

JOSÉ SÉRGIO RODRIGUES ALVES FILHO
Eng. Naval, Escola Politécnica da USP, 1982

ANÁLISE DE PLACAS E CASCAS SANDUICHE
POR UM MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da USP
para a obtenção do Título de Mestre em Engenharia

Orientador: Dr. Hely Ricardo Costa Sávio
Chefe da Seção de Análise de Estruturas de Material Composto
Divisão de Engenharia Aeronáutica - EMBRAER

São Paulo, 1986.

Dedico este trabalho à minha
esposa, sem cujo apoio este tra
balho não teria sido concluído.

AGRADECIMENTOS

ao Dr. Hely Ricardo Costa Sávio pela sua amizade, seu apoio e real orientação neste trabalho;

ao Instituto Técnico de Aeronáutica, ITA, na pessoa do Prof. Dr. Antonio Marmo de Oliveira, por permitir a utilização do sistema IBM-4341 no desenvolvimento da parte computacional deste trabalho;

ã Marilda P. G. de Moraes pela paciência e pelo excelente trabalho de datilografia.

RESUMO

Formula-se, neste trabalho, um elemento finito para a análise de placas e cascas sanduiche baseado em um modelo híbrido de tensões assumidas, denominado SNDQH1. Este elemento é quadrilateral, plano, isoparamétrico, e possui 4 nós e cinco graus de liberdade por nó. Painéis do tipo sanduiche com faces laminadas anisotrópicas e recheio ortotrópico, com orientação arbitrária, podem ser analisados com este elemento. Para utilização em análise dinâmicas de estruturas, uma matriz de massa é também apresentada. Os resultados dos testes efetuados demonstraram que o elemento SNDQH1, apesar da teoria simplificada de placas sanduiche utilizada, apresenta um ótimo comportamento na análise de placas sanduiche, para as geometrias normalmente encontradas na prática.

ABSTRACT

It is presented here a quadrilateral, isoparametric, four nodes, 5 degrees of freedom per node, sandwich plate/flat shell finite element, called SNDQH1, based on an assumed stress hybrid model. Sandwich structures with anisotropic laminated faces and arbitrarily oriented orthotropic cores, can be analysed with this element. A mass matrix was also developed in this work in order to allow dynamic analysis. Despite the very simple sandwich plate theory considered, test results show that the SNDQH1 element presents a good behaviour in the analysis of sandwich plates normally found in practice.

ÍNDICE

	<u>Pág.</u>
Notação e Nomenclatura	<i>vii</i>
Lista de Figuras	<i>ix</i>
Lista de Tabelas	<i>x</i>
Capítulo 1 - Introdução	1
Capítulo 2 - Formulação Variacional do Problema de Análise de Placas e o Método de Elementos Finitos (Modelo Híbrido)	5
Capítulo 3 - Análise de Placas Sanduiche e o Elemento SNDQH1	12
3.1 - Suposições Básicas	13
3.2 - Formulação da Teoria de Placas Sanduiche	14
3.3 - O elemento SNDQH1	23
3.3.1 - Geometria e Convenções Consideradas	23
3.3.2 - Matrizes de Interpolação	26
3.3.3 - Relações Constitutivas.....	28
3.3.4 - Matriz de Rigidez	29
3.3.5 - Matriz da Massa	31
3.3.6 - O Sexto Grau de Liberdade	31
Capítulo 4 - Testes Numéricos e Exemplo de Aplicação	33
4.1 - Testes de Precisão e Convergência	33
4.1.1 - Placa Quadrada Simplesmente Apoiada	34
4.1.2 - Placa Quadrada Engastada	35
4.1.3 - Placa Retangular Simplesmente Apoiada	36
4.2 - Testes de Limitação	37
4.2.1 - Flexão Anticlástica	38
4.2.2 - Variação dos Parâmetros t/h e h/a	38
4.3 - Exemplo de Aplicação	48
Capítulo 5 - Conclusões	51
Referências Bibliográficas	54

NOTAÇÃO E NOMENCLATURA

t	- espessura de face ou lâmina
c	- espessura do recheio
a	- comprimento de uma placa
h	- distância entre os planos de meia espessura das faces
E	- módulo de elasticidade
G	- módulo de cisalhamento
ν	- coeficiente de Poisson; vetor normal
ρ	- densidade
f	- frequência natural
u, v, w	- deslocamento nas direções dos eixos x, y e z, respectivamente
θ	- rotação em torno de um dos eixos de referência
ψ	- rotação da seção transversal
e, ϵ, γ	- deformação
σ, τ	- tensão
N	- matriz de interpolação de deslocamentos; força normal
M	- momento fletor
Q	- força cortante; matriz de material de uma lâmina ou laminado
\bar{p}	- pressão lateral no sanduiche

Índices Inferiores:

x, y, z	- direção dos eixos de referência x, y e z respectivamente
1, 2	- direções principais de material no plano da placa
3	- direção transversal de material
f	- indica face
c	- indica recheio

o - relacionado à superfície de referência

Índices Superiores:

u - face superior

L - face inferior

c - recheio

T - matriz ou vetor transposto

Outros Símbolos:

, - como índice inferior indica diferenciação

- - embaixo de um símbolo indica um tensor ou matriz.

[] - ao longo do texto, refere-se a um número da lista de referências bibliográficas.

LISTA DE FIGURAS

- Fig. 2.1 - Definição do domínio do problema.
- Fig. 3.1 - Geometria Típica de uma Placa Sanduiche.
- Fig. 3.2 - Sistema de Referência Utilizado.
- Fig. 3.3 - Distribuição da tensão de cisalhamento transversal ao longo da es pessura da placa.
- Fig. 3.4 - Geometria de uma placa sanduiche deformada por cisalhamento trans versal do recheio.
- Fig. 3.5 - Convenção dos sentidos positivos dos esforços na placa.
- Fig. 3.6 - O elemento SNDQH1
- Fig. 3.7 - Transformação de coordenadas locais para coordenadas generalizadas.
- Fig. 4.1 - Modelo para o teste de flexão anticlástica.
- Fig. 4.2 - Modelo para o teste de variação dos parâmetros t/h e h/a .
- Fig. 4.3 - Limites dos Parâmetros Geométricos t/h e h/a da Teoria Aproximada de Sanduiche.
- Fig. 4.4 - Convergência do elemento SNDQH1 para a solução aproximada ($h/a = 0,10$, $t/h = 0,01$).
- Fig. 4.5 - Erro percentual no valor de deslocamentos, do elemento SNDQH1 em relação à solução exata ($h/a = 0,10$).
- Fig. 4.6 - Geometria e Discretização do Modelo do Painel Central do Satélite de Coleta de Dados.
- Fig. 4.7 - Deflexão do painel central do satélite de coleta de dados.

LISTA DE TABELAS

- Tabela 4.1 - Placa Quadrada Simplesmente Apoiada.
- Tabela 4.2 - Placa Quadrada Simplesmente Apoiada (frequências naturais).
- Tabela 4.3 - Placa Quadrada Engastada.
- Tabela 4.4 - Placa Retangular Simplesmente Apoiada.
- Tabela 4.5 - Valores de $w(\text{aproximado})/w(\text{exato})$ para o Modelo de Fibra de Vidro.
- Tabela 4.6 - Valores de $w(\text{aproximado})/w(\text{exato})$ para o Modelo de Fibra de Carbono.
- Tabela 4.7 - Convergência do Elemento SNDQH1 para as Soluções Exata e Aproximada.
- Tabela 4.8 - Convergência de Tensões do Elemento SNDQH1 para a Solução Exata.
- Tabela 4.9 - Comparação dos resultados do elemento SNDQH1 com o elemento MLQSH1 [9].
- Tabela 4.10 - Valores de Momento Máximo no Painel Central do Satélite.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Placas e cascas sanduiche são definidas neste trabalho como aquelas utilizando um tipo de construção de 3 camadas, consistindo de duas lâminas finas de material de alta resistência entre as quais uma camada grossa de material de baixa resistência e densidade é colocada. As duas lâminas finas são denominadas faces e a camada intermediária é o recheio do sanduiche.

Embora, a princípio, qualquer material que seja disponível em forma de chapa fina possa ser usado como face de um sanduiche, os materiais mais utilizados nas faces de painéis sanduiche com compromisso estrutural são ligas de alumínio, aço e plásticos reforçados. Para o recheio, tem-se utilizado muito atualmente o recheio do tipo colmeia, que consiste de folhas finas, de alumínio ou plástico reforçado, na forma de células hexagonais perpendiculares as faces. Outros materiais como madeira balsa, poliuretano e borracha sintética são também utilizados em diferentes aplicações.

A construção sanduiche tornou-se bastante conhecida e utilizada após a Segunda Guerra Mundial devido ao avião Mosquito, embora aplicações anteriores a esta data tenham existido. O desenvolvimento deste tipo de construção originou-se da necessidade de se projetar estruturas, com uma razão rigidez/peso bastante alta e com um bom acabamento superficial, para utilização na indústria aeronáutica, em plena ascensão.

Em um sanduiche, as faces agem como se fossem os flanges de uma viga I, fornecendo um grande momento de inércia para a rigidez da estrutura e absorvendo praticamente todo o esforço de flexão e membrana. A função do recheio é manter as faces separadas e estabilizadas, além de suportar o cisalhamento transversal da viga, ou da placa. Devido à baixa densidade do material do recheio e à pequena espessura das faces, as estruturas sanduiche se caracterizam por um baixo peso possuindo, portanto, uma razão rigidez/peso elevada.

A utilização da construção sanduiche proporciona uma considerável economia de peso, principalmente em estruturas cuja falha crítica é a flambagem. Normalmente, no projeto destas estruturas, quando se utilizam métodos convencionais de construção, a obtenção da rigidez necessária implica numa utilização ineficiente de material em termos de resistência. Em um sanduiche, a resistência das faces aliada a rigidez proporcionada pela espessura do recheio permitem um projeto eficiente da estrutura tanto em termos de rigidez como de resistência. Por estes motivos, a construção sanduiche vem sendo empregada, atualmente, em larga escala no campo aeroespacial, onde o item peso é um grande limitante de projeto.

Na análise de placas do tipo sanduiche, o método de elementos finitos vem sendo empregado com sucesso, aproveitando-se de suas vantagens já conhecidas e comprovadas [4, 24]. Elementos finitos específicos para análise de placas sanduiche foram desenvolvidos em outros trabalhos [5], embora elementos de placa multicamada [9, 20], ou mesmo elementos de placa homogênea com cisalhamento transversal incluído [2, 3], possam também ser utilizados na modelagem de estruturas sanduiche. A vantagem do uso do primeiro tipo de elemento sobre os dois últimos é prática. Elementos de placa sanduiche permitem uma entrada de dados mais simples e a obtenção de resultados de tensões e esforços mais adequados à análise deste tipo de estrutura.

A motivação deste trabalho foi a de desenvolver um elemento finito para a análise de placas e cascas sanduiche para ser utilizado na análise das estruturas dos satélites desenvolvidos pelo Instituto de Pesquisas Espaciais - INPE. Estes satélites são praticamente totalmente constituídos de painéis sanduiche e o INPE ainda não dispunha de uma ferramenta específica para a análise deste tipo de estrutura.

Na formulação deste elemento, resolveu-se utilizar um modelo híbrido de tensões assumidas. A principal razão desta escolha foi aproveitar as vantagens deste modelo [15] na análise de flexão de placas com cisalhamento transversal incluído. O modelo híbrido foi lançado na década de 60 por Pian [13] e depois desenvolvido e aplicado em vários outros trabalhos desde então [5, 9, 14, 15, 16, 19, 20]. Este modelo, sendo baseado no princípio da

energia complementar mínima, permite a consideração de dois campos independentes. O campo de tensões, em equilíbrio dentro do elemento e escrito em termos de parâmetros de tensão β , e o campo de deslocamentos, escrito em termos de deslocamentos generalizados da estrutura. Os parâmetros β são independentes para cada elemento e são eliminados a nível de formulação do elemento, deixando apenas os deslocamentos generalizados como incógnitas no sistema de equações finais. Assim sendo, um elemento baseado no modelo híbrido pode ser facilmente implementado em um programa baseado no métodos de deslocamentos.

A primeira vantagem deste modelo, demonstrada por Pian e Tong [15], está no fato que o modelo híbrido conduz a uma estrutura mais flexível que aquela de um modelo de compatibilidade (com mesmo tipo de interpolação de deslocamentos no contorno inter-elementos), mas mais rígida que aquela de um modelo de equilíbrio (com mesmo tipo de interpolação de tensões no interior do elemento). Desta forma, espera-se que um elemento baseado em um modelo híbrido apresente resultados de tensões e deslocamentos mais precisos que aqueles obtidos a partir de um elemento baseado em um modelo de compatibilidade ou equilíbrio, com ordens de interpolação similares.

Uma outra grande vantagem do modelo híbrido reside no fato deste considerar o campo de tensões independentemente do campo de deslocamentos. O cálculo das tensões torna-se mais preciso, pois estas são calculadas através de parâmetros de tensão, diretamente a partir dos deslocamentos generalizados. O equilíbrio interno no elemento é garantido e a distribuição de tensões pode ser moldada às características específicas de cada problema, o que é particularmente interessante quando se considera, por exemplo, a análise de propagação de trincas, a reciprocidade de trações interlaminar em placas multicamadas ou a análise de efeitos de borda em estruturas laminadas.

Na análise de flexão de placas, quando se inclui os efeitos do cisalhamento transversal como é o caso da análise de placas sanduiche, o modelo híbrido permite a consideração de um elemento com funções de interpolação as mais simples (lineares) sem causar, entretanto, problemas de desbalanceamento, entre as parcelas de cisalhamento e flexão, no cálculo da energia

de deformação, para certas geometrias da placa. Este efeito, conhecido por "locking", ocorre com os elementos mais simples formulados a partir de um modelo de compatibilidade, e só é contornado, em alguns casos, com o auxílio de artifícios numéricos como uma integração reduzida e/ou reduzida seletiva.

A formulação variacional do problema de análise de placas e a aplicação de um modelo híbrido de elementos finitos para este problema estão apresentadas no capítulo 2 deste trabalho. Seguiu-se a notação usada por Pian em seus trabalhos [13, 14, 15, 16] e que se tornou usual em trabalhos relacionados com modelos híbridos. A formulação se baseia no funcional de Reissner modificado [23], que foi escolhido por simplificar a exposição.

O capítulo 3 apresenta a teoria de placas do tipo sanduiche, considerada neste trabalho. As hipóteses básicas desta teoria admitem, que as faces do sanduiche são finas, que o material do recheio não resiste a cargas no plano e que a distribuição de deformação é linear ao longo da espessura. Com base nesta teoria, apresenta-se neste mesmo capítulo, a formulação de um elemento finito quadrilateral plano, isoparamétrico, com 4 nós e 5 graus de liberdade por nó, denominado SNDQH1. Este elemento, formulado a partir de um modelo híbrido, foi implementado no programa SKORPIUS [8] de modo a permitir a análise de cascas através da utilização de um modelo facetado. Os resultados dos vários testes efetuados no elemento SNDQH1 são apresentados e discutidos no capítulo 4, incluindo-se uma comparação com o elemento MLQSH1 da referência [9]. Por fim, apresenta-se no capítulo 5, as conclusões retiradas do presente trabalho.

