

RUBÉN JOSÉ PAREDES ALVARADO

**DESENVOLVIMENTO DO MÉTODO RANS PARA ESCOAMENTO
INCOMPRESSÍVEL AO REDOR DE GEOMETRIAS SIMPLES
BIDIMENSIONAIS**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São
Paulo para obtenção do título de
Mestre em Engenharia

**São Paulo
2008**

RUBÉN JOSÉ PAREDES ALVARADO
Engenheiro Naval

**DESENVOLVIMENTO DO MÉTODO RANS PARA ESCOAMENTO
INCOMPRESSÍVEL AO REDOR DE GEOMETRIAS SIMPLES
BIDIMENSIONAIS**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São
Paulo para obtenção do título de
Mestre em Engenharia

Área de Concentração:
Engenharia Naval e Oceânica.

Orientador:
Prof. Dr.
Mardel Bongiovanni de Conti

São Paulo
2008

FOLHA DE APROVAÇÃO

RUBÉN JOSÉ PAREDES ALVARADO

**Desenvolvimento do Método RANS para Escoamento Incompressível ao Redor
de Geometrias Simples Bidimensionais**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São
Paulo para obtenção do título de
Mestre em Engenharia

Área de Concentração:
Engenharia Naval e Oceânica.

Aprovado em:

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Mardel Bongiovanni de Conti

Instituição: Universidade de São Paulo

Assinatura_____

Dr. Carlos Daher Padovezi

Instituição: Instituto de Pesquisa Tecnológica Assinatura_____

Prof. Dr. Alexandre Nicolaos Simos

Instituição: Universidade de São Paulo

Assinatura_____

DEDICÁTORIA

Dedico este trabalho a minha Esposa,
aos meus Pais, e às minhas Irmãs.

AGRADECIMENTOS

Ao professor Mardel Bongiovanni de Conti, pela orientação, apoio e pelo constante estímulo transmitido durante todo o trabalho.

Aos professores Marcos de Mattos Pimenta, e Alexandre Nicolaos Simos pelas críticas construtivas e sugestões concedidas durante a qualificação.

Ao professor Rui Carlos Botter, pela ajuda que fez possível o início do mestrado, e o apoio dado durante toda minha estadia na USP.

A Maricruz Fun-sang Cepeda, pelo grande apoio, incentivo e compreensão. Além da grande ajuda na elaboração e apresentação deste trabalho.

A todos os amigos e colegas que facilitarem a realização deste trabalho. Particularmente, Rodolfo Silva, Newton Pereira, Diego Sarzosa, e Clemente Rendón que contribuíram mais diretamente na melhor realização deste trabalho.

A todos os colegas e funcionários de Departamento de Engenharia Naval e Oceânica da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho.

A CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), pela concessão da bolsa de mestrado.

A ESPOL (Escuela Superior Politécnica del Litoral Guayaquil - Ecuador), pelo apoio econômico e institucional fornecido que fez possível a realização do mestrado. Especialmente aos Professores José Marín, Cristobal Mariscal, Bolívar Vaca.

A minha família, pela compreensão e incentivo durante esta etapa da minha vida.

SUMÁRIO

SUMÁRIO	6
RESUMO	13
ABSTRACT	15
RESUMEN	16
1. CONSIDERAÇÕES GERAIS	18
1.1. INTRODUÇÃO	18
1.2. CONTEXTO DO TRABALHO	20
1.3. OBJETIVOS	22
1.4. REVISÃO DA LITERATURA	22
1.5. ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	27
2. MODELO ANALÍTICO - NUMÉRICO	29
2.1. EQUAÇÕES GOVERNANTES	29
2.2. MÉTODO DE COMPRESSIBILIDADE ARTIFICIAL	34
2.2.1. Comparação com fluidos compressíveis	35
2.2.2. Influência do valor de compressibilidade artificial	36
2.3. MÉTODO DE VOLUMES FINITOS	38
2.3.1. Distribuição do fluxo de Euler	42
2.3.2. Distribuição do fluxo viscoso	44
2.3.3. Incremento no tempo	48
2.4. GERAÇÃO DA MALHA	51
2.5. MODELAGEM DA TURBULÊNCIA	56
2.5.1. Modelo algébrico de Baldwin e Lomax	59
3. APLICAÇÃO E VALIDADE DO MODELO NUMÉRICO	61
3.1. DESCRIÇÃO DOS ENSAIOS NUMÉRICOS	61

3.2. DOMÍNIO NUMÉRICO.....	63
3.2.1. Placa plana.....	63
3.2.2. Cilindro.....	65
3.3. CONDIÇÕES DE CONTORNO	67
3.3.1. Superfície impermeável	68
3.3.2. Simetria.....	71
3.3.3. Entrada e Saída.....	73
3.3.4. Continuidade.....	74
3.3.5. Campo distante.....	75
3.4. DESCRIÇÃO DO EQUIPAMENTO UTILIZADO	75
3.5. RESULTADOS E DISCUSSÃO	76
4. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES.....	89
REFERÊNCIAS	91

LISTA DE FIGURAS

	Página
Figura 2.1 - Influência de β na convergência para escoamento em um duto de seção constante	37
Figura 2.2 - Volume de controle para a célula triangular i mostrando o ponto de avaliação das funções	39
Figura 2.3 - Volume de controle para a face $(j, j+1)$	45
Figura 2.4 – Média das variáveis nos nós em função dos valores armazenados nos centróides das células	46
Figura 2.5 – Distâncias características de uma célula triangular i	51
Figura 2.6 - Geração da malha tradicional	52
Figura 2.7 - Geração elíptica da malha	53
Figura 2.8 - Transformação do plano físico ao regular.....	53
Figura 3.1 – Escoamento sobre a placa plana	62
Figura 3.2 – Domínio físico do cilindro circular.....	63
Figura 3.3 – Malha placa plana	64
Figura 3.4 – Malha cilindro circular.....	65
Figura 3.5 – Malha cilindro circular – domínio perto ao corpo	66
Figura 3.6 – Esquema das células “fantasmas”	66
Figura 3.8 – Contornos para placa plana	67
Figura 3.9 – Contornos para cilindro circular.....	68
Figura 3.10 -Implementação da condição de superfície solida	70
Figura 3.11 – Implementação da condição de simetria	72
Figura 3.12 - Condições de contorno	74
Figura 3.13.- Histórico da convergência parametrizado em β	78
Figura 3.14.- Histórico da convergência para β com valores desde 0.3 até 1.9.....	79

Figura 3.15 – Curvas da componente x da velocidade no caso da placa plana laminar quando β é 0.7.....	80
Figura 3.16 – Comparação resultados obtidos com Blasius	81
Figura 3.17 – Contorno de velocidades para varias densidades de malha	82
Figura 3.18 – Curva de convergência no caso da placa plana laminar com diferentes posições da fronteira de saída.....	83
Figura 3.19 – Contorno de velocidade na direção x para diferentes configurações da fronteira de saída	84
Figura 3.20 – Curvas da componente x da velocidade para o cilindro circular	85
Figura 3.21 – Curvas de pressão no caso do cilindro circular	86
Figura 3.22 – Comparação da distribuição de pressão na superfície do cilindro circular, $Re = 40$	87
Figura 3.23 – Curva de convergência no caso do cilindro circular	88

LISTA DE TABELAS

	Página
Tabela 1.- Variação dos coeficientes de arraste versus β	79
Tabela 2.- Variação dos coeficientes de arraste versus β entre 0.3 e 1.9.....	80
Tabela 3.- Variação do coeficiente em função da densidade da malha	82
Tabela 4.- Tempo de execução em função da densidade da malha	82
Tabela 5.- Influência da posição da fronteira de saída no coeficiente de arraste	85
Tabela 6.- Tempo de execução em função da posição da fronteira de saída	85

LISTA DE SÍMBOLOS

Latinos

C_p	Coeficiente de pressão
$D(q_i)$	Operador de dissipação artificial na célula i
$d^{(2)}(q_i)$	Termo dissipador de segunda ordem
$d^{(4)}(q_i)$	Termo dissipador de quarta ordem
E	Fluxo de Euler
E^v	Fluxo viscoso
k	Energia cinética das flutuações turbulentas
l_{mix}	Comprimento de mistura
n	Número de células vizinhas
\vec{n}	Vetor normal
p	Pressão com componente hidrostático [Pa]
p_g	Pressão na célula fantasma o adicional
p_r	Pressão na célula real
Re	Número de Reynolds
S_x	Componente do vetor normal na direção x proporcional à área de uma face da célula i
S_y	Componente do vetor normal na direção y proporcional à área de uma face da célula i
t	Tempo [seg]
u	Componente da velocidade na direção x [m/s]
u_g	Velocidade na célula fantasma o adicional
u_r	Velocidade na célula real
u'	Componente da velocidade na forma adimensional
$\overline{u'_i u'_j}$	Tensor dos esforços de Reynolds na forma adimensional
v	Componente da velocidade na direção y [m/s]
V_i	Volume de controle da célula i
V^*	Área do volume de controle alterno para o caso viscoso

Gregos

β	Parâmetro de pseudo-compressibilidade
δ	Espessura da camada limite
ε	Dissipação da turbulência
$\nabla^2 q_i$	Termo Laplaciano não dividido
ν	Viscosidade cinemática [m ² /seg]
ν_T	Viscosidade turbulenta
ν_{T_o}	Viscosidade turbulenta interior
ν_{T_i}	Viscosidade turbulenta exterior
ω	Taxa de dissipação da energia por unidade de volume e tempo
∂V_i	Contorno da célula i
ρ	Densidade do fluido [Kg/m ³]
$\overline{\rho u_i u_j}$	Tensor dos esforços de Reynolds
τ	Pseudo-tempo
τ_{ij}	Esforço cortante que atua na direção j num plano perpendicular ao eixo i
(ξ, η)	Coordenadas no plano computacional

RESUMO

O presente trabalho trata da aplicação do método RANS (*Reynolds Averaged Navier-Stokes*) ao escoamento estacionário bidimensional incompressível no entorno de corpos com geometrias simples sem superfície livre. Formula-se um processo de determinação do escoamento viscoso, que é aplicado no entorno de seções simples específicas, a saber, placa plana e círculo. Efeitos inerciais e viscosos são levados em conta analiticamente, com a consideração simplificada de turbulência; efeitos de compressibilidade são ignorados.

O trabalho avança pesquisa anterior do autor, Paredes (2006), em que se considerava a solução viscosa em regime laminar para fluidos incompressíveis internos, assim como escoamento com superfície livre. Caminhou-se, desde então, para a inclusão de turbulência no modelo, o que o torna mais próximo das aplicações em Engenharia Naval, como por exemplo, a determinação da resistência viscosa ao avanço. Utiliza-se aqui a técnica RANS e, para a modelagem dos esforços de Reynolds, utiliza-se o modelo de Baldwin-Lomax (1978), devido à boa aderência demonstrada nos resultados apresentados por diversos autores e a sua simplicidade de programação.

Faz-se uso do artifício “compressibilidade artificial” proposto por Chorin (1967) e, uma vez observadas às condições de contorno, a integração numérica destas equações no contínuo fluido é feita pelo método de volumes finitos (*Finite Volume Method* - FVM) em uma malha com células triangulares. Obtêm-se resultados numéricos para os casos do escoamento ao redor de placa plana, nos regimes laminar, e ao redor de um cilindro circular, por meio de um *software* desenvolvido especificamente para resolução dos casos considerados.

No caso da placa, plana os resultados são comparados com dados analíticos, mostrando uma boa aderência. Identifica-se a sensibilidade dos resultados quanto ao refinamento da malha, à geometria utilizada, e ao parâmetro de compressibilidade artificial. No caso do cilindro circular, os resultados são comparados com dados experimentais e numéricos obtidos por meio de outras técnicas, disponíveis na literatura, mostrando um bom comportamento para baixos números Reynolds, evidenciando-se boas perspectivas na utilização deste método em casos mais complexos, como o de análise do balanço do navio.

Palavras-chave: Hidrodinâmica. Mecânica de Fluidos Computacional. Atrito. Fluxo turbulento dos líquidos.

ABSTRACT

The present work is about the application of the RANS method (*Reynolds Averaged Navier-Stokes*) to the bi-dimensional incompressible steady flow around bodies with simple geometry without a free surface. It is formulated a process to determinate viscous flow around specific sections forms, namely flat plate and circumference. Inertial and viscous effects are considered, with a simplified consideration of turbulence; compressibility effects are neglected.

This work follows a previous author's research, Paredes (2006), where the viscous solution was considered in a laminar regime to analyze incompressible internal fluids, and flow with free surface. Since then, the author worked in the extension to turbulent regime with the inclusion of a turbulence model, in order to develop a solver more reliable according to Marine Engineering applications, for example, to determinate the viscous ship resistance. RANS techniques are used, and to model the Reynolds stresses, an algebraic model is used, Baldwin-Lomax (1978), because of the good behavior shown in the results published by several researchers and the easiness in the implementation.

The "Artificial Compressibility" technique proposed by Chorin (1967) is used, and once the boundary conditions are observed. The governing equations are discretized in space using the Finite Volume Method (FVM) in an unstructured mesh with triangular cells. The following cases are analyzed, the flow around a flat plate, in laminar regime, and the flow around a circular cylinder, with the use of the "in-house" *software* developed to solve them.

In the flat plate case, results are shown against analytical data with good agreement; also grid, geometry, and artificial compressibility parameter sensitivity are evaluated. In the circular cylinder case, results are shown against experimental and numerical data, available in literature, with acceptable agreement even at low Reynolds number, given good expectation to use this code in more complex cases, for example rolling vessels analysis.

Key-words: Hydrodynamics. Computational Fluid Mechanics. Friction. Turbulent flow.

RESUMEN

El presente trabajo trata de la aplicación del método RANS (*Reynolds Averaged Navier-Stokes*) al flujo estacionario bidimensional incompresible alrededor de cuerpos con geometrías sencillas sin superficie libre. Se formula un proceso de determinación del flujo viscoso, que es aplicado alrededor de secciones sencillas específicamente placa plana y círculo. Efectos inerciales y viscosos son tomados en cuenta analíticamente, con la consideración simplificada de la turbulencia; efectos de compresibilidad son ignorados.

Este trabajo continua una investigación previa del autor, Paredes (2006), en el que se consideraba la solución viscosa en régimen laminar para fluidos incompresibles internos y con superficie libre. Desde entonces, se trabajó en la inclusión de la turbulencia en el modelo, lo que posibilita su aplicación a las aplicaciones en Ingeniería Naval, como por ejemplo, la determinación de la resistencia viscosa al avance. Se utiliza aquí la técnica RANS y, para el modelaje de los esfuerzos de Reynolds, se utiliza el modelo de Baldwin-Lomax (1978), debido a la buena adherencia demostrada en los resultados presentados por diversos autores y la simplicidad de programación.

Se hace uso del artificio "compresibilidad artificial" propuesto por Chorin (1967) y, una vez observadas las condiciones de frontera, la integración numérica de estas ecuaciones en el dominio físico del fluido es realizada por el método de volúmenes finitos (*Finite Volume Method - FVM*) con una malla con celdas triangulares. Se obtienen resultados numéricos para los casos de flujo alrededor de una placa plana, en régimen laminar, y alrededor de un cilindro circular, por medio de un *software* desarrollado específicamente para la resolución de los casos considerados.

En el caso de la placa plana, los resultados son comparados con datos analíticos mostrando una buena adherencia, identificando la sensibilidad al refinamiento de la malla, la geometría utilizada, y al parámetro de compresibilidad artificial. En el caso del cilindro circular, los resultados son comparados con datos experimentales y numéricos obtenidos por medio de otras técnicas, disponibles en la literatura, mostrando un buen comportamiento con números Reynolds bajos, mostrando buenas posibilidades en la utilización de este código en casos más complejos, como el análisis del balance de embarcaciones.

Palabras-clave: Hidrodinámica. Mecánica de fluidos. Arrastre. Flujo Turbulento.

1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

1.1. INTRODUÇÃO

O problema de escoamento viscoso incompressível em torno do casco de navios é governado pelas equações de Navier-Stokes. Soluções analíticas deste sistema de equações têm aplicação limitada, devido às simplificações. Testes experimentais e análise numérica constituem importantes ferramentas utilizadas nas aplicações de interesse prático, sendo normalmente empregados de forma complementar. O presente trabalho trata de um método numérico, a saber, método RANS (*Reynolds-Averaged Navier-Stokes*), enquadrando-se no campo da Dinâmica dos Fluidos Computacional (*Computational Fluid Dynamics - CFD*). As pesquisas em CFD têm avançado paralelamente ao desenvolvimento de *hardware*, havendo atualmente a possibilidade concreta de seu emprego no projeto e na análise de navios, quanto ao seu comportamento hidrodinâmico.

Dentre os métodos numéricos utilizados em CFD, citam-se: métodos de diferenças finitas, métodos de volumes finitos, métodos de elementos finitos, métodos de painéis. Métodos de painéis, por exemplo, são utilizados na área naval em aplicações relativas à dinâmica do navio em que predominam efeitos inerciais e gravitacionais. Neste caso, adota-se o modelo de Teoria Potencial, complementada por formulações empíricas para consideração de efeitos viscosos. Porém, em determinadas aplicações é conveniente a consideração de efeitos viscosos no próprio método numérico, ao invés de sua inclusão como correção empírica. Este é o caso da resistência viscosa ao avanço, do balanço do navio, do arrasto em *risers*, etc.

Com relação ao tipo de descrição do escoamento, se referida a um sistema euleriano ou lagrangeano, há proposições de métodos nas duas vertentes. O “Método das Partículas”, (Koshizuka, et al., 1995), por exemplo, utiliza a descrição

lagrangeana, mostrando boa aderência no estudo da arrebentação das ondas. No método RANS, foco do presente trabalho, adota-se a descrição euleriana.

Segundo Larsson et al. (2003), a aplicação para a qual há mais consolidação na utilização do método RANS é a de resistência e propulsão.

As aplicações relativas à manobrabilidade e ao comportamento no mar enfrentam obstáculos como a não-estacionaridade, acelerações do navio, ambiente de descrição complexa, dentre outros, levando à necessidade de recursos computacionais intensos.

Uma alternativa é o uso dos modelos RANS em associação aos métodos numéricos baseados no modelo de Teoria Potencial. De fato, o modelo RANS captura o mecanismo de geração de vórtices e outros efeitos viscosos, mas, por enquanto, a modelagem viscosa requer recursos computacionais mais robustos do que a modelagem invíscida. Assim, ao considerar os efeitos viscosos, já dispondo de uma primeira estimativa dos resultados com base na consideração dos efeitos inerciais e gravitacionais, a técnica RANS mostra-se em geral viável e eficaz.

Cita-se, por exemplo, a previsão do emborcamento de navios submetidos a balanço de grandes amplitudes. Gorski (2002) assevera que, embora os códigos RANS não possam ser ainda utilizados com eficácia de modo global em tal modelagem, ao menos levam a uma previsão realística do amortecimento.

Outro exemplo refere-se ao escoamento em torno de cascos de navios em avanço, o qual apresenta efeitos significativamente turbulentos ao longo da camada limite e da esteira. Larsson et al. (2003) alega que a vantagem do método RANS é a inclusão do fenômeno da turbulência e efeitos viscosos, obtendo-se resultados com boa aderência comparados aos dados experimentais. No presente trabalho, a turbulência é considerada conforme o modelo algébrico de Baldwin-Lomax (1978), que considera duas camadas para o cálculo da viscosidade turbulenta.

Uma das variações do método RANS aqui utilizada inclui o artifício de “compressibilidade artificial”, proposto por Chorin (1967), e permite simular

escoamentos incompressíveis utilizando algoritmos empregados para escoamentos compressíveis. Utiliza-se ainda um algoritmo desenvolvido por Jameson e Mavriplis (1986), que resolve os escoamentos invíscidos em malhas triangulares regulares utilizando o método de volumes finitos para a discretização espacial e o método de Runge-Kutta de cinco etapas para realizar a integração no tempo. Tal método foi adaptado a escoamentos viscosos com presença de superfície livre por Farmer et al. (1994).

1.2. CONTEXTO DO TRABALHO

Os métodos numéricos mais consagrados para determinação do escoamento em torno de cascos de navios, os quais consideram efeitos de superfície livre e, conseqüentemente, difração e radiação de ondas, admitem freqüentemente a hipótese de fluido invíscido e escoamento potencial. Dentre tais métodos, empregam-se técnicas que utilizam distribuições de fontes de Kelvin, as quais satisfazem a condição de superfície livre linearizada e do escoamento uniforme ao longe, e ainda há técnicas que utilizam distribuições de Rankine, as quais podem satisfazer as condições de superfície livre linearizada em torno do escoamento de casco duplo.

A suposição de dissociação entre efeitos gravitacionais e viscosos está por trás da adoção desta hipótese de fluido invíscido e escoamento potencial. Consideram-se assim os efeitos gravitacionais e inerciais do escoamento, sendo que os efeitos viscosos, ou não são considerados, ou são tomados a posteriori por meio de expressões empíricas.

Assim é, por exemplo, na determinação da resistência ao avanço, em que se costuma empregar a hipótese de Froude, admitindo desvinculação entre resistência de ondas e resistência viscosa, podendo a primeira ser determinada por uma ferramenta computacional ou ensaios, e a segunda normalmente sendo estimada por fórmulas obtidas a partir de ensaios com placas planas.

Em outro exemplo prático, relativo ao balanço do navio sob ondas, costuma-se admitir a hipótese de fluido invíscido e escoamento potencial para determinação do amortecimento potencial e da inércia adicionada, e utilizar fórmulas empíricas para a determinação do amortecimento viscoso, na hipótese de que os amortecimentos, viscoso e potencial, sejam independentes.

