

014

CONSULTA  
FD-3623

Sao Paulo  
2004

Dissertação apresentada à Escola Politécnica  
da Universidade de São Paulo para obtenção  
do título de Mestre em Engenharia

VALIDAÇÃO DO MÉTODO DAS "GRANDES MASSAS" NA ANÁLISE DINÂMICA DE  
ESTRUTURAS SUBMETIDAS A EXCITAÇÕES DE BASE

Sergio Ferreira Alexandre

Sergio Ferreira Alexandre

VALIDAÇÃO DO MÉTODO DAS "GRANDES MASSAS" NA ANÁLISE DINÂMICA DE  
ESTRUTURAS SUBMETIDAS A EXCITAÇÕES DE BASE

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da  
Universidade de São Paulo para obtenção do  
título de Mestre em Engenharia

Área de Concentração:  
Engenharia Naval

Orientador:

Prof. Dr. Carlos Alberto Nunes Dias

São Paulo

2004

## Dedicatória

À minha família, já que a unidade da minha pessoa nada mais é que a soma das partes de cada um de vocês.  
À minha esposa Silvia, por ter me acompanhado nesta jornada.  
Uma lembrança: à quase 10 anos eu e meus irmãos ganhávamos o primeiro computador...

## Agradecimentos

Aproveito este espaço para agradecer ao Prof. Dr. Carlos Alberto Nunes Dias, que não somente contribuiu na orientação deste trabalho como também participou de seu desenvolvimento, tornando esta uma obra a quatro mãos.

Agradeço ainda aos integrantes dos grupos de Cálculo estrutural e Simulação Numérica da T-Systems do Brasil Ltda assim como o grupo de Predições Veiculares da Volkswagen do Brasil Ltda pelas várias discussões que muito acrescentaram a este trabalho e a minha pessoa.

Devo agradecimentos também ao engenheiro Rubens Marras Filho pela cessão dos direitos do artigo de sua autoria [1], o qual ilustra bem a presente dissertação.

Ao engenheiro Augusto Borella Hougaz o meu muito obrigado pelas informações e o modelo de elementos finitos do veículo mini-baja da Poli/USP.

Por fim agradeço aos colegas Claudiomar Cunha, Daniel Todescatt, Fernando Prevedello, Germano Gavarrão de Freitas, Gustavo Conrado e Ricardo Colalillo nos vários períodos dedicados ao estudo em conjunto, apoio e constante incentivo.

## **Resumo**

Este trabalho visa esclarecer algumas das técnicas usuais em análises pelo método dos elementos finitos, em particular quanto à análise dinâmica de estruturas.

Com a utilização de pacotes comerciais de análise estrutural, que se tornam cada vez mais populares tanto em preço como em utilização, não é difícil, hoje em dia, encontrar engenheiros recém-formados, ou mesmo profissionais que não apresentem especialização na área de emprego do software, manipulando-o como uma ferramenta qualquer de tecnologia da informação, preocupando-se apenas em desbravar as características intrínsecas ao software e não ao método dos elementos finitos e à área em que este é empregado, que pode variar da resistência dos materiais à mecânica dos fluidos, entre outras.

Diante desta situação, serão abordados neste trabalho temas ligados à análise dinâmica de estruturas pelo método dos elementos finitos, com aplicações à indústria de veículos, buscando-se, através das soluções obtidas para problemas simples, analogias que justifiquem procedimentos e técnicas de análise, que têm aplicação ampla e por vezes complexa.

Como será apresentado, em alguns casos a utilização dessas técnicas ou artifícios não necessariamente dizem respeito à resistência dos materiais, ou à outra teoria que fundamentalmente a simulação numérica a ser realizada, mas sim à limitações dos softwares empregados, no tocante a sua estratégia de desenvolvimento.

## **Abstract**

This work seeks to clarify a few common techniques in the finite element method, especially to dynamic analysis of structures.

Concerning the use of structural analysis commercial packages, which has become more popular every day in terms of price and use, it is not hard to find recently graduated engineers or even professionals who do not have specialization in the area where the software is used, manipulating it as a common information technology tool, with the only concern to uncover the inherent software features and not with the finite element method and the related area, which may vary from strength of materials to fluid mechanics, among others.

Considering this situation, themes linked to dynamic analysis of structures through the finite element method will be dealt within this work focusing on the vehicle industry, looking at the solutions obtained to simple problems, analogies that justify analysis procedures and techniques, that have a wide range of applications and are sometimes complex.

As it will be seen, in a few cases the use of these techniques is not necessary related to the strength of materials or another theory that corresponds to the target analysis to be performed, but to the used software limitations, related to its development strategy.

# Índice

1	INTRODUÇÃO .....	12
1.1	APLICAÇÕES NA INDÚSTRIA AUTOMOTIVA .....	13
1.2	OBJETIVOS DO TRABALHO .....	15
1.3	ORGANIZAÇÃO DO TEXTO .....	17
2	<b>MOVIMENTO DE BASE</b> .....	18
2.1	SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE .....	18
2.2	VIGA EM FLEXÃO SUBMETIDA A MOVIMENTO HARMÔNICO IMPOSTO NAS EXTREMIDADES .....	19
2.2.1	<i>Modos e frequências naturais para viga bi-apoiada</i> .....	19
2.2.2	<i>Resposta no tempo para movimento harmônico imposto nas extremidades</i> .....	20
2.2.3	<i>Cálculo das tensões dinâmicas de flexão</i> .....	24
2.3	VIGA EM FLEXÃO SUBMETIDA A MOVIMENTO HARMÔNICO IMPOSTO NAS EXTREMIDADES COM APOIO EM MOLAS .....	25
2.3.1	<i>Modos e frequências naturais para viga bi-apoiada em molas</i> .....	25
2.3.2	<i>Resposta no tempo para movimento harmônico imposto nas extremidades</i> .....	27
3	<b>GERAÇÃO E APLICAÇÃO DE UM SINAL DE PISTA</b> .....	30
3.1	GERAÇÃO DE UM SINAL DE PISTA .....	30
3.2	APLICAÇÃO DO SINAL DE PISTA .....	33
3.2.1	<i>Técnica das grandes massas</i> .....	33
3.2.2	<i>Métodos de Aplicação de Deslocamentos, Velocidades e Acelerações Prescritos no Tempo</i> .....	33
3.2.3	<i>Critério das Grandes Massas</i> .....	33
3.2.4	<i>Sistema " massa-mola-amortecedor " com a introdução da " grande massa " 33</i> .....	33
4	<b>TESTES DE CONFIABILIDADE</b> .....	36
4.1	EXEMPLO 1 – ANÁLISE MODAL .....	36
4.2	EXEMPLO 2 – ANÁLISE DINÂMICA TRANSIENTE .....	39

4.2.1	<i>Viga em flexão submetida a movimento harmônico imposto nas extremidades</i>	39
4.2.2	<i>Viga em flexão submetida a movimento harmônico imposto nas extremidades com apoio em molas</i>	44
4.2.3	<i>Comparativo entre as técnicas de superposição modal e integração direta</i>	47
5	<b>EXEMPLOS DE APLICAÇÃO</b>	52
5.1	VEÍCULO MINI-BAJA POLI/USP	52
6	<b>CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES</b>	55
7	<b>ANEXO A</b>	57
8	<b>LISTA DE REFERÊNCIAS</b>	59
9	<b>APÊNDICE I</b>	60
10	<b>APÊNDICE II</b>	66
11	<b>APÊNDICE III</b>	69
12	<b>APÊNDICE IV</b>	71



# Notações, Nomenclatura e Simbologias

E	–	Módulo de elasticidade do material
H( $\omega$ )	–	Função de resposta em frequência
I	–	Momento de inércia da seção transversal de uma viga
L	–	Comprimento
M	–	Momento atuante em uma seção da viga
S( $\gamma$ )	–	PSD ( Power Spectral Density )
t	–	Tempo
u	–	Modo natural de vibrar
v	–	Deslocamento
$V_x$	–	Velocidade na direção do eixo de coordenadas x
$\omega$	–	Frequência natural
W	–	Módulo de resistência à flexão da seção transversal
$\omega_d$	–	Frequência natural amortecida
$\omega$	–	Frequência de excitação
x,y	–	Coordenadas retangulares
$\beta$	–	Fator de sintonia
$\gamma$	–	Frequência espacial
$\eta$	–	Função de coerência
$\phi$	–	Ângulo de fase
$\theta$	–	Ângulo de fase
$\rho$	–	Densidade do material
$\sigma$	–	Tensão normal
$\xi$	–	Grau de amortecimento

## Lista de Figuras

Figura 1.1 – Gráfico de demanda de volume de serviços por tempo para produção, de acordo com a filosofia de projeto.....	12
Figura 1.2 – Trecho urbano número 2.....	13
Figura 1.3 – Trecho de Terra localizado na Fazenda Pimenta.....	14
Figura 1.4 – Chassi do ônibus urbano O-500M.....	14
Figura 1.5 – Modelo em elementos finitos da estrutura completa do ônibus.....	15
Figura 1.6 – Modelo em elementos finitos de parte da estrutura do chassi.....	15
Figura 2.1 – Sistema de um grau de liberdade representado um veículo trafegando.....	18
Figura 2.2 – Modelo de viga sujeita ao movimento de base.....	20
Figura 2.3 – Modelo de viga sujeita ao movimento de base com molas nas extremidades.....	25
Figura 3.1 – PSD medida em meio as PSDs de classificação da ISO.....	30
Figura 3.2 – Perfil de pista gerado.....	32
Figura 3.3 – Sistema “massa – mola – amortecedor” com 2 graus de liberdade.....	34
Figura 4.1 – Primeiros modos naturais de vibrar.....	36
Figura 4.2 – Modos de corpo rígido.....	37
Figura 4.3 – Erro percentual introduzido em função da massa relativa.....	38
Figura 4.4 – Propriedades da viga e de sua seção transversal.....	39
Figura 4.5 – Deslocamento imposto na extremidade da viga.....	40
Figura 4.6 – 1º modo natural associado ao uso da “grande massa”.....	41
Figura 4.7 – Deslocamento resultante na extremidade da viga.....	41
Figura 4.8 – Propagação do sinal ao longo do comprimento da viga.....	42
Figura 4.9 – Propagação do sinal ao longo do comprimento da viga.....	43
Figura 4.10 – Erro percentual introduzido em função da massa relativa.....	43
Figura 4.11 – Modelo de elementos finitos com grandes massas indicadas por cubos.....	44
Figura 4.12 – Deslocamento imposto nas bases das molas ( grandes massas ).....	44
Figura 4.13 – Deslocamento resultante nas extremidades da viga.....	45
Figura 4.14 – Propagação do sinal ao longo do comprimento da viga.....	45
Figura 4.15 – Deslocamento no tempo para vários pontos da viga.....	47
Figura 4.16 – Deslocamento no intervalo de tempo de 11 à 12 segundos de simulação.....	48
Figura 4.17 – Deslocamento no tempo para o ponto $x/L = 0,25$ .....	48
Figura 4.18 – Deslocamento no tempo para o ponto $x/L = 0,75$ .....	49

49	Figura 4.19 – Diferença no tempo para o ponto $x/L = 0,75$ .....
50	Figura 4.20 – Erro instantâneo no tempo para $x/L = 0,50$ .....
51	Figura 4.21 – análise de sensibilidade do amortecimento.....
52	Figura 5.1 – Modelo em elementos finitos do veículo mini-baja da Poli/USP.....
53	Figura 5.2 – Sinal de pista gerado.....
54	Figura 5.3 – Modelo em elementos finitos do veículo mini-baja da Poli/USP.....
54	Figura 5.4 – Gráfico de tensão no tempo para um elemento da estrutura do veículo.....

# 1 Introdução

O processo de desenvolvimento de produtos na indústria automobilística, hoje em dia, baseia-se em uma espiral de projeto em meio ao conceito de engenharia simultânea, recorrente principalmente quanto ao ciclo *design - simulação*, na qual a etapa de simulação busca representar situações extremas a que o veículo estará sujeito, entre elas a uma pista de testes para avaliação do mesmo quanto à vida a fadiga [2].

O fato é que, todas as montadoras possuem uma pista com imperfeições controladas que correlacionam a distância percorrida por um protótipo com uma determinada estimativa de vida do veículo. Entretanto, como a validação através de testes experimentais mostra-se não apenas custosa como também demorada, na atualidade é dada ênfase às simulações virtuais de protótipos, que podem ser realizadas através de tecnologias como elementos finitos, multi-corpos e outras. Com isso, reduz-se o custo por ciclo de avaliação bem como o tempo de projeto necessário ao lançamento de um novo produto no mercado, o que é uma vantagem competitiva bastante significativa neste mercado. Na figura 1.1 é apresentado um gráfico elaborado pela Delphi [3] no qual estes conceitos podem ser melhor visualizados. O ciclo de desenvolvimento com ênfase as simulações virtuais de protótipos é neste gráfico intitulado pela Delphi como "Expert Systems," ou também como "Up-front CAE".

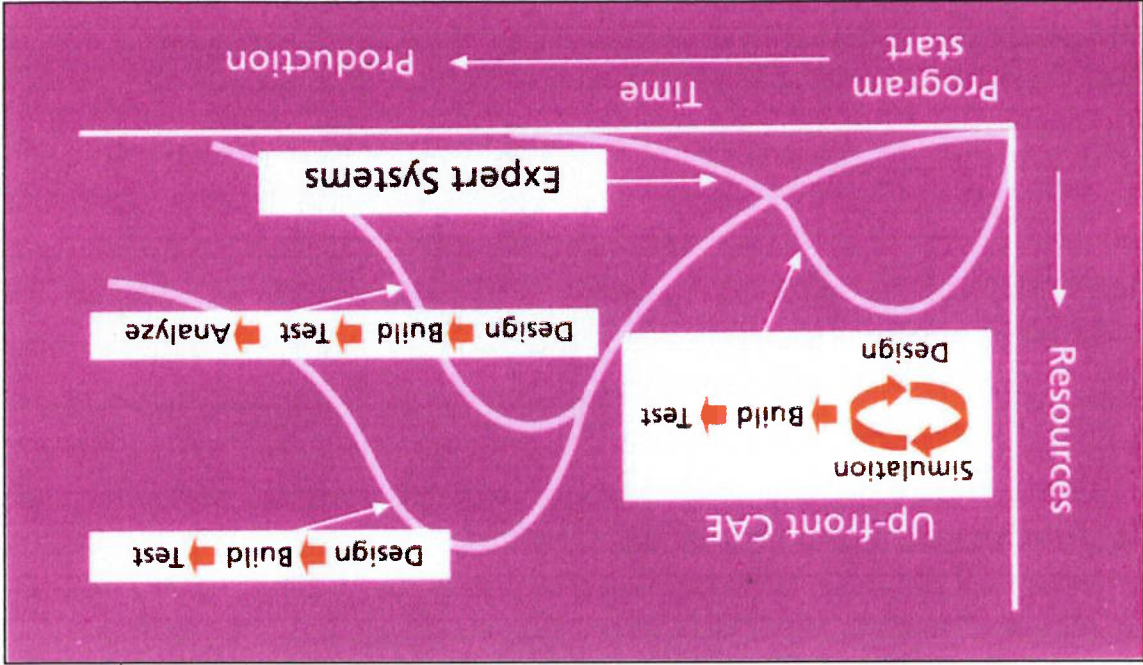


Figura 1.1 – Gráfico de demanda de volume de serviços por tempo para produção, de acordo com a filosofia de projeto

Os ciclos apresentados na mesma figura como “Design-Build-Test” e “Design-Build-Test-Analyse” se baseiam fortemente em testes experimentais, sendo que o último ciclo já faz uso de simulações numéricas, porém apenas em sua última etapa, causando redução de tempo e custo de desenvolvimento, mas de menor magnitude se comparada com a redução proporcionada pelo ciclo intitulado “Up-front CAE”.

## 1.1 Aplicações na indústria automotiva

Como exemplo de utilização das técnicas abordadas neste trabalho, em termos reais, citamos os trechos de testes utilizados aqui no Brasil pela DaimlerChrysler do Brasil Ltda, informação esta obtida da página da empresa na internet [4] e transcrita abaixo :

“Os Trechos Urbanos, na Grande São Paulo, simulam condições severas de utilização, com ciclos de aceleração e frenagem, acionamento de portas, paradas em semáforos, congestionamento e outros fatores que promovem o maior desgaste de componentes, contribuindo para o desenvolvimento de produtos robustos e duráveis.”Vide figura 1.2.

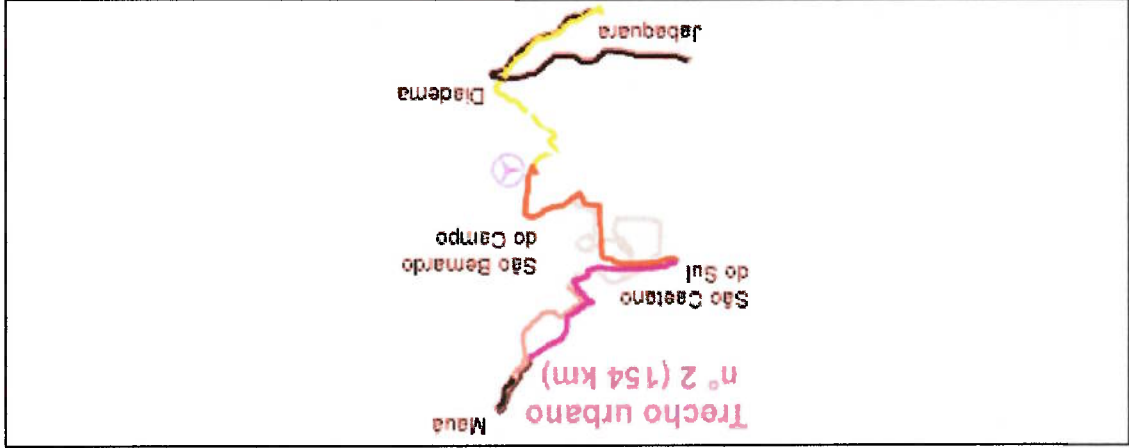


Figura 1.2 – Trecho urbano número 2

“O Trecho Terra, a 130 KM de São Bernardo do Campo está localizado no interior de uma fazenda, no Município de Indaiatuba - SP. São 18 km de pistas de terra, com irregularidades naturais e artificiais que submetem os protótipos a torções e vibrações em variadas gamas de esforços, frequências e amplitudes permitindo a aceleração da fadiga estrutural dos componentes dos veículos.”Vide figura 1.3.



Figura 1.3 – Trecho de Terra localizado na Fazenda Pimenta

“O perfil da pista é monitorado periodicamente através de um “veículo referência”, de modo a garantir a repetibilidade dos testes e a sua correlação com as condições reais de operação. Os sinais ali captados servem também para alimentação dos bancos de provas.”

Uma aplicação da simulação de um veículo em pista de testes é sugerida pela T-Systems do Brasil Ltda [1]. Abaixo é apresentado o chassi do veículo O-500M da DaimlerChrysler do Brasil Ltda [4], figura 1.4, e como exemplo de modelo de elementos finitos para este tipo de veículo, é apresentado o modelo da estrutura do chassi e carroceria e parte do chassi de um ônibus [1] nas figuras 1.5 e 1.6.

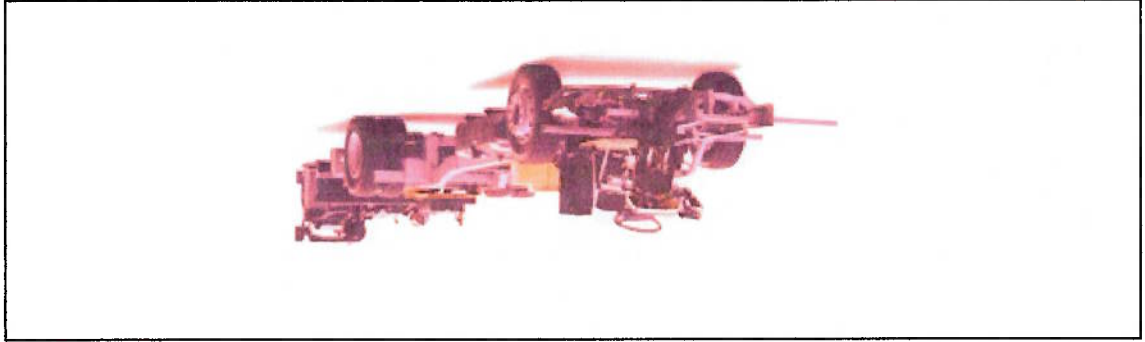


Figura 1.4 – Chassi do ônibus urbano O-500M



Tratando mais especificamente do desenvolvimento de veículos por parte das chamadas “montadoras”, e de conhecimento público que cada uma destas empresas possui a sua pista de testes na qual cada novo veículo deve percorrer uma distância mínima sem apresentar falhas. Com base no que foi exposto na introdução, não é difícil imaginar que a simulação em computador de tal critério seja altamente desejada, visando reproduzir

de estruturas. comentar alguns dos temas e procedimentos necessários à execução da análise dinâmica execução de tais análises. Diante deste cenário, é objetivo deste trabalho descrever e computadores, tornando-se o conhecimento humano o principal obstáculo para a correta vencida facilmente pela evolução vertiginosa do poder de processamento dos caracterizadas pelo alto custo computacional. Apesar disso, esta barreira vem sendo composta essencialmente de análises dinâmicas, há de se observar que estas análises são Admitindo que a etapa de simulações para a previsão de vida quanto à fadiga seja

## 1.2 Objetivos do Trabalho

Figura 1.6 – Modelo de parte da estrutura do chassi.

