

André Jacques de Paiva Leite

**FORÇAS DE CORRENTE EM PETROLEIROS E BIFURCAÇÃO DO  
EQUILÍBRIO EM SISTEMAS TIPO TURRET**

Dissertação apresentada à  
Escola Politécnica da  
Universidade de São Paulo  
para obtenção do título de  
Mestre em Engenharia.

São Paulo  
1997

**FORÇAS DE CORRENTE EM PETROLEIROS E BIFURCAÇÃO DO  
EQUILÍBRIO EM SISTEMAS TIPO TURRET**

**André Jacques de Paiva Leite**

**Dissertação apresentada à  
Escola Politécnica da  
Universidade de São Paulo  
para obtenção do título de  
Mestre em Engenharia.**

**Área de Concentração:**

**Engenharia Naval e Oceânica**

**Orientador:**

**José A. Pentecado Aranha**

**São Paulo  
1997**

Provérbio capiau (Minas Gerais)  
Extrado de "Sagarana", prefaciando "A Hora e a Vez de Augusto Matraga",  
Guimarães Rosa

O SAPO PULA NÃO POR BONITEZA, MAS PORÉM POR PERCISÃO

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à PETROBRAS por me haver proporcionado essa oportunidade de crescimento profissional e pessoal, em particular aos meus chefes diretos, Barusco e Bellot por viabilizarem o mestrado.

Agradeço especialmente ao meu orientador, prof. Aranha, grande amigo e incentivador das buscas, sempre priorizando o aprendizado, "espiralado" nas palavras do professor e, por assim ser, nem sempre agradável no seu percurso, porém enriquecedor ao seu final.

Agradeço aos colegas e colaboradores do Departamento de Engenharia Naval e Oceânica pelo dia-a-dia.

Agradeço à minha mãe pelas papas de maizena, sopas de batata, tapiocas com queijo e pelo cuscus.

Finalmente agradeço à vida por ter me dado Cláudia e Ana Luisa, companheiras do coração.



## ÍNDICE GERAL

1.1	1.1	INTRODUÇÃO
1.1	1.1	UTILIZAÇÃO DE PETROLEIROS NA PRODUÇÃO DE PETRÓLEO
1.1	1.2	BIFURCAÇÃO DO EQUILÍBRIO DEVIDO À CORRENTEZA
1.1	1.3	BIFURCAÇÃO DE FPSO-TURRET E O TERMO QUADRÁTICO DAS FORÇAS HIDRODINÂMICAS
1.1	1.4	IMPACTOS NO PROJETO DO FPSO
1.1	1.5	OBJETIVOS E SEQUÊNCIA DE ABORDAGEM DOS TÓPICOS
2.1	2.1	ESFORÇOS SOBRE UM CASCO ESTACIONÁRIO DEVIDO À AÇÃO DE CORRENTE UNIFORME
2.1	2.1	NATUREZA DOS ESFORÇOS DE CORRENTE SOBRE UM NAVIO ESTACIONÁRIO
2.1	2.2	DETERMINAÇÃO DAS EXPRESSÕES HEURÍSTICAS PARA ESFORÇOS DE CORRENTE
2.1	2.1	PROBLEMA POTENCIAL (FLUIDO IDEAL)
2.1	2.2	PROBLEMA COMPLETO (FLUIDO REAL)
2.1	2.3	COMPARAÇÃO DAS EXPRESSÕES HEURÍSTICAS COM RESULTADOS EXPERIMENTAIS
3.1	3.1	BIFURCAÇÃO DO EQUILÍBRIO: MODELO FÍSICO-MATEMÁTICO E RESULTADOS EXPERIMENTAIS
3.1	3.1	CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES
3.1	3.2	MODELO DINÂMICO - EQUAÇÕES DO MOVIMENTO NO PLANO
3.1	3.2.1	NAVIO LIVRE
3.1	3.2.2	NAVIO ANCORADO POR SISTEMA SPM-TURRET
3.1	3.2.3	ENSAIO DE ESTABILIDADE DIRECIONAL
3.1	3.3	ESTABILIDADE E ESTUDO DA BIFURCAÇÃO - ANÁLISE TEÓRICA
3.1	3.4	ESTABILIDADE E ESTUDO DA BIFURCAÇÃO - RESULTADOS EXPERIMENTAIS
4.1	4.1	CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES
A.1	A.1	ANEXO A
B.1	B.1	ANEXO B
C.1	C.1	ANEXO C
R.1	R.1	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS
		APÊNDICE

## ÍNDICE DE FIGURAS

### CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

FIGURA 1.1 - FPSO COM ANCORAGEM DO TIPO SPM - TURRET.....	1.3
FIGURA 1.2 - SPM-TURRET SUJEITO À CORRENTEZA .....	1.5

### CAPÍTULO 2 - ESFORÇOS SOBRE UM CASCO ESTACIONÁRIO DEVIDO À AÇÃO DE CORRENTE UNIFORME

FIGURA 2.1 - CONVENÇÕES.....	2.1
FIGURA 2.2 - TIPOS DE ESCOAMENTO EM TORNO DO CASCO.....	2.6
FIGURA 2.3 - DISTRIBUIÇÃO DE PRESSÃO EM UM CILINDRO PARA DIFERENTES $R_e$ .....	2.8
FIGURA 2.4 - COEFICIENTE DE ARRASTO $\times R_e$ PARA DIFERENTES CORPOS .....	2.10
FIGURA 2.5 - COEFICIENTE DE ARRASTO $\times$ RAZÃO DE ASPECTO DE UM FÓLIO.....	2.11
FIGURA 2.6 - CASCO DUPLA E DOMÍNIO DE INTEGRAÇÃO .....	2.17
FIGURA 2.7 - MASSA ADICIONAL BIDIMENSIONAL.....	2.19
FIGURA 2.8 - PRISMA ELÍPTICO $\times$ RETANGULAR .....	2.20
FIGURA 2.9 - NAVIO COMO ASA CURTA.....	2.25
FIGURA 2.10 - SIMETRIAS DO MODELO.....	2.26
FIGURA 2.11 - REGIMES LAMINAR E TURBULENTO.....	2.30
FIGURA 2.12 - $C_p(R_e)$ - PLACA PLANA, REG. TURBULENTO; SCHOENHERR $\times$ PRANDTL .....	2.31
FIGURA 2.13 - $C_p(R_e)$ - PLACA PLANA, REG. TURBULENTO; SCHOENHERR $\times$ ITTC-57 .....	2.32
FIGURA 2.14 - CURVAS EXPERIMENTAIS - MODELOS $\times$ ESC. REAL - "LUCY ASHTON" .....	2.34
FIGURA 2.15 - CROSS-FLOW.....	2.39
FIGURA 2.16 - $C_y$ BIDIMENSIONAL.....	2.46
FIGURA 2.17 - $C_y$ BIDIMENSIONAL (EFEITO DO RAIO DE ADOÇAMENTO).....	2.46
FIGURA 2.18 - PADRÃO DE ESCOAMENTO BIDIMENSIONAL.....	2.47
FIGURA 2.19 - $f_b(B/2T; r_c/T)$ - CASO 100% CARREGADO .....	2.55
FIGURA 2.20 - $C_{z_c}(\pi/2)$ EM FUNÇÃO DE $r_c/T$ E $B/2T$ .....	2.56
FIGURA 2.21a - EXPRESSÕES HEURÍSTICAS $\times$ EXPERIMENTOS - PP MORAES 100%.....	2.71
FIGURA 2.21b - EXPRESSÕES HEURÍSTICAS $\times$ EXPERIMENTOS - PP MORAES 40%.....	2.72
FIGURA 2.22 - EXPRESSÕES HEURÍSTICAS $\times$ EXPERIMENTOS - VIDAL - 100%.....	2.73
FIGURA 2.23a - EXPRESSÕES HEURÍSTICAS $\times$ EXPERIMENTOS - VLCC Martin 100%.....	2.74

FIGURA 2.23b - EXPRESSÕES HEURÍSTICAS x EXPERIMENTOS - VLCC *Marin* 40%.....2.75  
FIGURA 2.24 - EXPRESSÕES HEURÍSTICAS x RESULTADOS FALTNSEN (MARNTEK).....2.76

### **CAPÍTULO 3 - BIFURCAÇÃO DO EQUILÍBRIO: MODELO FÍSICO-MATEMÁTICO E RESULTADOS EXPERIMENTAIS**

FIGURA 3.1 - NAVIO SOB CORRENTEZA UNIFORME - SIST. COORDENADOS, DEFINIÇÕES 3.3  
FIGURA 3.2 - NAVIO ANCORADO POR SPM-TURRET SUJEITO A CORRENTE.....3.9  
FIGURA 3.3 - ARRANJO DO ENSAIO DE ESTABILIDADE DIRECIONAL.....3.11  
FIGURA 3.4 - TRANSFERÊNCIA DO MOMENTO PARA O TURRET.....3.13  
FIGURA 3.5 - DIAGRAMA DE BIFURCAÇÃO - "PP MORAES" (100% E 40%).....3.23  
FIGURA 3.6 - DIAGRAMA DE BIFURCAÇÃO - "VIDAL DE NEGREIROS" (100% E 40%).....3.24

### **CAPÍTULO 4 - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES**

FIGURA 4.1 - DIAG. BIFURCAÇÃO-"VIDAL" SEM/COM LEME E COM LEME DUPLO.....4.5

### **ANEXO A - ÁLGUMAS RELAÇÕES MATEMÁTICAS DA TEORIA POTENCIAL**

FIGURA A.1.....A.6  
FIGURA A.2.....A.8  
FIGURA A.3.....A.20

### **ANEXO B - EQUAÇÕES DO MOVIMENTO DE UM NAVIO NO PLANO HORIZONTAL SUJEITO A CORRENTE UNIFORME**

FIGURA B.1 - NAVIO SUJEITO A CORRENTE - SISTEMAS COORDENADOS LOCAIS (FIXOS AO NAVIO) E GLOBAL (FIXO A TERRA).....B.1  
FIGURA B.2 - QUANTIDADE DE MOVIMENTO ANGULAR DO NAVIO EM TORNO DA ORIGEM FIXA A TERRA.....B.5  
FIGURA B.3 - ÂNGULO DE INCIDÊNCIA EM RELAÇÃO AO MEIO FLUIDO.....B.12  
FIGURA B.4 - NAVIO SE MOVE EM FLUIDO INVISCIDO ESTACIONÁRIO.....B.13

### **ANEXO C - ANÁLISE DO EQUILÍBRIO DO MODELO EM ENSAIO DE ESTABILIDADE DIRECIONAL**

FIGURA C.1 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA EXPRESSÃO C.10.....C.10

ÍNDICE DE TABELAS

<b>CAPÍTULO 2 - ESFORÇOS SOBRE UM CASCO ESTACIONÁRIO DEVIDO À</b>	
<b><u>ACÇÃO DE CORRENTE UNIFORME</u></b>	
TABELA 2.1 - ORDENS DE GRANDEZA DOS ESFORÇOS.....	2.3
TABELA 2.2 - RELAÇÕES ENTRE OS ESFORÇOS.....	2.3
TABELA 2.3 - $C_{pi}$ E $L_{pm}^{pm}/L$ .....	2.49
TABELA 2.4 - CARACTERÍSTICAS DOS PETROLEIROS.....	2.52
TABELA 2.5 - $C_y(B/2T;I)$ .....	2.52
TABELA 2.6 - $f_b$ .....	2.54
TABELA 2.7 - CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS E $f_b$ (CASO 40%).....	2.58
TABELA 2.7 - CARACTERÍSTICAS DOS NAVIOS ENSAIADOS.....	2.68
TABELA 2.8 - VALORES EXPERIMENTAIS DE $C_{zc}(\pi/2)$ E $l/L$ .....	2.68
TABELA 2.9 - CARACTERÍSTICAS DO NAVIO DO MARINTEK.....	2.69
TABELA 2.10 - VALORES EXPERIMENTAIS DE $C_{zc}(\pi/2)$ E $l/L$ .....	2.69
<b>CAPÍTULO 3 - BIFURCAÇÃO DO EQUILÍBRIO: MODELO FÍSICO-</b>	
<b><u>MATEMÁTICO E RESULTADOS EXPERIMENTAIS</u></b>	
TABELA 3.1- DERIVADAS HIDRODINÂMICAS DE 1ª E 3ª ORDENS.....	3.2
TABELA 3.2 - CARACTERÍSTICAS PRINCIPAIS DOS NAVIOS ENSAIADOS.....	3.19
TABELA 3.3 - COEFICIENTE TRANSVERSAL E BRAÇO DO MOMENTO DE TRAVÉS.....	3.19
TABELA 3.4 - VALOR TEÓRICO E EXPERIMENTAL DE $a_{CR}$ .....	3.21
<b>CAPÍTULO 4 - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES</b>	
TABELA 4.1 - $(a_{CR})^{EXP}$ PARA O "VIDAL DE NEGREIROS".....	4.4

## NOMENCLATURA

a	Distância do centro do turrel à meia-nau, em %L;
A	Razão de aspecto;
B	Boca;
$C_B$	Coefficiente de bloco;
$C_f$	Coefficiente de arrasto friccional;
CG	Centro de gravidade;
CL	Camada limite;
CP	Centro de pressão no escoamento potencial;
$C_p$	Coefficiente de arrasto de pressão (ou de forma);
CP*	Centro de pressão real;
$C_{10}, C_{20}, C_{60}$	Coefficientes de força nas direções x e y e de momento em torno de z, respectivamente;
$C_{pl}$	Coefficiente prismático longitudinal;
$C_y$	Coefficiente de arrasto bidimensional;
Dwt	Tonagem de porte bruto (deadweight);
$f_p$	Fator de correção do coefficiente de arrasto transversal tridimensional;
Fr	Número de Froude;
$\bar{F}$	Vetor força;
$\bar{F}_i$	Vetor força de sustentação;
$\bar{F}_i$	Vetor força de arrasto induzido;
FPSO	Floating Production Storage and Offloading System
g	Aceração da gravidade;
IPT	Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado de São Paulo;

Versores do sistema coordenado fixo ao navio;	$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$
Versores do sistema coordenado fixo à terra;	$\bar{I}, \bar{J}, \bar{K}$
Momento de inércia em relação a z;	$I_z$
Momento de inércia principal em relação a z;	$I_{z_0}$
Fator de forma do navio;	k
Braco do momento em relação à meia-nau devido à corrente por través;	l
Comprimento do navio (entre perpendiculares);	L ou $L_{pp}$
Comprimento do corpo paralelo médio;	$L_{cpm}$
Lâmina d'água;	LDA
Massa total do corpo;	M
Maritime Research Institute Netherlands;	MARIN
Massa adicional na direção j devido ao movimento do navio na direção i;	$M_{ij}$
Massa adicional por unidade de comprimento;	$m_{ij}$
Mobile Offshore Drilling Unit;	MODU
Momento em torno de z (>0 de x para y);	$N$ ou $N_z$
Momento em torno de z tomado à meia-nau;	$N$ ou $N_{\oplus}$
Momento de Munk;	$N_{MUNK}$
Versor normal;	$\bar{n} = n_x \bar{i} + n_y \bar{j} + n_z \bar{k}$
Vetor momento;	$\bar{N}$
Oil Companies' International Marine Forum;	OCIMF
Pressão;	p
Vetor quantidade de movimento;	$\bar{p}$
Vetor posição em relação ao sistema fixo no navio;	$\bar{r}$
Vetor posição em relação ao sistema fixo à terra;	$\bar{R}$
Velocidade angular do navio;	$r = \dot{\psi}$
Raio de adocamento do bojo;	$r_c$

Re	Número de Reynolds;
S ou $S_c$	Superfície do casco;
$S_\infty$	Superfície do limite do volume de controle, no infinito;
SFP	Sistema Flutuante de Produção;
SPM	Single Point Mooring;
$S_x$	Área da seção mestra;
$S_x, S_y$	Momentos estáticos do corpo em relação aos eixos x e y;
t	tempo;
$\hat{t}$	Versor tangente;
T	Calado (também usado para energia cinética);
U	Módulo da velocidade da corrente;
$\underline{U}$	Velocidade da corrente;
$\underline{u} = u \hat{i} + v \hat{j} + w \hat{k}$	Campo de velocidades do fluido em relação à terra;
$\underline{U}_m = u_m \hat{i} + v_m \hat{j} + \psi_m \hat{k}$	Velocidades do navio em relação ao fluido no plano horizontal;
$V_c$	Volume do corpo;
$V_f$	Volume fluido;
X	Força na direção x;
x,y,z	Sistema de coordenadas fixo ao navio;
$x_0, y_0, z_0$	Sistema de coordenadas fixo à terra;
Y	Força na direção y;
$Y_\psi, N_\psi$	Derivadas hidrodinâmicas lineares em relação ao ângulo de ataque, $\Psi$ ;
$Y_{\psi\psi}, N_{\psi\psi}$	Derivadas hidrodinâmicas de terceira ordem;
Z	Força na direção z;
$\alpha$	Ângulo de incidência da corrente em relação ao navio ( $>0$ anti-horário);
$\Phi$	Função potencial de velocidades;
$\phi$	Função potencial unitária de velocidades;

$T$	Circulação;
$\lambda$	Fator de escala do modelo;
$\mu$	Viscosidade;
$\nu$	Viscosidade cinemática;
$\psi^e$	Ângulo de equilíbrio pós-crítico do navio;
$p$	Peso específico;
$\tau$	Tensão de cisalhamento;
$\psi$	Ângulo de ataque do navio em relação ao meio (>0 anti-horário);
$\Delta$	Operador nábua ou volume deslocado;



## RESUMO

O uso de petroleiros convertidos para sistemas de produção de petróleo no mar tem se tornado cada vez mais frequente devido ao aumento das lâminas d'água das locações e da capacidade de processamento das plantas. A falta de infra-estrutura de escoamento em áreas novas ou em campos marginais reforça essa tendência.

A amarração desses navios, comumente denominados FPSO's (*Floating Production Storage and Offloading Systems*), não é tarefa trivial. Várias concepções diferentes de ancoragem vêm sendo testadas ao longo dos anos em diversos países. Dentre essas alternativas destaca-se o sistema tipo SPM - turret (*Single Point Mooring of turret type*), onde o navio é ancorado através de uma turreta sobre rolamento, o que lhe concede liberdade angular no plano horizontal.

Visando estudar a dinâmica desse tipo de sistema para o caso mais simples possível, vislumbrou-se um ensaio com modelo reduzido batizado de Ensaio de Estabilidade Direcional ou Ensaio de Estabilidade ao Reboque. Nesse ensaio, o modelo de navio é rebocado pelo carro dinâmométrico através de uma haste vertical rígida conectada ao convés através de rolamento horizontal. Dessa forma, simula-se o caso de um SPM-turret com rigidez linear infinita no plano horizontal, restando, então, apenas um grau de liberdade qual seja o ângulo de aprornamento em relação ao meio.

A modelagem matemática do ensaio é baseada na Teoria de Jones (Modelo de Asa Curta), porém incorporando correções empíricas obtidas por Clarke et al. [7], as quais destacam a importância do leme na estabilidade do navio mesmo a baixas velocidades de corrente. O modelo assim obtido não só permite determinar expressões heurísticas para os esforços de corrente sobre o casco (forças nos sentidos longitudinal e transversal do navio e o momento em torno do seu eixo vertical), como também traz consigo as parcelas necessárias à análise da bifurcação do equilíbrio do sistema, caracterizada pela determinação da posição do turret a partir da qual a bifurcação ocorre ( $a_{CR}$ ), assim como do seu comportamento pós-crítico ( $\Psi^e = f(a)$ ).

Essa abordagem revela que a parcela quadrática da restauração angular,  $C_{z_c}(\pi/2) \cdot \Psi|\Psi|$ , onde  $C_{z_c}(\pi/2)$  é o coeficiente de força lateral para incidência de corrente por través, domina o cenário pós-crítico para pequenos ângulos de ataque ( $\Psi^e \gg 1$ ), complementando e, de certo modo, corrigindo resultados obtidos através do método de derivadas hidrodinâmicas oriundo de teoria de manobras. De fato mostra-se que, nas vizinhanças do ponto de bifurcação, o ângulo de aprornamento aumenta linearmente com o parâmetro de controle (posição do turret) e não com sua raiz quadrada como a abordagem tradicional aponta.

A aderência dos resultados obtidos tanto para os esforços de corrente quanto para o comportamento pós-crítico do navio é muito boa, comprovando a adequabilidade do modelo. E mais, sua estabilidade estrutural é garantida pelo termo quadrático, lhe conferindo uma robustez não destruída pelo modelo de derivadas hidrodinâmicas.

## ABSTRACT

The use of converted tankers for oil production at sea has increased in the last few years, both due to the greater depths of the newly discovered locations and to the larger oil processing capacities of the production plants. Lack of local infrastructure in new areas as well as in marginal fields has added to this tendency.

Mooring these vessels, known as FPSO's (Floating Production Storage and Offloading Systems) is no easy task. Several mooring concepts have been tried out along the years in different countries. Amongst these alternatives, the turret type of SPM (Single Point Mooring), where the ship is moored through a turret laid onto a horizontal bearing stands out. Here the vessel has the freedom to rotate around her vertical axis.

With the aim of studying the dynamics of this type of system for its most simple case, a model test dubbed as "Directional Stability Test" was envisaged. In this type of test the model is towed by the tank carriage through a vertical axis connected to the deck by means of a roller bearing. As such, a turret moored tanker of infinite linear stiffness on the horizontal plane is simulated. Only one degree of freedom is left, that of the heading angle.

The mathematical model that describes the test is based on Jones' Theory (Short Wing Model), however incorporating empirical corrections obtained by Clarke et al. [7], where the importance of the rudder in the vessel's stability is clearly depicted, even at low current speeds. The model so obtained not only allows for the determination of heuristic expressions for the current loads (forces both in the longitudinal and transversal directions, as well as the moment around the vertical axis) but also includes the parcels which enable the system's bifurcation analysis, characterized by the determination of the point after which bifurcation occurs ( $a^{cr}$ ) and its post-critical behaviour ( $\Psi_e = f(a)$ ).

The chosen approach unveils that the quadratic term of the yaw stiffness,  $C_{zc}(\pi/2) \cdot \Psi|\Psi|$ , where  $C_{zc}$  stands for the lateral force coefficient under beam current, dominates the post-critical scenario for small angles ( $\Psi_e \gg 1$ ), complementing and, in a way, correcting results obtained by means of the hydrodynamic derivatives method, derived from maneuvering theory. It is in fact shown that the yaw angle increases linearly with the control parameter (turret position) and not with its square root as the traditional approach would suggest.

The adherence of the obtained results to the experiments both for the current loads and for the ship's post-critical behaviour is very good, attesting the model's adequacy. And more than that, its structural stability is assured by the quadratic term, granting the model a robustness not shared by the model based on hydrodynamic derivatives.

## FORÇAS DE CORRENTE EM PETRÓLEOS E BIFURCAÇÃO DO EQUILÍBRIO EM SISTEMAS TIPO *TURRET*

### 1. INTRODUÇÃO

#### 1.1 UTILIZAÇÃO DE PETRÓLEOS NA PRODUÇÃO DE PETRÓLEO

Iniciada no final da década de 30, na região do Golfo do México, costa sudeste do litoral norte-americano, a produção de petróleo no mar (usualmente denominada pelo inglês - *offshore*) vem, desde então, experimentando um rápido desenvolvimento no sentido de aperfeiçoar seus métodos e sistemas.

No início da década de 60, a *semisubmersível BlueWater I* significou um marco de grande importância nesse processo de desenvolvimento, por introduzir o conceito de *Mobile Offshore Drilling Unit*, os chamados MODU's, que nada mais eram que plataformas móveis de perfuração. A produção do petróleo no mar, por outro lado, era feita sobre jaquetas fixas.

A crise do petróleo, no final da década de 70, exigiu uma resposta rápida das companhias de petróleo ocidentais, incluindo nesse grupo, a PETROBRAS, no sentido de produzir petróleo rapidamente e a um custo compatível com a realidade de mercado. Foi um verdadeiro *boom* de instalação dos chamados Sistemas de Produção Antecipada (SPA), *semisubmersíveis* de perfuração sobre as quais eram instaladas pequenas plantas de produção, precursors dos modernos Sistemas Flutuantes de Produção (SFP).

A versatilidade da *semisubmersível*, parente direta das jaquetas e submersíveis, havia ficado comprovada. Áreas antes reservadas a tanques de cimento e tubos de aço (*casings e risers*) davam lugar a aquecedores e separadores, nas primeiras plantas de processo instaladas em sistemas flutuantes ancorados ao fundo do mar através de amarras e cabos de aço.