Porém, principalmente a jusante do casco, em sua esteira, bem como junto ao bojo, os efeitos de interação inerciais - gravitacionais - viscosos são significativos e os métodos numéricos baseados na teoria potencial e as formulações empíricas não consideram esses efeitos. Aparece como alternativa a aplicação de métodos viscosos analíticos, com os quais é possível avaliar esta interação, melhorando a precisão dos resultados obtidos no estudo da dinâmica do navio. A consideração simultânea de efeitos gravitacionais e viscosos, além dos inerciais, é frente de pesquisa na área, e o procedimento para validar estes métodos está chegando a um consenso, aumentando assim o grau de confiabilidade dos resultados obtidos, (ITTC, 2002).

Uma das técnicas que vêm sendo experimentadas de forma promissora é a RANS (*Reynolds Averaged Navier-Stokes Method*), que utiliza o conceito de tensões médias de Reynolds e algum modelo de turbulência para dar fechamento à formulação do problema. Esta técnica vem sendo testada para aplicações de determinação da resistência ao avanço, do comportamento no mar e de manobrabilidade. Porém, há ainda várias questões a entender e resolver quanto à definição da malha, à modelagem da turbulência, às técnicas de integração, à própria validação e outras.

O presente trabalho visa avançar no entendimento destas questões, especialmente na situação da modelagem numérica da turbulência sem a consideração de uma superfície livre, enfocando a validação por comparação com resultados experimentais e analíticos disponíveis na literatura.

1.3. OBJETIVOS

Os objetivos do presente trabalho são:

1. Formular um processo de determinação do escoamento viscoso, pela técnica RANS, considerando turbulência por Baldwin-Lomax;
2. Aplicar o processo em (1) a escoamentos uniformes ao longe, sem superfície livre, incidindo em seções bidimensionais de geometrias simples, com exemplos específicos para placa plana e círculos;
3. Desenvolver e validar o correspondente programa computacional.

1.4. REVISÃO DA LITERATURA

Há uma extensa lista de estudos publicados sobre a aplicação do método RANS na área naval. A seguir, são sumarizados alguns dos principais trabalhos que tratam deste método.

Chorin (1967) utilizou um artifício matemático para incluir um parâmetro denominado de “compressibilidade artificial” nas equações de movimento, utilizando diferenças finitas, como uma alternativa para as simulações de escoamentos incompressíveis. Este parâmetro permite a utilização de algoritmos para a análise de escoamentos compressíveis em problemas de fluidos incompressíveis, como é o caso da água nas aplicações navais. No primeiro exemplo apresentado por Chorin, foi analisado o escoamento em um segmento de canal com um número de Reynolds entre 0.0 e 1.0, não tendo sido considerado um modelo de turbulência. O algoritmo mostrou ser estável inclusive para condições iniciais desfavoráveis; porém, para os números de Reynolds maiores, a convergência foi lenta. O segundo caso reportado foi o estudo da convecção térmica numa camada de fluido aquecido na superfície, e os resultados tiveram boa aderência com dados experimentais anteriores.

Por outro lado, Jameson; et al. (1981) publicou os resultados de um novo procedimento utilizando o método de volumes finitos com um operador de dissipação artificial de terceira ordem, e examinaram vários esquemas de Runge-Kutta para a integração no tempo, aplicados à resolução das equações de Euler. As células utilizadas foram de forma retangular. Foi analisado o escoamento ao redor de um cilindro e de um fólio NACA0012 com um ângulo de ataque de 12.5 graus. Foram testadas várias versões do método de Runge-Kutta, sendo que de quatro etapas mostrou a maior eficiência, tendo sido utilizado para todos os demais cálculos. Os resultados tiveram boa aderência e a taxa de convergência foi maior que a reportada por Chorin (1967).

Koren (1984) foi pioneiro em utilizar o método de Runge-Kutta em combinação com a técnica de compressibilidade artificial para analisar o escoamento incompressível viscoso. Adotou uma faixa para número de Reynolds entre 1 e 50, variando as dimensões do contorno de entrada. Utilizou o esquema de diferenças finitas, sem a inclusão de um operador de dissipação artificial, que limitou o número de Reynolds, uma vez que o processo iterativo diverge para Reynolds maior que 50. Os resultados computacionais estavam em concordância com os resultados físicos esperados e com os resultados numéricos de outros autores. Novamente o esquema de Runge-Kutta de quatro etapas apresentou a melhor taxa de convergência.

O método de Jameson et al. (1981) foi estendido a fluidos incompressíveis por Rizzi e Eriksson (1985) para a simulação de escoamentos invíscidos com rotação. Foi realizada uma análise da estabilidade do sistema de equações, estabelecendo a influência do parâmetro de compressibilidade artificial na taxa de convergência. O primeiro caso foi o escoamento ao redor de um cilindro circular. Ao comparar os resultados obtidos do coeficiente de pressão com os da solução analítica, observou-se que se resgatava a solução do escoamento irrotacional, uma vez que o parâmetro de dissipação fora fixado em um valor mínimo para conservar a precisão numérica. No segundo caso, analisou-se o fólio NACA0012 com um ângulo de incidência de cinco graus, demonstrando a capacidade do método de capturar a formação da vorticidade e a não necessidade da imposição da condição Kutta. Também foram

apresentados os resultados para uma geometria tridimensional de uma asa, sendo que a influência do parâmetro de dissipação foi importante, embora não compromettesse a precisão global.

Com o objetivo de aplicar o modelo numérico a problemas com geometrias mais complexas, Jameson e Mavriplis (1986) sugeriu um modelo baseado em volumes finitos, mas com malhas triangulares para resolver as equações de Euler compressíveis, e tendo sido utilizado pela primeira vez um esquema de Runge-Kutta de cinco etapas, com o operador de dissipação artificial avaliado somente nas primeiras etapas para diminuir o custo computacional. Também foram utilizadas estratégias para acelerar o processo de convergência, o incremento de tempo local, a atenuação do resíduo, o refinamento da malha, levando a uma melhoria na velocidade de convergência. Os resultados obtidos no caso do fólio NACA0012 são comparados com o modelo da malha quadrilateral, desenvolvido por Jameson et al. (1981), demonstrando uma taxa de convergência similar.

Este procedimento foi adaptado por Mavriplis e Jameson (1990) a fluidos viscosos, utilizando um operador de dissipação artificial, composto por duas parcelas: 1) um termo de segunda ordem, atuando como um sensor de pressão para detectar zonas de gradientes altos, como ondas de choque, considerando uma malha com estiramento; 2) um termo de quarta ordem, responsável pela estabilidade numérica, o qual é utilizado no presente trabalho. Os autores utilizaram o método de elementos finitos, e recomendaram o cálculo do operador de dissipação artificial nas etapas ímpares da integração no tempo, a qual é feita com o método de Runge-Kutta de cinco etapas. A malha foi não estruturada e os casos analisados são escoamentos laminares, relativos à placa plana e ao fólio NACA0012, demonstrando uma taxa de convergência menor do que nos casos com malhas estruturadas. Os resultados das componentes da velocidade e do esforço cortante mostraram uma boa aderência, assim como a distribuição da pressão sobre o fólio.

Mavriplis (1990) adaptou o modelo de Mavriplis e Jameson (1990) ao regime turbulento, utilizando o modelo algébrico de Baldwin-Lomax (1978), mediante a utilização de uma malha auxiliar próxima à parede para calcular a viscosidade turbulenta, e depois extrapolando estes valores à malha principal. O modelo da

turbulência foi modificado para conseguir analisar escoamentos mais complexos. Foram analisados escoamentos compressíveis de geometrias com um, dois e quatro fólhos, e os resultados foram comparados com dados experimentais, mostrando boa aderência.

Yeung e Ananthkrishnan (1992) propôs-se a capturar os atributos do escoamento para um corpo bidimensional de seção retangular flutuante oscilando num fluido viscoso, mediante a utilização do método de diferenças finitas. Além disso, estabeleceu uma linha de pesquisa que foi seguida em outros trabalhos sobre oscilações de corpo. Sem a consideração de modelos de turbulência, obtiveram-se resultados com boa aderência a dados experimentais, tendo sido observadas assimetrias no domínio fluido ao redor do eixo e desprendimento de vórtices.

A consideração de superfície livre foi proposta por Hino; Martinelli e Jameson (1994), com extensão do modelo numérico de Mavriplis e Jameson (1990). Os casos analisados são o escoamento ao redor de um hidrofólio NACA0012 submerso, com um ângulo de ataque de cinco graus, variando a profundidade para identificar a influência da superfície livre sobre o campo de pressões ao redor do hidrofólio e do campo de velocidades, assim como a influência do hidrofólio sobre a superfície livre. Os resultados tiveram uma boa aderência com casos experimentais.

Farmer et al. (1994) apresentou a aplicação do método de Euler e de Navier-Stokes de Mavriplis (1990) ao escoamento incompressível ao redor de navios com uma superfície livre. Foram analisados dois tipos de casco, Wigley e Séries 60 com um coeficiente de bloco de 0.6; os resultados têm boa aderência com dados experimentais. O método de Euler produziu resultados com precisão aceitável.

Os efeitos viscosos desconsiderados em Hino; Martinelli e Jameson (1994) foram incluídos em Hino (1997). O método de cálculo dos fluxos de Euler foi modificado utilizando a divisão de fluxo de Roe (1981), e a integração no tempo foi substituída por um método implícito, o que permitiu a utilização de números Courant-Freidricks-Levy (CFL) maiores, resultando em menores tempos de execução. O modelo para o cálculo do fluxo viscoso considerou os nós das faces e dos centros das células. Este modelo de cálculo de fluxo viscoso é utilizado no presente

trabalho. O modelo de turbulência utilizado no trabalho de Hino foi o de Spalart-Allmaras, como descrito em Wilcox (2006). Os casos analisados foram: 1) placa plana, cujos resultados foram comparados com Blasius apud White (2006); 2) escoamento ao redor do cilindro circular com um número de Reynolds de 40, onde o campo de pressões sobre o corpo foi comparado com dados experimentais mostrando uma boa aderência; 3) escoamento turbulento sem superfície livre ao redor de dois fólhos, onde a distribuição de pressão concordou com os dados experimentais; 4) escoamento ao redor de um hidrofólio, como nos casos analisados em Hino; Martinelli e Jameson (1994), mostrando uma boa aderência com estes resultados e com dados experimentais.

Posteriormente, o modelo de turbulência de Spalart-Allmaras foi substituído pelo de duas equações $k - \omega$ em Hino (2000), onde foram analisados escoamentos ao redor de um navio petroleiro, sem e com bolinas, tendo os resultados mostrados boa aderência quanto à resistência ao avanço. Trabalhos posteriores foram adaptados a regimes não permanentes, como é mostrado em Rhee e Hino (2000) e Sato et al. (2003).

Bet et al. (2000) apresentou um método de solução similar ao proposto por Jameson; Schmidt e Turkel (1981), mas o método de cálculo do fluxo invíscido foi feito como indicado por Hino (1997). Um diferencial neste trabalho foi a forma de aproximação da posição da superfície livre integrada ao método iterativo que resolve as equações de Navier-Stokes, utilizando um conceito similar ao método Level-Set. Utilizou-se o modelo de turbulência $k - \epsilon$. Foi analisado o escoamento ao redor de um casco Wigley e da Série 60 e, ao comparar os contornos das linhas de água com dados experimentais, o coeficiente de arrasto sob ondas mostraram boa aderência para ambos os cascos. Também, ao comparar a variação da velocidade com a aproximação numérica de Blasius, demonstrou-se a interação da superfície livre com a camada limite.

Martinelli e Cowles (2000) utilizou o algoritmo desenvolvido por Farmer et al. (1994) para otimizar a forma de um fólio em um escoamento incompressível, viscoso e turbulento com uma rotina externa também utilizando o método de compressibilidade artificial. O método foi validado para várias asas e a função

objetivo foi definida como a distribuição de pressão da asa desejada, resultando na modificação da forma inicial da mesma. Os resultados publicados demonstraram que o método atuou como esperado, inclusive para casos tridimensionais complexos.

Wanderley e Levi (2004) apresentaram o estudo do fenômeno “Vibração Induzida por Vórtices” (VIV) sobre um cilindro circular pela técnica RANS. Utilizaram o modelo de turbulência Baldwin-Lomax para simular o escoamento turbulento na esteira. Analisou-se a oscilação transversal; o método foi capaz de capturar a maioria das características da física real do fenômeno e os resultados coincidiram com aqueles obtidos de maneira experimental, tendo sido considerado um modelo numérico robusto e exato frente a outros modelos que fracassaram. O modelo necessitou de um grande número de iterações para alcançar o estado estável. Com as equações RANS, resolvia-se a dinâmica do fluido e obtinham-se a velocidade e a nova posição do cilindro; em seguida, a malha era redefinida. Houve diferenças com resultados experimentais, provavelmente devido a efeitos tridimensionais e à superfície livre. Onde tal influência não é significativa, tal modelo pode ser utilizado, como, por exemplo, em certas aplicações na área *offshore*.

1.5. ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

No Capítulo 2 descreve-se o modelo utilizado para a solução das equações de Navier-Stokes para problemas estacionários, utilizando o artifício de compressibilidade artificial com a discretização do domínio físico por meio do método de volumes finitos. Descreve-se também o método utilizado para geração da malha no domínio fluido e, finalmente, apresenta-se o método utilizado para modelagem da turbulência.

No capítulo 3 apresentam-se os casos de aplicação com as condições de contorno. Caracterizam-se o *hardware* e *software* utilizados. São apresentados os

ensaios numéricos para validação do procedimento e o tempo computacional empregado. São feitos comentários e observações.

No Capítulo 4 estão apresentadas conclusões e recomendações sobre o trabalho realizado e possíveis encaminhamento de futuras pesquisas.

Finalmente vêm as referências bibliográficas.

2. MODELO ANALÍTICO - NUMÉRICO

Neste capítulo são revisadas as equações governantes do movimento de fluidos, seção 2.1, as quais são aplicadas à decomposição de Reynolds nas componentes de velocidade e pressão para obter as equações do escoamento médio e assim poder incluir a análise da turbulência com um modelo apropriado, descrito na seção 2.5.

Para realizar a aproximação numérica, utiliza-se um artifício numérico (CHORIN, 1967), descrito na seção 2.2, com o qual se aproximam os escoamentos incompressíveis com algoritmos utilizados para escoamentos compressíveis no estado estacionário.

Adicionalmente, para a discretização no espaço é utilizado o método de volumes finitos, conforme seção 2.3; para o cálculo dos termos de Euler e viscosos, é necessária a utilização de distintos métodos de representação dos correspondentes fluxos, como descrito nas seções 2.3.1 e 2.3.2. Por último, a técnica utilizada para a discretização no tempo é descrita na seção 2.3.3.

Finalmente, um fator importante que determina a qualidade dos resultados obtidos por técnicas de CFD é o tipo de malha utilizada; o método para sua geração é mostrado na seção 2.4.

2.1. EQUAÇÕES GOVERNANTES

As equações governantes para um escoamento bidimensional viscoso são: equação de continuidade; equações de conservação de quantidade de movimento.

Podem ser apresentadas da seguinte maneira:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + F_x \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + F_y \quad (2.3)$$

Onde: (x, y) são coordenadas horizontal (positiva para a direita) e vertical (positiva para cima),

(u, v) são componentes da velocidade nas direções x e y,

p é pressão com componente hidrostática e hidrodinâmica,

(F_x, F_y) são componentes da força de corpo, por unidade de massa,

ν é viscosidade cinemática, e,

ρ é densidade do fluido.

No presente trabalho são considerados escoamentos internos, ou externos sem a influência de superfície livre, razão pela qual forças do corpo, de natureza gravitacional, eletromagnética e devidas a outras ações distribuídas volumetricamente são desconsideradas.

(2.2) e (2.3) ficam:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2.5)$$

Como é usual, na consideração do fenômeno da turbulência, utiliza-se a decomposição de Reynolds, desmembrando-se os valores instantâneos das variáveis em valores médios mais flutuações, como descrito em Wilcox (2006). De aí, obtém-se o seguinte sistema de equações, escrito na notação de Einstein:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.6)$$

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j u_i + \overline{u'_j u'_i}) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.7)$$

Além da substituição de valores instantâneos das velocidades e da pressão por valores médios, a única diferença entre as equações médias no tempo e as equações da quantidade de movimento é o aparecimento do termo $\overline{u'_i u'_j}$, o qual, segundo Wilcox (2006), é a média no tempo da taxa de transferência de quantidade de movimento devido à turbulência.

Segundo Tennekes e Lumley (1972), pelo fluxo de quantidade de movimento estar relacionado à força pela segunda lei de Newton, o termo de transporte da turbulência pode ser pensado como a divergência de um esforço. Também devido ao procedimento da decomposição de Reynolds, o movimento turbulento pode ser pensado como um agente que produz esforços no escoamento médio. Por esta razão, (2.7) é reescrita com todos estes esforços agrupados, como é mostrado a seguir:

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j u_i) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\rho}{\mu} \overline{u'_j u'_i} \right) \quad (2.8)$$

Esta equação, na verdade um conjunto de três equações escalares, é usualmente conhecida como equação de Navier-Stokes com termos turbulentos médio, conhecidos como termos de Reynolds ($\overline{\rho u'_i u'_j}$); daí o uso das siglas RANS.

Há muitas formas de escrever de maneira adimensional o sistema (2.6) e (2.8), mas no presente trabalho utilizam-se as seguintes relações como descritas por White (2006), onde L é um comprimento de referência, U , é a velocidade de referência, e, ρ é a densidade do fluido:

$$u' = \frac{u}{U} \quad v' = \frac{v}{U} \quad x' = \frac{x}{L}$$

$$y' = \frac{y}{L} \quad t' = \left(\frac{U}{L}\right)t \quad p' = \left(\frac{1}{\rho U^2}\right)p \quad (2.9)$$

Ao substituir estas igualdades em (2.6) e (2.8) e eliminando as apóstrofes, para poupar tempo de escrita, obtém-se:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j u_i) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \overline{u_j u_i} \right) \quad (2.11)$$

Onde: $\overline{u_j u_i}$ é a forma adimensional dos esforços de Reynolds, cuja adoção requer um modelo adicional, descrito na seção 2.5, para o fechamento do problema, e,

Re é o número de Reynolds, com ν como a viscosidade cinemática:

$$Re = \frac{UL}{\nu} \quad (2.12)$$

Os termos viscosos podem ser escritos de maneira análoga, como se mostra a seguir:

$$\frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad (2.13)$$

$$\frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \quad (2.14)$$

Segundo a notação usada em Newman (1977), τ_{ij} é o esforço de cisalhamento que atua na direção j num plano perpendicular ao eixo i; por a água ser um fluido newtoniano, tem-se:

$$\tau_{xx} = \frac{1}{Re} \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (2.15)$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.16)$$

$$\tau_{yy} = \frac{1}{Re} \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (2.17)$$

Combinando (2.15), (2.16), e (2.17) com as equações governantes, obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \quad (2.20)$$

Ao agrupar os termos invíscidos, também chamados de Euler, com os viscosos, tem-se o seguinte sistema de equações:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2 + p - \tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(uv - \tau_{xy})}{\partial y} = 0 \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv - \tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v^2 + p - \tau_{yy})}{\partial y} = 0 \quad (2.23)$$

Segundo Hino (1997), pode-se escrever o sistema (2.21), (2.22), e (2.23) em forma vetorial:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial(\mathbf{e} - \mathbf{e}^v)}{\partial x} + \frac{\partial(\mathbf{f} - \mathbf{f}^v)}{\partial y} = 0 \quad (2.24)$$

Onde:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ u \\ v \end{bmatrix}, \mathbf{e} = \begin{bmatrix} u \\ u^2 + p \\ uv \end{bmatrix}, \mathbf{f} = \begin{bmatrix} v \\ uv \\ v^2 + p \end{bmatrix}, \mathbf{e}^v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}, \mathbf{f}^v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \end{bmatrix}$$

Este sistema de equações não pode ser classificado como hiperbólico ou parabólico, dado que apresenta um comportamento matemático considerado como

uma combinação de ambos, o que torna complexo o estabelecimento de um método numérico para resolvê-lo.

2.2. MÉTODO DE COMPRESSIBILIDADE ARTIFICIAL

Este método foi proposto por Chorin (1967), pela necessidade de analisar o movimento de fluidos incompressíveis. Naquele ano, já se dispunham dos primeiros métodos para fluidos compressíveis com aplicação na área aeronáutica. Apesar da existência na atualidade de várias alternativas para a solução de problemas com escoamentos incompressíveis, no presente trabalho escolheu-se este método devido à sua fácil extensão a casos tridimensionais.

Ao resolver de forma numérica (2.24), percebe-se que as componentes do vetor velocidade (u , v) podem ser obtidas por um método iterativo que evolua no tempo; tal método é aplicado à (2.22) e (2.23), não o sendo com a pressão (p). Segundo Chorin (1967), a pressão em um fluido incompressível atua como um parâmetro de relaxamento para satisfazer a equação de continuidade original. Desta forma, (2.21) pode ser modificada pela inclusão de uma derivada artificial da pressão pelo tempo, representando a compressibilidade artificial:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \beta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.25)$$

Onde β atua como um parâmetro de pseudo-compressibilidade.

