João Vicente Sparano

Técnicas Variacionais Aplicadas ao Problema de Interação Hidrodinâmica entre Corpos: FPSOs em Configuração *Tandem*.

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Engenharia.

SÃO PAULO
2003

JOÃO VICENTE SPARANO

TÉCNICAS VARIACIONAIS APLICADAS AO PROBLEMA DE INTERAÇÃO HIDRODINÂMICA ENTRE CORPOS: FPSOS EM CONFIGURAÇÃO *TANDEM*.

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Engenharia.

Área de Concentração:
Engenharia Naval e Oceânica

Orientador:
Prof. Dr. J. A. P. Aranha

2003

DEDICATÓRIA

Para M.S.

AGRADECIMENTOS

À Agência Nacional de Petróleo, pelo suporte financeiro a esse projeto.

Ao Departamento de Engenharia Naval e Oceânica da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, seus professores e funcionários.

Ao meu orientador, Prof. Dr. José Augusto Penteado Aranha, por acreditar em mim.

Ao prof. Dr. Mardel Bongivanni de Conti, com quem tudo começou.

Aos amigos de sala Prof. Dr. Alexandre Simos, Prof. Dr. André Fujarra, Dr. Eduardo Tannuri, e, mais recentemente, Karime Alves e Tiago Bravin, por me aguentarem todos os dias.

A todos aqueles que de alguma maneira, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho...

...muito obrigado.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Símbolos

a Comprimento do *hawser*.

a_α Raio da esfera.

$a^* = \frac{a_\beta}{a_\alpha}$

A_{ij} Coeficientes de massa adicional do corpo.

d "Vão livre" entre as esferas.

$d^* = \frac{d}{a_\alpha}$

$\vec{f}_i^{\alpha\beta} = F^{\alpha\beta}\vec{\lambda}_{\alpha i}$.

$F^{\alpha\beta}$ Matriz de interação entre os corpos α e β.

F_X Força de *surge* devido à correnteza.

F_Y Força de *sway* devido à correnteza.

g Função genérica que define uma certa condição de contorno.

$G^{\alpha\beta}$ Vide equação 4.24.

H_X Força do *hawser* na direção de *surge*.

H_Y Força do *hawser* na direção de *sway*.

H_Z Força do *hawser* na direção de *yaw*.

I Tensor de inércia do corpo com respeito ao referencial local K.

$\mathbb{I}$ Matriz identidade.

K Sistema de referência tri-ortogonal local.

$\mathbb{K}$ Sistema de referência tri-ortogonal global.

l Distância entre centros das esferas.

L_1 Comprimento do FPSO.

m Massa do corpo.

M_{11} Massa adicional de *surge* das esferas.

M_{22} Massa adicional de *sway* das esferas.

M_{26} Inércia adicional do acoplamento *sway-yaw* das esferas.

M_{33} Massa adicional de *heave* das esferas.

M_{35} Inércia adicional do acoplamento *heave-pitch* das esferas.

M_{55} Inércia adicional de *pitch* das esferas.

M_{66} Inércia adicional de *yaw* das esferas.

$\vec{n}$ Vetor normal ao corpo e que aponta para fora dele.

N_Z Momento de *yaw* devido à correnteza.

$P^{\alpha\beta}$ Matriz que projeta qualquer vetor de $\mathbb{K}$ em um versor com a mesma direção de $\vec{R}_{\alpha\beta}$.

Q_i Força generalizada correspondente a s_i.

$R = \min\{\|\vec{R}_\beta - \vec{R}_\alpha\|\}$

R_X Força de amarração na direção de *surge*.

R_Y Força de amarração na direção de *sway*.

R_Z Força de amarração na direção de *yaw*.

$\vec{R}_\alpha$ Vetor posição do corpo α em relação a $\mathbb{K}$.

$\vec{R}_{\alpha\beta}$ Distância entre os corpos α e β.

s_i Coordenada generalizada do corpo.

T_α Matriz de atitude do corpo α em relação a $\mathbb{K}$.

T_α^t Transposta de T_α.

$\vec{u}$ Campo de velocidades do fluido.

U Velocidade da correnteza.

$\vec{v}$ Vetor velocidade em relação ao referencial local K.

$\mathbb{W}$ Energia Cinética do sistema sólido + fluido.

$\mathbb{W}_\alpha$ Energia Cinética do corpo α.

$\mathbb{W}_{\alpha\beta}$ Energia Cinética de Interação.

$\vec{x}_G$ Posição do centro de gravidade do corpo em relação a um referencial local.

X^α_{int} Força de interação de *surge* para o sistma *tandem.*

Y^α_{int} Força de interação de *sway* para o sistma *tandem.*

Z^α_{int} Momento de interação de *yaw* para o sistma *tandem.*

α Letra grega que representa cada corpo.

δ Erro na aproximação de Φ por θ.

$\partial\eta$ Superfície do corpo.

η Volume do corpo.

θ Aproximação para Φ.

$\vec{\lambda}_\alpha$ Coeficiente de dipolo da expansão multipolo de $\phi_{\alpha i}$.

λ_α Matriz 3×6 formadas pelos vetores $\vec{\lambda}_{\alpha i}$.

$\vec{\xi}$ Centro geométrico do volume do corpo.

ρ Densidade da água.

$\phi_{\alpha i}$ Função pontencial para cada corpo α.

Φ Função Potencial.

$\vec{\omega}$ Velocidade angular em relação ao referencial local K.

∇ Operador Divergente.

∇^2 Operador Laplaciano.

RESUMO

A indústria offshore cada vez mais opera com embarcações umas próximas às outras, de modo que a interação hidrodinâmica entre elas desempenha um papel importante na nova dinâmica do sistema acoplado. Esta interação se reflete nas forças viscosas e inerciais às quais as unidades flutuantes estão submetidas.

No que tange às forças inerciais, considerando o problema de vários corpos se movendo em um meio infinito de fluido ideal (invíscido e irrotacional), técnicas variacionais foram utilizadas para obtenção de uma função Lagrangiana explícita cujo termo de interação depende apenas das massas adicionais dos corpos isolados.

As expressões encontradas foram validadas com o auxílio do *software* WAMIT® e depois aplicadas, via Equações de Lagrange, no cálculo das forças de interação para dois navios em *tandem* e, incorporados a um modelo de forças de correnteza e ondas (segunda ordem), simulados no *Simulink* do MATLAB®.

O impacto da interação hidrodinâmica na dinâmica do sistema *tandem* e na estabilidade do mesmo foi discutido baseado nos resultados obtidos das simulações numéricas.

ABSTRACT

Offshore industry operations often involve more than one floating structure in close proximity to each other, in order that the hydrodynamic interaction play an important role in the feasibility of the operations. This interaction has been presented at both viscous and inertial forces which the bodies are submitted.

Regarding the inertial forces, and considering the motion of many solids through an unbounded ideal liquid (inviscid and irrotational), variational techniques have been used to exhibit an explicit Lagrangian function whose interaction term is depends only on the added mass coefficients for each isolated body.

The expressions have been validated using the WAMIT® *software* and then applied, by Lagrange's Equation, to estimate forces and moments of two vessels in a *tandem* configuration, and, along with a current and second order wave force models, simulated in the MATLAB® *Simulink*.

The hydrodynamic impact upon the *tandem* system dynamics and stability was discussed based on the results of those numerical simulations.

Capítulo 1

Introdução

Operações *offshore* freqüentemente envolvem mais de uma unidade flutuante trabalhando próximas umas às outras. Transferências de equipamentos, muitas vezes pesados, ou suprimentos de uma uma embarcação à outra são típicas, e nesses casos há que se preocupar com o movimento relativo entre as estruturas, pois este desempenha um papel muito importante na viabilidade da operação e seus limites de operacionalidade .

Além disso, a exploração de petróleo a lâminas d'água cada vez mais profundas vem crescendo nos últimos anos, forçando a indústria *offshore* a buscar alternativas para suas plataformas, tipicamente SPARS, TLP's e semi-submersíveis, pois todas elas possuem capacidade restrita de armazenamento. Uma das opções para esse problema foi a conversão de antigos petroleiros, condenados pelas novas normas da IMO (*International Maritime Organization*), por não possuírem duplo casco, em sistemas de produção de petróleo, os chamados FPSOs (*Floating Production Storage and Offloading Systems*). Dessa forma, o óleo é armazenado nos próprios tanques da embarcação, e a transferência desse óleo para a plataforma continental é feita por outra embarcação, o "navio Aliviador" (*shuttle tanker*), que se acopla ao FPSO em uma configuração denominada *tandem* - é a chamada operação de *offloading* do FPSO (Fig. 1.1), e é nesse acoplamento que ocorre a interação hidrodinâmica entre as duas embarcações, pois a presença de uma afeta o comportamento da outra no mar.

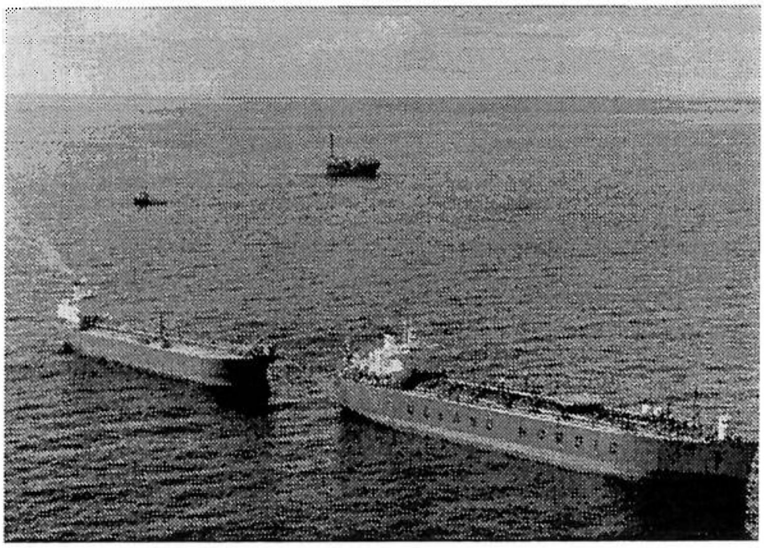

Figura 1.1: Navios em *tandem*.

E, como para os FPSOs não poderia ser diferente, questões de segurança impõem que seus movimentos sejam limitados, pois *risers* com óleo estão conectados aos tanques da embarcação, além do conforto da tripulação que trabalha nos diversos subsistemas da planta de produção. E, na operação de *offloading*, é desejável que estes movimentos permaneçam dentro de um limite de segurança, pois caso isso não aconteça, o risco de haver algum acidente é maior, com conseqüências desastrosas. Nesse caso, a interação hidrodinâmica entre as duas embarcações exerce papel muito importante, já que pode acarretar em uma mudança significativa do comportamento do sistema no mar. Portanto, é de fundamental importância avaliar o impacto da interação hidrodinâmica na dinâmica do sistema.

Em uma situação real, as embarcações estão sujeitas a condições ambientais que geram, por sua vez, forças de vento, correnteza e ondas (as duas primeiras de natureza **viscosa** e a última de natureza **potencial**). E, dentro das forças potenciais, há aquelas devido às inércias das embarcações que compõe o sistema *tandem*, que portanto recebem o nome de **Forças Inerciais**.

Nesse contexto, o Departamento de Engenharia Naval e Oceânica da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo vem desenvolvendo um modelo hidrodinâmico de forças de corrente atuantes sobre o casco de FPSOs (Modelo Heurístico Estendido). Sua formulação foi desenvolvida no contexto do convênio EPUSP - Petrobras (PROCAP 2000) e se baseia no modelo estático proposto por Leite et al. [7], cuja verificação experimental foi feita através de ensaios em escala reduzida no Tanque de Provas do Agrupamento de Hidrodinâmica da Divisão de Tecnologia de Transportes do Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado de São Paulo. O modelo completo, com respectiva validação experimental, encontra-se descrito em Simos et al. [14] e Tannuri et al. [17]. Além disso, o Modelo Heurístico Estendido foi inserido em um simulador dinâmico juntamente com outro que considera os efeitos de ondas, principalmente os de segunda ordem (forças de Deriva), sendo os coeficientes hidrodinâmicos de deriva obtidos pelo *software* WAMIT®, que resolve o problema linear de radiação e difração através do Método dos Painéis no domínio da freqüência.

Na configuração *tandem*, onde ocorre a interação hidrodinâmica, a presença de outra embarcação altera os coeficientes hidrodinâmicos de forças de excitação, massas adicionais, amortecimento por radiação de ondas, *wave drift*, etc. Para esses casos, o procedimento atual é, com o auxílio do WAMIT®, compilar um banco de dados dos coeficientes acima citados para cada configuração de aproamento de ambas as embarcações, comprimentos de *hawser*, direções e freqüências de onda, e que servirá de *input* para o simulador dinâmico.

Assim, no que tange às **Forças Inerciais**, objeto de estudo deste texto, sugere-se uma abordagem para o problema da interação hidrodinâmica entre corpos baseada no uso das técnicas variacionais, partindo das idéias contidas em Ragazzo [13].

Assim, serão objetivos maiores:

- Compreender a teoria por trás da contribuição referente às Forças Inerciais no fenômeno de interação hidrodinâmica através de outro método, que não, por exemplo, o dos Painéis usado pelo WAMIT®.
- Entender e avaliar o impacto desta parcela de interação na dinâmica do sistema FPSO - Aliviador, inserindo-a no modelo Heurístico Estendido descrito anteriormente.

Os resultados mostraram que a contribuição destas parcelas de interação inercial para o caso de navios em *tandem* é muito pequena face às outras forças presentes na dinâmica do problema, entretanto, o tempo requerido para as análises é muito menor quando comparado àquele que seria gasto usando-se o procedimento atual, justamente por ser analítico o método proposto por este texto.

Dessa forma, no **Capítulo 2** deste texto é apresentado um breve resumo dos principais trabalhos publicados que concernem a interação hidrodinâmica entre corpos.

No **Capítulo 3** justifica-se a escolha, dentre os trabalhos apresentados no capítulo anterior, daquele que norteará esta pesquisa.

As técnicas variacionais para exprimir a interação hidrodinâmica são apresentadas no **Capítulo 4**, resultando em expressões que serão, no **Capítulo 5**, validadas numericamente com o auxílio do WAMIT®.

O **Capítulo 6** concentra em si a aplicação proposta pelo trabalho: a influência horizontal, ou seja, são feitas simulações no *Simulink* do MATLAB® do sistema *tandem* para forças e momento de correnteza dados segundo Simos [14], adicionadas das parcelas de interação inercial, e apresentados os resultados dessas simulações.

Por fim, no último capítulo, o trabalho é concluído. São discutidos os pontos mais importantes e as principais conclusões obtidas durante o desenvolvimento da pesquisa. Algumas sugestões também são feitas para a continuidade do estudo de interação hidrodinâmica entre corpos.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

Investigações a respeito da interação hidrodinâmica entre corpos começaram a surgir nas últimas décadas, motivadas principalmente pela indústria *offshore*, como foi visto na **Introdução** deste texto.

As tentativas de se quantificar os efeitos da interação impulsionaram pesquisadores a desenvolverem ferramentas de análise cada vez melhores para este fim. O enfoque destas ferramentas no problema de interação hidrodinâmica tem sido de natureza numérica, ou seja, através de *software*. A predição de movimentos de embarcações usando a teoria linear do escoamento potencial (domínio da freqüência) virou rotina na análise de comportamento no mar de sistemas oceânicos. Muitos *software* tridimensionais que resolvem o problema de radiação/difração estão disponíveis comercialmente, fornecendo as forças e momentos para os seis graus de liberdade das embarcações, dentre eles o WAMIT®, talvez hoje a referência comercial deste tipo de ferramenta de análise, que resolve o problema de difração/radiação de ondas pelo Método dos Painéis.

Pinkster [12], com o auxílio do *software* DELFRAC®, desenvolvido pela *Delft University of Technology* e que utiliza aproximações sucessivas do Método de Fontes a partir de resultados para corpos isolados, realizou simulações visando estimar os efeitos de interação hidrodinâmica em ondas para dois casos: o

primeiro, uma caixa retangular próxima a um cilindro, para o qual foram calculados a massa adicional e o amortecimento potencial de *surge*, que foram comparados com valores experimentais, com aderência excelente entre os resultados; e o segundo, dois navios em configuração *tandem*. Para este caso, o FPSO e o Aliviador tinham as mesmas dimensões, o primeiro alinhado com a onda, e o segundo com um aproamento de 10°, separados por uma distância de 50m.
Não há comparação entre os resultados obtidos para o sistema acoplado e os respectivos para os navios isolados, mas o autor conclui que a interação hidrodinâmica é mais importante nas forças e momento de onda de segunda ordem.

O mesmo fato de que forças e momento de segunda ordem são os mais afetados pela interação hidrodinâmica é confirmado por Teigen [18], que simulou, com o auxílio do WAMIT®, uma TLP acoplada a uma balsa, separadas por uma distância de 10m, calculando os coeficientes hidrodinâmicos do sistema acoplado e comparando-os com aqueles para cada corpo isolado. Para massas adicionais, a diferença entre os valores para o sistema acoplado e para os corpos isolados foi pequena, da ordem de 1% para os períodos típicos de espectro de mar, chegando a um valor da ordem de 10% para baixas freqüências. O autor também tece algumas considerações a respeito de convergência numérica e tempo computacional gasto, concluindo que, em primeiro lugar, massas adicionais não são afetadas pelo tipo de malha usada, o mesmo não acontecendo para forças de segunda ordem, e que, devido a possíveis perdas de simetria - dependendo dos corpos a serem analisados e correspondente aumento no número de painéis (de maneira geral, o tempo computacional para o problema de difração é proporcional ao quadrado do número de painéis), muitas vezes o trabalho para se obter tais coeficientes de interação, sob o ponto de vista de engenharia, torna-se uma tarefa árdua. Apenas para algumas configurações de sistemas acoplados esses problemas são amenizados usando-se coordenadas generalizadas [8], mas na maioria dos casos o tempo gasto é o mesmo, assim como a preocupação quanto à convergência.

Por outro lado, Ragazzo [13] considera o problema de multi-corpos em um fluido infinito ideal (invíscido e irrotacional), partindo de um argumento variacional. O autor expressa uma função Lagrangiana que depende apenas das massas adicionais dos corpos isolados e da posição relativa entre eles. Por se tratar de expressões analíticas, é evidente que o tempo gasto para a obtenção dos coeficientes de interação inercial hidrodinâmica é muito menor, de modo que se feitas as necessárias incorporações à função Lagrangiana, pode-se chegar a um modelo relativamente preciso e rápido para se quantificar essa interação entre corpos, e conseqüentemente a estabilidade do sistema *tandem*.

Esse último assunto, inclusive, foi discutido por Lee [6], que, utilizando-se de um método tridimensional de distribuições de singularidades, estuda o comportamento dinâmico do sistema FPSO-Aliviador na presença de forças de vento, ondas e correnteza.
A partir das equações linearizadas dos movimentos de *surge*, *sway* e *yaw* das embarcações, Lee faz uma análise da estabilidade estática do sistema, concluindo que a presença de outra embarcação acoplada ao FPSO introduz uma força no sistema, a força no *hawser*, que o estabiliza. O autor também verifica, para o movimento de *yaw*, que na presença de correnteza o FPSO isolado é estável e quando acoplado com o Aliviador torna-se instável, apresentando um ciclo limite; já o navio Aliviador é instável tanto isolado quanto acoplado ao FPSO. E, ainda para o movimento de *yaw*, agora entretanto com respeito à velocidade do vento, à medida que esta aumenta a amplitude do ciclo limite diminui para

as duas embarcações.

Novamente, não foi feita uma quantificação da interação hidrodinâmica entre os navios e dos seus efeitos na estabilidade do sistema, apenas uma discussão do efeito que acarreta na mesma a presença de outra embarcação.

Assim, diante do panorama que as referências bibliográficas expõem, isto é, que as maiores contribuições para o efeito da interação hidrodinâmica são dadas pelas forças de onda de segunda ordem e pelas forças viscosas (vento e correnteza), é de se esperar que a contribuição das Forças Inerciais para o problema seja pequena, assim como seu impacto na dinâmica e, portanto, na estabilidade do sistema *tandem*. Por outro lado, o mesmo procedimento variacional, tanto o proposto por este texto como o de Aranha e Pesce [1] (desde que validado para o caso 3D) poderia, em tese, ser aplicado ao problema de difração/radiação de ondas, em especial para as forças de segunda ordem (Deriva e Deriva Lenta), estas sim muito influenciadas pela presença de um segundo corpo, com a motivação de tentar recuperar os resultados de Pinkster [12] e Teigen [18].

Capítulo 3

A Lagrangiana do Sistema

No capítulo anterior, dentre as alternativas encontradas na Literatura para o estudo da interação hidrodinâmica entre corpos, a única que fazia uso da Lagrangiana do sistema foi a proposta por Ragazzo [13].

Desde o século passado o problema de vários corpos movendo-se em um meio fluido infinito e ideal (invíscido e irrotacional) é tratado de uma maneira Lagrangiana considerando os sólidos e o fluido como um único sistema cuja dinâmica é governada apenas por suas inércias [1].

O problema em questão tem recentemente recebido renovado interesse em particular também devido à sua significância para os estudos de escoamento bifásico e movimentos de corpos submersos. A grande maioria dos trabalhos teóricos a respeito do movimento de vários corpos fornecem equações do movimento onde forças e torques são implicitamente dadas por soluções de problemas elípticos. Em apenas poucas situações de geometrias muito simples (todos os corpos são esferas) e sob a hipótese de que estas não estão tão próximas alguns autores conseguiram resolver aproximadamente o problema elíptico conseguindo um sistema de equações diferenciais ordinárias para a dinâmica do sistema.

