

CELSO PUPO PESCE

Engenheiro Naval, EPUSP - 1978

Mestre em Eng^a Naval, EPUSP - 1984

**ESTUDO DO COMPORTAMENTO DE CORPOS
FLUTUANTES EM ONDAS: UM ENFOQUE VARIACIONAL
E APLICAÇÕES DA TEORIA DO CORPO ESBELTO**

Tese apresentada à Escola Politécnica
da Universidade de São Paulo para ob
tenção do título de Doutor em Engenha
ria.

Orientador: Prof. Dr. José Augusto Penteado Aranha
Prof. Adjunto do Departamento de
Engenharia Naval da EPUSP

São Paulo, 1988

A *Sandra Regina,*
Fernando Augusto,
Ricardo e
Pedro Ivo

AGRADECIMENTOS

À Divisão de Engenharia Naval e Oceânica do Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado de São Paulo pelo apoio e incentivo no desenvolvimento do presente trabalho.

Ao CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, pelo suporte financeiro recebido, na forma de bolsa de estudos no decorrer dos cursos de pós-graduação junto ao California Institute of Technology, nos anos de 1984/85 (processo nº 20.713-83) e na forma de bolsa de pesquisa no ano de 1987 (processo nº 304062-85).

A todos os colegas que direta ou indiretamente tenham contribuído para a consecução deste projeto. Em especial ao Dr. Antônio Carlos Fernandes, e aos Engenheiros Clóvis de Arruda Martins e Kazuo Hirata pelas valiosas sugestões e discussões, e à Srta. Nair de Toledo pelo trabalho de datilografia.

De forma especial, a meu orientador Prof. Dr. José Augusto Penteado Aranha, cujo entusiasmo, dedicação e talento científico fizeram inesquecíveis muitas das estimulantes discussões que permearam estes anos de trabalho conjunto.

RESUMO

A interação hidrodinâmica de corpos flutuantes com ondas de superfície é formulada sob enfoque variacional. O desenvolvimento é feito no contexto dos problemas lineares não-homôgeneos que decorrem da transformação do problema - potencial não-linear quando a este é aplicada a usual técnica das perturbações. Com exceção da restrição de velocidade de avanço e excitação harmônica a formulação é geral.

Um novo princípio variacional (PV2) é enunciado, estabelecendo que as forças hidrodinâmicas generalizadas agentes sobre o corpo são valores estacionários de funcionais bem definidos. Estes funcionais guardam certa semelhança com o quociente de Rayleigh em problemas clássicos de vibração. Como consequência, estas quantidades podem ser acuradamente determinadas a partir de aproximações variacionais relativamente grosseiras dos campos potenciais de radiação e difração associados.

A aplicação do método variacional de Rayleigh-Ritz (ou direto) ao PV2 é então formulada e exemplificada através do desenvolvimento de um método específico ao problema bidimensional: o Método Variacional Bidimensional (MVB). São conduzidos experimentos numéricos mostrando sua convergência e permitindo estabelecer um procedimento eficiente para a escolha das funções-teste elementares que compõem as aproximações variacionais. Mostra-se que com o uso de singularidades de ordem superior (dipolos e vórtices) é possível recuperar-se os resultados dos coeficientes hidrodinâmicos de massa adicional e amortecimento, calculados por Vugts (1960) para diferentes seções, em toda a faixa de frequências. Isto implica na construção e inversão de uma matriz real e simétrica de ordem quatro.

O MVB é então aplicado em conjunto com a Teoria do Corpo Esbelto (TCE) produzindo um eficiente procedimento computacional, cujo desempenho é exemplificado para um elipsóide de re

volução. Os resultados são comparados àqueles conseguidos por Sclavounos (1985), com o uso da Teoria Unificada, e a outros de correntes da aplicação do Método de Painéis Esferoidais (uma variação específica do usual método de distribuição de singularidades), publicados por Breit (1985).

ABSTRACT

The wave-body interaction problem is reformulated under a variational approach. This is done for the usual potential nonlinear boundary problem transformed, by means of standard perturbation techniques, into an infinite sequence of linear non-homogeneous ones. Advancing speed is assumed to be null.

A new variational principle (PV2) is enunciated, stating that all generalized hydrodynamic forces acting on the body are, in fact, stationary values of well defined functionals. These functionals resemble, in some sense, the Rayleigh quotient in classical vibration problems. As a consequence, such quantities can be accurately determined from relatively crude approximations for the associated radiation and diffraction potentials.

Rayleigh-Ritz Variational Method (direct method) is applied to PV2 and exemplified through the construction of a specific method for the two-dimensional case: the two-dimensional Variational Method (MVB). Numerical experiments are conducted to show the convergence of the method, enabling to establish an efficient procedure for the choice of elementary trial functions that compose the variational approximations. It is shown that high-order singularities (dipoles, vortices) are able to recover the results obtained by Vugts (1968) for the added mass and damping coefficients, calculated for several different section geometries, in the whole range of frequencies. This implies in handling a real symmetric matrix of order four.

The MVB is then applied to Slender Body Theory (SBT). An efficient computational procedure is built up and tested for an ellipsoid of revolution. Comparison is made to Unified Theory results, due to Sclavounous(1985), and to The Spheroidal Poinel Method (a 3D singularity distribution method), from Breit (1985).

SUMÁRIO

Nomenclatura.....	(i)
Lista de Figuras.....	(viii)
Lista de Tabelas.....	(x)
1. INTRODUÇÃO.....	1.1
2. O ENFOQUE VARIACIONAL.....	2.1
2.1. Formulação e Princípios Variacionais.....	2.1
2.1.1. O Problema Harmônico. Princípio Variacional e Formulação Fraca.....	2.4
2.1.2. O Funcional F_{jN} e um novo Princípio Variacional.....	2.12
2.1.3. O Coeficiente Λ_{jN} e o Problema em Primeira-Ordem.....	2.18
2.2. Aplicação do Método Variacional de Rayleigh-Ritz ao PV2.....	2.23
2.3. Breve Histórico Bibliográfico.....	2.27
3. O PROBLEMA HARMÔNICO BIDIMENSIONAL SOB O ENFOQUE VARIACIONAL.....	3.1
3.1. O Problema Bidimensional. Definições e Formulação Geral.....	3.2
3.2. Um Método Variacional para o Problema Bidimensional (MVB).....	3.9
3.2.1. Relações Auxiliares.....	3.15
3.2.2. Coeficientes Hidrodinâmicos Globais..	3.16
3.2.3. Relações de Reciprocidade e Conservação de Energia.....	3.17
3.2.4. Solução em um Espaço de Dimensão Finita.....	3.23
3.2.5. A Escolha das Funções-Teste Elementares.....	3.25

3.3.	Experimentos Numéricos com o MVB.....	3.31
3.3.1.	Estudo de Convergência.....	3.32
3.3.2.	Análise Sistemática à Variação de Pa- râmetros.....	3.39
4.	APLICAÇÕES DA TEORIA DO CORPO ESBELTO (TCE).....	4.1
4.1.	Breve Histórico Bibliográfico.....	4.1
4.2.	Noções da Teoria do Corpo Esbelto.....	4.5
4.2.1.	A Solução Interior.....	4.7
4.2.2.	A Solução Exterior.....	4.10
4.2.3.	Compatibilização.....	4.12
4.3.	Coefficientes Hidrodinâmicos e Algumas Pro- priedades na TCE.....	4.14
4.3.1.	Coefficientes de Massa Adicional e Amortecimento por Radiação.....	4.14
4.3.2.	Amplitude de Onda Irradiada.....	4.16
4.3.3.	Força de Excitação através das Rela- ções de Haskind-Hanaoka.....	4.19
4.3.4.	Força Média de Deriva em Ondas Harmô- nicas.....	4.21
4.4.	Exemplos Numéricos de Aplicação Conjunta TCE & MVB.....	4.26
5.	CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	5.1
APÊNDICE A.	RELAÇÕES DE CONSERVAÇÃO E FLUXO DE ENERGIA	A.1
A.1.	Fluxo de Energia.....	A.1
A.2.	Fluxo Médio de Energia no Problema Linear...	A.3
A.3.	Função Lagrangeana no Problema Linear.....	A.5
APÊNDICE B.	FORMA ALTERNATIVA NO MVB.....	B.1

APÊNDICE C. FUNÇÕES-TESTE ELEMENTARES NO MVB.....	C.1
C.1. A Função Base $\Gamma(y,z; y_0, z_0)$	C.1
C.2. Algumas Funções Elementares em Fluido sem Fronteira.....	C.8
C.3. As Funções-Teste Elementares.....	C.11
C.3.1. $T_1^\pm(y,z)$ e $T_2^\pm(y,z)$: funções-teste elementares com comportamento de polos e dipolos.....	C.11
C.3.2. $T_3^\pm(y,z)$: funções-teste elementares com comportamento de sistemas de vórtices..	C.15
APÊNDICE D. COMPLEMENTOS DEDUTIVOS NA TCE.....	D.1
D.1. Força de Excitação e Amplitude de Onda Irradiada.....	D.1
D.2. Força Média de Deriva.....	D.4
D.3. Fluxo de Energia e Coeficiente de Amortecimento	D.5
APÊNDICE E. SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO INTEGRAL NA TCE.	E.1
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	RB1

NOMENCLATURA

ALFABETO ROMANO

A	-	amplitude de onda incidente
$A(\theta)$	-	amplitude de onda irradiada (dimensional)
$A_j(\omega)$	-	amplitude complexa dimensional de onda irradiada.
$A_{0j}(\omega)$	-	idem, porém adimensional
A_{nj}	-	coeficiente da sêrie de Fourier generalizada no modo j .
$a_{j\ell}(\omega)$	-	coeficiente adimensional de massa adicional bidimensional.
B	-	boca
b	-	cota y da fronteira r_v no problema bidimensional.
$b_{j\ell}(\omega)$	-	coeficiente adimensional de amortecimento bidimensional.
$B(\psi, \Psi)$	-	funcional definido em (3-55).
$C_j(x)$	-	função incôgnita na TCE
C_o	-	velocidade de fase
C_g	-	velocidade de grupo
D	-	calado
$D_{j\ell}(\omega)$	-	coeficiente dimensional de amortecimento tridimensional.
$Dy(y, z; y_o, z_o)$	-	par de dipolos em y (C.27); bidimensional.
$Dz(y, z; y_o, z_o)$	-	par de dipolos em z (C.28); bidimensional.

- $dz(y, z; y_0, z_0)$ - dipolo em z em fluido sem fronteiras (C.40);
bidimensional
- E - energia total no domínio fluido
- $E_j(\omega)$ - força excitante no modo j
- $E_1(W)$ - função exponencial integral (C.3)
- $E_{j\ell}$ - fluxo médio de "co-energia" nos modos $j\ell$
- $(.)^e$ - indica evanescente
- $F(W)$ - função especial definida em (C.2)
- $F_j(\omega)$ - força hidrodinâmica total no modo j
- $F_i(a, b, c)$ - função auxiliar definida em (E.6)
- $F_{jN}(\phi, \psi)$ - funcional definido em (2.27); problema tridimensional
- F_o - coeficiente definido em (3.6)
- F_n - coeficiente definido em (3.14)
- $F_{jk}^e(\psi, \Psi)$ - funcional definido em (3.50); problema bidimensional
- $f(x, y)$ - condição de contorno genérica na superfície livre
- $f_n(x, y)$ - idem, associada ao N -ésimo problema
- $f(z)$ - função definida em (2.46)
- $f_o(z)$ - função definida em (3.5)
- $G(\phi, \psi)$ - funcional definido em (2.13); problema tridimensional
- G_{nm} - matriz definida em (2.64)
- $G(\psi, \Psi)$ - funcional definido em (3.24); problema bidimensional
- $G^e(\psi, \Psi)$ - funcional definido em (3.31); problema bidimensional
- g - aceleração da gravidade

- $H(\psi)$ - função H de Kochin
 $H_0(\cdot)$ - função de Haenckel de primeira espécie e ordem zero
 $H_1^{(1)}(\cdot)$ - idem, ordem 1
 H_{ij} - matriz definida em (E.5)
 H_{jk} - força hidrodinâmica generalizada (2.51)
 $H_0(\cdot)$ - função de Struve de ordem zero
 $H_1(\cdot)$ - função de Struve de ordem 1
 h - calado
 $h(y, z; y_0, z_0)$ - função definida em (C.51)
 $I_0(x)$ - função integral definida em (E.9)
 $I_1(x)$ - idem definida em (E.10)
 i - unidade imaginária
 $J(\phi)$ - funcional definido em (2.2)
 $J^*(\phi)$ - funcional definido na seção (2.1.1)
 $J_B(\phi)$ - funcional definido em (2.70)
 j - indica modo de radiação no problema linear
 K_0 - número de onda
 K_n - raízes reais de equação (3.14.c)
 L - operador linear definido em (2.7)
 $L_n(\psi)$ - funcional definido em (3.16)
 $L(\cdot)$ - função Lagrangeana de um campo potencial
 L_{jj}^e - função Lagrangeana associada a ψ_j^e
 ℓ - indica problema de radiação
 $M_{j\ell}$ - coeficiente dimensional de massa adicional; tridimensional

N	- quando usado como subscripto indica tratar-se de um problema geral de ordem N .
\vec{n}	- versor normal
n_j	- j -ésima componente de \vec{n}
$P_j(\theta)$	- função definida em (4.26)
$p^\pm(y,z)$	- função definida em (3.42)
$p(x,y,z)$	- campo de pressão
$p_j(\xi)$	- função densidade de dipolo na TCE
p_0	- amplitude de oscilação de pressão definida em (A.16)
$Q_j(\theta)$	- função definida em (4.26)
$q^\pm(y,z)$	- função auxiliar no problema bidimensional definida em (3.23)
$q_j(\xi)$	- função densidade de fonte na TCE
R	- coeficiente de reflexão (bidimensional)
$R_j(\theta)$	- amplitude de onda irradiada no modo j de oscilação
$R_j(\omega)$	- força hidrodinâmica reativa generalizada no modo j ; definida em (2.50)
r	- coordenada radial
S	- superfície de controle no problema bidimensional
S_B	- superfície molhada do corpo em sua posição de equilíbrio hidrostático
\tilde{S}_B	- superfície molhada do corpo
S_F	- superfície livre em equilíbrio hidrostático; finita
\tilde{S}_F	- superfície livre perturbada; finita
$S_F^\infty, \tilde{S}_F^\infty$	- superfície livre; infinita
S_H	- superfície do fundo
S_R^∞	- superfície de controle; finita
S_R	- superfície de controle no infinito

- $T(\omega)$ - coeficiente de transmissão (bidimensional)
 $T_j(y, z; y_0, z_0)$ - funções-teste elementares
 t - tempo
 U_n - componente de velocidade normal à fronteira
 $\vec{u}(x, y, z, t)$ - vetor deslocamento de um ponto em S_B
 $V(\Psi)$ - funcional definido em (2.14); tridimensional
 $V_j(\Psi)$ - funcional (2.14) no modo j
 $V_H(y, z; y_0, z_0)$ - função potencial de um par de vórtices (C.25)
 $V_V(y, z; y_0, z_0)$ - função potencial de um par de vórtices (C.26)
 $V_j(\Psi)$ - funcional definido em (3.28); bidimensional
 $v(x, y, z)$ - condição de contorno natural de um campo potencial harmônico genérico em S_B .
 $v_j(x, y, z)$ - condição de contorno em S_B no modo j .
 W - trabalho de um campo potencial ou variável complexa definida em (C.1)
 $W_2^{(1)}(.)$ - espaço de Sobolev
 $W_2^{(1)0}(.)$ - subespaço de $W_2^{(1)}(.)$
 $\tilde{W}_2^{(1)}(.)$ - subespaço das aproximações de $W_2^{(1)}(.)$
 x, y, z - coordenadas cartesianas

ALFABETO GREGO

- α - ângulo de incidência da onda
 $\Gamma(y, z; y_0, z_0)$ - função-base definida em (C.4)
 Γ_B - contorno do corpo; problema bidimensional
 Γ_F - superfície livre do domínio finito S ; problema bidimensional
 Γ_{F^∞} - idem, domínio infinito S^∞
 Γ_H - contorno do fundo; problema bidimensional
 Γ_V^\pm - contornos verticais (controle); problema bidimensional
 γ^\pm - fase definida em (3.8)
 $\Delta_{j\ell}$ - coeficiente definido em (3.22)
 δ_j - coeficiente definido em (B.2)
 ϵ - parâmetro pequeno ou índice de esbeltez
 Λ_{jN} - valor estacionário do funcional $F_{jN}(\dots)$; definido em (2.26) ou (2.29)
 $\tilde{\Lambda}_{jN}$ - aproximação variacional de Λ_{jN}
 λ_{jk}^e - valor estacionário do funcional $F_{jk}^e(\dots)$; definido em (3.51)
 ρ - densidade da água
 $\sigma = \omega^2/g$
 $\Phi(x, y, z, t)$ - campo potencial tridimensional genérico
 $\phi(x, y, z)$ - campo potencial tridimensional harmônico
 $\phi_e(x, y, z)$ - campo potencial evanescente
 $\phi_j(x, y, z)$ - campo potencial tridimensional harmônico no modo j .
 $\bar{\phi}(x, y, z)$ - campo potencial no domínio complementar $\bar{\Omega}$
 $\bar{\Psi}(x, y, z, t)$ - campo potencial tridimensional genérico

- $\Psi(y, z)$ - campo potencial bidimensional genérico
 $\Psi(x, y, z)$ - campo potencial tridimensional harmônico
 $\psi_j(y, z)$ - campo potencial bidimensional harmônico no modo j
 ψ_j^e - parcela evanescente de $\psi_j(y, z)$
 $\bar{\psi}(y, z)$ - campo potencial bidimensional harmônico no domínio \bar{S} .
 $\tilde{\Omega}$ - domínio fluido finito delimitado por $S_B^{\tilde{}}US_F^{\tilde{}}US_H^{\tilde{}}US_R^{\tilde{}}$
 Ω - domínio fluido finito delimitado por $S_B^{}US_F^{}US_H^{}US_R^{}.$
 $\Omega^\infty, \tilde{\Omega}^\infty$ - equivalentes com $S_R \equiv S_R^\infty$
 ω - frequência circular de oscilação

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1.	Domínio Infinito $\tilde{\Omega}^{\infty}$	2.2
Figura 2.2.	O Domínio Finito Ω	2.5
Figura 3.1.	Definições e Coordenadas no Problema Bidimensional.....	3.3
Figura 3.2.	Seção Genérica e Posição de singularidades...	3.30
Figura 3.3.	Seções Típicas. Sequência de Aproximações Variacionais com Linha de "Polos" (5): $\Delta = B/16$.	3.33
Figura 3.4.	Seção Retangular $B/D = 8$. Coeficientes Hidrodinâmicos. Profundidade Infinita.....	3.48
Figura 3.5.	Aproximação Variacional para um Triângulo Equilátero.....	3.49
Figura 3.6.	Coeficientes Hidrodinâmicos para uma Seção Triangular Equilátera. Profundidade Infinita	3.49
Figura 4.1.	Corpo Esbelto. Sistema de Referências.....	4.2
Figura 4.2.	Elipsóide de Revolução 1:8. "surge". Coeficientes de Massa Adicional e Amortecimento. Profundidade Infinita.....	4.32
Figura 4.3.	Idem à figura 4.2. "Sway".....	4.33
Figura 4.4.	Idem à figura 4.2. "Heave".....	4.34
Figura 4.5.	Idem à figura 4.2. "Pitch".....	4.35
Figura 4.6.	Idem à figura 4.2. "Yaw".....	4.36
Figura 4.7.	Elipsóide de Revolução 1:8. "Surge". Força de Excitação. Profundidade Infinita....	4.37
Figura 4.8.	Idem à figura 4.7. "Sway".....	4.38
Figura 4.9.	Idem à figura 4.7. "Heave".....	4.39
Figura 4.10.	Idem à figura 4.7. "Pitch".....	4.40
Figura 4.11.	Idem à figura 4.7. "Yaw".....	4.41
Figura 4.12.	Elipsóide de Revolução 1:8. "Heave" Forças hidrodinâmicas reativas inerciais e de amortecimento comparadas à força hidrostática	4.42
Figura 4.13.	Coeficientes de Força de Deriva em um Corpo Prismático de Seção Retangular.....	4.43

Figura C.1.	Pares de singularidades fundamentais.....	C.9
Figura C.2.a.	Escoamentos típicos em "heave" e vórtices como singularidades fundamentais.....	C.15
Figura C.2.b.	Escoamentos típicos em "sway" e vórtices co- mo singularidades fundamentais.....	C.16
Figura C.3.	Sistemas de vórtice em contra-rotação.....	C.16
Figura C.4.	Composição de sistemas de vórtices.....	C.19

LIŞTA DE TABELAS

Tabela 3.1.	Parâmetros de Adimensionalização.....	3.3
Tabela 3.2.	Coeficientes Hidrodinâmicos para uma seção Circular. Modo em "Sway" $R = 1.0$: Profundidade Infinita. Estudo de Convergência.....	3.34
Tabela 3.3.	Idem à tabela 3.2. Modo em "Heave".....	3.35
Tabela 3.4.	Coeficientes Hidrodinâmicos para uma Seção Retangular. Modo em "Sway". $B/D = 8$. Profundidade Infinita. Estudo de Convergência.	3.36
Tabela 3.5.	Idem à tabela 3.4. Modo em "Sway".....	3.37
Tabela 3.6.	Idem à tabela 3.4. Modo em "Roll".....	3.38
Tabela 3.7.	Aproximações Variacionais para uma seção circular.....	3.40
Tabela 3.8.	Coeficientes Hidrodinâmicos para uma Seção Circular. $R = 10$. Modo em "Sway". Profundidade Infinita. Análise de Sensibilidade à Escolha e Posição das Funções-teste.....	3.41
Tabela 3.9.	Idem à tabela 3.8. Modo em "Heave".....	3.42
Tabela 3.10.	Aproximações Variacionais para uma Seção Retangular ($B/D = 8$).....	3.43
Tabela 3.11.	Coeficientes Hidrodinâmicos para uma Seção Retangular $B/D = 8$. Modo em "Sway". Profundidade Infinita. Análise de Sensibilidade à Escolha e Posição das Funções-teste.....	3.45
Tabela 3.12.	Idem à tabela 3.11. Modo em "Heave".....	3.46
Tabela 3.13.	Idem à tabela 3.11. Modo em "Roll".....	3.47
Tabela 4.1.	Funções-teste elementares no MVB para um elipsoide de revolução 1:8.....	4.26
Tabela 4.2.	Desempenho Numérico Comparativo Aproximado (em nº aproximado de operações aritméticas).	4.30

1. INTRODUÇÃO

O estudo do problema hidromecânico de interação de corpos flutuantes com ondas de superfície constitui-se, atualmente, em capítulo fundamental da engenharia oceânica.

Inicialmente afeito tão somente a aspectos de conforto em navegação, hoje é determinante nos estudos de viabilidade e segurança da quase totalidade de operações realizadas no mar. Anteriormente relegado à condição de simples verificação, o item comportamento no mar passou a integrar a espiral de projeto de sistemas oceânicos flutuantes já em seus primeiros ciclos.

Muito embora investigações mais intensas tenham tido seu início na década de 50, inúmeros aspectos do problema permanecem em aberto. Desde questões de fundamento exclusivamente teórico, como unicidade de solução (ver F. John, 1949) e que só recentemente foi demonstrada (ver Aranha, 1983), até aquelas de caráter mais prático como o movimento de "roll" em grande amplitude, aguçam a imaginação dos pesquisadores.

Mesmo sob hipótese de escoamento irrotacional e invíscido, o que permite a descrição potencial do campo de velocidades, o problema hidromecânico é de difícil tratamento. A existência da superfície livre introduz uma condição de contorno não-linear, em fronteira desconhecida a priori. Adicionalmente, a presença da superfície livre é responsável por um efeito de memória no meio fluido, visto que ondas geradas pelo corpo em um instante qualquer irão persistir indefinidamente. Este efeito não existe em escoamentos potenciais na ausência de interfaces.

Como se não bastasse, a superfície do corpo constitui-se em fonte adicional de não-linearidade.

Tais particularidades induzem a tratamentos simplificados do problema. O mais importante e usual consiste em representar a solução potencial em série assintótica, sob hipótese de ondas de "pequena" amplitude e "pequenos" movimentos do corpo. Esta técnica, sistematizada através do método das perturba

ções, leva a separar o problema original, que é em essência não linear, em uma seqüência infinita de problemas lineares não homogêneos. Estabelece-se assim uma seqüência de soluções, todas satisfazendo a mesma equação linear de campo, porém com condições de contorno, na superfície, livre e do corpo, que são funções não lineares das soluções de ordem inferior. Ao problema de primeira-ordem corresponde condição de contorno homogênea na superfície livre. Este problema, a que usualmente se refere como linear, tem sido objeto de intensos estudos e investigações. Sua solução tem permitido alcançar-se um bom grau de compreensão dos fenômenos dinâmicos e tem sido utilizada do ponto de vista prático. Mesmos fenômenos de origem sabidamente não linear, como a deriva de corpos flutuantes em ondas, podem ser devidamente equacionados a partir da solução do problema linear (ver. p.ex., Maruo (1960), Olgivie (1983), Aranha & Pesce (1986)).

A linearidade do equacionamento permite também que a solução global possa ser decomposta em diversas parcelas. A primeira, associada à difração do trem de ondas incidentes, considerando o(s) corpo(s) flutuante(s) sem liberdade para oscilar. As demais, associadas aos movimentos do(s) corpo(s) e também chamadas potenciais de Kirchoff. A primeira está associada a força hidrodinâmica "*excitante*". Às últimas as forças hidrodinâmicas "*reativas*", as quais correspondem os clássicos coeficientes hidrodinâmicos reativos: massa adicional e amortecimento por radiação.

A decomposição linear permite que o problema dinâmico seja tratado de forma dual no domínio do tempo ou da frequência (ver, p. ex., Mei (1983) pg. 374-378). A solução no domínio da frequência, por sua vez, é a base para a determinação da resposta dinâmica do corpo em ondas aleatórias, sob representação espectral.

Existe ainda um grupo de relações de reciprocidade entre parâmetros globais fundamentais, tais como força excitante, coeficientes hidrodinâmicos de amortecimento por radiação, ampli-

tude de onda irradiada ao longe do corpo, etc. Exemplos clássicos são as relações de Haskind-Hanaoka, Bessho-Newman, o teorema geral da "ótica". Estas relações, além de enriquecerem a compreensão do fenômeno físico, trazem um maior grau de eficiência à solução do problema dinâmico.

Muito embora simplificado, o problema geral, linear e harmônico, formulado para corpos de forma arbitrária, é de difícil solução numérica. O método de Green (MG), que faz uso do teorema e da função de Green, embora diretamente aplicável, conduz a sistemas de equações de ordem avantajada, caracterizados por matrizes complexas e cheias. Outros métodos mais recentes, como o método híbrido de elementos finitos (MHEF), e o método de elementos de contorno (MEC), trazem, igualmente, outras dificuldades práticas, tais como preparação das malhas de discretização.

Esta é a razão fundamental pela qual são após a década de 60, quando computadores de grande capacidade de processamento tornaram-se usuais, tais métodos passaram a ser mais empregados.

Pode-se afirmar, no entanto, que a solução do problema linear sob excitação harmônica, consiste, em última análise, em *determinar os coeficientes hidrodinâmicos globais*: forças de excitação, coeficientes de massa adicional e amortecimento. Então, para uma dada frequência resolver a "equação do movimento", determinando a resposta dinâmica (amplitude e fase) do corpo à ação de uma onda de amplitude unitária e direção de incidência arbitrária, em cada um de seus seis graus de liberdade de movimento.

Para tanto, os problemas de radiação devem ser resolvidos e os coeficientes globais obtidos da solução potencial, por integração ao longo da superfície do corpo. Este é o procedimento usual, em que pese o esforço numérico que porventura a ele esteja associado.

Os coeficientes globais são, na realidade, medidas de energia do sistema hidrodinâmico e, portanto, aparentemente, dependem fracamente das particularidades do campo de escoamento.

Com base neste argumento, pergunta-se: *seria necessário determinar o campo de pressões e velocidades em todo o domínio fluido para se determinar convenientemente estas entidades globais?*

Caso sua determinação possa ser feita de forma direta o uso de métodos variacionais é por certo apropriado, como em outros ramos da engenharia e da física aplicada. Assim se for possível formular um princípio variacional específico, de tal sorte que estas quantidades sejam valores estacionários de funcionais bem definidos, uma aproximação adequada do campo potencial, através de funções admissíveis, seria suficiente para a solução última do problema.

Um exemplo bastante animador foi obtido por Miles (1967), o qual, com o uso de apenas uma função admissível, reconstituiu o coeficiente de reflexão para um ressalto submarino, submetido à ação de ondas planas harmônicas.

Este objetivo é perseguido no presente trabalho, no contexto dos problemas lineares não homogêneos decorrentes da expansão do problema harmônico em uma série assintótica. A formulação variacional, apresentada no capítulo 2, é geral e tridimensional, embora restrita ao caso de velocidade nula de avanço. Dois princípios variacionais são enunciados. O primeiro (PV1) estabelece que a estacionariedade de um funcional, que pode ser interpretado como uma função Lagrangeana do sistema hidromecânico, conduz ao equacionamento fraco^(*) do problema associado e, equivalentemente, à sua formulação clássica, na forma diferencial. O segundo (PV2) estabelece que as forças hidrodinâmicas generalizadas agentes sobre o corpo são valores estacionários de funcionais, os quais relacionam o trabalho das forças externas sobre o meio fluido com a energia cinética e potencial deste meio. Estes funcionais guardam certa similaridade com o quociente de Rayleigh em problemas clássicos de vibração.

(*) Usualmente empregado no Método Híbrido de Elementos Finitos.

A aplicação do PV2 ao problema linear tridimensional é imediata e os tensores de massa adicional, amortecimento e força excitante são prontamente escritos como função do tensor de força hidrodinâmica generalizada.

Mostra-se também que a busca da condição de estacionariedade deste funcional pode ser feita através da solução da equação fraca associada em um espaço de dimensão finita^(*), varrido por funções admissíveis.

O capítulo 3 constitui-se em um exemplo de aplicação do PV2. Elegeu-se para tanto o problema linear, e mais especificamente, o caso bidimensional. Neste contexto mais restrito um método variacional é elaborado em detalhes.

Ressalta-se que os resultados conseguidos com o Método Variacional Bidimensional (MVB) são amplamente satisfatórios, adiantando-se que os coeficientes hidrodinâmicos de seções transversais típicas foram obtidos com bom grau de precisão e economia computacional, em toda a faixa de frequências de interesse. As funções admissíveis utilizadas compõem-se de apenas quatro funções-teste elementares reais, o que implica na solução de um problema linear real e simétrico de ordem 4.

Cumprir notar porém que a origem do estudo do comportamento no mar está na navegação. As formas esbeltas que caracterizam os navios induziram a adoção de aproximações, hoje conhecidas como Teoria de Faixas (TF) e Teoria do Corpo Esbelto (TCE). Ambas aproximam o problema tridimensional por uma sucessão de soluções bidimensionais correspondentes às diversas seções transversais do navio. A TF, contudo, não leva em consideração a interação longitudinal entre estas soluções. Formuladas inicialmente sob argumentos de natureza física, ambas teorias tem sido desenvolvidas desde o seu surgimento, no final da década de 50, e hoje estão bem estabelecidas tanto do ponto de vista matemático quanto prático. Uma excelente revisão pode ser apreciada em Newman (1978), Sclavounous (1983) e Aranha (1986).

(*) Método de Rayleigh-Ritz.

O capítulo 4 traz a Teoria do Corpo Esbelto e o Método Variacional Bidimensional aplicados conjuntamente à solução de problemas típicos. O objetivo é mostrar como técnicas variacionais e assintóticas podem se constituir em poderosa e eficiente ferramenta de análise para o estudo do comportamento dinâmico de corpos esbeltos em ondas.

Inicialmente faz-se uma breve revisão da formulação da TCE. Tanto os problemas de radiação quanto os de difração são abordados. A representação integral da solução em campo distante (solução exterior) tem como núcleo a função de Haenckel de primeira espécie e ordem zero. A solução em campo próximo (solução interior) é, a menos da condição de radiação, a solução bidimensional. A compatibilização das duas soluções resulta em uma equação integral de Fredholm, de segunda espécie.

Os coeficientes hidrodinâmicos globais são então facilmente obtidos, consistindo basicamente de duas parcelas: a primeira, advinda da solução bidimensional; a segunda, associada à interação longitudinal dos campos potenciais bidimensionais.

A partir da expansão assintótica para a amplitude de onda ao longe do corpo outros resultados relevantes são deduzidos no âmbito da TCE: as relações de Haskind, e o coeficiente médio da força de deriva em ondas monocromáticas. As forças excitantes, calculadas pelas relações de Haskind, dependem então apenas da solução dos problemas de radiação e, de forma integral, do ângulo de incidência do trem de ondas. Seguem também importantes relações de energia mostrando a consistência da TCE.

Os exemplos de aplicação escolhidos referem-se a um elipsóide de revolução. Os valores dos coeficientes hidrodinâmicos são comparados a resultados obtidos da literatura, provenientes quer da aplicação do Método de Green Tridimensional, quer da Teoria Unificada de Newman & Sclavounous. Mostra-se, contrastando-se os resultados, que a TCE conduz a valores dos coeficientes hidrodinâmicos com erros bastantes menores, se comparados aos erros da Teoria de Faixas, como esperado.

O capítulo 5 conclui o presente trabalho, tecendo as últimas considerações sobre os resultados alcançados, destacando os pontos fundamentais, e apresenta algumas sugestões para sua continuidade.

São apresentados, adicionalmente, 5 apêndices.

O apêndice A discute relações de conservação de energia e sua correlação com o enfoque variacional. O apêndice B trata de uma formulação alternativa do MVB. O apêndice C apresenta, para o caso bidimensional, o desenvolvimento analítico das funções teste elementares, formadas por sistemas de polos, dipolos e vórtices. O apêndice D cuida de algumas deduções, no âmbito da TCE, e o apêndice E descreve o método numérico empregado para a solução da equação integral.

* * *

2. O ENFOQUE VARIACIONAL

O presente capítulo apresenta uma formulação variacional para o problema hidromecânico de interação de corpos flutuantes com o meio fluido, na presença de superfície livre, e sob hipótese de velocidade nula de avanço^(*). Considera para tanto que a solução do problema harmônico (estacionário) seja expressa na forma de série assintótica, sob a hipótese de pequenos deslocamentos do sistema.

Da presente formulação, a qual faz uso do equacionamento fraco do problema, decorrem dois importantes princípios variacionais. A aplicação destes princípios conduz então a um método variacional onde as forças hidrodinâmicas generalizadas agentes sobre o(s) corpo(s) são determinadas de forma direta. Isto se consegue através do cálculo de valores estacionários de funcionais bem definidos a partir de aproximações com funções admissíveis, ou de Rayleigh-Ritz.

Mostra-se também que o princípio variacional de Bessho (1968) é um caso particular da aplicação dos princípios variacionais aqui desenvolvidos ao problema de primeira-ordem, quando as funções admissíveis são funções de Green do problema. Isto se fará na seção 2.3, onde um breve histórico bibliográfico é apresentado.

2.1. Formulação e Princípios Variacionais

Considere o problema de interação hidromecânica de um (ou mais) corpo(s) flutuante(s) e o meio fluido, na presença de superfície livre.

O escoamento é suposto invíscido e irrotacional, de tal sorte que possa ser representado por um campo potencial ϕ de velocidade. Despreza-se o efeito de tensão superficial.

(*) O problema em que há velocidade de avanço é relevante para corpos esbeltos. Pode-se mostrar, nestes casos, que o problema interior reduz-se ao problema clássico de velocidade nula com a frequência corrigida pelo efeito Doppler (ver Newman, 1978).

Considere um domínio fluido infinito $\tilde{\Omega}^\infty$, limitado pela superfície do fundo S_H^∞ , pela superfície(s) do(s) corpo(s) S_B^∞ e pela superfície livre S_F^∞ (ver figura 2.1).

O equacionamento mais geral do problema é dado por (ver, p.ex., Wehausen & Laitone (1959))

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad ; \quad \text{em } \tilde{\Omega}^\infty \quad (a)$$

$$-p/\rho = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + g\eta = P(x, y, t) \quad \text{em } S_F^\infty \quad (b)$$

(2.1)

$$\nabla \phi \cdot \vec{n} = V_n \quad \text{em } S_B^\infty \quad \text{e } S_H^\infty \quad (c)$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \phi \cdot \nabla \right) (z - \eta) = 0; \quad \text{em } S_F^\infty \quad (d)$$

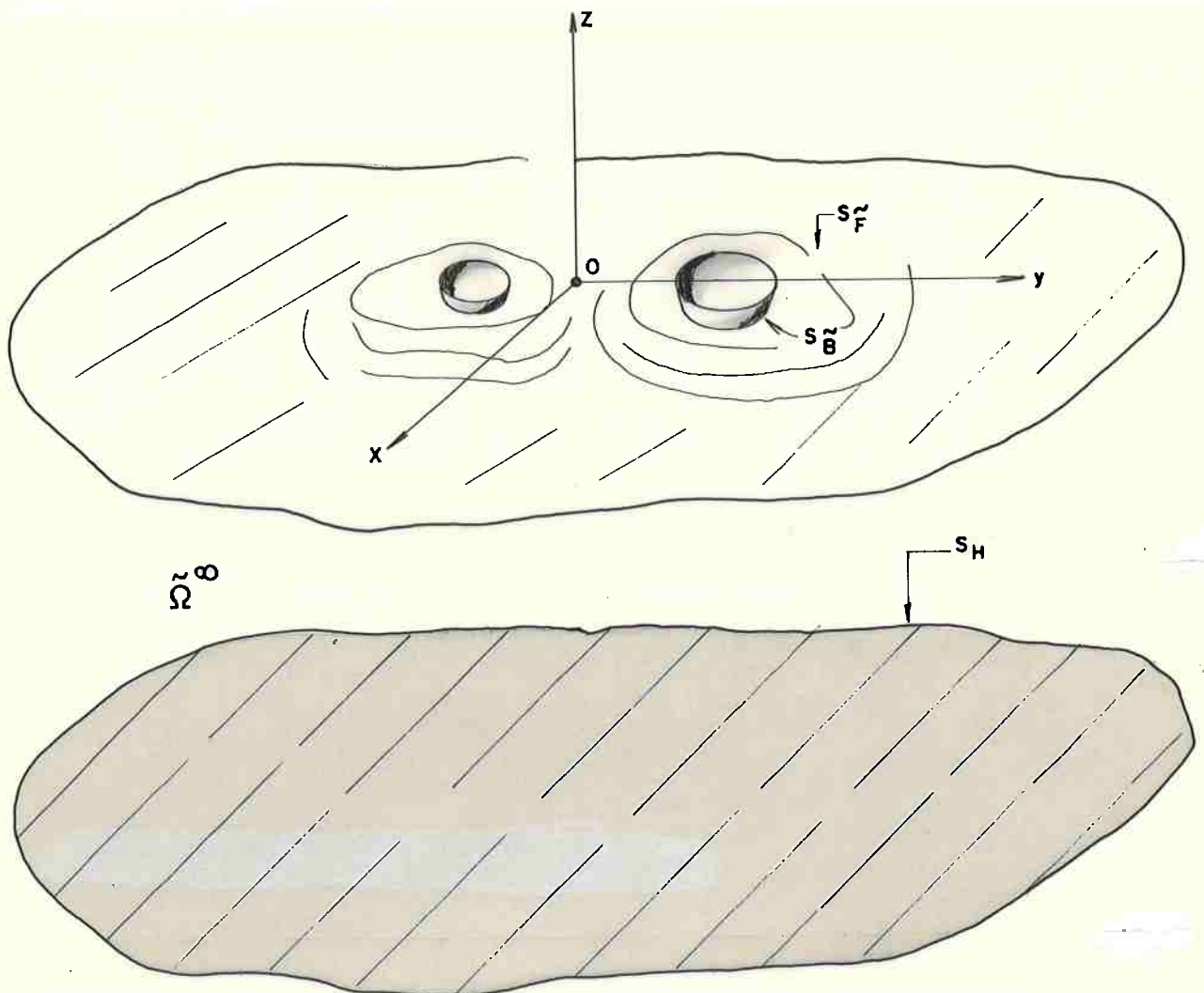


Figura 2.1. - Domínio Infinito $\tilde{\Omega}^\infty$

onde $\eta(x,y,t)$ é a cota da superfície livre, além de uma condição apropriada no infinito tal que Φ , $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ e $\nabla \Phi \rightarrow 0$ com $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$.

Como mencionado na introdução, o potencial Φ pode, sob hipótese de pequenos deslocamentos do sistema hidromecânico, ser representado por uma série assintótica na forma

$$\Phi = \epsilon \Phi^{(1)} + \epsilon^2 \Phi^{(2)} + \dots \quad (2.2)$$

onde ϵ é um parâmetro pequeno.

A substituição de (2.2) em (2.1) permite que os diversos problemas $\Phi^{(1)}$, $\Phi^{(2)}$, ..., sejam separados sistematicamente, agrupando-se os termos de mesma ordem de magnitude. A sequência de problemas que se estabelece é equacionada em um domínio Ω^∞ , limitado por S_B , S_F^∞ e S_H^∞ , onde S_B e S_F^∞ definem a posição média de equilíbrio do sistema hidromecânico.

Todas as soluções satisfazem a equação de campo em Ω^∞ . As condições de contorno são funções não lineares das soluções de ordem inferior. Em particular a condição de contorno na superfície livre pode ser decomposta em uma *condição homogênea*, dada por

$$\frac{\partial^2 \Phi^{(k)}}{\partial t^2} + \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial z} = 0 \quad ; \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

somada à uma condição particular $f_k(x,y,t)$, definida em S_F , e que caracteriza os diversos problemas $\Phi^{(k)}$.

Por simplicidade, a condição de contorno no fundo será suposta homogênea, ou seja $V_n = 0$ em S_H .

Assim, os diversos termos da série (2.2) satisfazem a

$$\nabla^2 \Phi^{(k)} = 0 \quad ; \quad \text{em } \Omega^\infty \quad (a)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi^{(k)}}{\partial t^2} + \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial z} = f_k(x,y,t) \quad ; \quad \text{em } S_F^\infty \quad (b)$$

$$\frac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial n} = v_k(x, y, z, t) \quad ; \text{ em } S_B \quad (c) \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial n} = 0 \quad ; \text{ em } S_H \quad (d)$$

$$\Phi^{(k)} \text{ e } \nabla \Phi^{(k)} \text{ são finitos; } r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty \quad (e)$$

Mostra-se, ver p.ex. Miloh (1984), que é possível estabelecer-se uma *formulação variacional geral* que leve ao equacionamento (2.1) ou, especificamente à seqüência (2.4) de equações.

Porém, é sob hipóteses mais restritivas de *resposta estacionária à excitação harmônica no tempo* que um enfoque variacional à equação (2.4) leva diretamente à solução deste problema hidromecânico. É possível construir um funcional, cujos valores estacionários são as próprias forças hidrodinâmicas generalizadas agentes sobre o(s) corpo(s) e decorrentes de um determinado campo potencial.

Em outras palavras *existe um princípio variacional* para essa classe de problemas que conduz a métodos variacionais específicos para sua solução.

Como será visto, esta formulação está intimamente ligada ao equacionamento fraco do problema (2.4) sob excitação harmônica.

Antes de abordarmos porém, é interessante que a formulação fraca seja revisitada, sob um enfoque variacional, o que se fará a seguir.

2.1.1. O Problema Harmônico. Princípio Variacional e Formulação Fraca.

Seja um subdomínio finito de Ω^∞ , denotado Ω , delimitado pelas superfícies S_B , S_H , S_F e S_R , conforme mostra a figura 2.2. A superfície S_R é, sem perda de generalidade, suposta ci-

lândrica e distante de um raio R do eixo coordenado vertical z , com origem em S_F . Considere qualquer um dos termos da série (2.2), aqui simplesmente indicado pela função $\phi(x,y,z,t)=\phi(r,\theta,z,t)$.

Apenas o caso de resposta estacionária à excitação harmônica no tempo, e de frequência ω , será considerado. Permite-se que tanto a superfície do(s) corpo(s) S_B quanto a superfície livre S_F^∞ sejam fontes de excitação. Assim, escreve-se

$$\phi(x,y,z,t) = \text{Re} \{ \phi(x,y,z) e^{-i\omega t} \} \quad (2.5)$$

e define-se o número σ através da relação de dispersão

$$\sigma = \frac{\omega^2}{g} = K_0 \tanh K_0 h$$

onde K_0 é o número de onda e h a profundidade.

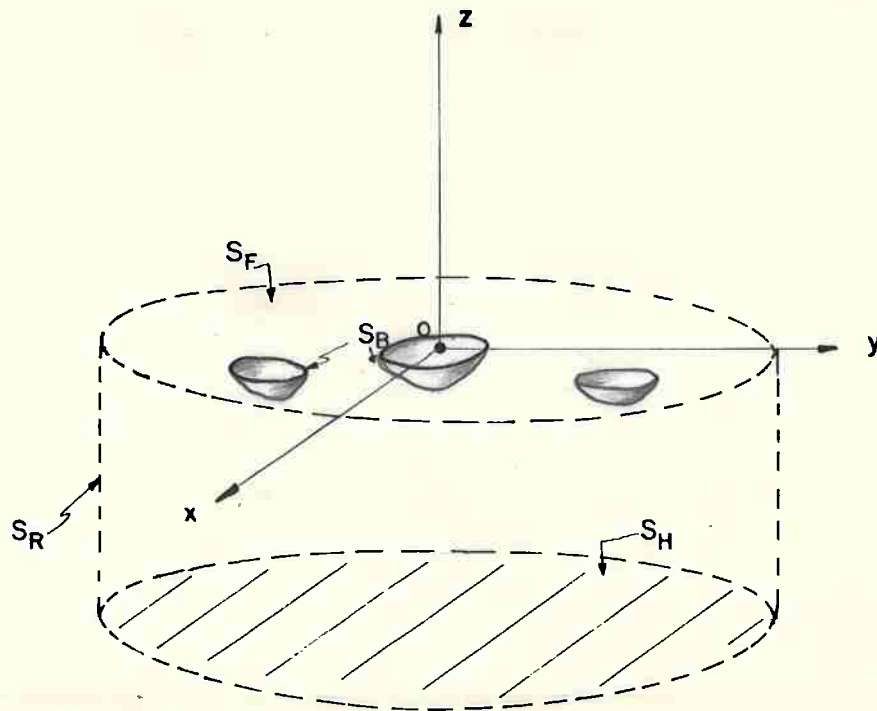


Figura 2.2. - O Domínio Finito Ω .

Considere também o domínio complementar de Ω em Ω^∞ , definido como $\bar{\Omega}$. Define-se então em $\bar{\Omega}$ a extensão contínua $\bar{\phi}(x,y,z)$ de $\phi(x,y,z)$. A função $\bar{\phi}(x,y,z)$ é suposta de classe C^2 .

O equacionamento mais geral de ϕ em Ω é dado então, para funções regulares $v(x,y,z)$ e $f(x,y)$, por

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad ; \quad \text{em } \Omega \quad (a)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = v(x,y,z) \quad ; \quad \text{em } S_B \quad (b)$$

$$L\phi = f(x,y) \quad ; \quad \text{em } S_F \quad (c) \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial r} ; \phi = \bar{\phi} \quad ; \quad \text{em } S_R \quad (d)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad ; \quad \text{em } S_H \quad (e)$$

onde

$$L = \left(\frac{\partial}{\partial z} - \sigma \right) \Big|_{z=0} \quad (2.7)$$

A função $\bar{\phi}(x,y,z)$ em $\bar{\Omega}$ pode ser representada como a soma de duas parcelas. A primeira, $\bar{\phi}_p$, solução particular, excitada pela função forçante $\bar{f}(x,y)$ em S_F . A segunda $\bar{\phi}_H$, solução homogênea.

Assim

$$\bar{\phi}(x,y,z) = \bar{\phi}_p(x,y,z) + \bar{\phi}_H(x,y,z) \quad (2.8)$$

A solução particular $\bar{\phi}_p$ pode ser escolhida de tal sorte que se anule na superfície de controle S_R , satisfazendo, portanto, ao seguinte equacionamento

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \bar{\phi}_p &= 0 && ; \text{ em } \bar{\Omega} && (a) \\
L \bar{\phi}_p &= \bar{f}(x, y) && ; \text{ em } S_F^- && (b) \\
\bar{\phi}_p &= 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \bar{\phi}_p}{\partial r} = \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\partial \bar{\phi}_H}{\partial r} && ; \text{ em } S_R && (c) \\
\frac{\partial \bar{\phi}_p}{\partial n} &= 0 && ; \text{ em } S_H && (d) \\
\bar{\phi}_p \quad \text{e} \quad \nabla \bar{\phi}_p &\text{ finitas para } r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty && (e)
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Por sua vez a solução homogênea $\bar{\phi}_H(x, y, z)$ satisfaz

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \bar{\phi}_H &= 0 && ; \text{ em } && (a) \\
L \bar{\phi}_H &= 0 && ; \text{ em } S_F^- && (b) \\
\frac{\partial \bar{\phi}_H}{\partial n} &= 0 && ; \text{ em } S_H^- && (c) \\
\bar{\phi}_H &= \phi && ; \text{ em } S_R && (d) \\
\bar{\phi}_H &\sim A(\theta) \frac{e^{i(K_0 r - \pi/4)}}{\sqrt{K_0 r}} f(z) ; K_0 r \rightarrow \infty && (e)
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Se a aproximação for de primeira ordem, por exemplo, $f \equiv 0$ e a condição de contorno em S_F^∞ é homogênea. Já, para o problema de segunda ordem, v , f e a parcela $\left. \frac{\partial \bar{\phi}_p}{\partial r} \right|_{S_R}$ são funções bilineares de $\phi^{(1)}$ e do movimento do corpo em primeira ordem $\xi^{(1)}$. Se $\phi^{(1)}$ for harmônico com frequência $\omega^{(1)}$, v , f (e, portanto $\left. \frac{\partial \bar{\phi}_p}{\partial r} \right|_{S_R}$) podem ser separados em duas parcelas: $v^{(20)}$, $v^{(22)}$ e $f^{(20)}$, $f^{(22)}$ respectivamente. A primeira, índice (20), independente do tempo, tem frequência nula. A segunda, índice (22) corresponde ao termo pulsante em $2\omega^{(1)}$. A elas correspondem os potenciais $\phi^{(20)}$ e $\phi^{(22)}$ respectivamente (ver Aranha e Pesce (1986)).

Considere agora a classe de funções Ψ contínuas em Ω e que tenham energia finita. Ou seja

$$\iiint_{\Omega} \{(\nabla\Psi)^2 + \Psi^2\} d\Omega < \infty \quad (2.11)$$

Esta classe de funções tem gradiente quadrado-integrável (norma de energia) e define um espaço linear denotado por $W_2^{(1)}(\Omega)$ na literatura especializada.

Escolhendo uma função $\Psi \in W_2^{(1)}(\Omega)$ arbitrária, multiplicando-a por (2.6.a), integrando o produto por partes em Ω e aplicando-se o teorema de Gauss e as demais condições de contorno, chega-se então à seguinte equação fraca: (*)

$$G(\phi, \Psi) = V(\Psi) \quad (2.12)$$

onde os funcionais $G(\phi, \Psi)$ e $V(\Psi)$ foram definidos como

$$G(\phi, \Psi) = \iiint_{\Omega} \nabla\phi \cdot \nabla\Psi d\Omega - \sigma \iint_{S_F} \phi\Psi dS - \iint_{S_R} \frac{\partial\bar{\phi}_H}{\partial r} \Psi dS \quad (2.13) \quad (**)$$

e

$$V(\Psi) = \iint_{S_B} v\Psi dS + \iint_{S_F} f\Psi dS + \iint_{S_R} \frac{\partial\bar{\phi}_P}{\partial r} \Psi dS \quad (2.14)$$

O problema (2.6) pode então ser assim enunciado: (***) "determinar $\phi \in W_2^{(1)}(\Omega)$ tal que (2.12) seja satisfeita para todo $\Psi \in W_2^{(1)}(\Omega)$ ". Note que no equacionamento fraco exige-se apenas que ϕ e Ψ tenham energia finita.

