

**Cláudio Gomes Fernandes**

**“ESTUDO DE UM MODELO ARQUETÍPICO DA  
DINÂMICA DE UNIDADES FLUTUANTES”**

Dissertação apresentada ao Departamento de  
Engenharia Naval e Oceânica da Escola  
Politécnica da Universidade de São Paulo para  
obtenção do título de Mestre em Engenharia

São Paulo

2004

**Cláudio Gomes Fernandes**

**“ESTUDO DE UM MODELO ARQUETÍPICO DA  
DINÂMICA DE UNIDADES FLUTUANTES”**

Dissertação apresentada ao Departamento de  
Engenharia Naval e Oceânica da Escola  
Politécnica da Universidade de São Paulo para  
obtenção do título de Mestre em Engenharia

Área de Concentração  
Engenharia Naval e Oceânica

Orientador  
Prof. Dr. Jessé Rebello de Souza Júnior

São Paulo  
2004

FERNANDES, Cláudio Gomes  
Estudo de um modelo arquetípico da dinâmica de unidades  
flutuantes. São Paulo, 2003.  
130p.

Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica da Universidade de  
São Paulo. Departamento de Engenharia Naval e Oceânica.

1. Dinâmica não-linear 2. Modelo arquetípico 3. Sistemas  
flutuantes

I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento  
de Engenharia Naval e Oceânica II. t

À Daniele.

## **AGRADECIMENTOS**

Aos meus pais pelo apoio e suporte por todo meu período de formação acadêmica.

Ao meu orientador por suas idéias que motivaram e contribuíram muito para esse trabalho.

*"Pensar que a natureza é formada por fenômenos previsíveis e imprevisíveis é, até certo ponto, sentir o Criador. A previsibilidade dos fatos, sua lógica e razão nos conduz facilmente à Matemática, enquanto a imprevisibilidade, o caos, nos atola no pântano da escuridão."*

**Descartes, 1637**

*"Depois de muito refletir, calcular e suar, concluí paradoxalmente que o mundo é composto de uma desordem organizada."*

**Lorenz, 1970**

Resumo .....	2
Abstract.....	3
LISTA DE FIGURAS.....	4
1. INTRODUÇÃO.....	7
2. DINÂMICA NÃO-LINEAR .....	12
2.1. Teoria qualitativa de equações diferenciais .....	13
2.2. Funções de Liapunov .....	18
2.3. Ciclos limite.....	23
2.4. Bifurcações .....	25
2.4.3. Bifurcação Fold .....	27
2.4.2. Bifurcações do tipo Hopf .....	30
3. MODELAGEM MATEMÁTICA.....	34
3.1. Modelagem do Sistema .....	35
3.1.1. Forças e Momentos Atuantes Sobre o Sistema .....	39
3.1.1.1. Forças e Momento devidos à Corrente.....	39
3.1.1.2. Amortecimento devido ao yaw.....	40
3.1.1.3. Amarras .....	41
3.1.1.4. Hawser.....	43
3.1.1.5. Forças e Momento devidos ao vento .....	44
3.2. Poços Potenciais.....	48
3.3. Modelo Arquetípico .....	55
3.4. Validação.....	75
4. RESULTADOS .....	79
4.1 Exploração do modelo arquetípico.....	88
4.1.1 Sistema de amarração DICAS .....	88
4.1.2 Sistema de amarração Turret .....	94
4.1.2.1 Parâmetros de projeto .....	107
4.1.2.2 Offloading.....	110
5. CONCLUSÕES.....	114
6. APÊNDICE .....	120
6.1 Derivação das funções modulo de seno e coseno .....	120
6.3 Algoritmo para construção de bacias de atração.....	123
7. BIBLIOGRAFIA.....	126

## Resumo

Com a crescente utilização de navios convertidos em unidades de produção e armazenamento, surgiu a necessidade de modelos numéricos que simulem a movimentação dinâmica da embarcação sob a influência de agentes ambientais, tais como vento e corrente.

Modelos matemáticos que representam a dinâmica do sistema de forma realista são geralmente complexos. Tal complexidade é ainda maior quando se consideram dois navios conectados, como verifica-se na operação de descarga de petróleo de um FPSO (navio-mãe) para um navio "shuttle" (aliviador). Os modelos matemáticos envolvidos são difíceis de serem tratados analiticamente. Em algumas análises, mesmo simulações numéricas tornam-se custosas em termos de tempo de simulação, inviabilizando certas análises.

Este trabalho consiste na elaboração de um modelo arquetípico (simplificado) que mantém as principais características do modelo completo. Dessa forma, análises qualitativas do sistema tornam-se mais fáceis de serem realizadas, através de, por exemplo, criação de mapas de bifurcação e bacias de atração.

O modelo arquetípico foi utilizado para realizar análises mais profundas da operação de descarregamento, até então não efetuadas para o modelo completo, assim como análise da influência da variação de alguns parâmetros de projeto do sistema sobre sua dinâmica.



## **Abstract**

The growing use of converted tankers as deep-water floating production, storage and offloading (FPSO) units has prompted the need for mathematical models capable of predicting accurately the dynamical behavior of these systems under the combined action of environmental agents such as wind and ocean currents.

Mathematical models representing the dynamics of FPSOs realistically are usually complex. Complexity increases when two interconnected ships (for example, the FPSO unit and a shuttle vessel in tandem configuration) are considered, as is the case when offloading operations are investigated. The resulting mathematical models are difficult to study by analytical means, and even numerical simulations can become time-consuming, precluding in-depth investigations.

The present work describes the development of an analytical (simplified) mathematical model for the dynamics of one or two vessels; it is shown that this model retains the main qualitative dynamical features of more complete models, such as their bifurcation diagrams and basins of attraction. The model has been also validated against experimental results.

The archetypal model proposed here has been used for in-depth analysis of the dynamics of offloading operations, not previously made with more sophisticated models. A qualitative parametric study was also carried out to assess the influence of some key design parameters upon the overall system dynamics.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Ponto de equilíbrio estável .....	15
Figura 2.2 - Ciclo limite estável.....	23
Figura 2.3 - Diagrama de fase para $m = 0.5$ .....	27
Figura 2.4 - Diagrama de fase para $m = 0.0$ .....	28
Figura 2.5 - Diagrama de fase para $m = -0.5$ .....	28
Figura 2.6 - Bifurcação de Hopf supercrítica.....	31
Figura 2.7 - Bifurcação de Hopf subcrítica.....	31
Figura 2.8 - Trajetórias típicas da bifurcação de Hopf .....	32
Figura 3.1 - Referenciais empregados: sistema Turret (esquerda) e DICAS (direita) .....	34
Figura 3.2 - Comparação dos coeficientes do vento na condição lastreado .....	46
Figura 3.3 - Comparação dos coeficientes do vento na condição carregado ....	47
Figura 3.4 - Poço potencial relativo aos aproamentos .....	53
Figura 3.5 - Poço potencial relativo a posição do navio shuttle .....	54
Figura 3.6 - Poço potencial relativo a posição do navio FPSO .....	54
Figura 3.7 - $V < B$ e $\varphi = 0$ .....	59
Figura 3.8 - $V/A = 0.8$ e $\varphi = \pi/2$ .....	60
Figura 3.9 - $V/A = 0.2$ e $\varphi = \pi$ .....	61
Figura 3.10 - Função potencial do modelo arquetípico .....	63
Figura 3.11 - Função potencial do sistema completo.....	68
Figura 3.12 - Vista Lateral da função potencial do sistema completo ( Lhawser = 190m).....	68
Figura 3.13 - Vista Lateral da função potencial do sistema completo ( Lhawser = 100m).....	69
Figura 3.14 - Vista Lateral da função potencial do sistema com vento e corrente .....	70
Figura 3.15 - Comparação entre dados experimentais e simulação com modelo .....	76
Figura 3.16 - Comparação entre simulação com modelo completo e arquetípico .....	77
Figura 3.17 - Comparação entre dados experimentais e simulação com modelo .....	77
Figura 3.18 - Comparação entre simulação com modelo completo e arquetípico .....	78
Figura 4.1 - Diagrama de bifurcação para modelo completo ( $\psi_v = 10^0$ e $\psi_c = 180^0$ ) .....	80
Figura 4.2 - Diagrama de bifurcação para modelo completo ( $\psi_c = 180^0$ e $\psi_v = 0^0$ ) .....	81
Figura 4.3 - Diagrama de bifurcação para o sistema DICAS ( $\psi_v = 10^0$ ).....	83
Figura 4.4 - Diagrama de bifurcação para o sistema DICAS ( $\psi_v = 0^0$ ).....	83
Figura 4.5 - Poço potencial para modelo completo .....	84

Figura 4.6 - Poço potencial para o modelo arquetípico.....	85
Figura 4.7 - Posicionamento com Turret na ponta do navio FPSO .....	85
Figura 4.8 - Turret posicionado à meia nau - Modelo Arquetípico.....	86
Figura 4.9 - Turret posicionado à meia nau - Modelo Completo .....	87
Figura 4.10 - Bacia de atração para sistema DICAS ( $\sigma = 1.3$ , $\psi_v = 10^0$ e $\psi_c = 180^0$ ).....	89
Figura 4.11 - Diagrama de fase para sistema DICAS ( $\sigma = 1.3$ , $\psi_v = 10^0$ e $\psi_c = 180^0$ ) .....	90
Figura 4.12 - Sistema de amarração DICAS .....	90
Figura 4.13 - Bacia de atração para sistema DICAS ( $\sigma = 0.3$ , $\psi_v = 0^0$ e $\psi_c = 180^0$ ) .....	91
Figura 4.14 - Diagrama de fase para sistema DICAS ( $\sigma = 0.3$ , $\psi_v = 0^0$ e $\psi_c = 180^0$ ) .....	91
Figura 4.15 - Bacia de atração para sistema DICAS ( $\sigma = 1.3$ , $\psi_v = 0^0$ e $\psi_c = 180^0$ ) .....	92
Figura 4.16 - Diagrama de fase para sistema DICAS ( $\sigma = 1.3$ , $\psi_v = 0^0$ e $\psi_c = 180^0$ ) .....	93
Figura 4.17 - Diagrama de bifurcação segundo variação de angulo de vento ( $\sigma = 2.0$ ).....	94
Figura 4.18 - Mapas de bifurcação para o navio FPSO ( $\psi_v = \frac{\pi}{4}$ e $\psi_c = \pi$ ) .....	95
Figura 4.19 - Mapas de bifurcação para o navio aliviador ( $\psi_v = \frac{\pi}{4}$ e $\psi_c = \pi$ ) ...	96
Figura 4.20 - Bacia de atração para sistema Turret ( $\sigma = 4.0$ , $\psi_v = \frac{\pi}{4}$ e $\psi_c = \pi$ ) .....	97
Figura 4.21 - Diagrama de fase para sistema Turret ( $\sigma = 4.0$ , $\psi_v = \frac{\pi}{4}$ e $\psi_c = \pi$ ) .....	97
Figura 4.22 - Bacia de atração para sistema Turret ( $\sigma = 6.0$ , $\psi_v = \frac{\pi}{4}$ e $\psi_c = \pi$ ) .....	98
Figura 4.23 - Diagrama de fase para sistema Turret ( $\sigma = 6.0$ , $\psi_v = \frac{\pi}{4}$ e $\psi_c = \pi$ ) .....	98
Figura 4.24 - Mapas de bifurcação para o navio FPSO ( $\psi_v = \frac{\pi}{4}$ e $\psi_c = \pi$ ) .....	100
Figura 4.25 - Mapas de bifurcação para o navio aliviador ( $\psi_v = \frac{\pi}{4}$ e $\psi_c = \pi$ ) .	101
Figura 4.26 - Mapas de bifurcação para o navio FPSO ( $\psi_v = \frac{\pi}{4}$ e $\psi_c = \pi$ ) .....	103

Figura 4.27 - Mapas de bifurcação para o navio aliviador ( $\psi_v = \frac{\pi}{4}$ e $\psi_c = \pi$ ).	103
Figura 4.28 - Diagrama de fase e de atração do navio FPSO para $\partial = 0.8$ ....	104
Figura 4.29 - Diagrama de fase e de atração do navio FPSO para $\partial = 1.0$ ....	105
Figura 4.30 - Mapas de bifurcação para o navio FPSO ( $\psi_c = \pi$ ).....	106
Figura 4.31 - Mapas de bifurcação para o navio aliviador ( $\psi_c = \pi$ ) .....	106
Figura 4.32 - Mapas de bifurcação para o navio FPSO ( $\psi_c = \pi$ ).....	108
Figura 4.33 - Mapas de bifurcação para o navio FPSO ( $\psi_c = \pi$ ).....	109
Figura 4.34 - Mapas de bifurcação para o navio FPSO ( $\psi_v = \frac{\pi}{4}$ e $\psi_c = \pi$ ) .....	112
Figura 4.35 - Mapas de bifurcação para o navio aliviador ( $\psi_v = \frac{\pi}{4}$ e $\psi_c = \pi$ ).	113
Figura 6.1 - Função $\sin(x) \sin(x) $ (azul) e $\sin^2(x)$ (vermelho) .....	121
Figura 6.2 - Ponto de equilíbrio estável .....	124
Figura 6.3 - Ciclo limite.....	124

## 1. INTRODUÇÃO

Sistemas de exploração de petróleo na plataforma continental, também denominadas *offshore*, têm sofrido várias mudanças tecnológicas com os passar dos anos. A necessidade crescente de exploração em regiões cada vez mais profundas vem pressionando o desenvolvimento de novas tecnologias, na tentativa de tornar tal exploração economicamente viável. Essa tendência tem sido observada em regiões tais como a Bacia de Campos, Brasil, e Golfo do México.

Quando se refere a inovações tecnológicas, tem-se em mente não somente o ferramental submarino necessário às atividades de prospecção, perfuração e exploração, como também a unidade flutuante de exploração. Nesse contexto, navios convertidos para sistemas de produção, tais como FPSO (Floating, Production, Storage e Offloading), e FPDSO (Floating, Production, Drilling, Storage e Offloading) têm sido amplamente utilizados.

Esses navios possuem uma planta de exploração instalada em seu convés, o que lhes permite agregar as funcionalidades de uma plataforma de exploração convencional, com a capacidade de armazenamento de um petroleiro. Uma outra vantagem desses navios é o fator econômico. Alguns dos que estão atualmente operando eram antigos navios-tanque, ainda com casco simples, considerados obsoletos para o transporte marítimo. Assim, sua conversão tornou-se uma alternativa atraente em relação à construção de uma nova unidade de exploração, tal como uma plataforma semi-submersível.

Os navios convertidos também podem possuir diferentes formas de amarração ao leito do mar. Os mais utilizados são os sistemas *DICAS* e *Turret*<sup>1</sup>. O primeiro sistema consiste em amarrações com complacência diferenciada, de forma que o navio possui relativa liberdade de alinhamento com os agentes ambientais (vento, correntes e ondas), ficando, porém, impedido de se deslocar significativamente no plano horizontal, ou mesmo de efetuar grandes variações em seu aproamento. O segundo sistema consiste na utilização de um *turret*, para o qual convergem as linhas de amarração e *risers*. O *turret*, essencialmente um cilindro vertical em torno do qual o navio pode girar, não restringe o movimento de rotação do navio (*guinada* ou *yaw*), e também permite um maior deslocamento horizontal deste em relação a sua posição de instalação.

Em termos de comportamento dinâmico, esses navios, comparados a plataformas semi-submersíveis, possuem a desvantagem de serem mais "sensíveis" à excitações ambientais, notadamente às ondas. Este fato decorre da grande superfície do casco exposta na altura da linha d'água. Além disso, a geometria de corpo esbelto do navio acarreta uma grande sensibilidade dos esforços ambientais em relação a sua direção relativa de incidência sobre o casco. Isso torna mais difíceis suas operações, tais como perfuração, ou mesmo exploração. Uma das operações que os sistemas de produção realizam freqüentemente é a transferência de petróleo e seus derivados para navios aliviadores. Durante essa operação, o navio principal tem que transferir o óleo através de um duto flexível (*hose*) para um outro navio, que irá levar o óleo a

outras instalações de processamento. Os navios são conectados por um cabo (*hawser*) em uma configuração em *tandem* (proa-pôpa ou proa-proa). É necessário portanto, que, durante esse acoplamento, os navios mantenham entre si posições relativas adequadas, que minimizem riscos de acidentes envolvendo colisão ou rompimento de cabos ou dutos.

O conhecimento da dinâmica de tal sistema, sob ação de agentes ambientais, tais como vento, corrente e ondas, principalmente durante a operação de descarregamento do óleo (*offloading*), representa um importante aspecto em seu projeto. As condições ideais durante essa operação são definidas operacionalmente. Porém o estudo da dinâmica permite analisar, e eventualmente projetar, as características dos navios, e assim o comportamento do sistema de modo a atender as condições ideais pré-definidas.

A dinâmica de sistemas FPSO tem sido objeto de estudos já há alguns anos. Aghamohammadi e Thompson (1990) e Simos et al. (2001) mostram estudos experimentais da dinâmica de um navio tanque, amarrado por um único ponto (Single-Point Mooring), revelando uma variedade de regimes de resposta, tais como ciclo limite e bifurcações, mediante alteração de parâmetros do modelo, tais como comprimento da linha de amarração. Leite et al. (1998) e Bernitas et al. (1999) realizaram estudos também apenas com o navio FPSO, e revelaram que dependendo do modelo de corrente e vento adotados, a dinâmica pode apresentar bifurcações de pontos de equilíbrio, ciclos limite e até movimentos que indiquem caos. Contudo, vale a pena mencionar que o modelo

hidrodinâmico de Bernitas é adaptado de modelos de manobra avante, por isso, valendo apenas para pequenos ângulos de aproamento. Morishita e Cornet (1998) e Souza Junior et al. (2000) investigaram a dinâmica do movimento de dois navios amarrados em configuração *tandem*, (navio FPSO e navio aliviador), representando a operação de *offloading*, mediante ação de vento e corrente. Com seis graus de liberdade acoplados, esse sistema apresenta uma variedade dinâmica enorme, não apenas pelos diferentes regimes de resposta, como pelo número de parâmetros, a cuja variação o modelo apresenta grande sensibilidade. Variando-se também a forma de amarração do navio FPSO obtém-se diferentes comportamentos dinâmicos para o sistema.

Tal sistema possui um nível de complexidade grande, dadas as não linearidades presentes nos modelos de corrente e vento, e principalmente pelo acoplamento dos seis graus de liberdade. Isso torna difícil uma investigação analítica do sistema, no sentido de conhecer os “fenômenos” de sua dinâmica, e, portanto, limitando o poder de síntese de projeto. Até mesmo uma investigação numérica torna-se custosa do ponto de vista de tempo de processamento, visto que para uma simples análise da estabilidade dos pontos de equilíbrio um grande número de simulações deve ser feito.

Nesse contexto, pretende-se buscar um modelo simplificado do sistema navio FPSO e navio aliviador (sistemas de amarração DICAS e *Turret*), modelo este que torne viável um estudo analítico do problema e permita aplicar ferramentas de dinâmica não linear que propiciem um melhor entendimento do sistema, identificando os fenômenos mais importantes de sua dinâmica.



A determinação do modelo simplificado, também denominado "arquetípico", parte do estudo das funções potenciais do modelo completo, no qual verificou-se que os graus de liberdade que representam os aproamentos dos navios são os que regem a dinâmica do sistema. Portanto, pretende-se obter um modelo com apenas esses dois graus de liberdade, que represente, porém, da melhor maneira possível os fenômenos do modelo completo. Com o objetivo de se obter um modelo relativamente simples para os agentes ambientais de vento e corrente, pretende-se verificar quais dentre seus componentes mais influenciam os pontos de equilíbrio do sistema, através do estudo dos zeros das funções que os representam. Assim, através de resultados anteriores obtidos com o modelo completo e também de dados experimentais, pretende-se validar o modelo arquetípico, possibilitando a investigação de fenômenos de interesse no sistema completo.

Pretende-se, dessa forma, realizar um estudo da fenomenologia do problema com o modelo reduzido, investigar características dinâmicas importantes, as quais não seria possível analisar com o modelo completo, a fim de obter um melhor entendimento do sistema real.

---

<sup>1</sup> O termo *Turret* será utilizado em inglês por ser um termo já consagrado dentro da área de aplicação.

## **2. DINÂMICA NÃO-LINEAR**

O objetivo de uma revisão no campo da dinâmica não linear é a exposição da teoria envolvida nas ferramentas que serão utilizadas neste trabalho. Pretende-se assim expor o campo de aplicação de tais ferramentas, suas funcionalidades bem como suas limitações.

A principal motivação da dinâmica não-linear é a introdução de idéias geométricas e qualitativas que auxiliem na análise de sistemas não-lineares, cujas equações diferenciais não podem ser resolvidas de maneira analítica e também cuja não-linearidade é fator preponderante na fenomenologia do sistema.

Uma primeira abordagem de dinâmica não-linear é a busca sobre o conhecimento da estabilidade de um sistema em uma região do seu espaço de estado, e mais especificamente, ao redor de um ponto de equilíbrio (também chamado de atrator). O mapeamento dos pontos de equilíbrio de um sistema é de suma importância para o conhecimento de sua dinâmica. Para tanto, uma primeira tentativa de se obter tal mapeamento é um estudo sobre as equações diferenciais envolvidas.

## 2.1. Teoria qualitativa de equações diferenciais

Dado um sistema autônomo representado por uma equação diferencial na forma:

$$\dot{x} = f(x) \quad f: U \rightarrow \mathfrak{R}^n \quad (1)$$

Diz-se que um campo vetorial  $f(x)$  de classe  $\ell^1$  gera o fluxo  $\phi_t: U \rightarrow \mathfrak{R}^n$ , onde  $\phi_t(x) = \phi(x, t)$  é uma função contínua definida para todo  $x \in U \rightarrow \mathfrak{R}^n$  e  $t$  em um intervalo  $(a, b) \subseteq \mathfrak{R}$ . Assim  $\phi_t$  satisfaz:

$$\frac{d}{dt}[\phi(x, t)]|_{t=\tau} = f(\phi(x, \tau)) \quad (2)$$

onde  $\phi_t$  é única segundo o teorema da existência e unicidade. Podemos tomar como exemplo um sistema linear da forma:

$$\dot{x} = Ax \quad x \in \mathfrak{R}^n \text{ e } A_{n \times n} \in \mathfrak{R}^{n \times n} \quad (3)$$

Tem-se  $\phi_t(x) = x_0 \cdot e^{A \cdot t}$  como solução para 3 com base em  $x_0$ . Dessa forma o operador  $e^{A \cdot t}$  define um fluxo sobre  $\mathfrak{R}^n$  e, pensando em termos vetoriais, fazendo com que os autovetores da matriz  $A$  gerem sub-espacos invariantes locais em  $\mathfrak{R}^n$  :

$E^s$  - sub-espço estável (também chamado de variedade estável) : gerado pelos auto vetores cujos auto valores possuam parte real negativa.

$E^u$  - sub-espço instável (também chamado de variedade instável) : gerado pelos auto vetores cujos auto valores possuam parte real positiva.

$E^c$  - sub-espço central : gerado pelos auto vetores cujos auto valores possuam parte real nula.

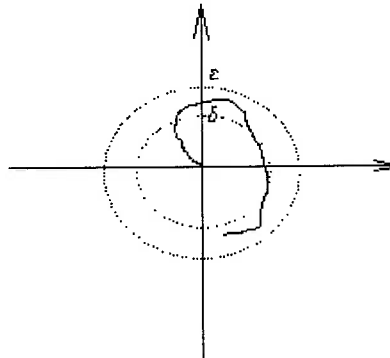
Nesse contexto começa o estudo sobre estabilidade e, principalmente, sobre a estabilidade de um ponto de equilíbrio, ou seja, sobre a estabilidade local.

Como ponto de equilíbrio entende-se por:

$$f(\bar{x}) = 0 \quad \text{onde } \bar{x} \text{ é o ponto de equilíbrio}$$

Segundo Guckenheimer e Holmes (1983)  $\bar{x}$  é ponto de equilíbrio estável  $\xleftrightarrow{\text{def}}$  dado  $\varepsilon > 0$  deve existir  $\delta(\varepsilon)$  tal que:

$$|x_0 - \bar{x}| < \delta \Rightarrow |\phi_t(x_0) - \phi_t(\bar{x})| < \varepsilon \quad \forall t > 0$$



**Figura 2.1 - Ponto de equilíbrio estável**

Para  $\bar{x}$  ser ponto de equilíbrio assintoticamente estável  $\xleftrightarrow{\text{def}}$

- 1-  $\bar{x}$  é ponto de equilíbrio estável e
- 2-  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x_0) = \bar{x}$ .

Tais definições representam condições necessárias e suficientes para definição de estabilidade. Porém não são práticas do ponto de vista algébrico, pois é necessário o conhecimento de  $\phi_t$  para determinação da estabilidade do ponto de equilíbrio.

Nesse contexto utiliza-se os teoremas locais de estabilidade. Um deles é o teorema de Hartman-Grobman (ver Wiggins, 1977). Esse teorema relata que dado um sistema não linear na forma  $\dot{x} = f(x)$  com  $x \in \mathfrak{R}^n, f: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$  e de classe  $\ell^1$ , com ponto de equilíbrio  $\bar{x}$ , uma boa forma de se caracterizar seu comportamento local é estudar sua dinâmica perto da solução  $\bar{x}$ . Assim fazendo a linearização:

$$\dot{\xi} = [J_f]_{\bar{x}} \cdot \xi \tag{4}$$

onde  $[J_f]_{\bar{x}}$  é a matriz jacobiana de  $f$  e  $x = \bar{x} + \xi$ , com  $|\xi| \leq 1$ .

Assim, segundo o teorema de Hartman-Grobman, se  $[J_f]_{\bar{x}}$  não possui nenhum auto-valor puramente imaginário então existe um homeomorfismo  $h$  definida na vizinhança  $U$  de  $\bar{x}$  em  $\mathfrak{R}^n$  que representa órbitas do fluxo não-linear  $\phi_t$  da equação 1 para o fluxo linear  $e^{[J_f]_{\bar{x}}t}$  de 4. Esse homeomorfismo preserva o sentido das órbitas e pode ser escolhida de maneira a preservar a parametrização do tempo.

Outro teorema local é o teorema da estabilidade linearizada de Liapunov, o qual, de certa forma, sintetiza as idéias principais do teorema anterior. O teorema diz respeito a um sistema  $\dot{x} = f(x)$  com  $x \in \mathfrak{R}^n$ ,  $f: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$  e de classe  $\ell^1$ , com ponto de equilíbrio  $\bar{x}$ ,  $A$  a matriz jacobiana de  $f(x)$  e  $\Gamma$  o espectro de  $A$  (conjunto composto por todos os autovalores de  $A$ ). Sendo  $\lambda_i$  o  $i$ ésimo autovalor de  $A$ :

se  $\text{Re}[\lambda_i] < 0, \forall \lambda_i \in \Gamma \Rightarrow \bar{x}$  é assintoticamente estável;

se  $\exists \lambda_i \in \Gamma \mid \text{Re}[\lambda_i] > 0 \Rightarrow \bar{x}$  é instável e

se  $\exists \lambda_i \in \Gamma \mid \text{Re}[\lambda_i] = 0$  e para todos os outros  $\lambda_i \in \Gamma \text{ Re}[\lambda_i] < 0 \Rightarrow$  nada pode-se afirmar a respeito da estabilidade de  $\bar{x}$ .

Em termos práticos, a principal limitação dos teoremas locais é saber as fronteiras de validade da linearização como também quando se obtém da linearização autovalores com parte real nula, o que como visto no teorema acima, nada consegue-se saber sobre a estabilidade do ponto.

Quando menciona-se de fronteiras de validade da linearização, refere-se, por exemplo, à ocorrência dos chamados ciclos limites os quais serão definidos no item 2.2.

Autovalores cujas partes reais são nulas, refere-se a pontos com estabilidade orbital. E uma forma eficaz que se verificar sua estabilidade é através de mapas de Poincaré, os quais consistem em mapas de tempo discreto que, de forma simplificada, consistem em seções no plano de estados do fluxo  $\phi_t$  do sistema em intervalos  $\Delta t$ .

Pode-se definir mapas de Poincaré através das vizinhanças de uma órbita periódica, de uma maneira mais completa da seguinte maneira:

Considere a seguinte equação diferencial ordinária:

$$\dot{x} = f(x) \quad x \in \mathfrak{R}^n$$

onde  $f:U \rightarrow \mathfrak{R}^n$  é  $C^r$  em algum aberto de  $U \subset \mathfrak{R}^n$ . Seja  $\phi_t$  o fluxo de  $f(x)$  e suponha que a equação diferencial acima tenha uma solução periódica de período  $T$  a qual podemos chamar de  $\phi(t+T, x_0)$ , onde  $x_0 \in \mathfrak{R}^n$  é qualquer ponto pelo qual passa uma solução periódica (ou seja,  $\phi(t+T, x_0) = \phi(t, x_0)$ ). Seja  $\Sigma$  uma superfície de dimensão  $n - 1$  transversal ao fluxo em  $x_0$ . Assim é possível encontrar um conjunto aberto  $V \subset \Sigma$  tal que as trajetórias começando em  $V$  retornam para  $\Sigma$  em um tempo fechado  $T$ . O mapa que associa pontos em  $V$  com seus primeiros pontos de retorno para  $\Sigma$  é chamado mapas de Poincaré, o qual denota-se por  $P$ . Sendo mais preciso:

$$P: V \rightarrow \Sigma, \\ x \rightarrow \phi(\tau(x), x),$$

onde  $\tau(x)$  é o tempo de primeiro retorno do ponto  $x$  para  $\Sigma$ . Assim:

$$\tau(x) = T \quad e \quad P(x_0) = x_0$$

Assim, uma importante característica de tais mapas é que pontos fixos de  $P$  correspondem a órbitas periódicas da equação diferencial acima citada.

## 2.2. Funções de Liapunov

As funções de Liapunov, em um caso particular, podem ser entendidas como funções de energia potencial de um determinado sistema. Assim consegue-se visualizar regiões de alto e baixo níveis energéticos, identificando dessa forma regiões de atração em torno de um determinado ponto de equilíbrio.

Através do método direto de Liapunov consegue-se obter essa noção qualitativa do domínio de estabilidade de atratores, como também se sua estabilidade é global ou apenas local. Para pontos não hiperbólicos também é possível obter "idéias" qualitativas quanto sua estabilidade, pois sabe-se em que direção a função de Liapunov cresce ou decresce, e pensando em termos de energia, sabe-se em que direção do "poço potencial" tem-se a região de menor valor da função (menor energia).

Para definição da função de Liapunov algumas definições são



necessárias.

- Função localmente definida positiva

Uma função  $V(x)$  com  $V : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  é localmente positiva definida ao redor de  $\bar{x} \xleftarrow{\text{def}} \rightarrow$   $\exists$  um domínio em  $\mathfrak{R}$  definida pela circunferência  $C(\bar{x})$  em torno de  $\bar{x}$  para a qual:

i)  $V(\bar{x}) = 0$

ii)  $V(x) > 0; \forall x \in C(\bar{x})$  exceto  $\bar{x}$ .