Mas a grande conveniência em trabalhar com a Lagrangiana do sistema reside no fato de que, a partir da mesma, é possível obter-se diretamente as equações

[1] As contribuições fundamentais para esse assunto foram dadas por Kirchhoff, Thomson (Lord Kelvin) e Tait. O livro de Lamb [5] contém uma excelente apresentação destas e de contribuições correlatas.

que regem o movimento do sistema, via **Equações de Lagrange**.

Para ilustrar este fato, considere um corpo se movimentando em um fluido infinito e ideal de densidade ρ com velocidade $\vec{U}$, assumindo que o movimento do fluido é inteiramente devido à sua interação com o sólido, i.e., não há forças externas agindo sobre o primeiro. O campo de velocidades $\vec{u}$ do fluido é, segundo a Teoria Potencial, o gradiente de uma função potencial Φ, $\vec{u} = \nabla\Phi$. Para cada tempo t a incompressibilidade do fluido implica que o **Laplaciano** de Φ seja nulo, $\nabla^2\Phi = 0$, e, em adição às duas equações acima, estão as seguintes condições de contorno [2]:

1. as componentes de $\nabla\Phi$ normais aos pontos da superfície do corpo são iguais à velocidade normal destes pontos.
2. O fluido está em repouso no infinito.

ou seja:

1. $\nabla\Phi \cdot \vec{n} = \vec{U} \cdot \vec{n}$
2. $\nabla\Phi \longrightarrow 0 \quad \|x\| \longrightarrow \infty$

A Energia Cinética total do sistema sólido + fluido é dada por:

$$\mathbb{W} = \text{Energia Cinética do Corpo} + \frac{\rho}{2}\int_{\mathbb{R}^3-\eta} \|\nabla\Phi\|^2$$

onde η é o volume do corpo.

Em um sistema de referência inercial local K (ou seja, fixo ao corpo), de versores $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, as componentes da velocidade de translação $\vec{v}$ e da velocidade de rotação $\vec{\omega}$ podem ser expressas da seguinte maneira:

$$c_i = v_i \qquad c_{(i+3)} = \omega_i \qquad i = 1, 2, 3$$

[2]Condições estas que implicam em $\|\nabla\Phi\|$ ser de ordem $1/\|\vec{x}\|^3$ para $\|\vec{x}\| \longrightarrow \infty$

e, usando a seguinte decomposição de Φ:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{6} c_i \phi_i(\vec{x}); \qquad \vec{x} \in K \tag{3.1}$$

onde, para $i = 1, 2, 3$ (*surge*, *sway* e *heave*, respectivamente):

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi_i(\vec{x}) = 0, & \text{para} \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3 - \eta \\ \nabla \phi_i(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) = \vec{e}_i \cdot \vec{n}(\vec{x}), & \text{para} \quad \vec{x} \in \partial\eta \\ \|\nabla \phi_i(\vec{x})\| \longrightarrow 0 & \text{para} \quad \|\vec{x}\| \longrightarrow \infty \end{cases} \tag{3.2}$$

onde $\partial\eta$ é a fronteira de η e $\vec{n} \in K$ corresponde ao versor normal ao ponto $\vec{x} \in \partial\eta$ que aponta para fora do corpo.

E para $i = 4, 5, 6$ (*roll*, *pitch* e *yaw*, respectivamente):

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi_i(\vec{x}) = 0, & \text{para} \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3 - \eta \\ \nabla \phi_i(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) = \left[\vec{e}_{(i-3)} \times \vec{x}\right] \cdot \vec{n}(\vec{x}), & \text{para} \quad \vec{x} \in \partial\eta \\ \|\nabla \phi_i(\vec{x})\| \longrightarrow 0 & \text{para} \quad \|\vec{x}\| \longrightarrow \infty \end{cases} \tag{3.3}$$

chega-se à expressão final da Energia Cinética $\mathbb{W}$ do sistema sólido + fluido no sistema de referência local K:

$$\mathbb{W} = \frac{1}{2}\left(m\|\vec{v}\|^2 + 2\,m\vec{v} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{x}_G) + \vec{\omega} \cdot I\vec{\omega}\right) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{6} A_{ij} c_i c_j$$

onde:

- m é a massa do corpo
- $\vec{x}_G$ é a posição do centro de massa do corpo no referencial local K
- I é tensor de inércia do corpo com respeito ao referencial local K
- A_{ij} são os coeficientes de massa adicional do corpo definidos por

$$A_{ij} \overset{def.}{=} \rho \int_{\mathbb{R}^3 - \eta} \nabla\Phi_i \nabla\Phi_j \tag{3.4}$$

Finalmente, usando a Equação de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{s}_i}\mathbb{W} - \frac{\partial}{\partial s_i}\mathbb{W} = Q_i$$

onde s_i é alguma coordenada generalizada do corpo e Q_i é a força generalizada correspondente, pode-se escrever as equações de movimento para a dinâmica de um corpo imerso em um fluido.

Nota-se que os efeitos do fluido na dinâmica do corpo são representados pelo conjunto de constantes A_{ij} que dependem apenas da geometria do corpo. Portanto, no contexto de fluidos ideais, o problema da dinâmica de um único corpo em um fluido reduz-se a um sistema de equações diferenciais ordinárias, o que, entretanto, não significa ser uma tarefa fácil [3].
Assim, se

$$\vec{v} = [u\ v\ \omega]^t \quad ; \quad \vec{\omega} = [\Omega_1\ \Omega_2\ \Omega_3]^t;$$

e

$$\vec{x_G} = x_G\vec{i} + y_G\vec{j} + z_G\vec{k}; \qquad I = \begin{bmatrix} I_{44} & I_{45} & I_{46} \\ I_{54} & I_{55} & I_{56} \\ I_{64} & I_{65} & I_{66} \end{bmatrix}$$

usando a decomposição de Φ, eq. 3.1, a definição de A_{ij}, eq. 3.4, e assumindo simetria do corpo em relação ao eixo longitudinal (eixo x) vem:

$$\mathbb{W} = \frac{1}{2}\left[m(u^2 + v^2 + \omega^2) + 2m[u\ v\ \omega] \cdot ([\Omega_1\ \Omega_2\ \Omega_3] \wedge [x_G\ y_G\ z_G]) + \right.$$

$$+[\Omega_1\ \Omega_2\ \Omega_3] \cdot \left[\begin{bmatrix} I_{44} & I_{45} & I_{46} \\ I_{54} & I_{55} & I_{56} \\ I_{64} & I_{65} & I_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{bmatrix}\right] + \tfrac{1}{2}[A_{11}u^2 + A_{13}u\omega + A_{15}u\Omega_2 + A_{22}v^2 +$$

$$A_{24}v\Omega_1 + A_{26}v\Omega_3 + A_{31}\omega u + A_{33}\omega^2 + A_{35}\omega\Omega_2 + A_{42}\Omega_1 v + A_{44}\Omega_1^2 + A_{46}\Omega_1\Omega_3 + A_{51}\Omega_2 u +$$

[3]Mesmo o "movimento livre" ($Q_i = 0$) de um corpo com uma superfície suficientemente complexa chega-se a um sistema de equações diferenciais ordinárias não integrável.

$$A_{53}\Omega_2\omega + A_{55}\Omega_2^2 + A_{62}\Omega_3 v + A_{64}\Omega_3\Omega_2 + A_{66}\Omega_3^2] \tag{3.5}$$

Fazendo as multiplicações e agrupando os termos vem:

$\mathbb{W} = \frac{1}{2}\{(m + A_{11})u^2 + (m + A_{22})v^2 + (m + A_{33})\omega^2 + (mz_G + A_{15})u\Omega_2 + (mz_G + A_{51})\Omega_2 u + (-my_G)u\Omega_3 + (-my_G)\Omega_3 u + (mx_G + A_{26})v\Omega_3 + (mx_G + A_{62})\Omega_3 v + (-mz_G + A_{24})v\Omega_1 + (-mz_G + A_{42})\Omega_1 v + (my_G)\omega\Omega_1 + (my_G)\Omega_1\omega + (-mx_G + A_{35})\omega\Omega_2 + (-mx_G + A_{53})\Omega_2\omega + (I_{44} + A_{44})\Omega_1^2 + I_{45}\Omega_1\Omega_2 + I_{54}\Omega_2\Omega_1 + (I_{46} + A_{46})\Omega_1\Omega_3 + (I_{64} + A_{64})\Omega_3\Omega_1 + (I_{55} + A_{55})\Omega_2^2 + I_{56}\Omega_2\Omega_3 + I_{65}\Omega_3\Omega_2 + (I_{66} + A_{66})\Omega_3^2 + A_{13}u\omega + A_{31}\omega u\}$

A expressão acima pode ser rescrita na forma matricial:

$$\mathbb{W} = \frac{1}{2}\, u^t \mathbb{M} u \tag{3.6}$$

onde:

$$u = \begin{bmatrix} u \\ v \\ \omega \\ \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} (m + A_{11}) & 0 & A_{13} & 0 & mz_G + A_{15} & -my_G \\ 0 & m + A_{22} & 0 & -mz_G + A_{24} & 0 & mx_G + A_{26} \\ A_{31} & 0 & m + A_{33} & my_G & -mx_G + A_{35} & 0 \\ 0 & -mz_G + A_{42} & my_G & I_{44} + A_{44} & I_{45} & I_{46} + A_{46} \\ mz_G + A_{51} & 0 & -mx_G + A_{53} & I_{54} & I_{55} + A_{55} & I_{56} \\ -my_G & mx_G + A_{62} & 0 & I_{64} + A_{64} & I_{65} & I_{66} + A_{66} \end{bmatrix}$$

conhecida na Literatura como *"Forma Quadrática"* da Energia Cinética [10].

Considerando o movimento no plano horizontal, e também $y_G = 0$, a expressão da Energia Cinética reduz-se a [4]:

$$\mathbb{W} = \frac{1}{2}\left[(m + A_{11})u^2 + (m + A_{22})v^2 + 2(mx_G + A_{26})v\dot{\Psi} + (I_{66} + A_{66})\dot{\Psi}^2\right]$$

e, pelas equações de Lagrange:

$$\begin{aligned}
\vec{F}_1 &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbb{W}}{\partial u}\right) - \frac{\partial \mathbb{W}}{\partial x} \\
\vec{F}_2 &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbb{W}}{\partial v}\right) - \frac{\partial \mathbb{W}}{\partial y} \\
\vec{M}_6 &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbb{W}}{\partial \dot{\Psi}}\right) - \frac{\partial \mathbb{W}}{\partial \Psi}
\end{aligned}$$

de modo que as expressões para força de *surge*, *sway* e momento de *yaw* ficam:

$$\begin{aligned}
\vec{F}_1 &= (m + A_{11})[\dot{u}\,\vec{i} + u\,\dot{\vec{i}}] \\
&= (m + A_{11})[\dot{u}\,\vec{i} + u(\dot{\Psi}\,\vec{k} \wedge \vec{i})] \\
&= (m + A_{11})\dot{u}\,\vec{i} + (m + A_{11})u\dot{\Psi}\,\vec{j}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{F}_2 &= (m + A_{22})[\dot{v}\,\vec{j} + v\,\dot{\vec{j}}] + (mx_G + A_{26})[\ddot{\Psi}\,\vec{j} + \dot{\Psi}\,\dot{\vec{j}}] \\
&= (m + A_{22})[\dot{v}\,\vec{j} + v(\dot{\Psi}\,\vec{k} \wedge \vec{j})] + (mx_G + A_{26})[\ddot{\Psi}\,\vec{j} + \dot{\Psi}(\dot{\Psi}\,\vec{k} \wedge \vec{j})] \\
&= (m + A_{22})\dot{v}\,\vec{j} - (m + A_{22})v\dot{\Psi}\,\vec{i} + (mx_G + A_{26})\ddot{\Psi}\,\vec{j} - (mx_G + A_{26})\dot{\Psi}^2\,\vec{i}
\end{aligned}$$

$$\vec{M}_6 = (mx_G + A_{26})\dot{v}\,\vec{k} + (I_{66} + A_{66})\ddot{\Psi}\,\vec{k}$$

[4]Lembrando que, se Ψ for o ângulo de *yaw*, no plano: $\Omega_3 = \dot{\Psi}$

Agrupando os termos em $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vem, finalmente:

$$\begin{aligned} F_X &= (m + A_{11})\dot{u} - (m + A_{22})v\dot{\Psi} - (mx_G + A_{26})\dot{\Psi}^2 \\ F_Y &= (m + A_{22})\dot{v} + (m + A_{11})u\dot{\Psi} + (mx_G + A_{26})\ddot{\Psi} \\ M &= (I_{66} + A_{66})\ddot{\Psi} + (mx_G + A_{26})\dot{v} \end{aligned} \tag{3.7}$$

No caso particular de uma correnteza atuando em um FPSO, F_X, F_Y e M são dadas segundo Simos [14].

Tem-se então o sistema dinâmico sólido + fluido completamente modelado, podendo ser simulado numericamente no *Simulink* do MATLAB®, por exemplo, para várias intensidades e direções de corrente, condições de carregameto, etc.

Agora, para o problema de vários corpos movendo-se em um fluido ideal, a idéia seria novamente escrever a energia cinética do sistema *sólidos + fluido* em termos de coordenadas generalizadas dos sólidos apenas. Usando os mesmos argumentos do capítulo anterior, e identificando cada corpo por uma letra grega $\alpha \in 1, 2, \ldots, N$, ter-se-ia a expressão abaixo:

$$\mathbb{W} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N}\left[\left(m_\alpha\|\vec{v}_\alpha\|^2 + 2\, m_\alpha\vec{v}_\alpha\cdot(\vec{\omega}_\alpha\times\vec{x}_{G\alpha}) + \vec{\omega}_\alpha\cdot I^\alpha\vec{\omega}_\alpha\right)\right] + \frac{\rho}{2}\int_S\|\nabla\Phi\|^2 \tag{3.8}$$

onde S é o conjunto aberto de pontos em $\mathbb{R}^3$ a menos de $\eta_1 \cup \ldots \eta_N$ (os sólidos) e

$$\begin{cases} \nabla^2\Phi = 0, & \text{para} \quad \vec{x}\in S \\ \nabla\Phi\cdot\vec{n} = \left[\vec{V}_\alpha + \vec{\Omega}_\alpha\times(\vec{x}_\alpha - \vec{R}_\alpha)\right]\cdot\vec{n}, & \text{para} \quad \vec{x}\in\partial\eta_\alpha \\ \|\nabla\Phi\| \longrightarrow 0 & \text{para} \quad \|\vec{x}\| \longrightarrow \infty \end{cases} \tag{3.9}$$

Em cada corpo é fixado um ponto de referência e um sistema de referência tri-ortogonal, denominado K_α sendo $\{\vec{e}_{\alpha1}, \vec{e}_{\alpha2}, \vec{e}_{\alpha3}\}$ seus versores, além de um sistema de referência tri-ortogonal fixo no espaço (global) $\mathbb{K}$ de versores $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Assim, a configuração do sistema é determinada por N vetores posição $\vec{R_\alpha}$ onde cada um deles é a posição do ponto de referência do corpo α em relação a $\mathbb{K}$ e N operadores ortogonais T_α, $T_\alpha : K_\alpha \rightarrow \mathbb{K}$, cada um descrevendo a orientação do corpo α com relação a $\mathbb{K}$ (matriz de atitute do corpo α).

Entretanto, ao contrário do caso para apenas um sólido, não é possível escrever a integral

$$\frac{\rho}{2}\int_S \|\nabla\Phi\|^2 \tag{3.10}$$

em termos de um conjunto de constantes que dependem apenas da geometria de cada corpo. É de se esperar que, como no caso para um corpo, esta integral seja uma função quadrática das velocidades lineares e angulares de cada sólido, e ainda uma função da posição relativa entre eles.

O propósito do próximo capítulo é aproximar a integral acima utilizando-se técnicas variacionais, chegando a uma expressão de Energia Cinética para o sistema multi-corpos que contenha essencialmente dois termos: um relacionado com cada um dos corpos isolados e outro que reflita a interação potencial inercial entre eles. Essa "separação" dos termos é conveniente porque, para o caso de dois navios em *tandem* o acoplamento hidrodinâmico do sistema FPSO-Aliviador é dado pela força de interação entre eles, e a partir da expressão do termo de interação da Energia Cinética do sistema apenas, é possível calcular as forças de interação entre os dois navios, e, conseqüentemente, avaliar o impacto dessa interação sobre a dinâmica do sistema.

Capítulo 4

O Princípio Variacional

No capítulo anterior foram obtidas as equações de movimento de um corpo isolado, imerso em um meio fluido, a partir da Lagrangiana do sistema. A partir de uma expansão para a função potencial Φ, a integral que representa a Energia Cinética do fluido foi substituída por coeficientes que dependem apenas da geometria do corpo para cada um dos graus de liberdade (massas adicionais), multiplicados por suas respectivas velocidades.

Também foi dito que, para o caso de N corpos, não era possível escrever a integral

$$\frac{\rho}{2}\int_S \|\nabla\Phi\|^2 \tag{4.1}$$

$$\begin{cases} \nabla^2\Phi = 0 & \\ \nabla\Phi\cdot\vec{N}_i(\vec{X}) = \left[\vec{V}_i + \vec{\Omega}_i \times (\vec{X}_i - \vec{R}_i)\right]\cdot\vec{N}_i, & \text{para} \quad \vec{X}\in\partial S_i \\ \|\nabla\Phi(X)\| \sim \frac{1}{\|X\|^3} & \text{para} \quad \|\vec{X}\| \longrightarrow \infty \end{cases}$$

em termos de um mesmo conjunto de constantes que dependam apenas da geometria de cada corpo, porém que era de se esperar, assim como no caso de apenas um corpo, que a integral fosse uma função quadrática das velocidades lineares e angulares de cada sólido e ainda uma função da posição relativa entre eles.

Assim, a idéia central desse capítulo é, primeiro, mostrar que a integral 4.1

admite um princípio variacional, e, a partir de uma *"função-tentativa"*, chegar a uma aproximação para a Energia Cinética do fuido para o caso de vários corpos em movimento, levando em conta a interação inercial entre eles, e sendo função apenas dos coeficientes dos corpos isolados e da posição relativa entre eles.

4.1 Caracterização Variacional de $\int_S \|\nabla\Phi\|^2$

Recordando o **Capítulo 3**, seja S o conjunto aberto de pontos em $\mathbb{R}^3$ a menos de $\eta_1 \cup \ldots \eta_N$ (os sólidos).

Dada uma função Φ tal que

$$\begin{cases} \nabla^2\Phi = 0 & \\ \nabla\Phi \cdot \vec{n} = g(x), & \text{para} \quad x \in \partial S \\ \|\nabla\Phi\| \longrightarrow 0 & \text{como} \frac{1}{\|x\|^3} \quad \text{para} \quad \|x\| \longrightarrow \infty \end{cases}$$

onde g é uma função genérica que define uma certa condição de contorno, seja

$$\theta = \Phi + \delta \tag{4.2}$$

onde $\delta << 1$.

Então

$$\begin{aligned} \int_S \|\nabla\theta\|^2 = \int_S \|\nabla\Phi\|^2 + 2\int_S \nabla\Phi\nabla\delta + \int_S \|\nabla\delta\|^2 \overset{Id.Green}{\geq} \\ \geq \int_S \|\nabla\Phi\|^2 - 2\int_{\partial S} \delta(\nabla\Phi\cdot\vec{n}) \end{aligned} \tag{4.3}$$

Mas

$$\int_S \|\nabla\Phi\|^2 \overset{Green}{=} -\int_{\partial S} \Phi(\nabla\Phi\cdot\vec{n})$$

e

$$\int_S \|\nabla\Phi\|^2 - 2\int_{\partial S} \underbrace{\delta}_{\theta-\Phi} \overbrace{(\nabla\Phi\cdot\vec{n})}^{g} = \int_S \|\nabla\Phi\|^2 + 2\int_{\partial S} \Phi(\nabla\Phi\cdot\vec{n}) - 2\int_{\partial S} \theta g$$

Ou seja, 4.3 implica em

$$\int_S \|\nabla\theta\|^2 + 2\int_{\partial S} \theta g \geq -\int_S \|\nabla\Phi\|^2$$

e a conclusão deste fato pode ser expressa na seguinte

Proposição 1. *Seja θ tal que $\int_S \|\nabla\theta\|^2 < \infty$ e $\int_{\partial S} \theta g$ existe. Então* [1]

$$\int_S \|\nabla\Phi\|^2 \geq -2\int_{\partial S} \theta g - \int_S \|\nabla\theta\|^2$$

Mais ainda, tomando $\theta = \Phi$ tem-se a identidade, e portanto:

$$\int_S \|\nabla\Phi\|^2 = max\left\{-2\int_{\partial S} \theta g - \int_S \|\nabla\theta\|^2\right\} = max\ F(\theta) \quad \theta \in H_1(S) \quad (4.4)$$

onde $H_1(S)$ é o domínio do funcional $F(\theta)$.

O próximo passo agora é identificar, dentre as funções $\theta \in H_1(S)$, aquela que satisfaz as condições de contorno 4.1 com um erro da ordem δ, de modo que, ao ser substituída na integral 4.1, acarrete em um erro da ordem de δ^2.

Os corpos estando suficientemente afastados, uma possível *"função-tentativa"* para o problema multi-corpos é a expansão de Φ dada por 3.1 extendida para N corpos, ou seja:

$$\theta = \sum_\alpha \sum_i \phi_{\alpha i} c_{\alpha i} \quad (4.5)$$

onde cada função $\phi_{\alpha i}$ admite, por sua vez, a seguinte expansão (Lamb [5]):

$$\phi_{\alpha i}(x) \sim -\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{x_k A^\alpha_{ik}}{|\vec{x}|^3} + \frac{x_i|\eta|}{|\vec{x}|^3}\right\} + o\left(\frac{1}{|x|^3}\right) \quad (4.6)$$

para $i = 1, 2, 3$, e

$$\phi_{\alpha i}(x) \sim -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{x}|^3}\left\{A^\alpha_{ki} x_k + \vec{e}_{i-3}\cdot(\vec{\xi}\times\vec{x})\right\} + o\left(\frac{1}{|x|^3}\right) \quad (4.7)$$

para $i = 4, 5, 6$.