Segundo Chorin (1967), (2.25) pode ser obtida da equação de continuidade para fluidos compressíveis, usando a equação de estado:

$$p = \beta \rho \quad (2.26)$$

Assim, o sistema fica:

$$\frac{\partial q^*}{\partial \tau} + \frac{\partial(e - e^v)}{\partial x} + \frac{\partial(f - f^v)}{\partial y} = 0 \quad (2.27)$$

Onde:

$$q^* = \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \end{bmatrix}, e = \begin{bmatrix} \beta u \\ u^2 + p \\ uv \end{bmatrix}, f = \begin{bmatrix} \beta v \\ uv \\ v^2 + p \end{bmatrix}, e^v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}, f^v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \end{bmatrix}$$

O sistema de equações diferenciais parciais é de tipo hiperbólico; pode-se utilizar um método numérico para sua integração no tempo.

2.2.1. Comparação com fluidos compressíveis

Os valores próprios do sistema (2.27), são:

$$\lambda = \begin{Bmatrix} v_n + a \\ v_n \\ v_n - a \end{Bmatrix} \quad (2.28)$$

Onde v_n é a velocidade normal à fronteira e a é a velocidade do som local; o valor de a é dado por:

$$a = \sqrt{v_n^2 + \beta(S_x^2 + S_y^2)} \quad (2.29)$$

Segundo Hino (1997), S_x e S_y são definidos por $(Y_{j+1} - Y_j)$ e $(X_j - X_{j+1})$ respectivamente. Uma comparação com o valor próprio das equações de Euler para um fluido compressível mostra que a corresponde a uma velocidade do som artificial.

Em analogia com o caso compressível, o número de Mach pode ser definido como a relação da velocidade de escoamento e a velocidade do som artificial:

$$Ma = \frac{V_n}{a} = \frac{V_n}{\sqrt{v_n^2 + \beta(S_x^2 + S_y^2)}} \quad (2.30)$$

Fisicamente, pequenas perturbações de pressão propagam-se em um fluido incompressível com velocidade infinita. Porém, no método de compressibilidade artificial, o correspondente parâmetro limita a velocidade de propagação e o efeito da perturbação é atrasado. O grau de atraso depende do valor de β . Para $\beta \geq 0$, o escoamento “pseudo-compressível” é comparável com um escoamento subsônico.

A solução do sistema (2.27) carece de sentido físico para escoamento não estacionário; contudo, no estado estacionário a derivada temporal $\frac{dp}{dt}$ desaparece e a equação de continuidade original para fluido incompressível é recuperada.

2.2.2. Influência do valor de compressibilidade artificial

A velocidade de propagação da onda de pressão em um fluido “pseudo-compressível” é influenciada consideravelmente pelo valor do parâmetro β . Um aumento no parâmetro β produz uma propagação da perturbação mais rápida dentro da região do escoamento, e a solução se aproxima de melhor maneira à solução de um escoamento não estacionário completamente incompressível.

Devido a isto, a seleção do valor apropriado de β está sujeita a certas restrições. Por exemplo, seu limite superior pode ser calculado da razão k entre o máximo e mínimo valor próprio do sistema diferencial de equações, (BET, et al., 2000):

$$k = \frac{|\lambda_{max}|}{|\lambda_{min}|} = \frac{|u + \sqrt{u^2 + \beta}|}{|u - \sqrt{u^2 + \beta}|} \quad (2.31)$$

Existem diferentes modelos na literatura onde o valor de β é assumido proporcional à velocidade local do escoamento, como em Rizzi e Eriksson (1985):

$$\beta = \gamma * \max[(u^2 + v^2), \beta_{min}] \quad (2.32)$$

Onde o parâmetro γ é um fator de primeira ordem de magnitude; Rizzi e Eriksson (1985) sugerem um valor entre um e cinco, depois de analisarem a estabilidade do sistema de equações.

O valor de β obtido por (2.32) é local, o que pode levar a problemas de convergência caso a velocidade do escoamento seja muito grande, localmente, e provoque um aumento de β .

Um valor mínimo razoável para β pode ser estimado da condição em que a onda de pressão artificial se propaga mais rápido que os efeitos viscosos. Segundo Bet et al. (2000), os valores recomendáveis para β estão entre 0.4 e 2.0. A Figura 2.1 mostra o comportamento de convergência de um escoamento laminar em um duto de seção constante com diferentes valores do parâmetro β , obtido pelo autor numa pesquisa prévia, (PAREDES, 2006); neste caso, o processo diverge para valores maiores do que um.

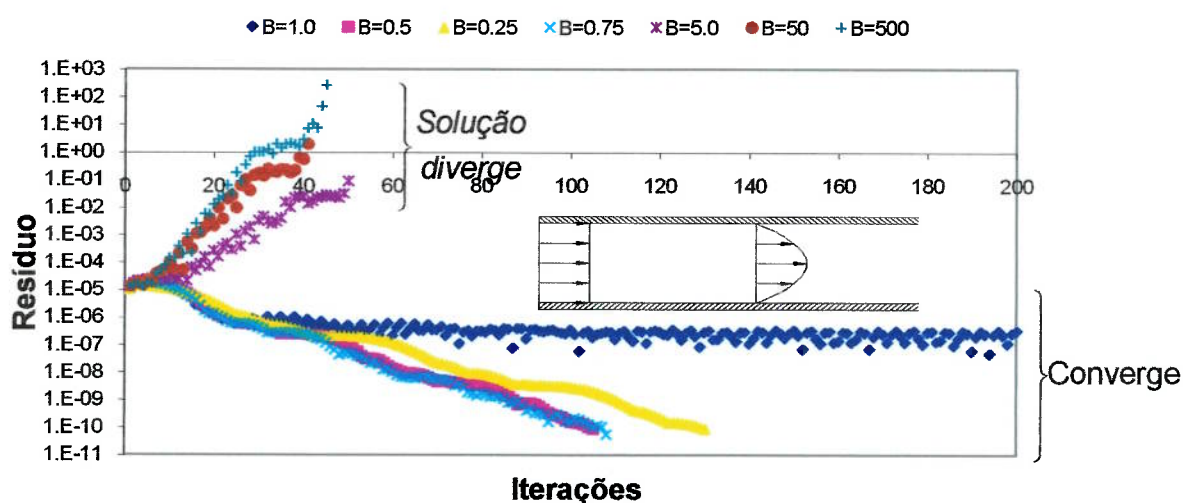


Figura 2.1 - Influência de β na convergência para escoamento em um duto de seção constante

No presente trabalho, no caso da placa plana em regime laminar, utiliza-se diferentes valores de β para identificar a influência deste parâmetro na taxa convergência.

2.3. MÉTODO DE VOLUMES FINITOS

Todos os métodos de CFD utilizam alguma forma de discretização espacial, como o método de diferenças finitas, o de elementos finitos e o de volumes finitos, cada um tendo suas vantagens e desvantagens.

O método de diferenças finitas consiste em substituir cada derivada na equação por uma expressão obtida da utilização de alguma série truncada de Taylor. Existem muitos esquemas vinculados à forma de discretização escolhida para cada derivada. Para aplicar este método, o domínio deve ser discretizado com quadriláteros paralelos aos eixos x e y . Além disso, o método pode ser utilizado em problemas com geometrias complexas, com uma manipulação prévia das equações governantes, aumentando a complexidade das mesmas.

No método de elementos finitos, divide-se o domínio em segmentos ou elementos, e dentro de cada um deles desenvolve-se uma interpolação em função dos valores da função-alvo, a qual é avaliada nos nós. Em seguida, aplica-se o método de resíduos ponderados para obter a matriz de rigidez de cada elemento. Este método é adequado para problemas de extrema complexidade e geometrias pouco comuns, tal qual o método de volumes finitos, o que amplia seu campo de aplicação em hidrodinâmica.

O método de volumes finitos, também chamado de método de volumes de controle, divide primeiramente o domínio em um número finito de células adjacentes, de tal forma que cada ponto, onde se armazenam as variáveis, esteja rodeado por volumes de controle. A seguir, as equações diferenciais governantes são

integradas, mediante integrais de linhas, ao redor das faces de cada volume de controle. Em seqüência, adotam-se distribuições das variáveis entre os nós, as quais são utilizadas na avaliação das integrais requeridas. Obtém-se uma equação algébrica contendo as variáveis de um grupo de nós. Uma vantagem deste sobre o método de diferenças finitas é que, ao utilizá-lo em geometrias complexas (malha não estruturada), não é necessária a manipulação prévia, mantendo o nível de complexidade. Além disso, as condições de contorno são aplicadas de uma forma mais simples sobre as fronteiras das células (MURTHY, et al., 2002). Por estas características, no presente trabalho utiliza-se este método.

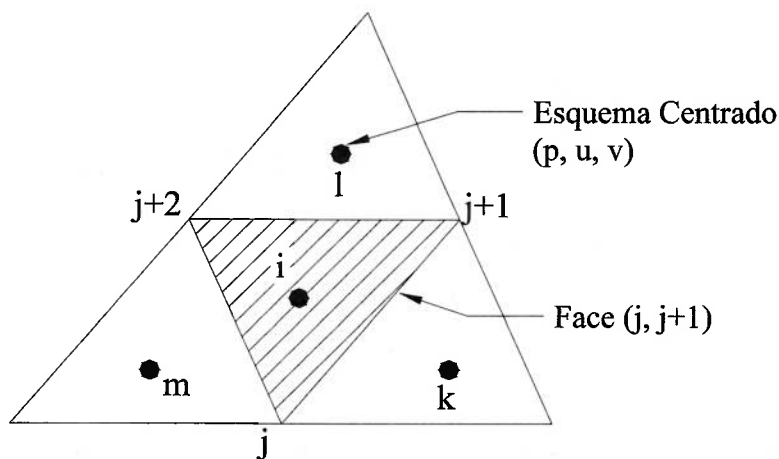


Figura 2.2 - Volume de controle para a célula triangular *i* mostrando o ponto de avaliação das funções

As células têm forma triangular com esquema centrado, onde as variáveis do escoamento (p , u , v) são definidas no centro de cada volume de controle, o que é mostrado na Figura 2.2. As variáveis são definidas como o valor médio na célula, definido pela seguinte equação:

$$q_i^* = \frac{\int_{V_i} q^* dV}{V_i} \quad (2.33)$$

Segundo Hino (1997), integra-se o sistema (2.27) ao redor do volume de controle, mostrado na Figura 2.2, obtendo-se:

$$\iint_{V_i} \left(\frac{\partial q^*}{\partial t} + \frac{\partial(e - e^v)}{\partial x} + \frac{\partial(f - f^v)}{\partial y} \right) dV = 0 \quad (2.34)$$

Onde V_i é a área (no caso bidimensional) da célula; V_i é independente do tempo porque a malha é admitida fixa no decorrer do tempo quando se procede à integração no espaço.

Do teorema de transporte, conforme por exemplo apresentado em Newman (1977), a derivada da integral do volume com relação ao tempo, é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{V_i} q^* dV = \iint_{V_i} \frac{\partial q^*}{\partial t} dV + \oint_{\partial V_i} q^* (u_g n_x + v_g n_y) dS \quad (2.35)$$

Onde ∂V_i é o contorno da célula i ,

(n_x, n_y) são as componentes (x, y) do vetor unitário normal para fora de ∂V_i ,

(u_g, v_g) são as componentes (x, y) da velocidade da malha, e a integral fechada é avaliada em sentido anti-horário.

Para o primeiro termo de (2.34), utiliza-se (2.35); todavia, considerando que neste caso o processo iterativo alcança o estado estacionário, a malha pode ser considerada como fixa no tempo. Daí:

$$\iint_{V_i} \frac{\partial q^*}{\partial t} dV = \frac{\partial}{\partial t} \iint_{V_i} q^* dV \quad (2.36)$$

Aplicando o Teorema da Divergência ao segundo e terceiro termos de (2.34), as integrais de volume podem ser convertidas para integrais de superfície:

$$\begin{aligned} \iint_{V_i} \left(\frac{\partial(e - e^v)}{\partial x} + \frac{\partial(f - f^v)}{\partial y} \right) dV \\ = \oint_{\partial V_i} \left((e - e^v)n_x + (f - f^v)n_y \right) dS \end{aligned} \quad (2.37)$$

Substituindo as equações(2.36), e (2.37) em (2.34), obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V_i} \mathbf{q}^* dV + \oint_{\partial V_i} \left((\mathbf{e} - \mathbf{e}^v) n_x + (\mathbf{f} - \mathbf{f}^v) n_y \right) dS = 0 \quad (2.38)$$

Onde:

$$\mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \end{bmatrix}, \mathbf{e} = \begin{bmatrix} \beta u \\ u^2 + p \\ uv \end{bmatrix}, \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \beta v \\ uv \\ v^2 + p \end{bmatrix}, \mathbf{e}^v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}, \mathbf{f}^v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \end{bmatrix}$$

Seguindo Hino (1997), a integral de linha fechada de (2.38) pode ser aproximada pela soma dos fluxos nas faces da célula i (veja Figura 2.2):

$$\begin{aligned} \oint_{\partial V_i} \left((\mathbf{e} - \mathbf{e}^v) n_x + (\mathbf{f} - \mathbf{f}^v) n_y \right) dS \\ \approx \sum_{bordas} \left((\mathbf{e} - \mathbf{e}^v) S_x + (\mathbf{f} - \mathbf{f}^v) S_y \right)_{j+1/2} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Onde: (S_x, S_y) são os vetores normais proporcionais à área da face $(j, j+1)$, sendo definidos por $(y_{j+1}-y_j, -x_{j+1}+x_j)$,

O subscrito $j+1/2$, denota o valor avaliado na face entre os nós $(j, j+1)$,

A soma desenvolve-se ao redor de todas as faces da célula i, em sentido anti-horário.

Define-se $E_{j+1/2}$ e $E_{j+1/2}^v$ como o fluxo de Euler e viscoso atravessando a face $(j, j+1)$, respectivamente:

$$E_{j+1/2} = (\mathbf{e} S_x + \mathbf{f} S_y)_{j+1/2} \quad (2.40)$$

$$E_{j+1/2}^v = (\mathbf{e}^v S_x + \mathbf{f}^v S_y)_{j+1/2} \quad (2.41)$$

Então a forma semi-discreta das equações de continuidade e de Navier-Stokes é:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{V_i} \mathbf{q}^* dV + \sum_{\text{faces}} (E_{j+1/2} - E_{j+1/2}^v) = 0 \quad (2.42)$$

Segundo (2.42), é preciso calcular os fluxos, viscoso e de Euler, nas faces das células; neste caso, as variáveis necessárias são calculadas no centro das células, sendo mandatório assumir um perfil de variação entre os nós. Vários esquemas têm sido propostos para cada um dos fluxos. A seguir, descrevem-se as distribuições utilizadas no presente trabalho.

2.3.1. Distribuição do fluxo de Euler

Segundo Hino (1997), cada componente do vetor do fluxo de Euler, E, é:

$$E(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \beta U \\ uU + pS_x \\ vU + pS_y \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

Onde

$$U = uS_x + vS_y \quad (2.44)$$

Por facilidade de implantação e para diminuir o tempo computacional, o fluxo de Euler é avaliado pelo esquema proposto por Jameson (1986), e extensamente analisado e descrito por Maciel (2003):

$$E(\mathbf{q})_{\text{face}} = E\left(\frac{q_i + q_k}{2}\right) \quad (2.45)$$

Onde q_i é o vetor avaliado na célula i , e, q_k , o avaliado na célula vizinha.

Esta relação é equivalente a um esquema centrado de segunda ordem em um contexto de diferenças finitas. Desta forma, é necessário introduzir explicitamente um operador de dissipação artificial, D , para evitar, por exemplo, desacoplamento nos nós adjacentes e instabilidades não lineares (ondas de choque). Reescreve-se então (2.42):

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{V_i} \mathbf{q}^* dV + \sum_{\text{faces}} \left(E_{j+\frac{1}{2}} - E_{j+\frac{1}{2}}^v \right) - D(q_i) = 0 \quad (2.46)$$

Um dos modelos de dissipação foi proposto por Mavriplis e Jameson (1990), tendo a seguinte estrutura:

$$D(q_i) = d^{(2)}(q_i) - d^{(4)}(q_i) \quad (2.47)$$

Segundo Hino et al. (1994), para manter o esquema de segunda ordem, utiliza-se o termo dissipador de quarta ordem, responsável pela estabilidade numérica. O termo dissipador de segunda ordem, usado para prevenir oscilações perto de ondas de choque, não é utilizado.

O termo dissipador é avaliado como a seguir.

Primeiramente, o termo “Laplaciano não dividido” no espaço computacional é aproximado como:

$$\nabla^2 q_i \approx \sum_{j=1}^n (q_j - q_i) \quad (2.48)$$

Onde n é o número de células vizinhas; no caso de ser uma célula de fronteira especial, chamada “fantasma”, sua contribuição à somatória é ignorada.

Em segundo lugar, o termo dissipador é calculado usando (2.48):

$$D(q_i) = \sum_{j=1}^n \varepsilon \frac{\lambda_i + \lambda_j}{2} (\nabla^2 q_j - \nabla^2 q_i) \quad (2.49)$$

Onde:

ε é uma constante global, a mesma que controla a magnitude da dissipação; segundo Maciel (2003), seu valor deve estar entre 0.01 e 0.04. Em todos os casos apresentados no presente trabalho utiliza-se o valor de 0.01.

λ atua como um fator de escala, e são as contribuições do máximo valor próprio das equações de Euler integrado ao redor de cada face da célula, Maciel (2003). É definido por:

$$\lambda_i = \sum_{k=1}^3 \left[|uS_x + vS_y| + \sqrt{(uS_x + vS_y)^2 + \beta(S_x^2 + S_y^2)} \right] \quad (2.50)$$

Onde u e v são calculados como médias aritméticas entre os valores associados à célula i e à sua vizinha k .

Mavriplis e Jameson (1990) recomendam avaliar o termo de dissipação artificial somente nas etapas ímpares, poupando algum tempo computacional e melhorando a estabilidade, baseando-se nas características hiperbólico-parabólicas das equações de Navier-Stokes. O referido termo permanece estático nas demais etapas, explorando as características hiperbólicas destas equações, para assegurar convergência.

2.3.2. Distribuição do fluxo viscoso

Segundo Hino (1997), as componentes do vetor do fluxo viscoso são:

$$E^v(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ S_x \tau_{xx} + S_y \tau_{xy} \\ S_x \tau_{xy} + S_y \tau_{yy} \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

Os gradientes de velocidade na face são requeridos para a avaliação do fluxo viscoso. Aplicando o teorema de Gauss ao volume de controle formado pela conexão dos nós localizados nos extremos das faces e dos centróides das células que compartilhem a mesma face (veja-se a Figura 2.3), obtém-se:

$$\frac{\partial q}{\partial x_{j+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{V^*} \oint_{\partial V} q dy \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial q}{\partial x_{j+\frac{1}{2}}} \approx \frac{1}{V^*} \left[\frac{q_k + q_{j+1}}{2} (y_{j+1} - y_k) + \frac{q_{j+1} + q_i}{2} (y_i - y_{j+1}) + \frac{q_i + q_j}{2} (y_j - y_i) + \frac{q_j + q_k}{2} (y_k - y_j) \right] \quad (2.53)$$

$$\frac{\partial q}{\partial x_{j+\frac{1}{2}}} \approx \frac{1}{2V^*} [(q_k - q_i)(y_{j+1} - y_j) + (q_{j+1} - q_j)(y_i - y_k)] \quad (2.54)$$

Onde V^* é a área do volume de controle.

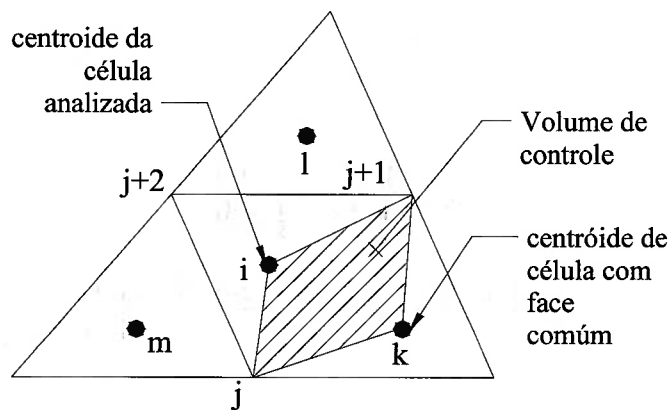


Figura 2.3 - Volume de controle para a face (j, j+1)

As variáveis do fluxo nos vértices, q_j e q_{j+1} , são calculadas a partir dos valores centrados na célula, seguindo o método de média laplaciana ponderada, (RAUSCH, et al., 1991). O gradiente, $\partial q / \partial y$, pode ser avaliado de uma forma similar.

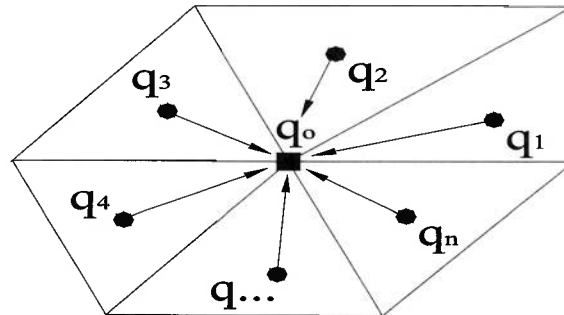


Figura 2.4 – Média das variáveis nos nós em função dos valores armazenados nos centróides das células

Como se ilustra na Figura 2.4, a média ponderada dos valores centrados na célula q_i ao redor de um nó é dada por:

$$q_0 = \frac{\sum_{i=1}^n w_i q_i}{\sum_{i=1}^n w_i} \quad (2.55)$$

Onde q_0 é calculado usando os fatores w_i para cada célula. Os fatores são:

$$w_i = 1 + \Delta w_i \quad (2.56)$$

Para calcular os valores de Δw_i , primeiro foi definida uma função de custo, C :

$$C = \sum_{i=1}^n (\Delta w_i)^2 \quad (2.57)$$

Em seguida, esta função de custo foi minimizada para manter os fatores próximos de 1, resolvendo um problema de otimização, tendo como restrições as seguintes equações:

$$L(x_0) = \sum_{i=1}^n w_i (x_i - x_0) = 0 \quad (2.58)$$

$$L(y_0) = \sum_{i=1}^n w_i (y_i - y_0) = 0 \quad (2.59)$$

Onde (x_0, y_0) são as coordenadas do nó, e

(x_i, y_i) são as coordenadas do centróide das células adjacentes.

