

A V E L I N O A L V E S F I L H O

Engenheiro Naval, Escola Politécnica da USP, 1974

**ANÁLISE DE ESTRUTURAS COMPOSTAS
POR PERFIS ABERTOS DE PAREDES
DELGADAS:
APLICAÇÃO DA ANALOGIA
FLEXÃO-RETORÇÃO
A PROBLEMAS ESTRUTURAIS
ESTÁTICOS E DINÂMICOS.**

Tese apresentada à Escola Politécnica
da Universidade de São Paulo para a
obtenção do título de Doutor em
Engenharia.

Orientador: **Prof. Dr. Carlos Alberto
Nunes Dias**

SÃO PAULO
1995

À
Silvana, Gabriela e Pedro,
aos meus pais e à Carmen
Lídia

AGRADECIMENTOS

A FAPESP - FUNDAÇÃO DE AMPARO À PESQUISA DO ESTADO DE SÃO PAULO, que apoiou o desenvolvimento deste trabalho, dando-me a honra de constar do seu quadro de bolsistas no Programa de Doutorado, sem o qual não seria possível atingir os objetivos previstos.

Ao Prof Dr. CARLOS ALBERTO NUNES DIAS, pelo eficaz trabalho de orientação geral e nos pontos chaves deste estudo, como a idealização do Modelo Híbrido Estático e Dinâmico e pelo constante estímulo durante a execução do plano geral de trabalho no programa de pós graduação.

Ao Prof. Dr. MIGUEL ANGEL BUELTA MARTINEZ e ao Prof. Dr. OSCAR BRITO AUGUSTO pelas valiosas sugestões.

Ao Prof. NIKOLAJ LEBEDEV, pelo incentivo constante no estudo da Teoria Vlasov e na formação profissional.

Aos meus pais, AVELINO e LÍDIA e à minha irmã CARMEN LÍDIA, pelo apoio de sempre.

À minha esposa SILVANA e aos meus filhos GABRIELA e PEDRO, pelo apoio e compreensão.

Ao Engenheiro VALTER CARMO DE OLIVEIRA, pela colaboração no processamento dos programas.

À Sra. MEIRE BISORDI pelo trabalho de editoração.

RESUMO

O presente trabalho aborda os efeitos decorrentes do empenamento (retorção) em perfis abertos de paredes delgadas, estabelecendo os procedimentos para o cálculo das tensões normais e de cisalhamento decorrentes da torção desses tipos de perfis (flexo-torção), ou de caixas estruturais abertas que, devido às suas dimensões globais e espessura de parede, possam ser assimiladas primariamente ao comportamento estrutural de vigas. São considerados os efeitos de Flexo-Torção no Cálculo Estático e Dinâmico.

A resolução do problema de flexo-torção para perfis abertos de paredes delgadas é efetuada por intermédio da introdução da Analogia Flexão-Retorção para aplicações Estáticas e Dinâmicas.

ABSTRACT

This study describes the effects of warping in open thin-walled beams. The procedures for normal and shear stresses calculations, caused by torsion of this type of beam, are also described. The effect of warping in the solution of natural frequency and mode shape is solved by a introduction of warping-flexion analogy to structural dynamic problems.

Índice Analítico

Capítulo I - INTRODUÇÃO

1.1 - ASPECTOS GERAIS.....	1.1
1.2 - ESCOPO DO TRABALHO.....	1.15

Capítulo II - ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS APLICADAS A VIGAS DE PAREDES DELGADAS

2.1 - VISÃO GERAL DO PROBLEMA DINÂMICO E ASPECTOS FÍSICOS.....	2.1
2.2 - TEORIA DAS VIBRAÇÕES FLEXO-TORCIONAIS.ABORDAGEM GERAL DE VLASOV	2.3
2.2.1. Equações Diferenciais das Vibrações Livres	2.3
2.2.2. Integração das Equações Diferenciais de Vibrações para Vigas	2.10
2.3 - ESTUDO DAS VIBRAÇÕES FLEXO-TORCIONAIS A PARTIR DO ACOPLAMENTO DAS VIBRAÇÕES FLEXIONAIS E TORCIONAIS	2.17
2.3.1. Introdução.....	2.17
2.3.2. Equações das Vibrações Laterais Livres	2.18
2.3.3. Vibrações Flexionais e Torcionais de Perfis C. Acoplamento a partir das Soluções de Flexão e Torção.....	2.27
2.3.4. Comparação da Solução Analítica desenvolvida com solução obtida pelo MEF, utilizando Elementos de Casca.....	2.32

Capítulo III - ANALOGIA FLEXÃO-RETORÇÃO COM ADOÇÃO DE MODELO HÍBRIDO PARA PROBLEMAS ESTRUTURAIS DINÂMICOS

3.1 - RETORÇÃO - TEORIA DE VLASOV: BIMOMENTO DE FLEXO-TORÇÃO.....	3.1
---	-----

3.2 - LIMITAÇÃO DAS ABORDAGENS EXISTENTES PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF)	3.3
3.3 - SOLUÇÃO PELA ANALOGIA FLEXÃO-RETORÇÃO	3.4
3.4 - MODELO HÍBRIDO PARA ANÁLISE DINÂMICA ACOPLAMENTO DAS VIBRAÇÕES TORCIONAIS E FLEXIONAIS PELA EXCENTRICIDADE DE MASSA DO MODELO.....	3.7

Capítulo IV - TESTES DE CONFIABILIDADE E APLICAÇÕES

4.1 - TESTES INICIAIS PARA PERFIL ISOLADO	4.1
4.2 - EFEITO DA RIGIDEZ À TORÇÃO DAS BARRAS DE LIGAÇÃO DO MODELO HÍBRIDO	4.8
4.3 - EFEITO DAS VIBRAÇÕES LOCAIS.....	4.16
4.4 - EFEITO DA RIGIDEZ AO EMPENAMENTO. TORÇÃO DE VLASOV E TORÇÃO DE SAINT VENANT	4.30
4.4.1. Introdução.....	4.30
4.4.2. Influência de λ nas vibrações flexo-torcionais	4.32
4.4.3. Considerações Adicionais à Analogia Flexão-Retorção.....	4.39
4.4.4. Aplicação dos Conceitos Anteriores	4.47
4.5 - ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS CONSTITUÍDAS POR DIVERSOS PERFIS ABERTOS DE PAREDES DELGADAS. ESTRUTURAS TIPO "CHASSI".....	4.49
4.5.1. Introdução.....	4.49
4.5.2. Exemplos.....	4.55

Capítulo V - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

5.1 - CONCLUSÕES FINAIS	5.1
5.2 - RECOMENDAÇÕES PARA FUTUROS TRABALHOS.....	5.7

Apêndice A - REVISÃO DA TEORIA DE VLASOV PARA PERFIS ABERTOS DE PAREDES DELGADAS

A.1 - REVISÃO DA TEORIA DE VLASOV PARA PERFIS ABERTOS DE PAREDES DELGADAS	A.2
A.2 - TENSÕES NORMAIS NA FLEXO-TORÇÃO	A.13
A.3 - EQUAÇÃO DO BIMOMENTO.....	A.21
A.4 - TENSÕES DE CISALHAMENTO NA FLEXO-TORÇÃO	A.26
A.5 - EQUAÇÕES GERAIS DA TEORIA DE VLASOV	A.29
A.6 - ROTEIRO PARA APLICAÇÃO DA TEORIA.....	A.30

Apêndice B - DESENVOLVIMENTO CONCEITUAL E ANALÍTICO DA ANALOGIA FLEXÃO-RETORÇÃO

B.1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS	B.2
B.2 - ALTERNATIVAS PARA DISCRETIZAÇÃO.....	B.5
B.3 - ANALOGIA FLEXÃO-RETORÇÃO	B.11
B.4 - TESTES DE CONFIABILIDADE	B.18
B.4.1. Introdução.....	B.18
B.4.2. Exemplo de Cálculo	B.18
B.4.2.1. Teoria de Vlasov	B.20
B.4.2.2. Análise pelo Método dos Elementos Finitos com Elementos de Casca	B.30
B.4.2.3. Analogia Flexão-Retorção.....	B.33
B.4.2.4. Comparação dos valores obtidos pelos diversos procedimentos. Conclusões do Estudo.	B.38
B.5 - EXEMPLO DE APLICAÇÃO - CHASSIS.....	B.40
B.5.1. Introdução.....	B.40
B.5.2. Exemplo para Estudo.....	B.40
B.5.2.1. Análise pelo Método dos Elementos Finitos com Elementos de Casca (MEF - Cascas).....	B.42

B.5.2.2. Análise pelo Método dos Elementos Finitos com "Modelo Híbrido". Analogia Flexão-Retorção.....	B.46
B.5.2.3. Comparação dos Resultados obtidos pelo "MEF- Casca" e "Modelo Híbrido" - Analogia Flexão- Retorção	B.56

Apêndice C - PROPRIEDADES SECTORIAIS

C.1 - ÁREA SECTORIAL.....	C.2
C.2 - MOMENTO ESTÁTICO SECTORIAL, MOMENTOS LINEARES SECTORIAIS E MOMENTO DE INÉRCIA SECTORIAL	C.5
C.3 - ÁREA SECTORIAL PRINCIPAL E MOMENTO DE INÉRCIA SECTORIAL PRINCIPAL.....	C.6
C.4 - EXEMPLOS.....	C.9

Apêndice D - CASO PARTICULAR. CONSIDERAÇÃO DE MASSAS CONCENTRADAS NO MODELO HÍBRIDO. CÁLCULO DE FREQUÊNCIAS NATURAIS

D.1 - EFEITO DE MASSAS CONCENTRADAS.....	D.2
--	-----

Apêndice E - DADOS DO MODELO HÍBRIDO PARA ESTRUTURAS TIPO CHASSI

Índice de Tabelas

Capítulo II

Tabela 2.1 - Comparação da Solução Analítica com a Solução pelo Mef (Casca)	2.32
---	------

Capítulo IV

Tabela 4.1 - Efeito da Rigidez à Torção das Barras de Ligação do Modelo Híbrido no Cálculo de Freqüências Naturais	4.11
Tabela 4.2 - Freqüências Naturais Obtidas Pelos Diferentes Modelos/Mef. Análise das Vibrações Flexo-Torcionais (Hz)	4.19
Tabela 4.3 - Testes de Cálculo de Freqüências Torcionais Utilizando Elementos de Viga com Barras Auxiliares.....	4.25
Tabela 4.4 - Influência de λ nas Vibrações Flexo-Torcionais.....	4.35
Tabela 4.5 - Freqüências Torcionais Globais Para Estruturas "Tipo Chassi" - I	4.55
Tabela 4.6 - Freqüências Torcionais Globais Para Estruturas "Tipo Chassi" - II	4.60
Tabela 4.7 - Modos e Freqüências (Hz) de Estruturas Tipo Chassi	4.68

Apêndice A

Tabela A.1 - Comparação das Formulações para Cálculo de Tensões Normais de Flexão e Flexo-Torção	A.21
Tabela A.2 - Comparação das Formulações para Cálculo de Tensões de Cisalhamento na Flexão e Na Flexo-Torção.....	A.28

Apêndice B

Tabela B.1 - Distribuições de M_{tu} , M_{ft} , M_{tt} e B	B.23
Tabela B.2 - Coordenadas Sectoriais	B.24
Tabela B.3 - Tensões Normais de Flexo-Torção	B.24
Tabela B.4 - Momento Estático Sectorial	B.27

Tabela B.5 - Tensões de Cisalhamento na Flexo-Torção	B.29
Tabela B.6 - Definição das Propriedades do Modelo Flexão-Retorção, em Relação aos Eixos Locais 1, 2, 3.....	B.33
Tabela B.7 - Esforços nos Elementos de Viga do Modelo Híbrido	B.35
Tabela B.8 - Comparação dos Processos de Cálculo	B.38

Apêndice D

Tabela D.1 - Cálculo de Frequências de Flexo-Torção (Hz) Considerando Efeito de Massa Concentrada e Massa Própria da Estrutura	D.4
Tabela D.2 - Modelos com Massa Concentrada no Centro de Torção e Massa Própria.....	D.17

Índice de Figuras

Capítulo I

Figura 1.1 - Torção de Um Perfil Aberto de Paredes Delgadas.....	1.4
Figura 1.2 - Deslocamentos Axiais U Devidos ao Fenômeno de Empenamento.....	1.4
Figura 1.3 - Torção Restringida de Um Perfil Aberto de Paredes Delgadas	1.5
Figura 1.4 - Tensões Normais em Perfil Aberto de Paredes Delgadas	1.6
Figura 1.5 - Exemplo de Vibrações Flexionais em Perfil Aberto de Paredes Delgadas	1.9
Figura 1.6 - Exemplo de Vibrações Flexo-Torcionais em Perfil Aberto de Paredes Delgadas	1.10
Figura 1.7 - Exemplo de Vibração Flexional Vertical em Estrutura "Tipo Chassi".....	1.11
Figura 1.8 - Exemplo de Vibração Flexional Lateral em Estrutura "Tipo Chassi".....	1.12
Figura 1.9 - Exemplo de Vibração Torcional Global em Estrutura "Tipo Chassi".....	1.13
Figura 1.10 - Exemplo de Vibração Global Acoplada a Vibração Flexo-Torcional de Perfil	1.14
Figura 1.11 - Representação Esquemática da Seqüência de Estudo	1.19

Capítulo II

Figura 2.1.a - Deslocamentos em Viga de Paredes Delgadas.....	2.4
Figura 2.1.b - Deslocamentos em Viga de Paredes Delgadas.....	2.5
Figura 2.2 - Análise de Trecho de Barra em Flexão.....	2.21
Figura 2.3 - Força de Restituição em Elemento de Barra Vibrante.....	2.21
Figura 2.4 - Movimento Rotacional em Trecho de Barra Vibrante.....	2.23

Figura 2.5- Rotação de Elemento de Massa da Seção Transversal de Barra	2.23
Figura 2.6 - Relações entre Grandezas Lineares e Angulares.....	2.23
Figura 2.7- Acoplamento das Vibrações a partir da Flexão e da Torção Restringida	2.28
Figura 2.8 - Exemplo de Vibrações Flexo-Torcionais.....	2.33
Figura 2.9 - Primeiro Modo Torcional ($f = 56,00$ Hz)	2.34
Figura 2.10 - Segundo Modo Torcional ($f = 231,35$ Hz)	2.35

Capítulo III

Figura 3.1 - Alternativas de Modelos Estruturais de Estrutura Tipo Chassi	3.5
Figura 3.2 - Tensões Estáticas obtidas pelos Diversos Modelos de Cálculo	3.5
Figura 3.3 - Concepção do Modelo Híbrido para Análise Dinâmica.....	3.10

Capítulo IV

Figura 4.1 - Vibração Flexo-Torcional de Perfil C com Modelo Híbrido ($f = 22,27$ Hz)	4.2
Figura 4.2 - Vibração Flexional Lateral de Perfil C com Modelo Híbrido ($f = 30,53$ Hz)	4.3
Figura 4.3 - Vibração Flexo-Torcional de Perfil C com Modelo em Elementos Finitos de Casca ($f = 20,57$ Hz).....	4.4
Figura 4.4 - Vibração Flexo-Torcional de Perfil C com Modelo em Elementos Finitos de Casca ($f = 20,15$ Hz).....	4.5
Figura 4.5 - Vibração Flexional Lateral de Perfil C acoplada à Vibração das Abas com Modelo em Elementos de Casca ($f = 34,94$ Hz)	4.6
Figura 4.6 - Vibração Flexional Lateral de Perfil C acoplada à Vibração das Abas com Modelo em Elementos de Casca ($f = 34,79$ Hz)	4.7
Figura 4.7 - Elementos considerados na definição do Modelo Híbrido	4.10

Figura 4.8 - Vibração Flexo-Torcional de Perfil C com Modelo Híbrido ($J = 8,0 \text{ E-}13 \text{ m}^4$ e $f = 22,273 \text{ Hz}$)	4.13
Figura 4.9 - Vibração Flexo-Torcional de Perfil C com Modelo Híbrido ($J = 8,0\text{E-}09\text{m}^4$ e $f = 23,775 \text{ Hz}$)	4.14
Figura 4.10 - Vibração Flexo-Torcional de Perfil C com Modelo Híbrido ($J = 8,0\text{E-}07\text{m}^4$ e $f = 44,942 \text{ Hz}$)	4.15
Figura 4.11- Vibração Flexo-Torcional de Perfil C 200 mm x 150 mm x 2 mm com Elementos de Casca ($L = 2\text{m}$ e $f = 20,15 \text{ Hz}$).....	4.20
Figura 4.12- Vibração Flexo-Torcional de Perfil C 200 mm x 150 mm x 2 mm com Modelo Híbrido ($L = 2\text{m}$ e $f = 22,27 \text{ Hz}$)	4.21
Figura 4.13 - Vibração Flexo-Torcional de Perfil C 200 mm x 150 mm x 2 mm com Elementos de Viga Convencionais, utilizando Barras Transversais Auxiliares para visualização dos Modos ($L = 2\text{m}$ e $f = 3,96 \text{ Hz}$)	4.22
Figura 4.14 - Modelo de Perfil com Elementos de Viga e Barras Auxiliares (Malha Grossa).....	4.26
Figura 4.15 - Modo Torcional de Vibração de Perfil C com Malha Grossa ($f = 3,953 \text{ Hz}$)	4.27
Figura 4.16 - Modelo de Perfil C com Elementos de Viga e Barras Auxiliares (Malha Refinada).....	4.28
Figura 4.17 - Modo Torcional de Vibração de Perfil C com Malha Refinada ($f = 4,272 \text{ Hz}$)	4.29
Figura 4.18 - Vibração de Perfil C 200mm x 150mm x 10mm ($L= 5\text{m}$) - Modelo em Elemento de Casca.....	4.36
Figura 4.19 - Vibração de Perfil C 200mm x 150mm x 10mm ($L= 5\text{m}$) - Modelo híbrido.....	4.37
Figura 4.20 - Vibração de Perfil C 200mm x 150mm x 10mm ($L= 5\text{m}$) - Modelo em Elemento de Viga.....	4.38
Figura 4.21 - Viga de Paredes Delgadas com Fechamento da Extremidade Livre.....	4.41
Figura 4.22 - Empenamento da Viga de Paredes Finas com Caixa de Reforço em Extremidade Livre.....	4.42

Figura 4.23 - Discretização da Caixa de Reforço da Viga de Paredes Delgadas	4.43
Figura 4.24 - Vista Geral do Modelo Estrutural com Reforço	4.44
Figura 4.25 - Tensões Normais na Viga com Extremidade Livre Reforçada	4.46
Figura 4.26 - Trecho de Casca Prismática com Grande Abertura e com Grande Restrição ao Empenamento nas Extremidades, como na Viga-Navio	4.48
Figura 4.27 - Vibração Torcional Global de Chassi	4.51
Figura 4.28 - Modelo Híbrido para Análise Dinâmica de Estrutura Tipo Chassi	4.54
Figura 4.29 - Vibração Torcional Global de Chassi com Elementos de Casca	4.56
Figura 4.30 - Vibração Torcional Global de Chassi com Elementos de Viga	4.57
Figura 4.31 - Vibração Torcional Global de Chassi com Modelo Híbrido	4.58
Figura 4.32 - Vibração Torcional Global de Chassi em Elementos de Casca	4.61
Figura 4.33 - Vibração Torcional Global de Chassi em Elementos de Viga	4.62
Figura 4.34 - Vibração Torcional Global de Chassi com Modelo Híbrido	4.63
Figura 4.35 - Estrutura Tipo Chassi - Modo Torcional	4.65
Figura 4.36 - Modo Flexional em Modelo de Cascas	4.66
Figura 4.37 - Modo Flexional Lateral	4.67
Figura 4.38 - Frequência Torcional x λ_T ($\lambda_L = 0,408$)	4.69
Figura 4.39 - Frequência Torcional x λ_T ($\lambda_L = 0,800$)	4.70

Capítulo V

Figura 5.1 - Caixas Estruturais com Anteparas	5.9
---	-----

Apêndice A

Figura A.1 - A Seção Elementar dx é um Corpo Rígido em relação ao Movimento Transversal	A.4
---	-----

Figura A.2 - Deformações em Perfil Aberto de Paredes Delgadas - Torção Restringida	A.5
Figura A.3 - Torção de Perfil Aberto e Perfil Fechado	A.9
Figura A.4 - Par de forças F que equilibram o Momento Torçor M_x	A.9
Figura A.5 - Diagrama de Momentos Torçores	A.9
Figura A.6 - Distribuição das Tensões de Cisalhamento devido a Torção Uniforme e Flexo-Torção	A.12
Figura A.7 - Área Varrida pelo Raio Vetor \overline{CO}	A.12
Figura A.8 - Torção de Perfil I de Paredes Delgadas	A.16
Figura A.9 - Flexão na Torção. Flexão Diferencial das Abas (flanges)	A.17
Figura A.10 - Equilíbrio de um Elemento de Viga na Torção	A.22
Figura A.11 - Área Associada ao Ponto i para Cálculo do Momento Estático	A.28
Figura A.12 - Representação Esquemática da Rotina de Cálculo para Obtenção de σ_{ft} e τ_{ft}	A.31
 Apêndice B	
Figura B.1 - Exemplo de Carga Aplicada em Viga com Excentricidade e, Introduzindo Momento Torçor	B.4
Figura B.2 - Transmissão de Momentos Torçores para os Casos de Existência ou Não de Empenamento	B.4
Figura B.3 - Estrutura Constituída de Perfis de Paredes Delgadas e Modelo Estrutural com Elementos de Viga Convencionais	B.6
Figura B.4 - Modelo Estrutural com Elementos de Casca. Representação da Região A.	B.7
Figura B.5 - Idéia Inicial de Modelo com Elementos de Vigas Convencionais para Cálculo de Flexo-Torção	B.10
Figura B.6 - Torção de Perfil C e Discretização por Modelo de 4 Elementos de Viga	B.12
Figura B.7 - Analogia Flexão-Retorção	B.17
Figura B.8 - Exemplo para Cálculo de Flexo-Torção	B.19

Figura B.9 - Representação Esquemática do Problema a ser Estudado	B.19
Figura B.10 - Diagrama de Área Sectorial Principal	B.25
Figura B.11 - Tensões Normais de Flexo-Torção para $X = 200$ cm, no Engastamento	B.25
Figura B.12 - Variação das Tensões Normais σ_{ft} ao longo do Comprimento da Viga. Pontos Extremos do Flange Superior	B.28
Figura B.13 - Tensões τ_{ft} para Abcissa $X = 200$ cm	B.29
Figura B.14 - Modelo Estrutural com 816 Pontos Nodais e 750 Elementos de Casca	B.31
Figura B.15 - Tensões Normais na Seção $X = 200$ cm pela Teoria de Vlasov (—) e pelo Método dos Elementos Finitos (- - -)	B.32
Figura B.16 - Modelo para Analogia Flexão-Torção	B.34
Figura B.17 - Momentos Fletores nos Flanges, Obtidos por Intermédio da Analogia Flexão-Retorção	B.36
Figura B.18 - Estrutura Constituída por Perfis Abertos de Paredes Delgadas	B.41
Figura B.19 - Vista Geral do Modelo Estrutural	B.43
Figura B.20 - Estrutura Tipo Chassis Sujeita à Torção	B.44
Figura B.21 - Distribuição das Tensões Normais ao Longo do Contorno da Seção dos Perfis	B.45
Figura B.22 - Modelo Estrutural de Chassis para Analogia Flexão-Retorção	B.48
Figura B.23 - Localização das Regiões de Empenamento Nulo para a Analogia Flexão-Retorção	B.49
Figura B.24 - Vista Geral do "Modelo Híbrido" Deformado	B.50
Figura B.25 - Tensões Normais Obtidas por Intermédio do "Modelo Híbrido" - Analogia Flexão-Retorção	B.55
Figura B.26 - Diagramas de Tensões Normais - Comparação dos Resultados da Analogia Flexão-Retorção com MEF Cascas (kgf/cm ²)	B.59

Apêndice C

Figura C.1 - Área do Setor PAB	C.2
Figura C.2 - Área Varrida pelo Raio Vetor, para Pólo e Origens Arbitrárias	C.3
Figura C.3 - Convenção de Sinais para Área Sectorial.....	C.4
Figura C.4 - Perfil de Paredes Delgadas	C.5
Figura C.5 - Posição do Centro de Torção C em Relação ao Pólo P'	C.8
Figura C.6 - Perfil para Cálculo de Propriedades Sectoriais	C.10
Figura C.7 - Posição dos Eixos Centrais Principais	C.10
Figura C.8 - Escolha de Pólo Arbitrário e Origem Arbitrária O'.....	C.11
Figura C.9 - Cálculo da Área Varrida de O' a M	C.11
Figura C.10 - Diagrama de Área Varrida de O' a M	C.12
Figura C.11 - Cálculo da Área Varrida de M a N	C.12
Figura C.12 - Diagrama de Área Varrida de O' a N	C.13
Figura C.13 - Cálculo de Área Varrida de O' a L	C.13
Figura C.14 - Diagramas w_o , y e z	C.14
Figura C.15 - Posição do Centro de Torção	C.15
Figura C.16 - Diagrama de Área Sectorial para Pólo Coincidente com o Centro de Torção e Origem Arbitrária.....	C.15
Figura C.17 - Diagrama de Área Sectorial Principal w	C.17
Figura C.18 - Construção do Diagrama w , Partindo da Condição que C e O São Conhecidos	C.17
Figura C.19 - Referências para Construção do Diagrama do Momento Estático Sectorial.....	C.18
Figura C.20 - Diagrama do Momento Estático Sectorial.....	C.21

Apêndice D

Figura D.1 - Modelo de Viga C em Elementos de Casca com Massa Concentrada (Caso 1).....	D.5
Figura D.2 - Modo Flexional Lateral Acoplado a Vibração Local da Alma e Flanges (Caso 1).....	D.6

Figura D.3 - Modo Flexo-Torcional do Perfil C (Caso 1)	D.7
Figura D.4 - Modelo com Elementos de Casca e Barras na Extremidade para Eliminar Vibração Local (caso 2)	D.8
Figura D.5 - Vibração Lateral de Perfil C (Caso 2)	D.9
Figura D.6 - Vibração Flexo-Torcional de Perfil C (Caso 2)	D.10
Figura D.7 - Modelo Híbrido de Perfil C Considerando Massa Própria e Massa Concentrada (Caso 3)	D.11
Figura D.8 - Vibração Lateral de Perfil C com Modelo Híbrido (Caso 3)	D.12
Figura D.9 - Vibração Flexo-Torcional de Perfil C com Modelo Híbrido (Caso 3)	D.13
Figura D.10 - Modelo de Perfil C com Elementos de Viga Convencionais e Barras Auxiliares. Massa Própria e Massa Concentrada (Caso 4)	D.14
Figura D.11 - Vibração Torcional com Modelo em Elementos de Viga (Caso 4)	D.15
Figura D.12 - Vibração Lateral com Modelo em Elementos de Viga (Caso 4)	D.16
Figura D.13 - Modelo em Elementos de Casca e Massa Concentrada no Centro de Torção (Caso 8)	D.18
Figura D.14 - Vibração Flexional Lateral (Caso 8)	D.19
Figura D.15 - Vibração Flexional Vertical do Perfil C, com Massa Concentrada no Centro de Torção Muito Maior que a Massa Própria do Perfil (Caso 8)	D.20
Figura D.16 - Modelo Híbrido com Massa Concentrada no Centro de Torção, sem Excentricidade (Caso 8)	D.21
Figura D.17 - Modelo Híbrido com Massa Concentrada no Centro de Torção, sem Excentricidade (Caso 9)	D.22
Figura D.18 - Vibração Lateral com Modelo Híbrido (Caso 9)	D.23
Figura D.19 - Vibração Flexional Vertical com Modelo Híbrido (Caso 9)	D.24
Figura D.20 - Vibração Torcional com Modelo Híbrido (Caso 9)	D.25

Figura D.21- Modelo em Elementos de Viga com Massa Concentrada no Centro de Torção (Caso 10)	D.26
Figura D.22 - Vibração Lateral com Massa no Centro de Torção (Caso 10)	D.27
Figura D.23 - Vibração Torcional com Massa no Centro de Torção (Caso 10).....	D.28
Figura D.24 - Vibração Torcional com Movimento da Massa Concentrada (f = 6,932 Hz - Caso 10)	D.29

NOMENCLATURA

- A - Área de seção transversal de perfil
- A - Ponto da seção transversal de perfil aberto de paredes delgadas, pertencente ou não ao contorno da seção
- a - Aceleração no movimento vibratório de flexão no estudo das vibrações flexo-torcionais a partir do acoplamento das vibrações flexionais e torcionais
- a_x - Coordenada do centro de torção em relação ao sistema de referência com origem no centróide da seção, segundo a abordagem geral de Vlasov
- a_y - Coordenada do centro de torção em relação ao sistema de referência com origem no centróide da seção, segundo a abordagem geral de Vlasov
- B - Bimomento de flexo-torção
- b - Largura do flange de perfil C
- b' - Largura de chapa
- C - Centro de torção
- C - Rijeza Torcional
- C₁ - Rijeza ao empenamento

- c - Excentricidade existente entre o Centro de Torção C e o Centro de Gravidade G em Perfil Aberto de Paredes Delgadas, no estudo das vibrações flexo-torcionais, a partir do acoplamento das vibrações flexionais e torcionais
- d - Braço de Momento
- d_w - Distância entre o ponto de empenamento nulo em flange de perfil C e o ponto de cálculo de tensão normal de flexo-torção no mesmo flange.
- E - Módulo de Elasticidade
- e - Excentricidade de carga aplicada em relação ao centro de torção C.
- F - Força aplicada
- f - Frequência de vibração de viga no estudo das vibrações flexo-torcionais, a partir do acoplamento das vibrações flexionais e torcionais.
- f_i - Força de inércia por unidade de comprimento de uma barra
- G - Módulo de Elasticidade em Cisalhamento
- g - Aceleração da gravidade
- h - Altura de alma de perfil C de paredes delgadas
- I - Momento de Inércia de perfil no estudo das vibrações flexo-torcionais, a partir do acoplamento das vibrações flexionais e torcionais.

- I_1, I_2, I_3 - Momento de Inércia de perfil em relação aos eixos locais 1, 2 e 3
- I_t - Momento de Inércia à torção (Saint-Venant)
- I_y - Momento de Inércia em relação ao eixo principal y
- I_y^*, I^* - Momento de Inércia para a Analogia Flexão-Retorção
- I_w - Momento de Inércia Sectorial
- I_z - Momento de Inércia em relação ao eixo principal z
- J - Momento de Inércia à torção de Saint-Venant, utilizado pelo programa em elementos finitos.
- J_d - Momento de Inércia à torção de Saint-Venant, segundo a abordagem geral de Vlasov.
- J_x - Momento de Inércia em relação ao eixo principal x, segundo a abordagem geral de Vlasov.
- J_y - Momento de Inércia em relação ao eixo principal y, segundo a abordagem geral de Vlasov.
- J_w - Momento de Inércia Sectorial, segundo a abordagem geral de Vlasov.
- k - Rigidez, Rigidez Generalizada
- k - Constante Elástica de mola
- L, l - Comprimento de viga

- m - Massa de viga
- m - Massa concentrada aplicada nos nós de modelo híbrido
- m - Momento Torçor por unidade de comprimento devido aos esforços externos atuantes em perfil aberto de paredes delgadas.
- m_1 - Solução particular da equação diferencial do Bimomento
- m_i - Elemento de massa da seção transversal de viga de paredes delgadas, utilizado no estudo das vibrações flexionais e torcionais.
- $m_A(z)$ - Momento Torçor externo devido às cargas transversais q_x e q_y em relação ao centro de torção, segundo a abordagem geral de Vlasov.
- M - Momento Fletor em viga
- M_{tt} - Momento Torçor total aplicado em perfil aberto de paredes delgadas
- M_x - Momento Torçor
- M_2 - Momento Fletor em relação ao eixo local 2
- M_3 - Momento Fletor em relação ao eixo local 3
- M_{ft} - Componente do momento torçor associado à flexo-torção
- M_0 - Momento Fletor atuante em flanges de perfil de paredes delgadas, decorrente de flexões diferenciais

- M_{tu} - Componente do momento torçor associado à torção uniforme
- $M_{sw}(s)$ - Momento Estático Sectorial ao longo do contorno s da seção transversal do perfil aberto de paredes delgadas
- M_y - Momento Fletor atuante segundo o eixo y
- M_z - Momento Fletor atuante segundo o eixo z
- N - Esforço Normal
- O - Origem para medição de áreas varridas
- P - Pólo arbitrário para medição de área sectorial
- p - Força axial distribuída em seção transversal de perfil aberto de paredes delgadas
- p - Frequência Angular ($p=2.\pi.f$) no estudo das vibrações flexo-torcionais, a partir do acoplamento das vibrações flexionais e torcionais
- p_z - $p_z = p_z(z,s)$ Projeção da força externa de superfície no eixo z , segundo a abordagem geral de Vlasov
- $q_x(z)$ - Magnitude das cargas externas que agem na direção x , segundo a abordagem geral de Vlasov
- $q_y(z)$ - Magnitude das cargas externas que agem na direção y , segundo a abordagem geral de Vlasov
- q - Carga contínua em viga

- Q_z - Força cortante na direção z
- Q - Força cortante
- r - Comprimento da perpendicular traçada de polo arbitrário à linha tangente ao contorno do perfil em ponto A
- r^2 - Parâmetro auxiliar = $\frac{J_x}{A} + \frac{J_y}{A} + a_x^2 + a_y^2$
- r_i - Distância à Linha Neutra de elemento de massa da seção transversal de viga de paredes delgadas, utilizado no estudo das vibrações flexo-torcionais a partir do acoplamento das vibrações flexionais e torcionais
- s - Contorno da seção transversal de perfil aberto de paredes delgadas
- s - Arco em perfil aberto de paredes delgadas
- t - Espessura
- t - Tempo
- t_1 - Espessura do flange de perfil C
- u - Deslocamentos Axiais, segundo o eixo x
- V_p - Deslocamento do ponto P, segundo o eixo y transversal
- $w(s)$ - Área sectorial principal, função que caracteriza o empenamento ao longo do contorno do perfil

- w_i - Área sectorial principal em ponto da seção onde atua carga axial P_i
- w_{si} - Área sectorial principal em ponto i do contorno s de um perfil de paredes delgadas
- w'_o - Área sectorial em relação à polo e origem arbitrários
- x - Coordenada de um ponto em relação à linha neutra na abordagem geral de Vlasov
- x - Eixo axial de viga no estudo das vibrações flexo-torcionais a partir do acoplamento das vibrações flexionais e torcionais
- x_i - Arco descrito por elemento de massa da seção transversal de viga de parede delgadas, utilizado no estudo das vibrações flexo-torcionais a partir do acoplamento das vibrações flexionais e torcionais
- X e X_1 - Valores assumidos para os coeficientes, nas soluções dos modos naturais de vibração por acoplamento de vibrações flexionais e torcionais
- y - Coordenada de um ponto em relação à linha neutra
- y_c - Coordenada do centro de torção em relação ao polo P_1
- y_p - Coordenada do ponto P da seção transversal em relação aos eixos (y, z) com origem no centro de torção
- z - Eixo axial de viga, no estudo de vibrações em vigas de paredes delgadas, segundo abordagem geral de Vlasov

- z - Deslocamento no eixo z no estudo de vibrações flexo-torcionais, a partir do acoplamento das vibrações flexionais e torcionais
- z - Coordenada de um ponto em relação à Linha Neutra
- z_p - Coordenada do ponto P da seção transversal em relação aos eixos (y, z) com origem no centro de torção
- z_c - Coordenada do centro de torção em relação ao polo P'
- α - Constante da equação diferencial do Bimomento
- α - Ângulo Central
- α_x - Distância do Centro de Torção à alma do perfil C , ou distância do ponto de empenamento nulo em flange de perfil C à alma do perfil
- δ - Espessura da parede da viga, na abordagem geral de Vlasov
- Δ_p - Deslocamento do ponto P segundo o eixo z
- ν - Coeficiente de Poisson
- ε - Deformação
- σ_{ft} - Tensão normal longitudinal de flexo-torção
- σ_o - Tensões normais atuantes nas flanges de perfil I de paredes delgadas, de correntes das flexões diferenciais

- σ_x - Tensão normal atuante em ponto da seção transversal da viga
- τ_{θ_i} - Tensão de cisalhamento devido à flexo-torção em ponto i do contorno da seção transversal de perfil aberto de paredes delgadas
- θ - Ângulo de Torção
- $\theta' = \frac{d\theta}{dx}$ - Taxa de variação do ângulo de torção ou ângulo de torção unitário
- ρ - Densidade de massa do material
- γ - Peso específico
- $\chi_n(z)$ - Função na variável z para introduzir separação de variáveis no Método de Poisson, segundo abordagem geral de Vlasov
- $\varphi_n(z)$ - Função na variável z para introduzir separação de variáveis no Método de Poisson, segundo abordagem geral de Vlasov
- $\phi_n(z)$ - Função na variável z para introduzir separação de variáveis no Método de Poisson, segundo abordagem geral de Vlasov
- $\chi_n(z)$ - Função na variável z para introduzir separação de variáveis no Método de Poisson, segundo abordagem geral de Vlasov
- ω_n - Frequência angular de vibração na abordagem geral de Vlasov

- ω_{nx} - Frequência angular de vibração na abordagem geral de Vlasov (transversal flexional)
- ω_{ny} - Frequência angular de vibração na abordagem geral de Vlasov (transversal flexional)
- ω_{nw} - Frequência angular de vibração na abordagem geral de Vlasov (torcional)
- ζ - Deslocamentos axiais segundo o eixo z, na abordagem geral de Vlasov
- ξ - Deslocamento segundo o eixo transversal x, na abordagem geral de Vlasov
- η - Deslocamento segundo o eixo transversal y, na abordagem geral de Vlasov

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

1.1 - ASPECTOS GERAIS

O fenômeno de flexo-torção, associado por exemplo à torção restringida de perfis abertos de paredes delgadas, é muitas vezes desconsiderado pelos analistas estruturais, pois as hipóteses da Resistência dos Materiais Elementar não permitem detectá-lo. Em diversas aplicações práticas, onde tais perfis são utilizados (estruturas reticuladas de chassis automotivos, vagões ferroviários, navios, aviões, etc.), a discretização da estrutura, por intermédio de um Modelo de Elementos Finitos de Vigas Convencionais, também apresenta sérias limitações, pois não é considerada em sua formulação a contribuição da componente de rigidez ao empenamento. A consequência prática disto, no caso geral de estruturas de paredes delgadas, é que tal incorreção pode resultar em tensões atuantes muito superiores àquelas previstas no projeto.

A solução desta questão, para o caso de comportamento estático por intermédio de um Modelo de Elementos Finitos com reduzido número de graus de liberdade, é considerada no Apêndice B, obtendo-se bons resultados a partir da instituição da Analogia Flexão-Retorção. Esta utiliza

um Modelo Híbrido formulado a partir de Elementos de Viga Convencionais, porém com propriedades adequadamente modificadas para incorporar os efeitos da torção (empenamento), conforme preconizado pela Teoria de Vlasov (3).

Também como decorrência desse enfoque, onde o modelo incorpora as características essenciais ao cálculo da torção, não é necessário o desenvolvimento de um "software" específico de elementos finitos. Os programas comerciais, com seus recursos usuais disponíveis, prestam-se perfeitamente à uma análise pelo Modelo Híbrido, tal como é apresentado em 3.4 e no Apêndice B.

As Figuras 1.1 e 1.2 representam o comportamento de um perfil aberto de paredes delgadas durante a torção - ele experimenta extensão longitudinal não uniforme em uma seção transversal - isto é, ele empena. Se o perfil estiver impedido de empenar livremente, como representa a Figura 1.3, o contorno da seção apresentará regiões tracionadas e regiões comprimidas, dando origem a tensões normais de tração e compressão.

A Figura 1.4 representa para um elemento de viga de uma estrutura, os componentes de tensão referente ao trabalho do elemento submetido à deformação axial uniforme, flexão no plano horizontal e flexão no plano vertical. Quando o perfil sofrer torção e for impedido de empenar livremente, a tensão normal será acrescida do componente de tensão σ_{ft} .

Como já foi observado anteriormente, a utilização de um modelo de cálculo inadequado não permitirá considerar os fenômenos representados nas Figuras 1.1 a 1.4.

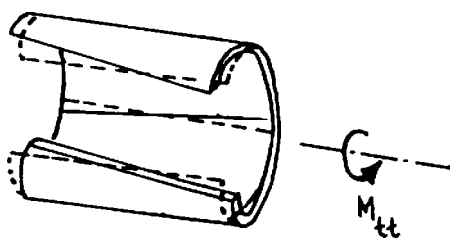


Figura 1.1 - Torção de um perfil aberto de paredes delgadas

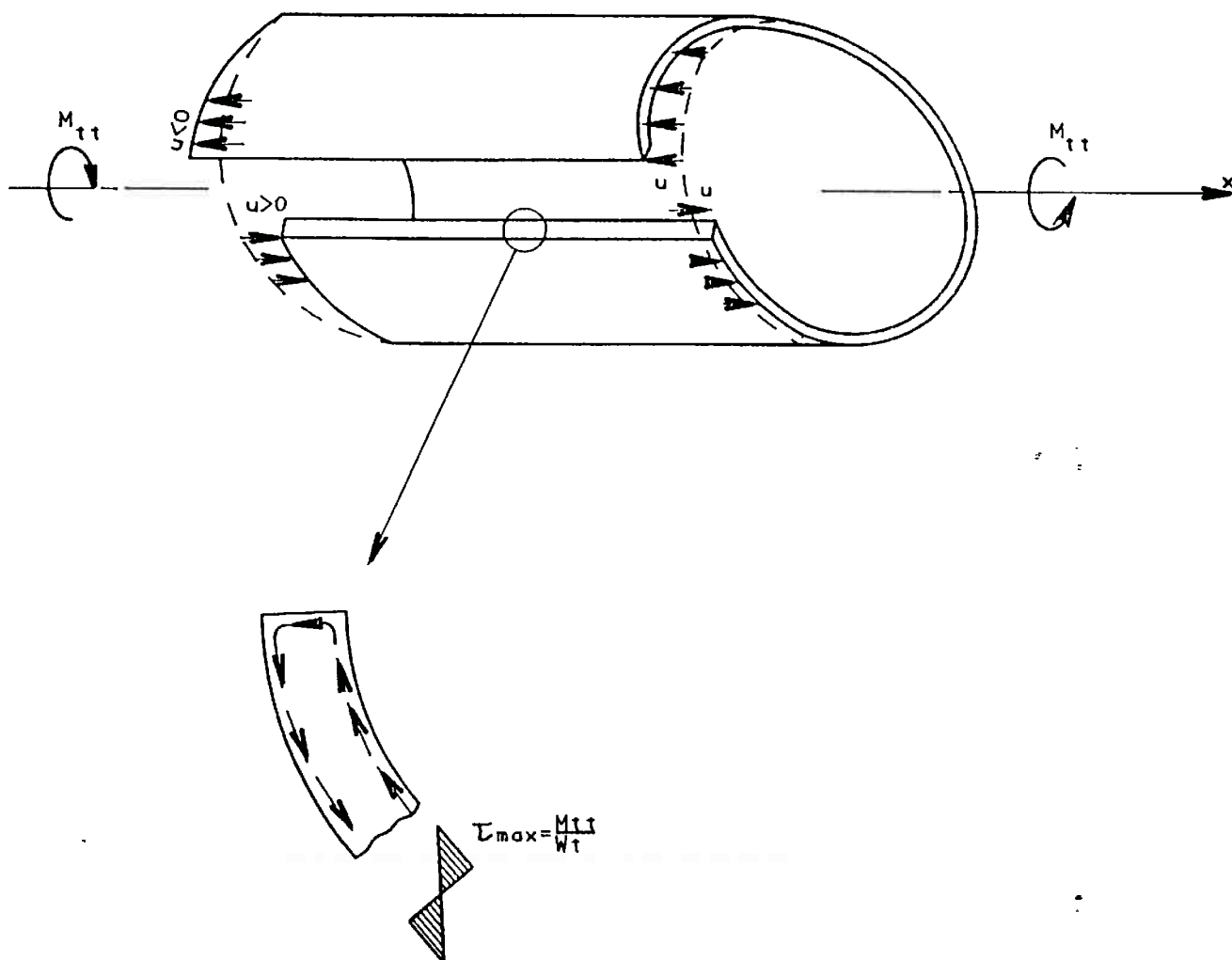


Figura 1.2 - Deslocamentos axiais u devidos ao fenômeno de empenamento

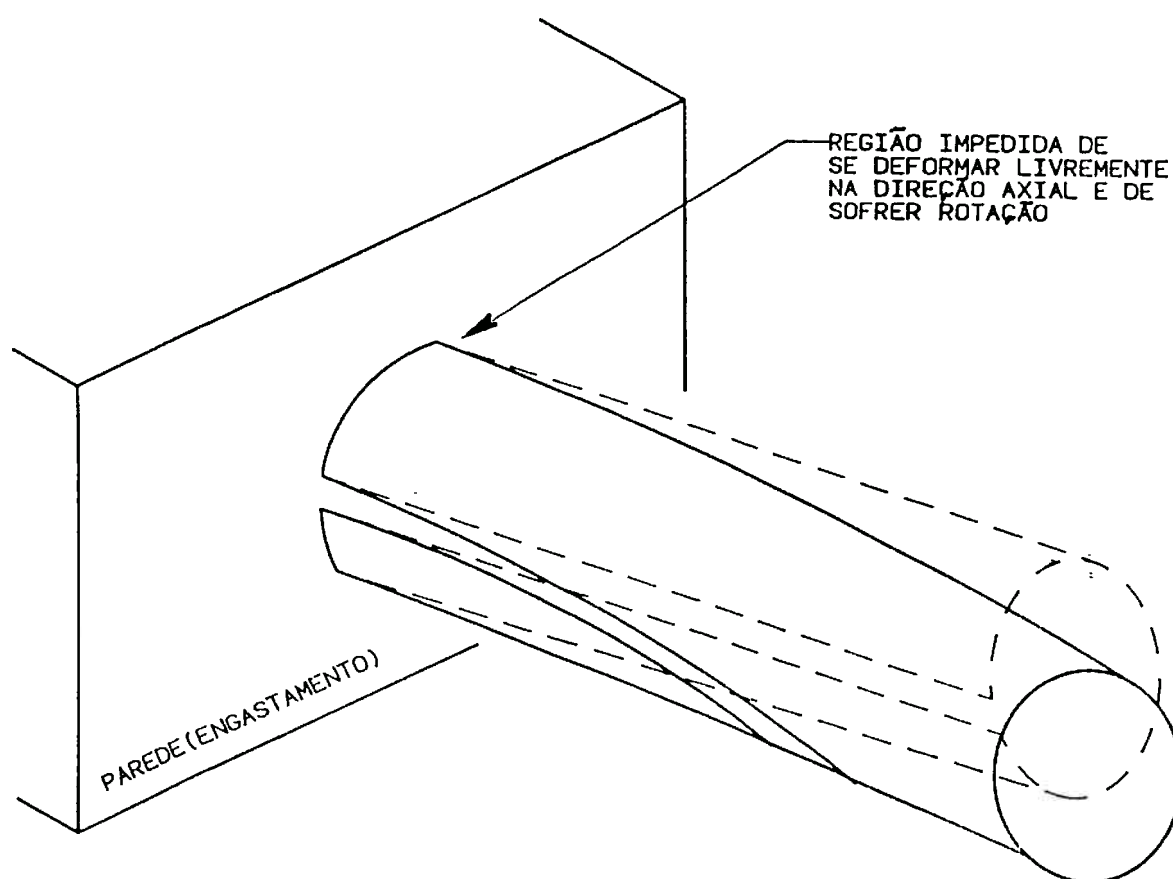


Figura 1.3 - Torção restringida de um perfil aberto de paredes delgadas

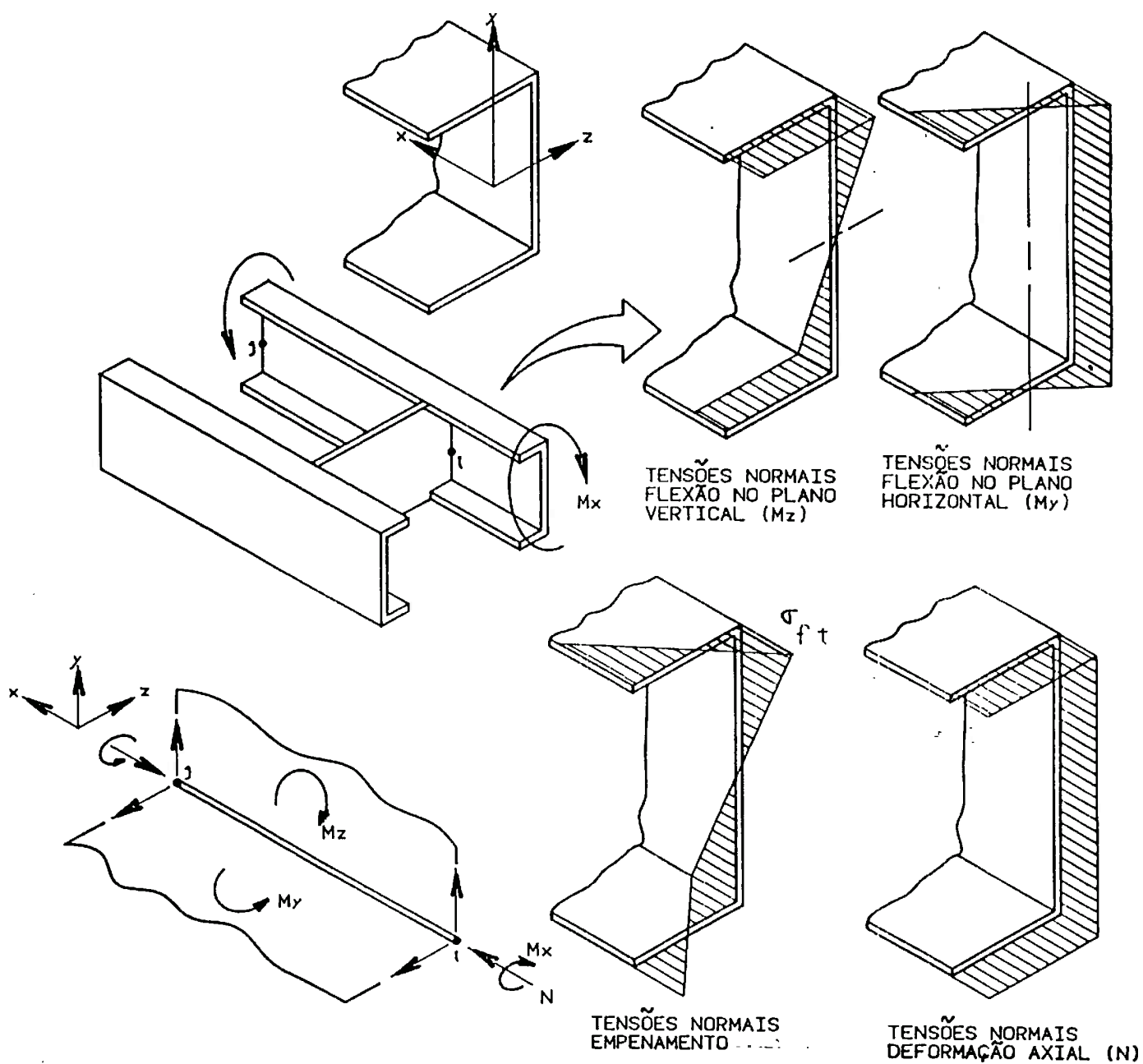


Figura 1.4 - Tensões normais em perfil aberto de paredes delgadas

A repercussão da utilização de um modelo inadequado não se limita apenas à análise estática: o cálculo de modos e frequências naturais, assim como as tensões com amplificação dinâmica são determinantes para avaliação da viga em fadiga. No caso específico de estruturas constituídas por perfis abertos de paredes delgadas, a instituição da Analogia Flexão-Retorção para a Análise Dinâmica apresenta relevância como decorrência dos seguintes fatos:

- i) Determinação dos Modos e Frequências Naturais de Vibração por intermédio de modelo com reduzido número de graus de liberdade, considerando não somente os modos globais de vibração (flexionais, torcionais, laterais), como também vibrações flexo-torcionais dos elementos da estrutura. Principalmente em fases preliminares de projeto, tal ferramental de cálculo é bastante útil para se estabelecer, de modo mais rápido a comparação entre diversas alternativas estruturais.
- ii) Determinação dos Modos e Frequências Naturais Torcionais Globais, considerando a rigidez ao empenamento. Dependendo das seções transversais dos perfis da estrutura e dos comprimentos desses elementos, a rigidez ao empenamento pode representar importante contribuição na

vibração torcional, tornando o modelo convencional de vigas inadequado, como será observado no desenvolvimento do presente trabalho.

iii) Determinação da Resposta Dinâmica. As tensões dinâmicas, decorrentes da flexo-torção, não podem ser calculadas por intermédio dos modelos convencionais de viga. A solução deste problema, por intermédio de um modelo constituído por elementos finitos de casca, torna a análise dinâmica bastante laboriosa como decorrência do grande número de graus de liberdade. Assim, a utilização do Modelo Híbrido, por sua maior simplicidade, ganha maior interesse.

As figuras seguintes ilustram casos de vibrações flexionais e flexo-torcionais de um perfil aberto de paredes delgadas computadas por modelos de elementos finitos de casca. São mostradas, também, as vibrações globais de uma estrutura constituída por alguns perfis abertos de paredes delgadas, nos modos globais flexionais e torcionais, bem como um modo flexo-torcional de uma viga da estrutura. Esses casos práticos de vibrações, tomando como paradigma os resultados dos modelos de casca, serão objeto de análise no presente trabalho, estabelecendo-se as bases do desenvolvimento do que chamamos de Modelo Híbrido.

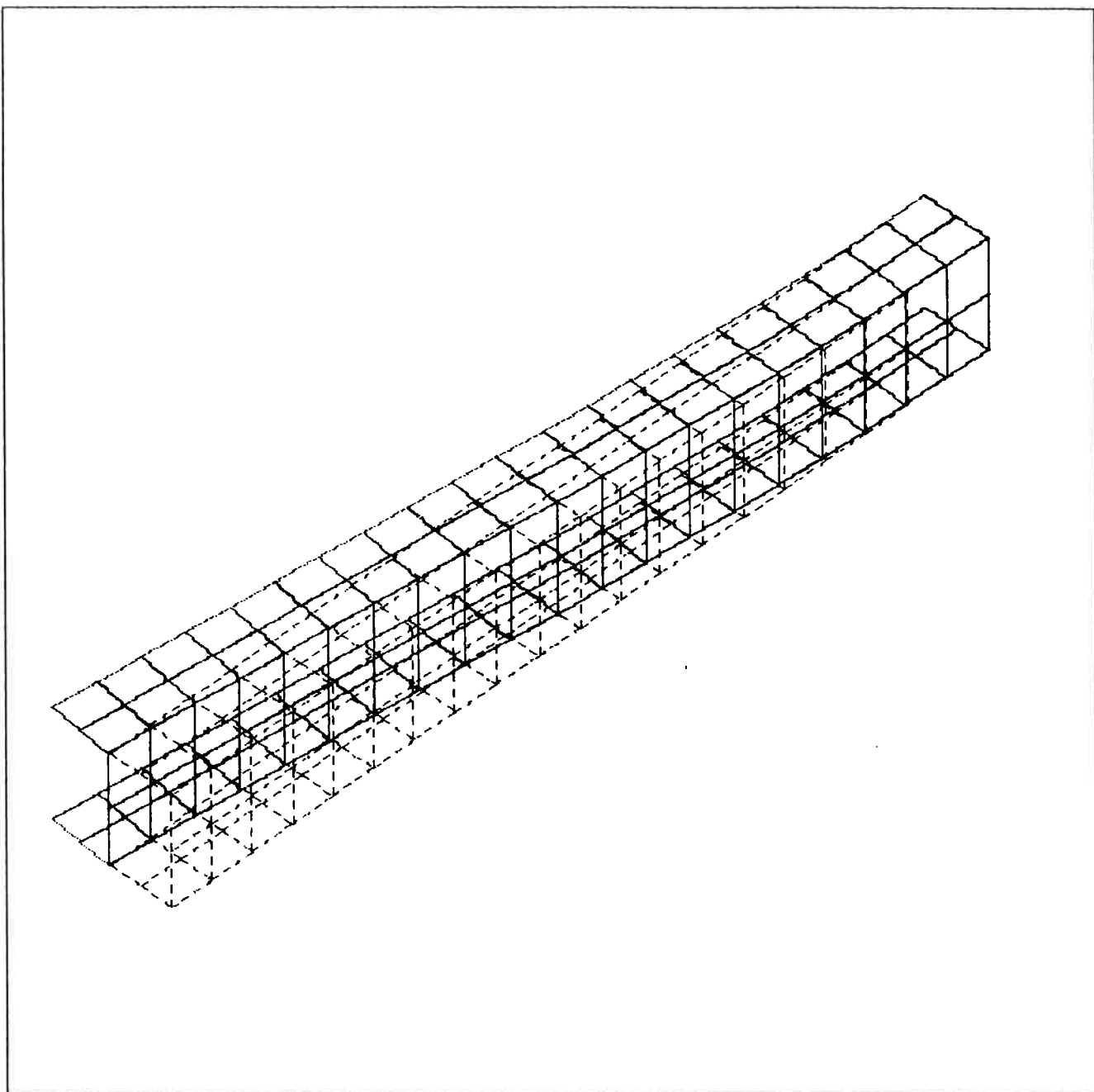


Figura 1.5 - Exemplo de vibrações flexionais em perfil aberto de paredes delgadas

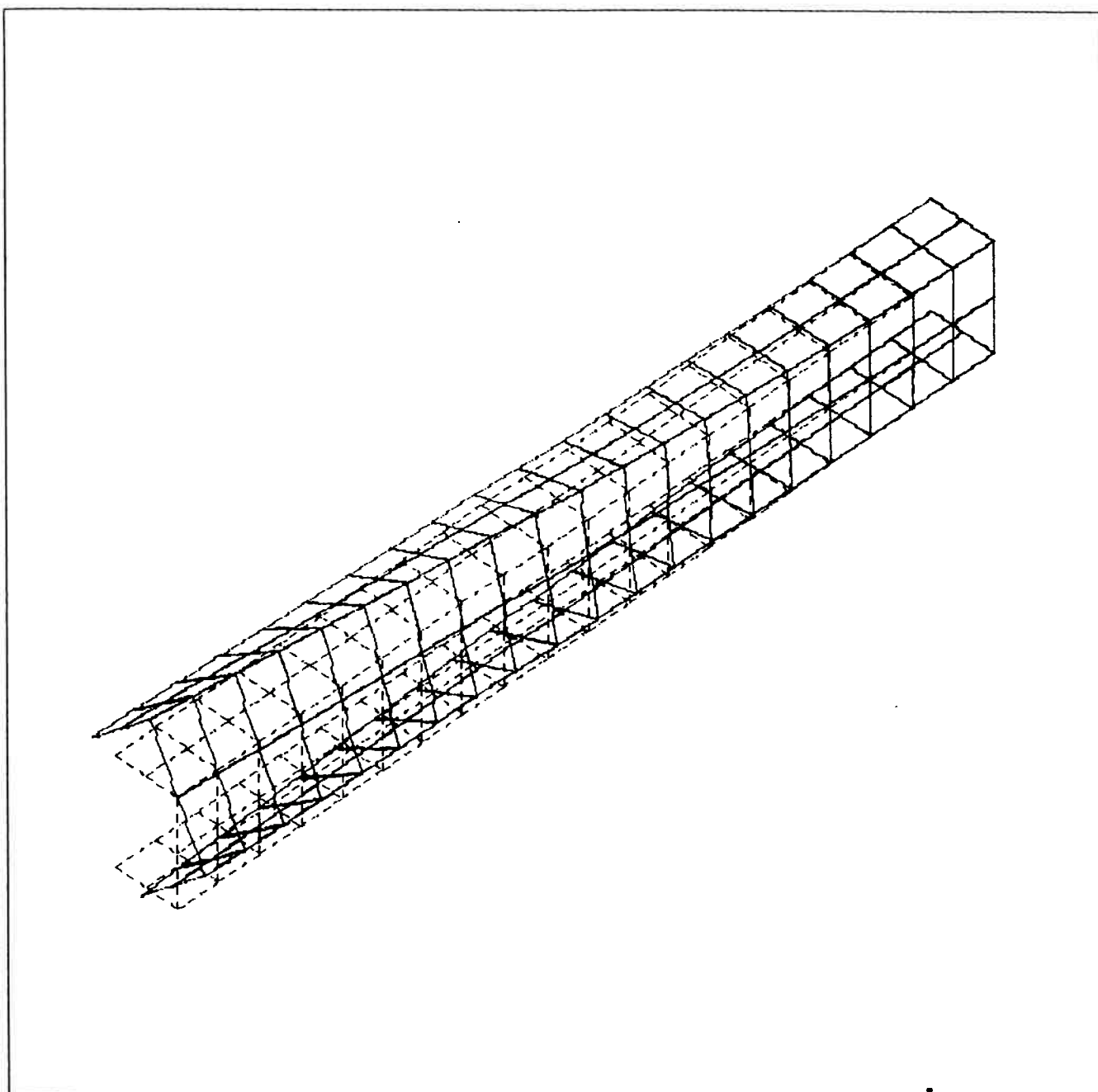


Figura 1.6 - Exemplo de vibrações flexo-torcionais em perfil aberto de paredes delgadas

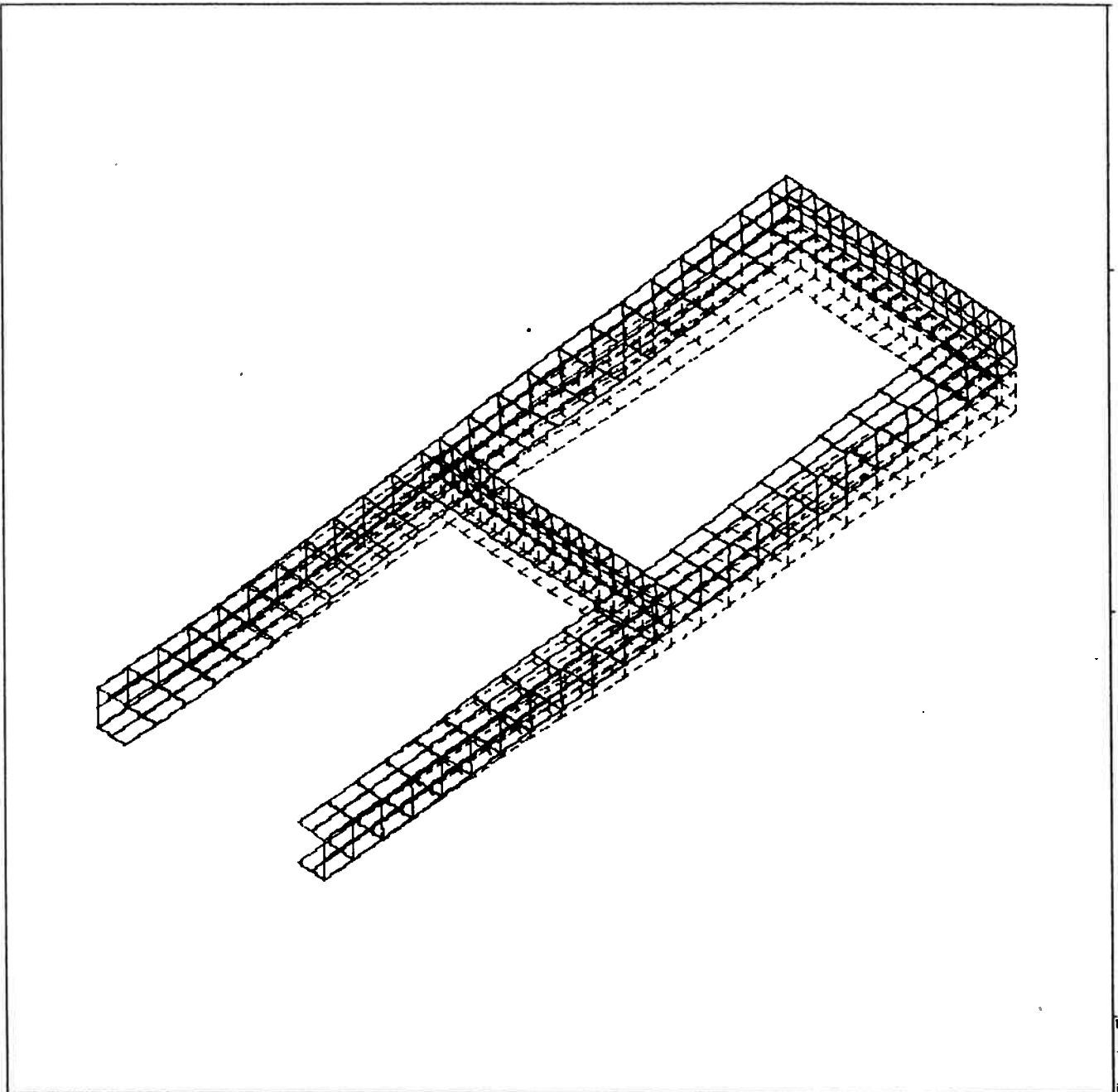


Figura 1.7 - Exemplo de vibração flexional vertical em estrutura "tipo chassi"

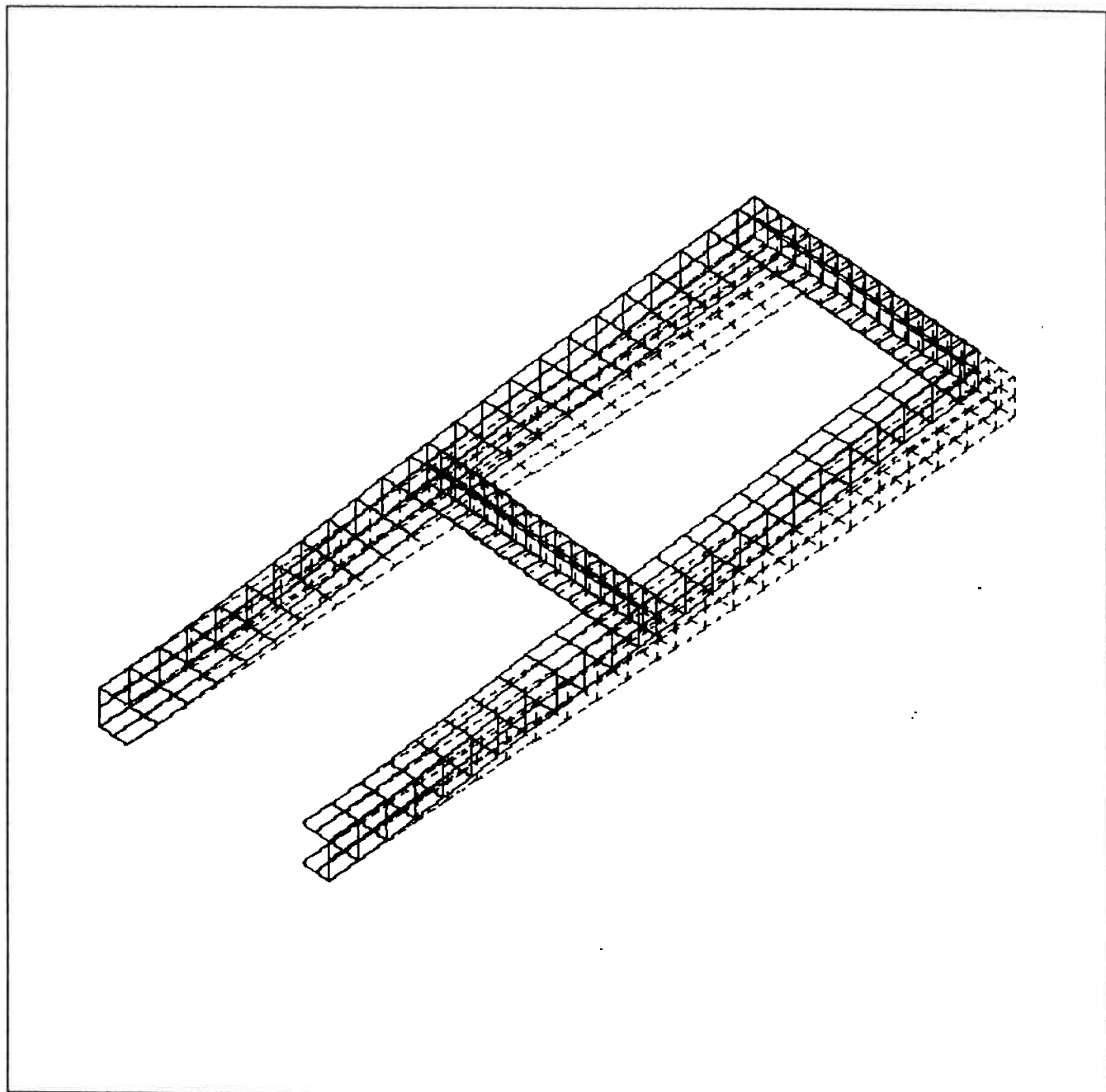


Figura 1.8- Exemplo de vibração flexional lateral em estrutura "tipo chassi"

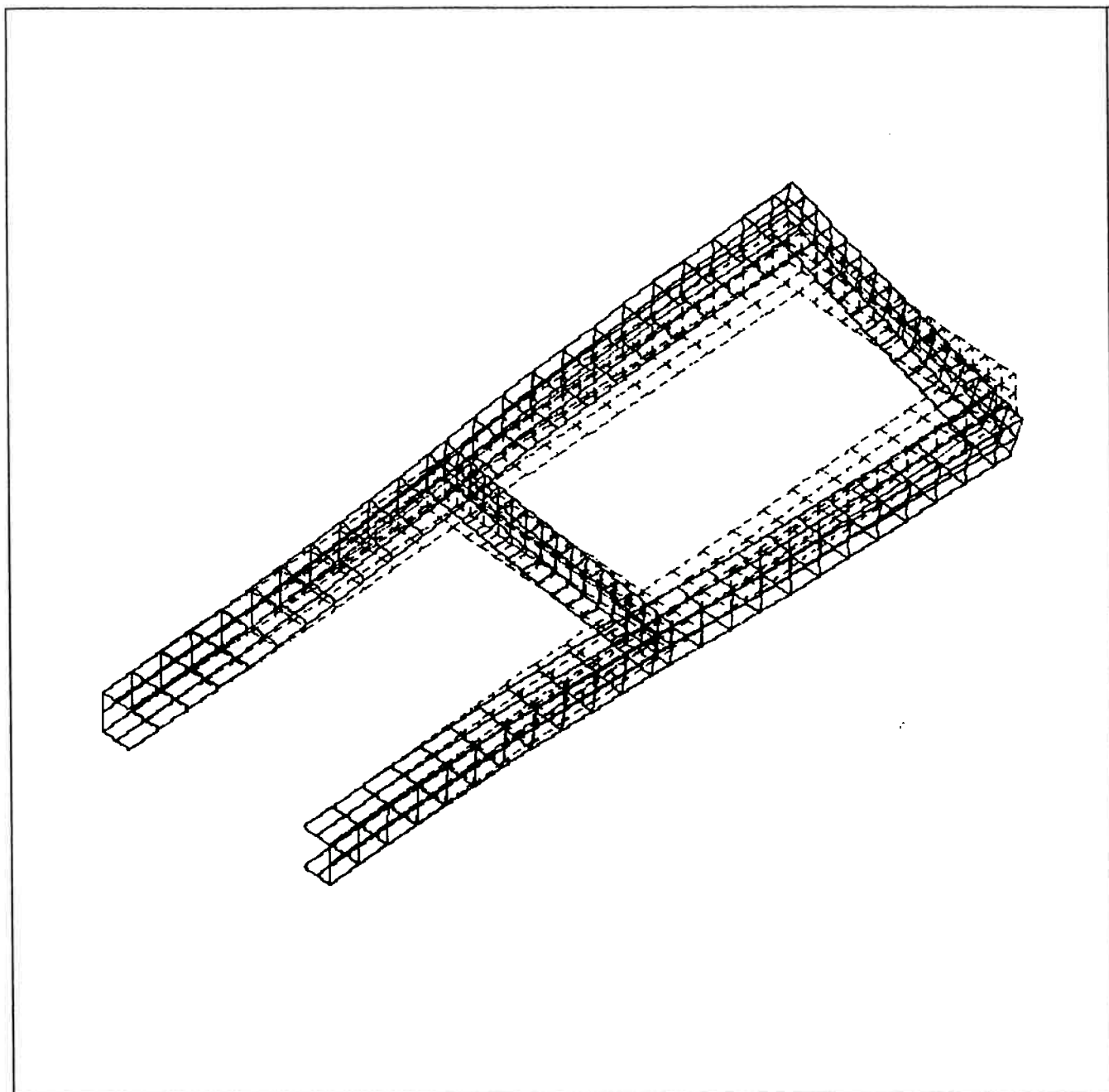


Figura 1.9- Exemplo de vibração torcional global em estrutura "tipo chassi"

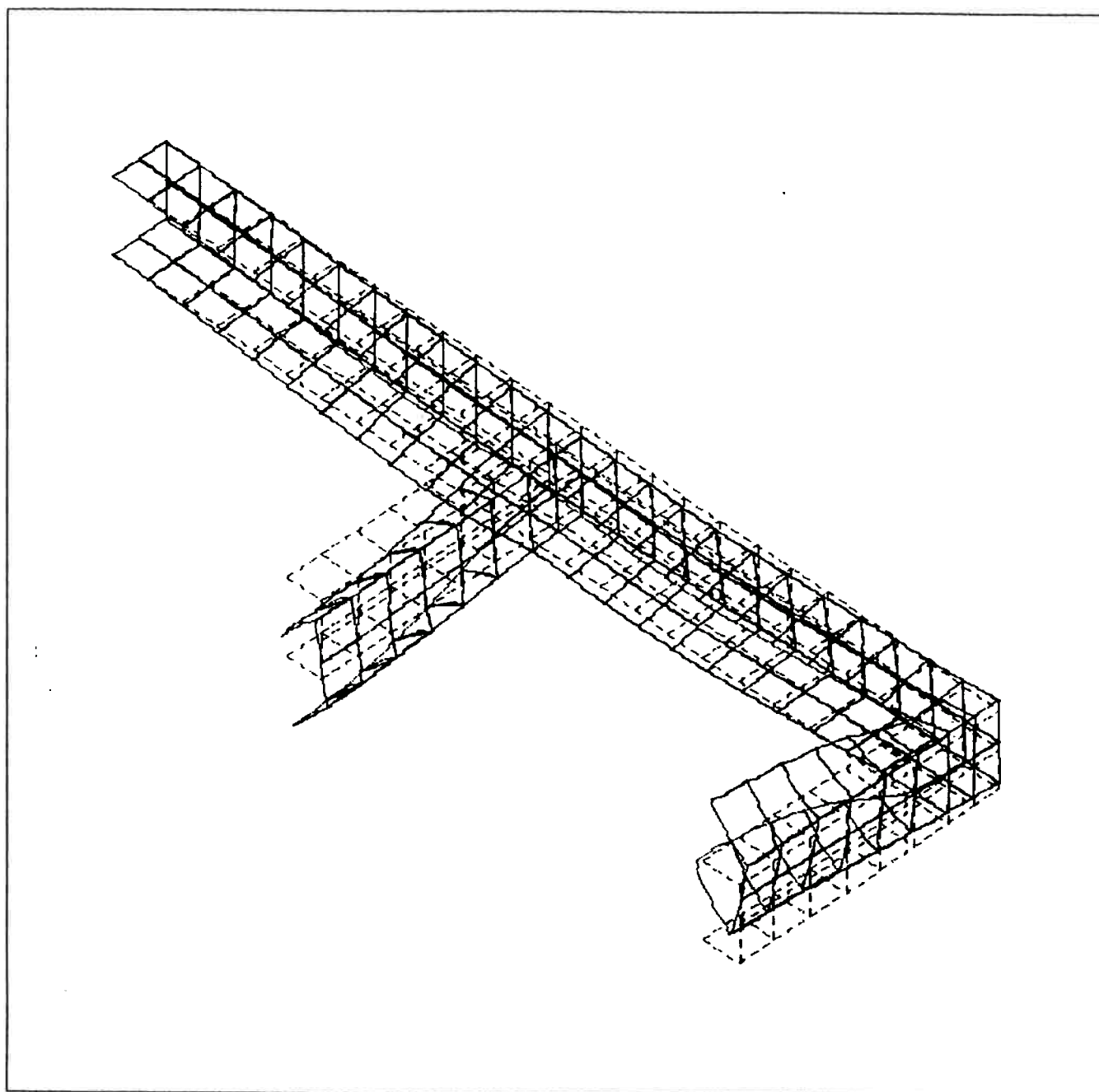


Figura 1.10 - Exemplo de vibração global acoplada a vibração flexo-torcional de perfil

1.2 - ESCOPO DO TRABALHO

O objetivo principal deste estudo é a aplicação de uma metodologia que permita a determinação dos Modos e Freqüências Naturais de vibração globais de uma estrutura constituída por perfis abertos de paredes delgadas. Adicionalmente, o modelo de cálculo proposto poderá ser utilizado para a determinação das tensões dinâmicas decorrentes da flexo-torção. Com esse propósito, considera-se um "modelo híbrido", com elementos finitos de viga, que incorpora as propriedades geométricas usualmente utilizadas na Resistência de Materiais Elementar e concomitantemente considera as propriedades geométricas associadas ao estudo do empenamento dos perfis abertos de paredes delgadas. Além da consideração da rigidez ao empenamento, o modelo proposto deverá considerar a discretização da massa da estrutura, de sorte a reproduzir o fenômeno de vibrações flexo-torcionais. Tal modelo para resolução do problema dinâmico, de concepção bem mais simples que um modelo constituído por elementos de casca, reduz acentuadamente o custo da solução, oferecendo alternativa interessante em termos de ferramenta auxiliar de análise.

Após a introdução feita neste capítulo, o Capítulo II trata analiticamente o problema das vibrações em perfis abertos de paredes delgadas, considerando a influência da Retorção ou Empenamento e, em

particular, a origem das vibrações flexo-torcionais. Inicialmente, tomados os aspectos físicos, são efetuadas considerações conceituais a respeito do problema de vibrações em estruturas e da necessidade da contabilização da rigidez ao empenamento no equacionamento do problema. Em seqüência, é revisada a Teoria Geral das Vibrações Flexionais e Torcionais proposta por Vlasov, de sorte a se identificar as condições necessárias para o surgimento das vibrações flexo-torcionais. Como abordagem alternativa, é apresentada também a solução desta questão a partir dos estudos independentes das vibrações flexionais e torcionais e a resolução do problema a partir do acoplamento das mesmas.

No Capítulo III é apresentada a Analogia Flexão-Retorção estendida a problemas estruturais dinâmicos com a adoção do "modelo híbrido", em elementos finitos de viga, para a resolução do problema das vibrações flexo-torcionais.

No Capítulo IV são efetuados Testes de Confiabilidade por comparações entre as soluções obtidas por modelos em elementos finitos de casca, modelos em elementos finitos de vigas convencionais e, finalmente, pelo Modelo Híbrido.

São efetuadas aplicações numéricas da metodologia desenvolvida, para o caso prático de estruturas "tipo chassi" de veículos. Comparando-se os resultados obtidos por intermédio do "modelo híbrido",

modelo em elementos finitos em que a estrutura é toda discretizada por elementos de casca, e modelo em elementos finitos de vigas convencionais, pode-se estabelecer os limites de aplicabilidade das modelagens.

No Capítulo V são apresentadas as conclusões deste estudo, bem como recomendações julgadas interessantes. Na Figura 1.11 apresenta-se, de forma esquemática, a seqüência das diversas etapas desenvolvidas neste trabalho.

Fazem parte ainda deste trabalho os seguintes Apêndices:

Apêndice A - Revisão da Teoria de Vlasov, para Perfis Abertos de Paredes Delgadas, analisando o fenômeno de "Flexo-Torção", por intermédio da equação da Torção Restringida. É abordado também o procedimento de cálculo de σ_{ft} , complementado pelo estudo da Equação do Bimomento de Flexo-Torção.

Apêndice B - Desenvolvimento Conceitual e Analítico da Analogia Flexão-Retorção, que permite a adoção de um "Modelo Híbrido" em elementos finitos de viga para a resolução do problema da Retorção, com Testes de Confiabilidade e aplicação a uma estrutura típica de chassi de veículo.

Apêndice C - Propriedades Sectoriais, que revisa as propriedades geométricas necessárias para aplicação da Teoria de Vlasov,

tais como: Área Sectorial, Momento Estático Sectorial, Momentos Lineares Sectoriais e Momento de Inércia Sectorial.

**Apêndice D - Consideração de Massas Concentradas no Modelo Híbrido /
Cálculo de Freqüências Naturais.**

Apêndice E - Dados do Modelo Híbrido para Estrutura Tipo Chassi.

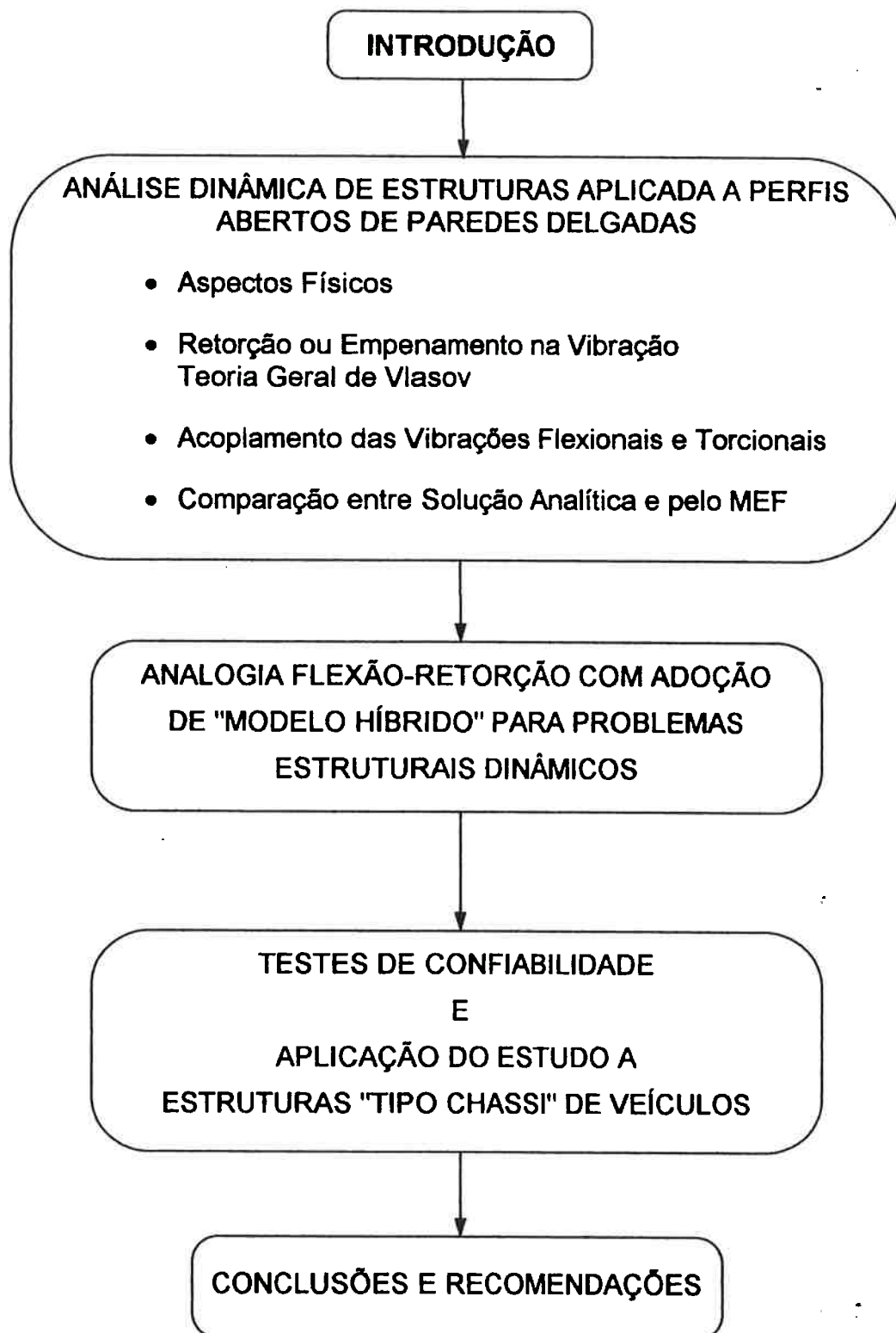


Figura 1.11- Representação Esquemática da Seqüência de Estudo

CAPÍTULO II

ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS APLICADA A VIGAS DE PAREDES DELGADAS

2.1 VISÃO GERAL DO PROBLEMA DINÂMICO E ASPECTOS FÍSICOS

A análise dos resultados, obtidos para modos e frequências naturais de vibração de uma determinada estrutura, deve ser pautada em um Critério de Ressonância, construído sobre o princípio de evitar-se a "coincidência" entre frequências naturais e frequências de excitação. Evidentemente, a verificação de tal coincidência fica atida ao modo pelo qual distribuem-se os valores de ambos os tipos de frequências. Assim, evitar a ocorrência de ressonância implica, do ponto de vista prático, em verificar o quão próximos estão os valores discretos das frequências naturais e de excitação.

Sob este ponto de vista, o projeto estrutural, em primeira instância, pode ter caráter de verificação preventiva, fazendo a estrutura trabalhar fora das condições de ressonância e, de forma mais geral, sem amplificação dinâmica.

Como se sabe, impor que nenhuma frequência natural coincida com nenhuma frequência de excitação, para o caso prático de um sistema contínuo com infinitas frequências naturais e excitação composta por vários harmônicos, é tarefa inexecutável. Resta ao analista estabelecer, como parte do Critério de Ressonância, condições para classificar as ressonâncias em potencialmente perigosas ou não.

Tanto do ponto de vista preventivo do Critério de Ressonância, quanto do ponto de vista do Cálculo da Resposta Dinâmica (por Superposição Modal), a determinação dos Modos e Frequências Naturais constitui-se em tarefa de vital importância no desenvolvimento do projeto.

No caso específico de estruturas constituídas por perfis abertos de paredes delgadas, o comportamento dinâmico pode ser afetado grandemente pela rigidez ao empenamento dos elementos da estrutura. Os modelos de análise formulados por intermédio de elementos de viga convencionais, e que são usualmente utilizados para solução do problema, não consideram a contribuição dessa parcela de rigidez, acarretando, em muitos casos, a avaliação das frequências naturais com desvios consideráveis em relação aos valores reais observados.

No desenvolvimento do presente trabalho, serão estabelecidas comparações entre diversos modelos de análise, utilizando o Método dos Elementos Finitos, como já mencionado no capítulo anterior. Antes, porém,

deve-se estabelecer a base conceitual para a formulação adequada desses modelos, como preconizado pela teoria das Vibrações Flexo-Torcionais em Perfis Abertos de Paredes Delgadas.