(*) O equacionamento fraco é a formulação usual do Método de Elementos Finitos (ver, p.ex., Mei (1983), pg. 332).

(**) Note que a parcela homogênea $\bar{\phi}_H$ é excitada por ϕ em S_R . Portanto $\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial r} = D(\phi)$, onde $D(\cdot)$ é um operador linear em ϕ .

(***) A interpretação física de (2.12-2.14) será deixada para o final da presente seção.

Não é difícil verificar que o funcional $G(\phi, \psi)$ é simétrico, ou seja

$$G(\phi, \psi) = G(\psi, \phi) \quad (2.15)$$

Para tanto, considere duas funções ϕ_ℓ e ϕ_m ambas pertencentes ao espaço $W_2^{(1)}(\Omega)$ e que satisfaçam às seguintes equações fracas

$$\begin{aligned} G(\phi_\ell, \psi) &= V_\ell(\psi) \\ G(\phi_m, \psi) &= V_m(\psi) \end{aligned} \quad (2.16)$$

onde $V_\ell(\psi)$ e $V_m(\psi)$ são definidas por (2.14), com as funções específicas $v_\ell, f_\ell, \phi_{\ell p}$ e v_m, f_m, ϕ_{mp} .

Segue então que

$$\begin{aligned} G(\phi_m, \phi_\ell) - G(\phi_\ell, \phi_m) &= \iint_{SR} \frac{\partial \bar{\phi}_{\ell H}}{\partial r} \phi_m dS - \iint_{SR} \frac{\partial \bar{\phi}_{mH}}{\partial r} \phi_\ell dS = \\ &= \iint_{SR} \left(\frac{\partial \bar{\phi}_{\ell H}}{\partial r} \bar{\phi}_{mH} - \frac{\partial \bar{\phi}_{mH}}{\partial r} \bar{\phi}_{\ell H} \right) dS + \iint_{SR} \left(\frac{\partial \bar{\phi}_{\ell H}}{\partial r} \bar{\phi}_{mp} - \frac{\partial \bar{\phi}_{mH}}{\partial r} \bar{\phi}_{\ell p} \right) dS \end{aligned} \quad (2.17)$$

Visto que $\bar{\phi}_{\ell H}$ e $\bar{\phi}_{mH}$ satisfazem a condições de radiação (2.10.e), matematicamente similares, segue, da aplicação do teorema de Green a estas funções no domínio $\bar{\Omega}$, que

$$\iint_{SR} \left(\frac{\partial \bar{\phi}_{\ell H}}{\partial r} \bar{\phi}_{mH} - \frac{\partial \bar{\phi}_{mH}}{\partial r} \bar{\phi}_{\ell H} \right) dS = 0 \quad (2.18)$$

Como, por outro lado, $\bar{\phi}_{\ell p}$ e $\bar{\phi}_{mp}$ são admitidas nulas em S_R (ver (2.9c)), a expressão (2.17) é identicamente nula o que demonstra (2.15).

De (2.15) e (2.16) decorre ainda que

$$V_{\ell}(\phi_m) = V_m(\phi_{\ell}) \quad (2.19)$$

Como será visto na próxima seção, esta relação de simetria (reciprocidade) é fundamental e permite que se estabeleça uma generalização das relações de Haskind-Hanaoka.

Considere agora o funcional

$$J(\phi) = \frac{1}{2} G(\phi, \phi) - V(\phi) \quad (2.20)$$

Verifica-se da simetria do funcional $G(\phi, \psi)$ que a estacionariedade de $J(\phi)$ implica na equação fraca (2.12) e vice-versa.

De fato, tomando a variação de (2.20), com $\delta\phi \in W_2^{(1)}(\Omega)$, arbitrário, segue que

$$\begin{aligned} \delta J &= \frac{1}{2} [G(\phi, \delta\phi) + G(\delta\phi, \phi)] - V(\delta\phi) = \\ &= G(\phi, \delta\phi) - V(\delta\phi) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Como $\delta\phi$ é arbitrário é imediato verificar que a estacionariedade de $J(\phi)$ implica na equação fraca (2.12) e é implicada por ela.

O seguinte princípio variacional pode portanto, ser enunciado:

"Dentre todas as funções $\phi \in W_2^{(1)}(\Omega)$, a solução do problema (2.12) é aquela que faz o funcional $J(\phi)$ estacionário"...(PVI).

Muito embora $J(\phi)$ guarde uma certa semelhança com uma função Lagrangeana clássica, deve-se lembrar que $\phi(x, y, z)$ é uma função complexa. Mesmo o funcional $J^*(\phi)$ definido como

$$J^*(\phi) = \frac{1}{2} G(\phi, \phi^*) - V(\phi^*)$$

onde (*) indica complexo conjugado, \bar{e} em geral um número complexo.

No entanto se, no problema em primeira-ordem, em que $f^{(1)} \equiv \bar{\phi}_p^{(1)} \equiv 0$, o potencial $\phi^{(1)}$ for separado em duas parcelas, a primeira que se propaga ao infinito $\phi_o^{(1)}$ e a segunda $\phi_e^{(1)}$ evanescente, ou seja

$$\{ r^{1/2} \phi_e^{(1)}, r^{1/2} \nabla \phi_e^{(1)} \} \rightarrow 0 ; r \rightarrow \infty$$

é possível mostrar-se (ver apêndice A):-

i) que o fluxo médio de energia associado a $\phi_e^{(1)}$ é nulo:

$$\text{Im} \int_{SB} \frac{\partial \phi_e^{(1)}}{\partial n} \phi_e^{(1)*} dS = \text{Im} \int_{SR} \frac{\partial \bar{\phi}_e^{(1)}}{\partial r} \phi_e^{(1)*} dS = \text{Im} \int_{SR^\infty} \frac{\partial \bar{\phi}_e^{(1)}}{\partial r} \phi_e^{(1)*} dS = 0$$

ii) que a diferença entre energia cinética \bar{T}_e e potencial \bar{U}_e em $\bar{\Omega}$ é finita e, a menos de uma constante pode ser calculada por uma integral na superfície S_R .

$$- \text{Re} \int_{SR} \frac{\partial \bar{\phi}_e^{(1)}}{\partial r} \phi_e^{(1)*} dS = \iiint_{\Omega} |\nabla \phi_e^{(1)}|^2 d\bar{\Omega} - \sigma \iint_{S\bar{F}} |\phi_e^{(1)}|^2 dS = \frac{2}{\rho} (\bar{T}_e - \bar{U}_e)$$

iii) que o trabalho médio realizado pelo corpo sobre o meio fluido é suficiente para determinar-se a diferença entre energia cinética e potencial em todo domínio fluido Ω^∞ :

$$\frac{W_e}{\rho \omega} = V(\phi_e^{(1)*}) = \text{Re} \int_{S_B} \frac{\partial \phi_e^{(1)*}}{\partial n} \phi_e^{(1)*} dS = \frac{2}{\rho} (T_e - U_e)$$

iv) e que o funcional $J^*(\phi_e^{(1)})$ definido anteriormente é, a menos de uma constante, uma função Lagrangeana clássica:

$$J^*(\phi_e^{(1)}) = \frac{1}{2} G(\phi_e^{(1)}, \phi_e^{(1)*}) - V(\phi_e^{(1)*}) = \frac{1}{\rho} (T_e - U_e) = \frac{1}{\rho} L(\phi_e^{(1)})$$

Outras relações de energia podem ser apreciadas no apêndice A.

Convém notar também, que o problema (2.12) *fica matematicamente bem posto com a condição fraca^(*) de compatibilidade adicional.*

$$\iint_{S_R} (\phi - \bar{\phi}) \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial r} dS = 0 \quad (2.22)$$

ã qual poder-se-ia ter chegado variando-se o funcional $\bar{J}(\phi, \bar{\phi})$ de finido como

$$\begin{aligned} \bar{J}(\phi, \bar{\phi}) = & \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} (\nabla \phi)^2 d\Omega - \sigma \iint_{S_F} \phi^2 dS - \iint_{S_B} v \phi dS - \iint_{S_F} f \phi dS \\ & + \frac{1}{2} \iint_{S_R} \left(\frac{1}{2} \bar{\phi} - \phi \right) \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial r} dS = J(\phi) + \frac{1}{2} \iint_{S_R} \bar{\phi} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial r} dS \end{aligned} \quad (2.23)$$

2.1.2. O Funcional F_{jN} e um novo princípio variacional (PV2)

O princípio variacional PVI, enunciado no item anterior, é bastante claro do ponto de vista físico. No entanto, não conduz diretamente às grandezas de maior interesse na solução do problema hidromecânico: *as forças hidrodinâmicas generalizadas agentes sobre o corpo* em um campo potencial ϕ_N , o qual satisfaz a equação (2.6) (ou (2.12)).

O objetivo da presente seção é mostrar que *existe um princípio variacional diretamente associado a estas grandezas globais.*

Para tanto, considere o potencial ϕ_j de radiação linear (ou em primeira ordem), associado ao movimento harmônico (na frequência ω) de um único corpo em seu j -ésimo modo generalizado de

(*) Foi chamada a atenção do autor para o fato de que esta condição é, em essência, a condição de continuidade fraca no espaço $W_2^{(1)}(\Omega)$. Está associada aos teoremas de imersão de Sobolev.

oscilar. O índice j será reservado para indicar apenas esta classe de problemas.

Os potenciais de radiação ϕ_j satisfazem a equação fraca.

$$G(\phi_j; \Psi) = V_j(\Psi) \quad (2.24)$$

para todo $\Psi \in W_2^{(1)}(\Omega)$, onde

$$V_j(\Psi) = \iint_{S_B} v_j \Psi \, dS \quad (*) \quad (2.25)$$

Considere também o potencial ϕ_N , na frequência ω , satisfazendo a

$$G(\phi_N, \Psi) = V_N(\Psi) \quad (2.12.a)$$

para todo $\Psi \in W_2^{(1)}(\Omega)$, onde

$$V_N(\Psi) = \iint_{S_B} v_N \Psi \, dS + \iint_{S_F} f_N \Psi \, dS + \iint_{S_R} \frac{\partial \bar{\phi}_{Np}}{\partial r} \Psi \, dS \quad (2.14.a)$$

No problema de primeira-ordem, como exemplo, o potencial ϕ_N pode ser qualquer um dos potenciais de radiação ($N=j=1, \dots, 6$), ou de espalhamento ($N=j=7$). No problema de segunda-ordem, como outra ilustração, ϕ_N pode ser a parcela pulsante $\phi^{(22)}$, como também a parcela $\phi^{(20)}$, em frequência nula.

Tomando a parte linear da equação de Bernoulli aplicada ao potencial ϕ_N na superfície do corpo, é imediato verificar-se que,

(*) Note que nos problemas de radiação não existe excitação na superfície livre ($f \equiv 0$) e portanto, $\bar{\phi}_p \equiv 0$; v_j 's são definidos usualmente como as componentes generalizadas do vetor normal.

a menos de uma constante, a *força hidrodinâmica generalizada* agente sobre o corpo segundo o j -ésimo grau de liberdade, no campo potencial ϕ_N , é dada por

$$\Lambda_{jN} = V_j(\phi_N) = V_N(\phi_j) \quad (2.26)$$

onde a relação de simetria (reciprocidade) do funcional $G(\phi, \psi)$ foi utilizada.

Na realidade a relação de reciprocidade (2.26) é uma generalização das relações de Haskind-Hanaoka. De fato, se em particular ϕ_N for o potencial de espalhamento em primeira-ordem, (2.26) é a própria relação de Haskind-Hanaoka. Se, por outro lado, ϕ_N for um dos potenciais de radiação, Λ_{jN} é a força hidrodinâmica "*reativa*" no problema de primeira-ordem, normalmente decomposta nos *coeficientes de massa adicional e amortecimento*. Estes resultados serão visto com detalhes na próxima seção.

Como outro exemplo, se ϕ_N for o potencial de segunda-ordem $\phi^{(2)}$, Λ_{jN} é o "*coeficiente de força generalizada associada ao potencial de segunda-ordem*", no modo $j^{(*)}$. Neste caso (2.26) é outra forma de expressar as relações deduzidas por Lighthill (1979) ou, de forma independente, porém no contexto do problema bidimensional, por Aranha & Pesce (1986). (ver também Aranha & Pesce (1987a)).

Considere agora o funcional

$$F_{jN}(\phi, \psi) = \frac{V_j(\psi) V_N(\phi)}{G(\phi, \psi)} \quad (2.27)$$

De (2.26) é imediato verificar que

$$\Lambda_{jN} = F_{jN}(\phi_j; \phi_N) \quad (2.29)$$

(*) Sõ tem sentido físico se considerarmos o problema de oscilações em baixa frequência.

ou seja: o funcional F_{jN} assume o valor da força hidrodinâmica Λ_{jN} no par de funções $(\phi_j; \phi_N) \in W_2^{(1)}(\Omega) \times W_2^{(1)}(\Omega)$. Note que esta relação é válida mesmo quando $G(\phi_j, \phi_N) = 0$, caso em que Λ_{jN} é identicamente nula.

Mais pode ser mostrado: Λ_{jN} é um valor estacionário de $F_{jN}(\phi, \psi)$, no par (ϕ_j, ϕ_N) .

De fato, considere (2.27) reescrita na forma

$$F_{jN}(\phi, \psi) G(\phi, \psi) = V_j(\psi) V_N(\phi) \quad (2.27.a)$$

Tomando a primeira variação de (2.27), com $(\delta\phi, \delta\psi) \in W_2^{(1)}(\Omega) \times W_2^{(1)}(\Omega)$, vem que

$$\delta F_{jN}(\phi, \psi) G(\phi, \psi) + F_{jN}(\phi, \psi) \delta G(\phi, \psi) = V_j(\delta\psi) V_N(\phi) + V_j(\psi) V_N(\delta\phi) \quad (2.30)$$

Se o par $(\phi_j; \phi_N)$ for substituído em (2.30) e as identidades (2.26) e (2.29) forem utilizadas segue que

$$\Lambda_{jN} \{ \delta F_{jN}(\phi_j; \phi_N) + (G(\phi_N, \delta\phi_j) - V_N(\delta\phi_j)) + \\ + (G(\phi_j, \delta\phi_N) - V_j(\delta\phi_N)) \} = 0$$

Como $(\delta\phi_j; \delta\phi_N)$ são arbitrárias, (2.12.a) e (2.24) se aplicam para ϕ_N e ϕ_j respectivamente, conduzindo à estacionariedade de F_{jN} , ou seja

$$\delta \Lambda_{jN} = \delta F_{jN}(\phi_j; \phi_N) = 0 \quad (2.32)$$

Note que (2.32) continua válida mesmo quando $\Lambda_{jN} = 0$.

Para demonstrar esta última assertiva, suponha um sub-espaço $\tilde{W}_2^{(1)}(\Omega)$, ($\tilde{W}_2^{(1)}(\Omega) \subset W_2^{(1)}(\Omega)$), denominado espaço das aproximações. Considere as aproximações $\tilde{\phi}_j$ e $\tilde{\phi}_N$ pertencentes a $\tilde{W}_2^{(1)}(\Omega)$ tais que

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_j &= \phi_j - \delta\phi_j \\ \tilde{\phi}_N &= \phi_N - \delta\phi_N\end{aligned}\tag{2.33}$$

No espaço $\tilde{W}_2^{(1)}(\Omega)$ valem as seguintes equações fracas

$$\begin{aligned}G(\tilde{\phi}_j, \tilde{\psi}) &= V_j(\tilde{\psi}) \quad ; \text{ todo } \tilde{\psi} \in \tilde{W}_2^{(1)}(\Omega) \\ G(\tilde{\phi}_N, \tilde{\psi}) &= V_N(\tilde{\psi}) \quad ; \text{ todo } \tilde{\psi} \in \tilde{W}_2^{(1)}(\Omega)\end{aligned}\tag{2.34}$$

Como $\tilde{\psi}$ é uma função arbitrária de $\tilde{W}_2^{(1)}(\Omega)$ e portanto, de $W_2^{(1)}(\Omega)$, valem ainda

$$\begin{aligned}G(\phi_j; \tilde{\psi}) &= V_j(\tilde{\psi}) \quad ; \text{ todo } \tilde{\psi} \in \tilde{W}_2^{(1)}(\Omega) \\ G(\phi_N; \tilde{\psi}) &= V_N(\tilde{\psi}) \quad ; \text{ todo } \tilde{\psi} \in \tilde{W}_2^{(1)}(\Omega)\end{aligned}\tag{2.35}$$

e portanto, de (2.33) - (2.35) vem que

$$G(\delta\phi_j; \tilde{\psi}) = G(\delta\phi_N; \tilde{\psi}) = 0; \text{ todo } \tilde{\psi} \in \tilde{W}_2^{(1)}(\Omega)\tag{2.36}$$

Segue então que

$$\begin{aligned}\Lambda_{jN} &= G(\phi_j; \phi_N) = G(\tilde{\phi}_j + \delta\phi_j; \tilde{\phi}_N + \delta\phi_N) = \\ &= G(\tilde{\phi}_j, \tilde{\phi}_N) + G(\tilde{\phi}_j, \delta\phi_N) + G(\tilde{\phi}_N, \delta\phi_j) + G(\delta\phi_j, \delta\phi_N) = \\ &= G(\tilde{\phi}_j, \tilde{\phi}_N) + G(\delta\phi_j, \delta\phi_N)\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\tilde{\Lambda}_{jN} = G(\tilde{\phi}_j, \tilde{\phi}_N) = \Lambda_{jN} - G(\delta\phi_j, \delta\phi_N)\tag{2.37}$$

(*) Se $G(\phi, \psi)$ tivesse a estrutura de um produto interno, (2.36) seria a própria condição de ortogonalidade.

Considere agora a norma

$$\delta = \max \{ \|\delta\phi_j\| ; \|\delta\phi_N\| \} \quad (2.38)$$

então, pela desigualdade de Schwarz

$$|G(\delta\phi_j, \delta\phi_N)| < C \|\delta\phi_j\| \cdot \|\delta\phi_N\| \sim O(\delta^2) \quad (2.39)$$

e portanto

$$\tilde{\Lambda}_{jN} = \Lambda_{jN} + O(\delta^2) \quad (2.40)$$

o que implica em que a primeira variação de Λ_{jN} seja nula, ou seja $\delta\Lambda_{jN} = 0$, mesmo quando $\Lambda_{jN} = 0$.

A demonstração acima, no espaço das aproximações $\tilde{W}_2^{(1)}(\Omega)$ é, na realidade, a aplicação do método variacional direto ou método de Rayleigh-Ritz. Maiores detalhes poderão ser apreciados na seção 2.2.

Pode-se, portanto, enunciar o seguinte princípio variacional:

"Dentre todos os pares de funções
 $(\phi, \psi) \in W_2^{(1)}(\Omega) \times W_2^{(1)}(\Omega)$, aquele que faz o funcional $F_{jN}(\phi, \psi)$ estacionário é o par (ϕ_j, ϕ_N) de soluções dos problemas (2.24) e (2.12.a)".....PV2

O ponto fundamental a ser ressaltado é que o princípio variacional enunciado permite que uma aproximação relativamente grosseira para os potenciais (ϕ_j, ϕ_N) , com erro da ordem $O(\delta)$, conduza a uma aproximação para os coeficientes de força hidrodinâmica generalizada, $\Lambda_{jN} = F_{jN}(\phi_j, \phi_N)$, com erro da ordem $O(\delta^2)^{(*)}$.

(*) Note que o PV2 poderia ser enunciado para qualquer par (ϕ_N, ϕ_M) soluções de (2.12), porém o coeficiente Λ_{NM} não teria interpretação física imediata.

Em outras palavras, permite que estas grandezas sejam satisfatória e diretamente aproximadas a partir da busca de valores estacionários do funcional F_{jN} em um espaço de dimensão finita, varrido por funções admissíveis convenientemente escolhidas.

É ainda notável a similaridade do funcional $F_{j\ell}(\phi, \psi)$ com o quociente de Rayleigh em problemas clássicos de vibração.

Note ainda que, se o corpo for considerado flexível, e $v_j(x, y, z) |_{SB}$ representar o j -ésimo modo de vibração, o coeficiente Λ_{jN} é na realidade a força de pressão hidrodinâmica associada ao potencial ϕ_N , atuando sobre este modo.

A aplicação do PV2 para o problema linear (em primeira-ordem) será vista em detalhe na subseção 2.1.3., a seguir.

2.1.3. O Coeficiente Λ_{jN} e o Problema em Primeira-Ordem

Considere a decomposição do potencial total $\phi^{(1)}(x, y, z)$, no problema de primeira-ordem. Admite-se agora que N corpos fluentes interajam hidrodinamicamente. Assim

$$\phi^{(1)}(x, y, z) = \phi_0(x, y, z) + \sum_{m=1}^N \phi_7^m(x, y, z) + i\omega \sum_{m=1}^N \sum_{j=1}^6 \xi_j^m \phi_j^m(x, y, z) \quad (2.41)$$

onde

ϕ_0 é o potencial da onda incidente

ϕ_7^m é o potencial da onda espalhada pelo m -ésimo corpo, suposto fixo.

ϕ_j^m ; $j = 1, \dots, 6$ é o potencial de radiação (Kirchoff) associado ao movimento do m -ésimo corpo em seu j -ésimo grau de liberdade.

ξ_j^m ; $j = 1, \dots, 6$ é o movimento do m -ésimo corpo segundo o grau de liberdade j .

Além da equação de Laplace e das condições de contorno homogêneas em $S_F^{(*)}$ e S_H , os potenciais de radiação ($j=1, \dots, 6$) e o potencial espalhado ($j=7$) satisfazem às condições de contorno na superfície S_B do(s) corpo(s)

$$\frac{\partial \phi_j^m}{\partial n} = \begin{cases} v_j^m & \text{em } S_B \quad j = 1, 2, \dots, 7 \\ 0 & ; \quad \text{em } S_B - S_B^m \end{cases} \quad (2.42)$$

com

$$v_j^m = \begin{cases} n_j^m, & j = 1, 2, 3 \\ (\vec{r} \times \vec{n})_k; & k = j-3; j = 4, 5, 6 \end{cases} \quad (2.43)$$

e

$$v_7^m = - \frac{\partial \phi_0}{\partial n} \quad (2.44)$$

onde \vec{n}^m é o versor normal ao m -ésimo corpo apontado para seu interior. Além da condição de contorno no corpo os potenciais ϕ_j^m satisfazem a condição de radiação de Sommerfeld no infinito (ver, p.ex., Mei (1983), pg. 307).

$$\phi_j^m \sim -ig \frac{A_j^m(\theta)}{\omega} \left(\frac{2}{\pi K_0 r}\right)^{1/2} e^{i(K_0 r - \pi/4)} f(z); \quad \begin{matrix} j=1, \dots, 7 \\ m=1, \dots, N \end{matrix} \quad (2.45)$$

com

$$f(z) = \frac{\cosh K_0(z+h)}{\cosh K_0 h} \quad (2.46)$$

(*) $f_j^m(x, y) \equiv 0$

Da equação de Bernoulli linearizada a j -ésima componente da força hidrodinâmica generalizada, sobre o m -ésimo corpo pode então ser escrita

$$F_j^m(\omega) = E_j^m(\omega) + R_j^m(\omega) ; \quad \begin{matrix} j = 1, \dots, 6 \\ m = 1, \dots, N \end{matrix} \quad (2.47)$$

onde

$$E_j^m(\omega) = i\rho\omega \iint_{S_B^m} \left(\phi_0 + \sum_{\ell=1}^N \phi_7^\ell \right) n_j^m dS ; \quad \begin{matrix} j = 1, \dots, 6 \\ m = 1, \dots, N \end{matrix} \quad (2.48)$$

corresponde à força de excitação e

$$R_j^m(\omega) = i\rho\omega \sum_{\ell=1}^N \sum_{k=1}^6 i\omega\xi_k^\ell \iint_{S_B^m} \phi_k^\ell n_j^m dS ; \quad \begin{matrix} j = 1, \dots, 6 \\ m = 1, \dots, N \end{matrix} \quad (2.50)$$

corresponde à força reativa generalizada. R_j^m pode, alternativamente, ser expressa na forma

$$R_j^m(\omega) = i\omega \sum_{\ell=1}^N \sum_{k=1}^6 \xi_k^\ell H_{jk}^{\ell m} ; \quad \begin{matrix} j = 1, \dots, 6 \\ m = 1, \dots, N \end{matrix} \quad (2.50)$$

onde

$$H_{jk}^{\ell m}(\omega) = i\omega\rho \iint_{S_B^m} \phi_k^\ell n_j^m dS ; \quad \begin{matrix} j, k = 1, \dots, 6 \\ \ell, m = 1, \dots, N \end{matrix} \quad (2.51)$$

representa a j -ésima componente da força reativa sobre o m -ésimo corpo, devido a um movimento unitário do ℓ -ésimo corpo segundo o grau de liberdade k , na frequência ω .

O coeficiente $H_{jk}^{\ell m}$ pode ser separado nos coeficientes de "massa adicional e amortecimento generalizados" $M_{jK}^{\ell m}$ e $D_{jK}^{\ell m}$, na forma

$$H_{jk}^{\ell m}(\omega) = i\omega M_{jk}^{\ell m} - D_{jk}^{\ell m} \quad (2.52)$$

onde, por definição

$$M_{jk}^{\ell m}(\omega) = \rho \iint_{S_B^m} \operatorname{Re}(\phi_k^\ell) n_j^m dS \quad (2.53)$$

e

$$D_{jk}^{\ell m}(\omega) = \rho\omega \iint_{S_B^m} \operatorname{Im}(\phi_k^\ell) n_j^m dS \quad (2.54)$$

Obviamente os potenciais (ϕ_j^m, ϕ_k^ℓ) são soluções dos problemas "adjuntos" (2.24), o que permite aplicar o P.V.2 para o caso de N corpos flutuantes, e definir

$$\Lambda_{jk}^{\ell m}(\omega) = V_j^\ell(\phi_k^m) = V_j^m(\phi_k^\ell) = V_k^\ell(\phi_j^m) = V_k^m(\phi_j^\ell) \quad (2.55.a)$$

com

$$V_j^\ell(\phi_k^m) = \iint_{S_B} \frac{\partial \phi_j^\ell}{\partial n} \phi_k^m dS \quad ; \quad \begin{array}{l} j, k = 1, \dots, 6 \\ \ell, m = 1, \dots, N \end{array} \quad (*) \quad (2.55.b)$$

Os coeficientes $\Lambda_{jk}^{\ell m}$ são simétricos em relação aos índices (ℓ, m) e (j, k) .

(*) Lembre que $\frac{\partial \phi_j^\ell}{\partial n} = 0$ em S_B^m , se $m \neq \ell$.

É imediato então verificar, de (2.51) que

$$H_{jk}^{\ell m}(\omega) = i\rho\omega \Lambda_{jk}^{\ell m}(\omega) \quad ; \quad \begin{array}{l} j,k = 1, \dots, 6 \\ \ell, m = 1, \dots, N \end{array} \quad (2.56)$$

e de (2.52) que

$$M_{jk}^{\ell m}(\omega) = \rho \operatorname{Re}(\Lambda_{jk}^{\ell m}(\omega)) \quad (2.57.a)$$

$$D_{jk}^{\ell m}(\omega) = \rho\omega \operatorname{Im}(\Lambda_{jk}^{\ell m}(\omega)) \quad (2.57.b)$$

Ainda, de (2.48), a força excitante generalizada pode ser escrita como

$$E_j^m(\omega) = i\rho\omega \left[V_j^m(\phi_0) + \sum_{\ell=1}^N \Lambda_{j7}^{\ell m} \right] \quad (2.58)$$

Note que a simetria dos coeficientes $\Lambda_{jk}^{\ell m}$ demonstra automaticamente a relação de Haskind-Hanaoka, conforme já mencionado na seção anterior, permitindo escrever

$$E_j^m(\omega) = i\rho\omega \left[V_j^m(\phi_0) + \sum_{\ell=1}^N \Lambda_{7j}^{m\ell} \right] = i\rho\omega \left[V_j^m(\phi_0) + \sum_{\ell=1}^N \Lambda_{7j}^{m\ell}(\phi_j^\ell) \right] \quad (2.59)$$

Outras implicações, tais como as relações de Bessho-Newman (ver Mei (1983), pg. 327), podem ser deduzidas de forma análoga.

2.2. Aplicação do Método Variacional de Rayleigh-Ritz ao PV2

Conforme foi visto nas seções anteriores a determinação dos coeficientes globais Λ_{jN} é suficiente para a solução do problema de interação hidromecânica de corpos flutuantes com o meio fluido, na presença de superfície livre, sob hipótese de resposta estacionária à excitação harmônica, agente na superfície livre, e/ou na superfície do corpo.

O princípio variacional PV2 permite que Λ_{jN} seja calculado com erro da ordem $O(\delta^2)$ bastando para isso que o potencial ϕ_j ou o potencial ϕ_N sejam aproximados por "funções admissíveis" com erro $O(\delta)$.

Entende-se por funções admissíveis funções que pertençam ao espaço de aproximações $\tilde{W}_2^{(1)}(\Omega)$. É conveniente, porém não necessário, que estas funções satisfaçam a equação de campo e algumas das condições de contorno do problema.

Obviamente a função de Green (*polo*) e funções elementares de ordem superior a ela relacionadas (*dipolos, linhas de vórtice*) constituem-se em escolha apropriada. Tais funções satisfazem a todas as condições de contorno, a menos das condições na superfície do corpo e, eventualmente, a condição não homogênea na superfície livre. Estas funções são específicas para cada problema e, em geral difíceis de serem estabelecidas e calculadas.

Seria, portanto, conveniente o uso de funções-admissíveis mais simples que, embora não tão precisas quanto as funções de Green, por outro lado trouxessem um mínimo de informações básicas sobre o fenômeno físico modelado.

Esta é uma das grandes vantagens de um método variacional. Em particular, o PV2, além de bastante abrangente, possibilita que a escolha do espaço de aproximações não seja tão restrita. Esta última qualidade advém da *formulação fraca* utilizada para seu estabelecimento, além da própria estrutura dos funcionais envolvidos que, em essência, trazem informações que per

mitem reconstituir todas as condições de contorno do problema.

A escolha das funções-admissíveis depende obviamente das particularidades de cada problema a ser resolvido. Esta discussão será deixada para a seção seguinte, onde um método variacional específico, baseado na aplicação do PV2, foi desenvolvido e implementado numericamente para o problema linear bidimensional. Neste caso, por exemplo, mostra-se que um sistema de polos, dipolos e linhas de vórtice em fluido sem fronteiras podem ser usados satisfatoriamente para compor, conjuntamente a funções de Green, funções admissíveis apropriadas.

O objetivo da presente seção é discutir de forma genérica a aplicação do *método variacional direto*, ou de Rayleigh-Ritz, ao presente problema.

Este método consiste basicamente em representar a *solução aproximada* como uma combinação linear de um conjunto de *funções-teste elementares*, cujos coeficientes formam um conjunto de "*parâmetros variacionais lineares*" (ver, p.ex., Morse & Feshbach (1953), pg. 1117).

Assim, sejam as seguintes aproximações, truncadas em um número finito M de termos.

$$\tilde{\phi}_j = \sum_{n=1}^M a_n^j \tilde{\psi}_n ; \quad \tilde{\phi}_N = \sum_{n=1}^M a_n^N \tilde{\psi}_n \quad (2.60)$$

onde $\tilde{\psi}_n \in \tilde{W}_2^{(1)}(\Omega)$ são as funções-teste elementares, sendo $\tilde{W}_2^{(1)}(\Omega)$ o espaço das aproximações.

Seja $\tilde{\Lambda}_{jN}$ a aproximação variacional decorrente da substituição de (2.60) em (2.27) tal que

$$\tilde{\Lambda}_{jN} = F_{jN}(\tilde{\phi}_j, \tilde{\phi}_N) = \frac{V_j(\tilde{\phi}_N) V_N(\tilde{\phi}_j)}{G(\tilde{\phi}_j, \tilde{\phi}_N)} \quad (2.61)$$

ou ainda

$$\tilde{\Lambda}_{jN} = G(\tilde{\phi}_j, \tilde{\phi}_N) = V_j(\tilde{\phi}_N) = V_N(\tilde{\phi}_j) \quad (2.62)$$

A condição de estacionariedade de (2.61) é equivalente ao seguinte sistema de equações

$$\frac{\partial \tilde{\Lambda}_{jN}}{\partial a_n^k} = 0 \quad ; \quad \begin{array}{l} n = 1, \dots, M \\ k = j, N \end{array} \quad (2.63)$$

Com a substituição de (2.61) e o uso de (2.60) e (2.62) mostra-se que (2.63) é equivalente aos seguintes sistemas de equações

$$\begin{aligned} \sum_n a_n^N G_{nm} &= V_N^m \quad ; \quad m = 1, \dots, M \\ \sum_n a_n^j G_{nm} &= V_j^m \quad ; \quad m = 1, \dots, M \end{aligned} \quad (2.63.a)$$

onde por conveniência de notação definiu-se

$$\begin{aligned} G_{nm} &= G(\tilde{\psi}_n, \tilde{\psi}_m) \\ V_j^m &= V_j(\tilde{\psi}_m) \\ V_N^m &= V_N(\tilde{\psi}_m) \end{aligned} \quad (2.64)$$

Note que (2.63.a) poderiam ter sido obtidas diretamente das equações fracas para $\tilde{\phi}_j$ e $\tilde{\phi}_N$ em $\tilde{W}_2^{(1)}(\Omega)$.

De fato, seja $\tilde{\psi} \in \tilde{W}_2^{(1)}(\Omega)$ arbitrário, tal que

$$\tilde{\psi} = \sum_m b_m \tilde{\psi}_m \quad (2.65)$$

ou em notação matricial

$$\tilde{\psi} = \{b_m\}^T \{\tilde{\psi}_m\} \quad (2.65.a)$$

As equações fracas

$$\begin{aligned} G(\tilde{\phi}_j, \tilde{\Psi}) &= V_j(\tilde{\Psi}) \\ G(\tilde{\phi}_N, \tilde{\Psi}) &= V_N(\tilde{\Psi}) \end{aligned} \quad (2.66)$$

são então escritas na forma

$$\begin{aligned} [G_{nm}] \{a_n^j\} &= \{V_j^m\} \\ [G_{nm}] \{a_n^N\} &= \{V_N^m\} \end{aligned} \quad (2.67)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \{a_n^j\} &= [G_{nm}]^{-1} \{V_j^m\} \\ \{a_n^N\} &= [G_{nm}]^{-1} \{V_N^m\} \end{aligned} \quad (2.68)$$

conduzindo finalmente a

$$\tilde{\Lambda}_{jN} = \{a_n^j\}^T \{V_N^n\} = \{a_n^N\}^T \{V_j^n\} \quad (2.69)$$

o que completa a solução do problema no espaço das aproximações $\tilde{W}_2^{(1)}(\Omega)$.

2.3. Breve Histórico Bibliográfico

O enfoque variacional no problema de ondas em interfaces fluidas tem sido objeto de muitas investigações nestas últimas três décadas.

Um excelente apanhado pode ser encontrado em Whitham (1967), Seliger & Whitham (1968), Leech (1976), Luke (1967), Miles (1977), Milder (1977). Todos estes trabalhos são de cunho fundamentalmente teórico e bastante abrangentes. Não abordam, contudo, o problema específico em questão: a interação hidromecânica de corpos flutuantes na presença de superfície livre.

Poucos tem sido os autores a formular este último problema por técnicas variacionais.

Em particular os artigos publicados recentemente por Miloh (1984), Athanassoulis & Loukakis (1985) e anteriormente, por Bessho e seus colaboradores (1968-1973), merecem atenção especial.

O primeiro utiliza o princípio de mínima ação de Hamilton e estende o princípio variacional de Luke (1967), (o qual fora formulado para o caso de propagação de ondas livres bidimensionais), incluindo a presença de corpos flutuantes. No caso analisado por Luke a função densidade Lagrangeana é a pressão, e a aplicação do princípio de Hamilton, sob a variação do campo potencial e da amplitude de onda, conduz à equação de campo e respectivas condições de contorno na superfície livre.

Miloh incorpora a função Lagrangeana proposta por Luke a energia dissipada por radiação no infinito.

Para provar a adequação de sua proposição, Miloh mostra que a função Lagrangeana somada ao trabalho de forças externas generalizadas, associadas ao movimento do(s) sólido(s), obedece o princípio de Hamilton, na medida em que permite recuperar a equação de campo e demais condições de contorno.

Além disso, Miloh mostra dois resultados de extrema relevância:

- i) A parcela conservativa da função Lagrangeana, ou seja, excluindo-se os termos correspondentes à dissipação de energia por radiação de ondas, pode ser expressa na forma de integrais ao longo da superfície livre e da superfície do(s) corpo(s).

Para o caso da aproximação linear, a Lagrangeana se reduz a integrais ao longo da superfície do(s) corpo(s) em sua posição média de equilíbrio e de sua projeção na linha d'água. A primeira parcela corresponde à energia cinética transferida ao fluido e a segunda parcela à energia potencial associada às forças de natureza hidrostática.

- ii) Como consequência imediata deste resultado, ou seja, de que no caso linear o movimento do fluido possa ser expresso como devido apenas aos movimentos dos sólidos, Miloh obtém as equações de Lagrange do movimento dos corpos e, a partir da hipótese de pequenos deslocamentos, decompõe o potencial em potenciais de Kirchoff. Tal decomposição permite escrever diretamente as usuais expressões para o tensor de massa adicional e de restauração hidrostática.

Ainda, utilizando implicitamente o fato de que o tensor de amortecimento por radiação pode ser expresso como função do campo potencial distante, a função de dissipação é decomposta como função quadrática das velocidades generalizadas dos sólidos.

A função de dissipação é análoga a função de Rayleigh em sistemas mecânicos com força de dissipação que é função linear da velocidade.

A hipótese de solução harmônica no tempo leva às expressões clássicas que relacionam a força hidrodinâmica generalizada aos movimentos.

Por sua vez, utilizando o Princípio da Velocidade Virtual (PVV), Athanassoulis & Loukakis (1985), formulam problema e quivalente. A partir da adoção de uma função Lagrangeana clássica, isto é, definida como excesso de energia cinética sobre a energia potencial, estes autores propõem um sistema completo de equações linearizadas do movimento do sistema hidromecânico. Nesta formulação a elevação da superfície livre é considerada como um campo de coordenadas generalizadas, e o tratamento matemático exige o emprego da Teoria de funcionais (ver Volterra (1939)). Neste contexto, *a elevação da superfície e a função potencial aparecem como um par de coordenadas canônicas generalizadas* de conformidade aos resultados obtidos anteriormente por outros autores, no caso de propagação de ondas livres (ver p.ex. Miles (1976)).

Conforme apontado por estes autores, e em que pese a conveniência de sua utilização, porquanto permitem um aprofundamento em questões de caráter teórico e qualitativo, estas formulações não levam por si sã a solução do problema hidromecânico.

Mesmo sob aproximação linear e harmônica, métodos numéricos clássicos teriam que ser utilizados para a determinação do campo potencial.

Paralelamente Bessho (1968) estabeleceu um princípio variacional para o problema de primeira ordem aplicado por Mizuno (1969, 70) para os problemas de radiação de "sway" e "roll", por Sao, Maeda & Hwang (1971) para o movimento de "heave" de um flutuante circular, e discutido de forma mais ampla por Isshiki (1973). Os resultados são bastante satisfatórios.

O princípio variacional de Bessho permite que a solução do problema linear de radiação seja aproximada por uma série de funções admissíveis.

A aproximação decorrente é aquela que deixa estacionário o funcional.

$$J_B(\phi) = - \frac{1}{2} \iint_{S_B} \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} - 2v \right) \phi dS \quad (2.70)$$

Como pode ser diretamente verificado a estacionariedade de (2.70) leva à condição de contorno no corpo.

$$\delta J_B(\phi) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = v \quad (2.71)$$

Cabe aqui observar, porém, que o princípio de Bessho só é aplicável a funções admissíveis que, além de harmônicas, satisfaçam identicamente a todas as condições de contorno do problema, a menos da condição (2.6b), ou seja, funções de Green.

Este princípio pode ser entendido como um caso particular dos princípios variacionais (PV1 e PV2), enunciados nas seções anteriores, quando aplicados ao problema em primeira-ordem.

* * *

3. O PROBLEMA HARMÔNICO BIDIMENSIONAL SOB O ENFOQUE VARIACIONAL

O presente tem como um dos objetivos exemplificar a aplicação do PV2. Isto se fará através do desenvolvimento de um método variacional específico ao problema bidimensional de primeira-ordem.

A escolha de um problema mais simples, o bidimensional, tem como principal argumento sugerir, de forma indutiva, o caminho para o tratamento do problema mais complexo, o tridimensional. Por outro lado, a solução do problema bidimensional tem caráter prático, visto que se aplicada à Teoria do Corpo Esbelto, leva a resolver uma importante classe de problemas tridimensionais. Isto se fará no capítulo 4.

Em essência o método variacional aplicado é o método direto, ou de Rayleigh-Ritz, abordado anteriormente na seção 2.2, porém agora particularizado ao problema em questão.

Especificamente, mostra-se que é possível representar os problemas potenciais de difração e radiação como a soma de uma parcela propagante e uma parcela evanescente.

Nesta representação o potencial evanescente é real, conforme evidenciado nas relações (2.19) e (2.20), e a aplicação do PV2 a este problema parcial permite que a solução, pelo método direto, se processe no domínio real.

Este procedimento é possível graças ao uso da formulação fraca do problema e da representação do potencial $\bar{\phi}$, no domínio complementar $\bar{\Omega}$, em série de Fourier generalizada.

As expressões finais dos coeficientes hidrodinâmicas são bastante simples, dadas na forma funcional, onde comparecem $V_j(\cdot)$ e $G(\cdot, \cdot)$, e permitem que as diversas relações de reciprocidade e de energia sejam diretamente demonstradas.

Um resultado particular, e de bastante interesse, é o estabelecimento de uma condição para existência de massa adicional negativa, que consiste, basicamente, em uma relação de desi-

gualdade entre a Lagrangeana da parcela evanescente e o fluxo de energia irradiada em um dado modo de oscilação.

A escolha das funções teste-elementares é realizada no contexto do problema evanescente.

O Método Variacional Direto é então aplicado e sua convergência é verificada, utilizando-se uma sequência de polos, cujo número é sistematicamente aumentado.

São conduzidos, por fim, experimentos numéricos com seções de formas típicas e mostra-se que o uso de funções-teste elementares de ordem superior (dipolos e linhas de vórtices) conduzem a resultados bastante satisfatórios. Adianta-se que funções admissíveis compostas por apenas 4 funções elementares são suficientes nos casos típicos analisados. Isto implica em construir e inverter uma matriz 4×4 , real e simétrica. O desempenho do método pode ser melhor avaliado pela seguinte comparação: pelo método de Green um grau de precisão equivalente seria alcançado através da construção e inversão de uma matriz com dimensão típica 30×30 , não simétrica e complexa.

3.1. O Problema Bidimensional. Definições e Formulação Geral

Considere a seção de um corpo cilíndrico, simétrica (*) em relação ao eixo vertical z , conforme mostra a figura 3.1. O corpo flutua em águas de profundidade h , suposta constante. Os eixos coordenados y e z tem sua origem na superfície livre não perturbada.

Definimos o domínio finito S , delimitado pelos contornos do corpo Γ_B , da superfície livre Γ_F , do fundo Γ_H e por duas fronteiras verticais Γ_V^\pm definidas pelas coordenadas $y = \pm b$. O domínio complementar \bar{S} é delimitado por $\bar{\Gamma}_F$, $\bar{\Gamma}_H$, $\bar{\Gamma}_V^\pm$ e Γ_∞ .

O problema considerado é harmônico e de primeira ordem, e vale a relação linear de dispersão adimensionalizada.

(*) O problema bidimensional não simétrico é de menor interesse prático, porém pode ser abordado de forma análoga.

$$\omega^2 = K_o \tanh K_o h \quad (3.1)$$

onde o fator de adimensionalização de frequência é

$$\omega_a = \left(\frac{2g}{B} \right)^{1/2} \quad (3.2)$$

com B, a boca da seção

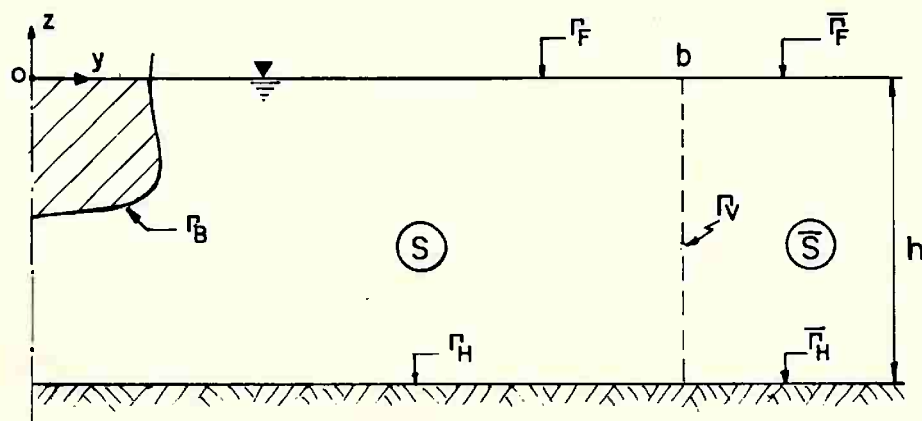


Figura 3.1. - Definições e Coordenadas no Problema Bidimensional.

Tabela 3.1. - Parâmetros de Adimensionalização

Relação	Parametro de Adimensionalização	Relação	Aplicação
Comprimento	$k_a^{-1} = \frac{B}{2} = \left(\frac{\omega_a^2}{g} \right)^{-1}$	onda típica	variáveis geométricas
Comprimento	A	amplitude de onda	movimentos translacionais de corpo rígido
Tempo	$\omega_a = \sqrt{\frac{B}{2g}}$	onda típica	tempo e frequência
Massa por unidade de comprimento	$m_a = \rho \left(\frac{g}{\omega_a^2} \right)^2$	inércia típica	massa
Força por unidade de comprimento	$F_a = \rho g A \left(\frac{g}{\omega_a^2} \right)$	força inercial típica	forças em geral

Neste capítulo todas as variáveis e funções são adimensionais de acordo com a tabela (3.1) (ver Pesce, 1984).

Considere a decomposição do potencial linear na forma de potencial de difração e radiação onde o potencial de difração é a soma do potencial incidente com o potencial espalhado.

As funções potenciais consideradas são funções apenas de posição, posto que o fator pulsante no tempo pode ser eliminado no equacionamento. Serão designadas por $\psi_j(y,z)$, onde $j = 0,1,2,3,4$ indicam respectivamente os potenciais incidente, de "surge" (ξ_1), "sway" (ξ_2), "heave" (ξ_3) e "roll" (ξ_4). O potencial difratado é denotado por ψ_D e o potencial espalhado por ψ_S .

Assim

$$\psi_D(y,z) = \psi_0(y,z) + \psi_S(y,z) \quad (3.3)$$

onde o potencial da onda incidente é dada por

$$\psi_0(y,z) = e^{iK_0(y-b)} f_0(z) \quad (3.4)^*$$

com (ver Mei (1983), pg. 305)

$$f_0(z) = F_0 \cosh K_0(z+h) \quad (3.5)$$

e

$$F_0 = \left(\frac{1}{h} \frac{4K_0 h}{2K_0 h + \sinh 2K_0 h} \right)^{1/2} \quad (3.6)$$

O fator F_0 é conveniente, pois faz $\int_{-h}^0 f_0^2(z) dz = 1$.

Devido à simetria da seção, o potencial espalhado $\psi_S(y,z)$ pode ser escrito como a soma de duas parcelas, funções par e ímpar, em relação a y . Assim

$$\psi_S(y,z) = \gamma^+ \psi_7(y,z) + \gamma^- \psi_8(y,z) \quad (3.7)$$

(*) A fase $e^{-iK_0 b}$ foi adotada por conveniência futura.

onde

$$\gamma^{\pm} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ i \end{array} \right\} e^{-iK_0 b} \quad (3.8)$$

ψ_7 e ψ_8 são funções par e ímpar, respectivamente. Note que os índices $j = 5$ e 6 são reservados para indicar os modos de "pitch" e "yaw", definidos no caso tridimensional geral.

A condição de contorno no corpo (Γ_B) para os potenciais ψ_7 e ψ_8 é facilmente obtida.

De fato, como

$$\frac{\partial \psi_S}{\partial n} = - \frac{\partial \psi_0}{\partial n} \quad ; \quad \text{em } \Gamma_B$$

segue de (3.4)

$$\frac{\partial \psi_7}{\partial n} = - \frac{\partial \psi_0^+}{\partial n} \quad ; \quad \text{em } \Gamma_B \quad (a)$$

(3.10)

e

$$\frac{\partial \psi_8}{\partial n} = - \frac{\partial \psi_0^-}{\partial n} \quad ; \quad \text{em } \Gamma_B \quad (b)$$

onde $\psi_0^{\pm}(y, z)$ são definidas como

$$\psi_0^+(y, z) = \cos K_0 y f_0(z) \quad (a)$$

(3.11)

$$\psi_0^-(y, z) = \sin K_0 y f_0(z) \quad (b)$$

$$\psi_0(y, z) = \gamma^+ \psi_0^+ + \gamma^- \psi_0^- \quad (c)$$

Mais, embora o modo de "surge" ($j=1$) não seja estritamente bidimensional, seu tratamento é indispensável à solução do problema tridimensional através da Teoria do Corpo Esbelto, conforme será visto no capítulo 4. O mesmo se aplica aos modos de "pitch" ($j=5$) e "yaw" ($j=6$). Para estes modos, no entanto é suficiente a solução dos problemas de "heave" ($j=3$) e de "sway" ($j=2$), aos quais são, respectivamente, linearmente proporcionais, onde a "constante" de proporcionalidade é a coordenada longitudinal x da seção.

Os potenciais $\psi_j(y,z)$; $j = 1, \dots, 6, 7, 8$ são então equacionados por

$$\nabla^2 \psi_j = 0 \quad ; \text{ em } S \quad (a)$$

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial z} = \omega^2 \psi_j \quad ; \text{ em } \Gamma_F \quad (b)$$

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial n} = v_j \quad ; \text{ em } \Gamma_B \quad (c) \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial n} = 0 \quad ; \text{ em } \Gamma_H \quad (d)$$

$$\psi_j \sim A_{\phi j} e^{ik_0(|y|-b)} f_0(z); \text{ em } |y| \rightarrow \infty \quad (e)$$

Onde

$$v_j = n_j \quad ; \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (f)$$

$$v_j = \vec{n} \times n_{8-j} \quad ; \quad j = 5, 6 \quad (g)$$

$$v_j = -\frac{\partial \psi_{0\pm}}{\partial n} \quad ; \quad j = 7(+), 8(-) \quad (h)$$

com $n_1 = nx$, $n_2 = ny$, $n_3 = nz$, $n_4 = -z ny + y nz$, onde \vec{n} é o vetor normal a Γ_B apontando para seu interior.

A condição (3.12.e) é a condição de radiação apropriada ao presente problema. De fato, a solução mais geral para $\bar{\psi}_j$, no domínio complementar \bar{S} , delimitado por $\bar{\Gamma}_F$, $\bar{\Gamma}_H$, $\bar{\Gamma}_V$ e Γ_∞ pode ser expressa como uma expansão em série de Fourier generalizada (ver, p. ex. Mei (1983)).

$$\bar{\psi}_j(y,z) = A_{0j} e^{iK_0(|y|-b)} f_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-Kn(|y|-b)} f_n^*(z) \quad (3.13)$$

onde K_0 e $f_0(z)$ foram definidos por (3.1) e (3.5) e

$$f_n(z) = F_n \cos Kn(z+h) \quad (a)$$

$$F_n = \left(\frac{1}{h} \frac{4K_n h}{2K_n h - \sin 2K_n h} \right)^{1/2} \quad ; n = 1, 2, \dots \quad (b) \quad (3.14)$$

$$-\omega^2 = K_n \tan K_n h \quad (c)$$

A expressão (3.13) decorre da solução do problema por separação de variáveis, sob condições de contorno homogêneas, na ausência de qualquer corpo difrator. No eixo z resulta um problema de Sturm-Liouville cuja solução é o conjunto

$\{k_n, f_n(z); n = 0, 1, 2, \dots\}$, de auto-valores e auto-funções. Note que $\{f_n(z)\}$ é completo e ortonormal $\left(\int_{-h}^0 f_n f_m dz = \delta_{nm} \right)$.