O método dos multiplicadores lagrangianos foi utilizado para resolver o problema de otimização, obtendo-se:

$$\Delta w_i = \lambda_x(x_i - x_0) + \lambda_y(y_i - y_0) \quad (2.60)$$

Os multiplicadores lagrangianos são definidos por:

$$\lambda_x = \frac{I_{xy}R_y - I_{yy}R_x}{I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2} \quad (2.61)$$

$$\lambda_y = \frac{I_{xy}R_x - I_{xx}R_y}{I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2} \quad (2.62)$$

Onde:

$$R_x = \sum_{i=1}^n (x_i - x_0) \quad (2.63)$$

$$R_y = \sum_{i=1}^n (y_i - y_0) \quad (2.64)$$

$$I_{xx} = \sum_{i=1}^n (x_i - x_0)^2 \quad (2.65)$$

$$I_{yy} = \sum_{i=1}^n (y_i - y_0)^2 \quad (2.66)$$

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^n (x_i - x_0)(y_i - y_0) \quad (2.67)$$

Usando esta ponderação com procedimento laplaciano, (2.55) constitui-se em uma interpolação exata do valor nodal q_0 para uma variação linear dos valores centrados nas células q_i , sendo uma aproximação de segunda ordem de precisão no espaço para uma variação não linear.

O fluxo viscoso na face $(j, j+1)$ é:

$$E_{j+1/2}^v = M(j+1, j)(q_k - q_i) + M(i, k)(q_{j+1} - q_j) \quad (2.68)$$

Onde a matriz M é definida por:

$$M(\alpha, \beta) = \frac{1}{2ReV^*} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2S_x dy_{\alpha\beta} - S_y dx_{\alpha\beta} & S_y dy_{\alpha\beta} \\ 0 & -S_x dx_{\alpha\beta} & S_x dy_{\alpha\beta} - 2S_y dx_{\alpha\beta} \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

Sendo: Re , o número de Reynolds,

V^* , a área do volume de controle, como mostrado na Figura 2.3, e,

$(dx_{\alpha\beta}, dy_{\alpha\beta})$, o vetor definido por:

$$dx_{\alpha\beta} = x_\alpha - x_\beta, \quad dy_{\alpha\beta} = y_\alpha - y_\beta \quad (2.70)$$

2.3.3. Incremento no tempo

Pela configuração espacial das equações da continuidade e de Navier-Stokes por meio do método de volumes finitos, obtém-se a seguinte equação diferencial parcial:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V_i} \mathbf{q}^* dV = - \sum_{\text{faces}} (E_{j+1/2} - E_{j+1/2}^v) + D(q_i) \quad (2.71)$$

Esta equação pode ser reescrita fazendo uso da definição das variáveis, (2.33), obtendo-se:

$$\frac{\partial V_i \mathbf{q}^*}{\partial \tau} = - \sum_{\text{faces}} (E_{j+1/2} - E_{j+1/2}^v) + D(q_i) = 0 \quad (2.72)$$

A variável τ é entendida aqui como um pseudo-tempo, indicando que a solução pode evoluir hiperbolicamente, com a solução dependente das etapas anteriores. Pode-se usar esta característica para desenvolver métodos numéricos para sistemas hiperbólicos, os quais se iniciam por uma solução aproximada, avançando para a satisfação das condições de contorno.

Aqui se utiliza o método explícito híbrido de Runge-Kutta de cinco etapas de segunda ordem de precisão como descrito por Jameson e Mavriplis (1986) e Maciel (2003), que é representado por:

$$\begin{aligned}
 q_i^{*(0)} &= q_i^{*(m)} \\
 q_i^{*(1)} &= q_i^{*(0)} - \frac{1}{4} \frac{\Delta\tau}{V_i} \left[\sum_{faces} (E_{j+1/2}^{(0)} - E_{j+1/2}^v{}^{(0)}) + D(q_i^{*(0)}) \right] \\
 q_i^{*(2)} &= q_i^{*(0)} - \frac{1}{6} \frac{\Delta\tau}{V_i} \left[\sum_{faces} (E_{j+1/2}^{(1)} - E_{j+1/2}^v{}^{(1)}) + D(q_i^{*(0)}) \right] \\
 q_i^{*(3)} &= q_i^{*(0)} - \frac{3}{8} \frac{\Delta\tau}{V_i} \left[\sum_{faces} (E_{j+1/2}^{(2)} - E_{j+1/2}^v{}^{(2)}) + D(q_i^{*(2)}) \right] \\
 q_i^{*(4)} &= q_i^{*(0)} - \frac{1}{2} \frac{\Delta\tau}{V_i} \left[\sum_{faces} (E_{j+1/2}^{(3)} - E_{j+1/2}^v{}^{(3)}) + D(q_i^{*(2)}) \right] \\
 q_i^{*(5)} &= q_i^{*(0)} - 1 \frac{\Delta\tau}{V_i} \left[\sum_{faces} (E_{j+1/2}^{(4)} - E_{j+1/2}^v{}^{(4)}) + D(q_i^{*(4)}) \right] \\
 q_i^{*(m+1)} &= q_i^{*(5)}
 \end{aligned} \tag{2.73}$$

Onde: o incremento de pseudo-tempo é definido por:

$$\Delta\tau^m = \tau^{m+1} - \tau^m \tag{2.74}$$

m é o índice para o controle da etapa do tempo. O símbolo Δ indica um passo finito (não diferencial). A evolução da equação em cada passo de tempo pode acontecer em uma ou mais etapas e com uma ou mais iterações.

A magnitude do passo do tempo, $\Delta\tau$, requer considerações, dentre as quais se destacam:

- Resolução da variação do tempo (escala temporal do movimento de uma partícula do fluido),
- Estabilidade do método numérico, e,
- Condição de estabilidade, onde se utiliza o número de Courant – Friedrichs - Lewy (CFL).

Na literatura existem formulações para determinar o valor de $\Delta\tau$, como por exemplo, as de Chorin (1967), Hino (1997) e Maciel (2003). A maioria destes autores utiliza a seguinte equação, com pequenas modificações:

$$\Delta\tau \leq \frac{CFL * \Delta x}{\lambda} \quad (2.75)$$

Onde:

1. CFL é o número Courant – Friedrichs - Lewy, e os métodos explícitos geralmente requerem $CFL < 1$. Nos casos aqui analisados, usa-se o valor 0.1, segundo o recomendado por Maciel (2003) para assegurar a convergência do processo iterativo.
2. Δx é o comprimento característico da célula; Maciel (2003) recomenda tomá-lo como o menor valor entre comprimentos dos lados (L_1, L_2, L_3) e distâncias desde o centróide da célula até os de suas vizinhas (d_1, d_2, d_3) (veja Figura 2.5).

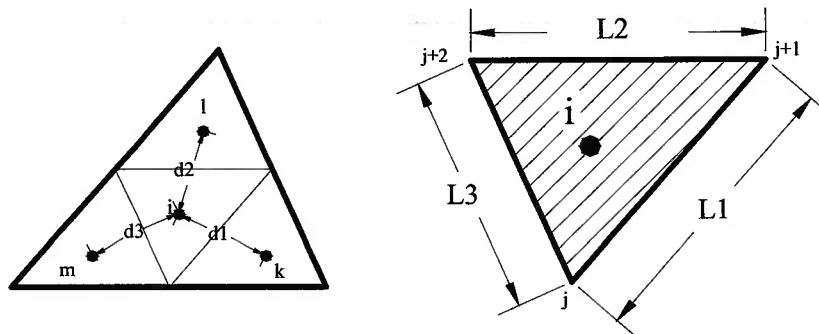


Figura 2.5 – Distâncias características de uma célula triangular i

3. λ é o máximo valor próprio (velocidade de onda), que Hino (1997) define por:

$$\lambda = \sqrt{(u^2 + v^2)^2 + \beta(S_x^2 + S_y^2)} \quad (2.76)$$

Com o intuito de acelerar o método numérico, em cada célula utiliza-se um passo do tempo diferente. A idéia principal deste procedimento é manter um número CFL constante em todo o processo, permitindo o uso de um passo do tempo apropriado para cada região específica durante o processo de convergência, como descrito em Rizzi e Eriksson (1985).

2.4. GERAÇÃO DA MALHA

Em Hidrodinâmica, é comum analisar escoamentos sobre corpos de formas curvas, por exemplo, um fólio (veja Figura 2.6 (a)). Para discretizar o domínio ao redor do corpo, não é recomendável utilizar uma malha tradicional não estruturada com elementos retangulares, pois a forma do fólio tende a não ficar descrita da maneira correta, como se exemplifica na Figura 2.6(b).

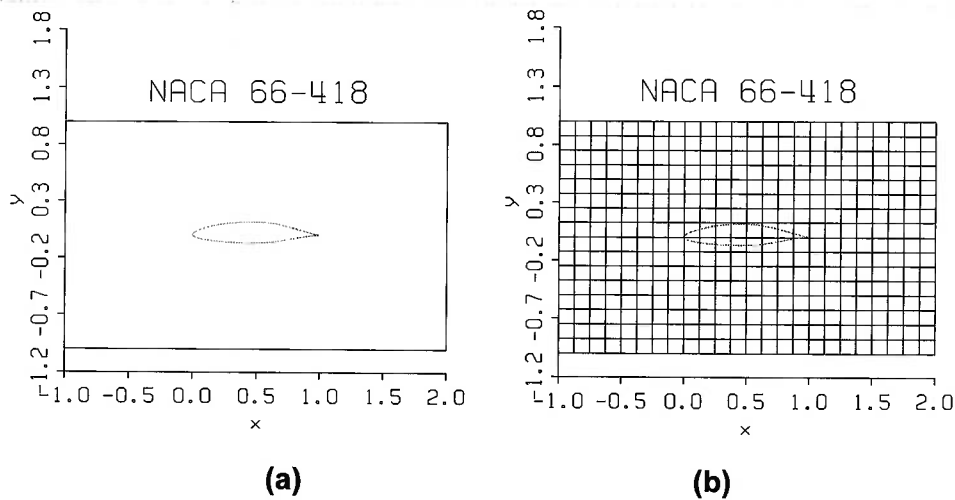


Figura 2.6 - Geração da malha tradicional

Diferentemente de utilizar uma malha não estruturada, constroem-se aqui malhas estruturadas, sendo que os elementos retangulares do domínio são subdivididos em elementos triangulares. Aplica-se o método de geração elíptica para colocar os nós distribuídos uniformemente. Contudo, o problema não é tratado no domínio transformado quando da resolução das equações da dinâmica, como de costume. Ao invés disso, Thompson et al. (1985) propõem este método somente para a geração da malha; como se mostra na Figura 2.7, buscando-se maior precisão na definição do corpo sob análise e assegurando que todos os nós fiquem sobre a fronteira.

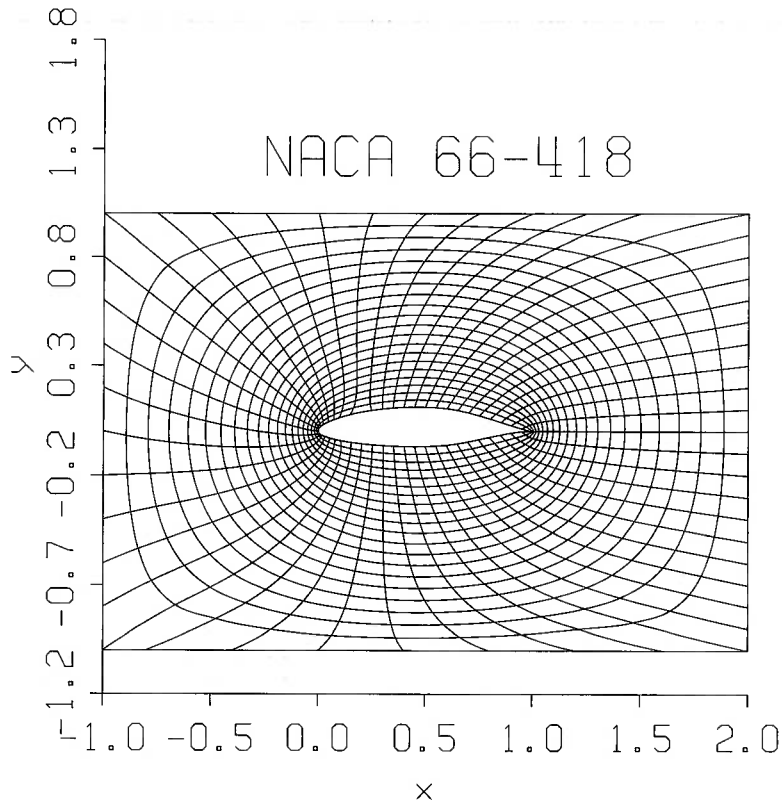


Figura 2.7 - Geração elíptica da malha

Não se constrói uma relação matemática explícita para posicionar os nós no domínio físico; um sistema de equações diferenciais parciais é resolvido para esta finalidade.

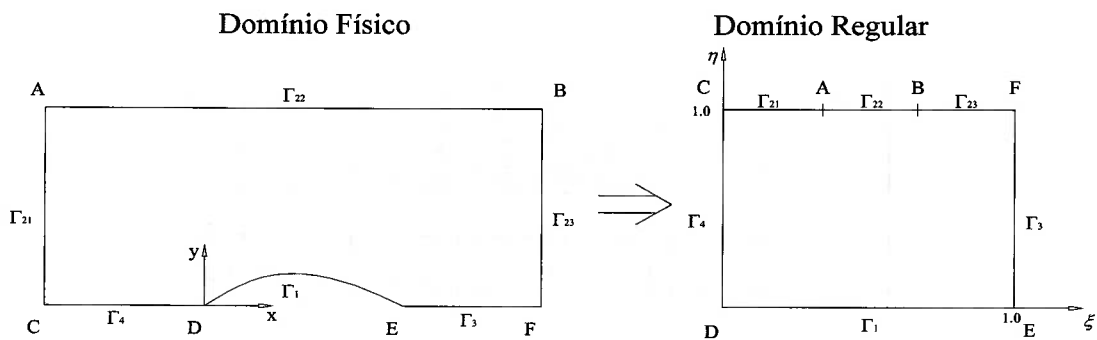


Figura 2.8 - Transformação do plano físico ao regular

O sistema diferencial de equações parciais elíptico é:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} &= 0\end{aligned}\tag{2.77}$$

Onde: (x, y) são as coordenadas no plano físico, e,

(ξ, η) as respectivas no plano regular (veja a Figura 2.8).

Para controlar a alocação dos nós interiores, utilizam-se as equações de Poisson:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} &= P(\xi, \eta) \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} &= Q(\xi, \eta)\end{aligned}\tag{2.78}$$

Onde as funções P e Q são escolhidas segundo as necessidades do problema. Nos casos em estudo, somente é preciso controlar a densidade de nós nas fronteiras com altos gradientes, como por exemplo ao redor de corpos.

Avaliam-se as equações elípticas de forma numérica, expressando, em (2.78), x e y como função de ξ e η , obtendo-se o seguinte sistema:

$$\begin{aligned}\alpha \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} &= \frac{1}{J^2} \left(P \frac{\partial x}{\partial \xi} + Q \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \\ \alpha \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} &= \frac{1}{J^2} \left(P \frac{\partial y}{\partial \xi} + Q \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)\end{aligned}\tag{2.79}$$

Onde:

$$\alpha = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2\tag{2.80}$$

$$\beta = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right) \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right) \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)$$

$$\gamma = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2$$

Nos casos em que existem fronteiras sólidas e superfícies livres, convém aglomerar nós próximos a estes contornos; para tanto, utilizam-se funções de controle para atração de determinadas linhas nas direções de ξ e η . Seguindo proposta de Hoffmann e Chiang (2004), tais funções se expressam por:

$$P = - \sum_{m=1}^M a_m \frac{\xi - \xi_m}{|\xi - \xi_m|} \text{EXP}(-c_m |\xi - \xi_m|)$$

$$Q = - \sum_{m=1}^M b_m \frac{\eta - \eta_m}{|\eta - \eta_m|} \text{EXP}(-d_m |\eta - \eta_m|)$$
(2.81)

Onde: a_m e b_m são fatores de amplificação,

c_m e d_m são fatores de decremento,

M é número de lugares geométricos com ξ ou η constantes,

ξ_m é lugar geométrico com η constante.

η_m é lugar geométrico com ξ constante.

O sistema de equações (2.79), (2.80), e (2.81) tem comportamento elíptico; valores pré-fixados ao longo da fronteira determinam o espaçamento entre nós. Um método iterativo é aplicado para obter os valores de x e y interiores.

Para resolver estas equações, utiliza-se um processo de relaxamento até atingir a convergência. Os valores iniciais são calculados mediante uma aproximação linear, de modo a acelerar a convergência do método iterativo.

2.5. MODELAGEM DA TURBULÊNCIA

Reynolds propôs, em 1895, utilizar a decomposição das variáveis velocidade e pressão nas equações de Navier-Stokes em termos médios e em termos flutuantes, estes últimos correspondentes a efeitos turbulentos. Tal proposição avança para os chamados termos médios de Reynolds, os quais correspondem a valores médios dos termos flutuantes.

As equações de Navier-Stokes podem ser utilizadas para aproximar de forma numérica direta escoamentos com turbulência. Para tanto, precisa-se utilizar uma malha muito fina para capturar as variações das propriedades e a formação de vórtices em todas as escalas presentes, incluindo as escalas de Kolmogorov. Isto requer muita capacidade computacional, inclusive para escoamentos com baixos números de Reynolds. Esta área de pesquisa é chamada simulação numérica direta (*Direct Numerical Simulation* - DNS). Como desvantagem apresentada por este método, tem-se que, sendo os números de Reynolds altos para as aplicações típicas na indústria, os recursos computacionais necessários excedem a capacidade dos computadores mais poderosos existentes na atualidade.

A técnica conhecida como simulação de vórtices de grande escala (*Large Eddy Simulation* - LES) é uma alternativa na modelagem da turbulência. Esta técnica utiliza como base um derivativo da teoria de auto-similaridade de Kolmogorov, que estabelece que os vórtices maiores dependam da geometria do escoamento; as escalas menores têm um comportamento isotrópico. Este fato é aproveitado para resolver de maneira explícita os vórtices maiores, e de maneira implícita os vórtices pequenos utilizando modelos *subgrid-scale* (SGS); porém, segundo Bredberg (2001), este mesmo modelo SGS é uma das fraquezas deste método.

Quanto ao método RANS, a determinação dos esforços de Reynolds requer expressões adicionais que dão fechamento ao problema, uma vez que há perda de informação ao se efetuar as integrais no tempo referentes aos termos médios.

Uma cronologia da história da modelagem da turbulência pode ser encontrada em Wilcox (2006). Tentativas iniciais para desenvolver matematicamente os esforços de Reynolds seguiram o processo de gradiente de difusão molecular. Para isto, Boussinesq (1877) introduziu o conceito de viscosidade turbulenta (*eddy viscosity*), amplamente utilizado. Muito da física de escoamento viscoso não se conhecia no século dezenove, isto até o desenvolvimento, por Ludwig Prandtl, do conceito de camada limite em 1904. Relativamente à turbulência, Prandtl (1925) introduziu o conceito de comprimento de mistura, em analogia ao caminho livre médio de um gás. Apresentou ainda uma prescrição para o cálculo da viscosidade turbulenta em termos do comprimento de mistura. A noção de comprimento de mistura formou uma base para pesquisa em turbulência.

Uma possível classificação dos modelos de turbulência, segundo Wilcox (2006), se dá em quatro categorias, conforme o número de equações diferenciais para o fechamento do problema:

1. **Modelos algébricos (zero equações**, ou seja, nenhuma equação diferencial). Refere-se a uma representação algébrica com base no comprimento de mistura, havendo uma equação relativa à viscosidade turbulenta. As variantes mais conhecidas destes modelos são: Cebeci-Smith; Baldwin-Lomax.
2. **Modelos de uma equação**. Para melhorar a habilidade de predição das propriedades dos escoamentos turbulentos e desenvolver uma descrição matemática mais real dos esforços turbulentos, Prandtl (1945) postulou um modelo no qual a viscosidade turbulenta dependia da energia cinética das flutuações turbulentas, k , propondo uma equação diferencial parcial representando aproximadamente a derivada substancial de k , considerando a produção, a dissipação, a difusão molecular, o transporte da turbulência e a difusão da pressão. Este modelo é mais realista e leva em conta o fato de que os esforços turbulentos são afetados pela história do escoamento. Mas ainda se faz necessário especificar uma escala comprimento turbulento, o que torna o modelo incompleto, já que são necessárias informações sobre o escoamento além das condições iniciais e de contorno para se obter uma

solução. Estes modelos têm provado ser de muito valor em muitas aplicações de engenharia. Um dos modelos mais utilizados é o proposto por Spalart-Allmaras.