Nas expansões acima, η é o volume do corpo, os coeficientes A^α_{ik} e A^α_{ki} são os coeficientes de massa adicional, $\vec{\xi}$ é o centro de volume do corpo e $\vec{x}$ o vetor posição.

Em outras palavras, a hipótese que está sendo feita para a *"função-tentativa"* θ é a de que, estando os corpos suficientemente afastados, cada $\phi_{\alpha i}$ se comporta

[1] *Esta desigualdade independe se $\vec{n}$ é tomado em sentido ao fluido ou fora dele.*

como um dipolo, de modo que no corpo α ela é a solução do problema potencial, e no corpo $\beta \neq \alpha$ seu efeito é muito pequeno, devido ao seu comportamento assintótico.

Como será mostrado neste capítulo, o comportamento de $\phi_{\alpha i}$ em cada um dos corpos citado no parágrafo anterior acarretará em uma Energia Cinética do fluido composta de dois termos: o primeiro, representando a Energia Cinética do fluido para cada corpo como se este estivesse isolado, chamado $\mathbb{W}_{\alpha}$; e o segundo, chamado $\mathbb{W}_{\alpha\beta}$, representando o efeito de interação potencial inercial entre os corpos, dados respectivamente por

$$\begin{aligned} \mathbb{W}_{\alpha} &= \sum_{\alpha=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6} A_{ij}^{\alpha} c_{\alpha i} c_{\alpha j}\right) \\ \mathbb{W}_{\alpha\beta} &= \frac{\rho}{2}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\substack{\beta\neq\alpha \\ \beta=1}}^{N}(\lambda_{\alpha} c_{\alpha}\cdot F^{\alpha\beta}\lambda_{\beta} c_{\beta}), \end{aligned} \tag{4.8}$$

A hipótese feita anteriormente de que 4.1 seria uma função dependente dos coeficientes geométricos dos corpos isolados (massas adicionais) e da posição relativa entre eles é confirmada por 4.8, pois em $\mathbb{W}_{\alpha\beta}$ os primeiros estão contidos em λ_{α} e λ_{β}, e a posição relativa entre os corpos na matriz $F^{\alpha\beta}$, restando para c_{α} e c_{β} representar as velocidades lineares e angulares de cada corpo. Nota-se ainda que $\mathbb{W}_{\alpha\beta}$ é o produto escalar de dois vetores de dimensão 3×1: $(\lambda_{\alpha} c_{\alpha})$ e $(F^{\alpha\beta}\lambda_{\beta} c_{\beta})$.

Assim exposto o resultado principal deste texto, na próxima seção será mostrado como o $\mathbb{W}_{\alpha}$ e $\mathbb{W}_{\alpha\beta}$ foram obtidos a partir da caracterização variacional de 4.1 feita no início deste capítulo.

4.2 Dedução dos termos de $\mathbb{W}_{\alpha}$ e $\mathbb{W}_{\alpha\beta}$

As expressões 4.6 e 4.7 podem ser combinadas na seguinte

Proposição 2. *Seja $\phi_{\alpha i}$ presente em 4.5 a solução do problema 3.2 para $i = 1, 2, 3$ e do problema 3.3 para i=4,5,6. Então:*

$$\phi_{\alpha i}(\vec{x}_\alpha) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\|\vec{x}_\alpha\|}\left\{\frac{\vec{\lambda}_{\alpha i}\cdot\vec{x}_\alpha}{\|\vec{x}_\alpha\|^2} + \mathrm{R}(\vec{x}_\alpha)\right\} \tag{4.9}$$

onde

$$\begin{cases} \vec{\lambda}_{\alpha i} \stackrel{def}{=} \left\{\eta_\alpha \vec{e}_{\alpha i} + \frac{1}{\rho}\sum_{j=1}^{3} A_{ij}^{\alpha}\vec{e}_{\alpha j}\right\} \in K_\alpha, & para \quad i = 1, 2, 3 \\ \vec{\lambda}_{\alpha i} \stackrel{def}{=} \left\{\vec{e}_{\alpha(i-3)} \times \vec{\xi}_\alpha + \frac{1}{\rho}\sum_{j=1}^{3} A_{ij}^{\alpha}\vec{e}_{\alpha j}\right\} \in K_\alpha, & para \quad i = 4, 5, 6 \\ \vec{x}_\alpha = T_\alpha^{-1}(\vec{x} - \vec{R}_\alpha) & \end{cases}$$

A vantagem da notação acima - uma expressão só para $\phi_{\alpha i}$ ao invés de duas (Eq. 4.13 e 4.14) - é que não haverá a necessidade de separar os movimentos lineares dos angulares na dedução dos termos de $\mathbb{W}_\alpha$ e $\mathbb{W}_{\alpha\beta}$.

Nota-se que o parâmetro geométrico $\vec{\lambda}_\alpha$ que aparece na Proposição acima é o coeficiente de dipolo da expansão multipolo de $\phi_{\alpha i}$.

Antes de verificar se θ satisfaz as condições de contorno 4.1, convém escrever 4.9 de uma outra maneira.

Definindo-se

$$\vec{R}_{\alpha\beta} = \vec{R}_\beta - \vec{R}_\alpha \tag{4.10}$$

e

$$R \stackrel{def.}{=} \min\{\|\vec{R}_\beta - \vec{R}_\alpha\| : \text{para} \quad \alpha \neq \beta, \quad \alpha = 1, \ldots, N; \quad \beta = 1, \ldots, N\}$$

vem que $\vec{x}_\alpha = T_\alpha^{-1}(\vec{x} - \vec{R}_\alpha)$.

Substituindo na **Proposição 2** vem:

$$\begin{aligned} \phi_{\alpha i}(\vec{x}_\alpha) &= -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\|T_\alpha^{-1}(\vec{x} - \vec{R}_\alpha)\|}\left\{\frac{\vec{\lambda}_{\alpha i}\cdot(T_\alpha^{-1}(\vec{x} - \vec{R}_\alpha))}{\|T_\alpha^{-1}(\vec{x} - \vec{R}_\alpha)\|^2} + o\left(\frac{1}{\|\vec{R}_\alpha\|^2}\right)\right\} \\ &= -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\|(\vec{x} - \vec{R}_\alpha)\|^3}\left\{\left[T_\alpha\vec{\lambda}_{\alpha i}\cdot(\vec{x} - R_\alpha)\right]\right\} \end{aligned}$$

Note que $\|T_\alpha^{-1}(\vec{x} - R_\alpha)\|^2 = \|\vec{x} - \vec{R}_\alpha\|^2$. De 4.10 vem que

$$\vec{x} - \vec{R}_\alpha = \vec{x} - \vec{R}_\alpha + \vec{R}_\beta - \vec{R}_\beta$$

$$\vec{x} - \vec{R}_\alpha = \vec{x} - \vec{R}_\beta + \vec{R}_{\alpha\beta} \tag{4.11}$$

e portanto

1.

$$\begin{aligned}
\|\vec{x} - \vec{R}_\alpha\|^2 &= \|\vec{x} - \vec{R}_\beta + \vec{R}_{\alpha\beta}\|^2 \\
&= \left((\vec{x} - \vec{R}_\beta) + \vec{R}_{\alpha\beta}\right) \cdot \left((\vec{x} - \vec{R}_\beta) + \vec{R}_{\alpha\beta}\right) \\
&= \|\vec{x} - \vec{R}_\beta\|^2 + 2(\vec{x} - \vec{R}_\beta) \cdot \vec{R}_{\alpha\beta} + \|\vec{R}_{\alpha\beta}\|^2 \\
&= \|\vec{R}_{\alpha\beta}\|^2 \left\{ 1 + \underbrace{\frac{2(\vec{x} - \vec{R}_\beta)}{\|\vec{R}_{\alpha\beta}\|}}_{\varepsilon} + \underbrace{\frac{\|\vec{x} - \vec{R}_\beta\|^2}{\|\vec{R}_{\alpha\beta}\|^2}}_{o(\frac{1}{R^2})} \right\}
\end{aligned}$$

2.

$$\phi_{\alpha i}(\vec{x}_\alpha) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|(\vec{x} - \vec{R}_\beta) + \vec{R}_{\alpha\beta}\|^3} \left\{ \left(T_\alpha \vec{\lambda}_{\alpha i} \cdot (\vec{x} - \vec{R}_\beta) + \vec{R}_{\alpha\beta} \right) \right\} \tag{4.12}$$

Assim:

$$\|(\vec{x} - \vec{R}_\beta) + \vec{R}_{\alpha\beta}\|^3 = \|\vec{R}_{\alpha\beta}\|^3 \left\{ 1 + \varepsilon + o\left(\frac{1}{R^2}\right) \right\}^{\frac{3}{2}}$$

Lembrando que

$$\begin{cases} (1 + \varepsilon + \ldots)^{\frac{3}{2}} \simeq 1 + \frac{3}{2}\varepsilon + \ldots \\ \frac{1}{1+\delta} \simeq 1 - \delta + \delta^2 - \ldots \end{cases}$$

vem que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|(\vec{x} - \vec{R}_\beta) + \vec{R}_{\alpha\beta}\|^3} &= \frac{1}{\|\vec{R}_{\alpha\beta}\|^3 (1 + \varepsilon + \ldots)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\|\vec{R}_{\alpha\beta}\|^3 \left(1 + \frac{3}{2}\varepsilon + \ldots\right)} \\
&= \frac{1}{\|\vec{R}_{\alpha\beta}\|^3} \left(1 - \frac{3}{2}\varepsilon + \ldots\right)
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
\left(T_\alpha \vec{\lambda}_{\alpha i} \cdot (\vec{x} - \vec{R}_\alpha)\right) &= \left(T_\alpha \vec{\lambda}_{\alpha i} \cdot (\vec{x} - \vec{R}_\beta)\right) + \left(T_\alpha \vec{\lambda}_{\alpha i} \cdot \vec{R}_{\alpha\beta}\right) \\
&= \|\vec{R}_{\alpha\beta}\| \left\{ \left(T_\alpha \vec{\lambda}_{\alpha i} \cdot \frac{\vec{x} - \vec{R}_\beta}{\|\vec{R}_{\alpha\beta}\|} \right) \right. \\
&\quad + \left. \left(T_\alpha \vec{\lambda}_{\alpha i} \cdot \frac{\vec{R}_{\alpha\beta}}{\|\vec{R}_{\alpha\beta}\|} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Substituindo 4.13 e 4.14 em 4.12 e desprezando os termos de ordem superior vem

$$\begin{aligned}
\phi_{\alpha i}(\vec{x}_\alpha) &= -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\|\vec{R}_{\alpha\beta}\|^2}\left(1-3\frac{(\vec{x}-\vec{R}_\beta)}{\|\vec{R}_{\alpha\beta}\|}\cdot\frac{\vec{R}_{\alpha\beta}}{\|\vec{R}_{\alpha\beta}\|}\right) * \\
&* \left[\left(T_\alpha\vec{\lambda}_{\alpha i}\cdot\frac{(\vec{x}-\vec{R}_\beta)}{\|\vec{R}_{\alpha\beta}\|}\right)+\left(T_\alpha\vec{\lambda}_{\alpha i}\cdot\frac{\vec{R}_{\alpha\beta}}{\|\vec{R}_{\alpha\beta}\|}\right)+\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{\alpha i}(\vec{x}_\alpha) &= -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\|\vec{R}_{\alpha\beta}\|^2}\left\{\frac{T_\alpha\vec{\lambda}_{\alpha i}\cdot\vec{R}_{\alpha\beta}}{\|\vec{R}_{\alpha\beta}\|}+\underbrace{\left(T_\alpha\vec{\lambda}_{\alpha i}\cdot\frac{(\vec{x}-\vec{R}_\beta)}{\|\vec{R}_{\alpha\beta}\|}\right)}_{a}\right. \\
&- \left. 3\left(T_\alpha\vec{\lambda}_{\alpha i}\cdot\frac{\vec{R}_{\alpha\beta}}{\|\vec{R}_{\alpha\beta}\|}\right)\underbrace{\left(\frac{(\vec{x}-\vec{R}_\beta)}{\|\vec{R}_{\alpha\beta}\|}\cdot\frac{\vec{R}_{\alpha\beta}}{\|\vec{R}_{\alpha\beta}\|}\right)}_{b}\right\} \qquad (4.15)
\end{aligned}$$

Multiplicando-se a e b de 4.15 por T_β^{-1} vem, finalmente [2]:

$$\begin{aligned}
\phi_{\alpha i}(\vec{x}_\alpha) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\|\vec{R}_{\alpha\beta}\|^3}(T_\alpha\vec{\lambda}_{\alpha i}\cdot\vec{R}_{\alpha\beta}) - \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\|\vec{R}_{\alpha\beta}\|^5}\Big\{(T_\beta^{-1}T_\alpha\vec{\lambda}_{\alpha i}\cdot\vec{x}_\beta)\|\vec{R}_{\alpha\beta}\|^2- \\
- 3(T_\alpha\vec{\lambda}_{\alpha i}\cdot\vec{R}_{\alpha\beta})(T_\beta^{-1}\vec{R}_{\alpha\beta}\cdot\vec{R}_\beta)\Big\}
\end{aligned}$$

Ou seja

$$\begin{aligned}
\phi_{\alpha i}(\vec{x}_\alpha) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\|\vec{R}_{\alpha\beta}\|^3}(T_\alpha\vec{\lambda}_{\alpha i}\cdot\vec{R}_{\alpha\beta}) - \left\{\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\|\vec{R}_{\alpha\beta}\|^5}\Big[T_\beta^{-1}T_\alpha\vec{\lambda}_{\alpha i}\|\vec{R}_{\alpha\beta}\|^2-\right. \\
\left. - 3(T_\alpha\vec{\lambda}_{\alpha i}\cdot\vec{R}_{\alpha\beta})T_\beta^{-1}\vec{R}_{\alpha\beta}\Big]\right\}\cdot\vec{x}_\beta \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

Note que a expressão acima pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
\phi_{\alpha i}(\vec{x}_\alpha) &= \Psi(\vec{R}_{\alpha\beta}) - \vec{f}^{\alpha\beta}\cdot\vec{x}_\beta \\
&= \Psi(\vec{R}_{\alpha\beta}) - (T_\beta\vec{f}^{\alpha\beta}\cdot T_\beta\vec{x}_\beta)
\end{aligned}$$

onde Ψ é uma função qualquer que depende apenas de $\vec{R}_{\alpha\beta}$.

Mas $T_\beta\vec{x}_\beta = \vec{x}-\vec{R}_\beta = (\vec{x}-\vec{R}_\alpha)-\vec{R}_{\alpha\beta}$ (usando 4.10). Então:

$$\begin{aligned}
\phi_{\alpha i}(\vec{x}_\alpha) &= \Psi(\vec{R}_{\alpha\beta}) - [T_\alpha^{-1}T_\beta\vec{f}^{\alpha\beta}\cdot(\underbrace{T_\alpha^{-1}(\vec{x}-\vec{R}_\alpha)}_{\vec{x}_\alpha}-T_\alpha^{-1}\vec{R}_{\alpha\beta})] \\
&= \Psi(\vec{R}_{\alpha\beta}) + [T_\alpha^{-1}T_\beta\vec{f}^{\alpha\beta}\cdot T_\alpha^{-1}\vec{R}_{\alpha\beta}] - (T_\alpha^{-1}T_\beta\vec{f}^{\alpha\beta}\cdot\vec{x}_\beta)
\end{aligned}$$

[2] Lembrando que $T_\beta^{-1}(\vec{x}-\vec{R}_\beta) = \vec{x}_\beta$

Finalmente, tomando o gradiente:

$$\nabla\phi_{\alpha i}(\vec{x}_\alpha) = T_\alpha^{-1} T_\beta \vec{f}^{\alpha\beta}$$

Os argumentos e idéias expostas acima podem ser estendidos para mais de dois corpos através da seguinte

Proposição 3. *Para cada par α, β, $\alpha = 1, \ldots, N$, $\beta = 1, \ldots, N$, com $\alpha \neq \beta$, define-se uma transformação $F^{\alpha\beta} : K_\beta \longrightarrow K_\alpha$ que depende de T_α, T_β e $\vec{R}_{\alpha\beta}$, cuja matrix 3×3 tem os seguintes elementos:*

$$\begin{aligned}
F_{lk}^{\alpha\beta} &= (F^{\alpha\beta}\vec{e}_{\beta k} \cdot \vec{e}_{\alpha l}) \\
&= \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\|\vec{R}_{\alpha\beta}\|^3}\left\{(T_\beta\vec{e}_{\beta k} \cdot T_\alpha\vec{e}_{\alpha l}) - 3\frac{(\vec{e}_{\beta k} \cdot T_\beta^{-1}\vec{R}_{\alpha\beta})(T_\alpha^{-1}\vec{R}_{\alpha\beta} \cdot \vec{e}_{\alpha l})}{\|\vec{R}_{\alpha\beta}\|^2}\right\} \\
&= F_{kl}^{\beta\alpha} = o\left(\frac{1}{R^3}\right)
\end{aligned}$$

Além disso, seja $\phi_{\alpha i}$ a solução do problema 3.2 para $i = 1, 2, 3$ e do problema 3.3 para $i = 4, 5, 6$. Supondo $\vec{x}_\alpha \in \partial\eta_\beta, \beta \neq \alpha$, então vale a seguinte expansão:

$$T_{-1}^{\beta} T_\alpha \nabla\phi_{\alpha i}(\vec{x}_\alpha) = -\vec{f}_i^{\alpha\beta} + o\left(\frac{1}{R^4}\right)$$

e

$$\phi_{\alpha i}(\vec{x}_\alpha) = \phi_{\alpha i}\left(T_\alpha^{-1}\vec{R}_{\alpha\beta}\right) - \vec{f}_i^{\alpha\beta} \cdot \vec{x}_\beta + o\left(\frac{1}{R^4}\right)$$

onde

$$\vec{f}_i^{\alpha\beta} = F^{\alpha\beta}\vec{\lambda}_{\alpha i} = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\|\vec{R}_{\alpha\beta}\|^5}\left\{\|\vec{R}_{\alpha\beta}\|^2 T_\beta^{-1} T_\alpha\vec{\lambda}_{\alpha i} - 3(T_\alpha\vec{\lambda}_{\alpha i} \cdot \vec{R}_{\alpha\beta}) T_\beta^{-1}\vec{R}_{\alpha\beta}\right\} \tag{4.17}$$

e

$$\vec{x}_\beta = T_\beta^{-1}(\vec{x} - \vec{R}_\beta) \quad \Rightarrow \quad \vec{x}_\alpha = T_\alpha^{-1}(\vec{R}_{\alpha\beta} + T_\beta\vec{x}_\beta)$$

Fisicamente, $\vec{f}_i^{\alpha\beta} \in K_\beta$ representa a velocidade do fluido no referencial do corpo β devido a um movimento de velocidade unitária do corpo α na direção "i", como se este estivesse se movendo na ausência de outros corpos.

Assim, conforme dito anteriormente, aproximando Φ da equação 4.1 por

$$\begin{aligned}
\theta(\vec{x}) &= \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{i=1}^{6} c_{\alpha i}\phi_{\alpha i}(\vec{x}_\alpha) \\
&= \sum_{i=1}^{6} c_{\alpha i}\phi_{\alpha i}(\vec{x}_\alpha) + \sum_{\substack{\beta\neq\alpha \\ \beta=1}}^{N}\sum_{i=1}^{6} c_{\beta i}\phi_{\beta i}(\vec{x}_\beta)
\end{aligned} \tag{4.18}$$

tem-se, para $\vec{x} \in \partial\eta_\alpha$:

$$\begin{aligned}
\nabla\theta(\vec{x}) &= \sum_{i=1}^{6} c_{\alpha i} T_\alpha \nabla\phi_{\alpha i}(\vec{x}_\alpha) + \sum_{\substack{\beta\neq\alpha \\ \beta=1}}^{N} \sum_{i=1}^{6} c_{\beta i} T_\beta \nabla\phi_{\beta i}(\vec{x}_\beta) \\
\nabla\theta(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) &= \sum_{i=1}^{6} c_{\alpha i} \left[T_\alpha \nabla\phi_{\alpha i}(\vec{x}_\alpha) \cdot \vec{n}(\vec{x})\right] + \sum_{\substack{\beta\neq\alpha \\ \beta=1}}^{N} \sum_{i=1}^{6} c_{\beta i} T_\beta \nabla\phi_{\beta i}(\vec{x}_\beta) \cdot \underbrace{\vec{n}(\vec{x})}_{T_\alpha \vec{n}_\alpha(\vec{x}_\alpha)} \\
&= \nabla\Phi(\vec{x}) \cdot \vec{n} - \sum_{\substack{\beta\neq\alpha \\ \beta=1}}^{N} \sum_{i=1}^{6} c_{\beta i} \vec{f}_i^{\beta\alpha} \cdot \vec{n}_\alpha(\vec{x}_\alpha)
\end{aligned}$$

Ou seja, de fato θ dada por 4.18 satisfaz as condições de contorno 4.1 com um erro de ordem δ de modo que, quando substítuída na integral da Energia Cinética do Fluido, acarreta em um erro da ordem de δ^2 para esta Energia Cinética. Isso faz de 4.18 uma *"função-tentativa"* para o problema de multi-corpos e será usada como aproximação de Φ.

