ALEXANDRE NICOLAOS SIMOS

TÓPICOS VISANDO O APRIMORAMENTO DO PROJETO DE PLATAFORMAS TLP: ESTUDO DE FORMAS BIDIMENSIONAIS DE MÍNIMA FORÇA DE EXCITAÇÃO VERTICAL E MODELAGEM DA DINÂMICA DOS TENDÕES SOB EXCITAÇÃO PARAMÉTRICA

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Engenharia

Área de Concentração:
Engenharia Naval e Oceânica

Orientador:
Prof. Dr. Celso Pupo Pesce

São Paulo
1997

ALEXANDRE NICOLAOS SIMOS
Engenheiro Naval, EPUSP - 1995

TÓPICOS VISANDO O APRIMORAMENTO DO PROJETO DE PLATAFORMAS TLP: ESTUDO DE FORMAS BIDIMENSIONAIS DE MÍNIMA FORÇA DE EXCITAÇÃO VERTICAL E MODELAGEM DA DINÂMICA DOS TENDÕES SOB EXCITAÇÃO PARAMÉTRICA

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Engenharia

Área de Concentração:
Engenharia Naval e Oceânica

Orientador:
Prof. Dr. Celso Pupo Pesce
Prof. Dr. do Departamento de Engenharia Mecânica da EPUSP

São Paulo, 1997

A *Priscilla*, a meus pais e minha irmã, por seu inestimável apoio e incentivo.

AGRADECIMENTOS

À FAPESP - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, pelo suporte financeiro recebido, na forma de bolsa de estudos, no decorrer dos cursos de pós-graduação e ao longo de todo o período de desenvolvimento deste trabalho (processo nº 95/8917-0).

Ao Prof. Dr. José Augusto Penteado Aranha, pelas valiosas sugestões e discussões que permearam o estudo desenvolvido.

A todos que direta ou indiretamente colaboraram para a consecução deste trabalho.

De maneira especial, ao meu amigo e orientador Prof. Dr. Celso Pupo Pesce, cujo talento, dedicação e incentivo permanente formaram os alicerces e ditaram as diretrizes que tornaram possível a edificação deste projeto.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SÍMBOLOS

RESUMO

ABSTRACT

1. INTRODUÇÃO 1

2. ESTUDO DE FORMAS BIDIMENSIONAIS 11

2.1 BREVE HISTÓRICO BIBLIOGRÁFICO 12

2.2 EXTENSÃO ANALÍTICA PARA A EQUAÇÃO DE MORISON E AS FUNÇÕES DE FORMA 17

2.3 METODOLOGIA PARA LEVANTAMENTO DO ESCOAMENTO POTENCIAL ASSOCIADO A FUNÇÕES DE FORMA PRÉ-DEFINIDAS 20

2.3.1 Caso-Exemplo: A Função de Forma $F(Ka) = e^{-\alpha Ka}$ 23

2.4 A FAMÍLIA DE FUNÇÕES DE FORMA $F(KA) = \cos^n(\alpha Ka)$ 29

2.4.1 A Função de Forma $F(Ka) = \cos(\alpha Ka)$ 30

2.4.2 A Função de Forma $F(Ka) = \cos^4(\alpha Ka)$ 35

2.5 A FUNÇÃO DE FORMA $F(KA) = 1 - \sin(\alpha Ka)$ 42

2.6 CONSIDERAÇÕES SOBRE O ESTUDO DE FORMAS SECCIONAIS ALTERNATIVAS 46

3. MODELO PARA ESTUDO DE EXCITAÇÃO PARAMÉTRICA CONSIDERANDO TRAÇÃO ESTÁTICA VARIÁVEL AO LONGO DOS TENDÕES 50

3.1 BREVE HISTÓRICO BIBLIOGRÁFICO 53

3.2 EQUACIONAMENTO DINÂMICO E MODELO DE REPRESENTAÇÃO DOS MODOS NATURAIS 56

3.2.1 O Equacionamento Dinâmico Global 56

3.2.2 Solução do Problema de Autovalor 59

3.2.3 Equacionamento Final na Forma de Equação de Mathieu 62

3.2.4 Modelo Dinâmico Assumindo Tração Estática Constante 64

3.3 ANÁLISE DE ESTABILIDADE DINÂMICA DE MATHIEU 67
3.3.1 Caso-Exemplo: A Plataforma Hutton 70
3.3.2 Discussão dos Resultados Obtidos para o Tendão da Plataforma Hutton..... 73
3.3.3 Caso-Exemplo: A Plataforma Auger..... 74
3.3.4 Discussão dos Resultados Obtidos para o Tendão da Plataforma Auger..... 85
3.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS SOBRE O MODELO DINÂMICO PROPOSTO E O FENÔMENO DE EXCITAÇÃO PARAMÉTRICA DOS TENDÕES 89

4. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....93

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....100

APÊNDICE A. DETERMINAÇÃO DA FORÇA DE EXCITAÇÃO INERCIAL VERTICAL EM TERMOS DA FUNÇÃO DE FORMA F(Ka).....A-1

APÊNDICE B. ESQUEMATIZAÇÃO DE FORÇAS PARA A GEOMETRIA ASSOCIADA À FUNÇÃO DE FORMA $F(Ka) = \cos^4(Ka)$.....B-1

APÊNDICE C. DINÂMICA LATERAL DO TENDÃO: EXPANSÃO EM MODOS NATURAIS E ACOPLAMENTOS DINÂMICOS.....C-1

APÊNDICE D. TRANSFORMAÇÃO ALGÉBRICA PARA REPRESENTAÇÃO DO PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE ASSOCIADO AO FENÔMENO DE EXCITAÇÃO PARAMÉTRICA DOS TENDÕES NA FORMA DE EQUAÇÃO DE BESSEL MODIFICADA.....D-1

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 Plataforma TLP: Configuração Típica 2

Figura 2.1 Representação Esquemática do Problema 17

Figura 2.2 Funções de Forma de Geometrias Usuais (extraída de ARANHA; PINTO (1994)) 20

Figura 2.3 Função de Forma $F(Ka)=e^{-\alpha Ka}$ 23

Figura 2.4 Campos de Escoamento Associados à Função $F(Ka) = e^{-\alpha Ka}$ 25

Figura 2.5 Representação Esquemática da Definição do Contorno do Corpo 27

Figura 2.6 Geometrias Seccionais Associadas à Função $F(Ka) = e^{-\alpha Ka}$ 28

Figura 2.7 Função de Forma $F(Ka) = \cos(\alpha Ka)$ 30

Figura 2.8 Campos de Escoamento Associados à Função $F(Ka) = \cos(\alpha Ka)$ 31

Figura 2.9 Geometrias Seccionais Associadas à Função $F(Ka) = \cos(\alpha Ka)$ 32

Figura 2.10 Formas Seccionais Obtidas Variando-se o Valor de α Relativas à Função $F(Ka)=\cos(\alpha Ka)$ 34

Figura 2.11 Função de Forma $F(Ka) = \cos^4(\alpha Ka)$ 35

Figura 2.12 Campos de Escoamento Associados à Função $F(Ka) = \cos^4(\alpha Ka)$ 37

Figura 2.13 Geometrias Seccionais Associadas à Função $F(Ka) = \cos^4(\alpha Ka)$ 38

Figura 2.14 Formas Seccionais Obtidas Variando-se o Valor de α Relativas à Função $F(Ka)=\cos^4(\alpha Ka)$ 39

Figura 2.15 Configuração Geométrica Esquemática 40

Figura 2.16 Função de Forma $F(Ka) = 1 - \sin(\alpha Ka)$ 42

Figura 2.17 Campos de Escoamento Associados à Função $F(Ka) = 1 - \sin(\alpha Ka)$ 43

Figura 2.18 Contornos Associados à Função $F(Ka) = 1 - \sin(\alpha Ka)$ 44

Figura 2.19 Configuração Geométrica Proposta 45

Figura 3.1 Representação Gráfica do Modelo de Tendão 57

Figura 3.2 Formas Modais Relativas ao Segundo Modo Natural 66

Figura 3.3 Formas Modais Relativas ao Quarto Modo Natural 66

Figura 3.4 Gráfico de Estabilidadede Mathieu (extraído de PATEL; PARK (1991)) 69

Figura 3.5 Amplitudes Generalizadas de Vibração Segundo os Dois Modelos Dinâmicos: Plataforma Hutton - Condição de Operação 72

Figura 3.6 Pontos de Operação das Plataformas Hutton e Auger no Diagrama de Mathieu 75
Figura 3.7 Amplitudes Generalizadas de Vibração Segundo os Dois Modelos Dinâmicos: Plataforma Auger - Condição de Operação 77
Figura 3.8 Amplitudes Generalizadas de Vibração Segundo os Dois Modelos Dinâmicos: Plataforma Auger- 1º Modo - Condição Instável ($T=T_1/2$) 79
Figura 3.9 Idem à Figura 3.8- 1º Modo - Condição Instável ($T = T_1$) 80
Figura 3.10 Idem à Figura 3.8 - 2º Modo - Condição Instável ($T = T_1/4$) 81
Figura 3.11 Idem à Figura 3.8 - 2º Modo - Condição Instável ($T = T_1/2$) 82
Figura 3.12 Amplitudes Generalizadas de Vibração Segundo os Dois Modelos Dinâmicos: Plataforma Auger c/ Pré-tensão Reduzida - 1º Modo - Condição Instável ($T = T_1/2$) 83
Figura 3.13 Idem à Figura 3.11- 1º Modo - Condição Instável ($T = T_1$) 84
Figura 3.14 Linhas de Variação do Par de Parâmetros (d_n;q_n) 87
Figura B.1 Configuração Geométrica Esquemática B-1

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 Pontos Fixos do Sistema Dinâmico Associado a $F(Ka) = e^{-\alpha Ka}$ 26

Tabela 2.2 Pontos de Estagnação e Linhas de Corrente. $F(Ka) = \cos(\alpha Ka)$ (α=0.6) . 32

Tabela 2.3 Idem à Tabela 2.2.(α=1.2) 32

Tabela 2.4 Pontos de Estagnação e Linhas de Corrente. $F(Ka) = \cos^4(\alpha Ka)$ (α=0.6) 38

Tabela 2.5 Idem à Tabela 2.4.(α=1.2) 38

Tabela 2.6 Pontos de Estagnação e Linhas de Corrente. $F(Ka) = \sin(\alpha Ka)$ (α=0.6) .. 44

Tabela 2.7 Idem à Tabela 2.6.(α=1.2) 44

Tabela 3.1 Amplitudes Generalizadas - Plataforma Auger - Pré-tensão Nominal 86

Tabela 3.2 Idem à Tabela 3.1. Pré-tensão reduzida em 15% 86

Tabela C.1 Matriz de Termos de Acoplamento - Plataforma Hutton C-4

Tabela C.2 Idem à Tabela C.1. Plataforma Auger C-4

Tabela C.3 Matriz de Termos de Correlação Modal - Plataforma Hutton..... C-4

Tabela C.4 Idem à Tabela C.3. Plataforma Auger C-4

LISTA DE SÍMBOLOS

ALFABETO ROMANO

a	-	comprimento característico
A	-	amplitude de onda incidente
B_n	-	coeficientes definidos em (A.3)
B_v	-	coeficiente de amortecimento quadrático
c_n	-	parâmetro da equação de Mathieu (3.16)
c^c_n	-	parâmetro da equação de Mathieu (3.20)
C_m	-	coeficiente de massa adicional em *heave*
C_{nk}	-	coeficiente de correlação linear definido em (C.18)
d	-	profundidade média de submersão do corpo
D_n	-	coeficientes definidos em (2.3)
$f(t)$	-	força inercial vertical de primeira ordem
$f_n(t)$	-	amplitude generalizada de oscilação lateral do tendão no n-ésimo modo de vibração
$F(Ka)$	-	função de forma definida em (2.4)
g	-	aceleração da gravidade
$\{I_1,...,I_5\}$	-	fatores definidos em (3.15)
$\{I^c_1,...,I^c_3\}$	-	fatores definidos em (3.22)
J_0	-	função de Bessel de primeira espécie e ordem zero
K	-	número de onda
L	-	comprimento de tendão
M	-	massa seccional dos tendões em vibração lateral
P	-	pré-tensão imposta ao tendão
q_n	-	parâmetro da equação de Mathieu (3.16)
q^c_n	-	parâmetro da equação de Mathieu (3.20)
r	-	coordenada polar radial
$R(x,y,t)$	-	função resíduo definida em (A.7)
R_{nk}	-	termo de restauração definido em (C.15)
S_0	-	amplitude de tração dinâmica imposta ao tendão
t	-	tempo

$T(x,t)$	-	tração total ao longo do tendão
$T_c(t)$	-	parcela da tração total definida em (C.10)
$T_d(t)$	-	tração dinâmica ao longo do tendão
$T_e(x)$	-	tração estática ao longo do tendão
(u,v)	-	componentes de velocidade do sistema dinâmico equivalente definido em (2.11)
v_0	-	componente de velocidade vertical da partícula fluida
$w(z)$	-	potencial complexo de escoamento adimensionalizado
$W(z)$	-	potencial complexo de escoamento
(x,y)	-	coordenadas cartesianas (Parte I: adimensionalizado por (a))
(X,Y)	-	coordenadas cartesianas dimensionais (Parte I)
(x_e,y_e)	-	pontos de estagnação do escoamento
$X_n(x)$	-	forma modal de vibração lateral do tendão no n-ésimo modo
Y_0	-	função de Bessel de primeira espécie e ordem zero
z	-	coordenada complexa $(x+iy)$

ALFABETO GREGO

α	-	parâmetro de controle das funções de forma
β_n	-	variável definida em (3.9)
δ_n	-	parâmetro da equação de Mathieu (3.16)
δ^c_n	-	parâmetro da equação de Mathieu (3.20)
Δ	-	deslocamento em peso da plataforma
η	-	variável definida em (3.8)
θ	-	coordenada polar angular
μg	-	peso linear submerso do tendão
ρ	-	densidade da água
σ	-	diferença de fase na tração dinâmica (3.3)
τ	-	variável de tempo adimensional
$\phi(x,y)$	-	potencial real de escoamento
$\phi_3(x,y,t)$	-	potencial de radiação definido em (A.7)

$\phi_w(x,y,t)$	-	onda estacionária definida em (A.16)
$\varphi(x,y)$	-	função definida em (A.8)
$\psi(x,y)$	-	função de linhas de corrente do escoamento
$\psi_e(x,y)$	-	linhas de corrente associadas a pontos de estagnação
ω	-	freqüência circular de oscilação
ϖ_n	-	freqüência natural de oscilação lateral dos tendões no n-ésimo modo de vibração

RESUMO

As plataformas de pernas tracionadas (*Tension Leg Platforms*, ou TLPs) constituem atualmente um dos conceitos de sistemas oceânicos mais promissores no que se refere à exploração de petróleo a grandes profundidades. As pesquisas iniciais em torno de sua concepção datam da década de setenta e, até o momento, apenas seis plataformas deste tipo foram efetivamente construídas. Tendo em vista a história de desenvolvimento deste sistema, observa-se atualmente um consenso entre projetistas de que seu projeto apresenta ainda grande potencial de aprimoramento.

O trabalho ora proposto aborda dois aspectos relativos ao projeto deste sistema oceânico. O primeiro tem por objetivo o estudo de formas bidimensionais submersas alternativas visando a minimização das forças hidrodinâmicas inerciais atuantes sobre as mesmas em determinada faixa de freqüências de interesse. Esse estudo é fundamentado no trabalho originalmente proposto por ARANHA; PINTO (1994) no qual é apresentada uma extensão para o bem conhecido termo de inércia da equação de Morison, válida para toda a faixa de freqüências de excitação. Com base no efeito de difração em ondas curtas, a formulação permite associar diretamente o campo de escoamento potencial ao comportamento da força inercial vertical. Uma metodologia para levantamento das formas geométricas associadas é elaborada a partir da analogia entre o referido campo potencial e sistemas dinâmicos conservativos. Várias geometrias resultantes deste processo são estudadas e a possível aplicação ao projeto de plataformas TLP é discutida.

O segundo tópico estuda a dinâmica dos tendões sob excitação paramétrica vertical. A tendência de utilização de plataformas TLP em águas cada vez mais profundas e com pré-tensões reduzidas acentua a influência deste fenômeno sobre a dinâmica global do tendão. Nesse contexto, o modelo de representação senoidal das formas modais de vibração lateral desses elementos, normalmente adotado no estudo do problema, torna-se pouco adequado. A variação da tração estática ao longo do comprimento do tendão passa a exercer significativa influência sobre a dinâmica em estudo. Um modelo para a representação dos modos naturais de vibração incorporando tais efeitos de variação de tração estática é então formulado. O fenômeno de excitação paramétrica é estudado modelando-se a dinâmica envolvida na forma canônica de uma equação de Mathieu, analisando-se as instabilidades dinâmicas envolvidas e verificando-se como tal fenômeno é afetado pelas tendências de projeto supra citadas. Através da comparação com os resultados obtidos ao se desconsiderar a variação de tração estática ao longo do tendão pode-se, ainda, atestar a relevância do modelo de representação proposto ao fenômeno aqui abordado e apontar como sua aplicação pode ser de interesse a outros problemas usuais em engenharia oceânica.

ABSTRACT

The Tension Leg Platform (TLP) represents one of the most promising solutions for the ultra-deep water oil exploitation. Research concerning this concept started in the early seventies but, until now, only a few platforms of this kind have effectively been built. Based on the previous history that distinguishes the development of this kind of system, it's now a consensus that the TLP design has a great potential for further improvements.

The work here presented deals with two important topics related to present and future TLP designs. The first objective is to propose alternative two-dimensional submerged geometries that minimize the first order inertial forces acting upon them due to wave effects, within a certain range of frequencies. The work is based on the formulation proposed by ARANHA; PINTO (1994) in which a extension to the well-known inertial term in Morison's formula is derived, valid for the whole range of frequencies. Through the representation of high frequency diffraction effects, a direct association between the potential flow field and the vertical inertial force behavior is performed. A methodology for the determination of the searched associated geometries is here proposed, based on analogy between the potential flow field and conservative dynamic systems. Various cross-sectional forms obtained through this process are evaluated and their potential application in actual TLP designs is also discussed.

As a second topic, the tether's transversal dynamics under vertical parametric excitation is investigated. As the TLP utilization moves towards deeper waters with a desired reduction of the usually high values of tether's pretension, the effect of the mentioned parametric excitation on the tether's dynamic behavior becomes more significant. Also, under these circumstances, the consideration of sinusoidal modal forms of tether's lateral vibrations does not lead to an accurate dynamic representation. The variation of static tension along the tether's length exerts significant influence on the considered dynamics. Based on this forethought, an analytical model for the representation of tether's modal forms of lateral vibration considering static tension variation along the length is then proposed. Through a Mathieu representation, the problem associated with the dynamic stability is analyzed. The effect of the modern trends in TLP's design on the tether's dynamics is also verified. Finally, by comparison with results obtained under a constant static tension approach, one may attest the relevance of the proposed model concerning the considered dynamic phenomenon and also point out its possibly pertinent application to other related offshore engineering problems.

1 INTRODUÇÃO

A exploração de petróleo em águas oceânicas é uma atividade que vem se desenvolvendo há várias décadas. Inicialmente restrita a águas rasas, nas quais a produção pode ser efetuada de maneira viável por intermédio de plataformas fixas, a exploração tem caminhado naturalmente ao longo dos últimos anos para pontos cada vez mais distantes das costas. À medida em que se avança sobre águas mais profundas, as plataformas fixas tornam-se inviáveis e novos tipos de plataformas oceânicas são desenvolvidos. Dentre as plataformas flutuantes o projeto mais difundido e bem estabelecido é, certamente, o projeto de plataformas semi-submersíveis. Este tipo de sistema oceânico teve uma grande expansão a partir dos anos 70 e pode-se dizer que já na década seguinte seu projeto atingiu uma configuração padrão bastante equilibrada em termos de desempenho no mar, capacidade de produção e viabilidade econômica.

Em anos mais recentes, contudo, a necessidade de se viabilizar campos de prospecção em águas de grande profundidade tem-se mostrado cada vez mais impositiva. Ultrapassou-se a barreira dos mil metros de profundidade e atualmente já se projeta visando-se lâminas d'água superiores a dois mil metros, as chamadas águas ultra-profundas. O domínio da tecnologia de produção nestas condições é questão prioritária para a indústria de petróleo mundial e o desenvolvimento de sistemas oceânicos mais adequados para este tipo de operação é hoje, sem dúvida, o desafio que tem impulsionado as pesquisas mais significativas em engenharia oceânica. Neste contexto novas concepções de plataformas surgiram, dentre as quais destacam-se, por

exemplo, as plataformas de pernas tracionadas (*Tension Leg Platforms*, ou abreviadamente TLPs) e as plataformas tipo *Spar*.

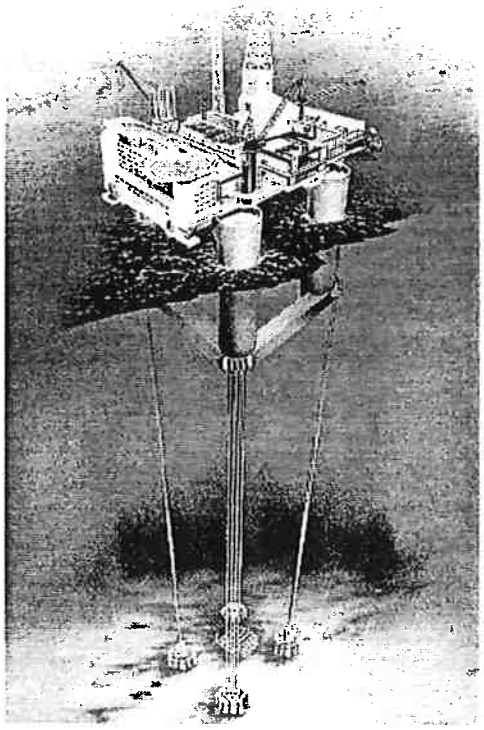


Figura 1.1 - Plataforma TLP: Configuração Típica

As plataformas TLP constituem o objeto do principal do trabalho aqui proposto e, assim, convém discutir alguns aspectos que caracterizam seus projetos. Este tipo de sistema oceânico é basicamente constituído de um casco flutuante com configuração de colunas e flutuadores (*pontoons*) semelhante à apresentada por plataformas semi-submersíveis (ver figura 1.1). O casco é preso ao solo por intermédio de tubos de aço denominados tendões. Impõe-se ao casco um calado superior àquele que a plataforma apresentaria nas mesmas condições, se flutuando livremente. À tração estática imposta aos tendões pelo resultante excesso de flutuação do casco dá-se o nome de pré-tensão. Graças à elevada rigidez proporcionada pelos tendões ao movimento vertical (*heave*) e movimentos angulares de *roll* e *pitch*, tais movimentos são minimizados e as freqüências naturais relativas aos mesmos são bastante altas, com períodos naturais da

ordem de 3 a 4 segundos. Assim, ao contrário do projeto de plataformas semi-submersíveis, as freqüências naturais de movimentos no plano vertical são, no caso de plataformas TLP, deslocadas para uma faixa de freqüências superior àquela de energia significativa de ondas do mar. Por outro lado, os movimento de translação no plano horizontal (*surge* e *sway*) são movimentos complacentes, com períodos naturais normalmente superiores a 100 segundos.

O valor de pré-tensão adotado corresponde a um dos principais parâmetros de projeto do sistema. Sua finalidade principal é prover força de restauração suficiente de forma a limitar os valores de *offset* (ou deslocamentos horizontais) do casco. Os tendões apresentam liberdade de movimento vertical de forma a se evitar qualquer esforço de compressão sobre os mesmos. No entanto, temendo-se os possíveis danos causados pelo súbito tracionamento dos tendões após um eventual instante de tração nula, adotou-se, como norma de projeto, um limite mínimo positivo para a tração. A margem de projeto adotada para a tração mínima é normalmente semelhante àquela imposta tendo em vista os carregamentos máximos do tendão.

As principais motivações que levaram a indústria petrolífera a romper as resistências naturais associadas à utilização de novas e desconhecidas tecnologias podem ser facilmente resumidas: O conceito de plataforma TLP apontava para um sistema capaz de admitir completação seca de maneira bastante similar às plataformas fixas. Isto é possível graças aos pequenos movimentos de *heave*, *roll* e *pitch* do sistema e implica em significativa redução de custos. Não obstante, tendo em vista a relativa

flexibilidade inerente à escolha das freqüências naturais do sistema, acreditava-se ser possível livrar as plataformas TLP de qualquer efeito dinâmico ressonante.

Desde o projeto da primeira TLP, a plataforma *Hutton*, instalada em 1984 no Mar do Norte em lâmina d'água de apenas 150 m, a forma de casco das TLPs construídas posteriormente, até o presente momento, segue o mesmo padrão, sem alterações significativas. Prova disto reside, por exemplo, no fato de que as cinco TLPs construídas até 1995 apresentam quatro grupos de tendões verticais paralelos com três ou quatro tendões em cada grupo. A plataforma Hutton tem quatro colunas principais e duas auxiliares, as demais tem quatro colunas em distribuição quadrangular. Todas as plataformas apresentam, ainda, arranjo dos *pontoons* em anel, sem treliças de suporte estrutural. Outra característica comum no projeto de cascos de plataformas TLP diz respeito à adoção de calados bastante profundos e *pontoons* de área seccional reduzida. A flutuação do sistema é dada, então, em sua maior parte pelas colunas que, dessa forma, assumem grandes proporções.

A configuração de casco acima descrita tem como finalidade principal a redução das forças de excitação por ação de ondas atuantes sobre *pontoons* e base das colunas e, conseqüentemente, a minimização da tração dinâmica imposta aos tendões. Todavia, à época em que se deram os primeiros passos no sentido de se elaborar este padrão de casco, pouco se sabia a respeito de efeitos não-lineares em altas freqüências. Excitação axial dos tendões de segunda ordem em alta freqüência foi observada inicialmente nos testes em modelos da plataforma *Snorre*, instalada em 1992. Tal excitação era de magnitude suficiente para causar preocupação com relação à fadiga dos tendões. Ao

fenômeno deu-se o nome de *springing*. O fenômeno de *ringing*, por sua vez, corresponde a um efeito de vibração lateral dos tendões, excitados por forças impulsivas de terceira ordem atuantes sobre o casco, principalmente devido ao impacto de ondas de maiores proporções. Tal efeito foi observado já nos testes em modelos reduzidos da plataforma Hutton, mas seu efeito sobre os tendões não se mostrou significativo. Fato semelhante foi verificado para as plataformas que a sucederam e, assim, este fenômeno foi considerado de importância menor, pelo menos até o projeto da plataforma *Heidrun*. Quinta TLP a entrar em operação, a plataforma Heidrun se caracteriza por ser a maior TLP já construída, apresentando um deslocamento de 288 mil toneladas a um calado de operação de 77 metros e com 4 colunas de concreto de 31 metros de diâmetro. Testes realizados durante seu projeto indicaram que o fenômeno de *ringing* é responsável por até 50% do carregamento dinâmico em seus tendões.

A verificação experimental dos efeitos não-lineares acima descritos jogou por terra a inicialmente promissora idéia de se obter um sistema livre de efeitos ressonantes. Algumas características, em particular o grande diâmetro de colunas, acentuam tais efeitos e o estudo aprofundado dos mesmos se tornou, então, de fundamental importância para os projetos atuais de plataformas TLP. Na verdade, a configuração de casco usualmente adotada por minimizar as forças excitantes em primeira ordem não repete seu desempenho no que se refere aos fenômenos de ordem superior.

O projeto usual de TLPs atualmente seguido como modelo resultou em grande parte da experiência previamente acumulada em sistemas oceânicos, em particular com relação às plataformas semi-submersíveis. Muitos dos conceitos naturalmente

importados para plataformas TLP resultam atualmente em fortes restrições ao desenvolvimento de projetos mais eficientes. Existe hoje, como apontado por NATVIG; VOGEL (1995), um consenso entre projetistas de que o projeto de TLPs apresenta ainda um grande potencial de refinamento. Este refinamento, já atualmente desejado, torna-se no entanto essencial ao se considerar as principais tendências verificadas para a utilização futura deste tipo de sistema. Tais tendências estão certamente ligadas à vocação natural das plataformas TLP como sistemas viáveis em grandes profundidades. De fato, muitas das grandes indústrias petrolíferas, hoje detentoras de tecnologia de ponta no que se refere à exploração em águas profundas, vêem este sistema como uma das principais soluções para o caso de águas ultra-profundas. A análise de como estas tendências podem afetar o desempenho das plataformas TLP merece então uma discussão mais detalhada.

À medida em que se caminha para águas mais profundas, os custos envolvidos no projeto de sistemas oceânicos crescem exponencialmente. A viabilização econômica dos mesmos leva assim, naturalmente, ao projeto de plataformas cada vez maiores. Capacidades de produção mais elevadas são fundamentais para contrabalançar o significativo aumento dos custos de projeto. Esta tendência já se verifica concretamente, por exemplo, no projeto da plataforma Heidrun. Ainda no sentido de se aprimorar a eficiência produtiva do sistema, uma segunda tendência atualmente presente diz respeito à redução dos usualmente elevados valores de pré-tensão. Pré-tensão em excesso significa menor capacidade de carga no convés e, portanto, menor capacidade de produção. Tendo em vista as hipóteses fortemente conservadoras de carregamento ambiental normalmente assumidas para determinação das condições extremas de

carregamento do sistema, sabe-se que tal redução é tarefa não muito complexa. Mesmo a limitação dos valores mínimos de tração já tem sido de certa forma relaxada. O projeto da plataforma Heidrun já prevê a possibilidade de ocorrência de tração nula sobre os tendões, durante breves períodos, em situações ambientais extremas.

Uma vez estando efeitos não-lineares diretamente associados às dimensões de colunas, mantidas as atuais configurações em cascos de crescentes proporções, pode-se esperar influência cada vez mais crítica dos fenômenos de *springing* e *ringing* sobre o sistema. Ainda no que diz respeito à dinâmica dos tendões, efeitos que atualmente são de menor importância quanto à fadiga destes elementos podem não continuar a sê-lo no caso de grandes profundidades e com trações estáticas reduzidas. Dentre tais efeitos, o mais evidente corresponde à oscilação lateral dos tendões sob excitação paramétrica vertical.

O já mencionado potencial de refinamento inerente ao projeto de plataformas TLP e as implicações relativas às tendências de emprego futuro das mesmas constituem a base de motivação para o desenvolvimento do presente trabalho de pesquisa. Dois tópicos são abordados. O primeiro relaciona-se ao estudo de possíveis formas geométricas seccionais alternativas, visando a minimização das forças inerciais de primeira ordem sobre os *pontoons*. O segundo, por sua vez, apresenta um modelo analítico de representação dos modos naturais de vibração lateral dos tendões o qual é empregado para a análise de estabilidade dinâmica dos mesmos sob excitação paramétrica.

ARANHA; PINTO (1994) desenvolveram extensão analítica para o bem conhecido termo de inércia da equação de Morison para a representação da força vertical de primeira ordem sobre cilindros submersos. Tal extensão é válida para toda a faixa de freqüências de excitação. A formulação, desenvolvida no contexto da teoria de escoamento potencial, descreve os efeitos de difração associados à geometria do corpo no regime de ondas curtas através de coeficientes analiticamente relacionados ao potencial complexo de escoamento. Abre-se a possibilidade de se determinar, por intermédio desta formulação, formas bidimensionais associadas a um comportamento preestabelecido das forças inerciais atuantes sobre as mesmas.

