---------|-----------|---------------------|---------------------|---------------|--------------------|--------------------|
| 1      | 1           | 2           | 1           | 9           | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 2      | 2           | 3           | 1           | 9           | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 3      | 3           | 4           | 1           | 9           | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 4      | 4           | 5           | 1           | 12          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 5      | 5           | 6           | 1           | 10          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 6      | 6           | 7           | 5           | 10          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 7      | 7           | 8           | 5           | 9           | 2       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 8      | 8           | 9           | 5           | 9           | 2       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 9      | 9           | 10          | 5           | 9           | 2       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 10     | 10          | 11          | 5           | 9           | 2       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 11     | 11          | 12          | 5           | 9           | 2       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 12     | 12          | 13          | 5           | 11          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 13     | 13          | 14          | 5           | 10          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 14     | 14          | 15          | 5           | 10          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 15     | 15          | 16          | 5           | 9           | 2       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 16     | 16          | 17          | 5           | 9           | 2       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 17     | 17          | 18          | 5           | 11          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 18     | 18          | 19          | 5           | 10          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 19     | 19          | 20          | 5           | 11          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 20     | 20          | 21          | 5           | 10          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 21     | 21          | 22          | 5           | 11          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 22     | 22          | 23          | 5           | 10          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 23     | 23          | 24          | 5           | 11          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 24     | 24          | 25          | 5           | 10          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 25     | 25          | 26          | 5           | 11          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 26     | 26          | 27          | 5           | 10          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 27     | 27          | 28          | 5           | 11          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 28     | 28          | 29          | 5           | 10          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 29     | 29          | 30          | 5           | 11          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 30     | 30          | 31          | 5           | 10          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 31     | 31          | 32          | 5           | 11          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 32     | 32          | 33          | 5           | 10          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 33     | 33          | 34          | 5           | 11          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 34     | 34          | 35          | 5           | 10          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 35     | 35          | 36          | 5           | 11          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 36     | 36          | 37          | 5           | 10          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 37     | 37          | 38          | 5           | 11          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 38     | 38          | 39          | 5           | 10          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 39     | 39          | 40          | 5           | 11          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 40     | 40          | 41          | 5           | 10          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 41     | 41          | 42          | 5           | 11          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 42     | 42          | 43          | 5           | 10          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 43     | 43          | 44          | 5           | 11          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 44     | 44          | 45          | 5           | 10          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 45     | 45          | 46          | 5           | 11          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 46     | 46          | 47          | 5           | 10          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 47     | 47          | 48          | 5           | 11          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 48     | 48          | 49          | 5           | 10          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 49     | 49          | 50          | 5           | 11          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 50     | 50          | 51          | 5           | 10          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 51     | 51          | 52          | 5           | 11          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 52     | 52          | 53          | 5           | 10          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 53     | 53          | 54          | 5           | 11          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 54     | 54          | 55          | 5           | 10          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 55     | 55          | 56          | 5           | 11          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 56     | 56          | 57          | 5           | 10          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 57     | 57          | 58          | 5           | 11          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 58     | 58          | 59          | 5           | 10          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 59     | 59          | 60          | 5           | 11          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 60     | 60          | 61          | 5           | 10          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 61     | 61          | 62          | 5           | 11          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 62     | 62          | 63          | 5           | 10          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 63     | 63          | 64          | 5           | 11          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 64     | 64          | 65          | 5           | 10          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 65     | 65          | 66          | 5           | 11          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 66     | 66          | 67          | 5           | 10          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 67     | 67          | 68          | 5           | 11          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 68     | 68          | 69          | 5           | 10          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 69     | 69          | 70          | 5           | 11          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 70     | 70          | 71          | 5           | 10          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 71     | 71          | 72          | 5           | 11          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 72     | 72          | 73          | 5           | 10          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 73     | 73          | 74          | 5           | 11          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 74     | 74          | 75          | 5           | 10          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 75     | 75          | 76          | 5           | 11          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 76     | 76          | 77          | 5           | 10          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 77     | 77          | 78          | 5           | 11          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 78     | 78          | 79          | 5           | 10          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 79     | 79          | 80          | 5           | 11          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 80     | 80          | 81          | 5           | 10          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 81     | 81          | 82          | 5           | 11          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 82     | 82          | 83          | 5           | 10          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 83     | 83          | 84          | 5           | 11          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 84     | 84          | 85          | 5           | 10          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 85     | 85          | 86          | 5           | 11          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 86     | 86          | 87          | 5           | 10          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 87     | 87          | 88          | 5           | 11          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 88     | 88          | 89          | 5           | 10          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 89     | 89          | 90          | 5           | 11          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 90     | 90          | 91          | 5           | 10          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 91     | 91          | 92          | 5           | 11          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 92     | 92          | 93          | 5           | 10          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 93     | 93          | 94          | 5           | 11          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 94     | 94          | 95          | 5           | 10          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 95     | 95          | 96          | 5           | 11          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 96     | 96          | 97          | 5           | 10          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 97     | 97          | 98          | 5           | 11          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 98     | 98          | 99          | 5           | 10          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |
| 99     | 99          | 100         | 5           | 11          | 1       | 000000    | .0                  | .0                  | .00           | 0                  | 0                  |