2.2 TEORIA DAS VIBRAÇÕES FLEXO-TORCIONAIS ABORDAGEM GERAL DE VLASOV

2.2.1. Equações Diferenciais das Vibrações Livres

O ponto de partida no tratamento das vibrações de vigas é o princípio d'Alembert, como considerado no caso mais geral do estudo de vibrações; o problema dinâmico é considerado como um problema estático com forças de inércia adicionadas às forças elásticas da viga.

O problema de equilíbrio de uma viga, na ausência de forças de cisalhamento externas ao longo das extremidades laterais, conduz-nos às seguintes equações diferenciais (3):

$$\left. \begin{aligned} EA\zeta'' + \int p_z \cdot ds &= 0 \\ EJ_y \xi^{IV} - \int \frac{\partial p_z}{\partial z} \cdot x \cdot ds - q_x &= 0 \\ EJ_x \eta^{IV} - \int \frac{\partial p_z}{\partial z} \cdot y \cdot ds - q_y &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Válidas Hipóteses} \\ \text{de} \\ \text{Bernoulli-Navier [3]} \end{array} \quad (2.1)$$

$$EJ_w \theta^{IV} - G \cdot J_d \theta'' - \int \frac{\partial p_z}{\partial z} \cdot w \cdot ds - m_a = 0 \quad \begin{array}{l} \text{Não obedecem Leis das} \\ \text{Seções Planas} \end{array} \quad (2.2)$$

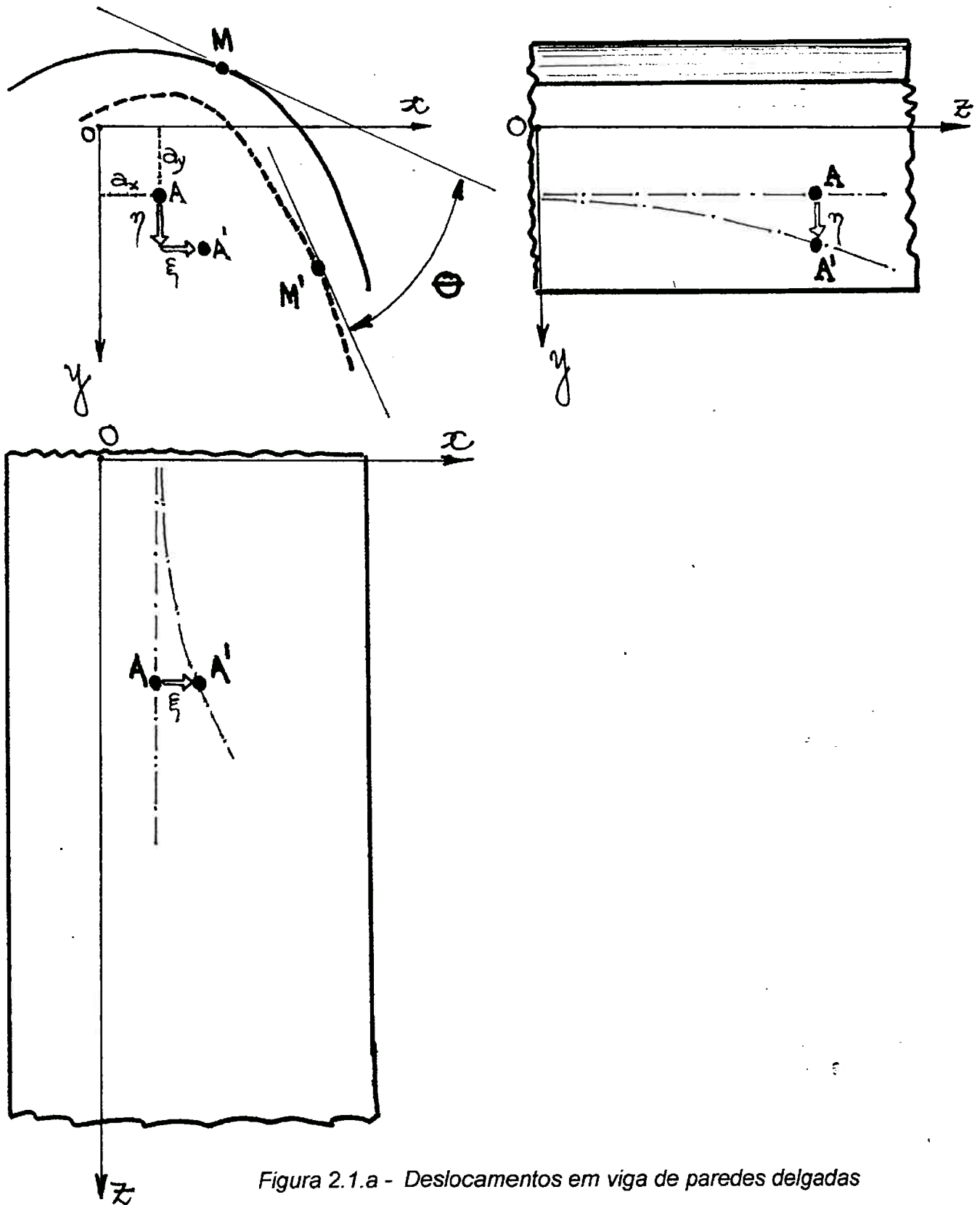


Figura 2.1.a - Deslocamentos em viga de paredes delgadas

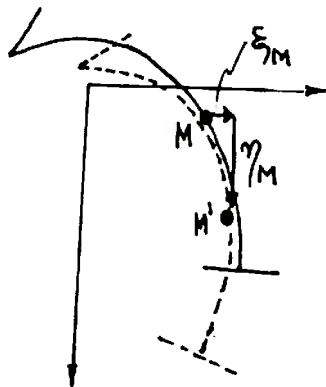
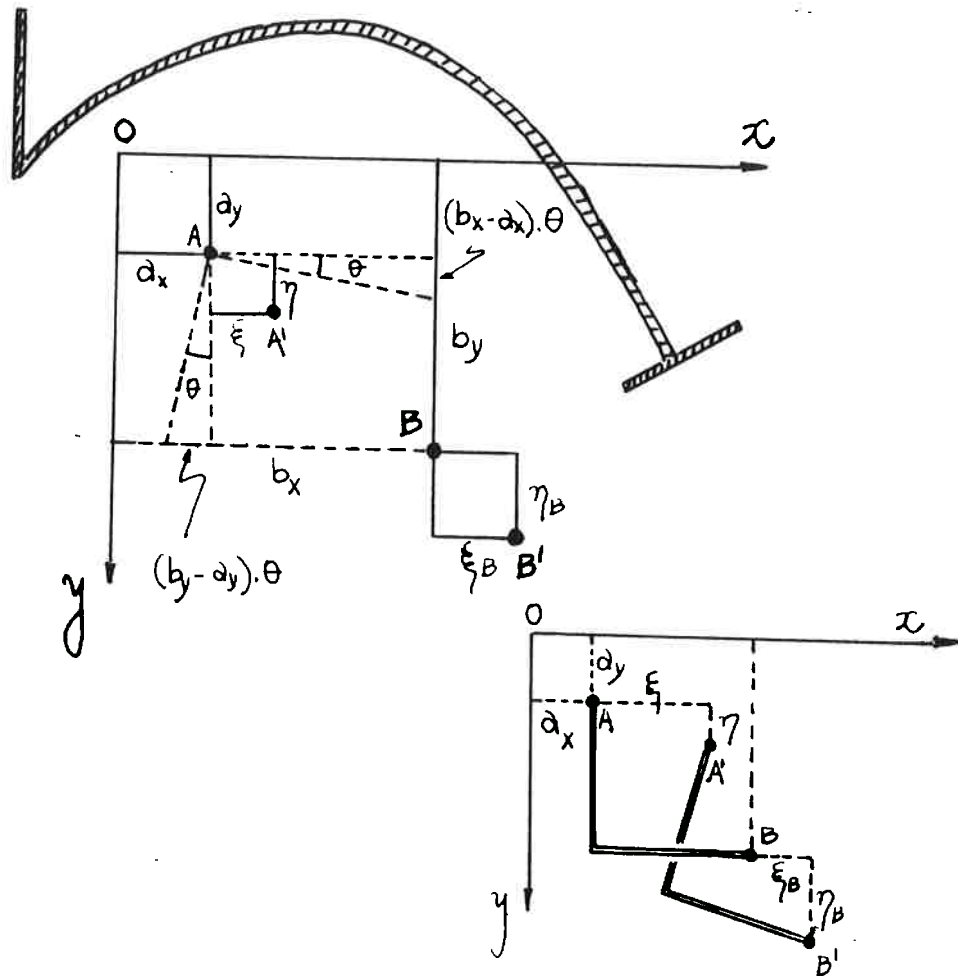


Figura 2.1.b - Deslocamentos em viga de paredes delgadas

onde:

$p_z = p_z(z,s)$ é a projeção da força externa de superfície no eixo z;

$q_x(z)$ e $q_y(z)$ são as magnitudes das cargas externas que agem nas direções x e y;

$m_A(z)$ é o momento torçor externo devido as cargas transversais q_x e q_y , em relação ao Centro de Torção.

Considerando o problema de vibração de uma viga, devemos tomar os deslocamentos ζ, ξ, η, θ como função de duas variáveis: a abscissa z e o tempo t.

Deve-se determinar as forças de inércia por unidade de área da superfície média da viga. Durante a vibração da viga, um ponto M da superfície média estará em movimento; o deslocamento deste ponto é um vetor e depende da posição do ponto na superfície (coordenadas z, s) e do tempo t. Os componentes deste vetor nos eixos x, y, z são:

$$\begin{aligned}\xi_M &= \xi - (y - a_y) \cdot \theta \\ \eta_M &= \eta - (x - a_x) \cdot \theta \\ \zeta_M &= \zeta - \xi' \cdot x - \eta' \cdot y - \theta' \cdot w\end{aligned}\tag{2.3}$$

onde ζ , ξ , η e θ são funções de duas variáveis z e t .

Conhecendo os componentes do deslocamento total de um ponto arbitrário, pode-se determinar a partir desses componentes, as forças de inércia por unidade de área da superfície média.

Para se obter tais forças, é necessário multiplicar a massa do paralelepípedo de base $dz.ds = 1$ e altura igual a espessura da parede da viga δ , pela aceleração na direção correspondente. Assim:

$$\begin{aligned} p_x &= -\frac{\gamma \cdot \delta}{g} \cdot \frac{\partial^2 \xi_M}{\partial t^2} \\ p_y &= -\frac{\gamma \cdot \delta}{g} \cdot \frac{\partial^2 \eta_M}{\partial t^2} \\ p_z &= -\frac{\gamma \cdot \delta}{g} \cdot \frac{\partial^2 \zeta_M}{\partial t^2} \end{aligned} \tag{2.4}$$

onde γ é o peso específico do material da viga, $\delta = \delta(s)$ é a espessura da parede da viga e g é a aceleração da gravidade.

As expressões de ξ_m , η_m , ζ_m podem ser introduzidas nas expressões de p_x , p_y e p_z .

Com essas expressões substituídas nas equações (2.1) e (2.2) pode-se determinar q_x , q_y e m_a , juntamente com aplicação das propriedades de ortogonalidade às funções 1 , $x(s)$, $y(s)$ e $w(s)$. O

desenvolvimento dessas expressões permite obter o conjunto de equações diferenciais dado a seguir:

$$\begin{aligned}
 EA \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} - \frac{\gamma}{g} \cdot A \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= 0 \\
 EJ_y \cdot \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4} - \frac{\gamma}{g} \cdot J_y \cdot \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\gamma \cdot A}{g} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{a_y \gamma \cdot A}{g} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} &= 0 \\
 EJ_x \cdot \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} - \frac{\gamma}{g} \cdot J_x \cdot \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\gamma \cdot A}{g} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{a_x \gamma \cdot A}{g} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} &= 0 \\
 \frac{a_y \gamma A}{g} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{a_x \gamma A}{g} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + EJ_w \cdot \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^4} - G \cdot J_d \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \\
 - \frac{\gamma J_w}{g} \cdot \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{r^2 \cdot \gamma \cdot A}{g} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} &= 0
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

As equações anteriores referem-se às vibrações livres de um perfil aberto de paredes delgadas com contorno transversal rígido e seção arbitrária. A primeira equação determina, independentemente das outras três, e aplicada às condições iniciais e de contorno, as vibrações longitudinais da viga. As restantes três equações constituem, no caso geral, um sistema simétrico que, juntamente com as condições iniciais e de contorno, determinam as vibrações transversais flexo-torcionais da viga. No caso particular quando $a_x = a_y = 0$, isto é, quando o centro de torção coincide com o centróide da seção (por exemplo, quando a seção tem dois

eixos de simetria), o sistema de equações simultâneas é resolvido pelas equações diferenciais independentes seguintes:

$$\begin{aligned}
 EA \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} - \frac{\gamma \cdot A}{g} \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= 0 \\
 EJ_y \cdot \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4} - \frac{\gamma \cdot J_y}{g} \cdot \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\gamma \cdot A}{g} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= 0 \\
 EJ_x \cdot \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} - \frac{\gamma \cdot J_x}{g} \cdot \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\gamma \cdot A}{g} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= 0 \\
 EJ_w \cdot \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^4} - G \cdot J_d \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \frac{\gamma J_w}{g} \cdot \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{r^2 \cdot \gamma \cdot A}{g} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

A primeira equação, à semelhança do caso geral, refere-se às vibrações longitudinais da viga. A segunda e terceira equações referem-se às vibrações transversais de flexão pura da viga nos planos principais. Essas equações diferem, das equações abordadas usualmente nos estudos convencionais de dinâmica estrutural, no fato em que os termos intermediários representam os componentes das cargas transversais de inércia, devido à rotação da seção transversal em torno dos eixos centrais principais. A última equação refere-se a Rotação da Viga em torno de um Eixo Longitudinal que passa pelo Centro de Torção (e neste caso particular, pelo centróide).

Das equações anteriores, podemos concluir que Vibrações Transversais de Flexão Pura (sem torção) são possíveis somente quando o centro de torção coincide com o centróide da seção. Em geral, as vibrações de vigas de paredes delgadas serão flexo-torcionais, fato determinado pelo conjunto de três equações diferenciais do caso geral, juntamente com as condições iniciais.

2.2.2. Integração das Equações Diferenciais de Vibrações para Vigas

As equações gerais consideradas anteriormente são lineares e homogêneas, com coeficientes constantes que dependem das características físicas e geométricas da viga. Além das derivadas das funções ζ , ξ , η e θ em relação a z , essas equações também contêm segundas derivadas em relação ao tempo, o que implica em vibrações de natureza harmônica. Pode-se utilizar o Método de Poisson de separação de variáveis para a busca da solução. Assim:

$$\begin{aligned}
\zeta(z, t) &= \sum_{n=1,2,3,\dots} \chi_n(z) \cdot \text{sen } \varpi_n \cdot t \\
\xi(z, t) &= \sum_{n=1,2,3,\dots} \varphi_n(z) \cdot \text{sen } \varpi_n \cdot t \\
\eta(z, t) &= \sum_{n=1,2,3,\dots} \phi_n(z) \cdot \text{sen } \varpi_n \cdot t \\
\theta(z, t) &= \sum_{n=1,2,3,\dots} \chi_n(z) \cdot \text{sen } \varpi_n \cdot t
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Substituindo-se essas expressões anteriores nas equações diferenciais gerais, pode-se obter o conjunto de equações diferenciais ordinárias e homogêneas seguintes:

$$\begin{aligned}
EA\chi_n'' + \frac{\gamma \cdot A}{g} \cdot \varpi_n^2 \cdot \chi_n &= 0 \\
EJ_y \cdot \varphi_n^{IV} + \frac{\gamma \cdot J_y}{g} \varpi_n^2 \cdot \varphi_n'' - \frac{\gamma \cdot A}{g} \cdot \varpi_n^2 \cdot \varphi_n - \frac{a_y \cdot \gamma \cdot A}{g} \cdot \varpi_n^2 \cdot \chi_n &= 0 \\
EJ_x \cdot \phi_n^{IV} + \frac{\gamma \cdot J_x}{g} \varpi_n^2 \cdot \phi_n'' - \frac{\gamma \cdot A}{g} \cdot \varpi_n^2 \cdot \phi_n + \frac{a_x \cdot \gamma \cdot A}{g} \cdot \varpi_n^2 \cdot \chi_n &= 0 \\
\frac{a_x \gamma A}{g} \cdot \varpi_n^2 \cdot \phi_n - \frac{a_y \gamma A}{g} \cdot \varpi_n^2 \cdot \varphi_n + EJ_w \cdot \chi_n^{IV} - \\
\left(G \cdot J_d - \frac{\gamma J_w}{g} \cdot \varpi_n^2 \right) \chi_n'' + \frac{r^2 \cdot \gamma \cdot A}{g} \cdot \varpi_n^2 \cdot \chi_n &= 0
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Os coeficientes dessas equações formam uma matriz simétrica e dependem das características físicas e geométricas da viga e do quadrado da frequência de vibração ω_n . A forma simétrica do conjunto anterior, e das equações gerais, deve-se ao Teorema Recíproco de Betti, que se aplica a toda teoria linear da elasticidade dinâmica. As equações anteriores determinam os autovalores a partir das condições de contorno, e como essas equações tem estrutura simétrica, os autovalores serão reais.

Como exemplo de verificação, Vlasov considerou em (3) o problema de vibração em vigas onde as seções extremas são fixadas em relação aos deslocamentos ξ , η e θ , isto é, as seções extremas são impedidas de se deslocarem segundo os eixos x e y , e também girarem, podendo porém os seus pontos se deslocarem em relação ao eixo z . Essas condições de contorno correspondem a uma viga ou uma casca longa apoiada em diafragmas nas seções extremas, as quais são rígidas em seu plano e flexíveis em relação aos deslocamentos perpendiculares aos planos dos diafragmas. Adotando a origem do sistema de coordenadas em uma extremidade da viga, e sendo L o seu vão (distância entre diafragmas), pode-se escrever as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned}
 z = 0 &\rightarrow \xi = \eta = \theta = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0 \\
 z = L &\rightarrow \xi = \eta = \theta = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0
 \end{aligned}
 \tag{2.9}$$

O desaparecimento das segundas derivadas dos deslocamentos ξ , η e θ decorre da inexistência de tensões normais nas extremidades da viga.

Os valores de contorno das funções φ_n , ϕ_n e χ_n são:

$$\begin{aligned}
 z = 0 &\rightarrow \varphi_n = \phi_n = \chi_n = 0 \quad ; \quad \varphi_n'' = \phi_n'' = \chi_n'' = 0 \\
 z = L &\rightarrow \varphi_n = \phi_n = \chi_n = 0 \quad ; \quad \varphi_n'' = \phi_n'' = \chi_n'' = 0
 \end{aligned}
 \tag{2.10}$$

Essas últimas condições referem-se às vibrações flexo-torcionais de uma viga com as condições de contorno citadas anteriormente.

Desde que o conjunto de equações diferenciais ordinárias contém as funções φ_n , ϕ_n e χ_n e suas derivadas de ordem par, e desde que os coeficientes dessas equações não dependem da variável de integração, as auto-funções para as vibrações flexo-torcionais devem ser:

$$\begin{aligned}
\varphi_n &= A_n \cdot \text{sen } \lambda_n \cdot z \\
\phi_n &= B_n \cdot \text{sen } \lambda_n \cdot z \\
\chi_n &= C_n \cdot \text{sen } \lambda_n \cdot z
\end{aligned}
\tag{2.11}$$

onde $\lambda_n = \frac{n \cdot \pi}{L}$, onde n é um número inteiro positivo, e A_n , B_n e

C_n são quantidades arbitrárias dependentes do índice do termo da expansão. Introduzindo essas últimas expressões nas equações diferenciais ordinárias já citadas, e cancelando o fator comum $\text{sen } \lambda_n \cdot z$ obter-se-á:

$$\begin{aligned}
&\left(EJ_y \cdot \lambda_n^4 - \frac{\gamma \cdot J_y}{g} \cdot \lambda_n^2 \cdot \varpi_n^2 - \frac{\gamma \cdot A}{g} \cdot \varpi_n^2 \right) \cdot A_n - \frac{a_y \cdot \gamma \cdot A}{g} \cdot \varpi_n^2 \cdot C_n = 0 \\
&\left(EJ_x \cdot \lambda_n^4 - \frac{\gamma \cdot J_x}{g} \cdot \lambda_n^2 \cdot \varpi_n^2 - \frac{\gamma \cdot A}{g} \cdot \varpi_n^2 \right) \cdot B_n - \frac{a_x \cdot \gamma \cdot A}{g} \cdot \varpi_n^2 \cdot C_n = 0 \\
&-\frac{a_y \gamma A}{g} \cdot \varpi_n^2 \cdot A_n + \frac{a_x \gamma A}{g} \cdot \varpi_n^2 \cdot B_n + \\
&\quad + \left[EJ_w \cdot \lambda_n^4 + G \cdot J_d \cdot \lambda_n^2 - (J_w \cdot \lambda_n^2 + r^2 \cdot A) \frac{\gamma}{g} \cdot \varpi_n^2 \right] C_n = 0
\end{aligned}
\tag{2.12}$$

As funções φ_n , ϕ_n e χ_n satisfazem as equações diferenciais ordinárias desde que os coeficientes A_n , B_n e C_n satisfaçam as equações algébricas anteriores. Entretanto, as funções φ_n , ϕ_n e χ_n , formando um sistema completo e sendo ortogonais no intervalo (0, L) são as auto-funções

do problema de contorno em estudo. As freqüências das vibrações flexo-torcionais da viga são determinadas a partir da condição que o determinante do sistema de equações algébricas anteriores deve ser nulo:

$$(2.13) \quad \begin{vmatrix} EJ_y \lambda_n^4 - (J_y \lambda_n^2 + A) \frac{\gamma}{g} \omega_n^2 & 0 & -\frac{a_y \gamma A}{g} \omega_n^2 \\ 0 & EJ_x \lambda_n^4 - (J_x \lambda_n^2 + A) \frac{\gamma}{g} \omega_n^2 & \frac{a_x \gamma A}{g} \omega_n^2 \\ -\frac{a_y \gamma A}{g} \omega_n^2 & \frac{a_x \gamma A}{g} \omega_n^2 & EJ_w \lambda_n^4 + G J_d \lambda_n^2 - (J_w \lambda_n^2 + A r^2) \frac{\gamma}{g} \omega_n^2 \end{vmatrix} = 0$$

Essa última equação é cúbica no quadrado da freqüência ω_n^2 e suas raízes são reais. A cada valor de $\lambda_n = \omega_n^2$ caracterizando, junto com as expressões de φ_n , ϕ_n e χ_n , as vibrações flexo-torcionais, correspondem três valores de freqüência de vibração da viga, associadas a três modos de vibração transversal da viga:

$$\omega_{nx}, \omega_{ny}, \omega_{nw}$$

No caso particular em que o centro de torção e o centróide coincidem, temos:

$$\begin{aligned}
\omega_{nx}^2 &= \frac{EJ_x \lambda_n^4}{(J_x \cdot \lambda_n^2 + A)} \cdot \frac{g}{\gamma} \\
\omega_{ny}^2 &= \frac{EJ_y \lambda_n^4}{(J_y \cdot \lambda_n^2 + A)} \cdot \frac{g}{\gamma} \\
\omega_{nw}^2 &= \frac{EJ_w \lambda_n^4 + G \cdot J_d \cdot \lambda_n^2}{(J_w \cdot \lambda_n^2 + r^2 \cdot A)} \cdot \frac{g}{\gamma}
\end{aligned}
\tag{2.14}$$

Os valores ω_{nx} e ω_{ny} determinam as freqüências das vibrações de flexão da viga na qual a sua seção transversal no plano (x, y) somente experimenta deslocamentos translacionais paralelos aos eixos principais da seção. Os valores ω_{nw} determinam as freqüências de vibrações torcionais de vigas de paredes delgadas de seção aberta e contorno rígido. Nessas vibrações a seção transversal gira ao redor do centro de torção.

No caso de uma viga tendo somente um eixo de simetria, como é o caso dos perfis C das longarinas e travessas de um chassi de veículo, tem-se um caso particular da equação (2.13). Por exemplo, para um perfil simétrico em relação ao eixo O_y , temos $a_x = 0$. O determinante do sistema de equações algébricas é resolvido por intermédio de duas equações, uma do primeiro grau no quadrado da freqüência, e outra do segundo grau.

$$EJ_x \lambda_n^4 - (J_x \cdot \lambda_n^2 + A) \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \varpi_n^2 = 0$$

$$(2.15)$$

$$\begin{vmatrix} EJ_y \lambda_n^4 - (J_y \cdot \lambda_n^2 + A) \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \varpi_n^2 & -\frac{a_y \cdot \gamma \cdot A}{g} \cdot \varpi_n^2 \\ -\frac{a_y \cdot \gamma \cdot A}{g} \cdot \varpi_n^2 & EJ_w \lambda_n^4 + G \cdot J_d \cdot \lambda_n^2 - (J_w \cdot \lambda_n^2 + r^2 A) \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \varpi_n^2 \end{vmatrix} = 0$$

A primeira equação fornece a frequência de vibração de flexão da viga no plano de simetria Oyz. A segunda equação dá, para um dado número n de semi-ondas senoidais, dois valores reais positivos de frequências de vibração flexo-torcionais da viga.

2.3 ESTUDO DAS VIBRAÇÕES FLEXO-TORCIONAIS A PARTIR DO ACOPLAMENTO DAS VIBRAÇÕES FLEXIONAIS E TORCIONAIS

2.3.1. Introdução

Foi visto anteriormente que o ponto de partida no tratamento das vibrações de vigas é o princípio d'Alembert, onde o problema dinâmico é considerado como um problema estático com Forças de Inércia adicionadas às Forças Elásticas ao se considerar as equações de equilíbrio. Nos casos de perfis em que ocorre excentricidade entre os centros de torção das seções transversais e os respectivos centros de gravidade, como por

exemplo os perfis tipo C de um chassi de veículo, as Forças de Inércia atuantes nos centróides das seções serão responsáveis pela aplicação de Momentos Torçores em relação aos centros de torção. Dessa forma, as vibrações flexionais e torcionais estarão acopladas. O desenvolvimento desse estudo é considerado nos itens seguintes, primeiramente abordando-se as vibrações flexionais, para posteriormente considerar o acoplamento.

2.3.2. Equações das Vibrações Laterais Livres

Inicialmente será abordado o estudo das vibrações laterais de corpos elásticos, sem a consideração dos efeitos de flexo-torção incorporados na Teoria de Vlasov já mencionada anteriormente. Posteriormente, com o acoplamento das vibrações de flexão e torção, será estabelecida a base para instituição do Modelo Híbrido em Análise Dinâmica. Assumindo que a barra representada na figura 2.2 tem um plano de simetria e que as vibrações ocorrem neste plano, a equação diferencial da linha elástica é:

$$-M = EI \cdot \frac{d^2 z}{dx^2} \quad (2.16)$$

Diferenciando a equação de M duas vezes, temos:

$$\frac{d}{dx} \left[EI \frac{d^2 z}{dx^2} \right] = -\frac{dM}{dx} = -Q$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI \frac{d^2 z}{dx^2} \right] = -\frac{dQ}{dx} = q \quad (2.17)$$

Esta última equação representa a equação diferencial de uma barra sujeita a uma carga contínua de intensidade q e pode ser utilizada para obter a equação da vibração lateral. Para isso deve-se aplicar o Princípio d'Alembert e imaginar que a barra vibrante é carregada por Forças de Inércia, cuja intensidade varia ao longo do comprimento da barra e que pode ser determinada a partir das equações da física das vibrações aplicadas a um elemento de massa da viga, como se vê na Figura 2.3.

$$a = - \underbrace{p^2 \cdot z}_{\text{Aceleraç \~{a}o}} \rightarrow f_i = -\mu \cdot p^2 \cdot z = -\mu \cdot a \rightarrow f_i = -\mu \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (2.18)$$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{A \cdot l} \rightarrow \rho \cdot A = \frac{m}{l} = \mu$$

$$f_i = -\rho \cdot A \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \rightarrow f_i = -\frac{\gamma \cdot A}{g} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (2.19)$$

Força de Inércia por Unidade de Comprimento da Barra

Substituindo a expressão da força de inércia distribuída f_i (2.19) na expressão da força distribuída q (2.17), a equação geral da vibração lateral da barra torna-se:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right] = - \frac{\gamma \cdot A}{g} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (2.20)$$

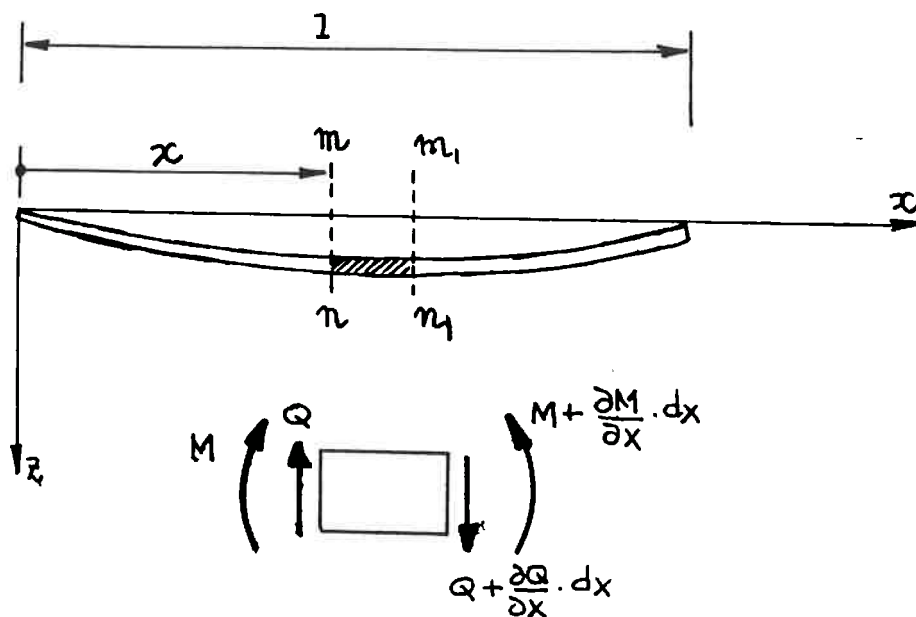


Figura 2.2 - Análise de trecho de barra em flexão

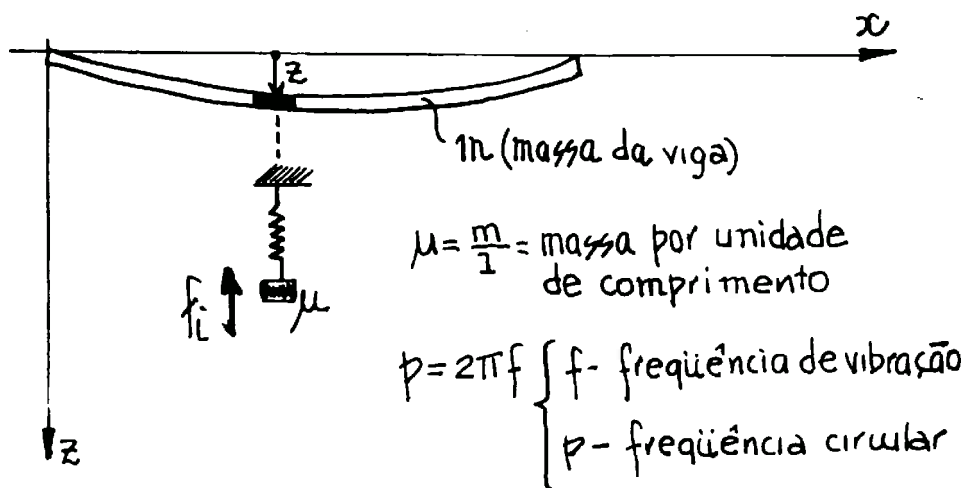


Figura 2.3 - Força de restituição em elemento de barra vibrante

No caso particular de uma barra prismática, a rigidez EI mantém-se constante ao longo do comprimento da barra, e assim em (2.20) teremos:

$$EI \cdot \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = -\frac{\gamma \cdot A}{g} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \rightarrow EI \cdot \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \frac{\gamma \cdot A}{g} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0 \rightarrow$$

$$\frac{\gamma \cdot A}{g} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + EI \cdot \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{EI}{A \cdot \gamma} \cdot g \cdot \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + k^2 \cdot \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = 0 \quad (2.21)$$

$$\text{onde} \quad k^2 = \frac{EIg}{A \cdot \gamma} \quad (2.22)$$

Na discussão anterior, foi desconsiderado o efeito da inércia rotacional. Durante a vibração os elementos da barra, como o trecho da Figura 2.2, executam não somente movimentos translacionais, como também movimentos rotacionais. O ângulo de rotação variável é igual a

inclinação da curva de deflexões e é expresso por $\frac{\partial z}{\partial x}$.

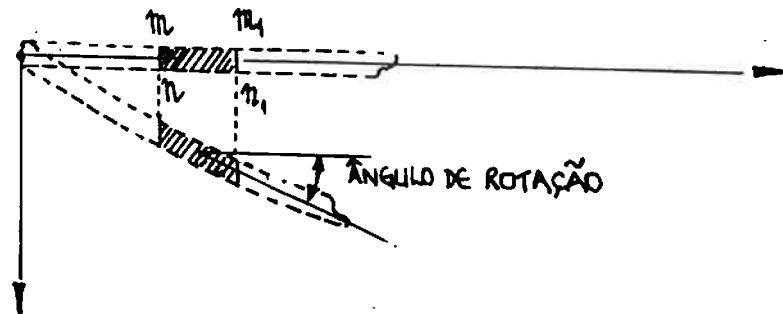


Figura 2.4 - Movimento rotacional em trecho de barra vibrante

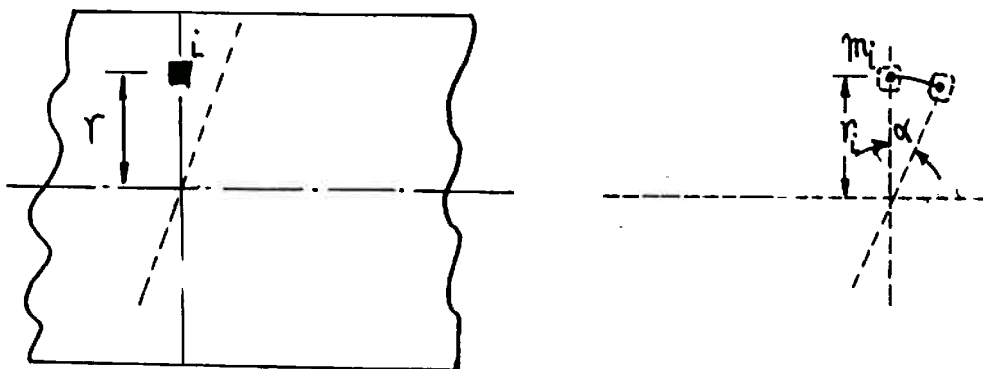


Figura 2.5- Rotação de elemento de massa da seção transversal de barra

$$\frac{x_i}{r_i} = \alpha$$

$$x_i = \alpha \cdot r_i$$

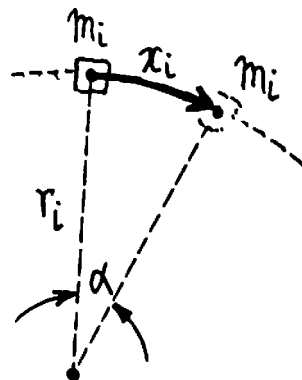


Figura 2.6 - Relações entre grandezas lineares e angulares

As correspondentes velocidades e acelerações angulares serão obtidas respectivamente, derivando-se a expressão anterior duas vezes em relação ao tempo:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial t^2} \quad (2.23)$$

As forças de inércia decorrentes dos movimentos rotacionais das seções, podem ser determinadas para o trecho da Figura 2.2, considerando o eixo de rotação que passa pelo centróide da seção e perpendicular ao plano xz.

Considerando inicialmente as relações básicas da dinâmica rotacional para o caso geral de uma massa pontual m_i da Figura 2.6:

$$\begin{aligned} F_i &= m_i \ddot{\chi}_i \rightarrow F_i = m_i (\alpha \cdot r_i)'' \rightarrow \\ &\rightarrow F_i = m_i \cdot r_i \cdot \ddot{\alpha} \xrightarrow{r_i} F_i \cdot r_i = m_i \cdot r_i \cdot r_i \cdot \ddot{\alpha} \rightarrow \\ M_i &= m_i \cdot r_i^2 \cdot \ddot{\alpha} \rightarrow M_i = \rho \cdot A_i \cdot dx \cdot r_i^2 \cdot \ddot{\alpha} \rightarrow \\ M_i &= \rho \cdot \underbrace{A_i \cdot r_i^2}_{\text{Momento de Inércia de Área}} \cdot \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial t^2} \cdot dx \end{aligned} \quad (2.24)$$

Momento de Inércia de Área.
No caso da seção transversal envolveria o somatório de todos os elementos de área da seção, isto é, a integral.

Portanto, para a seção transversal inteira:

$$M = \rho \cdot I \cdot \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial t^2} \cdot dx = I \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial t^2} \cdot dx \quad (2.25)$$

Este momento deveria ser contabilizado ao se considerar a variação do momento fletor ao longo do eixo da barra e, portanto:

$$\frac{dM}{dx} = Q - \frac{I \cdot \gamma}{g} \cdot \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial t^2} \quad (2.26)$$

Substituindo o valor de $\frac{dM}{dx}$ na equação da linha elástica (2.17):

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left[EI \frac{d^2 z}{dx^2} \right] &= -\frac{dQ}{dx} = -\frac{d}{dx} \left(\frac{dM}{dx} \right) = -\frac{d^2 M}{dx^2} \\ EI \cdot \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} &= - \left[\frac{dQ}{dx} - \frac{I \cdot \gamma}{g} \cdot \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \cdot \partial t^2} \right] \\ EI \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} &= -\frac{dQ}{dx} + \frac{I \cdot \gamma}{g} \cdot \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \cdot \partial t^2} \quad (2.27) \end{aligned}$$

Nesta última equação, ao invés da força distribuída por unidade de comprimento em $\frac{dQ}{dx}$ será considerada a força de inércia por unidade de comprimento de (2.19). Assim:

$$EI \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = -\frac{\gamma \cdot A}{g} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{I \cdot \gamma}{g} \cdot \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \cdot \partial t^2} \quad (2.28)$$

ou

$$EI \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} - \frac{I \cdot \gamma}{g} \cdot \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \cdot \partial t^2} + \gamma \cdot \frac{A}{g} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0 \quad (2.29)$$

2.3.3. Vibrações Flexionais e Torcionais de Perfis C.

Acoplamento a partir das Soluções de Flexão e Torção.

No caso mais simples de vibrações flexionais de uma viga, foi assumido que a mesma vibra no seu plano de simetria. Se isso não ocorre, as vibrações flexionais serão acopladas com as vibrações torcionais. As equações seguintes estabelecem o acoplamento dessas vibrações a partir da consideração dos estudos de flexão de vigas e da Torção Restringida (Figura 2.7). A Teoria de Vlasov para a Torção Restringida é abordada no Apêndice A.

Equação diferencial da Linha Elástica:

$$E \cdot I_y \cdot \frac{d^4 z}{dx^4} = q \quad (2.30)$$

Equação da Torção Restringida (Apêndice A):

$$M_t = M_x = C \cdot \frac{d\theta}{dx} - C_1 \cdot \frac{d^3\theta}{dx^3} \quad \begin{cases} C = G \cdot I_t = \text{RIJEZA TORCIONAL} \\ C_1 = E \cdot I_w = \text{RIJEZA AO EMPENAMENTO} \end{cases} \quad (2.31)$$

Diferenciando esta última equação em relação a x :

$$C \cdot \frac{d^2\theta}{dx^2} - C_1 \cdot \frac{d^4\theta}{dx^4} = \frac{dM_t}{dx} \quad (2.32)$$

As duas equações $E \cdot I_y \cdot \frac{d^4 z}{dx^4} = q$ e $C \cdot \frac{d^2\theta}{dx^2} - C_1 \cdot \frac{d^4\theta}{dx^4} = -q \cdot c$ definem a

flexão e a torção da barra acopladas para carga estática distribuída no eixo dos centróides.

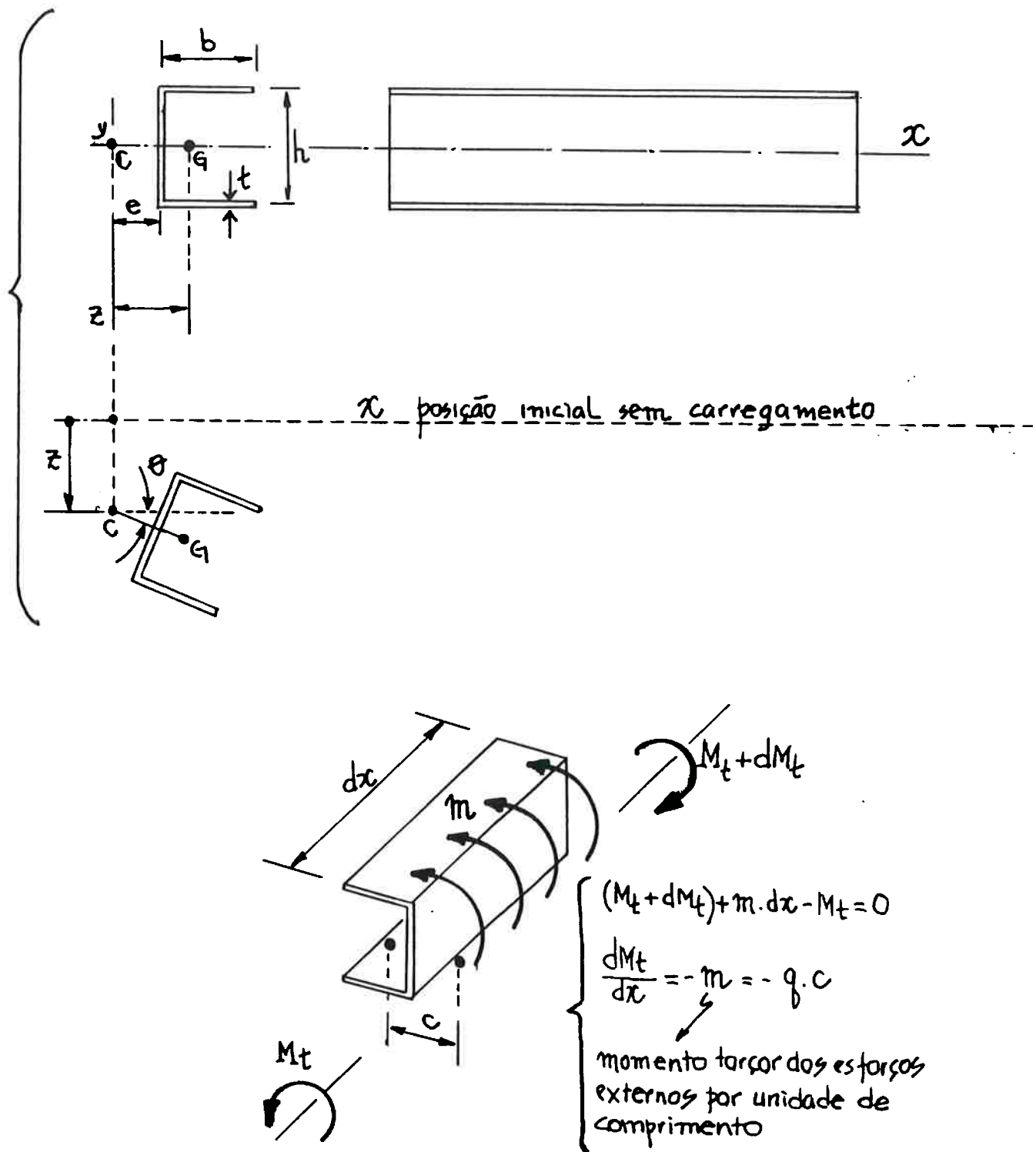


Figura 2.7- Acoplamento das vibrações a partir da flexão e da torção restringida

No caso de vibração da viga, teremos:

$$\text{FORÇAS DE INÉRCIA DE TRANSLAÇÃO: } -\frac{\gamma \cdot A}{g} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} (z + c \cdot \theta) \quad (2.33)$$

$$\text{FORÇAS DE INÉRCIA DE ROTAÇÃO: } -\frac{I_p \cdot \gamma}{g} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad (2.34)$$

Utilizando as Forças de Inércia ao invés das forças estaticamente aplicadas nas equações de flexão e torção:

$$EI_y \cdot \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = -\frac{\gamma \cdot A}{g} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \frac{\gamma \cdot A}{g} \cdot c \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad (2.35)$$

$$C_1 \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - C_1 \cdot \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} = c \cdot \frac{\gamma \cdot A}{g} \cdot \frac{\partial^2 (z + c \cdot \theta)}{\partial t^2} + \frac{I_p \cdot \gamma}{g} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad (2.36)$$

Para os modos naturais de vibração, é assumido:

$$z = X \cdot \text{sen } pt \quad \text{e} \quad \theta = X_1 \cdot \text{sen } pt \quad (2.37)$$

Substituindo essas equações nas equações anteriores, teremos:

$$EI_y X^{IV} = \frac{\gamma \cdot A}{g} \cdot p^2 \cdot (X + c \cdot X_1) \quad (2.38)$$

$$C_1 \cdot X_1^{IV} - C_1 \cdot X_1^{II} = \frac{\gamma \cdot A}{g} \cdot p^2 \cdot c \cdot (X + c \cdot X_1) + \frac{I_p \cdot \gamma}{g} \cdot p^2 \cdot X_1 \quad (2.39)$$

Em cada caso particular temos que procurar X e X_1 (soluções) que satisfaçam as condições de contorno, bem como as equações acima.

Por exemplo, para uma viga com extremidades simplesmente apoiadas com as condições de extremidade:

$$z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \theta = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0 \quad \text{para } x=0 \text{ e } x=L$$

Satisfeitas se:

$$X = z_0 \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{L} \quad ; \quad X_1 = \theta_0 \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{L} \quad (2.40)$$

Substituindo-se X e X_1 (2.40) nas equações diferenciais (2.38) e (2.39), e sendo:

$$W_b^2 = \frac{E \cdot I_y \cdot i^4 \cdot \pi^4 \cdot g}{L^4 \cdot A \cdot \gamma} \quad ; \quad W_t^2 = \frac{(C \cdot i^2 \cdot \pi^2 \cdot L^2 + C_1 \cdot i^4 \cdot \pi^4) \cdot g}{L^4 \cdot \gamma (I_p + A \cdot c^2)} \quad ; \quad \lambda = \frac{A \cdot c}{I_p + A \cdot c^2} \quad (2.41)$$

obtemos:

$$\begin{aligned} (w_b^2 - p^2) \cdot z_0 - p^2 \cdot c \cdot \theta_0 &= 0 \\ -\lambda \cdot p^2 \cdot z_0 + (w_t^2 - p^2) \cdot \theta_0 &= 0 \end{aligned} \quad (2.42)$$

Essas equações podem dar soluções para Z_0 e θ_0 diferente de zero somente se os seus determinantes desaparecerem, resultando:

$$(w_b^2 - p^2) \cdot (w_t^2 - p^2) - \lambda \cdot p^4 \cdot c = 0$$

(2.43)

$$p^2 = \frac{(w_t^2 + w_b^2) \pm \sqrt{(w_t^2 - w_b^2)^2 + 4 \cdot \lambda \cdot c \cdot w_b^2 \cdot w_t^2}}{2(1 - \lambda \cdot c)}$$

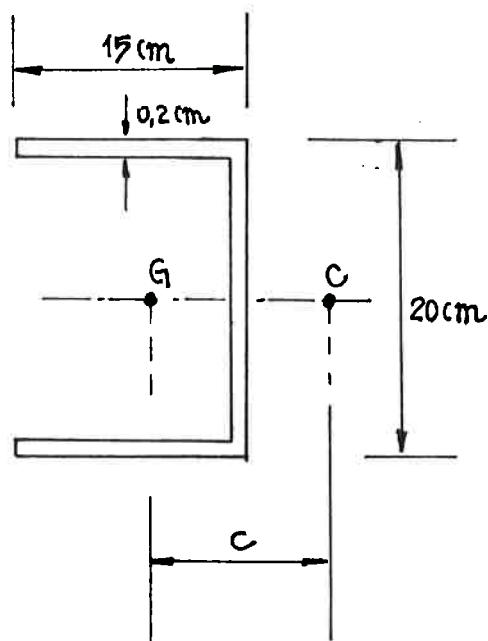
2.3.4. Comparação da Solução Analítica desenvolvida com solução obtida pelo MEF, utilizando Elementos de Casca

Como exemplo de aplicação de vibração flexo-torcional de perfil aberto de paredes delgadas, foram calculadas as frequências de vibração para o exemplo da Figura 2.8, cujas propriedades são lá especificadas. Os valores obtidos foram comparados com a solução discretizada por elementos de casca, objetivando-se avaliar a subdivisão adotada para os elementos, de forma a utilizá-la em aplicações a serem efetuadas no decorrer do trabalho.

Tabela 2.1 - COMPARAÇÃO DA SOLUÇÃO ANALÍTICA COM A SOLUÇÃO PELO MEF (CASCAS)

		Solução Analítica	Solução MEF(Cascas)	Desvio
1 ^a	Frequência Torcional	56,26 Hz	56,00 Hz	0,46%
2 ^a	Frequência Torcional	260,65 Hz	231,35 Hz	12,66%

$$\begin{aligned}
 E &= 20,58 \times 10^{10} \text{ N/m}^2 \\
 I_y &= 733,39 \times 10^{-8} \text{ m}^4 \\
 \rho &= \gamma/g = 7850 \text{ Kg/m}^3 \\
 L &= 2\text{m} \\
 A &= 0,001 \text{ m}^2 \\
 I_t &= 0,133 \times 10^{-8} \text{ m}^4 \\
 I_w &= 17.386,4 \times 10^{-12} \text{ m}^6 \\
 I_z &= 247,53 \times 10^{-8} \text{ m}^4 \\
 I_p &= I_x + I_y = 980,92 \times 10^{-8} \text{ m}^4 \\
 c &= 0,10637 \text{ m} \\
 i &= 1 \text{ (1 semi-onda)}
 \end{aligned}$$



$$w_b^2 = \frac{20,58 \times 10^{10} \times 733,39 \times 10^{-8} \times \pi^4}{2^4 \times 0,001 \times 7850} = B = 1.170.550,637$$

$$\begin{aligned}
 w_t^2 &= \frac{\left(\frac{20,58}{2,6}\right) \times 10^{10} \times 0,133 \times 10^{-8} \times \pi^2 \times 2^2 + 20,58 \times 10^{10} \times 17.386,4 \times 10^{-12} \times \pi^4}{2^4 \times 7850(980,92 \times 10^{-8} + 0,001 \times 0,10637^2)} = \\
 &= D = 132.935,598
 \end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{0,001 \times 0,10637}{980,92 \times 10^{-8} + 0,001 \times 0,10637^2} = F = 5,03556$$

$$p^2 = \frac{(D + B) \pm \sqrt{(D - B)^2 + 4.F.0,10637.B.D}}{2.(1 - F.c)} \rightarrow \begin{cases} p_1^2 = 2.682.075,246 \\ p_2^2 = 124.939,206 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} p_1 = 1.637,70 \text{ rad/s} = 2.\pi.f_1 \\ p_2 = 353,467 \text{ rad/s} = 2.\pi.f_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f_2 = 260,65 \text{ Hz} \\ f_1 = 56,26 \text{ Hz} \end{cases}$$

Figura 2.8 - Exemplo de vibrações flexo-torcionais

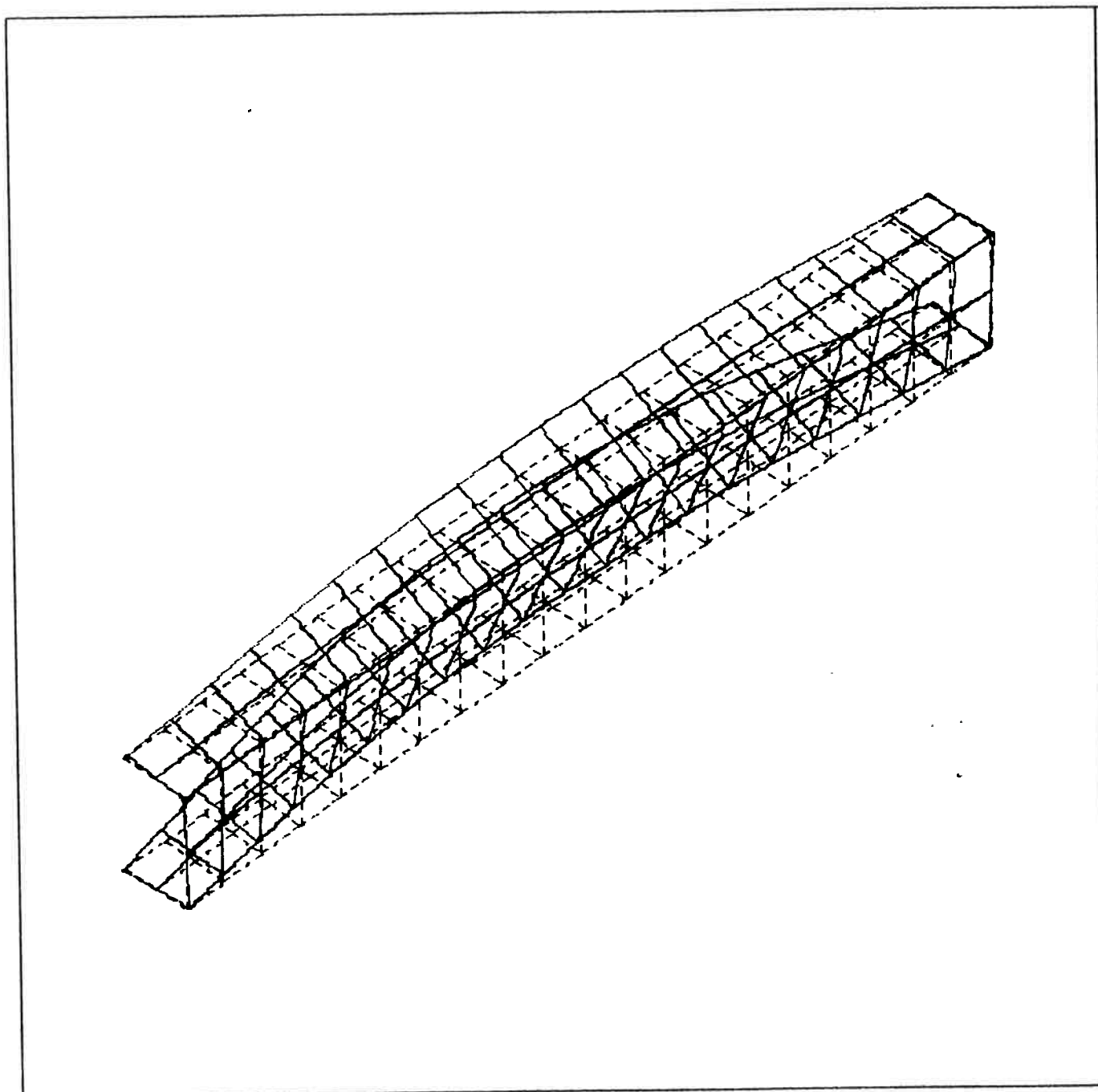


Figura 2.9 - Primeiro modo torcional ($f = 56,00$ Hz)

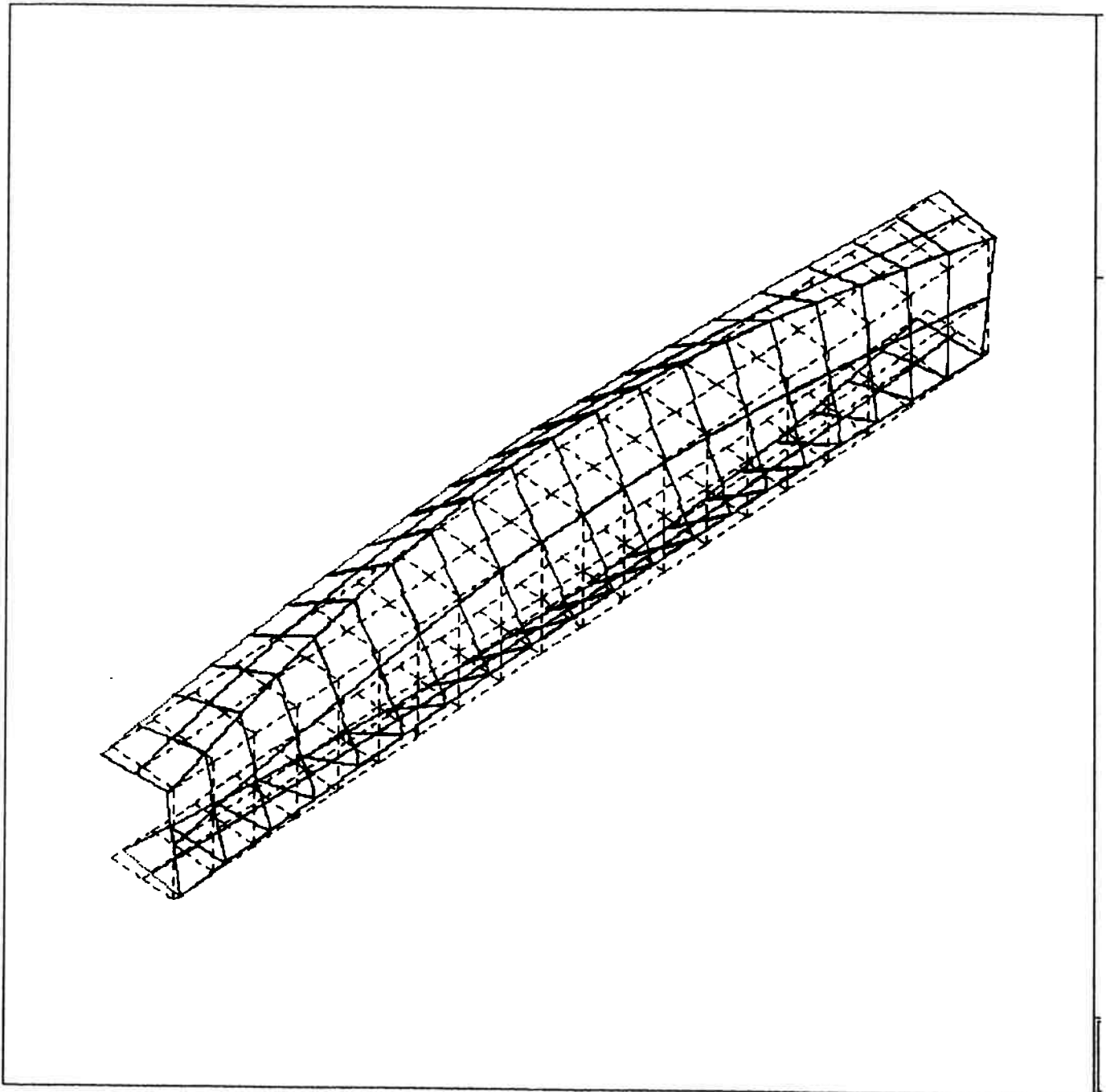


Figura 2.10 - Segundo modo torcional ($f = 231,35$ Hz)

CAPÍTULO III

ANALOGIA FLEXÃO-RETORÇÃO COM ADOÇÃO DE MODELO HÍBRIDO PARA PROBLEMAS ESTRUTURAIS DINÂMICOS

3.1 RETORÇÃO - TEORIA DE VLASOV: BIMOMENTO DE FLEXO-TORÇÃO

Quando um perfil de paredes delgadas está submetido à torção restringida, tal como os perfis C que compõem uma estrutura típica de chassi de veículo (Figura 3.1.a), a torção é governada pela equação seguinte, que além de incorporar a torção de Saint-Venant, considera a resistência adicional ao livre empenamento da seção [3]:

$$M_x = G.I_t . \theta' - E.I_w . \theta''' \quad (3.1)$$

onde M_x é o Momento Torçor, I_t é o Momento de Inércia à Torção de Saint-Venant e I_w é o Momento de Inércia Sectorial com dimensão de comprimento elevado à sexta potência (cm^6). A variação dos deslocamentos axiais ao longo do contorno da seção transversal de um perfil de paredes delgadas, caracterizando a Retorção ou Empenamento da seção, é dada pela função $w(s)$, conhecida como Área Sectorial [3]. A determinação das

tensões normais devido a flexo-torção (σ_{ft}), pode ser efetuada por meio do conhecimento do Bimomento, que é definido por:

$$B = \int_A \sigma_x \cdot w \cdot dA \quad (3.2)$$

O cálculo da tensão normal, devido aos efeitos do empenamento, é feito operacionalmente de forma semelhante àquele da flexão, substituindo-se o Momento Fletor pelo Bimomento, o Momento de Inércia por I_w e a coordenada y ou z pela coordenada sectorial w (s), que varia ao longo do contorno s da seção transversal do perfil:

$$\sigma_{ft} = \frac{B}{I_w} \cdot w \quad (3.3)$$

Vlasov encontrou a solução da Equação Diferencial do Bimomento de Flexo-Torção para diversas condições de contorno e vários casos de carregamentos aplicados a uma viga isolada [3], com torção na viga. Tais condições englobam os casos clássicos de vigas em condições de vínculos ideais e, portanto, até certo ponto, com um espectro limitado de aplicação, pois para uma estrutura real (Figura 3.1.a), as condições de extremidade de cada viga objeto de análise não são perfeitamente conhecidas como nos casos ideais. Tais dificuldades poderiam ser

superadas, por intermédio da utilização do Método dos Elementos Finitos (MEF); porém, a escolha do Modelo adequado para representação do Fenômeno, requer atenção especial. O estudo estático do fenômeno de flexo-torção, aplicado a estruturas constituídas por perfis abertos de paredes delgadas e abordando os conceitos teóricos anteriores, é desenvolvido no Apêndice A.

3.2 LIMITAÇÃO DAS ABORDAGENS EXISTENTES PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF)

A Figura 3.1.b representa o modelo estrutural de um chassi, utilizando-se para essa discretização elementos de viga convencionais com 6 graus de liberdade por nó. Como a matriz de rigidez do elemento de viga em consideração não incorpora os componentes de deslocamento associados ao empenamento do elemento, decorrente da torção, esse tipo de modelo não se presta a resolver o problema de flexo-torção, resultando em $\sigma_{tt}=0$. Essa limitação poderia ser superada se discretizássemos a estrutura por elementos de casca, como indica a Figura 3.1.c, o que constitui uma solução satisfatória, porém bastante trabalhosa, principalmente em fases de avaliação de diferentes configurações de projeto, onde vários modelos necessitariam ser processados.

3.3 SOLUÇÃO PELA ANALOGIA FLEXÃO-RETORÇÃO

No caso da Analogia Flexão-Retorção, cada viga C de paredes delgadas da estrutura pode ser analisada na torção como sujeita a flexões diferenciais dos seus flanges (Figura 3.2.a), representadas no modelo (b) por elementos de vigas convencionais interagindo através de elementos de ligação que representam o papel da alma do perfil. Esse modelo inclui as propriedades associadas a flexo-torção extraídas da Teoria de Vlasov, utilizando elementos de viga convencionais com as rizezas modificadas, sendo portanto um "Modelo Híbrido". A extensão desse conceito para a estrutura inteira conduz ao modelo da Figura 3.2.c. A associação entre as flexões diferenciais e a torção é obtida a partir da relação $z / (h/2) = \theta$, válida para pequenos ângulos, e a sua substituição na equação (3.1) onde $M_x = F.h$, o que resultará na relação $F \approx -E.2.I_w / h^2 . \theta'''$. Assim, no "Modelo Híbrido", as vigas H1 e H2 são caracterizadas pelo Momento de Inércia $I_y^* = 2.I_w/h^2$, associado a flexão no plano xz; a flexão vertical pode ser representada por apenas uma das vigas H, por intermédio da respectiva rigidez. O desenvolvimento detalhado da Analogia Flexão-Retorção, resultando no "Modelo Híbrido", é apresentado no Apêndice B.

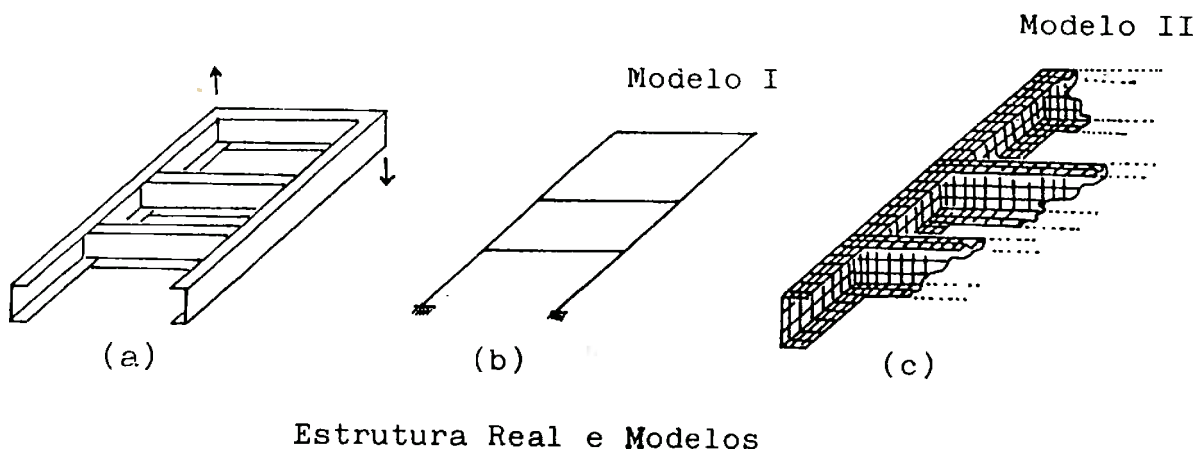
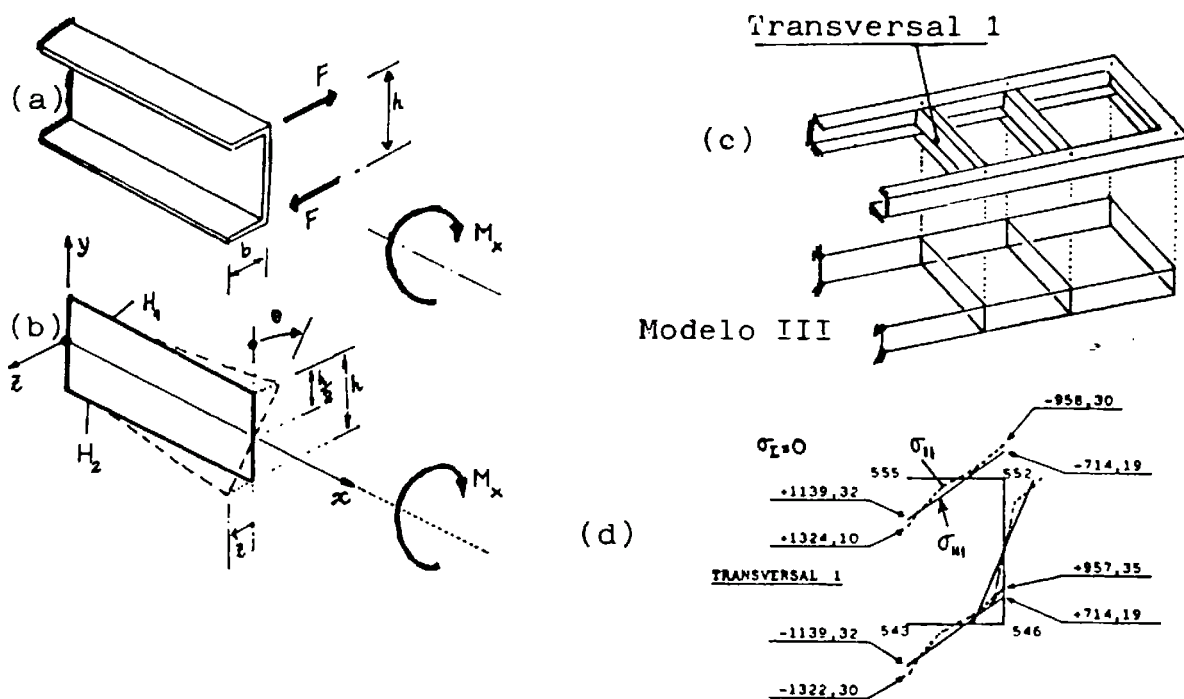


Figura 3.1 - Alternativas de modelos estruturais de estrutura tipo chassi



Tensões Normais (σ) na extremidade do Transversal 1 segundo os modelos I, II, III (Kgf/cm²)

Figura 3.2 - Tensões estáticas obtidas pelos diversos modelos de cálculo

Considerando a estrutura da Figura 3.1.a, foram calculadas as tensões normais decorrentes da torção da mesma segundo os Modelos I, II e III, pelo Método dos Elementos Finitos. A Figura 3.2.d permite estabelecer a comparação entre os resultados obtidos, permitindo a verificação da validade da Analogia Flexão-Retorção nos casos mais gerais, por comparação com o modelo em elementos de casca. Deve-se observar como fato bastante relevante, que as tensões normais obtidas por intermédio do Modelo I são nulas, enquanto os modelos II e III resultaram em tensões da ordem de 1000 Kgf/cm^2 .

Portanto, a Analogia Flexão-Retorção, para estruturas constituídas por perfis abertos de paredes delgadas, apresenta a possibilidade de resolver o problema de flexo-torção por um modelo com reduzido número de graus de liberdade, constituindo-se alternativa interessante nas fases preliminares do projeto.

A validação do Modelo Híbrido para a Análise Dinâmica dos tipos de estruturas aqui estudados, é de grande interesse para o projeto preliminar das mesmas. A solução desta questão deve considerar o modo pelo qual a distribuição de massa própria de estrutura, e dos componentes fixados a ela, influem na definição do Modelo. Da mesma forma que foi estabelecida a associação entre Modelo Híbrido e a Teoria de Vlasov para o problema estático, deve-se proceder para o problema dinâmico.

Analogamente, serão considerados os conceitos relativos às vibrações flexo-torcionais de perfis abertos de paredes delgadas, de sorte a utilizar as principais conclusões dos estudos teóricos anteriores na elaboração das hipóteses que consubstanciem fisicamente o modelo a ser proposto.

3.4 MODELO HÍBRIDO PARA ANÁLISE DINÂMICA ACOPLAMENTO DAS VIBRAÇÕES TORCIONAIS E FLEXIONAIS PELA EXCENTRICIDADE DE MASSA DO MODELO

A análise anterior das vibrações em perfis abertos de paredes delgadas permitiu observar a importância das vibrações flexo-torcionais em perfis que não apresentam dois eixos de simetria, tal como em perfis tipo C, onde ocorrem excentricidade entre o centro de massa e o centro de torção. As forças de inércia aplicadas nos centros de massa das diversas seções transversais serão responsáveis pela ação de momentos torçores, que ocasionarão vibrações Flexo-Torcionais. A análise das vibrações, como conduzida anteriormente, permite propor por abordagem física alterações no Modelo Híbrido discutido em 3.3., de forma a se incorporar no mesmo massas discretizadas, levando-se em conta as excentricidades mencionadas anteriormente, como indica a Figura 3.3.

A massa distribuída é discretizada em pontos fora do plano definido pelo Modelo Híbrido formulado para análise estática, utilizando-se elementos de viga rígidos, isto é, com rigidez flexional infinita nos dois

planos e rigidez axial infinita. Dessa forma, as massas adotadas reproduzirão momentos torcionais de inércia, o que não ocorreria se as mesmas fossem discretizadas no próprio plano do modelo híbrido estático. Essa hipótese de discretização de massas, considerada juntamente com as hipóteses de formulação de rigidez por intermédio do momento de inércia I^* , define o Modelo Híbrido Dinâmico.

As hipóteses anteriores de formulação do Modelo Híbrido merecem alguns reparos quanto a determinação de frequências de vibrações flexionais laterais; essas frequências deveriam apresentar desvios apreciáveis em relação aos valores esperados para o modelo ora proposto. O motivo destes desvios é que o Modelo Híbrido não leva em conta a rigidez flexional da viga no plano horizontal, mas considera o momento de inércia modificado I^* , tornando em princípio o Modelo Híbrido inadequado para o cálculo das vibrações flexionais. Tal dificuldade pode ser superada estabelecendo-se algumas modificações na definição da distribuição de massas no Modelo.

Considerando de forma geral que a frequência de Vibração, em termos de massa e rigidez generalizada, é dada por $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, a massa nodal do modelo híbrido na direção horizontal, e que será contabilizada na

3.9

sua matriz de massa, deverá ser corrigida pela relação I^* / I_{real} , de modo a reproduzir adequadamente a frequência de vibração flexional lateral.

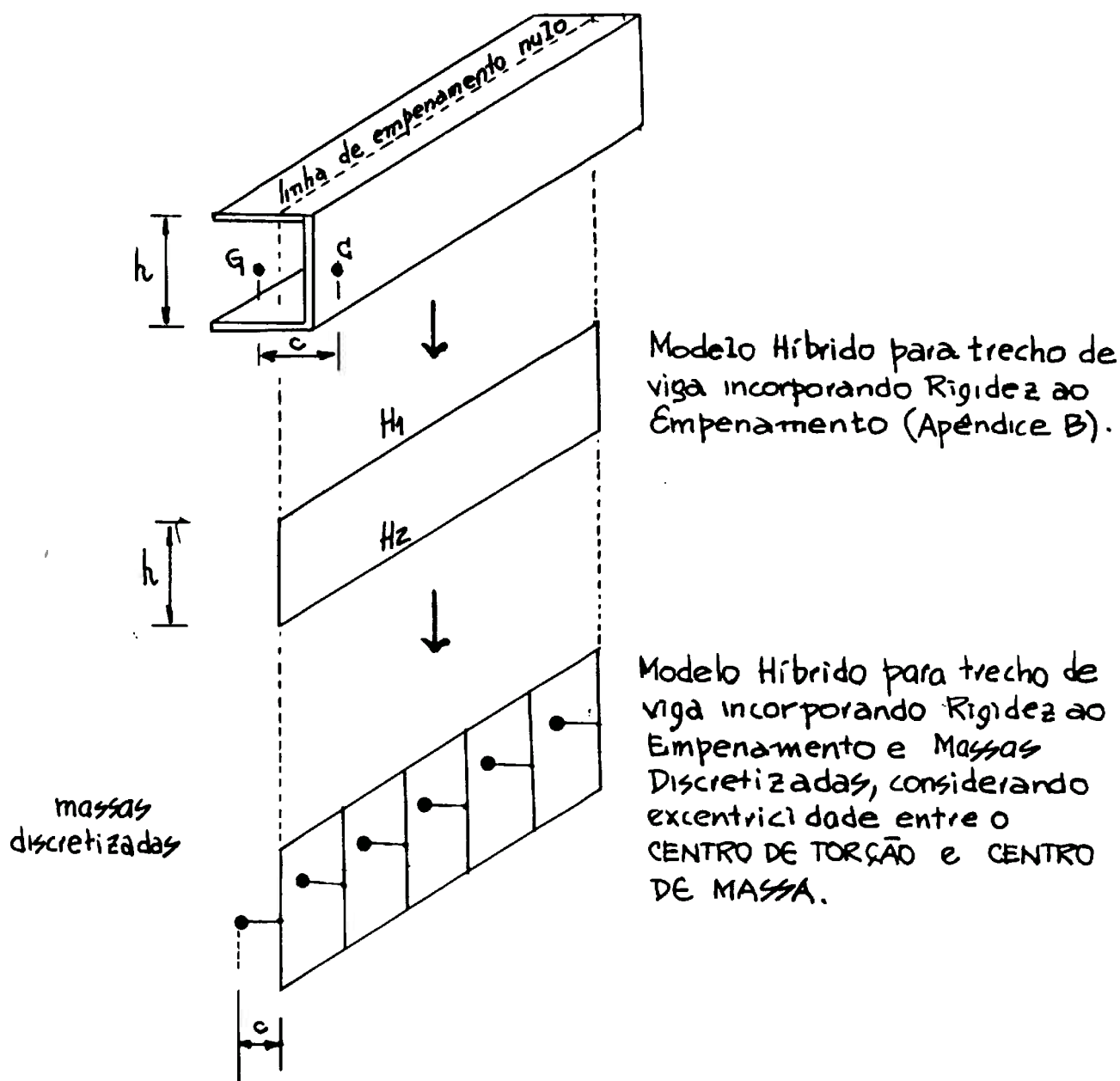


Figura 3.3 - Concepção do Modelo Híbrido para Análise Dinâmica

CAPÍTULO IV

TESTES DE CONFIABILIDADE E APLICAÇÕES

4.1 TESTES INICIAIS PARA PERFIL ISOLADO

Como Teste de Confiabilidade, foi estabelecida a comparação entre as freqüências naturais, para um perfil C com uma extremidade engastada e a outra extremidade livre, obtidas por intermédio de um modelo em elementos finitos de casca e pelo Modelo Híbrido. Foi analisado como exemplo o perfil C (20 cm x 15 cm x 0,2 cm) já anteriormente considerado. No Modelo Híbrido representado na Figura 4.1 a massa foi distribuída ao longo de 6 pontos nodais sem considerar o engastamento, o que permitiu determinar a 1ª freqüência flexo-torcional ($f = 22,27$ Hz), e a freqüência flexional ($f = 30,53$ Hz) correspondente a vibração lateral segundo um plano de simetria. Essas freqüências apresentaram consistência com os valores calculados, utilizando-se Elementos de Casca ($f = 20,57$ Hz e $f = 34,94$ Hz).

Os resultados dessas análises podem ser vistos nas Figura 4.1 a 4.6.

