

OSCAR BRITO AUGUSTO

PROPOSTA DE UM MODELO PARA O CÁLCULO DAS  
DEFLEXÕES TRANSVERSAIS DE CHAPAS RETANGULARES  
SUBMETIDAS A UMA ONDA DE CHOQUE GERADA POR  
UMA EXPLOÇÃO SUBMARINA

Dissertação apresentada a  
Escola Politécnica da USP,  
para a obtenção do título  
Mestre em Engenharia.

São Paulo, 1982

FD-458

OSCAR BRITO AUGUSTO

*Engenheiro Naval, Escola Politécnica da USP, 1980*

PROPOSTA DE UM MODELO PARA O CÁLCULO DAS DEFLEXÕES TRANS-  
VERSAIS DE CHAPAS RETANGULARES SUBMETIDAS A UMA ONDA DE  
CHOQUE GERADA POR UMA EXPLOÇÃO SUBMARINA

Dissertação apresentada à Es-  
cola Politécnica da USP para  
a obtenção do Título de Mes-  
tre em Engenharia

Orientador: *Prof. Dr. Ronaldo de Breyne Salvagni*  
*Prof. Assistente Doutor do Departa-*  
*mento de Engenharia Mecânica da*  
*EPUSP*

São Paulo, 1982

Ao meu pai  
(in memoriam)

## AGRADECIMENTOS

- Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, cujo apoio financeiro possibilitou a realização deste trabalho.
- À Marinha do Brasil, através do Escritório Técnico de Construção Naval em São Paulo, pelo apoio recebido.
- Ao Prof. Ronaldo de Breyne Salvagni, pela sua efetiva orientação e valiosas sugestões.
- Ao Sr. Francisco Gomes da Silva, pelo seu excelente trabalho de datilografia.
- A minha esposa Maria José, pelo seu incentivo, compreensão e paciência.

*R E S U M O*

É proposto um método de cálculo de deflexão transversais permanentes para placas retangulares imersas em um meio fluido (água de um lado, ar do outro) e submetidas ao carregamento de uma onda de choque gerada por uma explosão submarina. Incluem-se algumas comparações com resultados teóricos propostos por outros autores e com resultados experimentais.

*A B S T R A C T*

It is proposed a calculation method for rectangular plate permanent transverse deflections in a fluid medium (water on one side, air on the other) and subjected to a shock wave loading generated from an underwater explosion. The proposed solution is partially compared with experimental and theoretical results presented by others authors.

## Í N D I C E

- Agradecimentos.....	i
- Resumo.....	ii
- Índice.....	iii
- Notação.....	v
- Lista de figuras.....	viii
I. INTRODUÇÃO.....	I.1
II. A EXPLOÇÃO SUBMARINA.....	II.1
II.1 - Os Primeiros Estágios de Uma Explosão Submarina.....	II.1
II.2 - A Onda de Choque.....	II.3
III. FORMULAÇÃO ANALÍTICA PARA UMA ONDA DE CHOQUE PLANA.....	III.1
III.1 - Uma Onda de Choque Num Meio Fluido Ideal	III.1
III.2 - Reflexão de Uma Onda de Choque Plana em Uma Parede Infinita Móvel.....	III.7
III.3 - Incidência Oblíqua.....	III.9
III.4 - Os Efeitos de Fronteiras no Meio Fluido.	III.11
IV. DEFLEXÃO PERMANENTE DE CHAPAS RETANGULARES SOB UM CARREGAMENTO IMPULSIVO.....	IV.1
IV.1 - Considerações Gerais.....	IV.1
IV.2 - Equações de Equilíbrio.....	IV.2
IV.3 - Análise Aproximada.....	IV.5
IV.4 - Instante de Cavitação $\tau$ .....	IV.9
IV.5 - Segunda Fase do Movimento.....	IV.9
V. COMPARAÇÃO DE RESULTADOS.....	V.1

	<i>iv.</i>
V.1 - Resultados Experimentais.....	V.1
V.2 - Modelo Teórico.....	V.3
V.3 - Outros Modelos Teóricos.....	V.5
V.4 - Comparação de Resultados.....	V.12
VI. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTU <u>ROS</u> .....	VI.1
VII. APÊNDICES.....	VII.1
VII.1 - Diagrama de Blocos.....	VII.2
VII.2 - Listagem de Computador.....	VII.3
VII.3 - Manual do Usuário.....	VII.6
VII.4 - Exemplo Elucidativo.....	VII.7
VIII. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	VIII.1

## N O T A Ç Ã O

a	....	semi-comprimento da placa
b	....	semi-largura da placa
c	....	velocidade de propagação da onda de choque
$C_i, D_i$	(i=1,2) ...	constantes de integração
$D_e$	....	fluxo de trabalho das forças externas
G	....	peso em Kg da carga de explosivo
H	....	espessura da placa
$m_i$	....	(i=1,2) definido conforme eq. (IV.20)
$M_{ij}$	....	momento fletor por unidade de comprimento conforme definido na Figura IV.2
N	....	= $\sigma_0 H$
$N_{ij}$	....	força de membrana por unidade de comprimento conforme definido na Figura IV.2
p	....	pressão em algum ponto do meio fluido
$p_0$	....	pressão no meio fluido na ausência de perturbações
$p_m$	....	máxima sobre-pressão num ponto do meio fluido devido a onda de choque
$P_i$	....	força por unidade de área definido conforme a Figura IV.2
$(\dot{\quad})$	....	$\frac{\partial}{\partial t}(\quad)$
$Q_i$	....	força cortante por unidade de comprimento definido conforme a Figura IV.2
R	....	distância do local da explosão ao ponto em que está se medindo seus efeitos
$T_R$	....	instante de tempo em que a deflexão no centro da placa atinge seu valor máximo



- $t$  .... tempo  
 $u$  .... velocidade de uma partícula de fluido  
 $V_0$  .... velocidade uniforme da placa no instante inicial  
 $V_i$  .... deflexão de um ponto da placa na direção de  $x_i$ , conforme definido na Figura IV.1  
 $w$  .... deflexão da placa na direção do eixo  $z$   
 $w_0$  .... deflexão no centro da placa  
 $w_{0\text{máx}}$  .... máxima deflexão permanente  
 $\alpha$  .... ângulo entre a direção de propagação da onda de choque e a direção normal a superfície da placa  
 $\beta$  .... razão de aspecto da placa definido como  $b/a$   
 $\gamma$  .... constante definida conforme a equação (IV.13)  
 $\delta$  .... constante definida conforme a equação (IV.33)  
 $\epsilon_{ij}$  .... deformação do plano médio da placa  
 $\phi$  .... constante definida conforme a equação (IV.14)  
 $K_{ij}$  .... curvatura do plano médio da placa  
 $\xi$  .... constante definida conforme a equação (IV.21)  
 $\mu$  .... massa por unidade de área da placa  
 $\psi$  .... constante definida conforme a equação (IV.15)  
 $\rho_0$  .... densidade num ponto do meio fluido antes de sofrer perturbações  
 $\rho'$  .... variação na densidade do fluido devido a onda de choque  
 $\rho$  ....  $\rho_0 + \rho'$   
 $\lambda$  .... variável definida conforme a equação (V.6)  
 $\sigma_0$  .... tensão de escoamento do material da placa  
 $\theta$  .... constante de decaimento

- $\tau$  .... instante de tempo em que ocorre cavitação
- | | .. referências bibliográficas
- $\rho_m$  .. densidade do material da placa

LISTA DE FIGURAS

FIGURA		PÁGINA
II.1	.....	II.1
II.2	.....	II.3
II.3	.....	II.4
III.1	.....	III.1
III.2	.....	III.4
III.3	.....	III.7
III.4	.....	III.9
III.5	.....	III.12
III.6	.....	III.14
IV.1	.....	IV.3
IV.2	.....	IV.3
V.1	.....	V.2
V.2	.....	V.3
V.3.a	.....	V.14
V.3.b	.....	V.15
V.3.c	.....	V.16
V.3.d	.....	V.17
V.3.e	.....	V.18
V.4.a	.....	V.19
V.4.b	.....	V.20

*I - INTRODUÇÃO*

Inicialmente, descrevem-se os estágios de uma explosão ocorrendo no interior de um meio fluido, a água. Esta explosão gera no meio fluido adjacente uma onda de choque que se propaga na velocidade do som neste meio. Forma-se também uma bolha gasosa altamente comprimida. Devido a isso esta bolha se expande e posteriormente se comprime, migrando em direção à superfície devido ao efeito da gravidade.

Para uma embarcação suficientemente afastada do local de explosão, a bolha de gas pulsante não oferece maiores riscos. Porém, a onda de choque pode trazer sérios danos a estrutura, e, tendo em vista esta preocupação, conduziu-se este trabalho a fim de quantificar o comportamento de uma unidade de chapeamento retangular submetida ao carregamento impulsivo de uma onda de choque.

Depois disso, é formulado o cálculo da pressão em uma superfície devido a incidência de uma onda de choque plana, considerando o fluido compressível e não viscoso. Segue-se o estudo do comportamento dinâmico de uma chapa fina supondo que ela se deforme como uma membrana plástica. Será válida esta modelagem se a energia cinética inicial da placa for consideravelmente superior à máxima energia potencial elástica que ela pode absorver. São analisadas as duas fases características do fenômeno. A primeira compreende o intervalo entre a incidência da onda de choque até o instante em que ocorre cavitação e a segunda, a partir deste instante até a deflexão máxima.

Finalmente compara-se o resultado do modelo teórico com resultados experimentais disponíveis, de chapas retangulares sujeitas a um carregamento impulsivo suficiente para deformá-las plasticamente.

Conclui-se que o modelo teórico proposto fornece uma boa previsão para a máxima deflexão permanente, podendo ser útil como uma primeira estimativa.

## II - A EXPLOSÃO SUBMARINA

II.1 - Os Primeiros Estágios de Uma Explosão Submarina

A súbita energia liberada pela explosão de uma carga, nuclear ou não, em meio líquido leva a formação de uma bolha de gás superaquecida e altamente comprimida, e também gera uma onda de choque no meio fluido adjacente, conforme mostra o esquema da Figura II.1 .

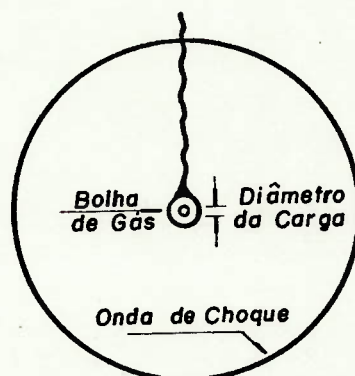


Figura II.1 Representação esquemática da onda de choque e bolha de gás gerados em uma explosão submarina.

O pulso de pressão se propaga, originalmente como uma onda esférica à velocidades muito maiores que a velocidade de propagação do som na água, caindo rapidamente para esta velo

cidade. Ao mesmo tempo a bolha de gás começa a se expandir em tamanho enquanto que a pressão do gás interior à bolha decresce gradualmente.

Esta expansão da bolha ultrapassa a condição de equilíbrio entre a pressão hidrostática e a pressão do gás interior. Depois de atingir um raio máximo e correspondente pressão mínima, consideravelmente abaixo da pressão hidrostática, a bolha começa a se contrair novamente, vagarosamente no início mas com um rápido colapso no final, a um raio mínimo. Por causa da geração de uma alta pressão no interior da bolha durante este estágio, ela começa a se expandir novamente, e muitos outros ciclos podem se seguir.

A cada raio mínimo, pulsos de pressão são emitidos que não são considerados ondas de choque, e tornam-se mais fracos a cada oscilação. No entanto, eles ainda representam um carregamento dinâmico que pode ser importante para a estrutura do navio. O primeiro destes pulsos pode ter um pico de pressão de 10 a 15 por cento do pico de pressão da onda de choque [1].

Durante este processo de pulsação a bolha migra para a superfície por causa da influência da gravidade, com máxima velocidade de migração ocorrendo durante um raio mínimo, conforme mostra a Figura II.2 .

Nas situações em que a explosão ocorre muito próximo ao navio, e particularmente, se ocorrer sob o navio, estes pulsos da bolha gasosa podem agravar significativamente os danos já causados pela onda de choque.

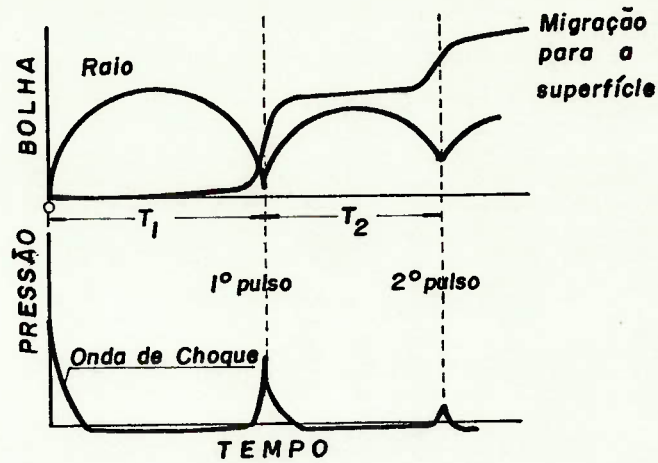


Figura II.2 Esquema do histórico de eventos de uma explosão submarina.

### II.2 - A Onda de Choque

A pressão de choque gerada pela explosão é somada à pressão hidrostática. O histórico de pressão num ponto fixo começa com um instantâneo aumento na pressão, para um valor máximo  $P_m$  (em menos de  $10^{-7}$  segundos, [1]) seguido de um decaimento que é, em sua porção inicial, aproximado por uma função exponencial, conforme mostra a Figura II.3.



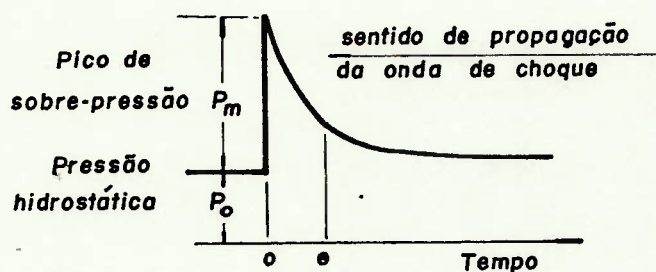


Figura II.3 Histórico de pressão de uma onda de choque gerada por uma explosão submarina gravado a um ponto à 1.80m de uma carga de 2 kg de pentolite. [2]

Logo, este histórico pode ser representado pela equação:

$$P(t) = P_m e^{-t/\theta} + P_o \quad (\text{II.1})$$

sendo  $\theta$  a constante de decaimento e, a equação acima é válida para o intervalo  $0 \leq t \leq \theta$ .