A princípio baseadas na utilização maciça das *semisubmersíveis*, as companhias de petróleo foram aos poucos se voltando para as vantagens do uso de navios, num primeiro momento como MODU's e, mais tarde, como SFP's. Além das grandes áreas de convés, os navios ofereciam capacidade de tanagem (daí a denominação específica

de FPSO - *Floating Production Storage and Offloading System* - para o caso de navios, permanecendo SFP para as semisubmersíveis), característica fundamental para produção em áreas remotas, desprovidas de infra-estrutura de escoamento para os terminais de terra (*onshore*).

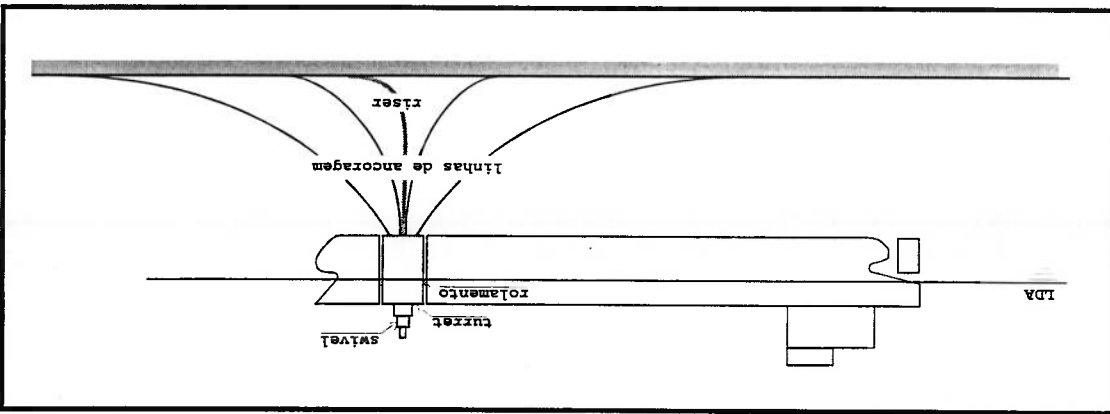
Os navios, porém, são constituídos de um corpo único, de grande área de linha d'água e, por isso, constituem um obstáculo físico aos agentes ambientais hidrodinâmicos de maior proporção que as semisubmersíveis. Forças de corrente, vento e ondas, tornam a seleção e o dimensionamento do sistema de posicionamento do navio e o exercício complexo e de fortes impactos econômicos no projeto global. A utilização do sistema de ancoragem convencional, como nas semisubmersíveis, era praticamente impossível, visto que, nesse tipo de sistema, também o aprornamento da unidade é mantido estacionário em relação ao meio e, desta forma, tempestades atingindo o navio por vezes poderiam resultar em forças de onda e corrente bastante grandes, fortes acelerações e movimentos de primeira ordem podendo até mesmo causar rompimento de linhas.

A solução encontrada foi conectar o navio a algum tipo de articulação que lhe conferisse liberdade de movimentos angulares no plano horizontal, ou seja, possibilitando o alinhamento do navio com a resultante dos esforços ambientais. Esse tipo de sistema de posicionamento foi batizado de *Single Point Mooring* (SPM) que, até os dias de hoje, são utilizados. Dos vários tipos de SPM existentes, os mais utilizados são o tipo monobóia, muito utilizado em terminais de carga e descarga de óleo devido à possibilidade de conexão e desconexão rápida do navio, e o tipo turreta (*turret* - utilizado no texto, sem itálico, por ser o termo usual). No SPM tipo turreta, a ancoragem é feita através de uma torre provida de rolamento no plano horizontal, a qual confere liberdade de aprornamento ao navio. Essa torre é instalada no próprio corpo do navio e a passagem do óleo do coletor (*manifold*) para a planta é feita através de um sistema de transferência bastante complexo, sendo o mais comum, o *swivel* (figura 1.1).

Para a PETROBRAS, em particular, a utilização de petroleiros ancorados através de turret é de muita importância, representando, no momento, uma área de grandes investimentos por parte da companhia, tanto em novas conversões como em pesquisa e desenvolvimento de sistemas correlatos.

- Crescimento da confiabilidade dos mancais e rolamentos para turret.
- disponíveis no mercado;
- Aumento da pressão máxima de operação dos sistemas de transferência (swivels) particular, na Baía de Campos, litoral do Rio de Janeiro);
- da lâmina d'água (LDA) dos poços e da capacidade das plantas de processo (em necessidade de grandes capacidades de área e carga de convés devido ao aumento estrutura de escoamento da produção;
- Aumento da exploração de campos remotos, em localidades desprovidas de infra-estrutura atráentes;
- muitos navios antigos, alguns conversíveis em FPSO, ficaram disponíveis a preços casco duplo, gerando um movimento de renovação de frota. Como consequência, da IMO (*International Maritime Organization*) de que esse tipo de navio possua Alienação de grande parte da frota mundial de petroleiros devido à nova exigência longo dos últimos anos, devido a vários motivos, dentre os quais pode-se mencionar: A utilização dos FPSO's vem experimentando um crescimento constante ao

Figura 1.1 - FPSO com ancoragem do tipo SPM - turret



Como parte desse esforço temático, o estudo da estabilidade do navio sujeito à ação de corrente se insere de forma natural como um passo na análise global do sistema, na avaliação de sua viabilidade de aplicação e no dimensionamento do sistema de ancoragem (incluindo, aí, não só as linhas e âncoras, mas também mancais, rolamentos e estruturas afins), uma vez que navios ancorados por turet estão sujeitos a determinados comportamentos dinâmicos decorrentes da liberdade de apraqueamento, em particular, bifurcação de equilíbrio.

## 1.2 BIFURCAÇÃO DO EQUILÍBRIO DEVIDO À CORRENTEZA

Estando o navio apenas sujeito à incidência de corrente pela proa e ancorado por um único ponto em torno do qual pode girar no plano horizontal, pode-se, intuitivamente, perceber que, uma pequena perturbação angular no seu apraqueamento poderá levá-lo para uma nova condição de equilíbrio, num ângulo diferente do inicial. A volta do navio ao seu apraqueamento inicial, o que caracterizaria a condição inicial (alinhada com a corrente) como uma condição de equilíbrio estável, dependerá da posição do turet, ou seja, da localização do ponto de pivoteamento do casco em relação ao meio. Ainda buscando na intuição a única fonte de visualização do fenômeno de bifurcação, pode-se imaginar duas situações distintas: na primeira, o ponto de pivoteamento sendo a extremidade da proa e na segunda, à meia-nau. Em ambas as situações, imagine-se uma corrente constante alinhada com o eixo longitudinal do navio, agindo, por exemplo, pela proa. Imagine-se, ainda, uma pequena perturbação angular do apraqueamento da embarcação em torno da condição inicial que convençionalmente, no momento, chamar de ângulo zero. É intuitivo que se espere um retorno do navio à condição de ângulo zero no primeiro caso (isso, porém, nem sempre ocorre, como veremos em detalhes mais adiante) e que o navio gire até ficar a aproximadamente 90 graus em relação à corrente (posicionamento de través) no segundo caso. A condição inicial, de ângulo zero, será, portanto, uma condição de equilíbrio estável no primeiro caso, enquanto que, no segundo, será uma condição de equilíbrio instável (as premissas que definem as condições estável e instável serão expressas matematicamente mais adiante).

O comportamento descrito acima, advém da ação das forças exercidas pela corrente sobre o casco, interagindo com a restauração proporcionada pelo turret, conforme ilustrado na figura 1.2.

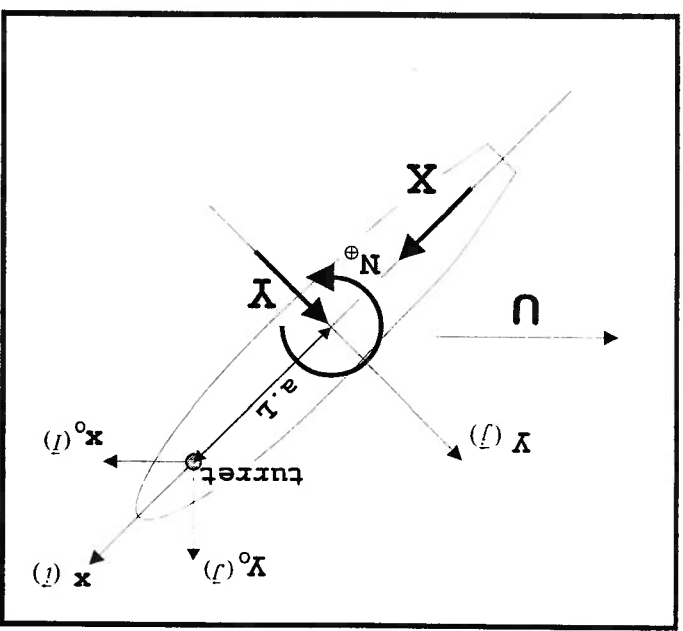


Figura 1.2 - SPM-turret sujeito à correnteza

A ação da corrente, de velocidade  $U$ , na direção do versor fixo à terra  $\bar{I}$ , causa as forças indicadas, longitudinal,  $X$ , e, transversal,  $Y$ , no sistema de referência do casco. A força transversal tem seu ponto de aplicação fora da meia nau e, portanto, em relação a essa seção, há o aparecimento de um momento no plano horizontal,  $N^{\oplus}$ . Sendo  $L$  o comprimento do navio e  $(a.L)$  a distância do turret à seção mestra, o equilíbrio em torno do turret será determinado pelo balanço de momentos definido pela diferença  $(Y.a.L - N^{\oplus})$ .

À instabilidade da condição inicial, sendo encontrado um novo ângulo de aprumoamento de equilíbrio estático, dá-se o nome de bifurcação do equilíbrio.

<sup>1</sup> O momento em relação à meia-nau está, no momento, sendo denominado  $N^{\oplus}$  para diferenciá-lo do momento medido em quaisquer outros pontos do navio. Usualmente, porém, o momento é expresso em relação à meia-nau e denominado apenas de  $N$ , como é feito no capítulo 2.

### 1.3 BIFURCAÇÃO DE FFSO-turret E O TERMO QUADRÁTICO DAS FORÇAS HIDRODINÂMICAS

O projeto do sistema de amarração de um FFSO é uma tarefa complexa que envolve a interação do navio com o meio. Essa interação é analisada à luz de formulações analíticas e programas de computador, seja no domínio da frequência ou no domínio do tempo, formulações e programas esses, que sofrem de limitações oriundas da impossibilidade de se modelar completamente os fenômenos físicos envolvidos no problema.

Nesse contexto, resultados experimentais são comumente utilizados independentemente da metodologia de cálculo adotada, seja para obtenção de dados de entrada para o programa ou formulação analítica, ou mesmo para verificação posterior dos resultados obtidos pelas vias não-experimentais, afinal de contas, a natureza é a mãe das não-linearidades, enquanto a visão dos homens, em particular da engenharia, dificilmente consegue ir além da linha reta.

O simples uso de um programa de computador sofisticado, dotado de poderosos e rápidos algoritmos de cálculo não nos torna necessariamente melhor apetrechados para alcançar as verdades ocultas da natureza podendo, via de regra, emburrecer-nos. Julgar-se capaz de domar as incertezas do projeto de um sistema de amarração de sistemas tipo SPM apenas por se dispor de um bom programa é perigoso e pode levar a resultados incorretos. Afinal de contas, por trás desse programa de computador reside um modelo físico-matemático, infalivelmente míope como o homem, seu criador.

A discussão acerca do modelo físico-matemático mais adequado para análise de ancoragem de sistemas tipo SPM-turret está longe de se esgotar e enseja esforços continuados. O estudo da bifurcação do equilíbrio desse tipo de sistema se enquadrará nesse esforço, uma vez que a perda da estabilidade pode levar o sistema a situações não previstas pelos modelos, principalmente os mais simples e linearizados, muito embora mesmo os modelos mais sofisticados, que comportam algumas não-linearidades careçam de bons coeficientes para suas equações, a maioria de difícil obtenção e precisão duvidável.

Permanece, portanto, em aberto, a questão do modelo físico-matemático mais adequado ao projeto, questão essa anterior à do uso de métodos no domínio do tempo ou



da frequência. O que parece ficar cada vez mais patente é que uma análise estrutural do sistema quanto ao seu comportamento dinâmico, anterior à adoção de um ou outro programa ou método disponível, merece atenção especial.

Partindo do caso mais simples, onde o FPSO ancorado por um ponto único e pivotado (assim como um SPM-turret, só que sem liberdade de movimentos em surge e sway) sofre apenas a ação de uma corrente constante, já se observa a possibilidade de ocorrência de bifurcação do equilíbrio, o que pode ser modelado até estaticamente (a bifurcação, no nosso modelo simplificado, pode ser comparada à ocorrência de flambagem em uma viga sob compressão axial). Nesse caso, a bifurcação se materializa na ocorrência de um novo ângulo de yaw em relação à incidência de corrente, diferente do inicial, onde uma nova condição de equilíbrio estável é encontrada pelo navio.

Esse tipo de abordagem, simples, se por um lado não nos conduz a um universo mais rico de possíveis comportamentos dinâmicos mais complexos, como ciclos-limite, movimentos caóticos, etc..., por outro, nos permite comparar o modelo físico-matemático aos resultados experimentais com maior segurança e controle.

A simples ocorrência da bifurcação, ou seja, a "acomodação" do sistema a um novo ângulo de equilíbrio pode não parecer, à primeira vista, algo que possa causar grandes impactos no seu projeto ou problemas operacionais. Mas, além de efeitos indesejáveis, como, por exemplo, um possível giro do navio para um apraqueamento desfavorável à incidência de ondas (o que pode causar desde desconforto à tripulação, mal funcionamento de sistemas de bordo, até desgaste prematuro dos rolamentos do turret, dos risers ou de componentes das linhas de amarração), a constatação da ocorrência de bifurcação sob a ação da corrente nos leva a uma situação imprevisível no caso real. Pode-se argumentar que uma análise no domínio do tempo engloba toda a variedade possível de comportamentos dinâmicos. Só que não se pode perder de vista que também os cálculos temporais sofrem de imprecisões e incertezas. Em particular, na abordagem via derivadas hidrodinâmicas, por exemplo baseada em teoria clássica de manobras, que fornece o modelo físico-matemático da maioria, se não da totalidade dos processadores no domínio do tempo disponíveis para a prática da engenharia, perde-se, pelo menos parcialmente, o termo quadrático da expansão da força em série de Taylor. Pior para nós, pois, será mostrado no capítulo 3, esse termo determina o comportamento

pós-crítico do sistema flutuante logo após a ocorrência da bifurcação e, como tal, deve ser incluído nas equações dos processadores no domínio do tempo.

#### 1.4 IMPACTOS NO PROJETO DO FFSO

Como vemos por essa argumentação inicial, a determinação do ponto de localização do turet ao longo do comprimento do navio deve ser feita, entre outros aspectos, à luz do estudo de bifurcação do equilíbrio. Sua importância é, portanto, fundamental, uma vez que o posicionamento do turet se relaciona com vários pontos do projeto do FFSO, entre os quais podemos mencionar:

- Arranjo geral;
- Segurança;
- Tipo e dimensionamento do sistema de posicionamento;
- Manutenção (ou, no caso de uma nova construção, instalação) ou não do leme, ou mesmo, sua substituição por outro de maior capacidade de estabilização;
- Integridade e confiabilidade estrutural;
- Nível de esforços nos risers flexíveis, assim como viabilidade de eventual uso de risers rígidos.

Parece, portanto, bastante promissor, do ponto de vista de confiabilidade dos cálculos, que seja possível prever a posição do turet que garanta estabilidade do equilíbrio, assim como determinar seu novo ângulo de equilíbrio pós-bifurcação, caso ocorra. E, mais ainda, através de um modelo robusto e simples que não sofra das mesmas incertezas que os modelos clássicos.

Como consequência do trabalho abre-se a perspectiva de um estudo mais aprofundado da importância do leme no posicionamento do turet, nessa busca de sua instalação mais próxima à meia-nau<sup>2</sup>, intengão limitada pela possível ocorrência de instabilidade. A manutenção do leme no casco, no caso de conversão do navio, ou instalação de um novo, no caso de construção, pode contribuir no sentido de permiti-la;

<sup>2</sup> O movimento de pitch impõe severas restrições ao projeto dos risers, sejam flexíveis ou, principalmente, rígidos. A possibilidade de diminuir esse movimento através da instalação do turet mais próximo da meia-nau é bastante desejável.

a manutenção (ou instalação) da sua maquinaria de governo, de modo que se possa variar a restauração angular do sistema no plano horizontal através da operação do leme, pode também ajudar, lemes especiais podem ser projetados e instalados; mais ainda, sistemas turret posicionados fora da linha de centro longitudinal combinados com uma angulação permanente no leme visando “enrijecer” o aprornamento do navo podem ser estudados. É um solo bastante rico, onde esse trabalho pretende ser a primeira semente.

## 1.5 OBJETIVOS E SEQUÊNCIA DE ABORDAGEM DOS TÓPICOS

O presente trabalho analisa o problema de bifurcação do equilíbrio de um navio sujeito a correnteza, iniciando pela determinação de expressões heurísticas para os esforços hidrodinâmicos causados pela ação da corrente sobre o casco estacionário em função de características geométricas da embarcação, procurando reproduzir as curvas desses esforços em função do ângulo de incidência, curvas essas normalmente obtidas através de ensaios com modelo cativo. Feito isso, as equações que regem a dinâmica de um navio livre sujeito à ação de corrente são deduzidas, particularizando-as para o caso do ensaio de estabilidade direcional. Através da análise dessas equações estuda-se a estabilidade do sistema o que, mostra-se, pode também ser feito via análise estática do equilíbrio do navio. Como resultado dessa análise, se torna possível determinar a posição crítica do turret, a partir da qual o sistema perde a estabilidade, bifurcando e atingindo um novo ângulo de equilíbrio, o qual também fica determinado. Uma breve descrição dos capítulos é dada a seguir.

No capítulo 2 as forças e momento no plano horizontal causados pela correnteza sobre um navio estacionário (ângulo de aprornamento fixo) são estudados e analisados a partir da teoria potencial (fluido ideal, inviscido) e complementados por resultados experimentais (ensaios com modelo cativo) para introduzir os efeitos gerados pela existência de viscosidade no fluido real. Expressões heurísticas para a determinação desses esforços, com base no trabalho desenvolvido por Aranha [1] são propostas e confrontadas com os resultados de ensaios com modelo cativo realizados no tanque de provas do IPT [2] e do MARIN, esses últimos para a tese de doutorado de Wichers [3],

consubstanciados, a posteriori, juntamente com resultados levantados para outros navios, no relatório para a OCIMF [4].

O capítulo 3 se inicia com a apresentação da dinâmica de um navio livre (não estacionário) sob a ação de corrente uniforme, apresentando as equações que regem seus movimentos no plano horizontal, ilustrando a complexidade do problema. Essa complexidade é contrastada com a simplicidade do caso do ensaio de estabilidade direcional, suficiente para o estudo do equilíbrio. Nesses ensaios os modelos são rebocados pelo carro dinâmométrico por um ponto, através de uma rótula rígida nas direções transversal e longitudinal emulando, portanto, um turet de rigidez infinita. O único grau de liberdade concedido ao navio é o de yaw (há, também, liberdade de heave, roll e pitch, apenas para que não haja ruídos na leitura do yaw), simplificando o modelo de trabalho. Segue-se a análise de bifurcação do equilíbrio que, por seu turno, é confrontada com os experimentos de estabilidade direcional realizados no IPT [2].

Finalmente, o capítulo 4 conclui o trabalho, tecendo comentários finais e recomendações.

Nos anexos são apresentadas em detalhes as deduções de algumas passagens do texto principal.

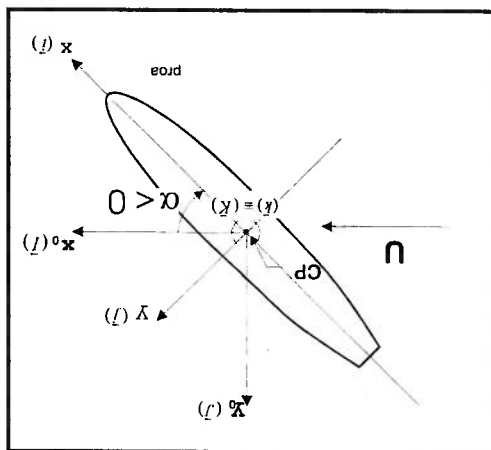
**FORÇAS DE CORRENTE EM PETROLEIROS E BIFURCAÇÃO DO EQUILÍBRIO EM SISTEMAS TIPO TURRET**

**2. ESFORÇOS SOBRE UM CASCO ESTACIONÁRIO DEVIDO À AÇÃO DE**

**CORRENTE UNIFORME**

**2.1-NATUREZA DOS ESFORÇOS DE CORRENTE SOBRE UM NAVIO ESTACIONÁRIO**

Seja um FPSO ancorado em equilíbrio estático (navio estacionário) sujeito a uma correnteza com módulo de velocidade  $U$  incidindo sobre si com ângulo  $\alpha$  conforme mostrado na figura 2.1 abaixo:



**Figura 2.1**

tangente a  $S$ , no plano horizontal.

superfície do casco  $S$  e  $\vec{t}$  o vetor unitário

sendo  $\vec{n}$  o vetor unitário normal à

- $\vec{u} \leftarrow \vec{U}$  no  $\infty$ .
- $\vec{u}|_S = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{t}|_S = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{n}|_S = 0 \end{cases}$

seguintes condições de contorno:

relativas ao casco, que obedece às

$$\vec{u}(x, y, z, t) = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k},$$

um campo de velocidades:

Nessa condição teremos, no fluido,

<sup>1</sup> CP é o centro de pressão de origem potencial, de origem potencial e viscosa, depende de  $U$  e de  $\alpha$ , portanto, nem sempre coincide com CP (ou CB). O centro de pressão real, de origem potencial e viscosa, depende de  $U$  e de  $\alpha$ , portanto, nem sempre coincide com CP (ou CB).  
 Notar que CP depende de  $U$  e de  $\alpha$ , coincidindo com o centro de carena, CB.

pele expressão da conservação da massa):

O escoamento obedece às equações de campo (Navier-Stokes complementada

$$(2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bullet \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \nabla) \cdot \bar{u} = - \frac{p}{\rho} - g \bar{k} + \nu \Delta^2 \bar{u}; \\ \bullet \text{div}(\bar{u}) = 0, \end{array} \right.$$

e os esforços que o fluido exerce sobre o casco, são:

$$(2.2) \quad \bar{F} = \iint_S (p \bar{n} + \tau \bar{t}) dS;$$

$$(2.3) \quad \bar{N} = \int_S \bar{r} \times (p \bar{n} + \tau \bar{t}) dS,$$

sendo S a superfície do casco e:

$$\bar{r} = x \bar{i} + y \bar{j} + z \bar{k}, \text{ o vetor posição do elemento de área } dS,$$

$$\bar{F} = X \bar{i} + Y \bar{j} + Z \bar{k}, \text{ o vetor de força e } \bar{N} = N_x \bar{i} + N_y \bar{j} + N_z \bar{k}, \text{ o vetor de momento.}$$

Nosso interesse é o cálculo dessas forças e momentos, de modo que se possa analisar o comportamento do casco sob a ação dos mesmos.

A questão é, portanto, determinar o campo de pressão e a distribuição da tensão de cisalhamento sobre o casco (em cada ponto  $(x, y, z)$  de S) e resolver as integrais. Essa não é uma tarefa trivial e algumas simplificações do problema são necessárias para se chegar a resultados confiáveis por métodos analíticos, numéricos ou mesmo através de ensaios com modelo reduzido.

Uma decomposição bastante clara e completa do problema de forças hidrodinâmicas agindo sobre o corpo no problema em questão é fornecida por Newman [5], assim como por Batchelor [6] em livros que são verdadeiros clássicos sobre dinâmica de fluidos.

Para podermos simplificar o problema, é bom primeiramente identificar qualitativamente a natureza dos fenômenos que produzem esse campo de pressão e tensões de cisalhamento assim como procurar quantificá-los em termos de ordens de grandeza relativa, nas escalas interesse.