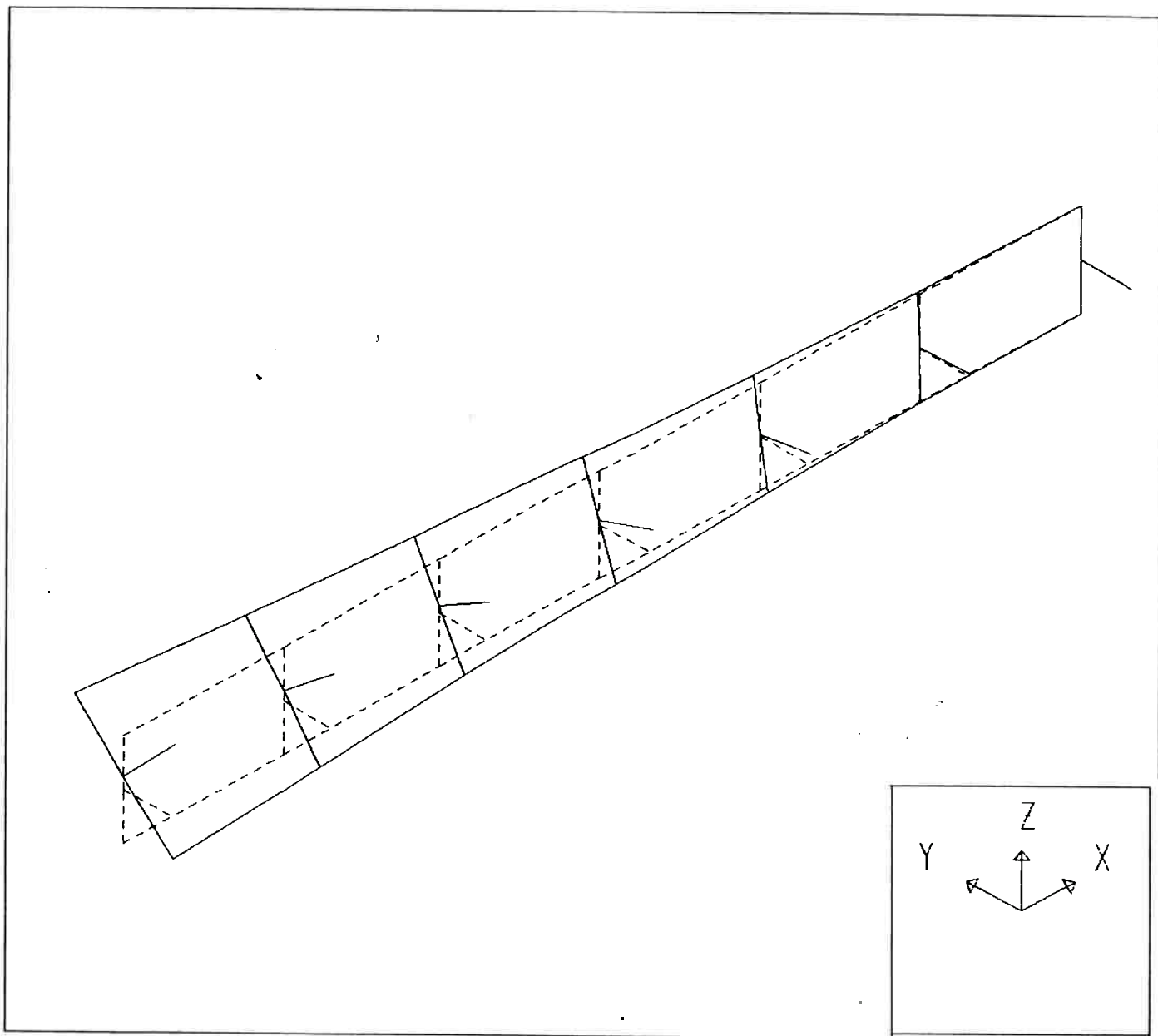


Figura 4.1 - Vibração flexo-torcional de perfil C com Modelo Híbrido ($f = 22,27$ Hz)

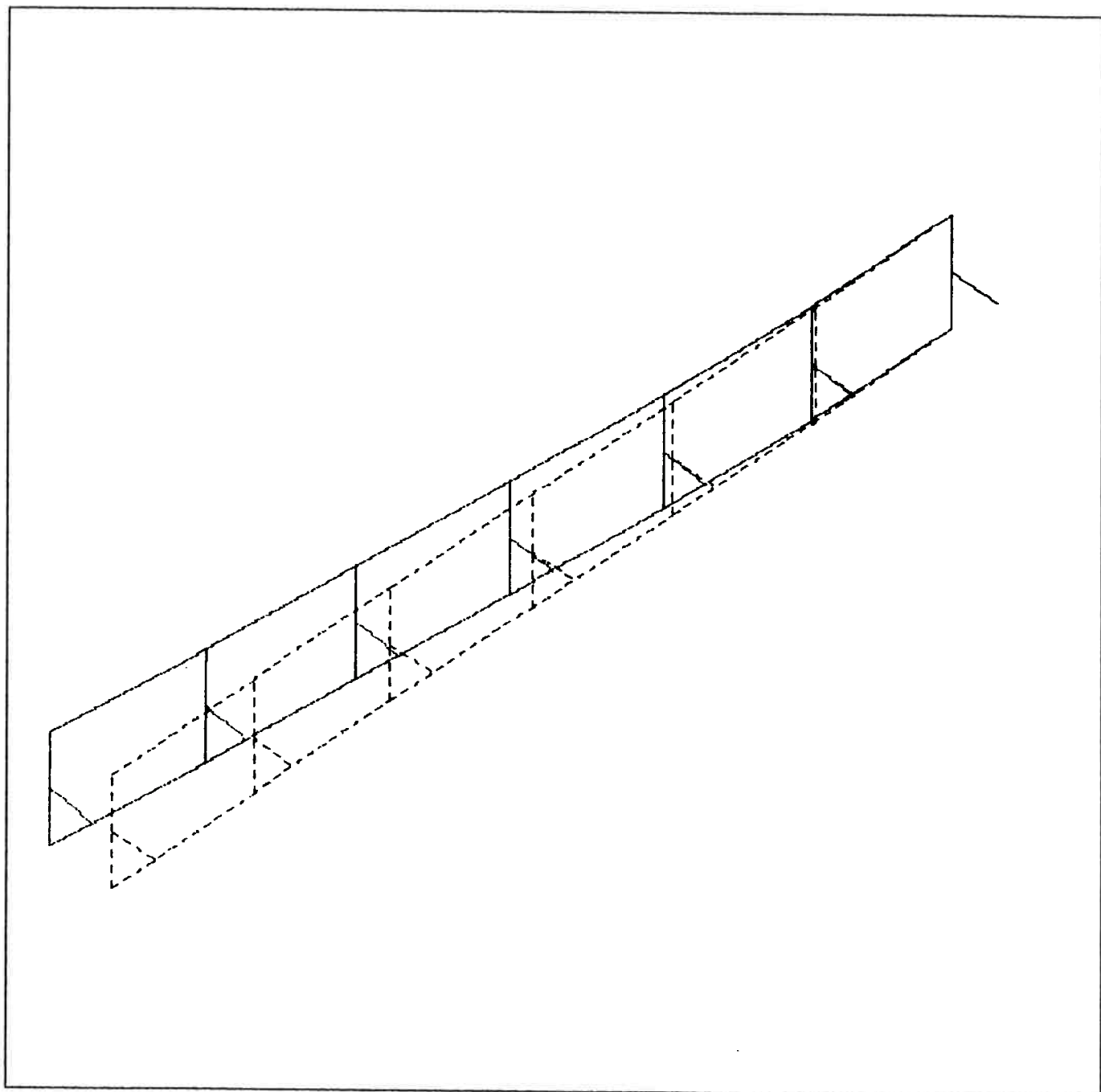


Figura 4.2 - Vibração flexional lateral de perfil C com Modelo Híbrido ($f = 30,53$ Hz)

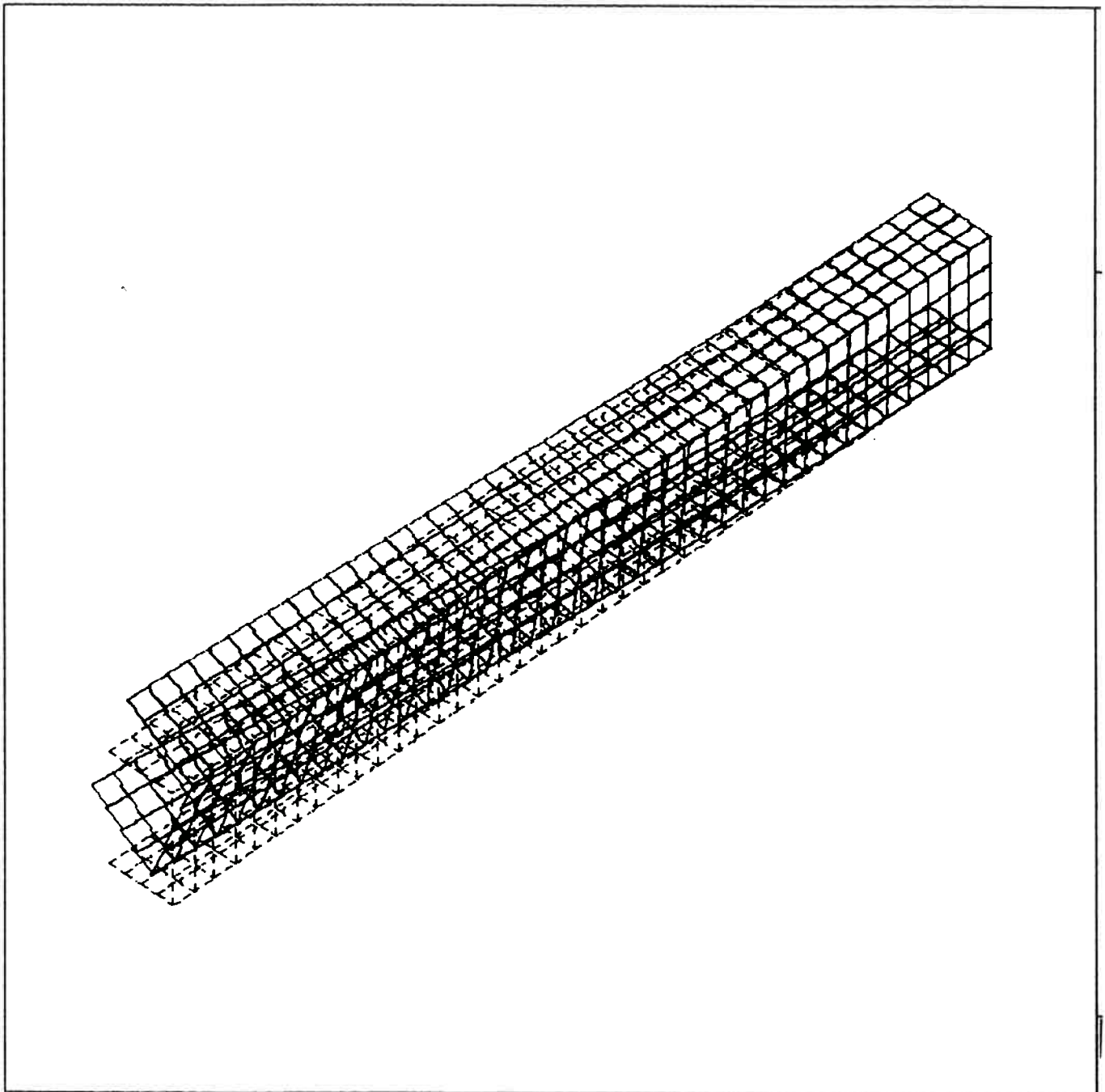


Figura 4.3 - Vibração flexo-torcional de perfil C com Modelo em elementos finitos de casca ($f = 20,57$ Hz)

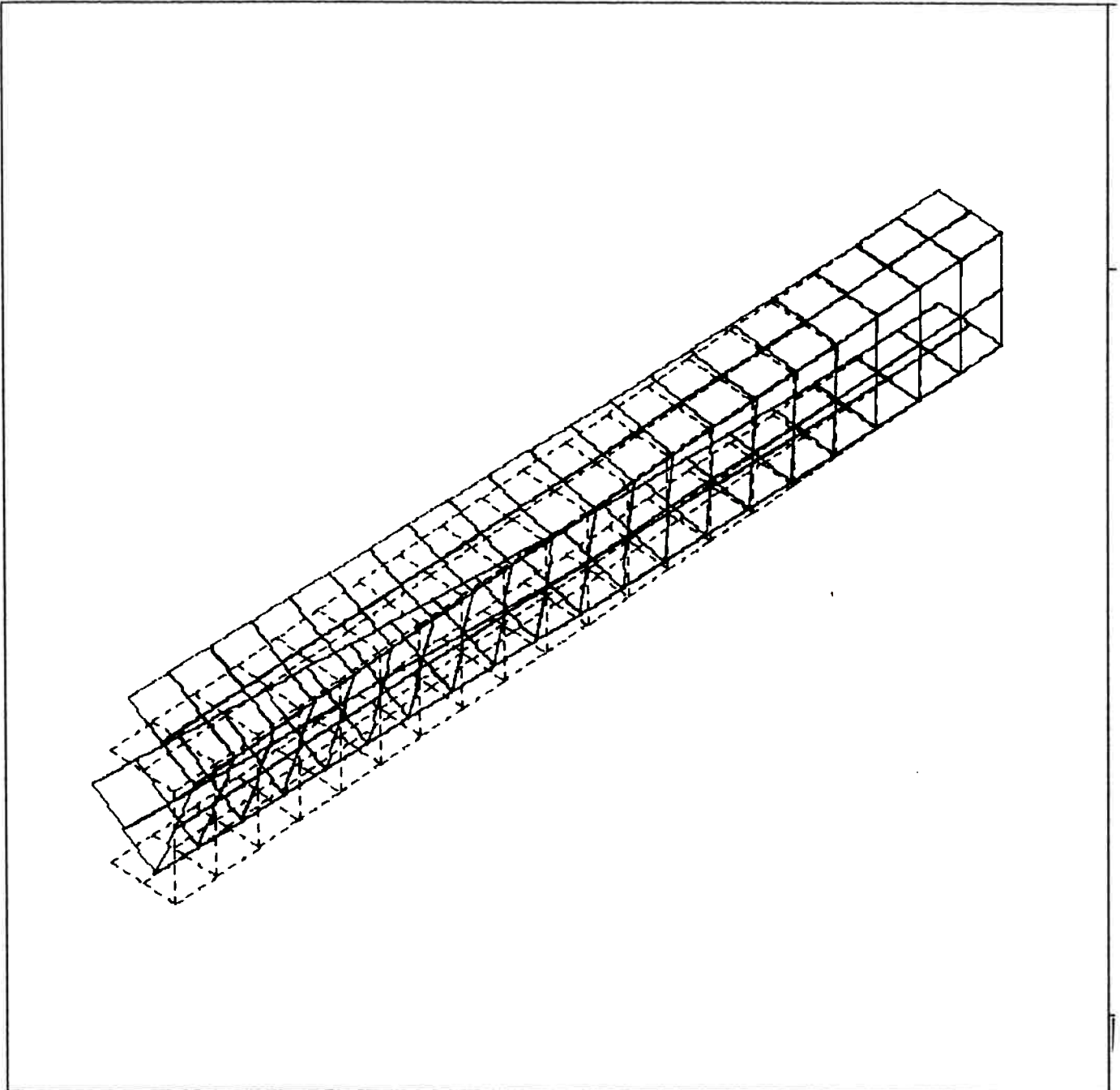


Figura 4.4 - Vibração flexo-torcional de perfil C com modelo em elementos finitos de casca ($f = 20,15$ Hz)

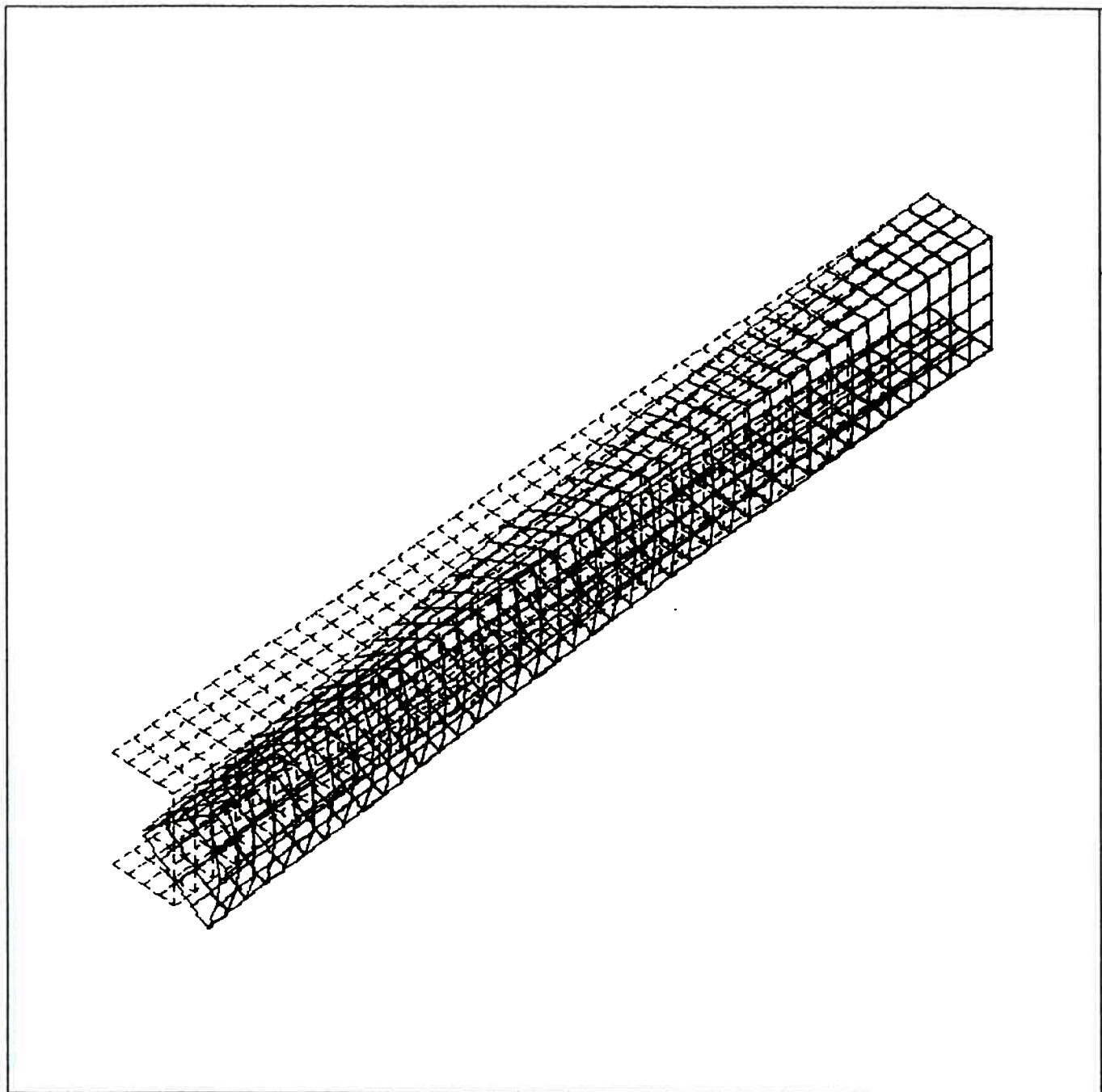


Figura 4.5 - Vibração flexional lateral de perfil C acoplada à vibração das abas com modelo em elementos de casca ($f = 34,94$ Hz)

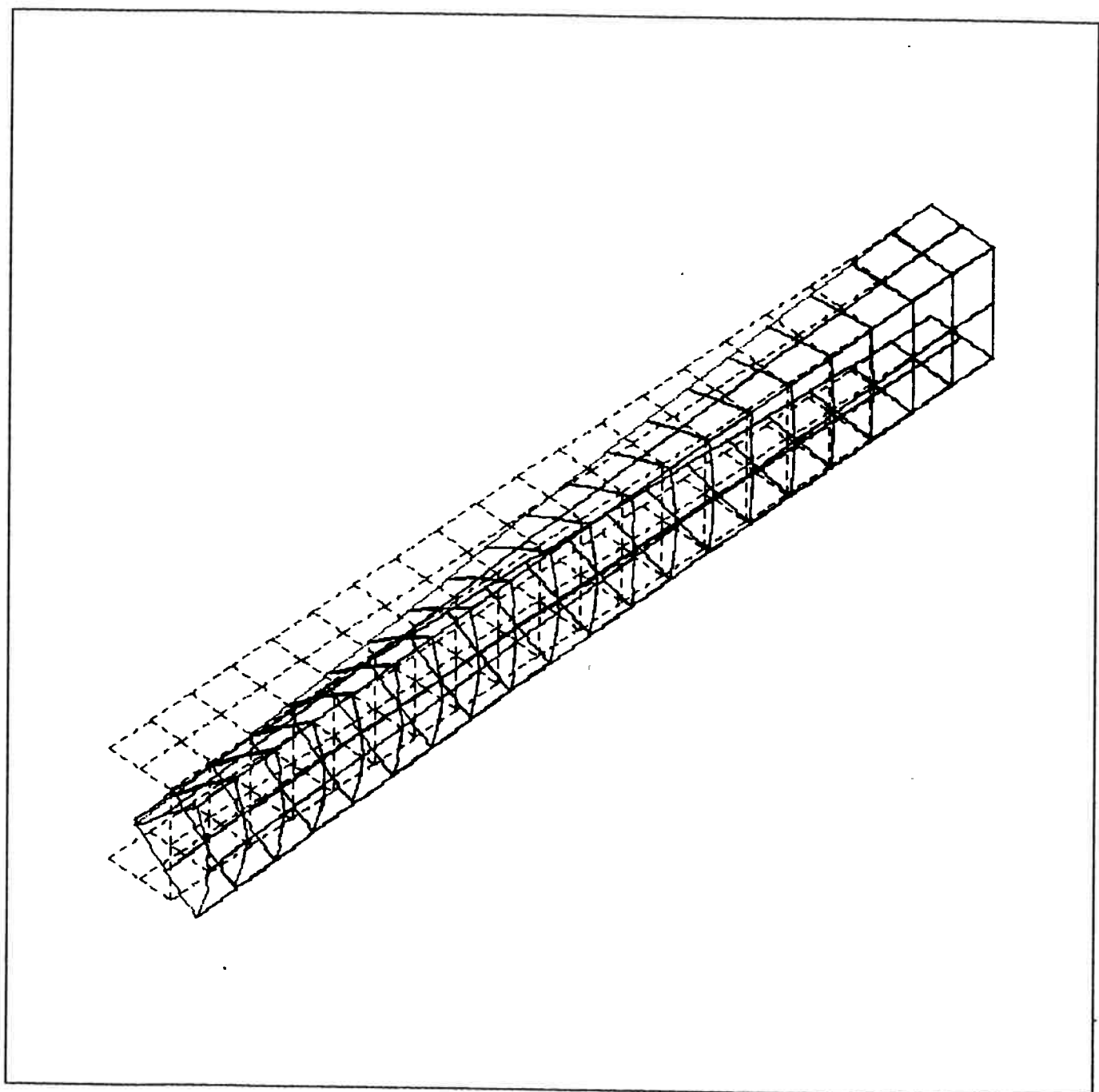


Figura 4.6 - Vibração flexional lateral de perfil C acoplada à vibração das abas com modelo em elementos de casca ($f = 34,79$ Hz)

Em função dos resultados obtidos, algumas questões mereceram uma investigação mais acurada de sorte a prover subsídios para o aprimoramento do Modelo Híbrido Dinâmico, em termos de avaliar a importância da definição de alguns parâmetros na sua formulação. Tais investigações foram efetuadas por intermédio de vários testes, considerando diversas alternativas de Modelos Estruturais. Foram considerados os casos de Vibração Torcional de vigas isoladas e, posteriormente, as vibrações de uma estrutura composta por diversas vigas de paredes delgadas, observando-se a aplicabilidade do Modelo Híbrido como ferramenta de cálculo também na investigação do problema dinâmico torcional. Vale ressaltar que o estudo isolado de uma viga de paredes delgadas, em termos de vibrações flexo-torcionais, permite a abordagem dessas vibrações em caixas estruturais abertas, estas, devido às suas dimensões globais e espessura de paredes, podem ser assimiladas primariamente ao comportamento estrutural de vigas, como é o caso da Viga-Navio [3].

4.2 EFEITO DA RIGIDEZ À TORÇÃO DAS BARRAS DE LIGAÇÃO DO MODELO HÍBRIDO

Na definição do Modelo Híbrido são considerados os elementos tipo A1, que correspondem às vigas 1 a 6 da Figura 4.7, os elementos tipo A2, que correspondem às vigas 7 a 12 e os elementos tipo B do modelo, que são os elementos de ligação da flexão diferencial dos flanges e

representadas pelas vigas 13 a 26. As vigas 27 a 33 são elementos através dos quais é possível introduzir a excentricidade entre o centro de torção e o centro de massa da seção transversal, responsáveis, portanto, pelo acoplamento das vibrações flexionais e torcionais. A RIGIDEZ TORCIONAL das vigas B dependem da Restrição ao Empenamento na Seção Considerada. Nas seções onde ocorre liberdade total ao empenamento, o Momento de Inércia à Torção J é nulo, de modo a permitir a flexão das vigas A1 e A2 no plano XY; nas seções onde ocorre impedimento ao empenamento, as vigas B do modelo híbrido devem apresentar Momento de Inércia J infinito. Como as flexões das vigas A1 e A2 no plano XY são controladas pelo Momento de Inércia I^* , a definição desses valores extremos de J será efetuada em relação aos valores de I^* . Dessa forma, a rigidez torcional nula para as vigas B do modelo será fornecida por intermédio de valores bastante inferiores a I^* , com o cuidado de não introduzir problemas numéricos na solução das equações. A investigação da influência de J no cálculo das frequências naturais é apresentada na Tabela 4.1.

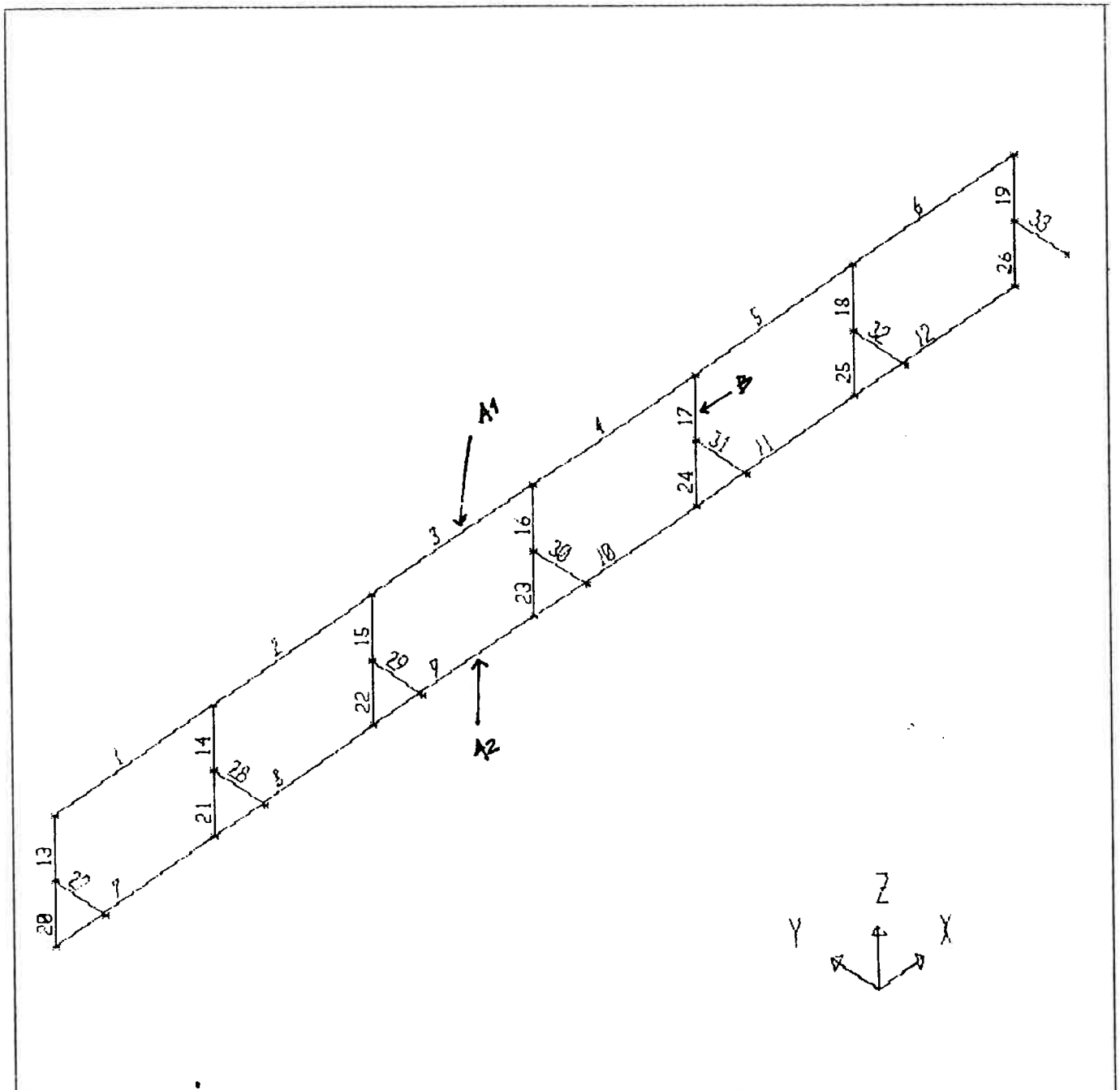


Figura 4.7 - Elementos considerados na definição do Modelo Híbrido

Tabela 4.1- Efeito da Rigidez à Torção das Barras de Ligação do Modelo Híbrido no Cálculo de Frequências Naturais

Caso Analisado	J (m⁴)	Frequência Flexo-Torcional (Hz)	Observações
Caso 1	$8,0 \cdot 10^{-13}$	22,273	Modo 1
Caso 2	$8,0 \cdot 10^{-14}$	22,273	Modo 1
Caso 3	$8,0 \cdot 10^{-12}$	22,274	Modo 1
Caso 4	$8,0 \cdot 10^{-11}$	22,289	Modo 1
Caso 5	$8,0 \cdot 10^{-10}$	22,434	Modo 1
Caso 6	$8,0 \cdot 10^{-09}$	23,775	Modo 1
Caso 7	$8,0 \cdot 10^{-08}$	31,600	Modo 2
Caso 8	$8,0 \cdot 10^{-07}$	44,942	Modo 2
Caso 9	$8,0 \cdot 10^{-06}$	269,124	Modo 4 Modo Flexional com torção em modo superior

Em relação ao valor calculado de frequência flexo-torcional, utilizando o Método de Elementos Finitos com Elementos de Casca, que resultou em um valor de frequência de 20,15 Hz, podemos observar a importância da definição de J na elaboração do Modelo Híbrido. Sendo I* igual a $8,6932E-07 \text{ m}^4$, os valores de J considerados nos casos 1 a 9 assumem valores de no máximo 100 vezes abaixo de I; sendo, portanto, as rigidezes torcionais das vigas B desprezíveis em relação às rigidezes flexionais das vigas A1 e A2 no plano XY. Observa-se que, à medida que J

4.12

diminui, o valor calculado de frequência pelo Modelo Híbrido apresenta melhores resultados ao se comparar com o Modelo constituído por Elementos de Casca. Esse Limite Inferior de J é determinado por problemas numéricos na solução das equações matriciais do problema de autovalor.

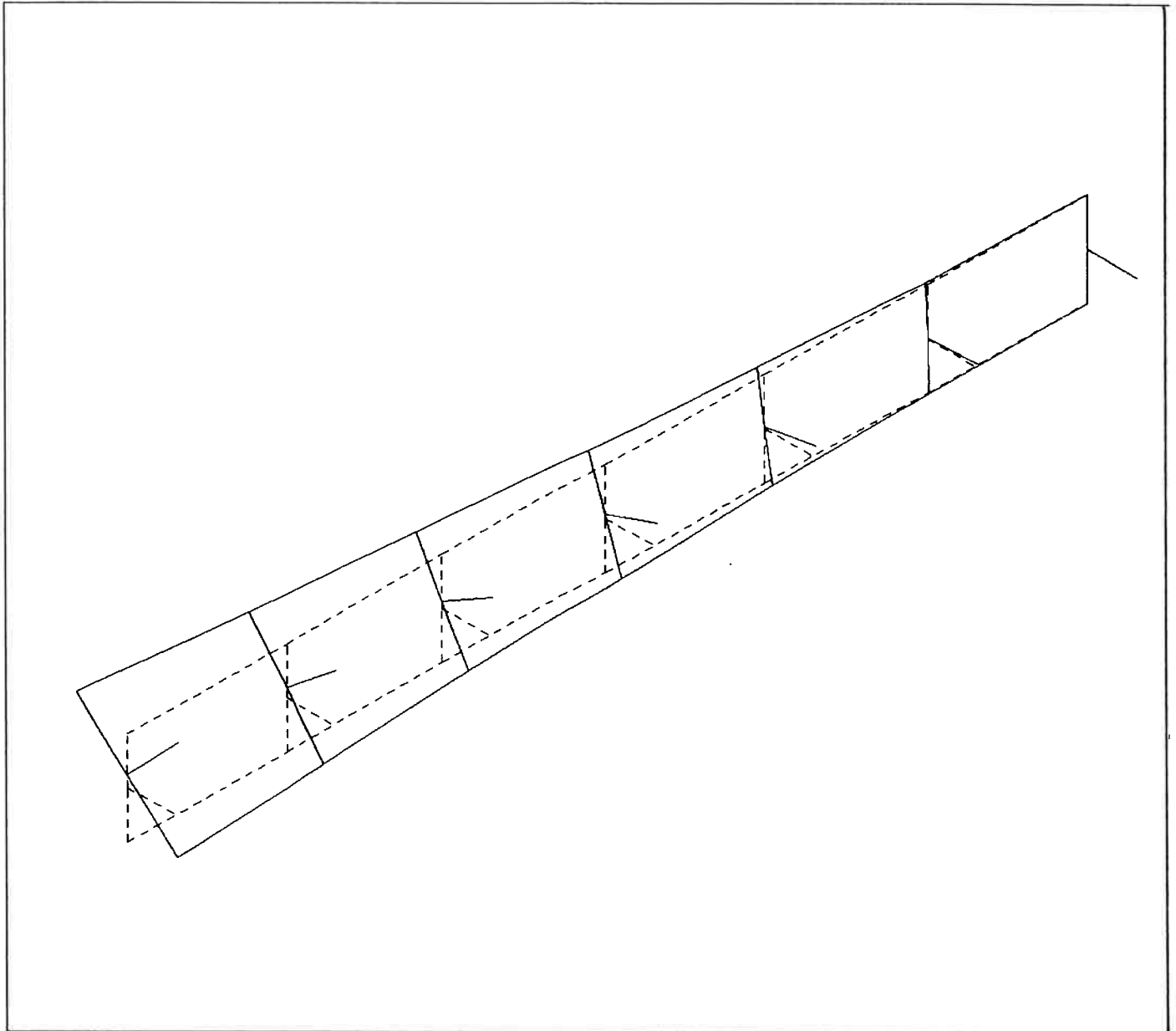


Figura 4.8 - Vibração flexo-torcional de perfil C com Modelo Híbrido ($J = 8,0 \text{ E-}13 \text{ m}^4$ e $f = 22,273 \text{ Hz}$)

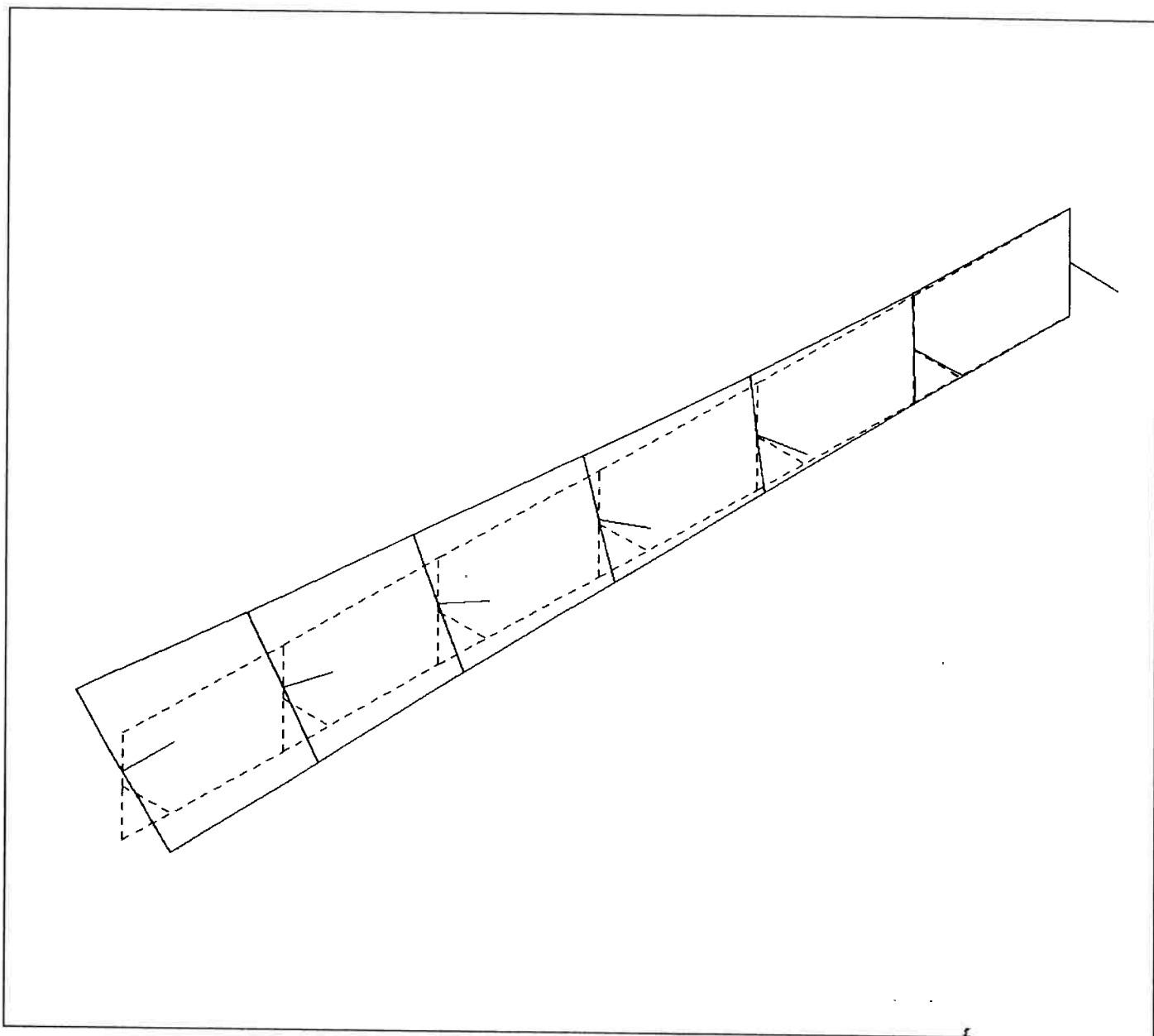


Figura 4.9 - Vibração flexo-torcional de perfil C com Modelo Híbrido ($J = 8,0E-09m^4$ e $f = 23,775$ Hz)

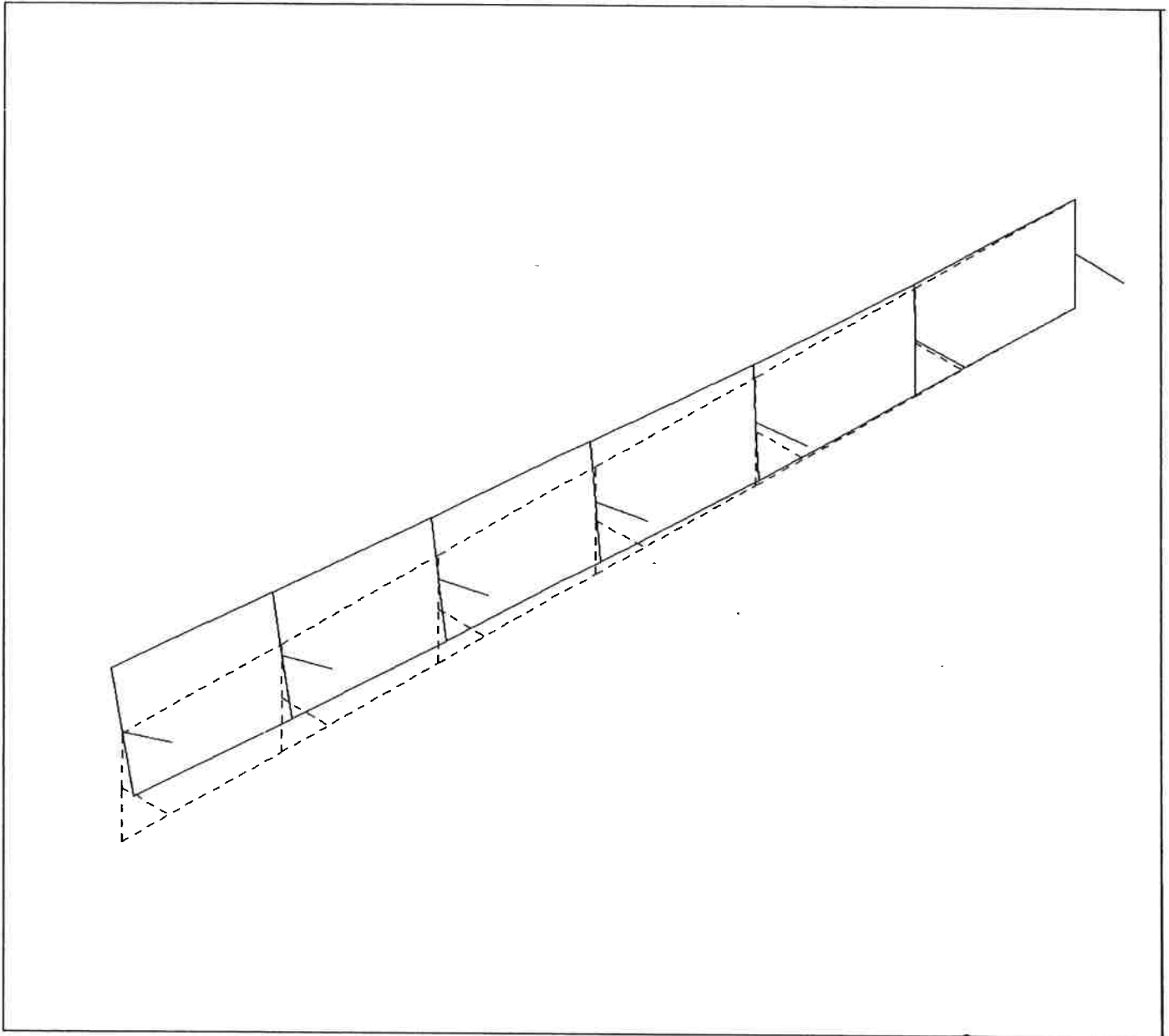


Figura 4.10 - Vibração flexo-torcional de perfil C com Modelo Híbrido ($J = 8,0E-07m^4$ e $f = 44,942$ Hz)

4.3 EFEITO DAS VIBRAÇÕES LOCAIS

Em relação à aplicabilidade do Modelo Híbrido para determinação das frequências de vibração flexo-torcional de perfis abertos de paredes delgadas, mereceu investigação também o Efeito das Vibrações Locais. À medida que a espessura do perfil diminui, os modos de vibração local das abas tendem a apresentar frequências menores devido a menor rigidez local, fato observado ao se discretizar o perfil por Elementos de Casca. O Modelo Híbrido, pela própria natureza dos elementos que o definem, não se presta à determinação de vibrações locais.

Para efeito de comparação, as diversas alternativas de Perfis foram analisadas por tipos diferentes de modelos Estruturais pelo Método dos Elementos Finitos. A saber:

i) MODELO DE PERFIL C POR ELEMENTOS DE CASCA

Permite a determinação das frequências naturais de vibração e os respectivos modos, tanto globais para o perfil (flexões e torções), bem como os modos locais que correspondem às vibrações naturais das abas e alma do perfil. Constitui um modelo completo, porém bastante trabalhoso.

ii) MODELO HÍBRIDO

Permite a determinação da frequência natural de vibração flexo-torcional, porém não determina as vibrações locais, o que não constitui um

impedimento já que o objetivo do modelo é o levantamento dos modos flexo-torcionais do perfil (ou estrutura da caixa estrutural), que são modos globais.

iii) MODELO EM CASCAS COM BARRAS AUXILIARES

Com a finalidade de eliminar os modos locais de vibração, foram introduzidos no modelo em elementos de casca, barras transversais ao longo do contorno da seção transversal do perfil de paredes delgadas, com o objetivo de simular a HIPÓTESE DO CONTORNO RÍGIDO da Teoria de Vlasov. A introdução desses elementos de viga auxiliares revelou-se bastante artificial, em determinada faixa de espessura dos perfis, falseando os resultados obtidos em relação ao comportamento esperado.

iv) MODELO COM ELEMENTOS DE VIGA CONVENCIONAIS

A tentativa de solução dos modos e frequências de vibração utilizando elementos de viga é de extrema importância, no sentido de se estabelecerem comparações de resultados das diversas análises. A importância decorre do fato de que a tendência inicial do analista estrutural é modelar o comportamento da viga por intermédio de elementos finitos de viga. Entretanto, como o elemento de viga convencional não incorpora em sua formulação o componente de rigidez associado ao empenamento, embora constitua um modo global de vibração do perfil ou caixa estrutural, as vibrações de flexo-torção não poderão ser determinadas, como será

mostrado a seguir. Essas observações são importantes para reforçar a aplicabilidade do Modelo Híbrido na determinação das vibrações flexo-torcionais, como alternativa ao modelo constituído por elementos de casca.

A tabela 4.2 seguinte apresenta a comparação dos resultados obtidos por esses modelos para as alternativas mencionadas anteriormente:

Tabela 4.2 - FREQUÊNCIAS NATURAIS OBTIDAS PELOS DIFERENTES MODELOS/MEF. ANÁLISE DAS VIBRAÇÕES FLEXO-TORCIONAIS (Hz)

Dimensões do Perfil C (mm)		Modelo em Cascas	Modelo Híbrido	Modelo em Cascas com Barras Auxiliares	Modelos com Elementos de Viga
200x150x2 L = 2m	A	20,15	22,27	20,06	3,96 (1)
200x150x1 L = 2m	B	17,15	21,98	20,05	1,98 (2)
200x150x0,5 L = 2m	C	11,53	21,90	20,05	0,99 (3)
200x150x3 L = 2m	E	21,67	22,75	20,06	5,95 (4)
200x150x5 L = 2m	F	24,83	24,16	20,06	9,91 (5)
200x150x10 L = 2m	G	33,70	28,95	20,06	19,82 (6)
100x50x3,2 L = 0,9m	H	71,72	87,06	-	47,99 (7)
100x50x3,2 L = 0,6m	I	144,14	170,42	-	71,99 (8)
200x150x2 L = 3,0m	J	10,07	10,11	-	2,64 (9)

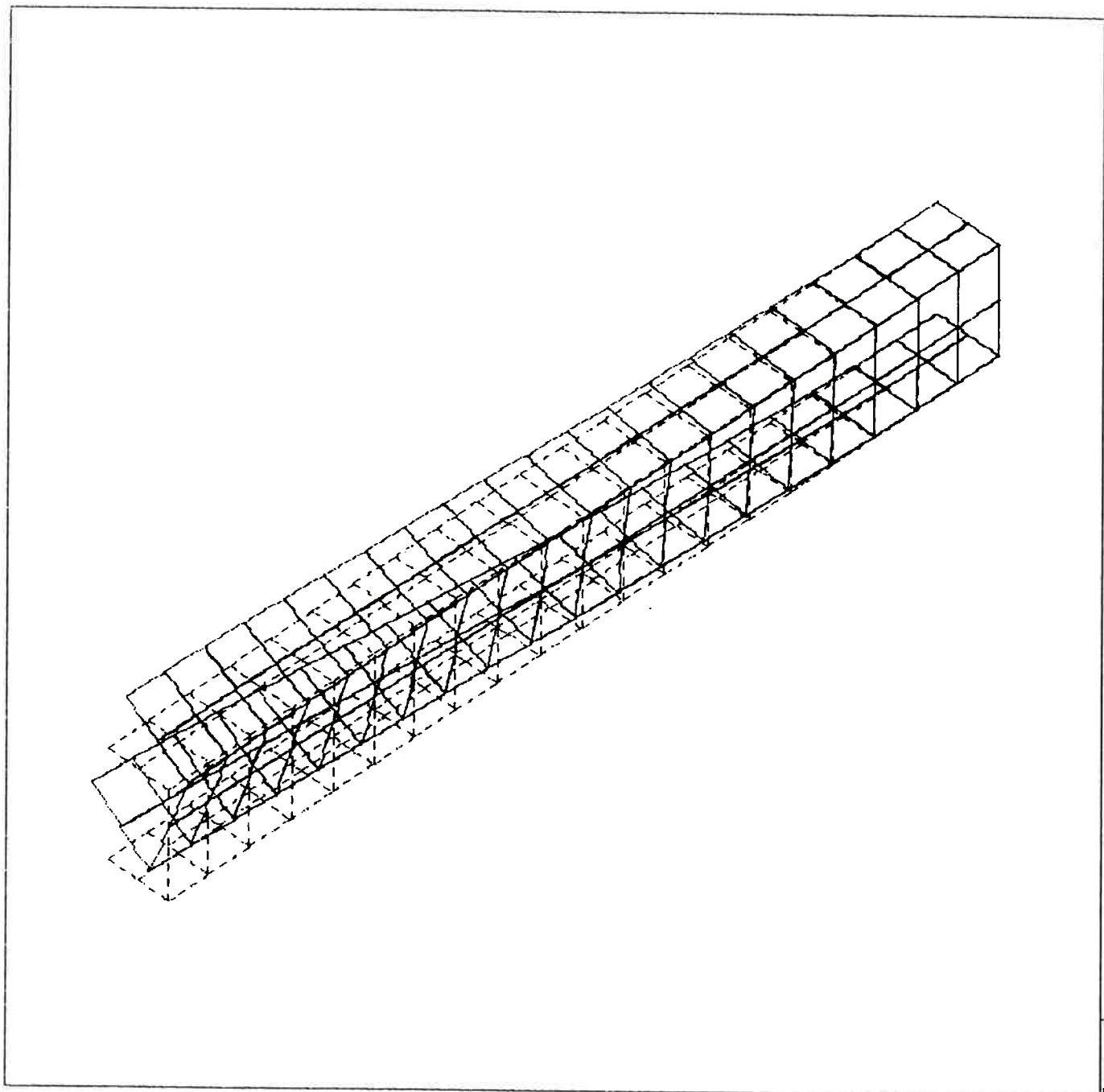


Figura 4.11- Vibração flexo-torcional de perfil C 200 mm x 150 mm x 2 mm com elementos de casca ($L = 2m$ e $f = 20,15$ Hz)

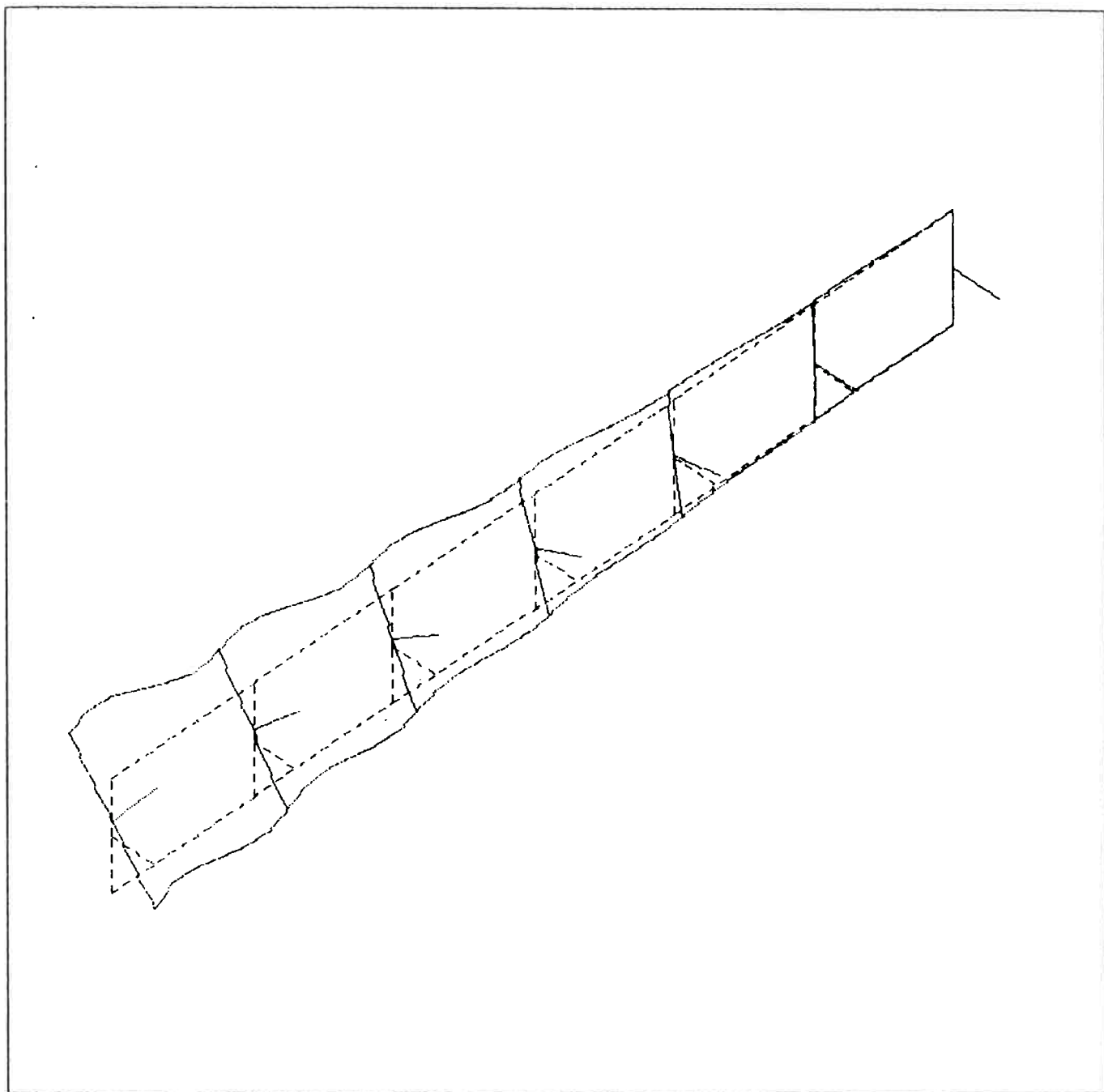


Figura 4.12- Vibração flexo-torcional de perfil C 200 mm x 150 mm x 2 mm com Modelo Híbrido ($L = 2m$ e $f = 22,27$ Hz)

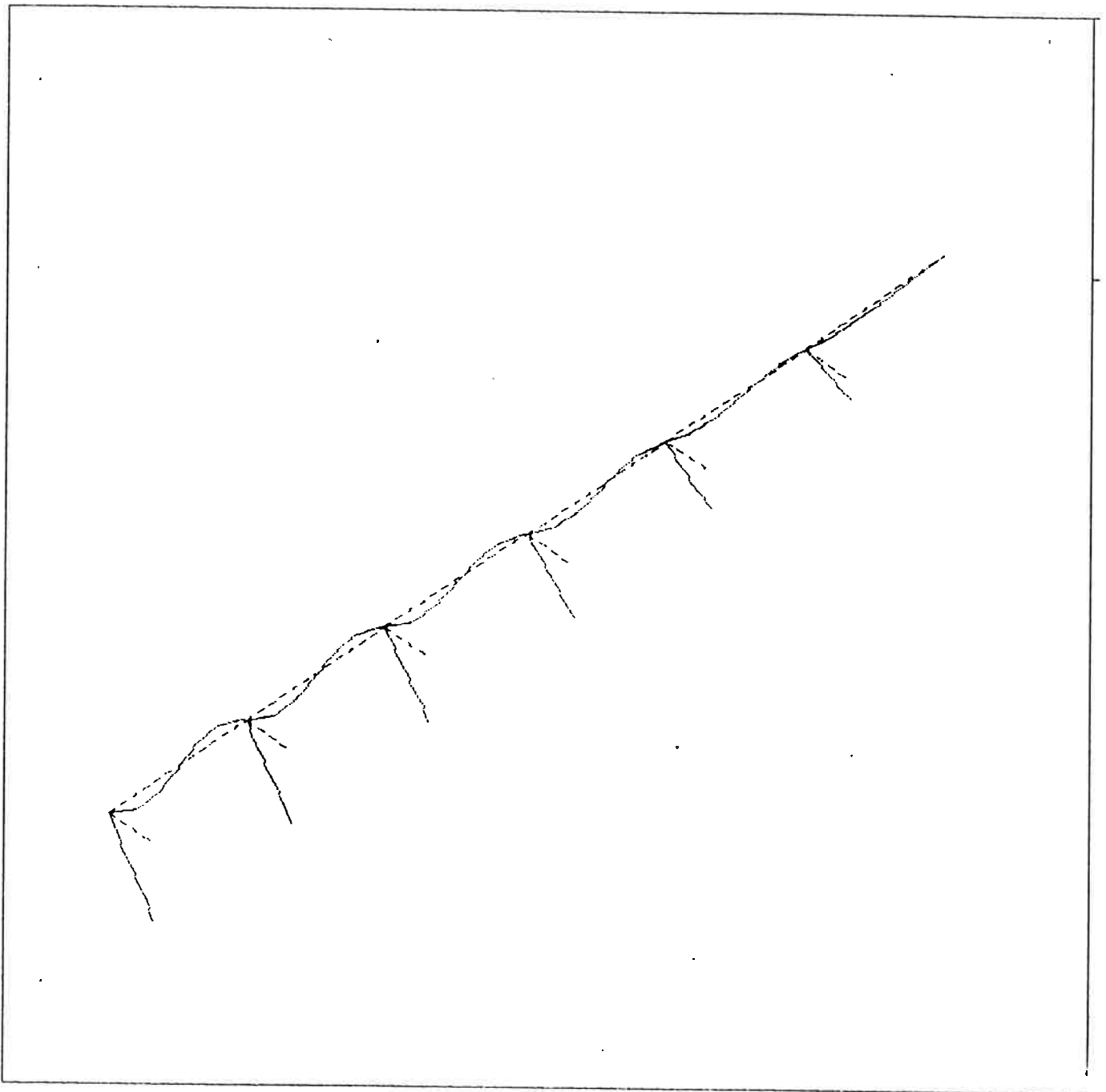


Figura 4.13 - Vibração flexo-torcional de perfil C 200 mm x 150 mm x 2 mm com elementos de viga convencionais, utilizando barras transversais auxiliares para visualização dos modos ($L = 2m$ e $f = 3,96$ Hz)

Em relação aos resultados obtidos, deve-se observar que:

- os maiores desvios observados para as frequências calculadas pelo Modelo Híbrido, em relação às frequências calculadas pelo Modelo com elementos de Casca, ocorreram para aqueles casos em que são marcantes os efeitos das vibrações locais, como já houvera sido mencionado. Em particular, para o caso C, que corresponde a espessura de 0,5 mm, o modo de torção é praticamente inexistente, sendo predominantes flexões locais das abas em fase. Vale ressaltar que foi efetuado um processamento correspondente à espessura de 0,1 mm, o que corresponderia ao caso D, não relacionado na Tabela 4.2, já que os dez primeiros modos correspondem a vibrações exclusivamente locais das abas do perfil.

- como já mencionado anteriormente, foram determinadas as **FREQÜÊNCIAS NATURAIS OBTIDAS PELOS DIFERENTES MODELOS** para análise das vibrações flexo-torcionais. No caso da determinação das frequências e modos de vibrar utilizando elementos de viga convencionais, foram utilizadas barras auxiliares transversais ao longo da viga apenas como artifício de representação, para permitir a visualização do ângulo de torção ao longo da linha representativa dos centróides da viga no modelo unidimensional. Como tais elementos não apresentam massa e são "rígidos", não alteram os resultados obtidos na análise, o que pôde ser verificado por intermédio de testes, onde o modelo foi processado com as

barras e posteriormente sem as barras, obtendo-se os mesmos valores de frequências naturais. Além dessas verificações, em relação ao modelo com elementos de viga convencionais, vale ressaltar que foram efetuados processamentos adicionais no sentido de se avaliar o efeito de um refinamento da malha na resposta do cálculo de frequência, pois o número de massas discretizadas seria maior e o efeito dessas massas concentradas poderia melhorar o modelo.

Os resultados desses testes encontram-se na Tabela 4.3, para o caso do perfil C 200 mm x 150 mm x 2 mm, onde os valores de frequências naturais são bastante diferentes dos valores de frequências flexo-torcionais calculadas pelo Modelo em Cascas e pelo Modelo Híbrido, devido a não consideração dos efeitos da torção restringida.

Tabela 4.3 - TESTES DE CÁLCULO DE FREQUÊNCIAS TORCIONAIS UTILIZANDO ELEMENTOS DE VIGA COM BARRAS AUXILIARES

Casos	Características	Frequência Torcional
K	Massas Translacionais m_y e m_z nos nós 8 a 13.	3,953 Hz
L	Massas Translacionais m_y e m_z nos nós 1 a 6 com aplicação dos Momentos de Inércia de Massa nesses nós.	3,963 Hz
M	Modelo com 100 nós e distribuição de massa similar ao Caso L.	4,261 Hz
N	Modelo com geometria igual ao Caso M, com distribuição de massa similar ao Caso K.	4,251 Hz
O	Modelo igual ao Caso M em termos de rigidez e distribuição de massa eliminando-se as barras laterais de representação.	4,261 Hz
P	Modelo mais refinado com 200 nós, barras auxiliares e massas aplicadas considerando excentricidades.	4,272 Hz

Perfil C 200mm x 150mm x 2mm e comprimento $L = 2m$, engastado em uma extremidade.

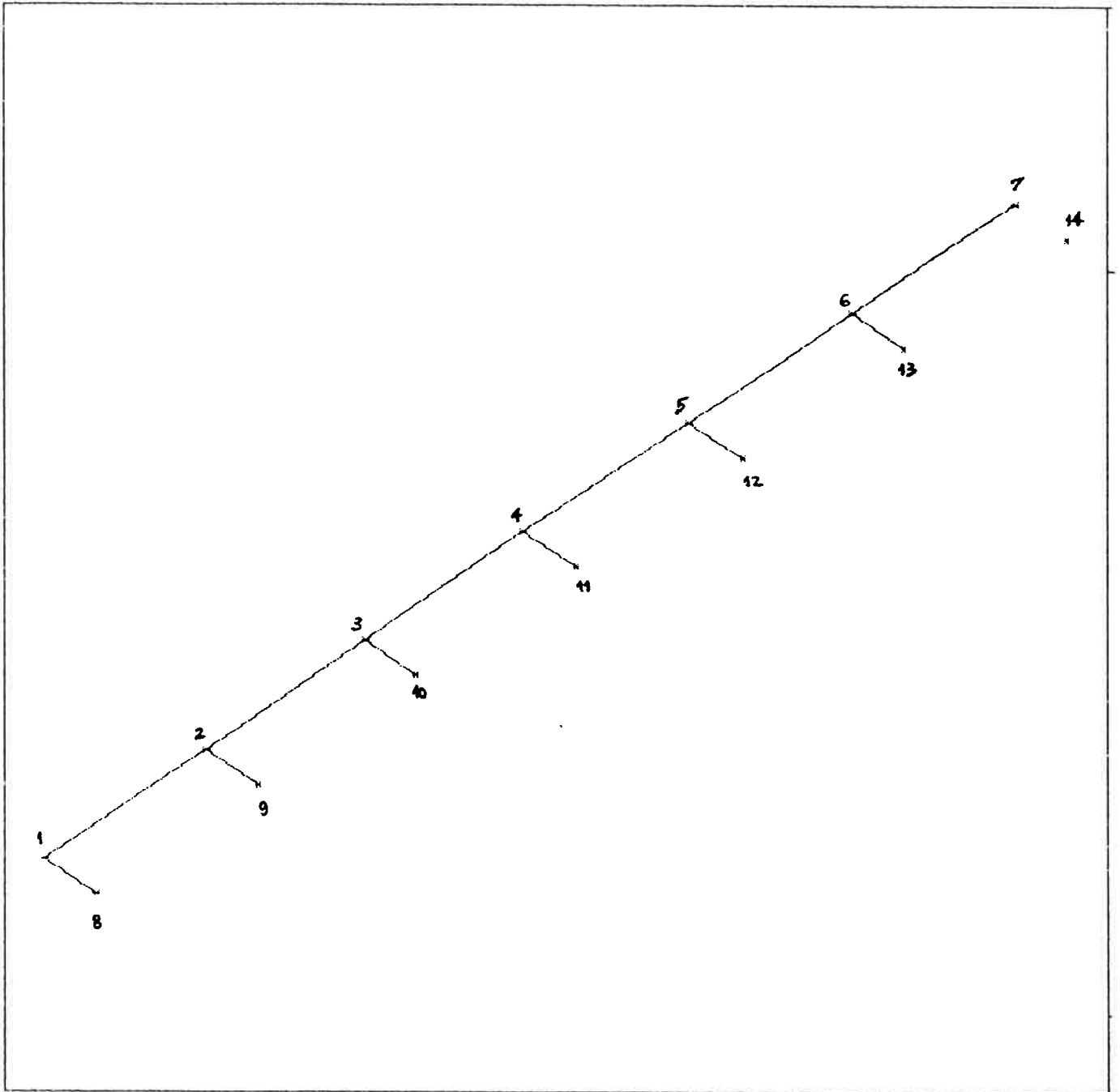


Figura 4.14 - Modelo de Perfil com elementos de viga e barras auxiliares (malha grossa)

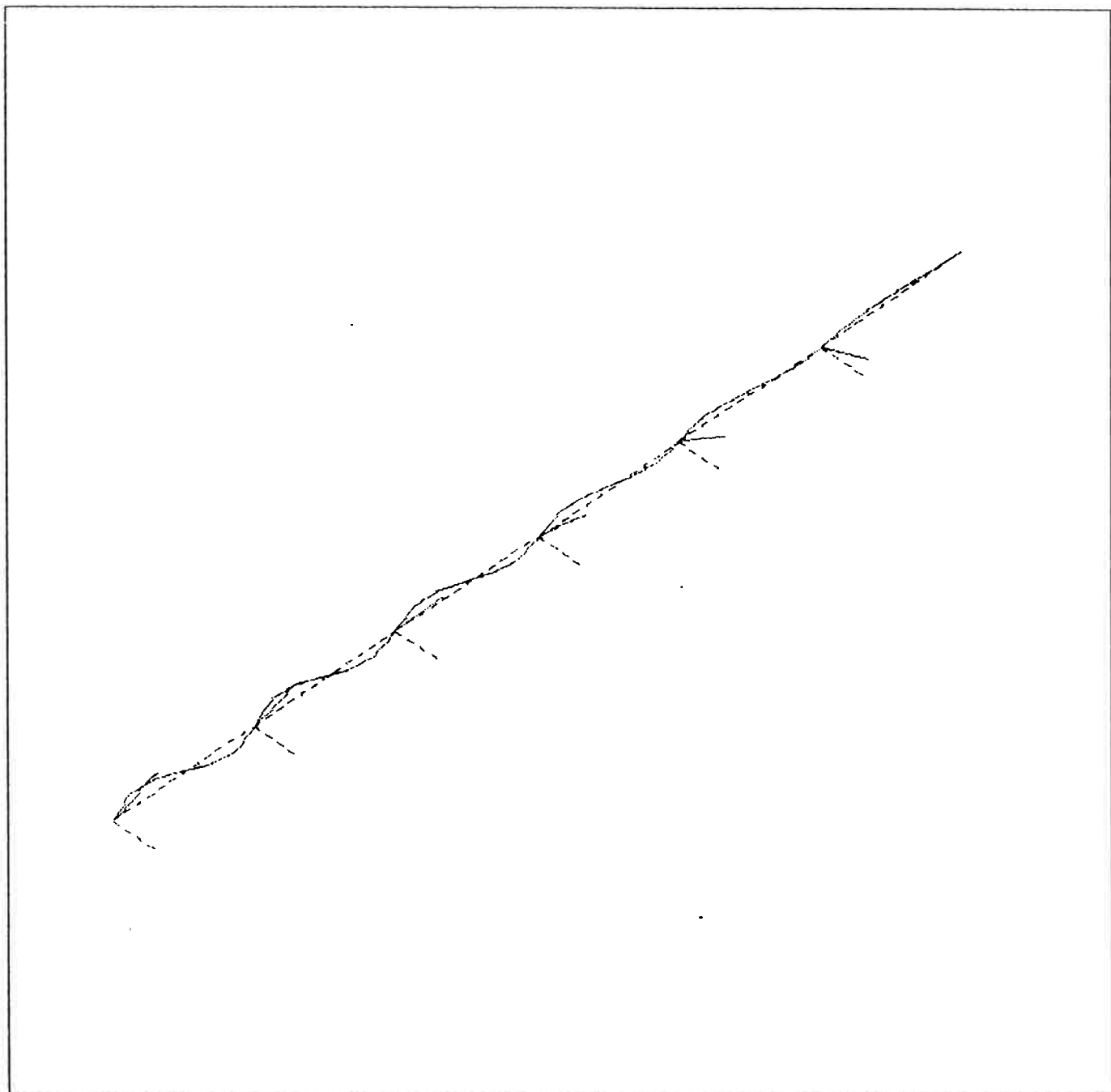


Figura 4.15 - Modo Torcional de Vibração de Perfil C com malha grossa ($f=3,953$ Hz)

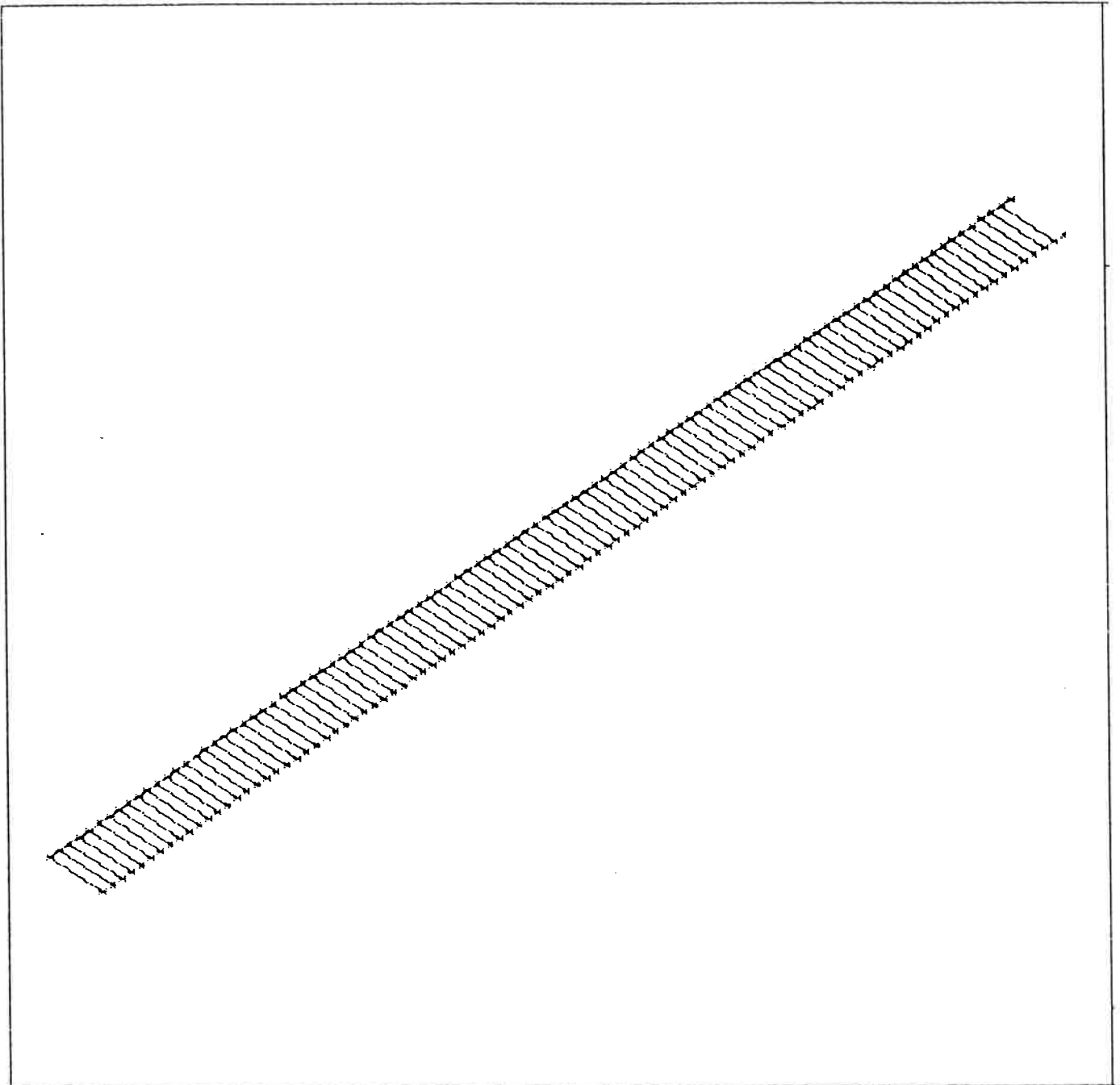


Figura 4.16 - Modelo de perfil C com elementos de viga e barras auxiliares (malha refinada)

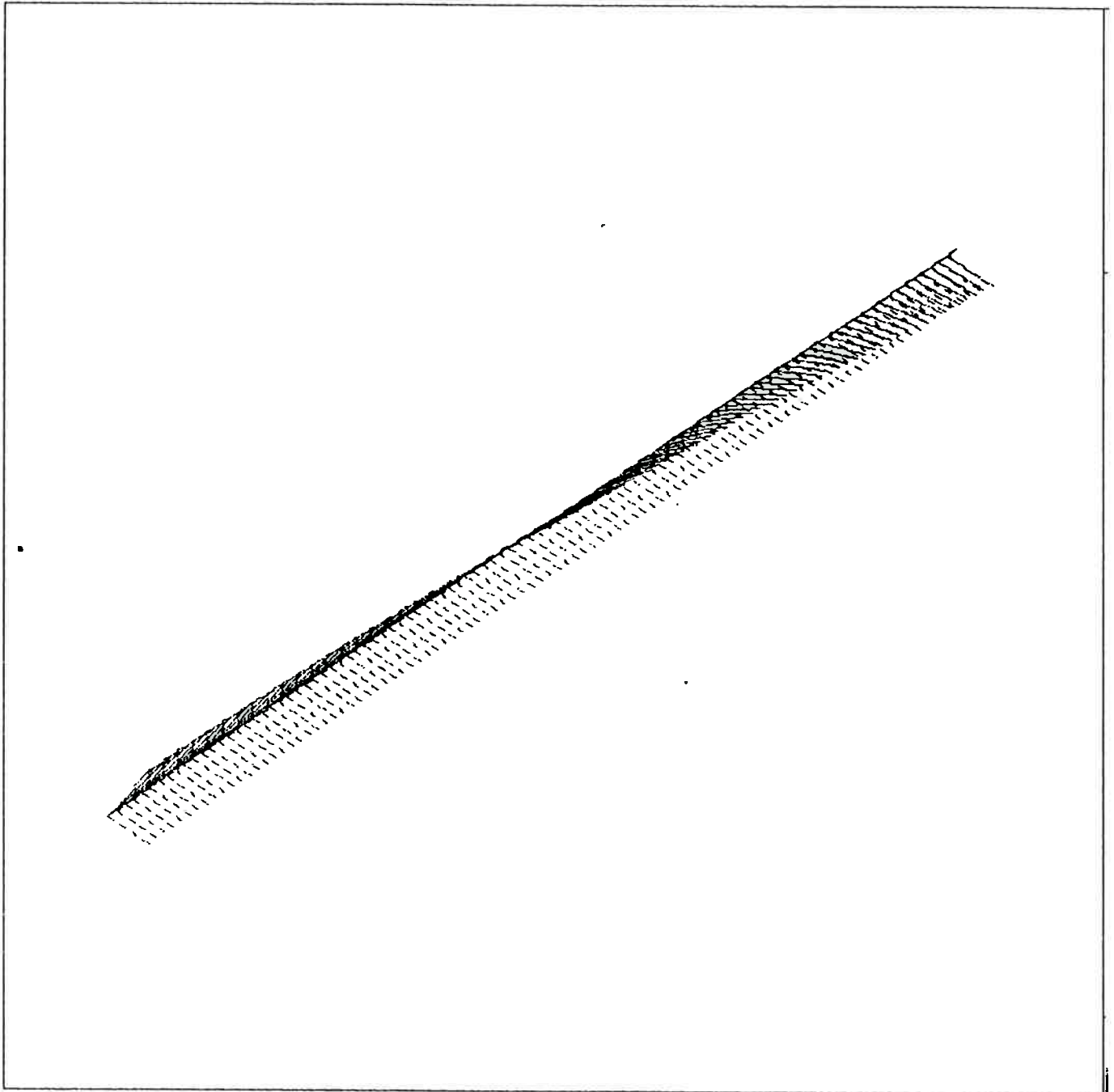


Figura 4.17 - Modo torcional de vibração de perfil C com malha refinada ($f = 4,272$ Hz)

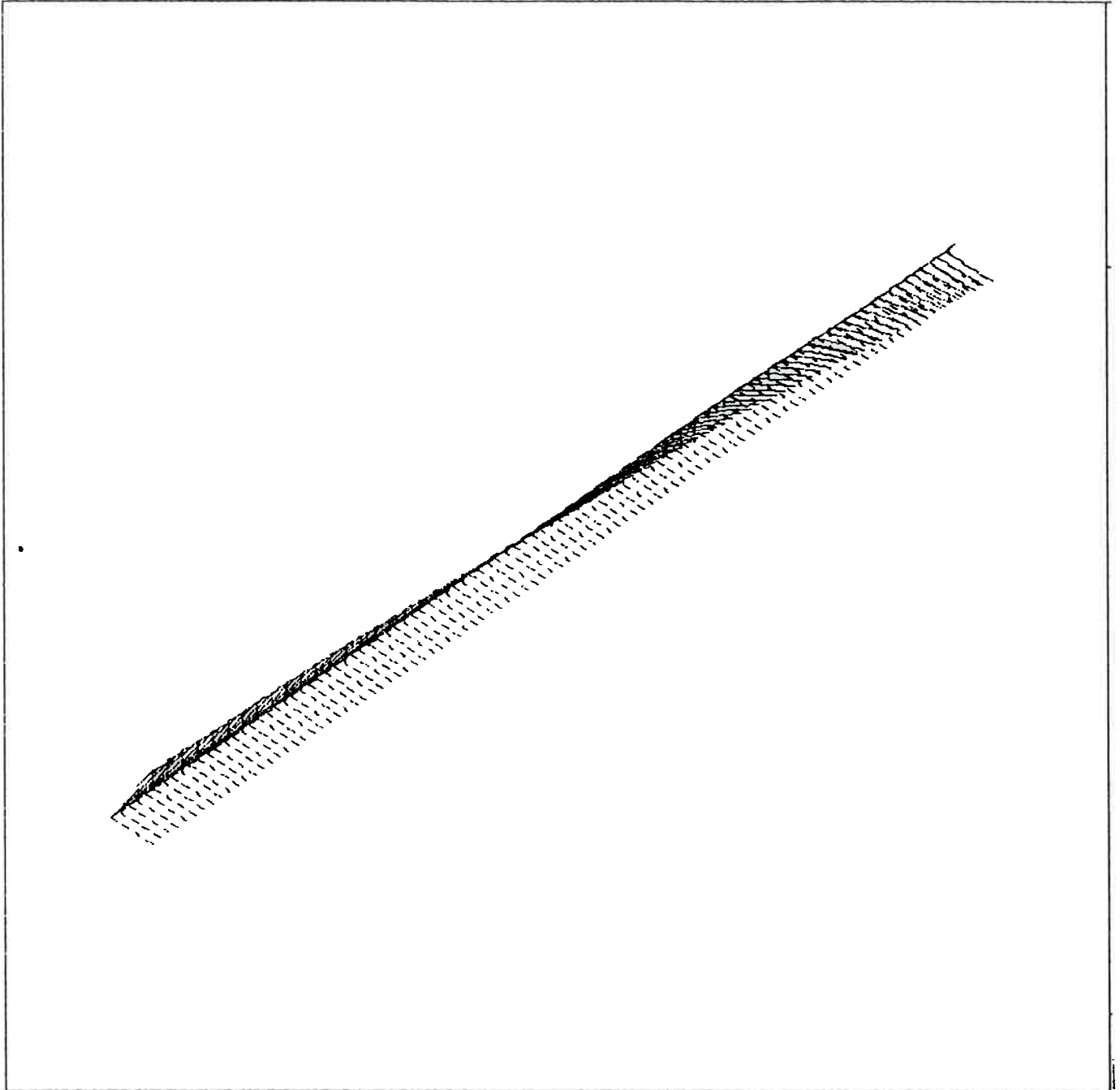


Figura 4.17 - Modo torcional de vibração de perfil C com malha refinada ($f = 4,272$ Hz)

4.4 EFEITO DA RIGIDEZ AO EMPENAMENTO. TORÇÃO DE VLASOV E TORÇÃO DE SAINT-VENANT

4.4.1 - Introdução

Nos apêndices A a C foram analisados os aspectos conceituais e aplicações da Teoria de Vlasov para a Flexo-Torção. A “torção ordinária” (Torção de Saint-Venant) é bem conhecida para a maior parte dos projetistas e normalmente não causa problemas em projeto. O que são quase completamente desconhecidas para a maior parte dos projetistas, são as tensões secundárias que surgem em decorrência da torção, especialmente em seções abertas, ou em aberturas de seções fechadas. Essas tensões secundárias são freqüentemente muito altas e cruciais na determinação da resistência de uma junta, como já foi determinado no Apêndice B. A rigidez ao empenamento, responsável pelos fatos acima expostos, tem implicações também na determinação dos modos e freqüências flexo-torcionais em um perfil aberto de paredes delgadas.

As equações (2.31) e (A.3) descreveram o comportamento da viga sob ação de um momento torçor $M_x = M_{tt}$, com componentes M_{tu} e M_{ft} , onde:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{tt} = M_x = M_{tu} + M_{ft} \\ M_{tt} = M_x = G \cdot I_t \cdot \frac{d\theta}{dx} - E \cdot I_w \cdot \frac{d^3\theta}{dx^3} \end{array} \right. \quad (\text{A.3})$$

A equação anterior foi aplicada no estudo estático da flexo-torção, bem como na introdução das vibrações flexo-torcionais considerando o Princípio d'Alembert em 2.3.3. No estudo de perfis abertos de paredes delgadas (3) considera-se o parâmetro λ , definido por:

$$\lambda = \sqrt{\frac{G \cdot J}{E \cdot I_w}} \cdot l$$

onde:

J - momento de Inércia à torção de Saint Venant;

I_w - momento de inércia Sectorial;

G - módulo de elasticidade em cisalhamento;

E - módulo de elasticidade;

l - comprimento da viga;

Akesson (7) recomenda os seguintes limites para aplicação da equação (A.3) :

- a equação $M_x = M_{tw} = G.I_t \cdot \frac{d\theta}{dx}$

(somente torção de Saint-Venant), pode ser assumida quando $\lambda \geq 15$

- a equação $M_x = M_{ft} = -E.I_w \cdot \frac{d^3\theta}{dx^3}$

(aplicação somente da torção de Vlasov), considerando portanto a rigidez ao empenamento, pode ser assumida quando $\lambda < 0,7$.

- a equação $M_x = M_{tt} = G.I_t \cdot \frac{d\theta}{dx} - E.I_w \cdot \frac{d^3\theta}{dx^3}$

ou seja, a torção levando em conta os dois casos anteriores, chamado de torção mista, pode ser assumida quando $0,7 < \lambda < 15$.

Os limites anteriormente recomendados, serão também aplicados na Análise Dinâmica, considerando-se as forças de inércia.

4.4.2 Influência de λ nas vibrações flexo-torcionais

O parâmetro λ introduzido em 4.4.1, permite-nos avaliar os limites para aplicação da equação (A.3) no estudo das vibrações flexo-torcionais, por intermédio dos modelos em elementos finitos de casca, modelo híbrido considerando a analogia Flexão-Retorção e modelo em elementos de viga convencionais. Foram considerados alguns exemplos de perfis C, e em função das suas propriedades geométricas foram

determinados os parâmetros λ . Para cada caso procedeu-se a determinação das frequências flexo-torcionais, utilizando os 3 modelos de análise citados anteriormente.

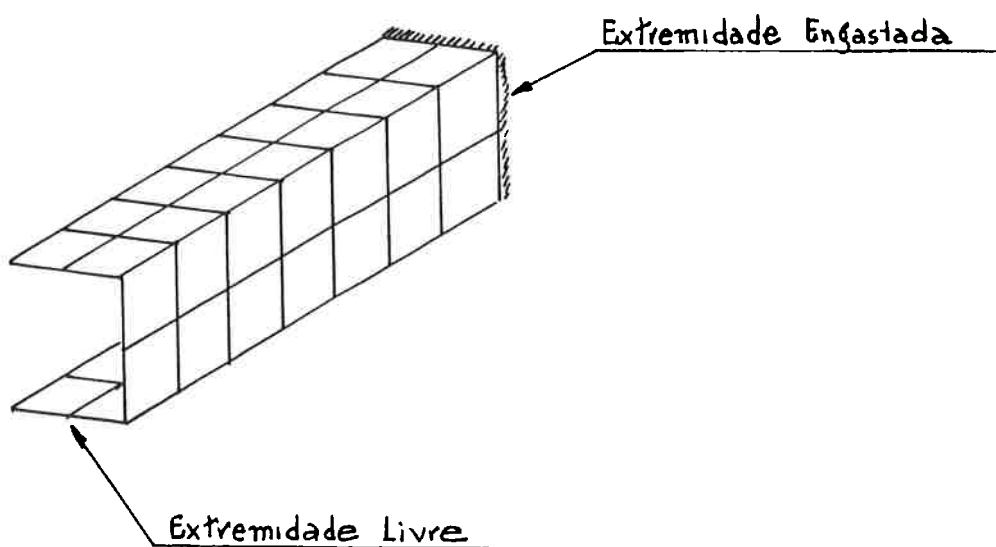
Os resultados dessas análises encontram-se na Tabela 4.4. Analisando os valores de frequências torcionais calculadas, podemos observar que para valores pequenos de λ , característicos da torção de Vlasov ($\lambda < 0,7$), o modelo em elementos de viga convencionais apresenta resultados bastante diferentes daqueles calculados pelo modelo em elementos de casca e pelo modelo híbrido. Nessa faixa de λ , a rigidez ao empenamento representa parcela importante da rigidez da viga na torção, não sendo bem representada pelo elemento de viga. À medida que são considerados valores de λ que correspondem a uma maior participação da torção de Saint-Venant na torção mista ($\lambda > 0,7$), os desvios observados nos cálculos de frequências tendem a ser menores. Deve-se observar também nos exemplos anteriores, que além das faixas de λ consideradas, outro fator importante está presente: a restrição ao empenamento na extremidade engastada. A restrição ao empenamento passa a ser mais relevante para os modos torcionais, nos modelos que incorporam a rigidez ao empenamento, que são os casos dos modelos em cascas e híbrido. No item 4.4.2. é considerado o comportamento de um perfil aberto de paredes

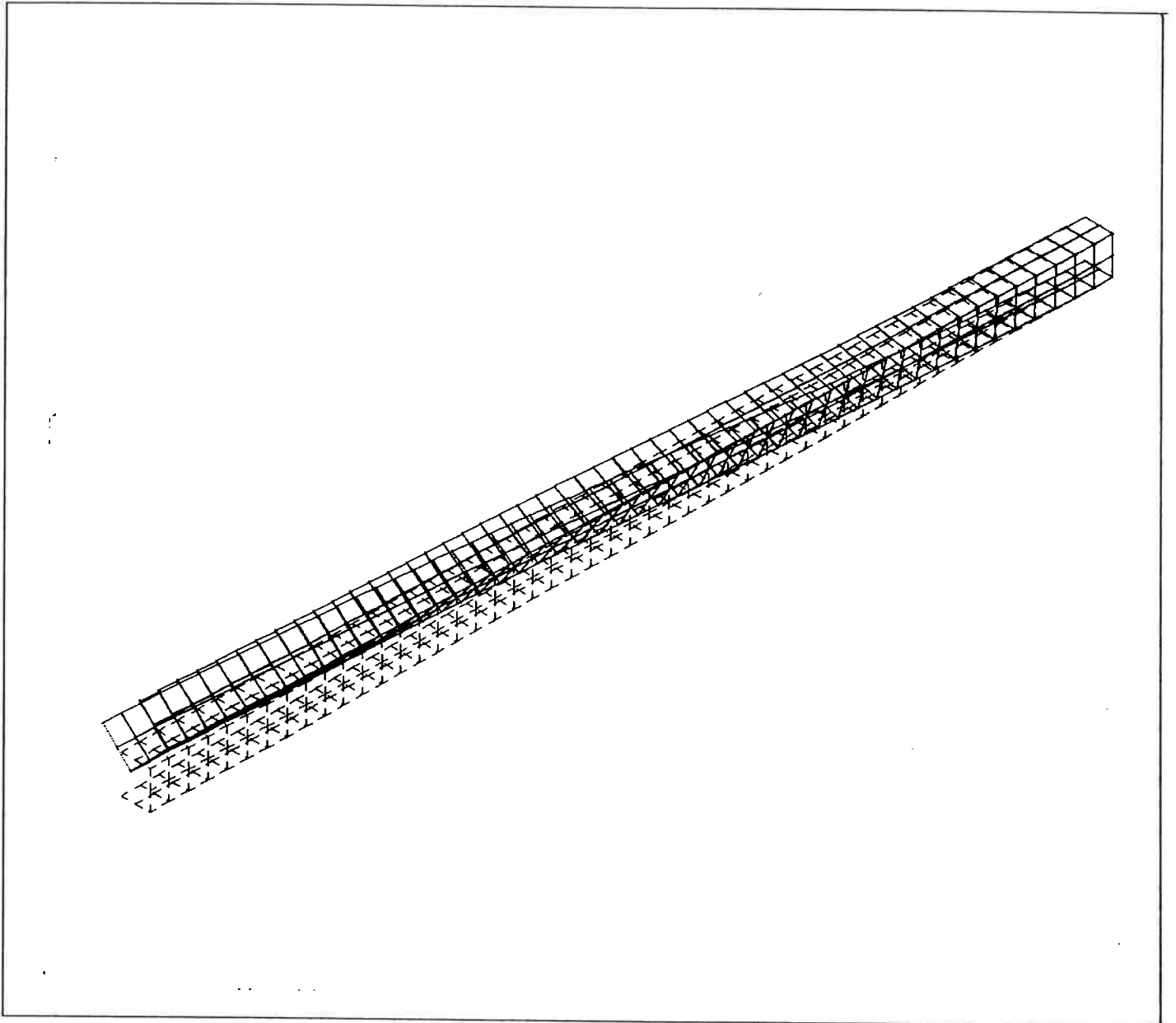
delgadas engastado em uma extremidade e livre na outra, com posterior enrijecimento da extremidade livre. O aumento da restrição ao empenamento na extremidade livre altera acentuadamente o comportamento à flexo-torção, como veremos em seguida. Embora o exemplo seja apresentado estaticamente, pretende-se mostrar que para um valor definido de λ característico da torção de Vlasov, as condições de extremidade quanto ao empenamento são determinantes no comportamento do perfil.