De 4.4, usando a identidade de Green, vem:

$$F(\theta) = \sum_{\alpha=1}^{N} \int_{\partial\eta_\alpha} \theta\left[-2\nabla\Phi \cdot \vec{n} + \nabla\theta \cdot \vec{n}\right] \qquad (4.19)$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
F(\theta) &= -\sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{6} c_{\alpha i} c_{\alpha j} \int_{\partial\eta_\alpha} \phi_{\alpha j}(\vec{x}_\alpha) \nabla\phi_{\alpha i}(\vec{x}_\alpha) \cdot \vec{n}_\alpha(\vec{x}_\alpha) \\
&+ \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{\substack{\beta\neq\alpha \\ \beta=1}}^{N} \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{6} \left\{ -\int_{\partial\eta_\alpha} \phi_{\alpha j}(\vec{x}_\alpha) \vec{f}_i^{\beta\alpha} \cdot \vec{n}_\alpha(\vec{x}_\alpha) \right. \\
&+ \left. \int_{\partial\eta_\alpha} (\vec{f}_i^{\beta\alpha} \cdot \vec{x}_\alpha)(\nabla\phi_{\alpha j}(\vec{x}_\alpha) \cdot \vec{n}_\alpha(\vec{x}_\alpha)) \right\} + o\left(\frac{1}{R^4}\right)
\end{aligned}$$

Da definição de massa adicional segue

$$-\int_{\partial\eta_\alpha} \phi_{\alpha j}(\vec{x}_\alpha) \nabla\phi_{\alpha i}(\vec{x}_\alpha) \cdot \vec{n}_\alpha(\vec{x}_\alpha) = \int_{\mathbb{R}^3 - \eta_\alpha} \nabla\phi_{\alpha i} \nabla\phi_{\alpha j} = \frac{1}{\rho} A_{ij}^\alpha \qquad (4.20)$$

Agora suponha uma grande esfera Γ de raio R_Γ centrada em η_α. Então, considerando $\phi_{\alpha j}$ e $\vec{f}_i^{\beta\alpha} \cdot \vec{x}_\alpha$ harmônicos fora de η_α, a partir da identidade de Green obtém-se:

$$\int_{\partial\eta_\alpha} \phi_{\alpha j}(\vec{x}_\alpha)\vec{f}_i^{\beta\alpha} \cdot \vec{n}_\alpha(\vec{x}_\alpha) + \int_\Gamma \phi_{\alpha j}(\vec{x}_\alpha)\vec{f}_i^{\beta\alpha} \cdot \vec{n}_\alpha(\vec{x}_\alpha) =$$

$$= \int_{\partial\eta_\alpha} (\vec{f}_i^{\beta\alpha} \cdot \vec{x}_\alpha)(\nabla\phi_{\alpha j}(\vec{x}_\alpha) \cdot \vec{n}_\alpha(\vec{x}_\alpha)) + \int_\Gamma (\vec{f}_i^{\beta\alpha} \cdot \vec{x}_\alpha)(\nabla\phi_{\alpha j}(\vec{x}_\alpha) \cdot \vec{n}_\alpha(\vec{x}_\alpha))$$

o que implica em

$$-\int_{\partial\eta_\alpha} \phi_{\alpha j}(\vec{x}_\alpha)\vec{f}_i^{\beta\alpha} \cdot \vec{n}_\alpha + \int_{\partial\eta_\alpha} (\vec{f}_i^{\beta\alpha} \cdot \vec{x}_\alpha)(\nabla\phi_{\alpha j}(\vec{x}_\alpha) \cdot \vec{n}_\alpha(\vec{x}_\alpha)) =$$

$$= \int_\Gamma \phi_{\alpha j}(\vec{x}_\alpha)\vec{f}_i^{\beta\alpha} \cdot \vec{n}_\alpha(\vec{x}_\alpha) - \int_\Gamma (\vec{f}_i^{\beta\alpha} \cdot \vec{x}_\alpha)(\nabla\phi_{\alpha j}(\vec{x}_\alpha) \cdot \vec{n}_\alpha(\vec{x}_\alpha))$$

Usando a **Proposição 2** vem

$$\int_\Gamma \phi_{\alpha j}(\vec{x}_\alpha)\vec{f}_i^{\beta\alpha} \cdot \vec{n}_\alpha(\vec{x}_\alpha) = -\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \frac{\vec{\lambda}_{\alpha j} \cdot \vec{x}_\alpha}{\|\vec{x}_\alpha\|^3}\vec{f}_i^{\beta\alpha} \cdot \vec{n}_\alpha(\vec{x}_\alpha) + o\left(\frac{1}{R_\Gamma}\right) \tag{4.21}$$

Diferenciando a aproximação para $\phi_{\alpha j}$ da **Proposição 2** obtém-se:

$$\nabla\phi_{\alpha j}(\vec{x}_\alpha) = -\frac{1}{4\pi\|\vec{x}_\alpha\|^5}\left\{\|\vec{x}_\alpha\|^2\vec{\lambda}_{\alpha j} - 3(\vec{\lambda}_{\alpha j} \cdot \vec{x}_\alpha)\vec{x}_\alpha\right\} + o\left(\frac{1}{\|\vec{x}_\alpha\|^4}\right)$$

Usando essa aproximação vem

$$\int_\Gamma (\vec{f}_i^{\beta\alpha} \cdot \vec{x}_\alpha)(\nabla\phi_{\alpha j}(\vec{x}_\alpha) \cdot \vec{n}_\alpha(\vec{x}_\alpha)) = -\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \frac{\vec{\lambda}_{\alpha j} \cdot \vec{n}_\alpha(\vec{x}_\alpha)}{\|\vec{x}_\alpha\|^3}\vec{f}_i^{\beta\alpha} \cdot \vec{x}_\alpha +$$

$$+\frac{3}{4\pi}\int_\Gamma \frac{(\vec{f}_i^{\beta\alpha} \cdot \vec{x}_\alpha)(\lambda_{\alpha j} \cdot \vec{x}_\alpha)(\vec{x}_\alpha \cdot \vec{n}_\alpha(\vec{x}_\alpha))}{\|\vec{x}_\alpha\|^5} + o\left(\frac{1}{R_\Gamma}\right)$$

A equação acima, junto com 4.21 e o fato de que para $\vec{x}_\alpha \in \Gamma, \vec{n}_\alpha(\vec{x}_\alpha) = -\frac{\vec{x}_\alpha}{\|\vec{x}_\alpha\|}$ implica em:

$$\int_\Gamma \phi_{\alpha j}(\vec{x}_\alpha)\vec{f}_i^{\beta\alpha} \cdot \vec{n}_\alpha(\vec{x}_\alpha) - \int_\Gamma (\vec{f}_i^{\beta\alpha} \cdot \vec{x}_\alpha)(\nabla\phi_{\alpha j}(\vec{x}_\alpha) \cdot \vec{n}_\alpha(\vec{x}_\alpha)) =$$

$$= -\frac{3}{4\pi}\int_\Gamma \frac{(\vec{f}_i^{\beta\alpha} \cdot \vec{x}_\alpha)(\vec{\lambda}_{\alpha j} \cdot \vec{x}_\alpha)(\vec{x}_\alpha \cdot \vec{n}_\alpha(\vec{x}_\alpha))}{\|\vec{x}_\alpha\|^5} = \frac{3}{4\pi R_\Gamma^3}\int_\Gamma (\vec{f}_i^{\beta\alpha} \cdot \vec{x}_\alpha)(\lambda_{\alpha j} \cdot \vec{n}_\alpha(\vec{x}_\alpha)) \tag{4.22}$$

Considerando que $(\vec{f}_i^{\beta\alpha} \cdot \vec{x}_\alpha)$ e $(\lambda_{\alpha j} \cdot \vec{x}_\alpha)$ são harmônicos em $\mathbb{R}^3$, pela identidade de Green vem

$$\frac{3}{4\pi R_\Gamma^3} \int_\Gamma (\vec{f}_i^{\beta\alpha} \cdot \vec{x}_\alpha)(\lambda_{\alpha j} \cdot \vec{n}_\alpha(\vec{x}_\alpha)) = -\frac{3}{4\pi R_\Gamma^3} \int_{\partial R_\Gamma} (\vec{f}_i^{\beta\alpha} \cdot \lambda_{\alpha j}) = -\vec{f}_i^{\beta\alpha} \cdot \lambda_{\alpha j} =$$

$$\overset{Prop.3}{=} \vec{\lambda}_{\alpha j} \cdot F^{\alpha\beta} \vec{\lambda}_{\beta i}$$

Portanto:

$$\frac{\rho}{2} \int_S \|\nabla\Phi\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{6} A_{ij}^{\alpha} c_{\alpha i} c_{\alpha j} + \frac{\rho}{2} \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{\substack{\beta \neq \alpha \\ \beta=1}}^{N} \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{6} (\vec{\lambda}_{\alpha i} \cdot F^{\alpha\beta} \vec{\lambda}_{\beta j}) c_{\alpha i} c_{\beta j}$$

lembrando que

$$c_{\alpha i} = v_{\alpha i}, \quad c_{\alpha(i+3)} = \omega_{\alpha i} \quad i = 1, 2, 3$$

A expressão acima pode ser escrita de outra maneira, mais conveniente.

Definindo a matriz λ_α de dimensão 3×6 cuja *i-ésima* coluna é formada pelo vetor $\vec{\lambda}_{\alpha i}$ e representando $c_{\alpha 1}, \ldots, c_{\alpha 6}$ como um vetor-coluna c_α, conclui-se que $\lambda_\alpha c_\alpha$ é um vetor coluna de 3 elementos. Assim elimina-se as somatórias em i e j de modo que a energia cinética devida à interação dos corpos α e β é dada pela função quadrática $(\lambda_\alpha c_\alpha \cdot F^{\alpha\beta} \lambda_\beta c_\beta)$. Nota-se que a matriz $F^{\alpha\beta}$ depende apenas da orientação e da posição relativa entre os corpos α e β, e se $R_{\alpha\beta 1}, R_{\alpha\beta 2}, R_{\alpha\beta 3}$ forem as três componentes de $\vec{R}_{\alpha\beta}$, definindo a matriz $P^{\alpha\beta}$ como sendo [3]

$$P^{\alpha\beta} \overset{def.}{=} \frac{1}{\|\vec{R}_{\alpha\beta}\|^2} \begin{pmatrix} R_{\alpha\beta 1} R_{\alpha\beta 1} & R_{\alpha\beta 1} R_{\alpha\beta 2} & R_{\alpha\beta 1} R_{\alpha\beta 3} \\ R_{\alpha\beta 2} R_{\alpha\beta 1} & R_{\alpha\beta 2} R_{\alpha\beta 2} & R_{\alpha\beta 2} R_{\alpha\beta 3} \\ R_{\alpha\beta 3} R_{\alpha\beta 1} & R_{\alpha\beta 3} R_{\alpha\beta 2} & R_{\alpha\beta 3} R_{\alpha\beta 3} \end{pmatrix} \tag{4.23}$$

pode-se definir a transformação $G^{\alpha\beta} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ como sendo

$$G^{\alpha\beta} \overset{def.}{=} \frac{1}{4\pi \|\vec{R}_{\alpha\beta}\|^3} [\mathbb{I} - 3P^{\alpha\beta}] \tag{4.24}$$

onde $\mathbb{I}$ é a matriz identidade.

Dessa forma a matriz $F^{\alpha\beta}$ pode ser fatorada como

$$F^{\alpha\beta} = T_\alpha^{-1} G^{\alpha\beta} T_\beta \tag{4.25}$$

[3]Esta matriz define uma transformação $P^{\alpha\beta} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ que projeta qualquer vetor de $\mathbb{K}$ em um versor com a mesma direção de $\vec{R}_{\alpha\beta}$ ($P^{\alpha\beta} P^{\alpha\beta} = P^{\alpha\beta}$ e $P^{\alpha\beta} \vec{R}_{\alpha\beta} = \vec{R}_{\alpha\beta}$).

onde $G^{\alpha\beta}$ depende apenas de $\vec{R}_{\alpha\beta}$ (note que $F^{\alpha\beta} = (F^{\beta\alpha})^t$).

Finalmente, o resultado principal deste trabalho pode ser expresso na forma do seguinte

Teorema 1.

$$\frac{\rho}{2}\int_S \|\nabla\Phi\|^2 = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6} A_{ij}^{\alpha} c_{\alpha i} c_{\alpha j} + \frac{\rho}{2}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\substack{\beta\neq\alpha \\ \beta=1}}^{N} (\lambda_\alpha c_\alpha \cdot F^{\alpha\beta}\lambda_\beta c_\beta) \qquad (4.26)$$

Claramente percebe-se os dois termos citados anteriormente em 4.26:

$$\begin{aligned} \mathbb{W}_\alpha &= \sum_{\alpha=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6} A_{ij}^{\alpha} c_{\alpha i} c_{\alpha j}\right) \\ \mathbb{W}_{\alpha\beta} &= \frac{\rho}{2}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\substack{\beta\neq\alpha \\ \beta=1}}^{N} (\lambda_\alpha c_\alpha \cdot F^{\alpha\beta}\lambda_\beta c_\beta), \end{aligned}$$

onde o primeiro deles, $\mathbb{W}_\alpha$, é a Energia Cinética dos corpos isolados, o que faz de $\mathbb{W}_{\alpha\beta}$ o termo de interação inercial, merecidamente chamado neste texto de **Energia Cinética de Interação** do sistema. Novamente lembrando, $\mathbb{W}_{\alpha\beta}$ é função dos coeficientes hidrodinâmicos dos corpos isolados (massas adicionais nas matrizes λ_α e λ_β), suas velocidades lineares e angulares (vetores c_α e c_β) e a posição relativa entre os corpos (matriz $F^{\alpha\beta}$).

No próximo capítulo, será feita uma validação numérica de 4.26, para o caso de duas esferas rigidamente ligadas, com o auxílio do *software* WAMIT®.

Capítulo 5

Validação Numérica

Considere duas esferas rigidamente ligadas, de raios a_α e a_β, com seus centros separados por uma distância $l = d + a_\alpha + a_\beta$, onde d é o "vão livre"entre elas, imersas em um domínio infinito de fluido, como na figura abaixo

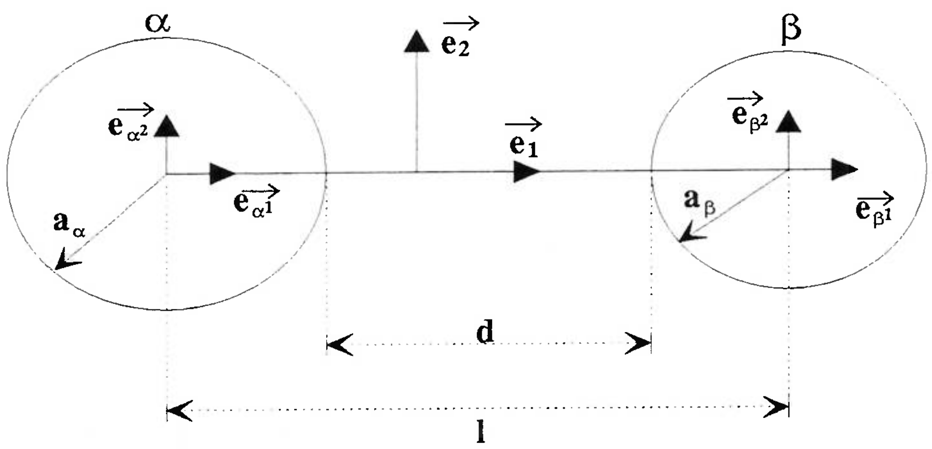

Figura 5.1: Duas esferas rigidamente ligadas

A massa adicional para a esfera isolada de raio a, com relação ao seu centro é $A_{ij} = \frac{2}{3}\pi\rho a^3$ para $i = 1, 2, 3$ e seu volume dado por $\eta = \frac{4}{3}\pi a^3$.

Aplicando o **Teorema 1** para este caso, tem-se as expressões para as massas adicionais do conjunto [1]:

$$M_{11} = \frac{2}{3}\rho\pi\left[a_\alpha^3 + a_\beta^3 - 6\frac{a_\alpha^3 a_\beta^3}{l^3}\right] = \frac{2}{3}\rho\pi a_\alpha^3 + \frac{2}{3}\rho\pi a_\beta^3 - 4\rho\pi\frac{a_\alpha^3 a_\beta^3}{l^3} \qquad (5.1)$$

$$M_{22} = M_{33} = \frac{2}{3}\rho\pi.\left[a_\alpha^3 + a_\beta^3 + 3\frac{a_\alpha^3 a_\beta^3}{l^3}\right] = \frac{2}{3}\rho\pi a_\alpha^3 + \frac{2}{3}\rho\pi a_\beta^3 + 2\rho\pi\frac{a_\alpha^3 a_\beta^3}{l^3} \qquad (5.2)$$

$$M_{55} = M_{66} = \frac{2}{3}\rho\pi\frac{a_\alpha^3 a_\beta^3}{(a_\alpha^3 + a_\beta^3)^2}l^2\left[a_\alpha^3 + a_\beta^3 - 3\frac{a_\alpha^2 a_\beta^2}{l^3}\right] \qquad (5.3)$$

$$M_{26} = -M_{35} = \rho\pi\frac{a_\alpha^3 a_\beta^3}{l^2}\left[\frac{a_\alpha^3 - a_\beta^3}{a_\alpha^3 + a_\beta^3}\right] \qquad (5.4)$$

Olhando mais atentamente às expressões acima, nota-se o efeito da interação hidrodinâmica, pois sendo $M_{11}^i = \frac{2}{3}\rho\pi a_i^3$; $i = \alpha,\ \beta$:

$$M_{11} = M_{11}^\alpha + M_{11}^\beta + M_{11}^{\alpha\beta}$$

$$M_{22} = M_{22}^\alpha + M_{22}^\beta + M_{22}^{\alpha\beta}$$

efeito este representado portanto por $M^{\alpha\beta}$, que para os movimentos de *surge* e *sway* caem com a distância ao cubo. Note ainda que $M_{22}^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}M_{11}^{\alpha\beta}$.

Já as equações 5.3 e 5.4 contém apenas termos de interação, já que para esferas isoladas esses valores são iguais a zero quando calculados em relação a seus centros.

A validação numérica das massas adicionais acima foi feita com o auxílio do *software* WAMIT®, adotando o seguinte procedimento (vide fig. 5.1):

(a) Esfera α: raio fixo de 30m.

(b) Esfera β: raios de valores 5m, 10m, 15m, 20m, 25m e, por fim, 30m. Assim, definiu-se o adimensional $a^* = \frac{a_\beta}{a_\alpha}$.

[1] No Apêndice A estão as deduções dessas expressões.

(c) Para cada a^*, foram aplicadas as expressões 5.1 a 5.4 para distâncias **d** ("vão livre") de 10m, 20m, 30m, 40m, 50, 60m, 90m e 120m.

(d) Nos gráficos, o eixo das abcissas representa a distância adimensionalizada $d^* = \frac{d}{a_\alpha}$, enquanto que no eixo das ordenadas os resultados obtidos para as massas adicionais de *surge* e *heave* do conjunto foram adimensionalizados pela soma das massas adicionais das esferas isoladas, e para o movimento de *yaw* e o acoplamento *sway-yaw* foram plotados os valores das massas adicionais dados pelas expressões analíticas diretamente comparados com aqueles calculados pelo WAMIT®, pois estes termos são somente de interação, como dito anteriormente.

Os primeiros gráficos mostrados a seguir mostram a variação da massa adicional de *surge* do conjunto quando a distância entre as esferas aumenta. Note que a maior interação hidrodinâmica é da ordem de 20% da soma das massas adicionais das esferas isoladas e ocorre justamente para esferas de mesmo diâmetro (Fig. 5.2 (a)).

Como era de se esperar pela expressão 5.1, a massa adicional do sistema tende assintoticamente à soma isolada quando a distância tende ao infinito.

A aderência da expressão 5.1 aos resultados numéricos é excelente, não obstante, por uma simples questão de escala, os gráficos (e) e (f) dêem a impressão do contrário. De fato, a condição onde o erro foi maior (3.6%)é para o gráfico (f) ($d^* = 0.17$).