$\bar{u} \cdot \bar{t} \Big|_S = 0, \forall \bar{t} \in P^1(x, y, z)$ , onde  $P^1(x, y, z)$  é o plano tangente à superfície do casco. S. e, em particular  $\bar{u} \cdot \bar{t} \Big|_S = 0$ , com  $\bar{t} \in P^1(x, y, 0)$ , caso de nosso interesse.

De acordo com a natureza dos esforços, podemos classificá-los como inerciais, gravitacionais e viscosos. Newman [5], a partir de uma análise dimensional simples mostra que as ordens de grandeza de cada esforço de acordo com sua natureza são:

NATUREZA DO ESFORÇO	ORDEM DE GRANDEZA
Inercial	$\rho U^2 L^2$
Gravitacional	$\rho g L^3$
Viscosa	$\mu U L$

Tabela 2.1 - Ordens de grandeza dos esforços

onde:

$g$  = aceleração da gravidade;

$\rho$  = massa específica do fluido;

$\mu$  = viscosidade do fluido.

Vale esclarecer que as ordens de grandeza apresentadas na tabela acima não expressam o valor exato das forças (por exemplo, pode-se argumentar que a força inercial deveria ser multiplicada por  $1/2$ , de acordo com Bernoulli), mas procuram dar uma visão relativa das mesmas. Por exemplo, ao se comparar forças agentes sobre um navio de 100 m de comprimento e de outro, semelhante, de 200 m, teremos uma relação de  $2^2$ ,  $2^3$  e 2 para as forças inerciais, gravitacionais e viscosas, respectivamente. Estabelecendo relações comparativas entre as forças, teremos:

Inercial	Gravitacional	$\frac{\rho U^2 L^2}{U^2} = \frac{\rho g L^3}{g L}$
Inercial	Viscosa	$\frac{\rho U^2 L^2}{\rho U L} = \frac{\mu U L}{\mu}$
Gravitacional	Gravitacional	$\frac{\rho U^2 L^2}{U^2} = \frac{\rho g L^3}{\rho g L^2} = \frac{\mu U L}{\mu U}$

Tabela 2.2 - Relações entre os esforços

Usualmente utiliza-se, para a relação entre forças inerciais e viscosas, o número de Reynolds:

$$Re = \frac{UL}{\nu}$$

onde  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  é a viscosidade cinemática do fluido.

E, para a relação entre forças gravitacionais e inerciais, o número de Froude:

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gL}}$$

Valores típicos de  $\nu$  são  $10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  para a água e  $1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$  para o ar. O fato

de que esses valores são muito pequenos quando expressos em unidades usuais, implica

que o número de Reynolds tenderá a ter um valor numérico alto, sugerindo, portanto,

que as forças viscosas em água e ar serão sempre desprezíveis face às forças inerciais.

Isso, em geral, é verdade, mas não significa que possamos desprezar

completamente o efeito da viscosidade nesses fluidos, muito pelo contrário. Sua

existência influencia o escoamento do fluido de forma bastante relevante para o

cômputo das forças inerciais, como veremos a seguir.

As forças sobre o casco devido às tensões de cisalhamento ( $\int_S \tau \bar{t} dS$ ), tangenciais

ao corpo, são uma consequência da viscosidade do fluido e, portanto, da fricção interna

no mesmo, recebendo a denominação de arrasto friccional (*friction drag* em inglês) e,

como vimos acima, tenderão a ser pequenas face às forças de inércia.

Por outro lado, as origens dos esforços devidos ao campo de pressão sobre o

casco ( $\int_S p \bar{n} dS$ ) são mais complexas. Além da pressão hidrostática exercida pelo fluido,

<sup>3</sup> Embora as forças friccionalis sejam pequenas, as forças inerciais de origem viscosa, mencionadas no parágrafo anterior, nem sempre o serão.



há os esforços inerciais causados pelo campo de pressão dinâmica, que pode ser decomposto conforme se segue:

1. Campo de pressão potencial, considerando o escoamento irrotacional (fluido ideal, sem viscosidade, portanto, o fluido escorrega sobre o corpo, ou  $\underline{u} \cdot \underline{t}|_s \neq 0$ ). Esse campo de pressão, como veremos no item 2.2, não provoca forças nas direções longitudinal e transversal do casco, mas sim, momentos (momentos de Munk), dos quais, para nós é relevante o momento no plano horizontal ( $N^z$ );

2. Alteração do campo de pressão potencial pela introdução da viscosidade no fluido (a condição de contorno  $\underline{u} \cdot \underline{t}|_s = 0$ , é introduzida, ou seja, o fluido não escorrega sobre o corpo. Essa condição implica no surgimento de uma camada limite sobre o casco, fora da qual o escoamento é irrotacional), porém **sem separação da camada limite**. Essa alteração do campo de pressão provoca o surgimento de uma força de sustentação (*lift* em inglês) na direção perpendicular ao escoamento e uma força de arrasto induzido (*induced drag*) na direção do escoamento;

3. Alteração do campo de pressão descrito no item 2 acima, devido à **separação da camada limite**. Essa alteração provoca a redução drástica da força de sustentação e introduz um outro arrasto, chamado de arrasto de forma (*form drag*), além do arrasto induzido. Após a separação da camada limite, normalmente o arrasto de forma passa a ser a parcela dominante na composição do arrasto total.

A figura 2.2 ilustra **qualitativamente** esses esforços para o caso bidimensional (o ângulo de incidência  $\alpha$  está exagerado em relação ao ângulo real, que causaria a separação da camada limite no ponto mostrado, a fim de facilitar a compreensão visual da figura).

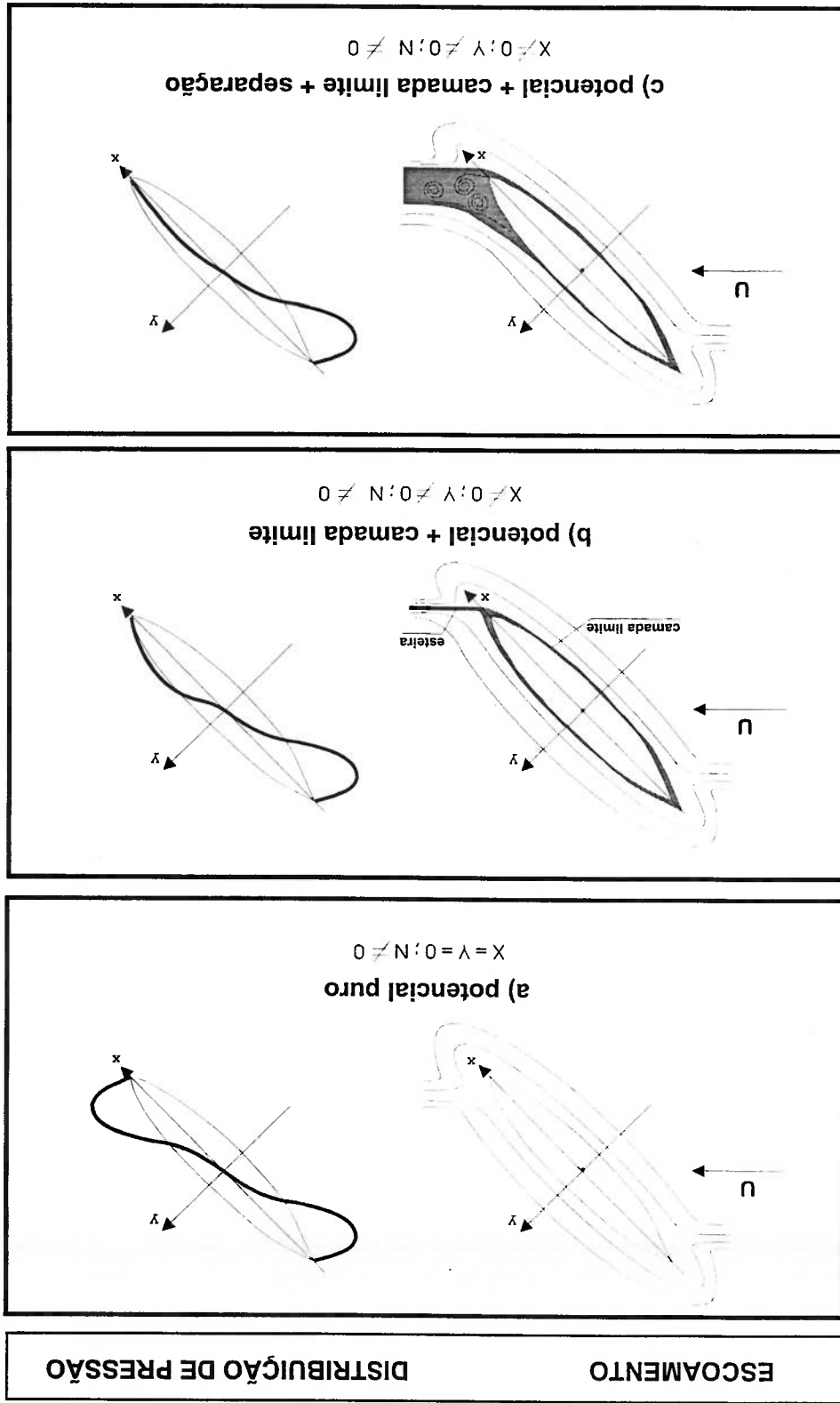


Figura 2.2 - Tipos de escoamento em torno do casco

A figura 2.2.a ilustra o caso potencial, bastante importante na análise de correnteza agindo sobre o casco, devido ao momento de Munk. Nesse caso o cálculo do

momento é relativamente simples. No escoamento puramente potencial, não há formação de camada limite e, portanto, não há circulação em torno do casco ( $\text{rot } \vec{u} = 0$ ). O escoamento é conservativo (não há dissipação de energia no fluido) e, sendo assim, o gradiente de pressão ao longo do casco independe de sua forma.

Desta forma, as linhas de corrente acompanham o formato do casco na popa (“fazem a curva”), conforme esboçado na figura. A pressão será máxima nos pontos de estagnação, onde a velocidade é nula e mínima nos pontos de máxima velocidade do fluido (região de máxima boca da embarcação).

A figura 2.2.b ilustra a alteração do escoamento puramente potencial pela introdução da condição de não-escorregamento da partícula fluida sobre o corpo (*non-slip condition* em inglês), o que ocasiona a formação de uma camada limite na sua superfície. Fora da camada limite, pode-se considerar o escoamento irrotacional, como se o fluido fosse ideal. Dentro da camada limite, o escoamento é rotacional ( $\text{rot } \vec{u} \neq 0$ ) e, para  $\alpha \neq 0$ , existe uma circulação,  $\Gamma = \int_{S_{CL}} \text{rot } \vec{u} \, dS_{CL} \neq 0$ .

A distribuição de pressão sobre o casco é similar ao caso puramente potencial, porém modificado pelo novo padrão de escoamento gerado pela presença da camada limite.

Agora o fluido não mais escoava contra o forte gradiente de pressão na região da popa (não “faz a curva”). A vorticidade da camada limite é convecçada numa esteira de pequena espessura (da mesma ordem de grandeza da espessura da camada limite) na direção de  $\vec{U}$ , conforme esboçado na figura. Externamente a essa esteira, assim como no caso da camada limite, o escoamento é praticamente irrotacional. Formação de camada limite sem separação pode ocorrer no caso da correnteza agindo sobre o casco para ângulos de ataque baixos, uma vez que uma condição para que não haja separação é que a queda total de velocidade do fluido externamente à camada limite seja pequena (portanto, que o gradiente de pressão seja baixo).

Quando não ocorre separação de camada limite, o arrasto de forma é muito menor que o arrasto por fricção. Sendo assim, para esses casos, o arrasto total será comparável ao arrasto de uma placa plana de mesma superfície molhada preservado o comprimento do corpo (de modo a preservar igualdade do número de Reynolds local, ao longo do corpo e, portanto, a espessura da camada limite).

Por fim, a figura 2.2.c ilustra o escoamento quando há separação da camada limite. Nesse caso, o alto gradiente de pressão gera um contra-fluxo (*back-flow*) dentro da camada limite, provocando seu descolamento do casco. Dependendo do número de Reynolds do escoamento, a vorticidade gerada por esse mecanismo permanece confinada numa região de sombra ou é convecada formando uma esteira de vórtices. Essa região de sombra provocada pela separação da camada limite é de alta vorticidade e baixa pressão, distorcendo a distribuição de pressão sobre o casco conforme esboçado na figura. O aumento no arrasto quando ocorre a separação da camada limite é grande e sua magnitude depende, basicamente, da localização do ponto de separação. Saliências e mudanças bruscas na geometria do casco podem provocar a separação. Quando o ângulo de ataque é grande (especialmente a 90 graus), a separação ocorre geralmente nas cúspides do casco independentemente do número de Reynolds. Sobre cascos de formas mais "lisas" (*streamlined*), o ponto de separação dependerá não só do número de Reynolds do escoamento, mas também do regime do escoamento (se laminar ou turbulento);<sup>4</sup>

As figuras 2.3 e 2.4, extraídas de Batchelor [6], resumem os aspectos aqui expostos.

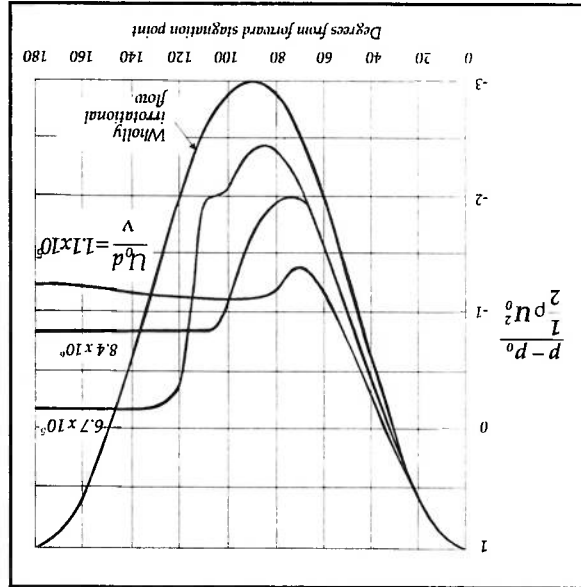


Figura 2.3 - Distribuição de pressão em torno de um cilindro para diferentes Re

A figura 2.3 mostra a distribuição de pressão em torno de um cilindro circular, nos casos de escoamento puramente potencial e de escoamento real (incluindo o efeito da viscosidade), esse último para números de Reynolds variando entre  $\sim 10^5$  e  $\sim 8.10^6$  ( $U_0$  é a velocidade da correnteza,  $p$  a pressão na parede do cilindro,  $p_0$  a pressão no infinito e  $d$  o diâmetro do cilindro). Conforme já mencionado, a distribuição de pressão no caso potencial não gera força de arrasto.

Para o caso real, em  $Re \approx 10^5$ , a distribuição de pressão é tal que o arrasto é o maior de todos os casos, diminuindo bastante para  $Re \approx 7.10^5$  e aumentando novamente para  $Re \approx 8.10^6$ , porém sem atingir o valor do arrasto para o Reynolds mais baixo. Isso ocorre pois com  $Re \approx 10^5$ , o regime de escoamento na camada limite é laminar e, segundo observações experimentais, sendo a superfície do corpo lisa, em regime laminar a separação da camada limite ocorre em torno do ponto de maior velocidade do escoamento externo. Em  $Re \approx 7.10^5$  o regime na C.L. é turbulento e o ponto de separação é deslocado para mais à jusante do escoamento (passa de 80 graus para 120 graus), diminuindo o arrasto de forma. Segundo Batchelor, citando Prandtl, a explicação para esse fato está na maior taxa de transferência de energia entre as diferentes camadas de fluido dentro da camada limite no regime turbulento devido ao movimento aleatório lateral das partículas fluidas, fazendo com que elas resistam mais ao desenvolvimento das condições necessárias para a separação (tensão de cisalhamento nula e consequente contra-fluxo no ponto de separação). Após o estabelecimento do regime turbulento, um aumento no número de Reynolds tenderá novamente a ocasionar aumento do arrasto. Para  $Re \approx 8.10^6$ , também regime turbulento, isso é observado.

A figura 2.4 mostra a relação entre a força de arrasto adimensional (coeficiente de arrasto) e o número de Reynolds para um cilindro circular, uma esfera e um disco circular em posição normal ao escoamento, todos de raio  $a$  ( $D$  é a força de arrasto,  $U_0$  a velocidade da correnteza no infinito e  $A$  a área frontal do corpo, sendo igual a  $\pi a^2$  para a esfera e o disco circular e 2a para o cilindro de comprimento unitário).

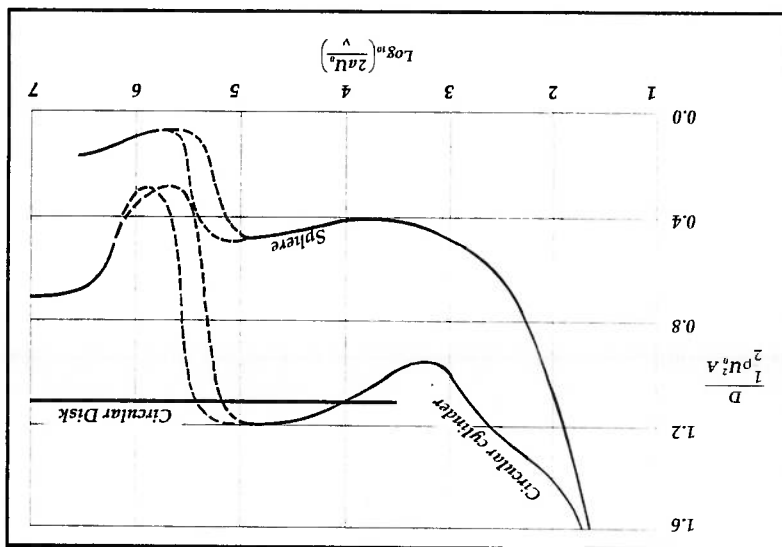


Figura 2.4 - Coeficiente de arrasto x Re para diferentes corpos

Observa-se a queda acentuada no coeficiente de arrasto na região de transição do regime laminar para o turbulento<sup>5</sup>. Essa queda é tão acentuada que consegue superar o aumento quadrático da velocidade, diminuindo não só o coeficiente, mas também a força de arrasto.

Observe-se, por fim, a constância do coeficiente de arrasto do disco circular em posição normal ao escoamento, uma vez que o ponto de separação independe do número de Reynolds e ocorrerá sempre nas bordas do disco.

Finalmente, a figura 2.5, também extraída de Batchelor [6], mostra a influência do fenômeno de separação da camada limite na força de arrasto. Ela mostra o desenvolvimento do arrasto com o aumento da espessura do fôlho para  $Re = 4 \cdot 10^5$ . O que mais chama a atenção na figura é a comparação entre dois corpos bidimensionais com arrastos iguais a velocidades iguais: um fôlho, projetado para minimizar a separação da camada limite e um cilindro, onde a separação ocorre mais facilmente!

<sup>5</sup> Observar que no regime laminar, o coeficiente de arrasto diminui com o aumento do Reynolds devido à diminuição da espessura da camada limite. Porém, a força de arrasto que depende do quadrado da velocidade, aumenta com o aumento do Reynolds

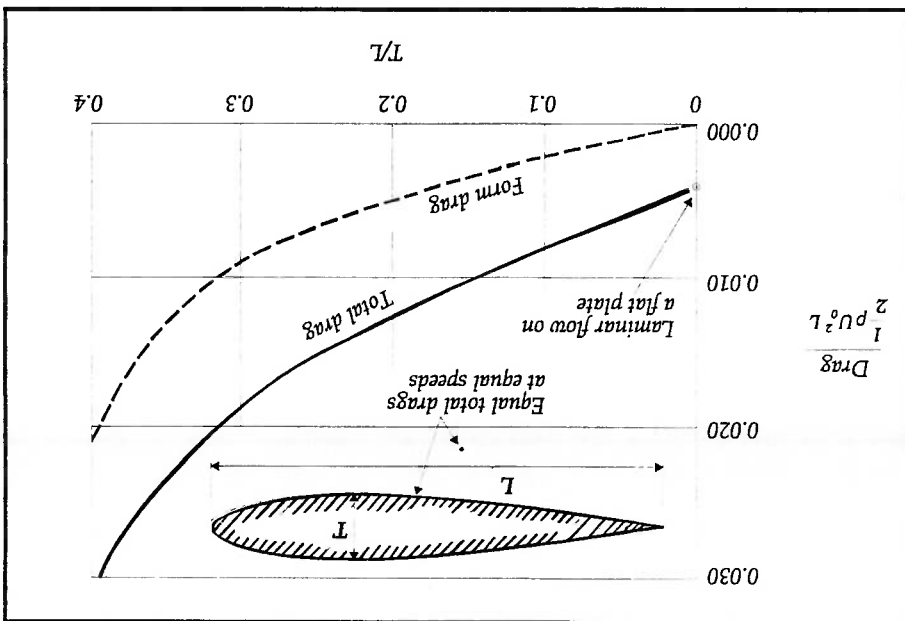


Figura 2.5 - Coeficiente de arrasto x Razão de aspecto de um fólio

Como se sabe, a resolução das equações de campo na sua forma completa não é possível na maioria dos casos e, portanto, o estudo do caso irrotacional, de solução menos complexa é bastante importante, fornecendo elementos para o entendimento e quantificação do problema real.

No caso puramente potencial, estuda-se o problema como se não houvesse viscosidade no fluido, anulando a parcela da tensão de cisalhamento ( $\tau_t$ ). O campo de velocidades é conservativo e pode ser escrito como sendo o gradiente de uma função potencial,  $\vec{u} = \nabla\Phi$ .

Utilizando  $\vec{u} = \nabla\Phi$  nas equações de campo, perde-se a condição de não-escoamento da partícula fluida sobre o corpo e o campo de pressão associado ao escoamento do fluido ideal é dado pela **equação de Bernoulli** (ver anexo A):

$$\rho \Phi(\vec{x}, t) - \frac{\rho}{2} \vec{g} \cdot \vec{z} - \frac{\rho}{2} \frac{\partial \Phi(\vec{x}, t)}{\partial t} = -p \quad (2.4)$$

Resumindo, no campo de velocidades do escoamento potencial, todas as condições de contorno do problema original são satisfeitas, **com exceção da condição de não-eskorregamento sobre o corpo**. Esse fato, como visto anteriormente, modifica muito o escoamento real onde há formação e separação de camada limite, com impacto no campo de pressão dinâmica sobre o corpo e, conseqüentemente, nos esforços que agem sobre ele. Em particular nas forças nas direções longitudinal e transversal do corpo que, num escoamento puramente potencial, são nulas, como veremos no item 2.2.

As expressões 2.2 e 2.3, que fornecem os esforços sobre o corpo se reduzem a:

$$\vec{F} = \int_S p \vec{n} \, dS; \quad (2.5)$$

$$\vec{N} = \int_S \vec{r} \times p \vec{n} \, dS. \quad (2.6)$$

Para se retornar ao problema real, após a premissa do escoamento potencial, devemos introduzir o efeito da viscosidade do fluido, ou seja, da rotacionalidade do escoamento. Isso é feito através de resultados experimentais, dada a grande complexidade do estudo analítico/numérico nesse caso.

Para a solução correta do problema e obtenção dos esforços hidrodinâmicos em programas que não o resolvam de forma completa (algoritmos de solução da equação de Navier-Stokes completa), pode-se utilizar modelos potenciais até onde for possível desprezar o efeito da viscosidade e “modifica-los” convenientemente por resultados experimentais, que incorporem esse efeito onde ele for relevante.

## 2.2- DETERMINAÇÃO DAS EXPRESSÕES HEURÍSTICAS PARA ESFORÇOS DE CORRENTE

Buscando a determinação das forças e do momento no plano horizontal devido à incidência da correnteza sobre o casco, usa-se realizar ensaios em tanques de prova com modelos reduzidos, uma vez que medições em escala real são de interpretação extremamente complexa e cheias de incertezas, além de serem de custo muito elevado.



Um dos tipos de ensaio com modelo reduzido de grande aplicação em programas de ancoragem é o chamado ensaio de modelo cativo.

O ensaio de modelo cativo se refere ao caso onde o modelo de navio é posicionado com um ângulo fixo em relação à correnteza incidente. Esse ângulo vai sendo variado ao longo do ensaio, proporcionando a obtenção das curvas dos esforços incidentes como função do ângulo de incidência. No IPT o modelo é rigidamente conectado ao carro dinâmométrico que o reboca em águas paradas. A cada corrida do carro varia-se o ângulo de aprornamento do casco. Nas corridas, mantêm-se constante a velocidade de reboque,  $U$ , provocando um movimento relativo entre a água e o casco, simulando, assim, a ação da correnteza (figura 2.1).