O primeiro termo em (3.13) associado a $f_0(z)$ é dito *propagante* e os termos sob o símbolo de somatória são ditos *evanescentes*, posto que decaem exponencialmente com $k_n y$.

A compatibilidade de pressão e fluxo em Γ_V^\pm , entre ψ_j e $\bar{\psi}_j$ é dada por

$$\psi_j(b,z) = \bar{\psi}_j(b,z)$$

(*) No caso de profundidade infinita a somatória é substituída por uma integral (espectro contínuo) - ver, p.ex. Miles (1967).

e

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial y}(b, z) = \frac{\partial \bar{\psi}_j}{\partial y}(b, z) \quad (3.15)$$

Definem-se ainda os funcionais

$$L_n(\Psi) = \int_{-h}^0 \Psi(b, z) f_n(z) dz \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.16)$$

onde $\Psi(y, z) \in W_2^{(1)}(S)$.

É então imediato verificar de (3.13) e (3.15), e da ortogonalidade das funções $f_n(z)$ que

$$A_{nj} = L_n(\psi_j) \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.17)$$

São definidos, ainda, os coeficientes de reflexão e transmissão associados ao problema de difração como

$$R = \begin{pmatrix} A_{07} - & A_{08} \end{pmatrix} e^{-2iK_0 b} \quad (3.18)$$

e

$$T = \begin{pmatrix} A_{07} + & A_{08} + 1 \end{pmatrix} e^{-2iK_0 b}$$

As expressões (3.18) podem ser facilmente verificadas da condição de radiação de ψ_7 , ψ_8 e da onda incidente ψ_0 , e ainda das definições (3.3) e (3.7).

Por fim os coeficientes de massa adicional amortecimento e força excitante são definidos

$$a_{j\ell}(\omega) = \Delta_{j\ell} \operatorname{Re} \int_{\Gamma_B} \psi_\ell v_j ds \quad ; \quad j, \ell = 1, 2, 3, 4 \quad (*) \quad (3.19)$$

(*) "pitch" e "yaw" ($j=5,6$) não são considerados, visto que são proporcionais a "heave" e "sway" ($j=3,2$).

$$b_{j\ell}(\omega) = \Delta_{j\ell} \omega \operatorname{Im} \int_{\Gamma_B} \psi_\ell v_j d_s \quad ; j, \ell = 1, 2, 3, 4 \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} E_j(\omega) &= \Delta_{jk} i\omega \gamma^\pm \int_{\Gamma_B} (\psi_o^\pm + \psi_k) v_j d_s \\ &= \Delta_{jk} i\omega \gamma^\pm \int_{\Gamma_B} (\psi_o^\pm v_j + \psi_j v_k) d_s \end{aligned} \quad (3.21)$$

onde

$$\Delta_{j\ell} = 1 + (-1)^{j+\ell} \quad (3.22)$$

O coeficiente $\Delta_{j\ell}$ é necessário nas expressões acima, posto que, devido à simetria da seção considerada, a integração se faz apenas em meio-contorno.

3.2. - Um Método Variacional para o Problema Bidimensional (MVB)

O desenvolvimento do MVB se fará através da aplicação do PV2 ao problema bidimensional.

Muito embora esta aplicação possa ser feita de forma direta, como um caso particular do método apresentado na seção 2.2, a condição de radiação dos diversos problemas impõe que a solução se processe no domínio das funções complexas. Este fato, pode ser evitado se os potenciais ψ_j forem separados em duas parcelas: a primeira propagante, associada a $f_o(z)$, e a segunda evanescente.

Como será visto adiante, a parcela evanescente é a soma de duas funções *equacionadas tão somente no domínio real* e às quais o PV2 será aplicado, em um espaço mais restrito.

Este procedimento exige, sem dúvida um grau adicional de elaboração. Contudo permite, por um lado, simplificar o tratamento numérico na solução dos diversos problemas. Por outro,

estabelecer diretamente, e de forma algébrica, uma série de relações de reciprocidade e de conservação de energia. Permite ainda que a perturbação local (ou de *campo próximo*), ocasionada pelo corpo sobre o meio fluido, seja isolada da perturbação global (ou de *campo distante*), trazendo uma melhor compreensão dos fenômenos físicos envolvidos.

Para tanto, considere as seguintes funções auxiliares

$$q^{\pm}(y,z) = f_0(z) \begin{Bmatrix} 1 \\ y/b \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

onde o sinal (+) se aplica aos problemas de potencial par em y ($j = 1,3,5,7$) e o sinal (-) àqueles de potencial ímpar ($j = 2,4,6,8$).

Notando que $L_0(q^{\pm}) = 1$, verifica-se que qualquer função $\psi(y,z) \in W_2^{(1)}(S)$ pode ser expressa na forma

$$\psi(y,z) = L_0(\psi) q^{\pm}(y,z) + \psi^e(y,z) \quad (3.24)$$

onde $\psi^e(y,z) \in W_2^{(1)}(S)$ com

$$W_2^{(1)}(S) = \{ \psi^e \in W_2^{(1)}(S) : L_0(\psi^e) = 0 \} \quad (3.25)$$

$W_2^{(1)}(S)$ é denominado *sub-espço das funções evanescentes*, ψ^e , ou seja, aquelas que decaem exponencialmente com y (ver (3.13)). Em palavras, $\psi(y,z)$ é representado como soma de duas parcelas, propagante, proporcional a $q^{\pm}(y,z)$ e evanescente $\psi^e(y,z)$.

Em particular, e utilizando a equação de compatibilidade de (3.15), as funções $\psi_j(y,z)$ ficam

$$\psi_j(y,z) = A_{0j} q^{\pm}(y,z) + \psi_j^e(y,z) \quad (3.26)$$

Considere agora, em estrita analogia ao problema geral tridimensional, os funcionais $G(\psi, \psi)$ e $V_j(\psi)$ definidos, no problema bidimensional, como

$$G(\psi, \Psi) = \iint_S \nabla\psi \cdot \nabla\Psi \, dS - \omega^2 \int_{\Gamma_F} \psi \Psi \, dy - \int_{-h}^0 \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} \bar{\Psi} \Big|_{y=b} dz \quad (3.27)$$

$$V_j(\Psi) = \int_{\Gamma_B} v_j \Psi \, ds \quad ; \quad j = 1, \dots, 8 \quad (3.28)$$

Os potenciais ψ_j são soluções das equações fracas

$$G(\psi_j, \Psi) = V_j(\Psi) \quad , \quad j = 1, \dots, 8 \quad (3.29)$$

e, pelo PV2, no contexto bidimensional, o funcional

$$F_{j\ell}(\psi, \Psi) = \frac{V_j(\Psi) V_\ell(\psi)}{G(\psi, \Psi)} \quad ; \quad j, \ell = 1, \dots, 8 \quad (3.30)$$

é estacionário no par $(\psi_j, \psi_\ell) \in W_2^{(1)}(S) \times W_2^{(1)}(S)$.

Define-se então o funcional $G^e(\psi, \Psi)$ tal que

$$G^e(\psi, \Psi) = G(\psi, \Psi) + \int_{-h}^0 \frac{\partial \bar{\psi}_p}{\partial y} \bar{\Psi} \Big|_{y=b} dz \quad (3.31)$$

onde $\bar{\psi}_p$ é a parcela "propagante" do potencial $\bar{\psi}$ em \bar{S} .

Da expressão (3.13) aplicada a $\bar{\psi}$ segue que

$$G^e(\psi, \Psi) = G(\psi, \Psi) + iK_o L_o(\psi) L_o(\Psi) \quad (3.32)$$

ou explicitamente

$$G^e(\psi, \Psi) = \iint_S \nabla\psi \cdot \nabla\Psi \, dS - \sigma \int_{\Gamma_F} \psi \Psi \, dy + \sum_{n=1}^{\infty} k_n L_n(\psi) L_n(\Psi) \quad (3.33)$$

A equação fraca (3.29) fica então escrita

$$G^e(\psi_j, \Psi) = V_j(\Psi) + ik_o A_{oj} L_o(\Psi), \quad j=1, \dots, 8 \quad (3.34)$$

Substituindo (3.26) em (3.34) e rearranjando termos vem

$$\begin{aligned} G^e(\psi_j^e, \Psi^e) + L_o(\Psi) \{ A_{oj} G^e(q^\pm, q^\pm) + G^e(\psi_j^e, q^\pm) \} &= \\ &= V_j(\Psi^e) + L_o(\Psi) \{ V_j(q^\pm) + ik_o A_{oj} \} - A_{oj} G^e(q^\pm, \Psi^e) \end{aligned} \quad (3.35)$$

Como Ψ é arbitrário, tomando $\Psi = \Psi^e$, o que implica em $L_o(\Psi) = 0$, tem-se de (3.35)

$$G^e(\psi_j^e, \Psi^e) = V_j(\Psi^e) - A_{oj} G^e(q^\pm, \Psi^e) \quad (3.36)$$

Definindo o funcional auxiliar

$$V_q(\Psi) = - G^e(q^\pm, \Psi) \quad ; \quad q = 9, 10 \quad (3.37)$$

segue que

$$\psi_j^e = A_{oj} \psi_q^e + \psi_j^e \quad ; \quad \begin{array}{l} j = 1, 2, \dots, 7, 8 \\ q = 9, 10 \end{array} \quad (*) \quad (3.38)$$

onde ψ_j^e e ψ_q^e satisfazem as seguintes equações fracas em $W_2^{(1)}(S)$.

$$G^e(\psi_j^e, \Psi^e) = V_j(\Psi^e) \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, 7, 8 \quad (3.39)$$

$$G^e(\psi_q^e, \Psi^e) = V_q(\Psi^e) \quad ; \quad q = 9, 10 \quad (3.40)$$

Substituindo (3.38) em (3.26) vem

(*) ψ_q^e é a solução de problema auxiliar (3.42), que depende da escolha das funções $q^\pm(y, z)$.

$$\psi_j = A_{oj} p^\pm + \psi_j^e \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, 7, 8 \quad (3.41)$$

onde, por definição

$$p^\pm(y, z) = q^\pm(y, z) + \psi_q^e(y, z) \quad ; \quad q = 9, 10 \quad (3.42)$$

Note que, para $j = 1, 2, \dots, 7, 8$, ψ_j^e é real, posto que tanto $G^e(\psi_j^e, \psi^e)$ quanto $V_j(\psi^e)$ serão reais, para ψ^e real. O mesmo ocorre com ψ_q^e .

Tomando ainda, em (3.35) $\Psi^e = 0$, com $L_o(\Psi) \neq 0$, arbitrário, segue que

$$A_{oj} \{G^e(q^\pm, q^\pm) + G^e(\bar{\psi}_j^e, q^\pm)\} = V_j(q^\pm) + ik_o A_{oj} \quad (3.43)$$

Usando (3.38) em (3.43) vem

$$A_{oj} \{G^e(q^\pm, q^\pm) + G^e(\psi_q^e, q^\pm) - ik_o\} = V_j(q^\pm) - G^e(q^\pm, \psi_j^e) \quad (3.44)$$

e da definição (3.42)

$$A_{oj} \{G^e(p^\pm, q^\pm) - ik_o\} = V_j(q^\pm) - G^e(q^\pm, \psi_j^e) \quad (3.45)$$

porém, de (3.37), (3.40) e (3.42), segue que

$$G^e(p^\pm, \psi^e) = 0 \quad , \quad \forall \psi^e \in \mathbb{W}_2^{(1)}(S) \quad (3.46)$$

e então

$$G^e(p^\pm, q^\pm) = G^e(p^\pm, p^\pm) \quad (3.47)$$

Ainda, de (3.37), (3.39) e (3.40)

$$V_q(\psi_j^e) = -G^e(q^\pm, \psi_j^e) = G^e(\psi_j^e, \psi_q^e) = V_j(\psi_q^e) \quad (3.48)$$

Substituindo (3.47) e (3.48) em (3.45) vem, finalmente

$$A_{oj} = \frac{V_j(p^\pm)}{G^e(p^\pm, p^\pm) - iK_o} \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, 7, 8 \quad (3.49)$$

Note que o denominador \bar{e} é uma constante para cada frequência, dependendo tão somente do problema auxiliar definido por (3.40) - (3.37) - (3.23).

O que caracteriza a amplitude complexa A_{oj} , associando-a ao j -ésimo problema em (3.12), \bar{e} é o funcional $V_j(p^\pm)$.

É importante notar que para qualquer outra função auxiliar q^\pm que satisfizesse a condição $L(q) = 1$, o resultado (3.49) permaneceria inalterado. A função escolhida é por \bar{e} mais simples.

Considere agora o funcional definido em $W_2^{o(1)}(S) \times W_2^{o(1)}(S)$

$$F_{jk}^e(\psi^e, \Psi^e) = \frac{V_j(\psi^e) V_k(\Psi^e)}{G^e(\psi^e, \Psi^e)} \quad ; \quad j, k = 1, 2, \dots, 7, 8, 9, 10 \quad (3.50)$$

É imediato verificar (*) que vale o PV2 para $F_{jk}^e(\psi^e, \Psi^e)$ que assume no par (ψ_j^e, Ψ_k^e) o valor estacionário

$$\lambda_{jk}^e = G^e(\psi_j^e, \Psi_k^e) = V_j(\psi_k^e) = V_k(\psi_j^e) = \lambda_{kj}^e \quad ; \quad j, k = 1, 2, \dots, 7, 8, 9, 10 \quad (3.51)$$

Na realidade, *trata-se de um caso particular do PV2*, quando os potenciais são evanescentes e satisfazem as equações (3.39-3.40).

Como será visto na seção 3.2.2, os coeficientes hidrodinâmicos globais: a_{jl} , b_{jl} , E_j , R , T serão expressos unicamente em função dos coeficientes reais λ_{jl}^e e dos funcionais $V_j(q^\pm)$ e $G^e(q^\pm, q^\pm)$.

(*) A demonstração é análoga àquela apresentada no capítulo 2, item 2.1.2, agora porém restrita ao espaço de funções evanescentes $W_2^{o(1)}(S)$.

3.2.1. - Relações Auxiliares

Das expressões (3.42) e (3.51) segue que

$$V_j(p^\pm) = V_j(q^\pm) + \begin{Bmatrix} \lambda_{j,9}^e \\ \lambda_{j,10}^e \end{Bmatrix} \quad (3.52)$$

e

$$G^e(p^\pm, p^\pm) = G^e(q^\pm, q^\pm) + \begin{Bmatrix} \lambda_{9,9}^e \\ \lambda_{10,10}^e \end{Bmatrix} \quad (3.53)$$

Outra relação interessante vem de (3.49)

$$A_{oj} V_k(p^\pm) = A_{ok} V_j(p^\pm) \quad j = 1, 2, \dots, 7, 8 \quad (3.54)$$

Considere agora e por simplicidade de notação o funcional

$$B(\psi, \Psi) = \int_{\Gamma_B} \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \Psi - \psi \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) ds \quad (3.55)$$

Se $\psi = \psi_o$, $B(\psi, \psi_o)$ pode ser identificada a função de Kochin $H(\psi)$ (ver, p. ex., Mei (1983), pg. 311).

Segue então de (3.55) que

$$B(\psi_j, \psi_o^\pm) = V_j(\psi_o^\pm) + V_k(\psi_j) = V_j(\psi_o^\pm) + V_j(\psi_k) \quad (3.56)$$

$$j = 1, 2, 3, 4$$

$$k = 7, 8$$

onde a condição de contorno (3.10) e a simetria do funcional $V_j(\psi_k)$ foram utilizadas.

Note também que $B(\psi_j, \psi_k) = 0$; $j, k = 1, 2, \dots, 7, 8$

3.2.2. - Coeficientes Hidrodinâmicos Globais

Os coeficientes hidrodinâmicos globais podem então ser calculados.

Das definições dos coeficientes de massa adicional e amortecimento (3.19 - 3.20) e das expressões (3.41), (3.49) e (3.51) vem, por substituição direta.

$$a_{j\ell}(\omega) = \Delta_{j\ell} \left\{ \frac{V_j(p^\pm) V_\ell(p^\pm)}{G^{e2}(p^\pm, p^\pm) + K_o^2} G^e(p^\pm, p^\pm) + \lambda_{j\ell}^e \right\};$$

$$j, \ell = 1, 2, 3, 4 \quad (3.57)$$

e

$$b_{j\ell}(\omega) = \Delta_{j\ell} \omega K_o \left\{ \frac{V_j(p^\pm) V_\ell(p^\pm)}{G^{e2}(p^\pm, p^\pm) + K_o^2} \right\}; j, \ell = 1, 2, 3, 4$$

$$(3.58)$$

Note que $\lambda_{j\ell}^e$ compareceu apenas em $a_{j\ell}$, visto que os potenciais ψ_j^e são reais (ver 3.20).

O coeficiente de força excitante segundo o modo j de oscilação vem da definição (3.21), como

$$E_j(\omega) = \Delta_{jk} i\omega \gamma^\pm \{ V_j(\psi_o^\pm) + V_j(\psi_k) \} =$$

$$(3.59)$$

$$= \Delta_{jk} i\omega \gamma^\pm \{ V_j(\psi_o^\pm) + V_k(\psi_j) \}$$

e de (3.56)

$$E_j(\omega) = \Delta_{jk} i\omega \gamma^\pm B(\psi_j, \psi_o^\pm) \quad (3.60)$$

que, no contexto da solução exata, é equivalente a (ver Mei (1983), pg. 312).

$$E_j(\omega) = -2\omega F_o \cosh K_o h C_g A_{oj} \quad (3.61)$$

A expressão (3.61) é a própria relação de Haskind-Hanao ká em campo distante. C_g é a velocidade do grupo, adimensional da da por

$$C_g = \frac{1}{2} \frac{\omega}{K_0} \left(1 + \frac{2K_0 h}{2 \sinh 2K_0 h} \right) \quad (3.62)$$

Por fim, os coeficientes de reflexão e transmissão, associados ao potencial difratado, são calculados a partir de (3.18) como

$$R = \left\{ \frac{V_7(p^+)}{G^e(p^+, p^+) - iK_0} - \frac{V_8(p^-)}{G^e(p^-, p^-) - iK_0} \right\} e^{-2iK_0 b} \quad (3.63)$$

e

$$T = \left\{ \frac{V_7(p^+)}{G^e(p^+, p^+) - iK_0} + \frac{V_8(p^-)}{G^e(p^-, p^-) - iK_0} + 1 \right\} e^{-2iK_0 b} \quad (3.64)$$

O apêndice B apresenta uma formulação alternativa, na qual o potencial difratado é tratado diretamente.

3.2.3. Relações de Reciprocidade e Conservação de Energia

As expressões desenvolvidas na seção anterior permitem que sejam diretamente estabelecidas uma série de relações de reciprocidade e de conservação de energia. Algumas delas serão, a título de exemplo, discutidas a seguir.

i) Relações de Haskind-Hanaoka

Seguem diretamente da simetria dos coeficientes λ_{jk} e resultam, essencialmente, nas formas (3.59) e (3.60) para expressar o coeficiente da força de excitação, apenas como

função do potencial de radiação associado.

A forma (3.59) é dita de "campo próximo" porquanto envolve tão somente integrais ao longo do contorno do corpo. Já a forma (3.60) é chamada de "campo distante", pois é dada como função do coeficiente A_{0j} , amplitude adimensional e complexa da onda irradiada pelo corpo, quando realiza um movimento oscilatório de amplitude unitária, no modo j .

ii) Relações de Bessho-Newman

Visto que $V_j(p^\pm)$ é real, segue de (3.49) que os coeficientes A_{0j} associados aos modos de potencial par tem, a menos de uma parcela $\pm n\pi$, a mesma fase ("surge" (1) "heave" (3), o mesmo ocorrendo para os coeficientes associados aos modos de potencial ímpar ("sway" (2), "roll" (4)).

Explicitamente, a menos de uma parcela $\pm n\pi$, $n = 1, 2, \dots$, tem-se:

$$\begin{aligned} \text{fase } (A_{01}) &= \text{fase } (A_{03}) = \text{fase } (A_{05}) & (*) \\ \text{fase } (A_{02}) &= \text{fase } (A_{04}) = \text{fase } (A_{06}) & (3.65) \end{aligned}$$

Este resultado é uma consequência direta das relações de Bessho-Newman, para o caso particular de uma seção simétrica (ver, p.ex., Mei (1983), pg. 328).

A mesma conclusão poderia ter sido obtida ao notar, de (3.49) e (3.58), que é real o produto

$$A_{0j} A_{0\ell}^{(*)} = \frac{V_j(p^\pm) V_\ell(p^\pm)}{G^2(p^\pm, p^\pm) + K_o^2} = \frac{b_{j\ell}}{\Delta_{j\ell} \omega K_o}; \quad j, \ell = 1, 2, 3, 4 \quad (3.66)$$

Este último resultado é sobejamente conhecido.

iii) Fluxo de Energia Irradiada

O coeficiente de amortecimento está diretamente ligado ao fluxo de energia irradiada nos modos j e ℓ . De fato

(*) Assumiu-se $n_j > 0$ e $-xn_z > 0$.

$$\begin{aligned}
 b_{j\ell} &= \Delta_{j\ell} \omega K_0 A_{oj} A_{o\ell}^* = \Delta_{j\ell} \omega K_0 A_{oj}^* A_{o\ell} \quad (3.67) \\
 &= \Delta_{j\ell} \omega K_0 |A_{oj}| |A_{o\ell}|
 \end{aligned}$$

corresponde, a menos de uma constante multiplicativa, ao "fluxo médio de energia no infinito", dada, no apêndice A, por

$$E_{j\ell} = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{\Gamma_\infty} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \psi_\ell^* dz \quad j, \ell = 1, 2, \dots, 7, 8 \quad (3.68)$$

que se substituída pelas respectivas condições de radiação fornece

$$E_{j\ell} = -\frac{1}{2} K_0 A_{oj} A_{o\ell}^* = -\frac{1}{2\omega} b_{j\ell} \quad j, \ell = 1, 2, 3, 4 \quad (3.69)$$

iv) Relações entre os coeficientes hidrodinâmicos globais

Das expressões (3.57) e (3.58) é imediato verificar que

$$a_{j\ell}(\omega) = \frac{b_{j\ell}}{\omega K_0} G^\ell(p^\pm, p^\pm) + \Delta_{j\ell} \lambda_{e_{j\ell}} \quad j, \ell = 1, 2, 3, 4 \quad (3.70)$$

A expressão (3.70) relaciona os coeficientes de massa adicional e amortecimento.

Ainda, de (3.67) e (3.61) segue que

$$E_j E_\ell^* = \frac{2\omega}{K_0} b_{j\ell} Cg^2 F_0^2 \cosh^2 K_0 h \quad (3.71)$$

e em particular

$$b_{jj} = \frac{K_0}{2\omega} |E_j|^2 \frac{1}{Cg^2 F_0^2 \cosh^2 K_0 h} \quad (3.72)$$

relacionando a força excitante e o amortecimento por radiação. Note que $b_{jj} > 0$ sempre.

Um resultado bastante interessante pode ser extraído de (3.70), e diz respeito à existência de massa adicional negativa.

Em primeiro lugar note que se o corpo tiver sua linha-d'água (definida como o traço da seção em Γ_F) de comprimento igual ou superior à sua projeção em Γ_F , o funcional $G^e(\psi, \psi)$ é sempre definido positivo. De fato, como a fronteira Γ_V , definida por $y = b$, é arbitrária, pode-se tomá-la como $y = b = B/2$, onde B é a boca da seção. Assim $\Gamma_F = 0$ e a assertiva acima é prontamente demonstrada da definição (3.33). Esta classe geométrica de seções será denominada simplesmente W .

Decorre então que λ_{jj}^e e $G^e(p^\pm, p^\pm)$ são definidos positivos e portanto, de (3.72) e (3.70) é possível afirmar que $a_{jj} > 0$ para a classe W de seções.

Mais pode ser dito, neste caso. Da própria estruturada expressão (3.57) segue que a matriz de massa adicional é positiva definida para corpos do tipo W .

Por outro lado não é possível inferir, com facilidade, uma condição necessária e suficiente para a existência de massa adicional negativa.

Observa-se, no entanto, que de (3.69), a expressão (3.70) pode ser escrita, com $j = \ell$, como

$$a_{jj}(\omega) = - 2 E_{jj} \frac{G^e(p^\pm, p^\pm)}{K_0} + 2 \lambda_{jj}^e ; j = 1, 2, 3, 4 \quad (3.70.a)$$

Da definição do coeficiente $\lambda_{j\ell}^e$ e da relação (2.20) aplicada ao contexto bidimensional, é imediato verificar que

$$\lambda_{jj}^e = - 2 L_{jj}^e$$

onde L_{jj}^e é a função Lagrangeana associada ao potencial evanescente ψ_j^e

Então a_{jj} será negativa quando

$$L_{jj}^e > -E_{jj} \frac{G^e(p^\pm, p^\pm)}{2K_0} \quad (*) \quad (3.73)$$

A desigualdade (3.73) é coerente com a conclusão anterior, envolvendo seções do tipo W. Sim, pois para este tipo de seção $G^e(p^\pm, p^\pm) > 0$, o mesmo ocorrendo com λ_{jj}^e , e portanto da relação anterior $L_{jj}^e < 0$. A desigualdade (3.73) não é satisfeita neste caso, e $a_{jj} > 0$.

Há que se investigar portanto, para corpos não W, em que condições $G^e(p^\pm, p^\pm)$ e L_{jj}^e se combinam no sentido de satisfazer (3.77). Esta é uma tarefa que está fora do escopo do presente trabalho, e que será deixado para ocasiões futuras.

Não foi fortuita, no entanto, a representação da desigualdade (3.73) na forma de balanço de energia. Tenciona-se, com isto, sugerir que quando o excesso da energia cinética sobre a energia potencial associadas à parcela evanescente do potencial ψ_j (e portanto, confinada, ou estacionária) for superior a um fator do fluxo médio de energia neste modo de oscilação, a força hidrodinâmica associada à aceleração do corpo deixa de ser reativa. Ou seja, $a_{jj} < 0$.

Em outras palavras $a_{jj} < 0$ quando existe incapacidade do sistema hidromecânico de "drenar" o excesso de energia cinética por radiação.

Estes resultados encontram respaldo físico no estudo apresentado por Newman, Sortland & Vinje (1984), no qual a ocorrência de massa adicional negativa é associada à existência de ondas estacionárias, na superfície livre, sobre um corpo ligeiramente submerso. Neste caso é fisicamente claro que a capacidade de radiação de energia do sistema hidromecânico é pequena em virtude da diminuta espessura da lâmina d'água existente sobre o corpo.

(*) Note que energia irradiada do corpo através de uma superfície de controle que o envolva é por definição negativa.

Voltando agora para a matriz de amortecimento segue, de (3.70), que esta é semi-definida positiva. Na realidade $[b_{j\ell}(\omega)]$ é sempre singular pois é sempre possível combinar-se a amplitude (complexa) de oscilação de modos acoplados, de tal forma a anular a onda irradiada total.

Tomando-se, por exemplo

$$\xi_2/\xi_4 = - V_4(p^-)/V_2(p^-) \quad (*) \quad (3.74)$$

segue, de (3.49), que

$$A = \xi_2 A_{02} + \xi_4 A_{04} = 0 \quad (3.75)$$

Outras relações de reciprocidade e de conservação de energia poderiam ser estabelecidas. O importante a ser observado, no entanto, é que a demonstração das diversas relações acima depende unicamente da estrutura das expressões dos coeficientes hidrodinâmicos globais $\{a_{j\ell}, b_{j\ell}, E_j, A_{0j}\}$, a qual decorre exclusivamente da simetria dos coeficientes $\lambda_{j\ell}^e$.

Este fato faz com que as diversas relações sejam identicamente satisfeitas quaisquer que sejam as aproximações numéricas das funções potenciais envolvidas.

Assim, no contexto da presente formulação, estas relações de reciprocidade e de conservação de energia não podem ser utilizadas como parâmetro de medida do erro da aproximação numérica.

(*) ξ_2 e ξ_4 , amplitudes de "sway" e "roll", tem necessariamente a mesma fase, a menos de uma parcela $\pm n\pi$.

3.2.4. Solução em um Espaço de Dimensão Finita

A determinação dos coeficientes $\lambda_{j\ell}^e$, no contexto do MVB, pode ser feita através do método variacional direto ou de Rayleigh-Ritz. O procedimento geral foi visto na seção 2.2, no qual a busca da condição de estacionariedade do funcional $F_{j\ell}^e$ é equivalente à solução das equações fracas associadas.

Dentro do problema bidimensional, e mais especificamente no domínio das funções evanescentes, $F_{j\ell}^e$ é o funcional correspondente e as equações (3.39-40) são as equações fracas associadas.

É importante observar que neste domínio a busca se faz entre funções reais.

Sejam portanto, as funções admissíveis $\tilde{\psi}_j^e(y,z)$, aproximações variacionais dos potenciais $\psi_j^e(y,z)$, dadas na forma de uma série de funções-teste elementares

$$\tilde{\psi}_j^e(y,z) = \sum_{n=0}^N \alpha_j^n \psi_n^{\pm}(y,z) ; \quad j=1,2,\dots, 7,8,9,10 \quad (3.76)$$

Os sinais (+) ou (-) devem ser utilizados, respectivamente, nos casos de funções potenciais pares ou ímpares segundo o eixo y.

É desejável que além de harmônicas, as funções-teste elementares satisfaçam às condições de contorno na superfície livre, no fundo e é essencial que sejam evanescentes, ou seja tenham $L_0(T_n^{\pm}) = 0$.

A solução das equações fracas (3.39-40) é dada então por

$$\{\alpha_j^n\} = [G_{mn}^e]^{-1} \{V_j^n\} ; \quad j=1,2,\dots, 7,8,9,10 \quad (3.77) \quad (*)$$

(*) Para uma seção do tipo W, $[G_{mn}^e]$ é definida positiva.

onde

$$G_{mn}^e = G^e(\psi_m^{e\pm}, \psi_n^{e\pm})$$

e

$$v_j^n = v_j(\psi_n^{e\pm}) \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, 7, 8, 9, 10 \quad (3.79)$$

Então

$$\lambda_{j\ell}^e = \{\alpha_j^n\}^T \{v_\ell^n\} = \{\alpha_\ell^n\}^T \{v_j^n\} \lambda_{\ell j}^e \quad (3.80)$$

A matriz $[G_{mn}^e]$ é real, simétrica e seus elementos podem ser calculados, através da utilização do Teorema de Gauss, por expressões da forma

$$G_{mn}^e = \int_{\partial S} \frac{\partial \psi_m^e}{\partial n} \psi_n^{e\pm} ds - \omega^2 \int_{\Gamma_F} \psi_m^{e\pm}(y, 0) \psi_n^{e\pm}(y, 0) dy + \\ + \sum_{i=1}^{\infty} K_i L_i(\psi_m^{e\pm}) L_i(\psi_n^{e\pm}); \quad \partial S = \Gamma_B \cup \Gamma_H \quad (3.81)$$

Note que, se as funções-teste elementares satisfizerem a todas as condições de contorno e tiverem $L(\psi_n^e) = 0$, o cômputo de G_{mn}^e se reduz a uma integral ao longo do contorno do corpo Γ_B . Neste caso as funções ψ_n^{\pm} são funções de Green ou funções elementares de ordem superior, dela derivadas.

Pode-se, portanto, afirmar que o MVB resulta em um método numérico que em essência é uma combinação do Método Híbrido de Elementos Finitos (Hybrid Element Method) e do Método de Green. É, porém, uma combinação adequada, posto que toma partido daquilo que há de melhor em ambos os métodos.

Do primeiro, utiliza a formulação fraca. A matriz a ser resolvida é simétrica e real. Mostra-se ainda que não há frequências irregulares (veja Aranha (1985), para demonstração).

Do segundo, o Método de Green, herda a simplicidade topológica: a discretização pode ser feita ao longo de uma linha, paralela a Γ_B , mas posicionada *necessariamente* dentro da seção.

É, no entanto, superior a ambos na medida em que os coeficientes hidrodinâmicos globais são obtidos a partir de aproximações variacionais, demandando, portanto, menor esforço de processamento.

Ainda, as funções-teste elementares podem ter seus centros posicionados em qualquer ponto no interior da seção. Assim, podem ser utilizados de forma a representar as particularidades do escoamento a partir de argumentos de natureza puramente físicas. Isto se fará na seção 3.2.5, a seguir.

Note, por fim, que um teorema de convergência demonstrado no contexto do Método de Green seria prontamente recuperável no MVB.

3.2.5. A Escolha das Funções-Teste Elementares

Uma função admissível satisfatoriamente construída deve permitir recuperar, ainda que de forma aproximada, as características do escoamento, induzidos pela presença do corpo, as quais são distintas para cada problema (modo) analisado.

Este é o papel fundamental das funções-teste elementares: representar particularidades do escoamento.

Cumpra porém observar que estas particularidades podem ser ditas de duas naturezas:

- i) globais
- ii) locais

As primeiras estão relacionadas à existência da perturbação e à sua intensidade e direção. Em outras palavras à dimensão, forma do corpo e modo de oscilação (ou espalhamento).

As últimas estão associadas aos detalhes geométricos que, embora locais, acabam por afetar de forma significativa todo o campo de escoamento. Especificamente, a existência de vértices ou "quinas".

A presença de um vértice, em um escoamento potencial, introduz um ponto de velocidade infinita associado ao movimento de rotação do meio fluido em torno dele. Assim é natural que sejam escolhidos "vórtices" ou "sistemas de vórtices", como funções-teste elementares que representem estas características.

Já, para o tratamento das características de natureza global, tanto polos (pares de fontes, sorvedouros ou "doublets") como dipolos podem ser satisfatoriamente utilizados, a exemplo de outros problemas clássicos da hidrodinâmica. "Vórtices" ou "sistemas de vórtices" podem ainda ser representativos no movimento de "roll" e "sway".

A figura C.2 apresenta aspectos pictóricos dos escoamentos em estudo.

De fato, em "baixa-frequência", por exemplo, tanto aos modos de "surge" quanto "heave", estão associadas funções potenciais que são essencialmente fontes pulsantes em fluido *sem interfaces*. Dipolos (ou "doublets") representam o modo em "sway", e um vórtice corresponde ao modo em "roll".

Em "alta-frequência" um dipolo constitui-se em escolha apropriada aos modos de "surge" e "heave" e um vórtice aos modos de "sway" e "roll" (ver, p.ex., Newman, (1974), pg.298).

É portanto natural que a escolha das funções-teste elementares seja encaminhada dentro de uma classe de funções que apresentam tais tipos de comportamento.

Respeitando-se a "paridade" ou "imparidade" dos problemas a serem representados, três funções-teste elementares foram escolhidas.

A primeira $T_1^\pm(y,z; y_0, z_0)$, tem comportamento de polo (fonte e sorvedouro) em região próxima ao seu centro (y_0, z_0) . A segunda $T_2^\pm(y,z; y_0, z_0)$, de dipolo e a terceira $T_3^\pm(y,z; y_0, z_0)$,

de vórtice. Na realidade $T_j^\pm(y,z; y_0, z_0)$ são sistemas de escoamentos singulares elementares posicionados simétrica e/ou anti-simetricamente em relação a (y,z) . Uma análise detalhada pode ser apreciada no apêndice C.

Para tanto foram utilizadas como funções geratrizes a função-base $\Gamma(y,z; y_0, z_0)$ e as três singularidades elementares em fluido infinito: fonte (ou sorvedouro dipolo e vórtice.

A função-base $\Gamma(y,z; y_0, z_0)$ foi tomada como a parte evanescente da *função de Green do problema bidimensional em profundidade infinita*, acrescida de duas funções harmônicas apropriadas.

Esta escolha tem por argumento mais forte a simplicidade computacional, visto que a parte evanescente da função de Green pode ser expressa em termos da função exponencial integral $E_1(w)$ (ver, p.ex., Newman, (1978), pg. 245). A função $E_1(w)$ tem suas propriedades extensivamente estudadas (ver Abramowitz & Stegun (1964), pgs. 228-254).

É interessante observar que, devido às suas propriedades matemáticas, as singularidades elementares em fluido infinito podem ser combinadas de forma a satisfazer a condição de contorno na superfície livre, característica obviamente desejável. Podem, ainda, ser combinadas de forma a satisfazer a condição essencial $L_0(\cdot) = 0$.

Para efeito de continuidade de exposição, as expressões das funções-teste $T_1^\pm(y,z; y_0, z_0)$, $T_2^\pm(y,z; y_0, z_0)$ e $T_3^\pm(y,z; y_0, z_0)$ foram transcritas do apêndice C. Os nomes a ela atribuídos objetivam referências futuras mais concisas, a serem utilizadas no item 3.3.

Definindo, por facilidade de notação,

$$f_p = f(y,z; y_0, z_0)$$

$$f_n = f(y,z; -y_0, z_0)$$

onde f é uma função genérica segue (ver apêndice C)

- sistema de "polos" (fontes ou sorvedouros)

$$T_1^+(y,z; y_0, z_0) = \Gamma_p + \Gamma_n - L_0(\Gamma_p + \Gamma_n) q^+(y,z) \quad (3.82.a)$$

- sistema de "polos" (y-doublets: fonte e sorvedouro)

$$T_1^-(y,z; y_0, z_0) = \Gamma_p - \Gamma_n - L_0(\Gamma_p - \Gamma_n) q^-(y,z) \quad (3.82.b)$$

- sistema de "z-dipolos"

$$T_2^+(y,z; y_0, z_0) = \frac{\partial \Gamma_p}{\partial z} + \frac{\partial \Gamma_n}{\partial z} - L_0(\Gamma_p + \Gamma_n) q^+(y,z) - 2(dz_p + dz_n) \quad (3.82.c)$$

- sistema de "y-dipolos"

$$T_2^-(y,z; y_0, z_0) = \frac{\partial \Gamma_p}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma_n}{\partial y} - L_0\left(\frac{\partial \Gamma_p}{\partial y} - \frac{\partial \Gamma_n}{\partial y}\right) q^-(y,z) \quad (3.82.d)$$

- sistema de "vórtices em contra-rotação"

$$T_3^+(y,z; y_0, z_0) = V_{Hp} - V_{Hn} + \frac{1}{K_0} \{D_{yp} - D_{yn} - \left(\frac{\partial \Gamma_p}{\partial y} - \frac{\partial \Gamma_n}{\partial y}\right)\} \\ + \frac{1}{K_0} L_0\left(\frac{\partial \Gamma_p}{\partial y} - \frac{\partial \Gamma_n}{\partial y}\right) \cdot q^+(y,z) \quad (3.82.e)$$

- sistema de "vórtices em mesma rotação"

$$T_3^-(y,z; y_0, z_0) = \{V_{Hp} + V_{Hn} - 2V_{Ho} + 2V_{vc}\} + \frac{1}{K_0} \{D_{yp} + D_{yn} - 2D_{y0}\} \\ - \frac{1}{K_0} \left\{ \frac{\partial \Gamma_p}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma_n}{\partial y} - 2 \frac{\partial \Gamma_c}{\partial y} \right\} + \frac{1}{K_0} \{L_0\left(\frac{\partial \Gamma_p}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma_n}{\partial y}\right) - 2L_0\left(\frac{\partial \Gamma_c}{\partial y}\right)\} q^-(y,z) \quad (3.82.f)$$

A função $\phi_{dz}(y,z; y_0, z_0)$ é um z-dipolo em fluido infinito.

A função $Dy(y,z; y_0, z_0)$ é um par de y-dipolos em fluido infinito, posicionados em $(y_0, \pm z_0)$.

As funções $V_H(y,z; y_0, z_0)$ e $V_V(y,z; y_0, z_0)$ são pares de vórtice, com "linhas-de-corte" horizontais e vertical respectivamente, posicionados em $(y_0, \pm z_0)$.

O ponto $(0, z_c)$ é a referência para o movimento de "roll".

É importante observar que a dependência das funções T_j^\pm em relação ao número de ondas K_0 se faz através da função-base Γ e, mais especificamente, da função especial: $\text{Re}\{e^w E_1(w)\}$, onde $w = -K_0 |z+z_0| + i K_0 |y-y_0|$ (ver expressões C.1-C.4).

Pode-se mostrar, ver Apêndice C, que as funções-teste T_j^\pm satisfazem

$$\nabla^2 T_j^\pm(y,z; y_0, z_0) = -L_0(\cdot) \nabla^2 q^\pm(y,z) \quad (a)$$

$$\frac{\partial T_j^\pm}{\partial z}(y,0; y_0, z_0) = K_0 T_j^\pm(y,0; y_0, z_0) \quad (b) \quad j=1,2,3$$

(3.83)

$$\nabla T_j \sim O(1/r) ; r \rightarrow \infty \quad (c)$$

$$L_0(T_j^\pm) = 0 \quad (d)$$

Para o caso de profundidade infinita, em que $K_0 = \sigma$, a expressão (3.83.b) é a própria condição de contorno na superfície livre.

Outras propriedades das funções-teste elementares escolhidas são discutidas no apêndice C.

Um outro ponto deve ser ainda abordado: *uma vez esco-*

lhido o tipo de função-teste elementar para a função-teste $\psi_n^\pm(y,z)$, como posicionar seu centro (y_0, z_0) de forma conveniente?

Embora de cunho puramente heurístico, a argumentação a baixo permite estabelecer um procedimento sistemático para a escolha e posicionamento das funções-teste elementares e que, conforme será visto na seção seguinte, conduz a resultados bastante satisfatórios.

Tomando como referência a seção poligonal, mostrada na figura 3.2, pode-se reconhecer, de imediato, três características geométricas que determinam o escoamento. Duas delas são de caráter global: área e distribuição de área.

A terceira é de caráter local: a existência de "quinas". As primeiras podem ser pensadas como se fossem representáveis por elipses inscritas equivalentes. A última como deformações destas formas regulares. Então os focos das elipses F , os pontos M em seu contorno e os pontos V , próximos aos vértices constituem-se, por certo, em posições adequadas para os centros das funções-teste, além do ponto central O (ver figura 3.2).

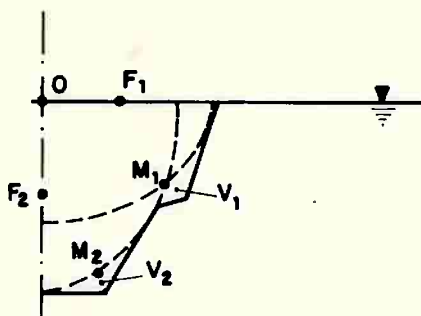


Figura 3.2. - Seção Genérica e Posição de Singularidades.

Por fim observa-se que seria desejável a adoção de uma função-teste elementar que permitisse recuperar de imediato o comportamento de onda-livre. Para tanto, uma função baseada na

componente de Fourier $f_0(z)$ pode ser convenientemente utilizada. Define-se, então

$$T_0^\pm(y,z) = f_0(z) \begin{cases} \cos K_0 y - \cos K_0 b \\ \sin K_0 y - \frac{y}{b} \sin K_0 b \end{cases} \begin{matrix} ; (\text{modos pares}) \\ ; (\text{modos ímpares}) \end{matrix} \quad (3.84)$$

Note que, embora não harmônicas, as funções $T_0^\pm(y,z)$ satisfazem a condição de contorno na superfície livre, para profundidade infinita, e apresentam $L_0(T_0^\pm) = 0$.

3.3. Experimentos Numéricos com o MVB

Dois são os objetivos que nortearam a escolha dos experimentos numéricos realizados com o Método Variacional Bidimensional.

O primeiro é o estudo de convergência numérica da solução. O segundo é o estabelecimento de um procedimento que permita escolher as funções-teste de forma a minimizar o esforço computacional para uma seção de geometria arbitrária.

No estudo de convergência o número de "polos", posicionados ao longo de uma linha paralela ao contorno da seção, foi sistematicamente aumentado até que fossem obtidos resultados satisfatórios.

O segundo objetivo foi alcançado através de uma análise sistemática à variação de dois parâmetros fundamentais: o tipo e a posição geométrica do centro das funções-teste.

Para realização dos experimentos numéricos foram escolhidas três seções típicas: círculo, retângulo e triângulo. A existência de resultados bem estabelecidos na literatura, inclusive com confirmação experimental (ver, p.ex., Vugts (1968)), aliada ao fato de se tratarem de formas geométricas básicas, foi determinante nesta escolha, além de se constituírem em formas de interesse prático.

Ainda, o retângulo e o triângulo apresentam "vértices", peculiaridade geométrica que deve ser convenientemente modelada na escolha das funções-teste.

Os resultados destes experimentos, dos quais apenas uma parte, julgada representativa, é apresentada, permitiram estabelecer um procedimento padrão. Este procedimento é materializado pelo programa VARSB (*variacional-seção bidimensional*) escrito em linguagem FORTRAN-77 e implementado em micro-computadores baseados em processadores numéricos do tipo 8087, ou em um computador VAX-750.

Cumprir observar que a análise se restringiu ao caso de profundidade infinita.

3.3.1. Estudo de Convergência

Os resultados selecionados dos experimentos numéricos de convergência são apresentados nas tabelas de nº 3.2 a 3.6, para as seções circular, e retangular.

O retângulo tem razão boca/calado igual a oito ($B/D=8$). Esta última escolha se deve à constatação de que a taxa de convergência é menor para calados menores.

Além da função-teste elementar $T_0^\pm(y,z)$ (ver eq.(3.88)), foi utilizada uma seqüência de "polos", dados pelas funções $T_1^\pm(y,z; y_0, z_0)$, posicionados, de forma equidistante, ao longo de uma linha paralela ao contorno do corpo.

Três aproximações sucessivas foram realizadas, a cada uma delas reduzindo-se pela metade a distância entre dois "polos". A primeira, com 3 "polos", a última com 9 "polos". A figura 3.3 ilustra a segunda aproximação.

São apresentados os coeficientes hidrodinâmicos de massa adicional e amortecimento. A primeira coluna apresenta os valores de referência, extraídos de Vugts(1968).

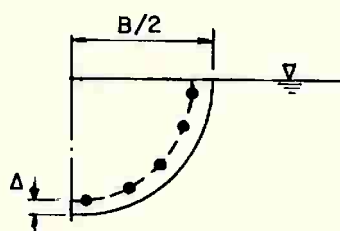
Conforme pode ser observado, a segunda aproximação (5 polos) já é suficientemente boa (em termos práticos) para a seção circular. A rigor, no modo de "heave", em baixas-freqüências, a primeira aproximação é já satisfatória.

Para a seção retangular a taxa de convergência é mais lenta, podendo ser considerada efetivamente satisfatória, em todos os modos de oscilação, apenas na terceira aproximação. Note, porém que os coeficientes de "roll" convergem mais lentamente, o que, conforme será evidenciado a seguir, se deve à maior influência dos vértices neste tipo de escoamento.

Uma última experiência, quanto à convergência, consistiu em reduzir-se à metade a distância que separa a linha de polos do contorno do corpo. Utilizando-se então 9 polos construiu-se a última coluna das tabelas 3.2 a 3.6.

Embora pequena, verifica-se uma ligeira queda de desempenho do método numérico.

Tal resultado pode ser atribuído a um crescimento no erro de integração à medida que a linha de singularidades se aproxima do contorno do corpo.



a) Círculo

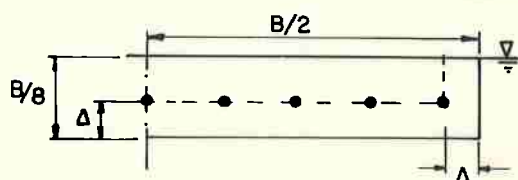
b) Retângulo $B/D = 8$

Figura 3.3. - Seções Típicas. Sequência de Aproximações Variacionais com Linhas de "Polos" (5): $\Delta = B/16$.

Pode-se admitir que, de um modo geral, a terceira aproximação seja satisfatória, do ponto de vista prático. Em outras palavras 9 polos, ou seja, 10 funções-teste, são suficientes para alcançar-se um bom grau de precisão na determinação dos

SEÇÃO CIRCULAR R=1.0		- PROFUNDIDADE INFINITA				
COEFICIENTES HIDRODINÂMICOS	$\omega \left(\frac{B}{2g}\right)^{1/2}$	VUGTS (1968)	APROXIMAÇÕES VARIACIONAIS			
			Nº 1 3 POLOS $\Delta=0.150B$	Nº 2 5 POLOS $\Delta=0.15QB$	Nº 3 9 POLOS $\Delta=0.150B$	Nº 3A 9 POLOS $\Delta=0.075B$
MASSA ADICIONAL $\frac{m_{22}}{\rho S}$	0.25	1.086	1.0678	1.0908	1.0950	1.0928
	0.50	1.293	1.2750	1.2982	1.3028	1.3002
	0.75	0.862	0.8678	0.8758	0.8770	0.8762
	1.00	0.385	0.3837	0.3833	0.3825	0.3830
	1.25	0.221	0.2177	0.2181	0.2180	0.2182
	1.50	0.178	0.1831	0.1834	0.1849	0.1846
	1.75	0.184	0.1937	0.1941	0.1950	0.1952
	2.00	0.224	0.2174	0.2196	0.2391	0.2193
AMORTECIMENTO (*) $\frac{d_{22}}{\rho \omega_a S}$	0.25	0.006	0.0060	0.0062	0.0062	0.0062
	0.50	0.192	0.1814	0.1857	0.1867	0.1862
	0.75	0.661	0.6490	0.6615	0.6643	0.6626
	1.00	0.747	0.7404	0.7457	0.7467	0.7458
	1.25	0.632	0.6325	0.6322	0.6316	0.6315
	1.50	0.500	0.4976	0.4992	0.5004	0.4989
	1.75	0.382	0.3816	0.3809	0.3855	0.3809
	2.00	0.293	0.2930	0.2907	0.3469	0.2845
FORÇA DE EXCITAÇÃO $\frac{ E_2 }{\rho g S k_o A}$	0.25	2.000	1.9843	2.0059	2.0095	2.0131
	0.50	1.932	1.9267	1.9447	1.9447	1.9447
	0.75	1.335	1.3205	1.3325	1.3325	1.3325
	1.00	0.682	0.6869	0.6887	0.6896	0.6896
	1.25	0.352	0.3630	0.3630	0.3630	0.3630
	1.50	0.204	0.2041	0.2046	0.2047	0.2053
	1.75	0.120	0.1214	0.1214	0.1224	0.1229
	2.00	0.074	0.0765	0.0761	0.0833	0.0769

$$(*) \quad \omega_a = (2g/B)^{1/2} = (g/R)^{1/2}$$

S = área submersa

Tabela 3.2. Coeficientes Hidrodinâmicos para uma Seção Circular.
Modo em "SWAY"
R = 1.0: Profundidade Infinita. Estudo de Convergência.
 Δ : Distância dos polos ao contorno do corpo.