- Função localmente semi-definida positiva

Uma função  $V(x)$  com  $V : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  é localmente semi-definida positiva ao redor de  $\bar{x} \xleftarrow{\text{def}} \rightarrow$   $\exists$  um domínio em  $\mathfrak{R}$  definida pela circunferência  $C(\bar{x})$  em torno de  $\bar{x}$  para a qual:

i)  $V(\bar{x}) = 0$

ii)  $V(x) \geq 0; \forall x \in C(\bar{x})$ .

- Função globalmente positiva definida

Uma função  $V(x)$  com  $V : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  é globalmente positiva definida  $\xleftarrow{\text{def}} \rightarrow$  se para todo  $\mathfrak{R}$  vale:

i)  $V(\bar{x}) = 0$

ii)  $V(x) > 0; \forall x \in \mathfrak{R}^n$ .

- Função globalmente positiva semi-definida.

Uma função  $V(x)$  com  $V: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  é globalmente positiva semi-definida  $\xleftarrow{\text{def}} \rightarrow$

se para todo  $\mathfrak{R}$  vale:

i)  $V(\bar{x}) = 0$

ii)  $V(x) \geq 0; \forall x \in \mathfrak{R}^n$ .

Essas mesmas definições podem ser aplicadas para funções localmente/globalmente negativa definida ou semi-definida.

Com essas definições é possível definir uma função de Liapunov. Função de Liapunov é uma função  $V: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ , localmente positiva definida, tal que  $\dot{V}(x)$  é localmente negativa semi-definida.

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} : \left[ \frac{\partial V}{\partial x_1}; \frac{\partial V}{\partial x_2}; \frac{\partial V}{\partial x_3}; \dots; \frac{\partial V}{\partial x_n} \right] \cdot \dot{x}$$

Através dessas definições pode-se definir o teorema da estabilidade local de Liapunov:

- Seja um sistema descrito pela equação diferencial:

$$\dot{x} = f(x) \quad \text{com } f: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n \quad \text{e } f \in \ell^1$$

e seja  $\bar{x}$  um ponto de equilíbrio do sistema de maneira que:

$$f(\bar{x})=0$$

Se  $\exists$  uma função  $V(x)$ , com  $V: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  e  $V(x)$  é uma função de Liapunov, então  $\bar{x}$  é localmente estável.

Caso a função de Liapunov seja globalmente positiva definida e  $\dot{V}(x)$  seja globalmente negativa semi-definida, então  $\bar{x}$  é globalmente estável.

Através do método de Liapunov pode-se garantir também a estabilidade assintótica de um ponto de equilíbrio. Dessa forma se  $\exists V(x)$  com  $V: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ , com derivadas contínuas, tal que:

A1)  $V(x)$  é positiva definida ao redor de  $C(\bar{x})$  e

A2)  $\dot{V}(x)$  é negativa definida ao redor de  $C(\bar{x})$ .

Então  $\bar{x}$  é localmente, assintoticamente estável. Dessa forma, consegue-se obter informação sobre estabilidade do ponto definido através de uma função de Liapunov previamente definida.

No entanto, nem sempre a definição de uma função de Liapunov é uma operação trivial. Porém, em alguns casos, a função potencial de um determinado sistema definido por:

$$V = - \int f(x).dx \quad p/ \dot{x} = 0 \quad (5)$$

pode representar uma função de Liapunov. Dado um ponto de equilíbrio que

deseja-se estudar, pode-se normalizar  $V(x)$  de maneira que  $V(x)=0$ . Dessa forma pode-se definir  $V(x)$  como localmente definida/semi-definida positiva ou negativa e caso  $\bar{x}$  seja realmente ponto de equilíbrio  $\dot{V}(x)$  será localmente definida/semi-definida positiva ou negativa, já que em um ponto de equilíbrio o nível energético é mínimo/máximo respectivamente ( $\dot{V}(\bar{x})$ ). Dessa forma, o estudo da função potencial torna-se um caso particular do método de Liapunov.

Como dito, para pontos não hiperbólicos, dependendo do sistema, pode-se analisar como a energia potencial varia com a variável de estado. Assim, conclusões podem ser tiradas a partir de  $V(x)$ , assim como o domínio de atração de um determinado ponto. Analisando graficamente  $V(x)$ , pode-se observar "vales" e "picos" na função potencial, e avaliar as regiões de atração para cada ponto fixo.

Uma vantagem de se analisar apenas a função de energia potencial (e não a utilização de uma função de Liapunov) é que se reduz o número de variáveis de  $V(x)$ , já que, para se obter  $V(x)$ ,  $\dot{x}$  é considerado zero (apenas variação de energia potencial). Assim analisa-se apenas a variação de energia da função restauração do sistema. Porém, em sistemas cuja não linearidade apresenta-se no termo dependente de  $\dot{x}$  (em geral, termo dissipativo) perde-se poder de análise com essa abordagem.

Para o caso de um oscilador de Van der Pol, por exemplo, o surgimento dos ciclos limite não seria percebido pelo estudo da função potencial. Nesse caso, tem-se um acoplamento entre  $x$  e  $\dot{x}$ . Porém, em sistemas mecânicos, cujo elemento dissipativo seja dependente apenas de  $\dot{x}$ , e todas as não-

linearidades do sistema provém dos elementos de restauração, a análise da função  $V(x)$  é uma forma simples e eficaz de se analisar tal sistema.

### 2.3. Ciclos limite

Ciclos limite consistem em atratores periódicos que apresentam trajetórias fechadas e isoladas no espaço de estado. Particularizando, para se ter um ciclo limite estável, por exemplo, sobre um ponto de equilíbrio  $\bar{x}$ , deve-se garantir que a origem  $(\bar{x}, 0)$  no espaço de estado seja instável, assim as trajetórias de pequena amplitude movem-se no sentido de se afastar da origem, enquanto que trajetórias de grande amplitude movem-se no sentido de se aproximar do ponto  $(\bar{x}, 0)$ .

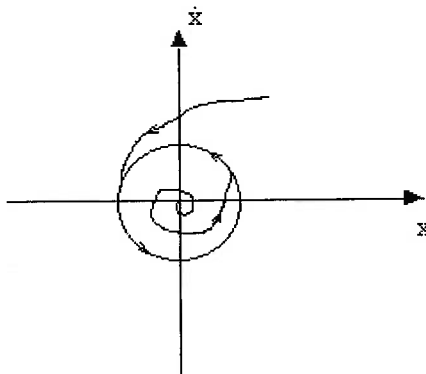


Figura 2.2 - Ciclo limite estável

Um exemplo é mostrado em Thompson e Stewart (1986) considerando um oscilador na forma:

$$m.\ddot{x} - c.\dot{x} + d.\dot{x}^3 + k.x = 0 \quad (6)$$

Para pequenas amplitudes pode-se linearizar o sistema descrito pela equação 6 apenas eliminando o termo não linear. Com isso, resta apenas um oscilador linear do tipo massa-mola-amortecedor com amortecimento negativo, o que significa que o ponto de equilíbrio (0,0) no espaço de estado é um foco instável. Porém, para grandes amplitudes o termo não linear é preponderante, e como consiste de um amortecimento positivo, faz com que as trajetórias sigam no sentido do ponto de equilíbrio, ficando porém em uma oscilação permanente, pois chegando perto do ponto (0,0) é novamente repellido.

Com respeito a existência dos ciclos limite, podemos citar o teorema de Hopf que garante a existência de um ciclo limite para um sistema dependente de um único parâmetro, chamado de  $\mu$ , e que para  $\mu=0$  tem-se soluções periódicas:

- Suponha que um sistema  $\dot{x} = f_{\mu}(x)$ ,  $f: U \rightarrow \mathfrak{R}^n$ ,  $x \in \mathfrak{R}^n$  e  $\mu \in \mathfrak{R}$  tem um ponto de equilíbrio  $(x_0, \mu_0)$  na qual as seguintes propriedades são satisfeitas:

- 1)  $D_x f_{\mu_0}(x_0)$  tem um par simples de autovalores imaginários puros  $(\lambda(\mu), \bar{\lambda}(\mu))$  e nenhum outro autovalor com parte real nula.

$$2) \frac{d}{d\mu} [\operatorname{Re} \lambda(\mu)]|_{\mu=\mu_0} = d \neq 0$$

Então há uma faixa de valores, tanto positivos quanto negativos de  $\Delta\mu = \mu - \mu_0$  para os quais cada  $\mu$  corresponde um único ciclo limite a uma distância

$$O\left[|\Delta\mu|^{\frac{1}{2}}\right] \text{ de } x_0.$$

## 2.4. Bifurcações

Segundo Thompson e Stewart (1986) pode-se definir como ponto de bifurcação todo ponto que, no espaço de parâmetro de controle em estudo, apresente um campo vetorial (trajetórias no espaço de estado) estruturalmente instável. Essa definição mostra-se bastante genérica, abrangendo bifurcações locais dinâmicas e estáticas, assim como bifurcações globais nos retratos de fase. Outros autores, tais como Hilborn (1994) definem teoria das bifurcações como o estudo de como as características de pontos fixos (referência à mapas discretos de Poincaré) e outros tipos de atratores no espaço de estado mudam mediante alteração de parâmetros do sistema. De certa forma, também é uma definição abrangente, porém mais específica a pontos de equilíbrio.

Para um sistema autônomo genérico da forma  $\dot{x} = N(x)$ , Thompson e Stewart (1986) cita o uso da teoria das variedades centrais para o estudo de bifurcações. A idéia principal de tal teoria é a tentativa de reescrever o sistema em equações desacopladas, reduzindo o número de graus de liberdade do sistema.

Em linhas gerais a teoria cita o sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A.x + f(x, y) \\ \dot{y} &= B.y + g(x, y)\end{aligned}$$

com  $x \in \mathbb{R}^N$ ,  $y \in \mathbb{R}^M$  e A e B sendo matrizes constantes tais que os autovalores de A tem parte real nula enquanto que os autovalores de B tem parte real negativa. As funções f e g são de classe  $\ell^2$  com  $f(0,0) = 0$ ,  $f'(0,0) = 0$ ,  $g(0,0) = 0$  e  $g'(0,0) = 0$ . De forma geral, se existe variedade invariante  $y = h(x)$  com h lisa e  $h(0) = 0$  e  $h'(0) = 0$  então  $h(x)$  é dita variedade central.

Através de teorema, garante-se a existência da variedade central  $y = h(x)$  para  $|x| < \delta$  e que o fluxo na variedade central é governada pelo sistema n-dimensional:

$$\dot{u} = A.u + f(u, h(u))$$

Outro teorema na teoria cita que a equação acima contém toda informação necessária para determinar o comportamento assintótico de pequenas soluções para o sistema completo.

Dessa forma para a região  $|x| < \delta$  do espaço de estado, pode-se estudar a estabilidade do sistema através de uma variedade central e assim facilitando o estudo de bifurcações. Vale ressaltar que tal teoria é local e portanto é válida apenas ao redor de um domínio restrito dentro do espaço de estado.



Por bifurcações locais, pode-se destacar duas, as quais, como será visto, irão ser observadas no sistema em estudo.

### 2.4.3. Bifurcação Fold

A bifurcação fold também é conhecida como bifurcação sela-nó. Para melhor compreendê-la, pode-se tomar como exemplo um oscilador não linear, com restauração quadrática, e uma forçante parametrizada em  $\mu$ .

$$\ddot{x} + \dot{x} + x^2 = \mu \quad (7)$$

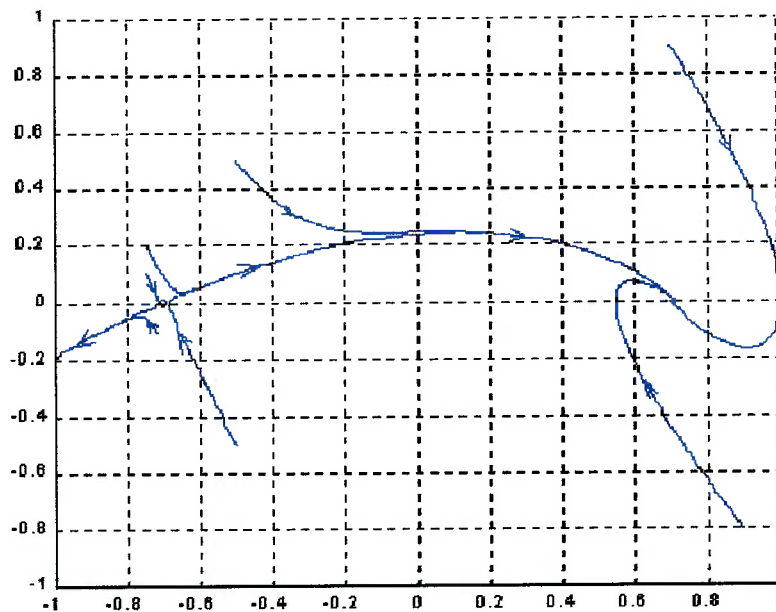
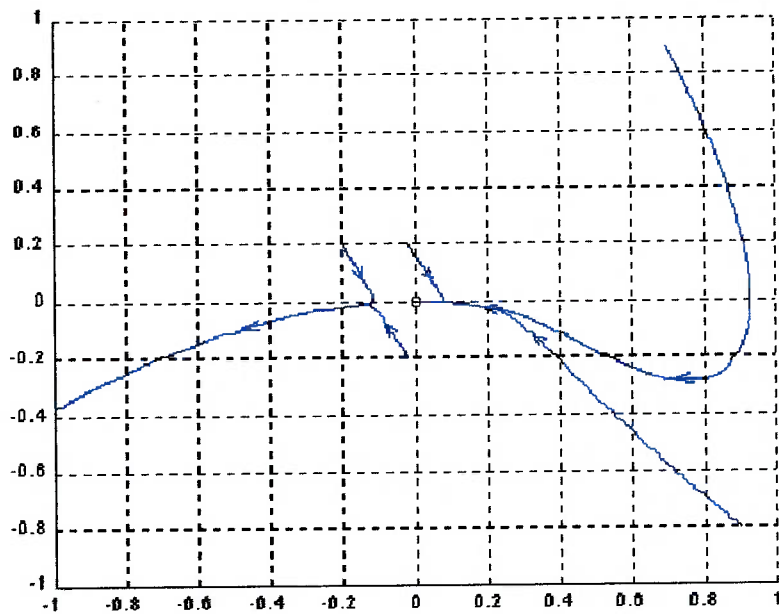
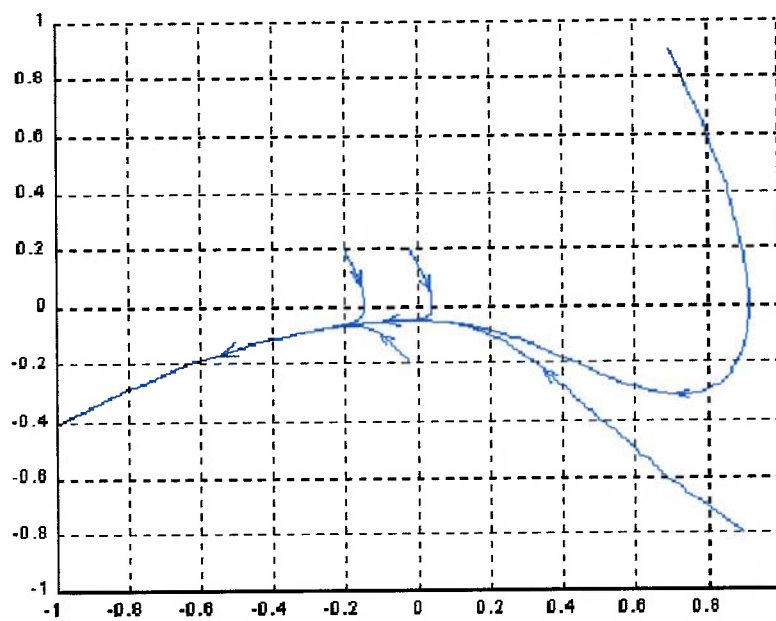


Figura 2.3 - Diagrama de fase para m = 0.5



**Figura 2.4 - Diagrama de fase para  $m = 0.0$**



**Figura 2.5 - Diagrama de fase para  $m = -0.5$**

O retrato de fase do sistema acima, para diferentes valores de  $\mu$  pode

ser visto nas Figuras de 2.3 a 2.5. Para  $\mu = 0.5$ , há um atrator assintoticamente estável em  $x = \sqrt{0.5}$  e uma cela em  $x = -\sqrt{0.5}$ . A medida que diminui-se  $\mu$ , os dois pontos de equilíbrio se aproximam, até unirem-se e tornarem-se apenas um ponto de equilíbrio sela-nó, para  $\mu = 0$ .

Para  $\mu = 0$ , as trajetórias com posição inicial ( $x_0$ ) maior que zero, vão para o ponto de equilíbrio  $x = 0$ . Já as trajetórias com posição inicial menor que zero, tendem a instabilidade e vão para  $-\infty$ .

Para  $\mu < 0$  não tem-se ponto de equilíbrio real, e todas as trajetórias no espaço de estado tendem a  $-\infty$ .

A bifurcação fold pode ser representada e considerada restrita à sua variedade central. Aplicando assim a teoria da variedade central J. Carr (1978/1979), o campo vetorial de um fold pode ser expresso na forma:

$$\dot{x} = \mu - x^2 \tag{8}$$

Como mencionado, para  $\dot{x}=0$  existe uma relação quadrática entre  $\mu$  e  $x$ , o que gera um equilíbrio dito parabólico ( um caminho estável e outro instável com a variação de  $\mu$ ).

Esta representa a mais simples forma de bifurcação local, pois pode-se representá-la com um diagrama de fase uni-dimensional, apenas um parâmetro de controle, e possui termo não-linear de baixa ordem ( $x^2$ ).

Considerando a adição de mais termos equivalentes à expansão em série de Taylor da variedade, pode-se descobrir que essa adição não altera

qualitativamente a dinâmica local. Ou seja, uma pequena perturbação na dinâmica não irá alterar a bifurcação qualitativamente. Em outras palavras, pode-se dizer que a bifurcação fold é estruturalmente estável. Assim a variedade central expressa em (8) pode ser válida até mesmo em complicados sistemas dinâmicos que possuam esse tipo de bifurcação.

#### 2.4.2. Bifurcações do tipo Hopf

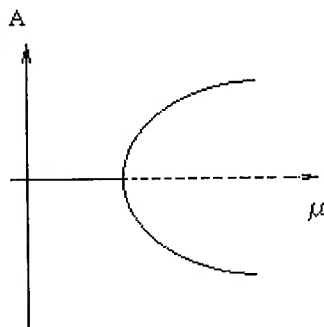
Chama-se bifurcação de Hopf a bifurcação contínua de um atrator em um ciclo limite. Como por exemplo podemos citar um oscilador com elementos dissipativo não-linear na forma:

$$\ddot{x} + \dot{x}(\dot{x}^2 - \mu) + x = 0$$

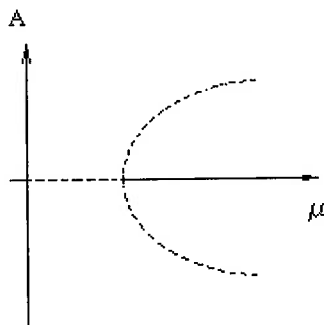
Essa equação apresenta um ponto de equilíbrio em  $x = 0$  e apresenta uma bifurcação de Hopf a medida que  $\mu$  muda de negativo para positivo. Para  $\mu < 0$  tem-se um amortecimento não-linear positivo ( $\dot{x}^3$ ) e um amortecimento linear também positivo, fazendo com que a origem seja um ponto assintoticamente estável. Para  $\mu = 0$  o ponto continua assintoticamente estável, porém a convergência é muito lenta. Para  $\mu > 0$ , o termo linear de amortecimento é negativo e dominante para baixas amplitudes de oscilação, fazendo com que a origem torne-se instável. No entanto, para oscilações

maiores, o termo não-linear é dominante, levando as trajetórias no espaço de estado para uma oscilação dentro de um ciclo limite. E quanto mais se aumenta  $\mu$ , o raio do ciclo limite também aumenta.

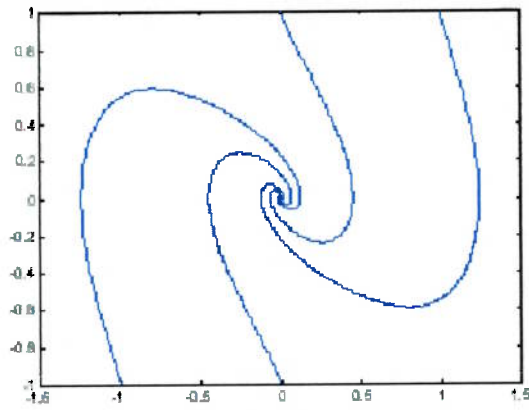
Esse tipo de bifurcação de Hopf é chamada de Hopf supercrítica (Figura 2.6). Um outro tipo de bifurcação de Hopf, mais crítica em termos de estabilidade, é o caso da Hopf subcrítica (Figura 2.7). As trajetórias no espaço de estado, para esse tipo de bifurcação são iguais à supercrítica, apenas com o sentido inverso das trajetórias. As trajetórias da bifurcação de Hopf podem ser vistas na Figura 2.8, de acordo com a variação de  $\mu$ .



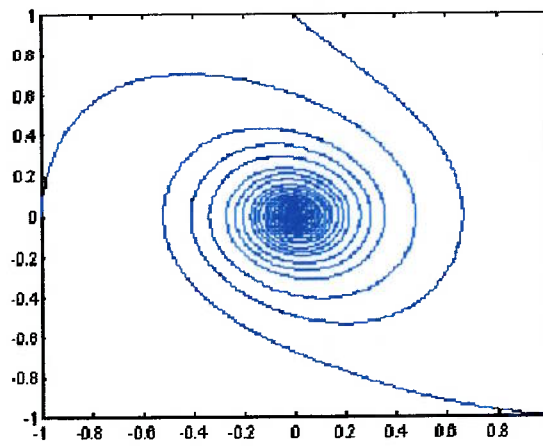
**Figura 2.6 - Bifurcação de Hopf supercrítica**



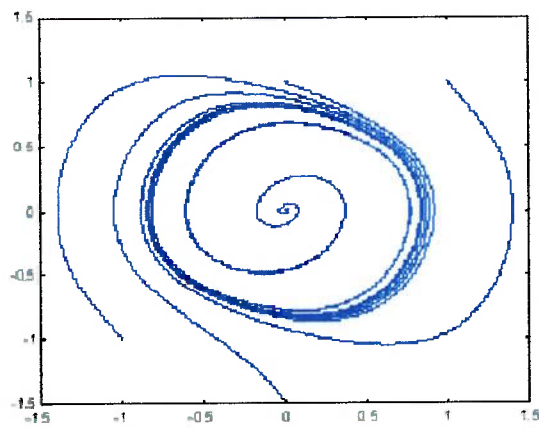
**Figura 2.7 - Bifurcação de Hopf subcrítica**



$$\mu = -0.5$$



$$\mu = 0$$



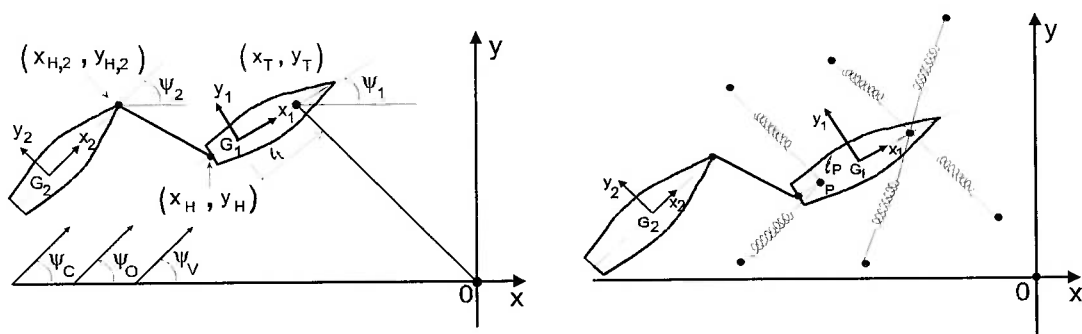
$$\mu = 0.5$$

**Figura 2.8 - Trajetórias típicas da bifurcação de Hopf**

Também chamada de Hopf em forma catastrófica, segundo Thompsom e Stewart (1986), o ponto de bifurcação é caracterizado pela mudança de um ponto de equilíbrio instável para um ponto de equilíbrio estável, porém com sua região de atração delimitada por um ciclo limite. Trajetórias fora desse ciclo limite, são repelidas, e trajetórias dentro dele, são atraídas para o ponto de equilíbrio. Um bom exemplo de sistema onde ocorre esse tipo de bifurcação pode ser encontrado nas equações de Lorenz.

### 3. MODELAGEM MATEMÁTICA

Primeiramente, pretende-se detalhar o modelo matemático do sistema baseado no qual quer-se construir um modelo arquetípico. Na Figura 3.1 tem-se uma ilustração do sistema (tanto para amarração com *Turret* como em complacência DICAS) com os referenciais utilizados. Os graus de liberdade envolvidos na modelagem são os movimentos de avanço (*surge*), deriva (*sway*) e guinada (*yaw*).



**Figura 3.1 - Referenciais empregados: sistema Turret (esquerda) e DICAS (direita)**

O primeiro referencial,  $OXYZ$ , é fixo à Terra (inercial). Os índices 1 e 2 representam respectivamente o navio carregador e o navio aliviador. O segundo e terceiro referenciais,  $G_1XYZ$  e  $G_2XYZ$ , são respectivamente presos ao centro de gravidade do navio de produção e do navio aliviador. Os eixos de cada referencial preso aos navios coincidem com os eixos principais de inércia das embarcações.

No caso do sistema Turret o ponto T representa sua posição. O ponto H é o ponto de amarração do "hawser" no FPSO, os pontos  $G_1$  e  $G_2$  os centros de



gravidade do FPSO e navio aliviador, respectivamente. No segundo caso, com o navio FPSO com linhas de amarração em complacência, as molas representam as linhas de amarração, com sua rigidez dada por equações de catenária, conforme será mostrado na seção 3.1.1.4.

### **3.1. Modelagem do Sistema**

Os resultados do estudo da dinâmica do sistema FPSO dependem do modelo hidrodinâmico adotado. Os primeiros modelos utilizados em estudos recentes foram propostos por Bernitas & Papoulias (1986), Garza-Rios & Bernitas (1999), Nishimoto & Brinati & Fucatu (1995). O modelo utilizado por tais autores baseia-se em equações de movimento de manobra, com as derivadas hidrodinâmicas obtidas de Obokata et al. (1981) or Takashina (1986) por exemplo. No entanto, alguns resultados, tais como definição de regiões de respostas dinâmicas (ciclos limite, respostas caóticas, etc) dependem da ordem das equações de manobra e das derivadas hidrodinâmicas utilizadas. Além disso, validações experimentais com tal modelo não estão consolidadas, além do fato de um modelo com número elevado de parâmetros, dificulta qualquer tipo de análise sobre uma validação. O modelo adotado aqui foi inicialmente proposto por Leite et al. (1998), baseado na teoria de asa de baixa razão de aspecto e na correção do fator de forma (Clarke et al, 1983). As expressões do modelo, como poderá ser visto adiante, dependem apenas do ângulo de incidência da corrente, das principais dimensões do navio e alguns coeficientes

hidrodinâmicos bem conhecidos.

A dinâmica de cada navio, no referencial fixo a ele, pode ser descrita por:

$$(m - m_{11}).\dot{u} = (m - m_{22}).vr - (m.x_g - m_{26})r^2 - (m_{11} - m_{12}).v_c.r + X \quad 9$$

$$(m - m_{22}).\dot{v} = (m_{11} - m).ur - (m.x_g - m_{26})\dot{r} - (m_{11} - m_{12}).u_c.r + Y \quad 10$$

$$(I_z - m_{66}).\dot{r} = (m_{22} - m_{11}).u.v - (m.x_g - m_{26})(\dot{v} + r.u) + N \quad 11$$

onde:

- m é a massa do navio;
- $m_{ii}$ ,  $i = 1, 2, 6$  são as massas derivadas hidrodinâmicas em surge, sway e yaw, respectivamente;
- $m_{26}$  é a massa adicional em sway devido ao movimento de yaw ( $m_{26}=m_{62}$ ).
- u e v são respectivamente as velocidades de surge e sway,  $u_c$  e  $v_c$  são as velocidades da corrente relativas às direções GX e GY respectivamente;
- r é a velocidade angular;
- $I_z$  é o momento de inércia em relação ao eixo GZ;
- X, Y e N representam as forças externas totais respectivamente nas direções de surge, sway e yaw;

A posição e aproamento de cada embarcação em relação ao referencial inercial são obtidos das seguintes equações:

$$\dot{x}_0 = u \cos \psi - v \sin \psi \quad 12$$

$$\dot{y}_0 = u \sin \psi + v \cos \psi \quad 13$$

$$\dot{\psi} = r \quad 14$$

onde  $\dot{x}_0$  e  $\dot{y}_0$  são as velocidades da embarcação respectivamente nas direções OX e OY, e  $\psi$  é o ângulo de aproamento do veículo.

As componentes  $u_c$  e  $v_c$  da corrente são calculadas de:

$$u_c = V_c \cos(\psi_c - \psi) \quad 15$$

$$v_c = V_c \sin(\psi_c - \psi) \quad 16$$

onde  $V_c$  é a velocidade da corrente referida à Terra e  $\psi_c$  é a sua direção (ver Figura 3.1).

As forças X, Y e o momento N são dados por:

$$X_i = X_{c,i} + X_{v,i} + X_{o,i} + X_{k,i} + X_{t,i} + X_{H,i} \quad 17$$

$$Y_i = Y_{c,i} + Y_{D,i} + Y_{v,i} + Y_{o,i} + Y_{k,i} + Y_{t,i} + Y_{H,i} \quad 18$$

$$N_i = N_{c,i} + N_{D,i} + N_{v,i} + N_{o,i} + N_{k,i} - Y_{H,i} \cdot l_{H,i} + Y_{t,i} \cdot l_{t,i} \quad i=1,2 \quad 19$$

$$X_{k,2} = X_{t,2} = Y_{k,2} = Y_{t,2} = N_{k,2} = N_{t,2} = 0 \quad 20$$

onde:

- os subscritos  $c$ ,  $v$ ,  $o$ ,  $k$ ,  $t$ ,  $H$ , e  $D$ , representam corrente, vento, ondas, amarras (caso DICAS), forças no turret (caso Turret), hawser e amortecimento respectivamente;
- os índices 1 e 2 referem-se respectivamente ao navio FPSO e ao navio aliviador;
- $L$  é o comprimento do navio;
- $l_H$  é a distância entre o ponto de amarração do hawser e o centro de gravidade do navio (positiva avante);
- $l_t$  é a distância entre o turret e o centro de gravidade do navio (positiva avante).