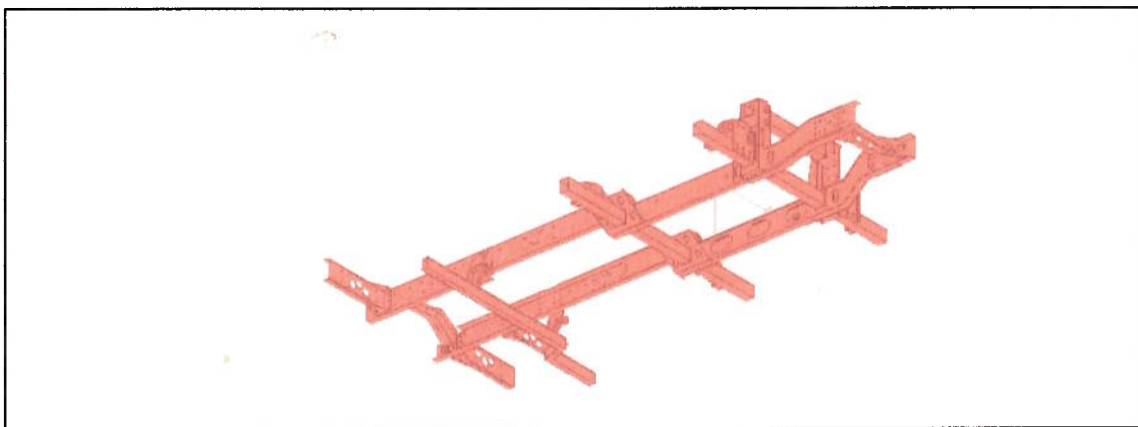
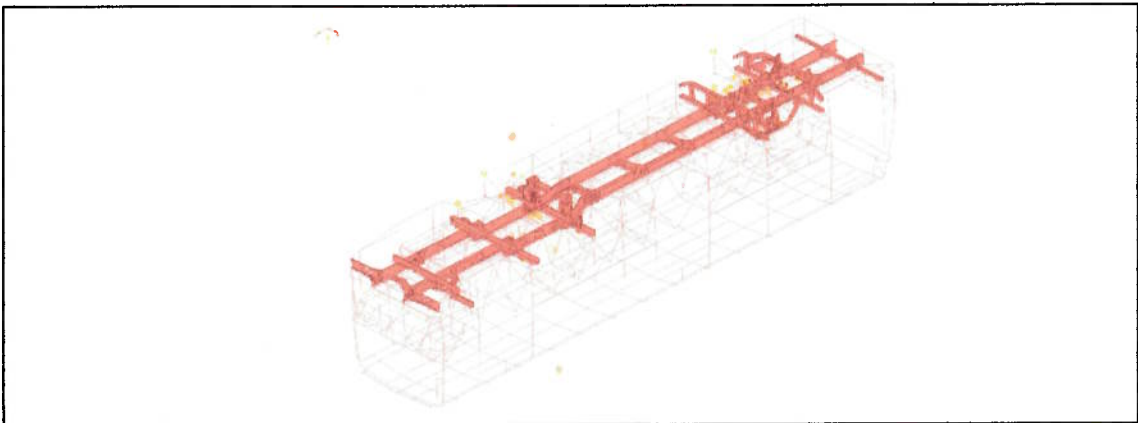


Figura 1.5 – Modelo da estrutura completa do ônibus.



virtualmente este teste, proporcionando um meio eficaz de avaliação do produto em questão quanto a sua durabilidade.

Tendo em mente que tal processo passa pela aplicação do sinal da pista de testes no modelo de elementos finitos, e que a forma mais simples de tal aplicação seria fazer uso dos deslocamentos aplicados, verifica-se que a simples utilização dos métodos de integração direta apresentam um alto custo computacional, quase que praticamente inviabilizando totalmente modelos com mais de 100.000 nós. Como alternativa, surge o método de superposição modal, o qual reduz de forma sensível tal custo. Mesmo assim, para a realização de uma simulação dentro deste contexto são muitas vezes necessárias técnicas de condensação, redução dinâmica e variantes, como por exemplo os chamados "super elementos" do software MSC/Nastran [5]. Para se ter ideia do custo computacional de uma análise dinâmica transiente pelo método de superposição modal e com o uso de redução dinâmica em um modelo de aproximadamente 1000000 de graus de liberdade, a realização desta simulação em um supercomputador Cray J90 em único processador com 1 Gb de memória RAM e 60 Gb de disco demora aproximadamente 6 horas.

Diante do cenário acima montado, vale a pena ressaltar os principais itens que caracterizam esta simulação:

- Modelo elaborado pelo método dos elementos finitos de grande porte
- Imposição de deslocamentos no tempo

- Método de superposição modal

- Técnicas de condensação ou redução dinâmica

Estes requisitos técnicos, em vista dos softwares de elementos finitos existentes presentemente no mercado Brasileiro, implicam na utilização do software MSC/Nastran, já que outro software também conhecido, o Ansys, não proporciona a imposição de deslocamentos associada à técnica de superposição modal, mas pura e simplesmente a técnica de integração direta no tempo.

Há, entretanto, um senão ao se utilizar o software MSC/Nastran que se apresenta como uma escolha lógica para a realização de tal tarefa, senão que surge da peculiaridade da utilização da chamada técnica da "grande massa" para a imposição de deslocamentos de base no domínio do tempo. O que representa a utilização de tal procedimento, por suas aproximações inerentes e erros admissíveis, são questões que serão abordadas nesta dissertação como seu objetivo.



### 1.3 Organização do texto

O presente trabalho foi organizado da seguinte maneira:

Capítulo 2: São apresentados os fundamentos teóricos para vigas bi-apoiadas e bi-apoiadas em molas, com as respectivas respostas.

Capítulo 3: A teoria sobre geração de sinais de pista dentro do contexto automotivo é indicada, bem como os artifícios necessários para a sua utilização em simulação numérica no software MSC/Nastran, conhecido como a técnica da “grande massa”.

Capítulo 4: São realizadas simulações numéricas baseadas nos modelos teóricos apresentados no capítulo 2, e utilizando-se ou não da técnica da “grande massa”, apresentada no capítulo 3.

Capítulo 5: É exemplificado o tipo de aplicação que o presente trabalho analisa, através da simulação numérica de um veículo em um sinal de pista gerado conforme proposto no capítulo 3.

Capítulo 6: Conclusão sobre os resultados alcançados no presente trabalho, além de sugestões para futuras pesquisas dentro da linha proposta.

## 2 Movimento de Base

Neste Capítulo será estudado o movimento de base, que para o caso da indústria automobilística se aplica na representação da interação entre veículo e solo. Para este fim, é formulado o equilíbrio dinâmico e, através da técnica de superposição modal, é obtida a solução do problema. Por último são confrontados os resultados obtidos através da solução analítica e do software MSC/Nastran.

### 2.1 Sistema com um grau de liberdade

De acordo com o tema proposto, será analisado um sistema de um grau de liberdade para o completo entendimento deste modelo como uma análise simplificada de um veículo trafegando em uma via. A figura 2.1 apresenta o sistema proposto por Meirovitch [6] :

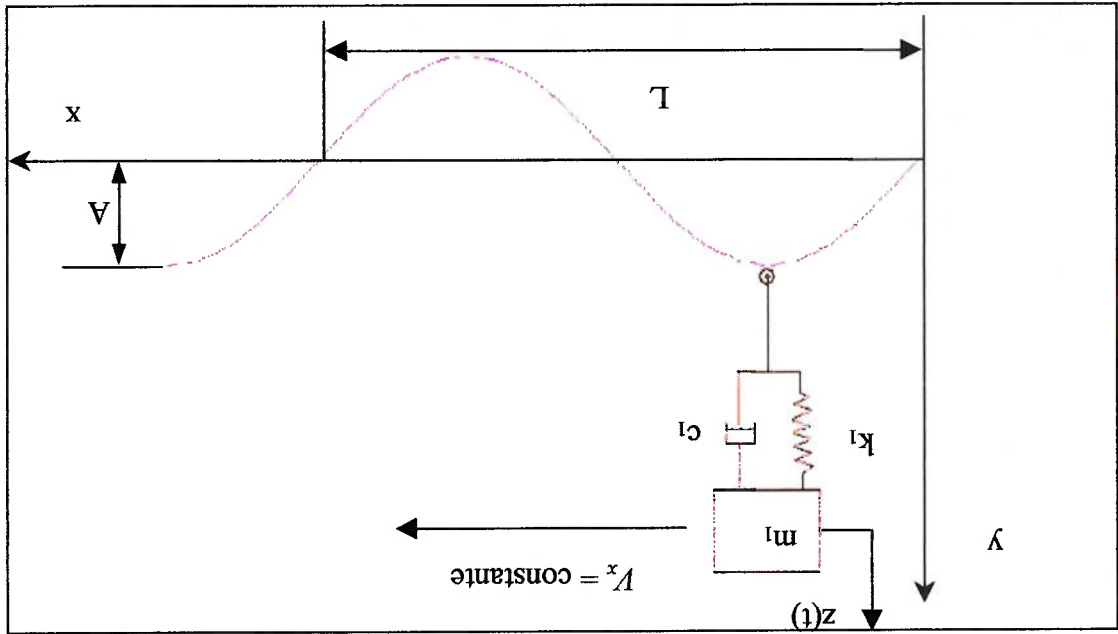


Figura 2.1 – Sistema de um grau de liberdade representado um veículo trafegando

A equação do sistema acima é :

$$m_1 \frac{d^2 z(t)}{dt^2} + c_1 \frac{dz(t)}{dt} + k_1 z(t) = c_1 \frac{dy(t)}{dt} + k_1 y(t) \quad (1)$$

sendo  $y(x) = A \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$ ,  $\omega = \frac{V_x}{L}$ ,  $x = V_x t$  e  $\omega_n = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$ . Logo,  $y$  é uma função do

tempo, como referenciado na equação (1) e pode ser escrito como  $y(t) = A \sin(\omega t)$ .

De modo que dividindo a equação (1) por  $m_1$  e reescrevendo-a temos:

Aplicando-se as condições de contorno naturais e essenciais nas extremidades da viga, para vibrações livres não amortecidas ( $c=0$ ) obtêm-se os modos e frequências naturais indicados nas equações (8) e (9) respectivamente [6].

da mesma. (I) da seção transversal da viga permanecem constantes ao longo do comprimento (L) onde se considera que o módulo de elasticidade (E) bem como os momentos de inércia

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + c \frac{\partial v}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = 0 \quad (7.)$$

despreza o efeito do cisalhamento interno à viga e tem por equação de equilíbrio: desenvolvimento é realizado segundo a teoria de viga de Euler-Bernoulli, a qual conforme apresentado na figura 2.2, e sujeita ao movimento de base. Todo o equacionamento que se segue é baseado em modelo de uma viga bi-apoiada,

### 2.2.1 Modos e frequências naturais para viga bi-apoiada

#### extremidades

### 2.2 Viga em flexão submetida a movimento harmônico imposto nas

$$\beta = \frac{\omega_n}{\omega} \quad (6.)$$

e  $\beta$  é o fator de sintonia, dado por:

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad (5.)$$

sendo  $H(\omega)$  a função de resposta em frequência, a qual é descrita na equação (5) abaixo

$$z(t) = AH(\omega)^2 \left\{ (1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2 \right\} \left[ \text{sen}(\omega t) - (2\xi\beta)^3 \cos(\omega t) \right] \quad (4.)$$

(3) tem a forma:

transiente. Portanto, a resposta para o deslocamento em regime permanente da equação admitindo que o interesse reside no regime permanente, desprezaremos a solução Sendo  $\xi$  o grau de amortecimento. Considerando que o amortecimento seja subcrítico, e

$$\frac{d^2 z(t)}{dt^2} + 2\xi\omega_n \frac{dz(t)}{dt} + \omega_n^2 z(t) = 2\xi A \omega_n \cos(\omega t) + \omega_n^2 A \text{sen}(\omega t) \quad (3.)$$

substituindo  $y(t)$  e  $\frac{dy(t)}{dt}$  obtemos

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\xi\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = 2\xi\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) \quad (2.)$$

Antes de prosseguirmos, é importante realçar que para o problema proposto a excitação acontece por movimento de base. Por isso, o lado direito de (7) é igual a zero, já que não há forças externas aplicadas ao longo do vão livre da viga. A equação (7) fornecerá uma solução não trivial ( $v \neq 0$ ) porque as condições de contorno do problema são não homogêneas, traduzindo a presença de excitação por movimento de base.

### 2.2.2 Resposta no tempo para movimento harmônico imposto nas extremidades

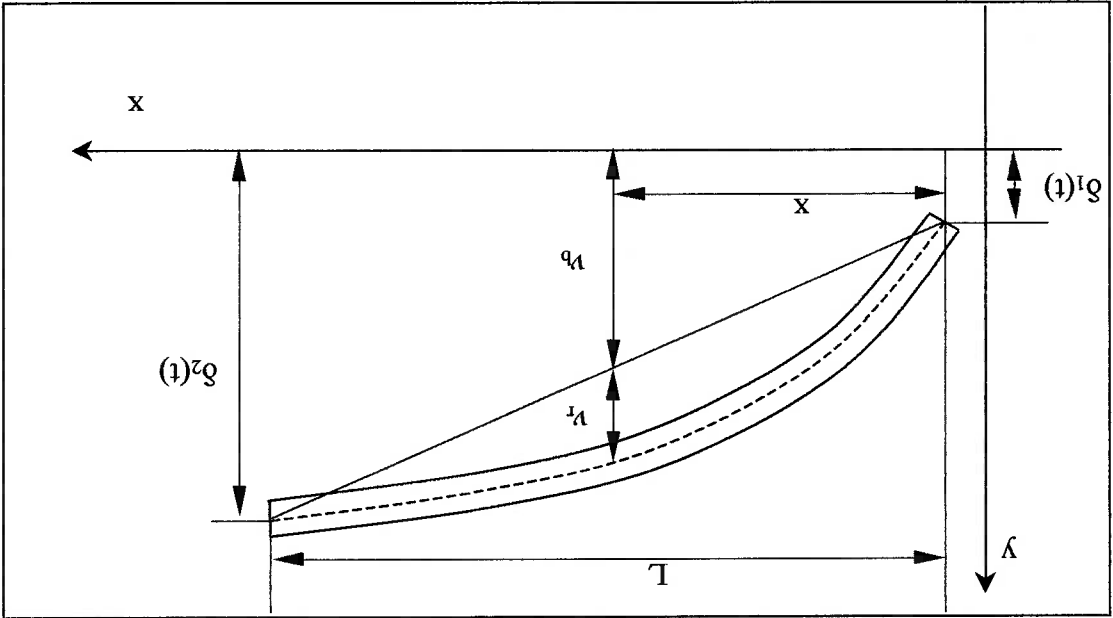


Figura 2.2 – Modelo de viga sujeita ao movimento de base

Admitindo o modelo apresentado na figura 2.2, cuja deformação por razões de clareza na identificação das variáveis apresenta-se bastante ampliada, e considerando que o movimento aplicado em cada extremidade seja harmônico, então, desenvolvida a formulação adequada para o fenômeno, baseada nas equações (7) à (9). Assim os deslocamentos das extremidades serão considerados na forma:

$$\delta_1(t) = d_1^0 \text{sen}(\omega_1 t + \phi_1) \quad (10.)$$

$$\delta_2(t) = d_2^0 \text{sen}(\omega_2 t + \phi_2) \quad (11.)$$

Sendo a estrutura isotática, seus deslocamentos quasi-estáticos, aqui denominados “de base”  $v_b(x,t)$ , são, simplesmente, obtidos por uma representação linear, variando de  $\delta_1(t)$  para  $x=0$  a  $\delta_2(t)$  para  $x=L$ . Portanto, podemos escrever:

$$\omega_n = (n\pi)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho L^4}} \text{ para } n=1,2,\dots,\infty \quad (9.)$$

$$U_n = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{ para } n=1,2,\dots,\infty \quad (8.)$$

É importante perceber que  $v_b(x,t)$  corresponde ao movimento da viga quando submetida a frequência de excitação muito baixa ( $\omega \ll \omega_n$ ), de modo a não prevalecerem os esforços de inércia. Com o aumento da frequência de excitação, os esforços de inércia entram em jogo e fazem aparecer deslocamentos adicionais, de natureza dinâmica e aqui chamados de relativos,  $v_r(x,t)$ . Assim sendo, de modo geral, os deslocamentos totais são obtidos por:

$$(13.) \quad v(x,t) = v_b(x,t) + v_r(x,t)$$

Substituindo a equação (13) na equação (7) obtemos

$$(14.) \quad \rho \frac{\partial^2 v_r}{\partial t^2} + c \frac{\partial v_r}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 v_r}{\partial x^4} = -\rho \frac{\partial^2 v_b}{\partial t^2} - c \frac{\partial v_b}{\partial t}$$

onde o lado direito da equação corresponde a um carregamento efetivo  $p(x,t)$  dado por

$$(15.) \quad p(x,t) = -\rho \frac{\partial^2 v_b}{\partial t^2} - c \frac{\partial v_b}{\partial t}$$

Como menciona Clough[7], na maioria dos casos práticos a contribuição da parcela de amortecimento para o carregamento efetivo é pequena se comparada com o termo de inércia e, portanto, tal parcela será aqui desprezada. Assim, obtemos:

$$(16.) \quad p(x,t) = -\rho \frac{\partial^2 v_b}{\partial t^2}$$

tal que aplicando a equação (12) na equação (16) acima, vem

$$(17.) \quad p(x,t) = -\rho \left\{ \frac{d^2}{dt^2} \delta_1(t) + \left[ \frac{T}{x} \right] \frac{d^2}{dt^2} \delta_2(t) - \frac{d^2}{dt^2} \delta_1(t) \right\}$$

Por outro lado, aplicando o conceito de superposição modal para equacionar o movimento dinâmico relativo

$$(18.) \quad v_r(x,t) = \sum_{i=1}^N n_i(x) y_i(t)$$

onde

$n_i(x) \Rightarrow i$ -ésimo modo natural de vibrar

$y_i(t) \Rightarrow i$ -ésima resposta normal em coordenadas generalizadas, obtida [7] de:

$$(19.) \quad m_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} + c_i \frac{\partial y_i}{\partial t} + k_i y_i(t) = z_i(x,t) \quad \text{para } i=1,2,\dots,N$$

e

Determinado o carregamento generalizado, composto pelas duas parcelas correspondentes aos deslocamentos impostos em ambas as extremidades da viga ( $j=1,2$ ), a resposta em regime permanente como solução particular do equilíbrio expresso por (19) é:

$$q_{z_j} = g_j - h_j \quad \text{e} \quad q_{z_j} = h_j \quad (32.)$$

$$R_j = \rho L d_0^j \omega_j^2 q_j \quad (31.)$$

com

$$z_j = \sum_{l=1}^j R_l \sin(\omega_l t + \phi_l) \quad (30.)$$

De tal modo que (27) pode ser reescrito na forma

$$h_j = \left[ \frac{\sin(i\pi)}{\sin(i\pi) - i\pi \cos(i\pi)} \right] \omega_j^2 \quad (29.)$$

$$g_j = \left[ \frac{i\pi}{1 - \cos(i\pi)} \right] \omega_j^2 \quad (28.)$$

Onde

$$z_j = \rho L \left\{ \omega_j^2 d_0^j [g_j - h_j \sin(\omega_j t + \phi_j)] + (\omega_j^2)^2 d_0^j h_j \sin(\omega_j t + \phi_j) \right\} \text{ para } j=1, \dots, N \quad (27.)$$

Integração analítica obtemos:

Para o carregamento generalizado, usando as equações (8), (10), (11) e (23) após

$$c_l = \frac{\rho L}{A} \quad (26.)$$

$$k_l = \omega_l^2 k_1 \text{ para } l=1, 2, \dots, N \quad (25.)$$

$$m_l = \frac{\rho L}{A} \quad (24.)$$

de onde usada a equação (8), vem:

$$z_l = \int_0^L u_l(x) p(x, t) dx \Rightarrow \text{carga generalizada para } l=1, 2, \dots, N \quad (23.)$$

$$c_l = \int_0^L c u_l^2(x) dx \Rightarrow \text{amortecimento do tipo viscoso generalizado para } l=1, 2, \dots, N \quad (22.)$$

$$k_l = \int_0^L E I u_l^4(x) dx \Rightarrow \text{rigidez generalizada para } l=1, 2, \dots, N \quad (21.)$$

$$m_l = \int_0^L \rho u_l^2(x) dx \Rightarrow \text{massa generalizada para } l=1, 2, \dots, N \quad (20.)$$

$$y_p^j(t) = P_j^j \sin(\omega_j t + \theta_j^j) \quad (33.)$$

$$P_j^j = \left( \frac{R_j^j}{m_j \omega_j^2} \right) D_j^j \quad (34.)$$

$$D_j^j = \left\{ (1 - \beta_j^j)^2 + (2\xi_j^j \beta_j^j)^2 \right\}^{-1/2} \quad (35.)$$

$$\beta_j^j = \frac{\omega_j}{\omega_j^j} \quad (36.)$$

$$\theta_j^j = \phi_j^j - \arctg \left[ \frac{2\xi_j^j \beta_j^j}{1 - \beta_j^j} \right] \quad (37.)$$

Considerando, agora, condições iniciais nulas, obtemos a solução homogênea de (19), responsável pela resposta em vibração livre transiente, como

$$y_h^j(t) = [A_j^j \sin(\omega_j^j t) + B_j^j \cos(\omega_j^j t)] e^{-\xi_j^j \omega_j^j t} \quad (38.)$$

sendo as constantes de integração dadas por:

$$B_j^j = -2f_j^j d_j^j \sin(\theta_j^j) - P_j^j \sin(\theta_j^j) \quad (39.)$$

$$A_j^j = \frac{1}{\omega_j^j} \left\{ -2f_j^j d_j^j \cos(\theta_j^j) - P_j^j \cos(\theta_j^j) \right\} [\omega_j^j + \xi_j^j \omega_j^j B_j^j] \quad (40.)$$

e

$$\omega_j^j = \omega_j^j \sqrt{1 - \xi_j^j{}^2} \quad (41.)$$

$$f_j^j = \frac{1}{T_j} \int_0^T n_j^j(x) dx - \frac{1}{T_j} \int_0^T x n_j^j(x) dx = g_j^j - h_j^j, \text{ para } j=1 \quad (42.)$$

$$f_j^j = \frac{1}{T_j} \int_0^T x n_j^j(x) dx = h_j^j, \text{ para } j=2 \quad (43.)$$

Finalmente, a solução total é obtida através da soma das soluções particular e homogênea:

$$y_t^j(t) = y_h^j(t) + y_p^j(t) \quad (44.)$$

$$v_t^j(x, t) = \sum_{N=1}^j n_t^{j(x)} y_t^j(t) \quad (45.)$$

O valor máximo da resposta dinâmica relativa, em regime permanente, pode ser obtido pela substituição de (33) em (45) e fazendo uso da lei dos senos

$$v_t^j(x, t) = \left[ \sum_{N=1}^j \sum_{N=1}^j n_t^j(x) P_j^j \left[ \cos(\theta_j^j) \sin(\omega_j^j t) + \sin(\theta_j^j) \cos(\omega_j^j t) \right] \right] \quad (46.)$$

$$\sigma(x,t)_{\max} = \sqrt{\left(\frac{W}{EI}\right)^2 \left[ \sum_2 \sum_N^{j=1} d_2^2 v_r(x,t) P^j \cos(\theta_j) \right]^2 + \left[ \sum_2 \sum_N^{j=1} d_2^2 v_r(x,t) P^j \sin(\theta_j) \right]^2} \quad (53.)$$

onde, de modo análogo ao feito para os deslocamentos, obtêm-se

$$\sigma(x,t) = \frac{W}{EI} \sum_2 \sum_N^{j=1} d_2^2 n_j(x,t) P^j [\cos(\theta_j) \sin(\varpi_j t) + \sin(\theta_j) \cos(\varpi_j t)] \quad (52.)$$

que aplicando (46) fornece para as tensões em regime permanente:

$$\sigma(x,t) = \frac{W}{EI} d_2^2 [v_r(x,t) + v_l(x,t)] = \frac{W}{EI} d_2^2 v_r(x,t) \quad (51.)$$

base, no presente problema, não causam tensões, ou seja:

