

Fernando Prevedello

# **Métodos de Redução de Modelos em Elementos Finitos Aplicados na Análise Dinâmica de Estruturas Complexas**

Dissertação apresentada à Escola  
Politécnica da Universidade de São  
Paulo – USP para a obtenção do título  
de Mestre em Engenharia.

Área de Concentração:  
Engenharia Naval e Oceânica

Orientador:  
Prof. Dr. Carlos Alberto Nunes Dias

São Paulo  
2005

OK

## Resumo

Em análises pelo método dos elementos finitos a demanda por recursos computacionais sempre excede a capacidade existente. O tamanho e a complexidade dos modelos limitam a habilidade dos engenheiros na solução de problemas dinâmicos. As soluções usadas em análise dinâmica são mais complicadas do que a solução de uma simples equação matricial. Comparados com uma análise linear estática, o tempo de processamento e o espaço em disco requeridos para problemas dinâmicos são muito maiores. Desta forma, o número de equações do sistema deve ser reduzido para viabilizar a solução do problema.

Redução dinâmica é uma aproximação numérica que pode ser usada para reduzir o número de graus de liberdade de um modelo dinâmico. O objetivo da redução dinâmica é aumentar a eficiência da solução usando matrizes pequenas e mantendo as características dinâmicas do sistema.

Usando os métodos de redução dinâmica é possível analisar grandes modelos e executar análises mais eficientes permitindo um número maior de ciclos de projeto ou iterações no processo de análise. Este trabalho apresenta as razões para se usar redução dinâmica, os principais métodos de redução e suas aplicações.

# Abstract

In finite element analysis, demand for computer resources will always exceed existing capabilities. The size and complexity of the models limit the ability of engineers to solve dynamics problems. The solutions used in dynamic analysis are more complicated than the solution of a simple matrix equation. Compared to linear static analysis, the running time for a dynamics problem is more costly and the required file space is more excessive. Therefore, attention should be paid to reducing the number of solution equations to manageable levels.

Dynamic reduction is a numerical approach that can be used to reduce a dynamic model to one with fewer degrees-of-freedom. Typically, the intent of dynamic reduction is to increase the efficiency of a dynamic solution by working with smaller matrices while maintaining the dynamic characteristics of the systems.

Using dynamic reduction, you can analyze large models and become more efficient in performing the analysis, thus allowing more design cycles or iterations in the analysis. This work shows the reasons to use dynamic reduction and present dynamic reduction methods and its applications.

A minha esposa Fernanda  
e aos meus pais Odete e Odacir  
com carinho e admiração.

# **Agradecimentos**

Ao orientador Prof. Dr. Carlos Alberto Nunes Dias pelas diretrizes e permanente incentivo.

A minha esposa, com amor e carinho por sua compreensão e incansável apoio ao longo do período de elaboração deste trabalho.

Aos meus familiares, amigos e colegas de trabalho das empresas T-Systems, SMARTtech e ESSS pelo incentivo e apoio para meu aperfeiçoamento técnico e profissional.

A todos que, direta ou indiretamente, colaboraram na execução deste trabalho.

# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>i</b>
<b>Abstract</b>	<b>ii</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>viii</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>x</b>
<b>Lista de Abreviaturas</b>	<b>xi</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>xii</b>
<b>Capítulo 1</b>	
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Motivação .....	1
1.2 Definição do Problema .....	3
1.3 Objetivos .....	3
<b>Capítulo 2</b>	
<b>Revisão Teórica</b>	<b>4</b>
2.1 Modelos Matemáticos de Sistemas com Múltiplos Graus de Liberdade ..	4
2.1.1 Equações de Lagrange .....	4
2.1.2 Aplicação das Equações de Lagrange para Modelos Contínuos .....	6
2.2 Vibração Livre de Sistemas com Múltiplos Graus de Liberdade .....	12
2.2.1 Método de Rayleigh.....	12
2.2.2 Método de Rayleigh-Ritz.....	14
2.3 Modelagem de Estruturas em Elementos Finitos .....	20
2.3.1 Introdução ao Método dos Elementos Finitos .....	20
2.3.2 Matrizes de Rigidez e Massa e Vetor de Força do Elemento .....	22
2.3.3 Transformação das Matrizes do Elemento .....	29

2.3.4	Montagem das Matrizes do Sistema .....	32
2.3.5	Condições de Contorno .....	37
2.3.6	Equações de Restrição e Redução de Graus de Liberdade .....	38
2.3.7	Sistemas com Modos de Corpo Rígido .....	41
<b>Capítulo 3</b>		
<b>Redução Dinâmica</b>		<b>43</b>
3.1	Introdução .....	43
3.2	Métodos Fundamentais .....	44
3.2.1	Alocação de Massa Discreta .....	44
3.2.2	Método de Rayleigh-Ritz .....	45
3.3	Método de Redução de Guyan .....	46
3.3.1	Desenvolvimento Matemático .....	46
3.3.2	Procedimentos para Seleção de Graus de Liberdade .....	50
3.3.3	Dificuldades com a Redução de Guyan .....	52
3.4	Método de Redução Dinâmica em Coordenadas Generalizadas .....	53
3.5	Comparação entre os Métodos de Redução .....	55
3.6	Aplicações Indiretas dos Métodos de Redução .....	56
3.7	Correlação de Modelos .....	58
<b>Capítulo 4</b>		
<b>Análise de Confiabilidade dos Métodos de Redução</b>		<b>59</b>
4.1	Modelo de uma Viga .....	59
4.1.1	Modelo de 2 Graus de Liberdade .....	60
4.1.2	Efeito do Aumento do Número de Graus de Liberdade .....	61
4.1.3	Efeito da Redução de Graus de Liberdade .....	62
4.1.4	Modelos com Matriz de Massa Discreta e Consistente .....	63
4.2	Modelo de uma Placa Plana .....	65
4.2.1	Modelo Completo com 936 DOF .....	65
4.2.2	Modelos Reduzidos .....	67
4.3	Modelo de uma Viga Discretizada com Elementos de Casca .....	71
4.3.1	Modelo Completo com 18600 DOF .....	71
4.3.2	Modelos Reduzidos .....	73
<b>Capítulo 5</b>		
<b>Exemplos de Aplicação</b>		<b>76</b>
5.1	Análise Modal do Chassi do Caminhão Ford F800 .....	77
5.2	Análise Harmônica do Chassi do Caminhão Ford F800 .....	80

<b>Capítulo 6</b>	
<b>Conclusões e Recomendações</b>	<b>83</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>85</b>
<b>Índice Remissivo</b>	<b>88</b>



## Lista de Figuras

Figura 1.1	Modelo em EF do veículo GEO Metro. ....	2
Figura 2.1	Exemplo de condição de contorno. ....	7
Figura 2.2	Movimento axial de uma barra esbelta. ....	8
Figura 2.3	Ilustração da propriedade de separação dos autovalores. ....	19
Figura 2.4	Modelo em EF da estrutura do veículo GEO Metro. ....	21
Figura 2.5	Elemento uniforme sujeito a deformação axial. ....	22
Figura 2.6	Funções de forma para um elemento axial. ....	23
Figura 2.7	Elemento uniforme sujeito a deflexão transversal. ....	24
Figura 2.8	Funções de forma para a deformação transversal de um elemento de viga. ....	25
Figura 2.9	Elemento uniforme sujeito a deformação torcional. ....	26
Figura 2.10	Modelo de massa discreta de uma viga. ....	29
Figura 2.11	Sistema de coordenadas global e do elemento para uma treliça plana. ....	30
Figura 2.12	Coordenadas de deslocamento do sistema para uma treliça. ....	33
Figura 2.13	Coordenadas de deslocamento do elemento referenciadas no sistema global. ....	33
Figura 3.1	Escolha de graus de liberdade: (a) para uma placa plana (b) em casos onde o movimento em X causa movimento em Y. ....	51
Figura 3.2	Escolha de graus de liberdade em locais com: (a) grande inércia rotatória (b) grandes massas. ....	51
Figura 3.3	Arranjo típico de subestruturas para uma aeronave. ....	57
Figura 4.1	Viga engastada e uniforme. ....	60
Figura 4.2	Modelo de 2 graus de liberdade (2-DOF) da viga engastada. ....	60

Figura 4.3	Modelo em EF da viga engastada. ....	61
Figura 4.4	Modelo em EF da placa plana. ....	65
Figura 4.5	Modos e frequências naturais da placa plana (936 DOF). ....	66
Figura 4.6	Modos e frequências naturais da placa plana (2 DOF). ....	67
Figura 4.7	Modos e frequências naturais da placa plana (6 DOF). ....	68
Figura 4.8	Modos e frequências naturais da placa plana (20 DOF). ....	69
Figura 4.9	Modos e frequências naturais da placa plana (20 DOF Auto). ....	70
Figura 4.10	Modelo em EF da viga engastada (casca). ....	71
Figura 4.11	Modos e frequências naturais da viga em casca (18600 DOF). ....	72
Figura 4.12	Seleção manual de graus de liberdade da viga (120 DOF). ....	73
Figura 4.13	Seleção manual e automática de graus de liberdade da viga (240 DOF). ....	74
Figura 5.1	Caminhão Ford F800. ....	76
Figura 5.2	Modelo em EF do chassi do caminhão Ford F800. ....	77
Figura 5.3	Condições de contorno para a análise modal do chassi. ....	77
Figura 5.4	Modos com maior participação modal na direção vertical (Z). ....	78
Figura 5.5	Seleção manual de graus de liberdade do chassi (84 DOF). ....	79
Figura 5.6	Condições de contorno e carregamento para a análise harmônica do chassi. ....	81
Figura 5.7	Comparação dos deslocamentos nas análises harmônicas do chassi. ....	81
Figura 5.8	Comparação das tensões de von Mises nas análises harmônicas do chassi. ....	82
Figura 5.9	Comparação do tempo de processamento nas análises do chassi. ....	82

## Lista de Tabelas

Tabela 2.1	Propriedades de convergência das frequências de Rayleigh-Ritz....	19
Tabela 3.1	Método de redução de Guyan <i>versus</i> GDR.....	56
Tabela 4.1	Comparação das frequências calculadas pelo MEF com a solução analítica para a viga engastada. ....	62
Tabela 4.2	Comparação das frequências calculadas pelo método de redução de Guyan com a solução analítica para a viga engastada.....	63
Tabela 4.3	Comparação das frequências calculadas em modelos com matriz de massa discreta com a solução analítica para a viga engastada.....	64
Tabela 4.4	Comparação entre as frequências do modelo completo e as frequências dos modelos reduzidos da viga em casca. ....	75
Tabela 5.1	Frequências naturais e fatores de participação modal do modelo completo do chassi. ....	78
Tabela 5.2	Comparação entre as frequências do modelo completo e as frequências dos modelos reduzidos do chassi.....	80

## Lista de Abreviaturas

<b>CMS</b>	Component Mode Synthesis
<b>DOF</b>	Degrees of Freedom
<b>EF</b>	Elementos Finitos
<b>FEA</b>	Finite Element Analysis
<b>FEM</b>	Finite Element Model
<b>GDR</b>	Generalized Dynamic Reduction
<b>MEF</b>	Método dos Elementos Finitos
<b>MDOF</b>	Multiples Degrees of Freedom
<b>SDOF</b>	Single Degrees of Freedom

## Lista de Símbolos

$\mathbf{M}$	Matriz de massa
$\hat{\mathbf{M}}$	Matriz de massa reduzida
$\mathbf{C}$	Matriz de amortecimento
$\mathbf{K}$	Matriz de rigidez
$\hat{\mathbf{K}}$	Matriz de rigidez reduzida
$\omega$	Autovalor
$T$	Energia cinética
$V$	Energia potencial
$\delta W_{nc}$	Trabalho virtual das forças não conservativas
$\hat{\mathbf{U}}, q$	Coordenadas generalizadas
$Q, p_i$	Forças generalizadas
$U, u$	Deslocamentos
$\psi_i$	Funções admissíveis
$E$	Módulo de elasticidade
$\rho$	Massa por unidade de volume
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$A$	Área da seção transversal
$I$	Momento de inércia
$I_p$	Momento polar de inércia
$\phi_i$	Modos naturais
$\phi_r$	Modos ortonormais

$k_{ij}$	Coeficientes de rigidez
$m_{ij}$	Coeficientes de massa
$GJ$	Rigidez torcional
$\mathbf{P}$	Vetor de força do sistema
$\mathbf{G}_d$	Matriz de Guyan
UX	Grau de liberdade de translação em X
UY	Grau de liberdade de translação em Y
UZ	Grau de liberdade de translação em Z
ROTX	Grau de liberdade de rotação em X
ROTY	Grau de liberdade de rotação em Y
ROTZ	Grau de liberdade de rotação em Z

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Motivação

Em análises pelo método dos elementos finitos (FEA) a demanda por recursos computacionais sempre excede a capacidade existente. Embora sejam viáveis a solução de problemas lineares estáticos e a extração de autovalores e autovetores (análise modal) de modelos com mais de 1.000.000 de graus de liberdade (DOF), a solução de problemas não-lineares estáticos e de problemas dinâmicos lineares e não-lineares (análises harmônica, espectral e transiente) apresenta um custo computacional elevado.

A redução dinâmica é uma aproximação numérica que pode ser usada para reduzir o número de graus de liberdade de um modelo dinâmico com o objetivo de aumentar a eficiência da solução usando matrizes pequenas e mantendo as características dinâmicas do sistema.

Esta técnica pode ser usada por diversas razões. Uma possibilidade é quando o modelo matemático é muito grande para ser resolvido, do ponto de vista dos recursos computacionais, sem a utilização de redução. Um caso típico é quando o modelo contém mais detalhes que o requerido. Muitas vezes as análises dinâmicas são executadas em modelos que foram inicialmente concebidos para uma análise estática detalhada de tensões, a qual requer malhas refinadas para uma avaliação precisa. Quando estes modelos são

usados em análises dinâmicas, o detalhamento do modelo é significativamente maior do que o requerido para prever com precisão as frequências e os modos naturais da estrutura.

No contexto de projetos de estruturas grandes e complexas, os principais componentes são frequentemente projetados e analisados por equipes distintas ou por diferentes organizações. Por exemplo, a estrutura de um veículo pode ser dividida em chassi, motor, transmissão e periféricos. Assim, pode ser difícil montar de forma rápida um modelo em elementos finitos (FEM) da estrutura inteira. Além disso, o modelo completo da estrutura possivelmente terá tantos graus de liberdades que seria inviável executar uma análise dinâmica baseada nas equações em elementos finitos para o sistema completo (CRAIG, 1981). A Figura 1.1 ilustra o modelo em elementos finitos detalhado do veículo GEO Metro desenvolvido pelo NCAC (National Crash Analysis Center, George Washington University) com mais de 1 milhão de graus de liberdade.

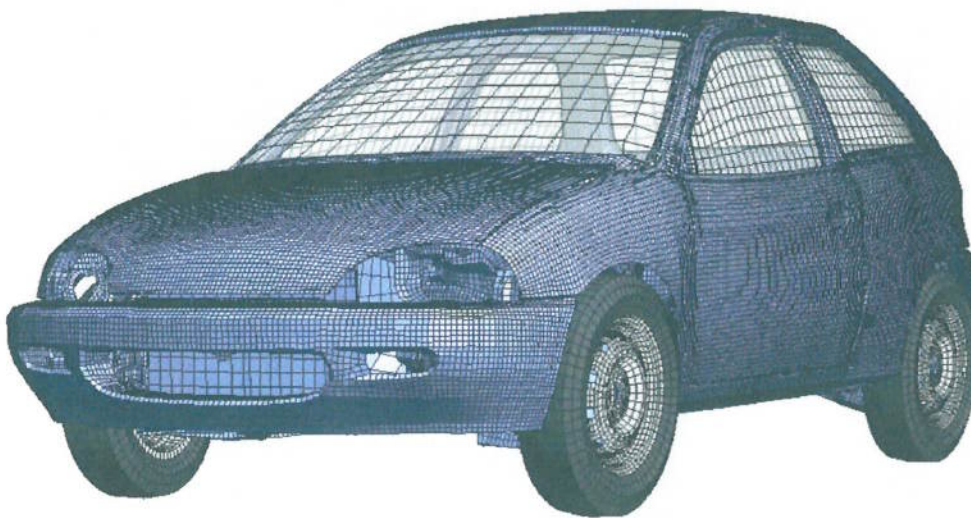


Figura 1.1 Modelo em EF do veículo GEO Metro.

O custo da análise do modelo matemático reduzido é significativamente menor do que o do modelo completo. Além disso, a redução dinâmica é mais precisa e provavelmente tenha um custo menor do que a construção de um modelo global com menos graus de liberdade para a análise dinâmica.



## 1.2 Definição do Problema

O princípio geral de um método para redução do problema de autovalores

$$\mathbf{K}\mathbf{x} = \omega^2\mathbf{M}\mathbf{x} \quad (1.1)$$

consiste em construir um subespaço  $\mathbf{R}$  ( $\dim(\mathbf{R}) = n \times m$ ,  $m < n$ ) tal que a solução da Equação 1.1 possa ser escrita na forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{y} \quad (1.2)$$

Se nós retornarmos ao problema variacional que deu origem a Equação 1.1 podemos deduzir o problema reduzido

$$\hat{\mathbf{K}}\mathbf{y} = \omega^2\hat{\mathbf{M}}\mathbf{y} \quad (1.3)$$

onde as matrizes de rigidez e massa reduzidas são dadas por

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{R}^T\mathbf{K}\mathbf{R} \quad \hat{\mathbf{M}} = \mathbf{R}^T\mathbf{M}\mathbf{R} \quad (1.4)$$

Quanto melhor o subespaço correspondente as colunas da matriz  $\mathbf{R}$  representar os modos fundamentais, mais próximas serão as soluções das Equações 1.3 e 1.1. Os diversos métodos de redução e subestruturação diferem-se um do outro somente pela escolha da matriz de redução  $\mathbf{R}$  (GÉRADIN; RIXEN, 1997).

## 1.3 Objetivos

O objetivo deste trabalho é fornecer o embasamento teórico indispensável para o entendimento dos métodos de redução de modelos em elementos finitos e estudar os principais métodos de redução dinâmica, sua confiabilidade e aplicação.

## Capítulo 2

# Revisão Teórica

Enquanto que os modelos contínuos fornecem um importante discernimento na dinâmica de alguns sistemas com geometria simples, a análise dinâmica da maioria das estruturas reais é baseada em modelos com múltiplos graus de liberdade (MDOF).

Neste capítulo serão deduzidas as equações do movimento de sistemas com múltiplos graus de liberdade e apresentados os métodos de Rayleigh e de Rayleigh-Ritz para obtenção de uma estimativa das frequências para estes sistemas. Também será apresentada uma introdução para o uso de modelos em elementos finitos (FEM) na análise dinâmica de estruturas.

### **2.1 Modelos Matemáticos de Sistemas com Múltiplos Graus de Liberdade**

As equações do movimento de sistemas com múltiplos graus de liberdade podem ser facilmente obtidas empregando-se as equações de Lagrange (CRAIG, 1981).

#### **2.1.1 Equações de Lagrange**

As equações de Lagrange podem ser derivadas do princípio dos deslocamentos virtuais (LANGHAAR, 1962) ou do princípio de Hamilton. A segunda aproximação será aqui empregada.

O princípio de Hamilton pode ser derivado do princípio dos trabalhos virtuais (LANGHAAR, 1962); (MEIROVITCH, 1967) e escrito como

$$\int_1^2 \delta(T - V) dt + \int_1^2 \delta W_{nc} dt = 0 \quad (2.1)$$

onde  $T$  é a energia cinética total do sistema,  $V$  a energia potencial e  $\delta W_{nc}$  é o trabalho virtual das forças não conservativas que agem sobre o sistema.

Para a maioria dos sistemas mecânicos e estruturais a energia cinética pode ser expressa em termos de *coordenadas generalizadas*<sup>1</sup> e suas primeiras derivadas, e a energia potencial, somente em termos das coordenadas generalizadas. Além disso, o trabalho virtual das forças não conservativas, produzidas através de deslocamentos virtuais causados por variações arbitrárias nas coordenadas generalizadas, pode ser expresso como uma função linear daquelas variações. Assim,

$$T = T(q_1, q_2, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N, t) \quad (2.2)$$

$$V = V(q_1, q_2, \dots, q_N, t) \quad (2.3)$$

$$\delta W_{nc} = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_N \delta q_N \quad (2.4)$$

onde  $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$  são chamadas de *forças generalizadas*.

Substituindo as Equações 2.2, 2.3 e 2.4 na Equação 2.1 temos,

$$\begin{aligned} & \int_1^2 \left( \frac{\partial T}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial T}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial T}{\partial q_N} \delta q_N + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \delta \dot{q}_1 + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \delta \dot{q}_2 + \dots \right. \\ & \left. + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_N} \delta \dot{q}_N - \frac{\partial V}{\partial q_1} \delta q_1 - \frac{\partial V}{\partial q_2} \delta q_2 - \dots - \frac{\partial V}{\partial q_N} \delta q_N \right. \\ & \left. + Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_N \delta q_N \right) dt = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

---

<sup>1</sup> Para um sistema com  $N$  graus de liberdade ( $N$ -DOF), as coordenadas generalizadas são definidas como o único conjunto de  $N$  grandezas independentes as quais são suficientes para especificar completamente a posição de qualquer ponto do sistema.

Os termos  $\delta\dot{q}_i$  podem ser integrados por partes da seguinte forma

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta\dot{q}_i dt = \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt \quad (2.6)$$

O primeiro termo do lado direito da equação acima é zero para cada coordenada, posto que  $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$  é a condição básica imposta para o princípio de Hamilton ser válido. Quando a Equação 2.6 é substituída na Equação 2.5, a equação resultante pode ser escrita da seguinte forma

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^N \left[ -\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i} + Q_i \right] \delta q_i \right\} dt = 0 \quad (2.7)$$

Visto que a variação  $\delta q_i (i=1, 2, \dots, N)$  deve ser independente, a Equação 2.7 é satisfeita somente quando a parte entre parênteses da expressão 2.7 desaparece para cada valor de  $i$ , isto é, quando

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \quad i=1, 2, \dots, N \quad (2.8)$$

As Equações 2.8 são conhecidas como equações de Lagrange.

As restrições impostas na obtenção das Equações 2.8 foram que as coordenadas  $q_i$  são independentes e que  $T$ ,  $V$  e  $\delta W_{nc}$  tem a forma mostrada nas Equações 2.2, 2.3 e 2.4. Assim, as Equações 2.8 são válidas para sistemas não lineares bem como para sistemas lineares.

### 2.1.2 Aplicação das Equações de Lagrange para Modelos Contínuos

Os deslocamentos de um sistema contínuo com  $N$  graus de liberdade ( $N$ -DOF) podem ser aproximados por

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^N \psi_i(x) u_i(t) \quad (2.9)$$

O método das funções de forma ou *assumed-modes method*<sup>2</sup> (MEIROVITCH, 1967) consiste em substituir a Equação 2.9 em expressões para  $T$ ,  $V$  e  $\delta W_{nc}$  e então aplicando as equações de Lagrange obter as equações do movimento do modelo com  $N$  graus de liberdade.

Escolhendo as funções  $\psi_i(x)$  o analista define o modelo com  $N$  graus de liberdade. As funções  $\psi_i(x)$  devem formar um conjunto linearmente independente. Adicionalmente, cada função  $\psi_i(x)$  deve possuir derivadas de ordem superior as que aparecem em  $V$  e devem satisfazer todas as condições de contorno prescritas, isto é, condições de contorno de deslocamento. As funções que satisfazem estas condições são chamadas de *funções admissíveis*.

Para a viga apoiada da Figura 2.1, cada  $\psi_i(x)$  deve satisfazer as condições de contorno

$$\psi_i(0) = \psi_i'(0) = \psi_i(L) = 0$$

visto que

$$v(0, t) = v'(0, t) = v(L, t) = 0$$

para todo  $t$ . Posto que a expressão da energia de deformação para uma viga de Bernoulli-Euler contém  $v''(x, t)$ , cada  $\psi_i(x)$  deve ser uma função contínua de  $x$ , e sua primeira derivada em relação a  $x$  deve ser contínua (isto é, a viga não pode ter mudanças bruscas de deslocamento ou inclinação).

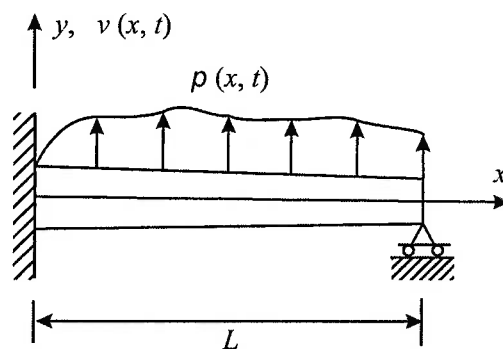


Figura 2.1 Exemplo de condição de contorno.

<sup>2</sup> *Assumed-mode* ou função de forma é uma função admissível usada para aproximar a deformação de um sistema contínuo.

Não é necessário que as  $\psi_i$ 's satisfaçam também as *condições de contorno naturais*, isto é, condições de contorno de esforços como  $M(L, t) = 0$  na Figura 2.1. Contudo, nos casos onde é possível obter funções  $\psi_i(x)$  que satisfaçam ambas as condições de contorno, prescritas e naturais, estas funções podem ser usadas na Equação 2.9.

Para introduzir o método das funções de forma, nós iremos aplicá-lo ao problema de determinação da solução aproximada para a vibração axial de uma barra linear elástica. Neste caso,  $u(x, t)$  representa o movimento axial da seção transversal plana em  $x$ , como mostra a Figura 2.2.