A seguir são mostrados cálculos de forças e momentos atuando nos navios, os quais são válidos para ambos os navios. Os índices 1 e 2 foram omitidos como forma de simplificação. Para o presente trabalho, como já mencionado, apenas forças de corrente e vento serão levadas em consideração.

### 3.1.1. Forças e Momentos Atuantes Sobre o Sistema

#### 3.1.1.1. Forças e Momento devidos à Corrente

As forças e momento devidos à corrente são dados pelas equações desenvolvidas para o modelo de asa curta e apresentadas em Leite et al., 1998:

$$X_c(\beta, V) = \frac{1}{2} \rho T L C_{1c}(\beta) |V_r|^2 \quad 21$$

$$Y_c(\beta, V) = \frac{1}{2} \rho T L C_{2c}(\beta) |V_r|^2 \quad 22$$

$$N_c(\beta, V) = \frac{1}{2} \rho T L^2 C_{6c}(\beta) |V_r|^2 \quad 23$$

$$V_r = \sqrt{(u - u_c)^2 + (v - v_c)^2}$$

onde os coeficientes hidrodinâmicos são dados por:

$$C_{1c}(\beta) = \left[ \frac{0.09375}{(\log(\text{Re}) - 2)^2} \frac{S}{TL} \right] \cos(\beta) + \frac{1}{8} \frac{\pi T}{L} (\cos(3\beta) - \cos(\beta)) \quad 24$$

$$C_{2c}(\beta) = \left[ C_Y - \frac{\pi T}{2L} \right] \sin(\beta) |\sin(\beta)| + \frac{\pi T}{2L} \sin^3(\beta) + \frac{\pi T}{L} \left[ 1 + 0.4 \frac{C_B B}{T} \right] \sin(\beta) |\cos(\beta)|$$

25

$$C_{6c}(\beta) = \frac{-1}{L} \left[ C_Y - \frac{\pi T}{2L} \right] \sin(\beta) |\sin(\beta)| - \frac{\pi T}{L} \sin(\beta) \cos(\beta) - \left[ \frac{1 + |\cos(\beta)|}{2} \right]^2 \frac{\pi T}{L} \left[ \frac{1}{2} - 2.4 \frac{T}{L} \right] \sin(\beta) |\cos(\beta)|$$

26

39

sendo:

- B e T respectivamente a boca e o calado do navio;
- S a superfície molhada;
- $C_B$  é o coeficiente de bloco;
- $C_Y$  é o coeficiente de força lateral para corrente transversal;
- Re é o número de Reynolds (baseado no comprimento L);
- $l_g$  mede a distância longitudinal entre o centro de massa do casco e a

seção média do navio;

- $\beta$  é o ângulo de ataque.

O ângulo  $\beta$  é definido por:

$$\beta = \arctan\left(\frac{v - v_c}{u - u_c}\right) \quad 27$$

### 3.1.1.2. Amortecimento devido ao yaw

As forças e momento de amortecimento devido ao movimento de guinada também são baseados no modelo de asa curta e podem ser determinados por (Aranha, 1998):

$$X_D = -\frac{1}{4} \rho \cdot \pi \cdot T^2 \cdot L \cdot v_r \cdot r - \frac{1}{16} \rho \cdot \pi \cdot T^2 \cdot L^2 \cdot \frac{u_r}{|u_r|} \cdot r^2 \quad 28$$

$$Y_D = \frac{1}{2} \rho \cdot T \cdot L^2 \cdot C_{D,2} \cdot u_r \cdot r - 0,035 \cdot \rho \cdot T \cdot L^2 \cdot v_r \cdot r - 0,007 \cdot \rho \cdot T \cdot L^3 \cdot |r| \cdot r \quad 29$$

$$N_D = -\frac{1}{2}\rho.T.L^3.C_{D,6}.|u_r|_r - \frac{3}{20}\rho.T.L^3.C_{\gamma}.|v_r|_r - \frac{1}{32}\rho.T.L^4.C_{\gamma}.|r|_r \quad 30$$

$$u_r = u - u_c \quad 31$$

$$v_r = v - v_c \quad 32$$

onde:  $C_{D,i}$  para  $i=2,6$  são os coeficientes de amortecimento respectivamente em sway e yaw, dados por:

$$C_{D,2} = \frac{\pi.T}{2.L} \left( 1 - 4,4 \cdot \frac{B}{L} + 0,16 \cdot \frac{B}{T} \right) \quad 33$$

$$C_{D,6} = \frac{\pi.T}{4.L} \left( 1 + 0,16 \cdot \frac{B}{T} - 2,2 \cdot \frac{B}{L} \right) \quad 34$$

Estas formulações foram validadas experimentalmente através de testes com "barra rígida" realizados no IPT (Simos et al, 2001).

### 3.1.1.3. Amarras

Os cabos de amarração devem ser modelados como catenárias através das seguintes equações:

$$x_e(s) = \frac{H_e}{EA} \cdot s + \frac{H_e}{\gamma} \left( \operatorname{arcsenh} \frac{\gamma \cdot s + V_{0,e}}{H_e} - \operatorname{arcsenh} \frac{V_{0,e}}{H_e} \right) \quad 35$$

$$y_e(s) = \frac{s}{EA} \cdot \left( \frac{\gamma}{2} \cdot s + V_{0,e} \right) + \frac{1}{\gamma} \cdot \left( \sqrt{H_e^2 + (\gamma \cdot s + V_{0,e})^2} - \sqrt{H_e^2 + V_{0,e}^2} \right) \quad 36$$

onde: -  $s$  é a coordenada sobre a catenária, sendo  $s = 0$  no ponto de toque da amarra com o fundo;

-  $x_e, y_e$  são respectivamente as coordenadas horizontal e vertical, no plano da amarra, sendo que  $x_e(0) = y_e(0) = 0$ ;

-  $H_e$  é a componente horizontal da força de tração da amarra, (constante ao longo de todo o comprimento);

-  $V_{0,e}$  é a componente vertical da força de tração na extremidade  $s = 0$ ;

-  $E$  é o módulo de Young,  $A$  é a área da seção transversal;

-  $\gamma$  é o peso linear (N/m) da amarra.

Estas equações porém, se aplicam apenas às seguintes condições:

- As linhas de amarração são submetidas exclusivamente ao próprio peso, isto é, não se leva em consideração a força de corrente ao longo da amarra;

- São válidas apenas para o trecho suspenso da linha;

- Aplicam-se apenas a linhas homogêneas;

- Não se considera a existência de bóias, pesos ou outras forças concentradas ao longo do comprimento da linha;

- É uma representação estática das amarras.



#### 3.1.1.4. Hawser

A equação clássica da catenária foi usada para modelar o hawser considerando apenas sua massa própria e assumindo sua geometria como sendo simétrica em relação ao seu ponto médio, isto é, a configuração da catenária é a mesma para ambos os lados do ponto médio. A partir destas hipóteses, não há força vertical atuando no ponto médio do hawser e a relação entre a distância horizontal e a força horizontal é dada por:

$$\Delta x_H = \frac{F_H}{E.A} + \frac{F_H}{w} \left[ a \operatorname{sen} \left( \frac{w.L_h/2}{F_H} \right) \right] \quad 37$$

onde: -  $\Delta x_H$  é a distância horizontal do hawser (alongamento);

- $F_H$  é a força horizontal do hawser;
- $E$  é o módulo de elasticidade;
- $A$  é a área transversal;  $w$  é o peso específico;
- $L_h$  é o comprimento do hawser.

A distância  $\Delta x_H$  é obtida por:

$$\Delta x_H = \left( \sqrt{(x_{H,1} - x_{H,2})^2 + (y_{H,1} - y_{H,2})^2} \right) / 2 \quad 38$$

onde  $x_{H,i}$ ,  $y_{H,i}$ ,  $i=1,2$  são as coordenadas da popa do FPSO e da proa do navio aliviador, respectivamente.

As projeções das forças do hawser sobre o FPSO e aliviador, são dadas por:

$$X_{H,i} = F_H \cdot \cos(\omega_i) \quad 39$$

$$Y_{H,i} = F_H \cdot \sin(\omega_i) \quad i=1,2 \quad 40$$

$$\omega_i = -\pi + \gamma_i - \psi_i \quad 41$$

$$\gamma_i = \text{atan2}(y_{H,1} - y_{H,2}, x_{H,1} - x_{H,2}) \quad 42$$

#### 2.1.1.5. Forças e Momento devidos ao vento

As equações utilizadas para o cálculo dos esforços do vento, tanto para o FPSO como para o navio aliviador, são (ver OCIMF, 1994):

$$X_v = \frac{1}{2} \cdot C_{Xv}(\psi_{rv}) \cdot \rho_v \cdot V_v^2 \cdot A_T \quad 43$$

$$Y_v = \frac{1}{2} \cdot C_{Yv}(\psi_{rv}) \cdot \rho_v \cdot V_v^2 \cdot A_L \quad 44$$

$$N_v = \frac{1}{2} \cdot C_{Nv}(\psi_{rv}) \cdot \rho_v \cdot V_v^2 \cdot A_L \cdot L_{BP} \quad 45$$

$$\psi_{rv} = \psi_v - \psi$$

onde: -  $C_{Xv}$ ,  $C_{Yv}$  e  $C_{Nv}$  são coeficientes dados em função do ângulo de ataque do vento  $\psi_v$ .

-  $V_v$  é a velocidade do vento a uma altitude de 10 m.

-  $A_T$  e  $A_L$  são respectivamente as áreas das seções transversal e longitudinal do navio expostas à ação do vento (áreas vélicas).

-  $\psi_v$  é o ângulo de ataque do vento.

Os coeficientes  $C_{Xv}$ ,  $C_{Yv}$  e  $C_{Nv}$  podem ser obtidos experimentalmente.

A título de exemplo, nas Figuras 3.2 e 3.3 estão ilustrados os coeficientes obtidos pela DMI (1999) para o FPSO P-43 e para um navio aliviador VLCC sugeridos pela OCIMF (1994), são válidos para condições entre 150000 e 500000 DWT.

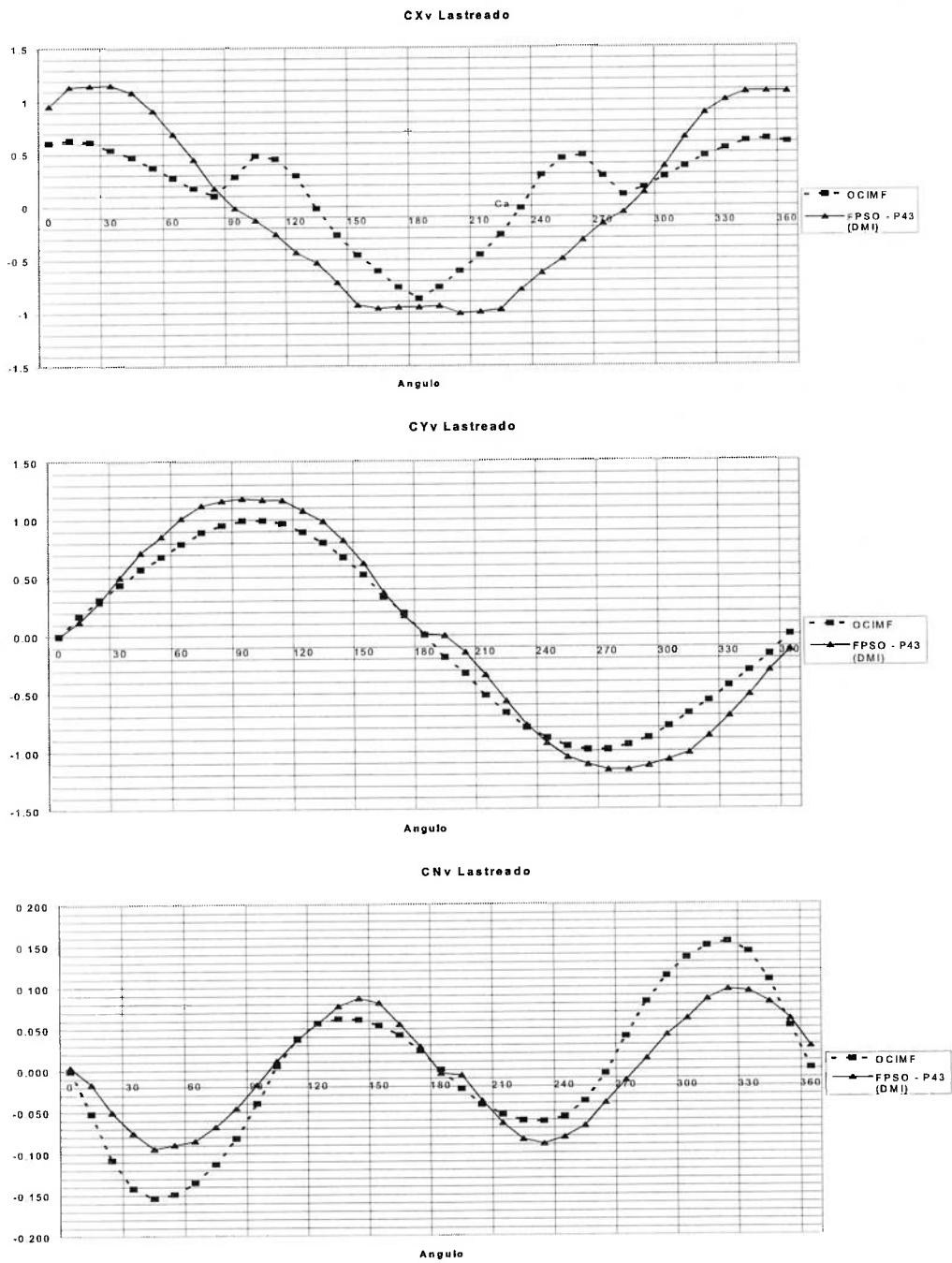
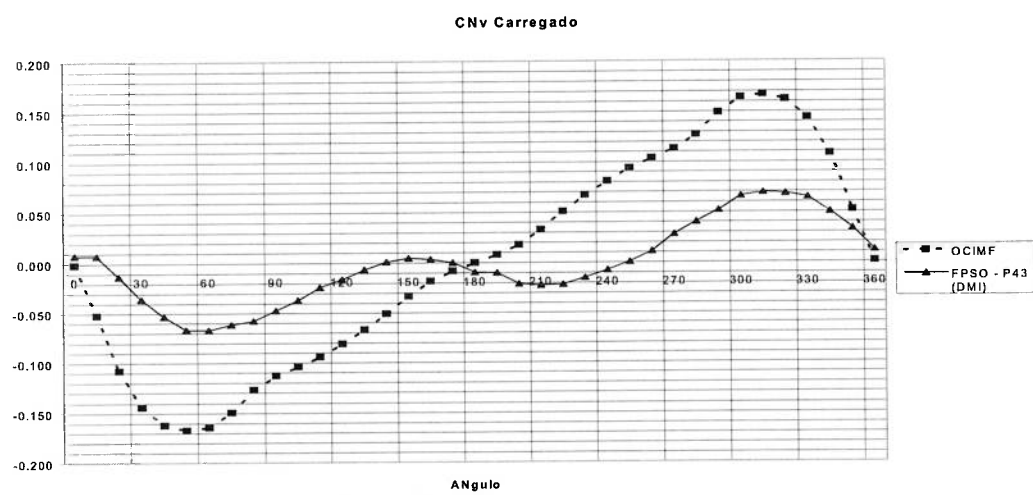
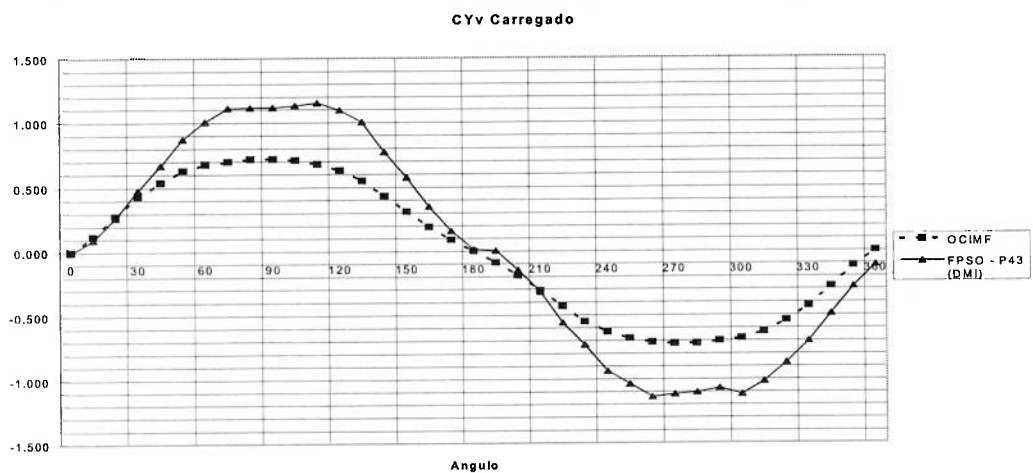
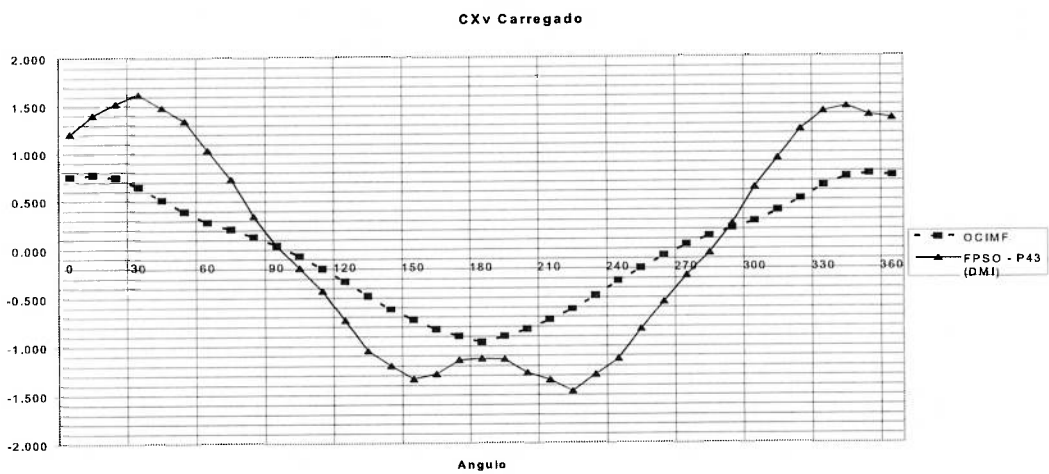


Figura 3.2 - Comparação dos coeficientes do vento na condição lastreado



**Figura 3.3 - Comparação dos coeficientes do vento na condição carregado**

### 3.2. Poços Potenciais

O modelo matemático descrito no item 3.1 apresenta grande complexidade algébrica. Constitui-se em um sistema fortemente<sup>1</sup> não linear, não sendo possível obter soluções analíticas para as equações diferenciais que regem sua dinâmica. Através de simulações numéricas pode-se investigar o comportamento do sistema. Porém, é difícil obter um completo entendimento de tal comportamento apenas com simulações.

Uma das alternativas encontradas para se efetuar uma exploração preliminar da dinâmica envolvida foi através da obtenção do potencial do sistema. Através da sua análise pode-se avaliar não apenas pontos de equilíbrio (estáveis e instáveis, o que correspondem a pontos críticos do potencial) para uma dada condição ambiental, como também visualizar as regiões de influência de cada ponto.

A possibilidade de avaliação de poços potenciais para esse sistema surge do fato deste depender apenas de variáveis de posição. Assim, do ponto de vista dinâmico, pode-se entender tal dependência como esforços de "mola", e como tal, tem-se por objetivo analisar como a energia potencial de tais esforços varia no espaço de estado.

No entanto, para o sistema como um todo, em seus seis graus de

---

<sup>1</sup> Um sistema *fortemente* não-linear é aquele para o qual aproximações lineares fornecem respostas inadequadas para a análise que se pretende efetuar. Este é o caso do sistema em estudo, conforme será mostrado a seguir.

liberdade, não é possível determinar um poço potencial único. Isso deve-se ao fato do sistema não ser um sistema gradiente, ou seja, derivado do gradiente de uma função potencial. Para sistemas multivariáveis gradientes, a obtenção de uma função potencial única é feita na forma:

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 + V_1(x_2, x_3, \dots, x_n)$$

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_2 + V_2(x_1, x_3, \dots, x_n)$$

.

.

.

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n + V_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$$

O fato das forças ambientais serem dependentes de apenas um dos graus de liberdade do sistema, no caso, o aprofundamento da embarcação torna matematicamente impossível a obtenção de uma única função potencial  $V(x_1, x_2, \dots)$  como descrito acima. Pois tomando as derivadas cruzadas da função potencial do sistema em estudo tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x_1} V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_3} \left\{ \int f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 + V_1(x_2, x_3, \dots, x_n) \right\} = \frac{\partial f_1}{\partial x_3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x_2} V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_3} \left\{ \int f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_2 + V_2(x_1, x_3, \dots, x_n) \right\} = \frac{\partial f_2}{\partial x_3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{1,2}} \frac{\partial}{\partial x_3} V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_{1,2}} \left\{ \int f_3(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_3 + V_3(x_1, x_2, \dots, x_n) \right\} = \frac{\partial f_3}{\partial x_{1,2}}$$

E se a função potencial for única, vale:

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_3} = \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \quad e \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = \frac{\partial f_3}{\partial x_1}$$

No entanto, para o modelo es estudo, sabe que  $f_1$ ,  $f_2$  e  $f_3$  dependem apenas da variável de aproamento ( $x_3$ ). Dessa forma  $\frac{\partial f_3}{\partial x_2}$  e  $\frac{\partial f_3}{\partial x_1}$  são iguais a zero, diferentemente de  $\frac{\partial f_2}{\partial x_3}$  e  $\frac{\partial f_1}{\partial x_3}$ . Por isso, tais igualdades não podem ser satisfeitas para o sistema, e dessa forma, não é possível obter uma função potencial única.

No modelo das forças de vento e corrente apresentado no item 3.1, estas são consideradas aplicadas no centro de massa da embarcação, ou seja, sem influência na equação de momento gerado na embarcação por estes agentes ambientais. O momento gerado é representado por uma equação própria, independente das forças lateral e longitudinal da embarcação. Devido a essa "independência", é possível determinar "pseudo-potenciais" ou sub-potenciais separados para os graus de liberdade angulares e lineares.

A principal idéia de uma função pseudo-potencial é que ela depende apenas de alguns graus de liberdade, sendo os outros mantidos em valores constantes. Em termos práticos, para o caso do sub-potencial dos momentos aplicados na embarcação fixa-se as posições X e Y das duas embarcações, e estuda-se a variação de energia potencial do sistema mediante variação do



aproamento das embarcações. E da mesma forma para as posições de cada navio. Vale a pena ressaltar que para um determinado ponto ser de equilíbrio para um sistema, é necessário que esse ponto seja um ponto crítico em todos os pseudo-potenciais.

Por questão de brevidade, adiante será mencionado apenas o termo potencial para referenciar as funções pseudo-potenciais.

Como função potencial de um sistema entende-se:

$$V = - \int f . ds \quad 46$$

Onde  $f$  representa as forças de um sistema dinâmico que dependem apenas de variáveis de posição (angular ou linear) e  $ds$  os respectivos deslocamentos nestas variáveis. Para o sistema estudado define-se o sub-potencial para os aproamentos:

$$V_{\psi} = - \int M_1 . d\psi_1 - \int M_2 . d\psi_2 \quad 47$$

Onde  $M$  são as parcelas dos momentos atuantes nos navios que dependem apenas das variáveis de aproamento. Para os graus de liberdade de posição horizontal dos navios define-se:

$$V_{xy} = - \int X_1 . dx_1 - \int X_2 . dx_2 - \int Y_1 . dy_1 - \int Y_2 . dy_2 \quad 48$$

Onde  $X$  e  $Y$  são respectivamente as parcelas das forças lateral e longitudinal que dependem apenas das posições dos navios. Através das forças e momentos de corrente e vento já descritas obtém-se as seguintes funções potenciais.

$$\begin{aligned}
 V_{\psi} = & Kt.(Lp_1 \cdot \cos \psi_1 \cdot x_1 + Lp_1 \cdot \sin \psi_1 \cdot y_1) + Kh. \left( \frac{L_1}{2} \cdot \cos \psi_1 \cdot x_1 + \frac{L_1}{2} \cdot \sin \psi_1 \cdot y_1 - \frac{L_2}{2} \cdot \cos \psi_2 \cdot x_2 \right. \\
 & - \frac{L_2}{2} \cdot \sin \psi_2 \cdot y_2 + x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + \frac{L_2}{2} \cdot \cos \psi_2 \cdot x_1 \\
 & + \frac{L_2}{2} \cdot \sin \psi_2 \cdot y_1 - \frac{L_1}{2} \cdot \cos \psi_1 \cdot x_2 - \frac{L_1}{2} \cdot \sin \psi_1 \cdot y_2 - \frac{L_2}{2} \cdot \frac{L_1}{2} \sin \psi_2 \cdot \sin \psi_1 - \frac{L_2}{2} \cdot \frac{L_1}{2} \cos \psi_2 \cdot \cos \psi_1 ) \\
 & - \frac{1}{2} \cdot \rho_v \cdot V_v^2 \cdot A_{r1} \cdot \frac{\cos[2 \cdot (\psi_v - \psi_1)]}{2} - \frac{1}{2} \cdot \rho_v \cdot V_v^2 \cdot A_{r2} \cdot \cos[2 \cdot (\psi_v - \psi_2)] \\
 & + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot T_1 \cdot L_1^2 \cdot V_r^2 \cdot \left\{ \begin{aligned} & - \frac{l_{g1}}{L_1} \left[ C_{r1} - \frac{\pi T_1}{2L_1} \right] \cdot \left( \frac{-\cos(\beta_1) |\sin(\beta_1)| + |\beta_1|}{2} \right) - \frac{\pi T_1 \sin^2(\beta_1)}{L_1 \cdot 2} \\ & - \frac{\pi T_1}{L_1} \left[ \frac{1}{2} - 2.4 \frac{T_1}{L_1} \right] \cdot \left[ \frac{-\cos \beta_1 |\cos(\beta_1)|}{4} + \cos^3 \beta_1 - \frac{\cos^3(\beta_1) |\cos(\beta_1)|}{12} \right] \end{aligned} \right\} \\
 & + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot T_2 \cdot L_2^2 \cdot V_r^2 \cdot \left\{ \begin{aligned} & - \frac{l_{g2}}{L_2} \left[ C_{r2} - \frac{\pi T_2}{2L_2} \right] \cdot \left( \frac{-\cos(\beta_2) |\sin(\beta_2)| + |\beta_2|}{2} \right) - \frac{\pi T_2 \sin^2(\beta_2)}{L_2 \cdot 2} \\ & - \frac{\pi T_2}{L_2} \left[ \frac{1}{2} - 2.4 \frac{T_2}{L_2} \right] \cdot \left[ \frac{-\cos \beta_2 |\cos(\beta_2)|}{4} + \cos^3 \beta_2 - \frac{\cos^3(\beta_2) |\cos(\beta_2)|}{12} \right] \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

49

$$\begin{aligned}
 V_{xy} = & Kt. \left( \frac{x_1^2}{2} + \frac{y_1^2}{2} + Lp_1 \cdot \cos \psi_1 \cdot x_1 + Lp_1 \cdot \sin \psi_1 \cdot y_1 \right) + Kh. \left( -\frac{x_1^2}{2} - \frac{y_1^2}{2} - \frac{x_2^2}{2} - \frac{y_2^2}{2} + \frac{L_1}{2} \cdot \cos \psi_1 \cdot x_1 \right. \\
 & + \frac{L_1}{2} \cdot \sin \psi_1 \cdot y_1 - \frac{L_2}{2} \cdot \cos \psi_2 \cdot x_2 - \frac{L_2}{2} \cdot \sin \psi_2 \cdot y_2 + x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + \frac{L_2}{2} \cdot \cos \psi_2 \cdot x_1 \\
 & + \frac{L_2}{2} \cdot \sin \psi_2 \cdot y_1 - \frac{L_1}{2} \cdot \cos \psi_1 \cdot x_2 - \frac{L_1}{2} \cdot \sin \psi_1 \cdot y_2 - \frac{L_2}{2} \cdot \frac{L_1}{2} \sin \psi_2 \cdot \sin \psi_1 - \frac{L_2}{2} \cdot \frac{L_1}{2} \cos \psi_2 \cdot \cos \psi_1 ) \\
 & - (Xv_1 \cdot x_1 + Yv_1 \cdot y_1 + Xc_1 \cdot x_1 + Yc_1 \cdot y_1 + Xv_2 \cdot x_2 + Yv_2 \cdot y_2 + Xc_2 \cdot x_2 + Yc_2 \cdot y_2)
 \end{aligned}$$

50

52

Através das equações 49 e 50 pode-se visualizar os sub-potenciais e analisar qualitativamente o comportamento do sistema. Nas Figuras 3.4 a 3.5 estão ilustrados os poços potenciais para um ponto de equilíbrio estável nas seguintes condições ambientais:

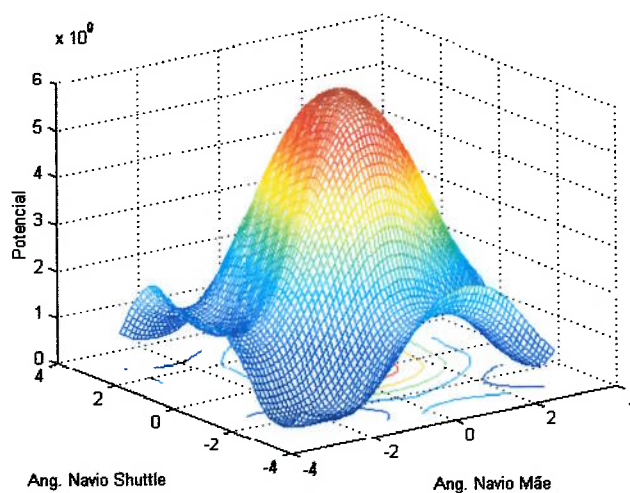
$$V_w = 8 \text{ m/s} \quad \psi_w = 0$$

$$V_c = 1 \text{ m/s} \quad \psi_c = \pi/8$$

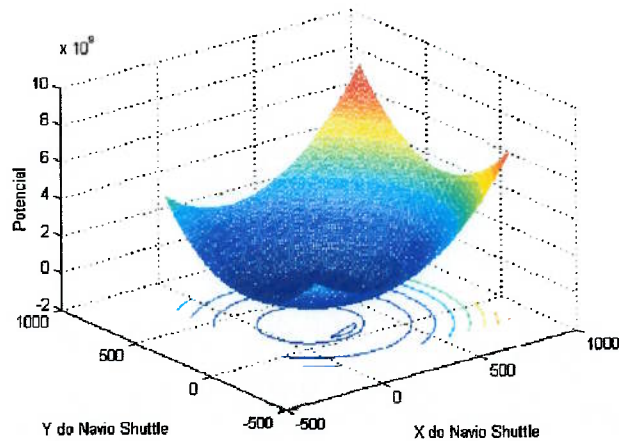
Navio FPSO : P-43

Navio Shuttle : VLCC

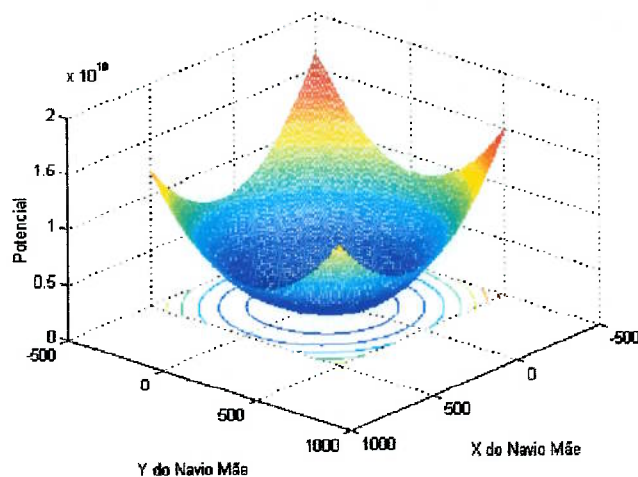
O potencial relativo ao posicionamento dos navios foi desmembrado em dois gráficos apenas por questões de visualização. Quando analisada a variação de energia potencial do posicionamento de um navio, o outro foi mantido em sua posição de equilíbrio.