Nesse ensaio mede-se as forças  $X$  e  $Y$  nas direções longitudinal e transversal do modelo, além do momento  $N$  em torno do seu eixo vertical, normalmente em relação à meia-nau,  $N = N_{\theta}$ . Esses esforços são, então, plotados em função do ângulo de incidência,  $\alpha$ , ou das velocidades relativas casco-fluido, nas direções dos eixos longitudinal e transversal ( $u = U \cos \alpha$ ;  $v = U \sin \alpha$ ).

Através do ensaio com modelo cativo, teremos em mãos, portanto, os valores de  $\bar{F}$  e  $\bar{N}$  para o caso de escoamento estacionário sobre o casco, incorporando todos os fenômenos físicos envolvidos (formação de camada limite e separação) para diversos ângulos de incidência de correnteza. Esses valores porém, sofrem de duas limitações:

1. Em ensaios de modelo cativo, o casco é mantido em atitude fixa em relação à correnteza, ou seja, não há movimento próprio do navio. Na realidade, sob efeito de ondas, ou mesmo em comportamento dinâmico instável, apenas na presença de corrente e vento, o navio se movimenta, ocasionando o aparecimento de outras forças. Como veremos mais adiante, através do ensaio com modelo cativo consegue-se resgatar as parcelas dos esforços para o caso em que as velocidades lineares do navio não são nulas, não sendo possível, porém, obter-se a parcela dependente de sua velocidade angular;

2. A semelhança dinâmica entre o modelo e a escala real não é total, uma vez que não é possível a igualdade entre o número de Reynolds do modelo e do navio. Esse

problema exige que sejam feitas correções nos coeficientes medidos no ensaio para aplicação na escala real.

Ensaio de modelo cativo para cascos típicos de petroleiros foram realizados pelo MARIN (Wageningen - Holanda) para as companhias de petróleo membras da OCIMF [4], gerando curvas de forças e momento adimensionais no plano horizontal em função do ângulo de incidência de corrente:

$$C_{lc}(\alpha) = \frac{X(\alpha)}{0,5^p T L U^2}; \quad (2.7)$$

$$C_{zc}(\alpha) = \frac{Y(\alpha)}{0,5^p T L U^2}; \quad (2.8)$$

$$C_{cc}(\alpha) = \frac{N(\alpha)}{0,5^p T L^2 U^2}. \quad (2.9)$$

As velocidades ensaiadas são escolhidas de modo que o número de Froude seja suficientemente baixo para não haver formação de ondas (ver 2.2.1, abaixo).

Essas curvas se tornaram referência mundial sobre o assunto e vêm sendo usadas por projetistas e companhias de petróleo em projetos de FFSO's, desde que determinados coeficientes adimensionais do casco se enquadrem na faixa de adimensionais dos modelos ensaiados.

Buscando capacitação em ensaios com modelos cativos, a Petrobras e o IPT em cooperação com o DENO-EPUSP, realizaram esse tipo de ensaio [2] para 2 cascos distintos: um VLCC de dimensões enquadradas na faixa da OCIMF e para o PP-Moraeas, um casco construído em FFSO para o campo de Barracuda, Bacia de Campos. Os resultados do VLCC são diretamente comparáveis com os da OCIMF e, portanto, serviram de referência para os ensaios do IPT. O PP-Moraeas, por outro lado, não se enquadra na faixa da OCIMF.

É importante que fique claro para o leitor que as curvas geradas pela OCIMF representam uma média dos resultados para uma família de cascos (classificados

\* O momento fornecido nos relatórios usuais de ensaios com modelo cativo, inclusive o da OCIMF, é medido em relação à meta-nau, ou seja,  $N = N_{\oplus}$ .

genéricamente como petroleiros) e, portanto, sua utilização para outros navios pressupõe uma semelhança geométrica entre eles. Caso essa semelhança geométrica não ocorra, não há garantias de que as curvas sejam aplicáveis.

Um modelo físico-matemático para determinação desses esforços foi, portanto, elaborado, visando poder escrevê-los em função de dimensões características do navio. Esse modelo, como explicitado nas considerações preliminares, foi abordado, como um problema potencial, convenientemente “modificado”, a partir de resultados experimentais (principalmente dos ensaios com modelo cativo), pela introdução da viscosidade no fluido e, conseqüentemente, da rotacionalidade do escoamento.

## 2.2.1- PROBLEMA POTENCIAL (FLUIDO IDEAL)

No caso em questão (escoamento estacionário), temos:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = 0 ;$$

Além disso, o número de Froude típico do escoamento é:

$$\text{Fr} = \frac{U}{\sqrt{g \cdot L}} \approx 1,8 \times 10^{-2}, \quad \begin{cases} U \approx 1 \text{ m/s} \\ L \approx 300 \text{ m} \end{cases}$$

o que é um valor muito baixo. Sendo assim, não há formação de ondas de amplitude significativa face às dimensões envolvidas no problema e pode-se desprezar efeitos de superfície livre.

Nesse caso, pode-se desprezar o efeito gravitacional no cômputo da pressão sobre o casco, uma vez que haverá apenas a pressão hidrostática  $p_g z$ . Na parede vertical do casco, a força horizontal resultante da integral da pressão hidrostática de bordo (BB) anula a força horizontal resultante da integral da pressão hidrostática de boreste (BE) e, no fundo, a força vertical resultante da integral da pressão hidrostática é contrabalançada pelo peso do navio.

A força sobre o casco, portanto, será resultado apenas da integral da chamada pressão dinâmica sobre o mesmo.

As equações de campo (2.1) para o cálculo da pressão sobre o casco, portanto, podem ser reduzidas a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \operatorname{div}(\vec{u}) = 0. \\ \bullet (\vec{u} \cdot \nabla) \cdot \vec{u} = -\frac{p}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{u}; \end{array} \right.$$

Considerando **escoamento potencial**, temos:

$$\vec{u} = \nabla\Phi;$$

E, portanto, vale a equação de Bernoulli, no caso, reduzida a:

$$p(\vec{x}, t) = -\frac{\rho}{2} |\nabla\Phi(\vec{x}, t)|^2;$$

Sendo o operador  $\nabla$  uma aplicação linear de um espaço vetorial em outro, podemos decompor a função potencial, de acordo com a figura 2.1, como:

$$\Phi = U \cdot \phi,$$

onde  $\phi$  é o potencial de velocidades para  $U = \text{cte} = 1$ .

O potencial obedece, portanto, às seguintes condições:

$$\bullet \nabla_z \phi = 0;$$

$$\bullet \nabla\phi \cdot \vec{n}|_S = 0;$$

$$\bullet \nabla\phi \rightarrow \cos\alpha \cdot \vec{i} + \text{sen}\alpha \cdot \vec{j} \text{ no } \infty.$$

Como não há efeito de superfície livre, pode-se considerar o problema como de “casco duplo”. Dessa forma, tudo se passa como se fosse um navio de “casco duplo”, totalmente submerso (figura 2.6).

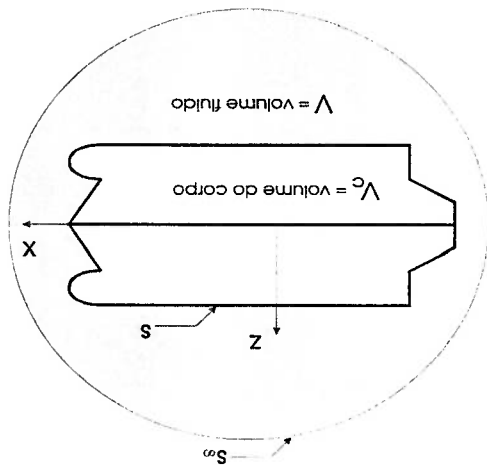


Figura 2.6

A expressão da força nas direções x, y e z devido ao potencial  $\Phi$  é (eq. 2.2):

$$(\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}; \quad \vec{n} = n_x\vec{i} + n_y\vec{j} + n_z\vec{k}.)$$

$$X = \int_S p n_x dS = -\frac{\rho}{2} \int_S |\Delta\Phi|^2 n_x dS = -\frac{\rho}{2} \int_S U^2 n_x dS;$$

$$Y = \int_S p n_y dS = -\frac{\rho}{2} \int_S |\Delta\Phi|^2 n_y dS = -\frac{\rho}{2} \int_S U^2 n_y dS;$$

$$Z = \int_S p n_z dS = -\frac{\rho}{2} \int_S |\Delta\Phi|^2 n_z dS = -\frac{\rho}{2} \int_S U^2 n_z dS.$$

Mas:

$$\int_S |\Delta\Phi|^2 n_x dS = \int_S |\Delta\Phi|^2 n_y dS = \int_S |\Delta\Phi|^2 n_z dS = 0. \quad (\text{ver anexo A})$$

$$\therefore X = Y = Z = 0.$$

Portanto, o escoamento potencial, com  $U = cte$ , não causa forças nas direções  $x$ ,  $y$  ou  $z$  (Paradoxo de D'Alembert).

Por outro lado, o escoamento potencial original momentos  $N^x \neq 0$ ;  $N^y \neq 0$ ;  $N^z \neq 0$ .

Esses momentos são conhecidos como Momentos de Munk. No caso real, onde o casco não é duplo, nem totalmente submerso, os momentos  $N^x$  e  $N^y$ , que tenderiam a provocar uma banda e um trim no navio, respectivamente, são muito pequenos comparados à restauração hidrostática do casco e, portanto, podem ser desprezados (no caso de aviões e submarinos, onde o "casco" está efetivamente totalmente imerso no meio, não há essa restauração hidrostática e esses momentos são compensados por lames horizontais convenientemente dispostos no mesmo).

Por outro lado, no plano horizontal o momento de Munk,  $N^{MUNK}$ , é importante e, via de regra, a componente de maior importância no cálculo do momento total (incluindo a parcela de arrasto),  $N^z$ , que o fluido exerce sobre o casco em torno do eixo vertical  $z$ .

O valor do momento de Munk pode ser obtido por integração direta da pressão sobre o casco (Anexo A), ou através de um argumento de energia (ver Anexo B, item B.2.2, equação B.24b).

Sua expressão é dada por:

$$N^{MUNK} = \left[ M_{11} - M_{22} \right] U^2 \sin \alpha \cos \alpha \bar{k}. \quad (2.10)$$

Resumindo o caso potencial, nesse tipo de escoamento as forças de arrasto são nulas mas o momento não. Como se percebe, o momento depende, no que diz respeito à embarcação, unicamente de suas massas adicionais em surge e sway (para frequência nula) que podem ser obtidas com boa precisão através de cálculo numérico ou estimadas a partir das dimensões principais do navio.

A figura 2.7, abaixo, traz as expressões das massas adicionais por unidade de comprimento, para frequência nula, nas direções  $x$  ( $m_{11}$ ) e  $y$  ( $m_{22}$ ) para seções transversais elípticas e quadradas (fonte: Newman [5]):

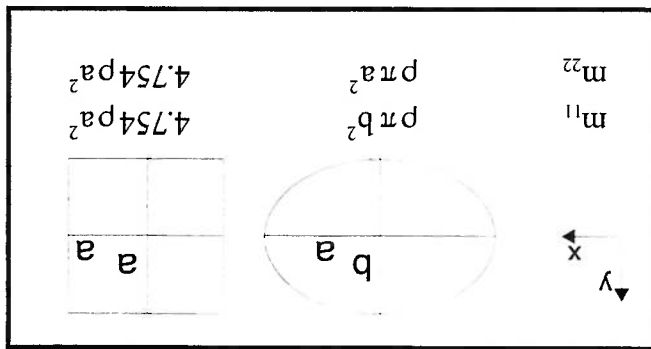


Figura 2.7 - Massa adicional bidimensional

Para estimar a massa adicional em sway do navio, podemos, em primeira aproximação, considerá-lo como metade de um prisma elíptico ou de um prisma quadrado (da linha d'água para baixo), de acordo com a figura 2.8. A partir dessa premissa, a massa adicional, considerando escoamento bidimensional (teoria das faixas) fica:

$$M_{z2} = \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} m_{z2}(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{2} (\pi \rho T^2 L), & \text{no caso do prisma elíptico;} \\ \frac{1}{2} (4.754 \rho T^2 L), & \text{no caso do prisma quadrado.} \end{cases} \quad (2.11)$$

$$(2.12)$$

A adoção de uma expressão ou outra (considerar o prisma elíptico ou retangular), ou ainda, de um valor intermediário depende de comparações entre cálculos e experimentos e é discutida mais adiante, no sub-item 2.2.3, que trata da expressão heurística para o momento no plano horizontal.

Há, porém, uma expectativa de que a expressão mais apropriada seja a que representa o navio como um prisma elíptico. Isso se deve ao fato de que, se por um lado, as seções transversais do navio se aproximem mais da forma geométrica de um

retângulo (para calado carregado, com raios de adocamento do bojo típicos), o que faria a premissa da elipse fornecer massas adicionais subestimadas, por outro, a consideração do escoamento bidimensional tenderá a superestimá-las. A premissa do prisma quadrado, por outro lado, tenderá a superestimar a massa adicional tanto pelo lado geométrico da seção transversal, como pelo lado do escoamento bidimensional. Espera-se, portanto, uma compensação dos dois aspectos na aproximação por elipse.

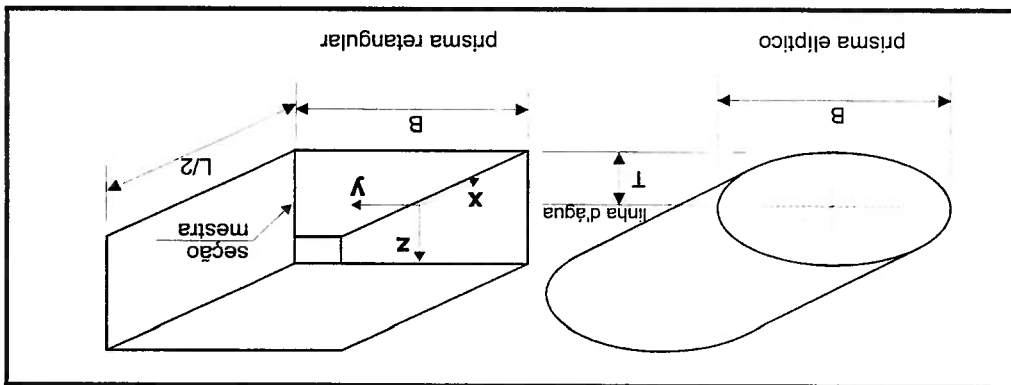


Figura 2.8 - Prisma elíptico x retangular

No item 2.2.2, a seguir, o problema real é analisado à luz de resultados experimentais com modelo cativo. As forças nas direções longitudinal e transversal do navio originadas pela rotacionalidade do escoamento são apresentadas e um modelo matemático que as descreva como função das características principais da embarcação é sugerido. O momento, por sua vez, será representado como o momento de Munk, de origem potencial, corrigido pelo resultado experimental para  $\alpha = 90$  graus.

## 2.2.2- PROBLEMA COMPLETO (FLUIDO REAL)

Em 2.2.1, vimos que no caso de escoamento estacionário puramente potencial (fluido ideal, sem viscosidade) a força resultante sobre o casco é nula (paradoxo de D'Alembert). A introdução da viscosidade acarreta no aparecimento de forças de arrasto de fricção e inerciais. A determinação dessas forças por vias numérico-



análíticas é muito complexa, às vezes impossível com as ferramentas disponíveis. Resultados de ensaios se fazem, portanto, necessários.

Conforme mencionado anteriormente, os resultados experimentais de forças e momento no plano causados pela correnteza utilizados neste trabalho serão os do MARIN/Wichers<sup>7</sup> [3] e do IPT [2], sendo os do MARIN usados para os cascos típicos de petroleiros e os do IPT para o PF Moraes.

Esses trabalhos fornecem as componentes da força atuante no casco nas direções longitudinal e transversal do navio, assim como o momento no plano horizontal<sup>8</sup> como função do ângulo de incidência de corrente ( $\alpha$ ). Essas forças e momento são adimensionalizados, tornando-se, portanto, coeficientes (expressões 2.7, 2.8 e 2.9, repetidas abaixo):

$$C_{lc}(\alpha) = \frac{X(\alpha)}{0,5\rho TL U^2}; \quad (2.7)$$

$$C_{zc}(\alpha) = \frac{Y(\alpha)}{0,5\rho TL U^2}; \quad (2.8)$$

$$C_{6c}(\alpha) = \frac{N(\alpha)}{0,5\rho TL^2 U^2}. \quad (2.9)$$

Para que se possa propor um modelo físico-matemático que descreva esses coeficientes como função de características geométricas da embarcação, é necessário que se analise a origem de cada um dos esforços. Isso será feito à luz do trabalho desenvolvido por Aranha [1].

Como já discutido no item 2.1, sendo o fluido viscoso, haverá formação de camada limite sobre a superfície do casco<sup>9</sup>. A depender do ângulo de incidência da corrente, assim como da geometria do casco, poderá haver ou não separação da camada limite.

<sup>7</sup> Os resultados publicados por Wichers foram preferidos em relação aos publicados para a OCIMF, porque os primeiros se referem a um único navio enquanto que os últimos resultaram da análise de vários navios diferentes.

<sup>8</sup> Como, no plano horizontal, o único momento relevante é  $N_z$ , para simplificar a nomenclatura, utilizaremos a notação usual.

<sup>9</sup>  $N = N_z$ .

<sup>9</sup> Para o modelo em escala reduzida ( $Re \approx 10^5$ ) o regime de escoamento na camada limite estará numa faixa de transição entre laminar e turbulento, enquanto que, para o navio em escala real ( $Re \approx 10^8$ ) o regime será turbulento. Excitadores instalados na popa e proa do modelo, porém, asseguram o regime turbulento também em escala reduzida.

Para pequenos ângulos de incidência, supondo que a geometria da linha d'água seja suficientemente alongada (*streamlined*), sem quinas e mudanças bruscas, não ocorrerá separação e, conseqüentemente o navio funcionará como uma asa, surgindo forças de sustentação e arrasto induzido.

A partir de um determinado ângulo (ângulo de *stall*), a camada limite se separa, a força de sustentação sofre uma queda abrupta e o arrasto de forma cresce substancialmente.

Resumidamente, podemos enumerar as seguintes forças presentes sobre o casco:

1. Arrasto viscoso;
2. Arrasto de forma (baixo para  $\alpha < \text{ângulo de stall}$  e alto para  $\alpha > \text{ângulo de stall}$ );
3. Arrasto induzido (para  $0 < \alpha < \text{ângulo de stall}$ );
4. Força de sustentação (para  $0 < \alpha < \text{ângulo de stall}$ ).

Com base nessa decomposição, um modelo físico-matemático para as componentes longitudinal e transversal da força sobre o casco, assim como para o momento no plano horizontal será apresentado a seguir.

## 2.2.2.1 - COMPONENTE LONGITUDINAL DA FORÇA DE ARRASTO, OU FORÇA LONGITUDINAL - $X(\alpha)$ :

A expressão heurística que descreve  $X(\alpha)$  é determinada a partir da decomposição do problema em dois. O primeiro refere-se ao arrasto viscoso, na direção longitudinal, e o segundo às componentes longitudinais das forças de sustentação e arrasto induzido, oriundas do efeito de asa do navio. Sendo assim, podemos escrever:

$$X(\alpha) = X^{\text{visc}}(\alpha) + X^{\text{asa}}(\alpha), \quad (2.10a)$$

onde:

$X^{\text{visc}}(\alpha)$  = força de arrasto viscoso na direção longitudinal;

$X^{\text{asa}}(\alpha)$  = componente longitudinal das forças devido ao efeito de asa do navio (fig. 2.9)

ou, adimensionalizando a força por  $\frac{1}{2}\rho U^2 L T$ :

$$C_{lc}(\alpha) = C_{lc,v}(\alpha) + C_{lc,a}(\alpha). \quad (2.10b)$$

Para  $X(\alpha)$ , a faixa de ângulos de ataque mais relevante é a de ângulos pequenos, próximos de 0 (ou  $\pi$ ), ou seja, menores que o ângulo de stall. Para ângulos maiores que o ângulo de stall, a componente longitudinal da força cairá, indo para zero em torno de  $\alpha \approx \pi/2$ .

Numa faixa de ângulos adequadamente pequenos ( $\alpha \ll 1$ )<sup>10</sup>, não haverá separação de camada limite com as seguintes consequências:

1. O regime de escoamento pode ser considerado irrotacional na maior parte da região fluida, exceção feita ao interior da camada limite;

2. A força de sustentação será elevada face às demais forças (efeito de asa);

3. O arrasto induzido será relevante e certamente maior que o arrasto de forma e viscoso;

4. O arrasto de forma será baixo e dependerá do número de Reynolds aproximadamente da mesma forma que o arrasto friccional.

Com base nesse comportamento, expressa-se a função  $X(\alpha)$ .

A parcela do arrasto viscoso se baseia em teoria de placas planas, corrigida para o caso do navio através da introdução de um coeficiente de forma adequado.

Para isso, decompõe-se a velocidade da correnteza,  $\vec{U}$ , nas direções longitudinal e transversal do navio:

$$\vec{U} = U \cos \alpha \vec{i} + U \sin \alpha \vec{j}.$$

<sup>10</sup> Ângulo medido em radianos. É claro que numericamente  $\alpha > 1$ , no caso de  $\pi$ , mas ainda assim o ângulo físico de incidência da corrente sobre o casco é próximo de zero, valendo a aproximação proposta.

Supondo que o escoamento do fluido na direção longitudinal não seja perturbado pela componente transversal, a força de arrasto viscosa longitudinal fica:

$$X_{visc}^{visc}(\alpha) = \frac{1}{2} \rho C_{lc}(0) LT(U \cos \alpha)^2,$$

ou, preservando o sinal da função  $\cos \alpha$  de modo que a expressão seja válida para

$$-2\pi \leq \alpha \leq 2\pi :$$

$$X_{visc}^{visc}(\alpha) = \frac{1}{2} \rho C_{lc}(0) LTU^2 \cos \alpha |\cos \alpha|. \quad (2.11a)$$

Em termos adimensionais:

$$C_{lc,v}^{visc}(\alpha) = C_{lc}(0) \cos \alpha |\cos \alpha|. \quad (2.11b)$$

A parcela de asa, por outro lado, será buscada na teoria de asa de pequena razão

de aspecto (teoria de Jones). Desta forma, estaremos, em primeira aproximação,

considerando o navio como uma placa plana de largura  $2T$  e comprimento  $L$  sujeita à

ação da correnteza no plano da linha d'água. Essa suposição pressupõe um escoamento

em torno do casco similar ao do caso de uma placa plana, ou seja, considera-se que a

boca do navio não modifique substancialmente o campo de pressão no casco comparado

a uma placa plana de mesma razão de aspecto<sup>11</sup>.

A razão de aspecto do navio (casco duplo - escoamento potencial fora da camada

limite) como "asa plana de pequena razão de aspecto" é (figura 2.9):

$$A = \frac{L}{2T}; \quad (2.12)$$

<sup>11</sup> Clarke et. al [7], baseado em estatísticas sobre ensaios de manobras realizados por instituições diferentes, propôs um fator de correção para algumas derivadas hidrodinâmicas lineares de um grupo de navios para ângulos de ataque pequenos ( $\alpha \approx \pi$ ). O fator obtido para uma dessas derivadas,  $Y_v$  na notação utilizada por Clarke, pode, em essência ser traduzida como um fator de correção do coeficiente de sustentação do navio, minimizando as imprecisões oriundas da premissa de placa plana. Essa correção é utilizada efetivamente na expressão heurística para o coeficiente transversal,  $C_{zc}(\alpha)$  - ver sub-ítem 2.2.2. Para  $C_{lc}(\alpha)$ , porém, ao contrário do que ocorre para  $C_{zc}(\alpha)$ , o fator de correção piora a aderência da expressão aos resultados experimentais e, portanto, não será introduzida nesse caso.