Pode-se descrever a onda de choque gerada pela explosão, bem como a distribuição de pressões no meio fluido em instantes de tempo fixos, conhecendo-se o valor da velocidade de propagação da onda neste meio.

Esta velocidade depende do pico de pressão da onda

de choque e para pressões até  $6.8948 \times 10^7 \text{ N/m}^2$  é descrita pela relação linear |1|

$$c = c_0 (1 + k \cdot P_m) \quad (\text{II.2})$$

onde,

$$k = 8.70221 \times 10^{-10}$$

e  $c_0$  é a velocidade de propagação do som no meio fluido.

O pico de pressão  $P_m$  e a constante de decaimento  $\theta$ , dependem do tipo de explosivo e da distância do ponto de explosão em que a pressão está sendo medida. Eles são dados por:

$$P_m = CP \left( \frac{G^{1/3}}{R} \right)^{EP}, \quad \text{N/m}^2 \quad (\text{II.3})$$

$$\theta = CT \cdot G^{1/3} \left( \frac{G^{1/3}}{R} \right)^{ET}, \quad \text{segundos} \quad (\text{II.4})$$

onde  $G$  é a massa da carga em kilogramas e  $R$  é a distância da explosão em metros. Para o explosivo TNT, os coeficientes das equações acima são |4|:

$$\begin{aligned} CP &= 5,2388 \times 10^7 \\ EP &= 1.13 \\ CT &= 0,0925 \times 10^{-3} \\ ET &= -0,22 \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

Para outros explosivos químicos estes coeficientes podem ser encontrados na referência |4|.

## III - FORMULAÇÃO ANALÍTICA DE UMA ONDA DE CHOQUE PLANA

III.1 - Uma Onda de Choque Num Meio Fluido Ideal

Considere-se, num meio fluido não viscoso, um elemento de lados  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , como mostrado na Figura III.1, onde o escoamento ocorre na direção positiva do eixo  $x$ . Seja  $\rho$  a densidade do fluido e  $u$  a velocidade do escoamento na face esquerda do elemento.

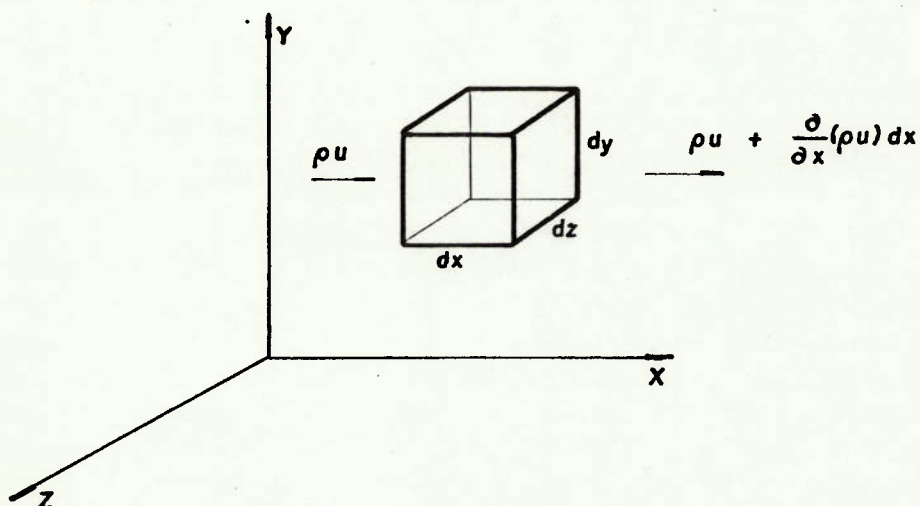


Figura III.1 Fluxo de massa através de um elemento fluido

A massa de fluido que entra através da face esquerda do elemento em um infinitesimal intervalo de tempo  $dt$  é dado por:

$$\rho u \, dy \, dz \, dt \quad (III.1)$$

A massa de fluido que deixa o elemento no mesmo intervalo de tempo é dada pela expressão:

$$\left\{ \rho u + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) dx \right\} dy dz dt \quad (\text{III.2})$$

A massa no interior do elemento aumenta no intervalo de tempo  $dt$ , do montante dado pela diferença das quantidades acima que é:

$$- \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) dx dy dz dt \quad (\text{III.3})$$

Isto resulta numa correspondente variação na densidade de  $\frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot dt$  no intervalo de tempo  $dt$ . O correspondente aumento na massa do elemento é  $\frac{\partial \rho}{\partial t} dt dx dy dz$ . Portanto, igualando o fluxo líquido de massa de fluido para o interior do elemento, no intervalo de tempo  $dt$ , a correspondente mudança de massa no mesmo intervalo de tempo é dada por:

$$- \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) dx dy dz dt = \frac{\partial \rho}{\partial t} dt dx dy dz \quad (\text{III.4})$$

Portanto o princípio de conservação de massa leva a seguinte equação:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (\text{III.5})$$

Para uma onda de choque de pequena intensidade a va

riação na densidade é insignificante quando comparada com seu valor inicial. Chamando  $\rho = \rho_0 + \rho'$  onde  $\rho_0$  é a densidade do fluido independente da perturbação e  $\rho'$  a variação da densidade devida a onda de choque, e, substituindo na equação (III.5) obtém-se:

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho'}{\partial x} + \rho' \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\partial \rho'}{\partial t}$$

Admite-se também que a velocidade de uma partícula é pequena de tal forma que os termos  $u \frac{\partial \rho'}{\partial x}$  e  $\rho' \frac{\partial u}{\partial x}$  são desprezíveis quando comparados à  $\rho_0 \frac{\partial u}{\partial x}$ . Estas aproximações são geralmente utilizadas para uma onda de choque de pequena intensidade e são as bases para a teoria acústica. Elas fornecem a seguinte equação linearizada para a equação de conservação de massa:

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\partial \rho'}{\partial t} \quad (\text{III.6})$$

Aplicando a segunda lei de Newton para o movimento, no elemento fluido mostrado na Figura III.2, obtém-se:

$$(\rho dx dy dz) \frac{Du}{Dt} = - \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz \quad (\text{III.7})$$

onde  $P$  é a pressão no fluido, e  $\frac{D}{Dt}$  é a derivada material definida como  $\frac{D}{Dt} (.) = \left( \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) (.)$ .

A equação acima fornece a equação de conservação da quantidade de movimento na seguinte forma:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = - \frac{\partial P}{\partial x} \quad (\text{III.8})$$

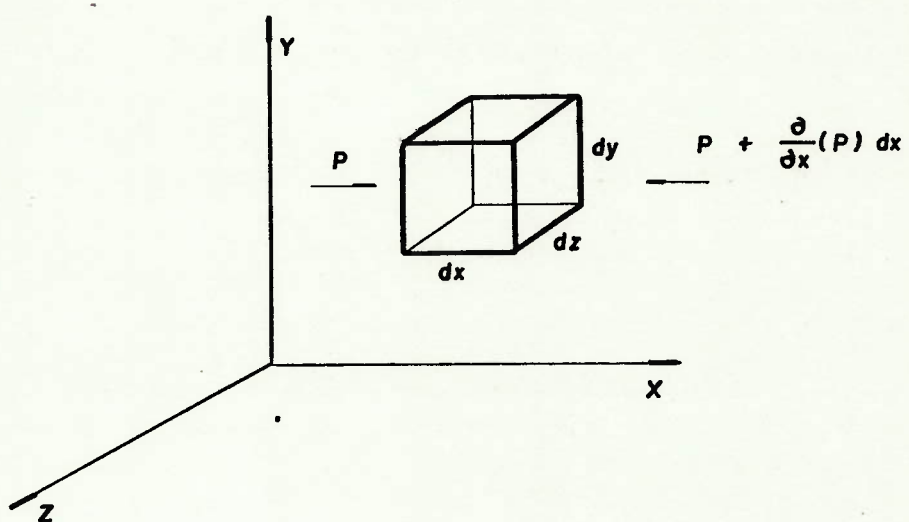


Figura III.2 Forças agentes no elemento fluido

e, pode ser reescrita como:

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x}$$

Utilizando a prévia simplificação para onda de choque de pequena intensidade, obtém-se a seguinte equação diferencial:

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial P}{\partial x} \quad (\text{III.9})$$

As duas equações obtidas para o escoamento são:

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\partial \rho'}{\partial t}$$

e

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial P}{\partial x}$$

Para eliminar a densidade das equações acima, utiliza-se uma equação de estado para a água que seja consistente com as linearizações da teoria acústica, ou seja, admite-se que a pressão  $P$  é uma função somente da densidade,

$$P = P(\rho) \quad (\text{III.10})$$

Segue então que:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{dP}{d\rho} \frac{\partial \rho'}{\partial t}$$

mas  $\frac{dP}{d\rho} = c^2$ , o quadrado da velocidade do som no meio fluido [5].  
Substituindo na equação acima, obtém-se:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial P}{\partial t}$$

O sistema de equações para o escoamento torna-se:

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (\text{III.11})$$

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} \quad (\text{III.12})$$

Eliminando  $u$  das equações acima obtém-se:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad (\text{III.13})$$

A equação (III.13) é conhecida como equação de onda unidimensional cuja solução é  $P = f(t \pm x/c)$ , onde:

$P = f(t-x/c)$  representa um pulso de pressão que se move na direção positiva do eixo  $x$ .

$P = f(t+x/c)$  representa um pulso de pressão que se move na direção negativa do eixo  $x$ .



III.2 - Reflexão de Uma Onda de Choque Plana em Uma Parede Infinita Móvel

Seja  $P = f(t-x/c)$  uma onda de choque que se move no meio fluido na direção positiva do eixo  $x$  e que incide em uma placa plana infinita mostrada na Figura III.3 .

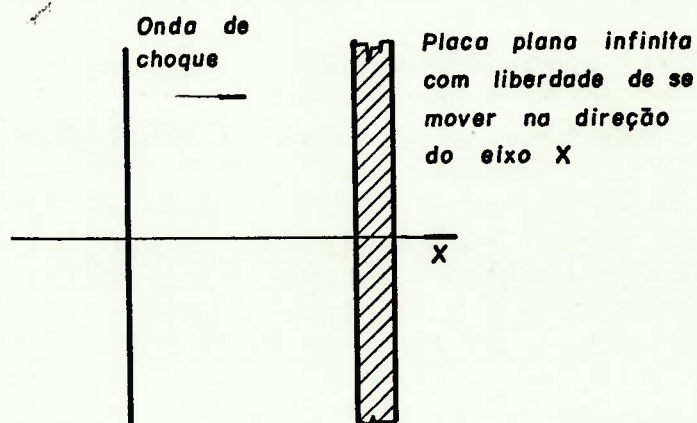


Figura III.3 Onda de choque plana atingindo uma placa plana infinita

Sendo  $\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial P}{\partial t}$  e, substituindo na equação (III.12) obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{c} P - \rho_0 u \right) = 0 \quad (\text{III.14})$$

a integração da equação acima no intervalo  $t_0$  a  $t$  fornece:

$$u_1 - u_0 = \frac{P_1 - P_0}{\rho_0 c} \quad (\text{III.15})$$

onde,

$u_0$  = é a velocidade em um ponto do meio fluido antes da passagem da onda de choque.

$P_0$  = pressão neste mesmo ponto do meio fluido.

$P_1$  = é a pressão no ponto do meio fluido no instante de tempo  $t$  devido a onda de choque incidente.

Após a reflexão na face da placa a onda de choque irá se mover para a esquerda, isto é, na direção negativa do eixo  $x$ .

Pode-se agora verificar o efeito que a onda de choque refletida causa na velocidade de uma partícula de fluido após aquela ter passado por esta. A expressão para uma onda de choque que se move para a esquerda é:

$$P = f(t + x/c)$$

Novamente, substituindo  $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{\partial P}{\partial t}$  na equação (III.12) e integrando-a no intervalo  $t_0$  a  $t$ :

$$u_2 - u_0 = \frac{P_0 - P_2}{\rho_0 c} \quad (\text{III.16})$$

onde o índice 2 se refere a onda de choque refletida.

Resumindo portanto, foi mostrado que a passagem de uma onda de choque, de pressão  $P_1$ , que se move para a direita (direção positiva do eixo  $x$ ) impõe uma variação na velocidade de uma partícula de fluido dada por:

$$u_1 - u_0 = \frac{P_1 - P_0}{\rho_0 c}$$

enquanto que a passagem de uma onda de choque, de pressão  $P_2$ , que se move para a esquerda impõe uma variação na velocidade de uma partícula de fluido dada por:

$$u_2 - u_0 = \frac{P_0 - P_2}{\rho_0 c}$$

### III.3 - Incidência Obliqua

Considere uma onda de choque plana incidindo obliquamente em uma placa plana infinita formando um ângulo  $\alpha$ , com a direção normal à placa como mostra a Figura III.4.

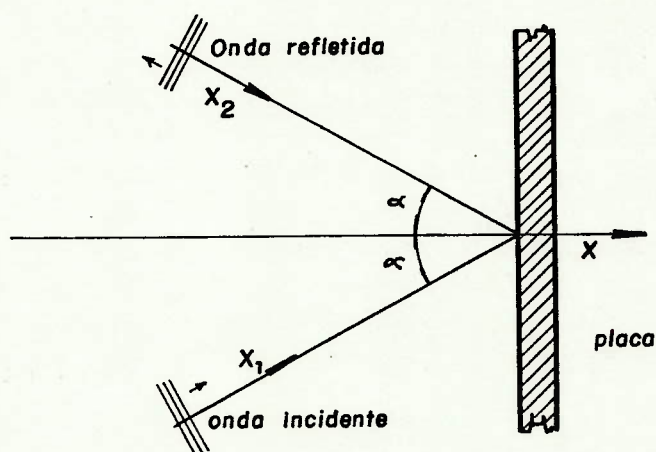


Figura III.4 Interação entre uma onda de choque plana e uma placa infinita

Após a reflexão na face da placa, a onda de choque se moverá para a esquerda na direção negativa do eixo  $x_2$  que forma o mesmo ângulo  $\alpha$  com a direção normal à placa [6].

Considere que no instante inicial  $t_0$  o fluido esteja em repouso e que se está interessado apenas no movimento na direção normal à placa.

