

São Paulo  
1997

Dissertação apresentada à Escola  
Politécnica da Universidade de São  
Paulo para obtenção do título de  
Mestre em Engenharia

**ESTUDO DAS POTENCIALIDADES DO PROGRAMA BOSORS NA  
ANÁLISE ESTRUTURAL DE CASCAS DE REVOLUÇÃO**

**VLADIMIR T. GONZÁLEZ FERNÁNDEZ**

**VLADIMIR T. GONZÁLEZ FERNÁNDEZ**

**ESTUDO DAS POTENCIALIDADES DO PROGRAMA BOSORS NA  
ANÁLISE ESTRUTURAL DE CASCAS DE REVOLUÇÃO**

Dissertação apresentada à Escola  
Politécnica da Universidade de  
São Paulo para obtenção do título de  
Mestre em Engenharia.

Área de concentração:  
Engenharia Naval.

Orientador:

Prof. Dr. Miguel Angel Buelta Martínez.

**São Paulo  
1997**

## DEDICATÓRIA

A minha esposa Mariza e a meu filho Vladimir,  
e pelo pouco tempo que este trabalho  
permitiu-me dedicar-lhes

A meus pais René e Olga pela formação que me proporcionaram.  
A meus irmãos e amigos, cubanos e brasileiros, pelo apoio em todos os momentos.  
A Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo pela concessão da bolsa de estudos e dotações suplementares para a execução deste trabalho.  
Aos professores que colaboraram direta ou indiretamente para o desenvolvimento das pesquisas realizadas, e em especial a meu orientador, Prof. Dr. Miguel Ángel Buelta Martínez, pela amizade surgida nesses anos e pela orientação, dedicação e incentivo contínuo que permitiram a conclusão deste trabalho.

## AGRADECIMENTOS

## RESUMIO

Neste trabalho são estudadas as potencialidades de aplicação do programa BOSORS na análise de diferentes tipos de estruturas em forma de cascas de revolução. O programa BOSORS executa o cálculo de tensões, deslocamentos e cargas críticas, sob carregamento axissimétrico, dentro do regime não-linear geométrico e físico. Nesse aspecto são apresentados os fundamentos teóricos e estratégias de análise utilizadas pelo programa, baseado no método das diferenças finitas.

Como exemplo para verificação das potencialidades do programa, são utilizadas estruturas típicas de submersíveis, considerando as regiões de descontinuidade geométrica. Apesar das conclusões serem gerais e aplicáveis a outras cascas de revolução. São comparados os resultados obtidos com os de outros programas, seja de elementos finitos, seja baseados em formulações teóricas, podendo-se inferir dos resultados a utilidade do BOSORS como ferramenta de análise estrutural dentro do regime não-linear, pela simplicidade de sua utilização e precisão de cálculo.

In this work the potentialities of application of the program BOSORS5 in the analysis of several kinds of structures in shape of revolution's shells, are studied. The program BOSORS5 carries out the calculation of tensions, deformations and critical loads, under axisymmetric external loads, within the nonlinear geometric and physic behavior. In this aspect the theoretical foundation and strategies of analysis utilized by the program are introduced, based on the method of the finite differences.

As example to the verification of the potentialities of the program, typical structures of submarines are utilized, considering the regions of geometric discontinuities. The conclusions are general and applicable to other revolution's shells.

Comparisons of the results obtained with other programs of finite elements or based in theoretical formulations are made, could be inferred the utility of the BOSORS5 like tool of structural calculation with nonlinear behavior by the simplicity of its utilization and precision of results.

## ABSTRACT

(caso necessário utilize folhas adicionais numeradas)

ERRATA

ORIENTADOR: PROF. DR. MIGUEL ANGEL BUELTA MARTINEZ  
DATA DA DEFESA: 18.11.1997

CANDIDATO: VLADIMIR TOMAS GONZALEZ FERNANDEZ  
TÍTULO DO TRABALHO: "ESTUDO DAS POTENCIALIDADES DO  
PROGRAMA BOSOR 5 NA ANÁLISE ESTRUTURAL DE CASCAS DE  
REVOLUÇÃO"

PROGRAMA: NÍVEL: MESTRADO: ( X )  
DOUTORADO: ( )



### CAPÍTULO 3 MÉTODOS DE SOLUÇÃO UTILIZADOS PELO PROGRAMA BOSORS

#### 3.1 Introdução

Na análise de estruturas é de fundamental importância a determinação das cargas críticas. A carga crítica pode corresponder a um ponto limite ou a um ponto de bifurcação do equilíbrio, o qual define-se como “o ponto a partir do qual a estrutura pode percorrer um caminho alternativo e ainda estar em equilíbrio”, como será mostrado a seguir.

O cilindro sob carregamento axial, apresentado na Figura 3.1.1 se deforma de maneira axissimétrica ao longo do caminho OA, até que o valor máximo ou carga limite  $\lambda_L$  é atingida no ponto A. O cilindro sem imperfeições falhará nesta carga limite seguindo o caminho ABC, ao longo do qual continua a deformação axissimétrica ou algum outro caminho ABD, ao longo do qual têm-se deformações axissimétricas entre A e B, e não axissimétricas entre B e D. Neste caso, no ponto B pode ocorrer flambagem, e a estrutura percorre o trecho BD. O ponto limite corresponde ao ponto A e a bifurcação do equilíbrio ao ponto B [6,14,15].

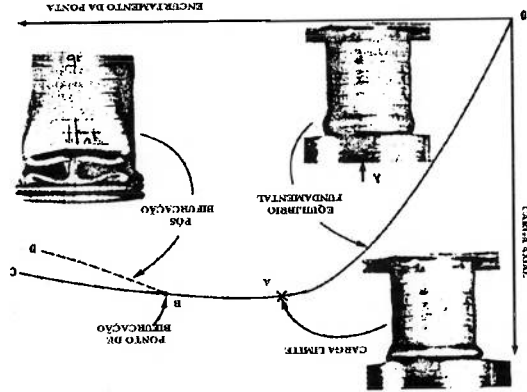


Figura 3.1.1 Cilindro sob compressão axial. Apresentando os pontos limite e de bifurcação.



No caso do carregamento, foi considerada só a pressão externa em todo o

comprimento do modelo e uma carga axial em função da pressão atuante nas extremidades

fechadas do cilindro.

As condições de contorno correspondentes aos planos de simetria que limitam o

modelo, sendo  $u$  o deslocamento axial,  $v$  o deslocamento circumferencial,  $w$  o deslocamento

radial e  $\theta$  o deslocamento angular, são as seguintes:

- Nó A :  $u = 0, v = 1, w = 0, \theta = 1$       0 : indica livre
- Nó B :  $u = 1, v = 1, w = 0, \theta = 1$       1 : indica restrito

Para esse modelo o programa calcula os deslocamentos radiais máximos a cada

passo de pressão, segundo um incremento definido na entrada de dados, considerando-se a

não-linearidade tanto geométrica como de material. Esses resultados são utilizados para

levantar a trajetória de pressão externa aplicada vs. deslocamento radial máximo.

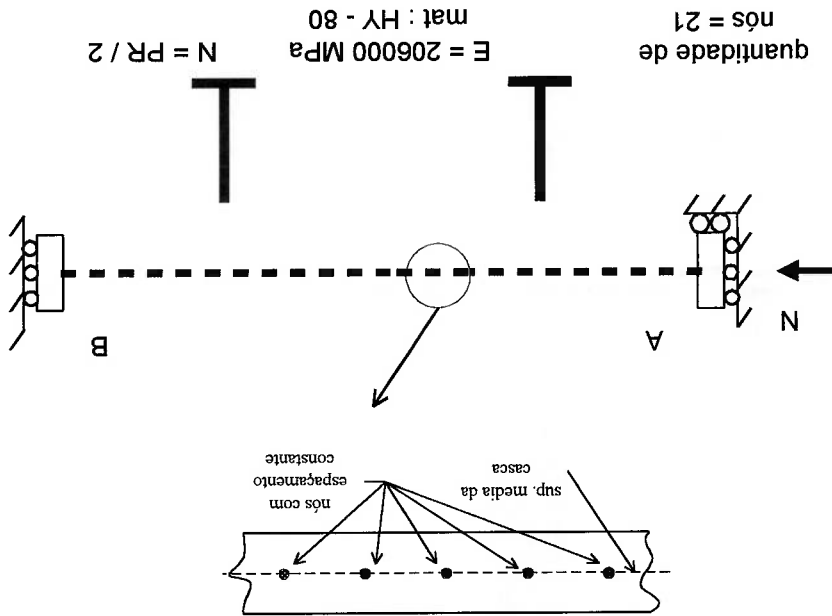


Figura 5.2 Discretização do MODELO1, com as condições de contorno.

	Dedicatória	i
	Agradecimentos	ii
	Resumo	iii
	“Abstract”	iv
	Índice Geral	v
	Lista de tabelas	vii
	Lista de figuras	viii
	Nomenclatura	xi
	1 INTRODUÇÃO	1
	1.1 Explicações Iniciais	1
	1.2 Objetivos e Justificativa	3
	1.3 Apresentação do Trabalho	4
	2 INTRODUÇÃO À TEORIA DE CASCAS	6
	2.1 Propriedades Geométricas das Superfícies	6
	2.2 Primeira Aproximação a Teoria das Cascas Finas	10
	2.3 Equações de Equilíbrio	13
	2.4 Relações entre Deformações e Deslocamentos	22
	2.5 Equações Constitutivas	26
	2.6 Condições de Contorno	29
	2.7 Teoria de Membrana das Cascas de Revolução	32
	2.8 Inclusão da Não Linearidade	38
40	3 MÉTODOS DE SOLUÇÃO UTILIZADOS PELO PROGRAMA BOSOR5	40
	3.1 Introdução	40
	3.2 Utilização do Programa BOSOR5	45
	3.3 Solução da Não Linearidade Segundo o BOSOR5	49
	3.4 Equações Básicas	53
	3.5 Estratégia na Solução da Não Linearidade Física	56
	3.6 Implementação dentro do Programa BOSOR5	60
	3.7 Estratégia Usada no BOSOR5 para Obter a Carga Mínima de Flambagem	64

69	4 ESTRUTURAS DE SUBMARINOS E TIPOS DE FALHAS
69	4.1 Estrutura Tipica de um Submersivel
71	4.2 Tipos de Falhas Estruturais
71	4.2.1 Falhas do Casco Resistente
73	4.2.2 Falhas das Cavernas
75	4.2.3 Falhas nas Descontinuidades
78	5 APLICAÇÕES DO PROGRAMA BOSORS
78	5.1 Introdução
78	5.2 Cilindro Reforado
96	5.3 Cone Reforado
100	5.4 Modelo de Descontinuidade com Elemento de Transição
111	6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS
111	6.1 Conclusões
112	6.2 Sugestões para Futuros Trabalhos
114	7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS
118	ANEXO A - BOSORS. Elemento de Diferença Finita. Matriz Rígidez

82	Valores de pressão vs. deslocamento máximo. MODELO1.....	5.2.1
85	Comparação de resultados do cálculo da pressão de flambagem. MODELO1.....	5.2.2
86	Tensões MODELO1. Pressão 2 MPa.....	5.2.3
88	Valores de pressão vs. deslocamento máximo. MODELO2.....	5.2.4
89	Comparação de resultados do cálculo da pressão de flambagem. MODELO2.....	5.2.5
90	Tensões MODELO2. Pressão 2 MPa.....	5.2.6
91	Valores de pressão vs. deslocamento máximo. MODELO3 (primeira corrida).....	5.2.7
92	Valores de pressão vs. deslocamento máximo. MODELO3 (segunda corrida).....	5.2.8
94	Pressão crítica segundo BOSOR5 e FLAMBIMP. MODELO3.....	5.2.9
95	Valores de tensões para o MODELO3.....	5.2.10
98	Valores de pressão crítica para o CONE1. Programa FLAMBIMP.....	5.3.1
99	Valores de pressão crítica para o CONE2. Programa FLAMBIMP.....	5.3.2
108	Valores de tensão equivalente na face interna da casca. BOSOR5 e SAP90.....	5.4.1

Lista de Tabelas

## Lista de Figuras

7	Geometria de uma superfície.....	2.1.1
14	Elemento de casca, geometria e tensões.....	2.3.1a
16	Forças resultantes por unidade de comprimento.....	2.3.1b
16	Momentos resultantes por unidade de comprimento.....	2.3.1c
17	Forças e momentos resultantes nas faces CD e DE.....	2.3.1d
30	Elemento no contorno da casca.....	2.6.1
34	Elemento de casca de revolução usado para deduzir as equações de equilíbrio.....	2.7.1
35	Projecção do elemento de casca em três planos.....	2.7.2
37	Análise de um segmento de casca de revolução.....	2.7.3
40	Cilindro sob compressão axial. Apresentando os pontos limites e de bifurcação.....	3.1.1
41	Curve de carga vs. deslocamento apresentando os pontos limite e de bifurcação.....	3.1.2
42	Diferentes tipos de relações carga deslocamento $\lambda$ vs. $w_b$ .....	3.1.3
43	Painel cilíndrico em compressão axial. Bifurcação assimétrica.....	3.1.4
44	Chapa com carregamento no plano.....	3.1.5
44	Cilindro em compressão axial.....	3.1.6
47	Coordenadas a serem utilizadas na modelagem com BOSOR5.....	3.2.1
50	Fluxograma do duplo laço de iteração utilizado no BOSOR5.....	3.3.1
52	Representação esquemática da solução do sistema B.....	3.3.2
54	Coordenadas da superfície de referência, geometria, deslocamentos e esforços resultantes e pressão.....	3.4.1
55	Localização das variáveis dos pontos nodais da casca.....	3.4.2

63	3.6.1	Variáveis e convênios de sinais dos anéis discretos.....
63	3.6.2	Localização do anel em relação a casca.....
66	3.7.1	Cálculo de carga mínima de flambagem segundo BOSORS.....
69	4.1.1	Estrutura típica de um submarino.....
70	4.1.2	Distribuição de pressões no casco.....
72	4.2.1.1	Falhas do casco resistente entre cavernas.....
73	4.2.1.2	Flambagem do casco resistente entre anteparas.....
73	4.2.2.1	Flambagem de cavernas.....
74	4.2.2.2	Escoramento do ponto de flange livre das cavernas.....
75	4.2.3.1	Transições axissimétricas típicas.....
76	4.2.3.2	Anel de transição típico.....
79	5.2.1	Cilindro reforçado com cavernas internas, sob pressão externa. MODELO1. Geometria e carregamento.....
80	5.2.2	Discretização MODELO1. Condições de contorno.....
87	5.2.3	Cilindro reforçado com cavernas internas, sob pressão externa. MODELO2. Geometria e carregamento.....
87	5.2.4	Discretização MODELO2. Condições de contorno.....
96	5.3.1	Modelo do CONE1. Geometria e dimensões.....
97	5.3.2	Modelo do CONE1. Condições de contorno e carregamento.....
97	5.3.3	Modelo do CONE2. Geometria e dimensões.....
101	5.4.1	Modelo de descontinuidade com elemento de transição.....
102	5.4.2	Variante de discretização.....
103	5.4.3	Distribuição dos segmentos no casco.....
103	5.4.4	Ressalto entre os segmentos.....

105	5.4.5	Modelo discretizado utilizando o programa SAP90.....
106	5.4.6	Modelo deformado segundo SAP90.....
107	5.4.7	Discretização do elemento de transição segundo SAP90.....
118	A1	Elemento de diferença finita usado no programa BOSOR5. Posição de pontos nodais e variáveis.....

## Nomenclatura

[C] : matriz dos coeficientes das equações constitutivas

$ds_1, ds_2$ : dimensões do elemento de casca

$e_1, e_2, n$  : versores nas direções  $\alpha_1, \alpha_2$  e Z

E, F e G : primeiras grandezas fundamentais ou coeficientes métricos

E : módulo de elasticidade

G : módulo de elasticidade transversal

H : força radial atuando no centro de gravidade do anel

h, R : espessura e raio médio de uma casca

$L_1, L_2$  : valores de carga na análise de bifurcação

$M_1$  : momento resultante por unidade de comprimento no plano IZ

$M_2$  : momento resultante por unidade de comprimento no plano ZZ

$M_{12}$  : momento torsor por unidade de comprimento no eixo  $\alpha_1$

$M_{21}$  : momento torsor por unidade de comprimento no eixo  $\alpha_2$

$M_0$  : momento fator de compatibilização nas descontinuidades

M : momento meridional ao redor do centro de gravidade do anel

$N_1$  : força normal por unidade de comprimento na direção 1

$N_2$  : força normal por unidade de comprimento na direção 2

$N_{12}$  : força tangencial por unidade de comprimento no plano  $\alpha_1, \alpha_2$

$N^{(1)}, N^{(2)}$  : forças resultantes por unidade de comprimento na superfície de meia espessura

para um elemento de casca



$N_{\varphi}, N_{\theta}$ : esforços nas direções  $\varphi$ ,  $\theta$  para uma casca de revolução  
 $n_{\min}, n_{\max}$ : número de ondas circunferenciais na análise de bifurcação  
 $n_0$ : número inicial de ondas circunferenciais para a análise de bifurcação  
 $P$ : pressão  
 $p_1, p_2, p_3$ : componentes da pressão nas direções meridional, circunferencial e normal  
 $Q_1$ : força tangencial por unidade de comprimento no plano IZ  
 $Q_2$ : força tangencial por unidade de comprimento no plano ZZ  
 $\vec{q}$ : carregamento externo da casca  
 $q$ : grau de liberdade de um nó ou multiplicador de Lagrange  
 $Q_0$ : esforço cortante de compatibilização nas descontinuidades  
 $R_1$ : raio meridional  
 $R_2$ : raio circunferencial  
 $r_c$ : raio do centro de gravidade do anel  
 $S$ : força cortante atuando ao longo do eixo do centro de gravidade  
 $\delta U$ : trabalho virtual das forças internas  
 $u, u_c, v, v_c, w$ : pontos nodais  
 $u$ : deslocamento axial de um ponto de uma superfície  
 $u_c$ : deslocamento axial do centro de gravidade do anel  
 $V$ : carregamento axial no centro de gravidade do anel  
 $v$ : deslocamento circunferencial de um ponto de uma superfície  
 $v_c$ : deslocamento circunferencial do centro de gravidade do anel  
 $w_c$ : deslocamento radial do centro de gravidade do anel

$w_0$ : deslocamento modal de flambagem  
 $\delta W$ : trabalho virtual realizado pelos esforços externos  
 $w$ : deslocamento radial de um ponto de uma superfície  
 $(\ )_s$ : pertencente ao centro de cisalhamento  
 $\alpha_1, \alpha_2$ : parâmetros geométricos das superfícies  
 $\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}$ : deformações principais  
 $\epsilon^T$ : deformação por temperatura  
 $\epsilon^P, \epsilon^C$ : componentes meridional e circumferencial da deformação plástica  
 $\epsilon^T, \epsilon^C$ : componentes meridional e circumferencial da deformação por fluência  
 $\epsilon_a$ : deformação num ponto qualquer da espessura da casca  
 $\epsilon_t$ : deformação total do anel  
 $\epsilon^P$ : deformação plástica do anel  
 $\epsilon^C$ : deformação por fluência do anel  
 $\epsilon^T$ : deformação por temperatura do anel  
 $\nu$ : coeficiente de Poisson  
 $\tau$ : tensão de cisalhamento  
 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ : tensões normais principais  
 $\bar{\sigma}$ : tensão equivalente  
 $\lambda_L$ : carga limite  
 $\lambda_C$ : carga de bifurcação do equilíbrio  
 $\lambda_S$ : carga limite para uma estrutura com imperfeições

$\lambda$  : carga aplicado

$\psi$  : gradiente da energia da deformação

## CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO

### 1.1 Explicações Iniciais

Várias áreas da engenharia utilizam cascas de revolução como um elemento estrutural, destacando-se entre elas a civil, a aeronáutica, a nuclear e a naval. Na indústria naval os aparelhos submersíveis e estruturas ligadas a pesquisas e exploração de recursos oceânicos incorporam em seu arranjo estrutural cascas de revolução, herméticas, de paredes finas e submetidas a pressões externas. Estas características tornam tais tipos de estruturas suscetíveis a falhas não previstas por meio de uma análise linear. Para essas situações, seria conveniente dispor de ferramentas, que utilizando hipóteses mais realistas, consigam bem representar o comportamento dessas estruturas. Particularmente, tal ferramenta é indispensável no desenvolvimento de projetos de aparelhos submersíveis ou em vasos de pressão onde o peso estrutural deva ser minimizado não somente por economia, como também pela viabilização do próprio projeto. Nesses casos, o projetista estrutural deve ter disponível uma ferramenta de simples utilização e que lhe forneça resultados confiáveis.

No âmbito do Departamento de Engenharia Naval e Oceânica da Escola Politécnica da USP, já em 1978, iniciaram-se atividades de pesquisa nas áreas de projeto, fabricação, reparo e instrumentação de veículos submersíveis, com o objetivo de criar capacidade nacional, dando condições para que a obtenção de tecnologia fosse realizada de forma crítica e ativa, possibilitando a execução de projetos inteiramente nacionais.

No que concerne a estruturas de submarinos, foram compilados os recursos existentes para o projeto estrutural, tanto no País como no exterior, e ainda decodificados

alguns critérios de projeto empregados pelas Marinhas de outros países. No entanto, o emprego militar de submarinos faz que o acesso à bibliografia referente ao projeto dos mesmos seja bastante dificultado, pois normalmente envolve informações consideradas sigilosas. Mesmo quando disponíveis, as referências bibliográficas requerem cuidadoso estudo, pois as vezes contêm informações incompletas que necessitam ser devidamente interpretadas. Assim sendo, qualquer desenvolvimento neste campo depende de esforço e dedicação redobrados, para o pleno esclarecimento das informações obtidas.

Este trabalho insere-se nesse contexto, avaliando e complementando os recursos existentes para o projeto do casco resistente de submarinos, principalmente em regiões de descon continuidades estruturais, e dando continuidade a essa linha de pesquisa [1,2], considerando-se aqui as não linearidades geométrica e física, importantes quando se deseja verificar o colapso desses tipos de estruturas.

O presente estudo, ao abordar o problema da análise estrutural das regiões de descon continuidade das cascas de revolução, incluindo a existência de elementos de transição, considera critérios de projeto propostos em outros trabalhos relacionados na bibliografia [2], aprofundando o conhecimento do comportamento não-linear desse tipo de estrutura. Para tanto, é utilizado o programa de análise de estruturas axissimétricas BOSORS[3] como ferramenta de cálculo. São apresentadas as características do programa, para um melhor entendimento, e realizados testes de utilização do mesmo, para estruturas típicas, comparando-se os resultados com outros programas, seja de elementos finitos, seja baseados em formulações teóricas clássicas deste tipo de estrutura [4,5].

## 1.2. Objetivos e Justificativa

Os objetivos que este trabalho persegue são:

- estudo de estruturas em forma de cascas de revolução, tanto considerando comportamento linear como não linear;
- estudo do comportamento deste tipo de estrutura, quando da análise de estabilidade e determinação do ponto de bifurcação;
- aprofundar-se no conhecimento do programa BOSOR5[3] para cálculo não linear de estruturas em forma de cascas de revolução, incluindo a determinação das cargas críticas e modos de flambagem. Disponibilizar o programa de uma forma mais clara e entendível, o que não ocorria anteriormente;

- avaliar a qualidade dos resultados obtidos pelo programa BOSOR5[3], seja no cálculo de tensões, comparando-o com programas de elementos finitos, seja no cálculo de pressões críticas, comparando-o com formulações analíticas;

- modelagem de cascas típicas e regiões de descontinuidade do casco resistente de submersíveis, verificando a confiabilidade e precisão de cálculo dos resultados, tanto no nível de tensões como no valor das cargas críticas;

O trabalho se justifica, pois o programa BOSOR5[3] permite uma simples discretização desse tipo de estrutura, tendo apresentado resultados considerados confiáveis, fornecendo uma ferramenta de análise extremamente útil.

### 1.3 Apresentação do Trabalho

O texto está organizado em capítulos cujos conteúdos são abaixo resumidos.

Este primeiro capítulo é introdutório e são dadas as explicações iniciais e definidos os objetivos e justificativa do trabalho. No segundo capítulo são expostos os fundamentos teóricos utilizados na teoria de cascas finas, fornecendo as principais hipóteses usadas, as equações de equilíbrio, as equações constitutivas e a teoria de membrana. Todos esses aspectos são relativos à teoria linear básica de cascas, que são necessários para um melhor entendimento quando da análise não-linear.

No terceiro capítulo, são apresentados os fundamentos teóricos utilizados pelo programa BOSOR5[6,7,8] na análise dos problemas nos quais tem-se grandes deslocamentos e plasticidade, e a estratégia seguida na solução. Também é apresentada a metodologia de determinação da carga de flambagem, utilizada pelo programa e alguns aspectos teóricos relacionados com a bifurcação do equilíbrio.

O quarto capítulo diz respeito à apresentação geral do tipo de estrutura onde serão aplicados os conceitos apresentados nos capítulos anteriores, que é a estrutura do casco resistente, sem no entanto limitar o escopo deste trabalho. Neste são dadas as características gerais da configuração dessa estrutura, os tipos de falhas que podem ocorrer e o arranjo típico das descontinuidades existentes nesse casco resistente, que é um dos principais alvos deste trabalho.

No quinto capítulo são apresentadas as aplicações realizadas com o programa BOSOR5[3] no cálculo estrutural para a determinação de tensões, levantamento de curvas de pressão vs. deslocamento radial máximo e pressões críticas, comparando, quando

possível, com resultados obtidos de outros programas de elementos finitos[5] ou formulações teóricas, verificando-se as potencialidades e precisão do BOSOR5[3] na análise de cascas axissimétricas com comportamento não linear tanto geométrico como físico. As aplicações servem ainda para orientar na modelagem de regiões de descontinuidade, de modo a obterem-se resultados confiáveis. No sexto capítulo são apresentadas as conclusões principais do trabalho e sugestões para futuras pesquisas. São apresentados em anexo, algumas características do elemento de diferença finita usado pelo programa BOSOR5[3] e a matriz de rigidez.



## CAPÍTULO 2 INTRODUÇÃO À TEORIA DE CASCAS

### 2.1 Propriedades Geométricas das Superfícies

Neste item pretende-se dar uma idéia geral dos fundamentos geométricos básicos das superfícies, o que servirá para um melhor entendimento da análise não-linear de cascas, que após será estudada.

Uma superfície é definida como sendo o lugar geométrico dos pontos determinados por um vetor  $\vec{r} = r(\alpha_1, \alpha_2)$ , função de dois parâmetros independentes  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  e tendo como origem o ponto fixo "0". As coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  de um ponto da superfície serão funções de  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  e poderão ser escritas na forma:

$$x = f(\alpha_1, \alpha_2) ; y = f(\alpha_1, \alpha_2) ; z = f(\alpha_1, \alpha_2). \quad (2.1.1)$$

Essas equações são chamadas equações paramétricas das superfícies. Se eliminarmos  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  dessas equações, obteremos a forma implícita da equação de uma superfície:

$$f(x, y, z) = 0$$

Qualquer relação entre os parâmetros  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  representa uma curva sobre a superfície, podendo ser  $\vec{r}$  função de apenas um parâmetro independente e o lugar geométrico descrito por  $\vec{r}$  será uma curva sobre a superfície, chamada de "curva paramétrica", já que um parâmetro se mantém constante. Uma superfície pode ser definida por um conjunto duplamente infinito de curvas paramétricas. Os parâmetros  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$

constituem um sistema de coordenadas curvilíneas para os pontos de uma superfície e a posição de cada ponto sobre a superfície é determinada para valores dados de  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ .

Consideram-se dois pontos vizinhos, P e Q, sobre uma superfície, definidos por  $\vec{r}$  e

$\vec{r} + d\vec{r}$ , de coordenadas paramétricas  $(\alpha_1, \alpha_2)$  e  $(\alpha_1 + d\alpha_1, \alpha_2 + d\alpha_2)$ , conforme a Figura

2.1.1

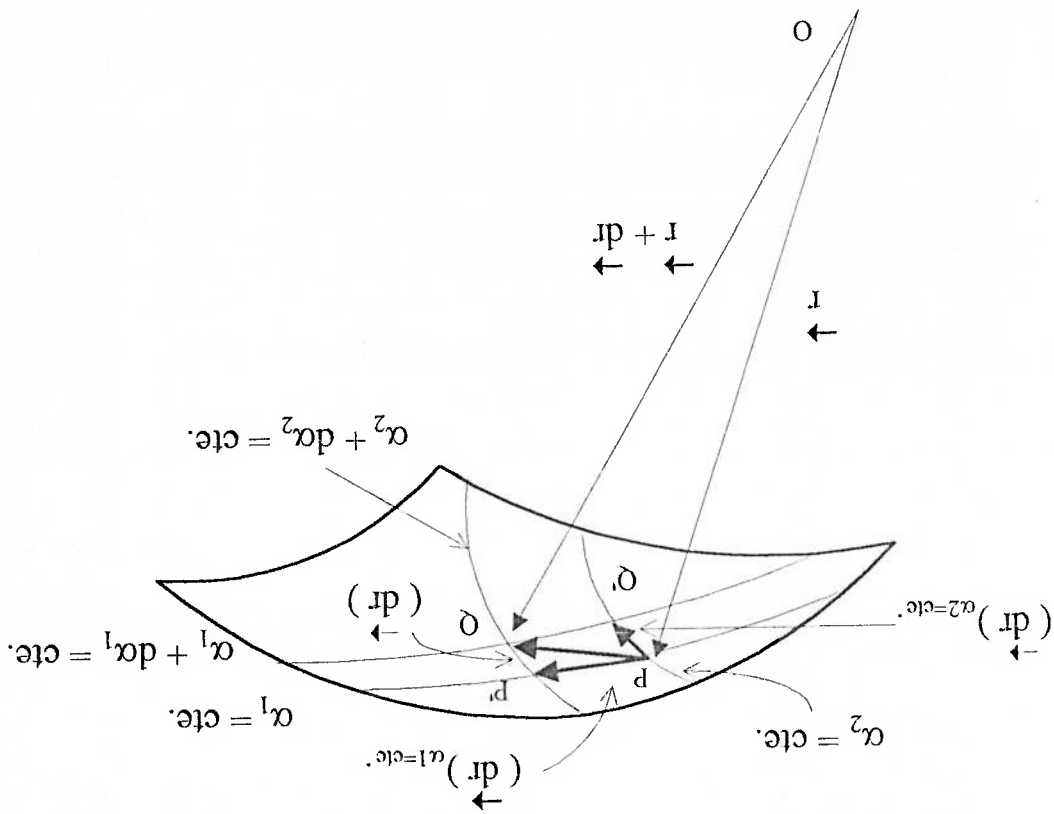


Figura 2.1.1 Geometria de uma superfície.

Como  $\vec{r}$  é uma função de  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , podemos escrever:

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \quad (2.1.2)$$

onde os pontos  $P$  e  $Q$  tem uma proximidade infinitesimal, o comprimento do arco  $ds$  que une esses pontos é igual ao comprimento da corda que os une, isto é, igual a  $\left| d\vec{r} \right|$ .

Podemos portanto escrever:

$$(2.1.3) \quad (ds)^2 = \left| d\vec{r} \right|^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) \cdot \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right)$$

$$(2.1.4) \quad (ds)^2 = \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha_1} \right) (d\alpha_1)^2 + 2 \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha_2} \right) d\alpha_1 d\alpha_2 + \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha_2} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha_2} \right) (d\alpha_2)^2$$

Introduzindo a notação

$$E = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha_1} = \left( \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \alpha_1}{\partial z} \right)^2$$

$$(2.1.5) \quad F = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial \alpha_2}{\partial z}$$

$$G = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha_2} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha_2} = \left( \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \alpha_2}{\partial z} \right)^2$$

onde  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ;

temos a primeira forma métrica fundamental da superfície:

$$(2.1.6) \quad (ds)^2 = E(d\alpha_1)^2 + 2F(d\alpha_1 d\alpha_2) + G(d\alpha_2)^2$$

onde  $E$ ,  $F$  e  $G$  são chamadas primeiras grandezas fundamentais ou coeficientes métricos.

respectivamente.

Tem-se:

$$F = \frac{\partial r}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial r}{\partial \alpha_2} = \sqrt{E} \sqrt{G} \cos \theta$$

(2.1.7)

e como  $-1 < \cos \theta < 1 \Rightarrow |F| < \sqrt{EG}$ , o que é equivalente a dizer que  $H^2 = EG - F^2$  deve

ser maior que zero, ou seja,  $EG - F^2 > 0$ .

Ao longo de uma curva paramétrica,  $\alpha_1 = \text{cte}$ ,  $d\alpha_1 = 0$  e o vetor  $\vec{PP}'$  é dado por

$$\left( \frac{\partial r}{\partial \alpha_2} \right)_2 = \sqrt{G} d\alpha_2. \text{ Analogamente, ao longo de}$$

$\alpha_2 = \text{cte}$ ,  $d\alpha_2 = 0$  e o vetor  $\vec{PQ}$  é dado por  $\left( \frac{\partial r}{\partial \alpha_1} \right)_1 = \frac{\partial r}{\partial \alpha_1} d\alpha_1$ , tendo como grandeza

$(ds)_1 = \sqrt{E} d\alpha_1$ . Se as curvas paramétricas formarem um sistema ortogonal de coordenadas

sobre a superfície, os vetores  $\vec{PP}'$  e  $\vec{PQ}$ , serão perpendiculares, ou seja o cosseno do

ângulo formado entre eles será nulo. Portanto:

$$\left( \frac{\partial r}{\partial \alpha_1} \right)_1 \cdot \left( \frac{\partial r}{\partial \alpha_2} \right)_2 = \frac{\partial r}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial r}{\partial \alpha_2} d\alpha_1 d\alpha_2 = F d\alpha_1 d\alpha_2 = 0$$

(2.1.8)

Se  $F = 0$ , então as curvas paramétricas formam um sistema ortogonal curvilíneo de

coordenadas sobre a superfície e:

$$(ds)^2 = A_1^2 (d\alpha_1)^2 + A_2^2 (d\alpha_2)^2$$

(2.1.9)

onde  $A_1 = \sqrt{E}$  e  $A_2 = \sqrt{G}$

Os coeficientes métricos ou primeiras grandezas fundamentais são indispensáveis,

por exemplo, na obtenção da deformação da superfície. As componentes da deformação,

expressas em termos das coordenadas da superfície são encontradas comparando-se  $(ds)^2$

para a superfície não deformada com  $(ds^*)^2$  para a superfície deformada, com a posição da

superfície deformada  $r^* = r^*(\alpha_1, \alpha_2)$  expressa em termos da superfície não deformada,

incorporando-se os componentes dos deslocamentos  $u, v$  e  $w$  nas direções dos eixos.