Usando as equações (13) e (14), observa-se que os deslocamentos quasi-estáticos de

onde  $W$  é o módulo de resistência à flexão da seção transversal.

$$\sigma(x,t) = \frac{W}{EI} \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \quad (50.)$$

da fórmula

Da resistência dos materiais é sabido que as tensões de flexão podem ser obtidas através

### 2.2.3 Cálculo das tensões dinâmicas de flexão

$$v_2(x,t)_{\max} = \sqrt{\left\{ \sum_2 \sum_N^{j=1} d_2^2 n_j(x) P^j \cos(\theta_j) \right\}^2 + \left\{ \sum_2 \sum_N^{j=1} d_2^2 n_j(x) P^j \sin(\theta_j) \right\}^2} + \left\{ \left[ 1 - \left( \frac{T}{x} \right) \right] d_0^1 \sin(\phi_1) + \left( \frac{T}{x} \right) d_0^2 \sin(\phi_2) \right\}^2} \quad (49.)$$

de tal sorte que para o deslocamento total absoluto, a partir de (13), obtêm-se

$$v_0(x,t)_{\max} = \sqrt{\left\{ \left[ 1 - \left( \frac{T}{x} \right) \right] d_0^1 \cos(\phi_1) + \left( \frac{T}{x} \right) d_0^2 \cos(\phi_2) \right\}^2 + \left\{ \left[ 1 - \left( \frac{T}{x} \right) \right] d_0^1 \sin(\phi_1) + \left( \frac{T}{x} \right) d_0^2 \sin(\phi_2) \right\}^2} \quad (48.)$$

Por outro lado, usando (10), (11) e (12) o máximo da resposta quasi-estática é :

$$v_r(x,t)_{\max} = \sqrt{\left[ \sum_2 \sum_N^{j=1} d_2^2 n_j(x) P^j \cos(\theta_j) \right]^2 + \left[ \sum_2 \sum_N^{j=1} d_2^2 n_j(x) P^j \sin(\theta_j) \right]^2} \quad (47.)$$

deslocamentos de mesma frequência ( $\varpi_1 = \varpi_2 = \varpi$ ), obtêm-se :

onde, para o caso particular em que ambas as extremidades são submetidas a



### 2.3 Viga em flexão submetida a movimento harmônico imposto nas extremidades com apoio em molas

#### 2.3.1 Modos e frequências naturais para viga bi-apoiada em molas

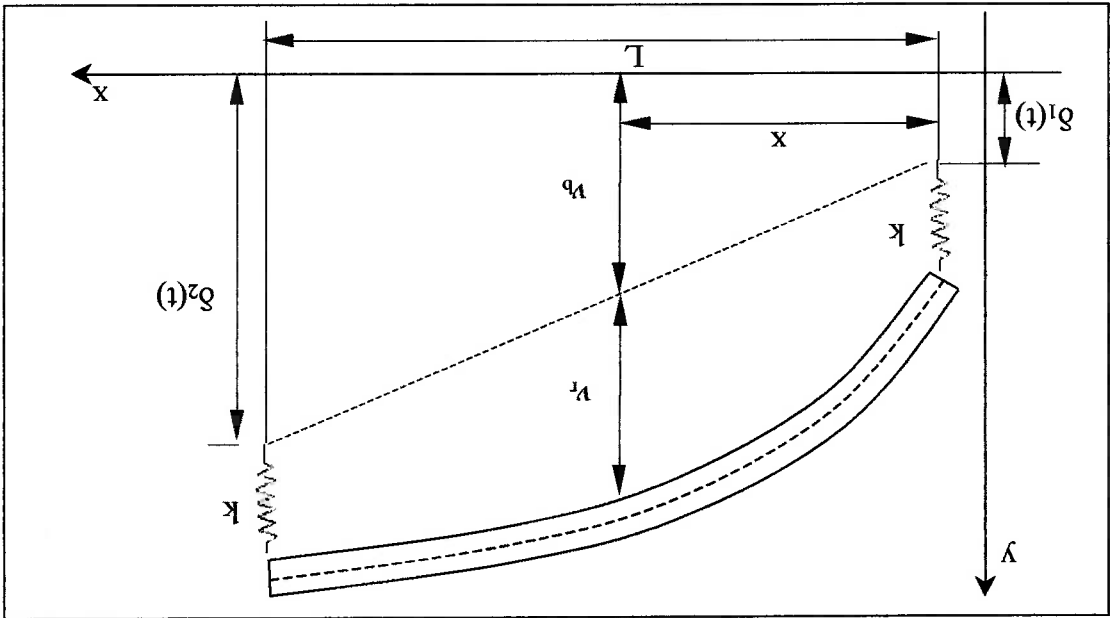


Figura 2.3 – Modelo de viga sujeita ao movimento de base com molas nas extremidades

O equacionamento que se segue é baseado no modelo de uma viga bi-apoiada em molas, conforme apresentada na figura 2.3, e que de forma rudimentar, acredita-se, pode representar o chassi de um veículo comercial sujeito ao sinal de uma pista, que neste caso corresponde ao movimento de base.

Através da equação para vibração livre não-amortecida

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = 0 \quad (54.)$$

e assumindo movimento harmônico síncrono para a solução da equação (54), como por

$$v(x, t) = n(x) \text{sen}(\omega t) \quad (55.)$$

Obtemos

$$- \rho \omega^2 n(x) + EI \frac{\partial^4 n(x)}{\partial x^4} = 0 \quad (56.)$$

ou ainda

$$\frac{\partial^4 n(x)}{\partial x^4} - \gamma^4 n(x) = 0 \quad (57.)$$

com

$$\gamma^4 = \frac{\rho \omega^2}{EI} \quad (58.)$$

A solução para a equação (56), conforme *Meirovitch* [6] é

$$u(x) = C_1 \sin(\gamma x) + C_2 \cos(\gamma x) + C_3 \sinh(\gamma x) + C_4 \cosh(\gamma x) \quad (59.)$$

Da equação (58) vem

$$\omega = \gamma^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho}} \quad (60.)$$

Aplicando as condições de contorno, teremos:

a)  $x=0$

a.1) Força cortante

$$EI \frac{\partial^3 v(0,t)}{\partial x^3} = -k v(0,t) \quad (61.)$$

$$EI \gamma^3 [C_1 + C_3] = -k [C_2 + C_4] \quad (62.)$$

a.2) Momento fletor

$$EI \frac{\partial^2 v(0,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (63.)$$

$$C_2 = C_4 \quad (64.)$$

b)  $x=L$

b.1) Força cortante

$$EI \frac{\partial^3 v(L,t)}{\partial x^3} = -k v(L,t) \quad (65.)$$

$$EI \gamma^3 [-C_1 \cos(\gamma L) + C_2 \sin(\gamma L) + C_3 \cosh(\gamma L) + C_4 \sinh(\gamma L)] = -k [C_1 \sin(\gamma L) + C_2 \cos(\gamma L) + C_3 \sinh(\gamma L) + C_4 \cosh(\gamma L)] \quad (66.)$$

b.2) Momento fletor

$$EI \frac{\partial^2 v(L,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (67.)$$

$$EI \gamma^2 [-C_1 \sin(\gamma L) - C_2 \cos(\gamma L) + C_3 \sinh(\gamma L) + C_4 \cosh(\gamma L)] = 0 \quad (68.)$$

Agora, reunindo essas equações na forma matricial e usando o fato que  $C_2 = C_4$ ,

obtem-se para as demais constantes:

$$m_i \frac{\partial^2 y_i(t)}{\partial t^2} + k_i y_i(t) = z_i(x, t) \quad \text{para } i=1, 2, \dots, N \quad (72.)$$

item anterior. Portanto, analogamente:

Admitindo o modelo apresentado na figura 2.3, e considerando que o deslocamento aplicado em cada extremidade seja harmônico, será, então, desenvolvida a formulação deste fenômeno, baseada no equacionamento por superposição modal já apresentado no

### 2.3.2 Resposta no tempo para movimento harmônico imposto nas extremidades

o correspondente modo de vibrar.

A extração dos autovalores  $\gamma_i$  de (69) necessita de procedimento numérico que, no presente trabalho, foi aplicado através de planilha no software Excel. Por se tratar de procedimento elementar de cálculo de raízes de uma função, não será aqui descrito em detalhes. Para cada raiz obtida, as equações (70) e (71) são aplicadas de modo a se obter

$$C_{3i} = C_{1i} - \left( \frac{2k}{EI\gamma_i^3} \right) \quad (71.)$$

$$C_{1i} = \left[ \frac{\cosh(\gamma L) - \cos(\gamma L) - \left( \frac{2k}{EI\gamma_i^3} \right) \sinh(\gamma L)}{\sinh(\gamma L) - \text{sen}(\gamma L)} \right]_{\gamma=\gamma_i} \quad (70.)$$

$C_1$  e  $C_3$  de (69), resultando:

Para um valor qualquer de  $\gamma$ , o sistema de equações (69) tem solução trivial:  $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$ , que, de forma alguma, tem interesse prático. Portanto, é necessário descobrir quais valores de  $\gamma$ , ditos autovalores, tornam (69) possível e indeterminado. Neste contexto, interessa-nos obter os valores de  $\gamma$  que tornam nulo o determinante da matriz dos coeficientes. Cada uma dessas raízes, ( $\gamma = \gamma_i$ ), aplicadas em isto posto, a cada frequência natural obtida corresponde um modo de vibrar, representado pelos coeficientes  $C_1, C_2, C_3$  e  $C_4$  que se extraí de (69) para  $\gamma = \gamma_i$ . Como o sistema de equações tem solução indeterminada, podemos adotar  $C_2 = C_4 = 1$  e extrair

determinante da matriz dos coeficientes. Cada uma dessas raízes, ( $\gamma = \gamma_i$ ), aplicadas em isto posto, a cada frequência natural obtida corresponde um modo de vibrar, representado pelos coeficientes  $C_1, C_2, C_3$  e  $C_4$  que se extraí de (69) para  $\gamma = \gamma_i$ . Como o sistema de equações tem solução indeterminada, podemos adotar  $C_2 = C_4 = 1$  e extrair

$$\begin{bmatrix} -EI\gamma^3 & 2k & EI\gamma^3 & 0 \\ -EI\gamma^3 \cos(\gamma L) & EI\gamma^3 [\text{sen}(\gamma L) + \sinh(\gamma L)] & EI\gamma^3 \cosh(\gamma L) & 0 \\ -k \text{sen}(\gamma L) & -k [\cos(\gamma L) + \cosh(\gamma L)] & -k \text{senh}(\gamma L) & 0 \\ -\text{sen}(\gamma L) & \cosh(\gamma L) - \cos(\gamma L) & \text{senh}(\gamma L) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (69.)$$

Com

$$(73.) \quad m_i = \int_L^0 \rho n'_i(x) dx \Rightarrow \text{massa generalizada para } i=1,2,\dots,N$$

$$(74.) \quad k_i = \int_L^0 EI n'_i(x) \frac{\partial^4 n'_i(x)}{\partial x^4} dx = \omega_i^2 m_i \Rightarrow \text{rigidez generalizada para } i=1,2,\dots,N$$

$$(75.) \quad z_i = \int_L^0 n'_i(x) p(x,t) dx \Rightarrow \text{carga generalizada para } i=1,2,\dots,N$$

Substituindo a equação (59) na equação (73) e resolvendo-a

$$(76.) \quad m_i = \left( \frac{\partial L}{\partial \tilde{f}_i} \right)$$

onde

$$(77.) \quad \tilde{f}_i = \begin{cases} 1 & (3BH - DF - 3AG + CE) \left( \frac{1}{L} \right) + F_2 + B_2 - 2DH \\ 2 & \text{para } i=1,\dots,N \end{cases}$$

com

$$(78.) \quad A = n'_i(0) = C_{z_i} + C_{a_i}$$

$$(79.) \quad B = n'_i(L) = C_{n_i} \text{sen}(\gamma'_i L) + C_{z_i} \text{cos}(\gamma'_i L) + C_{a_i} \text{senh}(\gamma'_i L) + C_{b_i} \text{cosh}(\gamma'_i L)$$

$$(80.) \quad C = \left( \frac{1}{L} \right) \left( \frac{\partial n'_i(0)}{\partial x} \right) = C_{n_i} + C_{a_i}$$

$$(81.) \quad D = \left( \frac{1}{L} \right) \left( \frac{\partial n'_i(L)}{\partial x} \right) = C_{n_i} \text{cos}(\gamma'_i L) - C_{z_i} \text{sen}(\gamma'_i L) + C_{a_i} \text{cosh}(\gamma'_i L) + C_{b_i} \text{senh}(\gamma'_i L)$$

$$(82.) \quad E = \left( \frac{1}{L} \right) \left( \frac{\partial^2 n'_i(0)}{\partial x^2} \right) = -C_{z_i} + C_{a_i}$$

$$(83.) \quad F = \left( \frac{1}{L} \right) \left( \frac{\partial^2 n'_i(L)}{\partial x^2} \right) = -C_{n_i} \text{sen}(\gamma'_i L) - C_{z_i} \text{cos}(\gamma'_i L) + C_{a_i} \text{senh}(\gamma'_i L) + C_{b_i} \text{cosh}(\gamma'_i L)$$

$$(84.) \quad G = \left( \frac{1}{L} \right) \left( \frac{\partial^3 n'_i(0)}{\partial x^3} \right) = -C_{n_i} + C_{a_i}$$

$$(85.) \quad H = \left( \frac{1}{L} \right) \left( \frac{\partial^3 n'_i(L)}{\partial x^3} \right) = -C_{n_i} \text{cos}(\gamma'_i L) + C_{z_i} \text{sen}(\gamma'_i L) + C_{a_i} \text{cosh}(\gamma'_i L) + C_{b_i} \text{senh}(\gamma'_i L)$$

Introduzindo em (17) e (59) em (75) e integrando, de modo análogo obtêm-se para o carregamento generalizado:

valores máximos de deslocamentos e tensões. Por consequência, são válidas as expressões (47), (48), (49) e (53) para cálculo dos mesmos deslocamentos e tensões.

Por consequência, são válidas as expressões (47), (48), (49) e (53) para cálculo dos mesmos deslocamentos e tensões.

$$f_{ij} = h_i / f_i \quad \text{para } j=2 \quad (93.)$$

$$f_{ij} = (g_i - h_i) / f_i \quad \text{para } j=1 \quad (92.)$$

por:

análogo ao visto em 2.2.2 e 2.2.3, bastando substituir nas constantes de integração da resposta homogênea, (consideradas também condições iniciais nulas), o parâmetro  $f_{ij}$  por  $g_i$  dado por (90),  $h_i$  por (91) e  $f_i$  por (77). A solução total é também obtida da seguinte maneira:

$$h_i = \left[ \frac{\gamma_i}{H} \right] - \left( \frac{1}{L\gamma_i^2} \right) (F - E) \quad (91.)$$

$$g_i = \left[ \frac{\gamma_i}{H - G} \right] \quad (90.)$$

$$q_{ij} = g_i - h_i \quad \text{e} \quad q_{zi} = h_i \quad (89.)$$

$$R_{ij} = \rho L d_0^j \omega_j^j q_{ij} \quad (88.)$$

com

$$z_i = \sum_{j=1}^2 R_{ij} \sin(\omega_j t + \phi_j) \quad (87.)$$

A equação (86) pode ainda ser reescrita, usando (10) e (11), na forma

$$\left( \frac{d^2 x_i}{dt^2} + \gamma_i^2 x_i \right) \left[ \frac{\gamma_i}{H} \right] - \left( \frac{1}{L\gamma_i^2} \right) (F - E) \quad (86.)$$

para  $i=1, \dots, N$

$$z_i = \rho \left\{ \left( \frac{d^2 x_i}{dt^2} + \gamma_i^2 x_i \right) \left[ \frac{\gamma_i}{H - G} \right] + \left[ \frac{\gamma_i}{H} \right] \left( \frac{1}{L\gamma_i^2} \right) (F - E) \right\} -$$

### 3 Geração e aplicação de um sinal de pista

Simulações numéricas de veículos no domínio do tempo necessitam do sinal de entrada de vias, as quais são descritas em geral pelas alturas de pontos igualmente espaçados ao longo desta. Este perfil pode ser diretamente obtido através de medições da superfície da pista na qual o veículo será testado, sendo que na ausência desta, pode-se fazer uso da geração de um perfil de pista de acordo com algumas características desejadas definidas.

#### 3.1 Geração de um sinal de pista

Em uma análise de um veículo sobre rodas através de vibrações aleatórias, o uso da chamada PSD ( Power Spectral Density ), como a formulação que representa o quão acidentada uma via é, é mandatória de modo a quantificar a energia que é introduzida na estrutura de um veículo. Considerando o domínio da frequência espacial,  $\gamma$ , a PSD descreve as irregularidades da superfície de uma via, de pequenos buracos à longas elevações. Assim como qualquer sinal aleatório, o perfil de elevação medido ao longo do comprimento da via pode ser decomposto pela transformada de Fourier em uma série de pequenos senos variando em suas amplitudes e ângulos de fase. O gráfico das amplitudes pela frequência espacial é a PSD. Um exemplo de PSD pode ser visto na figura 3.1, obtida de Cebon[8], na qual esta é apresentada em meio a classificação desta pela ISO.

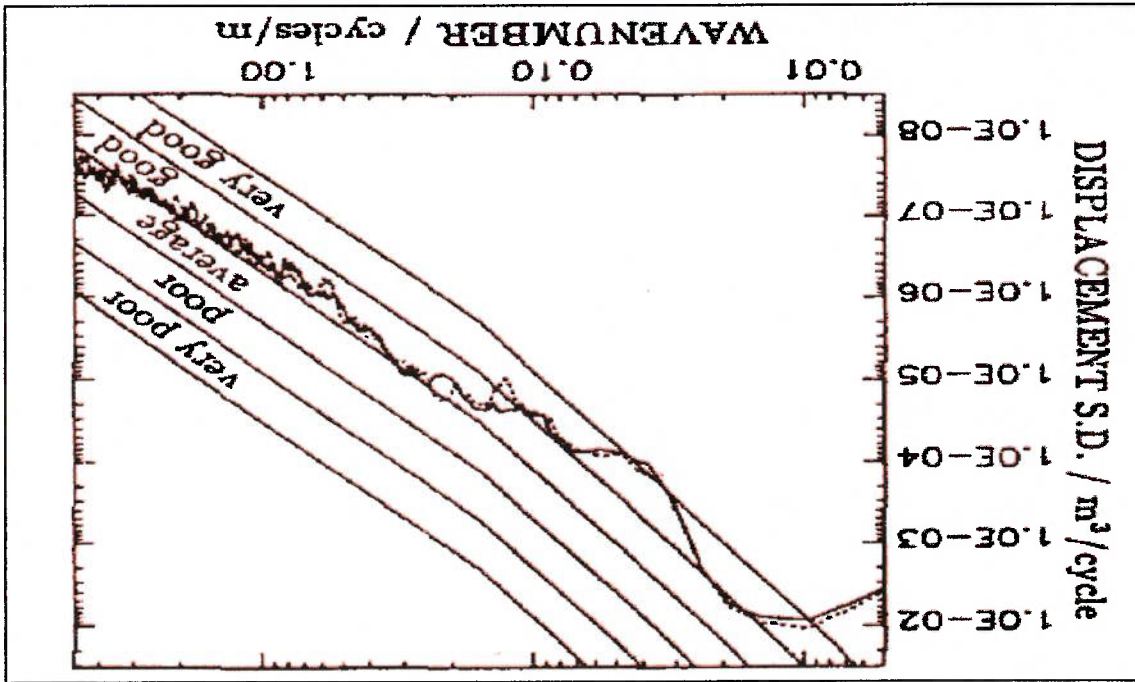


Figura 3.1 – PSD medida em meio as PSDs de classificação da ISO

No presente trabalho, de acordo com Dias [9], assumimos que o mesmo espectro será aplicado em todos os pontos de contato das rodas com a via, complementado pela CSD ( Cross Spectrum Density ), função a qual calcula a influência da distância transversal das rodas,  $b$ , correspondendo à diferença de fase entre estes pontos. A CSD é definida pela PSD multiplicada pela função de coerência,  $\eta$ . Portanto, para duas rodas em lados diferentes, a função de coerência,  $\eta$ , depende da velocidade do veículo e do espectro da própria via tal que esta possa variar de 0 ( sem correlação ) até 1 ( correlação total ), sendo que o aumento da correlação ocorre com o aumento do comprimento de onda das irregularidades,  $\lambda$ , e diminui com o aumento da distância transversal entre as rodas. Normalmente a função de coerência,  $\eta$ , é utilizada com base na frequência espacial,  $\gamma$ , sendo que qualquer resultado para a função de coerência pode ser facilmente convertido para  $\omega$  através da relação

$$\omega \text{ [rad/s]} = \gamma \text{ [rad/m]} V \text{ [m/s]}$$

sendo  $V$  a velocidade do veículo.

A equação (94) abaixo apresenta a elevação,  $z$ , em função da PSD,  $S(\gamma)$ , da distância transversal entre as rodas,  $b$ , da função de coerência,  $\eta$ , e dos conjuntos de ângulos de fase,  $\phi$ .

$$z_j(x) = \sum_{n=0}^N \sqrt{2S(n\Delta\gamma)\Delta\gamma} \left\{ \sqrt{1 - \eta(b, n\Delta\gamma)} \cos(n\Delta\gamma x + \phi_D^n) + \sqrt{\eta(b, n\Delta\gamma)} \cos(n\Delta\gamma x + \phi_C^n) \right\}$$

para  $n=1, 2, \dots, N$

onde  $\Delta\gamma$  é um intervalo regular para a chamada frequência espacial  $\gamma$  que discretiza o domínio da frequência através da variação de  $n$ , e  $j=1, 2$  indica a roda direita e esquerda.

A primeira etapa para a geração do sinal consiste na obtenção de conjuntos independentes de ângulos de fase aleatórios uniformemente distribuídos entre 0 e  $2\pi$ , tal

que

$$\phi_D^n = \text{conjunto de ângulos de fase para as rodas direitas}$$

$$\phi_{2n} = \text{conjunto de ângulos de fase para as rodas esquerdas}$$

$$\phi_C^n = \text{conjunto de ângulos de fase para correlação cruzada entre as rodas direitas e}$$

esquerdas.