CAPÍTULO 2

FORMULAÇÃO VARIACIONAL DO PROBLEMA DE ANÁLISE DE PLACAS E O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS (MODELO HÍBRIDO)

O problema de análise de placas pode, dentro do escopo deste trabalho, ser simplificado e apresentado na forma geral que se segue. Define-se um corpo elástico, mostrado na Figura 2.1, de volume V e contorno S , em equilíbrio, sob a ação de forças de campo \bar{F}_i , forças de tração no contorno \bar{T}_i , um campo de tensões σ e um campo de deslocamentos u . A teoria linear de elasticidade, de pequenos deslocamentos, fornece as equações básicas que governam este problema em qualquer instante, a saber*:

$$\text{equações de equilíbrio} \quad \sigma_{ij,j} + \bar{F}_i = 0 \quad (2.1)$$

$$\text{equações constitutivas} \quad \sigma_{ij} = c_{ijkl} e_{kl} \quad (2.2)$$

$$\text{equações de compatibilidade} \quad e_{kl} = \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k}) \quad (2.3)$$

que devem valer em todo o volume V .

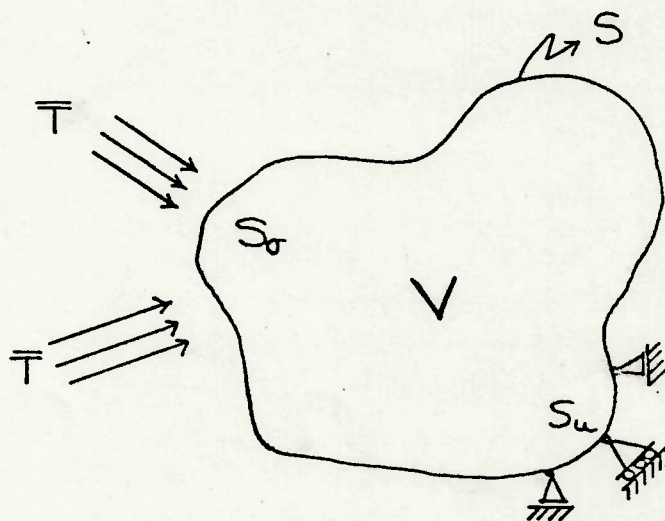


Fig. 2.1 - Definição do domínio do problema.

* utilizando notação tensorial onde os subscritos i, j variam de 1 a 3.

Para finalizar a definição do problema, fixam-se as condições no contorno do corpo como:

$$\sigma_{ij} v_j = \bar{T}_i \text{ em } S_\sigma \quad (2.4)$$

$$u_i = \bar{u}_i \text{ em } S_u \quad (2.5)$$

onde v_j são os cossenos diretores da normal ao contorno no ponto considerado, S_u é a porção do contorno onde os deslocamentos são prescritos e S_σ é a porção onde as forças de tração são prescritas tal que $S = S_u + S_\sigma$.

Para a obtenção de uma solução aproximada do problema exposto, i.e., das equações diferenciais apresentadas, utiliza-se aqui uma formulação variacional através de um funcional de energia conveniente sobre o qual aplica-se um método de elementos finitos, discretizando-se o volume V . Escolheu-se para este trabalho o funcional de Reissner modificado [23] o qual é função de dois campos independentes (σ e u) e que permite, portanto, a consideração de um modelo híbrido [16] de elementos finitos. Escrevendo-se então este funcional para o problema em questão vem:

$$-\pi_R^* = \iiint_V [B(\sigma_{ij}) + (\sigma_{ij,j} + \bar{F}_i)u_i] dV - \iint_{S_\sigma} (T_i - \bar{T}_i)u_i dS - \iint_{S_u} T_i \bar{u}_i dS \quad (2.6)$$

sem nenhuma condição subsidiária e onde

$$B(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2} S_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl}$$

é a energia de deformação complementar e

$$T_i = \sigma_{ij} v_j.$$

A este funcional existe um princípio variacional associado que estabelece que de todos os campos possíveis, aqueles que garantem a estacionariedade do funcional são os campos da solução procurada. Isto pode ser verificado variando-se o funcional em relação aos campos $\underline{\sigma}$ e \underline{u} para se obter, como equações de Euler, as expressões (2.1) e (2.3) e as condições de contorno (2.4) e (2.5).

A expressão (2.6) pode ser reescrita considerando-se condições subsidiárias ao funcional. No caso, força-se que a equação homogênea de equilíbrio seja satisfeita a priori em todo o volume V e que a condição de contorno (2.5) seja igualmente satisfeita no contorno S_u . Assim tem-se:

$$\pi_{mc}^* = \iiint_V [B(\sigma_{ij}) + \bar{F}_i u_i] dV - \iint_S (T_i u_i) dS + \iint_{S_\sigma} \bar{T}_i u_i dS \quad (2.7)$$

com as condições subsidiárias:

$$\sigma_{ij,j} = 0 \text{ em } V$$

$$u_i = \bar{u}_i \text{ em } S_u$$

Para utilizar-se um método de elementos finitos, discretiza-se o domínio do problema, dividindo o volume V em n elementos finitos de volume V_n e contorno ∂V_n . A energia total do sistema passa então a ser a soma das energias destes n elementos e o funcional (2.7) deve ser reescrito na forma de um somatório como:

$$\pi_{mc}^* = \sum_n \{ \iiint_{V_n} [B(\sigma_{ij}) + \bar{F}_i u_i] dV - \iint_{\partial V_n} T_i u_i dS + \iint_{S_{\sigma n}} \bar{T}_i u_i dS \} \quad (2.8)$$

onde:

$$\partial V_n = S_n + S_{un} + S_{\sigma n}$$

$$S_n = \text{contorno entre elementos}$$

$$S_{un} = \text{porção de } S_u \text{ no elemento } n.$$

$$S_{\sigma n} = \text{porção de } S_\sigma \text{ no elemento } n.$$

com as condições subsidiárias

$$\sigma_{ij,j} = 0 \text{ em } V_n$$

$$u_i = \bar{u}_i \text{ em } S_{un}$$

Observa-se que na obtenção da expressão (2.8) relaxou-se a condição de continuidade de tração ao longo do contorno entre elementos, utilizando para isso a técnica dos multiplicadores de Lagrange. Portanto, o campo $\underline{\sigma}$ pode ser admitido como independente para cada elemento, o mesmo não acontecendo com o campo de deslocamentos \underline{u} . Para este campo a continuidade entre elementos deverá ser satisfeita a priori pelas funções teste consideradas. Baseado no exposto acima, pode-se obter uma solução aproximada do problema admitindo funções de interpolação conhecidas para a distribuição de tensões e deslocamentos e escrevendo para cada elemento o campo de tensões em função de parâmetros $\underline{\beta}$, diferentes para cada elemento, e o campo de deslocamentos em função de deslocamentos generalizados \underline{q}^* , na forma seguinte:

$$\underline{\sigma} = \underline{P} \underline{\beta} \quad \text{em } V_n \quad (2.9)$$

onde a matriz \underline{P} deve ser tal que a condição $\sigma_{ij,i} = 0$ em V_n seja satisfeita identicamente; e

$$\underline{u} = \underline{N} \underline{q} \quad \text{em } V_n \quad (2.10)$$

onde a matriz \underline{N} interpola os deslocamentos no volume do elemento e deve garantir a continuidade de deslocamentos entre elementos e os deslocamentos generalizados \underline{q} devem satisfazer a condição de contorno $\underline{u} = \bar{\underline{u}}$ em S_u . Assim, as forças de tração \underline{T} em qualquer superfície de normal $\underline{\nu}$ podem ser calculadas como:

$$\underline{T} = \underline{\nu}^T \underline{\sigma} = \underline{R} \underline{\beta} \quad \text{onde } \underline{R} = \underline{\nu}^T \underline{P} \quad (2.11)$$

Substituindo (2.9), (2.10) e (2.11) em (2.8) vem:

$$\pi_{mc}^* = \sum_n \left\{ \int_{V_n} \left[\frac{1}{2} \underline{\beta}^T \underline{P}^T \underline{S} \underline{P} \underline{\beta} + \bar{\underline{F}}^T \underline{N} \underline{q} \right] dV - \int_{\partial V_n} \underline{\beta}^T \underline{R}^T \underline{N} \underline{q} dS + \int_{S_{\sigma n}} \bar{\underline{T}}^T \underline{N} \underline{q} dS \right\} \quad (2.12)$$

que pode ser simplificado na forma

* utiliza-se de agora em diante uma notação matricial.

$$\pi_{mc}^* = \sum_n \left[\frac{1}{2} \underline{\beta}^T \underline{H} \underline{\beta} + \underline{\bar{Q}}_{Fn}^T \underline{q} - \underline{\beta}^T \underline{G} \underline{q} + \underline{\bar{Q}}_{Tn}^T \underline{q} \right] \quad (2.13)$$

onde

$$\underline{H} = \iiint_{V_n} \underline{P}^T \underline{S} \underline{P} dV \quad (2.14)$$

$$\underline{\bar{Q}}_{Fn}^T = \iiint_{V_n} \underline{\bar{F}}^T \underline{N} dV \quad (2.15)$$

$$\underline{G} = \iint_{\partial V_n} \underline{R}^T \underline{N} dS \quad (2.16)$$

$$\underline{\bar{Q}}_{Tn}^T = \iint_{S\sigma_n} \underline{\bar{T}}^T \underline{N} dS \quad (2.17)$$

As condições estacionárias do funcional dado pela equação (2.13), com relação a variação dos parâmetros β e q , fornece as seguintes equações de Euler:

$$\underline{H} \underline{\beta} - \underline{G} \underline{q} = 0 \quad (*) \quad (2.18a)$$

$$\sum_n (-\underline{\beta}^T \underline{G} + \underline{\bar{Q}}_{Fn}^T + \underline{\bar{Q}}_{Tn}^T) \delta \underline{q} = 0 \quad (2.18b)$$

Os parâmetros de tensão β podem então ser calculados, para cada elemento, a partir da equação (2.18a), como:

$$\underline{\beta} = \underline{H}^{-1} \underline{G} \underline{q} \quad (2.18c)$$

A equação (2.18c), satisfeita, garante a compatibilidade do campo de deformação dentro de cada elemento [16] e a sua substituição em (2.13) permite que o funcional do problema seja expresso apenas em termos dos deslocamentos generalizados q , da seguinte forma:

* válida em cada elemento uma vez que os parâmetros β são independentes de elemento para elemento.

$$\mathcal{I}_{mc}^* = \sum_n \left[-\frac{1}{2} \underline{q}^T \underline{k}_n \underline{q} + \underline{\bar{Q}}_n^T \underline{q} \right] \quad (2.19a)$$

onde

$$\underline{k}_n = \underline{G}^T \underline{H}^{-1} \underline{G} \quad (2.19b)$$

$$\underline{\bar{Q}}_n = \underline{\bar{Q}}_{Fn} + \underline{\bar{Q}}_{Tn} \quad (2.19c)$$

Fazendo o somatório, obtém-se:

$$\mathcal{I}_{mc}^* = -\frac{1}{2} \underline{q}^T \underline{K} \underline{q} + \underline{\bar{Q}}^T \underline{q} \quad (2.20a)$$

onde

$$\underline{K} = \sum_n \underline{k}_n \quad (2.20b)$$

$$\underline{\bar{Q}} = \sum_n \underline{\bar{Q}}_n \quad (2.20c)$$

Finalmente, da condição estacionária do funcional acima, pode-se calcular os deslocamentos generalizados \underline{q} através da seguinte expressão:

$$\underline{q} = \underline{K}^{-1} \underline{\bar{Q}} \quad (2.21)$$

Em problemas dinâmicos, considera-se o Princípio de D'Alembert e admite-se que as forças de inércia são uma parcela das forças de campo $\underline{\bar{F}}$, tal que:

$$\underline{\bar{F}} = \underline{\bar{f}} - \rho \underline{\ddot{u}} \quad (2.22)$$

onde $\underline{\ddot{u}}$ são acelerações e $\underline{\ddot{u}} = \underline{N} \underline{\ddot{q}}$

Neste caso, reescreve-se a expressão (2.20), que agora é válida para um instante de tempo qualquer t , como:

$$\mathcal{I}_{mc}^* = -\frac{1}{2} \underline{q}^T \underline{K} \underline{q} - \underline{q}^T \underline{M} \underline{\ddot{q}} + \underline{q}^T \underline{\bar{Q}} \quad (2.23a)$$

onde

$$\underline{M} = \underline{\Sigma} \underline{m}_n \quad (2.23b)$$

e

$$\underline{m}_n = \iiint_{V_n} \rho \underline{N}^T \underline{N} dV \quad (2.23c)$$

Através da condição estacionária do funcional (2.23), obtém-se a seguinte equação diferencial que, integrada no tempo, fornece a solução aproximada de problemas dinâmicos:

$$\underline{M} \ddot{\underline{q}} + \underline{K} \underline{q} - \underline{\bar{Q}} = 0 \quad (2.24)$$

Observa-se que a grande vantagem do modelo híbrido é se poder considerar campos de tensão e deslocamentos independentes entre si sem, no entanto, aumentar o número de graus de liberdade no sistema final de equações (2.21). Como foi mostrado acima, os parâmetros de tensão que definem o campo de tensão de cada elemento são eliminados a nível de formulação do elemento (2.18), trabalhando-se no final simplesmente com uma matriz de rigidez (2.20). Isto permite que um elemento finito híbrido possa ser implementado, sem nenhuma dificuldade, em programas de computador baseados no modelo de deslocamentos.

Observa-se também, que o número de parâmetros de tensão β não pode ser qualquer, como foi demonstrado por Pian [16]. Uma inspeção da equação (2.18b) revela que não haverá, em geral, solução para os parâmetros de tensão β , se o número total destes parâmetros, de todos os elementos, for menor que o número de deslocamentos generalizados q do sistema. Na verdade, Fraeijs de Veubeke [7] mostrou que se, para um elemento, M é o número de parâmetros β , n o número de deslocamentos q e r o número de modos de corpo rígido, então a condição

$$M \geq n - r \quad (2.25)$$

deve ser satisfeita a fim de evitar-se a existência de modos cinemáticos neste elemento. Esta condição é necessária mas não suficiente.

CAPÍTULO 3

ANÁLISE DE PLACAS SANDUICHE E O ELEMENTO SNDQH1

A construção sanduiche foi idealizada visando aliar grande rigidez a pouco peso, a fim de tornar mais eficiente estruturas projetadas para esforços de compressão e/ou flexão. Um grande momento de inércia transversal é obtido através de duas faces finas de material rígido separadas entre si por uma camada mais espessa de material leve que tem por finalidade suportar o cisalhamento transversal e garantir a estabilidade das faces. A geometria típica é apresentada na Figura 3.1.

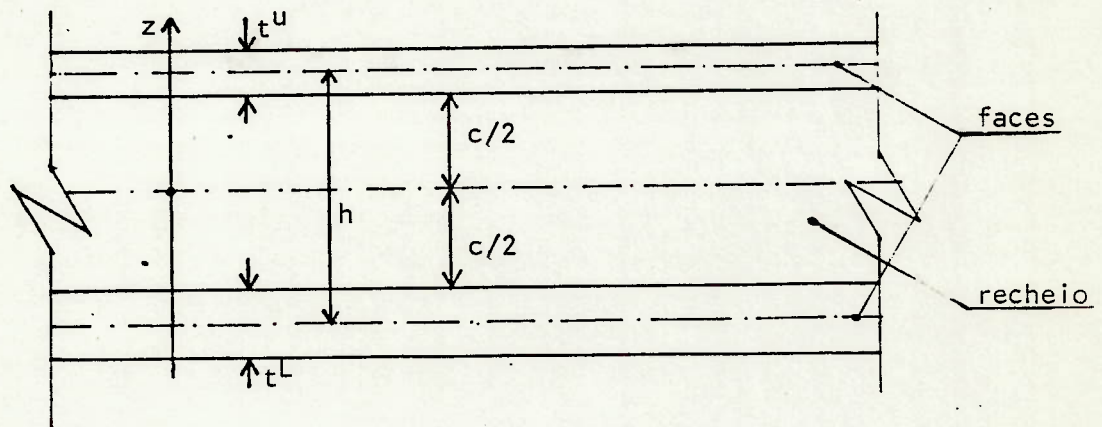


Fig. 3.1 - Geometria típica de uma placa sanduiche.

