

PNU  
FD-689

DEMETRIO CORNILIOS ZACHARIADIS

Eng. Naval, Escola Politécnica da USP, 1982

MÉTODO PARA O CÁLCULO DA RESPOSTA DINÂMICA  
DE ESTRUTURAS À IMPOSIÇÃO DE MOVIMENTOS GENÉRICOS

Dissertação apresentada à  
Escola Politécnica da USP  
para a obtenção do título  
de Mestre em Engenharia.

Orientador: Prof. Dr. Ronaldo de Breyne Salvagni  
Professor Livre-Docente do  
Departamento de Engenharia Mecânica  
da Escola Politécnica da USP.

São Paulo, 1986

CONSULTA  
FD-689

A meus pais.

AGRADECIMENTOS

- Ao Prof.Dr. Ronaldo de Breyne Salvagni, pela generosa dedicação à sua tarefa de orientador, graças à qual principalmente tornou-se possível este trabalho.
- Ao Prof. Elói Medina, cuja preciosa ajuda foi de grande valia para a superação de dificuldades encontradas no desenrolar da pesquisa.
- Ao amigo Heverson Tamashiro, que esmerou-se na elaboração de desenhos e gráficos.
- Aos amigos Mauro, Gabriel e Anil, que colaboraram na revisão do texto.
- À Srta. Ivan Rocha da Silva, pela eficiência e boa vontade com que efetuou os trabalhos de datilografia.
- Aos Deptos. de Engenharia Mecânica e Naval, que possibilitaram a utilização do computador.
- À FAPESP pelo auxílio financeiro.



RESUMO

Este trabalho mostra a aplicação do Método dos Elementos Finitos para o cálculo da resposta dinâmica de estruturas à imposição de movimentos genéricos. Após uma breve revisão teórica, são apresentadas e comentadas duas maneiras já conhecidas de solucionar-se o problema. Em seguida é proposto um método que permite resolver o problema e superar algumas dificuldades envolvidas na utilização das soluções anteriores. Passa-se então à análise do método proposto e definição de critérios para o seu emprego, que é exemplificado no cálculo da resposta dinâmica de uma linha de eixos.



## ABSTRACT

This work shows an application of the Finite Element Method in the calculus of the dynamic response of structures submitted to generic motions in several points. Subsequently to a brief theoretical review, two already known solutions for the problem are presented and discussed. Following, a method is proposed which solves the problem and allows overcome some difficulties involved when using the previous solutions. The method is analysed and the application criteria are established. It's exemplificated in the calculus of the response of a shaft line.

Í N D I C E

	Pág.
Dedicatória.....	i
Agradecimentos.....	ii
Resumo.....	iii
Abstract.....	iv
Índice.....	v
Notação e Nomenclatura.....	vii
Lista de Figuras.....	x
Lista de Tabelas.....	xii
I - Introdução.....	1
II- Revisão Teórica .....	4
II.1-Introdução.....	4
II.2-Equação Matricial do Equilíbrio Dinâmico .....	4
II.3-Problema das Vibrações Livres.....	6
II.4-Método da Superposição Modal.....	11
II.5-Método da Integração Direta.....	15
III-Soluções Propostas na Bibliografia.....	19
III.1-Apresentação.....	19
III.2-Comentários às Soluções Apresentadas...	23
IV- Um Método Alternativo.....	26
V - Análise do Método Proposto e Testes de Confiabilidade.....	35
V.1-Apresentação.....	35
V.2-Cálculo das Freqüências e Modos Naturais. ....	35
V.3-Escolha das Constantes de Rigidez das Molas.....	44
V.4-Resolução das Equações de Equilíbrio Dinâmico.....	45

	Pág.
V.5-Testes de Confiabilidade.....	48
VI - Exemplo de Aplicação do Método Proposto.....	56
VI.1-Introdução.....	56
VI.2-Elaboração do Modelo.....	56
VI.2.1-Estabelecimento do objetivo da análise.....	56
VI.2.2-Escolha da região a ser analisada e das condições de contorno.....	60
VI.2.3-Discretização da estrutura.....	60
VI.2.4-Propriedades de rigidez, massa e amortecimento.....	61
VI.2.5-Excitação empregada.....	68
VI.2.6-Cálculo da resposta.....	76
VI.3-Apresentação dos Resultados.....	76
VI.4-Comentários.....	77
VII- Conclusões.....	83
VIII-Bibliografia.....	85



## NOTAÇÃO E NOMENCLATURA

As letras maiúsculas do alfabeto português ou grego, designam as matrizes; para indicar seus elementos, utilizam-se as letras minúsculas. No entanto, certas variáveis, como por exemplo, o tempo, são identificadas por letras maiúsculas em algumas das expressões, sem que isso prejudique a compreensão do texto.

Quando uma letra designa diferentes entidades de mesmo significado físico ou matemático, a distinção entre elas é feita utilizando-se índices colocados à frente da letra, acima ou abaixo desta. Outro modo de diferenciar estes entes é pelo emprego de sinais e caracteres como  $\hat{\quad}$ ,  $\bar{\quad}$  e  $\tilde{\quad}$ .

Procurou-se adotar a mesma nomenclatura comumente encontrada nas referências bibliográficas, bem como evitar a repetição dos nomes das variáveis. Quando não for possível ou natural proceder desta maneira, o significado do nome repetido será claramente definido pelo contexto.

O sinal  $\sim$  é utilizado para indicar matrizes e demais grandezas afetadas pela inclusão dos coeficientes de rigidez das molas. Um ou mais pontos colocados sobre uma variável indicam derivações com relação ao tempo. Normas de vetores são indicadas por  $\| \quad \|$ .

A lista a seguir contém as principais variáveis utilizadas no texto. Os algarismos entre parênteses indicam a equação onde algumas variáveis são definidas, ou apenas o capítulo onde estas expressões são apresentadas.

$$B = \tilde{K} - \tilde{\lambda} \tilde{M} \dots\dots\dots (V)$$

$$B_{ij} - \text{matriz obtida quando se retira a } 1^{\text{a}} \text{ linha e } j\text{-ésima} \\ \text{coluna de } B \dots\dots\dots (V)$$

$$C, c_{ij} - \text{matriz de amortecimento e respectivo elemento}$$

$$c' - \text{amortecimento de um sistema de um grau de liberdade} \dots\dots\dots (II.20)$$

- $c$  - velocidade de propagação da onda de choque na água (VI)  
 $d_e, d_i$  - diâmetro externo e interno..... (VI)  
 $e$  - ..... (IV.9)  
 $e(\tilde{\lambda}, \sigma)$  - ..... (V.4)  
 $F$  - matriz modal..... (II.14)  
 $f(t)$  - função variável no tempo..... (II.3)  
 $K, k_{i,j}$  - matriz de rigidez e respectivo elemento  
 $M, m_{i,j}$  - matriz de massa e respectivo elemento  
 $m_v$  - massa virtual..... (VI)  
 $0$  - vetor nulo  
 $P_i, p_i$  - ..... (II.3)  
 $p_m$  - pressão dinâmica no mancal  $m$  ..... (VI)  
 $p_0$  - pressão dinâmica máxima ..... (VI)  
 $R$  - ..... (III.9)  
 $T_1$  - tempo até ser atingida a velocidade máxima..... (VI.1)  
 $T_2$  - período da resposta estrutural ..... (VI.2)  
 $t_m$  - instante no qual a onda de choque atinge o mancal  
 $m$  ..... (VI)  
 $u$  - grau de liberdade qualquer com deslocamento impos  
to  
 $V$  - vetor dos deslocamentos nodais  
 $x_0$  - velocidade máxima..... (VI.1)  
 $\bar{x}$  - velocidade de corpo rígido..... (VI.2)  
 $x_m$  - posição do mancal  $m$  ..... (VI)  
 $\alpha, \beta$  - constantes multiplicadoras  
 $\Delta t$  - intervalo de tempo  
 $\delta, \delta(t)$  - deslocamento imposto  
 $\xi$  - porcentagem do amortecimento crítico..... (II.20)  
 $\phi_i, \phi_i^j$  - modo normal de vibração;  $j$ -ésima coordenada do  
 $i$ -ésimo modo  
 $\lambda$  - autovalor

$$\Psi = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \tilde{\Phi} \dots \dots \dots (V)$$

$\rho$  - densidade

$\rho(\phi)$  - quociente de Rayleigh

$\sigma$  - constante de rigidez de mola

$\omega$  - freqüência

$\omega'$  - freqüência natural de um sistema de um grau de liberdade..... (II.20)

$\omega_i$  - i-ésima freqüência natural

$\omega_b$  - freqüência do movimento de corpo rígido..... (VI.2)



LISTA DE FIGURAS

Figura	Legenda	Pág.
1.1	- Fratura na cobertura de um mancal.....	2
1.2	- Ruptura em tubulações de vapor e válvula de exaustão para gerador.....	2
2.1	- Variação linear da aceleração de $t$ a $t + \theta \Delta t$ .	16
4.1	- Graus de liberdade com molas associadas.....	26
4.2	- Ilustração do método proposto - elementos de vigas.....	30
4.3	- Molas associadas aos graus de liberdade com deslocamentos impostos.....	32
5.1	- Aspecto dos gráficos de $P_n(\tilde{\lambda})$ e $P_n(\tilde{\lambda}) + e(\tilde{\lambda}, \sigma)$	39
5.2	- Modelo de uma viga com mola associada a um dos apoios.....	42
5.3	- Acelerações.....	49
5.4	- Viga em balanço submetida a acelerações no engaste.....	50
5.5	- Modelo utilizado na análise da viga em balanço	51
5.6	- Deslocamentos relativos no meio da viga..... ( $x = 200$ pol.).....	51
5.7	- Deslocamentos relativos na extremidade livre da viga ( $x = 400$ pol.).....	52
5.8	- Momentos no engastamento.....	52
5.9	- Viga bi-apoiada submetida a deslocamentos no apoio da esquerda.....	53
5.10	- Aplicação do carregamento efetivo - solução matricial "exata".....	54
6.1	- Esquema da linha de eixos.....	58

	pág.
6.2 - Modelagem da linha de eixos.....	63
6.3 - Para uma mesma onda de choque...(ilustração do conceito de massa efetiva).....	70
6.4 - Aspecto das curvas de deslocamentos, velocidades e acelerações.....	72

LISTA DE TABELAS

Tabela	Legenda	Pág.
5.1	- Modos normalizados e frequências naturais do modelo com molas.....	43
5.2	- Raízes de $P_n(\tilde{\lambda}) + e(\tilde{\lambda}, \sigma)$ e valores de $e(\tilde{\lambda}, \sigma)$ associados.....	44
5.3	- Deslocamentos.....	49
5.4	- Comparação dos resultados; deslocamentos absolutos.....	44
6.1	- Propriedades geométricas.....	62
6.2	- Frequências naturais da linha de eixos...	65
6.3	- Massas concentradas.....	67
6.4	- Descrição das condições de carregamento intermediárias.....	75
6.5	- Tensões máximas com respectivos esforços, locais e instantes de ocorrência.....	78
6.6	- Reações máximas nos mancais e instantes de ocorrência.....	81



## I - INTRODUÇÃO

As excitações de natureza dinâmica que atuam nas estruturas podem ser classificadas em duas categorias | 1 | . Na primeira estão as excitações pela atuação de esforços e na segunda estão aquelas que excitam o sistema estrutural prescrevendo movimentos em determinados pontos. O primeiro tipo pode ser exemplificado pelos esforços que uma máquina rotativa desbalanceada transmite através dos seus apoios, e o segundo pela translação ou rotação das fundações de um edifício durante um terremoto.

Em estruturas navais é freqüente a ocorrência de vibrações e choques em seus componentes e equipamentos provocados pela imposição de movimentos em alguns pontos destes itens. Estes pontos em geral são as conexões dos elementos entre si ou com o restante da estrutura. Tais deslocamentos podem ter as mais variadas origens, como os movimentos do navio no mar, excitações do sistema propulsor, choques provenientes de explosões submarinas, colisões, etc...

Neste trabalho, pretende-se utilizar o Método dos Elementos Finitos para estudar o cálculo da resposta dinâmica de estruturas sujeitas a movimentos genéricos em diversos de seus pontos. Um caso particular deste tipo de excitação é aquele em que os deslocamentos impostos são de translação, idênticos e simultâneos, aqui denominados movimentos uniformes.

O tipo de excitação mais freqüentemente considerada na bibliografia (|11|, |12|, |13| e |19|) é a causada por explosões submarinas sem contato, as quais geram ondas de choque que impõem ao navio movimentos transientes de duração da ordem de milésimos de segundos, causando danos e desarranjos nos equipamentos e componentes estruturais, sem necessariamente comprometer a estanqueidade do casco.

A maioria dos itens cuja resposta a choque é verificada, podem ser modelados por sistemas discretos, nos quais se impõe a movimentação uniforme. Este caso inclui motores ,



bombas, quadros elétricos, etc.... Para outros equipamentos, como linhas de eixos e tubulações, a translação idêntica e simultânea nem sempre é uma hipótese realista [23], pois estes itens podem possuir bases e conexões distanciadas umas das outras e, portanto, sujeitas a movimentos de magnitudes diferentes. As figuras 1.1 e 1.2. [15] mostram alguns tipos de avarias envolvendo linhas de eixos e tubulações.



Fig.1.1- Fratura na cobertura de um mancal

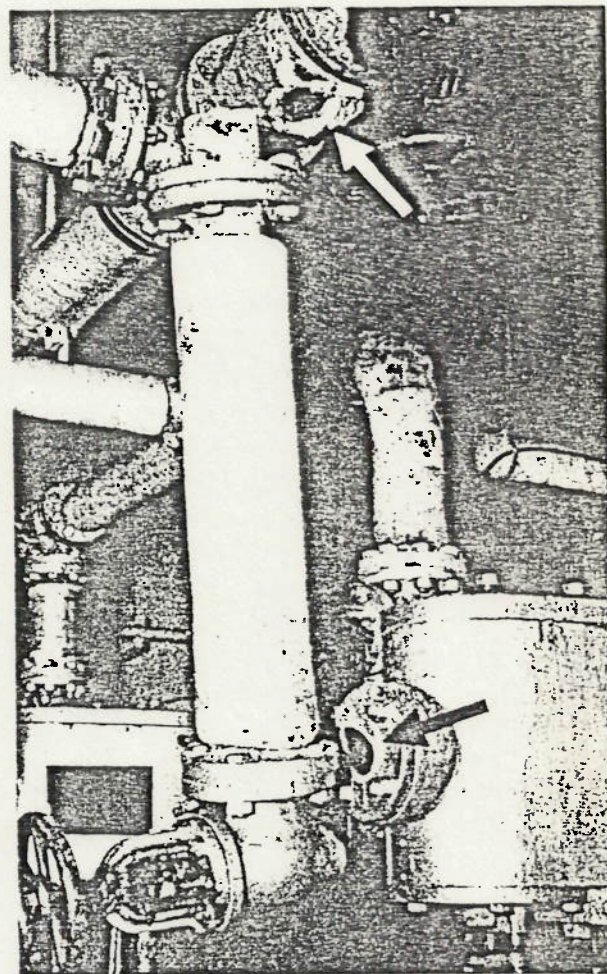


Fig.1.2- Ruptura em tubulações de vapor e - válvula de exaustão para gerador.

Os programas de computador usualmente empregados na análise matricial de estruturas pelo Método dos Elementos Finitos, como o SAP IV [4] e o STRUDL [16], apresentam recursos



apenas para o cálculo da resposta dinâmica à movimentação uniforme. A busca de soluções, que permitissem superar esta limitação, deu origem a este trabalho.

Dentre as soluções apresentadas, duas foram localizadas na bibliografia. Uma terceira maneira de resolver o problema é aqui proposta, analisada e empregada no cálculo da resposta dinâmica de uma estrutura real, excitada pela imposição de movimentos genéricos. Considerações finais comentam as três soluções apresentadas e recomendam a realização de trabalhos futuros.



## II - REVISÃO TEÓRICA

### II.1- Introdução

Será apresentada uma breve descrição do Método dos Elementos Finitos aplicado na análise dinâmica de estruturas, visando introduzir os conceitos e definições que serão utilizados no decorrer do trabalho. Desde que não comprometa este objetivo, serão evitadas as deduções e demonstrações extensas, remetendo-se o leitor às referências indicadas no texto, caso deseje um maior aprofundamento nos tópicos tratados.

Para a compreensão desta revisão teórica, bem como do restante do trabalho, é necessário o conhecimento prévio dos aspectos mais fundamentais do Método dos Elementos Finitos e da análise matricial de estruturas aplicados em problemas estáticos (| 3 |, | 6 |, | 10 | e | 33 |).

### II.2- Equação Matricial do Equilíbrio Dinâmico

Um sistema estrutural discretizado dentro da Técnica dos Elementos Finitos, do qual se conheçam as matrizes de massa  $M$ , de amortecimento  $C$  e de rigidez  $K$ , tem sua condição de equilíbrio dinâmico (| 3 | e | 5 |) expressa pela equação (II.1),

$$M \ddot{V} + C \dot{V} + K V = Q(t) \quad (II.1)$$

onde:

- $V$  - vetor dos deslocamentos da estrutura discretizada
- $\dot{V}$  - velocidades
- $\ddot{V}$  - acelerações
- $M \ddot{V}$  - vetor dos esforços de inércia
- $C \dot{V}$  - vetor dos esforços de amortecimento, do tipo viscoso linear.
- $K V$  - vetor dos esforços elásticos; estrutura de comportamento linear.

$Q(t)$  - vetor dos esforços externos nodais.

A matriz de rigidez é a mesma utilizada nos problemas estáticos |6| e seus elementos  $k_{ij}$  representam a força atuante segundo o grau de liberdade  $i$ , decorrente de um deslocamento unitário segundo o grau de liberdade  $j$ . Neste trabalho, serão consideradas apenas matrizes de rigidez de modelos não hipostáticos.

A matriz de massa é composta por elementos  $m_{ij}$ , definidos como a força associada ao grau de liberdade  $i$  proveniente de uma aceleração unitária, segundo o grau de liberdade  $j$ . Na obtenção da matriz de massa, dois processos são comumente empregados. O primeiro calcula os coeficientes  $m_{ij}$ , utilizando as mesmas funções de interpolação empregadas no cálculo dos coeficientes da matriz de rigidez (|1|, |5| e |31|). A matriz assim obtida é chamada de "matriz de massa consistente" |5|.

O segundo processo, simplesmente associa a cada nó a massa distribuída nas suas proximidades, formando uma matriz diagonal conhecida como "matriz de massa discreta" - |5| ou "aglutinada" |29|. Se esta matriz contiver elementos nulos (em geral, inércias rotacionais), os graus de liberdade correspondentes podem ser eliminados através de um procedimento de condensação estática (|1| e |3|).

As propriedades de amortecimento em cada estrutura real são de difícil avaliação (em muitos casos é impraticável), o que leva à adoção de resultados obtidos a partir de experiências em estruturas semelhantes |5|. Em geral, a matriz de amortecimento montada a partir dessas propriedades é tal que permite a aplicação do método da superposição modal (apresentado posteriormente) na análise da resposta |5|. É constituída por elementos  $c_{ij}$  que são definidos de maneira análoga aos das matrizes anteriores, ou seja, cada um deles é a força associada ao grau de liberdade  $i$  proveniente de uma velocidade unitária, segundo o grau de liberdade  $j$ .

O vetor de esforços externos pode ser obtido diretamente, se estes forem concentrados, ou a partir de esforços distribuídos, transformando-os em esforços nodais equivalentes através de algum dos procedimentos disponíveis, como, por exemplo, o das resultantes estáticas ou o das cargas nodais equivalentes | 5 |.

A equação matricial diferencial (11.1) agrupa as equações de movimento dos graus de liberdade não restritos da estrutura modelada, e a sua integração fornece o movimento segundo estes graus de liberdade ao longo do tempo.

Dois são os métodos de integração comumente empregados em programas de análise estrutural por elementos finitos, implantados em computadores digitais de grande porte atualmente em uso: o método da superposição modal e o método da integração direta.

Antes de proceder à apresentação desses métodos, tratar-se-á do problema de vibrações livres, em que se buscam como resultados os modos e frequências naturais do modelo. Esses resultados serão utilizados depois no método da superposição modal.

### 11.3 - Problema das Vibrações Livres

Será tratado o problema das vibrações livres não amortecidas. Para este caso, a equação do equilíbrio dinâmico é escrita:

$$M \ddot{V} + K V = 0 \quad (11.2)$$

onde  $0$  é o vetor nulo.

Pode-se buscar uma solução dessa equação, supondo que cada movimento é da forma | 17 |

$$v_i = p_i f(t) \quad , \quad i=1,2,\dots,n \quad (11.3)$$

onde  $n$  - número de graus de liberdade.



$p_i$  - amplitude do movimento em cada grau de liberdade  
 $f(t)$  - função variável no tempo

o que implica em que a razão entre as amplitudes  $p_i$  dos movimentos, em dois graus de liberdade quaisquer, não depende do tempo. Fisicamente, isso significa que os deslocamentos em todos os graus de liberdade são sincronizados e que o aspecto geral do movimento não muda sua forma mas apenas sua amplitude ao longo do tempo.