Após, seleciona-se a função PSD  $S(\gamma)$ , que para o presente trabalho foi escolhida como

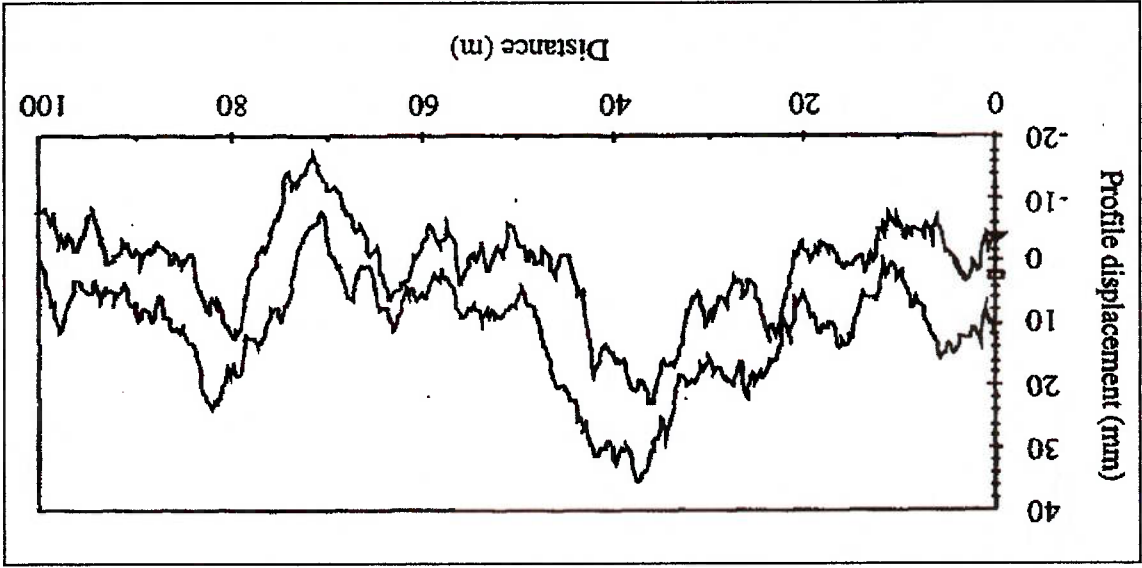


Figura 3.2 – Perfil de pista gerado

Como exemplo de um sinal gerado, mais uma vez citando Cebon [8], é apresentado na figura 3.2 o perfil de uma pista obtido segundo essa metodologia, sendo que o sinal de um dos lados foi deslocado 10 mm em relação ao seu posicionamento original por motivos de clareza, sendo  $b=2000$  mm.

$$\eta_0 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \quad (97.)$$

onde

$$\eta(b, \gamma) = \eta_0 e^{\left\{ a - \sqrt{a^2 + b^2} \right\} \gamma} \quad (96.)$$

Por fim define-se pela função coerência  $\eta$  a ser utilizada, que neste caso adotaremos

além de  $\gamma$  a chamada frequência espacial e  $\gamma_0 = 1,0$  rad/m.

Muito ruim	$\rightarrow$	$512 \times 10^{-6} < S_0 < 2048 \times 10^{-6}$
Ruim	$\rightarrow$	$128 \times 10^{-6} < S_0 < 512 \times 10^{-6}$
Regular	$\rightarrow$	$32 \times 10^{-6} < S_0 < 128 \times 10^{-6}$
Bom	$\rightarrow$	$8 \times 10^{-6} < S_0 < 32 \times 10^{-6}$
Muito bom	$\rightarrow$	$2 \times 10^{-6} < S_0 < 8 \times 10^{-6}$

sendo  $S_0$  um coeficiente de intensidade de rugosidade ou de condições da via dado por

$$S(\gamma) = \frac{\left( 0,1 + \left( \frac{\gamma}{\gamma_0} \right)^3 \right)}{\left( \frac{S_0}{\gamma_0} \right) \left( 1 + \left( \frac{\gamma}{\gamma_0} \right)^{0,75} \right)} \quad (95.)$$



## 3.2 Aplicação do sinal de pista

### 3.2.1 Técnica das “grandes massas”

O software MSC/Nastran, ao contrário do que seria considerado desejável como procedimento natural de cálculo em análises dinâmicas, não se utiliza de forma direta dos movimentos de base prescritos no tempo, tais como deslocamentos, velocidades ou acelerações, mas sim, transforma-os em esforços equivalentes [5]. Para tal, é necessário que para cada ponto de entrada de sinal, seja incluído um elemento de massa de ordem muito superior à massa total da estrutura com correspondente aplicação de esforço equivalente externo, proporcional ao sinal de entrada. Este procedimento se aplica às análises dinâmicas através de integração direta, assim como às análises pelo método de superposição modal, sendo que esta última técnica, devido ao menor custo computacional, é mais empregada para modelos de grande porte.

### 3.2.2 Métodos de Aplicação de Deslocamentos, Velocidades e Acelerações Prescritos no Tempo

Considerando deslocamentos de translação, a força equivalente é obtida pela 1ª lei de Newton ( $f = m a$ ), tal que a “grande massa” incluída ao modelo é usada em conjunto com a aceleração prescrita no tempo. Quando se faz uso de deslocamentos ou velocidades, o software incube-se de calcular as acelerações por derivação numérica. Neste caso, é necessário que os movimentos assim prescritos sejam deriváveis.

### 3.2.3 Critério das “grandes massas”

Para o artifício descrito acima há, inevitavelmente, a dúvida pela precisão dos resultados a serem obtidos, não somente pelo tratamento do sinal por diferenciação numérica, quando necessário, mas também pela inclusão da chamada “grande massa”. Portanto, visando avaliar o erro introduzido no modelo, foram analisados, em um primeiro passo, a vibração natural de um sistema discreto “massa – mola – amortecedor” com um grau de liberdade ( seção 2.1 ) e, a seguir, este mesmo sistema acrescido da “grande massa”.

### 3.2.4 Sistema “ massa-mola-amortecedor” com a introdução da “ grande massa”

Visando avaliar a influência da “grande massa” no problema apresentado no item 2.1, foi idealizado um sistema com dois graus de liberdade que contemplasse tal efeito,

como se vê na figura 3.3, incluindo uma massa  $m_2$  muito maior do que a massa original do sistema  $m_1$ .

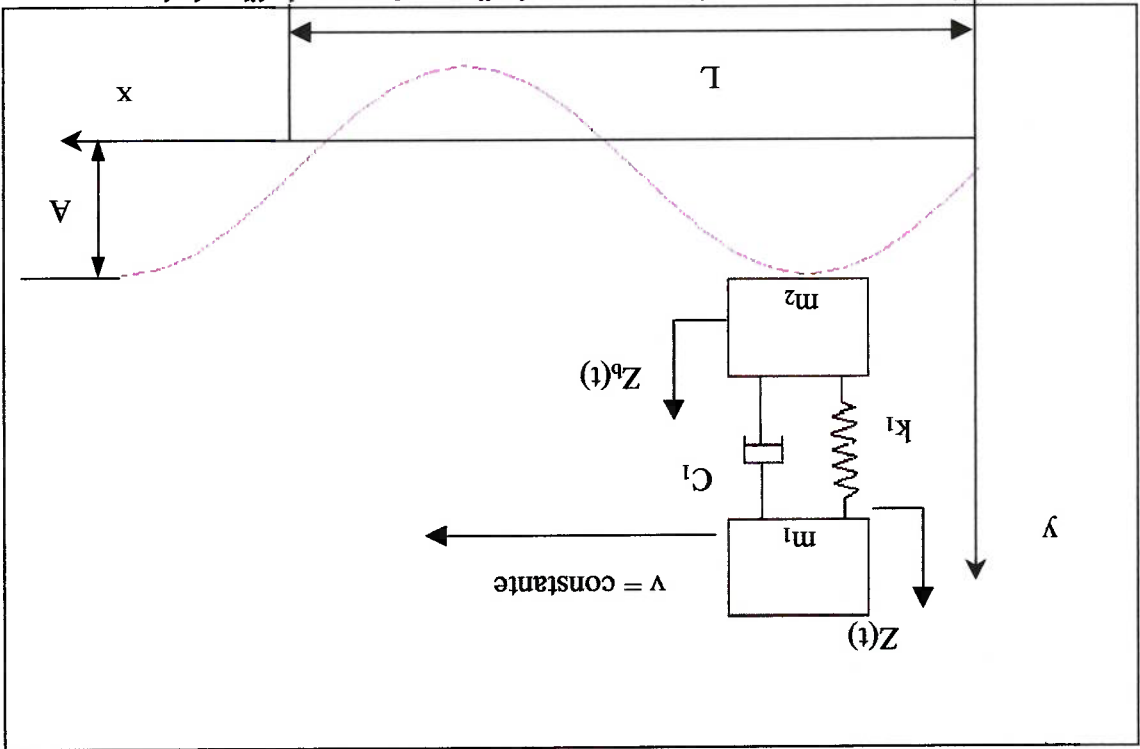


Figura 3.3 – Sistema “massa – mola – amortecedor” com 2 graus de liberdade

Dessa forma o equacionamento do sistema em sua forma discreta fica :

$$(99.) \quad \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d^2 z(t)}{dt^2} \\ \frac{d^2 z_b(t)}{dt^2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dz(t)}{dt} \\ \frac{dz_b(t)}{dt} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ z_b(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F(t) \end{bmatrix}$$

Sendo

$$(100.) \quad z(t) = z_p(t) + z_r(t)$$

Admitindo movimento harmônico síncrono, o sistema de equações (99) em termos de

vibração livre não-amortecida fica:

$$(101.) \quad \begin{bmatrix} k_1 - \omega^2 m_1 & 0 \\ 0 & k_1 - \omega^2 m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ z_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que para fornecer solução não-trivial, necessita ter

$$(102.) \quad (k_1 - \omega^2 m_2)(k_1 - \omega^2 m_1) - k_1^2 = 0$$

onde surgem duas raízes  $\omega_1 = 0$  e  $\omega_2 = \sqrt{k_1 \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)}$ , como frequências naturais.

Considerando agora a chamada "grande massa", ( $m_2 \gg m_1$ ), consequentemente a segunda frequência natural será  $\omega_2 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$ , solução esperada para o problema original.

A necessidade do uso da "grande massa" leva à introdução de mais um grau de liberdade, feito que torna o sistema hipostático. Daí, indiretamente, o artifício da "grande massa" faz surgir o modo de corpo rígido, com frequência nula. No caso mais geral de uma estrutura mais complexa, com vários graus de liberdade, o mesmo efeito aparecerá se por culpa da "grande massa" forem introduzidos graus de liberdade adicionais em número suficiente para tornar a estrutura hipostática ( com matriz de rigidez singular ). Se, por exemplo, for imposto deslocamento num único grau de liberdade, pelo uso do artifício da "grande massa", e, ainda, preservados os demais vínculos de modo a não se criar hipostaticidade, não surgirão modos de corpo rígido, mesmo que se tenha usado "grande massa".

## 4 Testes de Confiabilidade

### 4.1 Exemplo 1 – Análise Modal

Abaixo serão apresentados os resultados obtidos para uma análise modal pelo método dos elementos finitos através do software MSC/Nastran para uma viga bi-apoiada, discretizada com 10 elementos do tipo “bar”. Foram analisados e comparados os resultados para o modelo original e, depois, com a introdução das “grandes massas” nas extremidades da viga. Estas massas têm valor  $10^6$  maior do que a massa da viga. Os resultados para o modelo de elementos finitos correspondem ao obtido por solução analítica, com modos naturais apresentados na figura 4.1:

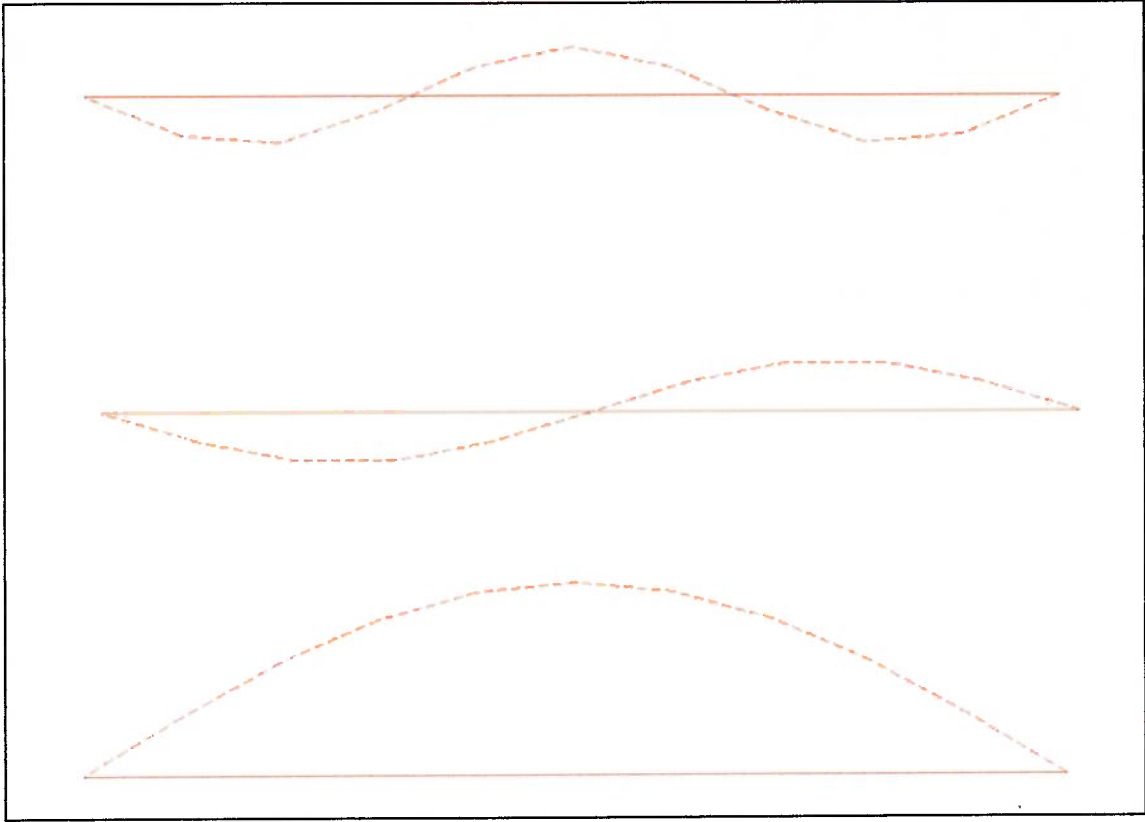
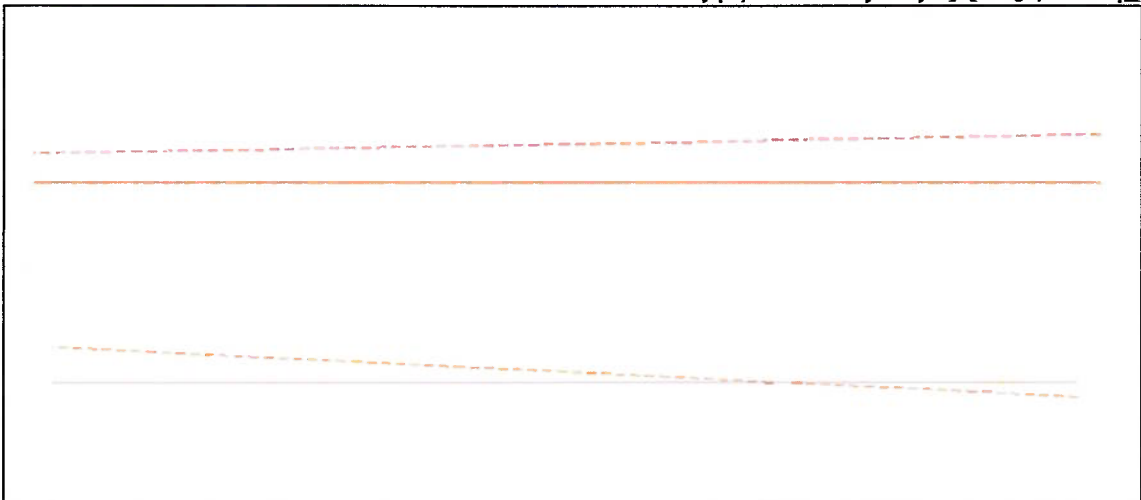


Figura 4.1 – Primeiros modos naturais de vibrar

Com relação a “grande massa”, foram obtidos os mesmos resultados para os modos de vibrar apresentados na figura 4.1, sendo as diferenças das frequências naturais desprezíveis, conforme tabela 4.1.

Um ponto interessante a avaliar é o valor das “grandes massas” adequado à realização da simulação, pois é sabido que ordens de grandeza muito distintas acarretam no mau condicionamento do problema numérico, introduzindo erro na solução. Portanto, para fins de avaliação, este mesmo problema foi simulado com diversos valores de massa relativa ( massa relativa = massa da “grande massa” / massa do sistema original ), cujos resultados são apresentados na figura 4.3.

Figura 4.2 – Modos de corpo rígido



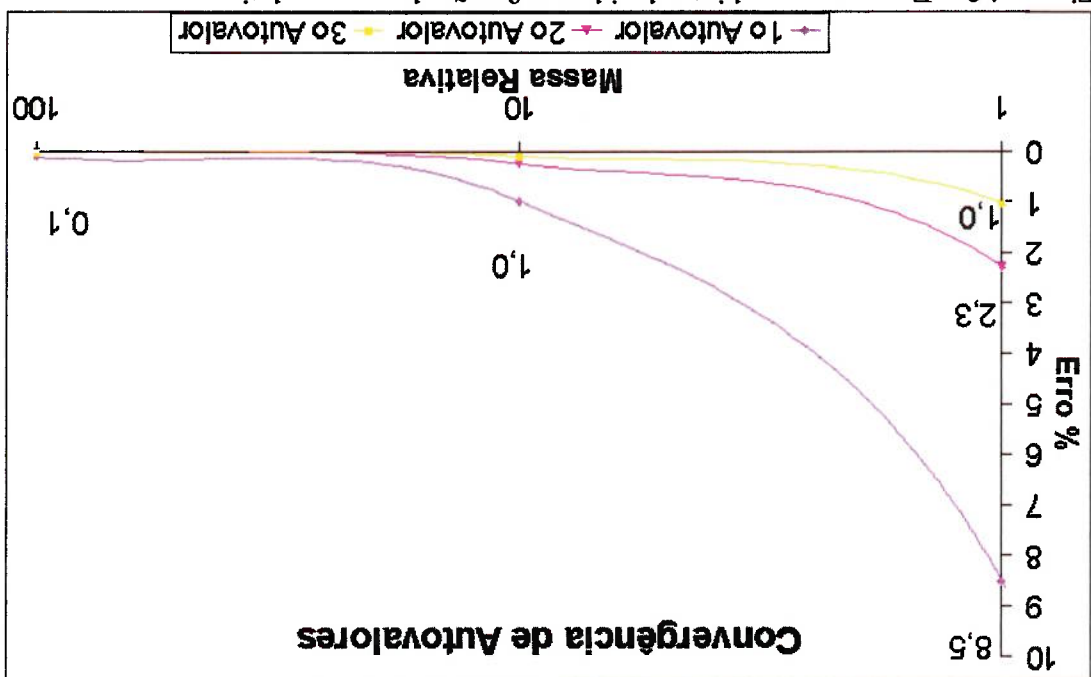
Há ainda que se observar a presença de dois modos de vibrar encontrados na análise modal obtida do modelo com “grandes massas”. Ambos apresentaram frequência natural nula ou próximo disso,  $4 \times 10^{-5}$  Hz, e são apresentados na figura 4.2.

Tabela 4.1 – Análise comparativa de resultados para os modelos de elementos finitos com e sem “grandes massas”

Modelo original	Modelo com “grandes massas”	Erro %	
1ª frequência natural ( Hz )	5.92358	5.92424	0,011
2ª frequência natural ( Hz )	23.69166	23.69229	0,002
3ª frequência natural ( Hz )	53.27671	53.27729	0,001

Com base nestes resultados, fica claro que com uma massa relativa de valor 10 obtêm-se erros percentuais aceitáveis, sendo que quando esse valor atinge 100 o erro já cai para cerca de 0,1 %.

Figura 4.3 – Erro percentual introduzido em função da massa relativa



## 4.2 Exemplo 2 – Análise Dinâmica Transiente

### 4.2.1 Viga em flexão submetida a movimento harmônico imposto nas extremidades

Muito embora se deseje validar o artifício do uso da técnica da “grande massa” para análises dinâmicas transientes, far-se-á uso da teoria apresentada no capítulo 2, mais especificamente da resposta em regime permanente, bem como de um sinal periódico que poderia muito bem ser simulado como uma análise de resposta em frequência, para a realização desta avaliação. Mesmo assim, o procedimento para a simulação utilizado foi o de uma análise dinâmica transiente, fazendo-se uso do “desconhecimento” das características do problema por parte do software, e aplicando-se o carregamento senoidal como deslocamentos prescritos no tempo.

Para a execução das análises dinâmicas através do método de elementos finitos fez-se uso mais uma vez do software MSC/Nastran V70.7 e da estrutura de uma viga apoiada em uma de suas extremidades, com a aplicação dos deslocamentos prescritos no tempo na outra. As características do problema estão detalhadas abaixo na figura 4.4, para um sistema de unidades consistentes. Como valor analítico utilizou-se a planilha criada no software Excel com base na teoria apresentada no capítulo 2. A carta de submissão para a execução do software MSC/Nastran encontra-se no Apêndice I.

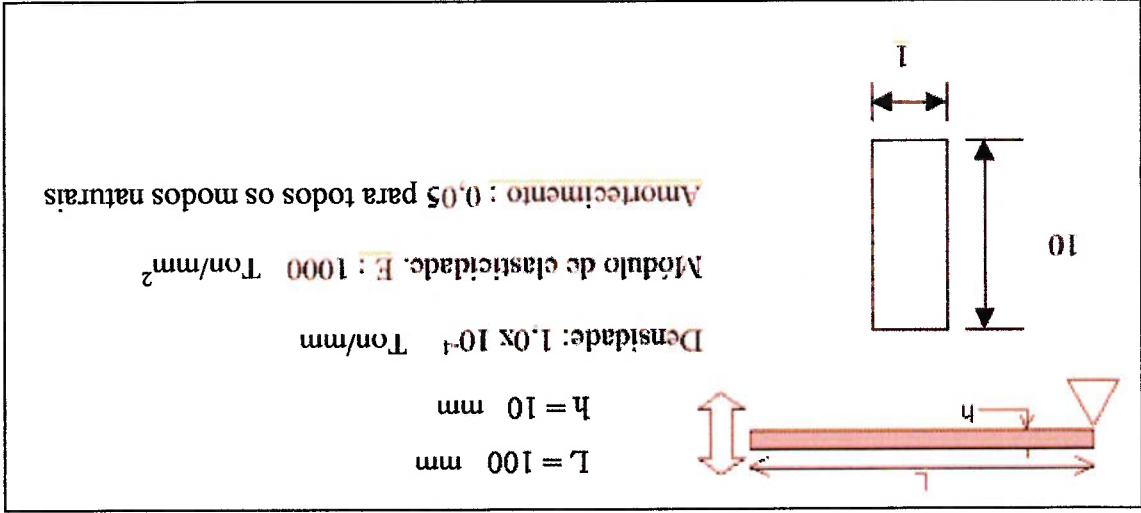


Figura 4.4 – Propriedades da viga e de sua seção transversal

A imposição das condições de contorno essenciais em análises dinâmicas transientes no software MSC/Nastran, apresenta uma limitação quanto a sua aplicação direta, necessitando do emprego de técnicas como “grande massa”, “grande mola” ou

multiplicadores de *lagrange*, sendo o 1º método apontado no manual do software como o mais eficaz. Desta forma, esta técnica será aqui empregada.