**Figura 3.4 - Poço potencial relativo aos aproamentos**



**Figura 3.5 - Poço potencial relativo a posição do navio shuttle**



**Figura 3.6 - Poço potencial relativo a posição do navio FPSO**

Pode-se observar que a maior parte da dinâmica é ditada pelos aproamentos das embarcações. Seu posicionamento horizontal constitui poços potenciais com apenas um ponto de equilíbrio e estável. Ou seja, os navios em seus aproamentos de equilíbrio, podem sofrer qualquer perturbação em seus

posicionamentos, e sempre retornarão aos seus pontos de equilíbrio originais. Para o caso dos aproamentos (Figura 3.4), pode-se observar os pontos de equilíbrio instáveis. Dessa maneira, torna-se claro que os graus de liberdade responsáveis pela instabilidade do sistema nesses pontos são os aproamentos. Nesses pontos, qualquer perturbação no aproamento do navio fará com que este entre tenda a outro ponto de equilíbrio, diferentemente do visto para os primeiros potenciais mencionados.

A observação desta característica do sistema sugeriu a elaboração de um modelo simplificado (arquetípico), o qual leva em consideração apenas a dinâmica rica do sistema, ou seja, a dinâmica dos aproamentos das embarcações.

### **3.3. Modelo Arquetípico**

Para a caracterização do modelo arquetípico, deve-se estabelecer um parâmetro de comparação deste com o modelo completo, e que de alguma forma meça a representatividade do modelo reduzido. Um dos parâmetros escolhidos foram os pontos de equilíbrio do sistema. Assim, o modelo reduzido deverá representar, qualitativamente, mapas de bifurcação semelhantes do modelo completo.

Para isso é necessário estudar as funções que compõem os modelos de vento e corrente, para extrair, para o modelo reduzido, apenas as funções que representem os pontos de equilíbrio típicos para o modelo.

Para o caso das forças de vento, as quais são obtidas através de coeficientes experimentais (Figuras 3.2 e 3.3), a variação destes coeficientes será tomada como uma função senoidal, com a frequência e amplitude determinadas pelos valores experimentais. Tal representação, tendo em vista os gráficos dos coeficientes de vento apresentados na seção 3, apresenta-se como uma boa aproximação para as funções de vento.

Para as forças de corrente, deve-se realizar um estudo mais profundo das funções que a compõem. Sabe-se que são as funções que a compõem que determinam os pontos de equilíbrio do sistema. Por isso deve-se inspecionar se todos os termos do modelo de corrente são estruturalmente estáveis, ou melhor, se bifurcações podem ocorrer quando se usa um modelo mais simples de corrente, com apenas um termo por exemplo, ou todos os termos do modelo de asa curta.

Os termos presentes no modelo de corrente de asa curta, para o grau de liberdade de aproamento são:

$$A|\cos(\beta)|\sin(\beta) + B.\cos(\beta).\sin(\beta) + C|\sin(\beta)|\sin(\beta) + D|\cos(\beta)|^3.\sin(\beta)$$

Primeiramente, escolhendo o primeiro termo do modelo de corrente:

$$A|\cos(\beta)|\sin(\beta) = 0$$

Sabe-se que tal sistema possui quatro pontos de equilíbrio, os quais são os zeros respectivos das funções seno e coseno.

$$\beta = 0 ; \pi/2 ; \pi ; 3\pi/2.$$

Escolhendo um segundo termo a seguinte equação deve ser resolvida para se obter os pontos de equilíbrio:

$$A \cdot |\cos(\beta)| \cdot \sin(\beta) + B \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\beta) = 0$$

Sabe-se, de antemão, que os pontos  $\beta = 0, \pi/2, \pi$  e  $3\pi/2$  são solução. Caso A seja numericamente igual a B, teremos infinitos pontos de equilíbrio no intervalo negativo do coseno, pois:

$$\frac{|\cos(\beta)|}{\cos(\beta)} = -\frac{B}{A}$$

Para quaisquer outros valores para A e B a equação possui as quatro soluções mencionadas.

Escolhendo  $B > A > C$ , todos maiores que zero, cuja proporção é encontrada no modelo de corrente, tem-se sempre os pontos de equilíbrio 0 e  $\pi$  e adicionalmente mais dois pontos resultantes da equação:

$$\frac{A}{B}|\cos(\beta)| + \frac{C}{B}|\sin(\beta)| = -\cos(\beta) \quad \text{para } \sin(\beta) \neq 0$$

Tais pontos ocorrem nas proximidades de  $\pi/2$  e  $3\pi/2$ . Pois perto desses ângulos a parte em seno é maior, apenas reduzida do fator  $C/B$ , e equipara-se com as funções restantes. O mesmo acontece com a inserção do quarto termo do modelo de corrente.

$$D|\cos(\beta)|^3 \cdot \sin(\beta)$$

Porém tal termo acarreta apenas uma translação desses dois pontos de equilíbrio citados anteriormente.

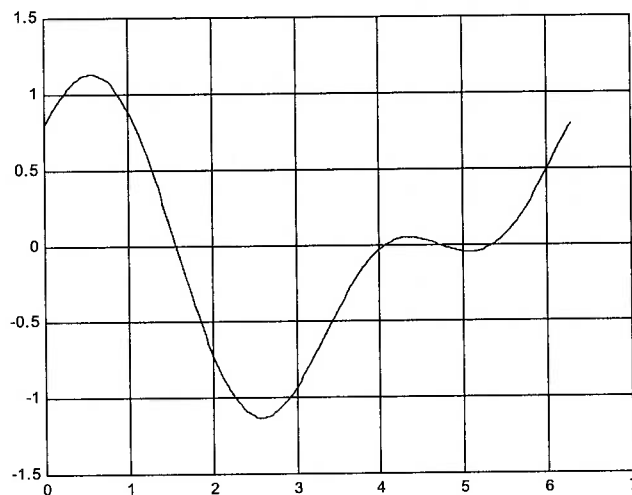
Uma das características do modelo completo que se deseja representar no modelo reduzido, é o aumento do número de pontos de equilíbrio, quando as forças de vento e corrente se opõem. Assim deve-se estudar não somente as funções de corrente, mas também sua influência com a função de vento. De maneira a escolher um modelo reduzido de corrente, o qual não perca principais características do sistema em questão, deve-se avaliar qual destes modelos pode sugerir possíveis bifurcações quando da variação dos parâmetros relativos às funções representativas de vento e corrente. Dessa forma tomando-se como modelo de corrente apenas a parcela de  $\cos \cdot \sin$  tem-se com a adição de força de vento:

$$B \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\beta) + V \cdot \sin(\beta + \varphi) = 0$$



Para  $B=V$  tem-se apenas dois pontos de equilíbrio  $0$  e  $\pi$ . Já para  $B > V$  tem-se mais dois pontos de equilíbrio, dados por:

$$\cos(\beta) = -\frac{V}{B}$$



**Figura 3.7 -  $V < B$  e  $\varphi = 0$**

Mesmo com a adição de uma fase, por exemplo, perto de  $\pi$  ou mesmo de  $\pi/2$ , não ocorre mais nenhum outro tipo de bifurcação, ou seja, para  $B > V$ , o sistema sempre possuirá 4 pontos de equilíbrio.

Contudo, escolhendo como função de corrente a função  $|\cos(\beta)| \cdot \sin(\beta)$  o sistema se comporta de maneira diferente. Os pontos de equilíbrio podem ser dados pela equação:

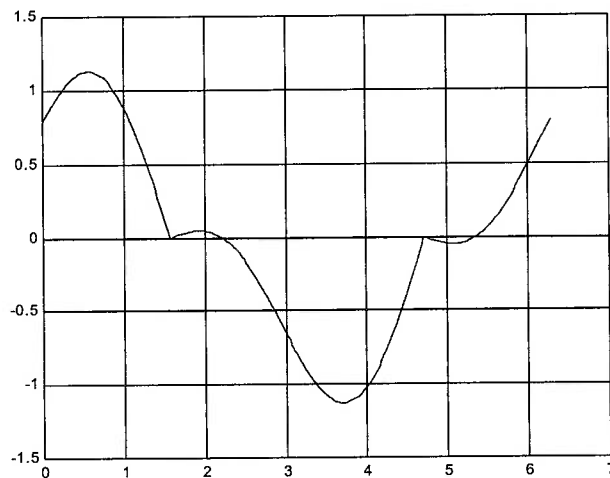
$$A|\cos(\beta)| \cdot \sin(\beta) + V \cdot \sin(\beta + \varphi) = 0$$

Para  $\varphi = 0$ , só existem 2 pontos de equilíbrio, 0 e  $\pi$ . Pois para quaisquer outros pontos, vale a equação:

$$|\cos(\beta)| = -\frac{V}{A}$$

A qual não possui raiz. Tomando uma fase  $\varphi$  de  $\pi/2$ , por exemplo, e com  $V=A$ , o sistema continua com apenas duas raízes, porém as raízes do cosseno ( $\pi/2$  e  $3\pi/2$ ).

Quando se diminui a razão  $V/A$ , o sistema ganha duas novas raízes, tão próximas às anteriores quanto mais próximo de 1 for essa razão.

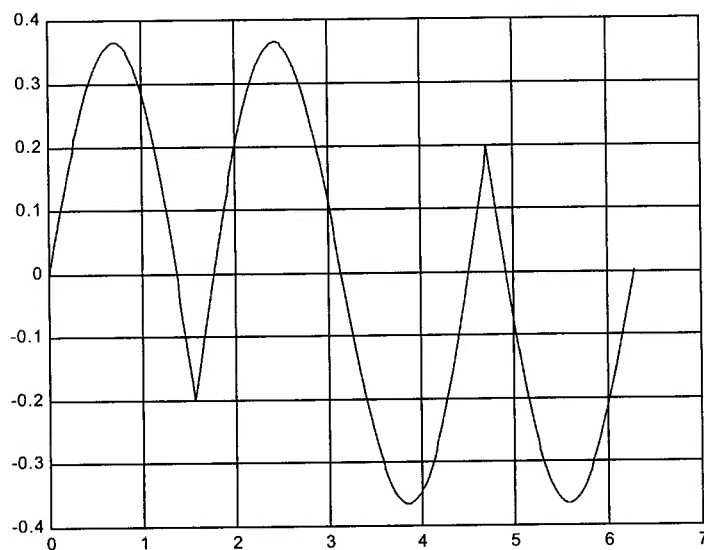


**Figura 3.8 -  $V/A = 0.8$  e  $\varphi = \pi/2$**

Porém quando se opõem as supostas forças de corrente e vento, ou seja, para um ângulo de fase de 180 graus, esse modelo ganha mais duas raízes, para as mesmas condições anteriores, ou seja  $A > V$ . Isso pode ser visto pela equação abaixo:

$$|\cos(\beta)| \cdot \sin(\beta) = -\frac{V}{A} \cdot \sin(\beta + \pi)$$

Quando a função seno muda de sinal, o que ocorre perto de  $\pi$  e  $V/A \ll 1$  existirão sempre 2 pontos de equilíbrio perto de  $\pi/2$  e mais outros dois perto de  $3\pi/2$ . Nesses pontos  $|\cos(\beta)|$  fica numericamente próximo de  $V/A$  e  $\sin(\beta) = -\sin(\beta + \pi)$ . Isso só ocorre pois trata-se da função módulo de cosseno, caso contrário o sinal dessa função não permitiria a existência de tais raízes. Quanto maior a razão  $V/A$ , maior é o afastamento dessas raízes de  $\pi/2$  e  $3\pi/2$ .



**Figura 3.9 -  $V/A = 0.2$  e  $\phi = \pi$**

O mesmo ocorre se tomarmos a função  $|\sin(\beta)| \cdot \sin(\beta)$  porém os novos dois pontos de equilíbrio ocorrerão perto de 0 e  $\pi$ .

Com isso, percebe-se que a função  $|\cos(\beta)| \cdot \sin(\beta)$  deve estar presente no

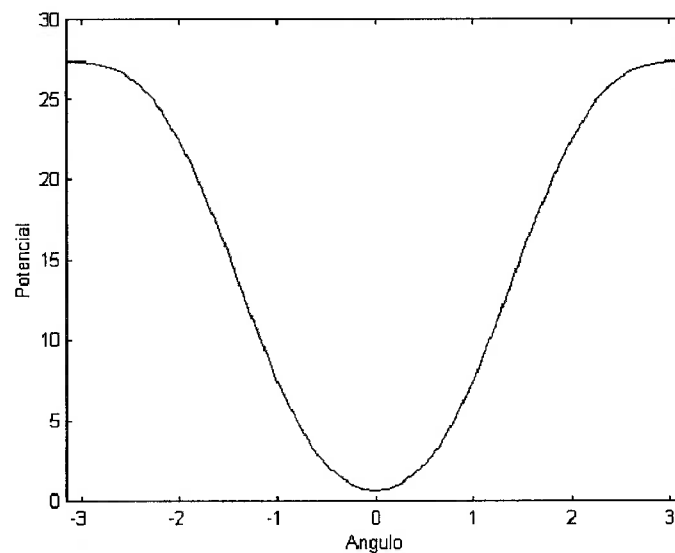
modelo de corrente reduzido, assim como a função  $\cos(\beta).\sin(\beta)$ , já que esta representa a função de maior coeficiente do modelo de asa curta apresentado e também influencia os pontos de equilíbrio do sistema. As outras funções que compõem o modelo para o grau de liberdade de aproamento, como visto, não alteram qualitativamente os pontos de equilíbrio, e por isso não serão adicionadas no modelo reduzido.

Outro fator importante do sistema completo que influencia os pontos de equilíbrio do sistema é o elemento de ligação entre os navios, ou seja, o *hawser*. Ele funciona como um ponto de reação do navio, fazendo com que as forças de corrente e vento geradas no navio se convertam em momento, através do braço determinado pela distância do seu ponto de amarração no navio até o centro de massa deste. Assim, as forças de corrente e vento, na direção transversal dos navios, também devem influenciar qualitativamente os pontos de equilíbrio do sistema. E dessa forma, os coeficientes dependentes do ângulo de aproamento dessas forças não podem ser desprezados.

O coeficiente de maior valor absoluto presente na força de corrente, e que difere dos coeficientes mencionados anteriormente é proporcional a  $\sin(\beta)^3$ . Tal função representa uma mudança qualitativa no modelo reduzido que pretende-se construir, visto que, as funções pré-selecionadas  $|\cos(\beta)|.\sin(\beta)$  e  $\cos(\beta).\sin(\beta)$  tem raízes em  $0, \pi/2, \pi$  e  $3\pi/2$  e com a introdução da função  $\sin(\beta)^3$ ,  $\pi/2$  e  $3\pi/2$  deixam de ser raízes. Tal introdução tem por objetivo "físico", levar em consideração a influência do *hawser* no modelo arquetípico. Nos resultados que irão ser apresentados, poder-se-á observar que a

introdução desse termo fez com que os resultados do modelo reduzido se equiparassem com os resultados do modelo completo.

Assim, seja um potencial mostrado na Figura 3.10, construído a partir das funções matemáticas escolhidas acima, presentes no momento de corrente gerado na embarcação.



**Figura 3.10 - Função potencial do modelo arquetípico**

Cuja equação é representada por:

$$V_{arq} = -A.\cos(\psi) \cdot \left(\frac{1}{3}.\text{sen}^2(\psi) + \frac{2}{3}\right) - B.\cos(\psi) \cdot |\cos(\psi)| + C.\text{sen}^2(\psi) + \sigma.\cos(\psi_v - \psi)$$

Os coeficientes A, B e C acima citados podem ser estimados para um determinado navio através das seguintes relações (derivados das equações 24 à 26):

$$A = \frac{2\pi \cdot T \cdot L_H}{L^2} + R$$

$$B = \frac{\pi \cdot T}{L} \cdot \left[ 1 + 0.4 \cdot \frac{C_B \cdot B}{T} \right] + R$$

$$C = -\frac{\pi \cdot T}{2 \cdot L} - R$$

sendo:

- B e T a boca e o calado respectivamente da embarcação;
- L o comprimento do navio;
- $C_B$  o coeficiente de bloco;
- $L_H$  é a distância entre o centro de gravidade do navio e o ponto de amarração do Turret/hawser.
- R uma parcela de ajuste.

Esse fator denominado R significa a introdução de uma parcela de ajuste que refina o cálculo dos coeficientes do modelo arquetípico. Neste trabalho tal coeficiente foi ajustado através de resultados experimentais. Além disso, foi observado que apenas um fator R foi necessário para obter uma boa correlação entre o modelo e os resultados experimentais.

No entanto, uma vez de posse dos valores de R, observou-se uma

grande semelhança entre os poços potenciais do modelo completo e arquetípico. Dessa observação motivou-se a obter tal fator de ajuste por meio de comparação entre os potenciais. A primeira tentativa foi igualar a ordem de grandeza dos potenciais, e assim obter R. No entanto, o resultado, ou melhor, o valor final dos coeficientes não foram os mesmos comparados com os obtidos com posse de dados experimentais. Ou seja, percebeu-se que um simples ajuste na ordem de grandeza dos poços não foi suficiente para determinação precisa de R uma vez que o resultado não alterou substancialmente a forma do poço potencial do modelo arquetípico.

Dessa forma notou-se que mais condições devem ser impostas à equiparação dos dois potenciais. Deve-se garantir também que a topologia seja semelhante, como por exemplo, variação de energia equivalente em uma dada região, pontos de mínimo/máximo de mesma ordem de grandeza, etc. Assim, métodos numéricos podem ser utilizados para chegar em tal equivalência, como por exemplo, o Método dos Mínimos quadrados. Através dele, e da utilização de, por exemplo, três diferentes parâmetros de ajuste (R1, R2 e R3) pode-se obter os valores dos coeficientes A, B e C apenas com a utilização do modelo completo, sem a necessidade de recorrer a uma validação experimental.

Contudo, verificou-se que considerar tal resíduo igual a zero já se apresenta como uma boa estimativa dos coeficientes das funções para o potencial do modelo arquetípico.

Utilizando-se dessa função potencial, obtém-se uma função restauração equivalente, em função de  $\psi$ , a qual pretende-se adicionar um oscilador Van

der Pol. Assim a equação diferencial para o sistema fica:

$$\ddot{\psi} + D \cdot \left( -E \cdot \frac{\sqrt{V_c} \cdot [\log Re - 2]^2}{\sigma + \frac{1}{\sigma}} + |\psi| \right) \cdot \dot{\psi} + f(\psi) = 0 \quad 52$$

Onde  $f(\psi)$  é a restauração mencionada, calculada por:

$$f(\psi) = \frac{\partial V_{arq}}{\partial \psi} \quad 53$$

A introdução de um oscilador Van der Pol deve-se a uma característica do sistema completo, cuja dinâmica apresenta regiões de ciclo limite. Tal comportamento tem como fator de influência uma relação de dependência entre aproamento e velocidades encontrada na forças de corrente. Tal relação funciona como um oscilador de Van der Pol, porém para graus de liberdade diferentes. Contudo, com a redução do sistema para apenas um grau de liberdade, no caso o aproamento, perdeu-se tal característica. Por essa razão, decidiu-se introduzir um Van der Pol para restaurar a característica do sistema completo, no modelo reduzido. No entanto, um estudo mais aprofundado sobre a ocorrência dos ciclos limite foi necessário.

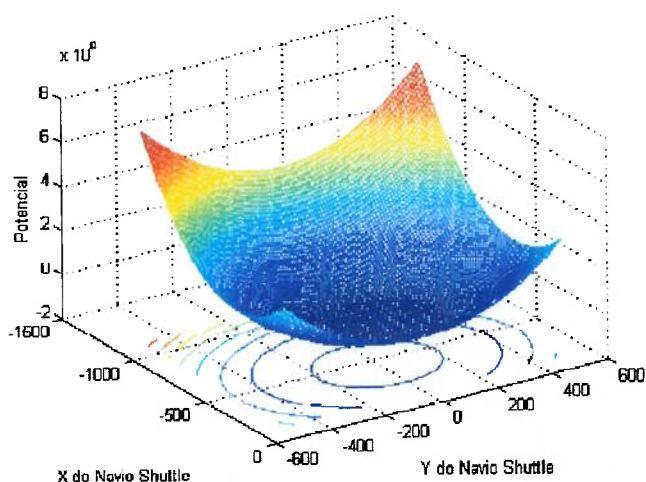
Aghamohammadi e Thompson (1990) e Simos et al. (2001) realizaram estudos, incluindo dados experimentais, sobre os ciclos limite que surgem em um sistema de um navio amarrado, e sobre as regiões de sua ocorrência



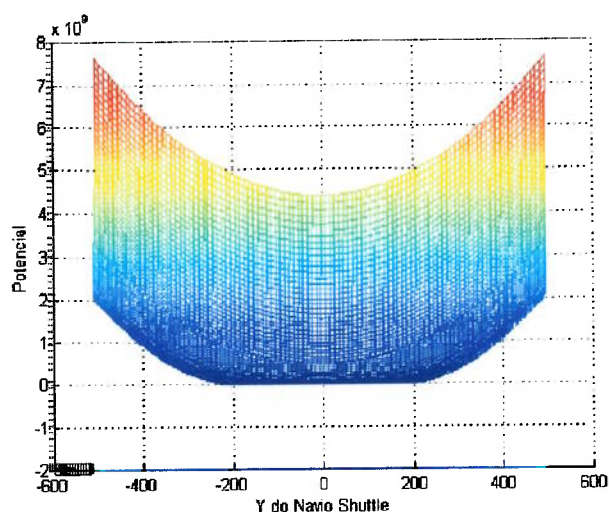
mediante a variação de parâmetros, tais como, o comprimento da amarração, no nosso caso em particular, o comprimento do *hawser*. No entanto, não realizaram estudos sobre os motivos de sua ocorrência.

Com o objetivo de verificar a razão da ocorrência de ciclos limite no sistema, recorreu-se novamente aos sub-potenciais, cujos resultados motivaram a elaboração de um modelo arquetípico, mesmo sabendo que os potenciais não levam em consideração velocidades dos graus de liberdade. No entanto, a dinâmica do sistema é consideravelmente lenta em comparação com velocidades de corrente e vento. Dessa forma, para uma análise qualitativa, é considerada aceitável a adoção das velocidades relativas de vento e corrente como as próprias velocidades dos agentes ambientais.

Assim analisando os pseudo potenciais nos graus de liberdade correspondentes ao movimento de translação da embarcação, pode-se obter informações importantes sobre a ocorrência de tal fenômeno dinâmico. Nas Figuras 3.11 e 3.12 pode-se observar os pseudo potenciais acima citados, para condição de força externa apenas de corrente. A Figura 3.12 é apenas uma vista lateral do mesmo potencial.



**Figura 3.11 - Função potencial do sistema completo**

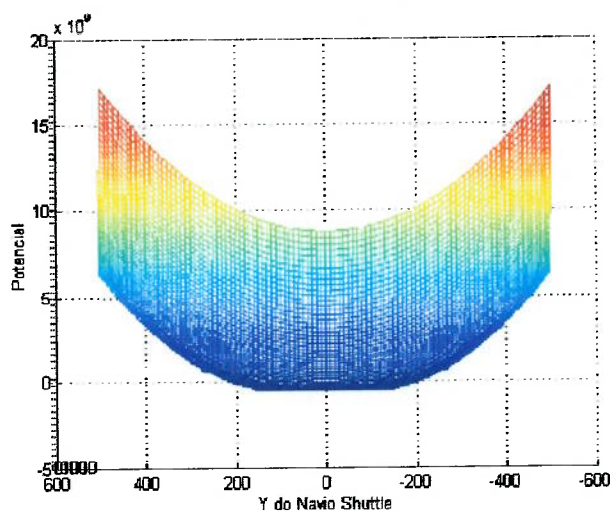


**Figura 3.12 - Vista Lateral da função potencial do sistema completo ( Lhawser = 190m)**

Pode-se notar a presença de um patamar equipotencial em torno da posição de equilíbrio. Isso significa que o sistema, nessa condição, passa a possuir um plano de equilíbrio, no qual pode oscilar. Essa condição dinâmica é fortemente influenciada pelo *hawser*, que devido ao seu comprimento, limita a

região desse patamar equipotencial. Observa-se na Figura 3.13, em comparação com a Figura 3.12, que a região equipotencial diminuiu quando da diminuição do comprimento do *hawser*.

O navio oscilando em seu plano horizontal excita oscilações no aproamento, e o que se observa é a oscilação nos três graus de liberdade do sistema.

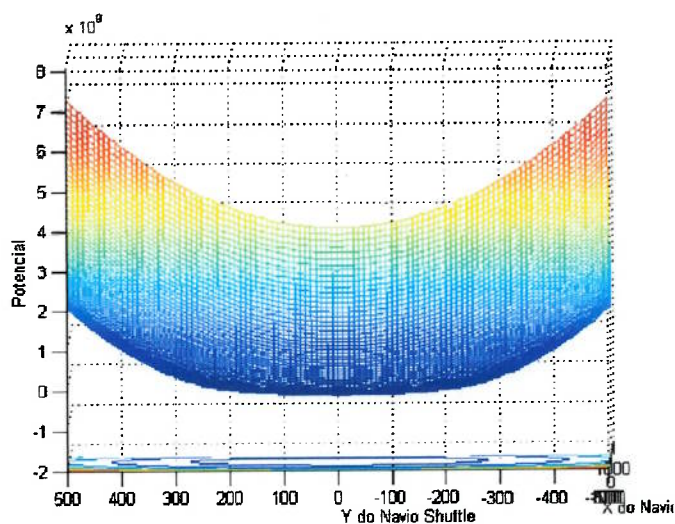


**Figura 3.13 - Vista Lateral da função potencial do sistema completo (  $L_{hawser} = 100m$  )**

Outra característica do ciclo limite presente na dinâmica em estudo, é sua diminuição de amplitude com o aumento das forças de vento comparativamente com as forças de corrente (verificado em simulação). Tal característica também foi observada nos pseudo-potenciais. Observa-se na figura 3.14, condição de velocidade de vento 30 vezes maior que a corrente, que o plano equipotencial citado anteriormente praticamente não existe, reduzindo a região equipotencial do ponto de equilíbrio.

Em suma, percebe-se pela variação de energia nos pontos de equilíbrio, que o ciclo limite ocorre devido ao grau de liberdade de translação das embarcações, o qual foi suprimido para a construção do modelo reduzido. Por isso a necessidade da introdução de um oscilador Van der Pol, para restituir tal característica. Contudo, é necessário saber como a amplitude de oscilação do ciclo limite varia, com a alteração das condições ambientais, por exemplo. Nesse contexto, foi proposta uma metodologia simplificada para essa verificação. Como hipótese, sugere que as oscilações do ciclo limite em cada grau de liberdade no plano horizontal, sejam oscilações senoidais, com amplitude  $A$  e frequência  $w$  (equações 54 e 55).

Substituindo nas equações do sistema (equações 1, 2 e 3) e depois de algum trabalho algébrico, obtém-se as relações 56 e 57.



**Figura 3.14 - Vista Lateral da função potencial do sistema com vento e corrente**

$$X = A_1 \cdot \sin(w_1 t) \quad 54$$

$$Y = A_2 \cdot \sin(w_2 t) \quad 55$$

$$A_{1,2} \approx a + \frac{b}{\sigma + \frac{1}{\sigma}} \quad 56$$

$$A_{1,2} \approx c + d \cdot \sqrt{V_c} \cdot [\log \text{Re} - 2]^2 \quad 57$$

Onde  $\sigma$  é a relação  $\frac{V_v}{V_c}$ . As expressões 56 e 57 revelam que a amplitude

do ciclo limite varia proporcionalmente ao inverso da razão  $\sigma$ , e diretamente proporcional à raiz da velocidade da corrente e com o quadrado do número de Reynolds. A introdução da razão  $\sigma$  deve-se à normalização dos agentes externos pela velocidade da corrente, a qual é o fator determinante na variação dos pontos de equilíbrio do sistema.

Por isso, na equação 52 foi introduzido o oscilador de Van der Pol na

forma:  $D \cdot \left( -E \cdot \frac{\sqrt{V_c} \cdot [\log \text{Re} - 2]^2}{\sigma + \frac{1}{\sigma}} + |\psi| \right) \cdot \dot{\psi}$ . Dessa forma a fronteira da região na

qual o amortecimento passa de um valor negativo para positivo é proporcional

à  $\frac{\sqrt{V_c} \cdot [\log \text{Re} - 2]^2}{\sigma + \frac{1}{\sigma}}$ , assim como visto para o caso do modelo completo. E as

constantes D e E podem ser calibradas, através de simulação com o modelo completo, por exemplo, para uma representação quantitativa da região do ciclo limite no modelo reduzido.

Assim, o modelo definido pela equação 52, segundo os estudos sobre as funções matemáticas que regem as forças de corrente e vento sobre uma embarcação representa a dinâmica de um navio em uma configuração conhecida como SPM (single point moored). Tal configuração se assemelha dinamicamente à condição de dois navios em tandem na configuração DICAS de amarração. Pois a dinâmica do sistema como um todo é pouco influenciada pela dinâmica no navio FPSO. Com isso, define-se um modelo de um grau de liberdade, que apresenta as mesmas características dinâmicas de um sistema com seis graus.

Para o segundo caso citado neste trabalho, na configuração de amarração Turret do navio FPSO, um segundo grau de liberdade deve ser adicionado ao modelo arquetípico, para obter equivalências dinâmicas entre o modelo completo e o modelo reduzido que pretende-se obter. Tal grau de liberdade representa a dinâmica de outro navio SPM, com características de resposta à ação ambiental diferentes.

No entanto percebe-se a necessidade de se acrescentar outro termo na restauração, equivalente aos momentos gerados pelo vínculo entre os navios, o hawser. Este termo tem por característica gerar um "auto-alinhamento" entre os dois ângulos, proporcional a uma rigidez equivalente desse hawser.