Da equação III.15 do item anterior a componente da velocidade normal à placa para a onda que está incidindo é:

$$(u_1)_N = \left( \frac{P_1 - P_0}{c \rho_0} \right) \cdot \cos \alpha \quad (\text{III.17})$$

De forma análoga, para a onda refletida tem-se:

$$(u_2)_N = \left( \frac{P_0 - P_2}{\rho_0 c} \right) \cdot \cos \alpha \quad (\text{III.18})$$

Superpondo estes dois efeitos pela soma das velocidades, obtém-se:

$$(u_1)_N + (u_2)_N = \left( \frac{P_1 - P_2}{\rho_0 c} \right) \cdot \cos \alpha \quad (\text{III.19})$$

Chamando de  $u = (u_1)_N + (u_2)_N$  a velocidade resultante dos dois efeitos na direção normal à placa, a equação acima torna-se:

$$u = \left( \frac{P_1 - P_2}{\rho_0 c} \right) \cdot \cos \alpha \quad (\text{III.20})$$

$P_1$  é da forma  $f_1(t-x_1/c)$  e  $P_2$  da forma  $f_2(t+x_2/c)$ .

Considerando a origem na superfície da placa  $x = x_1 = x_2 = 0$  então  $P_1$  e  $P_2$  terão a forma  $P_1 = P_1(t)$  e  $P_2 = P_2(t)$ .

Da equação (III.20) pode-se obter a pressão  $P_2$  para a onda refletida:

$$P_2 = P_1 - \frac{\rho_0 c}{\cos \alpha} \cdot u \quad (\text{III.21})$$

a pressão resultante que age na superfície da placa é dada pela soma  $P = P_2 + P_1 = 2P_1 - \frac{\rho_0 c}{\cos \alpha} u$ . Sendo a onda de choque gerada por uma explosão submarina, a pressão  $P_1$  pode ser escrita como  $P_1 = P_m e^{-t/\theta}$  e a expressão acima se modifica para:

$$P = 2P_m e^{-t/\theta} - \frac{\rho_0 c}{\cos \alpha} \cdot u \quad (\text{III.22})$$

onde  $u$  é a velocidade da placa na direção do eixo  $x$ .

#### III.4 - Os Efeitos de Fronteiras no Meio Fluido

Os efeitos da superfície e do fundo podem ser descritos considerando a reflexão de uma onda acústica na fronteira do meio fluido.

Na superfície, faz-se a hipótese de que a pressão transmitida da água para o ar é desprezível. Portanto a condição de contorno na superfície é que, a soma das pressões, da onda incidente com a onda refletida, deve ser nula. Como a onda incidente é de compressão, a condição de contorno acima só pode

ser obedecida se e somente se a onda refletida for uma onda de rarefação de igual intensidade.

Este problema é ilustrado na Figura III.5

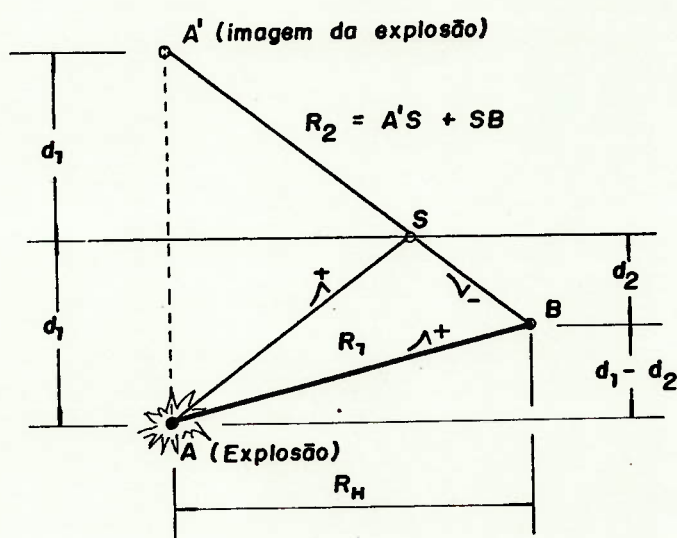


Figura III.5 Diagrama esquemático que ilustra a geometria da reflexão, em uma superfície, de uma onda de choque resultante de uma explosão em A, sendo medida a pressão em B.

A onda de choque de uma explosão no ponto A, é sentida no ponto B, como a soma da onda direta de compressão, que segue o caminho AB, e da onda de tensão refletida que segue o caminho ASB. O intervalo de tempo entre a chegada das duas ondas em B é governado pela diferença de distâncias entre os dois caminhos.

Esta diferença pode ser obtida admitindo-se que a onda refletida é gerada por uma imagem "negativa" da explosão em A' e calculando-se a diferença entre  $R_2$  (trajetória A'SB) e,  $R_1$  (trajetória ASB), onde:

$$R_2 = |(d_1+d_2)^2 + R_H^2|^{1/2} \quad (\text{III.23})$$

e

$$R_1 = |(d_1-d_2)^2 + R_H^2|^{1/2} \quad (\text{III.24})$$

Admitindo que  $d_1$  e  $d_2$  são pequenos quando comparados com  $R_H$ , então:

$$R_2 - R_1 \approx \frac{2d_1 d_2}{R_H} \quad (\text{III.25})$$

e o intervalo de tempo entre a chegada das duas ondas no ponto B é dado por:

$$\frac{R_2 - R_1}{c} = t_c = \frac{2d_1 d_2}{R_H c} \quad (\text{III.26})$$

a forma da onda resultante é mostrada na Figura III.6. Na prática, a porção negativa da onda de choque resultante seguinte ao instante de tempo  $t_c$  não pode ser observada porque a água não pode suportar tensão, pois ocorre cavitação no meio fluido a pressões inferiores à pressão de vaporização.

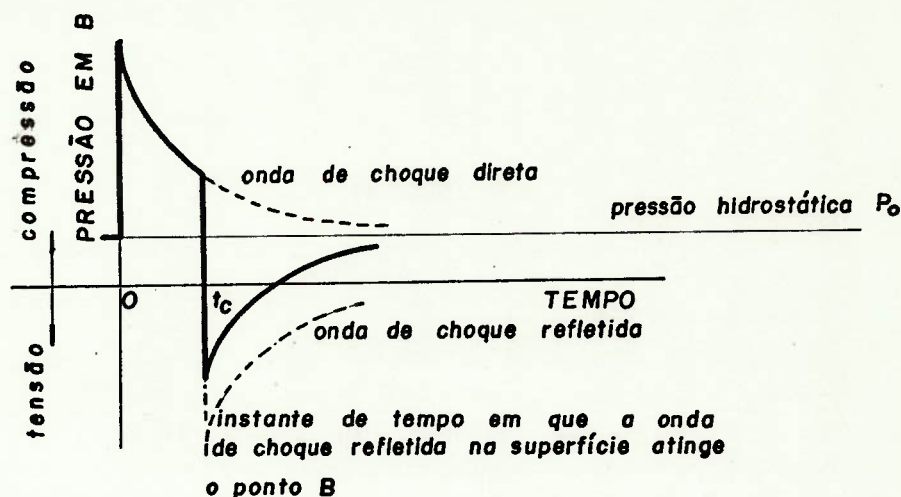


Figura III.6 Representação esquemática da leitura de pressão no ponto B (fig. III.5) mostrando a onda resultante da soma da onda incidente direta e refletida.

A reflexão no fundo é tratada de modo similar. Se este for considerado rígido, a condição de contorno imposta é que a velocidade resultante de uma partícula de fluido, na direção normal a fronteira, deve ser nula. Da equação (III.21), com a velocidade resultante  $u=0$  obtém-se que  $P_2 = P_1$ , e, portanto a pressão total é  $P = P_2 + P_1 = 2P_1$ . Ou seja na reflexão em uma fron



teira rígida, não há inversão de fase e a pressão atuante nesta superfície é o dobro da amplitude de pressão da onda incidente.

IV - DEFLEXÃO PERMANENTE DE CHAPAS RETANGULARES, SOB CARREGAMENTOS IMPULSIVOS

IV.1 - Considerações Gerais

Será analisado neste capítulo o comportamento dinâmico de uma unidade de chapeamento de espessura uniforme H, retangular imersa num meio fluido não viscoso e exposta a uma onda de choque plana descrita no capítulo anterior.

Esta unidade de chapeamento possui contornos impedidos de se aproximarem ou se defletirem. Como foi visto, a pressão agente na superfície da placa é dada pela equação (III.22):

$$P = 2P_m e^{-t/\theta} - \rho_0 c \cdot u (\cos \alpha)^{-1}$$

onde u é a velocidade da placa em sua direção normal.

Note que, dependendo do valor da velocidade u na expressão acima, a pressão P pode atingir valores da ordem da pressão de vaporização do fluido, e neste instante ocorre cavitação, deixando de haver interação entre o fluido e a placa.

Passados alguns instantes, a bolha de vapor que se forma entre meio, água no caso, e a placa entra em colapso, apresentando uma carga dinâmica adicional para a estrutura.

Medidas experimentais relatadas na referência |4| mostram este fenômeno.

No estudo que seguirá adiante este fenômeno não será considerado, pois neste estágio de pesquisa se está apenas

querendo saber qual o comportamento da unidade de chapeamento em relação a onda de choque.

#### IV.2 - Equações de Equilíbrio

Considere-se um sistema de coordenadas  $x_i$  ( $i=1,2$ ) localizado no plano médio de uma placa inicialmente plana de espessura  $H$ . Escolhido um vetor de deslocamentos de um ponto localizado no plano médio da placa, com componentes  $x_i$  ao longo dos eixos  $x_i$  e,  $w$  transversal à placa como indicado na Figura IV.1, as equações de equilíbrio dinâmico, para o elemento mostrado na Figura IV.2 podem ser escritas [13] como:

$$\frac{\partial N_{ij}}{\partial x_j} + P_i - \mu \ddot{v}_i = 0 \quad (\text{IV.1})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( Q_i + N_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_j} \right) + P_3 - \mu \ddot{w} = 0 \quad (\text{IV.2})$$

$$Q_i - \frac{\partial M_{ji}}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{IV.3})$$

onde foram mantidos os termos para grandes deflexões, restrita a valores moderados, desprezou-se a inércia à rotação e empregou-se a convenção de soma de Einstein.

As direções positivas para as forças de membrana  $N_{ij}$ , forças de cisalhamento  $Q_i$ , momentos  $M_{ij}$  e forças externas devido ao carregamento distribuído  $P_i$  e  $P_3$  estão definidas na Figu-

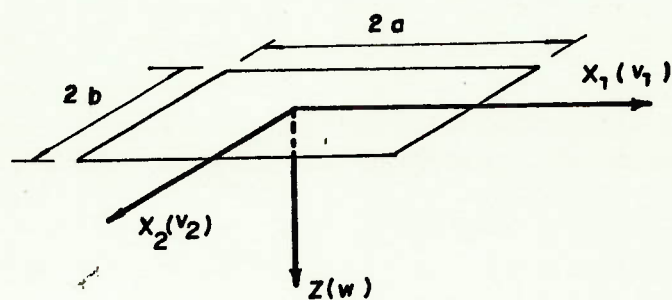


Figura IV.1 Superfície média da placa indeformada

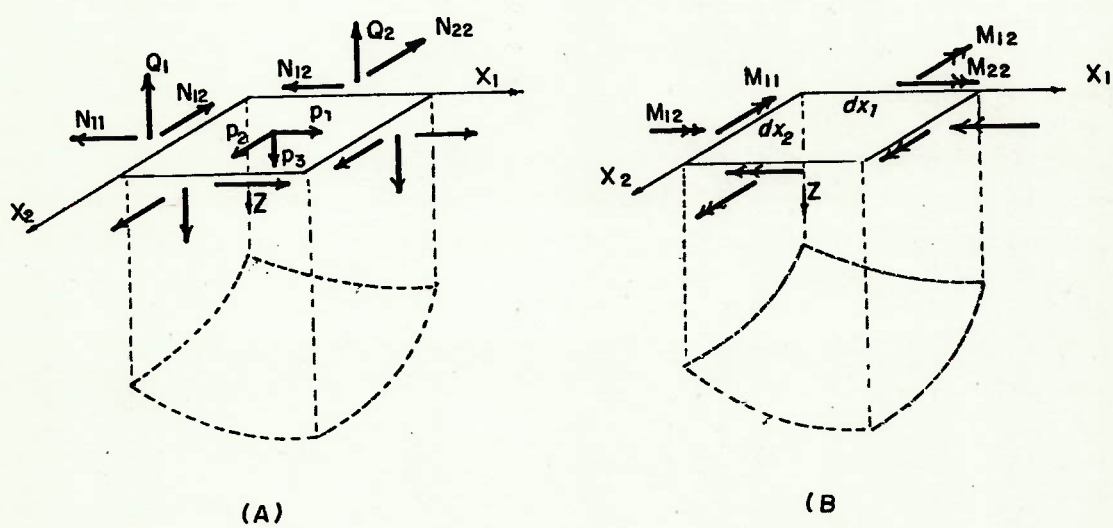


Figura IV.2 Forças (A) e momentos (B) que agem no plano médio da placa

ra IV.2.

As deformações se relacionam com as deflexões através de:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial w}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_j} \right) \quad (\text{IV.4})$$

e mudanças de curvatura:

$$k_{ij} = - \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \quad (\text{IV.5})$$

Pode-se então calcular a potência das forças externas como sendo:

$$D_e = \int_A \left[ (P_i - \mu \ddot{v}_i) \dot{v}_i + (P_3 - \mu \ddot{w}) \dot{w} \right] dA \quad (\text{IV.6})$$

onde a área A se estende por todo o plano médio da placa na posição deformada, porém, neste caso as deflexões podem ser consideradas pequenas quando comparadas com as dimensões originais da placa, à exceção da espessura, e A pode ser tomada como a área original da superfície indeformada.

Substituindo as equações (IV.1), (IV.2) e (IV.3) na equação (IV.6), obtem-se:

$$\begin{aligned} & \int_A \left[ (P_i - \mu \ddot{v}_i) \dot{v}_i + (P_3 - \mu \ddot{w}) \dot{w} \right] dA = \\ & = - \int_A \left\{ \frac{\partial N_{ij}}{\partial x_i} \cdot \dot{v}_i + \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} (M_{ji}) + N_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_j} \right) \right] \cdot \dot{w} \right\} dA \quad (\text{IV.7}) \end{aligned}$$

IV.3 - Análise Aproximada

Antes de prosseguir, resolveu-se introduzir algumas simplificações fundamentais no modelo analítico, diferentes das adotadas nas referências |10|, |12| e |13|, porém muito mais simples, e, cujos resultados não levam a erros significativos de valores obtidos em ensaios experimentais. São elas:

a) A placa se desloca segundo uma superfície parabólica, dada pela equação:

$$w = \frac{w_0}{a^2 b^2} \cdot (a^2 - x_1^2)(b^2 - x_2^2) \quad (\text{IV.8})$$

b) Foi considerado também que a placa não possui rigidez à flexão, isto é, ela resiste ao carregamento externo apenas por tensões de membrana, nas direções de  $x_1$  e  $x_2$ , e ainda mais, foi suposto que o valor destas tensões é constante e igual a tensão de escoamento do material.