O sinal de entrada aqui utilizado é indicado abaixo na figura 4.5, e corresponde ao movimento de translação vertical na extremidade direita da viga da figura 4.4, sendo que frequência de aplicação de este está pouco abaixo do valor da primeira frequência natural da estrutura, como será mostrado, de tal forma que se encaixe na hipótese adotada na seção 4.2.3, com propósitos específicos.

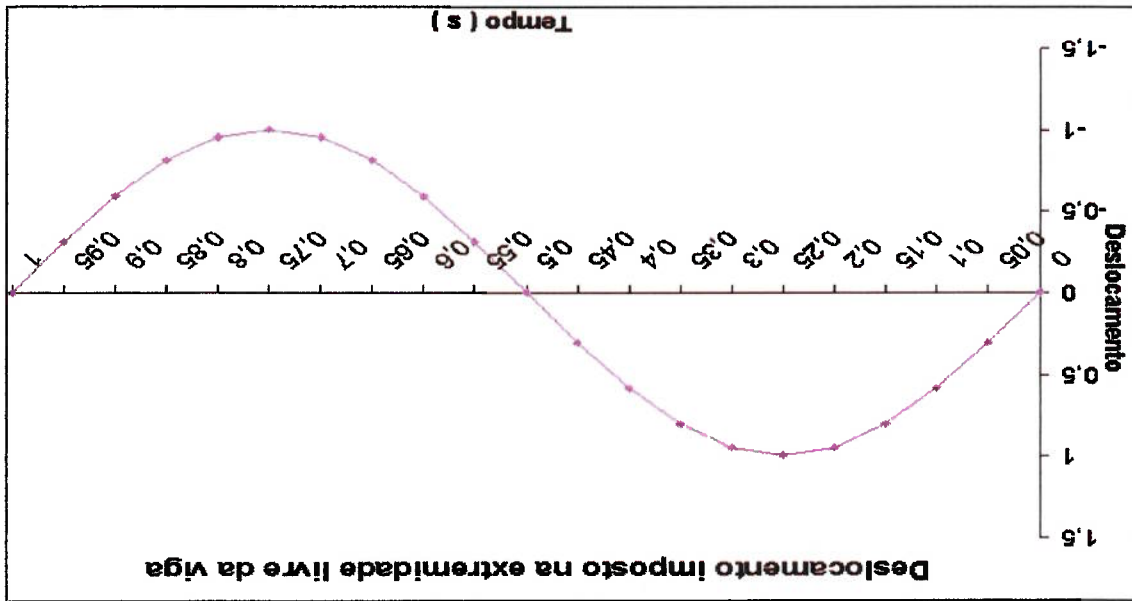


Figura 4.5 – Deslocamento imposto na extremidade da viga

Para a execução desta tarefa foi utilizado um modelo com elemento do tipo barra com 33 nós. A primeira etapa de avaliação consistiu na execução de uma análise modal, cujas frequências naturais são comparadas ao valor teórico esperado, apresentados na tabela 4.2 abaixo.

Percebe-se, então, um 1º modo decorrente da implementação da “grande massa”, correspondente ao movimento de corpo rígido da nova estrutura, e que tem a forma indicada na figura 4.6.

A realização da análise dinâmica, com a incorporação do modo de corpo rígido, proporciona a obtenção dos valores absolutos de deslocamento, velocidade e aceleração. Daí, uma segunda verificação pode ser feita quanto ao deslocamento na extremidade da viga, que deve ser igual ao sinal imposto indicado na figura 4.5. Para efeito dessa observação foram analisados os resultados, conforme figura 4.7, sendo que, de fato há coincidência com o que se vê na figura 4.5.



Por outro lado, considerada a propagação do sinal ao longo do comprimento da viga, conforme figura 4.8, observa-se na tabela 4.3 que os resultados para os deslocamentos máximos absolutos estão de acordo com o que se obtém da solução analítica apresentada no capítulo 2.

1º modo	MEF (rad/s)	Valor Analítico (rad/s)	Erro %
1º modo	6,04E-09	0,0000	-
2º modo	9,01E+00	9,01E+00	-0,02
3º modo	3,60E+01	3,60E+01	0,09
4º modo	8,11E+01	8,11E+01	-0,04
5º modo	1,44E+02	1,44E+02	0,09
6º modo	2,25E+02	2,25E+02	0,08
7º modo	3,24E+02	3,24E+02	0,08
8º modo	4,41E+02	4,41E+02	0,07
9º modo	5,76E+02	5,77E+02	-0,12
10º modo	7,29E+02	7,30E+02	-0,10
11º modo	9,00E+02	9,01E+02	-0,10

Tabela 4.2 – Análise das frequências naturais obtidas

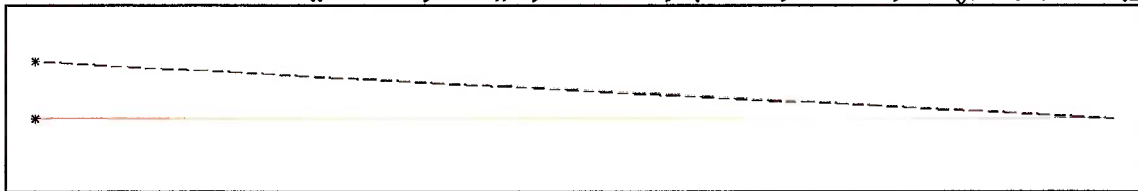


Figura 4.6 – 1º modo natural associado ao uso da "grande massa"

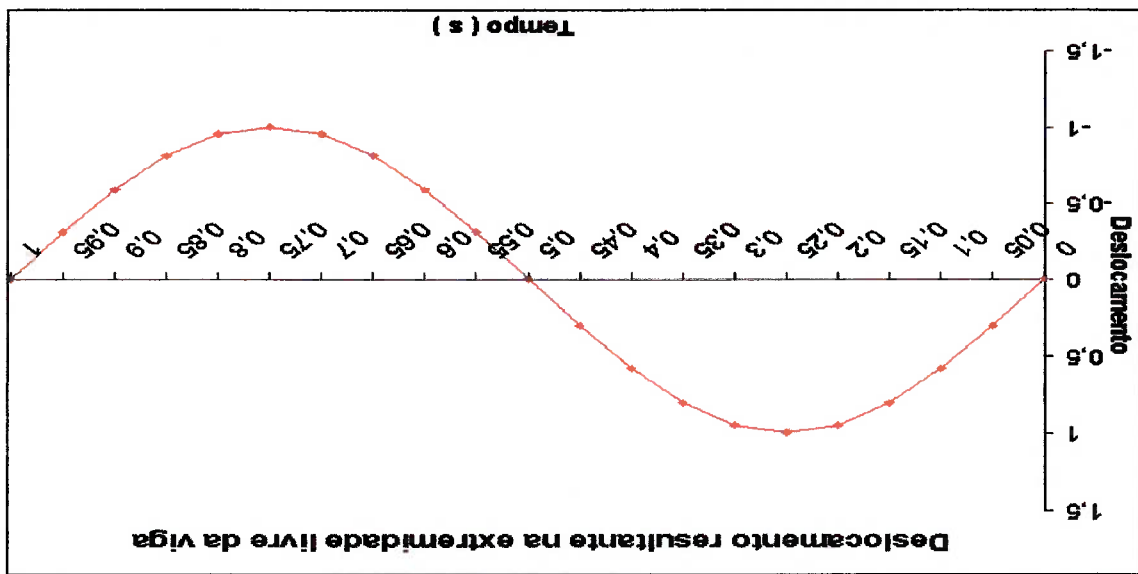


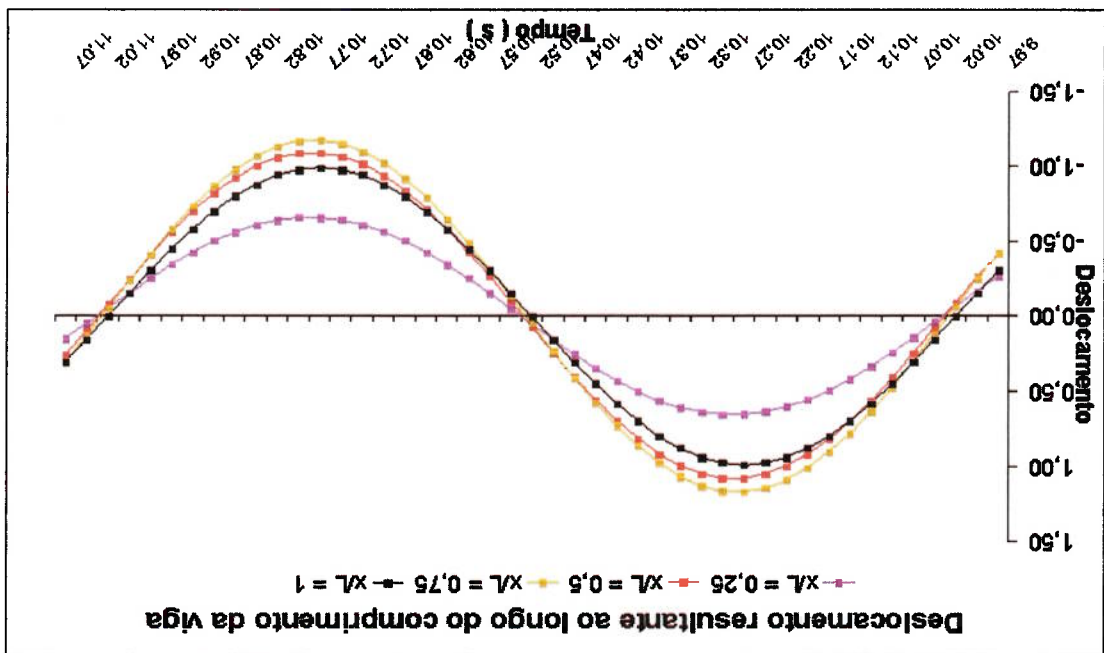
Figura 4.7 – Deslocamento resultante na extremidade da viga

Da mesma forma, pode-se confrontar os resultados para os deslocamentos relativos, figura 4.9, como se vê na tabela 4.4. Assim como no exemplo 1, também foi aqui avaliado o valor das “grandes massas” adequado à realização da simulação. Portanto, mais uma vez para fins de avaliação, o problema exemplo 2 foi simulado com diversos valores de massa relativa, sendo os deslocamentos obtidos, neste caso, o alvo da análise. Para isso foram analisados os erros para deslocamentos obtidos por elemento finitos e através da solução analítica nas extremidades da viga, bem como ao longo desta, com resultados apresentados na figura 4.10.

Tabela 4.3 – Deslocamentos máximos absolutos ao longo da viga

Posição do Ponto	Deslocamento máximo absoluto no tempo	Valor Analítico	Erro %
$\frac{L}{x} = 0,25$	0,6592	0,6620	-0,42
$\frac{L}{x} = 0,50$	1,0871	1,0900	-0,27
$\frac{L}{x} = 0,75$	1,1714	1,1800	-0,73

Figura 4.8 – Propagação do sinal ao longo do comprimento da viga



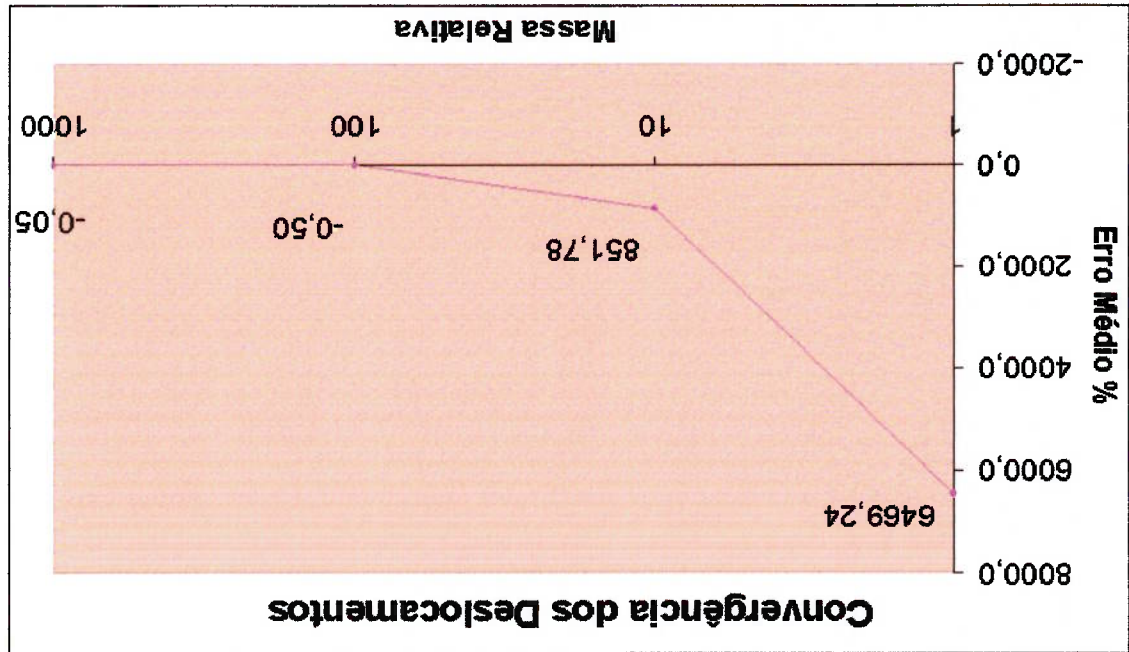
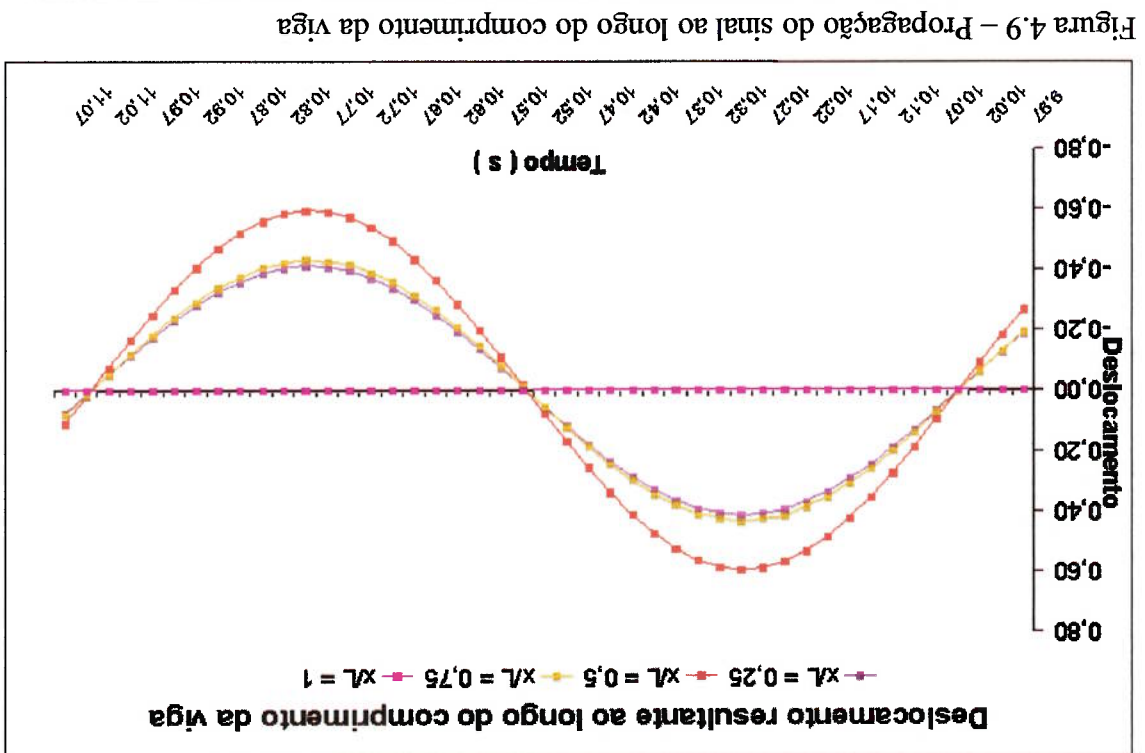


Figura 4.10 – Erro percentual introduzido em função da massa relativa

Tabela 4.4 – Deslocamentos máximos relativos obtidos ao longo da viga

Posição do Ponto	Deslocamento máximo relativo no tempo	Valor Analítico	Erro %
$x/L = 0,25$	0,4153	0,4130	0,56
$x/L = 0,50$	0,5981	0,5960	0,35
$x/L = 0,75$	0,4362	0,4330	0,74



## 4.2.2 Viga em flexão submetida a movimento harmônico imposto nas extremidades com apoio em molas

Visando analisar a introdução das molas nas extremidades de uma viga, utilizaremos as mesmas características empregadas na seção 4.2.1, sendo que as molas apresentaram rigidez de 100 N/mm. Como pode ser observado na figura 4.11 abaixo, as “grandes massas” foram introduzidas na base das molas, onde o sinal será aplicado. A carta para a execução da simulação numérica deste problema no software MSC/Nastran encontra-se no apêndice II.

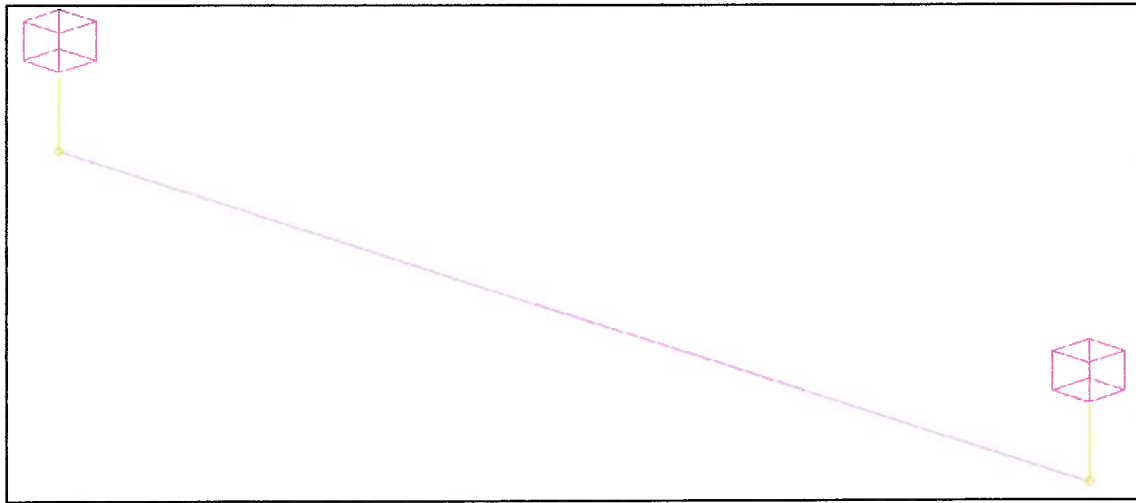


Figura 4.11 – Modelo de elementos finitos com “grandes massas” indicadas por cubos

Para este item optou-se por sinais diferentes em cada extremidade, sendo que em uma destas foi aplicado o mesmo sinal que na seção anterior ( $x/L = 1$ ), enquanto que na outra extremidade aplicou-se um sinal com amplitude de 1,5 mm e frequência de 0,5 Hz, como indicado na figura 4.12.

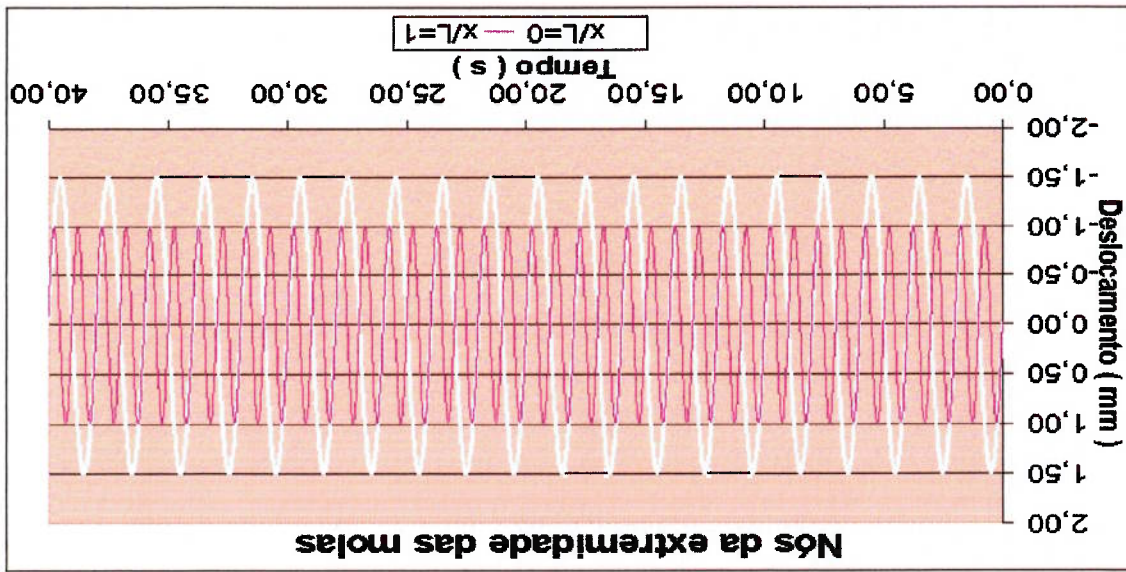


Figura 4.12 – Deslocamento imposto nas bases das molas (“grandes massas”)



Como resultado, obtivemos o deslocamento verificado nos nós das extremidades da viga, figura 4.13, bem como para nós do vão livre, figura 4.14, sendo este último apresentado em detalhe entre os instantes 36 e 40 segundos.