ANALISE DE ESTRUTURA COM PERFIS ABERTOS \* FLEXO-TORCAO/VIGAS ARQ:TESEF

C

TOTAL WEIGHT OF FRAME ELEMENTS = .000000

TOTAL MASS OF FRAME ELEMENTS = .000000

ANALISE DE ESTRUTURA COM PERFIS ABERTOS \* FLEXO-TORCAO/VIGAS ARQ:TESEF

## JOINT LOADS

C

| JOINT | LOAD | FX       | FY       | FZ        | MX       | MY       |        |
|-------|------|----------|----------|-----------|----------|----------|--------|
| 0     | :    | .000E+00 | .000E+00 | .400E+03  | .000E+00 | .000E+00 | .000E+ |
| 1=    | :    | .000E+00 | .000E+00 | -.400E+03 | .000E+00 | .000E+00 | .000E+ |

## ANALISE DE ESTRUTURA COM PERFS ABERTOS \* FLEXO-TORCAO/VIGAS ARQ:TESEF

E Q U I L I B R I U M    E Q U A T I O N    N U M B E R S

C

| JOINT | X  | Y  | Z  | XX | YY | ZZ |
|-------|----|----|----|----|----|----|
| 1     | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| 2     | 25 | 11 | 37 | 38 | 29 | 30 |
| 3     | 49 | 50 | 61 | 52 | 33 | 54 |
| 4     | 61 | 62 | 66 | 64 | 35 | 60 |
| 5     | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| 6     | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 7     | 40 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 |
| 8     | 67 | 68 | 69 | 70 | 71 | 72 |
| 9     | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| 10    | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 |
| 11    | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 |
| 12    | 53 | 56 | 57 | 58 | 59 | 62 |
| 13    | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| 14    | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  |
| 15    | 11 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 16    | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 |

## ANALISE DE ESTRUTURA COM PERFIS ABERTOS \* FLEXO-TORCAO/VIGAS ARG:TESEF

## JOINT DISPLACEMENTS

C.13

LOAD CONDITION 1 - DISPLACEMENTS "U" AND ROTATIONS "R"

| JOINT | U(X)     | U(Y)     | U(Z)      | R(X)    | R(Y)     | R(Z)     |
|-------|----------|----------|-----------|---------|----------|----------|
| 1     | .000000  | .000000  | .000000   | .000000 | .000000  | .000000  |
| 2     | .101734  | .092846  | .782417   | .009285 | -.010173 | .000974  |
| 3     | .159681  | .315567  | 2.661172  | .031557 | -.015968 | .001539  |
| 4     | .178830  | .609483  | 5.149472  | .060948 | -.017883 | .000974  |
| 5     | .000000  | .000000  | .000000   | .000000 | .000000  | .000000  |
| 6     | -.101734 | -.092846 | .782417   | .009285 | -.010173 | -.000974 |
| 7     | -.159681 | -.315567 | 2.661172  | .031557 | -.015968 | -.001539 |
| 8     | -.178830 | -.609483 | 5.149473  | .060948 | -.017883 | -.000974 |
| 9     | .000000  | .000000  | .000000   | .000000 | .000000  | .000000  |
| 10    | -.101734 | .092846  | -.782417  | .009285 | .010173  | .000974  |
| 11    | -.159681 | .315567  | -2.661172 | .031557 | .015968  | .001539  |
| 12    | -.178830 | .609483  | -5.149472 | .060948 | .017883  | .000974  |
| 13    | .000000  | .000000  | .000000   | .000000 | .000000  | .000000  |
| 14    | .101734  | -.092846 | -.782417  | .009285 | .010173  | -.000974 |
| 15    | .159681  | -.315567 | -2.661172 | .031557 | .015968  | -.001539 |
| 16    | .178830  | -.609483 | -5.149473 | .060948 | .017883  | -.000974 |