## 2.2 Primeira Aproximação à Teoria das Cascas Finas.

O termo casca se aplica a uma folha não plana na qual uma das dimensões, a

espessura, é muito menor do que as outras duas. A espessura da casca, denotada por  $h$ , é a

distância entre as duas faces que a compõem. O lugar geométrico dos pontos médios da

espessura da casca é a superfície média.

Se a casca não tiver outros contornos além das duas faces, ela será chamada de

completa. Toda casca completa pode ser dividida em partes que são denominadas de cascas

incompletas. A superfície média, a espessura e as bordas definem a geometria da casca.

As cascas podem ser classificadas em finas ou espessas. Uma casca será chamada de

fina se o valor máximo da relação  $h / R$ , onde  $R$  é o raio de curvatura da superfície média,

pode ser desprezada em comparação com a unidade. As cascas serão chamadas de espessas

ou grossas quando a relação antes citada não puder ser desprezada em relação à unidade.

Em um grande número de aplicações práticas as espessuras das cascas estão contidas

no intervalo,  $1 / 1000 \leq h / R \leq 1 / 50$ . Nesse caso elas são denominadas cascas finas.

Um conjunto de hipóteses simplificadoras foi proposto por Love [9, 10], e levou ao desenvolvimento de uma classe de problema da teoria da elasticidade conhecida como teoria

das cascas finas.

Essa teoria está baseada nas seguintes hipóteses:

1. casca é fina;

2. os deslocamentos da casca são pequenos em relação à espessura;

3. as tensões normais que atuam perpendicularmente à superfície média, podem ser

desprezadas em relação às demais tensões;

4. as normais à superfície média não deformada e os segmentos dessas normais

mantêm os mesmos comprimentos (não há variação da espessura durante a

deformação);

Estas quatro hipóteses constituem a chamada primeira aproximação da teoria das

cascas de Love.

A primeira hipótese é o fundamento dessa teoria. A segunda é a justificativa para a

linearização. A terceira restringe as aplicações da teoria de cascas a situações nas quais as

dimensões ao longo das coordenadas paramétricas  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são muito grandes quando

comparados com a espessura da casca. Uma condição necessária para a quarta hipótese é a

de que se desprezem as deformações transversais devido ao cisalhamento. Ela é também conhecida como hipótese de Kirchhoff, restringindo as aplicações da teoria das cascas finas.

Vários autores indicam a não consistência entre a terceira e quarta hipóteses, em

relação à Lei de Hooke. Por exemplo, se pela quarta hipótese a normal à superfície média não deformada não pode mudar seu comprimento, então, para materiais isotropos, deve aparecer uma tensão normal perpendicular à essa mesma superfície média de valor  $\sigma_n = \nu(\sigma_{\alpha 1} + \sigma_{\alpha 2})$ , que contraria a terceira hipótese. Pelo contrário se essa tensão normal é pequena e as tensões no plano não são, então a normal deve mudar seu comprimento. Por outro lado, na hipótese de Kirchhoff, dever-se-ia ter uma tensão de cisalhamento nula. No entanto, o elemento de casca, em geral, não pode permanecer em equilíbrio sem as forças cortantes resultantes, as quais correspondem à integral das tensões cortantes na espessura da casca atuando ao longo das bordas.

Essas inconsistências não diminuem o valor da teoria de cascas finas como ferramenta de engenharia. Elas podem ser desenfaturadas pela introdução das seguintes aproximações [10]:

1. o trabalho realizado pela tensão normal à superfície média, atuando ao longo de uma distância igual à mudança do comprimento da normal a essa mesma superfície, e o trabalho realizado pelas tensões de cisalhamento, atuando ao longo de uma distância igual ao deslocamento devido às forças cortantes, são desprezíveis se comparados à variação total da energia de deformação;

2. os deslocamentos em planos paralelos à superfície média de referência podem ser calculados como se a normal a essa superfície não deformada permanecesse reta e não alterasse seu comprimento durante a deformação da casca.

### 2.3 Equações de Equilíbrio

Um ponto qualquer da casca pode ser determinado por meio de três parâmetros. Dois destes parâmetros variam sobre a superfície média e o terceiro varia ao longo da normal a superfície média.

Escolhe-se sobre a superfície média as linhas de curvatura como sendo as curvas paramétricas  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  e  $z$  a distância do ponto à superfície média. Um ponto da casca terá portanto o sistema de coordenadas curvilíneas ortogonais  $\alpha_1, \alpha_2$  e  $z$ .

Considere-se um elemento infinitesimal de casca limitado por  $\alpha_1 = \text{cte.}, \alpha_1 + d\alpha_1 = \text{cte.}, \alpha_2 = \text{cte.}, \alpha_2 + d\alpha_2 = \text{cte.}$  e  $z = \pm h/2$ . Os lados do elemento sobre a superfície média terão os comprimentos  $ds_1 = A_1 d\alpha_1$  e  $ds_2 = A_2 d\alpha_2$ , conforme mostrado na Figura 2.3.1a.

Sejam  $x$  e  $y$  as tangentes às coordenadas curvilíneas  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  com origem em "0" e  $R_1$  e  $R_2$  os raios de curvatura principais em "0", situados respectivamente nos planos  $xz$  e  $yz$ . O ângulo correspondente ao arco  $A_2 d\alpha_2$  é  $(A_2 d\alpha_2 / R_2)$  e o comprimento do arco situado à distância  $z$  da superfície média é dado por:

$$ds_2 = (R_2 - z) \frac{A_2 d\alpha_2}{R_2} = \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) A_2 d\alpha_2. \quad (2.3.1)$$

Analogamente,



$$ds_1 = \left( 1 - \frac{R_1^1}{z} \right) A_1 d\alpha_1 \quad (2.3.2)$$

Deve-se observar que os raios de curvatura  $R_1$  e  $R_2$  são positivos quando os seus centros de curvatura estão no mesmo lado indicado pelo sentido positivo da normal  $z$ .

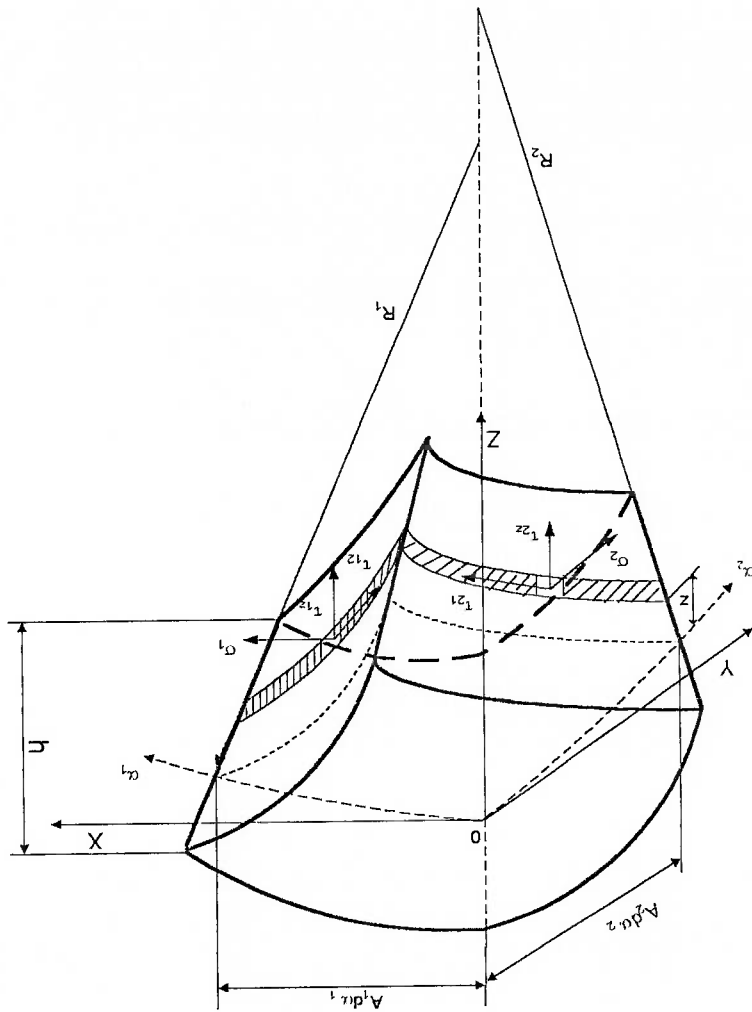


Figura 2.3.1a Elemento de casca. Geometria e tensões.

O primeiro índice de cada tensão indica que a mesma age num plano perpendicular ao eixo correspondente a esse índice. O segundo índice indica que a tensão encontra-se atuando nessa direção.

As tensões que atuam nas faces do elemento da Figura 2.3.1a são  $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12} = \tau_{21}$ ,

$\tau_{12}$  e  $\tau_{21}$ . Se para cada uma das faces laterais do elemento considerado se reduzem todos os

esforços que nela atuam para a curva resultante da interseção dessa face com a superfície

média, tem-se:

$$N_1 A_2 d\alpha_2 = \int_{h/2}^{-h/2} \sigma_1 \left(1 - \frac{R_2}{z}\right) A_2 d\alpha_2 dz \quad (2.3.3)$$

Onde  $N_1$  é a força normal resultante por unidade de comprimento que atua na

interseção da face  $yz$  com a superfície média.

De (2.3.3) vem:

$$N_1 = \int_{h/2}^{-h/2} \sigma_1 \left(1 - \frac{R_2}{z}\right) dz$$

Analogamente

$$N_2 = \int_{h/2}^{-h/2} \sigma_2 \left(1 - \frac{R_1}{z}\right) dz ; \quad N_{12} = \int_{h/2}^{-h/2} \tau_{12} \left(1 - \frac{R_2}{z}\right) dz ; \quad N_{21} = \int_{h/2}^{-h/2} \tau_{21} \left(1 - \frac{R_1}{z}\right) dz$$

$$M_1 = \int_{h/2}^{-h/2} \sigma_1 \left(1 - \frac{R_2}{z}\right) z dz ; \quad M_2 = \int_{h/2}^{-h/2} \sigma_2 \left(1 - \frac{R_1}{z}\right) z dz$$

$$M_{12} = \int_{h/2}^{-h/2} \tau_{12} \left(1 - \frac{R_2}{z}\right) z dz ; \quad M_{21} = \int_{h/2}^{-h/2} \tau_{21} \left(1 - \frac{R_1}{z}\right) z dz$$

$$\bar{Q}_1 = \int_{h/2}^{-h/2} \tau_{12} \left(1 - \frac{R_2}{z}\right) dz ; \quad \bar{Q}_2 = \int_{h/2}^{-h/2} \tau_{21} \left(1 - \frac{R_1}{z}\right) dz$$

(2.3.4a-j)

Nas Figuras 2.3.1b, 2.3.1c e 2.3.1d esta representada a superfície média do elemento de casca considerado. Podemos estabelecer as condições de equilíbrio como segue:

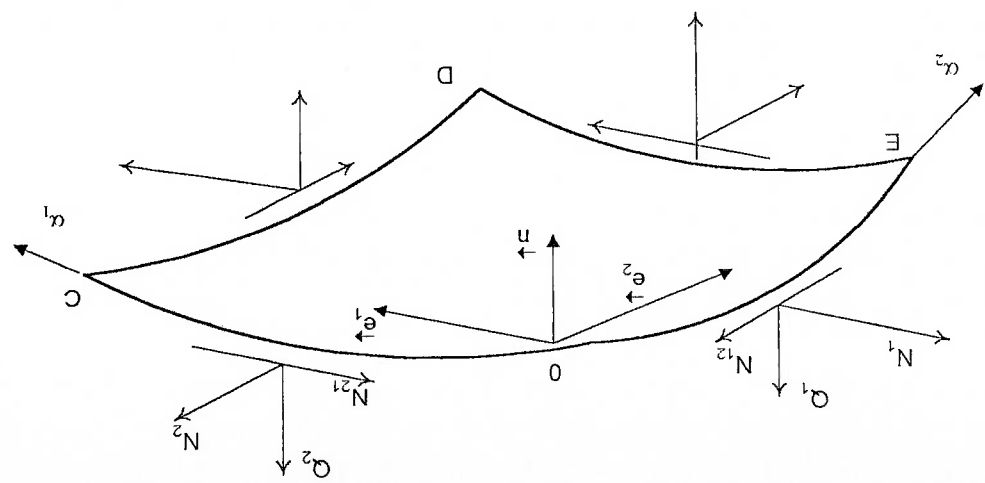


Figura 2.3.1b. Forças resultantes por unidade de comprimento.

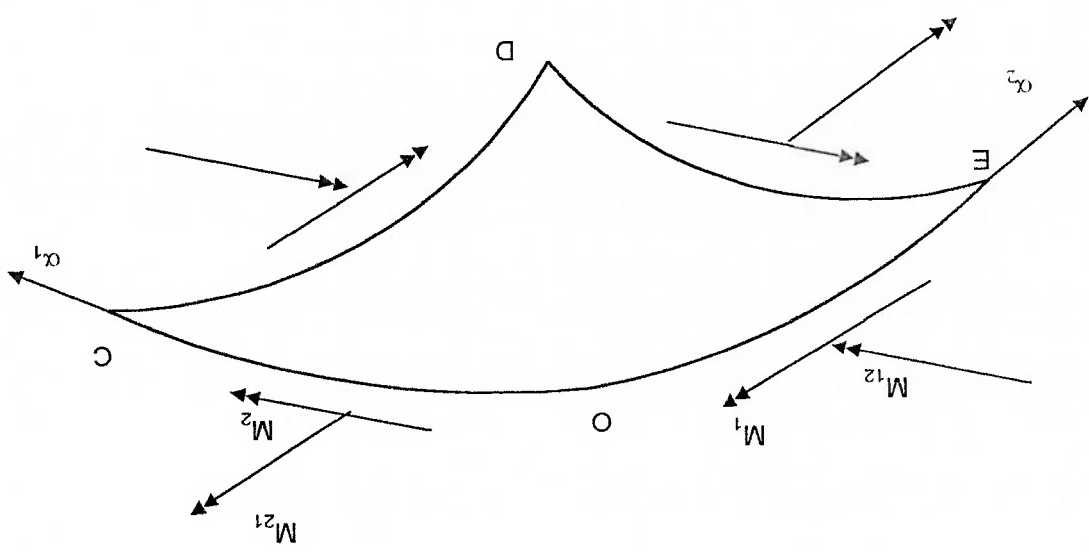


Figura 2.3.1c. Momentos resultantes por unidade de comprimento.

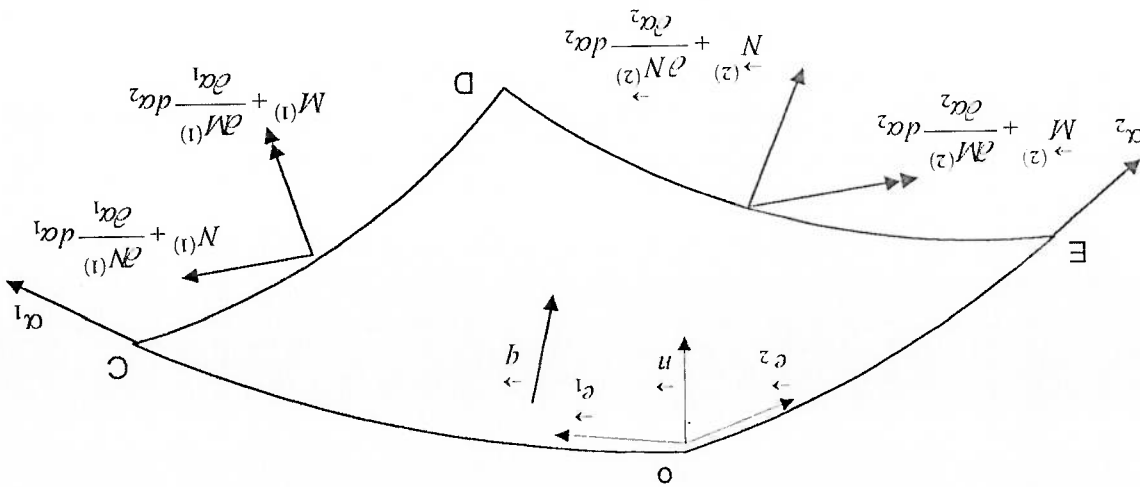


Figura 2.3.1d. Forças e momentos resultantes nas faces CD e DE.

A força total que age na curva OE é dada por :

$$(2.3.5) \quad -N^{(1)} e_1 + N^{(2)} e_2 + Q_1 n \left( A_2 d\alpha_2 \right)$$

e o momento resultante:

$$(2.3.6) \quad -M^{(1)} e_2 - M^{(2)} e_1 \left( A_2 d\alpha_2 \right)$$

Para o lado CD pode-se escrever:

$$(2.3.7) \quad N^{(1)} + \frac{\partial N^{(1)}}{\partial \alpha_1} d\alpha_1$$

$$(2.3.8) \quad M^{(1)} + \frac{\partial M^{(1)}}{\partial \alpha_1} d\alpha_1$$

Analogamente, para os lados OC e DE tem-se, respectivamente:

$$(2.3.9) \quad -N_{[2]}^{\leftarrow} = - \left( N_2^{\leftarrow} e_2 + N_{21}^{\leftarrow} e_1 + Q_2^{\leftarrow} n \right) A_1 d\alpha_1$$

$$(2.3.10) \quad -M_{(2)}^{\leftarrow} = - \left( M_{21}^{\leftarrow} e_2 - M_2^{\leftarrow} e_1 \right) A_1 d\alpha_1$$

$$(2.3.11) \quad N_{(2)}^{\leftarrow} + \frac{\partial N_{(2)}^{\leftarrow}}{\partial \alpha_2} d\alpha_2$$

$$(2.3.12) \quad M_{(2)}^{\leftarrow} + \frac{\partial M_{(2)}^{\leftarrow}}{\partial \alpha_2} d\alpha_2$$

O carregamento externo  $\vec{q}$  pode ser decomposto segundo as direções dos versores

em:

$$(2.3.13) \quad \vec{q} = \left( q_1^{\leftarrow} e_1 + q_2^{\leftarrow} e_2 + q_n^{\leftarrow} n \right)$$

como já colocado, as variações do elemento devido as deformações serão

desprezadas.

Para o equilíbrio de forças deve-se fazer igual a zero o vetor resultante de todas as

forças que atuam no elemento de superfície média, isto é,

$$(2.3.14) \quad -N_{(1)}^{\leftarrow} + N_{(1)}^{\leftarrow} + N_{(2)}^{\leftarrow} + \frac{\partial N_{(1)}^{\leftarrow}}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 - N_{(2)}^{\leftarrow} + N_{(2)}^{\leftarrow} + \frac{\partial N_{(2)}^{\leftarrow}}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + q A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = 0$$

e vem:

$$(2.3.15) \quad \frac{\partial N_{(1)}^{\leftarrow}}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial N_{(2)}^{\leftarrow}}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + q A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = 0$$

Substituindo os valores  $N_1, N_2$  e  $q$  acima obtidos em (2.3.15) e utilizando as

derivadas dos versores  $e_1, e_2, n$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_1}{\partial \alpha_1} &= -\frac{A_2}{A_1} \left[ \frac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha_1} e_2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_1} e_1 \right] \\ \frac{\partial e_2}{\partial \alpha_1} &= \frac{A_1}{A_2} \left[ \frac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha_1} e_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_1} e_1 \right] \\ \frac{\partial e_1}{\partial \alpha_2} &= -\frac{A_1}{A_2} \left[ \frac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha_2} e_2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_2} e_1 \right] \\ \frac{\partial e_2}{\partial \alpha_2} &= \frac{A_2}{A_1} \left[ \frac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha_2} e_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_2} e_1 \right] \end{aligned}$$

dadas na referência [10], obtêm-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial (N_1 A_2)}{\partial \alpha_1} + N_{12} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} - N_2 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right] - \frac{1}{Q_1} + q_1 &= 0 \\ \frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial (N_2 A_1)}{\partial \alpha_2} + N_{21} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_2} - N_1 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right] - \frac{1}{Q_2} + q_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.3.16a-c)$$

Analogamente a soma de todos os vetores momento atuando nos lados do elemento

é dada por:

$$\begin{aligned} M_{(1)}^{\leftarrow} + \frac{\partial M_{(1)}^{\leftarrow}}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 - M_{(1)}^{\leftarrow} + M_{(2)}^{\leftarrow} + M_{(2)}^{\leftarrow} + \frac{\partial M_{(2)}^{\leftarrow}}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 - M_{(2)}^{\leftarrow} \\ = \frac{\partial M_{(1)}^{\leftarrow}}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial M_{(2)}^{\leftarrow}}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

Utilizando-se as mesmas relações, tem-se:

$$(2.3.18) \quad \frac{\partial M}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial M}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 = \left[ \begin{array}{c} - \left[ \frac{\partial(A_2 M_{12})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 M_2)}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_2} M_{21} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha_1} M_1 \right] e_1 \\ + \left[ \frac{\partial(A_2 M_{21})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 M_1)}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_2} M_{12} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha_1} M_2 \right] e_2 \end{array} \right] d\alpha_1 d\alpha_2 - \left[ \frac{M_{12}}{R_1} - \frac{M_{21}}{R_2} - A_1 A_2 n \right]$$

Considera-se agora o momento de todas as forças com relação ao ponto "0". Deve-se observar que o momento devido ao carregamento é infinitésimo de ordem superior aos

momentos restantes. Os esforços  $N_{12}$  e  $N_{21}$  darão momentos em torno de  $n$  e os esforços

$N_1$  e  $N_2$  darão momentos nulos, a menos de infinitésimos de ordem superior. Os esforços

cortantes  $Q_1$  e  $Q_2$  produzirão momentos em torno dos versores  $e_2, e_1$  respectivamente.

Portanto os momentos das forças em torno de "0" podem ser escritos como segue:

$$(2.3.19) \quad \left[ \begin{array}{c} \vec{Q}_2 e_1 - \vec{Q}_1 e_2 - (N_{21} - N_{12}) n \\ A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \end{array} \right]$$

A condição para que se anule o vetor resultante de todos os momentos atuantes

sobre o elemento é que a soma das parcelas (2.3.18) e (2.3.19) se anule. Após dividir por

$d\alpha_1 d\alpha_2$  resultam as seguintes equações diferenciais, [10,12,13].

$$(2.3.16d-f) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial(A_2 M_1)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 M_2)}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_2} M_{21} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha_1} M_1 \right] - \vec{Q}_1 = 0 \\ & \frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial(A_2 M_{21})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 M_1)}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_2} M_{12} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha_1} M_2 \right] - \vec{Q}_2 = 0 \end{aligned}$$

As seis equações de equilíbrio acima deduzidas (2.3.16a-f) envolvem dez incógnitas.

Portanto o problema é estáticamente indeterminado. A sua solução só é possível com a obtenção de outras relações envolvendo as incógnitas.

Pelo equilíbrio das tensões sobre um elemento, pode-se ver que  $\tau_{21} = \tau_{12}$ . Das

definições de  $N_{12}$  e  $N_{21}$  resulta que  $N_{12} \neq N_{21}$  e  $M_{12} \neq M_{21}$  pois,  $R_1 \neq R_2$ . No entanto, para cascas

finas, isto é, quando  $h \ll R_1$  e  $R_2$  os termos  $\frac{R_1}{z}$  e  $\frac{R_2}{z}$  podem ser desprezados quando

comparados com a unidade. Dessa simplificação resulta que  $N_{12} = N_{21}$  e  $M_{12} = M_{21}$ . Em face a estes resultados, a equação (2.3.16f) não poderá subsistir, com exceção feita às cascas

esféricas  $R_1 = R_2$ , às placas, onde  $\frac{R_1}{1} = \frac{R_2}{1} = 0$  e cascas de revolução com carregamento

axissimétrico, onde ela é identicamente satisfeita. No caso de termos  $N_{12} \neq N_{21}$  e  $M_{12} \neq M_{21}$ , a

equação (2.3.16f) também é identicamente satisfeita para  $\tau_{21} = \tau_{12}$ . Esse fato pode ser verificado substituindo-se as expressões (2.3.4a-j) na última equação de equilíbrio. Como

resultado obtêm-se:

$$\int_{\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}} \left(1 - \frac{R_1}{z}\right) \left(1 - \frac{R_2}{z}\right) (\tau_{12} - \tau_{21}) dz = 0$$



### 2.4 Relações entre Deformações e Deslocamentos

As relações entre deformações e deslocamentos podem ser escritas na forma

seguinte:

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{1}{r_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{A_1}{r_1} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha_1} + \frac{A_1}{r_1} \frac{\partial \alpha_3}{\partial \alpha_1} \\ \epsilon_{22} &= \frac{1}{r_2} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{A_2}{r_2} \frac{\partial \alpha_3}{\partial \alpha_2} + \frac{A_2}{r_2} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_2} \\ \epsilon_{33} &= \frac{1}{r_3} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_3} + \frac{A_3}{r_3} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_3} + \frac{A_3}{r_3} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha_3} \end{aligned}$$

(2.4.1a-f)

$$\begin{aligned} \epsilon_{12} &= \frac{A_2}{r_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{A_1}{r_2} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_2} \right) + \frac{A_1}{r_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{A_2}{r_1} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha_1} \right) \\ \epsilon_{13} &= \frac{A_3}{r_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{A_1}{r_3} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_3} \right) + \frac{A_1}{r_3} \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left( \frac{A_3}{r_1} \frac{\partial \alpha_3}{\partial \alpha_1} \right) \\ \epsilon_{23} &= \frac{A_3}{r_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{A_2}{r_3} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha_3} \right) + \frac{A_2}{r_3} \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left( \frac{A_3}{r_2} \frac{\partial \alpha_3}{\partial \alpha_2} \right) \end{aligned}$$

Para adaptar estas equações às cascas deve-se definir o seguinte vetor deslocamento:

$$\vec{v}(\alpha_1, \alpha_2, z) = n_1 \alpha_1(\alpha_1, \alpha_2, z) \vec{e}_1 + n_2 \alpha_2(\alpha_1, \alpha_2, z) \vec{e}_2 + w(\alpha_1, \alpha_2, z) \vec{e}_3, \text{ sendo:}$$

$$\alpha_1 = \alpha_1; \alpha_2 = \alpha_2; \alpha_3 = z$$

$$\bar{A}_1 = A_1 \left( 1 - \frac{R_1}{z} \right); \bar{A}_2 = A_2 \left( 1 - \frac{R_2}{z} \right); \bar{A}_3 = 1$$

$u_1, u_2$  e  $w$  são as componentes do vetor deslocamento nas correspondentes direções ortogonais dos eixos coordenados, isto é,  $u_1 = u, u_2 = v$  e  $u_3 = w$ . Devido a quarta hipótese de

Love, os deslocamentos estão distribuídos linearmente ao longo da espessura casca. Pode-se portanto admitir para as componentes dos deslocamentos as seguintes expressões:

$$n_1(\alpha_1, \alpha_2, z) = n_{10}(\alpha_1, \alpha_2) + z n_1'(\alpha_1, \alpha_2, 0)$$

$$n_2(\alpha_1, \alpha_2, z) = n_{20}(\alpha_1, \alpha_2) + z n_2'(\alpha_1, \alpha_2, 0)$$

(2.4.2a-c)

$$w(\alpha_1, \alpha_2, z) = w(\alpha_1, \alpha_2)$$

onde a "linha" indica a derivada em relação a  $z$ . As quantidades  $n_{10}(\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $n_{20}(\alpha_1, \alpha_2)$  e

$w(\alpha_1, \alpha_2)$  são os deslocamentos de um ponto da superfície média e as quantidades

$n_1'(\alpha_1, \alpha_2, 0)$  e  $n_2'(\alpha_1, \alpha_2, 0)$  representam as rotações das tangentes à superfície média ao

longo das linhas paramétricas  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , respectivamente. Ainda pela quarta hipótese de Love,

conclui-se que os ângulos retos formados pela normal à superfície média com as tangentes à

mesma, em um dado ponto, não sofrem variações com a deformação. Não havendo

deformação angular deve-se ter:

$$(\epsilon_{13})^{z=0} = 0 \quad \text{e} \quad (\epsilon_{23})^{z=0} = 0$$

(2.4.3a-b)

onde

$$\epsilon_{13} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{A_3}{n_3} \frac{\partial \alpha_1}{\partial z} \right) + \frac{1}{n_3} \frac{\partial A_3}{\partial z} \left( \frac{\partial \alpha_1}{\partial z} \right) - \left( \frac{A_1}{n_1} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial A_3}{\partial z} \right) \frac{\partial \alpha_1}{\partial z}$$

$$\epsilon_{23} = \frac{1}{n_2} \frac{\partial A_3}{\partial z} \frac{\partial \alpha_2}{\partial z} - \frac{A_3}{n_2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \alpha_2}{\partial z} \right) + \frac{\partial A_3}{\partial z} \frac{\partial \alpha_2}{\partial z} + \frac{A_2}{n_3} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \alpha_2}{\partial z} \right) \frac{\partial A_3}{\partial z}$$

Substituindo as expressões (2.4.2a-c) nas (2.4.3a-b), obtêm-se:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \alpha_1}\right)^{z=0} = -\frac{R_1}{n_{10}} - \frac{1}{\partial w} \frac{A_1 \partial \alpha_1}{\partial z} \quad \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha_2}\right)^{z=0} = -\frac{R_2}{n_{20}} - \frac{1}{\partial w} \frac{A_2 \partial \alpha_2}{\partial z}$$

Portanto,

$$n_1 = n_{10} - z \left( \frac{R_1}{n_{10}} + \frac{1}{\partial w} \frac{A_1 \partial \alpha_1}{\partial z} \right) \quad n_2 = n_{20} - z \left( \frac{R_2}{n_{20}} + \frac{1}{\partial w} \frac{A_2 \partial \alpha_2}{\partial z} \right) \quad w(\alpha_1, \alpha_2, z) = w(\alpha_1, \alpha_2)$$

Da primeira hipótese de Love resulta  $\frac{R}{z} \ll 1$  e consequentemente  $\bar{A}_1 = A_1$  e

$\bar{A}_2 = A_2$ . Observando que  $\frac{\partial \bar{A}_1}{\partial z} = -\frac{R_1}{A_1}$ ,  $\frac{\partial \bar{A}_2}{\partial z} = -\frac{R_2}{A_2}$  e levando em conta as expressões

(2.4.4a-c), as relações entre deformações e deslocamentos podem ser escritas como segue:

$$\varepsilon_{11} = \left( \frac{1}{\partial n_{10}} \frac{\partial \alpha_1}{\partial z} + \frac{1}{n_{20}} \frac{\partial A_1 A_2 \partial \alpha_2}{\partial A_1} - \frac{R_1}{w} \right) - z \left[ \frac{1}{\partial} \frac{\partial \alpha_1}{\partial z} \left( \frac{R_1}{n_{10}} + \frac{1}{\partial w} \frac{A_1 \partial \alpha_1}{\partial z} \right) + \frac{1}{\partial} \frac{\partial \alpha_2}{\partial z} \left( \frac{R_2}{n_{20}} + \frac{1}{\partial w} \frac{A_2 \partial \alpha_2}{\partial z} \right) + \frac{1}{\partial} \frac{\partial \alpha_2}{\partial z} \left( \frac{R_2}{n_{20}} + \frac{1}{\partial w} \frac{A_2 \partial \alpha_2}{\partial z} \right) + \frac{1}{\partial} \frac{\partial \alpha_1}{\partial z} \left( \frac{R_1}{n_{10}} + \frac{1}{\partial w} \frac{A_1 \partial \alpha_1}{\partial z} \right) \right]$$

(2.4.5a-c)

$$\varepsilon_{22} = \left( \frac{1}{\partial n_{20}} \frac{\partial \alpha_2}{\partial z} + \frac{1}{n_{10}} \frac{\partial A_1 A_2 \partial \alpha_1}{\partial A_2} - \frac{R_2}{w} \right) - z \left[ \frac{1}{\partial} \frac{\partial \alpha_2}{\partial z} \left( \frac{R_2}{n_{20}} + \frac{1}{\partial w} \frac{A_2 \partial \alpha_2}{\partial z} \right) + \frac{1}{\partial} \frac{\partial \alpha_1}{\partial z} \left( \frac{R_1}{n_{10}} + \frac{1}{\partial w} \frac{A_1 \partial \alpha_1}{\partial z} \right) \right]$$

As expressões (2.4.5a-c) também podem ser postas na forma seguinte:

$$\epsilon_{12} = \left[ \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{A_2}{n_{20}} \right) + \frac{A_1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{A_1}{n_{10}} \right) \right] - z \left[ \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{A_1}{n_{20}} \right) + \frac{A_1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{A_2}{n_{10}} \right) + \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{A_1}{n_{10}} \right) + \frac{A_1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{A_2}{n_{20}} \right) \right]$$

$$\epsilon_{11} = \epsilon_{10} - z\chi_1$$

$$\epsilon_{22} = \epsilon_{20} - z\chi_2$$

$$\epsilon_{12} = \gamma_0 - 2z\chi_{12}$$

onde

$$\epsilon_{10} = \left( \frac{1}{w} \frac{\partial n_{10}}{\partial A_1} + \frac{A_1 A_2}{n_{20}} \frac{\partial \alpha_1}{\partial A_1} - R_1 \right)$$

$$\epsilon_{20} = \left( \frac{1}{w} \frac{\partial n_{20}}{\partial A_2} + \frac{A_1 A_2}{n_{10}} \frac{\partial \alpha_2}{\partial A_2} - R_2 \right)$$

$$\gamma_0 = \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{A_2}{n_{20}} \right) + \frac{A_1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{A_1}{n_{10}} \right)$$

$$\chi_1 = \left[ \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{A_1}{n_{10}} \right) + \frac{A_1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{R_1}{n_{20}} \right) + \frac{A_1 A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) \right]$$

$$\chi_2 = \left[ \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{A_2}{n_{20}} \right) + \frac{A_2}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{R_2}{n_{10}} \right) + \frac{A_1 A_2}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right) \right]$$

$$\chi_{12} = \frac{1}{2} \left[ \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{A_2 R_2}{n_{20}} \right) + \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{A_1 R_1}{n_{10}} \right) + \frac{A_1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{A_2}{n_{10}} \right) + \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{A_1}{n_{20}} \right) \right]$$

As quantidades  $\epsilon_{10}$ ,  $\epsilon_{20}$  e  $\gamma_0$  podem ser interpretadas fisicamente como sendo

deformações da superfície média enquanto que  $\chi_1$ ,  $\chi_2$  e  $\chi_{12}$  são variações de curvatura

[10,13].