Introduzindo (11.3) em (11.2) obtém-se:

$$M P \ddot{f}(t) + K P f(t) = 0 \quad (11.4)$$

onde  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}^t$

o que representa  $n$  equações do tipo:

$$\sum_{j=1}^n m_{ij} p_j \ddot{f}(t) + \sum_{j=1}^n k_{ij} p_j f(t) = 0, \quad (11.5)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

Nas equações onde  $\sum_{j=1}^n m_{ij} p_j = 0$ , tem-se

$$\sum_{j=1}^n k_{ij} p_j f(t) = 0, \quad \forall t$$

e como  $f(t) \neq 0$  para algum  $t$ , então

$\sum_{j=1}^n k_{ij} p_j = 0$  e portanto qualquer  $f(t)$  satisfaz estas equações diferenciais. Supondo que exista  $i$  tal que

$\sum_{j=1}^n m_{ij} p_j \neq 0$ , pode-se escrever (11.5) da forma

$$\ddot{f}(t) + \frac{\sum_{j=1}^n k_{ij} p_j}{\sum_{j=1}^n m_{ij} p_j} f(t) = 0 \quad (11.6)$$

ou

$$\ddot{f}(t) + \omega^2 f(t) = 0 \quad (11.7)$$

onde  $\omega^2$  é uma constante positiva dada por

$$\omega^2 = \frac{\sum_{j=1}^n k_{ij} p_j}{\sum_{j=1}^n m_{ij} p_j}$$

de modo que chega-se a

$$\sum_{j=1}^n k_{ij} p_j - \omega^2 \sum_{j=1}^n m_{ij} p_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (11.8)$$

Note-se que foi escolhida uma constante positiva por considerações físicas. O sistema é conservativo e como consequência, os deslocamentos devem ser finitos ao longo do tempo [17]. Escolhendo uma constante positiva, a solução da equação (11.7) envolve termos harmônicos, ao passo que, se a constante fosse negativa, a solução envolveria termos exponenciais e não seria obedecida a limitação de energia total finita [18].

Deste modo, a solução de (11.7) é

$$f(t) = x \sin(\omega t + \Omega) \quad (11.9)$$

onde  $x$  é uma constante arbitrária, e se verifica que é possível obter como solução um movimento em todos os graus de liberdade que seja harmônico, com uma mesma frequência  $\omega$  e fase inicial  $\Omega$ . Os valores das frequências para os quais tal movimento pode ocorrer são determinados a partir das equações (11.8) que constituem um sistema de  $n$  equações lineares homogêneas nas incógnitas  $p_i$ . Essas equações podem ser escritas em forma matricial:

$$(K - \omega^2 M)P = 0 \quad (11.10)$$

$$\text{ou} \quad K P = \lambda M P \quad (11.10a)$$

onde  $\lambda = \omega^2$

e terão solução não trivial ( $P \neq 0$ ) se o determinante dos coeficientes for nulo:

$$\det(K - \lambda M) = 0 \quad (11.11)$$

O problema agora consiste em determinar os valores de  $\lambda$  para os quais o conjunto de equações homogêneas (11.10) tem solução não trivial.

Desenvolvendo o determinante obtém-se uma equação - polinomial algébrica de grau  $n$  em  $\lambda$ , a qual recebe o nome de equação de freqüência. Pode ser demonstrado que, sendo  $K$  e  $M$  simétricas e positivas definidas [17], todas as raízes da equação de freqüências são reais e positivas [3] e são denotadas  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  ( $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ ). As raízes quadradas positivas desses valores são as freqüências naturais  $\omega_i$  do modelo, sendo que a menor delas,  $\omega_1$ , é denominada a freqüência fundamental. Em geral, as freqüências  $\omega_i$  são distintas entre si, embora seja possível que duas ou mais freqüências naturais possuam o mesmo valor (isto constitui os chamados casos degenerados [18]). Portanto, existem no máximo  $n$  freqüências nas quais o movimento harmônico dado pela equação (11.9) é possível.

Passa-se agora ao estudo das amplitudes  $p_i$  desses movimentos harmônicos. Introduzindo as freqüências naturais na equação (11.10.a), obtém-se  $n$  equações do tipo:

$$K P_r = \omega_r^2 M P_r \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (11.12)$$

Para cada valor de  $\omega_r^2$ , a equação (11.12) tem um vetor solução não trivial  $P_r$ , chamado de modo natural de vibração. As matrizes coluna  $P_r$  são formadas por elementos  $p_r^i$  que são números reais determinados por uma constante multiplicadora arbitrária  $\alpha_r$ , dado que  $\alpha_r P_r$  é também uma solução das equações homogêneas (11.10). Segue daí que, embora não se possam determinar as amplitudes  $p_r^i$  univocamente, pode ser determinada a razão entre os elementos de qualquer vetor  $P_r$ . Portanto, para uma dada freqüência natu



ral  $\omega_r$ , a equação (11.11) permite obter um vetor  $P_r$  que tem uma única forma mas amplitude arbitrária.

A condição imposta em (11.11) resulta do fato de (11.10) agrupar um sistema de equações possível mas indeterminado. Decorre daí que, arbitrando um dos elementos de cada vetor  $P_r$ , calculam-se os demais a partir deste. Os processos de determinação dos modos naturais impõem alguma normalização (| 5 | e | 17 |) e os vetores assim determinados são denominados modos normais de vibração, identificados por  $\phi_r$ . Os vetores normalizados são representados da forma  $\phi_r = \beta P_r$ , com  $\beta$  dependendo da normalização desejada. Quando os modos normais satisfazem  $\phi_r^t M \phi_r = 1$ , são chamados de "M - ortonormalizados". Este tipo de normalização é muito freqüente em programas de computador.

Os modos naturais são características do sistema - estrutural, como o são as freqüências naturais, e dependem das suas propriedades de rigidez e de massa. Comumente são agrupados numa matriz, chamada matriz modal, na qual cada modo corresponde a uma coluna. Pode ser demonstrado |18 | que os modos naturais constituem um conjunto de vetores linearmente independentes. Também apresentam a propriedade da ortogonalidade, que consiste nas relações |18 |:

$$P_r^t M P_s = 0, \quad \text{para } \omega_r \neq \omega_s$$

$$e \quad P_r^t K P_s = 0, \quad \text{para } \omega_r \neq \omega_s$$

ou, de modo geral:

$$P_r^t M(M^{-1} K)^b P_s = 0, \quad \text{para } \omega_r \neq \omega_s \quad e$$

$$-\infty < b < \infty$$

A resolução da equação (11.10) é estudada na álgebra matricial sob o nome de problema de autovalor generalizado | 3 | e pode ser resolvido de vários modos, como mostrado em |3 | e |5 |. Os resultados obtidos são genericamente chamados de autovalores (neste trabalho, identi-

ficados por  $\lambda$ ) e autovetores (neste trabalho,  $P$  ou  $\Phi$ ). Quando a matriz de massa é a identidade, a equação (11.10) reduz-se a  $K\Phi = \lambda\Phi$ , que é conhecida como problema de autovalor na forma padrão | 3 |.

Alguns autores apresentam o cálculo de freqüências e modos de vibrar levando em conta o amortecimento (| 17 | e | 14 |), embora na maioria dos problemas estruturais o fator de amortecimento raramente ultrapasse 20% | 5 |, de modo que a sua inclusão, ou não, afeta pouco os resultados.

#### 11.4 - Método da Superposição Modal

O Método da Superposição Modal é aplicado a partir dos resultados de uma análise de modos e freqüências naturais do modelo estrutural.

Como mencionado anteriormente, os modos naturais formam um conjunto de  $n$  vetores linearmente independentes. Tal conjunto constitui uma base no espaço de  $n$  dimensões e qualquer vetor de  $n$  componentes pode ser obtido pela combinação linear dos modos naturais que compõem a base.

Conseqüentemente, o vetor formado pelos  $n$  deslocamentos nodais em cada instante pode ser obtido pela combinação linear dos modos naturais, como indicado na expressão (11.13):

$$V(t) = \phi_1 y_1(t) + \phi_2 y_2(t) + \dots + \phi_n y_n(t) \quad (11.13)$$

onde  $\phi_i$  são os modos naturais normalizados e  $y_i(t)$  são as amplitudes modais, que representam coordenadas generalizadas.

Omitindo a referência à dependência do tempo, a equação (11.13) escrita em forma matricial fica:

$$V = F Y \quad (11.14)$$

sendo  $F$  a matriz modal e  $Y$  o vetor constituído pelas  $n$  amplitudes modais.

Aplicando a transformação linear (11.14) na equação (11.1) tem-se:

$$M F \ddot{Y} + C F \dot{Y} + K F Y = Q \quad (11.15)$$

Já foi indicado que as matrizes de massa e rigidez satisfazem as condições de ortogonalidade. Para que o mesmo se verifique em relação à matriz de amortecimento, ou seja,

$$P_r^t C P_s = 0, \text{ para } \omega_r \neq \omega_s$$

uma possibilidade é que esta matriz seja da forma (|1|e|3|):

$$C = M \sum_b a_b (M^{-1} K)^b, (-\infty < b < \infty) \quad (11.16)$$

onde as constantes  $a_b$  podem ser calculadas a partir de graus de amortecimento modais, como mostrado em |1| e |5|.

Supondo  $C$  uma matriz que satisfaça às condições de ortogonalidade, pré-multiplicando a equação (11.15) por  $\phi_r^t$  obtém-se:

$$\phi_r^t M F \ddot{Y} + \phi_r^t C F \dot{Y} + \phi_r^t K F Y = \phi_r^t Q \quad (11.17)$$

e pelas condições de ortogonalidade:

$$\phi_r^t M \phi_r \ddot{y}_r + \phi_r^t C \phi_r \dot{y}_r + \phi_r^t K \phi_r y_r = \phi_r^t Q \quad (11.18)$$

Introduzindo a notação:

$$M_r = \phi_r^t M \phi_r - \text{massa generalizada do modo } r$$

$$C_r = \phi_r^t C \phi_r - \text{amortecimento generalizado do modo } r$$



$K_r = \phi_r^t K \phi_r$  - rigidez generalizada do modo  $r$

$Q_r = \phi_r^t Q$  - carga generalizada do modo  $r$ .

pode-se escrever:

$$M_r \ddot{y}_r + C_r \dot{y}_r + K_r y_r = Q_r \quad (11.19)$$

Para cada valor de  $r$ , (11.19) é a equação de equilíbrio dinâmico de um sistema de um grau de liberdade associado ao  $r$ -ésimo modo natural. Desta maneira, transformaram-se as equações de movimento, de um conjunto de  $n$  equações diferenciais simultâneas, acopladas pelos termos não diagonais das matrizes de massa, amortecimento e rigidez, em um conjunto de  $n$  equações diferenciais independentes, nas coordenadas generalizadas  $y_r$ .

Para um sistema de um grau de liberdade sub-crítico, o amortecimento é dado por |5|:

$$c' = \xi \, 2m' \omega' \quad (11.20)$$

onde  $\xi$  - porcentagem do amortecimento crítico ( $\xi < 1$ )

$m'$  - massa

$\omega'$  - frequência natural

Sabe-se também que a frequência natural desse sistema vale:

$$\omega' = \sqrt{\frac{k'}{m'}} \quad (11.21)$$

onde  $k'$  é a rigidez.

Dividindo a equação (11.19) por  $M_r$  e aplicando (11.20) e (11.21), chega-se à forma final das equações, em coordenadas generalizadas desacopladas pelo método da superposição modal:

$$\ddot{y}_r + 2 \xi_r \omega_r \dot{y}_r + \omega_r^2 y_r = \frac{Q_r}{M_r} \quad (11.22)$$

Resolvendo cada uma dessas equações e fazendo a superposição indicada em (11.13), obtém-se a resposta nas coordenadas geométricas originais.

A expressão geral da resposta modal é dada pela integral de Duhamel (|5| e |31|):

$$y_r = \frac{1}{M_r \omega_{dr}} \int_0^t Q_r(\tau) e^{-\xi_r \omega_r (t-\tau)} \text{sen} \omega_{dr} (t-\tau) d\tau \quad (11.23)$$

$$\text{onde } \omega_{dr} = \omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2}$$

que é aplicável a sistemas sub-amortecidos, em repouso na posição de equilíbrio para  $t = 0$ . Se o deslocamento e a velocidade inicial não forem nulos, deve ser adicionada à resposta a parcela correspondente à vibração livre, que - para cada modo vale |5|:

$$y_r = e^{-\xi_r \omega_r t} \left[ \frac{\dot{y}_r(0) + y_r(0) \xi_r \omega_r}{\omega_{dr}} \text{sen} \omega_{dr} t + y_r(0) \text{cos} \omega_{dr} t \right] \quad (11.24)$$

onde  $\dot{y}_r(0)$  e  $y_r(0)$  são a velocidade e o deslocamento modais iniciais. Estes valores podem ser obtidos a partir do deslocamento e velocidade iniciais expressos nas coordenadas geométricas originais, como mostrado abaixo |5|:

$$y_r(0) = \frac{\phi_r^t M V(0)}{M_r} \quad (11.25)$$

$$\dot{y}_r(0) = \frac{\phi_r^t M \dot{V}(0)}{M_r} \quad (11.26)$$

A resposta do sistema nas coordenadas geométricas normalmente é calculada incluindo poucos modos de ordem mais baixa na sua composição, devido às seguintes razões (| 3 | e | 5 |):

- para a maioria dos carregamentos, é pequena a contribuição dos modos de ordem superior na resposta; exceções podem ocorrer quando o carregamento possui componentes harmônicos com frequências próximas às de modos superiores.
- de ordinário, os modelos discretizados de estruturas complexas não permitem um cálculo preciso dos modos superiores.
- os modos de ordem superior são mais amortecidos

A avaliação da integral de Duhamel em geral é feita com métodos numéricos de integração, exceto quando a função que descreve o carregamento é harmônica, o que permite o conhecimento prévio da expressão que fornece a resposta.

#### 11.5 - Método da Integração Direta

A integração direta consiste em um procedimento numérico no qual é feita a integração "passo a passo" das equações (11.1); é denominada direta por não requerer qualquer modificação na forma original das equações.

O método é desenvolvido a partir de duas idéias básicas. A primeira é que a equação (11.1) seja satisfeita não para qualquer valor do tempo  $t$ , mas apenas em instantes múltiplos de intervalos discretos  $\Delta t$ . A segunda idéia é que a variação dos deslocamentos, velocidades e acelerações durante cada intervalo segue uma forma previamente escolhida. A precisão, estabilidade | 3 | e o custo da solução são determinados pela forma adotada para essas variações nos deslocamentos, velocidades e acelerações | 3 |.



Dentre os diversos métodos disponíveis, a integração direta pelo método "Wilson- $\theta$ " será apresentada, por ser um procedimento comumente adotado em programas como, por exemplo, o SAP IV | 4 |. Outros métodos podem ser encontrados em | 3 |.

Como nos demais, o método "Wilson- $\theta$ " supõe conhecidos os valores de  $V_0$ ,  $\dot{V}_0$  e  $\ddot{V}_0$  correspondentes a um instante inicial  $t_0$ , sendo que a resposta será calculada até o instante  $T$ , estando o intervalo de  $t_0$  a  $T$  subdividido em passos iguais  $\Delta t$ . O procedimento será desenvolvido para o cálculo da resposta em um instante genérico  $t + \Delta t$ .

Conforme pode ser visto na figura 2.1, adota-se uma variação linear da aceleração durante o período de  $t$  até  $t + \theta\Delta t$ , onde  $\theta > 1.0$  | 3 |. Pode ser demonstrado que o método é incondicionalmente estável para  $\theta > 1.37$ , sendo que usualmente se utiliza  $\theta = 1.4$  | 3 |.

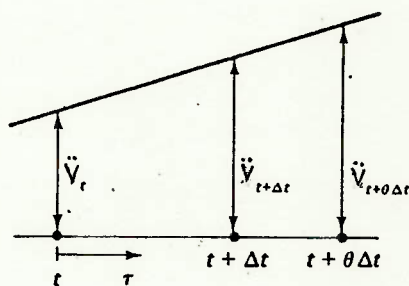


Fig.2.1- Variação linear da aceleração de  $t$  a  $t + \theta\Delta t$ .

Seja  $\tau$  a variação no tempo desde  $t$  até  $t + \theta\Delta t$ , de modo que  $0 < \tau < \theta\Delta t$ . Então, a aceleração neste intervalo é dada por:

$$\ddot{V}_{t+\tau} = \ddot{V}_t + \frac{\tau}{\theta\Delta t} (\ddot{V}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{V}_t) \quad (11.27)$$

que integrada resulta, para a velocidade e o deslocamento:

$$\dot{V}_{t+\tau} = \dot{V}_t + \ddot{V}_t \tau + \frac{\tau^2}{2\theta\Delta t} (\ddot{V}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{V}_t) \quad (11.28)$$

e

$$V_{t+\tau} = V_t + \dot{V}_t \tau + \frac{\ddot{V}_t \tau^2}{2} + \frac{1}{6\theta\Delta t} \tau^3 (\ddot{V}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{V}_t) \quad (11.29)$$

Utilizando (11.27) e (11.28), para o instante  $t + \theta\Delta t$ ,  
tem-se:

$$\dot{V}_{t+\theta\Delta t} = \dot{V}_t + \frac{\theta\Delta t}{2} (\ddot{V}_{t+\theta\Delta t} + \ddot{V}_t) \quad (11.30)$$

e

$$V_{t+\theta\Delta t} = V_t + \theta\Delta t \dot{V}_t + \frac{\theta^2 \Delta t^2}{6} (\ddot{V}_{t+\theta\Delta t} + 2 \ddot{V}_t) \quad (11.31)$$

que podem ser resolvidas para  $\ddot{V}_{t+\theta\Delta t}$  e  $\dot{V}_{t+\theta\Delta t}$  em função  
de  $V_{t+\theta\Delta t}$  :

$$\ddot{V}_{t+\theta\Delta t} = \frac{6}{\theta^2 \Delta t^2} (V_{t+\theta\Delta t} - V_t) - \frac{6}{\theta\Delta t} \dot{V}_t - 2\ddot{V}_t \quad (11.32)$$

e

$$\dot{V}_{t+\theta\Delta t} = \frac{3}{\theta\Delta t} (V_{t+\theta\Delta t} - V_t) - 2\dot{V}_t - \frac{\theta\Delta t}{2} \ddot{V}_t \quad (11.33)$$

Impondo as condições de equilíbrio para o instante  
 $t + \theta\Delta t$  :

$$M\ddot{V}_{t+\theta\Delta t} + C\dot{V}_{t+\theta\Delta t} + KV_{t+\theta\Delta t} = \bar{Q}_{t+\theta\Delta t} \quad (11.34)$$

onde  $\bar{Q}_{t+\theta\Delta t}$  é a extrapolação linear do vetor de carga-  
mentos (que pode ser feita pois adotou-se variação linear  
das acelerações), dada por:

$$\bar{Q}_{t+\theta\Delta t} = Q_t + \theta (Q_{t+\Delta t} - Q_t) \quad (11.35)$$

Substituindo (11.32) e (11.33) em (11.34) e rearranjando os termos, chega-se a:

$$\left( \frac{6}{\theta^2 \Delta t^2} M + \frac{3C}{\theta \Delta t} + K \right) v_{t+\theta\Delta t} = Q_t + \theta (Q_{t+\Delta t} - Q_t) + \\ + M \left( \frac{6}{\theta^2 \Delta t^2} v_t + \frac{6}{\theta \Delta t^2} \dot{v}_t + 2\ddot{v}_t \right) + C \left( \frac{3}{\theta \Delta t} v_t + 2\dot{v}_t + \frac{\theta \Delta t}{2} \ddot{v}_t \right) \quad (11.36)$$

Todos os termos do membro da direita de (11.36) são conhecidos e podem ser interpretados como um carregamento efetivo  $\hat{Q}_{t+\theta\Delta t}$ , enquanto os termos entre parênteses da esquerda constituem uma rigidez efetiva  $\hat{K}$ , de modo que (11.36) reduz-se a:

$$\hat{K} v_{t+\theta\Delta t} = \hat{Q}_{t+\theta\Delta t} \quad (11.37)$$

e portanto

$$v_{t+\theta\Delta t} = \hat{K}^{-1} \hat{Q}_{t+\theta\Delta t} \quad (11.38)$$

Substituindo o valor de  $v_{t+\theta\Delta t}$  em (11.32), obtém-se  $\ddot{v}_{t+\theta\Delta t}$ , que utilizado em (11.27), (11.28) e (11.29), calculadas para  $\tau = \Delta t$ , fornecem os valores de  $\ddot{v}_{t+\Delta t}$ ,  $\dot{v}_{t+\Delta t}$  e  $v_{t+\Delta t}$ .

Um procedimento análogo é apresentado em | 8 | para a integração numérica das equações (11.22).



### III - SOLUÇÕES PROPOSTAS NA BIBLIOGRAFIA

#### III.1- Apresentação

O problema do cálculo da resposta dinâmica de estruturas à excitação provocada pela imposição de movimentos independentes em diferentes pontos da mesma é abordado por alguns autores com o emprego de métodos matriciais, como o mostram as referências | 5 |, | 24 | e | 31 |.