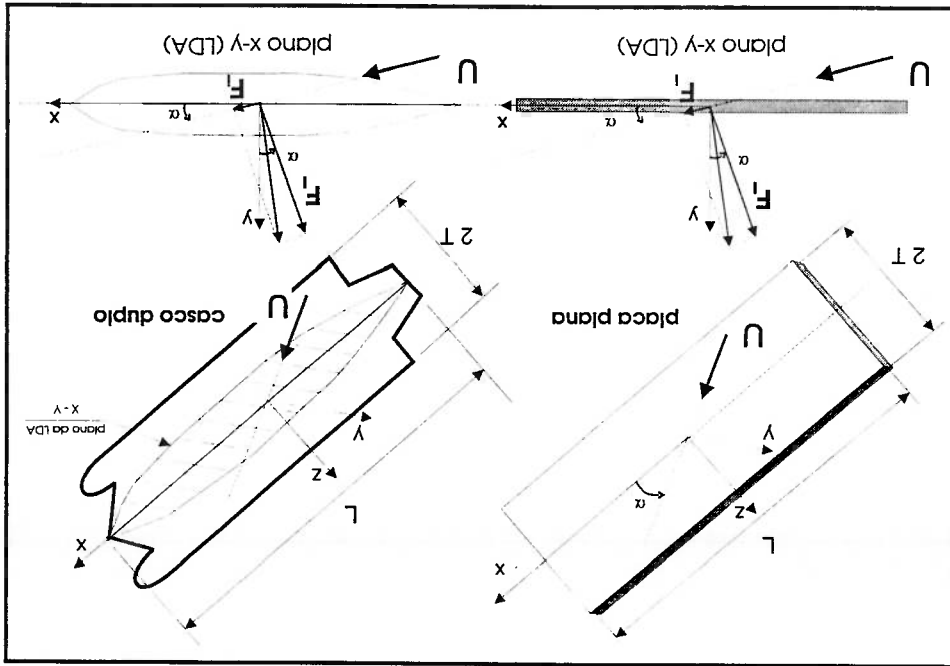


Figura 2.9 - Navio como asa curta

Sendo  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ , as forças de sustentação (*lift*, em inglês) e de arrasto induzido (*induced drag*).  
 De acordo com a figura 2.9 podemos decompor as forças de sustentação e arrasto induzido:

$$\vec{F}_1(\alpha) = -F_1(\alpha) \text{sen} \alpha \vec{i} + F_1(\alpha) \text{cos} \alpha \vec{j}; \quad (2.13a)$$

$$\vec{F}_2(\alpha) = F_2(\alpha) \text{cos} \alpha \vec{i} + F_2(\alpha) \text{sen} \alpha \vec{j}; \quad (2.13b)$$

Sendo assim, a componente longitudinal da força oriunda do efeito asa, fica:

$$X_{asa}(\alpha) = F_1(\alpha) \text{cos} \alpha - F_2(\alpha) \text{sen} \alpha, \quad (2.14a)$$

ou, em termos adimensionais:

$$C_{l,asa}(\alpha) = C_{l1}(\alpha) \text{cos} \alpha - C_{l2}(\alpha) \text{sen} \alpha \quad (2.14b)$$

Para as planas de pequena razão de aspecto ( $A \ll 1$ ), os seguintes resultados são clássicos na literatura (as expressões são consistentes com o fator de adimensionalização  $\frac{1}{2} \rho U^2 L T$ ):

$$C_l(\alpha) = \frac{\pi A}{2} \text{sen } \alpha ;$$

$$C_{l_2}(\alpha) = \frac{\pi A}{4} \text{sen}^2 \alpha .$$

que substituídas em 2.14b, fornecem:

$$C_{l_{ca}}(\alpha) = \frac{\pi A}{2} \left( \frac{\text{sen}^2 \alpha \text{cos } \alpha}{2} - \text{sen}^2 \alpha \right) . \tag{2.14c}$$

Observa-se, porém, que a expressão 2.14c não se comporta da maneira desejada

para grandes ângulos de ataque ( $\alpha \equiv O(1)$ ). De fato, a expressão desejada, deve tender a

zero para  $\alpha \approx \pi/2$ . Para contornar esse problema, a expressão é escrita como uma série de

Fourier, o que é possível, visto que se trata de uma função periódica.

Os coeficientes da série podem ser obtidos a partir de considerações físicas. Seja:

$$C_{l_{ca}}(\alpha) = a_0 + \sum a_n \text{cos}(n\alpha) + \sum b_n \text{sen}(n\alpha) ;$$

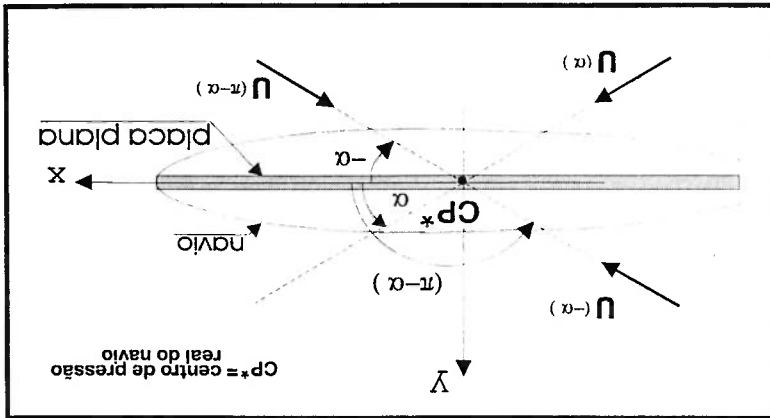


Figura 2.10 - Simetrias do modelo

Segundo a figura 2.10, temos:

$C_{1ca}(\alpha) = C_{1ca}(-\alpha)$ , ou seja,  $C_{1ca}(\alpha)$  é uma função par em  $\alpha$  e, portanto, todos os termos em sen  $\alpha$  devem ser nulos, restando da série de Fourier apenas:

$$C_{1ca}(\alpha) = a_0 + \sum a_n \cos(n\alpha).$$

Supondo simetria em relação ao eixo  $y$  do navio<sup>12</sup>, temos que  $C_{1ca}(\pi - \alpha) = -C_{1ca}(\alpha)$  e, portanto  $a_0 = 0$ . Temos, então, desenvolvendo a série até o

terceiro termo:

$$C_{1ca}(\alpha) = a_1 \cos \alpha + a_2 \cos(2\alpha) + a_3 \cos(3\alpha).$$

Ainda aplicando a premissa  $C_{1ca}(\pi - \alpha) = -C_{1ca}(\alpha)$ , vemos que apenas os

termos ímpares da função permanecem, pois:

$$\begin{aligned} \cos(\pi - \alpha) &= -\cos \alpha \Rightarrow \text{SERVE} \\ \cos[2(\pi - \alpha)] &= \cos(2\alpha) \Rightarrow \text{NÃO SERVE} \\ \cos[3(\pi - \alpha)] &= -\cos(3\alpha) \Rightarrow \text{SERVE} \end{aligned}$$

Ficamos, finalmente, com:

$$\begin{cases} C_{1ca}(\alpha) = a_1 \cos \alpha + a_3 \cos(3\alpha); \\ a_1 + a_3 = 0, \end{cases} \quad (2.15a)^{13}$$

ou:

$$C_{1ca}(\alpha) = a_1 [\cos \alpha - \cos(3\alpha)]. \quad (2.15b)$$

<sup>12</sup> O centro de pressão real,  $CP^*$ , é função de  $U$  e de  $\alpha$  e, portanto, diferente do centro de pressão potencial,  $CP$ . Aqui considera-se que  $CP^* = CP$  e que haja simetria do casco em relação ao eixo que passa por ele. Para a placa plana,  $CP$  fica localizado à metade do comprimento.

<sup>13</sup> Quando  $\alpha = 0$ , temos  $C_{1ca}(\alpha) = 0 \Leftrightarrow a_1 + a_3 = 0$ .

Expandindo  $\cos(\alpha)$  e  $\cos(3\alpha)$  em série de Taylor, em torno de  $\alpha = 0$ , temos:

$$\cos(\alpha)|_{\alpha=0} = \cos(0) - \alpha \cdot \text{sen}(0) - \frac{\alpha^2 \cos(0)}{2} + (\dots) \cong 1 - \frac{\alpha^2}{2};$$

$$\cos(3\alpha)|_{\alpha=0} = \cos(0) - 3\alpha \cdot \text{sen}(0) - \frac{9\alpha^2 \cos(0)}{2} + (\dots) \cong 1 - \frac{9}{2}\alpha^2.$$

Que, substituídas em 2.15b, fornecem:

$$C_{1ca}(\alpha) = 4a_1\alpha^2. \quad (2.15c)$$

Como vemos, considerações simples sobre a força longitudinal provocada pelo escoamento do fluido sobre o casco já nos permitem esboçar uma expressão para essa força.

Contornado o problema da convergência para zero em  $\alpha \approx \pi/2$ , pode-se voltar ao modelo físico da expressão 2.14c para obtenção do coeficiente  $a_1$ .

Ainda, consistentemente com a premissa de  $\alpha \ll 1$ , podemos fazer:

$$\cos(\alpha) \cong 1 - \frac{\alpha^2}{2};$$

$$\text{sen}(\alpha) \cong \alpha \text{ e, portanto, } \text{sen}^2(\alpha) \cong \alpha^2.$$

que, substituídas em 2.14c, fornecem:

$$C_{1ca}(\alpha) = \frac{\pi A}{2} \left[ \frac{\alpha^2}{2} \left( 1 - \frac{\alpha^2}{2} \right) - \alpha^2 \right] \cong -\frac{\pi A}{4} \alpha^2. \quad (2.16)$$

Iguando a expressão 2.16 à expressão 2.15c, temos:

$$a_1 = -\frac{\pi A}{16}, \quad (2.17a)$$



ou, utilizando a expressão 2.12:

$$a_1 = -\frac{\pi T}{8L}, \quad (2.17b)$$

que, substituído em 2.15b fornece:

$$C_{1ca}(\alpha) = \frac{\pi T}{8L} [\cos(3\alpha) - \cos\alpha]. \quad (2.18)$$

Adicionando a parcela da expressão 2.18 à parcela do arrasto viscoso, expressão 2.11b, temos:

$$C_{1c}(\alpha) = C_{1c}(0) \cos\alpha \left| \cos\alpha \right| + \frac{\pi T}{8L} [\cos(3\alpha) - \cos\alpha], \quad (2.19a)$$

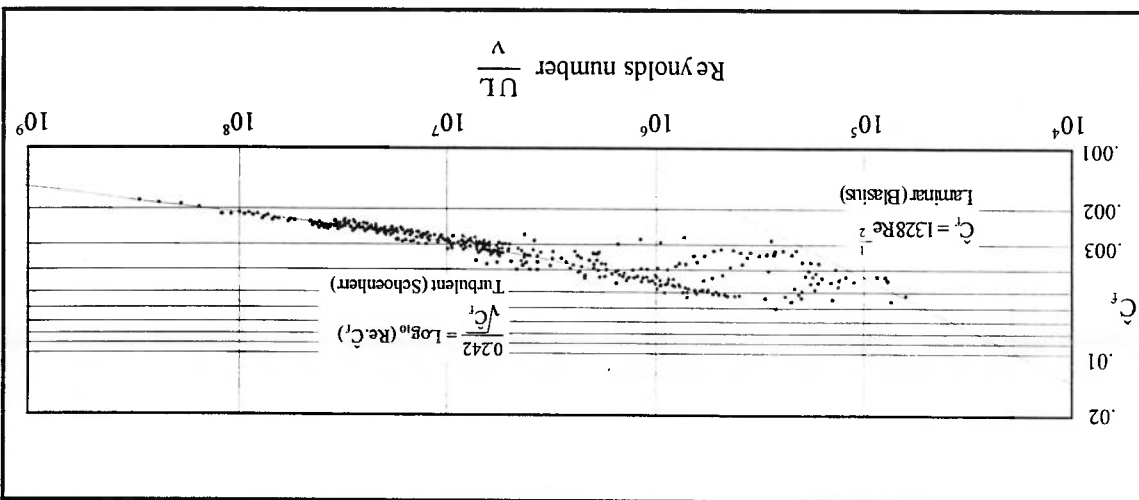
onde a primeira parcela da expressão 2.19 se refere à componente de arrasto viscoso, enquanto que a segunda fornece a “componente de asa” da força. O coeficiente de arrasto viscoso,  $C_{1c}(0)$ , inclui as componentes de fricção e de forma (ou arrasto de pressão):<sup>14</sup>

$$C_{1c}(0) = C_f(Re) + C_p(Re). \quad (2.19b)$$

Como estamos tratando de arrasto friccional gerado por camada limite turbulenta, tanto no modelo quanto no navio em escala real, a expressão de  $C_f(Re)$  utilizada no equacionamento proposto deve refletir esse fato. A figura 2.11, extraída de Newman [5], ilustra o comportamento de  $C_f(Re)$  em regimes laminar e turbulento.

<sup>14</sup> Não havendo separação da camada limite, o que vale para  $\alpha < \alpha_{\text{stall}}$ ,  $C_p$  é da mesma ordem que  $C_f$  e ambos dependem do número de Reynolds da mesma forma. Quando  $\alpha > \alpha_{\text{stall}}$ , ou seja para ângulos superiores à faixa de interesse para a força longitudinal, ocorre separação da camada limite e  $C_p \gg C_f$ .

Figura 2.11 -  $C_f(Re)$  - Regimes laminar e turbulento



Existem, na literatura, inúmeros trabalhos publicados por diferentes pesquisadores para o cálculo de  $C_f(Re)$ . Um das primeiras expressões propostas deve-se aos trabalhos de Prandtl e de Van-Karman, independentes porém coincidentes no resultado, ambos datados de 1921. Segundo Prandtl e Von-Karman, para escoamento permanente sobre placas lisas com camada limite turbulenta (extrada de [8], à

expressão é adimensionalizada por  $\frac{1}{2}\rho U^2 S$ :

$$\hat{C}_f = \frac{0.072}{Re^{0.2}}$$

ou, adimensionalizando-a por  $\frac{1}{2}\rho U^2 L T$ , temos:

$$C_f = \frac{0.072 S}{Re^{0.2} TL} \quad (2.20)$$

Em 1932, Schoenherr, de posse de vários resultados experimentais para placas planas obtidos de fontes diferentes, compilou os valores de  $C_f$  para números de Reynolds compreendidos entre  $10^5$  e  $10^9$ . Esse trabalho proporcionou uma reavaliação da formulação para  $C_f$ , não contrariando os princípios teóricos expostos por Prandtl e

Von-Karman resultando na seguinte expressão iterativa para o cálculo do coeficiente de arrasto friccional:

$$\sqrt{C_f} = 0.242 \log_{10}(Re \cdot C_f) \quad (2.21)$$

A expressão 2.21 apresenta excelente aderência aos resultados experimentais para camada limite turbulenta, como atesta a figura 2.11.

Apesar da boa concordância com os experimentos da expressão de Schoenherr, a fórmula de Prandtl e Von-Karman tem a vantagem da simplicidade. A figura 2.12 apresenta uma comparação dos resultados obtidos através das duas expressões. Nota-se uma boa concordância entre as duas, para  $10^5 < Re < 10^7$ , faixa de números de Reynolds dos modelos reduzidos, havendo um “descolamento” das curvas para valores maiores, na faixa de Reynolds típica dos navios em escala real.

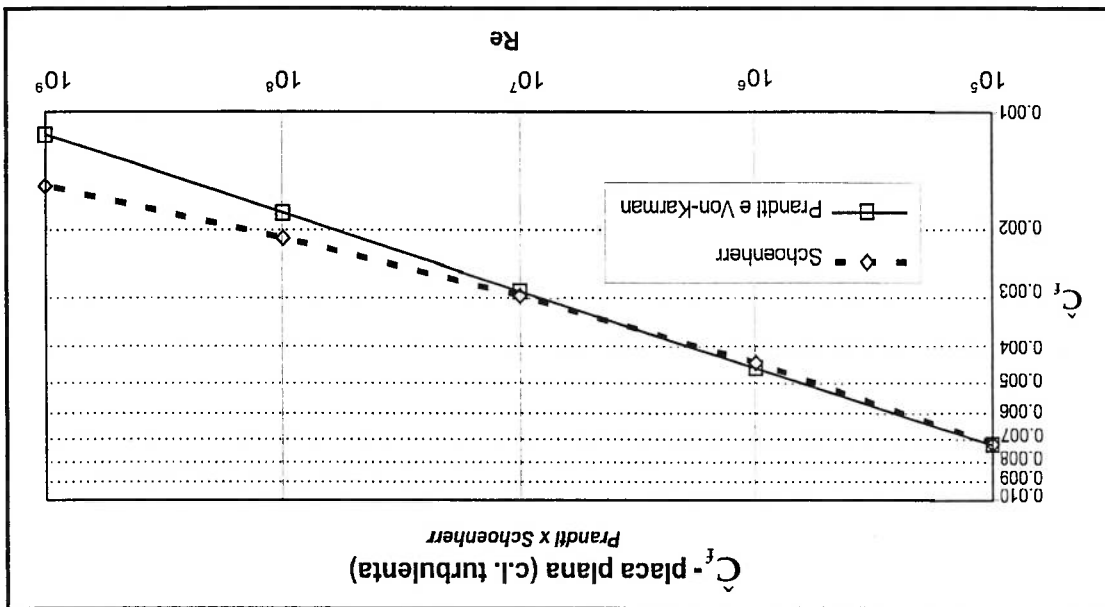


Figura 2.12 -  $C_f(Re)$  - placa plana lisa, regime turbulento; Schoenherr x Prandtl

Em 1957, na reunião da ITTC (International Towing Tank Conference), uma nova expressão para o cálculo de  $C_f(Re)$  para placa plana lisa em regime turbulento foi proposta (também extraída de [8]):

$$\hat{C}_f(Re) = \frac{0.075}{(\log(Re) - 2)^2}$$

que, adimensionalizada por  $\frac{1}{2}\rho U^2 L T$  se torna:

$$C_f(Re) = \frac{0.075}{S} \frac{(\log(Re) - 2)^2}{TL} \quad (2.22)$$

A comparação da expressão 2.22 com a curva de Schoenherr é apresentada na figura 2.13.

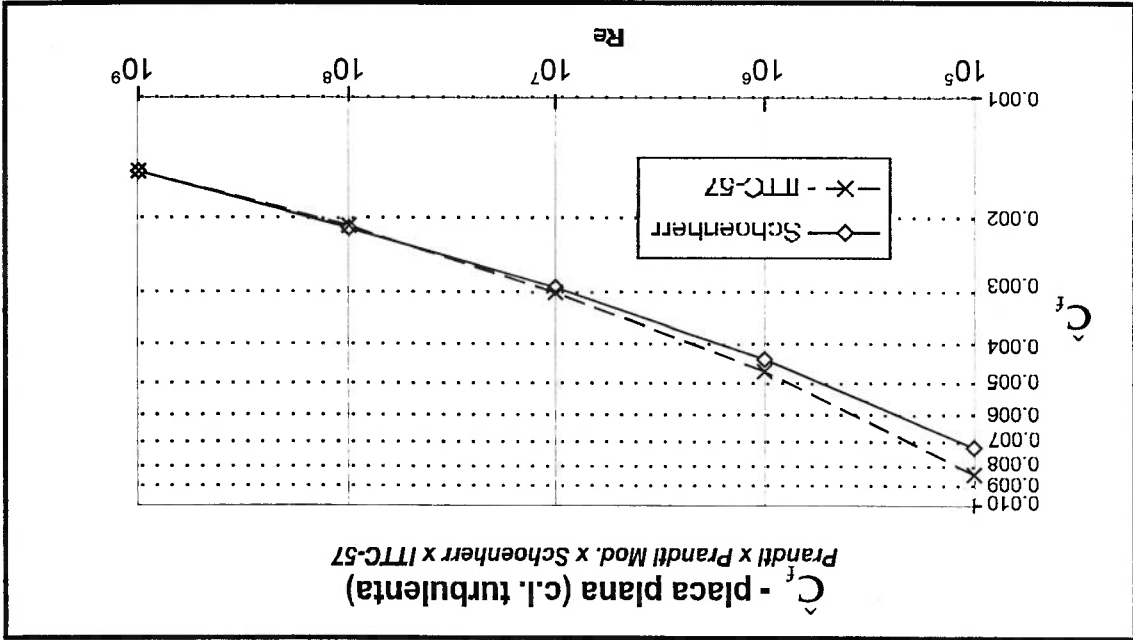


Figura 2.13 -  $C_f(Re)$  - placa plana lisa, regime turbulento; Schoenherr x ITTC-57

Observa-se aderência melhor com os resultados de Schoenherr que a expressão anterior, de Prandtl e Von-Karman, principalmente na faixa de Reynolds da escala real. Essa expressão alia, portanto, a simplicidade de aplicação à aderência com os resultados experimentais e será adotada no presente modelo<sup>15</sup>.

Como comentário final à discussão sobre a expressão de  $C_f(Re)$ , vale apontar que essa diferença entre as expressões simplificadas para determinação do coeficiente de arrasto de fricção indica que a parcela de força de arrasto de origem friccional é maior no modelo que na escala real. Portanto, na extrapolação de resultados experimentais para a escala real, essa correção deve ser levada em conta, o que não é feito nas curvas levantadas pelo MARIN para Wichers ou para a OCIMF [3] e [4]. Portanto, o emprego direto dessas curvas em projeto, resultará num superdimensionamento das forças de arrasto friccional para pequenos ângulos de ataque, onde o arrasto friccional predomina.

Das expressões 2.19 a e 2.19b, observa-se que falta ainda determinar a parcela do arrasto de forma para  $\alpha = 0$ .

Supondo que  $C_{1c}(0)$  e  $C_f(Re)$  dependam do número de Reynolds da mesma maneira:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{1c}(Re) = K_{1c} \cdot Re^\lambda; \\ C_f(Re) = K_f \cdot Re^\lambda. \end{array} \right. \Leftrightarrow \frac{C_{1c}(Re)}{K_{1c}} = \frac{C_f(Re)}{K_f} = (1+k), \text{ relação independente de } Re,$$

e, então, voltando à expressão 2.19b:

$$C_{1c}(Re) = C_f(Re) + C_p(Re) = C_f(Re) \cdot (1+k), \quad (2.23)$$

onde  $k$  é o "fator de forma" do navio.

<sup>15</sup> Pode-se, alternativamente, adotar duas expressões distintas para o cálculo da força de arrasto longitudinal, uma na escala do modelo e a outra para a escala real. Nesse caso, a sugestão seria de usar a expressão original de Prandtl e Von-Karman para a escala do modelo e uma expressão modificada, para a escala real (a aderência com a curva de Schoenherr na escala real é excelente):

$$C_f = \frac{0,028}{S} Re_{0,14}^{1,4}; \text{ (escala real)}$$

Essa suposição não contraria resultados experimentais de tanques de provas, consubstanciados em curvas-padrão por organismos internacionais, as quais são utilizadas pela indústria naval (ver, por exemplo, [5], capítulo 2). À luz dessa suposição, a força de arrasto total para  $\alpha = 0$  difere do arrasto friccional de um "fator de forma", dependendo, como o próprio nome diz, da geometria da embarcação. Esse fator de forma independe do número de Reynolds, estando, portanto, automaticamente determinado para a escala real através do ensaio com modelo reduzido.

Dentre os resultados experimentais publicados na literatura, as curvas de comparação entre modelo e escala real levantadas em 1951 para o navio "Lucy Ashton" (figura 2.14) ilustram e sustentam bastante bem a suposição proposta, sendo o coeficiente de arrasto de forma (ou de pressão) a diferença entre a linha de Schoenherr e a primeira linha experimental dos modelos, conforme indicado (a indicação não faz parte da figura original, tendo sido introduzida para esse trabalho).

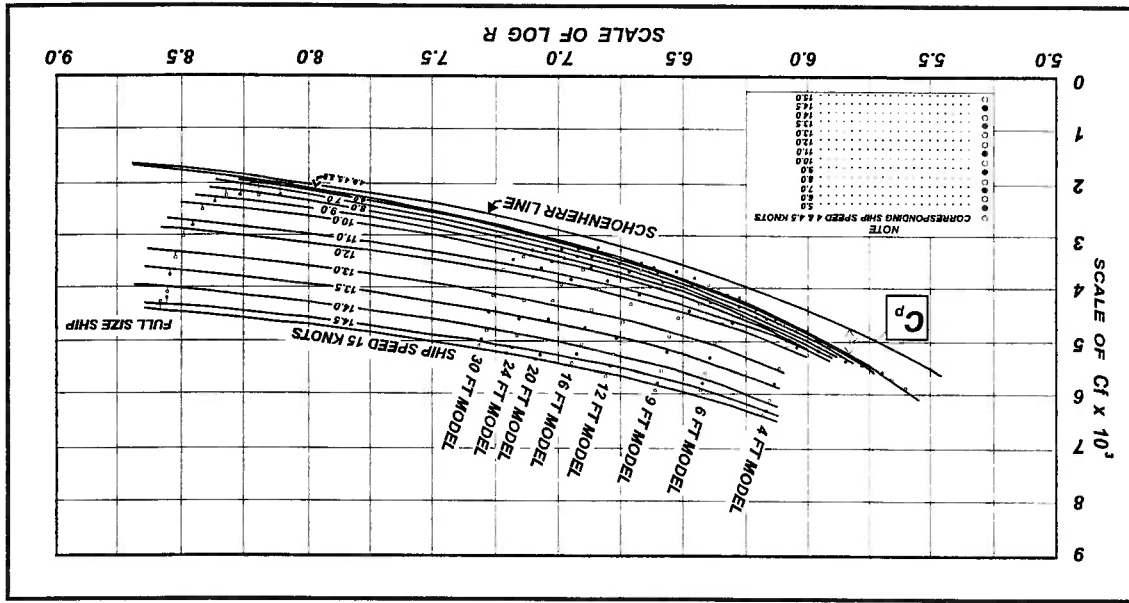


Figura 2.14 - Curvas experimentais - modelos x escala real para o "Lucy Ashton"

Existem alguns métodos empíricos para determinação do fator de forma, sendo, talvez, um dos mais conhecidos, o de Holtrop [9], baseado em regressões feitas sobre um universo bastante grande e variado de modelos de navio ensaiados no tanque de provas do MARIN, em Wageningen, Holanda.