(2.4.7a-f)

(2.4.6a-c)

É importante observar, que desprezar as deformações de cisalhamento correspondente as tensões  $\tau_{13}$  e  $\tau_{23}$  é equivalente à hipótese feita das normais permanecerem perpendiculares a superfície média deformada. Pode-se, portanto, pensar que as tensões de cisalhamento  $\tau_{13}$  e  $\tau_{23}$  também deveriam ser desprezadas. Entretanto, isto não seria correto pois que  $Q_1$  e  $Q_2$  são fundamentais para as equações de equilíbrio. A hipótese das normais se manterem normais a superfície deformada é utilizado somente para se determinar a lei de deformação de uma fibra da casca paralela a superfície média. No estudo do equilíbrio do elemento ela não é utilizada. Para maior clareza seria conveniente alterar a quarta hipótese como segue:

“Para a determinação das deformações das fibras da casca paralelas a superfície média, devemos desprezar as deformações de cisalhamento correspondentes as tensões  $\tau_{12}$  e  $\tau_{22}$  bem como as deformações na direção perpendicular à superfície média”.

## 2.5 Equações Constitutivas

A terceira e quarta hipóteses de Love, quando aplicadas às equações constitutivas, caracterizam de uma maneira definitiva a chamada “primeira aproximação da teoria de cascas devida a Love”.

A lei de Hooke, para um material homogêneo e isotrópico, pode ser escrita na seguinte forma:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)]$$

(2.5.1a-f)

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{l} \left[ \sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2) \right]$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{G}{T_{12}} \quad ; \quad \varepsilon_{13} = \frac{G}{T_{13}} \quad ; \quad \varepsilon_{23} = \frac{G}{T_{23}}$$

Como consequência da terceira e quarta hipótese de Love:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{l} \left[ \sigma_1 - \nu\sigma_2 \right]$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{l} \left[ \sigma_2 - \nu\sigma_1 \right]$$

$$\varepsilon_{12} = \gamma_{12} = \frac{G}{T_{12}}$$

pois  $\varepsilon_{33} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \sigma_3 = 0$  e

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Invertendo essas relações e usando as relações (2.4.6a-c), obtidas das referências

[10, 12, 13], resulta:

$$\sigma_1 = \frac{1-\nu^2}{E} \left[ \varepsilon_{10} + \nu\varepsilon_{20} - z(\chi_1 + \nu\chi_2) \right]$$

$$\sigma_2 = \frac{1-\nu^2}{E} \left[ \varepsilon_{20} + \nu\varepsilon_{10} - z(\chi_2 + \nu\chi_1) \right]$$

$$\tau_{12} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \gamma_{01} - 2z\delta_{12} \right)$$

Substituindo essas expressões nas (2.3.4a-j) obtemos:

$$N_1 = K(\varepsilon_{10} + \nu\varepsilon_{20})$$

$$N_2 = K(\varepsilon_{20} + \nu\varepsilon_{10})$$

(2.5.3a-c)

(2.5.2a-c)

$$N_{12} = N_{21} = Gh\gamma_0 = \frac{K(1-\nu)}{2}\gamma_0$$

(2.5.4a-f)

$$M_1 = -D(\chi_1 + \nu\chi_2)$$

$$M_2 = -D(\chi_2 + \nu\chi_1)$$

$$M_{12} = M_{21} = -D(1-\nu)\chi_{12}$$

onde  $K = \frac{Eh}{1-\nu^2}$  e  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$

As relações acima também podem ser escritas na forma:

$$\epsilon_{10} + \nu\epsilon_{20} = \frac{N_1}{Eh}$$

$$\epsilon_{20} + \nu\epsilon_{10} = \frac{N_2}{Eh}$$

$$\gamma_0 = \frac{2N_{12}}{Eh^2(1-\nu)}$$

$$\chi_1 + \nu\chi_2 = -\frac{M_1}{D}$$

$$\chi_2 + \nu\chi_1 = -\frac{M_2}{D}$$

$$\chi_{12} = -\frac{M_{12}}{D(1-\nu)}$$

e quando substituídas nas expressões das tensões, resulta:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{12M_1} + \frac{h}{h_3}z$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{12M_2} + \frac{h}{h_3}z$$

(2.5.6a-c)

$$\tau_{12} = \frac{N_{12}}{12M_{12}} + \frac{h}{h^3} z$$

A determinação das tensões de cisalhamento  $\tau_{12}$  e  $\tau_{22}$  a partir dos esforços  $Q_1$  e  $Q_2$

não é tão precisa quanto a determinação de  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\tau_{12}$ . Neste caso como na teoria das vigas, admite-se uma distribuição parabólica das tensões de cisalhamento ao longo da

espessura da casca [9, 11, 12].

Portanto,

$$\tau_{1z} = \frac{2}{3} \cdot \frac{Q_1}{h} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{h}{2z} \right)^2 \right]$$

$$\tau_{2z} = \frac{2}{3} \cdot \frac{Q_2}{h} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{h}{2z} \right)^2 \right]$$

(2.5.7a-b)

Resumindo, foram obtidas seis equações de equilíbrio (2.3.16a-f), seis relações entre

esforços e deformações (2.5.4a-f) e seis relações de deslocamentos (2.4.7a-f). Das

seis equações de equilíbrio, a (2.3.16f), para cascas finas, pode ser eliminada e substituída

por  $N_{12}=N_{21}$  e  $M_{12}=M_{21}$ , considerando-se portanto cinco equações de equilíbrio (2.3.16a-e).

Temos portanto um total de dezessete equações básicas e o mesmo número de variáveis:  $N_1$ ,

$N_2$ ,  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $N_{12}=N_{21}$ ,  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_{12}=M_{21}$ ,  $\epsilon_{10}$ ,  $\epsilon_{20}$ ,  $\gamma_0$ ,  $\chi_1$ ,  $\chi_2$ ,  $\chi_{12}$ ,  $u_{10}$ ,  $u_{20}$ , e  $w$ . Conclui-se que a

solução é determinada, quando forem especificadas as condições de contorno.

## 2.6 Condições de Contorno

Suponha-se que o contorno seja definido pela linha coordenada  $\alpha_2 = \text{cte}$ , e que  $N_2$ ,

$N_{21}$ ,  $Q_2$ ,  $M_{21}$  e  $M_2$  sejam os esforços atuantes nesse contorno. Poderíamos imaginar que o



numero de condições de contorno a ser prescrita fosse igual a cinco. Entretanto, foi provado por Kirchhoff para o caso da placa e mais tarde por Basset e Lamb [10], para a casca cilíndrica e esférica, que  $N_{z1}$ ,  $Q_z$  e  $M_{z1}$  não podem ser prescritos separadamente no contorno. Esses três esforços são substituídos por dois esforços estaticamente equivalentes. Para determinar essas relações se considerará um elemento de contorno passando pelo ponto  $\bar{b}$  que será aproximado por uma linha poligonal possuindo lados infinitesimais.

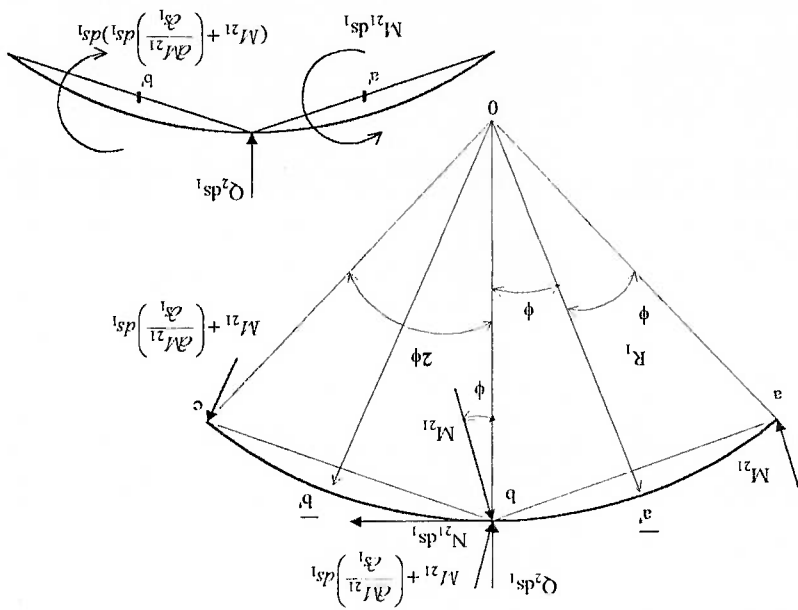


Figura 2.6.1 Elemento no contorno da casca.

Aproxima-se o comprimento de cada segmento de cada segmento ao correspondente comprimento de cada arco, isto é,  $ab = bc = ds_1$ , bem como  $a'b' = ds_1$ .

O momento  $M_{z1} ds_1$  atuando em  $a$  é substituído por duas forças  $M_{z1}$  aplicadas em  $a$  e  $b$  e dirigida segundo a normal a superfície média no ponto  $a$  (isto é, paralelo a  $Oa$ ).

Analogamente, o momento atuando em  $b$  é substituído por duas forças  $M_{z1} + \left(\frac{\partial M_{z1}}{\partial s_1}\right) ds_1$

aplicadas nos pontos  $b$  e  $c$  dirigidas segundo a normal a superfície no ponto  $b$ . Projetando as forças que estão aplicadas em  $b$  segundo a normal a superfície média em  $b$ , obtemos:

$$(2.6.1) \quad \left( M_{21} + \frac{\partial M_{21}}{\partial s_1} ds_1 \right) \cos \phi - M_{21} \cos \phi \approx \frac{\partial M_{21}}{\partial s_1} ds_1$$

Pois, para valores pequenos de  $\phi$ ,  $\cos \phi \approx 1$

De maneira análoga, projetando essas forças segundo a tangente ao elemento no

ponto  $b$  resulta:

$$(2.6.2) \quad \left( 2M_{21} + \frac{\partial M_{21}}{\partial s_1} ds_1 \right) \phi$$

Onde  $2\phi$  é o ângulo entre as normais a superfície média que passam pelos pontos  $a$

e  $b$ , isto é:

$$(2.6.3) \quad 2\phi = \frac{ds_1}{R_1}$$

Substituindo o valor de  $\phi$  na expressão (2.6.2) e restando apenas as quantidades de primeira

ordem, teremos

$$(2.6.4) \quad \frac{M_{21}}{R_1} ds_1$$

Foi mostrado que o momento torsor  $M_{21}$  é estaticamente equivalente a uma força de

cisalhamento distribuída normal à superfície média ( $\partial M_{21}/\partial s_1$ ) e uma força distribuída

tangencial  $M_{21}/R_1$ . Portanto o efeito de  $M_{21}$  pode ser incluído nos esforços que atuam no

contorno se definirmos os esforços de cisalhamento efetivos como segue:

$$R_2 = Q_2 + \frac{\partial M_{21}}{\partial s_1}$$

$$I_{z1} = N_{z1} - \frac{M_{z1}}{R_1} \quad (2.6.5a-b)$$

Descrevendo algumas condições de contorno que aparecem frequentemente na análise de estruturas em forma de cascas, pode-se dizer que se a casca for fechada em relação a uma coordenada (casca de revolução), sabe-se que dando uma volta completa e retornando ao mesmo ponto devemos obter os mesmos resultados. Portanto, nestes casos, a solução precisa ser periódica em relação a essa coordenada. Por outro lado nas bordas da casca deve-se especificar, em cada caso particular, deslocamentos ou esforços previamente conhecidos. Exemplo:

Borda engastada  $\Rightarrow u = v = w = 0$  e a rotação nula, isto é,  $\theta = 0$ .

Borda, com  $\alpha_2 = \text{cte}$ , livre e sem qualquer esforço ai aplicado  $\Rightarrow N_2=M_2=V_2=T_{z1}=0$ .

### 2.7 Teoria de Membrana das Cascas de Revolução.

O estudo das cascas simplifica-se de forma sensível quando admite-se para a casca um comportamento chamado de membrana. Esta teoria supõe que a estrutura não possui rigidez à flexão e à torção, resultando nulos, por conseguinte, os momentos fletores e os de torção.

O regime de membrana é, portanto, o limite ao qual tende, pelo menos a partir de uma certa distancia das bordas, o estado de tensão numa casca quando a espessura  $h$  da mesma é muito pequena. Pode-se, porém, em vista do pequeno valor de  $h$ , admitir que as tensões se distribuam pela espessura uniformemente, de maneira que pelas expressões (2.3.4), desprezando  $\frac{R_1}{z}$  e  $\frac{R_2}{z}$  em face da unidade, os momentos fletores e de torção

resultam nulos. Nestas condições anulam-se também as forças cortantes e a casca está sujeita unicamente a esforços atuando ao longo da superfície média, caso as condições de vínculo sejam compatíveis com o regime de membrana.

As propriedades das cascas podem ser comparadas às dos arcos. Sabe-se que um arco de um modo geral trabalha a compressão e a flexão. Entretanto é possível determinar uma forma e um correspondente carregamento de tal maneira que os efeitos devidos a flexão se anulem. Por exemplo, um arco parabólico sujeito a um carregamento uniformemente distribuído sobre a sua corda estará isento de flexão. Também estará isento de flexão o arco em forma de catenária sob a ação do peso próprio. Essa é a grande vantagem dos arcos sobre as vigas.

As cascas também apresentam vantagens sobre as placas, análogas às dos arcos sobre as vigas, porém com a diferença de que, enquanto um arco de uma dada forma é capaz de suportar um único tipo de carregamento sem causar flexão, a casca de uma dada forma possui essa mesma propriedade para uma gama maior de cargas. Esses carregamentos, naturalmente, devem satisfazer certas condições de continuidade e as bordas devem ter condições de apoio convenientes.

O regime de membrana pode estender-se a toda casca desde que se verifiquem as seguintes condições:

- as variações dos raios de curvatura da superfície média devem ser contínuas;
- a variação da espessura  $h$  da casca deve ser contínua;
- a distribuição das forças externas deve ser contínua;

- as forças externas aplicadas às bordas livres devem atuar nos correspondentes planos tangentes a superfície média;
- as reações dos vínculos devem estar contidas nos planos tangentes a superfície média;

Qualquer alteração nas condições mencionadas acarretará uma perturbação em geral

local para cujo exame devemos levar em conta a rigidez da casca.

Para deduzir as equações fundamentais da teoria de membrana, considere-se o

elemento de uma casca de revolução, mostrado na Figura 2.7.1, sujeita a um carregamento axisimétrico. Deduziremos as equações de equilíbrio para esse elemento, fazendo a seguinte

mudança de notação:  $r = R_0$ ;  $r_1 = R_\phi$  e  $r_2 = R_0$

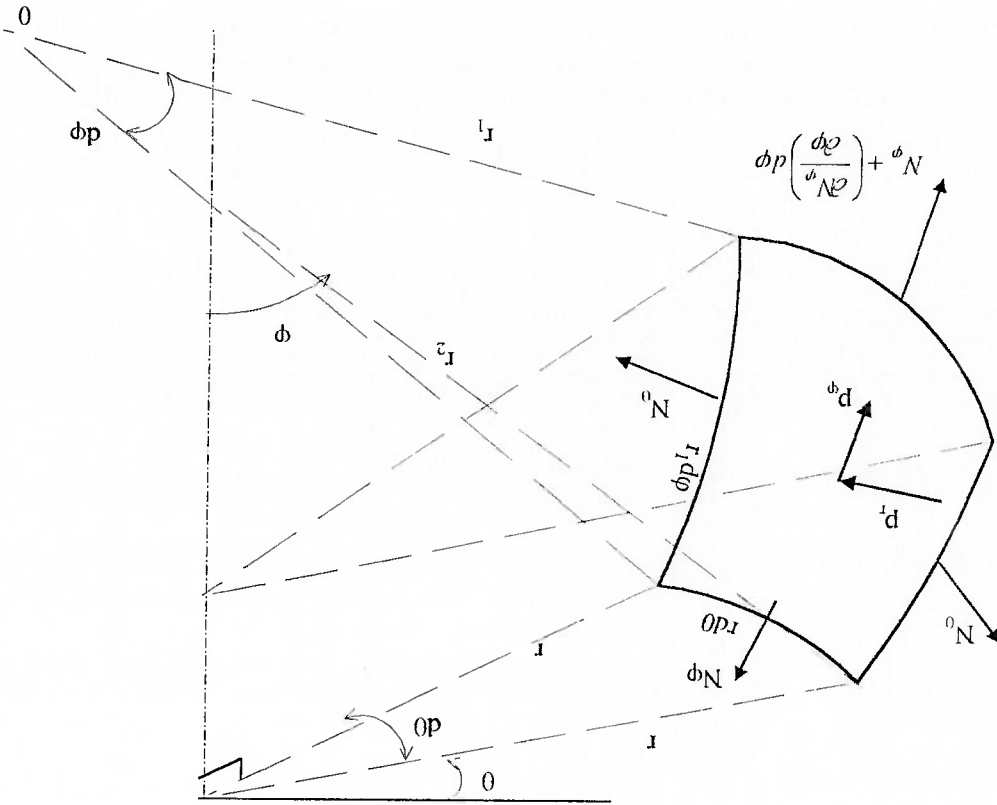


Figura 2.7.1 Elemento de casca de revolução usado para deduzir equações de equilíbrio.

Portanto,  $r = r_2 \sin \phi$ , onde  $r$  é a distância dos pontos de um mesmo paralelo ao eixo de rotação,  $r_1$  e  $r_2$  são os raios de curvatura principais de um ponto genérico do elemento. Devido à axisimetria,  $p_\theta = N_{\theta\phi} = 0$ .

Como  $\cos(\phi) \approx 1$ , a resultante segundo a direção  $\phi$  é

$$\frac{\partial(N_{\phi r} d\theta)}{\partial \phi} d\phi, \text{ sendo este resultado obtido da Figura 2.7.2a abaixo mostrada.}$$

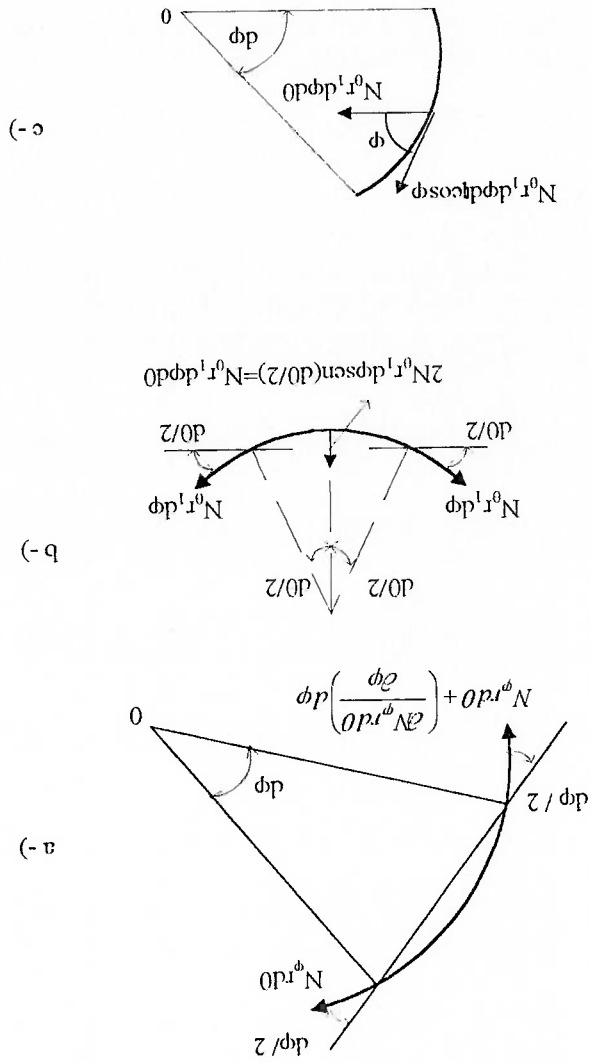


Figura 2.7.2. Projção do elemento de casca em três planos.

Das Figuras 2.7.2b e 2.7.2c obtêm-se a resultante das forças  $N_0$  segundo  $\phi$ , projetando-se  $N_{\theta_1} d\theta$  segundo  $\phi$ , ou seja,  $N_{\theta_1} d\theta \cos \phi$ .

Da condição de equilíbrio segundo  $\phi$ , resulta:

$$\frac{\partial(N_{\theta_1} r d\theta)}{\partial \phi} d\phi - N_{\theta_1} r d\theta \cos \phi + P_{\theta_1} r d\theta_1 d\phi = 0$$

ou

$$(2.7.1) \quad \frac{\partial(N_{\theta_1} r)}{\partial \phi} - N_{\theta_1} r \cos \phi + P_{\theta_1} r = 0,$$

e da condição de equilíbrio segundo a normal, obtemos:

$$N_{\theta_1} r d\theta \sin \phi + N_{\theta_1} r d\theta \sin \phi + P_{\theta_1} r d\theta_1 d\phi = 0$$

ou

$$(2.7.2) \quad \frac{N_{\theta_1} r}{N_{\theta_0}} + \frac{r_2}{r_1} + P_{\theta_1} = 0,$$

onde  $r = r_2 \sin \phi$ .

Tirando o valor de  $N_{\theta_0}$  da equação de equilíbrio anterior, temos:

$$(2.7.3) \quad N_{\theta_0} = -r_2 P_{\theta_1} - \frac{r_1}{r_2} N_{\theta_1}$$

e substituindo na equação (2.7.1), resulta:

$$(2.7.4) \quad \frac{d(N_{\theta_1} r_2 \sin \phi)}{d\phi} + N_{\theta_1} r_2 \cos \phi = -P_{\theta_1} r_1 r_2 \sin \phi - P_{\theta_1} r_1 r_2 \cos \phi.$$

Multiplicando membro a membro por  $\sin \phi$ , vem:

$$(2.7.5) \quad N_{\theta_1} r_2 \sin^2 \phi = -\int (P_{\theta_1} r_1 r_2 \cos \phi + P_{\theta_1} r_1 r_2 \sin \phi) d\phi + C.$$

Essa equação pode ser interpretada como sendo a condição de equilíbrio segundo a vertical da parte da casca situada acima de um círculo paralelo,  $\phi = \text{cte}$ . De fato, da Figura

2.7.3, tem-se:

$$(2.7.6) \quad -P_r \cos \phi - P_\phi \sin \phi \int_0^{\phi_0} r' d\phi + (2\pi r') = dl'_{vertical}$$

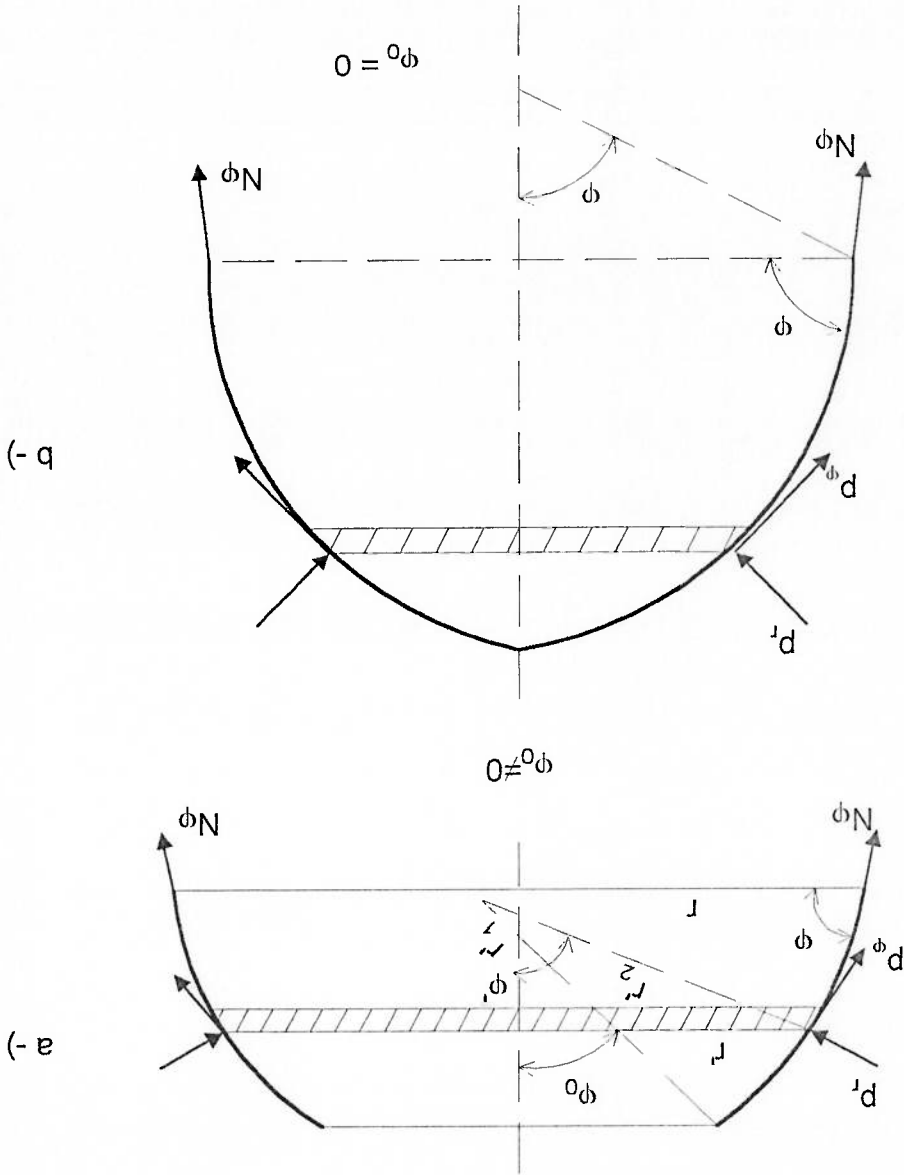


Figura 2.7.3 Análise de um segmento de casca de revolução.



E tem-se ainda:

$$(2.7.7) \quad \left( N_{\phi} \sin \phi \right) 2\pi r = 2\pi \int_{\phi_0}^{\phi} \left( -P_r \cos \phi - P_{\phi} \sin \phi \right) r_1 r_2 \sin \phi \, d\phi.$$

Tendo-se apenas um carregamento vertical  $p$  uniformemente distribuído no círculo

$\phi = \phi_0$ , tem-se:

$$2\pi N_{\phi} r_2 \sin^2 \phi = 2\pi C = -P \quad \text{onde} \quad P = 2\pi(r_1)_{\phi_0} p$$

$$\text{Portanto, } C = -(P/2\pi) \quad \text{e} \quad N_{\phi} = -\frac{2(\pi)r_2 \sin^2 \phi}{P}$$

Da equação de equilíbrio (2.7.2), resulta:

$$(2.7.8) \quad N_{\theta} = \frac{2(\pi)r_1 \sin^2 \phi}{P}$$

Se a casca for fechada, isto é,  $\phi_0 = 0$ ,  $P$  representará uma carga concentrada aplicada no

vértice. No caso de se ter cargas concentradas e distribuídas, o princípio da superposição

podrá ser utilizado. A expressão final será:

$$(2.7.9) \quad N_{\phi} = -\frac{1}{P} \int_{\phi_0}^{\phi} \left( P_r \cos \phi + P_{\phi} \sin \phi \right) r_1 r_2 \sin \phi \, d\phi + \frac{2\pi}{P}$$

### 2.8 Inclusão da Não Linearidade.

As equações apresentadas foram formuladas da teoria linear clássica da elasticidade,

onde são considerados somente os termos lineares. Nessas condições, existem teoremas que

garantem a unicidade da solução para a casca com carregamento e condições de contorno

prescritas.

Na solução dos problemas estudados neste trabalho é considerada a não linearidade geométrica e pode existir também a não linearidade física. Portanto, podem-se obter soluções múltiplas, como por exemplo após o ponto de bifurcação. Neste caso a teoria baseada na elasticidade não linear é necessária na análise dos chamados grandes deslocamentos e é a base da análise da estabilidade de cascas. Aqui o efeito da deformação sobre o equilíbrio não pode ser ignorado [12].

Os mais recentes avanços nessa área incluem a formulação e solução dos problemas estáticos e dinâmicos nos quais ocorrem simultaneamente grandes deslocamentos, plasticidade e fluência; o desenvolvimento de teorias unificadas para a predição da fluência e o escoamento a criação de modelos mais exatos para fenômenos cíclicos elasto-plásticos e a avaliação de melhores estratégias para a solução de equações não lineares. Vários programas de computador tem surgido para a análise do meio contínuo não linear em duas e três dimensões. Muitos desses programas permitem grandes deslocamentos, deformações finitas e variações das propriedades do material devido à temperatura.

As equações simultâneas não lineares, resultantes da análise de modelos discretizados, são resolvidas através de vários métodos ou utilizando estratégias diferentes, sendo a verificação iterativa do equilíbrio o método quase sempre utilizado.

Os conceitos aqui apresentados, para a análise de tensões e deformações, são utilizados pelo programa BOSORS[3] na solução dos problemas de cascas de revolução, dentro do regime não linear geométrico e físico, sendo o capítulo seguinte dedicado à análise do problema da flambagem, complementando a formulação teórica utilizada pelo programa.

### CAPÍTULO 3 MÉTODOS DE SOLUÇÃO UTILIZADOS PELO PROGRAMA BOSORS

#### 3.1 Introdução

Na análise de estruturas é de fundamental importância a determinação das cargas críticas. A carga crítica pode corresponder a um ponto limite ou a um ponto de bifurcação do equilíbrio, o qual define-se como "o ponto a partir do qual a estrutura pode percorrer um caminho alternativo e ainda estar em equilíbrio", como será mostrado a seguir.

O cilindro sob carregamento axial, apresentado na Figura 3.1.1 se deforma de maneira axissimétrica ao longo do caminho OA, até que o valor máximo ou carga limite  $\lambda_L$  é atingida no ponto A. O cilindro sem imperfeições falhará nesta carga limite seguindo o caminho ABC, ao longo do qual continua a deformação axissimétrica ou algum outro caminho ABD, ao longo do qual têm-se deformações axissimétricas entre A e B, e não axissimétricas entre B e D. Nesse caso, ao percorrer o trecho BD, diz-se que ocorreu flambagem. O ponto limite corresponde ao ponto A e a bifurcação do equilíbrio ao ponto B [6,14,15].

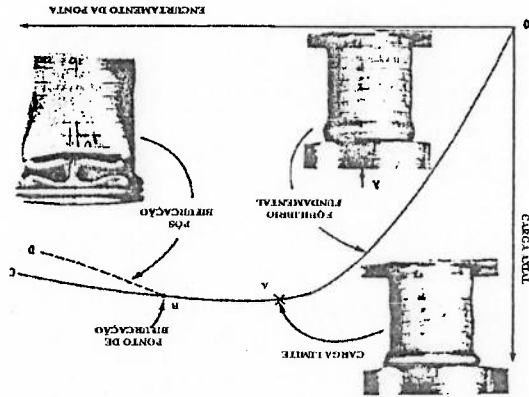


Figura 3.1.1 Cilindro sob compressão axial. Apresentando os pontos limite e de bifurcação.

O caso da Figura 3.1.1 é bastante incomum para cascas finas, já que o ponto de bifurcação ocorre depois de ter-se atingido o ponto limite. Neste caso, portanto, a bifurcação do equilíbrio é de menor significado que a carga limite.

A situação apresentada na Figura 3.1.2 é mais comum para o tipo de estrutura estudado. O ponto de bifurcação B fica entre O e A. O caminho fundamental OAC corresponde à deformação axissimétrica e BD à não axissimétrica. Neste caso a carga limite da estrutura sem imperfeições  $\lambda_1$  é de menor importância que a bifurcação  $\lambda_c$ .

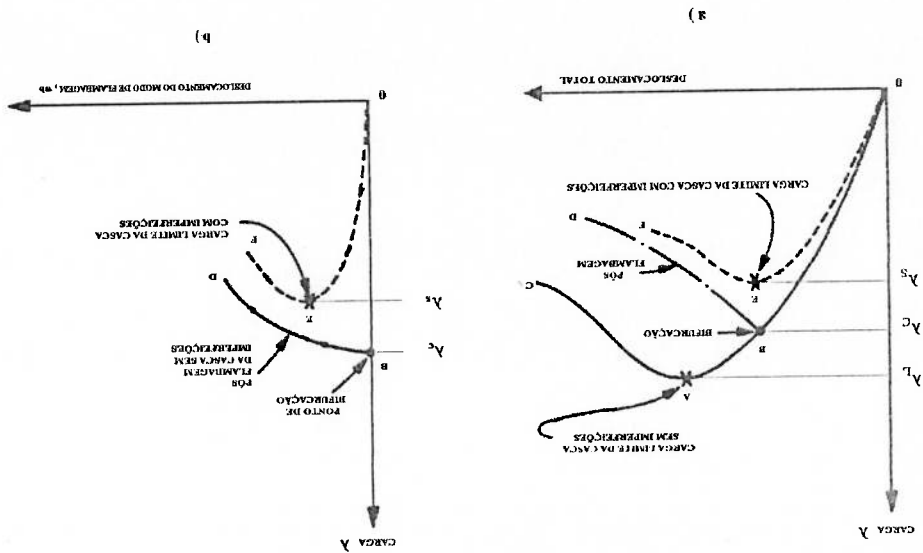


Figura 3.1.2 Curvas de carga vs. deslocamento, apresentando pontos limites e de bifurcação. No caso de estruturas reais, as quais têm inevitáveis imperfeições, não existe bifurcação do equilíbrio e a estrutura seguirá o caminho OEF da Figura 3.1.2a, correspondendo a falha ao ponto E, e sendo a carga limite dada por  $\lambda_s$ .