Com base nesta formulação, o capítulo 2 deste trabalho trata do estudo de possíveis formas seccionais que venham a minimizar estas forças de excitação em determinadas freqüências de onda incidente. A possibilidade de se projetar *pontoons* de dimensões maiores, sem com isso aumentar as forças de excitação de primeira ordem sobre o sistema, abriria caminho para a redução das grandes dimensões de colunas atualmente verificadas. A otimização hidrodinâmica das formas do casco de sistemas oceânicos, já discutida na literatura especializada para o caso de plataformas semi-submersíveis (ver seção 2.1), seria de fundamental importância no caso de plataformas TLP. Permitiria, em resumo, se repensar as configurações adotadas como padrão para o casco deste tipo de sistema e, dessa forma, superar muitas das barreiras atualmente presentes quanto ao desenvolvimento futuro do mesmo.

A segunda parte deste trabalho, compreendida no capítulo 3, trata do estudo de um fenômeno que certamente ganha importância, tendo-se em vista as tendências que

norteiam os projetos futuros de plataformas TLP. Sabe-se hoje que a atual configuração de tendões implica em oscilações laterais dos mesmos, excitadas paramétricamente por movimentos verticais do casco. Mais ainda, sabe-se que, em águas profundas, condições dinâmicas instáveis relativas a este fenômeno são praticamente inevitáveis. Graças, no entanto, aos elevados valores de pré-tensão atualmente empregados, os danos decorrentes deste tipo de oscilação tem sido relativamente pequenos. Contudo, à medida em que se caminha para águas mais profundas e se vislumbram substanciais reduções de tração estática, este panorama pode ser radicalmente modificado.

Seguindo-se procedimento usual na literatura, a dinâmica do fenômeno é representada na forma canônica de uma equação de Mathieu. Todavia, o modelo de representação dos modos naturais até então empregado considera tração estática constante ao longo do comprimento dos tendões e, dessa forma, tem sua eficiência comprometida no contexto acima mencionado. A redução dos valores de pré-tensão torna os efeitos de variação da tração estática significativos em sua dinâmica lateral. Propõe-se então um novo modelo de representação dos modos naturais de vibração lateral, incorporando-se o efeito de variação de tração estática ao longo do comprimento do tendão.

Apesar de aplicado ao caso específico de excitação vertical paramétrica, o campo de aplicação deste modelo abrange, certamente, outros fenômenos relativos à dinâmica lateral dos tendões. Dessa forma, além de uma análise crítica do fenômeno de excitação paramétrica dos tendões, o objetivo perseguido neste segundo tópico de pesquisa inclui, de maneira suplementar, a elaboração de uma ferramenta analítica que

facilite a análise preliminar de outros problemas dinâmicos relevantes. Dentre tais problemas pode-se mencionar, por exemplo, o fenômeno de *ringing* dos tendões ou ainda o estudo dinâmico de *risers* e cabos umbilicais, entre outros.

O capítulo 4 conclui este trabalho, destaca os principais resultados oriundos de ambos os tópicos de pesquisa em questão, tece algumas considerações finais e sugere futuros desenvolvimentos para a continuidade do mesmo.

O trabalho apresenta adicionalmente 4 apêndices. O apêndice A apresenta a formulação básica desenvolvida em ARANHA; PINTO (1994). O apêndice B esquematiza as forças e momentos de excitação resultantes sobre uma das formas bidimensionais estudadas na primeira parte, apresentada na seção 3.4.2. O equacionamento completo do problema dinâmico de excitação paramétrica dos tendões, com todos os acoplamentos modais envolvidos, é apresentado no apêndice C. O apêndice D, por fim, detalha o trabalho algébrico envolvido na representação do problema clássico de Sturm-Liouville associado à representação dos modos naturais de vibração lateral dos tendões por intermédio de uma equação de Bessel modificada.

PARTE I

2. ESTUDO DE FORMAS BIDIMENSIONAIS

O presente capítulo, o qual compreende a primeira parte deste trabalho, visa estudar formas geométricas bidimensionais geradas a partir de formulação proposta por ARANHA; PINTO (1994). Tal formulação baseia-se (ver seção 2.2) na obtenção de uma extensão para o bem conhecido termo de inércia da equação de Morison, válida para toda a faixa de freqüências de excitação. Resulta explícito neste equacionamento o fator que descreve a influência das formas geométricas do corpo submerso sobre a força excitante de primeira ordem devido ao efeito de difração de ondas. A este fator foi dado o nome de *função de forma*. ARANHA; PINTO (1994) propõem, então, a geração de formas bidimensionais de corpos submersos a partir de funções de forma preestabelecidas, visando a minimização das forças de excitação de origem inercial em uma dada faixa de freqüências.

O objetivo principal do estudo ora proposto consiste no levantamento de formas bidimensionais, com forças de excitação de primeira ordem minimizadas segundo o equacionamento acima citado, e que possam representar alternativas de interesse em termos de projetos oceânicos usuais, em particular os projetos de plataformas TLP. Tendo em vista tal objetivo, desenvolve-se uma metodologia para a representação do campo de escoamento potencial associado a uma determinada função de forma. Esta metodologia, apresentada na seção 2.3, baseia-se na analogia entre campos de escoamento potencial e sistemas dinâmicos não-dissipativos e permite, uma vez

estabelecida a função de forma de interesse, obter-se as linhas de corrente do escoamento associado e (caso exista) o corpo bidimensional associado.

Várias funções de forma com características desejáveis quanto à redução de forças excitantes foram analisadas. As seções 2.4 e 2.5 apresentam e discutem os resultados obtidos a partir de algumas destas funções, aquelas que potencialmente apresentam maior interesse do ponto de vista de possíveis alternativas práticas de projeto.

Ainda, uma vez que a formulação sobre a qual se fundamenta o estudo proposto é exata no contexto de corpos que apresentem uma profundidade de submersão suficientemente grande a ponto de se desprezar efeitos de superfície livre sobre o campo de escoamento potencial, a influência de tais efeitos em função da profundidade de submersão deve ser verificada. Tal verificação corresponde a uma das várias etapas subseqüentes de projeto que devem ser trilhadas no sentido de se validar a aplicação prática das formas alternativas em estudo. A seção 2.6 se encarrega portanto, encerrando a primeira parte deste trabalho, de tecer algumas considerações relevantes advindas da análise das formas levantadas e discutir as etapas de estudo subseqüentes necessárias no sentido de se verificar a adequação de tais formas a projetos oceânicos reais e as possíveis vantagens resultantes de sua utilização.

2.1 Breve Histórico Bibliográfico

Tendo em vista a complexidade inerente ao tema abordado, a bibliografia existente sobre o mesmo é, não obstante sua indiscutível relevância, bastante esparsa.

BESSHO (1965) propôs um método para determinação de formas bidimensionais, as quais, no contexto da teoria potencial, não irradiam ondas ao oscilar verticalmente em uma determinada freqüência. Não irradiando ondas, tais formas, com base na relação de Haskind (ver, por exemplo, MEI (1983) pg. 326), apresentarão força de excitação vertical nula resultante da ação de uma onda regular com a mesma freqüência. A metodologia proposta por BESSHO (1965) baseia-se na determinação de um potencial de velocidades que satisfaça a condição de superfície-livre e, ao mesmo tempo, implique em amplitude de onda irradiada nula em uma dada freqüência. Tal potencial advém, em sua formulação, de um operador diferencial adjunto da condição de superfície-livre e é representado por meio de singularidades básicas do escoamento como fontes e sorvedouros. Uma vez estabelecido tal potencial, identificando-se as linhas de corrente associadas a pontos de estagnação do mesmo, gera-se um grupo de corpos bidimensionais, que cruzam a superfície, e que apresentam força de excitação vertical nula para uma determinada freqüência de onda.

Com o mesmo objetivo porém partindo de um outro enfoque, MOTORA; KOYAMA (1965) buscam a identificação de corpos com as mesmas propriedades quanto à excitação vertical em ondas acima descritas. Assumindo corpos com área de flutuação não nula, a força de excitação vertical apresenta uma parcela que representa a variação de flutuação do corpo devido à passagem da onda e que é determinada com base no potencial de onda incidente não-perturbado, denominada parcela de Froude-Krilov. Esta parcela, obviamente, apresenta-se em fase com a onda incidente. Uma segunda parcela na força de excitação corresponde à força inercial que advém do potencial de onda espalhado pelo corpo. Tal parcela, no entanto, resulta defasada de

180° em relação à onda. A força de flutuação e a força inercial encontram-se, portanto, em anti-fase e, dessa forma, alterando-se as propriedades de inércia e de flutuação do casco é possível obter seu cancelamento para uma dada freqüência de onda incidente. O mencionado trabalho propõe então uma série de corpos bidimensionais e tridimensionais que apresentam como característica geométrica geral um cilindro vertical que cruza a superfície-livre e determina a área de flutuação e, em sua extremidade inferior, um corpo de maiores dimensões, de forma a aumentar a inércia do sistema e trazer a freqüência de cancelamento para uma faixa típica de ondas do mar.

Vários trabalhos adotaram o enfoque apresentado por MOTORA; KOYAMA (1965) buscando minimizar as forças de excitação em plataformas semi-submersíveis. HORTON et al. (1972) analisam configurações usuais de casco de plataformas flutuantes e concluem que, para estas configurações, não seria possível se projetar uma plataforma semi-submersível de dimensões razoáveis e que apresentasse uma freqüência de cancelamento das forças verticais significativamente afastada da freqüência natural de movimento vertical. Assim, para o caso de plataformas semi-submersíveis, o principal meio de redução dos movimentos verticais corresponderia mesmo à otimização dos valores de freqüência natural do sistema. Por outro lado, para o caso de plataformas do tipo TLP, tendo em vista o fato de que suas freqüências naturais são impostas em uma faixa superior àquela de energia significativa das ondas do mar, HORTON et al. (1972) afirmam que o ganho advindo da minimização das forças excitantes através da otimização das formas do casco seria fator fundamental de projeto. Para as configurações de TLP em estudo na época (normalmente um arranjo triangular dos *pontoons* com colunas em seus vértices), o trabalho indica que a desejada

minimização poderia ser obtida, para uma dada freqüência de interesse, através de variações na relação entre volume de colunas e volume de *pontoons*. Um outro trabalho que segue o mesmo enfoque foi desenvolvido por MINKENBERG; SLUIJS (1972) no qual analisa-se como diferentes secções transversais dos *pontoons* influenciam a força de excitação em *heave* do sistema.

YAMASHITA (1981) retoma o conceito proposto por BESSHO (1965) e estuda uma nova série de corpos bidimensionais na superfície que resultam em duas diferentes freqüências de cancelamento da força vertical. Em trabalho posterior YAMASHITA (1985) aplica novamente o conceito de *wave-free distribution* agora, no entanto, visando o cancelamento das forças de *sway*. Resultam deste estudo dois tipos de formas bidimensionais. A primeira é um corpo totalmente submerso e próximo à superfície e a segunda forma corresponde a um corpo cruzando a superfície não-perpendicularmente. Mediante combinação de formas previamente obtidas, NISHIMOTO; MAZZUCO (1989) demonstraram haver configurações para as quais, no contexto teórico envolvido, todas as forças de excitação poderiam ser anuladas em freqüências típicas de ondas do mar. Verificaram no entanto que, para freqüências próximas à freqüência de cancelamento, o aumento destas forças se torna muito acentuado. Por outro lado, baseando-se no conceito de cancelamento entre forças inerciais e de flutuação, os referidos autores propõem modificações das configurações usuais de casco de semi-submersíveis através, por exemplo, da adoção de anéis em torno das colunas. Dessa forma, variando-se a flutuação do sistema, demonstram haver formas para as quais freqüências de cancelamento das forças de *sway* podem ser obtidas sem acarretar significativo aumento das forças de *heave*. Esta idéia é posteriormente aplicada em

NISHIMOTO et al. (1992), conjuntamente com a variação de outros parâmetros de projeto (como a relação entre volumes de colunas e *pontoons*), com o objetivo de minimização das forças de excitação verticais em plataformas semi-submersíveis.

Percebe-se, do acima exposto, que os trabalhos acima mencionados tinham como objetivo final, via de regra, a minimização de forças excitantes sobre plataformas semi-submersíveis. Tendo em vista as baixas freqüências naturais que caracterizam este sistema, a teoria aplicada para cálculo de forças inerciais baseia-se na conhecida equação de Morison, assintóticamente correta no regime de ondas longas. Estudos semelhantes objetivando a determinação de formas seccionais que minimizem as forças verticais em plataformas TLP, todavia, devem inevitavelmente lidar com os problemas de difração associados ao regime de ondas curtas. Partindo deste princípio, ARANHA; PINTO (1994) desenvolveram uma extensão analítica para o bem conhecido termo de inércia da equação de Morison, a qual é válida para toda a faixa de freqüências. Na formulação proposta, todas as informações geométricas necessárias para a consideração dos efeitos de difração estão contidas na então denominada *função de forma*. Tal função é diretamente associada, por sua vez, ao potencial complexo de velocidades. A partir de um comportamento preestabelecido da força de excitação vertical pode-se, então, determinar o campo de escoamento associado e as possíveis formas bidimensionais que impliquem em tal comportamento. O estudo de formas hidrodinâmicas aqui proposto baseia-se neste trabalho. Assim, a formulação desenvolvida por ARANHA; PINTO (1994) fundamenta o estudo desenvolvido ao longo deste capítulo e será apresentada de maneira mais detalhada na seção 2.2.

2.2 Extensão Analítica para a Equação de Morison e as Funções de Forma

Esta seção apresenta sucintamente o procedimento proposto por ARANHA; PINTO (1994), por intermédio do qual formula-se a denominada equação de Morison modificada, válida para toda a faixa de freqüências de excitação. Para tanto, suponha-se a secção transversal de um cilindro submerso a uma profundidade relativamente grande, sendo (d) a distância do centro da secção O(0,0) à superfície livre, conforme esquematizado na figura 2.1.

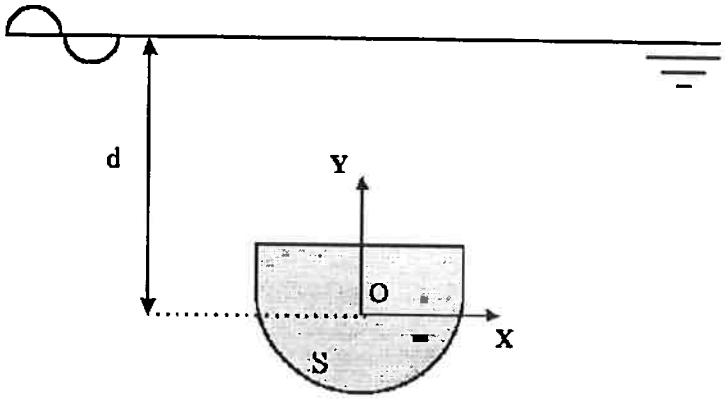


Figura 2.1 - Representação Esquemática do Problema

A ação de uma onda harmônica de amplitude A e freqüência circular ω induz em O uma velocidade vertical dada por:

$$v_0(t) = -i\omega A \cdot e^{-Kd} \cdot e^{-i\omega t} \tag{2.1}$$

onde K é o número de onda . A força inercial de *heave* resultante sobre o corpo é definida pelo termo inercial da equação de Morison, na forma:

$$f(t) = \rho S\left(C_m + 1\right) \cdot \frac{dv_0}{dt} \tag{2.2}$$

sendo S a área seccional do corpo e C_m seu coeficiente de massa adicional em *heave*. Nesta representação da força de excitação em *heave*, os efeitos de difração são quase

que completamente ignorados e, assim, o único parâmetro hidrodinâmico associado à geometria do corpo do qual esta força depende é o coeficiente de massa adicional.

A adoção da força excitante acima descrita é adequada, pelo menos em termos de uma primeira estimativa, para análise dos *pontoons* de plataformas semi-submersíveis, por exemplo, dado que os períodos naturais de movimento vertical deste tipo de sistema são normalmente bastante altos (da ordem de 20 segundos). No regime de ondas longas os efeitos de difração podem ser desprezados e, por conseguinte, a parcela de inércia da equação de Morison representa de maneira apropriada a força de Froude-Krilov. No entanto, no caso de plataformas TLP onde os períodos naturais em *heave* são significativamente menores (da ordem de 3 a 4 segundos), sua resposta ressonante é fortemente influenciada por efeitos de difração. Manter-se a simplicidade de representação, advinda da equação de Morison, no caso de altas freqüências depende, portanto, da correta consideração dos efeitos de difração associados às formas geométricas do corpo.

Com esse intuito, retomando-se o caso em análise e normalizando-se as dimensões envolvidas pelo comprimento característico do problema (a) (por exemplo, $a=S^{1/2}$), sendo ($x=X/a$; $y=Y/a$) e z a variável complexa ($z=x+iy$), pode-se definir o potencial de velocidades complexo adimensional w(z) associado ao movimento vertical do corpo com velocidade unitária em fluido sem fronteiras. A função w(z) é analítica na região fluida e pode ser expandida em série de Laurent na forma:

$$w(z) = -\sum_{n=1}^{\infty}(-i)^n \frac{D_n}{z^n} \tag{2.3}$$

Os coeficientes D_n dependem exclusivamente das formas geométricas seccionais do corpo e, no caso particular de um corpo simétrico em relação ao eixo y, como aqui considerado, são coeficientes reais. Este conjunto de coeficientes sintetiza todas as informações geométricas necessárias e, portanto, parece plausível que os efeitos de difração possam ser representados a partir dos mesmos. De fato, considerando-se a função de forma:

$$F(Ka) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(Ka)^n}{n!} \frac{D_{n+1}}{D_1} \tag{2.4}$$

a qual é unicamente definida para cada geometria, conforme demonstrado em ARANHA; PINTO (1994), a força de excitação em *heave* quando os efeitos de difração são incorporados pode ser escrita como:

$$f(t) = \rho S\left(C_M + 1\right) \cdot F(Ka) \cdot \frac{dv_0}{dt} \tag{2.5}$$

A determinação da força de excitação vertical em termos da função de forma é equacionada, de maneira resumida, no apêndice A deste trabalho. Neste equacionamento despreza-se termo da ordem $O((Ka)^2.e^{-2Kd})$ e, portanto, a formulação acima apresentada é exata no contexto de grandes profundidades de submersão do corpo. Em tal contexto certamente se enquadram os *pontoons* de plataformas TLP, para os quais tem-se usualmente $d \cong 3a$.

A equação (2.5) corresponde ao termo de inércia da equação de Morison corrigido pela função de forma F(Ka), a qual traduz a influência geométrica sobre a força de excitação. A mesma representa, então, uma extensão natural da equação de Morison original, válida agora para toda a faixa de freqüências. A figura 2.2 apresenta o

comportamento das funções de forma relativas a geometrias usuais, levantadas por ARANHA; PINTO (1994).

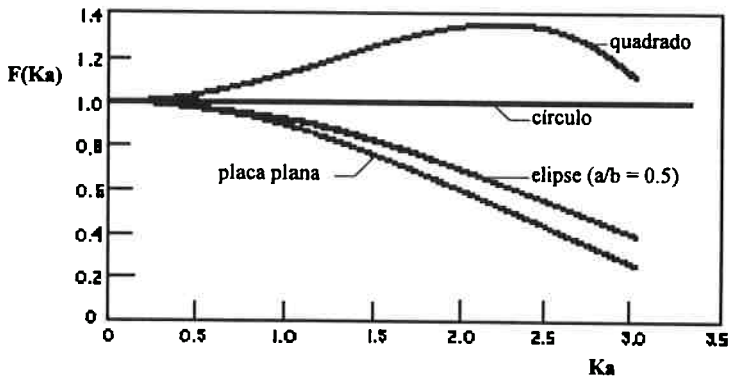


Figura 2.2 - Funções de Forma de Geometrias Usuais (extraída de ARANHA; PINTO (1994))

Deve-se observar que a função de forma tende à unidade quando o parâmetro Ka tende a zero (ou seja, no limite de baixas freqüências) e a expressão (2.5) recupera assim o termo de inércia original da equação de Morison (2.2). Ainda, no caso de uma secção circular, todos os coeficientes D_n são nulos e a função de forma resulta unitária para qualquer freqüência de excitação.

2.3 Metodologia para Levantamento do Escoamento Potencial Associado a Funções de Forma Pré-Definidas

A principal vantagem do equacionamento da força de excitação vertical em termos da função de forma, explicitando-se a influência geométrica do corpo, consiste em permitir o estudo de escoamentos potenciais associados a funções de forma pré-definidas e, assim, verificar a possível existência de corpos bidimensionais que induzam tal campo de escoamento. Em outras palavras, a simplicidade inerente ao equacionamento proposto permite fazer inferências quanto a possíveis corpos bidimensionais gerados a partir de um desejado comportamento da força de excitação

resultante, escolhido *a priori*. Caminha-se, então, no sentido do sempre tão desejado (e raramente encontrado) processo de engenharia no qual geram-se as "causas" uma vez estabelecidas as "conseqüências".

Para tanto, torna-se necessária uma metodologia que permita, em primeiro lugar, definir o campo de escoamento potencial associado a dada função de forma, verificar a existência de corpos físicos que o induzam e, em caso positivo, determinar com exatidão o contorno geométrico dos mesmos. É então proposto nesta seção um modelo analítico-numérico que, tomando partido de analogia entre o campo de escoamento potencial e sistemas dinâmicos não-dissipativos, proporciona um padrão para o estudo hidrodinâmico das possíveis formas geométricas associadas a quaisquer funções de forma preestabelecidas.

Dada uma certa função de forma de interesse, a primeira etapa da metodologia em questão diz respeito ao levantamento analítico do potencial de velocidades ϕ e função de corrente ψ, os quais definem o campo de escoamento. O mesmo é possível graças à associação direta entre a função de forma e o potencial complexo de escoamento através do conjunto de coeficientes D_n, conforme apresentado na seção anterior. De acordo com as características da função de forma em análise, o potencial de velocidades complexo pode resultar em equações também analíticas (como nos exemplos apresentados a seguir) ou devem ser obtidos na forma de séries de potências. Neste último caso, uma análise de convergência deve ser realizada a fim de se determinar o truncamento numérico conveniente para as mesmas.

Uma vez equacionada a função de corrente do escoamento associado, utiliza-se rotina numérica (implementada, no caso, em sistema *MATLAB*) para gerar um conjunto representativo de linhas de corrente constituintes do escoamento. Desta forma, possibilita-se a visualização do campo de escoamento como um todo e a identificação de eventuais corpos isolados (é possível resultar mais de um corpo fechado) indutores de tal escoamento, bem como suas formas geométricas. Essa visualização permite também uma análise do possível interesse prático das geometrias obtidas. Procede-se, então, à segunda parte da metodologia proposta, abaixo descrita.

Sendo o sistema *Hamiltoniano*, uma analogia direta entre o escoamento hidrodinâmico e um sistema dinâmico conservativo bidimensional pode ser efetuada. Uma vez analiticamente definido esse sistema, normalmente caracterizado por fortes não-linearidades, os pontos singulares do mesmo são levantados através de procedimento numérico (no caso, implementado com base no programa *Mathematica*). Dentre os pontos fixos resultantes, são identificados aqueles que correspondem a pontos de estagnação do escoamento hidrodinâmico original e, assim, o valor das linhas de corrente aos quais os mesmos estão associados. De posse desses valores, pode-se retornar à rotina de geração das linhas de corrente e plotar apenas aquelas que efetivamente passam pelos pontos de estagnação, separando-se sobre a superfície do corpo e definindo de maneira exata seu contorno geométrico.

A etapa final consiste de um procedimento numérico para levantamento de dados geométricos do corpo como, por exemplo, sua área efetiva e coeficientes hidrodinâmicos de interesse como o coeficiente de massa adicional.

A aplicação do modelo acima descrito é demonstrada a seguir através de um caso-exemplo. A partir de uma dada função de forma, detalha-se o trabalho analítico envolvido e apresenta-se os resultados numericamente obtidos, os quais levam à definição do corpo bidimensional associado.

2.3.1 Caso-Exemplo: A Função de Forma $F(Ka)= e^{-\alpha Ka}$

Como exemplo ilustrativo de aplicação do modelo proposto, adota-se um caso simples, discutido previamente em ARANHA; PINTO (1994), correspondente à função de forma dada por:

$$F(Ka) = e^{-\alpha Ka} \tag{2.6}$$

onde o parâmetro α é uma constante que, neste caso, controla o decaimento da função de forma* .

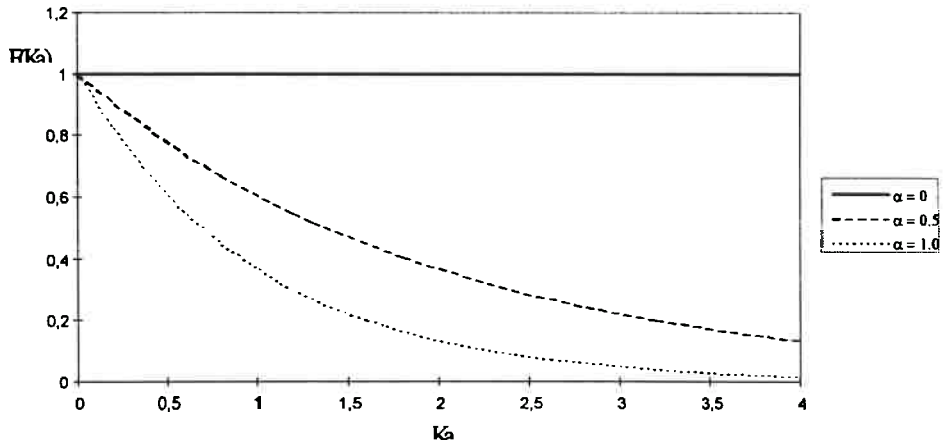


Figura 2.3 - Função de Forma $F(Ka)=e^{-\alpha Ka}$

* Deve-se ressaltar que sabe-se, a priori, que tal função de forma não apresenta interesse prático do ponto de vista de redução da força de excitação (como ficará claro no decorrer da seção). Sua adoção tem por finalidade exclusiva ilustrar o modelo proposto.

Obviamente, para α igual a zero, a função de forma resulta unitária em toda a faixa de freqüências e, conforme mencionado anteriormente, o corpo associado a tal função corresponde a um círculo centrado na origem e de raio (a). São analisados três valores distintos de α (0.0, 0.5 e 1.0) e o comportamento das funções de forma relativas ao casos analisados são apresentadas no gráfico da figura 2.3, acima.

Seguindo ARANHA; PINTO (1994), decompondo-se (2.6) em série de potências em Ka e comparando-se com a equação (2.4), obtém-se $D_n/D_1 = \alpha^{n-1}$. Substituindo-se essa relação na expressão (2.3), o potencial complexo de velocidades w(z) do escoamento associado a esta função de forma resulta:

$$w(z) = \left(i\frac{D_1}{z} + \frac{D_2}{z^2}\right).\left[1 - \left(\frac{\alpha}{z}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{z}\right)^4 - \ldots\right] = \frac{\left(iD_1 z + D_2\right)}{(z^2 + \alpha^2)} \qquad (2.7)$$

Uma vez que F(Ka) depende apenas das relações D_n/D_1, existe uma liberdade para se fixar o valor de D_1, sem perda de generalidade.

Assim, assumindo-se D_1=-1 e sendo $D_2/D_1=\alpha$, o potencial acima pode ser rescrito na forma:

$$w(z) = -i\frac{1}{(z + i\alpha)} \qquad (2.8)$$

O potencial de escoamento associado à função de forma em análise corresponde, então, ao potencial de um dipolo vertical posicionado em ($x=0;y=-\alpha$). Ao potencial acima é acrescentado um termo representativo de um escoamento uniforme vertical, para caracterização do fluxo associado ao movimento de *heave* do corpo, obtendo-se assim o potencial final:

$$w(z) = -i\frac{1}{(z+i\alpha)} + iz \tag{2.9}$$

Uma vez levantado o potencial complexo associado, pode-se analiticamente determinar a função de corrente do escoamento (ψ), a qual corresponde à parte imaginária do mesmo, resultando:

$$\psi(x,y) = -\frac{x}{x^2 + (y+\alpha)^2} + x \tag{2.10}$$

Utiliza-se, então, rotina implementada em sistema *MATLAB* para representar graficamente o escoamento definido pela função de corrente para os diferentes valores do parâmetro α, como apresentado na figura 2.4.

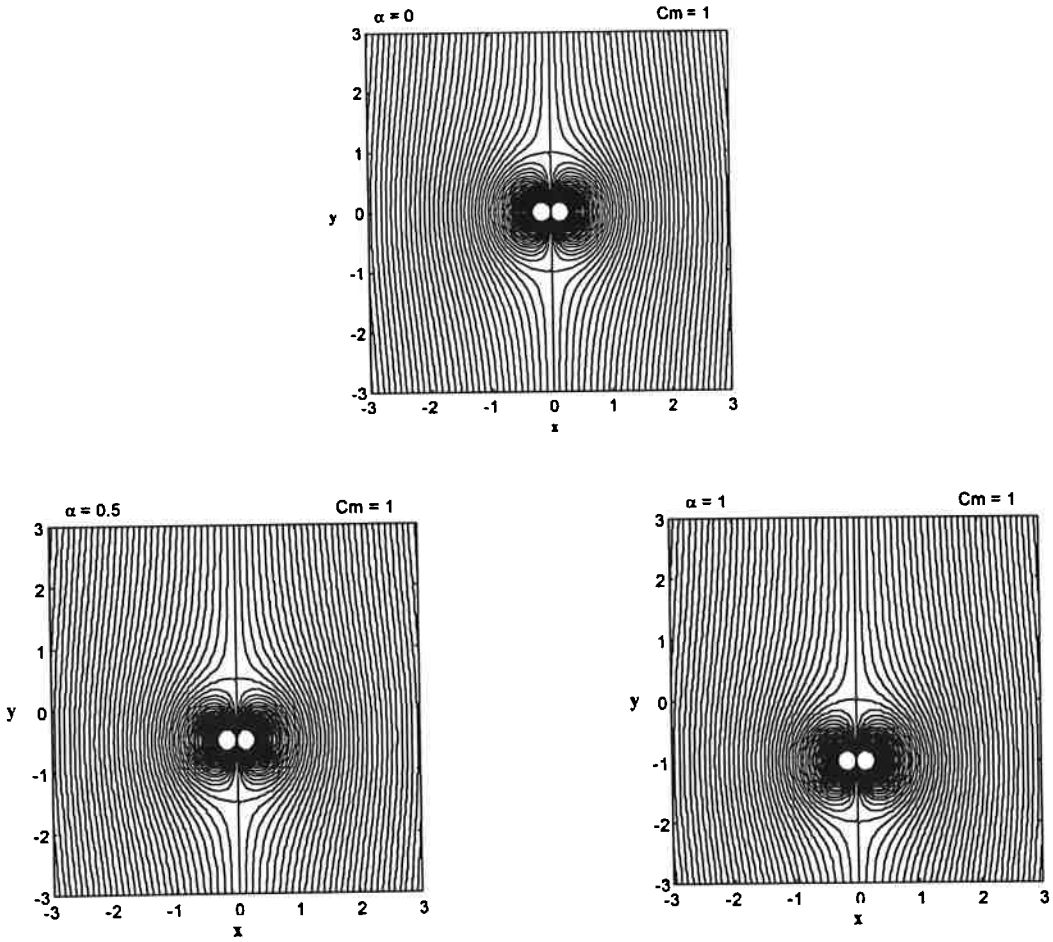


Figura 2.4 - Campos de Escoamento Associados à Função F(Ka) = $e^{-\alpha Ka}$

O sistema dinâmico resultante é não-linear e pode ser expresso analiticamente na forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2x(y+\alpha)}{x^2+(y+\alpha)^2} \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{x^2+(y+\alpha)^2} - \dfrac{2x^2}{\left[x^2+(y+\alpha)^2\right]^2} - 1 \end{cases} \tag{2.12}$$

Via procedimento numérico implementado com base no programa *Mathematica*, identificam-se os seguintes pontos fixos do sistema dinâmico equivalente:

α	$(x_e;y_e)$	ψ_e
0.0	(0.0;1.0) (0.0;-1.0)	0
0.5	(0.0;0.5) (0.0;-1.5)	0
1.0	(0.0;0.0) (0.0;-2.0)	0

Tabela 2.1 - Pontos Fixos do Sistema Dinâmico Associado a $F(Ka)=e^{-\alpha Ka}$

Tomando-se como exemplo o caso α=0, pode-se linearizar o sistema em torno dos respectivos pontos fixos, obtendo-se:

$$(x_e, y_e) = (0.0,1.0) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d\tilde{x}}{dt} = 2\tilde{x} \\ \dfrac{d\tilde{y}}{dt} = -2\tilde{y} \end{cases}$$

$$(x_e, y_e) = (0.0,-1.0) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d\tilde{x}}{dt} = -2\tilde{x} \\ \dfrac{d\tilde{y}}{dt} = 2\tilde{y} \end{cases} \tag{2.13}$$

onde $(\tilde{x}, \tilde{y})$ são as correspondentes coordenadas do sistema linearizado.