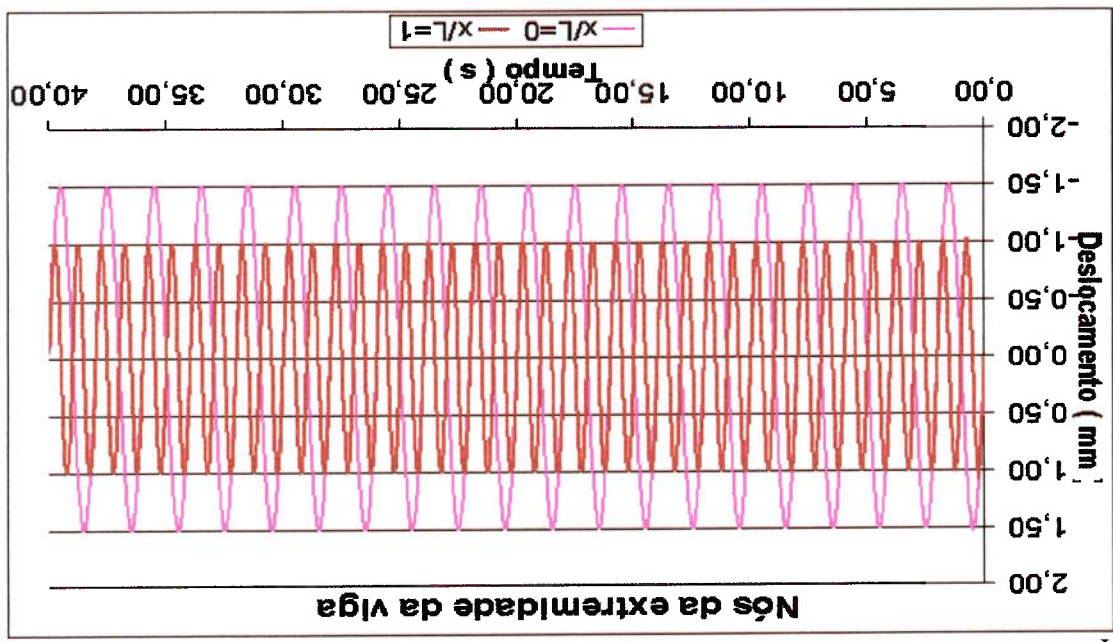


Figura 4.13 – Deslocamento resultante nas extremidades da viga

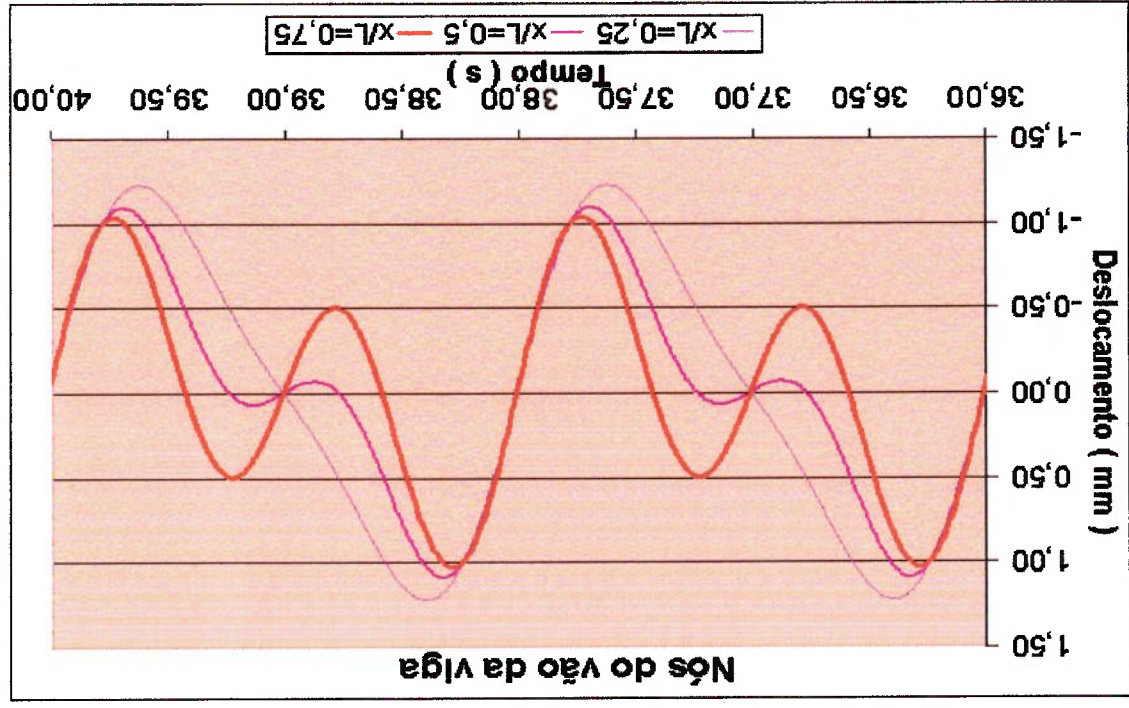


Figura 4.14 – Propagação do sinal ao longo do comprimento da viga

Comparando-se então, os resultados obtidos pelo método dos elementos finitos com os valores analíticos, tanto para frequência natural quanto para deslocamentos, respectivamente nas tabelas 4.5 e 4.6 :

Tabela 4.6 – Deslocamentos máximos absolutos ao longo da viga

Posição do Ponto	Deslocamento máximo absoluto	Valor Analítico	Erro %
$\frac{T}{x} = 0,25$	1,2260	1,2353	-0,8
$\frac{T}{x} = 0,50$	1,0945	1,1081	-1,2
$\frac{T}{x} = 0,75$	1,0505	1,0341	1,6

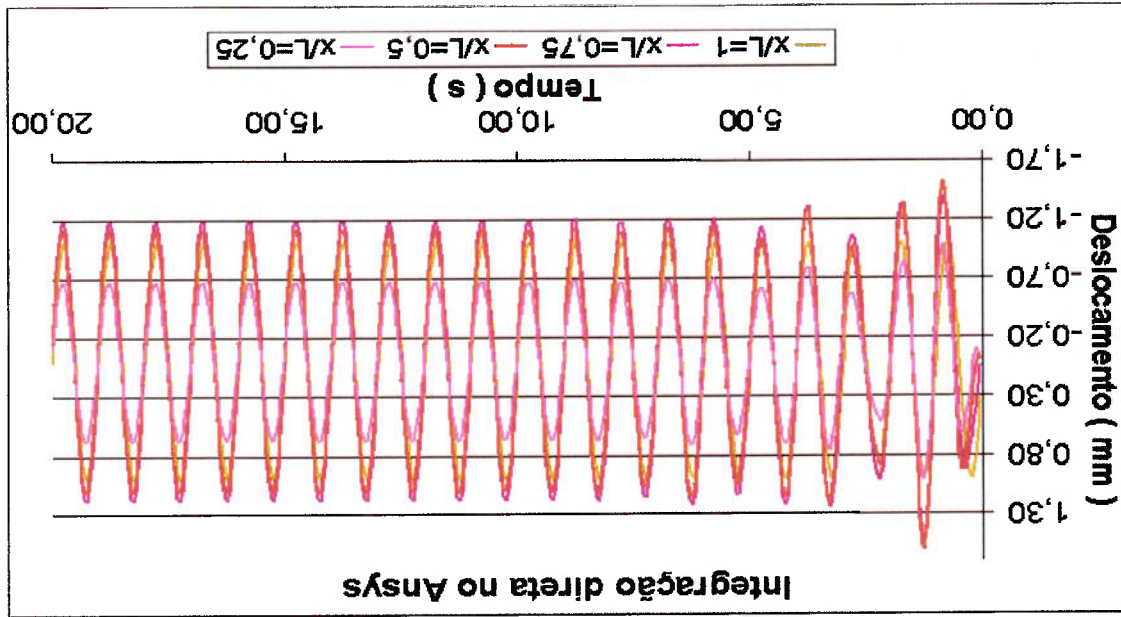
Tabela 4.5 – Análise das frequências naturais obtidas

Valor Analítico (Hz)	MEF (Hz)	Variação %	1º modo	2º modo	3º modo	4º modo	5º modo	6º modo	7º modo	8º modo	9º modo
-	5,68E-07	-	1º modo	2º modo	3º modo	4º modo	5º modo	6º modo	7º modo	8º modo	9º modo
-	3,84E-07	-	(“grande massa”)	(“grande massa”)	12,30	310,72	608,66	1005,98	1502,67	2098,73	2780,41
-	7,06	7,06	12,30	113,50	306,65	597,61	982,66	1460,32	2029,09	2687,39	7,06
-	12,28	12,28	112,61	306,65	597,61	982,66	1460,32	2029,09	2687,39	7,06	12,28
-	113,50	113,50	306,65	597,61	982,66	1460,32	2029,09	2687,39	7,06	113,50	306,65
-	310,72	310,72	597,61	982,66	1460,32	2029,09	2687,39	7,06	310,72	597,61	982,66
-	608,66	608,66	982,66	1460,32	2029,09	2687,39	7,06	608,66	982,66	1460,32	2029,09
-	1005,98	1005,98	1460,32	2029,09	2687,39	7,06	1005,98	1460,32	2029,09	2687,39	7,06
-	1502,67	1502,67	2029,09	2687,39	7,06	1502,67	2029,09	2687,39	7,06	1502,67	2029,09
-	2098,73	2098,73	2687,39	7,06	2098,73	2687,39	7,06	2098,73	2687,39	7,06	2098,73
-	2780,41	2780,41	7,06	2780,41	7,06	2780,41	7,06	2780,41	7,06	2780,41	7,06

### 4.2.3 Comparativo entre as técnicas de superposição modal e integração direta

Visando estabelecer um comparativo entre as análises dinâmicas por integração direta, realizada no software Ansys\* sem “grandes massas”, e por superposição modal, realizada no software MSC/Nastran com “grandes massas”, foi estabelecido um procedimento de forma a se obter o valor equivalente de amortecimento, (Anexo A). Definidos os parâmetros de amortecimento para integração direta, foi realizada a simulação numérica do problema proposto no exemplo anterior, pelo software Ansys, cuja carta de entrada encontra-se no Apêndice III.

Os resultados são apresentados conforme figura 4.15 a seguir, fazendo-se uso dos resultados obtidos na seção 4.2.1, para os mesmos pontos observados anteriormente, onde se pode verificar o deslocamento durante todo o período de integração. Serão objetivos dessa análise apenas os deslocamentos absolutos.



Os mesmos pontos podem ser vistos em detalhe na figura 4.16 a seguir, para o intervalo de tempo de 11 e 12 segundos de simulação, como apresentado anteriormente para a simulação com o software MSC/Nastran, de acordo com a figura 4.12.

\* O programa Ansys, pelo menos até a versão usada neste trabalho (v5.7), permite a entrada de excitação por movimento de base apenas para o caso de se desejar usar integração direta. Se for desejada superposição modal, o artifício das grandes massas também necessita ser usado, porém por conta do próprio usuário.

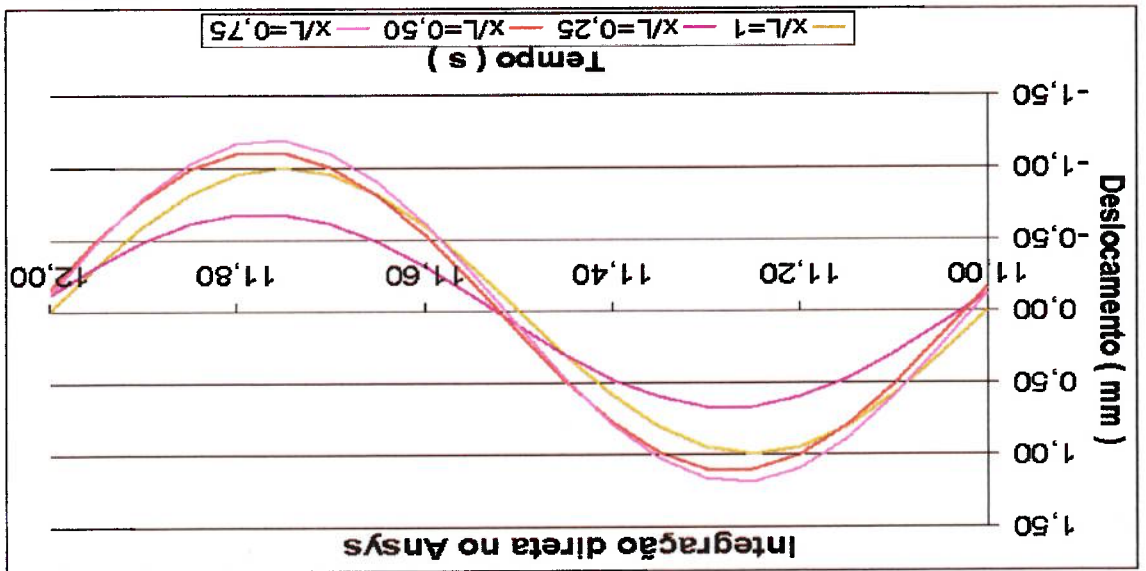


Figura 4.16 – Deslocamento no intervalo de tempo de 11 à 12 segundos de simulação

Na figura 4.16, pode-se observar melhor que, em termos qualitativos, os resultados apresentam-se semelhantes, o que nos leva a uma verificação mais detalhada. Diante desta situação, são apresentados a seguir gráficos limitados aos primeiros cinco segundos de simulação, sendo alvo da análise os pontos interiores ao vão livre da viga, correspondentes a  $x/L = 0,25$  e  $x/L = 0,75$ , conforme figuras 4.17 e 4.18, respectivamente.

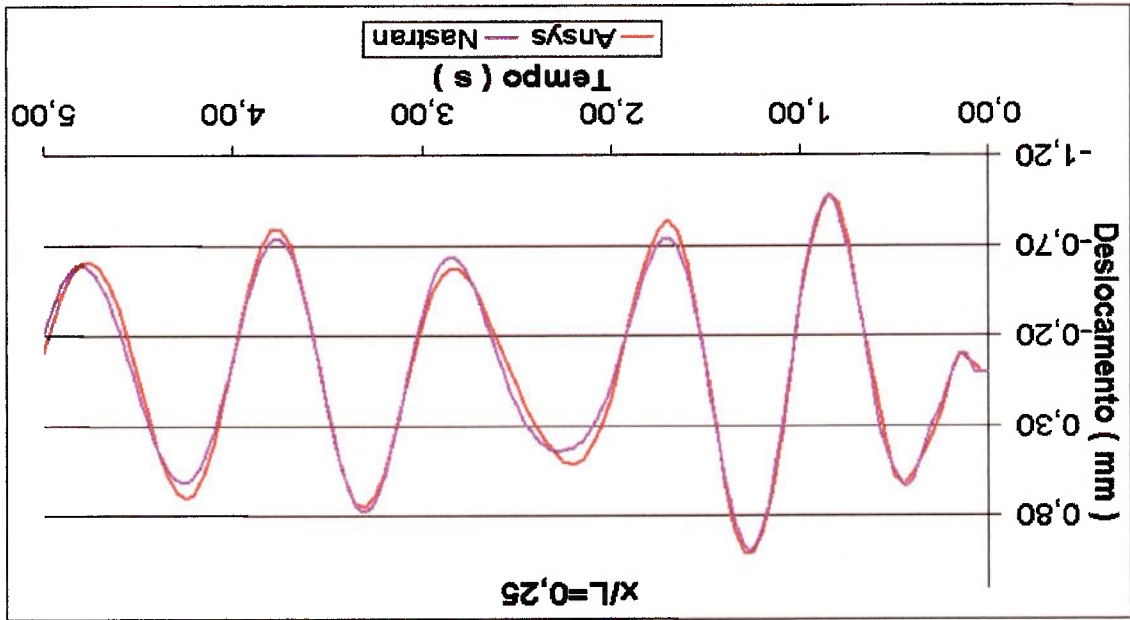


Figura 4.17 – Deslocamento no tempo para o ponto  $x/L = 0,25$



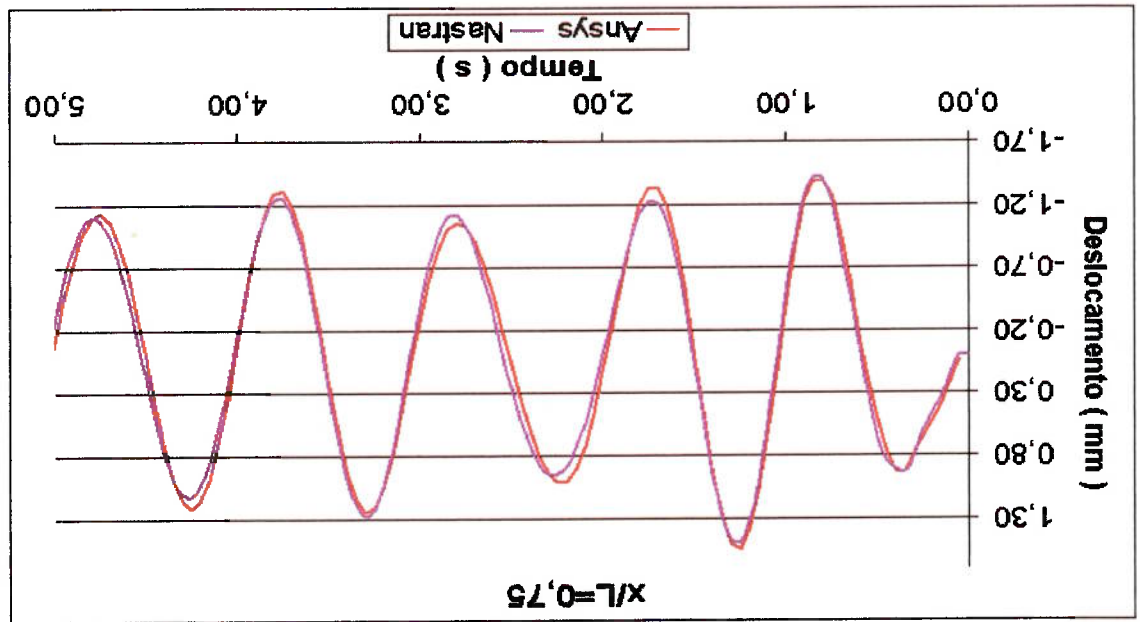


Figura 4.18 – Deslocamento no tempo para o ponto  $x/L = 0,75$

As figuras 4.17 e 4.18 deixam claro que existe diferença entre as duas simulações, já que há variação entre os resultados.

De modo a realizar uma análise do erro embuído na resposta obtida, foi verificada a diferença absoluta entre as respostas fornecida pelos dois softwares, a qual é apresentada abaixo, figura 4.19, em conjunto com as respectivas respostas, sendo os dados analisados oriundos da resposta em regime permanente e para o ponto  $x/L = 0,75$ .

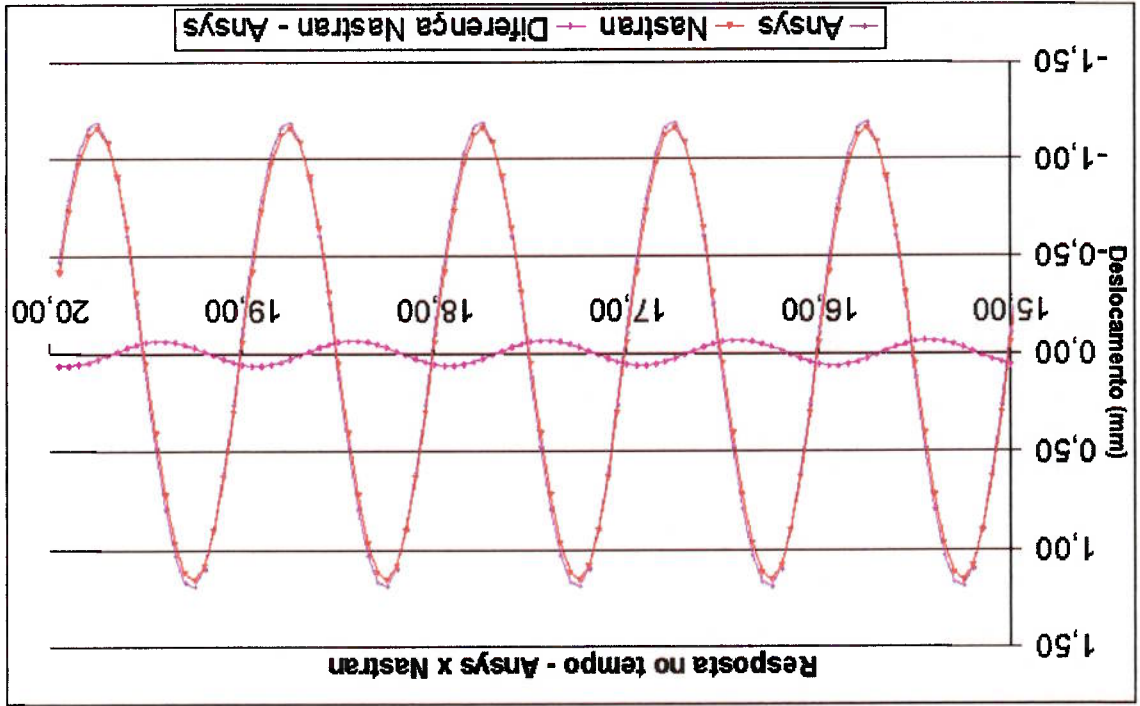


Figura 4.19 – Diferença no tempo para o ponto  $x/L = 0,75$

Ao se fazer uma análise percebeu-se que o erro instantâneo atinge valores significativos para os instantes em que os deslocamentos convergem para zero, sendo que nestes instantes é percebida uma descontinuidade do erro, o que na verdade reflete o caráter de valor indeterminado, como pode ser notado na figura 4.20 a seguir.