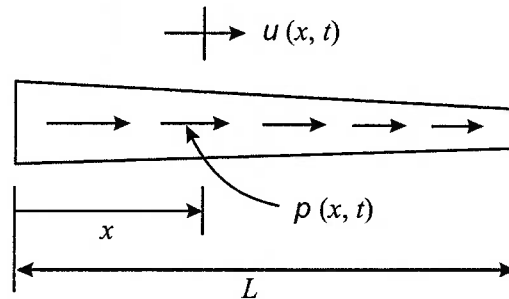


Figura 2.2 Movimento axial de uma barra esbelta.

A energia de deformação na barra é dada por

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L EA (u')^2 dx \quad (2.10)$$

e a energia cinética da barra devido ao deslocamento axial  $u(x, t)$  é dada por

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A (\dot{u})^2 dx \quad (2.11)$$

onde  $\rho(x)$  é a massa por unidade de volume e  $A(x)$  é a área da seção transversal.

Quando a Equação 2.9 é substituída na Equação 2.10, a expressão resultante para a energia potencial pode ser escrita na forma

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N k_{ij} u_i u_j \quad (2.12)$$

onde

$$k_{ij} = \int_0^L EA \psi_i' \psi_j' dx \quad (2.13)$$

Em outras palavras,  $V$  é uma função quadrática das coordenadas generalizadas, com os coeficientes na expressão quadrática definidos pela Equação 2.13. A expressão quadrática pode ser escrita convenientemente na forma matricial, ou seja

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{k} \mathbf{u} \quad (2.14)$$

onde

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{Bmatrix} \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2N} \\ & & \ddots & \\ k_{N1} & k_{N2} & \cdots & k_{NN} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Da mesma forma, as Equações 2.9 e 2.11 podem ser combinadas resultando em

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m_{ij} \dot{u}_i \dot{u}_j \quad (2.16)$$

onde

$$m_{ij} = \int_0^L \rho A \psi_i \psi_j dx \quad (2.17)$$

Na forma matricial

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{m} \dot{\mathbf{u}} \quad (2.18)$$

A matriz de massa de um sistema determinada através da Equação 2.17 é chamada de *matriz de massa consistente*.

Se a barra está sujeita a forças externas, como mostra a Figura 2.2, as correspondentes forças generalizadas são determinadas pelo emprego do princípio dos trabalhos virtuais. Assim,

$$\delta W = \int_0^t p(x, t) \delta u(x, t) dx = \sum_{i=1}^N p_i \delta u_i \quad (2.19)$$

Da Equação 2.9,  $\delta u(x, t)$  pode ser aproximado por

$$\delta u(x, t) = \sum_{i=1}^N \psi_i(x) \delta u_i \quad (2.20)$$

Então, combinando as Equações 2.19 e 2.20 obtemos

$$p_i(t) = \int_0^t p(x, t) \psi_i(x) dx \quad (2.21)$$

Agora, as equações de Lagrange podem ser usadas para determinar as equações do movimento do modelo com  $N$  graus de liberdade ( $N$ -DOF) definido pela Equação 2.9. Quando as Equações 2.12 e 2.16 são substituídas na Equação 2.8 obtemos

$$\sum_{j=1}^N m_{ij} \ddot{u}_j + \sum_{j=1}^N k_{ij} u_j = p_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.22)$$

A qual pode ser escrita na forma matricial

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{p} \quad (2.23)$$

Ainda que partimos das equações de Lagrange para chegar na Equação 2.23, pode-se verificar que somente alguns passos são realmente requeridos no uso do método das funções de forma para chegarmos nas equações do movimento de um modelo com  $N$  graus de liberdade. Estes passos são:

1. Selecionar um conjunto de  $N$  funções admissíveis,  $\psi_i(x)$ ;
2. Computar os coeficientes da matriz de rigidez usando a Equação 2.13;
3. Computar os coeficientes da matriz de massa usando a Equação 2.17;
4. Computar as forças generalizadas correspondentes as forças aplicadas usando a Equação 2.21;
5. Escrever as equações do movimento usando a Equação 2.23.



Da mesma forma, o método das funções de forma pode ser usado para obter as equações do movimento de outros sistemas elásticos. Para uma viga de Bernoulli-Euler, a energia de deformação é dada por

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EI (v'')^2 dx \quad (2.24)$$

onde  $v(x, t)$  refere-se ao movimento transversal, como na Figura 2.1,  $EI$  pode ser uma função de  $x$ . A energia cinética é dada por

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A (\dot{v})^2 dx \quad (2.25)$$

As Equações 2.24 e 2.25 levam a expressões para os coeficientes de rigidez e de massa da seguinte forma

$$k_{ij} = \int_0^l EI \psi_i''(x) \psi_j''(x) dx \quad (2.26)$$

$$m_{ij} = \int_0^l \rho A \psi_i(x) \psi_j(x) dx \quad (2.27)$$

As forças generalizadas devido a força transversal distribuída,  $p(x, t)$ , como mostra a Figura 2.1, são dadas por

$$p_i = \int_0^l p(x, t) \psi_i(x) dx \quad (2.28)$$

Quando um sistema é influenciado por um amortecimento viscoso, é possível escrever as forças generalizadas correspondentes como

$$p_i = - \sum_{j=1}^N c_{ij} \dot{v}_j \quad (2.29)$$

Posto que estas forças generalizadas dependem de velocidades generalizadas desconhecidas,  $p_i$  devido ao amortecimento viscoso pode ser posto no lado esquerdo da Equação 2.22. Então, a Equação 2.23 pode ser escrita

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{k}\mathbf{q} = \mathbf{Q} \quad (2.30)$$

onde  $\mathbf{c}$  é chamada de *matriz de amortecimento*.

Do ponto de vista prático, as propriedades de amortecimento de um sistema quase nunca são conhecidas enquanto que as propriedades de inércia e rigidez do sistema são conhecidas. Desta forma não é prático encontrar os coeficientes da matriz de amortecimento  $\mathbf{c}$ . Outros procedimentos para tratar o amortecimento de sistemas com múltiplos graus de liberdade são apresentados por Craig (1981).

## 2.2 Vibração Livre de Sistemas com Múltiplos Graus de Liberdade

Nesta seção serão apresentados os métodos de Rayleigh e de Rayleigh-Ritz usados para obter uma estimativa para as frequências naturais de um sistema com múltiplos graus de liberdade (MDOF).

### 2.2.1 Método de Rayleigh

O *quociente de Rayleigh* para sistemas com múltiplos graus de liberdade é definido por

$$\omega_R^2 \equiv R(\mathbf{U}) = \frac{\mathbf{U}^T \mathbf{k} \mathbf{U}}{\mathbf{U}^T \mathbf{m} \mathbf{U}} \quad (2.31)$$

onde  $\omega_R$  é a aproximação de Rayleigh para a frequência e  $\mathbf{U}$  o vetor dos modos naturais. Expandindo  $\mathbf{U}$  em uma série dos modos ortonormais  $\phi_r$ , temos

$$\mathbf{U} = \sum_{r=1}^N c_r \phi_r \quad (2.32)$$

onde  $c_r$  é a constante de escala. Então, devido as propriedades de ortogonalidade dos modos

$$R(\mathbf{U}) = \frac{\omega_1^2 c_1^2 + \omega_2^2 c_2^2 + \dots + \omega_N^2 c_N^2}{c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_N^2} \quad (2.33)$$

Usando a Equação 2.33 podemos provar que

$$\omega_1^2 \leq R(\mathbf{U}) \leq \omega_N^2 \quad (2.34)$$

Se  $\omega_1 \neq 0$ , podemos escrever a Equação 2.33 na forma

$$R(\mathbf{U}) = \omega_1^2 \left[ \frac{1 + (c_2/c_1)^2 (\omega_2/\omega_1)^2 + \dots + (c_N/c_1)^2 (\omega_N/\omega_1)^2}{1 + (c_2/c_1)^2 + \dots + (c_N/c_1)^2} \right] \quad (2.35)$$

Visto que  $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_N$ , cada termo no numerador é maior ou igual ao termo correspondente no denominador. Portanto,

$$R(\mathbf{U}) \geq \omega_1^2 \quad (2.36)$$

Um procedimento similar pode ser empregado para mostrar que  $R(\mathbf{U}) \leq \omega_N^2$ , e portanto a Equação 2.34 é provada.

O *método de Rayleigh* pode ser usado para reduzir um sistema com  $N$  graus de liberdade para um de um grau de liberdade (SDOF) o qual aproxima o modo fundamental do sistema. Para aplicar o método, é necessário expressar o deslocamento da estrutura em termos de uma função de forma e de uma amplitude em coordenadas generalizadas. Na notação matricial, os deslocamentos para vibração livre podem ser expressos

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{U} \cos(\omega_R t) = \psi \hat{U} \cos(\omega_R t) \quad (2.37)$$

onde  $\psi$  é o vetor de forma e  $\hat{U}$  é a coordenada generalizada expressando sua amplitude. Então, o vetor velocidade é

$$\dot{\mathbf{u}} = -\omega_R \mathbf{U} \sin(\omega_R t) = -\omega_R \psi \hat{U} \sin(\omega_R t) \quad (2.38)$$

A energia cinética e potencial são dadas por

<sup>3</sup> Um dos procedimentos para normalização de um modo é alterar a escala do modo de forma que a *massa generalizada* ou *massa modal* definida por  $M_r = \phi_r^T \mathbf{m} \phi_r$  tenha um valor específico. Se o modo natural é normalizado com  $M_r = 1$ , ele é chamado de modo ortonormal.

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{k} \mathbf{u}, \quad T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{m} \dot{\mathbf{u}} \quad (2.39)$$

Substituindo as Equações 2.37 e 2.38 nas Equações 2.39 obtemos

$$V_{\max} = \frac{1}{2} \hat{K} \hat{U}^2, \quad T_{\max} = \frac{1}{2} \omega_R^2 \hat{m} \hat{U}^2 \quad (2.40)$$

onde

$$\hat{k} = \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{k} \boldsymbol{\psi}, \quad \hat{m} = \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{m} \boldsymbol{\psi} \quad (2.41)$$

Usando a conservação de energia,  $V_{\max} = T_{\max}$ , obtemos

$$R(\mathbf{U}) = \omega_R^2 = \frac{\hat{k}}{\hat{m}} \quad (2.42)$$

Das Equações 2.34 e 2.42, temos

$$\omega_1^2 \leq \omega_R^2 \leq \omega_N^2 \quad (2.43)$$

Uma função de forma  $\boldsymbol{\psi}$  a qual aproxima a forma do modo fundamental  $\phi_1$  irá dar um limite superior próximo a  $\omega_1$ .

### 2.2.2 Método de Rayleigh-Ritz

O método de Rayleigh-Ritz para sistemas com múltiplos graus de liberdade (MDOF) permite aproximar os valores das frequências de  $\hat{N}$  modos ( $\hat{N} < N$ ). Assumindo deslocamento harmônico no tempo, temos

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{U} \cos(\omega t - \alpha) \quad (2.44)$$

A hipótese básica do método de Ritz é que o vetor de deslocamento pode ser expresso em termos de um conjunto funções de formas  $\boldsymbol{\psi}$  de amplitude  $\hat{U}$ , como segue

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^{\hat{N}} \hat{U}_i \boldsymbol{\psi}_i = \boldsymbol{\Psi} \hat{\mathbf{U}} \quad (2.45)$$

onde

$$\Psi = [\psi_1 \ \psi_2 \ \dots \ \psi_{\hat{n}}] \quad (2.46)$$

As  $\psi_i$ 's são vetores pré-selecionados linearmente independentes. Para obter melhores resultados a partir do menor número de coordenadas possível, cada vetor  $\psi_i$  deve ser tomado como uma aproximação do correspondente modo de vibrar exato  $\phi_i$ . Muitos métodos foram propostos para selecionar os vetores de partida, por exemplo, o procedimento de condensação estática pode ser visto como um método para obter um conjunto de vetores de Ritz. O fato de um conjunto de forças elásticas serem iguais a zero constitui uma restrição que torna possível expressar o correspondente conjunto de deslocamentos em termos de todos os outros. Esta relação é dada por

$$\mathbf{U}_d = -\mathbf{K}_{dd}^{-1} \mathbf{K}_{da} \mathbf{U}_a \quad (2.47)$$

Então, o vetor de deslocamentos completo também pode ser expresso em termos dos graus de liberdade com forças diferente de zero,  $\mathbf{U}_a$ , simplesmente incorporando uma matriz identidade de dimensões apropriadas na transformação

$$\mathbf{U} \equiv \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_a \\ \mathbf{U}_d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{aa} \\ -\mathbf{K}_{dd}^{-1} \mathbf{K}_{da} \end{bmatrix} \mathbf{U}_a \quad (2.48)$$

Nesta expressão, a matriz entre colchetes é equivalente as funções de forma  $\Psi$  da Equação 2.45, e o vetor  $\mathbf{U}_a$  às coordenadas generalizadas  $\hat{\mathbf{U}}$ . Podem ser usados na análise de Ritz tantos vetores de partida quanto desejados. Em geral, é conveniente usar  $n$  funções de forma  $\Psi$  para obter  $n/2$  modos e frequências de vibrar com boa precisão.

Expressões para a máxima energia cinética e potencial no sistema podem ser obtidas substituindo a Equação 2.45 nas Equações 2.39. Igualando as expressões  $T_{\max} = V_{\max}$  obtemos o quociente de Rayleigh

$$R(\mathbf{U}) \equiv \hat{\omega}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\hat{N}} \sum_{j=1}^{\hat{N}} \hat{U}_i \hat{U}_j \hat{k}_{ij}}{\sum_{i=1}^{\hat{N}} \sum_{j=1}^{\hat{N}} \hat{U}_i \hat{U}_j \hat{m}_{ij}} = \frac{\hat{\mathbf{U}}^T \hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{U}}}{\hat{\mathbf{U}}^T \hat{\mathbf{m}} \hat{\mathbf{U}}} \quad (2.49)$$

onde

$$\hat{\mathbf{k}} = \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{k} \boldsymbol{\psi}, \quad \hat{\mathbf{m}} = \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{m} \boldsymbol{\psi} \quad (2.50)$$

Comparando a Equação 2.42 com a Equação 2.49, vemos que uma determinada frequência  $\omega_R$  é baseada na anterior, enquanto que o valor de  $\hat{\omega}^2$  na Equação 2.49 depende dos valores de  $\hat{U}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, \hat{N}$ .

A Equação 2.49 não é uma expressão explícita para a frequência de vibração, o numerador e o denominador são funções das amplitudes das coordenadas generalizadas  $\hat{\mathbf{U}}$ , as quais ainda não são conhecidas. Para avaliar isto, o fato de que a análise de Rayleigh fornece um limite superior para a frequência de vibração será utilizado; em outras palavras, qualquer função de forma leva a uma frequência calculada a qual é maior do que a frequência exata. Portanto, a melhor aproximação da forma, isto é, a melhor escolha de  $\hat{\mathbf{U}}$ , minimizará a frequência.

Desta forma, diferenciando a expressão da frequência em respeito a qualquer uma das coordenadas generalizadas  $\hat{U}_i$  e igualando a zero temos

$$\frac{\partial R(\mathbf{U})}{\partial \hat{U}_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \hat{N} \quad (2.51)$$

Façamos

$$R(\mathbf{U}) = \frac{N(\mathbf{U})}{D(\mathbf{U})} \quad (2.52)$$

Então, a Equação 2.51 resulta

$$N(\mathbf{U}) \frac{\partial D(\mathbf{U})}{\partial \hat{U}_i} - D(\mathbf{U}) \frac{\partial N(\mathbf{U})}{\partial \hat{U}_i} = 0 \quad (2.53)$$

Mas, visto que  $\hat{k}_{ij} = \hat{k}_{ji}$ ,

$$\frac{\partial N(\mathbf{U})}{\partial U_i} = 2 \sum_{j=1}^{\hat{N}} \hat{k}_{ij} \hat{U}_j \quad (2.54)$$

e similarmente para a derivada de  $D(\mathbf{U})$ . Combinando as Equações 2.49, 2.53 e 2.54 obtemos

$$\sum_{j=1}^{\hat{N}} (\hat{k}_{ij} - \hat{\omega}^2 \hat{m}_{ij}) \hat{U}_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \hat{N} \quad (2.55)$$

ou

$$(\hat{\mathbf{k}} - \hat{\omega}^2 \hat{\mathbf{m}}) \hat{\mathbf{U}} = 0 \quad (2.56)$$

Este problema de autovalor leva a um conjunto de  $\hat{N}$  frequências aproximadas  $\hat{\omega}$ , e modos correspondentes  $\hat{\mathbf{U}}$ .

Em geral, as funções de forma  $\psi_i$  não possuem a propriedade de ortogonalidade da forma exata do modo, assim, os termos fora da diagonal não desaparecem das matrizes de rigidez e massa generalizadas. Contudo, uma boa escolha das funções de forma tende a tornar os termos fora da diagonal relativamente pequenos. De qualquer forma, é muito mais fácil obter a resposta dinâmica para um número reduzido de coordenadas  $n$  do que para as  $N$  equações originais.

O procedimento de Rayleigh-Ritz descrito acima pode ser considerado como um caso especial de aplicação do método das funções de forma (*assumed-modes method*) para vibração livre de um sistema com múltiplos graus de liberdade (MDOF). O método das funções de forma pode ser usado para reduzir um sistema com  $N$  graus de liberdade ( $N$ -DOF) para um com  $\hat{N}$  graus de liberdade ( $\hat{N}$ -DOF) assumindo

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^{\hat{N}} \psi_i \hat{u}_i(t) = \boldsymbol{\Psi} \hat{\mathbf{u}}(t) \quad (2.57)$$

Esta aproximação pode ser substituída em expressões para  $V$  e  $T$  nas Equação 2.39, e o resultado substituído nas equações de Lagrange, Equação 2.8, dando

$$\hat{\mathbf{m}}\ddot{\hat{\mathbf{u}}} + \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{u}} = 0 \quad (2.58)$$

para vibração livre sem amortecimento ou para vibração forçada de um sistema com amortecido viscoso

$$\hat{\mathbf{m}}\ddot{\hat{\mathbf{u}}} + \hat{\mathbf{c}}\dot{\hat{\mathbf{u}}} + \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{p}}(t) \quad (2.59)$$

onde

$$\hat{\mathbf{c}} = \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{c} \boldsymbol{\Psi}, \quad \hat{\mathbf{p}}(t) = \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{p}(t) \quad (2.60)$$

Vários procedimentos específicos para escolher os vetores de forma  $\psi_i$  serão discutidos na Seção 2.3.6.

Uma propriedade muito interessante e útil dos autovalores (frequências naturais) é a propriedade da separação dos autovalores (BATHE, 1976). Façamos o problema original de autovalores com  $N$  graus de liberdade ser expresso como

$$(\mathbf{k} - \lambda \mathbf{m}) \mathbf{U} = 0 \quad (2.61)$$

onde  $\lambda = \omega^2$ , e fazamos

$$(\mathbf{k}^{(m)} - \lambda^{(m)} \mathbf{m}^{(m)}) \mathbf{U}^{(m)} = 0, \quad m = 0, 1, \dots, (N-1) \quad (2.62)$$

ser o  $m$ -ésimo problema restrito de autovalor, onde  $\mathbf{k}^{(m)}$  e  $\mathbf{m}^{(m)}$  são obtidos excluindo as últimas  $m$  linhas e colunas de  $\mathbf{k}$  e  $\mathbf{m}$ , respectivamente.  $\mathbf{k}^{(0)} = \mathbf{k}$  e  $\mathbf{m}^{(0)} = \mathbf{m}$ . Então, o *teorema da separação dos autovalores* expressa que

$$\lambda_1^{(m)} \leq \lambda_1^{(m+1)} \leq \lambda_2^{(m)} \leq \lambda_2^{(m+1)} \leq \dots \leq \lambda_{(N-m)}^{(m)} \quad (2.63)$$

para  $m = 0, 1, 2, \dots, (N-2)$

Isto é, os autovalores dos  $(m+1)$  primeiros problemas separam os autovalores do  $m$ -ésimo problema como ilustra a Figura 2.3, onde

$$p^{(m)}(\mu) = \det(\mathbf{k}^{(m)} - \mu \mathbf{m}^{(m)}) \quad (2.64)$$



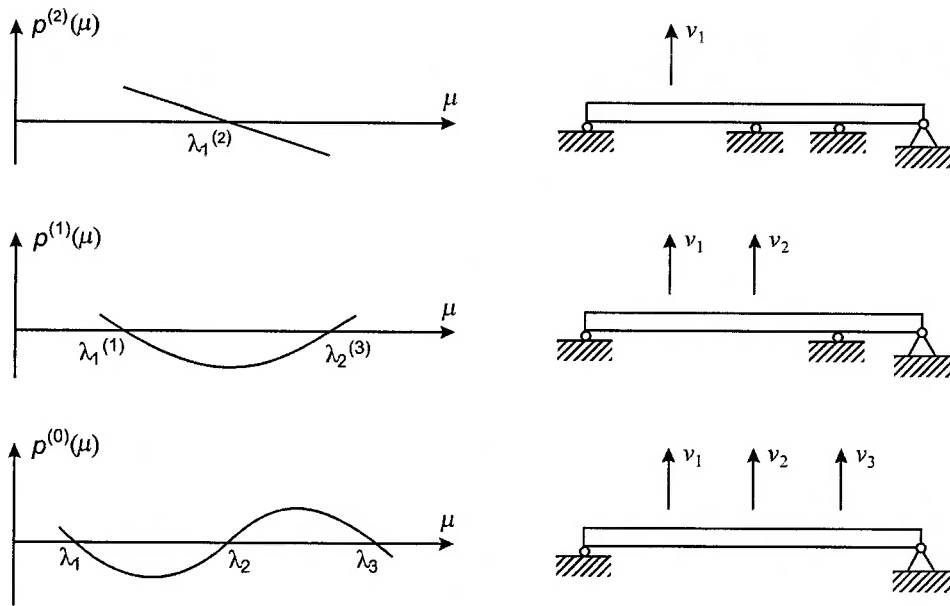


Figura 2.3 Ilustração da propriedade de separação dos autovalores.

O teorema da separação dos autovalores da Equação 2.63 pode ser empregado diretamente para mostrar as propriedades de convergência das frequências obtidas pelo método de Rayleigh-Ritz. O resultado é mostrado na Tabela 2.1. Assim, cada um dos  $N$  autovalores obtidos pela aproximação de Rayleigh-Ritz para um sistema com  $N$  graus de liberdade é um valor superior ao correspondente autovalor exato. Os autovalores aproximam os valores exatos a medida que o número de graus de liberdade,  $\hat{N}$ , aumenta.

Tabela 2.1 Propriedades de convergência das frequências de Rayleigh-Ritz.

$DOF = \hat{N} =$	1	2	3	...	$N$
"Restrições" = $m =$	$N - 1$	$N - 2$	$N - 3$	...	0
1º Autovalor	$\lambda_1^{(N-1)} \geq$	$\lambda_1^{(N-2)} \geq$	$\lambda_1^{(N-3)} \geq$	...	$\rightarrow \lambda_1$
2º Autovalor		$\lambda_2^{(N-2)} \geq$	$\lambda_2^{(N-3)} \geq$	...	$\rightarrow \lambda_2$
3º Autovalor			$\lambda_3^{(N-3)} \geq$	...	$\rightarrow \lambda_3$
⋮					⋮
$N$ -ésimo Autovalor					$\rightarrow \lambda_N$

## 2.3 Modelagem de Estruturas em Elementos Finitos

Na Seção 2.1.2 o método das funções de forma foi aplicado para a construção de um modelo com finitos graus de liberdade ( $N$ -DOF) de um sistema contínuo. Os procedimentos descritos lá podem ser referenciados como um método global das funções de forma porque as funções de forma,  $\psi_i$ , descrevem formas dos deslocamentos ao longo de toda a estrutura. Um método de aproximação poderoso, o qual é uma versão do método das funções de forma, é o *Método dos Elementos Finitos* (MEF). Esta seção fornece uma introdução ao uso de modelos em *elementos finitos* em análises dinâmicas de estruturas.

### 2.3.1 Introdução ao Método dos Elementos Finitos

Na Seção 2.1.2 aproximações com finitos graus de liberdade para um sistema contínuo foram criadas usando o método global das funções de forma, isto é, aproximando a função de deslocamento por uma expressão da forma

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^N \psi_i(x) v_i(t) \quad (2.65)$$

onde cada  $\psi_i(x)$  descreve uma forma deformada de toda a estrutura. Como demonstrado na Seção 2.1.2, um modelo matemático com  $N$  graus de liberdade ( $N$ -DOF) de uma estrutura resulta em coeficientes de rigidez e massa generalizados e forças generalizadas obtidos de integrais envolvendo as funções  $\psi_i$ 's e suas derivadas. O advento dos computadores digitais facilitou a avaliação destas integrais, mas fracassou no tratamento de outras sérias desvantagens do método global das funções de forma, em outras palavras (1) é extremamente difícil para um analista escolher um conjunto de  $\psi_i$ 's para uma estrutura com geometria complexa, (2) as equações resultantes da aplicação do método global das funções de forma são geralmente altamente acopladas, e isto requer mais tempo e memória de computador do que é requerido se os coeficientes das matrizes são distribuídos de forma esparsa, e (3) há uma pequena passagem de um problema para outro, isto é, para cada nova

geometria um novo conjunto de  $\psi_i$ 's deve ser selecionado. O método dos elementos finitos supera estas dificuldades.

A modelagem em elementos finitos de uma estrutura pode ser considerada como uma aplicação do método das funções de forma onde as  $\psi_i$ 's representam formas de deslocamentos sobre uma porção (elemento finito) da estrutura. A Figura 2.4 mostra a estrutura do veículo GEO Metro modelada em elementos quadriláteros e triangulares. Os elementos são conectados através dos nós onde é imposta a compatibilidade dos deslocamentos.