Investigando as funções matemáticas relativas ao hawser no modelo completo, pode-se extrair uma função, que possua as características supra citadas, e que além disso, também representa uma função potencial, mantendo as características do sistema.

Essa função esta apresentada na equação 58.

$$f_{hawser} = Kh \left[ \frac{l_1 \cdot l_2}{2} \cdot \cos(\psi_1) \cdot \sin(\psi_2) - \frac{l_1 \cdot l_2}{2} \cdot \sin(\psi_1) \cdot \cos(\psi_2) \right] \quad 58$$

Onde  $Kh$  representa a rigidez do hawser, ou do "momento auto-alinhante" no modelo reduzido,  $l_1$  e  $l_2$  são as variáveis representativas dos comprimentos dos navios e  $\psi_1$  e  $\psi_2$  são os dois graus de liberdade do novo modelo arquetípico, representando os aproamentos dos dois navios em tandem na configuração Turret.

Assim, o modelo arquetípico para a configuração acima citada fica:

$$\ddot{\psi}_1 + D \cdot \left( -E \cdot \frac{\sqrt{V_c} \cdot [\log Re - 2]^2}{\sigma + \frac{1}{\sigma}} + |\psi| \right) \dot{\psi}_1 + f(\psi_1) + f_{hawser}(\psi_1, \psi_2) = 0$$

$$\ddot{\psi}_2 + D \cdot \left( -E \cdot \frac{\sqrt{V_c} \cdot [\log Re - 2]^2}{\sigma + \frac{1}{\sigma}} + |\psi| \right) \dot{\psi}_2 + f(\psi_2) + f_{hawser}(\psi_1, \psi_2) = 0 \quad 59$$

Vale ressaltar, no entanto, que com a introdução do termo do hawser perdeu-se uma característica do sistema que é a independência do navio aliviador, em termos de pontos de equilíbrio, para com o navio FPSO.

Essa independência pode ser entendida matematicamente através da álgebra utilizada para obtenção do aproamento de equilíbrio para o navio aliviador:

$$Y_t = Y_v(\psi_2) + Y_c(\psi_2) + Y_h(\psi_1, \psi_2) = 0$$

$$M_t = M_v(\psi_2) + M_c(\psi_2) + Y_h(\psi_1, \psi_2) \cdot L_h = 0$$

Somatória das forças de sway e momentos no navio aliviador igual a zero. Da primeira equação obtém-se:

$$Y_h = Y_v + Y_c$$

E finalmente.

$$M_v(\psi_2) + M_c(\psi_2) + [Y_c(\psi_2) + Y_v(\psi_2)]L_h = 0$$

Cuja equação claramente só depende de  $\psi_2$ . Em termos físicos, percebe-se que é a presença do hawser que causa a dependência apenas de  $\psi_2$  nos aproamentos de equilíbrio do navio aliviador. Com a introdução da função do hawser no modelo arquetípico perdeu-se tal característica. No entanto, qualitativamente não houve mudança nos pontos de equilíbrio deste navio devido tal função, como será visto adiante.



### **3.4. Validação**

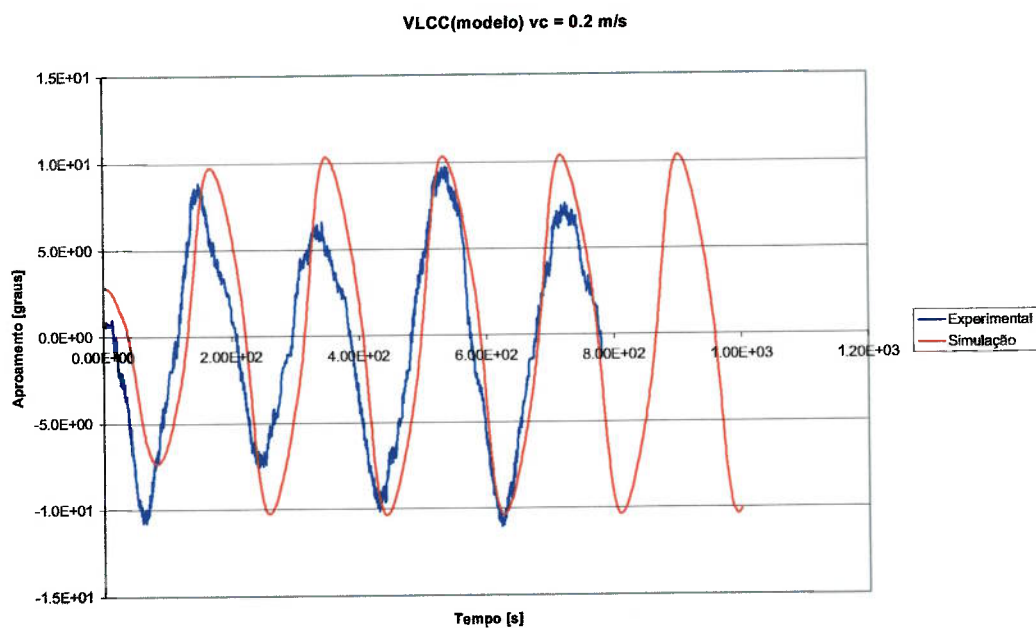
De posse do modelo arquetípico, faz-se necessário a comparação dos resultados obtidos através desse modelo, e de alguns resultados já observados, seja no modelo completo, seja em experimento. Tais comparações podem ser feitas através de séries temporais. No entanto, tal comparação não caracteriza um comportamento global para o sistema, principalmente se tratando de um sistema não linear. Por isso pretende-se, nesse trabalho, fazer uma analogia dos modelos arquetípico e completo do sistema em estudo, através de características que descrevam sua dinâmica. Para tal comparação far-se-á uso de mapas de bifurcação e poços potenciais dos modelos, pois eles fornecem um mapeamento mais global de sua dinâmica, mostrando, por exemplo, a variação dos pontos de equilíbrio a um determinado parâmetro, a robustez de um ponto de equilíbrio, etc. Essas comparações serão realizadas no capítulo de resultados deste trabalho.

No entanto, também é válida a comparação em séries temporais principalmente com dados obtidos de experimento. Para tanto, foram utilizados os resultados dos ensaios realizados por Simos et al. (1998), os quais se caracterizam por um modelo do VLCC, amarrado por um hawser rígido, o que não introduz a dinâmica deste no sistema.

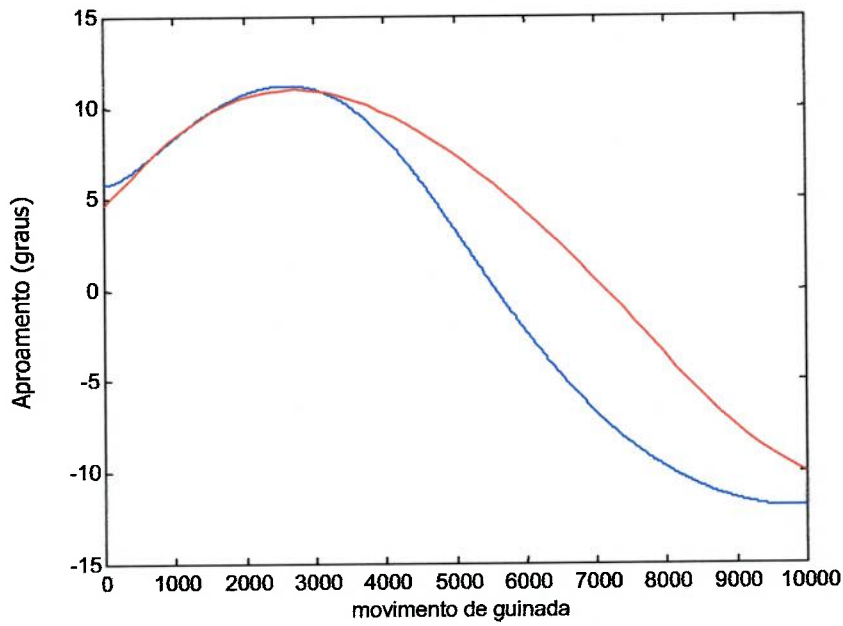
Nas figuras 3.15 e 3.17 pode-se observar os resultados de simulação com o modelo arquetípico e do experimento para duas velocidades de corrente diferentes, e uma determinada condição de carga. Observa-se uma boa

correlação tanto em frequência e, principalmente, na amplitude do ciclo limite, confirmando a escolha de um oscilador de Van der Pol para a representação do fenômeno.

Foi realizada também uma comparação entre simulações com o modelo completo e o modelo arquetípico em estudo. Para isso, foram escolhidas as mesmas condições ambientais dos ensaios experimentais em modelo reduzido, e as embarcações foram simuladas na condição de lastro. Os resultados podem ser vistos na figuras 3.16 e 3.18.



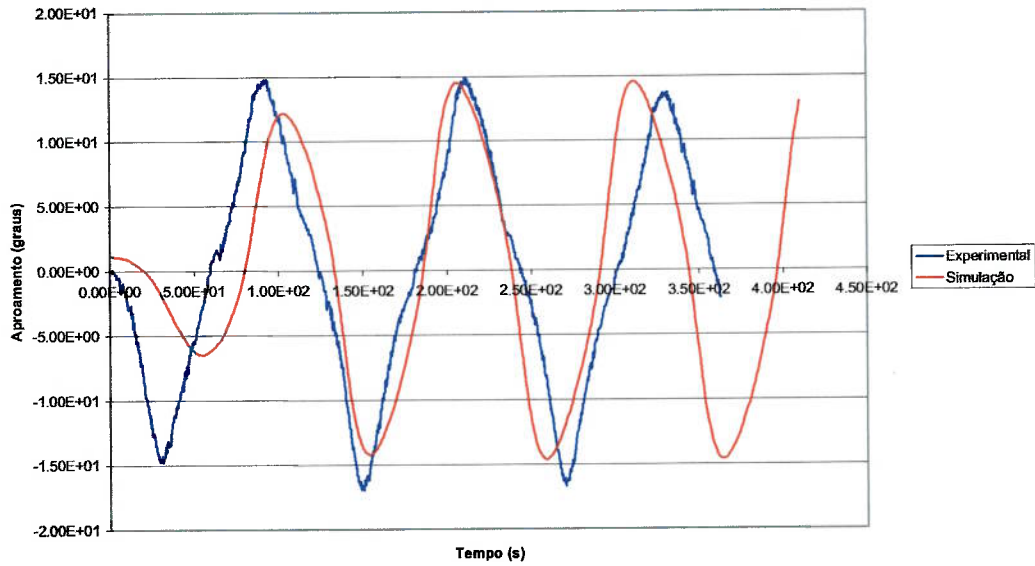
**Figura 3.15 - Comparação entre dados experimentais e simulação com modelo**



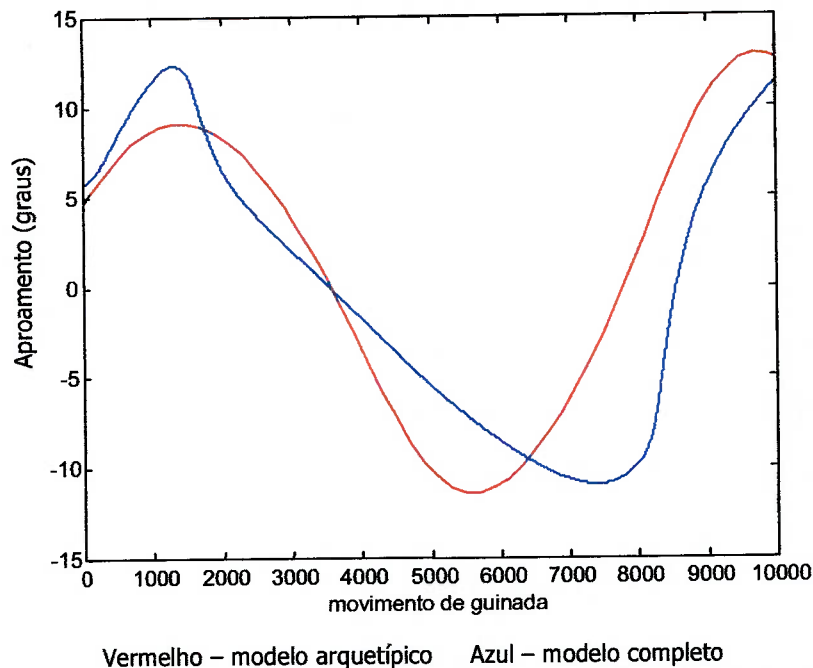
Vermelho – modelo arquetípico Azul – modelo completo

**Figura 3.16 - Comparação entre simulação com modelo completo e arquetípico**

VLCC(modelo)  $v_c = 0.4 \text{ m/s}$



**Figura 3.17 - Comparação entre dados experimentais e simulação com modelo**



**Figura 3.18 - Comparação entre simulação com modelo completo e arquetípico**

Pode-se observar uma boa correlação nas séries temporais apresentadas, tanto quando comparadas com dados experimentais, quanto para os dados de simulação com modelo completo. Esses resultados confirmam a reprodutividade da dinâmica do sistema por parte do modelo arquetípico. Contudo, como foi mencionado, comparações mais aprofundadas entre o modelo completo e o modelo arquetípico ainda serão realizadas neste trabalho.

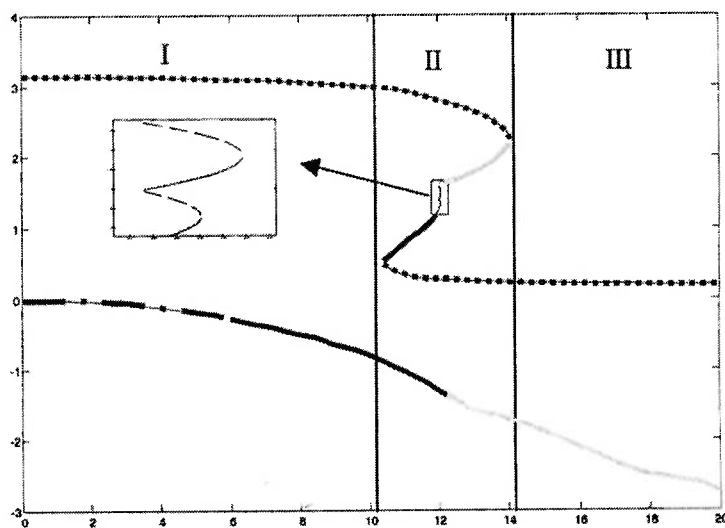
## 4. RESULTADOS

Tendo em vista o modelo arquetípico desenvolvido pretende-se obter resultados comparativos que confirmem a reprodutividade da dinâmica do sistema completo com o modelo reduzido, reprodutividade esta observada no item de validação experimental. Como já mencionado, a simples comparação por séries temporais não implica em uma avaliação correta dos modelos, pois não contempla toda a fenomenologia de sua dinâmica. Por esse motivo, tem-se por objetivo comparar os resultados com o modelo completo através de mapas de bifurcação e diagrama de poços potenciais.

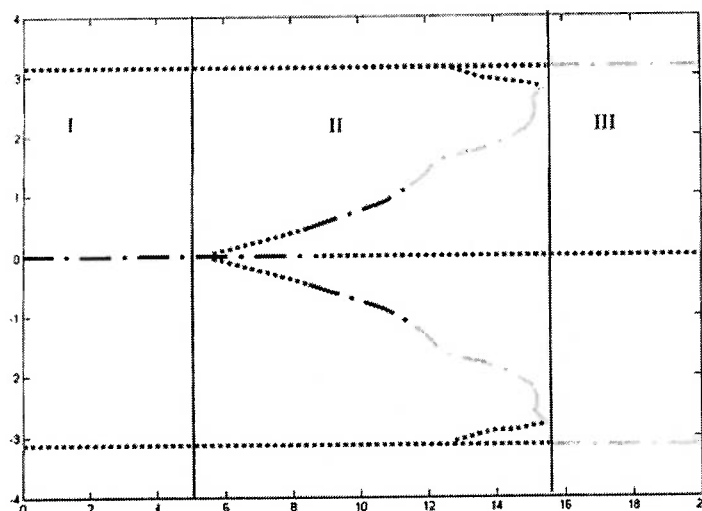
Alguns mapas de bifurcação do modelo completo foram elaborados por Morishita et al (2001), tendo como parâmetro de controle a relação  $\sigma = \frac{V_v}{V_c}$  (relação entre velocidades de vento e corrente). A escolha desse parâmetro tem por finalidade o estudo das possíveis variações nas posições de equilíbrio do sistema (atratores), quando da operação de descarregamento (off-loading), mediante possíveis variações de intensidade de vento e corrente. Essa investigação é de grande importância em termos de engenharia, pois identifica o "surgimento" de posições de equilíbrio indesejáveis, as quais podem representar algum risco prático para a operação, tal como a colisão dos navios. Para obtenção dos mapas de bifurcação foi utilizado o algoritmo de Newton-Raphson com a adição, para teste de convergência, de erro absoluto e relativo.

Em termos de modelo completo, esses mapas foram feitos para o sistema DICAS de amarração, por constituir um sistema mais simples em termos computacionais e assim, tornando o processo de obtenção dos mapas mais viáveis em termos de tempo de processamento. Tal simplicidade está no fato de que os graus de liberdade do navio FPSO são limitados devido à amarração.

Segundo Morishita et al (2001), pode-se observar nas Figuras 4.1 e 4.2 os mapas de bifurcação dos pontos de equilíbrio do sistema para duas situações distintas: na Figura 4.1 a direção da corrente é de  $\psi_c = 180^\circ$  e a direção do vento é de  $\psi_v = 10^\circ$  e na Figura 4.2,  $\psi_c = 180^\circ$  e  $\psi_v = 0^\circ$ .



**Figura 4.1 - Diagrama de bifurcação para modelo completo ( $\psi_v = 10^\circ$  e  $\psi_c = 180^\circ$ )**



**Figura 4.2 - Diagrama de bifurcação para modelo completo ( $\psi_c = 180^\circ$  e  $\psi_v = 0^\circ$ )**

De acordo com os autores, pode-se identificar pela Figura 4.1 a presença de três regiões distintas. Região I, onde há apenas dois pontos de equilíbrio, sendo um deles instável ( $\psi > 0$ ) e outro estável ( $\psi < 0$ ) representando o equilíbrio segundo a direção da resultante das forças de vento e corrente. Na região II nota-se o surgimento (bifurcações tipo fold) de mais pontos de equilíbrio, sendo alguns deles estáveis, porém, do ponto de vista de engenharia, em posição indesejável. Na mesma região II, o ponto de equilíbrio estável ( $\psi < 0$ ) continua com sua estabilidade.

A região III possui qualitativamente as mesmas características da região I, apenas com seus atratores em valores diferentes.

Na Figura 4.2, para  $\psi_v = 0^\circ$ , nota-se também a presença de três regiões. As regiões I e III mostram-se semelhantes em relação ao número de pontos de equilíbrio. No entanto na região I, há a presença de um ciclo limite estável para

$\psi = 0$  e dois outros pontos de equilíbrio instáveis, diferentemente da região III, com dois pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis e um instável.

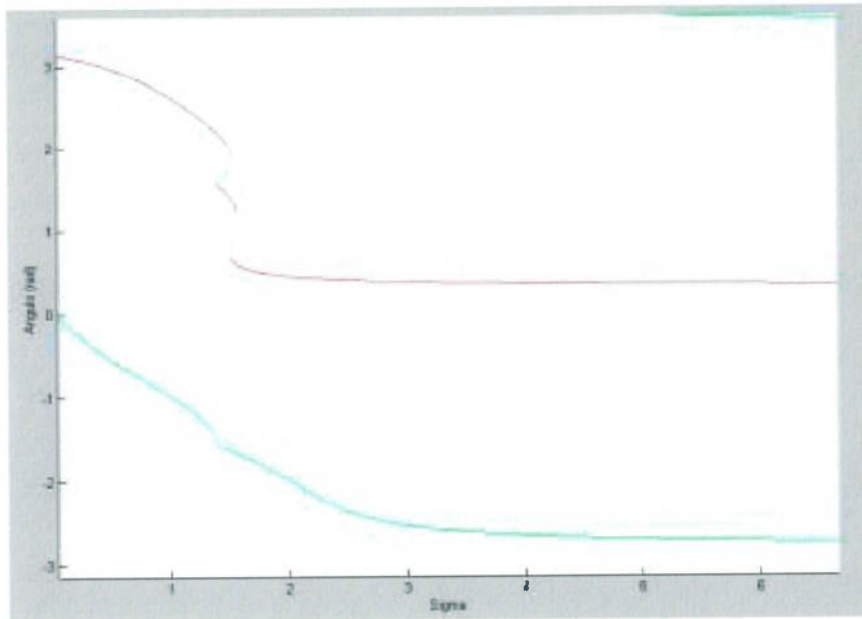
Quando as forças de vento e corrente se equilibram ( $\sigma \cong 2.0$ ), ocorre uma bifurcação, pela qual o ciclo limite muda para dois pontos de equilíbrio estáveis. Ainda na região II, aumentando-se  $\sigma$ , consegue-se obter outros pontos de equilíbrio que surgem através de bifurcações do tipo fold e, dessa forma, ora estáveis, ora instáveis. Aumentando-se  $\sigma$ , entra-se na região III.

Nas Figuras 4.3 e 4.4 pode-se observar os mapas de bifurcação para o modelo arquetípico, considerando o sistema DICAS de amarração. Nota-se as mesmas regiões apresentadas nos mapas de bifurcação do modelo completo. Na região II o número de pontos de equilíbrio não é o mesmo, porém, qualitativamente, obteve-se o mesmo comportamento, inclusive os mesmos tipos de bifurcação folds.

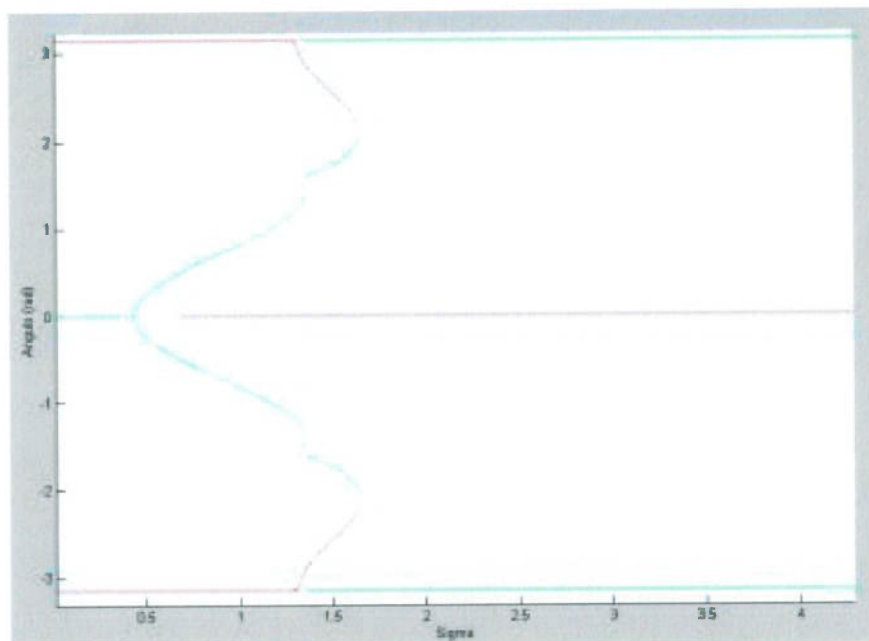
Na Figura 4.4, como será mostrado nos resultados de bacias de atração a seguir, também se nota uma grande similaridade. A presença de um ciclo limite na região I, uma bifurcação tornando esse ciclo limite em dois pontos de equilíbrio estáveis na região II, e os três pontos de equilíbrio na região III.

Nos mapas de bifurcação apresentados os pontos em cor verde representam condições de equilíbrio estável, sejam elas relativas a pontos hiperbólicos, não-hiperbólicos ou ciclos limite. Em vermelho estão representados os pontos de equilíbrio instáveis.





**Figura 4.3 - Diagrama de bifurcação para o sistema DICAS ( $\psi_v = 10^\circ$ )**

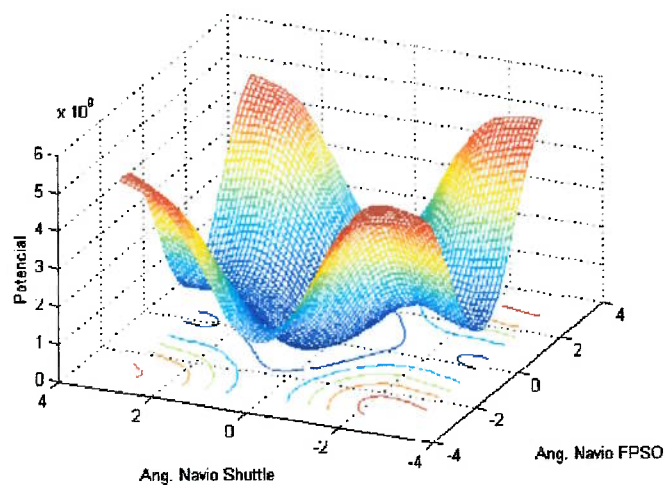


**Figura 4.4 - Diagrama de bifurcação para o sistema DICAS ( $\psi_v = 0^\circ$ )**

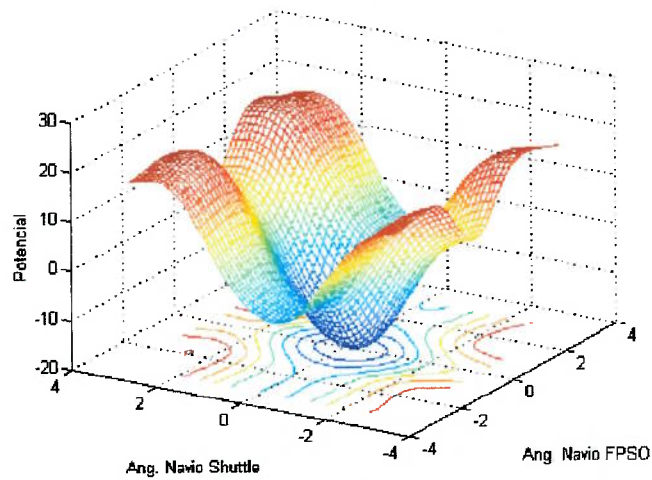
Para o sistema em Turret, devido a dificuldade de processamento matemático para o modelo completo, não se tem mapas de bifurcação do

modelo. No entanto, pode-se compará-lo com o modelo arquetípico através de poços potenciais.

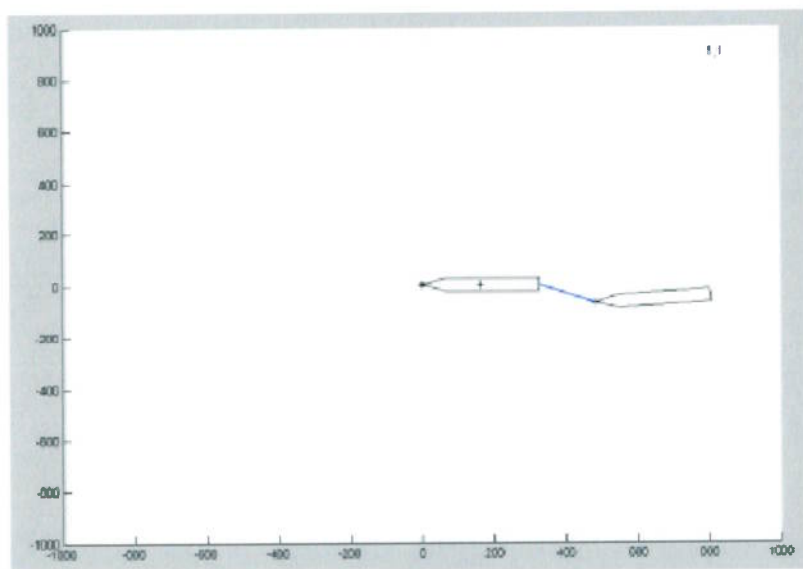
Nas Figuras 4.5 e 4.6 tem-se os poços potenciais para os modelos completo e arquetípico, respectivamente, para o Turret posicionado na proa do navio FPSO, como pode ser visto na Figura 4.7. Tais poços foram obtidos para ângulos de corrente e vento de  $\psi_c = 180^\circ$  e  $\psi_v = 90^\circ$ , respectivamente. Vale ressaltar que a maior diferença que o modelo arquetípico e o modelo completo apresentam é para ângulos de vento de través, visto que para tais ângulos, os coeficientes de vento (medidos experimentalmente) diferem da aproximação feita, pela qual os coeficientes variam segundo uma senóide.



**Figura 4.5 - Poço potencial para modelo completo**



**Figura 4.6 - Poço potencial para o modelo arquetípico**

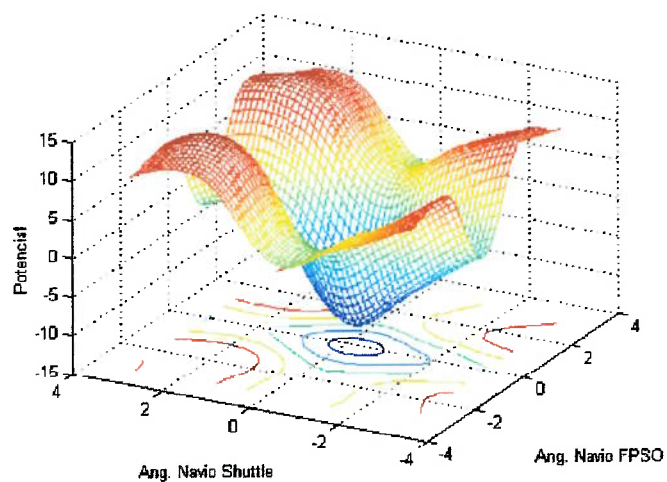


**Figura 4.7 - Posicionamento com Turret na ponta do navio FPSO**

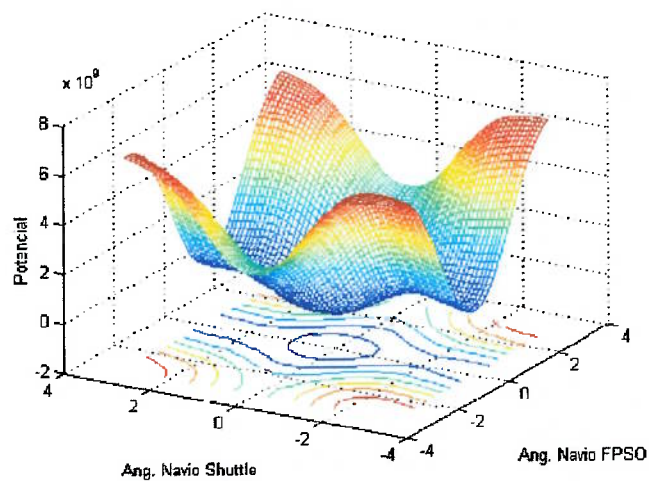
De maneira geral ambos os poços possuem um mesmo comportamento qualitativo. Ambos apresentam uma região de mínima energia, em torno do ponto  $(0,0)$ , representando um ponto de equilíbrio estável. Para as posições extremas do potencial  $(-\pi,-\pi)$ ,  $(\pi,\pi)$ ,  $(-\pi,\pi)$  e  $(\pi,-\pi)$  tem-se regiões de máxima

energia, as quais decaem tanto no sentido da variação do ângulo do navio FPSO, como para o ângulo do navio aliviador (navio shuttle). Para o ângulo do navio aliviador ( $\psi_2$ ) igual a zero, tem-se para ângulos do navio FPSO ( $\psi_1$ ) próximos à  $-\pi$  e  $\pi$ , pontos de sela, representando uma instabilidade local. De outra forma, observando as linhas equipotenciais, apresentadas no plano de energia zero do gráfico, pode-se observar tendências semelhantes de variação de energia.