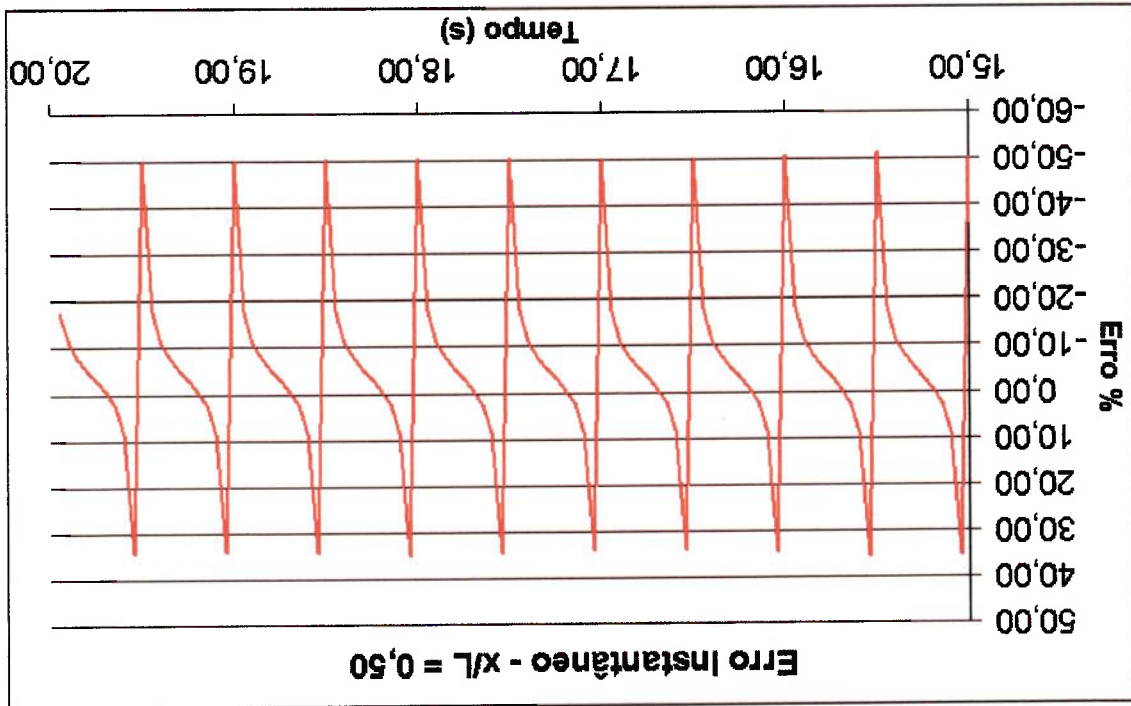


Figura 4.20 – Erro instantâneo no tempo para x/L = 0,50

Como alternativa, ao invés de se calcular o erro instantâneo e depois se obter um valor médio, optou-se pelo cálculo da média dos deslocamentos e da diferença destes, e aí sim calcular o erro médio com base nestas duas medidas. Entretanto, devido à natureza das respostas e suas diferenças, senoidal, utilizou-se o valor estatístico recomendado para o cálculo deste valor médio, que neste caso foi o valor RMS, conforme fórmula abaixo

$$n_{rms} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N n_i \Delta t_i}{N}} \quad (103.)$$

que para um passo no tempo constante se resume a

$$n_{rms} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N n_i^2}{N}} \quad (104.)$$

Há ainda que se verificar a existência do erro devido à aproximação do grau de amortecimento aplicado na simulação por superposição modal para as constantes do

amortecimento de Rayleigh utilizado na simulação por integração direta. Diante disto, foi feita uma análise de sensibilidade com relação ao amortecimento, cujos resultados encontrados para o erro RMS são apresentados no gráfico abaixo.

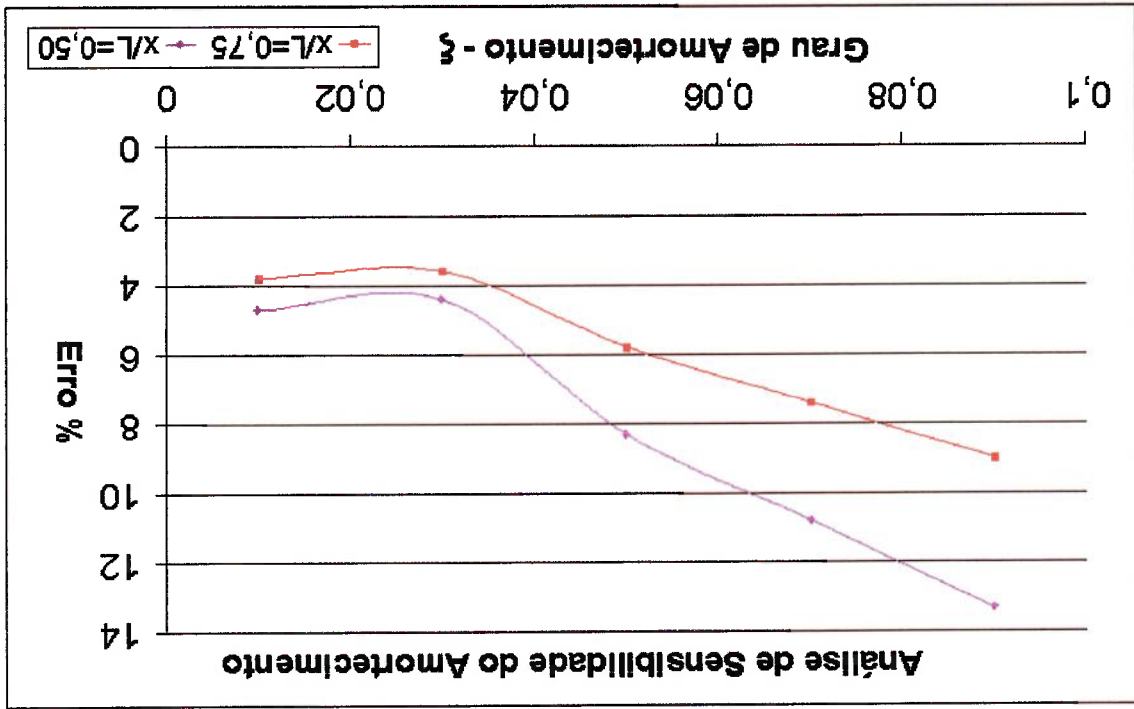


Figura 4.21 – análise de sensibilidade do amortecimento

Em vista dos resultados acima, fica evidente que a aproximação do amortecimento segundo o procedimento no anexo A tem sua contribuição dentro o valor de erro RMS calculado, e que através dos valores de erro para as simulações com grau de amortecimento bem baixo é possível identificar o erro RMS relativo entre a simulação por superposição modal realizada com o software MSC/Nastran com “grande massa” e a simulação por integração direta realizada com o software Ansys, sem “grande massa” e que estaria entre os valores de 3,6% a 4,7%.

Diante disso, e considerando a hipótese de preponderância dos dois primeiros modos de vibrar para a determinação do amortecimento correspondente na simulação por integração direta já que o fator de sintonia do carregamento com relação à primeira frequência natural é 0,7, pode-se considerar que houve uma aproximação aceitável.

## 5 Exemplos de Aplicação

### 5.1 Veículo Mini-Baja Poli/USP

Como exemplo de aplicação das técnicas abordadas neste trabalho, realizamos simulação numérica, dentro dos moldes aqui discutidos, para o modelo de veículo Mini-Baja, figura 5.1, o qual foi elaborado com 4351 nós e 3742 elementos, dos tipos *CONN2*, *CBAR*, *CROD*, *CHEXA*, que correspondem a elementos de massa concentrada, barra, viga e sólido hexaédrico, respectivamente. Maiores detalhes podem ser obtidos através do relatório [10] FAPESP. A carta para a execução da simulação numérica deste problema no software MSC/Nastran encontra-se no apêndice IV.

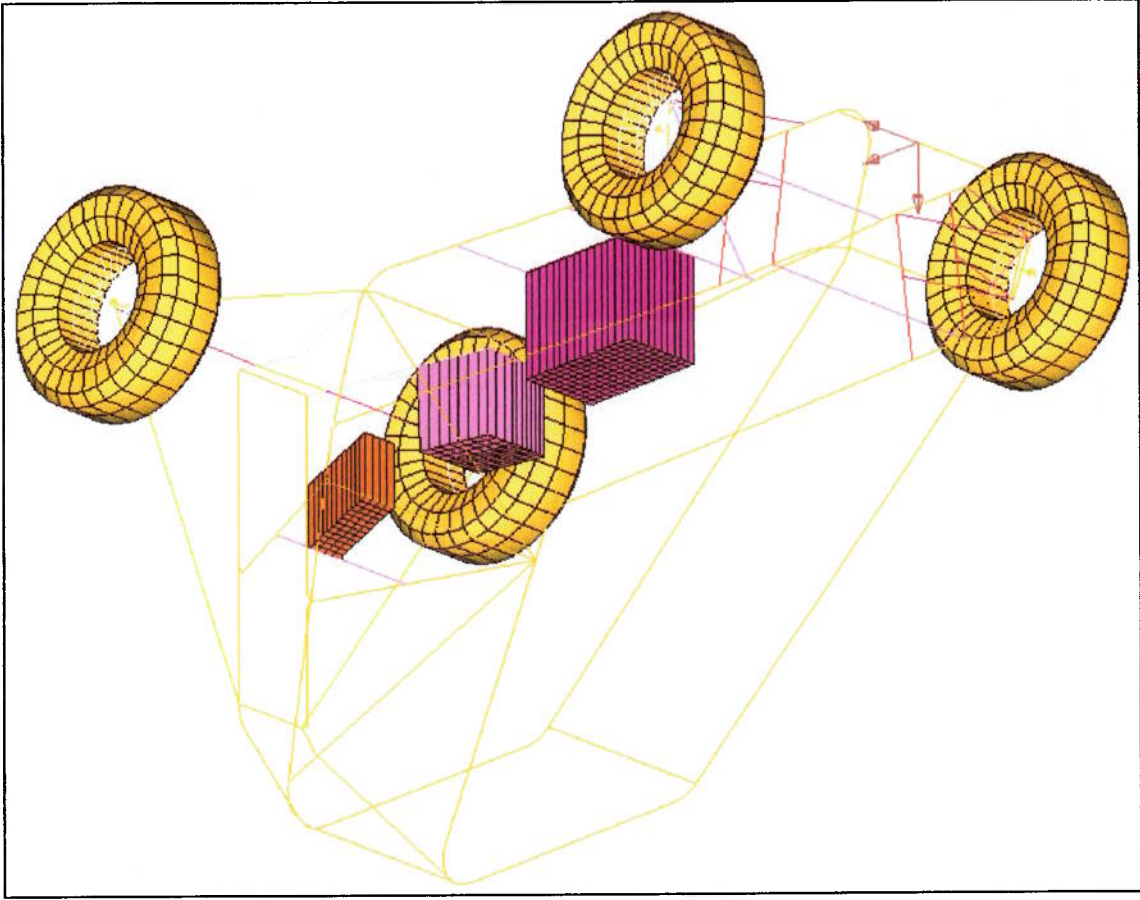


Figura 5.1 – Modelo em elementos finitos do veículo mini-baja da Poli/USP.

Dentro do que foi estudado anteriormente, foram adotados como carregamento sinais aleatórios, para o lado direito e esquerdo do veículo, conforme figura 5.2. A geração destes sinais, na ausência de uma medição, pode ser realizada através de formulação matemática adequada a esta tarefa, como indicado no capítulo 3, e será portanto aqui empregada.



No caso do veículo mini-baja, a distância transversal entre as rodas é de 0,52 m, ou seja,

$$b = 520 \text{ mm.}$$

Fazendo uso das equações (94) à (98), e admitindo um perfil de pista ruim, ( $S_0 = 320 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{ciclo}$ ), além de uma sequência de ângulos de fase gerados aleatoriamente,

obtemos o sinal que é apresentado na figura 5.2 abaixo.

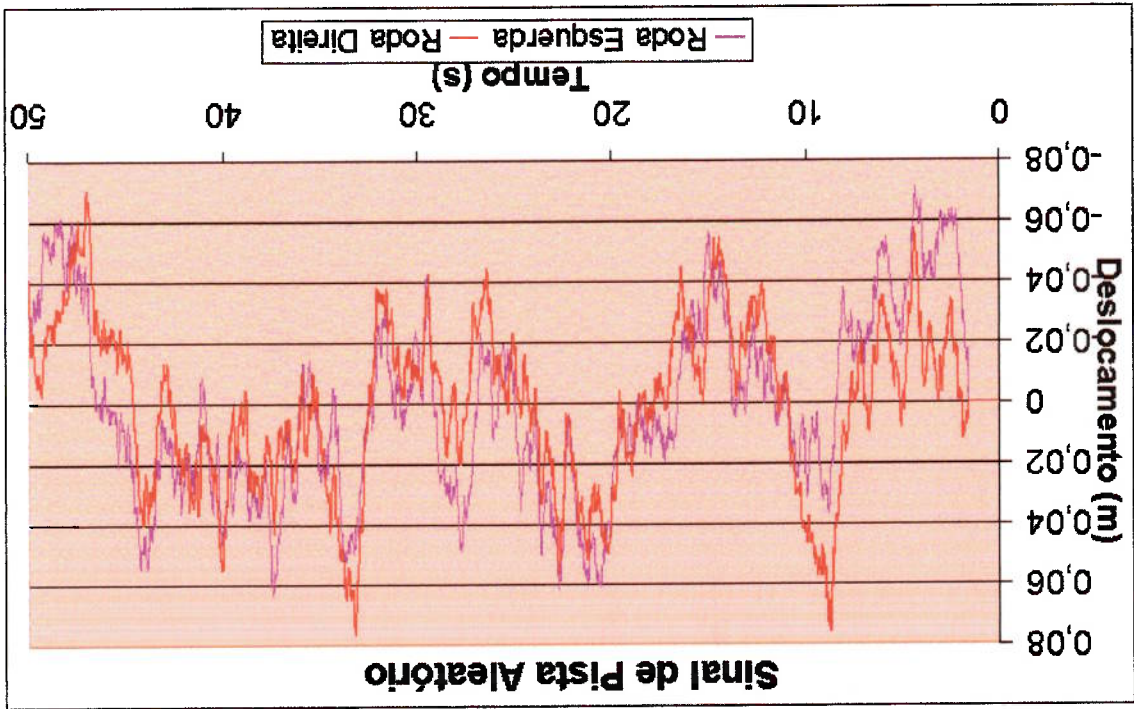


Figura 5.2 – Sinal de pista gerado.

Realizamos então uma análise dinâmica do veículo mini-baja conforme proposto nesta dissertação e com o sinal apresentado acima, figura 5.2, ( incluindo a utilização das “grandes massas” ), durante os 50 segundos de duração e com passo no tempo de 0,005 segundos. Como exemplo, é apresentado na figura 5.3 o posicionamento da estrutura do veículo para um dado instante de tempo (  $t = 25$  segundos ) em sua configuração deformada.

Ainda apresentando alguns dos resultados que são desejados, podemos ver a seguir o gráfico de tensão no tempo para um elemento de barra que representa uma parte do quadro do veículo, figura 5.4, o qual pode servir de base para uma teoria de previsão de vida à fadiga do mesmo. Uma metodologia viável seria o uso do método de contagem de ciclos de *Rainflow* para o histórico de tensões resultantes para cada região (elemento) de interesse e aplicá-los a uma curva tensão x vida em conjunto com uma regra para o cálculo de dano acumulado.

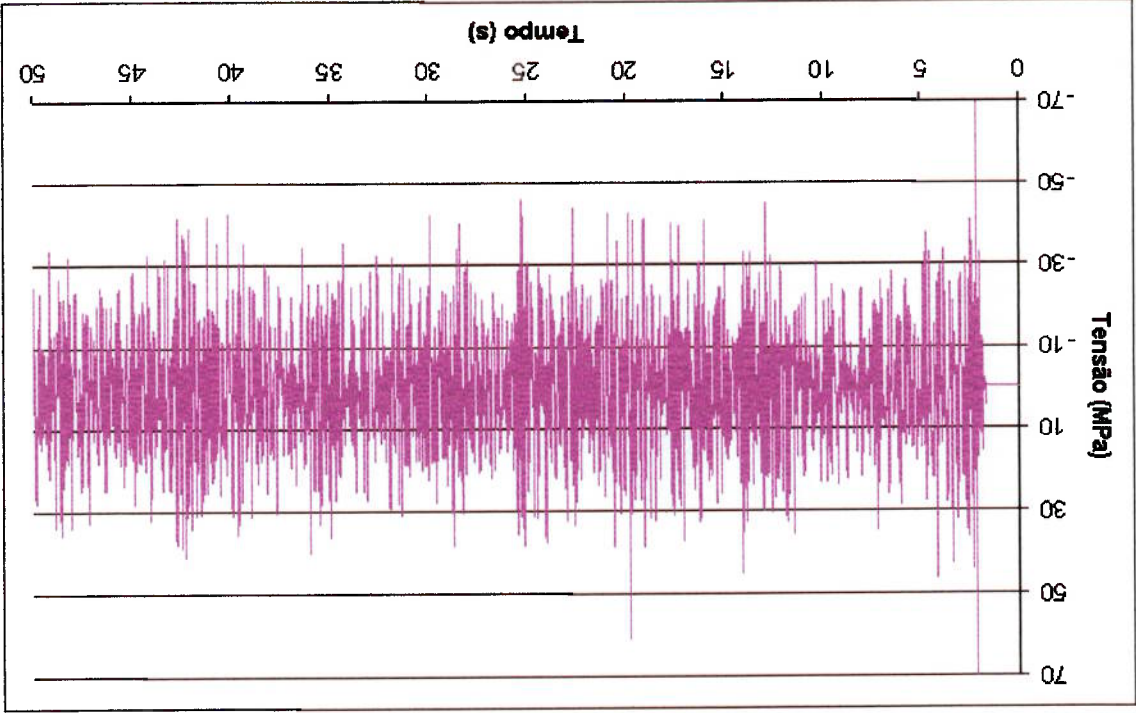
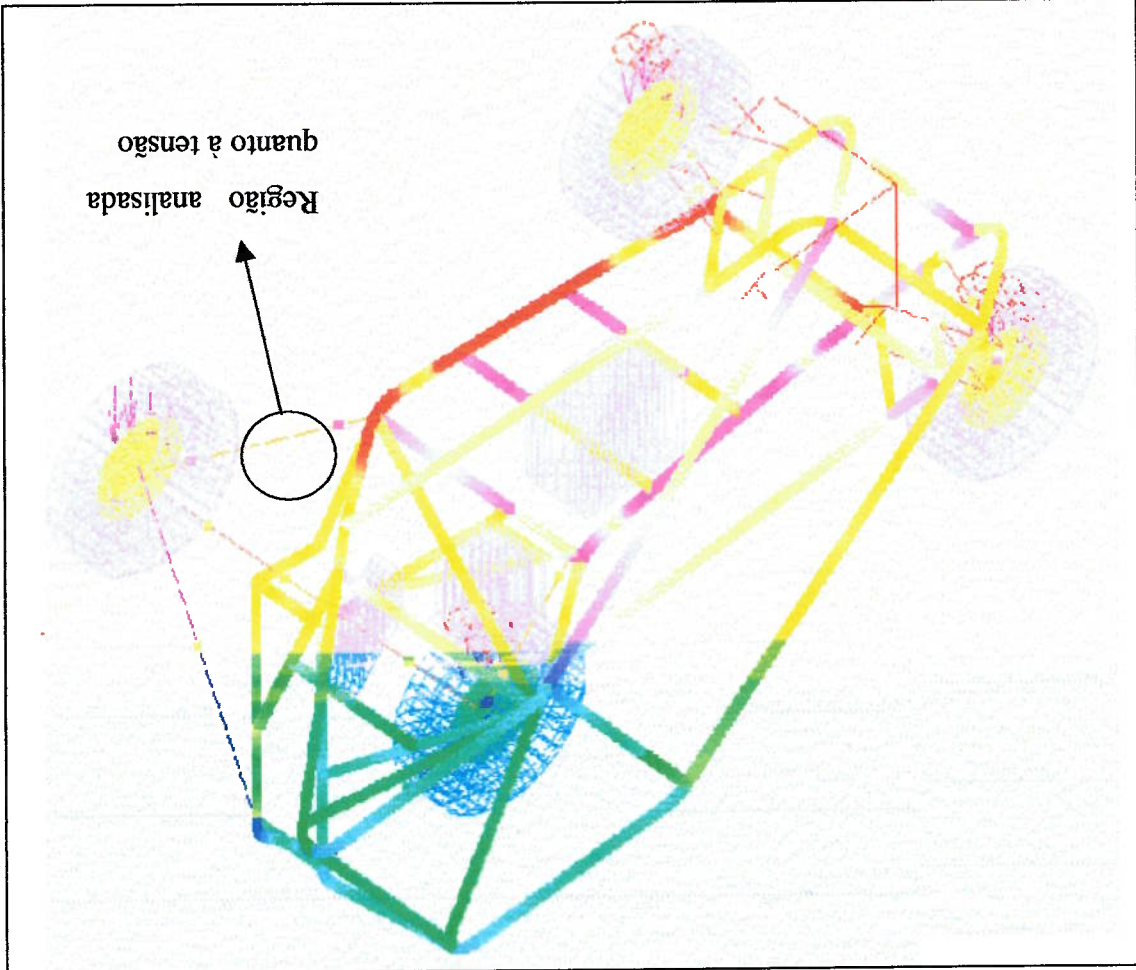


Figura 5.3 – Resultado em isotensões do veículo mini-baja em t=25 segundos.



## 6 Conclusões e Recomendações

Como conclusão, vamos começar pela análise da proposta de utilização de modelos simplificados, como os modelos de viga utilizados na seção "Movimento de Base", que possibilitam resultados preliminares na fase de concepção de veículos comerciais. A utilização desses modelos, com as respectivas soluções analíticas, propiciam a análise inicial do projeto de uma longarina de caminho ou ônibus, por exemplo, proporcionando resultados objetivos de frequências naturais, modos de vibrar e tensões atuantes. As vantagens residem no fato de se antecipar possíveis problemas de projeto, reduzindo os custos de geração de modelos de elementos finitos ou, ainda, construção de protótipos.

Todos estes passos foram percorridos como subsídios para a validação da técnica das "grandes massas", tornando possível estabelecer a relação entre massas adequada para garantir a precisão nos resultados desejados. Apesar do recomendado pela MSC, que prega uma relação entre massas de 1E+6, verificamos que foi possível obter valores relativamente precisos com uma relação de 100.

Independente da razão utilizada, 100 ou 1E+6, parece incontestável a eficácia da técnica empregada como artifício para a realização de análises dinâmica, o que é o objetivo deste trabalho.

A parte a validação da técnica das "grandes massas", existe uma questão que é inevitável quanto à realização de simulações que hoje em dia dependem necessariamente desta técnica : Por que não se pode simplesmente aplicar a excitação diretamente ao modelo utilizado em análises estáticas ?

Quais as implicações matemáticas ou mesmo numéricas que inviabilizam tal procedimento, que seria intuitivamente o mais adequado?

Estas questões surgem como recomendações para futuros trabalhos para uma investigação mais profunda deste tema, bem como obter um critério claro para a escolha dos graus de liberdade para a aplicação das técnicas de condensação e redução de dinâmica.

Por fim, sugere-se um trabalho um pouco mais abrangente sobre uma teoria de fadiga através de análises dinâmicas voltadas não somente para o critério de cada "montadora" em específico, mas sim para cada região contemplando suas características intrínsecas, citando mais uma vez HEYES [2], já que a aprovação de um veículo em uma pista de testes não implica necessariamente na aprovação do mesmo na pista de testes do

concorrente e, pior ainda, não indica necessariamente que este veículo terá durabilidade aceitável em qualquer localidade ou país.