Tabela 4.4 Influência de λ nas Vibrações Flexo-Torcionais

Perfil C	Comprimento l (m)	$\lambda = \sqrt{\frac{G.J}{E.I_w}} \cdot l$	FREQÜÊNCIA (Hz) DAS VIBRAÇÕES FLEXO-TORCIONAIS PELO MEF		
			Cascas	Híbrido	Vigas
I - 200mm x 150mm x 1mm	2	0,172	17,15	21,98	1,98
II - 200mm x 150mm x 2mm	2	0,343	20,15	22,27	3,96
III - 200mm x 150mm x 3mm	2	0,515	21,67	22,75	5,95
IV - 200mm x 150mm x 5mm	2	0,859	24,83	24,16	9,91
V - 200mm x 150mm x 10mm	2	1,71	33,70	28,95	19,82
VI - 200mm x 150mm x 10mm	5	4,29	10,02	7,03	6,24
VII - 200mm x 150mm x 10mm	10	8,55	4,35	2,75	2,08
VIII - 200mm x 150mm x 10mm	15	12,8	2,73	1,81	1,00

Vibração de Perfil C engastado em uma extremidade e livre na outra extremidade





*Figura 4.18 - Vibração de perfil C 200mm x 150mm x 10mm
(L= 5m) - Modelo em elemento de casca*

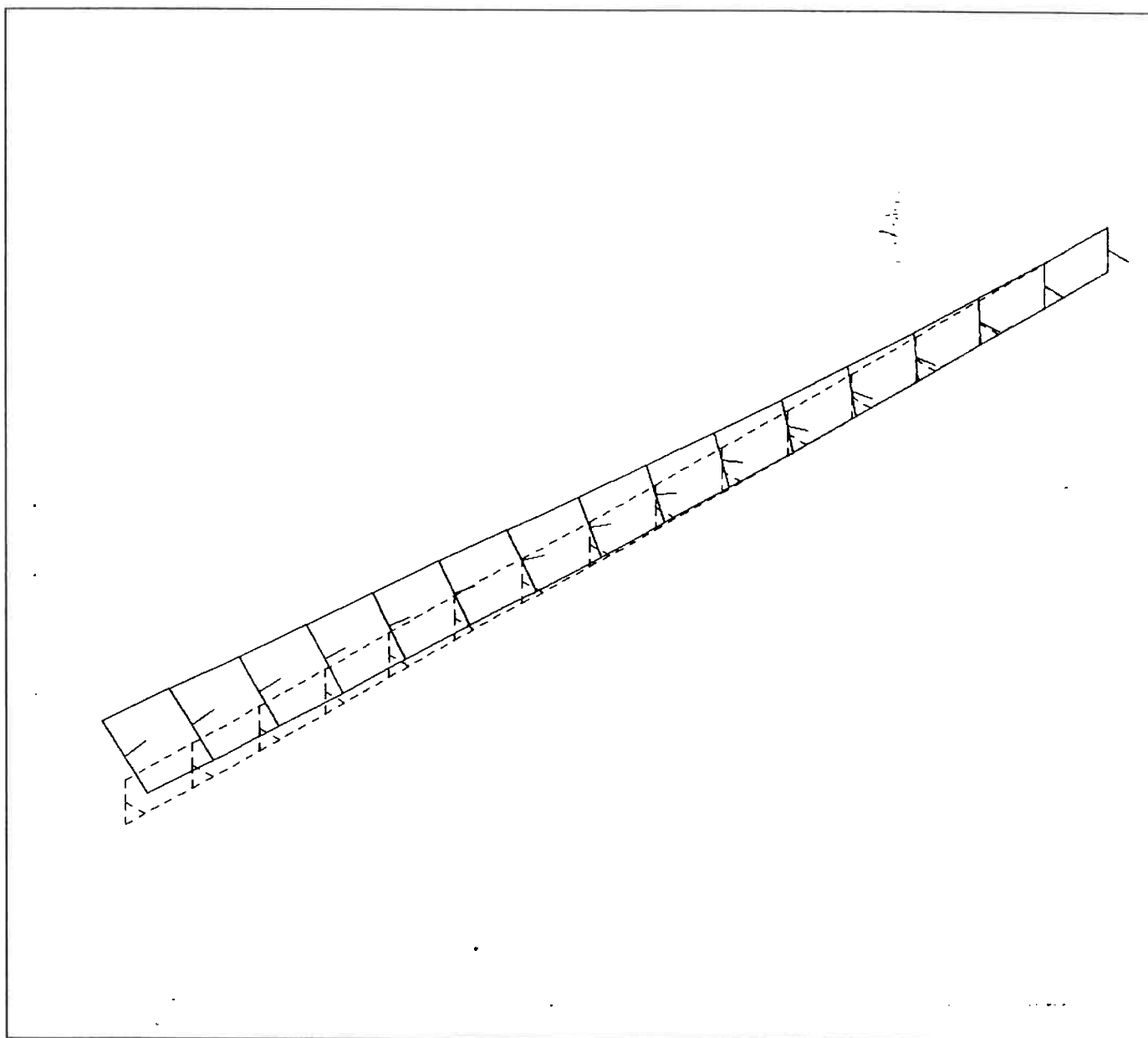


Figura 4.19 - Vibração de perfil C 200mm x 150mm x 10mm
(L= 5m) - Modelo híbrido

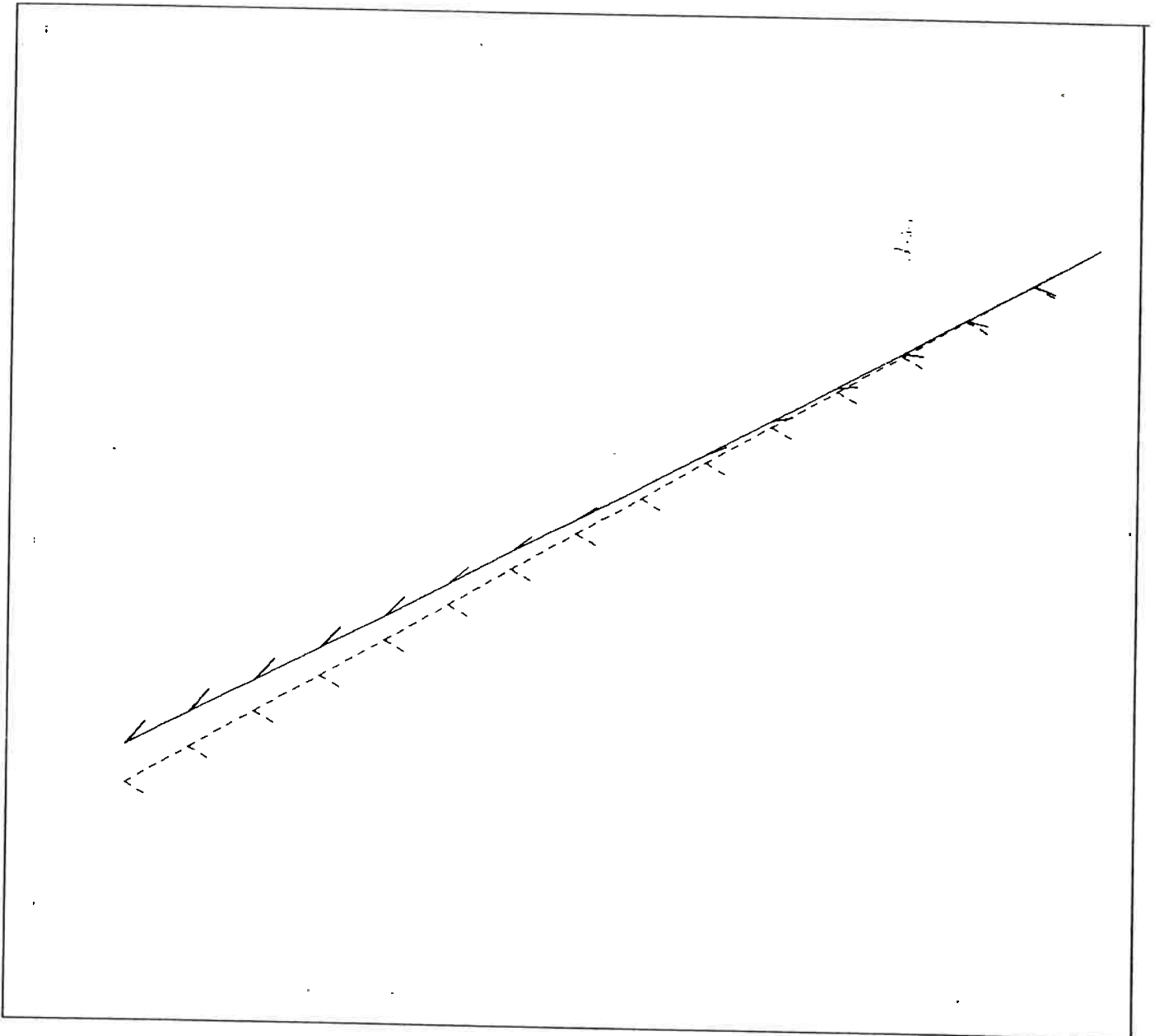


Figura 4.20 - Vibração de perfil C 200mm x 150mm x 10mm
(L= 5m) - Modelo em elemento de viga

4.4.3 - Considerações Adicionais à Analogia Flexão-Retorção

Na conceituação da analogia flexão-retorção no Apêndice B, foram introduzidas duas condições opostas em relação à rigidez à torção das vigas verticais V do modelo, segundo a Figura B.7. Quando a extremidade da viga era livre para empenar, a rigidez torcional do elemento V do modelo foi considerada nula; quando a extremidade da viga era impedida de empenar a rigidez torcional do elemento V foi considerada infinita. Entretanto, em muitas situações práticas, a restrição ao empenamento na extremidade de uma viga situa-se em uma condição intermediária entre a liberdade total ao empenamento e a restrição total ao empenamento. Com a finalidade de investigar esse efeito, procedeu-se a análise da viga considerada no ítem B.4.2.2 do Apêndice B pelo método dos elementos finitos, introduzindo-se alterações em sua extremidade livre, aumentando sua restrição ao empenamento. A viga foi reforçada por intermédio do fechamento de sua extremidade livre de acordo com a Figura 4.21; o empenamento dos flanges do perfil estará associado à rigidez à rotação da caixa de reforço na extremidade livre, como indica a Figura 4.22. A viga reforçada foi analisada pelo Método dos Elementos Finitos, sendo modelada por 820 elementos discretos de casca, definidos por intermédio de 918 pontos nodais, como é representado nas Figuras 4.23 e 4.24. Utilizando-se a Analogia Flexão-Retorção, a mesma viga foi analisada pelo método dos elementos finitos, tal como no ítem B.4.2.3 do Apêndice B,

utilizando-se porém, para o elemento de viga nº 3 da Figura B.16 do Apêndice B, $I_t = 743 \text{ cm}^4$, que corresponde ao momento de inércia à torção da caixa representada na Figura 4.22 (corte B-B), como já explicado anteriormente.

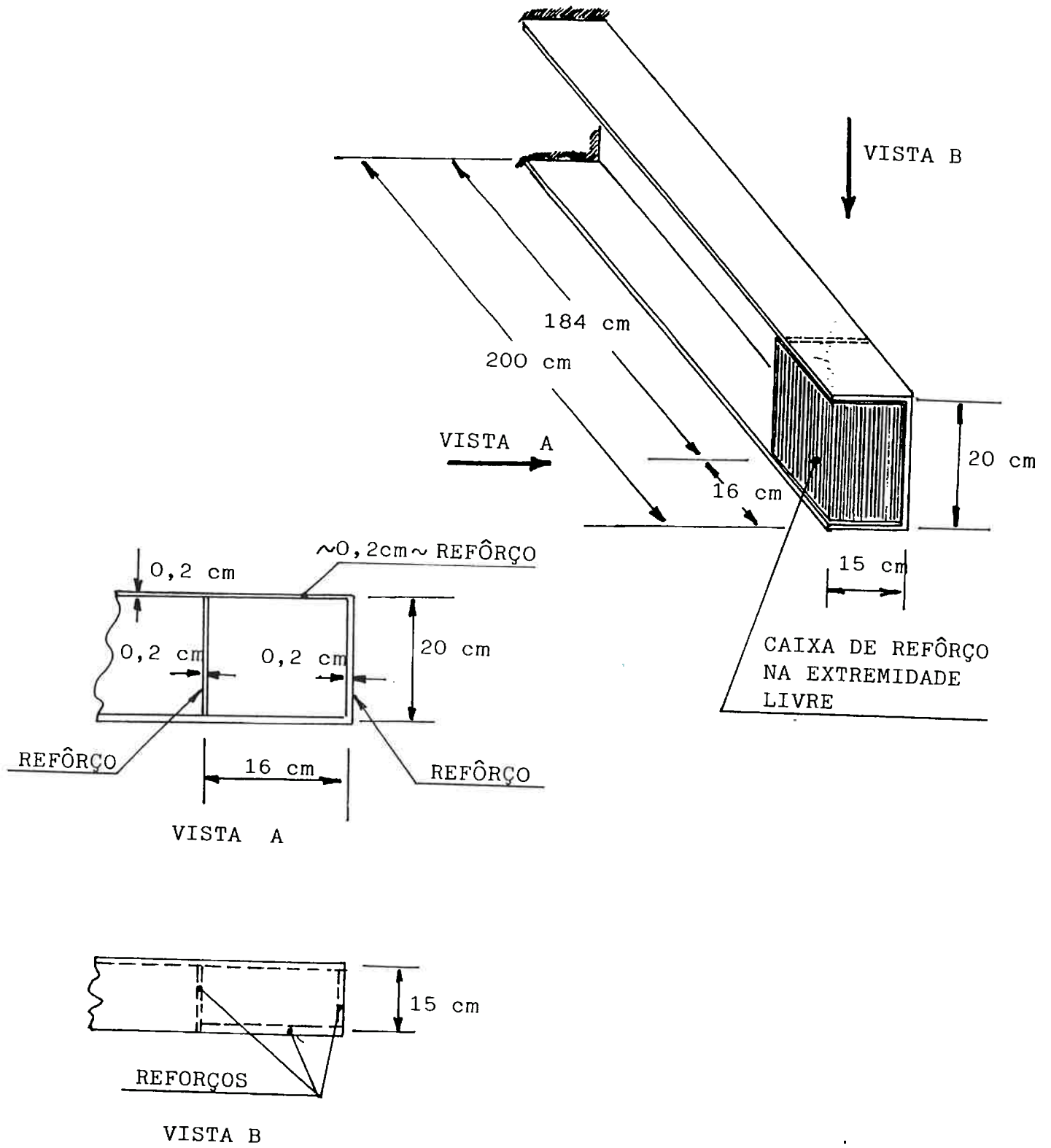


Figura 4.21 - Viga de paredes delgadas com fechamento da extremidade livre

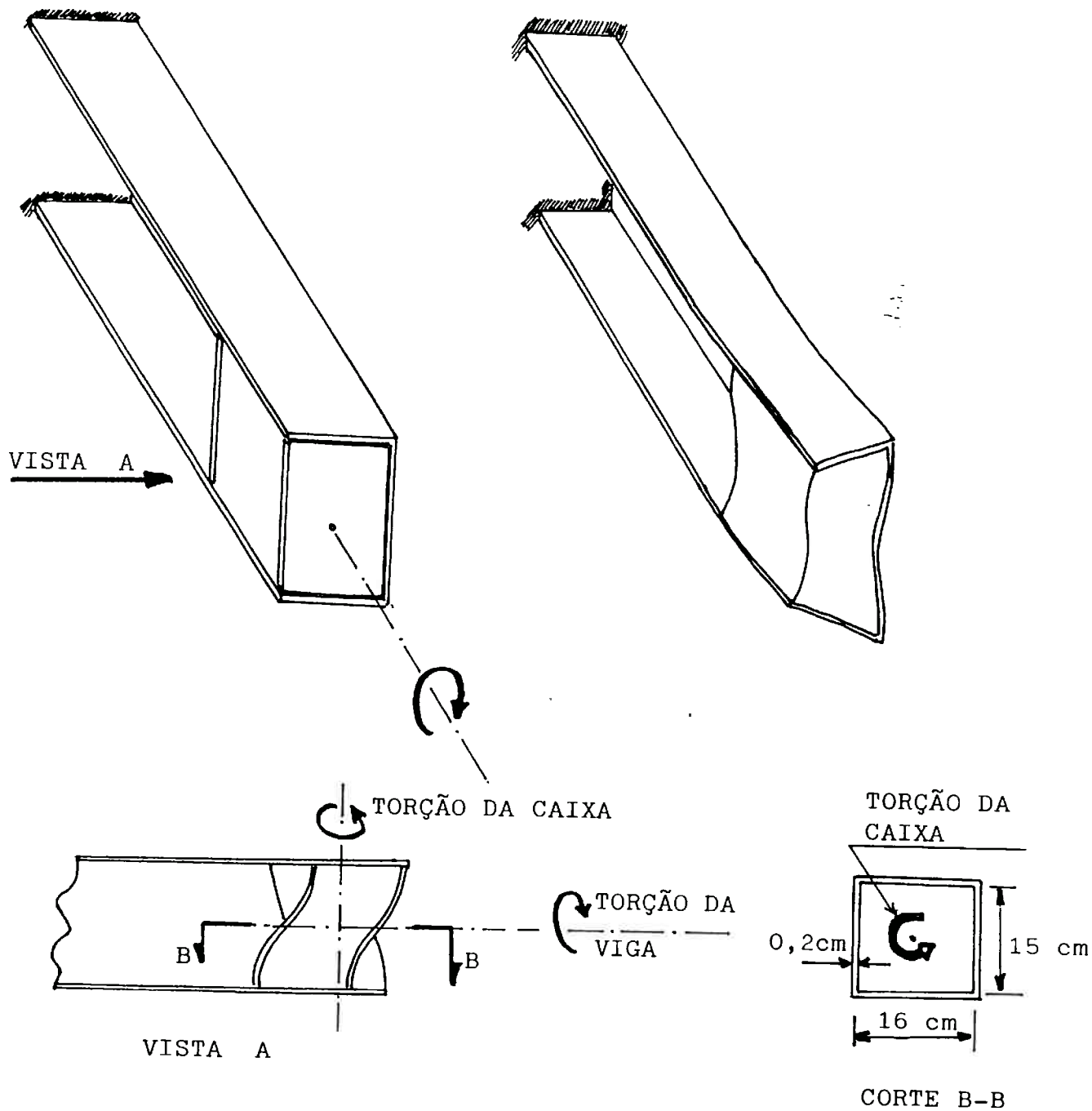


Figura 4.22 - Empenamento da viga de paredes finas com caixa de reforço em extremidade livre

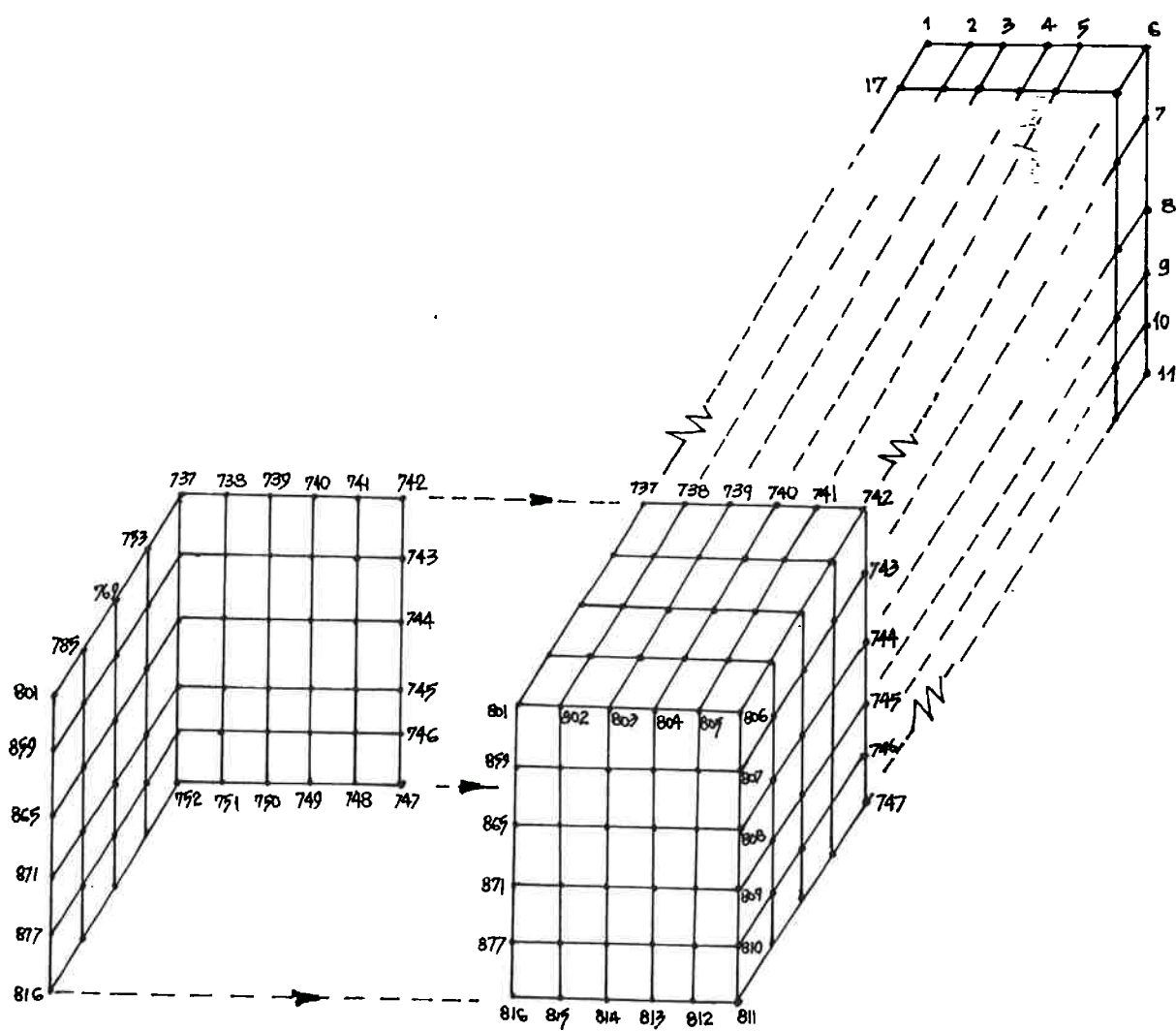


Figura 4.23 - Discretização da caixa de reforço da viga de paredes delgadas

4.29

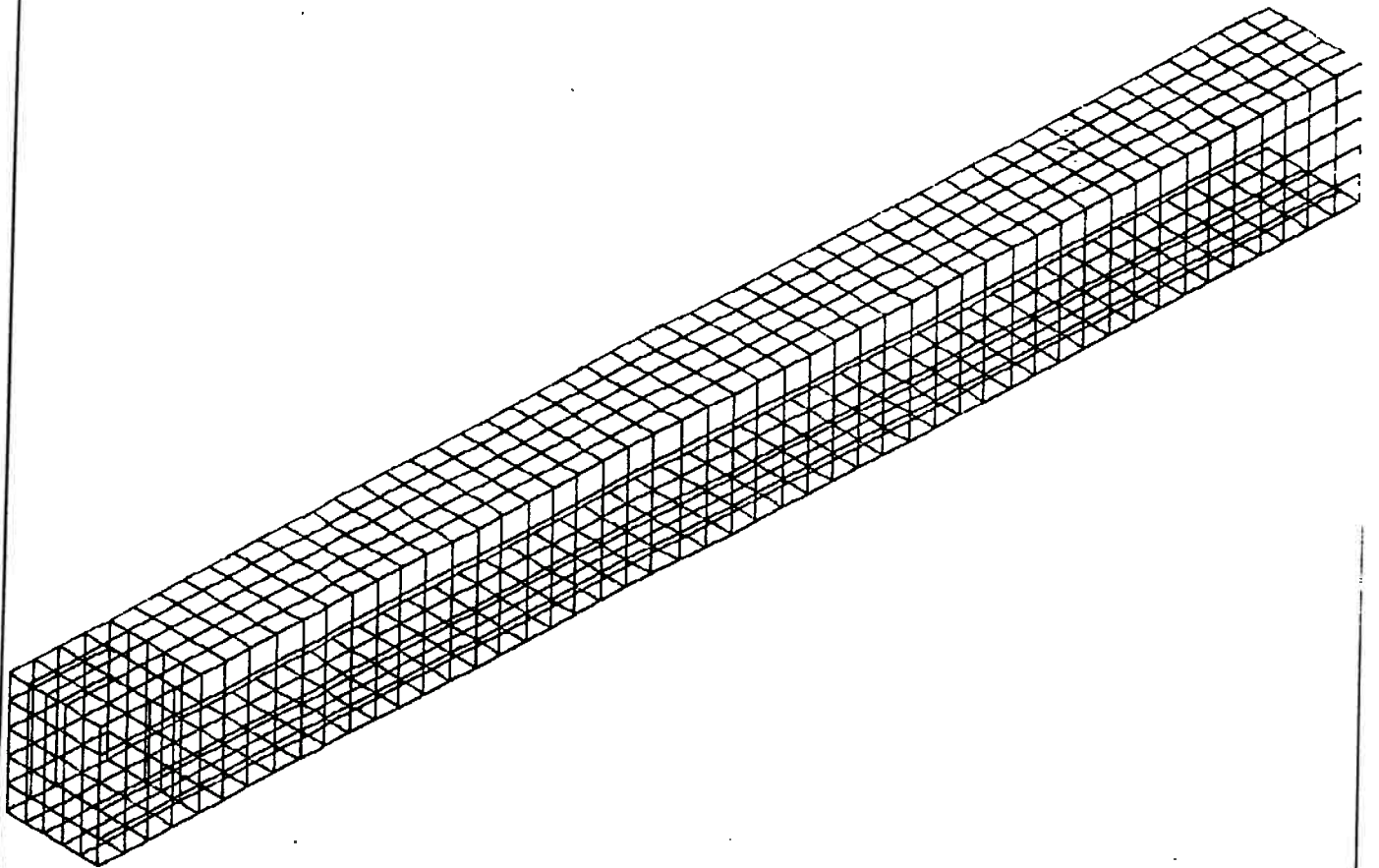


Figura 4.24 - Vista geral do modelo estrutural com reforço

A Figura 4.25 representa as tensões normais no contorno da seção transversal da viga, para a região do engastamento e para a região de extremidade que corresponde a transição entre o perfil aberto e a caixa de reforço; são estabelecidas as comparações entre os valores calculados pelo MEF (casca) e pela Analogia Flexão-Retorção.

Portanto, a introdução do reforço na extremidade livre da viga, implicou no aparecimento de tensões normais nessa extremidade, o que não ocorria anteriormente quando a liberdade ao empenamento era total. Este resultado sugere que, em aplicações práticas, a rigidez à torção das vigas V da Analogia Flexão-Retorção deve ser calculada a partir da rigidez à torção da ligação de extremidade da viga. Quando esta extremidade constituir uma ligação na forma de caixa, a repercussão deste reforço deverá ser significativa na resposta, em consequência da elevada rigidez à torção do perfil fechado.

Assim, além das características geométricas definidas pelo parâmetro λ , as condições de restrição ao empenamento desempenham importante papel no fenômeno de flexo-torção. Como o problema dinâmico é considerado como um problema estático com forças de inércia adicionadas às forças elásticas da viga, pelo princípio d'Alembert, essas observações estendem-se aos estudos dinâmicos, como já comentado no item anterior.

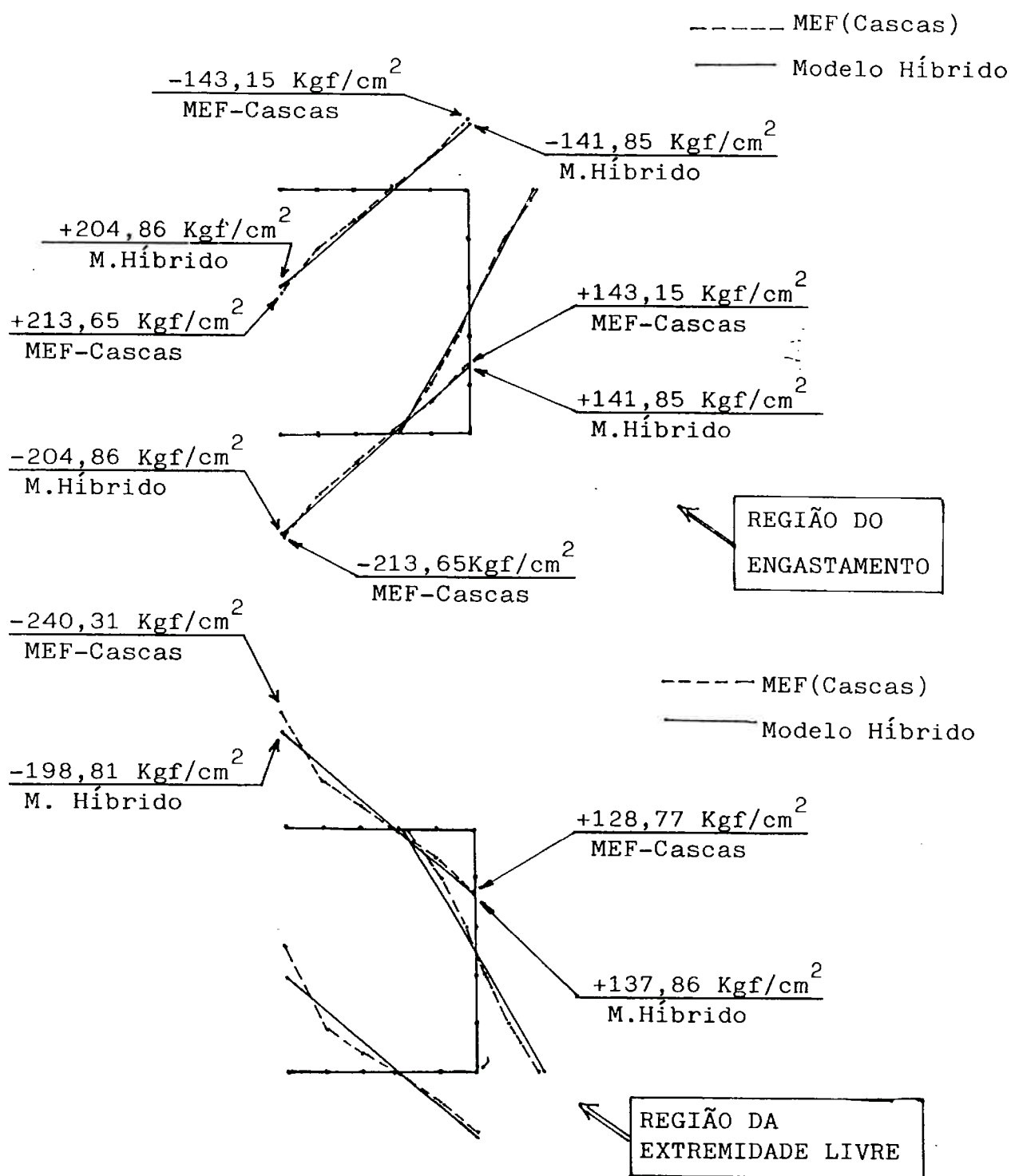


Figura 4.25 - Tensões normais na viga com extremidade livre reforçada

4.4.4 - Aplicação dos Conceitos Anteriores

Os conceitos anteriores abordados estática e dinamicamente, para perfis abertos de paredes delgadas, aplicam-se também a caixas estruturais cujas dimensões globais e espessuras de paredes possam ser assimiladas primariamente ao comportamento estrutural de vigas de paredes delgadas, como por exemplo o caso da viga navio com grandes aberturas e sujeitas a vibrações torcionais ou torção estática.

Tais estruturas constituem uma casca prismática longa, que são enfraquecidas por aberturas consideravelmente longas na direção do comprimento da casca. Essas cascas são normalmente restringidas ao empenamento por intermédio de fechamentos e anteparas, que aumentam consideravelmente a rigidez torcional fora das aberturas, como a fuselagem de um avião ou o corpo de um navio, já mencionado acima.

A Figura 4.26 ilustra um caso dos exemplos acima citados.

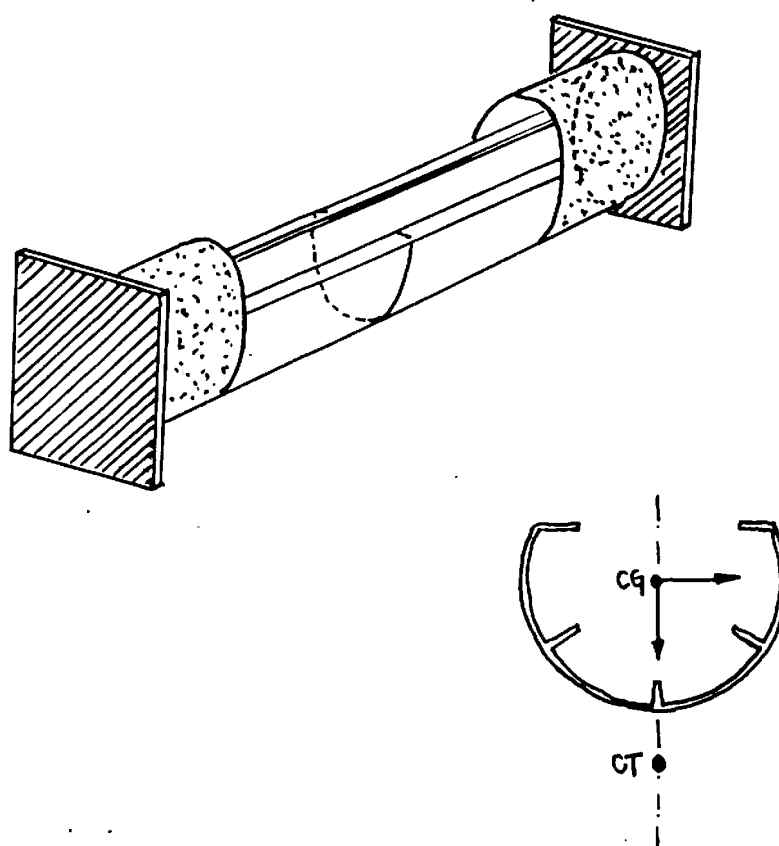


Figura 4.26 - Trecho de casca prismática com grande abertura e com grande restrição ao empenamento nas extremidades, como na Viga-Navio

4.5 ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS CONSTITUÍDAS POR DIVERSOS PERFIS ABERTOS DE PAREDES DELGADAS. ESTRUTURAS TIPO "CHASSI

4.5.1 - Introdução

A Análise Dinâmica de estruturas constituídas por diversos perfis abertos de paredes delgadas, tais como as estruturas "tipo chassi", envolve além dos conceitos anteriormente discutidos para cada perfil isolado, a interação entre os diversos componentes da mesma. A identificação da vibração torcional global do chassi como um todo, e a participação do modo torcional isolado de cada viga torna-se mais complexo. A restrição ao empenamento das juntas da estrutura pode situar-se entre a condição de liberdade total ao empenamento e a condição de restrição total ao empenamento.

A Figura 4.27.a representa a vibração torcional global de uma estrutura tipo chassi. A longarina AD isoladamente sofre flexão e também está sujeita à torção, onde $\theta_D > \theta_C > \theta_B > \theta_A = 0$. Nesse caso, o cálculo do parâmetro λ é baseado no comprimento $\ell = \overline{AD}$ para as longarinas e $\ell = \overline{DE}$ para as transversais.

A determinação da frequência de vibração torcional global envolve, do ponto de vista físico, as trocas entre energia cinética e potencial, como em qualquer fenômeno vibratório. Na condição de máxima deformação da estrutura como representado na Figura 4.27.a, estarão presentes no cálculo da energia potencial, a parte referente ao modo flexional e torcional da longarina, bem como os modos torcionais das transversais, em primeira instância.

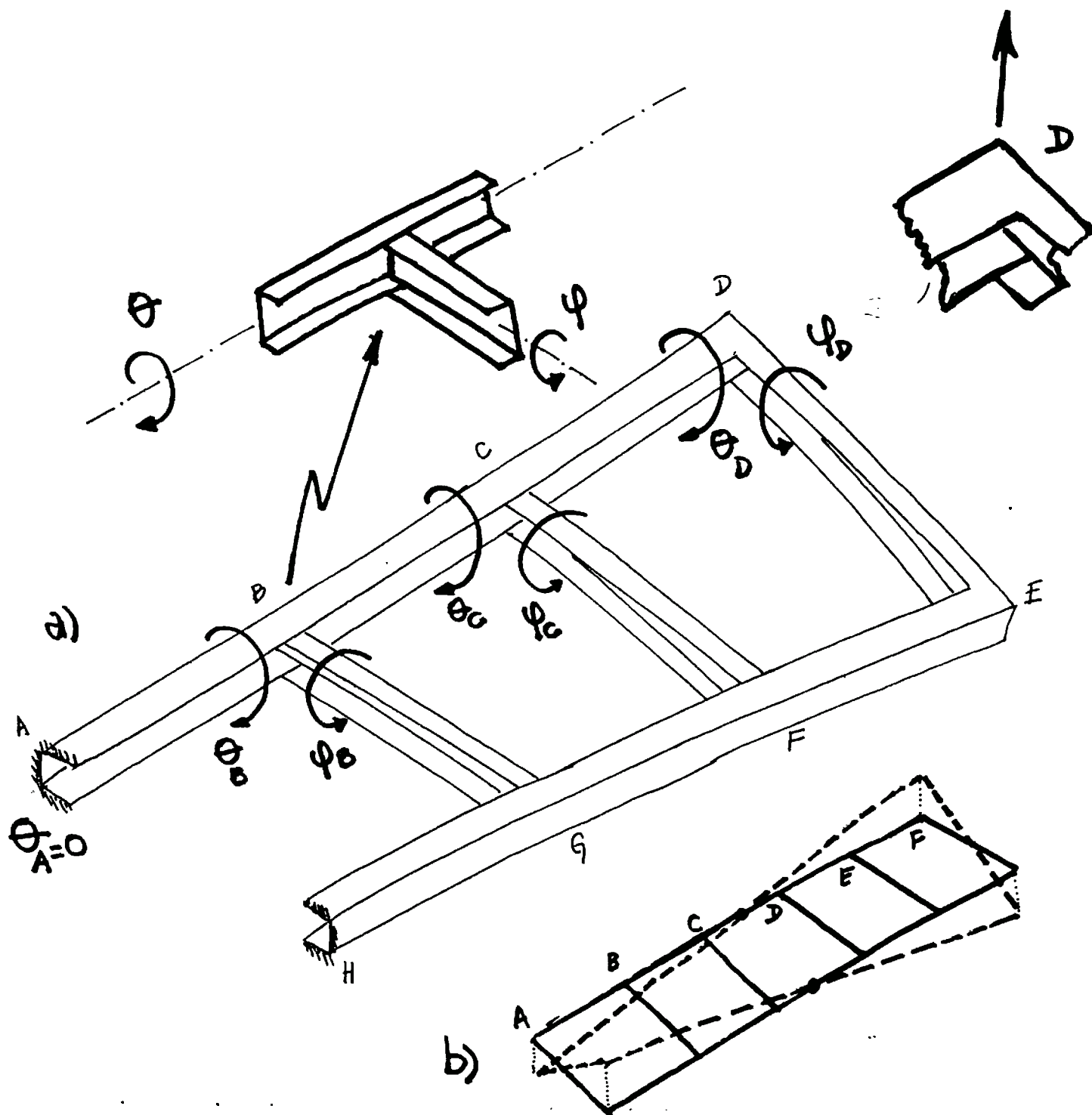


Figura 4.27 - Vibração torcional global de chassi

Em princípio, dois aspectos deveriam ser importantes na determinação do modo torcional global:

- i) Se os componentes individuais da estrutura estão em faixas de λ que correspondem à torção de Vlasov, torção mista ou torção de Saint-Venant.
- ii) Identificado o tipo de torção de um elemento individual da estrutura, na torção global - a longarina caracterizada pelo ângulo θ e as transversais por φ - resta saber se a contribuição das torções individuais na energia potencial é significativa. Em caso afirmativo, em se tratando da torção de Vlasov, a determinação acurada dessas frequências só poderia ser efetuada pelos modelos de cálculo que considerassem a rigidez ao empenamento, isto é, o Modelo em Elementos Finitos de casca e o modelo que considera a Analogia Flexão-Retorção.

O desenvolvimento analítico a partir das equações diferenciais das vibrações de perfis abertos de paredes delgadas, para o caso de uma estrutura constituída por vários perfis, torna-se bem mais complexo que o estudo teórico desenvolvido no capítulo 2, e foge aos objetivos deste trabalho. A determinação dos modos e frequências naturais de vibração para este caso, será efetuada estendendo-se as hipóteses de modelagem

de cada viga pela Analogia Flexão-Retorção, para a Composição do Modelo Global da estrutura, tal como foi efetuado para a Análise Estática de um chassi em B.5.2.2, adicionando-se em cada trecho de viga a massa da estrutura com a respectiva excentricidade entre o Centro de Torção e o centro de massa, como já efetuado para um perfil isolado. A Figura 4.28 representa o modelo híbrido de uma estrutura tipo chassi, incorporando a excentricidade de massa para aplicação em Análise Dinâmica. Dessa forma, para uma estrutura desse tipo, poderão ser estabelecidas comparações entre as frequências torcionais globais obtidas pelos modelos em cascas, modelo híbrido e modelo em elementos de viga, que serão efetuadas em seguida.

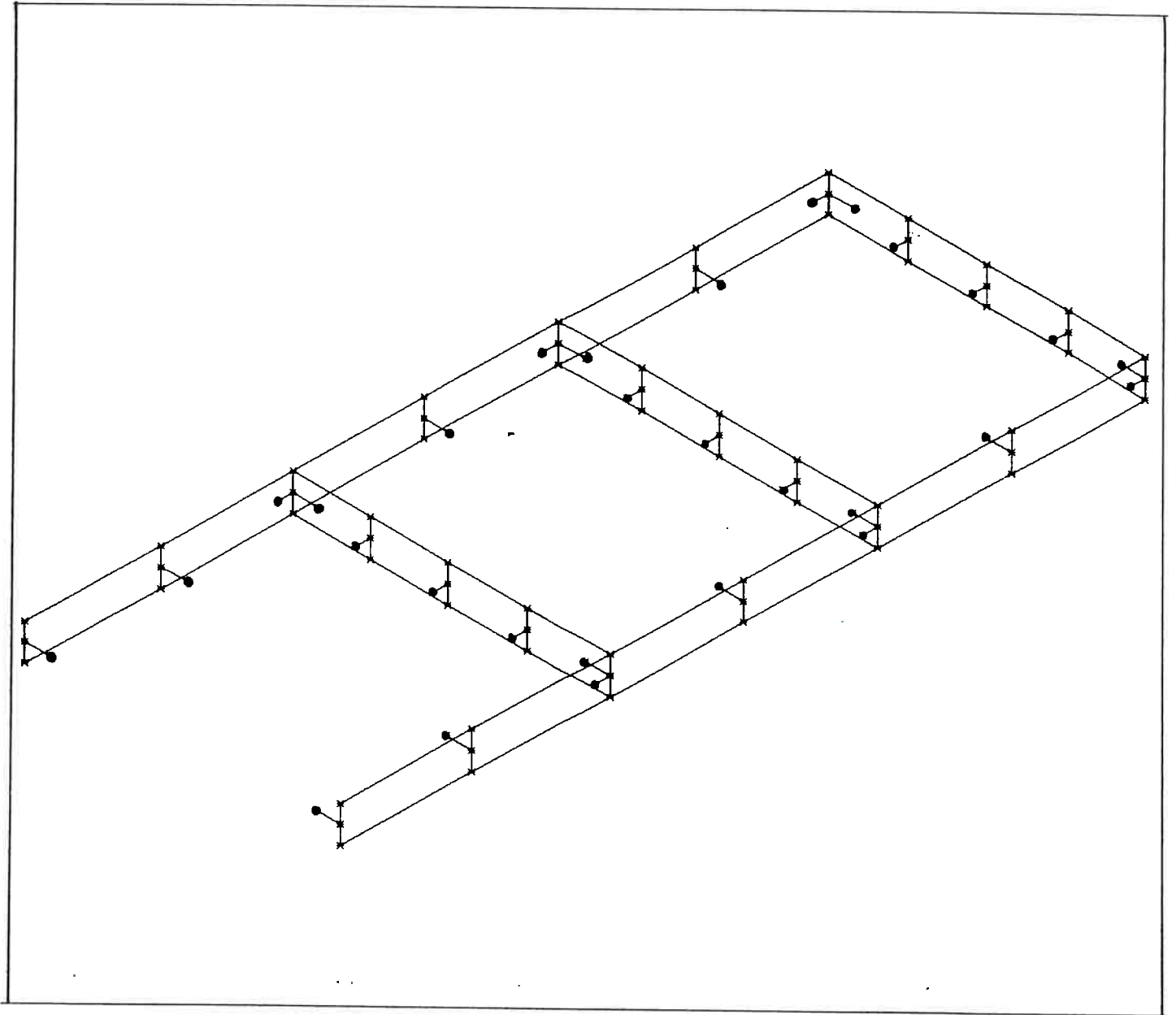


Figura 4.28 - Modelo híbrido para Análise Dinâmica de estrutura tipo chassi

4.5.2 - Exemplos

Foram processados alguns exemplos de estruturas "tipo chassi" de veículos, calculando-se os modos e frequências torcionais por intermédio do Modelo em Elementos de Casca, Modelo em Elementos de Viga e "Modelo Híbrido" considerando a Analogia Flexão-Retorção. Com a finalidade de se identificar a influência do parâmetro λ das longarinas e transversais no modo torcional global, ainda que em caráter preliminar, o estudo foi dividido em 3 casos:

- i) Como exemplo inicial de aplicação, foi considerada a mesma estrutura já estudada estaticamente à flexo-torção, e representada nas Figuras B.18 e B.23. A Tabela 4.5 apresenta os resultados obtidos para essas análises com os três modelos diferentes.

Tabela 4.5 - Frequências torcionais globais para estruturas "Tipo Chassi" - I

	Modelo em Elementos de Casca	"Modelo Híbrido"	Modelo em Elementos de Viga	$\lambda_{\text{Transversal}}$	$\lambda_{\text{Longarina}}$
Frequência Torcional Global (Hz)	14,373	13,377	14,389	0,400	0,613

A representação dos modos torcionais, correspondentes aos três modelos de análise, encontram-se nas Figuras 4.29 a 4.31.

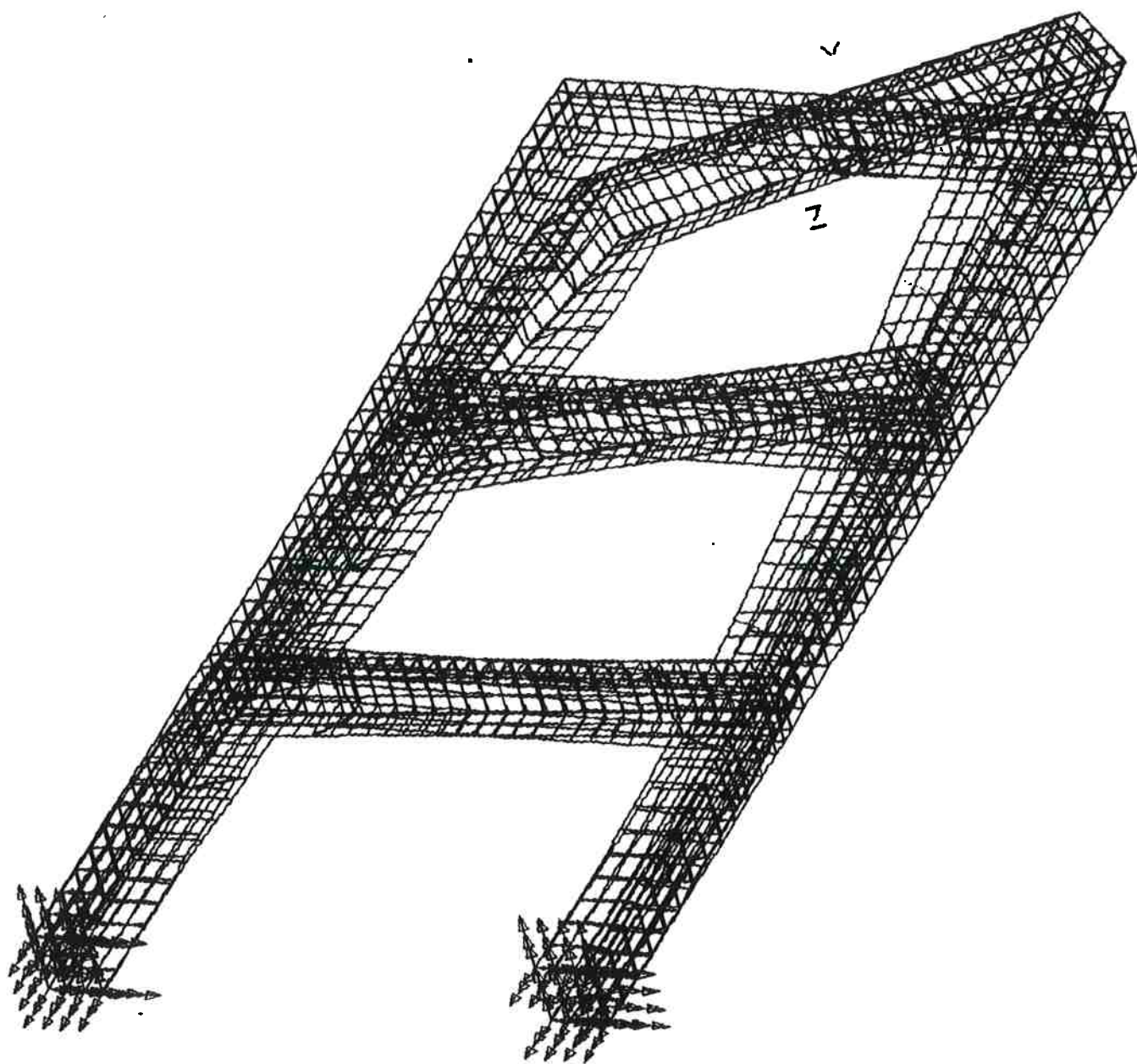


Figura 4.29 - Vibração torcional global de chassi com elementos de casca

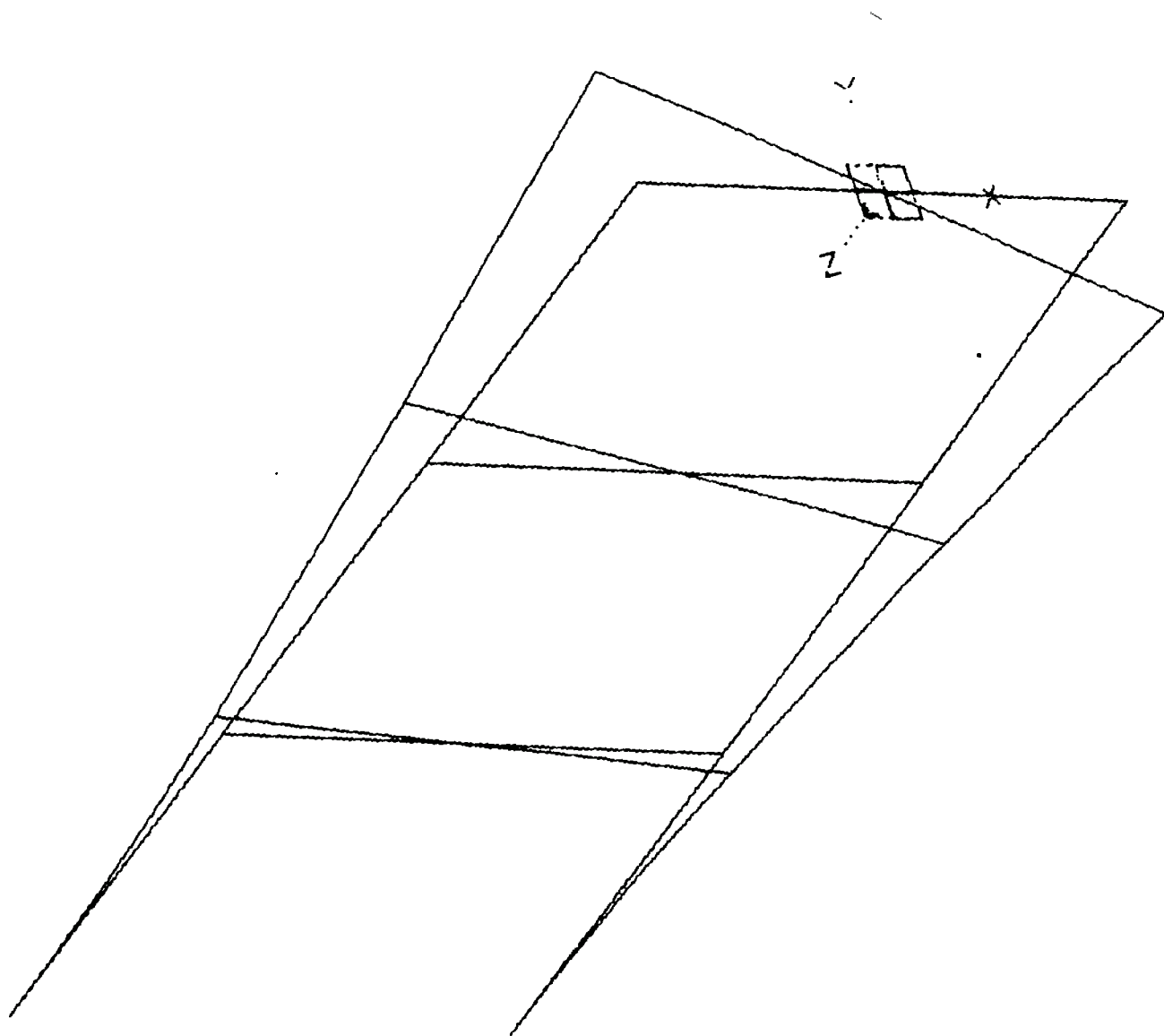


Figura 4.30 - Vibração torcional global de chassi com elementos de viga

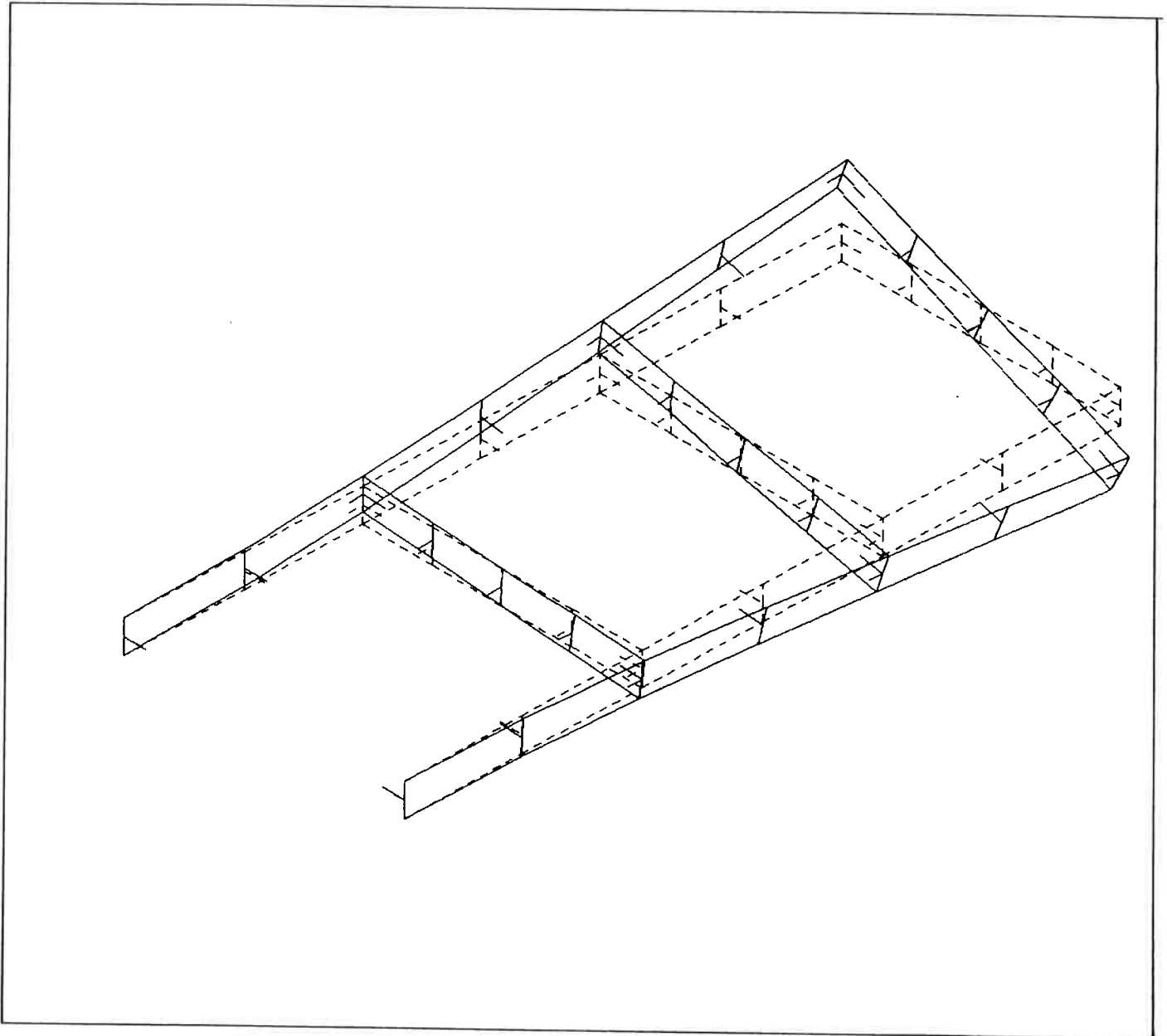


Figura 4.31 - Vibração torcional global de chassi com modelo híbrido

Para este primeiro exemplo, que considera o caso de vibração torcional global da estrutura constituída por diversos perfis abertos de paredes delgadas, observamos que esse modo pôde ser determinado pelos três modelos (Casca, Híbrido e Vigas Convencionais). Embora a freqüência torcional tenha sido acuradamente determinada pelo modelo em vigas e pelo modelo híbrido, ao se confrontar com o modelo em cascas, a aplicação da Analogia Flexão-Retorção na Análise Dinâmica revela-se também importante tal como no exemplo estático; do ponto de vista do cálculo de tensões, vale lembrar que a torção estática global da estrutura gera tensões normais de flexo-torção bastante elevadas na junção entre longarinas e transversais. No modelo em elementos de viga convencionais essas tensões estáticas são nulas, como já discutido no Apêndice B; qualquer excitação que implique em valores elevados de amplificação dinâmica do modo torcional, continuarão a gerar tensões dinâmicas nulas de flexo-torção, pois o fator de amplificação, embora elevado, será multiplicado por zero, que corresponde ao valor da tensão calculada estaticamente para o valor máximo da carga variável. Isso não ocorrerá para o "Modelo Híbrido" em análise dinâmica, pois permitirá determinar a amplificação das tensões de flexo-torção, como já estudado no Apêndice B. Assim, por intermédio da Analogia Flexão-Retorção, podemos determinar a Resposta Estática Global da Estrutura, modos e freqüências de vibração global e Resposta Dinâmica. Obviamente, tais conclusões se estendem ao caso de tensões variáveis com o tempo, com amplificação dinâmica igual a 1 (um),

ii) Como segundo exemplo de aplicação, foi considerada a estrutura com os mesmos perfis anteriores, mantendo-se o comprimento total e reduzindo-se à metade a largura da mesma. O objetivo foi, em uma primeira instância, avaliar como as características flexo-torcionais dos perfis da estrutura poderiam influir no modo torcional global, alterando-se nesse caso o parâmetro λ dos transversais. A Tabela 4.6 apresenta os resultados obtidos para essas análises com os três modelos diferentes.

Tabela 4.6 - *Freqüências torcionais globais para estruturas "Tipo Chassi" - II*

	Modelo em Elementos de Casca	"Modelo Híbrido"	Modelo em Elementos de Viga	$\lambda_{\text{Transversal}}$	$\lambda_{\text{Longarina}}$
Freqüência Torcional Global (Hz)	22,089	22,719	19,501	0,200	0,613

A representação dos modos torcionais correspondentes aos três modelos de análise encontram-se nas Figuras 4.32 a 4.34.

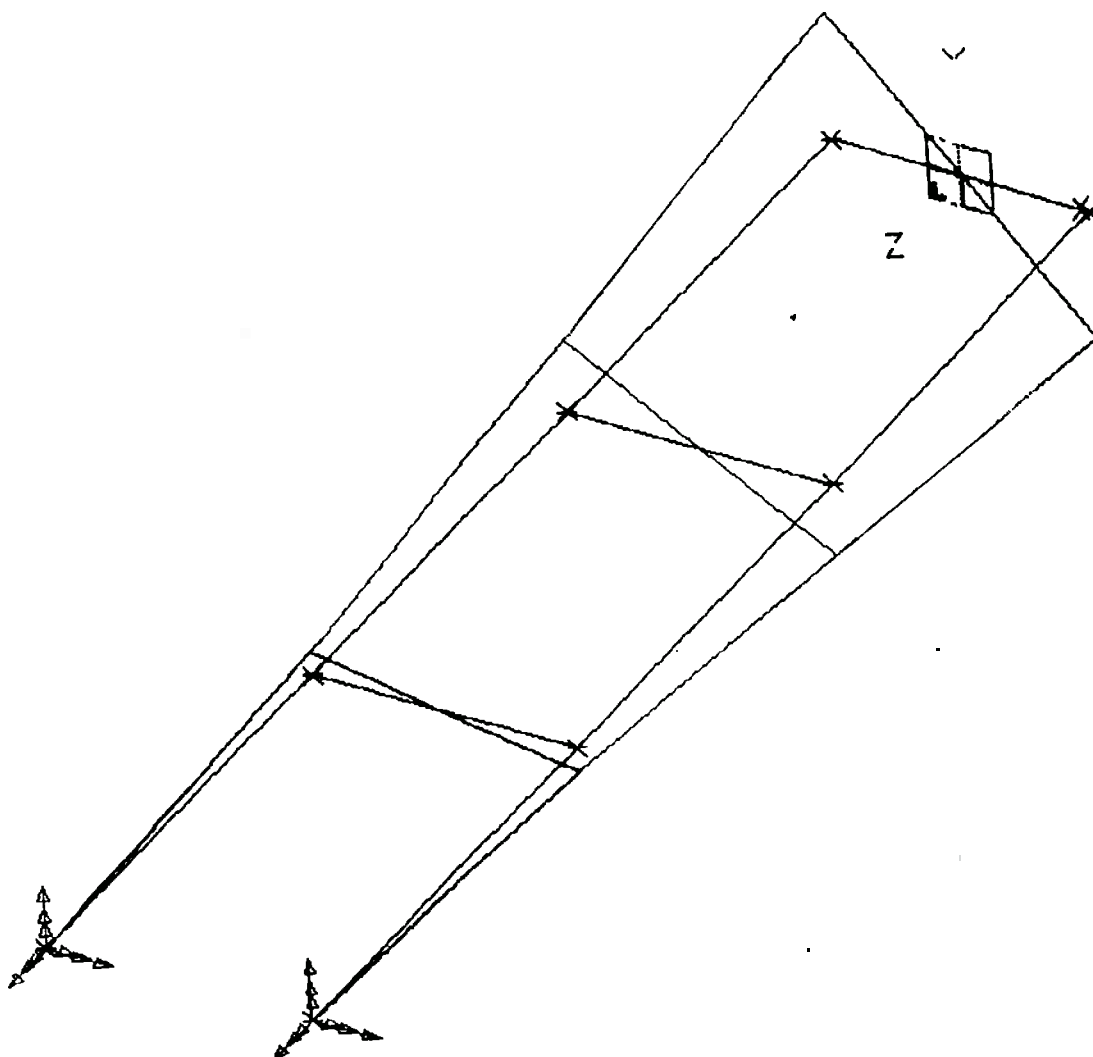


Figura 4.33 - Vibração torcional global de chassi em elementos de viga

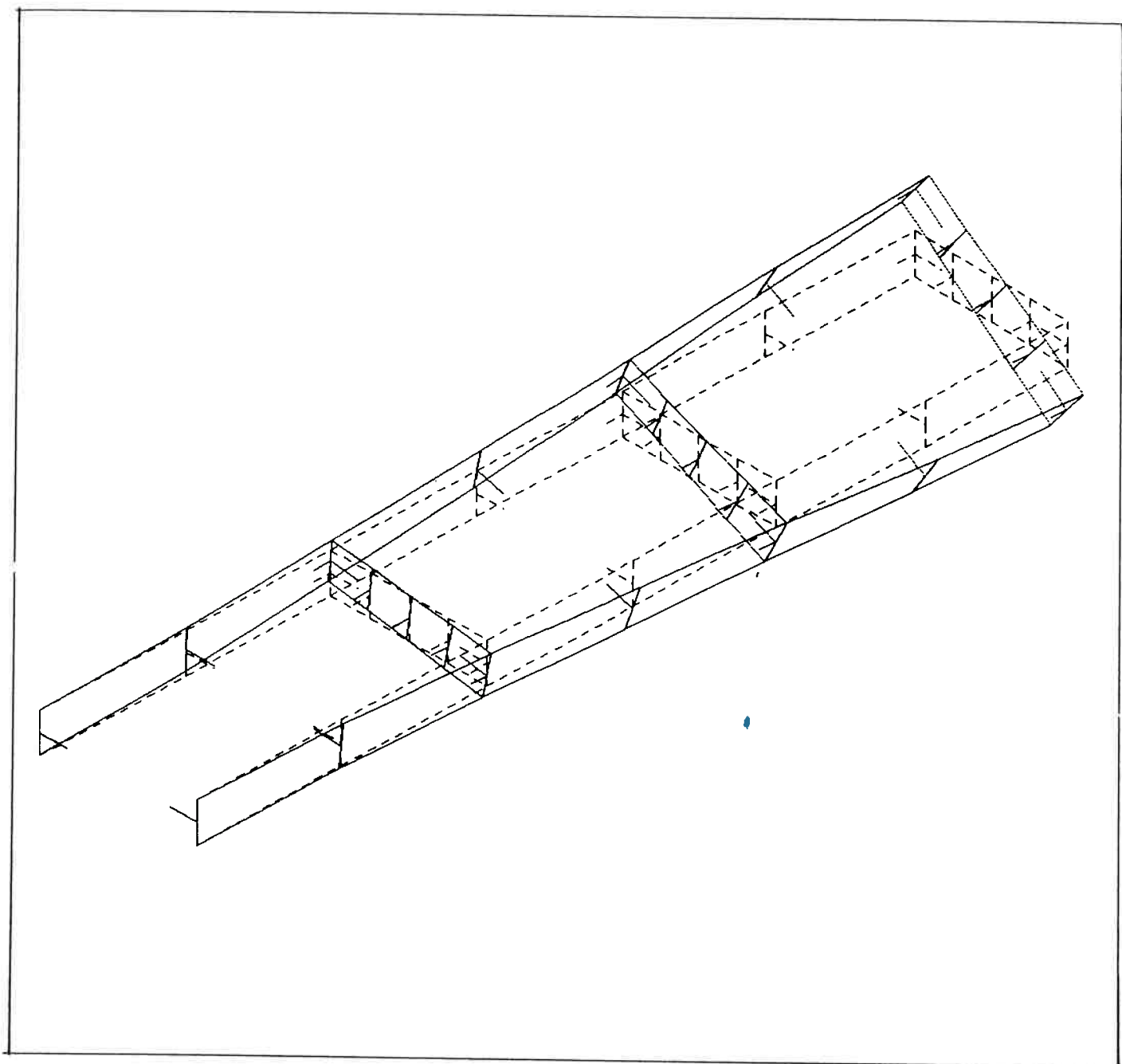


Figura 4.34 - Vibração torcional global de chassi com modelo híbrido

Para este caso, podemos observar que a diminuição do parâmetro λ dos transversais, e conseqüente aumento dos efeitos da torção de Vlasov, gerou desvio entre as freqüências calculadas pelos modelos em cascas e em vigas. Portanto, essa tendência revelada poderia acarretar além das limitações levantadas em i, a determinação incorreta dos fatores de amplificação dinâmica em uma análise de vibração forçada, devido ao cálculo incorreto de freqüência natural pelo modelo em vigas. Neste caso, o desvio observado ($\approx 13\%$) não foi muito grande, o que sugeria a análise de alguns casos adicionais considerando faixas de variação λ , como será efetuado em iii.

iii) Finalmente, com o objetivo de se efetuar uma análise de sensibilidade para estudar o efeito de flexo-torção em estruturas constituídas por diversos perfis abertos de paredes delgadas, foram processadas algumas análises desses tipos de estruturas, considerando a estrutura básica representada nas Figuras 4.35 a 4.37. As dimensões dos elementos integrantes da estrutura foram alteradas considerando novamente o parâmetro λ . Os resultados dessas análises são apresentadas na Tabela 4.7 e representadas graficamente de modo a se observar a influência do parâmetro λ nos valores de freqüência obtidas por modelos diferentes.

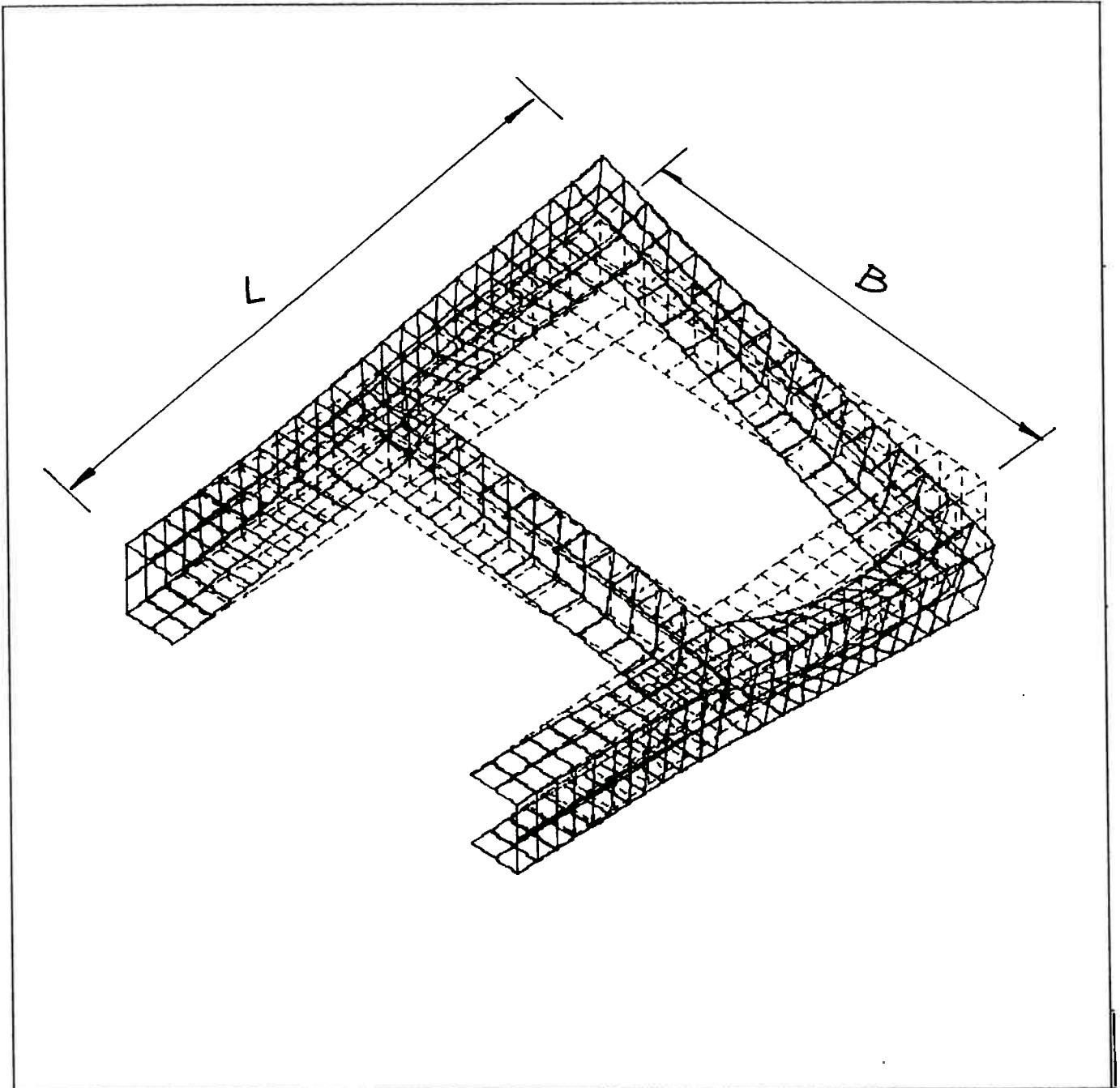


Figura 4.35 - Estrutura tipo chassi - modo torcional

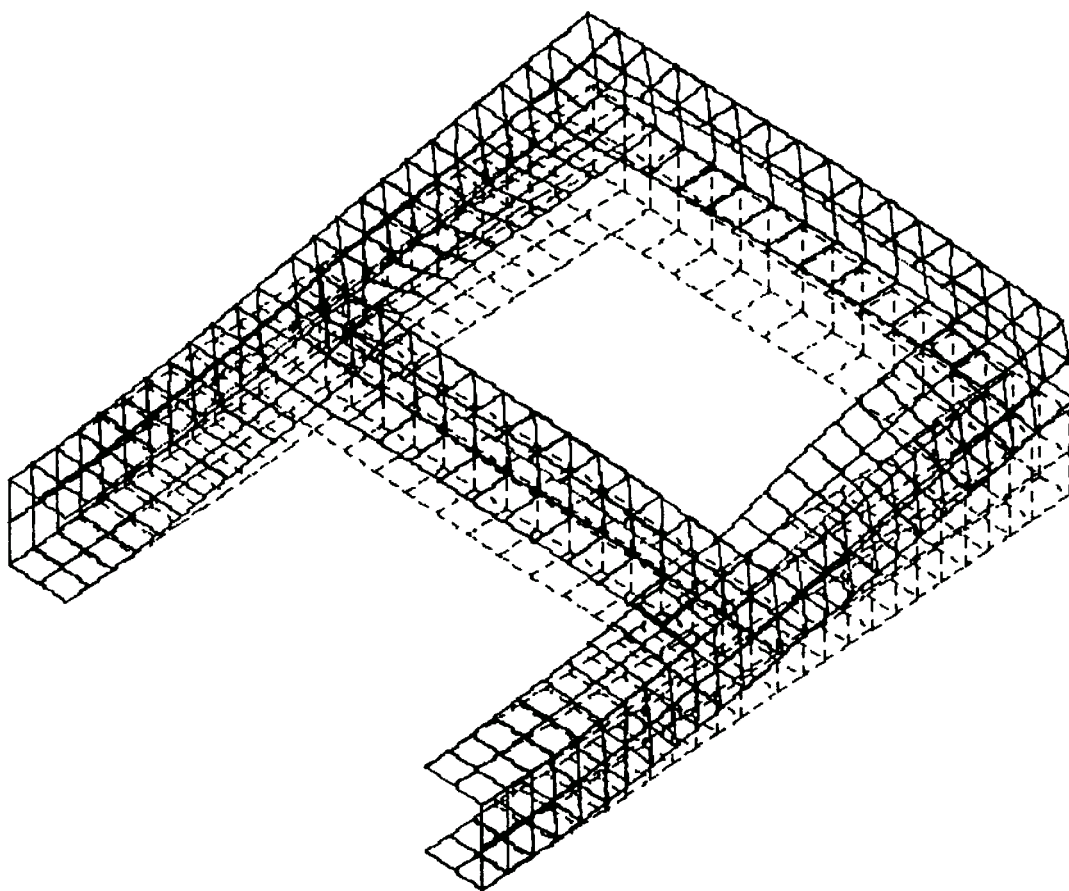


Figura 4.36 - Modo flexional em modelo de cascas

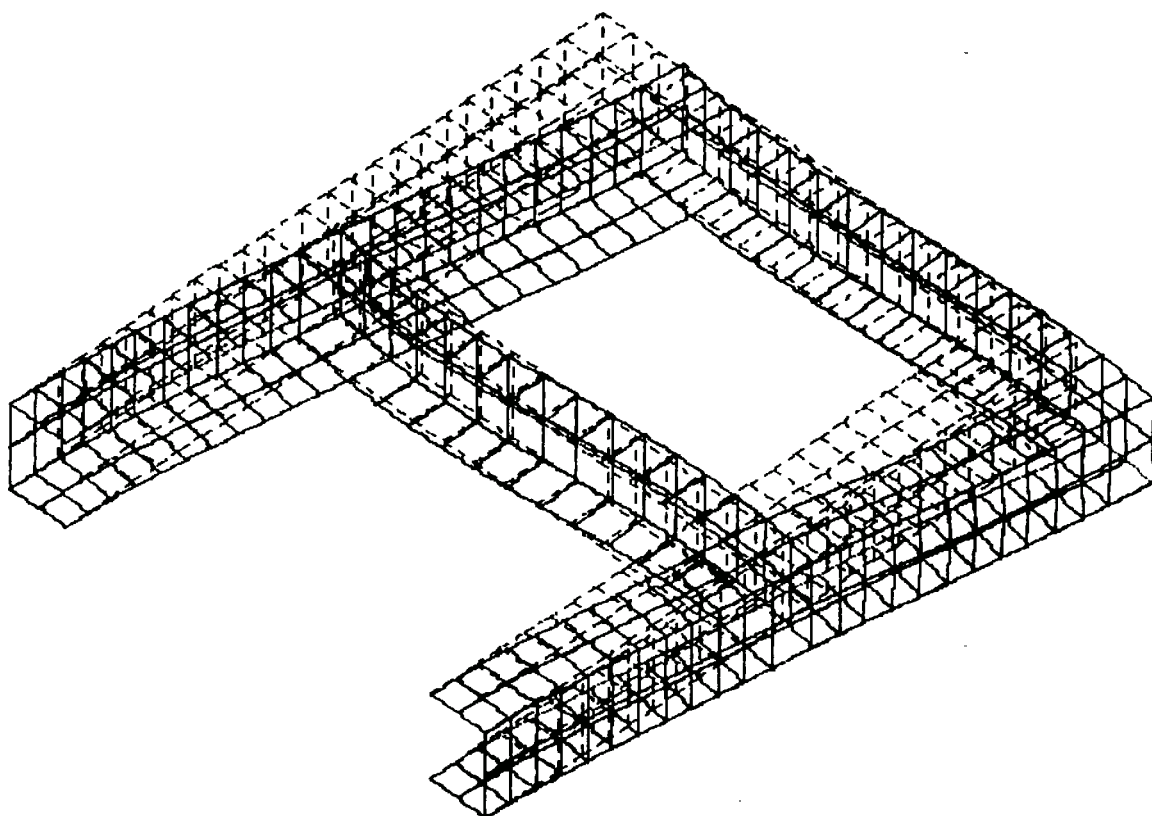


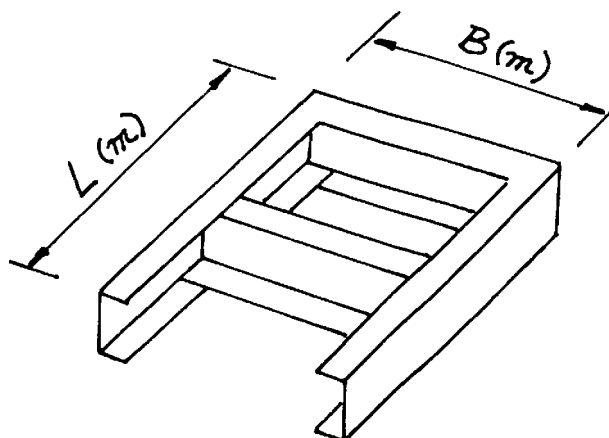
Figura 4.37 - Modo flexional lateral

Tabela 4.7 - Modos e frequências (Hz) de estruturas tipo chassi

λ		MODELO EM CASCAS			MODELO HÍBRIDO			MODELO EM VIGAS			B x L
λ_L	λ_T	Modo Vertical	Modo Lateral	Modo Torcional	Modo Vertical	Modo Lateral	Modo Torcional	Modo Vertical	Modo Lateral	Modo Torcional	
0,408	0,2	23,93	40,35	37,57	24,04	37,14	45,36	25,20	37,30	28,24	0,90x2,88
	0,6	18,23	23,99	26,17	18,65	22,44	23,79	8,74	21,76	24,18	2,76x2,88
	1,0	14,24	19,22	22,70	14,81	16,70	20,27	14,83	16,02	21,47	4,59x2,88
	1,4	10,99	16,72	20,25	10,81	13,53	18,04	11,30	12,87	19,40	6,43x2,88
	1,8	8,57	15,00	18,23	7,44	11,45	16,15	8,23	10,79	17,60	8,27x2,88
0,800	0,2	7,40	13,34	19,43	6,55	11,39	13,41	7,09	11,76	7,58	0,90x5,64
	0,6	6,12	9,23	8,67	5,58	7,95	6,84	5,85	7,88	6,91	2,76x5,64
	1,0	5,31	7,81	7,42	4,93	6,21	6,01	5,08	6,09	6,41	4,59x5,64
	1,4	4,70	7,04	6,77	4,41	5,17	5,52	4,50	5,03	5,99	6,43x5,64
	1,8	4,21	6,51	6,31	3,93	4,47	5,15	4,00	4,33	5,65	8,27x5,64

Longarina C 200 mm x 180 mm x 2 mm

Transversal C 200 mm x 120 mm x 2 mm



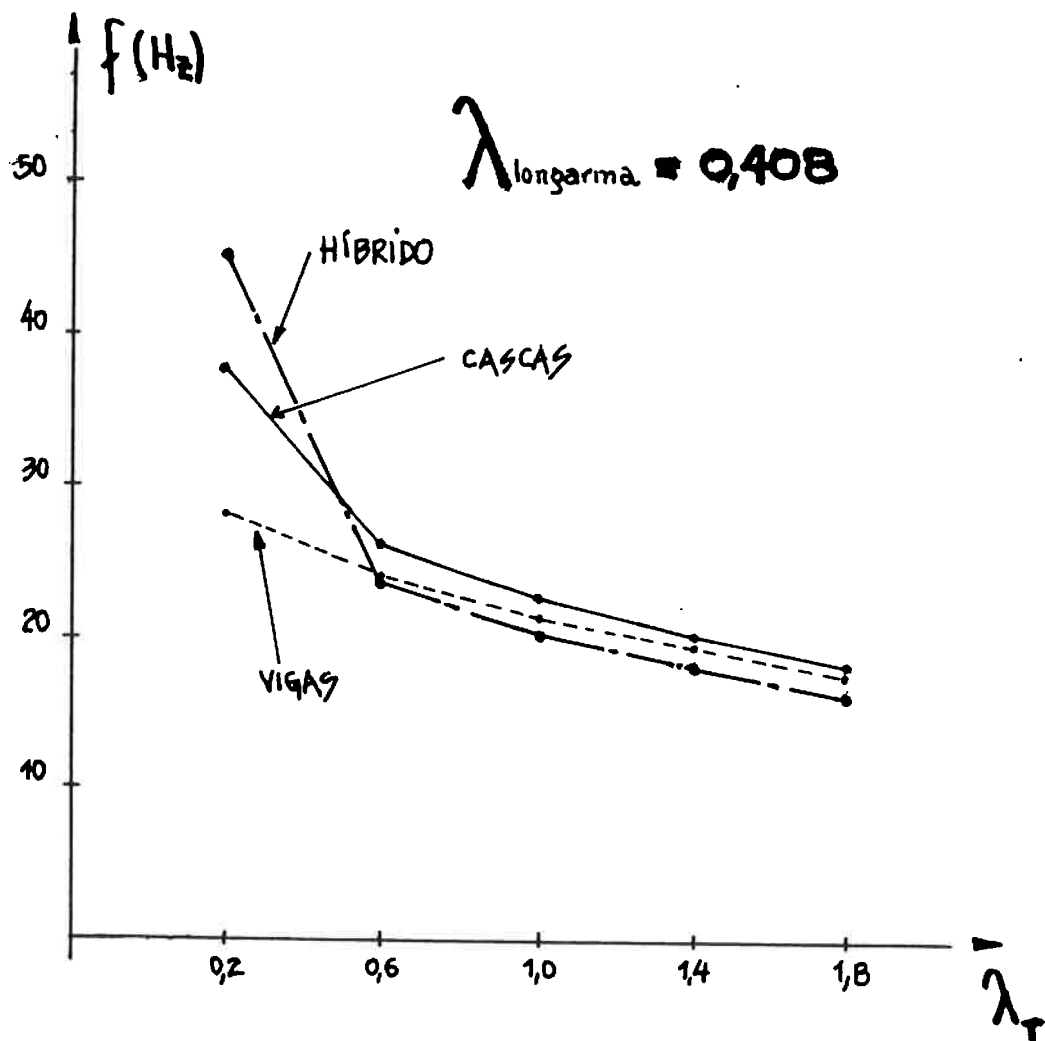


Figura 4.38 - Frequência Torcional $\times \lambda_T$ ($\lambda_L = 0,408$)

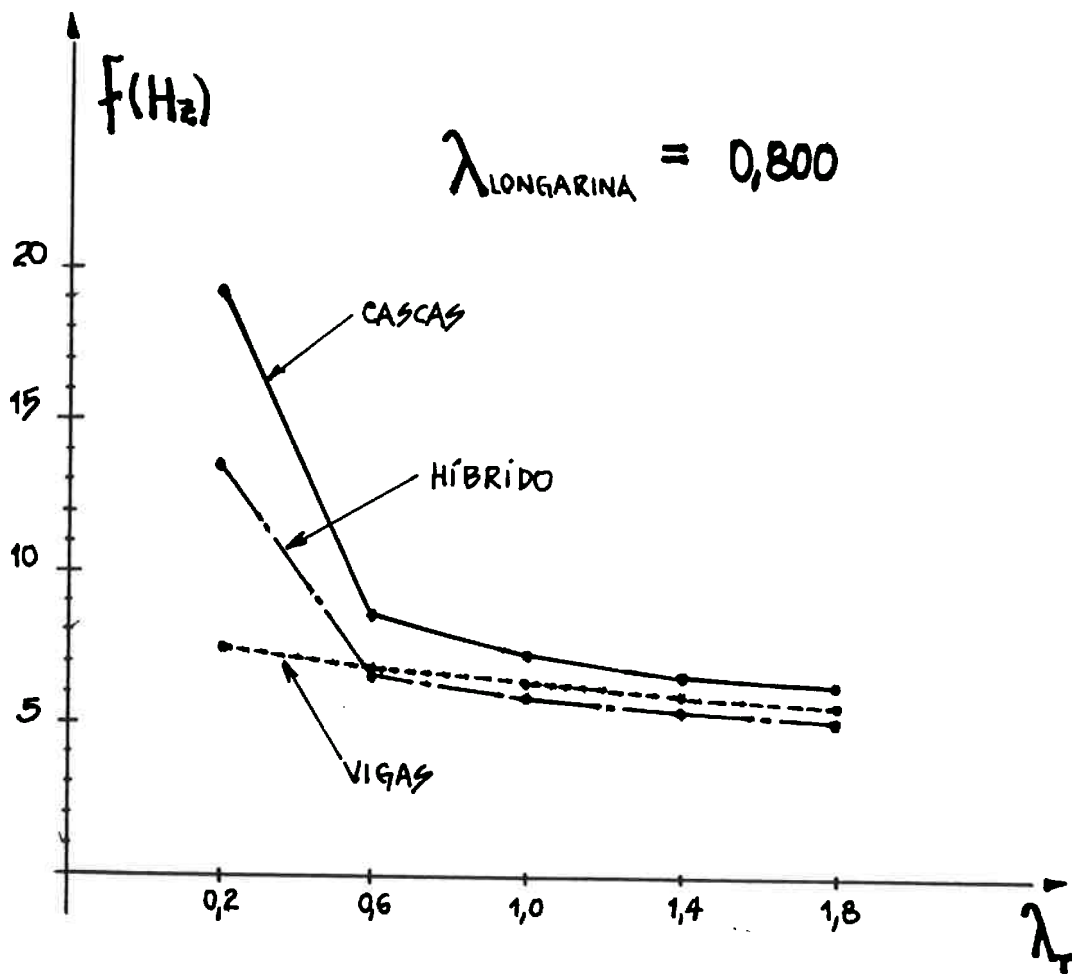


Figura 4.39 - Frequência Torcional x λ_T ($\lambda_L = 0,800$)

A observação dos gráficos construídos nos diagramas anteriores, indica faixas em que os valores de freqüências naturais calculadas pelos 3 modelos diferentes são consistentes. Como o modelo mais completo de análise é o modelo em elementos de casca, pode-se dizer que em termos de avaliação preliminar de projeto, os modelos simplificados de viga e híbrido fornecem resultados aceitáveis nessas faixas para os exemplos desenvolvidos. Por outro lado, existem faixas de trabalho em que o modelo constituído por elementos finitos de viga se afasta dos resultados obtidos pelo modelo em cascas e também do modelo híbrido; essas faixas correspondem aos valores de λ que representam participações crescentes da torção de Vlasov dos transversais.

Assim, nos exemplos estudados, vale observar que os modos globais podem ser afetados pela rigidez ao empenamento dos elementos da estrutura, e que a utilização do modelo em elementos finitos de viga, para avaliação dos modos e freqüências naturais de uma estrutura reticulada, pode apresentar resultados bastante diferentes daqueles obtidos pelo Modelo em Cascas. Portanto, em função dos desvios no cálculo de freqüências e das limitações já consideradas em i e ii, na faixa de λ correspondente à torção de Vlasov, é recomendada a utilização de modelos mais sofisticados de Análise, tal como modelo em cascas, ou como alternativa, o Modelo Híbrido, adotando-se para a cobertura de eventuais desvios, fatores de segurança adequados, suprimindo, então, tanto as

necessidades de determinação de modos e frequências, como da determinação de tensões dinâmicas de flexo-torção no cálculo da resposta.

Embora a influência de λ fique evidenciada neste último caso (iii), além da faixa de λ deve-se considerar o arranjo estrutural do chassi, como por exemplo o número de transversais. Este arranjo poderia ser determinante de maiores ou menores desvios, como indicam as comparações dos próprios casos i, ii e iii.

Uma análise completa desses efeitos deveria ser efetuada a partir da aplicação dos três modelos para uma ampla faixa de variação de λ para os transversais e longarinas do chassi, bem como alterações de arranjo estrutural. Um estudo desse porte foge aos objetivos do presente trabalho.

CAPÍTULO V

CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

5.1 CONCLUSÕES FINAIS

O cálculo de estruturas constituídas por perfis abertos de paredes delgadas, ou caixas estruturais que, devido as suas dimensões globais e espessura de parede, possam ser assimiladas primariamente ao comportamento estrutural de vigas, deve merecer especial atenção no que diz respeito a atuação de momentos torçores e, em conseqüência, tensões normais de flexo-torção, tanto do ponto de vista estático como dinâmico.

A) Na consideração de Análise Estrutural Estática, vale observar alguns pontos importantes. A saber:

Em se tratando de estruturas reticuladas de veículos, é usual proceder-se ao cálculo de toda a estrutura pelo Método dos Elementos Finitos. A resposta estrutural inclui para cada elemento de viga os esforços de extremidade, tais como: Momentos Fletores em dois planos perpendiculares, Força Axial, Forças Cortantes em dois planos perpendiculares e Momentos Torçores; e as conseqüentes tensões calculadas considerando a Resistência dos Materiais Elementar. Deve-se proceder adicionalmente ao cálculo das tensões normais de flexo-torção

5.2

que não obedecem a Lei das Seções Planas, não seguindo portanto a hipótese de Navier. Em uma estrutura discretizada por muitos elementos de viga, o cálculo dessas tensões normais de flexo-torção, em princípio, poderia ser efetuado para cada elemento segundo uma das alternativas:

- i) Discretizando adicionalmente cada viga por elementos de casca, adotando o mesmo procedimento utilizado no item B.4.2.2 , e solicitada por momento torçor obtido do cálculo global de toda a estrutura. Tal procedimento seria extremamente laborioso, pois cada elemento de viga definido entre dois pontos nodais no modelo da estrutura completa, daria origem a um novo modelo com um grande número de nós e elementos, para análise local.
- ii) Considerando para cada elemento de viga, a solução da Equação Diferencial do Bimomento, por intermédio da Teoria de Vlasov, sob efeito da aplicação de momentos torçores de extremidade, decorrentes do trabalho da estrutura como um todo e cargas locais no vão de viga que apresentem excentricidade em relação ao centro de torção.