SEÇÃO CIRCULAR R=1.0		- PROFUNDIDADE INFINITA				
COEFICIENTES HIDRODINÂMICOS	$\omega \left(\frac{B}{2g}\right)^{1/2}$	VUGTS (1968)	APROXIMAÇÕES VARIACIONAIS			
			Nº 1 3 POLOS $\Delta=0.150B$	Nº 2 5 POLOS $\Delta=0.150B$	Nº 3 9 POLOS $\Delta=0.150B$	Nº 3A 9 POLOS $\Delta=0.075B$
MASSA ADICIONAL $\frac{m_{33}}{\rho S}$	0.25	1.732	1.7357	1.7478	1.7505	1.7460
	0.50	0.369	0.8620	0.8753	0.8785	0.8749
	0.75	0.623	0.6006	0.6191	0.6237	0.6197
	1.00	0.612	0.5694	0.5975	0.6048	0.5993
	1.25	0.681	0.6101	0.6576	0.6719	0.6620
	1.50	0.743	0.7018	0.7399	0.7529	0.7437
	1.75	0.807	0.7809	0.8115	0.8181	0.8106
	2.00	0.858	0.8341	0.8587	0.8642	0.8576
AMORTECIMENTO (**) $\frac{d_{33}}{\rho \omega_a S}$	0.25	0.482	0.4842	0.4836	0.4835	0.4837
	0.50	0.616	0.6261	0.6231	0.6224	0.6232
	0.75	0.553	0.5600	0.5543	0.5528	0.5543
	1.00	0.398	0.4010	0.3979	0.3966	0.3981
	1.25	0.244	0.2263	0.2407	0.2454	0.2408
	1.50	0.135	0.1270	0.1313	0.1375	0.1349
	1.75	0.072	0.0727	0.0762	0.0768	0.0759
	2.00	0.037	0.0405	0.0402	0.0413	0.0400
FORÇA DE EXCITAÇÃO $\frac{ E_3 }{\rho g B A}$	0.25	0.871	0.8715	0.8715	0.8715	0.8733
	0.50	0.700	0.7000	0.7000	0.7000	0.7035
	0.75	0.534	0.5409	0.5409	0.5356	0.5886
	1.00	0.391	0.3967	0.3935	0.3945	0.4016
	1.25	0.280	0.2669	0.2749	0.2775	0.2819
	1.50	0.186	0.1824	0.1856	0.1898	0.1880
	1.75	0.134	0.1274	0.1311	0.1312	0.1237
	2.00	0.090	0.0892	0.0888	0.0900	0.0854

$$(**) \omega_a = (2g/B)^{1/2} = (g/R)^{1/2}$$

S = área submersa

Tabela 3.3. Coeficientes Hidrodinâmicos para uma Seção Circular. Modo em "HEAVE".

R = 1.0: Profundidade Infinita. Estudo de Convergência.

Δ = Distância dos polos ao contorno do corpo.

SEÇÃO RETANGULAR B/D = 8 -		PROFUNDIDADE INFINITA				
COEFICIENTES HIDRODINÂMICOS	$\omega \left(\frac{B}{2g}\right)^{1/2}$	VUGTS (1960)	APROXIMAÇÕES VARIACIONAIS			
			Nº 1 3 POLOS $\Delta=B/8$	Nº 2 5 POLOS $\Delta=B/8$	Nº 3 9 POLOS $\Delta=B/8$	Nº 3A 9 POLOS $\Delta=B/16$
MASSA ADICIONAL $\frac{m_{22}}{\rho BD}$	0.25	0.390	0.2956	0.3408	0.3574	0.2700
	0.50	0.430	0.3601	0.3976	0.4260	0.4148
	0.75	0.454	0.3719	0.4109	0.4410	0.4280
	1.00	0.350	0.2890	0.3143	0.3355	0.3259
	1.25	0.215	0.1861	0.1952	0.2051	0.2010
	1.50	0.115	0.1082	0.1095	0.1126	0.1119
	1.75	0.057	0.0567	0.0569	0.0500	0.0578
	2.00	0.023	0.0261	0.0277	0.0269	0.0280
AMORTECIMENTO (*) $\frac{d_{22}}{\rho \omega_a BD}$	0.25	0.000	0.0008	0.0008	0.0009	0.0007
	0.50	0.026	0.0229	0.0247	0.0259	0.0254
	0.75	0.150	0.1212	0.1332	0.1420	0.1379
	1.00	0.318	0.2595	0.2864	0.3067	0.2960
	1.25	0.428	0.3537	0.3829	0.4072	0.3931
	1.50	0.448	0.3967	0.4173	0.4283	0.4245
	1.75	0.440	0.4026	0.4132	0.4279	0.4162
	2.00	0.405	0.3830	0.3879	0.3960	0.3869
PRAÇA DE EXCITAÇÃO $\frac{ E_2 }{\rho g B D k_G A}$	0.25	1.366	1.2218	1.3123	1.3287	1.2330
	0.50	1.314	1.1766	1.2614	1.2728	1.2728
	0.75	1.126	0.9805	1.0635	1.0748	1.0785
	1.00	0.800	0.6986	0.7552	0.7693	0.7693
	1.25	0.526	0.4684	0.5000	0.5068	0.5068
	1.50	0.343	0.3149	0.3300	0.3337	0.3337
	1.75	0.228	0.2182	0.2246	0.2246	0.2246
	2.00	0.160	0.1541	0.1556	0.1556	0.1555

$$(*) \omega_a = (2g/B)^{1/2}$$

Tabela 3.4. Coeficientes Hidrodinâmicos para uma Seção Retangular.
 Modo em "SWAY"
 B/D = 8.0: Profundidade Infinita. Estudo de Convergência.
 Δ = Distância dos polos ao contorno do corpo.

SEÇÃO RETANGULAR B/D = 8		- PROFUNDIDADE INFINITA				
COEFICIENTES HIDRODINÂMICOS	$\omega \left(\frac{B}{2g}\right)^{1/2}$	VUGTS (1968)	APROXIMAÇÕES VARIACIONAIS			
			Nº 1 3 POLOS $\Delta=B/8$	Nº 2 5 POLOS $\Delta=B/8$	Nº 3 9 POLOS $\Delta=B/8$	Nº 3A 9 POLOS $\Delta=B/16$
MASSA ADICIONAL $\frac{m_{33}}{\rho BD}$	0.25	-	6.6075	6.7978	6.8948	6.8696
	0.50	4.080	3.8744	4.0426	4.0803	4.0794
	0.75	3.045	2.9207	3.0224	3.0655	3.0763
	1.00	2.736	2.6204	2.6580	2.7060	2.7358
	1.25	2.701	2.6216	2.6140	2.6720	2.7231
	1.50	2.816	2.6926	2.7358	2.8015	2.8707
	1.75	3.046	2.5899	2.9113	2.9915	3.0618
	2.00	3.218	2.1987	3.0272	3.1759	3.2505
AMORTECIMENTO (*) $\frac{d_{33}}{\rho \omega_a BD}$	0.25	1.550	1.5713	1.5611	1.5559	1.5578
	0.50	2.155	2.2360	2.1730	2.1610	2.1670
	0.75	2.195	2.3701	2.2399	2.2033	2.2203
	1.00	1.908	2.1589	1.9874	1.9219	1.9549
	1.25	1.465	1.6816	1.5634	1.4769	1.5257
	1.50	0.975	1.0572	1.0963	1.0120	1.0676
	1.75	0.590	0.5131	0.6823	0.6260	0.6762
	2.00	0.330	0.2111	0.3727	0.3558	0.3875
FORÇA DE EXCITAÇÃO $\frac{ E_3 }{\rho g BA}$	0.25	0.886	0.8839	0.8821	0.8803	0.8821
	0.50	0.737	0.7425	0.7389	0.7354	0.7354
	0.75	0.609	0.6205	0.6098	0.6046	0.6098
	1.00	0.491	0.5126	0.4992	0.4928	0.4942
	1.25	0.386	0.4172	0.3977	0.3924	0.3907
	1.50	0.286	0.3309	0.3086	0.2991	0.2980
	1.75	0.208	0.2536	0.2326	0.2215	0.2203
	2.00	0.147	0.1867	0.1711	0.1598	0.1556

$$*) \quad \omega_a = (2g/B)^{1/2}$$

Tabela 3.5. Coeficiente Hidrodinâmicos para uma Seção Retangular. Modo em "HEAVE".

B/D = 8.0: Profundidade Infinita. Estudo de Convergência.

Δ = Distância dos polos ao contorno do corpo.

SEÇÃO RETANGULAR B/D = 8			- PROFUNDIDADE INFINITA			
COEFICIENTES HIDRODINÂMICOS	$\omega \left(\frac{B}{2g}\right)^{1/2}$	VUGTS (1968)	APROXIMAÇÕES VARIACIONAIS			
			Nº 1 3 POLOS $\Delta=0.125B$	Nº 2 5 POLOS $\Delta=0.125B$	Nº 3 9 POLOS $\Delta=0.125B$	Nº 3A 9 POLOS $\Delta=0.0625B$
MASSA ADICIONAL $\frac{m_{44}}{\rho B^3 D}$	0.25	0.141	0.1376	0.1408	0.1405	0.1747
	0.50	0.149	0.1261	0.1410	0.1466	0.1437
	0.75	0.143	0.1248	0.1352	0.1397	0.1371
	1.00	0.118	0.1025	0.1106	0.1151	0.1122
	1.25	0.101	0.0872	0.0935	0.0984	0.0948
	1.50	0.097	0.0849	0.0923	0.0939	0.0897
	1.75	0.099	0.0871	0.0923	0.0953	0.0911
	2.00	0.101	0.0851	0.0971	0.0983	0.0948
AMORTECIMENTO (**) $\frac{d_{44}}{\rho \omega_a B^3 D}$	0.25	0.000	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
	0.50	0.006	0.0068	0.0062	0.0061	0.0058
	0.75	0.026	0.0304	0.0274	0.0259	0.0267
	1.00	0.041	0.0511	0.0449	0.0414	0.0434
	1.25	0.038	0.0497	0.0428	0.0382	0.0412
	1.50	0.026	0.0354	0.0310	0.0268	0.0301
	1.75	0.014	0.0201	0.0187	0.0162	0.0188
	2.00	0.008	0.0096	0.0096	0.0087	0.0103
FORÇA DE EXCITAÇÃO $\frac{ E_4 }{\rho g \frac{B^3}{12} k_{0A}}$	0.25	1.022	1.0691	1.0436	1.0352	0.8740
	0.50	0.914	0.9716	0.9418	0.9334	0.9333
	0.75	0.689	0.7495	0.7212	0.7099	0.7099
	1.00	0.428	0.4794	0.4518	0.4412	0.4412
	1.25	0.230	0.2800	0.2562	0.2461	0.2461
	1.50	0.115	0.1584	0.1428	0.1332	0.1335
	1.75	0.060	0.0889	0.0791	0.0721	0.0717
	2.00	0.040	0.0489	0.0440	0.0388	0.0381

$$(**) \omega_a = (2g/B)^{1/2}$$

Tabela 3.6. Coeficientes Hidrodinâmicos para uma Seção Retangular.
 Modo "ROLL".
 B/D = 8.0: Profundidade Infinita. Estudo de Convergência.
 Δ = Distância dos polos ao contorno do corpo.

coeficientes globais. Isto significa, numericamente, ter que inverter uma matriz real e simétrica de ordem 10.

Este desempenho deveria ser contrastado com o Método de Green usual, onde, de modo geral, uma matriz complexa e cheia, de ordem 25 deve ser construída e invertida.

Deve-se observar, no entanto, que o *desempenho do MVB pode ser substancialmente melhorado com o uso de funções-teste elementares de ordem superior, como os "sistemas de dipolos e vórtices"* estabelecidos na seção anterior (funções $T_2^\pm(y,z; y_0, z_0)$ e $T_3^\pm(y,z; y_0, z_0)$). Este fato será demonstrado no item 3.3.2, a seguir.

Por fim ressalta-se que, do ponto de vista do usuário, o MVB, com o uso de sistemas de "polos", é bastante semelhante ao Método de Green. Converge, porém, muito mais rapidamente. A razão foi já mencionada: pelo método variacional, uma aproximação da função potencial com erro de ordem $O(\delta)$, leva a valores dos coeficientes globais com erro $O(\delta^2)$. Pelo método de Green este erro permanece da ordem $O(\delta)$.

3.3.2. Análise Sistemática à Variação de Parâmetros

Dois foram os parâmetros variados: o tipo e a posição das funções-teste elementares. Os resultados para a seção circular são apresentados nas tabelas de nº 3.8 e 3.9 e aqueles referentes à seção retangular (B/D=8) podem ser apreciados nas tabelas de nº 3.11 a 3.13. Os valores de referência (Vugts (1968)) são mostrados na primeira coluna.

A escolha das funções-teste foi orientada pela argumentação de natureza física apresentada na seção 3.2.4 e que levou ao estabelecimento dos três tipos de funções elementares.

"polo"	:	$T_1^\pm(y,z; y_0, z_0)$
"dipolo"	:	$T_2^\pm(y,z; y_0, z_0)$
"vórtice"	:	$T_3^\pm(y,z; y_0, z_0)$

Para a seção circular três aproximações variacionais foram testadas, conforme resumidamente descrito abaixo. As funções $T_0^\pm(y,z)$ foram utilizadas em todas as aproximações.

Aprox. N°	N° de F-T's	FUNÇÕES-TESTE ELEMENTARES
4	2	$T_0^\pm(y,z)$; $T_2^\pm(y,z;0,0)$;
5	3	$T_0^\pm(y,z)$; $T_2^\pm(y,z;0,0)$; $T_1^\pm(y,z;0.85R,45^\circ)$
6	4	$T_0^\pm(y,z)$; $T_2^\pm(y,z;0,0)$; $T_1^\pm(y,z;0.85R,30^\circ)$; $T_1^\pm(y,z;0.85R,60^\circ)$

Tabela 3.7. Aproximações Variacionais para uma seção circular.

A aproximação 4 tem por objetivo caracterizar o efeito de um único "dipolo" na solução final. O resultado é bastante satisfatório para o modo de "heave", em baixa frequência, e "sway", em alta frequência. Cumpre observar que o "z-dipolo" é equivalente, a menos de um fator ω^2 , a um polo, quando seu centro está na superfície livre. Esta singularidade representa de forma exata o comportamento assintótico do modo de "heave" quando $\omega \rightarrow 0$ (ver Newman, 1974). Por sua vez o "y-dipolo" apresenta em alta frequência o mesmo comportamento assintótico do modo de "sway".

As aproximações seguintes, 5 e 6 buscam fornecer maiores informações sobre a distribuição de área do círculo. Conforme se pode observar, a aproximação n° 6 é já bastante satisfatória.

O caminho seguido para a seção retangular é bastante semelhante. Foram quatro, no entanto, as aproximações variacionais testadas. A tabela 3.10 descreve estas aproximações.

SEÇÃO CIRCULAR R = 1.0			- PROFUNDIDADE INFINITA			
COEFICIENTES HIDRODINÂMICOS	$\omega \left(\frac{B}{2g}\right)^{1/2}$	VUGTS (1968)	APROXIMAÇÕES VARIACIONAIS			
			Nº 4 2F.T'S	Nº 5 3F.T'S	Nº 6 4F.T'S	
MASSA ADICIONAL $\frac{m_{22}}{\rho S}$	0.25	1.086	1.0962	1.0964	1.0965	
	0.50	1.293	1.3069	1.3052	1.3046	
	0.75	0.862	0.8795	0.8777	0.8771	
	1.00	0.385	0.3784	0.3809	0.3816	
	1.25	0.221	0.2003	0.2127	0.2166	
	1.50	0.178	0.1483	0.1748	0.1831	
	1.75	0.184	0.1248	0.1795	0.1933	
	2.00	0.224	0.0959	0.1959	0.2171	
AMORTECIMENTO (**) $\frac{d_{22}}{\rho \omega_a S}$	0.25	0.906	0.0062	0.0062	0.0062	
	0.50	0.192	0.1880	0.1874	0.1872	
	0.75	0.661	0.6684	0.6664	0.6658	
	1.00	0.747	0.7577	0.7504	0.7480	
	1.25	0.632	0.6464	0.6367	0.6329	
	1.50	0.500	0.5115	0.5056	0.5018	
	1.75	0.382	0.3850	0.3901	0.3884	
	2.00	0.293	0.2750	0.2944	0.2961	
FORÇA DE EXCITAÇÃO $\frac{ E_2 }{\rho g S k_0 A}$	0.25	2.000	2.0131	2.0131	2.0131	
	0.50	1.932	1.9446	1.9627	1.9446	
	0.75	1.335	1.3445	1.3325	1.3325	
	1.00	0.682	0.6941	0.6914	0.6896	
	1.25	0.352	0.3673	0.3644	0.3630	
	1.50	0.204	0.2071	0.2059	0.2053	
	1.75	0.120	0.1224	0.1229	0.1229	
	2.00	0.074	0.0738	0.0765	0.0769	

$$(**) \omega_a = (2g/B)^{1/2} = (g/R)^{1/2}$$

Tabela 3.8. Coeficientes Hidrodinâmicos para uma Seção Circular = R = 1.0. Modo "SWAY". Profundidade Infinita.

Análise de Sensibilidade à Escolha e Posição das Funções-Teste. (Ver Tabela 3.7).

SEÇÃO CIRCULAR R = 1.0		- PROFUNDIDADE INFINITA			
COEFICIENTES HIDRODINÂMICOS	$\omega \left(\frac{B}{2g}\right)^{1/2}$	VUGTS (1968)	APROXIMAÇÕES VARIACIONAIS		
			Nº 4 2F.-T'S	Nº 5 3F.-T'S	Nº 6 4F.-T'S
MASSA ADICIONAL (**) $\frac{m_{33}}{\rho S}$	0.25	1.732	1.6592	1.6608	1.7220
	0.50	0.869	0.7774	0.7799	0.8457
	0.75	0.623	0.4919	0.4972	0.5785
	1.00	0.612	0.4394	0.4500	0.5455
	1.25	0.681	0.4719	0.4911	0.6037
	1.50	0.743	0.4706	0.5192	0.6765
	1.75	0.307	0.4271	0.5772	0.7428
2.00	0.858	0.6899	0.7591	0.8153	
AMORTECIMENTO (*) $\frac{d_{33}}{\rho \omega_a S}$	0.25	0.482	0.4878	0.4878	0.4849
	0.50	0.616	0.6434	0.6426	0.6294
	0.75	0.553	0.5917	0.5888	0.5667
	1.00	0.398	0.4344	0.4289	0.4111
	1.25	0.244	0.2621	0.2563	0.2527
	1.50	0.135	0.1247	0.1229	0.1367
	1.75	0.072	0.0381	0.0492	0.0684
2.00	0.037	0.0258	0.0323	0.0372	
FORÇA DE EXCITAÇÃO $\frac{ E_3 }{\rho g B A}$	0.25	0.871	0.8750	0.8750	0.8733
	0.50	0.700	0.7106	0.7106	0.7036
	0.75	0.534	0.5568	0.5568	0.5462
	1.00	0.391	0.4129	0.4101	0.4016
	1.25	0.280	0.2873	0.2837	0.2819
	1.50	0.186	0.1803	0.1792	0.1888
	1.75	0.134	0.0924	0.1050	0.1237
2.00	0.090	0.0711	0.0796	0.0854	

$$(*) \quad \omega_a = (2g/B)^{1/2} = (g/R)^{1/2}$$

S = área submersa

Tabela 3.9. Coeficientes Hidrodinâmicos para uma Seção Circular R = 1.0. Modo em "HEAVE", Profundidade Infinita.

Análise de Sensibilidade a escolha e posição das Funções-Teste. (Ver Tabela 3.7).

Aprox. N ^o	N ^o de F.T.'s	FUNÇÕES-TESTE ELEMENTARES	
		Modos Pares (j=1,3,5)	Modos Ímpares (j=2,4,6)
4	2	$T_0^+(y,z) ; T_1^+(y,z;0,0)$	$T_0^-(y,z) ; T_2^-(y,z;y_F,z_F)$
5	3	Aprox. $4+T_1^+(y,z;y_F,z_F)$	Aprox. $4 + T_3^-(y,z;y_F,z_F)$
6	3	Aprox. $4+T_3^+(y,z;y_V,z_V)$	Aprox. $4 + T_3^-(y,z;y_V,z_V)$
7	4	Aprox. $5 + T_3^+(y,z;y_V,z_V)$	Aprox. $5 + T_3^-(y,z;y_V,z_V)$

Tabela 3.10. Aproximações variacionais para uma seção retangular (B/D=8) F: foco da elipse inscrita
 $V = (0.45B; -0.075B)$
 B= boca; D= calado

Além destas uma aproximação adicional foi testada, denominada 7a. Está é a própria aproximação 7 com o ponto V ligeiramente mais próximo da quina da seção ($V=(0.475B;-0.10B)$).

Para a aproximação n^o 4 valem as mesmas observações feitas anteriormente, no caso da seção circular. Já a aproximação de n^o 5 mostra que a adição de um "polo" no foco da elipse, para os modos de potencial par, melhora ligeiramente a solução em toda a faixa de frequências. Para os modos de potencial ímpar, o "vórtice" centrado no foco da elipse inscrita (F) introduz, através da função $2V_V(y,z;0,0)$, que compõe $T_3^-(y,z;y_F,z_F)$ (ver 3.86.f), uma rotação que simula a condição de contorno associada ao movimento de "roll". Esta é a razão pela qual os valores dos coeficientes em "roll" sofrem uma melhoria.

A aproximação n^o 6 é fundamental, porquanto mostra a importância de se representar apropriadamente o efeito (local) das quinas no escoamento.

O uso das funções $T_3^\pm(y,z;y_V,z_V)$ permite então simular as características básicas do escoamento neste entorno, introduzindo

um comportamento de "vórtice", levando a uma substancial melhoria no cálculo dos coeficientes, particularmente no modo de "heave", em alta frequência.

A aproximação de nº 7, por sua vez, combina as particularidades das anteriores e leva a resultados *plenamente satisfatórios*. Estes resultados são ainda melhorados na aproximação de nº 7a quando o ponto v é levado mais junto às quinas da seção, mostrando que de fato o efeito do vértice é equivalente a um ponto de vórtice no escoamento.

Pode-se por fim dizer que a análise acima indica que a aproximação de nº 7 (7a) reúne o menor número de informações necessárias para uma fiel representação do escoamento, considerando-se, obviamente, esta classe de funções-teste elementares.

Com base nesta conclusão, a aproximação 7a foi utilizada diretamente para uma seção retangular de maior calado ($B/D=2$). Os resultados para as duas condições de calado são apresentados em forma gráfica, na figura 3.4, comparadas às curvas de referência extraídas de Vugts (1968). Observa-se concordância em toda a faixa de frequências, inclusive para os valores dos coeficientes acoplados em "sway-roll".

Para finalizar o presente estudo uma aproximação variacional com 4 funções-teste foi utilizada para o caso de um triângulo equilátero. Os resultados são mostrados na figura 3.6.

Para os modos pares: $T_0^+(y,z)$; $T_2^+(y,z;0,0)$; $T_1^+(y,z;y_1,z_1)$; $T_1^+(y,z;y_F,z_F)$. Para os modos ímpares: $T_0^-(y,z)$; $T_2^-(y,z;y_F,z_F)$; $T_3^-(y,z;y_2,z_2)$; $T_3^-(y,z;y_v,z_v)$ (ver figura 3.7). F é o foco da elipse circunscrita).

SEÇÃO RETANGULAR B/D = 8			PROFUNDIDADE INFINITA				
COEFICIENTES HIDRODINÂMICOS	$\omega \left(\frac{B}{2g}\right)^{1/2}$	VUGTS (1968)	APROXIMAÇÕES VARIACIONAIS				
			Nº 4 2F.T'S	Nº 5 3F.T'S	Nº 6 3F.T'S	Nº 7 4F.T'S	Nº 7A 4F.T'S
MASSA ADICIONAL $\frac{m_{22}}{\rho BD}$	0.25	0.390	0.2313	0.2927	0.3433	0.3601	0.3772
	0.50	0.430	0.3358	0.3686	0.4041	0.4281	0.4462
	0.75	0.454	0.3447	0.3775	0.3945	0.4433	0.4628
	1.00	0.350	0.2718	0.2889	0.2806	0.3369	0.3515
	1.25	0.215	0.1826	0.1843	0.1829	0.2057	0.2139
	1.50	0.115	0.1124	0.1096	0.1124	0.1126	0.1169
	1.75	0.057	0.0627	0.0621	0.0637	0.0565	0.0589
	2.00	0.023	0.0318	0.0329	0.0327	0.0256	0.0271
AMORTECIMENTO $\frac{d_{22}}{\rho \omega_a BD}$ (*)	0.25	0.000	0.0007	0.0008	0.0008	0.0009	0.0009
	0.50	0.026	0.0218	0.0234	0.0249	0.0260	0.0268
	0.75	0.150	0.1122	0.1233	0.1270	0.1430	0.1485
	1.00	0.318	0.2379	0.2602	0.2448	0.3090	0.3220
	1.25	0.428	0.3285	0.3473	0.3283	0.4104	0.4271
	1.50	0.448	0.3777	0.3839	0.3771	0.4421	0.4587
	1.75	0.440	0.3920	0.3909	0.3921	0.4327	0.4476
	2.00	0.405	0.3788	0.3799	0.3826	0.4021	0.4153
FORÇA DE EXCITAÇÃO $\frac{ E_2 }{\rho g B D k_{0A}}$	0.25	1.366	1.1992	1.2558	1.3124	1.3318	1.3494
	0.50	1.314	1.1822	1.2219	1.2615	1.2910	1.3104
	0.75	1.126	0.9730	1.0182	1.0333	1.0977	1.1187
	1.00	0.800	0.6901	0.7212	0.6986	0.7861	0.8025
	1.25	0.526	0.4639	0.4774	0.4639	0.5186	0.5290
	1.50	0.343	0.3149	0.3187	0.3149	0.3412	0.3476
	1.75	0.228	0.2182	0.2182	0.2182	0.2296	0.2335
	2.00	0.160	0.1541	0.1541	0.1541	0.1585	0.1610

$$(*) \omega_a = (2g/B)^{1/2}$$

Tabela 3.11. Coeficientes Hidrodinâmicos para uma Seção Retangular B/D = 8.

Modo em "SWAY". Profundidade Infinita.

Análise de Sensibilidade à Escolha e posição das Funções-Teste.

(Ver Tabela 3.10).

SEÇÃO RETANGULAR B/D = 8 - PROFUNDIDADE INFINITA							
COEFICIENTES HIDRODINÂMICOS	$\omega \left(\frac{B}{2g}\right)^{1/2}$	VUGTS (1968)	APROXIMAÇÕES VARIACIONAIS				
			Nº 4 2F.T'S	Nº 5 3F.T'S	Nº 6 3F.T'S	Nº 7 4F.T'S	Nº 7A 4F.T'S
MASSA ADICIONAL $\frac{m}{\rho BD}$	0.25	-	6.4843	6.5905	6.5467	6.8550	6.8518
	0.50	4.080	3.8140	3.8467	3.8483	4.0591	4.0627
	0.75	3.045	2.9133	2.8780	2.9360	3.0453	3.0616
	1.00	2.736	2.6239	2.5549	2.6301	2.6903	2.7277
	1.25	2.701	2.5505	2.5358	2.5843	2.6568	2.7279
	1.50	2.816	2.4547	2.6225	2.6868	2.7680	2.8822
	1.75	3.046	2.2071	2.5945	2.8638	2.9420	3.0714
	2.00	3.218	1.8324	2.2459	3.0411	3.1294	3.2484
AMORTECIMENTO (*) $\frac{d_{33}}{\rho \omega_a BD}$	0.25	1.550	1.5786	1.5722	1.5755	1.5580	1.5582
	0.50	2.155	2.2696	2.2442	2.2644	2.1699	2.1699
	0.75	2.195	2.4262	2.4017	2.4396	2.2394	2.2313
	1.00	1.908	2.1993	2.2438	2.2755	2.0402	1.9903
	1.25	1.565	1.6490	1.8501	1.8744	1.7415	1.6051
	1.50	0.975	0.9377	1.2939	1.3737	1.3165	1.1554
	1.75	0.590	0.3862	0.7379	0.9073	0.8520	0.7087
	2.00	0.330	0.1488	0.3766	0.5709	0.4933	0.3797
FORÇA DE EXCITAÇÃO $\frac{ E_3 }{\rho g BA}$	0.25	0.886	0.8892	0.8874	0.8874	0.8826	0.8827
	0.50	0.737	0.7531	0.7495	0.7531	0.7365	0.7365
	0.75	0.609	0.6364	0.6311	0.6364	0.6109	0.6098
	1.00	0.491	0.5247	0.5296	0.5331	0.5050	0.4988
	1.25	0.386	0.4057	0.4304	0.4331	0.4173	0.4006
	1.50	0.286	0.2800	0.3288	0.3383	0.3312	0.3103
	1.75	0.208	0.1658	0.2301	0.2549	0.2467	0.2250
	2.00	0.147	0.0964	0.1527	0.1895	0.1756	0.1540

$$(*) \quad \omega_a = (2g/B)^{1/2}$$

Tabela 3.12. Coeficientes Hidrodinâmicos para uma Seção Retangular B/D = 8.

Modo em "HEAVE". Profundidade Infinita.

Análise de Sensibilidade a Escolha e Posição das Funções-Teste.

(Ver Tabela 3.10).

SEÇÃO RETANGULAR B/D = 8			PROFUNDIDADE INFINITA				
COEFICIENTES HIDRODINÂMICOS	$\omega \left(\frac{B}{2g}\right)^{1/2}$	VUGTS (1968)	APROXIMAÇÕES VARIACIONAIS				
			Nº 4 2F.T'S	Nº 5 3F.T'S	Nº 6 3F.T'S	Nº 7 4F.T'S	Nº 7A 4F.T'S
MASSA ADICIONAL $\frac{m_{44}}{\rho B^3 D}$	0.25	0.141	0.1101	0.1257	0.1380	0.1384	0.1411
	0.50	0.149	0.1137	0.1340	0.1379	0.1466	0.1491
	0.75	0.143	0.1156	0.1287	0.1256	0.1397	0.1420
	1.00	0.118	0.0951	0.1029	0.0966	0.1151	0.1180
	1.25	0.101	0.0799	0.0828	0.0801	0.0984	0.1025
	1.50	0.097	0.0759	0.0755	0.0774	0.0935	0.0988
	1.75	0.099	0.0714	0.0767	0.0816	0.0942	0.1004
	2.00	0.101	0.0531	0.0826	0.0879	0.0960	0.1030
AMORTECIMENTO (*) $\frac{d_{44}}{\rho \omega_a B^3 D}$	0.25	0.000	0.0003	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
	0.50	0.006	0.0072	0.0065	0.0062	0.0059	0.0057
	0.75	0.026	0.0331	0.0295	0.0296	0.0258	0.0250
	1.00	0.041	0.0575	0.0508	0.0560	0.0413	0.0393
	1.25	0.038	0.0583	0.0531	0.0584	0.0382	0.0352
	1.50	0.026	0.0441	0.0436	0.0446	0.0272	0.0240
	1.75	0.014	0.0286	0.0306	0.0285	0.0168	0.0140
	2.00	0.008	0.0195	0.0183	0.0156	0.0094	0.0072
FORÇA DE EXCITAÇÃO $\frac{ E_4 }{\rho g \frac{B^3}{12} k_o A}$	0.25	1.022	1.0186	1.0607	1.0267	1.0241	1.0147
	0.50	0.914	1.0182	0.9673	0.9461	0.9205	0.9095
	0.75	0.689	0.7919	0.7467	0.7495	0.6990	0.6880
	1.00	0.428	0.5091	0.4773	0.5027	0.4310	0.4204
	1.25	0.230	0.2936	0.2800	0.2936	0.2374	0.2279
	1.50	0.115	0.1612	0.1612	0.1626	0.1270	0.1193
	1.75	0.060	0.0885	0.0915	0.0884	0.0678	0.0619
	2.00	0.040	0.0523	0.0507	0.0469	0.0364	0.0317

$$(*) \omega_a = (2g/B)^{1/2}$$

Tabela 3.13. Coeficientes Hidrodinâmicos para uma Seção Retangular B/D = 8.

Modo em "ROLL". Profundidade Infinita.

Análise de Sensibilidade a Escolha e Posição das Funções-Teste.

(Ver Tabela 3.10).

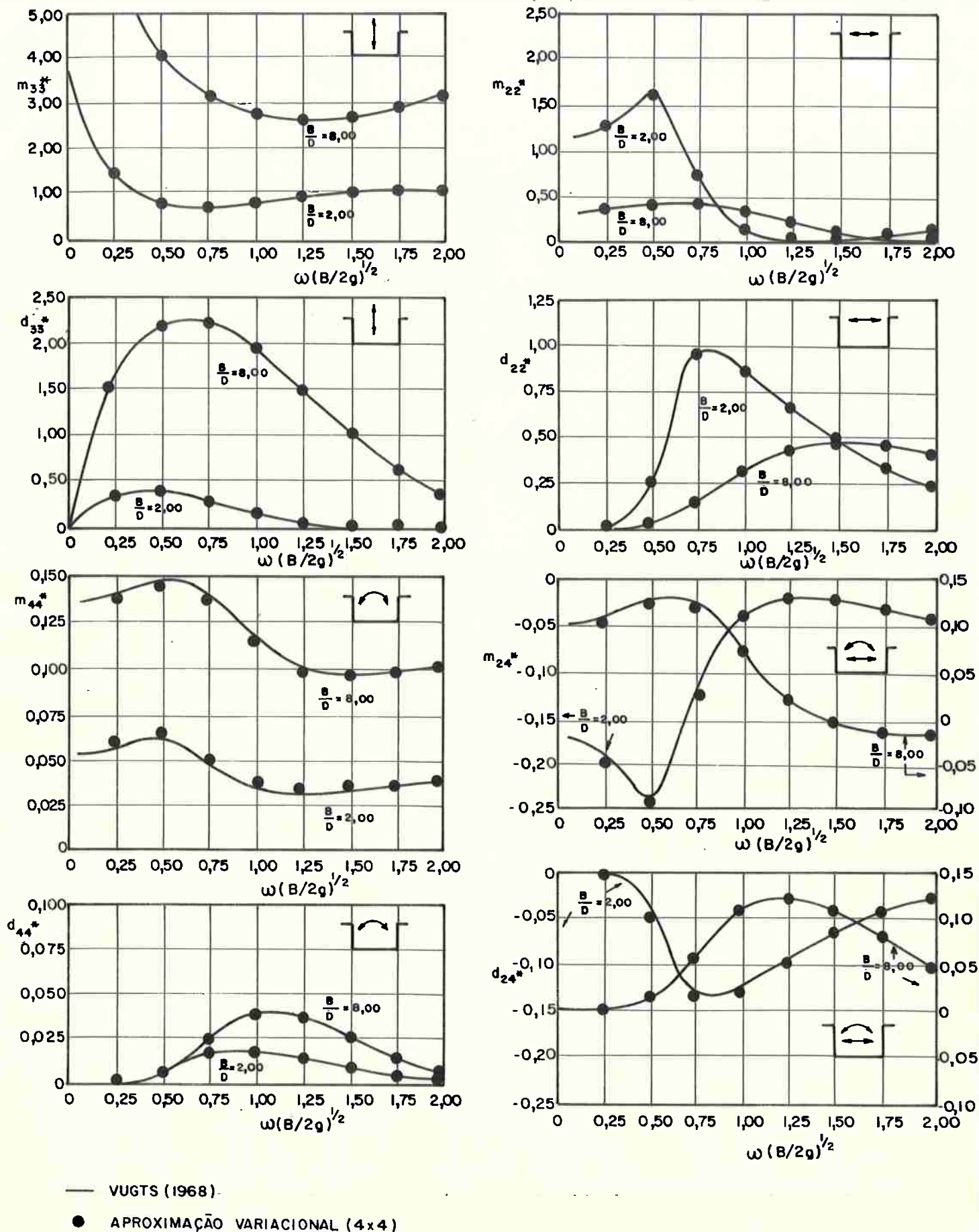


Figura 3.4. - Seção retangular B/D = 8. Coeficientes Hidrodinâmicos. Profundidade infinita; $m_{22}^* = m_{22}/(\rho BD)$, $m_{33}^* = m_{33}/(\rho BD)$, $m_{44}^* = m_{44}/(\rho B^3D)$; $m_{24}^* = m_{24}/(\rho B^2D)$; $d_{22}^* = d_{22}/(\rho \omega_a BD)$, $d_{33}^* = d_{33}/(\rho \omega_a BD)$, $d_{44}^* = d_{44}/(\rho \omega_a B^3D)$, $d_{24}^* = d_{24}/(\rho \omega_a B^2D)$.

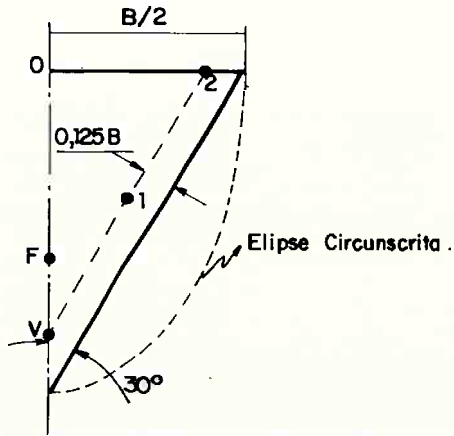


Figura 3.5. - Aproximação variacional para um triângulo equilátero

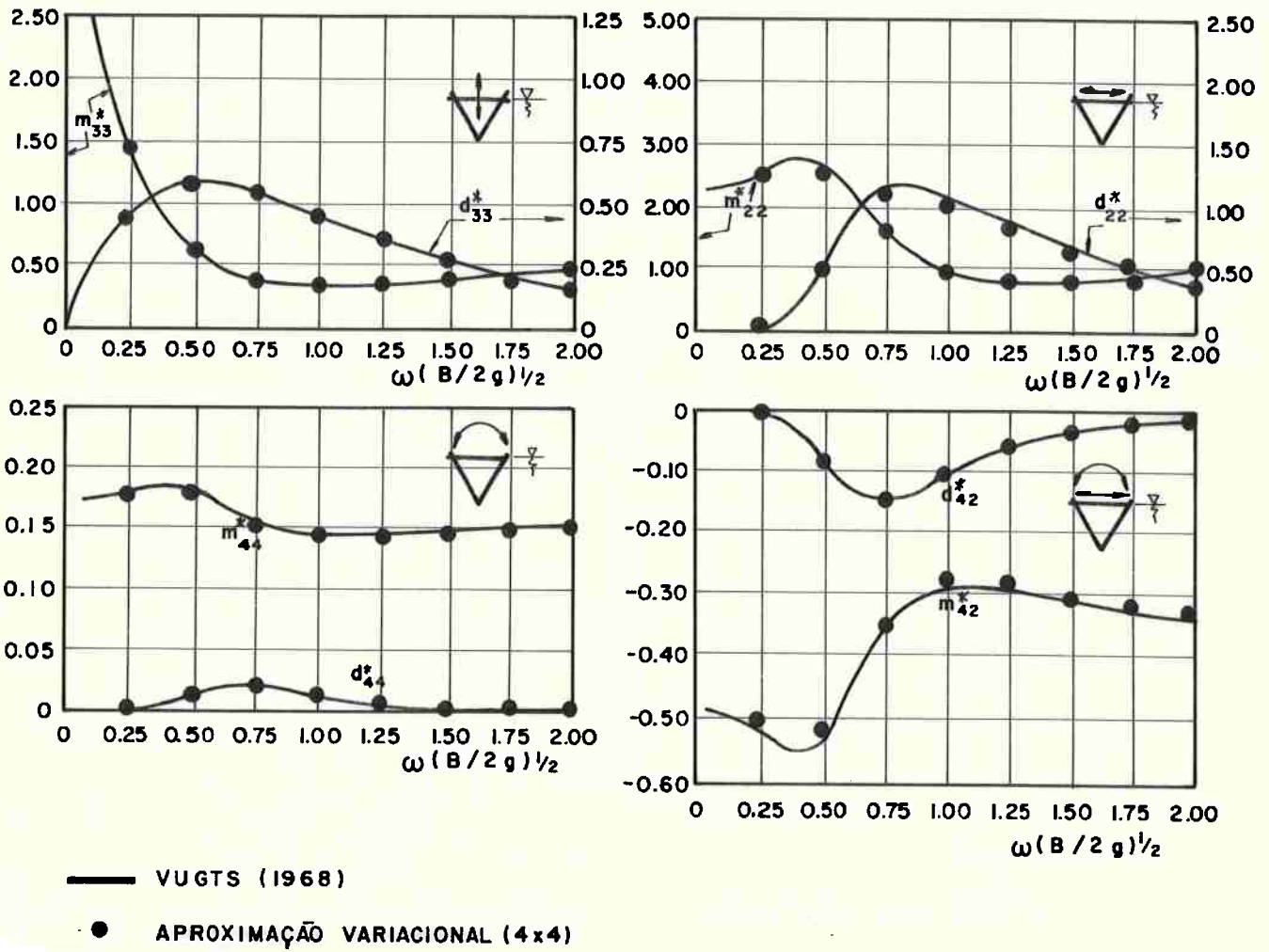


Figura 3.6. - Coeficientes Hidrodinâmicos para uma Seção Triangular Equilátera. Profundidade infinita.

4. APLICAÇÕES DA TEORIA DO CORPO ESBELTO

O objetivo do presente capítulo é mostrar como a conjunção de duas técnicas aproximadas, de um lado o MVB (Método Variacional Bidimensional), e de outro a TCE (Teoria do Corpo Esbelto), pode se transformar em uma poderosa ferramenta de análise dentro de uma restrita, porém importante classe de problemas: o comportamento dinâmico de corpos esbeltos em ondas.

Para tanto faz-se, inicialmente um apanhado da formulação da TCE, partindo de um breve histórico bibliográfico^(*) e culminando com sua aplicação ao problema harmônico linear, exemplificada através de resultados numéricos para um corpo esbelto típico: um elipsóide de revolução.

4.1. Breve Histórico Bibliográfico

A Teoria do Corpo Esbelto tem sua origem na aerodinâmica. Especificamente, nos estudos de Munk (1924) sobre o escoamento em torno de um corpo esbelto de revolução, e formalizados matematicamente nos anos 50 através da técnica das expansões assintóticas compatibilizadas (*"matched asymptotic expansions"*).

No campo da engenharia oceânica atribui-se o pioneirismo^(*) a Korvin-Kroukowsky (1955), a quem se deve o estabelecimento da Teoria de Faixas (*"Strip Theory"*). De formulação heurística, a TF aproxima o problema tridimensional por uma sucessão de problemas potenciais bidimensionais, correspondentes ao escoamento no entorno das diversas balizas da embarcação. Os resultados alcançados, no entanto, são bastante satisfatórios, do ponto de vista da engenharia (e no que concerne à determinação de primeira-ordem). Este fato por certo determinou todo um esforço de investigação teórica visando uma formulação matemática apropriada.

(*) Revisão histórica mais completa (até 1978) pode ser apreciada em Newman (1978).

A presença da superfície livre, no entanto, introduzia dificuldades à consecução deste intento, o que foi satisfatoriamente alcançado quatorze anos depois, em 1969, por Ogilvie & Tuck. Em seu trabalho, os dois pesquisadores apontaram uma importante restrição do ponto de vista matemático: a *TF* é válida apenas no regime de ondas curtas^(*), ou seja no regime em que a difração não pode ser desprezada.

Paralelamente Newman (1964) desenvolvia uma teoria de corpo esbelto válida somente em ondas longas.

A unificação das duas teorias, tarefa natural, foi finalmente apresentada por Newman em 1978. A *Teoria Unificada*, como é conhecida, recupera a Teoria de Faixas e a teoria em ondas longas.

A Teoria Unificada basicamente incorpora à Teoria de Faixas a solução de uma equação integral (de Fredholm de segunda espécie) ao longo do comprimento do corpo, permitindo com isso considerar a interação longitudinal das diversas soluções bidimensionais. Esta equação resulta do processo de compatibilização das soluções internas (ou de campo próximo) e da solução externa (ou de campo distante), na técnica das aproximações assintóticas compatibilizadas, e permite provar a consistência da teoria no que concerne ao fluxo de radiação de energia do campo potencial.

Este último resultado foi estabelecido por Sclavounos (1983), a quem se deve atribuir a extensão da Teoria Unificada ao problema de difração (ver Sclavounos (1984)).

Duas limitações de ordem prática persistiam. A Teoria Unificada foi desenvolvida considerando unicamente o caso de águas infinitamente profundas, e com um erro "aparente"^(**) da forma $(1+O(\epsilon))$, onde $\epsilon = B/L$ é a razão de esbeltez do corpo.

(*) Do ponto de vista prático as indeterminações hidrodinâmicas em ondas longas são, dentro da teoria potencial linear, irrelevantes, porquanto, neste regime, dominam as forças hidrostáticas.

(**) Na realidade Aranha & Sugaya (1987) mostraram que o erro é da forma $(1+O(\epsilon^2))$ para corpos com seções de geometria "quase-constante".

Em (4.11) a condição $|y|/B \rightarrow \infty$ equivale a dizer-se $|y|/B \geq O(1)$.

4.2.2. A Solução Exterior

Na *região exterior* ($|y|/L \geq O(1)$) o potencial no modo j pode ser representado na forma integral como

$$\phi_j^{(o)}(x,y,z) = \int_{-L/2}^{L/2} d\xi \left\{ q_j(\xi) + \frac{1}{K_o} p_j(\xi) \frac{\partial}{\partial y} \right\} G_o(x-\xi,y,z) \quad (4.12)$$

onde $q_j(\cdot)$ e $p_j(\cdot)$ são funções densidade de distribuição de singularidades e $G_o(x-\xi,y,z)$ é uma solução arbitrária das equações (4.3.a,b,c,e), ou seja, sem considerar a condição de contorno no corpo (4.3.d). $G_o(\cdot)$ é obviamente uma função par em y .

Note que $q_j(\xi)$ estará associado aos modos de potencial par e $p_j(\xi)$ àqueles de potencial ímpar^(*).

Usualmente $G_o(\cdot)$ é tomada como a função de Green do problema. No entanto, a solução mais geral, no problema tridimensional, associado a uma perturbação harmônica puntual na superfície livre é dada na forma de série de Fourier (ver p. ex., Mei (1983), pg. 307) como

$$\begin{aligned} \phi(r,\theta,z) = & \sum_m H_m^{(1)}(K_o r) (a_{om} \cos m\theta + b_{om} \sin m\theta) f_o(z) + \\ & + \sum_m \sum_n K_m(k_n r) (a_{nm} \cos m\theta + b_{nm} \sin m\theta) f_n(z) \end{aligned} \quad (4.13)$$

onde $H_m^{(1)}(\cdot)$ são funções de Haenckel de primeira espécie e ordem m , e $K_m(\cdot)$ são funções de Bessel de segunda espécie e ordem m . Estas últimas decaem exponencialmente com $k_n r$ e são ditas evanescentes. As primeiras determinam, através de sua expansão assintótica quando $K_o r \rightarrow \infty$, a condição de radiação (4.3.e). Visto que a representação (4.12) é feita na região exterior é natural que

(*) Poder-se-ia escrever, de antemão, que $q_j = 0$, $j = 2,4,6$ e $p_j(\cdot) = 0$ para $j = 1,3,5$; isto será visto adiante.

Considerando que não são raros os casos em que barcaças, rebocadores ou mesmo navios de operações especiais apresentam coeficientes $\epsilon \sim 0.20$, o que implicaria em erros de ordem 20%, e que são frequentes os casos em que a análise do comportamento no mar deve ser feita em águas de profundidade pequena, estas duas limitações levaram à busca de uma teoria mais geral.

Esta teoria foi desenvolvida, com erro da forma $(1+O(\epsilon^2))$ por Aranha & Sugaya (1987) para águas rasas e por Aranha & Martins (1987) para águas de profundidade arbitrária.

Além da introdução de uma métrica especial para medir o erro da aproximação, desenvolvida até segunda-ordem, a Teoria do Corpo Esbelto (TCE) desenvolvida por Aranha e seus colaboradores difere fundamentalmente da Teoria Unificada (TU) no núcleo da equação integral a ser resolvida. A função de Green, para águas de profundidade infinita, utilizada na TU é substituída pela função de Haenckel de primeira espécie e ordem zero $H_0^{(1)}(\cdot)$, o que simplifica ainda mais os procedimentos numéricos.

A solução do problema tridimensional, no âmbito da TCE, reduz-se basicamente à solução dos problemas bidimensionais, em cada seção, a qual pode ser conseguida através de qualquer método usual (Método de Green, Método Híbrido de Elementos Finitos) e, em particular através do MVB.

4.2. Noções da Teoria do Corpo Esbelto

Não é propósito da presente seção rededuzir com minúcias a TCE, mas tão somente indicar os principais passos de sua formulação. Neste sentido a exposição a seguir é em essência aquela apresentada em Aranha & Pesce (1987).

Considere um corpo esbelto flutuante, estacionário. O sistema de referências é indicado na figura 4.1, a seguir. O corpo é sujeito à ação de ondas harmônicas.

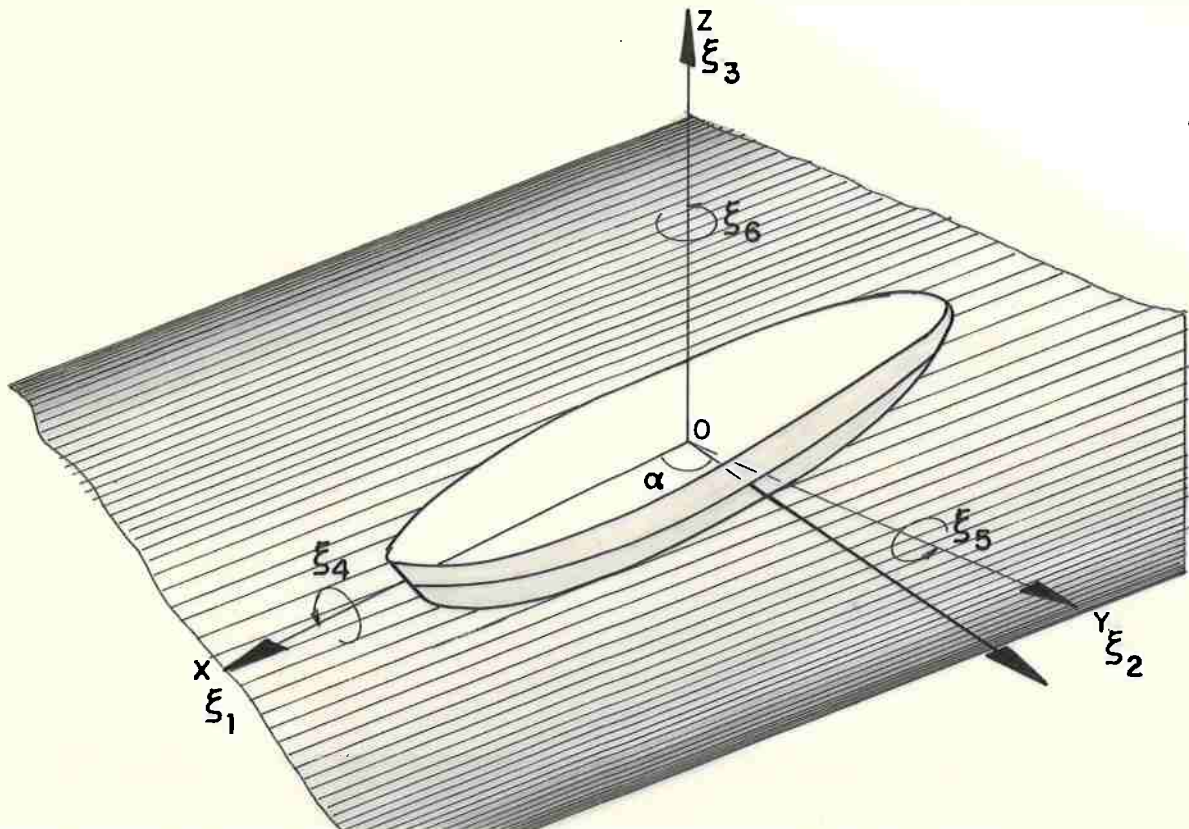


Figura 4.1. - Corpo Esbelto. Sistema de Referências

Sob as usuais hipóteses de pequenos deslocamentos do sistema hidromecânico, considere tão somente o problema linear ou de primeira ordem, decorrente da expansão em série de potências (ver capítulo 2). A condição de contorno homogênea na superfície permite que o problema original seja separado nos problemas de radiação ($j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) e de espalhamento ($j=7, 8$), conforme apresentado na seção 2.2.3, de forma geral para N corpos flutuantes. O potencial de onda incidente é denotado por ϕ_0 e escrito na forma

$$\phi_0(x, y, z) = -\frac{g}{\omega} e^{iK_0(\cos\alpha x + \sin\alpha y)} f(z) \quad (4.1.a)$$

ou

$$\phi_0(r, \theta, z) = -\frac{ig}{\omega} e^{iK_0 r \cos(\theta - \alpha)} f(z) \quad (4.1.b)$$

onde a amplitude foi suposta unitária, $f(z)$ é definida pela expressão (2.46) e K_0 e ω satisfazem a relação de dispersão linear.