Na análise de placas de tipo sanduiche, a utilização da teoria clássica de Kirchhoff para placas finas não é aconselhável devido a pequena rigidez em cisalhamento do recheio. As deformações causadas pelo cisalhamento transversal não são desprezíveis, neste caso, e teorias de ordem superior devem ser consideradas. Algumas hipóteses podem ser formuladas na elaboração de uma teoria aproximada para placas sanduiche, que, embora simplificando o modelo de estudo, forneça resultados suficientemente bons para a utilização em problemas práticos de projetos de engenharia.

A seção 3.1 apresenta as suposições básicas admitidas na elaboração da teoria utilizada neste trabalho para análise de placas sanduiche.

A seguir, na seção 3.2, obtêm-se as equações específicas para análise de placas sanduiche a partir das hipóteses admitidas na seção 3.1. Aplica-se então, na seção 3.3, a formulação variacional e o modelo híbrido de elementos finitos, mostrados no Capítulo 2, para o caso específico de placas sanduiche, desenvolvendo-se o elemento SNDQH1.

3.1 - SUPOSIÇÕES BÁSICAS

Na construção do modelo matemático considerado neste trabalho, admitiu-se as seguintes hipóteses:

● CINEMÁTICAS

- a. Pequenos deslocamentos. Dada a grande rigidez do sanduiche, esta hipótese é realista e permite a consideração da teoria linear da elasticidade.
- b. Admite-se uma distribuição linear de deformação ao longo da espessura da placa.
- c. Tensões normais ao plano da placa são desprezíveis. Considera-se, assim, que o material do recheio tem módulo de elasticidade infinito na direção transversal e portanto o deslocamento lateral é constante ao longo da espessura da placa.

● GEOMÉTRICAS

- d. Faces finas. Considera-se que a razão t/h é pequena e que, portanto, as deformações das faces podem ser admitidas constantes ao longo de sua espessura e a rigidez a flexão das mesmas pode ser desprezada.
- e. Espessura da placa é constante.

● MATERIAL

- f. O material do recheio é ortotrópico e tem módulos de elasticidade no plano da placa nulos resistindo, portanto, apenas ao cisalhamento transversal.

- g. As faces podem ser constituídas de várias lâminas de material ortotrópico, orientadas livremente, resultando em um laminado anisotrópico.

3.2 - FORMULAÇÃO DA TEORIA DE PLACAS SANDUICHE

Inicialmente, define-se um sistema cartesiano de referência OXYZ, mostrado na Figura 3.2, a partir do qual serão definidos todas as funções de deslocamentos, deformações e tensões do problema. A geometria típica da placa sanduiche considerada é a mesma já mostrada na Figura 3.1 e a qual se supõe enquadrar-se dentro das hipóteses geométricas admitidas na seção anterior.

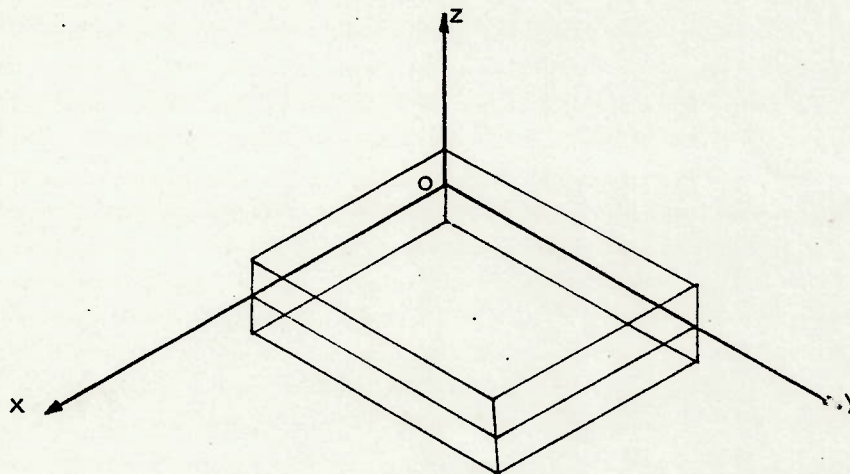


Fig. 3.2 - Sistema de referência utilizado .

A partir das hipóteses cinemáticas consideradas na seção 3.1, pode-se escrever os deslocamentos dos vários pontos materiais de uma placa sanduiche como:

$$\underline{u}(x,y,z) = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \\ w(x,y) \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \psi_x(x,y) \\ \psi_y(x,y) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.2.1)$$

As deformações podem ser calculadas a partir da expressão acima de acordo com a teoria linear da elasticidade (2.3). Como utiliza-se uma notação matricial, considera-se de agora em diante as chamadas deformações de engenharia por facilidade de escrita. Desta forma:

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{x0} + z \chi_x \\ \epsilon_{y0} + z \chi_y \\ 0 \\ w_{,x} + \psi_x \\ w_{,y} + \psi_y \\ \gamma_{xy0} + z \chi_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.2.2)$$

onde

$$\epsilon_{x0} = u_{,x} ; \quad \epsilon_{y0} = v_{,y} ; \quad \gamma_{xy0} = u_{,y} + v_{,x}$$

$$\chi_x = \psi_{x,x} ; \quad \chi_y = \psi_{y,y} ; \quad \chi_{xy} = \psi_{x,y} + \psi_{y,x}$$

A expressão (3.2.2) pode também ser escrita na forma:

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{Bmatrix} \underline{\underline{P}} \\ \underline{\underline{\epsilon}} \\ \underline{\underline{\gamma}} \end{Bmatrix} \quad (3.2.3a)$$

onde eliminou-se ϵ_z e

$$\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{\epsilon}}_0 + z \underline{\underline{\chi}} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{x0} \\ \epsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.2.3b)$$

$$\underline{\underline{\gamma}} = \begin{Bmatrix} w_{,x} + \psi_x \\ w_{,y} + \psi_y \end{Bmatrix} \quad (3.2.3c)$$

A hipótese de que as faces são finas permite que se considere as deformações de cada face constantes ao longo de sua espessura. Considerando o plano da meia espessura da placa, as deformações em cada face podem ser calculadas como segue:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^u = \underline{\underline{\varepsilon}}_0 + z^u \underline{\underline{\chi}} \quad (3.2.4a)$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^L = \underline{\underline{\varepsilon}}_0 - z^L \underline{\underline{\chi}} \quad (3.2.4b)$$

onde

$$z^u = \frac{1}{2} (c + t^u)$$

$$z^L = \frac{1}{2} (c + t^L)$$

As características do material de cada face laminada podem ser representadas, de forma geral, através de matrizes $\underline{\underline{k}}_Q$, as quais relacionam tensões e deformações na k-ésima lâmina da face, nas direções do referencial do problema [8]. Isto é:

$$\underline{\underline{k}}_{\sigma}^{u,L} = \underline{\underline{k}}_Q^{u,L} \underline{\underline{\varepsilon}}^{u,L} \quad (3.2.5)$$

onde

$$\underline{\underline{k}}_{\sigma}^{u,L} = \begin{Bmatrix} k_{\sigma_x}^{u,L} \\ k_{\sigma_y}^{u,L} \\ k_{\tau_{xy}}^{u,L} \end{Bmatrix}$$

Os esforços resultantes normais no laminado de cada face podem ser obtidos a partir de uma integração ao longo da espessura da face como segue:

$$\underline{\underline{N}}^{u,L} = \begin{Bmatrix} N_x^{u,L} \\ N_y^{u,L} \\ N_{xy}^{u,L} \end{Bmatrix} = \int_{-c}^c \underline{\underline{\sigma}} dz = \sum_k \underline{\underline{k}}_{\sigma}^{u,L} k_t^{u,L} = \underline{\underline{Q}}^{u,L} \underline{\underline{\varepsilon}}^{u,L} \quad (3.2.6)$$

onde:

$$\underline{Q}^{u,L} = \sum_k k_{\underline{Q}}^{u,L} k_{t}^{u,L}$$

A partir da expressão (3.2.6) os esforços resultantes normais na placa sanduiche podem ser calculados da seguinte forma:

$$\underline{N} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{c}{2} + t^u \\ \underline{\sigma} dz = \underline{N}^u + \underline{N}^L \\ -\frac{c}{2} - t^L \end{Bmatrix} \quad (3.2.7)$$

Os momentos agentes na placa sanduiche podem ser calculados pela seguinte integral:

$$\underline{M} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{c}{2} + t^u \\ \underline{\sigma} z dz \\ -\frac{c}{2} - t^L \end{Bmatrix} \quad (3.2.8)$$

Considerando as hipóteses admitidas na seção 3.1 de que as faces são finas (podendo-se desprezar a rigidez à flexão local das faces) e de que o material do recheio não resiste a esforços no plano da placa, o cálculo da expressão (3.2.8) pode ser simplificado, obtendo-se:

$$\underline{M} = \underline{N}^u z^u - \underline{N}^L z^L \quad (3.2.9)$$

Introduzindo as expressões (3.2.4) e (3.2.6) em (3.2.7) e (3.2.9) obtem-se:

$$\underline{N} = \underline{A} \underline{\epsilon}_0 + \underline{B} \underline{\chi} \quad (3.2.10a)$$

$$\underline{M} = \underline{B} \underline{\epsilon}_0 + \underline{D} \underline{\chi} \quad (3.2.10b)$$

onde:

$$\underline{A} = \underline{Q}^u + \underline{Q}^L$$

$$\underline{B} = \underline{Q}^u z^u - \underline{Q}^L z^L$$

$$\underline{D} = \underline{Q}^u (z^u)^2 + \underline{Q}^L (z^L)^2$$

Uma inspeção na expressão (3.2.3c) indica que as deformações de cisalhamento transversal são constantes ao longo da espessura da placa, uma vez que as funções w , ψ_x e ψ_y são constantes em z . Este fato, advindo das hipóteses cinemáticas admitidas, não traduz a distribuição real de cisalhamento transversal na placa. Isto pode ser verificado pelas condições de contorno nas superfícies externas das faces (onde as tensões τ_{xz} e τ_{yz} devem ser nulas) e evidencia-se ainda mais quando se observa os diferentes módulos de cisalhamento de faces e recheio em painéis reais. Este erro pode ser corrigido, como é feito nas teorias clássicas de placas e vigas, calculando-se a distribuição de cisalhamento transversal a partir das equações de equilíbrio do problema (equações 2.1), como segue:

$$\tau_{xz} = - \int [\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y}] dz + C \quad (3.2.11a)$$

$$\tau_{yz} = - \int [\tau_{xy,x} + \sigma_{y,y}] dz + C \quad (3.2.11b)$$

Aplicando-se as equações acima para o recheio, facilmente se demonstra que as tensões τ_{xz} e τ_{yz} são constantes ao longo de toda a sua espessura, uma vez que se admitiu, por hipótese, que as tensões no plano da placa são nulas no recheio. Para as faces, como as deformações são admitidas constantes ao longo da espessura e portanto as tensões são constantes em cada lâmina, verifica-se que as tensões de cisalhamento τ_{xz} e τ_{yz} variam linearmente em z . Estas tensões devem ser nulas nas superfícies externas das faces e apresentam a distribuição mostrada na Figura 3.3.

Como se supõe que as faces são muito mais rígidas em cisalhamento que o recheio (da ordem de 100 vezes mais rígida), são as deformações

deste último que tem interesse de serem consideradas. A Figura 3.4 apresenta a geometria de uma placa sanduiche deformada apenas por cisalhamento do recheio. Desprezou-se, portanto, a deformação de cisalhamento das faces. Desta figura é possível obter-se a seguinte relação geométrica entre as deformações de cisalhamento transversal da placa (3.2.3c) e do recheio:

$$\gamma_c = \frac{h}{c} \gamma \quad (3.2.12)$$

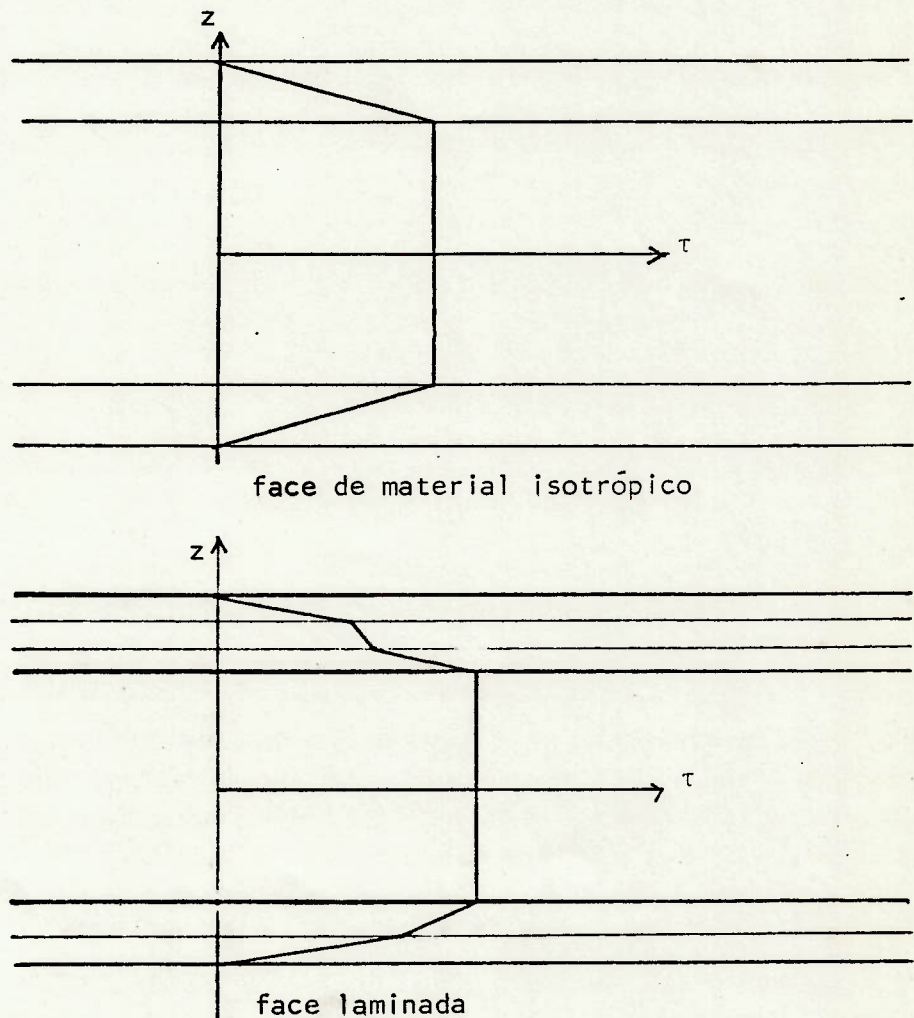


Fig. 3.3 - Distribuição de cisalhamento transversal ao longo da espessura da placa sanduiche.