Na Figura 3.1.2b a carga é uma função do deslocamento modal de flambagem  $w_b$ .

Visto que o modo de bifurcação é ortogonal ao padrão dos deslocamentos pré flambagem da casca sem imperfeições, a amplitude é zero até atingir o ponto de bifurcação B.

A curva BD, no exemplo da Figura 3.1.2 implica em dizer que o estado pós

flambagem é instável, diminuindo a capacidade de suportar o carregamento  $\lambda$  com o

aumento do deslocamento, após o ponto B.

A Figura 3.1.3 é mais geral e mostra os diferentes tipos de comportamento pós

flambagem, quando tem-se somente um ponto de bifurcação associado a um modo de

flambagem [16,17,18].

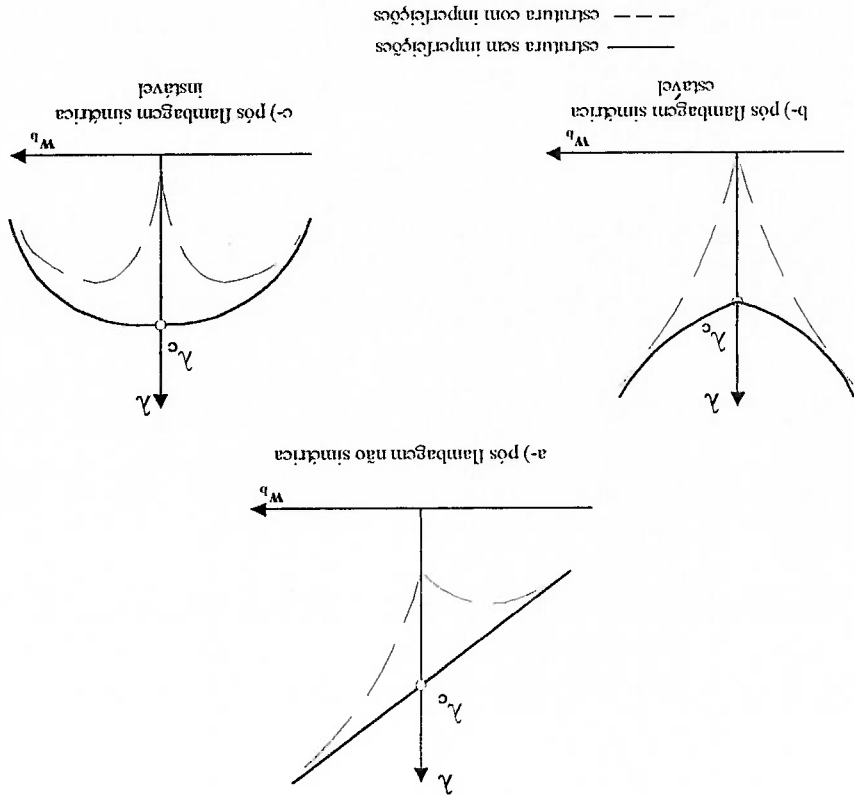


Figura 3.1.3 Diferentes tipos de relações carga deslocamentos, sendo  $\lambda$  o carregamento e  $w_b$  o deslocamento modal de flambagem.

A natureza não simétrica da curva na Figura 3.1.3a indica que a estrutura ainda suporta carga acima da bifurcação  $\lambda_c$  se ela flamba numa direção, apresentando portanto, um comportamento pós flambagem estável. Já na outra direção apresentará um comportamento pós flambagem instável. Um exemplo deste tipo de comportamento assimétrico são estruturas com movimento relativo de uma de suas partes em relação a outra [16]. Outro caso clássico é o painel cilíndrico comprimido axialmente Figura 3.1.4.

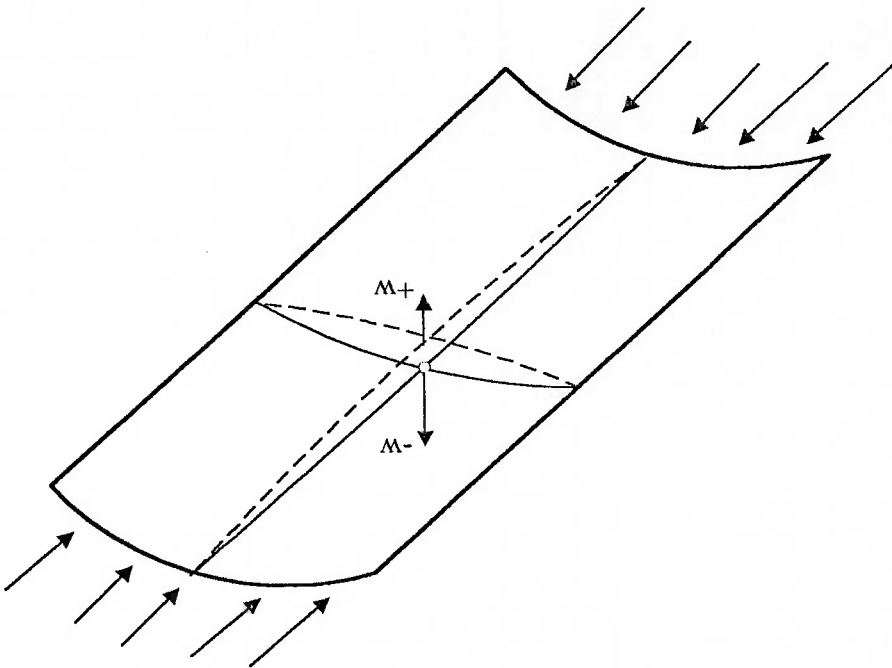


Figura 3.1.4 Painel cilíndrico em compressão axial. Bifurcação Assimétrica.

A Figura 3.1.3b apresenta um comportamento pós flambagem estável simétrico, o qual é típico de barras em compressão, anéis circulares sob carregamento radial uniforme, calotas esféricas finas, engastadas, com carga concentrada no pico etc. A estrutura, portanto, pode flambar segundo a forma específica desse modo de flambagem e suportar um carregamento que exceda o valor crítico. A Figura 3.1.5 mostra o caso de uma chapa com carregamento no plano que é um exemplo de comportamento pós flambagem simétrico.

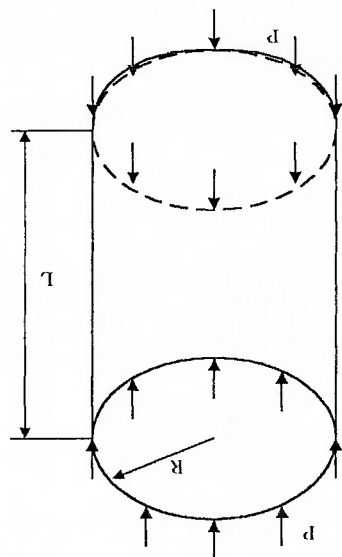


Figura 3.1.6 Cilindro em compressão axial.

A Figura 3.1.3c mostra o comportamento típico de cascas finas, com raras exceções. O cilindro em compressão axial ou pressão hidrostática e a esfera ou calotas sob pressão externa são exemplos típicos, com a ocorrência de um grande número de lóbulos. Neste caso a estrutura, após esse ponto de bifurcação e inclusive nele, só possui estados de equilíbrio instável. A estrutura flamba com grandes deformações e não pode suportar um carregamento maior. A Figura 3.1.6 mostra o caso do cilindro em compressão axial.

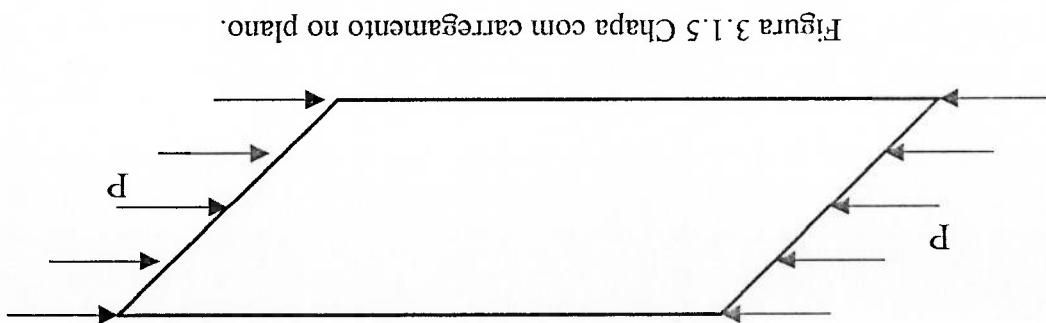


Figura 3.1.5 Chapa com carregamento no plano.

### 3.2 Utilização do Programa BOSORS

O programa BOSORS[3] calcula as tensões em estruturas axissimétricas de cascas de revolução. No caso do comportamento ser do tipo da Figura 3.1.1 calcula toda a curva OA. Já no caso de ocorrer o ponto de bifurcação antes do ponto limite, como exemplificado na Figura 3.1.2, o programa calcula a mesma curva OA e determina a posição do ponto B, fornecendo a menor carga de flambagem e o modo correspondente

A estrutura pode ser reforçada por anéis circulares de secção transversal arbitrária, de materiais de diferentes propriedades, podendo ter comportamento elasto-plástico. As paredes da casca podem ser constituídas de até seis materiais diferentes. A estrutura pode ser submetida a cargas de pressão, cargas térmicas variáveis ao longo da espessura e/ou da geratriz e cargas concentradas numa linha circumferencial [19,20].

A formulação do problema é em forma integral através do princípio dos trabalhos virtuais. A discretização é feita pelo método das diferenças finitas, onde são obtidas um conjunto de equações algébricas não lineares que são resolvidas pelo método de Newton-Raphson. No anexo A são dados o tipo de elemento de diferença finita utilizado pelo programa, a matriz de rigidez e as matrizes que compõem a mesma. A energia potencial total se compõe da energia da deformação dos segmentos de casca e dos anéis e do trabalho dos esforços Na referência [2] há uma completa e detalhada apresentação dos fundamentos teóricos do programa.

Para o uso do programa, o usuário, basicamente deve inserir as características da estrutura a ser analisada utilizando o pré processador (INPUT). Deve, a seguir, correr o processador principal (BOSORMAIN), que calcula os deslocamentos da estrutura, e



posteriormente o pós processador (BOSORPOST), que calcula as tensões agentes. Cada uma dessas etapas é descrita mais detalhadamente nas referências bibliográficas [3,19,20]. A sequência de execução de cada um dos programas que compõem o BOSOR5[3] é a seguinte:

INPUT

ASSEMBLE

(B)OSORREAD (nome do caso)

(M)AINSETUP

(B)OSORMAIN (nome do caso)

(P)OSTSETUP

(B)OSORPOST (nome do caso)

As letras entre parênteses devem ser omitidas devido à limitação de caracteres que definem o nome de arquivos em micros. Nas etapas indicadas deve-se incluir o nome do caso estudado para a execução do programa.

O programa INPUT é a etapa de pré processamento, que recebe os dados do modelo discretizado da estrutura a ser analisada pelo BOSOR5[3]. O mesmo constitui a entrada de dados do modelo, junto com os programas MAINSETUP e POSTSETUP, onde se colocam, respectivamente, as opções do tipo de análise a ser executada e do tipo de saída de resultados desejada.

A estrutura a ser analisada deve ser dividida em segmentos ou partes, a critério do analista, estes segmentos são classificados de acordo com a forma da geratriz, conforme o descrito abaixo:

- grupo 1: cilindro, cone e placa circular
- grupo 2: esfera, toroide e ogiva
- grupo 3: forma qualquer

O grupo 3 não é recomendado devendo, nestes casos, o usuário modelar a geratriz com a combinação de múltiplos segmentos enquadrados nos grupos 1 e 2.

Os segmentos são discretizados através de nós, utilizando uma superfície de referência para a casca. Os pontos nodais devem ser em maior número nas regiões onde se espera encontrar um elevado gradiente de deformações. Portanto, não existe uma regra única para a discretização, pois ela é sempre uma função do problema a ser estudado e só a experiência ajudará a decidir qual a melhor a ser adotada em cada caso.

A estrutura deve ser posicionada em relação a um eixo de coordenadas  $(R, Z)$ , de acordo com a Figura 3.2.1, na qual  $Z$  é o eixo de revolução e  $R$  o eixo radial. A entrada de dados é fornecida, de maneira interativa, conforme uma sequência imposta pelo programa.

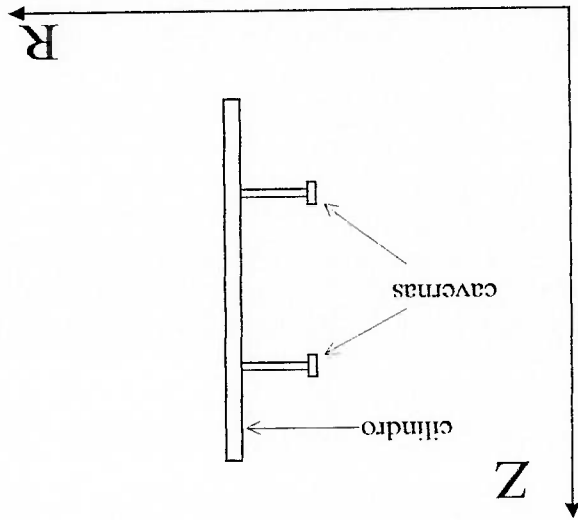


Figura 3.2.1 Coordenadas a serem utilizadas na modelagem com BOSORS.

Para cada segmento da estrutura em análise o INPUT cria um arquivo contendo os dados relativos a esse segmento. Para toda a estrutura, cria mais um arquivo contendo a descrição da função carregamento e as condições de contorno. Assim, por exemplo, se uma estrutura apresenta três segmentos, serão criados quatro arquivos com extensão S1, S2, S3 e S4. Esses arquivos são agrupados num único arquivo para que se possa inicializar o processamento do modelo. Isso é feito pelo programa ASSEMBLE e o arquivo criado apresenta extensão ALL.

Em outra etapa, com o programa BOSORREAD, são montados os arquivos necessários à execução do processador principal. Além disso, é feita a leitura do arquivo de extensão ALL para verificação da ocorrência de erros de declaração de variáveis ou erros de lógica. O arquivo contendo as informações relativas a essa verificação apresenta extensão ERR.

Posteriormente, se inicia o processamento do modelo através do programa MAINSETUP, com a criação do arquivo de extensão IMP, onde o usuário escolhe o tipo de processamento e pode alterar os incrementos de carga para a corrida do programa. O processo consiste em iniciar o processamento com intervalos de carga relativamente grandes, para depois diminuir esse intervalo próximo ao valor limite, com um processo iterativo. Nesta etapa é criado, pelo programa BOSORMAIN, um arquivo de saída de extensão MAL, onde são calculados os deslocamentos máximos de cada segmento para cada valor de carregamento. Caso para algum valor de carga o cálculo não convirja para o número máximo de iterações especificado, significa que a estrutura atingiu o ponto limite A.

O cálculo do ponto B é uma das opções de análise a ser executada pelo processador

principal, com a criação de outro tipo de arquivo de extensão IMP na entrada dos dados no

MAINSETUP.

Numa etapa posterior são fornecidos os dados para o pós processamento

(POSTSETUP), com a criação do arquivo de extensão IPP, onde serão controlados a

impressão de saída, a quantidade de passos de carga para a saída, o tipo de saída desejada

etc. Na execução do pós processamento (BOSORPOST), é criado um arquivo de extensão

POS, onde são mostrados para cada ponto nodal e cada anel discretizado os carregamentos

e as tensões, segundo especificado pelo usuário.

### 3.3 Solução da Não-Linearidade Segundo o BOSORS

Será apresentada a estratégia usada no programa de computador BOSORS[3], para a

solução da não linearidade geométrica e física.

A estratégia na solução numérica dos problemas nos quais têm-se grandes

deslocamentos e plasticidade, utilizada pelo programa BOSORS[3], é o método de

incrementos num duplo laço de iteração em cada nível de carga, chamado na

bibliografia[6,15,19,20] “método sub incremental”. No laço interno as propriedades do

material são mantidas fixas e as equações não-lineares de equilíbrio são resolvidas pelo

método de Newton-Raphson (equações formuladas em termos de rigidez tangente). No laço

externo são determinadas as propriedades que dependem das deformações, a matriz dos

coeficientes das equações constitutivas [C], os componentes meridianais e circunferenciais

Na análise, a carga é aplicada incrementalmente e a resposta determinada para cada valor de carga. Em cada nível de carga é resolvido um sistema de equações algébricas, sendo a sua ordem igual ao número de graus de liberdade do sistema (chamado na bibliografia de "sistema A"). A determinação dos componentes da deformação plástica requer, em geral, nos casos tridimensionais, a solução de um conjunto de seis equações simultâneas em cada ponto. Já no caso de deformações axissimétricas, de cascas finas, requer a solução de duas equações simultâneas em cada ponto (chamado na bibliografia de "sistema B") [6,8,21].

Esta estratégia é ilustrada no fluxograma da Figura 3.3.1.

Na análise, a carga é aplicada incrementalmente e a resposta determinada para cada valor de carga. Em cada nível de carga é resolvido um sistema de equações algébricas, sendo a sua ordem igual ao número de graus de liberdade do sistema (chamado na bibliografia de "sistema A"). A determinação dos componentes da deformação plástica requer, em geral, nos casos tridimensionais, a solução de um conjunto de seis equações simultâneas em cada ponto. Já no caso de deformações axissimétricas, de cascas finas, requer a solução de duas equações simultâneas em cada ponto (chamado na bibliografia de "sistema B") [6,8,21].

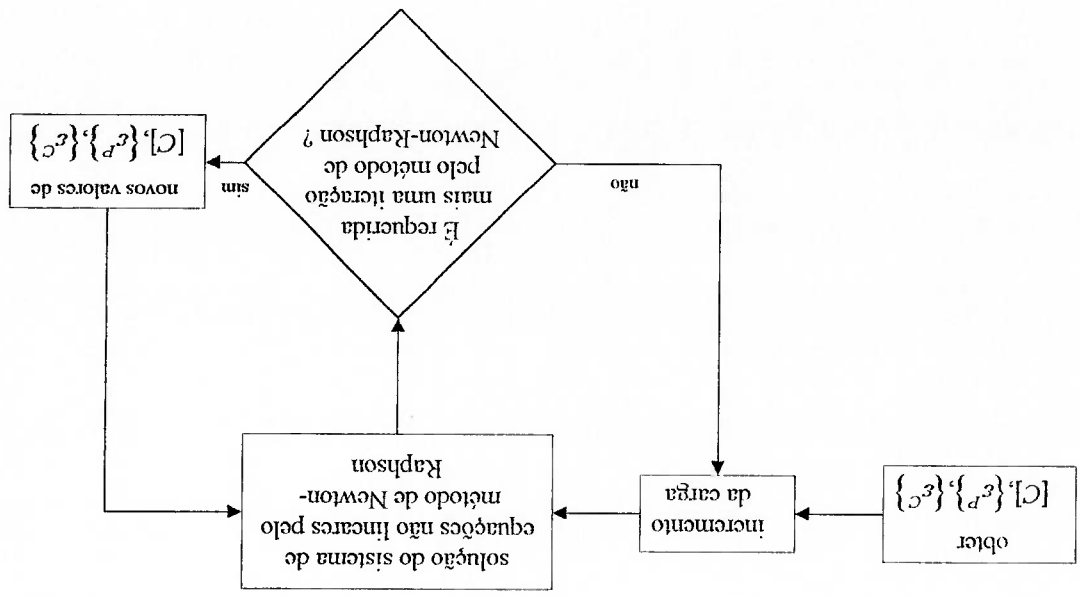


Figura 3.3.1 Fluxograma do duplo laço de iteração utilizado no BOSORS.

As equações do sistema B ficam do modo seguinte:

$$\{\Delta \varepsilon\} = [D^{-1}] \{ \Delta \sigma \} + \Delta \varepsilon^{-p} \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \\ - \end{matrix} \right\}_0$$

(3.3.1a)

$$\{\Delta\varepsilon\} = [D^{-1}]\{\Delta\sigma\} + \frac{E - E_T}{E_T} \Delta\sigma \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} \end{array} \right\}^0 \quad (3.3.1b)$$

$$\{\Delta\varepsilon\} = [D^{-1}]\{\Delta\sigma\} + \frac{E - E_T}{E_T} f(\Delta\sigma_{ij}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} \end{array} \right\}^0 \quad (3.3.1c)$$

Nas equações (3.3.1a), (3.3.1b) e (3.3.1c) o termo da esquerda  $\{\Delta\varepsilon\}$  é o vetor dos

incrementos dos componentes das tensões, de valor desconhecido (incógnita);  $\Delta\varepsilon^{-p}$  é

incógnita e é chamado incremento da deformação plástica efetiva; que na equação (3.3.1b) é

expresso em função do incremento da tensão equivalente  $\Delta\sigma$ , e na equação (3.3.1c) em

função dos incrementos das componentes da tensão equivalente, por meio da função não

linear  $f(\Delta\sigma_{ij})$ . O sistema não-linear (sistema B) pode-se resolver para os incrementos das

componentes das tensões  $\{\Delta\sigma\}$ .

Podem acontecer nos casos de concentração de tensões, onde  $\{\Delta\varepsilon\}$  é muito grande,

que o sistema B não tenha solução. A Figura 3.3.2 mostra o que pode acontecer. Uma

seqüência de valores de  $\Delta\varepsilon^{-p}$  pode ser testado na equação (3.3.1a) para gerar a curva

contínua na Figura 3.3.2a. A curva tensão deformação, é representada pela linha

descontínua. Idealmente, o valor de  $\Delta\varepsilon^{-p}$ , que satisfaz todas as condições do problema é

obtido como uma das interseções das duas curvas [22,23,24].

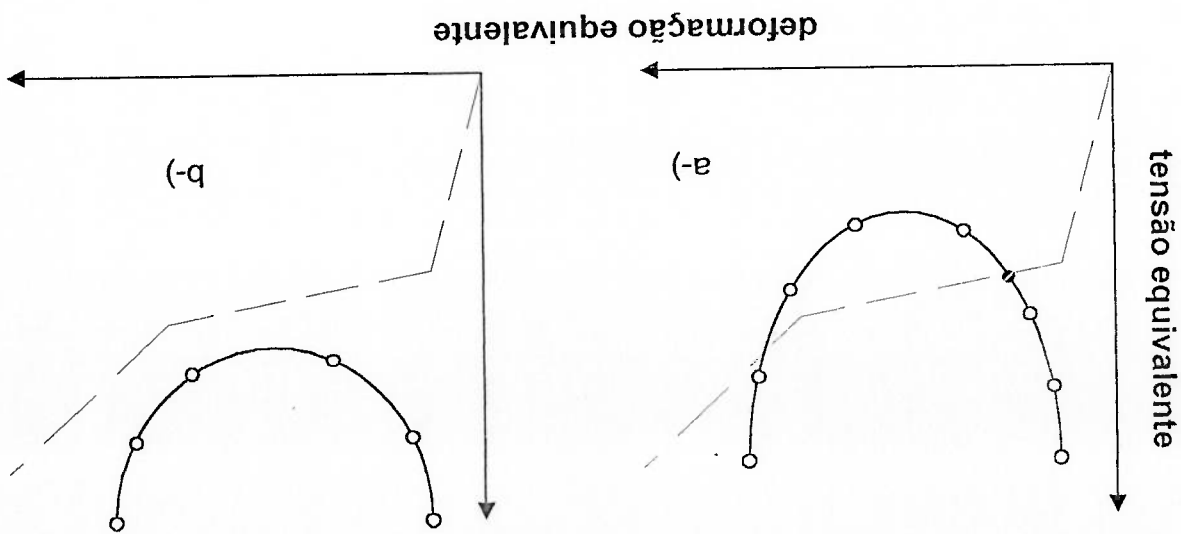


Figura 3.3.2 Representação esquemática da solução do sistema B.

De fato, soluções podem ser obtidas desse modo se o incremento efetivo da deformação é menor que 0.1%. Para incrementos da deformação maiores, no entanto, resultado mostrado na Figura 3.3.2b pode ocorrer. O método sub incremental [6,8,25], citado no início deste item, impede essa anomalia vista na Figura 3.3.2b.

Também pode acontecer outro problema no cálculo de  $\{\Delta\sigma\}$  nas equações (3.3.1), pelo fato de que o módulo tangente  $E_T$  é uma função não linear de  $\epsilon^p$  ou  $\sigma$ . Na análise, a curva de tensão vs. deformação é substituída por linhas retas (segmentos de reta). Como o incremento de carga muda de um nível ou passo de carga a outro,  $E_T$  também muda de maneira descontínua, de maneira que não é possível expressá-lo por uma função simples.

### 3.4 Equações Básicas

O programa de computador BOSOR5[3] baseia-se no princípio dos trabalhos

virtuais[6,18,22] o qual pode-se escrever como:

$$\delta U = \int_{vol} [\epsilon - \epsilon^p - \epsilon^e - \epsilon^T] [D] \{\delta \epsilon\} dV = \delta W \quad (3.4.1)$$

onde  $\delta U$  representa o trabalho virtual dos esforços internos e  $\delta W$  o trabalho virtual

realizado pelos esforços externos. Sendo a equação (3.4.1) aplicada a deformações de

cascas de revolução.

$[\epsilon]$  ou  $\{\epsilon\}$  representam os componentes das deformações meridionais e circunferências

$$[\epsilon_1, \epsilon_2] \quad \text{ou} \quad \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{Bmatrix}$$

Tem-se ainda:

$$[\epsilon^p] \quad \text{componente total da deformação plástica} \quad [\epsilon_1^p, \epsilon_2^p]$$

$$[\epsilon^e] \quad \text{componente total da deformação por fluência} \quad [\epsilon_1^e, \epsilon_2^e]$$

$$[\epsilon^T] \quad \text{componente da deformação por temperatura} \quad [\epsilon_1^T, \epsilon_2^T]$$

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix}$$

A integração é feita através da espessura da casca, ao longo da circunferência e do

meridiano.

As deformações totais  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$  são dadas em qualquer ponto ao longo da espessura

da casca por:

$$\epsilon_\alpha = \epsilon_\alpha^e - z k_\alpha \quad ; \quad \alpha = 1, 2$$

(3.4.2)



onde  $z$  é a distância até a superfície de referência e (Figura 3.4.1):

$$\left. \begin{aligned}
 c_1 &= n' + \frac{R_1}{w} + \frac{\beta^2}{2} & e_2 &= \frac{w'}{w} + \frac{R_2}{r} \\
 k_1 &= w'' - \frac{n}{R_1} - n \left( \frac{1}{R_1} \right)' & k_2 &= \beta \left( \frac{r'}{r} \right) \\
 \beta &= w' - \frac{R_1}{n} & &
 \end{aligned} \right\} \quad ( )' \equiv d( ) / ds \tag{3.4.3}$$

Nesta análise da curva OA (Figura 3.1.2), as deformações são assumidas muito

pequenas, ficando deste modo implícito o conceito de deformação dado em engenharia de

“mudança de comprimento/comprimento original”. Nas equações (3.4.3) as derivadas das

variáveis dependentes  $u$  e  $w$  são substituídas pelas expressões de diferenças finitas

apropriadas de primeira e segunda ordem [6,8,16].

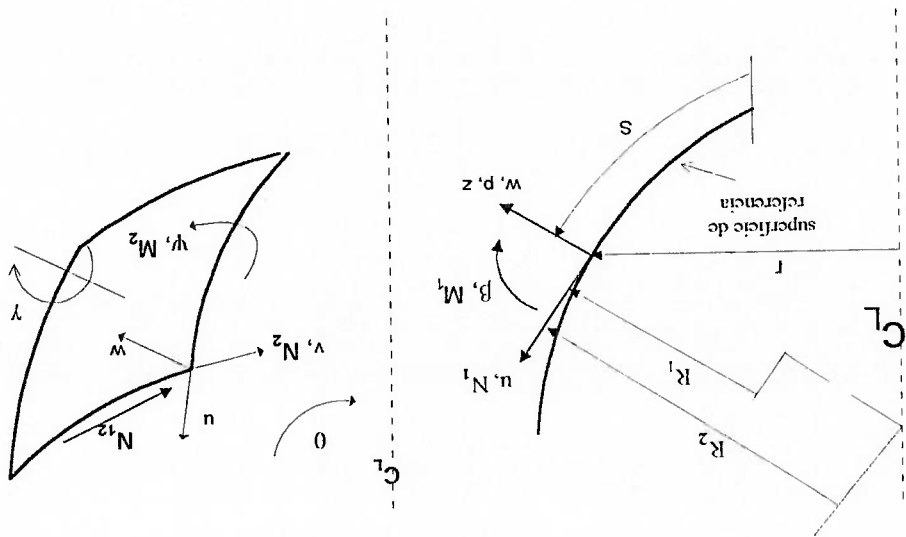


Figura 3.4.1 Coordenadas da superfície de referência, geometria, deslocamentos, esforços resultantes e pressão.

Os pontos nodais "u" estão situados no meio do caminho entre os pontos nodais "w", mostrado na Figura (3.4.2). São introduzidos multiplicadores de Lagrange para incluir condições de fronteira e conexão dos segmentos. Portanto as variáveis subscritas  $q_i$  nas equações a seguir representam os graus de liberdade nodais de "u" e "w" e os multiplicadores de Lagrange [26,27].

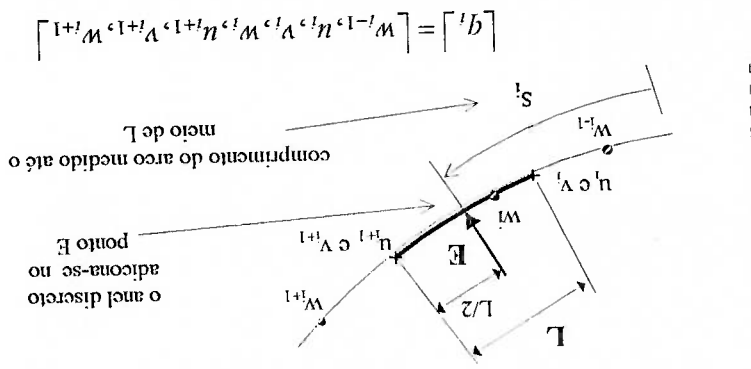


Figura.3.4.2 Localização das variáveis dos pontos nodais da casca.

A integração da equação 3.4.1, com relação a coordenada circunferencial  $\theta$ , equivale a multiplicar por  $2\pi$ . A integração ao longo do meridiano é substituída pela multiplicação pelo comprimento do arco entre dois nós adjacentes "u" e a integração na espessura da casca é feita pela regra de Simpson.

As variações indicadas na equação (3.4.1) para o modelo discretizado são feitas com relação às variáveis dependentes  $q_i, i = 1, 2, \dots, N$ , onde  $q_i$  é um grau de liberdade de um nó ou multiplicador de Lagrange e  $N$  é o número total de graus de liberdade. Se a  $i$ th componente do gradiente na equação (3.4.1) é:

$$\psi_i = \int \left[ \varepsilon - \varepsilon^p - \varepsilon^e - \varepsilon^T \right] [D] \left\{ \frac{\partial \varepsilon}{\partial q_i} \right\} dV - \frac{\partial W}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (3.4.4)$$

então se estabelece para o equilíbrio o seguinte:

$$\psi_i(q_j) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (3.4.5)$$

Temos em (3.4.5) um sistema de equações algébricas não lineares que são resolvidas pelo método de Newton-Raphson. Para cada iteração do método aplicado

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial \psi_i}{\partial q_j} \Delta q_j = -\psi_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.4.6)$$

devem ser resolvidas para os termos de correção  $\Delta q$ . As iterações continuam até  $\frac{\Delta q_j}{q_j} \leq \varepsilon$ ,

onde  $\varepsilon$  é um parâmetro de controle do erro (no caso do BOSORS  $\varepsilon = 0.001$ ).

A quantidade  $\frac{\partial \psi_i}{\partial q_j}$  é o (i, j)th coeficiente de uma matriz  $N^*N$ , conhecida como

matriz dos coeficientes, a qual muda com cada iteração.

Os coeficientes mencionados em (3.4.6) são calculados a partir da equação (3.4.4)

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial q_j} = \int \left[ \varepsilon - \varepsilon^p - \varepsilon^e - \varepsilon^T \right] [D] \left\{ \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial q_i \partial q_j} \right\} + \frac{\partial}{\partial q_j} \left[ \varepsilon - \varepsilon^p - \varepsilon^e - \varepsilon^T \right] [D] \left\{ \frac{\partial \varepsilon}{\partial q_i} \right\} dV - \frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_j} \quad (3.4.7)$$

### 3.5 Estratégia na Solução da Não Linearidade Física

Na equação (3.4.7) a deformação de fluência e a deformação de temperatura são assumidas independentes dos deslocamentos nodais do ponto  $q_i$ . Dois métodos para a

solução incremental da plasticidade são:

- a-) o método da "deformação inicial";
- b-) o método do "módulo tangente" ("rigidez tangente");

No método da "deformação inicial" são tratadas as deformações plásticas como "deformação térmica efetiva" [11,14]. Na equação (3.4.7) assume-se o termo  $\epsilon^p$  como independente dos deslocamentos do ponto nodal  $q_j$ . Então a equação (3.4.7) transforma-se em:

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial q_j} = \int \left[ \epsilon - \epsilon^p - \epsilon^e - \epsilon^T \right] [D] \left\{ \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial q_j \partial q_j} + \left[ \frac{\partial q_j}{\partial \epsilon} \right] [D] \left\{ \frac{\partial \epsilon}{\partial q_j} \right\} \right\} dV - \frac{\partial^2 W}{\partial q_j \partial q_j} \quad (3.5.1)$$

onde todos os termos são conhecidos e independentes de  $q_i$  e  $q_j$ , exceto  $\epsilon$  e  $W$ . No método da "rigidez tangente" (utilizado no BOSOR5[3]) as variações dos componentes da deformação plástica são expressas em termos das variações dos componentes da deformação total:

$$\{d\epsilon^p\} = [C] \{d\epsilon - d\epsilon^e - d\epsilon^T\} \quad (3.5.2)$$

Se  $[C]$ ,  $\epsilon^e$  e  $\epsilon^T$  são consideradas independentes de  $q_j$  vem:

$$\frac{\partial \epsilon^p}{\partial q_j} = [C] \frac{\partial}{\partial q_j} \{d\epsilon - d\epsilon^e - d\epsilon^T\} = [C] \left\{ \frac{\partial \epsilon}{\partial q_j} \right\}, \quad (3.5.3)$$

sendo  $[C]$  uma matriz  $2 \times 2$ .