## 7 Anexo A

A seguir é apresentado o procedimento utilizado para que a comparação das análises dinâmicas por integração direta, realizada no software Ansys, e por superposição modal, realizada no software MSC/Nastran, de forma a se obter o mesmo valor de amortecimento. Usando o conceito de grau de amortecimento modal, o qual tem um maior significado físico uma vez que o valor do amortecimento pode ser obtido de resultados experimentais, temos a relação

$$\xi_i = \frac{c_i}{2\omega_i m_i} \quad (105.)$$

Já o amortecimento proporcional de Rayleigh, com a aplicação das propriedades de ortogonalidade dos modos naturais de vibrar em relação à massa e à rigidez, é expresso por

$$c_i = a m_i + b k_i \quad (106.)$$

Igualando as equações (105) e (106), obtemos

$$\xi_i = \frac{1}{2} \left[ \frac{a}{\omega_i} + b \omega_i \right] \quad (107.)$$

Como no caso em estudo aplicamos o carregamento abaixo da primeira frequência natural, parece razoável assumir que os dois primeiros modos de vibrar sejam preponderantes sobre os demais, e portanto serão usados para a determinação dos coeficientes  $a$  e  $b$ . Há ainda que se considerar que o grau de amortecimento de 5% foi utilizado como valor constante para os modos de vibrar, o que nos permite a partir da equação (107) determinar os coeficientes com base em  $\omega_1$  e  $\omega_2$ . Admitindo então  $\xi_1 = \xi_2 = \xi$ , surgem duas equações em função de  $\omega_1$  e  $\omega_2$  que resolvidas para  $a$  e  $b$

$$a = 2\xi \left( \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \right) \quad (108.)$$

$$b = 2\xi \left( \frac{1}{\omega_1 + \omega_2} \right) \quad (109.)$$

Para o problema em questão, obtemos então os valores

$$a = 0,7208$$

$$b = 2,2198 \times 10^{-3}$$

Uma abordagem mais detalhada e extensa sobre esta questão pode ser encontrada em Clough [7], a qual entretanto fugiria ao objetivo deste trabalho.

## 8 Lista de Referências

- [1] FILHO, Rubens M.; BEZERRA, Marcelo A.; RIPOLI, Romulo R.; "Simulação numérica da estrutura do quadro de ônibus", Congresso da SAE Brasil, São Paulo, 2001.
- [2] HEYES, Peter et al.; "Analytical Methods for Durability in the Automotive Industry – The Engineering Process, Past, Present and Future", SAE Brasil – International Conference on Fatigue, São Paulo, 2001.
- [3] Bokulich, Frank; "Simulation : redefining the development process", Automotive Engineering International, p. 63, Abril de 2001.
- [4] DaimlerChrysler do Brasil Ltda, Pesquisa e Tecnologia - Testes de durabilidade em veículos, Disponível em <[http://www.daimlerchrysler.com.br/pesquisa\\_tecnologia/centestes.htm](http://www.daimlerchrysler.com.br/pesquisa_tecnologia/centestes.htm)>. Acesso em: 29 out. 2002.
- [5] HERTING, David N., "MSC/NASTRAN Advanced Dynamic Analysis User's Guide", The MacNeal-Schwendler Corporation, 1997.
- [6] MEIROVITCH, Leonard., Elements of vibration analysis, Mc Graw Hill Book Company, 2. ed, 1986.
- [7] CLOUGH, W. Ray; PENZIEN, Joseph; "Dynamics of structures", Mc Graw Hill Book Company, 2. ed, 1993.
- [8] CEBON, David; "Handbook of vehicle-road interaction", Swets & Zeitlinger Publishers, 1. ed, 1999.
- [9] Dias, C. A. Nunes; "Practical aproach for road roughness coherence function", Journal of Sound and Vibration, 2003, apresentado para publicação em 10/2003.
- [10] HOUGAZ, A. Borella; Dias, C. A. Nunes; "Análise Estrutural de Veículo Mini-Baja, Visando Simulação Dinâmica de Acelerações e Tensões", Relatório final à FAPESP, Dezembro de 2001.

## 9 Apêndice I

Abaixo segue a carta de submissão para a realização das simulações com o software de elementos finitos MSC/Nastran versão 70.7.

```
$
NASTRAN BUFSIZE=2049
$
ASSIGN PUNCH='s112E5.punch',NEW,UNIT=7
$
ASSIGN OUTPUT2='s112E5.output2',UNIT=12
$
$
ID MOVBAS
TIME 9999
SOL 112
CEND
$
TITLE = MOVIMENTO DE BASE
SUBTITLE = VIGA
ECHO = NONE
SPC = 1
DLOAD = 1
$LOADSET = 1
SDAMPING = 9
METHOD = 1 $ LANZOS
TSTEP = 1
OUTPUT
$
SET 456 = 10, 15, 20, 2
MAXLINES = 999999999
LINE = 120
$DISP(PLOT) = ALL
DISP(PUNCH) = 456
$
$
$
BEGIN BULK
PARAM AUTOSPC YES
PARAM EPZERO 1.E-8
PARAM MAXRATIO 1.E+8
PARAM K6ROT 100.
PARAM NEWSEQ -1
PARAM POST -1
$
PARAM DDRMM -1
PARAM APPR 1
$
```

\$ LANZOS		FIGRL 1		11		0		MASS	
\$		\$ Amortecimiento x Freq		TABDMP1 9 CRT		+		\$	
\$		+ 0.05		+ 1.05		+ ENDT		\$	
\$ Desc x Tempo		TABLED2		5		0.		+	
9.8-0.95106	+	0.	0.	0.05	0.30902	0.25	1.	0.3	0.95106
9.6-0.58779	+	0.2	0.95106	0.45	0.30902	0.5	0.	0.55-0.30902	+
9.4 0.58779	+	0.4	0.58779	0.65-0.80902	0.85-0.80902	0.75	-1.+	9.75	+
9.2 0.95106	+	0.8	0.95106	0.85-0.80902	0.85-0.80902	0.75	-1.+	9.95-0.30902	+
9. 0.	+	0.8	0.95106	0.85-0.80902	0.85-0.80902	0.75	-1.+	9.95-0.30902	+
8.8-0.95106	+	0.8	0.95106	0.85-0.80902	0.85-0.80902	0.75	-1.+	9.95-0.30902	+
8.6-0.58779	+	8.4	0.58779	0.85-0.80902	0.85-0.80902	0.75	-1.+	9.95-0.30902	+
8.4 0.58779	+	8.4	0.58779	0.85-0.80902	0.85-0.80902	0.75	-1.+	9.95-0.30902	+
8.2 0.95106	+	8.2	0.95106	0.85-0.80902	0.85-0.80902	0.75	-1.+	9.95-0.30902	+
8. 0.	+	8.2	0.95106	0.85-0.80902	0.85-0.80902	0.75	-1.+	9.95-0.30902	+
7.8-0.95106	+	8.05	0.30902	0.85-0.80902	0.85-0.80902	0.75	-1.+	9.95-0.30902	+
7.6-0.58779	+	7.85-0.80902	7.65-0.80902	0.85-0.80902	0.85-0.80902	0.75	-1.+	9.95-0.30902	+
7.4 0.58779	+	7.45	0.30902	0.85-0.80902	0.85-0.80902	0.75	-1.+	9.95-0.30902	+
7.2 0.95106	+	7.25	1.	0.85-0.80902	0.85-0.80902	0.75	-1.+	9.95-0.30902	+
7. 0.	+	7.05	0.30902	0.85-0.80902	0.85-0.80902	0.75	-1.+	9.95-0.30902	+
6.8-0.95106	+	6.85-0.80902	6.65-0.80902	0.85-0.80902	0.85-0.80902	0.75	-1.+	9.95-0.30902	+
6.6-0.58779	+	6.45	0.30902	0.85-0.80902	0.85-0.80902	0.75	-1.+	9.95-0.30902	+
6.4 0.58779	+	6.25	1.	0.85-0.80902	0.85-0.80902	0.75	-1.+	9.95-0.30902	+
6.2 0.95106	+	6.05	0.30902	0.85-0.80902	0.85-0.80902	0.75	-1.+	9.95-0.30902	+
6. 0.	+	5.85-0.80902	5.65-0.80902	0.85-0.80902	0.85-0.80902	0.75	-1.+	9.95-0.30902	+
5.8-0.95106	+	5.65-0.80902	5.45	0.30902	0.85-0.80902	0.75	-1.+	9.95-0.30902	+
5.6-0.58779	+	5.45	0.30902	0.85-0.80902	0.85-0.80902	0.75	-1.+	9.95-0.30902	+
5.4 0.58779	+	5.25	1.	0.85-0.80902	0.85-0.80902	0.75	-1.+	9.95-0.30902	+
5.2 0.95106	+	5.05	0.30902	0.85-0.80902	0.85-0.80902	0.75	-1.+	9.95-0.30902	+
5. 0.	+	4.85-0.80902	4.65-0.80902	0.85-0.80902	0.85-0.80902	0.75	-1.+	9.95-0.30902	+
4.8-0.95106	+	4.65-0.80902	4.45	0.30902	0.85-0.80902	0.75	-1.+	9.95-0.30902	+
4.6-0.58779	+	4.45	0.30902	0.85-0.80902	0.85-0.80902	0.75	-1.+	9.95-0.30902	+
4.4 0.58779	+	4.25	1.	0.85-0.80902	0.85-0.80902	0.75	-1.+	9.95-0.30902	+
4.2 0.95106	+	4.05	0.30902	0.85-0.80902	0.85-0.80902	0.75	-1.+	9.95-0.30902	+
4. 0.	+	3.85-0.80902	3.65-0.80902	0.85-0.80902	0.85-0.80902	0.75	-1.+	9.95-0.30902	+
3.8-0.95106	+	3.65-0.80902	3.45	0.30902	0.85-0.80902	0.75	-1.+	9.95-0.30902	+
3.6-0.58779	+	3.45	0.30902	0.85-0.80902	0.85-0.80902	0.75	-1.+	9.95-0.30902	+
3.4 0.58779	+	3.25	1.	0.85-0.80902	0.85-0.80902	0.75	-1.+	9.95-0.30902	+
3.2 0.95106	+	3.05	0.30902	0.85-0.80902	0.85-0.80902	0.75	-1.+	9.95-0.30902	+
3. 0.	+	2.85-0.80902	2.65-0.80902	0.85-0.80902	0.85-0.80902	0.75	-1.+	9.95-0.30902	+
2.8-0.95106	+	2.65-0.80902	2.45	0.30902	0.85-0.80902	0.75	-1.+	9.95-0.30902	+
2.6-0.58779	+	2.45	0.30902	0.85-0.80902	0.85-0.80902	0.75	-1.+	9.95-0.30902	+
2.4 0.58779	+	2.25	1.	0.85-0.80902	0.85-0.80902	0.75	-1.+	9.95-0.30902	+
2.2 0.95106	+	2.05	0.30902	0.85-0.80902	0.85-0.80902	0.75	-1.+	9.95-0.30902	+
2. 0.	+	1.85-0.80902	1.65-0.80902	0.85-0.80902	0.85-0.80902	0.75	-1.+	9.95-0.30902	+
1.8-0.95106	+	1.65-0.80902	1.45	0.30902	0.85-0.80902	0.75	-1.+	9.95-0.30902	+
1.6-0.58779	+	1.45	0.30902	0.85-0.80902	0.85-0.80902	0.75	-1.+	9.95-0.30902	+
1.4 0.58779	+	1.25	1.	0.85-0.80902	0.85-0.80902	0.75	-1.+	9.95-0.30902	+
1.2 0.95106	+	1.05	0.30902	0.85-0.80902	0.85-0.80902	0.75	-1.+	9.95-0.30902	+
1. 0.	+	0.85-0.80902	0.65-0.80902	0.85-0.80902	0.85-0.80902	0.75	-1.+	9.95-0.30902	+
0.8-0.95106	+	0.65-0.80902	0.45	0.30902	0.85-0.80902	0.75	-1.+	9.95-0.30902	+
0.6-0.58779	+	0.45	0.30902	0.85-0.80902	0.85-0.80902	0.75	-1.+	9.95-0.30902	+
0.4 0.58779	+	0.25	1.	0.85-0.80902	0.85-0.80902	0.75	-1.+	9.95-0.30902	+
0.2 0.95106	+	0.05	0.30902	0.85-0.80902	0.85-0.80902	0.75	-1.+	9.95-0.30902	+
0. 0.	+	0.	0.	0.85-0.80902	0.85-0.80902	0.75	-1.+	9.95-0.30902	+











## 10 Apêndice II

Abaixo segue a carta de submissão para a realização das simulações com o software de elementos finitos MSC/Nastran versão 70.7 para o modelo de uma viga bi-apoiada em

molás.

```

$
nastran buffsize=2049
$
ASSIGN PUNCH='viga_bia.punch',NEW,UNIT=7
$
ASSIGN OUTPUT2='viga_bia.output2',UNIT=12
$
ID MOVBAS
TIME 9999
SOL 112
$
CEND
$
SET 456 = 1, 2, 25, 10, 15, 20, 26
$CASE
TITLE = MOVIMENTO DE BASE
SUBTITLE = VIGA
ECHO = NONE
SPC = 1
DLOAD = 1
SDAMPING = 9
METHOD = 1 $ LANZOS
TSTEP = 1
OUTPUT
MAXLINES = 99999999
LINE = 120
$DISPL = ALL
DISP(PUNCH) = 456
BEGIN BULK
PARAM AUTOSPC YES
PARAM EPZERO 1.E-8
PARAM MAXRATIO 1.E+8
PARAM K6ROT 100.
PARAM NEWSEQ -1
PARAM POST -1
PARAM DDRMM -1
PARAM APPR 1
EIGRL 1
TABDMPI 9 CRIT
+ 0.05 2000. 0.05 ENDT
DLOAD 1 1. 102 1. 112
DLOAD 102 101 99 1 5
DLOAD 112 111 98 1 6
$
2.....$
3.....$
4.....$
5.....$
6.....$
7.....$
8.....$
9.....$
10.....$

```

DAREA	111	25	3	1.E+5			
DAREA	101	26	3	1.E+5			
\$ ATRASO PARA V=7.2 km/h ( 2 m/s = 2000 mm/s )							
\$DELAY	SID	P1	C1	T1	P2	C2	T2
DELAY	98	25	3	0.0			
DELAY	99	26	3	0.0			
TSTEP	1	4000	0.01				
\$Global coordinate system							
CORD2R	1	0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.00000
GRID	1	0.00.596E-5	0.0				
GRID	2	100.0000.596E-5	0.0				
GRID	6	5.000000.596E-5	0.0				
GRID	7	10.00000.596E-5	0.0				
GRID	8	15.00000.596E-5	0.0				
GRID	9	20.00000.596E-5	0.0				
GRID	10	25.00000.596E-5	0.0				
GRID	11	30.00000.596E-5	0.0				
GRID	12	35.00000.596E-5	0.0				
GRID	13	40.00000.596E-5	0.0				
GRID	14	45.00000.596E-5	0.0				
GRID	15	50.00000.596E-5	0.0				
GRID	16	55.00000.596E-5	0.0				
GRID	17	60.00000.596E-5	0.0				
GRID	18	65.00000.596E-5	0.0				
GRID	19	70.00000.596E-5	0.0				
GRID	20	75.00000.596E-5	0.0				
GRID	21	80.00000.596E-5	0.0				
GRID	22	85.00000.596E-5	0.0				
GRID	23	90.00000.596E-5	0.0				
GRID	24	95.00000.596E-5	0.0				
GRID	25	0.00.596E-5-10.0000					
GRID	26	100.0000.596E-5-10.0000					
CELAS2	1	100.000	26	3	2	3	0.0
CELAS2	2	100.000	25	3	1	3	0.0
CBAR	4	40	1	6	0.0	0.0	1.00000
CBAR	5	40	6	7	0.0	0.0	1.00000
CBAR	6	40	7	8	0.0	0.0	1.00000
CBAR	7	40	8	9	0.0	0.0	1.00000
CBAR	8	40	9	10	0.0	0.0	1.00000
CBAR	9	40	10	11	0.0	0.0	1.00000
CBAR	10	40	11	12	0.0	0.0	1.00000
CBAR	11	40	12	13	0.0	0.0	1.00000
CBAR	12	40	13	14	0.0	0.0	1.00000
CBAR	13	40	14	15	0.0	0.0	1.00000
CBAR	14	40	15	16	0.0	0.0	1.00000
CBAR	15	40	16	17	0.0	0.0	1.00000
CBAR	16	40	17	18	0.0	0.0	1.00000
CBAR	17	40	18	19	0.0	0.0	1.00000
CBAR	18	40	19	20	0.0	0.0	1.00000



### 11 Apêndice III

Abaixo segue a carta de submissão para a realização das simulações com o software de

elementos finitos Ansys versão 5.7.

```
FINI
/CLEAR
/PRER7
! Dados de entrada
PI = acos(-1)
comp = 100
a = 10.
th = 10.
NEle = 32
Ex = 1000.
nu = .3
rho = 1.E-4
S = a
Izz = 83.333
no = 1.
fo = .8827684
Ff = 1
DTInt = 0.05 ! DT integração
! Propriedades
MP,EX,1,Ex
MP,NUXY,1,nu
MP,DENS,1,rho
R,1,S,Izz,th
ET,1,BEAM3
! Geometria
K,1,0,0,0
K,2,comp,0,0
L,1,2
LESIZE,ALL,,,NEle
LMESH,ALL
! Condições de Contorno
DK,ALL,ux
DK,1,uy
DK,1,uz
DK,1,ROTX
```

DK,1,ROTY  
/POST6  
NSOL,2,node(100,0,0),U,Y,UyIvte  
NSOL,3,node(75,0,0),U,Y,Uy34  
NSOL,4,node(50,0,0),U,Y,Uymei0  
NSOL,5,node(25,0,0),U,Y,Uy14  
plvar,2,3,4,5  
SAVE  
FINI

IC,2,ALL,0,0,  
! Carregamento  
ANTYPE,TRANS,NEW  
! Inclui efeito transiente  
TIMINT,ON,ALL  
ALPHAD,0.7208  
BETAD,0.00221975582  
! Impulso  
\*do,1,0.05,400,0.05  
TIME,!  
d,2,uy,no\*SIN(2\*PI\*F\*!)  
i f,2,fy,fo\*SIN(2\*PI\*F\*!)  
KBC,1  
AUTOTS,ON  
DELTIM,DTIME,0.001,0.1  
OUTPR,NSOL,1  
OUTRES,NSOL,1  
LSWRITE  
\*enddo  
/SOLU  
TRNOPT,FULL  
LSSOLVE,1,400 i +1  
SAVE  
FINI

! Condições iniciais  
IC,2,ALL,0,0,  
! Carregamento  
ANTYPE,TRANS,NEW  
! Inclui efeito transiente  
TIMINT,ON,ALL  
ALPHAD,0.7208  
BETAD,0.00221975582  
! Impulso  
\*do,1,0.05,400,0.05  
TIME,!  
d,2,uy,no\*SIN(2\*PI\*F\*!)  
i f,2,fy,fo\*SIN(2\*PI\*F\*!)  
KBC,1  
AUTOTS,ON  
DELTIM,DTIME,0.001,0.1  
OUTPR,NSOL,1  
OUTRES,NSOL,1  
LSWRITE  
\*enddo

## 12 Apêndice IV

\$  
nastan buftsize=2049

\$  
ASSIGN PUNCH='mini\_bajaj9.punch',NEW,UNIT=7

\$  
ASSIGN OUTPUT2='mini\_bajaj9.output2' UNIT=12

\$  
NASTRAN SYSTEM(151)=1

\$  
\$  
init dball logical=(db\_1(1500MB),db\_2(1500MB),db\_3(1500MB),

db\_4(1500MB),db\_5(1500MB),db\_6(1500MB),

db\_7(1500MB),db\_8(1500MB),db\_9(1500MB),

db\_10(1500MB),db\_11(1500MB),db\_12(1500MB),

db\_13(1500MB))

init scratch logical=(scr\_1(2000MB),scr\_2(2000MB),scr\_3(2000MB)),

scr300=(scr\_3a(2000MB),scr\_3b(2000MB),

scr\_3c(2000MB),scr\_3d(2000MB),scr\_3e(2000MB),

scr\_3f(2000MB),scr\_3g(2000MB),scr\_3h(2000MB),

scr\_3i(2000MB),scr\_3j(2000MB),scr\_3k(2000MB),

scr\_3l(2000MB),scr\_3m(2000MB),scr\_3n(2000MB),

scr\_3o(2000MB),scr\_3p(2000MB),scr\_3q(2000MB))

\$  
ID MOVBAS

TIME 9999

SOL 112

\$

CEND

\$

SET 1 = 282, 2496

SET 2 = 722, 727, 2135, 2138

\$CASE

TITLE = MOVIMIENTO DE BASE

SUBTITLE = VIGA

ECHO = NONE

SPC = 1

DLOAD = 1

SDAMPING = 9

METHOD = 1 \$ LANZOS

TSTEP = 1

OUTPUT

MAXLINES = 999999999

LINE = 120

DISPL(PLOT) = ALL

\$DISP(PUNCH) = 456

\$STRESS(PLOT) = ALL

BEGIN BULK

```

PARAM AUTOSPC YES
PARAM EPZERO 1.E-8
PARAM MAXRATIO 1.E+8
PARAM K6ROT 100.
PARAM NEWSEQ -1
PARAM POST -1
PARAM DDRMM -1
PARAM APPR 1
$.....2.....3.....4.....5.....6.....7.....8.....9.....10.....
$EIGRL SID V1 V2 ND MSGVL MAXSET SHFSCL NORM
EIGRL 1 50
$EIGRL 1 11
TABDMP1 9 CRIT
+ 0.05 2000. 0.05 ENDT
DLOAD 1 1. 102 1. 112 1. 122 +DLOAD
+DLOAD 1. 132
$ LADO DIANTEIRO DIREITO
TLOAD1 102 101 96 1 6
$ LADO DIANTEIRO ESQUERDO
TLOAD1 112 111 98 1 5
$ LADO TRASEIRO DIREITO
TLOAD1 122 121 97 1 6
$ LADO TRASEIRO ESQUERDO
TLOAD1 132 131 99 1 5
$.....2.....3.....4.....5.....6.....7.....8.....9.....10.....
$ RODA DIANT DIR
DAREA 101 2135 3 1.0E+6
$ RODA DIANT ESQ
DAREA 111 2138 3 1.0E+6
$ RODA TRAS DIR
DAREA 121 722 3 1.0E+6
$ RODA TRAS ESQ
DAREA 131 727 3 1.0E+6
$ ATRASO PARA V=10 m/s E ENTRE EIXOS DE 1672.5 mm = 0.16725 s
$DELAY SID P1 C1 T1 P2 C2 T2
DELAY 96 2135 3 0.0
DELAY 97 722 3 0.16725
DELAY 98 2138 3 0.0
DELAY 99 727 3 0.16725
$.....2.....3.....4.....5.....6.....7.....8.....9.....10.....
TSTEP 1 10000 0.005
INCLUDE "/auto/people/guest/baja_gmassa20S3.fif"
$
INCLUDE "/auto/people/guest/pista_red_dir2.fif"
$
INCLUDE "/auto/people/guest/pista_red_esq2.fif"
$
ENDDATA
$

```