Para petroleiros, cuja forma tende a fornecer fatores de forma mais elevados que cargueiros comuns, navios de passageiros, etc., pode-se utilizar a curva de  $C_{Xc}$  OCIMF [4], para  $WD/T(100\%) \geq 4.4$ , tomando os valores para  $\theta_c = 0$  e  $\theta_c = 180^\circ$ , correspondentes a  $C_{1c}(0)$  e  $C_{1c}(180)$ , respectivamente<sup>16,17</sup>

$$C_{1c}(0) = 0.036; \quad (\text{corrente incidindo pela popa, escala do modelo})$$

$$C_{1c}(180) = 0.032. \quad (\text{corrente incidindo pela proa, escala do modelo})$$

Esses coeficientes coincidem com os valores publicados por Wichers em sua tese de doutorado [3], obtidos para o modelo de um petroleiro de 200 mil Dwt, o qual faz parte do grupo de embarcações ensaiadas para a confecção do relatório final da OCIMF. As características principais do navio de ensaiado por Wichers são (escala real):

Comprimento:  $L=310.0$  m ;

Boca:  $B=47.2$  m ;

Calado  $T=18.9$  m ;

Volume deslocado:  $\Delta=234994$  m<sup>3</sup> ;

Área molhada:  $S=22804$  m<sup>2</sup> ;

Fator de escala do modelo do navio:  $\lambda=82.5$ .

As medições de força foram realizadas por Wichers para uma velocidade de corrente em escala real de aproximadamente 1.0 m/s, correspondendo, portanto, a  $(v \approx 1.1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s})$ :

$$Re_{\text{modelo}} = 3.7 \cdot 10^5,$$

e:

$$Re_{\text{real}} = 2.8 \cdot 10^8.$$

<sup>16</sup> Não é aplicada nenhuma correção em  $C_{Xc}$  devido à escala. Os valores lidos, portanto, valem para a escala do modelo.

<sup>17</sup> Os coeficientes são adimensionalizados por  $\frac{1}{2}\rho U^2 L T$  estando, portanto, consistentes com os valores adotados no presente trabalho.

Portanto, para essa embarcação temos, na escala do modelo:

$$C_r = \frac{0.075}{S} \frac{(\log(\text{Re}) - 2)^2}{\text{TL}} = \frac{(\log(3.7 \cdot 10^5) - 2)^2 \cdot 18.9 \cdot 310}{0.075 \cdot 22804} = 0.0229,$$

e, para a escala real:

$$C_r = \frac{0.075}{S} \frac{(\log(\text{Re}) - 2)^2}{\text{TL}} = \frac{(\log(2.8 \cdot 10^8) - 2)^2 \cdot 18.9 \cdot 310}{0.075 \cdot 22804} = 0.0070.$$

Tomando um valor de  $C_{lc}$  de 0.032 (valor obtido para incidência pela proa, na

escala do modelo), temos a seguinte relação, válida para modelo ou escala real:

$$\frac{C_{lc}}{C_r} = (1+k) = \frac{0.0320}{0.0229} \cong 1.39,$$

ou seja, um fator de forma,  $k = 0.39$ .

Substituindo o valor acima em 2.19a, teremos, para qualquer escala:

$$C_{lc}(\alpha) = C_{lc}(0) \cos\alpha |\cos\alpha| + \frac{\pi L}{8} [\cos(3\alpha) - \cos\alpha] =$$

$$= \frac{0.075}{S} \frac{(\log(\text{Re}) - 2)^2}{\text{TL}} \cdot 1.39 \cdot \cos(\alpha) |\cos\alpha| + \frac{\pi L}{8} [\cos(3\alpha) - \cos(\alpha)]$$

ou seja:

$$C_{lc}(\alpha) = \frac{0.104}{S} \frac{(\log(\text{Re}) - 2)^2}{\text{TL}} \cos(\alpha) |\cos\alpha| + \frac{\pi L}{8} [\cos(3\alpha) - \cos(\alpha)] \quad (2.24)$$



Para obtenção da força  $F_x(\alpha)$  basta, de acordo com a expressão 2.7, fazer:

$$X(\alpha) = \frac{1}{2} C_{lc}(\alpha) \rho T L U^2.$$

As comparações entre os resultados fornecidos pela expressão 2.24 e os obtidos por ensaio com modelo cativo são apresentadas no item 2.3.

## 2.2.2.2 - COMPONENTE TRANSVERSAL DA FORÇA DE ARRASTO, OU FORÇA

TRANSVERSAL -  $Y(\alpha)$  :

Para a componente transversal da força, a faixa angular de interesse se amplia. Quando  $\alpha$  é próximo de 0 (ou  $\pi$ ),  $Y(\alpha)$  advirá principalmente do efeito de asa, enquanto que, quando  $\alpha$  ultrapassa o ângulo de stall e se aproxima de  $\pi/2$ , há uma queda abrupta na força de sustentação devido à separação da camada limite com consequente aumento do arrasto de forma, e  $Y(\alpha)$  se deverá a esse novo mecanismo.

O modelo físico adotado aqui será, portanto, o mesmo utilizado para  $X(\alpha)$ , ou seja,  $Y(\alpha)$  é decomposta em uma parcela de asa e uma parcela de arrasto, sendo essa última, predominantemente de forma, força inercial de origem viscosa, consequência da separação da camada limite. Aqui, portanto, ao contrário do que foi feito para  $X(\alpha)$ , onde  $C_p(\text{Re}) \equiv O(C_f(\text{Re}))$ , ocorre o inverso. Ao determinar  $Y(\alpha)$ , a parcela friccional,  $C_f(\text{Re})$ , pode ser desprezada, pois para pequenos ângulos de ataque, onde ainda não ocorreu separação da camada limite, sua componente na direção  $y$  é muito pequena,  $C_f \text{ sen}(\alpha) \equiv C_f \alpha$ ;  $C_f \alpha \ll 1$ ;  $\alpha \ll 1$ , enquanto que, quando  $\alpha >$  ângulo de stall, a camada limite se separa do corpo e, consequentemente,  $C_p \equiv O(1) \gg C_f(\text{Re})$ .<sup>18</sup>

Podemos, então, escrever:

$$Y(\alpha) = Y_{\text{visc}}(\alpha) + Y_{\text{asa}}(\alpha), \quad (2.25a)$$

<sup>18</sup> Aqui  $C_p$  independe de Reynolds, uma vez que o ponto de separação da camada limite é determinado, praticamente apenas pelo formato do casco (o paradigma é o caso do disco circular, ver figura 2.4).

onde:

$Y^{\text{visc}}(\alpha)$  = força de arrasto viscoso na direção longitudinal;

$Y^{\text{asa}}(\alpha)$  = componente longitudinal das forças devido ao efeito de asa do navio (ver

figura 2.9),

ou, adimensionalizando a força por  $\frac{1}{2}\rho U^2 L T$ :

$$C_{z_c}(\alpha) = C_{z_{c,v}}(\alpha) + C_{z_{c,a}}(\alpha). \quad (2.25b)$$

A parcela viscosa, agora momentaneamente de forma, pode ser obtida de forma análoga à anterior. Mais uma vez, decompondo a velocidade da corrente:

$$\vec{U} = U \cos \alpha \vec{i} + U \sin \alpha \vec{j},$$

nesse caso, a suposição é a de que o arrasto viscoso na direção transversal seja causado exclusivamente pela componente transversal da velocidade da corrente,  $U \sin \alpha$ . Essa condição é clássica na literatura (ver, por exemplo, [10]) conhecida como *cross-flow*.

A condição de *cross-flow* enuncia que:

1. A separação da camada limite na direção transversal do navio ocorre devido exclusivamente à componente transversal do escoamento (*flow*), ou correnteza, que o atinge;
2. A componente longitudinal do escoamento (ou correnteza) não influencia as forças transversais;
3. As forças transversais atuantes sobre o casco são oriundas dos efeitos de forma

(separação de camada limite com criação de vórtices).

Em outras palavras, a condição de *cross-flow* se refere ao caso onde a corrente incide com ângulo  $\alpha$  sobre um corpo cilíndrico infinitamente longo, como ilustra a figura 2.15.

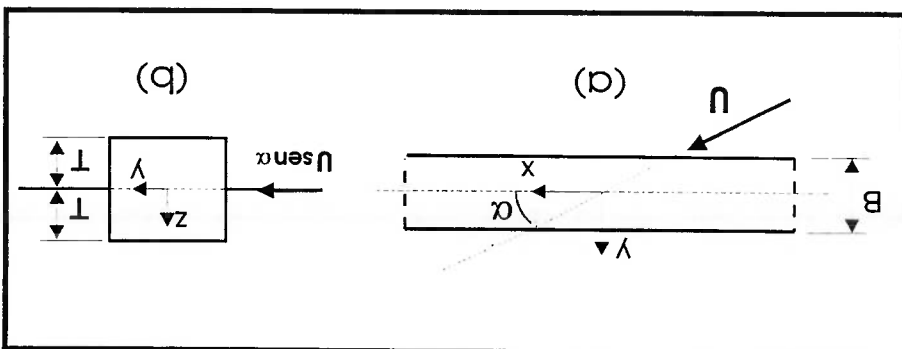


Figura 2.15 - Cross-flow

Para o corpo infinitamente longo, a distribuição de velocidade do fluido e de pressão sobre o casco na direção  $x$  não varia, ou seja, é a mesma em qualquer ponto ao longo do seu comprimento, o que, expresso matematicamente, nos dá as seguintes relações para o campo de velocidades,  $\vec{u} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$ , e de pressão,  $p$ , do fluido num volume de controle ao redor do corpo:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \quad e \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \end{aligned} \right.$$

As equações de campo (Navier-Stokes + continuidade), se reduzem a:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \\ \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + w \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \\ \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \\ \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \right). \end{aligned} \right.$$

com as seguintes condições de contorno:

$$\begin{cases} \left( \bar{u} \bar{i} + \bar{v} \bar{j} + \bar{w} \bar{k} \right)_{\text{corpo}} = \bar{0}; \\ \left( \bar{u} \bar{i} + \bar{v} \bar{j} + \bar{w} \bar{k} \right) \rightarrow U \cos \alpha \bar{i} + U \sin \alpha \bar{j} \text{ no } \infty. \end{cases}$$

Das equações de campo pode-se perceber que o gradiente de pressão sobre o corpo, que origina as forças de arrasto, é definido exclusivamente pelo perfil de velocidades no plano transversal (direções  $y$  e  $z$ ). O perfil de velocidades na direção longitudinal, está desacoplado dos perfis de velocidades transversal e vertical, não havendo, portanto, interferências entre eles. O problema se resume ao caso bidimensional (figura 2.15-b), onde tudo se passa como se sobre o corpo incidisse uma corrente lateral de velocidade  $U \sin \alpha$ .

É claro que para o navio essa premissa não é de todo correta e tanto mais se aproxima da realidade quanto maior for sua razão  $L/B$ .<sup>19</sup> Por outro lado, as discrepâncias serão maiores nas regiões de popa e proa, onde o efeito da tridimensionalidade é mais pronunciado.

Garantidos, portanto pela suposição do *cross-flow*, temos:

$$Y^{\text{visc}}(\alpha) = \frac{1}{2} \rho C_{z_c} \left( \frac{\pi}{2} \right) L T U^2 \sin \alpha,$$

onde:

$$C_{z_c} \left( \frac{\pi}{2} \right) = \text{coeficiente de arrasto transversal do navio, para corrente de través } \left( \alpha = \frac{\pi}{2} \right).$$

Ou, preservando o sinal da função  $\sin \alpha$  de modo que a expressão seja válida para  $-2\pi \leq \alpha \leq 2\pi$ :

$$Y^{\text{visc}}(\alpha) = \frac{1}{2} \rho C_{z_c} \left( \frac{\pi}{2} \right) L T U^2 \sin \alpha \quad (2.26a)$$

<sup>19</sup> Para petroleiros,  $L/B \gg 1$ , o que justifica a premissa do *cross-flow*.

Em termos adimensionais:

$$C_{z_c, v}(\alpha) = C_{z_c}(\pi/2) \text{sen} \alpha | \text{sen} \alpha|. \quad (2.26b)$$

Analogamente ao caso longitudinal, a parcela de asa será desenvolvida com base na teoria de Jones, para asa curta, só que agora acrescida de um fator de correção obtido do trabalho de Clarke et. al. [7].

Pode-se, aqui, desenvolver segunda parcela da expressão 2.25b, periódica, em série de Fourier, de maneira análoga ao que foi feito para a força longitudinal, resultando a seguinte expressão:

$$C_{z_c}(\alpha) = C_{z_c}(\pi/2) \text{sen}(\alpha) | \text{sen} \alpha | - \frac{8L}{\pi T} [\text{sen}(3\alpha) + \text{sen}(\alpha)], \quad (2.27a)$$

ou, com o coeficiente de correção de Clarke:

$$C_{z_c}(\alpha) = C_{z_c}(\pi/2) \text{sen}(\alpha) | \text{sen} \alpha | - \frac{8L}{\pi T} \left( 1 + 0.4 \frac{C_B}{C_T} \right) [\text{sen}(3\alpha) + \text{sen}(\alpha)]. \quad (2.27b)$$

Essa abordagem, porém, não é interessante para o estudo da bifurcação do equilíbrio, uma vez que, para esse estudo, é interessante mantermos os termos quadráticos e cúbicos em  $\alpha$  para que esses termos sejam introduzidos na equação do movimento do SPM-turret do ensaio de estabilidade direcional. F a partir desses termos não lineares, presentes tanto na expressão da força transversal quanto na do momento de yaw, que um cenário de bifurcação se faz possível<sup>20</sup>

Os termos não-lineares em  $\alpha$  surgem naturalmente sob a ótica da teoria de asa de pequena razão de aspecto utilizando as expressões 2.13a e 2.13b. Tomando, agora, as componentes transversais das forças de sustentação e de arrasto induzido, temos:

$$Y_{asa}(\alpha) = F_l(\alpha) \text{sen} \alpha + F_d(\alpha) \text{cos} \alpha, \quad (2.28a)$$

<sup>20</sup> O balanço do momento no plano horizontal para o qual contribuem a força transversal e o momento de yaw (ver capítulo 3) representa termo de restauração angular na equação do movimento do SPM-turret em ensaio de estabilidade direcional. Sua não-linearidade, portanto, implica na existência de outras possíveis de equilíbrio do sistema além do ângulo zero (vide equação de Duffing).

ou, em termos adimensionais:

$$C_{z_{ca}}(\alpha) = C_I(\alpha) \operatorname{sen} \alpha + C_I'(\alpha) \cos \alpha. \quad (2.28b)$$

Para que a expressão valha para  $-2\pi \leq \alpha \leq 2\pi$ , temos:

$$C_{z_{ca}}(\alpha) = C_I(\alpha) \operatorname{sen} \alpha + C_I'(\alpha) |\cos \alpha|, \quad (2.28c)$$

que, substituindo  $C_I(\alpha)$  e  $C_I'(\alpha)$  pelas expressões da teoria de asa, toma a forma:

$$C_{z_{ca}}(\alpha) = \frac{\pi A}{2} \left( \frac{\operatorname{sen}^3 \alpha}{2} + \operatorname{sen} \alpha |\cos \alpha| \right). \quad (2.28d)$$

Voltando, finalmente, a 2.25b com os valores dados pelas expressões 2.26b e

2.28d, temos:

$$C_{z_c}(\alpha) = C_{z_{ca}}(\alpha) = \frac{\pi A}{2} \left( \frac{\operatorname{sen}^3 \alpha}{2} + \operatorname{sen} \alpha |\cos \alpha| \right), \quad (2.29a)$$

ou, em termos das dimensões do navio:

$$C_{z_c}(\alpha) = C_{z_{ca}}(\alpha) = \frac{\pi}{2} \left( \frac{\operatorname{sen}^3 \alpha}{2} + \operatorname{sen} \alpha |\cos \alpha| \right). \quad (2.29b)$$

A segunda parcela da expressão acima independe do cosseno e, portanto, não tenderá a zero quando  $\alpha \approx \pi/2$ . Quando  $\alpha = \pi/2$ , ela fornecerá:

$$C_{z_c}(\alpha = \pi/2) = C_{z_{ca}}(\pi/2) = \frac{\pi T}{2L}.$$

o que, obviamente é **incorreto**. Porém, podemos introduzir uma parcela de correção, e a expressão se torna:

$$C_{2c}(\alpha) = \left[ C_{2c} \left( \frac{\pi}{2} \right) - \frac{\pi T}{2L} \left[ \text{sen} \alpha |\text{sen} \alpha| + \frac{\pi T}{2L} \text{sen}^3 \alpha + \frac{\pi T}{L} \text{sen} \alpha |\cos \alpha| \right] \right] \quad (2.29c)$$

Como já mencionado, 2.29 compara o navio a uma placa plana (asa curta plana) e, pode-se introduzir o fator de correção proposto por Clarke [7]<sup>21</sup> na parcela de asa da expressão para levar em conta a geometria do casco.

Segundo Clarke:

$$-\frac{C_B}{C_{2c}} \left( \frac{L}{T} \right)^2 = 1 + 0.4 \frac{T}{L}; \quad (\alpha \approx \pi)$$

onde:

$$Y_v' = \frac{Y_v}{Y_v} \left( \frac{1}{2} \rho L T U^2 \right),$$

e, segundo a notação do presente trabalho:

$$Y_v = \frac{1}{2} \rho L T U^2 \frac{\partial C_{2c}(v_m)}{\partial v_m},$$

onde:

$v_m$  = velocidade do navio em relação ao meio na sua direção transversal.

<sup>21</sup> Como as derivadas obtidas por Clarke são lineares, o limite de validade de suas expressões é pequeno, ou seja, para  $\alpha \approx \pi$  (ou, estendendo o resultado para incidência de popa,  $\alpha \approx 0$ ).

No ensaio de modelo cativo:

$$v_m = -U \operatorname{sen} \alpha ;$$

Usando a regra da cadeia, temos:

$$\frac{\partial C_{z_c}(v_m)}{\partial v_m} = \frac{\partial C_{z_c}(\alpha)}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial v_m} = \frac{1}{U \operatorname{cos} \alpha} \frac{\partial C_{z_c}(\alpha)}{\partial \alpha},$$

obtido, no final:

$$\frac{\partial C_{z_c}(\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\pi T}{L} \left( 1 + 0.4 \frac{C_B}{C_B T} \right) |\operatorname{cos} \alpha| ; (\alpha \approx \pi),$$

o que implica em:

$$C_{z_c}(\alpha) \equiv \frac{\pi T}{L} \left( 1 + 0.4 \frac{C_B}{C_B T} \right) \cdot \operatorname{sen} \alpha ; (\alpha \approx \pi),$$

ou, sem alterar a expressão no seu limite de validade porém generalizando para que a correção tenda a zero, juntamente com o coeficiente de sustentação,  $C_l$ , em torno de

$$\alpha \approx \pi/2 :$$

$$C_{z_c}(\alpha) \equiv \frac{\pi T}{L} \left( 1 + 0.4 \frac{C_B}{C_B T} \right) \cdot \operatorname{sen} \alpha |\operatorname{cos} \alpha| ; (\pi - \alpha \ll 1) \text{ ou } (\alpha \ll 1).$$

De acordo com os resultados analisados por Clarke, portanto, quando o ângulo de incidência (ou, no caso de manobra, ângulo de ataque) em relação ao eixo

<sup>22</sup> Aqui usa-se  $|\operatorname{cos} \alpha|$  para dar conta da inversão de sinal do cosseno, uma vez que Clarke trabalha com ângulos de ataque do navio,  $\psi = \pi - \alpha$ .



longitudinal do navio é pequeno, o coeficiente de força transversal tende ao fornecido pela expressão acima.

Utilizando esse resultado diretamente em 2.29c, temos:

$$C_{z_c}(\alpha) = \left[ C_{z_c}(\pi/2) - \frac{\pi T}{2L} \left[ \text{sen} \alpha |\text{sen} \alpha| + \frac{\pi T}{2L} \text{sen}^3 \alpha + \frac{L}{\pi T} \left( 1 + 0.4 \frac{T}{C_B} \right) \text{sen} \alpha |\cos \alpha| \right] \right]$$

.....(2.29d)

Pode-se observar que a expressão 2.29d tenderá à expressão sugerida por Clarke quando o ângulo de incidência for pequeno, uma vez que as duas primeiras parcelas, dependentes do ângulo ao quadrado e ao cubo<sup>23</sup>, irão para zero mais rapidamente que a terceira parcela.

A determinação do coeficiente  $C_{z_c}(\pi/2)$  deve, de preferência, ser feita diretamente a partir de resultados experimentais para o navio analisado. Caso esses resultados não estejam disponíveis, pode-se, a partir de resultados experimentais bidimensionais ou mesmo de resultados para algum navio semelhante, estimar  $C_{z_c}(\pi/2)$  para o navio analisado.

Aranha [1], propõe a utilização de  $C_{z_c}(\pi/2)$ , a partir da curva experimental publicada por Hoerner [11] para escoamento bidimensional e seção transversal com bordo de ataque arredondado (fig. 2.16). A figura 2.17, também extraída do trabalho de Hoerner, ilustra a influência do raio de adocamento do bojo ( $r_c$ ) no coeficiente de arrasto, predominantemente de forma.<sup>24</sup>

<sup>23</sup>  $\text{sen} \alpha \approx \alpha$ .

<sup>24</sup> Faltnsen [15], ao tratar de navios petroleiros, sugere que a razão B/T praticamente não inclui no coeficiente de arrasto lateral, enquanto que a razão  $r_c/T$  influencia de maneira exponencial. Isso não é exatamente o que mostra as curvas de Hoerner e também não foi evidenciado pelos resultados de modelo cativo disponíveis. Uma série de ensaios bidimensionais em túnel de cavitação estão sendo realizados no IPT visando levantar novas curvas de arrasto lateral em função de B/T e  $r_c/T$ .