Outros pesquisadores desenvolveram soluções exatas para sistemas contínuos, principalmente os que podem ser idealizados como vigas. Neste caso incluem-se linhas de eixos e tubulações. Um procedimento possível consiste em montar convenientemente as expressões do Lagrangeano do sistema (| 21 | e | 22 |), para em seguida obter as equações de movimento a partir da aplicação do princípio de Hamilton | 17 |. Desta maneira, foram derivadas as expressões para o cálculo da resposta de uma linha de eixos à aplicação de movimentos genéricos em seus mancais (| 21 | e | 22 |).

De modo geral, o estudo do comportamento de sistemas contínuos envolve a resolução de equações diferenciais parciais, que devem ser satisfeitas pela função que descreve a resposta do sistema em um determinado domínio e sob certas condições de contorno. Em alguns casos, pode ser possível obter a solução através de uma transformada, como a de Laplace, ou então pelas transformações de Fourier. Em outros problemas, as equações diferenciais podem ser desacopladas utilizando-se um método análogo ao da superposição modal, que requer a solução prévia de um problema de frequências e modos naturais. Estes procedimentos são amplamente estudados nas referências | 17 | e | 30 |.

Neste capítulo são apresentadas as soluções que utilizam métodos matriciais. Este tipo de abordagem foi aplicado inicialmente, no caso da imposição dos deslocamentos apenas nos suportes de uma estrutura | 32 |.

Para o caso geral da movimentação forçada de pontos quaisquer, as referências [24] e [31] propõem que seja feito um particionamento do vetor global de deslocamentos nodais, como indicado em (III.1):

$$V_G = \begin{bmatrix} V_i \\ V_f \\ V_d \end{bmatrix} \begin{matrix} (n \times 1) \\ (g \times 1) \\ (h \times 1) \end{matrix} \quad (III.1)$$

onde o índice  $i$  corresponde aos deslocamentos nos graus de liberdade internos da estrutura, e que são as incógnitas do problema, o índice  $f$  refere-se aos graus de liberdade com deslocamentos nulos (fixos) e o índice  $d$  identifica os graus de liberdade segundo os quais são impostos os deslocamentos. Deste modo,  $V_f$  e  $V_d$  são conhecidos.

Rearranjando as matrizes globais de massa, amortecimento e rigidez,  $M_G$ ,  $C_G$  e  $K_G$ , bem como o vetor global de esforços,  $Q_G$  e efetuando o particionamento correspondente a  $V_G$ , escreve-se a equação do equilíbrio dinâmico:

$$\begin{bmatrix} M_{ii} & M_{if} & M_{id} \\ M_{fi} & M_{ff} & M_{fd} \\ M_{di} & M_{df} & M_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{V}_i \\ \ddot{V}_f \\ \ddot{V}_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{ii} & C_{if} & C_{id} \\ C_{fi} & C_{ff} & C_{fd} \\ C_{di} & C_{df} & C_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_i \\ \dot{V}_f \\ \dot{V}_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{if} & K_{id} \\ K_{fi} & K_{ff} & K_{fd} \\ K_{di} & K_{df} & K_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i \\ V_f \\ V_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_i \\ Q_f \\ Q_d \end{bmatrix} \quad (III.2)$$

As sub-matrizes da equação (III.2) são identificadas da seguinte forma:

$M_{ii}$ ,  $C_{ii}$  e  $K_{ii}$  = contêm os elementos relativos unicamente aos graus de liberdade internos da estrutura - de agora em diante, serão identificados simplesmente por  $M$ ,  $C$  e  $K$ ; do mesmo

modo,  $V_i = V$ ,  $\dot{V}_i = \dot{V}$  e  $\ddot{V}_i = \ddot{V}$ ;

$M_{if}$ ,  $C_{if}$  e  $K_{if}$  - contêm os elementos que acoplam graus de liberdade internos com fixos

$M_{id}$ ,  $C_{id}$  e  $K_{id}$  - contêm elementos que acoplam graus de liberdade internos a graus de liberdade com deslocamentos impostos.

As demais sub-matrizes são identificadas de maneira análoga. Quanto aos carregamentos nodais,  $Q_i$  são as cargas externas aplicadas segundo os graus de liberdade internos (a partir de agora,  $Q_i = Q$ ),  $Q_f$  são as reações nos vínculos externos e  $Q_d$  são as cargas atuantes nos graus de liberdade com deslocamentos impostos, necessárias para obtê-los.

Desenvolvendo a equação (III.2) e lembrando que  $\ddot{V}_f = \dot{V}_f = V_f = 0$ , chega-se a:

$$M\ddot{V} + C\dot{V} + KV = - (M_{id}\ddot{V}_d + C_{id}\dot{V}_d + K_{id}V_d) + Q \quad (III.3)$$

$$M_{fi}\ddot{V} + M_{fd}\ddot{V}_d + C_{fi}\dot{V} + C_{fd}\dot{V}_d + K_{fi}V + K_{fd}V_d = Q_f \quad (III.4)$$

$$M_{di}\ddot{V} + M_{dd}\ddot{V}_d + C_{di}\dot{V} + C_{dd}\dot{V}_d + K_{di}V + K_{dd}V_d = Q_d \quad (III.5)$$

No membro da direita de (III.3) foram isolados os termos conhecidos, que desta forma compõem o vetor de carregamento, o qual será chamado de carregamento efetivo. A partir desta equação, obtém-se a resposta do sistema por um dos métodos de integração apresentados no capítulo II. Efetuado o cálculo da resposta, pode-se determinar as reações nos vínculos externos bem como as cargas atuantes nos graus de liberdade com deslocamentos impostos, utilizando as equações (III.4) e (III.5), respectivamente. Este primeiro enfoque utilizando métodos matriciais será discutido adiante.



Uma segunda forma de abordar o problema é apresentada nas referências | 1 | e | 5 |, que além de adotar o particionamento indicado em (III.1), propõem que o deslocamento segundo cada grau de liberdade interno da estrutura seja resultante da superposição de duas parcelas:

$$v = v_s + v_r \quad (III.6)$$

onde  $v_s$  é chamado de deslocamento pseudo-estático | 5 |, definido como o deslocamento estático de um ponto qualquer da estrutura devido ao deslocamento de algum outro ponto da mesma;  $v_r$  é denominado deslocamento relativo | 5 | ou deslocamento dinâmico | 1 |, devido unicamente à existência dos esforços dinâmicos (inércia e amortecimento).

Introduzindo a equação (III.6) em (III.3):

$$M(\ddot{V}_s + \ddot{V}_r) + C(\dot{V}_s + \dot{V}_r) + K(V_s + V_r) = -(M_{id}\ddot{V}_d + C_{id}\dot{V}_d + K_{id}V_d) + Q \quad (III.7)$$

Pela sua definição, os deslocamentos pseudo-estáticos satisfazem a relação:

$$\begin{bmatrix} K & K_{id} \\ K_{di} & K_{dd} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_s \\ V_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De onde se obtém  $KV_s = -K_{id}V_d$  e portanto

$$V_s = -K^{-1} K_{id} V_d$$

$$\text{ou } V_s = R V_d \quad (III.8)$$

$$\text{onde } R = -K^{-1} K_{id} \quad (III.9)$$

As colunas de  $R$  constituem o que se costuma chamar de funções de influência  $|9|$ ; cada uma delas representa os deslocamentos nos graus de liberdade internos da estrutura devidos a um deslocamento unitário segundo o componente de  $V_d$  correspondente.

Substituindo (III.8.) em (III.7.):

$$M\ddot{V}_r + C\dot{V}_r + KV_r = -(MR + M_{id})\ddot{V}_d - (CR + C_{id})\dot{V}_d - (KR + K_{id})V_d + Q \quad (III.10)$$

e como  $KR + K_{id} = 0$ , chega-se à forma final das equações:

$$M\ddot{V}_r + C\dot{V}_r + KV_r = -(MR + M_{id})\ddot{V}_d - (CR + C_{id})\dot{V}_d + Q \quad (III.11)$$

A integração da equação (III.11) permite obter os deslocamentos relativos, que superpostos aos deslocamentos pseudo-estáticos calculados por (III.8), fornecem a resposta do sistema.

### III.2 - Comentários às Soluções Apresentadas

A primeira abordagem apresentada requer a solução da equação (III.3), na qual o carregamento efetivo, dado - por

$$Q_{ef} = -(M_{id}\ddot{V}_d + C_{id}\dot{V}_d + K_{id}V_d) + Q$$

é bastante simplificado quando a matriz de massa é diagonal e não se leva em conta o amortecimento, ou ainda quando a matriz de amortecimento também é diagonal, ficando:

$$Q_{ef} = -K_{id}V_d + Q \quad (III.12)$$

Os coeficientes da matriz  $K_{id}$  podem ser calculados manualmente com certa facilidade para diversos tipos de -

elementos finitos, como por exemplo, vigas e treliças de estruturas planas. Nestes casos, o vetor de esforços efetivos não precisa ser calculado pelo programa, mas pode ser fornecido diretamente pelo analista como cargas concentradas. Isto possibilita a resolução de (III.3) com a utilização de programas de computador já existentes.

Esta situação é comum quando o programa empregado somente possibilita a montagem da matriz de massa diagonal, como o SAP IV.

Mesmo quando as matrizes  $M_{id}$  e  $C_{id}$  devam ser consideradas, diversas estruturas são discretizadas com modelos simples o bastante para permitir o cálculo manual do carregamento efetivo apresentado na equação (III.3).

Para permitir a resolução de (III.3) no caso geral, é necessário dispor de algum programa que permita distinguir entre os diferentes tipos de graus de liberdade da estrutura (internos ou com deslocamentos conhecidos) e efetuar o cálculo do carregamento efetivo. Para isto, pode-se aproveitar os programas disponíveis e modificá-los convenientemente. Apesar de tais modificações não envolverem grandes dificuldades, existe um obstáculo de ordem não técnica, que é o de acesso às listagens dos programas já existentes, que em geral são restritas.

Quanto à solução proposta em segundo lugar, o cálculo do carregamento efetivo é bastante mais trabalhoso que o anterior, conforme mostra a equação (III.11). Ainda no caso de  $M_{id}$ ,  $C_{id}$  e  $C$  serem nulas, a expressão do carregamento efetivo é dada por

$$Q_{ef} = -MR\ddot{V}_d + Q \quad (III.13)$$

o que torna bastante remota a possibilidade de qualquer cálculo manual, pois envolve o conhecimento prévio das matrizes de massa e rigidez, bem como a inversão desta última.



No que se refere ao cálculo dos deslocamentos relativos, estes representam um resultado necessário na análise de estruturas submetidas a movimentos de translação uniformes nos apoios, onde os únicos deslocamentos que deformam a estrutura são de origem dinâmica. Inclusive, como mencionado anteriormente, os programas comumente utilizados possuem recursos que permitem a realização deste tipo de análise ([4] e [16]). No problema da excitação múltipla, não se vêem vantagens no cálculo dos deslocamentos relativos, o que torna indesejável o trabalho computacional adicional necessário para a sua obtenção.

Caso fosse necessário optar por um dos procedimentos apresentados, seria escolhido o primeiro, pois requer um número menor de operações para montar o vetor de carregamentos efetivos e obter a resposta em termos dos deslocamentos totais.

Os dois procedimentos apresentados constituem a solução exata do problema, dentro do âmbito dos métodos matriciais.

#### IV - UM MÉTODO ALTERNATIVO

Propõe-se agora um terceiro procedimento, que também utiliza métodos matriciais para o cálculo da resposta dinâmica de estruturas à imposição de movimentos quaisquer em diversos de seus pontos.

Em um sistema estrutural genérico, considere-se um grau de liberdade  $u$  no qual se deseja impor um determinado deslocamento  $\delta(t)$ . Seguindo a nomenclatura do Capítulo III, este deslocamento é um dos elementos do vetor  $V_d$ . Associe-se ao grau de liberdade  $u$  uma mola ideal de constante de rigidez  $\sigma$  segundo este grau de liberdade. A outra extremidade da mola é associada ao grau de liberdade correspondente a  $u$  de um nó não pertencente à estrutura. Este segundo grau de liberdade é denominado grau de liberdade auxiliar. A figura 4.1 exemplifica o que foi descrito. No caso a, deseja-se impor translações segundo Y; em b, rotações segundo Z.

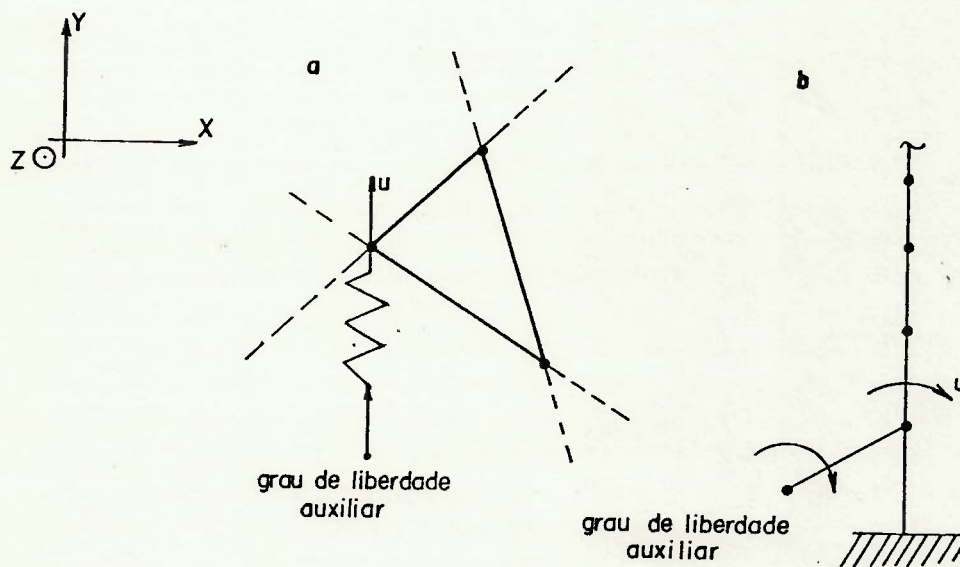


Fig. 4.1 - Graus de liberdade com molas associadas.

O método que se pretende utilizar consiste em impor os deslocamentos no grau de liberdade auxiliar e conseguir que esses deslocamentos sejam reproduzidos no grau de liberdade  $u$  da estrutura. É evidente que se a mola for rígida, qualquer deslocamento que ocorra segundo o grau de liberdade auxiliar transmite-se integralmente ao grau de liberdade  $u$ . Por outro

lado, se a mola não for rígida, para que o deslocamento em  $u$  seja praticamente igual ao do grau de liberdade auxiliar, basta que a mola tenha uma rigidez suficientemente elevada, ou seja,  $\sigma \gg k_{uu}$  (coeficiente da diagonal principal da matriz de rigidez correspondente ao grau de liberdade  $u$ ). Quanto maior a relação  $\sigma/k_{uu}$ , melhor será a reprodução, no grau de liberdade  $u$ , do deslocamento imposto segundo o grau de liberdade auxiliar. Além do valor de  $k_{uu}$ , a reprodução do deslocamento também é afetada pelos outros esforços atuantes (inércia e amortecimento), que podem influir razoavelmente no valor de  $\sigma$  necessário para uma boa aproximação de  $\delta(t)$ .

Aparentemente, a inclusão da mola não contribui para a solução do problema, pois apenas transfere a imposição do movimento segundo um grau de liberdade da estrutura para um grau de liberdade auxiliar não pertencente a ela.

A explicação para a utilização deste procedimento será dada estudando como a inclusão de uma mola da maneira descrita acima altera as matrizes de massa, amortecimento e rigidez do modelo. As alterações são:

a) na matriz de rigidez

- o coeficiente da diagonal principal, correspondente ao grau de liberdade  $u$ , passa a ser  $k_{uu} + \sigma$ ;
- é acrescentada uma linha e uma coluna correspondentes ao grau de liberdade auxiliar;

b) nas matrizes de massa e amortecimento

- é acrescentada uma linha e uma coluna com todos os seus elementos nulos, correspondentes ao grau de liberdade auxiliar.

Adotando para o vetor de deslocamentos nodais  $V_G$  a mesma partição indicada em (III.1), vê-se que, com a inclusão da mola, deixa de haver distinção entre o grau de liberdade  $u$  (de índice  $d$ ) e os graus de liberdade internos do modelo original. Por outro lado, o grau de liberdade auxiliar, segundo o qual é imposto o deslocamento, passa a desempenhar o papel que antes cabia ao grau de liberdade  $u$ , e será identi-



cado pelo índice  $c$ .

Estendendo a introdução de molas a todos os graus de liberdade segundo os quais são impostos deslocamentos, o vetor de deslocamentos nodais passa a ser:

$$\tilde{V}_G = \begin{bmatrix} \tilde{V}_i \\ \tilde{V}_f \\ \tilde{V}_c \end{bmatrix} \begin{matrix} ((n + h) \times 1) \\ (g \times 1) \\ (h \times 1) \end{matrix} \quad (IV.1)$$

onde  $\tilde{V}_i$  é o vetor  $V_i$  de (III.1) acrescido dos elementos de  $V_d$  e  $V_c$  contém os deslocamentos impostos nos graus de liberdade auxiliares. As matrizes de massa, amortecimento e rigidez sofrem as alterações anteriormente mencionadas e são identificadas pelo sinal "~". Modificações análogas são feitas no vetor de carregamentos.

Procedendo como no Capítulo III, substituindo (IV.1) em (II.1) obtém-se:

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{ii} \ddot{\tilde{V}}_i + \tilde{M}_{if} \ddot{\tilde{V}}_f + \tilde{M}_{ic} \ddot{\tilde{V}}_c + \tilde{C}_{ii} \dot{\tilde{V}}_i + \tilde{C}_{if} \dot{\tilde{V}}_f + \tilde{C}_{ic} \dot{\tilde{V}}_c + \tilde{K}_{ii} \tilde{V}_i + \\ + \tilde{K}_{if} \tilde{V}_f + \tilde{K}_{ic} \tilde{V}_c = \tilde{Q}_i \end{aligned} \quad (IV.2)$$

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{fi} \ddot{\tilde{V}}_i + \tilde{M}_{ff} \ddot{\tilde{V}}_f + \tilde{M}_{fc} \ddot{\tilde{V}}_c + \tilde{C}_{fi} \dot{\tilde{V}}_i + \tilde{C}_{ff} \dot{\tilde{V}}_f + \tilde{C}_{fc} \dot{\tilde{V}}_c + \tilde{K}_{fi} \tilde{V}_i + \\ + \tilde{K}_{ff} \tilde{V}_f + \tilde{K}_{fc} \tilde{V}_c = \tilde{Q}_f \end{aligned} \quad (IV.3)$$

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{ci} \ddot{\tilde{V}}_i + \tilde{M}_{cf} \ddot{\tilde{V}}_f + \tilde{M}_{cc} \ddot{\tilde{V}}_c + \tilde{C}_{ci} \dot{\tilde{V}}_i + \tilde{C}_{cf} \dot{\tilde{V}}_f + \tilde{C}_{cc} \dot{\tilde{V}}_c + \tilde{K}_{ci} \tilde{V}_i + \\ + \tilde{K}_{cf} \tilde{V}_f + \tilde{K}_{cc} \tilde{V}_c = \tilde{Q}_c \end{aligned} \quad (IV.4)$$

Chamando  $\tilde{M}_{ii}$ ,  $\tilde{C}_{ii}$  e  $\tilde{K}_{ii}$  de  $\tilde{M}$ ,  $\tilde{C}$  e  $\tilde{K}$ ;  $\ddot{\tilde{V}}_i$ ,  $\dot{\tilde{V}}_i$  e  $\tilde{V}_i$  de  $\ddot{\tilde{V}}$ ,  $\dot{\tilde{V}}$  e  $\tilde{V}$ ;  $\tilde{Q}_i$  de  $\tilde{Q}$  e ainda, lembrando que  $\tilde{V}_f$ ,  $\dot{\tilde{V}}_f$ ,  $\ddot{\tilde{V}}_f$ ,  $\tilde{M}_{ic}$ ,  $\tilde{M}_{fc}$ ,  $\tilde{M}_{cc}$ ,  $\tilde{C}_{ic}$ ,  $\tilde{C}_{fc}$ ,  $\tilde{C}_{cc}$  e  $\tilde{K}_{fc}$  somente contêm elementos nulos, chega-se a:

$$\tilde{M}\ddot{\tilde{V}} + \tilde{C}\dot{\tilde{V}} + \tilde{K}\tilde{V} + \tilde{K}_{ic}\tilde{V}_c = \tilde{Q} \quad (IV.5)$$

$$\tilde{M}_{fi}\ddot{\tilde{V}} + \tilde{C}_{fi}\dot{\tilde{V}} + \tilde{K}_{fi}\tilde{V} = \tilde{Q}_f \quad (IV.6)$$

$$\tilde{K}_{ci}\tilde{V} + \tilde{K}_{cc}\tilde{V}_c = \tilde{Q}_c \quad (IV.7)$$

Isolando os termos conhecidos da equação (IV.5):

$$\tilde{M}\ddot{\tilde{V}} + \tilde{C}\dot{\tilde{V}} + \tilde{K}\tilde{V} = \tilde{K}_{ic}\tilde{V}_c + \tilde{Q} \quad (IV.8)$$

onde  $-\tilde{K}_{ic}\tilde{V}_c + \tilde{Q}$  é o carregamento efetivo. A matriz  $\tilde{K}_{ic}$  é retangular (o número de linhas é o de graus de liberdade internos, e o número de colunas é o de graus de liberdade de índice c) e seus únicos elementos não nulos são os valores previamente conhecidos das constantes de mola, dispostos de tal forma que o produto  $\tilde{K}_{ic}\tilde{V}_c$  consiste simplesmente em multiplicar cada deslocamento de  $\tilde{V}_c$  pelo valor da constante da mola associada. Deste modo, o problema reduz-se ao da aplicação de esforços nodais, sendo cada esforço descrito pelos deslocamentos impostos multiplicados por uma constante.