## ANALISE DE ESTRUTURA COM PERFIS ABERTOS \* FLEXO-TORCAO/VIGAS ARG:TESEF

## REACTIONS AND APPLIED FORCES

C.14

LOAD CONDITION 1 - FORCES 'F' AND MOMENTS 'M'

| JOINT | F(X)       | F(Y)       | F(Z)       | M(X)       | M(Y)       | M(Z)       |
|-------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 1     | -.1491E-01 | -.3782E+02 | -.3909E+03 | -.3908E+01 | .1552E+06  | -.4518E+04 |
| 2     | .6505E-09  | .2731E-08  | -.3698E-07 | -.9892E-07 | .2664E-07  | .5715E-11  |
| 3     | -.3588E-08 | -.7064E-08 | -.7989E-07 | -.9523E-07 | .5275E-07  | -.6531E-12 |
| 4     | .5491E-08  | .7586E-08  | .8591E-07  | -.5269E-06 | .3816E-06  | -.4118E-11 |
| 5     | .1491E-01  | .3782E+02  | -.4581E-01 | -.3908E+01 | .1819E+02  | .4518E+04  |
| 6     | .2447E-08  | -.2689E-08 | .3906E-07  | -.4659E-07 | -.1060E-06 | .3103E-11  |
| 7     | .3646E-08  | .7197E-08  | .1059E-07  | .5361E-07  | .3607E-07  | .5953E-11  |
| 8     | -.7935E-09 | .5226E-07  | .4000E+03  | -.3766E-07 | .2258E-08  | .3785E-11  |
| 9     | -.1491E-01 | -.3782E+02 | .3909E+03  | -.3908E+01 | -.1552E+06 | -.4518E+04 |
| 10    | .7952E-08  | -.4445E-08 | .2979E-09  | -.4220E-07 | .3059E-07  | -.5396E-11 |
| 11    | .3177E-07  | .5210E-07  | .9741E-07  | -.3218E-06 | .6012E-08  | -.5864E-11 |
| 12    | -.1937E-09 | -.3782E-07 | -.2292E-06 | .4564E-06  | -.4820E-07 | -.6235E-11 |
| 13    | -.1491E-01 | .3782E+02  | .4581E-01  | -.3908E+01 | -.1819E+02 | .4518E+04  |
| 14    | -.1103E-07 | .4483E-08  | -.2218E-07 | -.3099E-07 | .1013E-06  | -.1601E-12 |
| 15    | -.2457E-07 | -.2218E-07 | -.9811E-07 | -.6178E-06 | .8145E-07  | -.1492E-10 |
| 16    | -.4363E-08 | .9280E-08  | -.4000E+03 | .1874E-06  | -.5080E-07 | -.6982E-11 |
| TOTAL | .0725E-08  | .3960E-07  | -.1731E-06 | -.1568E+02 | .5136E-06  | -.2843E-10 |