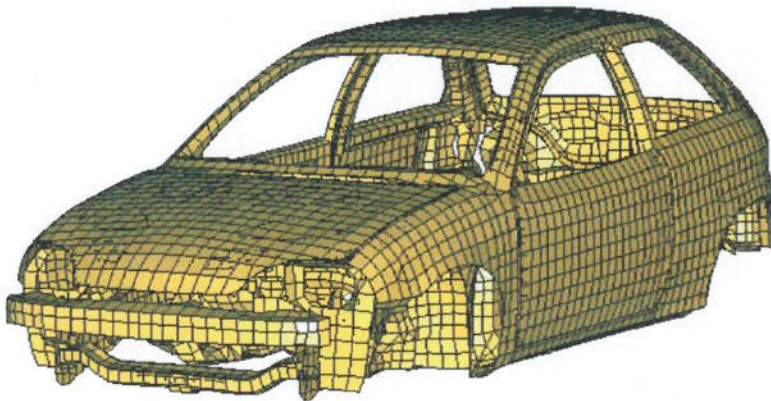


Figura 2.4 Modelo em EF da estrutura do veículo GEO Metro.

Embora o método dos elementos finitos tenha uma gama muito ampla de aplicações, somente os aspectos da teoria de elementos finitos aplicáveis a dinâmica de estruturas serão tratados aqui.

Na Seção 2.3.2 as matrizes de rigidez e massa e os vetores de força são derivados para vários tipos de elementos finitos unidimensionais. A Seção 2.3.3 trata da transformação das matrizes do elemento de forma que todas as forças e deslocamentos sejam referentes ao sistema global da estrutura. Na Seção 2.3.4 é descrito o procedimento de montagem dos elementos para formar um sistema estrutural. As Seções 2.3.5 até 2.3.7 discutem a aplicação de condições de contorno e outras formas de restrições, incluindo restrições impostas para reduzir o número de graus de liberdade (DOF) ativos em um sistema.

### 2.3.2 Matrizes de Rigidez e Massa e Vetor de Força do Elemento

Nesta seção serão desenvolvidas as matrizes de rigidez e massa e os vetores de força para elementos unidimensionais uniformes sujeitos a deformação axial, flexão e torção, ou uma combinação destes.

#### Movimento Axial

Considere um elemento uniforme de comprimento  $L$ , densidade de massa  $\rho$ , módulo de elasticidade  $E$ , e área da seção transversal  $A$ . O sistema de referência mostrado na Figura 2.5 é chamado de *sistema de coordenadas do elemento* devido ao alinhamento de um dos eixos com o elemento. A aproximação mais simples do deslocamento axial no elemento emprega o deslocamento nas duas extremidades e é dada por

$$u(x, t) = \psi_1(x) u_1(t) + \psi_2(x) u_2(t) \quad (2.66)$$

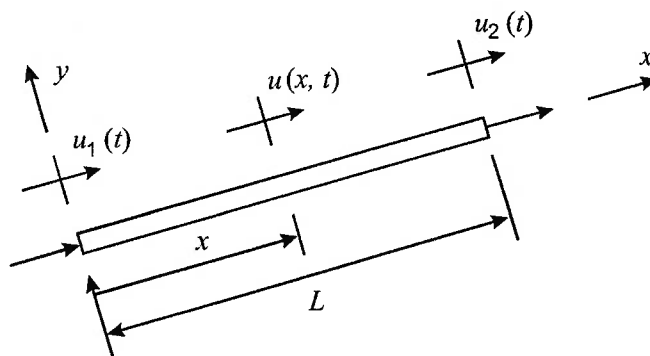


Figura 2.5 Elemento uniforme sujeito a deformação axial.

Posto que  $u(0, t) = u_1(t)$  e  $u(L, t) = u_2(t)$ , as *funções de forma*  $\psi_1$  e  $\psi_2$  devem satisfazer as condições de contorno

$$\begin{aligned} \psi_1(0) &= 1, & \psi_1(L) &= 0 \\ \psi_2(0) &= 0, & \psi_2(L) &= 1 \end{aligned} \quad (2.67)$$

As funções de forma podem ser derivadas considerando a deformação axial sob cargas estáticas as quais produzem as condições de contorno das Equações 2.67. Para uma barra submetida à deformação axial a equação do equilíbrio é

$$(AEu')' = 0 \quad (2.68)$$

para um elemento uniforme  $AE = \text{constante}$ , assim

$$u(x) = c_1 + c_2 \left( \frac{x}{L} \right) \quad (2.69)$$

Os termos lineares são normalizados para  $(x/L)$  de forma que  $c_1$  e  $c_2$  terão as dimensões de  $u(x)$ . Das Equações 2.67 e 2.69, obtemos

$$\psi_1(x) = 1 - \left( \frac{x}{L} \right), \quad \psi_2(x) = \left( \frac{x}{L} \right) \quad (2.70)$$

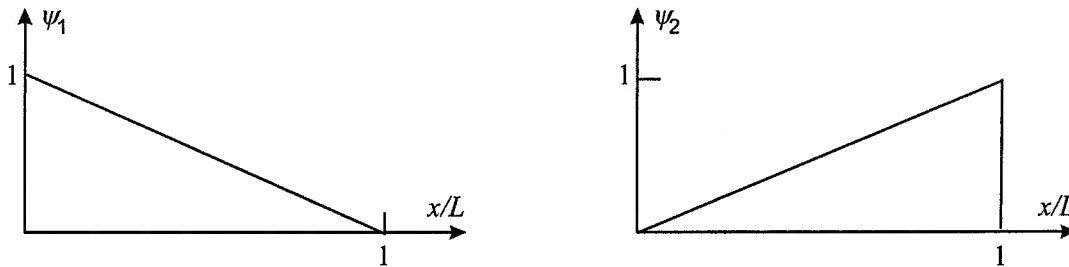


Figura 2.6 Funções de forma para um elemento axial.

Expressões para os coeficientes de rigidez  $k_{ij}$ , coeficientes de massa  $m_{ij}$  e forças generalizadas  $p_i$  para o movimento axial são dadas respectivamente pelas Equações 2.13, 2.17 e 2.21. Assim,

$$k_{ij} = \int_0^L EA \psi_i' \psi_j' dx \quad (2.71)$$

$$m_{ij} = \int_0^L \rho A \psi_i \psi_j dx \quad (2.72)$$

$$p_i(t) = \int_0^L p(x, t) \psi_i(x) dx \quad (2.73)$$

Substituindo as Equações 2.70 nas Equações 2.71 e 2.72 obtemos as seguintes matrizes de rigidez e massa para um elemento uniforme.

$$\mathbf{k} = \left( \frac{AE}{L} \right) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

$$\mathbf{m} = \left( \frac{\rho AL}{6} \right) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

**Movimento Transversal – Teoria de Bernoulli-Euler**

Considere um elemento de viga uniforme de comprimento  $L$ , densidade de massa  $\rho$ , módulo de elasticidade  $E$ , área da seção transversal  $A$  e momento de inércia  $I$ . Façamos as coordenadas de deslocamento para o movimento transversal serem os deslocamentos e inclinações das extremidades numerados como mostra a Figura 2.7. O deslocamento transversal pode ser aproximado por

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^4 \psi_i(x) v_i(t) \quad (2.76)$$

onde as funções  $\psi_i(x)$  satisfazem as condições de contorno

$$\begin{aligned} \psi_1(0) = 1, & \quad \psi_1'(0) = \psi_1(L) = \psi_1'(L) = 0 \\ \psi_2'(0) = 1, & \quad \psi_2(0) = \psi_2(L) = \psi_2'(L) = 0 \\ \psi_3(L) = 1, & \quad \psi_3(0) = \psi_3'(0) = \psi_3'(L) = 0 \\ \psi_4'(L) = 1, & \quad \psi_4(0) = \psi_4'(0) = \psi_4(L) = 0 \end{aligned} \quad (2.77)$$

Funções de forma apropriadas podem ser facilmente derivadas considerando o elemento de viga da Figura 2.7 solicitado estaticamente por cortantes e momentos para produzir as diferentes formas de deflexão estática que satisfazem as Equações 2.77.

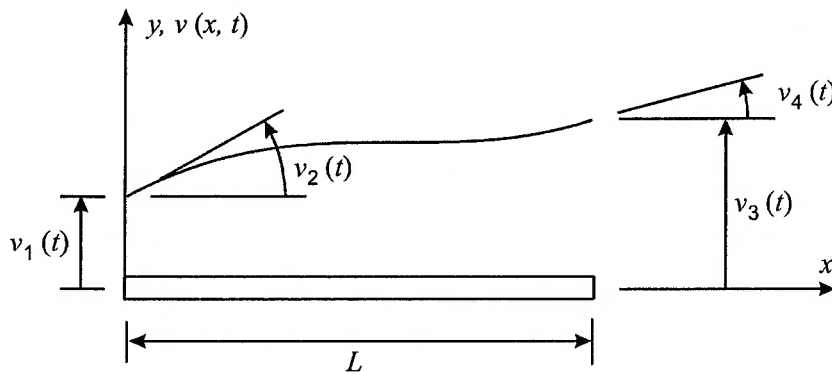


Figura 2.7 Elemento uniforme sujeito a deflexão transversal.

Assim, para uma viga solicitada somente em suas extremidades a equação de equilíbrio é

$$(EIv''')'' = 0 \tag{2.78}$$

A solução geral da Equação 2.76 para uma viga uniforme é um polinômio de ordem cúbica

$$v(x) = c_1 + c_2 \left(\frac{x}{L}\right) + c_3 \left(\frac{x}{L}\right)^2 + c_4 \left(\frac{x}{L}\right)^3 \tag{2.79}$$

Note que  $(x/L)$  é novamente usado no lugar de  $x$ , de forma que todas as constantes  $c_i$  tenham a mesma dimensão. Substituindo os quatro conjuntos de condições de contorno das Equações 2.77 na Equação 2.79 obtemos as seguintes funções de forma:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= 1 - 3 \left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2 \left(\frac{x}{L}\right)^3 \\ \psi_2 &= x - 2L \left(\frac{x}{L}\right)^2 + L \left(\frac{x}{L}\right)^3 \\ \psi_3 &= 3 \left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2 \left(\frac{x}{L}\right)^3 \\ \psi_4 &= -L \left(\frac{x}{L}\right)^2 + L \left(\frac{x}{L}\right)^3 \end{aligned} \tag{2.80}$$

As funções de forma são ilustradas na Figura 2.8.

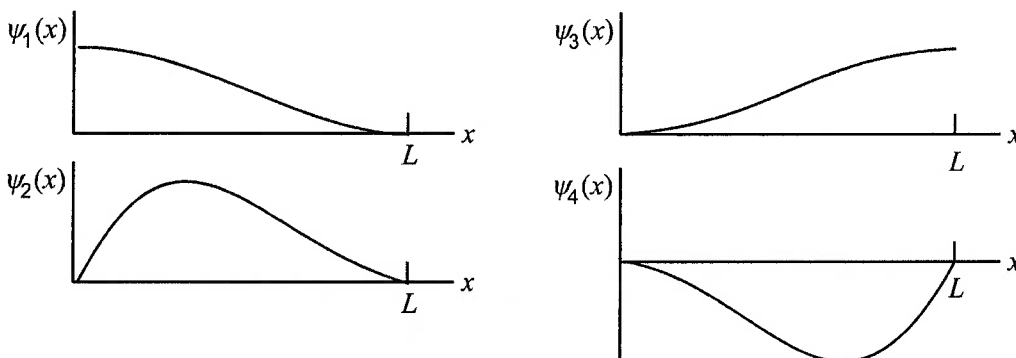


Figura 2.8 Funções de forma para a deformação transversal de um elemento de viga.

As Equações 2.26 a 2.28 são expressões para  $k_{ij}$ ,  $m_{ij}$  e  $p_{ij}$  para vigas de Bernoulli-Euler. Assim,

$$k_{ij} = \int_0^L EI \psi_i'' \psi_j'' dx \quad (2.81)$$

$$m_{ij} = \int_0^L \rho A \psi_i \psi_j dx \quad (2.82)$$

$$p_i = \int_0^L p(x, t) \psi_i dx \quad (2.83)$$

Substituindo as Equações 2.80 nas Equações 2.81 e 2.82 obtemos

$$\mathbf{k} = \left( \frac{EI}{L^3} \right) \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ \text{Sim.} & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

$$\mathbf{m} = \left( \frac{\rho AL}{420} \right) \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ & & 156 & -22L \\ \text{Sim.} & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

### Torção

Considere um elemento uniforme de comprimento  $L$  como mostra a Figura 2.9. Façamos o eixo  $x$  local ser o eixo central,  $I_p$  o momento polar de inércia sobre o eixo central e  $GJ$  a rigidez torcional.

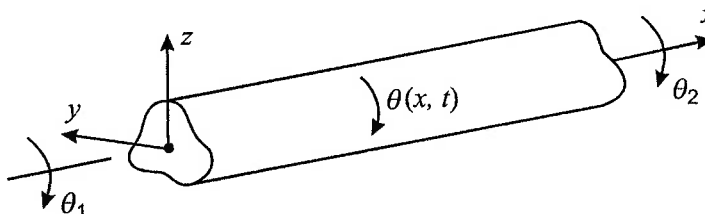


Figura 2.9 Elemento uniforme sujeito a deformação torcional.



A energia de deformação e a energia cinética para torção pura são dadas por

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L GJ(\theta')^2 dx \quad (2.86)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho I_p (\dot{\theta})^2 dx \quad (2.87)$$

A rotação no elemento é determinada pelas funções de forma  $\psi_1$  e  $\psi_2$

$$\theta(x, t) = \psi_1(x) \theta_1(t) + \psi_2(x) \theta_2(t) \quad (2.88)$$

onde as condições de contorno apropriadas para as funções de forma são dadas pelas Equações 2.67. Para um elemento carregado estaticamente por torques nas extremidades, a equação de equilíbrio é

$$(GJ\theta')' = 0 \quad (2.89)$$

Visto que esta equação tem a mesma forma da equação de equilíbrio para deformação axial, Equação 2.68, e as funções de forma para torção devem satisfazer as mesmas condições de contorno das funções de forma para deformação axial, as funções de forma para o elemento de torção e para o elemento axial são as mesmas, isto é,  $\psi_1$  e  $\psi_2$  são dadas pelas Equações 2.70.

Usando os procedimentos empregados na Seção 2.1.2 podemos combinar as Equações 2.88 e 2.89 para obter as expressões

$$\begin{aligned} k_{ij} &= \int_0^L GJ \psi_i' \psi_j' dx \\ m_{ij} &= \int_0^L \rho I_p \psi_i \psi_j dx \\ p_i &= \int_0^L t(x, t) \psi_i dx \end{aligned} \quad (2.90)$$

onde  $t(x, t)$  é o torque distribuído por unidade de comprimento. Inserindo as funções de forma das Equações 2.70 nas Equações 2.90, obtemos as matrizes  $\mathbf{k}$  e  $\mathbf{m}$  para um elemento de torção uniforme

$$\mathbf{k} = \left( \frac{GJ}{L} \right) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

$$\mathbf{m} = \left( \frac{\rho I_p L}{6} \right) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.92)$$

### Elementos Estruturais Tridimensionais

As matrizes de rigidez e massa para um elemento de viga tridimensional podem ser obtidas dos elementos axiais, de flexão e torção discutidos. Przemieniecki (1968) apresenta a formulação para as matrizes de rigidez e massa de um elemento de viga tridimensional incluindo deformação por cisalhamento e efeitos de inércia rotatória.

### Outros Elementos

As matrizes de rigidez e massa para outros elementos finitos, incluindo elementos bidimensionais e tridimensionais, podem ser encontradas em livros e artigos sobre elementos finitos.

### Matriz de Massa Discreta para Elementos de Viga

As matrizes de massa obtidas acima são referenciadas como *matrizes de massa consistentes* porque as mesmas funções de forma são usadas para derivar os coeficientes das matrizes de massa e de rigidez. Isto leva, por exemplo, ao acoplamento entre as coordenadas de translação e rotação na matriz de massa de uma viga, Equação 2.85. Um modelo mais simples das propriedades de inércia de uma viga é o modelo de *massa discreto*. A Figura 2.10 mostra uma viga dividida em elementos finitos, com a massa dos elementos concentrada em suas extremidades e reunidas para formar o modelo de massa discreto da viga. Para elementos de mesmo comprimento a matriz de massa discreta para o elemento de viga da Figura 2.10 deve ser

$$\mathbf{m} = \frac{\rho AL}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.93)$$

Archer (1963), Leckie; Lindberg (1963), Tong; Pian; Bucciarelli (1971) compararam a solução do problema de autovalores e autovetores baseado nas formulações de massa discreta e consistente. Os resultados de modelos com matriz de massa discreta e consistente serão discutidos na Seção 4.1.4.

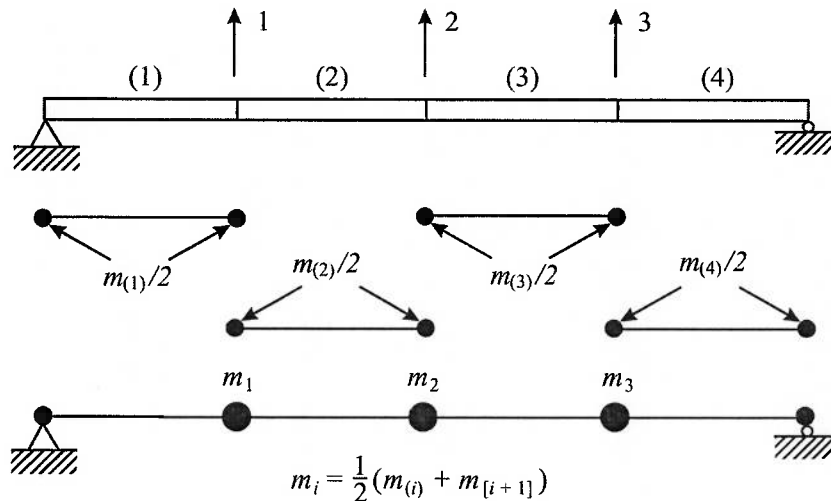


Figura 2.10 Modelo de massa discreta de uma viga.

### 2.3.3 Transformação das Matrizes do Elemento

Na Seção 2.3.1 foi indicado que o método dos elementos finitos consiste em aproximar os deslocamentos localmente e conectar os elementos nos nós através das condições de compatibilidade. Esta aproximação é chamada de *método dos deslocamentos* porque são os deslocamentos de um elemento que são aproximados diretamente. Literaturas sobre o método dos elementos finitos também discutem o *método das forças*, onde as tensões são aproximadas diretamente, e os *métodos mistos*. O método dos deslocamentos é mais freqüentemente empregado na análise dinâmica de estruturas.

Na Seção 2.3.2 as matrizes de rigidez e massa foram obtidas para elementos com as coordenadas de deslocamento referenciadas no *sistema de coordenadas do elemento*,  $xyz$ . As estruturas reais freqüentemente têm membros que não estão alinhados a um sistema comum de coordenadas, ou *sistema de coordenadas global*,  $XYZ$ , como no caso da treliça plana mostrada na

Figura 2.11. As extremidades dos elementos são designadas por  $i$  e  $j$  e a origem dos eixos locais é colocada na extremidade  $i$  com o eixo  $x$  ao longo do elemento de  $i$  em direção a  $j$ .

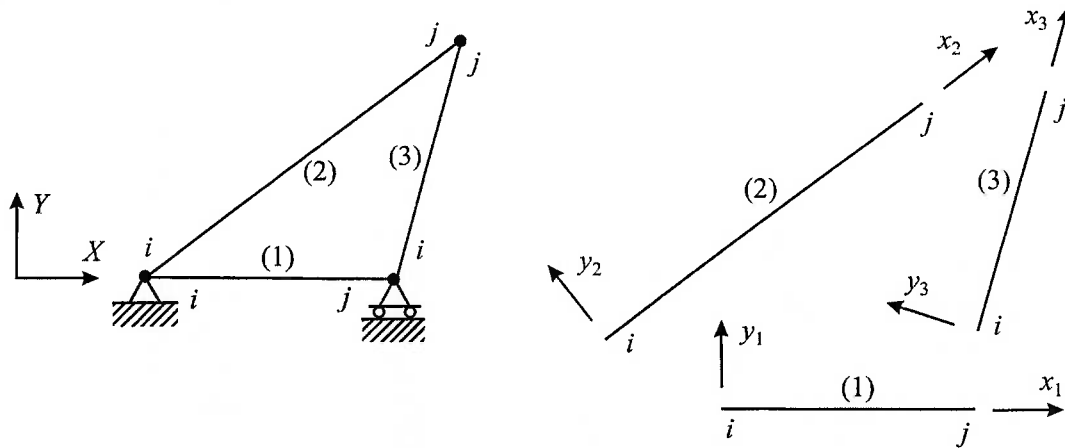


Figura 2.11 Sistema de coordenadas global e do elemento para uma treliça plana.

Nesta seção será considerada a transformação das matrizes do elemento (vetores de deslocamento e força, matrizes de rigidez e massa) para o sistema de coordenadas global de forma que as equações de compatibilidade e a montagem das matrizes do sistema possam ser tratadas mais diretamente.

Visto que as matrizes do elemento são inicialmente calculadas em coordenadas locais, orientadas adequadamente para minimizar o esforço computacional, é necessário introduzir matrizes de transformação alterando o sistema de referência para coordenadas globais. As matrizes de transformação relacionam os deslocamentos do elemento no sistema de coordenadas local  $\mathbf{u}$  com os deslocamentos do elemento no sistema de coordenadas global  $\hat{\mathbf{u}}$ . Esta relação é expressa pela equação matricial

$$\mathbf{u} = \mathbf{T}\hat{\mathbf{u}} \tag{2.94}$$

Os elementos da matriz  $\mathbf{T}$  são obtidos dos co-senos diretores dos ângulos entre o sistema de coordenadas local e global. Przemieniecki (1968) apresenta a formulação das matrizes de transformação dos deslocamentos para elementos estruturais unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais.

Para obter as transformações para o vetor de força, matriz de rigidez e matriz de massa é conveniente empregar os conceitos de trabalho virtual e

energia. Para transformar o vetor de força  $\mathbf{p}$  associado com o vetor de deslocamento  $\mathbf{u}$  para um vetor de força  $\hat{\mathbf{p}}$  associado com  $\hat{\mathbf{u}}$ , considere o trabalho virtual. A quantidade escalar  $\delta W$  deve ser a mesma para ambas as representações, isto é,

$$\delta W = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} = \delta \hat{\mathbf{u}}^T \hat{\mathbf{p}} \quad (2.95)$$

Substituindo a Equação 2.94 na expressão acima obtemos

$$\delta W = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} = (\delta \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{T}^T) \mathbf{p} = \delta \hat{\mathbf{u}}^T (\mathbf{T}^T \mathbf{p}) \quad (2.96)$$

Comparando os termos  $\delta \hat{u}_1$ ,  $\delta \hat{u}_2$ , e assim por diante, nas Equações 2.95 e 2.96 podemos concluir que

$$\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{T}^T \mathbf{p} \quad (2.97)$$

visto que as  $\delta \hat{u}_i$ 's são independentes.

Para obter a equação de transformação para as matrizes de rigidez e massa podemos empregar a energia de deformação e a energia cinética. Das Equações 2.14 e 2.18, temos

$$V = \frac{1}{2} (\mathbf{u}^T \mathbf{k} \mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{u}}^T \hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{u}}) \quad (2.98)$$

e

$$T = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{m} \dot{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2} (\dot{\hat{\mathbf{u}}}^T \hat{\mathbf{m}} \dot{\hat{\mathbf{u}}}) \quad (2.99)$$

Assim,

$$V = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{T}^T) \mathbf{k} (\mathbf{T} \hat{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{u}}^T (\mathbf{T}^T \mathbf{k} \mathbf{T}) \hat{\mathbf{u}} \quad (2.100)$$

ou

$$\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{T}^T \mathbf{k} \mathbf{T} \quad (2.101)$$

Similarmente, da energia cinética obtemos

$$\hat{\mathbf{m}} = \mathbf{T}^T \mathbf{m} \mathbf{T} \quad (2.102)$$

### 2.3.4 Montagem das Matrizes do Sistema

Vários processos estão envolvidos na obtenção de um conjunto final de equações de movimento para um sistema baseado em modelagem por elementos finitos. Até agora consideramos os processos em nível de elemento – obtenção das matrizes do elemento e transformação destas para coordenadas globais. Ainda restam a montagem das matrizes do sistema, impor as condições de contorno e outras restrições (por exemplo, redução do número de coordenadas do sistema). Em muitos programas de elementos finitos estes processos são realizados simultaneamente, isto é, condições de contorno e outras restrições são impostas enquanto as matrizes do sistema são montadas. Para simplificar a demonstração, estes serão considerados separadamente.

Na Seção 2.3.3 a matriz de transformação **T** foi introduzida para permitir que todas as matrizes do elemento sejam referenciadas a um sistema comum de coordenadas, o sistema de coordenadas global *XYZ*. Nesta seção o método da rigidez ou “*direct stiffness*” *method* é empregado para montar as matrizes do sistema **M**, **K** e **P** das correspondentes matrizes do elemento.