A primeira hipótese foi adotada tendo em vista a forma defletida de algumas placas ensaiadas estaticamente |14|, |15|.

Quanto a segunda hipótese, se a placa for fina, isto é, a relação  $H/b$  for suficientemente pequena, pode-se provar que a rigidez a flexão desta placa é desprezível, quando comparada com a rigidez a extensão. Supor que a tensão é constante e igual ao valor da tensão de escoamento do material significa desprezar a energia potencial elástica que seria absorvida pela placa durante o seu carregamento. Porém, considera-se que isto

é válido [11] quando a energia dinâmica disponível para defle-  
tir a placa é consideravelmente maior do que a máxima energia  
que ela absorveria no modo elástico.

Para simplificar ainda mais a equação (IV.7) pode-  
se notar que parece razoável desprezar a influência de  $v_i$  e  $\ddot{v}_i$   
comparados a  $w$  e  $\dot{w}$  quando  $p_i = 0$ .

Com estas hipóteses, a equação (IV.7) se reduz a:

$$\int_A (P_3 - \mu \ddot{w}) \dot{w} dA = - \int_A N_{ij} \dot{w} \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} = - \int_A N \dot{w} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) dA \quad (\text{IV.9})$$

Lembrando que  $P_3$  devido a onda de choque é dado pela equação  
(III.22):  $P_3 = 2P_m e^{-t/\theta} - \frac{\rho_0 c \dot{w}}{\cos \alpha}$ , pode-se efetuar a integração a  
cima (para um quarto da placa, devido à simetria) obtendo, para  
o primeiro membro:

$$\left( \frac{32}{9} P_m e^{-t/\theta} - \frac{256}{225} \rho_0 \frac{c}{\cos \alpha} \cdot \dot{w}_0 - \frac{256}{225} \cdot \mu \ddot{w}_0 \right) ab \dot{w}_0 \quad (\text{IV.10})$$

e, para o segundo membro:

$$\frac{128}{45} \frac{N}{ab} (a^2 + b^2) w_0 \dot{w}_0 \quad (\text{IV.11})$$

Igualando as equações (IV.10) e (IV.11) obtém-se a  
seguinte equação diferencial relativa ao tempo, envolvendo a de-  
flexão no centro  $w_0$ :

$$\ddot{w}_0 + \gamma \dot{w}_0 + \phi w_0 = \psi e^{-t/\theta} \quad (\text{IV.12})$$

onde:

$$\gamma = \frac{\rho_0 c}{\mu \cos \alpha} \quad (\text{IV.13})$$

$$\phi = \frac{5}{2} \frac{N}{\mu b^2} (1 + \beta^2) \quad (\text{IV.14})$$

$$\psi = \frac{25}{8} \frac{P_m}{\mu} \quad (\text{IV.15})$$

$$\beta = \frac{b}{a} \quad (\text{IV.16})$$

$$N = \sigma_0 H \quad (\text{IV.17})$$

A solução geral da equação (IV.12) para valores de  $H/b < \rho_0 c / \sqrt{20 \rho_m \sigma_0}$

$$w_0 = C_1 e^{m_1 t} + C_2 e^{m_2 t} + \frac{\psi \cdot e^{-t/\theta}}{(\phi - \frac{\gamma}{\theta} + \frac{1}{\theta^2})} \quad (\text{IV.18})$$

e

$$\dot{w}_0 = C_1 m_1 e^{m_1 t} + C_2 m_2 e^{m_2 t} - \frac{1}{\theta} \cdot \frac{\psi e^{-t/\theta}}{(\phi - \frac{\gamma}{\theta} + \frac{1}{\theta^2})} \quad (\text{IV.19})$$

onde  $m_1$  e  $m_2$  são raízes reais da equação polinomial

$$m^2 + \gamma \cdot m + \phi = 0 \quad (\text{IV.20})$$

As constantes de integração  $C_1$  e  $C_2$  são calculadas impondo-se condições iniciais nulas, isto é,  $w_0(0)$  e  $\dot{w}_0(0)$  são nulos.



$$\text{Calculando, } w_0(0) = C_1 + C_2 + \xi \text{ e } \dot{w}_0(0) = C_1 m_1 + C_2 m_2 - \frac{\xi}{\theta}$$

onde:

$$\xi = \frac{\psi}{\phi + \frac{1-\gamma}{\theta^2 \theta}} \quad (\text{IV.21})$$

monta-se o sistema (IV.22).

$$C_1 + C_2 = -\xi \quad (\text{IV.22})$$

$$m_1 C_1 + m_2 C_2 = \frac{\xi}{\theta}$$

que pode ser resolvido pela regra de Cramer; obtêm-se:

$$C_1 = \frac{\xi}{m_1 - m_2} (m_2 + 1/\theta) \quad (\text{IV.23})$$

$$C_2 = \frac{\xi}{m_2 - m_1} \left( m_1 + \frac{1}{\theta} \right) \quad (\text{IV.24})$$

o que completa a solução (IV.18).

Deve-se lembrar que esta solução é válida somente enquanto houver interação entre o fluido e a placa, isto é, válida para o intervalo  $0 \leq t \leq \tau$  onde  $\tau$  é o instante de tempo em que ocorre cavitação, descrito no item IV.1.

Esta fase será denominada como sendo a primeira fase do movimento.

#### IV.4 - Instante de Cavitação $\tau$

Desprezando a pressão de vaporização do fluido pode-se supor que o instante de cavitação é obtido fazendo-se  $P_3 = 0$ , ou seja, da equação (III.22) :

$$2P_m e^{-\tau/\theta} - \frac{\rho_0 c}{\cos \alpha} \dot{w}_0(\tau) = 0 \quad (IV.25)$$

a substituição da equação (IV.19) resulta em:

$$\left(2P_m + \frac{\rho_0 c \xi}{\theta \cos \alpha}\right) e^{-\tau/\theta} - \frac{\rho_0 c}{\cos \alpha} \cdot (C_1 m_1 e^{m_1 \tau} + C_2 m_2 e^{m_2 \tau}) = 0 \quad (IV.26)$$

A equação (IV.26) pode ser resolvida numericamente para a obtenção de  $\tau$ .

#### IV.5 - Segunda Fase do Movimento

A segunda fase do movimento seria aquela em que a placa se move livre da ação do fluido.

O modelo matemático para esta fase é o mesmo da equação (IV.9) com o termo  $P_3 = 0$ .

Isto equivale anular os coeficientes  $\gamma$  e  $\psi$  na equação diferencial (IV.12), o que resulta em:

$$\ddot{w}_0 + \phi w_0 = 0 \quad (IV.27)$$

(2)            (2)

onde o subscrito (2) refere  $w_o$  à segunda fase do movimento.

As condições iniciais que completam o problema são

$$w_o^{(2)}(\tau) = \bar{w}_o$$

e

(IV.28)

$$\dot{w}_o^{(2)}(\tau) = \dot{\bar{w}}_o$$

onde  $\bar{w}_o$  e  $\dot{\bar{w}}_o$  são obtidos das equações (IV.18) e (IV.19), respectivamente, fazendo-se  $t = \tau$ .

A solução geral da equação (IV.27) é da forma:

$$w_o^{(2)} = D_1 \cos \sqrt{\phi} t + D_2 \sin \sqrt{\phi} t \quad (IV.29)$$

onde  $D_1$  e  $D_2$  são obtidos pela satisfação da equação (IV.29) às condições (IV.28).

Efetuada os cálculos necessários obtém-se:

$$D_1 = \frac{1}{\sqrt{\phi}} \cdot (\bar{w}_o \sqrt{\phi} \cdot \cos \sqrt{\phi} \tau - \dot{\bar{w}}_o \sin \sqrt{\phi} \tau) \quad (IV.30)$$

$$D_2 = \frac{1}{\sqrt{\phi}} \cdot (\dot{\bar{w}}_o \cos \sqrt{\phi} \tau + \bar{w}_o \sqrt{\phi} \sin \sqrt{\phi} \tau) \quad (IV.31)$$

A equação (IV.29) pode ser escrita em uma forma mais compacta como:

$$w_o^{(2)}(t) = (D_1^2 + D_2^2)^{1/2} \sin(\sqrt{\phi} t + \delta) \quad (IV.32)$$

onde

$$\delta = \text{atan} \left( \frac{D_1}{D_2} \right) \quad (\text{IV.33})$$

Como o termo  $\phi$  na equação (IV.14), envolvendo a tensão de escoamento é um termo dissipativo de energia, em defor-mação plástica, a solução (IV.32) é válida até o instante de tempo  $T_R$  em que  $w_0$  é máximo. Isto ocorre quando  $\text{sen}(\sqrt{\phi}t + \delta) = 1$  e por conseguinte: <sup>(2)</sup>

$$T_R = \frac{1}{\sqrt{\phi}} \left( \frac{\pi}{2} - \delta \right) \quad (\text{IV.34})$$

e a máxima deflexão plástica permanente é:

$$w_{0\text{máx}} = (D_1^2 + D_2^2)^{1/2} \quad (\text{IV.35})$$

## V. COMPARAÇÃO DE RESULTADOS

O resultado analítico obtido no capítulo anterior será agora comparado com resultados experimentais e teóricos publicados nas referências |11|, |12| e |13|.

### V.1 - Resultados Experimentais

Será descrito de forma resumida o procedimento adotado no ensaio experimental e que produto final foi obtido. Para maiores detalhes devem ser consultadas as referências |16| e |17|.

O corpo de prova a ser experimentado (viga ou placa) é fixado adequadamente num dispositivo que assegure o não deslocamento nos contornos, garantindo um vínculo de engastamento (nas extremidades para vigas e em todo o contorno para placas).

Este dispositivo é fixo solidariamente a um pêndulo balístico, e uma camada uniforme de explosivo é colocada sobre a superfície do corpo prova, conforme mostra a Figura V.1. Esta figura foi extraída da referência |16| e deve ser considerada apenas como ilustrativa.

Devido à sua velocidade de queima, o explosivo é totalmente detonado sem que o corpo de prova inicie movimento. Segue-se então um movimento puramente como resultado da inércia, livre de qualquer carregamento externo, onde o corpo de prova possui, no instante considerado inicial, determinada velocidade.

de  $V_0$  e deflexão nula. A súbita aceleração define o carregamento impulsivo.

O corpo de prova atinge sua configuração deformada definitiva com o pêndulo ainda em condição estática. Passado alguns instantes, o pêndulo inicia um movimento oscilatório.

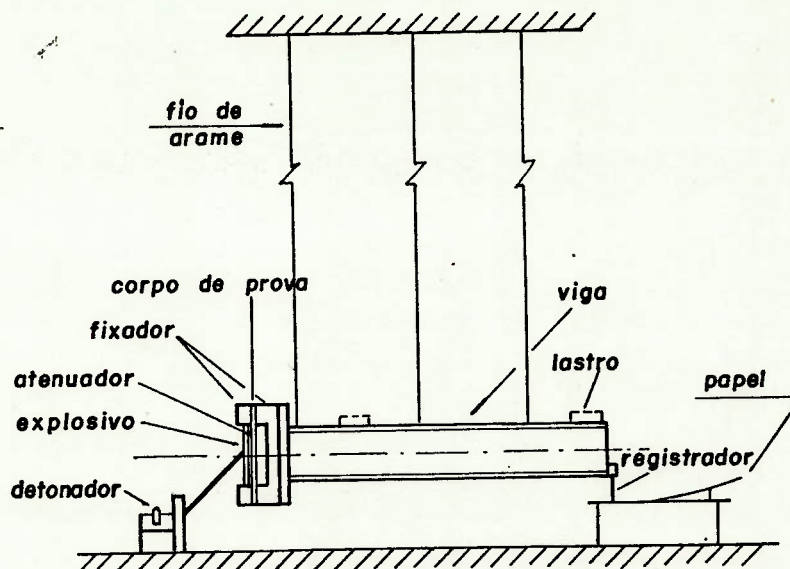


Figura V.1 Esquema do arranjo experimental

A máxima altura atingida pelo pêndulo fornece diretamente a máxima energia potencial do sistema, pois assegura-se que as perdas de energia interna ao sistema seja muito baixa. O valor máximo desta energia potencial é utilizada para calcular a máxima velocidade do sistema quando este passa pela posição de equilíbrio. Com isto calcula-se a quantidade de movimento neste ponto (massa do sistema x velocidade) e admite-se que este impulso foi aplicado ao corpo de prova no instante inicial.

JONES |11| realizou experimentos em chapas retangulares de dimensões  $3'' \times 5^{1/6}''$ . Os corpos de prova foram feitos de aço médio laminado a quente ou alumínio 6061-T6. Para cada espessura de chapa foram realizados ensaios de tração estática a fim de se determinar a tensão de escoamento de cada corpo e as curvas típicas de tensão-deformação.

Entre a camada de explosivo e a superfície da placa foi colocada uma placa de espuma ou de borracha, que serviu como atenuador, para evitar que fragmentos de explosivo penetrassem na placa.

Foi medido a máxima deflexão permanente em função de um parâmetro adimensional  $\lambda$  envolvendo a velocidade inicial  $v_0$ .

Os resultados encontram-se em forma de gráfico na Figura V.3.c.

## V.2 - Modelo Teórico

As condições experimentais não se identificam com o modelo analítico descrito no capítulo anterior, ou seja, da explosão submarina, emissão da onda de choque e posterior interação entre a onda de choque e a placa. Porém, pode-se modificar este modelo para verificar sua validade, já que em ambos os casos o carregamento é do tipo impulsivo, e compará-lo com estes resultados experimentais disponíveis.