Trabalhando com as equações (3.4.7) e (3.5.3), obtemos

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial q_j} = \int \left[ \epsilon - \epsilon^p - \epsilon^e - \epsilon^T \right] [D] \left\{ \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial q_j \partial q_j} + \left[ \frac{\partial q_j}{\partial \epsilon} \right] [D] \left\{ \frac{\partial \epsilon}{\partial q_j} \right\} \right\} dV - \frac{\partial^2 W}{\partial q_j \partial q_j} \quad (3.5.4)$$

Os dois elementos do vetor  $\epsilon^p$  no primeiro termo da direita das equações (3.4.4) e (3.5.4) são dados por:

$$\{\epsilon^p\} = \{\epsilon_0^p + \Delta\epsilon^p\} = \{\epsilon_0^p + [C](\epsilon - \epsilon_0)\}, \quad (3.5.5)$$

na qual o subscrito ( )<sub>0</sub> é o valor obtido antes da atualização das propriedades do

material.

Utilizando a equação (3.5.5) pode-se escrever a equação (3.5.4) da seguinte

maneira:

$$\frac{\partial^2 q_i}{\partial q_j^2} = \int \left[ \epsilon^T [D^T] \left\{ \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial q_i \partial q_j} \right\} + \left[ \frac{\partial \epsilon}{\partial q_i} \right] [D^T] \left\{ \frac{\partial q_i}{\partial \epsilon} \right\} + [C] \epsilon_0 - \epsilon_0^p - \epsilon^e - \epsilon^T [D] \left\{ \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial q_i \partial q_j} \right\} \right] pV - \frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_j} \quad (3.5.6)$$

onde  $[D^T]$  é a matriz de rigidez tangente

$$[D^T] = [1 - C]^T [D]. \quad (3.5.7)$$

As equações constitutivas no método da "rigidez tangente" para cada iteração feita

pelo método de Newton-Raphson são obtidas inserindo as equações (3.4.4) e (3.5.6) em

$$(3.4.6).$$

Na equação (3.5.3) a variação das componentes da deformação plástica estão

relacionadas com os componentes da deformação total pela matriz  $[C]^{2 \times 2}$ , obtida conforme

vem a seguir:

As componentes das tensões são:

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon - \epsilon^p - \epsilon^e - \epsilon^T\}, \quad (3.5.8)$$

sendo os incrementos das tensões

$$\{\Delta\sigma\} = [D] \{\Delta\epsilon - \Delta\epsilon^p - \Delta\epsilon^e - \Delta\epsilon^T\}, \quad (3.5.9)$$

Da condição que o vetor incremento da deformação plástica deve ser normal à

superfície de escoamento de Von-Mises, resultam as relações seguintes:

$$(3.5.10) \quad \left\{ \Delta \varepsilon'_p \right\} = \left\{ \frac{\Delta \sigma}{\Delta \sigma'} \right\} \Delta \varepsilon_p = \begin{pmatrix} \sigma \\ \sigma \\ \sigma \\ \sigma \\ \sigma \\ \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\sigma_1 - 0.5\sigma_2) \\ \sigma \\ \sigma \\ (\sigma_2 - 0.5\sigma_1) \\ \sigma \\ \sigma \end{pmatrix} \quad (! = 1, 2)$$

onde  $\Delta \varepsilon'_p$ ,  $i = 1, 2$  são os componentes da deformação plástica incremental;  $\Delta \varepsilon_p$  é o incremento efetivo da deformação plástica;  $\sigma_i$ ,  $i = 1, 2$  são obtidos pela equação (3.5.8) e  $\sigma$  é a tensão equivalente dada por:

$$(3.5.11) \quad \sigma = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2)^{1/2}$$

Multiplicando a equação (3.5.9) pela fila  $\begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} \end{bmatrix}$  e substituindo o lado direito da

equação (3.5.10) por  $\{\Delta \varepsilon_p\}$  obtêm-se:

$$(3.5.12) \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} \end{bmatrix} \{\Delta \varepsilon\} = \Delta \sigma = H' \Delta \varepsilon_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} \end{bmatrix} [D] \left( \{\Delta \varepsilon\} - \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} \end{bmatrix} \Delta \varepsilon_p \right) - \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} \end{bmatrix} \{\Delta \varepsilon_c\} - \{\Delta \varepsilon_T\}$$

a equação (3.5.12) pode-se resolver para  $\Delta \varepsilon_p$ , ficando

$$(3.5.13) \quad \Delta \varepsilon_p = \frac{H' + \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} \end{bmatrix} [D] \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} \end{bmatrix} [D] \left( \{\Delta \varepsilon\} - \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} \end{bmatrix} \Delta \varepsilon_p \right) - \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} \end{bmatrix} \{\Delta \varepsilon_c\} - \{\Delta \varepsilon_T\}}$$

Os dois elementos da fila ou coluna  $\left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} \right\}$  são obtidos da equação (3.5.10) e  $H'$  é

a inclinação da curva da tensão equivalente vs. deformação plástica, a qual é dada por:

$$(3.5.14) \quad H' = \frac{E - E_T}{E_T}$$

onde  $E_T$  é o módulo tangente.

Da equação (3.5.10) vem a equação final

$$(3.5.15) \quad \{\Delta \epsilon^p\} = [C] \{\Delta \epsilon - \Delta \epsilon^e - \Delta \epsilon^T\}$$

onde

$$(3.5.16) \quad [C]^{2*2} = \frac{\begin{Bmatrix} \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} \\ - \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} \end{Bmatrix} [D] \begin{Bmatrix} \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} \\ - \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} \end{Bmatrix} + H' \begin{Bmatrix} \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} \\ - \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} \end{Bmatrix} [D] \begin{Bmatrix} \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} \\ - \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} \end{Bmatrix}}{\begin{Bmatrix} \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} \\ - \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} \end{Bmatrix} [D] \begin{Bmatrix} \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} \\ - \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} \end{Bmatrix}}$$

### 3.6 Implementação dentro do Programa BOSORS

Se a estrutura é composta por cascas de revolução e anéis, a equação (3.4.1) pode

ser escrita da seguinte forma:

$$(3.6.1) \quad \delta U - \delta W = \int_{\theta} \int_0^s \left[ \int_0^z \left[ \epsilon - \epsilon^e - \epsilon^T \right] [D] \{ \delta \epsilon \} r dz ds + \int_0^y \left( \epsilon_r' - \epsilon_p' - \epsilon_c' - \epsilon_T' \right) E_r \delta \epsilon_r' da \right. \\ \left. - \int_0^s \left[ \left( p_1 \delta u + p_2 \delta v + p_3 \delta w \right) - p_3 \left( \frac{R_1}{I} + \frac{R_2}{I} \right) w \delta w \right. \right. \\ \left. \left. + p_3 \left( \frac{R_1}{u \delta u} + \frac{R_2}{v \delta v} \right) \left( \frac{dp_3}{u \delta w} + w \delta u \right) \right] + p_3 \left( \frac{R_1}{v \delta v} + \frac{R_2}{u \delta u} \right) \left( \frac{dw}{\delta w} + w \delta u \right) \right. \\ \left. - \left( -A \delta u^e + S \delta v^e + H \delta w^e + M \delta \chi \right) r^e \right]$$

onde:

$p_1$  : componente da pressão na direção meridional

$p_2$  : componente da pressão na direção circumferencial

$p_3$  : componente da pressão na direção radial

$\epsilon_r$  : deformação total do anel.

$\epsilon_r^p$  : deformação plástica do anel.

$\epsilon_r^c$  : deformação por fluência do anel.

$\epsilon_r^T$  : deformação por temperatura do anel.

$V$  : força axial por unidade de longitude aplicada no centro de gravidade do anel.

$S$  : força cortante por unidade de longitude atuando ao longo do eixo do centro de gravidade do anel.

gravidade do anel.

$H$  : força radial por unidade de longitude aplicada no centro de gravidade do anel.

$M$  : momento meridional por unidade de longitude ao redor do centro de gravidade do anel.

$r_c$  : raio do centro de gravidade do anel.

$u_c$  : deformação longitudinal do centro de gravidade do anel

$v_c$  : deformação circumferencial do centro de gravidade do anel

$w_c$  : deformação radial do centro de gravidade do anel

Nessa equação esta representada a energia da deformação da casca, a energia da

deformação dos anéis, as forças externas na casca e as forças externas nos anéis.

Os termos não lineares multiplicados por  $p_3$  foram obtidos da bibliografia [6] e

representam o efeito da pressão.



A deformação total da casca  $\epsilon$  pode ser dada em função das deformações da superfície de referência e mudanças da curvatura, e estas quantidades estão dadas através de expressões apropriadas de diferenças finitas, em função dos deslocamentos dos pontos nodais ( $q_i$ ) mostrados na Figura 3.4.2.

Para o anel é utilizada a hipótese de que as suas seções planas permanecem planas depois da deformação, sendo a origem para a rotação desses planos o centro de cisalhamento da seção transversal do anel. A deformação total  $\epsilon$ , em qualquer seção transversal do anel pode ser expressada em função dos componentes dos deslocamentos  $u_s$ ,  $v_s$  e  $w_s$  do centro de cisalhamento do anel e da rotação  $\chi$  ao redor do mesmo. Os componentes  $u_s$ ,  $v_s$  e  $w_s$  e os componentes dos deslocamentos do centro de gravidade do anel  $u_c$ ,  $v_c$  e  $w_c$  mostradas na Figura 3.6.1 podem ser expressas em função dos componentes dos deslocamentos  $u$ ,  $v$  e  $w$  da linha circunferencial sobre a superfície de referência da casca na qual considera-se ligado o anel (Figura 3.6.2). Estes componentes podem ser facilmente expressos em função de  $u$ ,  $v$  e  $w$  e daí em função das variáveis nodais dos pontos  $q_i$ , segundo a Figura 3.4.2.

Os resultados da análise anterior foram obtidas de [8,17] para a casca e de [28,29] para o anel, que pode ser composto de vários segmentos na análise dentro do programa BOSORS[3].

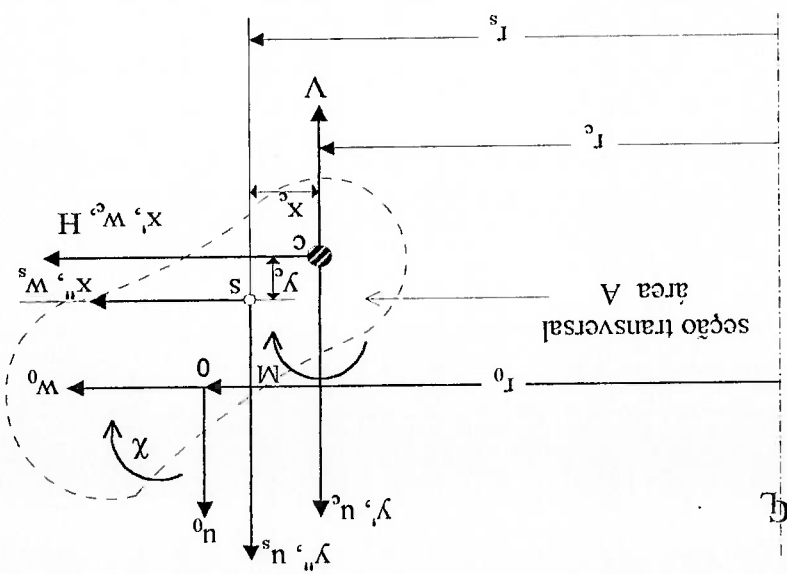
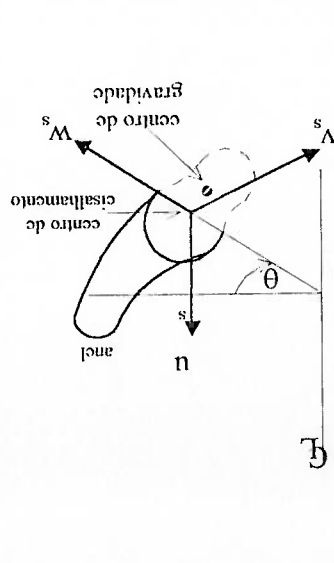


Figura 3.6.1 Variáveis e convênios de sinais dos anéis discretos.

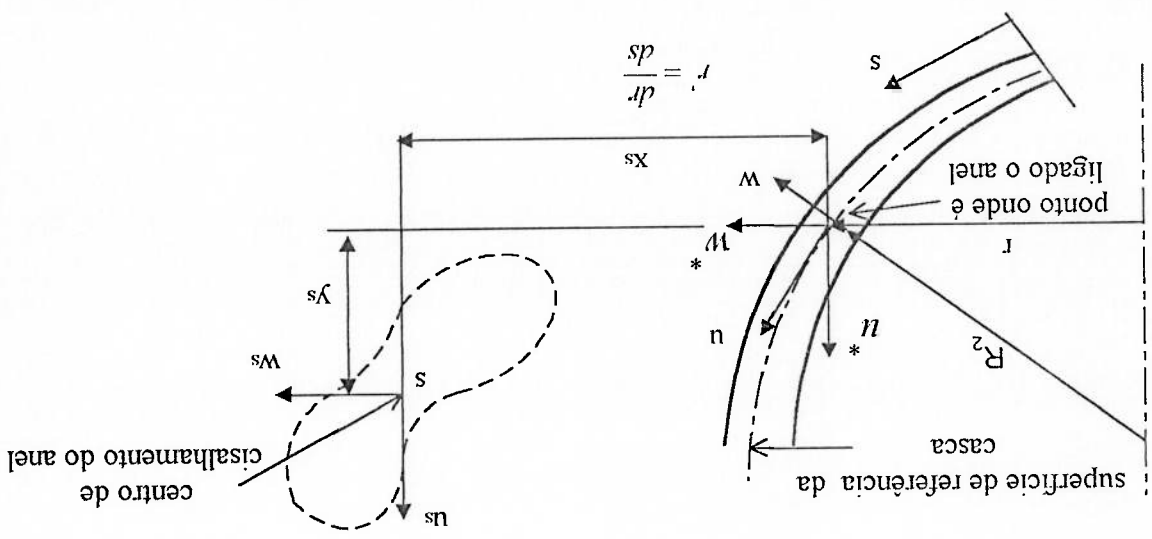


Figura 3.6.2 Localização do anel em relação à casca.

De 3.6.1 as equações de equilíbrio são:

$$3.6.2 \quad \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial w} = \psi_1 = \int_0^s \left[ \left( p_1 \frac{\partial q_1}{\partial w} + p_2 \frac{\partial q_1}{\partial w} + p_3 \frac{\partial q_1}{\partial w} \right) \left( \frac{1}{1} + \frac{R_1}{1} + \frac{R_2}{1} \right) w \frac{\partial q_1}{\partial w} + \right. \\ \left. - \int_0^s \left[ p_3 \left( \frac{R_1}{n} \frac{\partial q_1}{\partial w} + \frac{R_2}{v} \frac{\partial q_1}{\partial w} \right) + \frac{dp_3}{ds} \left( \frac{dw}{\partial w} + w \frac{\partial q_1}{\partial w} \right) \right] \right. \\ \left. - \left( -P \frac{\partial q_1}{\partial w} + S \frac{\partial q_1}{\partial w} + M \frac{\partial^2 q_1}{\partial w^2} \right) r_2 \right] \\ \frac{\partial^2 q_1}{\partial w^2} r_2 = 0 \end{array} \right.$$

onde  $i = 1, 2, 3, \dots, N$ , no qual  $N$  é o número total de graus de liberdade. Na equação anterior

as deformações plásticas  $\left[ \varepsilon_p \right]$  e  $\varepsilon_p'$  são formadas por duas parcelas:

$$(3.6.3) \quad \left[ \varepsilon_p \right] = \left[ \varepsilon_p^0 \right] + \left[ \varepsilon - \varepsilon_0 \right] \left[ C \right]^T$$

$$(3.6.4) \quad \varepsilon_p' = \varepsilon_p^{i0} + (\varepsilon_i - \varepsilon_i^0) C_i$$

onde  $\left[ C \right]$  é dada pela equação (3.5.16) e  $C_i = 1 - E_{Ti} / E_r$

O subscrito  $(i)$  na equação 3.6.3 indica o valor obtido na última atualização das propriedades do material. Na equação 3.6.2 estão representadas um conjunto de  $N$  equações algébricas não lineares, as quais são resolvidas pelo método de Newton-Raphson.

### 3.7 Estratégia Usada no BOSORS para Obter a Carga Mínima de Flambagem

Neste item serão apresentados de forma geral os passos seguidos pelo programa

BOSORS[3] na determinação da carga mínima de flambagem (ponto B na Figura 3.1.2).

O usuário escolhe um intervalo de número de ondas circunferenciais, entre  $n_{min}$  e

$n_{max}$ , em que deverá ocorrer a flambagem, segundo sua estimativa ou experiência. Também é

dado um número inicial de ondas  $n_0$ , entre  $n_{\min}$  e  $n_{\max}$ , para o qual o programa inicia a análise e uma faixa de valores de pressão [17,21,30]. Todos estes dados são fornecidos ao programa de maneira interativa.

O programa estabelece, para cada valor de  $n$  dentro do intervalo  $(n_{\min}, n_{\max})$ , problemas de autovalor do tipo:

$$(K_{1n} + \lambda_n K_{2n})(q_n) = 0 \quad (3.7.1)$$

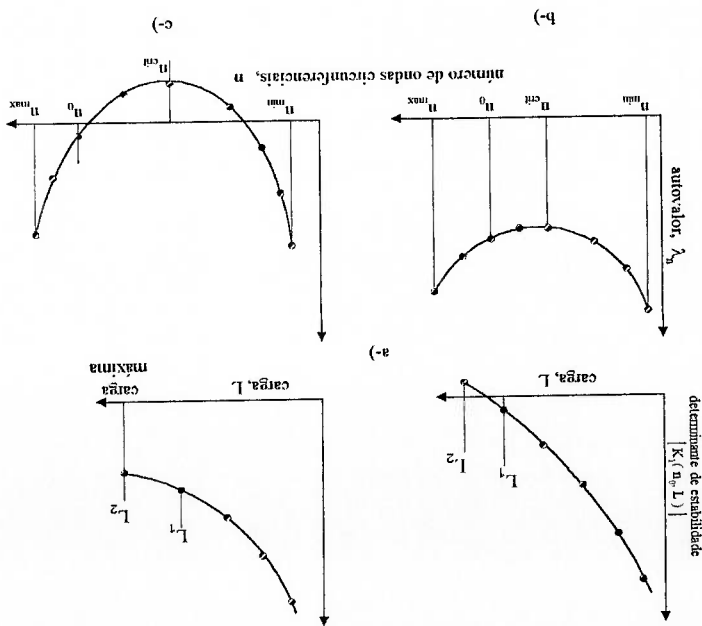
A quantidade  $(K_{1n})$  representa a matriz de rigidez correspondente a  $n$  ondas circunferenciais para a estrutura carregada; e a quantidade  $(K_{2n})$  é a matriz geométrica. As duas matrizes são apresentadas nas referências [16,17,30,31].

Na solução da equação 3.7.1 procura-se o valor mínimo do autovalor  $\lambda_n$  variando o número de ondas circunferenciais  $n$ . O valor exato de  $\lambda_n$  geralmente não pode ser usado para obter a carga de flambagem, ou seja:

$$N_{cr} \neq N_{0r} + \lambda_n N_0 \quad (3.7.2)$$

pelas mudanças muito rápidas da rigidez tangente com o incremento de carga, na vizinhança do ponto de bifurcação. A Figura 3.7.1 apresenta graficamente a procura da carga mínima de flambagem.

Figura 3.7.1. Cálculo da carga mínima de flambagem segundo BOSORS.



Para o número inicial de ondas circunferenciais selecionado, é calculado o determinante de estabilidade  $|K_1(n_0, L)|$ , em cada incremento de carga, como mostrado na Figura 3.7.1a. A carga  $L$  é incrementada até identificar um ou mais autovalores entre dois passos de carga sequenciais, ou até atingir a carga máxima fornecida pelo usuário. Neste ponto é estabelecida e resolvida uma série de problemas de autovalor, segundo a equação 3.7.1, onde:

$K_{1n}$ : matriz de rigidez correspondente a  $n$  ondas circunferenciais da estrutura carregada com o valor de carga  $L_1$ .

$K_{2n}$ : matriz geométrica correspondente ao incremento de tensão resultante do incremento de carga ( $L_2 - L_1$ ).

$L_1$ : valor de carga no passo indicado na Figura 3.7.1a.

$L_2$  : valor de carga no passo indicado na Figura 3.7.1a.

$\lambda_n$  : autovalor.

$q_n$  : autovetor.

$n$  : número de ondas circunferenciais, sendo  $n_{\min} \leq n \leq n_{\max}$  (estes valores são fornecidos pelo

usuário).

O programa BOSORS[3] calcula os autovalores e autovetores para  $n_{\min} \leq n \leq n_{\max}$ ,

com incremento de número de ondas  $n_{inc}$ , fornecido pelo usuário.

Se o comportamento pré flambagem é não-linear, a rigidez tangencial muda com o

carregamento. A análise do autovalor só produzirá uma solução rigorosa do problema da

bifurcação do equilíbrio se a rigidez tangencial é avaliada na carga de bifurcação, isto é, se o

autovalor calculado for zero. Se o material for elástico com moderada não-linearidade

geométrica, a carga de flambagem será aproximadamente

$$L_{crit} = L_1 + \lambda_{ncrit}(L_2 - L_1) \quad (3.7.3)$$

Não obstante, especialmente por causa da não linearidade física, o módulo tangente

muda muito rápido para tensões acima do limite de proporcionalidade. Neste caso o

autovalor  $\lambda_{ncrit}$  não pode ser usado no cálculo de  $L_{crit}$  segundo a equação 3.7.3, se o

escoamento ocorrer antes de  $L_2$ . Em problemas que incluem flambagem, o propósito das

séries de problemas de autovalores é achar o número de ondas circunferenciais crítico,  $n_{crit}$ ,

e obter os modos de flambagem. Se existisse a situação da Figura 3.7.1b, então seria

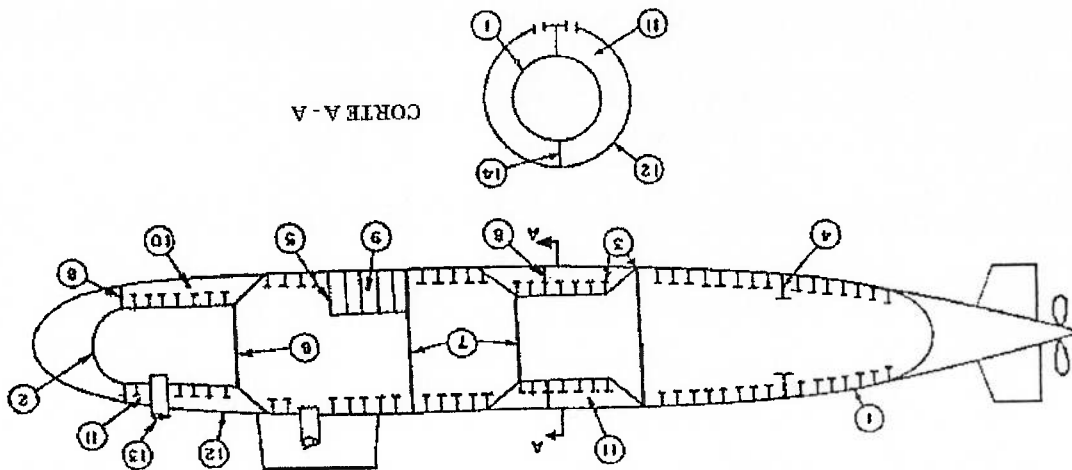
conhecido que  $L_1 \leq L_{crit} \leq L_2$ , na menor parcela de  $n_{min} \leq n \leq n_{max}$  (possivelmente seja necessário explorar outra faixa de valores de  $n$  para obter o valor mínimo global de  $L_{crit}$ ). Se o autovalor  $\lambda_n$  segue o padrão apresentado na Figura 3.7.1c, então apenas conhecemos que  $L_{crit} \ll L_1$ . Neste último caso será necessário gerar outra serie de valores do determinante de estabilidade  $|K_1(n, L)|$  como mostrado na Figura 3.7.1a, desta vez com  $n = n_{crit}$  em lugar de  $n = n_0$ .

O programa BOSORS[3] de maneira automática realiza este cálculo adicional e a carga de flambagem é identificada no intervalo  $L_1 \leq L \leq L_2$  como aquela para a qual o determinante  $|K_1(n_{crit}, L)|$  é igual a zero. Se fosse necessário refinar a definição de  $L_{crit}$ , é possível reiniciar o cálculo com o valor inicial de carga  $L_1$ , o número de ondas circunferenciais  $n_{crit}$  e menor incremento de carregamento.

## CAPÍTULO 4 ESTRUTURA DO SUBMARINO E TIPOS DE FALHAS

### 4.1-Estrutura Típica de um Submarino

O submarino tem um arranjo estrutural típico, constituído por um casco resistente, cilíndrico, reforçado internamente ou externamente por cavernas e completado através das anteparas, troncos cônicos e calotas de proa e popa, conforme a Figura 4.1.1. Deve, fundamentalmente, resistir à pressão hidrostática à qual estará submetida durante a operação em imersão.



- 1- Casco resistente e cavernas.
- 2- Calota de proa.
- 3- Interseção cone-cilindro.
- 4- Anel gigante.
- 5- Anteparas estanque.
- 6- Anteparas de segurança.
- 7- Anteparas de subdivisão.
- 8- Hastilhas.
- 9- Tanque de lastro interno.
- 10- Tanque de lastro externo.
- 11- Tanque de lastro principal.
- 12- Casco não resistente.
- 13- Escotilha.
- 14- Divisão de tanque.

Figura. 4.1.1 Estrutura típica de um submarino.

O chapameento pode constituir o casco resistente ou o casco não resistente. O casco resistente é projetado para resistir à pressão externa. No casco não resistente, a pressão externa d'água se equilibra com a interna (lastro, ar ou óleo) conforme mostra a

Figura 4.1.2.



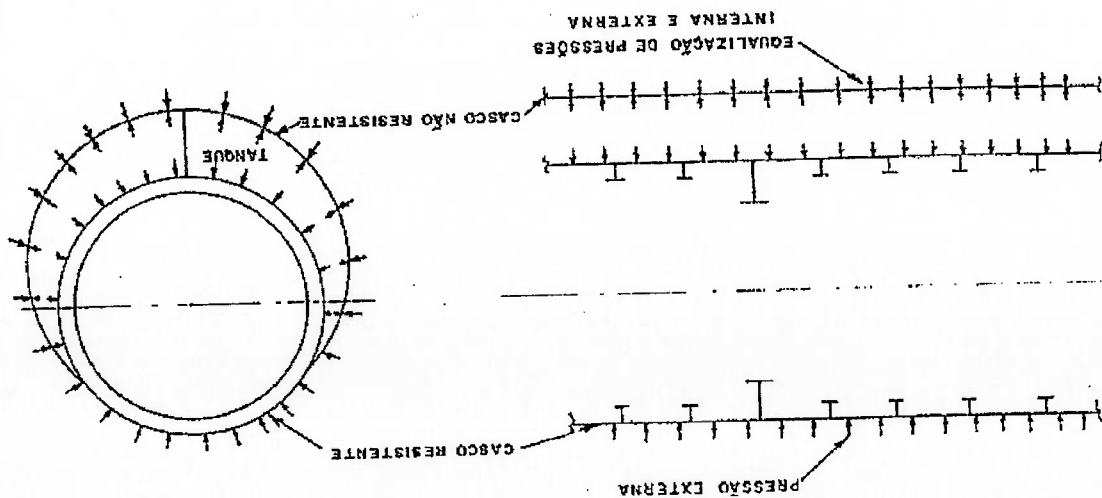


Figura 4.1.2 Distribuição de pressões no casco.

A espessura do casco resistente é função do diâmetro do cilindro, espaçamento de cavernas, profundidade máxima de operação e propriedades do material. Ele é ainda reforçado pelas cavernas simples e gigantes, hastilhas e anteparas.

Os perfis mais comuns utilizados em cavernas são do tipo T, I e bulbo. Podem ser internas ou externas ao casco resistente, e apresentam diferentes vantagens e desvantagens de um tipo a outro. As cavernas externas têm a vantagem de possuírem maior resistência a flambagem lateral ("tripping"), maior reserva ao colapso, caso uma de suas seções atinja o escoamento e propiciam maior espaço interno, facilitando ainda o seu reparo estrutural. Já as cavernas internas não são submetidas à ação direta da água do mar e contam com vantagens sobre o aspecto de corrosão. São necessariamente utilizadas nas regiões onde não existe o casco não resistente, de modo a não aumentar a resistência a propulsão.

As anteparas possuem importância fundamental no que tange à resistência transversal da estrutura. Existem três tipos principais:

- Anteparas de subdivisão: servem para limitar os vários compartimentos do submarino;

- Anteparas de segurança: estão normalmente localizadas nas extremidades do submarino, separando os compartimentos de proa e popa;
- Anteparas estanques: correspondem às divisões de tanques externos e internos,

neste caso também chamadas de hastilhas estanques.

As hastilhas vazadas têm a mesma configuração das anteparas estanques, mas sem estarem sujeitas a um diferencial de pressão.

A distância entre anteparas é um fator fundamental na determinação da pressão

máxima de operação do submarino, pois provê apoio transversal ao casco resistente.

O fechamento de proa e popa é feito por calotas hemisféricas, elípticas,

torisféricas etc., normalmente sem reforços, por possuírem uma resistência própria já

compatível com as condições máximas de operação.

No caso de necessidade de mudança de diâmetro do casco resistente, isto é feito

através de troncos de cone, reforçados por cavernas.

Deve-se ressaltar para o fato de existir uma tendência atual de eliminar o casco

não resistente, fazendo que os tanques sejam internos, e construindo-se um submarino de

casco singelo.

#### 4.2- Tipos de Falhas Estruturais

Os principais tipos de falhas, com maior ou menor comprometimento estrutural, que devem ser alvo de análise pelo engenheiro, são apenas descritos a seguir.

#### 4.2.1- Falhas do Casco Resistente

As falhas que ocorrem nesta porção estrutural são classificadas em função da extensão do submarino que abrangem, conforme segue.

■ Falha do Casco entre Cavernas: esta falha ocorre, tipicamente, por flambagem elástica, flambagem inelástica ou escoamento. Depende do espaçamento entre cavernas, diâmetro do cilindro, espessura do casco, módulo de elasticidade e ocorrência primeira de um dos três tipos de tensão de escoamento do material. A ocorrência entre esses parâmetros, de forma análoga ao que ocorre com uma barra sob carga de compressão. A flambagem é caracterizada pela formação de ondulações ao longo da circunferência (Figura 4.2.1.1a) e o escoamento por uma ondulação longitudinal entre cavernas (Figura 4.2.1.1b), após a formação de rótulas plásticas ao pé das cavernas e no meio do vão.

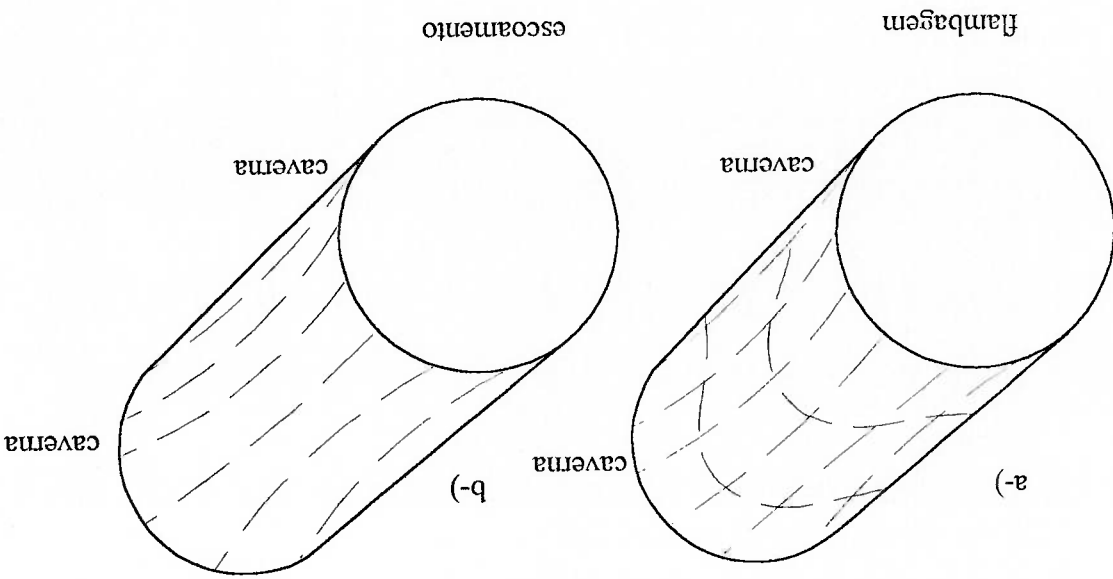


Figura 4.2.1.1 Falhas do casco resistente entre cavernas.