Quando vários elementos são combinados para formar uma estrutura, o conjunto de coordenadas de deslocamento do sistema será indicado pelo vetor **U**. A Figura 2.12 mostra os seis deslocamentos do sistema de uma treliça de três barras sem restrições. As articulações são identificadas por 1, 2 e 3 e os deslocamentos do sistema são definidos na seguinte ordem:  $U_1$  é o deslocamento na direção *X* na articulação 1,  $U_2$  é o deslocamento na direção *Y* na articulação 1, e assim por diante, como mostra a Figura 2.12. Observe que foram introduzidos três tipos distintos de coordenadas de deslocamento: deslocamentos do elemento referenciados no sistema de coordenadas do elemento, deslocamentos do elemento referenciados no sistema de coordenadas global e deslocamentos do sistema. Nesta seção usaremos a relação entre os dois últimos tipos na montagem das matrizes do sistema.

O método da rigidez para a montagem das matrizes do sistema é baseado no fato de que o trabalho e a energia são quantidades escalares de forma que, por exemplo, a energia de deformação total de uma estrutura é a soma das contribuições de energia de deformação de todos os seus elementos. Além

disso, os deslocamentos do elemento referenciados no sistema de coordenadas global podem ser identificados simplesmente com os deslocamentos do sistema apropriados, isto é, os deslocamentos  $\hat{u}_e$  do elemento  $e$  podem ser identificados com os deslocamentos do sistema por  $\mathbf{U}$ . Por exemplo, considere o elemento 3 da treliça mostrada na Figura 2.12. Os deslocamentos do elemento referenciados no sistema de coordenadas global são indicados na Figura 2.13, onde a orientação dos eixos do elemento é definida pela notação  $i, j$  da Figura 2.12.

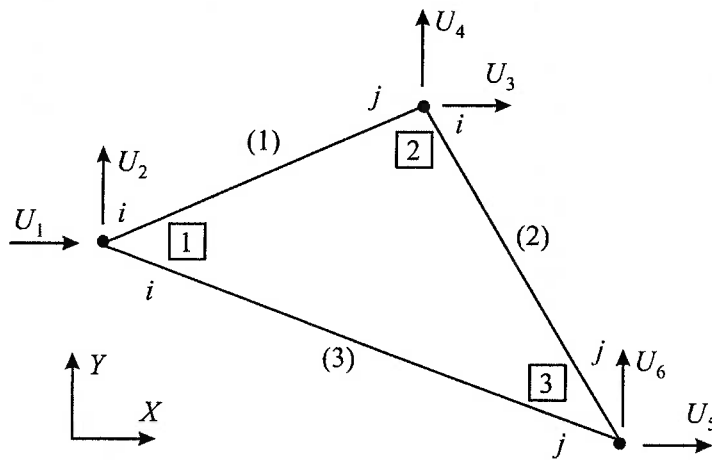


Figura 2.12 Coordenadas de deslocamento do sistema para uma treliça.

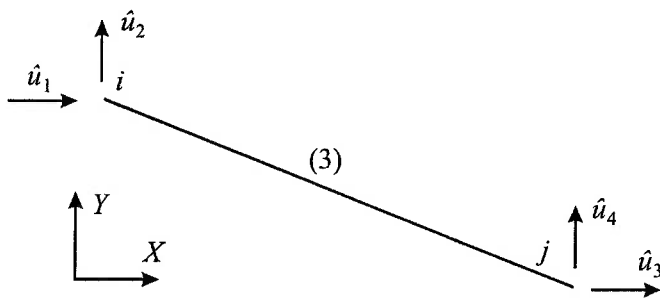


Figura 2.13 Coordenadas de deslocamento do elemento referenciadas no sistema global.

Comparando a Figura 2.13 com a Figura 2.12 notamos que os deslocamentos do elemento 3 são relacionados por

$$\begin{aligned}
\hat{u}_1 &= U_1 \\
\hat{u}_2 &= U_2 \\
\hat{u}_3 &= U_5 \\
\hat{u}_4 &= U_6
\end{aligned}
\tag{2.103}$$

As coordenadas do elemento referenciadas nos eixos globais podem ser relacionadas com as coordenadas de deslocamento do sistema através de *matrizes de localização*,  $\mathbf{L}_e$ , isto é

$$\hat{\mathbf{u}}_e = \mathbf{L}_e \mathbf{U} \tag{2.104}$$

Por exemplo, para o elemento 3 mostrado na Figura 2.13

$$\mathbf{L}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.105}$$

O número de linhas de  $\mathbf{L}_e$  é igual ao número de linhas de  $\hat{\mathbf{u}}_e$ , e o número de colunas de  $\mathbf{L}_e$  é igual ao número de graus de liberdade (DOF) do sistema. Visto que  $\mathbf{L}_e$  consiste somente de zeros e uns, é mais eficiente em aplicações computacionais armazenar as informações de localização como um *vetor de localização*  $\mathbf{l}_e$  o qual lista as coordenadas do sistema que correspondem as respectivas coordenadas dos elemento em  $\hat{\mathbf{u}}_e$ . Por exemplo, para o elemento 3

$$\mathbf{l}_3^T = [1 \quad 2 \quad 5 \quad 6] \tag{2.106}$$

Podemos chegar a um procedimento de montagem para o método da rigidez expressando a energia de deformação da estrutura como uma soma das energias de deformação dos elementos, isto é,

$$V = \sum_{e=1}^{N_e} V_e = \sum_{e=1}^{N_e} \left( \frac{1}{2} \hat{\mathbf{u}}_e^T \hat{\mathbf{k}}_e \hat{\mathbf{u}}_e \right) = \sum_{e=1}^{N_e} \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K}_e \mathbf{U} \tag{2.107}$$

onde foi usada a Equação 2.104, e onde

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{L}_e^T \hat{\mathbf{k}}_e \mathbf{L}_e \tag{2.108}$$



A energia de deformação do sistema também pode ser escrita como

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} \quad (2.109)$$

onde  $\mathbf{K}$  é a *matriz de rigidez do sistema* dada por

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{K}_e \quad (2.110)$$

Embora o processo de montagem da matriz de rigidez do sistema a partir das  $N_e$  matrizes do elemento,  $\hat{\mathbf{k}}_e$ , pareça envolver dois passos dados pelas Equações 2.108 e 2.110, os dois passos podem ser combinados em um eficiente processo chamado método da rigidez, o qual será ilustrado para a treliça de três barras mostrada na Figura 2.12.

Inicialmente mostraremos que a Equação 2.108 simplesmente aloca os elementos da matriz  $\hat{\mathbf{k}}_e$  na posição apropriada correspondente aos graus de liberdade do sistema do elemento  $e$ . Considere o elemento 3 para o qual  $\mathbf{L}_3$  é dado na Equação 2.105. Dado

$$\hat{\mathbf{k}}_3 = \begin{bmatrix} \hat{k}_{11} & \hat{k}_{12} & \hat{k}_{13} & \hat{k}_{14} \\ \hat{k}_{21} & \hat{k}_{22} & \hat{k}_{23} & \hat{k}_{24} \\ \hat{k}_{31} & \hat{k}_{32} & \hat{k}_{33} & \hat{k}_{34} \\ \hat{k}_{41} & \hat{k}_{42} & \hat{k}_{43} & \hat{k}_{44} \end{bmatrix} \quad (2.111)$$

Então,

$$\hat{\mathbf{k}}_3 \mathbf{L}_3 = \begin{bmatrix} \hat{k}_{11} & \hat{k}_{12} & 0 & 0 & \hat{k}_{13} & \hat{k}_{14} \\ \hat{k}_{21} & \hat{k}_{22} & 0 & 0 & \hat{k}_{23} & \hat{k}_{24} \\ \hat{k}_{31} & \hat{k}_{32} & 0 & 0 & \hat{k}_{33} & \hat{k}_{34} \\ \hat{k}_{41} & \hat{k}_{42} & 0 & 0 & \hat{k}_{43} & \hat{k}_{44} \end{bmatrix} \quad (2.112)$$

Isto é, pós-multiplicando por uma matriz  $\mathbf{L}_e$  simplesmente coloca-se os coeficientes de  $\hat{\mathbf{k}}_e$  nas colunas apropriadas de  $\mathbf{K}_e$ . Pré-multiplicando por  $\mathbf{L}_e^T$  expande-se as linhas e coloca-se os coeficientes na localização apropriada da linha de  $\mathbf{K}_e$ . Finalmente, a Equação 2.110 soma os coeficientes na localização

apropriada de  $\mathbf{K}$ .

A pós-multiplicação por  $\mathbf{L}_e$  e a pré-multiplicação por  $\mathbf{L}_e^T$  envolve muitas operações de multiplicação desnecessárias, visto que o resultado final é simplesmente um movimento dos elementos de  $\hat{\mathbf{k}}_e$  para a posição apropriada nas linhas e colunas e adição em  $\mathbf{K}$ . Contornar essas multiplicações e apenas adicionar diretamente os coeficientes de  $\hat{\mathbf{k}}_e$  na localização apropriada em  $\mathbf{K}$  com a ajuda de informações de um vetor de localização  $\mathbf{l}_e$ , como por exemplo a Equação 2.106, é referenciado como o método da rigidez para montagem da matriz  $\mathbf{K}$ .<sup>4</sup>

A matriz de massa do sistema pode ser montada da mesma forma (isto é, pelo método da rigidez) como pode ser visto considerando a energia cinética do sistema.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{N_e} \dot{\mathbf{u}}_e^T \hat{\mathbf{m}}_e \dot{\mathbf{u}}_e \\ &= \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{N_e} \dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M}_e \dot{\mathbf{U}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}} \end{aligned} \quad (2.113)$$

onde

$$\mathbf{M}_e = \mathbf{L}_e^T \hat{\mathbf{m}}_e \mathbf{L}_e \quad (2.114)$$

e

$$\mathbf{M} = \sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{M}_e \quad (2.115)$$

O trabalho virtual feito pelas cargas pode ser usado para obter o vetor de força do sistema  $\mathbf{P}$  correspondente aos deslocamentos do sistema  $\mathbf{U}$ . Assim,

---

<sup>4</sup> O método da rigidez foi formulado em termos da soma das contribuições de cada elemento para a energia de deformação total da estrutura e, portanto para a matriz de rigidez da estrutura. Uma aproximação similar empregando trabalho virtual e energia de deformação é explorada por Przemieniecki (1968). Uma discussão alternativa do método da rigidez, a qual é baseada na soma das forças nodais para satisfazer o equilíbrio nodal, é apresentada por McGuire; Gallagher (1979).

$$\delta W = \sum_{e=1}^{N_e} \delta \hat{\mathbf{u}}_e^T \hat{\mathbf{p}}_e = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{P} \quad (2.116)$$

Combinando a Equação 2.103 com a Equação 2.116 obtemos

$$\sum_{e=1}^{N_e} \delta \hat{\mathbf{u}}_e \hat{\mathbf{p}}_e = \delta \mathbf{U}^T \left( \sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{L}_e^T \hat{\mathbf{p}}_e \right) \quad (2.117)$$

assim, visto que os deslocamentos virtuais  $\delta U_i$  são independentes,

$$\mathbf{P} = \sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{L}_e^T \hat{\mathbf{p}}_e \quad (2.118)$$

Da mesma forma que não foi necessário realizar a pré e pós-multiplicação na Equação 2.108, não é necessário realizar as multiplicações na Equação 2.118. Para montar o vetor de força do sistema  $\mathbf{P}$  é somente necessário usar as informações de localização para designar as componentes do vetor de força de cada elemento  $\hat{\mathbf{p}}_e$  para a linha apropriada do vetor de força do sistema  $\mathbf{P}$ .

### 2.3.5 Condições de Contorno

Para problemas dinâmicos expressos na forma matricial é necessário incluir condições de contorno de dois tipos: forças prescritas e deslocamentos prescritos. A Equação 2.118 foi fornecida para a montagem do vetor de força do sistema a partir dos vetores de força dos elementos, a esta podem ser adicionados quaisquer carregamentos concentrados aplicados nos nós. Nesta seção examinaremos o procedimento para impor condições de contorno em um modelo em elementos finitos de uma estrutura.

Na Seção 2.3.4 as matrizes do sistema  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{M}$  foram montadas ainda que todos os nós da estrutura estavam sem restrições (por exemplo, veja a Figura 2.12). Isto leva a uma matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  singular, e o sistema tem movimento de corpo rígido. Quando os deslocamentos de determinados nós são prescritos para serem zero, o procedimento mais direto para impor esta

condição é particionar o sistema em *graus de liberdade ativos* e *graus de liberdade restritos*. Assim, para um sistema sem amortecimento a equação do movimento particionada é

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{aa} & \mathbf{M}_{ac} \\ \mathbf{M}_{ca} & \mathbf{M}_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}_a \\ \ddot{\mathbf{U}}_c \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ac} \\ \mathbf{K}_{ca} & \mathbf{K}_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_a \\ \mathbf{U}_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_a \\ \mathbf{P}_c \end{Bmatrix} \quad (2.119)$$

Mas, se  $\mathbf{U}_c = 0$  devido a restrição dos  $c$  deslocamentos, a Equação 2.119 pode ser escrita como

$$\mathbf{M}_{aa} \ddot{\mathbf{U}}_a + \mathbf{K}_{aa} \mathbf{U}_a = \mathbf{P}_a \quad (2.120)$$

$$\mathbf{P}_c = \mathbf{M}_{ca} \ddot{\mathbf{U}}_a + \mathbf{K}_{ca} \mathbf{U}_a \quad (2.121)$$

Inicialmente, deve-se resolver a Equação 2.120 para o vetor dos deslocamentos ativos  $\mathbf{U}_a(t)$ . Em seguida, as reações nas restrições podem ser obtidas da Equação 2.121. De qualquer forma, visto que somente  $\mathbf{M}_{aa}$  e  $\mathbf{K}_{aa}$  são requeridas na solução para o vetor dos deslocamentos ativos  $\mathbf{U}_a$ , as partes restantes das matrizes  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{M}$  não precisam ser montadas a partir das correspondentes matrizes dos elementos. Neste caso, as reações podem ser obtidas das forças nos elementos após estas serem calculadas, ao invés de usar a Equação 2.121.

### 2.3.6 Equações de Restrição e Redução de Graus de Liberdade

Na seção anterior tratamos de restrições impostas como condições de contorno na estrutura. Frequentemente tem-se a necessidade de especificar a relação entre sistemas de coordenadas de deslocamento. Esta transformação de coordenadas pode ser escrita como

$$\mathbf{U} = \mathbf{T}\hat{\mathbf{U}} \quad (2.122)$$

onde  $\hat{N} \leq N$  e  $\hat{\mathbf{U}}$  é o vetor de coordenadas generalizadas. A Equação 2.122 pode ser referenciada como uma transformação de Ritz; análoga a Equação 2.9.

Usando equivalência de energia obtemos a equação do movimento

$$\hat{\mathbf{M}}\ddot{\hat{\mathbf{U}}} + \hat{\mathbf{C}}\dot{\hat{\mathbf{U}}} + \hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{U}} = \hat{\mathbf{P}} \quad (2.123)$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{M}} &= \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T}, & \hat{\mathbf{C}} &= \mathbf{T}^T \mathbf{C} \mathbf{T} \\ \hat{\mathbf{K}} &= \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T}, & \hat{\mathbf{P}} &= \mathbf{T}^T \mathbf{P} \end{aligned} \quad (2.124)$$

A matriz de transformação  $\mathbf{T}$  pode ser obtida como um resultado da necessidade de especificar a relação entre diferentes sistemas de coordenadas de deslocamento. A equação de restrição pode ser escrita na forma matricial como

$$\mathbf{R}\mathbf{U} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{da} & \mathbf{R}_{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_a \\ \mathbf{U}_d \end{Bmatrix} = 0 \quad (2.125)$$

onde  $\mathbf{U}_d$  é o vetor das  $N_d$  coordenadas dependentes e  $\mathbf{U}_a$  é o vetor das coordenadas independentes ou ativas. A Equação 2.125 pode ser resolvida para  $\mathbf{U}_d$  resultando

$$\mathbf{U}_d = -\mathbf{R}_{dd}^{-1} \mathbf{R}_{da} \mathbf{U}_a \quad (2.126)$$

Portanto, o conjunto original de coordenada  $\mathbf{U}$  pode ser relacionado com as coordenadas ativas pela equação

$$\mathbf{U} \equiv \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_a \\ \mathbf{U}_d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{aa} \\ \mathbf{T}_{da} \end{bmatrix} \mathbf{U}_a \equiv \mathbf{T} \mathbf{U}_a \quad (2.127)$$

onde as coordenadas ativas formam  $\hat{\mathbf{U}}$  e onde

$$\mathbf{T}_{da} = -\mathbf{R}_{dd}^{-1} \mathbf{R}_{da} \quad (2.128)$$

Uma equação de restrição como a Equação 2.125 pode ser obtida de uma situação onde um corpo rígido é conectado a uma estrutura elástica. Weaver (1966) discute os aspectos avançados da dinâmica de corpos rígidos conectados elasticamente.

Outro exemplo de aplicação de equações de restrição para redução de

graus de liberdade é a *condensação estática*. Considere um sistema sem amortecimento onde a inércia é representada por uma matriz de massa discreta, como descrito na Seção 2.3.2. A equação do movimento pode ser escrita na forma matricial particionada

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{aa} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}_a \\ \ddot{\mathbf{U}}_d \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ad} \\ \mathbf{K}_{da} & \mathbf{K}_{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_a \\ \mathbf{U}_d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_a \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.129)$$

A partição inferior fornece uma equação de restrição estática

$$\mathbf{K}_{da} \mathbf{U}_a + \mathbf{K}_{dd} \mathbf{U}_d = 0 \quad (2.130)$$

a qual é da mesma forma da Equação 2.125. Portanto a matriz de transformação é

$$\mathbf{T} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{aa} \\ \mathbf{T}_{da} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{aa} \\ -\mathbf{K}_{dd}^{-1} \mathbf{K}_{da} \end{bmatrix} \quad (2.131)$$

A matriz de transformação da Equação 2.131 pode ser usada em conjunto com as Equações 2.124 e 2.129 para obter a equação do movimento para as coordenadas ativas  $\mathbf{U}_a$ . As matrizes de massa e rigidez reduzidas são determinadas por

$$\hat{\mathbf{M}}_{aa} = \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{aa} & \mathbf{T}_{da}^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{aa} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{aa} \\ \mathbf{T}_{da} \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{aa} \quad (2.132)$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{aa} = \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{aa} & \mathbf{T}_{da}^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ad} \\ \mathbf{K}_{da} & \mathbf{K}_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{aa} \\ \mathbf{T}_{da} \end{bmatrix} = \mathbf{K}_{aa} - \mathbf{K}_{da}^T \mathbf{K}_{dd}^{-1} \mathbf{K}_{da} \quad (2.133)$$

Desta forma, para um modelo de massa discreta o tamanho do problema pode ser reduzido usando somente as coordenadas com inércia associada. A matriz de massa não é alterada, enquanto que a matriz de rigidez transforma-se na *matriz de rigidez reduzida*  $\hat{\mathbf{K}}_{aa}$  definida pela Equação 2.133.

Uma técnica freqüentemente empregada para reduzir o número de graus de liberdade (DOF) de um sistema é o *método de redução de Guyan* (GUYAN, 1965). Mesmo que todas as coordenadas tenham inércia associada, um subconjunto de coordenadas é selecionado arbitrariamente como conjunto de

coordenadas ativas (ou *master*) e as coordenadas restantes são coordenadas dependentes (ou *slave*). Então, a matriz de transformação de Ritz da Equação 2.122 é tomada como sendo a mesma daquela obtida para um sistema de massa discreta na Equação 2.131. Os vetores de base de Ritz, os quais são as colunas da matriz de transformação de Ritz  $\mathbf{T}$ , são formas de deslocamento associadas a um deslocamento unitário das respectivas coordenadas ativas enquanto que as coordenadas dependentes são atualizadas. Anderson; Irons; Zienkiewicz (1968) discutem a aplicação deste procedimento de redução para análise de vibração e flambagem e mostram o efeito da escolha das coordenadas e do número de coordenadas retidas na precisão dos autovalores e autovetores obtidos.

### 2.3.7 Sistemas com Modos de Corpo Rígido

Alguns métodos algébricos de extração de autovalores e autovetores (por exemplo, métodos iterativos) requerem a solução da equação de autovalores

$$\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}\phi = \left(\frac{1}{\lambda}\right)\phi \quad (2.134)$$

Quando uma estrutura tem modos de corpo rígido, não é possível inverter a matriz  $\mathbf{K}$ , visto que  $\mathbf{K}$  é singular. Um procedimento para eliminação de movimentos de corpo rígido pode ser expresso na forma de uma transformação de coordenadas que separa as coordenadas de corpo rígido das coordenadas de deformação elástica. Escrevendo a matriz  $\mathbf{K}$  original como

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ee} & \mathbf{K}_{er} \\ \mathbf{K}_{re} & \mathbf{K}_{rr} \end{bmatrix} \quad (2.135)$$

A transformação de Ritz tem a forma da Equação 2.122, ou seja

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{U}_e \\ \mathbf{U}_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{ee} & (\mathbf{K}_{ee}^{-1}\mathbf{K}_{er}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{U}}_e \\ \hat{\mathbf{U}}_r \end{Bmatrix} \quad (2.136)$$

esta equação junto com a Equação 2.124 conduz a matriz de rigidez generalizada

$$\hat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ee} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.137)$$

A transformação dada pela Equação 2.136 leva para uma forma particular simples de  $\hat{\mathbf{K}}$ , a qual mostra claramente que as coordenadas  $\mathbf{U}_r$  representam um movimento de corpo rígido. Qualquer conjunto de vetores linearmente independentes podem substituir a matriz  $\mathbf{I}_{ee}$  na Equação 2.136, mas outras escolhas não conduziriam a  $\hat{\mathbf{K}}_{ee} = \mathbf{K}_{ee}$  como na Equação 2.137.



## Capítulo 3

# Redução Dinâmica

As soluções usadas em análise dinâmica são mais complicadas do que a solução de uma simples equação matricial. Comparados com uma análise linear estática, o tempo de processamento e o espaço em disco requeridos para problemas dinâmicos são muito maiores. Desta forma, o número de equações do sistema deve ser reduzido para viabilizar a solução do problema.

Neste capítulo são apresentados os principais métodos de redução das matrizes do sistema. São discutidos os métodos diretos, formulações modais e métodos combinados.

### 3.1 Introdução

Redução dinâmica é uma aproximação numérica que permite reduzir o número de graus de liberdade (DOF) de um modelo dinâmico. O objetivo da redução dinâmica é aumentar a eficiência da solução trabalhando-se com matrizes pequenas e mantendo as características dinâmicas do sistema.

Esta técnica pode ser usada por diversas razões. Uma possibilidade é quando o modelo matemático é muito grande para ser resolvido, do ponto de vista dos recursos computacionais, sem a utilização de redução. Um caso típico é que o modelo contenha mais detalhes que o requerido. Muitas vezes as análises dinâmicas são executadas em modelos que foram inicialmente concebidos para uma análise estática detalhada de tensões, a qual requer

malhas refinadas para uma avaliação precisa. Quando estes modelos são usados em análises dinâmicas, o detalhamento do modelo é significativamente maior do que o requerido para prever com precisão as frequências naturais e os modos de vibrar da estrutura.

No contexto de projetos de estruturas grandes e complexas, os principais componentes são freqüentemente projetados e analisados por equipes distintas ou por diferentes organizações. Assim, pode ser difícil montar de forma rápida um modelo em *elementos finitos* da estrutura inteira. Além disso, o modelo completo da estrutura possivelmente terá tantos graus de liberdades que seria inviável executar uma análise dinâmica baseada nas equações em *elementos finitos* para o sistema completo.

## **3.2 Métodos Fundamentais**

Dois aproximações têm sido efetivamente usadas para reduzir o número de graus de liberdade na análise dinâmica de estruturas. A mais simples é baseada na hipótese de que as forças de inércia são associadas somente com certos graus de liberdade selecionados da idealização original; os graus de liberdade restantes não são explicitamente envolvidos na análise dinâmica e podem ser condensados na formulação do problema. Na segunda aproximação, o número de graus de liberdade é limitado pela hipótese de que os deslocamentos da estrutura são uma combinação de formas selecionadas, as amplitudes desses deslocamentos se transformam em coordenadas generalizadas na análise dinâmica (CLOUGH, 1975). Estas aproximações são empregadas em diversas técnicas específicas e suas características essenciais são discutidas a seguir.

### **3.2.1 Alocação de Massa Discreta**

Na análise de estruturas formadas por vigas, é uma prática comum reduzir o número de graus de liberdade supondo que a massa esteja concentrada em pontos discretos nas uniões da estrutura. Desprezando a inércia rotacional dos pontos discretos a redução dos graus de liberdade é de 33% para uma estrutura plana e de 50% para uma estrutura tridimensional. Se as deformações axiais dos membros são desprezadas, de forma que o

número de graus de liberdade de translação envolvido seja relativamente menor, a eliminação dos graus de liberdade de rotação é muito mais significativa; na análise de estruturas de edifícios, o número de graus de liberdade usados na análise dinâmica é freqüentemente menor que 10% do número de graus de liberdade da análise estática. Em alguns tipos de sistemas estruturais, reduções adicionais são feitas assumindo que a massa é concentrada somente em um conjunto de pontos selecionados da estrutura. De qualquer forma, esta extensão da idéia é muito menos confiável que a simples eliminação dos graus de liberdade de rotação os quais são associados com uma parcela muito pequena da energia cinética da estrutura.

A eliminação dos graus de liberdade não-essenciais geralmente é feita pelo procedimento de *condensação estática*, descrito na Seção 2.3.6. Embora o princípio da condensação estática seja bem conhecido e amplamente utilizado para a eliminação dos graus de liberdade não-essenciais de sistemas pequenos, nem sempre ele é um procedimento eficiente para grandes estruturas.