3. **Modelos de duas equações.** Além da equação para k referida em (2), pode ser utilizada uma equação diferencial adicional para estimar a variável desejada. O método $k - \epsilon$ é o mais usual, modelando a dissipação, ϵ , o que permite o cálculo da viscosidade turbulenta de forma direta. Uma outra alternativa é o método $k - \omega$, introduzido por Kolmogorov (1942), que modela ω , a taxa de dissipação de energia por unidade de volume e tempo.
4. **Modelos de transporte de esforços.** Este modelo expressa a evolução diferencial do tensor representante dos esforços turbulentos. É conhecido por fechamento de segunda ordem ou fechamento do segundo momento. Uma conveniência deste modelo é o modo de incorporação de efeitos não locais e de seu histórico, automaticamente acomodando a curvatura da linha de corrente, a rotação do corpo rígido, as forças volumétricas, etc. Isto o difere dos modelos de viscosidade turbulenta onde é necessária a inclusão de termos empíricos. Alguns dos trabalhos representativos são os publicados por Chou (1945) e Rotta (1951).

Na presente pesquisa utiliza-se o modelo algébrico de duas camadas proposto por Baldwin e Lomax (1978), devido à sua simplicidade na formulação e à boa aderência demonstrada em resultados já publicados. Outra vantagem do modelo é de não implicar em necessidade de determinação de propriedades da camada limite, como a espessura da mesma, δ , o que o torna aplicável a problemas físicos complexos.

2.5.1. Modelo algébrico de Baldwin e Lomax

Desenvolvido e apresentado em 1978, este modelo considera duas camadas e expressa a viscosidade turbulenta, ν_T , por expressões diferentes em cada uma delas. Utilizando a notação mostrada em Wilcox (2006), a viscosidade turbulenta é:

$$\nu_T = \begin{cases} \nu_{T_i} & , \quad y \leq y_m \\ \nu_{T_o} & , \quad y > y_m \end{cases} \quad (2.82)$$

Onde: y é a distância do ponto mais próximo no meio fluido até a superfície sólida, medida normalmente a esta superfície,

y_m é o menor valor de y para o qual $\nu_{T_i} = \nu_{T_o}$,

A viscosidade turbulenta na camada interna, ν_{T_i} , é definida por:

$$\nu_{T_i} = l_{mix}^2 |\omega| \quad (2.83)$$

Sendo o comprimento de mistura representado por

$$l_{mix} = ky[1 - e^{-y^+/A_o^+}] \quad (2.84)$$

Na camada exterior a viscosidade turbulenta, ν_{T_o} , é:

$$\nu_{T_o} = \alpha C_{cp} F_{wake} F_{Kleb} (y; y_{max} / C_{Kleb}) \quad (2.85)$$

Onde: y_{max} é o valor de y que maximiza $l_{mix} |\omega|$.

$$F_{wake} = \min[y_{max} F_{max}; C_{wk} y_{max} U_{dif}^2 / F_{max}] \quad (2.86)$$

$$F_{max} = \frac{1}{k} [\max(l_{mix} |\omega|)] \quad (2.87)$$

Wilcox (2006) recomenda os seguintes valores para os coeficientes de fechamento:

$$\left. \begin{array}{l} k = 0.40 \quad \alpha = 0.0168 \quad A_0^+ = 26 \\ C_{cp} = 1.6 \quad C_{Kleb} = 0.3 \quad C_{wk} = 1.0 \end{array} \right\} \quad (2.88)$$

A função F_{Kleb} é a função de intermitência de Klebanoff definida como:

$$F_{Kleb}(y; y_{max} / C_{Kleb}) = \left[1 + 5.5 \left(\frac{y}{y_{max} / C_{Kleb}} \right)^6 \right]^{-1} \quad (2.89)$$

O caso analisado é bidimensional pelo qual, ω , que é a magnitude da vorticidade, esta definida por:

$$\omega = \left| \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right| \quad (2.90)$$

Também é definido U_{dif} , o maior valor de U para camada limite. Para escoamentos em geral, é definida como:

$$U_{dif} = \left(\sqrt{U^2 + V^2} \right)_{max} - \left(\sqrt{U^2 + V^2} \right)_{y=y_{max}} \quad (2.91)$$

3. APLICAÇÃO E VALIDADE DO MODELO NUMÉRICO

Neste capítulo apresentam-se as aplicações do método. Os problemas físicos estudados são:

- a) Escoamento laminar sobre uma placa plana.
- b) Escoamento laminar ao redor de um cilindro circular.

Os resultados são discutidos sob o ponto de vista da qualidade numérica e das implicações em projeto e em análise de engenharia.

3.1. DESCRIÇÃO DOS ENSAIOS NUMÉRICOS

O primeiro exemplo analisado é o escoamento laminar sob uma placa plana com um ângulo de incidência nulo. A camada limite laminar se alarga para jusante. Internamente à camada, os gradientes de velocidade normais à superfície do corpo são altos, tornando os efeitos viscosos importantes. Externamente à camada limite o escoamento se comporta como livre, não sofrendo influência da presença da placa. Os resultados obtidos são comparados com a solução de Blasius apud White (2006).

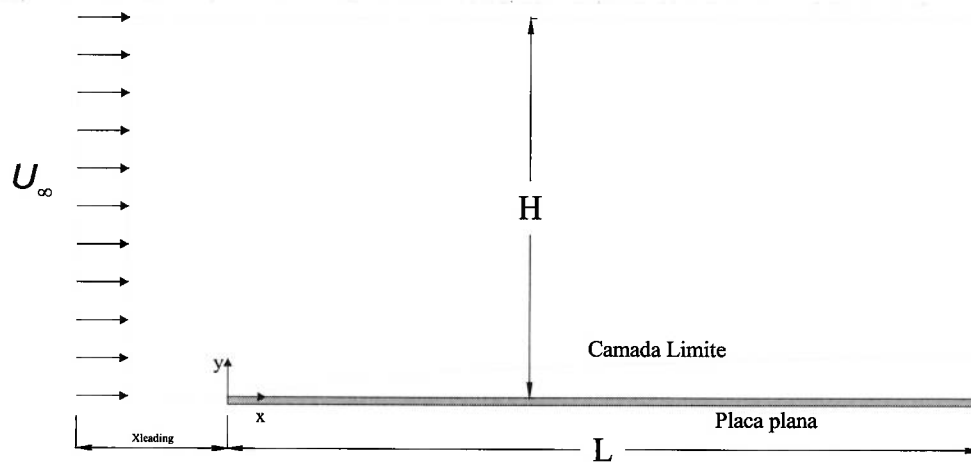


Figura 3.1 – Escoamento sobre a placa plana

Considerou-se um comprimento, L , de 1.0 m para a placa plana (ver Figura 3.1). O *bordo de ataque* está em $x = 0.0 \text{ m}$. A velocidade do escoamento ao longe, U_∞ , tem um valor de 0.1 m/seg ; viscosidade cinemática da água é considerada como $1.004 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{seg}$ (a $20 \text{ }^\circ\text{C}$). Estas condições foram escolhidas para obter um número de Reynolds, baseado no comprimento da placa, de aproximadamente 10^5 , assegurando desta forma que o escoamento está no regime laminar.

A extensão lateral do domínio numérico, H , é de 0.1 m . O contorno a montante é posicionado suficientemente distante do bordo de ataque da placa, assim assegurando a uniformidade do escoamento na fronteira de entrada. Fez-se posição de entrada em $X_{\text{leading}} = 0.2 \text{ m}$.

O escoamento ao redor de um cilindro circular bidimensional tem sido utilizado para validação e para pesquisas numéricas em si. O número de Reynolds aqui adotado, baseado no diâmetro, é 40 , isto é, um valor muito baixo, resultando em um escoamento estacionário e simétrico. Uma geometria típica é mostrada na Figura 3.2:



Figura 3.2 – Domínio físico do cilindro circular

Admite-se escoamento uniforme a montante. O contorno externo geralmente é colocado bem afastado da superfície do cilindro para que as fronteiras externas não sintam as perturbações devidas à presença do corpo. No caso analisado, considera-se um diâmetro, $D = 1 \text{ m}$.

3.2. DOMÍNIO NUMÉRICO

3.2.1. Placa plana

Devido à simetria, somente se modela um bordo do escoamento em torno da placa plana.

A malha com discretização espacial não estruturada é formada por elementos triangulares, obtidos ao se dividir pela metade cada elemento retangular de uma malha estruturada.

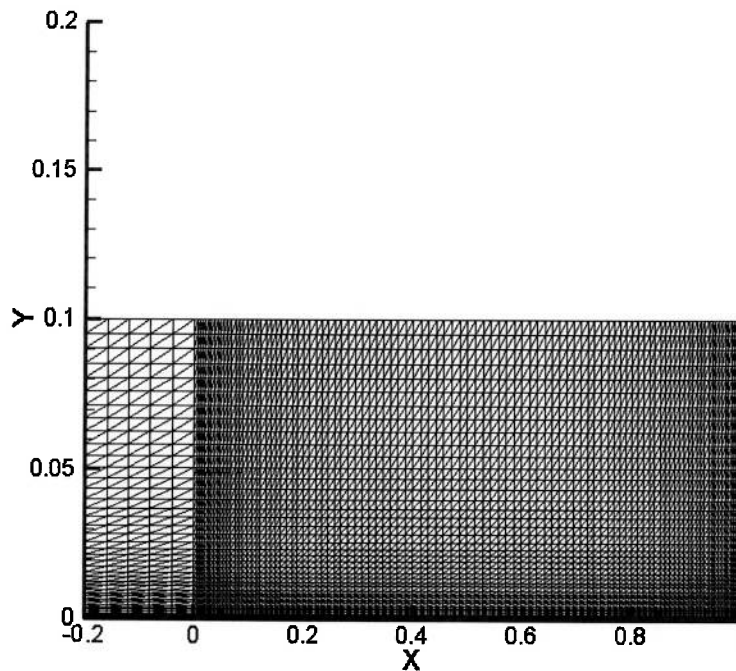


Figura 3.3 – Malha placa plana

A Figura 3.3 ilustra a malha utilizada, a qual está baseada em formulação de volumes finitos. A malha neste exemplo tem 106 por 41 nós, sendo que 101 deles estão alinhados com a placa, e 5 a montante. No contexto não estruturado, fez-se uso de 8.400 elementos efetivos e 4.346 nós.

O critério adotado para obter uma solução convergida foi que a magnitude da máxima diferença entre iterações seja menor ou igual a 10^{-10} ou um máximo de 10000 iterações, o que fora atingido primeiro.

No domínio discretizado, distinguem-se duas regiões: a menor, a montante, a qual é uniformemente distribuída; a maior, alinhada com a placa, com distribuição conveniente quanto à captura da variação do escoamento. Para resolver adequadamente a camada limite ao longo da placa, os nós são alongados na direção normal, sendo o espaçamento entre eles menor perto da placa do que distante dela.

3.2.2. Cilindro

No caso do cilindro circular, muitas variantes de representação têm sido apresentadas na literatura, algumas delas considerando somente a metade superior do domínio físico, levando em conta a simetria do escoamento, como no caso da placa plana. Embora isto reduza o custo computacional, há redução da faixa de aplicabilidade física das simulações, como é mostrado em Batchelor (2000) e White (2006). De fato, assimetrias são desenvolvidas inclusive com números de Reynolds baixos; assim, no presente caso o domínio é discretizado ao redor de todo o cilindro circular físico, limitado por um círculo exterior distante de raio igual a 20 *m*.

A Figura 3.4 ilustra a malha, a qual está construída com base em volumes finitos. A malha tem topologia "O", a partir do algoritmo de geração elíptica descrito na seção 2.4. A malha neste exemplo tem 61 por 41 nós, sendo que 61 envolvem o cilindro. No contexto não estruturado, fez-se uso de 4.800 elementos efetivos e 2.501 nós.

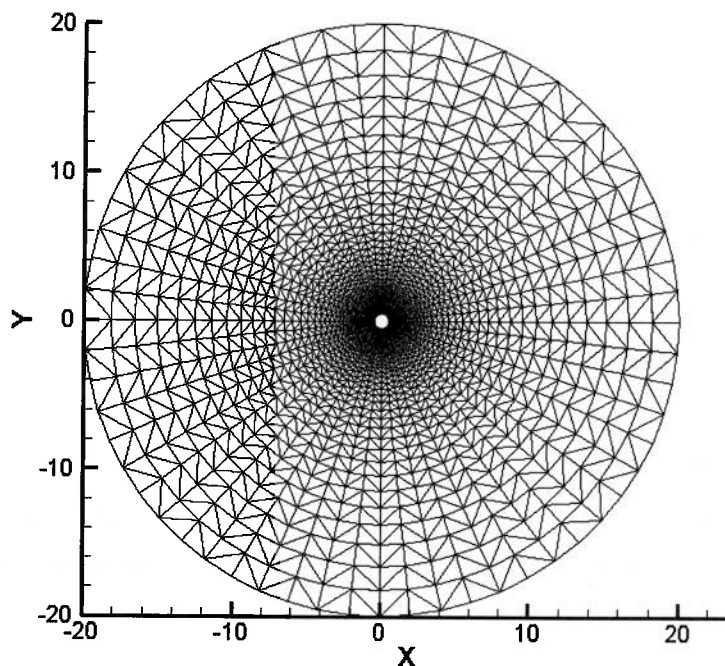


Figura 3.4 – Malha cilindro circular

Para dar resolução à região junto à parede, os nós são estirados, ou seja, o espaçamento entre eles é feito menor na direção radial, próximo ao cilindro, devido aos altos gradientes existentes nesta região, como mostrado na Figura 3.5.

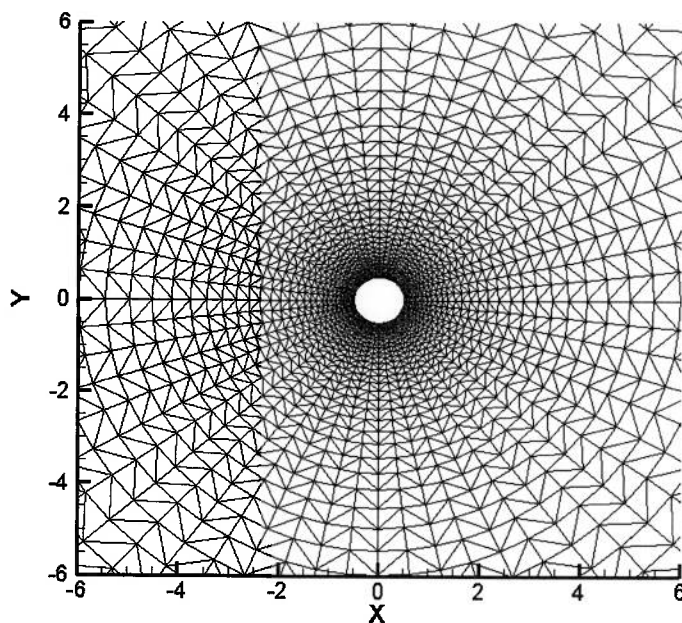


Figura 3.5 – Malha cilindro circular – domínio perto ao corpo

Segundo Maciel (2003), na imposição das condições de contorno incorporam-se células “adicionais” ou “fantasmas” fora do domínio (veja a Figura 3.6); não se faz alusão a estas células nas soluções obtidas.

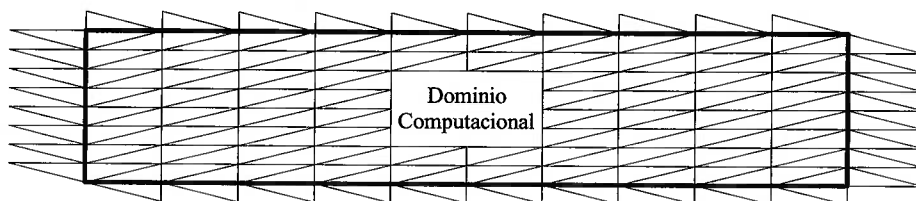


Figura 3.6 – Esquema das células “fantasmas”

Em certas condições de contorno, há necessidade de avaliação dos gradientes das variáveis na direção normal; convenientemente, posiciona-se o

centróide de cada célula adicional alinhado com a direção normal a partir de sua célula vizinha.

3.3. CONDIÇÕES DE CONTORNO

Para resolver as equações de movimento, é necessário impor condições apropriadas nas fronteiras do domínio fluido, sejam físicas ou computacionais, e são estas condições que diferenciam um problema hidrodinâmico de outro.

Na superfície da placa plana, seja o escoamento laminar ou turbulento, vale a hipótese de aderência. Na fronteira distante, colocada em $y = 0.1 \text{ m}$, como se mostra na Figura 3.7, valem as condições do escoamento uniforme ao longe.

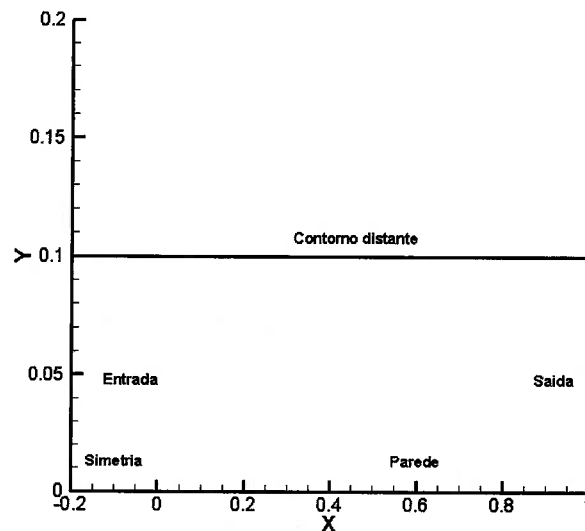


Figura 3.7 – Contornos para placa plana

Nos problemas em que se utilizam ferramentas computacionais, o domínio físico originalmente irrestrito deve ser tornado finito, isto é, limitado; nestas fronteiras delimitadoras, há necessidade da imposição de condições adequadas de entrada e de saída. A fronteira de entrada do domínio computacional é do tipo subsônico. A

influência do posicionamento a jusante da fronteira de saída foi testada mediante sua colocação em três locais distintos.

Na superfície do cilindro circular, também vale a hipótese de aderência. No círculo exterior delimitador do domínio, valem as condições correspondentes ao escoamento ao longe (veja Figura 3.8). Observe-se na figura o corte que garante que o domínio seja simplesmente conexo.

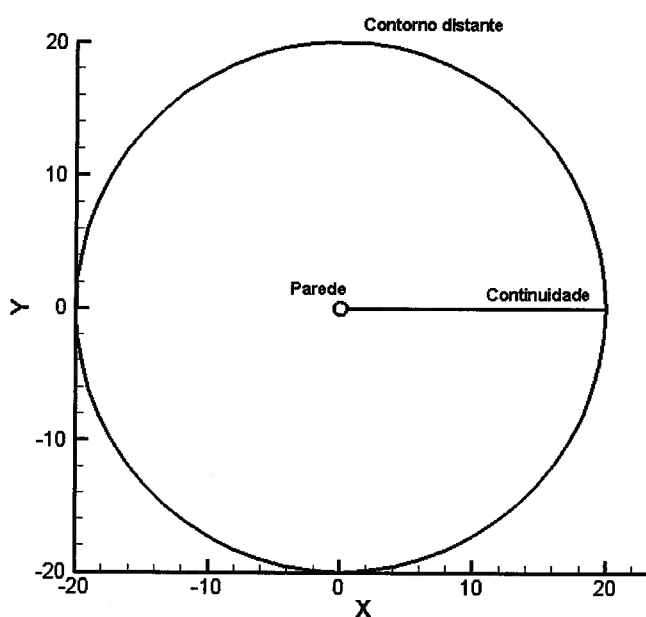


Figura 3.8 – Contornos para cilindro circular

3.3.1. Superfície impermeável

No caso de fluido viscoso, a condição de contorno apropriada no corpo é a condição de aderência, esta é uma das condições de contorno física. Quando um fluido movimenta-se sobre uma superfície sólida, devido à viscosidade do mesmo, o fluido “adere” à parede, e, devido ao esforço cortante sobre tal superfície, forma-se uma fina lâmina do fluido conhecida como camada limite.

Nos casos em que o corpo tenha velocidade, o fluido sobre seu contorno deve ter velocidade igual à do corpo. Esta condição pode ser escrita como:

$$\vec{u}_f = \vec{U}_w \quad (3.1)$$

Onde \vec{u}_f é a velocidade do fluido, e, \vec{U}_w é a velocidade da parede.

A pressão sobre a superfície rígida podem ser obtidos a partir da conservação da quantidade de movimento, (2.19) e (2.20):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \quad (2.20)$$

Nos casos em que a variação da velocidade no tempo seja nula (regime permanente) e, além disso, quando os termos inerciais convectivos possam também ser desprezados (por exemplo, em baixos números de Reynolds), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Quanto ao gradiente de pressões na direção normal, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial n} &= \left(\frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} \right) \cdot \vec{n} \\ \frac{\partial p}{\partial n} &= \left(\frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} \right) \cdot (n_x \vec{i} + n_y \vec{j}) \\ \frac{\partial p}{\partial n} &= \frac{\partial p}{\partial x} n_x + \frac{\partial p}{\partial y} n_y \end{aligned} \quad (3.3)$$

Onde: \vec{n} é vetor normal apontando para fora do corpo.

Com (3.3), (3.2) fica:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) n_x + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right) n_y \quad (3.4)$$

Utilizando (2.13) e (2.14), pode-se reescrevê-la assim:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{1}{Re} \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) n_x + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) n_y \right] \quad (3.5)$$

Para problemas com números de Reynolds elevados, o gradiente de pressão na direção normal à superfície pode ser desprezado, devido às propriedades da camada limite do escoamento perto da superfície:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad (3.6)$$

Segundo (3.1), a condição de aderência se impõe para o escoamento na parede sólida e quando a mesma está fixa no espaço, $u_w = v_w = 0$. Isso pode ser aproximado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u_g &= -u_r \\ v_g &= -v_r \end{aligned} \quad (3.7)$$

Onde o índice g representa a célula adicional e o índice r sua célula vizinha real (veja Figura 3.9).