Nas Figuras 4.8 e 4.9 estão apresentados os poços potenciais para os modelos completo e arquetípico, respectivamente, para o turrete posicionado à meia nau do navio FPSO, adotando-se as mesmas condições ambientais.



**Figura 4.8 - Turrete posicionado à meia nau - Modelo Arquetípico**



**Figura 4.9 - Turret posicionado à meia nau - Modelo Completo**

Novamente, as mesmas observações feitas para os gráficos anteriores podem ser feitas neste caso: ponto de mínimo na região da origem (0,0) e mesmas regiões de crescimento e decrescimento da função potencial. Uma característica a se observar são as linhas equipotenciais no plano de energia zero do poço. Observa-se, em ambos os modelos, a mudança de orientação das linhas em relação aos diagramas anteriores. Para o Turret na proa do navio FPSO, as linhas estavam orientadas no sentido de variação do ângulo navio aliviador, diferentemente dos gráficos das figuras 4.8 e 4.9. Isso pode ser explicado devido à contribuição de inércia do navio FPSO em relação ao sistema. Com o turret posicionado à proa deste, sua inércia rotativa em relação ao C.G. é maior quando comparada ao turret posicionado à meia nau (posição próxima ao C.G.). Com o turret a meia nau, as linhas tomam uma orientação no sentido da variação do ângulo do navio FPSO, mostrando que a maior inércia do sistema relaciona-se com a inércia do navio aliviador, a qual é maior

proporcionalmente quando comparada com a do navio FPSO.

Dessa forma, mesmo para o sistema turrete de amarração, o qual apresenta-se mais complexo devido ao aumento do número de graus de liberdade, o modelo arquetípico representa bem o sistema como um todo. Para o sistema DICAS, percebe-se facilmente essa correlação através da semelhança dos diagramas de bifurcação apresentados. Pode-se notar com isso que o modelo arquetípico representa de maneira adequada a dinâmica qualitativa do sistema em estudo, e por isso, pode ser usado para obtenção de resultados objetivando analogias com a dinâmica do modelo completo.

#### **4.1 Exploração do modelo arquetípico**

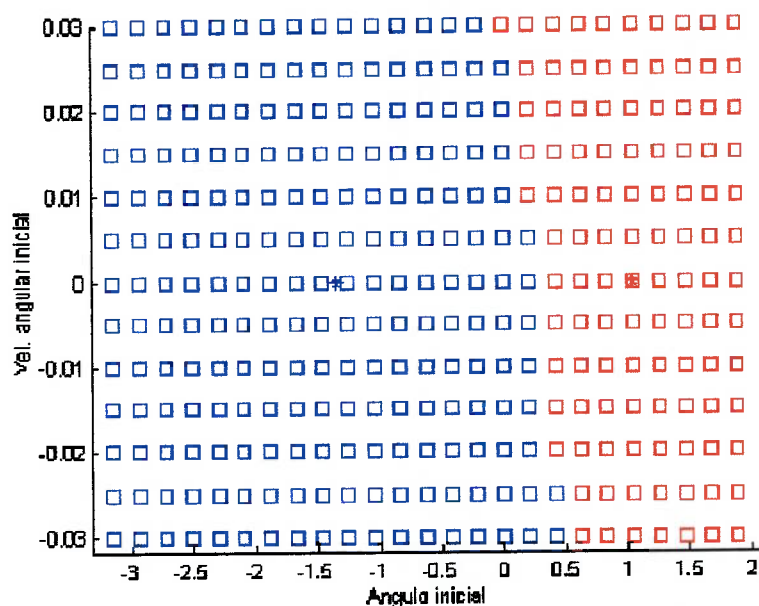
##### **4.1.1 Sistema de amarração DICAS**

Um dos principais estudos nos quais objetiva-se utilizar o modelo arquetípico é a obtenção das bacias de atração dos pontos de equilíbrio. Com esses diagramas, pode-se conhecer o domínio de atração de cada ponto de atrator, e dessa forma ter conhecimento de "quão forte" é um atrator.

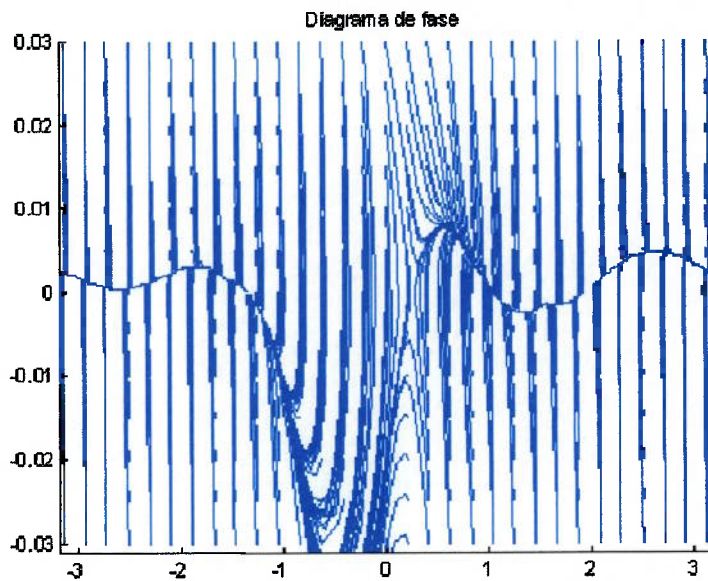
Nas figuras 4.10 e 4.11 estão apresentadas a bacia de atração e o diagrama de fase, respectivamente, para  $\sigma = 1.3$  na condição de  $\psi_v = 10^\circ$  e  $\psi_c = 180^\circ$  (diagrama de bifurcação na Figura 4.3). Essa condição mostrou-se peculiar devido a equiparação das forças de vento e corrente para  $\sigma$  ao redor de 1.0. Para identificação da região de atração um algoritmo foi elaborado, o qual será detalhado mais adiante. Como representação, foi adotado que os

pontos de equilíbrio estáveis fossem representados por um asterisco (\*) e ciclos limite por um círculo (o). Os demais pontos representam pontos no espaço de estado pertencentes a região de atração de determinado atrator, identificados por cores.

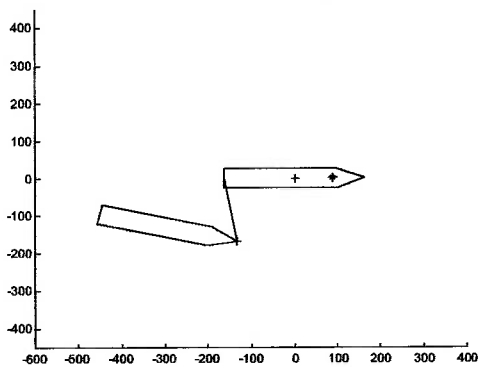
Pode ser visto na bacia de atração que ambos pontos de equilíbrio estáveis possuem uma região de atração considerável, sendo que para o atrator  $\psi_1 = 1.3 \text{ rad}$  a bacia apresentou-se menor em comparação com o segundo atrator  $\psi_2 = -1.3 \text{ rad}$ . Em termos de engenharia, o primeiro atrator representa uma posição indesejável, visto que o navio FPSO está ancorado com aproamento relativo de zero radianos, e um aproamento positivo do navio aliviador representaria uma maior aproximação dos dois navios. (Figura 4.12)



**Figura 4.10 - Bacia de atração para sistema DICAS ( $\sigma = 1.3$ ,  $\psi_v = 10^\circ$  e  $\psi_c = 180^\circ$ )**



**Figura 4.11 - Diagrama de fase para sistema DICAS ( $\sigma = 1.3$ ,  $\psi_v = 10^\circ$  e  $\psi_c = 180^\circ$  )**



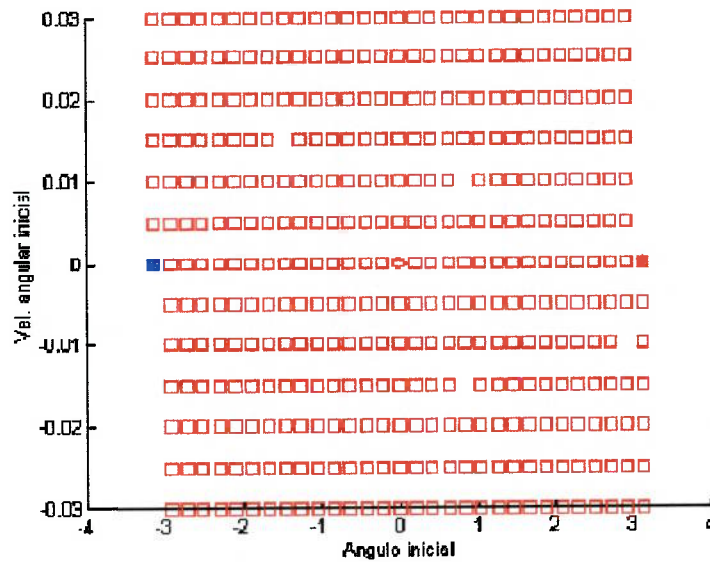
**Figura 4.12 - Sistema de amarração DICAS**

O diagrama de fase apenas confirma os resultados obtidos através da bacia de atração gerada.

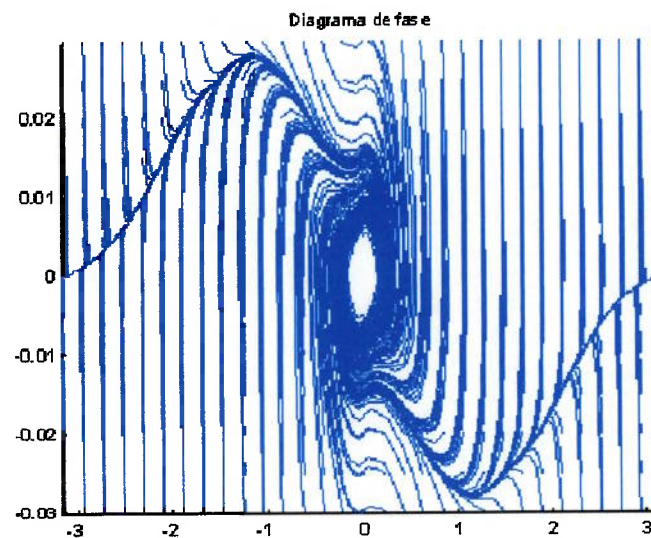
Nas Figuras 4.13 e 4.14 estão apresentadas as bacias de atração e o diagrama de fase para o caso de  $\psi_v = 0^\circ$  e  $\psi_c = 180^\circ$  para  $\sigma = 0.3$ . Pode-se observar a presença de um ciclo limite (identificado pelo símbolo de um círculo



em seu centro), com região de atração sendo definido por todo o espaço dos parâmetros analisados.

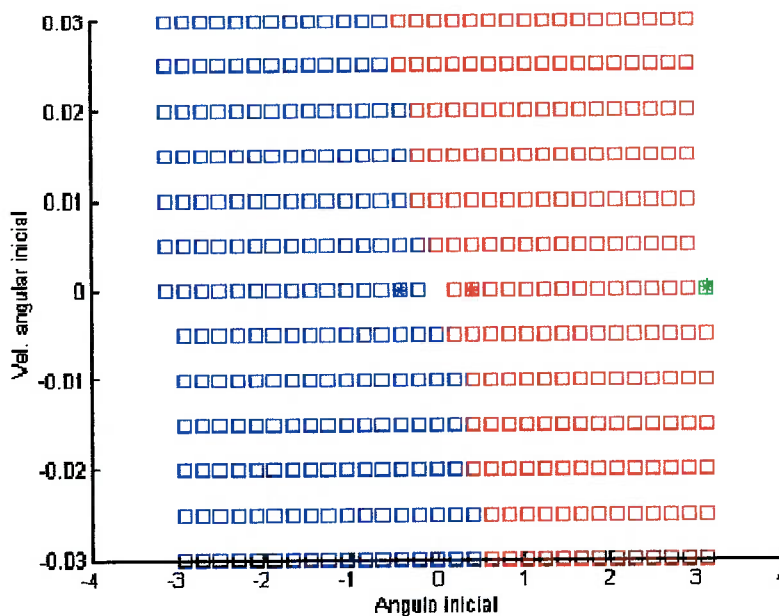


**Figura 4.13 - Bacia de atração para sistema DICAS ( $\sigma = 0.3$ ,  $\psi_v = 0^0$  e  $\psi_c = 180^0$  )**

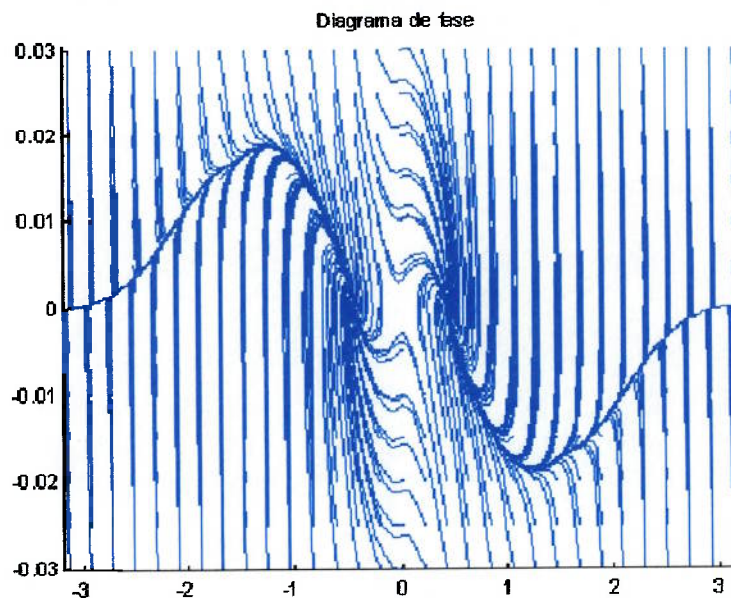


**Figura 4.14 - Diagrama de fase para sistema DICAS ( $\sigma = 0.3$ ,  $\psi_v = 0^0$  e  $\psi_c = 180^0$  )**

Com o aumento do valor de sigma, ou melhor, a medida que a velocidade do vento se intensifica, ocorre um ponto de bifurcação (Figura 4.4), e o sistema passa a possuir 2 pontos de equilíbrio, os quais inicialmente se caracterizam por dois ciclos limite, passando posteriormente a pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis. Pode-se notar através das Figuras 4.15 e 4.16 a bacias de atração e o diagrama de fase para o caso comentado ( $\sigma = 1.3$ ). Observa-se que a região do espaço de parâmetros se divide de forma uniforme entre os dois atratores, pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis. Vale ressaltar, no entanto, que tal condição ambiental se mostra, na prática, impraticável, pois tais características ocorrem apenas, numericamente, na situação de oposição entre as forças de vento e corrente.

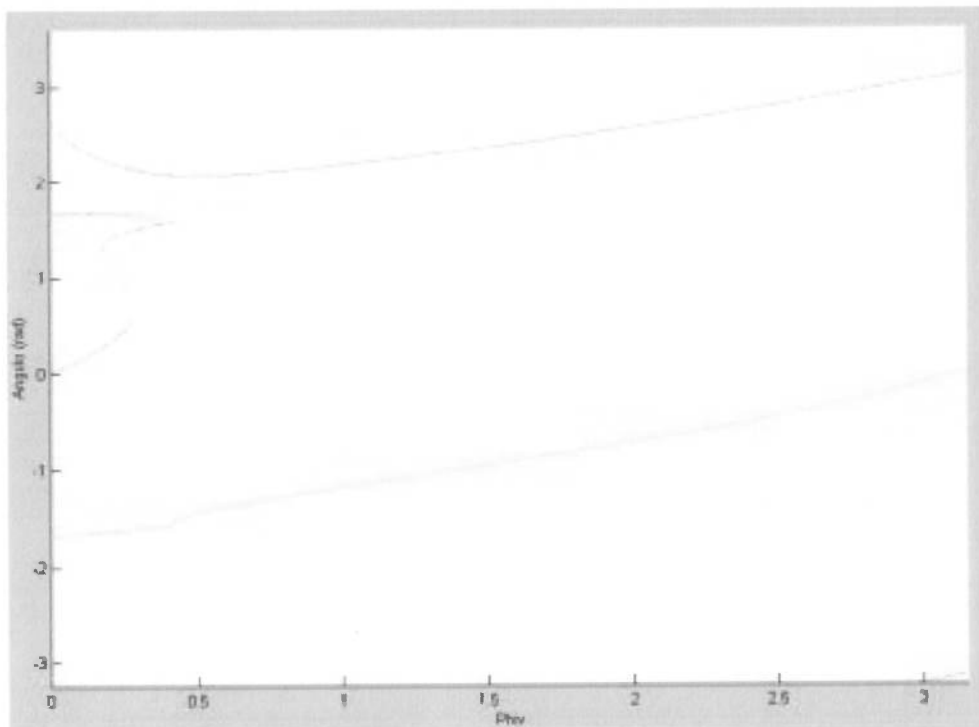


**Figura 4.15 - Bacia de atração para sistema DICAS ( $\sigma = 1.3$ ,  $\psi_v = 0^0$  e  $\psi_c = 180^0$  )**



**Figura 4.16 - Diagrama de fase para sistema DICAS ( $\sigma = 1.3$ ,  $\psi_v = 0^0$  e  $\psi_c = 180^0$  )**

Com os resultados obtidos, pode-se observar que as bifurcações ocorrem quando da equiparação das forças ambientais. Na Figura 4.17 por exemplo, está apresentado um diagrama de bifurcação também para o sistema DICAS de amarração, para uma dada relação de velocidades ( $\sigma$ ) e como parâmetro de controle o ângulo do vento. O ângulo da corrente foi fixado em  $\pi$  e como resultado obteve-se um cenário mais complexo em termos de dinâmica para  $\psi_v < 0.5 \text{ rad}$ , ratificando o surgimento de bifurcações quando da equiparação das forças ambientais, já que o ângulo de incidência da corrente é de  $\pi \text{ rad}$  (180 graus).



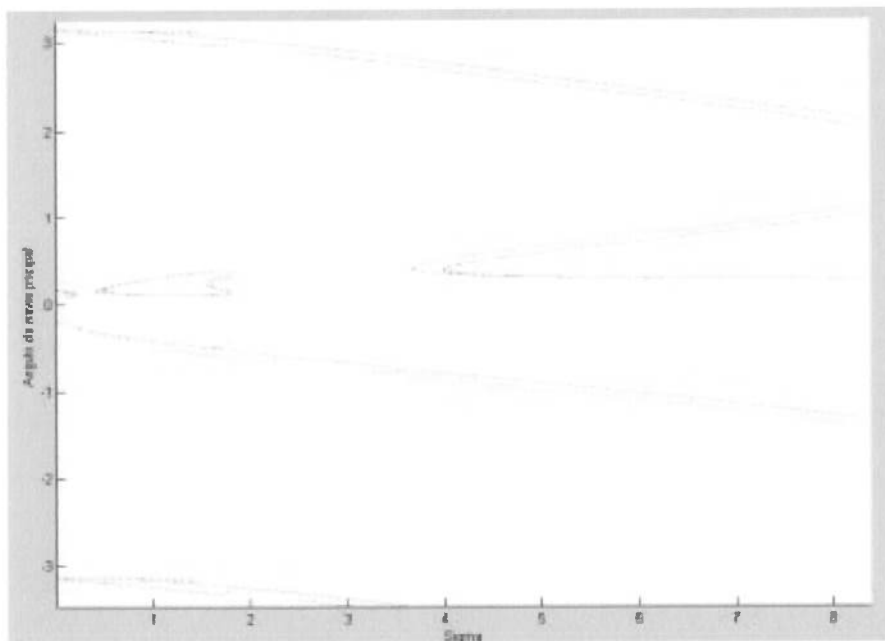
**Figura 4.17 - Diagrama de bifurcação segundo variação de ângulo de vento ( $\sigma = 2.0$ )**

#### 4.1.2 Sistema de amarração Turret

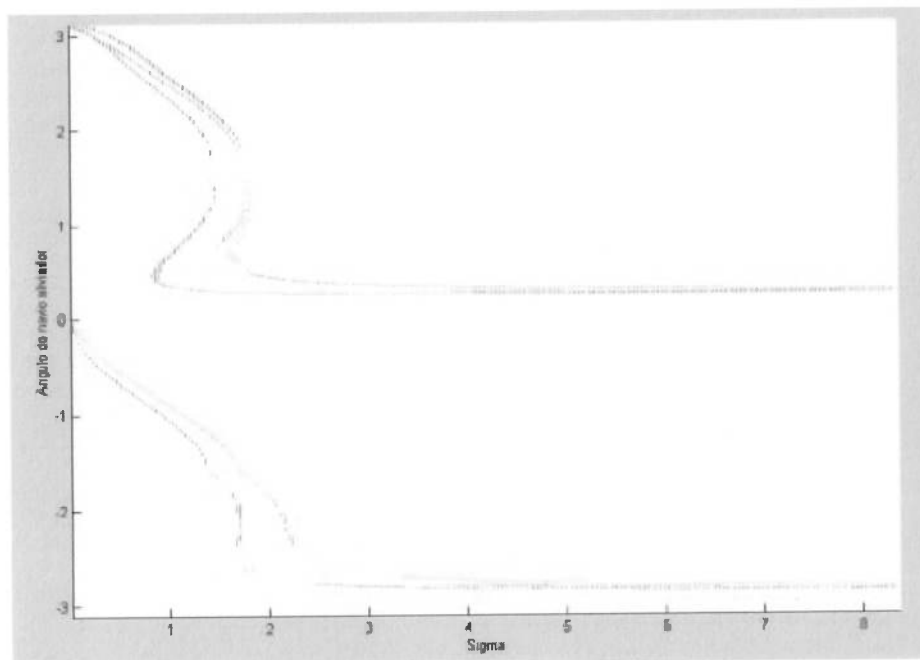
Para o sistema de amarração em Turret, tem-se um cenário um pouco mais complexo devido ao aumento dos graus de liberdade. Nesse sistema ambos os navios podem mudar seu aproamento com relação às condições ambientais o que, de certa forma, reduz o risco de colisão pois ambos os navios se acomodam em posições naturalmente afastadas. No entanto os navios podem se comportar de maneira distinta, ou seja, com tempos de resposta diferentes, e dessa forma possuem respostas à excitações diferentemente um do outro o que pode provocar proximidade e com isso risco de colisão em regimes transitórios de resposta. Em situação de regime permanente, pode

haver pontos de equilíbrio distintos para os navios, o que ocasionaria, novamente, movimentos excessivos entre os navios. Do ponto de vista de engenharia, tal movimentação é uma característica ruim para o sistema, pois induz grandes esforços nos sistema de conexão entre os navios.

Como ponto de partida para a exploração do modelo arquetípico foi construído um mapa de bifurcação dos pontos de equilíbrio, para uma condição com o Turret posicionado na ponta do navio FPSO, ângulo de vento em torno de  $\frac{\pi}{4}$ , ângulo de corrente a  $\pi$  e condições medianas de calados (carregamento) para ambos navios. Pode-se observar nas Figuras 4.18 e 4.19 os mapas de bifurcação dos ângulos de equilíbrio para os navios FPSO e aliviador, respectivamente, e como parâmetro de controle, tem-se a relação de velocidades  $\sigma$ .



**Figura 4.18 - Mapas de bifurcação para o navio FPSO ( $\psi_v = \frac{\pi}{4}$  e  $\psi_c = \pi$ )**



**Figura 4.19 - Mapas de bifurcação para o navio aliviador ( $\psi_v = \frac{\pi}{4}$  e  $\psi_o = \pi$ )**

Nota-se grande semelhança do mapa de bifurcação do navio aliviador, quando comparado ao mesmo navio aliviador, porém com o sistema DICAS de amarração para o sistema. No entanto, para o navio FPSO, nota-se um cenário diferente. Para  $\sigma > 4$  tem-se a presença de outro ponto de equilíbrio ( $\psi_1 > 0$ ). Esses dois pontos de equilíbrio mencionados “disputam” o equilíbrio do sistema, com diferentes áreas de atração, como pode ser vistas nas Figuras 4.20 a 4.23, as quais representam as bacias de atração e diagramas de fase para  $\sigma = 4.0$  e  $\sigma = 6.0$ , respectivamente. A região de atração do ponto de equilíbrio  $\psi_1 > 0$  para  $\sigma$  em torno de 4.0 é pequena quando comparada a do outro ponto de equilíbrio. A medida que a velocidade do vento é aumentada, aumentando sigma, sua região vai aumentando, dividindo espaço na região de atração com

o outro ponto.

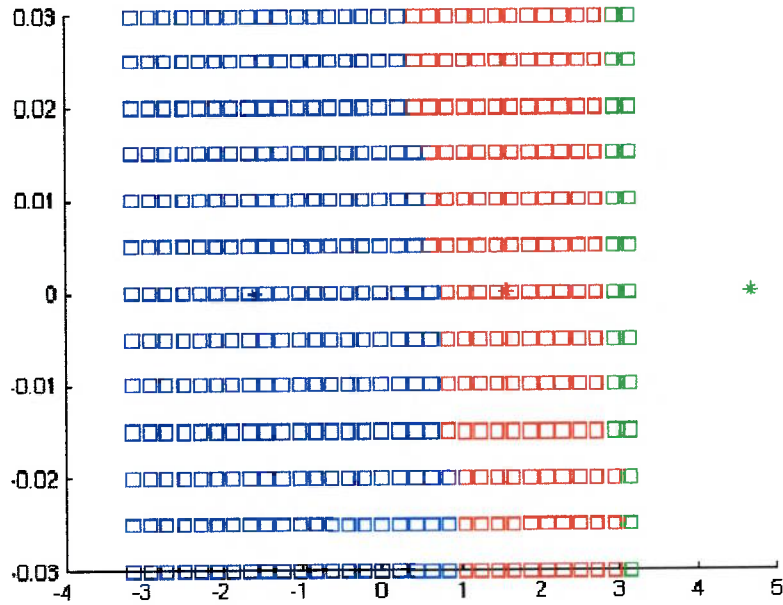


Figura 4.20 - Bacia de atração para sistema Turret ( $\sigma = 4.0$ ,  $\psi_v = \frac{\pi}{4}$  e  $\psi_c = \pi$ )

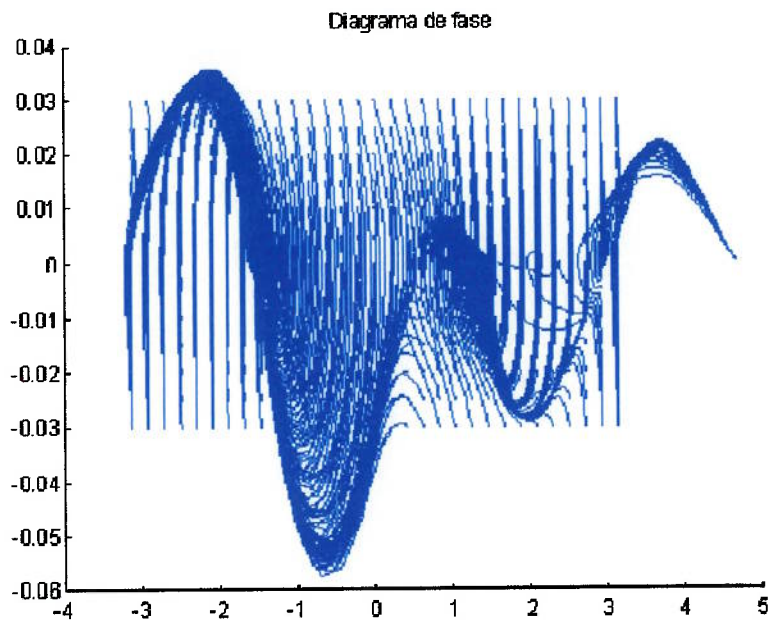


Figura 4.21 - Diagrama de fase para sistema Turret ( $\sigma = 4.0$ ,  $\psi_v = \frac{\pi}{4}$  e  $\psi_c = \pi$ )

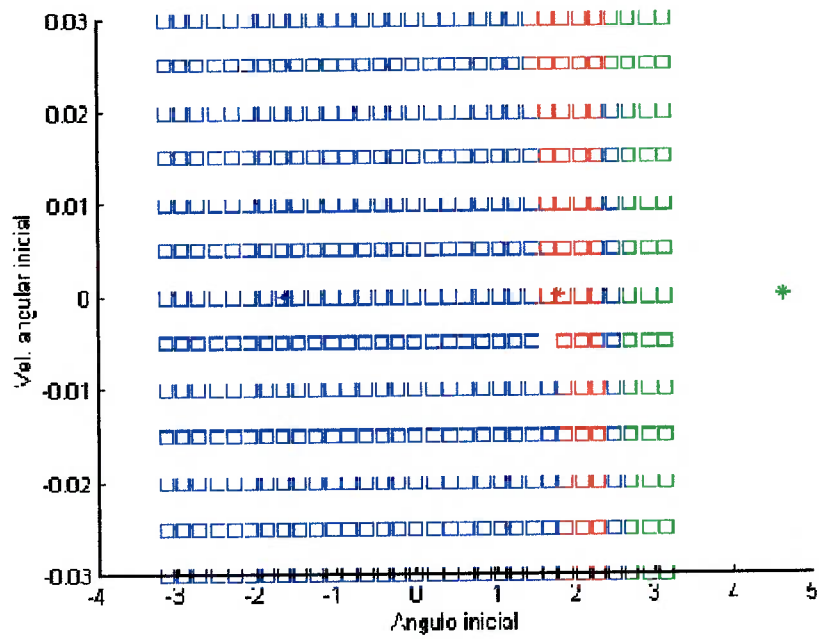


Figura 4.22 - Bacia de atração para sistema Turret ( $\sigma = 6.0$ ,  $\psi_v = \frac{\pi}{4}$  e  $\psi_o = \pi$ )

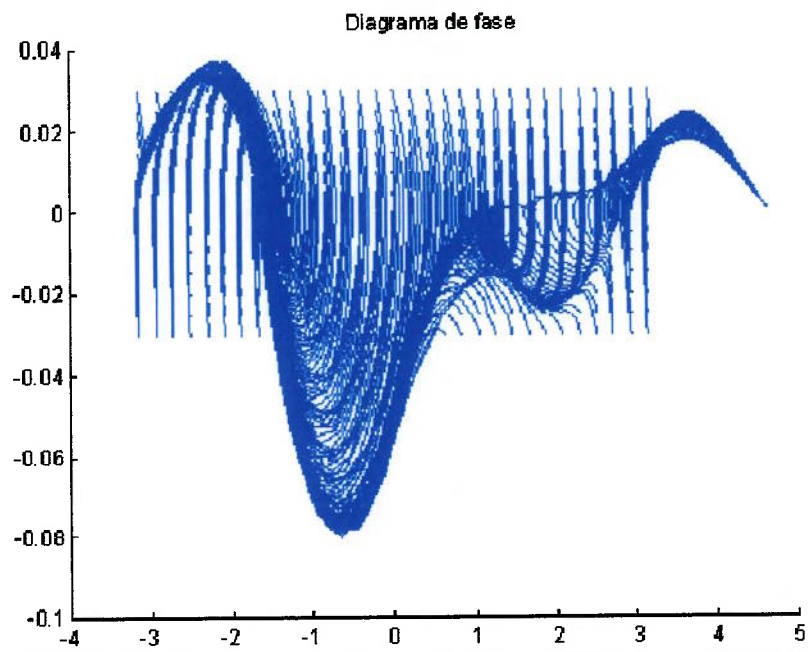


Figura 4.23 - Diagrama de fase para sistema Turret ( $\sigma = 6.0$ ,  $\psi_v = \frac{\pi}{4}$  e  $\psi_o = \pi$ )



Nota-se pelos mapas de bifurcação a presença de um outro ponto de equilíbrio estável (representado em verde no diagrama) também resultante de um fold, em torno de  $\sigma = 1.8$ . No entanto, o que se verifica através de sua bacia de atração é que sua região de atração não se manifesta, sendo considerado assim um atrator de pouca relevância prática.