O procedimento apresentado permite impor deslocamentos segundo as direções globais. Quando for necessário aplicar movimentos em outras direções, estes devem ser decompostos segundo as direções globais e serão adicionadas molas nas direções das componentes. De outra maneira, seriam afetados os coeficientes não pertencentes à diagonal principal da matriz de rigidez.

Voltando à equação (IV.8), vê-se que o vetor de carregamentos efetivos é fornecido como um dado de entrada, cabendo ao programa empregado a montagem das matrizes  $\tilde{M}$ ,  $\tilde{C}$  e  $\tilde{K}$  calculando seus elementos relativos a graus de liberdade internos. Como visto na dedução de (IV.8), as matrizes  $\tilde{M}$ ,  $\tilde{C}$  e  $\tilde{K}$  não apresentam elementos correspondentes aos graus de liberdade auxiliares. Deste modo, para a montagem destas matrizes, basta posicionar os nós que definem as direções das molas tendo todos os seus deslocamentos restritos. Fica claro então que

os graus de liberdade auxiliares não são incluídos no modelo físico, tendo sido empregados até aqui para mostrar a maneira pela qual é obtida a equação de equilíbrio dinâmico a ser integrada, equação (IV.8).

A equação (IV.8) é idêntica à que seria obtida se fosse utilizado um procedimento algumas vezes empregado em análises estáticas, para impor deslocamentos em determinados pontos (em geral os apoios) de estruturas. Define-se uma mola de rigidez  $\sigma$ , associada ao grau de liberdade que deve sofrer um deslocamento  $\delta$  e aplica-se neste grau de liberdade um esforço  $P = \delta\sigma$ , o qual provoca um deslocamento  $\delta'$ , que será tão próximo ao valor  $\delta$ , quanto maior for o valor de  $\sigma$  em relação à rigidez associada ao grau de liberdade (|3| e |4|). Verifica-se desta forma que a imposição dos movimentos em graus de liberdade auxiliares conectados à estrutura por molas suficientemente rígidas conduz às mesmas equações que são obtidas quando se aplica em problemas dinâmicos o procedimento descrito acima, empregado em análises estáticas.

Como ilustração do método, considere-se a estrutura de vigas da figura 4.2, na qual se deseja impor deslocamentos segundo os graus de liberdade indicados. São conhecidas todas as matrizes que descrevem as propriedades da estrutura e, por simplicidade, não se inclui o amortecimento.

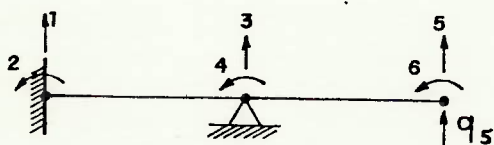


Fig.4.2. - Ilustração do método proposto - elementos de vigas.

$$V_d = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_6 \end{bmatrix}; \quad V_f = \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}; \quad V = \begin{bmatrix} v_4 \\ v_5 \end{bmatrix}$$

A equação de equilíbrio dinâmico é dada por:



$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & 0 & 0 \\ & m_{22} & m_{23} & m_{24} & 0 & 0 \\ & & m_{33} & m_{34} & m_{35} & m_{36} \\ & & & m_{44} & m_{45} & m_{46} \\ \text{simétrica} & & & & m_{55} & m_{56} \\ & & & & & m_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{v}_1 \\ \ddot{v}_2 \\ \ddot{v}_3 \\ \ddot{v}_4 \\ \ddot{v}_5 \\ \ddot{v}_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & 0 & 0 \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} & 0 & 0 \\ & & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ & & & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ \text{simétrica} & & & & k_{55} & k_{56} \\ & & & & & k_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ 0 \\ q_5 \\ q_6 \end{bmatrix}$$

Após o particionamento, rearranjo e eliminação dos graus de liberdade de índice  $f$ , a equação fica:

$$\begin{bmatrix} m_{44} & m_{45} & | & m_{41} & m_{46} \\ m_{54} & m_{55} & | & m_{51} & m_{56} \\ \hline m_{14} & 0 & | & m_{11} & 0 \\ m_{64} & m_{65} & | & 0 & m_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{v}_4 \\ \ddot{v}_5 \\ \ddot{v}_1 \\ \ddot{v}_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{44} & k_{45} & | & k_{41} & k_{46} \\ k_{54} & k_{55} & | & 0 & k_{56} \\ \hline k_{14} & 0 & | & k_{11} & 0 \\ k_{64} & k_{65} & | & 0 & k_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_4 \\ v_5 \\ v_1 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ q_5 \\ q_1 \\ q_6 \end{bmatrix}$$

Até aqui, seguiu-se o primeiro procedimento apresentado no Capítulo III. Passa-se agora à inclusão das molas, como indicado na figura 4.3.

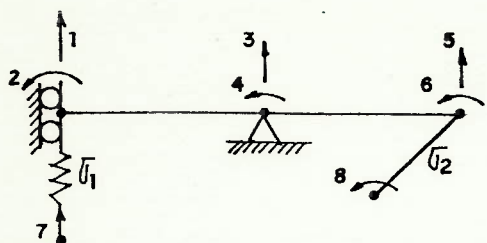


Fig.4.3 - Molas associadas aos graus de liberdade com deslocamentos impostos.

Com a inclusão dos graus de liberdade 7 e 8, e após rearranjo:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{41} & m_{44} & m_{45} & m_{46} & 0 & 0 \\ 0 & m_{54} & m_{55} & m_{56} & 0 & 0 \\ 0 & m_{64} & m_{65} & m_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{v}_1 \\ \ddot{v}_4 \\ \ddot{v}_5 \\ \ddot{v}_6 \\ \ddot{v}_7 \\ \ddot{v}_8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_{11} + \sigma_1) & k_{14} & 0 & 0 & -\sigma_1 & 0 \\ k_{41} & k_{44} & k_{45} & k_{46} & 0 & 0 \\ 0 & k_{54} & k_{55} & k_{56} & 0 & 0 \\ 0 & k_{64} & k_{65} & (k_{66} + \sigma_2) & 0 & -\sigma_2 \\ -\sigma_1 & 0 & 0 & 0 & \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma_2 & 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_5 \\ 0 \\ q_7 \\ q_8 \end{bmatrix}$$

Finalmente, chega-se a:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{14} & 0 & 0 \\ m_{41} & m_{44} & m_{45} & m_{46} \\ 0 & m_{54} & m_{55} & m_{56} \\ 0 & m_{64} & m_{65} & m_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{v}_1 \\ \ddot{v}_4 \\ \ddot{v}_5 \\ \ddot{v}_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_{11} + \sigma_1) & k_{14} & 0 & 0 \\ k_{41} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ 0 & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ 0 & k_{64} & k_{65} & (k_{66} + \sigma_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 v_7 \\ 0 \\ q_5 \\ \sigma_2 v_8 \end{bmatrix}$$

$\tilde{M} \quad \quad \quad \ddot{\tilde{v}} \quad \quad \quad \tilde{K} \quad \quad \quad \tilde{v} \quad \quad \quad \tilde{Q}$

que corresponde à equação (IV.8), anteriormente apresentada.

Como se verifica nas expressões anteriores, o cálculo das reações  $\tilde{Q}_c$  também é simples e pode ser feito manualmente mesmo em estruturas complexas, caso o programa utilizado não forneça estes resultados. No caso do exemplo, tem-se:

$$\begin{bmatrix} -\sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_7 \\ v_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_6 \end{bmatrix}$$

e portanto

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 (v_7 - v_1) \\ \sigma_2 (v_8 - v_6) \end{bmatrix}$$

O caráter aproximado do método pode ser constatado desenvolvendo a equação de equilíbrio de um grau de liberdade com deslocamento imposto da estrutura anterior. Por exemplo, para o grau de liberdade 6:

$$m_{64}\ddot{v}_4 + m_{65}\ddot{v}_5 + m_{66}\ddot{v}_6 + k_{64}v_4 + k_{65}v_5 + (k_{66} + \sigma_2)v_6 = \sigma_2 v_8$$

ou

$$m_{64}\ddot{v}_4 + m_{65}\ddot{v}_5 + m_{66}\ddot{v}_6 + k_{64}v_4 + k_{65}v_5 + k_{66}v_6 = \sigma_2 \tilde{e} \quad (\text{IV.9})$$

onde  $\tilde{e} = (v_8 - v_6)$ .



À medida em que a resposta calculada em  $v_6$  aproxima o deslocamento imposto  $v_g$ , o valor de  $\tilde{\epsilon}$  tende a anular-se. Para  $\tilde{\epsilon} = 0$ , a equação (IV.9) é idêntica à que seria obtida se fosse usado o primeiro procedimento apresentado no Capítulo III, equação (III.5), que não envolve nenhuma aproximação.

O método proposto pode ser empregado em programas de computador já existentes como, por exemplo, o SAP IV e o STRUDL, sem requerer qualquer alteração dos mesmos.

Basta posicionar de maneira conveniente os nós que definem a direção das molas e introduzir estes elementos com constantes de rigidez suficientemente elevadas para permitir a reprodução dos deslocamentos. Os valores das constantes de rigidez devem multiplicar os deslocamentos impostos aos graus de liberdade com molas associadas, o que define os carregamentos a serem aplicados nestes graus de liberdade.

A escolha de valores apropriados para as constantes das molas faz parte da análise do método proposto, que é assunto do próximo Capítulo.

## V - ANÁLISE DO MÉTODO PROPOSTO E TESTES DE CONFIABILIDADE

### V.1 - Apresentação

As alterações efetuadas na matriz de rigidez, pela inclusão dos coeficientes das molas, trazem consigo algumas conseqüências sobre a aplicação do método proposto no Capítulo IV e a validade dos seus resultados. O estudo de algumas dessas conseqüências indica critérios para a correta utilização do procedimento.

Após a análise do método e indicação dos critérios para a sua utilização, são apresentados no fim do Capítulo, dois testes de confiabilidade, que comparam os resultados obtidos na resolução de problemas simples através do procedimento proposto e de outros, que também utilizam métodos matriciais.

### V.2 - Cálculo das Frequências e Modos Naturais.

Em uma análise estática, associar molas muito rígidas a determinados graus de liberdade, da maneira apresentada no Capítulo anterior, produz o efeito de restringir os deslocamentos segundo estes graus de liberdade. Resultados análogos são previstos na análise dinâmica, ou seja, os graus de liberdade com molas muito rígidas associadas devem comportar-se como - graus de liberdade restritos e assim exercer pouca influência nas frequências e modos naturais do modelo. Isto é, espera-se que os resultados obtidos a partir da resolução de  $K\phi = \lambda M\phi$  e de  $\tilde{K}\tilde{\phi} = \tilde{\lambda}\tilde{M}\tilde{\phi}$  (onde  $\tilde{\lambda}$  e  $\tilde{\phi}$  são os autovalores e autovetores do modelo com molas) sejam equivalentes. O estudo destes resultados será apresentado porque fornece diversas informações úteis para definição dos critérios de utilização do método proposto.

Ao abordar este assunto, alguns autores chamam a atenção para a possível ocorrência de problemas relativos à precisão -

numérica (|3|, |4| e |24|), que podem dificultar o cálculo das frequências e modos naturais. Problemas desta natureza não serão aqui considerados e a sua existência será discutida em secções posteriores deste Capítulo.

Inicialmente, será tratado o caso da inclusão de uma única mola, de rigidez  $\sigma$ , no grau de liberdade  $u$  ( $\sigma \gg k_{uu}$ ). Desta forma, as matrizes passam a ter dimensão  $n + 1$ . O que se pretende é verificar qual o comportamento das frequências e modos naturais para valores de  $\sigma$  suficientemente grandes, isto é, o que acontece com estas variáveis quando  $\sigma \rightarrow \infty$ .

Consideram-se todos os autovetores normalizados de forma a ter-se:

$$||\phi|| = \left( \sum_{i=1}^{n+1} |\phi_i|^2 \right)^{1/2} = 1$$

Além disso, as matrizes de rigidez e de massa devem ser positivas definidas e não será estudado o caso de autovalores múltiplos, ou seja,  $\lambda_i \neq \lambda_j$  quando  $i \neq j$ .

Passa-se agora à apresentação dos resultados.

a) Avaliação de  $\tilde{\lambda}_{n+1}$  para  $\sigma \rightarrow \infty$

Sendo  $\rho(\phi)$  o Quociente de Rayleigh |17|, é válida a seguinte propriedade |3|:

$$\tilde{\lambda}_1 \leq \rho(\phi) \leq \tilde{\lambda}_{n+1}$$

para todo vetor  $\phi$  de  $n+1$  dimensões

Tendo sido a mola introduzida no grau de liberdade  $u$ , escolhe-se



$$\phi = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \\ \\ u \\ \\ \\ n+1 \end{matrix}$$

$$\text{Deste modo, } \rho(\phi) = \frac{\phi^t \tilde{K} \phi}{\phi^t \tilde{M} \phi} = \frac{k_{uu} + \sigma}{m_{uu}} ;$$

$$\text{logo, } \tilde{\lambda}_{n+1} \geq \frac{k_{uu} + \sigma}{m_{uu}} \quad (\text{V.1})$$

Portanto, quando  $\sigma \rightarrow \infty$ ,  $\tilde{\lambda}_{n+1} \rightarrow \infty$  (isto é,  $\tilde{\lambda}_{n+1}$  fica arbitrariamente grande se  $\sigma \rightarrow \infty$ ).

b) Avaliação de  $\tilde{\lambda}_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) quando  $\sigma \rightarrow \infty$

Após rearranjo de linhas e colunas das matrizes  $\tilde{K}$  e  $\tilde{M}$ , tem-se os elementos  $(k_{uu} + \sigma)$  e  $m_{uu}$  na posição  $i = j = 1$ . Os autovalores do problema  $\tilde{K} \tilde{\phi} = \tilde{\lambda} \tilde{M} \tilde{\phi}$  são raízes da equação:

$$\det(\tilde{K} - \tilde{\lambda} \tilde{M}) = 0$$

Desenvolvendo este determinante a partir da primeira linha, tem-se:

$$\left[ (k_{uu} + \sigma) - \tilde{\lambda} m_{uu} \right] \det B_{11} + \sum_{j=2}^{n+1} \left[ (k_{uj} - \tilde{\lambda} m_{uj}) (-1)^{1+j} \det B_{1j} \right] = 0$$

onde,  $B = \tilde{K} - \tilde{\lambda} \tilde{M}$  e  $B_{1j}$  é a matriz obtida quando se retira a primeira linha e a  $j$ -ésima coluna de  $B$ .

A matriz  $B_{11}$  é calculada a partir das matrizes de rigidez e de massa do modelo antes de terem sido acrescentadas a linha e a coluna do grau de liberdade ao qual é associada a mola, ou seja,  $B_{11} = K - \tilde{\lambda} M$ . Pela propriedade da separação dos autovalores | 3 |, sabe-se que

$$\sigma \leq \tilde{\lambda}_1 \leq \lambda_1 \leq \tilde{\lambda}_2 \leq \dots \leq \tilde{\lambda}_n \leq \lambda_n \leq \tilde{\lambda}_{n+1} \quad (\text{V.2})$$

logo,  $\tilde{\lambda}_i \leq \lambda_n$ ,  $\forall i$  e  $\forall \sigma$ ; portanto, ao procurar as  $n$  primeiras raízes de  $\det(\tilde{K} - \tilde{\lambda} \tilde{M})$ , pode-se restringir a busca ao intervalo  $[0, \lambda_n]$ .

Tomando-se  $\sigma$  suficientemente grande, de forma a ter-se:

$(k_{uu} + \sigma) - \tilde{\lambda} m_{uu} \neq 0$ , para  $\forall \tilde{\lambda}$  ( $0 \leq \tilde{\lambda} \leq \lambda_n$ ), pode-se escrever

$$\det B_{11} + e(\tilde{\lambda}, \sigma) = 0 \quad (\text{V.3})$$

$$\text{onde } e(\tilde{\lambda}, \sigma) = \frac{\sum_{j=2}^{n+1} [(k_{uj} - \tilde{\lambda} m_{uj})(-1)^{1+j} \det B_{1j}]}{(k_{uu} + \sigma) - \tilde{\lambda} m_{uu}} \quad (\text{V.4})$$

Portanto,  $e(\tilde{\lambda}, \sigma) \rightarrow 0$  ( $e(\tilde{\lambda}, \sigma)$  fica arbitrariamente próximo de zero) quando  $\sigma \rightarrow \infty$ .

Desenvolvendo o determinante de  $B_{11}$ , chega-se ao polinômio  $P_n(\tilde{\lambda}) = \det(K - \tilde{\lambda}M)$ , de grau  $n$  em  $\tilde{\lambda}$ , cujas raízes são os valores de  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  ( $0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ ).

Assim sendo, como  $\det(\tilde{K} - \tilde{\lambda} \tilde{M})$  e  $P_n(\tilde{\lambda}) + e(\tilde{\lambda}, \sigma)$  têm as mesmas raízes em  $[0, \lambda_n]$  e como o gráfico de  $P_n(\tilde{\lambda}) + e(\tilde{\lambda}, \sigma)$  fica arbitrariamente próximo do gráfico de  $P_n(\tilde{\lambda})$  (isto quando  $\sigma \rightarrow \infty$ ), segue-se que  $\tilde{\lambda}_i \rightarrow \lambda_i$  (isto é,  $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \tilde{\lambda}_i = \lambda_i$ ).

A figura 5.1 mostra o aspecto dos gráficos de  $P_n(\tilde{\lambda})$  e  $P_n(\tilde{\lambda}) + e(\tilde{\lambda}, \sigma)$

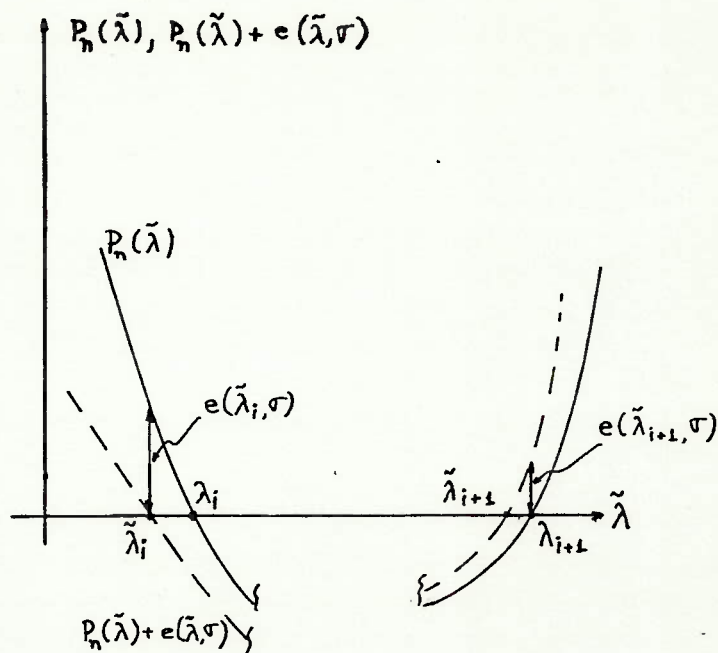


Fig.5.1 - Aspecto dos gráficos de  $P_n(\tilde{\lambda})$  e  $P_n(\tilde{\lambda}) + e(\tilde{\lambda}, \sigma)$

c) Aspecto de  $\tilde{\phi}_i$  ( $i \leq n$ ), quando  $\sigma \rightarrow \infty$ .

Pode-se verificar o aspecto dos autovetores  $\tilde{\phi}_i$  quando  $\sigma \rightarrow \infty$ , substituindo os autovalores correspondentes na expressão  $\tilde{K} \tilde{\phi} = \tilde{\lambda} \tilde{M} \tilde{\phi}$ . Por exemplo, quando  $i = 1$ ,

$$\tilde{K} \tilde{\phi}_1 = \tilde{\lambda}_1 \tilde{M} \tilde{\phi}_1 \quad (V.5)$$

Efetuando os produtos, tem-se para a primeira linha - (matrizes  $\tilde{K}$  e  $\tilde{M}$  com elementos  $(k_{uu} + \sigma)$  e  $m_{uu}$  na posição  $i = j = 1$ ):

$$(k_{uu} + \sigma) \tilde{\phi}_1^u + k_{u1} \tilde{\phi}_1^1 + \dots + k_{u,n+1} \tilde{\phi}_1^{n+1} = \lambda_1 (m_{uu} \tilde{\phi}_1^u + \dots + m_{u,n+1} \tilde{\phi}_1^{n+1})$$

Os valores de  $\tilde{\phi}_1^i$  são limitados para qualquer  $i$ , portanto, quando  $\sigma \rightarrow \infty$ , é necessário que  $\tilde{\phi}_1^u \rightarrow 0$ , para que se verifique a igualdade anterior.