Será adotado um carregamento impulsivo traduzido por velocidade inicial uniforme  $V_0$  e deflexão inicial nula. Para isto utiliza-se a equação (IV.27) do capítulo anterior impondo as condições iniciais acima. O problema consiste em resolver a equação diferencial

$$\ddot{w}_0 + \phi w_0 = 0 \quad (V.1)$$

com as condições iniciais

$$w_0(0) = 0 \quad (V.2)$$

$$\dot{w}_0(0) = V_0$$

sendo a solução válida no intervalo de tempo  $0 < t < T_R$ .

Pode-se demonstrar que a solução do problema acima é:

$$w_0(t) = \frac{V_0}{\sqrt{\phi}} \sin\sqrt{\phi}t, \quad 0 < t < T_R \quad (V.3)$$

e

$$T_R = \frac{\pi}{2\sqrt{\phi}} \quad (V.4)$$

onde a máxima deflexão:

$$w_{0\text{máx}} = \frac{V_0}{\sqrt{\phi}} \quad (V.5)$$

Para comparar este resultado teórico com os resultata



dos experimentais, deve-se introduzir a variável adimensional definida por:

$$\lambda = \frac{4\mu V_0^2 a^2}{\sigma_0 H^3} \quad (V.6)$$

substituindo em (V.5) obtêm-se:

$$\frac{W_{0\text{máx}}}{H} = \left| \frac{\beta^2 \cdot \lambda}{10(1+\beta^2)} \right|^{1/2} \quad (V.7)$$

A curva  $\left( \frac{W_{0\text{máx}}}{H} \right) = f(\lambda)$ , obtida pela equação (V.7) se encontra nas Figuras V.3.a-e. Pode-se verificar que o procedimento proposto no capítulo IV, apesar das hipóteses aparentemente fortes, para a análise de unidades de chapeamento além do regime elástico e sob carregamentos impulsivos, parece fornecer bons resultados.

### V.3 - Outros Modelos Teóricos

Outros pesquisadores estudaram o comportamento de placas em regime plástico sob o carregamento impulsivo definido no item anterior, velocidade inicial uniforme  $V_0$  e deflexão inicial nula.

SAWCZUK [10] pesquisou o comportamento após o escoamento de placas retangulares sob carregamento estático. Ele admitiu que o escoamento ocorre em determinadas linhas na placa ao longo das quais é dissipada energia de deformação plástica ,

enquanto que as partes restantes, durante a resposta, se deslocam como corpo rígido. Em seu trabalho ele deduziu a seguinte equação, que governa o comportamento do fenômeno,

$$\int_A P_3 w \, dA = \sum_{i=1}^n (M + F\bar{w}) \theta_i \ell_i \quad (V.8)$$

onde

$A$  - é a área da placa indeformada.

$P_3$  - é a pressão perpendicular ao plano da placa aplicada estaticamente.

$w$  - é a deflexão transversal.

$M$  e  $F$  - são momento fletor e força de membrana por unidade de comprimento respectivamente.

$\theta_i$  - é o ângulo relativo entre as partes rígidas através da  $i$ -ésima rótula plástica,  $\ell_i$  seu comprimento e  $\bar{w}$  sua deflexão transversal.

A equação (V.8) foi interpretada como um balanço de energia, pois o primeiro membro desta equação representa o trabalho executado pela força externa  $P_3$ , e o segundo membro, a energia dissipada pelo momento fletor e a força de membrana ao longo da rótula plástica.

O termo  $(M + F\bar{w}) \theta_i$  é chamado [13] função de dissipação de energia de deformação em uma rótula plástica por unidade de comprimento. Esta função depende das condições de contorno a que está submetida a placa e do critério de escoamento utilizado, ou seja uma função  $\phi(M, F, \bar{w}) = \text{constante}$ . O material é suposto rígido perfeitamente plástico.

Se não houver interação entre  $M$ ,  $F$  e  $\bar{w}$  através de uma função  $\Phi$ , pode-se demonstrar [10] que o critério de escoamento torna-se:

$$M = \pm \frac{\sigma_0 H^2}{4} = \pm M_0 \quad (V.9)$$

$$N = \pm \sigma_0 H = \pm N_0$$

resultando para a função de dissipação

$$D_{\text{dis}} = M_0 \left( 1 + \frac{4\bar{w}}{H} \right) \theta_i \quad (V.10)$$

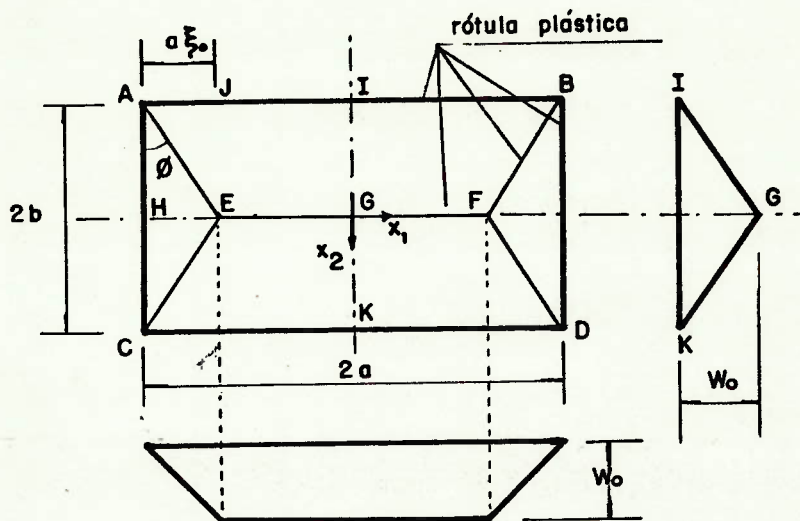
JONES [13] generalizou a equação (V.8) para casos em que a força externa  $P_3$  depende do tempo, e, para as condições da equação (V.9) obteve,

$$\int_A (P_3 - \mu \ddot{w}) \dot{w} \, dA = M_0 \sum_{i=1}^n \int_{\ell_i} \left( 1 + \frac{4\bar{w}}{H} \right) \theta_i \, d\ell_i \quad (V.11)$$

Ele utilizou o campo de deflexões mostrado na Figura V.2 onde a única incógnita é  $w_0$ .

A pressão  $P_3$  foi definida como:

$$P_3 = \begin{cases} P_0 & 0 < t < \tau_0 \\ 0 & t > \tau_0 \end{cases} \quad (V.12)$$



$$W = \begin{cases} W_0 \left( \frac{X+a}{a\xi_0} \right) & , -a \leq X_1 \leq \frac{\xi_0}{\beta} (X_2+b) - a & \text{para a região AHE} \\ W_0 \left( \frac{X+b}{b} \right) & , -b \leq X_2 \leq \frac{\beta}{\xi_0} (X_1+a) - b & \text{para a região AEJ} \\ W_0 \left( \frac{X+b}{b} \right) & , -b \leq X_2 \leq 0 & \text{para a região JEGI} \end{cases}$$

Figura V.2 Perfil de deflexões proposto por JONES [13].

Considerou também que se o tempo de atuação da pressão, fosse muito menor do que o período de oscilação natural da placa, então o carregamento seria considerado como impulsivo, valendo a igualdade  $p_0 \tau_0 = \mu V_0$ .

Substituindo a equação (V.12) e o campo de deflexões da Figura V.2, na equação (V.11), e, levando em conta a consideração acima, JONES obteve para a máxima deflexão permanente  $w_0$ ,

$$\frac{W_{o\text{máx}}}{H} = \frac{(3-\xi_0)\{(1+\Gamma)^{1/2}-1\}}{2\{1+(\xi_0-1)(\xi_0-2)\}} \quad (\text{V.13})$$

onde:

$$\Gamma = \frac{\lambda\beta^2}{6} (3-2\xi_0) \left(1-\xi_0 + \frac{1}{2-\xi_0}\right)$$

$$\xi_0 = \beta\{\sqrt{(3+\beta^2)}-\beta\}$$

A curva  $\left(\frac{W_{o\text{máx}}}{H}\right) = f(\lambda)$ , obtida pela equação (V.13)

encontra-se nas Figuras V.3.a-e.

TAYA [12] abordou este mesmo problema através de cálculo variacional. Ele propôs uma modificação para o princípio de Hamilton de tal forma a poder aplicá-lo a um sistema não conservativo.

Resumidamente o princípio de Hamilton diz que o caminho seguido pelo processo dinâmico torna integral J, equação (V.14), estacionária.

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (K - U) dt \quad (\text{V.14})$$

onde K é energia cinética e U a energia potencial. Isto quer dizer que J atinge um valor extremo e pode-se mostrar que este valor é mínimo. Esta condição se resume em:

$$\delta J = 0 \quad (\text{V.15})$$

Para aplicar este princípio a um sistema não conservativo, TAYA [12] propôs sua modificação para:

$$\delta J = \delta \int_{t_0}^{t_1} (K-U) dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta E dt \quad (V.16)$$

onde  $\delta E$  representa a energia dissipada em deformação plástica durante o intervalo  $dt$ . Para um elemento de placa tem-se:

$$K = \frac{1}{2} \mu \dot{w}^2 \quad (V.17)$$

$$U = p \cdot w$$

Ele utilizou o mesmo campo de deflexões proposto por JONES [13], mostrado na Figura V.2 e para  $\delta E$  utilizou a equação (V.10). Admitiu as seguintes condições iniciais e finais:

$$\begin{aligned} \dot{w} &= v_0 \quad \text{para } t = 0 \\ w &= 0 \quad \text{para } t = 0 \\ \dot{w} &= 0 \quad \text{para } t = T_R \end{aligned} \quad (V.18)$$

com isto a equação (V.16) torna-se:

$$\delta \int_0^{T_R} \int_A \frac{1}{2} \mu \dot{w}^2 dA dt = \int_0^{T_R} \sum_{i=1}^n \int_{\ell_i} M_0 \left(1 + \frac{4\bar{w}}{H}\right) \delta \theta_i dt \quad (V.19)$$

admitiu para a deflexão no centro da placa:

$$w_0(t) = V_0 t + d_1 t^2 \quad (V.20)$$

que satisfaz automaticamente as condições iniciais  $w_0(0) = 0$  e  $\dot{w}_0(0) = V_0$ , e,  $d_1$  será o coeficiente sujeito a variação.

A condição final fornece,

$$T_R = - \frac{V_0}{2d_1} \quad (V.21)$$

substituindo as equações (V.20), (V.21) e o campo de deflexões na Figura V.2 na equação (V.19) e efetuando a integração, obtém-se:

$$T_R = \frac{e_1 V_0}{e_2 + \sqrt{e_2^2 + 4e_1 e_3}}$$

e

$$W_{0\text{máx}} = w_0(T_R) = \frac{e_1 V_0^2}{2\{e_2 + \sqrt{e_2^2 + 4e_1 e_3}\}}$$

onde

$$e_1 = \frac{7}{12} \left( \frac{1}{3} - \frac{\xi_0}{6} \right) \frac{ab\mu}{M_0} \quad (V.24)$$

$$e_2 = \frac{K_1}{24} \quad (V.25)$$

$$e_3 = \frac{3K_2 V_0^2}{320 H} \quad (V.26)$$

$$K_1 = \frac{2\beta}{\xi_0} + \tan \phi + \frac{1}{\beta} (2 - \xi_0) \quad (V.27)$$

$$K_2 = \frac{2\beta}{\xi_0} + 2 \tan \phi + \frac{4}{\beta} (1 - \xi_0) \quad (V.28)$$

$$M_o = \frac{\sigma_o H}{4} \quad (V.29)$$

Introduzindo o parâmetro  $\lambda = \frac{\mu V_o^2 a^2}{M_o H}$  na equação

(V.23) pode-se obter,

$$\frac{W_{o\text{máx}}}{H} = \frac{\Delta \cdot \lambda}{2\{e_2 + \sqrt{e_2^2 + \nabla \cdot \lambda}\}} \quad (V.30)$$

onde

$$\Delta = \frac{7}{12} \left( \frac{1}{3} - \frac{\xi_o}{6} \right) \quad (V.31)$$

$$\nabla = \frac{3}{80} \cdot \Delta \cdot K_2 \cdot \beta \quad (V.32)$$

A curva  $\frac{W_{o\text{máx}}}{H} = f(\lambda)$ , obtida pela equação (V.30) en-  
contra-se nas Figuras V.3.a-e.

#### V.4 - Comparação de Resultados

Os gráficos nas Figuras V.3.a-e mostram os resulta-  
dos experimentais e as curvas teóricas, de JONES [13], de TAYA  
[12], e, do modelo proposto neste trabalho.

Nas Figuras V.4.a-b comparam-se o perfil de defle-  
xões permanentes de alguns corpos de prova ensaiados, com o per-  
fil teórico aqui proposto.

A diferença entre ambos advém do fato de ter-se es-  
colhido uma forma de deflexões baseando-se em observações de en-  
saios estáticos. KEIL [8] notou que a forma do perfil de defle-



xões depende do efeito dinâmico do carregamento, e isto pode ser melhor observado em sequências fotográficas mostradas na referência |17|.

Seguem as Figuras V.3.a-e e V.4.a-b.

Nas Figuras V.3.a-e as curvas teóricas estão designadas pelos números 1, 2 e 3 sendo 1 a curva obtida pela equação (V.30) (TAYA), 2 a curva obtida pela equação (V.13) (JONES) e 3, a curva obtida pela equação (V.7), proposta neste trabalho.