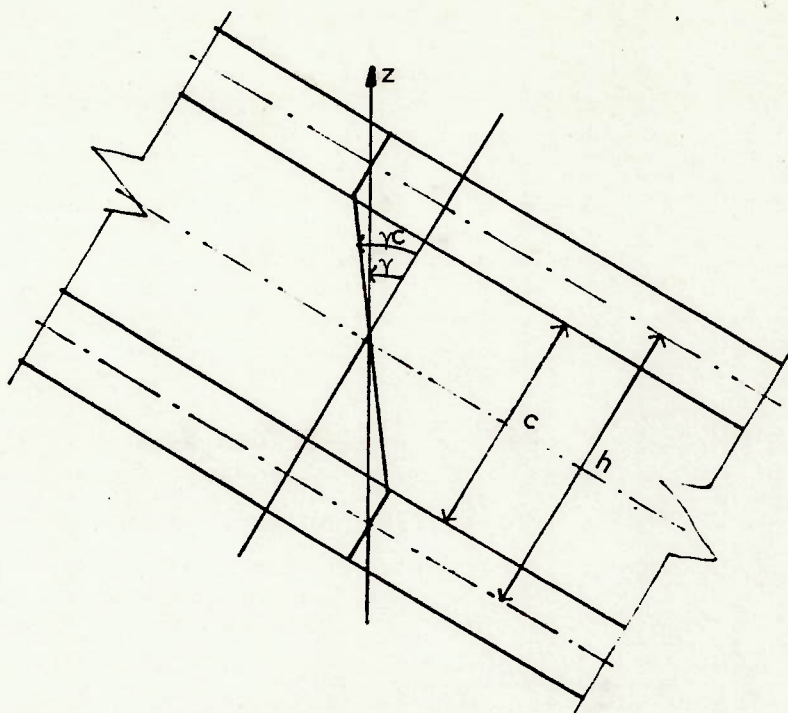


Fig. 3.4 - Geometria de uma placa sanduiche deformada por cisalhamento transversal do recheio.

A relação entre as tensões de cisalhamento no recheio e as deformações correspondentes são dadas pela expressão:

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz}^c \\ \tau_{yz}^c \end{Bmatrix} = \underline{G}^c \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^c \\ \gamma_{yz}^c \end{Bmatrix} \quad (3.2.13)$$

onde

$$\underline{G}^c = \begin{bmatrix} G_x^c & G_{xy}^c \\ G_{xy}^c & G_y^c \end{bmatrix}$$

é a matriz de material do recheio na direção dos eixos x e y. No caso destes eixos coincidirem com as direções principais de material do recheio, $G_{xy}^c = 0$.

As componentes da força cortante podem ser obtidas através de uma integração ao longo da espessura da placa, das tensões de cisalhamento transversal, como segue:

$$Q_x = \begin{cases} \frac{c}{2} + t^u \\ \tau_{xz} dz \equiv h \cdot \tau_{xz}^c \\ -\frac{c}{2} - t^L \end{cases} \quad (3.2.14a)$$

$$Q_y = \begin{cases} \frac{c}{2} + t^u \\ \tau_{yz} dz \equiv h \cdot \tau_{yz}^c \\ -\frac{c}{2} - t^L \end{cases} \quad (3.2.14b)$$

Considerando as expressões (3.2.12), (3.2.13) e (3.2.14) po-
de-se escrever:

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = h \begin{Bmatrix} \tau_{xz}^c \\ \tau_{yz}^c \end{Bmatrix} = \frac{h^2}{c} \cdot \underline{G}^c \underline{Y} \quad (3.2.15)$$

Pode-se ainda reunir as expressões (3.2.10) e (3.2.15) na for-
ma:

$$\underline{Q} = \underline{C} \underline{\epsilon}^* \quad (3.2.16)$$

onde

$$\underline{Q}^T = \{ \underline{N}^T \quad \underline{M}^T \quad Q_x \quad Q_y \}$$

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} & \underline{0} & \\ \underline{B} & \underline{D} & \underline{0} & \\ \underline{0} & \underline{0} & \frac{h^2}{c} \cdot \underline{G}^c & \\ & & & \end{bmatrix}$$

$$\underline{\epsilon}^{*T} = \{ \underline{\epsilon}_0^T \quad \underline{X}^T \quad \underline{Y}^T \}$$

As equações de equilíbrio para uma placa sanduiche, em termos de esforços resultantes, são as mesmas deduzidas para uma placa homogênea. Seguindo a orientação da Figura 3.5, onde os esforços considerados com sinal positivo estão esquematizados, e realizando um balanço de forças, obtem-se as seguintes expressões:

$$N_{x,x} + N_{xy,y} = 0 \quad (3.2.17a)$$

$$N_{xy,x} + N_{y,y} = 0 \quad (3.2.17b)$$

$$M_{x,x} + M_{xy,y} - Q_x = 0 \quad (3.2.17c)$$

$$M_{xy,x} + M_{y,y} - Q_y = 0 \quad (3.2.17d)$$

$$Q_{x,x} + Q_{y,y} - \bar{p} = 0 \quad (3.2.17e)$$

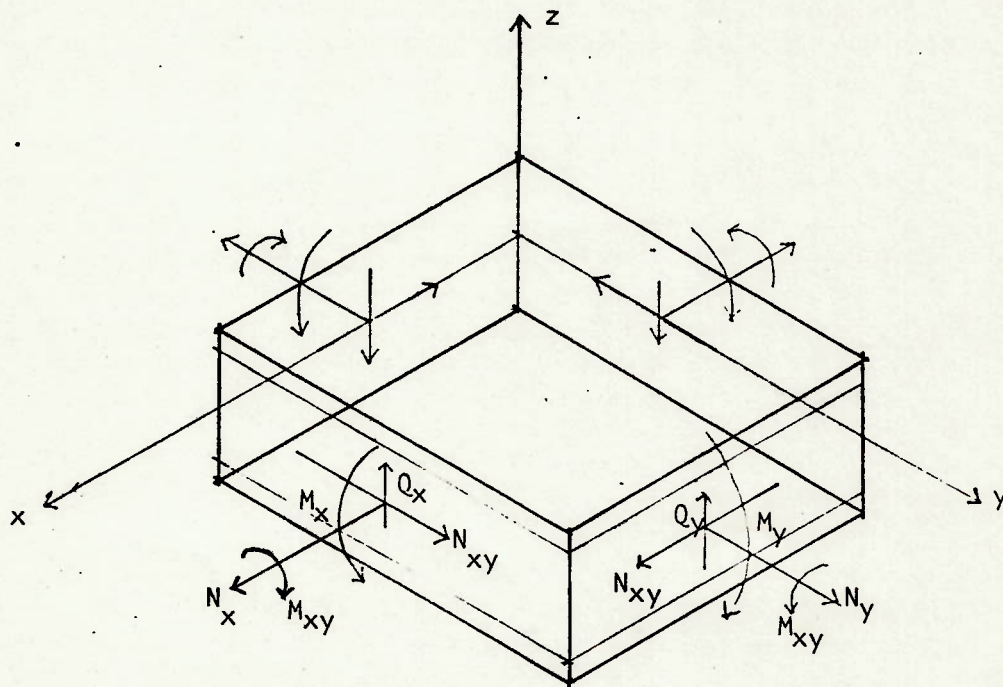


Fig. 3.5 - Convenção dos sentidos positivos dos esforços na placa.

As expressões (3.2.17a) e (3.2.17b) são as equações de equilíbrio de forças no plano. As expressões (3.2.17c, d, e) são as equações de equilíbrio na flexão de placas sanduiche. Estas três últimas expressões podem ainda ser escritas de forma integrada como:

$$M_{x,xx} + M_{xy,xy} + M_{y,yy} = \bar{p} \quad (3.2.18)$$

Analogamente às equações (2.1), (2.2) e (2.3) da elasticidade linear, as expressões (3.2.17), (3.2.16) e (3.2.2) são respectivamente as equações correspondentes para a solução de problemas de placas sanduiche sujeitas a cargas no plano e a cargas de flexão.

3.3 - O ELEMENTO SNDQH1

Nesta seção formula-se um elemento finito quadrilateral e iso paramétrico para a análise de placas e cascas sanduiche, baseado num modelo híbrido, com 4 nós e 5 graus de liberdade por nó. Utiliza-se, como base teórica, a formulação variacional e o método de elementos finitos apresentados no Capítulo 2, aplicados ao caso específico da teoria de sanduiche desenvolvida na seção anterior.

3.3.1 - GEOMETRIA E CONVENÇÕES CONSIDERADAS

A Figura 3.6 apresenta a geometria, os eixos locais de referência $\bar{o}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ e a incidência de numeração dos nós considerados para o elemento. Observa-se que:

- a. a origem \bar{o} dos eixos locais situa-se sobre o centro geométrico do elemento, calculado a partir das coordenadas dos quatro nós;
- b. o eixo \bar{z} é obtido pelo produto vetorial das duas diagonais ($\vec{V}_{13} \wedge \vec{V}_{24}$) e o plano perpendicular a \bar{z} , passando por \bar{o} , é denominado superfície de referência, sendo associado ao plano da meia espessura do recheio;
- c. o eixo \bar{x} está sobre a superfície de referência, é paralelo a reta que passa pelos centros dos lados 2-3 e 4-1 e é orientado como mostra a Figura 3.6;

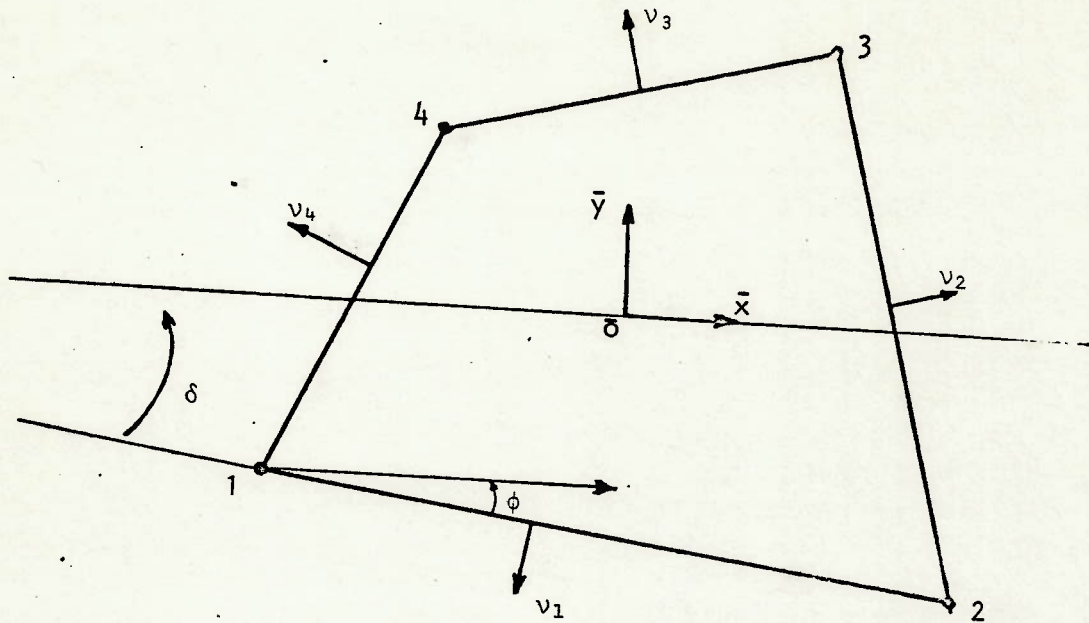


Fig. 3.6 - O Elemento SNDQH1.

- d. o eixo \bar{y} é obtido com o produto vetorial $\bar{z} \wedge \bar{x}$;
- e. a normal \vec{v} a cada lado é sempre orientada para fora do elemento;
- f. o ângulo entre o eixo \bar{x} e o lado 1-2 é denominado δ e o ângulo entre o lado 1-2 e a direção de referência de material do sanduiche (L) é denominado ϕ , com sentidos positivos indicados na Figura 3.6;
- h. os sentidos positivos dos esforços no elemento, em relação aos eixos locais, são os mesmos convencionados na Figura 3.5.

Com o intuito de facilitar os cálculos, considera-se um sistema auxiliar de coordenadas generalizadas (ou isoparamétricas) $\xi\eta$, como mostra a Figura 3.7. A transformação de coordenadas é feita com o auxílio da expressão abaixo. A matriz \underline{N}^* , na realidade, interpola as coordenadas \bar{x} e \bar{y} de qualquer ponto do elemento em relação as coordenadas dos 4 nós, quando as coordenadas ξ e η deste ponto são conhecidas.

$$\bar{\underline{x}} = \underline{N}^* \begin{Bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \\ \bar{x}_4 \end{Bmatrix} \quad (3.3.1a)$$

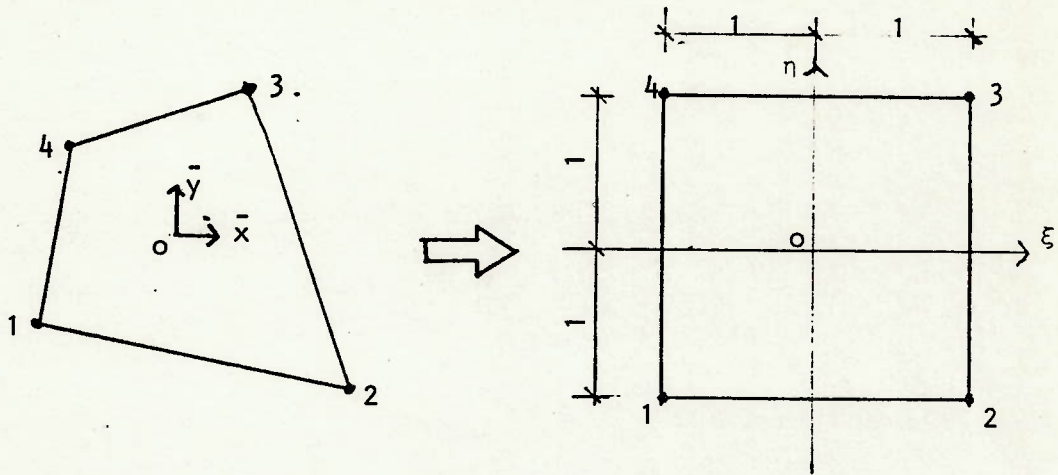


Fig. 3.7 - Transformação de coordenadas locais para coordenadas generalizadas.

$$\bar{y} = \underline{N}^* \begin{Bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \bar{y}_3 \\ \bar{y}_4 \end{Bmatrix} \quad (3.3.1b)$$

onde

$$\underline{N}^{*T} = \{N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4\} \quad (3.3.1c)$$

$$N_1 = \frac{1}{4} (1-\xi) (1-\eta) \quad (3.3.2a)$$

$$N_2 = \frac{1}{4} (1+\xi) (1-\eta) \quad (3.3.2b)$$

$$N_3 = \frac{1}{4} (1+\xi) (1+\eta) \quad (3.3.2c)$$

$$N_4 = \frac{1}{4} (1-\xi) (1+\eta) \quad (3.3.2d)$$

3.3.2 - MATRIZES DE INTERPOLAÇÃO

De acordo com as expressões (2.9) e (2.10), apresentadas no Capítulo 2, os campos de tensão e deslocamento podem ser aproximados através de funções de interpolação e parâmetros generalizados em cada elemento. Para o campo de tensões, utiliza-se neste trabalho 16 parâmetros de tensão β , para cada elemento, e a matriz de interpolação \underline{P} abaixo:

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \bar{y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \bar{x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \bar{x} & 0 & 0 & \bar{y} & 0 & 0 & \bar{x}\bar{y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \bar{x} & 0 & 0 & \bar{y} & 0 & 0 & \bar{x}\bar{y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \bar{x} & 0 & 0 & \bar{y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \bar{y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \bar{x} \end{bmatrix}$$

(3.3.3)

Na realidade, de acordo com a teoria de sanduiche desenvolvida na seção anterior, a matriz \underline{P} da expressão (3.3.3) interpola não tensões mais sim os esforços resultantes na placa sanduiche, de forma que:

$$\underline{Q} = \underline{P} \underline{\beta} \quad (3.3.4)$$

onde

\underline{Q} é definido na expressão (3.2.16).

A construção desta matriz \underline{P} seguiu a orientação dada pelos trabalhos de Pian [13] que desenvolveu vários elementos baseados em modelos híbridos. Observa-se que a interpolação dos esforços no elemento é sempre linear e que a equação homogênea de equilíbrio é identicamente satisfeita com esta matriz.

Uma inspeção da expressão (3.2.1) permite concluir que os deslocamentos de qualquer ponto no volume do elemento podem ser calculados a partir de 5 funções na superfície de referência, a saber: u , v , w , ψ_x e ψ_y .