### **3.2.2 Método de Rayleigh-Ritz**

A redução de graus de liberdade pelo procedimento de condensação estática pode ser muito eficaz em certas classes de estruturas, contudo, a aplicação do método e a extensão das possibilidades de redução são limitadas. Por outro lado, as técnicas de redução baseadas no uso de coordenadas generalizadas representando as amplitudes de formas de deslocamento fictícias são aplicadas para qualquer tipo de sistema estrutural, e podem alcançar qualquer grau de redução desejado. Conseqüentemente, diversas técnicas de redução baseadas neste conceito têm sido usadas em dinâmica estrutural. A essência de todas estas técnicas é o *método de Rayleigh* ou a generalização conhecida como *método de Rayleigh-Ritz*.

A aplicação do método de Rayleigh e das extensões de Ritz para sistemas com múltiplos graus de liberdade estão apresentadas nas Seções 2.2.1 e 2.2.2.

### 3.3 Método de Redução de Guyan

#### 3.3.1 Desenvolvimento Matemático

O método de redução de Guyan (GUYAN, 1965) envolve a reformulação das matrizes de rigidez e massa baseada na partição da matriz de rigidez. A equação do equilíbrio dinâmico pode ser escrita na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \overline{\mathbf{M}}_{aa} & \mathbf{M}_{ad} \\ \mathbf{M}_{da} & \mathbf{M}_{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}_a \\ \ddot{\mathbf{U}}_d \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{C}}_{aa} & \mathbf{C}_{ad} \\ \mathbf{C}_{da} & \mathbf{C}_{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_a \\ \dot{\mathbf{U}}_d \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{K}}_{aa} & \mathbf{K}_{ad} \\ \mathbf{K}_{da} & \mathbf{K}_{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_a \\ \mathbf{U}_d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_a \\ \mathbf{P}_d \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

onde

$\mathbf{U}_a, \dot{\mathbf{U}}_a, \ddot{\mathbf{U}}_a$  são os deslocamentos, velocidades e acelerações ativos na solução.

$\mathbf{U}_d, \dot{\mathbf{U}}_d, \ddot{\mathbf{U}}_d$  são os deslocamentos, velocidades e acelerações dependentes, eliminados da solução.

$\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$  são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez.

$\mathbf{P}_a, \mathbf{P}_d$  são os carregamentos aplicados.

Note que todos os movimentos de corpo rígido devem ser incluídos na partição  $\mathbf{U}_a$ , caso contrário  $\mathbf{K}_{dd}$  será singular. A barra superior indica quantidades sem redução.

Para problemas estáticos podemos desprezar os efeitos de inércia e amortecimento e resolver a partição inferior da Equação 3.1 para  $\mathbf{U}_d$ .

$$\mathbf{U}_d = -\mathbf{k}_{dd}^{-1} (\mathbf{K}_{da} \mathbf{U}_a - \mathbf{P}_d) \quad (3.2)$$

Duas partes da Equação 3.2 tornam-se a matriz de Guyan  $\mathbf{G}_d$  e a correção estática do deslocamento  $\mathbf{U}_d^d$ .

$$\mathbf{G}_d = -\mathbf{k}_{dd}^{-1} \mathbf{K}_{da} \quad (3.3)$$

$$\mathbf{U}_d^d = \mathbf{k}_{dd}^{-1} \mathbf{P}_d \quad (3.4)$$

A solução estática exata é obtida substituindo-se as Equações 3.2 a 3.4 nos termos superiores da Equação 3.1, resultando nas equações reduzidas usadas na solução estática

$$\mathbf{K}_{aa}\mathbf{U}_a = \mathbf{P}_a \quad (3.5)$$

$$\mathbf{U}_d = \mathbf{G}_d\mathbf{U}_a + \mathbf{U}_d^d \quad (3.6)$$

onde

$$\mathbf{K}_{aa} = \mathbf{K}_{aa} + \mathbf{K}_{ad}\mathbf{G}_d \quad (3.7)$$

$$\mathbf{P}_a = \mathbf{P}_a + \mathbf{G}_d^T\mathbf{P}_d \quad (3.8)$$

Na prática, a dimensão de  $\mathbf{U}_a$  é usualmente pequena comparada com  $\mathbf{U}_d$ , mas as matrizes reduzidas são densas, não diminuindo o custo da análise. A economia na solução da Equação 3.5 é usualmente igual ao custo do cálculo de  $\mathbf{G}_d$  e  $\mathbf{U}_d^d$ .

Contudo, na análise dinâmica os vetores  $\dot{\mathbf{U}}_d$  e  $\ddot{\mathbf{U}}_d$  também podem ser aproximados para reduzir a ordem do sistema. Partindo-se das propriedades estáticas, Equação 3.6, define-se a seguinte transformação

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_a \\ \mathbf{U}_d \end{Bmatrix} = \mathbf{H}\mathbf{U}' \quad (3.9)$$

onde

$$\mathbf{U}' = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_a \\ \mathbf{U}_d^d \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & | & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{G}_d & | & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Aqui  $\mathbf{U}_d^d$  são os deslocamentos incrementais relativos a forma estática. O sistema descrito na Equação 3.1 pode ser transformado para as novas coordenadas sem perda de precisão. A matriz de rigidez no sistema

transformado é

$$\mathbf{K}' = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{G}_d^T \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ad} \\ \mathbf{K}_{da} & \mathbf{K}_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{G}_d & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Fazendo a multiplicação e substituindo a Equação 3.3 temos

$$\mathbf{K}' = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{dd} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Embora a matriz de rigidez se torna desacoplada, as matrizes de massa e amortecimento tendem ter mais acoplamento que no sistema original. Visto que os termos de amortecimento têm a mesma forma dos de massa, eles não serão incluídos aqui. A transformação exata do sistema torna-se

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}'_{aa} & \mathbf{M}'_{ad} \\ \mathbf{M}'_{da} & \mathbf{M}'_{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}_a \\ \ddot{\mathbf{U}}_d \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_a \\ \mathbf{U}_d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_a \\ \mathbf{P}_d \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

onde

$$\mathbf{M}'_{aa} = \mathbf{M}_{aa} + \mathbf{M}_{ad} \mathbf{G}_d + \mathbf{G}_d^T (\mathbf{M}_{da} + \mathbf{M}_{dd} \mathbf{G}_d) \quad (3.15)$$

$$\mathbf{M}'_{ad} = \mathbf{M}'_{da} = \mathbf{M}_{ad} + \mathbf{G}_d^T \mathbf{M}_{dd} \quad (3.16)$$

$$\mathbf{M}'_{dd} = \mathbf{M}_{dd} \quad (3.17)$$

Os termos da matriz de amortecimento  $\mathbf{C}'$  são similares em forma as partições da matriz de massa. Uma derivação alternativa a qual não depende de transformação simétrica é dada abaixo. A partir das Equações 3.1 a 3.8, podemos estimar os efeitos da aceleração dos pontos dependentes pela equação

$$\ddot{\mathbf{U}}_d \cong \mathbf{G}_d \ddot{\mathbf{U}}_a \quad (3.18)$$

Substituindo a Equação 3.18 na partição inferior da Equação 3.1 e resolvendo para  $\mathbf{U}_d$ , desprezando o amortecimento, obtemos a aproximação

$$\mathbf{U}_d = \mathbf{K}_{dd}^{-1} (\mathbf{P}_d - \mathbf{K}_{da} \mathbf{U}_a - (\mathbf{M}_{da} + \mathbf{M}_{dd} \mathbf{G}_d) \ddot{\mathbf{U}}_a) \quad (3.19)$$

Substituindo a Equação 3.3 para  $\mathbf{K}_{da}$  e a Equação 3.16 para os termos de

massa na Equação 3.19, obtemos

$$\mathbf{U}_d \cong \mathbf{G}_d \mathbf{U}_a + \mathbf{K}_{dd}^{-1} (\mathbf{P}_d - \mathbf{M}'_{da} \ddot{\mathbf{U}}_a) \quad (3.20)$$

Substituindo as Equações 3.18 e 3.20 na parte superior da Equação 3.1, e desprezando o amortecimento, obtemos

$$\begin{aligned} (\bar{\mathbf{M}}_{aa} + \mathbf{M}_{ad} \mathbf{G}_d) \ddot{\mathbf{U}}_a + (\bar{\mathbf{K}}_{aa} + \mathbf{K}_{ad} \mathbf{G}_d) \mathbf{U}_a - (\mathbf{K}_{ad} \mathbf{K}_{dd}^{-1}) (\mathbf{M}_{da} + \mathbf{M}_{dd} \mathbf{G}_d) \ddot{\mathbf{U}}_a \\ = \bar{\mathbf{P}}_a - \mathbf{K}_{ad} \mathbf{K}_{dd}^{-1} \mathbf{P}_d \end{aligned} \quad (3.21)$$

Combinando os termos da Equação 3.21, obtemos os mesmos resultados das Equações 3.14 a 3.17.

Este desenvolvimento nos mostra que a transformação de Guyan tem propriedades muito interessantes:

- a) A aproximação ocorre somente nos termos de aceleração (Equação 3.18);
- b) A matriz de rigidez do sistema reduzido é exata;
- c) Os deslocamentos definidos pelas Equações 3.20 e 3.14 são quase idênticos.

No processo de redução de Guyan as acelerações relativas dependentes,  $\ddot{\mathbf{U}}_d^d$ , da Equação 3.14 podem ser aproximadas pela Equação 3.18. Desta forma, o sistema de solução resultante é

$$\mathbf{M}'_{aa} \ddot{\mathbf{U}}_a + \mathbf{K}'_{aa} \mathbf{U}_a = \mathbf{P}'_a \quad (3.22)$$

O sistema descrito pela Equação 3.22 tem várias propriedades desejáveis. As propriedades de massa e centro de gravidade do sistema são preservadas na matriz de massa. Também se nota que a rigidez estática é exata. Se ocorrerem acelerações, os erros podem ser estimados pela solução para  $\mathbf{U}_d^d$  depois que  $\mathbf{U}_a$  é obtido. Os pontos eliminados da solução,  $\mathbf{U}_d^d$ , podem ser recuperados resolvendo-se a partição inferior da Equação 3.14.

De qualquer forma, na maioria das aplicações, os termos de rigidez da

Equação 3.14 predominam e os modos normais dos graus de liberdades eliminados são de frequências maiores do que o conjunto de solução. Então, podemos ignorar a massa do lado esquerdo e resolver  $U_d$  diretamente pela equação

$$U_d = G_d U_a \quad (3.23)$$

Os erros na Equação 3.23 são proporcionais ao vetor  $U_d^d$ , os quais tornam-se pequenos quando as massas concentradas e os carregamentos aplicados no conjunto de coordenadas dependentes são pequenos. Por causa da mesma hipótese, os erros da parte superior da Equação 3.14 também são pequenos.

### **3.3.2 Procedimentos para Seleção de Graus de Liberdade**

A escolha dos graus de liberdade ativos é um passo importante na análise de um modelo reduzido. A precisão da matriz de massa reduzida, por conseguinte a precisão da solução, depende do número e da localização dos graus de liberdade ativos. Para um dado problema, podemos escolher diferentes conjuntos de graus de liberdade ativos e provavelmente obteremos resultados aceitáveis em todos os casos.

Alguns programas de elementos finitos permitem a seleção manual de graus de liberdade ou a seleção automática durante a solução, neste caso é recomendado o uso de ambas. Desta forma, o programa pode selecionar modos omitidos pela seleção manual. Os seguintes tópicos resumem os procedimentos para seleção de graus de liberdade:

- a) O número de graus de liberdade ativos deve ser pelo menos o dobro do número de modos de interesse;
- b) Deve-se escolher graus de liberdade em direções nas quais espera-se que a estrutura ou componente irá vibrar. Para uma placa plana, por exemplo, deve-se escolher pelo menos alguns graus de liberdade na direção perpendicular ao plano, como mostra a Figura 3.1 (a). Em casos onde o movimento em uma direção causa movimento significativo em outra direção, deve-se escolher graus de liberdade em ambas as



direções, como mostra a Figura 3.1 (b);

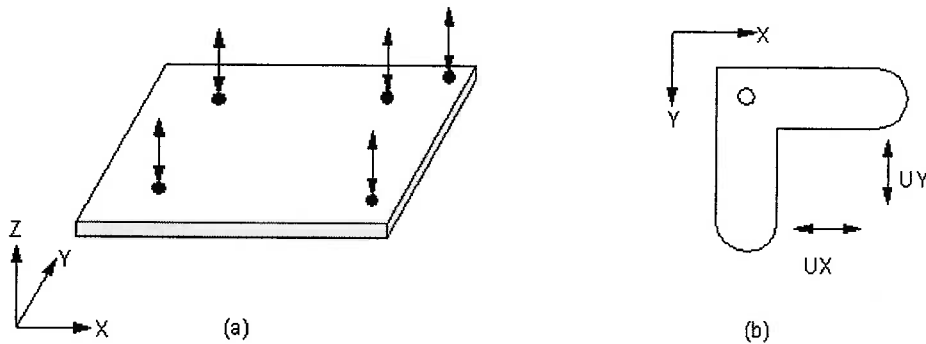


Figura 3.1 Escolha de graus de liberdade: (a) para uma placa plana (b) em casos onde o movimento em X causa movimento em Y.

- c) Deve-se escolher graus de liberdade em locais com massas relativamente grandes ou inércia rotatória e rigidez relativamente baixa, como mostra a Figura 3.2. Reciprocamente, não se deve escolher graus de liberdade em locais com massas relativamente pequenas ou em locais com rigidez alta, como por exemplo, graus de liberdade próximos a restrições;

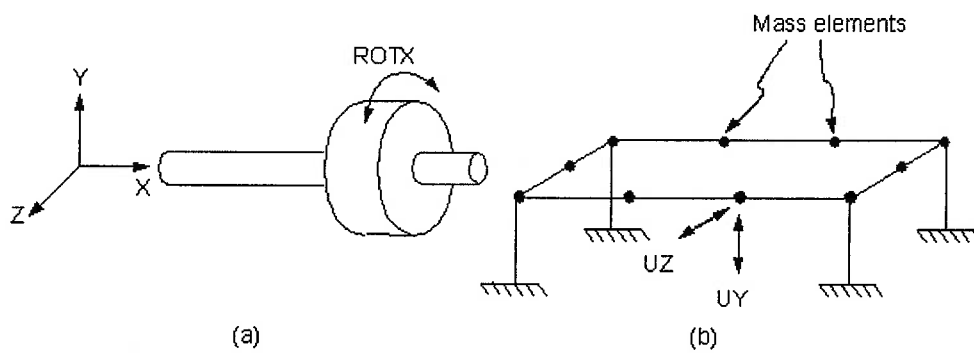


Figura 3.2 Escolha de graus de liberdade em locais com: (a) grande inércia rotatória (b) grandes massas.

- d) Se o interesse principal são os modos de flexão, pode-se desprezar os graus de liberdade de rotação e estiramento;
- e) Se os graus de liberdade a serem escolhidos pertencem a um acoplamento, deve-se escolher somente os graus de liberdade primários

do acoplamento;

- f) Deve-se escolher graus de liberdade em locais onde serão aplicados forças ou deslocamentos diferentes de zero.

A melhor forma para verificar a validade dos graus de liberdade selecionados é re-executar a análise com o dobro (ou a metade) do número de graus de liberdade e comparar os resultados. Outra forma é verificar a distribuição de massa reduzida na análise modal. A massa reduzida deve ser, pelo menos na direção dominante do movimento, cerca de 10 a 15% da massa total da estrutura.

Em malhas com tamanhos de elemento e propriedades uniformes (por exemplo, uma placa plana) a distribuição dos graus de liberdade selecionados automaticamente durante a solução, em geral, não é uniforme. Isto ocorre porque a seleção dos graus de liberdade é determinada por uma relação matemática de rigidez e massa. Nestes casos, deve-se incluir alguns graus de liberdade manualmente. A mesma recomendação é aplicada a estruturas com uma distribuição de massa irregular, onde os graus de liberdade selecionados automaticamente podem se concentrar nas regiões de maior massa.

### **3.3.3 Dificuldades com a Redução de Guyan**

Nas aplicações do método de redução de Guyan as seguintes dificuldades podem ser encontradas:

- a) Esforço do usuário na seleção dos graus de liberdade;
- b) A precisão dos resultados depende da destreza do usuário na seleção dos graus de liberdade;
- c) O número de graus de liberdade ativos na solução deve ser de 2 a 5 vezes o número de modos de interesse;
- d) A redução da rigidez é exata enquanto que as reduções de massa e amortecimento são somente aproximadas;
- e) Não ocorrem perdas na precisão dos modos quando são omitidos graus de liberdade sem massa;
- f) Os erros são mais pronunciados nos modos de alta frequência;

- g) Os modos locais podem ser completamente omitidos;
- h) Recomenda-se a execução de uma análise de correlação;
- i) A condensação estática pode perder os efeitos dinâmicos locais.

### 3.4 Método de Redução Dinâmica em Coordenadas Generalizadas

Na maioria das aplicações, o método de redução dinâmica em coordenadas generalizadas (GDR) é usado diretamente para encontrar os modos do sistema. O método se torna então uma aplicação direta dos procedimentos de Rayleigh-Ritz e Lanczos. De qualquer forma, uma prática recomendada é estender o conjunto  $\mathbf{U}_a$  incluindo grandes massas para evitar problemas numéricos e fornecer resultados mais precisos.

Se os deslocamentos dos nós do conjunto  $\mathbf{U}_a$  são mantidos no processo de redução,  $\mathbf{U}_d^d$  é aproximado pelo conjunto de coordenadas generalizadas,  $\mathbf{U}_q$ , onde

$$\mathbf{U}_d^d \cong \phi_{dq} \mathbf{U}_q \quad (3.24)$$

onde  $\phi_{dq}$  é um conjunto de autovetores ou modos naturais aproximados. De forma simples, com  $\mathbf{U}_l$  substituindo  $\mathbf{U}_a$ , a transformação correspondente a Equação 3.9 é

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{U}_l \\ \mathbf{U}_d^d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{G}_d & \phi_{dq} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_l \\ \mathbf{U}_q \end{Bmatrix} \quad (3.25)$$

O sistema matricial transformado é então

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}'_{ll} & \mathbf{M}'_{lq} \\ \mathbf{M}'_{ql} & \mathbf{M}'_{qq} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}_l \\ \ddot{\mathbf{U}}_q \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}'_{ll} & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{qq} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_l \\ \mathbf{U}_q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}'_l \\ \mathbf{P}'_q \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

onde  $\mathbf{M}'_{ll}$  é definido pela Equação 3.15 com  $\mathbf{U}_l$  substituindo  $\mathbf{U}_a$ , como segue:

$$\mathbf{M}'_{lq} = \mathbf{M}'_{dl} \phi_{dq} + \mathbf{G}_d^T \mathbf{M}_{dd} \phi_{dq} \quad (3.27)$$

$$\mathbf{M}_{qq} = \phi_{dq}^T \mathbf{M}_{dd} \phi_{dq} \quad (3.28)$$

$$\mathbf{K}'_t = \mathbf{K}_t + \mathbf{K}_{td} \mathbf{G}_d \quad (3.29)$$

$$\mathbf{K}_{qq} = \phi_{dq}^T \mathbf{K}_{dd} \phi_{dq} \quad (3.30)$$

$$\mathbf{P}'_t = \mathbf{P}_t + \mathbf{G}_d^T \mathbf{P}_d \quad (3.31)$$

$$\mathbf{P}_q = \phi_{dq}^T \mathbf{P}_d \quad (3.32)$$

Note que, como na redução de Guyan, a rigidez estática exata é mantida. Se existirem acelerações ocorrerão erros quando os deslocamentos modais não se compararem a solução exata para  $\mathbf{U}_d^d$ . Supondo que o erro no deslocamento,  $\varepsilon_d$ , é

$$\varepsilon_d = \phi_q \mathbf{U}_q - \mathbf{U}_d^d \quad (3.33)$$

O erro associado a força modal é

$$\delta_q = (\phi_{dq}^T \mathbf{K}_{dd}) \varepsilon_d = \mathbf{K}_{qq} \mathbf{U}_q - (\phi_{dq}^T \mathbf{K}_{dd}) \mathbf{U}_d^d \quad (3.34)$$

De qualquer forma, da Equação 3.14 obtemos

$$\mathbf{K}_{dd} \mathbf{U}_d^d = \mathbf{P}_d - \mathbf{M}_{dd} \ddot{\mathbf{U}}_d^d - \mathbf{M}'_{dt} \ddot{\mathbf{U}}_t \quad (3.35)$$

e da parte inferior das Equações 3.26 e 3.30 a 3.32 obtemos

$$\mathbf{K}_{qq} \mathbf{U}_q = \phi_a^T \mathbf{P}_d - (\phi_a^T \mathbf{M}_{dd} \phi_d) \ddot{\mathbf{U}}_q - (\phi_d^T \mathbf{M}'_{dt}) \ddot{\mathbf{U}}_t \quad (3.36)$$

Substituindo as Equações 3.35 e 3.36 na Equação 3.34 obtemos

$$\delta_q = (\phi_{dq}^T \mathbf{M}_{dd}) (\ddot{\mathbf{U}}_d^d - \phi_{dq} \ddot{\mathbf{U}}_q) \quad (3.37)$$

Então, observamos que os erros associados a força para a redução em coordenadas generalizadas serão proporcionais a dimensão das massas desprezadas,  $\mathbf{M}_{dd}$ , e com a característica da aproximação

$$\ddot{\mathbf{U}}_d^d \cong \phi_q \ddot{\mathbf{U}}_q \quad (3.38)$$

Em relação a Equação 3.37, o erro associado a força para a redução de Guyan foi

$$\delta_d = \mathbf{M}_{dd} \ddot{\mathbf{U}}_d^d \quad (3.39)$$

Mesmo quando as formas dos modos são somente aproximadas, como na redução em coordenadas generalizadas, concluímos que os resultados (para o mesmo conjunto  $\mathbf{U}_d$ ) serão melhorados a partir dos resultados da redução de Guyan. De qualquer forma, note que quando um conjunto  $\mathbf{U}_i$  não é usado os modos do conjunto  $\mathbf{U}_d^d$  tem as mesmas baixas frequências que os modos do sistema e a aproximação provavelmente não melhora. Em outras palavras, o uso de coordenadas físicas  $\mathbf{U}_i$  no processo de redução em coordenada generalizadas combina a melhor parte dos métodos de redução de Guyan e de Rayleigh-Ritz.

### **3.5 Comparação entre os Métodos de Redução**

A Tabela 3.1 a seguir apresenta uma comparação entre o método de redução de Guyan e o método de redução dinâmica em coordenadas generalizadas.

Tabela 3.1 Método de redução de Guyan *versus* GDR.

	<b>Redução de Guyan</b>	<b>Redução Dinâmica em Coordenadas Generalizadas</b>
<b>Custo relativo</b>	Baixo para uma precisão razoável dos modos de vibração	Baixo para uma precisão boa a excelente dos modos de vibração
<b>Habilidade exigida</b>	Seleção de graus de liberdade	Seleção de parâmetros da solução
<b>Trabalho adicional</b>	Sim, se existirem muitos graus de liberdade ativos	Não
<b>Dificuldades</b>	A seleção inadequada de graus de liberdade conduz a modos imprecisos	A seleção inadequada de parâmetros conduz a omissão de modos, resultados errados ou custo excessivo
<b>Diagnósticos de ajuda</b>	Nenhum	A seqüência de Sturm indica o número de modos ausentes
<b>Número de modos precisos</b>	Um quarto a um meio do número de graus de liberdade ativos	Dois terços do número de coordenadas generalizadas
<b>Modos com frequências próximas</b>	Sem problemas	Podem ser omitidos se o número de autovetores aproximados for muito pequeno

### 3.6 Aplicações Indiretas dos Métodos de Redução

Os métodos de redução de modelo também são aplicados em técnicas de subestruturação. A seguir, será apresentada uma breve introdução aos principais métodos de subestruturação que estão além do escopo deste trabalho.

#### Superelementos

A análise por superelementos é uma forma de subestruturação onde o modelo é

dividido em partes e cada parte é representada por uma matriz reduzida de rigidez, massa e amortecimento. Cada superelemento é processado individualmente, e as soluções são então combinadas para a resolução do modelo completo. A análise final, onde todas as soluções individuais dos superelementos são combinadas, envolve matrizes muito menores do que as requeridas para a solução do modelo completo. Por exemplo, a estrutura de uma aeronave pode ser dividida em asas, fuselagem central, fuselagem frontal, fuselagem traseira, turbinas e estabilizador vertical, conforme mostra a Figura 3.3. Cada parte da aeronave pode ser analisada separadamente e as soluções individuais combinadas para obter a solução do modelo completo.

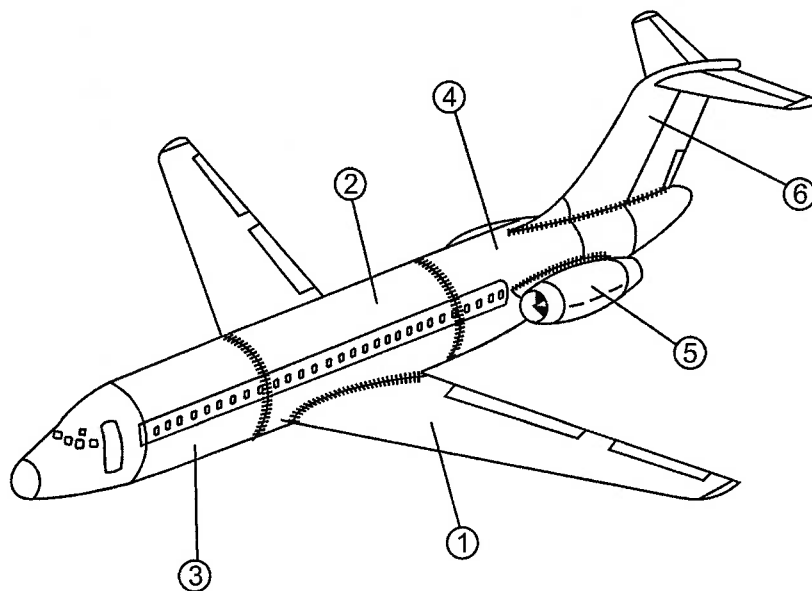


Figura 3.3 Arranjo típico de subestruturas para uma aeronave.