As alternativas i e ii oferecem, porém, restrições de ordem prática. Em estruturas reais, a restrição ao empenamento nas extremidades dos elementos de viga não é absoluta, de modo que a estrutura contínua

(global) fornece apenas certa resistência a esse empenamento. Além disso, os modelos em elementos de viga não incorporam a rigidez ao empenamento em sua formulação.

Portanto, a alternativa mais adequada seria a adoção de um modelo utilizando o Método dos Elementos Finitos que simulasse, de forma mais real possível, a restrição ao empenamento na extremidade de cada viga, já no próprio modelo global. Este foi o objetivo da parte estática do presente trabalho por intermédio da utilização do Modelo Híbrido, cujos resultados foram bastante aceitáveis de acordo com as comparações e conclusões estabelecidas no item B.5.2.3. A aplicação desta metodologia foi desenvolvida dentro do escopo deste trabalho, para uma estrutura tipo grelha. Entretanto, de forma mais geral, estruturas tridimensionais com efeito de torção contabilizado em apenas um único plano, poderiam ser resolvidas com a abordagem proposta neste trabalho.

B) Na consideração de Análise Estrutural Dinâmica, vale observar alguns pontos importantes. A saber:

As estruturas já mencionadas anteriormente e sujeitas à flexo-torção, devem merecer especial atenção na determinação dos modos e frequências naturais de vibração torcional e, como consequência, no cálculo da resposta dinâmica.

Por exemplo, em se tratando de estruturas reticuladas de veículos, é usual proceder-se ao cálculo dos modos de vibrar do chassi

pelo Método dos Elementos Finitos, utilizando Elementos Finitos de Viga Convencionais. Por esse procedimento, a determinação dos modos e frequências não incorpora a rigidez ao empenamento dos elementos da estrutura. Dependendo das características geométricas dos perfis adotados e das dimensões globais, os resultados podem apresentar desvios em relação aos valores reais. Nesses casos, definidos no capítulo anterior, o Modelo Híbrido Dinâmico constitui uma alternativa interessante aos modelos bastante trabalhosos em elementos de casca, principalmente no sentido de se avaliar alternativas em fases preliminares de projeto e de se estabelecer análises de sensibilidade, que ficariam comprometidas com o uso dos modelos em vigas, devido as diferenças acentuadas em relação aos resultados reais. Em resumo, o desenvolvimento do presente trabalho permitiu na Análise Dinâmica, atingir os seguintes objetivos:

- i) Instituir, por abordagem física e consideração simultânea das equações das vibrações flexionais laterais e vibrações torcionais, o Modelo Híbrido para Análise Dinâmica de Estruturas constituídas por perfis abertos de paredes delgadas. Os diversos casos analisados mostram a importância dos efeitos de flexo-torção também no cálculo dinâmico.
- ii) No caso de vibração de um perfil aberto de paredes delgadas isoladamente, o Modelo Híbrido permitiu determinar as frequências naturais de vibração flexo-torcionais,

apresentando valores consistentes com o modelo de elementos finitos de casca. Assim, para este caso isolado de viga, a utilização de um modelo discretizado com elementos de viga convencionais levou à determinação de freqüências naturais torcionais bastante diferentes dos valores reais. Isso ocorreu, pois o modelo com elementos de viga convencionais não considera a rigidez ao empenamento, constatando a utilidade do modelo híbrido. A conclusão anterior permite-nos observar que para o caso de vibrações forçadas, tanto o Modelo Híbrido como o Modelo em Elementos de Casca poderiam ser utilizados no cálculo de Tensões Normais de Flexo-Torção, considerando-se a amplificação dinâmica devido à participação do modo de vibração flexo-torcional na resposta, e o modelo com elementos de viga convencionais seria inadequado. Do ponto de vista prático, esta aplicação seria importante no caso de uma viga constituinte de uma estrutura formada por diversos perfis onde ocorressem excitações geradoras de vibrações flexo-torcionais isoladas do perfil, ou vibrações globais da Viga-Navio.

- iii) No caso de vibração global de uma estrutura constituída por diversos perfis abertos de paredes delgadas, observamos que o modo global torcional de vibração pôde ser determinado

pelos 3 Modelos (Casca, Híbrido e Vigas Convencionais) em alguns casos. Nos casos em que a rigidez ao empenamento é determinante, a utilização do modelo em vigas convencionais não é recomendado, podendo comprometer o cálculo da resposta dinâmica, bem como ser uma solução também inadequada no cálculo preventivo de vibrações, na aplicação de um Critério de Ressonância. Do ponto de vista do cálculo de tensões, vale lembrar que a torção estática da estrutura tipo chassi como um todo, gera tensões normais de flexo-torção bastante elevadas na junção entre longarinas e transversais. No modelo em elementos de viga convencionais essas tensões estáticas são nulas, como já discutido neste trabalho. Portanto, qualquer excitação que implique em valores elevados de amplificação do modo torcional, continuarão a gerar tensões dinâmicas nula de flexo-torção, pois o fator de amplificação, embora elevado, será multiplicado por zero, que corresponde ao valor estático da tensão dada pelo modelo em vigas convencionais. Isso não ocorrerá para o Modelo Híbrido em análise dinâmica, pois permitirá determinar a amplificação das tensões calculadas pelo mesmo estaticamente. Assim, o modelo híbrido proposto, permite-nos a aplicação para Análise Estática, Determinação de Modos e Frequências de Vibração e Resposta Dinâmica.

iv) Algumas questões adicionais, como as faixas de influência dos modos flexo-torcionais isolados de vigas da estrutura nos modos globais, que caracterizariam o acoplamento dessas vibrações, jamais poderiam ser incluídos nos modelos de elementos finitos de viga convencionais, pelos motivos já expostos anteriormente. Entretanto, embora não tenha sido dada ênfase neste trabalho, poderiam ser estudados pelo modelo híbrido dinâmico em função dos seus parâmetros de definição.

5.2 RECOMENDAÇÕES PARA FUTUROS TRABALHOS

O desenvolvimento do presente trabalho permitiu avaliar a existência de alguns tópicos de pesquisa que mereceriam considerações mais profundas em futuros estudos. A saber:

- i) A generalização da definição dos parâmetros do Modelo Híbrido para estruturas reticuladas tridimensionais que permita considerar os efeitos de flexo-torção em diferentes planos.
- ii) A presença de reforçadores no perfil aberto, como ilustram os casos a e b da Figura 5.1, ou até o caso c da combinação dos dois efeitos, o que sugere o estudo de caixas estruturais

abertas com anteparas transversais, que sujeitas à torção permite-nos o cálculo do componente σ_{ft} de flexo-torção.

- iii) Estudo completo das diversas faixas do parâmetro λ , para longarinas e transversais de estruturas tipo chassi, bem como efeitos dos diversos arranjos estruturais dessas estruturas.

Os tópicos de pesquisa i, ii e iii têm como ponto de partida os conceitos e conclusões estabelecidas neste trabalho.

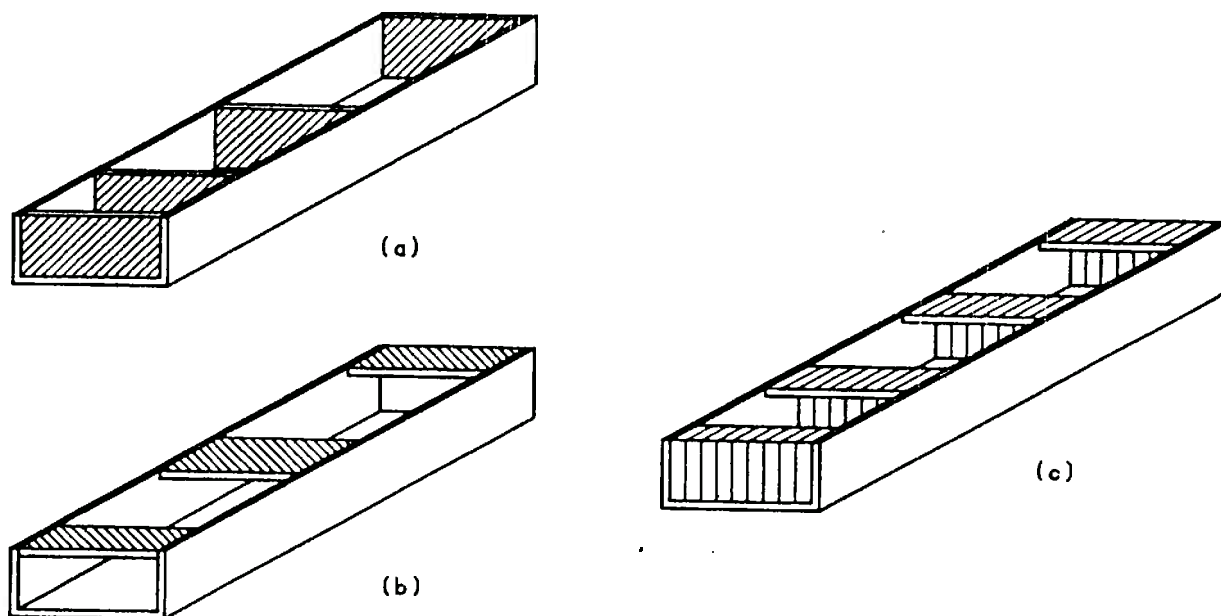


Figura 5.1 - Caixas Estruturais com Anteparas

APÊNDICE A

**REVISÃO DA TEORIA DE VLASOV
PARA PERFIS ABERTOS DE PAREDES DELGADAS**

APÊNDICE A

A.1 REVISÃO DA TEORIA DE VLASOV PARA PERFIS ABERTOS DE PAREDES DELGADAS

Quando um perfil de seção não circular sofre torção, ocorrem deformações longitudinais da seção, e esta não se mantém plana. O estudo analítico desse fenômeno se baseia na hipótese do Contorno Rígido, isto é, o contorno da seção transversal do perfil mantém a sua forma durante a torção, embora ocorra rotação da seção transversal e diferentes deslocamentos longitudinais dos Pontos da seção. Em outras palavras, a seção elementar da Figura A.1 é um corpo rígido em relação aos deslocamentos no plano transversal, porém esta seção é considerada deformável em relação aos deslocamentos fora desse plano. Os pontos de uma seção transversal qualquer da viga, podem ter deslocamentos longitudinais, que são relacionados com o empenamento da seção, em adição a qualquer deslocamento indicado na Lei da Seções Planas.

Durante a torção da barra, as seções transversais giram em relação ao Centro de Torção C (Figura A.2). Se não há restrição ao livre

A.3

empenamento, a torção de qualquer tipo de seção - aberta ou fechada - é governada pela equação:

$$M_x = G \cdot I_t \cdot \frac{d\theta}{dx}$$

(A.1)

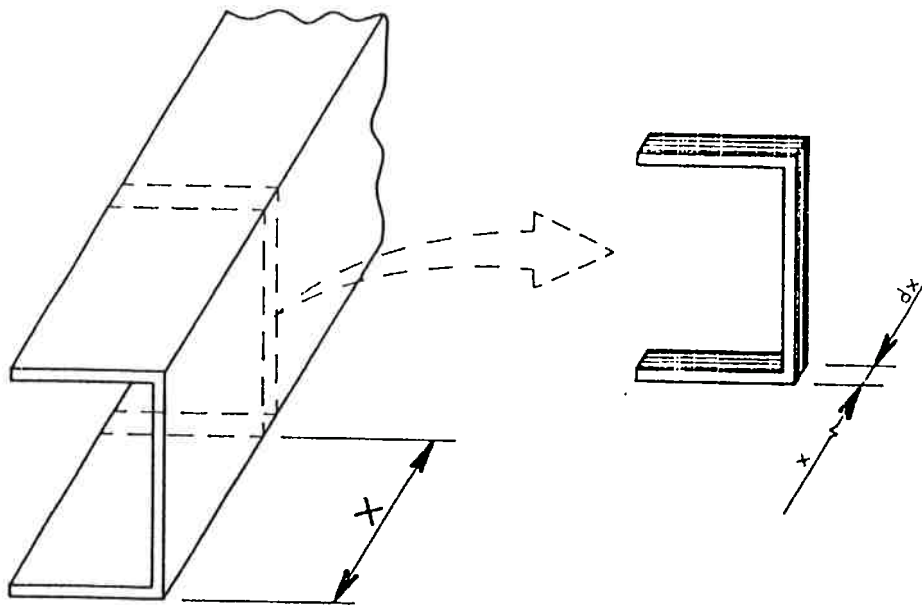


Figura A.1 - A seção elementar dx é um corpo rígido em relação ao movimento transversal

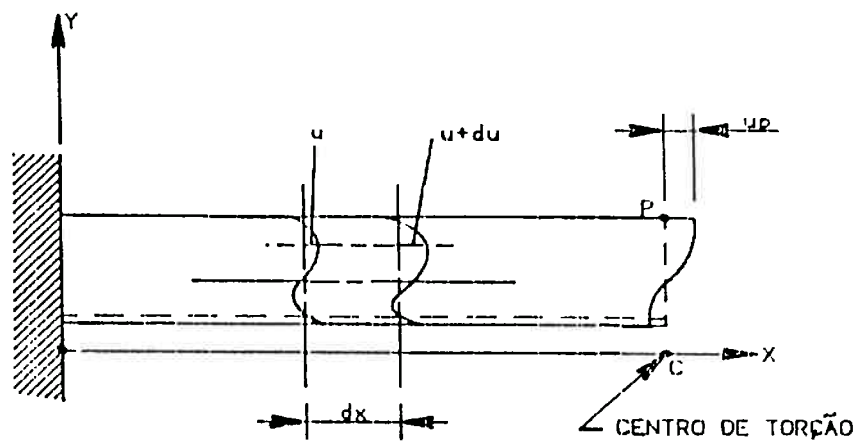
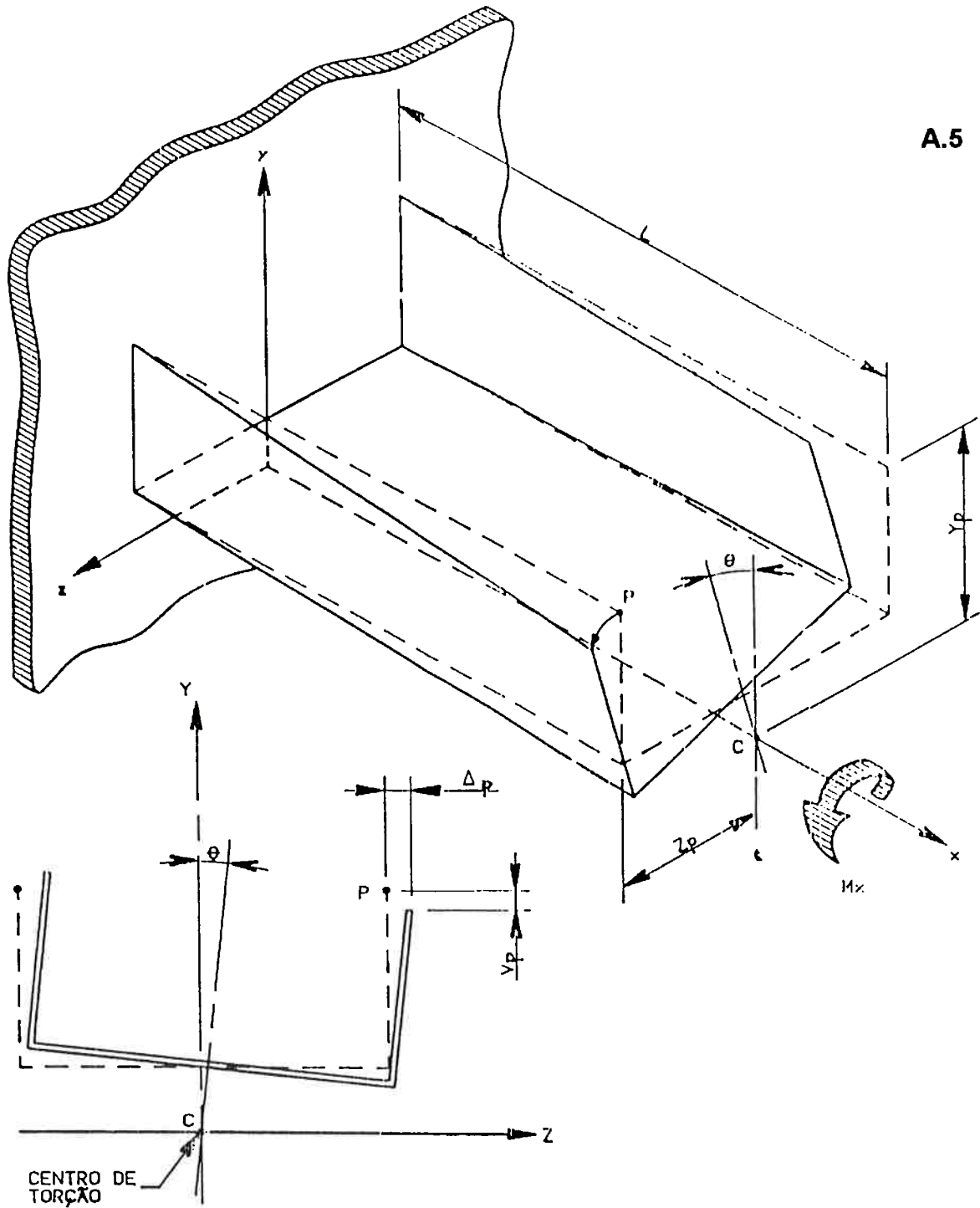


Figura A.2 - Deformações em perfil aberto de paredes delgadas - torção restringida

segundo a Resistência dos Materiais Elementar, onde:

M_x - Momento Torçor

G - Módulo de Elasticidade em Cisalhamento

I_t - Momento de Inércia à Torção (Saint-Venant)

$\theta' = \frac{d\theta}{dx}$ - Taxa de Variação do ângulo de Torção ou ângulo de Torção Unitário

A Figura A.2 ilustra a convenção de sinais utilizada no estudo da torção. O momento torçor M_x e o ângulo de torção θ são positivos no sentido horário, quando olhamos ao longo do sentido positivo do eixo x .

As seções abertas e fechadas diferem acentuadamente quanto à distribuição de tensões de cisalhamento e quanto ao grau de empenamento; a seção fechada envolve muito menos rotação e tensão de cisalhamento para um dado momento torçor, como é representado na Figura A.3. A distribuição de tensões de cisalhamento em uma seção aberta é linear ao longo da espessura, apresentando semelhança com uma chapa plana de largura b' e espessura t , onde b' , no caso da Figura A.3, seria o comprimento total do arco. Portanto, tem-se na realidade uma seção transversal "sólida" muito esbelta, e a tensão de cisalhamento pode "circular" somente dentro desta área confinada, e então equilibrar o momento torçor aplicado. Para equilibrar o momento torçor M_x , deve-se ter

A.7

tensões τ elevadas, pois d e t indicados na Figura A.4 são muito pequenos. A análise das Figuras A.3 e A.4 permite colocar também alguns aspectos importantes relativos à Torção não Restringida, ou Torção de Saint-Venant. Em seção aberta, o empenamento não é causado pelo cisalhamento, visto que o valor médio das tensões de cisalhamento através da espessura é nulo; é causado por rotação de corpo rígido da parede do membro no seu próprio plano (8). Esta rotação é o complemento cinemático direto da rotação axial do membro.

No caso da seção fechada, como é representado na Figura A.3, a "circulação" ocorre em trajetória fechada, apresentando duas vantagens: a tensão de cisalhamento é constante ao longo da espessura, o que representa melhor utilização do material e um braço de momento muito maior em relação ao centro de giro, implicando valores de tensões de cisalhamento menores para equilibrar M_x , justificando os ângulos de rotação menores.

Quando o perfil está submetido à Torção Restringida, como ilustra a Figura A.2, existe uma resistência adicional ao momento torçor M_x , e para qualquer tipo de perfil - aberto ou fechado - a equação (A.1) recebe mais um termo que leva em conta esse efeito. A saber:

$$M_x = G.I_t \cdot \frac{d\theta}{dx} - E.I_w \cdot \frac{d^3\theta}{dx^3}$$

(A.2)

onde I_w é o Momento de Inércia Sectorial (cm^6), cuja revisão é dada no Apêndice C. A explicação física das paralelas do 2º membro da equação anterior é a seguinte:

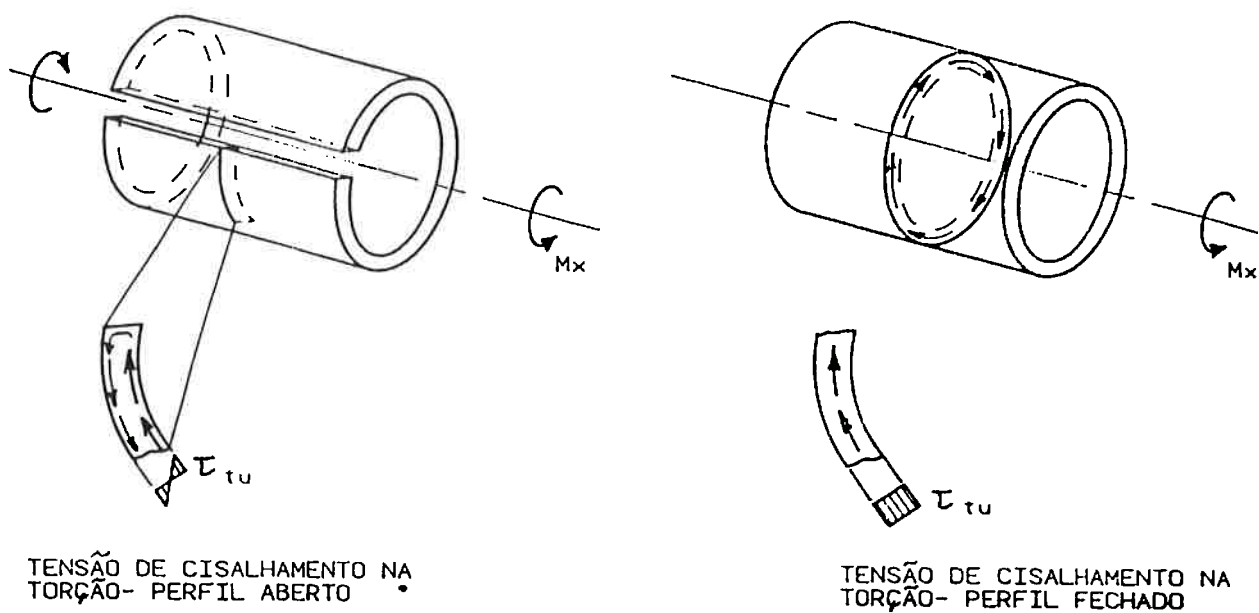


Figura A.3 - Torção de Perfil Aberto e Perfil Fechado

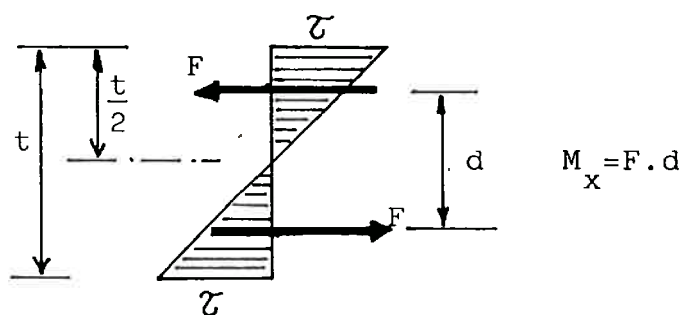


Figura A.4 - Par de forças F que equilibram o Momento Torçor M_x

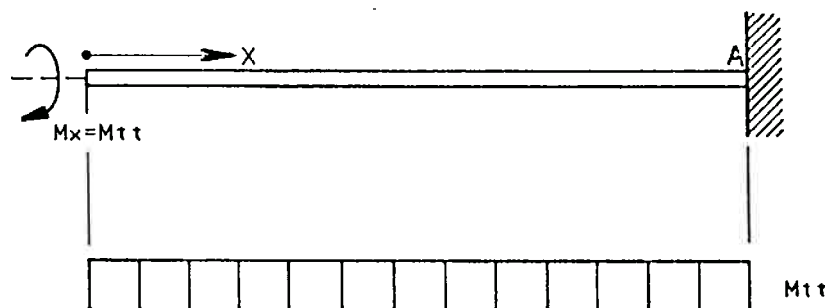


Figura A.5 - Diagrama de Momentos Torçores

Quando na extremidade da viga da Figura A.5 aplica-se o momento torçor $M_x = M_{tt}$, temos o diagrama de momentos torçores ilustrado. O momento torçor atuante na seção transversal admite dois componentes:

- a parcela componente do Momento Torçor M_{tt} , que é responsável pela rotação da seção e que provoca ângulo unitário de torção. Este componente é tratado como responsável pela Torção Uniforme da Viga (M_{tu}), aplicando-se a teoria Elementar da Torção. Como a restrição à rotação e ao empenamento são progressivamente maiores à medida que a seção se aproxima do engastamento, o componente M_{tu} diminui com a distância ao engastamento, tornando-se nula em A;
- a parcela componente do Momento Torçor M_{tt} que está associada à restrição apresentada pela seção ao empenamento, ou seja, associada à Flexo-Torção. Como a restrição ao empenamento é progressivamente maior próximo ao engastamento, o componente de flexo-torção M_{ft} também o será, atingindo seu valor máximo em A.

Portanto, para uma seção qualquer da viga, pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
 M_{tt} &= M_x = M_{tu} + M_{ft} \\
 &\quad \quad \quad \updownarrow \quad \quad \quad \updownarrow \\
 M_{tt} &= M_x = G \cdot I_t \cdot \frac{d\theta}{dx} - E \cdot I_w \cdot \frac{d^3\theta}{dx^3}
 \end{aligned}
 \tag{A.3}$$

As tensões tangenciais resultam em um momento torçor atuante na seção ($M_x = M_{tt}$), que pode ser interpretado como a soma de dois momentos, conforme a Figura A.6:

- a) momento causado pelas tensões de cisalhamento linearmente distribuídas ao longo da espessura do perfil e oriundas da Torção Uniforme ($\tau_{tu} \rightarrow M_{tu}$);
- b) momento causado pelas tensões de cisalhamento uniformemente distribuídas ao longo da espessura do perfil e oriundas da Flexo-Torção ($\tau_{ft} \rightarrow M_{ft}$)

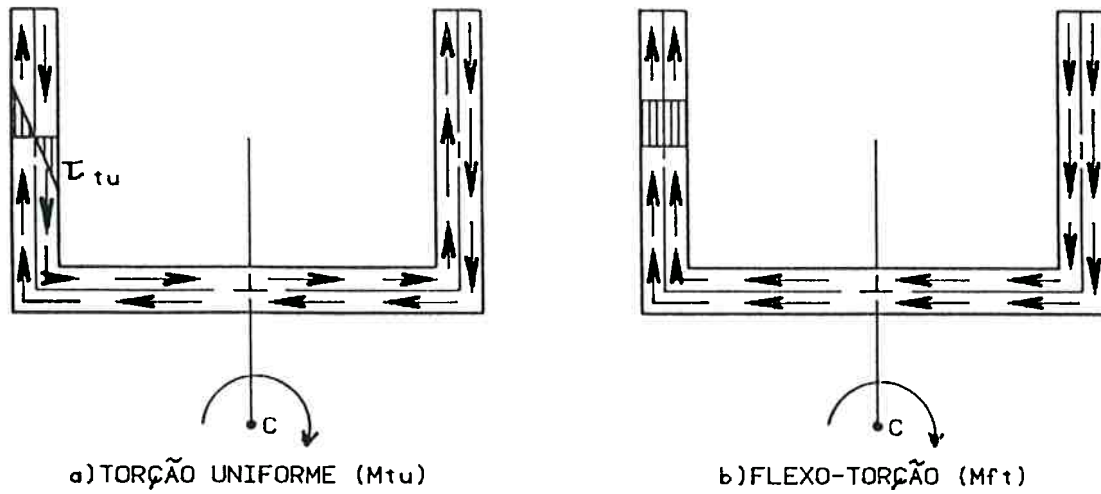


Figura A.6 - Distribuição das tensões de cisalhamento devido a torção uniforme e flexo-torção

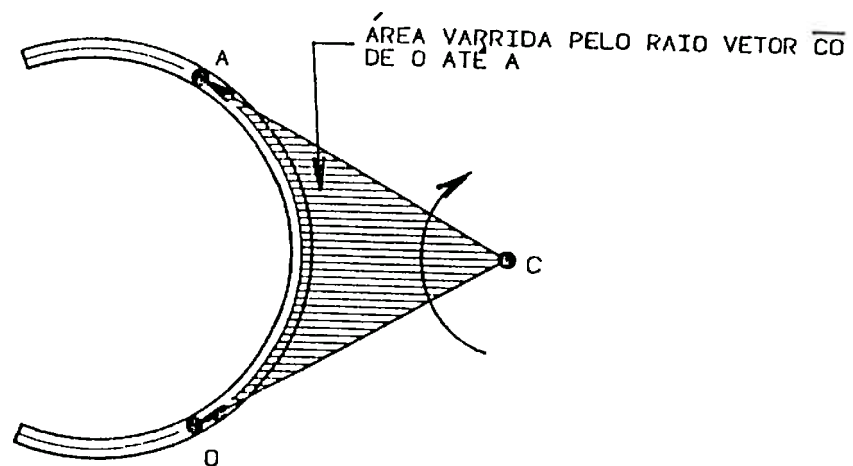


Figura A.7 - Área varrida pelo raio vetor \overline{CO}

A.2 TENSÕES NORMAIS NA FLEXO-TORÇÃO

O estudo analítico completo, com o desenvolvimento das expressões para cálculo das tensões normais e tensões de cisalhamento devido à flexo-torção, pode ser encontrado nas referências (3), (8), (9) e (10). Na Figura A.2 é representada a rotação da seção transversal e diferentes deslocamentos longitudinais u dos pontos da seção da viga. Como as seções giram em relação ao Centro de Torção C, podemos escrever:

$$v = -\theta \cdot z \text{ (segundo o eixo } y)$$

$$\Delta = \theta \cdot y \text{ (segundo o eixo } z)$$
(A.4)

No caso do ponto P, da seção extrema, temos:

$$v_p = -\theta \cdot z_p$$

$$\Delta_p = \theta \cdot y_p$$
(A.5)

A variação dos deslocamentos axiais por empenamento (u) ao longo do contorno da seção transversal é dada por uma função $w(s)$ que caracteriza o empenamento ao longo desse contorno. Essa função não varia na direção axial da barra prismática e é conhecida como Área Sectorial Principal, pois está associada à área do Setor, varrida pelo raio vetor que

une o centro de torção C ao contorno do perfil, como mostra a Figura A.7.

Tal definição é recordada no Apêndice C.

Adicionalmente, verifica-se que a intensidade do empenamento é proporcional à taxa de variação do ângulo de torção. Assim:

$$u = w \cdot \theta' \quad (A.6)$$

Quando um elemento da viga sofre um deslocamento axial du , teremos:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} \rightarrow \varepsilon = \frac{d(w \cdot \theta')}{dx} \rightarrow \varepsilon = w \cdot \frac{d^2\theta}{dx^2} = w \cdot \theta'' \quad (A.7)$$

Considerando-se apenas a existência de tensões normais no plano da seção transversal da viga, e a inexistência de tensões em cortes longitudinais:

$$\sigma = \varepsilon \cdot E \rightarrow \sigma_{ft} = E \cdot \theta'' \cdot w \quad (A.8)$$

Portanto, a tensão normal na seção, ocasionada pela flexo-torção varia de acordo com $w(s)$. Tais tensões estão associadas à parcela das deformações longitudinais que não obedecem à lei das seções planas, e são resultantes da torção.

As tensões σ_{ft} são auto-equilibradas na seção como é mostrado nas Figuras A.8 e A.9, e portanto ao longo da área A da seção transversal, podemos escrever:

Equilíbrio de Forças

$$\int_A \sigma_{ft} \cdot dA = \int_A E \cdot \theta'' \cdot w \cdot dA = 0 \quad (A.9)$$

O Equilíbrio de Forças equacionado anteriormente, pode ser explicado com o exemplo de um perfil I de paredes delgadas submetido à torção (Figuras A.8 e A.9). Os flanges sofrem flexões em sentidos opostos, nos seus próprios planos. O resultado é que a seção transversal não se mantém plana, ocorrendo o fenômeno de Flexão na Torção. Se não existisse a alma do perfil I, os flanges se deformariam independentemente um do outro e, para uma determinada seção, as tensões normais teriam uma distribuição conforme representado na Figura A.9. No caso de um perfil de paredes delgadas, a rigidez da união entre os flanges (alma) é pequena no plano perpendicular à alma e a propagação do efeito representado na Figura A.9, ao longo da viga, é bastante acentuado.

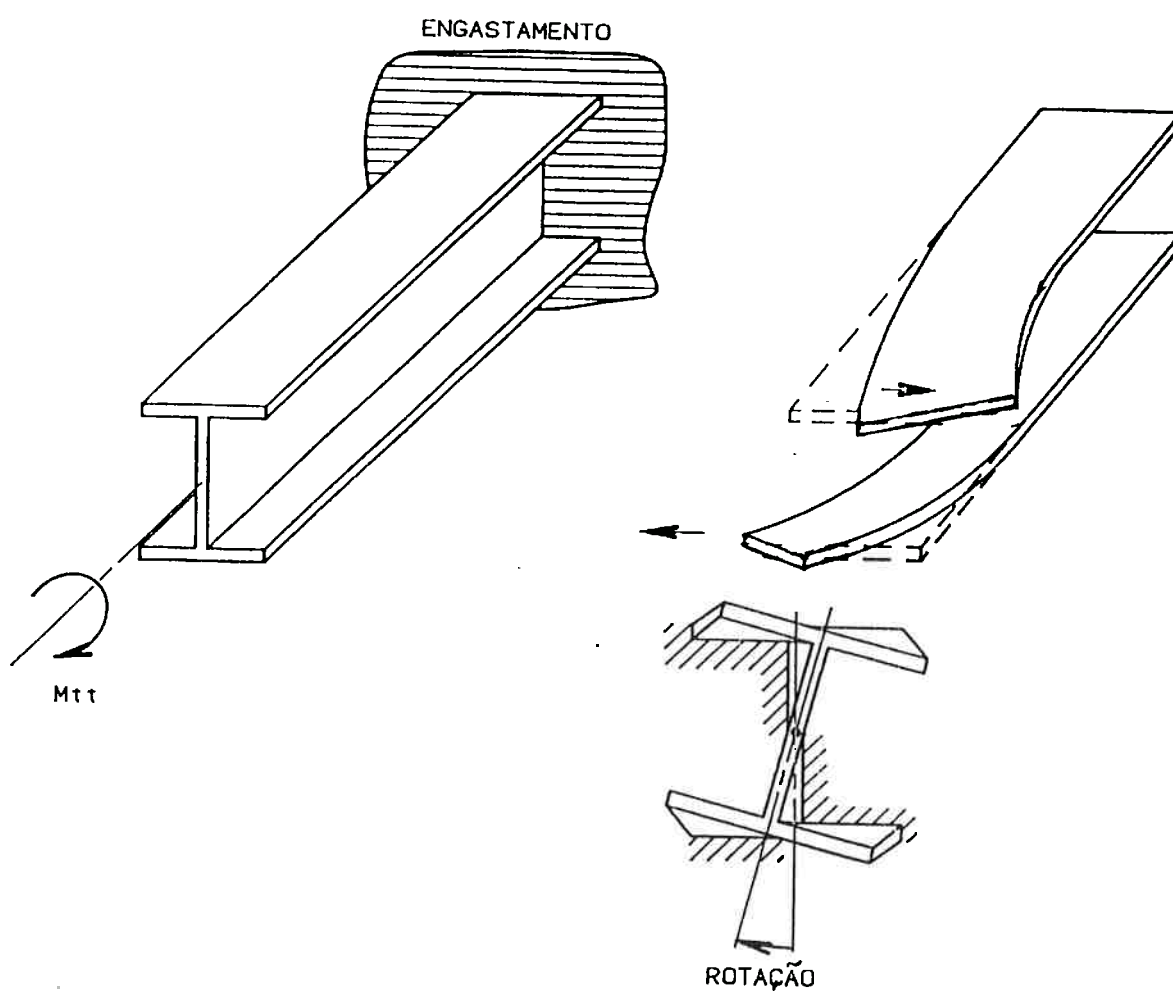


Figura A.8 - Torção de Perfil I de Paredes Delgadas

Embora as tensões atuantes nos dois flanges (sujeitos à flexão horizontal devido à atuação de Dois Momentos M_o e $-M_o$), constituam um Sistema de Tensões Mutuamente Balanceadas, os seus efeitos não poderão ser considerados como esforços locais simplesmente. Eles irão se superpor aos outros esforços aos quais a viga usualmente pode estar submetida em trabalho, e serem até mais intensos que os mesmos, provocando perda da resistência ou estabilidade e comprometendo a resistência da estrutura.

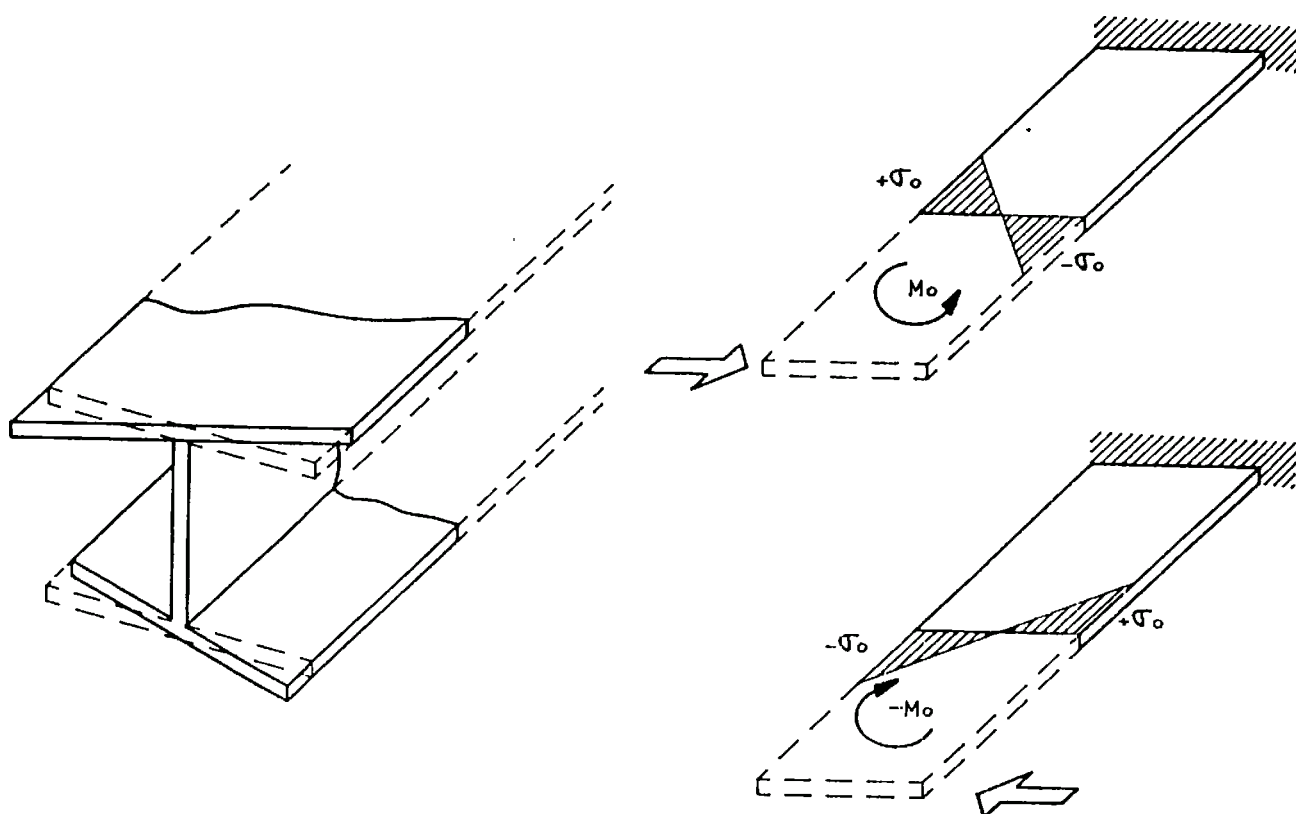


Figura A.9 - Flexão na torção. Flexão diferencial das abas (flanges)

Equilíbrio de Momentos

$$\int_A \sigma_{ft} \cdot y \cdot dA = \int_A E \cdot \theta'' \cdot w \cdot y \cdot dA = 0$$

$$\int_A \sigma_{ft} \cdot z \cdot dA = \int_A E \cdot \theta'' \cdot w \cdot z \cdot dA = 0$$

(A.10)

Como $E \cdot \theta''$ é constante para uma seção transversal, temos

$$\int_A w \cdot dA = 0$$

$$\int_A w \cdot z \cdot dA = 0$$

$$\int_A w \cdot y \cdot dA = 0$$

(A.11)

As conclusões de (A.11) constituem propriedades da função w , chamada Área Sectorial Principal, revisada no Apêndice C.

A determinação das tensões normais devido a flexo-torção (σ_{ft}), pode ser efetuada por meio do conhecimento do Bimomento. O Bimomento agente na seção é definido por:

(A.12)

$$B = \int_A \sigma_x \cdot w \cdot dA$$

Substituindo-se (A.8) em (A.12), considerando a viga sujeita apenas ao momento torçor ($\sigma_x = \sigma_{ft}$), temos:

$$B = \int_A E \cdot \theta'' \cdot w \cdot w \cdot dA \rightarrow B = E \cdot \theta'' \int_A w^2 \cdot dA$$

Como $I_w = \int_A w^2 \cdot dA$ é o momento de Inércia Sectorial (cm^6)

revisado no Apêndice C, temos:

$$B = E \cdot \theta'' I_w$$

(A.13)

sendo $E \cdot \theta'' = \frac{\sigma_{ft}}{w}$, vem:

$$B = \frac{\sigma_{ft}}{w} \cdot I_w \rightarrow \sigma_{ft} = \frac{B}{I_w} \cdot w$$

Para um ponto i do contorno s da seção transversal, a Área Sectorial (ou Coordenada Sectorial) nesse ponto será denotada por W_{si} , e dessa forma teremos para a expressão anterior:

(A.14)

$$\sigma_{ft} = \frac{B}{I_w} \cdot w_{si}$$

Portanto, o cálculo da tensão normal, devido aos efeitos do empenamento, é feito operacionalmente de forma semelhante àquele da flexão, onde:

- em substituição ao Momento Fletor (kgf.cm) considera-se o Bimomento (kgf.cm²)
- em substituição ao Momento de Inércia (cm⁴) de área considera-se o Momento de Inércia Sectorial (cm⁶);
- em substituição a Coordenada do Ponto Considerado y ou z (cm) considera-se a Coordenada Sectorial w (cm²).

A Tabela A.1 ilustra esse procedimento.

Tabela A.1 - COMPARAÇÃO DAS FORMULAÇÕES PARA CÁLCULO DE TENSÕES NORMAIS DE FLEXÃO E FLEXO-TORÇÃO

	FLEXÃO	FLEXO-TORÇÃO
Esforço Atuante na Seção	Momento Fletor [M] kgf . cm	Bimomento [B] kgf . cm ²
Propriedade da Seção	Momento de Inércia [I] cm ⁴	Momento de Inércia Sectorial [I _w] cm ⁶
Coordenada do Ponto em que se calcula a Tensão	Coordenada [y ou z] cm	Coordenada Sectorial [w] cm ²
Cálculo da Tensão Normal	$\sigma = \frac{M}{I} \cdot y \qquad \sigma_{ft} = \frac{B}{I_w} \cdot w$	

As propriedades w e I_w dependem da forma da seção transversal do perfil de paredes delgadas. Resta, portanto, determinar B e, dessa forma, calcular σ_{ft} , o que será feito no item seguinte.

A.3 EQUAÇÃO DO BIMOMENTO

A determinação da tensão normal σ_{ft} nos diversos pontos de uma seção transversal, requer o conhecimento do Bimomento nesta seção.

Considerando um trecho de viga de comprimento dx e sendo m o momento dos esforços externos por unidade de comprimento, em relação a

linha dos centros de torção, o equilíbrio do elemento impõe que (Figura A.10):

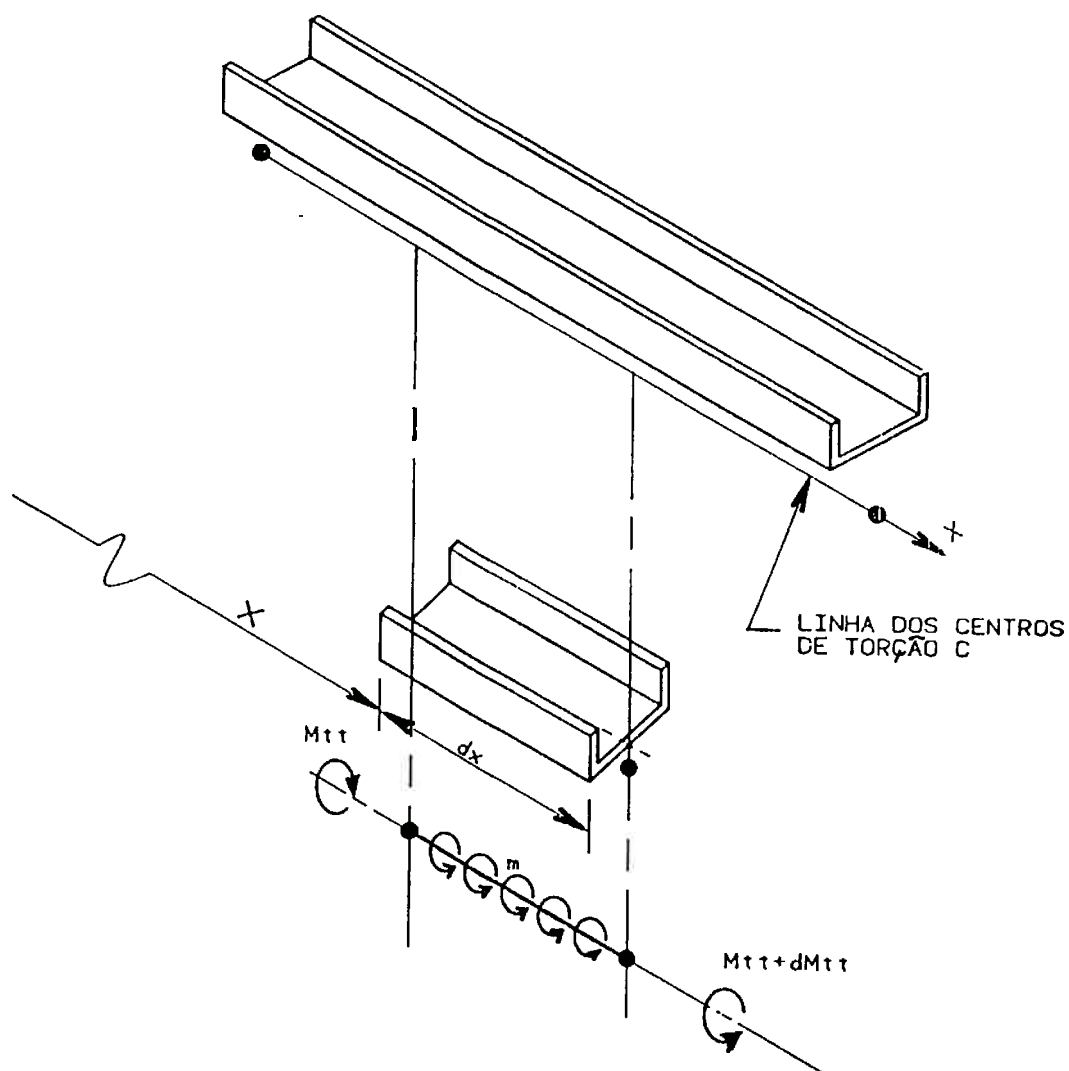


Figura A.10 - Equilíbrio de um elemento de viga na torção

$$(M_{tt} + dM_{tt}) + m \cdot dx - M_{tt} = 0 \rightarrow \frac{dM_{tt}}{dx} = -m \quad (A.15)$$

Da equação (A.2):

$$M_x = M_{tt} = G \cdot I_t \cdot \frac{d\theta}{dx} - E \cdot I_w \cdot \frac{d^3\theta}{dx^3},$$

e derivando em relação a x , temos:

$$\frac{dM_{tt}}{dx} = G \cdot I_t \cdot \theta'' - E \cdot I_w \cdot \theta'''' \quad (A.16)$$

de (A.13) temos que $\theta'' = \frac{B}{E \cdot I_w}$ e em (A.16)

$$\frac{dM_{tt}}{dx} = G \cdot I_t \cdot \frac{B}{E \cdot I_w} - E \cdot I_w \cdot \left(\frac{B}{E \cdot I_w} \right)''$$

e de (A.15)

$$-m = \frac{G \cdot I_t}{E \cdot I_w} \cdot B - B'' \rightarrow B'' - \frac{G \cdot I_t}{E \cdot I_w} \cdot B = m \quad (A.17)$$

$$\text{Fazendo } \alpha^2 = \frac{G \cdot I_t}{E \cdot I_w} \quad (A.18)$$

teremos:

Equação Diferencial do Bimomento

$$B'' - \alpha^2 \cdot B = m \quad (A.19)$$

A solução da equação (A.19) permite-nos obter o diagrama dos Bimomentos em função da posição x da seção da viga e calcular em seguida σ_{ft} . A solução geral da equação (A.19) é conhecida na Teoria de Equações Diferenciais e é dada por:

$$B = C_1 \cdot \text{sh}[\alpha \cdot x] + C_2 \cdot \text{ch}[\alpha \cdot x] + m_1 \quad (\text{A.20})$$

onde m_1 é uma solução particular da equação (A.19). Nos casos em que $m = 0$, $m = \text{constante}$ ou m variar linearmente com x , solução particular da equação (A.19) será dada por:

$$m_1 = \frac{-m}{\alpha^2} \quad (\text{A.21})$$

As constantes C_1 e C_2 da equação (A.20) são determinadas considerando-se as condições de contorno de cada viga a ser estudada.

Assim:

Extremidades Engastadas

$$\theta' = \frac{d\theta}{dx} = 0 \quad M_{tu} = G \cdot I_t \cdot \frac{d\theta}{dx} = 0 \quad (\text{A.22})$$

Extremidades Livres para Empenar

Nas extremidades livres o Bimomento é conhecido, pois pode-se aplicar a expressão:

$$B = \int_A \sigma \cdot w \cdot dA = \int_A w \cdot (\sigma \cdot dA) = \int_A w \cdot d(\text{força}), \text{ isto é:}$$

- se são aplicadas Forças Axiais Concentradas na extremidade, o Bimomento será igual ao produto da força pelo valor da função w no ponto de aplicação, somando-se todos os efeitos, ou seja:

$$\sum_{i=1}^n P_i \cdot W_i \quad \text{n Forças Axiais Concentradas}$$

- se houver Forças Axiais Distribuídas p ao longo do contorno da seção, teremos:

$$\int_A p \cdot w \cdot dA$$

Assim, na extremidade livre teremos:

$$B = \int_A p \cdot w \cdot dA + \sum_{i=1}^n P_i \cdot W_i \quad (\text{A.23})$$

onde p e P são positivos quando forem de tração.

No caso de não ocorrência de Forças Axiais na Extremidade Livre, teremos:

$$B = 0$$

A.4 TENSÕES DE CISALHAMENTO NA FLEXO-TORÇÃO

A existência de tensões normais que variam ao longo da direção axial da barra, devido ao fenômeno de flexo-torção, resulta no aparecimento de tensões de cisalhamento, como já observado anteriormente. O estudo teórico com o desenvolvimento analítico que permite a obtenção da expressão para cálculo de τ_{ft} devido a flexo-torção, pode ser encontrado nas referências (3), (8), (9) e (10).

Verifica-se que para um ponto i do contorno da seção, extremo do arco AB, a tensão de cisalhamento devido à flexo-torção é dada por:

$$\tau_{ft_i} = -\frac{M_{ft}}{I_w \cdot t} \int_{AB} w \cdot dA \quad (A.24)$$

onde $M_{sw} = \int_{AB} w \cdot dA$ é o Momento Estático Sectorial da área hachurada

da Figura A.11 (arco AB), assim:

$$\tau_{ft} = -\frac{M_{ft}(x) \cdot M_{sw}(s)}{I_w \cdot t} \quad (A.25)$$

dessa forma, o cálculo da tensão de cisalhamento, devida aos efeitos do empenamento, é feito operacionalmente de forma semelhante ao cálculo das tensões de cisalhamento na flexão, onde:

A.27

- em substituição à força Cortante (kgf) considera-se o Momento Torçor M_{ft} , componente de flexo-torção (kgf . cm);
- em substituição ao Momento Estático (cm^3) de área, considera-se o Momento Estático Sectorial (cm^4);
- em substituição ao Momento de Inércia (cm^4) de área, considera-se o Momento de Inércia Sectorial (cm^6).

A Tabela A.2 ilustra esse procedimento.

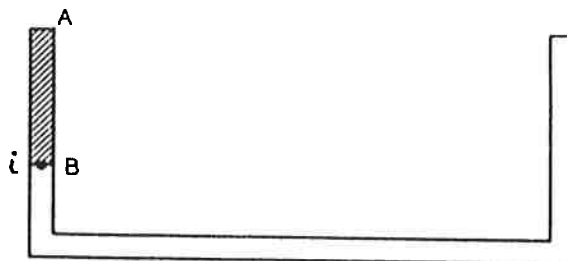


Figura A.11 - Área associada ao ponto i para cálculo do Momento Estático

Tabela A.2 - COMPARAÇÃO DAS FORMULAÇÕES PARA CÁLCULO DE TENSÕES DE CISALHAMENTO NA FLEXÃO E NA FLEXO-TORÇÃO

	FLEXÃO	FLEXO-TORÇÃO
Esforço Atuante na Seção	Força Cortante [Q] kgf	Momento Torçor [M_{ft}], componente de M_{tt} kgf . cm
Propriedades da Seção	Momento Estático [M_s] cm^3	Momento Estático Sectorial [M_{sw}] cm^4
	Momento de Inércia [I] cm^4	Momento de Inércia Sectorial [I_w] cm^6
Cálculo da Tensão Normal	$\tau = \frac{Q \cdot M_s}{t \cdot I} \qquad \tau_{ft} = \frac{-M_{ft} \cdot M_{sw}}{t \cdot I_w}$	

A.5 EQUAÇÕES GERAIS DA TEORIA DE VLASOV

Nas referências (3), (8), (9) e (10), como já mencionado, encontra-se o estudo analítico completo da flexo-torção. Foi elaborado um sumário das Equações da Teoria de Vlasov, que são apresentadas a seguir:

$$\sigma_{ft} = E.w.\theta'' \quad (A.26)$$

$$M_{ft} = -\frac{dB}{dx} = -B' \quad (A.27)$$

$$\frac{dM_{tt}}{dx} = -m \quad (A.28)$$

$$E.I_w.\theta' = \frac{M_{tu}}{\alpha^2} \quad (A.29)$$

$$E.I_w.\theta'' = B \quad (A.30)$$

$$E.I_w.\theta''' = -M_{ft} \quad (A.31)$$

$$E.I_w.\theta'''' = \frac{dM_{tu}}{dx} + m = \alpha^2 B + m \quad (A.32)$$

$$E.I_w.\theta'''' - G.I_t.\theta'' - m = 0 \quad (A.33)$$

$$M_{tt} = G.I_t.\theta' - E.I_w.\theta''' \quad (A.34)$$

$$\frac{dM_{tu}}{dx} = \alpha^2 . B \quad (A.35)$$

$$\frac{d^2 M_{tu}}{dx^2} = -\alpha^2 . M_{ft} \quad (A.36)$$

A.6 ROTEIRO PARA APLICAÇÃO DA TEORIA

No Apêndice C é apresentado um exemplo prático de cálculo das propriedades sectoriais necessárias ao estudo das tensões normais e de cisalhamento da flexo-torção. Para o caso mais geral, pode-se estabelecer uma rotina de cálculo visando a obtenção de σ_{ft} e τ_{ft} , como é mostrado a seguir na Figura A.12.

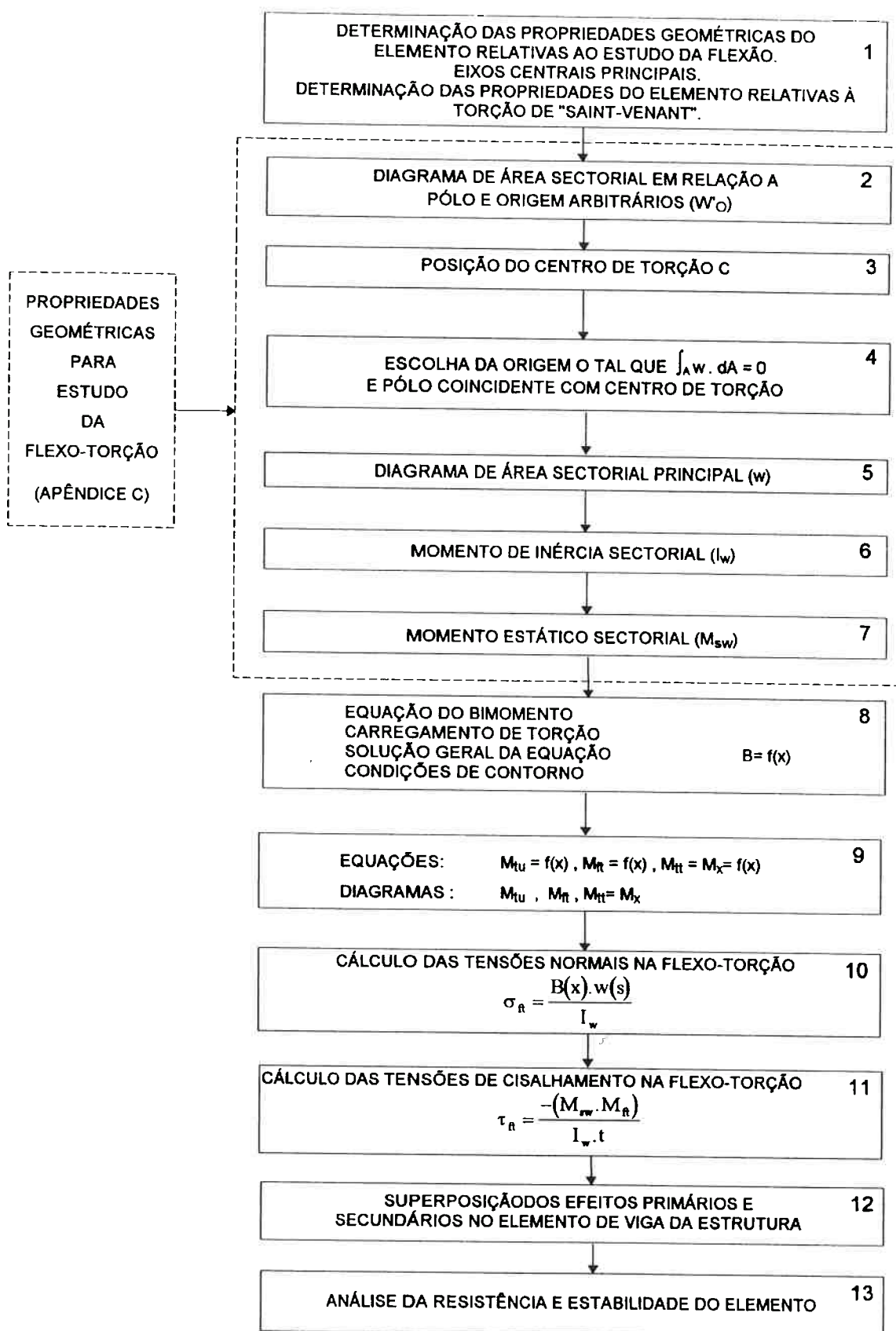


Figura A.12 - Representação esquemática da rotina de cálculo para obtenção de σ_{ft} e τ_{ft}

APÊNDICE B

DESENVOLVIMENTO CONCEITUAL E ANALÍTICO DA ANALOGIA FLEXÃO-RETORÇÃO

APÊNDICE B

DESENVOLVIMENTO CONCEITUAL E ANALÍTICO DA ANALOGIA FLEXÃO-RETORÇÃO

B.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

A teoria de Vlasov revisada no Apêndice A, permite o equacionamento do problema de Flexo-Torção para perfis abertos de paredes delgadas, por intermédio da Equação Diferencial do Bimomento de Flexo-Torção. Vlasov (3) encontrou a solução desta equação para diversas condições de contorno e para vários casos de carregamentos aplicados a uma viga isolada, e que ocasionavam torção na viga, decorrente da existência de excentricidade da carga em relação ao centro de torção, como representado na Figura B.1. Tais condições englobam os casos clássicos de vigas em condições de vínculos ideais já conhecidos da Resistência dos Materiais Elementar e, portanto, até certo ponto, com um espectro limitado de aplicação. Para uma estrutura real constituída por perfis abertos de paredes delgadas, as condições de extremidade de cada viga, objeto de análise, não são perfeitamente conhecidas, como nos casos ideais mencionados anteriormente; cada elemento está vinculado a outros elementos estruturais que apresentam características de rigidez a serem

consideradas em função do tipo de ligação entre eles, e em função da rigidez dos próprios elementos.

A Figura B.2.a representa um exemplo de transmissão de esforços entre duas vigas perpendiculares de seções circulares. O perfil circular não sofre empenamento durante a torção, de forma que o momento torçor na viga 1 está em equilíbrio com o momento fletor na viga 2. Este caso, corresponde à abordagem clássica da Resistência dos Materiais Elementar. A Figura B.2.b representa a transmissão de esforços entre duas vigas C perpendiculares. No membro 1 a torção provoca a flexão dos flanges em sentidos opostos. Essas flexões diferenciais são transmitidas aos flanges superior e inferior da viga 2, de modo que a viga sofre também torção. Assim, a torção do membro 1 também provoca torção no membro 2, e não apenas flexão, como no exemplo citado na Figura B.2.a. O exemplo da união de perfis C, tal como ocorre em uma estrutura real, evidencia que o empenamento nesse caso não é perfeitamente restrito nem completamente livre, mas situa-se em uma condição intermediária entre esses casos ideais. Portanto, a aplicação da teoria explanada no Apêndice A, considerando uma viga da estrutura com a condição de restrição total ao empenamento, ou liberdade total ao empenamento, poderia levar-nos a resultados bastante distintos da realidade.

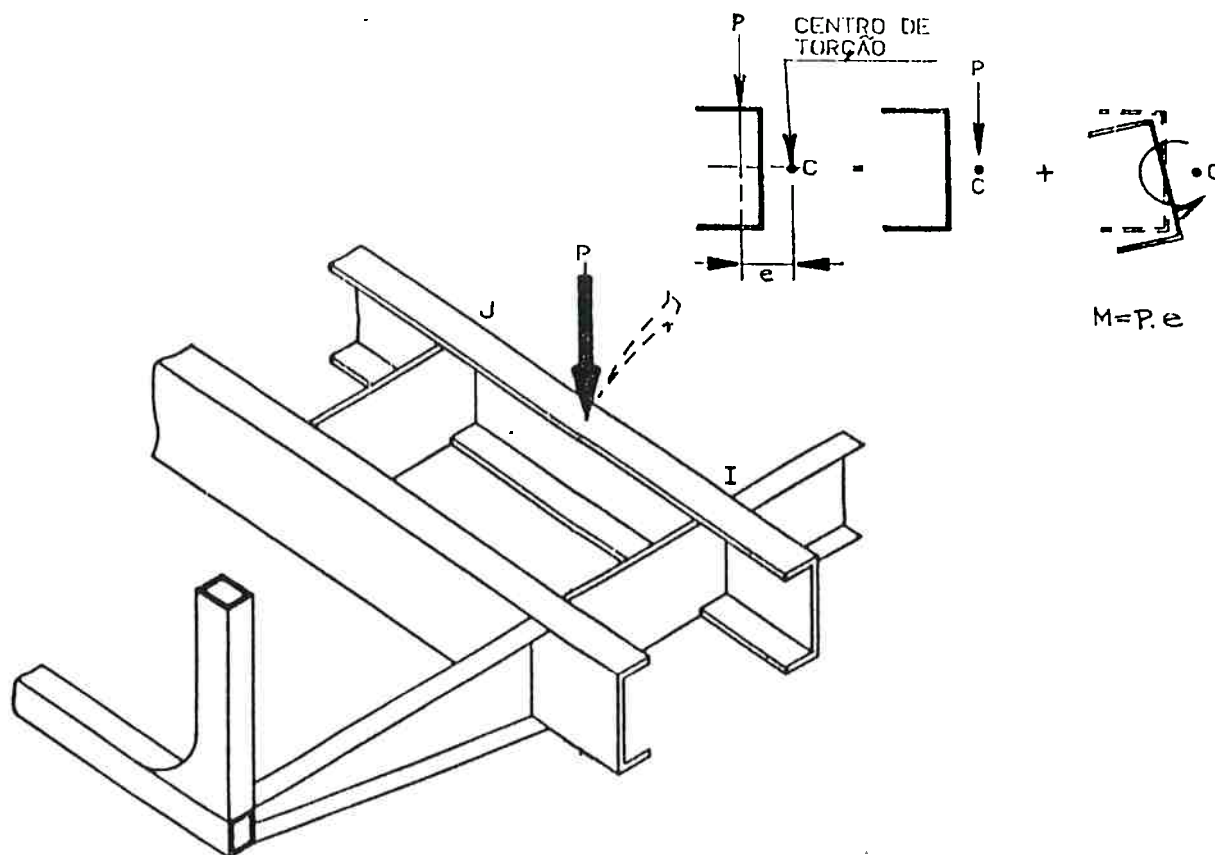


Figura B.1 - Exemplo de carga aplicada em viga com excentricidade e , introduzindo Momento Torçor

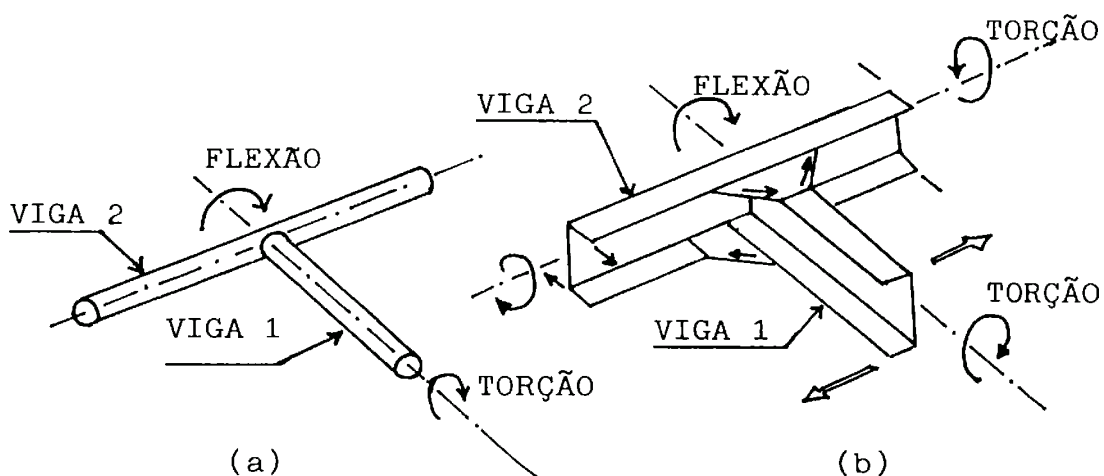
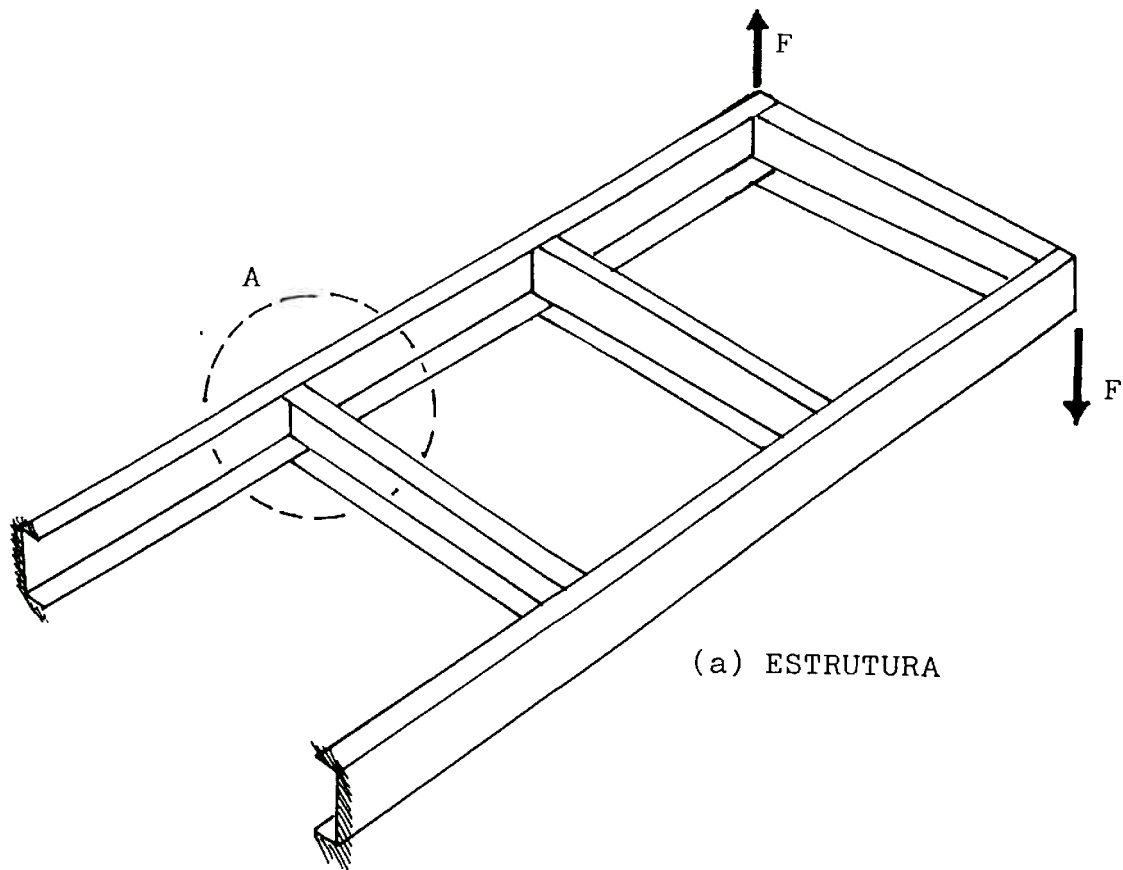


Figura B.2 - Transmissão de Momentos Torçores para os casos de existência ou não de empenamento

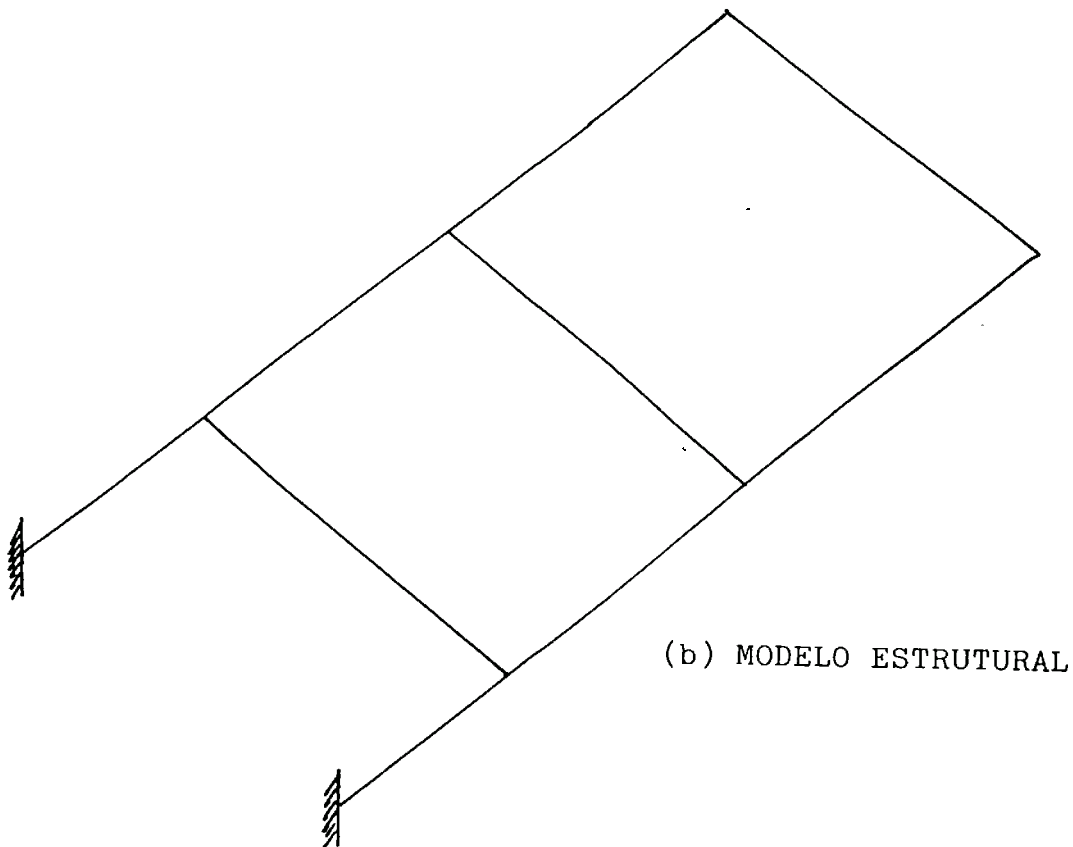
B.2. ALTERNATIVAS PARA DISCRETIZAÇÃO

As dificuldades mencionadas em B.1 poderiam ser superadas, por intermédio da utilização de uma ferramenta poderosa de análise, tal como o Método dos Elementos Finitos, que considera um modelo matemático discreto equivalente ao problema contínuo real. A discretização de problemas em engenharia visa superar a intratabilidade do tipo de problema contínuo como citado em B.1, porém, a modelagem desse tipo de problema merece cuidados especiais, como é mencionado a seguir.

A Figura B.3.a representa uma estrutura constituída por perfis abertos de paredes delgadas e a Figura B.3.b representa um modelo estrutural da mesma, utilizando-se para essa discretização elementos finitos de viga convencionais, isto é, com 6 graus de liberdade por nó. Como a matriz de rigidez do elemento de viga em consideração não incorpora os componentes de deslocamento associados ao empenamento do elemento, decorrente da torção, esse tipo de modelo estrutural não se presta a resolver o problema de flexo-torção. Essa limitação poderia ser superada se discretizássemos a estrutura por intermédio de elementos finitos de casca, levando em conta as particularidades das ligações entre elementos. Os pontos do contorno dos perfis C, seriam discretizados por diversos pontos nodais, permitindo a determinação dos componentes axiais de deslocamento associados ao empenamento.

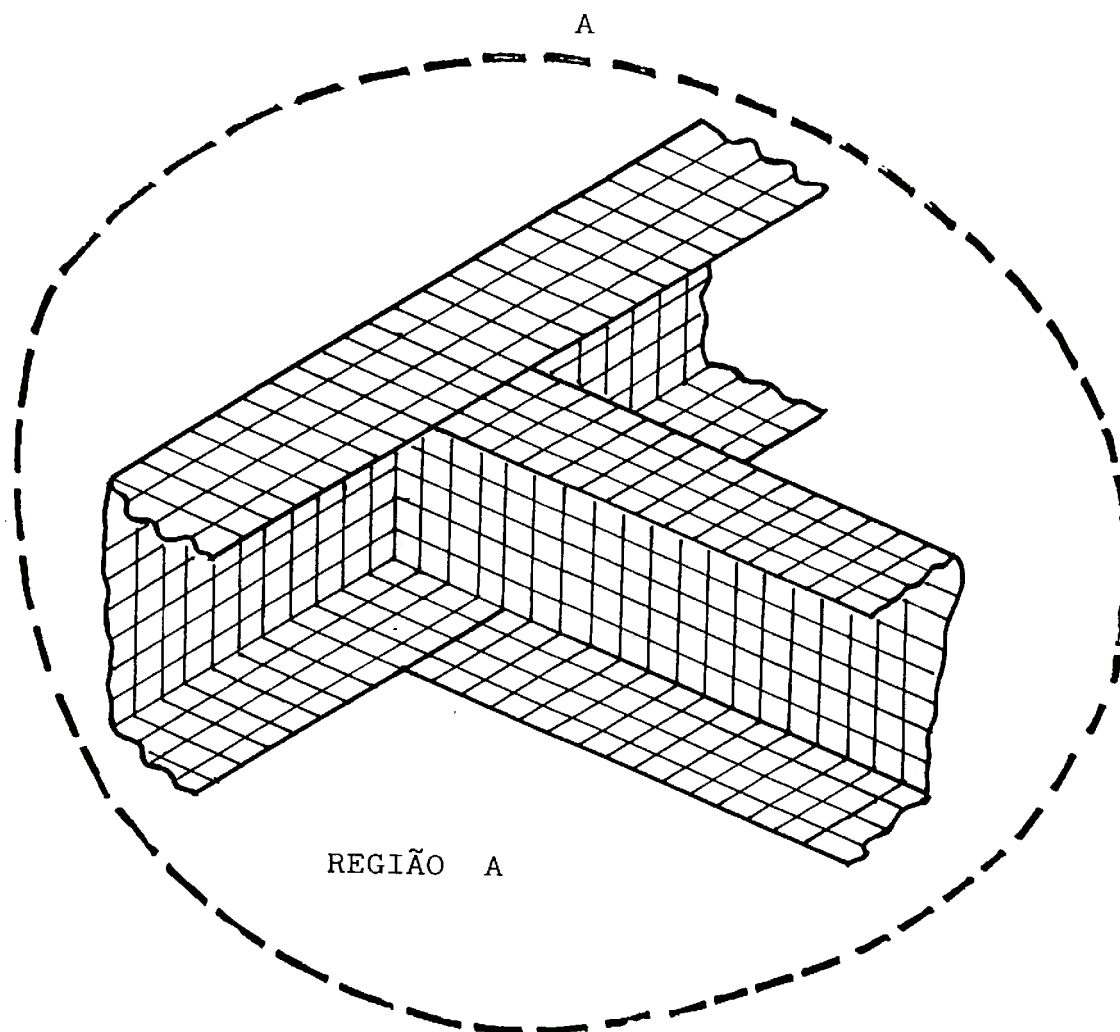


(a) ESTRUTURA



(b) MODELO ESTRUTURAL

Figura B.3 - Estrutura constituída de perfis de paredes delgadas e modelo estrutural com elementos de viga convencionais



*Figura B.4 - Modelo estrutural com elementos de casca.
Representação da região A.*

A região A da estrutura representada na Figura B.3.a é discretizada na Figura B.4. Tal solução, para a estrutura inteira, embora satisfatória, é extremamente trabalhosa.

A solução desse problema por intermédio de um modelo com elementos de viga pode ser proposta considerando-se o comportamento na torção de cada uma das vigas de paredes delgadas. Como já foi mencionado na análise física do problema de retorção, a viga C de paredes delgadas pode ser analisada como sujeita a flexões diferenciais dos seus flanges. Uma tentativa seria elaborar um modelo que considerasse essas flexões dos flanges, por intermédio de elementos de viga diferentes. Essas flexões diferenciais estariam interagindo através de algum elemento de ligação que corresponderia ao papel da alma do perfil C; tal modelo poderia incluir as propriedades associadas à flexo-torção já conhecidas da teoria de Vlasov, utilizando elementos de viga convencionais. A Figura B.5 representa a idéia conceitual desse modelo. Tal "modelo híbrido" será explanado no item B.3 por intermédio da Analogia Flexão-Retorção. Portanto, a solução do problema de flexo-torção, utilizando elementos de viga convencionais, não implica em alterações na formulação do elemento finito de viga, e não altera o núcleo do programa de computador utilizado para esse fim. Uma outra alternativa, que não está sendo considerada neste trabalho, é o desenvolvimento de um elemento de viga não convencional que incorpore em sua matriz de rigidez os componentes de deslocamento associados ao

empenamento do elemento; tal solução além de seguir uma filosofia diferente deste trabalho, necessitaria para sua implementação, o acesso do analista ao núcleo do programa de elementos finitos, o que nem sempre é possível ao se trabalhar com os programas comerciais disponíveis. O desenvolvimento desta última idéia é encontrado no trabalho de Hughes (8).