Utilizando a notação do capítulo 2, porém com o operador ∇ definido apenas no plano (y, z) , ou seja

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (4.2.)$$

reescreve-se, para efeito de clareza de entendimento, o equacionamento dos potenciais de radiação e espalhamento na forma

$$\nabla^2 \phi_j + \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} = 0 \quad ; \quad \text{em } \Omega^\infty \quad (\text{a})$$

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial z} = \sigma \phi_j \quad ; \quad \text{em } S_F \quad (\text{b}) \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial z} = 0 \quad ; \quad \text{em } z = L \quad (\text{c})$$

$$\nabla \phi_j \cdot \vec{n} + \frac{\partial \phi_j}{\partial x} n_x = v_j(x, y, z); \text{ em } S_B \quad (\text{d})$$

$$\phi_j(r, \theta, z) \sim R_j(\theta) \frac{e^{iK_0 r}}{\sqrt{K_0 r}} f_0(z) ; r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty \quad (\text{e})$$

onde $R_j(\theta)$ é a "amplitude complexa de onda ao longe" e v_j a condição de contorno no corpo.

A TCE explora a esbeltez do corpo, ou seja $\epsilon = B/L \ll 1$, para construir uma solução assintótica em ϵ para o problema matemático dado por (4.3).

Sob esta hipótese mostra-se que $n_x \sim 0(\epsilon)$ e que portanto,

$$v_1 = n_x \quad ; \quad \text{"surge"} \quad (\text{a})$$

$$v_2 = n_y \quad ; \quad \text{"sway"} \quad (\text{b})$$

$$v_3 = n_z \quad ; \quad \text{"heave"} \quad (\text{c}) \quad (4.4)$$

$$v_4 = -z n_y + y n_z \quad ; \quad \text{"roll"} \quad (\text{d})$$

$$v_5 = -x n_z \quad ; \quad \text{"pitch"} \quad (\text{e})$$

$$v_6 = x n_y \quad ; \quad \text{"yaw"} \quad (\text{f})$$

A TCE é construída através da técnica das "expansões asintóticas compatibilizadas". O problema é formulado em uma região interior (ou campo próximo ao corpo) e em uma região exterior (ou campo distante).

Na região interior ($|y|/B \leq O(1)$) o problema é "localmente" bidimensional, e é formulado como se o fosse, a menos da condição de radiação, que neste caso é "inacessível". Em outras palavras, um observador colocado nesta região "veria" a solução como bidimensional, perdendo informações a respeito da condição de radiação e da interação longitudinal entre os escoamentos nos planos das diversas seções transversais.

Na região exterior a escala de comprimento natural é o comprimento L do corpo. Nesta região ($|y|/L \geq O(1)$) a solução é bem representada se o corpo for considerado como uma "linha" que irradia (e palha) ondas. No entanto, perde-se informações sobre as condições de contorno no corpo (locais) e portanto, esta solução não é, por seu turno, completamente determinada.

A forma de resolver ambas indeterminações é compatibilizar as soluções ("matching") em uma região intermediária ($O(B) \leq |y| \leq O(L)$).

É fundamental observar que este é um "problema de perturbação singular" nos modos de potencial par ($j=1,3,5$: "surge", "heave", "pitch"). (ver, p.ex., Ogilvie (1977)).

Esta assertiva pode ser explicada do ponto de vista físico, acessando o problema original da aerodinâmica, o caso de um cone esbelto. Neste caso os potenciais pares são bem representados por fontes (polos) em fluido sem fronteiras.

Em solução bidimensional o comportamento de um polo é do tipo $\ln(y^2 + z^2)^{1/2} \rightarrow \infty$, $r \rightarrow \infty$, incompatível, portanto, com o comportamento de um polo tridimensional, do tipo $1/r \rightarrow 0$, $r \rightarrow \infty$. Esta incompatibilidade gera, em essência, a "singularidade".

A interação longitudinal dos campos potenciais transver

sais pode ser interpretada então como a condição que remove esta "singularidade".

Comportamento análogo ocorre no problema em questão, na presença de superfície livre e neste contexto Sclavounos (1983) mostrou que a interação longitudinal é essencial para que haja *compatibilidade de fluxo de energia*, o que é abordado na seção 4.4 do presente trabalho.

Já os modos de potencial ímpar ($j=2,4,6$: "sway, roll e yaw") são representáveis por funções com comportamento de dipolos, os quais tendem para zero com $r \rightarrow \infty$ em ambas as soluções, bidimensional ou tridimensional. É de se esperar, portanto, que, nestes modos, a TCE recaia na TF, ou seja não haja interação longitudinal dos campos potenciais transversais. Como será visto a diante, esta expectativa é confirmada de forma exata, em aproximação de primeira-ordem no parâmetro ϵ .

O procedimento acima descrito é formalizado matematicamente nos subitens seguintes. Em 4.2.1 a *solução interior* é desenvolvida e tem sua *expansão exterior* determinada. Em 4.2.2 a *solução exterior* é discutida e tem, por sua vez, a *expansão interior* estabelecida. A compatibilização é realizada em 4.2.3.

4.2.1. A Solução Interior

Na região interior ($|y|/B \lesssim O(1)$) a escala natural de comprimento é a boca do corpo B . As seguintes ordens de magnitude podem então ser estabelecidas.

$$\nabla^2 \phi \sim O(\phi/B^2) \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \sim O(\phi/L^2)$$

e mostra-se que, (ver Aranha & Sugaya (1987)), com erro da forma $(1+O(\epsilon^2))$, as equações (4.3.a, b,c) reduzem-se a

$$\nabla^2 \phi_j^{(i)} = 0 \quad ; \text{ no domínio fluido} \quad (a)$$

$$\frac{\partial \phi_j^{(i)}}{\partial z} = \sigma \phi_j^{(i)} \quad ; \text{ na superfície livre; } z=0 \quad (b)(4.6)$$

$$\frac{\partial \phi_j^{(i)}}{\partial z} = 0 \quad ; \text{ no fundo} \quad ; z=-h \quad (c)$$

onde o índice (i) indica se tratar de "solução interior". Note que $\phi_j^{(i)} = \phi_j^{(i)}(y,z;x)$, onde a "dependência" em x foi propositalmente isolada para indicar que o potencial bidimensional varia de seção para seção.

Pode-se mostrar também (ver Aranha & Sugaya (1987)) que, para corpos de seções transversais "quase-uniforme", $n_x \sim 0(\epsilon)$ implica em que $\frac{\partial \phi}{\partial x} \sim 0(\epsilon)$ na região interior e portanto, a condição de contorno no corpo fica escrita, com erro da forma $(1+0(\epsilon^2))$, como

$$\nabla \phi_j^{(i)} \cdot \vec{n} = v_j \quad ; \text{ na superfície do corpo } S_B \quad (4.6.d)$$

A menos da condição de radiação, inacessível na região interior, a equação (4.6) formula o próprio problema bidimensional. É natural que seja então tomada como *solução particular* de (4.6) a *solução bidimensional* $\psi_j(y,z)$. Como *solução homogênea* Newman (1978) sugeriu a função $\text{Im}(\psi_j)$.

De fato, visto que v_j é real, por certo

$$\nabla (\text{Im}(\psi_j)) \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{em } S_B \quad (4.7)$$

e, portanto, a solução interior fica representada, com erro $(1+0(\epsilon^2))$, na forma

$$\phi_j^{(i)}(y,z;x) = \psi_j(y,z;x) + C_j(x) \text{Im} \{ \psi_j(y,z;x) \} \quad (4.8)$$

Note que no presente capítulo as grandezas são dimensionais e o potencial bidimensional $\psi_j(y,z)$ tem a seguinte condição de radiação.

$$\psi_j(y,z;x) \sim A_j(x) e^{iK_0|y|} f_0(z); |y| \rightarrow \infty \quad (4.9)$$

e, portanto, com referência ao potencial adimensional definido no capítulo 3, vale a seguinte relação.

$$A_j(x) = - \left(\frac{B}{2}\right)^{3/2} A_{0j}(x) e^{-iK_0 b} \quad (*) \quad (4.10)$$

Assim, a menos da função $C_j(x)$, a solução interior fica univocamente determinada pela solução do problema bidimensional $\psi_j(y,z;x)$.

Como será visto adiante $C_j(x)$ será determinado através da compatibilização da solução interior com a solução exterior na região intermediária. $C_j(x)$ é, em essência, o agente da interação entre as diversas soluções seccionais. É quem permite o fluxo de energia longitudinal na região interior.

Por fim para que a compatibilização possa ser realizada é necessário estabelecer a "expansão exterior da solução interior". Isto se consegue diretamente da condição de radiação do potencial $\psi_j(y,z;x)$, dada em (4.9).

A "expansão exterior" pode então ser escrita na forma

$$\begin{aligned} \phi_j^{(i)}(y,z;x) \sim & \{ [A_j(x) + C_j(x) \operatorname{Im}(A_j(x))] \cos K_0|y| + \\ & + [i A_j(x) + C_j(x) \operatorname{Re}(A_j(x))] \sin K_0|y| \} f_0(z) \\ & ; |y|/B \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4.11)$$

(*) B é o comprimento típico de adimensionalização do problema; no caso é tomado com a boca da seção mestra.

$G_0(\cdot)$ seja baseada nas funções de Haenckel. Em particular a escolha mais simples (ver Aranha & Martins (1987)) é dada por

$$G_0(x-\xi, y, z) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(K_0 \sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}) f_0(z) \quad (4.14)$$

a qual, como pode ser verificado, satisfaz (4.3.a,b,c,e).

A simplicidade na escolha de $G_0(\cdot)$ determina uma menor dificuldade com que a "expansão interior" da solução exterior pode ser deduzida, com erro da forma $(1+O(\epsilon^2))$, quando comparada ao uso da função de Green.

Ainda assim, esta dedução não é trivial. Seu desenvolvimento pode ser apreciado em Aranha & Sugaya (1987). O resultado final é dado abaixo.

$$\begin{aligned} \phi_j^{(0)}(x, y, z) \sim & \left\{ \left(-\frac{i}{2} L(q_j) \cos K_0 |y| + \frac{q_j(x)}{2K_0} \sin K_0 |y| \right) f_0(z) + \right. \\ & \left. + s(y) \left(\frac{p_j(x)}{2K_0} \cos K_0 |y| + i \frac{p_j(x)}{2K_0} \sin K_0 |y| \right) f_0(z) \right\} (1+O(\epsilon^2)) \\ & ; |y|/L \leq O(1) \end{aligned} \quad (4.15)$$

onde $L(\cdot)$ é um funcional linear definido como

$$L(q_j) = \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} d\xi q_j(\xi) H_0^{(1)}(K_0 |x-\xi|) \quad (4.16)$$

As funções $q_j(\cdot)$, $p_j(\cdot)$ e $C_j(\cdot)$ serão a seguir determinadas através do processo de compatibilização na região intermédia.

4.2.3. Compatibilização

A compatibilização entre as duas soluções $\phi_j^{(i)}(y,z;x)$ e $\phi_j^{(o)}(x,y,z)$ é feita através da identidade entre as suas "expressões exterior e interior" respectivamente.

Segue então, de (4.11) e (4.15), que

- para os modos de potencial par ($j=1,3,5,7$)

$$-\frac{i}{2} L(q_j(x)) = A_j(x) + C_j(x) \operatorname{Im}(A_j(x))$$

e (4.17)

$$\frac{q_j(x)}{2K_0} = i A_j(x) + C_j(x) \operatorname{Re}(A_j(x))$$

- para os modos de potencial ímpar ($j=2,4,6,8$)

$$\frac{p_j(x)}{2K_0} = A_j(x) + C_j(x) \operatorname{Im}(A_j(x))$$

e (4.18)

$$\frac{ip_j(x)}{2K_0} = i A_j(x) + C_j(x) \operatorname{Re}(A_j(x))$$

Definindo a fase de $A_j(x)$ como $\beta(x)$, $j=1,3,5,7$, ^(*) as equações (4.17) podem ser escritas na forma

$$\frac{i}{2} L(q_j) \pm \operatorname{tg} \beta(x) \frac{q_j(x)}{2K_0} = - \frac{|A_j(x)|}{\cos \beta(x)} ; j = 1,3,5,7$$

(4.17.a)

(*) Lembre que as fases são idênticas para modos de potencial par (ímpar) (ver seção 3.3.2, equação (3.69), a menos de um fator $\pm n\pi$.

e

$$C_j(x) = \frac{1}{|A_j(x)|} \frac{1}{\cos\beta(x)} \left\{ \frac{q_j(x)}{2K_0} - i e^{i\beta(x)} |A_j(x)| \right\} \quad (4.17.b)$$

; j = 1,3,5,7

As equações (4.17) constituem um par de equações integrais de Fredholm de segunda espécie, cuja discussão matemática formal é bem estabelecida (ver, p.ex., Volterra (1929)).

Por outro lado, das equações (4.18) segue diretamente que

$$p_j(x) = 2K_0 A_j(x) \quad ; \quad j = 2,4,6,8 \quad (4.18.a)$$

$$C_j(x) = 0$$

Este último resultado confirma a expectativa de que nos modos de potencial ímpar a TCE recai na TF, com erro da forma $(1+O(\epsilon^2))$.

Portanto, para a completa solução do problema tridimensional, no âmbito da TCE, é suficiente que, além das soluções dos problemas seccionais bidimensionais, as equações integrais (4.17) sejam resolvidas. No presente trabalho esta solução é conduzida numericamente através do usual *método das colocações*. O procedimento pode ser apreciado no apêndice E.

4.3. Coeficientes Hidrodinâmicos e algumas propriedades na TCE

4.3.1. Coeficientes de massa adicional e amortecimento por radiação

Das definições dos coeficientes de massa adicional e amortecimento por radiação, dadas por

$$M_{j\ell}(\omega) = \rho \int_{-L/2}^{L/2} dx \int_{\Gamma_B(x)} \operatorname{Re} \{ \phi_j^{(i)}(y,z;x) \} v_\ell ds$$

$$j, \ell = 1, \dots, 6 \quad (4.19)$$

$$D_{j\ell}(\omega) = \rho\omega \int_{-L/2}^{L/2} dx \int_{\Gamma_B(x)} \operatorname{Im} \{ \phi_j^{(i)}(y,z;x) \} v_\ell ds$$

e da solução interior $\phi_j^{(i)}(y,z;x)$, dada por (4.8), segue que

$$M_{j\ell}(\omega) = \int_{-L/2}^{L/2} m_{j\ell}(x) dx + \frac{1}{\omega} \int_{-L/2}^{L/2} \operatorname{Re}(C_j(x)) d_{j\ell}(x) dx$$

$$j, \ell = 1, \dots, 6 \quad (4.19.a)$$

$$D_{j\ell}(\omega) = \int_{-L/2}^{L/2} d_{j\ell}(x) dx + \int_{-L/2}^{L/2} \operatorname{Im}(C_j(x)) d_{j\ell}(x) dx$$

onde $m_{j\ell}$ e $d_{j\ell}$ são respectivamente os coeficientes bidimensionais de massa adicional e amortecimento, dados em forma dimensional. (*)

(*) Referindo-se ao capítulo 3, $m_{j\ell} = \rho b^2 a_{j\ell}$, $d_{j\ell} = \rho b^2 b_{j\ell}$.

Note que a primeira parcela resulta da própria Teoria de Faixas. A segunda parcela representa, por sua vez, a correção devido à interação longitudinal entre os campos potenciais bidimensionais.

Note, também, que a segunda parcela é nula para os modos de potencial ímpar ($C_j(x) = 0$; $j = 2, 4, 6, 8$). Em outras palavras, para estes modos a TF e a TCE são equivalentes com erro da forma $(1+O(\epsilon^2))$.

Outra observação interessante diz respeito à compatibilidade de fluxo de energia entre a solução interior e a solução exterior. É conhecido (ver, p.ex., Mei (1983), pg.321) que o coeficiente de amortecimento de radiação é diretamente relacionado ao fluxo de energia irradiada. No caso bidimensional esta relação é dada por

$$d_{j\ell} = -2 E_{j\ell}^b = \rho\omega K_o A_j A_\ell^*$$

No caso tridimensional existe uma relação análoga

$$D_{j\ell} = -2 E_{j\ell}^t$$

que pode ser facilmente demonstrada (ver, p.ex., Mei (1983)).

Chamando de $E_{jj}^{t(i)}$ o fluxo de energia tridimensional na região interior, associada ao j -ésimo modo, pode-se mostrar que (ver apêndice D).

$$E_{jj}^{t(i)} = -\frac{\rho\omega K_o}{2} \int_{-L/2}^{L/2} |A_j|^2 (1 + \text{Im } C_j) dx$$

Visto que

$$E_{jj}^b = -\frac{1}{2} d_{jj} = -\frac{\rho\omega K_o}{2} |A_j|^2$$

conclui-se, como foi anteriormente sugerido, que se na TCE houver compatibilidade de fluxo de energia entre a região interior e a região exterior, C_j será o agente de compatibilização. Sclavounos (1983) prova que esta compatibilidade existe e conduz à mesma equação integral. Demonstração equivalente poderia ser conduzida no presente trabalho, através da identidade de $E_{jj}^{t(i)}$ e do fluxo de energia na região exterior, este último determinado a partir da expressão geral (A.18) com o uso da "expansão interior" (4.15).

É possível mostrar, por fim, que as aproximações assintóticas dos coeficientes $M_{j\ell}$ e $D_{j\ell}$, dadas pela TCE com erro da forma $(1 + O(\epsilon^2))$, satisfazem as relações de simetria provadas, no caso geral, no capítulo 2. A demonstração no contexto da TCE pode ser apreciada em Aranha & Pesce (1987b).

4.3.2. Amplitude de Onda Irradiada

Uma grandeza de fundamental importância a ser determinada no âmbito da TCE é a amplitude de onda irradiada. Através de outras grandezas de natureza global tal como a força de excitação hidrodinâmica ou a força média de deriva em ondas monocromáticas agentes sobre o corpo podem ser diretamente calculadas.

Assim, considere a solução exterior do potencial ϕ_j , dada pelas expressões (4.12) e (4.14). Deseja-se obter o campo distante deste potencial, ou seja sua aproximação assintótica ao longe do corpo. Para tanto é suficiente determinar as aproximações assintóticas da função de Haenckel e de sua derivada em relação a y .

Seja então

$$r_o^2 = (x-\xi)^2 + y^2 \quad (4.20)$$

$$x = r \cos\theta$$

$$y = r \sin\theta$$

Fatorando r e fazendo $\xi/r \ll 1$ segue que

$$r_0 \sim r(1 - \cos\theta \cdot \xi/r) \quad (1 + O(\xi/r)^2) \quad (4.21)$$

A expansão assintótica de $H_0^{(1)}(K_0 r_0)$, $K_0 r_0 \rightarrow \infty$ é dada por (ver A & S, pg, 364).

$$H_0^{(1)}(K_0 r_0) \sim \left(\frac{2}{\pi K_0 r_0}\right)^{1/2} e^{i(K_0 r_0 - \pi/4)} = \left(\frac{2}{\pi K_0 r}\right)^{1/2} e^{i(K_0 r - \pi/4)}$$

$$\frac{1}{(1-\gamma)^{1/2}} e^{-iK_0 r \gamma}; \quad K_0 r \rightarrow \infty \quad (4.22)$$

onde foi definido $\gamma = \frac{\xi}{r} \cos\theta$

Por outro lado $\frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial y} = \sin\theta \frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial r}$, e de (4.22)

$$\frac{\partial}{\partial r} H_0^{(1)}(K_0 r) \sim \left(\frac{2}{\pi K_0 r}\right)^{1/2} e^{i(K_0 r - \pi/4)} \frac{e^{-iK_0 r \gamma}}{r(1-\gamma)^{1/2}} iK_0 r$$

$$; \quad K_0 r \rightarrow \infty \quad (4.23)$$

Para corpos de comprimento finito $\xi/r \ll 1$, e portanto, com erro da forma $(1+O(L/r))$, (4.22) e (4.23) ficam escritos

$$H_0^{(1)}(K_0 r) \sim \left(\frac{2}{\pi K_0 r}\right)^{1/2} e^{i(K_0 r - \pi/4)} e^{-iK_0 r \gamma}; \quad K_0 r \rightarrow \infty$$

$$(4.22.a)$$

e

$$\frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial r}(K_0 r) \sim iK_0 \left(\frac{2}{\pi K_0 r}\right)^{1/2} e^{i(K_0 r - \pi/4)} e^{-iK_0 r \gamma} = iK_0 H_0^{(1)}(K_0 r); \quad K_0 r \rightarrow \infty$$

$$(4.23.a)$$

Substituindo então (4.22.a) e (4.23.a) em (4.12) a aproximação assintótica do potencial fica expressa como

$$\begin{aligned}
 \text{(o)} \quad \phi_j(x,y,z) &\sim -\frac{i}{4} \left(\frac{2}{\pi K_0 r}\right)^{1/2} e^{i(K_0 r - \pi/4)} \int_{-L/2}^{L/2} d\xi e^{-iK_0 \xi \cos\theta} \{q_j(\xi) + i \sin\theta p_j(\xi)\} \\
 & \hspace{15em} (*) \\
 & \hspace{10em} ; j = 1, \dots, 8 \quad ; K_0 r \rightarrow \infty. \quad (4.24)
 \end{aligned}$$

Por fim, identificando (4.24) com a condição de radiação (4.3.e) segue que a "amplitude complexa da onda irradiada" $R_j(\theta)$ é dada por

$$\begin{aligned}
 R_j(\theta) &= -\frac{i}{4} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} e^{-i\pi/4} \int_{-L/2}^{L/2} d\xi e^{-iK_0 \xi \cos\theta} \{q_j(\xi) + i \sin\theta p_j(\xi)\} \\
 & \hspace{15em} ; j = 1, \dots, 8 \quad ; K_0 r \rightarrow \infty \quad (4.25)
 \end{aligned}$$

Note que para $j = 7, 8$ $R_j = R_j(\theta, \alpha)$

Definam-se agora, por facilidade de notação, as seguintes funções

$$\begin{aligned}
 Q_j(\theta) &= \int_{-L/2}^{L/2} d\xi e^{-iK_0 \xi \cos\theta} q_j(\xi) \\
 & \hspace{15em} ; j = 1, \dots, 8 \quad (4.26) \\
 P_j(\theta) &= \int_{-L/2}^{L/2} d\xi e^{-iK_0 \xi \cos\theta} p_j(\xi)
 \end{aligned}$$

$R_j(\theta)$ fica então escrito na forma

$$\begin{aligned}
 R_j(\theta) &= \left(\frac{1}{8\pi}\right)^{1/2} e^{-i3\pi/4} \{Q_j(\theta) + i \sin\theta P_j(\theta)\} \\
 & \hspace{10em} ; j = 1, \dots, 8 \quad ; K_0 r \rightarrow \infty \quad (4.25.a)
 \end{aligned}$$

(*) Note que para $j = 7, 8$ (espalhamento) q_j e p_j são funções do ângulo de incidência da onda α ; ou seja $q_j = q_j(\xi; \alpha)$ e $p_j = p_j(\xi; \alpha)$

Como $q_j(\xi) = 0$; $j = 2, 4, 6, 8$ e $p_j(\xi) = 0$; $j = 1, 3, 5, 7$, segue, portanto que

$$R_j(\theta) = \left(\frac{1}{8\pi}\right)^{1/2} e^{-i3\pi/4} Q_j(\theta) \quad ; \quad j = 1, 3, 5, 7 \quad (4.27)$$

$$; \quad K_o r \rightarrow \infty$$

$$R_j(\theta) = i\left(\frac{1}{8\pi}\right)^{1/2} e^{-i3\pi/4} \sin\theta P_j(\theta) \quad ; \quad j = 2, 4, 6, 8$$

$$; \quad K_o r \rightarrow \infty \quad (4.28)$$

A simplicidade das expressões (4.27), (4.28) se deve à escolha da função $G_o(\cdot)$ em (4.12).

Note ainda que de (4.18.a)

$$P_j(\theta) = 2K_o \int_{-L/2}^{L/2} d\xi e^{iK_o \xi \cos\theta} A_j(\xi); \quad j = 2, 4, 6, 8 \quad (4.26. *)$$

ou seja, $P_j(\theta)$ é prontamente calculável a partir das soluções bi-dimensionais.

4.3.3. Força de Excitação através das relações de Haskind-Hanaoka

A força excitante, segundo o modo j de oscilação ($j=1, \dots, 6$) pode ser calculada diretamente através da definição, ou seja integrando-se a pressão associada ao potencial de difração na superfície do corpo. Para tanto há que se utilizar a solução interior do potencial espalhado.

Outra alternativa é constituída pelas relações de Haskind-Hanaoka, em sua forma de campo distante (ver, p.ex. Mei(1983), pg. 326).

Explicitamente

$$E_j(\omega) = -i\omega\rho \iint_{S_{R^\infty}} \left(\phi_o \frac{\partial \phi_j}{\partial r} - \phi_j \frac{\partial \phi_o}{\partial r} \right) dS \quad (4.29)$$

Em outras palavras calculase $E_j(\omega)$ a partir da expansão assintótica do potencial ϕ_j quando $K_o r \rightarrow \infty$.

Pode-se verificar facilmente (ver apêndice D) que a substituição de (4.1.b) e (4.3.e) em (4.29) leva, com o uso do *método da fase estacionária*, a

$$E_j(\omega) = - \frac{i\rho g}{F_o \cosh K_o h} (8\pi)^{1/2} e^{i\pi/4} R_j(\alpha + \pi) \quad (4.30)$$

Esta expressão é geral e fornece a força de excitação no modo j , para uma onda harmônica de frequência ω , amplitude unitária e ângulo de incidência α .

No contexto da TCE as aproximações assintóticas (4.24) e (4.28) podem ser diretamente utilizadas fornecendo, com erro da forma $(1+O(\epsilon^2))$, as seguintes expressões

$$E_j(\omega) = - \frac{\rho g}{F_o \cosh K_o h} Q_j(\alpha + \pi) \quad ; \quad j = 1, 3, 5 \quad (4.31)$$

e

$$E_j(\omega) = - \frac{i\rho g}{F_o \cosh K_o h} \sin(\alpha + \pi) P_j(\alpha + \pi); \quad j = 2, 4, 6 \quad (4.32)$$

onde $Q_j(\alpha + \pi)$ e $P_j(\alpha + \pi)$ são dados por (4.26), com $\theta = \alpha + \pi$

Note que (4.31) depende da solução da equação integral e do cálculo de $Q_j(\alpha + \pi)$.

Por outro lado (4.32) depende unicamente do cálculo de $P_j(\alpha + \pi)$, o qual é obtido prontamente a partir das soluções bidimensionais ($A_j(\xi)$).

Note que em profundidade infinita (ver expressão (3.6))

$$\lim_{K_0 h \rightarrow \infty} F_0 \cosh K_0 h = (2K_0)^{1/2}$$

e portanto,

$$E_j(\omega) = - \frac{\rho g}{(2K_0)^{1/2}} Q_j(\alpha + \pi) \quad ; \quad j = 1, 3, 5 \quad (4.31.a)$$

$$E_j(\omega) = - \frac{i \rho g}{(2K_0)^{1/2}} \sin(\alpha + \pi) P_j(\alpha + \pi) \quad ; \quad j = 2, 4, 6 \quad (4.32.a)$$

4.3.4. Força Média de Deriva em Ondas Harmônicas

É bastante conhecida a importância da determinação da força média de deriva em ondas monocromáticas (ver, p.ex., Maruo (1960), Newman (1967)).

Como o próprio nome sugere, tal força é responsável pela deriva de um corpo flutuante sob a ação de ondas. No caso de corpos fundeados esta ação leva a alterar a posição de equilíbrio do sistema.

É, porém, no fenômeno de oscilações lentas de corpos flutuantes fundeados, sob ação de ondas aleatórias, que a determinação das forças de deriva adquire especial importância.

Em ondas aleatórias as forças de deriva são lentamente oscilantes e, embora de segunda-ordem, podem excitar a ressonância do sistema amarrado no plano horizontal (ver, p.ex. Newman (1974), Faltinsen & Løckens (1979), Pesce (1984), Aranha & Pesce (1986)).

Sob hipótese de ondas aleatórias com espectro de banda estreita, uma aproximação assintótica em torno de sua frequência central ω_0 , permite mostrar que as forças de deriva podem ser expressas na forma de uma demodulação quadrática na amplitude da onda (ver Pesce (1984) ou Aranha & Pesce (1986)). Assim

$$\tilde{D}(t) = \left\{ \mathcal{D}^{(1)}(\omega_0) + \frac{\mathcal{D}^{(2)}(\omega_0)}{\omega_0} \frac{d}{dt} \right\} |a(t)|^2 \quad (1+O(\Delta\omega)) \quad (4.33)$$

onde

$\tilde{D}(t)$ é a força de deriva, lentamente oscilante

$\mathcal{D}^{(1)}(\omega_0)$ é a força média de deriva em ondas monocromáticas, na frequência (central), unicamente associado ao potencial de primeira-ordem.

$\mathcal{D}^{(2)}(\omega_0)$ é o coeficiente de força de deriva associado ao potencial de segunda-ordem.

$a(t)$ é a amplitude de modulação do trem de ondas

$\Delta\omega$ é a largura de banda espectral

Mostra-se que, apenas em baixa-profundidade (ver Aranha & Pesce (1986)), ou no caso de corpos ligeiramente submersos - (ver Pesce & Aranha (1987)), o coeficiente $\mathcal{D}^{(2)}(\omega_0)^{(*)}$ é relevante.

Em geral o conhecimento de $\mathcal{D}^{(1)}(\omega_0)$ é suficiente para uma boa aproximação de $\tilde{D}(t)$.

Como será visto adiante, este coeficiente pode ser calculado prontamente, no âmbito da TCE.

Duas são as maneiras possíveis para o cálculo de $\mathcal{D}^{(1)}(\omega_0)$. A primeira, chamada de integração em *campo próximo*, realiza a integral das pressões de segunda-ordem no casco. A segunda, de *campo distante* relaciona a força média de deriva com a amplitude de onda irradiada, através do princípio de conservação de quantidade de movimento.

Este segundo método, desenvolvido por Maruo (1960), e estendido por Newman (1967) para o cálculo do momento de deriva em yaw ($j=6$), é bastante mais prático e direto e será aqui abordado.

(*) $\mathcal{D}_2(\omega_0)$ pode ser determinado diretamente, sem o cálculo do potencial de segunda-ordem, através do PV2.

Considere a amplitude complexa $A(\theta)$, da onda irradiada associada ao potencial em primeira ordem, decorrente do movimento de um corpo flutuante em ondas harmônicas com incidência α .

Segundo o método de Maruo (ver Mei (1983), pg. 367) o qual foi estendido por Newman (1967), chega-se ao seguinte resultado final

$$D_{\alpha}^{(1)}(\omega_o) = \frac{\rho g A^2}{K_o} \frac{Cg}{c_o} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \cos(\theta - \alpha)) |A(\theta - \alpha)|^2 d\theta \right. \quad (4.34)$$

$$D_{\alpha + \pi/2}^{(1)}(\omega_o; \alpha) = - \frac{\rho g A^2}{K_o} \frac{Cg}{c_o} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\theta - \alpha) |A(\theta - \alpha)|^2 d\theta \right. \quad (4.35)$$

onde $D_{\alpha}^{(1)}$ é a componente da força de deriva na direção do eixo de incidência da onda ($\theta = \alpha$) e $D_{\alpha + \pi/2}^{(1)}$ corresponde à componente perpendicular.

Para um corpo esbelto é conveniente que as componentes da força de deriva correspondam aos movimentos de "surge" e "sway". Assim

$$D_1^{(1)}(\omega_o; \alpha) = D_{\alpha}^{(1)}(\omega_o) \cos \alpha - D_{\alpha + \pi/2}^{(1)}(\omega_o) \sin \alpha; \text{ "surge"} \quad (4.36)$$

e

$$D_2^{(1)}(\omega_o; \alpha) = D_{\alpha}^{(1)}(\omega_o) \sin \alpha + D_{\alpha + \pi/2}^{(1)}(\omega_o) \cos \alpha; \text{ "sway"} \quad (4.37)$$

0. "momento" de deriva" em yaw é, por sua vez

$$D_6^{(1)}(\omega_o; \alpha) = \rho g \frac{A^2}{K_o^2} \frac{Cg}{c_o} \operatorname{Im} \left\{ \left. \frac{dA^*}{d\theta} \right|_{\theta = \alpha} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} A(\theta) d \frac{A^*(\theta)}{d\theta} d\theta \right\}; \text{ "yaw"} \quad (4.38)$$

onde A é a amplitude da onda incidente.

É importante notar que $A(\theta)$ combina tão somente radiação e espalhamento. As parcelas associadas à onda incidente se anulam (ver Newman (1967)).

Assim

$$A(\theta) = -i\omega \sum_{j=1}^6 \xi_j A(\theta) + A_7(\theta) + A_8(\theta) \quad (4.39)$$

Note que $A_j(\theta)$ e $R_j(\theta)$ são relacionados através das duas formas equivalentes de expressar a condição de radiação ((2.10.e) ou (4.3.e)). Esta relação é dada por (ver apêndice D).

$$A_j(\theta) = KR_j(\theta) \quad (4.40)$$

com

$$K = \frac{i\omega}{g} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \cdot e^{i\pi/4} F_0 \cosh K_0 h = i \left(\frac{\pi}{2} \frac{gC_g}{K_0}\right)^{1/2} e^{i\pi/4} \quad (4.41)$$

onde C_g é a velocidade de grupo.

Segue então de (4.25.a), (4.40) e (4.41), que no âmbito da TCE (ver apêndice D).

$$A_j(\theta) = \mu(Q_j(\theta) + i \sin\theta P_j(\theta)) \quad (4.42)$$

onde, por simplicidade de notação, definiu-se

$$\mu = \frac{1}{4} \left(\frac{g}{\omega} \frac{C_g}{K_0}\right)^{1/2} \quad (4.43)$$

A substituição de (4.42) e (4.39) em (4.34)(4.35),(4.38) leva às formas explícitas apresentadas abaixo.

$$D_\alpha^{(1)}(\omega_o; \alpha) = (2\mu)^4 \frac{K_0 A^2}{\pi} \left\{ \omega^2 \sum_{j=1}^8 \sum_{\ell=1}^8 \xi_j \xi_\ell^* \int_0^{2\pi} d\theta (1 - \cos\theta) \right. \quad (4.44a)$$

$$\left. \cdot \left[Q_j Q_\ell^* + 1 \sin\theta (Q_\ell^* P_j - Q_j P_\ell^*) + \sin^2\theta P_j P_\ell^* \right] \right\}$$

$$D_{\alpha + \pi/2}^{(1)}(\omega_0; \alpha) = (2\mu)^4 \frac{K_0 A^2}{\pi} \left\{ \omega^2 \sum_{j=1}^8 \sum_{\ell=1}^8 \xi_j \xi_{\ell}^* \int_0^{2\pi} d\theta \sin\theta \cdot |Q_j Q_{\ell}^* + i \sin\theta (Q_{\ell}^* P_j - Q_j P_{\ell}^*) + \sin^2\theta P_j P_{\ell}^*| \right\} \quad (4.44b)$$

$$D_6^{(1)}(\omega_0; \alpha) = (2\mu)^4 A^2 \operatorname{Im} \left\{ i\omega \sum_{j=1}^8 \left(\frac{dQ_j^*}{d\theta} - i(\cos\theta P_j^* + \sin\theta \frac{dP_j^*}{d\theta}) \right) \right\}_{\theta=\alpha} + \frac{\omega^2}{\pi} \sum_{j=1}^8 \sum_{\ell=1}^8 \xi_j \xi_{\ell}^* \int_0^{2\pi} \left\{ Q_j \frac{dQ_{\ell}^*}{d\theta} + \cos\theta P_{\omega}^* (\sin\theta P_j - iQ_j) + i \sin\theta \left(P_j \frac{dQ_{\ell}^*}{d\theta} - Q_j \frac{dP_{\ell}^*}{d\theta} \right) + \sin^2\theta P_j \frac{dP_{\ell}^*}{d\theta} \right\} \quad (4.44c)$$

onde, por questão de concisão definiu-se $\xi_7 = \xi_8 = -i/\omega$. Lembre que $Q_j = 0$, se $j = 2, 4, 6, 8$ e $P_j = 0$ se $j = 1, 3, 5, 7$.

Note ainda que seguem de (4.42) ou (4.44) as seguintes relações

$$\begin{aligned} \text{fase}(Q_j) &= \pm \text{fase}(Q_{\ell}) & ; & \quad j, \ell = 1, 3, 5, 7 \\ \text{fase}(P_j) &= \pm \text{fase}(P_{\ell}) & ; & \quad j, \ell = 2, 4, 6, 8 \\ \text{fase}(\xi_j Q_j) - \text{fase}(\xi_{\ell} P_{\ell}) &= \pm \pi/2; & j &= 1, 3, 5, 7 \\ & & \ell &= 2, 4, 6, 8 \end{aligned}$$

onde foram utilizadas as propriedades de paridade ou imparidade das soluções bidimensionais e as relações (3.65).

4.4. Exemplos Numéricos de Aplicação Conjunta TCE & MVB

A presente seção exemplifica a aplicação da Teoria do Corpo Esbelto e do Método Variacional Bidimensional, *sob hipótese de velocidade nula de avanço, em águas de profundidade infinita*. Muito embora o núcleo da equação integral na TCE seja uma função de Haenckel, adequada à hipótese de profundidade finita, os exemplos apresentados tem também o objetivo de permitir verificar, do ponto de vista numérico, sua aplicabilidade a águas infinitamente profundas.

Um elipsóide de revolução com razão de esbeltez 1:8 foi escolhido para processamento, o qual é concretizado pelo programa SBW, escrito em linguagem FORTRAN-77 e que implementa a TCE ao programa VARSB.

A escolha desta forma geométrica se deve à sua simplicidade, enquanto exemplo acadêmico, e a existência de resultados publicados, provenientes da aplicação de métodos de distribuição de singularidades por painéis ("Panel Methods") e da Teoria Unificada ("Unified Theory").

No caso do MVB o elipsóide foi discretizado em 11 seções transversais (balizas), equidistantes. As balizas de proa e a ré, a 49% do comprimento. Cada seção foi representada por 30 pontos. No processamento do programa VARSB foram utilizadas 5 *funções-teste elementares*, conforme descrito na tabela 4.1.

FUNÇÕES-TESTE ELEMENTARES				
Nº	Tipo		Coordenadas (*) (r_o, θ_o)	
	Pot. Pares	Pot. Impares	r_o/R	θ_o (o)
1	T_o^+	T_o^-	-	-
2	T_1^+	T_2^-	0.0	-
3	T_1^+	T_1^-	0.85	22.5
4	T_1^+	T_1^-	0.85	45.0
5	T_1^+	T_1^-	0.85	77.5

(*) (r_o, θ_o) é o centro da função-teste em coordenadas polares
R é o raio da seção.

Tabela 4.1. Funções-teste elementares no MVB para um elipsóide de de revolução 1:8.

Os resultados numéricos são apresentados na forma gráfica nas figuras 4.2 a 4.11. Correspondem aos coeficientes adimensionais de massa adicional, amortecimento e força de excitação.

Os valores obtidos foram comparados a resultados extraídos de Breit (1985), Sclavounous (1985) e Bai & Yeung (1974).

Breit utiliza-se de um *método tridimensional de distribuição de singularidades*, o Método de Painéis Esferoidais ("*Spheroidal Panel Method*"), (SPM) no qual os campos potenciais são representados como séries bidimensionais de polinômios de Tchebycheff em cada painel esferoidal. O método aproveita a peculiaridade geométrica do corpo em questão possibilitando, após uma transformação de coordenadas esferoidais para coordenadas cartesianas, uma exata representação de sua superfície. Isto conduz a resultados numéricos bastante acurados, cuja precisão pode ser controlada (ver Breit (1985)).

Sclavounous utiliza-se da Teoria Unificada ("*Unified Theory*") (UT), desenvolvida para águas profundas. Bai & Yeung, por sua vez valem-se de um método tridimensional de distribuição de singularidades tradicional, o "*Fundamental Singularity Method (FSM)*".

Para os coeficientes de massa adicional e amortecimento foram traçadas as curvas correspondentes à TCE (linha cheia) e à TF (linha tracejada).

Conforme pode ser observado os resultados da TCE e TF coincidem para os modos de potencial par ($j=2,6 = \text{"sway, yaw"}$), confirmando a expectativa.

Já para os modos de potencial ímpar ($j=1,3,5 : \text{"surge, heave, pitch"}$) a TF conduz a valores que tendem assintoticamente àqueles obtidos com a TCE quando $\omega \rightarrow \infty$, como esperado. Em baixa frequência, $\omega \rightarrow 0$, a TCE recupera com boa precisão os valores dos coeficientes de amortecimento o que não ocorre com a TF, a qual apresenta um valor assintótico finito, porém não nulo, neste limite.

Por outro lado o coeficiente de massa adicional nos modos de potencial ímpar ($j=1,3,5$) não é recuperado em baixa frequência, seja pela TCE ou pela TF. Ambas levam assintoticamente ao infinito, no limite $\omega \rightarrow 0$.

No caso da TF isto se deve à integração direta de coeficientes bidimensionais que apresentam o mesmo comportamento (ver, p.ex., capítulo 3, seção 3.3).

Já no caso da TCE, além desta, a causa está também no comportamento logarítmico do núcleo da equação integral, a função $H_0^1(\cdot)$.

O núcleo da equação integral utilizada na Teoria Unificada (ver Sclavounous (1984)) é, ao contrário, perfeitamente adequado à hipótese de águas infinitamente profundas em toda a faixa de frequências, conduzindo então ao comportamento assintótico correto. Este núcleo é dado pela própria função de Green.

Cumprir notar que a discrepância de comportamentos assintóticos apresentados por estes dois núcleos é análoga àquela que ocorre com a relação de dispersão quando se assume:

- i) que a profundidade é finita, caso em que $\frac{\omega^2}{g} \sim K_0^2 h$, $\omega \rightarrow 0$;
- ii) que a profundidade é infinita, caso em que $\frac{\omega^2}{g} = K_0$ para todo ω .

O comportamento assintótico da presente TCE não traz, no entanto, maiores problemas quando se deseja, em última instância, o cálculo da resposta em movimento.

Para os modos de "heave" e "pitch", dominam as forças de natureza hidrostática quando comparadas às forças inerciais ($-\omega^2 M_{j\ell}$) ou de amortecimento ($i\omega D_{j\ell}$), $\omega \rightarrow 0$. Com o intuito de uma melhor visualização deste fato foram traçadas as curvas da figura 4.12. Note que a medida em que a ordem de magnitude destas últimas forças vai ficando comparável à da primeira, o que ocorre com o crescimento de ω , tanto a TCE quanto a TF vão apre-

sentando comportamentos assintóticos corretos.

Para o modo de "surge" inexistente restauração hidrostática. No entanto cabe observar que o valor do coeficiente de massa adicional é pequeno (cerca de 10%) do valor da massa (deslocamento) do corpo. O valor do coeficiente de amortecimento é também pequeno, e portanto, as forças inerciais associadas à massa do próprio corpo são dominantes. Assim, um erro relativamente grande nestes coeficientes introduz pequenos desvios na resposta do movimento em "surge".

Quanto às forças de excitação (gráficos 4.7 a 4.11) os resultados são considerados satisfatórios, notadamente nos modos de "sway", "heave" e "yaw". Ressalta-se a perfeita recuperação da fase em toda a faixa de frequências. Os resultados correspondem a três diferentes aproamentos ($\alpha = 0^\circ, 45^\circ$ e 90°), ou seja ondas pela proa, com incidência oblíqua e pelo travês, respectivamente.

Cabem aqui algumas observações relativas ao desempenho computacional da TCE & MVB.

Inicialmente observa-se que em Bai & Yeung (1974) a superfície do corpo foi discretizada em 56 pontos. Isto significa construir e manipular uma matriz complexa e cheia de ordem 56, para cada frequência analisada.

Breit (1985), por sua vez, utiliza 36 painéis para representar, aproveitando-se da dupla simetria do corpo, um quarto de sua superfície molhada.

Admitindo que fossem suficientes aproximações de "primeira ordem", o que em seu método (SPM) significa tomar-se os campos potenciais constantes em cada painel (polinômios de Tchebycheff de grau 1), uma matriz complexa e cheia de grau 36 seria manipulada. Aproximações de ordem superior implicariam em matrizes de maior grau.

A solução pela Teoria Unificada, com método de Green bidimensional, implica, no presente exemplo, na construção e in

versão de 6 matrizes complexas e cheias de ordem 20 e a construção e inversão de uma matriz complexa e cheia de ordem 11, para cada frequência analisada. Estes números correspondem à solução bidimensional em 6 seções (aproveitando-se a simetria do corpo) e à solução da equação integral na TU.

Já a aplicação conjunta MVB & TCE corresponde à construção e inversão de 12 (2x6) matrizes reais e simétricas (problemas par e ímpar), ao nível das soluções bidimensionais, e à construção e inversão de uma matriz complexa e cheia de ordem 11, na solução da equação integral.

Para fixar idéias a tabela 4.2 apresenta uma avaliação de desempenho numérico comparativo, considerando, para simplificar, que o esforço computacional associado à construção das matrizes seja equivalente em todos os métodos.

A primeira linha considera o uso de um algoritmo direto de solução das equações matriciais, no qual o esforço computacional é, grosso modo, proporcional a N^3 , onde N é a ordem da matriz. A segunda linha considera um algoritmo iterativo acelerado, o qual reduz o esforço para ordem N^2 . É evidente, a superioridade do MVB & TCE.

MVB & TCE	GREEN & TCE	"FSM" Bai & Yeung (1974)	"SPM" Breit (1985)
12148 $(2 \times 6 \times 5)^3 + (2 \times 11)^3$	394648 $(6 \times (2 \times 20))^3 + (2 \times 11)^3$	2097152 $(2 \times 56)^3$	373248 $(2 \times 36)^3$
784 $(2 \times 6 \times 5)^2 + (2 \times 11)^2$	10084 $(6 \times (2 \times 20))^2 + (2 \times 11)^2$	16384 $(2 \times 56)^2$	5184 $(2 \times 36)^2$

Tabela 4.2. Desempenho Numérico Comparativo Aproximado (em nº aproximado de operações aritméticas por frequência analisada).

Por fim, e apresentada a título ilustrativo, a figura 4.13 refere-se à força média de deriva em "sway" agente sobre um corpo prismático de seção retangular ($B/D = 8$).

As curvas mostram, para um ângulo de incidência de onda de 90° (mar de través), a relação entre os resultados obtidos através da TCE (D_{y3}) e da TF (D_{y2}). O corpo é mantido fixo, considerando-se diversas razões de esbeltez ($L/B = 4; 6; 8; 10, 15, 20$). Como esperado, quanto menor a esbeltez do corpo mais a TF superestima o valor da força média de deriva.

Deve-se observar que, em frequências não dimensionais no intervalo 1.0-1.4., os procedimentos numéricos de solução da equação integral, no caso de difração, não convergem. Tal fato é evidenciado por uma linha tracejada na figura 4.13. Investigações preliminares, indicam a existência de um comportamento singular da equação integral quando o segundo termo se anula. No caso de difração pura a equação integral é escrita

$$\frac{i}{2} \mathcal{L}(q_7) - i \frac{1+A_7}{A_7} \frac{q_7(x)}{2K_0} = 1$$

e o problema ocorre quando $A_7 \approx -1$, com A_7 a amplitude complexa da parte par do potencial difratado. Isto significa, a nível bidimensional, reflexão total em antífase com a onda incidente ($R \approx -1$).

Este comportamento é matematicamente análogo à singularidade intrínseca investigada por Haren & Mei (1981), no contexto de difração em mar de proa e, posteriormente, analisada por Aranha & Sugaya (1985). Este ponto deve ser investigado com rigor e foi incluído, no capítulo 5, como sugestão de trabalho futuro.

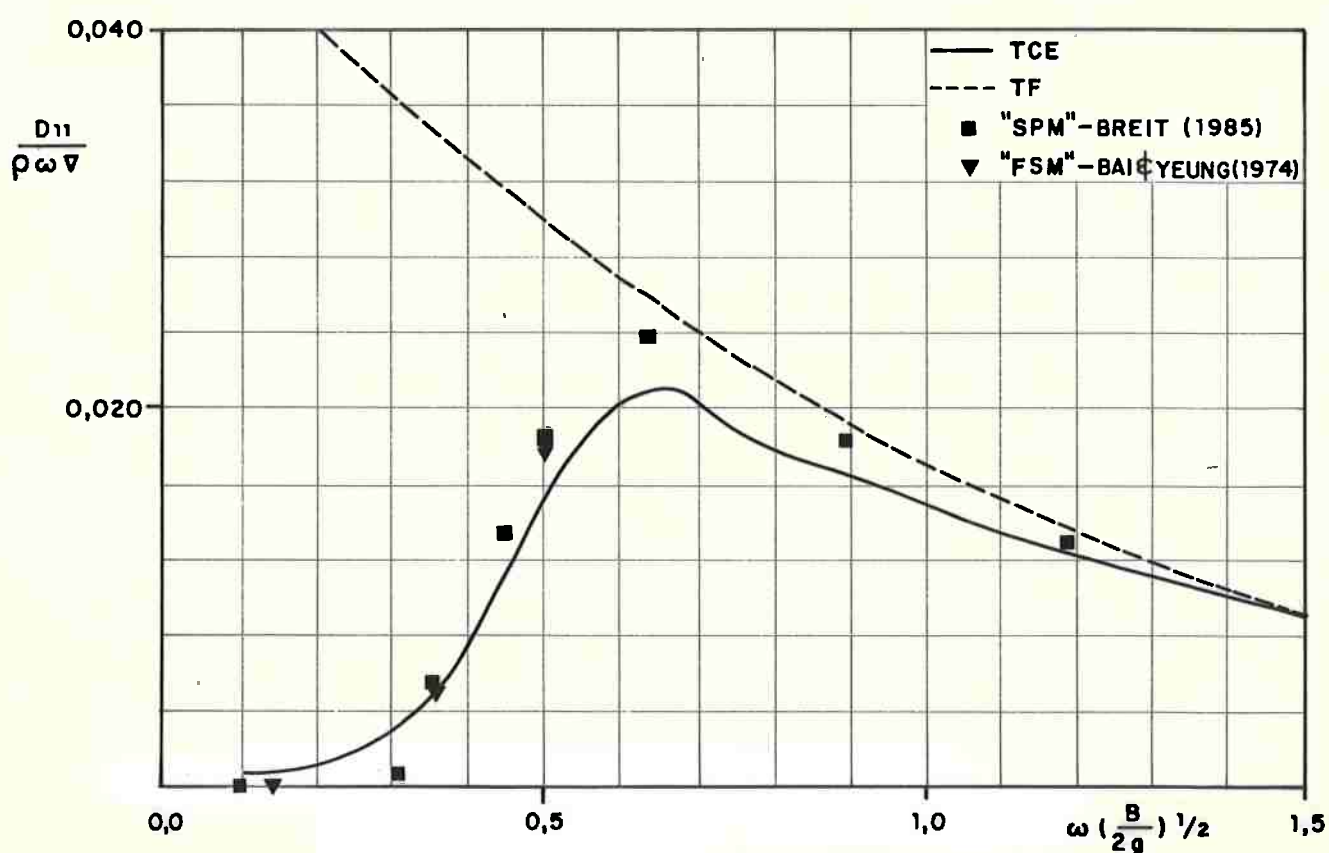
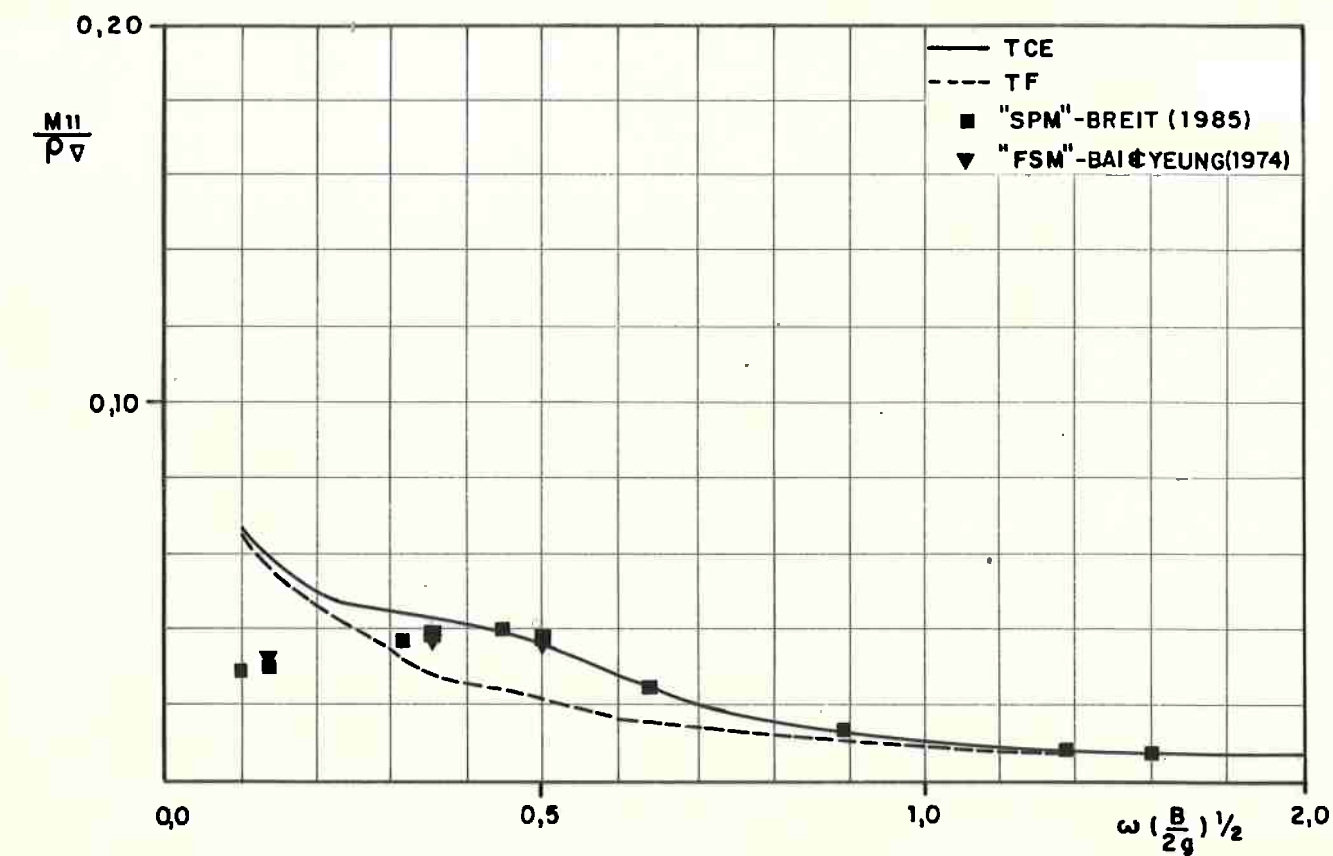


Figura 4.2. - Elipsóide de Revolução 1:8. "Surge"
 Coeficientes de massa adicional e amortecimento
 Profundidade infinita.