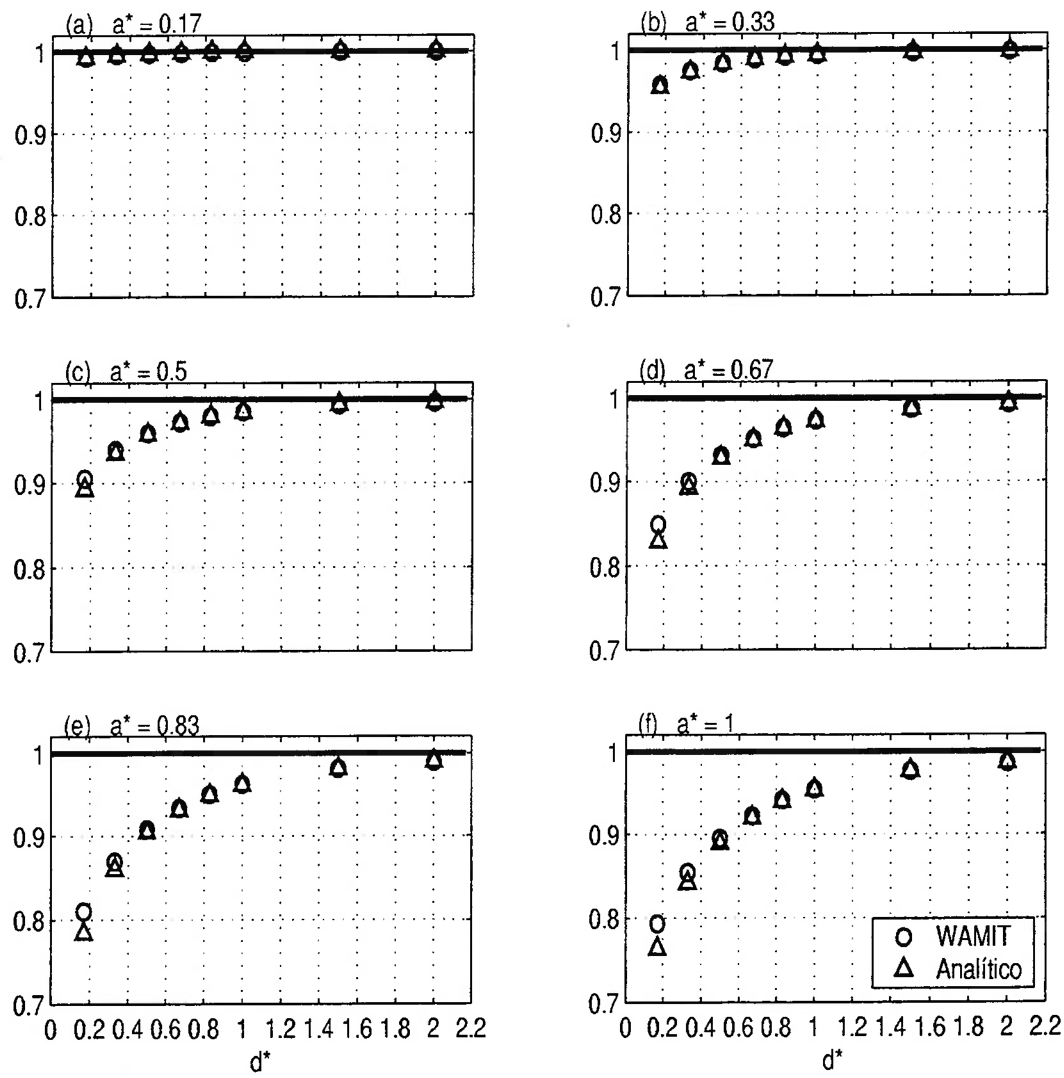

Figura 5.2: Massa Adicional de *Surge* - $a^* = \frac{a_\beta}{a_\alpha}$; $d^* = \frac{d}{a_\alpha}$

As próximas figuras mostram a variação da massa adicional de *heave* do sistema. Como no caso anterior, nota-se uma tendência assintótica dos valores destas massas adicionais à soma daquelas das esferas isoladas. Entretanto no movimento de *heave* o efeito da interação hidrodinâmica é menor - da ordem de 13% - para a mesma situação de duas esferas de mesmo diâmetro (Fig. 5.3 (f)).

O maior erro entre a expressão analítica 5.2 e o WAMIT® ocorre também na situação do gráfico Fig. 5.3(f) (como no caso de *surge*, para esferas de diâmetros iguais; entretanto, muito menor): 1% para $d^* = 0.17$.

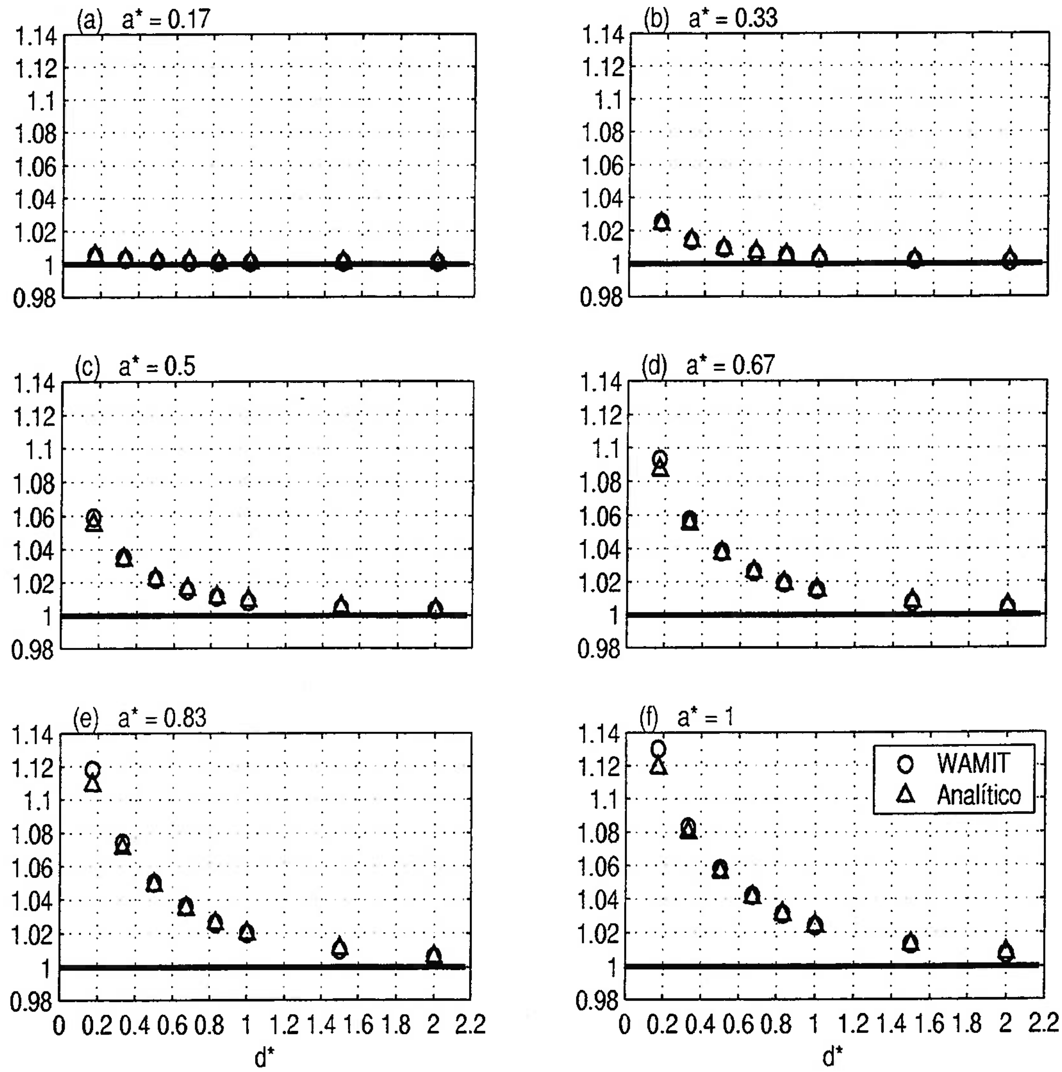

Figura 5.3: Massa Adicional de *Heave*- $a^* = \frac{a_\beta}{a_\alpha}$; $d^* = \frac{d}{a_\alpha}$

A seguir estão os resultados obtidos para as inércias adicionais de *pitch* e para o acoplamento *sway-yaw*. Para a inércia adicional de *pitch* o erro entre a expressão 5.3 e o WAMIT® não ultrapassou 1% em nenhum caso, enquanto que para o acoplamento *sway-yaw* verificou-se um erro de 4.5% para $a^* = 0.17$ (Fig.5, gráfico (f)) entre a expressão 5.4 e o WAMIT®.

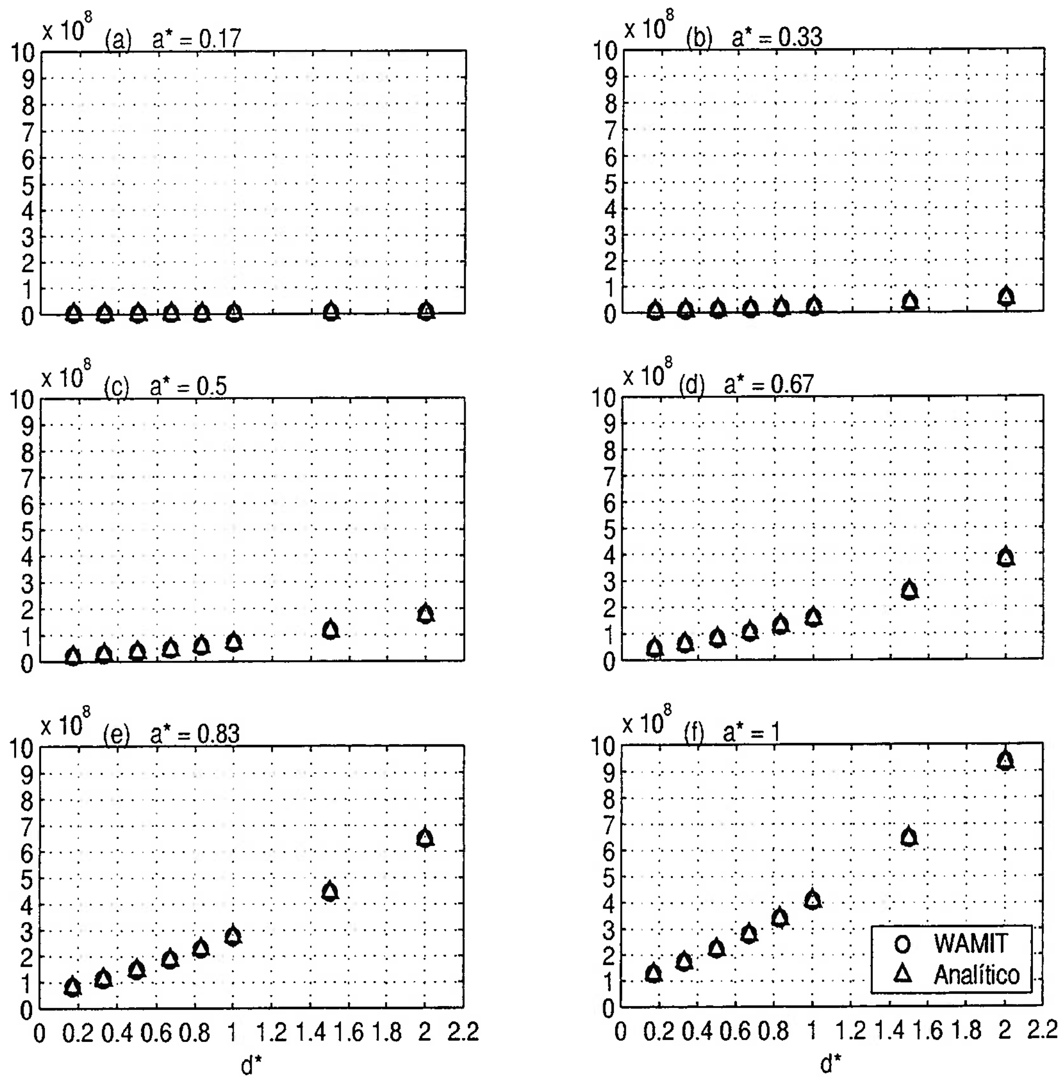

Figura 5.4: Inércia Adicional de *Pitch* - $ton \cdot m^2$- $a^* = \frac{a_\beta}{a_\alpha}$; $d^* = \frac{d}{a_\alpha}$

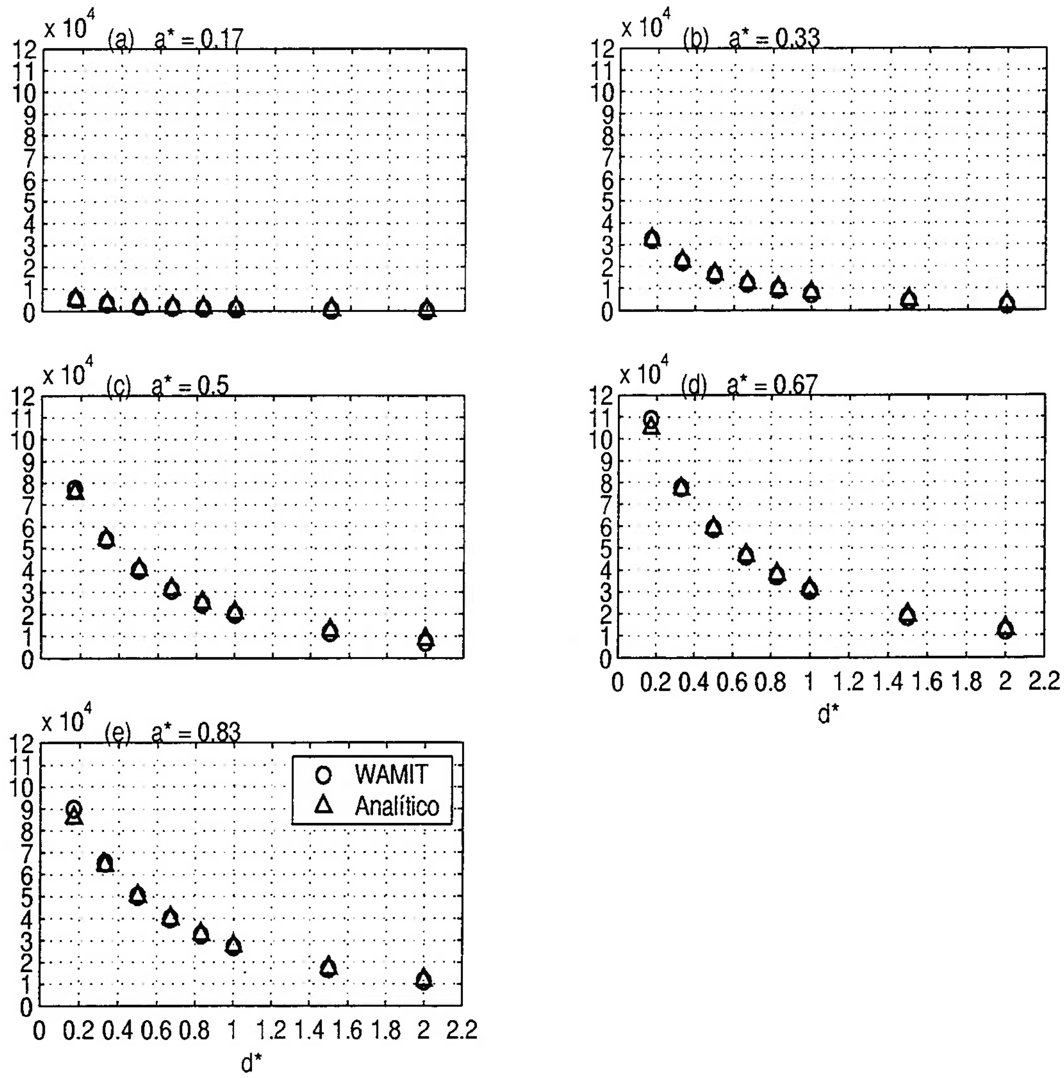

Figura 5.5: Inércia Adicional de *Sway-Yaw* - $ton \cdot m^2$- $a^* = \frac{a_\beta}{a_\alpha}$; $d^* = \frac{d}{a_\alpha}$

Enfim, a análise dos gráficos acima confirma a excelente aderência das expressões analíticas aos resultados do WAMIT® e portanto do **Teorema 1** como uma aproximação para a parcela inercial da Energia Cinética de Interação entre corpos, o que motiva a aplicação do mesmo para o cálculo da parcela das forças de interação no caso de dois navios em *tandem*, que será feita no próximo capítulo.

Capítulo 6

Impacto da Interação na Dinâmica do Sistema

Como foi dito inicialmente na **Introdução** deste texto, um sistema *tandem* é composto por um FPSO e um navio Aliviador, ligados por um *hawser*.

Esquematicamente, o sistema formado pelas duas embarcações pode ser expresso como na figura abaixo:

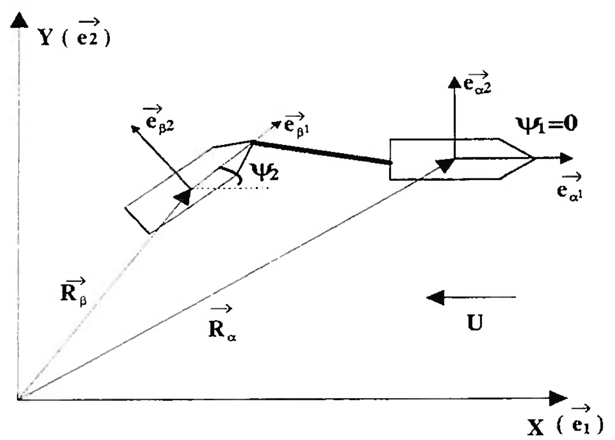

Figura 6.1: Navios em "*tandem*"

onde, para questões de nomenclatura, valerão doravante os seguintes índices:

- $\alpha : FPSO(x_1, y_1, \psi_1)$
- $\beta : Aliviador(x_2, y_2, \psi_2)$

Desconsiderando-se a interação hidrodinâmica, a dinâmica do sistema no plano horizontal no caso particular de uma correnteza nada mais é do que, repetidamente, as equações 3.8 definidas no **Capítulo 3**, para cada uma das embarcações, ou seja:

$$\left\{\begin{array}{lcl}
(m_\alpha + A_{11}^\alpha)\dot{u}_1 - (m_\alpha + A_{22}^\alpha)v_1\dot{\psi}_1 - (m_\alpha x_G^\alpha + A_{26}^\alpha)\dot{\psi}_1^2 & = & H_X^\alpha + R_X^\alpha + F_X^\alpha \\
(m_\alpha + A_{22}^\alpha)\dot{v}_1 - (m_\alpha + A_{11}^\alpha)u_1\dot{\psi}_1 - (m_\alpha x_G^\alpha + A_{26}^\alpha)\ddot{\psi}_1 & = & H_Y^\alpha + R_Y^\alpha + F_Y^\alpha \\
(I_{66}^\alpha + A_{66}^\alpha)\ddot{\psi}_1 + (m_\alpha x_G^\alpha + A_{26}^\alpha)\dot{v}_1 & = & H_Z^\alpha + R_Z^\alpha + N_Z^\alpha \\
 & & \\
(m_\beta + A_{11}^\beta)\dot{u}_2 - (m_\beta + A_{22}^\beta)v_2\dot{\psi}_2 - (m_\beta x_G^\beta + A_{26}^\beta)\dot{\psi}_2^2 & = & H_X^\beta + R_X^\beta + F_X^\beta \\
(m_\beta + A_{22}^\beta)\dot{v}_2 - (m_\beta + A_{11}^\beta)u_2\dot{\psi}_2 - (m_\beta x_G^\beta + A_{26}^\beta)\ddot{\psi}_2 & = & H_Y^\beta + R_Y^\beta + F_Y^\beta \\
(I_{66}^\beta + A_{66}^\beta)\ddot{\psi}_2 + (m_\beta x_G^\beta + A_{26}^\beta)\dot{v}_2 & = & H_Z^\beta + R_Z^\beta + N_Z^\beta
\end{array}\right. \tag{6.1}$$

onde H_X^i, H_Y^i, H_Z^i e $R_X^i, R_Y^i, R_Z^i, i = \alpha, \beta$ são, respectivamente, as componentes nas direções de *surge*, *sway* e *yaw* das forças devido ao *hawser* e amarração. Nota-se que o sistema é desacoplado hidrodinamicamente (pois as forças no *hawser* implicam em acoplamentos dinâmicos), e são justamente as forças de interação que representam o acoplamento hidrodinâmico do conjunto, isto é, 6.1 seria acrescido de:

$$\left\{\begin{array}{lcl}
(m_\alpha + A_{11}^\alpha)\dot{u}_1 - (m_\alpha + A_{22}^\alpha)v_1\dot{\psi}_1 - (m_\alpha x_G^\alpha + A_{26}^\alpha)\dot{\psi}_1^2 & = & H_X^\alpha + R_X^\alpha + F_X^\alpha + X_{int}^\alpha \\
(m_\alpha + A_{22}^\alpha)\dot{v}_1 - (m_\alpha + A_{11}^\alpha)u_1\dot{\psi}_1 - (m_\alpha x_G^\alpha + A_{26}^\alpha)\ddot{\psi}_1 & = & H_Y^\alpha + R_Y^\alpha + F_Y^\alpha + Y_{int}^\alpha \\
(I_{66}^\alpha + A_{66}^\alpha)\ddot{\psi}_1 + (m_\alpha x_G^\alpha + A_{26}^\alpha)\dot{v}_1 & = & H_Z^\alpha + R_Z^\alpha + N_Z^\alpha + Z_{int}^\alpha \\
 & & \\
(m_\beta + A_{11}^\beta)\dot{u}_2 - (m_\beta + A_{22}^\beta)v_2\dot{\psi}_2 - (m_\beta x_G^\beta + A_{26}^\beta)\dot{\psi}_2^2 & = & H_X^\beta + R_X^\beta + F_X^\beta + X_{int}^\beta \\
(m_\beta + A_{22}^\beta)\dot{v}_2 - (m_\beta + A_{11}^\beta)u_2\dot{\psi}_2 - (m_\beta x_G^\beta + A_{26}^\beta)\ddot{\psi}_2 & = & H_Y^\beta + R_Y^\beta + F_Y^\beta + Y_{int}^\beta \\
(I_{66}^\beta + A_{66}^\beta)\ddot{\psi}_2 + (m_\beta x_G^\beta + A_{26}^\beta)\dot{v}_2 & = & H_Z^\beta + R_Z^\beta + N_Z^\beta + Z_{int}^\beta
\end{array}\right. \tag{6.2}$$

Aplicando as equações de Lagrange à **Energia Cinética de Interação** obtém-se as forças e o momento de Interação Inercial Hidrodinâmica:

- *Força de Interação de Surge*

$$X_{int}^\alpha = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbb{W}_{\alpha\beta}}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial \mathbb{W}_{\alpha\beta}}{\partial x_1}$$

$$X_{int}^{\alpha} = \rho \left[\lambda_\alpha \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial c_\alpha}{\partial \dot{x}_1}\right) \cdot F^{\alpha\beta}\lambda_\beta c_\beta + \lambda_\alpha \frac{\partial c_\alpha}{\partial \dot{x}_1} \cdot \frac{dF^{\alpha\beta}}{dt}\lambda_\beta c_\beta + \lambda_\alpha \frac{\partial c_\alpha}{\partial \dot{x}_1} \cdot F^{\alpha\beta}\lambda_\beta \frac{dc_\beta}{dt} \right.$$
$$\left. -\lambda_\alpha c_\alpha \cdot \frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x_1}\lambda_\beta c_\beta \right] \tag{6.3}$$

- *Força de Interação de Sway*

$$Y_{int}^{\alpha} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbb{W}_{\alpha\beta}}{\partial \dot{y}_1}\right) - \frac{\partial \mathbb{W}_{\alpha\beta}}{\partial y_1}$$

$$Y_{int}^{\alpha} = \rho \left[\lambda_\alpha \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial c_\alpha}{\partial \dot{y}_1}\right) \cdot F^{\alpha\beta}\lambda_\beta c_\beta + \lambda_\alpha \frac{\partial c_\alpha}{\partial \dot{y}_1} \cdot \frac{dF^{\alpha\beta}}{dt}\lambda_\beta c_\beta + \lambda_\alpha \frac{\partial c_\alpha}{\partial \dot{y}_1} \cdot F^{\alpha\beta}\lambda_\beta \frac{dc_\beta}{dt} \right.$$
$$\left. -\lambda_\alpha c_\alpha \cdot \frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial y_1}\lambda_\beta c_\beta \right] \tag{6.4}$$

- *Momento de Interação de Yaw*

$$Z_{int}^{\alpha} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbb{W}_{\alpha\beta}}{\partial \dot{\psi}_1}\right) - \frac{\partial \mathbb{W}_{\alpha\beta}}{\partial \psi_1}$$

$$Z_{int}^{\alpha} = \rho \left[\lambda_\alpha \frac{\partial c_\alpha}{\partial \dot{\psi}_1} \cdot \frac{dF^{\alpha\beta}}{dt}\lambda_\beta c_\beta + \lambda_\alpha \frac{\partial c_\alpha}{\partial \dot{\psi}_1} \cdot F^{\alpha\beta}\lambda_\beta \frac{dc_\beta}{dt} \right.$$
$$\left. -\lambda_\alpha \frac{\partial c_\alpha}{\partial \psi_1} \cdot F^{\alpha\beta}\lambda_\beta c_\beta - \lambda_\alpha c_\alpha \cdot \frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial \psi_1}\lambda_\beta c_\beta \right] \tag{6.5}$$

Para as expressões de X_{int}^{β}, Y_{int}^{β} e Z_{int}^{β}, basta substituir α por β e "1" por "2" nas expressões 6.3, 6.4 e 6.5, lembrando que $F^{\alpha\beta}$ é uma matriz simétrica. [1]

A fim de avaliar o impacto dos termos de interação sobre a dinâmica do sistema e sua estabilidade, foram feitas simulações no *Simulink* do MATLAB® considerando apenas forças devido a correnteza; para esse caso, F_X^i, F_Y^i e N_Z^i, $i = \alpha, \beta$ são dados segundo Simos [14].