Na interpolação destas funções no plano do elemento, utilizou-se, neste trabalho, os conceitos de isoparametria e considerou-se as mesmas funções de interpolação lineares usadas na definição da forma do elemento (3.3.2). Sendo a interpolação linear, apenas quatro parâmetros são necessários na determinação de cada função e, portanto, vinte parâmetros ou deslocamentos generalizados devem ser considerados ao todo. Os três deslocamentos lineares mais as rotações nos eixos \bar{x} e \bar{y} , em cada nó, foram escolhidos como estes deslocamentos generalizados. Desta forma, garante-se a continuidade C^0 de deslocamentos entre elementos uma vez que os deslocamentos em cada lado do elemento dependerão somente dos deslocamentos generalizados dos nós naquele mesmo lado. A definição das rotações ψ_x e ψ_y independentemente dos deslocamentos lineares garante, por sua vez, a rotação das seções transversais não necessariamente normal a superfície de referência e, portanto, a inclusão dos efeitos de deformação de cisalhamento transversal.

A interpolação de deslocamentos é obtida, então, da forma que se segue:

$$\underline{u}^* = \underline{N} \underline{q} \quad (3.3.5a)$$

onde

$$\underline{u}^{*T} = \{u \quad v \quad w \quad \psi_x \quad \psi_y\} \quad (3.3.5b)$$

$$\underline{q}^T = \{q_1^T \quad q_2^T \quad q_3^T \quad q_4^T\} \quad (3.3.5c)$$

$$q_i^T = \{u_i \quad v_i \quad w_i \quad \theta_{x_i} \quad \theta_{y_i}\} \quad (3.3.5d)$$

$$\underline{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4 \\ 0 & 0 & 0 & -N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -N_4 \end{bmatrix}$$

$$(3.3.5e)$$

N_1, N_2, N_3, N_4 - definidos nas expressões (3.3.2).

3.3.3 - RELAÇÕES CONSTITUTIVAS

A relação entre esforços e deformações no elemento é dada por uma matriz \underline{C} , apresentada na expressão (3.2.16). Esta matriz leva em conta as características dos materiais de cada face e do recheio e refere-se à uma direção de referência de material do sanduiche, uma vez que considera-se, no caso geral, laminados anisotrópicos para as faces. A orientação desta direção de referência do material do sanduiche no elemento é feita através do ângulo ϕ , mostrado na Figura 3.6, que deve ser fornecido para cada elemento (se diferente de zero). As características de material são fornecidas para cada lâmina das faces através de matrizes \underline{k}_Q (3.2.5), referentes às direções principais 1-2 de material, do tipo:

$$\underline{k}_Q = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{(1-\nu_{12} \nu_{21})} & \frac{\nu_{12} E_2}{(1-\nu_{12} \nu_{21})} & 0 \\ \frac{\nu_{21} E_1}{(1-\nu_{12} \nu_{21})} & \frac{E_2}{(1-\nu_{12} \nu_{21})} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \quad (3.3.6)$$

Para o recheio, apenas os módulos de cisalhamento transversal (G_{13} e G_{23}), nas direções principais do material, devem ser fornecidos.

De forma geral, procede-se da seguinte forma na obtenção da matriz \underline{C} : a partir das matrizes \underline{k}_Q e da orientação relativa (ângulo de laminação) de cada lâmina de uma face, calculam-se as matrizes \underline{Q}^u e \underline{Q}^l (3.2.6) na direção de referência do laminado de cada face. A seguir, rotacionam-se as matrizes \underline{Q}^u e \underline{Q}^l para a direção de referência de material do sanduiche, a partir da orientação da direção do laminado de cada face. Rotaciona-se também a matriz \underline{G}^c , da direção principal do material do recheio, para a direção de refe

rência de material do sanduiche. Em cada elemento, determinam-se estas mes mas três matrizes em relação ao sistema local, a partir dos ângulos ϕ e δ (ver Figura 3.6), e obtem-se, finalmente, a matriz \underline{C} para aquele elemento.

Qualquer rotação das matrizes de material das lâminas ou dos la minados das faces é feita utilizando-se a seguinte expressão:

$$\underline{Q}^s = \underline{T}^T \underline{Q}^r \underline{T} \quad (3.3.7a)$$

onde

\underline{Q}^s - matriz de material em uma direção s

\underline{Q}^r - matriz de material em uma direção r

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \cos^2\phi & \sin^2\phi & \sin\phi \cos\phi \\ \sin^2\phi & \cos^2\phi & -\sin\phi \cos\phi \\ -\sin 2\phi & \sin 2\phi & \cos 2\phi \end{bmatrix}$$

ϕ - ângulo entre as direções r e s, positivo no sentido anti-horário.

Na rotação da matriz \underline{G}^C do material do recheio utiliza-se a seguinte expressão, semelhante a (3.3.7a):

$$\underline{G}_s^C = \underline{T}_C^T \underline{G}_r^C \underline{T}_C \quad (3.3.7b)$$

onde

$$\underline{T}_C = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

3.3.4 - MATRIZ DE RIGIDEZ

No cálculo da matriz rigidez do elemento, segue-se exatamente o procedimento apresentado no capítulo 2. A matriz \underline{G} é obtida a partir das expressões (2.11) e (2.16), considerando-se a orientação dos vetores normais a cada lado do elemento mostrada na Figura 3.6 e utilizando uma integração numérica Gaussiana de 2 pontos em cada lado, da forma que se segue:

$$\underline{G} = \int_{1-2} \underline{P}^T \underline{v}_1 \underline{N} ds + \int_{2-3} \underline{P}^T \underline{v}_2 \underline{N} ds + \int_{3-4} \underline{P}^T \underline{v}_3 \underline{N} ds + \int_{4-1} \underline{P}^T \underline{v}_4 \underline{N} ds \quad (3.3.8a)$$

onde

\underline{P} , \underline{N} - matrizes de interpolação, seção 3.3.2

$$\underline{v}_i = \begin{bmatrix} m_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_i & 0 & 0 & 0 \\ n_i & m_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n_i \\ 0 & 0 & 0 & n_i & m_i \\ 0 & 0 & m_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_i & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3.8b)$$

m_i, n_i - cossenos diretores da normal ao lado i

A matriz \underline{H} é obtida a partir da expressão (2.14) através de uma integração numérica Gaussiana 2X2, como:

$$\underline{H} = \iint_{A_n} \underline{P}^T \underline{C}^{-1} \underline{P} dA = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 w_i w_j \underline{P}^T(\xi_i, \eta_j) \underline{C}^{-1} \underline{P}(\xi_i, \eta_j) \det[J] \quad (3.3.9)$$

onde \underline{P} - matriz de interpolação, seção 3.3.2

\underline{C} - seção 3.3.3

w - peso na integração em cada ponto

$\det[J]$ - determinante do Jacobiano da transformação de coordenadas

Por fim, a matriz de rigidez do elemento é calculada a partir das expressões (3.3.8) e (3.3.9), como indicado no capítulo 2 (2.19b), da seguinte forma:

$$\underline{k}_n = \underline{G}^T \underline{H}^{-1} \underline{G} \quad (3.3.10)$$

3.3.5 - MATRIZ DE MASSA

A matriz de massa do elemento é calculada com base na expressão (2.23c) como:

$$\underline{m}_n = \iint_{A_n} \underline{N}^T \underline{\rho} \underline{N} dA \quad (3.3.11)$$

onde: A_n - área do elemento
 \underline{N} - matriz de interpolação, seção 3.3.2

$$\underline{\rho} = \begin{bmatrix} \rho_m & 0 & 0 & \rho_{UL} & 0 \\ 0 & \rho_m & 0 & 0 & \rho_{UL} \\ 0 & 0 & \rho_m & 0 & 0 \\ \rho_{UL} & 0 & 0 & \rho_I & 0 \\ 0 & \rho_{UL} & 0 & 0 & \rho_I \end{bmatrix}$$

$$\rho_m = \rho^u \cdot t^u + \rho^c \cdot c + \rho^L \cdot t^L$$

$$\rho_{UL} = \rho^u \cdot t^u \cdot z^u - \rho^L \cdot t^L \cdot z^L$$

$$\rho_I = \rho^u \cdot \left[(z^u)^2 \cdot t^u + \frac{(t^u)^3}{12} \right] + \rho^c \cdot \frac{c^3}{12} + \rho^L \cdot \left[(z^L)^2 \cdot t^L + \frac{(t^L)^3}{12} \right]$$

3.3.6 - O SEXTO GRAU DE LIBERDADE

Com a finalidade de poder utilizar o elemento SNDQH1 na análise de cascas, sem recair em problemas na montagem da matriz de rigidez global de um modelo devido a um desbalanceamento numérico ou singularidade, inclui-se na sua formulação um sexto grau de liberdade, θ_z , com uma rigidez fictícia. Esta rigidez fictícia, fornecida através de uma função penalidade, não pode oferecer resistência ao movimento de corpo rígido $\theta_{z1} = \theta_{z2} = \theta_{z3} = \theta_{z4}$ ou a qualquer outro, e deve possuir um valor que evite o problema da singularidade sem incluir alterações significativas na solução [4 , 9].

A função penalidade utilizada é apresentada abaixo:

$$\begin{Bmatrix} M_{z1} \\ M_{z2} \\ M_{z3} \\ M_{z4} \end{Bmatrix} = \alpha \cdot A \cdot (E^U_t^U + E^L_t^L) \begin{bmatrix} 1,5 & -0,5 & -0,5 & -0,5 \\ -0,5 & 1,5 & -0,5 & -0,5 \\ -0,5 & -0,5 & 1,5 & -0,5 \\ -0,5 & -0,5 & -0,5 & 1,5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{z1} \\ \theta_{z2} \\ \theta_{z3} \\ \theta_{z4} \end{Bmatrix} \quad (3.3.12)$$

onde

- α - constante de valor 1×10^{-6}
- A - área do elemento
- E^U - módulo de elasticidade longitudinal do laminado da face superior
- E^L - módulo de elasticidade longitudinal do laminado da face inferior

CAPÍTULO 4

TESTES NUMÉRICOS E EXEMPLO DE APLICAÇÃO

A fim de demonstrar a eficiência e as limitações do elemento SNDQH1, apresentado neste trabalho, foram realizados vários testes numéricos, em modelos diversos, cujos resultados são mostrados e discutidos neste capítulo. Estes testes estão divididos em duas categorias: testes de precisão e convergência e testes de limitação. A finalidade dos primeiros é de mostrar a eficiência do elemento quando este é usado em modelos enquadrados dentro das hipóteses adotados (Seção 3.1). O segundo tipo de teste visa determinar os limites de utilização do elemento, discutindo a validade de algumas hipóteses consideradas na sua formulação.

Apresenta-se também neste capítulo um exemplo de aplicação do elemento SNDQH1 através da análise do painel central da estrutura do satélite de coleta de dados desenvolvido pelo INPE - Instituto de Pesquisas Espaciais - em São José dos Campos.

4.1 - TESTES DE PRECISÃO E CONVERGÊNCIA

Utilizou-se nestes testes, de forma geral, uma placa sanduíche moderadamente espessa ($h/a = 0,10$), isotrópica e retangular, com faces finas ($t/h = 0,01$) de alumínio e recheio do tipo colmeia também de alumínio, sujeita a um carregamento uniformemente distribuído por sua área. As dimensões e características dos materiais utilizados são:

$$\begin{array}{lll} t = 0,4 \text{ mm} & E_f = 68901 \text{ MPa} & \rho_f = 2,77 \times 10^{-6} \text{ kg/mm}^3 \\ h = 40 \text{ mm} & \nu_f = 0,33 & \rho_c = 3,68 \times 10^{-8} \text{ kg/mm}^3 \\ a = 400 \text{ mm} & G_c = 111,6 \text{ MPa} & \end{array}$$

Devido a simetria do problema, analisa-se apenas 1/4 da placa. Os resultados obtidos para cada modelo utilizado são apresentados a seguir. Estes vários modelos diferem entre si apenas pelas condições de contorno e geometria considerados.

4.1.1 - PLACA QUADRADA SIMPLEMENTE APOIADA

A tabela 4.1 apresenta a convergência do elemento SNDQH1, neste modelo, para a teoria de sanduiche em que se baseia a sua formulação [17], utilizando como parâmetros, a deflexão e o momento máximos na placa. Observa-se, pelos resultados, que a malha 4x4 pode já ser considerada convergida, neste modelo, apresentando um erro no valor da deflexão máxima menor que 1%.

TABELA 4.1

PLACA QUADRADA SIMPLEMENTE APOIADA

MALHA	w_{\max} (mm)	$\frac{w_{\max}}{w_{\text{exato}}}$ (1)	M_{\max} (N mm/mm)	$\frac{M_{\max}}{M_{\text{exato}}}$ (2)
1 x 1	7,4854	1,0984	2484,5	0,3242
2 x 2	6,9945	1,0263	6554,5	0,8552
4 x 4	6,8593	1,0065	7519,0	0,9811
8 x 8	6,8276	1,0018	7758,8	1,0124

(1) $w_{\text{exato}} = 6,815 \text{ mm}$ [17]

(2) $M_{\text{exato}} = 7664,0 \text{ Nmm/mm}$ [17]

A tabela 4.2 apresenta a convergência do elemento SNDQH1, neste modelo, no cálculo de frequências naturais. A comparação é feita com a teoria de placas de Kirchhoff e para tanto, neste caso, considerou-se uma colmeia rígida em cisalhamento ($G_c = 25.903 \text{ MPa}$). Pode-se observar que como a placa analisada é moderadamente espessa ($h/a=0,10$), o elemento converge para valores de frequência um pouco menores que os da solução analítica, devido à consideração da inércia de rotação e da deformação de cisalhamento. No caso de uma placa fina ($h/a=0,05$), quando estes efeitos são desprezíveis, observa-se que o elemento converge para a solução analítica apresentando resultados muito bons para o primeiro e segundo modos.

TABELA 4.2

PLACA QUADRADA SIMPLEMENTE APOIADA (FREQUÊNCIAS NATURAIS)

MALHA	h/a = 0,10				h/a = 0,05			
	f ₁₁ (Hz)	$\frac{f_{11} (1)}{f_{11exato}}$	f ₃₁ (Hz)	$\frac{f_{31} (2)}{f_{31exato}}$	f ₁₁ (Hz)	$\frac{f_{11} (3)}{f_{11exato}}$	f ₃₁ (Hz)	$\frac{f_{31} (4)}{f_{31exato}}$
2 X 2	1662,4	1,0318	11088,5	1,3761	421,7	1,0467	2932,1	1,4554
4 X 4	1601,3	0,9936	8247,9	1,0235	406,1	1,0079	2206,3	1,0952
8 X 8	1586,4	0,9844	7584,2	0,9412	402,2	0,9983	2024,3	1,0048

(1) f₁₁ exato = 1611,6 Hz

(3) f₁₁ exato = 402,9 Hz

(2) f₃₁ exato = 8058,2 Hz

(4) f₃₁ exato = 2014,6 Hz

4.1.2 - PLACA QUADRADA ENGASTADA

A tabela 4.3 apresenta a convergência do elemento SNDQH1, neste modelo, para uma solução analítica aproximada [17], utilizando como parâmetros a deflexão e o momento máximos. Neste caso utilizou-se espessura de face igual a 0,298 mm e h= 39,498 mm. Os resultados obtidos para os valores de deflexão são muito bons, como pode ser observado nesta tabela. Os erros encontrados para os valores de momento máximo, entretanto, são bastante grandes. Isto pode ser explicado pelo fato de que os valores de esforços obtidos no programa são relativos aos centros dos elementos mas o momento máximo obtido na solução analítica ocorre na extremidade da placa. Como a distribuição de momentos fletores, neste modelo, apresenta um grande gradiente na região de ocorrência do momento máximo, a diferença na posição do ponto onde os valores são calculados não pode ser desprezada. No modelo simplesmente apoiado esta diferença pode ser desconsiderada, uma vez que o mesmo gradiente é pequeno. Se, ao invés do momento máximo, considerarmos o valor do momento na posição do centro do elemento na malha 8 x 8, o erro seria de aproximadamente 5%.