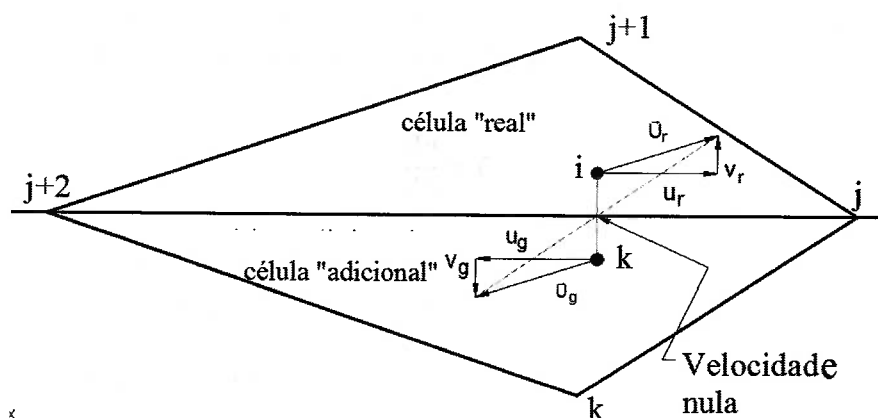


Figura 3.9 - Implementação da condição de superfície sólida

Quando os números de Reynolds são elevados, o gradiente da pressão normal à parede aproxima-se de zero, e a pressão na célula “fantasma” é extrapolada da célula real vizinha (extrapolação de ordem zero), isto é:

$$p_g = p_r \quad (3.8)$$

Para números de Reynolds baixos, o gradiente da pressão normal á parede é aproximado por:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{1}{Re} \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) n_x + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) n_y \right] \quad (3.9)$$

Daí, a pressão na célula “fantasma” é extrapolada da célula real vizinha deste modo:

$$p_g = p_r + \frac{\Delta n}{Re} \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) n_x + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) n_y \right] \quad (3.10)$$

3.3.2. Simetria

Em muitos casos, os problemas analisados são simétricos em relação a um de seus eixos, e assim a análise computacional pode representar só uma das regiões. Para tanto, é preciso impor condições de simetria sobre o contorno, as quais requerem que a variação da pressão em relação à direção normal do eixo de simetria seja zero, ou seja, similar à condição para superfície sólida, conforme (3.6), e que a componente de velocidade normal ao contorno seja igual a zero, isto é:

$$\vec{u}_f \cdot \vec{n} = 0 \quad (3.11)$$

Onde \vec{n} é o vetor unitário normal a superfície, e, \vec{u}_f é o vetor velocidade do fluido (veja Figura 3.10).

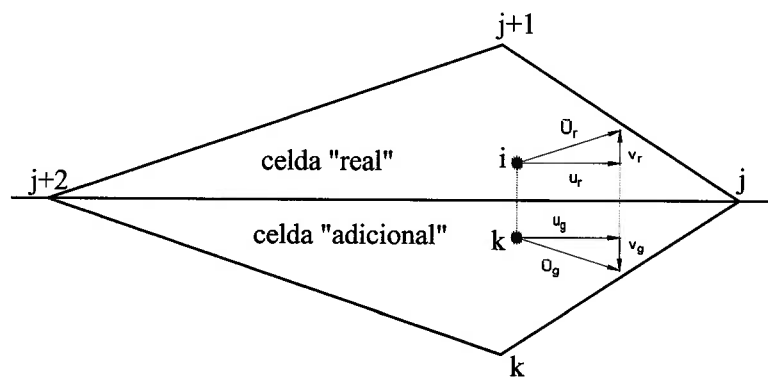


Figura 3.10 – Implementação da condição de simetria

No caso da placa plana, o eixo de simetria é paralelo ao eixo x, e a velocidade satisfaz:

$$\begin{aligned} u_g &= u_r \\ v_g &= -v_r \end{aligned} \quad (3.12)$$

Esta condição garante que não exista fluxo que cruze a linha central, como se mostra na Figura 3.10.

3.3.3. Entrada e Saída

Para impor as condições de entrada e saída do domínio fluido, é necessário estabelecer a direção na que se propaga a informação. Esta direção depende do sinal dos valores próprios do sistema diferencial de equações sobre o contorno.

Desta forma, pode-se determinar quais variáveis devem ser avaliadas fora do domínio computacional e quais devem ser extrapoladas do interior do mesmo. De acordo com vários autores, dentre eles, Jameson e Mavriplis (1986) e Hino (1997), os valores próprios do sistema de equações de Navier-Stokes são:

$$\lambda = \begin{Bmatrix} V_n + a \\ V_n \\ V_n - a \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

Onde v_n é a velocidade normal ao contorno e a é a velocidade do som local. Fisicamente, cada valor próprio está associado com a velocidade da onda com que se propaga a informação.

Segundo Rizzi e Ericsson (1985), o primeiro valor próprio sempre é positivo e, ao assumir que o vetor normal à fronteira aponta para fora, a variável associada com este valor próprio tem o mesmo valor sobre a fronteira e no interior da malha. De uma maneira similar, o terceiro valor próprio é sempre negativo, e assim a variável associada com este valor próprio é igual à variável no escoamento sem perturbações. Por último, o valor do segundo valor próprio depende de o escoamento estar entrando ou saindo do domínio; se a fronteira é de entrada, o valor da variável associada é igual à do escoamento livre; no caso do contorno de saída, a variável associada é igual ao seu valor no interior do domínio (veja Figura 3.11).

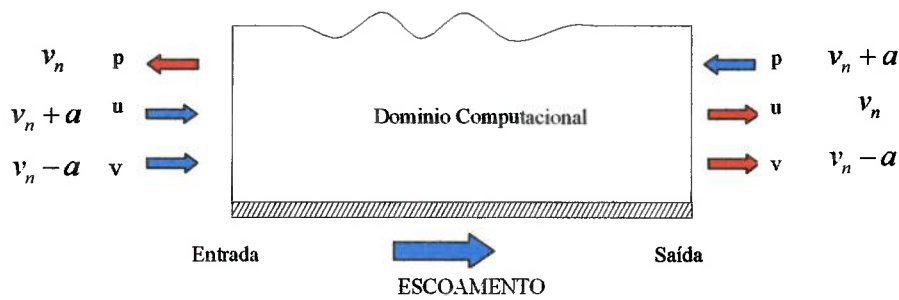


Figura 3.11 - Condições de contorno

Hino (1997) recomenda, no contorno de entrada, estabelecer os valores da velocidade como no caso da placa plana ($u = U$, $v = 0$), e extrapolar a pressão do interior do domínio ($\frac{\partial p}{\partial x} = 0$). Na saída, fixa-se o valor da pressão ($p = 0$) e se extrapola a velocidade do interior ($\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$).

Nas células “adicionais” do contorno utiliza-se novamente (3.8) para avaliar a pressão, e as componentes da velocidade são definidas por:

$$\begin{aligned} u_g &= 1.0 \\ v_g &= 0.0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Na saída, faz-se o valor da pressão igual a zero e se extrapola a velocidade a partir do interior:

$$\begin{aligned} u_g &= u_r \\ v_g &= v_r \\ p_g &= 0.0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

3.3.4. Continuidade

O corte feito para manter a região fluida simplesmente conexa no escoamento em torno do cilindro é considerado como uma fronteira artificial. Segundo Maciel

(2003), deve-se impor aí a continuidade do escoamento, por meio das seguintes condições:

$$\begin{aligned}u_{up} &= u_{down} \\v_{up} &= v_{down} \\p_{up} &= p_{down}\end{aligned}\tag{3.16}$$

3.3.5. Campo distante

Ao longe, no campo distante, tem-se a condição de evanescência. Neste limite da malha para problemas físicos de escoamento externo, Maciel (2003) recomenda diferenciar dois tipos de situações físicas possíveis: entrada com escoamento subsônico e saída do mesmo tipo de escoamento, as quais são tratadas da mesma forma que descrita na seção 3.3.3.

3.4. DESCRIÇÃO DO EQUIPAMENTO UTILIZADO

Para realizar as simulações numéricas, foi utilizado um computador portátil com as seguintes características:

- Processador Intel(R) Core(TM) 2 Duo processor T5600 com clock de 1.83 GHz com barramento de 1.83 MHz.
- Memória (RAM) DDR2 2048 Mbytes.
- Hard Disk Serial ATA-150 - 5400 rpm de 140 Gbytes.
- Sistema Operacional Windows Vista™ Home Premium 32-bit.
- Compilador Intel® Visual Fortran 10.0.

3.5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

No caso da placa plana, foi determinada a influência do parâmetro de compressibilidade artificial na taxa de convergência e na precisão do processo iterativo. Um parâmetro de muita importância é a força de atrito exercida pelo fluido sobre a placa plana. Tal força nas duas faces da placa plana, por unidade de largura, é:

$$D = 2 \int_0^L \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} dx \quad (3.17)$$

Segundo Batchelor (2000), esta força é aproximadamente:

$$D = 1.33 \rho U^2 L \left(\frac{UL}{\nu} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.18)$$

Costuma-se expressar a força de arraste de maneira adimensional na forma do coeficiente de arraste.

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho U^2 L} = \frac{2.66}{\left(\frac{UL}{\nu} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.19)$$

No caso analisado considera-se um número de Reynolds de 10^5 , pelo qual o coeficiente de arraste tem o seguinte valor:

$$C_D = \frac{2.66}{Re^{\frac{1}{2}}} = \frac{2.66}{\sqrt{10^5}} = 8.411E - 3 \quad (3.20)$$

Para calcular o arraste numericamente, utiliza-se uma aproximação de (3.17)

$$D = 2 \int_0^L \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} dx \approx 2 \sum_{i=1}^N \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_i \Delta x_i \quad (3.21)$$

Onde i é o índice do número das N células que têm uma de suas faces sobre a placa plana, e Δx é o comprimento da face. A derivada da velocidade u na direção y é calculada utilizando (2.54):

$$\frac{\partial u}{\partial y_{j+\frac{1}{2}}} \approx \frac{1}{2V^*} [(u_K - u_i)(x_{j+1} - x_j) + (u_{j+1} - u_j)(x_i - x_k)] \quad (3.22)$$

Onde os índices $j+1$ e j estão sobre a placa plana, e daí a velocidade será nula. Adicionalmente, pela condição de aderência expressa na equação (3.7), o índice K corresponde à célula fantasma e o índice i à célula real:

$$\frac{\partial u}{\partial y_{j+\frac{1}{2}}} \approx \frac{1}{V^*} [(-u_i)(x_{j+1} - x_j)] \quad (3.23)$$

O volume de controle é mostrado na Figura 2.3. Dado que a placa plana não tem um ângulo de ataque, este volume é:

$$V^* = \left| \frac{(x_{j+1} - x_j)(y_k - y_i)}{2} \right| \quad (3.24)$$

Assim, o gradiente fica:

$$\frac{\partial u}{\partial y_{j+\frac{1}{2}}} \approx \frac{-2u_i}{|y_k - y_i|} \quad (3.25)$$

A placa plana esta na origem e o centróide da célula fantasma é o espelho da célula real; então:

$$\frac{\partial u}{\partial y_{j+\frac{1}{2}}} \approx \frac{u_i}{y_i} \quad (3.26)$$

O arraste dos resultados numéricos é expresso por uma aproximação de (3.17)

$$D \approx 2\mu \sum_{i=1}^N \frac{u_i}{y_i} (x_{j+1} - x_j) \quad (3.27)$$

Na Figura 3.12 apresenta-se o histórico de convergência para os valores do parâmetro β avaliados. Para o menor valor, 1.1, há uma convergência mais suave; embora ao final haja pequenas oscilações. Tais oscilações crescem para valores maiores de β , o que pode se dever à informação viajar mais rápido nestes casos, e uma pequena variação em uma das células poder ser “transmitida” a um maior número de células vizinhas, retardando a convergência do processo.

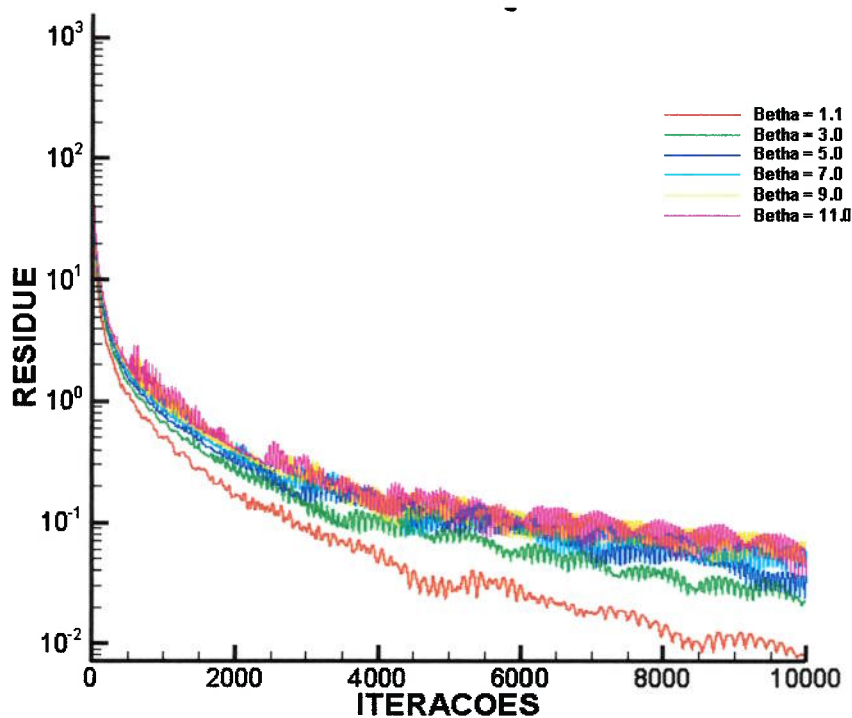


Figura 3.12.- Histórico da convergência parametrizado em β

Na Tabela 1 é mostrada a diferença no coeficiente de arraste em função de β , onde é comprovada a recomendação de Bet; Hanel e Sharma (2000); os valores maiores do que 2.0 exibem um maior erro. Embora tenha sido reportado que um maior valor de β representasse melhor um escoamento incompressível, é também verdadeiro que um valor alto provoca oscilações com possibilidade divergência no processo iterativo; daí, utilizam-se valores de β menores:

Betha	Cdnum	Cd	Erro
1.10	8.250E-3	8.412E-3	1.92%
3.00	8.153E-3	8.412E-3	3.07%
5.00	8.095E-3	8.412E-3	3.77%
7.00	8.054E-3	8.412E-3	4.25%
9.00	8.024E-3	8.412E-3	4.61%
11.00	7.999E-3	8.412E-3	4.90%

Tabela 1.- Variação dos coeficientes de arraste versus β

Na Figura 3.13, mostra-se o histórico de convergência para valores de β entre 0.3 e 1.9, comprovando-se mais uma vez que maiores valores produzem processos iterativos com mais oscilações; desta forma, é recomendável manter o valor deste parâmetro inferior a um.

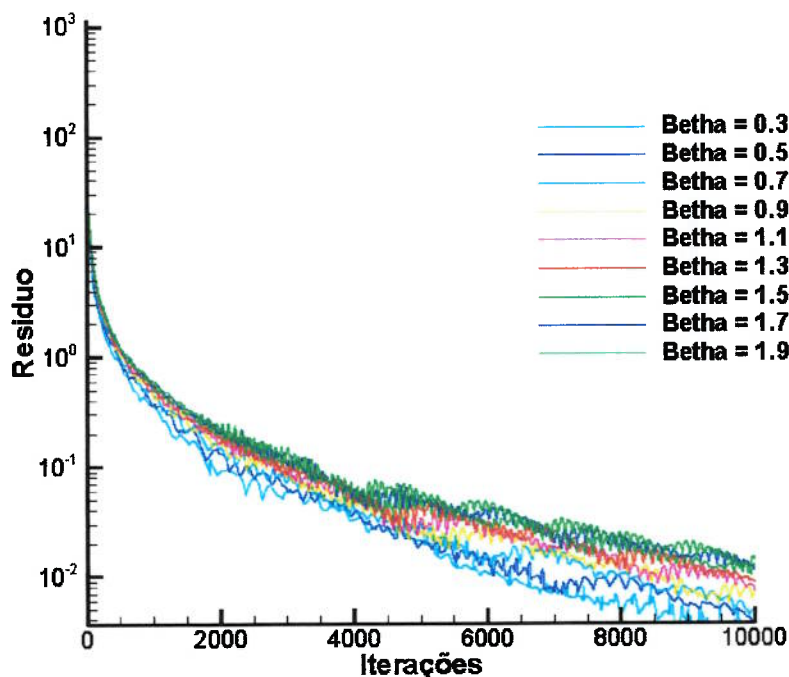


Figura 3.13.- Histórico da convergência para β com valores desde 0.3 até 1.9

Na Tabela 2, mostra-se o erro para os diferentes valores do parâmetro de compressibilidade artificial, obtendo-se um menor valor quando este parâmetro é de 0.3; contudo, os resultados publicados sugerem que este parâmetro seja maior a 0.4; assim, decide-se continuar as simulações com um valor de 0.7, com um erro aproximado de 1.5%.

Betha	Cdnum	Cd	Error
0.30	8.337E-3	8.412E-3	0.89%
0.50	8.308E-3	8.412E-3	1.23%
0.70	8.286E-3	8.412E-3	1.50%
0.90	8.267E-3	8.412E-3	1.72%
1.10	8.250E-3	8.412E-3	1.92%
1.30	8.236E-3	8.412E-3	2.09%
1.50	8.223E-3	8.412E-3	2.24%
1.70	8.211E-3	8.412E-3	2.38%
1.90	8.201E-3	8.412E-3	2.51%

Tabela 2.- Variação dos coeficientes de arraste versus β entre 0.3 e 1.9

Na Figura 3.14, exibem-se os contornos da componente da velocidade na direção x , u , com o parâmetro de compressibilidade artificial igual a 0.7. Distingue-se uma forte variação na região sobre a placa plana. Esta região é conhecida como camada limite.

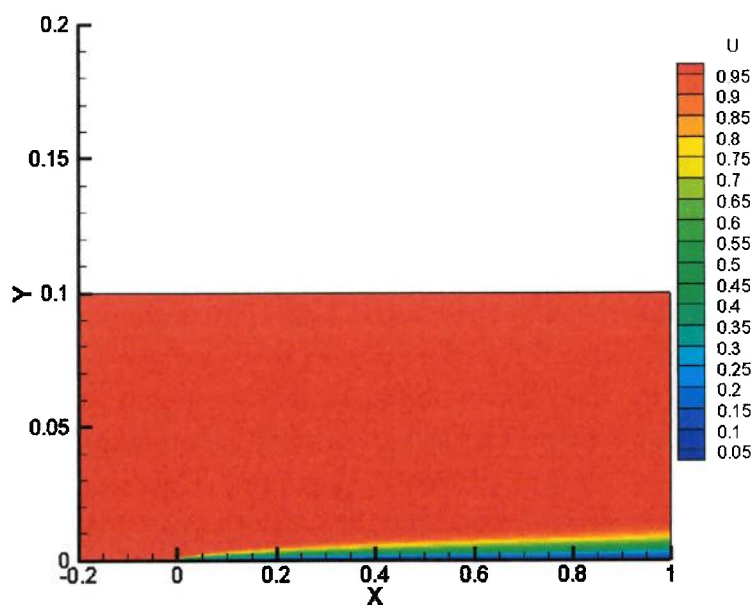


Figura 3.14 – Curvas da componente x da velocidade no caso da placa plana laminar quando β é 0.7

A seguir, compara-se a variação de velocidades sobre a placa plana com a solução numérica de Blasius. Devido à possível influência do bordo de ataque e do final da placa plana, escolheram-se as células afastadas destes pontos, o que também foi feito por Hino (1997), escolhendo as posições 0.25L, 0.50L, e 0.75L. Na Figura 3.15, que utiliza a coordenada adimensionalizada η , mostra-se haver uma boa aderência dos resultados obtidos, o que demonstra que o *software* é capaz de capturar o gradiente de velocidade ao longo da placa no regime laminar. Este resultado sugere um comportamento similar para escoamentos com geometrias mais complexas.

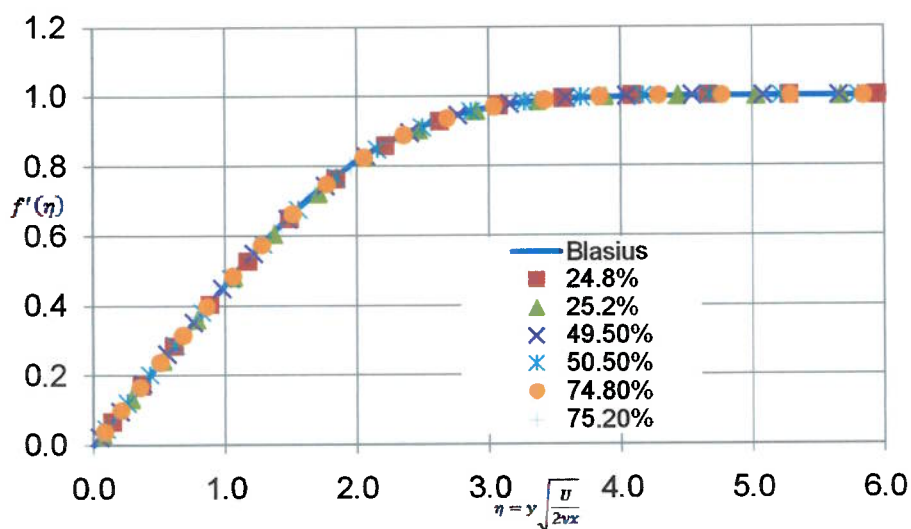


Figura 3.15 – Comparação resultados obtidos com Blasius

Mostra-se o contorno de velocidades na direção x na Figura 3.16. Em (a), tem-se uma malha de 51x21 nós sobre a placa plana, e se obtém uma solução qualitativamente aceitável, com a captura da presença da camada limite. Em (b), tem-se uma malha de 51x41 nós, onde se obtém uma melhor descrição da variação da velocidade na direção normal à placa plana. Melhoram também os resultados obtidos em (c), com malha de 101x21. Em (d), resulta a melhor descrição da camada limite, tanto na direção normal quanto tangencial.