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS



- (1) - VLASOV, V.Z., "Thin-Walled Elastic Beams", Israel' Program for Scientific Tranlations, Jerusalem, ' Israel, 1961.
- (2) - HUGHES, O.F., "Ship Structural Design, A Rational ly-Based, Computer Aided, Optimization Approach ", John Wiley & Sons, New York, NY, USA, 1983.
- (3) - FEODOSIEV, V.I., "Resistencia de Materiales " , ' Editorial Mir, Moscou, URSS, 1972.
- (4) - LANGENDONCK, T.V., "Curso de Mecânica das Estrutu ras - Resistência dos Materiais, Deformações II", Editora Edgard Blücher Ltda., Editora da Universi dade de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil.
- (5) - REKACH, V.G., "Static Theory of Thin-Walled Spa- ce Structures ", Mir Publishers, Moscou, 1978.
- (6) - FEODOSIEV, V.I., "Diez Conferencias sobre Resiste ncia de Materiales ", Editorial Mir Moscou, URSS, 1973.
- (7) - TAKAHASHI, K., "A Torsional Strength Analysis of Truck Frames Using Open Sections Members ", Pu- blicação da Nissan Motor Co., Ltd. Ref. 710595.
- (8) - LEBEDEV, N., "Problemas Atuais em Mecânica e Ma- temática Aplicada - Sistema de Equações Diferen- ciais de Estabilidade Vlasov ", Publicação Inter- na da Divisão de Engenharia Naval do IPT, São Pau lo, SP, Brasil, 1981.
- (9) - LEBEDEV, N., "Problemas Atuais em Mecânica e Mate mática Aplicada - Método Variacional Vlasov ", Pu- blicação Interna da Divisão de Engenharia Naval do IPT, São Paulo, SP, Brasil, 1981.
- (10) - RICARDO, O.G.S., "Alguns Fundamentos Teóricos ' para o Projeto de Estruturas Construídas com Cha pas e Reforçadores ", Revista Brasileira de Engen haria-Caderno de Engenharia Naval (SOBENA), Volume 5 / Nº 2, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1988.

- (11) - ALVES Fº, A., "Teoria de Flexo-Torção para Perfis Abertos de Paredes Delgadas (Teoria de Vlasov)", Revista Brasileira de Engenharia - Caderno de Engenharia Naval (SOBENA), Volume 6/Nº1, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1988.
- (12) - RICARDO, O.G.S., "Um Modelo Simplificado para Análise Inicial de uma Estrutura de Ônibus", Publicação da CMTC em colaboração com a Divisão de Engenharia Naval da EPUSP, São Paulo, SP, Brasil, 1979.
- (13) - WESTIN, H., "Analysis of the Torsional Response of the SL-7 Hull Structure by Use of the Finite - Beam Technique and Comparison with other Techniques", Journal of Ship Research - SNAME, New York, NY, USA, 1981.
- (14) - PAN, Y.H. and Lu, S.Y., "Increase of Warping Rigidity in Open Sections of a Containership by stiffening Plates", Journal of ship Research - SNAME, New York, NY, USA, 1983.
- (15) - LIU, D. and CHEN, Y.K., "Fundamentals and Applications of the Finite - Element Method in Analyzing Structural and Non Structural Marine Problems", Marine Technology - SNAME, New York, NY, USA, 1982.
- (16) - BATHE, K.J., "Finite Element Procedures in Engineering ANALYSIS", Prentice - Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1982.
- (17) - ZIENKIEWICZ, O.C., "The Finite Element Method", 3rd ed., Mc Graw - Hill Book Company, New York, NY, USA 1977.
- (18) - SCHODEK, D.L., "Structures", Prentice - Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1980.
- (19) - TIMOSHENKO, S.P., "Resistência dos Materiais-Volume II", Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1981.

- (20) - TIMOSHENKO, S.P. and GOODIER, J.N., "Theory of Elasticity", McGraw-Hill Book Company, Kogakusha Company Ltda., Tokyo, Japan, 1951.
- (21) - TIMOSHENKO, S.P. and KRIEGER, S.W., "Theory of Plates and Shells", McGraw - Hill International Book Company, Singapore, 1970.
- (22) - RICARDO, O.G.S., "Teoria das Estruturas", Editora da Universidade de São Paulo, Editora McGraw - Hill do Brasil Ltda., São Paulo, SP, Brasil, 1978.
- (23) - ROARK., R.J. and YOUNG, W.C., "Formulas for Stress and Strain", McGraw - Hill International Book Company, Singapore, 1976.
- (24) - BELYAEV , N.M., "Strength of Materials", Mir Publishers Moscou, URSS, 1979.