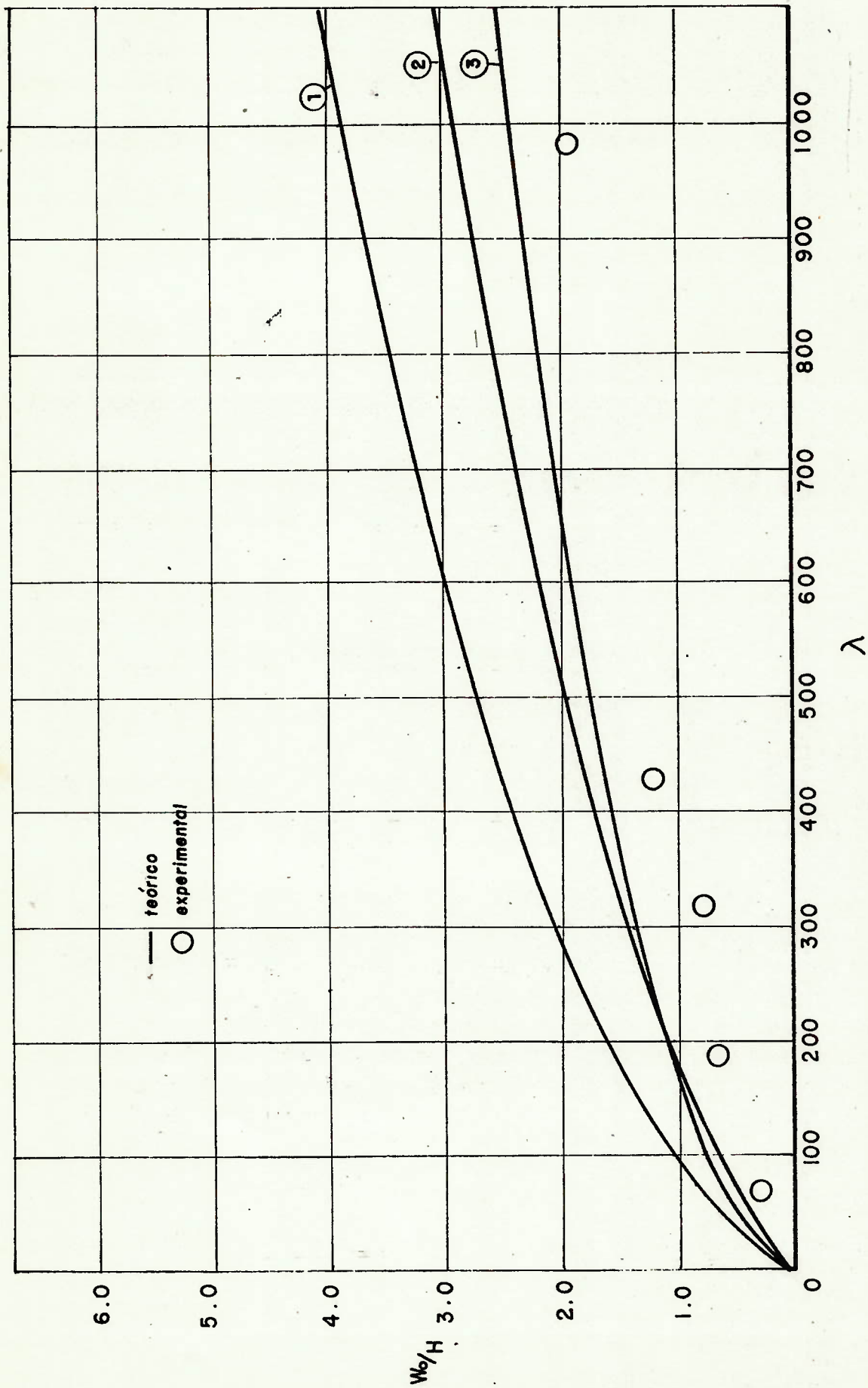


Figura V.3.a Comparação entre resultados teóricos e experimentais

$\beta = 0.249$

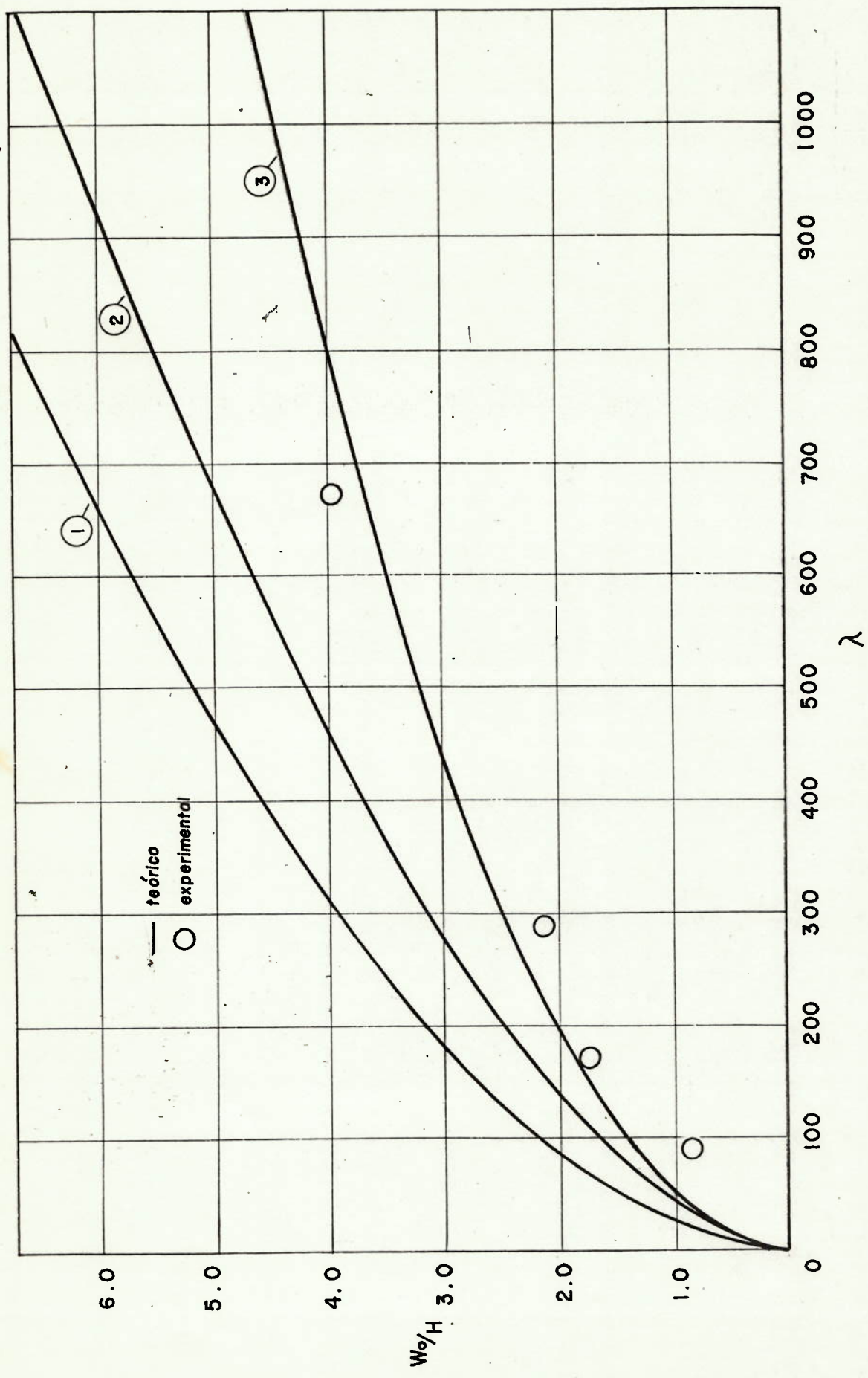


Figura V.3.b Comparação entre resultados teóricos e experimentais  
 $\beta = 0.499$

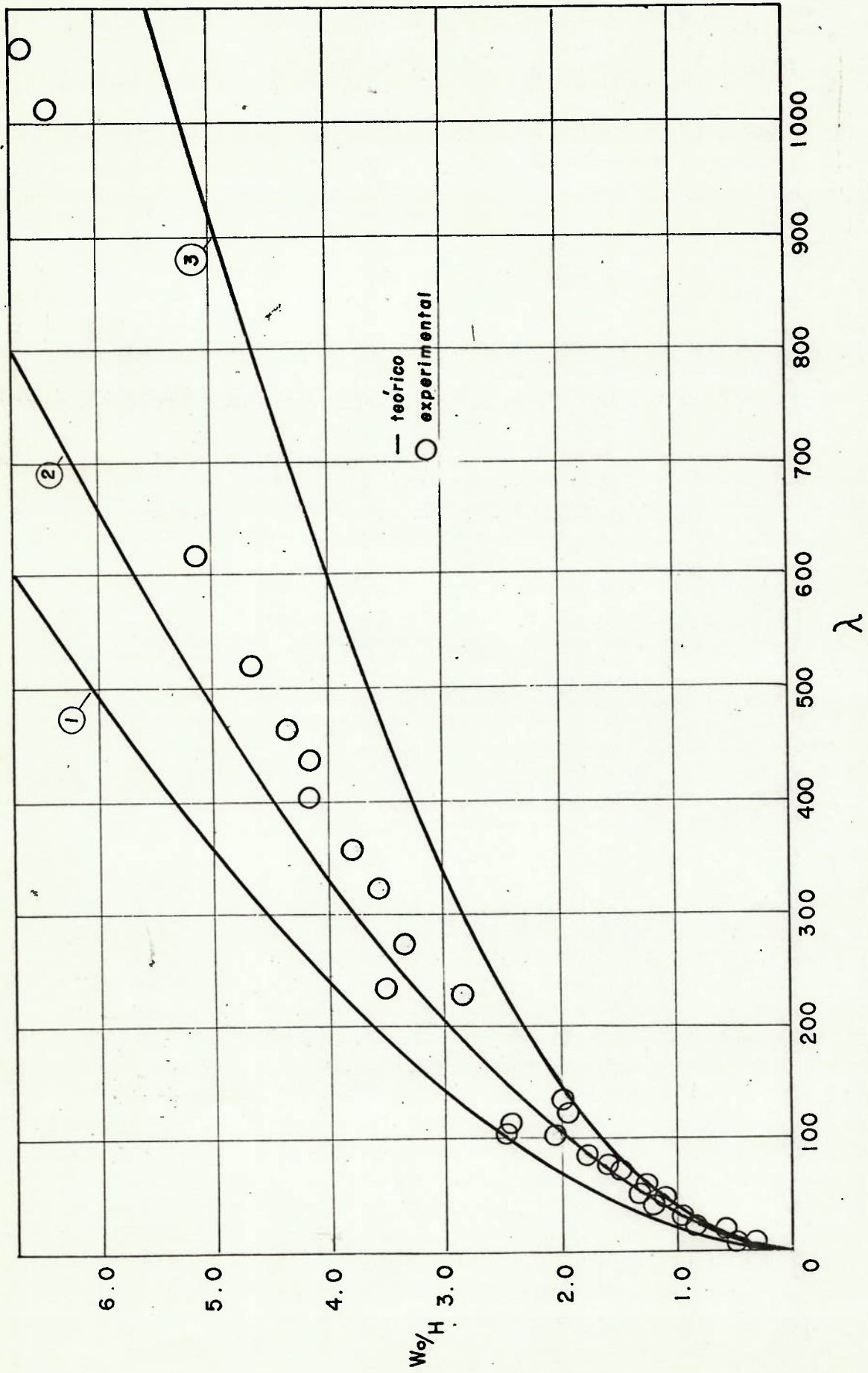


Figura V.3.c Comparação entre resultados teóricos e experimentais  
 $\beta = 0.593$