A análise por superelementos tem a vantagem de reduzir a demanda por recursos computacionais, especialmente se são feitas mudanças em somente uma parte do modelo (superelemento), neste caso, somente o superelemento afetado precisa ser reanalisado e a análise final repetida.

O procedimento de análise por superelementos também apresenta vantagens, especialmente quando várias equipes ou empresas de engenharia estão envolvidas em uma análise. Na aeronave ilustrada na Figura 3.3, o modelo de cada parte pode ser elaborado por diferentes equipes ou empresas. Cada equipe ou empresa pode reduzir seu modelo para os graus de liberdade

da fronteira, o que é adequado para a análise por superelementos. Estes modelos reduzidos podem então ser combinados, por exemplo, para a simulação de uma decolagem da aeronave.

Outra vantagem da análise por superelementos é que as matrizes podem ser passadas de uma empresa para outra sem a revelação de detalhes de modelagem ou sem a preocupação se a mesma numeração de nós e elementos no interior do superelemento foi usada por todos os participantes.

### **Síntese Modal de Componentes**

A Síntese Modal de Componentes (CMS) é uma forma de redução dinâmica para superelementos onde as matrizes são definidas em termos das coordenadas modais (correspondentes aos modos do superelemento) e das coordenadas físicas (correspondentes aos nós nas fronteiras do superelemento). A síntese modal de componentes é vantajosa porque existem menos coordenadas modais que coordenadas físicas, possivelmente somente um por cento quando muito. Adicionalmente, a síntese modal de componentes pode utilizar dados modais de teste, e através disso aumentar a precisão da análise.

## **3.7 Correlação de Modelos**

Os resultados do modelo de elementos finitos e os resultados de testes experimentais podem não estar compatíveis devido às incertezas de modelagem e de teste. Da mesma forma, os resultados de elementos finitos do modelo reduzido podem não estar compatíveis com o resultados do modelo completo devido à escolha inadequada dos graus de liberdade. Chung (1995) apresenta diversos critérios de avaliação para examinar a qualidade dos dados medidos e a correlação entre os resultados analíticos e os resultados de teste (FEM-Teste). Estes critérios também podem ser aplicados na validação de modelos de elementos finitos (FEM-FEM).



## **Capítulo 4**

# **Análise de Confiabilidade dos Métodos de Redução**

O objetivo do presente capítulo é apresentar algumas soluções para modos e frequências naturais de componentes estruturais simples através do método dos elementos finitos (MEF). Serão comparados modelos com matriz de massa consistente e discreta e demonstrada a redução de graus de liberdade.

### **4.1 Modelo de uma Viga**

Nesta seção nos concentraremos na vibração transversal de uma viga engastada e uniforme, como mostra a Figura 4.1, com o objetivo de ilustrar a solução de um modelo de 2 graus de liberdades (2-DOF) através do método dos elementos finitos, o efeito do aumento do número de graus de liberdade em um modelo com matriz de massa consistente, o efeito da redução de graus de liberdade usando o método de redução de Guyan e a comparação de modelos com matriz de massa discreta e consistente.

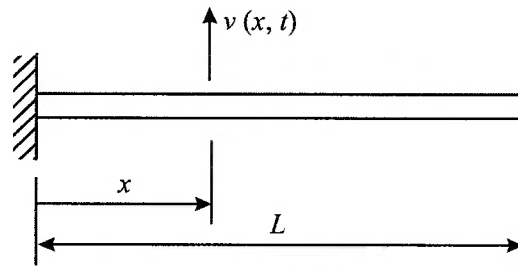


Figura 4.1 Viga engastada e uniforme.

A solução analítica para as frequências naturais dos três primeiros modos de vibração transversal da viga engastada e uniforme ilustrada na Figura 4.1 é dada pelas Equações 4.1 (CRAIG, 1969).

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{3,516}{L^2} \left( \frac{EI}{\rho A} \right)^{1/2} \\ \omega_2 &= \frac{22,03}{L^2} \left( \frac{EI}{\rho A} \right)^{1/2} \\ \omega_3 &= \frac{61,70}{L^2} \left( \frac{EI}{\rho A} \right)^{1/2} \end{aligned} \tag{4.1}$$

#### 4.1.1 Modelo de 2 Graus de Liberdade

A viga engasta e uniforme ilustrada na Figura 4.1 foi discretizada utilizando o programa de elementos finitos ANSYS com um elemento de viga (BEAM3), conforme mostra a Figura 4.2.

E = 1e+11  
 ρ = 1e+03  
 A = 1e-03  
 I = 1e-11  
 L = 1

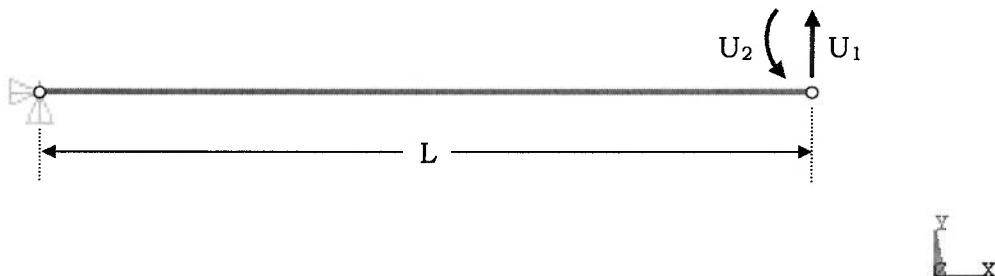


Figura 4.2 Modelo de 2 graus de liberdade (2-DOF) da viga engastada.

Na solução para as frequências naturais o módulo de elasticidade, a

densidade, o momento de inércia, a área da seção transversal e o comprimento da viga foram adotados de forma que  $(EI/\rho AL^4)^{1/2}$  seja igual a 1, assim, obtêm-se como resultado as constantes das Equações 4.1.

Na análise foram obtidas as freqüências  $\omega_1=3,533$  e  $\omega_2=34,81$  para o primeiro e segundo modo de vibrar da viga engastada e uniforme. A partir dos resultados pode-se verificar que o modelo de 2 graus de liberdade (2-DOF) apresenta valores superiores as freqüências exatas do primeiro e do segundo modo. A freqüência fundamental do modelo de 2 graus de liberdade é bastante precisa, enquanto que a segunda freqüência é muito alta para ser considerada. Estes resultados estão de acordo com as propriedades de convergência das freqüências de Rayleigh-Ritz resumidas na Tabela 2.1.

#### 4.1.2 Efeito do Aumento do Número de Graus de Liberdade

Para ilustrar a relação entre o número de graus de liberdade em um modelo em elementos finitos com matriz de massa consistente e a precisão das freqüências obtidas usando o modelo, as freqüências naturais da viga engastada e uniforme ilustrada na Figura 4.3 foram calculadas, usando o programa ANSYS, para diferentes graus de refinamento e os resultados resumidos na Tabela 4.1.

$E = 1e+11$   
 $\rho = 1e+03$   
 $A = 1e-03$   
 $I = 1e-11$   
 $L = 1$

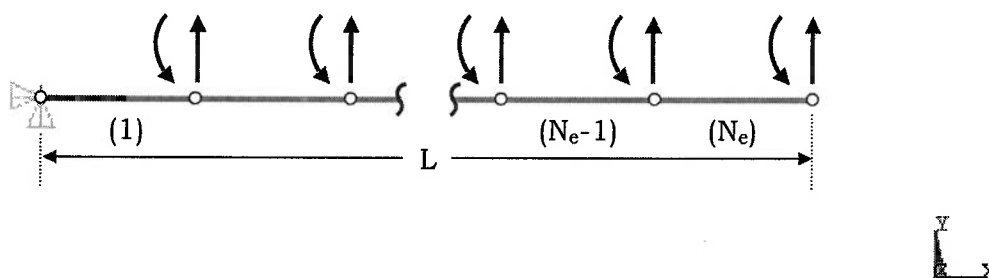


Figura 4.3 Modelo em EF da viga engastada.

A Tabela 4.1 ilustra as propriedades de convergência das freqüências de Rayleigh-Ritz demonstrada anteriormente na Tabela 2.1, isto é, a precisão das freqüências se deteriora para os modos mais altos de um determinado modelo, mas a precisão é aumentada pelo aumento do número de graus de liberdade do

modelo. Note que a precisão é bastante boa para um número de modos igual ao número de elementos, mas para os demais modos as frequências são pobres.

Tabela 4.1 Comparação das frequências calculadas pelo MEF com a solução analítica para a viga engastada.

Modos	Número de Elementos ( $N_e$ )					
	1	2	3	4	5	Exato <sup>1</sup>
1	3,53273	3,51772	3,51637	3,51613	3,51606	3,51602
2	34,8069	22,2215	22,1069	22,0601	22,0455	22,0345
3		75,1569	62,4660	62,1749	61,9188	61,6972
4		218,138	140,671	122,658	122,320	120,902
5			264,743	228,137	203,020	199,860
6			527,794	366,389	337,272	298,556
7				580,847	493,263	416,991
8				953,046	715,341	555,165
9					1016,19	713,079
10					1494,86	890,732

<sup>1</sup> (CRAIG, 1969).

#### 4.1.3 Efeito da Redução de Graus de Liberdade

Com o objetivo de ilustrar o efeito da redução de graus de liberdade usamos o método de redução de Guyan descrito na Seção 3.3 para eliminar os graus de liberdade de rotação do problema da viga engastada e uniforme.

No programa ANSYS os graus de liberdade de translação foram definidos como ativos e os de rotação como dependentes e as soluções para os modos e frequência naturais da viga engastada e uniforme foram obtidas usando o método de redução de Guyan, conforme mostra a Tabela 4.2.

Note que cada frequência da Tabela 4.2 é maior que a frequência correspondente na Tabela 4.1, ilustrando novamente as propriedades de convergência das frequências de Rayleigh-Ritz. Observe que os dois valores sublinhados não são menores que os valores imediatamente a sua esquerda. Isto é possível, visto que os valores na coluna  $N_e$  da Tabela 4.2 foram obtidos através da redução dos graus de liberdade de rotação os quais estavam ativos na obtenção da coluna correspondente da Tabela 4.1, e não pela adição de um

grau de liberdade ao modelo usado na obtenção da coluna  $N_e-1$ .

Tabela 4.2 Comparação das freqüências calculadas pelo método de redução de Guyan com a solução analítica para a viga engastada.

Modos	Número de Elementos ( $N_e$ )					Exato
	1	2	3	4	5	
1	3,56753	3,52198	3,51699	3,51628	3,51611	3,51602
2		22,2790	22,2362	22,0946	22,0573	22,0345
3			62,6685	<u>62,9701</u>	62,2180	61,6972
4				123,545	<u>124,725</u>	120,902
5					205,277	199,860

Embora o método de redução de Guyan permita reduzir a dimensão do problema de autovalores e autovetores e geralmente produz freqüências precisas para uma boa porcentagem dos modos retidos na solução, duas precauções devem ser observadas:

- a) A precisão das freqüências obtidas depende de quais coordenadas são mantidas e quais são eliminadas da solução, como foi mostrado por Anderson; Irons; Zienkiewicz (1968).
- b) Enquanto que  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{M}$  podem ser matrizes de banda, a redução de Guyan destrói a banda das matrizes e pode conduzir a uma solução muito mais cara, mesmo que a ordem das matrizes reduzidas  $\hat{\mathbf{K}}$  e  $\hat{\mathbf{M}}$  seja menor que a das matrizes  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{M}$ .

#### 4.1.4 Modelos com Matriz de Massa Discreta e Consistente

Usando a viga engastada e uniforme ilustrada na Figura 4.3 avaliaremos a precisão das freqüências obtidas em modelos com matriz de massa discreta, conforme procedimento descrito na Seção 2.3.6.

As seguintes freqüências foram obtidas usando o programa ANSYS.

Tabela 4.3 Comparação das freqüências calculadas em modelos com matriz de massa discreta com a solução analítica para a viga engastada.

Modos	Número de Elementos ( $N_e$ )					
	1	2	3	4	5	Exato
1	2,44949	3,15623	3,34568	3,41804	3,45266	3,51602
2		16,2581	18,8859	20,0904	20,7335	22,0345
3			47,0284	53,2017	55,9529	61,6972
4				92,730	104,435	120,902
5					153,018	199,860

Pode-se observar na Tabela 4.3 que para o procedimento empregado, isto é, metade da massa do elemento distribuída em cada extremidade, a solução para as freqüências naturais convergem muito lentamente partindo de valores inferiores as freqüências exatas.

No artigo onde foi criada a expressão “matriz de massa consistente”, Archer (1963) comparou as freqüências de modelos com matriz de massa discreta e consistente de vigas uniformes livre-livre e simplesmente apoiadas incluindo e excluindo os graus de liberdade de rotação. Ele concluiu que “a análise dos modos e freqüências naturais e, portanto, a análise da resposta dinâmica de vigas com rigidez e massa distribuídas uniformemente é significativamente melhorada se a matriz de massa é construída usando as equações correspondentes à aproximação de Rayleigh-Ritz, isto é, a aproximação de massa consistente no lugar do procedimento usual de alocação de massa discreta”. Em um artigo publicado em paralelo ao artigo de Archer, Leckie; Lindberg (1963) apresentaram estimativas de erro para as freqüências de vigas e mostraram que o número de elementos requerido para alcançar a precisão desejada depende das condições de contorno se o procedimento de alocação de massa discreta é empregado, enquanto que este não é o caso para a representação usando massa consistente.

## 4.2 Modelo de uma Placa Plana

Nesta seção nos concentraremos na vibração transversal de uma placa plana com o objetivo de ilustrar a solução de um modelo de 936 graus de liberdades através do método dos elementos finitos (MEF), o efeito da redução de graus de liberdade usando o método de redução de Guyan e a comparação dos resultados dos modelos completo e reduzido.

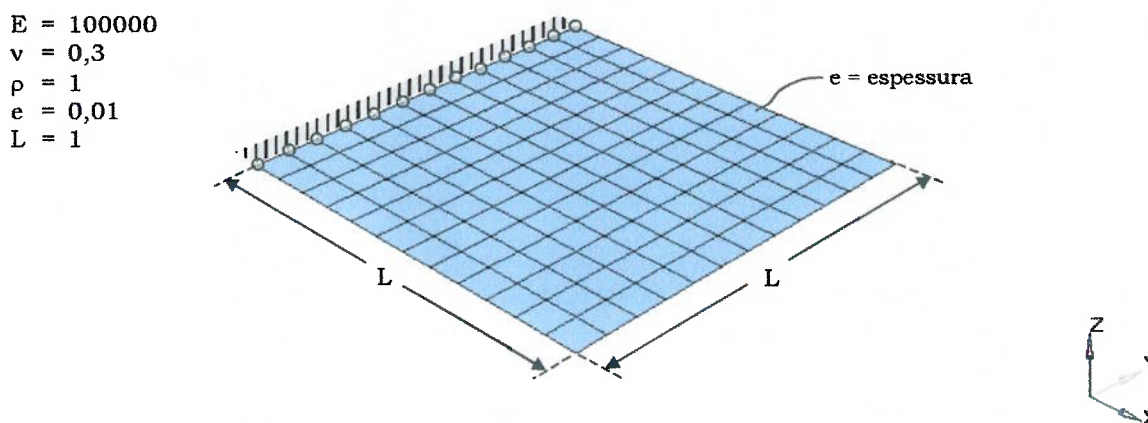


Figura 4.4 Modelo em EF da placa plana.

A placa foi discretizada utilizando o programa de elementos finitos ANSYS com elementos de casca (SHELL63), conforme mostra a Figura 4.4. Para ilustrar o efeito da redução de graus de liberdade usamos o método de redução de Guyan descrito na Seção 3.3.

### 4.2.1 Modelo Completo com 936 DOF

Para a extração dos autovalores e autovetores (análise modal) do modelo completo da placa plana foi escolhido o algoritmo de Lanczos. O método de Lanczos é extremamente poderoso, possibilita o tratamento de modelos grandes e é usado na maioria dos códigos de elementos finitos.

Contudo, a escolha apropriada do método de extração de autovalores e autovetores depende de uma série de critérios como: número de graus de liberdade do sistema, espectro de frequência de interesse e número de modos desejados, habilidade para separar frequências próximas e extrair modos de corpo rígido, utilização com método de redução e subestruturação, etc. Os critérios para escolha do método extração de autovalores e autovetores, bem

como as vantagens e dificuldades dos principais métodos são discutidos por G eradin; Rixen (1997).

A solu o para os 6 primeiros modos e freq ncias naturais do modelo completo da placa plana (936 DOF) com matriz de massa consistente   ilustrada na Figura 4.5.

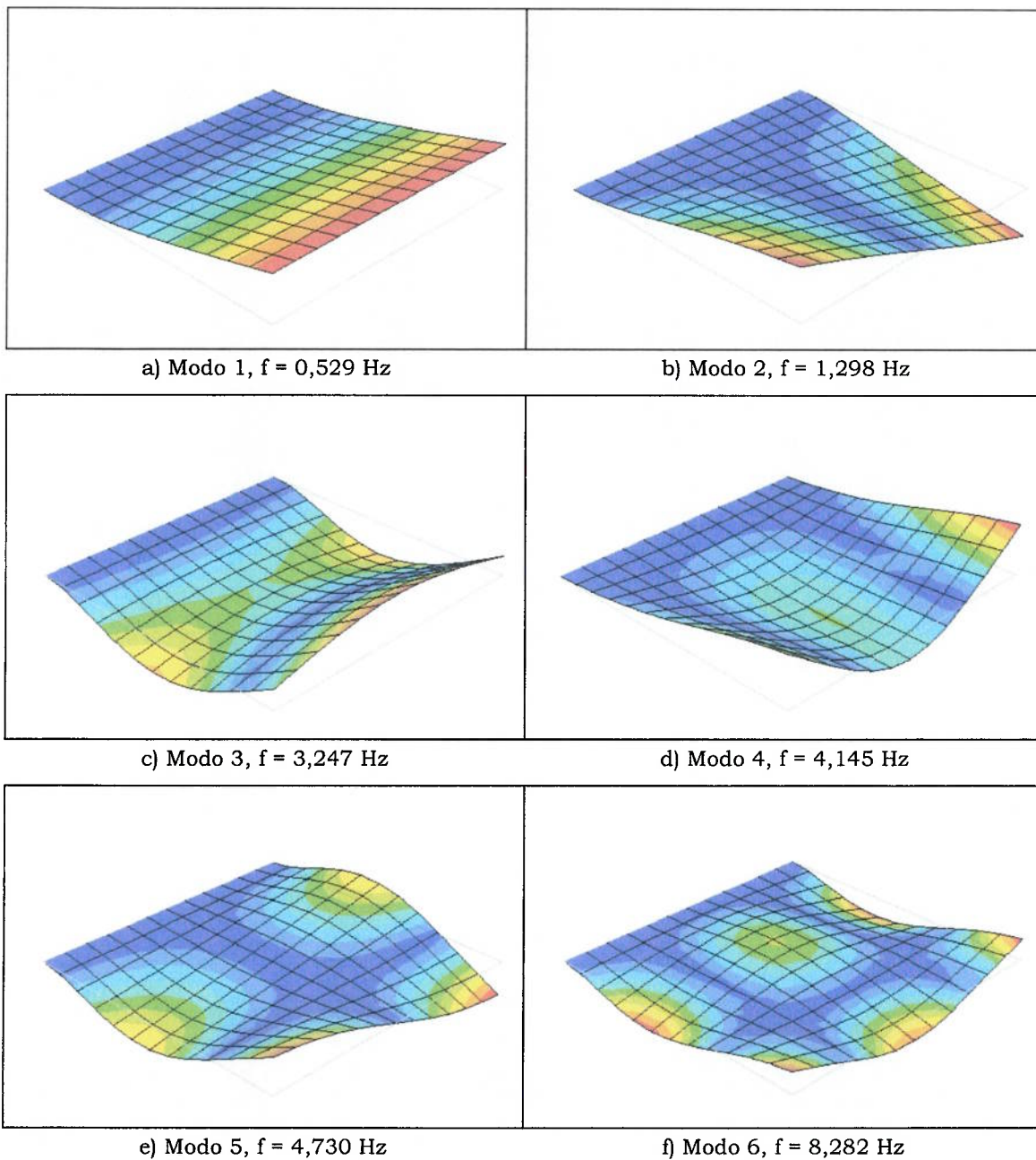


Figura 4.5 Modos e freq ncias naturais da placa plana (936 DOF).



### 4.2.2 Modelos Reduzidos

Nas análises pelo método de redução de Guyan o programa ANSYS utiliza o método HBI (Householder-Bisection-Inverse) para a extração dos autovalores e autovetores.

O modelo em EF da placa plana foi analisado para 3 níveis de redução e os graus de liberdade mantidos na solução foram escolhidos manualmente na direção perpendicular ao plano no qual espera-se que a estrutura irá vibrar. Os resultados obtidos e os graus de liberdade selecionados (Master DOF) estão ilustrados nas Figuras 4.6 a 4.8.

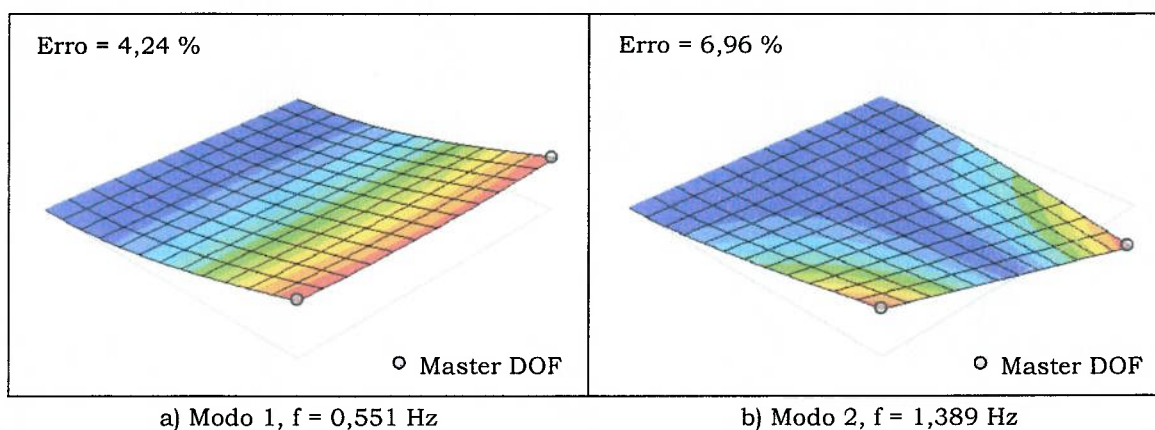


Figura 4.6 Modos e freqüências naturais da placa plana (2 DOF).

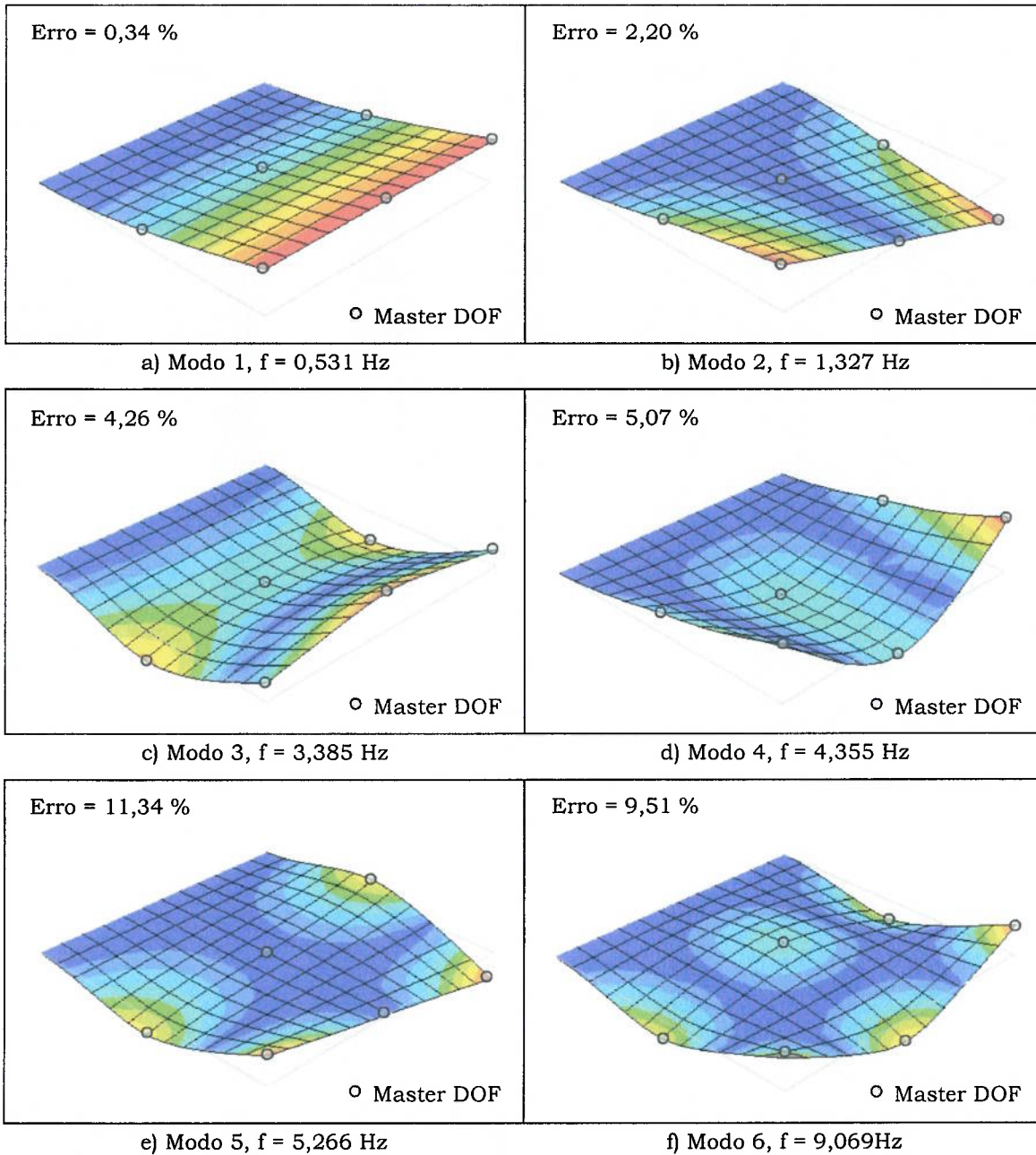


Figura 4.7 Modos e frequências naturais da placa plana (6 DOF).