■ Flambagem Global: ocorre com a formação de ondulações circunferenciais e longitudinais entre anteparas, no casco, incluindo também as cavernas (Figura 4.2.1.2).

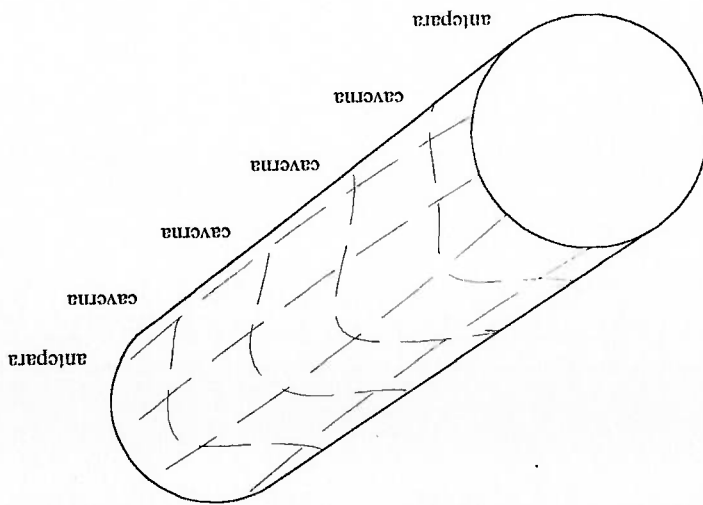


Figura 4.2.1.2 Flambagem do casco resistente entre anteparas.

#### 4.2.2-Falhas das Cavernas

Os dois tipos de falhas apresentadas por estes elementos estruturais são descritos

a seguir.

■ Flambagem de Cavernas: esta pode ocorrer em forma elástica ou inelástica no

próprio plano da caverna ou fora de seu plano. Em ambos os casos ocorre

uma formação de lóbulos circunferenciais.

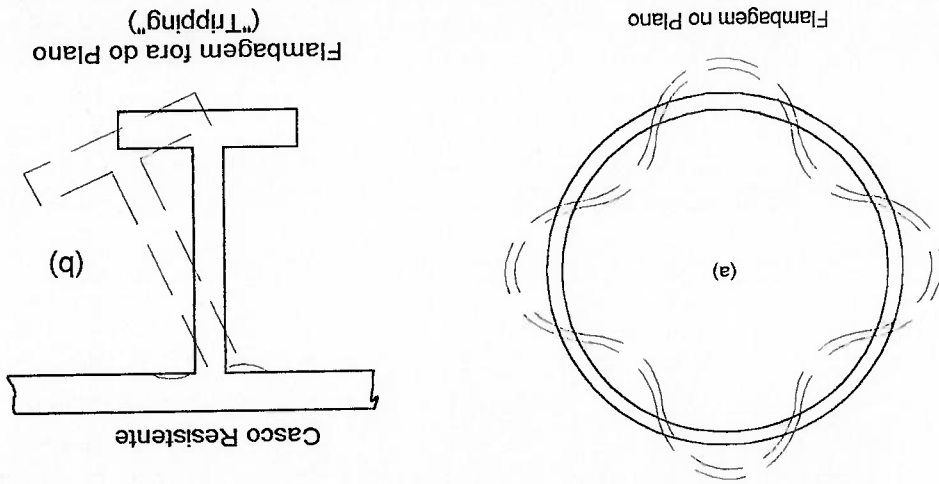


Figura 4.2.2.1 Flambagem de cavernas.

■ Escocamento de Cavernas: se o casco fosse perfeitamente circular, esta falha seria alcançada quando a tensão normal uniforme de compressão, agente na seção da caverna e ao longo de toda a circunferência, atingisse a tensão de escoamento. Ocorre que os processos de fabricação tendem a induzir imperfeições geométricas que afastam o casco resistente de sua forma perfeitamente circular. Nessas condições, à tensão de compressão constante agente na caverna, vai-se superpor a flexão dessa caverna, sob a pressão externa, que faz com que se atinja o escocamento em pontos isolados de seu flange livre.

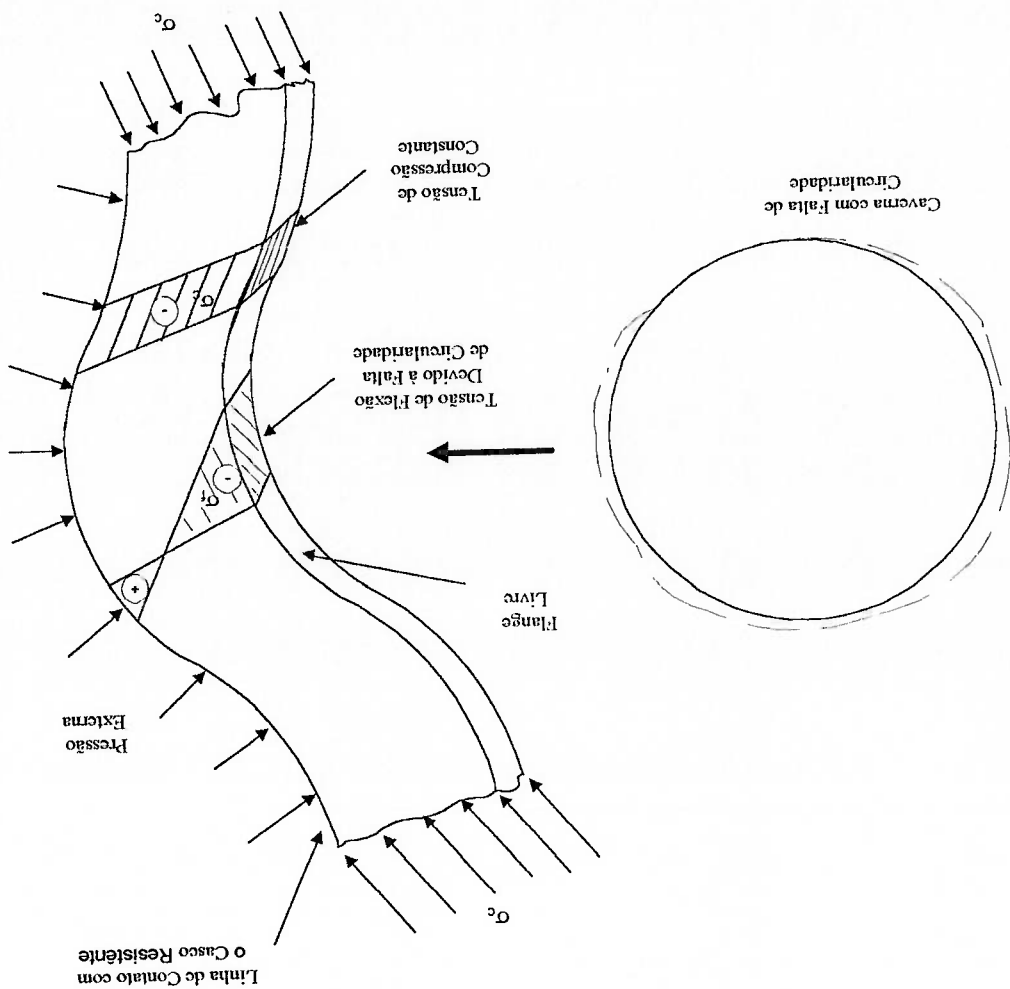


Figura 4.2.2.2 - Escocamento de ponto de flange livre das cavernas.

### 4.2.3- Falhas nas Descontinuidades

Uma descontinuidade estrutural acontece quando ocorre uma mudança geométrica da estrutura. Por exemplo, interseção do cilindro reforçado com regiões cônicas, calotas e cavernas gigantes ou interseção de regiões cônicas com diferentes ângulos de abertura (Figura 4.2.3.1). Todas essas descontinuidades são axissimétricas.

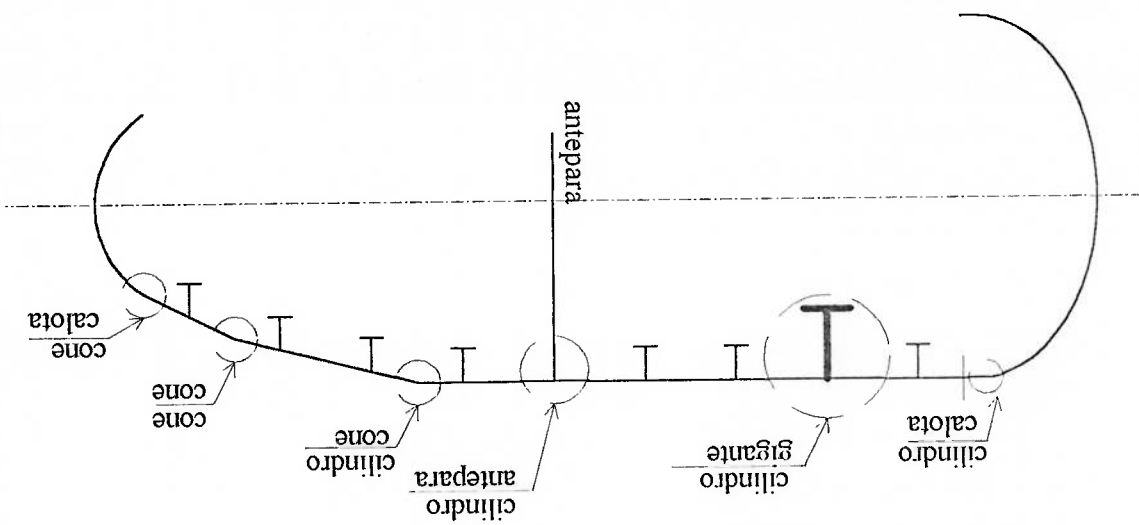


Figura 4.2.3.1 Descontinuidades axissimétricas típicas.

Em todos os casos, tem-se a união de estruturas que possuem comportamentos diferentes quando submetidos à pressão externa. Cada uma das estruturas que se interceptam, se encaradas isoladamente, apresentam deslocamentos que lhes são próprios. A interseção obriga a que a estrutura possua um mesmo deslocamento no ponto de sua interseção. Assim sendo, surgem esforços cortantes ( $Q_0$ ) e fltores ( $M_0$ ) de compatibilização [32], os quais produzem tensões adicionais que se superpõem às tensões incidentes nas estruturas quando examinadas isoladamente. Este fato leva a que, normalmente, seja requerido o reforço dessas regiões e a utilização de elementos de transição, visando diminuir o efeito dessa descontinuidade, como se vê na Figura 4.2.3.2

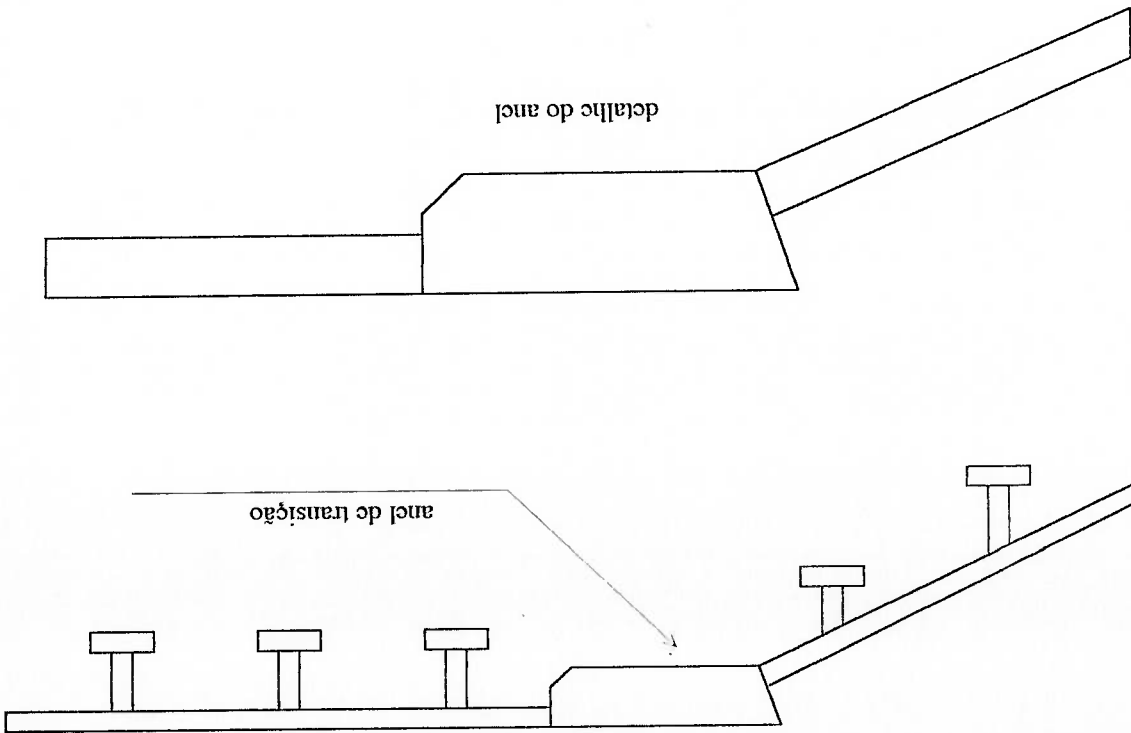


Figura 4.2.3.2 Anel de transição típico.

Felizmente, sendo o casco do submersino constituído por cascas finas, essas tensões se amortecem rapidamente a partir do ponto em que foram introduzidos  $Q_0$  e  $M_0$ . O cálculo das tensões pode ser analítico para o caso de estimativas preliminares, ou através de métodos computacionais.

Para o caso do cálculo analítico, utiliza-se o método dos coeficientes de influência, que permite a determinação dos esforços  $Q_0$  e  $M_0$ . Conhecidos esses esforços, pode-se calcular a tensão circunferencial ( $\sigma_\theta$ ) e a longitudinal ( $\sigma_x$ ), atuantes no casco do submersino. Esses cálculos podem ser realizados automatizadamente, mediante o emprego do programa "Aquiles" [32].

Uma descontinuidade estrutural pode ser também não axisimétrica, como é o caso das aberturas no casco resistente.

As falhas que devem ser alvo de atenção nas descon continuidades são as que seguem:

- Nas interseções cilindro-cone, cone-cone ou cone-calota: nessas interseções aparecem altos esforços de compatibilidade que podem levar a tensões próximas ao escoamento, principalmente na interseção com a face maior do tronco cônico.

- Nas interseções cilindro-anteparas ou cilindro-gigante: nessas interseções, a alta rigidez das anteparas ou gigantes no seu próprio plano, em relação às cavernas comuns, impõe um esforço cortante de compatibilidade que eleva as tensões no casco resistente nessa região.

- Nas aberturas no casco: as aberturas efetuadas no casco resistente implicam numa concentração de tensões, elevando o seu nível nessa região.

- Pode-se incluir, ainda, a própria falha das calotas, que ocorre por flambagem elástica ou inelástica.

Todas as falhas listadas neste item 4.2, para a estrutura sem imperfeições de forma, podem ser calculadas pelo programa BOSOR5[3], exceto as duas abaixo:

1. Escoamento de Cavernas, pois o programa não considera uma imperfeição geométrica não axisimétrica, que é o que ocasiona essa falha. Esta pode ser calculada através de modelos analíticos[2].

2. Falhas nas aberturas do casco, pois a estrutura deixa de ser axisimétrica. Esta pode ser calculada através de um modelo de elementos finitos.



## CAPÍTULO 5 APLICAÇÕES DO PROGRAMA BOSORS

### 5.1 Introdução

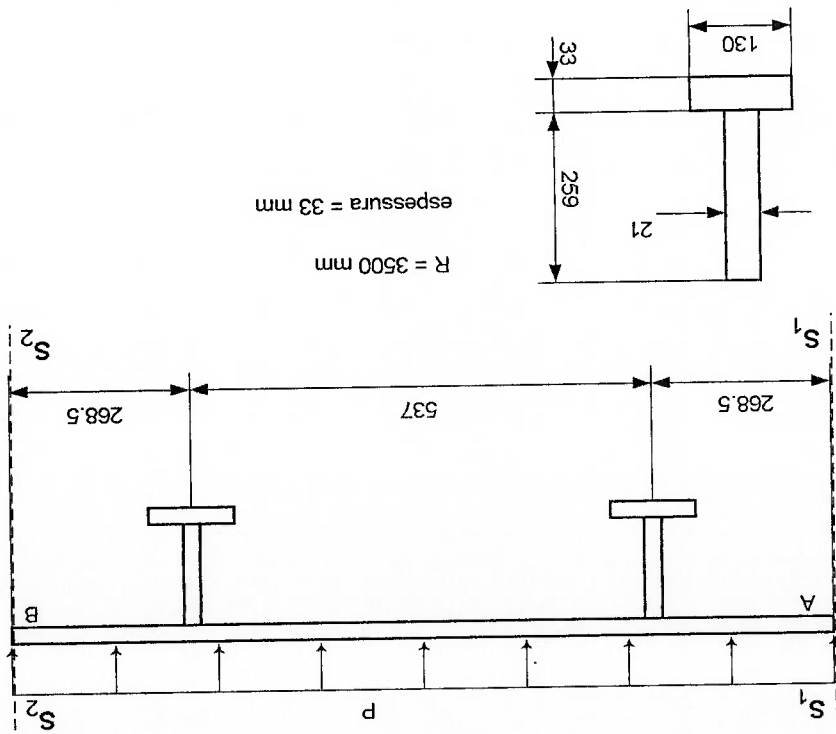
Procurando atingir os objetivos deste trabalho, o programa foi utilizado na análise de regiões típicas da estrutura de submarinos, analisando-se os resultados obtidos e comparando-os com os de outros programas, seja de elementos finitos, seja baseado nas formulações clássicas de Reynolds [33] e Lurchick [34].

### 5.2 Cilindro Reforcado

Neste item serão apresentados os casos analisados de um cilindro reforçado com cavernas internas  $T$ , sob pressão externa, obtendo-se a trajetória de  $P$  vs.  $\delta$  (pressão externa no casco vs. deslocamento radial máximo) indicando-se o ponto limite de linearidade, a pressão crítica correspondente à bifurcação do equilíbrio (flambagem) e a pressão crítica correspondente ao ponto limite.

Também são determinadas as tensões equivalentes, segundo o critério de Von Mises, as tensões meridionais e circunferenciais, tanto na face externa como na face interna da casca, no meio do vão e ao pé das cavernas. A Figura 5.2.1 mostra o arranjo do primeiro cilindro analisado, chamado de **MODELO1**. Mostra-se o arranjo no entorno de um espaçamento de caverna, repetindo-se essa geometria para ambos os lados, até as extremidades fechadas. Pela repetitividade da estrutura, para este carregamento, os planos  $S_1$ - $S_1$  e  $S_2$ - $S_2$  podem ser considerados planos de simetria, e o modelo a ser analisado corresponde à região compreendida entre esses dois planos.

Figura 5.2.1 Cilindro reforçado com cavernas internas, sob pressão externa. MODELO1.Geometria e carregamento.



Como mostrado na Figura 5.2.2, o MODELO1 foi discretizado com 21 nós, com espaçamento constante entre eles, utilizando como referência a superfície média da casca. São fornecidos os dados geométricos, tais como raio, comprimento, espessura, localização da superfície de referência, implantação de cavernas e posição das cargas concentradas, e físicos, como módulo de resistência, curva tensão deformação do material etc. O cilindro foi considerado de espessura constante, sem imperfeições de forma e as cavernas tomadas como anéis, subdivididas em retângulos de espessura constante  $T_k$ , comprimento  $L_k$  e ângulo de orientação  $\phi_k$ , discretizadas em uma quantidade de pontos nodais de acordo as possibilidades do programa.

No caso do carregamento, foi considerada só a pressão externa em todo o comprimento do modelo e uma carga axial em função da pressão atuante nas extremidades fechadas do cilindro.

As condições de contorno correspondentes aos planos de simetria que limitam o modelo, sendo  $u$  o deslocamento axial,  $v$  o deslocamento circumferencial,  $w$  o deslocamento radial e  $\theta$  o deslocamento angular, são as seguintes:

- N6 A :  $u = 0, v = 1, w = 0, \theta = 1$       0 : indica livre
- N6 B :  $u = 1, v = 1, w = 0, \theta = 1$       1 : indica restrito

Para esse modelo o programa calcula os deslocamentos radiais máximos a cada passo de pressão, segundo um incremento definido na entrada de dados, considerando-se a não-linearidade tanto geométrica como de material. Esses resultados são utilizados para levantar a trajetória de pressão externa aplicada vs. deslocamento radial máximo.

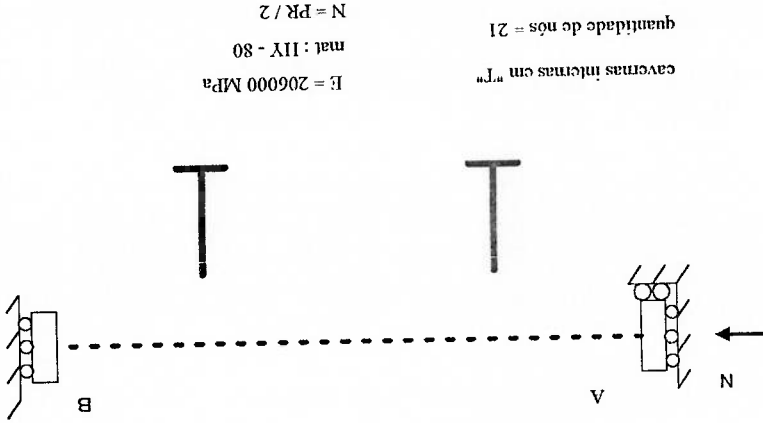


Figura 5.2.2. Discretização do MODELO1, com as condições de contorno.

Deve-se ressaltar que numa primeira corrida do programa são dados passos de carga ( $\delta p$ ) muito grandes, até a não convergência da iteração, ou seja, ponto limite da estrutura. Depois numa segunda corrida são diminuídos esses passos de carga, começando por valores de pressão perto do limite indicado na corrida anterior, conseguindo uma melhor precisão no levantamento do gráfico.

Após ser obtida a solução dada pelo processador principal (MAINSETUP, BOSORMAIN), começa a entrada de dados do pós processador (POSTSETUP), onde são indicados os passos de carga para os quais se quer a saída do programa, podendo ser tantos quanto o usuário desejar, e o tipo de saída (POSTSETUP, BOSORPOST). Aqui são calculados os valores de tensões equivalentes, segundo o critério de Von-Mises, tensões meridionais e tensões circunferenciais, além dos deslocamentos  $u$ ,  $v$ ,  $w$  nos pontos nodais, tensões em pontos selecionados da espessura da casca e tensões nas cavernas.

O programa indica na saída do pós processador os pontos da estrutura nos quais tem-se deformações plásticas e a porcentagem dessa deformação.

Visando a obtenção do ponto de bifurcação do equilíbrio, após o cálculo do ponto limite, faz-se outra corrida do processador principal (MAINSETUP, BOSORMAIN) selecionando outro tipo de cálculo, processo pelo qual é determinada a pressão de flambagem e o respectivo modo.

O Gráfico 5.2.1 mostra a curva  $p$  vs.  $\delta_{max}$  resultante do MODELO1. Na Tabela 5.2.1 esses resultados são apresentados numericamente.

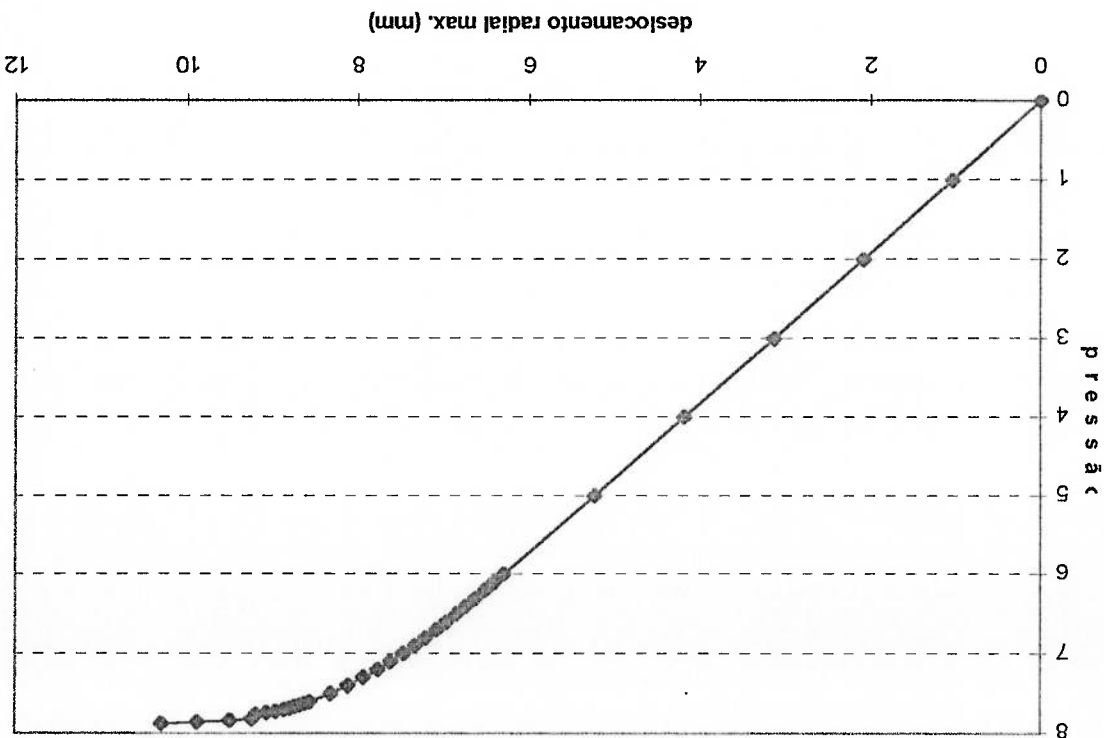
Esses valores foram obtidos em corridas sucessivas do processador principal do BOSORS[3], com diminuição dos passos de carga ( $\delta p$ ) em cada uma delas, sendo na

primeira corrida utilizado um passo de 1 MPa, na segunda corrida de 0.1 MPa e na terceira de 0.02 MPa. Essa seleção ocorre segundo as necessidades de cada problema. No caso de passo igual a 0.02 MPa, o ponto limite ocorre entre 7.88 e 7.9 MPa, pois para esse segundo valor não há convergência na solução do equilíbrio

No.	P(MPa)	$\delta_m$ (mm)	No.	P(MPa)	$\delta_m$ (mm)	No.	P(MPa)	$\delta_m$ (mm)
1	0	0	14	6.7	7.086	27	7.68	8.789
2	1	1.042	15	6.8	7.21	28	7.7	8.860
3	2	2.087	16	6.9	7.337	29	7.72	8.956
4	3	3.134	17	7	7.472	30	7.74	9.062
5	4	4.184	18	7.1	7.618	31	7.76	9.191
6	5	5.237	19	7.2	7.768	32	7.78	9.196
7	6	6.299	20	7.3	7.933	33	7.8	9.215
8	6.1	6.407	21	7.4	8.117	34	7.82	9.240
9	6.2	6.517	22	7.5	8.318	35	7.84	9.498
10	6.3	6.626	23	7.6	8.563	36	7.86	9.880
11	6.4	6.737	24	7.62	8.615	37	7.88	10.297
12	6.5	6.850	25	7.64	8.672	38	7.90	não conv.
13	6.6	6.967	26	7.66	8.728	39		

Tabela 5.2.1. Valores de pressão vs. deslocamento máximo. MODELO1.

Gráfico 5.2.1. Pressão vs. deslocamento radial máximo. MODELO1.



Visando a obtenção do valor de pressão mínima de flambagem, foram feitas outras corridas do processador principal, mudando os dados de entrada no MAINSETUP. A continuação são apresentados os resultados obtidos.

Primeira corrida (INDIC = -3):

Início no STEP 36; TIME 7.86 até STEP 37; TIME 7.88. Número de ondas circunferenciais no início da análise de flambagem  $n_{ob} = 12$ , intervalo para o análise  $n_{min} = 0$ ,  $n_{max} = 20$ , com incremento do número de ondas  $n_{inc} = 1$ .

Como foi explicado no Capítulo 3, para esta análise o programa verifica se o determinante da matriz de estabilidade global troca de sinal no intervalo dado, para um

número de ondas circunferenciais fornecido pelo usuário, sendo a resposta neste caso a seguinte:

“The user has checked for bifurcation buckling loads for  $n = 12$  circumferential waves. It has been determined by the above calculations that for  $n = 12$ , the stability determinant does not change sign in the time and load range specified for this run. However, it may happen that the minimum non symmetric buckling load corresponds to a different value of  $n$  that 12”.

Não ocorreu mudança do sinal do determinante. Neste caso, o programa faz o cálculo de autovalores para diferentes números de ondas circunferenciais no intervalo fornecido (entre os valores  $n_{min}$  e  $n_{max}$  com incremento conhecido), procurando o valor de  $n$  para o qual o autovalor  $\lambda_n$  é mínimo.

Obteve-se neste caso  $n = 4$  ondas circunferenciais, sendo a carga de flambagem maior que a correspondente ao passo número 36 (7.86 MPa). Automaticamente o programa busca, para  $n=4$ , em todo o intervalo de carga estudado, ou seja, desde 0 MPa até 7.88 MPa, com os incrementos de carga fornecidos em as corridas anteriores, uma troca de sinal do determinante, obtendo-se a mesma para  $n=4$  e valores de pressão entre 7.86 MPa e 7.88 MPa, indicando o programa a carga de flambagem entre esses valores.

Os resultados finais são, portanto, os que seguem:

1. O ponto de flambagem corresponde a  $n=4$  ondas circunferenciais.
2. A pressão de flambagem encontra-se entre os passos de carga 36 e 37, isto é, entre 7.86 MPa e 7.88 MPa.

3. Os valores de pressão limite (entre 7.88 MPa e 7.90 MPa) e pressão de flambagem ficaram muito próximos. Este é um resultado característico deste tipo de sistema estrutural.

4. Como resultado da análise do pós processador nota-se o aparecimento de deformação plástica para uma pressão de 5.4 MPa.

Os resultados obtidos do programa BOSORS[3] são comparados com os resultados do programa FLAMBIMP[32], desenvolvido no Departamento de Engenharia Naval e Oceânica da EPUSP, baseado na solução teórica do problema, considerando não linearidade geométrica e física segundo a formulação indicada em [30,31], conforme a Tabela 5.2.2.

PROGRAMA	P ( flambagem )
FLAMBIMP	8.129 MPa
BOSORS	7.87 MPa
diferença	3.19 %

Tabela 5.2.2 Comparação de resultados do cálculo da pressão de flambagem. MODELO1.

Comparando-se os resultados se observa uma diferença de 3.19%, dando mostra da precisão do programa BOSORS[3], sem necessidade de um aumento muito grande da quantidade de nós da malha de elementos de diferenças finitas. Na Tabela 5.2.3 são apresentadas os resultados obtidos para as tensões longitudinais, circunferenciais e equivalentes do BOSORS[3] e FLAMBIMP[32] para uma pressão externa de 2MPa, ainda na região linear, sendo a concordância de resultados muito boa.



Como MODELO2 foi usado um casco cilíndrico com um espaçamento entre cavernas igual ao dobro do caso anterior, na tentativa de estabelecer uma maior diferença entre o ponto limite da estrutura e a bifurcação do equilíbrio. A Figura 5.2.3 mostra seu arranjo estrutural, sendo a discretização similar à vista na Figura 5.2.2, mais com 41 nós.

Tabela 5.2.3 Tensões MODELO1. Pressão de 2 MPa

BOSORS		FLAMBIMP		BOSORS	
MEIO DO VÃO DA CAVERNA	MEIO DO VÃO DA CAVERNA	MEIO DO VÃO DA CAVERNA	MEIO DO VÃO DA CAVERNA	MEIO DO VÃO DA CAVERNA	MEIO DO VÃO DA CAVERNA
TENSÕES LONGITUDINAIS		TENSÕES CIRCUNFERENCIAIS		TENSÕES EQUIVALENTES	
MEMBRANA	FLEXÃO	MEMBRANA	FLEXÃO	MEMBRANA	FLEXÃO
-106.56	37	-152.88	11.1	135.78	130
-106.56	74.3	-143.2	22.29	128.85	140
-110	40	-150	10	140	160
-110	80	-140	25	130	180
TOTAL		TOTAL		TOTAL	
EXT.	INT.	EXT.	INT.	EXT.	INT.
-143.56	-69.56	-163.98	-141.78	154.78	122.79
-32.26	-180	-120.91	-165.49	108.44	173.69
-150	-70	-170	-140	160	120
-30	-190	-120	-170	110	180

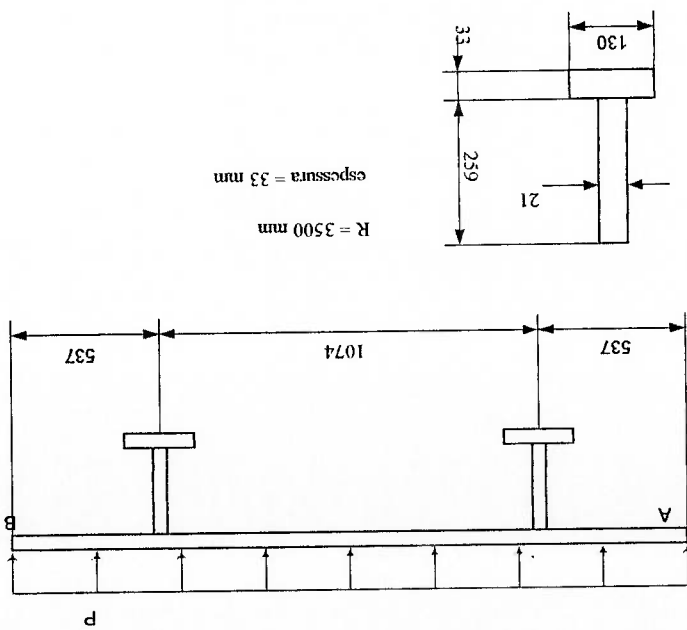
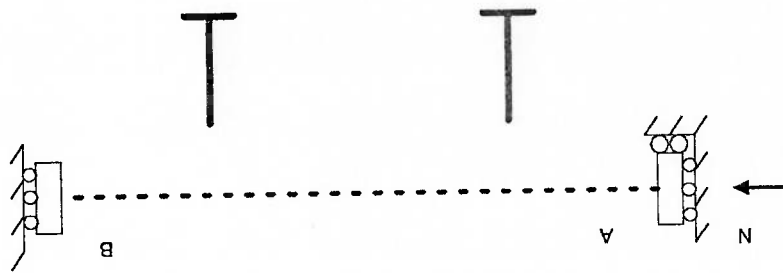


Figura 5.2.3 Casca cilíndrica com duas cavernas internas, sob pressão externa. MODELO2. Geometria e carregamento.



quantidade de nós = 41

cavernas internas em "T" consideradas como anéis rígidos

$E = 206000 \text{ MPa}$

mat : HY - 80

$N = PR / 2$

Figura 5.2.4 Discretização MODELO2. Condições de contorno.