É trivial demonstrar que os autovalores $\lambda_{1,2}$ associados ao sistema linearizado acima resultam $\lambda_{1,2} = \pm 2$. A análise dos outros dois casos leva aos mesmos autovalores

e, portanto, os pontos fixos do sistema dinâmico em estudo correspondem a pontos de sela.

Cada ponto de estagnação do escoamento fluido em estudo corresponderá a um ponto de sela do sistema dinâmico análogo. Pode-se, dessa forma, identificar os pontos de estagnação do escoamento e as respectivas linhas de corrente ψ_e que passam pelos mesmos. Tais linhas de corrente separam-se sobre o corpo e, portanto, suas trajetórias delineiam o contorno exato do(s) possível(eis) corpo(s) fechado(s) imerso(s) no campo de escoamento (na terminologia de sistemas dinâmicos as referidas linhas correspondem a órbitas heteroclínicas, ligando dois pontos de sela). No caso em estudo verifica-se a existência de apenas um corpo fechado o qual, portanto, é definido por uma única linha de corrente (ψ_e=0) e a explanação acima pode ser, neste caso, esquematizada pela figura 2.5 a seguir (P1 e P2 são os respectivos pontos de estagnação).

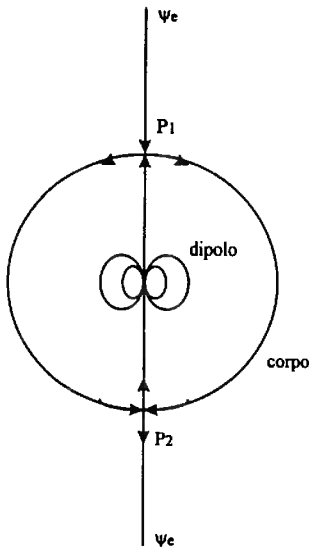


Figura 2.5 - Representação Esquemática da Definição do Contorno do Corpo

Uma vez definidas as linhas de corrente de separação do escoamento pode-se visualizar o contorno exato do corpo, determinar sua geometria e calcular os respectivos coeficientes hidrodinâmicos de interesse.

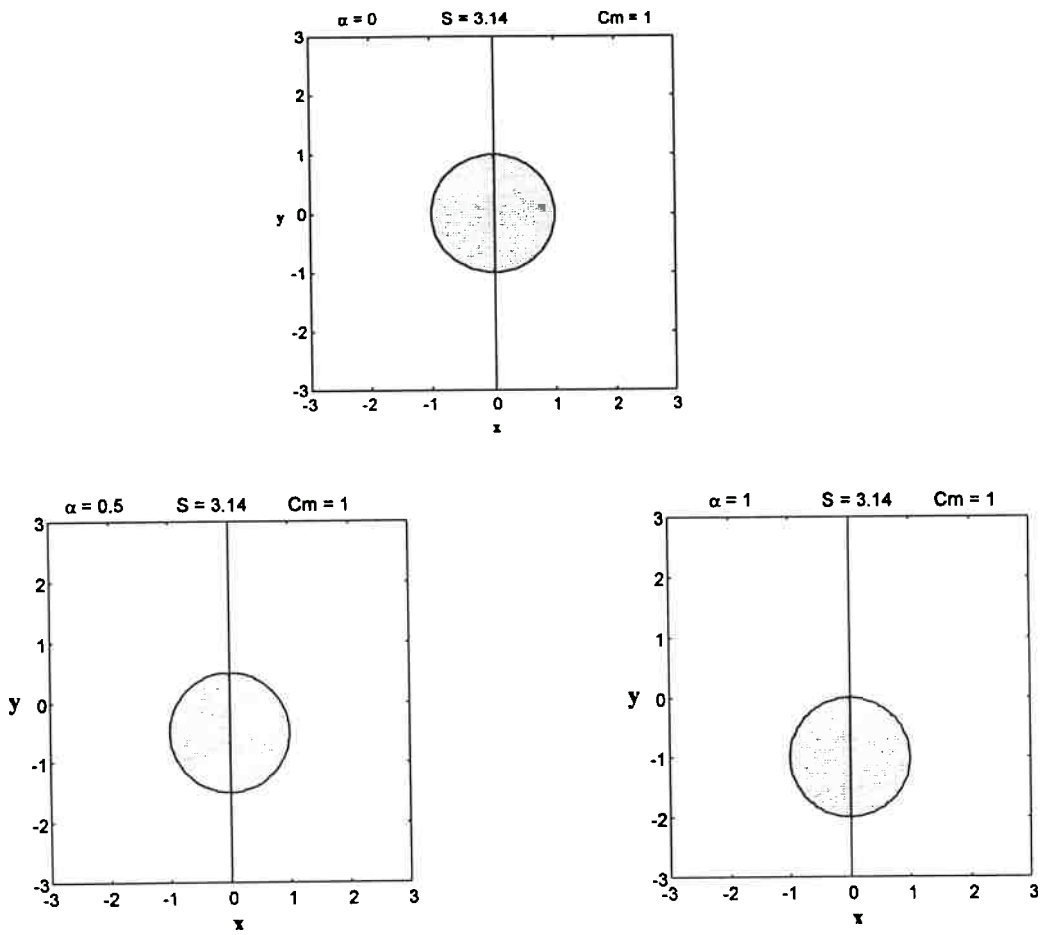


Figura 2.6 - Geometrias Seccionais Associadas à Função F(Ka) = $e^{-\alpha Ka}$

Pode-se perceber através da figura 2.6 que o corpo associado à função de forma em análise corresponde a um círculo de raio (a) (no caso unitário) e centrado em ($x=0;y=-\alpha a$). Tal fato, indicado na própria expressão do potencial complexo de escoamento (2.9), já era esperado. Conforme discutido em ARANHA; PINTO (1994), tomando-se $F(Ka)=e^{-\alpha Ka}$ na equação (2.5), a força de *heave* em um círculo distante

d+αa da superfície é obtida. O decaimento da função F(Ka), verificado na figura 2.3, não corresponde, portanto, a um real decaimento da força de excitação devido a alterações de forma mas sim ao decaimento da força resultante do aumento de profundidade do corpo. O mesmo é explicado uma vez que a função de forma depende do referencial de coordenadas em função do qual a mesma é representada. Em outras palavras, o corpo sofre, neste caso, uma translação vertical dada por $\Delta y = -\alpha a$. A função de forma F(Ka) se refere, no entanto, ao sistema de coordenadas cuja origem se situa em O(0,0). O decaimento apresentado pela função de forma corresponde, então, à redução exponencial de força de excitação decorrente do aumento da profundidade de submersão (Δy).

2.4 A Família de Funções de Forma F(Ka) = $\cos^n(\alpha Ka)$

O estudo da família de funções de forma F(ka) = $\cos^n(\alpha Ka)$ leva, como será demonstrado no decorrer desta seção, a resultados bastante particulares e interessantes do ponto de vista de geometrias seccionais associadas e redução da força inercial de *heave* sobre as mesmas. A análise efetuada para tal família de funções será ilustrada por intermédio de duas de suas representantes: A função F(ka)=cos(αKa) e a função F(ka)=$\cos^4(\alpha Ka)$. É imediata a generalização dos resultados referentes a estes casos particulares, sendo a extensão dos mesmos para o conjunto total das funções englobadas pela família em estudo discutida ao longo das seções subseqüentes.

2.4.1 A Função de Forma F(Ka) = cos(αKa)

Esta função de forma apresenta pontos de cancelamento para freqüências de excitação particulares (denominadas, então, freqüências de cancelamento ω_0), as quais são controladas pelo parâmetro α. Dessa forma, para uma determinada dimensão geométrica representativa (caracterizada pelo comprimento a), pode-se sintonizar a freqüência de cancelamento de interesse, para a qual a força de excitação vertical sobre a secção em análise será nula. O comportamento de tal função de forma é representado na figura abaixo:

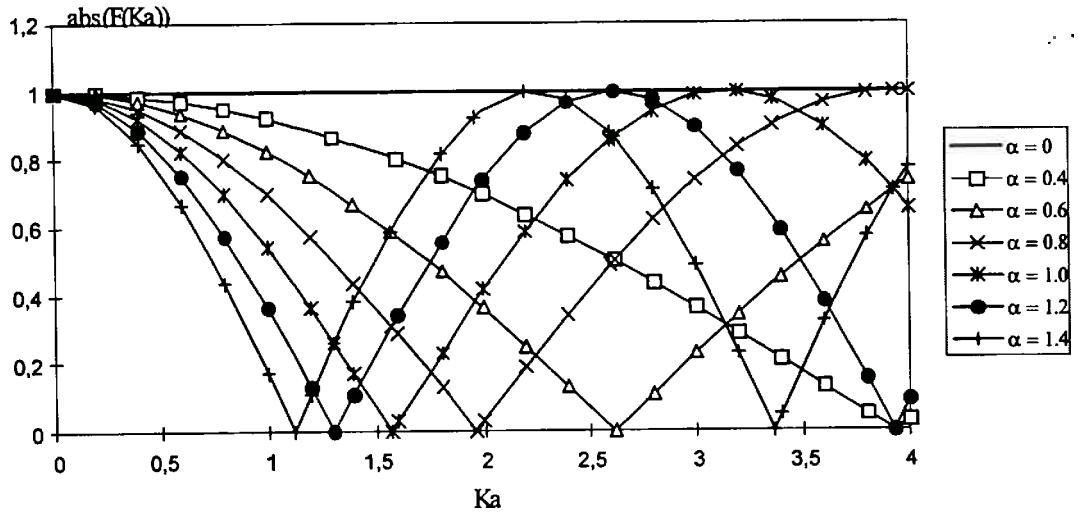


Figura 2.7 - Função de Forma F(Ka) = cos(αKa)

Seguindo o procedimento proposto na seção 2.3, o potencial complexo de escoamento associado a esta função de forma (previamente deduzido em ARANHA; PINTO (1994)), já com o termo de escoamento vertical uniforme incorporado, é dado por:

$$w(z) = -\frac{1}{2}\frac{1}{(z-\alpha)} - \frac{1}{2}\frac{1}{(z+\alpha)} + iz \qquad (2.14)$$

O mesmo corresponde, portanto, ao potencial de escoamento induzido por dois dipolos verticais posicionados respectivamente em ($x=\pm\alpha; y=0$) conjuntamente ao escoamento vertical uniforme imposto.

A função de corrente associada a esse potencial resulta:

$$\psi(x,y) = x\left\{1 - \frac{(x^2 + y^2 - \alpha^2)}{\left[(x^2 - y^2 - \alpha^2)^2 + 4x^2y^2\right]}\right\} \tag{2.15}$$

O campo de escoamento hidrodinâmico resultante pode ser visualizado, para dois casos ilustrativos ($\alpha=0.6$ e $\alpha=1.2$), nas figuras abaixo. Pode-se perceber que o mesmo corresponde a um fluxo em torno de dois corpos separados. Verifica-se ainda que a distância entre os corpos aumenta linearmente com o parâmetro α:

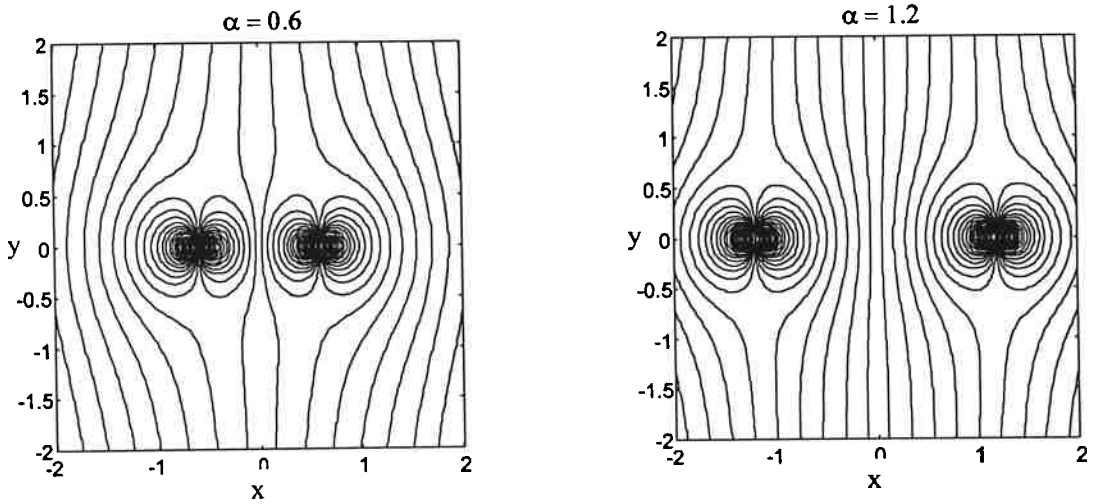


Figura 2.8 - Campos de Escoamento Associados à Função F(Ka) =cos(αKa)

Mediante procedimento análogo ao apresentado na seção anterior, o sistema dinâmico conservativo equivalente ao campo de escoamento potencial associado à

função de forma em análise pode ser determinado utilizando-se a expressão (2.15) em (2.11), resultando:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{2xy}{(x^2-y^2-\alpha^2)+4x^2y^2} + \dfrac{4xy\left[(x^2+y^2)^2-\alpha^4\right]}{\left[(x^2-y^2-\alpha^2)+4x^2y^2\right]^2} \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{3x^2+y^2-\alpha^2}{(x^2-y^2-\alpha^2)+4x^2y^2} - \dfrac{4x^2(x^2+y^2-\alpha^2)^2}{\left[(x^2-y^2-\alpha^2)+4x^2y^2\right]^2} - 1 \end{cases} \tag{2.16}$$

A solução numérica de tal sistema traz, para os dois valores de α exemplificados, os seguintes pontos de estagnação do fluxo e linhas de correntes de separação:

$(x_e;y_e)$	ψ_e
(0.5290;±0.6480)	0.2794
(-0.5290;±0.6480)	-0.2794

Tabela 2.2 - Pontos de Estagnação e Linhas de Corrente Associadas (α = 0.6)

$(x_e;y_e)$	ψ_e
(1.1863;±0.6835)	1.0073
(-1.1863;±0.6835)	-1.0073

Tabela 2.3 - Pontos de Estagnação e Linhas de Corrente Associadas (α = 1.2)

A representação gráfica das linhas acima permite, então, a definição exata do contorno geométrico dos corpos em questão:

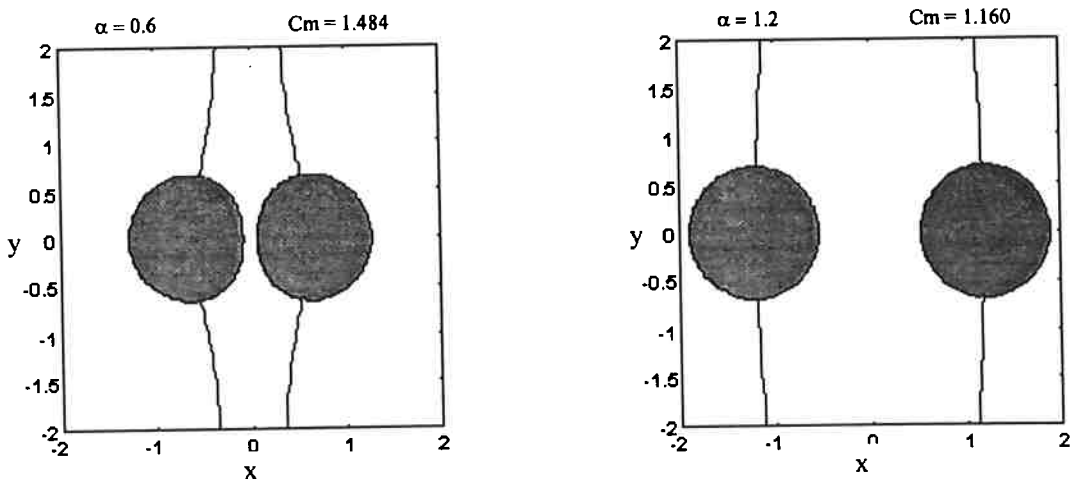


Figura 2.9 - Geometrias Seccionais Associadas à Função F(Ka) =cos(αKa)

O parâmetro α controla a freqüência de cancelamento da força vertical resultante. Pode-se ter uma idéia das magnitudes envolvidas mediante um exemplo ilustrativo: Visando-se, por exemplo, anular a força de excitação vertical para um período de onda de 4 segundos (período típico de ressonância em sistemas TLP) e, considerando-se um comprimento geométrico característico (a) igual a 8 metros, o valor de α que sintoniza a freqüência desejada resulta igual a 0.78. Variando-se, o valor deste parâmetro, gera-se um conjunto de formas seccionais associadas, apresentado na figura 2.10, a seguir. Este conjunto de geometrias apresenta-se normalizado e todas as secções possuem área unitária.

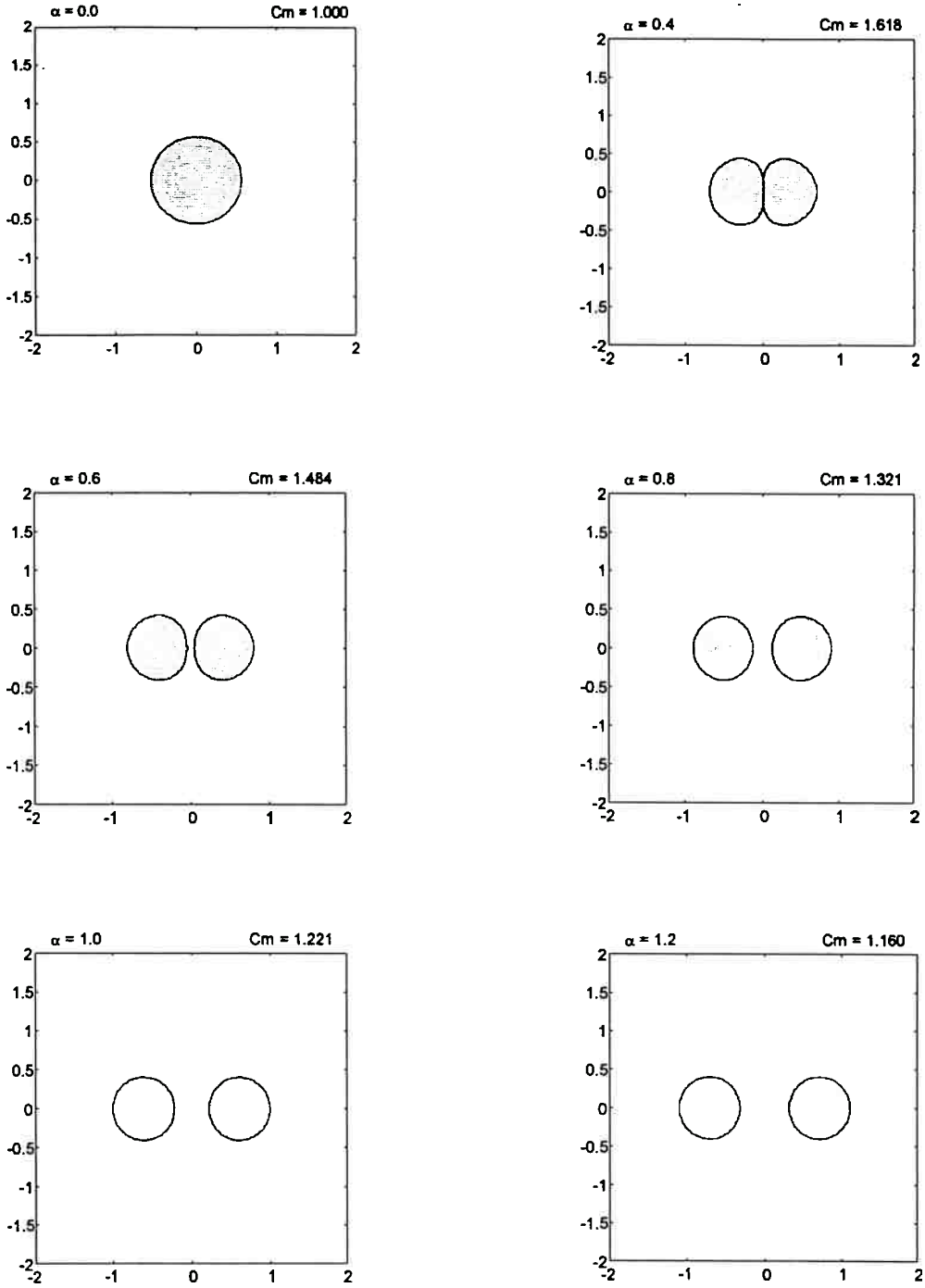


Figura 2.10 - Formas Seccionais Obtidas Variando-se o Valor de α Relativas à Função $F(Ka)=\cos(\alpha Ka)$

2.4.2 A Função de Forma F(Ka) = $\cos^4(\alpha Ka)$

Esta função de forma apresenta o comportamento abaixo retratado:

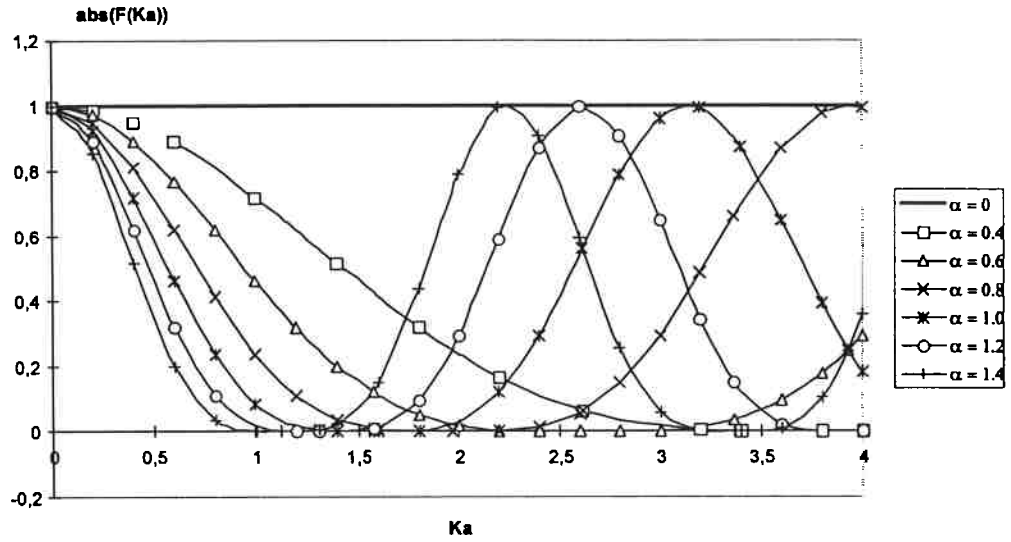


Figura 2.11 - Função de Forma F(Ka) = $\cos^4(\alpha Ka)$

Um primeiro fato a se destacar na análise desta função de forma diz respeito às suas características quanto à redução da força de excitação vertical resultante. A comparação entre o comportamento desta função, apresentado acima, e aquele correspondente à função F(Ka)=cos(αKa), exemplificado na figura 2.7, permite verificar de maneira imediata que: A função de forma F(Ka)=$\cos^4(\alpha Ka)$ leva a uma redução efetiva da força vertical em uma larga faixa de freqüências em torno das chamadas freqüências de cancelamento. A função apresentada na seção anterior apresenta mínimos na forma de picos e, conseqüentemente, pequenas variações de freqüência em torno das freqüências de cancelamento levam a acréscimos mais expressivos na força vertical resultante. A função aqui analisada, ao contrário, não é tão sensível a tais variações, mantendo uma efetiva redução da força vertical para uma banda significativa de freqüências, em torno das correspondentes freqüências de cancelamento. Dessa forma,

focalizando-se estritamente o aspecto de redução das forças verticais de primeira ordem, a função $F(Ka)=\cos^4(\alpha Ka)$ apresenta características mais apropriadas, se comparada à função discutida na seção precedente.

Deve-se, então, pesquisar as possíveis formas geométricas decorrentes de tal função. O potencial de escoamento complexo resultante de tal função é dado por:

$$w(z) = -\frac{3i}{8}\frac{1}{z} - \frac{i}{4}\frac{1}{(z+2\alpha)} - \frac{i}{4}\frac{1}{(z-2\alpha)} - \frac{i}{16}\frac{1}{(z+4\alpha)} - \frac{i}{16}\frac{1}{(z-4\alpha)} + iz \quad (2.17)$$

Percebe-se, da equação acima, que o potencial de escoamento corresponde neste caso ao potencial resultante de 5 dipolos verticais posicionados em ($x = -4\alpha, -2\alpha, 0, 2\alpha, 4\alpha$) e ($y = 0$). Novamente, o termo ($iz$) foi acrescentado para a representação do movimento de *heave*.

A parte imaginária deste potencial complexo corresponde às linhas de corrente do escoamento potencial que para esse caso resultam:

$$\psi(x,y) = -\frac{3i}{8}\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{1}{4}\frac{(x+2\alpha)}{(x+2\alpha)^2+y^2} - \frac{1}{4}\frac{(x-2\alpha)}{(x-2\alpha)^2+y^2} - \frac{1}{16}\frac{(x+4\alpha)}{(x+4\alpha)^2+y^2} - \frac{1}{16}\frac{(x-4\alpha)}{(x-4\alpha)^2+y^2} + x \quad (2.18)$$

As linhas de corrente permitem, então, a visualização do escoamento para diferentes valores do parâmetro α, conforme apresentado na figura 2.12. A visualização destes campos de escoamento revela a existência de cinco corpos fechados, induzidos pelos citados dipolos verticais, os quais se afastam à medida em que o parâmetro α cresce.

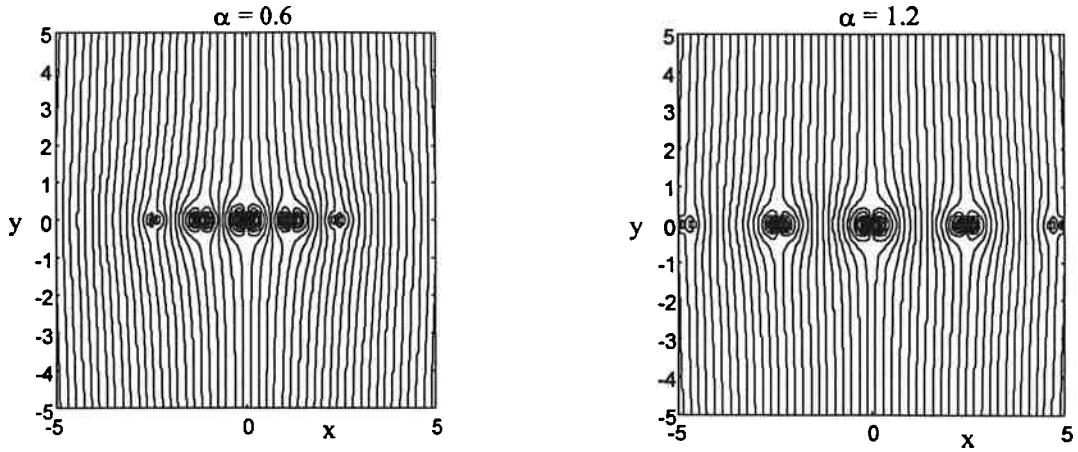


Figura 2.12 - Campos de Escoamento Associados à Função F(Ka) =cos⁴(αKa)

De (2.18) e (2.7), obtém-se o sistema dinâmico análogo ao escoamento potencial definido em (2.17) representado neste caso por:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{3}{4}\frac{xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{1}{8}\frac{y(x-4\alpha)}{\left[(x-4\alpha)^2+y^2\right]^2} + \frac{1}{2}\frac{y(x-2\alpha)}{\left[(x-2\alpha)^2+y^2\right]^2} + \frac{1}{2}\frac{y(x+2\alpha)}{\left[(x+2\alpha)^2+y^2\right]^2} + \frac{1}{8}\frac{y(x+4\alpha)}{\left[(x+4\alpha)^2+y^2\right]^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{3}{8}\frac{1}{(x^2+y^2)} - \frac{3}{4}\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{1}{8}\frac{(x-4\alpha)^2}{\left[(x-4\alpha)^2+y^2\right]^2} + \frac{1}{16}\frac{1}{\left[(x-4\alpha)^2+y^2\right]} - \frac{1}{2}\frac{(x-2\alpha)^2}{\left[(x-2\alpha)^2+y^2\right]^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{\left[(x-2\alpha)^2+y^2\right]} - \frac{1}{2}\frac{(x+2\alpha)^2}{\left[(x+2\alpha)^2+y^2\right]^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{\left[(x+2\alpha)^2+y^2\right]} - \frac{1}{8}\frac{(x+4\alpha)^2}{\left[(x+4\alpha)^2+y^2\right]^2} + \frac{1}{16}\frac{1}{\left[(x+4\alpha)^2+y^2\right]} \tag{2.19}$$

e a determinação numérica de seus pontos de equilíbrio leva aos pontos de estagnação do fluxo e linhas de corrente associadas. Para cada configuração geométrica há dez pontos de estagnação (dois para cada corpo isolado):

(x_e, y_e)	ψ_e
(0.0,±0.5585)	0
(±1.1733, ±0.4446)	±0.8535
(±2.3931, ±0.2238)	±1.9616

Tabela 2.4 - Pontos de Estagnação e Linhas de Corrente Associadas (α = 0.6)

(x_e, y_e)	ψ_e
(0.0, ±0.5899)	0
(±2.3950, ±0.4812)	±2.2146
(±4.7988, ±0.2424)	±4.5778

Tabela 2.5 - Pontos de Estagnação e Linhas de Corrente Associadas (α = 1.2)

Determina-se então o contorno geométrico das secções procuradas:

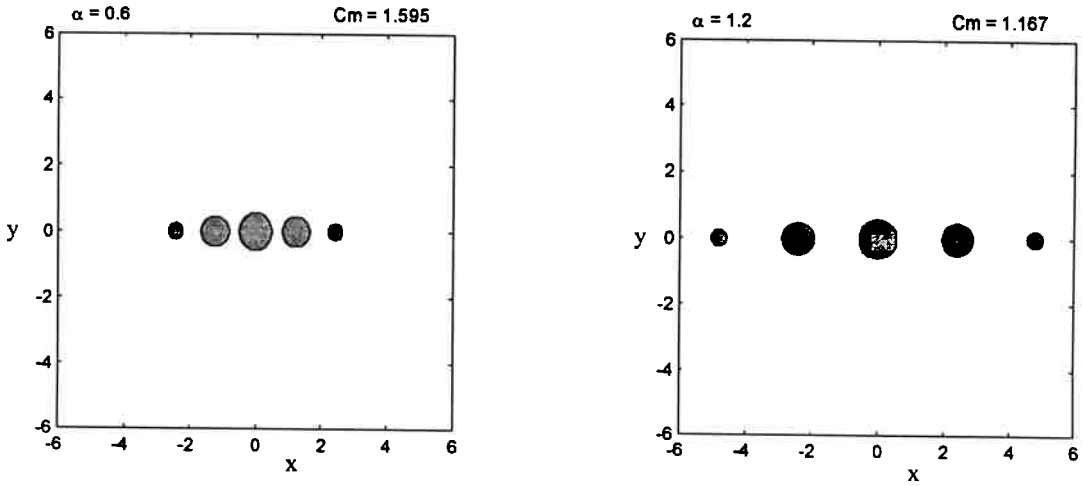


Figura 2.13 - Geometrias Seccionais Associadas à Função $F(Ka) = \cos^4(\alpha Ka)$

Para α=0, o corpo resultante corresponde a um único corpo circular, com centro na origem do sistema de coordenadas. À medida em que o parâmetro α aumenta, no entanto, o corpo se separa em cinco secções, as quais se afastam linearmente com o aumento deste parâmetro, induzidos pelo correspondente afastamento dos mencionados dipolos verticais. Obviamente, para valores maiores do parâmetro de controle, os corpos tendem novamente a secções circulares. As geometrias normalizadas obtidas com a variação do parâmetro de controle α são apresentadas na figura 2.14.