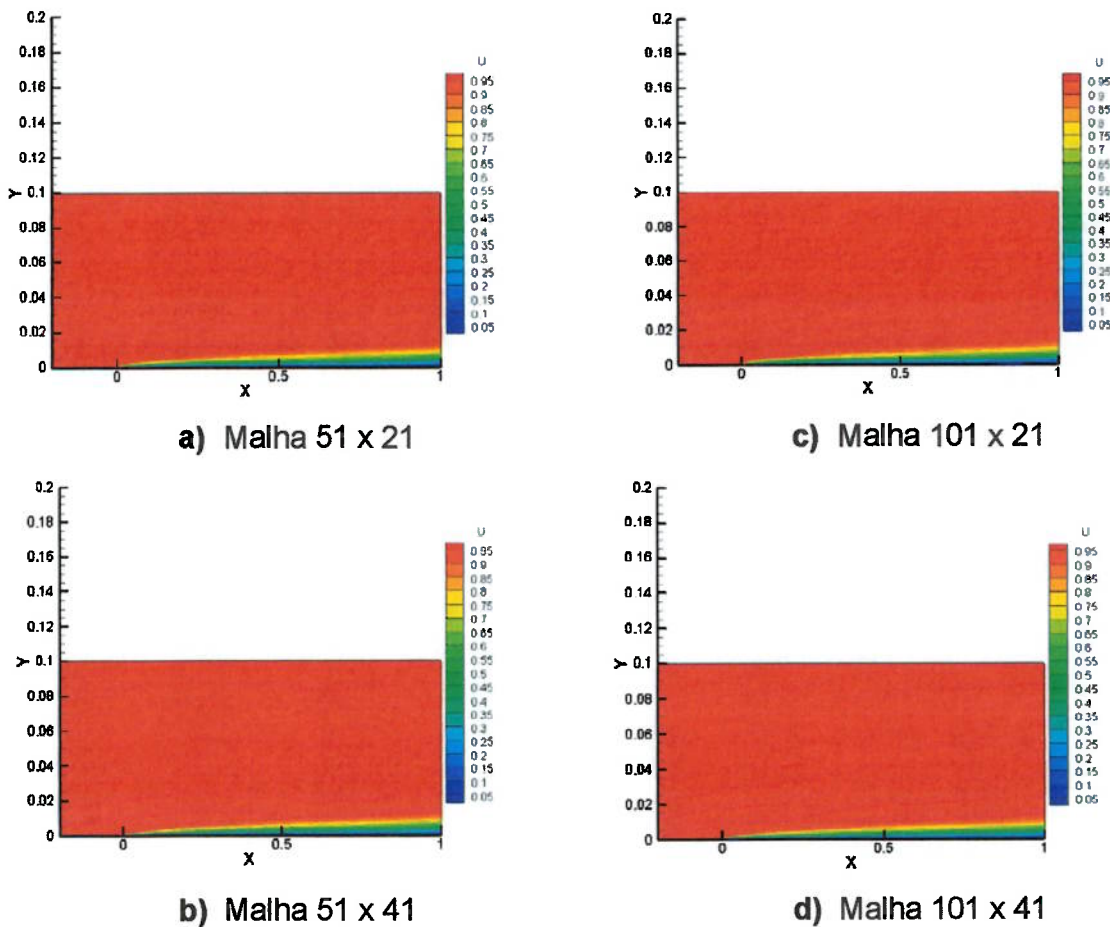


Figura 3.16 – Contorno de velocidades para varias densidades de malha

Na Tabela 3, mostra-se a influência da densidade da malha no erro na estimativa do coeficiente de arraste, e na Tabela 4 o tempo de execução requerido em cada caso. A malha menos densa apresenta um erro de 3.7%, e quase 50 minutos de execução. Nos casos 2 e 3 resulta quase a mesma quantidade de tempo de execução, 155 minutos. No caso com mais divisões na direção normal, tem-se o menor erro, 0.7%, devido à física do problema. No último caso, a diferença de erro diminui para 1.3%. Quanto ao segundo caso, emprega quase 4 vezes mais o tempo de execução.

Malha	Cdnum	Cd	Erro
51 x 21	8.101e-3	8.412e-3	3.69%
51 x 41	8.173e-3	8.412e-3	2.84%
101 x 21	8.127e-3	8.412e-3	3.39%
101 x 41	8.286e-3	8.412e-3	1.50%

Tabela 3.- Variação do coeficiente em função da densidade da malha

Malha	Horas	Minutos	Segundos
51 x 21	0	49	8
51 x 41	2	33	8
101 x 21	2	35	35
101 x 41	8	31	9

Tabela 4.- Tempo de execução em função da densidade da malha

Quanto à influência da posição da fronteira de saída, observa-se pela Figura 3.17, onde se analisam duas variações adicionais, que o resíduo, após 10000 iterações, aumenta para o domínio estendido. Vê-se que as oscilações, ao final do histórico de convergência, diminuem, pelo fato de serem produzidas pela interação da fronteira de saída no resíduo.

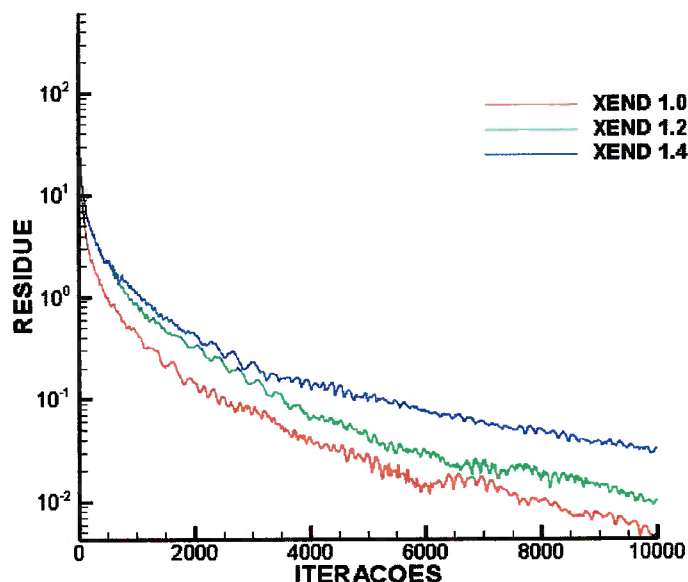


Figura 3.17 – Curva de convergência no caso da placa plana laminar com diferentes posições da fronteira de saída

Na Figura 3.18, mostra-se o campo de velocidades para a fronteira de saída em diferentes posições. A situação (a) encontra-se comentada acima (mesma de 3.17d). Em (b), nota-se uma diminuição da região perturbada a jusante, e um ligeiro aumento da espessura da camada limite sobre a placa plana. Em (c), descreve-se melhor a esteira a jusante da placa, e a camada limite se mantém com a mesma variação de velocidades obtida em (b).

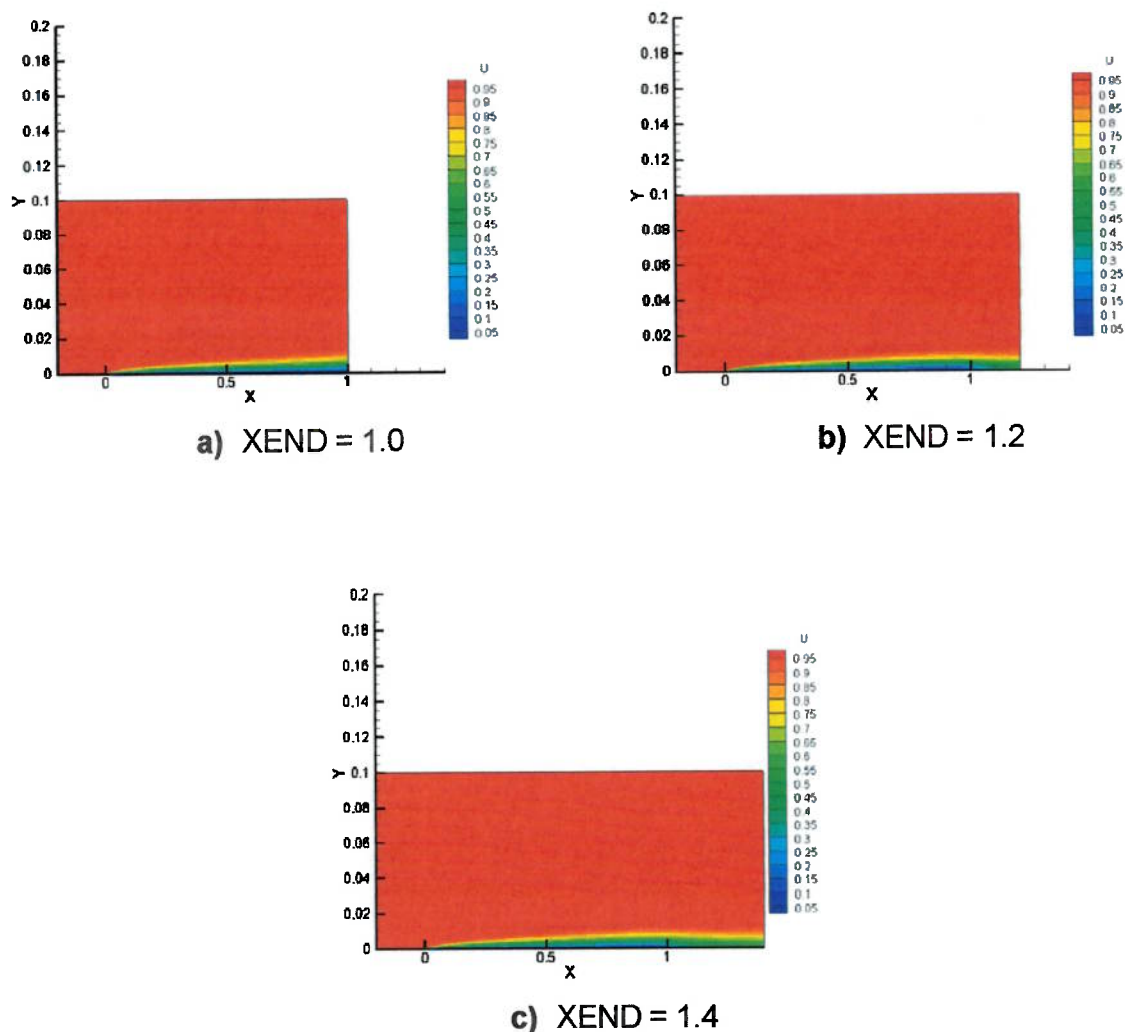


Figura 3.18 – Contorno de velocidade na direção x para diferentes configurações da fronteira de saída

Na Tabela 5, mostra-se a influência da posição da fronteira de saída no erro na estimativa do coeficiente de arraste, e na Tabela 6 o tempo de execução requerido em cada caso. A malha inicial apresenta um erro de 1.5% e um tempo computacional de 8.5 horas. Quando a fronteira de saída se encontra na posição 1.2, tem-se um acréscimo do coeficiente de arraste de 0.82% e do tempo computacional de 3.5 horas, comprovando-se a influência da fronteira no campo de velocidades. Quando a fronteira de saída se encontra na posição 1.4, utiliza-se quase 3.8 horas a mais do que no caso anterior, mas o erro mantém, não se recomendando a utilização de uma malha com uma fronteira de saída mais distante do final da placa.

XEND	Cdnum	Cd	Erro
1.00	8.286e-3	8.412e-3	1.50%
1.20	8.481e-3	8.412e-3	-0.82%
1.40	8.481e-3	8.412e-3	-0.83%

Tabela 5.- Influência da posição da fronteira de saída no coeficiente de arraste

XEND	Horas	Minutos	Segundos
1.00	8	31	9
1.20	12	2	49
1.40	15	50	38

Tabela 6.- Tempo de execução em função da posição da fronteira de saída

Na Figura 3.19 exibem-se os contornos da componente da velocidade adimensional na direção x , u , para o cilindro circular; distingue-se que, ao redor do corpo, a velocidade é zero, o que é consistente com a condição de contorno de superfície sólida. Na região à jusante do corpo, o escoamento é perturbado pela sua presença, com uma variação maior na região mais próxima ao corpo, considerando uma seção transversal paralela ao eixo y e de dimensão igual a um diâmetro. Também nesta região há um trecho de recirculação, isto sendo consistente com o encontrado em trabalhos experimentais e numéricos reportados por diversos autores. À medida que o escoamento se afasta do corpo, ocorre aumento da dimensão da seção transversal onde se observa variação da componente u , o que é similar ao comportamento da esteira de navios em avanço.

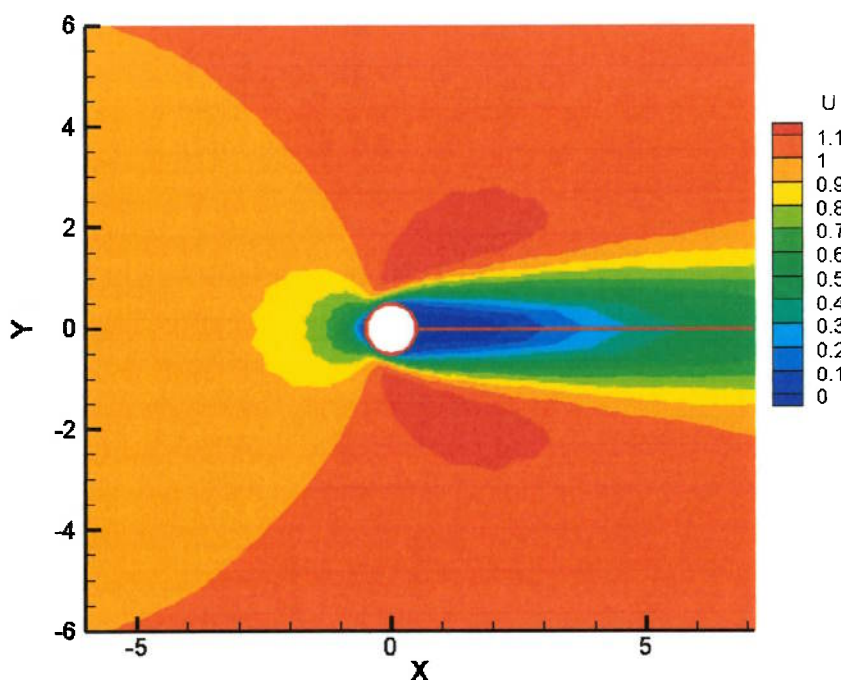


Figura 3.19 – Curvas da componente x da velocidade para o cilindro circular

Na Figura 3.20, apresentam-se os contornos da pressão adimensionalizada, p , na região ao redor do cilindro circular. Pode-se identificar um aumento do valor da pressão no ponto de estagnação. Isto é consistente com a conservação de energia, pois neste ponto há uma diminuição das velocidades. Ao longo do contorno do corpo, há uma diminuição progressiva da pressão, de maneira simétrica nos dois bordos. Na posição 90 graus, aproximadamente, atinge-se o mínimo valor; a partir daí, ocorre um pequeno aumento, mas sem recuperar o valor a montante. Estes resultados são consistentes com os reportados por diversos autores.

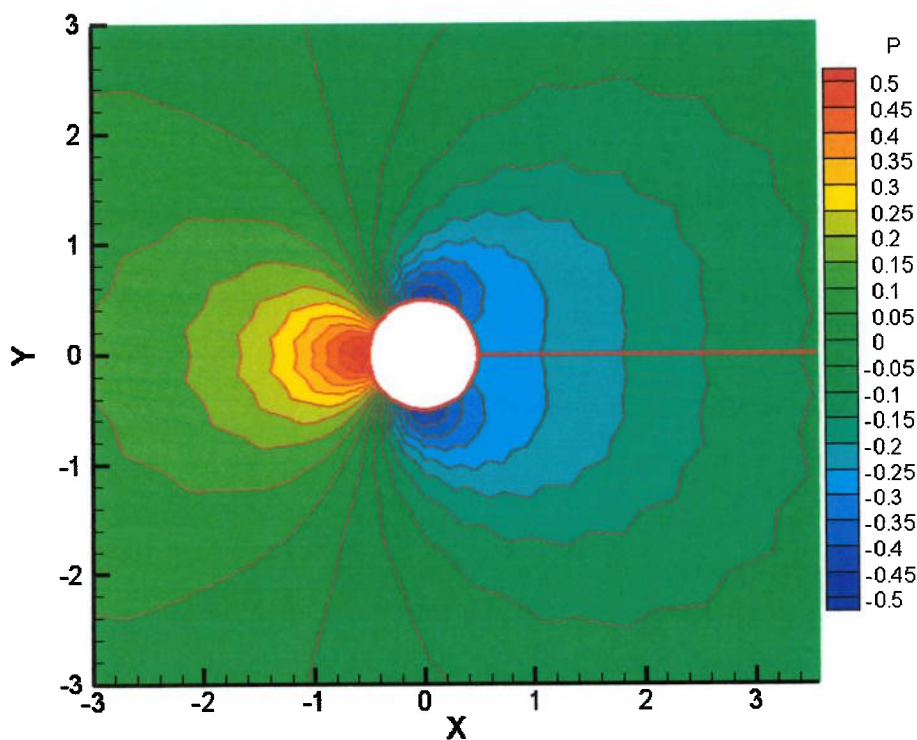


Figura 3.20 – Curvas de pressão no caso do cilindro circular

Para fazer a comparação dos resultados aqui apresentados com os de outras referências, emprega-se o coeficiente de pressão, C_p , definido pela relação entre a pressão local e uma pressão ao longe, quer dizer:

$$C_p = \frac{p - p_o}{\frac{1}{2} \rho U^2} \quad (3.28)$$

Na Figura 3.21, a distribuição pressão adimensional sobre a superfície do cilindro é comparada com os dados publicados por Hino (1997) e Wanderley e Levy (2004). Embora os valores obtidos estejam dispersos, a tendência da variação da pressão obtida com o método numérico desenvolvido é similar à mostrada nas outras referências. As diferenças se devem à discretização esparsa na região próxima à superfície do cilindro; desta forma, recomenda-se uma malha mais densa na região mais próxima ao cilindro.

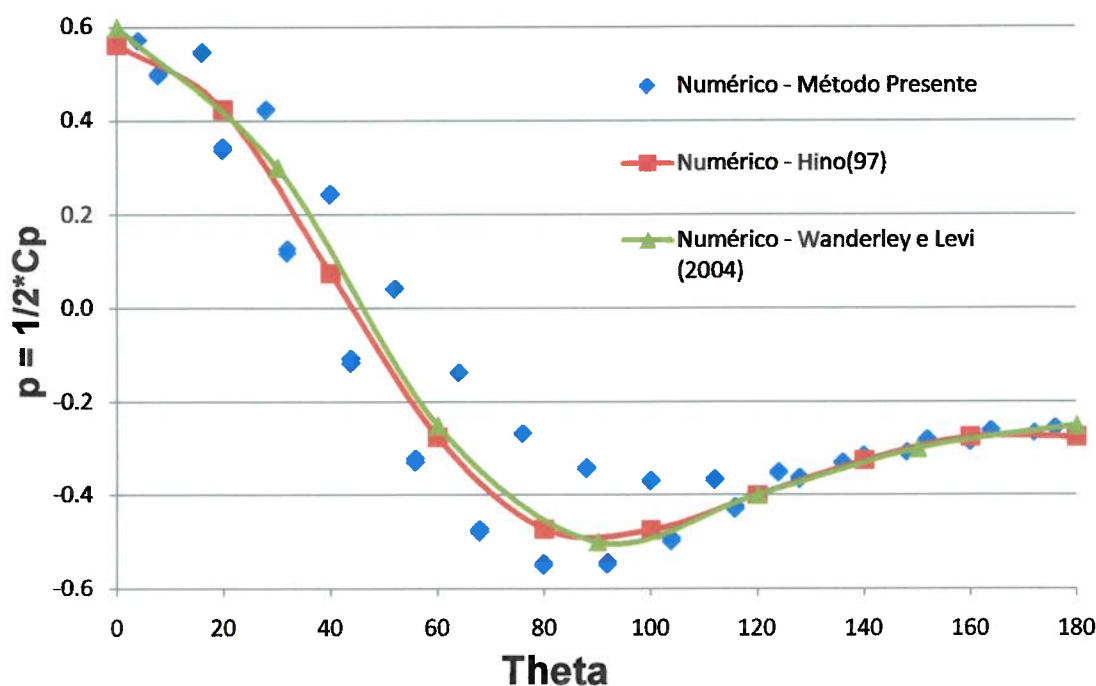


Figura 3.21 – Comparação da distribuição de pressão na superfície do cilindro circular, $Re = 40$

Na Figura 3.22, mostra-se o histórico de convergência para o cilindro circular com CFL igual a 0.1; nas 20.000 iterações foram empregadas quase 5 horas de execução, acarretando um custo aproximado de 0.00018 segundos por cada célula real em cada iteração. Verificou-se uma redução de seis ordens de magnitude no resíduo até processo iterativo levar ao estado permanente. Na curva, verifica-se uma redução suave nas primeiras 3.000 iterações para, a seguir, haver oscilações

até o final. Na comparação com a placa plana, o cilindro circular exibe uma maior complexidade para o escoamento, isto diferenciando os respectivos históricos de convergência; para o cilindro, ocorre recirculação do fluido na região posterior.