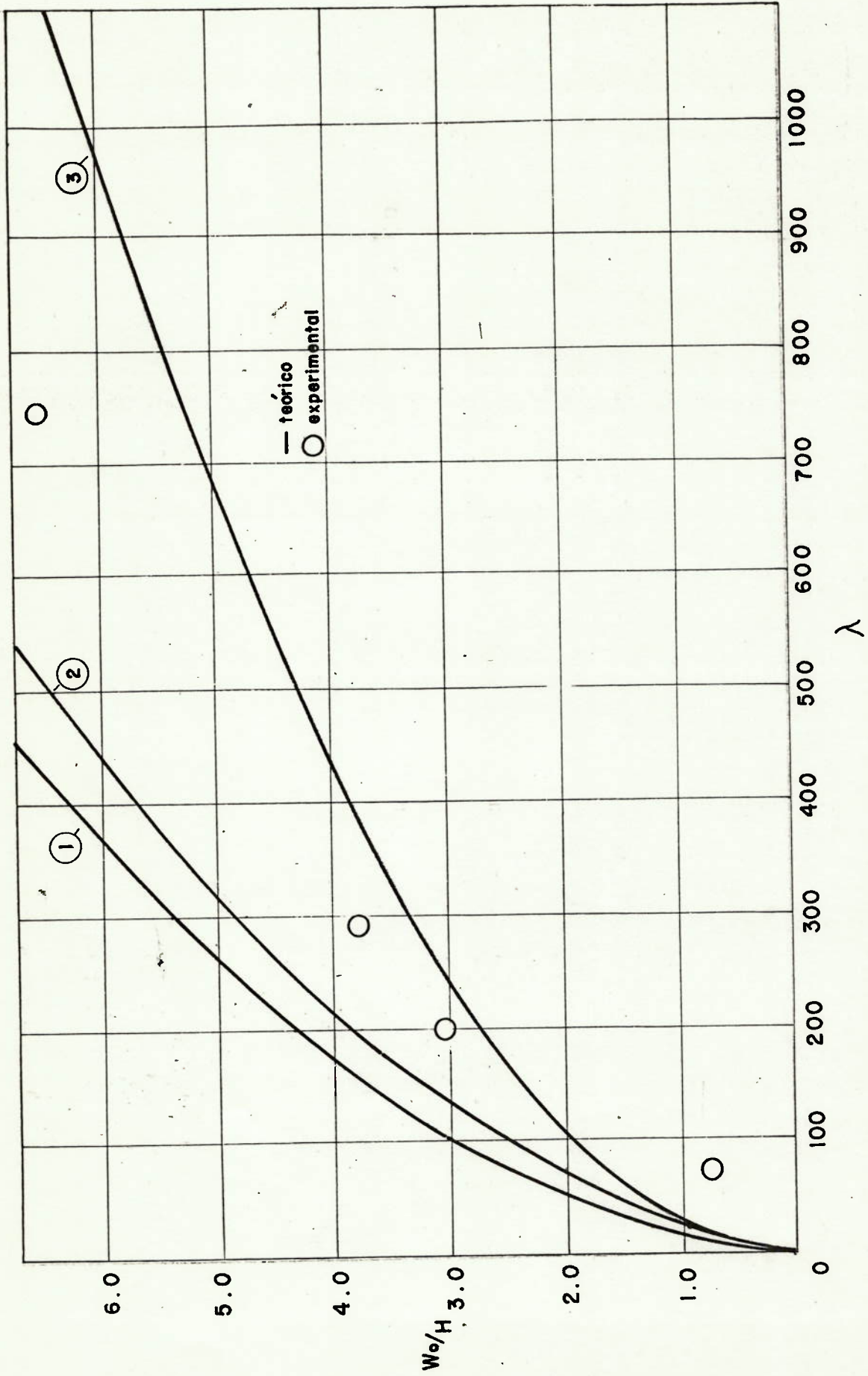


Figura V.3.d Comparação entre resultados teóricos e experimentais

$$\beta = 0.7515$$

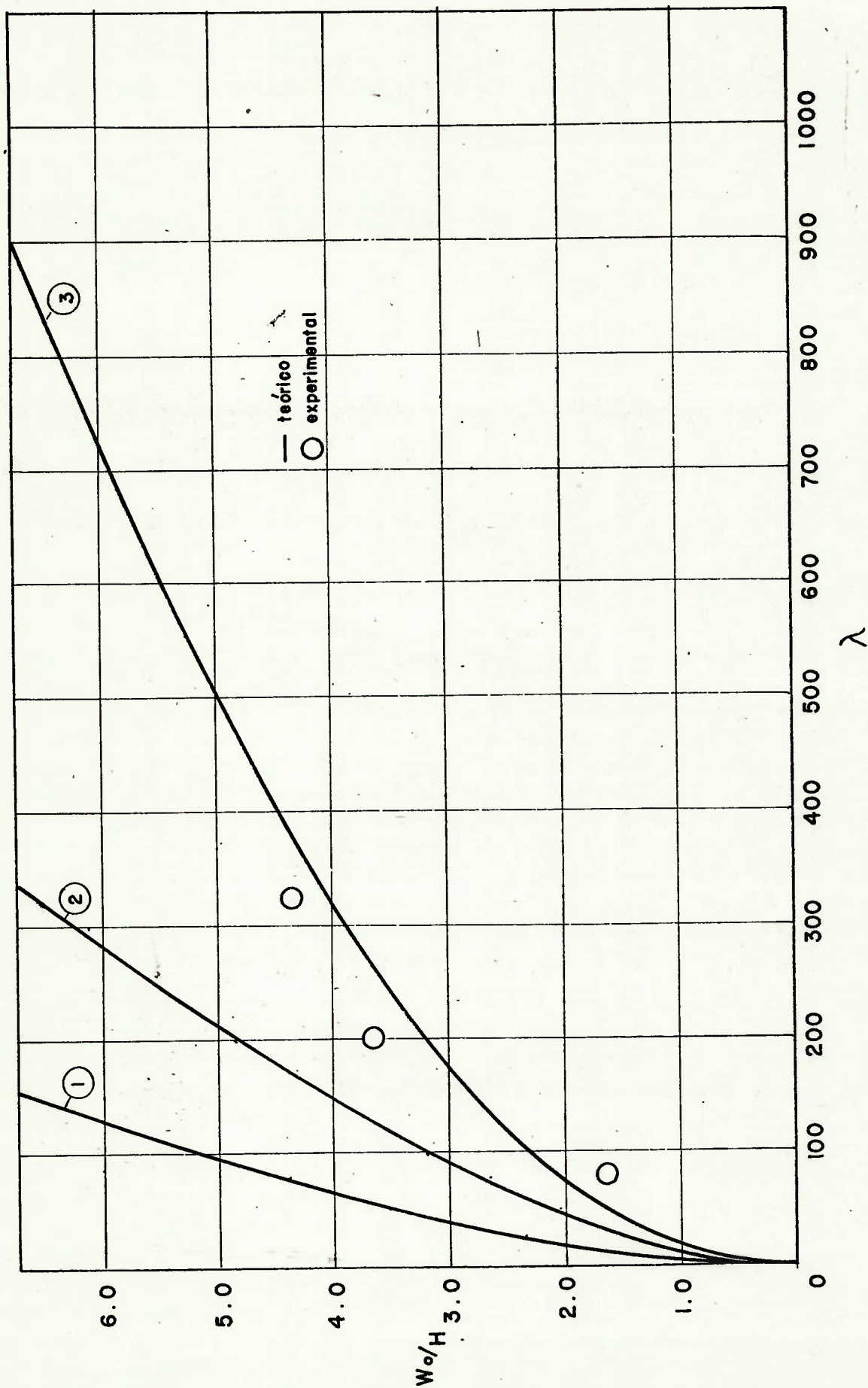


Figura V.3.e Comparação entre resultados teóricos e experimentais

$$\beta = 0.9996$$

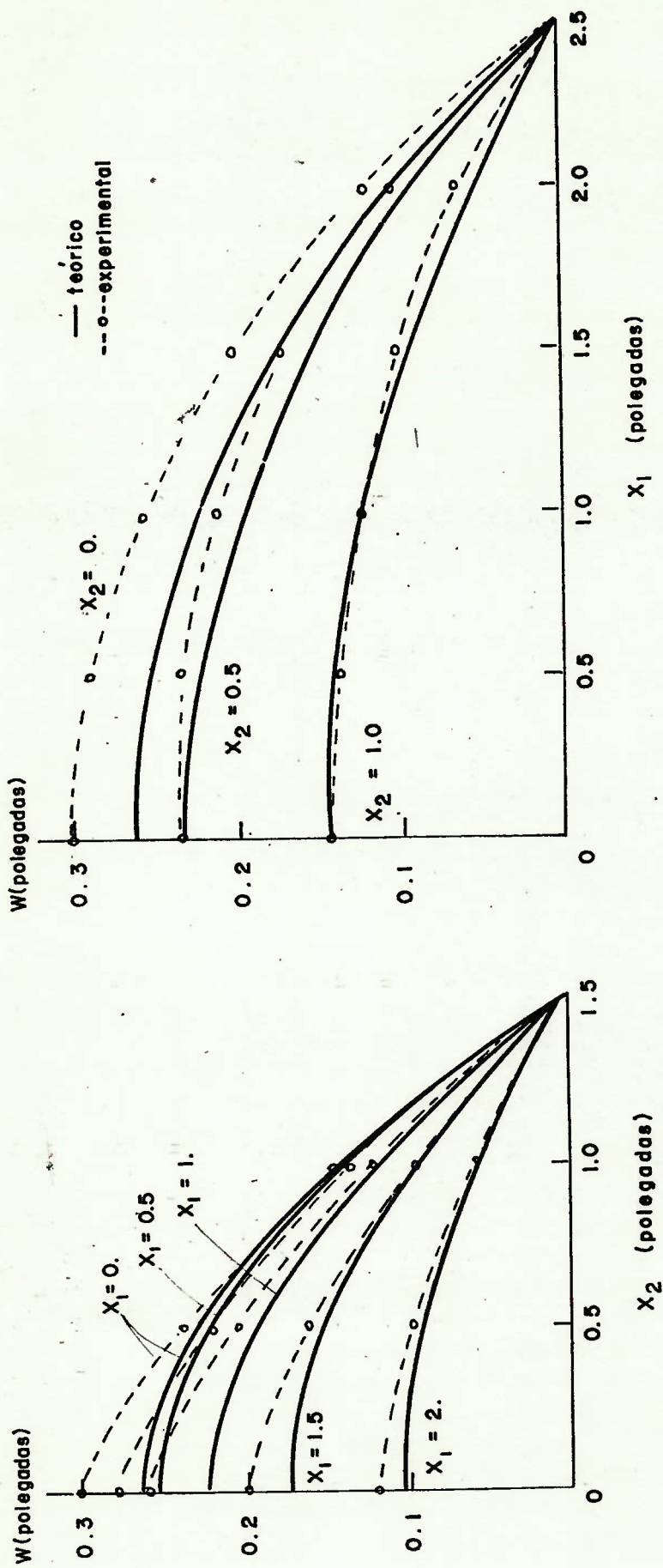


Figura V.4.a. Comparação entre o perfil de deflexões permanentes do corpo de prova N° 22 (tabela 7, ref. 11) com perfil teórico.

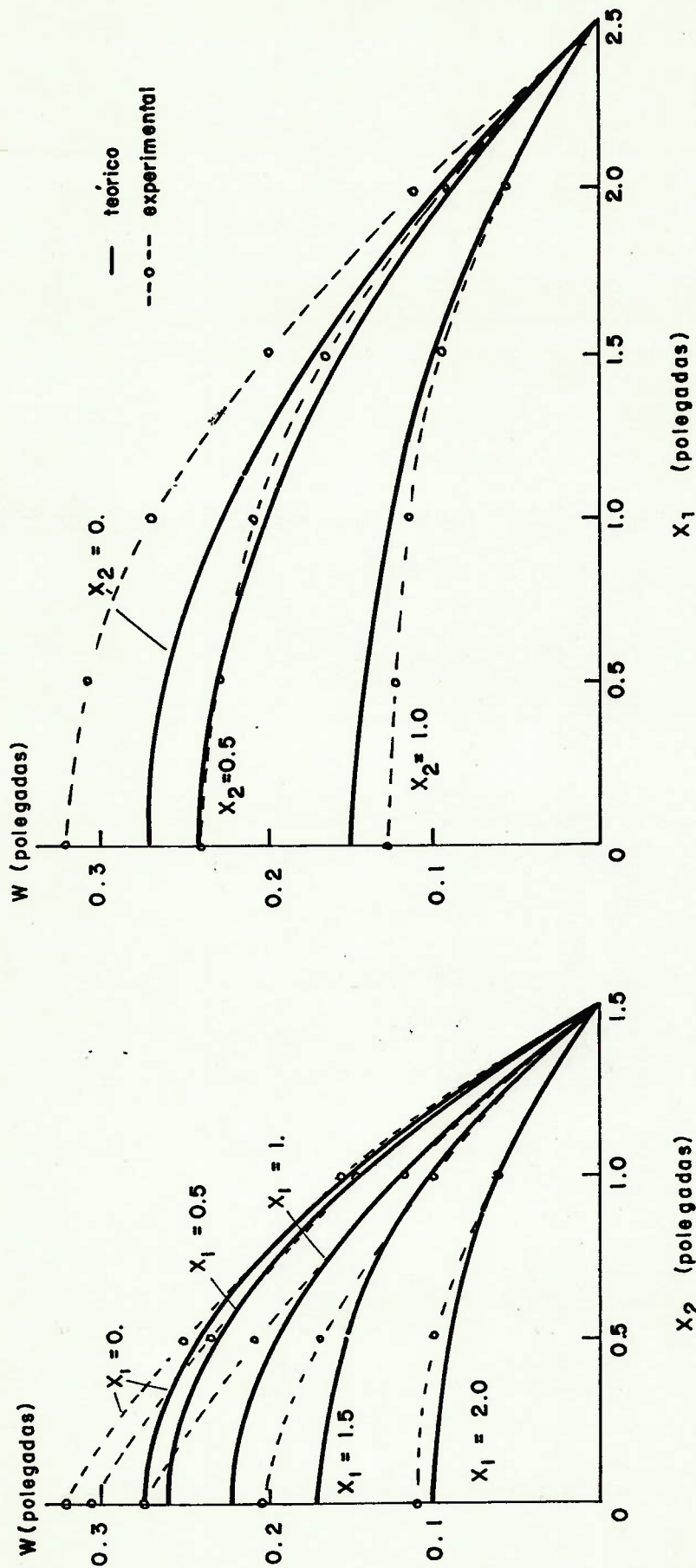


Figura V.4.b Comparação entre o perfil de deflexões permanentes do corpo de prova N.º 3 (tabela 2, ref. 11) com perfil teórico.



## VI. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

O método analítico, proposto neste trabalho fornece condições de se prever a máxima deflexão plástica permanente de uma unidade de chapeamento retangular, sob um carregamento impulsivo. Porém, ainda faltam meios de se verificar se esta deflexão é atingida sem que a placa se rompa, perdendo sua estanqueidade, ou ainda possuindo alguma reserva de resistência para trabalhar como membro estrutural para a qual foi projetada.

Por isso, deve-se pesquisar critérios de falha ou ruptura do material, compatíveis com as hipóteses adotadas no modelo teórico, que forneçam condições de se estabelecer limites máximos de deflexões para a placa, a partir dos quais ocorreriam trincas, ou até mesmo a separação em fragmentos desta placa do restante da estrutura.

Aliado a isto, esforços devem ser concentrados na tentativa de se realizarem ensaios experimentais que reproduzam os efeitos da explosão submarina em si, isto é, explosão, geração da onda de choque, formação da bolha gasosa e posterior interação entre a onda de choque e a estrutura, para a comparação dos resultados analíticos e experimentais.

Com os resultados aqui obtidos, pode-se investigar a possibilidade de ampliar este estudo para outras geometrias estruturais, como cascas, vigas, anéis, etc., o que permitiria a análise de elementos do casco e veículos submersíveis.

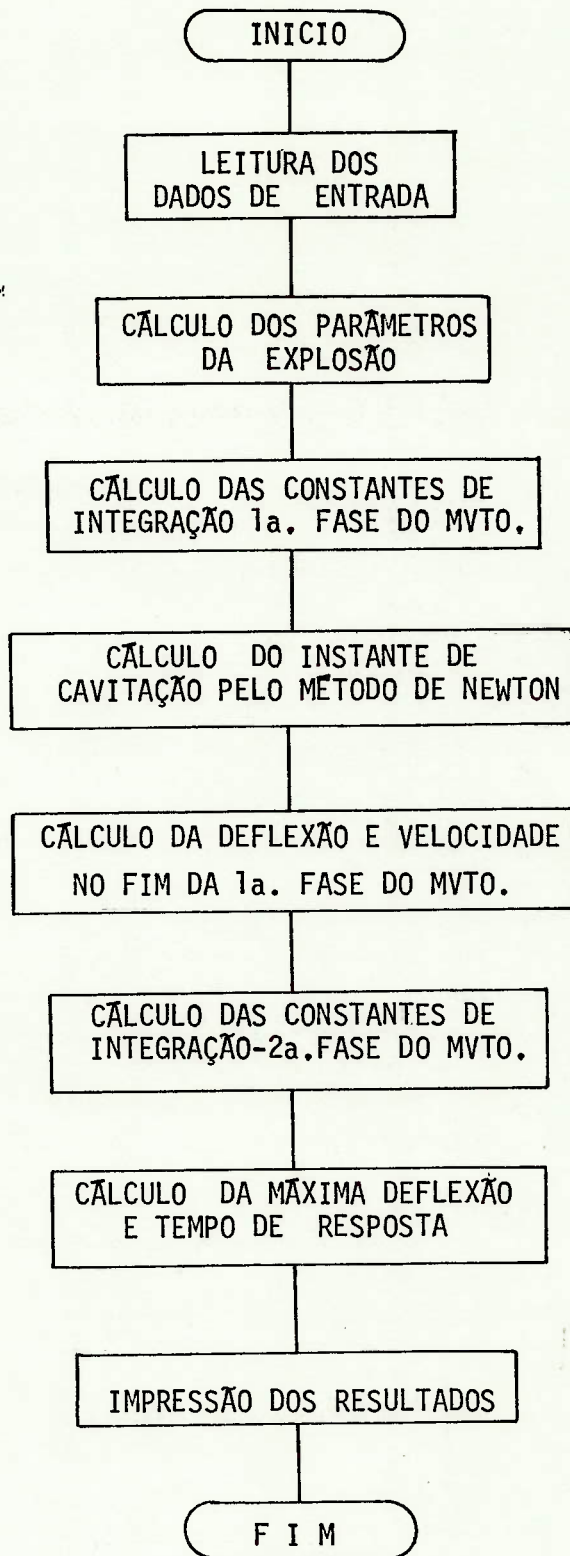
Acredita-se ainda que há muito para se estudar nes-

te assunto, e, espera-se que este trabalho de alguma forma venha a ser útil àqueles que o consultarem para futuras pesquisas.