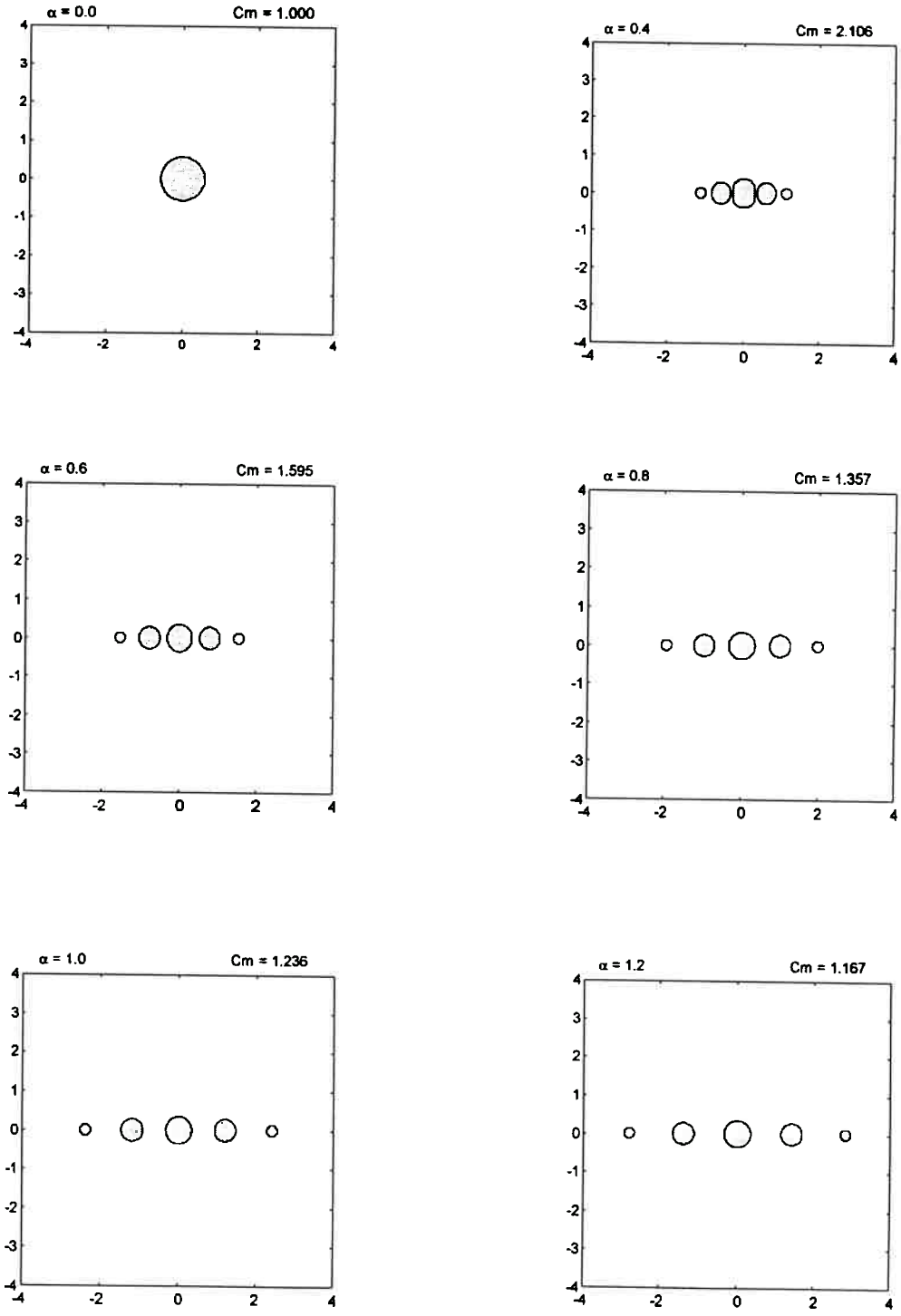


Figura 2.14 - Formas Seccionais Obtidas Variando-se o Valor de α Relativas à Função

$F(Ka)=\cos^4(\alpha Ka)$

A relação entre a dimensão das secções e a distância entre as mesmas podem ser visualizadas esquematicamente abaixo:

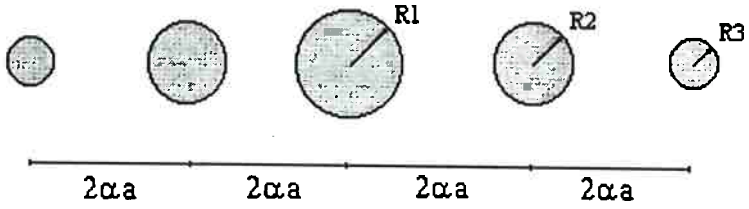


Figura 2.15 - Configuração Geométrica Esquemática

onde (a) corresponde à dimensão característica do problema. Os corpos tendem, com o aumento do parâmetro α, a círculos de raios (R1;R2;R3) iguais a $\left(\sqrt{\frac{3}{8}}a;\frac{1}{2}a;\frac{1}{4}a\right)$, respectivamente.

Considerando-se novamente, a título de ilustração, a sintonia de freqüência de cancelamento correspondente ao período de onda de 4 segundos tem-se, para um comprimento (a) de 8 metros, o valor do parâmetro α igual a 0.78. Para esta configuração, assumindo-se os corpos resultantes circulares, os valores de (R1;R2;R3) seriam aproximadamente (4.9;4.0;2.0) metros e a distância entre centros dos mesmos corresponderia a 12.50 metros. A distância total entre as secções mais externas resultaria então, aproximadamente, 54 metros.

Tomando-se como base estes valores ilustrativos, algumas considerações quanto ao possível aproveitamento de tais formas como secções reais de *pontoons* de um sistema oceânico devem ser feitas: As geometrias obtidas até então, correspondentes à

função de forma $F(Ka) = \cos(\alpha Ka)$, seriam mais facilmente identificadas com a secção de um único flutuador isolado. Neste caso no entanto, devido à simetria da configuração e a maior distância entre elementos, a geometria resultante estaria melhor adequada ao sistema de *pontoons* como um todo. Assim, pode-se imaginar, ao invés do sistema usual de dois *pontoons* paralelos, um sistema composto por cinco flutuadores com a configuração acima apresentada. Nesse sistema, o cancelamento da força vertical resultante corresponderia a um cancelamento da força de excitação total atuante sobre os *pontoons*. Outro aspecto importante a ser considerado diz respeito ao fato de que não apenas a força de excitação vertical atuante sobre este sistema se cancela nas freqüências escolhidas mas também o momento advindo das forças verticais isoladas agindo sobre cada secção resulta nulo. A verificação de tal fato é trivial e encontra-se esquematizada no apêndice B deste trabalho.

A generalização das formas geométricas associadas à família $F(Ka)=\cos^n(\alpha Ka)$ é imediata: geram-se (n+1) corpos cujos centros encontram-se em y=0 e distam $2\alpha a$ do(s) centro(s) adjacente(s), em uma distribuição simétrica em relação aos eixos coordenados e com formas geométricas tendendo a secções circulares à medida em que o parâmetro de controle α aumenta.

Logicamente, há ainda muito trabalho a se realizar no sentido de analisar a viabilidade desta ou daquela configuração em termos práticos de projeto. Não faz parte do escopo deste trabalho o desenvolvimento de análises mais aprofundadas quanto à possível aplicação prática das geometrias bidimensionais levantadas, limitando-se o mesmo a apenas levantar propostas de aplicação baseadas nas características principais

das configurações obtidas. Tal discussão será retomada, em maior profundidade, na seção 2.6.

2.5 A Função de Forma F(Ka) = 1 - sin(αKa)

A função de forma F(Ka) = 1 - sin(αKa) é um exemplo de função para a qual o escoamento fluido associado não leva a geometrias seccionais fisicamente possíveis. Sua discussão, contudo, tem por finalidade não apenas exemplificar casos para os quais não é possível associar formas geométricas que levem ao comportamento pretendido mas também demonstrar como mesmo estes casos podem trazer alguma contribuição relevante.

O comportamento desta função pode ser visualizado abaixo:

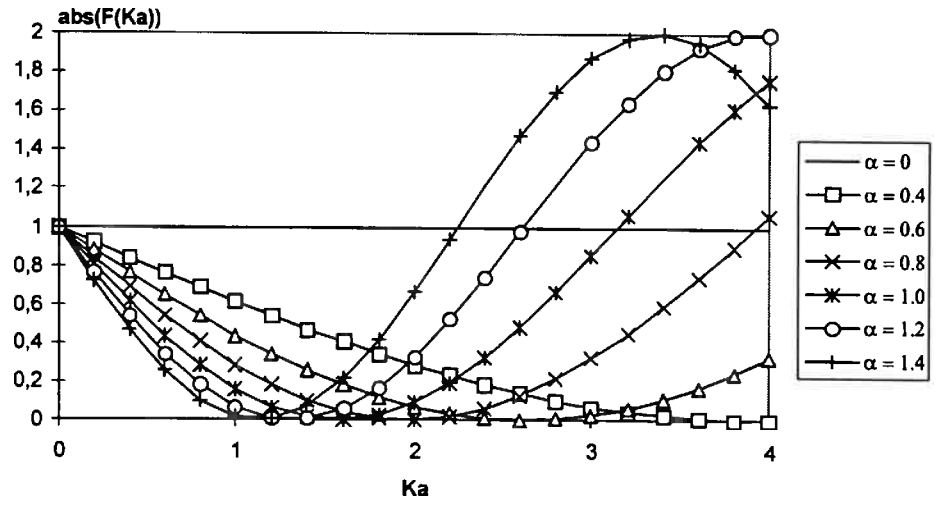


Figura 2.16 - Função de Forma F(Ka) = 1- sin(αKa)

O potencial de escoamento complexo, relativo ao movimento de *heave*, associado a esta função de forma é:

$$w(z) = -\frac{i}{z} + \frac{1}{2}\frac{1}{(z-\alpha)} - \frac{1}{2}\frac{1}{(z+\alpha)} + iz \qquad (2.20)$$

O potencial acima corresponde àquele induzido por um dipolo vertical na origem e dois dipolos horizontais, com sinais opostos, e posicionados em ($x=\pm\alpha; y=0$), além do termo relativo ao fluxo uniforme acrescentado. A função de linhas de corrente resulta:

$$\psi(x,y) = \frac{1}{2}\frac{y}{[(x+\alpha)^2 + y^2]} - \frac{1}{2}\frac{y}{[(x-\alpha)^2 + y^2]} - \frac{x}{(x^2+y^2)} + x \qquad (2.21)$$

Através da mesma, pode-se visualizar o campo de escoamento resultante, para diferentes valores do parâmetro de controle α:

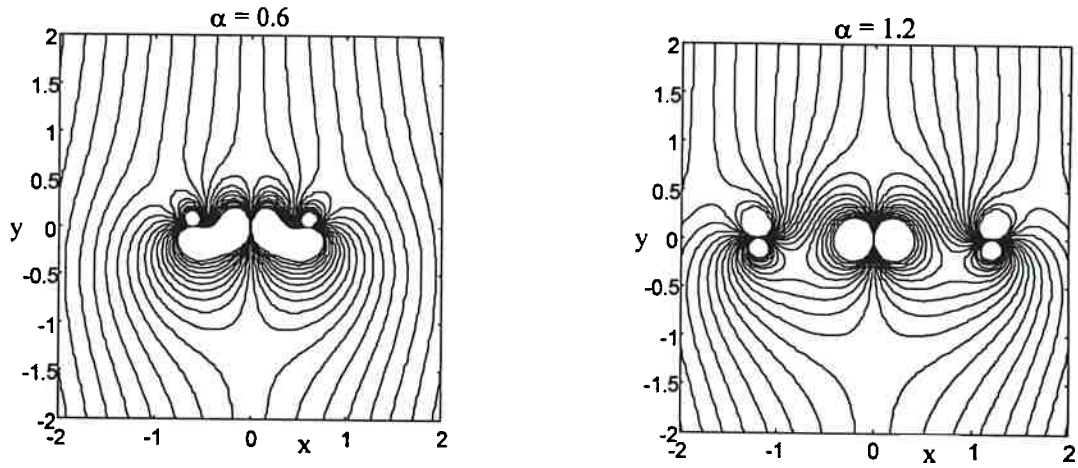


Figura 2.17 - Campos de Escoamento Associados à Função F(Ka) =1 - sin(αKa)

Seguindo o modelo proposto na seção 2.3, determina-se o sistema dinâmico associado a esta função de forma, no caso dado por:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{y^2}{[(x-\alpha)^2+y^2]^2} - \dfrac{y^2}{[(x+\alpha)^2+y^2]^2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{[(x-\alpha)^2+y^2]} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{[(x+\alpha)^2+y^2]} + \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{y(x-\alpha)}{[(x-\alpha)^2+y^2]^2} + \dfrac{y(x+\alpha)}{[(x+\alpha)^2+y^2]^2} - \dfrac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \dfrac{1}{(x^2+y^2)} - 1 \end{cases}$$

(2.22)

e, através de sua solução numérica, obtém-se os pontos de sela do mesmo aos quais correspondem pontos de estagnação do escoamento equivalente. Neste caso, tem-se quatro pontos de estagnação relativos a cada valor do parâmetro α:

(x_e, y_e)	ψ_e
(0.0, 0.6697)	0
(0.0, -1.2769)	0
(0.9023, 0.4228)	0.6893
(-0.9023, 0.4228)	-0.6893

Tabela 2.6 - Pontos de Estagnação e Linhas de Corrente Associadas (α = 0.6)

(x_e, y_e)	ψ_e
(0.0, 0.833638)	0
(0.0, -1.2296)	0
(1.612310, 0.453934)	1.613210
(-1.612310, 0.453934)	-1.613210

Tabela 2.7 - Pontos de Estagnação e Linhas de Corrente Associadas (α = 1.2)

Plotando-se, então, as linhas de corrente ψ_e obtidas, os seguintes contornos são definidos:

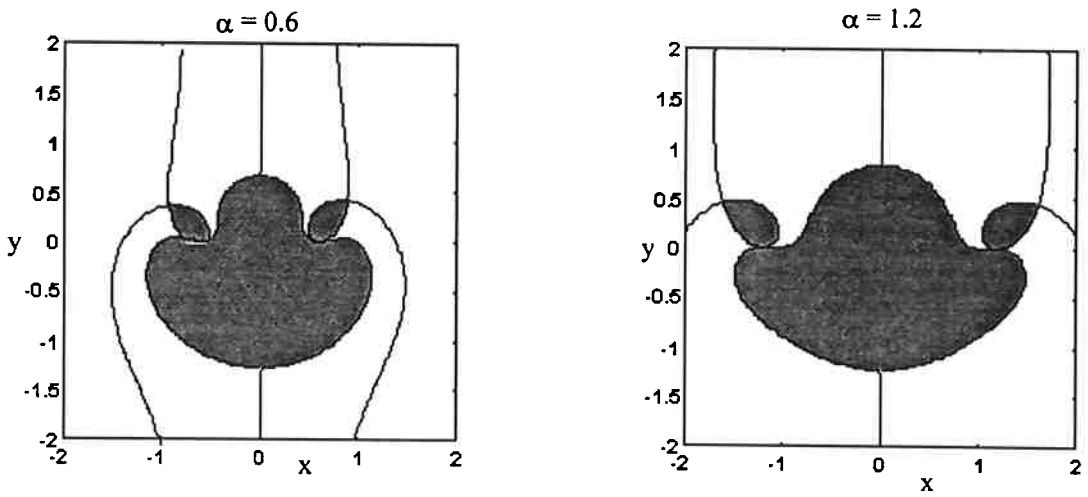


Figura 2.18 - Contornos Associados à Função F(Ka) =1 - sin(αKa)

Todavia, conforme mencionado anteriormente, os contornos acima não podem ser diretamente associados a secções geométricas fisicamente possíveis. Tal impossibilidade deve-se ao fato de que há singularidades presentes na região fluida, exatamente nos pontos de contato entre o corpos principais e apêndices apresentados na

figura acima. Estas singularidades correspondem aos dipolos horizontais presentes na expressão do potencial complexo (2.20).

Por outro lado, apesar de não ser possível se associar diretamente campos de escoamento e geometrias seccionais à função de forma em questão, o levantamento dos campos de escoamento apresentados pode, neste caso particular, fornecer subsídio significativo quanto à concepção de possíveis configurações geométricas alternativas. Assuma-se, por exemplo, a configuração obtida com base no contorno gerado para o caso α=1.0, separando-se os apêndices do corpo principal, como abaixo esquematizado:

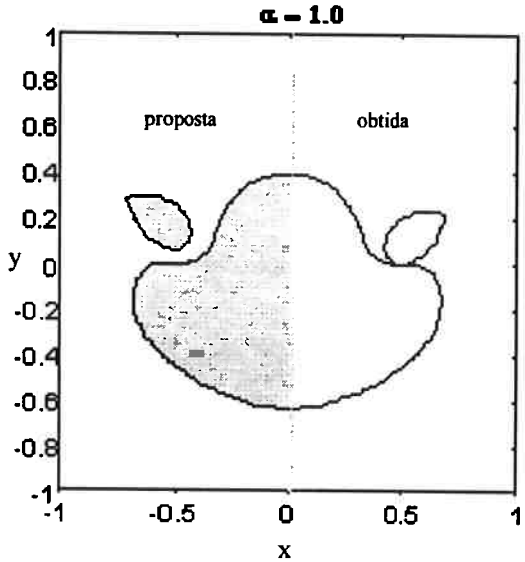


Figura 2.19 - Configuração Geométrica Proposta

Para distâncias suficientemente pequenas entre os apêndices e o corpo principal, o campo de escoamento resultante assemelha-se ao original. À medida em que esta distância diminui, não apenas o padrão de escoamento é reproduzido mas também o campo de velocidades tende àquele originalmente obtido. Pode-se então imaginar os contornos levantados segundo o modelo proposto como o caso limite em que os apêndices tangenciam o corpo principal. Certamente efeitos viscosos relativos ao fluxo

de um fluido real através dos pontos de estrangulamento originados passarão a ser relevantes, limitando a proximidade entre os corpos e devem, portanto, ser considerados. No entanto, levando-se em conta estritamente aspectos potenciais do escoamento, a função de forma resultante para a configuração acima proposta deve ser, para pequenas distâncias entre os corpos, muito próxima à função original. Obviamente, uma análise numérica far-se-ía necessária no sentido de validar tal hipótese.

2.6 Considerações sobre o Estudo de Formas Seccionais Alternativas

Apresentou-se, como primeira etapa deste trabalho, um método para levantamento e estudo de possíveis geometrias bidimensionais alternativas. Tais geometrias são determinadas no contexto da teoria do escoamento potencial, assumindo-se profundidade de submersão suficientemente grande a fim de poder-se desprezar efeitos de superfície livre. Tendo em vista tais hipóteses, gerou-se uma série de geometrias seccionais, apresentadas nas seções 2.4 e 2.5, cujas formas são determinadas a partir de um comportamento preestabelecido da força de excitação vertical de primeira ordem. Pretende-se, nesta seção, discutir um pouco mais o possível enquadramento de tais geometrias como formas alternativas de cascos de sistemas oceânicos, particularmente, plataformas TLP.

O projeto de cascos de plataformas tipo TLP tem assumido uma configuração padrão na qual são adotados *pontoons* de pequenas dimensões e situados a profundidades bastante grandes. A maior parte do deslocamento do sistema deve, então, ser fornecido pelo volume de colunas as quais, dessa forma, assumem dimensões

significativas. Esta configuração, discutida em maiores detalhes no capítulo 1 deste trabalho, tem por finalidade principal reduzir ao máximo as forças de excitação de primeira ordem atuantes sobre o sistema. Um dos problemas que este tipo de configuração acarreta, no entanto, diz respeito às forças de segunda e terceira ordem, diretamente associadas ao diâmetro de colunas empregado. O objetivo do método aqui proposto atua no mesmo sentido de redução das forças inerciais sobre os *pontoons*, procurando, contudo, obter tal redução a partir de geometrias alternativas de casco. Sabe-se que o volume dos flutuadores é decisivo com relação à força vertical de primeira ordem atuante sobre o sistema, sendo a contribuição das colunas a tal força bastante pequena. Por outro lado, o volume de colunas está diretamente associado a fenômenos de ordem superior normalmente observados em plataformas TLP, especialmente os fenômenos de *springing* e *ringing*. Assim, inserida no processo global de projeto, a validação das formas alternativas em estudo permitiria, por exemplo, alcançar a desejada minimização de forças com flutuadores de dimensões maiores e, dessa forma, reduzir o volume de colunas necessário. Tal modificação certamente traria benefícios quanto às forças de ordem superior. Em suma, a possibilidade de obtenção de formas alternativas para os *pontoons*, que levassem à minimização das forças inerciais de primeira ordem sobre os mesmos, abriria caminho para se repensar a configuração padrão de casco destes sistemas, visando um projeto mais equilibrado também no que diz respeito às forças de excitação de ordem superior.

Um aspecto importante a ser observado é a faixa de freqüências para a qual as formas levantadas apresentam, pelo menos em primeira análise, uma maior viabilidade do ponto de vista prático. Alguns dos conjuntos de geometrias geradas, como por

exemplo aquelas decorrentes da função de forma $F(Ka)=\cos(\alpha Ka)$, são configurações alternativas para a secção de um *pontoon* isolado, enquanto as formas relativas à função $F(Ka)=\cos^4(\alpha Ka)$ são mais facilmente identificadas com a secção do conjunto global de *pontoons*. Todavia, em ambos os casos, tais formas perdem interesse prático para valores muito elevados do parâmetro de controle α o que se deve, principalmente, à separação dos corpos em questão, tendendo a formas usuais (secções circulares) ou dificultando um possível arranjo global do casco devido, por exemplo, à grande distância entre os corpos resultante (ver figuras 2.10 e 2.14). A sintonia de freqüências de cancelamento mais baixas, portanto, torna-se mais difícil uma vez que exige altos valores de parâmetro de controle. Assim, apesar de as formas seccionais levantadas não se destinarem exclusivamente ao caso de plataformas TLP, as mesmas parecem se adequar melhor a este tipo de projeto tendo em vista, pelo menos, as freqüências naturais usualmente altas de movimento vertical deste tipo de sistema.

Por fim, deve-se novamente ressaltar que o levantamento e estudo das geometrias em questão corresponde apenas à etapa inicial de qualquer processo visando a determinação de formas alternativas de cascos em projetos de sistemas oceânicos. Obviamente, a aplicação de tais formas seccionais dependeria ainda de diversas etapas de estudo como a extensão para o caso tridimensional, consideração de efeitos viscosos, análise dos arranjos alternativos mais apropriados, enfim, todas as etapas de projeto às quais deve-se submeter um projeto alternativo de casco incluindo-se aí, certamente, as necessárias validações experimentais. Não obstante, cumpre notar que o método de estudo de formas seccionais alternativas ora proposto apresenta resultados bastante fortes no contexto em que é elaborado.

Em uma época em que os métodos numéricos encontram-se tão bem estabelecidos, a proposta de um modelo simplificado pode parecer questionável. Deve-se, no entanto, ter em mente que, ao contrário da grande maioria das ferramentas numéricas atualmente desenvolvidas, as quais se destinam à análise de projetos previamente elaborados, este método caracteriza-se essencialmente como uma ferramenta de síntese, permitindo levantar e estudar formas seccionais alternativas a partir de respostas desejadas preestabelecidas. Nesse sentido, é exatamente na simplicidade do método proposto que reside seu maior mérito.

PARTE II

3 MODELO PARA ESTUDO DE EXCITAÇÃO PARAMÉTRICA CONSIDERANDO TRAÇÃO ESTÁTICA VARIÁVEL AO LONGO DOS TENDÕES

O segundo tópico abordado neste trabalho tem como objetivo principal a elaboração de um modelo para representação dos modos naturais de vibração de cabos tracionados, enfocando-se, em especial, o caso de tendões de plataformas TLP sujeitos a excitação paramétrica. Retomando-se alguns aspectos discutidos no capítulo 1, pretende-se aqui examinar, de maneira mais aprofundada, as considerações principais que levam os tendões de plataformas TLP a constituir um caso de particular interesse no que se refere ao escopo mais amplo deste estudo.

Submetidos a elevados valores de tração estática, usualmente denominada pré-tensão, e a trações dinâmicas induzidas pelos movimentos do casco sob ação de ondas, os tendões apresentam oscilações paramétricas, as quais podem ser traduzidas na forma canônica de uma equação dinâmica de Mathieu. Vários trabalhos foram desenvolvidos até então, com base nesta abordagem, visando o estudo de tais oscilações e suas conseqüências. A seção 3.1 trata da discussão mais detalhada dos principais aspectos destes trabalhos. A solução do problema de autovalor e a descrição dos modos naturais de vibração lateral dos tendões são realizadas, via de regra, assumindo-se tração estática constante ao longo do comprimento dos tendões e, normalmente, mediante comparação com resultados gerados via modelos de elementos finitos. A não consideração da variação de tração estática devido à influência do peso submerso dos tendões é uma

hipótese bastante razoável, tendo-se em vista os usualmente elevados valores de pré-tensão. Tal fato é normalmente confirmado mediante modelagem numérica. Mais ainda, se levado em consideração o fato de que, para as configurações atuais que caracterizam os projetos de plataformas TLP, os danos causados por este tipo de oscilação lateral é normalmente muito inferior àquele resultante de outros efeitos (como, por exemplo, o fenômeno de *springing*), o refinamento do modelo mediante a incorporação da variação de tração estática é, certamente, um esforço que agrega poucos benefícios do ponto de vista prático de projeto.

Todavia, ao se observar mais atentamente as principais tendências quanto ao futuro emprego deste tipo de sistema oceânico, o panorama acima descrito pode sofrer alterações. Um primeiro aspecto significativo diz respeito à tendência de utilização de TLPs em águas ultra-profundas, ou seja, em lâminas d'água superiores a dois mil metros. Sabe-se que a condição de águas profundas é crítica no que se refere à estabilidade dinâmica do fenômeno em estudo e o mesmo ficará claro ao longo da análise efetuada na seção 3.3. Outro fator a se considerar concerne a já presente necessidade de redução dos valores de pré-tensão normalmente empregados. Como discutido em PATEL; PARK (1991), tal redução é necessária no sentido de permitir maiores cargas de convés e, assim, capacidades de produção mais elevadas. Este aspecto será cada vez mais decisivo à medida em que as profundidades de operação aumentam, tendo em vista os significativos orçamentos envolvidos neste tipo de projeto. Pode-se mesmo dizer que vislumbram-se projetos de TLP cada vez maiores, como já sinaliza o recente projeto da plataforma Heidrun (ver capítulo 1) e, certamente, o aumento de

capacidade de produção advindo da redução de pré-tensão será fator primordial para a viabilidade econômica dos mesmos.

No contexto de utilização de TLPs em águas ultra-profundas e com pré-tensões reduzidas, o fenômeno de excitação paramétrica dos tendões assume maior importância. Além disso, deve-se ressaltar, com a redução dos valores da relação entre pré-tensão e peso submerso dos tendões, a variação linear da tração ao longo do comprimento dos mesmos passa a influir de maneira decisiva no fenômeno em questão, não mais podendo ser ignorada.

Com base no acima exposto, o presente trabalho propõe um modelo de representação dos modos naturais dos tendões considerando variação da tração estática ao longo do comprimento. Tal modelo é analítico e expresso em termos de funções de Bessel de primeira espécie. Sua dedução é apresentada em detalhes na seção 3.2, juntamente com o equacionamento dinâmico global adotado. Segue-se, então, uma comparação entre os resultados mediante sua utilização e aqueles resultantes da modelagem usual, considerando tração estática constante. A comparação, objeto da seção 3.3, é ilustrada através da adoção de configurações reais de tendões de duas plataformas TLP. Nesta análise, são ainda discutidos aspectos relevantes referentes à estabilidade dinâmica do fenômeno e como estes aspectos são influenciados pelas modernas tendências de projeto deste sistema oceânico.

3.1 Breve Histórico Bibliográfico

A análise dinâmica de plataformas TLP tem sido tema de inúmeros trabalhos. Modelos dinâmicos bidimensionais e tridimensionais tem sido propostos, abordando-se normalmente aspectos como acoplamentos dinâmicos entre tendões e movimentos do casco e efeitos não-lineares, como os fenômenos de *springing* e *ringing*. No entanto, a modelagem dinâmica é quase sempre efetuada com base em procedimentos numéricos. Os poucos modelos analíticos apresentados servem como balizadores para trabalhos experimentais, como, por exemplo, o realizado por MATSUI et al. (1993), no qual são investigadas as oscilações e forças de segunda-ordem agindo no sistema. Os modelos dinâmicos analíticos adotam, via de regra, aproximações bastante simplificadas para representação dos tendões, desconsiderando sua massa e desprezando as forças hidrodinâmicas atuantes diretamente sobre os mesmos. Graças à elevada esbeltez, à usualmente baixa rigidez flexional e aos altos valores de tração estática que caracterizam os tendões de plataformas TLP, estas hipóteses simplificadoras normalmente representam uma boa aproximação, pelo menos em se tratando de uma análise preliminar.