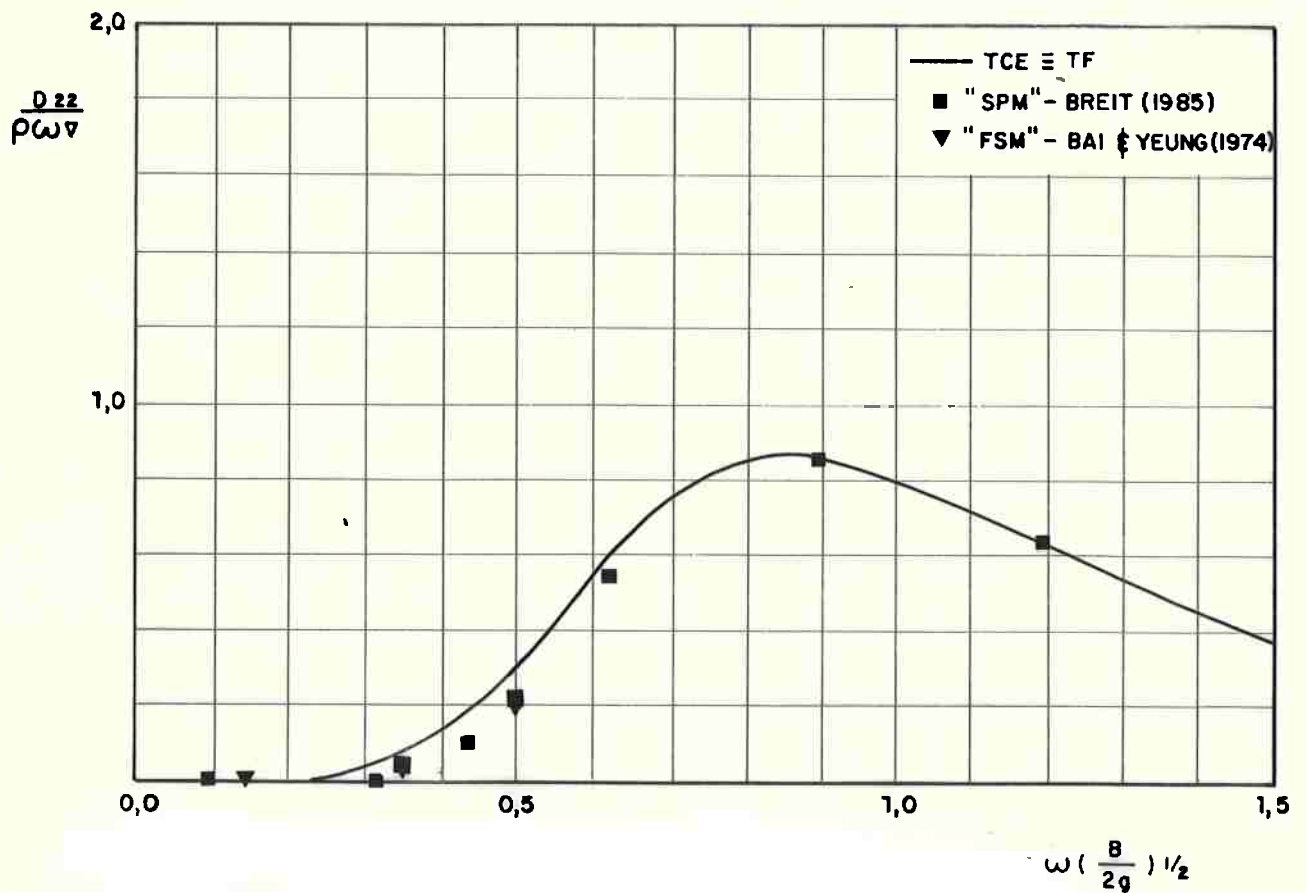
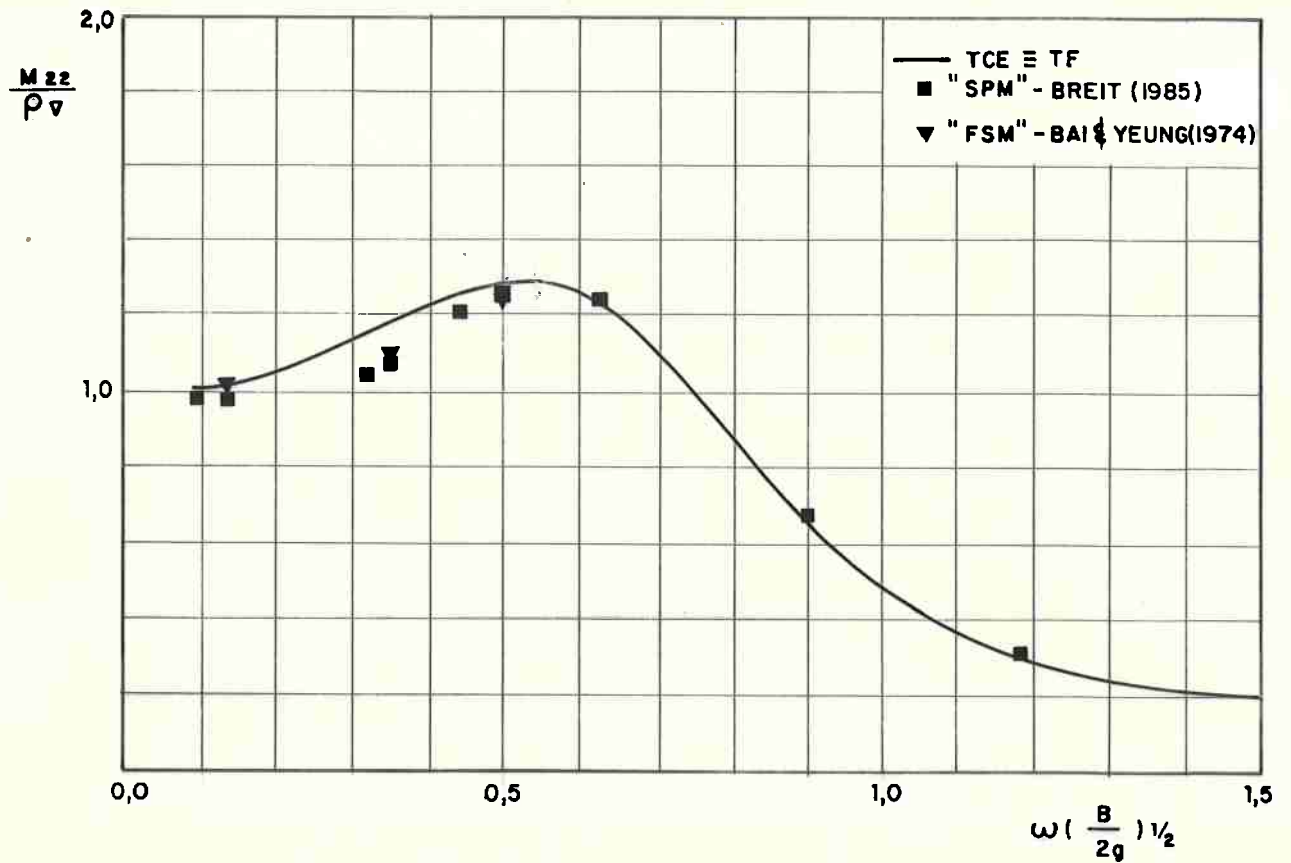


Figura 4.3. - Elipsóide de Revolução 1:8. "Sway"
 Coeficientes de massa adicional e amortecimento
 Profundidade infinita

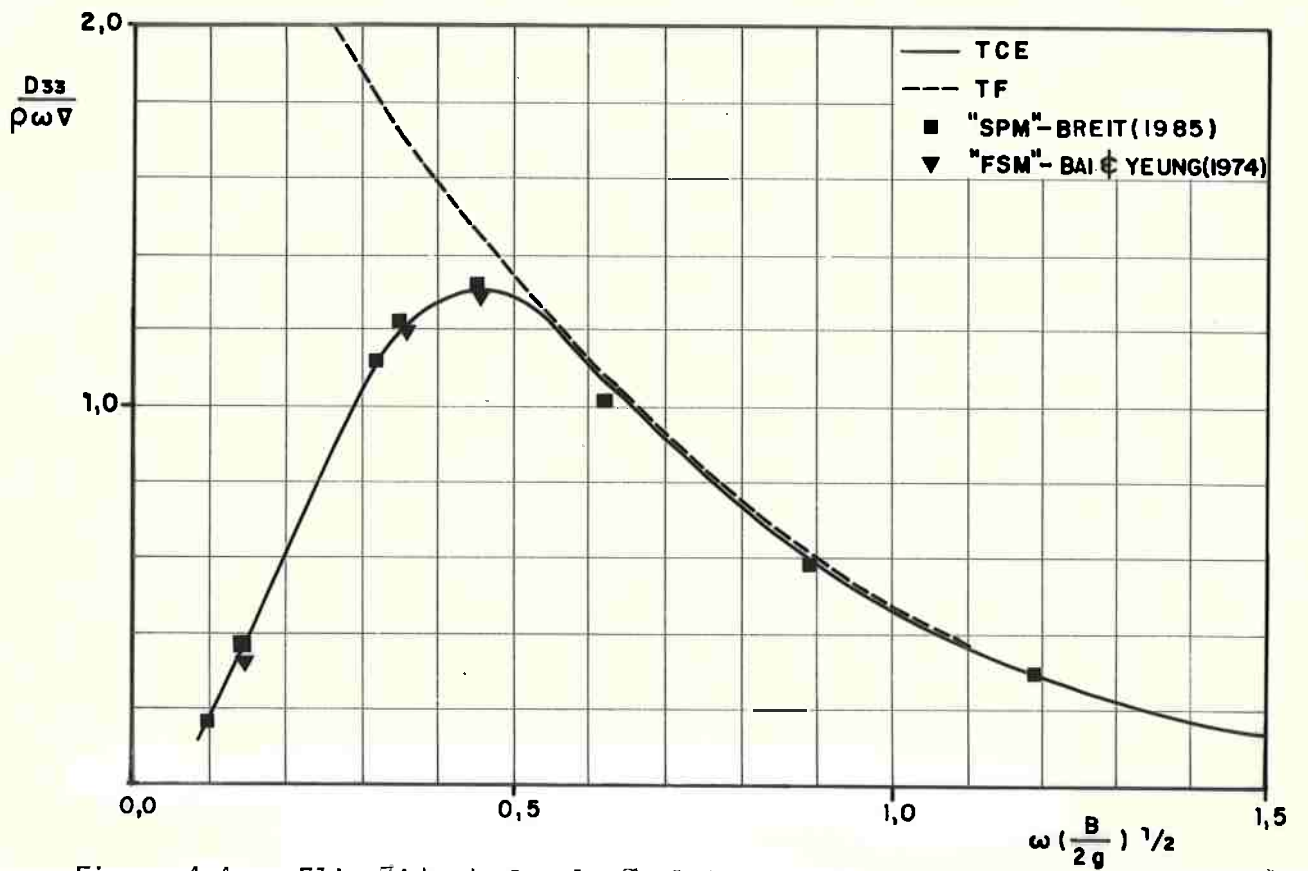
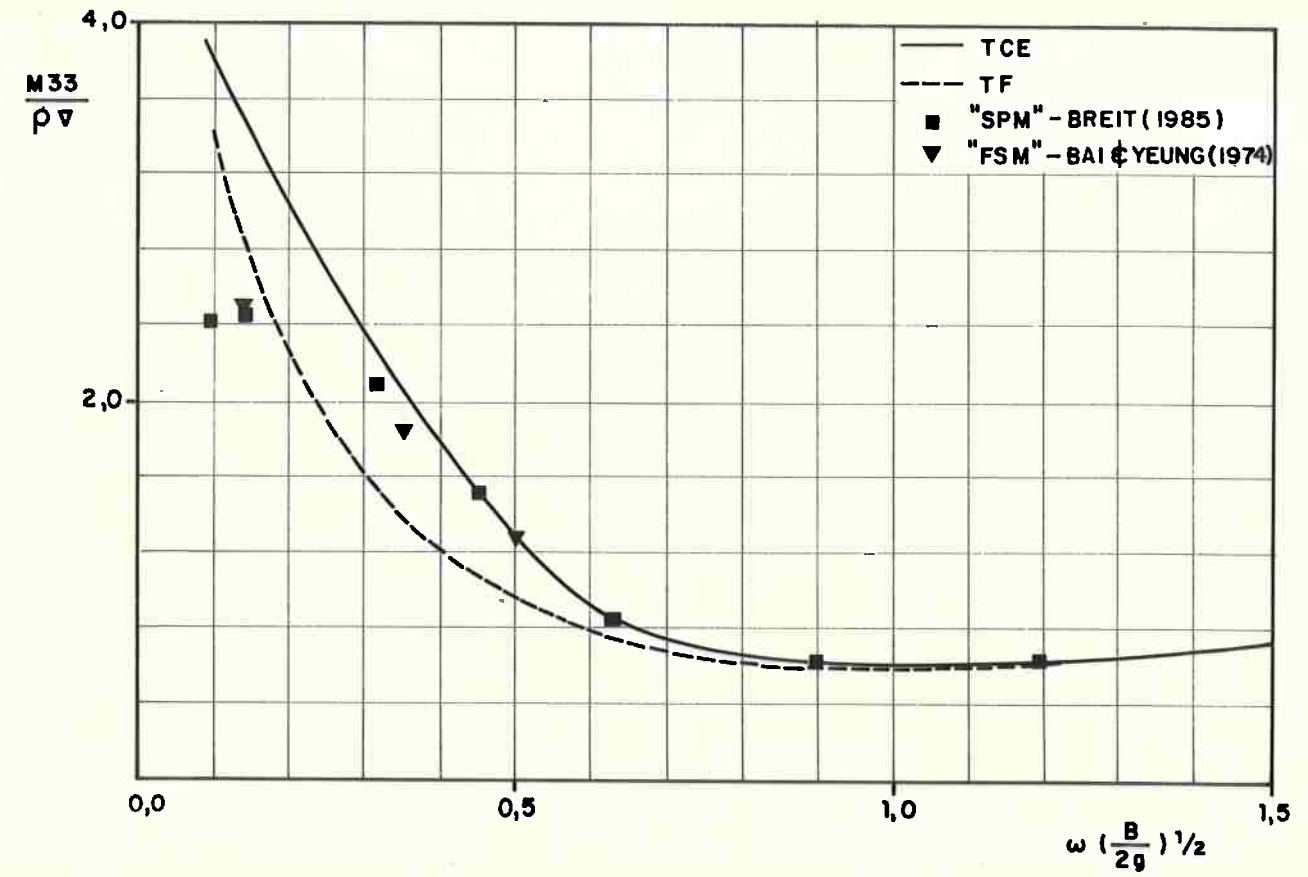


Figura 4.4. - Elipsóide de Revolução 1:8. "Heave"
 Coeficientes de massa adicional e amortecimento
 Profundidade infinita.

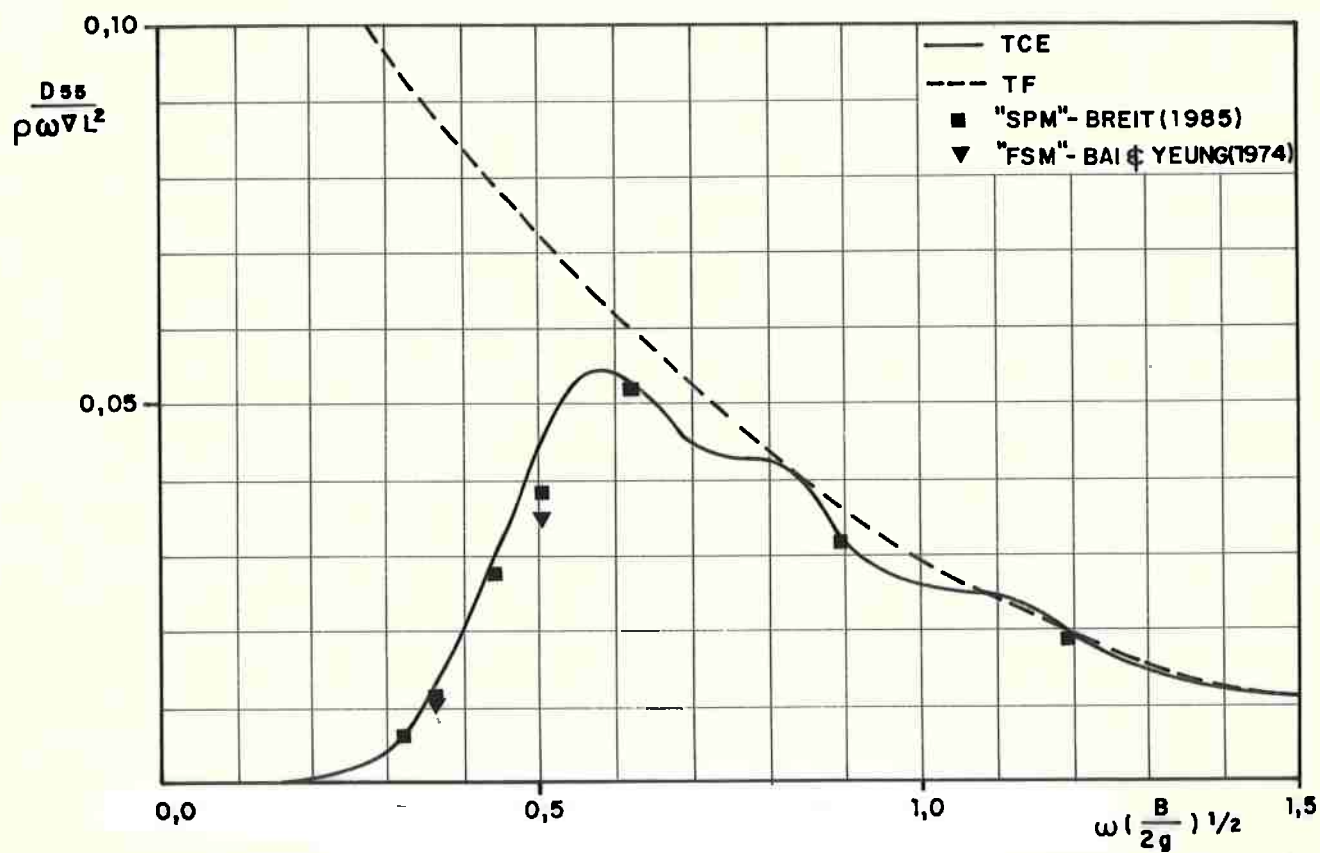
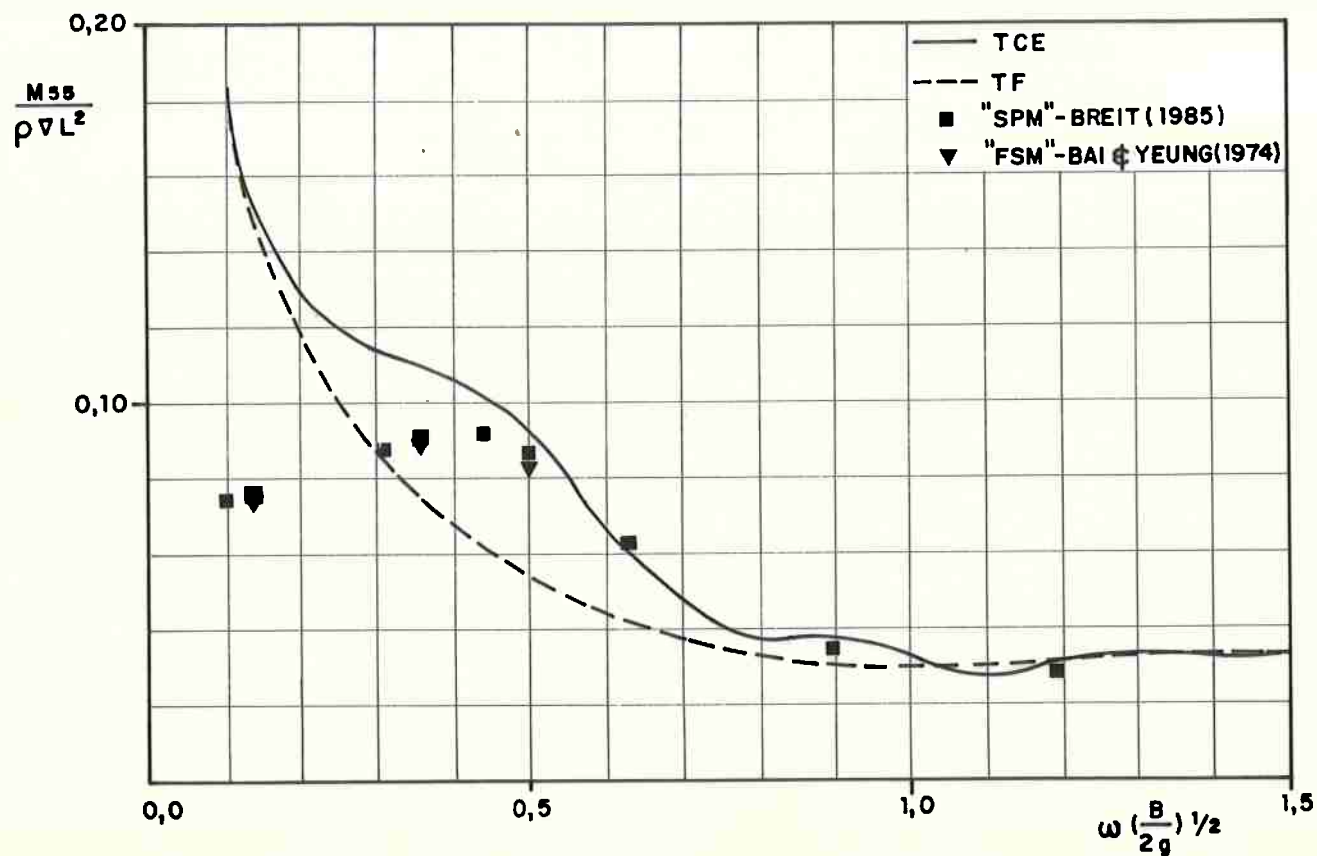


Figura 4.5. - Elipsóide de Revolução 1:8 "Pitch"
 Coeficientes de massa adicional e amortecimento
 Profundidade infinita

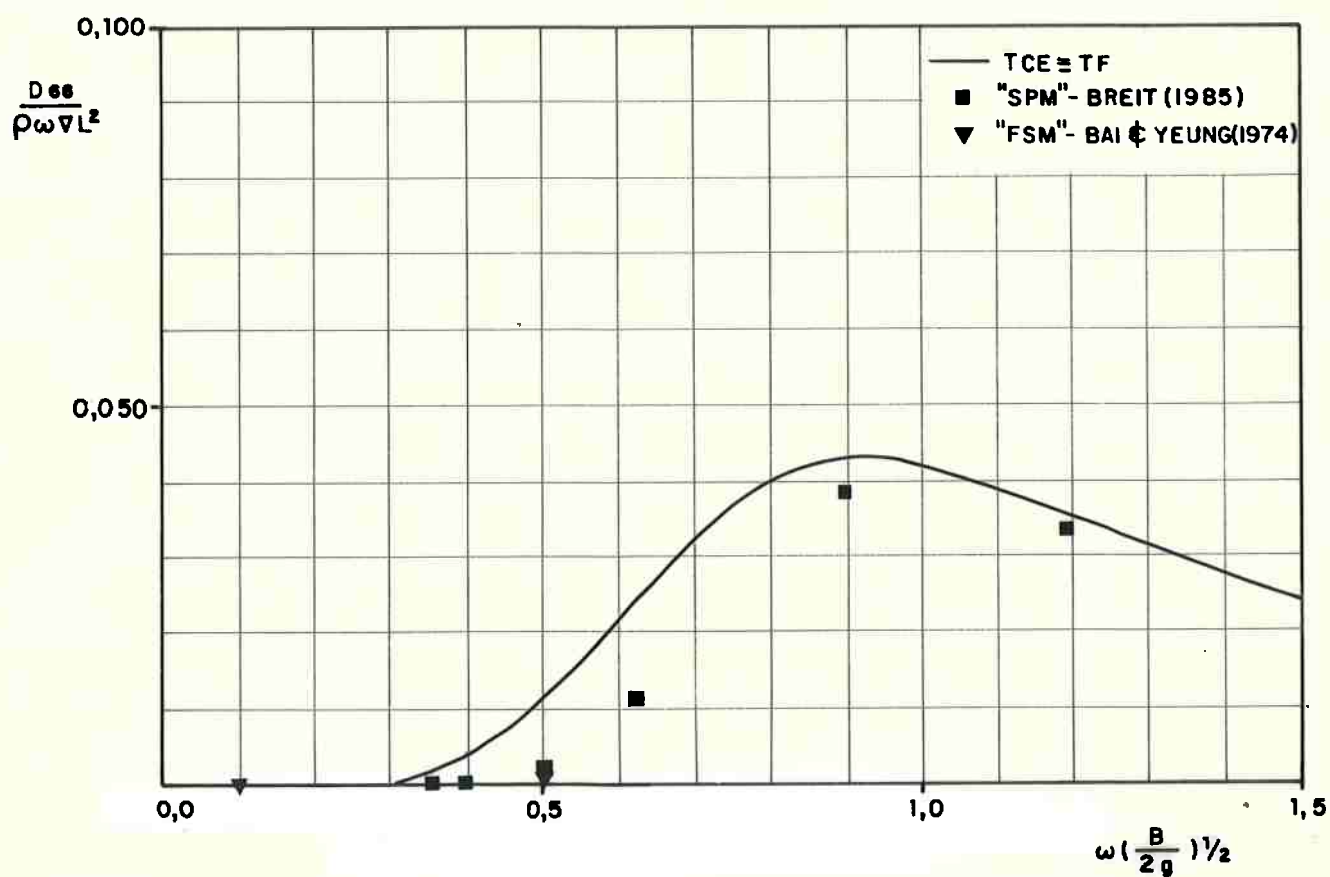
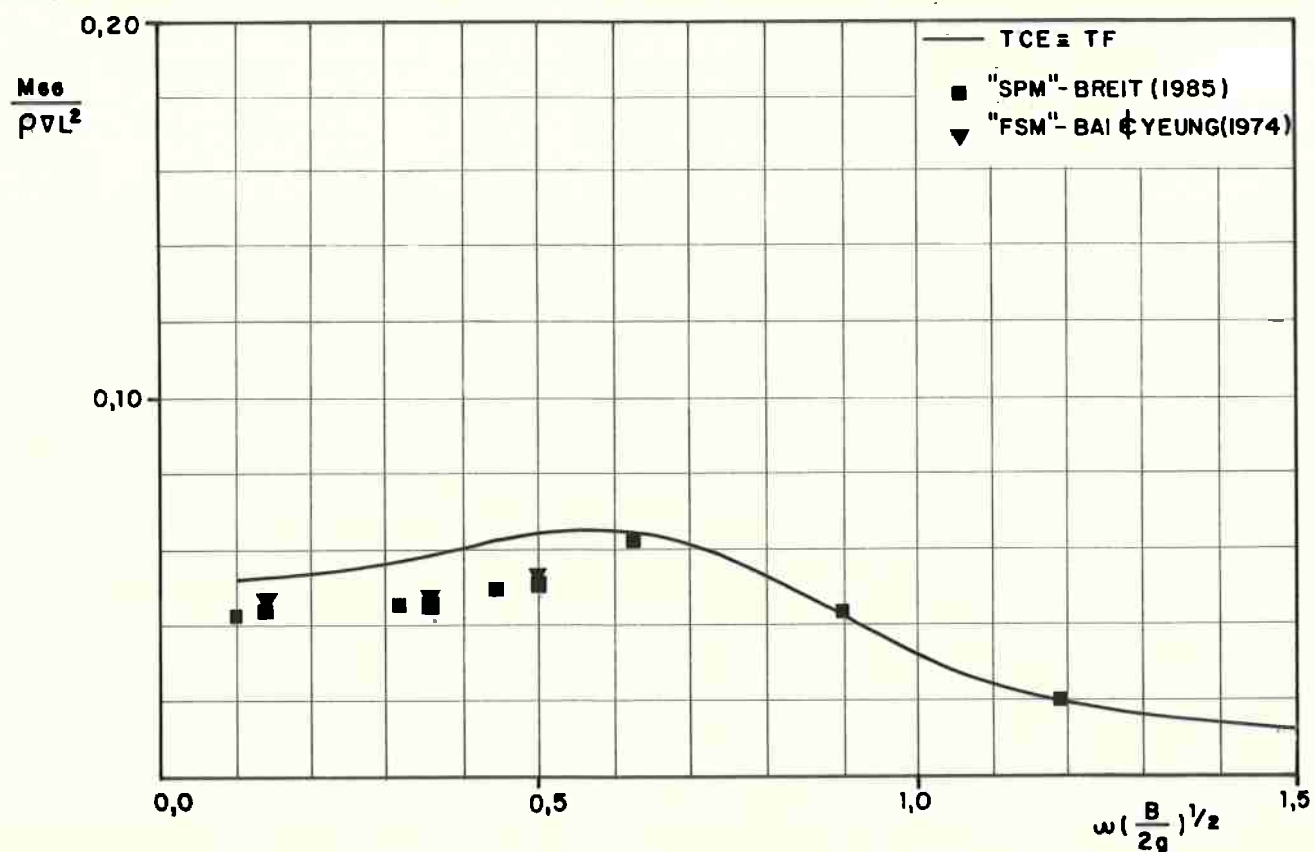


Figura 4.6. - Elipsóide de Revolução 1:8 "Yaw"
 Coeficientes de massa adicional e amortecimento
 Profundidade infinita

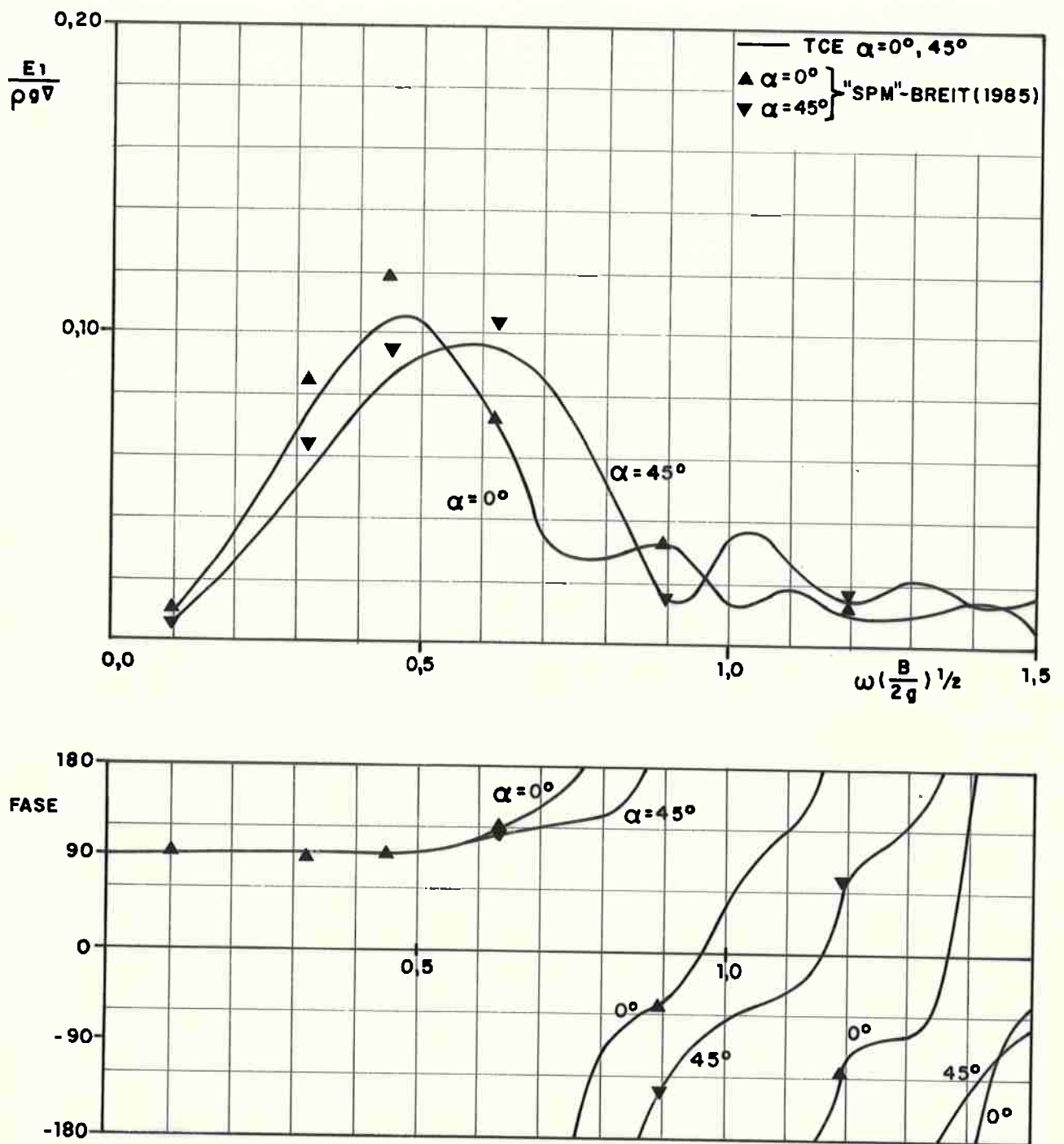


Figura 4.7. - Elipsóide de Revolução 1:8 "Surge".
 Força de Excitação
 Profundidade infinita

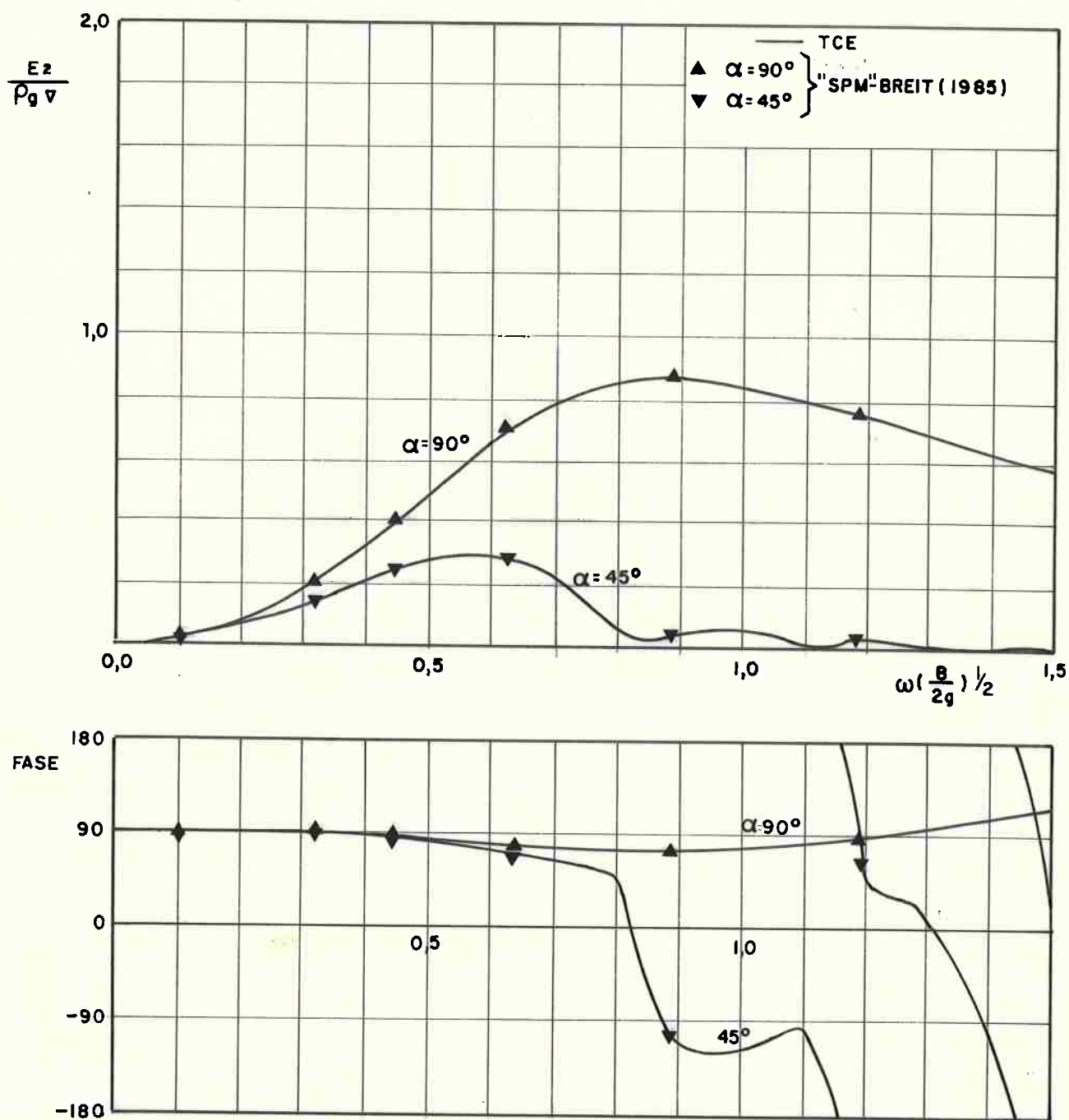


Figura 4.8. - Elipsóide de Revolução 1:8 "Sway"
 Força de Excitação
 Profundidade infinita

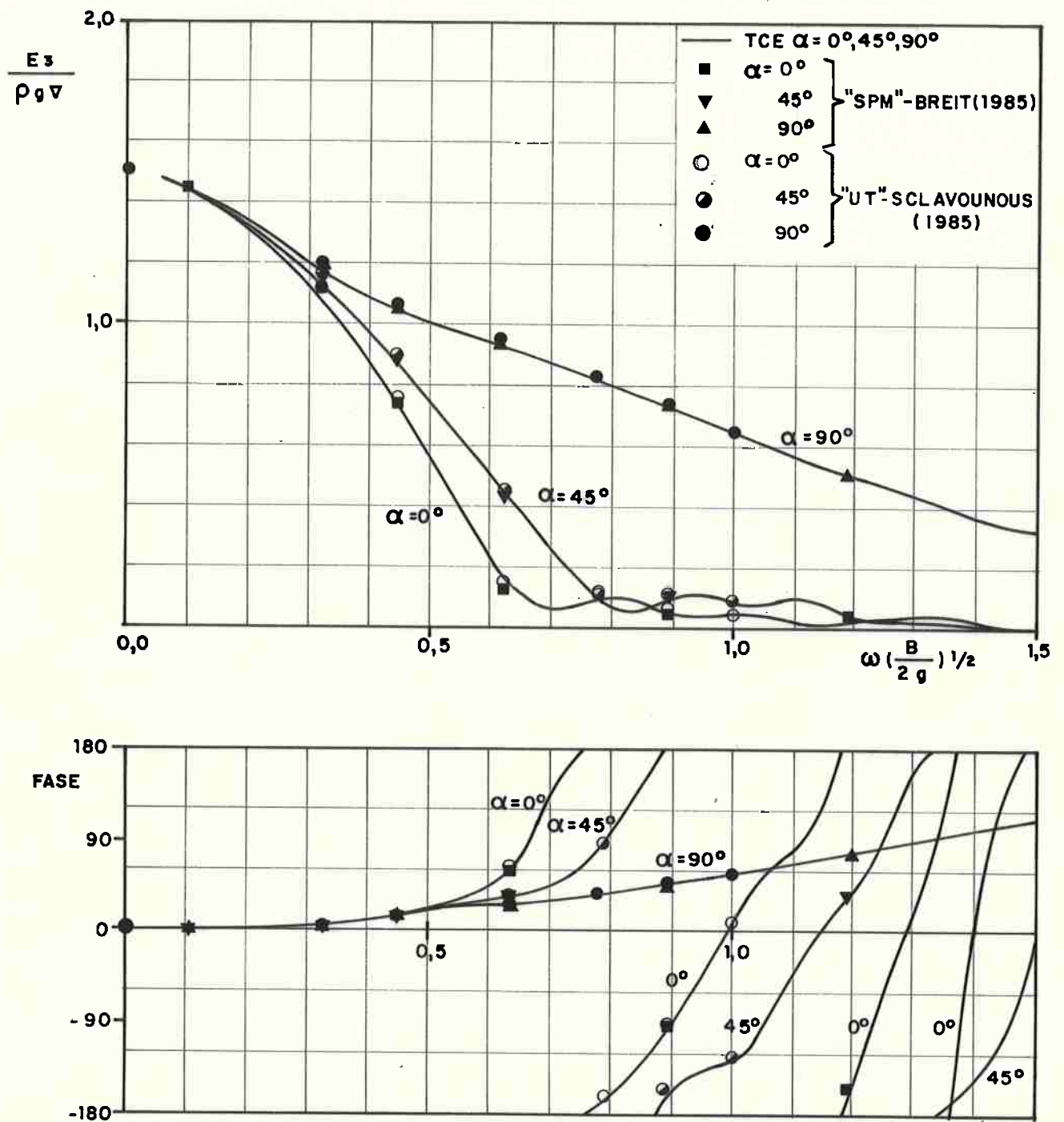


Figura 4.9. - Elipsóide de Revolução 1:8 . "Heave".
 Força de Excitação
 Profundidade infinita

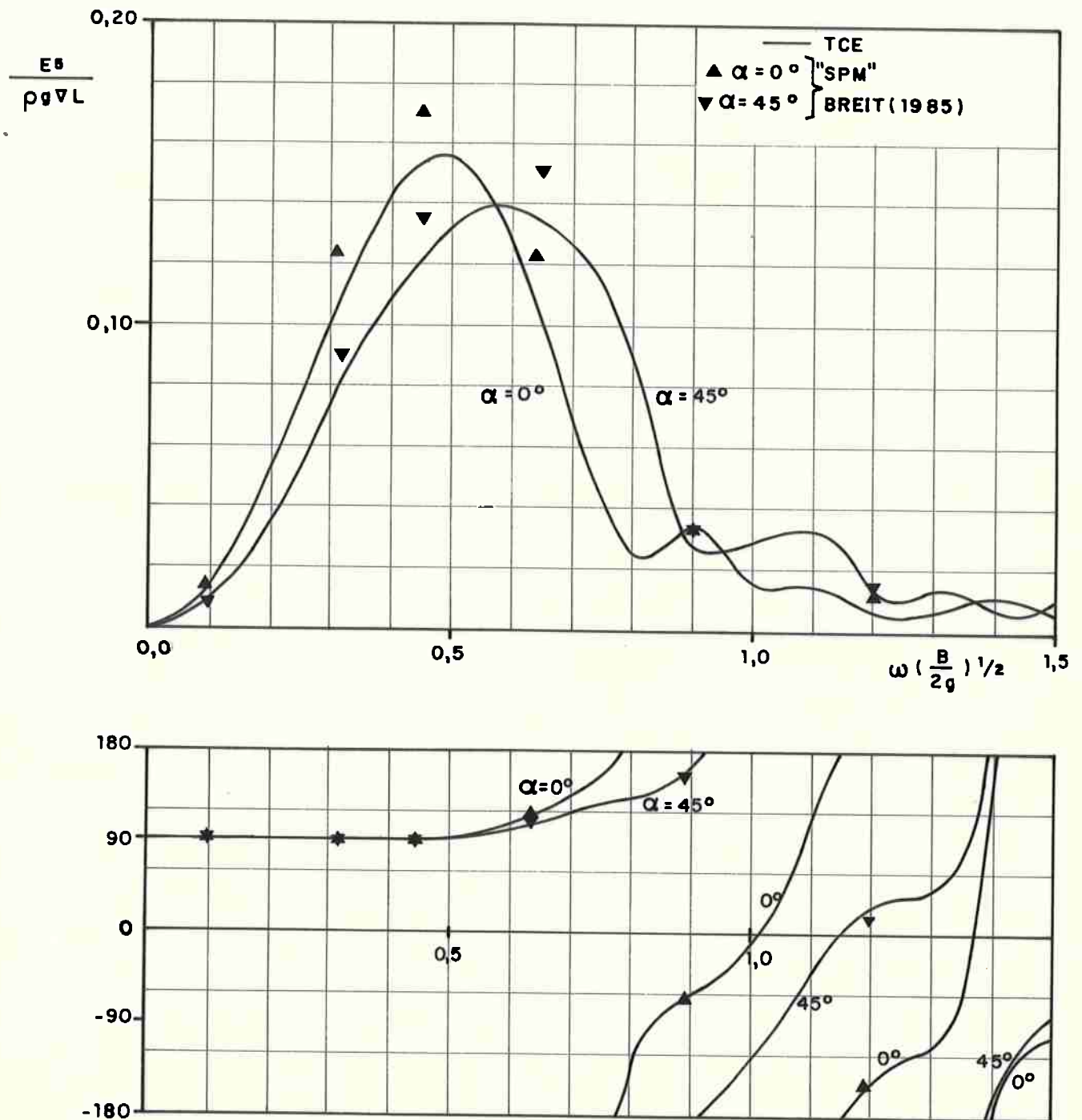


Figura 4.10. - Elipsóide de Revolução 1:8 "Pitch".
 Força de Excitação
 Profundidade Infinita

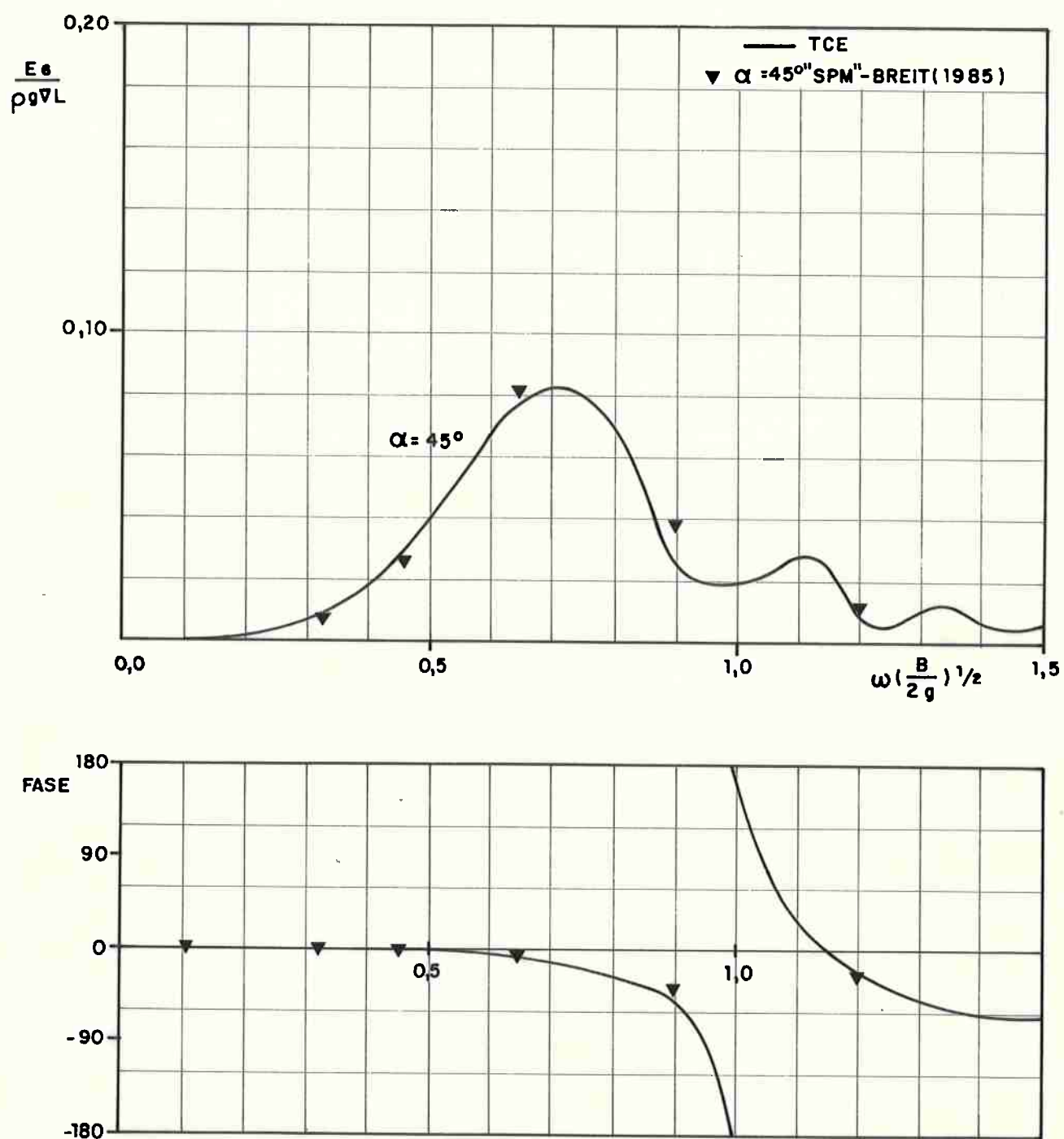


Figura 4.11.- Elipsóide de Revolução 1:8. "Yaw".
 Força de Excitação.
 Profundidade infinita.