## VII. APÊNDICE

Devido a excessiva quantidade de cálculo entre a definição da unidade de chapeamento e a obtenção de sua máxima de flexão permanente, julgou-se conveniente colocar os resultados obtidos no capítulo IV em forma de algoritmo de cálculo e transformá-lo em programa de computador. Os dados de entrada serão as dimensões da placa, propriedades do material desta e características da explosão.

Seguem o diagrama de blocos, a listagem do programa, o manual do usuário e um exemplo elucidativo.

VII.1 - Diagrama de Blocos

```

1000  $RESET FREE
1010  $SET ERRLIST LINEINFO
1020  C
1030  C PROGRAMA PARA O CALCULO DA MAXIMA DEFLEXAO PERMANENTE EM UNIDADES
1040  C DE CHAMPEAMENTO RETANGULARES SOB O CARREGAMENTO IMPULSIVO DE UMA
1050  C ONDA DE CHOQUE GERADA POR UMA EXPLOSAO SUBMARINA
1060  C
1070  C TODAS AS UNIDADES DEVEN OBEDECER O SISTEMA INTERNACIONAL
1080  C
1090  C DEFINICAO DAS VARIAVEIS RELEVANTES
1100  C
1110  C CO = VELOCIDADE DE PROPAGACAO DO SOM NA AGUA
1120  C C = VELOCIDADE DE PROPAGACAO DA ONDA DE CHOQUE
1130  C CG = MASSA DA CARGA DE EXPLOSIVO (TNT)
1140  C R = DISTANCIA DO PONTO DE EXPLOSAO AO CENTRO DA PLACA
1150  C ALFA = ANGULO DE INCIDENCIA DA ONDA DE CHOQUE
1160  C A = SEMI-COMPRIENTO DA PLACA
1170  C B = SEMI-LARGURA DA PLACA
1180  C H = ESPESSURA DA PLACA
1190  C RHOH = DENSIDADE DO MATERIAL DA PLACA
1200  C SIGMAO = TENSAO DE ESCOAMENTO
1210  C PM = MAXIMA PRESSAO VERIFICADA NA ONDA DE CHOQUE
1220  C TETA = CONSTANTE DE DECAIMENTO
1230  C BETA = RAZAO DE ASPECTO DA PLACA
1240  C TAL = INSTANTE DE TEMPO EM QUE OCCORRE CAVITACAO
1250  C WMAX = MAXIMA DEFLEXAO PERMANENTE PARA A PLACA
1260  C TR = INSTANTE DE TEMPO EM QUE FDI ATINGIDA A MAXIMA DEFLEXAO
1270  REAL H, MI, KSI, M1, M2
1280  C
1290  C DEFINICAO DE CONSTANTES
1300  C
1310  PI = 3.1415926
1320  CO = 1534.
1330  RHO = 1000.
1340  C
1350  C LEITURA E IMPRESSAO DE DADOS DO ENTRADA
1360  C
1370  DO 10 J = N 1,1000
1380  READ(5,100) CG, R, ALFA
1390  100 FORMAT(8F10.0)
1400  IF(CG.EQ.0.AND.R.EQ.0) GO TO 99
1410  WRITE(6,200) CG, R, ALFA
1420  200 FORMAT(IH1,IX, 2U N I D A D E S 0.//,
1430  1 5X, OSISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES0.//,
1440  2 5X, OPESO DE EXPLOSIVO = 0, 3X, E10.4,/,
1450  3 5X, ODISTANCIA = 0, 11X, E10.4,/,
1460  4 5X, OANGULO DE INCIDENCIA = 0, F10.3, 3 GRAUS0)
1470  READ(5,100) A, B, H, RHOH, SIGMAO
1480  WRITE(6,201) A, B, H, RHOH, SIGMAO
1490  201 FORMAT(//, 3X, ODADOS RELATIVOS A PLACA 0.//,
1500  1 5X, OSEMI-COMPRIENTO = 0, 4X, E10.4,/,
1510  2 5X, OSEMI-LARGURA = 0, 8X, E10.4,/,
1520  3 5X, OESPESSURA = 0, 11X, E10.4,/,
1530  4 5X, ODENSIDADE = 0, 11X, E10.4,/,
1540  5 5X, OTENSAO DE ESCOAMENTO = 0, E10.4,/)
1550  C
1560  C CALCULO DA PRESSAO MAXIMA E DA CONSTANTE DE DECAIMENTO

```

```

570 C
1580 PM = 5.2388E+07*(CG**((1./3.)/R)**1.13
590 TETA = 0.0925E-03*CG**((1./3.)/((CG**((1./3.)/R)**0.22))
600 TETA1 = 1./TETA
610 C
620 C CALCULO DAS CONSTANTES DE INTEGRACAO PARA A 2. FASE DO MOVIMENTO
630 C
640 ALFA = PI*ALFA/180.
650 C = CO*(1. + 8.70221E-10*PM)
660 CS = COS(ALFA)
670 BETA = B/A
680 MI = RHO*C/H
690 GAMA = RHO*C/(MI*CS)
700 FI = 2.5*SIGMA0*H*(1.+BETA**2.)/(MI*B*B)
710 PSI = 3.125*PM/MI
720 KSI = PSI/(FI - GAMA/TETA + TETA1**2.)
730 RDELTA = SQRT(GAMA**2./4. - FI)
740 M1 = -GAMA/2. + RDELTA
750 M2 = -GAMA/2. - RDELTA
760 C1 = KSI*(M2*TETA1)/(M1-M2)
770 C2 = KSI*(M1*TETA1)/(M2-M1)
780 C
790 C CALCULO DO TEMPO DE CAVITACAO P/METODO ITERATIVO DE NEWTON
800 C
810 ERR = 1.
820 EPS = 1.E-06
830 ETA = 1.E-05
840 T = 0.
850 E1 = 2.*PM + RHO*C*KSI/(TETA*CS)
860 E2 = - RHO*C*C1*M1/CS
870 E3 = - RHO*C*C2*M2/CS
880 E4 = - E1/TETA
890 E5 = E2*M1
900 E6 = E3*M2
910 DO 1 I = 1,100
920 F = E1*EXP(-T/TETA) + E2*EXP(M1*T) + E3*EXP(M2*T)
930 FLINHA = E4*EXP(-T/TETA) + E5*EXP(M1*T) + E6*EXP(M2*T)
940 T1 = T - F/FLINHA
950 IF(T.NE.C) ERR = ABS((T1-T)/T)
960 IF(ABS(F).LE.EPS.OR.ERR.LE.ETA) GO TO 2
970 T = T1
980 I CONTINUE
990 C
2000 C CALCULO DA DEFLEXAO E VELOC. NO CENTRO DA PLACA NO INST. DE CAVITACAO
2010 C
2020 2 TAL = T1
2030 W1 = C1*EXP(M1*TAL)*C2*EXP(M2*TAL)*KSI*EXP(-TAL/TETA)
2040 WPONTO=C1*M1*EXP(M1*TAL)*C2*M2*EXP(M2*TAL)-KSI*EXP(-TAL/TETA)/TE
2050 C
2060 C CALCULO DAS CONSTANTES DE INTEGRACAO PARA A 2. FASE DO MOVIMENTO
2070 C
2080 RAIZFI = SQRT(FI)
2090 COSENO = COS(RAIZFI*TAL)
2100 SENO = SIN(RAIZFI*TAL)
2110 D1 = (W1*RAIZFI*COSENO - WPONTO*SENO)/RAIZFI
2120 D2 = (WPONTO*COSENO + W1*RAIZFI*SENO)/RAIZFI
2130 C
2140 C CALCULO DA MAXIMA DEFLEXAO (WMAX) E TEMPO DE RESPOSTA (TR)
2150 C
2160 WMAX = SQRT(D1**2. + D2**2.)

```

```
2170      DELTA = ATAN(D1/D2)
2180      TR    = (PI/2. - DELTA)/RAIZFI
2190      WRITE(6,202) TAL, WMAX, TR
2200 202 FORMAT(///, 1X, OR E S U L T A D O S 0, //,
2210      1 5X, 0INSTANTE DE CAVITACAO = 0, 5X, E10.4, /,
2220      2 5X, 0MAXIMA DEFLEXAO PERMANENTE = 0, E10.4, /,
2230      3 5X, 0TEMPO DE RESPOSTA = 0, 9X, E10.4, )
2240      10 CONTINUE
2250      99 STOP
2260      END
```

VII.3 - Manual do Usuário

I. Cartão que define as características da explosão  
(3F10.0)

## COLUNAS

- 1 - 10 (CG) - massa da carga de explosivo em Kg  
(TNT).
- 11 - 20 (R) - distância do local de explosão ao  
centro da placa.  $R > 0$  (m).
- 21 - 30 (ALFA) - ângulo entre a direção normal à  
placa e a direção da reta que une  
o centro da placa e o ponto de ex-  
plosão.  $0 \leq \text{ALFA} < 90$  (graus)

II. Cartão que define as dimensões da unidade de cha-  
peamento e as propriedades do material (5F10.0)

## COLUNAS

- 1 - 10 (A) - semi-comprimento da placa (m).
- 11 - 20 (B) - semi-largura da placa (m).
- 21 - 30 (H) - espessura (m).
- 31 - 40 (RHOM) - densidade do material ( $\text{Kg}/\text{m}^3$ )
- 41 - 50 (SIGMAO) - tensão de escoamento ( $\text{N}/\text{m}^2$ )

Obs.: Em um mesmo processamento é possível calcular mais de um  
problema distinto. Para tanto devem ser colocados os car-  
tões I e II de cada problema sucessivamente.  
Após todos os cartões de dados deve ser colocada um car-  
tão em branco, como cartão final.



II.4 - Exemplo Elucidativo

Como exemplo de aplicação, tomou-se arbitrariamente uma unidade de chapeamento de aço médio de dimensões;  $a=1,05\text{m}$ ,  $b=0,20\text{m}$ ,  $H=0,00635\text{m}$ , com uma carga de 60 Kg, explodindo a 15m e ângulo de incidência nulo.

O resultado do programa se encontra a seguir.

## U N I C I D A D E S

## SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES

PESO DE EXPLOSIVO = .6000E+02  
 DISTANCIA = .1500E+02  
 ANGULO DE INCIDENCIA = 0.000 GRAUS

## DADOS RELATIVOS A PLACA

SEMI-COMPRIENTO = .1050E+01  
 SEMI-LARGURA = .2000E+00  
 ESPESSURA = .6350E-02  
 DENSIDADE = .7850E+04  
 TENSÃO DE ESCOAMENTO = .2352E+09

## R E S U L T A D O S

INSTANTE DE CAVITACAO = .3139E-04  
 MAXIMA DEFLEXAO PERMANENTE = .9979E-02  
 TEMPO DE RESPOSTA = .1141E-02

## VIII. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 KEIL, A.H. The response of ships to underwater explosions. In: Transactions SNAME 69, 366-410, 1961.
- 2 HOLLYER, R.S. Direct shock-wave damage to merchant ships from noncontact underwater explosions. In: Transactions SNAME 67, 773-784, 1959.
- 3 AUGUSTO, O.B. Formulação analítica de pressão e velocidades em ondas de choque. Estudo Técnico nº 380/1982 - Ministério da Marinha, ETCN-SP, São Paulo, março/1982.
- 4 EZRA, A.A. Principles and practice of explosive metalworking. London, Garden City Press Limited, 1973 V.1.
- 5 LANDAU, L.O & LIFSHITZ, E.M Fluid mechanics. London, Pergamon Press, 1959, V.6.
- 6 STRUTT, J.W. (Lord Rayleigh) The theory of sound. New York, Dover Publications, 1945.
- 7 AUGUSTO, O.B. Reflexão e refração de ondas de choque planas. Estudo Técnico nº 383/1982, Ministério da Marinha, ETCN-SP, São Paulo, março/1982.

- 8 KEIL, A.H. Problems of plasticity in naval structures: explosive and impact loading. Proceedings of the second Symposium on Naval Structural Mechanics. Plasticity, Oxford, Pergamon Press Ltd, 1960.
- 9 LOVE, A.E.H. A treatise on the mathematical theory of elasticity. New York, Dover Publications, 1944.
- 10 SAWCZUK, A On initiation of the membrane action in rigid-plastic plates. Journal de Mécanique, vol. 3, n° 1, 15-23, Mars 1964.
- 11 JONES, N. et alli The dynamic plastic behavior of fully clamped rectangular plates. International Journal of Solids and Structures, Pergamon Press, Great Britain, vol.6, 1499-1512, 1970.
- 12 MURA, T, & TAYA, M. Dynamic plastic behavior of structures under impact loading investigated by the extended Hamilton's principle. International Journal of Solids and Structures, Pergamon Press, Great Britain, vol. 10, 197-209, 1974.
- 13 JONES, N. A theoretical study of dynamic plastic behavior of beams and plates with finite-deflections. International Journal of Solids and Structures, Pergamon Press, Great Britain, vol. 7, 1007-1029, 1971.

- 14 HOOKE, R. & RAWLINGS, B. An experimental investigation of the behavior of clamped, rectangular mild steel plates subjected to a uniform transverse pressure. Proceedings Institutions of Civil Engineers, vol. 42, 75-103, January, 1969.
- 15 GLEYZAL, A. Plastic deformation of a circular diaphragm under pressure. Journal of Applied Mechanics, New York, 288-296, September, 1948.
- 16 JONES, N. et al. An experimental study into dynamic plastic behavior of wide beams and rectangular plates. International Journal of Mechanical Sciences, Pergamon Press, Great Britain, vol. 13, 721-735, 1971.
- 17 HUMPREYS, J.S. Plastic deformation of impulsively loaded straight clamped beams. Journal of Applied Mechanics, New York, 7-10, March, 1965.
- 18 HILDEBRAND, F.B. Advanced calculus for applications. New Jersey, Prentice Hall, 2a. Edition, 1976.