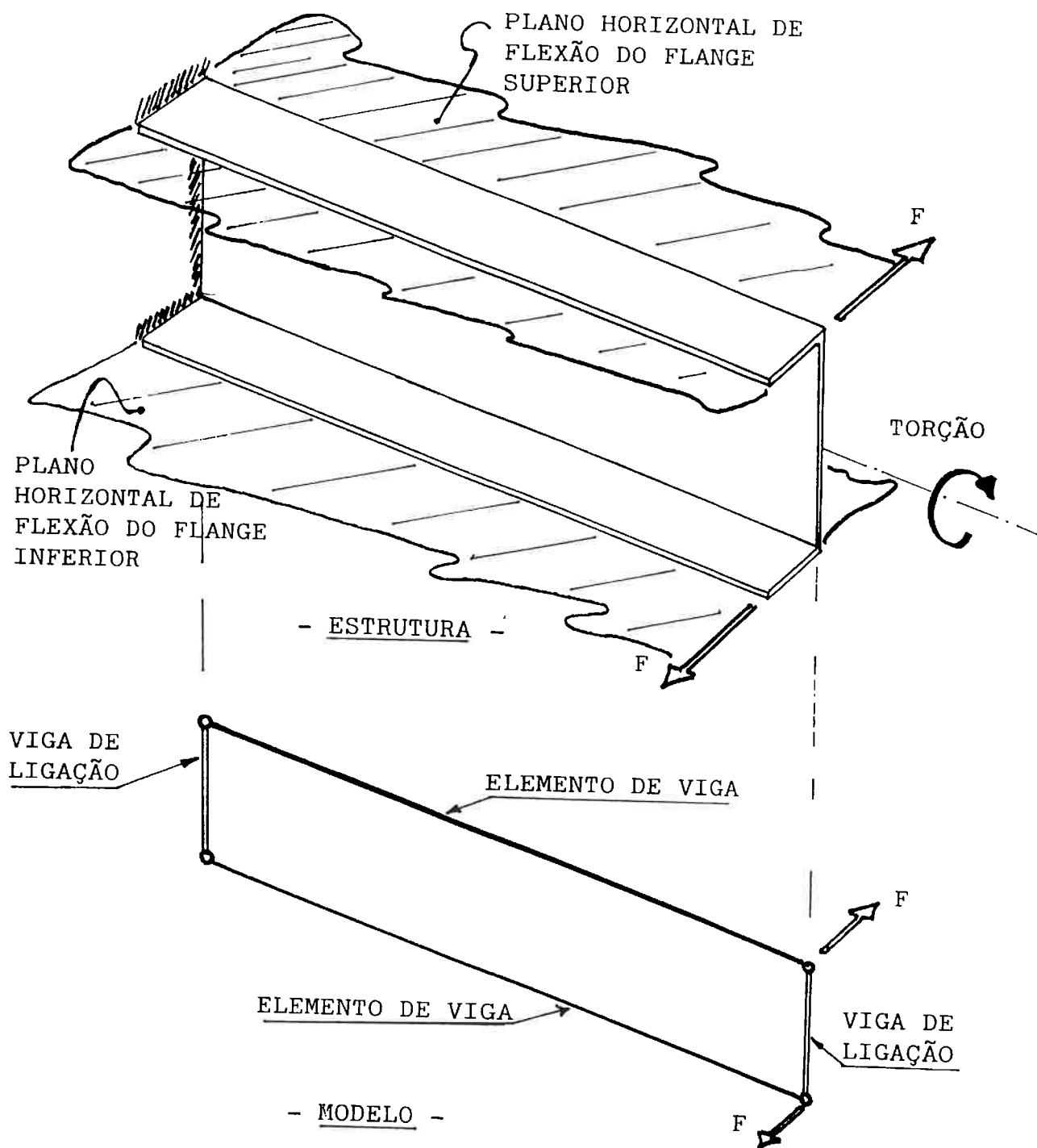


Figura B.5 - Idéia inicial de modelo com elementos de vigas convencionais para cálculo de flexo-torção

B.3. - ANALOGIA FLEXÃO-RETORÇÃO

A Figura B.6 representa um perfil aberto de paredes delgadas tipo C sujeito à torção, e o modelo estrutural constituído por 4 elementos de viga. O modelo estrutural considerado deve, portanto, exibir características de rigidez e de tensões atuantes - similares à estrutura real. No exemplo considerado, uma das extremidades do perfil C está engastada e, portanto, o empenamento nessa extremidade é restrito. Na extremidade oposta, o perfil tem liberdade total ao empenamento. Os elementos de viga horizontais H_1 e H_2 sofrem flexões nos planos horizontais paralelos ao plano xz , eles se deslocam lateralmente na direção z , devido à atuação do momento torçor. As vigas verticais V apresentam rigidez infinita às flexões nos planos xy e yz , movimentando-se como corpo rígido. Como a extremidade livre do perfil pode sofrer empenamento, ocorrendo extensão longitudinal dos flanges, admite-se para a viga vertical da extremidade livre, rigidez à torção nula. De acordo com a figura B.6, e pela definição de ângulo em radianos, tem-se para θ pequeno:

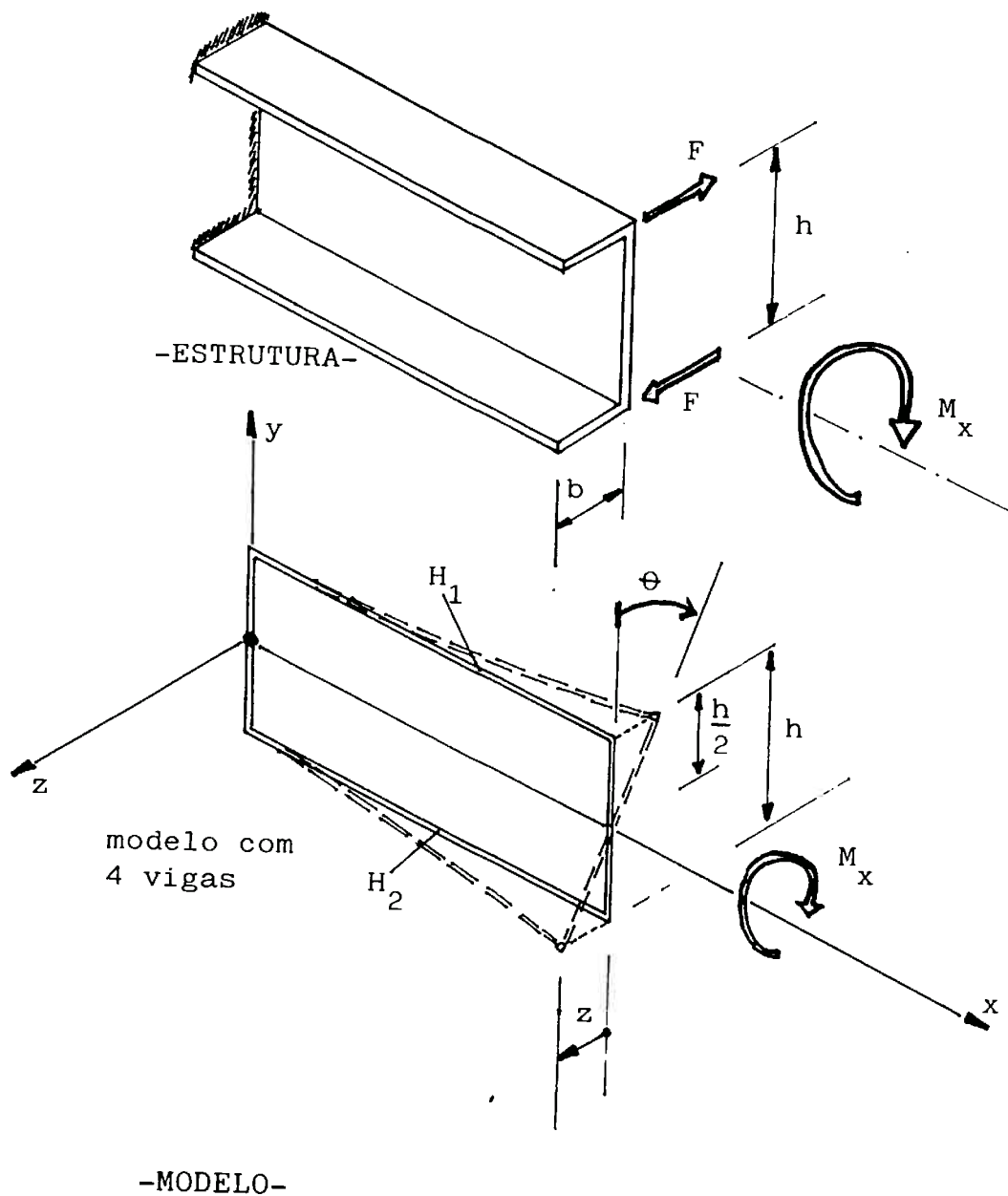


Figura B.6 - Torção de perfil C e discretização por modelo de 4 elementos de viga

$$\frac{Z}{h/2} = \theta \quad (B.1)$$

resultando,

$$\theta = \frac{2.z}{h} \quad (B.2)$$

Pela Equação da Torção Restringida (A.2) tem-se:

$$M_x = G.I_t \cdot \frac{d\theta}{dx} - E.I_w \cdot \frac{d^3\theta}{dx^3}$$

e substituindo-se (B.2) na equação (A.2) resulta:

$$M_x = G.I_t \cdot \frac{d\left(\frac{2.z}{h}\right)}{dx} - E.I_w \cdot \frac{d^3\left(\frac{2.z}{h}\right)}{dx^3}$$

$$M_x = \frac{2}{h} \cdot G.I_t \cdot \frac{dz}{dx} - \frac{2}{h} \cdot E.I_w \cdot \frac{d^3z}{dx^3}$$

Sendo $M_x = F.h$, resultará:

$$F = \frac{2}{h^2} \cdot G.I_t \cdot \frac{dz}{dx} - \frac{2}{h^2} \cdot E.I_w \cdot \frac{d^3z}{dx^3}, \text{ ou}$$

$$F = G \cdot \frac{2.I_t}{h^2} \cdot \frac{dz}{dx} - E \cdot \frac{2.I_w}{h^2} \cdot \frac{d^3z}{dx^3}$$

Para o perfil aberto tipo C tem-se:

$$I_t = \frac{2.b.t^3}{3} + \frac{h.t^3}{3}$$

e nas condições de um perfil de paredes delgadas

$$\frac{I_t}{h^2} \approx 0, \text{ e assim:}$$

$$F \approx -E \cdot \frac{2.I_w}{h^2} \cdot \frac{d^3 z}{dx^3} = -E \cdot I_y^* \cdot \frac{d^3 z}{dx^3} \quad (B.3)$$

que representa o esforço cortante nas vigas H, onde

$$I_y^* = \frac{2.I_w}{h^2}$$

Da resistência dos materiais elementar pode-se escrever:

$$Q_z = \frac{dM_y}{dx} = E \cdot I_y \cdot \frac{d^3 z}{dx^3} \quad (B.4)$$

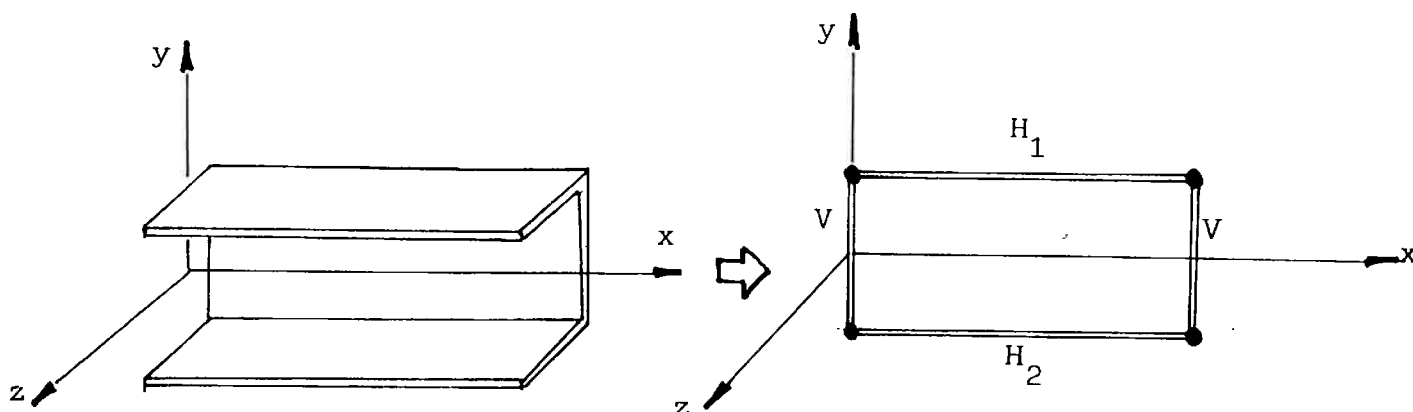
Comparando (B.3) e (B.4) e considerando que M_x aplicado nesse exemplo é negativo, resulta:

$$I_y = \frac{2.I_w}{h^2} = I_y^* \quad (B.5)$$

A expressão (B.5), juntamente com as condições estabelecidas anteriormente para as vigas verticais V, permitem o estabelecimento de uma

Analogia Flexão-Retorção, de forma que com um modelo estrutural constituído por elementos de viga convencionais, o fenómeno da Retorção pode ser levado em conta. Nesse modelo, as vigas H_1 e H_2 são caracterizadas pelo momento de inércia I_y , que considera a propriedade sectorial I_w e a altura h . Considerando-se rigidez axial infinita para as vigas verticais V e rigidez à flexão infinita para essas mesmas vigas V , a flexão vertical pode ser representada por apenas uma das vigas H , por intermédio da respectiva rigidez à essa flexão. Quanto as rigidezes axiais das vigas horizontais, serão consideradas nulas por dois motivos: Primeiro, a torção da grelha representada na figura B.3.a gera flexões e torções nos membros que a compõe mas não ocasiona o aparecimento de forças axiais associadas a deformações axiais uniformes nas seções das vigas; e segundo, a rigidez axial das vigas H , distanciadas de h , ocasionaria o equilíbrio de momentos fletores verticais por um par de forças horizontais aplicadas axialmente nas vigas H e com braço de momento h . Atribuindo rigidez axial nula às vigas horizontais, as flexões verticais serão equilibradas somente pelos momentos fletores internos associados à rigidez à flexão de uma das vigas H . A Figura B.7 resume as idéias conceituais envolvidas na montagem da Analogia Flexão-Retorção, de forma a permitir por intermédio de um modelo estrutural constituído por elementos de viga convencionais, a análise do fenómeno de Flexo-Torção.

Embora a introdução da Analogia Flexão-Retorção tenha sido efetuada com o exemplo do perfil C, o raciocínio seria análogo para outros tipos de perfis de paredes delgadas em que ocorram flexões diferenciais nos planos paralelos de suas abas ou flanges. Evidentemente que em cada caso analisado dever-se-ia considerar a expressão adequada do momento de inércia I_t à semelhança do que foi feito na dedução da página B.11 para o caso do perfil C.



(A) Estrutura Real

(B) Modelo para cálculo de flexão no plano XY e torção, através das flexões diferenciais dos flanges.

	Estrutura Real	Modelo para Analogia Flexão-Retorção			
		membro H ₁	membro H ₂	membro V ^(^o)	membro V ^(^o)
Rigidez à Flexão no Plano xy	EI_z	0	EI_z	∞	∞
Rigidez à Flexão no Plano xz	EI_y	EI_y^*	EI_y^*	(plano yz) ∞	(plano yz) ∞
Rigidez Axial	EA	0	0	∞	∞
Rigidez Torcional	GI_t	$GI_t/2$	$GI_t/2$	0	∞

(^o) A Extremidade é livre para empenar

(^o) A Extremidade é impedida de empenar

Figura B.7 - Analogia Flexão-Retorção

B.4. TESTES DE CONFIABILIDADE

B.4.1. Introdução

Neste ítem serão considerados diversos métodos de solução do problema de Flexo-Torção, tomando-se como referência um exemplo numérico. O mesmo problema será resolvido pela Teoria de Vlasov, pelo Método dos Elementos Finitos, considerando a discretização do problema por elementos de casca e, finalmente, utilizando-se a Analogia Flexão-Retorção, considerando-se elementos de viga convencionais. Será considerado um exemplo de tal forma que a sua solução possa ser estabelecida de forma exata por meio de equações diferenciais e, posteriormente, em comparação com a solução dada pela Analogia Flexão-Retorção, fique caracterizada a validade da Analogia, por intermédio de aplicação numérica. Estabelecida a confiabilidade da Analogia introduzida, poder-se-á partir para a solução de problemas envolvendo muitos elementos, o que constitui uma aplicação prática de interesse, tal como em estruturas tipo chassis de veículos.

B.4.2. Exemplo de Cálculo

A viga de aço representada na Figura B.8, está sujeita a um momento torçor $M = F.h = 20.20 = 400 \text{ Kgf. cm}$, e engastada em uma de suas extremidades. Para esse perfil, estabeleceremos a solução do

problema de Flexo-Torção, calculando as tensões normais de flexo-torção, pelos processos já mencionados.

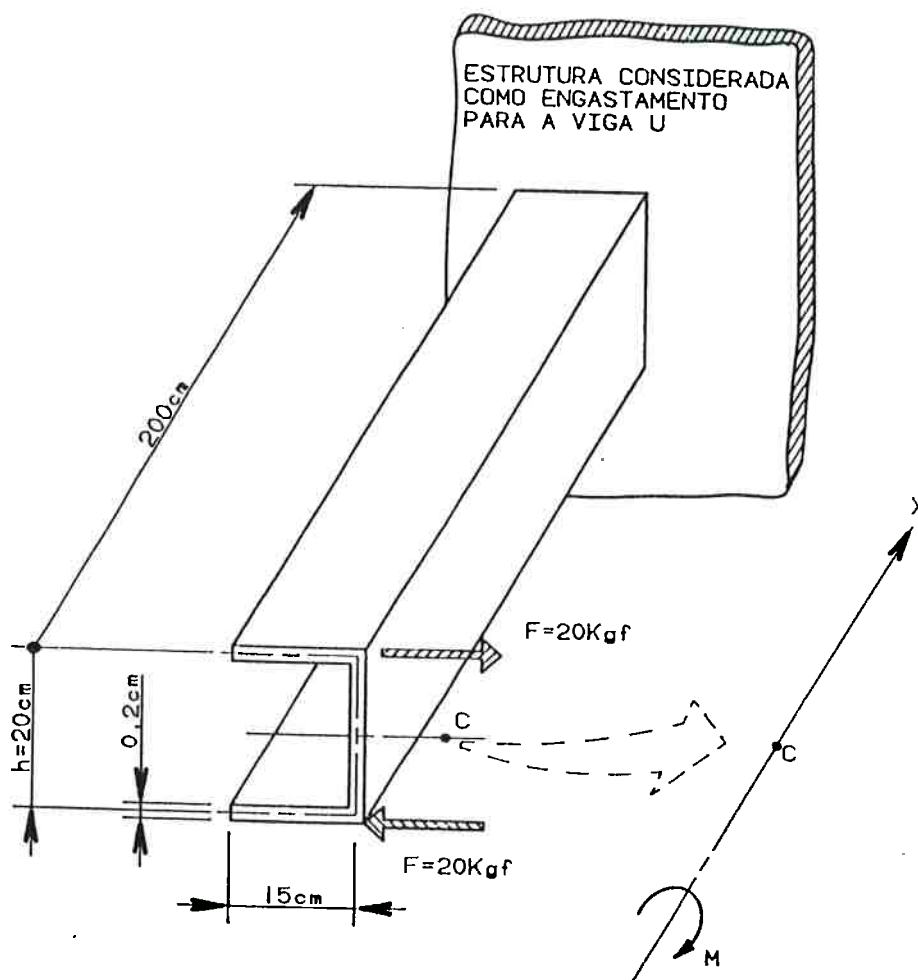


Figura B.8 - Exemplo para cálculo de Flexo-Torção

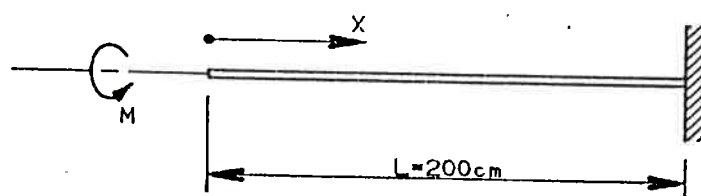


Figura B.9 - Representação esquemática do problema a ser estudado

B.4.2.1. TEORIA DE VLASOV

As propriedades geométricas associadas à viga em estudo foram determinadas no Apêndice C. Portanto, os passos 1 a 7 representados na Figura A.12, que definem um roteiro para aplicação da Teoria de Vlasov, já estão executados. O próximo passo constitui o estudo do Bimomento de Flexo-Torção. Nesse caso, o único esforço externo agente na viga é o Momento Torçor M , como representado na Figura B.9 de forma esquemática e, portanto:

$$M_{tt} = M$$

De acordo com a equação (A.3):

$$M_{tt} = M_{tu} + M_{ft} \rightarrow M_{tt} = M_{tu} + M_{ft} = M = \text{constante}$$

A Equação Diferencial da Bimomentó é (A.19):

$$B'' - \alpha^2 \cdot B = m \quad \text{onde} \quad \alpha^2 = \frac{G \cdot I_t}{E \cdot I_w}$$

A solução desta Equação Diferencial é dada por (A.20):

$$B = C_1 \cdot \text{sh}(\alpha \cdot x) + C_2 \cdot \text{ch}(\alpha \cdot x) + m_1$$

$$\text{de (A.15)} \quad m = -\frac{dM_{tt}}{dx} \rightarrow m = 0, \text{ pois } M_{tt} = \text{constante}$$

$$\text{de (A.21)} \quad m_1 = -\frac{m}{\alpha^2} \rightarrow m_1 = 0. \text{ Assim:}$$

$$B = C_1 \cdot \text{sh}(\alpha \cdot x) + C_2 \cdot \text{ch}(\alpha \cdot x)$$

Aplicamos as Condições de Contorno:

Extremidade Livre (x=0)

$B = 0$ pois não há forças axiais aplicadas. Assim:

$$B = 0 = C_1 \cdot \text{sh}(\alpha \cdot 0) + C_2 \cdot \text{ch}(\alpha \cdot 0)$$

$$0 = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 \rightarrow C_2 = 0$$

$$\text{Portanto } B = C_1 \cdot \text{sh}(\alpha \cdot x)$$

Extremidade Engastada (x=L)

$$\text{De (A.27): } M_{ft} = -\frac{dB}{dx} = -B'$$

$$\text{derivando } B, \text{ temos } B' = C_1 \cdot \alpha \cdot \text{ch}(\alpha \cdot x)$$

Assim,

$$M_{ft} = -\alpha \cdot C_1 \cdot \text{ch}(\alpha \cdot x)$$

$$\text{Portanto: } M = M_{tu} + M_{ft} = M_{tu} - \alpha \cdot C_1 \cdot \text{ch}(\alpha \cdot x)$$

(na extremidade engastada $M_{tu} = 0$)

$$M = 0 - \alpha \cdot C_1 \cdot \text{ch}(\alpha \cdot x) \rightarrow C_1 = -\frac{M}{\alpha \cdot \text{ch}(\alpha \cdot L)}$$

A Equação do Bimomento fica então:

$$B = C_1 \cdot \text{sh}(\alpha \cdot x) = -\frac{M}{\alpha \cdot \text{ch}(\alpha \cdot L)} \cdot \text{sh}(\alpha \cdot x)$$

$$B = -\frac{M}{\alpha \cdot \text{ch}(\alpha \cdot L)} \cdot \text{sh}(\alpha \cdot x) \quad e$$

$$M_{\text{ft}} = -\alpha \cdot C_1 \cdot \text{ch}(\alpha \cdot x) = -\alpha \cdot \left(\frac{-M}{\alpha \cdot \text{ch}(\alpha \cdot L)} \right) \cdot \text{ch}(\alpha \cdot x)$$

$$M_{\text{ft}} = \frac{M}{\text{ch}(\alpha \cdot L)} \cdot \text{ch}(\alpha \cdot x)$$

como $M_{\text{tt}} = M_{\text{tw}} + M_{\text{ft}}$ tem-se

$$M_{\text{tw}} = M - \frac{M}{\text{ch}(\alpha \cdot L)} \cdot \text{ch}(\alpha \cdot x) \rightarrow M_{\text{tw}} = M \cdot \left(1 - \frac{\text{ch}(\alpha \cdot x)}{\text{ch}(\alpha \cdot L)} \right)$$

no exemplo em estudo:

$$M = 400 \text{ kgf.cm}$$

$$L = 200 \text{ cm}$$

$$I_t = 0,133 \text{ cm}^4$$

$$I_w = 17.386,4 \text{ cm}^6$$

$$\nu = 0,3 \text{ (coeficiente de Poisson)}$$

$$\alpha^2 = \frac{G \cdot I_t}{E \cdot I_w} = \frac{E}{2(1+\nu)E} \cdot \frac{0,133}{17.386,4} \rightarrow \alpha = 0,0017153 \text{ cm}^{-1}$$

$$\alpha \cdot L = 0,34306$$

o que permite determinar:

$$M_{\text{ft}} = \frac{M}{\text{ch}(0,34306)} \cdot \text{ch}(0,0017153 \cdot x)$$

$$M_{\text{tw}} = M \left[1 - \frac{\text{ch}(0,0017153 \cdot x)}{\text{ch}(0,34306)} \right]$$

$$B = -\frac{M}{0,0017153 \cdot \text{ch}(0,34306)} \cdot \text{sh}(0,0017153 \cdot x)$$

com essas expressões, podemos calcular as distribuições de M_{tu} , M_{ft} , M_{tt} e B ao longo do comprimento da viga, como é indicado na Tabela B.1.

Tabela B.1 - Distribuições de M_{tu} , M_{ft} , M_{tt} e B

X	0	50	100	150	200
M_{tu}	0,056.M	0,053.M	0,042.M	0,025.M	0
M_{ft}	0,944.M	0,947.M	0,958.M	0,975.M	M
M_{tt}	1,000.M	1,000.M	1,000.M	1,000.M	M
B	0	-47,25.M	-94,85.M	-143,15.M	-192,51.M

$$[x] = \text{cm}; \quad [M_{tu}] = [M_{ft}] = [M_{tt}] = \text{kgf.cm}; \quad [B] = \text{kgf.cm}^2$$

Passemos ao cálculo das tensões Normais na Flexo-Torção (σ_{ft}), que são dadas por:

$$\sigma_{ft} = \frac{B(x) \cdot w(s)}{I_w}$$

Nesta expressão, I_w é válido para toda a seção e é constante ao longo do comprimento da viga, que é prismática, w varia ao longo do contorno s da seção, mas para um ponto do contorno o seu valor é constante ao longo do eixo axial x .

Considerando a seção transversal de abscissa $x = 200$ cm, onde o Bimomento é máximo, teremos:

$$B = - 192,51 . M$$

$$B = - 192,51 . 400$$

$$B = - 77.004 \text{ kgf.cm}^2$$

Considerando 16 pontos para cálculo das tensões normais devido a flexo-torção (Figura B.10), teremos as coordenadas sectoriais dadas pela Tabela B.2.

Tabela B.2 - Coordenadas Sectoriais

Pontos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
w (cm ²)	-88,63	-58,63	-28,63	1,37	31,37	61,37	36,822	12,274	-12,274	-36,822	-61,37	-31,37	-1,37	28,63	58,63	88,63

Para cada um desses pontos, pode-se calcular as tensões normais:

$$\sigma_{ft} = - \frac{77.004}{17.386,4} . w$$

Os resultados dessas tensões são apresentados na Tabela B.3 e o respectivo diagrama na Figura B.11.

Tabela B.3 - Tensões Normais de Flexo-Torção

Ponto	σ_{ft} (kgf / cm ²)
1	+ 392,54
2	+ 259,67
3	+ 126,80
4	- 6,07
5	- 138,94
6	- 271,81
7	- 163,08
8	- 54,36
9	+ 54,36
10	+ 163,08
11	+ 271,81
12	+ 138,94
13	+ 6,07
14	- 126,80
15	- 259,67
16	- 392,54

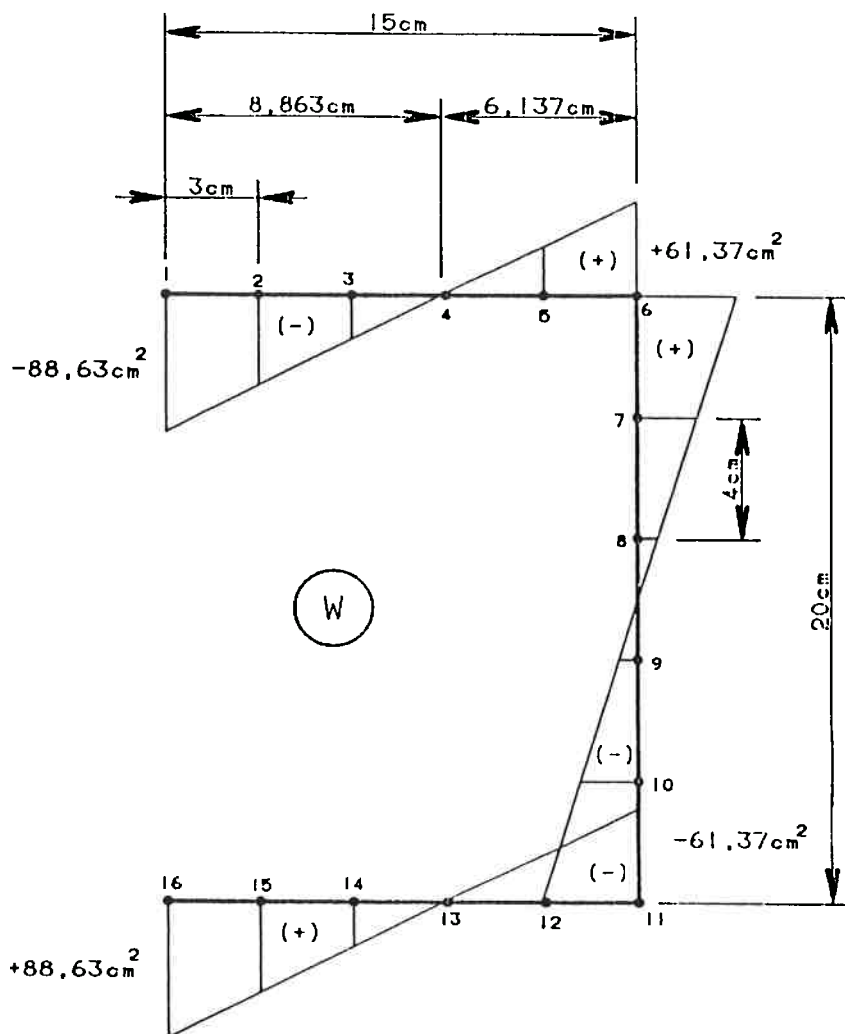


Figura B.10 - Diagrama de Área Sectorial Principal

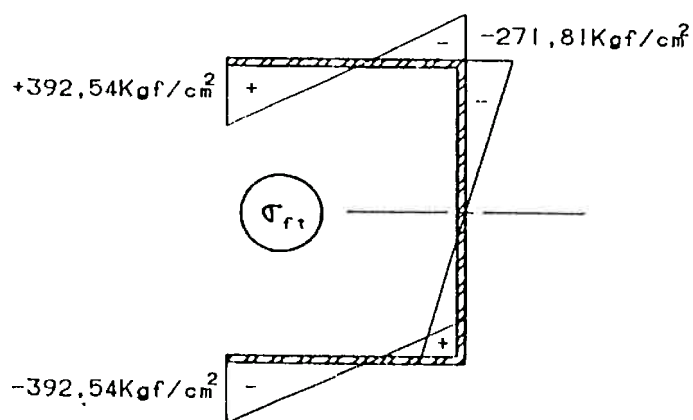


Figura B.11 - Tensões normais de Flexo-Torção para $X = 200 \text{ cm}$, no engastamento

Considerando as diferentes seções da viga, podemos calcular os valores do Bimomento em função de x e as consequentes tensões normais de flexo-torção.

A Figura B.12 representa a variação dessas tensões normais ao longo do comprimento da viga, para os pontos do flange superior.

As Tensões de Cisalhamento na Flexo-Torção (τ_{ft}), podem ser calculadas pela Teoria de Vlasov por (A.25):

$$\tau_{ft} = - \frac{M_{ft}(x) \cdot M_{sw}(s)}{I_w \cdot t}$$

Nesta expressão I_w é válido para toda a seção e é constante ao longo do comprimento da viga, que é prismática, M_{sw} varia ao longo do contorno s da seção, mas para um ponto do contorno o seu valor é constante ao longo do eixo axial x .

Considerando a seção transversal de abscissa $x = 200$ cm, onde M_{ft} é máximo, teremos:

$$M_{ft} = M = 400 \text{ kgf} \cdot \text{cm}$$

Considerando os pontos N, R, M, B, O, B', O', R' e L para cálculo das tensões de cisalhamento devido à flexo-torção (Figura C.20 -

Apêndice C), teremos o diagrama do Momento Estático Sectorial, cujos pontos são dados na Tabela B.4.

Tabela B.4 - Momento Estático Sectorial

Pontos	N	R	M	B	O	B'	O'	R'	L
$M_{sw} (cm^4)$	0	-78,55	-40,89	0	+20,45	0	-40,89	-78,55	0

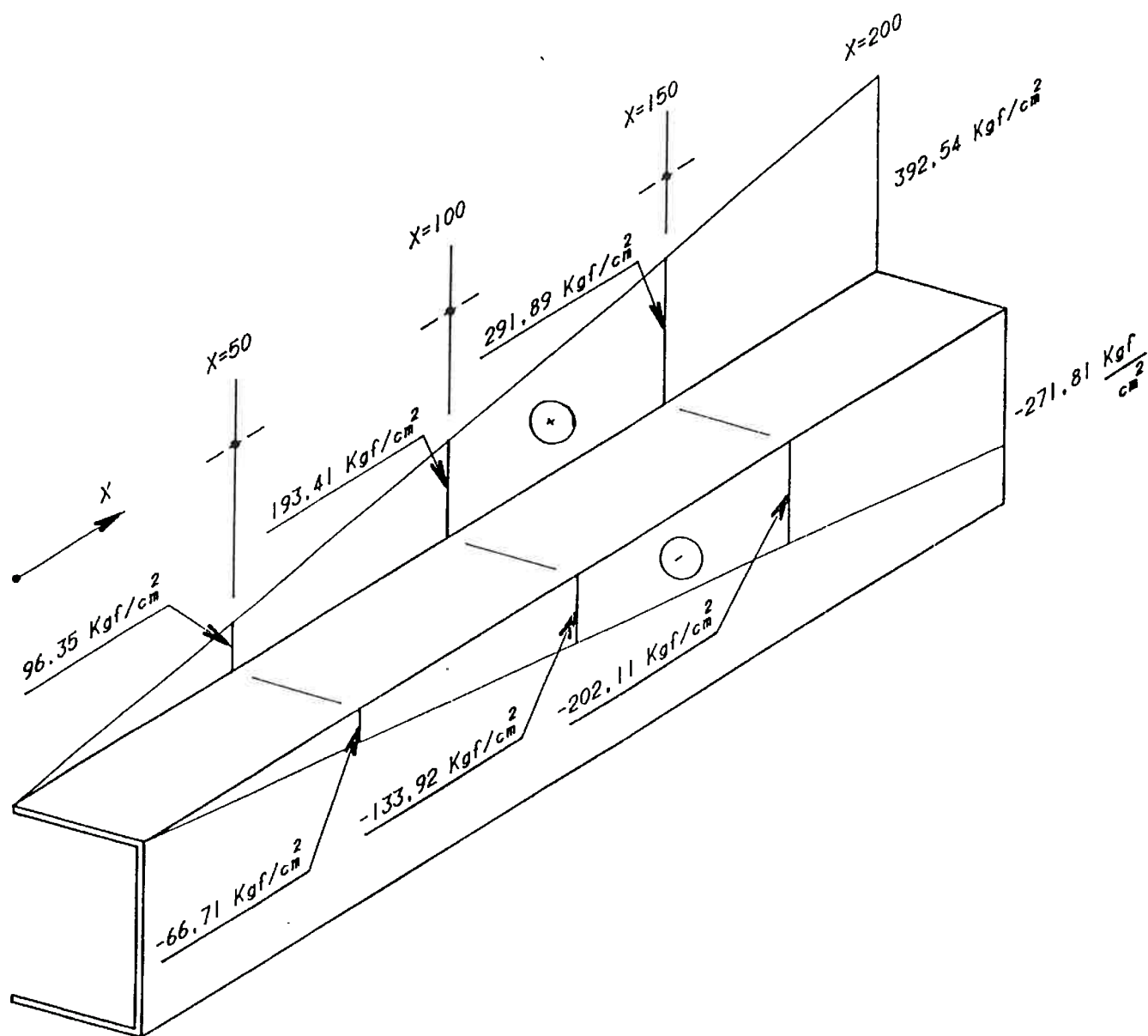


Figura B.12 - Variação das tensões normais σ_{fl} ao longo do comprimento da viga. Pontos extremos do flange superior

Para cada um desses pontos, pode-se calcular as tensões de cisalhamento, dadas na Tabela 4.5, e cujo diagrama é representado na Figura 4.6.

$$\tau_{ft} = -\frac{400}{17.386,4 \cdot 0,2} \cdot M_{sw}(s) \quad , \text{ resultando:}$$

Tabela B.5 - Tensões de Cisalhamento na Flexo-Torção

Ponto	τ_{ft} (kgf / cm ²)
N	0
R	+ 9,04
M	+ 4,70
B	0
O	- 2,35
B'	0
O'	+ 4,70
R'	+ 9,04
L	0

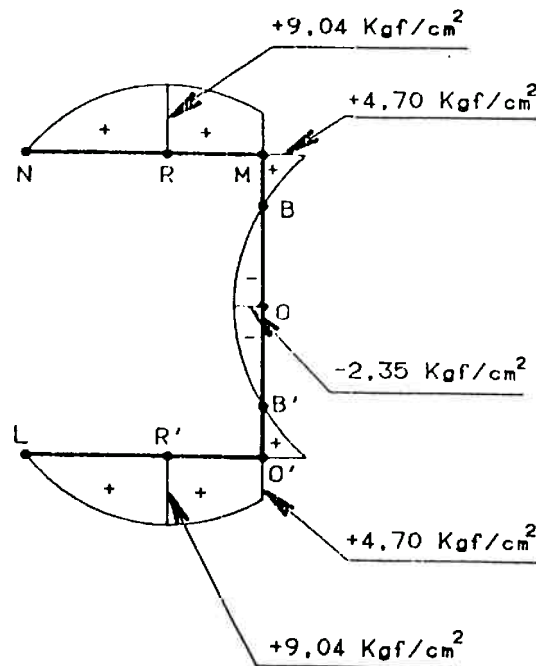


Figura B.13 - Tensões τ_{ft} para abscissa $X = 200$ cm

B.4.2.2. Análise pelo Método dos Elementos Finitos com Elementos de Casca

A viga de aço estudada em B.4.2.1 pela Teoria de Vlasov, foi analisada pelo Método dos Elementos Finitos (MEF), que considera um Modelo Matemático Discreto equivalente ao problema contínuo resolvido anteriormente. No procedimento de discretização, a estrutura foi subdividida em 750 elementos discretos de casca ("Shell Elements"), definidos por intermédio de 816 pontos nodais, como indica a Figura B.14.

Tal modelo permitiu a determinação das tensões normais devido as deformações axiais não uniformes experimentadas pela viga, decorrentes da flexo-torção.

O programa de computador utilizado como Programa de Análise para obtenção da solução pelo MEF foi o SAP-90, desenvolvido pela Computers & Structures Inc., Berkeley, California, implantado em microcomputador PC-386.

A Figura B.15 representa a variação dessas tensões ao longo do contorno da seção que corresponde a $x = 200$ cm.

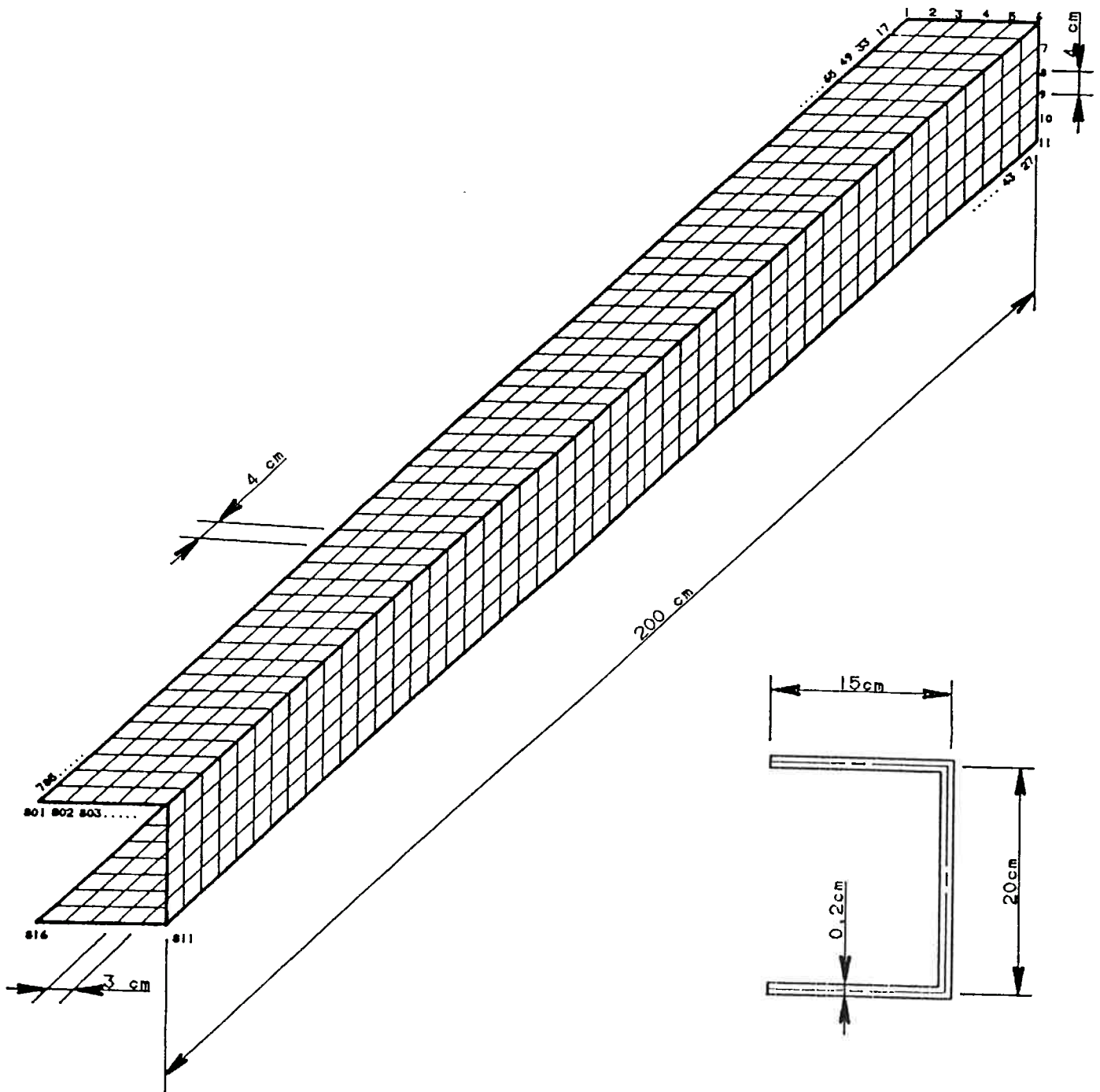
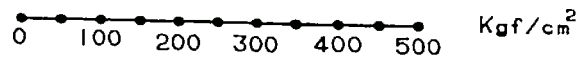


Figura B.14 - Modelo Estrutural com 816 pontos nodais e 750 Elementos de Casca



B.32

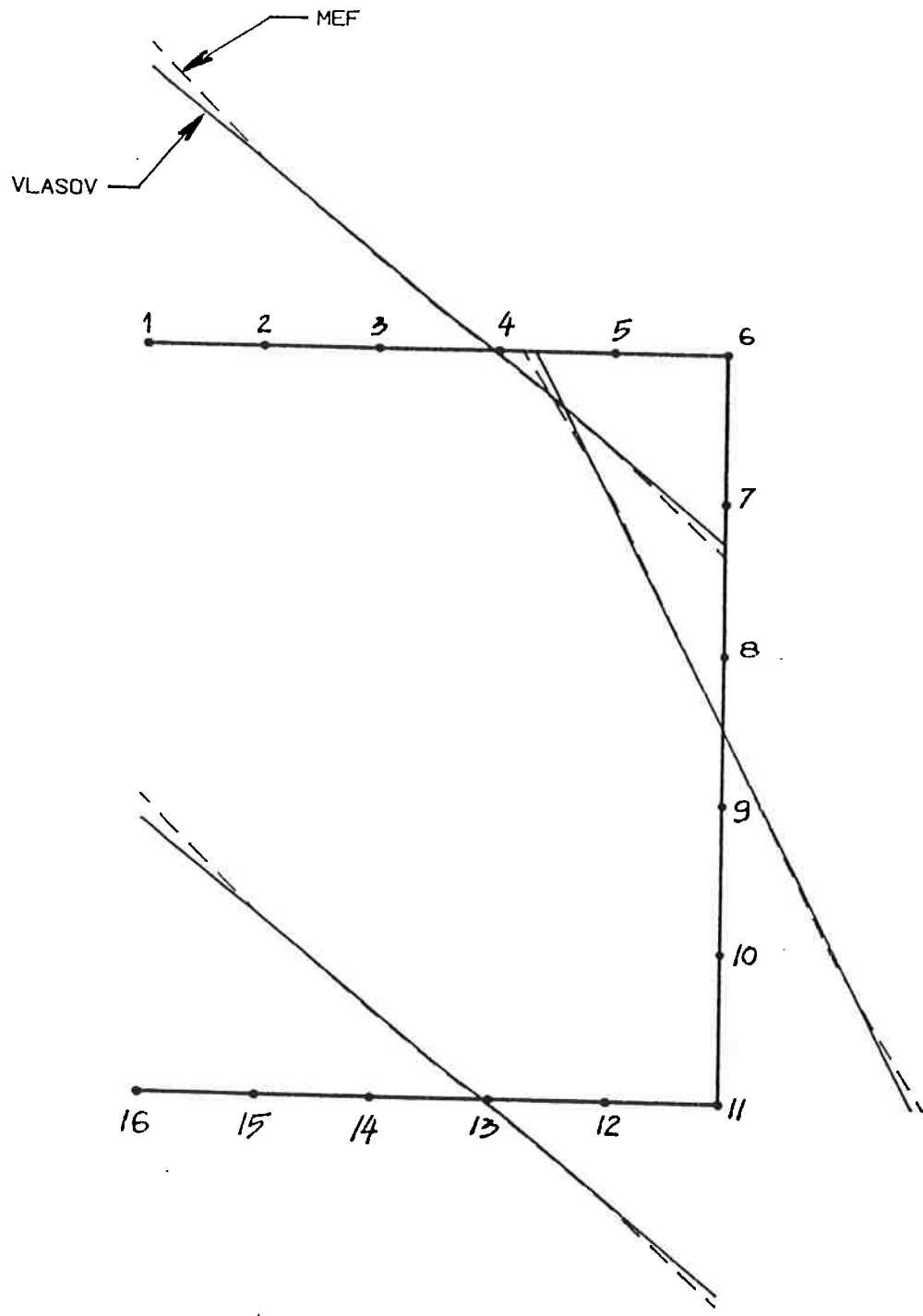


Figura B.15 - Tensões Normais na seção $X = 200$ cm pela Teoria de Vlasov (—) e pelo Método dos Elementos Finitos (---)

B.4.2.3. - Analogia Flexão-Retorção

O problema já resolvido anteriormente em B.4.2.1 e B.4.2.2 será resolvido por intermédio da Analogia Flexão-Retorção. A Figura B.16 representa o modelo estrutural concebido segundo as hipóteses estabelecidas em B.3 e resumidas na Figura B.7. A Tabela B.6 resume as condições de definição do modelo estrutural da Figura B.16, que será resolvido com auxílio dos elementos de viga do programa SAP-90.

Tabela B.6 - Definição das Propriedades do Modelo Flexão-Retorção, em relação aos eixos locais 1, 2, 3.

VIGA 1	$I_3 = 0; I_2 = I_y^* = \frac{2 \cdot I_w}{h^2} = 86,932 \text{ cm}^4; A = 0; I_1 = \frac{I_t}{2} = 0,06665 \text{ cm}^4$
VIGA 2	$I_3 = 733,39 \text{ cm}^4; I_2 = 86,932 \text{ cm}^4; A = 0; I_1 = \frac{I_t}{2} = 0,06665 \text{ cm}^4$
VIGA 3	$I_3 = \infty; I_2 = \infty; A = 0; I_1 = 0$
VIGA 4	$I_3 = \infty; I_2 = \infty; A = \infty; I_1 = \infty$

A Tabela B.7 apresenta os valores obtidos por intermédio do programa SAP-90, para os esforços nos elementos de viga do "Modelo Híbrido", e que serão utilizados para o cálculo das tensões normais de flexo-torção.

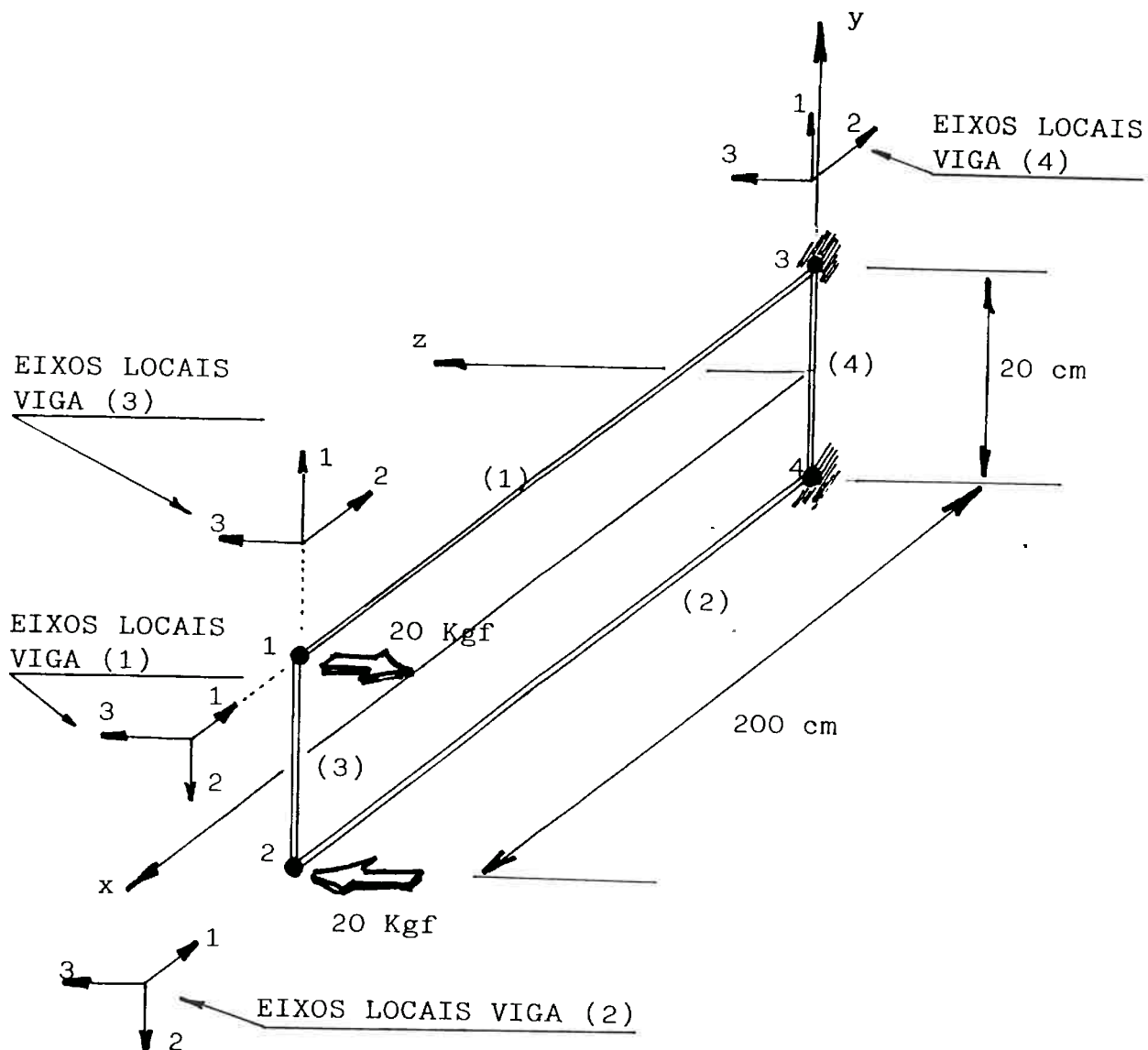


Figura B.16 - Modelo para Analogia Flexão-Torção

Tabela B.7 - Esforços nos Elementos de Viga do Modelo Híbrido

ANÁLISE DE PERFIL ABERTO-TORÇÃO-MODELO EM VIGAS

FRAMES ELEMENT FORCES

ELT	LOAD	AXIAL DIST	1-2 PLANE		1-3 PLANE		AXIAL
ID	COND	FORCE ENDI	SHEAR	MOMENT	SHEAR	MOMENT	TORSI
1	1	.00					
		.0	.00	.00	-19.25	.00	-7.133
		200.0	.00	.00	-19.25	-3849.01	
2	1	.00					
		.0	.00	.00	19.25	.00	-7.133
		200.0	.00	.00	19.25	3849.01	
3	1	.00					
		.0	.00	.00	.75	-7.25	
		20.0	.00	.00	.75	7.25	
4	1	.00					

As vigas (1) e (2) do modelo apresentam para momentos fletores atuantes no plano 1-3 (ou M_2) valores com intensidades 3849,01 kgf.cm. Esses momentos estão associados ao empenamento dos flanges e permitirão o cálculo das tensões de flexo-torção, que serão nulas nos pontos da seção que correspondem a empenamento nulo, como é representado na Figura B.17. Dessa forma, com M_2 , $I_2 = I_y$ e os valores das coordenadas sectoriais w , poderemos calcular as tensões normais de flexo-torção na extremidade engastada.

$$\sigma_{ft} = \pm \frac{|M_2|}{I_2} \cdot d_w \quad , \quad (B.6)$$

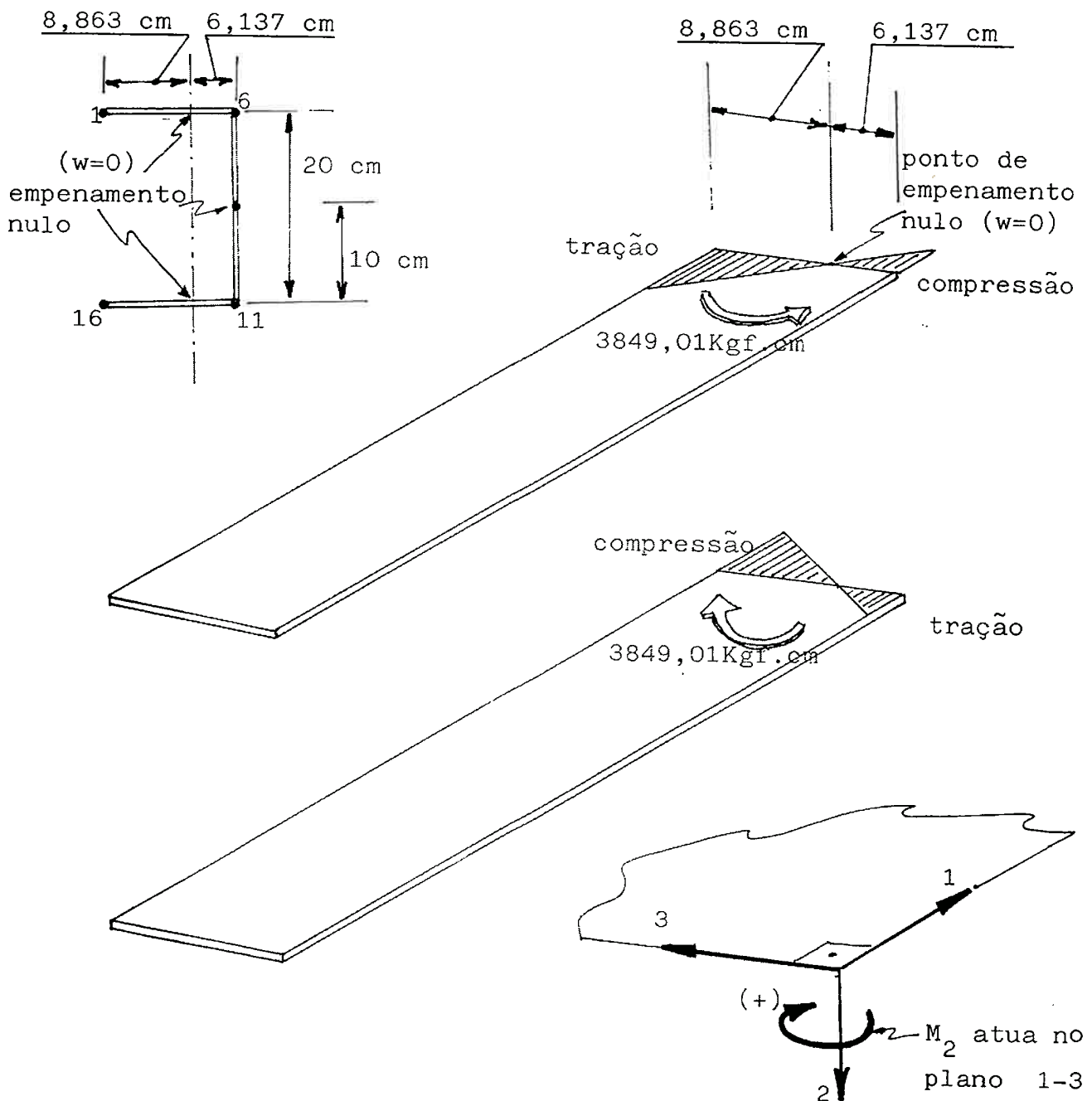


Figura B.17 - Momentos Fletores nos Flanges, obtidos por intermédio da Analogia Flexão-Retorção

sendo d_w a distância entre o ponto considerado para o cálculo de σ_{ft} no flange superior e o ponto que corresponde à empenamento nulo nesse mesmo flange. Assim:

$$|M_2| = 3.849,01 \text{ kgf.cm, e}$$

para os pontos 1 e 6 do flange superior, já foi determinado:

$$d_{w_1} = 8,863 \text{ cm} \quad \text{e} \quad d_{w_6} = 6,137 \text{ cm}$$

com $I_2 = 86,932 \text{ cm}^4$ resultará:

$$\sigma_{ft_1} = \frac{|M_2|}{I_2} \cdot d_{w_1} = \frac{3.849,01}{86,932} \cdot 8,863 \rightarrow \sigma_{ft_1} = +392,42 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_{ft_6} = -\frac{|M_2|}{I_2} \cdot d_{w_6} = -\frac{3.849,01}{86,932} \cdot 6,137 \rightarrow \sigma_{ft_6} = -271,72 \text{ kgf/cm}^2$$

Para os pontos 16 e 11 do flange inferior, o procedimento de cálculo será análogo com $|M_2| = 3.849,01 \text{ kgf.cm}$; $d_{w_{16}} = 8,863 \text{ cm}$; $d_{w_{11}} = 6,137 \text{ cm}$; $I_2 = 86,932 \text{ cm}^4$; o que resultará

$$\sigma_{ft_{16}} = -\frac{|M_2|}{I_2} \cdot d_{w_{16}} = -\frac{3.849,01}{86,932} \cdot 8,863 \rightarrow \sigma_{ft_{16}} = -392,42 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_{ft_{11}} = \frac{|M_2|}{I_2} \cdot d_{w_{11}} = \frac{3.849,01}{86,932} \cdot 6,137 \rightarrow \sigma_{ft_{11}} = +271,71 \text{ kgf/cm}^2$$

B.4.2.4. Comparação dos valores obtidos pelos diversos procedimentos. Conclusões do Estudo.

Os procedimentos de cálculo utilizados em B.4.2.1, B.4.2.2 e B.4.2.3 podem ser comparados de forma a se estabelecer a confiabilidade na utilização da Analogia Flexão-Retorção. A Tabela B.8 resume os valores de σ_{ft} para os pontos 1, 6, 11, 16.

Tabela B.8 - Comparação dos Processos de Cálculo

Tensões Normais de Flexo-Torção na Extremidade Engastada da Viga $-\sigma_{ft}$ = kgf / cm ²			
	Teoria de Vlasov	Analogia Flexão-Retorção (MEF)	MEF com Elementos de Casca
Ponto 1	+ 392,54	+ 392,42	+ 427,44
Ponto 6	- 271,81	- 271,72	- 288,46
Ponto 11	+ 271,81	+ 271,72	+ 288,46
Ponto 16	- 392,54	- 392,42	- 427,44

A comparação dos valores obtidos segundo os três procedimentos diferentes, permite-nos estabelecer algumas conclusões importantes a respeito do estudo desenvolvido:

- i) Quanto à aplicabilidade da Analogia Flexão-Retorção, observamos que o "Modelo Híbrido" apresenta resultados coincidentes com os valores exatos pela Teoria de Vlasov.

Portanto, por intermédio um modelo discreto bastante simples que incorpora as propriedades de flexo-torção do perfil, é obtida a solução do problema. Tal conclusão constitui a base para resolução de problemas mais gerais envolvendo flexo-torção, como por exemplo estruturas contendo vários perfis de paredes delgadas, tal como em aplicações de estruturas tipo chassis de veículos. Este tipo de aplicação será objeto de análise no próximo item.

- ii) Os valores de tensões calculados pela Teoria de Vlasov e pela Analogia Flexão-Retorção correspondem a Tensões Nominais. Nos pontos 1 e 16, de acordo com a Tabela B.8, são verificadas diferenças de 8,9% para as Tensões Calculadas pelo MEF (casca) quando comparadas aos valores dados por Vlasov e pela Analogia Flexão-Retorção. A diferença desses valores poderia ser justificada em função de que as tensões calculadas pelo MEF (casca) incorporam efeitos não cobertos pelo elemento de viga convencional (por exemplo, as tensões calculadas nos flanges que são obtidas a partir do elemento de viga são consideradas linearmente distribuídas ao longo do flange). O modelo híbrido considera também a hipótese do contorno rígido na medida que atribui rigidez infinita para as vigas verticais V (rigidez à flexão), o que não ocorre para o

modelo pelo MEF (casca), que permite uma análise mais real de todos os pontos do contorno do perfil. Podemos então, numa primeira análise, verificar que o modelo híbrido fornece valores não conservadores para as tensões calculadas.

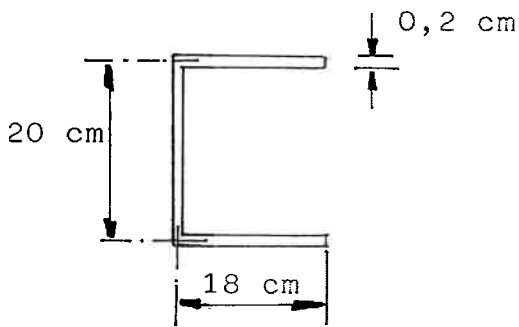
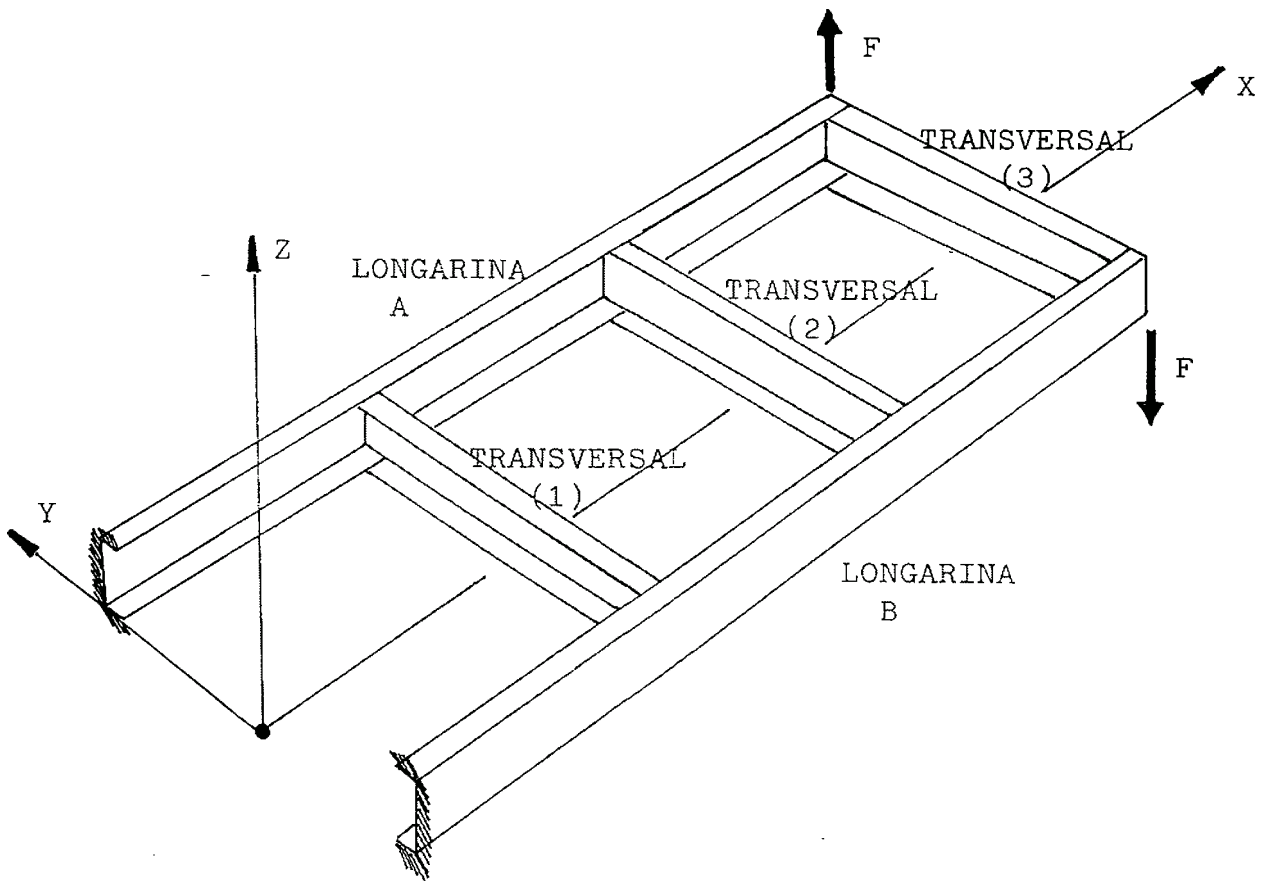
B.5. EXEMPLO DE APLICAÇÃO - CHASSIS

B.5.1. Introdução

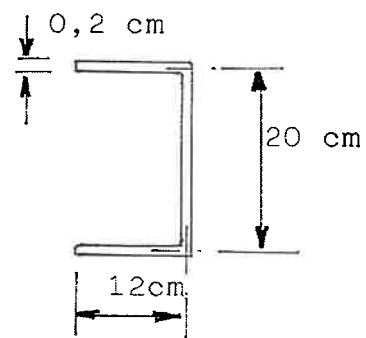
Neste ítem será utilizada a Analogia Flexão-Retorção para um caso de aplicação prática, considerando uma estrutura tipo chassis de veículo, constituída por diversos perfis abertos de paredes delgadas interligados entre si. Inicialmente, o problema será resolvido por intermédio do Método dos Elementos Finitos, considerando toda a estrutura discretizada por elementos de casca, portanto, utilizando um modelo bastante trabalhoso. Posteriormente, o mesmo problema será discretizado por intermédio do "Modelo Híbrido" já considerado anteriormente, estabelecendo-se assim a comparação dos resultados obtidos pelos dois processos, permitindo a verificação da validade da Analogia Flexão-Retorção nos casos mais gerais.

B.5.2. Exemplo para Estudo

A Figura B.18 representa uma estrutura constituída por perfis abertos de paredes delgadas.



LONGARINAS A e B



TRANSVERSAIS
(1), (2) e (3)

Figura B.18 - Estrutura Constituída por Perfis Abertos de Paredes Delgadas

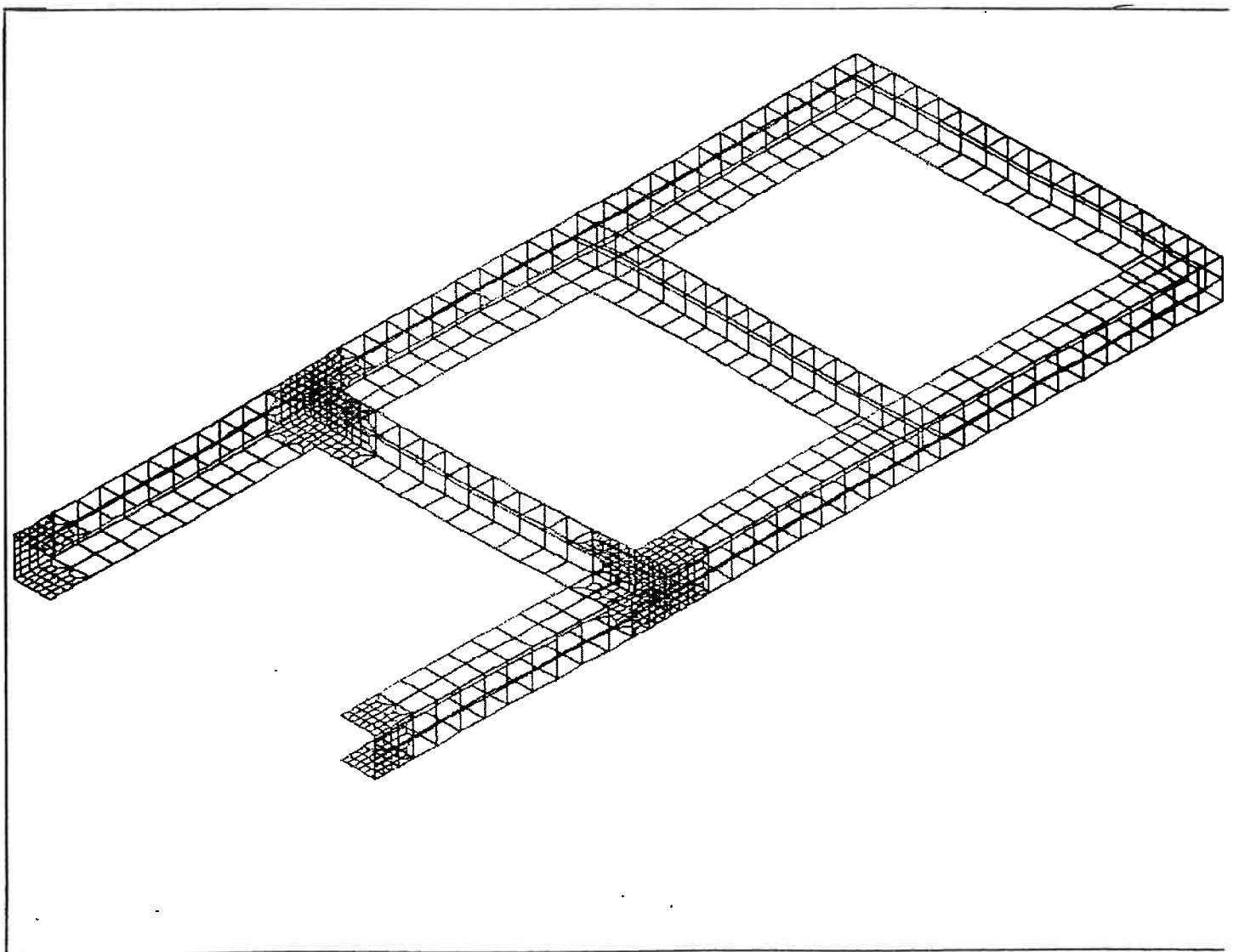


Figura B.19 - Vista Geral do Modelo Estrutural

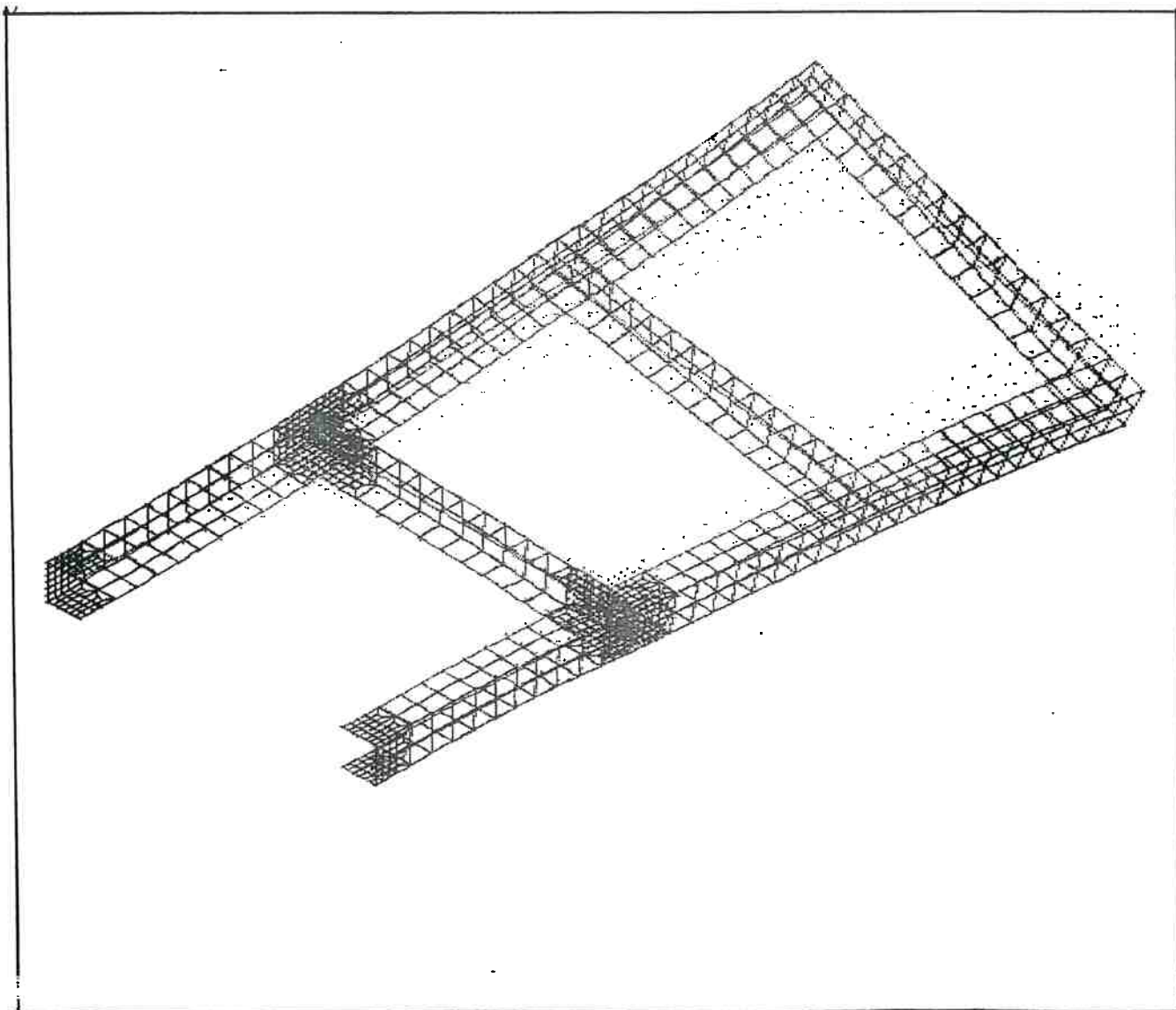


Figura B.20 - Estrutura Tipo Chassis Sujeita à Torção

TENSÕES NORMAIS AXIAIS
PARA LONGARINA E
TRANSVERSAL

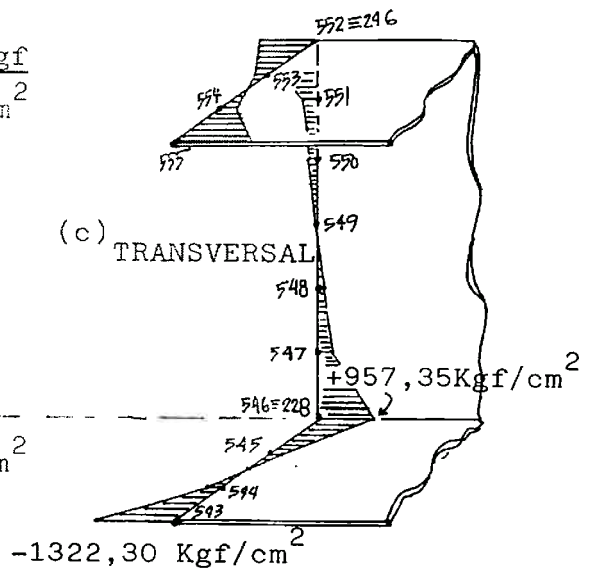
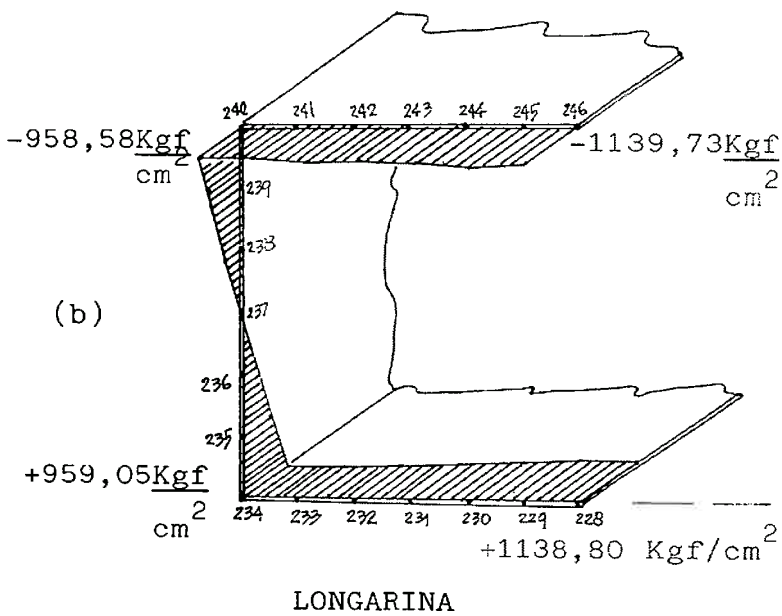
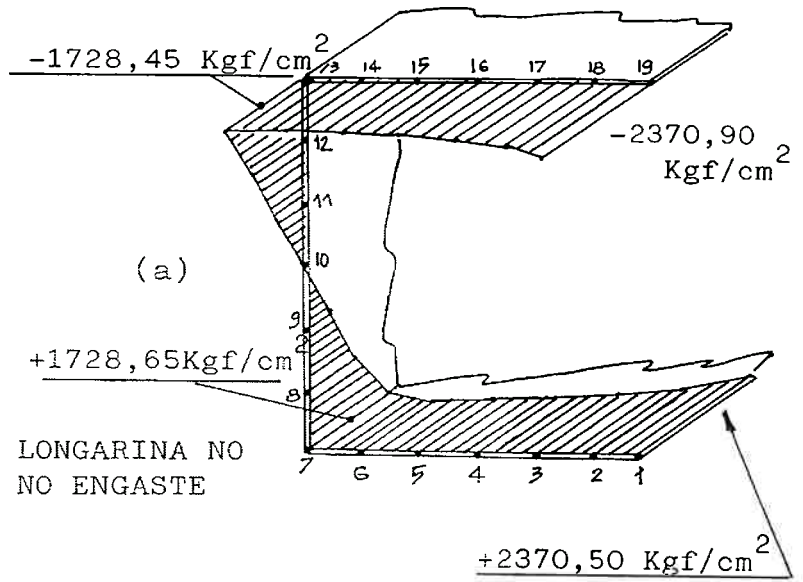
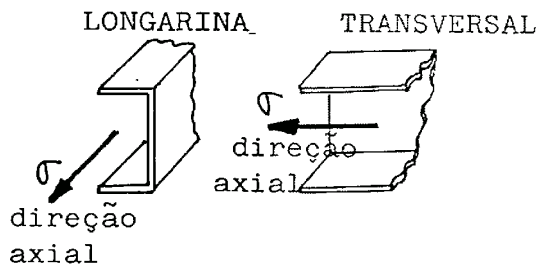


Figura B.21 - Distribuição das Tensões Normais ao longo do Contorno da Seção dos Perfis

B.5.2.2. Análise pelo Método dos Elementos Finitos com "Modelo Híbrido". Analogia Flexão-Retorção

A estrutura representada na Figura B.18 foi discretizada considerando as hipóteses introduzidas anteriormente na concepção da Analogia Flexão-Retorção. A Figura B.22 representa o Modelo Estrutural; como as flexões horizontais dos elementos de viga do Modelo estão associadas às flexões diferenciais dos flanges (retorção ou flexo-torção), que provocam o empenamento, os pontos extremos dos elementos de viga foram posicionados nos pontos correspondentes a empenamento nulo das vigas a que estão ligadas, conforme representado nessa mesma figura. A Figura B.23 representa as vistas lateral e frontal da longarina e as regiões de intersecção com os transversais, permitindo a definição dos pontos nodais por intermédio dos eixos de empenamento nulo. O cálculo dos pontos de empenamento nulo foi efetuado para as longarinas e transversais, utilizando-se a expressão deduzida por Vlasov (3), que decorre do procedimento apresentado no Apêndice C. Para perfis com seções usuais em aplicações práticas, a formulação para cálculo do centro de torção e pontos de empenamento nulo são conhecidas e disponíveis nas referências (3) e (10), por exemplo. De (3):

$$\alpha_x = \frac{b^2 \cdot t_1}{2 \cdot t_1 \cdot b + \frac{t \cdot h}{3}}, \text{ resultando para as longarinas:}$$

$$b = 18 \text{ cm}$$

$$t_1 = t = 0,2 \text{ cm}$$

$$h = 20 \text{ cm}, \text{ e portanto } \alpha_x = 7,594 \text{ cm}$$

e para as transversais:

$$- \quad b = 12 \text{ cm}$$

$$t_1 = t = 0,2 \text{ cm}$$

$$h = 20 \text{ cm}, \text{ e portanto } \alpha_x = 4,696 \text{ cm}$$

Foram consideradas as seguintes propriedades, calculadas a partir das formulações já conhecidas para perfis tipo C e disponíveis nas referências (3) e (10):

$$\text{longarinas} \quad - \quad I_w = 28553,86 \text{ cm}^6; \quad I_t = 0,1493 \text{ cm}^4;$$

$$I_y^* = 142,77 \text{ cm}^4; \quad I_3 = 853,36 \text{ cm}^4$$

$$\text{transversais} \quad - \quad I_w = 9516,87 \text{ cm}^6; \quad I_t = 0,1173 \text{ cm}^4;$$

$$I_y^* = 47,58 \text{ cm}^4; \quad I_3 = 613,35 \text{ cm}^4$$

As vigas verticais V de ligação do modelo híbrido foram consideradas com momento de inércia à torção $J \approx 0$. Isto decorre da inexistência de um reforço fechado no encontro das vigas longitudinais e transversais, com conseqüente rigidez à torção muito pequena se comparada com a rigidez à flexão das vigas transversais e longitudinais no plano de empenamento.

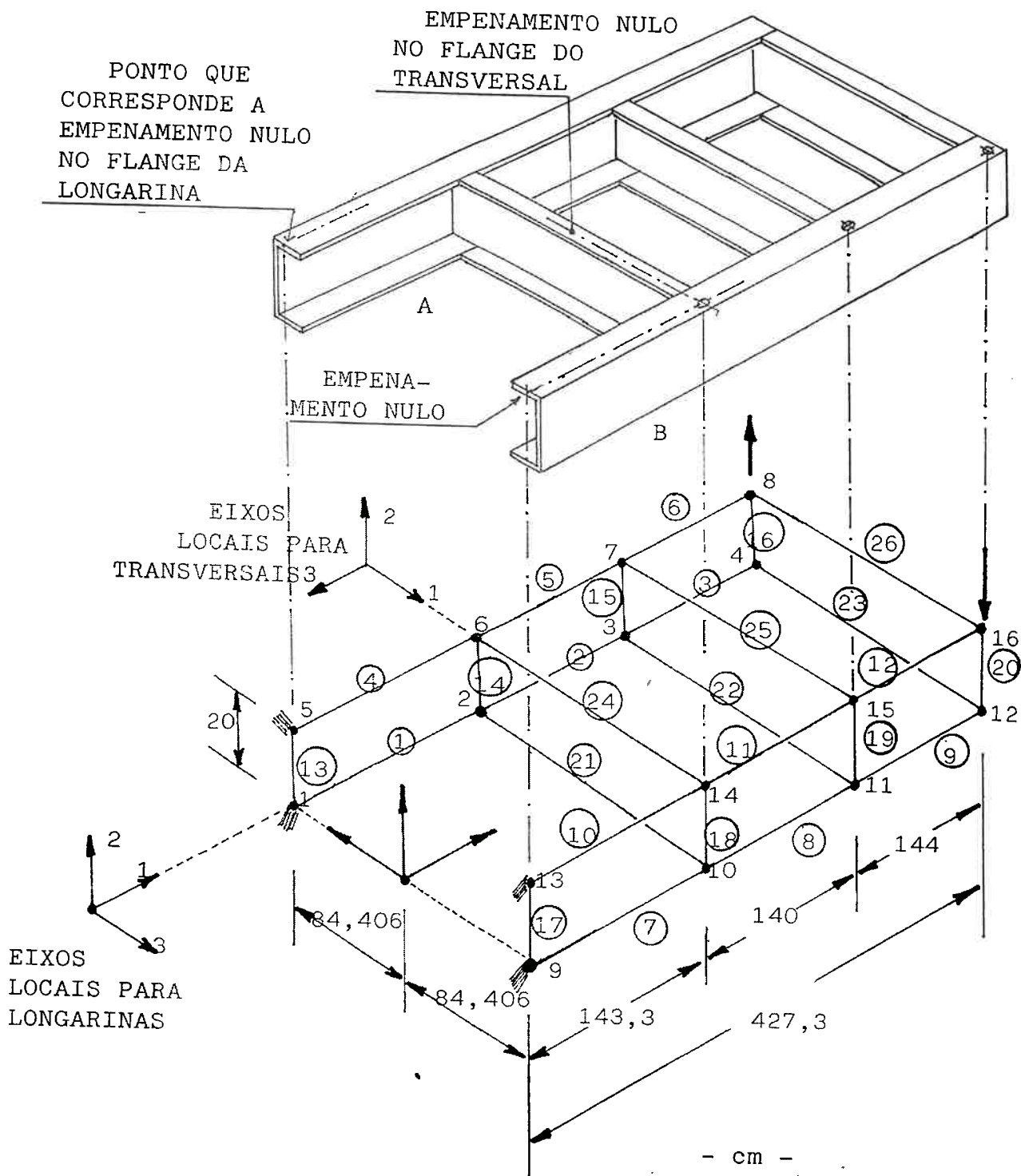
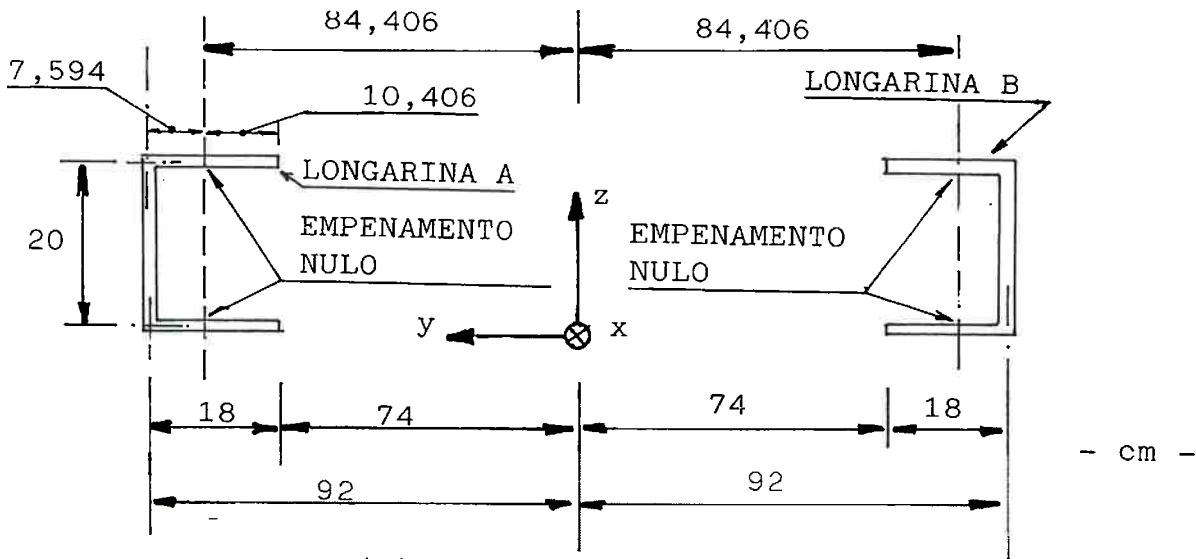
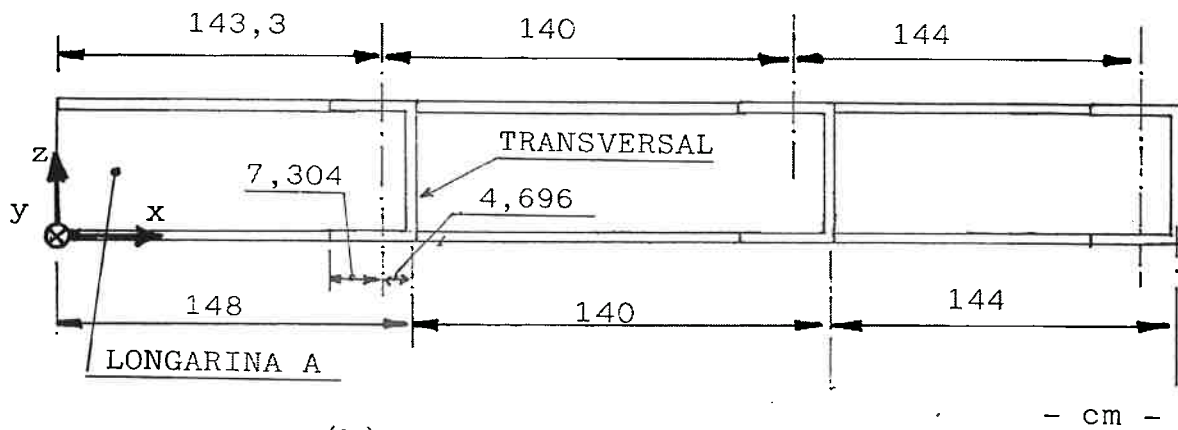


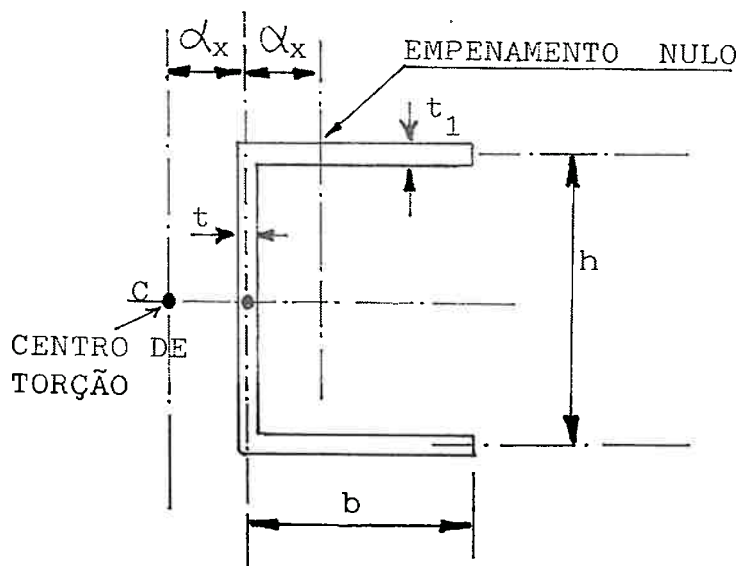
Figura B.22 - Modelo Estrutural de Chassis para Analogia Flexão-Retorção



(a) VISTA FRONTAL (x=0)



(b) VISTA LATERAL



(c) POSIÇÃO DO CENTRO DE TORÇÃO E DOS PONTOS DE EMPENAMENTO NULO NOS FLANGES DE PERFIL C

Figura B.23 - Localização das Regiões de Empenamento Nulo para a Analogia Flexão-Retorção

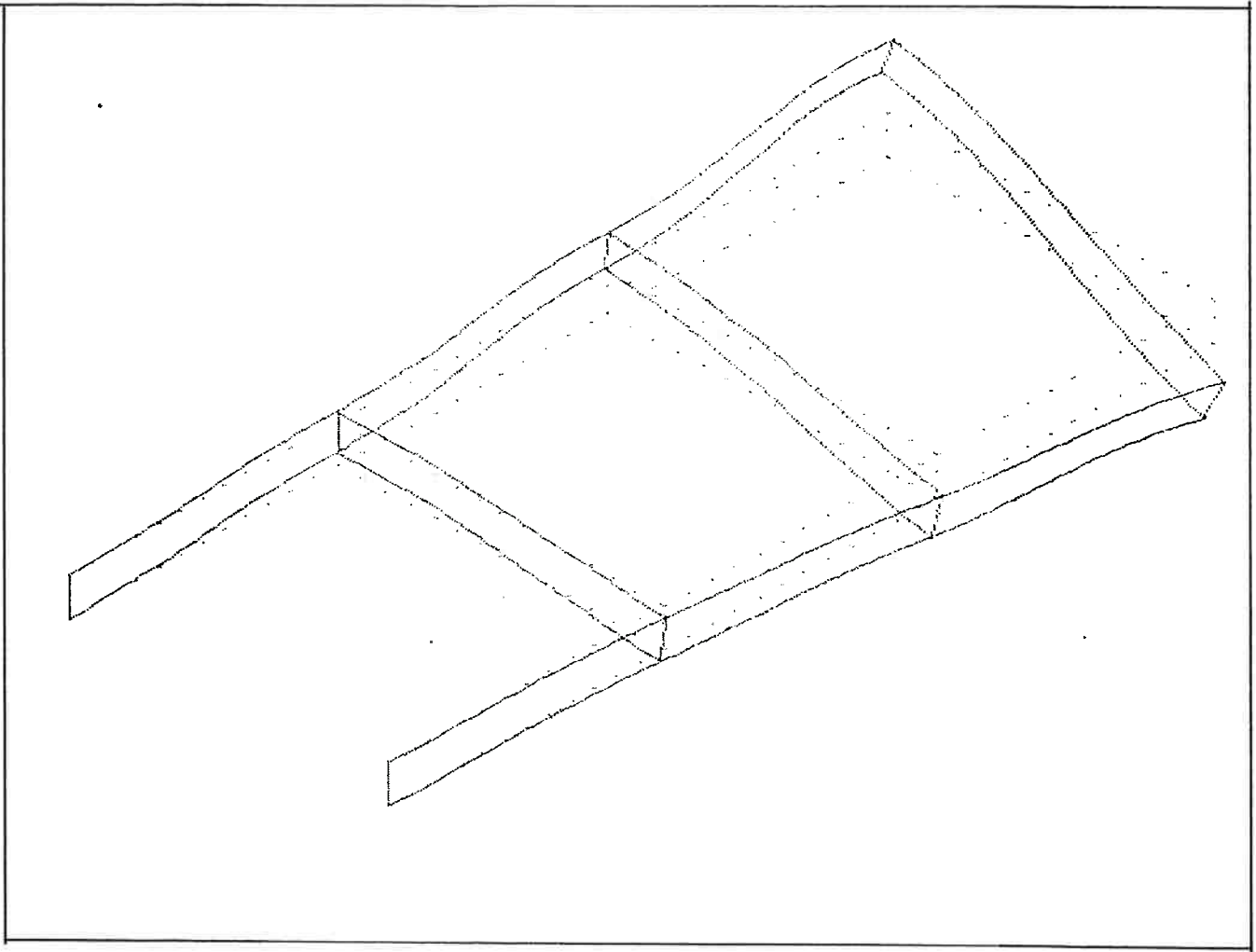


Figura B.24 - Vista Geral do "Modelo Híbrido" Deformado

A Figura B.24 apresenta uma vista geral da deformação do "modelo híbrido", para $F = 400$ kgf aplicadas aos nós 8 e 16 conforme indicado na Figura B.22.