Chamando de  $\psi_1^i$  os valores de  $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \tilde{\phi}_1^i$  (nos casos em que este limite exista) e de  $\Psi_1$  o vetor formado pelas coordenadas  $\psi_1^i$ , tem-se:

$$\Psi_1 = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \tilde{\phi}_1 \quad (\text{V.6})$$

Como  $\psi_1^u = 0$  e  $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \tilde{\lambda}_1 = \lambda_1$ , os demais produtos de (V.5) são indicados:

$$\begin{bmatrix} k_{11} \cdots k_{1,u-1} & k_{1,u+1} \cdots k_{1,n+1} \\ \vdots & \vdots \\ k_{n+1,1} & k_{n+1,u-1} & k_{n+1,u+1} & k_{n+1,n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1^1 \\ \vdots \\ \psi_1^{u-1} \\ \psi_1^{u+1} \\ \vdots \\ \psi_1^{n+1} \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} m_{11} \cdots m_{1,u-1} & m_{1,u+1} \cdots m_{1,n+1} \\ \vdots & \vdots \\ m_{n+1,1} \cdots m_{n+1,u-1} & m_{n+1,u+1} \cdots m_{n+1,n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1^1 \\ \vdots \\ \psi_1^{u-1} \\ \psi_1^{u+1} \\ \vdots \\ \psi_1^{n+1} \end{bmatrix}$$

ou  $K \Psi_1 = \lambda_1 M \Psi_1$ , o que significa que  $\Psi_1$  é autovetor de  $K \Phi = \lambda_1 M \Phi$ . Além disso,

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \sqrt{\sum (\tilde{\phi}_1^i)^2} = \sqrt{\sum (\psi_1^i)^2} = \|\Psi_1\| = 1$$

Como  $\Psi_1$  é autovetor de  $K \Phi = \lambda_1 M \Phi$ ,  $\|\Phi_1\| = \|\Psi_1\|$ , e também, lembrando que não ocorre multiplicidade de autovalores e que os autovetores correspondentes são linearmente -

independentes, chega-se a:

$$\psi_1 = +\phi_1 \quad \text{ou} \quad \psi_1 = -\phi_1$$

Portanto,  $\tilde{\phi}_i \rightarrow +\phi_i$  ou  $\tilde{\phi}_i \rightarrow -\phi_i$  ( $\tilde{\phi}_i$  fica arbitrariamente próximo de  $\phi_i$  ou de  $-\phi_i$ ) quando  $\sigma \rightarrow \infty$ .

d) Aspecto de  $\tilde{\phi}_{n+1}$  quando  $\sigma \rightarrow \infty$

Define-se agora  $\psi_i = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \tilde{\phi}_i$  (ou seja,  $\psi_i^j = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \tilde{\phi}_i^j$ ,  $(1 \leq j \leq n+1)$  e  $(1 \leq i \leq n+1)$ ) nos casos em que estes limites existem.

Pelas condições de ortogonalidade, sabe-se que  $\tilde{\phi}_i^t \tilde{M} \tilde{\phi}_j = 0$ , se  $i \neq j$ . Logo, também é verdadeiro que  $\psi_i^t \tilde{M} \psi_j = 0$ , se  $i \neq j$ .

O aspecto de  $\tilde{\phi}_{n+1}$  será estudado apenas quando a matriz de massa for do tipo:

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} m_{uu} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & m_{11} & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & m_{n+1,n+1} \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} m_{uj} = 0, \quad j \neq u \text{ e} \\ 1 \leq j \leq n+1 \end{array}$$

(as linhas e colunas foram rearranjadas de modo a ter-se  $m_{uu}$  na posição  $i = j = 1$ )

Os autovetores  $\psi_r$  ( $1 \leq r \leq n$ ) formam uma base do espaço  $\mathbb{R}_n$  contida em  $\mathbb{R}_{n+1}$  (espaço real de  $n+1$  dimensões), pois todos eles tem a coordenada  $\psi_r^u = 0$  ( $r = 1, \dots, n$ ). Por esta mesma razão,  $M\psi_r$  também pertence a  $\mathbb{R}_n$  e como  $M$  é inversível, os vetores  $\bar{\psi}_r = M\psi_r$  ( $r = 1, \dots, n$ ) formam uma base do  $\mathbb{R}_n$ . Como lembrado acima,  $\psi_{n+1}^t \bar{\psi}_r = 0$  ( $r = 1, \dots, n$ ), o que significa que  $\psi_{n+1}$  é ortogonal ao sub-espaço formado pelos vetores  $\bar{\psi}_r$  ( $r = 1, \dots, n$ ). Logo,  $\psi_{n+1}$  tem todas as suas coordenadas nulas, exceto a  $u$ -ésima, e sendo normalizado como os demais autovetores, ou seja,  $\|\psi_{n+1}\| = 1$ , tem-se então que  $\psi_{n+1}^u = 1$ , ou  $\psi_{n+1}^u = -1$  (isto é,  $\psi_{n+1}^t = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & \dots & 0 \\ u & 1 & & n+1 \end{pmatrix}$ ).

Um tipo de matriz de massa que satisfaz a restrição imposta acima é a matriz de massa diagonal.

A resolução de um problema simples serve para ilustrar os resultados anteriores. Por exemplo, no modelo de vigas da figura 5.2, foi adicionada uma mola ao nó 1 em lugar de um apoio simples que restringia a translação na direção vertical.

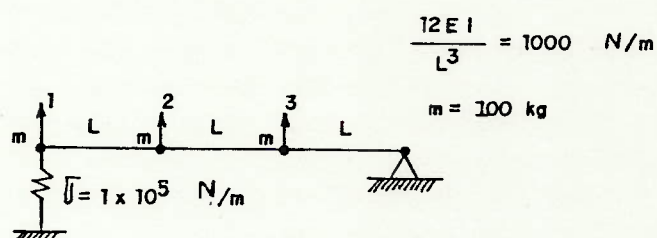


Fig.5.2 - Modelo de uma viga com mola associada a um dos apoios.

As frequências naturais do modelo antes da inclusão da mola (apoio nas duas extremidades) são as raízes quadradas positivas de  $\lambda_1 = 10 \text{ (rad/s)}^2$  e  $\lambda_2 = 30 \text{ (rad/s)}^2$ ;  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são as raízes de

$$P_n(\lambda) = \lambda^2 - 40\lambda + 300$$

Após a inclusão das molas, as frequências naturais do modelo são:



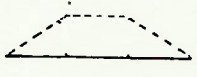
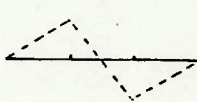
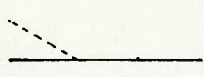
$$\tilde{\omega}_1 = \sqrt{9,95} = 3,15 \text{ rad/s}$$

$$\tilde{\omega}_2 = \sqrt{29,95} = 5,47 \text{ rad/s}$$

$$\tilde{\omega}_3 = \sqrt{1010,10} = 31,78 \text{ rad/s}$$

A tabela 5.1 apresenta as freqüências e os modos naturais do modelo com molas.

Tabela 5.1- Modos normalizados e freqüências naturais do modelo da figura 5.2.

Coordenadas dos modos normalizados	freqüências naturais (rad/s)		
	1ª	2ª	3ª
	3,15	5,47	31,78
$\tilde{\phi}_1$	0,01	0,01	1,00
$\tilde{\phi}_2$	1,00	1,00	-0,01
$\tilde{\phi}_3$	1,00	-1,00	0,00
Aspecto			

Se for utilizada a equação (V.3) para o cálculo das freqüências naturais, chega-se a:

$$P_n(\tilde{\lambda}) + e(\tilde{\lambda}, \sigma) = \tilde{\lambda}^2 - 40\tilde{\lambda} + 300 + \frac{10^4 \tilde{\lambda} - 2 \times 10^5}{1000 + \sigma - 100 \tilde{\lambda}} = 0$$

A tabela 5.2 apresenta as raízes de  $P_n(\tilde{\lambda}) + e(\tilde{\lambda}_1, \sigma)$  bem como os valores de  $e(\tilde{\lambda}, \sigma)$  para diversos valores de  $\sigma$ .

Tabela 5.2 - Raízes de  $P_n(\tilde{\lambda}) + e(\tilde{\lambda}, \sigma)$  e valores de  $e(\tilde{\lambda}, \sigma)$  associados .

$\sigma$ (N/m)	$\tilde{\lambda}_1$ (rad/s) <sup>2</sup>	$e(\tilde{\lambda}_1, \sigma)$	$\tilde{\lambda}_2$ (rad/s) <sup>2</sup>	$e(\tilde{\lambda}_2, \sigma)$
$10^4$	9,490	-10,457	29,399	11,661
$10^5$	9,950	- 1,005	29,949	1,015
$10^6$	9,995	- 0,100	29,995	0,100
$10^7$	9,999	- 0,010	29,999	0,010

O caso geral da introdução de várias molas é uma extensão do anterior e suas propriedades são as mesmas. Para estudá-lo, pode-se considerar que as molas são adicionadas à matriz de rigidez uma de cada vez. Por exemplo, com a inclusão de uma segunda mola de rigidez  $\sigma_2$  associada a outro grau de liberdade, fixando para  $\sigma_1$  um valor grande o suficiente para que sejam válidas as propriedades já demonstradas, repete-se o procedimento anterior fazendo  $\sigma_2 \rightarrow \infty$ .

### V.3 - Escolha das Constantes de Rigidez das Molas

A expressão (V.4) mostra que  $e(\tilde{\lambda}, \sigma) \rightarrow 0$  quando  $\sigma \rightarrow \infty$ , e que assim  $\tilde{\lambda}_i \rightarrow \lambda_i$ . O valor de  $\sigma$  sempre pode ser aumentado de maneira a ter-se  $e(\tilde{\lambda}_i, \sigma)$  suficientemente pequeno para todos os  $\tilde{\lambda}_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ), mas isso não é necessário na maioria dos casos. Basta que  $\sigma$  seja tal que permita obter, com boa aproximação, os valores das  $r$  ( $r \leq n$ ) frequências e modos natu-

rais originais que devem participar da resposta. Por frequências e modos naturais originais entende-se os que são obtidos da resolução de  $(K - \lambda M)\Phi = 0$ .

Fica então definido como critério para a escolha das molas, que estas tenham uma rigidez suficientemente elevada para reproduzir, dentro da precisão desejada,  $r$  ( $r \leq n$ ) frequências e modos naturais do problema  $K\Phi = \lambda M\Phi$ .

O procedimento para determinar o valor apropriado das constantes de rigidez das molas consiste no cálculo dos autovalores e autovetores de  $(K - \lambda M)\Phi = 0$ , seguido da resolução dos problemas  $(\tilde{K} - \tilde{\lambda} \tilde{M})\tilde{\Phi} = 0$ , para diversos valores destas constantes.

A rigidez das molas não pode ser arbitrariamente grande, porque isso aumenta a possibilidade de ocorrência de problemas relativos à precisão numérica e convergência dos resultados, - como mencionado no início deste Capítulo.

Estes problemas ocorrem nos processos de cálculo dos autovalores e autovetores, que envolvem a fatoração da matriz de rigidez, ou de matrizes obtidas a partir dela e que conservam as suas características (isto é, apresentam na diagonal principal elementos de ordens de grandeza muito diferentes). Indicando por  $\bar{K}$  estas matrizes, ao se efetuar a fatoração  $\bar{K} = \bar{L}^t \bar{D} \bar{L}$  (mais detalhes em | 3 |), o valor médio dos elementos da matriz diagonal  $\bar{D}$  pode ser muito maior que o valor de um elemento  $\bar{d}_{ii}$  qualquer. Isto pode levar o programa empregado a considerar  $\bar{d}_{ii}$  como nulo e acusar a presença de modos rígidos de vibrar, causando a interrupção do processamento, como ocorre com o SAP IV | 4 |.

#### V.4 - Resolução das Equações de Equilíbrio Dinâmico

A escolha do método de integração das equações de equilíbrio dinâmico geralmente é feita considerando o número de modos a serem incluídos na resposta e o intervalo de tempo durante o qual será calculada, fatores estes que determinam o tempo e o custo de processamento do programa empregado (| 5 | e | 8 |).



Em geral, prefere-se o método da integração direta quando muitos modos precisam ser incluídos na resposta (e portanto é necessário adotar um intervalo de integração pequeno  $| \Delta t |$  e esta é requerida para um curto intervalo de tempo. No caso contrário (pequeno número de modos e resposta requerida em períodos de tempo maiores), o método da superposição modal é mais eficiente.

Além destas considerações, a solução dada ao problema da imposição de movimentos introduz outras, que afetam os resultados obtidos por um ou outro método de integração, como mostrado a seguir.

a) Método da Superposição Modal .

Neste método, os deslocamentos são dados por (II.14):

$$\tilde{V} = \tilde{F} \tilde{Y} \quad (V.7)$$

onde  $\tilde{F}$  = matriz modal - modelo com molas

$\tilde{Y}$  = vetor das amplitudes modais - modelo com molas

e pretende-se que  $\tilde{V}$  seja uma boa aproximação da resposta. Já foi visto que molas muito rígidas permitem reproduzir os modos naturais do modelo original, de modo que  $\tilde{\phi}_i \approx \phi_i$  ( $i \leq i \leq n$ ).

No caso da introdução de uma única mola suficientemente rígida no grau de liberdade  $u$ , tem-se:

$$\begin{bmatrix} \tilde{v}_1 \\ \vdots \\ \tilde{v}_u \\ \vdots \\ \tilde{v}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_1^1 & \dots & \tilde{\phi}_r^1 & \dots & \tilde{\phi}_n^1 & \tilde{\phi}_{n+1}^1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \tilde{\phi}_1^u & & \tilde{\phi}_r^u & & \tilde{\phi}_n^u & \tilde{\phi}_{n+1}^u \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \tilde{\phi}_1^{n+1} & \dots & \tilde{\phi}_r^{n+1} & \dots & \tilde{\phi}_n^{n+1} & \tilde{\phi}_{n+1}^{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \vdots \\ \tilde{y}_u \\ \vdots \\ \tilde{y}_{n+1} \end{bmatrix}$$

onde  $\tilde{\phi}_i^u \sim 0$  ( $1 \leq i \leq n$ ) e  $\tilde{\phi}_{n+1}^i \sim 0$  ( $i \leq n+1, i \neq u$ ) e a matriz de massa é do tipo especificado em V.2, item d).

No grau de liberdade  $u$ , o deslocamento é dado por:

$$\tilde{v}_u = \tilde{\phi}_1^u \tilde{y}_1 + \dots + \tilde{\phi}_r^u \tilde{y}_r + \dots + \tilde{\phi}_n^u \tilde{y}_n + \tilde{\phi}_{n+1}^u \tilde{y}_{n+1} \quad (V.8)$$

Pela expressão (V.8) vê-se que é necessário incluir na resposta a participação do  $(n+1)$ -ésimo modo, para reproduzir o deslocamento imposto em  $\tilde{v}_u$ . Este modo de vibrar não corresponde ao modelo original, mas a sua inclusão na resposta não deve introduzir erros significativos nos deslocamentos calculados para os demais graus de liberdade, pois como lembrado acima,  $\tilde{\phi}_{n+1}^i$  são muito próximos de zero (desde que a matriz de massa obedeça às restrições impostas em V.2, item d).

A maior fonte de erros deve ser a inclusão de todos os modos calculáveis a partir do modelo original, que em geral não constituem uma boa aproximação dos modos de vibrar da estrutura (| 3 | e | 5 |).

Se a rigidez da mola for suficiente apenas para aproximar  $r$  frequências e modos naturais, a reprodução do deslocamento imposto  $\delta(t)$  em  $\tilde{v}_u$  requer a inclusão de outros modos  $\tilde{\phi}_\ell$  ( $1 \leq \ell \leq n+1$ ), nos quais  $\tilde{\phi}_\ell^u$  sejam tais que  $\tilde{v}_u = \sum_{\ell} \tilde{\phi}_\ell^u \tilde{y}_\ell \sim \delta(t)$ , ( $1 \leq \ell \leq n+1$ ).

Como os autovetores  $\tilde{\phi}_\ell$  não são boas aproximações dos modos de vibrar do modelo original, a sua inclusão na resposta, apesar de permitir a reprodução do deslocamento imposto, pode levar a resultados incorretos para os deslocamentos nos demais graus de liberdade, sem que seja possível constatar a ocorrência destes erros.

As mesmas considerações são válidas quando se faz a inclusão de várias molas, ou seja, é necessário incluir na resposta a participação de modos que não correspondem ao modelo original, para permitir a reprodução dos deslocamentos impostos.

Pelo apresentado, não se recomenda a utilização do método da Superposição Modal para o cálculo da resposta, ainda que, pelo seu emprego, seja possível chegar a resultados corretos em alguns casos.

#### b) Métodos de Integração Direta.

Os métodos de Integração Direta das equações de equilíbrio dinâmico geralmente implementados nos programas de computador, requerem a solução de sistemas de equações lineares para o cálculo da resposta. Por exemplo, no método "Wilson- $\theta$ ", descrito no Capítulo II, os deslocamentos nodais do modelo são calculados após a resolução da equação:

$$\tilde{K} \tilde{V}_{t+\theta\Delta t} = \tilde{Q}_{t+\theta\Delta t} \quad (V.9)$$

onde  $\tilde{K}$  e  $\tilde{Q}_{t+\theta\Delta t}$  são análogas às matrizes  $\hat{K}$  e  $\hat{Q}_{t+\theta\Delta t}$  da equação II.37. Para a resolução do sistema acima, é necessário triangularizar a matriz  $\tilde{K}$ , obtida a partir de  $\hat{K}$  e que portanto pode apresentar os mesmos problemas comentados em V.3. Essas dificuldades numéricas podem ser evitadas utilizando-se programas de computador com maior número de casas de precisão (|2|, |3| e |29|). Este procedimento foi adotado nos testes de confiabilidade apresentados em seguida bem como no exemplo do Capítulo VI e não foram constatados quaisquer problemas numéricos.

#### V.5 - Testes de Confiabilidade

Foram realizados dois testes de confiabilidade cujos resultados são comparados com valores já conhecidos ou obtidos por outros métodos matriciais.



Em ambos os testes foi utilizada a mesma excitação - que é descrita na figura 5.3 (acelerações) e na tabela 5.3. (deslocamentos).

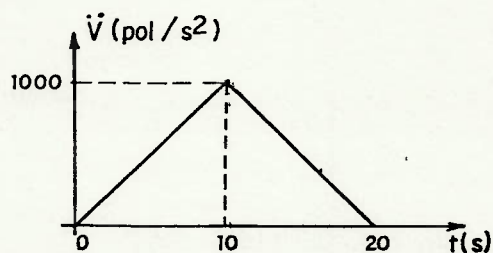


Fig. 5.3 - Acelerações.

Tabela 5.3- Deslocamentos

t(s)	V (pol)	t(s)	V(pol)
1	17	11	22.152
2	133	12	28.500
3	453	13	37.720
4	1.097	14	43.600
5	2.053	15	52.080
6	3.800	16	61.070
7	5.717	17	70.450
8	8.533	18	80.130
9	12.158	19	90.020
10	16.667	20	100.000

Os testes foram realizados utilizando-se o programa SAP IV com precisão dupla (22 dígitos - Burroughs B-6900).

### Teste 1

Neste teste, utiliza-se o método aqui proposto visando reproduzir um exemplo de aplicação dos recursos do programa SAP IV para o cálculo da resposta dinâmica de estruturas submetidas a acelerações de translação idênticas e simultâneas em seus apoios, apresentado no manual de utilização do programa [4].

A estrutura é a viga em balanço da figura 5.4, submetida à aceleração descrita na figura 5.3, segundo a direção Y. Nesta figura é mostrada a modelagem adotada no manual do SAP IV.

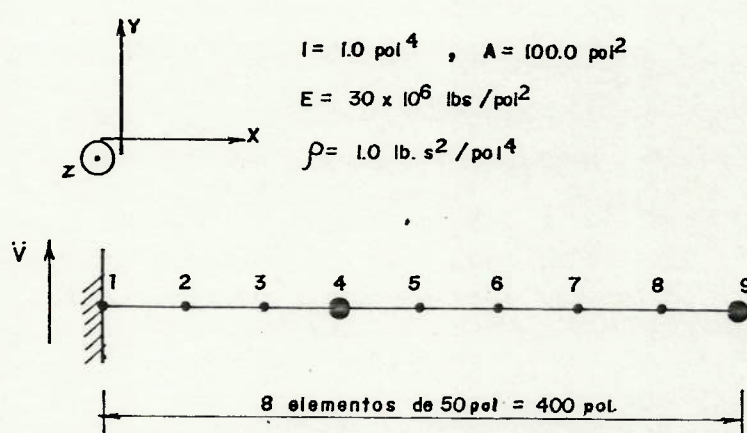


Figura 5.4- Viga em balanço submetida a acelerações no engaste; nas posições  $x = 150$  e  $400 \text{ pol}$  foram acrescentadas massas de  $1 \text{ lb. s}^2/\text{pol}$ .