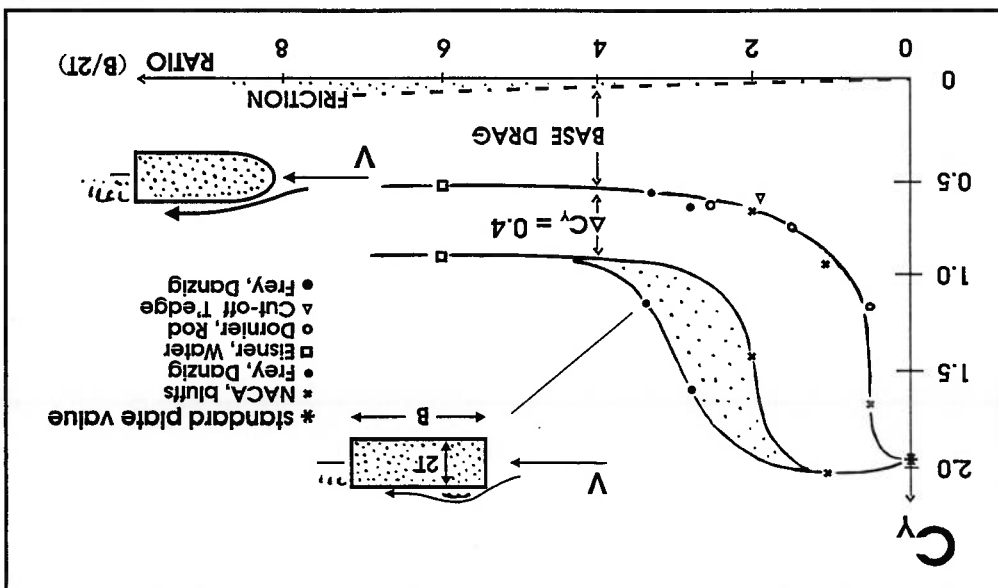


Figura 2.16 -  $C_y$  bidimensional

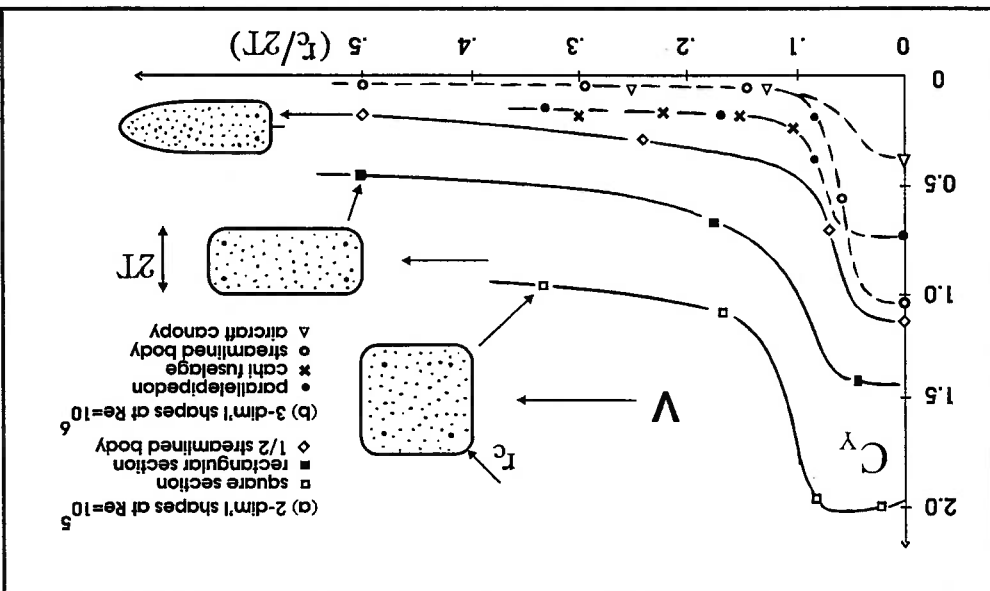


Figura 2.17 -  $C_y$  bidimensional (efeito do raio de adocamento)

Num navio, a geometria da seção transversal varia ao longo do comprimento, com exceção do trecho correspondente ao corpo paralelo médio. Portanto, a rigor, o valor do coeficiente de arrasto,  $C_{2^e}(\pi/2)$ , seria dado por:

$$C_{2c}(\pi/2) = \frac{1}{l} \int_l T(x) \cdot C_Y(x) dx \quad (2.30a)$$

A figura 2.18 ilustra o que seria o escoamento bidimensional, pressuposto na condição de *cross-flow*, para o qual a expressão 2.30 seria exata. Pode-se ver que a suposição do *cross-flow* implica em que o fluido contorne o corpo exclusivamente no plano transversal.

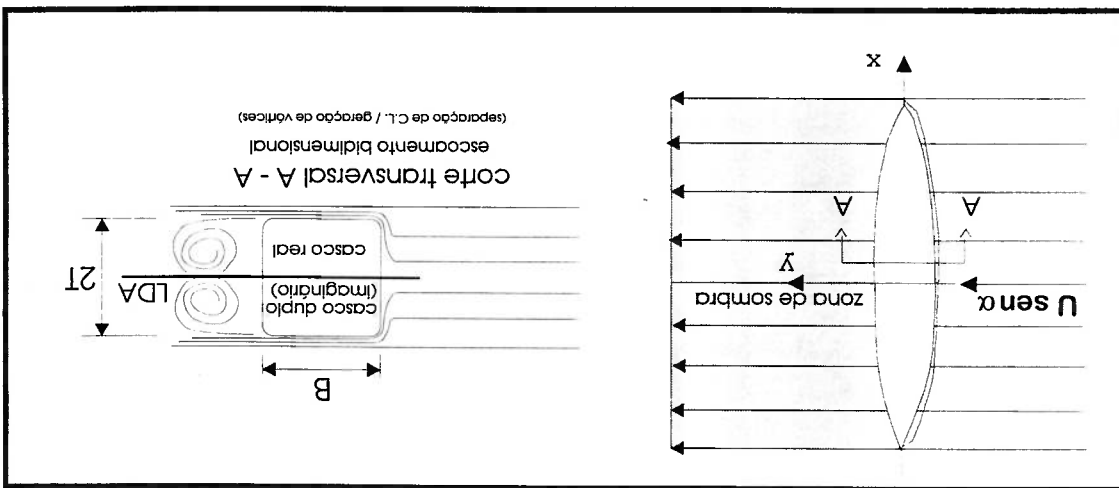


Figura 2.18 - Padrão de escoamento bidimensional

Mesmo intuitivamente pode-se observar que, quanto maior a razão L/B do casco, mais próximo do bidimensional será o padrão de escoamento do fluido ao contorná-lo. Espera-se, também, que a razão L/T tenha alguma influência nesse aspecto, de modo que, se ela for suficientemente alta, mesmo que a razão L/B não o seja, o padrão poderá tender ao caso bidimensional<sup>25</sup>.

No caso real, devido à tridimensionalidade do escoamento, mais presente nas extremidades do navio, seu coeficiente de arrasto lateral,  $C_{2c}(\pi/2)$ , tenderá a ser menor que o valor determinado pelo método bidimensional. Faltinsen [10] sugere a utilização de um fator de redução,  $f(x) \leq 1$ , a ser aplicado à expressão 2.30a, de modo que:

<sup>25</sup> Em particular, para um dado casco, pode-se esperar que o caso a 40% do calado, apresente um padrão de escoamento mais próximo do bidimensional que o caso 100% carregado, de maior calado.

$$C_{z_c}(\pi/2) = \frac{1}{L} \int_0^L T(x) \cdot C_y(x) \cdot f(x) dx \quad (2.30b)$$

Para uso prático, o melhor é dispor de resultados de ensaios e, quando isso não é possível, pode-se utilizar algum tipo de aproximação para a determinação de  $C_{z_c}(\pi/2)$ . A expressão 2.30 não é realmente o que se pode chamar de prática: de maneira geral, não se dispõe dos coeficientes  $C_y(x)$  para todos os tipos de seção, o fator de correção  $f(x)$ , também não é figura fácil, além de que, ao cabo, o resultado continuará sendo aproximado...

Desta forma, como alternativa aos resultados experimentais, o ideal é que  $C_{z_c}(\pi/2)$  para um determinado casco possa ser extrapolado de resultados disponíveis para outro(s) casco(s), apenas com base nas diferenças entre suas dimensões principais. Uma metodologia para esse procedimento, usando como base as curvas publicadas por Hoerner, conforme sugerido por Aranha, porém propondo correções a partir de algumas relações dimensionais do casco será apresentada a seguir:<sup>26</sup>

Ao invés de imaginar todo o escoamento como bidimensional, pode-se considerar que apenas parte dele o seja, na região de meia-nau do navio enquanto que, nas suas extremidades é tridimensional. A extensão do casco onde o escoamento pode ser considerado bidimensional será, segundo essa ótica, tanto maior quanto mais longo seja seu corpo paralelo médio. Por outro lado, quanto maior o comprimento do corpo paralelo médio em relação ao comprimento do navio ( $L_{pm}/L$ ), mais abruptas serão as curvaturas do casco nas regiões de proa e popa, aumentando o efeito tridimensional das extremidades. Esse efeito pode ser avaliado através da própria relação entre comprimentos, como também, de maneira mais abrangente, pelos coeficientes prismáticos dos navios, dos quais, o mais adequado é o coeficiente prismático longitudinal,  $C_{pl}$ . Pode-se então, com base nesses adimensionais, avaliar e classificar os navios em grupos considerados passíveis de correlação entre seus respectivos

<sup>26</sup> O procedimento se baseia em apenas 3 resultados experimentais disponíveis, 2 obtidos pelo IPT e 1 pelo MARIN, o que limita seu espectro de aplicação confiável. Pode-se, porém, adaptá-lo a medida que novos resultados forem sendo obtidos, não só com relação aos coeficientes utilizados nas expressões propostas, mas também com relação às funções que descrevem a dependência do coeficiente de arrasto lateral das variáveis eleitas.

coeficientes de arrasto laterais e, por consequência, extrapolar resultados apenas com base em suas características transversais.

A tabela 2.3, abaixo, apresenta os valores de  $C_{pl}$  e  $L_{cpm}/L_{27}$  para cascos de petroleiros de diversas tonelagens:

NAVIO (Dwt)	$S_x$ (m <sup>2</sup> )	$\Delta$ (m <sup>3</sup> )	$C_{pl} = \frac{C_{pl}(S_x L_{pp})}{\Delta}$	$\frac{L_{cpm}}{L_{27}}$ (%)
100%	100%	40%	100%	40%
Moraes (55.000)	331.8	23.722	0.824	0.777
Vidal (282.000)	1171.2	312850	114.176	0.835
MARIN (200.000)	894.5	234994	88.956	0.847
Alagoas (29.000)	240.9	33141	0.819	ND
Jurua (132.000)	713.1	152498	0.823	ND
				60.0
				50.0

Tabela 2.3 -  $C_{pl}$  e  $L_{cpm}/L_{27}$

Como se vê na tabela, a máxima diferença entre os coeficientes prismáticos longitudinais ocorre entre o navio do MARIN e o "Alagoas", no caso 100% carregado e, entre o MARIN e o "Vidal", no caso a 40% do calado, sendo de 3,5 e 6,2%, respectivamente. A diferença entre as razões de comprimento é maior, chegando a 15% entre o navio do MARIN e os demais, com exceção do "PP Moraes", no caso 100% carregado e 16% no caso a 40%.

A semelhança geométrica longitudinal entre as embarcações permite classifica-las num mesmo grupo, petroleiros, e, extrapolações entre seus coeficientes de arrasto lateral serão realizadas com base exclusivamente nas suas relações geométricas transversais: a razão de aspecto  $B/2T$  e a razão do raio de adocamento do bojo  $r_c/2T$ .

<sup>27</sup> O valor de  $L_{cpm}/L_{27}$  foi calculado a partir dos planos de balizagem das embarcações, com base em avaliação visual da mudança de geometria das seções transversais em relação à seção mestra e, portanto, não corresponde estritamente ao corpo paralelo médio como esse é formalmente definido. O comprimento  $L_{cpm}$  considerado é o comprimento entre perpendiculares, normalmente publicado como  $L_{pp}$ .

Com base na argumentação acima, propõe-se, como primeira aproximação, que o escoamento seja considerado bidimensional na região do corpo paralelo médio do navio e tridimensional nas extremidades. Dessa forma, propõe-se usar um coeficiente de arrasto extraído da figura 2.16, corrigido por um fator,  $f_p$ , função de  $B/2T$  e de  $r_c/2T$  na região do corpo paralelo e o coeficiente de arrasto 0,2 para o resto do casco.

O uso do coeficiente 0,2 não é de todo arbitrário, uma vez que esse valor corresponde aproximadamente ao valor do coeficiente de arrasto de uma esfera, para  $Re > 10^6$ , coincidindo, também com o coeficiente do paralelepípedo (ver figura 2.17) de cantos arredondados.

A recomendação do uso das curvas da figura 2.16 tampouco é casuística. Poder-se-ia, alternativamente, procurar o coeficiente de arrasto na figura 2.17 cujas curvas para casos bidimensionais se referem a geometrias de certo modo até mais próximas do nosso caso de interesse. Ocorre, porém, que essas curvas foram levantadas para  $Re = 10^5$ , exatamente na região de transição de regime laminar para turbulento e, o bordo de fuga da seção tem cantos arredondados. Sendo assim, não se pode garantir que o ponto de separação da camada limite esteja representando fielmente o que ocorre em escala real, onde o  $Re$  é da ordem de  $10^8$  e a separação não necessariamente ocorrerá na intersecção entre o fundo do navio e o início do raio de adocamento do bojo, no bordo de fuga. Ao mesmo tempo, a razão do raio de adocamento do bojo,  $r_c/2T$ , dos navios se encontra entre 0.05 e 0.10 (ver tabela 2.4), região de grandes variações no coeficiente de arrasto bidimensional,  $C_y$ , como se depreende da figura 2.17. Isso só faz aumentar as incertezas quanto à validade dos números daí obtidos para os casos de interesse. Pode-se, porém, usar essas curvas para comparações entre duas seções de mesma razão de raio de adocamento do bojo e razões de aspectos diferentes.

As curvas da figura 2.16, por outro lado, apesar de não haver referência no texto de Hoerner quanto ao número de Reynolds para o qual as curvas foram levantadas, se referem a seções de bordo de fuga de cantos vivos, garantindo a ocorrência da separação da camada limite sempre no mesmo ponto (quina do bordo de fuga com linha de base). Desta forma, há maior segurança com relação à similaridade entre a separação da camada limite para o modelo e para a escala real.

Das curvas constantes na figura 2.16, a mais recomendável de ser utilizada é, obviamente a curva para seção transversal de cantos arredondados, uma vez que seus resultados não apresentam a mesma dispersão encontrada na curva da seção de cantos vivos na faixa de razão de aspecto de interesse ( $1.0 < B/2T < 4.5$ ).

Com base na proposição apresentada, temos:

$$C_{z_c}(\pi/2) = f(B/2T; r_c/2T),$$

e, explicitando essa dependência em termos de um coeficiente bidimensional,  $C_y$ :

$$C_{z_c}(\pi/2) = \frac{L_{cpm} C_y(B/2T; r_c/2T) + [L - L_{cpm}] 0.2}{L}; \quad (2.31)_{28}$$

que representa uma média ponderada de um coeficiente bidimensional,  $C_y$  (função da razão de aspecto da seção e da razão do raio de adocamento do bojo), e o coeficiente tridimensional, 0,2, onde  $C_y$  pode se escrito em função do coeficiente  $C_y(B/2T; 1)$ , fornecido por Hoerner (figura 2.16) para a seção de cantos arredondados<sup>29</sup>, através da introdução de uma função de correção,  $f_b$ :

$$C_y(B/2T; r_c/2T) = C_y(B/2T; 0.5) \cdot f_b(B/2T; r_c/2T),$$

que substituída em 2.31, fornece:

$$C_{z_c}(\pi/2) = \frac{L_{cpm}}{L} [C_y(B/2T; 0.5) \cdot f_b(B/2T; r_c/2T) - 0.2] + 0.2. \quad (2.32)$$

A tabela 2.4, abaixo, traz as características geométricas dos navios constantes da tabela 2.3, além dos valores de  $C_{z_c}(\pi/2)$  obtidos de ensaios:

<sup>28</sup> É claro que essa ponderação poderia ter sido feita utilizando-se o coeficiente prismático longitudinal,  $C_{pl}$ , ao invés da razão entre os comprimentos,  $L_{cpm}/L$ . Isso, porém, não foi feito pois a razão entre os comprimentos fornece uma visão mais simples do ponto de vista físico, do que se está propondo.

**Tabela 2.4<sup>30</sup> - Características dos petroleiros**

Navio	L (m)	B (m)	T (m)		r <sub>c</sub> (m)	B/2T	r <sub>c</sub> /2T	C <sub>zc</sub> (π/2)				
			100%	40%								
Moraes	231,1	26,0	12,80	5,12	1,5	1,02	2,53	0,06	0,15	1,05 *	0,50 *	ND
Vidal	320,0	54,5	21,57	8,63	3,2	1,26	3,16	0,07	0,19	0,85 *	ND	ND
Marin	310,0	47,2	18,90	7,56	3,5	1,25	3,12	0,09	0,23	0,70 **	0,50 **	ND
Alagoas	168,0	25,6	9,45	3,78	1,7	1,36	3,40	0,09	0,22	ND	ND	ND
Jurua	260,0	44,5	16,10	6,44	2,8	1,38	3,45	0,09	0,22	ND	ND	ND

(\*) Fonte: IPT - [11];

(\*\*) Fonte: Wichers / MARIN - [14]

Podemos, de posse dos valores de  $C_{zc}(\pi/2)$  obtidos dos ensaios, e de

$C_Y(B/2T;0,5)$ , extraídos da figura 2.16, calcular  $f_b$  para o "PP Moraes", "Vidal de

"Negreiros" e para o navio ensaiado por Wichers, no MARIN.

Para esses navios temos, da figura 2.16:

**Tabela 2.5 -  $C_Y(B/2T;1)$**

Navio	$C_Y(B/2T;1)$	
	100%	40%
PP Moraes	0,90	0,61
Vidal de Negreiros	0,82	0,59
MARIN	0,82	0,59

Observa-se, da tabela 2.5, que para o caso 40%, a variação do coeficiente  $C_Y$

entre os cascos de razão de razão de aspecto diferentes é menor que para o caso 100%.

<sup>29</sup> Por não estar explicitado pelo autor, definiremos essa curva, apenas para efeito de nomenclatura, como sendo a de uma seção cuja razão do raio de adocamento do bojo seja igual a meio ( $r_c/2T = 1/2$ ).

<sup>30</sup> Os ensaios cativos no MARIN são realizados com excitadores de turbulência ao longo do bojo do modelo, garantindo, assim, a turbulência da camada limite e, consequentemente, similaridade com a escala real, do seu ponto de separação. Os do IPT não utilizaram esse artifício, o que pode causar distorções entre os resultados obtidos pelas duas instituições. Um estudo sobre a utilização desses excitadores para ensaios cativos está em andamento no IPT, o que pode alterar o procedimento de ensaio adotado hoje e, consequentemente, os resultados. Espera-se que os valores obtidos de  $C_{zc}(\pi/2)$  com o uso desses excitadores possam ser menores que sem o uso. Em se confirmando a expectativa, os valores aqui utilizados e, consequentemente, os coeficientes daí extraídos deverão ser revisados.



Da figura 2.16 percebe-se que o coeficiente de arrasto bidimensional para a seção de cantos arredondados, passa a independe da razão de aspecto para  $B/2T$  maior que aproximadamente 2.5 ( $C_Y(B/2T; 0.5) \approx \text{cte}$ ;  $B/2T > 2.5$ ), o que engloba todos os navios considerados no caso 40%. Ao mesmo tempo, observa-se que o coeficiente de arrasto transversal real,  $C_{2c}(\pi/2)$ , para o caso 40% não varia para dois cascos de razão de raio de adocamento do bojo,  $r_c/2T$ , diferentes entre si. Esses fatos sugerem a adoção de um modelo de correção mais simples, para o caso 40%, do que o proposto inicialmente. Portanto, a dedução da função de correção,  $f_p$ , conforme proposta, será feita apenas para o caso 100%, adotando-se apenas um fator de redução constante para o caso 40%.

- Determinação de  $f_p(B/2T; r_c/2T)$  - caso 100%:

No intuito de simplificar o cálculo de  $f_p$  a razão entre comprimentos,  $L_{cpm}/L$ , será considerada constante para a família de petroleiros. Essa simplificação é consistente com a suposição feita de que a correção a ser aplicada ao coeficiente bidimensional,  $C_Y$ , deve considerar apenas as diferenças nas seções transversais. Para isso, será utilizado o valor médio:

$$\left( \frac{L_{cpm}}{L} \right)_{\text{medio}} = 0,65$$

E a expressão 2.32 fica:

$$C_{2c}(\pi/2) = 0,65 [C_Y \cdot f_p - 0,2] + 0,2; \quad (2.33)$$

Podemos, desta forma, chegar aos valores de  $f_p$ . A tabela 2.6, abaixo, mostra os valores calculados de  $f_p$ :

Navio	$C_Y(B/2T;0,5)$	$C_{z_c}(\pi/2)$	$f_b$
	100%	100%	100%
Moraes	0.90	1.05	1.675
Vidal	0.82	0.84	1.445
MARIN	0.82	0.70	1.182

Tabela 2.6 -  $f_b$

A partir dos valores conhecidos de  $f_b$ , pode-se obtê-lo para os demais navios, a partir de algumas suposições, desde que convenientemente determinados os limites de validade dessas suposições.

Da tabela 2.4, temos que a faixa de interesse da razão do raio de adocamento se situa, aproximadamente:

$$0.05 < r_c / 2T < 0.10. \quad (\text{caso } 100\% \text{ carregado})$$

Nessa faixa, podemos observar da figura 2.17, que o valor da diferença dos valores de  $C_Y$ ,  $\delta C_Y$ , para as seções quadrada ( $B/2T = 1$ ) e retangular ( $B/2T = 2$ )<sup>31</sup> é praticamente constante:

$$\delta C_Y = C_Y(1; r_c / 2T) - C_Y(2; r_c / 2T) \approx \text{cte} \approx 0.7; \quad (0.05 < r_c / 2T < 0.10). \quad (2.34)$$

Sendo assim, podemos supor que os valores de  $\delta C_Y$  para as seções intermediárias ( $1 < B/2T < 2$ ) também obedecem a esse princípio, ou seja, as curvas de  $C_Y$  para essas seções serão paralelas e de espaçamento proporcional à diferença entre as respectivas razões de aspecto. Assumindo linearidade de  $f_b$  na faixa de  $r_c / 2T$  de interesse, podemos plotar as curvas de  $f_b(B/2T; r_c / 2T)$  ou, por conveniência, de  $f_b(B/2T; r_c / T)$ <sup>32</sup>, conforme ilustrado na figura 2.19.

<sup>31</sup> Não consta do trabalho de Hoerner [11], qual o valor de  $B/2T$  para a seção retangular. Pelas proporções do desenho, porém, pode-se inferir o valor 2.  
<sup>32</sup> Hoerner usa a razão  $r_c / 2T$  ao invés de  $r_c / T$ , mais usual e, por isso, adotada aqui. Nessa nova variável o coeficiente de arrasto transversal bi-dimensional para seção de cantos arredondados, se torna  $C_Y(B/2T; 1)$ , ao invés de  $C_Y(B/2T; 0.5)$ .

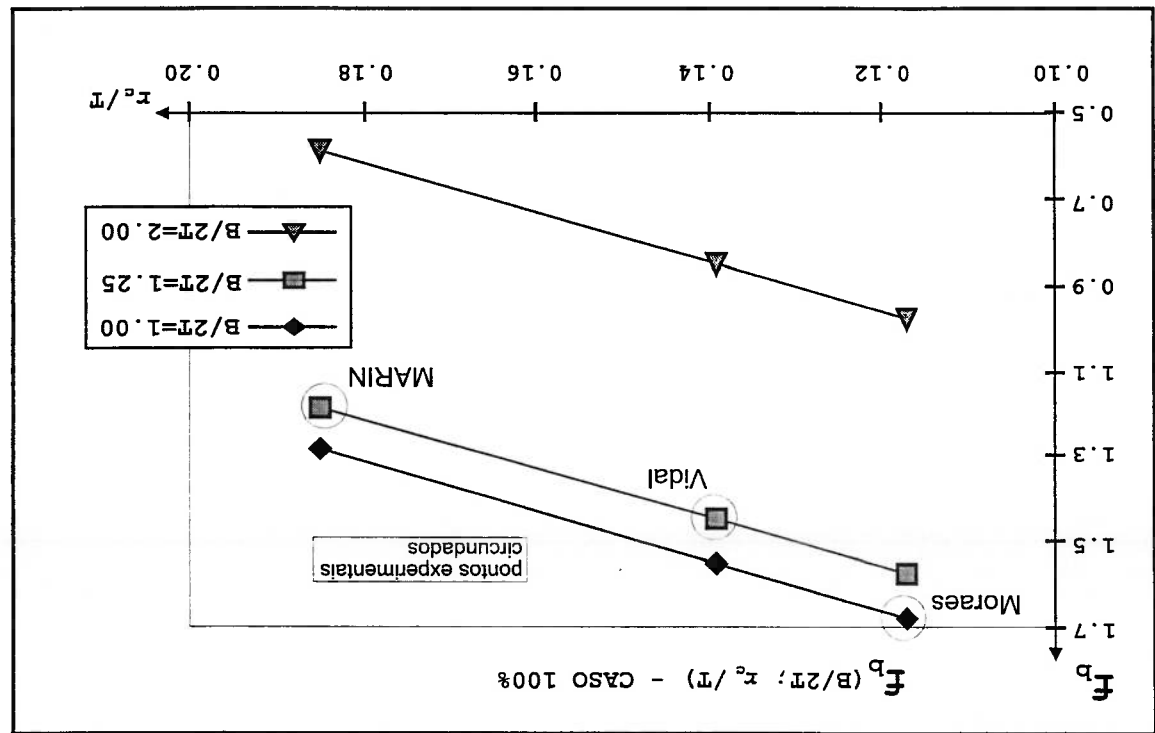


Figura 2.19 -  $F_p(B/2T; x_c/T)$  - caso 100% carregado

Como se observa da figura, os pontos experimentais para o “Vidal de Negreiros” e para o navio ensaiado por Wichers (“MARIN”), ambos de aproximadamente mesma razão de aspecto, definem a função desejada para  $B/2T=1.25$ . A partir dessa reta fica fácil determinar as demais.