O número de pontos de equilíbrio apresenta-se maior que o sistema DICAS de amarração, contemplando a maior complexidade do sistema Turret.

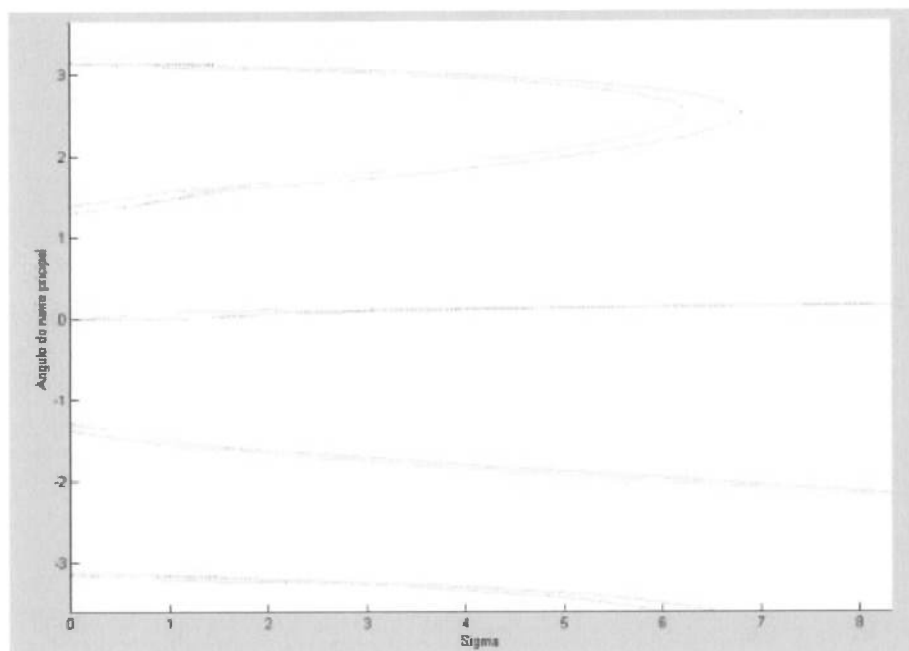
Uma característica do sistema Turret é sua dependência para com a posição de fixação do Turret. De acordo com sua posição, o navio FPSO tem uma inércia relativa ao ponto de rotação diferente, alterando assim a dinâmica do sistema como um todo.

Nas Figuras 4.24 e 4.25 estão apresentados os diagramas de bifurcação para o sistema Turret, com as mesmas características do sistema anteriormente discutido, porém com o Turret localizado à meia nau do navio FPSO. Como pode-se observar nos diagramas, o número de pontos equilíbrio, sejam eles estáveis ou instáveis, é maior que no caso anterior. O próprio algoritmo utilizado, usando a mesma precisão numérica do caso anterior, encontrou pontos de equilíbrio muito próximos uns dos outros, o que fisicamente corresponderia apenas um ponto. Tal característica demonstra mudança no sistema.

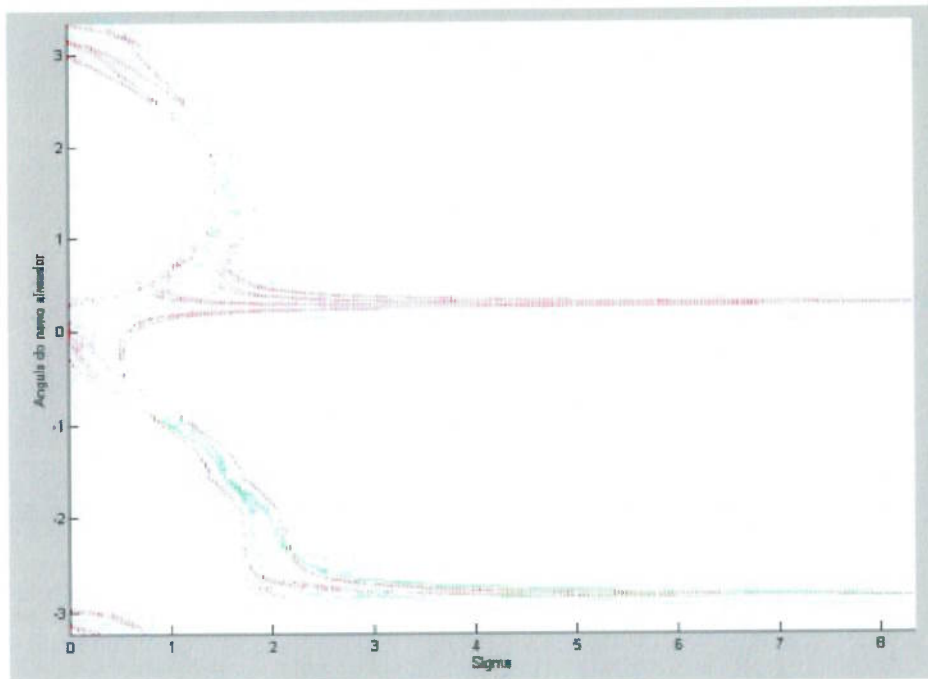
Com o Turret a meia nau, o equilíbrio com respeito ao navio FPSO passa a ser "indiferente", ou seja, em termos de poços potenciais, seu poço é mais "achatado", possuindo menor variação de energia, e assim, menor força de

atração. Percebe-se pela figura 4.50 a presença de dois pontos de equilíbrio para o navio FPSO até valores de sigma em torno de 6.0, quando então apenas um atrator permanece mediante a preponderância das forças de vento. O detalhe desse diagrama é que os pontos de equilíbrio para valores de sigma próximos a zero, ou seja, na ausência de vento, são valores em torno de 1.3 rad e  $-1.3$  rad. Tais variações dos pontos de equilíbrio são também verificadas com o modelo completo através de simulação.

Apesar da corrente estar alinhada a  $\pi$ , o navio FPSO não fica em equilíbrio alinhado a corrente, devido ao novo posicionamento do Turret. Já em relação ao navio aliviador, o comportamento qualitativo do diagrama permanece inalterado, apenas com maior número de pontos de equilíbrio instável.



**Figura 4.24 - Mapas de bifurcação para o navio FPSO ( $\psi_v = \frac{\pi}{4}$  e  $\psi_c = \pi$ )**



**Figura 4.25 - Mapas de bifurcação para o navio aliviador ( $\psi_v = \frac{\pi}{4}$  e  $\psi_c = \pi$ )**

Em termos de engenharia tal sistema apresenta-se mais susceptível à mudanças, pois para o navio FPSO, dois atratores coexistem por uma extensa região do diagrama de bifurcação, tomando como parâmetro as velocidades dos agentes ambientais. Assim movimentações induzidas no navio FPSO podem provocar a atração de um ou outro atrator.

Apesar da maior complexidade do sistema, nota-se qualitativamente a presença de folds nas bifurcações constatadas, principalmente em relação ao navio FPSO. O que significa, qualitativamente, que a dinâmica fundamental do sistema não se altera substancialmente.

Com essa dependência em relação à posição do Turret, um diagrama de bifurcação foi construído tendo como parâmetro de controle a posição relativa

do Turret no navio FPSO. Esse parâmetro, denominado de  $\partial$ , foi variado do valor zero (Turret à meia nau) até 1.0 (Turret na ponta do navio). O diagrama pode ser visto nas Figuras 4.26 e 4.27. O que pode ser observado é que a medida que se posiciona o Turret mais para a meia nau do navio FPSO ( $\partial > 0$ ), o segundo ponto de equilíbrio tende a desaparecer. Em termos de bacia de atração, vistas nas Figuras 4.28 e 4.29, para  $\partial = 0.8$  e  $\partial = 1.0$ , respectivamente, pode-se observar que o ponto de equilíbrio  $\psi > 0$  possui uma região de atração tão menor quanto maior o valor de  $\partial$ . Em termos de projeto, o mapa de bifurcação mostra a partir de qual posição do navio FPSO é interessante posicionar o Turret a partir do qual o sistema possuirá apenas um ponto de equilíbrio para uma dada condição ambiental, caracterizando-se assim por um sistema mais robusto.

Outra condição interessante de se analisar a influência do posicionamento do Turret é com determinada corrente e ausência de vento. Nessa condição tem-se a presença da bifurcação de Hopf. Para o Turret posicionado a extrema proa do navio FPSO, tem-se a condição de ciclo limite estável. A medida que o Turret é posicionado mais a meia nau da embarcação, vê-se o surgimento de dois pontos de equilíbrio, também estáveis, com aproamentos não coincidentes com a direção da corrente. O diagrama de bifurcação para a condição citada pode ser visto nas Figuras 4.30 e 4.31.

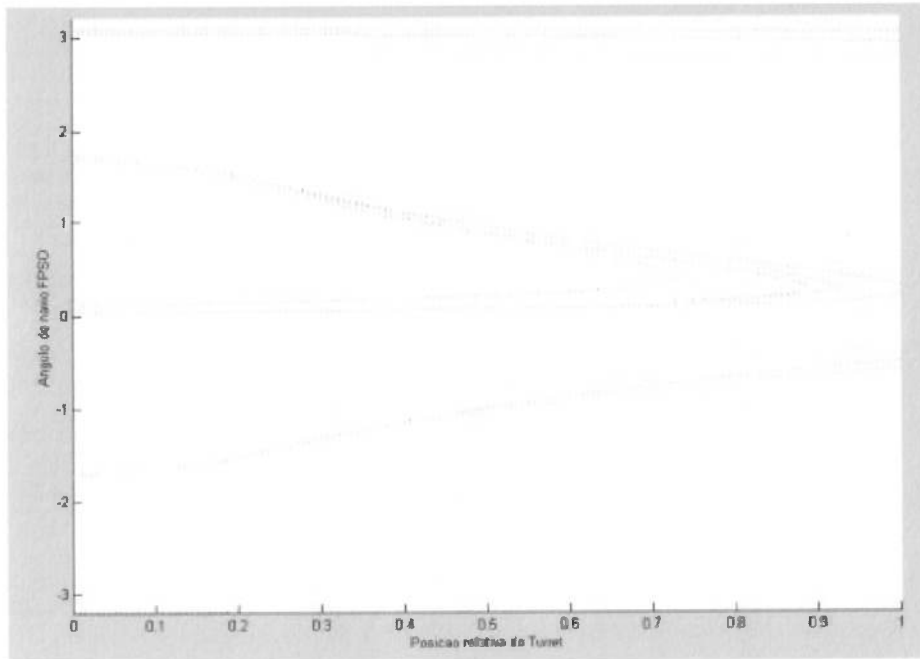


Figura 4.26 - Mapas de bifurcação para o navio FPSO ( $\psi_v = \frac{\pi}{4}$  e  $\psi_c = \pi$ )

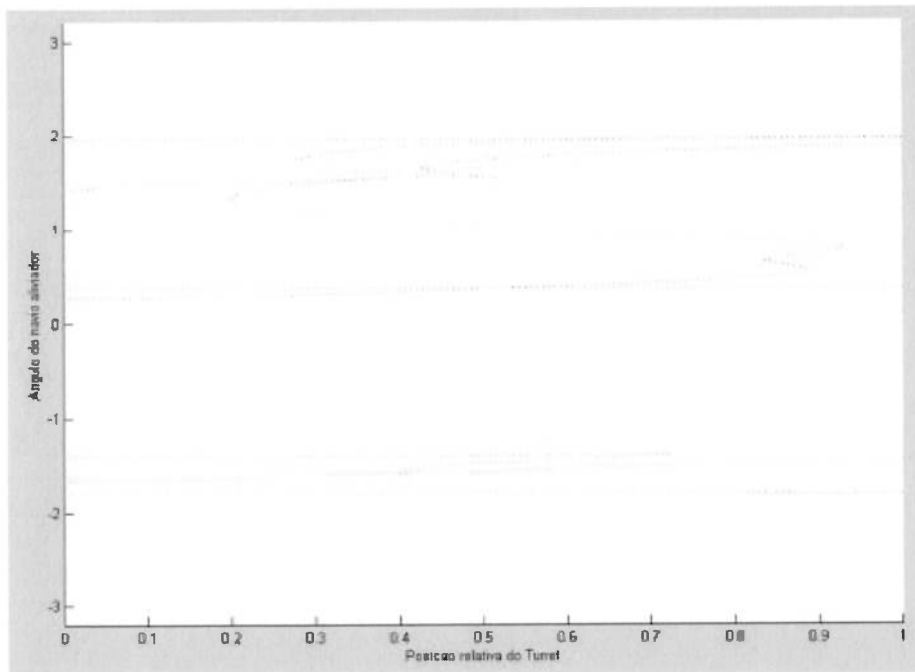


Figura 4.27 - Mapas de bifurcação para o navio aliviador ( $\psi_v = \frac{\pi}{4}$  e  $\psi_c = \pi$ )

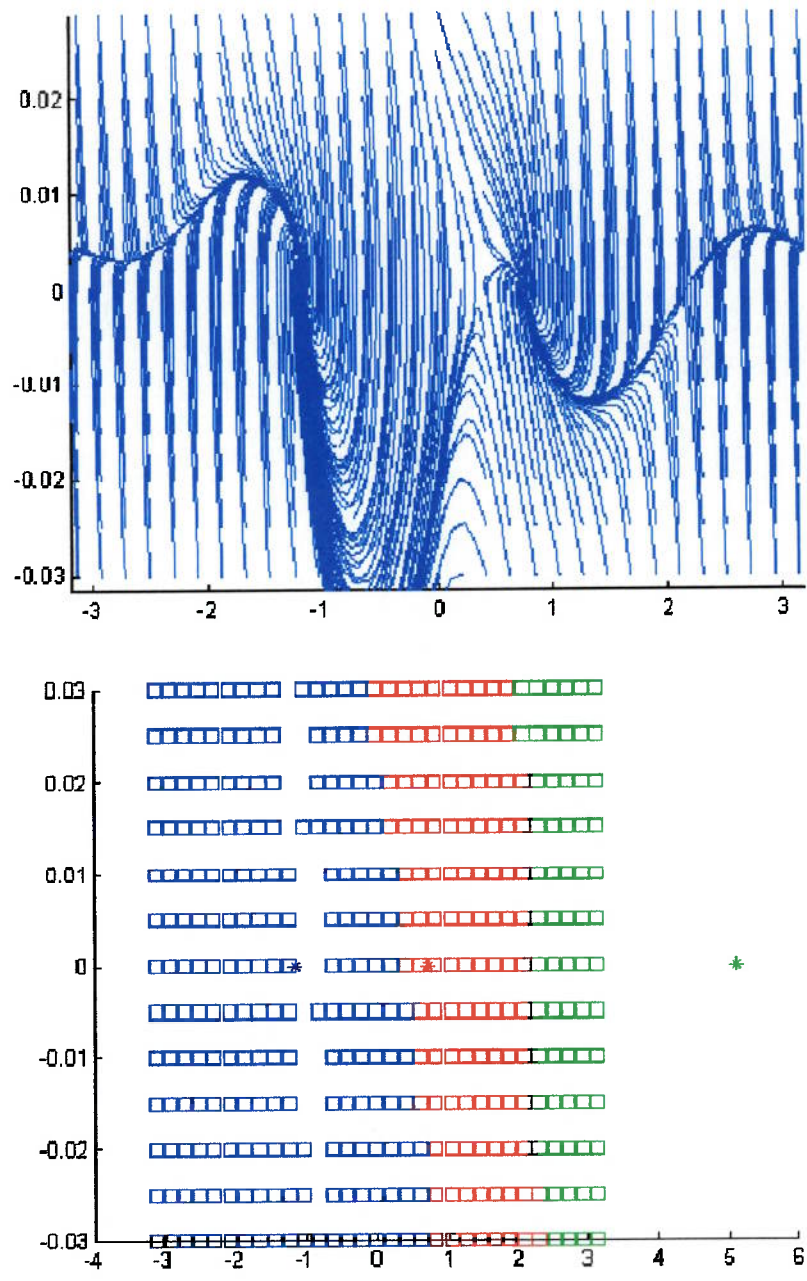
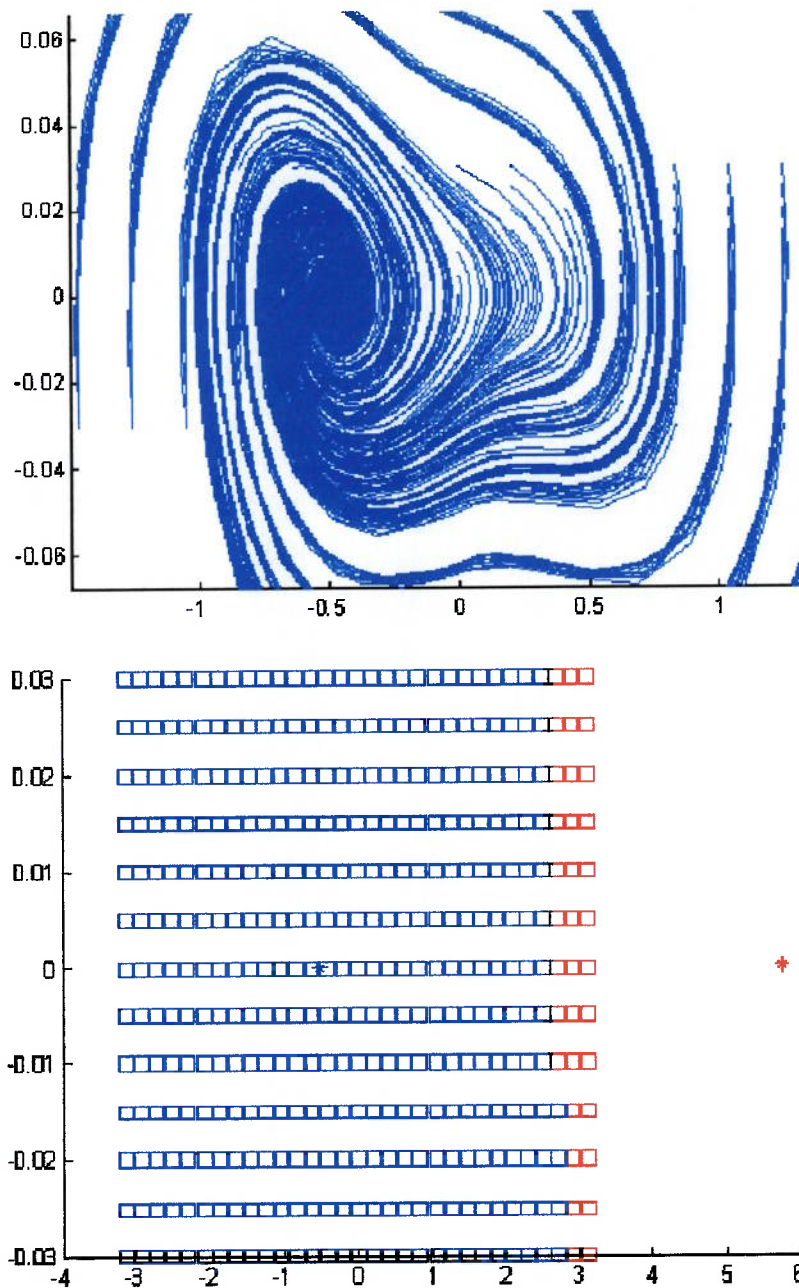
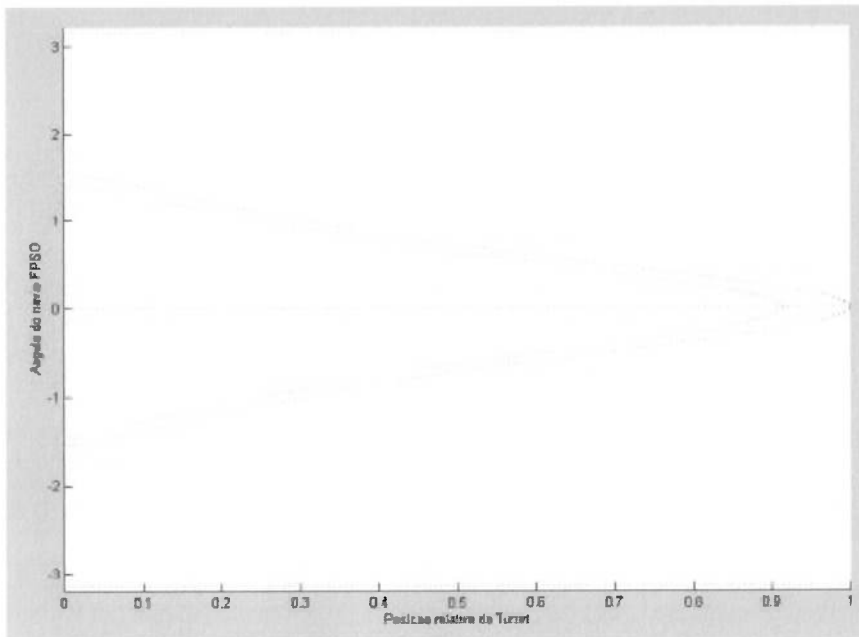


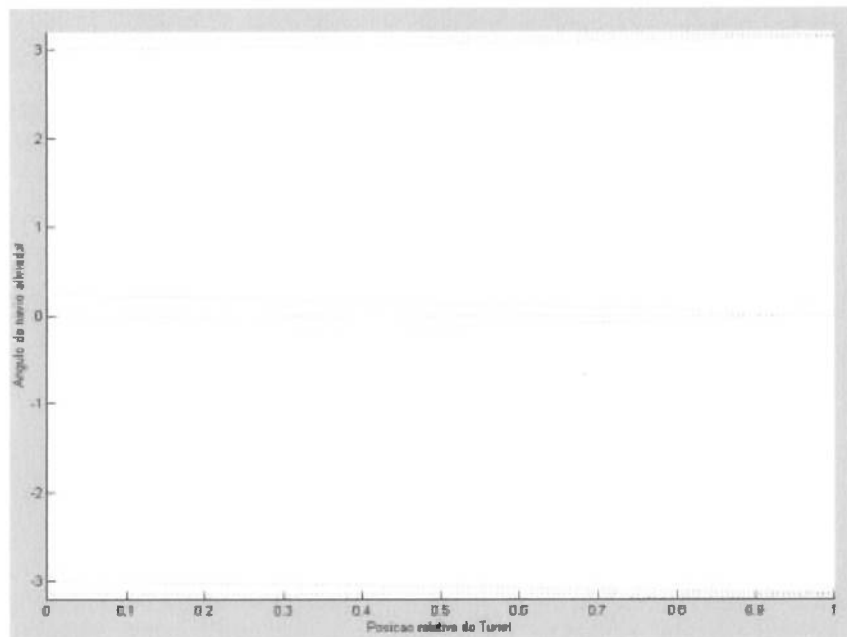
Figura 4.28 - Diagrama de fase e de atração do navio FPSO para  $\partial = 0.8$



**Figura 4.29 - Diagrama de fase e de atração do navio FPSO para  $\delta = 1.0$**



**Figura 4.30 - Mapas de bifurcação para o navio FPSO ( $\psi_c = \pi$ )**



**Figura 4.31 - Mapas de bifurcação para o navio aliviador ( $\psi_c = \pi$ )**



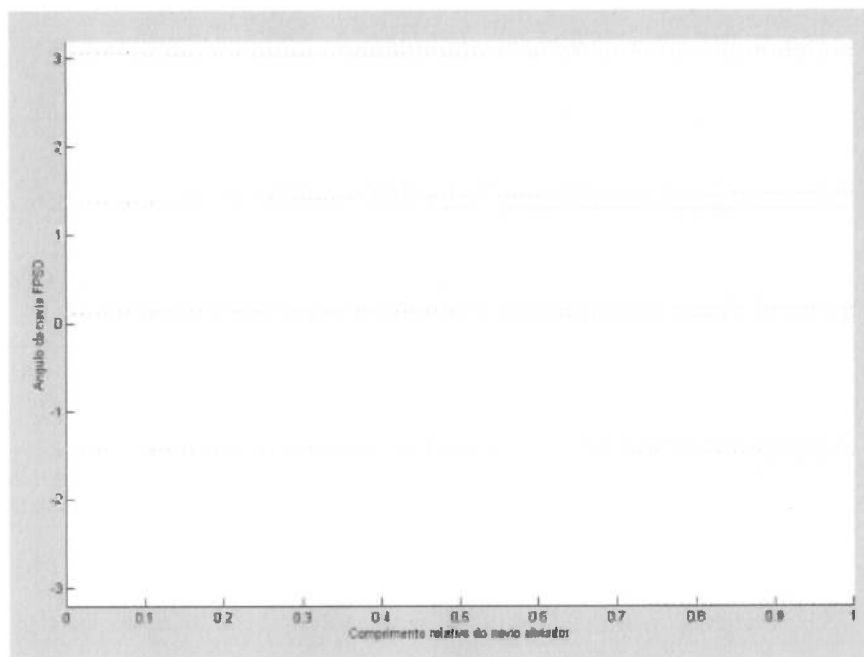
#### 4.1.2.1 Parâmetros de projeto

De posse de um modelo arquetípico, uma interessante investigação a ser feita diz respeito a variação de características de projeto. Em etapas iniciais de definição de tal sistema, características globais tais como dimensões principais das embarcações podem ser escolhidas de forma a se obter um comportamento ótimo desejável. Um desses parâmetros mencionados é o comprimento do navio aliviador. De acordo com seu comprimento, essa embarcação possui características diferentes em termos de resposta em relação a vento e corrente.

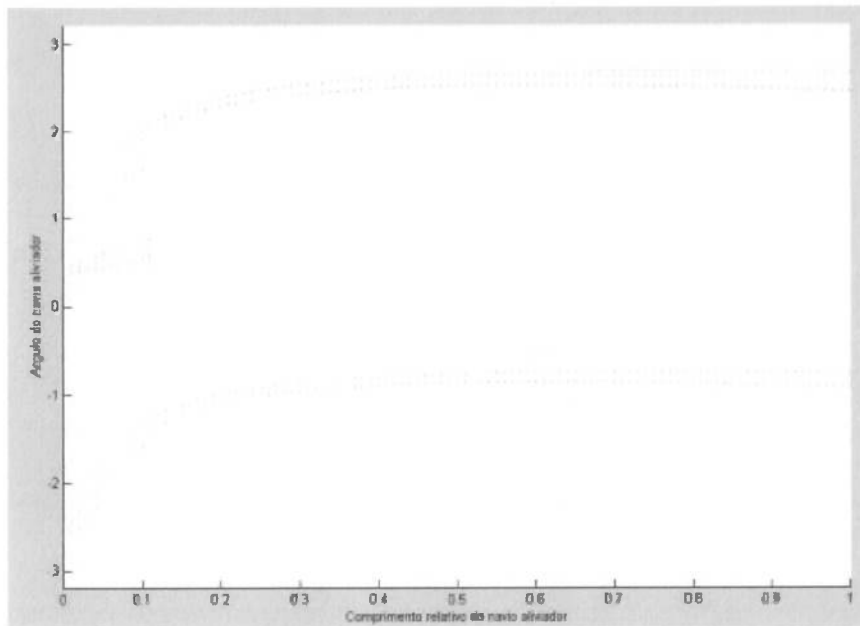
Em relação a corrente, utilizando-se as equações 24, 25 e 26 pode-se estabelecer a relação entre comprimento do navio de coeficientes de corrente. Com relação ao vento, pode-se fazer uma aproximação que os coeficientes de vento não sejam sensíveis a uma variação de comprimento do navio. Dessa forma a força devido ao vento sofre alteração apenas da área projetada. Como tais navios, geralmente, possuem coeficientes de bloco elevados, pode-se aproximar uma variação linear das forças e momentos do vento em relação ao comprimento.

Dessa forma, com o modelo arquetípico, mapas de bifurcações foram construídos tendo como parâmetro de variação a o comprimento do navio aliviador. Tal parâmetro tem como faixa de variação de zero a um, representando valor percentual relativo ao comprimento do navio FPSO. Para tal análise foram consideradas direções de corrente de  $\psi_c = \pi$ , vento de

$\psi_v = \frac{\pi}{6}$ ,  $\sigma = 1.5$  e posição relativa do turret de  $\delta = 0.5$ . Inúmeras outras combinações podem ser testadas. Nas Figuras 4.32 e 4.33 pode-se observar tais diagramas em relação ao navio FPSO e navio aliviador, respectivamente.



**Figura 4.32 - Mapas de bifurcação para o navio FPSO ( $\psi_c = \pi$ )**



**Figura 4.33 - Mapas de bifurcação para o navio FPSO ( $\psi_c = \pi$ )**

Pode-se notar que o navio FPSO mostra-se indiferente com relação ao comprimento do navio aliviador. Pode-se notar, porém, que a medida que seu comprimento fica menor que 15% do comprimento do navio FPSO, mais pontos de equilíbrio surgem para a mesma dada condição ambiental. Isso se deve ao fato do navio com menor comprimento possuir maior sensibilidade ao vento que a corrente, quando comparado com o mesmo navio com maior comprimento.

Tal análise depende das características de cada navio. Por isso pode-se esperar formatos diferentes de tais diagramas de bifurcação para cada sistema analisado. No entanto, tal parâmetro apresenta importância em fase de projeto, pois no exemplo acima mostrado, uma configuração com o comprimento do navio aliviador menor que 15% do navio FPSO pode representar características

indesejáveis, visto que a região de atração é compartilhada por dois diferentes atratores, o que pode implicar, por exemplo, grandes deslocamento do navio aliviador quando este “saltar” de um ponto para outro.