TABELA 4.3

PLACA QUADRADA ENGASTADA

MALHA	w_{\max} (mm)	$\frac{w_{\max}}{w_{\text{exato}}}$ (1)	M_{\max} (N.mm/mm) (2)	$\frac{M_{\max}}{M_{\text{exato}}}$
1 x 1	5,4630	1,1804	-0	--
2 x 2	4,8834	1,0552	3083,4	0,4700
4 x 4	4,6545	1,0057	4095,0	0,6242
8 x 8	4,5984	0,9936	5482,9	0,8358

(1) $w_{\text{exato}} = 4,638$ mm [17]

(2) Valores nos centros dos elementos

(3) $M_{\text{exato}} = 6560 \frac{\text{N.mm}}{\text{mm}}$ [17]

4.1.3 - PLACA RETANGULAR SIMPLEMENTE APOIADA

A tabela 4.4 apresenta o comportamento do elemento SNDQH1, neste modelo, quando este tem sua geometria distorcida. Neste caso considerou-se placas retangulares, com a razão de aspecto b/a variando de 1 a ∞ , sendo analisadas sempre com uma mesma malha 4 x 4 tal que os elementos fossem distorcidos. Os resultados, como pode ser observado na tabela através do deslocamento no centro da placa, demonstram que a precisão da análise não é afetada de forma considerável, com a distorção do elemento.

TABELA 4.4

PLACA RETANGULAR SIMPLEMENTE APOIADA (MALHA 4x4)

CASO	b/a	$w_{\text{m\acute{a}ximo}}$	w_{exato} [17]	$\frac{w_{\text{m\acute{a}ximo}}}{w_{\text{exato}}}$
1	1,0	6,8593	6,8153	1,0065
2	1,2	8,9758	8,9147	1,0068
3	1,4	10,8231	10,7250	1,0091
4	1,6	12,3610	12,2840	1,0063
5	1,8	13,6049	13,5280	1,0057
6	2,0	14,5923	14,5210	1,0049
7	3,0	17,0414	17,0060	1,0021
8	4,0	17,5216	17,6800	0,9967
9	5,0	17,7195	17,8500	0,9927
10	∞	17,8850(*)	17,9050	0,9989

(*) b/a = 20

4.2 - TESTES DE LIMITAÇÃO

O objetivo destes testes é verificar quais as limitações de utilização do elemento SNDQH1 advindas das hipóteses sobre as quais se baseia a teoria que orienta a sua formulação (seção 3), bem como de outras limitações inerentes desta sua própria formulação.

Decidiu-se, neste trabalho, ater-se a apenas dois testes, a saber: flexão anticlástica e estudo da variação dos parâmetros t/h e h/a. Com o primeiro pretende-se averiguar a existência de modos cinemáticos no elemento, o que poderia torná-lo inadequado para análises de modelos nos quais estes mesmos modos estivessem presentes. O segundo teste, mais extenso, objetiva discutir a hipótese de faces finas, que a teoria admite (seção 3.1), e verificar os limites práticos de utilização do elemento SNDQH1, em termos dos parâmetros h/a e t/h, dentro dos quais se obtêm resultados confiáveis.

4.2.1 - FLEXÃO ANTICLÁSTICA

O modelo utilizado compõe-se de apenas um elemento quadrado, sujeito às condições de contorno e a uma força localizada mostrados na Figura 4.1. Esta análise demonstrou que o elemento SNDQH1 não apresenta os modos cinemáticos, forçados por este modelo. Com uma análise de autovalores de sua matriz de rigidez, poder-se-ia averiguar a existência de outros possíveis modos. Esta análise não foi incluída neste trabalho.

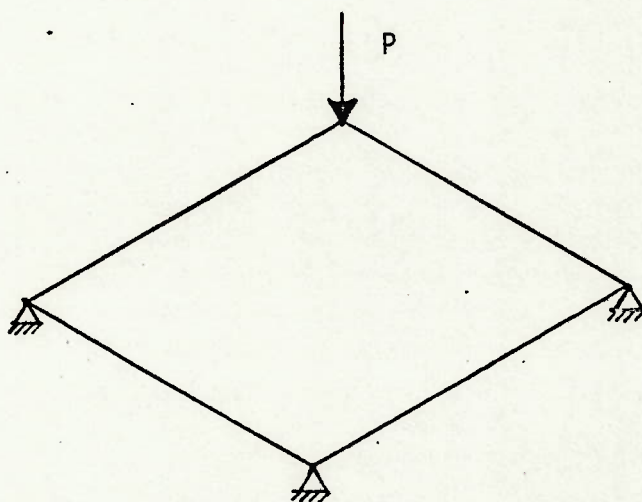


Fig. 4.1 - Modelo para o teste de flexão anticlástica.

4.2.2 - VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS t/h E h/a

Uma das suposições básicas em que se baseia a teoria de sanduiche utilizada neste trabalho é a de que o painel sanduiche tem faces finas. Esta hipótese simplifica o cálculo da rigidez do elemento, a distribuição de deformações ao longo da espessura do elemento e até o número de graus de liberdade considerados. O objetivo deste teste é avaliar o significado do termo "faces finas", apresentando, como resultado, limites práticos de utilização do elemento SNDQH1 em termos dos parâmetros geométricos t/h e h/a .

Como procedimento, decidiu-se, em primeiro lugar, comparar a teoria do sanduiche aproximada com a solução exata da elasticidade para um modelo em que as duas soluções analíticas fossem conhecidas. Desta for

ma, pode-se obter os limites de utilização da teoria considerada analisando o valor do erro encontrado em cada caso. Numa segunda etapa, demonstra-se a convergência do elemento SNDQH1 para esta mesma teoria aproximada, e que com põe a sua formulação, de forma semelhante ao que foi feito na seção 4.1.1.

O modelo escolhido para análise foi o de uma placa sanduiche quadrada, simplesmente apoiada e sujeita a um carregamento distribuido se noidal, como mostrado na Figura 4.2. As dimensões do modelo, em cada caso, são calculadas a partir das espessuras de face, visando os valores de h/a e t/h desejados. Dois programas de computador foram desenvolvidos para auxi liar na determinação das soluções analíticas aproximada e exata deste modelo. A solução da teoria de sanduiche aproximada deste modelo é bastante conheci da e pode ser encontrada em várias referências [1, 17]. A solução exata da elasticidade deste modelo foi retirada do trabalho de Pagano [12].

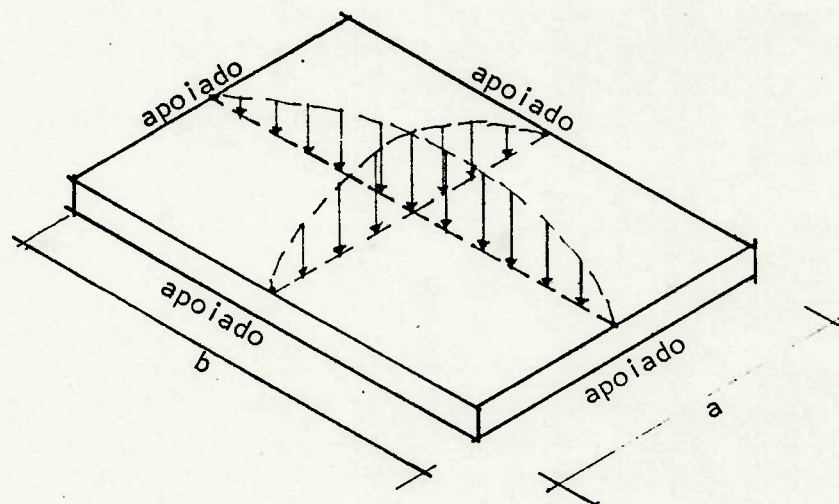


Fig. 4.2 - Modelo para o teste de variação dos parâmetros t/h e h/a .

O material utilizado no recheio foi uma colmeia ortotrópica. Nas faces, dois tipos distintos de material foram considerados. No primeiro, as faces são laminadas, com duas camadas 0-90 de fibra de carbono unidirecio nal. No segundo caso, as faces são laminadas, de tecido de fibra de vidro, em duas camadas. As características destes materiais são:

Fibra de carbono: $E_1 = 132.000 \text{ MPa}$
 $E_2 = 12.000 \text{ MPa}$
 $\nu_{12} = 0,27$
 $G_{12} = 5.000 \text{ MPa}$
Espessura da lâmina = 0,19 mm

Fibra de Vidro: $E_1 = 31.000 \text{ MPa}$
 $E_2 = 31.000 \text{ MPa}$
 $\nu_{12} = 0,16$
 $G_{12} = 4.200 \text{ MPa}$
Espessura da lâmina = 0,21 mm

Recheio : $G_{13} = 48 \text{ MPa}$
 $G_{23} = 24 \text{ MPa}.$

Os resultados obtidos, em termos do erro no valor da deflexão no centro da placa, estão mostrados nas tabelas 4.5 e 4.6. A Figura 4.3 ilustra melhor estes mesmos resultados. Nesta Figura estão mostrados também, através dos parâmetros t/h e h/a , os limites geométricos de placas sanduíche usualmente encontrados na prática e construídos tanto em alumínio como com materiais compostos. Observa-se que para toda a faixa encontrada na prática, a teoria aproximada fornece erros para deslocamento menores que 5% no modelo testado, e para boa parte desta mesma faixa os erros são menores que 1%.

Pode ser observado também que o painel com faces mais rígidas (fibra de carbono) apresenta erros maiores para a mesma geometria. Este fato pode ser atribuído a um deslocamento horizontal das faces, na deformação por cisalhamento, uma em relação a outra, tanto maior quanto maior for a rigidez das faces. Este deslocamento, considerado na solução exata da elasticidade é desprezado na teoria aproximada, tanto nas hipóteses cinemáticas como nas condições de contorno adotadas.

TABELA 4.5

VALORES DE $w(\text{aproximado})/w(\text{exato})$ PARA O MODELO DE FIBRA DE VIDRO

$t/h \backslash h/a$	0,01	0,05	0,07	0,10
0,01	1,0088	1,0076	1,0067	1,0054
0,02	1,0043	1,0033	1,0027	1,0021
0,03	1,0027	1,0020	1,0017	1,0016
0,04	1,0020	1,0017	1,0017	1,0020
0,05	1,0016	1,0017	1,0021	1,0032
0,08	1,0010	1,0036	1,0060	1,0110
0,10	1,0009	1,0064	1,0110	1,0206
0,15	1,0014	1,0191	1,0338	1,0639
0,20	1,0027	1,0412	1,0735	1,1398

TABELA 4.6

VALORES DE $w(\text{aproximado})/w(\text{exato})$ PARA O MODELO DE FIBRA DE CARBONO

$t/h \backslash h/a$	0,01	0,05	0,07	0,10	0,15	0,20
0,01	1,0046	1,0033	1,0027	1,0024	1,0026	1,0026
0,02	1,0021	1,0010	1,0014	1,0025	1,0040	1,0051
0,03	1,0012	1,0009	1,0024	1,0047	1,0067	1,0088
0,04	1,0007	1,0016	1,0042	1,0076	1,0118	1,0157
0,05	1,0003	1,0030	1,0041	1,0114	1,0171	1,0228
0,08	0,9995	1,0100	1,0176	1,0274	1,0426	1,0612
0,10	0,9992	1,0168	1,0276	1,0425	1,0695	1,1028
0,15	0,9995	1,0441	1,0670	1,1002	1,1797	1,2827
0,20	1,0007	1,0751	1,1172	1,1903	1,3538	1,5745

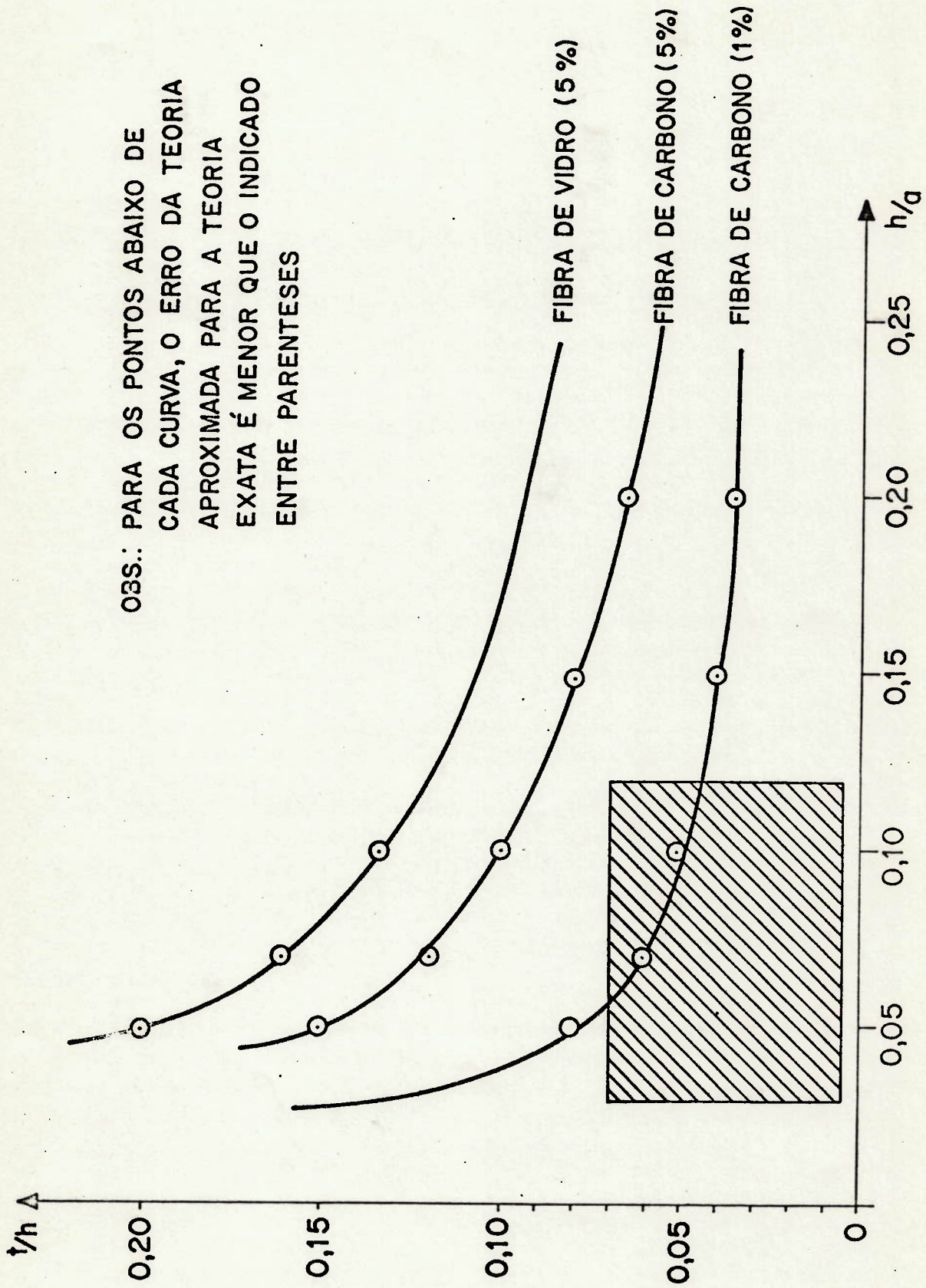


Fig. 4.3 - Limites dos Parâmetros Geométricos t/h e h/g da Teoria Aproximada de Sanduiche.