O fenômeno de *ringing* dos tendões tem sido, da mesma forma, alvo de vários trabalhos. O tema central dos mesmos, no entanto, gira em torno da predição das forças de terceira ordem atuantes sobre o casco, causadoras do mencionado fenômeno. A determinação de tais forças com razoável exatidão apresenta-se como a maior dificuldade no tratamento deste problema. Dentre os vários trabalhos, NATVIG (1994), por exemplo, propõe um modelo para análise do fenômeno e KIM et al. (1995) analisam

os efeitos de segunda e terceira ordem através de simulações numéricas baseadas em forças não-lineares medidas experimentalmente. A análise dinâmica do fenômeno é feita, via de regra, através de robustas modelagens numéricas via método de elementos finitos.

O preâmbulo acima apresentado não tem por objetivo relacionar os inúmeros trabalhos relativos ao estudo da dinâmica de plataforma TLP existentes na literatura. Pretende-se apenas discutir o contexto no qual se encontra inserido o objeto deste trabalho: Modelos de tratamento analítico referentes à dinâmica própria do tendão isolado, considerando efeitos de inércia e efeitos hidrodinâmicos atuantes sobre o mesmo, são relativamente escassos na literatura. Pode-se citar, ilustrativamente, o trabalho de ROSSIT et al. (1995), o qual aborda a resposta dinâmica de um tendão sujeito à carga impulsiva axial em sua extremidade. O modelo adotado é bastante simplificado e resolvido através de expansão de Fourier em termos dos autovalores obtidos da partir do sistema de Sturm-Liouville resultante. LEE et al. (1997) estudam a dinâmica dos tendões sob efeito de correnteza e movimentos horizontais impostos ao topo, modelando os modos naturais de oscilação lateral por intermédio de séries de funções harmônicas.

No que diz respeito à análise de instabilidades paramétricas dos tendões excitadas verticalmente, tema abordado neste trabalho, duas são as referências principais, as quais embasaram o estudo aqui apresentado: STRICKLAND; MASON (1981) discutem o fenômeno modelando o tendão através de uma equação de cabo linear com amortecimento quadrático por efeitos viscosos, extremos articulados com

translação restrita e na ausência de efeitos de correnteza sobre os mesmos. Assumindo formas modais senoidais de vibração lateral e mediante aplicação do método variacional de Galerkin, a equação dinâmica é obtida na forma canônica de uma equação de Mathieu. Através de um exemplo ilustrativo várias simulações numéricas são realizadas objetivando-se a análise do comportamento dinâmico em condições instáveis. Mediante a análise dos valores típicos assumidos pelos parâmetros de Mathieu no caso de tendões de plataformas TLP e através dos resultados numéricos obtidos chega-se a duas conclusões principais: A configuração de águas profundas é crítica no que diz respeito ao fenômeno dinâmico em questão e, nesse caso, a ocorrência de condições instáveis é praticamente inevitável. Do estudo realizado pode-se também concluir que, tendo em vista os elevados valores de tração estática usuais, as amplitudes de oscilação resultantes do fenômeno são relativamente pequenas e não devem influir decisivamente no fenômeno de fadiga dos tendões. Por outro lado, PATEL; PARK (1991) discutem a excitação paramétrica dos tendões sob pré-tensões reduzidas. O procedimento de modelagem dinâmica através de equação de Mathieu é análogo àquele apresentado em STRICKLAND; MASON (1981). O modelo dinâmico assume, da mesma forma, tração estática constante ao longo dos tendões e, assim, as formas modais resultam senoidais. Procura-se, então, discutir os efeitos advindos da redução de pré-tensão sobre a dinâmica dos tendões. Adota-se como exemplo, contudo, a plataforma Hutton. Tal plataforma (ver seções 3.3.1 e 3.3.2), tendo sido a primeira TLP a ser projetada, apresenta configuração de tendões muito distinta daquela usualmente verificada neste tipo de projeto. Os valores dos parâmetros de Mathieu resultam, para a mesma, extremamente elevados, ao contrário do que se observa para as demais TLPs existentes.

O presente trabalho pretende aplicar o modelo de representação dos modos naturais de vibração lateral dos tendões aqui proposto através do estudo das oscilações laterais excitadas paramétricamente considerando, para tanto, configurações mais próximas àquelas seguidas como tendência no projeto deste tipo de sistema oceânico. O modelo dinâmico adotado segue aquele previamente apresentado nos dois trabalhos acima citados. Difere dos mesmos, porém, ao considerar o efeito de variação da tração estática sob influência do peso submerso dos tendões. As formas modais de vibração lateral resultam, então, não-senoidais e são representadas através de funções de Bessel de primeira espécie e ordem zero. Os resultados obtidos através deste modelo são comparados àqueles oriundos do modelo de tração estática constante, discutindo-se as discrepâncias verificadas.

3.2 Equacionamento Dinâmico e Modelo de Representação dos Modos Naturais

3.2.1 O Equacionamento Dinâmico Global

A modelagem dinâmica para representação das oscilações laterais de um tendão isolado adota as seguintes hipóteses principais:

- A dinâmica do tendão será representada através de um modelo linear de cabo, desprezando-se a inércia flexional do mesmo. Esta hipótese está fundamentada na elevada esbeltez do elemento estrutural e em seus valores relativamente baixos de rigidez flexional;

- A tração estática aplicada ao tendão é imposta pela submersão excessiva à qual se submete o casco (tração esta denominada pré-tensão) e varia linearmente ao longo do tendão devido à ação do peso submerso do mesmo;

- A tração dinâmica é imposta verticalmente por movimentos lineares de *heave* do casco, movimentos estes resultantes da ação de uma onda harmônica, em mar monocromático;

- O tendão é considerado inextensível e suas extremidades são suportadas por apoios simples. Dessa forma, são também desprezados efeitos de rigidez associados às juntas de acoplamento dos tendões;

- Os modos naturais de vibração lateral do tendão são tratados isoladamente, desprezando-se acoplamentos modais (aspectos relativos a tais acoplamentos são discutidos em maiores detalhes na seção 3.2.4 e no apêndice C deste trabalho)

- Ausência de correnteza;

O modelo adotado pode então ser esquematizado através da figura 3.1.

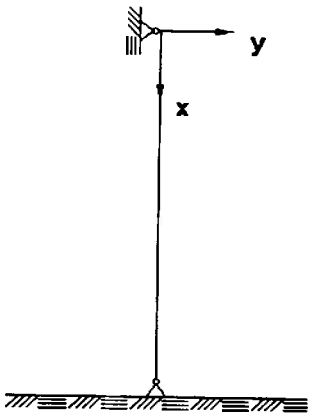


Figura 3.1 - Representação Gráfica do Modelo de Tendão

Uma vez desprezada a rigidez flexional do tendão e sob a hipótese de pequenos deslocamentos, seu movimento lateral é regido pela seguinte equação dinâmica:

$$M\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(T(x,t).\frac{\partial y}{\partial x}\right) + B_v\left|\frac{\partial y}{\partial t}\right|\frac{\partial y}{\partial t} = 0 \qquad (3.1)$$

sendo:

M: massa total seccional (massa própria mais massa adicional);

B_v*: coeficiente de amortecimento quadrático (viscoso);

T(x,t): tração total aplicada;

A tração total atuante sobre o tendão T(x,t) é composta pela superposição de:

- Tração estática ($T_e(x)$), resultante da chamada pré-tensão dos tendões (P) e variável ao longo do comprimento por influência do peso submerso dos mesmos:

$$T_e(x) = P + \mu g(L - x) \qquad (3.2)$$

onde:

μg: peso próprio seccional (submerso);

L: comprimento do tendão;

- Tração dinâmica (Td(t)) imposta verticalmente por movimento linear de *heave* do casco, sob ação de onda harmônica de freqüência circular ω:

$$T_d(x,t) = -S(x)\cos(\omega t + \sigma) \cong -S_0\cos(\omega t) = T_d(t) \qquad (3.3)$$

com:

S_0: amplitude de tração dinâmica imposta por movimento linear de *heave* do casco;

* O coeficiente de amortecimento quadrático é dado por $B_v = 1/2\rho.C_D.D_e$, sendo o coeficiente de arrasto C_D igual a 1.2 por se tratar de secções circulares.

Cabe aqui uma observação quanto a algumas simplificações importantes que podem ser feitas com relação à modelagem da tração dinâmica imposta aos tendões (expressas na equação 3.3): Em primeiro lugar, sabe-se que a velocidade de propagação da onda elástica longitudinal é muito superior à velocidade da onda transversal e, com isso, a diferença de fase (σ) torna-se desprezível. Além disso, vários trabalhos demonstram que (ver, por exemplo, ARANHA et al. (1993)) a amplitude de tração dinâmica é praticamente constante ao longo do comprimento do cabo ($S(x) \cong S_0$).

Tem-se, assim, a tração total atuante sobre o tendão, variável ao longo de seu comprimento, na forma:

$$T(x,t) = P + \mu g(L - x) - S_0.\cos(\omega t) \tag{3.4}$$

3.2.2 Solução do Problema de Autovalor

A equação de movimento do tendão em vibração livre não-amortecida é dada por:

$$M\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(T_e(x)\frac{\partial y}{\partial x}\right) = 0 \tag{3.5}$$

Supondo-se o movimento lateral do n-ésimo modo natural de vibrar dado por:

$$y_n(x,t) = f_n(t).X_n(x) \tag{3.6}$$

onde $f_n(t)$ corresponde à amplitude generalizada de oscilação e $X_n(x)$ denota a forma modal correspondente. Substituindo-se a equação acima em (3.1), chega-se à seguinte equação do movimento em termos das formas modais de vibração:

$$\left\{\left[\frac{P}{M}+\frac{\mu g(L-x)}{M}\right]X_n'\right\}'+\varpi_n^2 X_n=0 \qquad (3.7)$$

sendo:

ϖ_n: freqüência natural do n-ésimo modo natural de vibração.

Conforme indicado pela equação (3.7), o problema dinâmico em estudo recai no caso clássico de um *Problema de Sturm-Liouville.*

Adotando-se, então, a nova variável (η), definida por:

$$\eta=\sqrt{1+\frac{\mu g(L-x)}{P}} \qquad (3.8)$$

e mediante manipulações algébricas (ver apêndice D), a equação (3.7) pode, finalmente, ser rescrita na forma:

$$\begin{aligned} &\eta^2 X_n'' + \eta X_n' + 4\beta_n{}^2\eta^2 X_n = 0 \\ &\beta_n{}^2 = \frac{PM}{(\mu g)^2}\varpi_n^2 \end{aligned} \qquad (3.9)$$

A equação acima é identificada como sendo uma Equação de Bessel Modificada, cuja solução é dada em termos das funções de Bessel de primeira espécie e ordem zero (J_0,Y_0) na forma:

$$X_n(\eta)=C_1J_0(2\beta_n\eta)+C_2Y_0(2\beta_n\eta) \qquad (3.10)$$

O trabalho algébrico que leva (3.7) a (3.9) é de fundamental importância para a identificação e descrição do modelo de representação dos modos naturais em termos de funções de Bessel. Tal trabalho é, no entanto, bastante extenso e, visando-se uma maior

concisão do texto, o mesmo será apresentado em maiores detalhes no apêndice D deste trabalho.

As constantes de integração (C_1,C_2) presentes em (3.10) são determinadas através da consideração de condições de contorno apropriadas, as quais no caso resumem-se a:

$$\begin{cases} X_n(\eta|_{x=0}) = 0 \\ X_n(\eta|_{x=L}) = 0 \end{cases} \tag{3.11}$$

As formas modais de vibração lateral dos tendões resultam finalmente :

$$X_n(x) = J_0\left(2\beta_n\left[1+\frac{\mu g(L-x)}{P}\right]^{1/2}\right) - \frac{J_0(2\beta_n)}{Y_0(2\beta_n)}Y_0\left(2\beta_n\left[1+\frac{\mu g(L-x)}{P}\right]^{1/2}\right) \tag{3.12}$$

com freqüências naturais dadas por:

$$\varpi_n = \mu g\sqrt{\frac{1}{PM}}\beta_n \tag{3.13}$$

Os valores de (β_n) são calculados numericamente como solução da equação característica associada:

$$J_0\left(2\beta_n\sqrt{1+\frac{\mu gL}{P}}\right)Y_0(2\beta_n) - Y_0\left(2\beta_n\sqrt{1+\frac{\mu gL}{P}}\right)J_0(2\beta_n) = 0 \tag{3.14}$$

equação esta advinda da imposição de existência de solução não-trivial ao sistema definido em (3.11).

3.2.3 Equacionamento Final na Forma de Equação de Mathieu

Uma das hipóteses assumidas na modelagem do problema dinâmico em estudo diz respeito à desconsideração dos acoplamentos modais envolvidos. O apêndice C deste trabalho apresenta o equacionamento dinâmico completo, com todos os acoplamentos resultantes e discute a adequação de tal hipótese. Duas são as fontes de acoplamento modal envolvidas: A primeira se deve ao amortecimento não-linear do sistema e a segunda tem sua origem na variação da tração estática ao longo do comprimento do tendão. Os trabalhos de STRICKLAND; MASON (1981) e PATEL; PARK (1991) desconsideram, a priori, o acoplamento devido ao amortecimento não-linear, admitindo que o primeiro modo seja muito pouco influenciado pelos demais modos de vibração. Deve-se ressaltar que o amortecimento não influi na estabilidade dinâmica do problema (ver seção 3.3) mas sim nas amplitudes de vibração resultantes. Por assumirem tração estática constante ao longo do tendão, esta é a única fonte de acoplamento presente em seus modelos dinâmicos. Na modelagem aqui proposta, no entanto, a variação de tração estática introduz uma segunda fonte de acoplamento associada à matriz de restauração do sistema (ver apêndice C). Verifica-se, todavia, que tal acoplamento é fraco, ao menos no que se refere aos modos mais baixos de vibração. No decorrer deste capítulo, então, toda a análise dinâmica será efetuada com base no estudo de modos de vibração isolados.

Uma vez equacionado o problema de autovalores, seguindo procedimento adotado em PATEL; PARK (1991), substituindo (3.12) na equação do movimento (3.1),

aplicando o método variacional de Galerkin (multiplicando-se a equação resultante pelas formas modais $X_n(x)$ e integrando-se ao longo do comprimento), e definindo:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^L \left[X_n(x)\right]^2 dx \\
I_2 &= \int_0^L \frac{dX_n(x)}{dx}.X_n(x).dx \\
I_3 &= \int_0^L \frac{d^2X_n(x)}{dx^2}.X_n(x).dx \\
I_4 &= \int_0^L \frac{dX_n(x)}{dx}.X_n(x).x.dx \\
I_5 &= \int_0^L \left[X_n(x)\right]^2 \left|X_n(x)\right| dx
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

a equação do movimento resulta:

$$
\frac{d^2f_n(\tau)}{d\tau^2} + \left(\delta_n - 2.q_n.\cos(2\tau)\right)f_n(\tau) + c_n\left|\frac{df_n(\tau)}{d\tau}\right|\frac{df_n(\tau)}{d\tau} = 0 \tag{3.16}
$$

onde τ é a variável de tempo adimensionalizado ($2\tau = \omega t$);

A dinâmica do tendão é então representada através de uma equação paramétrica de Mathieu, expressa em sua forma canônica através da equação (3.16) e com parâmetros (δ_n,q_n,c_n) dados em termos dos fatores definidos em (3.15):

$$
\begin{aligned}
\delta_n &= \frac{4}{M\omega^2}\left\{\mu g\frac{(I_2 + I_4)}{I_1} - (P + \mu gL)\frac{I_3}{I_1}\right\} \\
q_n &= -\frac{2S}{M\omega^2}\frac{I_3}{I_1} \\
c_n &= \frac{B_V}{M}\frac{I_5}{I_1}
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

O conjunto de fatores $\{I_1,...,I_5\}$ dependem exclusivamente das formas modais assumidas e traduzem assim, em (3.16), a influência dessas formas sobre a dinâmica de excitação paramétrica dos tendões.

3.2.4 Modelo Dinâmico Assumindo Tração Estática Constante

Ao se desprezar a influência do peso próprio sobre a tração estática, ou seja, assumindo-se $T^c_e(x) = P$, constante ao longo do comprimento do tendão, a solução do problema de autovalor leva naturalmente a formas modais senoidais* , assim:

$$X^c_n(x) = \sin\left(n\frac{\pi x}{L}\right) \tag{3.18}$$

com freqüências naturais de vibração dadas por:

$$\varpi^c_n = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{P}{M}} \tag{3.19}$$

Considerando-se as formas modais (3.18) juntamente com a tração estática T^c_e, o procedimento adotado na seção 3.2.3 leva, igualmente, a uma equação dinâmica na forma canônica de Mathieu:

$$\frac{d^2 f_n(\tau)}{d\tau^2} + \left(\delta^c_n - 2.q^c_n.\cos(2\tau)\right)f_n(\tau) + c^c_n\left|\frac{df_n(\tau)}{d\tau}\right|\frac{df_n(\tau)}{d\tau} = 0 \tag{3.20}$$

com parâmetros agora dados por:

$$\begin{aligned} \delta^c_n &= \frac{4n^2}{M\omega^2}\left(-P\frac{I_3}{I_1}\right) \\ q^c_n &= -\frac{2Sn^2}{M\omega^2}\frac{I_3}{I_1} \\ c^c_n &= \frac{B_V}{M}\frac{I_5}{I_1} \end{aligned} \tag{3.21}$$

* O sobre-índice c será doravante utilizado para denotar qualquer elemento associado ao modelo assumindo tração estática constante ao longo dos tendões.

Os coeficientes $\{I_1, I_3, I_5\}$ definidos em (3.15) resultam, neste caso:

$$I_1^c = \frac{L}{2}$$

$$I_3^c = -\frac{\pi^2}{2L} \tag{3.22}$$

$$I_5^c = \frac{4L}{3\pi}$$

e, assim, os parâmetros de Mathieu (3.21) podem ser escritos na forma:

$$\delta_n^c = \frac{(2\varpi_n)^2}{\omega^2}$$

$$q_n^c = \frac{2S\varpi_n^{\ 2}}{P\omega^2} \tag{3.23}$$

$$c_n^c = \frac{8}{3\pi}\frac{B_V}{M}$$

Esses coeficientes correspondem àqueles apresentados em PATEL; PARK (1991) e STRICKLAND; MASON (1981), por exemplo, os quais assumem tração estática constante ao longo dos tendões. Convém notar que nesta abordagem, a tração constante deve ser tomada como a tração média que ocorre ao longo do tendão, a qual representa um ponto estacionário do quociente de Rayleigh associado.

A título de ilustração das diferenças resultantes na solução do problema de autovalor segundo os modelos apresentados, considere-se a seguinte configuração hipotética do tendão:

- Comprimento: L=1000 m;
- Relação entre pré-tensão e peso submerso: P/W = 3 (W = μgL);

Para esta configuração, as formas modais obtidas segundo os dois modelos são apresentadas nas figuras 3.2 e 3.3 a seguir, para o segundo e quarto modos naturais de vibração (as curvas tracejadas representam as formas senoidais enquanto as curvas contínuas correspondem às formas modais associadas à representação de Bessel).

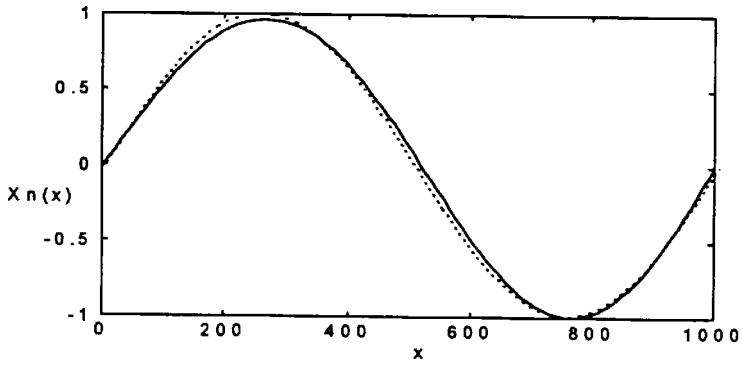


Figura 3.2 - Formas Modais Relativas ao Segundo Modo Natural

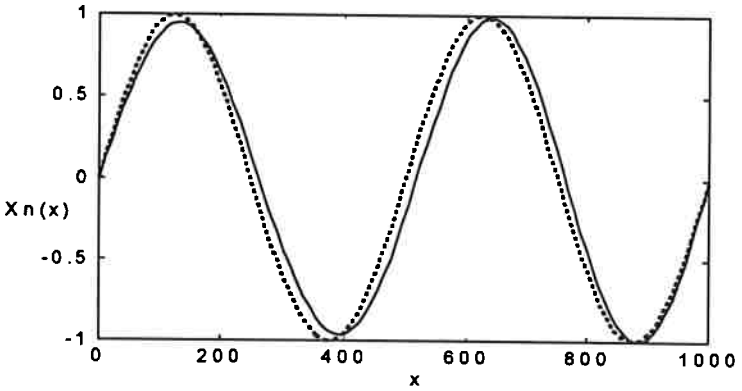


Figura 3.3 - Formas Modais Relativas ao Quarto Modo Natural

Logicamente, quanto menor a relação entre pré-tensão e peso submerso (P/W), maiores serão as discrepâncias verificadas nas formas modais obtidas e,

conseqüentemente, tanto maiores serão as diferenças entre os parâmetros de governo da equação de Mathieu obtidos segundo as duas modelagem distintas aqui abordadas.

3.3 Análise de Estabilidade Dinâmica de Mathieu

Conforme apresentado na seção anterior, os tendões de plataformas TLP estão sujeitos a oscilações laterais excitadas paramétricamente e cuja dinâmica pode ser equacionada, mediante as hipóteses discutidas, na forma clássica de uma equação de Mathieu. A análise de estabilidade dinâmica tem, como primeiro objetivo, examinar este comportamento dinâmico dos tendões e a eventual ocorrência de instabilidades. Com respeito aos aspectos de estabilidade dinâmica doravante mencionados, entendem-se por condições estáveis aquelas nas quais a amplitude generalizada de oscilação $f_n(t)$ tende a zero com o tempo, possuindo assim seus correspondentes diagramas de fase um único atrator estável, situado em sua origem. Condições instáveis em relação à dinâmica inerente à equação de Mathieu se caracterizam pelo surgimento de ciclos-limite. A resposta dos tendões tende a entrar em regime com determinadas amplitudes generalizadas de oscilação lateral assintóticas.

Para se efetuar tal análise, adotam-se como casos-exemplo os tendões de duas plataformas TLP reais e com configurações bastante distintas. Em decorrência deste estudo pode-se verificar a significativa influência de fatores inerentes a cada projeto (em especial a lâmina d'água de operação e a relação entre pré-tensão e peso submerso dos tendões) sobre a dinâmica lateral destes elementos estruturais. O segundo objetivo da análise em questão diz respeito à verificação das discrepâncias entre os resultados

obtidos segundo modelo de tração estática constante e aqueles decorrentes da abordagem que incorpora efeitos de variação desta tração. De forma complementar a esta verificação, discute-se também como as tendências atuais de projeto atuariam sobre a dinâmica em estudo e, conseqüentemente, sobre a qualidade de representação desta dinâmica segundo os modelos aqui abordados.

O comportamento dinâmico dos tendões será então estudado através da simulação numérica* das equações de Mathieu (3.16) e (3.20) com parâmetros dados respectivamente por (3.17) e (3.21). Como resultado das simulações levanta-se as amplitudes generalizadas de oscilação lateral dos tendões $f_n(t)$ definidas em (3.6), referentes a cada modo natural de vibração. Os resultados serão então apresentados na forma de diagramas de fase e gráficos de variação temporal das mencionadas amplitudes de vibração.

Com relação à análise efetuada segundo modelo de tração estática constante cabe aqui uma observação: O modelo de tração constante assume como tração estática do tendão o valor de pré-tensão atuante sobre o mesmo. Visando-se uma comparação mais realista entre modelos, no entanto, adotar-se-á para a abordagem de tração o valor médio de tração estática ao longo do tendão, sob influência do peso submerso. Ao se adotar este procedimento, garante-se também que a discrepância nos resultados obtidos segundo os dois modelos dinâmicos advém apenas do efeito de variação da tração ao longo do comprimento e não da diferença entre seus valores médios.

---

*As simulações dinâmicas apresentadas neste capítulo foram realizadas através do módulo *SIMULINK* do sistema *MATLAB* utilizando como método numérico de integração o método de Runge-Kutta de 5ª ordem e condições iniciais $(f(0);f'(0)) = (0;1)$.

PATEL; PARK (1991) levantaram um Gráfico de Estabilidade de Mathieu para uma larga faixa de variação dos parâmetros de controle, apresentado na figura 3.4, o qual será de grande valia para a visualização e discussão dos resultados.

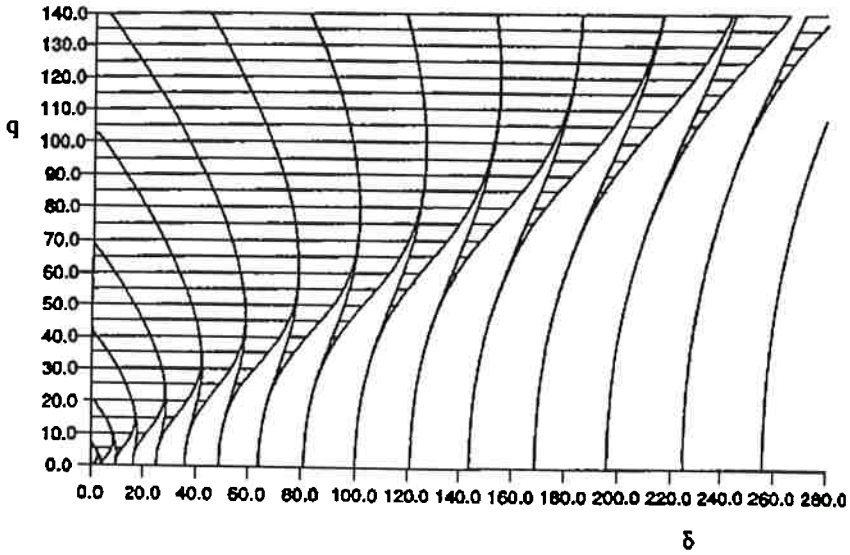


Figura 3.4 - Gráfico de Estabilidade de Mathieu (extraído de PATEL; PARK (1991))

No gráfico acima as regiões hachuradas correspondem a condições dinâmicas instáveis da equação de Mathieu. Deve-se ressaltar que a estabilidade dinâmica do problema está, portanto, associada aos parâmetros δ_n e q_n. O primeiro depende, por sua vez, da relação entre a freqüência natural de oscilação do tendão e a freqüência de excitação enquanto o segundo está relacionado também com a relação entre a tração dinâmica imposta e a tração estática. As mencionadas dependências são claramente explicitadas, por exemplo, através da equação (3.23), no caso de tração constante. O parâmetro c_n não tem influência sobre a estabilidade da solução. Trata-se apenas de um parâmetro de amortecimento (viscoso) do sistema e controla, dessa forma, a amplitude de oscilação resultante. De acordo com PATEL; PARK (1991), o valor deste parâmetro situa-se usualmente entre 0.2 e 0.4 para tendões de plataformas TLP.

3.3.1 Caso-Exemplo: A Plataforma *Hutton*

A plataforma TLP Hutton foi a primeira plataforma deste tipo a ser efetivamente projetada e colocada em operação. Encontra-se instalada no Mar do Norte e está em operação desde 1984. Graças a seu inegável pioneirismo, no entanto, seu projeto caracteriza-se por uma configuração de tendões muito distinta em relação àquela usualmente apresentada pelas plataformas que a sucederam. Em primeiro lugar, a Hutton encontra-se em uma lâmina d'água bastante baixa, em se tratando de plataformas TLP, de apenas 150 metros. Além disso, seus tendões encontram-se submetidos a valores de pré-tensão extremamente elevados. Estes e outros dados relativos aos tendões desta TLP são listados abaixo:

Dados Gerais de Projeto:

- Deslocamento: $\Delta = 63300$ ton;
- Calado de Operação: $H = 33.2$ m;
- Lâmina d'água: $LDA = 147$ m;

Dados relativos aos tendões:

- Número de tendões: $N = 16$
- Comprimento: $L \cong 115$ m
- Diâmetro externo: $D_e = 0.26$ m
- Espessura de aço: $t \cong 103.5$ mm
- Pré-tensão / tendão: $P = 7840$ kN (800 tonf)

A partir destes dados, podem-se calcular:

- Massa seccional: $M = 0.45$ ton/m (própria+adicional)
- Peso submerso linear: $\mu g = 3.36$ kN/m (0.34 tonf/m)
- Coef. amortecimento: $B_v = 0.16$ ton/m^2

A relação entre pré-tensão e peso submerso total do tendão resulta, então, $P/W \cong 20$ para a plataforma Hutton.

Esta plataforma é adotada como exemplo no estudo realizado por PATEL; PARK (1991), no qual se apresenta também os valores de parâmetros de Mathieu para o primeiro modo de vibração dos tendões ($\delta_1^c = 255$; $q_1^c = 85$; $c_1^c = 0.3$), relativos à condição de operação do sistema. Sendo a freqüência natural de vibração do primeiro modo segundo o modelo de tração estática constante ω_1^c igual a 3.60 rad/s (calculada de acordo com a expressão (3.19)), os valores dos parâmetros acima citados correspondem a uma freqüência de excitação ω de aproximadamente 0.45 rad/s (ou seja, um período de onda T igual a 14 segundos) e a uma relação entre tração dinâmica e estática S_0/P equivalente a 2/3.

Para as condições acima foram então levantadas as amplitudes generalizadas de oscilação lateral dos tendões ($f_n(t)$) da plataforma Hutton, segundo os dois modelos dinâmicos aqui abordados. Os resultados são apresentados na figura 3.5.