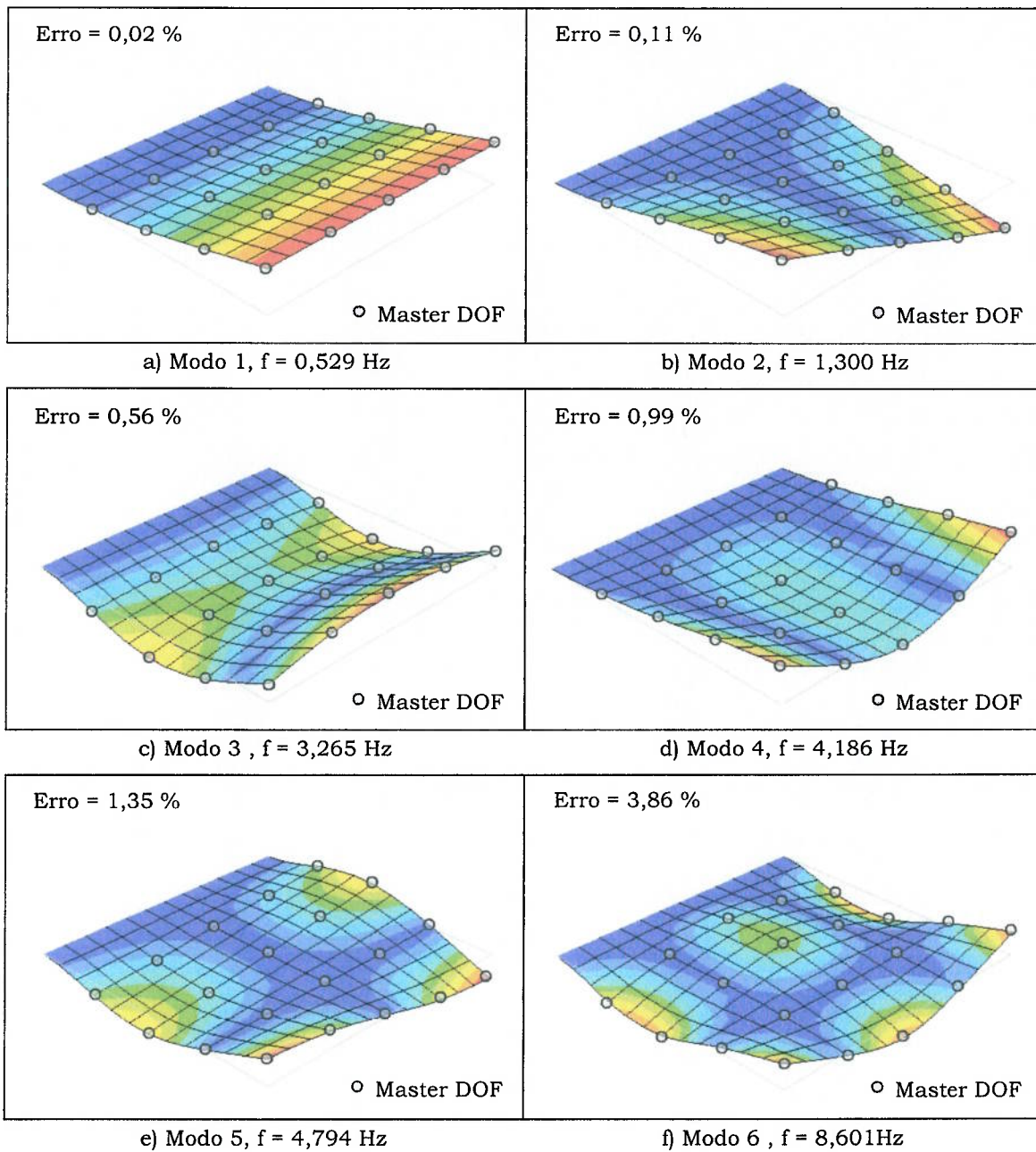


Figura 4.8 Modos e freqüências naturais da placa plana (20 DOF).

O programa ANSYS permite ao usuário a seleção manual ou automática de graus de liberdade, ou uma combinação das duas opções. O método de seleção automática de graus de liberdade usado pelo ANSYS foi proposto por Henshell; Ong (1975) e consiste em eliminar da solução os graus de liberdade com rigidez alta e inércia baixa, ou seja, os graus de liberdade onde a relação dos termos da diagonal  $k_{ii}/m_{ii}$  é alta.

O uso deste algoritmo assume uma estrutura razoavelmente regular. Se a estrutura tem uma distribuição de massa irregular, os graus de liberdade selecionados automaticamente podem se concentrar totalmente nas regiões de maior massa, neste caso, deve ser usada a seleção manual de alguns graus de liberdade. A Figura 4.9 mostra os resultados obtidos utilizando-se a seleção automática de 20 graus de liberdade.

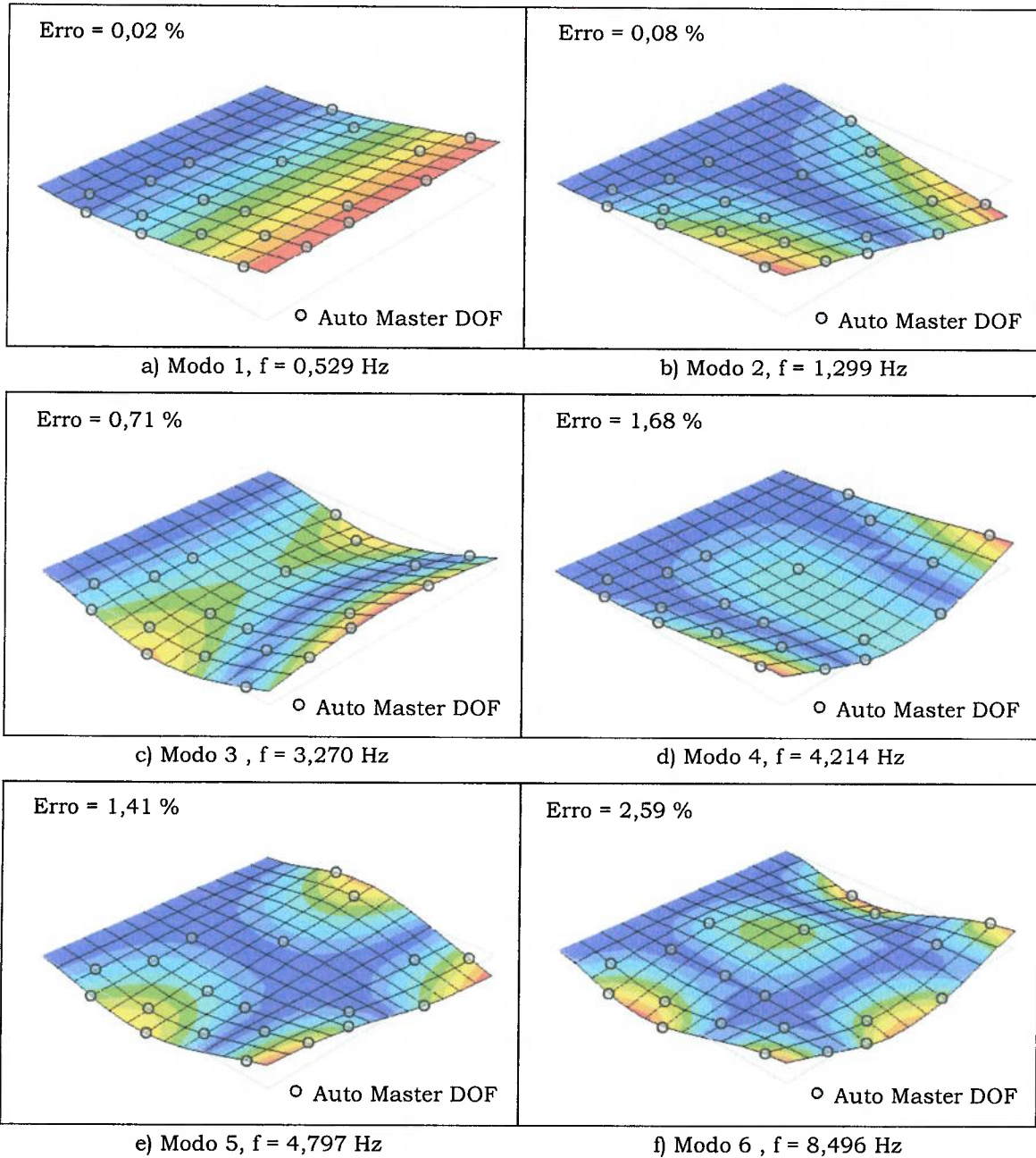


Figura 4.9 Modos e frequências naturais da placa plana (20 DOF Auto).

### 4.3 Modelo de uma Viga Discretizada com Elementos de Casca

A seguir estudaremos a vibração de uma viga discretizada com elementos de casca com o objetivo de ilustrar a solução do modelo de 18600 graus de liberdades através do método dos elementos finitos (MEF). Serão analisados um modelo com seleção manual de graus de liberdade e outro modelo com uma combinação de seleção manual e automática.

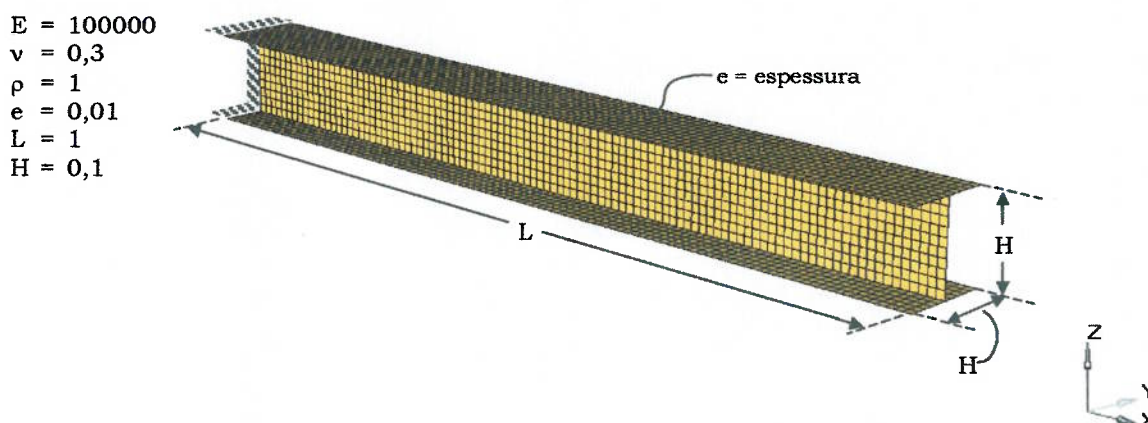


Figura 4.10 Modelo em EF da viga engastada (casca).

A viga foi discretizada utilizando o programa de elementos finitos ANSYS com elementos de casca (SHELL63), conforme mostra a Figura 4.4. Para ilustrar o efeito da redução de graus de liberdade usamos o método de redução de Guyan descrito na Seção 3.3.

#### 4.3.1 Modelo Completo com 18600 DOF

Para a extração dos autovalores e autovetores (análise modal) do modelo completo da viga foi escolhido o algoritmo de Lanczos. A solução para os 12 primeiros modos e frequências naturais do modelo completo da viga discretizada com elementos de casca (18600 DOF) e com matriz de massa consistente é apresentada na Figura 4.11.

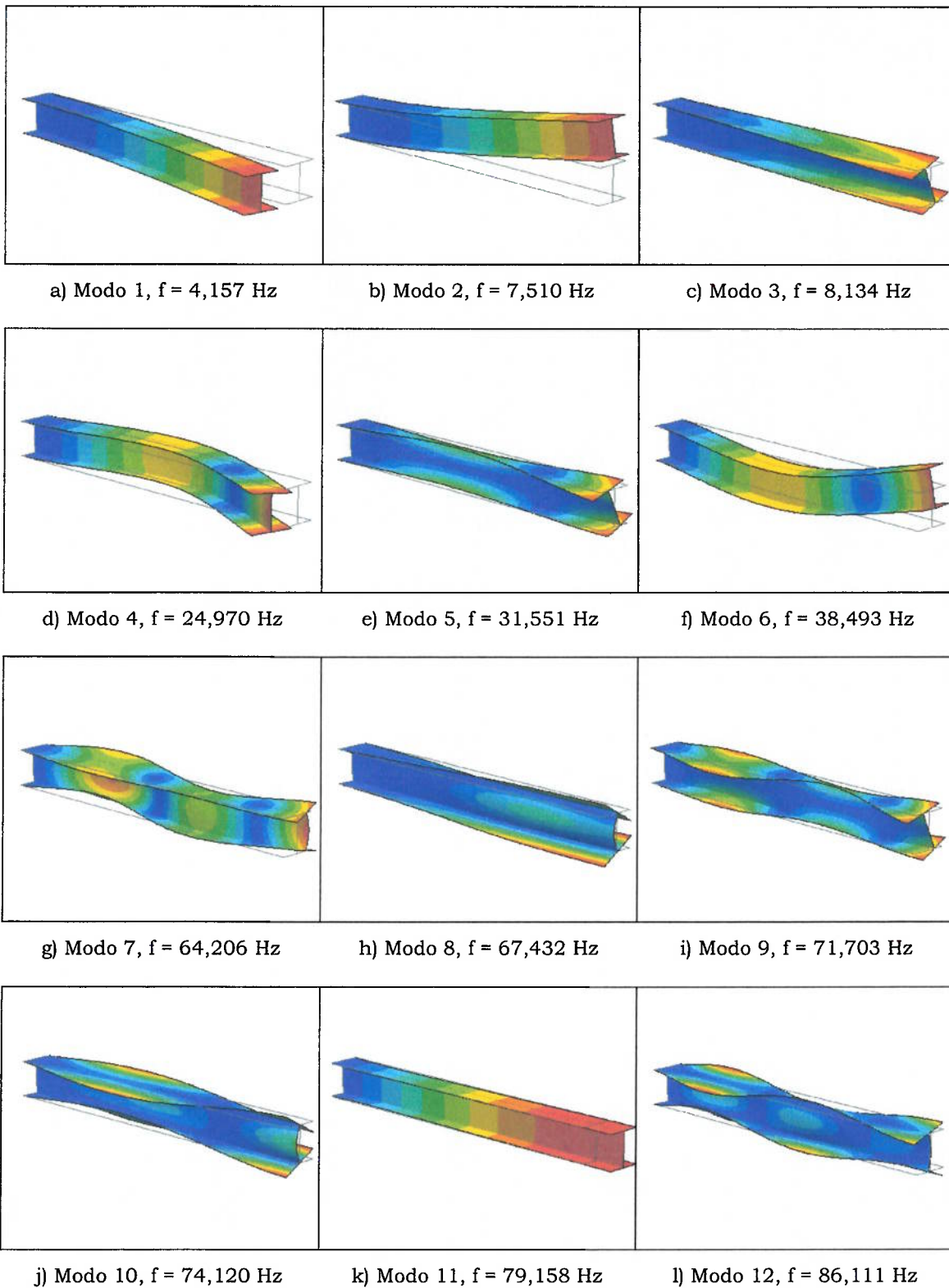


Figura 4.11 Modos e frequências naturais da viga em casca (18600 DOF).

### 4.3.2 Modelos Reduzidos

Na análise pelo método de redução de Guyan da viga foram estudados dois modelos reduzidos, um modelo com seleção manual de graus de liberdade e o outro com uma combinação de seleção manual e automática.

No primeiro modelo reduzido, os graus de liberdade foram selecionados manualmente de acordo com os critérios abaixo.

- O número de graus de liberdade ativos deve ser pelo menos o dobro do número de modos de interesse (24 DOF para 12 modos);
- Os graus de liberdade devem ser escolhidos em direções nas quais espera-se que a estrutura irá vibrar (Z e Y);
- A viga foi dividida em 10 seções perpendiculares ao eixo X. Nestas seções foram selecionados os graus de liberdade de translação UZ e UY das extremidades e arestas, conforme mostra a Figura 4.12.

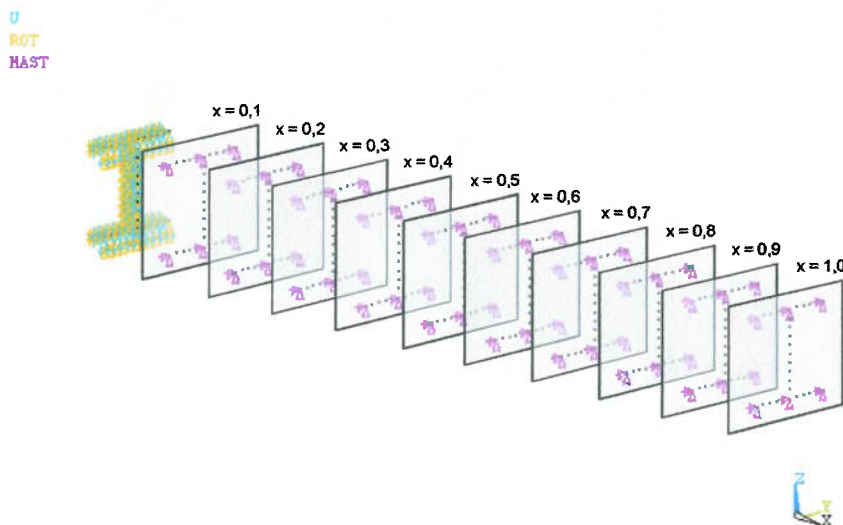


Figura 4.12 Seleção manual de graus de liberdade da viga (120 DOF).

Para o segundo modelo reduzido, foi utilizado a seleção automática de 240 graus de liberdade de translação (UX, UY, UZ). A escolha automática dos graus de liberdade pelo programa ANSYS é realizada de acordo com o procedimento abaixo.

- a) Os graus de liberdade selecionados pelo usuário (neste caso 120 DOF) sempre são mantidos na solução;
- b) Define-se como  $N_S$  o número de graus de liberdade a serem selecionados, neste caso 120 DOF ( $240 - 120$ ), e como  $N_A$  o número total de graus de liberdade da estrutura;
- c) Os primeiros  $N_S$  graus de liberdade processados pelo *solver* são inicialmente definidos como *Master DOF*. Existe uma opção que permite excluir os graus de liberdade de rotação (ROTX, ROTY, ROTZ);
- d) O próximo grau de liberdade processado pelo *solver* é selecionado. Para todos os  $N_S + 1$  DOF é calculada a relação  $Q_i = k_{ii}/m_{ii}$ . Onde  $k_{ii}$  e  $m_{ii}$  são os  $i$ -ésimos termos da diagonal principal das matrizes de rigidez e massa, respectivamente;
- e) O termo com maior valor de  $Q_i$  é identificado e então eliminado;
- f) Todos os graus de liberdade restantes são processados da mesma forma. Então  $N_A - N_S$  graus de liberdade são eliminados.

A Figura 4.13 mostra os graus de liberdade selecionado manualmente (120 DOF) e os graus de liberdade selecionado automaticamente (120 DOF).

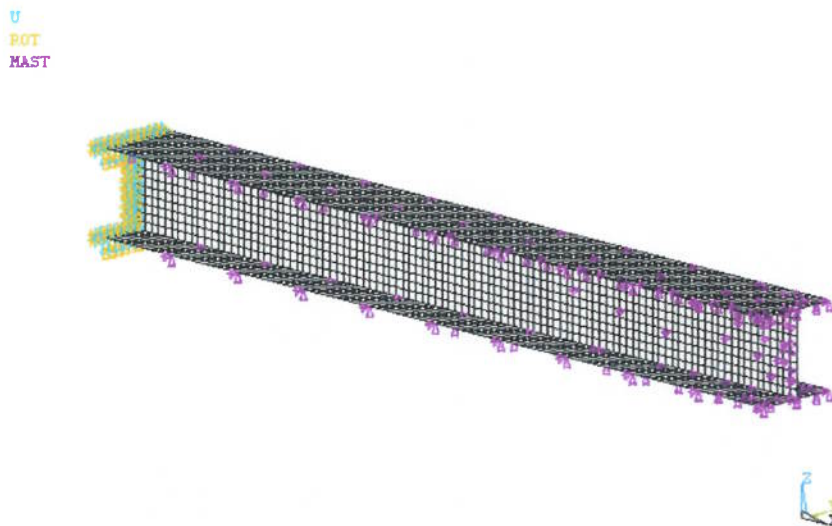


Figura 4.13 Seleção manual e automática de graus de liberdade da viga (240 DOF).



Os modos obtidos nas análises dos modelos reduzidos (120 e 240 DOF) são idênticos aos modos mostrados na Figura 4.11 para o modelo completo. A Tabela 4.4 apresenta uma comparação entre as frequências naturais dos modelos reduzidos e as frequências naturais do modelo completo.

O modelo de 120 DOF apresentou um erro inferior a 0,5 % para os seis primeiros modos e inferior a 3,5 % para os 12 primeiros modos. Contudo, o 11º modo (vibração axial) foi omitido da solução porque não foram selecionados graus de liberdade na direção axial.

No modelo de 240 DOF a precisão dos resultados melhorou significativamente, o erro foi inferior a 0,25 % para os 6 primeiros modos e inferior a 2 % para os demais modos obtidos no modelo de 120 DOF. O uso combinado dos métodos de seleção manual e automática de graus de liberdade permitiu identificar modos omitidos no modelo com seleção manual e aumentar consideravelmente a precisão para os demais modos.

Tabela 4.4 Comparação entre as frequências do modelo completo e as frequências dos modelos reduzidos da viga em casca.

Modelo	Reduzido				Completo
DOF	120		240		18600
Modo	f[Hz]	Erro [%]	f[Hz]	Erro [%]	f [Hz]
1	4,1571	0,01	4,1569	0,00	4,1569
2	7,5110	0,02	7,5101	0,01	7,5097
3	8,1350	0,01	8,1345	0,00	8,1342
4	25,019	0,19	25,002	0,13	24,970
5	31,598	0,15	31,578	0,08	31,551
6	38,662	0,44	38,589	0,25	38,494
7	65,298	1,70	64,939	1,14	64,206
8	68,957	2,26	67,761	0,49	67,432
9	72,310	0,85	72,081	0,53	71,703
10	76,060	2,62	75,016	1,21	74,120
11	Omitido	-	86,705	9,53	79,159
12	88,973	3,32	87,765	1,92	86,111

## Capítulo 5

### Exemplos de Aplicação

As análises modais das vigas engastadas e da placa plana apresentadas no Capítulo 4 permitiram avaliar a precisão dos métodos de redução de modelo. Para avaliar também a eficiência, foi analisado o modelo em elementos finitos do chassi do caminhão Ford F800 desenvolvido pelo NCAC (National Crash Analysis Center, George Washington University), conforme ilustra a Figura 5.1. O modelo em elementos finitos do chassi, ilustrado na Figura 5.2, tem aproximadamente 25000 graus de liberdade (DOF).

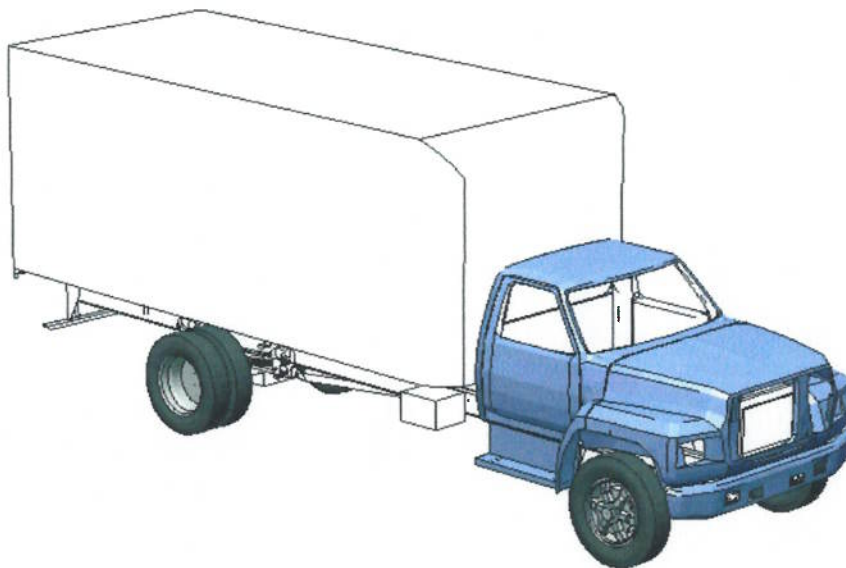


Figura 5.1 Caminhão Ford F800.