Não obstante as expressões 6.3 a 6.5 terem sido deduzidas para os dois navios movendo-se livremente no plano, nas simulações o FPSO está ancorado por um

[1] No **Apêndice B** estão as deduções destas expressões e a definição de cada um dos termos que as compõem.

sistema do tipo *turret*. Este fato justifica a corrente unidirecional da figura 6.1, e acarreta também que o FPSO tem seus movimentos reduzidos pelas forças de amarração, que gera baixas velocidades e acelerações nas parcelas de interação, de modo que para as simulações a preocupação maior foi com o navio Aliviador. Três velocidades de correnteza foram consideradas: $U = 1.9m/s, 3.8m/s$ e $4.7m/s$. A escolha destes dois últimos valores de velocidade de correnteza, muito acima dos valores centenários reais, explica-se pelo seguinte fato: a intenção do presente texto é avaliar o impacto da interação inercial hidrodinâmica no sistema *tandem* também quando o mesmo é instável, principalmente nas vizinhanças do ponto de bifurcação. Portanto "forçou-se" a instabilidade do sistema *tandem* através de altas velocidades de correnteza.

Assim, foram realizadas simulações com os navios **VLCC Vidal de Negreiros** (VN) como FPSO e **Juruá** como Aliviador, para duas condições de carregamento:

1. início da operação de *offloading*: VN a 100% de carregamento e Juruá a 40%.

2. final da operação de *offloading*: VN a 40% de carregamento e Juruá a 100%.

As dimensões principais dos dois navios para as duas condições acima estão na tabela abaixo: [2]

[2] ***Observação***: Para todas as simulações, os eixos locais de cada embarcação encontravam-se em suas respectivas seções-mestras, e o eixo global do sistema coincidindo com o local do FPSO. Além disso, os aproamentos iniciais para o FPSO e Aliviador foram, respectivamente, 0 e 15 graus.

Tabela 6.1: Navios que compõem o sistema *tandem* da simulação

	FPSO 100%	*Aliviador* 40%	*FPSO* 40%	*Aliviador* 100%
Comp.(m)	320	260	320	260
Boca(m)	54.5	44.5	54.5	44.5
Calado(m)	21.47	6.44	8.63	16.1
Desl.(ton)	3.2E+05	5.88E+03	1.26E+05	1.55E+05
x_G(m)	9.81	7.18	4.44	7.41
A_{11}(ton)	1.9E+04	3.4E+03	4.03E+03	8.62E+03
A_{22}(ton)	2.83E+05	5.12E+03	5.61E+04	1.32E+05
A_{66}(ton·m^2)	1.66E+09	2.04E+08	3.43E+08	5.39E+08
A_{26}(ton·m)	3.39E+06	1.85E+05	1.64E+05	7.42E+05

Sendo 'a' o comprimento do *hawser*, definiu-se o adimensional $\frac{a}{L_1}$, onde L_1 é o comprimento do FPSO, e, para cada velocidade de correnteza simulou-se o sistema para $\frac{a}{L_1}$ variando de 0.2 a 1.2, comparando (para cada combinação desses parâmetros) a porcentagem que a força de interação inercial representa da respectiva força potencial (lado esquerdo do sistema 6.2), e o efeito que aquelas causam na estabilidade do sistema, tendo como critério o gráfico da figura abaixo:

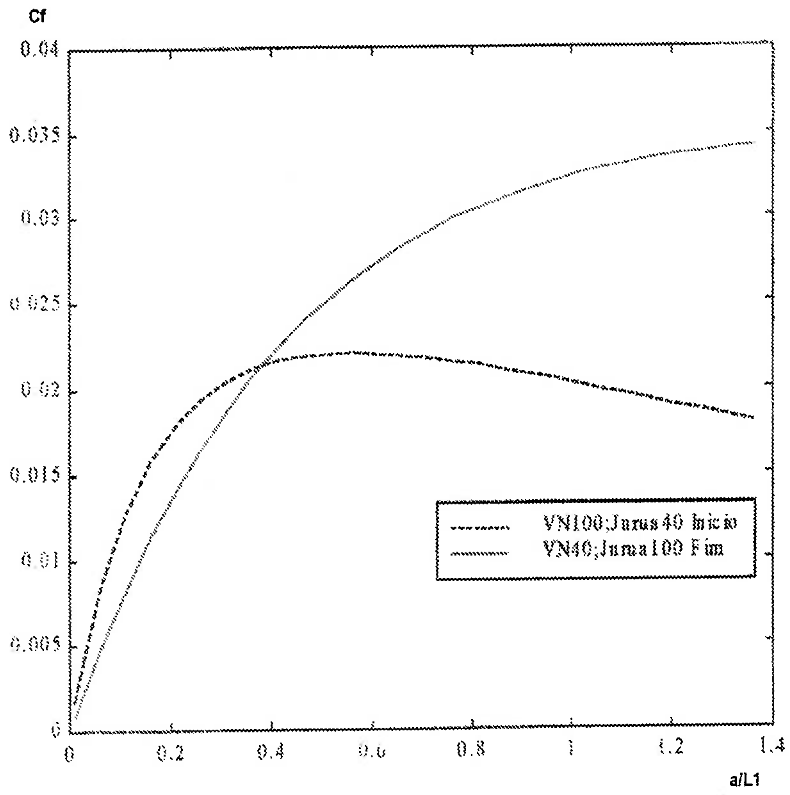

Figura 6.2: Estabilidade do sistema *tandem* sem interação

Esta figura é o gráfico de estabilidade, segundo o critério de Hurwitz, do sistema 6.1, ou seja, sem interação. Os parâmetros de bifurcação considerados foram o comprimento adimensionalizado do *hawser* e o Coeficiente Friccional (segundo fórmula da ITTC), e no gráfico estão plotadas as curvas para as duas condições de carregamento consideradas acima: linha tracejada para o início da operação de *offloading* e linha cheia para o fim. Para cada uma das curvas, a região acima da mesma é a região ESTÁVEL do sistema; obviamente, abaixo da curva é a região INSTÁVEL. Assim, simulações em torno do ponto de bifurcação foram conduzidas para verificar se as parcelas de interação inercial causavam algum deslocamento do mesmo.

A figura abaixo mostra a variação (em %) da força de *surge* em relação à correspondente potencial para o início da operação de *offloading*, isto é, VN 100% e Juruá 40%. Nesta condição de carregamento, as velocidades de correnteza de 1.9; 3.8 e 4.7 m/s acarretam Coeficientes Friccionais de, respectivamente, 0.0462;0.0396 e 0.0378, de modo que, segundo a Fig. 6.2, o sistema é originalmente estável para todas as velocidades e comprimentos de *hawser.* [3]
Então os valores dos gráficos para esta situação são correspondentes ao regime transiente das forças, e como as parcelas de interação decaem muito mais rapidamente que as potenciais, o intervalo de tempo considerado para a análise foi aquele das forças de interação, desde o início ($t = 0$) até o instante em que estas se anulavam:

[3]Por o sistema ser estável, essa situação, sob o ponto de vista prático, não seria preocupante.

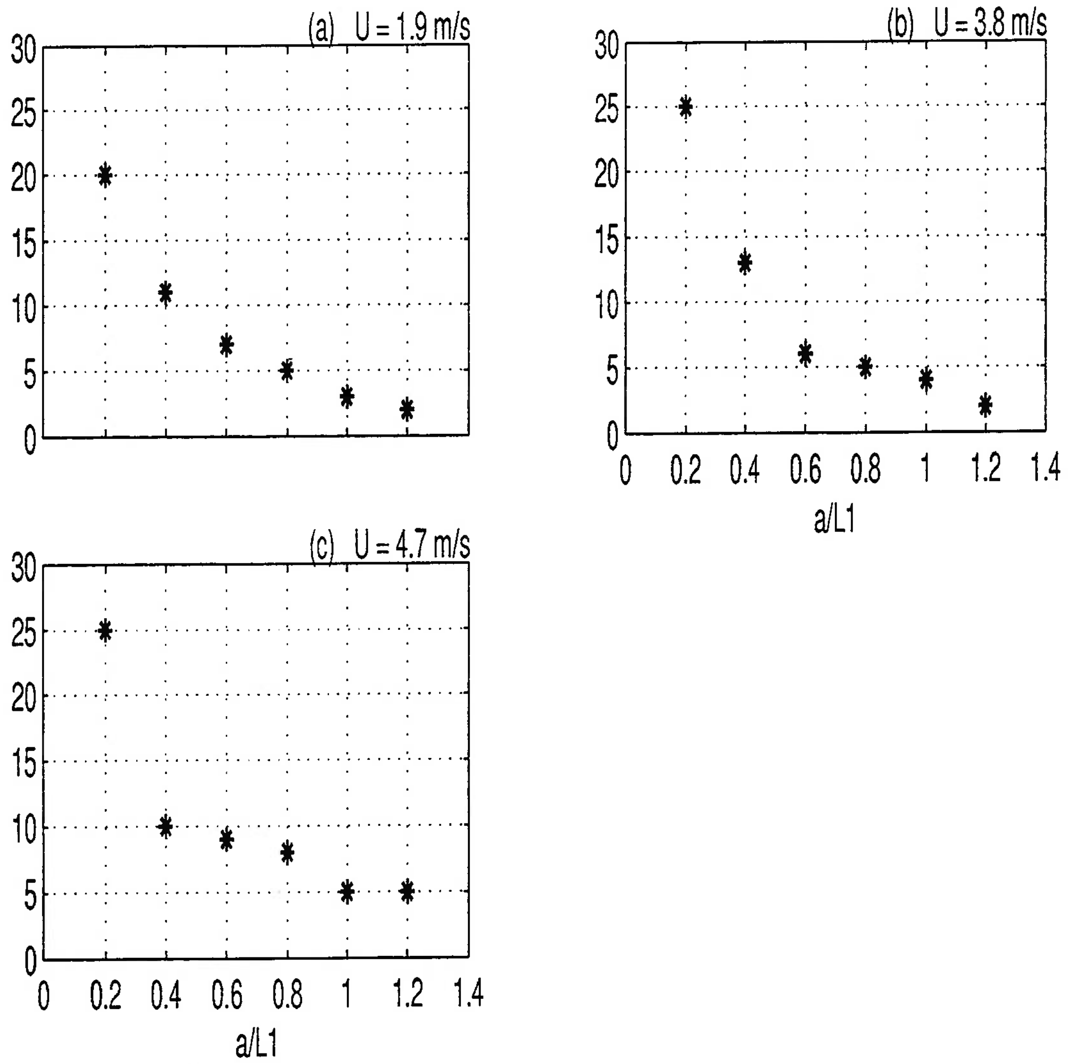

Figura 6.3: Força de Interação Inercial de *Surge* / Força Potencial de *Surge* (%) - Início da operação de *offloading*

A figura mostra apenas as forças de interação de *surge*, pois em todos os casos a contribuição da força de *sway* e do momento de *yaw* foram menores que 2%. Para $U = 1.9$ e $3.8m/s$, nota-se que houve um comportamento similar das curvas: contribuição máxima da ordem de 20% para $\frac{a}{L_1} = 0.2$ e mínima da ordem de 2% para $\frac{a}{L_1} = 1.2$, e quando o comprimento do *hawser* dobra a força cai aproximadamente pela metade. Para $U = 4.7m/s$ este último comportamento não se verifica, e, embora seja uma contribuição muito pequena, o mínimo para $\frac{a}{L_1} = 1.2$ foi o dobro dos gráficos anteriores: 4.6%.

A próxima figura mostra os resultados para o fim da operação de *offloading*. Nessa condição de operação, segundo a Fig. 6.2, o sistema inicialmente é, quando $U = 1.9m/s$, ESTÁVEL para $\frac{a}{L_1}$ de 0.2 a 0.6, e INSTÁVEL para os demais valores. Para $U = 3.8$ e $4.7\ m/s$ o sistema é ESTÁVEL apenas para $\frac{a}{L_1} = 0.2$.

Nos casos instáveis, a porcentagem das parcelas de interação em relação às correspondentes potenciais mostraram-se todas menores que 0.5% em regime, de modo que para os gráficos foi novamente considerado o período transiente destas forças (anterior ao regime), novamente considerando o intervalo de tempo das parcelas de interação:

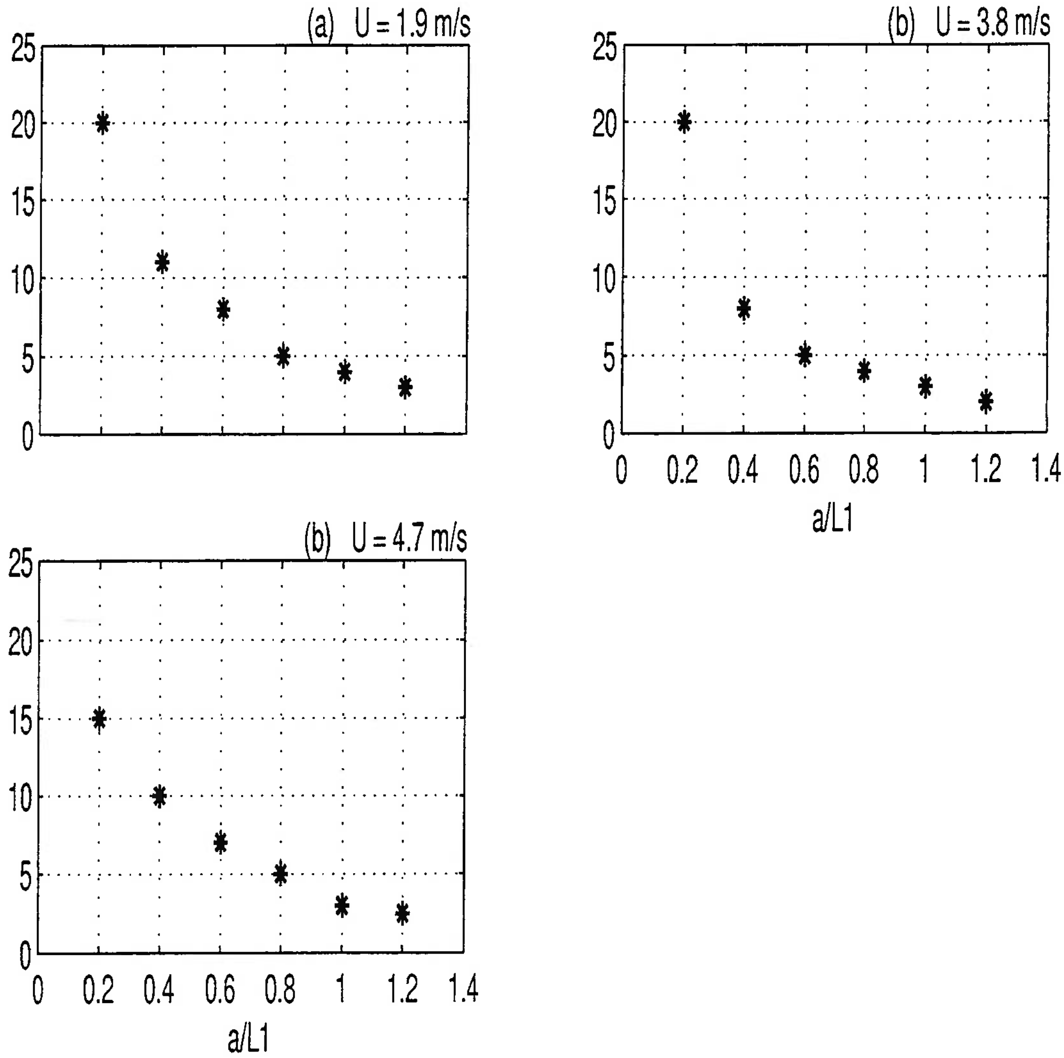

Figura 6.4: Força de Interação Inercial de *Surge* / Força Potencial de *Surge* (%) - Final da operação de *offloading*

Para esta condição de carregamento a figura acima apresenta o mesmo padrão de comportamento que aquelas obtidas para o início da operação de *offloading*, entretanto com uma maior homogeneidade, pois todas têm contribuições máximas por volta de 20% para $\frac{a}{L_1} = 0.2$ e mínimas da ordem de 2% para $\frac{a}{L_1} = 1.2$ para as três velocidades de correnteza, além da relação de proporcionalidade com respeito ao comprimento do *hawser*.

Nota-se também que, para as situações às quais o sistema é INSTÁVEL, esta sim mais preocupante sob o ponto de vista prático, as contribuições das parcelas de interação são muito pequenas: para $U = 1.9m/s$, menores que 5%, e menores que 10% para as demais velocidades. Isso acontece porque, pela Fig. 6.2, o sistema é instável para grandes valores de $\frac{a}{L_1}$, ou seja, para grandes distância entre as embarcações, e o efeito de interação hidrodinâmica diminui com a distância. Como no caso anterior (início do *offloading*), a força de *sway* e o momento de *yaw* foram menores que 2% em relação às respectivas parcelas potenciais . A conseqüência disso é que, sendo o comportamento de *fishtailing* [14] regido predominantemente pela força de *sway* e momento de *yaw*, este comportamento não é amplificado, porém, infelizmente, nem reduzido pelas forças de interação inerciais.

Enfim, o que se percebe das figuras acima é que somente no movimento de *surge* a interação é mais pronunciada - ordem de 20% da força potencial, resultado próximo (e coerente) com aquele obtido no **Capítulo 5** para as esferas, mesmo assim por um período pequeno de tempo (regime transiente de forças), além do fato de que, na prática o navio Aliviador é mantido tracionado pela popa por um navio rebocador, o que torna o sistema ainda mais estável; ou seja, o impacto da interação inercial na dinâmica do sistema *tandem* é praticamente nulo.

Além disso, tendo as forças de interação inercial as ordens de grandeza mostradas pelas simulações, não houve qualquer mudança dos pontos de bifurcação da Fig. 6.2.

Capítulo 7

Conclusões e Sugestões de Trabalhos Futuros

O uso cada vez mais frequente de FPSOs convertidos a partir de petroleiros antigos pelas indústrias exploradoras de petróleo, motivados por explorações a cada vez maiores profundidades, levanta questões a respeito do comportamento do sistema durante a operação de *offloading*, visto que a capacidade de armazenamento destas embarcações, o que por um lado impusionou seu próprio uso, requer a presença de outra embarcação, quase sempre do mesmo porte, o que certamente afeta o comportamento da primeira no mar. Essa interação hidrodinâmcia se reflete nas forças viscosas (correnteza e vento) e potenciais (ondas, principalmente movimentos de segunda ordem); dentro das forças potenciais, há ainda a parcela inercial das forças, isto é, aquela devido às massas adicionais. Então conhecer a dinâmica do sistema nessa situação é de fundamental importância no que tange à segurança da operação, e medidas podem ser tomadas no caso de alguma eventualidade.

Também foi visto que, tendo-se a Lagrangiana do sistema, é possível obter as equações do movimento do mesmo através das Equações de Lagrange. E, através de um princípio variacional, acrescentou-se à Lagrangiana original termos de interação inercial, o que pela validação numérica feita mostraram-se bastante adequados.