TENDÃO DA PLATAFORMA HUTTON

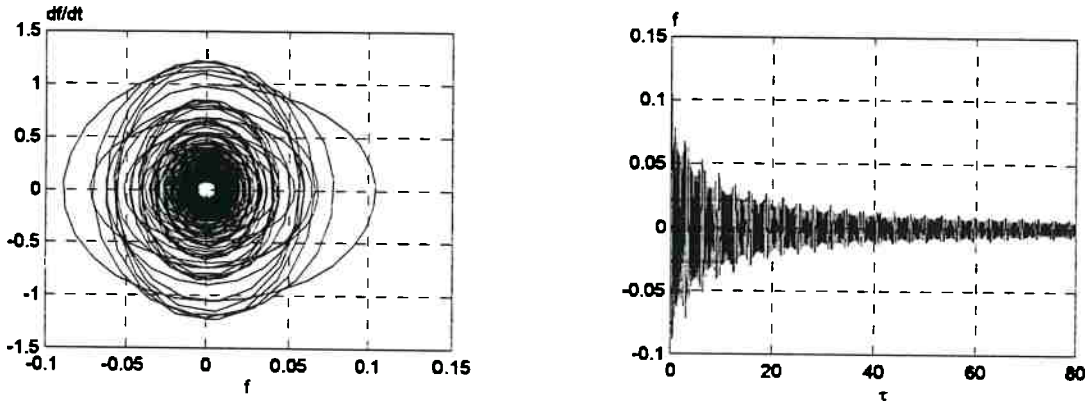
CONDIÇÃO DE OPERAÇÃO - 1° MODO NATURAL DE VIBRAÇÃO

$\omega = 0.45$ rad/s ($T = 13.96$ s) $S_0/P = 2/3$

MODELO DINÂMICO ASSUMINDO TRAÇÃO ESTÁTICA CONSTANTE

$\omega_1^c = 3.60$ rad/s ($T_1^c = 1.74$ s)

($\delta_1^c = 255$; $q_1^c = 85$; $c_1^c = 0.3$)



MODELO DINÂMICO PROPOSTO INCORPORANDO VARIAÇÃO DA TRAÇÃO ESTÁTICA

$\omega_1 = 3.60$ rad/s ($T_1 = 1.74$ s)

($\delta_1 = 256$; $q_1 = 85$; $c_1 = 0.3$)

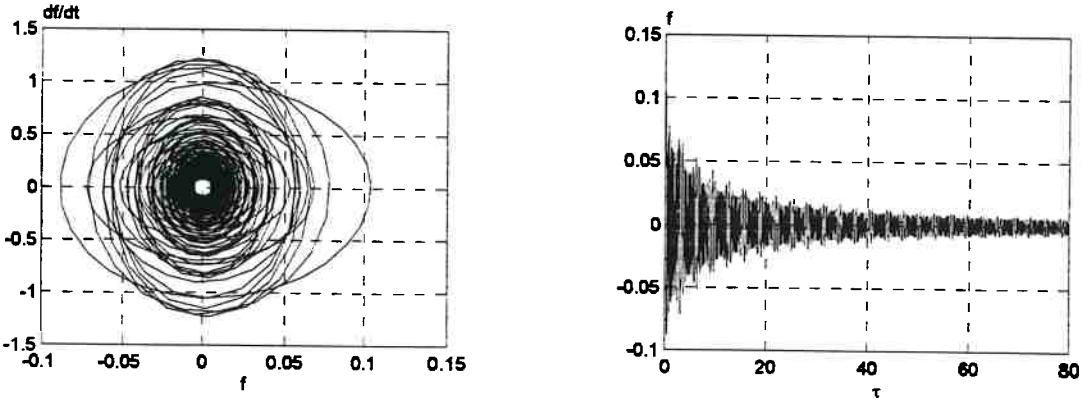


Figura 3.5 - Amplitudes Generalizadas de Vibração Segundo os Dois Modelos Dinâmicos Plataforma Hutton - Condição de Operação

3.3.2 Discussão dos Resultados Obtidos para o Tendão da Plataforma Hutton

Mediante a observação dos gráficos apresentados na Figura 3.5 percebe-se, de imediato, que as amplitudes generalizadas de oscilação advindas dos dois modelos dinâmicos considerados resultam idênticas. Tal fato já era, contudo, esperado: Sendo o peso próprio dos tendões da plataforma Hutton equivalente a apenas 5% do valor de pré-tensão, a variação de tração estática ao longo dos mesmos não apresenta, certamente, nenhuma relevância em relação ao comportamento dinâmico em estudo.

Deve-se ainda observar que, conforme pode ser verificado através do gráfico de estabilidade apresentado na figura 3.4, o ponto de operação da plataforma em questão situa-se no centro de uma região de estabilidade com valores paramétricos bastante altos. Certamente, nessa condição, nenhuma freqüência de onda de excitação acarretará instabilidades dinâmicas de oscilação lateral dos tendões.

As particularidades de projeto que caracterizam este sistema levam, assim, a uma condição dinâmica absolutamente estável para seus tendões, ao menos no que diz respeito às oscilações paramétricas em análise. Todavia, deve-se levar em consideração que estas mesmas particularidades afastam significativamente o projeto da plataforma Hutton dos projetos mais recentes de plataformas TLP. Com base neste fato adota-se, como segundo caso-exemplo (ver seção 3.3.3), uma plataforma cujo projeto segue mais de perto as tendências atuais de utilização de sistemas oceânicos tipo TLP.

3.3.3 Caso-Exemplo: A Plataforma *Auger*

Com base nos aspectos discutidos ao final da seção anterior procura-se, através do exemplo da plataforma TLP Auger, estudar a excitação paramétrica dos tendões em uma configuração de projeto mais próxima dos padrões que atualmente caracterizam este tipo de sistema oceânico. A plataforma Auger encontra-se em operação no Golfo do México. Instalada em 1993 em uma lâmina d'água de 872 metros, a plataforma apresenta um sistema de amarração adicional, o qual contribui para a redução dos requisitos de pré-tensionamento dos tendões. Os dados principais referentes à esta plataforma encontram-se abaixo relacionados:

Dados Gerais de Projeto:

- Deslocamento: $\Delta = 81760$ ton;
- Calado de Operação: $H = 31$ m;
- Lâmina d'água: $LDA = 872$ m;

Dados relativos aos tendões:

- Número de tendões: $N = 12$
- Comprimento: $L \cong 843$ m
- Diâmetro externo: $D_e = 0.66$ m
- Espessura de aço: $t \cong 33.0$ mm
- Pré-tensão / tendão: $P = 8852$ kN (903 tonf)

A partir destes dados pode-se então determinar:

- Massa seccional: $M = 0.86$ ton/m (própria+adicional)
- Peso submerso linear: $\mu g = 1.53$ kN/m (0.16 tonf/m)
- Coef. amortecimento: $B_v = 0.41$ ton/m^2

A relação entre pré-tensão e peso submerso resulta então P/W≅7 para os tendões da plataforma Auger.

Sabendo-se ainda que o período de onda de projeto assumido para esta plataforma, na condição de operação, é de 10.3 segundos (SCHOTT et al. 1994) e assumindo-se tração dinâmica máxima equivalente a 60% da tração estática (relação semelhante àquela verificada para a plataforma Hutton), pode-se levantar os parâmetros de Mathieu para esta condição e proceder-se à simulação da dinâmica lateral do tendão. Os resultados obtidos para a condição de operação são apresentados na figura 3.7.

Um primeiro aspecto a ser observado neste caso diz respeito à magnitude dos parâmetros de controle. Os valores assumidos pelos parâmetros de Mathieu δ_1 e q_1, os quais efetivamente determinam a estabilidade da solução, são muito menores se comparados àqueles verificados para a condição de operação da plataforma Hutton, como pode ser visualizado através da figura 3.6, abaixo. Tal fato decorre, principalmente, do maior comprimento dos tendões, ou seja, da maior profundidade de operação.

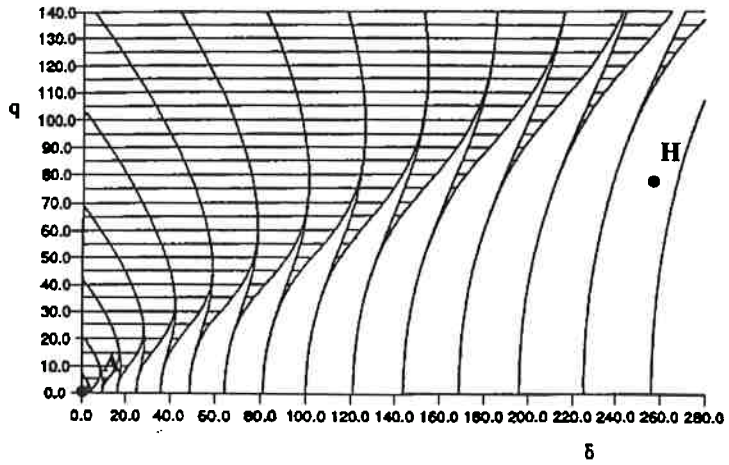


Figura 3.6 - Pontos de Operação das Plataformas Hutton e Auger no Diagrama de Mathieu

Graças aos valores reduzidos destes parâmetros, o ponto de operação correspondente no diagrama de estabilidade de Mathieu situa-se agora em uma região um tanto "perigosa", próximo à origem do diagrama. Nessa região onde condições estáveis e instáveis se condensam, pequenas variações nos parâmetros pode levar à instabilização de soluções previamente estáveis e vice-versa. Assim, apesar de a condição particular retratada na figura 3.7 corresponder, segundo as duas modelagens, a uma condição estável, pequenas variações de fatores, como por exemplo a freqüência de onda incidente, certamente levarão a instabilidades.

O problema acima descrito não é novidade em se tratando do estudo dinâmico dos tendões de TLPs em águas profundas. De fato, STRICKLAND; MASON (1981) comentam que, para as configurações usuais de TLPs em grandes profundidades, deve-se mesmo assumir a ocorrência das citadas instabilidades dinâmicas dos tendões como algo inevitável. A questão passa a ser então a magnitude dos danos causados nos tendões em virtude das oscilações decorrentes (este fato é discutido em maiores detalhes na seção 3.4). Em seu trabalho, STRICKLAND; MASON (1981) apresentam ainda uma expressão (deduzida assumindo-se formas modais do tipo senoidal) que permite levantar os períodos de onda excitante para os quais, em princípio, as instabilidades devem ocorrer. Sendo T_1 o período de oscilação do modo fundamental, para o n-ésimo modo de vibração tem-se:

$$2n\frac{T}{T_1} = 1,2,3,4,.... \qquad (3.24)$$

TENDÃO DA PLATAFORMA AUGER

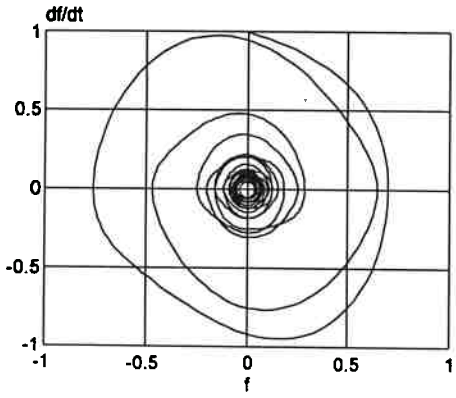
CONDIÇÃO DE OPERAÇÃO - 1° MODO NATURAL DE VIBRAÇÃO

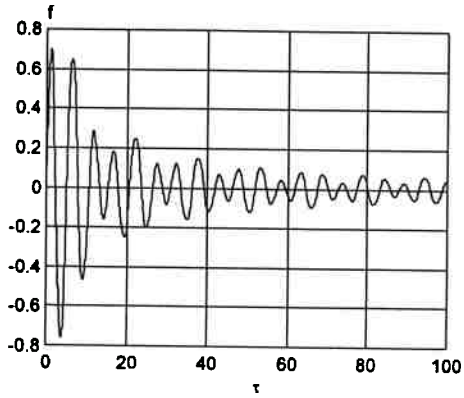
$\omega = 0.61$ rad/s ($T = 10.3$ s) $S_0/P = 0.6$

MODELO DINÂMICO ASSUMINDO TRAÇÃO ESTÁTICA CONSTANTE

$\omega_1^c = 0.39$ rad/s ($T_1^c = 16.03$ s)

($\delta_1^c = 1.652$; $q_1^c = 0.462$; $c_1^c = 0.401$)

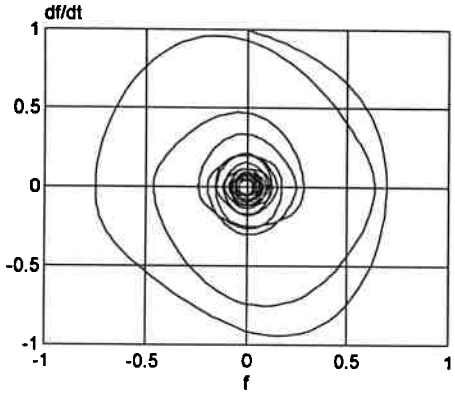




MODELO DINÂMICO PROPOSTO INCORPORANDO VARIAÇÃO DA TRAÇÃO ESTÁTICA

$\omega_1 = 0.39$ rad/s ($T_1 = 16.03$ s)

($\delta_1 = 1.650$; $q_1 = 0.463$; $c_1 = 0.415$)



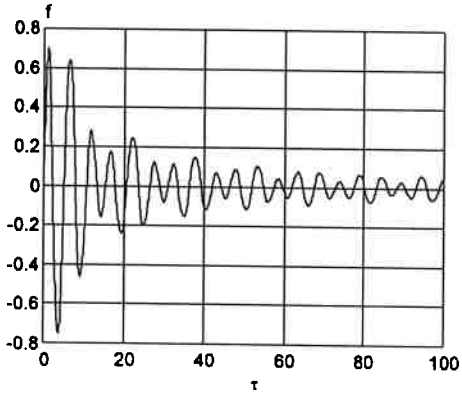


Figura 3.7 - Amplitudes Generalizadas de Vibração Segundo os Dois Modelos Dinâmicos Plataforma Auger - Condição de Operação

Uma vez que as instabilidades são presença certa na dinâmica dos tendões em águas profundas, deve-se conseguir prever as amplitudes generalizadas de oscilação resultantes, de forma a permitir a avaliação de suas conseqüências. A análise que se segue considerará, então, algumas condições de instabilidade que ocorrerão, segundo (3.24), para períodos de onda de provável ocorrência. Mediante tal análise pode-se verificar a ordem de magnitude das amplitudes envolvidas e as discrepâncias verificadas nas soluções devido ao efeito de variação de tração estática. As figuras 3.8 a 3.11 ilustram as amplitudes resultantes em algumas condições instáveis para o primeiro e segundo modo natural de vibração. Objetivando-se ainda demonstrar mais claramente a influência da relação entre pré-tensão e peso dos tendões, um caso adicional foi considerado, assumindo-se uma redução de 15% no valor nominal de pré-tensão da plataforma Auger e sendo mantidos os demais valores inalterados. Esta análise suplementar é apresentada nas figuras 3.12 e 3.13.

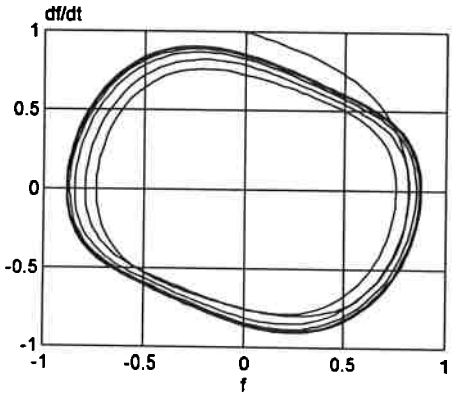
TENDÃO DA PLATAFORMA AUGER

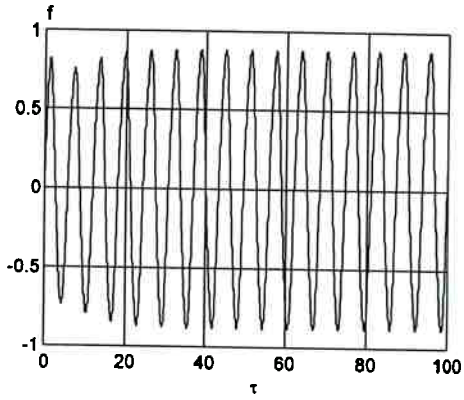
CONDIÇÃO INSTÁVEL ($T = T_1/2$) 1° MODO NATURAL DE VIBRAÇÃO

$\omega = 0.78$ $S_0/P = 0.6$

MODELO DINÂMICO ASSUMINDO TRAÇÃO ESTÁTICA CONSTANTE

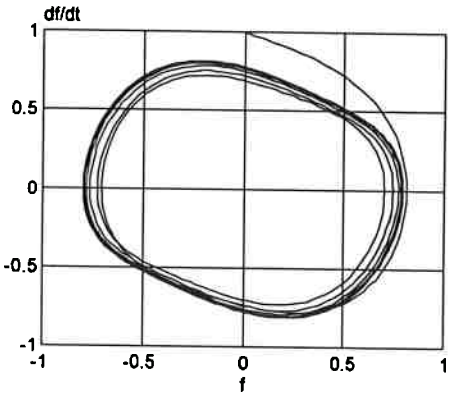
($\delta_1^c = 1.000$; $q_1^c = 0.300$; $c_1^c = 0.401$)





MODELO DINÂMICO PROPOSTO INCORPORANDO VARIAÇÃO DA TRAÇÃO ESTÁTICA

($\delta_1 = 1.000$; $q_1 = 0.280$; $c_1 = 0.415$)



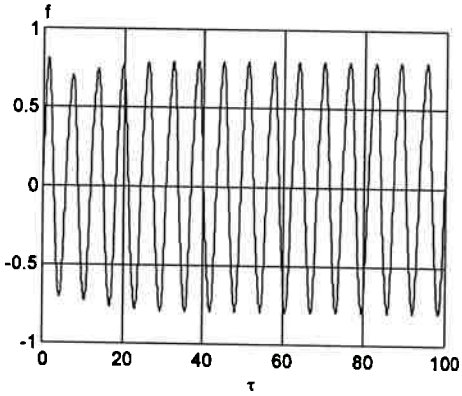


Figura 3.8 - Amplitudes Generalizadas de Vibração Segundo os Dois Modelos Dinâmicos Plataforma Auger - 1º Modo - Condição Instável ($T = T_1/2$)

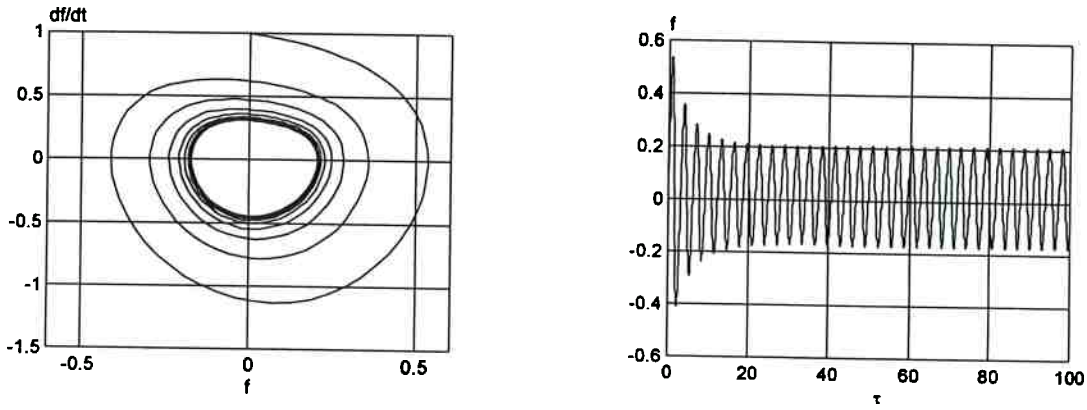
TENDÃO DA PLATAFORMA AUGER

CONDIÇÃO INSTÁVEL ($T = T_1$) 1º MODO NATURAL DE VIBRAÇÃO

$\omega = 0.39$ rad/s $S_0/P = 0.6$

MODELO DINÂMICO ASSUMINDO TRAÇÃO ESTÁTICA CONSTANTE

($\delta_1^c = 4.000$; $q_1^c = 1.200$; $c_1^c = 0.401$)



MODELO DINÂMICO PROPOSTO INCORPORANDO VARIAÇÃO DA TRAÇÃO ESTÁTICA

($\delta_1 = 4.000$; $q_1 = 1.121$; $c_1 = 0.415$)

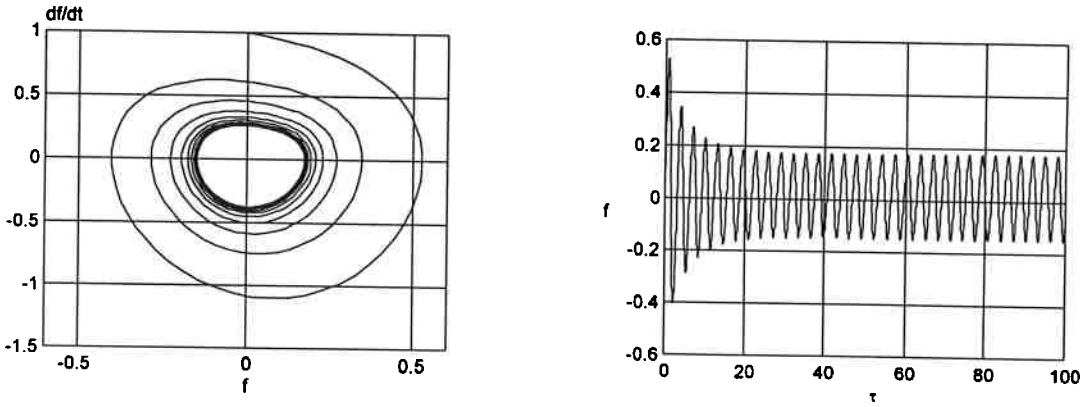


Figura 3.9 - Amplitudes Generalizadas de Vibração Segundo os Dois Modelos Dinâmicos Plataforma Auger - 1º Modo - Condição Instável ($T = T_1$)

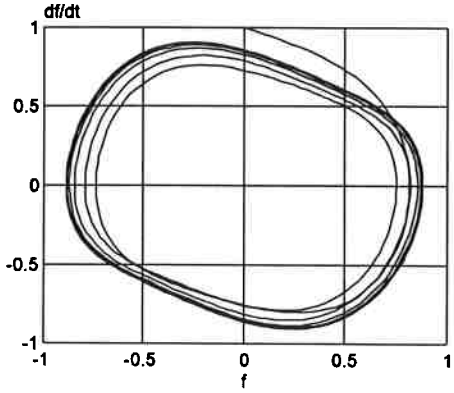
TENDÃO DA PLATAFORMA AUGER

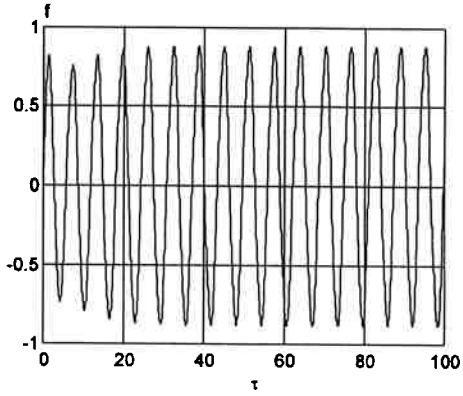
CONDIÇÃO INSTÁVEL ($T = T_1/4$) 2º MODO NATURAL DE VIBRAÇÃO

$\omega = 1.56$ rad/s $S_0/P = 0.6$

MODELO DINÂMICO ASSUMINDO TRAÇÃO ESTÁTICA CONSTANTE

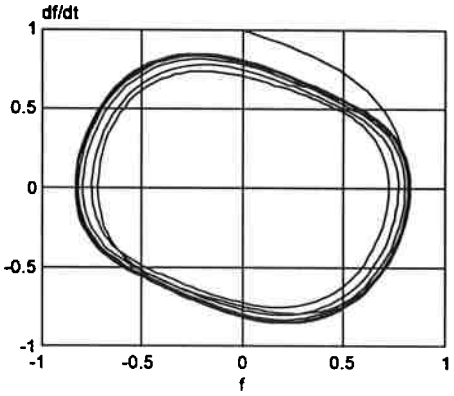
($\delta_2^c = 1.000$; $q_2^c = 0.300$; $c_2^c = 0.401$)





MODELO DINÂMICO PROPOSTO INCORPORANDO VARIAÇÃO DA TRAÇÃO ESTÁTICA

($\delta_2 = 1.001$; $q_2 = 0.280$; $c_2 = 0.398$)



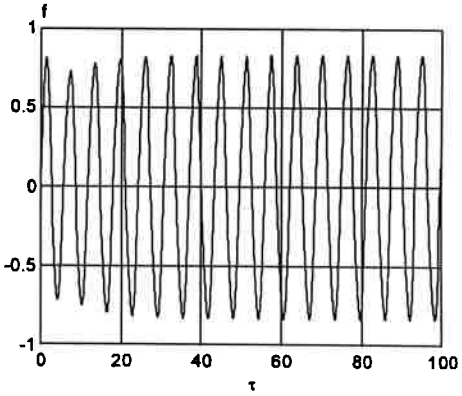


Figura 3.10 - Amplitudes Generalizadas de Vibração Segundo os Dois Modelos Dinâmicos Plataforma Auger - 2º Modo - Condição Instável ($T = T_1/4$)

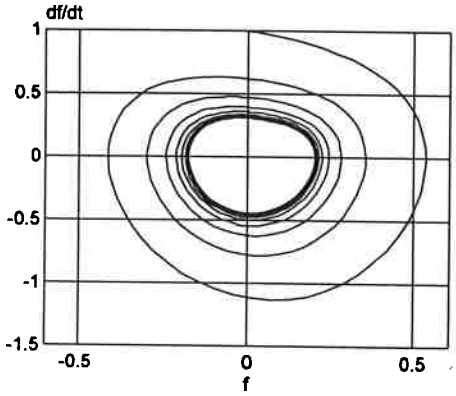
TENDÃO DA PLATAFORMA AUGER

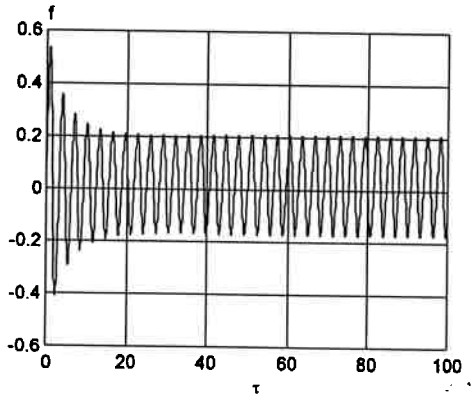
CONDIÇÃO INSTÁVEL ($T = T_1/2$) 2° MODO NATURAL DE VIBRAÇÃO

$\omega = 0.78$ rad/s $S_0/P = 0.6$

MODELO DINÂMICO ASSUMINDO TRAÇÃO ESTÁTICA CONSTANTE

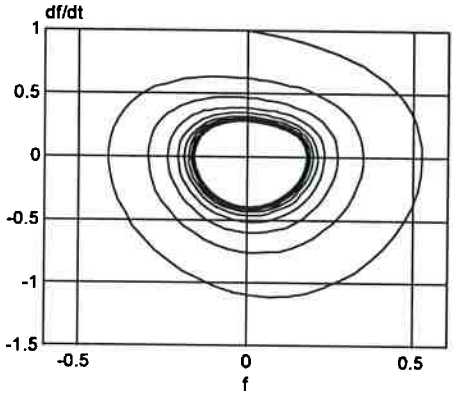
($\delta_2^c = 4.000$; $q_2^c = 1.200$; $c_2^c = 0.401$)





MODELO DINÂMICO PROPOSTO INCORPORANDO VARIAÇÃO DA TRAÇÃO ESTÁTICA

($\delta_2 = 4.003$; $q_2 = 1.122$; $c_2 = 0.398$)



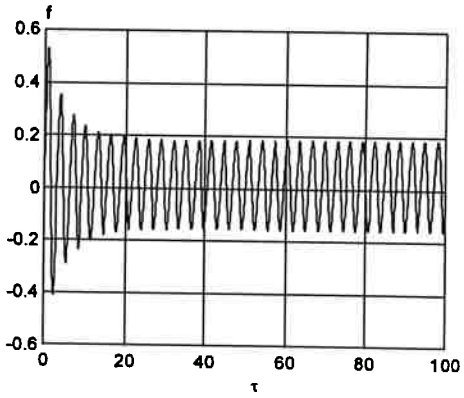


Figura 3.11 - Amplitudes Generalizadas de Vibração Segundo os Dois Modelos Dinâmicos Plataforma Auger - 2º Modo - Condição Instável ($T = T_1/2$)

TENDÃO DA PLATAFORMA AUGER

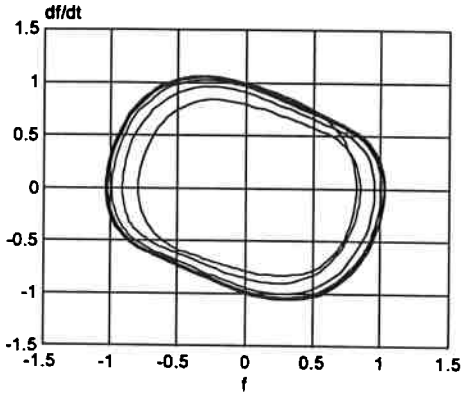
PRÉ-TENSÃO REDUZIDA EM 15% (P = 7524 kN)

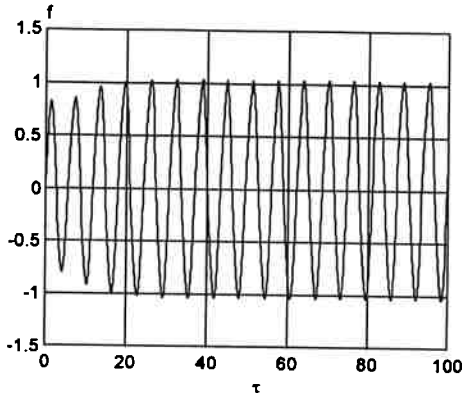
CONDIÇÃO INSTÁVEL ($T = T_1/2$) 1° MODO NATURAL DE VIBRAÇÃO

$\omega = 0.78$ $S_0/P = 0.7$

MODELO DINÂMICO ASSUMINDO TRAÇÃO ESTÁTICA CONSTANTE

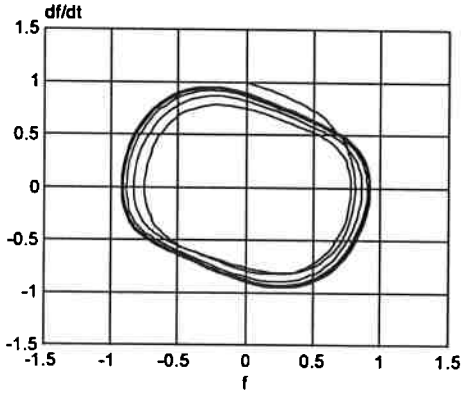
($\delta_1^c = 1.000$; $q_1^c = 0.350$; $c_1^c = 0.401$)





MODELO DINÂMICO PROPOSTO INCORPORANDO VARIAÇÃO DA TRAÇÃO ESTÁTICA

($\delta_1 = 1.000$; $q_1 = 0.326$; $c_1 = 0.417$)



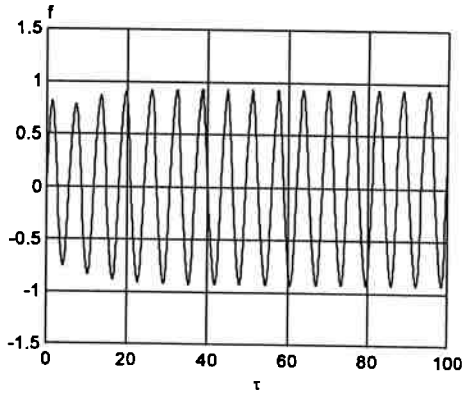


Figura 3.12 - Amplitudes Generalizadas de Vibração Segundo os Dois Modelos Dinâmicos Plataforma Auger c/ Pré-tensão Reduzida - 1º Modo - Condição Instável ($T = T_1/2$)

TENDÃO DA PLATAFORMA AUGER

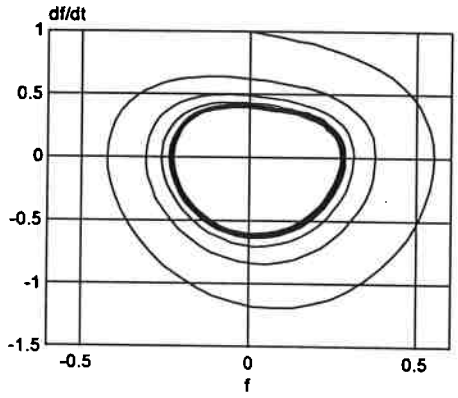
PRÉ-TENSÃO REDUZIDA EM 15% (P = 7524 kN)

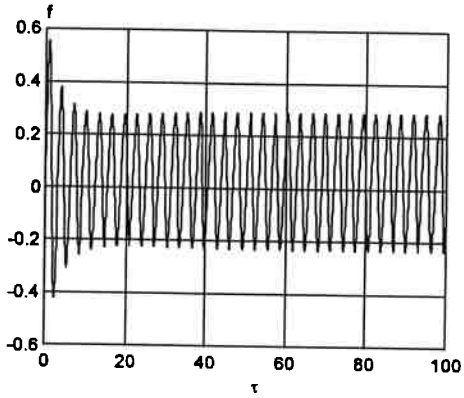
CONDIÇÃO INSTÁVEL ($T = T_1$) 1° MODO NATURAL DE VIBRAÇÃO

$\omega = 0.39$ rad/s $S_0/P = 0.7$

MODELO DINÂMICO ASSUMINDO TRAÇÃO ESTÁTICA CONSTANTE

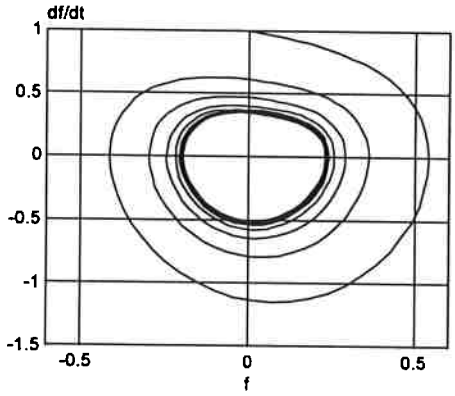
($\delta_1^c = 4.000$; $q_1^c = 1.400$; $c_1^c = 0.401$)





MODELO DINÂMICO PROPOSTO INCORPORANDO VARIAÇÃO DA TRAÇÃO ESTÁTICA

($\delta_1 = 4.000$; $q_1 = 1.305$; $c_1 = 0.417$)



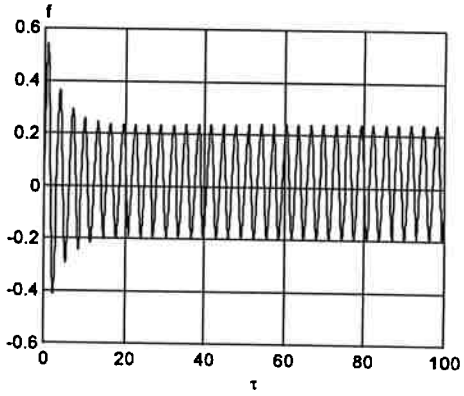


Figura 3.13 - Amplitudes Generalizadas de Vibração Segundo os Dois Modelos Dinâmicos Plataforma Auger c/ Pré-tensão Reduzida - 1º Modo - Condição Instável ($T = T_1$)

3.3.4 Discussão dos Resultados Obtidos para o Tendão da Plataforma Auger

A análise dos tendões da plataforma Auger permite evidenciar a influência exercida pelas modernas configurações de projeto de TLPs sobre a dinâmica lateral dos tendões. Em primeiro lugar, explicita fato já amplamente discutido na literatura que aborda esse tema: O caso de águas profundas é crítico no que se refere às excitações paramétricas estudadas. Este fato se concretiza através dos baixos valores assumidos pelos parâmetros de controle da equação de Mathieu. No caso particular da plataforma Auger, seus tendões apresentam um período fundamental de oscilação da ordem de 16 segundos e, assim, períodos de ondas do mar próximos a 4, 8 e 12 segundos, por exemplo, levarão inevitavelmente a condições instáveis de oscilação lateral. A figura 3.7 representa a condição de operação da plataforma, com período de projeto de 10.3 segundos resultando em uma condição dinâmica estável para os tendões. No entanto, a figura 3.9 corresponde à mesma situação, agora com um período de ondas de 12.0 segundos e leva, ao contrário, a uma oscilação instável dos tendões.