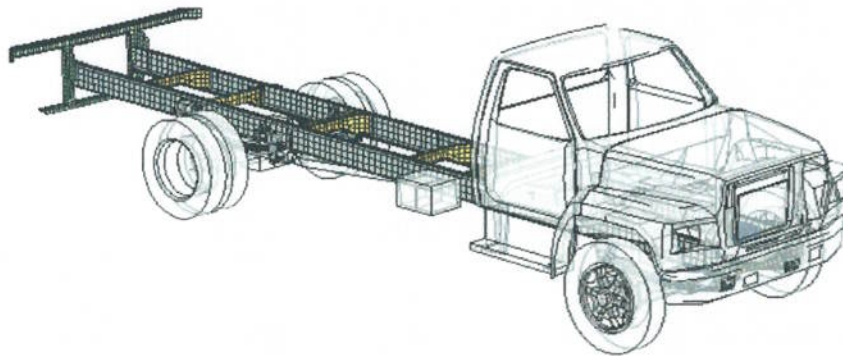


Figura 5.2 Modelo em EF do chassi do caminhão Ford F800.

Para as análises do chassi, o modelo em elementos finitos do pára-choque traseiro foi substituído por uma travessa de fechamento e as longarinas foram fixadas entre os suportes dos feixes de mola, conforme ilustra a Figura 5.3.

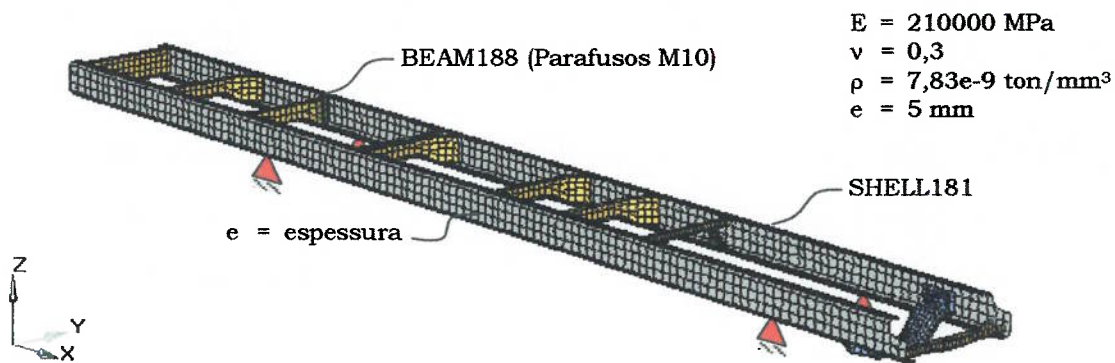


Figura 5.3 Condições de contorno para a análise modal do chassi.

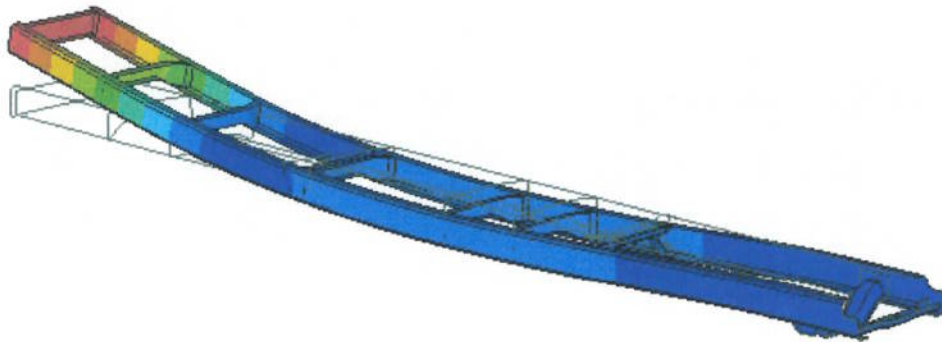
### 5.1 Análise Modal do Chassi do Caminhão Ford F800

Para a extração dos autovalores e autovetores do modelo completo do chassi foi escolhido no programa ANSYS o algoritmo de Lanczos. O método de Lanczos trabalha bem com modelos grandes e é usado na maioria dos códigos de elementos finitos.

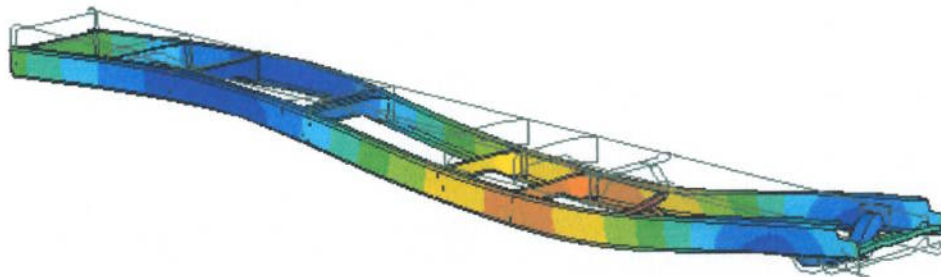
As frequências naturais e os fatores de participação modal nas direções X, Y e Z do modelo completo do chassi (24144 DOF) estão resumidos na Tabela 5.1 e os modos com maior participação modal na direção vertical (Z) estão ilustrados na Figura 5.4.

Tabela 5.1 Freqüências naturais e fatores de participação modal do modelo completo do chassi.

Modo	f[Hz]	Fatores de Participação Modal		
		X	Y	Z
1	8,9923	0,000679	0,268145	0,000367
2	11,885	0,000424	1,000000	0,000134
3	17,978	0,953408	0,000197	<b>0,297906</b>
4	22,513	0,000112	0,084262	0,000011
5	32,040	0,000258	0,107129	0,000514
6	33,742	0,628286	0,000000	<b>1,000000</b>
7	38,763	0,000469	0,207112	0,000042
8	45,468	0,000840	0,317916	0,000347
9	53,040	0,003792	0,530479	0,000339
10	59,442	0,015289	0,035601	0,001976
11	60,315	0,139860	0,001598	0,037226
12	62,161	1,000000	0,000043	0,487219



a) Modo 3, f = 17,978 Hz



b) Modo 6, f = 33,742 Hz

Figura 5.4 Modos com maior participação modal na direção vertical (Z).

Na análise pelo método de redução de Guyan foram estudados dois modelos reduzidos do chassi, um modelo com seleção manual de graus de liberdade e o outro com uma combinação de seleção manual e automática.

A seleção manual de graus de liberdade foi realizada seguindo os critérios apresentados na Seção 4.3.2 para a viga engastada, isto é, foram definidas seções perpendiculares ao eixo longitudinal do chassi e selecionados os graus de liberdade de translação UZ, UY e UX das extremidades e arestas, conforme mostra a Figura 4.12. As seções foram posicionadas nas regiões onde foram observadas as maiores amplitudes de deslocamento nos modos do modelo completo. Se os modos do modelo completo não estiverem disponíveis estas seções podem ser distribuídas uniformemente.

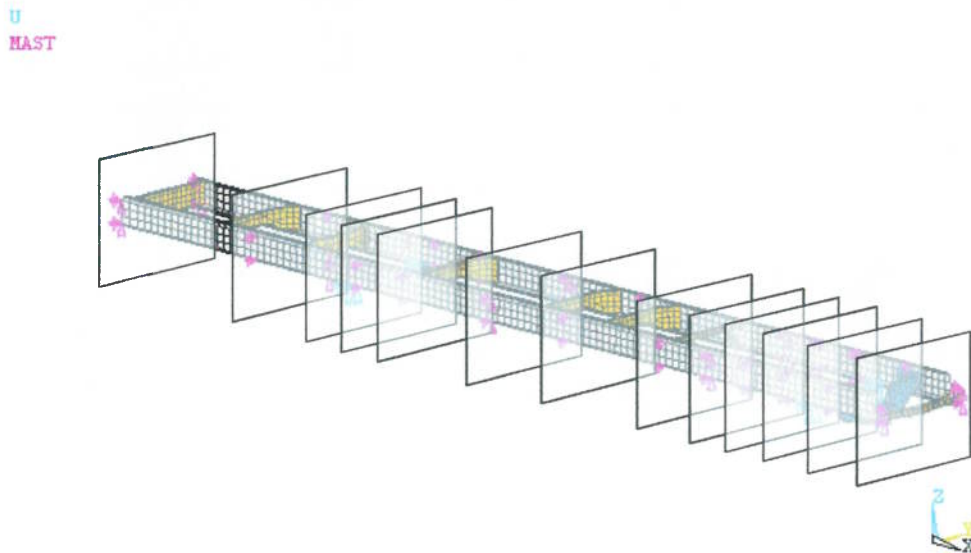


Figura 5.5 Seleção manual de graus de liberdade do chassi (84 DOF).

Para o segundo modelo reduzido, foi utilizado a seleção automática de 168 graus de liberdade de translação (UX, UY, UZ) incluindo os graus de liberdade escolhidos manualmente. A seleção automática dos graus de liberdade pelo programa ANSYS é realizada de acordo com o procedimento descrito na Seção 4.3.2.

Tabela 5.2 Comparação entre as frequências do modelo completo e as frequências dos modelos reduzidos do chassi.

Modelo	Reduzido				Completo
DOF	84		168		24144
Tempo [s]	21 (54%)		30 (77%)		39 (100%)
Modo	f[Hz]	Erro [%]	f[Hz]	Erro [%]	f [Hz]
1	9,0093	0,19	8,9933	0,01	8,9923
2	11,901	0,13	11,890	0,04	11,885
3	18,051	0,41	18,006	0,16	17,978
4	22,616	0,46	22,554	0,18	22,513
5	32,178	0,43	32,141	0,32	32,040
6	34,543	2,38	34,323	1,72	33,742
7	39,396	1,63	39,207	1,14	38,763
8	46,357	1,96	45,703	0,52	45,468
9	53,502	0,87	53,350	0,58	53,040
10	60,457	1,71	60,086	1,08	59,442
11	60,913	0,99	60,824	0,85	60,315
12	64,819	4,28	63,918	2,83	62,161

## 5.2 Análise Harmônica do Chassi do Caminhão Ford F800

Na análise modal do chassi podemos observar uma redução significativa no tempo de processamento dos modelos reduzidos. Contudo, a evolução dos computadores associada a métodos eficientes para a extração de autovalores e autovetores de modelos grandes possibilita a análise de sistemas com mais de 1.000.000 de graus de liberdade (DOF) com um custo computacional relativamente pequeno.

No entanto, na solução de problemas dinâmicos lineares e não-lineares (análises harmônica, espectral e transiente) a estrutura pode ser analisada em um intervalo de frequência ou tempo que é discretizado de acordo com o problema. De tal modo que o custo computacional aumenta significativamente e a solução do modelo completo pode não ser possível ou apresentar um custo muito elevado.

Para exemplificar este problema foi realizada uma análise harmônica no modelo completo (24144 DOF) e no modelo reduzido (168 DOF) do chassi.

Nesta análise foram aplicadas forças correspondente a aceleração de 1g no intervalo de freqüência de 0 a 50 Hz discretizado de 1 em 1 Hz, conforme ilustra a Figura 5.6.

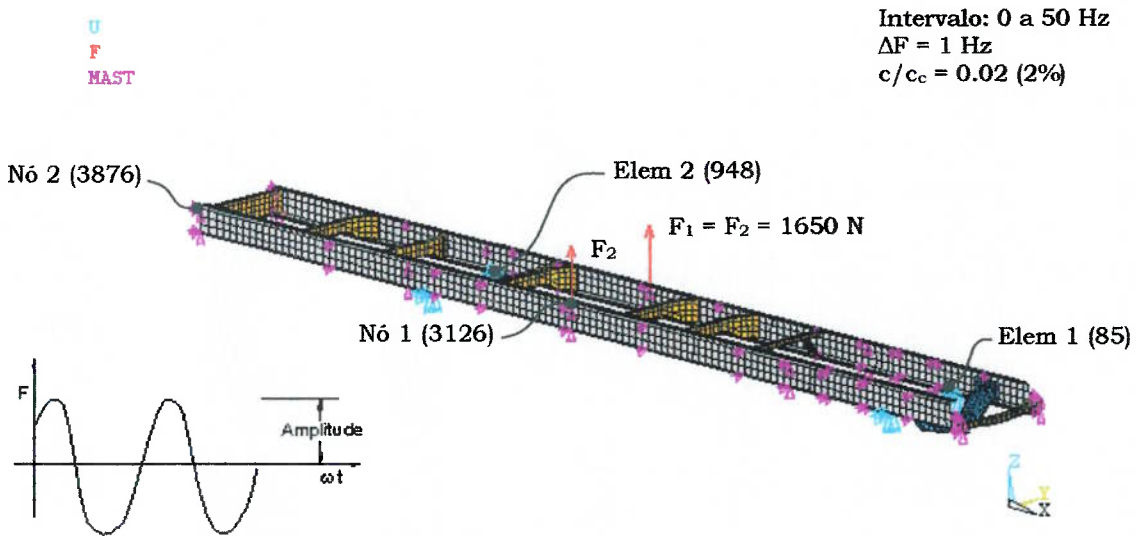


Figura 5.6 Condições de contorno e carregamento para a análise harmônica do chassi.

Os resultados de deslocamento e tensão equivalente de von Mises obtidos nas análises harmônicas dos modelos completo e reduzido estão plotados nos gráficos das Figuras 5.7 e 5.8. Podemos observar que tanto os resultados de deslocamento como os resultados de tensão apresentam uma excelente correlação no intervalo de freqüências analisado.

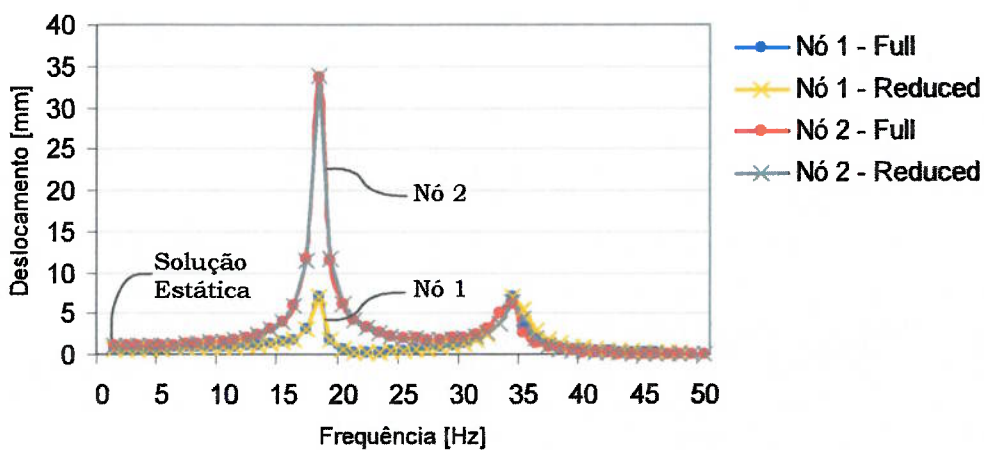


Figura 5.7 Comparação dos deslocamentos nas análises harmônicas do chassi.

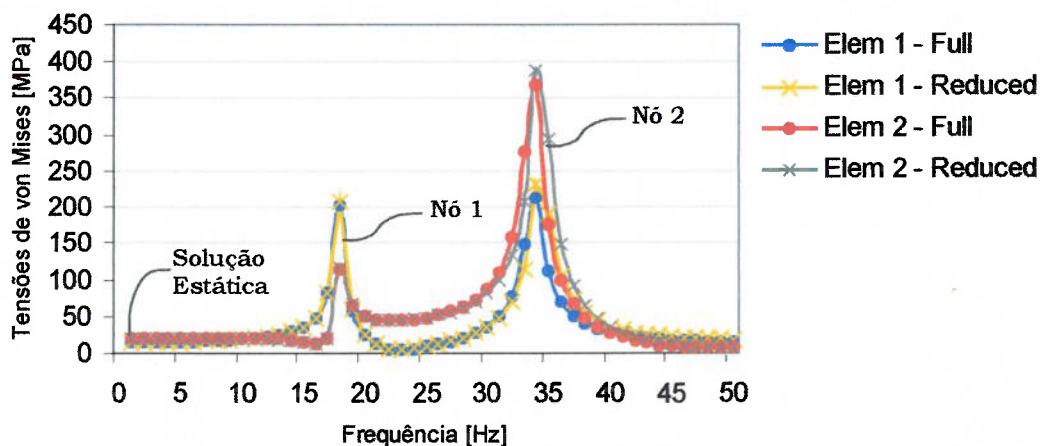


Figura 5.8 Comparação das tensões de von Mises nas análises harmônicas do chassi.

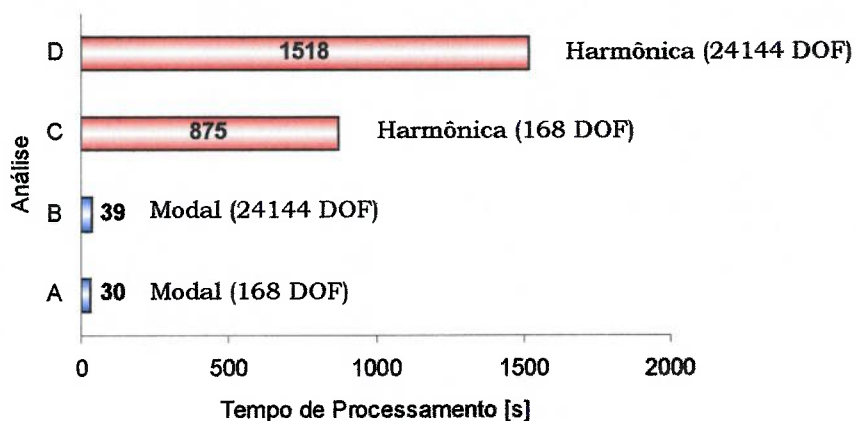


Figura 5.9 Comparação do tempo de processamento nas análises do chassi.

O gráfico da Figura 5.9 mostra os tempos de processamento das análises modal e harmônica do chassi. Pode-se observar que, mesmo para um modelo pequeno onde a análise dos modos e frequência naturais é obtida com facilidade, a análise do modelo completo no domínio da frequência ou do tempo pode apresentar um custo computacional bastante elevado.



## Capítulo 6

# Conclusões e Recomendações

As análises modais das vigas engastadas e da placa plana, apresentadas no Capítulo 4, permitiram avaliar a precisão do método de redução de Guyan e do método de alocação de massa discreta.

No modelo da viga foi possível observar que a precisão das freqüências se deteriora para os modos mais altos de um determinado modelo e aumentada com a adição de graus de liberdade. As freqüências dos modelos com matriz de massa consistente são maiores do que as freqüências calculadas analiticamente ilustrando as propriedades de convergência das freqüências de Rayleigh-Ritz. Nos modelos com matriz de massa discreta as freqüências naturais convergem muito lentamente partindo de valores inferiores às freqüências exatas. Além disso, em modelos com matriz de massa discreta o número de elementos requeridos para alcançar a precisão desejada depende das condições de contorno, o que não ocorre em modelos com matriz de massa consistente.

Nas análises da placa plana e da viga discretizada com elementos de casca foram estudados os procedimentos de seleção manual e seleção automática de graus de liberdade. Se a estrutura tem uma distribuição de massa irregular, os graus de liberdade selecionados automaticamente podem se concentrar totalmente nas regiões de maior massa, neste caso, deve ser usada a seleção manual de alguns graus de liberdade. O uso combinado dos métodos

de seleção manual e seleção automática de graus de liberdade permitiu identificar modos omitidos e aumentar a precisão das frequências dos demais modos.

No Capítulo 5 foi analisado o modelo em elementos finitos do chassi do caminhão Ford F800 com o objetivo de avaliar a eficiência, sob o ponto de vista dos recursos computacionais, dos métodos de redução. Na análise modal do chassi observamos uma redução significativa no tempo de processamento dos modelos reduzidos, contudo, a análise modal de modelos com mais de 1 milhão de graus de liberdade apresenta um custo computacional relativamente pequeno. No entanto, na solução de problemas dinâmicos no domínio do tempo ou da frequência o custo computacional aumenta significativamente, conforme observado na análise harmônica do chassi. De tal modo que a solução de um determinado problema pode não ser possível ou apresentar um custo computacional muito elevado sem o auxílio dos métodos de redução.

Embora o método de redução de Guyan permita reduzir a dimensão do problema, a precisão dos resultados e a eficiência da análise depende da habilidade na escolha dos graus de liberdade. Por isso, os métodos de redução devem ser usados com cautela.

O manuseio efetivo de grandes modelos estruturais é e ainda continuará sendo por um longo tempo um importante campo de pesquisa.

## Referências Bibliográficas

- [1] ANDERSON, R.G.; IRONS, B.M.; ZIENKIEWICZ, O.C. **Vibration and Stability of Plates Using Finite Elements**. Int. J. Solids Struct., v. 4, p.1031-1055, 1968.
- [2] ANSYS Release 8.1. **Theory Reference**. On-line Documentation, 2004.
- [3] ANSYS Release 8.1. **Structural Analysis Guide**. On-line Documentation, 2004.
- [4] ANSYS Release 8.1. **Advanced Analysis Techniques Guide**. On-line Documentation, 2004.
- [5] ARCHER, J.S. **Consistent Mass Matrix for Distributed Mass Systems**. J. Struct. Div., Proc. ASCE, v. 89, p.161-178, 1963.
- [6] BATHÉ, K.J; WILSON, E.L. **Numerical Methods in Finite Element Analysis**. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1976.
- [7] CHUNG, Y.T. **Model Reduction and Model Correlation Using MSC/NASTRAN**. MSC User's Conference. 16p, 1995.
- [8] CLOUGH, R.W.; PENZIEN, J. **Dynamics of Structures**. New York: McGraw-Hill, 1975. p. 235-243.
- [9] CRAIG, R.R. **Structural Dynamics – An Introduction to Computer Methods**. New York: John Wiley & Sons, 1981.

- [10] CRAIG, R.R.; CHANG, T.C. **Normal Modes of Uniform Beams**. Proc. ASCE, v. 95, n. EM4, p. 1025-1031, 1969.
- [11] GÉRADIN, M.; RIXEN, D. **Mechanical Vibrations – Theory and Application to Structural Dynamics**. Chichester: John Wiley & Sons, Second Edition, 1997. p. 295-363.
- [12] GUYAN, R.J. **Reduction of Stiffness and Mass Matrices**. AIAA Journal, v. 3, No. 2, p.280, 1965.
- [13] HENSHELL, R.D.; ONG, J.H. **Automatic Masters for Eigenvalue Economisation**. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, v. 3, p. 375-383. 1975.
- [14] LANGHAAR, H.L. **Energy Methods in Applied Mechanics**. New York: Wiley, 1962.
- [15] LECKIE, F.A.; LINDBERG, G.M. **The Effect of Lumped Parameters on Beam Frequencies**. Aeron. Quart., v. 14, p. 224-240, 1963.
- [16] MCGUIRE, W.; GALLAGHER, R.H. **Matrix Structural Analysis**. New York: Wiley, 1979.
- [17] MEIROVITCH, L. **Analytical Methods in Vibrations**. New York: Macmillan, 1967.
- [18] NASTRAN Version 70. **Advanced Dynamic Analysis User's Guide**. On-line Documentation, 2002.
- [19] PRZEMENIECKI, J.S. **Theory of Matrix Structural Analysis**. New York: Dover Publications, 1968. p. 61-263.
- [20] TONG, P.; PIAN, T.H.H.; BUCCIARELLI, L.L. **Mode Shape and Frequencies by Finite Element Method Using Consistent and Lumped Masses**. Comps. Struct., v. 1, p. 623-628, 1971.

- [21] WEAVER, W. **Dynamics of Elastically Connected Rigid Bodies**. Proc. 3<sup>rd</sup> Southeastern Conf. on T&AM, Columbia, p. 543-562, 1966.

# Índice Remissivo

## A

análise espectral, 1, 80  
 análise harmônica, 1, 80, 81, 82  
 análise modal, 1, 52, 65, 71, 77, 80, 84  
 análise transiente, 1, 80  
 ANSYS, 60, 61, 62, 63, 65, 67, 69, 71, 73,  
 77, 79

## B

Bernoulli-Euler, 7, 11, 26

## C

*condensação estática*, 15, 40, 45, 53  
*coordenadas generalizadas*, 5, 9, 13, 15, 16,  
 38, 44, 45, 53, 54, 55, 56  
 Correlação de Modelos, 58

## E

elementos finitos, i, 2, 3, 4, 20, 21, 28, 29,  
 32, 37, 44, 50, 58, 60, 61, 65, 71, 76, 77

## F

*funções admissíveis*, 7, 10  
 funções de forma, 7, 8, 10, 11, 15, 17, 20,  
 21, 22, 25, 27, 28

## L

Lagrange, 4, 6, 7, 10, 17  
 Lanczos, 53, 65, 71, 77

## M

*matriz de massa consistente*, 9, 59, 61, 64,  
 66, 71  
*matriz de massa discreta*, 28, 29, 40, 59,  
 63, 64  
*método das forças*, 29  
*método de redução de Guyan*, 40, 46, 52,  
 55, 59, 62, 63, 65, 67, 71, 73, 79, 84  
*método dos deslocamentos*, 29  
*método dos elementos finitos*, 1, 20, 21, 29,  
 59, 65  
*métodos de subestruturação*, 56

## R

Rayleigh, 4, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 45,  
 53, 61, 62, 64  
 Rayleigh-Ritz, 4, 12, 19, 45  
 redução dinâmica, i, 2, 3, 43, 53, 55, 58  
 redução dinâmica em coordenadas  
 generalizadas, 53, 55

**S**

seleção automática de graus de liberdade,  
50, 69, 70, 73, 79

seleção manual de graus de liberdade, 50,  
71, 73, 79

Síntese Modal de Componentes, 58

Sturm, 56

subestruturação, 3, 56, 65

superelementos, 56, 57, 58