Demonstra-se agora, seguindo o procedimento apresentado anteriormente, a convergência do elemento SNDQH1 para a teoria aproximada. Na Tabela 4.7 estão sumarizados os resultados obtidos, e nas Figuras 4.4 e 4.5 estes mesmos resultados são ilustrados para uma melhor visualização. O modelo analisado é, logicamente, o mesmo utilizado na comparação entre as soluções aproximada e exata, com o parâmetro $h/a = 0,10$ e com o parâmetro t/h variando de 0,01 a 0,20. Novamente a comparação é feita através dos valores de deflexão no centro da placa.

É necessário dizer que a solução aproximada, utilizada para comparação, inclui a rigidez em flexão das faces no cálculo da rigidez a flexão da placa. Na formulação do elemento esta rigidez foi desprezada em virtude da suposição de faces finas. De fato, para valores de t/h menores ou iguais a 0,17, a rigidez de flexão local das faces pode ser desprezada sem que isto acarrete, na solução, erros maiores que 1% [1]. A inclusão ou não desta rigidez explica o aumento do erro com o aumento do valor de t/h na última coluna da Tabela 4.7. Entretanto, como pode ser observado nesta mesma tabela, os erros não são maiores que 1% e verifica-se uma boa correspondência entre os valores obtidos com o elemento SNDQH1 e aqueles calculados pela teoria aproximada.

A tabela 4.8, de forma semelhante à tabela 4.7, mostra o erro apresentando pelo elemento SNDQH1 no cálculo de tensões em relação a solução exata. Observa-se que, dentro dos limites práticos de utilização do elemento mostrados anteriormente ($t/h \leq 0,07$), os erros são pequenos mesmo considerando que os valores de tensão do elemento referem-se ao seu centro e os valores máximos da solução exata são no centro da placa, para σ_1 e σ_2 e no meio de um lado, para τ_{13} . Observa-se também erros bem menores no cálculo das tensões de cisalhamento transversal no recheio do que no cálculo das tensões normais nas lâminas da face. No cálculo desta última, o erro é menor no cálculo das tensões na direção de material do que das tensões na direção transversal, principalmente, quando lâminas de fibra unidirecional são utilizadas.

Finalmente, uma comparação do elemento SNDQH1 com o elemento MLQSH1, da referência [9], foi realizada e está mostrada na tabela 4.9. O elemento MLQSH1 é um elemento quadrilateral para análise de placas lamina

TABELA 4.7

CONVERGÊNCIA DO ELEMENTO SNDQH1 PARA AS SOLUÇÕES EXATA E APROXIMADA

MATERIAL	t/h	MALHA	SOL. EXATA	SOL. APROX.	SOL. SNDQH1	SNDQH1 EXATA	SNDQH1 APROXIMADA
CARBONO	0,01	2 x 2	10,1280	10,1519600	11,006900	1,0868	1,0842
	0,01	4 x 4	10,1280	10,1519600	10,368600	1,0237	1,0213
	0,01	8 x 8	10,1280	10,1519600	10,215900	1,0087	1,0063
	0,05	8 x 8	1,20090	1,2146130	1,226140	1,0210	1,0095
	0,10	8 x 8	0,50854	0,5301653	0,535708	1,0534	1,0104
	0,15	8 x 8	0,29480	0,3243502	0,327757	1,1118	1,0105
FIBRA DE VIDRO	0,20	8 x 8	0,18956	0,2256328	0,228174	1,2037	1,0113
	0,01	8 x 8	15,80300	15,8875700	15,959200	1,0099	1,0045
	0,05	8 x 8	1,54590	1,5507800	1,559790	1,0090	1,0058
	0,10	8 x 8	0,62794	0,6408743	0,645013	1,0272	1,0064
	0,15	8 x 8	0,36053	0,3835580	0,386232	1,0713	1,0070
	0,20	8 x 8	0,23140	0,2637429	0,265713	1,1483	1,0075

Obs.: Valores de deflexão no centro da placa, em mm.

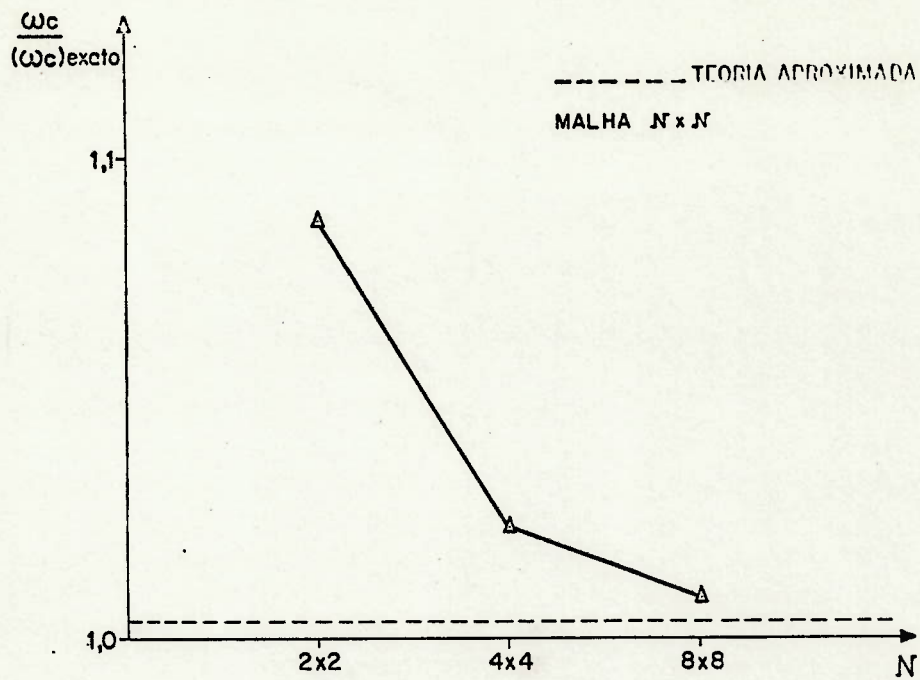


Fig. 4.4 - Convergência do elemento SNDQH1 para a solução aproximada ($h/a=0,10$, $t/h = 0,01$).

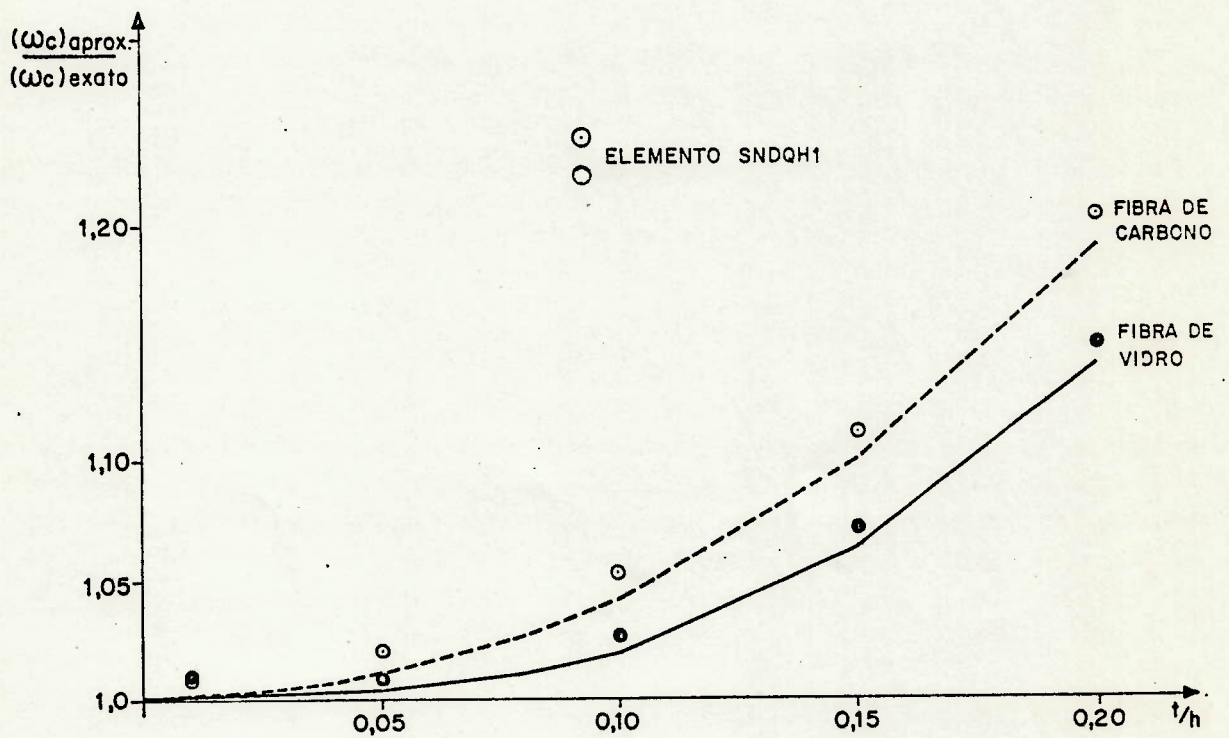


Fig. 4.5 - Erro percentual no valor de deslocamentos do elemento SNDQH1 em relação à solução exata.

TABELA 4.8

CONVERGÊNCIA DE TENSÕES DO ELEMENTO SNDQH1 PARA A SOLUÇÃO EXATA ($h/a = 0,10$)

MATERIAL	t/h	MALHA	SOLUÇÃO EXATA			SOLUÇÃO SNDQH1				SOLUÇÃO SNDQH1 SOLUÇÃO EXATA		
			$\sigma_1(1)$	$\sigma_2(1)$	$\sigma_{13}(2)$	$\sigma_1(3)$	$\sigma_2(3)$	$\sigma_{13}(4)$	σ_1	σ_2	σ_{13}	
CARBONO	0,01	2x2	96745	8037,8	-187,24	78388	6404,0	-159,38	0,8102	0,7967	0,8512	
	0,01	4x4	96745	8037,8	-187,24	91893	7550,1	-179,46	0,9498	0,9393	0,9584	
	0,01	8x8	96745	8037,8	-187,24	95475	7855,7	-184,66	0,9868	0,9773	0,9862	
	0,05	8x8	21953	1861,5	-204,59	21100	1434,7	-201,54	0,9611	0,7707	0,9851	
	0,10	8x8	11613	1419,1	-205,86	10769	702,44	-205,23	0,9273	0,4950	0,9969	
	0,15	8x8	8013,9	1392,9	-199,95	7232,5	464,56	-206,84	0,9025	0,3335	1,0345	
	0,20	8x8	6084,4	1397,2	-188,55	5445,3	347,09	-207,27	0,8950	0,2484	1,0993	
	0,01	8x8	46139	36353	-175,24	45581	35898	-172,89	0,9879	0,9875	0,9866	
PLACA DE VIDRO	0,05	8x8	11272	6819,9	-193,73	10357	5938,7	-192,45	0,9188	0,8708	0,9934	
	0,10	8x8	6679,3	4084,1	-196,56	5387,9	2760,0	-199,04	0,8066	0,6758	1,0126	
	0,15	8x8	5190,7	3428,3	-190,80	3650,1	1781,8	-201,80	0,7032	0,5197	1,0576	
	0,20	8x8	4400,3	3132,8	-178,96	2761,1	1312,9	-203,27	0,6275	0,4191	1,1358	

(1) tensão no meio da lâmina externa da face inferior, no centro da placa.

(2) tensão no meio do recheio, na metade da extremidade da placa paralela a y.

(3) tensão na lâmina externa da face inferior, no centro do elemento próximo ao centro da placa.

(4) tensão no recheio, no centro do elemento próximo à metade da extremidade da placa paralela a y.

TABELA 4.9

COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS DO ELEMENTO SNDQH1 COM O ELEMENTO MLQSH1 [9]

t/h	MALHA	$\frac{w(\text{SNDQH1})}{w(\text{exato})}$	$\frac{w(\text{MLQSH1})}{w(\text{exato})}$	$\frac{\sigma_1(\text{SNDQH1})}{\sigma_1(\text{exato})}$	$\frac{\sigma_1(\text{MLQDH1})}{\sigma_1(\text{exato})}$	$\frac{\sigma_2(\text{SNDQH1})}{\sigma_2(\text{exato})}$	$\frac{\sigma_2(\text{MLQSH1})}{\sigma_2(\text{exato})}$
0,01	8x8	1,0099	0,9914	0,9879	0,9636	0,9875	0,9548
0,05	8x8	1,0090	1,0092	0,9188	0,9368	0,8708	0,8848
0,10	8x8	1,0272	1,0246	0,8066	0,8426	0,6758	0,7057
0,15	8x8	1,0713	1,0613	0,7032	0,7494	0,5197	0,5548
0,20	8x8	1,1483	1,1261	0,6275	0,6802	0,4191	0,4561

das, baseado também em um modelo híbrido de tensões assumidas, e que se mostrou competitivo como elemento QUAD4 do pacote comercial NASTRAN. Utilizou-se o modelo de fibra de vidro e comparou-se os valores obtidos de deflexão no centro da placa e de tensões na lâmina externa da face inferior. Os resultados foram bastante similares, sendo que, para $t/h = 0,01$, o elemento deste trabalho apresenta valores de tensão mais precisos que o elemento MLQSH1.

4.3 - EXEMPLO DE APLICAÇÃO

A fim de exemplificar e demonstrar a capacidade de análise do elemento SNDQH1, proposto neste trabalho, apresenta-se a seguir uma análise do painel central da estrutura do satélite de coleta de dados da Missão Espacial Completa Brasileira, em desenvolvimento, atualmente, no Instituto de Pesquisas Espaciais - INPE.

Este painel é octogonal, do tipo sanduiche colado, com faces e recheio colméia de alumínio. Devido a simetria da estrutura e da carga, apenas 1/4 do painel foi considerado no modelo. A geometria e características dos materiais utilizados, bem como a discretização e sistema de referência considerados na análise, estão mostrados na Figura 4.6. Neste modelo a extremidade do painel é considerada engastada e a extremidade externa livre. A carga de projeto, aplicada no satélite pelo veículo lançador, é inercial e igual a uma aceleração axial (na direção do eixo z) de 20g. Considera-se uma massa distribuída uniformemente por toda a área, igual a $1,0961 \times 10^{-5}$ kg/mm², e que simula além da massa própria, a massa dos equipamentos fixados ao painel.

A figura 4.7 apresenta os resultados obtidos para a deflexão do painel em uma análise estática, onde considerou-se a colméia isotrópica ($G_c = 111,6$ MPa). Para comparação utiliza-se os resultados da referência [2], onde o mesmo painel foi analisado (com a mesma malha) com um elemento de casca isotrópica, isoparamétrico, de 8 nós e 5 graus de liberdade por nó, baseado num modelo de compatibilidade. Nesta referência, o painel sanduiche foi modelado como uma placa homogênea através de propriedades equivalentes. Apesar da interpolação de ordem superior do elemento utilizado em [2], os va

lores de deflexão obtidos nos dois trabalhos são bastante próximos, com um desvio máximo de 1%. Por esta razão não foi possível plotar duas curvas distintas naquela figura, onde apenas os valores máximos de deflexão estão mostrados. Na tabela 4.10 apresentam-se os valores de momento máximo obtidos com o elemento SNDQH1 e na referência [2]. Observa-se que, devido a um número de equações e a uma largura de banda menores no modelo deste trabalho, a utilização do elemento SNDQH1 mostrou-se vantajosa uma vez que obteve-se resultados equivalentes com um tempo de processamento muito menor.