Nos gráficos e tabelas a seguir são apresentados os resultados obtidos.

O ponto limite para este modelo, encontra-se entre os passos de carga 38 e 39. Sendo o valor de pressão entre 6.10 MPa e 6.12 MPa, a bifurcação do equilíbrio ocorre por n=14 ondas circunferenciais com valor de pressão entre 5.82 MPa e 5.84 MPa e, segundo indicado pela saída do programa aparecem deformações plásticas para pressões de 4.2 MPa.

No	P(MPa)	$\delta_m$ (mm)	No	P(MPa)	$\delta_m$ (mm)	No	P(MPa)	$\delta_m$ (mm)
1	0	0	14	4.9	7.558	27	5.88	10.122
2	1	1.406	15	5	7.729	28	5.9	10.24
3	2	2.996	16	5.1	7.907	29	5.92	10.365
4	3	4.533	17	5.2	8.094	30	5.94	10.494
5	4	6.102	18	5.3	8.289	31	5.96	10.645
6	4.1	6.26	19	5.4	8.502	32	5.98	10.822
7	4.2	6.419	20	5.5	8.743	33	6.0	11.038
8	4.3	6.579	21	5.6	9.008	34	6.02	11.307
9	4.4	6.739	22	5.7	9.319	35	6.04	11.665
10	4.5	6.899	23	5.8	9.71	36	6.06	12.288
11	4.6	7.061	24	5.82	9.801	37	6.08	12.317
12	4.7	7.224	25	5.84	9.901	38	6.10	15.849
13	4.8	7.389	26	5.86	10.01	39	6.12	15.849

Tabela 5.2.4. Valores de pressão vs. deslocamento máximo. MODELO2.

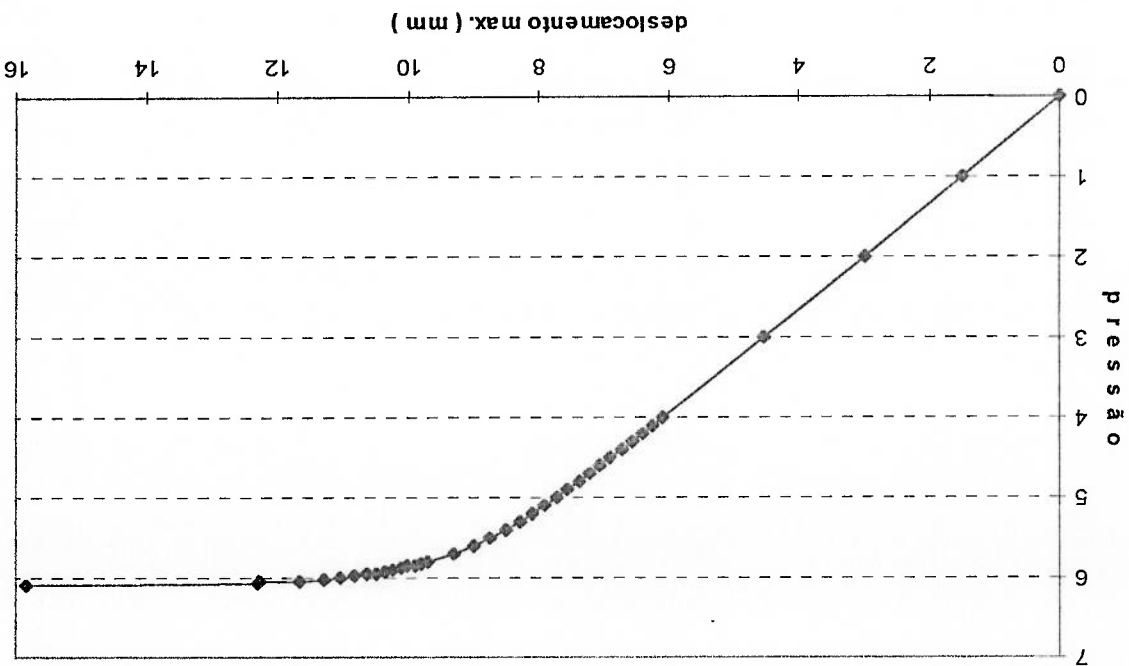


Gráfico 5.2.2.-Pressão vs. deslocamento máximo. MODELO2.

PROGRAMA	P (flambagem)
FLAMBIMP	5.57 MPa
BOSORS	5.83 MPa
diferença	4.46%

Tabela 5.2.5. Comparação dos resultados do cálculo da pressão de flambagem. MODELO2.

Também neste caso cumpre-se a relação obtida no modelo anterior para a diferença das pressões de flambagem, menor de 5%, entre o programa BOSORS[3] e FLAMBIMP[4], sem necessidade de um grande refinamento da malha de elementos de diferenças finitas.

sendo a diferença menor que 4% em todos os casos.

Como pode-se observar, para as tensões, a concordância dos valores é muito boa,

Tabela 5.2.6 Tensões MODEL02. Pressão de 2MPa.

		TENSÕES LONGITUDINAIS			
		MEIO DO VÃO DA CAVERNA	MEIO DO VÃO DA CAVERNA	MEIO DO VÃO DA CAVERNA	MEIO DO VÃO DA CAVERNA
		BOSORS			
MEMBRANA	FLEXÃO	-106.56	-110	47.62	125
	TOTAL	EXT.	-154.18	20.38	20
	INT.	-58.94	-233.57	-60	-230
TENSÕES CIRCUNFERENCIAIS					
MEMBRANA	FLEXÃO	-206.11	-147.93	-210	-150
	TOTAL	EXT.	-220.39	-109.85	-220
	INT.	-191.82	-186.02	-190	-180
TENSÕES EQUIVALENTES					
MEMBRANA	FLEXÃO	178.53	132.19	180	130
	TOTAL	EXT.	195.87	121.33	200
	INT.	170.19	213.75	170	210

Parte-se, agora, para verificar a influência do refinamento da malha de elementos de diferenças finitas nos resultados. Como exemplo foi usado o cilindro cujo arranjo é dado pelos dados a seguir (MODELO3):

$$R_{int} = 3100\text{mm (raio interno)}$$

$$t = 23\text{mm (espessura da casca)}$$

$$L_c = 430\text{mm (espaçamento entre cavernas)}$$

dimensões das cavernas

$$e_w = 12.5\text{mm (espessura da alma)} \quad d = 185\text{ mm (altura da alma)}$$

$$e_f = 23\text{mm (espessura do flange)} \quad f = 90\text{mm (largura do flange)}$$

$$\text{material aço HY - 80} \quad E = 206000\text{ MPa}, \quad G = 79231\text{ MPa}, \quad \nu = 0.3$$

Na primeira discretização foi utilizado um número de nós igual a 5, sendo este o mínimo admitido pelo programa (admitem-se entre 5 e 98 nós)

A primeira corrida desta malha tem os resultados de pressão vs. deslocamento radial

máximo mostrados na Tabela 5.2.7.

No	P(MPa)	δm(mm).	No.	P(MPa)	δm(mm).	No.	P(MPa)	δm(mm)
1	0	0	6	2.5	3.338	11	5	6.770
2	0.5	0.666	7	3	4.009	12	5.5	7.798
3	1	1.332	8	3.5	4.682	13	6	não conv.
4	1.5	1.999	9	4	5.356			
5	2	2.668	10	4.5	6.036			

Tabela 5.2.7 Valores de pressão vs. deslocamento máximo. MODELO3. Primeira corrida. Numero de nós = 5.

O incremento de pressão usado nessa corrida foi de 0.5 MPa, seguindo o procedimento de que para as primeiras corridas sejam usados passos grandes, que depois serão reduzidos em corridas sucessivas. O início do cálculo corresponde à pressão zero no passo número um. Nestas iterações não houve convergência no passo número 13 correspondente a uma pressão de 6 MPa. Portanto, a pressão correspondente ao ponto limite está entre 5.5 MPa e 6 MPa. Para conseguir melhor precisão do resultado, foi feita outra corrida, correspondendo o início ao passo número 10 ( $P = 4.5$  MPa) com incremento menor, sendo neste caso de 0.1 MPa

Como se mostra na Tabela 5.2.7, sendo o incremento menor, obteve-se uma não convergência no passo de carga número 23 ( $P = 5.8$  MPa), ou seja, o ponto limite está entre 5.7 MPa e 5.8 MPa

No.	P(MPa)	$\delta m$ (mm)	No.	P(MPa)	$\delta m$ (mm)	No.	P(MPa)	$\delta m$ (mm)
11	4.6	6.176	16	5.1	6.931	21	5.6	8.140
12	4.7	6.316	17	5.2	7.115	22	5.7	8.739
13	4.8	6.46	18	5.3	7.329	23	5.8	não conv.
14	4.9	6.611	19	5.4	7.551			
15	5.0	6.770	20	5.5	7.798			

Tabela 5.2.8. Valores de pressão vs. deslocamento máximo. MODELO3. Segunda corrida. Número de nós = 5

Numa terceira corrida, visou-se determinar a pressão correspondente ao ponto de bifurcação (flambagem). Esta corrida inicia-se no passo de carga No.15 (5 MPa) até o passo

No.22 (5.7MPa), com início do cálculo para  $n = 12$  ondas circunferenciais, no intervalo de 0-20 ondas com incremento deste número igual 1.

De acordo com a estratégia do BOSORS[3] para a determinação da carga mínima de flambagem, para os dados fornecidos não houve troca de sinal do determinante de estabilidade. O programa verificou que o autovvalor mínimo corresponde a  $n=9$  e que a carga de flambagem é maior que o limite superior do intervalo analisado.

Para melhorar a precisão do cálculo, foi feita uma quarta corrida, diminuindo os intervalos de carga. Nesta corrida o início foi dado no passo No.22 (5.7 MPa), com incremento do valor de pressão de 0.01 MPa para  $n=9$  ondas circunferenciais no intervalo de 0 a 20 ondas, com incremento de número de ondas igual a 1. O resultado neste último cálculo foi que o determinante trocou de sinal entre 5.76 MPa e 5.77 MPa para  $n=3$  ondas circunferenciais.

Neste caso observou-se uma diferença do número de ondas circunferenciais correspondente ao mínimo autovvalor com incremento do valor de pressão 0.1 MPa e 0.01 MPa, esta diferença é devida à proximidade dos autovvalores para os valores de  $n$  o qual afeta a precisão e o grosseiro da malha utilizada neste caso que tem apenas 5 nós, nos casos de discretização com maior número de nós não foi observada esta variação. Nota-se que, também aqui, o ponto limite e ponto de bifurcação são extremamente próximos.

Foram realizadas outras corridas com diferentes discretizações, aumentando o número de nós, obtendo-se os valores dados na Tabela 5.2.9. Estes resultados são comparados com os obtidos pela formulação analítica utilizada no programa FLAMBIMP[4]. Nota-se desta Tabela que o resultado do BOSORS[3] tende ao resultado



do FLAMBIMP[4], variando a diferença entre 4.6% para a malha mais grossa, a 2% para a malha mais refinada.

FLAMBIMP		6.046	
B	quantidade de nós	Pressão crítica (MPa)	No. Ondas
O	5	5.765	3
S	9	5.925	4
O	17	5.905	4
R	33	5.915	4
S	65	5.925	4

Tabela 5.2.9. Pressão crítica segundo BOSORS e FLAMBIMP. MODELO3.

A seguir, foi feito o cálculo das tensões no casco para valores de pressão correspondentes à região linear e não linear, sendo estes valores 1 MPa e 5 MPa. Neste último valor existe deformação plástica. A Tabela 5.2.10 mostra esses resultados, observando-se também neste caso uma boa correspondência dos resultados.

BOSORS	LONGITUDINAIS		5 mos		9 mos		17 mos		33 mos		65 mos	
	FLAMBIMP	5 MPa	M	P	M	P	M	P	M	P	M	P
CIRCUNFERENCIAIS	MEMBRANA	Méio do vão da caverna	-67,41	-338,21	-70	-340	-70	-340	-70	-340	-70	-340
		Méio do vão da caverna	-67,41	-338,21	-70	-340	-70	-340	-70	-340	-70	-340
	FLEXÃO	21,28	42,96	25	120	25	135	25	130	205	40	20
		122,51	232,72	120	135	130	130	130	230	125	240	125
	TOTAL	-88,92	-24,68	-90	-40	-90	-40	-90	-20	-90	-20	-90
		-460,72	-105,49	-450	-200	-460	-200	-460	-90	-460	-80	-460
	TOTAL	-110,6	-110,6	-40	-40	-40	-40	-110	-40	-110	-50	-110
		-215,7	-570,93	-210	-470	-200	-530	-200	-550	-210	-560	-210
	EQUIVALENTES	MEMBRANA	-102,55	-96,63	-110	-540	-90	-470	-100	-520	-100	-480
			-515,29	-481,9	-540	-470	-530	-470	-520	-480	-520	-480
		FLEXÃO	6,83	12,89	10	30	5	30	5	35	5	60
			36,75	69,82	30	30	35	30	35	55	35	60
TOTAL		-108,94	-83,75	-120	-90	-110	-80	-110	-80	-110	-80	
		-552,04	-412,08	-560	-430	-550	-410	-550	-400	-550	-400	
TOTAL		-96,17	-109,52	-100	-100	-100	-110	-100	-110	-100	-110	
		-478,54	-551,71	-500	-500	-490	-510	-480	-510	-480	-520	
EQUIVALENTES		MEMBRANA	90,31	85,89	90	80	90	80	90	80	90	80
			453,47	428,52	470	420	460	420	460	430	460	430
		FLEXÃO	83,3	110,07	90	100	80	110	80	110	80	110
			415,1	561,57	440	480	420	520	420	530	420	540
	TOTAL	100,44	74,54	110	70	100	70	100	70	100	70	
		512,52	370,77	520	370	510	360	510	370	510	370	
	TOTAL	83,3	110,07	90	100	80	110	80	110	80	110	
		415,1	561,57	440	480	420	520	420	530	420	540	

Tabela 5.2.10 Valores de tensões para o MODELO3.

M : meio do vão.

P : pé da caverna.

### 5.3 Cone Reforçado

São executadas análises de dois cones reforçados, chamados de CONE1, com semi-ângulo de abertura igual a 30°, e CONE2, com semi-ângulo de abertura igual a 10°. Para esses cones serão calculadas as pressões críticas e comparados os resultados com o programa FLAMBIMP[4], o qual neste caso de cones executa um cálculo menos preciso. A geometria dos cones é dada nas Figuras abaixo:

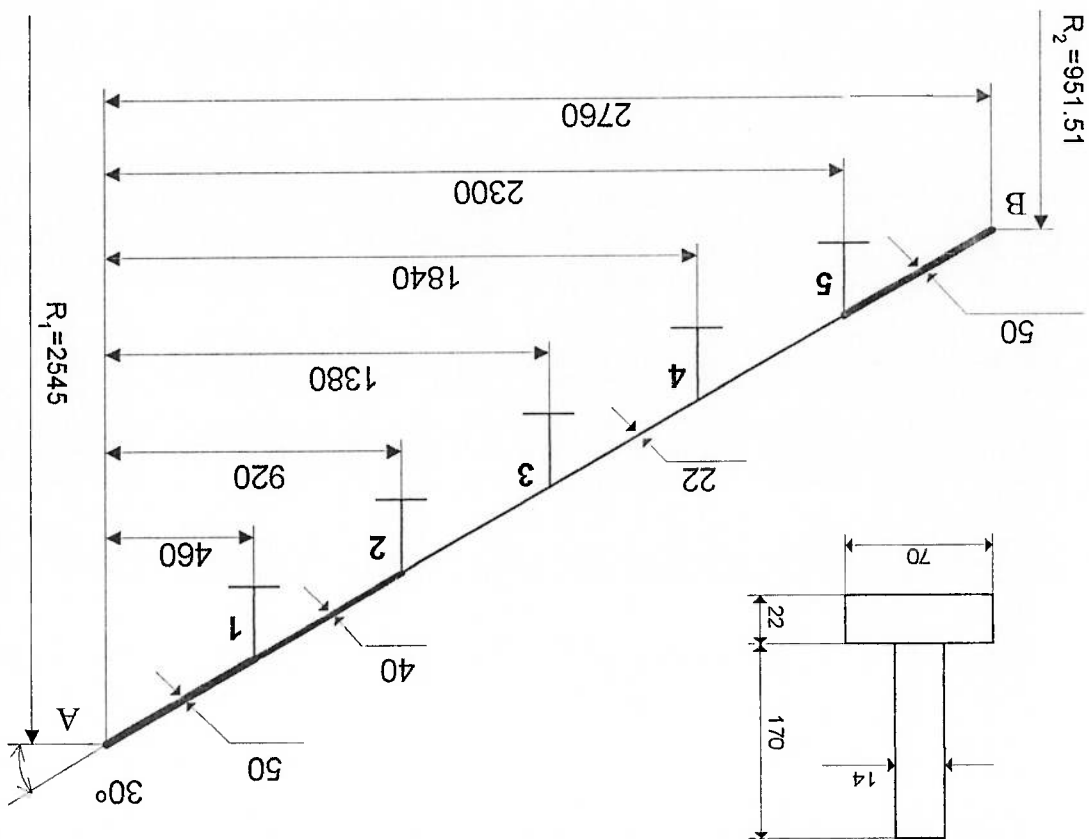


Figura 5.3.1 Modelo do CONE1. Geometria e dimensões.

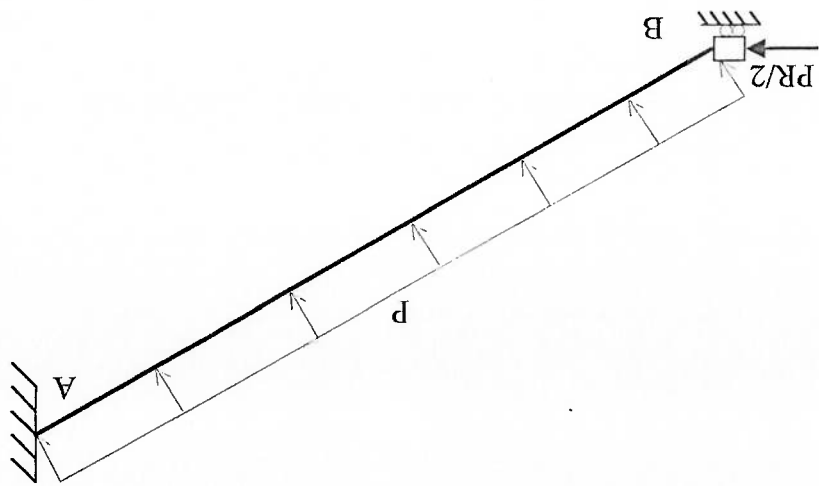


Figura 5.3.2. Modelo CONE1. Condições de contorno e carregamento.

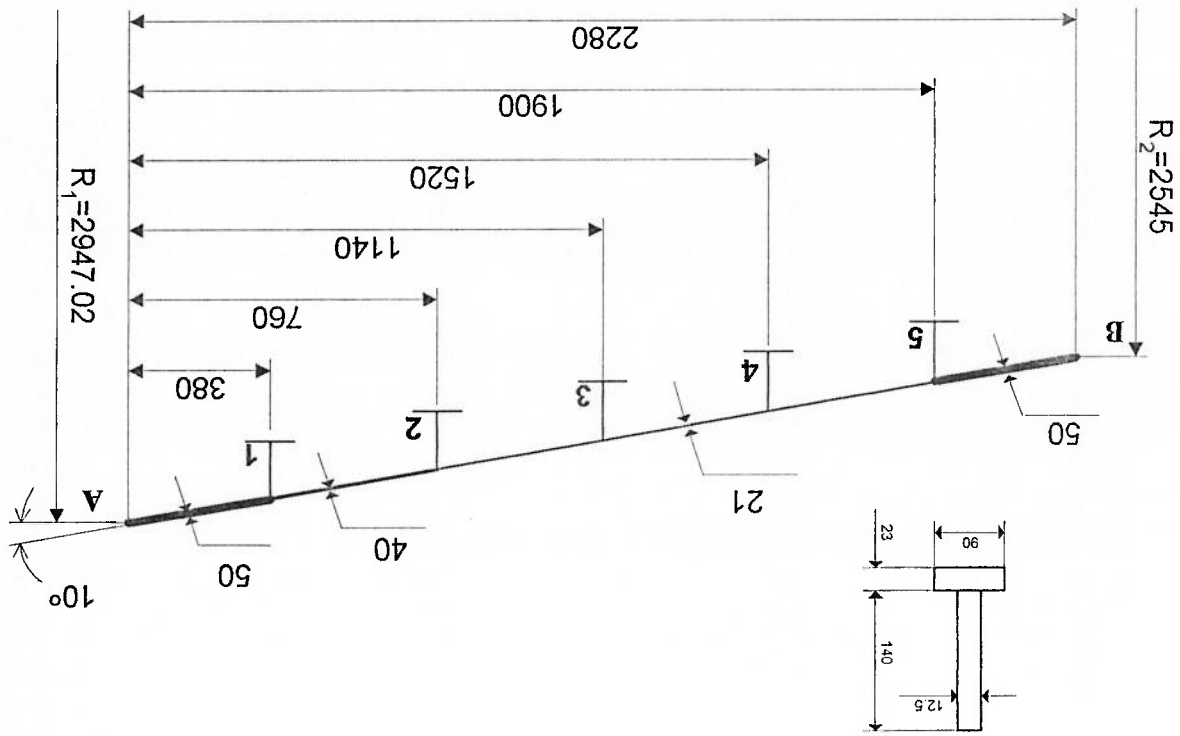


Figura 5.3.3. Modelo do CONE2. Geometria e dimensões.

As condições de contorno são as mesmas do modelo anterior.

Como se pode observar nas Figuras 5.3.1 e 5.3.3, a espessura do chapamento é aumentada próximo aos extremos, de tal forma que a flambagem ocorra nos vãos internos dos troncos cônicos, evitando-se possíveis influências das condições de contorno utilizadas nas extremidades. Desta forma pode-se fazer a comparação com os resultados da formulação teórica do programa FLAMBIMP[4]. O cálculo das pressões de flambagem por esse programa e feita de modo aproximado, obtendo-se o valor desejado, na posição de uma caverna, pela média entre seus dois vãos adjacentes. Do programa FLAMBIMP[4] obtiveram-se os resultados mostrados na Tabela 5.3.1.

R <sub>int</sub> (mm)	P <sub>flamb</sub> (MPa)	No. Caverna
1703.25	7.179	3
1437.67	8.23	4

Tabela 5.3.1 Valores de pressão crítica para o CONE1. Programa FLAMBIMP.

Os valores médios entre posições de cavernas são:

entre as cavernas 3 e 4 **7.705 MPa**

No caso do BOSORS[3] foi determinada a pressão crítica, ocorrendo os

deslocamentos máximos entre as cavernas 3 e 4. Os valores de pressão de flambagem são dados a seguir para duas diferentes discretizações.

$P_{flam} = 8.065 \text{ MPa}$  (para 25 nós)  $P_{flam} = 7.92 \text{ MPa}$  (para 30 nós)  
 valor médio  $P_{flam} = 7.993 \text{ MPa}$

A diferença, com relação à correspondente pressão de flambagem dada pelo programa FLAMBIMP[4], é de 3,6%.

No caso do CONE2, os resultados obtidos no programa FLAMBIMP[32] são dados na Tabela 5.3.2.

Rint.(mm)	Pflamb.(MPa)	No. Caverna
2701.01	6.261	4
2634	6.409	3

Tabela 5.3.2. Valores de pressão crítica para o CONE2. Programa FLAMBIMP.

Os valores médios entre posições das cavernas são:  
 entre as cavernas 3 e 4 **6.335 MPa**

No caso de BOSORS[3], foi determinada a pressão crítica, ocorrendo os deslocamentos radiais máximos da estrutura entre as cavernas 3 e 4, obtendo-se:

$P_{flam} = 5.985 \text{ MPa}$  (para 25 nós)  $P_{flam} = 6.05 \text{ MPa}$  (para 30 nós)  
 valor médio  $P_{flam} = 6.018 \text{ MPa}$

A diferença em relação ao programa FLAMBIMP[4] é, neste caso, de 5%.

Como verificado, tanto no caso do cilindro reforçado como no do cone, os resultados, de modo geral, estão muito próximos aos das formulações analíticas existentes e consagradas. No que diz respeito às pressões críticas pode-se, como primeira aproximação, inferir que os resultados do programa BOSOR5[3] sejam também aceitáveis naqueles casos cuja geometria não permite que modelos analíticos possam ser utilizados, como no caso das descontinuidades estruturais do casco resistente, com a existência de elemento de transição que visa diminuir o efeito dessa descontinuidade.

#### 5.4 Modelo de Descontinuidade com Elemento de Transição

O objetivo deste item é a aplicação do programa BOSOR5[3] no cálculo de tensões na região de descontinuidades estruturais. Como exemplo é analisado o caso da interseção de cilindro-cone com elemento de transição, mostrado na Figura 5.4.1

Neste caso, devido à complexidade do modelo analisado, não foi possível incluir toda a geometria do mesmo num segmento só, sendo necessário dividi-lo em várias partes, usando as potencialidades do programa, que permite sejam fornecidos na entrada de dados até 200 segmentos diferentes, sendo estes definidos pela geratriz da casca e podendo o usuário utilizar diferentes discretizações de acordo com as necessidades do problema [28,29,35,36]

Foi usada uma quantidade de nós para o modelo de acordo com a importância de cada segmento, utilizando-se um espaçamento constante dos nós que formam a malha e sem imperfeições de forma. Existem seis cavernas que são declaradas ao programa como anéis como parte do modelo da análise.

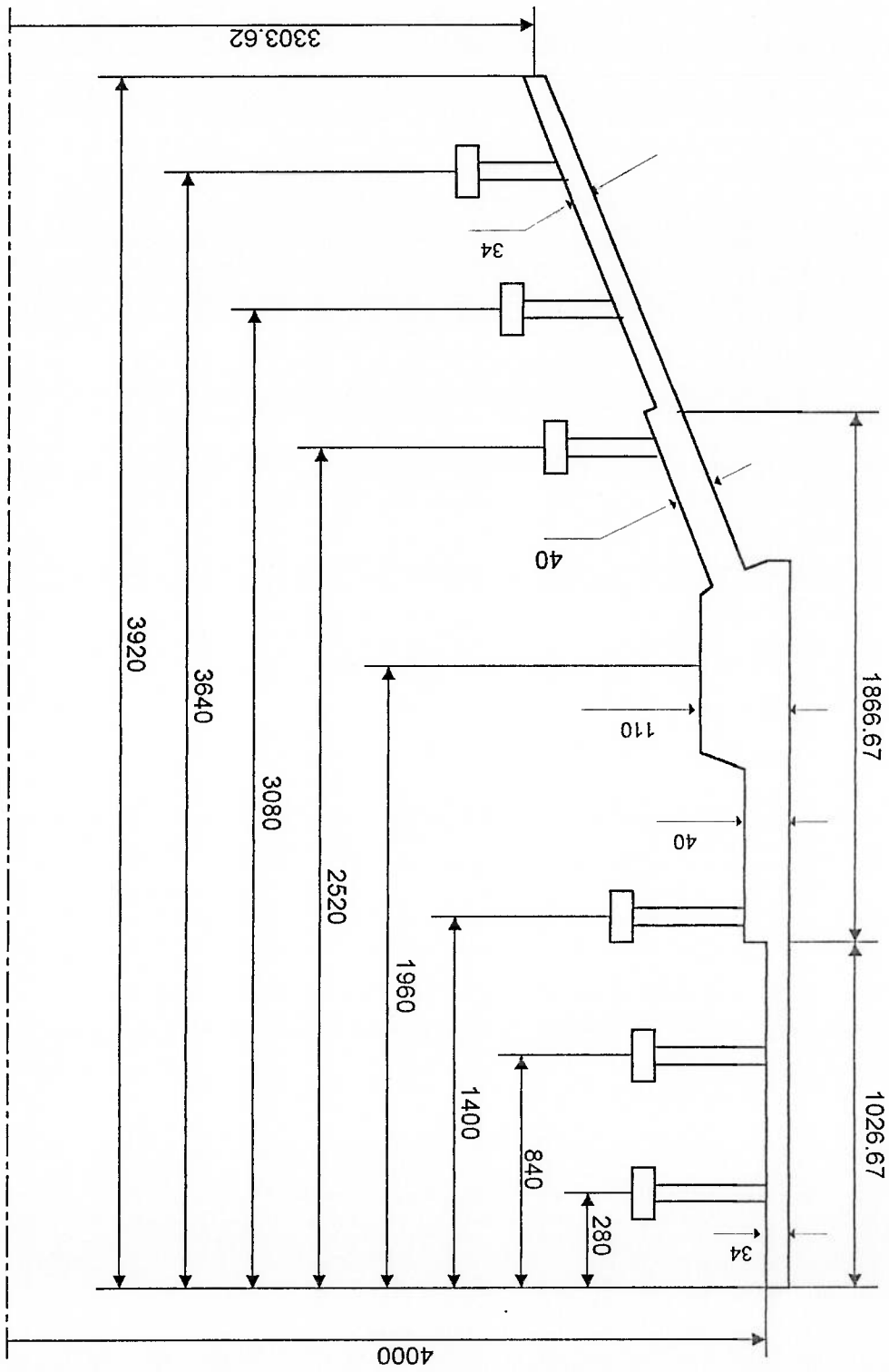


Figura 5.4.1. Modelo de descontinuidade com elemento de transição.



De acordo com a configuração da descontinuidade, incluindo o elemento de transição e levando em conta as possibilidades do BOSORS[3], que permite dividir o modelo em segmentos segundo a geometria da geratriz, foi utilizado para a discretização uma divisão com 5 segmentos, incluindo-se as mudanças da geometria e necessidades de maior quantidade de nós nas regiões de interesse, que são aquelas mais próximas da região de descontinuidade, como mostrado nas Figuras 5.4.2 e 5.4.3.

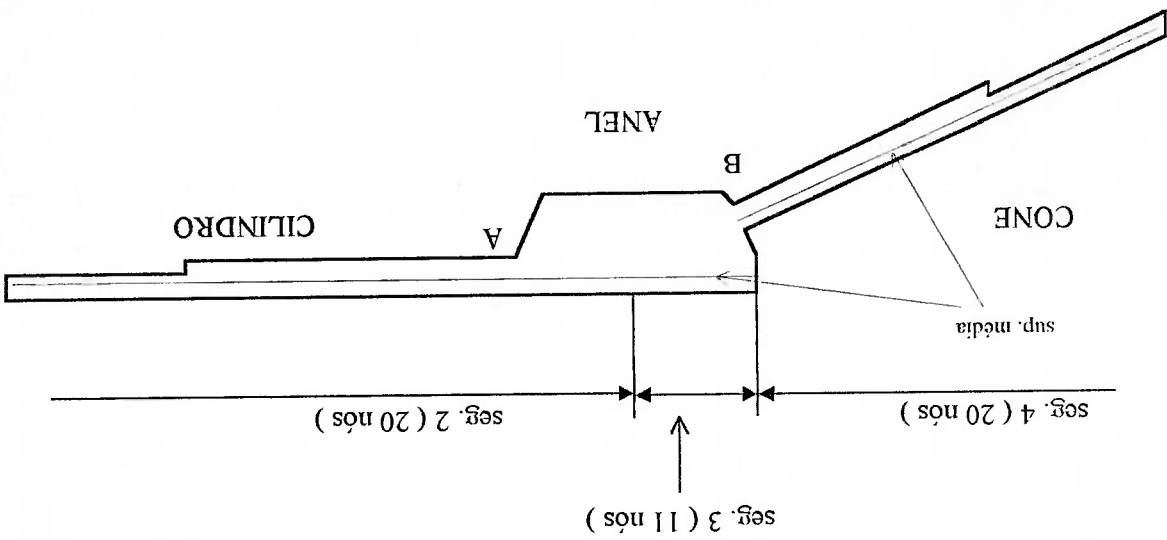


Figura 5.4.2. Variante de discretização.

A Figura 5.4.3 dá uma descrição mais detalhada da geometria do modelo na região de descontinuidade, incluindo o anel de transição, utilizando a possibilidade de incluir na entrada de dados do modelo um ressalto entre os segmentos [28,29,35,36], como detalhado na Figura 5.4.4.