Os testes foram realizados adicionando-se elementos de contorno ao nó 1, na direção Y (mola linear,  $\sigma_m$ ) e na direção Z (mola torcional  $\sigma_t$ ), como indicado na figura 5.5, que mostra a modelagem empregada para a realização do teste. As constantes de mola foram escolhidas conforme o critério apresentando em V.3. Note-se que não seria necessário incluir a mola torcional.

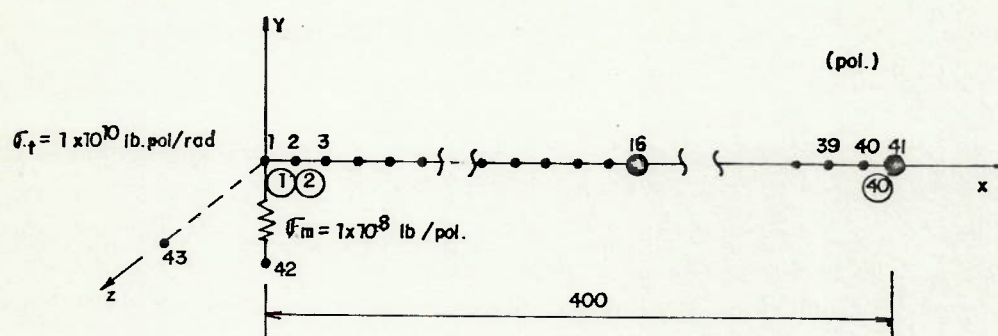


Fig.5.5 - Modelo utilizado na análise da viga em balanço.

Os resultados foram obtidos pelo método da integração direta, com um intervalo de integração de 0.05 segundos e são mostrados nas figuras 5.6, 5.7 e 5.8. Nos gráficos de deslocamentos, são comparados seus valores relativos (deslocamentos em relação à base móvel), pois estes são os resultados fornecidos pelo SAP IV quando se utilizam seus recursos de aceleração das bases. Verificou-se que os deslocamentos absolutos do nó 1 reproduziram exatamente os movimentos impostos no engastamento.

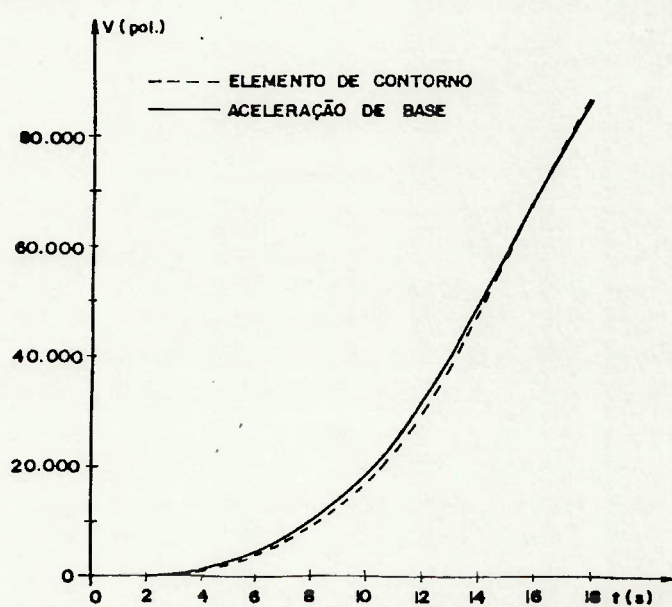


Fig.5.6 - Deslocamentos relativos no meio da viga ( $x = 200\text{pol.}$ ).



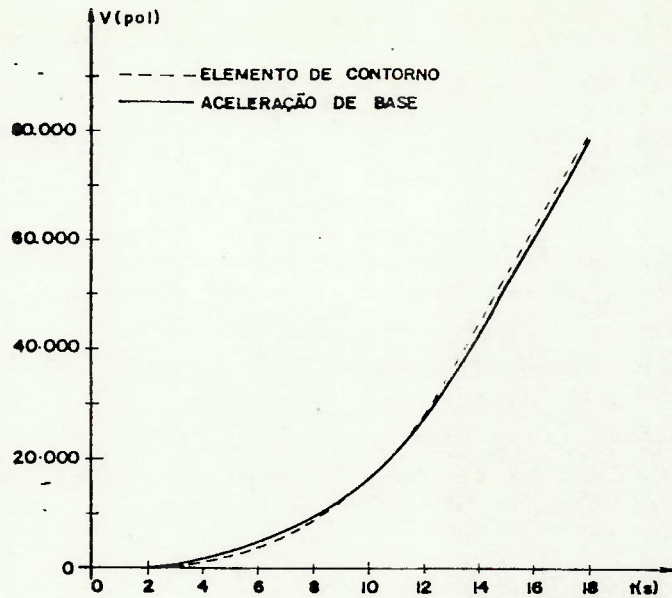


Fig.5.7- Deslocamentos relativos na extremidade livre da viga ( $x = 400$  pol).

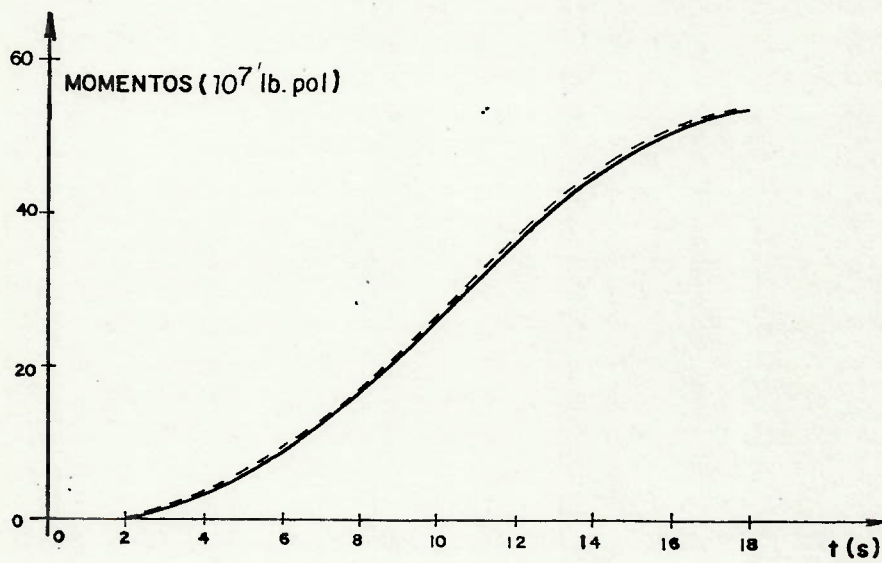


Fig.5.8- Momentos no engastamento.

### Teste 2

No apoio da esquerda da viga mostrada na figura 5.9, cujas propriedades são similares às da viga engastada do teste anterior, foram impostos os deslocamentos descritos na tabela 5.3. O modelo de viga utilizado é o mostrado na figura 5.5 com as seguintes alterações: foram eliminadas a mola torsional bem como as massas concentradas adicionais dos nós 16 e 41; foi restringido o deslocamento segundo Y do nó 41.

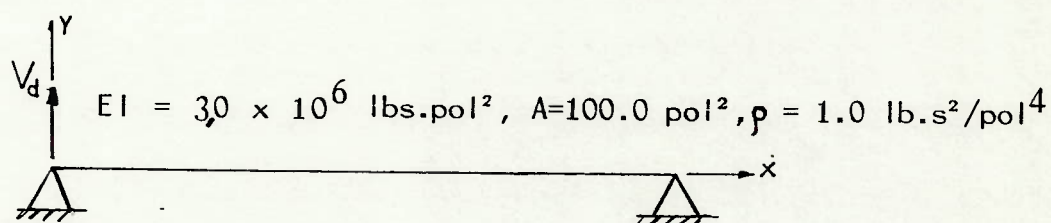


Fig. 5.9 - Viga bi-apoiada submetida a deslocamentos no apoio da esquerda.

Os deslocamentos ao longo da viga foram calculados de quatro maneiras:

- utilizando o modelo com molas e os métodos da Superposição Modal e Integração Direta;
- utilizando a primeira solução matricial "exata" apresentada no Capítulo III e os mesmos métodos de integração.

Para utilizar a solução matricial exata, restringe-se o deslocamento segundo Y no apoio da esquerda. Os elementos da matriz  $K_{i,d}$  (ver Capítulo III equação (III.3)) multiplicados pelos deslocamentos impostos formam o carregamento efetivo, aplicado como mostrado na figura 5.10.

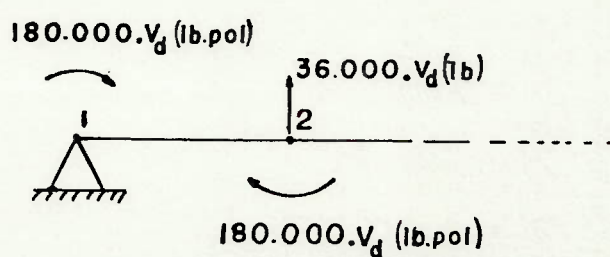


Fig.5.10 - Aplicação do carregamento efetivo -  
solução matricial "exata".

Os resultados são mostrados na tabela 5.4. Quando se usa a solução matricial "exata", os deslocamentos calculados pelos métodos da Superposição Modal e da Integração Direta são idênticos. O intervalo de integração adotado para a Integração Direta é igual a  $T_f/10$  ( $T_f$  é o período do modo natural de mais alta ordem incluído na resposta).

O cálculo da resposta pelo método da Superposição Modal foi feito considerando a participação de todos os modos calculáveis a partir dos modelos, ou seja, 40 modos no modelo com molas e 39 modos no modelo da solução matricial "exata". Sem a inclusão do 40º modo, a resposta calculada utilizando o modelo com molas não reproduzia o deslocamento imposto e fornecia resultados errados para os demais deslocamentos.



Tabela 5.4 - Comparação dos resultados; deslocamentos absolutos.

x(pol)	Deslocamentos (pol)		
	Modelo com molas		Solução "exata"
	SM	ID	SM e ID
	t = 1 s		
20	5,001 E-1	4,948 E-1	4,948 E-1
100	-9,039 E-3	-9,261 E-3	-9,261 E-3
200	-2,615 E-6	-5,045 E-8	-5,045 E-8
300	-2,583 E-6	-2,749 E-13	-2,749 E-13
350	-2,581 E-6	2,020 E-16	2,020 E-16
	t = 5 s		
20	5,709 E+2	5,709 E+2	5,709 E+2
100	2,254 E+1	2,254 E+1	2,254 E+1
200	-2,385 E 0	-2,383 E 0	-2,383 E 0
300	-1,170 E-1	-1,157 E-1	-1,157 E-1
350	-3,607 E-4	-1,237 E-3	-1,238 E-3
	t = 10 s		
20	7,358 E+3	7,358 E+3	7,358 E+3
100	-6,388 E+2	-6,388 E+2	-6,388 E+2
200	-5,628 E+1	-5,629 E+1	-5,629 E+1
300	-7,243 E-1	-7,273 E-1	-7,273 E-1
350	-5,222 E-1	-5,245 E-1	-5,245 E-1
	t = 15 s		
20	2,868 E+4	2,868 E+4	2,868 E+4
100	-4,752 E+3	-4,752 E+3	-4,751 E+3
200	2,605 E+2	2,605 E+2	2,604 E+2
300	4,956 E+1	4,956 E+1	4,963 E+1
350	-1,878 E+1	-1,878 E+1	-1,877 E+1
	t = 19 s		
20	5,586 E+4	5,586 E+4	5,586 E+4
100	-1,039 E+4	-1,039 E+4	-1,038 E+4
200	1,558 E+3	1,558 E+3	1,557 E+3
300	-6,797 E+1	-6,797 E+1	-6,786 E+1
350	4,984 E+1	4,984 E+1	5,008 E+1

SM - Superposição modal

ID - Integração direta

nº E<sup>±</sup> . m = nº x 10<sup>± m</sup>

## VI - EXEMPLO DE APLICAÇÃO DO MÉTODO PROPOSTO

### VI.1 - Introdução

Será apresentada a aplicação do método proposto para o estudo de uma estrutura real, passível de ser excitada dinamicamente pela imposição de movimentos independentes em diversos de seus pontos.

Trata-se da linha de eixos de uma corveta. Os movimentos a ela impostos provêm de choque lateral provocado por uma explosão submarina, não comprometedora da integridade do casco.

Esta estrutura já foi estudada no que se refere a vibrações laterais |25| e à sua resposta a choque |26|. Neste segundo estudo, o choque era transmitido à linha de eixos através da imposição de movimentos idênticos e simultâneos em seus mancais. Diversas informações dessas análises anteriores serão aqui aproveitadas.

Além de sugerir um procedimento que possa ser seguido em estudos semelhantes, pretende-se efetuar uma análise qualitativa dos resultados, procurando identificar tendências no comportamento da estrutura. A análise dos resultados não permite emitir julgamentos acerca da aptidão da linha de eixos para resistir ao carregamento de choque, pois, como será apresentado em seguida, não se conseguiu definir com certeza a excitação apropriada.

A estrutura será estudada com a utilização do programa SAP IV | 4 | versão dupla precisão (22 dígitos).

### VI.2 - Elaboração do Modelo

#### VI.2.1- Estabelecimento do objetivo da análise

O objetivo da análise ficou delimitado pelas informações disponíveis a respeito da estrutura e da excitação.



Será apresentada a descrição destas informações e do grau de confiabilidade das mesmas, acompanhadas das considerações feitas para a sua aplicação na análise da linha de eixos.

a) Estrutura a ser analisada.

Como indicado em | 13 | e | 34 |, a resistência a choque de equipamentos geralmente é verificada após estes terem sido projetados para atenderem os requisitos de suas condições normais de operação. Portanto, na maioria dos casos, são conhecidos todos os dados necessários para a elaboração dos modelos empregados na avaliação da resistência a choque.

Tal situação é verificada apenas parcialmente na análise da linha de eixos em questão, da qual se conhecem apenas suas propriedades geométricas e físicas enquanto as dos mancais são desconhecidas. Os mancais são considerados como apoios simples, conforme | 26 |, de modo a não influírem na resposta.

A figura 6.1 mostra esquematicamente a linha de eixos, indicando a posição dos mancais, acoplamentos, engrenagem redutora e propulsor.

b) Efeitos visados.

Deseja-se estudar apenas os efeitos do choque aplicado lateralmente à linha de eixos. Portanto, serão desprezados quaisquer efeitos de vibrações axiais e torcionais, bem como o fato do eixo estar girando. Ignorando-se os efeitos de vibrações axiais, não será necessário decompor o movimento aplicado aos mancais na direção perpendicular e tangente à da linha de eixos, o que aparentemente seria necessário, visto que esta não é paralela ao fundo da embarcação, conforme mostrado na figura 6.1.



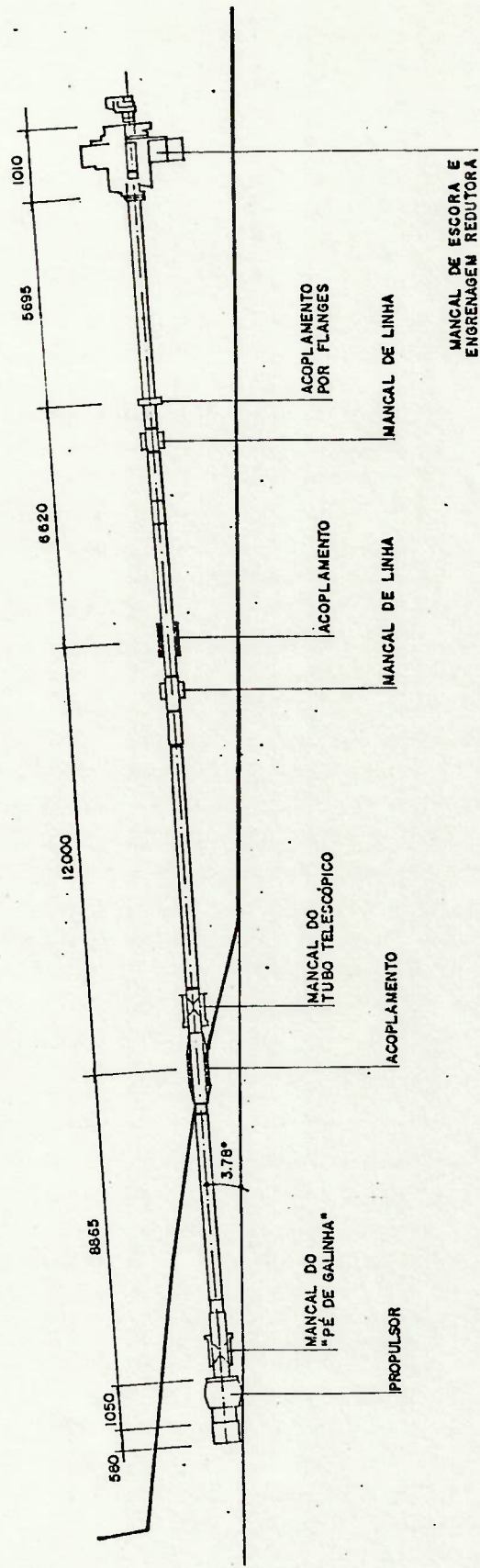


Fig.6.1 - Esquema da linha de eixos

MEDIDAS EM MILÍMETROS

c) Excitação.

O cálculo da resposta de equipamentos a choque geralmente é feito no projeto de embarcações militares e, portanto, as informações relativas à excitação, métodos e critérios de análise são de caráter sigiloso. Os únicos dados disponíveis são os do manual de choque da Marinha Britânica |34|. Os mesmos dados foram utilizados em |26| para o cálculo da resposta a choque desta linha de eixos.

Naquele estudo, foram levantadas dúvidas relativas à forma e adequabilidade da aplicação dos critérios de |34| na análise de uma estrutura com várias bases distanciadas - entre si, como uma linha de eixos, visto que o referido manual tratava apenas de equipamentos com base única (não necessariamente um único ponto de fixação, mas apoios próximos excitados igual e simultaneamente com movimentos de - translação).

Mesmo assim, devido à escassez de dados, será adotada a referência |34| para fornecer os movimentos a serem aplicados nos mancais da linha de eixos, partindo da hipótese de que estes possam ser empregados para a excitação não uniforme e não simultânea dos apoios de uma estrutura.

Tendo em vista a hipótese mencionada no item c, bem como as considerações feitas nos itens a e b, o objetivo da análise consiste em comparar a resposta da linha de eixos, excitada pela imposição não uniforme e não simultânea de - deslocamentos em seus mancais, com a resposta obtida a partir da excitação uniforme dos mesmos.

A comparação proposta permite identificar qual situação provoca maiores níveis de tensões, sem, no entanto, possibilitar avaliar se a linha de eixos seria capaz de suportá-los. Trata-se, portanto, de uma análise apenas qualitativa.



### VI.2.2 - Escolha da região a ser analisada e das condições de contorno.

O estudo da resposta a choque não só envolve o equipamento analisado, mas também a sua localização dentro da embarcação e a estrutura sobre a qual são montadas suas fundações. Estes dois últimos fatores não influem na modelagem (discretização) do equipamento, mas definem a excitação a ser empregada (parâmetros que descrevem o choque). Portanto, a elaboração do modelo não englobará a estrutura do fundo do navio, no qual se apoiam os mancais da linha de eixos.

Quanto às condições de contorno, elas já se estabeleceram quando os mancais foram considerados como apoios simples.

### VI.2.3 - Discretização da estrutura

A linha de eixos foi discretizada com o uso de elementos de vigas ("three dimensional beam elements" |4|), e as molas empregadas na imposição de movimentos são representadas por elementos de contorno ("boundary elements" - |4|) com rigidez a deformações lineares.

A modelagem adotada é a mesma empregada nos estudos anteriores (|25| e |26|). Uma análise de sensibilidade revelou que as frequências e modos naturais do modelo são muito pouco afetados pela variação de diversos parâmetros, tais como diâmetros dos eixos, posição de mancais e inércia do propulsor.

As dimensões dos elementos foram determinadas de modo a reproduzir todas as variações das propriedades geométricas, ao longo da linha de eixos e permitir uma distribuição uniforme de massa nos diversos nós.

As propriedades geométricas dos diversos trechos da linha de eixos bem como os elementos que delas partilham -



são mostrados na tabela 6.1. Na figura 6.2 é mostrada a modelagem da estrutura, dividida nos quatro eixos que compõem a linha.

O elemento 1 representa parte do bossô do propulsor, de modo que a ele é associada uma área pequena (a massa do bossô é incluída na do propulsor, fornecida adiante) e uma grande rigidez à flexão (cerca de  $10^3$  vezes maior que a do eixo) [25]. Os elementos 71, 72 e 73 pertencem ao eixo da engrenagem redutora, e suas propriedades são calculadas em [25].

#### VI.2.4 - Propriedades de rigidez, massa e amortecimento.

##### a) Rigidez.

As propriedades de rigidez do modelo são calculadas pelo programa a partir das dimensões dos elementos de vigas e do módulo de elasticidade.

Foram fornecidos ao programa os valores das áreas de cisalhamento, que permitem incluir na resposta o efeito da deformação por cisalhamento. Este efeito foi considerado, pois, na resposta a choque, pode ser significativa a contribuição de modos naturais de ordem elevada, aos quais correspondem maiores níveis de deformações dos elementos. A área de cisalhamento é igual à metade da área da secção reta, conforme [25].