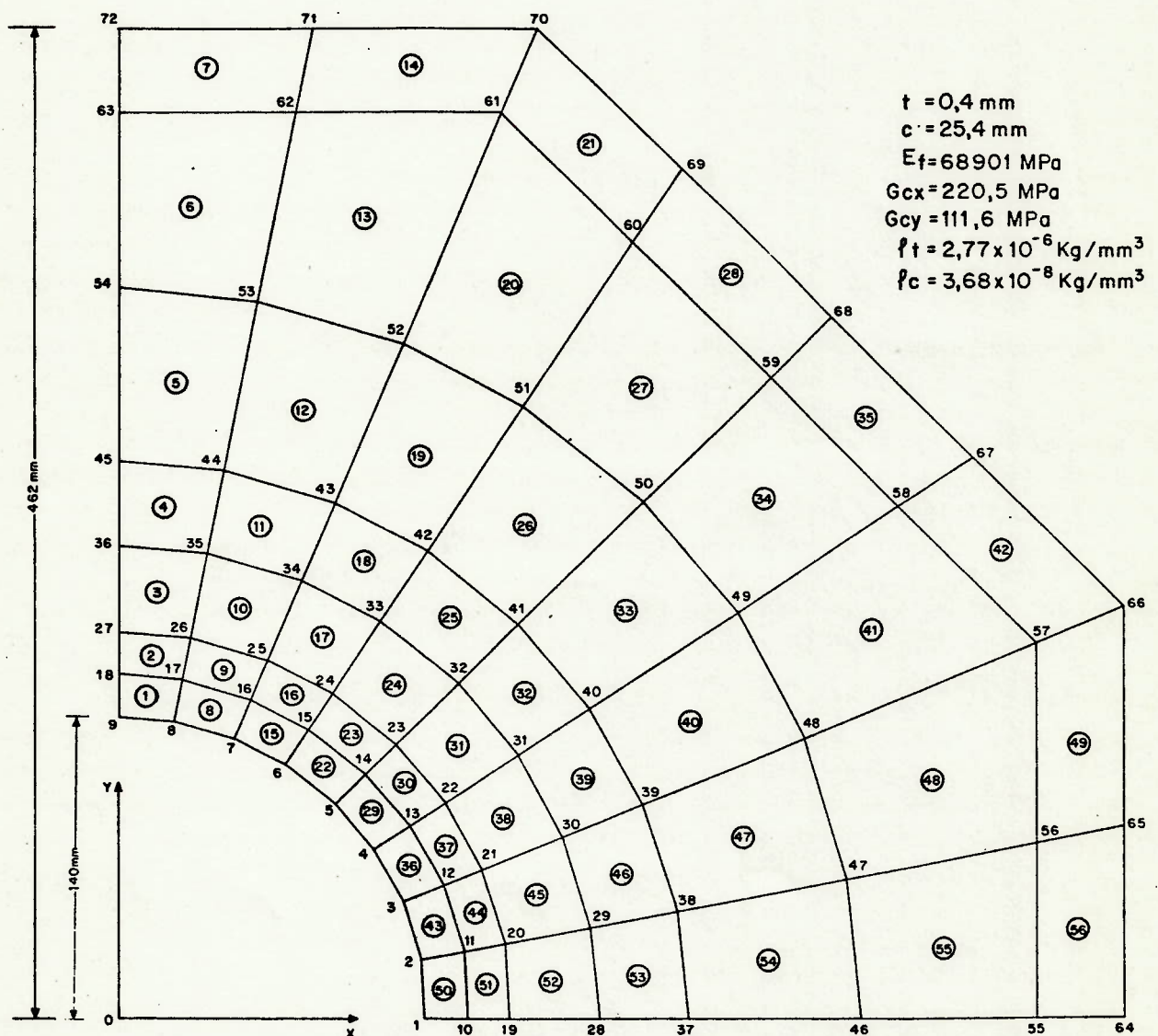


Fig. 4.6 - Geometria e Discretização do Modelo do Painel Central do Satélite de Coleta de Dados.

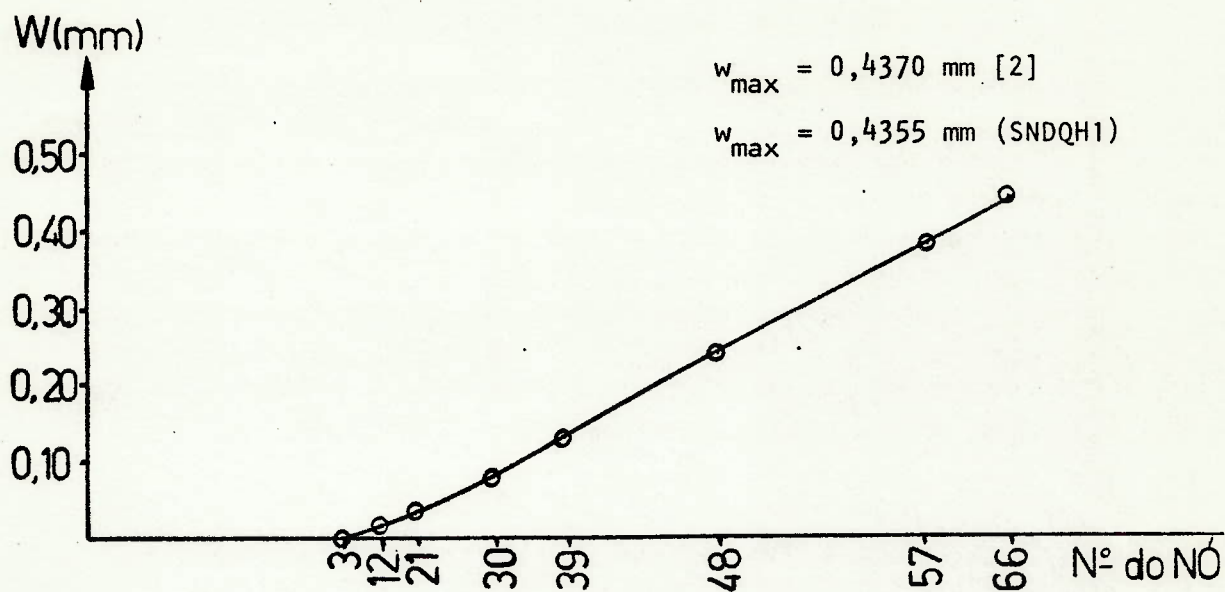


Fig. 4.7 - Deflexão do painel central do satélite de coleta de dados.

TABELA 4.10

VALORES DE MOMENTO MÁXIMO NO PAINEL CENTRAL DO SATÉLITE

	M_{radial}	$M_{\text{circunf.}}$
SNDQH1	- 177,2	- 68,5
REF. [2]	- 177,7	- 69,2

Obs.: valores no centro do elemento 1, em N.mm/mm.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES

Apresentou-se neste trabalho a formulação de um elemento finito bastante simples para a análise de placas e cascas sanduiche, baseado num modelo híbrido de tensões assumidas. Foram incluídos na formulação a deformação por cisalhamento transversal, o efeito do acoplamento dos comportamentos em membrana e flexão e a matriz de massa para análise de problemas dinâmicos. Estruturas sanduiche, utilizando material de recheio ortotrópico e/ou faces laminadas anisotrópicas, podem ser analisadas com este elemento, denominado SNDQH1. Embora todos os exemplos apresentados tenham sido de análise de placas, o elemento SNDQH1 está implementado de modo a permitir a modelagem de cascas do tipo sanduiche, utilizando-se para isso um modelo facetado.

Os resultados apresentados no capítulo anterior demonstram um comportamento excelente do elemento na análise de flexão de placas sanduiche, tanto isotrópicas quanto ortotrópicas. Os resultados foram bons mesmo quando o elemento foi utilizado em malhas distorcidas com uma grande razão de aspecto. A convergência observada tanto dos deslocamentos quanto dos esforços, foi rápida e a precisão obtida bastante satisfatória. No cálculo de frequências naturais, os resultados apresentados foram também muito bons e, de forma geral, o elemento SNDQH1 mostrou-se ser uma ferramenta eficiente na análise de estruturas utilizando construção sanduiche.

Durante os testes efetuados, nenhum modo cinemático foi detectado no comportamento do elemento, embora uma análise de autovalores da matriz de rigidez não tenha sido realizada. A hipótese de faces finas, admitida na formulação, mostrou-se realista após o estudo paramétrico, feito para a geometria do elemento no problema de flexão de uma placa quadrada simplesmente apoiada. Dentro dos limites de espessuras de faces e recheio de placas sanduiche, normalmente encontrados em estruturas reais ($0,005 \leq t/h \leq 0,07$; $0,03 \leq h/a \leq 0,12$), demonstrou-se que o elemento SNDQH1 apresenta erros bastante pequenos em relação à solução exata da elasticidade, nos modelos testados.

A hipótese de que o material do recheio não resiste a cargas no plano do elemento, também admitida na formulação, não foi discutida no capítulo anterior. Em outras palavras, o que se fez foi desprezar a rigidez a flexão do recheio no cálculo da rigidez a flexão de placa. Pode-se demonstrar que esta rigidez é menor que 1% da rigidez à flexão do painel sanduiche (devido às faces) se a razão E_f/E_c for maior que 3300, para valores de t/h maiores que 0,005. Normalmente esta condição é satisfeita na prática, com os materiais normalmente empregados. Entretanto, num caso especial onde não se consiga este valor mínimo de E_f/E_c , pode-se facilmente avaliar o erro incorrido calculando a razão entre a rigidez à flexão do recheio e a rigidez a flexão do sanduiche devida as faces. Este cálculo leva à seguinte expressão:

$$\frac{D_c}{D_f} = \frac{E_c}{E_f} \cdot \frac{(1 - 2\beta)^3}{6\beta(1 - \beta)^2} \quad (5.1)$$

onde

$$\beta = t/h$$

D - rigidez à flexão

Na comparação do comportamento do elemento deste trabalho com o elemento MLQSH1 da referência [9], observou-se uma grande similaridade de resultados embora, dentro da faixa prática de utilização do elemento SNDQH1, este apresentou uma tendência em fornecer valores de tensão mais precisos. Desta forma, espera-se uma economia em custo de processamento na utilização do elemento SNDQH1, em malhas maiores, em relação ao elemento MLQSH1 que possui uma formulação mais complexa.

Verificou-se a obtenção de resultados mais precisos do elemento (para a mesma geometria) quando materiais menos rígidos são utilizados nas faces. Este efeito não chega a limitar a sua utilização pois os erros encontrados para os modelos com faces de fibra de carbono ($E_f = 132.000$ MPa) foram satisfatórios e dificilmente trabalhar-se-a com materiais mais rígidos neste tipo de construção.

As vantagens de utilização de um modelo híbrido de tensões assumidas foram demonstradas na formulação do elemento apresentado neste trabalho. Além de um cálculo de tensões mais preciso, proporcionado pela consideração de um campo de tensões independente, destaca-se a capacidade deste modelo de solucionar o problema de flexão de placas moderadamente espessas (com cisalhamento transversal incluído), a partir de funções de interpolação simples e obedecendo a continuidade de deslocamentos exigida pelo funcional, sem necessitar de artifícios numéricos em sua formulação. Um elemento semelhante, mas baseado num modelo de deslocamentos, exigiria a utilização de uma integração reduzida seletiva para evitar o problema de "locking" em certas geometrias. O elemento SNDQH1, além de não apresentar problemas de "locking", pode ser implementado em qualquer programa baseado no método de deslocamento.

Acredita-se que o objetivo maior deste trabalho tenha sido alcançado, pois se dispõe hoje, no Instituto de Pesquisas Espaciais, de um elemento específico para a análise de painéis sanduiche, sempre presentes em estruturas de satélites. Este fato pode ser demonstrado através do exemplo de aplicação apresentado.

Finalmente, propõe-se alguns tópicos que poderão ser enfocados na continuação deste trabalho, com o intuito de aperfeiçoar e aumentar os limites de utilização do elemento SNDQH1 em problemas de engenharia:

1. aplicação deste elemento em um número maior de exemplos de problemas de análise de cascas;
2. estimativa de economia, em tempo de processamento, obtida com o elemento SNDQH1 em relação a outros elementos de análise de placas laminadas;
3. incluir, na formulação do elemento, a capacidade de análise de flambagem linear e de problemas termo-elásticos;
4. formulação de um elemento triangular semelhante;
5. desenvolver um elemento sanduiche de casca, curvo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ALLEN, H.G. *Analysis and design of structural sandwich panels*. Londres. Pergamon Press, 1969.
2. ALVES FILHO, J.S.R. *Análise estrutural dos painéis porta-equipamentos do satélite de coleta de dados da MECB, por um método de elementos finitos*. São José dos Campos, INPE, maio 1985. (INPE-3508-RPI/126).
3. ALVES FILHO, J.S.R. *Análise dinâmica da estrutura do satélite de coleta de dados da MECB: resposta transiente*. São José dos Campos, INPE, Out. 1985. (INPE-3699-RPI/143).
4. COOK, R.D. *Concepts and applications of finite element analysis*. N.Y. Wiley, 1974.
5. _____. Two hybrid elements for analysis of thick, thin and sandwich plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 5:277-288. 1972.
6. COWPER, G.R. Gaussian quadrature formulas for triangles. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 7: 405-408. 1973.
7. FRAEIJIS DE VEUBEKE, B. Displacement and equilibrium models in the finite element method. In: ZIENKIEWICZ, O.C.; HOLISTER, G.S. *Stress analysis*. Wiley, 1965. Cap. 9.
8. JONES, R.M. *Mechanics of composite materials*. Washington, D.C. Scripta Book, 1975.
9. KATAOKA FILHO, M. *Análise de placas e cascas laminadas por método de elementos finitos de tensões assumidas*. Tese de Mestrado em Engenharia Aeronáutica. São José dos Campos, ITA, 1985.
10. MANSFIELD, E.H. *The bending and stretching of plates*. Londres. Pergamon Press, 1964.
11. MELOSH, R.J. Basis for derivation of matrices for the direct stiffness method. *American Institute for Aeronautics and Astronautics Journal*. 1(7): 1631-1637. July, 1963.
12. PAGANO, N.J. Exact solutions for rectangular bidirectional composite and sandwich plates. *Journal of Composite Materials*. 4: 20-34. Jan, 1970.

13. PIAN, T.H.H. Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distributions. *American Institute of Aeronautic and Astronautics Journal*. 2(7): 1333-1336. July, 1964.
14. ——— Element stiffness matrices for boundary compatibility and for prescribed boundary stresses. In: CONFERENCE ON MATRIX METHODS IN STRUCTURAL MECHANICS, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, Oct. 26-28, 1965. *Proceedings*. Ohio, 1965. p. 457-477 (AFFDL-TR-66-80).
15. PIAN, T.H.H.; TONG, P. Rationalization in deriving element stiffness matrix by assumed stress approach. In: CONFERENCE ON MATRIX METHODS IN STRUCTURAL MECHANICS, Ohio, Oct. 15-17, 1968. *Proceedings*. Ohio, 1969. p. 441-469. (AFFDL-TR-68-150).
16. ——— Basis of finite element methods for solid continua. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1: 3-28. 1969.
17. PLANTEMA, F.J. *Sandwich construction*. N.Y. Wiley, 1966.
18. SAVIO, H.R.C. *Skorpius system: programmer's manual*. Relatório de circulação restrita, 1980.
19. SEVERN, R.T.; TAYLOR, P.R. The finite element method for flexure slabs when stress distributions are assumed. *Proceeding of Institute of Civil Engineers*. 34: 153-170. 1986.
20. SPILKER, R.L. A hybrid-stress finite element formulation for thick multilayer laminates. *Computers & Structures*. 11: 507-514. 1980.
21. UGURAL, A.C. *Stresses in plates and shells*. N.Y. McGraw Hill, 1981.
22. VINSON, J.R.; CHOU, T. *Composite materials and their use in structures*. Londres. Applied Science, 1975.
23. WASHIZU, K. *Variational methods in elasticity and plasticity*. 2.ed. Oxford. Pergamon Press, 1975.
24. ZIENKIEWICZ, O.C. *The finite element method*. 3.ed. Londres. McGraw Hill, 1977.