Entretanto, pela dedução das próprias expressões, é natural que os resultados para o caso de simples esferas sejam muito satisfatórios, pois a função $\phi_{\alpha i}$ é considerada de modo que se comportasse como dipolo no infinito, e o dipolo é a solução analítica do potencial de velocidades para a esfera. Então, sugere-se, para o caso de geometrias mais complicadas, consideração de termos de ordem superior tanto na expansão de $\phi_{\alpha i}$, como também na matriz de interação $F^{\alpha\beta}$ (já que é nela que está a essência da interação hidrodinâmica inercial), desprezados para as aplicações do presente texto. Porém, nestes casos de geometrias mais complicadas, torna-se indispensável o uso de uma ferramenta precisa de cálculo de massas adicionais dos corpos isolados, como o WAMIT®, por exemplo, já que esta não é uma tarefa fácil para corpos de geometrias diferentes dos elementares.

Como aplicação mais direta das expressões de interação que compõem o **Teorema 1**, motivadas pela excelente aderência numérica, foram feitas simulações para dois navios em *tandem* para alguns valores de correnteza e comprimento de *hawser*, e o que se concluiu, não obstante os resultados estejam coerentes com os encontrados para as esferas e também por Teigen [18], ou seja, forças de interação inercial relevantes apenas para pequenas distâncias entre os corpos, foi que a magnitude das forças de interação é muito menor que as outras forças envolvidas no sistema, como a força potencial (lado esquerdo do sistema 6.2) e a própria força de correnteza, ainda mais porque na prática o navio Aliviador é mantido tracionado pela popa por um navio rebocador, o que torna o sistema ainda mais estável, de modo que não há impacto na dinâmica do sistema, nem mesmo na estabilidade do sistema.

E embora os resultados das expressões variacionais deste texto não tenham se mostrado relevantes para o problema particular de navios em *tandem*, outras aplicações podem ser estudadas, como por exemplo, o conjunto de *risers* de um sistema *turret* sujeitos ao fenômeno de *"clashing"* (toque metálico entre *risers*), além do fato do **Teorema 1** ser uma primeira tentativa de se expressar as forças de interação hidrodinâmica, mesmo que apenas uma parcela delas (a inercial), analiticamente. Isso é bastante válido sob o aspecto teórico e científico, pois nos dá uma idéia primeiro da dificuldade envolvida no processo e, segundo, nos mostra como é a "identidade" destas funções, isto é, como elas são, o comportamento delas, e o que se pode esperar à medida em que se avança na análise do problema.

Para uma modelagem mais precisa, dentro da Teoria Potencial (porque há ainda a parcela devido à viscosidade, o chamado *Efeito de Sombra* ou *Esteira*) far-se-ia necessário incluir nas expressões variacionais efeitos de superfície livre, ou seja, radiação e difração de ondas, principalmente os termos de segunda ordem dessas forças. Dessa maneira, ter-se-ia um modelo melhor de interação hidrodinâmica, possivelmente capaz de confirmar, por exemplo, os resultados encontrados por Pinkster [12] para a estabilidade do sistema.

Ensaios com modelos em escala reduzida também poderiam ser realizados, a fim de se ter também uma validação experimental de massas adicionais e coeficientes de força para corpos com geometria diferente das formas elementares (esferas, cilindros e caixas retangulares), como por exemplo navios em *tandem*, ou plataformas, ou combinações destes, já que na dedução do **Teorema 1** não foram feitas considerações a respeito da forma dos corpos: necessita-se apenas de suas massas adicionais isoladas.

Bibliografia

[1] Aranha, J.A.P.; Pesce, C.P., *A variational method for water wave radiation and diffraction problems*, Journal of Fluid Mechanics, vol. 204, 1989, pp.135-157.

[2] Bender, C.M.; Orzag, S.A., *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*, McGraw-Hill, International Series in Pure and Applied Mathematics, 1978.

[3] Kolmogorov, A. N.; Fomin, S.V., *Elements of the theory of functional analysis (Spanish)*, Third Edition, Mir, Moscow, 1978.

[4] Gelfand, I.M.; Fomin, S.V., *Calculus of Variations*, Prentice-Hall: Englewood Cliffs, NJ, 1963.

[5] Lamb, H., *Hydrodynamics*, 6th edition, Dover, New York, 1932.

[6] Lee, Dong H.; Choi, H.S., *A dynamic analysis of FPSO-Shuttle tanker system*, Proceedings da ISOPE2000.

[7] Leite, A.J.P.; *Forças de corrente em petroleiros e bifurcação do equilíbrio em sistemas tipo turret.*, Dissertação(Mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1997.

[8] Mathai, T., *Use of generalized modes in hydrodynamics analysis of multiple bodies*, Proceedings da ISOPE2000.

[9] Molin, B., *Second order diffraction loads upon three-dimensional bodies*, Appl. Ocean Res. 1, 1979, pp. 197-202.

[10] Newman, J.N., *Marine Hydrodynamics*, MIT Press, 1976.

[11] Pesce, C.P., *Estudo do comportamento de corpos flutuantes em ondas: um enfoque variacional e aplicações da teoria de corpo esbelto*, Tese de Doutorado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1988.

[12] Pinkster, J.A., *Hydrodynamic interaction effects in waves*, Proceedings da ISOPE1995.

[13] Ragazzo, C.G., *On the motion of solids through an ideal liquid: approximated equations for many body systems*, Journal of Applied Mathematics, 2000 (Submitted).

[14] Simos, A.N.; Tannuri, E.A.; Pesce, C.P.; Aranha, J.A.P., *A Quasi - Explicit Hydrodynamic Model for the Dynamic Analysis of a Moored FPSO under Current Action*, Journal of Ship Research, 2000

[15] Sobolev, S.L., *Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics*, Translation of Mathematical Monographs, vol. 7, American Mathematical Society, 1963.

[16] Spiegel, M.R., *Variáveis Complexas*, McGraw-Hill, 1973.

[17] Tannuri, E.A.; Simos, A.N.; Leite, A.J.P.; Aranha, J.A.P., *Fishtailing Instability of a Moored FPSO: Theoretical Prediction and Experiments*, Journal of Ship Research, 2000

[18] Teigen, P., *Numerical aspects of multiple body hydrodynamics*, Proceedings da ISOPE2000.

[19] Troutman, J.L., *Variational Calculus and Optimal Control*, Springer-Verlag, 1996.

[20] *WAMIT, A radiation-diffraction panel program for wave-body interactions*, Massachussets Institute of Technology, 1993.

Apêndice A

A.1 Dedução das expressões do Capítulo 5

Para as duas esferas α e β rigidamente ligadas do **Capítulo 5** o **Teorema 1** diz que:

$$\frac{\rho}{2}\int_{\forall}\|\nabla\Phi\|^2 d\forall = \frac{1}{2}\left[A_{11}^{\alpha}u_{\alpha}^2 + A_{22}^{\alpha}v_{\alpha}^2 + A_{33}^{\alpha}\omega_{\alpha}^2 + A_{11}^{\beta}u_{\beta}^2 + A_{22}^{\beta}v_{\beta}^2 + A_{33}^{\beta}\omega_{\beta}^2\right]$$
$$+\frac{1}{2}\left[\lambda_\alpha c_\alpha \cdot F^{\alpha\beta}\lambda_\beta c_\beta + \lambda_\beta c_\beta \cdot F^{\beta\alpha}\lambda_\alpha c_\alpha\right] \qquad \text{(A.1)}$$

onde

$$c_\alpha = \begin{bmatrix} u_\alpha \\ v_\alpha \\ \omega_\alpha \end{bmatrix}; c_\beta = \begin{bmatrix} u_\beta \\ v_\beta \\ \omega_\beta \end{bmatrix}; A_{11}^i = A_{22}^i = A_{33}^i = \frac{2}{3}\rho\pi a_i^3 \qquad i = \alpha, \beta \qquad \text{(A.2)}$$

Pela definição da matriz λ_α no **Capítulo 4** segue que

$$\lambda_\alpha = \begin{bmatrix} 2\pi a_\alpha^3 & 0 & 0 \\ 0 & 2\pi a_\alpha^3 & 0 \\ 0 & 0 & 2\pi a_\alpha^3 \end{bmatrix}; \lambda_\beta = \begin{bmatrix} 2\pi a_\beta^3 & 0 & 0 \\ 0 & 2\pi a_\beta^3 & 0 \\ 0 & 0 & 2\pi a_\beta^3 \end{bmatrix}$$

e portanto

$$\lambda_\alpha c_\alpha = \begin{bmatrix} 2\pi a_\alpha^3 u_\alpha \\ 2\pi a_\alpha^3 v_\alpha \\ 2\pi a_\alpha^3 \omega_\alpha \end{bmatrix}; \lambda_\beta c_\beta = \begin{bmatrix} 2\pi a_\beta^3 u_\beta \\ 2\pi a_\beta^3 v_\beta \\ 2\pi a_\beta^3 \omega_\beta \end{bmatrix}$$

Sendo, nesse caso, $T_\alpha = T_\beta = \mathbb{I}$, então $F^{\alpha\beta} = G^{\alpha\beta}$. Além disso

$$\vec{R_{\alpha\beta}} = \vec{R_\beta} - \vec{R_\alpha} = l_\beta\,\vec{e_1} - (-l_\alpha\,\vec{e_1}) = (l_\alpha + l_\beta)\,\vec{e_1} = l\,\vec{e_1}$$

e então, de 4.24:

$$F^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -1/2\pi l^3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4\pi l^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4/\pi l^3 \end{bmatrix}$$

É fácil verificar que $F^{\beta\alpha} = F^{\alpha\beta}$.

Substituindo as matrizes acima na expressão A.1 vem:

$$\frac{\rho}{2}\int_{\forall} \|\nabla\Phi\|^2 d\forall = \frac{1}{3}\rho\pi a_\alpha^3 u_\alpha^2 + \frac{1}{3}\rho\pi a_\alpha^3 v_\alpha^2 + \frac{1}{3}\rho\pi a_\alpha^3 \omega_\alpha^2 + \frac{1}{3}\rho\pi a_\beta^3 u_\beta^2 + \frac{1}{3}\rho\pi a_\beta^3 v_\beta^2 + \frac{1}{3}\rho\pi a_\beta^3 \omega_\beta^2$$

$$-\frac{2\rho\pi a_\alpha^3 a_\beta^3}{l^3} u_\alpha u_\beta + \frac{\rho\pi a_\alpha^3 a_\beta^3}{l^3} v_\alpha v_\beta + \frac{\rho\pi a_\alpha^3 a_\beta^3}{l^3} \omega_\alpha \omega_\beta \qquad (A.3)$$

Como as esferas estão rigidamente ligadas:

$$\vec{c_\alpha} = \vec{V} + \vec{\Omega} \wedge \vec{R_\alpha} = V_1\,\vec{e}_1 + V_2\,\vec{e}_2 + V_3\,\vec{e}_3 + (\Omega_1\,\vec{e}_1 + \Omega_2\,\vec{e}_2 + \Omega_3\,\vec{e}_3 \wedge -l_\alpha\,\vec{e}_1)$$

$$\vec{c_\beta} = \vec{V} + \vec{\Omega} \wedge \vec{R_\beta} = V_1\,\vec{e}_1 + V_2\,\vec{e}_2 + V_3\,\vec{e}_3 + (\Omega_1\,\vec{e}_1 + \Omega_2\,\vec{e}_2 + \Omega_3\,\vec{e}_3 \wedge l_\beta\,\vec{e}_1)$$

$$c_\alpha = V_1\,\vec{e}_1 + (V_2 - \Omega_3 l_\alpha)\,\vec{e}_2 + (V_3 + \Omega_2 l_\alpha)\,\vec{e}_3$$

$$c_\beta = V_1\,\vec{e}_1 + (V_2 + \Omega_3 l_\beta)\,\vec{e}_2 + (V_3 - \Omega_2 l_\beta)\,\vec{e}_3$$

Desse modo:

$$u_\alpha = V_1 \qquad u_\beta = V_1$$

$$v_\alpha = V_2 - \Omega_3 l_\alpha \qquad v_\beta = V_2 + \Omega_3 l_\beta$$

$$\omega_\alpha = V_3 + \Omega_2 l_\alpha \qquad \omega_\beta = V_3 - \Omega_2 l_\beta$$

E, substituindo esses valores em A.3 vem:

$$\frac{\rho}{2}\int_{\forall} \|\nabla\Phi\|^2 d\forall = \left(\tfrac{1}{3}\rho\pi a_\alpha^3 + \tfrac{1}{3}\rho\pi a_\beta^3 - \tfrac{2\rho\pi a_\alpha^3 a_\beta^3}{l^3}\right) V_1^2 + \left(\tfrac{1}{3}\rho\pi a_\alpha^3 + \tfrac{1}{3}\rho\pi a_\beta^3 + \tfrac{\rho\pi a_\alpha^3 a_\beta^3}{l^3}\right) V_2^2 +$$
$$\left(\tfrac{1}{3}\rho\pi a_\alpha^3 + \tfrac{1}{3}\rho\pi a_\beta^3 + \tfrac{\rho\pi a_\alpha^3 a_\beta^3}{l^3}\right) V_3^2 + \left(\tfrac{2}{3}\rho\pi a_\beta^3 l_\beta - \tfrac{2}{3}\rho\pi a_\alpha^3 l_\alpha + \tfrac{\rho\pi a_\alpha^3 a_\beta^3}{l^3}(l_\beta - l_\alpha)\right) V_2\Omega_3 +$$
$$\left(\tfrac{1}{3}\rho\pi a_\alpha^3 l_\alpha^2 + \tfrac{1}{3}\rho\pi a_\beta^3 l_\beta^2 - \tfrac{\rho\pi a_\alpha^3 a_\beta^3}{l^3} l_\alpha l_\beta\right) \Omega_3^2 + \left(\tfrac{2}{3}\rho\pi a_\alpha l_\alpha - \tfrac{2}{3}\rho\pi a_\beta^3 l_\beta - \tfrac{\rho\pi a_\alpha^3 a_\beta^3}{l^3}(l_\beta - l_\alpha)\right) V_3\Omega_2 +$$
$$\left(\tfrac{1}{3}\rho\pi a_\alpha^3 l_\alpha^2 + \tfrac{1}{3}\rho\pi a_\beta^3 l_\beta^2 - \tfrac{\rho\pi a_\alpha^3 a_\beta^3}{l^3} l_\alpha l_\beta\right) \Omega_2^2 = \tfrac{1}{2}M_{11}\ V_1^2 + \tfrac{1}{2}M_{22}\ V_2^2 + \tfrac{1}{2}M_{33}\ V_3^2 +$$
$$M_{26}\ V_2\Omega_3 + \tfrac{1}{2}M_{66}\ \Omega_3^2 + M_{35}\ V_3\Omega_2 + \tfrac{1}{2}M_{55}\ \Omega_2^2$$

Portanto, por analogia:

$$\frac{1}{2}M_{11} = \left(\frac{1}{3}\rho\pi a_\alpha^3 + \frac{1}{3}\rho\pi a_\beta^3 - \frac{2\rho\pi a_\alpha^3 a_\beta^3}{l^3}\right) \tag{A.4}$$

$$\frac{1}{2}M_{22} = \left(\frac{1}{3}\rho\pi a_\alpha^3 + \frac{1}{3}\rho\pi a_\beta^3 + \frac{\rho\pi a_\alpha^3 a_\beta^3}{l^3}\right) \tag{A.5}$$

$$\frac{1}{2}M_{33} = \left(\frac{1}{3}\rho\pi a_\alpha^3 + \frac{1}{3}\rho\pi a_\beta^3 + \frac{\rho\pi a_\alpha^3 a_\beta^3}{l^3}\right) = \tag{A.6}$$

$$M_{26} = \left(\frac{2}{3}\rho\pi a_\beta^3 l_\beta - \frac{2}{3}\rho\pi a_\alpha^3 l_\alpha + \frac{\rho\pi a_\alpha^3 a_\beta^3}{l^3}(l_\beta - l_\alpha)\right) \tag{A.7}$$

$$\frac{1}{2}M_{66} = \left(\frac{1}{3}\rho\pi a_\alpha^3 l_\alpha^2 + \frac{1}{3}\rho\pi a_\beta^3 l_\beta^2 - \frac{\rho\pi a_\alpha^3 a_\beta^3}{l^3} l_\alpha l_\beta\right) \tag{A.8}$$

$$M_{35} = \left(\frac{2}{3}\rho\pi a_\alpha l_\alpha - \frac{2}{3}\rho\pi a_\beta^3 l_\beta - \frac{\rho\pi a_\alpha^3 a_\beta^3}{l^3}(l_\beta - l_\alpha)\right) \tag{A.9}$$

$$\frac{1}{2}M_{55} = \left(\frac{1}{3}\rho\pi a_\alpha^3 l_\alpha^2 + \frac{1}{3}\rho\pi a_\beta^3 l_\beta^2 - \frac{\rho\pi a_\alpha^3 a_\beta^3}{l^3} l_\alpha l_\beta\right) \tag{A.10}$$

Se o eixo global de coordenadas estiver no centro de volume do sistema formado pelas duas esferas:

$$\bar{x} = \frac{\nabla_\alpha\, x_\alpha + \nabla_\beta\, x_\beta}{\nabla_\alpha + \nabla_\beta} = 0$$

$$\frac{4/3\pi a_\alpha^3(-l_\alpha)\,\vec{i} + 4/3\pi a_\beta^3(l_\beta)\,\vec{i}}{4/3\pi a_\alpha^3 + 4/3\pi a_\beta^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad l_\alpha = \frac{a_\beta^3}{a_\alpha^3} l_\beta$$

Como $l_\alpha + l_\beta = l$ segue que:

$$l_\beta = \frac{a_\alpha^3}{a_\alpha^3 + a_\beta^3} l \quad ; \quad l_\alpha = \frac{a_\beta^3}{a_\alpha^3 + a_\beta^3} l$$

Finalmente, levando estes valores nas expressões A.4 a A.10 vem:

$$M_{11} = \frac{2}{3}\rho\pi \left[a_\alpha^3 + a_\beta^3 - 6\frac{a_\alpha^3 a_\beta^3}{l^3}\right] \tag{A.11}$$

$$M_{22} = M_{33} = \frac{2}{3}\rho\pi \left[a_\alpha^3 + a_\beta^3 + 3\frac{a_\alpha^3 a_\beta^3}{l^3}\right] \tag{A.12}$$

$$M_{55} = M_{66} = \frac{2}{3}\rho\pi \frac{a_\alpha^3 a_\beta^3}{(a_\alpha^3 + a_\beta^3)^2} l^2 \left[a_\alpha^3 + a_\beta^3 - 3\frac{a_\alpha^2 a_\beta^2}{l^3}\right] \tag{A.13}$$

$$M_{26} = -M_{35} = \rho\pi \frac{a_\alpha^3 a_\beta^3}{l^2} \left[\frac{a_\alpha^3 - a_\beta^3}{a_\alpha^3 + a_\beta^3}\right] \tag{A.14}$$

Apêndice B

B.1 Dedução das expressões do Capítulo 6

Recordando do **Capítulo 6** os índices

- $\alpha : FPSO(x_1, y_1, \psi_1)$
- $\beta : Aliviador(x_2, y_2, \psi_2)$

e que a energia cinética de interação é dada por

$$\mathbb{W}_{\alpha\beta} = \rho(\lambda_\alpha c_\alpha \cdot F^{\alpha\beta}\lambda_\beta c_\beta)$$

tem-se, pelas equações de Lagrange, para o FPSO:

$$X^{\alpha}_{int} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbb{W}_{\alpha\beta}}{\partial \dot{x_1}}\right) - \frac{\partial \mathbb{W}_{\alpha\beta}}{\partial x_1}$$

que é a força de interação de *surge* do sistema. Então, primeiramente:

$$\frac{\partial \mathbb{W}_{\alpha\beta}}{\partial \dot{x_1}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x_1}}(\rho(\lambda_\alpha c_\alpha \cdot F^{\alpha\beta}\lambda_\beta c_\beta)) = \rho\left[\lambda_\alpha \frac{\partial c_\alpha}{\partial \dot{x_1}} \cdot F^{\alpha\beta}\lambda_\beta c_\beta + \lambda_\alpha c_\alpha \cdot \frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial \dot{x_1}}\lambda_\beta c_\beta\right]$$

Como

$$\frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial \dot{x_1}} = 0$$

então

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbb{W}_{\alpha\beta}}{d\dot{x_1}}\right) = \rho\left[\lambda_\alpha \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial c_\alpha}{\partial \dot{x_1}}\right) \cdot F^{\alpha\beta}\lambda_\beta c_\beta + \lambda_\alpha \frac{\partial c_\alpha}{\partial \dot{x_1}} \cdot \frac{dF^{\alpha\beta}}{dt}\lambda_\beta c_\beta + \lambda_\alpha \frac{\partial c_\alpha}{\partial \dot{x_1}} \cdot F^{\alpha\beta}\lambda_\beta \frac{dc_\beta}{dt}\right]$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial \mathbb{W}_{\alpha\beta}}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}(\rho(\lambda_\alpha c_\alpha \cdot F^{\alpha\beta}\lambda_\beta c_\beta)) = \rho\left[\lambda_\alpha c_\alpha \cdot \frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x_1}\lambda_\beta c_\beta\right]$$

já que

$$\frac{\partial c_i}{\partial x_1} = 0; \qquad i = \alpha, \beta$$

Então como resultado para a força de interação de *surge* do sistema vem:

$$X^{\alpha}_{int} = \rho \left[\lambda_\alpha \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial c_\alpha}{\partial \dot{x}_1}\right) \cdot F^{\alpha\beta}\lambda_\beta c_\beta + \lambda_\alpha \frac{\partial c_\alpha}{\partial \dot{x}_1} \cdot \frac{dF^{\alpha\beta}}{dt}\lambda_\beta c_\beta + \lambda_\alpha \frac{\partial c_\alpha}{\partial \dot{x}_1} \cdot F^{\alpha\beta}\lambda_\beta \frac{dc_\beta}{dt} \right.$$
$$\left. -\lambda_\alpha \frac{\partial c_\alpha}{\partial x_1} \cdot F^{\alpha\beta}\lambda_\beta c_\beta + \lambda_\alpha c_\alpha \cdot \frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x_1}\lambda_\beta c_\beta \right] \tag{B.1}$$