A partir dos momentos fletores nos planos locais 1-2 e 1-3 definidos pelos eixos locais 1-2-3 da Figura B.22 para longarinas e transversais, obtém-se as tensões normais de flexão e de flexo-torção, que superpostas fornecerão as tensões nas diversas seções dos elementos de viga. Tais tensões poderão ser comparadas àquelas calculadas pelo modelo MEF-cascas desenvolvido em B.5.2.1 e são apresentadas a seguir:

i) Tensões Normais na Longarina A na região do Engastamento

As tensões normais na Longarina A para a seção correspondente ao engastamento, poderão ser obtidas por intermédio do Modelo Híbrido considerando os Momentos Fletores obtidos para os elementos de viga 1 e 4. Para a viga 1, nó 1, o momento fletor atuante no plano 1-2 representa o componente associado à flexão da viga, como já discutido na introdução da Analogia Flexão-Retorção. Para a mesma viga e ponto nodal, o momento fletor atuante no plano 1-3 representa o componente associado à flexo-torção da viga, e que provoca flexão diferencial dos flanges. Sendo os momentos nos planos 1-2 e 1-3 (em intensidade) respectivamente iguais a 155.233,24 kgf.cm e 4.517,73 kgf.cm e levando em conta a convenção de

sinais do programa em elementos finitos, calcula-se as tensões normais nos pontos da seção que correspondem aos nós 1, 7, 13, 19 do MEF-cascas, como representado na Figura B.25, após a composição das mesmas.

$$\text{flexão: } \sigma_{13} = \sigma_{19} = -\sigma_7 = -\sigma_1 = -\frac{155,233,24}{853,36} \cdot 10 = -1.819,0 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\text{flexo-torção: } \sigma_{13} = -\sigma_7 = \frac{4.517,73}{142,77} \cdot 7,594 = +240,30 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_{19} = -\sigma_1 = -\frac{4.517,73}{142,77} \cdot 10,406 = -329,28 \text{ kgf/cm}^2$$

A composição das tensões obtidas de flexão e flexo-torção resulta:

$$\sigma_{13} = -1.819,08 + 240,30 = -1.578,78 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_{19} = -1.819,08 - 329,28 = -2.148,36 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_7 = 1.819,08 - 240,30 = +1.578,78 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_1 = 1.819,08 + 329,28 = +2.148,36 \text{ kgf/cm}^2$$

ii) Tensões Normais na Longarina A, na região de Encontro com Transversal (1)

O procedimento é análogo ao aplicado em i. As tensões normais na longarina A para a seção correspondente ao encontro com o Transversal 1, poderão ser obtidas com o elemento de viga 1, nó 2, considerando

novamente os momentos nos planos 1-2 e 1-3, de acordo com os resultados da análise. Calcula-se então as tensões normais nos pontos da seção que corresponde aos nós 228, 234, 240, 246 do MEF-cascas, como representado na Figura B.25, após a composição dos efeitos de flexão e flexo-torção.

flexão:

$$\sigma_{240} = \sigma_{246} = -\sigma_{234} = -\sigma_{228} = -\frac{99.217,26}{853,36} \cdot 10 = -1.162,67 \text{ kgf/cm}^2$$

flexo-torção: $\sigma_{240} = -\sigma_{234} = \frac{901,90}{142,77} \cdot 7,594 = +47,97 \text{ kgf/cm}^2$

$$\sigma_{246} = -\sigma_{228} = -\frac{901,90}{142,77} \cdot 10,406 = -65,74 \text{ kgf/cm}^2$$

A composição das tensões de flexão e flexo-torção resulta:

$$\sigma_{240} = -1162,67 + 47,97 = -1114,70 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_{246} = -1162,67 - 65,74 = -1228,41 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_{234} = 1162,67 - 47,97 = 1114,70 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_{228} = 1162,67 + 65,74 = 1228,41 \text{ kgf/cm}^2$$

iii) Tensões Normais no Transversal 1 na região de encontro com Longarina A

O procedimento é análogo ao aplicado em i e ii. As tensões normais no Transversal (1) para a seção correspondente ao encontro com a longarina A, poderão ser obtidas por intermédio do elemento de viga 21, nó 2, considerando os momentos nos planos 1-2 e 1-3, de acordo com os resultados da análise. Calcula-se então as tensões normais nos pontos da seção que correspondem aos nós 543, 546, 552 e 555 do MEF-cascas, como representado na Figura B.25, após a composição dos efeitos de flexão e flexo-torção.

$$\text{flexão: } \sigma_{555} = \sigma_{552} = -\sigma_{543} = -\sigma_{546} = \frac{684,17}{613,35} \cdot 10 = 11,15 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\text{flexo-torção: } \sigma_{555} = -\sigma_{543} = \frac{7.349,14}{47,58} \cdot 7,304 = 1.128,17 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_{552} = -\sigma_{546} = -\frac{7.349,14}{47,58} \cdot 4,696 = -725,34 \text{ kgf/cm}^2$$

A composição das tensões de flexão e flexo-torção resulta:

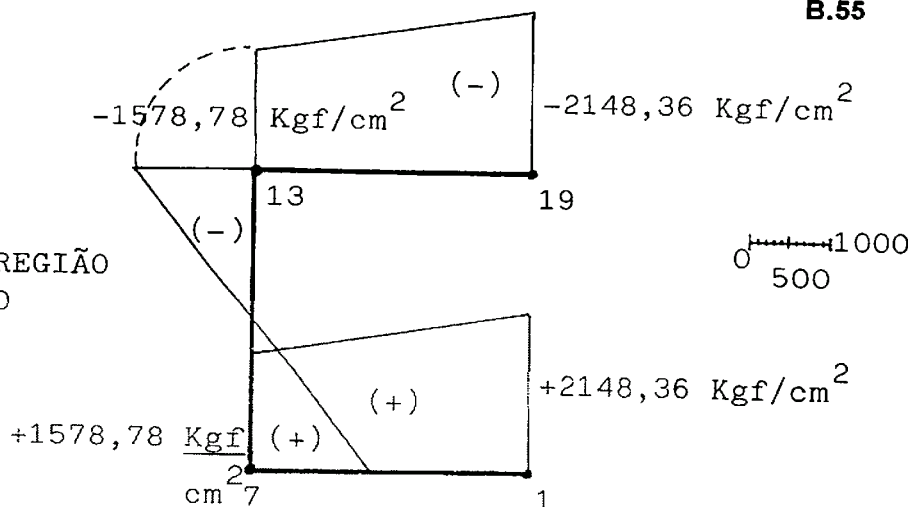
$$\sigma_{555} = 11,15 + 1128,17 = 1139,32 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_{552} = 11,15 - 725,34 = -714,19 \text{ kgf/cm}^2$$

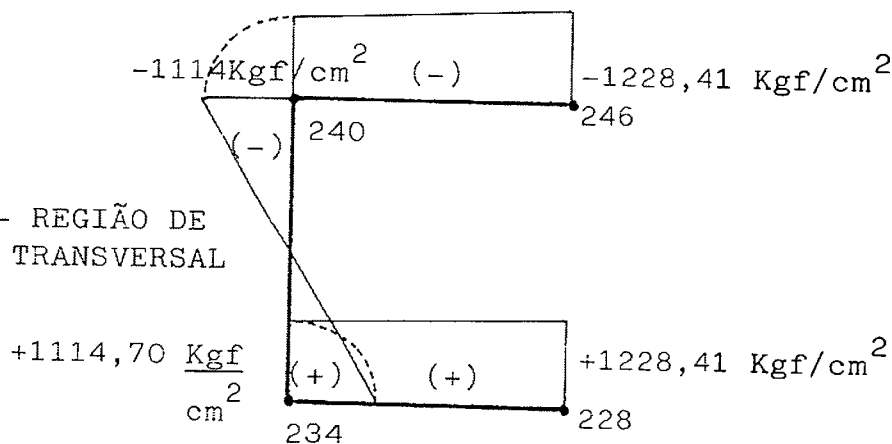
$$\sigma_{546} = -11,15 + 725,34 = +714,19 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_{543} = -11,15 - 1128,17 = -1139,32 \text{ kgf/cm}^2$$

(a) LONGARINA A - REGIÃO DO ENGASTAMENTO



(b) LONGARINA A - REGIÃO DE ENCONTRO COM TRANSVERSAL



(c) TRANSVERSAL 1 - REGIÃO DE ENCONTRO COM LONGARINA A

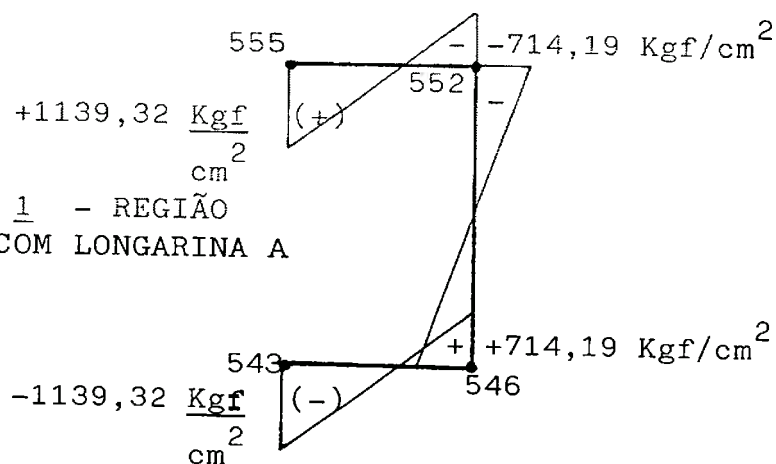


Figura B.25 - Tensões Normais obtidas por intermédio do "Modelo Híbrido" - Analogia Flexão-Retorção

B.5.2.3. Comparação dos Resultados obtidos pelo "MEF-Cascas" e "Modelo Híbrido" - Analogia Flexão-Retorção

Os dois modelos de análise utilizados em B.5.2.1 e B.5.2.2 são comparados no que se refere ao cálculo de tensões normais. A Figura B.26 apresenta para as 3 regiões analisadas anteriormente o diagrama dessas tensões, incluindo os efeitos de flexão e flexo-torção, permitindo portanto o confronto dos resultados obtidos pela Analogia Flexão-Retorção e pelo MEF-cascas. A análise da Figura B.26 permite estabelecer algumas conclusões importantes a respeito das análises efetuadas:

- i) As figuras B.26.a e B.26.b apresentam os resultados das tensões normais atuantes na Longarina A em duas regiões diferentes, respectivamente na região do engastamento e no encontro com o Transversal (1). Vale observar, em primeiro lugar, que os resultados obtidos por intermédio dos dois modelos de cálculo estão bastante consistentes, justificando a aplicação da Analogia Flexão-Retorção. Em segundo lugar, é interessante observar que o efeito de flexo-torção na longarina não é muito acentuado, mas sim o efeito de flexão. Isto pode ser concluído, pois nos flanges superior e inferior, as tensões normais não sofrem uma variação acentuada de um extremo ao outro do flange; nota-se, porém, que esta variação é mais

intensa no caso (a), pois corresponde à região de engastamento, onde a restrição ao empenamento é máxima.

ii) A Figura B.26.c apresenta os resultados das tensões normais atuantes no Transversal (1), na região de encontro com a longarina A. Vale ressaltar inicialmente que, devido às flexões em sentidos opostos das longarinas A e B, o Transversal (1) está sujeito à Torção. Como já foi explicado anteriormente, um modelo convencional com elementos de viga, não permitiria o cálculo de tensões normais decorrente da torção. A variação das tensões normais ao longo dos flanges do perfil C do transversal indica uma variação acentuada das mesmas, inclusive em valor algébrico, o que caracteriza o fenômeno de flexo-torção. As tensões calculadas pelos dois modelos de cálculo neste caso indicam resultados bastante consistentes, justificando a aplicação da Analogia Flexão-Retorção, para cálculo das Tensões Normais decorrentes da Torção do perfil transversal.

iii) O procedimento aplicado na Analogia Flexão-Retorção para a estrutura do chassis completo, permanece válido para qualquer tipo de perfil, ou combinação de perfis diferentes, desde que as flexões diferenciais dos flanges das longarinas e transversais ocorram num mesmo plano (por exemplo, no caso

do chassis analisado, as flexões diferenciais dos flanges das longarinas e transversais ocorrem em planos horizontais). Se as flexões diferenciais ocorrerem em planos perpendiculares (por exemplo, longarinas com perfis C e transversais com perfis U), as hipóteses de formulação do problema do chassis, pela Analogia Flexão-Retorção deveriam ser reestabelecidas, utilizando-se os conceitos já expostos neste trabalho.

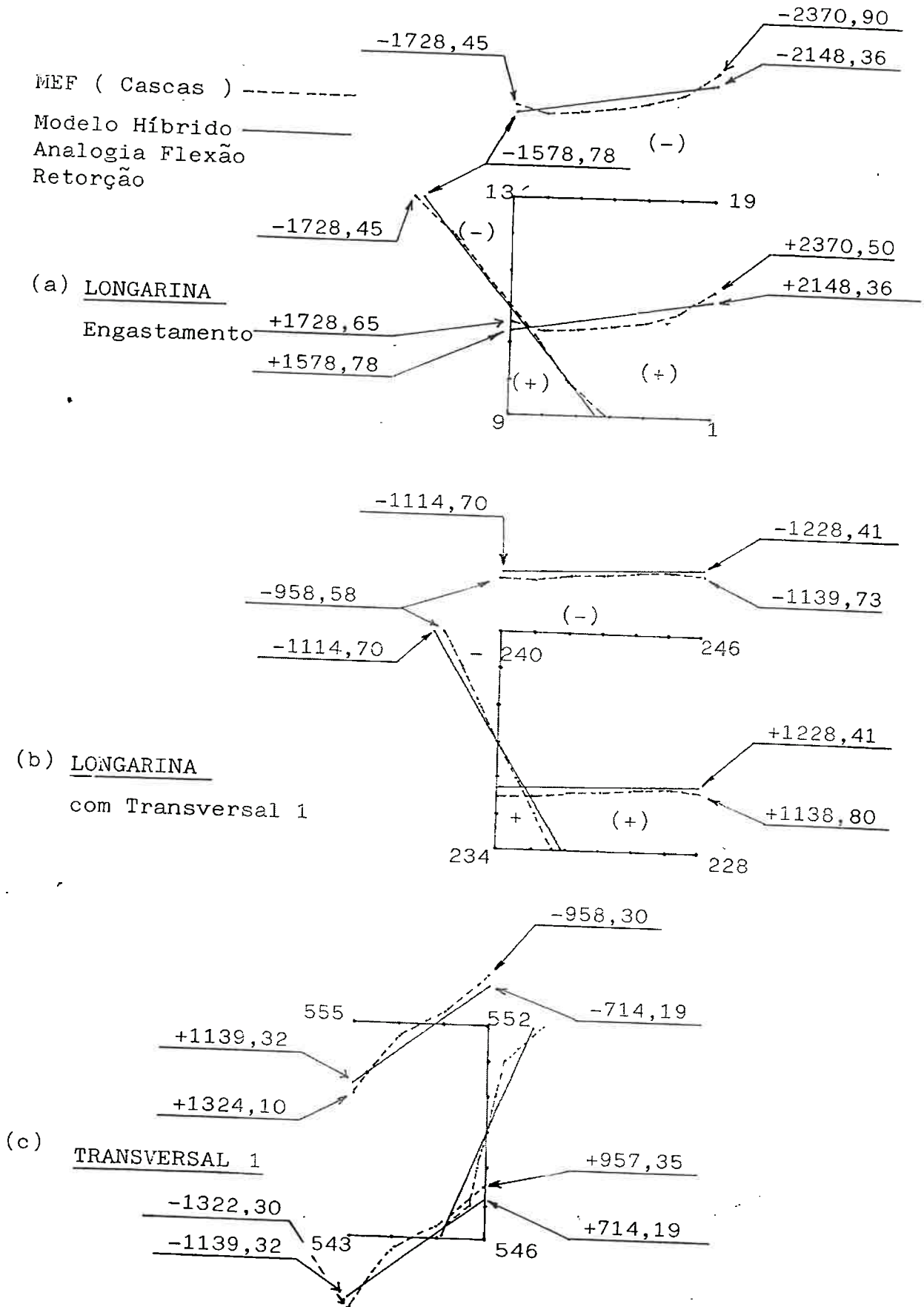


Figura B.26- Diagramas de Tensões Normais - Comparação dos Resultados da Analogia Flexão-Retorção com MEF Cascas (kgf/cm²)

APÊNDICE C

PROPRIEDADES SECTORIAIS

APÊNDICE C

PROPRIEDADES SECTORIAIS

C.1. ÁREA SECTORIAL

Na linha média do contorno do perfil de paredes delgadas, escolhe-se uma origem arbitrária O , para medição de arcos S . Escolhe-se um pólo arbitrário P , pertencente ou não à linha média do contorno (Figura C.1).

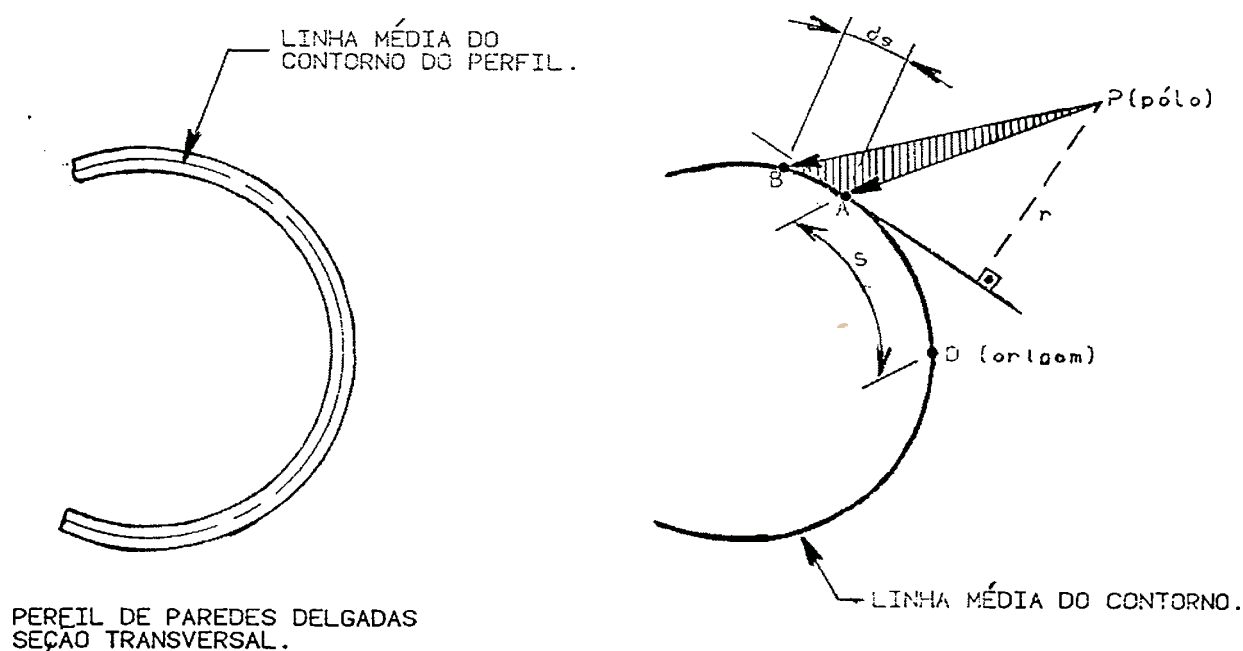


Figura C.1 - Área do Setor PAB

Unindo-se o pólo P ao segmento AB , define-se o triângulo elementar (ou o Setor) PAB , cuja base é o elemento de arco ds e cuja altura

r é o comprimento da perpendicular traçada de P até a linha tangente ao contorno do perfil em A . O dobro da Área do Setor PAB é dada por:

$$dw = r \cdot ds$$

Quando o raio vetor PA se move desde a origem O até o ponto A , cuja posição é definida pelo arco S , a Área do Setor POA é varrida pelo mesmo raio vetor (Figura C.2).

Define-se Área Sectorial como sendo:

$$w = \int_0^s r \cdot ds \quad [\text{cm}^2], \quad (\text{C.1})$$

que constitui o dobro da área do setor POA .

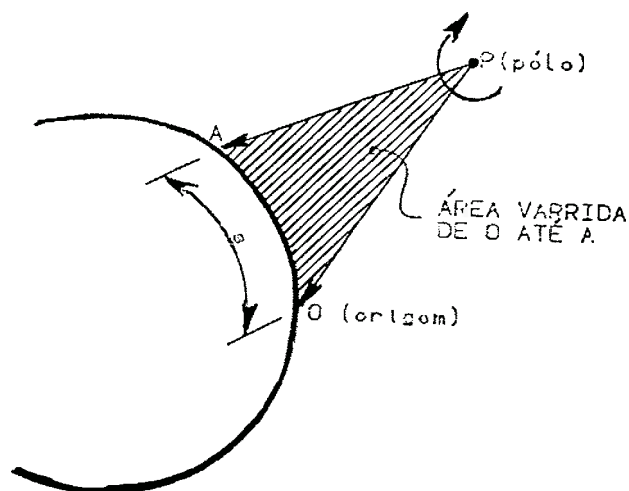


Figura C.2 - Área varrida pelo raio vetor, para pólo e origens arbitrárias

A Área Sectorial é função da posição S e depende da posição da origem O e da posição do pólo P. Se:

- Raio vetor gira no sentido horário → $dw > 0$
(Figura C.3)
- Raio vetor gira no sentido anti-horário → $dw < 0$

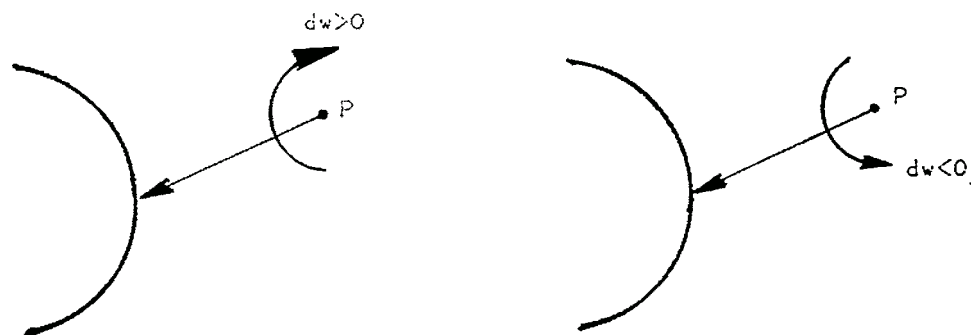


Figura C.3 - Convenção de Sinais para Área Sectorial

C.2. MOMENTO ESTÁTICO SECTORIAL, MOMENTOS LINEARES SECTORIAIS E MOMENTO DE INÉRCIA SECTORIAL

Conhecendo-se o diagrama de w (Área Sectorial ou Coordenadas Sectoriais) ao longo do contorno da seção, e sendo dA um elemento de área, define-se

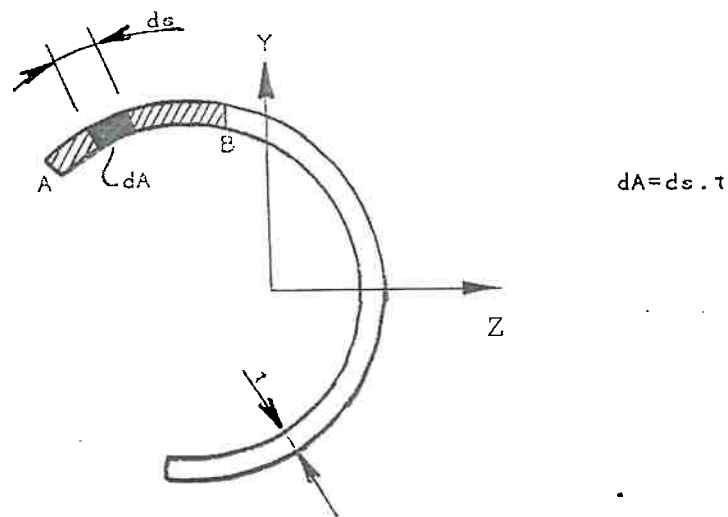


Figura C.4 - Perfil de Paredes Delgadas

Momento Estático Sectorial do Arco AB

$$M_{sw} = \int_{AB} w \cdot dA \quad [\text{cm}^4] \quad (\text{C.2})$$

Momentos Lineares Sectoriais do Arco AB

$$\begin{aligned}
 & \int_{AB} z \cdot w \cdot dA \\
 - & \int_{AB} y \cdot w \cdot dA \quad [cm^5] \quad (C.3)
 \end{aligned}$$

Momento de Inércia Sectorial

$$I_w = \int_A w^2 \cdot dA \quad [cm^6] \quad (C.4)$$

A = Área Total da Seção

Quando os eixos y e z são Eixos Centrais Principais e o pólo P coincide com o centro de Torção, os Momentos Lineares Sectoriais são nulos. Assim:

- Eixos Centrais Principais (y e z)

$$\rightarrow \int_A z \cdot w \cdot dA = \int_A y \cdot w \cdot dA = 0 \quad (C.5)$$
- Pólo \equiv Centro de Torção

C.3. ÁREA SECTORIAL PRINCIPAL E MOMENTO DE INÉRCIA SECTORIAL PRINCIPAL

O diagrama de w que satisfaz as condições de C.5 e cuja origem O para medição de arcos S é escolhida de tal forma que $\int_A w \cdot dA = 0$ é denominado Diagrama de Área Sectorial Principal. Assim, se:

- y e z são Eixos Centrais Principais
- Pólo $P \equiv$ Centro de Torção \rightarrow w é o diagrama de Área Sectorial Principal
- Origem O é tal que $\int_A w \cdot dA = 0$

O Momento de Inércia $I_w = \int_A w^2 \cdot dA$ é denominado **Momento de Inércia Sectorial Principal**.

Observações Importantes

No caso geral, para construir o diagrama de área sectorial principal, procede-se da seguinte forma:

- determinar os eixos centrais principais do perfil;
- determinar a posição do centro de torção.

Em relação a um pólo P' e uma origem O' arbitrárias, constrói-se um diagrama de áreas sectoriais w'_o . Tendo os diagramas w'_o , y e z , determina-se as coordenadas do centro de torção y_c e z_c . Pode-se demonstrar que:

$$y_c = \frac{\int_A z \cdot w'_o \cdot dA}{I_y} \quad (C.6)$$

e

$$z_c = \frac{-\int_A y \cdot w'_o \cdot dA}{I_z} \quad (C.7)$$

(ver exemplo resolvido a seguir)

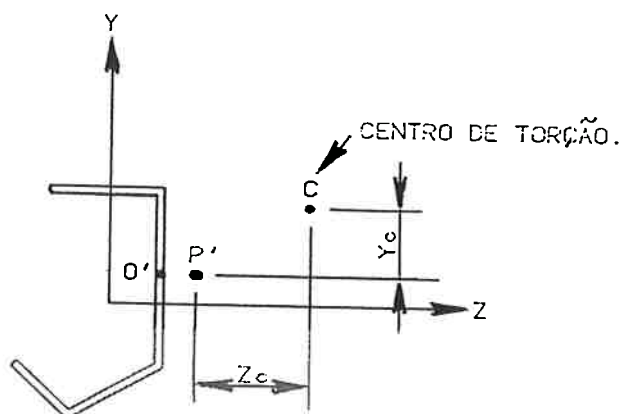


Figura C.5 - Posição do Centro de Torção C em relação ao Pólo P'

- c) escolher pólo coincidente com o centro de torção;
- d) escolher origem arbitrária O e determinar o diagrama w_o em relação ao centro de torção e origem O;
- e) como no diagrama de w (principal) temos $\int_A w \cdot dA = 0$ e fazendo $w = w_o + k$, teremos:

$$\int_A w \cdot dA = \int_A (w_o + k) \cdot dA = 0$$

$$\int_A w \cdot dA = \int_A w_o \cdot dA + \int_A k \cdot dA = 0$$

$$\int_A w \cdot dA = \int_A w_o \cdot dA + k \cdot A = 0$$

$$k = -\frac{\int_A w_o \cdot dA}{A}$$

- f) tendo-se calculado k , da expressão anterior, podemos obter w em todos os pontos do contorno do perfil, fazendo $w = w_o + k$, e estará obtido o Diagrama de Área Sectorial Principal w ;

- g) no caso de um perfil simétrico, o ponto inicial O deverá situar-se sobre o eixo de simetria para que $\int_A w \cdot dA = 0$;
- h) a seqüência apresentada aplica-se ao caso mais geral da seção transversal de um perfil de paredes delgadas. No caso de seções usuais mais utilizadas na prática, tais como perfis I, L, etc., essa seqüência não necessitará ser executada, pois os valores w são tabelados.

C.4. EXEMPLOS

Como exemplo de determinação de propriedades sectoriais, vamos considerar a seção transversal da Figura C.6. Embora este seja um exemplo de seção bastante simples, cujas propriedades poderiam ser obtidas diretamente de uma tabela, objetiva-se com este exemplo aplicar a metodologia completa de cálculo, dando ênfase aos seus aspectos conceituais, sem a preocupação da extensão numérica do exemplo. Uma seção transversal mais complexa não apresentaria nenhuma novidade em termos de seqüência de cálculo, apenas maior trabalho numérico.

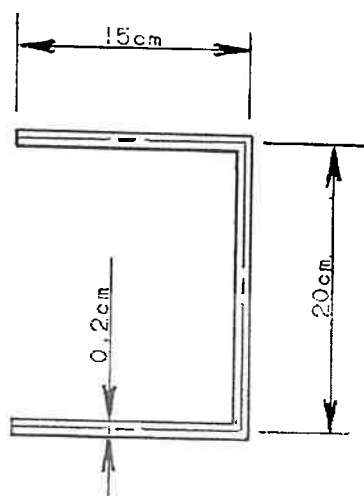


Figura C.6 - Perfil para Cálculo de Propriedades Sectoriais

a) Eixos Centrais Principais

Do estudo da Resistência dos Materiais Elementar, resulta:

$$I_z = 733,39 \text{ cm}^4$$

$$I_y = 247,53 \text{ cm}^4$$

$$I_t = 0,133 \text{ cm}^4 \text{ (Momento de Inércia à Torção de "Saint-Venant")}$$

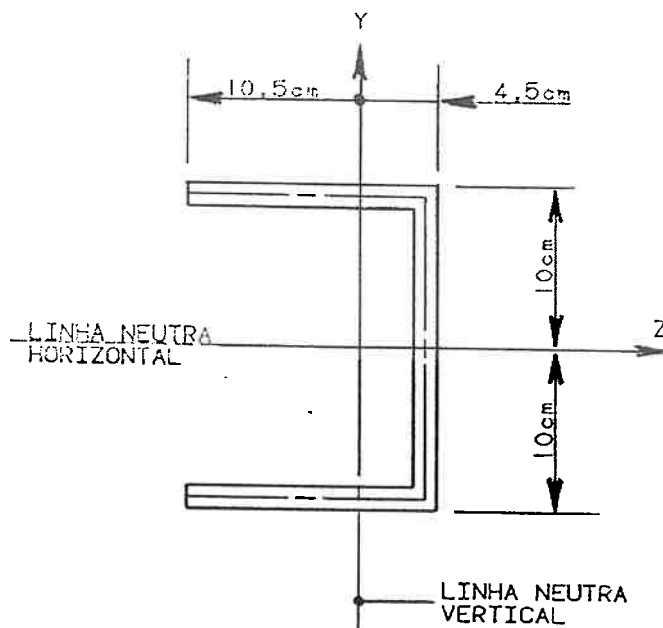


Figura C.7 - Posição dos Eixos Centrais Principais

b) Posição do Centro de Torção

Adota-se o pólo arbitrário P' e a origem arbitrária O' , como indica a Figura C.8, e constrói-se o diagrama de áreas sectoriais w'_o .

$$w'_o = \int_0^s r \cdot ds$$

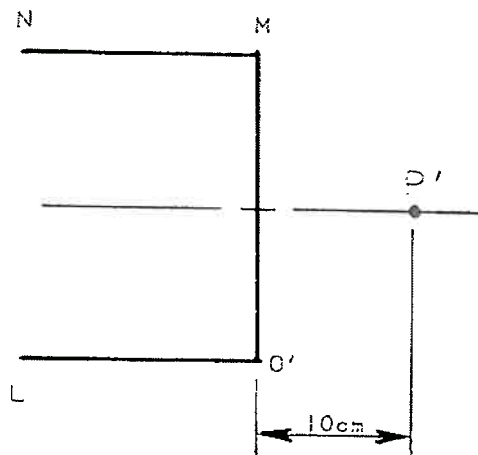


Figura C.8 - Escolha de Pólo Arbitrário e Origem Arbitrária O'

Trecho O' a M (Figuras C.9 e C.10)

$$w'_o = \int_{O'}^M r \cdot ds = \int_{\text{zero}}^s r \cdot ds$$

$$w'_o = \int_{\text{zero}}^s 10 ds = 10 \cdot S \Big|_{\text{zero}}^s \rightarrow w'_o = 10 \cdot S$$

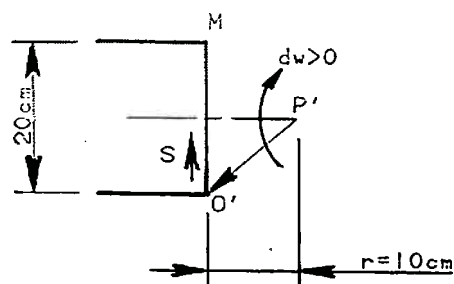


Figura C.9 - Cálculo da Área Varrida de O' a M

para $S = 20,00$ cm, temos:

$$w'_0 = 200 \text{ cm}^2$$

$$(S = 20)$$

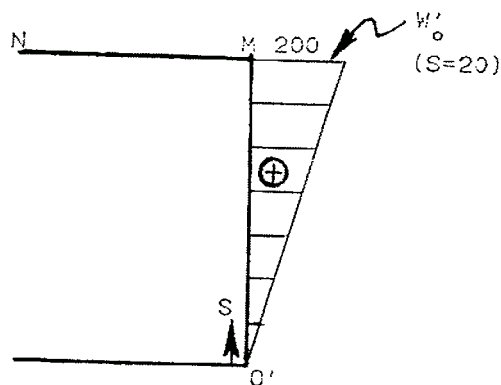


Figura C.10 - Diagrama de Área Varrida de O' a M

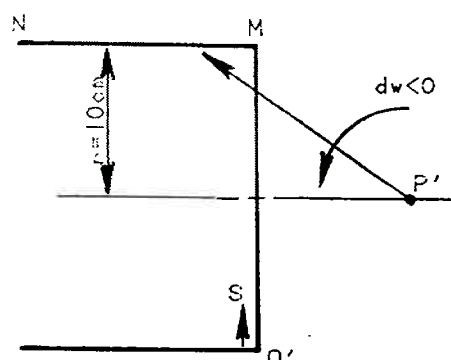
Trecho M a N (Figuras C.11 e C.12)

$$w'_0 = w'_{(S=20)} - \int_M^N r \cdot ds$$

$$w'_0 = 200 - \int_{20}^S 10 \cdot ds$$

$$w'_0 = 200 - 10 \cdot S \Big|_{20}^S$$

$$w'_0 = 200 - 10 \cdot (S - 20)$$



para o ponto N , $S = 35$ cm

Figura C.11 - Cálculo da Área Varrida de M a N

$$w'_o = 200 - 10(35 - 20)$$

(S=35)

$$w'_o = 50 \text{ cm}^2$$

(S=35)

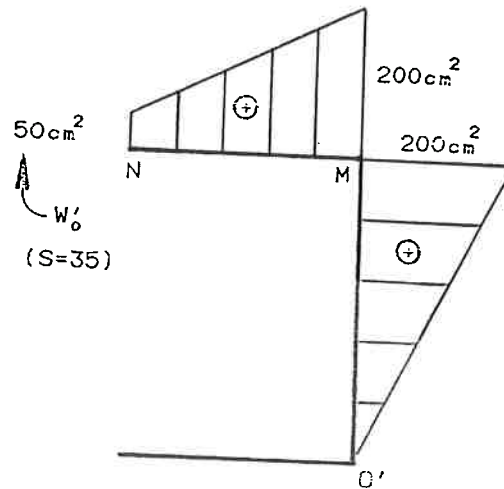


Figura C.12 - Diagrama de Área Varrida de O' a N

Trecho O' a L (Figura C.13)

$$w'_o = \int_{O'}^L r \cdot ds$$

no ponto L,

$$w'_o = 10 \times 15 \text{ cm}^2 = 150 \text{ cm}^2$$

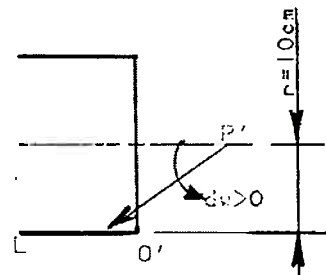


Figura C.13 - Cálculo de Área Varrida de O' a L

A Figura C.14 representa os diagramas w'_o que acabamos de determinar, bem como os diagramas das coordenadas y e z dos pontos da seção, considerando os Eixos Centrais Principais.

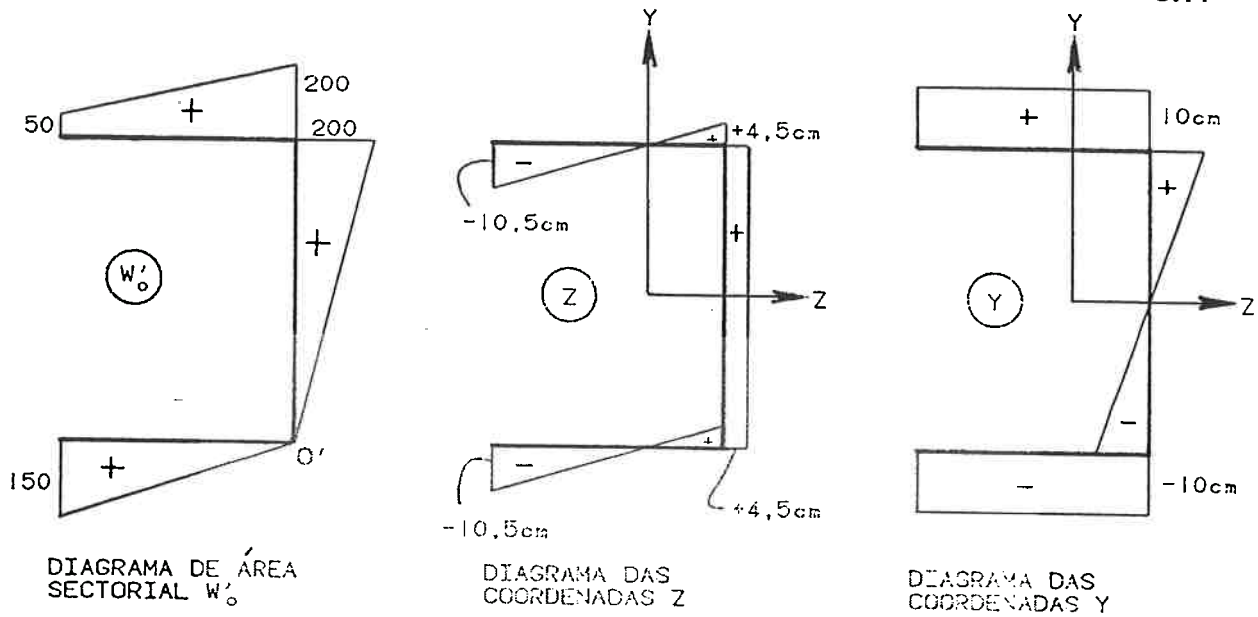


Figura C.14 - Diagramas w'_0 , y e z

Tendo os diagramas w'_0 , z e y , pode-se determinar as coordenadas do centro de torção.

$$y_c = \frac{\int z \cdot w'_0 \cdot dA}{I_y} \quad \text{e} \quad z_c = \frac{- \int y \cdot w'_0 \cdot dA}{I_z}$$

As integrais que fazem parte dos numeradores das expressões de y_c e z_c , representam o "produto dos diagramas" tramo a tramo ao longo da seção. A integração do produto de duas funções, como aquelas representadas anteriormente, pode ser obtida, por exemplo, pela Tabela de Kurt Beyer. Assim:

$$y_c = 0 \text{ cm}$$

$$z_c = -3,863 \text{ cm}$$

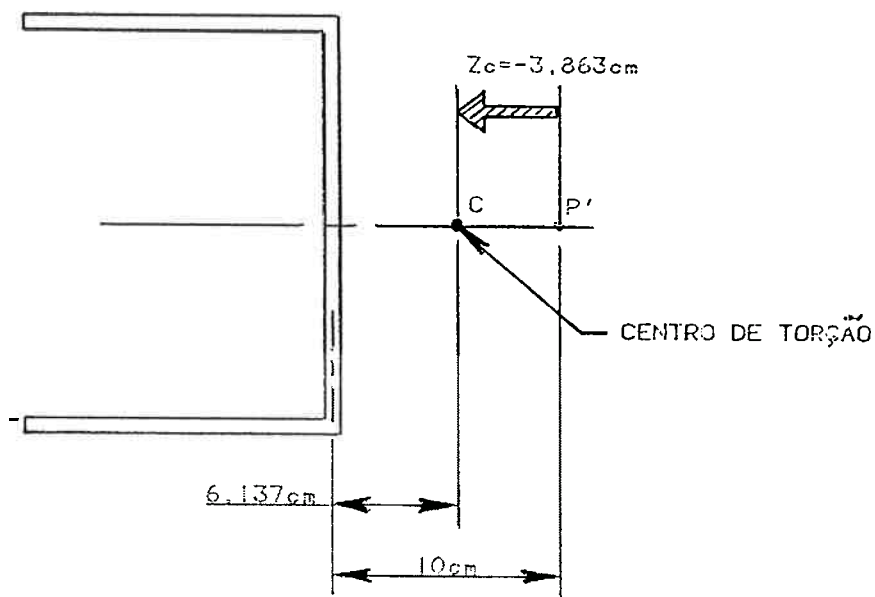


Figura C.15 - Posição do Centro de Torção

c) Escolher Pólo P coincidente com o Centro de Torção

Na figura anterior fazer $P \equiv C$.

d) Diagrama w_0

Com pólo em C, adotamos origem arbitrária O e construímos o diagrama w_0 .

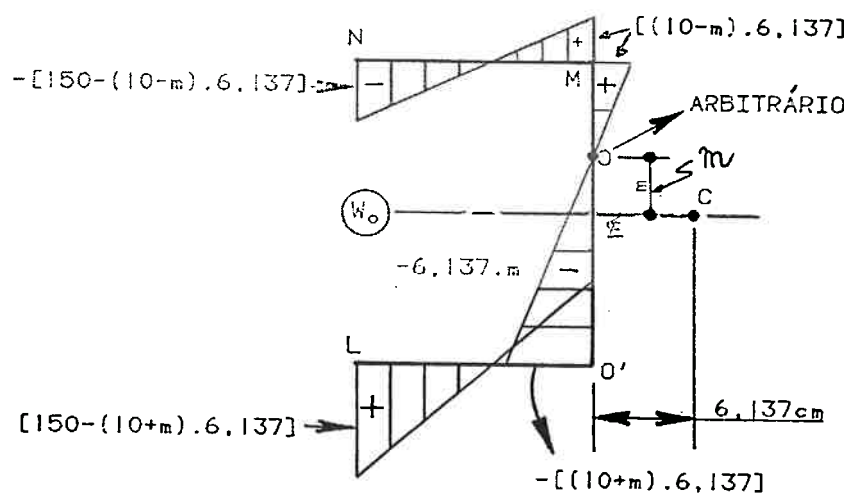


Figura C.16 - Diagrama de Área Sectorial para Pólo Coincidente com o Centro de Torção e Origem Arbitrária

e) Calcular k

$$k = -\frac{\int_A w_o \cdot dA}{A}$$

A integração $\int_A w_o \cdot l \cdot dA$ pode ser feita, por exemplo, com o auxílio

da Tabela de Kurt Beyer (produto das funções w_o e 1, considerando $dA = t \cdot ds$, sendo t a espessura do perfil)

Assim, resulta:

$$K = 6,137 \cdot m$$

f) Diagrama de Área Sectorial Principal w

Em todos os pontos do contorno do perfil, devemos ao diagrama w_o , fazer $w = w_o + k$. Assim:

Ponto L

$$w_L = [150 - (10+m) \cdot 6,137] + 6,137m = 88,63 \text{ cm}^2$$

$$w'_o = [-(10+m) \cdot 6,137] + 6,137m = -61,37 \text{ cm}^2$$

$$w_L = -6,137m + 6,137m = 0 \text{ cm}^2$$

$$w_M = [(10-m) \cdot 6,137] + 6,137m = 61,37 \text{ cm}^2$$

$$w_N = [-150 - (10-m) \cdot 6,137] + 6,137m = -38,63 \text{ cm}^2$$

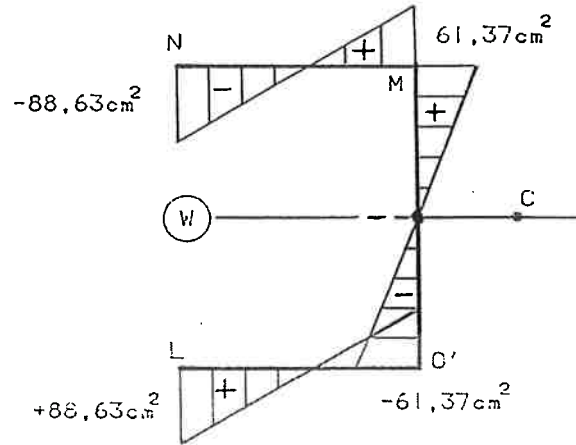


Figura C.17 - Diagrama de Área Sectorial Principal w

g) Perfil Simétrico

O diagrama de área sectorial principal obtido poderia ser determinado considerando a origem O sobre o eixo de simetria (perfil simétrico), o que forneceria a condição $\int_A w \cdot dA = 0$, e o pólo coincidente com o centro de torção C .

$$w_M = \int_0^M r \cdot ds = 6,137 \times 10 = 61,37 \text{ cm}^2$$

$$w_N = 61,37 - \int_M^N r \cdot ds = -88,63 \text{ cm}^2$$

$$= 61,37 - 10 \times 15 = -88,63 \text{ cm}^2$$

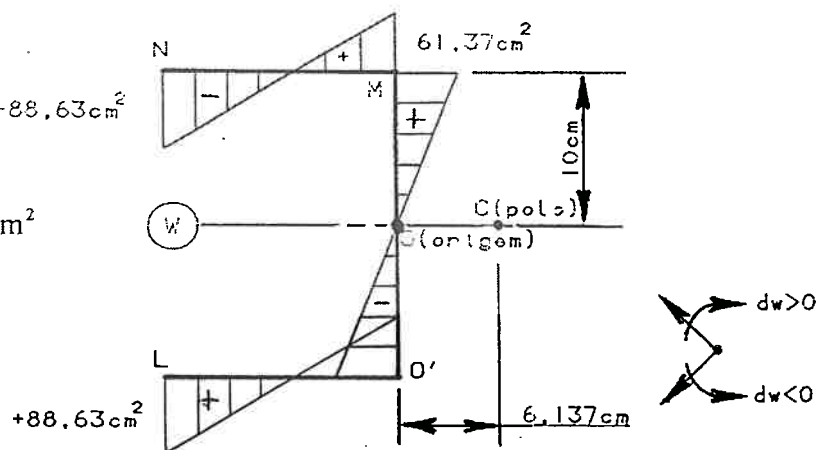


Figura C.18 - Construção do Diagrama w , partindo da condição que C e O são conhecidos

h) A seqüência de A a G não seria necessária para este tipo de perfil, pois os resultados são tabelados, como já foi dito anteriormente.

i) Cálculo do Momento de Inércia Sectorial Principal

$$I_w = \int_A w^2 \cdot dA = \int_A w \cdot w \cdot dA; \text{ cuja integração pode ser efetuada}$$

considerando o produto da função w por ela mesma. Dessa forma:

$$I_w = 17.386,4 \text{ cm}^6$$

j) Diagrama do Momento Estático Sectorial

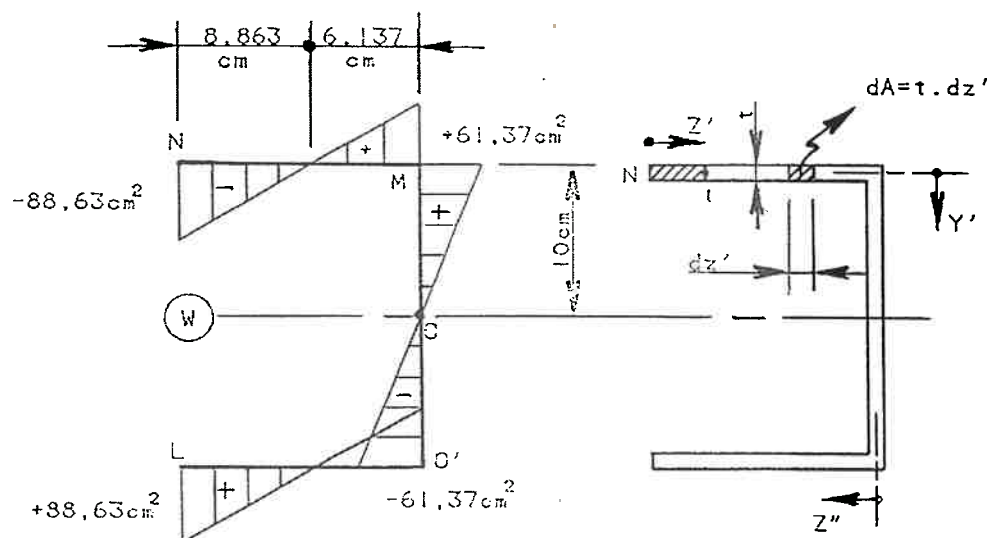


Figura C.19 - Referências para construção do Diagrama do Momento Estático Sectorial

no trecho NM : $w = -88,63 + 10 \cdot z'$

no trecho MO' : $w = 61,37 - 6,137 \cdot y'$

no trecho O'L : $w = -61,37 + 10 \cdot z''$

No trecho NM

$$M_{sw} = \int_0^{z'} w \cdot dA = \int_0^{z'} (-88,63 + 10 \cdot z') \cdot t \cdot dz' = \int_0^{z'} (-88,63 + 10 \cdot z') \cdot 0,2 \cdot dz'$$

$$M_{sw} = -17,726 \int_0^{z'} dz' + 2 \int_0^{z'} z' \cdot dz' \rightarrow M_{sw} = -17,726 \cdot z' \Big|_0^{z'} + z'^2 \Big|_0^{z'}$$

$$M_{sw} = -17,726 \cdot z' + z'^2$$

$$\text{para } z' = 0 \quad \rightarrow \quad M_{sw} = 0 \text{ cm}^4$$

$$\text{para } z' = 8,863 \text{ cm} \quad \rightarrow \quad M_{sw} = -78,55 \text{ cm}^4$$

$$\text{para } z' = 15 \text{ cm} \quad \rightarrow \quad M_{sw} = -40,89 \text{ cm}^4$$

No trecho MO'

$$M_{sw} = \int_0^{y'} w \cdot dA + M_{swM} = \int_0^{y'} w \cdot dA - 40,89 \rightarrow$$

$$M_{sw} = \int_0^{y'} (61,37 - 6,137 \cdot y') \cdot 0,2 \cdot dy' - 40,89 \rightarrow$$

$$M_{sw} = 12,274 \int_0^{y'} dy' - 1,227 \int_0^{y'} y' dy' - 40,89 \rightarrow$$

$$M_{sw} = -40,89 + 12,274 \Big|_0^{y'} - \frac{1,227}{2} y'^2 \Big|_0^{y'} \rightarrow$$

$$M_{sw} = -40,89 + 12,274 y' - 0,6135 y'^2$$

$$\text{para } y' = 0 \text{ cm} \quad \rightarrow \quad M_{sw} = -40,89 \text{ cm}^4$$

$$\text{para } y' = 4,2227 \text{ cm} \quad \rightarrow \quad M_{sw} = 0 \text{ cm}^4$$

$$\text{para } y' = 10 \text{ cm} \quad \rightarrow \quad M_{sw} = 20,45 \text{ cm}^4$$

$$\text{para } y' = 15,7838 \text{ cm} \quad \rightarrow \quad M_{sw} = 0 \text{ cm}^4$$

$$\text{para } y' = 20 \text{ cm} \quad \rightarrow \quad M_{sw} = -40,89 \text{ cm}^4$$

No trecho O'L

$$M_{sw} = \int_0^{z''} w \cdot dA + M_{sw_{o'}} = \int_0^{z''} w \cdot dA - 40,89 \rightarrow$$

$$M_{sw} = \int_0^{z''} (-61,37 + 10 \cdot z'') \cdot 0,2 \cdot dz'' - 40,89 \rightarrow$$

$$M_{sw} = -40,89 + 12,274 \cdot z''^2$$

$$\text{para } z'' = 0 \text{ cm} \quad \rightarrow \quad M_{sw} = -40,89 \text{ cm}^4$$

$$\text{para } z'' = 6,137 \text{ cm} \quad \rightarrow \quad M_{sw} = -78,55 \text{ cm}^4$$

$$\text{para } z'' = 15 \text{ cm} \quad \rightarrow \quad M_{sw} = 0 \text{ cm}^4$$

Resultará portanto o diagrama:

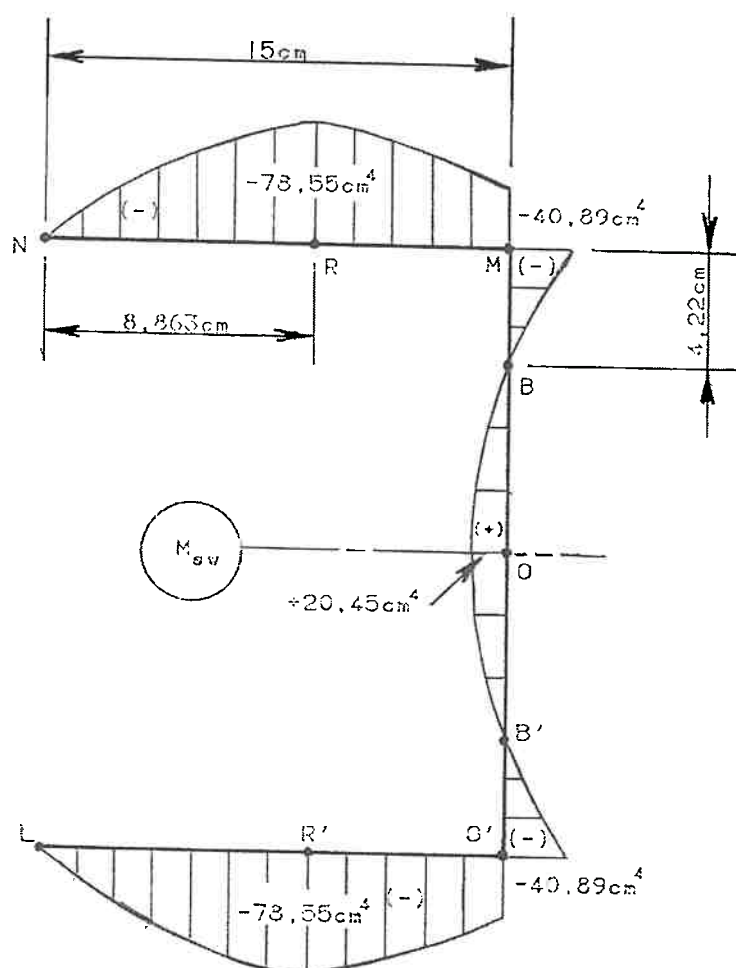


Figura C.20 - Diagrama do Momento Estático Sectorial

Para perfis usuais, o diagrama do momento estático sectorial pode ser obtido de tabelas.

APÊNDICE D

CASO PARTICULAR

CONSIDERAÇÃO DE MASSAS CONCENTRADAS NO MODELO HÍBRIDO

CÁLCULO DE FREQUÊNCIAS NATURAIS

APÊNDICE D

CASO PARTICULAR

CONSIDERAÇÃO DE MASSAS CONCENTRADAS NO MODELO HÍBRIDO

CÁLCULO DE FREQUÊNCIAS NATURAIS

D.1 EFEITO DE MASSAS CONCENTRADAS

As análises desenvolvidas por intermédio dos TESTES DE CONFIABILIDADE permitiram verificar a aplicação do Modelo Híbrido no cálculo de frequências naturais de flexo-torção para uma viga isolada ou uma caixa estrutural. As análises anteriores consideraram apenas o efeito da distribuição da massa própria da estrutura. Em diversas situações práticas, podemos considerar o efeito de massas relativamente mais intensas que a própria massa da estrutura, e suportadas devido à capacidade portante da mesma. Por exemplo, a massa de equipamentos localizados em determinadas regiões da estrutura e que podem ser aplicadas com excentricidades em relação ao centro de torção. A investigação desses efeitos foi efetuada considerando o caso do perfil C 200x150x2 mm com uma massa concentrada de 300 Kg aplicada

excentricamente em relação ao centro de torção. Foram pesquisados para este caso também, segundo diversos modelos utilizando o MEF, os modos e frequências naturais de vibração e em particular as vibrações flexo-torcionais.

Foi considerada a vibração da viga C em balanço com uma massa concentrada em sua extremidade livre; a comparação entre os diversos modelos é mostrada na tabela seguinte. Foram feitas posteriormente, algumas alterações com objetivo de analisar novos casos, como por exemplo a análise da viga para um comprimento diferente e, posteriormente, a massa aplicada no centro de torção do perfil. Novamente foram considerados os modelos: MEF/Elementos de Casca, Modelo Híbrido, MEF/Vigas.

Tabela D.1 - CÁLCULO DE FREQUÊNCIAS DE FLEXO-TORÇÃO (Hz) CONSIDERANDO EFEITO DE MASSA CONCENTRADA E MASSA PRÓPRIA DA ESTRUTURA

-	Frequência	Observações
Caso 1	4,4539	Modelo com elementos finitos de casca. O primeiro modo de vibrar corresponde à vibração local da alma e flanges, acoplada à vibração lateral.
Caso 2	4,4596	Modelo com elementos finitos de casca com barras na extremidade para eliminar vibração local.
Caso 3	4,3200	Modelo Híbrido Analogia Flexão-Retorção
Caso 4	1,0472	Modelo constituído por Elementos de Viga Convencionais. Embora considere o efeito da excentricidade de massa, tanto do perfil como da massa concentrada, o valor calculado não permite avaliar a frequência de vibração flexo-torcional, decorrente da inexistência da rigidez ao empenamento.

Foram processadas as análises anteriores alterando-se o comprimento do perfil para $L = 3\text{m}$, gerando-se novos modelos em elementos finitos, que correspondem respectivamente aos casos 5, 6 e 7. As frequências calculadas foram 2,5706 (MEF/Cascas), 2,3799 (Modelo Híbrido) e 0,8534 (Modelo com Elementos de Viga Convencionais), confirmando as observações já efetuadas anteriormente quanto a validade dos Modelos adotados.

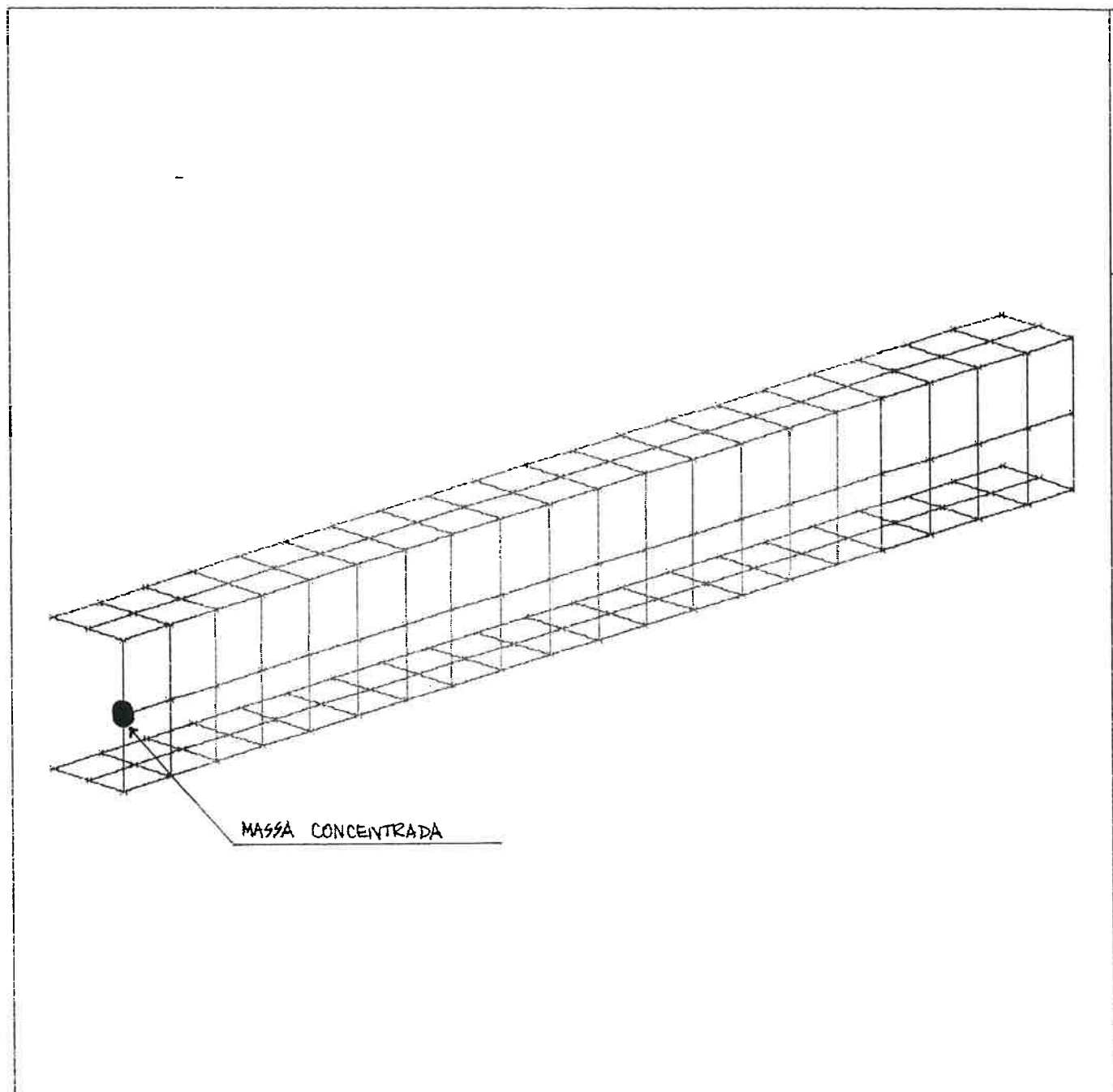


Figura D.1 - Modelo de Viga C em Elementos de Casca com Massa Concentrada (Caso 1)

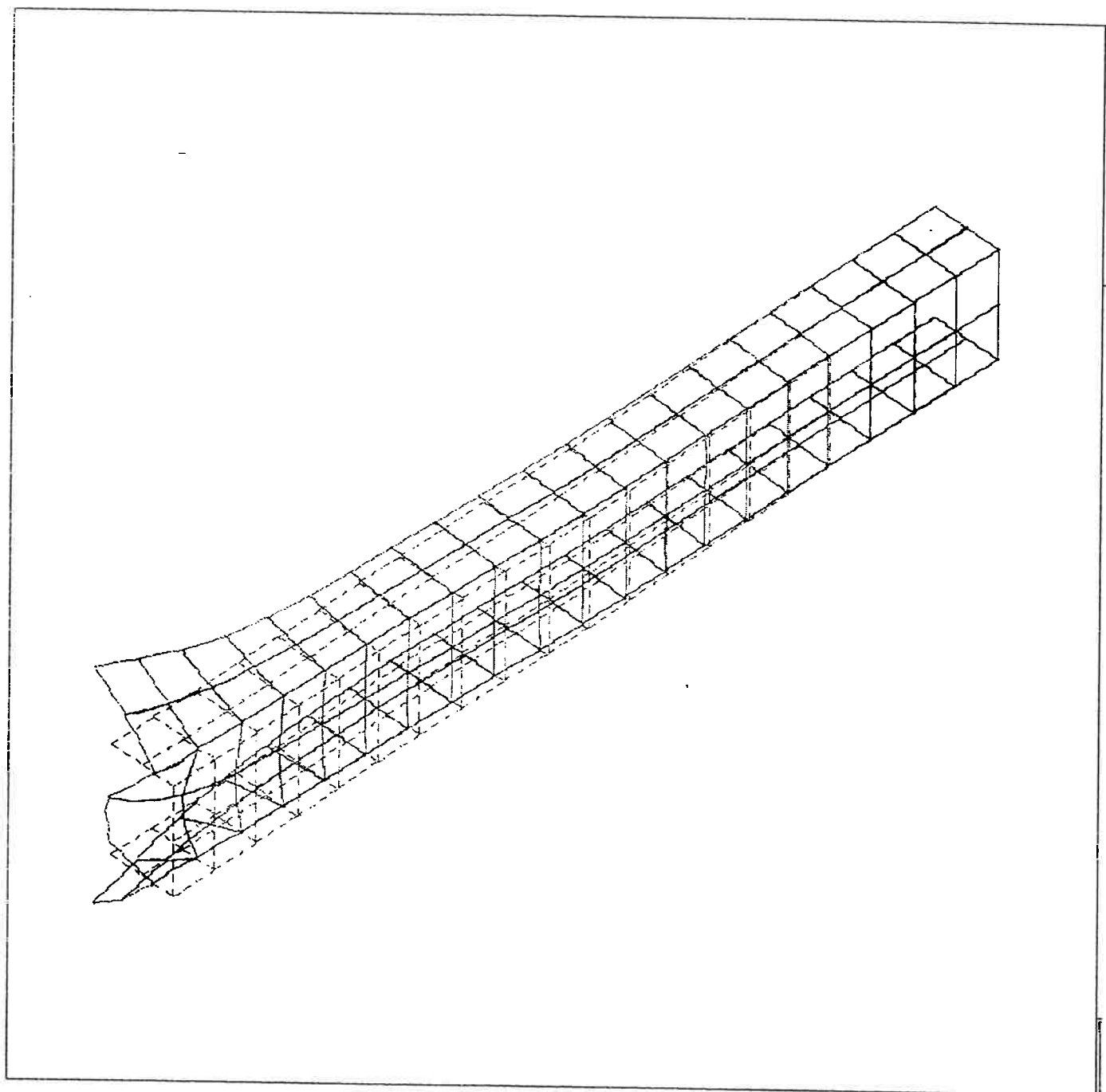


Figura D.2 - Modo Flexional Lateral acoplado a Vibração Local da Alma e Flanges (Caso 1)

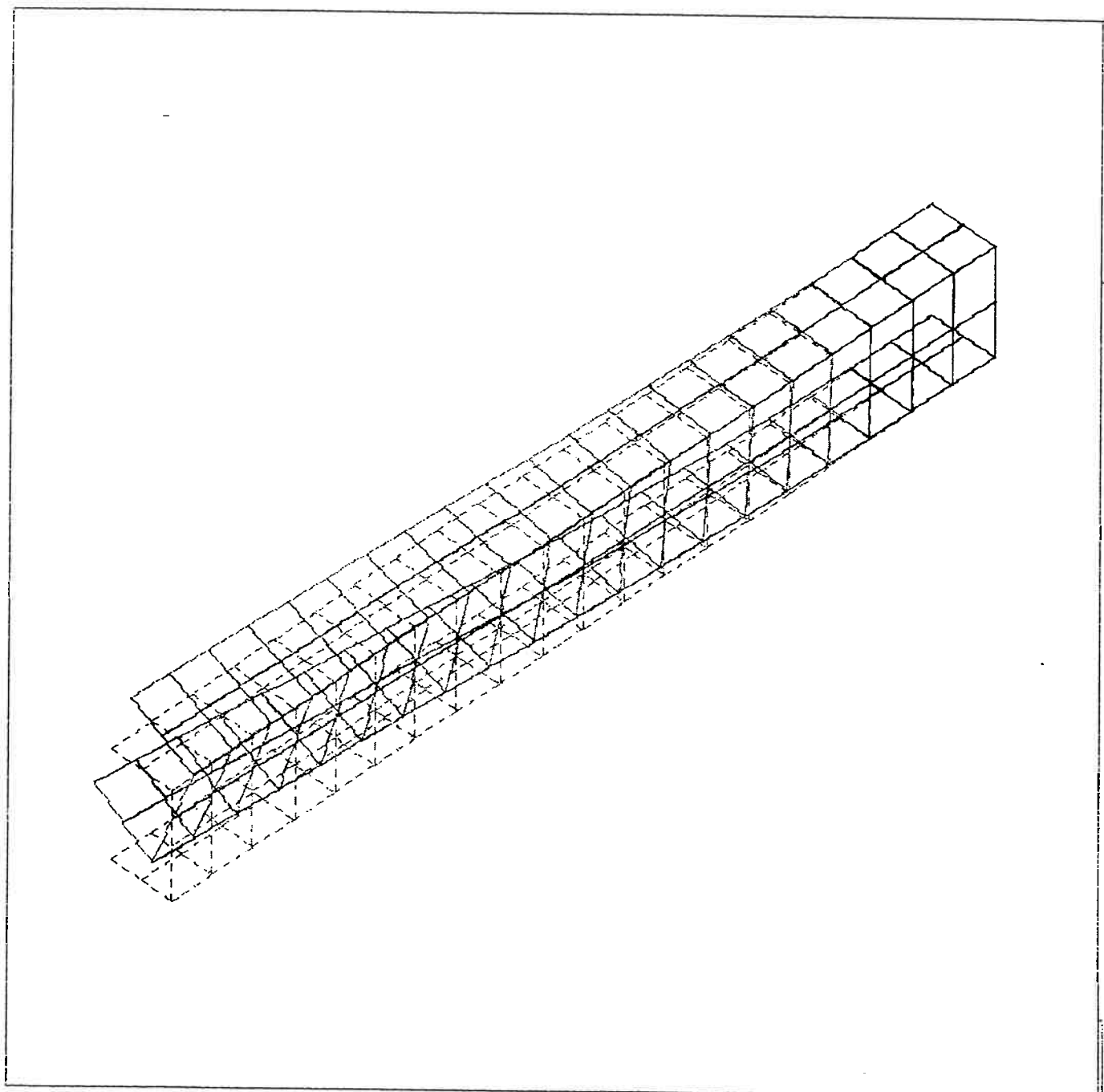
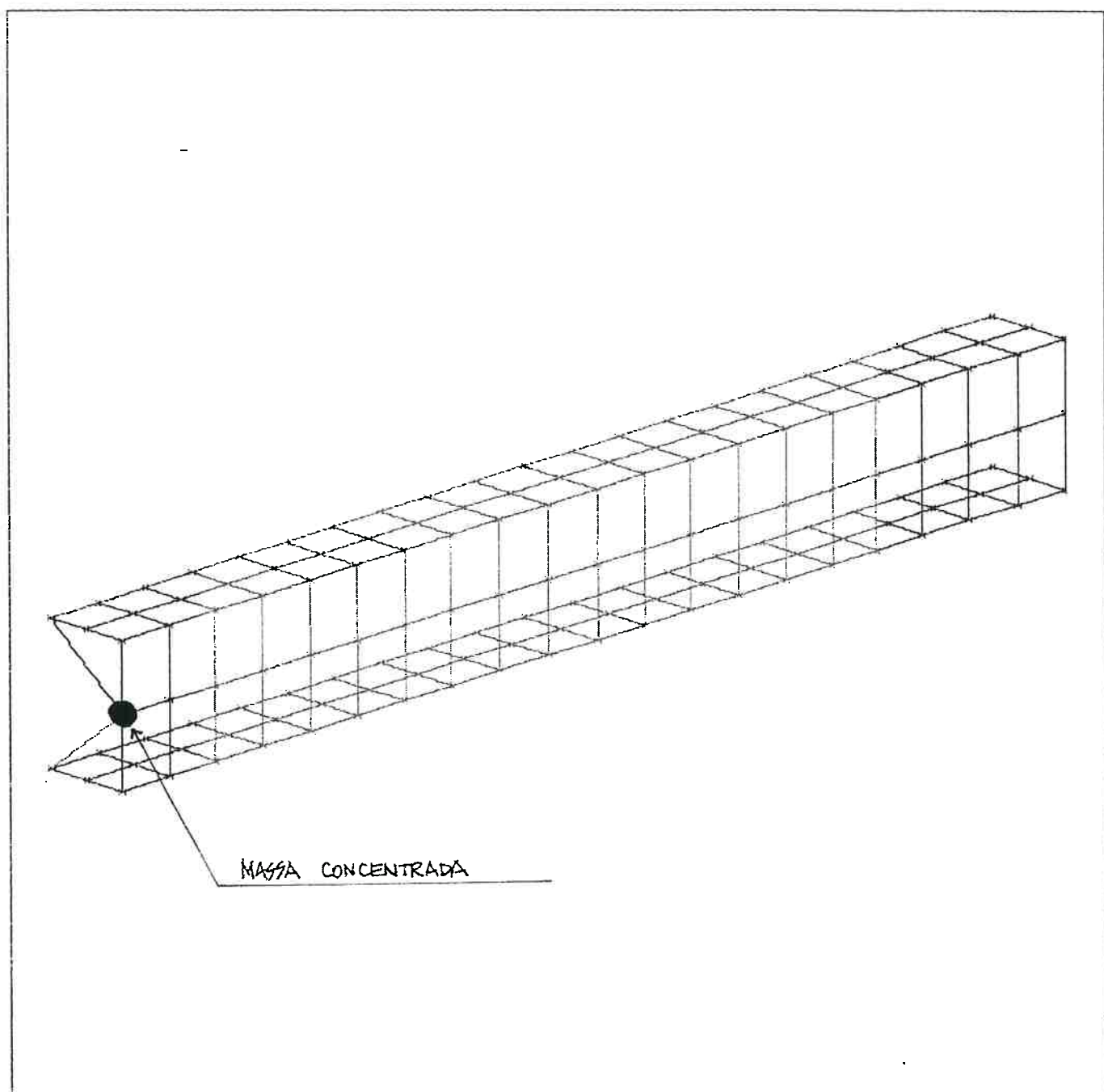


Figura D.3 - Modo Flexo-Torcional do Perfil C (Caso 1)



*Figura D.4 - Modelo com Elementos de Casca e Barras na
Extremidade para eliminar Vibração Local (Caso 2)*

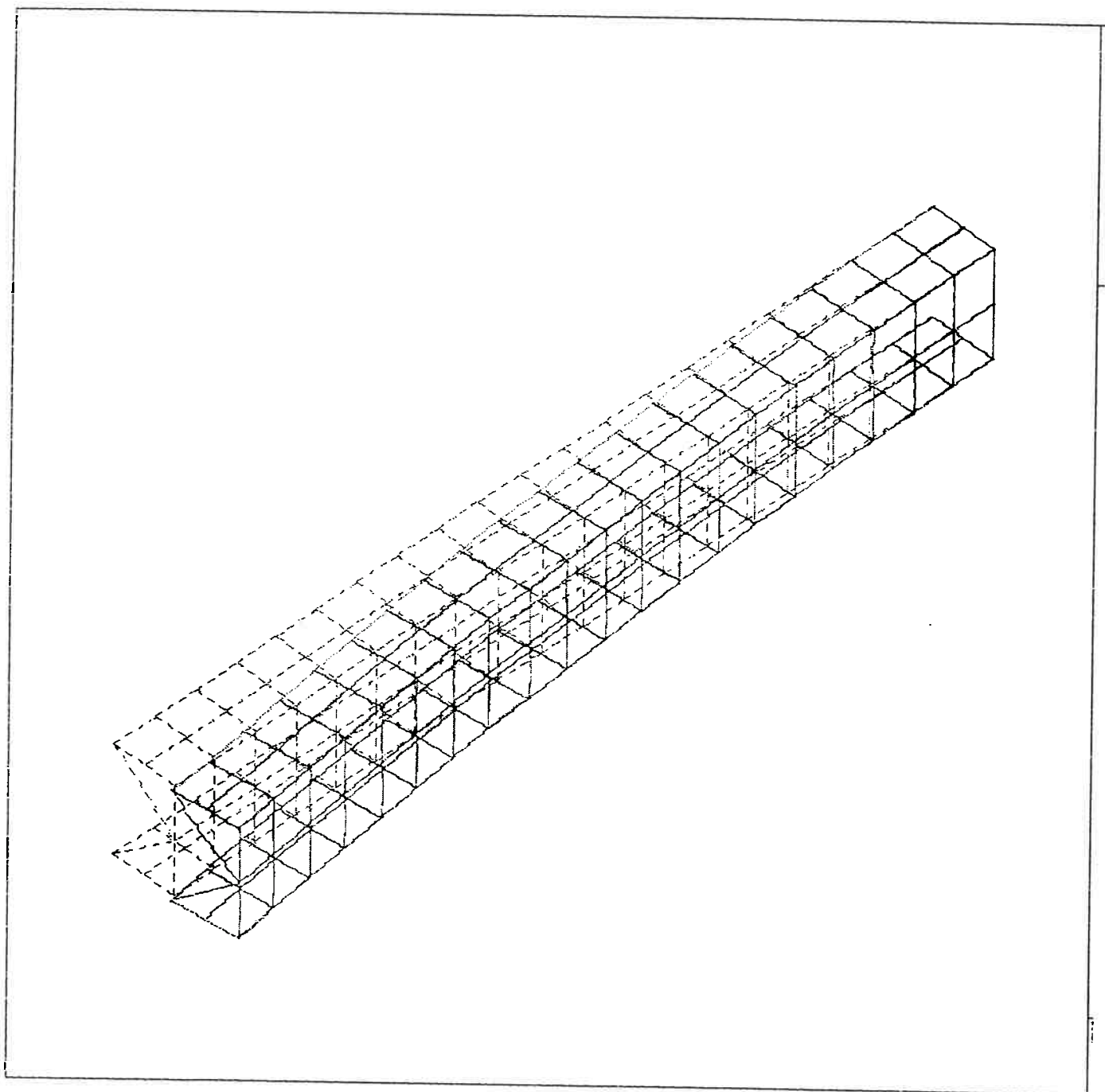


Figura D.5 - Vibração Lateral de Perfil C (Caso 2)

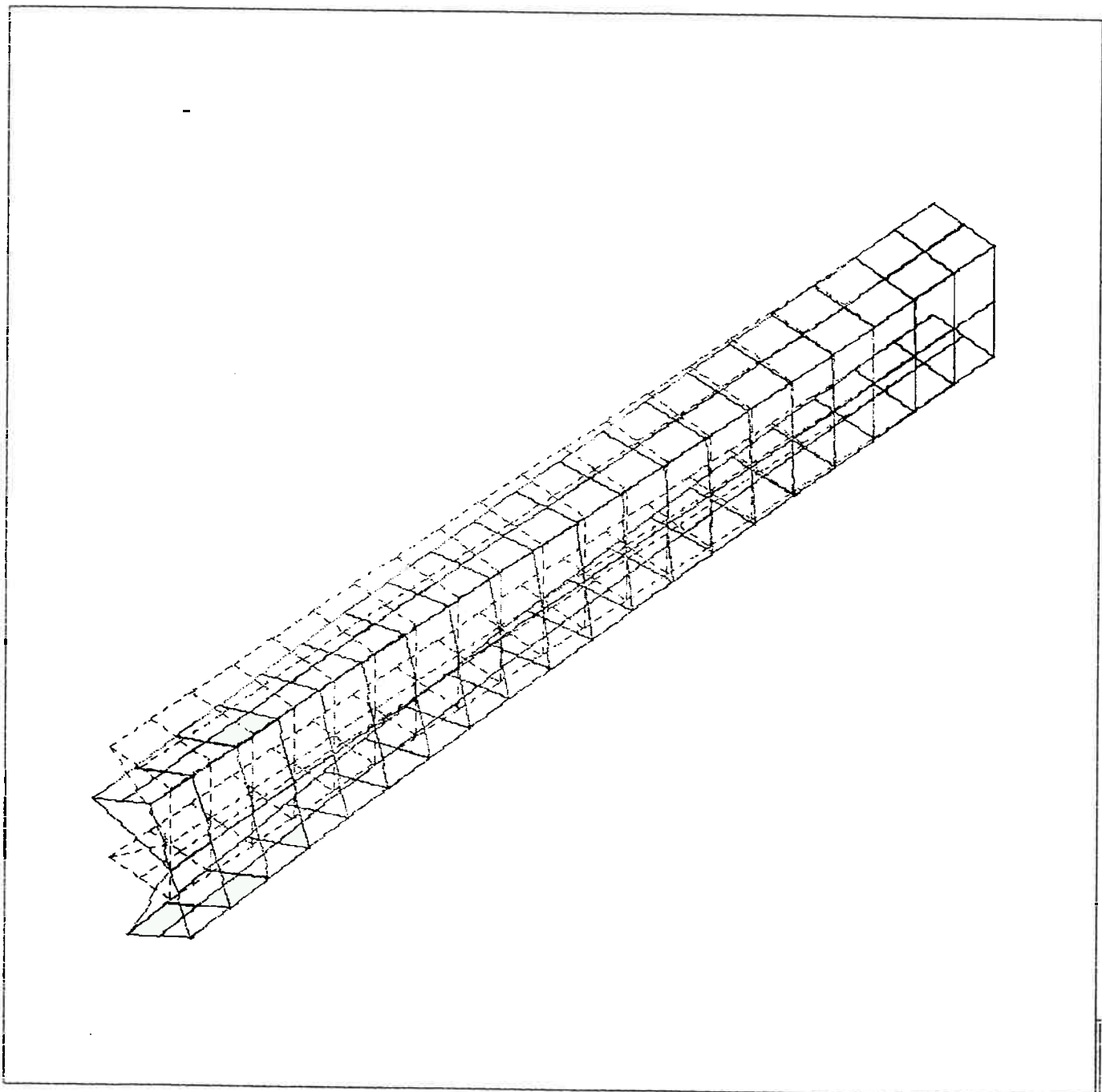


Figura D.6 - Vibração Flexo-Torcional de Perfil C (Caso 2)