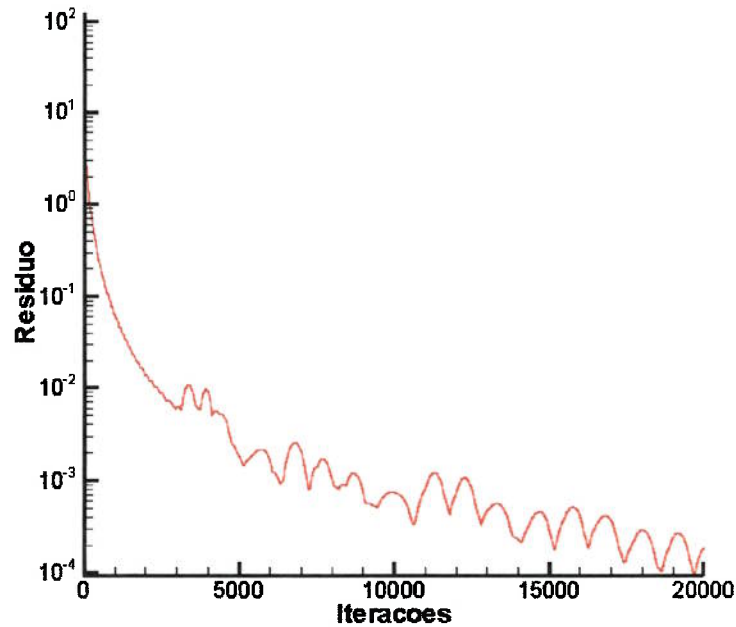


Figura 3.22 – Curva de convergência no caso do cilindro circular

4. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Os resultados obtidos a partir do modelo numérico desenvolvido neste trabalho, e correspondentes algoritmo e *software*, mostram boa aderência quando comparados com dados analíticos, experimentais, e numéricos no regime laminar. Como evolução da pesquisa, seria interessante a validação dos resultados para a condição turbulenta.

Quanto à geometria dos corpos aqui analisados, observaram-se as seguintes características de aplicação do método:

- 1) Nem sempre um maior número de células resulta em uma melhor resposta, o método demonstrou que é muito importante conhecer de forma aproximada o tipo de escoamento, por exemplo, recomenda-se ter maior número de células na direção normal a superfícies sólidas.
- 2) A posição das fronteiras perturba o escoamento obtido numericamente se são colocadas muito próximas as regiões com altos gradientes, como no caso da placa plana quando a fronteira de saída está sobre o final da placa a 0.2 m, o coeficiente de arraste varia, mas depois de esta posição o erro não diminui, mas o tempo de execução aumenta.
- 3) O parâmetro de compressibilidade artificial demonstrou ser muito importante tanto na taxa de convergência quanto na precisão do escoamento obtido, menores valores produzem melhores aproximações e atinge menores valores de resíduos mais rapidamente.

Embora os resultados sejam auspiciosos, ainda não é possível afirmar que o modelo, algoritmo e *software* estão totalmente validados. Existe ainda a necessidade de comparar casos bidimensionais mais complexos, como, por exemplo, incluindo a presença de uma superfície livre, em números de Reynolds mais elevados, e com geometrias tridimensionais; devem ser feitas comparações com resultados de campo. Comparações de resultados a partir do método RANS com resultados obtidos por outros métodos, como por exemplo o método das partículas ou o LES, também procedem.

É necessário diminuir ainda mais o tempo computacional. Algumas das possibilidades de otimização do código são a implementação dos métodos de aceleração de convergência e de paralelização do código.

Na literatura, o método RANS já se tem demonstrado o grande potencial para diversas aplicações navais, como por exemplo, a estimativa da resistência ao avanço, manobras de baixas velocidades, balanço do navio no mar.

No âmbito das aplicações aqui consideradas, o modelo, algoritmo e software desenvolvidos levaram a resultados comparáveis aos obtidos por outros pesquisadores, sejam numéricos, experimentais ou analíticos, evidenciando-se sua potencialidade para análise de dinâmica de fluidos.

Em resumo, para avançar na pesquisa de estabelecimento de métodos numéricos e programas CFD aplicados a situações de interesse na engenharia naval e oceânica, convém:

- Configurar e implantar técnicas de aceleração do processo iterativo.
- Paralelizar o código.
- Incluir um método para estimar a posição da superfície livre, que seja capaz de capturar e seguir adaptativamente a deformação da superfície livre (ondas).
- Prosseguir na sua validação para outras aplicações.

REFERÊNCIAS

BALDWIN B. S. e LOMAX H. Thin Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flow [Conferência] // AIAA 16th Aerospace sciences meeting. - Huntsville, Alabama : American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1978. - pp. 1-8.

BATCHELOR G. K. An introduction to Fluid Dynamics [Book]. - New York, NY, USA : Cambridge Mathematical Press, 2000.

BET F., HANEL D. e SHARMA S. Numerical Simulation of Ship Flow by a Method of Artificial Compressibility [Periódico] // Twenty-Second Symposium on Naval Hydrodynamics. - [s.l.] : The National Academy of Sciences, 2000. - pp. 522-531.

BREDBERG J. On two equation Eddy-Viscosity Models [Relatório] : Internal Report 01/08 / Department of Thermo and Fluid Dynamics ; Chalmers University of Technology. - Sweden : [s.n.], 2001. - p. 41.

BRUMMELEN H. Analysis of the Incompressible Navier-Stokes Equations with a Quasi Free-Surface Condition [Relatório] : Report MAS - R9922 / Modeling, Analysis and Simulation ; Centrum voor Wiskunde en Informatica. - The Netherlands : [s.n.], 1999. - p. 11.

BRUMMELEN H. e RAVEN H. Numerical Solution of Steady Free-Surface Navier-Stokes Flow [Relatório]. - The Netherlands : [s.n.], 2000.

BRUMMELEN H., RAVEN H. e KOREN B. Efficient Numerical Solution of Steady Free-Surface Navier-Stokes Flow [Periódico] // Journal of Computational Physics 174. - 2001. - pp. 120-137.

CARRICA P., WILSON R. e STERN F. An Unsteady Single-Phase Level Set Method for Viscous Free Surface Flows [Relatório] : Report No. 444 / IIHR ; The University of IOWA. - USA : [s.n.], 2005. - p. 37.

CHAKRABARTI S. Empirical calculation of Roll Damping for Ships and Barges [Periódico] // Ocean Engineering 28. - [s.l.] : Elsevier Science Ltd., 2001. - pp. 915-932.

CHORIN A. A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems [Periódico] // Journal of Computational Physics. - August de 1967. - 1 : Vol. 2. - pp. 12-26.

DAVIDSON L. An Introduction to Turbulence Models [Relatório] : Publication 97/2 / Department of Thermo and Fluid Dynamics ; Chalmers University of Technology. - Sweden : [s.n.], 2003. - p. 48.

FARMER J., MARTINELLI L. e JAMESON A. A Fast Multigrid Method for Solving the Nonlinear Ship Wave Problem with a Free Surface [Conferência] // Proceedings of the Sixth International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics. - [s.l.] : The National Academy of Science, 1994. - pp. 155-172.

GORSKI J. A perspective on the Role of RANS Codes for Predicting Large Amplitude Ship Motions [Conferência] // 6th ISSW. - New York : [s.n.], 2002. - pp. 1-10.

GORSKI J. J. [et al.] The Use of a RANS Code in the Design and Analysis of a Naval Combatant [Conferência] // Proceedings of the 24th Symposium on Naval Hydrodynamics. - Fukuoka - Japan : The National Academy of Science, 2002. - pp. 1-16.

HARLOW F. e WELCH E. Numerical Calculation of Time-dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface [Periódico] // The Physics of Fluids. - 1965. - 12 : Vol. 8. - pp. 2182-2189.

HERMANS A. The Role of Applied Mathematics in Hydrodynamics for Ships and Floating Offshore Structures [Relatório]. - The Netherlands : TU DELFT, 1998.

HIMENO Y. Prediction of Ship Roll Damping - State of the Art [Relatório] : Report No.239 / Dep. of Naval Architecture and Marine Engineering ; The University of Michigan . - Ann Arbor : [s.n.], 1981. - p. 92.

HINO T. An Unstructured grid Method for Incompressible Viscous Flows with a Free Surface [Periódico] // AIAA paper 97-0862. - 1997. - pp. 1-10.

HINO T. Navier-Stokes Computations of Ship Flows on Unstructured Grids [Periódico] // Twenty-Second Symposium on Naval Hydrodynamics. - [s.l.] : The National Academy of Sciences, 2000. - pp. 463-475.

HINO T., MARTINELLI L. e JAMESON A. A Finite-Volume Method with Unstructured Grid for Free Surface Flow Simulations [Conferência] // Proceedings of the Sixth International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics. - [s.l.] : The National Academy of Sciences, 1994. - pp. 173-193.

HOFFMANN K. e CHIANG S. Computational Fluid Dynamics [Livro]. - USA : EES, 2004. - Vol. I : III.

IKEDA Y., FUJIWARA T. e KATAYAMA T. Roll Damping of a Sharp-Cornered Barge and Roll Control by a New-Type Stabilizer [Conferência] // Proceedings of the Third International Offshore and Polar Engineering Conference. - Singapore : ISOPE, 1993. - Vol. III. - pp. 634-639. - ISBN 1-880653-05-2 (Set).

ITTC Final Report and Recommendations of the Specialist Committee on Stability in Waves [Conferência] // Proceedings of the 24th ITTC. - UK : [s.n.], 2005.

ITTC Specialist Committee on Prediction of Extreme Ships Motions and Capsizing: Final Report and Recommendations to the 23rd ITTC [Conferência] // Proceedings of the 23rd ITTC. - Venice : [s.n.], 2002. - pp. 611-649.

ITTC Specialist Committee on Ship Stability: Final Report and Recommendations to the 22nd ITTC [Conference] // Proceedings of the 22nd ITTC. - Seoul and Shanghai : [s.n.], 1999. - pp. 399-431.

ITTC Verification and Validation Procedure for Uncertainty in CFD (ITTC QUALITY MANUAL 7.5-03) [Relatório]. - 2002. - p. 12.

JAMESON A. e MAVRIPLIS D. Finite Volume Solution of the Two-Dimensional Euler Equations on a Regular Triangular Mesh [Periódico] // AIAA Journal Vol. 24, N 4. - 1986. - pp. 611-618.

JAMESON, A.; SCHMIDT, W.; TURKEL, E. Numerical Solution of the Euler Equations by Finite Volume Methods Using Runge-Kutta Time-Stepping Schemes [Conferência] // AIAA 14th Fluid and Plasma Dynamic Conference. - Palo Alto, California : AIAA 1981-1259, 1981. - pp. 1-18.

KAKAR K. Computational Modeling of FPSO Hull Roll Motions and Two-component Marine Propulsion Systems [Relatório] : M.Sc. Thesis / Department of Civil Engineering ; The University of Texas at Austin. - Austin, TX 78712 : [s.n.], 2002.

KIM K. Simulation of Surface Ship Dynamics Using Unsteady RANS Codes [Relatório] : RTO-MP-089 / Office of Naval Research. - 2002.

KLUWE F. e SCHMODE D. RANS based analysis of Roll Damping Moments at Bilge Keels [Relatório] : NuTTS / Institute of Ship Design and Ship Safety ; Hamburg University of Technology. - 2005. - p. 8.

KOREN B. Explicit Runge-Kutta Artificial Compressibility Technique for Incompressible Navier-Stokes Equations Application to the Backward Facing Step Flow [Relatório] : Project Report 1984-14 / Von Karman Institute for Fluid Dynamics. - Rhode Saint Genese, Belgium : [s.n.], 1984. - p. 60.

KORPUS R. A. e FALZARANO J. M. Prediction of Viscous Ship Roll Damping by Unsteady Navier-Stokes Techniques [Periódico] // Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering. - Florence - Italy : SNAME, MAY de 1997. - Vol. 119. - pp. 108-113.

Koshizuka S., Tamako H. and Oka Y. A particle method for incompressible viscous flow with fluid fragmentation [Journal]. - [s.l.] : Journal Computational Fluid Dynamics, 1995. - 1 : Vol. 4. - pp. 29-46.

LARSSON L., STERN F. e BERTRAM V. Benchmarking of Computational Fluid Dynamics for Ship Flows: The Gothenburg 2000 Workshop [Periódico] // Journal of Ship Research. - 2003. - 1 : Vol. 47. - pp. 63-81.

MACIEL E. S. G. Simulação numérica de escoamentos supersônicos e Hipersônicos utilizando técnicas de dinâmica dos fluidos computacional [Relatório] : Tesis (Doutoramento) / ITA. - São José dos Campos : [s.n.], 2003.

MARTINELLI L. e COWLES G. An adjoint Method for the Incompressible Reynolds Averaged Navier Stokes using Artificial Compressibility [Periódico] // IEEE. - 2000. - pp. 89-110.

MAVRIPLIS D. Algebraic Turbulence Modeling for Unstructured and Adaptive Meshes [Relatório] : ICASE Report No. 90-30. - Hampton, Virginia 23665-5225 : NASA, 1990.

MAVRIPLIS D. J. e JAMESON A. Multigrid Solution of the Navier-Stokes Equations on Triangular Meshes [Periódico] // AIAA Journal, Vol. 28, No. 8. - 1990. - pp. 1415-1425.

MILLER R. W., GORSKI J. J. e FRY D. J. Viscous Roll Predictions of a Circular Cylinder with Bilge Keels [Periódico] // Twenty-Fourth Symposium on Naval Hydrodynamics. - Japan : [s.n.], 2002. - pp. 1-16.

MORENO J. F. FORTRAN para principiantes [Relatório]: Notas de clases Programación Aplicada I / FIMCM ; ESPOL. - Guayaquil - Ecuador : [s.n.], 2006. - p. 117.

MURTHY J. Y. e MATHUR S. R. Numerical Methods in Heat, Mass, and Momentum Transfer: Draft Notes ME 608 [Livro]. - [s.l.] : Purdue University, 2002.

NEVES M. e RODRIGUEZ C. A non-linear mathematical model of Higher order for Strong Parametric Resonance of the Roll motion of Ship in Waves [Periódico] // Marine Systems & Ocean Technology - Journal of SOBENA. - 2005. - 2 : Vol. 1. - pp. 69-81.

NEWMAN J. N. Marine Hydrodynamics [Livro]. - [s.l.] : MIT Press, 1977.

OBBERKAMPF W. L. DISCUSSION: "Comprehensive Approach to Verification and Validation of CFD Simulations-Part 1: Methodology and Procedures" [Periódico] // Journal of Fluids Engineering. - [s.l.] : ASME, 2002. - Vol. 124. - pp. 809-811.

PAREDES R. J. Implementación de una solución del Flujo Laminar Viscoso Bidimensional con influencia de superficie libre aplicando el Método de Hino [Relatório]: TESIS DE GRADO / FIMCM ; ESPOL. - Guayaquil - Ecuador : [s.n.], 2006.

PATERSON E., WILSON R. e STERN F. General-Purpose Parallel Unsteady RANS Ship Hydrodynamics Code: CFDSHIP-IOWA [Relatório] : Report No. 432 / IIHR ; The University of IOWA. - 2003. - p. 107.

POPE S. Turbulent Flow [Livro]. - [s.l.] : Cambridge University Press, 2005.

RANSAU S. Solution Methods for Incompressible Viscous Free Surface Flows: A Literature Review [Relatório]: Preprint Numeric No. 3/2002 / Department of Mathematical Sciences ; Norwegian University of Science and technology. - Trondheim - Norway : [s.n.], 2002. - p. 62.

RAUSCH R. D., BATINA J. T. e YANG H. T. Y. Spatial Adaption Procedures on Unstructured Meshes for Accurate Unsteady Aerodynamic Flow Computation [Periódico] // AIAA Paper 91-1106. - [s.l.] : American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1991. - pp. 1-16.

RAVEN H. e BRUMMELEN H. A new approach to computing Steady Free-Surface Viscous Flow Problems [Conferência] // First MARNET-CFD. - Barcelona - Spain : MARIN, 1999. - pp. 1-5.

RHEE S. e STERN F. Unsteady RANS Method for Ship boundary Layer and Wake and Wave field [Periódico] // International Journal for Numerical Methods in Fluids. - [s.l.] : John Wiley & Sons, Ltd., 2001. - Vol. 37. - pp. 445-478.

RHEE S. H. e HINO T. Numerical Simulation of Unsteady Flows using Unstructured Grid Method [Periódico]. - 2000. - pp. 1-4.

RIZZI A. e ERIKSSON L. Computation of inviscid incompressible flow with rotation [Periódico] // Journal Fluid Mechanics Vol 153. - 1985. - pp. 275-312.

ROE P. L. Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes [Periódico] // Journal of Computational Physics. - 1981. - Vol. 43. - pp. 357-372.

ROGERS S. E., KWAK D. e KIRIS C. Steady and Unsteady Solutions of the Incompressible Navier-Stokes Equations [Periódico] // AIAA Journal. - 1991. - Vol. 29. - pp. 603-610.

SARKAR T. Application of a RANS Technique for Simulation of the Flow Past a Body in Heaving and Rolling Motions at the Free Surface [Relatório]. - Glasgow - UK : Ship Stability Research Center, 2001.

SARKAR T. e VASSALOS D. A RANS-based technique for simulation of the flow near a rolling cylinder at the free surface [Periódico] // Journal of Marine Science and Technology. - UK : SNAJ 2000, 2000. - 2 : Vol. 5. - pp. 66-77.

SARPKAYA T. e O'KEEFE J. L. Oscillating Flow about Two and Three-Dimensional bilge Keels [Periódico] // Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering Vol 118. - Copenhagen - Denmark : SNAME, 1996. - Vol. 118. - pp. 1-6.

SATO Y., HINO T. e HINATSU M. Unsteady Flow Simulation around a moving body by an unstructured Navier-Stokes Solver [Conferência] // Proc. Numerical Towing Tank Simulation. - 2003. - pp. 1-6.

SENOCAK I. e IACCARINO G. Progress towards RANS Simulation of Free Surface flow around Modern Ships [Relatório]: Annual Research Briefs / Center for Turbulence Research. - 2005. - pp. 151-156.

SIMOS A. N. Hidrodinâmica I: Texto de apoio a disciplina PNV5200 [Livro]. - São Paulo : [s.n.], 2006.

STERN F. [et al.] Comprehensive Approach to Verification and Validation of CFD Simulations - Part 1 [Periódico] // Journal of Fluids engineering. - [s.l.]: ASME, 2001. - Vol. 123. - pp. 793-802.

SUSSMAN M., SMEREKA P. e OSHER S. A Level Set Approach for Computing Solutions to Incompressible Two-Phase Flow [Periódico] // Journal of Computational Physics. - 1994. - Vol. 114. - pp. 146-159.

TENNEKES H. e LUMLEY J. A First Course in Turbulence [Livro]. - [s.l.]: MIT Press, 1972.

THOMPSON J., WARSI Z. U. A. e MASTIN C. Numerical Grid Generation: Foundations and Applications [Livro]. - New York : Elsevier Science Publishing Co., 1985. - p. 342.

TSUKAMOTO M. Desenvolvimento do Método de Partículas na Representação de Corpos flutuantes em Ondas Altamente não Lineares [Relatório]: Dissertação (Mestrado) / Escola Politécnica; Universidade de São Paulo. - São Paulo : [s.n.], 2006. - p. 69.

WANDERLEY J. B. e LEVI C. Numerical Investigation of Vortex Induced Vibration on an Elastically Mounted Cylinder [Periódico] // Marine Systems and Ocean Technology - Journal of SOBENA. - 2004. - 1 : Vol. 1. - pp. 1-7.

WHITE F. M. Viscous Fluid Flow [Livro]. - [s.l.]: Mc Graw Hill Series, 2006.

WILCOX D. Turbulence Modeling for CFD [Livro]. - [s.l.]: DCW Industries, 2006.

WILSON R. V., CARRICA P. M. e STERN F. Unsteady RANS method for ship motions with application to roll for a surface combatant [Periódico] // Computer & Fluids. - [s.l.] : Elsevier Ltd., 2006. - Vol. 35. - pp. 501-524.

YANG J. e STERN F. Large-Eddy Simulation of Breaking Waves using Embedded-Boundary/Level-Set Method [Periódico] // AIAA 2007-1455. - 2007. - pp. 1-16.

YEUNG R. e ANANTHAKRISHNAN P. Oscillation of a floating Body in a Viscous Fluid [Periódico] // Journal of Engineering Mathematics. - 1992. - Vol. 26. - pp. 211-230.

YEUNG R. W. [et al.] On Roll Hydrodynamics of Cylinders Fitted with Bilge Keels [Periódico] // Twenty-Third Symposium on Naval Hydrodynamics. - 2001. - pp. 1-19.

YEUNG R. W., LIAO S. -W. e RODDIER D. Hydrodynamic Coefficients of Rolling Rectangular Cylinders [Periódico] // International Journal of Offshore and Polar Engineering. - [s.l.] : ISOPE, 1998. - 4 : Vol. 8. - pp. 241-250. - ISSN 1053-5381.

YEUNG R. W., LIAO S.-W. e RODDIER D. On Roll Hydrodynamics of Rectangular Cylinders [Conferência] // Proceedings of the Eighth International Offshore and Polar Engineering Conference. - Montreal - Canada : ISOPE, 1998. - pp. 445-453.