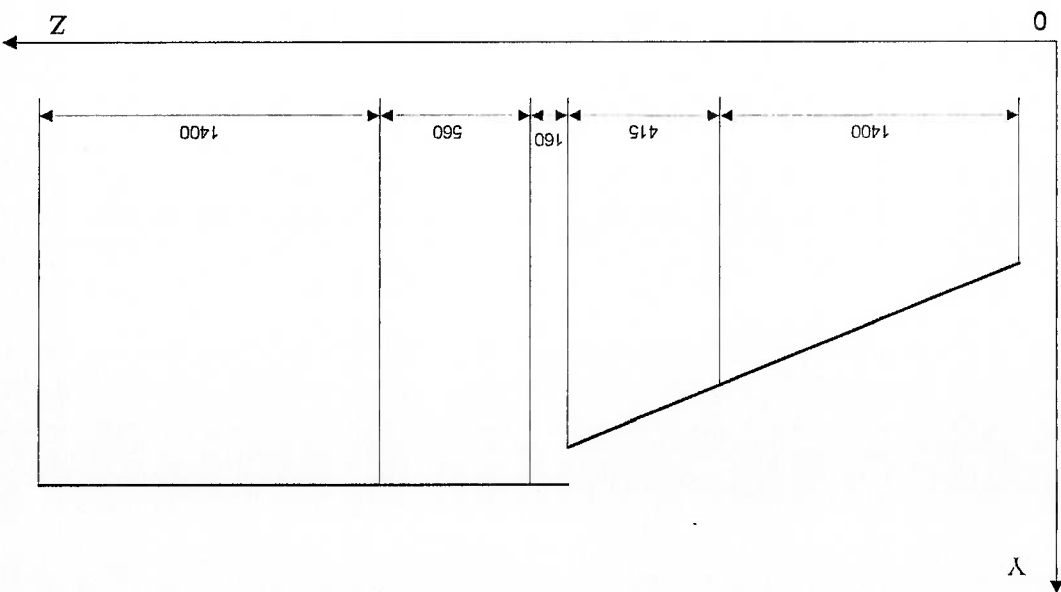


Figura 5.4.3. Distribuição dos segmentos no casco.

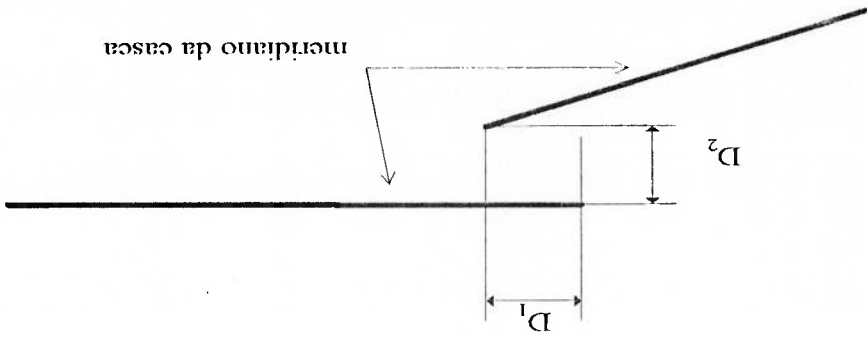


Figura 5.4.4. Recesso entre os segmentos.

As condições de contorno nas extremidades da casca são as seguintes:

CONE:  $u, w$  livres (na direção que é aplicado o esforço de contorno  $PR/2$ )

$v, \theta$  restritos

CILINDRO:  $w$  livre,  $u, v$  e  $\theta$  restritos.

A região também é discretizada através de um modelo de elementos finitos, conforme Figuras 5.4.5, 5.4.6 e 5.4.7, onde são apresentados o modelo discretizado, o modelo deformado e um detalhe do elemento de transição. A análise foi feita utilizando o programa SAP90[5]. Na modelação o maior quantidade de nós foi concentrada na região de descontinuidade incluindo o elemento de transição.

Os resultados de tensões equivalentes obtidos pelo BOSORS[3], na fase interna da casca são comparados com resultados do programa de elementos finitos SAP90[5], para uma pressão de 2 MPa como mostrado na Tabela 5.4.1. Também, são dados os valores da distribuição de tensões no comprimento da casca para as discretizações feitas com o programa BOSORS[3] e para os pontos correspondentes as mesmas coordenadas do SAP90[5].

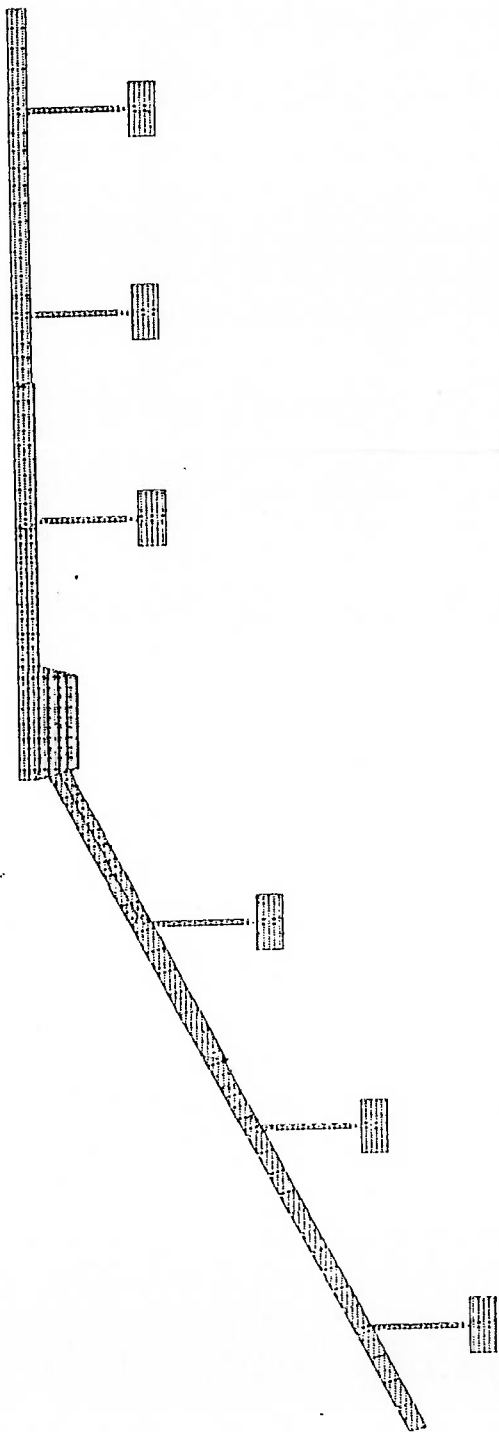


Figura 5.4.5 Modelo discretizado utilizando o programa SAP90

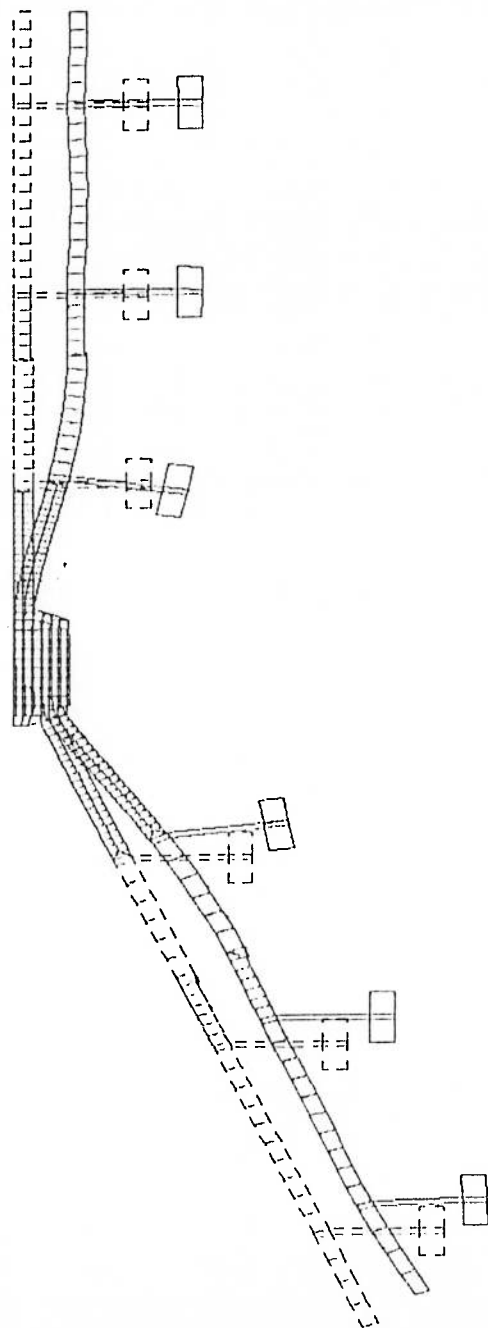


Figura 5.4.6 Modelo deformado segundo SAP90

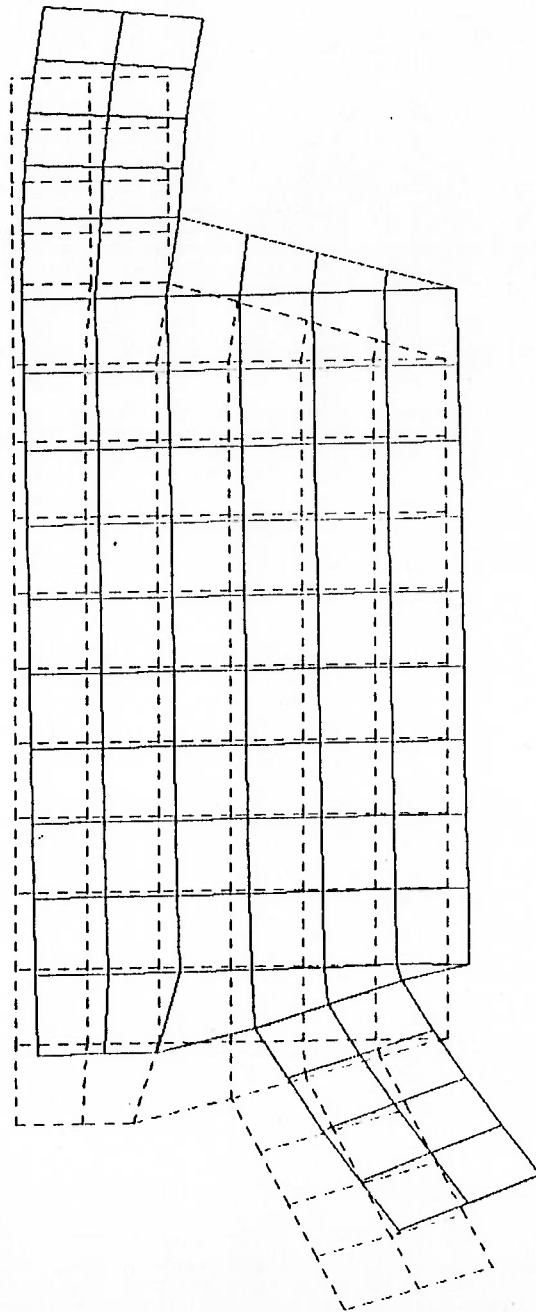


Figura 5.4.7 Discretização do elemento de transição segundo SAP90

Tabela 5.4.1. Valores de tensão equivalente na fase interna da casca. BOSORS e SAP90.

Nas colunas correspondentes às tensões equivalentes do programa SAP90[5] não aparecem todos os valores, já que, só foram colocados aqueles cujas coordenadas dos nós correspondem as posições das coordenadas da discretização feita com o BOSORS[3].

Deve-se ressaltar que a preparação de dados para o programa BOSORS[3] é muito

mais simples se comparado com o SAP90[5], que permite fazer rápidas mudanças na malha de elementos de diferenças finitas, daí sua vantagem. Foi também calculada a pressão de laminação para este modelo, tendo sido obtido:  $P_{lam} = 6,78MPa$ . Não se dispõe de formulações analíticas que propiciem uma comparação com esse valor.

coordenada	σ <sub>equiv</sub>	coordenada (mm)	σ <sub>equiv</sub>	σ <sub>equiv</sub>	
				BOSORS	SAP90
2520		1952		85	91,4
2513		1930		100	81
2491		1901	182	120	
2462		1872	161	140	
2432		1842		170	
2403		1813	161	570	
2376		1783		510	502
2344		1754	171	400	430
2314		1724	200,6	350	376
2284		1695		300	
2255		1665	261,36	230	247
2226		1636		200	
2196		1606	370	175	
2167		1577	450	160	
2137		1547		160	187
2108		1518	595	165	148
2078		1488		170	153
2048		1459		180	153
2019		1430	80	205	
1990		1408		220	
1968,5		1400	91,42		
1960					

A seguir serão mostrados os gráficos correspondentes aos resultados do cálculo de tensões equivalentes para BOSORS[3] e SAP90[5].

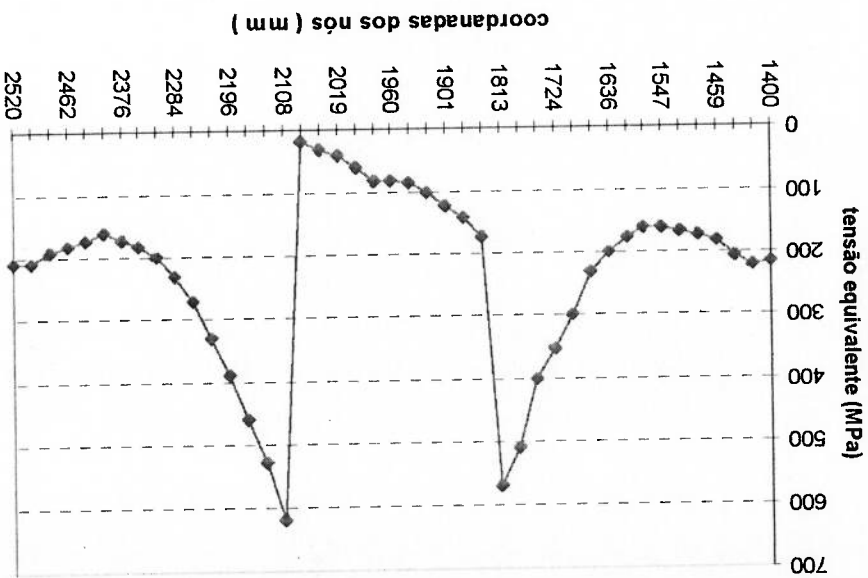


Gráfico 5.4.1a. Tensão equivalente vs. coordenadas dos nós. BOSORS (5 segmentos).

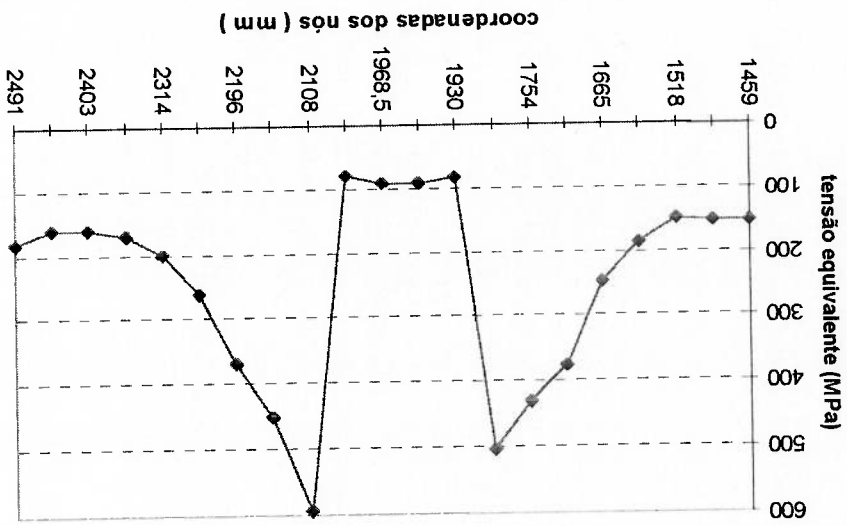


Gráfico 5.4.1b. Tensão equivalente vs. coordenadas dos nós. SAP90.



Nestes gráficos pode-se observar o similar comportamento das tensões equivalentes em todos os casos, o que diz respeito à confiabilidade do programa estudado.

Concluindo pode-se estabelecer que o programa BOSORS[3] será muito útil como ferramenta de cálculo não-linear geométrico e de material, nos casos de cascos de revolução, pelas vantagens que oferece na discretização deste tipo de elemento estrutural, pela rapidez dos cálculos e pela confiabilidade e precisão dos resultados obtidos. A boa concordância dos resultados do programa BOSORS[3] e de um programa típico de elementos finitos, SAP90[5], ocorrem mesmo neste caso da existência do elemento de transição, onde a discretização desse elemento utilizando o BOSORS[3] é mais grosseira, como pode ser visto comparando-se as Figuras 5.4.4 e 5.4.7.

## CAPÍTULO 6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS

### 6.1 Conclusões

Consideraram-se os resultados obtidos como satisfatórios e, levando em conta os objetivos propostos no início do trabalho, podem-se tirar as conclusões que a seguir.

1. Do estudo da bibliografia obteve-se toda a informação necessária para o conhecimento das potencialidades do programa BOSOR5, as quais são muito amplas e de simples aplicação, o que facilita o trabalho nas diferentes etapas do projeto estrutural.

2. Foram verificadas as potencialidades e precisão do programa na determinação das cargas limites e de bifurcação do equilíbrio, levantando-se curvas de comportamento de diferentes arranjos estruturais sob pressão externa (pressão vs. deslocamento radial), obtendo-se resultados próximos aos de formulações analíticas consagradas.

3. Como para regiões com arranjo estrutural mais complexo, tais como as regiões de descontinuidade, não se dispõe de formulações analíticas, o programa BOSOR5 poderá ser aí utilizado.

4. Foi comprovada a precisão de cálculo do programa BOSOR5, na determinação de tensões lineares elásticas em regiões de descontinuidade, com elemento de transição, sendo os resultados aceitáveis do ponto de vista de engenharia, se comparados com programas de elementos finitos, mesmo com a discretização mais grosseira desse elemento de transição, que é efetuada quando da utilização

deste programa. O programa BOSOR5 tem a vantagem de uma fácil preparação da malha de entrada de dados, além de um menor tempo de processamento.

## 6.2 Sugestões para Futuros Trabalhos

Para futuros trabalhos sugere-se:

1. Continuar aprofundando o estudo das potencialidades do programa BOSOR5, que revelou-se uma ferramenta útil e simples no projeto estrutural. A comparação dos resultados de pressões críticas de regiões de descontinuidade com aqueles advindos de programas de elementos finitos é um bom exemplo.
2. Utilizar exaustivamente o programa BOSOR5 em vários tipos de estruturas, especificamente modificando arranjos típicos da estrutura de submarinos, de tal forma a obterem-se informações para projeto que propiciem o encaminhamento de soluções estruturais não convencionais e otimizadas.
3. Propõe-se para melhorar o cálculo nas regiões de transição, como alternativa, o uso de um modelo misto, ao invés de somente elementos de cascas finas como usados no BOSOR5. Entendendo-se por modelo misto uma configuração na qual algumas partes da estrutura axisimétrica são modeladas com o uso da teoria de cascas finas e outras partes com o uso de elementos sólidos de revolução isoparamétricos. O programa BOSOR6[16,37] resolve o cálculo de tensões, flambagem e análise de vibrações nesse tipo de configuração. As tensões e deformações na vizinhança dos pontos que compõem a junção dos segmentos de cascas, não podem ser adequadamente prognosticadas com a teoria de cascas

finas, portanto precisa-se definir uma pequena região que tem de ser discretizada em duas dimensões. Esse análise é aplicável a corpos de revolução compostos de segmentos de cascas finas, segmentos de cascas espessas e anéis discretos. As cascas delgadas são discretizadas pelo método das diferenças finitas. A casca de maior espessura ou segmentos sólidos são tratados como uma montagem de elementos finitos de revolução quadrilaterais isoparamétricos de 8 nós. As condições adequadas de compatibilidade são formuladas de modo tal que estes segmentos não semelhantes sejam unidos sem introduzir falsas descontinuidades de tensões, como descrito na referencia [2].

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] MORANDI, A.C. Projeto de Regiões de Descontinuidade do Casca Resistente de Submarinos. Dissertação apresentada a EPUSP. Depto. Engenharia Naval, Junho 1991.
- [2] BUELTA, M. A. M. Desenvolvimento de Critérios para Projeto e Análise de Estruturas Submersíveis. Tese de Doutorado, EPUSP, São Paulo, Brasil, 1984.
- [3] BUSHNELL, D. BOSORS - A Computer Program for Buckling of Elastic-Plastic Complex Shells of Revolution Including Large Deflection and Creep. Vol. I: User's Manual, Input Data, Lockheed Missiles & Space Co., Inc., USA, 1974.
- [4] BUELTA, M.A.M., RASSETI, C. Manual de Engenharia do Programa FLAMBIMP (2ª versão), R.T., No. 38/406, CEPEN/USP, Out. 1988.
- [5] WILSON, E. L., HABULLAH, A. SAP90: A Series of Computers Programs for the Static and Dynamic Finite Element Analysis of Structures.
- [6] BUSHNELL, D. A Strategy for the Solution of Problems Including Large Deflections Plasticity and Creep. International Journal of Numerical Methods in Engineering, Vol. 11, 1977, USA, pag. 683-678.
- [7] BUSHNELL, D. & GALLETTLY, G. D. Comparisons of Test and Theory for Nonsymmetric Elastic-Plastic Buckling of Shells of Revolution. International Journal of Solids Structures, Vol. 10, 1974, pag. 1271-1286.
- [8] BUSHNELL, D. Large Deflection Elastic-Plastic Creep Analysis of Axisymmetric Shells. Solution of Non Linear Structural Problems, Vol. 6 ASME, p.103-138, USA, Nov. 1973.
- [9] LOVE, A. E., H. A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. 4 edic. Dove. Pub. Inc. New York USA. 1945.
- [10] ALTMAN, W. Teoria de Cascas EPUSP, Departamento Engenharia Civil São Paulo. 1996
- [11] BUSHNELL, D. Computerized Analysis of Shells. Governing Equations. Computer & Structures, Vol. 18, nº 3, pag. 471-536, 1984
- [12] MOLLMAN, H. Theory of Thin Shells. John Willey & Sons. The Pitman Press, Avon, Great Britain, 1981.

- [13] NOVOZHILOV, V. V. The Theory of Thin Shells. P Noorhoff. The Netherlands, 1959
- [14] BUSHNELL, D. Computerized Buckling Analysis of Shells. Lockheed Palo Alto Research Laboratory, Palo Alto, California, USA, 1985, pag. 444.
- [15] BUSHNELL, D. Buckling of Elastic-Plastic Shells of Revolution with Discrete Elastic-Plastic Ring Stiffeners. International Journal of Solids Structures, vol. 12, pag. 51-76, 1976
- [16] BUSHNELL, D. Mechanics of Elastic Stability. Computerized Buckling Analysis of Shells. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1989.
- [17] BUSHNELL, D. Bifurcation Buckling of Shells of Revolution Including Large Deflection and Creep. International Journal of Solids Structures, Vol. 10, 1974, USA, pag. 1287-1305.
- [18] CROLL, J.G.A.; WALKER, A.C. Elementos de Estabilidad. Editorial Reverte S.A. Barcelona, España, 1975
- [19] MORAIS, C. H. B. Roteiro Simplificado para a Utilização do Programa BOSORS. Depto. Engenharia Naval, EPUSP, Fev. 1992.
- [20] Relatório Técnico. Alguns Aspectos do Programa BOSORS. EPUSP. Depto. Eng. Naval. R.T. 72/406 Março 1990.
- [21] BUSHNELL, D. 2.4 Plastic Buckling. Pressure Vessel & Piping: Design Technology, ASME, p 47-115, 1982.
- [22] LAGAE, G & BUSHNELL, D. Elastic-Plastic Buckling of Internally Pressurized Torispherical Vessel Heads. Nuclear Engineering and Design, n° 48, 1978, USA, pag. 405-414.
- [23] BUSHNELL, D. Elastic-Plastic Buckling of Internally Pressurized Ellipsoidal Pressure Vessel Heads. Welding Research Council, n° 267, USA, May. 1981
- [24] BUSHNELL, D. & GALLETLY, G. D. Stress and Buckling of Internally Pressurized Elastic-Plastic Torispherical Vessel Heads. Comparisons of Test and Theory. Journal of Pressure Vessel Technology, Vol. 99, Feb. 1977, USA, pag. 39-43.
- [25] BUSHNELL, D. Elastic-plastic Buckling of Axially Compressed Ring Stiffened Cylinders. Test vs. Theory. Welding Research Council Bulletin, n° 282, USA.

- [26] BUSHNELL, D. Nonsymmetric Buckling of Internally Pressurized Ellipsoidal and Torispherical Elastic-Plastic Pressure Vessel Head. Journal of Pressure Vessel Technology, Vol. 99, , USA, pag. 54-62, Feb. 1977.
- [27] BUSHNELL, D. Stress Stability and Vibration of Complex Branched Shells of Revolution. Computer & Structures, Vol. 4, pag. 399-435, 1974
- [28] BUSHNELL, D. BOSORS - Program for Buckling of Elasto-Plastic Complex Shells of Revolution Including Large Deflection and Creep. Computer & Structures, Vol. 6, pag. 221-259, 1976
- [29] BUSHNELL, D. BOSORS - Program for Buckling of Complex Branched Shells of Revolution Including Large Deflection Plasticity and Creep. Structural Analysis Systems, Vol. 2, USA, pag. 55-67, 1986
- [30] BUSHNELL, D. & GALLETLY, G. D. Stress and Buckling of Internally Pressurized Elastic-Plastic Torispherical Vessel Heads. Comparisons of Test and Theory. Journal of Pressure Vessel Technology, Vol. 99, p. 39-43, USA, Feb. 1977.
- [31] BUSHNELL, D. Plastic Buckling of Various Shells. Journal of Pressure Vessel Technology, Vol. 104, May, USA pag. 51-72, 1982
- [31] BUSHNELL, D. Evaluation of Various Analytical Models for Buckling and Vibration of Stiffened Shells. AIAA Journal, Vol. 11, n° 9, Sept. 1973, USA, pag. 1283-1291.
- [32] MORAIS, C.H.B., Finardi, P., BUELTA, M. A. M. Manual de Engenharia do Programa Aquiles. CENO, USP, R.T. 106/406, Abril 1991.
- [33] REYNOLDS, T. E. Inelastic Lobar Buckling of Cylindrical Shells under External Hydrostatic Pressure. DTMB, Report 1392, August 1960.
- [34] LUNCHICK, M. E. Plastic Axisymmetric Buckling of Ring Stiffened Cylindrical Shells Fabrication From Strain Hardening Materials and Subjected to External Hydrostatic Pressure. DTMB, Report 1393, Jan. 1961.
- [35] BUSHNELL, D. BOSOR4 - User's Manual. Structural Mechanics. Software Series, Vol. 1, USA, Lockheed Missiles & Space Company, Inc.
- [36] BUSHNELL, D. BOSOR4 and BOSORS Warning. Lockheed Missiles and Space Company, Inc., USA, Applied Mechanics Laboratory, Nov. 1985

- [37] BUSHNELL, D. Stress Buckling and Vibration of Hybrid Bodies of Revolution. Computer & Structures, Vol. 7 p. 517-537 Pergamon Press. Great Britain, 1977.
- [38] FENVES, S. J. Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics. Academic Press, New York & London, 1973.
- [39] BUSHNELL, D. BOSOR4 - Programs for Stress Stability and Vibration of Complex Shells of Revolution. Lockheed Applied Mechanics Laboratory, Palo Alto, California, USA.
- [40] BUSHNELL, D. Analysis of Buckling and Vibration of Ring-Stiffened Segmented Shells of Revolution. International Journal of Solids Structures, Vol. 6, pag. 157-181, 1970



**ANEXO A  
BOSORS. ELEMENTO DE DIFERENÇA FINITA. MATRIZ RIGIDEZ**

Seja o método empregado elementos finitos ou diferenças finitas, as incógnitas do problema são os deslocamentos dos pontos nodais. Entre estes nós as variações dos deslocamentos são expressas como séries de potências em  $S$ , onde a integração da expressão de energia de deformação pode ser feita analítica ou numericamente. A diferença entre os dois métodos diz respeito à seleção dos componentes dos deslocamentos e à seleção dos nós.

A Figuras A1a e A1b mostram um exemplo de discretização, por diferenças finitas, de um meridiano de casca. Os nós são indicados por grandes pontos ou cruces. O elemento é definido pela linha de maior espessura.

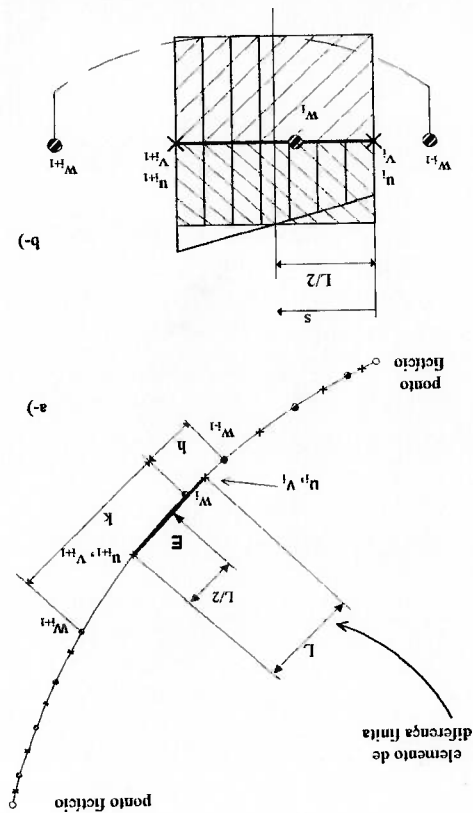


Figura A1. Elemento de diferença finita usado no programa BOSORS. Posição de pontos nodais e variáveis.

Seja  $E$  um ponto, no meio do elemento de diferença finita, onde será avaliada a integral de energia potencial total para cada elemento,  $h$  e  $k$  são parâmetros geométricos que definem o espaçamento entre pontos nodais  $w$ .

Os deslocamentos dos pontos nodais  $u_i$ ,  $v_i$  e  $w_i$  são mostradas nos nós aos quais estão associadas. Para o elemento mostrado na figura o integrando da equação de energia potencial é avaliado só em um ponto de cada elemento e a energia total é obtida multiplicando-se pelo comprimento do arco meridional.

Os deslocamentos  $u_i$  e  $v_i$  são tomados na posição intermédia entre dois deslocamentos  $w_i$  como mostrado na Figura A1. A energia também é avaliada nos mesmos pontos. Os deslocamentos e as derivadas de  $S$  requeridas na equação de energia são:

$$u = \frac{2}{n_i + n_{i-1}}, \quad v = \frac{2}{v_i + v_{i-1}}, \quad n = \frac{h}{n_i - n_{i-1}}, \quad v = \frac{h}{v_i - v_{i-1}}$$

$$w = w_i, \quad w' = \frac{2h}{w_{i+1} - w_{i-1}}, \quad w'' = \frac{h^2}{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}$$

Estas expressões são válidas para qualquer espaçamento dos nós na malha, podendo ser espaçamento constante e espaçamento variável, nas variáveis  $u$ ,  $v$ ,  $u'$ ,  $v'$ . Para os valores de  $w$ ,  $w'$  e  $w''$ , tem-se:

$$\begin{Bmatrix} w \\ w' \\ w'' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{i-1} \\ w_i \\ w_{i+1} \end{Bmatrix}$$

na qual:

$$a_{11} = \frac{16(h^2 + hk)}{(h-k)(3k+h)} \quad a_{12} = \frac{16hk}{(h+3k)(3h+k)} \quad a_{13} = \frac{16(k^2 + hk)}{(k-h)(3h+k)}$$

sendo  $h$  e  $k$  definidas na figura A1a.

Esta técnica de discretização é conhecida como método de energia de diferenças

finitas [2,33].

A densidade de energia avaliada no ponto  $E$  da figura A1a, no meio do

comprimento  $L$ , inclui os sete pontos de  $w_{i-1}$  até  $w_{i+1}$ . Esta formulação produz uma

matriz de rigidez de  $7 \times 7$ . Deve-se notar que dois pontos  $w$  estão situados fora do

elemento.

### Matriz Rigidez.

Como parte do estudo teórico do programa, são apresentados os elementos que

compõem a matriz rigidez, obtidos do da bibliografia [2,6,16,21] referente ao

BOSORS[3]. A matriz é dada por:

$$K = [B^T C B + R^T N_{of} R + D^T P D]^{7 \times 7},$$

onde:

B: matriz que relaciona deformação com deslocamento.

C: matriz dos coeficientes das equações constitutivas.

R: matriz que relaciona deslocamentos lineares com rotações

$N_{of}$ : matriz dos esforços resultantes.



$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ C_{14} & C_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{15} & C_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{36} & 0 & 0 & 0 \\ C_{14} & C_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{15} & C_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{36} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{6 \times 6}$$

$$E_{11} = \frac{E_1}{(1 - \nu_{12}\nu_{21})} \quad ; \quad E_{22} = \frac{E_2}{(1 - \nu_{12}\nu_{21})} \quad ; \quad E_{12} = \nu_{12}E_{22}$$

$$C_{11} = \int E_{11} dz \quad ; \quad C_{12} = \int E_{12} dz \quad ; \quad C_{14} = - \int E_{11} z dz$$

$$C_{15} = - \int E_{12} z dz \quad ; \quad C_{22} = \int E_{22} dz \quad ; \quad C_{24} = - \int E_{12} z dz$$

$$C_{25} = - \int E_{22} z dz \quad ; \quad C_{33} = \int G dz \quad ; \quad C_{36} = \int G z dz$$

$$C_{66} = \int G z^2 dz \quad ; \quad C_{44} = \int E_{11} z^2 dz \quad ; \quad C_{45} = \int E_{12} z^2 dz$$

$$C_{55} = \int E_{22} z^2 dz$$

$$N^{\sigma f} = \begin{bmatrix} Nf_{10} & 0 & 0 \\ Nf_{20} & 0 & 0 \\ (Nf_{10} + Nf_{20}) & 0 & 0 \end{bmatrix}^{3 \times 3}$$

$$P_f = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{p} & 0 & -p \\ 0 & -\frac{R_2}{p} & 0 \\ 0 & 0 & p \left( \frac{R_1}{1} - \frac{R_2}{1} \right) \end{bmatrix}^{3 \times 3}$$

Os termos incluídos nas matrizes são os seguintes:  
 $R_1$  : raio meridional

$R_2$  : raio circunferencial.

r : raio do ponto analisado

v : coeficiente de Poisson ; E : módulo de elasticidade

G : módulo de elasticidade transversal

P : pressão ,  $N_{10}$ ,  $N_{20}$  : esforços meridional e circunferencial.

A matriz de rigidez global de todo o modelo é obtida pela composição das matrizes de rigidez de cada elemento de diferença finita.