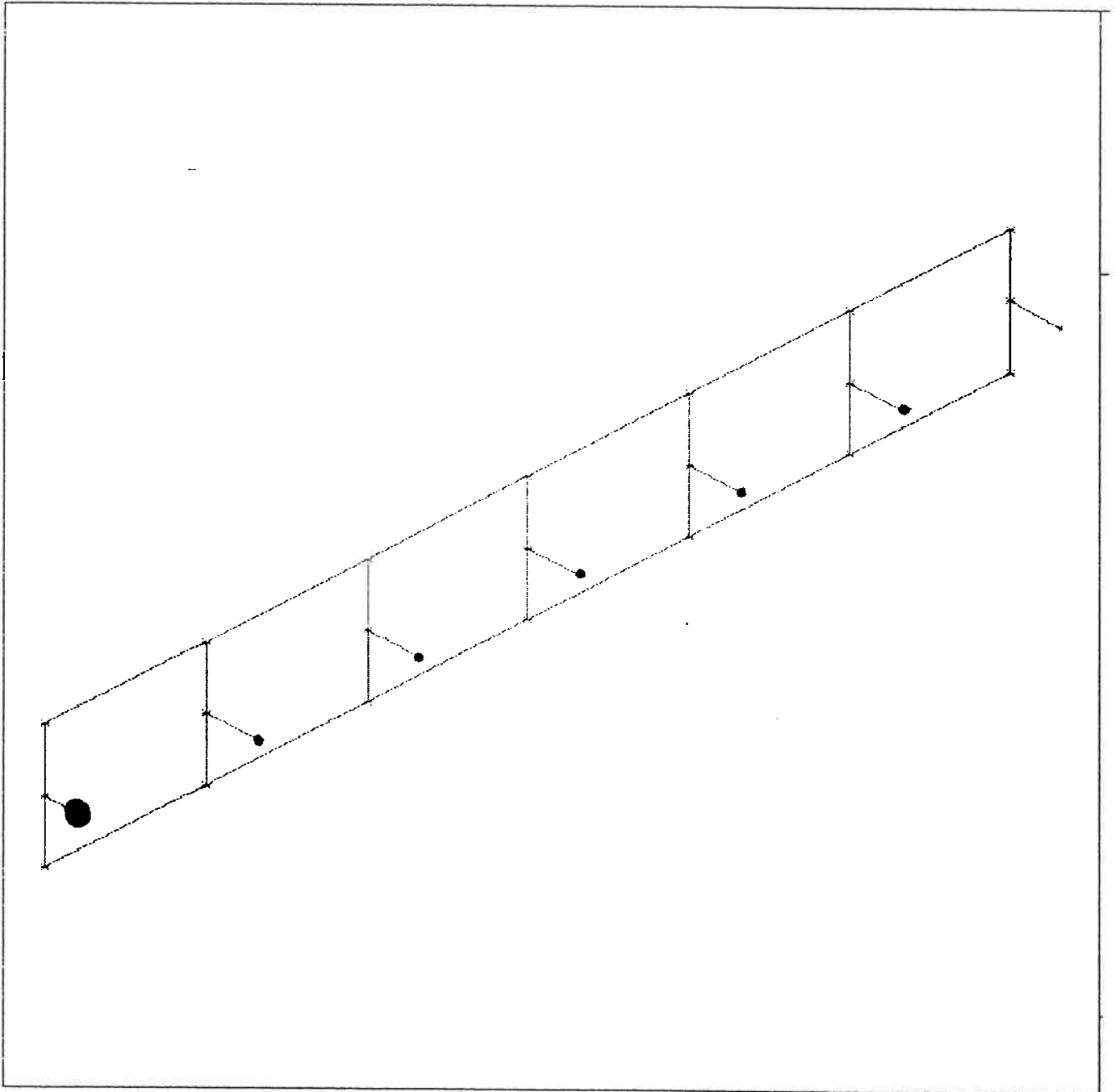
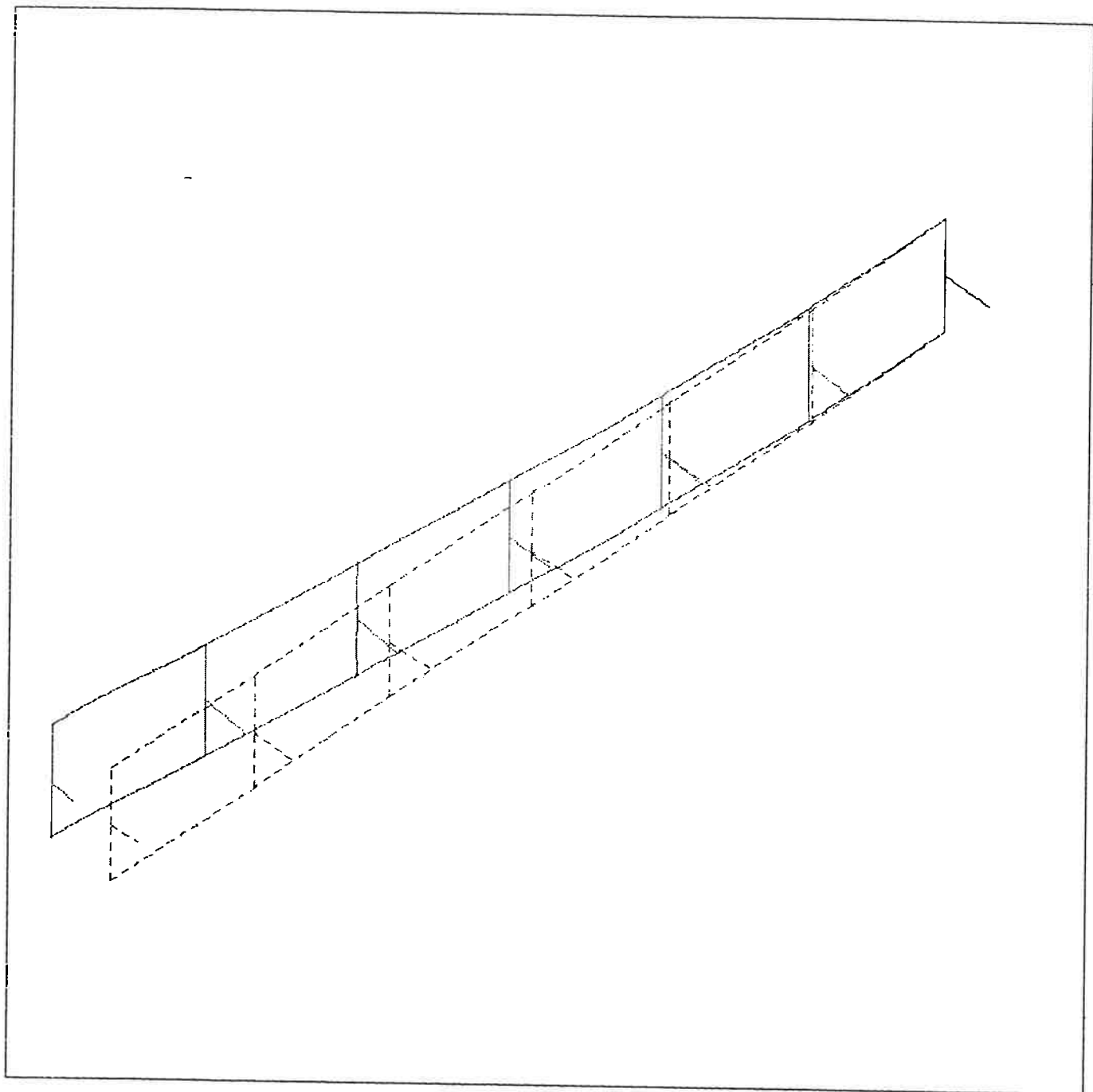


Figura D.7 - Modelo Híbrido de Perfil C considerando Massa Própria e Massa Concentrada (Caso 3)



*Figura D.8 - Vibração Lateral de Perfil C com Modelo Híbrido
(Caso 3)*

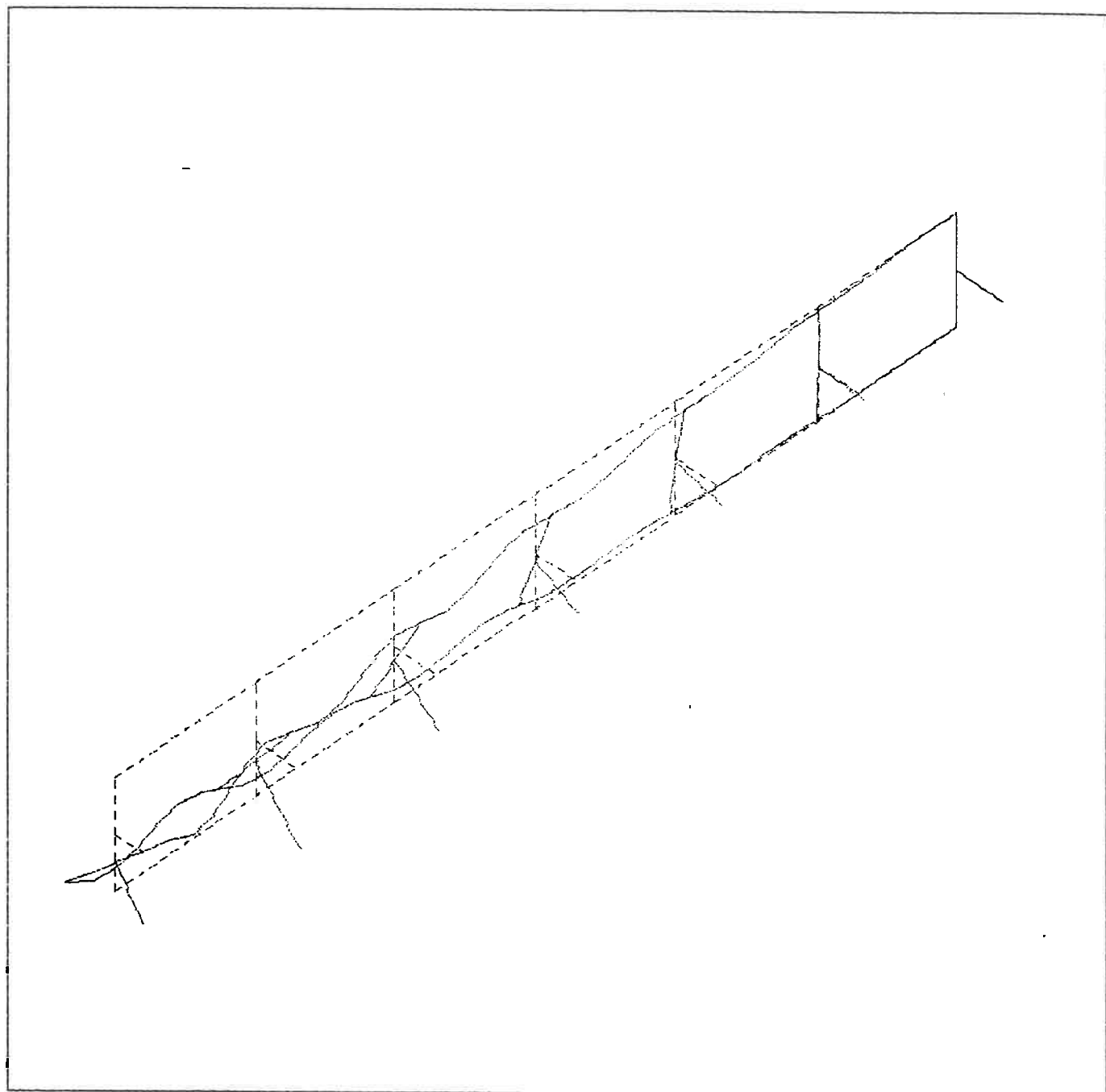


Figura D.9 - Vibração Flexo-Torcional de Perfil C com Modelo Híbrido (Caso 3)

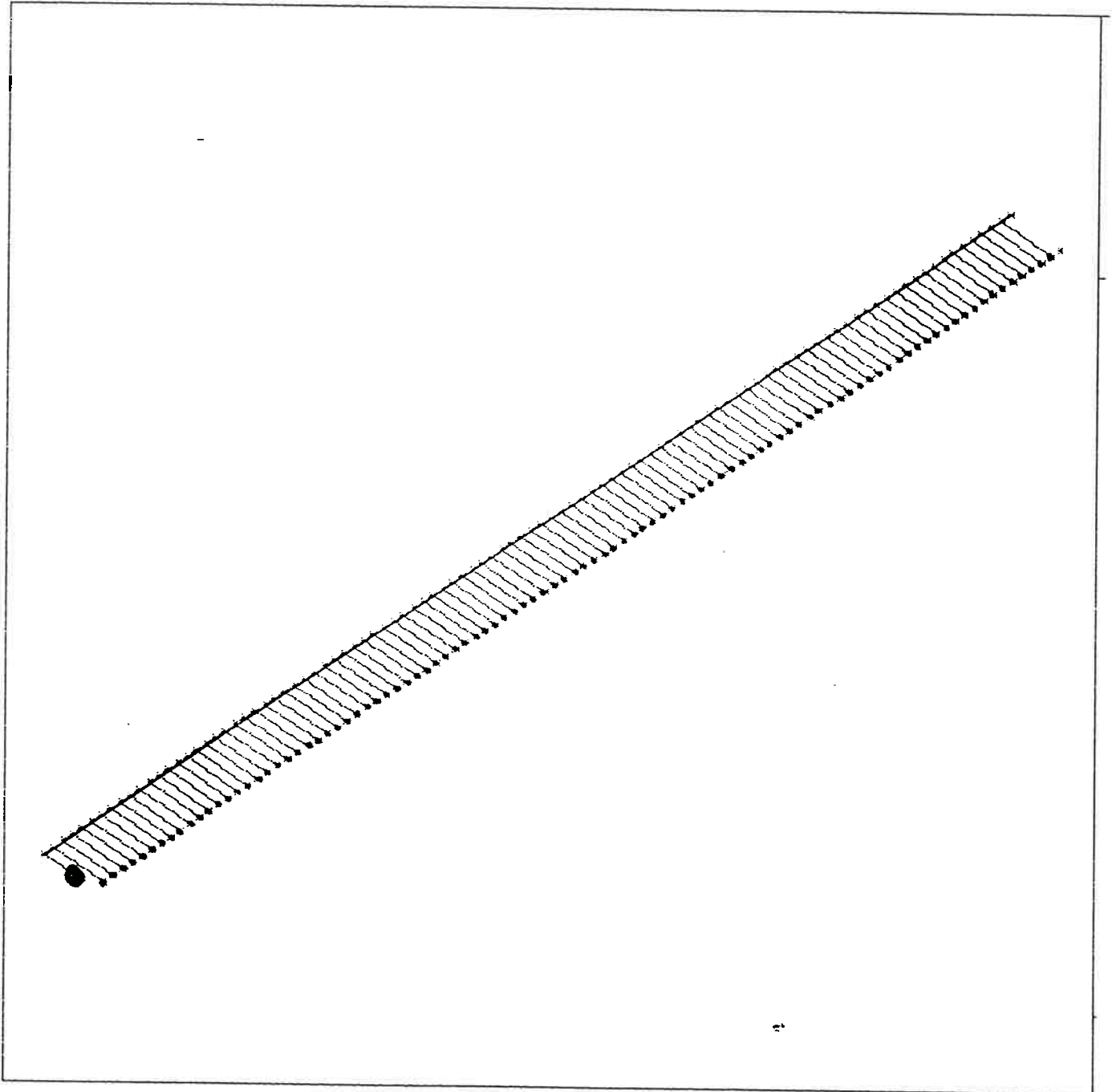


Figura D.10 - Modelo de Perfil C com Elementos de Viga Convencionais e Barras Auxiliares. Massa Própria e Massa Concentrada (Caso 4)

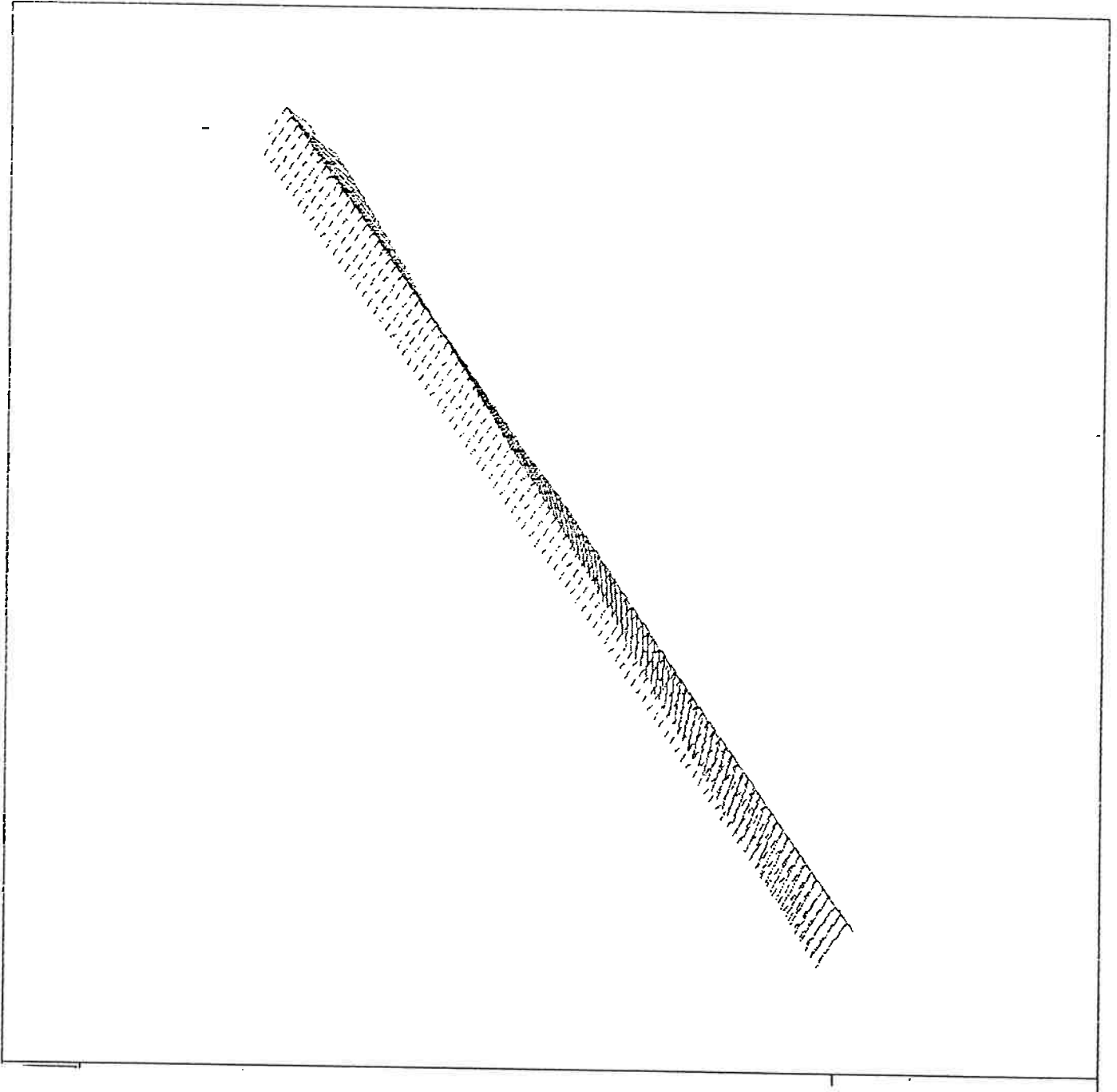


Figura D.11 - Vibração Torcional com Modelo em Elementos de Viga (Caso 4)

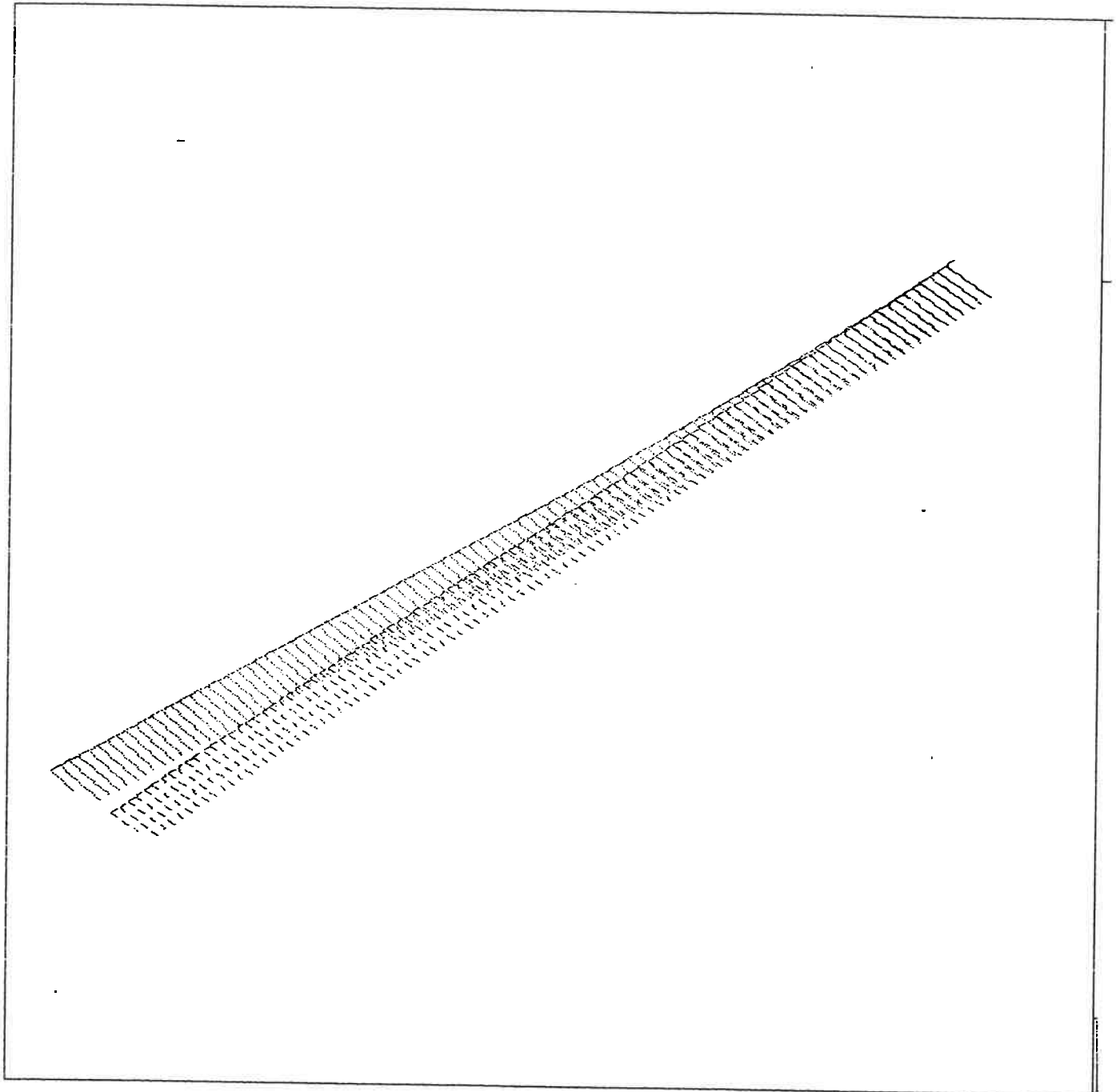


Figura D.12 - Vibração Lateral com Modelo em Elementos de Viga (Caso 4)

Finalmente, mereceu investigação a importância da colocação da massa concentrada no centro de torção do perfil, que deve evitar a vibração flexo-torcional. Foram processados respectivamente os Casos 8, 9 e 10. Nestes casos, os modelos apresentaram valores coerentes em termos de vibração flexional lateral e flexional vertical. Quanto à flexo-torção, não foi detectada devido à inexistência de excentricidade, sendo coerente para os três modelos. Entretanto, neste caso também podemos verificar a limitação do modelo com elementos de viga convencionais e a utilidade do modelo híbrido. Embora não ocorra o acoplamento das vibrações verticais e torcionais, pode-se detectar a presença de vibrações torcionais, de modo que o perfil sofra rotação em torno do centro de torção, onde a massa concentrada permanece imóvel. Nesse caso, a presença do componente flexo-torcional é causada pela massa própria do perfil. Essa expectativa pode ser confirmada analisando-se a tabela seguinte com os resultados dos processamentos. A vibração torcional corresponde à frequência de 20,7589 Hz, não sendo possível a sua determinação com o modelo em elementos de vigas, mas já houvera sido determinada anteriormente na análise do perfil sujeito à sua massa própria, inclusive pelo próprio modelo híbrido.

Tabela D.2 - Modelos com Massa Concentrada no Centro de Torção e Massa Própria

	Caso 8 (Casca)	Caso 9 (Híbrido)	Caso 10 (Vigas)
Flexão Lateral	4,1208	3,9826	3,9911
Flexão Vertical	6,7725	6,8504	6,9317
Torção em torno do ponto fixo (C.Torção)	20,7589	24,7780	4,2668

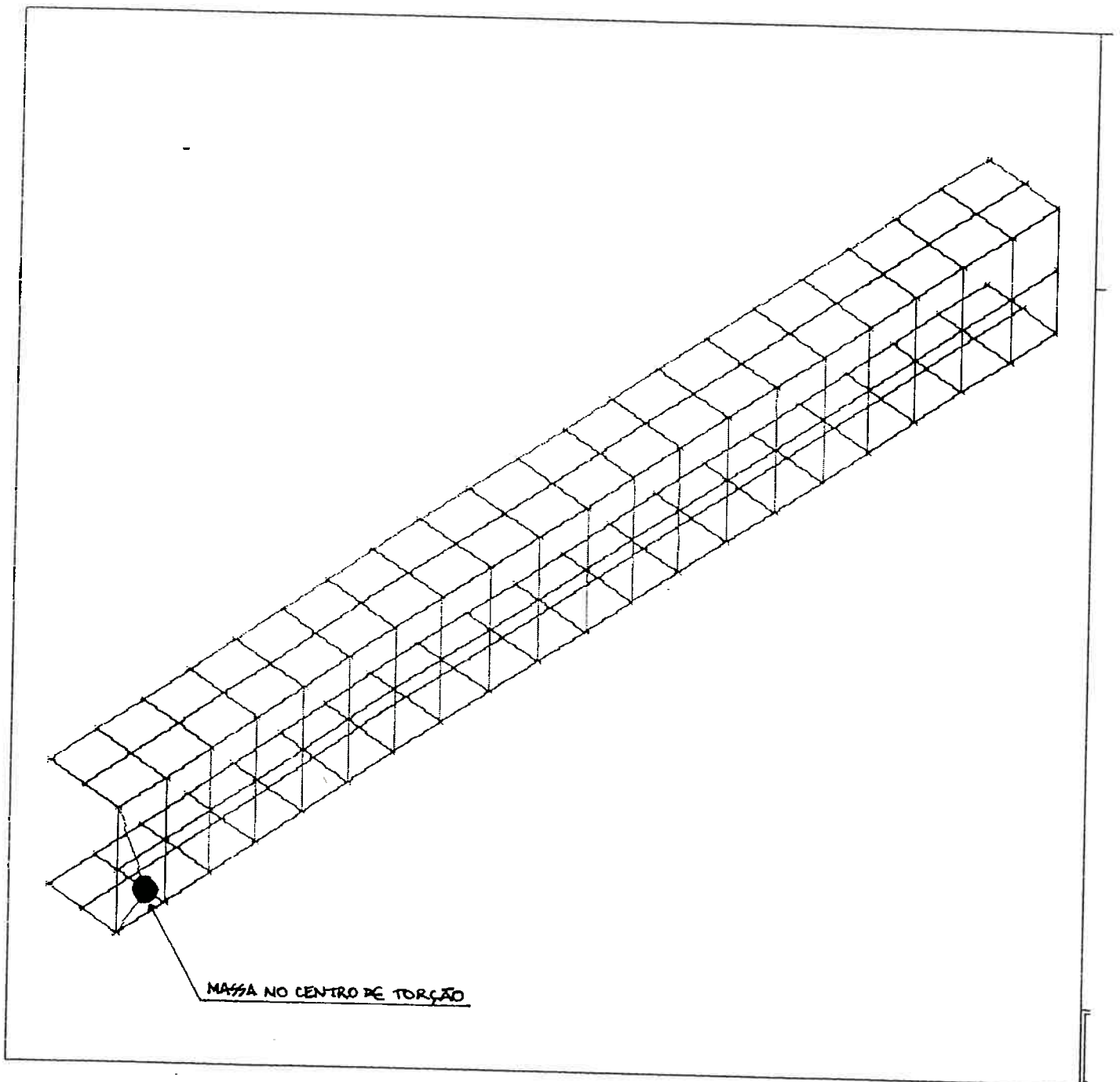


Figura D.13 - Modelo em Elementos de Casca e Massa Concentrada no Centro de Torção (Caso 8)

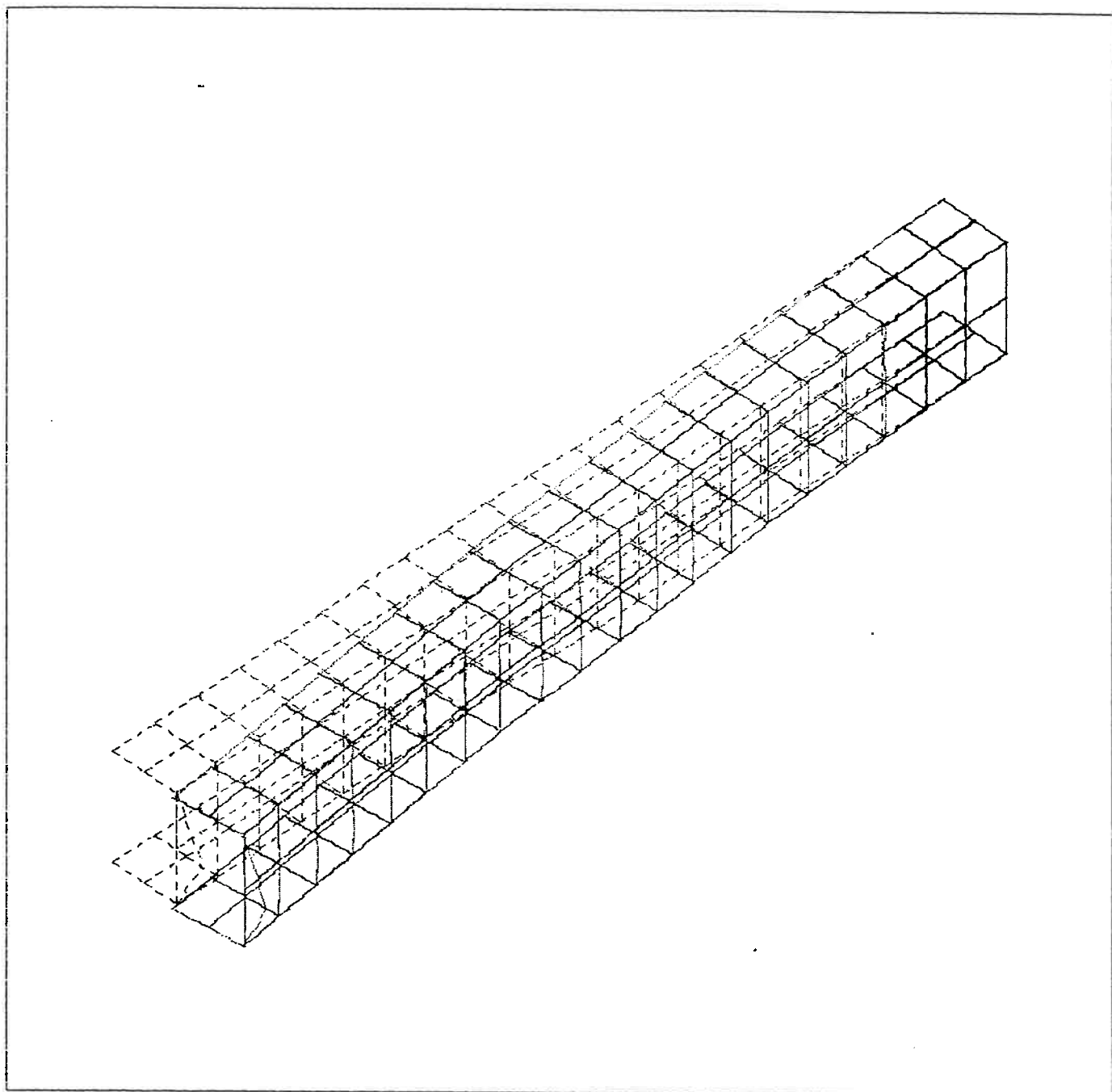
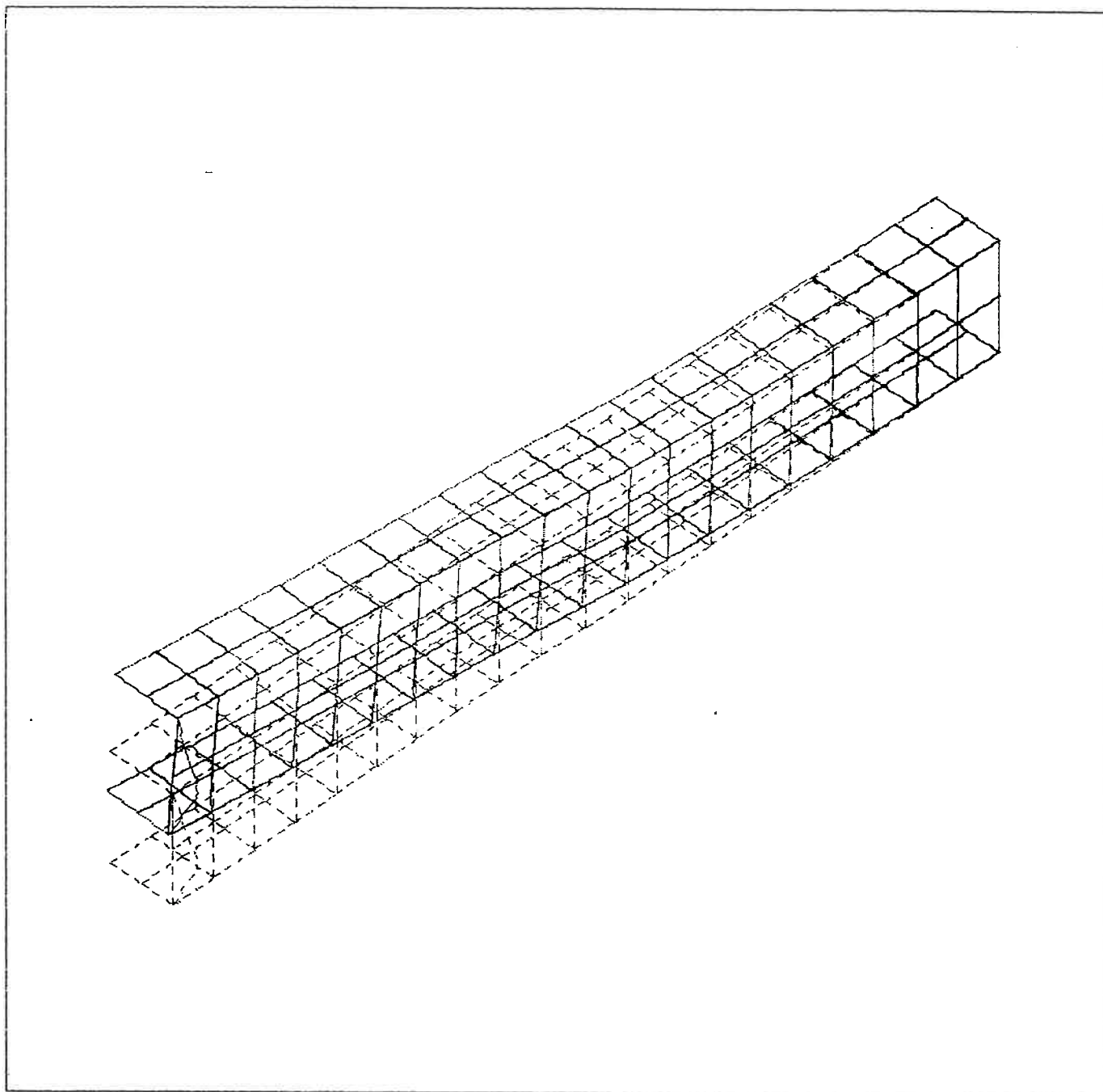


Figura D.14 - Vibração Flexional Lateral (Caso 8)



*Figura D.15 - Vibração Flexional Vertical do Perfil C, com
Massa Concentrada no Centro de Torção muito
maior que a Massa Própria do Perfil (Caso 8)*

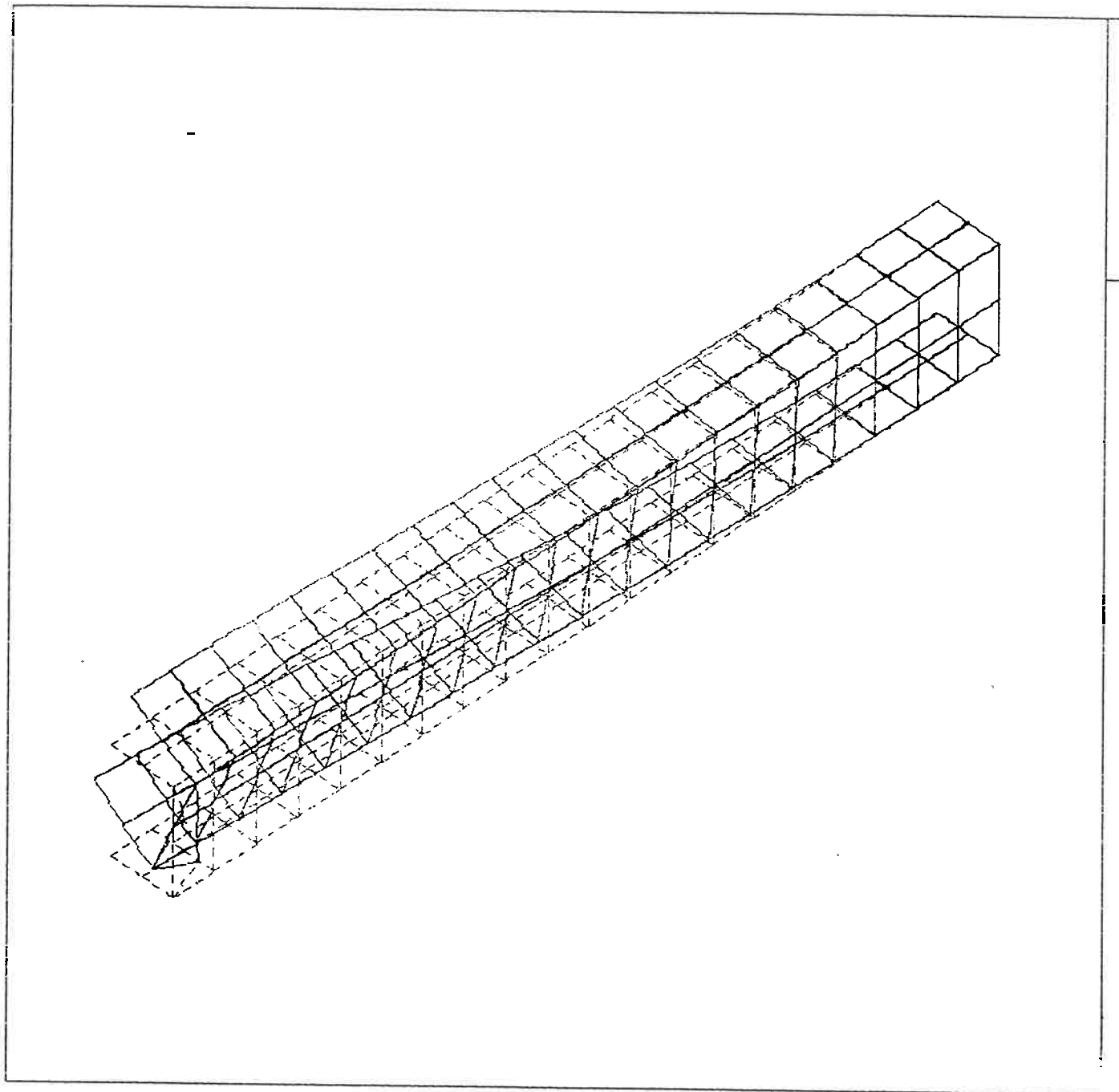


Figura D.16 - Modelo Híbrido com Massa Concentrada no Centro de Torção, sem excentricidade (Caso 8)

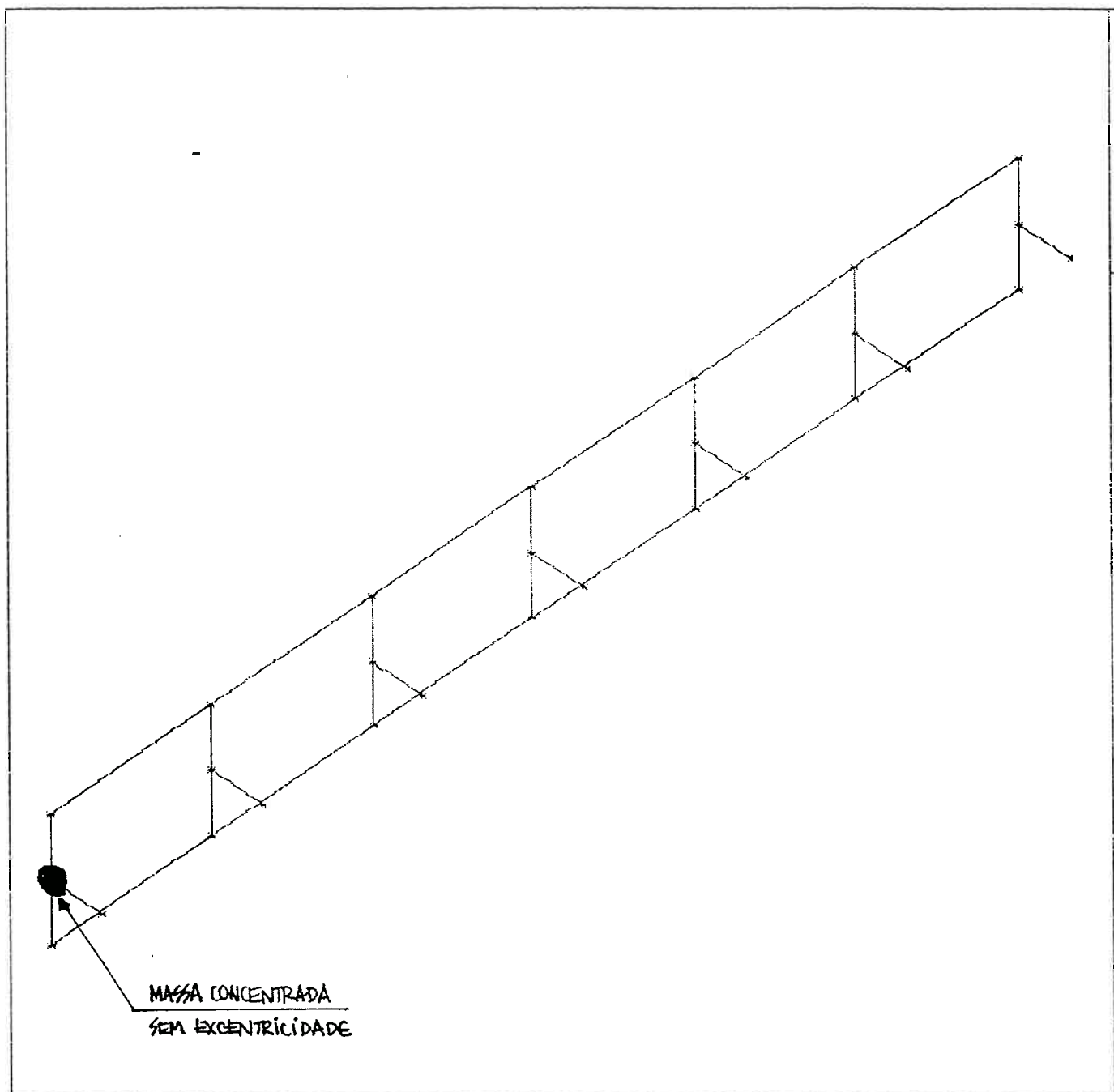


Figura D.17 - Modelo Híbrido com Massa Concentrada no Centro de Torção, sem excentricidade (Caso 9)

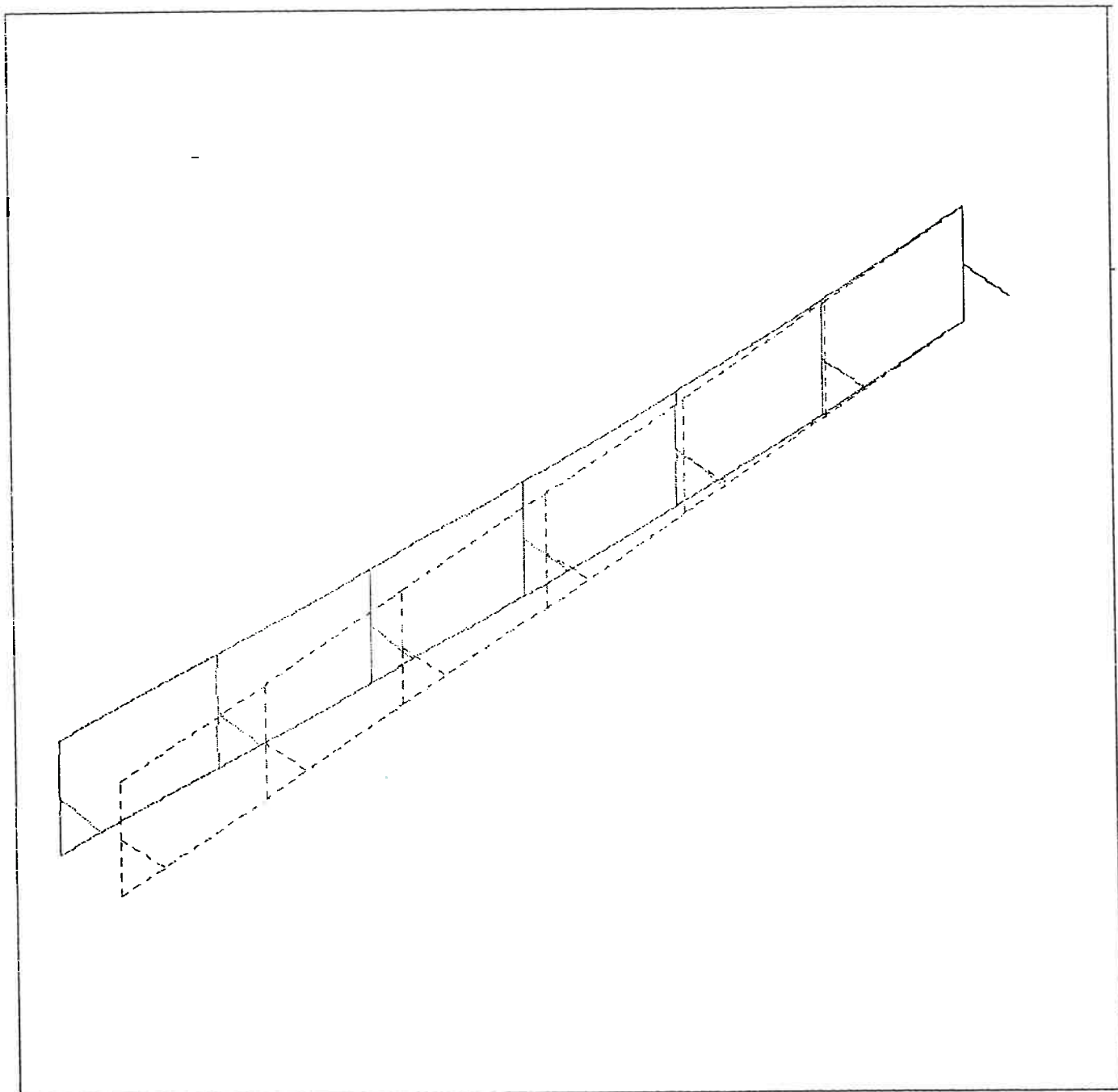
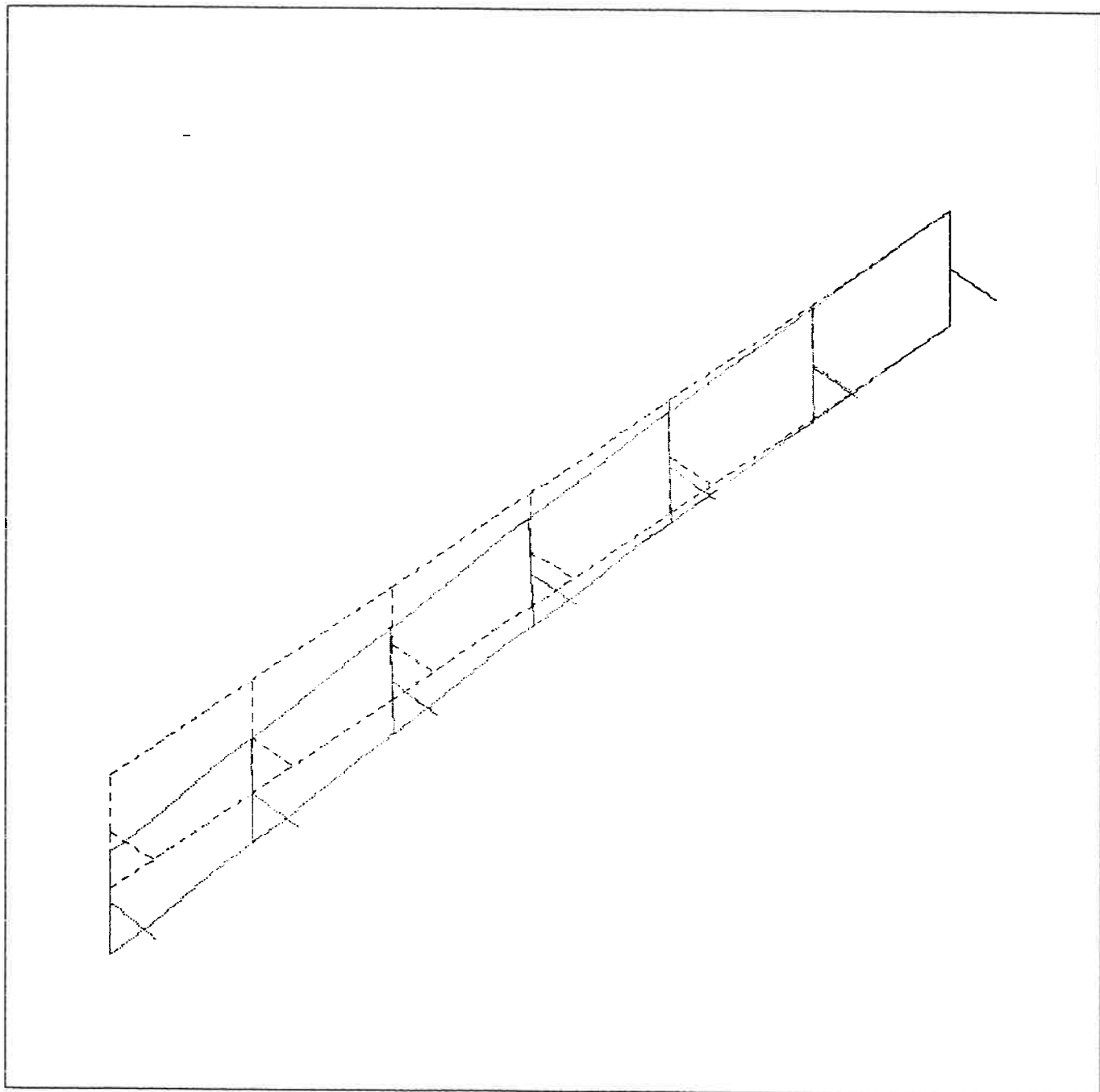


Figura D.18 - Vibração Lateral com Modelo Híbrido (Caso 9)



*Figura D.19 - Vibração Flexional Vertical com Modelo Híbrido
(Caso 9)*

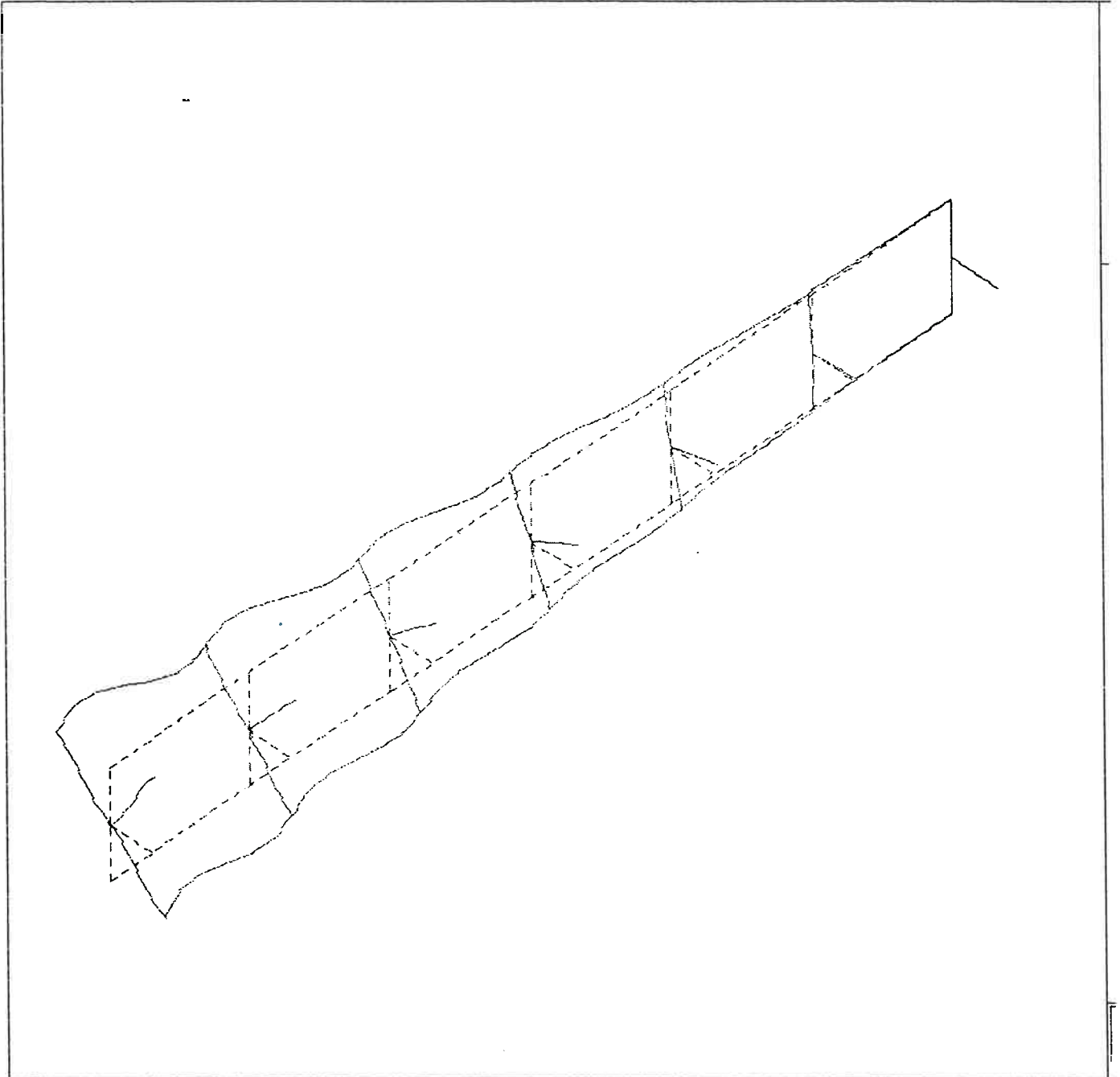
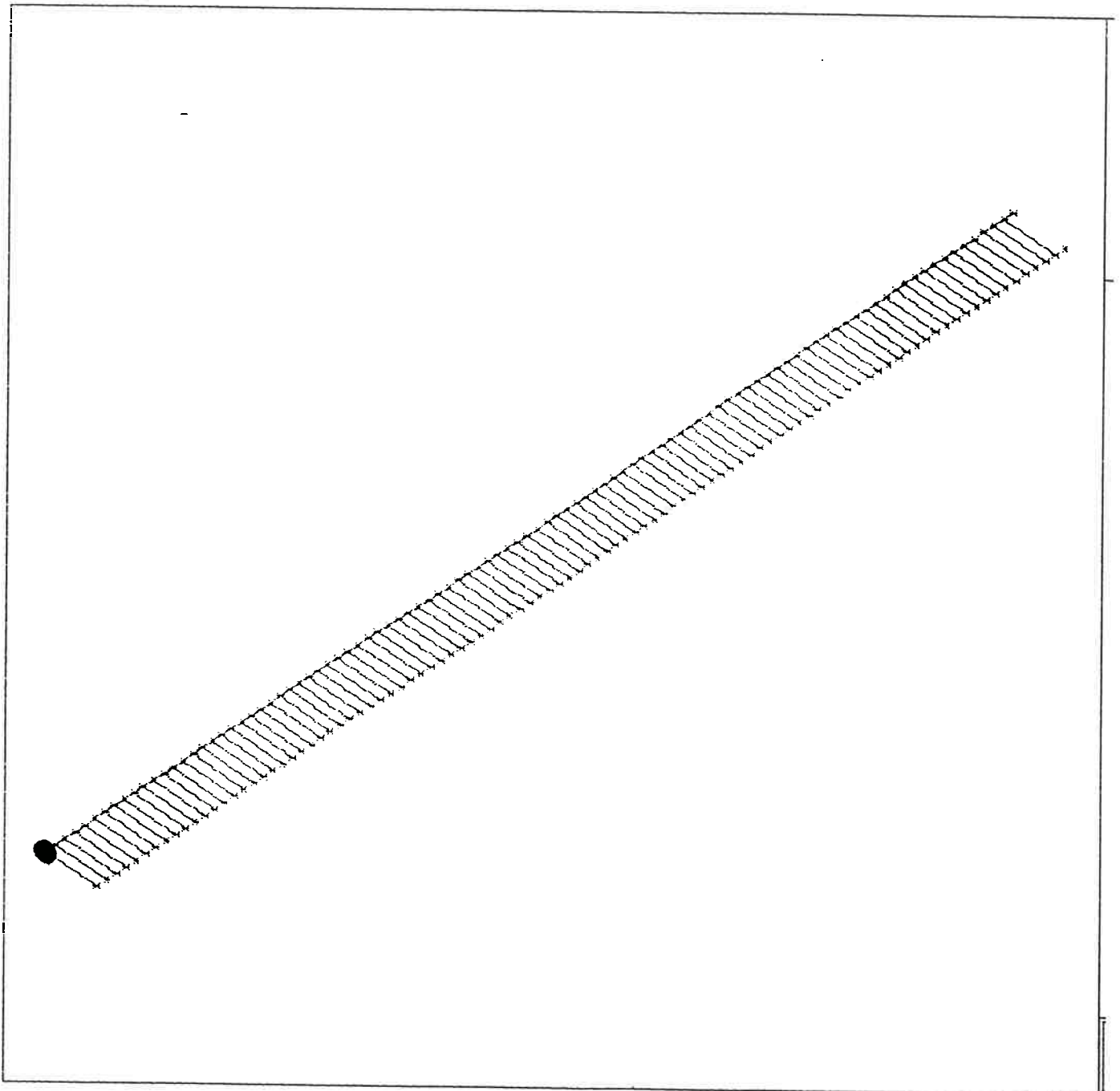


Figura D.20 - Vibração Torcional com Modelo Híbrido (Caso 9)



*Figura D.21- Modelo em Elementos de Viga com Massa
Concentrada no Centro de Torção (Caso 10)*

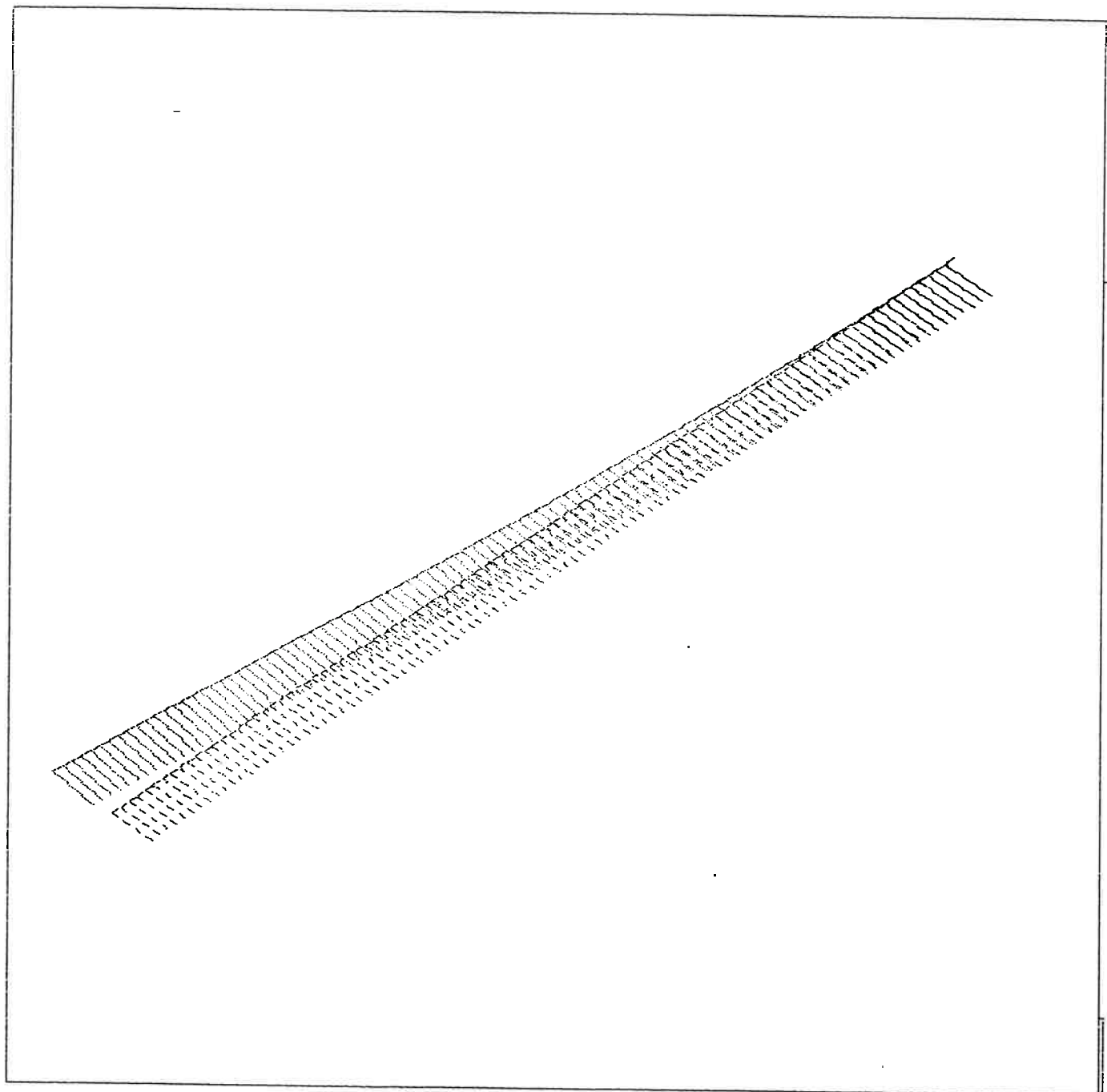


Figura D.22 - Vibração Lateral com Massa no Centro de Torção (Caso 10)

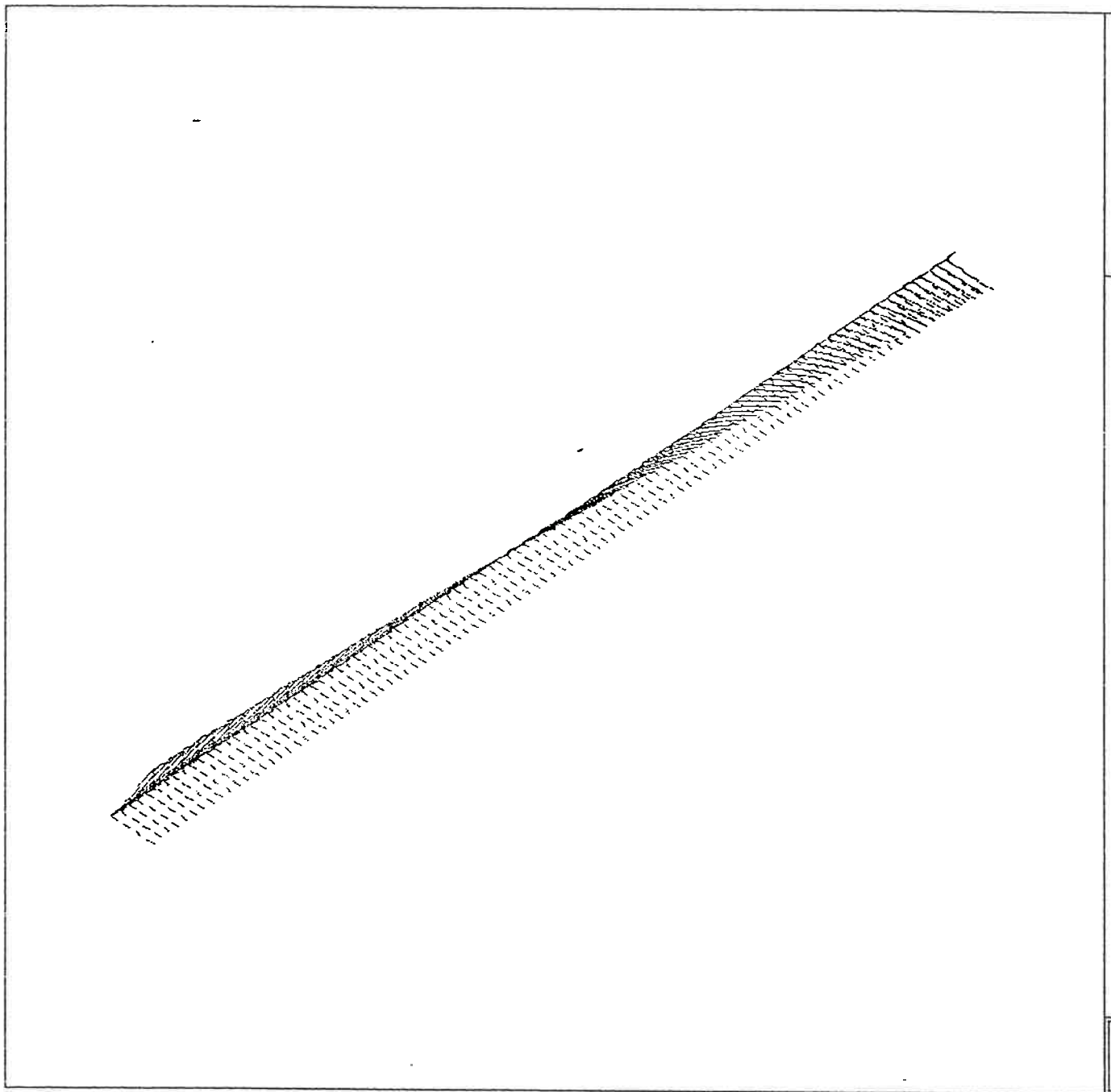


Figura D.23 - Vibração Torcional com Massa no Centro de Torção (Caso 10)

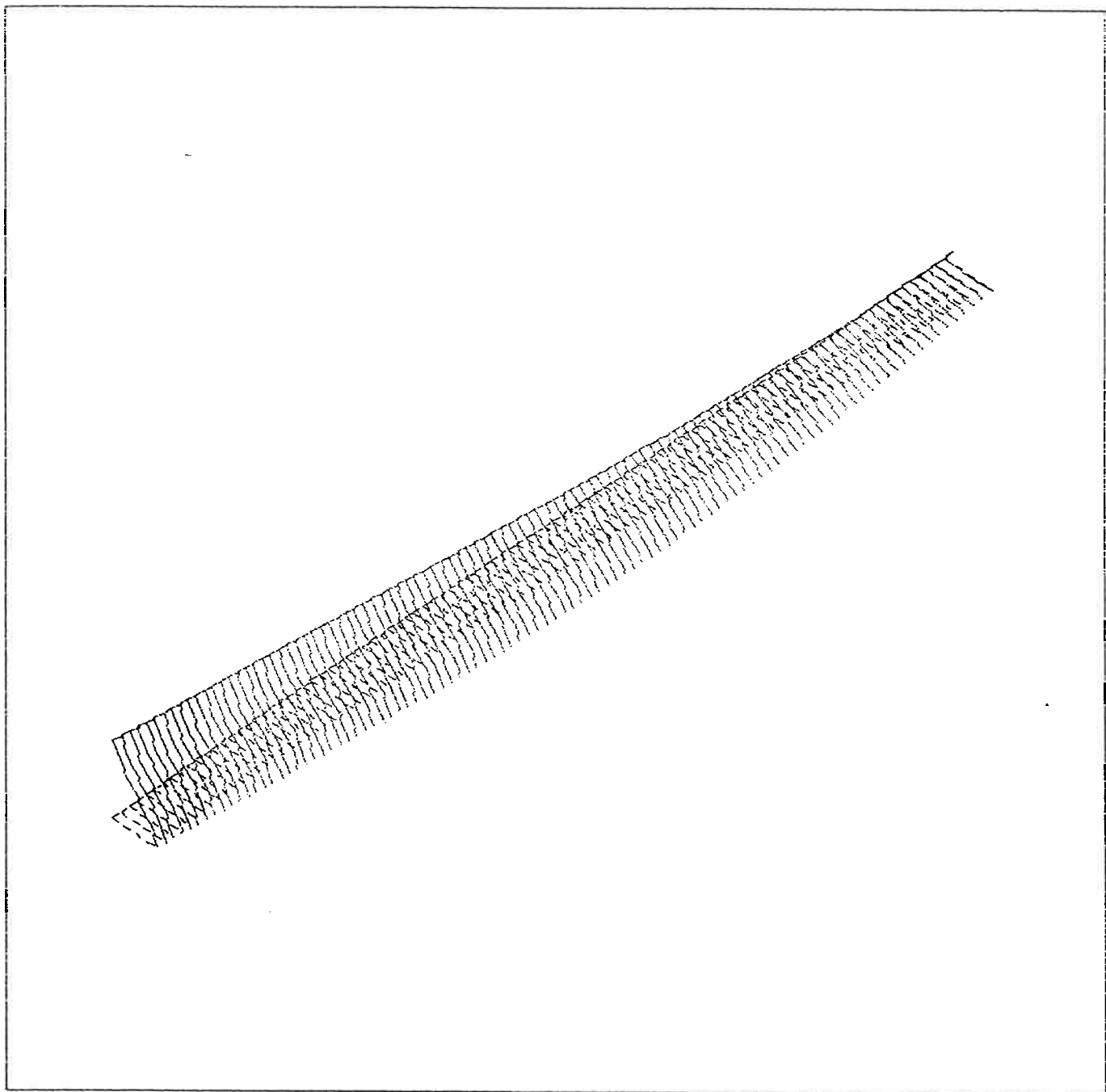


Figura D.24 - Vibração Torcional com Movimento da Massa Concentrada ($f = 6,932 \text{ Hz}$ - Caso 10)

APÊNDICE E

**DADOS DO MODELO HÍBRIDO
PARA ESTRUTURA TIPO CHASSI**

ANALISE DE CHASSI-MODELO HIBRIDO / CHIBA

SYSTEM

V=10

JOINTS

1	X=0	Y= 0.844	Z=0.2	
127	X=4.272	Y= 0.844	Z=0.2	
15	X=0	Y= 0.844	Z=0	
141	X=4.272	Y= 0.844	Z=0	Q=1,127,15,141,21,7
7	X=0	Y=-0.844	Z=0.2	
133	X=4.272	Y=-0.844	Z=0.2	
21	X=0	Y=-0.844	Z=0	
147	X=4.272	Y=-0.844	Z=0	Q=7,133,21,147,21,7
44	X=1.424	Y= 0.422	Z=0.2	
128	X=4.272	Y= 0.422	Z=0.2	
48	X=1.424	Y=-0.422	Z=0.2	
132	X=4.272	Y=-0.422	Z=0.2	Q=44,128,48,132,42,2
52	X=1.424	Y= 0.422	Z=0.1	
136	X=4.272	Y= 0.422	Z=0.1	
54	X=1.424	Y=-0.422	Z=0.1	
138	X=4.272	Y=-0.422	Z=0.1	Q=52,136,54,138,42,1
58	X=1.424	Y= 0.422	Z=0	
142	X=4.272	Y= 0.422	Z=0	
62	X=1.424	Y=-0.422	Z=0	
146	X=4.272	Y=-0.422	Z=0	Q=58,142,62,146,42,2
9	X=0	Y= 0.71	Z=0.1	
135	X=4.272	Y= 0.71	Z=0.1	G=9,135,21
13	X=0	Y=-0.71	Z=0.1	
139	X=4.272	Y=-0.714	Z=0.1	G=13,139,21
148	X=1.343	Y= 0.844	Z=0.1	
152	X=1.343	Y=-0.844	Z=0.1	C=148,152,1
153	X=2.768	Y= 0.844	Z=0.1	
157	X=2.768	Y=-0.844	Z=0.1	G=153,157,1
158	X=4.192	Y= 0.844	Z=0.1	
162	X=4.192	Y=-0.844	Z=0.1	G=158,162,1

RESTRAINTS

1,15,7 R=1,1,1,1,1,1
7,21,7 R=1,1,1,1,1,1

FRAME

NM=6

1	A=1.0E-8	J=7.465E-10	I=1.0E-9,1.4277E-6	E=20.58E10	G=7.91E10
2	A=1.0E-8	J=7.465E-10	I=8.534E-6,1.4277E-6	E=20.58E10	G=7.91E10
3	A=1.0E-8	J=5.865E-10	I=1.0E-9,4.758E-7	E=20.58E10	G=7.91E10
4	A=1.0E-8	J=5.865E-10	I=6.134E-6,4.758E-7	E=20.58E10	G=7.91E10
5	A=0.22	J=8.0E-13	I=1.2E-3,1.2E-3	E=20.58E10	G=7.91E10
6	A=0.22	J=1.2E-4	I=1.2E-3,1.2E-3	E=20.58E10	G=7.91E10
1,1,22	M=2	LP=2,0	G=5,1,21,21		
7,7,28	M=2	LP=2,0	G=5,1,21,21		
13,15,36	M=1	LP=2,0	G=5,1,21,21		
19,21,42	M=1	LP=2,0	G=5,1,21,21		
25,43,44	M=4	LP=3,0	G=2,1,42,42		
28,44,46	M=4	LP=3,0	G=2,1,42,42		
31,46,48	M=4	LP=3,0	G=2,1,42,42		
34,48,49	M=4	LP=3,0	G=2,1,42,42		
37,57,58	M=3	LP=3,0	G=2,1,42,42		
40,58,60	M=3	LP=3,0	G=2,1,42,42		
43,60,62	M=3	LP=3,0	G=2,1,42,42		
46,62,63	M=3	LP=3,0	G=2,1,42,42		
49,8,1	M=5	LP=2,0	G=6,1,21,21		

56,15,8	M=5	LP=2,0	G=6,1,21,21
63,14,7	M=5	LP=2,0	G=6,1,21,21
70,21,14	M=5	LP=2,0	G=6,1,21,21
77,52,44	M=5	LP=2,0	G=2,1,1,2
80,58,52	M=5	LP=2,0	G=2,1,2,1
83,94,86	M=5	LP=2,0	G=2,1,1,2
86,100,94	M=5	LP=2,0	G=2,1,2,1
89,136,128	M=5	LP=2,0	G=2,1,1,2
92,142,136	M=5	LP=2,0	G=2,1,2,1
95,8,9	M=6	LP=1,0	G=6,1,21,21
102,13,14	M=6	LP=1,0	G=6,1,21,21
109,148,50	M=6	LP=2,0	
110,149,52	M=6	LP=2,0	G=2,1,1,1
113,152,56	M=6	LP=2,0	
114,153,92	M=6	LP=2,0	
115,154,94	M=6	LP=2,0	G=2,1,1,1
118,157,98	M=6	LP=2,0	
119,158,134	M=6	LP=2,0	
120,159,136	M=6	LP=2,0	G=2,1,1,1
123,162,140	M=6	LP=2,0	

MASSES

9,135,21	M=0,3.847,5.426
13,139,21	M=0,3.847,5.426
148,152,1	M=1.429,0,2.045
153,157,1	M=1.429,0,2.045

ANALISE DE CHASSI-MODELO HIBRIDO

E I G E N S Y S T E M P A R A M E T E R S

NUMBER OF EQUATIONS	=	552
NUMBER OF MASSES	=	58
NUMBER OF VALUES TO BE EVALUATED	=	10
SIZE OF SUBSPACE	=	14

ANALISE DE CHASSI-MODELO HIBRIDO

E I G E N V A L U E S A N D F R E Q U E N C I E S

MODE NUMBER	EIGENVALUE (RAD/SEC)**2	CIRCULAR FREQ (RAD/SEC)	FREQUENCY (CYCLES/SEC)	PERIOD (SEC)
1	.160232E+03	.126583E+02	2.014627	.496370
2	.125755E+04	.354620E+02	5.643948	.177181
3	.262530E+04	.512377E+02	8.154736	.122628
4	.285981E+04	.534772E+02	8.511160	.117493
5	.397570E+04	.630531E+02	10.035219	.099649
→ 6	.706491E+04	.840530E+02	→ 13.377450 ←	.074753
7	.964484E+04	.982081E+02	15.630312	.063978
8	.857559E+05	.292841E+03	46.607105	.021456
9	.152569E+06	.390601E+03	62.166142	.016086
10	.166220E+06	.407701E+03	64.887586	.015411

ANALISE DE CHASSI ESTREITO -MODELO HIBRIDO / CHIB3

E6

SYSTEM

V=10

JOINTS

1	X=0	Y= 0.384	Z=0.2	
127	X=4.272	Y= 0.384	Z=0.2	
15	X=0	Y= 0.384	Z=0	
141	X=4.272	Y= 0.384	Z=0	Q=1,127,15,141,21,7
7	X=0	Y=-0.384	Z=0.2	
133	X=4.272	Y=-0.384	Z=0.2	
21	X=0	Y=-0.384	Z=0	
147	X=4.272	Y=-0.384	Z=0	Q=7,133,21,147,21,7
44	X=1.424	Y= 0.192	Z=0.2	
128	X=4.272	Y= 0.192	Z=0.2	
48	X=1.424	Y=-0.192	Z=0.2	
132	X=4.272	Y=-0.192	Z=0.2	Q=44,128,48,132,42,2
52	X=1.424	Y= 0.192	Z=0.1	
136	X=4.272	Y= 0.192	Z=0.1	
54	X=1.424	Y=-0.192	Z=0.1	
138	X=4.272	Y=-0.192	Z=0.1	Q=52,136,54,138,42,1
58	X=1.424	Y= 0.192	Z=0	
142	X=4.272	Y= 0.192	Z=0	
62	X=1.424	Y=-0.192	Z=0	
146	X=4.272	Y=-0.192	Z=0	Q=58,142,62,146,42,2
9	X=0	Y= 0.25	Z=0.1	
135	X=4.272	Y= 0.25	Z=0.1	G=9,135,21
13	X=0	Y=-0.25	Z=0.1	
139	X=4.272	Y=-0.25	Z=0.1	G=13,139,21
148	X=1.343	Y= 0.384	Z=0.1	
152	X=1.343	Y=-0.384	Z=0.1	G=148,152,1
153	X=2.768	Y= 0.384	Z=0.1	
157	X=2.768	Y=-0.384	Z=0.1	G=153,157,1
158	X=4.192	Y= 0.384	Z=0.1	
162	X=4.192	Y=-0.384	Z=0.1	G=158,162,1

RESTRAINTS

1,15,7 R=1,1,1,1,1,1

7,21,7 R=1,1,1,1,1,1

FRAME

NM=6

1	A=1.0E-8	J=7.465E-10	I=1.0E-9,1.4277E-6	E=20.58E10	G=7.91E10
2	A=1.0E-8	J=7.465E-10	I=8.534E-6,1.4277E-6	AS=0.0004	E=20.58E10 G=7.9E10
3	A=1.0E-8	J=5.865E-10	I=1.0E-9,4.758E-7	E=20.58E10	G=7.91E10
4	A=1.0E-8	J=5.865E-10	I=6.134E-6,4.758E-7	AS=0.0004	E=20.58E10 G=7.91E10
5	A=0.22	J=8.0E-13	I=1.2E-3,1.2E-3	E=20.58E10	G=7.91E10
6	A=0.22	J=1.2E-4	I=1.2E-3,1.2E-3	E=20.58E10	G=7.91E10
1,1,22	M=2	LP=2,0	G=5,1,21,21		
7,7,28	M=2	LP=2,0	G=5,1,21,21		
13,15,36	M=1	LP=2,0	G=5,1,21,21		
19,21,42	M=1	LP=2,0	G=5,1,21,21		
25,43,44	M=4	LP=3,0	G=2,1,42,42		
28,44,46	M=4	LP=3,0	G=2,1,42,42		
31,46,48	M=4	LP=3,0	G=2,1,42,42		
34,48,49	M=4	LP=3,0	G=2,1,42,42		
37,57,58	M=3	LP=3,0	G=2,1,42,42		
40,58,60	M=3	LP=3,0	G=2,1,42,42		
43,60,62	M=3	LP=3,0	G=2,1,42,42		
46,62,63	M=3	LP=3,0	G=2,1,42,42		
49,8,1	M=5	LP=2,0	G=6,1,21,21		
56,15,8	M=5	LP=2,0	G=6,1,21,21		
63,14,7	M=5	LP=2,0	G=6,1,21,21		
70,21,14	M=5	LP=2,0	G=6,1,21,21		

77,52,44	M=5	LP=2,0	G=2,1,1,2
80,58,52	M=5	LP=2,0	G=2,1,2,1
83,94,86	M=5	LP=2,0	G=2,1,1,2
86,100,94	M=5	LP=2,0	G=2,1,2,1
89,136,128	M=5	LP=2,0	G=2,1,1,2
92,142,136	M=5	LP=2,0	G=2,1,2,1
95,8,9	M=6	LP=1,0	G=6,1,21,21
102,13,14	M=6	LP=1,0	G=6,1,21,21
109,148,50	M=6	LP=2,0	
110,149,52	M=6	LP=2,0	G=2,1,1,1
113,152,56	M=6	LP=2,0	
114,153,92	M=6	LP=2,0	
115,154,94	M=6	LP=2,0	G=2,1,1,1
118,157,98	M=6	LP=2,0	
119,158,134	M=6	LP=2,0	
120,159,136	M=6	LP=2,0	G=2,1,1,1
123,162,140	M=6	LP=2,0	

MASSES

30,135,21	M=0,4.487,6.330
34,139,21	M=0,4.487,6.330
148,152,1	M=0.541,0,0.774
153,157,1	M=0.541,0,0.774

ANALISE DE CHASSI ESTREITO -MODELO HIBRIDO

E I G E N S Y S T E M P A R A M E T E R S

NUMBER OF EQUATIONS	=	552
NUMBER OF MASSES	=	54
NUMBER OF VALUES TO BE EVALUATED	=	10
SIZE OF SUBSPACE	=	14

ANALISE DE CHASSI ESTREITO -MODELO HIBRIDO

E I G E N V A L U E S A N D F R E Q U E N C I E S

MODE NUMBER	EIGENVALUE (RAD/SEC)**2	CIRCULAR FREQ (RAD/SEC)	FREQUENCY (CYCLES/SEC)	PERIOD (SEC)
1	.423278E+03	.205737E+02	3.274410	.305398
2	.253593E+04	.503580E+02	8.014722	.124770
3	.332294E+04	.576449E+02	9.174477	.108998
4	.447523E+04	.668972E+02	10.647019	.093923
5	.693858E+04	.832981E+02	13.257309	.075430
6	.134485E+05	.115967E+03	18.456797	.054181
7	.203772E+05	.142749E+03	22.719153	.044016
8	.100474E+06	.316976E+03	50.448378	.019822
9	.163121E+06	.403882E+03	64.279872	.015557
10	.186097E+06	.431390E+03	68.657786	.014565



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- (1) ALVES Filho, Avelino. "Análise de Estruturas Compostas por Perfis Abertos de Paredes Delgadas: Uma Aplicação da Analogia Flexão-Retorção". Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil, Abril, 1991
- (2) ALVES Filho, A. e NUNES DIAS, C. A. "Analogia Flexão-Retorção no Cálculo do Comportamento Estático de Vigas de Paredes Delgadas". PACAM III - Third Pan American Congress of Applied Mechanics. São Paulo, SP, Brasil, Janeiro, 1993.
- (3) VLASOV, V. Z., "Thin-Walled Elastic Beams", Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, Israel, 1961
- (4) TIMOSHENKO, S. e YOUNG, D. H. , "Vibrations Problems in Engineering". D. Van Nostrand Company, Inc., New York, NY, USA, 1955
- (5) CLOUGH, R. W. e PENZIEN, J., "Dynamics of Structures", McGraw Hill, Inc., New York, NY, USA, 1975
- (6) BATHE, K. J., "Finite Element Procedures in Engineering Analysis". Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1982

- (7) AKESSON, Handboken Bygg 1A, 1979
- (8) HUGHES, O. F., "Ship Structural Design, A Rationally-Based Computer Aided, , Optimization Approach", John Wiley & Sons, New York, NY, USA, 1983
- (9) FEODOSIEV, V. I., "Resistencia de Materiales", Editorial Mir, Moscou, URSS, 1972
- (10) LANGENDONCK, T. V., "Curso de Mecânica das Estruturas - Resistência dos Materiais, Deformações II", Editora Edgard Blücher Ltda., Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil
- (11) TAKAHASHI, K., "A Torsional Strength Analysis of Truck Frames Using Open Sections Members". Publicação da Nissan Motor Co., Ltd. Ref. 710595
- (12) REKACH, V. G., "Static Theory of Thin-Walled Space Structures", Mir Publishers, Moscou, 1978
- (13) FEODOSIEV, V. I., "Diez Conferencias sobre Resistencia de Materiales", Editorial Mir Moscou, URSS, 1973
- (14) LEBEDEV, N., "Problemas Atuais em Mecânica e Matemática Aplicada - Sistema de Equações Diferenciais de Estabilidade Vlasov", Publicação Interna da Divisão de Engenharia Naval do IPT, São Paulo, SP, Brasil, 1981

- (15) LEBEDEV, N., "Problemas Atuais em Mecânica e Matemática Aplicada - Método Variacional Vlasov", Publicação Interna da Divisão de Engenharia Naval do IPT, São Paulo, SP, Brasil, 1981
- (16) RICARDO, O. G. S., "Alguns Fundamentos Teóricos para o Projeto de Estruturas Construídas com Chapas e Reforçadores", Revista Brasileira de Engenharia - Caderno de Engenharia Naval (SOBENA), Volume 5 / nº 2, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1986
- (17) ALVES FILHO, A. , "Teoria de Flexo-Torção para Perfis Abertos de Paredes Delgadas (Teoria de Vlasov)". Revista Brasileira de Engenharia - Caderno de Engenharia Naval (SOBENA), Volume 6 / nº 1, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1988
- (18) RICARDO, O. G. S., "Um Modelo Simplificado para Análise Inicial de uma Estrutura de Ônibus", Publicação da CMTC em colaboração com a Divisão de Engenharia Naval da EPUSP, São Paulo, SP, Brasil, 1979.
- (19) WESTIN, H., "Analysis of the Torsional Response of the SL-7 Hull Structure by Use of the Finite - Beam Technique and Comparison with other Techniques". Journal of Ship Research - SNAME, New York, NY, USA, 1981

- (20) PAN, Y. H. and Lu, S. Y., "Increase of Warping Rigidity in Open Sections of a Containership by stiffening Plates", Journal of ship Research - SNAME, New York, NY, USA, 1983
- (21) LIU, D. and CHEN, Y. K., "Fundamentals and Applications of the Finite - Element Method in Analysing Structural and Non Structural Marine Problems" Marine Technology - SNAME, New York, NY, USA, 1982
- (22) ZIENKIEWICZ, O. C., "The Finite Element Method", 3rd ed., McGraw - Hill Book Company, New York, NY, USA, 1977
- (23) SCHODEK, D. L. , "Structures", Prentice - Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1980
- (24) TIMOSHENKO, S. P., "Resistência dos Materiais - Volume II", Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1981
- (25) TIMOSHENKO, S. P. and GOODIER J. N., "Theory of Elasticity", McGraw - Hill Book Company, Kogakusha Company Ltd., Tokyo, Japan, 1951
- (26) TIMOSHENKO, S. P. and KRIEGER, S. W., "Theory of Plates and Shells", McGraw - Hill International Book Company, Singapore, 1970

- (27) RICARDO, O. S. S., "Teoria das Estruturas", Editora da Universidade de São Paulo, Editora McGraw - Hill do Brasil Ltda., São Paulo, SP, Brasil, 1978
- (28) ROARK, R. J. and YOUNG, W. C., "Formulas for Stress and Strain", McGraw - Hill International Book Company, Singapore, 1976
- (29) BELYAEV, N. M., "Strength of Materials", Mir Publishers Moscou, URSS, 1979