#### 4.1.2.2 Offloading

Durante a operação de descarregamento do navio FPSO, na qual o navio aliviador “puxa” o óleo, as características de cada navio mudam de acordo com sua carga. A medida que o petróleo é esvaziado do navio FPSO, seu calado diminui, e a influência da força de corrente também diminui, ao passo que aumenta a influência do vento, pois a área vélica aumenta com a diminuição do calado. Da mesma forma, o navio aliviador tem seu calado aumentado, tornando a influencia da corrente maior e a do vento menor. Tais variações, para uma dada condição ambiental, pode representar uma alteração da dinâmica do sistema durante o processo.

O que se pretende fazer é analisar a operação de descarregamento com respeito a alteração dos pontos de equilíbrio do sistema. Para isso é preciso saber quantitativamente como as forças de vento e corrente incidentes sobre os navios variam com a alteração do deslocamento. Assim pode-se analisar, através de um diagrama de bifurcações, por exemplo, como os pontos de equilíbrio se comportam durante tal operação.

De acordo com os coeficientes de força e momento de corrente já observados nas equações 24, 25 e 26, percebe-se a dependência com o calado

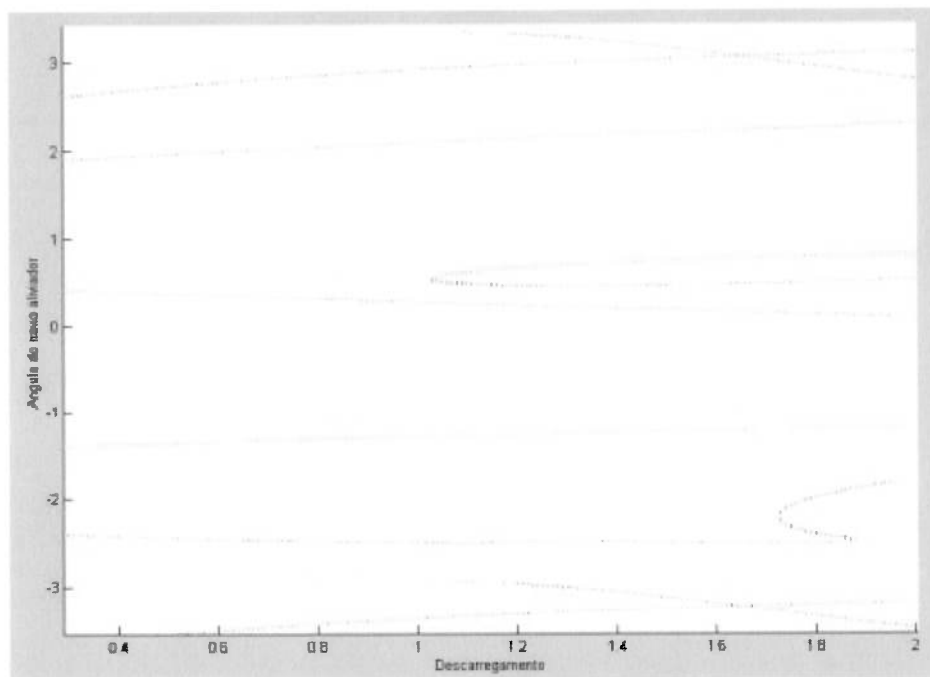
(T) dos navios. Supondo navios com alto coeficiente de bloco, pode-se fazer uma aproximação de uma variação linear do calado com a variação do deslocamento da embarcação. Portanto, consegue-se obter a relação da variação das forças de corrente com o deslocamento da embarcação. Já com respeito ao vento, assumindo que seus coeficientes não variem consideravelmente para um navio com alto coeficiente de bloco, o que implica em dizer que sua forma exposta ao vento não varie, conclui-se que a alteração da força é resultante apenas da variação de sua área projetada. E, por aproximação, pode-se adotar uma variação da área projetada tal que a variação respectiva de forças e momentos seja linear.

Com essas hipóteses, foram analisadas variações mínimas e máximas de deslocamento para os navios P43 (FPSO) e VLCC (navio aliviador) tomados como base para os estudos. Foram determinados os valores máximos e mínimos dos coeficientes de momentos para vento e corrente, possibilitando a construção de um mapa de bifurcação, o qual mostra a variação dos pontos de equilíbrio do sistema durante a operação de descarregamento. Para referência, foi adotada uma variação de deslocamento do navio FPSO de 100% carregado, até 40%, ao passo que para o navio aliviador, da condição vazia, para 100% carregada, para as mesmas condições ambientais mostradas anteriormente para o sistema Turret. Os mapas podem ser vistos na Figuras 4.34 e 4.35.

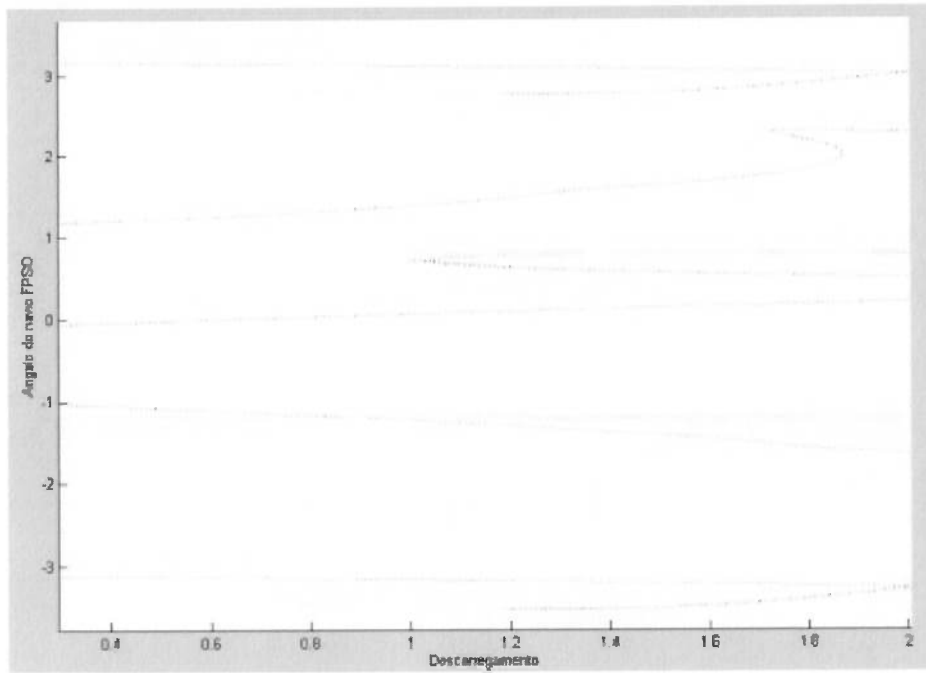
As escalas apresentadas nas abscissas dos mapas são apenas referências para o tempo de duração da operação de descarregamento. Pode-se observar que durante a metade do processo de descarregamento ocorre uma bifurcação

pela qual surge um novo ponto de equilíbrio estável. Em termos de engenharia tal comportamento não é desejável, visto que as embarcações podem mudar de posição, quando as condições de posição e velocidade das embarcações estiverem dentro da região de atração desse novo ponto de equilíbrio, durante a operação.

Com tal análise, pode-se, para determinada condição ambiental, projetar os navios (parâmetros que reflitam nos coeficientes de corrente e vento), os quais não possuam tal característica. Em suma, é desejável embarcações que durante qualquer operação não adquiram posições de equilíbrio novas, e com isso, não acarretem movimentações relativas durante a operações.



**Figura 4.34 - Mapas de bifurcação para o navio FPSO ( $\psi_v = \frac{\pi}{4}$  e  $\psi_c = \pi$ )**



**Figura 4.35 - Mapas de bifurcação para o navio aliviador ( $\psi_v = \frac{\pi}{4}$  e  $\psi_c = \pi$ )**

## 5. CONCLUSÕES

Como principal objetivo deste trabalho, colocou-se obtenção de um modelo matemático simplificado, dito arquetípico, que possibilitasse um estudo qualitativo mais aprofundado do sistema FPSO de exploração, mais precisamente durante a operação de descarga de petróleo, seja com sistema de amarração DICAS ou *Turret*.

Através de um estudo da variação de energia potencial do sistema completo, pode-se obter características peculiares deste, tal como a presença da dinâmica dita "interessante" apenas nos graus de aproamento dos navios. Tal conclusão serviu como ponto de partida para obtenção do modelo arquetípico, o qual contempla apenas os graus de liberdade relativos a aproamentos. A ausência dos graus de liberdade de deslocamento implica, de certa forma, a impossibilidade de identificação de, por exemplo, uma posição de equilíbrio do sistema dita "de risco", caracterizada pela proximidade dos dois navios. Todavia, uma vez tendo-se um conhecimento profundo da dinâmica relevante do sistema, através do modelo arquetípico, e de por exemplo, identificação de regiões de atração de certos pontos de equilíbrio, este pode ser verificado no modelo completo para simples identificação da possibilidade de colisão. Embora para certos pontos de equilíbrio, conhecendo os aproamentos pode-se, intuitivamente, ter uma noção das prováveis posições dos navios.

Através das comparações de resultados do modelo arquetípico com o modelo completo, assim como com resultados experimentais, pode-se observar uma boa correlação dos resultados. Vale a pena ressaltar que as comparações



com o modelo completo, deram-se não somente através de séries temporais, como também através de mapas de bifurcação, os quais apresentam características fundamentais do modelo. Dessa forma o modelo arquetípico como um todo apresentou boa correlação com o modelo completo, e por isso, foi considerado representativo para a dinâmica do sistema que pretende-se investigar.

Uma vez de posse do modelo arquetípico, varias análises foram feitas de maneira a obter um melhor entendimento do sistema. Uma ferramenta utilizada foi a construção de bacias de atração. Através delas foi possível observar o domínio de atração de diferentes pontos de equilíbrio, assim como, em certas situações, verificar uma divisão da região de atração entre dois diferentes pontos. Para o sistema com amarração DICAS, foi confirmada a presença de um segundo ponto de equilíbrio para determinada condição de vento e corrente, os quais dependendo da relação velocidade de vento e corrente, dividem diferentemente a região de atração.

Com relação ao sistema Turret de amarração observou-se uma maior complexidade. Um maior número de parâmetros influenciam a dinâmica de tal sistema, tais como, velocidade e aproamento de vento e corrente, como no sistema anterior, relação de deslocamento entre os navios e posição do Turret no navio FPSO. Para uma melhor compreensão deste sistema, assim como para o sistema DICAS, foram obtidos mapas de bifurcação tendo como parâmetro a relação de velocidades entre vento e corrente. Pôde-se concluir que bifurcações ocorrem também devido a oposição entre vento e corrente, assim como para o

sistema DICAS. Porém, os aproamentos do vento e corrente não precisam estar necessariamente opostos para a ocorrência de bifurcações, o que ocorre no sistema anterior. Principalmente quando o Turret está posicionado mais a meia-nau do navio FPSO, bifurcações ocorrem mesmo para uma diferença de  $\pi/2$  radianos entre os aproamentos. Outra característica observada foi a maior "sensibilidade numérica" do modelo, o qual apresenta pontos de equilíbrios distintos, com valores próximos numericamente um dos outros. Tal característica também pode ser observada no modelo completo.

Em termos de resultados, percebeu-se que para o sistema Turret, pontos de equilíbrio ditos secundários, os quais são resultados de bifurcações devido oposição de vento e corrente, se apresentam em um domínio maior nos mapas de bifurcação, assim como apresentam maior domínio de atração, notado nas bacias de atração. Tal característica se observa principalmente em relação ao navio FPSO, e com maior intensidade para o Turret mais próximo da meia nau do navio.

Uma característica considerada típica de tal sistema, a presença de uma bifurcação de Hopf quando da variação do posicionamento do Turret, também foi constatada no modelo arquetípico. Através de mapas de bifurcação tendo como parâmetro tal posicionamento, foi possível não somente identificar tal fenômeno, quando na ausência de vento e corrente a  $\pi$  radianos, como também a presença de bifurcações folds, quando da variação deste mesmo parâmetro na presença de vento com aproamento diferente da corrente. Tais mapas sem o auxílio do modelo arquetípico seriam difíceis de serem obtidos.

Outras investigações foram procuradas no sentido de analisar variações de características do sistema, e correspondente alteração no comportamento do sistema. A primeira característica analisada foi a influência do comprimento relativo dos navios sobre a dinâmica global. Dessa forma, para uma dada configuração de vento e corrente, foi obtido um mapa de bifurcação tendo como parâmetro o comprimento relativo dos navios. Observou-se que para comprimento do navio aliviador abaixo de 15% (para as condições simuladas) o sistema apresenta bifurcação, possuindo um segundo ponto de equilíbrio, o que pode significar grandes amplitudes de movimento caso o sistema "saltar" de um ponto de equilíbrio para outro, já que o domínio de atração é dividido entre dois atratores. Dessa forma percebe-se que pode-se projetar tal embarcação de maneira a evitar fenômenos indesejáveis do ponto de vista de engenharia.

Outro fenômeno observado nesse sistema foi a variação da dinâmica do sistema durante a operação de descarregamento (*offloading*). Mapas de bifurcação foram obtidos tendo como parâmetro o progresso da operação de descarga, sendo esta caracterizada pela diminuição de deslocamento do navio FPSO e respectivo aumento do navio aliviador. Novamente tais mapas foram obtidos para uma determinada condição de vento e corrente. Observou-se que durante a operação, ocorre uma bifurcação em termos de ponto de equilíbrio tanto para o navio aliviador como para o navio FPSO. Tal característica é indesejável em termos de engenharia, pois implica em uma divisão da região de atração entre dois pontos de equilíbrio, a qual era dominada apenas por um atrator quando do começo da operação. Isso significa que durante a operação,

por ação de variação de algum agente externo, o sistema pode mudar de atrator e gerar deslocamentos relativos dos navios durante regime transiente. Tais deslocamentos podem gerar tensões excessivas nas linhas de conexão entre os navios e prejudicar a operação. Tal evidência motiva o estudo de características ideais do sistema, de maneira a evitar tal fenômeno para uma dada condição ambiental pré-estabelecida em projeto. Vale ressaltar que sem um modelo arquetípico, tal constatação seria muito difícil em termos práticos, visto a complexidade do modelo completo.

De posse de um modelo arquetípico, vários diferentes estudos podem ser feitos sobre o mesmo sistema descrito. Neste trabalho apenas alguns casos ditos "interessantes" de condições ambientais foram investigados. Porém pode-se realizar um estudo sistemático, sobre condições típicas de vento e corrente em determinada região no decorrer de um tempo, e mapear todos os possíveis cenários envolvendo tais condições. Dessa forma, pode-se investigar alternativas de projeto do sistema que objetivem uma melhoria de comportamento.

No presente trabalho, apenas forças de corrente e vento foram levadas em consideração. Porém, forças na embarcação geradas através de ondas também têm grande influência sobre a dinâmica do sistema. Esforços de ondas caracterizam-se não somente por forças de deriva lenta (as quais possuem valor médio não nulo) como também forças oscilatórias, as quais dependendo da frequência podem gerar diferentes reações no sistema. Dessa forma, um aperfeiçoamento que pode ser feito no modelo arquetípico é a introdução de

forças de onda, e a verificação de como os diagramas de bifurcação, por exemplo, se alteram com tais forças. Com a introdução de forças de ondas, tem-se um cenário mais complexo, pois a influência em pontos de equilíbrio dá-se pela combinação de três fatores ambientais. Dessa forma os mapas de bifurcação tendo como parâmetro a relação de velocidade de vento e corrente ( $\sigma$ ) sofreriam alteração para cada condição de onda, e assim mapas de bifurcação em três dimensões podem ser construídos. Estudos feitos neste trabalho tais como a influência sobre a operação de descarregamento, bem como a influência de parâmetros das embarcações, tais como o comprimento do navio aliviador, poderiam ser elaborados e assim avaliar a influência apenas dos esforços de ondas sobre os resultados. Dessa forma, ter-se-ia uma avaliação de qual a influência dos esforços de ondas sobre a dinâmica do sistema completo.

## 6. APÊNDICE

### 6.1 Derivação das funções modulo de seno e coseno

Para desenvolvimento de uma função analítica para os poços potenciais do sistema em estudo, foi necessário obter analiticamente a integral das funções  $|\cos x|$  e  $|\sin x|$ . Porém tais integrais, ou mesmo derivadas dessas funções não foram encontradas em tabelas de funções matemáticas. Por isso foi necessário fazer o desenvolvimento de tal derivada (ou integral).

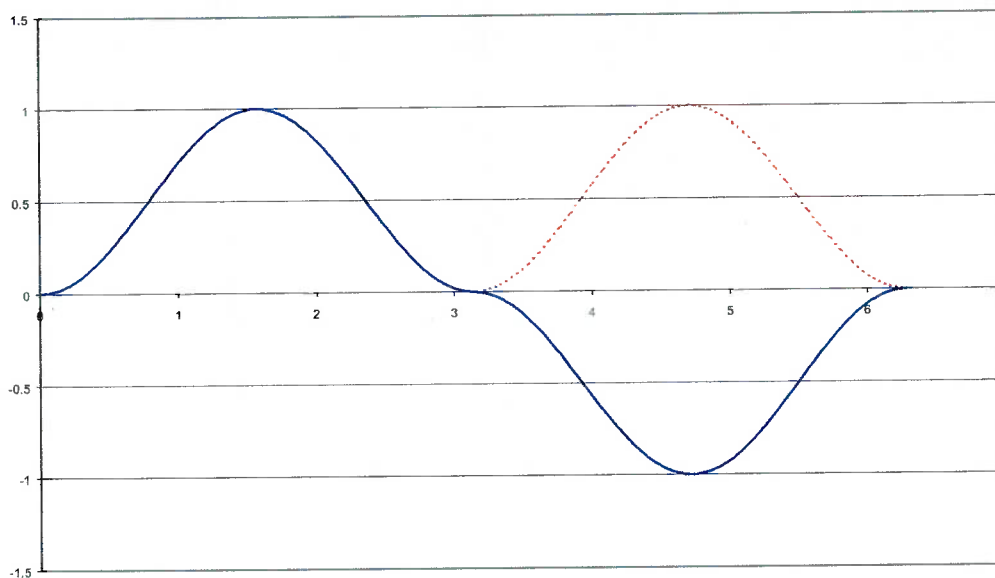
Sabe que a derivada da função  $\sin^2(x)$  é dada por :

$$\frac{d \sin^2(x)}{dx} = 2 \cdot \cos(x) \cdot \sin(x) \quad 60$$

No entanto sabe-se também que a função  $\sin(x) \cdot |\sin(x)|$  tem mesmo valor numérico da função  $\sin^2(x)$  porém com o sinal da função igual ao sinal da função seno.

Com isso a derivada da função  $f(x) = \sin(x) \cdot |\sin(x)|$  deve ser numericamente igual a  $2 \cdot \cos(x) \cdot \sin(x)$ , porém com o sinal da função coseno. Tal conclusão pode ser tirada de, de maneira simples, analisando o gráfico das funções  $\sin^2(x)$  e  $\sin(x) \cdot |\sin(x)|$  (Figura 6.1). Analisando a tangente a cada ponto das duas funções, pode-se concluir que ambas possuem tangentes de

mesmo valor em modulo a cada ponto, porém, com sinais diferentes. Pode-se notar que as tangentes da função  $f(x) = \sin(x) \cdot |\sin(x)|$  acompanha o sinal do coseno: valor positivo para ângulos menores que  $\frac{\pi}{2}$  rad, valor negativo entre  $\frac{\pi}{2}$  e  $\frac{3\pi}{2}$  rad, e novamente positivo até  $2\pi$ .



**Figura 6.1 - Função  $\sin(x) \cdot |\sin(x)|$  (azul) e  $\sin^2(x)$  (vermelho)**

A partir do que foi dito acima pode-se concluir:

$$\frac{d \sin(x) \cdot |\sin(x)|}{dx} = 2 \cdot \cos(x) \cdot |\sin(x)|$$

61

Porém,

$$\frac{d \sin(x) \cdot |\sin(x)|}{dx} = \frac{d \sin(x)}{dx} \cdot |\sin(x)| + \sin(x) \cdot \frac{d|\sin(x)|}{dx} = 2 \cdot \cos(x) \cdot |\sin(x)| \quad 62$$

Assim isolando a parcela que contém a derivada da função modulo de seno obtém-se:

$$\frac{d|\sin(x)|}{dx} = \frac{2 \cdot \cos(x) \cdot |\sin(x)| - \frac{d \sin(x)}{dx} \cdot |\sin(x)|}{\sin(x)} \quad 63$$

E, por fim :

$$\frac{d|\sin(x)|}{dx} = \frac{\cos(x) \cdot |\sin(x)|}{\sin(x)} = \cot \text{ang}(x) \cdot |\sin(x)| = \cos(x) \cdot \text{sign}(\sin(x)) \quad 64$$

Através da equação 64 foi possível obter a integral de funções presentes no sistema, como por exemplo,  $|\sin x| \cdot \sin x$  ou  $|\sin x| \cdot \cos x$ , através de integração por partes.



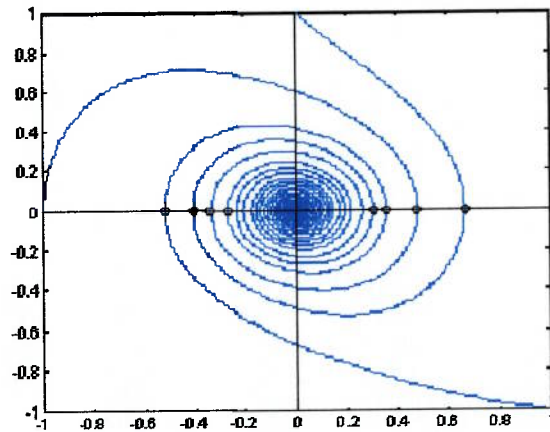
Fazendo o mesmo desenvolvimento para a função  $\cos^2(x)$  obtém-se:

$$\frac{d|\cos(x)|}{dx} = -\frac{\sin(x)|\cos(x)|}{\cos(x)} = -\tan(x) \cdot |\cos(x)| = \sin(x) \cdot \text{sign}(\cos(x)) \quad 65$$

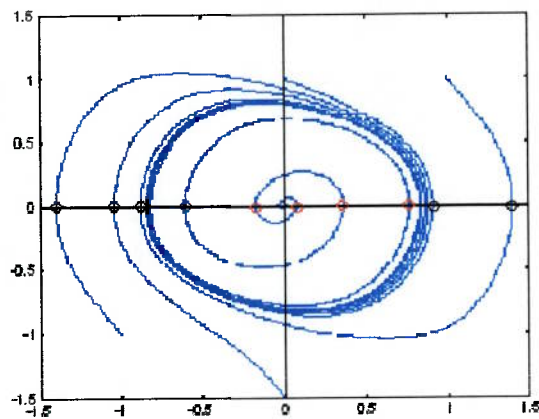
### 6.3 Algoritmo para construção de bacias de atração

Para a identificação de bacias de atração deve-se utilizar um algoritmo eficiente e rápido, pois para determinação das regiões de atração é necessário simular o modelo, numericamente, para cada diferente condição do parâmetro analisado. No caso deste trabalho, por exemplo, deve-se simular o modelo para cada condição inicial de posição e velocidade. Assim, dependendo da resolução desejada para a bacia de atração, tal processo pode custar muito tempo de simulação.

O algoritmo elaborado neste trabalho baseia-se em convergência de series. Analisando o diagrama de fase de um sistema dinâmico pode-se fazer uma relação entre a característica de um determinado ponto de equilíbrio e a forma do diagrama de fase do sistema ao redor de tal ponto. A principal idéia do algoritmo pode ser melhor explicada através das Figuras 6.2 e 6.3. Tais figuras representam o diagrama de fase de um sistema dinâmico exemplificado no capítulo 2. A primeira figura representa um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema, enquanto a segunda um ciclo limite.



**Figura 6.2 - Ponto de equilíbrio estável**



**Figura 6.3 - Ciclo limite**

Com pequenos círculos, estão marcados os pontos de intersecção com a abscissa do diagrama de fase, ou seja, pontos da trajetória com velocidade zero. Pode-se observar na Figura 6.2, que os pontos de intersecção do lado positivo, assim como do lado negativo, representam um série convergente, com valor final (0,0). O mesmo pode-se observar na Figura 6.3, porém os pontos

do lado negativo tendem a um valor determinado negativo ( aproximadamente  $-0.75$  no exemplo ), enquanto os pontos do lado positivo tendem a um valor positivo ( aproximadamente  $0.75$  ). Nota-se portanto, que através do reconhecimento da série dos pontos da trajetória de velocidade zero é possível identificar a origem deste. Se a série do lado positivo tende ao mesmo ponto da série do lado negativo, assim o ponto possui estabilidade assintótica. Caso a série do lado negativo convirja para um valor diferente da série do lado positivo, então o ponto central possui uma estabilidade orbital. Ou seja, pode ser um ciclo limite, ou um ponto de equilíbrio estável. Para diferenciar ambos, basta comparar a posição inicial (deslocamento inicial), com o valor de convergência da série. Se o valor de convergência coincidir com a posição inicial para uma dada precisão numérica, este se caracteriza por um ponto de equilíbrio, ou seja, uma órbita estável não isolada no espaço de estado. Caso contrário, o ponto se caracteriza por um ciclo limite, ou seja, um órbita fechada e isolada.

Dessa forma, em um mesmo algoritmo, pode-se identificar cada tipo de ponto de equilíbrio encontrado no sistema em estudo, bem como sua região de atração, apenas analisando o ponto de convergência de cada ponto de origem.

## 7. BIBLIOGRAFIA

AGHAMOHAMMADI, F.; THOMPSON, J. M. T. An experimental study of the large amplitude fish-tailing instabilities of a tanker at a single point mooring. Applied Ocean Research, Vol.12 No. 1, 1990.

ALLGOWER, E.L.; GEORG, K. **Numerical Continuation Methods: An Introduction.** Springer-Verlag, 1990.

BERNITAS, M. M. ; PAPOULIAS, F. A. Stability of single point mooring systems. Applied Ocean Research, 8(1), 49-58,1986.

BERNITAS, M. M.; GARZA-RIOS, L.O.; KIM, B. Mooring Design Base on Catastrophes of Slow Dynamics, Transactions of the SNAME, 1999.

CARR, J. **Applications of Center Manifold Theory, Applied Mathematical Sciences**, v35. Springer-Verlag, 1978/1979.

CLARKE, D.; GEDLING, P.; HINE, G. The application of manoeuvring criteria in hull design using linear theory. Proc. of the Royal Institute of Naval Arch., pp. 45-68, 1983.

FERNANDES, A.C. and SPHAIER, S. Dynamic Analysis of a FPSO System. In: The Proceedings of the Seventh International Offshore and Polar Engineering Conference, Vol. I. p:330-35, Honolulu, Hawaii.

GARZA-RIOS, L.O. and BERNITAS, M. M. Mathematical Model for the Slow Motion Dynamics of Turret Mooring Systems, Report to the University of Michigan, Department of Naval Architecture and Marine Engineering, Ann Arbor, Publication No. 336, 1998.

GUCKENHEIMER, JOHN; HOLMES, PHILIP. **Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields.** Applied mathematical sciences, v. 42. Springer-Verlag, 1983.

HILBORN, R.C. **Chaos and Nonlinear Dynamics, An introduction for scientists and Engineers.** Oxford University Press, 1994.

LEITE, A.J.P., ARANHA, J.A.P., UMEDA, C., DE CONTI, M.B. Current Forces in Tankers and Bifurcation of Equilibrium of Turret System: Hydrodynamic Model and Experiments. In: Applied Ocean Research, 1998.

MORISHITA, H.M. e CORNET, B.J.J. Dynamics of a Turret-FPSO and shuttle vessel due to current. In: IFAC COFERENCE, Fukuoka. Control Applications in Marine Systems. Kyushu, p. 101-6, 1998.

MORISHITA, H. M.; SOUZA JÚNIOR, J. D. R. de; FERNANDES, C. G.  
Nonlinear dynamics of a FPSO and shuttle vessel in tandem configuration. In:  
International Offshore and Polar Engineering Conference, 11. Stavanger, 2001.  
Proceedings. Cupertino : International Society of Offshore and Polar Engineers,  
2001.v. 1, p. 336-342.

NAYFEH, A. H.; BALACHANDIAN, B. **Applied nonlinear dynamics:  
analytical, computational and experimental methods.** Wiley Series in  
Nonlinear Science, 1933.

NISHIMOTO, K., BRINATI, H.L. AND FUCATU, C.H. Analysis of the Point  
Moored Tanker using Manoeuvring Hydrodynamic Model. In: Proceeding of the  
14<sup>th</sup> International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering,  
Vol.1 Pt.B. p.253-61, Copenhagen, 1995.

OBOKATA, J. On the basic design of single point mooring systems. J. of the  
Society of Naval Architects of Japan, vol.161, June 1987.

OCIMF. Predictions of Wind and Current Loads on VLCCs. Oil Companies. In:  
International Marine Forum, 1994.

PARKER, THOMAS; CHUA, LEON. **Practical numerical algorithms for chaotic systems**. Springer-Verlag, 1989.

SIMOS, A. N., TANNURI, E.A., PESCE, C.P. Dynamics of a Turret-FPSO System and Hydrodynamic Model. In: Proceeding of the 17<sup>th</sup> International Offshore and Polar Engineering Conference, Lisbon, 1998.

SIMOS, A. N., TANNURI, E.A., ARANHA, J.A.P. Theoretical Analysis and Experimental Evaluation of the Fishtailing Phenomenon in a Single-Point Moored Tanker. In: Proceeding of the 11<sup>th</sup> International Offshore and Polar Engineering Conference, Stavanger, Norway 2001.

SOUZA JÚNIOR, J. D. R. de; FERNANDES, C. G. Nonlinear dynamics an archetypal model of ships motions in Tandem. In: International Workshop on Dynamics and Control, 12. Los Angeles, 2002. Dynamics and control of complex systems in nature and society: abstracts. Califórnia : USC, 2002.p. 23.

SOUZA JÚNIOR, J. D. R. de; MORISHITA, H. M.; FERNANDES, C. G.; CORNET, B. J. J. Nonlinear dynamics and control of a shuttle tanker. In: International Conference on Nonlinear Dynamics, Chaos, Control and their Applications in Engineering Sciences,. Campos do Jordão, 2000. ICONNE'2000: proceedings.S. l. : ABCM, 2000.

SOUZA JÚNIOR, J. D. R. de, FERNANDES, C. G. Nonlinear Dynamics of an Archetypal Model of Ship Motions in Tandem In: XII International Workshop on Nonlinear Dynamics and Control, 2002, Los Angeles, California, EUA.

TAKASHIMA, J. Ship maneuvering motion due to tugs boats and its mathematical model. J. of the Society of Naval Architects of Japan, vol.160, Dec. 1986.

THOMPSON, J.M.T.; STEWART, H.B. **Nonlinear dynamics and chaos**. Wiley & Sons Ltd, 1986.