As constantes de rigidez dos elementos de contorno foram escolhidas de acordo com os critérios apresentados no capítulo V. Desta forma, foi adotado o valor de  $1 \times 10^{16}$  N/m que permite reproduzir, com 4 dígitos significativos, as vinte e cinco primeiras frequências e modos naturais da estrutura discretizada, nas condições de apoio originais. Os valores das frequências naturais são apresentados na tabela 6.2. A discussão a respeito do número de modos será apresentada adiante, na descrição da excitação e do cálculo da resposta.

Tabela 6.1- Propriedades geométricas

Seção	$\phi_e$ (m)	$\phi_i$ (m)	Área (m <sup>2</sup> )	Momento Estático (m <sup>3</sup> )	Momento de Inércia (m <sup>4</sup> )	Elementos
1	. 390	. 240	.07422	$3,7913 \times 10^{-4}$	$9,7275 \times 10^{-4}$	2 + 5
2	. 365	. 240	.05940	$2,9003 \times 10^{-3}$	$7,0839 \times 10^{-4}$	6,23 +25,43,44
3	. 340	. 240	.04555	$2,1233 \times 10^{-3}$	$4,9311 \times 10^{-4}$	7+ 17, 19+ 22, 26+ 42, 47, 48
4	. 352	. 240	.05208	$2,4825 \times 10^{-3}$	$5,9074 \times 10^{-4}$	18
5	. 345	. 240	.04824	$2,2699 \times 10^{-3}$	$5,3256 \times 10^{-4}$	45, 46
6	. 340	. 255	.03972	$1,8936 \times 10^{-3}$	$4,4842 \times 10^{-4}$	49+ 54, 56,57, 60+ 70
7	. 345	. 255	.04241	$2,0402 \times 10^{-3}$	$4,8786 \times 10^{-3}$	55, 58, 59
8	. 405	. 255	.07780	$4,1541 \times 10^{-3}$	$1,1131 \times 10^{-3}$	71 +73
9	/	/	.1 x 10 <sup>-3</sup>	/	1.	1

Área de cisalhamento = 1/2 Área transversal

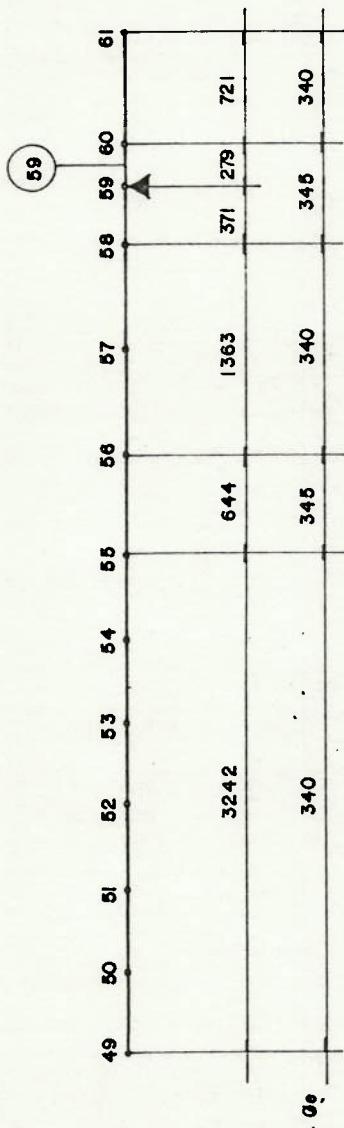






EIXO INTERMEDIÁRIO CENTRAL (  $\phi_i = 255 \text{ mm}$  )

$\phi_i$  = DIÂMETRO INTERNO  
 $\phi_e$  = DIÂMETRO EXTERNO  
 MEDIDAS EM MILÍMETROS



EIXO INTERMEDIÁRIO DE VANTE (  $\phi_i = 255 \text{ mm}$  )

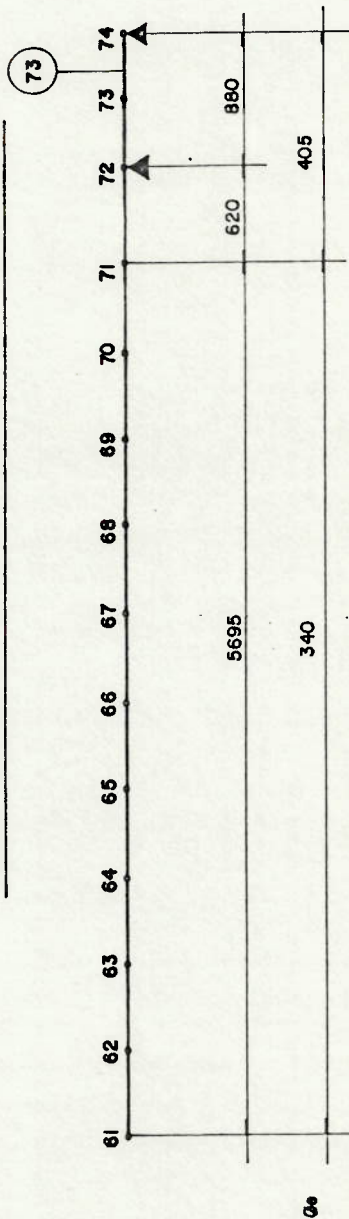


Fig.6.2 - Continuação.

Tabela 6.2- Freqüências naturais da linha de eixos

Ordem modal	Velocidade angular(rad/s)	Freqüência (Hz)	Período ( $10^{-2}$ s)
1	37,88	6,029	16,59
2	61,92	9,854	10,15
3	92,28	14,69	6,809
4	127,8	20,34	4,916
5	148,8	23,68	4,222
6	192,5	30,64	3,264
7	234,1	37,26	2,684
8	324,3	51,62	1,937
9	387,7	61,70	1,621
10	436,5	69,47	1,439
11	491,3	78,19	1,279
12	660,6	105,1	0,9512
13	735,0	117,0	0,8549
14	806,1	128,3	0,9794
15	912,6	145,2	0,6885
16	962,9	153,3	0,6525
17	1071	170,4	0,5868
18	1131	180,0	0,5554
19	1139	181,2	0,5518
20	1431	227,8	0,4391
21	1526	242,9	0,4117
22	1564	248,9	0,4018
23	1633	259,9	0,3848
24	2006	319,2	0,3133
25	2109	335,7	0,2979

## b) Massa

O programa SAP IV utiliza somente a formulação da matriz de massa aglutinada. Fornecendo-se a massa específica do material, a matriz é automaticamente calculada pelo programa, que associa metade da massa do elemento a

cada deslocamento linear de seus nós. A inércia rotacional será desprezada.

Os trechos submersos da linha apresentam um acréscimo em massa virtual  $m_v$ , que depende do diâmetro externo do eixo, dada por [ 25 ]:

$$m_v = \rho_a \pi d_e^2 / 4$$

onde  $\rho_a$  - massa específica da água do mar (1025 kg /m<sup>3</sup>)

$d_e$  - diâmetro externo.

Foi também considerada a existência de óleo no interior da linha de eixos.

Desta maneira, a massa específica fornecida ao programa depende das propriedades geométricas de cada secção, sendo calculada pela expressão:

$$\rho = \rho_s + (\rho_o d_i^2 + \rho_a d_e^2) / (d_e^2 - d_i^2)$$

onde:  $\rho$  - massa específica fornecida ao programa

$\rho_s$  - massa específica do aço (7800 kg/m<sup>3</sup>)

$\rho_o$  - massa específica do óleo (800 kg/m<sup>3</sup>)

$d_i$  - diâmetro interno



Na tabela 6.3 são apresentadas as massas concentradas, fornecidas diretamente ao programa.

Tabela 6.3 - Massas concentradas.

Nº	Massa concentrada (kg)	Descrição
1	5800	propulsor acrescido de massa virtual
2	6000*	momento de inércia do propulsor acrescido de massa virtual
3	298	parcela da massa do mancal do pé de galinha
4	595	parcela da massa do mancal do pé de galinha
5	299	parcela da massa do mancal do pé de galinha
21	940	acoplamento
25	848	mancal do tubo telescópico
46	500	mancal de linha
49	1010	acoplamento
59	500	mancal da linha
61	400	acoplamento por flanges
73	6000	engrenagem redutora
	1600*	momento de inércia da engrenagem redutora

\* em  $\text{kg m}^2$

c) Amortecimento.

Será adotada a postura conservadora de não considerar o amortecimento, no cálculo da resposta dinâmica. A sua inclusão na análise seria feita através de valores bastante arbitrários, visto serem desconhecidos resultados semelhantes obtidos de ensaios em estruturas similares.

Ainda assim, será levada em conta a existência do amortecimento para delimitar a duração do intervalo de tempo durante o qual se fará o cálculo da resposta, como mostrado adiante.

#### VI.2.5- Excitação empregada.

O movimento imposto aos mancais da linha de eixos é descrito no manual da Marinha Britânica para a avaliação da resposta a choque de equipamentos instalados a bordo e seus componentes | 34 |.

A excitação é fornecida em termos de velocidade da base do equipamento, pelas expressões:

$$0 \leq t_1 \leq T_1: \quad \dot{x} = \frac{x_0}{2} (1 - \cos \omega_1 t_1) \quad (\text{VI.1})$$

onde  $x_0$  - velocidade máxima (m/s)

$$\omega_1 = \pi/T_1 \quad (\text{rad/s})$$

$T_1$  - tempo até ser atingida a velocidade máxima (s)

$t_1$  - tempo transcorrido desde o início do movimento (s)

$$t_1 > T_1: \quad \dot{x} = \bar{x} \cos \omega_b t_2 + \bar{q} c_0 e^{-\mu(\omega_2 t_2 + \theta_0)} \cos(\omega_2 t_2 + \theta_0) \quad (\text{VI.2})$$

com  $\bar{x}$  - velocidade de corpo rígido (m/s)

$$c_0 = x_0 - \bar{x} \quad (\text{m/s})$$

$$\omega_2 = 2\pi/T_2 \quad (\text{rad/s})$$

$T_2$  - período da resposta estrutural (s)

$\mu$  - amortecimento

$$\theta_0 = \tan^{-1}(-\mu)$$

$$\omega_b = 4\pi/3 - \text{frequência do movimento de corpo rígido} \quad (\text{rad/s})$$

$$t_2 = t - t_1$$



Segundo o manual, as expressões apresentadas são - tais que, adotando-se valores adequados para seus diversos parâmetros, pode-se cobrir toda a variedade de movimentos de choque com possibilidade de ocorrerem em embarcações. Estas expressões foram obtidas a partir de um grande número de experiências feitas em navios | 34 |.

Os coeficientes  $\mu$ ,  $\bar{q}$ ,  $\theta_0$  e  $\bar{x}$  definem sete graus de choque, aplicáveis tanto na direção vertical como na horizontal, associados à intensidade da excitação à qual o equipamento estaria sujeito em função das suas características, localização, etc... O manual não apresenta a maneira de se escolher o grau de choque apropriado para cada componente; apenas menciona que o grau será definido sem, no entanto, mostrar os critérios.

Os parâmetros  $T_1$  e  $T_2$  são obtidos a partir de curvas traçadas para os diferentes graus de choque, em função da massa efetiva ou virtual do equipamento. Esta massa efetiva é definida para itens flexíveis, modelados por sistemas de vários graus de liberdade. Seu significado é discutido abaixo.

Quando a onda de choque atinge determinada região do casco, o movimento imposto depende da massa da estrutura e dos componentes ligados a ela. Além do valor da massa, o fato de um equipamento apresentar suportes ou partes flexíveis também influe no movimento resultante. O que o manual denomina de massa efetiva corresponde a um valor de massa que, rigidamente conectada ao casco, faz com que o movimento resultante da ação da onda de choque seja igual ao que seria verificado para o equipamento original. A figura 6.3 ilustra o conceito de massa efetiva:



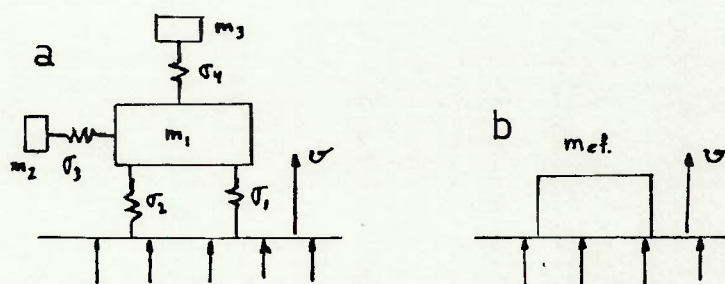


Fig.6.3 - Para uma mesma onda de choque, o movimento imposto  $v$  é igual em a e b.

O manual apresenta um processo iterativo para o cálculo da massa efetiva, e sugere que, no seu início, adote-se um valor igual à massa do equipamento. O cálculo de massa efetiva de equipamentos com diversas bases distanciadas não é mencionado.

A fim de efetuar a presente análise da resposta, adotou-se o grau de choque B, | 34 |, que é o mesmo utilizado com igual objetivo pelo fabricante da linha de eixos | 26 |. Os parâmetros que dependem da massa efetiva foram obtidos, supondo-se que esta seja de 5000 kg. Este valor corresponde, aproximadamente, ao resultado da divisão da massa total da linha de eixos pelo número de mancais, ou seja, cinco mancais, considerando os mancais dos nós 72 e 74 como um único. Desta maneira, a soma da massa efetiva associada a cada mancal, fornece a massa total da linha de eixos, de acordo com o sugerido no manual para o início do processo iterativo. Um outro procedimento seria, por exemplo, associar a cada mancal valores diferentes de massas efetivas, calculados a partir das reações de apoio obtidas em uma análise estática da linha de eixos.

Definidos o grau de choque e a massa efetiva, os diversos parâmetros têm os seguintes valores:

$$\begin{aligned}
 \mu &= 0,5 \\
 \bar{q} &= 0,887 \\
 \theta_0 &= -0,4637 \\
 \bar{x} &= 1,0 \text{ m/s} \\
 x_0 &= 5,0 \text{ m/s} \\
 T_1 &= 0,0045 \text{ s} \\
 T_2 &= 0,042 \text{ s}
 \end{aligned}$$

Integrando e derivando as equações (VI.1) e (VI.2) em relação ao tempo, chega-se às seguintes expressões para o deslocamento e aceleração, respectivamente:

$$0 \leq t_1 \leq T_1: \quad x = \frac{x_0}{2} \left( t_1 - \frac{\text{sen} \omega_1 t_1}{\omega} \right) \quad (\text{VI.3})$$

$$\begin{aligned}
 t_1 > T_1: \quad x = \frac{\bar{x}}{\omega_b} \text{sen} \omega_b t_2 + \frac{\bar{q} c_0 e^{-\mu(\omega_2 t_2 + \theta_0)}}{\omega_2 (1 + \mu^2)} \left[ \text{sen}(\omega_2 t_2 + \theta_0) - \right. \\
 \left. \mu \cos(\omega_2 t_2 + \theta_0) \right] + x(T_1) \quad (\text{VI.4})
 \end{aligned}$$

aceleração :

$$0 \leq t_1 \leq T_1: \quad \ddot{x} = \frac{x_0 \cdot \omega_1}{2} \text{sen} \omega_1 t_1 \quad (\text{VI.5})$$

$$\begin{aligned}
 t_1 > T_1: \quad \ddot{x} = -\bar{x} \omega_b \text{sen} \omega_b t_2 - \bar{q} c_0 e^{-\mu(\omega_2 t_2 + \theta_0)} \left[ \mu \omega_2 \cos(\omega_2 t_2 + \theta_0) - \right. \\
 \left. + \omega_2 \text{sen}(\omega_2 t_2 + \theta_0) \right] \quad (\text{VI.6})
 \end{aligned}$$

O aspecto das curvas de deslocamento, velocidade e aceleração, ao longo do tempo, é apresentado na figura 6.4

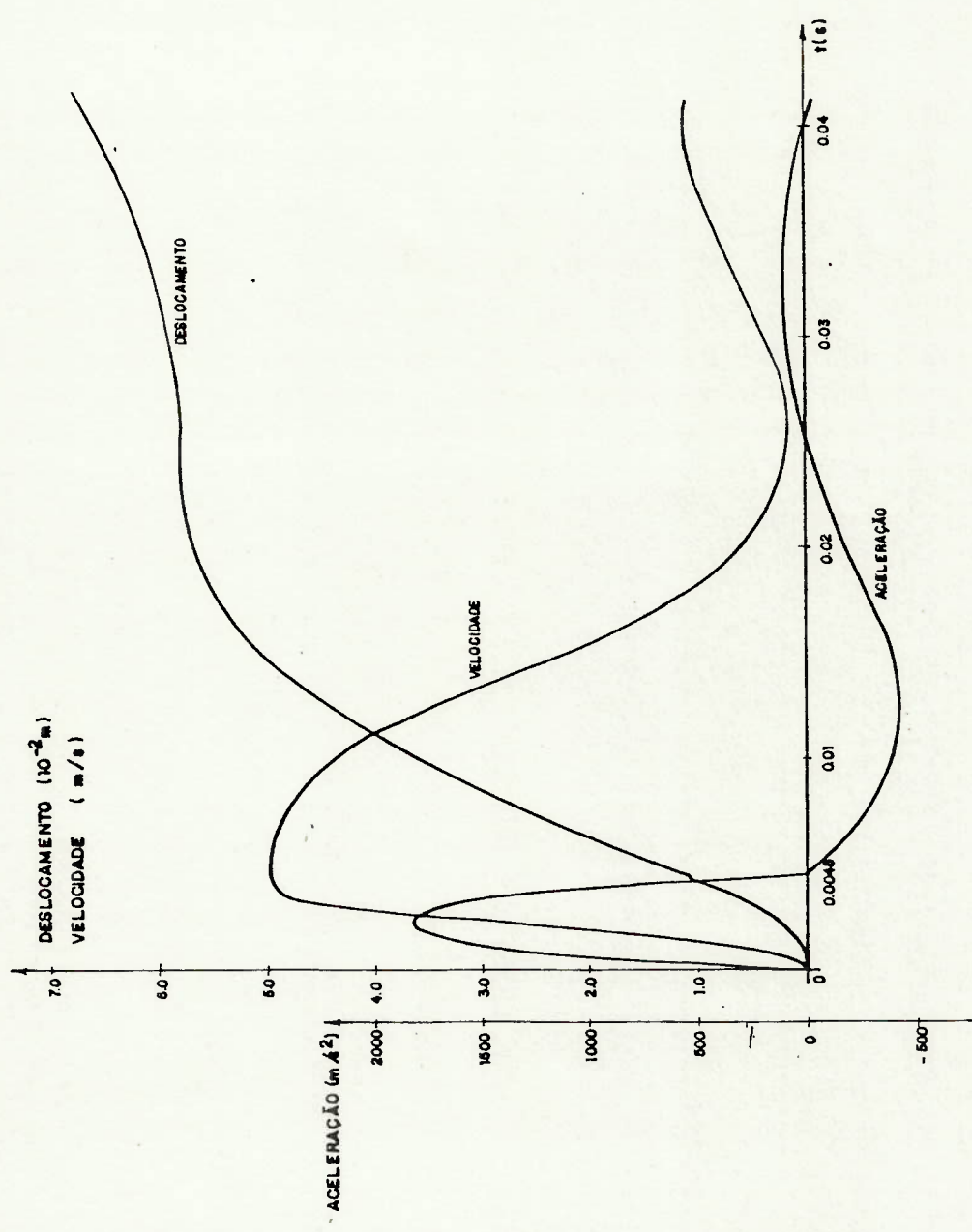


Fig.6.4- Aspecto das curvas de deslocamentos, velocidades e acelerações



Aos valores de  $T_1$  e  $T_2$  correspondem as frequências  $\omega_1 = 698,1$  rad/s e  $\omega_2 = 74,8$  rad/s, que são as frequências características da excitação. Estes valores comparados com as frequências naturais da linha de eixos, mostradas na tabela 6.2, indicam ser necessário incluir na resposta ao menos a participação dos 13 primeiros modos. A contribuição de modos com frequências naturais superiores será avaliada, quando for feito o cálculo da resposta.

Definido o movimento a ser imposto, não se tem nenhuma informação a respeito da distância da ocorrência da explosão ou da carga de explosivo. Sejam quais forem estes valores, o movimento imposto à linha de eixos situa-se entre duas situações extremas:

- a primeira supõe a explosão de uma grande carga, distante do navio o suficiente para se considerar que a onda de choque atinge todos os mancais com a mesma intensidade e no mesmo instante;
- a segunda situação corresponde à explosão de uma carga pequena, próxima ao navio, de modo a impor o movimento em apenas um dos mancais de cada vez. Para que esta situação seja realmente limite, será desconsiderado o movimento do fundo como corpo rígido (esta parcela do movimento é dada pelo primeiro termo da expressão (VI.4)), e assim, os demais mancais permanecem imóveis.