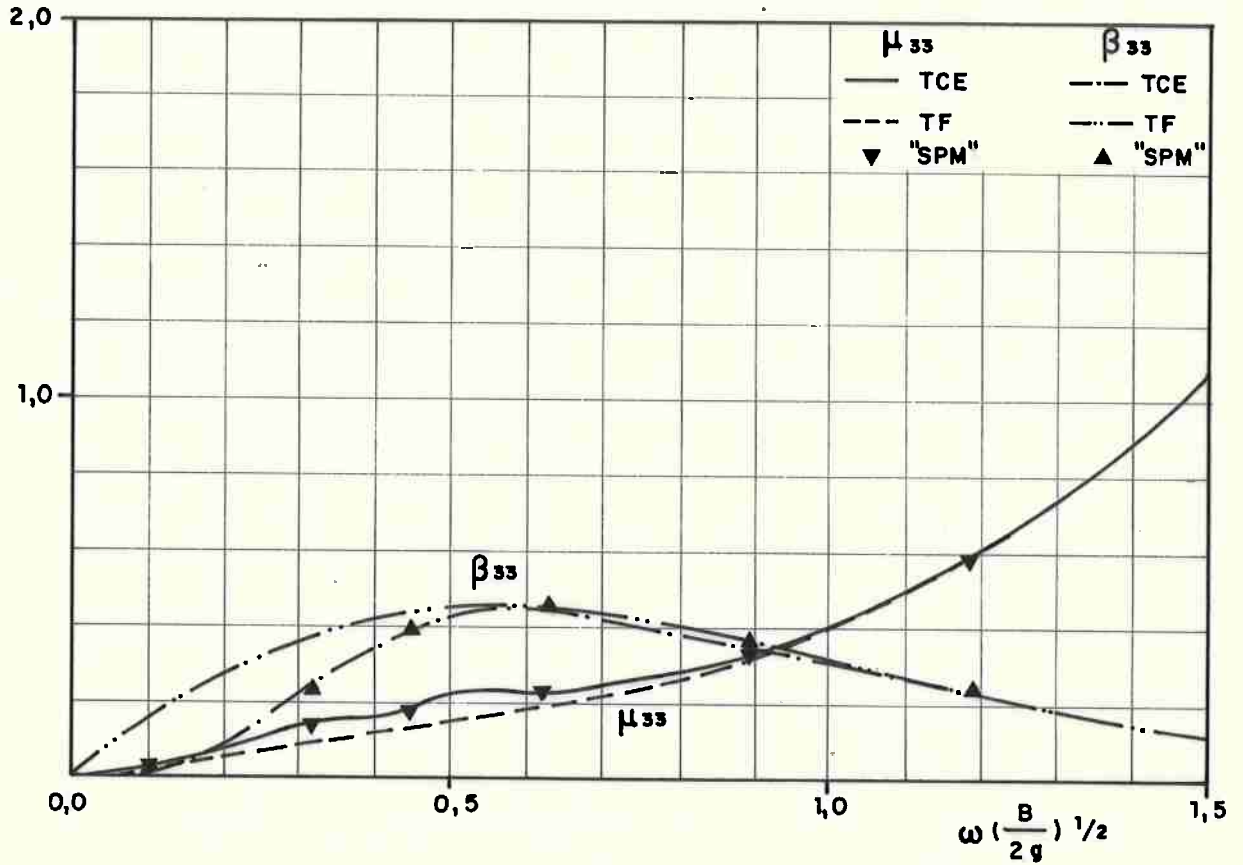


Figura 4.12. - Elipsóide de Revolução 1:8 "HEAVE"
Forças hidrodinâmicas reativas inerciais e de amortecimento comparadas à força hidrostática:

$$\mu_{33} = \frac{\omega^2 M_{33}}{\rho g A W} ; \quad \beta_{33} = \frac{\omega D_{33}}{\rho g A W}$$

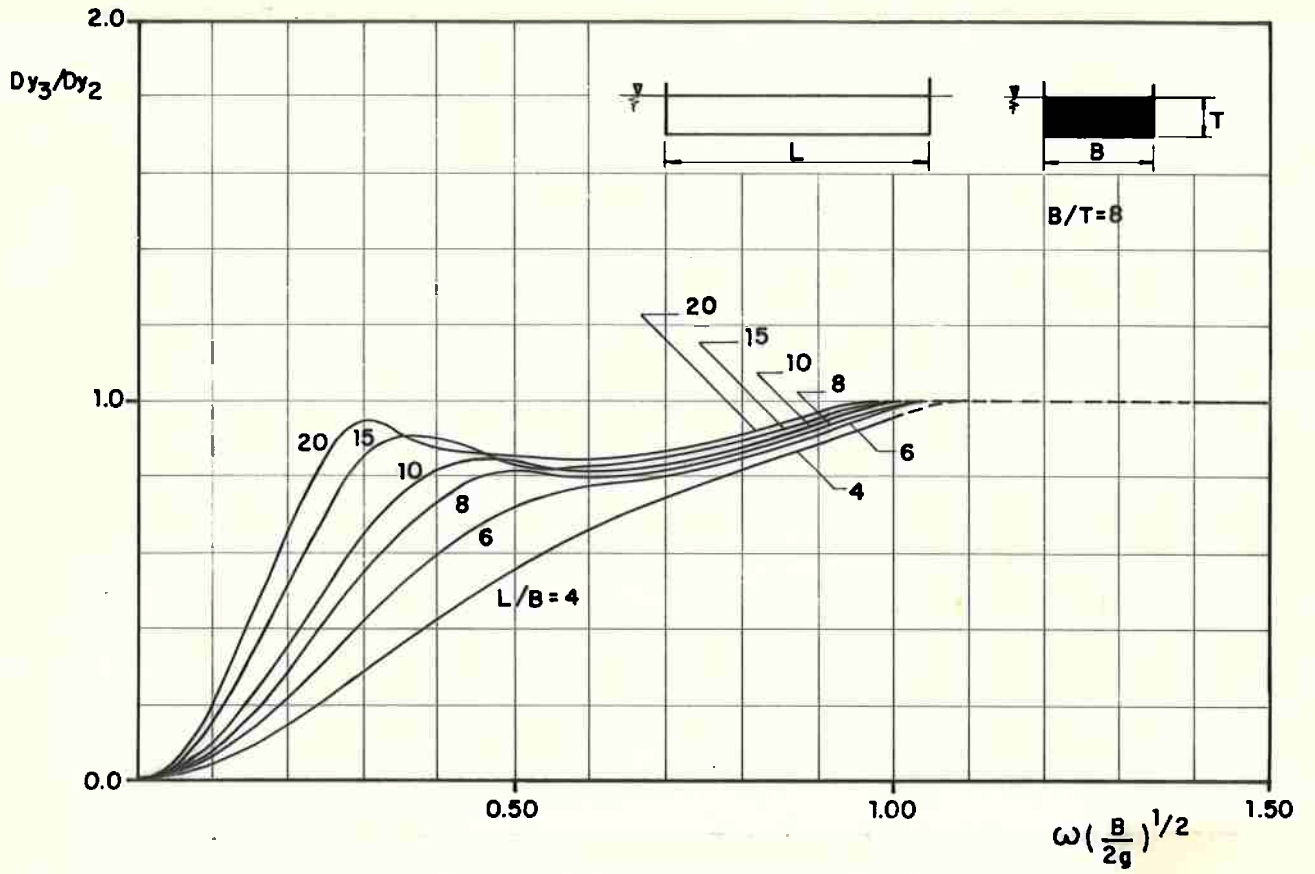


Figura 4.13.-Coeficiente de força de deriva em um corpo prismático de seção retangular (D_{y_3} : TCE; D_{y_2} : TF).

5. CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Não é intenção deste último capítulo fazer um apanhado das diversas conclusões e observações específicas que podem ser apreciadas em todo o decorrer do presente trabalho.

É intenção, isto sim, procurar ressaltar algumas idéias fundamentais que nortearam seu desenvolvimento. Estas idéias tem, em essência, uma única fonte: *"a busca de uma visão mais sistêmica do fenômeno estudado"*. E é através de uma delicada combinação entre um observar ora geral e distante, ora preciso e detalhado, que se aguça a capacidade de compreensão.

Assim, um enfoque sistêmico e clássico da mecânica, o *enfoque variacional*, trouxe a um problema também clássico da hidrodinâmica, a *interação hidromecânica de corpos flutuantes na presença de superfície livre*, uma formulação analiticamente mais adequada.

Propiciou, sob hipóteses de excitação harmônica e velocidade nula de avanço, o *estabelecimento de um princípio variacional* (PV2) que trata diretamente das grandezas físicas de maior interesse neste problema: *"as forças hidrodinâmicas generalizadas agentes sobre o corpo"*.

Este princípio diz, fundamentalmente, que: *"as forças hidrodinâmicas generalizadas são valores estacionários de funcionais bem definidos, os quais representam uma medida do balanço da "co-energia" dos campos potenciais associados às perturbações causadas pelo corpo sobre o meio fluido"*.

Estes funcionais são de estrutura bilinear e seus valores estacionários tem, portanto, erro da forma $(1+O(\delta^2))$ quando aproximações variacionais com erro da forma $(1+O(\delta))$ são utilizadas para representar os campos potenciais. É ainda notável sua semelhança, em forma, com o clássico quociente de Rayleigh.

O enunciado do PV2 se fez com o uso da *"formulação fraca"* associada ao problema, o que, no presente contexto, significa tratá-lo em um espaço de funções menos restritivo: aquele que exige tão somente a *finitude de energia* do campo potencial.

A aplicação deste princípio é bastante abrangente, compreendendo toda a classe de problemas representáveis na forma de uma série assintótica, sob a hipótese de "*pequenos deslocamentos*" do sistema hidromecânico. Permite, portanto, estudar as perturbações de ordem-superior. Em particular, a simetria destes funcionais conduz natural e diretamente a uma generalização das Relações de Haskind-Hanaoka.

Mostrou-se ainda que o princípio variacional de Bessho é um caso particular do PV2, no contexto do problema de primeira-ordem, e quando se admite que as funções admissíveis, no uso do método variacional direto, sejam funções de Green.

Foi, contudo, no problema de primeira-ordem, também dito "*linear*", que a aplicação deste princípio foi exemplificada. Primeiramente, e de forma analítica no caso geral tridimensional, através da adoção do método variacional direto. Particularmente no caso bidimensional, estendendo-se até a elaboração de um método numérico específico, o MVB (Método Variacional Bidimensional).

Os resultados então conseguidos confirmaram o poder do enfoque variacional. De um lado, permitindo isolar as parcelas correspondentes às perturbações de campo próximo (evanescentes) e às perturbações de campo distante (propagantes). Isto conduz a uma melhor interpretação física do problema, e leva ao estabelecimento das usuais relações de reciprocidade e de energia através de transformações algébricas. De outro lado, permite recuperar com grande precisão os coeficientes hidrodinâmicos globais em toda a faixa de frequências de interesse, a partir de aproximações variacionais diretas, que contam com um número bastante reduzido de "*funções-teste elementares*".

Outro exemplo radiante^(*) que resulta de um enfoque mais sistêmico ao presente problema é a Teoria do Corpo Esbelto. Sua

(*) (Em que pese a conotação específica que a este qualificativo poderia ser aqui atribuída).

aplicação conjunta ao Método Variacional Bidimensional pode então ser entendida natural, porquanto compartilham de uma mesma linha de pensamento.

A TCE resulta da aplicação da técnica das expansões as sintóticas compatibilizadas, na qual soluções em campo próximo e distante são tornadas compatíveis em uma região intermediária através da solução de uma equação integral de Fredholm, de segunda espécie.

Do ponto de vista teórico permite visualizar como o fluxo de energia que é, em campo próximo, bidimensional, se compatibiliza com o fluxo em campo distante, de natureza tridimensional. Permite ainda calcular os coeficientes hidrodinâmicos globais de forma imediata, a partir dos resultados correspondentes às soluções dos diversos problemas bidimensionais.

Do ponto de vista prático tal conjunção trouxe uma maior eficiência à solução de uma importante classe de problemas: o comportamento de corpos esbeltos flutuantes em ondas de superfície. Os exemplos numéricos apresentados confirmam plenamente esta afirmativa. Comparado ao desempenho computacional de um método tridimensional usual de distribuição de singularidades, a conjunção TCE & MVB provou ser cerca de cem vezes mais eficiente.

Por fim cabe ressaltar algumas sugestões de continuidade para trabalhos futuros. Algumas de cunho essencialmente teórico, outras de caráter mais prático ou aplicativo.

i) Sugestões de natureza teórica:

- a) abordar sob o enfoque variacional o *problema geral transiente*;
- b) aprofundar-se em questões da presente formulação que exigem um maior rigor matemático, como por exemplo, a condição de "*continuidade fraca*", citada no capítulo 2;

- c) generalizar, para o caso linear tridimensional, a condição necessária e suficiente, estabelecida no capítulo 3, no contexto bidimensional, para a existência de "*massa adicional negativa*", buscando interpretações físicas que permitam prever esta ocorrência;
- d) investigar, através do enfoque variacional, a possibilidade de *estabelecer as relações de reciprocidade em uma teoria de grupos*;
- e) formular, através do enfoque variacional, outros fenômenos, de natureza sabidamente não-linear, como a existência de ondas confinadas em corpos submersos e ressonância não-linear^(*);
- f) estabelecer, matematicamente, um teorema de convergência para o MVB;
- g) investigar o comportamento singular da equação integral na TCE, verificado na figura 4.13.

ii) Sugestões de natureza aplicativa

- a) generalizar a presente formulação e o PV2 para o caso de velocidade de avanço não nula; estender esta generalização para o caso de incidência de corrente;
- b) desenvolver o MVT (Método Variacional Tridimensional), sob a mesma ótica do MVB, aplicável a corpos tridimensionais de geometria arbitrária;
- c) desenvolver o MVCE (Método Variacional para Corpos Esbeltos), específico, no qual as funções teste-elementares se constituiriam em funções "*densidade*", distribuída ao longo do comprimento do corpo;
- d) realizar experimentos numéricos com o MVB (e com MVT e MVCE), utilizando-se apenas funções-teste derivadas de singularidades elementares em fluido sem fronteira;

(*) Este tópico já tem sido abordado (ver Aranha (1987)).

- e) estender o atual MVB para o caso de incidência arbitrária, cuja equação de campo é a equação de Helmholtz; esta extensão é fundamental para o cômputo de grandezas que dependem do conhecimento do potencial espalhado, como por exemplo as forças médias de deriva;
- f) "*construir*" funções-teste elementares que permitam, no contexto do MVB (e dos futuros MVT e MVCE), considerar a ação de superfícies de sustentação tais como hidrofólios, bolinas;
- g) aplicar o PV2 a problemas da hidroelasticidade na presença de superfície livre, como por exemplo o estudo de vibrações estruturais do navio, conforme sugerido no capítulo 2;
- h) abordar o clássico problema de "*resistência de ondas*" ao avanço de uma embarcação.

* * *

APÊNDICE A - RELAÇÕES DE CONSERVAÇÃO E FLUXO DE ENERGIA

A.1. - Fluxo de Energia

Considere inicialmente o problema potencial geral $\phi(x,y,z,t)$, equacionado no domínio $\tilde{\Omega}^\infty$ por (2.1) com $P(x,y,t) = 0$ em S_F (ver capítulo 2). Suponha um volume de controle $\tilde{\Omega}$ definido pelas superfícies do corpo S_B , do fundo S_H , livre S_F e por uma superfície de controle S_R , não material, sem perda de generalidade suposta cilíndrica e a uma distância R do centro O de coordenadas (ver figura 2.1, capítulo 2).

A taxa de variação no tempo da energia total E contida em $\tilde{\Omega}$ é dada por

$$\frac{dE}{dt} = \rho \frac{d}{dt} \iiint_{\tilde{\Omega}} \left(\frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 + gz \right) d\tilde{\Omega} \quad (A.1)$$

Aplicando o teorema do transporte, com U_n a componente de velocidade normal à fronteira $S_{\tilde{\Omega}}$, vem

$$\frac{dE}{dt} = \rho \iiint_{\tilde{\Omega}} \left\{ \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 + gz \right\} d\tilde{\Omega} + \rho \iint_{S_{\tilde{\Omega}}} \left(\frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 + gz \right) U_n dS \quad (A.2)$$

Então, visto que z é variável independente e que

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 \right) - \nabla\phi \cdot \nabla \frac{\partial\phi}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\nabla\phi \frac{\partial\phi}{\partial t} \right) - \frac{\partial\phi}{\partial t} \nabla^2\phi = \nabla \cdot \left(\nabla\phi \frac{\partial\phi}{\partial t} \right) \quad (A.3)$$

segue, do teorema de Gauss

$$\frac{dE}{dt} = \rho \iint_{S_{\tilde{\Omega}}} \left\{ \frac{\partial\phi}{\partial n} \frac{\partial\phi}{\partial t} + \left(\frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 + gz \right) U_n \right\} dS \quad (A.4)$$

Considerando fixas as superfícies S_R e S_H vem

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} = \rho \iint_{S_B \sim US \sim F} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial n} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \left(\frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + gz \right) U_n \right\} dS + \\ + \rho \iint_{S_R} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dS \end{aligned} \quad (A.5)$$

Por outro lado, da equação de Bernoulli

$$\frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + gz = - \left(\frac{p}{\rho} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \quad (A.6)$$

onde a pressão de referência foi suposta nula, sem perda de generalidade. E também das condições de contorno

$$p = 0 \quad \text{em } S_F$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = U_n \quad \text{em } S_B \text{ e } S_F$$

segue que

$$\frac{dE}{dt} = - \iint_{S_B} p U_n dS + \rho \iint_{S_R} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dS \quad (A.8)$$

Em outras palavras, a variação da energia total no volume de controle $\tilde{\Omega}$ é igual ao fluxo de energia que passa por S_R somado à potência das forças de pressão entregue ao fluido através da superfície do corpo S_B . Note que *não existe fluxo de energia através da superfície livre.*

Visto que S_R é arbitrária, fazendo $R \rightarrow \infty$ obtêm-se

$$\frac{dE}{dt} = - \iint_{S_B} p U_n dS + \rho \iint_{S_R} \frac{\partial \phi}{\partial n} \frac{\partial \phi}{\partial t} dS \quad (\text{A.8.a})$$

Se ϕ for evanescente, ou seja se

$$r^{1/2} \left(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial r}, \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \rightarrow 0 ; r \rightarrow \infty$$

a variação de energia em $\tilde{\Omega}^\infty$ fica expressa apenas como uma integral no corpo

$$\frac{dE}{dt} = - \iint_{S_B} p U_n dS \quad (\text{A.8.b})$$

A.2. - Fluxo Médio de Energia no Problema Linear

Considere agora o problema linear (ou em primeira-ordem). O volume de controle considerado neste caso é denotado Ω , delimitado por S_B , S_F , S_R e S_H (ver figura 2.2) S_B e S_F definem a posição de equilíbrio hidrostático do sistema hidromecânico. Seja

$$\phi(x,y,z,t) = \text{Re} \{ \phi(x,y,z) e^{i\omega t} \} \quad (\text{A.9})$$

segue então que

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial n} = - \frac{\omega}{2} \{ \text{Im} \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial n} e^{2i\omega t} \right) + \text{Im} \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) \} \quad (\text{A.10})$$

Definindo \bar{E} como a média da variação de energia em $\tilde{\Omega}$ em um ciclo tal que

A.4.

$$\bar{E} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dE}{dt} dt = \frac{1}{T} \{ E(T) - E(0) \} \quad (\text{A.11})$$

Lembrando que $\bar{E} = 0$ para solução periódica e definindo em S_B

$$p = \operatorname{Re}(p_0 e^{i\omega t}) \quad (\text{A.12})$$

vem de (A.8)

$$-\frac{1}{2} \iint_{S_B} \operatorname{Re}(p_0 \frac{\partial \phi^*}{\partial n}) dS = \frac{\omega \rho}{2} \iint_{S_R} \operatorname{Im}(\phi \frac{\partial \phi^*}{\partial n}) dS \quad (\text{A.13})$$

Definindo ainda

$$\vec{u}(x,y,z,t) = \operatorname{Re}\{\vec{u}_0(x,y,z) e^{i\omega t}\} ; (x,y,z) \in S_B \quad (\text{A.14})$$

como o vetor deslocamento de um ponto qualquer em S_B em torno de sua posição de equilíbrio hidrostático segue, em primeira-ordem

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -i\omega \vec{u}_0^* \cdot \vec{n} ; (x,y,z) \in S_B \quad (\text{A.15})$$

Da equação de Bernoulli linearizada a amplitude de oscilação da pressão dinâmica em cada ponto de S_B será dada por

$$p_0 = -\rho(i\omega\phi + g u_{03}) \quad (\text{A.16})$$

Com (A.15) e (A.16) substituídas em (A.13) vem

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \omega \rho \iint_{S_B} \operatorname{Im}(\phi \frac{\partial \phi^*}{\partial n}) dS - \frac{1}{2} \omega \rho g \iint_{S_B} \operatorname{Im}\{(u_{01} n_1 + u_{02} n_2) u_{03}^*\} dS = \\ = \frac{\omega \rho}{2} \iint_{S_B} \operatorname{Im}(\phi \frac{\partial \phi^*}{\partial n}) dS \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Note que para um corpo rígido a segunda integral se anulará, qualquer que seja sua geometria, e portanto,

$$- \iint_{S_B} \text{Im} \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right)^* dS = \iint_{S_R} \text{Im} \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right)^* dS \quad (\text{A.18})$$

que relaciona os fluxos de energia através de S_B e S_R .

A.3. - Função Lagrangeana no Problema Linear

Considere o domínio complementar a Ω em Ω^∞ denotado $\bar{\Omega}$, delimitado por $S_{\bar{F}}$, $S_{\bar{H}}$, S_R e S_{R^∞} .

Considere o produto $(\nabla^2 \bar{\phi}) \bar{\psi}$, $\bar{\psi}$ arbitrário (*). O usual processo de integração por partes e aplicação do teorema de Gauss conduz a

$$\iiint_{\bar{\Omega}} \nabla \bar{\phi} \nabla \bar{\psi} \, d\bar{\Omega} - \sigma \iint_{S_{\bar{F}}} \bar{\phi} \bar{\psi} \, dS - \iint_{S_R} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} \bar{\psi} \, dS - \iint_{S_{R^\infty}} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} \bar{\psi} \, dS = 0 \quad (\text{A.19})$$

Em particular se $\bar{\psi} = \bar{\phi}^*$ (A.19) fica

$$\iiint_{\bar{\Omega}} |\nabla \bar{\phi}|^2 \, d\bar{\Omega} - \sigma \iint_{S_{\bar{F}}} |\bar{\phi}|^2 \, dS = \text{Re} \left\{ \iint_{S_R} \bar{\phi} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} \, dS + \iint_{S_{R^\infty}} \bar{\phi} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} \, dS \right\} \quad (\text{a})$$

(**)
(A.20)

$$- \text{Im} \iint_{S_R} \bar{\phi} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} \, dS = \text{Im} \iint_{S_{R^\infty}} \bar{\phi} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} \, dS \quad (\text{b})$$

(*) $\bar{\psi}$ de classe C_1 .

(**) Note que se $S_R \equiv S_B$, (A.20.b) recai em (A.18).

O primeiro termo de (A.20.a), $\bar{\omega}$ é a menos de uma constante multiplicativa, a diferença entre energia cinética T e potencial U , em $\bar{\Omega}$. Note que como $\bar{\Omega}$ é infinito, T e U são grandezas não mensuráveis.

Se ϕ for separado em duas parcelas, a primeira propagante ϕ_p e a segunda evanescente ϕ_e , tal que $r^{1/2} (\bar{\phi}_e, \nabla \bar{\phi}_e) \rightarrow 0$, $r \rightarrow \infty$, e se apenas ϕ_e for considerado, segue de (A.20) que

$$\iiint_{\bar{\Omega}} |\nabla \phi_e|^2 d\bar{\Omega} - \sigma \iint_{S_F} |\bar{\phi}_e|^2 dS = \text{Re} \iint_{S_R} \bar{\phi}_e \frac{\partial \bar{\phi}_e^*}{\partial n} dS \quad (\text{a})$$

(A.21)

$$\text{Im} \iint_{S_R} \bar{\phi}_e \frac{\partial \bar{\phi}_e}{\partial n} = 0 \quad (\text{b})$$

ou seja a diferença entre energia cinética e potencial de ϕ_e é definida completamente por uma integral em S_R , e o fluxo de energia é nulo.

Como S_R é arbitrária pode-se tomar $S_R \equiv S_B$ e a assertiva acima se aplica a todo o domínio Ω , com S_B no lugar de S_R . Explicitamente

$$\iiint_{\Omega} |\nabla \phi_e|^2 d\Omega - \sigma \iint_{S_F} |\phi_e|^2 dS = \text{Re} \iint_{S_B} \phi_e \frac{\partial \phi_e^*}{\partial n} dS = \frac{2}{\rho} (T_e - U_e) \quad (\text{a})$$

(A.22)

e

$$\text{Im} \iint_{S_B} \phi_e \frac{\partial \phi_e^*}{\partial n} dS = 0 \quad (\text{b})$$

onde T_e e U_e foram definidas como a energia cinética e potencial em todo o domínio fluido.

Note que tanto T_e quanto U_e são finitas, neste caso.

Reconhecendo

$$W_e = \rho \omega \operatorname{Re} \iint_{S_B} \phi_e \frac{\partial \phi_e^*}{\partial n} dS \quad (\text{A.23})$$

como a taxa média, no tempo, do trabalho realizado pelo corpo sobre o meio fluido, pode-se definir uma "função Lagrangeana" para ϕ_e como

$$L(\phi_e) = T_e - U_e - W_e = -\frac{\rho}{2} \omega \operatorname{Re} \iint_{S_B} \phi \frac{\partial \phi_e^*}{\partial n} dS \quad (\text{A.24})$$

Na notação do capítulo 2

$$L(\phi_e) = \rho \left\{ \frac{1}{2} G(\phi_e, \phi_e^*) - V(\phi_e^*) \right\} = \rho J^*(\phi_e) \quad (\text{A.25})$$

* * *

APÊNDICE B - Forma alternativa do MVB

Uma forma alternativa de desenvolver o MVB consiste em formulá-lo considerando não o potencial espalhado, mas sim o potencial difratado.

Esta alternativa conduz, no que concerne aos coeficientes hidrodinâmicos associados à difração, a resultados que diferem em sua forma e cuja estrutura permite demonstrar algumas relações diretamente, relações estas válidas não obstante o grau de precisão da aproximação variacional adotada.

Considere então os coeficientes A_{07} e A_{08} , agora associados aos potenciais difratados par e ímpar respectivamente, tal que

$$\begin{aligned} A_{07} &= \frac{1}{2} (T + R) e^{2iK_0 b} \\ A_{08} &= \frac{1}{2} (T - R) e^{2iK_0 b} \end{aligned} \quad (B.1)$$

Considere também o coeficiente δ_j definido como

$$\delta_j = 0 \quad ; \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$\delta_j = \pm 1 \quad ; \quad j = 7, 8$$

Não é difícil então verificar que o comportamento assintótico dos potenciais ψ_j no infinito é dado por

$$\begin{aligned} \psi_j(y, z) \sim \left\{ \left(A_{0j} + \frac{\delta_j}{2} \right) e^{iK_0(|y|-b)} + \frac{\delta_j}{2} \left(e^{-iK_0(|y|-b)} - e^{iK_0(|y|-b)} \right) \right\} f_0(z) \\ j = 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8 \end{aligned} \quad (B.3)$$

com

$$L_0(\psi_j) = A_{0j} + \frac{\delta_j}{2} \quad j = 1, 2, 3, 4, 7, 8 \quad (B.4)$$

É importante observar que os potenciais difratados ($j = 7, 8$) não apresentam um comportamento puramente de radiação devido à presença do potencial de onda incidente. A parcela $\delta_j/2 \{e^{-iK_0(|y|-b)} - e^{+iK_0(|y|-b)}\} f_0(z)$ desempenha o mesmo papel de ϕ_N^P , no capítulo 2, com a restrição $f_N(y) \equiv 0$. Assim as equações fracas podem ser escritas

$$G^e(\psi_j; \Psi) = iK_0 \left(A_{0j} - \frac{\delta_j}{2} \right) L_0(\Psi) + (1 - |\delta_j|) V_j(\Psi) \quad (\text{B.5})$$

$$V_j(\Psi) = \int_{\Gamma_B} v_j \Psi ds \quad ; \quad j = 1, 2, 3, 4$$

O procedimento seguido no capítulo 3, para desmembrar os potenciais ψ_j em parte propagante e parte evanescente é absolutamente análogo, conduzindo aos seguintes resultados ($j=1, 2, \dots, 7, 8$)

$$A_{0j} = -\frac{\delta_j}{2} \frac{G^{e\pm} + iK_0}{G^{e\pm} - iK_0} + (1 - |\delta_j|) \frac{V_j(p^\pm)}{G^{e\pm} - iK_0} \quad (\text{B.6})$$

$$\psi_j = \left(A_{0j} + \frac{\delta_j}{2} \right) p^\pm(y, z) + (1 - |\delta_j|) \psi_j^e(y, z) \quad (\text{B.7})$$

onde, por concisão

$$G^{e\pm} = G^e(p^\pm, p^\pm) \quad (\text{B.8})$$

Note que para $j=1, 2, \dots, 5, 6$ as expressões (B.6) e (B.7) são idênticas às suas correspondentes desenvolvidas no capítulo 2.

Note também que o potencial difratado \bar{e} , a menos de uma constante multiplicativa, a própria função $p^\pm(y, z)$ (parte par ou ímpar).

Observar que a parte imaginária dos potenciais de radiação é o próprio potencial difratado, a menos de uma constante, um resultado sem dúvida bastante interessante, e que foi implícita -

mente utilizado por Newman (1978) no desenvolvimento da teoria unificada. (ver capítulo 4).

Os resultados concernentes à massa adicional e amortecimento permanecem inalterados (ver capítulo 2). Porém os coeficientes de reflexão e transmissão ficam expressos como

$$R(\omega) = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{G^{e-} + iK_0}{G^{e+} - iK_0} + \frac{G^{e+} + iK_0}{G^{e-} - iK_0} \right\} e^{-2iK_0 b} \quad (\text{B.9})$$

$$T(\omega) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{G^{e-} + iK_0}{G^{e+} - iK_0} - \frac{G^{e+} + iK_0}{G^{e-} - iK_0} \right\} e^{-2iK_0 b} \quad (\text{B.10})$$

A estrutura algébrica de (B.9) e (B.10) permite demonstrar diretamente que

$$|R|^2 + |T|^2 = 1 \quad (\text{B.11})$$

$$RT^* + R^*T = 0 \quad (\text{B.12})$$

Por sua vez de (B.6) e da expressão geral para os coeficientes de força de excitação segue que:

$$E_j(\omega) = (-1)^j \Delta_{j\ell} \frac{iK_0 v_j(p^\pm)}{G^{e^\pm} - iK_0} = (-1)^j \Delta_{j\ell} iK_0 A_{oj};$$

$$j = 1, 2, 3, 4$$

$$\ell = 7, 8 \quad (\text{B.13})$$

demonstrando automaticamente as relações de Haskind-Hanaoka.

Portanto, pelo menos no contexto da presente formulação alternativa, as relações (B.11 - B.13) não podem ser utilizadas como critério de convergência de erro, posto que são sempre satisfeitas, não importando o grau de precisão da aproximação variacional utilizada.

APÊNDICE C - FUNÇÕES - TESTE ELEMENTARES NO MÉTODO VARIACIONAL BIDIMENSIONAL

O presente apêndice desenvolve e analisa algumas funções-teste elementares apropriadas à solução do problema bidimensional, através do MVB, sob hipótese de velocidade de avanço nula.

Visto que a aplicação do MVB, apresentada no capítulo 3 a título de exemplo de funcionamento do método variacional, se fez no contexto de profundidade infinita, a função-base aqui analisada deriva da função de Green deste problema. Cumpre lembrar, porém, que sua utilização não se restringe a este caso, posto que a matriz $[G_{mn}^e]$ pode ser convenientemente calculada, conforme apresentada na expressão (3.85).

Antes de serem elaboradas as funções-teste propriamente ditas, as propriedades da função base e de algumas funções elementares, compostas por dipolos e vórtices em fluido sem fronteiras, serão analisadas.

A motivação física da escolha destas funções é discutida no capítulo 3, seção 3.2.4, aqui cabendo detalhar alguns aspectos mais técnicos.

C.1. - A função base $\Gamma(y, z; y_0, z_0)$

O MVB foi elaborado no espaço das funções evanescentes, $W_2^{(1)}(S)$, ou seja, que decaem exponencialmente com $|y|$.

É natural, portanto, que a função-base $\Gamma(y, z; y_0, z_0)$ seja tomada como a parte evanescente da função de Green do problema bidimensional, acrescida de *funções harmônicas apropriadas*.

Sejam então:

$$W = -k_0 |z+z_0| + i k_0 |y-y_0| \quad (C.1)$$

e

$$F(W) = e^W E_1(W) \quad (C.2)$$

onde (y_0, z_0) são as coordenadas do polo (fonte ou sorvedouro) e $E_1(W)$ é a função integral definida como:

$$E_1(W) = \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{\xi} \cdot e^{-\xi W} \quad (C.3)$$

A função $\Gamma(y, z; y_0, z_0)$ é definida como:

$$\Gamma(y, z; y_0, z_0) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \{ F(W) \} + \frac{1}{\pi} \ln \frac{|y-y_0|^2 + |z-z_0|^2}{|y-y|^2 + |z+z|^2} + e^{-K_0|z+z_0|} \sin K_0|y-y_0| \quad (C.4)$$

A primeira parcela é a parte evanescente da função de Green bidimensional, em águas de profundidade infinita (ver, p. ex., Newman (1978), pg. 246).

A segunda e a terceira parcelas são funções harmônicas apropriadas, como será visto adiante.

As derivadas da função $\Gamma(y, z; y_0, z_0)$ são dadas por:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial y}(y, z; y_0, z_0) = s(y-y_0) \left\{ \frac{k_0}{\pi} \operatorname{Im} F(W) + \frac{|y-y_0|}{2\pi} \left[\frac{1}{|y-y_0|^2 + |z-z_0|^2} + \frac{1}{|y-y_0|^2 + |z-z_0|^2} \right] + K_0 e^{-K_0|z+z_0|} \cos K_0|y-y_0| \right\} \quad (*) \quad (C.5)$$

(*) Pode se verificar que o primeiro e o terceiro termo são descontínuos em $y = y_0$, porém se anulam identicamente; esta é a razão de incluir o termo propagante $e^{-K_0|z+z_0|} \sin K_0|y-y_0|$ na função-base $\Gamma(y, z; y_0, z_0)$, e o que permite utilizar $\frac{\partial \Gamma}{\partial y}(\cdot)$ na composição das funções-teste elementares como será visto adiante.

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma}{\partial z}(y, z; y_0, z_0) = & K_0 \Gamma(y, z; y_0, z_0) - \frac{K_0}{4\pi} \ln \frac{|y-y_0|^2 + |z-z_0|^2}{|y-y_0|^2 + |z+z_0|^2} + \\ & + \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{z+z_0}{|y-y_0|^2 + |z+z_0|^2} + \frac{z-z_0}{|y-y_0|^2 + |z-z_0|^2} \right\} \end{aligned} \quad (C.6)$$

onde $s(y)$ é a função sinal.

Visto que $\nabla^2(\operatorname{Re}(F(W))) = 0$ (ver, p.ex., Newman (1978)), a função $\Gamma(y, z; y_0, z_0)$ é harmônica, ou seja:

$$\nabla^2 \Gamma(y, z; y_0, z_0) = 0 \quad (C.7)$$

Assim,

$$\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial y^2} = - \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial z^2} \quad (C.8)$$

e, portanto, de (C.6)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial y^2}(y, z; y_0, z_0) = & -K_0 \frac{\partial \Gamma}{\partial z}(y, z; y_0, z_0) + \frac{K_0}{2\pi} \left[\frac{z-z_0}{|y-y_0|^2 + |z-z_0|^2} - \frac{z+z_0}{|y-y_0|^2 + |z+z_0|^2} \right] \\ & - \frac{1}{2\pi} \left[\frac{(y-y_0)^2 - (z+z_0)^2}{(y-y_0)^2 + (z+z_0)^2} + \frac{(y-y_0)^2 - (z-z_0)^2}{((y-y_0)^2 + (y-z_0)^2)} \right] \end{aligned} \quad (C.9)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial y \partial z} (y, z; y_0, z_0) &= K_0 \frac{\partial \Gamma}{\partial y} (y, z; y_0, z_0) - s (y - y_0) |y - y_0| \cdot \\ &\cdot \left\{ \frac{K_0}{2\pi} \left[\frac{1}{(y - y_0) + (z - z_0)} \frac{1}{(y - y_0) + (z + z_0)} \right] + \right. \\ &\left. + \frac{1}{\pi} \left[\frac{z + z_0}{((y - y_0)^2 + (z + z_0)^2)^2} \frac{z - z_0}{((y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (C.10)$$

A expressão (C.5) pode ser verificada facilmente a partir da seguinte identidade:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left\{ -\frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \{F(W)\} \right\} = \frac{K_0}{\pi} \operatorname{Im} \{F(W)\} + \frac{1}{\pi} \frac{|y - y_0|}{[y - y_0]^2 + [z + z_0]^2}$$

a qual segue da propriedade (ver Abramowitz & Stegun, pg. 230).

$$\frac{dF}{dW} = F(W) - \frac{1}{W} \quad (C.11)$$

aplicada à expressão $\frac{\partial}{\partial y} \left\{ -\frac{1}{2\pi} |F(W) + F(W^*)| \right\}$. A expressão (C.6) pode também ser verificada de forma análoga.

$$\text{Note que } \frac{\partial \Gamma}{\partial z} (y, 0; y_0, z_0) = K_0 \Gamma (y, 0; y_0, z_0) \quad (6.6.a)$$

e ainda que, da propriedade (A & S, pg. 228) (*)

$$E_1(-x \pm i0) = -E_1(x) \mp i\pi \quad (C.12)$$

(*) A & S : Abramowitz & Stegun

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{\partial \Gamma}{\partial y} = 0 \quad (C.13)$$

O comportamento da função base em região próxima ao polo é logarítmico, conforme pode-se verificar, a partir da expansão em série para a função $E_1(W)$, dada em A&S, pg.229, e da expressão (C.4). Assim,

$$\Gamma(y, z; y_0, z_0) \sim \frac{1}{2} \ln r_0; \quad r_0 = \sqrt{(y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} \rightarrow 0 \quad (C.14)$$

Resta por fim determinar o valor do funcional $L_0(\Gamma)$ e de duas derivadas.

Para tanto, além das propriedades (C.11) e (C.12), duas outras serão utilizadas (ver A&S, pgs. 230 e 231)

$$\int \frac{\xi}{a^2 + \xi^2} e^{\xi} d\xi = \operatorname{Re} \left\{ -e^{ia} E_1(-x + ia) \right\} + \text{cte} \quad (C.15)$$

e

$$E_1(z) \sim \frac{e^{-z}}{z}; \quad z \rightarrow \infty \quad (C.16)$$

Definindo a função $\Gamma_1(y, z; y_0, z_0)$ como

$$\Gamma_1(y, z; y_0, z_0) = \Gamma(y, z; y_0, z_0) - e^{-K_0 |z+z_0|} \sin K_0 |y-y_0| \quad (C.17)$$

e calculando

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_1}{\partial \bar{z}} = & \Gamma_1 - \frac{1}{4\pi} \ln \left(\frac{|y-y_0|^2 + |z-z_0|^2}{|y-y_0|^2 + |z+z_0|^2} \right) + \\ & + \frac{1}{2\pi} \left[\frac{z+z_0}{|y-y_0|^2 + |z+z_0|^2} + \frac{z-z_0}{|y-y_0|^2 + |z-z_0|^2} \right] \end{aligned} \quad (C.18)$$

onde $\bar{z} = K_0 z$

segue que, para águas de profundidade infinita

$$\begin{aligned}
 L_0(\Gamma_1) &= \frac{(2K_0)^{1/2}}{K_0} \int_{-\infty}^0 \Gamma_1 e^{\bar{z}} \Big|_{y=b} d\bar{z} = \frac{(2K_0)^{1/2}}{K_0} \left| \int_{-\infty}^0 \frac{d}{dz} (\Gamma_1 e^{\bar{z}}) d\bar{z} - \int_{-\infty}^0 \frac{d\Gamma_1}{dz} e^{\bar{z}} d\bar{z} \right|_{y=b} = \\
 &= \frac{(2K_0)^{1/2}}{K_0} \left\{ \Gamma_1(b, 0; y_0, z_0) + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^0 \ln \left(\frac{|b-y_0|^2 + |z-z_0|^2}{|b-y_0|^2 + |z+z_0|^2} \right) e^{\bar{z}} d\bar{z} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \left(\frac{z+z_0}{|b-y_0|^2 + |z+z_0|^2} + \frac{z-z_0}{|b-y_0|^2 + |z-z_0|^2} \right) dz \right\} - L_0(\Gamma_1)
 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
 L_0(\Gamma_1) &= \frac{(2K_0)^{1/2}}{2K_0} \left\{ \Gamma_1(b, 0; y_0, z_0) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \left(\frac{z-z_0}{|b-y_0|^2 + |z-z_0|^2} - \frac{z+z_0}{|b-y_0|^2 + |z+z_0|^2} \right) dz \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \left(\frac{z+z_0}{|b-y_0|^2 + |z+z_0|^2} + \frac{z-z_0}{|b-y_0|^2 + |z-z_0|^2} \right) dz \right\} = \\
 &= \frac{(2K_0)^{1/2}}{2K_0} \left\{ \Gamma_1(b, 0; y_0, z_0) - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{z-z_0}{|b-y_0|^2 + |z-z_0|^2} e^{\bar{z}} d\bar{z} \right\} \\
 &= \frac{(2K_0)^{1/2}}{2K_0} \left\{ \Gamma_1(b, 0; y_0, z_0) - \frac{e^{\bar{z}_0} |\bar{z}_0|}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{\xi}{(b-y_0)^2 + \xi^2} e^{\xi} d\xi \right\} =
 \end{aligned}$$

C.7.

$$\begin{aligned}
&= \frac{(2K_0)^{1/2}}{2K_0} \left\{ -\frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[F(-K_0 | \bar{z}_0 | + iK_0 |b-y_0|) \right] - \right. \\
&\quad - \frac{e^{-K_0 |\bar{z}_0|}}{\pi} \operatorname{Re} \left[-e^{iK_0 |b-y_0|} E_1(-K_0 |z_0| + iK_0 |b-y_0|) + \right. \\
&\quad \left. \left. + e^{iK_0 |b-y_0|} \lim_{x \rightarrow \infty} E_1(x+ia) \right] \right\} \\
&= \frac{(2K_0)^{1/2}}{2K_0} \left\{ -\frac{1}{\pi} \operatorname{Re} F(W) + \frac{\operatorname{Re}}{\pi} \left[e^W E_1(w) \right] \right\} = 0
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$L_0(\Gamma) = L_0(e^{-K_0 |z+z_0|} \sin K_0 |y-y_0|) \quad (\text{C.19})$$

ou, explicitamente

$$L_0(\Gamma) = \sin K_0 |b-y_0| \frac{e^{K_0 z_0}}{(2K_0)^{1/2}} \quad (\text{C.20})$$

Segue também que

$$L_0\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial y}\right) = K_0 \cos K_0 |b-y_0| \frac{e^{K_0 z_0}}{(2K_0)^{1/2}} \quad (\text{C.21})$$

Ainda, de (C.6), verifica-se que

$$L_0\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial z}\right) = K_0 L_0(\Gamma) \quad (\text{C.22})$$

e, portanto,

$$L_0\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial y \partial z}\right) = K_0 L_0\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial y}\right) \quad (\text{C.23})$$

e

$$L_o \left(\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial y^2} \right) = - L_o \left(\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial z^2} \right) = - K_o^2 L_o (\Gamma) \quad (C.24)$$

É evidente que na construção das funções-teste elementares no espaço $W_2^{(1)}(S)$ ($L(\Psi) = 0$), a partir da função base $\Gamma(\cdot)$, os valores (C.19 - C.21) deverão ser compensados.

C.2. - Algumas Funções Elementares em fluido sem fronteiras

Considere os seguintes pares de singularidades em meio fluido infinito.

i) Par de vórtices com "cortes" horizontais

$$V_H(y, z; y_o, z_o) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \arctg \left(\frac{z+z_o}{y-y_o} \right) + \arctg \left(\frac{z-z_o}{y-y_o} \right) \right\} \quad (C.25)$$

ii) Par de vórtices com "corte" vertical

$$V_V(y, z; y_o, z_o) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \arctg \left(\frac{y-y_o}{z+z_o} \right) + \arctg \left(\frac{y-y_o}{z-z_o} \right) \right\} \quad (C.26)$$

iii) Par de dipolos em y

$$D_y(y, z; y_o, z_o) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{y-y_o}{(y-y_o)^2 + (z+z_o)^2} + \frac{y-y_o}{(y-y_o)^2 + (z-z_o)^2} \right\} \quad (C.27)$$

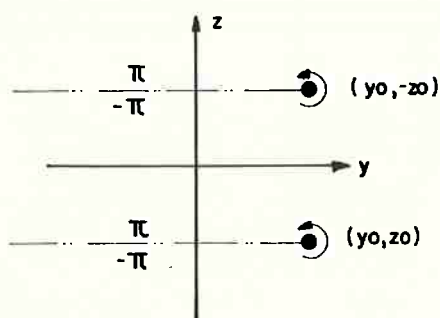
iv) Par de dipolos em z

$$D_z(y, z; y_o, z_o) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{z+z_o}{(y-y_o)^2 + (z+z_o)^2} + \frac{z-z_o}{(y-y_o)^2 + (z-z_o)^2} \right\} \quad (C.28)$$

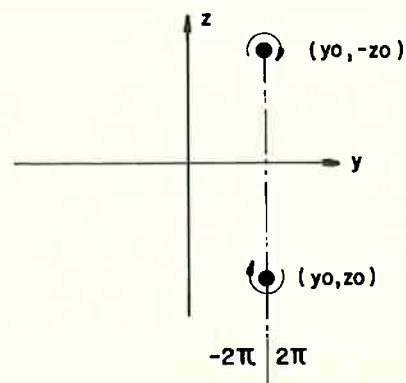
Uma visão pictórica das diversas funções elementares acima definidas é dada na figura C.1. Note que os cortes nas funções V_H e V_V são indicados por linhas tracejadas e estendem-se ao infinito.

Observa-se que

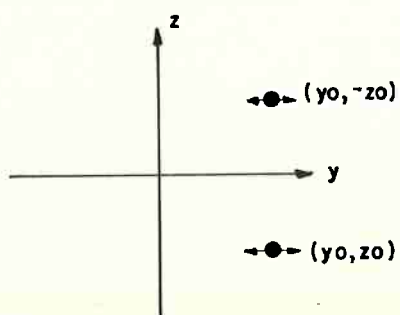
$$\frac{\partial}{\partial y} (V_H(y, z; y_0, z_0)) = - \frac{\partial}{\partial y} (V_V(y, z; y_0, z_0)) = - Dz(y, z; y_0, z_0) \quad (C.29)$$



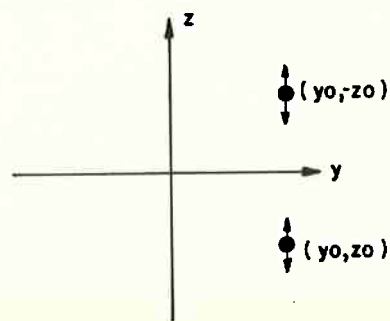
(a) $V_H(y, z; y_0, z_0)$



(b) $V_V(y, z; y_0, z_0)$



(c) $Dy(y, z; y_0, z_0)$



(d) $Dz(y, z; y_0, z_0)$

Figura C.1. - Pares de Singularidades Fundamentais.

e

$$\frac{\partial}{\partial z} (V_H(y, z; y_0, z_0)) = - \frac{\partial}{\partial z} (V_V(y, z; y_0, z_0)) = Dy(y, z; y_0, z_0) \quad (C.30)$$

e que

$$\frac{\partial}{\partial y} Dy = - \frac{\partial}{\partial z} Dz = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{(z+z_0)^2 - (y-y_0)^2}{((y-y_0)^2 + (z+z_0)^2)^2} + \frac{(z-z_0)^2 - (y-y_0)^2}{((y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)^2} \right\}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial z} Dy = \frac{\partial}{\partial y} Dz = - \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{(y-y_0)(z+z_0)}{((y-y_0)^2 + (z+z_0)^2)^2} + \frac{(y-y_0)(z-z_0)}{((y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)^2} \right\} \quad (C.32)$$

As identidades (C.29 - 30) implicam em que

$$\nabla V_H(y, z; y_0, z_0) = - \nabla V_V(y, z; y_0, z_0) \quad (C.33)$$

ou seja, os escoamentos associados a $V_H(y, z; y_0, z_0)$ e $V_V(y, z; y_0, z_0)$ tem "rotação" em sentidos opostos.

Observa-se também que:

$$V_H(y, z; y_0, z_0) \Big|_{z=0} = 0 \quad (C.34)$$

$$\frac{\partial Dy}{\partial z} (y, z; y_0, z_0) \Big|_{z=0} = 0$$

As propriedades e definições acima serão amplamente utilizadas no estabelecimento de funções-teste elementares.

C.3. - As funções-teste elementares

Como foi visto no capítulo 3, seção 3.2.4, as funções admissíveis devem descrever apropriadamente as características do escoamento induzidos pelo corpo, além de, paralelamente, permitir recuperar o comportamento de onda-livre.

As funções-teste $T_{0\pm}(y,z)$, definidas no capítulo 3, encaregam-se da última tarefa.

Para o cumprimento da primeira tarefa foi visto que as características do escoamento de natureza global podem ser bem modeladas por funções com comportamento de polos (pares de fontes, sorvedouros ou "doublets"), dipolos ou mesmo vórtices (ou sistema de vórtices).

Já as características de natureza local, ou mais especificamente o efeito da existência de "vértices", podem ser bem simuladas por "vórtices" ou "sistemas de vórtices". (*)

Estas singularidades devem ser convenientemente posicionadas no interior da seção. A localização apropriada é discutida no capítulo 3.

Antes porém de serem estabelecidas as funções-teste elementares, cumpre lembrar que o problema tratado no MVB refere-se a seções simétricas. A "paridade" ou "imparidade" que caracterizam os diversos problemas de radiação (e espalhamento) serão explicitamente consideradas e denotadas respectivamente pelos sinais (+) ou (-).

C.3.1. - $T_{1\pm}(y,z)$ e $T_{2\pm}(y,z)$: funções-teste elementares com comportamento de polos e dipolos.

Como foi visto no item C.1 a função-base $\Gamma(y,z; y_0, z_0)$ tem comportamento de polo (singularidade do tipo logarítmica). Suas derivadas em relação a y e z tem, portanto, comportamento de dipolo

(*) Na realidade polos e dipolos podem ser utilizados, porém com muito menor eficiência, conforme apresentado no capítulo 3.

los nos eixos y e z respectivamente. Cumpre lembrar que além de harmônica, $\Gamma(y,z; y_0, z_0)$ satisfaz a condição de contorno na superfície livre. Assim a função-base $\Gamma(y,z; y_0, z_0)^{(*)}$ e suas derivadas são escolhas apropriadas para a definição das funções-teste $T_{1\pm}(y,z)$ e $T_{2\pm}(y,z)$.

Lembre, no entanto que $L_0(\Gamma)$, $L_0(\frac{\partial \Gamma}{\partial y})$ e $L_0(\frac{\partial \Gamma}{\partial z})$ são diferentes de zero. Assim, para que funções-teste elementares construídas a partir de $\Gamma(\cdot)$ pertençam ao espaço $\dot{W}_2^{(1)}(S)(L_0(\Psi) = 0)$ estes valores devem ser compensados.