Procedendo de maneira análoga para a força de interação de *sway*:

$$Y^{\alpha}_{int} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbb{W}_{\alpha\beta}}{\partial \dot{y}_1}\right) - \frac{\partial \mathbb{W}_{\alpha\beta}}{\partial y_1}$$

Novamente:

$$\frac{\partial \mathbb{W}_{\alpha\beta}}{\partial \dot{y}_1} = \rho \frac{\partial}{\partial \dot{y}_1}(\lambda_\alpha c_\alpha \cdot F^{\alpha\beta}\lambda_\beta c_\beta) = \rho \left[\lambda_\alpha \frac{\partial c_\alpha}{\partial \dot{y}_1} \cdot F^{\alpha\beta}\lambda_\beta c_\beta + \lambda_\alpha c_\alpha \cdot \frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial \dot{y}_1}\lambda_\beta c_\beta \right]$$

Da mesma maneira

$$\frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial \dot{y}_1} = 0$$

de modo que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbb{W}_{\alpha\beta}}{\partial \dot{y}_1}\right) = \rho \left[\lambda_\alpha \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial c_\alpha}{\partial \dot{y}_1}\right) \cdot F^{\alpha\beta}\lambda_\beta c_\beta + \lambda_\alpha \frac{\partial c_\alpha}{\partial \dot{y}_1} \cdot \frac{dF^{\alpha\beta}}{dt}\lambda_\beta c_\beta + \lambda_\alpha \frac{\partial c_\alpha}{\partial \dot{y}_1} \cdot F^{\alpha\beta}\lambda_\beta \frac{dc_\beta}{dt} \right]$$

Para o segundo termo vem

$$\frac{\partial \mathbb{W}_{\alpha\beta}}{\partial y_1} = \rho \frac{\partial}{\partial y_1}(\lambda_\alpha c_\alpha \cdot F^{\alpha\beta}\lambda_\beta c_\beta) = \rho \left[\lambda_\alpha c_\alpha \cdot \frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial y_1}\lambda_\beta c_\beta \right]$$

pois, novamente

$$\frac{\partial c_i}{\partial y_1} = 0; \qquad i = \alpha, \beta$$

Portanto

$$Y^{\alpha}_{int} = \rho \left[\lambda_\alpha \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial c_\alpha}{\partial \dot{y}_1}\right) \cdot F^{\alpha\beta}\lambda_\beta c_\beta + \lambda_\alpha \frac{\partial c_\alpha}{\partial \dot{y}_1} \cdot \frac{dF^{\alpha\beta}}{dt}\lambda_\beta c_\beta + \lambda_\alpha \frac{\partial c_\alpha}{\partial \dot{y}_1} \cdot F^{\alpha\beta}\lambda_\beta \frac{dc_\beta}{dt} \right.$$

$$-\lambda_\alpha c_\alpha \cdot \frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial y_1}\lambda_\beta c_\beta\Bigg] \tag{B.2}$$

Finalmente, para a expressão do momento de interação de *yaw*:

$$Z^\alpha_{int} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbb{W}_{\alpha\beta}}{\partial \dot{\Psi}_1}\right) - \frac{\partial \mathbb{W}_{\alpha\beta}}{\partial \Psi_1}$$

E assim

$$\frac{\partial \mathbb{W}_{\alpha\beta}}{\partial \dot{\Psi}_1} = \rho\,\frac{\partial}{\partial \dot{\Psi}_1}(\lambda_\alpha c_\alpha \cdot F^{\alpha\beta}\lambda_\beta c_\beta) = \rho\left[\lambda_\alpha \frac{\partial c_\alpha}{\partial \dot{\Psi}_1}\cdot F^{\alpha\beta}\lambda_\beta c_\beta\right]$$

porque

$$\frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial \dot{\Psi}_1} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial c_\beta}{\partial \dot{\Psi}_1} = 0$$

Derivando em relação ao tempo:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbb{W}_{\alpha\beta}}{\partial \dot{\Psi}_1}\right) = \rho\,\frac{d}{dt}\left[\lambda_\alpha \frac{\partial c_\alpha}{\partial \dot{\Psi}_1}\cdot F^{\alpha\beta}\lambda_\beta c_\beta\right] = \rho\,\Bigg[\lambda_\alpha \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial c_\alpha}{\partial \dot{\Psi}_1}\right)\cdot F^{\alpha\beta}\lambda_\beta c_\beta +$$

$$+\lambda_\alpha \frac{\partial c_\alpha}{\partial \dot{\Psi}_1}\cdot \frac{dF^{\alpha\beta}}{dt}\lambda_\beta c_\beta + \lambda_\alpha \frac{\partial c_\alpha}{\partial \dot{\Psi}_1}\cdot F^{\alpha\beta}\lambda_\beta \frac{dc_\beta}{dt}\Bigg]$$

Para o segundo termo:

$$\frac{\partial \mathbb{W}_{\alpha\beta}}{\partial \Psi_1} = \rho\,\frac{\partial}{\partial \Psi_1}(\lambda_\alpha c_\alpha \cdot F^{\alpha\beta}\lambda_\beta c_\beta) = \rho\left[\lambda_\alpha \frac{\partial c_\alpha}{\partial \Psi_1}\cdot F^{\alpha\beta}\lambda_\beta c_\beta + \lambda_\alpha c_\alpha \cdot \frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial \Psi_1}\lambda_\beta c_\beta\right]$$

e portanto

$$Z^\alpha_{int} = \rho\,\Bigg[\lambda_\alpha \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial c_\alpha}{\partial \dot{\Psi}_1}\right)\cdot F^{\alpha\beta}\lambda_\beta c_\beta + \lambda_\alpha \frac{\partial c_\alpha}{\partial \dot{\Psi}_1}\cdot \frac{dF^{\alpha\beta}}{dt}\lambda_\beta c_\beta + \lambda_\alpha \frac{\partial c_\alpha}{\partial \dot{\Psi}_1}\cdot F^{\alpha\beta}\lambda_\beta \frac{dc_\beta}{dt}$$

$$-\lambda_\alpha \frac{\partial c_\alpha}{\partial \Psi_1}\cdot F^{\alpha\beta}\lambda_\beta c_\beta - \lambda_\alpha c_\alpha \cdot \frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial \Psi_1}\lambda_\beta c_\beta\Bigg] \tag{B.3}$$

Trocando α por β e "1" por "2" nas expressões B.1, B.2 e B.3 têm-se, para o navio aliviador

$$X^\beta_{int} = \rho\,\Bigg[\lambda_\alpha \frac{dc_\alpha}{dt}\cdot F^{\alpha\beta}\lambda_\beta \frac{\partial c_\beta}{\partial \dot{x}_2} + \lambda_\alpha c_\alpha \cdot \frac{dF^{\alpha\beta}}{dt}\lambda_\beta \frac{\partial c_\beta}{\partial \dot{x}_2}$$

$$+\lambda_\alpha c_\alpha \cdot F^{\alpha\beta}\lambda_\beta \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial c_\beta}{\partial \dot{x}_2}\right) - \lambda_\alpha c_\alpha \cdot \frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial \dot{x}_2}\lambda_\beta c_\beta\Bigg] \tag{B.4}$$

para a força de interação de *surge*;

$$Y^{\beta}_{int} = \rho \left[\lambda_\alpha \frac{dc_\alpha}{dt} \cdot F^{\alpha\beta} \lambda_\beta \frac{\partial c_\beta}{\partial \dot{y}_2} + \lambda_\alpha c_\alpha \cdot \frac{dF^{\alpha\beta}}{dt} \lambda_\beta \frac{\partial c_\beta}{\partial \dot{y}_2} \right.$$

$$\left. + \lambda_\alpha c_\alpha \cdot F^{\alpha\beta} \lambda_\beta \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial c_\beta}{\partial \dot{y}_2} \right) - \lambda_\alpha c_\alpha \cdot \frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial y_2} \lambda_\beta c_\beta \right] \tag{B.5}$$

para a força de interação de *sway*; e

$$Z^{\beta}_{int} = \rho \left[\lambda_\alpha \frac{dc_\alpha}{dt} \cdot F^{\alpha\beta} \lambda_\beta \frac{\partial c_\beta}{\partial \dot{\Psi}_2} + \lambda_\alpha c_\alpha \cdot \frac{dF^{\alpha\beta}}{dt} \lambda_\beta \frac{\partial c_\beta}{\partial \dot{\Psi}_2} + \lambda_\alpha c_\alpha \cdot F^{\alpha\beta} \lambda_\beta \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial c_\beta}{\partial \dot{\Psi}_2} \right) \right.$$

$$\left. - \lambda_\alpha c_\alpha \cdot \frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial \Psi_2} \lambda_\beta c_\beta - \lambda_\alpha c_\alpha \cdot F^{\alpha\beta} \lambda_\beta \frac{\partial c_\beta}{\partial \Psi_2} \right] \tag{B.6}$$

para o momento de interação de *yaw*.

Nota-se nas expressões acima termos que são comuns a todas elas, como $\lambda_\alpha, \lambda_\beta, c_\alpha$, $c_\beta, F^{\alpha\beta}, \frac{dc_\alpha}{dt}; \frac{dc_\beta}{dt}$ e $\frac{dF^{\alpha\beta}}{dt}$. Outros aparecem apenas uma vez nas expressões de forças e momentos, a saber:

- *Força de Surge no FPSO*: $\frac{\partial c_\alpha}{\partial \dot{x}_1}; \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial c_\alpha}{\partial \dot{x}_1}\right); \frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x_1}$
- *Força de Sway no FPSO*: $\frac{\partial c_\alpha}{\partial \dot{y}_1}; \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial c_\alpha}{\partial \dot{y}_1}\right); \frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial y_1}$
- *Momento de Yaw no FPSO*: $\frac{\partial c_\alpha}{\partial \dot{\Psi}_1}; \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial c_\alpha}{\partial \dot{\Psi}_1}\right); \frac{\partial c_\alpha}{\partial \Psi_1}; \frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial Psi_1}$
- *Força de Surge no Aliviador*: $\frac{\partial c_\beta}{\partial \dot{x}_2}; \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial c_\beta}{\partial \dot{x}_2}\right); \frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x_2}$
- *Força de Sway no Aliviador*: $\frac{\partial c_\beta}{\partial \dot{y}_2}; \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial c_\beta}{\partial \dot{y}_2}\right); \frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial y_2}$
- *Momento de Yaw no Aliviador*: $\frac{\partial c_\beta}{\partial \dot{\Psi}_2}; \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial c_\beta}{\partial \dot{\Psi}_2}\right); \frac{\partial c_\beta}{\partial \Psi_2}; \frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial \Psi_2}$

Nas duas seções seguintes os primeiros termos, que aparecem sempre, serão definidos como "*Termos Gerais*", e o restante, "*Termos Específicos*".

B.1.1 Termos Gerais

Da definição da matriz λ_α no **Capítulo 4** vem:

$$\lambda_\alpha = \begin{bmatrix} \left(\eta_\alpha + \frac{A^\alpha_{11}}{\rho}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\eta_\alpha + \frac{A^\alpha_{22}}{\rho}\right) & 0 & 0 & 0 & \left(\xi^\alpha_x + \frac{A^\alpha_{26}}{\rho}\right) \\ 0 & 0 & \eta_\alpha & 0 & -\xi^\alpha_x & 0 \end{bmatrix} \tag{B.7}$$

e, conseqüentemente:

$$\lambda_\beta = \begin{bmatrix} \left(\eta_\beta + \frac{A^\beta_{11}}{\rho}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\eta_\beta + \frac{A^\beta_{22}}{\rho}\right) & 0 & 0 & 0 & \left(\xi^\beta_x + \frac{A^\beta_{26}}{\rho}\right) \\ 0 & 0 & \eta_\beta & 0 & -\xi^\beta_x & 0 \end{bmatrix} \tag{B.8}$$

É fácil verificar que

$$T^t_\alpha = \begin{bmatrix} cos\ \psi_1 & sin\ \psi_1 & 0 \\ -sin\ \psi_1 & cos\ \psi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad T_\beta = \begin{bmatrix} cos\ \psi_2 & -sin\ \psi_2 & 0 \\ sin\ \psi_2 & cos\ \psi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e como

$$\vec{V}_\alpha = T_\alpha \vec{v}_\alpha$$

se u_1, v_1, r_1 e u_2, v_2 e r_2 são, respectivamente, as velocidades do FPSO e aliviador no sistema referencial local de coordenadas e sendo U a velocidade da correnteza, então:

$$\text{FPSO} \begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 cos\ \psi_1 - v_1 sin\ \psi_1 - U \\ \dot{y}_1 = u_1 sin\ \psi_1 + v_1 cos\ \psi_1 \\ \dot{\psi}_1 = r_1 \end{cases}$$

$$\text{Aliviador} \begin{cases} \dot{x}_2 = u_2 cos\ \psi_2 - v_2 sin\ \psi_2 - U \\ \dot{y}_2 = u_2 sin\ \psi_2 + v_2 cos\ \psi_2 \\ \dot{\psi}_2 = r_2 \end{cases}$$

de modo que, a partir da definição do vetor coluna c_α também do **Capítulo 4**, tem-se

$$c_\alpha = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 cos\ \psi_1 + \dot{y}_1 sin\ \psi_1 \\ -\dot{x}_1 sin\ \psi_1 + \dot{y}_1 cos\ \psi_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dot{\psi}_1 \end{bmatrix} \quad c_\beta = \begin{bmatrix} \dot{x}_2 cos\ \psi_2 + \dot{y}_2 sin\ \psi_2 \\ -\dot{x}_2 sin\ \psi_2 + \dot{y}_2 cos\ \psi_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dot{\psi}_2 \end{bmatrix} \tag{B.9}$$

De 4.25:

$$F^{\alpha\beta} = T^t_\alpha G^{\alpha\beta} T_\beta$$

onde (segundo 4.24):

$$G^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]^{3/2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]^{3/2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]^{3/2}} \end{bmatrix} -3\begin{bmatrix} \frac{(x_2-x_1)^2}{[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]^{5/2}} & \frac{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}{[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]^{5/2}} & 0 \\ \frac{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}{[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]^{5/2}} & \frac{(y_2-y_1)^2}{[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]^{5/2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

Derivando B.9 em relação ao tempo:

$$\frac{\partial c_\alpha}{\partial t} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 cos\ \psi_1 - \dot{x}_1\dot{\psi}_1 sin\ \psi_1 + \ddot{y}_1 sin\ \psi_1 + \dot{y}_1\dot{\psi}_1 cos\ \psi_1 \\ -\ddot{x}_1 sin\ \psi_1 - \dot{x}_1\dot{\psi}_1 cos\ \psi_1 + \ddot{y}_1 cos\ \psi_1 - \dot{y}_1\dot{\psi}_1 sin\ \psi_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \ddot{\psi}_1 \end{bmatrix} \tag{B.10}$$

$$\frac{\partial c_\beta}{\partial t} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_2 cos\ \psi_2 - \dot{x}_2\dot{\psi}_2 sin\ \psi_2 + \ddot{y}_2 sin\ \psi_2 + \dot{y}_2\dot{\psi}_2 cos\ \psi_2 \\ -\ddot{x}_2 sin\ \psi_2 - \dot{x}_2\dot{\psi}_2 cos\ \psi_2 + \ddot{y}_2 cos\ \psi_2 - \dot{y}_2\dot{\psi}_2 sin\ \psi_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \ddot{\psi}_2 \end{bmatrix} \tag{B.11}$$

Agora, derivando 4.25 em relação ao tempo:

$$\frac{dF^{\alpha\beta}}{dt} = \frac{dT^t_\alpha}{dt}G^{\alpha\beta}T_\beta + T^t_\alpha\frac{dG^{\alpha\beta}}{dt}T_\beta + T^t_\alpha G^{\alpha\beta}T_\beta\frac{dT_\beta}{dt} \tag{B.12}$$

onde

$$\frac{dT^t_\alpha}{dt} = \dot{\psi}_1\begin{bmatrix} -sin\ \psi_1 & cos\ \psi_1 & 0 \\ -cos\ \psi_1 & -sin\ \psi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \frac{dT_\beta}{dt} = \dot{\psi}_2\begin{bmatrix} -sin\ \psi_2 & -cos\ \psi_2 & 0 \\ cos\ \psi_2 & -sin\ \psi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\frac{dG^{\alpha\beta}}{dt} = -\frac{3}{4\pi[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]^{5/2}}\left(\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} + \right.$$

$$\left. +\frac{1}{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{12} & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

com

- $a_{11} = a_{22} = a_{33} = (x_2 - x_1)(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + (y_2 - y_1)(\dot{y}_2 - \dot{y}_1)$
- $b_{11} = -(x_2-x_1)\{(5(x_2-x_1)^2 - 2[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2])(\dot{x}_2-\dot{x}_1)+5(x_2-x_1)(y_2-y_1)(\dot{y}_2-\dot{y}_1)\}$
- $b_{12} = (-1)\{(5(x_2-x_1)^2-[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2])(\dot{x}_2-\dot{x}_1)+(5(y_2-y_1)^2-[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2])(\dot{y}_2-\dot{y}_1)\}$
- $b_{22} = -(y_2-y_1)\{(5(x_2-x_1)(y_2-y_1)(\dot{x}_2-\dot{x}_1)+(5(y_2-y_1)^2-2[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2])(\dot{y}_2-\dot{y}_1)\}$

B.1.2 Termos Específicos

Força de Interação de *Surge* no FPSO

Derivando B.9 em relação ao tempo vem:

$$\frac{\partial c_\alpha}{\partial \dot{x}_1} = \begin{bmatrix} cos\,\psi_1 \\ -sin\,\psi_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial c_\alpha}{\partial \dot{x}_1}\right) = \begin{bmatrix} -\dot{\psi}_1 sin\,\psi_1 \\ -\dot{\psi}_1 cos\,\psi_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{B.13}$$

E, de 4.25:

$$\frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x_1} = T^t_\alpha \frac{\partial G^{\alpha\beta}}{\partial x_1} T_\beta \tag{B.14}$$

onde

$$\frac{dG^{\alpha\beta}}{dx_1} = \frac{3}{4\pi[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]^{5/2}}\left(\begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{bmatrix} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{12} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

com

- $c_{11} = c_{22} = c_{33} = (x_2 - x_1)$
- $d_{11} = (x_2 - x_1)\{5(x_2-x_1)^2 - 2[(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2]\}$
- $d_{12} = (y_2 - y_1)\{5(x_2-x_1)^2 - [(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2]\}$
- $d_{22} = 5(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)^2$

Força de Interação de *Sway* no FPSO

Analogamente ao que foi feito na seção anterior para a força de *surge*, os termos que aparecem na equação da força de *sway* são:

$$\frac{\partial c_\alpha}{\partial y_1} = \begin{bmatrix} sin\ \psi_1 \\ cos\ \psi_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial c_\alpha}{\partial y_1}\right) = \begin{bmatrix} \dot{\psi}_1 cos\ \psi_1 \\ -\dot{\psi}_1 sin\ \psi_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{(B.15)}$$

e

$$\frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial y_1} = T_\alpha^t \frac{\partial G^{\alpha\beta}}{\partial y_1} T_\beta \quad \text{(B.16)}$$

onde

$$\frac{dG^{\alpha\beta}}{dy_1} = \frac{3}{4\pi[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]^{5/2}}\left(\begin{bmatrix} e_{11} & 0 & 0 \\ 0 & e_{22} & 0 \\ 0 & 0 & e_{33} \end{bmatrix} - \right.$$

$$-\frac{1}{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & 0 \\ f_{12} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\Bigg)$$

com

- $e_{11} = e_{22} = e_{33} = (y_2 - y_1)$
- $f_{11} = 5(x_2 - x_1)^2(y_2 - y_1)$
- $f_{12} = (x_2 - x_1)\{5(y_2 - y_1)^2 - [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]\}$
- $f_{22} = (y_2 - y_1)\{5(y_2 - y_1)^2 - 2[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]\}$

Momento de Interação de *Yaw* no FPSO

Finalmente, os termos que aparecem na expressão do momento de interação de *yaw* para o FPSO são definidos pelas seguintes expressões: a partir de B.9 vem:

$$\frac{\partial c_\alpha}{\partial \dot{\psi}_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial c_\alpha}{\partial \dot{\psi}_1}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{B.17}$$

e

$$\frac{\partial c_\alpha}{\partial \psi_1} = \begin{bmatrix} -\dot{x}_1 sin\ \psi_1 + \dot{y}_1 cos\ \psi_1 \\ -\dot{x}_1 cos\ \psi_1 - \dot{y}_1 sin\ \psi_1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{B.18}$$

De 4.25:

$$\frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial \psi_1} = \frac{\partial T^t_\alpha}{\partial \psi_1} G^{\alpha\beta} T_\beta \tag{B.19}$$

onde

$$\frac{\partial T^t_\alpha}{\partial \psi_1} = \begin{bmatrix} -sin\ \psi_1 & cos\ \psi_1 & 0 \\ -cos\ \psi_1 & -sin\ \psi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

lembrando que $G^{\alpha\beta}$ só depende de $\vec{R}_{\alpha\beta}$.