Um outro aspecto que deve ser analisado através dos resultados advindos desta análise corresponde ao efeito de redução dos valores de pré-tensão. Tal redução atua no mesmo sentido do efeito de aumento de profundidade no que diz respeito à redução dos parâmetros de Mathieu pois diminui as freqüências naturais de oscilação do tendão. Seu efeito, no entanto, não é tão significativo quanto aquele oriundo do aumento do comprimento dos tendões, mesmo porque existem limitações óbvias para a desejada redução de pré-tensão. Seu efeito é, contudo, importante em se tratando da influência da variação de tração sobre a dinâmica lateral dos tendões. Como mostram os resultados

apresentados na seção 3.3.1, devido à elevada relação entre pré-tensão e peso próprio dos tendões (P/W), o efeito de variação de tração é desprezível no caso dos tendões da plataforma Hutton. O mesmo não pode ser dito, entretanto, ao se analisar os resultados relativos à plataforma Auger. As amplitudes generalizadas de oscilação em ciclo-limite, obtidas para as regiões de instabilidade analisadas, são sumarizadas na tabela 3.1 para os casos de pré-tensão nominal e na tabela 3.2 para o caso adicional de pré-tensão reduzida (Ac e Av correspondem respectivamente às amplitudes obtidas segundo modelo dinâmico de tração constante e variável ao longo dos tendões):

Modo	T	Ac (m)	Av(m)	Ac/Av
1º	$T_1/2$	0.88	0.80	1.10
1º	T_1	0.21	0.18	1.17
2º	$T_1/4$	0.88	0.83	1.07
2º	$T_1/2$	0.21	0.19	1.10

Tabela 3.1 - Amplitudes Generalizadas - Plataforma Auger - Pré-tensão Nominal

Modo	T	Ac (m)	Av(m)	Ac/Av
1º	$T_1/2$	1.04	0.93	1.12
1º	T_1	0.29	0.24	1.21

Tabela 3.2 - Amplitudes Generalizadas - Plataforma Auger - Pré-tensão Reduzida em 15%

Das tabelas acima pode-se verificar que as amplitudes generalizadas de oscilação preditas segundo o modelo de tração estática constante são da ordem de 10 a 20% superiores àquelas obtidas mediante a incorporação do efeito de variação desta tração ao longo do comprimento dos tendões. Percebe-se ainda que, como esperado, a

discrepância entre os modelos aumenta com a redução da relação entre pré-tensão e peso submerso do tendão (P/W).

Da análise efetuada pode-se ainda extrair outro aspecto dinâmico fundamental inerente ao problema de oscilação paramétrica dos tendões: Para uma mesma condição de excitação, modos de vibração mais elevados tendem a ser modos dinamicamente mais estáveis. Tal fato pode ser esquematizado com auxílio da figura 3.14, abaixo.

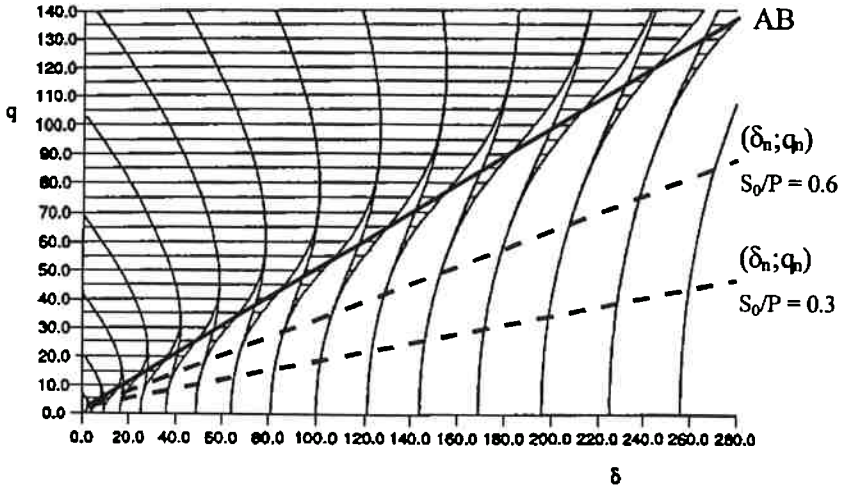


Figura 3.14 - Linhas de Variação do Par de Parâmetros (δ_n;q_n)

Nesta figura, a linha AB representa, de maneira aproximada, a separação entre regiões estáveis e instáveis no diagrama de Mathieu. Pode-se claramente perceber que tal linha pode ser descrita por:

$$q^{AB} \cong \frac{1}{2}\delta^{AB} \tag{3.25}$$

Para o modelo de tração constante, através da equação 3.23, a seguinte relação entre parâmetros pode ser imediatamente derivada:

$$q_n^c = \frac{1}{2}\delta_n^c\left(\frac{S_0}{P}\right) \tag{3.26}$$

A expressão acima demonstra que à medida em que a freqüência natural de vibração aumenta, ou seja, à medida em que se caminha para modos naturais mais altos, o parâmetro q_n^c cresce linearmente com o parâmetro δ_n^c. A relação acima é explícita para o modelo de tração constante e verifica-se numericamente que a mesma resulta ainda menor para o modelo de tração variável (ou seja, $q_n < (1/2)\delta_n(S_0/P)$). Mais ainda, sendo a relação (S_0/P) menor do que um (exceto em instantes isolados relativos a condições extremas previstas em projetos mais recentes), as linhas $(q_n^c;\delta_n^c)$ apresentam inclinação menor do que aquela apresentada pela linha AB. Dessa forma, para uma mesma condição de excitação, à medida em que a freqüência natural aumenta tende-se a pontos mais estáveis no diagrama de Mathieu. Esta tendência à estabilização pode ainda ser atestada através da tabela 3.1 ao se verificar que, para o período de excitação $T=T_1/2$, a amplitude generalizada de vibração relativa ao segundo modo natural é aproximadamente quatro vezes menor do que aquela correspondente ao modo fundamental de oscilação. O problema dinâmico de oscilação paramétrica dos tendões tem, portanto, seu interesse prático restrito aos modos naturais de vibração mais baixos.

Deve-se destacar também, por fim, que as amplitudes generalizadas de oscilação observadas são, mesmo para as condições instáveis mais críticas, bastante baixas. Magnitudes de oscilação da ordem de 1 metro para o primeiro e segundo modo natural indicam, tendo em vista o comprimento dos tendões, que os danos causados pela excitação paramétrica dos tendões serão consideravelmente inferiores àqueles resultantes de outros fenômenos como, por exemplo, o fenômeno de *springing* dos tendões.

3.4 Considerações Finais sobre o Modelo Dinâmico Proposto e o Fenômeno de Excitação Paramétrica dos Tendões

Propõe-se neste trabalho um modelo para representação dos modos naturais de oscilação lateral dos tendões considerando o efeito de variação da tração estática ao longo do comprimento dos mesmos por ação de seu peso submerso. Tal representação dá-se em termos de funções de Bessel de primeira espécie e o modelo resulta bastante simples do ponto de vista numérico, não requerendo em sua aplicação esforços computacionais significativos.

Mediante aplicação do modelo proposto, analisou-se o problema de excitação paramétrica dos tendões através de representação dinâmica usual na literatura especializada, baseada em equação dinâmica de Mathieu. Pôde-se, então, comparar os resultados obtidos através do modelo proposto com aqueles resultantes da representação dos modos naturais assumindo-se tração estática constante. Com base nesta análise várias considerações podem ser tecidas no que diz respeito ao problema dinâmico estudado e, de forma mais geral, quanto a outros problemas para os quais a aplicação do modelo proposto pode resultar vantajosa.

Em se tratando do problema de excitação paramétrica dos tendões, através dos dois casos-exemplo analisados, as plataformas Hutton e Auger, e graças às marcantes diferenças em suas configurações de projeto, a análise dinâmica realizada permite uma série de verificações e conclusões. Inicialmente, torna-se claro o efeito relativo às tendências presentes de projeto deste tipo de sistema sobre a dinâmica em estudo: O caso de águas profundas é crítico para este tipo de excitação, fato este já discutido em

maiores detalhes na seção 3.3.4 e a redução dos valores usualmente elevados de pré-tensão implica, logicamente, em maiores amplitudes de oscilação além de acentuar os efeitos de variação da tração estática sobre a dinâmica em questão. Através dos resultados obtidos pode-se também concluir que, mesmo para os casos mais críticos verificados para a plataforma Auger, as amplitudes de oscilação resultantes não devem induzir a danos significativos dos tendões graças às suas reduzidas magnitudes. Por outro lado, a comparação entre os distintos casos-exemplo estudados permite afirmar que os projetos de utilização de TLPs em águas ultra-profundas e a necessidade de redução dos valores de pré-tensão naturalmente levarão, mantidas as configurações padrão de projeto hoje verificadas, a condições dinâmicas mais críticas para seus tendões. Dessa forma, a fadiga causada por este tipo de oscilação pode vir a ser um parâmetro de projeto significativo.

Em relação ao modelo de representação dos modos naturais proposto vários aspectos merecem destaque. Em primeiro lugar, no que diz respeito às suas limitações, deve-se mencionar que, além daquelas obviamente resultantes das restrições físicas impostas, uma outra merece atenção: Os tendões são tratados como cabos, desprezando-se sua rigidez flexional, aproximação esta que é certamente adequada para modos naturais mais baixos tornando-se, contudo, menos apropriada para a representação de modos naturais elevados. Tal limitação é no entanto minimizada ao se verificar que a grande maioria das análises de interesse para os tendões de plataformas TLP restringe-se aos modos naturais mais baixos. O mesmo, no entanto, pode não ser verdade ao se considerar a utilização deste modelo em um leque mais amplo de aplicações, algumas das quais são comentadas mais adiante.

A análise dinâmica efetuada demonstra que, para o caso de tendões de plataformas TLP, mesmo sujeitos a valores sempre elevados de tração estática, a influência da variação desta tração pode resultar em diferenças significativas na representação de seu comportamento dinâmico. Indica também que as tendências de projeto deste tipo de sistema agem no sentido de intensificar tal influência. Agregando-se a essas verificações o fato de que o modelo dinâmico resulta extremamente simples do ponto de vista numérico, não exigindo esforços adicionais significativos se comparado ao modelo de tração estática constante, forma-se o contexto no qual se fundamentam as possíveis vantagens de aplicação do modelo proposto às etapas preliminares de análise dinâmica dos tendões. Tal aplicação, certamente, não se limita ao estudo de excitações paramétricas dos mesmos, podendo ser também de interesse, por exemplo, na análise de um dos principais fenômenos dinâmicos relativos ao projeto de plataformas TLP: o fenômeno de *ringing* dos tendões. Sendo este fenômeno caracterizado por oscilações laterais dos tendões segundo modos naturais de vibração excitados por forças impulsivas de terceira ordem atuantes sobre o casco, a necessidade de se considerar a variação de tração estática sobre os tendões a fim de se inferir de maneira mais precisa os danos de fadiga associados torna-se evidente.

Expandindo-se um pouco mais o horizonte de aplicação do modelo proposto pode-se, ainda, listar alguns outros problemas em engenharia oceânica onde a utilização preliminar do modelo de representação de Bessel dos modos naturais pode ser vantajosa: Um primeiro exemplo corresponde ao problema de lançamento no mar de pesadas estruturas por intermédio de cabos metálicos, as quais devem ser posicionadas

no solo marítimo de maneira precisa e a grandes profundidades; problema relativamente comum em engenharia *offshore*. A análise de fadiga de *risers* e cabos umbilicais, ligando o casco de plataformas ao leito oceânico, constitui outro exemplo direto.

Finalmente, com respeito a futuros incrementos no modelo dinâmico proposto, algumas sugestões surgem naturalmente em se tratando de problemas de engenharia oceânica: A incorporação de efeitos de correnteza, movimentos impostos nas extremidades e curvatura do cabo (necessária, por exemplo, na análise de *risers* em catenária) constituem alguns exemplos. Não obstante, a determinação precisa das amplitudes generalizadas de oscilação, visando, por exemplo, estudos de fadiga, depende da solução do sistema dinâmico completo, com todos os acoplamentos envolvidos. Obviamente, a solução do sistema de equações dinâmicas acopladas necessita de robustos modelos de simulação numérica. Deve-se sempre ter em mente, todavia, que a principal vantagem deste modelo decorre de sua simplicidade. Não é objetivo do mesmo concorrer com elaborados modelos numéricos mas sim fornecer uma ferramenta que permita extrair resultados de maneira simples e direta em etapas preliminares de projeto e, principalmente, possibilitar o desenvolvimento de sensibilidade quanto aos vários fatores envolvidos no complexo problema dinâmico em questão. Assim sendo, o incremento do modelo visando um tratamento mais completo do fenômeno em questão poderia, de certa forma, desviá-lo de sua finalidade precípua.

4 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

A experiência adquirida através dos poucos projetos ainda hoje efetivamente concretizados envolvendo plataformas TLP já se mostra suficiente, ao menos, para fundamentar o que hoje é um consenso em engenharia oceânica: Existe grande potencial de aprimoramento deste sistema oceânico com relação às configurações atualmente seguidas, aprimoramento esse que se apresenta como requisito básico ao se almejar o futuro emprego de plataformas TLP em águas ultra-profundas. O trabalho de pesquisa desenvolvido e relatado ao longo dos capítulos precedentes levantou uma série de aspectos relativos a possíveis refinamentos e, do mesmo, várias conclusões específicas foram extraídas. O intuito aqui não é fazer um apanhado destas conclusões mas sim organizar a linha geral que norteia os aspectos abordados, ressaltar como os resultados obtidos podem contribuir para alcançá-los e apontar as etapas seguintes de desenvolvimento que devem ser trilhadas no sentido de complementar a pesquisa proposta.

Um dos sistemas para exploração de petróleo no mar mais bem estabelecidos em engenharia oceânica é, sem dúvida, a plataforma semi-submersível. Seu mérito principal, no que diz respeito ao seu comportamento no mar, talvez seja a possibilidade de sintonizar suas freqüências naturais de movimento em *heave*, *roll* e *pitch* em uma faixa significativamente inferior àquela de maior energia de ondas. Muitos trabalhos foram desenvolvidos procurando, através de um cancelamento entre forças inerciais e de forças de flutuação, otimizar o sistema no que diz respeito às suas

forças excitantes. Tendo em vista as baixas freqüências ressonantes envolvidas, a hipótese de ondas longas, adotada por tais trabalhos, é certamente válida ao se tratar da resposta ressonante deste tipo de sistema. O mesmo não é verdade, no entanto, ao se analisar sistemas TLP. As freqüências ressonantes dos movimentos no plano vertical deste sistema são bastante elevadas. O padrão de projeto adotado permitiu minimizar efeitos de primeira ordem mas o sistema passou a ser atingido pela ação de vários fenômenos não-lineares em alta freqüência imprevistos quando de sua elaboração conceitual.

A formulação desenvolvida por ARANHA; PINTO (1994) abre caminho para o estudo de formas alternativas de casco, hidrodinamicamente otimizadas quanto aos efeitos de excitação vertical no regime de altas freqüências. Mais do que isso, permite a elaboração de uma metodologia simples e direta para o estudo de eventuais formas bidimensionais associadas a qualquer comportamento previamente definido para as forças de excitação vertical que virão a atuar sobre as mesmas.

Ao se estudar mais profundamente o problema de otimização de formas hidrodinâmicas aqui abordado, o primeiro aspecto a vir à tona é o elevado grau de complexidade que o envolve. Certamente, nenhum modelo que procurasse incorporar todos os fenômenos envolvidos nos quais se incluem a viscosidade do escoamento, efeitos de difração, influência da superfície, irregularidade das ondas do mar, tridimensionalidade do escoamento, interação entre corpos, entre muitos outros, teria êxito em apontar qualquer alternativa viável. Da análise dos vários trabalhos realizados sobre o tema percebe-se que, mesmo sob as fortes hipóteses simplificadoras assumidas,

o descobrimento das formas procuradas ainda parece exigir um trabalho muito mais artístico do que propriamente exato. Por mais direta que seja a metodologia envolvida, o estudo de possíveis alternativas resulta, muitas vezes, infrutífero. As formas bidimensionais geradas ao logo do capítulo 2 deste trabalho vem demonstrar que, apesar de árduo, este trabalho de criação pode trazer bons resultados.

No contexto teórico em que foram elaboradas, as formas bidimensionais levantadas apresentam resultados bastante fortes. Permitem não apenas o cancelamento da forças inerciais verticais em uma dada freqüência de ondas mas também sua redução efetiva em um larga faixa de freqüências adjacente. Obter tal comportamento foi sempre um dos principais problemas observados nos trabalhos previamente desenvolvidos sobre o tema.

Obviamente, a validação das formas bidimensionais geradas como possíveis alternativas de interesse para secções de *pontoons* de plataformas TLP ainda está longe de poder ser afirmada. Deve-se, inicialmente, verificar a influência da profundidade de submersão sobre o comportamento das geometrias obtidas no contexto de grandes profundidades de submersão. A extensão das mesmas para o caso tridimensional é uma das etapas subseqüentes fundamentais. Nesta etapa deve-se investigar outras possíveis configurações de *pontoons* (como, por exemplo, a configuração toroidal) e o comportamento das mesmas sob vários ângulos de incidência de ondas. A viabilidade de construção das eventuais configurações e a questão do arranjo entre colunas e *pontoons* são outros aspectos de fundamental importância. Em suma, as possíveis concepções

alternativas resultantes deste estudo devem percorrer todas as etapas de análise envolvidas na validação de um novo conceito de sistema oceânico.

O estudo de formas hidrodinâmicas realizado não tem, assim, a pretensão de exaurir as possibilidades advindas da formulação em que o mesmo se fundamenta e, muito menos, de viabilizar a aplicação prática das formas geométricas obtidas. Acredita-se, no entanto, que graças à simplicidade inerente à metodologia proposta e tendo em vista os resultados obtidos através da mesma, tenha-se delineado uma ferramenta de síntese que possa vir a contribuir de forma significativa para a expansão dos horizontes normalmente nebulosos que envolvem a concepção de novos conceitos de engenharia.

O segundo tópico abordado neste trabalho tem, com certeza, um tom menos artístico, mas não menos importante. O problema de excitação paramétrica dos tendões não implica, hoje, em danos significativos aos tendões, face a outros fenômenos dinâmicos envolvidos. O estudo realizado para os tendões da plataforma Auger (ver seção 3.3.3) demonstra que, em primeira análise, as oscilações oriundas de tal excitação tem, mesmo nas condições dinâmicas instáveis mais críticas, amplitude máxima da ordem de um metro para um tendão de aproximadamente 850 metros de comprimento.

A análise realizada demonstra, no entanto, que o problema ganha relevância à medida em que se caminha para águas de maior profundidade. Nestas condições, os tendões estarão sujeitos a condições instáveis mais críticas no que se refere ao fenômeno em questão, o que se traduz matematicamente por menores parâmetros de Mathieu. Outro aspecto que contribui para intensificar o fenômeno em questão é a redução de pré-

tensão do sistema. Visto que a aplicação em águas ultra-profundas e com pré-tensão reduzida são duas das principais tendências que balizam a futura utilização de plataformas TLP, o panorama de comportamento dinâmico dos tendões pode vir a ser radicalmente modificado e, certamente, o problema de excitação paramétrica deve ser investigado.

Tal investigação não mais poderá, contudo, ser efetuada com base nos modelos senoidais de representação das formas modais de vibração lateral, empregados, via de regra, para a análise deste problema dinâmico. Sob pré-tensões reduzidas, o efeito de variação da tração estática ao longo do comprimento dos tendões por influência de seu peso submerso passa a influenciar significativamente sua dinâmica lateral.

Com base nos aspectos acima discutidos, deduziu-se modelo analítico de representação destas formas modais, incorporando a mencionada variação de tração estática. Através de uma transformação do problema de Sturm-Liouville associado à representação deste fenômeno, pôde-se, mediante trabalho apresentado no apêndice C, rescrevê-lo com base em uma equação de Bessel modificada. Como resultado deste procedimento, um modelo analítico de representação das formas modais de vibração lateral dos tendões em termos das funções de Bessel de primeira espécie é derivado. Mediante o estudo dos dois casos-exemplo apresentados na seção 3.3, explicita-se a maior influência da variação de tração estática sobre a dinâmica analisada, em função da redução da relação entre pré-tensão e peso submerso do tendão.

Conforme mencionado na seção 3.4, alguns refinamentos do modelo proposto podem ser sugeridos no sentido de enriquecer o panorama dinâmico enfocado. Dentre eles destacam-se a incorporação de efeitos de rigidez das juntas flexíveis, a consideração dos movimentos impostos ao topo pelo casco e os efeitos dinâmicos de onda e correnteza atuando diretamente sobre os tendões. Não obstante, deve-se ressaltar que o campo de aplicação deste modelo dinâmico não se restringe ao problema de excitação paramétrica, objeto deste estudo. Deste campo fazem parte não apenas outros fenômenos que envolvem a dinâmica lateral dos tendões (dentre os quais um dos mais importantes é, certamente, o fenômeno de *ringing*), mas também problemas correlatos em engenharia oceânica como, por exemplo, a dinâmica de *risers* e umbilicais.

Com base no acima exposto, pode-se resumir e ressaltar as principais sugestões visando a continuidade do estudo apresentado:

- Parte I:
    - Estudo de novas funções de forma e possíveis configurações geométricas bidimensionais associadas;
    - Análise da influência de efeitos de superfície livre sobre as formas seccionais obtidas;
    - Extensão de tais formas seccionais ao caso tridimensional com o estudo de possíveis arranjos alternativos de *pontoons*.
    - Estudo de interação hidrodinâmica entre *pontoons* otimizados e colunas;
    - Análise de viabilidade construtiva.

- Parte II:
    - Incorporação de efeitos de rigidez das juntas flexíveis;
    - Consideração de efeitos hidrodinâmicos atuando diretamente sobre o cabo, principalmente por ação da correnteza;
    - Incorporação de movimentos lineares de *heave* e *sway* do casco;
    - Implementação da modelagem dinâmica do cabo com curvatura visado, especialmente, a análise dinâmica de *risers* e cabos umbilicais em catenária;
    - Possível extensão para o caso tridimensional.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. **Handbook of mathematical functions.** Washington, DC, U.S. Gov. Print Office, 1964.

ARANHA, J.A.P.; PESCE, C.P. A variational method for water wave radiation and diffraction problems. **Journal of Fluid Mechanics**, n.204, p.135-57, 1989.

_____ et al. Mechanics of submerged cables: Asymptotic solution and dynamic tension. In: INTERNATIONAL OFFSHORE AND POLAR ENGINEERING CONFERENCE, 3., Singapore, 1993. **Proceedings**. ISOPE, 1993. v.2, p.345-356.

_____; PINTO, M.O. Wave radiation by a deep submerged cylinder with application to ocean structure. **Applied Ocean Research**, n.15, p.327-35, 1994.

BENDER, C.M.; ORZAG, S.A. **Advanced mathematical methods for scientists and engineers.** New York, MacGraw-Hill, 1978.

BESSHO, M. On the wave-free distribution in the oscillation problem of the ship. **Journal of the Society of Naval Architects of Japan**, v.117, p.127-138, 1965.

BREKKE, J.N; GARDNER, T.N. Analysis of brief tension loss in TLP tethers. **Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering,** n.110, p.43-7, 1988.

CHEN, X.B.; MOLIN, B.; PETITJEAN, F. Numerical evaluation of the springing loads on tension leg platforms. **Marine Structures**, n.8, p.501-24, 1995.

CHITRAPU, A.S.; ERTEKIN, R.C. Time-domain simulation of large amplitude response of floating platforms. **Ocean Engineering,** v.4, n.22, p.367-85, 1995.

CHUNG, P.L. Dragged surge motion of a tension leg structure. **Ocean Engineering**, n.21, p.311-28, 1994.

FALTINSEN, O.M. **Sea Loads on Ships and Offshore Structures**. Cambridge, Cambridge University Press, 1990.

FERRARA, N.F.; PRADO, C.P.C. **Caos - uma introdução**. São Paulo, Edgar Blücher, 1994.

HORTON, E.E. et al. Optimization of stable platform characteristics. In: OFFSHORE TECHNOLOGY CONFERENCE, 4., Houston, 1972. **Proceedings**. OTC, 1972. v.1, p. 417-28.

HSU, C.S. The response of a parametrically excited hanging string in fluid. **Journal of Sound and Vibration**, v.3, n.39, p.305-16, 1975.

KIM, C.H., ZHAO, C. & ZOU, J. Springing and ringing due to nonlinear waves on a coupled TLP. In: INTERNATIONAL OFFSHORE AND POLAR ENGINEERING CONFERENCE, 5., The Hague, 1995. **Proceedings**. ISOPE, 1995. v.1, p.83-89.

KITAMI, E.K.; NIMOMIYA, K; KATAYAMA, M. Response characteristics of a tension leg platform with mechanical damping system in waves. In: OFFSHORE TECHNOLOGY CONFERENCE, 14., Houston, 1982. **Proceedings**. OTC, 1982. v.1, p. 181-98.

LAMB, H. **Hydrodynamics.** 6.ed. Cambridge, Cambridge University Press, 1932.

LANDAU, L.; LIFSHITZ, E. **Curso Abreviado de Fisica Teorica. Libro 1: Mecanica y Electrodinamica**. 2.ed. Moscow, Editorial Mir, 1979.

LEE et al. Dragged surge motion on tension leg platform tethers In: INTERNATIONAL OFFSHORE AND POLAR ENGINEERING CONFERENCE, 7., Honolulu, 1997. **Proceedings**. ISOPE, 1997. v.1, p.201-06.

LEITE, A.J.P. et al. Minimization of vertical wave exciting force and heave motion of a production semisubmersible with rigid risers. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON OFFSHORE MECH. AND ARTIC ENG., 11., 1992. **Proceedings.** OMAE, 1992, v.1-A, p.215-22.

LOHR, C.J. et al. Design, fabrication and installation of Auger LMS and tendons. In: OFFSHORE TECHNOLOGY CONFERENCE, 26., Houston, 1994. **Proceedings**. OTC, 1994. v.4, p.553-64.

MATSUI, T.; SAKOH, Y.; NOZU, T. Second-order sum-frequency oscillations of tension leg platforms: prediction and measurement. **Applied Ocean Research**, n.15, p.107-18, 1993.

MEI, C.C. **The applied dynamics of ocean surface waves.** New York, John Wiley & Sons, 1983.

MERCIER, J.A. Evolution of Hutton TLP response to environmental loads. In: OFFSHORE TECHNOLOGY CONFERENCE, 14., Houston, 1982. **Proceedings**. OTC, 1982. v.4, p. 585-96.

MINKENBERG, H.L.; VAN SLUIJS, M.F. Motion optimization of semi-submersibles. In: OFFSHORE TECHNOLOGY CONFERENCE, 4., Houston, 1972. **Proceedings**. OTC, 1972. v.2, p. 131-42.

MOTORA, S.; KOYAMA, T. On wave excitationless ship forms. **Journal of the Society of Naval Architects of Japan**, v.117, p.115-26, 1965.

NATVIG, B.J. A proposed ringing analysis model for higher order tether response. In: INTERNATIONAL OFFSHORE AND POLAR ENGINEERING CONFERENCE, 3., Singapore, 1993. **Proceedings**. ISOPE, 1993. v.1, p.40-51.