Para tornar o texto mais conciso a seguinte notação será utilizada.

$$\begin{aligned} \Gamma_p &= \Gamma(y,z; y_0, z_0) & ; & & \Gamma_n &= \Gamma(y,z; -y_0, z_0) \\ D_{yp} &= D_y(y,z; y_0, z_0) & ; & & D_{yn} &= D_y(y,z; -y_0, z_0) \\ D_{zp} &= D_z(y,z; y_0, z_0) & ; & & D_{zn} &= D_z(y,z; -y_0, z_0) \\ V_{Hp} &= V_H(y,z; y_0, z_0) & ; & & V_{Hn} &= V_H(y,z; -y_0, z_0) \\ V_{vp} &= V_v(y,z; y_0, z_0) & ; & & V_{vn} &= V_v(y,z; -y_0, z_0) \end{aligned}$$

(C.35)

Para os modos de potencial par ($j = 1,3,5$) a função $T_{1\pm}(y,z; y_0, z_0)$ é definida como um par de "polos" (fontes) posicionadas simetricamente em relação ao eixo z , acrescido de um termo que faz $L_0(T_{1\pm}) = 0$. Assim

$$T_{1+(y,z; y_0, z_0)} = \Gamma_p + \Gamma_n - L_0(\Gamma_p + \Gamma_n) q^+(y,z) \quad (**)$$

(C.36)

e suas derivadas são calculadas a partir de (C.5) e (C.6) como:

$$\frac{\partial T_{1+}}{\partial y}(y,z; y_0, z_0) = \frac{\partial \Gamma_p}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma_n}{\partial y}$$

(C.37)

(*) Note que $\frac{\partial \Gamma}{\partial z} = \frac{\partial \Gamma}{\partial z_0}$ e $\frac{\partial \Gamma}{\partial y} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial y_0}$

(**) Lembre que $L_0(q^+) = 1$ e que $\frac{\partial q^+}{\partial y} = 0$.

$$\frac{\partial T_1^+}{\partial z}(y, z; y_0, z_0) = \frac{\partial \Gamma_p}{\partial z} + \frac{\partial \Gamma_n}{\partial z} - L_0(\Gamma_p + \Gamma_n) \cdot K_0 q^+(y, z) \quad (C.38)$$

A função $T_2^+(y, z; y_0, z_0)$ fica, por sua vez, definida como:

$$\begin{aligned} T_2^+(y, z; y_0, z_0) = & \frac{\partial \Gamma_p}{\partial z} + \frac{\partial \Gamma_n}{\partial z} - K_0 L_0(\Gamma_p + \Gamma_n) q^+(y, z) - \\ & - 2 \{ d_z(y, z; y_0, z_0) + d_z(y, z; -y_0, z_0) \} \end{aligned} \quad (C.39)$$

onde

$$d_z(y, z; y_0, z_0) = \frac{1}{2\pi} \frac{z - z_0}{(z - z_0)^2 + (y - y_0)^2} \quad (*) \quad (C.40)$$

é um z-dipolo em fluido sem fronteira centrado em (y_0, z_0) .

Suas derivadas ficam:

$$\frac{\partial T_2^+}{\partial y}(y, z; y_0, z_0) = \frac{\partial^2 \Gamma_p}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \Gamma_n}{\partial y \partial z} - 2 \left\{ \frac{\partial}{\partial y} d_{zp} + \frac{\partial}{\partial y} d_{zn} \right\} \quad (C.41)$$

e

$$\frac{\partial T_2^+}{\partial z}(y, z; y_0, z_0) = \frac{\partial^2 \Gamma_p}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Gamma_n}{\partial z^2} - K_0^2 L_0(\Gamma_p + \Gamma_n) q^+(y, z) - 2 \left\{ \frac{\partial}{\partial z} d_{zp} + \frac{\partial}{\partial z} d_{zn} \right\} \quad (C.42)$$

Para os modos de potencial ímpar ($j=2,4,6$) o procedimento é análogo.

(*) $L_0(d_z) = 0$.

Assim, o "doublet"

$$T_1^-(y, z; y_0, z_0) = \Gamma_p - \Gamma_n - L_0(\Gamma_p - \Gamma_n)q^-(y, z) \quad (C.43)$$

é definido como função-teste primária. Seguem

$$\frac{\partial T_1^-}{\partial y}(y, z; y_0, z_0) = \frac{\partial \Gamma_p}{\partial y} - \frac{\partial \Gamma_n}{\partial y} - L_0(\Gamma_p - \Gamma_n) \frac{\partial q^-}{\partial y}(y, z) \quad (C.44)$$

e

$$\frac{\partial T_1^-}{\partial z}(y, z; y_0, z_0) = \frac{\partial \Gamma_p}{\partial z} - \frac{\partial \Gamma_n}{\partial z} - L_0(\Gamma_p - \Gamma_n) K_0 q^-(y, z) \quad (C.45)$$

Por sua vez, o par de dipolos

$$T_2^-(y, z; y_0, z_0) = \frac{\partial \Gamma_p}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma_n}{\partial y} - L_0 \left(\frac{\partial \Gamma_p}{\partial y} - \frac{\partial \Gamma_n}{\partial y} \right) q^-(y, z) \quad (*) \quad (C.46)$$

é definido como função-teste secundária. Seguem

$$\frac{\partial T_2^-}{\partial y}(y, z; y_0, z_0) = \frac{\partial^2 \Gamma_p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Gamma_n}{\partial y^2} - L_0 \left(\frac{\partial \Gamma_p}{\partial y} - \frac{\partial \Gamma_n}{\partial y} \right) \frac{\partial q^-}{\partial y}(y, z) \quad (C.47)$$

e

$$\frac{\partial T_2^-}{\partial z}(y, z; y_0, z_0) = \frac{\partial^2 \Gamma_p}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \Gamma_n}{\partial y \partial z} - L_0 \left(\frac{\partial \Gamma_p}{\partial y} - \frac{\partial \Gamma_n}{\partial y} \right) K_0 q^-(y, z) \quad (C.48)$$

Note por fim, que as funções $T_1^\pm(y, z)$ e $T_2^\pm(y, z)$ satisfazem as seguintes propriedades.

$$\nabla^2 T_j^\pm = -L_0(\cdot) \nabla^2 q^\pm(y, z) \text{ em } S$$

$$\frac{\partial T_j^\pm}{\partial z} = K_0 T_j^\pm \text{ em } z = 0 \quad ; \quad j = 1, 2 \quad (C.49)$$

(*) Veja nota ao pé da página C.12.

$$L_0(T_j^\pm) = 0$$

$$T_j^\pm(y, z; y_0, z_0) = \pm T_j^\pm(-y, z; y_0, z_0)$$

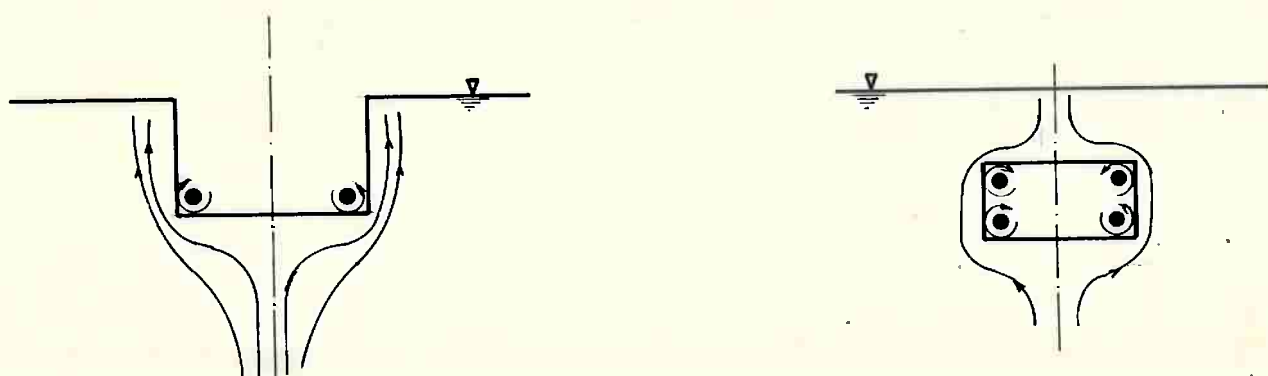
T_1^\pm tem comportamento de polo próximo a $(\pm y_0, z_0)$

T_2^\pm tem comportamento de dipolo próximo a $(\pm y_0, z_0)$

$$\frac{\partial T_j^\pm}{\partial z} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad |z| \rightarrow \infty$$

C.3.2. - $T_3^\pm(y, z)$: funções-teste com comportamento de sistemas de vórtices.

Considere inicialmente a representação pictórica dos escoamentos associados aos modos de "heave" (par) e "sway" (ímpar), apresentada na figura C.2. O uso de vórtices como singularidades fundamentais fica então evidente. Para modos de potencial par, um sistema de vórtices em contra-rotação, para aqueles de potencial ímpar, um sistema com mesmo sentido de rotação.



(a) escoamento típicos em "heave"

Figura C.2.a. - Escoamentos típicos e vórtices como singularidades fundamentais.



b) escoamentos típicos em "sway"

Figura C.2.b.-Escoamentos típicos e vórtices como singularidades fundamentais.

Para os modos de potencial par ($j=1,3,5$) considere então a função

$$V_C(y,z; y_0, z_0) = V_H(y,z; y_0, z_0) - V_H(y,z; y_0, z_0) \quad (C.50)$$

É fácil perceber, da definição e da figura C.1, que $V_C(y,z; y_0, z_0)$ é um sistema de vórtices em contra-rotação, simétrico em relação ao eixo z . Os "cortes" que para V_H se estendem ao infinito, agora ficarão limitados ao interior do corpo. Além disso, a circulação total em torno do corpo é nula, condição necessária para que o escoamento representado tenha energia finita. (ver figura C.3).

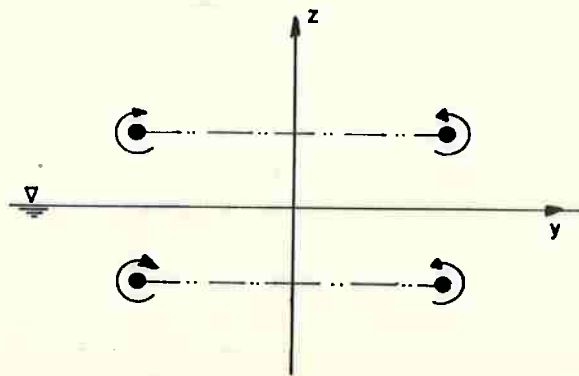


Figura C.3.- Sistema de Vórtices em Contra-Rotação.

Se a função $V_c(y, z; y_0, z_0)$ somarmos o termo

$$\frac{1}{K_0} (Dy(y, z; y_0, z_0) - Dy(y, z; -y_0, z_0))$$

definindo então a função

$$h(y, z; y_0, z_0) = V_{Hp} - V_{Hn} + \frac{1}{K_0} (D_{yp} - D_{yn}) \quad (C.51)$$

onde a notação da seção anterior foi utilizada é fácil verificar as seguintes propriedades.

$$\nabla^2 h(y, z; y_0, z_0) = 0 \quad (C.52)$$

$$h(y, z; y_0, z_0) = h(-y, z; y_0, z_0)$$

e, em face de (C.34), (C.29 a C.32), que

$$h(y, 0; y_0, z_0) = \frac{1}{K_0} \{ D_{yp} - D_{yn} \}_{z=0} \quad (C.53)$$

e

$$\frac{\partial h}{\partial z}(y, 0; y_0, z_0) = \{ D_{yp} - D_{yn} \}_{z=0} \quad (C.54)$$

e que, portanto,

$$\frac{\partial h}{\partial z}(y, 0; y_0, z_0) = K_0 h(y, z; y_0, z_0) \quad (C.55)$$

Ainda, segue que

$$L_0(h) = L_0\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right) = 0 \quad (C.56)$$

Próximo a singularidade, no entanto, a função é dominada pelo comportamento de dipolo $(D_{yp} - D_{yn})$, ao invés daquele associado ao sistema de vórtices. Além disso, $h(y, z; y_0, z_0)$ de

pende fracamente de K_0 e seria desejável que a função-teste fosse dependente do número de onda de forma mais intrínseca.

Estas duas características podem ser convenientemente "ajustadas" se for observado que $\frac{\partial \Gamma}{\partial y}(y,z; y_0, z_0)$ contém a função $D_y(y,z; y_0, z_0)$ (ver C.5), e que depende fortemente de K_0 através da função $F(W)$.

Lembrando que $L_0(T_j^\pm) = 0$ deve ser satisfeita para as funções-teste, $T_3^+(y,z; y_0, z_0)$ pode então ser definida como:

$$T_3^+(y,z; y_0, z_0) = V_{HP} - V_{HN} + \frac{1}{K_0} \{D_{yp} - D_{yn} - (\frac{\partial \Gamma_p}{\partial y} - \frac{\partial \Gamma_n}{\partial y})\} + \frac{1}{K_0} L_0(\frac{\partial \Gamma_p}{\partial y} - \frac{\partial \Gamma_n}{\partial y}) q^+(y,z) \quad (C.57)$$

onde (C.56) foi utilizada.

Note que $T_3^+(y,z; y_0, z_0)$ é harmônica, par em relação a y e satisfaz a condição de contorno na superfície livre (ver (C.30) e (C.34)). $T_3^+(y,z; y_0, z_0)$ é fortemente dependente de K_0 e o comportamento de dipolo junto à singularidade foi eliminado, predominando portanto, o comportamento de vórtice junto a $(\pm y_0, z_0)$.

Utilizando as identidades (C.29) a (C.32) as derivadas de $T_3^+(y,z; y_0, z_0)$ são expressas como:

$$\frac{\partial T_3^+}{\partial y}(y,z; y_0, z_0) = -(D_{zp} - D_{zn}) + \frac{1}{K_0} \{ \frac{\partial D_{yp}}{\partial y} - \frac{\partial D_{yn}}{\partial y} - (\frac{\partial^2 \Gamma_p}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Gamma_n}{\partial y^2}) \} \quad (C.58)$$

e

$$\frac{\partial T_3^+}{\partial z}(y,z; y_0, z_0) = (D_{yp} - D_{yn}) + \frac{1}{K_0} \{ \frac{\partial}{\partial z} D_{yp} - \frac{\partial}{\partial z} D_{yn} - (\frac{\partial^2 \Gamma_p}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 \Gamma_n}{\partial z \partial y}) \} + L_0(\frac{\partial \Gamma_p}{\partial y} - \frac{\partial \Gamma_n}{\partial y}) q^+(y,z) \quad (C.59)$$

Por fim os modos de potencial impar ($j=2,4,6$) serão considerados.

Neste caso é necessário um sistema de vórtices com mesmo sentido de rotação.

A soma de duas funções elementares V_H centradas em $(\pm y_0, z_0)$ cumpre este papel. No entanto, a função decorrente apresenta dois "cortes" que se estendem pelo meio fluido ao infinito. Para manter o corte confinado ao interior da seção pode-se adicionar a função $-2V_H(y, z; 0, z_0)$, e para anular a intensidade (-2) introduzida soma-se a função $-2V_V(y, z; 0, z_0)^{(*)}$. (Ver figura C.4).

Ainda, visto que a função-teste em construção deverá simular a condição correspondente ao movimento de "roll", considera-se adicionalmente a função $2V_V(y, z; y_c, z_c)$, centrada no ponto de referência para movimento (y_c, z_c) .

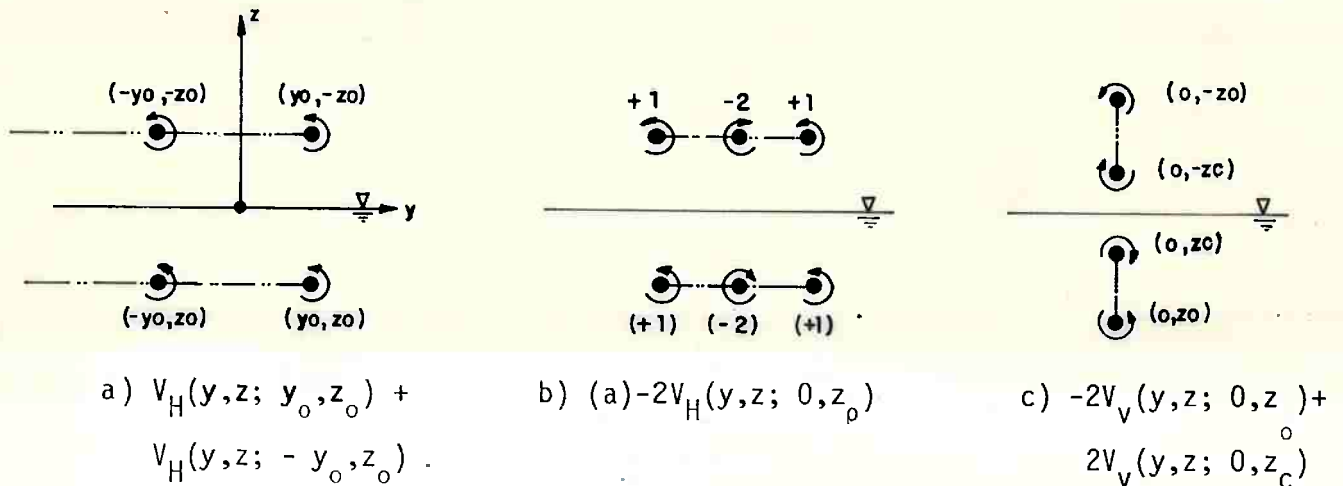


Figura C.4.- Composição de Sistemas de Vórtices.

(*) Lembre que V_H e V_V tem rotações opostas.

Considere, portanto, a função

$$\begin{aligned}
 T_3^-(y,z; y_0, z_0) = & \{ V_{Hp} + V_{Hn} - 2 V_{HO} - 2V_{v0} + 2V_{vc} \} \\
 & + \frac{1}{K_0} \{ D_{yp} + D_{yn} - 2D_{y0} - \left(\frac{\partial \Gamma_p}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma_n}{\partial y} - 2 \frac{\partial \Gamma_c}{\partial y} \right) \} \\
 & + \frac{1}{K_0} \{ L_0 \left(\frac{\partial \Gamma_p}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma_n}{\partial y} \right) - 2L_0 \left(\frac{\partial \Gamma_c}{\partial y} \right) \} q^-(y,z)
 \end{aligned}
 \tag{C.60}$$

onde a seguinte notação adicional foi utilizada

$$\begin{aligned}
 V_{v0} &= V_v(y,z; 0, z_0) & ; & \quad D_{y0} = D_y(y,z; 0, z_0) \\
 V_{vc} &= V_v(y,z; 0, z_c) & ; & \quad \Gamma_c = \Gamma(y,z; 0, z_c)
 \end{aligned}
 \tag{C.61}$$

e onde $(0, z_c)$ é o centro de rotação de referência.

O segundo termo entre colchetes tem função análoga \bar{a} aquela na expressão (C.57). Ainda, verifica-se que $L_0(T_3^-) = 0$.

Seguem então as derivadas (use C.29-C.30).

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T_3^-}{\partial y}(y,z; y_0, z_0) = & - \{ D_{zp} + D_{zn} - 2 D_y \} + \frac{1}{K_0} \left\{ \frac{\partial D_{yp}}{\partial y} + \frac{\partial D_{yn}}{\partial y} - 2 \frac{\partial D_{yc}}{\partial y} \right\} \\
 & - \frac{1}{K_0} \left\{ \frac{\partial^2 \Gamma_p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Gamma_n}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \Gamma_c}{\partial y^2} \right\} + \\
 & + \frac{1}{K_0} \left\{ L_0 \left(\frac{\partial \Gamma_p}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma_n}{\partial y} \right) - 2 L_0 \left(\frac{\partial \Gamma_c}{\partial y} \right) \right\} \frac{\partial q^-}{\partial y}(y,z)
 \end{aligned}
 \tag{C.62}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_3^-}{\partial z}(y,z; y_0, z_0) &= \{ D_{yp} + D_{yn} - 2 D_{yc} \} + \frac{1}{K_0} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} D_{yp} + \frac{\partial}{\partial z} D_{yn} - 2 \frac{\partial D_{yc}}{\partial z} \right\} \\
&- \frac{1}{K_0} \left\{ \frac{\partial^2 \Gamma_p}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \Gamma_n}{\partial y \partial z} - 2 \frac{\partial^2 \Gamma_c}{\partial y \partial z} \right\} + \\
&+ \left\{ L_0 \left(\frac{\partial \Gamma_p}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma_n}{\partial y} \right) - 2 L_0 \left(\frac{\partial \Gamma_c}{\partial y} \right) \right\} q^-(y,z) \quad (C.63)
\end{aligned}$$

Cumpra por fim ressaltar que as seguintes propriedades são verificadas

$$\nabla^2 T_3^\pm(y,z; y_0, z_0) = + \frac{1}{K_0} \left\{ \begin{array}{l} L_0 \left(\frac{\partial \Gamma_p}{\partial y} - \frac{\partial \Gamma_n}{\partial y} \right) \\ L_0 \left(\frac{\partial \Gamma_p}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma_n}{\partial y} \right) - 2 L_0 \left(\frac{\partial \Gamma_c}{\partial y} \right) \end{array} \right\} \nabla^2 q^\pm(y,z)^{(*)}$$

$$T_3^\pm(y,z; y_0, z_0) = \pm T_3^\pm(-y,z; y_0, z_0)$$

$$\frac{\partial T_3^\pm}{\partial z}(y,z; y_0, z_0) \Big|_{z=0} = K_0 T_3^\pm(y,z; y_0, z_0) \Big|_{z=0} \quad (C.64)$$

$T_3^\pm(y,z; y_0, z_0)$ tem comportamento de vórtice em região próxima aos pontos $(\pm y_0, z_0)$

$$L_0(T_3^\pm) = 0$$

$$\frac{\partial T_3^\pm}{\partial z} \rightarrow 0 \text{ quando } |z| \rightarrow 0$$

(*) Na realidade $\nabla^2 q^\pm = \frac{\partial^2 q^\pm}{\partial z^2}$ visto que $\frac{\partial^2 q^\pm}{\partial y^2} = 0$

APÊNDICE D - COMPLEMENTOS DEDUTIVOS NA TCE

D.1. - Força de Excitação e Amplitude de Onda Irradiada

Da definição do potencial de onda incidente

$$\phi_o(r, \theta, z) = -\frac{ig}{\omega} e^{iK_o r \cos(\theta-\alpha)} f(z) \quad (D.1)$$

segue que

$$\frac{\partial \phi_o}{\partial r}(r, \theta, z) = iK_o \cos(\theta-\alpha) \phi_o \quad (D.2)$$

Da expansão assintótica do potencial de radiação

$$\phi_j \sim R_j(\theta) \frac{e^{iK_o r}}{(K_o r)^{1/2}} f_o(z) \quad ; \quad K_o r \rightarrow \infty \quad (D.3)$$

segue que

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial r} \sim iK_o \phi_j \quad ; \quad K_o r \rightarrow \infty \quad (D.4)$$

Portanto, da relação de Haskind-Hanaoka em campo distante

$$E_j(\omega) = -i\omega \rho \iint_{S_B} \left(\phi_o \frac{\partial \phi_j}{\partial r} - \phi_j \frac{\partial \phi_o}{\partial r} \right) dS \quad (D.5)$$

vem que

$$E_j(\omega) = K_o \omega \rho \int_{-h}^0 \int_0^{2\pi} \phi_o \phi_j (1 - \cos(\theta-\alpha)) r d\theta dz \quad ; \quad K_o r \rightarrow \infty \quad (D.6)$$

então, de (D.1) e (D.3)

$$E_j(\omega) = -iK_0 \rho g \int_{-h}^0 dz f(z) f_0(z) \int_0^\pi \frac{e^{iK_0 r(1+\cos(\theta-\alpha))}}{(K_0 r)^{1/2}} R_j(\theta) (1-\cos(\theta-\alpha)) r d\theta$$

; $K_0 r \rightarrow \infty$ (D.7)

porém (ver(2.10.e) e (3.5))

$$f(z) = \frac{f_0(z)}{f_0 \cosh K_0 h}$$

(D.8)

e da relação

$$\int_{-h}^0 f_0^2(z) dz = 1$$

(D.9)

segue que

$$E_j(\omega) = -\frac{i\rho g}{F_0 \cosh K_0 h} (K_0 r)^{1/2} \int_0^{2\pi} R_j(\theta) e^{iK_0 r(1+g(\theta))} (1-g(\theta)) d\theta$$

; $K_0 r \rightarrow \infty$ (D.10)

com

$$g(\theta) = \cos(\theta-\alpha)$$

A integral em (D.10) pode ser avaliada pelo *método da fase estacionária* (ver, p.ex., Bender & Ozag, 1978, pg.276).

De fato, o integrando tem fase estacionária, ou seja $\frac{\partial}{\partial \theta} (1+g(\theta)) = 0$, em $\theta_1 = \alpha$ ou $\theta_2 = \alpha + \pi$.

No primeiro ponto ($\theta_1 = \alpha$) o integrando é nulo. No segundo ponto ($\theta_2 = \alpha + \pi$) o integrando é, aproximadamente

$$R_j(\theta) e^{iK_0 r(1+g(\theta))} (1-g(\theta)) \sim 2R_j(\alpha+\pi) e^{iK_0 r \left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)^2}; \quad K_0 r \rightarrow \infty$$

(D.11)

e a integral em (D.10) pode ser avaliada

$$\int_0^{2\pi} R_j(\theta) e^{-\frac{iK_0 r(1+g(\theta))}{(1-g(\theta))}} d\theta \sim 2R_j(\alpha+\pi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{iK_0 r}{2} \frac{(\theta-\alpha)^2}{2}} d\theta$$

$$= 2 R_j(\alpha+\pi) \left(\frac{2\pi}{K_0 r}\right)^{1/2} e^{i\pi/4} \quad (D.12)$$

Assim

$$E_j(\omega) = -\frac{i\rho g}{F_0 \cosh K_0 h} (8\pi)^{1/2} e^{i\pi/4} R_j(\alpha+\pi) \quad (D.13)$$

Uma forma alternativa pode também ser considerada.

Para tanto, lembrando que

$$F_0^2 = \frac{1}{h} \frac{4K_0 h}{2K_0 h + \sinh 2K_0 h} = \frac{2}{h} \frac{\frac{2K_0 h}{\sinh 2K_0 h}}{\frac{2K_0 h}{\sinh 2K_0 h} + 1}$$

$$= \frac{2}{h} \frac{2K_0 h}{\sinh 2K_0 h} \frac{\omega}{2K_0 C_g}$$

onde C_g é a velocidade de grupo; segue

$$F_0^2 \cosh^2 K_0 h = \frac{2}{h} \cdot \frac{2K_0 h \cosh^2 K_0 h}{2 \sinh K_0 h \cosh K_0 h} \cdot \frac{\omega}{2K_0 C_g}$$

$$= \frac{K_0}{K_0 \tanh K_0 h} \cdot \frac{\omega}{C_g} = \frac{1}{h} \cdot \frac{g}{\omega^2} \cdot \frac{\omega}{C_g}$$

$$= \frac{K_0 g}{\omega C_g} \quad (D.14)$$

Se for utilizada a condição de radiação definida em (2.10.e), tal que

$$R_j(\theta) = -ig \frac{A_j(\theta)}{\omega} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} e^{-i\pi/4} \frac{1}{F_0 \cosh K_0 h} \quad (D.15)$$

ou ainda

$$R_j(\theta) = -i \left(\frac{g}{\omega} \frac{Cg}{K_0} \frac{2}{\pi}\right)^{1/2} e^{-i\pi/4} A_j(\theta) = \frac{A_j(\theta)}{K} \quad (D.15.a)$$

segue que

$$E_j(\omega; \alpha) = -4 \frac{\rho g}{K_0} Cg A_j(\alpha + \pi) \quad (D.16)$$

que coincide com a expressão apresentada em Mei (1983), pg. 327.

Note ainda que de (4.38) e (4.39)

$$A_j(\theta) = \mu(Q_j(\theta) + i \sin \theta P_j(\theta)) \quad (1 + O(\epsilon^2)) \quad (D.17)$$

onde

$$j = 1, \dots, 8$$

$$\mu = K \left(\frac{1}{8\pi}\right)^{1/2} e^{-i3\pi/4} = \frac{1}{4} \left(\frac{g}{\omega} \frac{Cg}{K_0}\right)^{1/2} \quad (D.18)$$

D.2. - Força Média de Deriva

As expressões das componentes da força média de deriva são dadas por (4.34) - (4.37) em função de $A(\theta)$, onde $A(\theta)$ é a onda irradiada total, tal que

$$A(\theta) = i\omega \sum_{j=1}^8 \xi_j A_j(\theta) \quad (D.19)$$

onde $\xi_7 = \xi_8 = -i/\omega$, por concisão de notação.

Segue, então, que

$$|A(\theta)|^2 = \omega^2 \sum_{j=1}^8 \sum_{\ell=1}^8 \xi_j \xi_\ell^* A_j A_\ell^* \quad (D.20)$$

ou ainda

$$|A(\theta)|^2 = \omega^2 \mu^2 \sum_{j=1}^8 \sum_{\ell=1}^8 \xi_j \xi_\ell^* \{ Q_j Q_\ell^* + i \sin \theta (Q_\ell^* P_j - Q_j P_\ell^*) + \sin^2 \theta P_j P_\ell^* \} \quad (D.20.a)$$

e

$$A(\theta) \frac{dA^*(\theta)}{d\theta} = \omega^2 \sum_{j=1}^8 \sum_{\ell=1}^8 \xi_j \xi_\ell^* A_j \frac{dA_\ell^*}{d\theta} \quad (D.21)$$

ou então

$$A(\theta) \frac{dA^*(\theta)}{d\theta} = \mu^2 \omega^2 \sum_{j=1}^8 \sum_{\ell=1}^8 \{ Q_j \frac{dQ_\ell^*}{d\theta} + \cos \theta P_\ell^* (\sin \theta P_j - i Q_j) + i \sin \theta (P_j \frac{dQ_\ell^*}{d\theta} - Q_j \frac{dP_\ell^*}{d\theta}) + \sin^2 \theta P_j \frac{dP_\ell^*}{d\theta} \} \quad (D.21.a)$$

Lembre que $Q_j = 0$, se $j = 2, 4, 6$ e $P_j = 0$, se $j = 1, 3, 5$.

D.3. - Fluxo de Energia e Coeficiente de Amortecimento

Conforme visto no apêndice A, o fluxo médio de energia por uma superfície de controle S_R , arbitrária, que envolve o corpo é dada por

$$E = \frac{1}{2} \rho \omega \operatorname{Im} \iint_{S_R} \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial n} dS = - \frac{1}{2} \rho \omega \operatorname{Im} \iint_{S_B} \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial n} dS \quad (D.22)$$

Considere, em primeiro lugar, o campo distante, quando $K r \rightarrow \infty$. Suponha o fluxo de "co-energia" entre os potenciais $\phi_j^{(o)}$ e $\phi_\ell^{(o)}$. Substituindo as aproximações assintóticas (D.3) e (D.4) segue que

$$E_{j\ell}^{(o)} = -\frac{1}{2} \rho \omega R_e \int_0^{2\pi} R_j R_\ell^* d\theta = -\frac{1}{2} \rho \omega R_e \int_0^{2\pi} (Q_j Q_\ell^* + i \sin\theta (P_j Q_\ell^* - Q_j P_\ell^*) + \sin^2\theta P_j P_\ell^*) d\theta \quad (D.23)$$

para o modo j (D.23) fica

$$E_{jj}^{(o)} = -\frac{1}{2} \rho \omega \int_0^{2\pi} |Q_j|^2 d\theta \quad ; \quad j = 1, 3, 5, 7 \quad (D.24)$$

$$E_{jj}^{(o)} = -\frac{1}{2} \rho \omega \int_0^{2\pi} |P_j|^2 \sin^2\theta d\theta \quad ; \quad j = 2, 4, 6, 8 \quad (D.25)$$

Uma expressão alternativa, tomando S_R como uma superfície cilíndrica adjacente ao corpo e utilizando a "expansão interior" da solução exterior dada por (4.15) pode ser deduzida. A álgebra é imediata, porém tediosa, e por este motivo este desenvolvimento será omitido.

Considere agora o campo próximo. A expressão (D.22) pode ser integrada diretamente sobre o corpo onde vale a expressão (4.8) para $\phi_j^{(i)}$. Assim

$$E_{j\ell}^{(i)} = -\frac{1}{2} \rho \omega \operatorname{Im} \iint_{S_B} \phi_j^{(i)} \frac{\partial \phi_\ell^*}{\partial n} dS =$$

$$= -\frac{1}{2} \rho \omega \operatorname{Im} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{\Gamma_B(x)} (\psi_j + C_j \operatorname{Im} \psi_j) \left(\frac{\partial \psi_\ell^*}{\partial n} + C_\ell^* \operatorname{Im} \frac{\partial \psi_\ell}{\partial n} \right) ds dx$$

porém $\operatorname{Im} \left(\frac{\partial \psi_\ell}{\partial n} \right) = 0$ ($\frac{\partial \psi_\ell}{\partial n}$ é real) e portanto,

$$E_{j\ell}^{(i)} = -\frac{1}{2} \rho \omega \operatorname{Im} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{\Gamma_B(x)} \psi_j \frac{\partial \psi_\ell}{\partial n} ds dx + \operatorname{Im} \int_{-L/2}^{L/2} C_j(x) \int_{\Gamma_B(x)} \operatorname{Im}(\psi_j) \cdot \frac{\partial \psi_\ell}{\partial n} ds dx \quad (D.23)$$

que pode ser escrita

$$E_{j\ell}^{(i)} = -\frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} d_{j\ell} dx - \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \text{Im } C_j(x) \cdot d_{j\ell} dx \quad (\text{D.24})$$

que comparada a (4.19.a) fornece

$$D_{j\ell} = -2 E_{j\ell}^{(i)} \quad (\text{D.25})$$

Alternativamente, utilizando-se a integral em S_R , com $\phi_j^{(i)}$ e $\frac{\partial \phi_\ell^{(i)*}}{\partial r}$ dadas por suas expansões exteriores (ver (4.11)) fornece, após alguma álgebra:

$$E_{j\ell}^{(i)} = \frac{1}{2} \rho \omega k_0 \text{Im} \int_{-L/2}^{L/2} \left\{ (-iA_j A_\ell^* + C_j C_\ell^* \text{Im}(A_j e^{ik_0 y}) \text{Im}(iA_\ell e^{ik_0 y}) + A_{j\ell}^{ik_0 y} C_\ell^* \text{Re}(A_\ell e^{ik_0 y}) - iA_\ell^* e^{-ik_0 y} C_j \text{Im}(A_j e^{ik_0 y})) \right\} dx \quad (\text{D.26})$$

que se $j = \ell$ reduz-se a

$$E_{jj}^{(i)} = -\frac{1}{2} \rho \omega k_0 \int_{-L/2}^{L/2} |A_j|^2 (1 + \text{Im } C_j) dx \quad (\text{D.27})$$

que é em essência (D.24), se for lembrado que

$$d_{j\ell} = \rho \omega k_0 A_j A_\ell^* \quad (\text{D.28})$$

* * *

APÊNDICE E - SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO INTEGRAL NA TCE

O presente apêndice apresenta, de forma sucinta, o procedimento numérico utilizado para a solução da equação integral na TCE. Especificamente aplica o método da colocação na equação integral de Fredholm de segunda espécie.

$$\frac{j}{4} L(q) + \operatorname{tg} \beta(x) \frac{q(x)}{2K_0} = - \frac{|A(x)|}{\cos \beta(x)}$$

onde (E.1)

$$L(q) = \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} d\xi q(\xi) H_0^{(1)}(K_0 |x-\xi|)$$

com $H_0^{(1)}(\cdot)$ a função de Haenckel de primeira espécie e ordem zero.

Considere o segmento $(-L/2, L/2)$ dividido em $N-1$ elementos. Tomando, a interpolação linear de $q(\xi)$ entre os nós: j e $j+1$ ($x_j \leq \xi \leq x_{j+1}$), tal que

$$q(\xi) = \frac{q^{(j+1)}(\xi-x_j) + q^{(j)}(x_{j+1}-\xi)}{\Delta_{xj}} \quad (*) \quad (E.2)$$

onde

$$\Delta_{xj} = x_j - x_{j-1} \quad j = 1, 2, \dots, N$$

com (E.3)

$$\begin{aligned} x_0 = x_1 = -L/2 & \quad \Delta x_0 = 0; \\ x_{N+1} = x_N = L/2 & \quad \Delta x_{N+1} = 0 \end{aligned}$$

a equação integral (E.1) fica expressa, em forma discreta, como

$$\sum_{j=1}^N \left\{ H_{ij} + \frac{\tan \beta(x_i)}{2K_0} \delta_{ij} \right\} q^{(j)} = - \frac{|A_j(x_i)|}{\cos \beta(x_i)} ; i = 1, \dots, N \quad (E.4)$$

(*) Os índices j não devem ser confundidos com os modos de radiação.

onde

$$H_{ij} = \frac{i}{4K_o^2} \left\{ \frac{K_o^2}{\Delta x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (\xi - x_{j-1}) H_o^{(1)}(K_o |x_i - \xi|) d\xi - \frac{K_o^2}{\Delta x_{j+1}} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (\xi - x_{j+1}) H_o^{(1)}(K_o |x_i - \xi|) d\xi \right\} \quad (E.5)$$

Definindo, agora a função auxiliar

$$F_i(a, b, c) = K_o^2 \int_a^b (\xi - c) H_o^{(1)}(K_o |x_i - \xi|) d\xi \quad (E.6)$$

H_{ij} pode ser escrita na forma

$$H_{ij} = \frac{i}{4K_o^2} \left\{ \frac{1}{\Delta x_j} F_i(x_{j-1}, x_j, x_{j-1}) - \frac{1}{\Delta x_{j+1}} F_i(x_j, x_{j+1}, x_{j+1}) \right\} \quad (E.7)$$

Porém,

$$\begin{aligned} F_i(a, b, c) &= K_o^2 \int_a^b [(\xi - x_i) + (x_i - c)] H_o^{(1)}(K_o |\xi - x_i|) d\xi = \\ &= \int_{K_o(a-x_i)}^{K_o(b-x_i)} (t + K_o(x_i - c)) H_o^{(1)}(|t|) dt \end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned} F_i(a, b, c) &= K_o(x_i - c) \{s(b-x_i) I_o(K_o |b-x_i|) - s(a-x_i) I_o(K_o |a-x_i|)\} + \\ &+ \{I_1(K_o |b-x_i|) - I_1(K_o |a-x_i|)\} \end{aligned} \quad (E.8)$$

onde $s(\cdot)$ é a função sinal e $I_0(\cdot)$ e $I_1(\cdot)$ foram definidas como

$$I_0(x) = \int_0^x H_0^{(1)}(t) dt \quad (E.9)$$

$$I_1(x) = \int_0^x t H_0^{(1)}(t) dt \quad (E.10)$$

Note porém (ver A & S, pg. 480) que

$$I_0(x) = x H_0^{(1)}(x) \left(1 - \frac{\pi}{2} H_1(x)\right) + \frac{\pi}{2} x H_1^{(1)}(x) H_0(x) \quad (E.11)$$

e, integrando por partes,

$$I_1(x) = x H_1^{(1)}(x) + \frac{2i}{\pi} \quad (E.12)$$

onde $H_1^{(1)}$ é a função de Haenckel de primeira espécie e ordem 1, e $H_0(\cdot)$ e $H_1(\cdot)$ são as funções de Struve de ordem zero e primeira respectivamente, e definidas, por exemplo, em A & S, pg. 495.

As funções de Haenckel e Struve possuem aproximações racionais e polinomiais (ver Newman (1983)) e seu cálculo exige, portanto, pouco esforço computacional.

Uma vez escrito um núcleo de rotinas computacionais para o cálculo destas funções, a função auxiliar $Fi(a,b,c)$ é prontamente construída, conduzindo à matriz H_{ij} .

A solução de (E.4) é então imediata.

Este foi o procedimento adotado no programa SBW, cujos resultados numéricos são exemplificados no capítulo 4.

* * *

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABRAMOWITZ, M. & STEGUN, I., ed. Handbook of mathematical functions. Washington, D.C., U.S. Gov. Print Office, 1964.
- ARANHA, J.A.P., Mathematical analysis of the two-dimensional water waves problem. Submitted to the Journal Mécanique in 1985.
- _____, A teoria dos corpos alongados no problema de difração de ondas no mar. São Paulo, 1986, p. irreg. Tese de Livre Docência EPUSP/Departamento de Engenharia Naval.
- _____ & MARTINS, C.A., Diffraction of sea waves by a slender body: part 2 - water of arbitrary depth. Submitted to the Journal of Fluid Mechanics in 1987.
- _____ & PESCE, C.P. Effect of the second-order potential in the slow-drift oscillation of a floating structure in irregular waves. Journal of Ship Research, 30(2): 103 - 22
- _____ & _____, Slow drift and trapping of waves on submerged structures. In: IUTAM Symposium on Nonlinear Water Waves, Tokyo, Aug. 24-28, 1987. 12p.
- _____ & _____, Variational approximation and slender body theory applied to the motion analysis of floating structures. In: International Symposium on Off-shore Engineering, 6., Rio de Janeiro, Sept. 18-24, 1987.
- _____ & SUGAYA, M., Diffraction of sea waves by a slender body: part 1 - the shallow water limit. Journal of Fluid Mechanics, 180: 51-85, 1987.
- _____ & _____, A note on head-sea diffraction by a slender body. Journal of Fluid Mechanics, 155: 131-139, 1985.
- ATHANASSOULIS, G.A. & LOUKAKIS, T.A., Lagrangean expressions of the hydrodynamic forces acting on a rigid body in the presence of a free surface. Journal of Ship Research, 29 (1): 12-22, Mar. 1985.

- BAI, K.J. & YEUNG, R.W., Numerical solutions to free-surface flow problems. In: Symposium on Naval Hydrodynamics, 10., Cambridge, Jun. 24-28, 1974. Preprint. 25p.
- BECK, R.F. & TUCK, E.O., Computation of shallow water ship motions. In: Symposium on Naval Hydrodynamics, 9., Paris, Aug. 20-25, 1972. Preprint. 50.p.
- BENDER, C.M. & ORSZAG, S.A., Advanced mathematical methods for scientists and engineers. New York, MacGraw-Hill, 1978. 593p. (International Series in Pures and Applied Mathematics).
- BESSHO, M., On boundary value problems of an oscillating body floating on water. Mem. Defense Academy, 8(1): 183-200, 1968.
- _____, Variational approach to steady ship wave problem. In: Symposium on Naval Hydrodynamics, 89, Pasadena, Aug. 1970. Preprint.
- BREIT, S.R., Wave interaction between adjacent bodies by a slender body approximation and a panel method. PhD thesis, M.I.T., Ocean Engineering Dept., 1985.
- ELZGOLTZ, L., Equaciones diferenciales y calculo variacional. Moscow, MIR, 1969, 431p.
- GANTMACHER, F., Lectures in analytical mechanics. 2.ed. Moscow, MIR, 1975. 264p.
- GERMAIN, P., La méthode des puissances virtuelles en mécanique des milieux continus. Journal de Mécanique, 12(2): 235-73, 1973.
- GERRITSMAN, J., A note on the application of ship motion theory, Schiffstechnik, 23(114): 181-85, Nov. 1976.
- _____, et alii. Polynomial representation and damping of series 60 hull forms. International Shipbuilding Progress, 9(2): 295-304, Jul. 1962.
- GOLDSTEIN, H., Classical mechanics. 2.ed. London, Addison-Wesley, 1980.

- HAREN, P. & MEI, c.c., Head sea diffraction by a slender raft with application to wave-power absorption. Journal of Fluid Mechanics, 104: 503-524, 1981.
- HASKIND, M.D., The exciting forces and wetting of ships in waves. Bethesda, DTMB, 1962. (David W. Taylor Naval Ship Research and Development Center - Translation n^o 307).
- _____, The hydrodynamic theory of ship oscillations in rolling and pitching. In: Haskind, M.D. Two papers on the hydrodynamic theory of heaving and pitching of a ship. New York, SNAME, 1953. p.3-43. (Society of Naval Architects and Marine Engineers - Technical and Research Bulletin n^o 1-12).
- _____, The oscillation of a ship on a calm sea. In: Haskind, M.D. Two papers on the hydrodynamic theory of heaving and pitching of a ship. New York, SNAME, 1953. p. 45-60 (The Society of Naval Architects and Marine Engineers-Technical and Research Bulletin n^o 1-12).
- ISSHIKI, H., Variational principles associated with ship motions in waves. International Shipbuilding Progress, 20(229): 327-45, Sept. 1973.
- JOHN, F., On the motion of floating bodies. Communications on Pure and Applied Mathematics, 3:45-100, 1950.
- KORVIN, KROUKOVSKY, B.V., Investigation of ship motions in regular waves. Transactions of the Society of Naval Architects of Marine Engineers, 63:386-435, 1955.
- LADHENSKAYA, O. & URAL' TSEVA, N., Linear and quasilinear elliptic equations. New York, Academic Press, 1968.
- LAMB, H., Hydrodynamics. 6.ed. Cambridge, Cambridge University Press, 1932. 738p.
- LANCZOS, C., The variational principles of mechanics, 4.ed. Toronto, University of Toronto Press, 1970. 417p.
- LANDAU, L. & LIFSHITZ, E., Curso abreviado de física teórica. 2.ed.
- LEECH, C.M., Hamilton's principle applied to fluid mechanics. Quartely Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 30: 107-30, 1977.

- LIGHTHILL, M.J. Waves and Hydrodynamic Loading. In: Second Int. Conference on the Behaviour of Offshore Structures, 1, pp.1-40, 1979.
- LUKE, J.C., A variational principle for a fluid with a free surface. Journal of Fluid Mechanics, 27(2): 395-97, 1987.
- MARUO, H., Application of the slender body theory to the longitudinal motions of ships among waves. Bull. Fac. Eng. Yokohama Natl. Univ., 16:29-61, 1967.
- _____, An improvement of the slender body theory for oscillating ships with zero forward speed. Bull. Fac. Eng. Yokohama Natl. Univ., 19:45-56, 1970.
- _____, The drift of a body floating on waves. Journal of Ship Research, 4(3): 1-10, 1960.
- MEI, C.C., The applied dynamics of ocean surface waves. New York, John Wiley & Sons, 1983.
- _____, Numerical methods in water-wave diffraction and radiation. Annual Review of Fluid Mechanics, 10:393-416, 1977.
- MEYER, R.C., Introduction to mathematical fluid dynamics New York, Dover, 1971. 185p.
- MILDER, D.M., A note regarding on Hamilton's principle for surface waves. Journal of Fluid Mechanics, 83(1): 159-161, 1977.
- MILES, J.W., On Hamilton's principle for surface waves. Journal of Fluid Mechanics, 83(1): 153-58, 1977.
- _____, Hamiltonian formulation for surface waves. Applied Scientific Research, 37: 103-10, 1981.
- _____, Surface-wave scattering matrix for a shelf. Journal of Fluid Mechanics, 28(4): 755-67, 1967.
- MILOH, T., Hamilton's principle, Lagrange's method and ship motion theory. Journal of Ship Research, 28(4): 229-37, Dec. 1984.
- MIZUNO, T., On swaying motion of some surface-piercing bodies. Mem. Defence Academy, 9(1): 221-37, 1969.

- MIZUNO, T., On sway and roll motion of some surface-piercing bodies. Journal of the Society of Naval Architects of Japan, 127:
- MING-SHUN, Chang. Three-dimensional ship-motion computations, In: International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics, 2., Berkeley, Sept. 19-21, 1977. Berkeley, University of Berkeley, 1977. p.26-8.
- MORSE, P.M. & FESHBACH, H. Methods of theoretical physics. New York, McGraw-Hill, 1953.
- MUNK, M., The aerodynamic forces on airships hulls. Washington, D.C., NAC, 1924. (National Advisory Committee for Aeronautics - Report 184).
- NESTEGARD, A. & SCLAVONOUS, P.D., A numerical solution of two-dimensional deep water-body problem. Journal of Ship Research, 28(1): 4-54, Feb. 1984.
- NEWMAN, J.N., A linearized theory for the motion of a thin ship in regular waves. Journal of Ship Research, 3(1): 1-19, 1961.
- _____, Marine hydrodynamics. Cambridge, MIT, 1978. 402p.
- _____, A slender-body theory for ship oscillations in waves, Journal of Fluid Mechanics, 18:602-18, 1964.
- _____, The theory of ship motions. Advances in Applied Mechanics, 18:221-82, 1978.
- _____ & SCLAVOUNOS, P.D., The unified theory of ship motions. In: Symposium on Naval Hydrodynamics, 13., Tokyo, 1980.
- _____ & TUCK, E.O., Current progress in the slender-body theory of ship motions. In: Symposium of Naval Hydrodynamics, 5., Washington, D.C., 1964. Proceedings. Washington, D.C., Office of Naval Research, 1964. p. 129-67.
- NEWMAN, J.N. Algorithms for the Free Surface Green Function, Journal of Eng. Mathematics, 19 pp.57-67.

- OGILVIE, T.F., Recent progress toward the understanding and prediction of ship motions. In: Symposium on Naval Hydrodynamics, 5., Washington, D.C., 1964. Proceedings, Washington, D.C., Office of Naval Research, 1964, p.3-128.
- _____ & TUCK, E.O., A rational strip theory for ship motions: part 1. Ann arbor, University of Michigan, 1969. University of Michigan - Department of Naval Architects and Marine Engineering - Report nº 103).
- _____, Singular-perturbation problems in ship hydrodynamics. Advances Applied Mechanics, 17: 91-188, 1977.
- PESCE, C.P., Cálculo da força de deriva sobre corpos cilíndricos flutuantes em ondas aleatórias: os efeitos dos potenciais de primeira e segunda-ordem em lâmina d'água de profundidade finita. São Paulo, 1984. p. irreg. (Dissertação de Mestrado apres. a EPUSP/Departamento de Engenharia Naval).
- _____, Considerações sobre o artigo Hamilton's principles, Lagrange's method and ship motion theory de Touvia Miloh. São Paulo, 1987. (Exame de Qualificação para o Doutorado, EPUSP/Departamento de Engenharia Naval).
- _____, & ARANHA, J.A.P., Asymptotic and variational methods applied to the evaluation of wave drift forces. In: NATO-Advance Studies Institute. Advances in berthing & mooring os ships and offshore structures, Trondheim, Sept. 7-8, 1987.
- _____ & _____, Numerical experiments on a variational method for the two-dimensional radiation and diffraction problems in water waves. In: International Symposium on Offshore Engineering, 6: , Rio de Janeiro, Sept. 18-24, 1987.
- PETERS, A.S. & STOKER, J.J., The motion of a ship, as a floating rigid body in a seaway. Communications Pure & Applied Mathematics, 10: 399-490, 1957.
- SALVESEN, N. et alii. Ship motions and sea loads. Transactions of the Society of Naval Architects and Marine Engineers, 78: 250-87, 1970.

- SAO, K. et alii. On the heaving oscillation of a circular dock, Journal of the Society of Naval Architects of Japan, 130:
- SCLAVOUNOUS, P.D., The diffraction of free-surface waves by a slender ship. Journal of Ship Research, 28(1): 29-47, Mar. 1984.
- _____, Forward-speed vertical wave exciting forces on ships. Journal of Ship Research, 29(2): 105-11, Jun. 1985.
- ST. DENIS, M. & PIERSON, W.J., On the motion of ships in confused seas. Transactions of the Society of Naval Architects and Marine Engineers, 61: 280-354, 1953.
- VOLTERRA, V. Theory of functionals and of integral and integro-differential equations. Longon, Blackie & Son, 1929.
- VUGTS, J.H., The hydrodynamic coefficients for swaying, heaving and rolling cylinder in a free surface. International Shipbuilding Progress, 15(167): 251-76, Jul. 1968.
- WANG, S., Dynamical theory of potential flows with a free surface: a classical approach to strip theory of a ship motions. Journal of Ship Research, 20(3): 137-44, Sept. 1976.
- WEHAUSEN, J.V. & LAITONE, E.V. Surface waves. In: FLÜGGE, S. & TRUESDELL, C., ed. Encyclopedia of physics. Berlin, Springer-Verlag, 1960. v.9, p.447-814.
- WHITHAM, G.M., Linear and non-linear waves. New York, John & Wiley, 1974. 636 p. (Pure and Applied Mathematics. A Wiley-Interscience Series of Texts, Monographs and Tracts).
- _____, Variational methods and applications to water waves. Proceedings of the Royal Society - Series A, 229-6-25, 1967.
- YEUNG, R.W. Numerical methods in free-surface flows. Annual Review of Fluid Mechanics, 14: 395-442, 1982.
- _____, & BAI, K.J., Numerical solutions to free-surface flow problems. In: Symposium on Naval Hydrodynamics, 10., Cambridge 1974. Preprint.