Será também analisada uma situação intermediária, na qual a explosão ocorre em um ponto localizado sobre a perpendicular ao fundo do navio, passando por um dos mancais. Este mancal estará mais próximo do local da explosão, devendo receber o choque mais intenso. Além disso, a onda de choque atingirá os outros mancais em instantes posteriores. A referência [15] fornece uma expressão que permite avaliar a intensidade da excitação em cada mancal, válida para uma frente de onda de choque esférica e para uma explosão suficientemente afastado do casco:

$$p_m = p_o e^{-x_m/c\gamma} \quad (m = 1, \dots, 5)$$

onde  $p_m$  - pressão dinâmica no mancal  $m$

$p_o$  - pressão máxima

$x_m$  - distância do mancal  $m$  ao local da explosão

$c$  - velocidade de propagação da onda de choque na água

$\gamma$  - tempo de decaimento

A mesma referência indica que o valor de  $c$  geralmente é adotado como igual a 1524 m/s (5000 pés/s). Os valores de  $\gamma$  e de  $p_o$  são fornecidos por ábacos | 15 |, em função da distância da explosão e do peso da carga de explosivo. Arbitrando uma distância de 30,48 m (100 pés) e uma carga de 680 kg (1500 lb) de TNT (trinitrotolueno), obtém-se  $p_o = 140,7 \text{ kgf/cm}^2$  e  $\gamma = 1,05 \text{ msec}$ . Com estes valores pode-se calcular o valor de  $p_m$  no mancal mais solicitado bem como nos demais, e assim a fração do deslocamento a ser imposto em cada um deles. Este deslocamento será decomposto na direção normal e paralela ao casco, segundo o ângulo de incidência da onda de choque na posição de cada mancal.

O instante  $t_m$  no qual o choque começa a atuar em cada mancal é calculado dividindo-se  $x_m$  por  $c$  (é insignificante o valor da velocidade do navio).

Definem-se assim cinco diferentes condições de carregamento, cada uma solicitando mais intensamente um dos mancais (os mancais dos nós 72 e 74 são solicitados simultaneamente).

O valor da fração do deslocamento a ser imposto em cada mancal bem como o instante  $t_m$  no qual começa a atuar são fornecidos na tabela 6.4.

Tabela 6.4 - Descrição das condições de carregamento intermediárias.

Mancal mais solicitado	Fração do deslocamento				
	$t_m(s)$				
Nó	Nó				
Nó	4	25	46	59	72 e 74
4	1 0	0,9315 0,00104	0,8320 0,00349	0,7435 0,00621	0,6575 0,00954
25		1 0	0,9415 0,00081	0,8675 0,00255	0,7770 0,00513
46		(simétrica)	1 0	0,9545 0,00053	0,8847 0,00212
59				1 0	0,9525 0,00057
72 e 74					1 0

Resumindo, serão analisadas três situações de carregamento:

- 1ª) movimentação uniforme e simultânea de todos os mancais;
- 2ª) movimentos independentes nos mancais: cinco possibilidades diferentes descritas na tabela 6.4;
- 3ª) movimento aplicado em um único mancal de cada vez, enquanto os demais permanecem imóveis.



### VI.2.6 - Cálculo da resposta

A resposta será calculada pelo método "Wilson  $\theta$ " de integração direta, descrito no Capítulo II, com um intervalo de integração de 0,00029 segundos, que garante a inclusão dos 13 primeiros modos naturais de vibração e a eventual contribuição de modos superiores, até cerca do 25º. Julgou-se conveniente considerar a participação destes modos pois foi verificado em análises preliminares que a sua inclusão provoca variações de aproximadamente 20% em alguns resultados.

O intervalo de tempo durante o qual a resposta será calculada estende-se de 0 até 0,1659 segundos, que corresponde ao período do primeiro modo natural de vibrar da linha de eixos. Este intervalo é bastante superior ao tempo de duração da fase mais impulsiva da excitação e parece suficiente para que a linha de eixos oscile nas frequências naturais. Verificou-se posteriormente que os esforços atingem seus primeiros valores máximos relativos dentro desse intervalo de tempo. Os máximos posteriores são da mesma magnitude e a sua ocorrência predomina no intervalo de 0,25 a 0,35 segundos. Neste período, a amplitude das oscilações já deve estar razoavelmente diminuída devido à existência do amortecimento e o valor dos esforços será menor que o calculado.

### VI.3 - Apresentação dos Resultados

Os resultados computados são os esforços na linha de eixos e as reações nos mancais. Estes últimos valores foram obtidos adicionando elementos de treliça nas posições dos mancais, com rigidez igual à dos elementos de contorno. Foram também calculados os deslocamentos dos mancais, que reproduziram exatamente os deslocamentos impostos (estes resultados são fornecidos pelo programa com quatro algarismos significativos).

O cálculo das tensões normais  $\sigma$  e de cisalhamento  $\tau$  é feito a partir dos valores máximos do momento fletor e - força cortante atuantes nas diferentes secções dos eixos - que compõem a linha. Estes resultados são apresentados na tabela 6.5. A tabela 6.6 apresenta o módulo dos valores máximos das reações nos mancais.

#### VI.4 - Comentários

As tensões máximas, tanto normais como de cisalhamento, obtidas para a primeira e segunda situações de carregamento são semelhantes. Tomando como referência os resultados obtidos para a situação de carregamento 1, as diferenças percentuais raramente ultrapassam 20%. As maiores diferenças ocorrem entre as situações 1 e 2a (tabela 6.5); esta última provoca um nível de tensões mais elevado na região próxima - ao mancal do "pé de galinha".

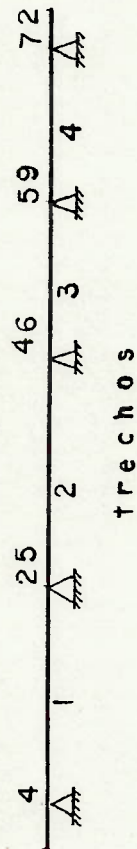
Comparando as tensões calculadas para a excitação individual, vê-se que seus valores são bastante inferiores aos obtidos para as situações de carregamento 1 e 2. Por exemplo, no trecho 4, a situação de carregamento 1 causa uma tensão - de cisalhamento máxima 42% maior que a prevista quando se movimentam o mancal do nó 59 individualmente. De modo geral, a excitação individual resulta valores menores para as tensões de cisalhamento. O mesmo vale para as tensões devidas à flexão, embora as diferenças percentuais sejam menores.

Os resultados indicam que a explosão de uma grande - carga distante do casco do navio provoca maiores níveis de tensões na linha de eixos que a explosão de uma carga pequena, próxima ao casco, independentemente da posição em que esta ocorra. Mostram também que os esforços de inércia são os mais significativos e que predomina a ocorrência de tensões máximas em instantes posteriores aos de atuação da parte propriamente impulsiva da excitação. Isto significa que a linha de eixos executa um movimento de vibração livre não amortecida após a fase inicial do carregamento.



Tabela 6.5 - Tensões máximas com respectivos esforços, locais e instantes de ocorrência.

Q - força cortante; M - momento fletor.



Situação de carregamento.	Trecho	$Q(10^6 N)$	$\tau(N/mm^2)$	t(s)	Nó	Elemento	$M(10^6 N.m)$	$\sigma(N/mm^2)$	t(s)	Nó	Elemento	
		EXCITAÇÃO UNIFORME										
1	1	1,8669	80,4	0,15515	22	22	2,6543	683,8	0,13833	25	24	
	2	1,9422	83,6	0,02813	26	26	3,3379	1081,2	0,13862	46	45	
	3	2,9087	125,3	0,13833	47	47	3,2136	1136,3	0,15399	59	58	
	4	3,6839	183,0	0,09106	60	60	3,2136	1136,3	0,15399	59	59	
		MANCAL MAIS SOLICITADO - NÓ 4										
2a	1	2,2502	96,9	0,15834	22	22	4,1420	830,3	0,06844	4	4	
	2	1,8068	77,8	0,02929	26	26	2,6548	860,0	0,03161	46	45	
	3	2,5281	108,9	0,04408	47	47	2,6843	949,1	0,11426	59	58	
	4	2,7117	134,7	0,11455	60	60	2,6843	949,1	0,11426	59	59	



Tabela 6.5 (continuação)

Situação de carregamento.	Trecho	$Q(10^6 N)$	$\tau (N/mm^2)$	t (s)	Nó	Elemento	$M(10^6 N.m)$	$\sigma (N/mm^2)$	t (s)	Nó	Elemento	
2b	MANCAL MAIS SOLICITADO - NÓ 25											
	1	1,8206	78,4	0,15486	22	22	2,9076	749,1	0,13920	25	24	
	2	2,2524	97,0	0,13249	26	26	2,7279	883,6	0,13920	46	45	
	3	3,1642	128,4	0,04176	46	46	3,3137	1171,7	0,11049	59	58	
	4	3,3296	165,4	0,11049	60	60	3,3137	1171,7	0,11049	59	59	
2c	MANCAL MAIS SOLICITADO - NÓ 46											
	1	2,9818	77,5	0,11629	4	4	2,0297	699,7	0,07656	21	21	
	2	1,8072	73,4	0,15428	46	45	2,9304	949,2	0,13949	46	45	
	3	2,4981	107,6	0,13862	47	47	3,3218	1174,5	0,10817	59	58	
	4	3,1455	156,3	0,10817	60	60	3,3218	1174,5	0,10817	59	59	
2d	MANCAL MAIS SOLICITADO - NÓ 59											
	1	1,7987	77,5	0,06235	7	7	1,9679	678,4	0,07656	21	21	
	2	1,5238	65,6	0,12180	26	26	2,8648	927,9	0,13920	46	45	
	3	2,7000	116,3	0,15747	47	47	2,8582	1010,6	0,15428	59	58	
	4	2,9896	148,5	0,09164	70	70	2,8582	1010,6	0,15428	59	59	

Tabela 6.5 (continuação)

Situação de carregamento.	Trecho	$Q(10^6N)$	$\tau (N/mm^2)$	t(s)	Nó	Elemento	$M(10^6N.m)$	$\sigma (N/mm^2)$	t(s)	Nó	Elemento	
		MANCAL MAIS SOLICITADO - NÓS 72 e 74										
2e	1	1,5994	68,9	0,14558	22	22	3,2837	658,3	0,10179	4	4	
	2	1,5604	67,2	0,12528	26	26	2,8959	938,0	0,13978	46	45	
	3	2,5166	108,4	0,15863	47	47	2,8959	938,0	0,13978	46	46	
	4	2,9910	148,6	0,05742	60	60	2,6379	932,7	0,15486	59	59	
		EXCITAÇÃO INDIVIDUAL										
3a	4	2,0117	52,3	0,00406	4	4	1,2740	439,2	0,10469	21	21	
3b	25	1,6398	53,7	0,00406	25	24	1,8713	645,1	0,12963	21	21	
3c	46	1,8437	79,4	0,13688	47	47	2,7574	893,1	0,13775	46	46	
3d	59	2,1231	105,5	0,10846	60	60	2,8153	995,5	0,10817	59	59	
3e	72 e 74	1,6061	74,6	0,05742	59	59	1,694	599,0	0,15834	59	58	



Tabela 6.6 - Reações máximas nos mancais e instantes de ocorrência.

Situação de carregamento.	Reações nos mancais ( $10^7$ N)													
	Nó 4	t(s)	Nó 25	t(s)	Nó 46	t(s)	Nó 59	t(s)	Nó 72	t(s)	Nó 74	t(s)	Nó 74	t(s)
1	6,9625	0,00580	7,9257	0,00580	5,2037	0,00580	4,5511	0,00580	3,1824	0,00580	1,8384	0,00609	1,8384	0,00609
2a	6,9608	0,00580	6,7984	0,00696	3,5239	0,00928	2,8110	0,01890	1,6590	0,01890	1,1400	0,01566	1,1400	0,01566
2b	5,9758	0,00696	7,9188	0,00580	4,5436	0,00670	3,2337	0,00841	2,0236	0,00841	1,2938	0,01131	1,2938	0,01131
2c	4,7136	0,00928	6,8810	0,00667	5,2144	0,00580	4,3558	0,00638	2,4417	0,00638	1,4553	0,00812	1,4553	0,00812
2d	4,2033	0,01189	5,5958	0,00841	4,9468	0,00638	4,5870	0,00580	3,0486	0,00580	1,7440	0,00667	1,7440	0,00667
2e	3,7124	0,01537	4,9648	0,01102	3,7473	0,00783	4,3382	0,00638	3,1567	0,00638	1,8418	0,00609	1,8418	0,00609
3a	6,9608	0,00580	0,9098	0,05858	0,0457	0,16559	0,0248	0,05568	0,0352	0,05568	0,0298	0,06757	0,0298	0,06670
3b	0,0909	0,05858	7,9189	0,00580	0,3549	0,02291	0,1830	0,07308	0,4609	0,07308	0,3522	0,07337	0,3522	0,07337
3c	0,0457	0,16559	0,3549	0,02291	5,2209	0,00580	0,2049	0,05655	0,3808	0,05655	0,2842	0,10962	0,2842	0,10904
3d	0,0248	0,05568	0,1830	0,07308	0,2049	0,05655	4,5994	0,00580	0,6148	0,00580	0,4209	0,05713	0,4209	0,05626
3e	0,0147	0,06873	0,1252	0,06902	0,1437	0,08874	0,2300	0,05742	3,1417	0,05742	1,8424	0,00609	1,8424	0,00609



No que se refere às reações nos mancais, seu valores máximos, calculados para as diversas condições de carregamento, são muito semelhantes, de modo que todas as situações são igualmente nocivas. Ao contrário das tensões, as reações máximas ocorrem na fase inicial da excitação, indicando que grandes esforços de inércia tendem a impedir os movimentos - da linha de eixos nestes primeiros instantes.

## VII - CONCLUSÕES

O estudo do cálculo da resposta dinâmica de estruturas à imposição de movimentos genéricos, feito neste trabalho, mostrou que este problema pode ser facilmente resolvido pelo uso de métodos matriciais, apresentando três possíveis soluções. As duas primeiras constituem soluções exatas (dentro das limitações do cálculo matricial) e a sua adoção supõe, exceto no caso de estruturas muito simples, a alteração dos programas de computador disponíveis para o cálculo da resposta dinâmica de estruturas.

A terceira solução, proposta como uma alternativa para as anteriores, resolve o problema através de um método aproximado, que tem como vantagem a possibilidade de ser aplicado a partir dos programas existentes sem requerer qualquer tipo de alteração dos mesmos. Esta característica torna o método proposto atraente para usuários de programas cujas listagens sejam inacessíveis ou para aqueles que, tendo acesso às listagens, não disponham de condições para modificá-las, com o fim de implementar algum dos outros métodos.

Por outro lado, a análise do método proposto mostrou que a sua adoção nem sempre é satisfatória, principalmente por dois motivos:

- dificuldades para o uso do Método da Superposição Modal; e
- possibilidade de ocorrência de problemas nos processos numéricos envolvidos na utilização dos Métodos de Integração Direta.

As mesmas dificuldades encontradas no uso do Método da Superposição Modal afetam o emprego do método proposto em análises no domínio da frequência  $| \dot{\gamma} |$ . Este tipo de análise é comum quando a excitação consiste na imposição de movimentos harmônicos. Para tal tipo de excitação recomenda-se o

uso de algum dos métodos matriciais "exatos" apresentados no Capítulo III.

Com o uso do método proposto foi possível realizar a análise qualitativa da resposta de uma linha de eixos a choque proveniente de uma explosão submarina sem contato. Os resultados obtidos mostram que a translação idêntica e simultânea dos mancais provoca maior nível de tensões que o calculado quando a mesma translação é aplicada a cada mancal individualmente. A movimentação defasada e não uniforme dos mancais produz resultados semelhantes aos da excitação uniforme. Também foi constatado que as reações máximas nos mancais são pouco afetadas pela variação das condições de carregamento.

Será bastante útil no futuro efetuar análises semelhantes em outras linhas de eixos bem como demais estruturas, visando definir excitações, modelos e limites de aceitabilidade para a resposta dinâmica destes itens à imposição de movimentos genéricos.



VIII - BIBLIOGRAFIA

- 1 - ALARCON, E.A. et alii. Cálculo dinâmico em la ingenieria civil. 2ª ed. Madrid, Centro de perfeccionamento profesional y empresarial del colegio oficial de ing. de caminos, canales y puertos, 1974.
- 2 - ARGYRIS, J.E. et alii. A new eterative solution for structures and continua with very stiff or rigid parts In: Computer methods in applied mechanics and engineering 24(2). Amsterdam, North Holland Publ. Co., 1980.
- 3 - BATHE, K.J. & WILSON, E.L. Numerical methods in finite element analysis. New Jersey, Prentice-Hall, 1976.
- 4 - BATHE, K.J. et alii. SAP IV - A structural analysis program for static and dynamic response of linear systems. Report EERC 73-11 (rev. 1974). University of California, 1974.
- 5 - CLOUGH, R.W. & PENZIEN, J. Dynamics of structures. New York, McGraw-Hill, 1975.
- 6 - DAWE, D.J. Matrix and finite element displacement analysis of structures. Oxford, Clarendon Press, 1984.
- 7 - DIAS, C.A.N. Método para a prevenção de vibrações da estrutura do navio. Tese de Doutorado, EPUSP, São Paulo, 1985.
- 8 - ————. Introdução ao estudo de vibrações da viga navio-técnica dos elementos finitos. Dissertação de mestrado. EPUSP, São Paulo, 1978.
- 9 - GALEÃO, A.C.N.R. & BARBOSA, H.J.C. Excitação múltipla de suportes - parte I - formulação. Simpósio Brasileiro de tubulações e vasos de pressão, Salvador, Bahia, Nov.1980.

- 10 - GERE, J.M. & WEAVER Jr., W. Analysis of framed structures. New York, Van Nostrand Reinhold, 1965.
- 11 - HARRINGTON, R.L. Marine engineering. New York. The Society of Naval Architects and Marine Engineers. 1971. 871 p.
- 12 - HARRINGTON, R.L. & VORUS, W.S. Dynamic shock analysis of shipboard equipment. IN: Marine Technology, 5 (1) January 1968. The Society of Naval Architects and Marine Engineers p.331-354.
- 13 - HARRIS, C.M. & CREDE, C.E. Shock and vibration handbook vol.3. New York, McGraw-Hill, 1961.
- 14 - HURTY, W.C. & RUBINSTEIN, M.F. Dynamics of structures. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-hall, 1964.
- 15 - KEIL, A.H. The response of ships to underwater explosion. Transactions of the Society of Naval Architects and Marine Engineers 69. New York, 1961.
- 16 - LOGCHER, R.D. et alii. ICES STRUDL - The structural design language engineering user's manual. 1<sup>st</sup> ed. Massachusetts Structures Division and Civil Engineering Systems Laboratory, Department of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology, November 1968.
- 17 - MEIROVICH, L. Analytical methods in vibrations. New York, Macmillan, 1977.
- 18 - ——— . Elements of vibration analysis. (ISE). Tóquio, McGraw-Hill, 1975.
- 19 - MORROW, c.T. Shock and vibration engineering. New York, John Willey and Sons Inc., 1963.

- 20 - MOTT-SMITH, H.M. Effect of shock applied to a ships propeller. IN: Journal of Ship Research. New York, The Society of Naval Architects and Marine Engineers 15 (1): 59-73, March 1971.
- 21 - ————. Vibration equations for a structure. IN: Journal of Ship Research. New York, The Society of Naval Architects and Marine Engineers 14 (3): 168-180. September 1970.
- 22 - ————. Transverse vibrations of a propeller shaft. IN: Journal of Ship Research. New York, The Society of Naval Architects and Marine Engineers 15(2): 144-152. June 1971.
23. - PALMER, E.W. et alii. Discussion of dynamic shock analysis of shipboard equipment. IN: Marine Technology. New York, The Society of Naval Architects and Marine Engineers 5(1): 1-16. January 1968.
- 24 - PESTEL, E.C. & LECKIE, F.A. Matrix methods in elastomechanics. New York, McGraw-Hill, 1964.
- 25 - SALVAGNI, R.B. Análise de vibrações laterais da linha de eixos de uma corveta. Estudo Técnico nº 388/82. - São Paulo. Ministério da Marinha, ETCN=SP, 1982.
- 26 - ————. Avaliação de resposta a choque da linha de eixos de uma corveta. Estudo Técnico. Nº 532/83. São Paulo. Ministério da Marinha, ETCN-SP, 1983.
- 27 - ————. Complementação do estudo técnico nº 532/83. Estudo Técnico nº 540/83. São Paulo. Ministério da Marinha, ETCN-SP, 1983.



- 28 - ————. Vibrações em navios - análise pelo método dos elementos finitos. Dissertação de Mestrado. - EPUSP, São Paulo, 1978.
- 29 - ————. A confiabilidade do método dos elementos finitos na análise de vibrações lineares em sistemas contínuos. Tese de Livre Docência. EPUSP, São Paulo, 1985.
- 30 - TIMOSHENKO, S.P., YOUNG, D.H. & WEAVER, W. Vibration problems in engineering. 4ª ed. New York, Wiley, 1974.
- 31 - VENÂNCIO FILHO, F. Análise matricial de estruturas. Rio de Janeiro, Almeida Neves, 1975.
- 32 - YOUNG, D.H. Response of structural systems to ground shock IN: Shock and structural response. New York, American Society of Mechanical Engineers, 1960.
- 33 - ZIENKIEWICZ, O.C. The finite element method. 3ª ed. London, McGraw-Hill, 1977.
- 34 - GRÃ BRETANHA. Ministério da defesa. Shock manual BR 3021. Londres, 1975. 2V.