_____; VOGEL, H. TLP design philosophy - past, present, future. In: INTERNATIONAL OFFSHORE AND POLAR ENGINEERING CONFERENCE, 5., The Hague, 1995. **Proceedings**. ISOPE, 1995. v.1, p.64-69.

NEWMAN, J.N. **Marine hydrodynamics**. 2ed. Cambridge, The MIT Press, 1978.

_____. Second-harmonic wave diffraction at large depths. **Journal of Fluid Mechanics**, n. 213, p.59-70, 1990.

NISHIMOTO, K.; MAZZUCO, J.C.C. Fundamental study of semisubmersible hull form with minimum exciting forces in waves. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON OFFSHORE ENGINEERING, 6., Rio de Janeiro, Sept., p.713-27, 1989.

PATEL, M.H.; PARK, H.I. Dynamics of tension leg platform tethers at low tension. Part I - Mathieu stability at large parameters. **Marine Structures**, v.3, n.4, p.257-73, 1991.

PESCE, C.P. **Estudo do comportamento de corpos flutuantes em ondas: um enfoque variacional e aplicações da teoria do corpo esbelto**. São Paulo, 1988. p.irreg. Tese (Doutorado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.

ROITMAN, N.; ANDRADE, F.M.; BATISTA, R.C. Dynamic response analysis of a small scale model tension leg platform. **Marine Structures**, v.5, n.6, p.491-513, 1992.

ROSSIT, C.A; LAURA, P.A.A.; BAMBILL D.V. Dynamic response of the leg of a tension leg platform subjected to an axial, suddenly applied load at one end. **Ocean Engineering**, v.23, n.3, p.219-24, 1996.

SCHOTT III, W.E. et al. Global design and analysis of the Auger tension leg platform. In: OFFSHORE TECHNOLOGY CONFERENCE, 26., Houston, 1994. **Proceedings**. OTC, 1994. v.4, p.541-52.

STOKER, J.J. **Nonlinear Vibrations**. New York, Wiley, 1950.

STRICKLAND, G.E.; MASON, A.B. Parametric response of TLP tendons - Theoretical and numerical analyses. In: OFFSHORE TECHNOLOGY CONFERENCE, 13., Houston, 1981. **Proceedings**. OTC, 1981. v.1, p.45-54.

TETLOW, J.; LEECE, M. Hutton TLP mooring system. In: OFFSHORE TECHNOLOGY CONFERENCE, 14., Houston, 1982. **Proceedings**. OTC, 1982. v.4, p.573-584.

THOMPSON, J.M.T. & STEWART, H.B. **Nonlinear Dynamics and Chaos**. New York, Wiley, 1993.

YAMASHITA, S. A study on wave-free floating-body forms in heaving motion. **Journal of the Society of Naval Architects of Japan**, v.150, p.158-65, 1981.

_____. On wave free forms in swaying oscillation, **Journal of the Society of Naval Architects of Japan**, v.157, June, p.168-79, 1985.

Apêndice A

DETERMINAÇÃO DA FORÇA DE EXCITAÇÃO INERCIAL VERTICAL EM TERMOS DA FUNÇÃO DE FORMA F(Ka)

Este apêndice tem por objetivo apresentar, de maneira resumida, a fundamentação teórica e o equacionamento analítico desenvolvidos em ARANHA; PINTO (1994), os quais possibilitam a determinação da força de excitação inercial em termos da função de forma F(Ka), válida para toda a faixa de freqüências.

A.1 Formulação em Fluido sem Fronteiras

A equação (2.3) apresenta a expansão em série de Laurent do potencial complexo de escoamento adimensional em fluido sem fronteiras, expansão esta válida para toda a região fluida:

$$w(z) = -\sum_{n=1}^{\infty}(-i)^n \frac{D_n}{z^n} \tag{A.1}$$

Tal potencial encontra-se adimensionalizado pelo comprimento típico (a). O potencial dimensional W(z), escrito em termos do sistema de coordenadas dimensional (X,Y), é então dado por:

$$W(Z) = -a\sum_{n=1}^{\infty}(-i)^n \frac{D_n}{(Z/a)^n} = -\sum_{n=1}^{\infty}(-i)^n \frac{B_n}{Z^n} \tag{A.2}$$

onde:

$$B_n = a^{n+1}D_n \tag{A.3}$$

Em particular, o coeficiente do termo linear (B_1) é dado analiticamente por:

$$B_1 = -\frac{1}{2\pi}(C_m + 1)S \tag{A.4}$$

Sendo (r,θ) o sistema de coordenadas cartesiano associado a (X,Y) e lembrando que:

$$\begin{aligned} \frac{\sin((2n+1)\theta)}{r^{2n+1}} &= \frac{(-1)^n}{(2n)!}\frac{\partial^{2n}}{\partial y^{2n}}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right) \\ \frac{\cos(2n\theta)}{r^{2n}} &= \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\frac{\partial^{2n-1}}{\partial y^{2n-1}}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right) \end{aligned} \tag{A.5}$$

o potencial de velocidades do escoamento pode então ser escrito como:

$$\phi(X,Y) = \mathrm{Real}(W(Z)) = B_1.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{n-1}}{(n-1)!}\frac{D_n}{D_1}\frac{\partial^{n-1}}{\partial y^{n-1}}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right) \qquad (A.6)$$

A.2 Efeito de Superfície Livre

Supondo-se a secção apresentada na figura (2.1) oscilando com freqüência ω, a solução do problema de radiação deve satisfazer a condição cinemática imposta na superfície do corpo, a condição de superfície livre em Y=d, a condição de radiação quando $X \rightarrow \pm\infty$ e a equação de Laplace. Observando que a condição cinemática no corpo é automaticamente satisfeita por (A.6), o potencial de radiação pode ser dado por:

$$\phi_3(X,Y,t) = \left[\phi(X,Y) + \varphi(X,Y)\right].\cos(\omega t) + \varphi_w(X,Y,t) + R(X,Y,t) \qquad (A.7)$$

Na equação acima $\phi(X,Y)$ é o potencial em fluido sem fronteiras, dado por (A.6) e as demais funções são definidas da seguinte forma: A função $\varphi(X,Y)$ é determinada impondo-se que o termo entre colchetes em (A.7) satisfaça a condição de superfície livre e a função $\varphi_w(X,Y,t)$ corresponde a uma onda estacionária adicionada de forma que a condição de radiação seja plenamente satisfeita. O resíduo R(X,Y,t) corrige a condição de contorno no corpo, perturbada pelas funções φ e φ_w, e deve satisfazer todas as demais condições de contorno.

Sendo uma solução da equação de Laplace, a função $\varphi(X,Y)$ pode ser dada na forma de integral de Fourier:

$$\varphi(X,Y) = \int_0^{\infty} b(k).e^{-kY}.\cos(kX).dk \qquad (A.8)$$

Através da identidade:

$$\frac{\sin\theta}{r} = \frac{Y}{X^2+Y^2} = \int_0^{\infty} e^{-kY}.\cos(kX).dk \quad (y>0) \qquad (A.9)$$

pode-se também escrever $\phi(X,Y)$ na forma:

$$\phi(X,Y) = B_1.\int_0^{\infty} F(ka).e^{-ky}.\cos(kX).dk \qquad (A.10)$$

onde:

$$F(ka) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(ka)^n}{n!}\frac{D_{n+1}}{D_1} \qquad (A.11)$$

A função F(.) acima corresponde à denominada *função de forma* do corpo (definida pela equação (2.4)). Conforme apresentado no capítulo 2 deste trabalho, tal função é analítica em todo o plano complexo e depende exclusivamente da geometria da secção através da relação de coeficientes D_n/D_1.

Da condição de superfície livre :

$$\left[\frac{\partial}{\partial y}(\phi+\varphi)=K(\phi+\varphi)\right]_{y=d} \tag{A.12}$$

determina-se:

$$b(k)=B_1\frac{k+K}{k-K}F(ka)e^{-2kd} \tag{A.13}$$

A integral de Fourier em (A.8) pode ser definida no plano complexo k, devendo-se, no entanto, atentar para a singularidade em k=K introduzida através da equação (A.13). Contornando-se propriamente tal singularidade ao longo do caminho de integração, a função $\varphi(X,Y)$ pode ser expressa na forma final:

$$\varphi(X,Y)=\varphi_o(X,Y)+\varphi_e(X,Y) \tag{A.14}$$

com:

$$\varphi_o(X,Y)=-2\pi B_1KF(Ka)e^{-2Kd}e^{Ky}\sin(K|x|)$$

$$\varphi_e(X,Y)=-2\pi B_1.\mathrm{Real}\left[\frac{i}{2\pi}\int_0^\infty\frac{i.m+1}{i.m-1}F(imKa)e^{-i.m(2Kd-Ky)}e^{-m|x|}dm\right] \tag{A.15}$$

As funções $\varphi_o(X,Y)$ e $\varphi_e(X,Y)$ correspondem, respectivamente, às parcelas ondulatórias e evanescentes de $\varphi(X,Y)$.

No campo distante apenas a parcela ondulatória $\varphi_o(X,Y)$ permanece e a condição de radiação será satisfeita se a onda estacionária:

$$\varphi_w(X,Y,t)=2\pi B_1K^2F(Ka)e^{-2kd}e^{ky}.\cos(K|x|).\mathrm{sen}(\omega t) \tag{A.16}$$

for adicionada à solução (eq. (A.7)).

A função R(X,Y,t), conforme mencionado anteriormente, corrige a perturbação introduzida na condição de contorno na superfície do corpo pelas funções $\varphi(X,Y)$ e $\varphi_w(X,Y)$ e, portanto:

$$\nabla R.\vec{n}=-\nabla(\varphi(X,Y).\cos(\omega t)+\varphi_w(X,Y,t)).\vec{n}\sim O(\delta) \tag{A.17}$$

onde δ é dado por (ver eqs. (A.14)-(A.16)):

$$\delta=(C_m+1)S.F(Ka).K^2.e^{-2Kd} \tag{A.18}$$

Assim, assumindo-se que a profundidade de submersão (d) seja suficientemente grande de forma que δ seja desprezível ($\delta<<1$) em toda a faixa de freqüências, o potencial de radiação em campo distante pode ser aproximado por:

$$\phi_3(X,Y,t) \sim i.2\pi B_1.KF(Ka)e^{-2Kd}e^{Ky}e^{i(K|x|-\omega t)};|x| \to \infty \qquad (A.19)$$

A força de excitação devido à ação de uma onda incidente com potencial ϕ_I pode ser determinada a partir do potencial de radiação em campo distante (A.19) por intermédio da Relação de Haskind, resultando, neste caso:

$$f(t) = \rho S(C_m + 1).F(Ka).\frac{dv_0}{dt}$$

$$v_0(t) = \frac{\partial \phi_I}{\partial Y} = -i\omega A e^{Kd} e^{-i\omega t} \qquad (A.20)$$

A equação acima corresponde, então, à força seccional de *heave* dada em termos da função de forma F(Ka), através da qual se traduzem os efeitos da geometria do corpo sobre o fenômeno de difração de ondas e, conseqüentemente, sobre a referida força de excitação inercial.

Apêndice B

ESQUEMATIZAÇÃO DE FORÇAS PARA A GEOMETRIA ASSOCIADA À FUNÇÃO DE FORMA $F(Ka) = \cos^4(\alpha Ka)$

A relação entre os raios dos *pontoons* e também a distância entre os mesmos para as geometrias decorrentes da função de forma $F(Ka) = \cos^4(\alpha Ka)$ podem ser visualizadas esquematicamente abaixo:

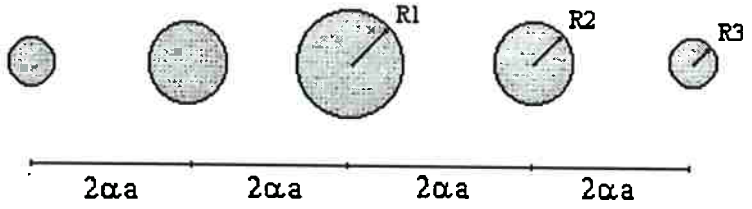


Figura B.1 - Configuração Geométrica Esquemática

onde (a) corresponde à dimensão típica do corpo e os raios (R1;R2;R3) tendem assintóticamente para $\left(\frac{\sqrt{3}}{8}a;\frac{1}{2}a;\frac{1}{4}a\right)$ com o aumento do parâmetro de controle.

A força de *heave* atuante sobre esse sistema bidimensional, desprezando-se efeitos viscosos, é dada, segundo a equação de *Morison*, por:

$$f = \rho\sum_{i=1}^{5}(Cm_i + 1).F_i(Ka).Sp_i.e^{iKx_i}\ddot{w} \qquad (B.1)$$

sendo:
- x_i: coordenada horizontal de cada *pontoon*;
- $F_i(Ka)$: função de forma de um corpo isolado;
- Sp_i: área de cada *pontoon*;
- $\ddot{w}$: aceleração fluida vertical à profundidade (d)

Assumindo-se agora, para uma maior simplicidade e sem perda de generalidade, um valor de (α) suficientemente grande (por exemplo α=1), as geometrias tendem a secções circulares e, assim, tem-se ($Cm_i = 1$) e ($F_i(Ka) = 1$). Considerando-se, ainda, a atuação de uma onda harmônica de freqüência (ω) e amplitude unitária, a amplitude de força vertical resulta:

$$f = -2\rho\omega^2 e^{-Kd}\sum_{i=1}^{5}Sp_i.e^{iKx_i} \qquad (B.2)$$

Considerando-se a relação de raios apresentada na figura acima e substituindo-se os valores de (x_i) obtém-se:

$$f = -2\rho\omega^2 e^{-Kd}\left\{\frac{\pi}{8}\cos(4\alpha Ka) + \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{2}\cos(2\alpha Ka)\right\} \qquad (B.3)$$

Para α=1, na freqüência de cancelamento, tem-se:

$$\cos^4(Ka) = 0 \qquad (B.4)$$

Dessa forma, o primeiro valor de (Ka) para o qual a função de forma se cancela é ($Ka=\pi/2$), valor esse que implica, segundo (B.3), em f=0.

A análise acima demonstra que a configuração geométrica resultante para a família de funções de forma em questão resulta simplesmente de uma combinação de áreas e distâncias entre corpos que, em função do comprimento de onda incidente (expresso pelo parâmetro Ka) apresentem resultante de forças vertical nula.

Ainda, considerando-se que o momento total gerado sobre as secções tem amplitude dada por:

$$m = -2\rho\omega^2 e^{-Kd}\sum_{i=1}^{5} Sp_i . e^{iKX_i} . x_i \qquad (B.5)$$

é trivial verificar que, nas freqüências de cancelamento da força inercial vertical, o momento total gerado pelas mesmas também se anula.

Apêndice C

DINÂMICA LATERAL DO TENDÃO: EXPANSÃO EM MODOS NATURAIS E ACOPLAMENTOS DINÂMICOS

A dinâmica lateral do tendão sob ação de tração estática variável é representada por intermédio da equação:

$$M\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(T(x,t)\frac{\partial y}{\partial x}\right) + B_v\left|\frac{\partial y}{\partial t}\right|\frac{\partial y}{\partial t} = 0 \qquad (C.1)$$

sendo T(x,t) a tração total atuante sobre o tendão.

A equação (C.1) é, então, dada por:

$$M\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x} - T(x,t)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + B_v\left|\frac{\partial y}{\partial t}\right|\frac{\partial y}{\partial t} = 0 \qquad (C.2)$$

A resposta dinâmica pode ser representada em termos de sua expansão em modos naturais:

$$y(x,t) = \sum_n f_n(t)\chi_n(x) \qquad (C.3)$$

onde: $f_n(t)$: amplitude generalizada do n-ésimo modo de vibração;
$\chi_n(x)$: forma modal do n-ésimo modo de vibração

Substituindo a expansão (C.3) em (C.2), tem-se a dinâmica lateral representada em termos dos modos naturais de vibração:

$$M\sum_n \frac{d^2 f_n}{dt^2}\chi_n - \frac{\partial T}{\partial x}\sum_n f_n\frac{d\chi_n}{dx} - T(x,t)\sum_n f_n\frac{d^2\chi_n}{dx^2} + B_v\left|\sum_n \frac{df_n}{dt}\chi_n\right|\sum_m \frac{df_m}{dt}\chi_m = 0 \qquad (C.4)$$

Considera-se então os dois casos distintos de carregamento estático:

i) <u>Tração estática constante:</u>

Neste caso a tração é dada por:

$$T(x,t) = T(t) = P - S_0\cos(\omega t) \qquad (C.5)$$

e a equação (C.4) resulta:

$$M\sum_n \frac{d^2 f_n}{dt^2}\chi_n - T(x,t)\sum_n f_n \frac{d^2\chi_n}{dx^2} + B_v\left|\sum_n \frac{df_n}{dt}\chi_n\right|\sum_m \frac{df_m}{dt}\chi_m = 0 \qquad (C.6)$$

Aplicando-se o método variacional de Galerkin (ou seja, multiplicando-se a equação dinâmica por $\chi_k(x)$ e integrando-se ao longo do comprimento do tendão) tem-se o seguinte sistema de equações:

$$M\sum_n \frac{d^2 f_n}{dt^2}\int_0^L \chi_n\chi_k dx - T(x,t)\sum_n f_n \int_0^L \frac{d^2\chi_n}{dx^2}\chi_k dx + \int_0^L\left(B_v\left|\sum_n \frac{df_n}{dt}\chi_n\right|\sum_m \frac{df_m}{dt}\chi_m\right)\chi_k dx = 0$$

$$k = 1,2,3,... \qquad (C.7)$$

No caso particular de tração estática constante, os modos naturais resultam senoidais, na forma:

$$\chi_n(x) = \sin\left(n\frac{\pi x}{L}\right) \qquad (C.8)$$

Assim, as integrais presentes nos dois primeiros termos de (C.7) resultam nulas para $n \neq k$. O único acoplamento dinâmico existente através desta modelagem corresponde àquele induzido pelo termo de amortecimento não-linear. Desprezando-se tal acoplamento (procedimento adotado em STRICKLAND; MASON (1981) e também em PATEL; PARK (1991)), a dinâmica relativa a cada modo natural de vibração pode ser analisada separadamente.

ii) *<u>Tração estática variável:</u>*

Assumindo a variação linear de tração estática ao longo do comprimento do tendão por influência de seu peso submerso tem-se:

$$T(x,t) = P + \mu g(L - x) - S_0\cos(\omega t) \qquad (C.9)$$

Definindo:

$$T_C(t) = P + \mu gL - S_0\cos(\omega t) \qquad (C.10)$$

pode-se escrever:

$$T(x,t) = T_C(t) - \mu gx \qquad (C.11)$$

Substituindo-se (C.11) em (C.7), vem:

$$M\sum_n \frac{d^2 f_n}{dt^2}\chi_n + \mu g\sum_n f_n\left(\frac{d\chi_n}{dx} + x\frac{d^2\chi_n}{dx^2}\right) - T_C(t)\sum_n f_n \frac{d^2\chi_n}{dx^2} + B_v\left|\sum_n \frac{df_n}{dt}\chi_n\right|\sum_m \frac{df_m}{dt}\chi_m = 0$$

$$(C.12)$$

Aplicando-se o método de Galerkin à equação acima, analogamente ao caso anterior, tem-se o sistema de equações acopladas:

$$M\sum_n \frac{d^2 f_n}{dt^2}\int_0^L \chi_n \chi_k dx + \sum_n f_n \left[\mu g \int_0^L \left(\frac{d\chi_n}{dx} + x\frac{d^2\chi_n}{dx^2} \right)\chi_k dx - T_c(t)\int_0^L \frac{d^2\chi_n}{dx^2}\chi_k dx \right] +$$

$$B_v \int_0^L \left(\left| \sum_n \frac{df_n}{dt}\chi_n \right| \sum_m \frac{df_m}{dt}\chi_m \right)\chi_k dx = 0 \qquad (C.13)$$

$$k = 1,2,3,...$$

Os modos naturais de vibração lateral do tendão considerando variação de tração estática ao longo do comprimento podem ser representados através de funções de Bessel de primeira espécie (ver solução do problema de autovalor, seção 3.2.2) na forma:

$$\chi_n(x) = X_n(x) = J_0\left(2\beta_n \left[1 + \frac{\mu g(L-x)}{P} \right]^{1/2} \right) - \frac{J_0(2\beta_n)}{Y_0(2\beta_n)} Y_0\left(2\beta_n \left[1 + \frac{\mu g(L-x)}{P} \right]^{1/2} \right) \qquad (C.14)$$

A representação modal acima descrita advém da solução de um problema de Sturm-Liouville auto-adjunto. Dessa forma, os modos naturais obtidos são ortogonais e, portanto, o termo de inércia em (C.13) é naturalmente desacoplado. O mesmo não ocorre, no entanto, com o termo entre colchetes nesta mesma equação, o qual convencionou-se denominar *termo de restauração* (R_{nk}):

$$R_{nk}(\mu, L, P, S, \omega, t) = \mu g \int_0^L \left(\frac{dX_n}{dx} + x\frac{d^2X_n}{dx^2} \right) X_k dx - T_c(t)\int_0^L \frac{d^2X_n}{dx^2} X_k dx \qquad (C.15)$$

Há, portanto, um acoplamento entre modos naturais devido à variação de tração estática, além do acoplamento oriundo do amortecimento não-linear. Convém notar que tais fontes de acoplamento são de natureza distinta.

Para se verificar a influência dos acoplamentos introduzidos pela variação de tração estática em termos da dinâmica global em estudo, procede-se a uma análise do termo de restauração acima citado. Assim, adimensionalizando-se R_{nk} por (P/L) e definido-se:

$$\xi = \frac{x}{L} \qquad (C.16)$$

e, notando ainda que o grau de acoplamento no termo de restauração varia no tempo em função da tração dinâmica e que seu máximo ocorre para cos(ωt)=1, pode-se escrever o termo de restauração associado a esta situação em função de apenas dois adimensionais característicos do problema:

$$\overline{R}_{nk}\left(\frac{\mu gL}{P},\frac{S}{P}\right)=\frac{\mu gL}{P}\int_0^1\left(\frac{dX_n(\xi)}{d\xi}+\xi\frac{d^2X_n(\xi)}{d\xi^2}\right)X_k(\xi)d\xi-\left(1+\frac{\mu gL}{P}-\frac{S}{P}\right)\int_0^1\frac{d^2X_n(\xi)}{d\xi^2}X_k(\xi)d\xi \tag{C.17}$$

Percebe-se, assim, que o acoplamento dinâmico entre os modos está diretamente relacionado à relação entre peso submerso dos tendões e pré-tensão ($\mu gL/P$) e à relação entre tração dinâmica e pré-tensão (S_0/P).

Pode-se então levantar os valores do termo de restauração acima definido para os tendões das duas TLPs adotadas como exemplo neste trabalho: as plataformas Hutton e Auger (os dados relativos a estes tendões encontram-se respectivamente nas seções 3.3.1 e 3.3.3).

Plataforma Hutton

$\overline{R}_{nk}$

n\k	1	2	3
1	**0.026**	0.001	-2.0E-5
2	0.001	**0.099**	0.004
3	-2.0E-5	0.004	**0.417**

Tabela C.1 - Matriz de Termos de Acoplamento Plataforma Hutton

Plataforma Auger

$\overline{R}_{nk}$

n\k	1	2	3
1	**3.228**	0.032	0.001
2	0.032	**0.204**	-0.005
3	0.001	-0.005	**0.104**

Tabela C.2 - Matriz de Termos de Acoplamento Plataforma Auger

Os valores das matrizes acima já permitem perceber que o acoplamento modal oriundo da variação de tração é, em ambos os casos, fraco. Tal fato se caracteriza pela menor ordem de magnitude dos termos fora da diagonal principal. No entanto, a fim de se permitir uma comparação mais direta da influência dos termos acoplados na matriz de restauração, define-se um coeficiente de correlação entre os modos, dado por:

$$C_{nk}=\frac{\overline{R}_{nk}}{(1/2)(\overline{R}_{nn}+\overline{R}_{kk})} \tag{C.18}$$

O termo acima compara linearmente os modos acoplados com os respectivos modos puros e permite, ao menos, uma comparação entre os casos. Tem-se, então:

Plataforma Hutton

$\overline{C}_{nk}$

n\k	1	2	3
1	**1.000**	0.016	-9.0E-5
2	0.016	**1.000**	0.015
3	-9.0E-5	0.015	**1.000**

Tabela C.3 - Matriz de Termos de Correlação Modal - Plataforma Hutton

Plataforma Auger

$\overline{C}_{nk}$

n\k	1	2	3
1	**1.000**	0.019	6.0E-4
2	0.019	**1.000**	-0.032
3	6.0E-4	-0.032	**1.000**

Tabela C.4 - Matriz de Termos de Correlação Modal - Plataforma Auger

Pode-se perceber, assim, que a rigidez relativa aos modos acoplados é substancialmente inferior àquela correspondente aos modos puros de vibração. Fisicamente, tal fato já poderia ser presumido. Mesmo para o caso da plataforma Auger, cujos tendões estão sujeitos a uma relação mais baixa entre pré-tensão e peso próprio, as formas modais relativas aos modos mais baixos de vibração pouco se afastam das respectivas formas senoidais. Como apresentado previamente, as formas senoidais oriundas do modelo de tração estática constante não implicam em acoplamentos de restauração e, portanto, pode-se esperar que, para os casos em análise de acordo com o modelo de tração variável, tais acoplamentos sejam baixos para os primeiros modos de vibração. Os modos naturais de vibração podem, então, ser tratados isoladamente (metodologia adotada) sem representar um erro significativo ao se desprezar os acoplamentos de restauração em questão, ao menos para os modos mais baixos.

À medida em que se caminha para modos mais elevados, no entanto, as formas modais relativas ao modelo de tração variável se caracterizam por um "empacotamento" de semi-ondas na parte inferior do tendão cada vez mais acentuado, afastando-se, assim, das formas senoidais de vibração. O acoplamento entre modos mais elevados pode, portanto, ser mais significativo. Por outro lado, uma das conclusões derivadas da análise estabilidade efetuada (ver seção 3.3) diz respeito ao fato de que modos naturais mais elevados tendem a ser dinamicamente mais estáveis. Assim, em se tratando do problema específico de vibração paramétrica dos tendões, o problema de instabilidade dinâmica se restringe naturalmente aos modos naturais mais baixos, faixa na qual os acoplamentos dinâmicos devido à variação de tração estática são efetivamente fracos.

Por fim, resta ainda a questão do acoplamento modal induzido pela consideração do amortecimento fluido não linear. Tal acoplamento é de natureza distinta em relação àquele acima discutido e independe do modelo de tração estática considerado. Seguindo-se os trabalhos previamente desenvolvidos sobre o tema (ver STRICKLAND; MASON (1981) e PATEL; PARK (1991)), tal acoplamento será também desconsiderado, permitindo-se a análise de modos isolados. Deve-se lembrar, no entanto, que tal hipótese não interfere no problema de instabilidade dinâmica em estudo mas sim, na magnitude das amplitudes de vibração resultantes. Assumir esta hipótese é, no entanto, necessário ao se almejar um primeiro tratamento do problema dinâmico, de forma analítica, que permita trazer à luz e discutir muitas das particularidades inerentes ao problema. O desenvolvimento desta sensibilidade é, como se sabe, fundamental para se possibilitar a compreensão física da dinâmica em estudo e, assim, abrir caminho para futuras

Apêndice D

TRANSFORMAÇÃO ALGÉBRICA PARA REPRESENTAÇÃO DO PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE ASSOCIADO AO FENÔMENO DE EXCITAÇÃO PARAMÉTRICA DOS TENDÕES NA FORMA DE EQUAÇÃO DE BESSEL MODIFICADA

A equação (3.7) caracteriza o problema de Sturm-Liouville associado ao fenômeno de excitação vertical paramétrica dos tendões:

$$\left\{\left[\frac{P}{M}+\frac{\mu g(L-x)}{M}\right]X_n'\right\}'+\varpi_n^2 X_n=0 \qquad (D.1)$$

A equação acima pode, ainda, ser rescrita na forma:

$$\left\{\left[1+\frac{\mu g(L-x)}{P}\right]X_n'\right\}'+\frac{M}{P}\varpi_n^2 X_n=0 \qquad (D.2)$$

Definindo-se a variável:

$$\psi=1+\frac{\mu g(L-x)}{P} \qquad (D.3)$$

e representando (C.2) em termos desta nova variável, tem-se:

$$\left\{\psi X_n'(\psi)\right\}'+\frac{PM}{(\mu g)^2}\varpi_n^2 X_n(\psi)=0 \qquad (D.4)$$

Definindo-se também:

$$\beta_n^2=\frac{PM}{(\mu g)^2}\varpi_n^2 \qquad (D.5)$$

resulta:

$$\left\{\psi X_n'(\psi)\right\}'+\beta_n^2 X_n(\psi)=0 \qquad (D.6)$$

Procedendo-se a nova mudança de variáveis:

$$\eta=\psi^{1/2} \qquad (D.7)$$

e notando que:

$$\begin{cases} \dfrac{dX(\psi)}{d\psi} = \dfrac{1}{2\eta}\dfrac{dX(\eta)}{d\eta} \\ \\ \dfrac{d^2X(\psi)}{d\psi^2} = \dfrac{1}{2\eta}\left(-\dfrac{1}{2\eta^2}\dfrac{dX(\eta)}{d\eta} + \dfrac{1}{2\eta}\dfrac{d^2X(\eta)}{d\eta^2}\right) \end{cases} \tag{D.8}$$

a equação (C.6) assume a forma:

$$\frac{1}{4}X_n''(\eta) + \frac{1}{4\eta}X_n'(\eta) + \beta_n^2 X_n(\eta) = 0 \tag{D.9}$$

ou, ainda:

$$\eta^2 X_n''(\eta) + \eta X_n'(\eta) + 4\beta_n^2\eta^2 X_n(\eta) = 0 \tag{D.10}$$

A equação (C.10) acima pode ser diretamente associada à Equação de Bessel Modificada expressa por:

$$\eta^2 X_n''(\eta) + a\eta X_n'(\eta) + (b + c\eta^{2q})X_n(\eta) = 0 \tag{D.11}$$

com parâmetros dados por:

- $a = 1$;
- $b = 0$;
- $c = 4\beta^2$;
- $q = 1$;

cuja solução analítica é dada em termos das equações de Bessel de primeira espécie, na forma:

$$X_n(\eta) = C_1 J_\nu(k\eta^q) + C_2 Y_\nu(k\eta^q) \tag{D.12}$$

sendo:

$$\begin{cases} p = \dfrac{1}{2}(1-a) = 0; \\ \\ k = \left(\dfrac{c}{q}\right)^{1/2} = 2\beta; \\ \\ \nu = \left(\dfrac{1}{q}\right)\left(p^2 - b\right)^{1/2} = 0; \end{cases}$$

e, assim, chega-se finalmente à representação das formas modais de vibração em termos das funções de Bessel (J_0,Y_0):

$$X_n(\eta) = C_1 J_0(2\beta\eta) + C_2 Y_0(2\beta\eta) \tag{D.13}$$

As constantes (C_1,C_2) podem ser determinadas através das condições de contorno:

$$\begin{cases} X_n\left(\sqrt{1+\dfrac{\mu g L}{P}}\right) = 0; x = 0 \\ \\ X_n(1) = 0; x = L \end{cases} \tag{D.14}$$

****