Fazendo, para facilitar a notação,

$$\left. \begin{aligned} B/2T &= x; \\ r_c/T &= y, \end{aligned} \right\}$$

temos, expandindo  $F_p$  até primeira ordem:

$$F_p(x; y) \approx F_p(x_0; y_0) + \frac{\partial F_p}{\partial x} \Big|_{(x_0; y_0)} (x - x_0) + \frac{\partial F_p}{\partial y} \Big|_{(x_0; y_0)} (y - y_0); \quad (2.35)$$

Desenvolvendo a função  $f_b$ , em torno do valor calculado, para o "PP Moraes", temos:

$$f_b(x_0; y_0) = f_b(0.117; 1.0) = 1.675;$$

$$\left. \frac{\partial f_b}{\partial x} \right|_{(x_0; y_0)} = \left. \frac{\partial f_b}{\partial x} \right|_{(0.117; 1.0)} = \left. \frac{\partial f_b}{\partial x} \right|_{(0.139; 1.25)}; \quad (\text{paralelismo entre as retas})$$

$$\therefore \left. \frac{\partial f_b}{\partial x} \right|_{(x_0; y_0)} = \frac{f_b(0.185; 1.25) - f_b(0.139; 1.25)}{0.185 - 0.139} = \frac{1.182 - 1.445}{0.185 - 0.139} = -5.717.$$

Também:

$$\left. \frac{\partial f_b}{\partial y} \right|_{(x_0; y_0)} = \left. \frac{\partial f_b}{\partial y} \right|_{(0.117; 1.0)} = \frac{f_b(0.117; 1.25) - f_b(0.117; 1.00)}{1.25 - 1.00} = \frac{1.571 - 1.675}{1.25 - 1.00} = -0.416.$$

Substituindo os valores acima em 2.35, chega-se a:

$$f_b = 1.675 - 5.717(x - 0.117) - 0.416(y - 1.00),$$

<sup>33</sup> Pode-se chegar ao mesmo valor através da relação 2.63, que fornece  $\delta C^y \approx \text{cte} = 0.70$ , sendo  $\delta C^y$  a diferença entre  $C^y$  para  $B/2T = 1$  e  $B/2T = 2$ , e válido para  $r_c/2T < 0.10$ , ou  $0.10 < r_c/2T < 0.20$  - caso 100%. Para  $B/2T = 1$  e  $r_c/T = 0.117$ , temos que  $f_b = 1.675$ ; assim como, para  $B/2T = 1.25$  e  $r_c/T = 0.117$ , temos que  $f_b = 1.571$ , fornecendo uma variação  $\delta f_b = -0.104$ . Por outro lado, a partir da suposição de que  $\delta C^y \approx \text{cte} = 0.70$ , podemos escrever:

$$C^y[B/2T; r_c/T] = 0.70 \cdot (B/2T) - 0.70;$$

e, impondo uma variação de  $f_b$  proporcional à variação de  $C^y$ , temos:

$$\delta f_b = K \cdot \delta C^y \Rightarrow -0.104 = K [C^y(1.25; 0.117) - C^y(1.00; 0.117)] = K \cdot 0.175 \Rightarrow K = -0.594,$$

que, incluído na expressão de  $C^y$ , fornece:

$$\delta f_b = -0.594 [0.70(B/2T) - 0.70] = -0.416(B/2T) + 0.416 = \left. \frac{\partial f_b}{\partial y} \right|_{(x_0; y_0)} (y - y_0).$$

Substituindo essa expressão em 2.34, chega-se, da mesma forma a 2.36. Isso confirma o limite dos valores da razão de aspecto,  $B/2T$ , para os quais a expressão 2.36 é válida, ( $1 < B/2T < 2$ ).

que, desenvolvendo e substituindo x e y, fornece:

$$\left. \begin{aligned}
 F_b &= 2.760 - 5.717(B/2T) - 0.416(r_c/T); \\
 C_{zc}(\pi/2) &= 0.65[C_y(B/2T;1) \cdot F_b - 0.2] + 0.2; \\
 (1 \leq B/2T \leq 2); \\
 (0.10 \leq r_c/T \leq 0.20).
 \end{aligned} \right\} (2.36)$$

A figura 2.20 mostra as curvas da função de correção,  $F_b(B/2T; r_c/T)$ .

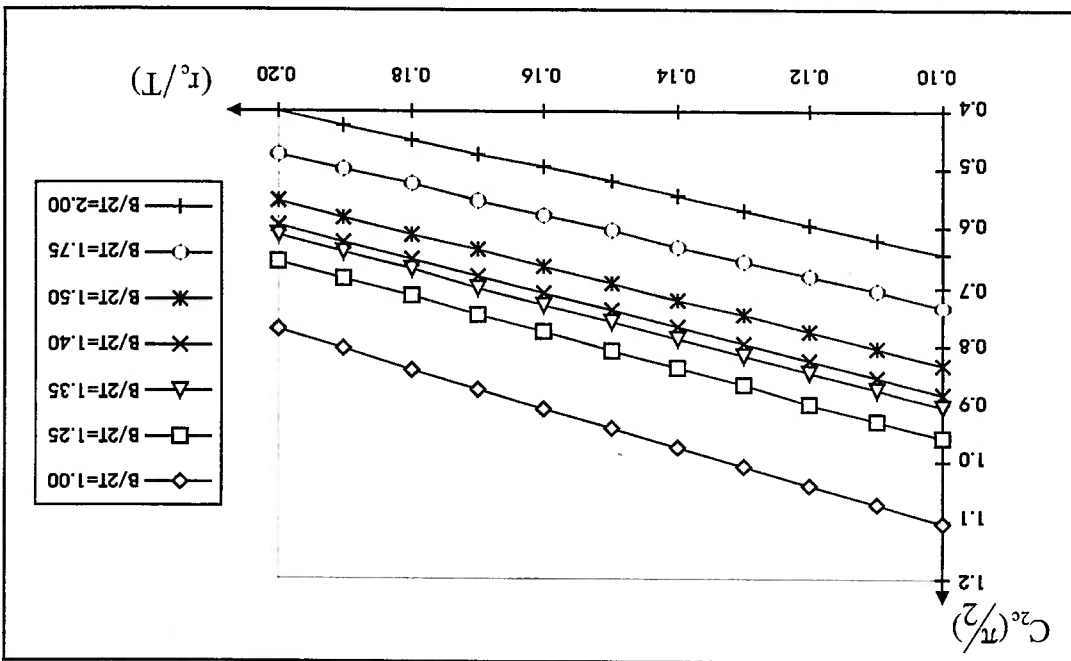


Figura 2.20 -  $C_{zc}(\pi/2)$  em função de  $r_c/T$  e  $B/2T$

- Determinação do fator de correção para o caso 40%:

Qualquer tentativa de se aplicar uma função de correção para o caso 40% com base nos resultados experimentais disponíveis para esse trabalho tentando levar em conta possíveis variações dessa função com a razão do raio de adocamento,  $r_c/T$ , será

frustrada. Afinal, os resultados experimentais para os cascos indicam uma invariância do coeficiente de arrasto transversal nesse calado. A tabela 2.7 traz um resumo das relações geométricas dos navios ensaiados a 40% do calado e do coeficiente de correção,  $f_p$ .

Navio	L/B	L/T	$C_{pi}$	$L^{cpm}/L$	$r_c/T$	B/2T	$f_{34}$	$\hat{f}_p$ (*)
MARIN	6.6	41.0	0.817	0.60	0.46	3.12	1.222	0.85
Moraes	8.9	45.1	0.777	0.60	0.30	2.53	1.263	0.82
	40%	40%	40%	40%	40%	40%	40%	40%

Tabela 2.7 - Características geométricas e  $f_p$  (caso 40%)

(\*) A função  $f_p$  é a razão entre os coeficientes de arrasto transversal tridimensional e bidimensional, ou seja:  $\hat{f}_p = \left[ C_{zc}(\pi/2) / C_y(B/2T; I) \right]$

Como se observa da tabela 2.7, a variação de  $f_p$  e  $\hat{f}_p$  é pequena (~4%) para uma variação de  $r_c/T$  de mais de 50%, indicando uma tendência maior à bidimensionalidade do escoamento para o caso a 40% do calado, talvez devido ao aumento substancial da razão L/T em relação ao caso carregado. Portanto, como fator de correção para o caso 40%, propõe-se uma constante que correlacione a média dos valores obtidos para os coeficientes de arrasto transversal bidimensionais,  $C_y(B/2T; I)$ , constantes da tabela 2.5, com os valores tridimensionais experimentais,  $C_{zc}(\pi/2)$ , de modo que:

$$\left\{ \begin{aligned} f_p &= \frac{0.50}{0.60} = 0.833; \\ C_{zc}(\pi/2) &= C_y(B/2T; I) \cdot f_p; \\ (B/2T \geq 2.5); \\ (0.25 \leq r_c/T \leq 0.50). \end{aligned} \right. \quad (2.37)$$

<sup>34</sup> A função  $f_p$  foi calculada exatamente como para o caso 100%, exceto que com a consideração de que o coeficiente de arrasto transversal bidimensional, nesse caso, independe da razão de aspecto ( $C_y(B/2T; I) \approx cte$ ;  $(B/2T > 2.5)$ ), ou seja, para 40%:  $f_p = f_p(r_c/T)$ .

Finalmente, para obtermos o coeficiente de força transversal como função do ângulo de incidência da correnteza,  $C_{zc}(\alpha_c)$ , retorna-se à expressão 2.29d, repetida abaixo:

$$C_{zc}(\alpha) = \left[ C_{zc} \left( \frac{\pi}{2} \right) - \frac{\pi T}{2L} \left[ \text{sen } \alpha | \text{sen } \alpha | + \frac{\pi T}{2L} \text{sen}^3 \alpha + \frac{L}{\pi T} \left( 1 + 0.4 \frac{C_B}{T} \right) \text{sen } \alpha | \text{cos } \alpha | \right] \right]$$

.....(2.29d)

Substituindo as expressões 2.36, para o caso 100% e 2.37, para o caso 40% em 2.29d, temos:

$$\left. \begin{aligned} C_{zc}(\alpha) &= \left\{ C_Y [1,794 - 3,716(B/2T) - 0,270(r_c/T)] - 1,10 - \frac{\pi T}{2L} \right\} \text{sen } \alpha | \text{sen } \alpha | + \\ &+ \frac{\pi T}{2L} \text{sen}^3 \alpha + \frac{L}{\pi T} \left( 1 + 0.4 \frac{C_B}{T} \right) \text{sen } \alpha | \text{cos } \alpha | \end{aligned} \right\} \begin{aligned} (1 \leq B/2T \leq 2); \\ (0,10 \leq r_c/T \leq 0,20). \end{aligned}$$

..... (caso 100%)..... (2.38)

$$\left. \begin{aligned} C_{zc}(\alpha_c) &= \left( 0,833 C_Y - \frac{\pi T}{2L} \right) \text{sen } \alpha | \text{sen } \alpha | + \frac{\pi T}{2L} \text{sen}^3 \alpha + \frac{L}{\pi T} \left( 1 + 0.4 \frac{C_B}{T} \right) \text{sen } \alpha | \text{cos } \alpha |; \\ &(B/2T \geq 2,5); \\ &(0,25 \leq r_c/T \leq 0,50). \end{aligned} \right\}$$

..... (caso 40%)..... (2.39)

Para obtenção da força  $Y(\alpha)$ , de acordo com a expressão 2.8, basta agora fazer:

$$Y(\alpha) = \frac{1}{2} C_{zc}(\alpha) \rho T L U^2.$$

As comparações entre os resultados fornecidos pela expressões 2.38 e 2.39 e obtidos por ensaio com modelo cativo são apresentadas no item 2.3, onde a validade e escopo de sua aplicação são discutidos.

### 2.2.2.3 - MOMENTO NO PLANO - $N(\alpha)$ :

A determinação da expressão heurística que fornece o momento no plano horizontal provocado pela incidência de corrente sobre o casco é, de certa forma, mais simples que o caso das forças. Isso pois, enquanto as forças de origem potencial são nulas, o momento não. Como vimos, no caso potencial:

$$\begin{cases} X = Y = 0; \\ N = N_{MUNK} \end{cases}$$

onde, o momento de Munk,  $N_{MUNK}(\alpha)$  é (ver expressão 2.10):

$$N_{MUNK}(\alpha) = -(M_{22} - M_{11})U^2 \text{sen} \alpha \text{cos} \alpha. \quad (2.40)^{35}$$

O momento de Munk é a parcela mais importante de  $N(\alpha)$  e pode ser determinado analiticamente com boa precisão. Trata-se de um momento puro, dado que as forças são nulas e, sendo assim, não depende do ponto de referência.

Por outro lado, a viscosidade do fluido real, implica no surgimento da força transversal<sup>36</sup> a qual tem seu ponto de aplicação no centro de pressão do casco que, por sua vez, depende do ângulo de incidência da corrente. O que ocorre, portanto, a rigor, é que tanto a força quanto seu ponto de aplicação são funções do ângulo de incidência e o momento depende do ponto para o qual ele é medido<sup>37</sup>.

Além desse fator, a existência do leme à ré introduz um momento adicional ao produzido pelo casco nu, momento esse que será estabilizador para corrente incidindo

<sup>35</sup> Massas adicionais na frequência nula.

<sup>36</sup> A força longitudinal, devido à simetria do navio em relação à linha de centro, não causa momento.



pela proa e desestabilizador quando a incidência é pela popa. Esse efeito é mais pronunciado para pequenos ângulos de ataque da correnteza, ou seja, para  $\alpha \approx 0$  quando a incidência é pela popa ou  $\alpha \approx \pi$ , pela proa, diminuindo à medida que  $\alpha \approx \pm\pi/2$ . Pode-se considerá-lo como um acréscimo/decréscimo ao momento de Munk que deve ser incorporado à medida que  $\alpha$  varia de zero (acréscimo) a  $\pi/2$  (decréscimo).

Observa-se, portanto, que o momento de Munk por si só não é capaz de predizer o momento total sobre o navio e precisa ser complementado com uma correção que traduza a física acima descrita o mais fielmente possível, sem porém perder a simplicidade.

O que se propõe aqui é que o momento seja descrito como uma parcela potencial (momento de Munk), acrescida de correções para o efeito viscoso e para a presença do leme:

$$N = N_{MUNK} + N_{visc} \pm N_{leme}^{38}$$

(2.41a)

ou, em termos adimensionais:

$$C_{6c}(\alpha) = C_{6c,MUNK}(\alpha) + C_{6c,visc}(\alpha) \pm C_{6c,leme}(\alpha)$$

(2.41b)

A parcela potencial, de acordo com a expressão 2.40, depende das massas adicionais em surge e sway. A primeira pode ser desprezada face à segunda ( $M_{11} \ll M_{22}$ ) e 2.40 pode, em primeira aproximação, ser reescrita como:

$$N_{MUNK}(\alpha) \equiv -M_{22} U^2 \text{sen } \alpha \text{ cos } \alpha.$$

(2.42a)

Como sugerido no item 2.2.1, uma maneira simples e consistente de determinar a massa adicional em sway,  $M_{22}$ , do navio, é considerá-lo como um prisma cilíndrico. Duas possibilidades foram testadas:

<sup>37</sup> Seguindo a prática usual, a expressão heurística aqui desenvolvida fornece o momento em relação à meia-nau, de modo que  $N = N_{\oplus}$ .  
<sup>38</sup> O sinal  $\pm$  para a parcela do leme reflete a necessidade de que essa correção seja "assimétrica", ou seja, estabilizadora para corrente por vante e desestabilizadora por ré.

1. Considerar o navio como um meio prisma elíptico (expressão 2.11);
2. Meio prisma quadrado (expressão 2.12).

As comparações com a massa adicional obtida por método potencial tridimensional foram inconclusivas, porém, na comparação da expressão heurística final, a premissa de aproximar o navio por um meio prisma elíptico mostrou maior aderência aos resultados experimentais.

Por teoria bidimensional, temos para o “navio-elíptico” (expressão 2.11):

$$M_{zz} = \frac{1}{2} \rho \pi T^2 L,$$

e, a parcela potencial, portanto fica:

$$N_{MUNK}(\alpha) \equiv -\frac{1}{2} \rho L T^2 U^2 \pi \text{sen} \alpha \text{cos} \alpha, \quad (2.42b)$$

ou, em termos adimensionais:

$$C_{6c, MUNK}(\alpha) \equiv -\frac{\pi}{L} \text{sen} \alpha \text{cos} \alpha. \quad (2.42c)$$

A parcela viscosa é introduzida considerando, simplificadamente, que o centro de pressão seja independente do ângulo de incidência e da velocidade da corrente<sup>39</sup>. Toma-se o caso de incidência por través ( $\alpha = \pm \pi/2$ ) onde, devido a assimetrias do navio em relação à meia-nau, o ponto de aplicação da força transversal não coincide com essa seção. Há, portanto, um momento “residual”,  $N(\pm \pi/2)$ , de origem viscosa<sup>40</sup>. Podemos assim obter a coordenada longitudinal do centro de pressão real para a incidência de través:

<sup>39</sup> A posição do centro de pressão pode variar com a velocidade de corrente para pequenos ângulos de ataque, onde o ponto de separação da camada limite pode depender do número de Reynolds.  
<sup>40</sup> Para esses ângulos o momento de Munk é nulo.

(2.43a)

$$x_{cp} = \frac{N(\pm\pi/2)}{Y(\pm\pi/2)},$$

ou, em termos adimensionais:

(2.43b)

$$x_{cp} = \frac{C_{6c}(\pm\pi/2)}{C_{2c}(\pm\pi/2)},$$

onde:

$x_{cp}$  = coordenada longitudinal do centro de pressão real (ponto de aplicação da força transversal) em relação à seção mestra.

ou ainda, observando que, usualmente, para navios,  $x_{cp} \leq 0$ :

(2.43c)

$$-1 \leq \frac{C_{6c}(\pm\pi/2)}{C_{2c}(\pm\pi/2)},$$

onde:

$l > 0$  é o braço do momento viscoso em relação à seção mestra, obtido de ensaios experimentais<sup>41</sup>.

Generalizando o resultado, temos:

(2.43d)

$$\frac{l}{l} \equiv \frac{C_{6c,visc}(\alpha)}{C_{2c}(\pm\pi/2) \text{sen}\alpha \text{sen}\alpha}.$$

e, portanto, podemos escrever:

(2.43e)

$$C_{6c,visc}(\alpha) \equiv -\frac{l}{l} C_{2c}(\pm\pi/2) \text{sen}\alpha \text{sen}\alpha.$$

<sup>41</sup> Foram feitas algumas tentativas de relacionar o braço  $l$  a características geométricas do navio, notadamente ao valor de LCB e/ou do centro de área vélica das obras vivas, porém sem nenhum resultado conclusivo até o momento.

A parcela devido ao efeito estabilizador/desestabilizador do leme é incorporada à expressão 2.41b com base no trabalho de Clarke [7].  
 Segundo Clarke:

$$\frac{N_v}{N_v} = \frac{\pi \left(\frac{L}{T}\right)^2}{1 + 2.4 \frac{L}{T}}; (\alpha \approx \pi) \quad (2.44a)$$

onde:

$$N_v = \frac{N_v}{N_v} \left( \frac{1}{2} \rho L^2 U^2 \right)$$

e, segundo a notação do presente trabalho:

$$N_v = \frac{1}{2} \rho L^2 U^2 \frac{\partial C_{\text{ec}}(v_m)}{\partial v_m}$$

e, assim como para o coeficiente de força transversal, pode-se fazer, no caso do modelo cativo:

$$\frac{\partial C_{\text{ec}}(v_m)}{\partial v_m} = \frac{\partial C_{\text{ec}}(\alpha)}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial v_m} = \frac{1}{U \cos \alpha} \frac{\partial C_{\text{ec}}(\alpha)}{\partial \alpha}$$

obtido, no final:

$$\frac{\partial C_{\text{ec}}(\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{L}{1 + 2.4 \frac{L}{T}} \cdot |\cos \alpha|; (\alpha \approx \pi) \quad (2.44b)$$

o que implica em:

$$C_{\text{ec}}(\alpha) \equiv \frac{L}{1 + 2.4 \frac{L}{T}} \left( \frac{L}{2} + 2.4 \frac{L}{T} \right) \cdot \text{sen } \alpha; (\alpha \approx \pi) \quad (2.45a)$$

ou, sem alterar a expressão no seu limite de validade porém generalizando para que a correção tenda a zero em torno de  $\alpha \approx \pi/2$  juntamente com o coeficiente de sustentação,  $C_l$ , temos:

$$C_{6c}(\alpha) \equiv \frac{\pi T}{l} \left( \frac{1}{2} + 2.4 \frac{l}{T} \right) \cdot \text{sen} \alpha |\cos \alpha|; \quad (\alpha \approx \pi). \quad (2.45b)$$

Segundo Clarke, portanto, quando o ângulo de incidência tende a  $\pi$  (ou, no caso de manobra, o ângulo de ataque tende a zero), o coeficiente de momento tenderá ao valor fornecido por 2.45b que é aproximadamente igual à metade do momento de Munk<sup>42</sup>. Portanto, conforme antecipado, para  $\alpha \approx \pi$ , o leme funciona como um estabilizador do navio, reduzindo o momento de Munk. Por outro lado, para  $\alpha \approx 0$ , devemos ter o efeito inverso, ou seja, sendo o leme nesse caso desestabilizador, o momento deverá crescer.

A determinação de uma função que faça essa transição é mais um trabalho de tentativa e erro que uma dedução analítica pura. Numa primeira tentativa podemos substituir as expressões 2.42c e 2.43e em 2.41b obtendo, para o caso de  $(\alpha \approx \pi)$ :

$$C_{6c}(\alpha \approx \pi) \equiv \frac{l}{L} C_{2c} \left( \frac{\pi}{2} \right) \overbrace{\text{sen}(\alpha \approx \pi) |\text{sen}(\alpha \approx \pi)|}^{\text{zero}} - \frac{\pi T}{l} \text{sen}(\alpha \approx \pi) \overbrace{\text{cos}(\alpha \approx \pi)}^{-1} + C_{6c, \text{leme}}(\alpha \approx \pi)$$

ou seja:

$$C_{6c}(\alpha \approx \pi) \equiv \frac{\pi T}{l} \text{sen}(\alpha \approx \pi) |\text{cos}(\alpha \approx \pi)| + C_{6c, \text{leme}}(\alpha \approx \pi). \quad (2.46)$$

Igualando 2.45b com 2.46, vem:

$$\frac{\pi T}{l} \text{sen}(\alpha \approx \pi) |\text{cos}(\alpha \approx \pi)| + C_{6c, \text{leme}}(\alpha \approx \pi) = \frac{\pi T}{l} \left( \frac{1}{2} + 2.4 \frac{l}{T} \right) \cdot \text{sen}(\alpha \approx \pi) |\text{cos}(\alpha \approx \pi)|,$$

<sup>42</sup> Esse resultado é consistente com teoria de placa plana, para a qual, quando  $|\text{sen} \alpha \ll 1|$ , a força lateral é dominada pela força de sustentação (efeito de asa) que, em uma placa, tem resultante passando por  $X_{cp} \approx L/2$ , gerando um momento em relação à meia-nau que é a metade do momento de Munk.

que fornece:

$$C_{6c,leme}(\alpha \approx \pi) = \frac{\pi T}{l} \left( -\frac{1}{2} + 2.4 \frac{l}{T} \right) \cdot \text{sen}(\alpha \approx \pi) |\cos(\alpha \approx \pi)| \quad (2.47)$$

Assumindo que a expressão 2.47 seja válida para todo o domínio do ângulo  $\alpha$  e substituindo-a em 2.41b juntamente com 2.42c e 2.43e, temos:

$$C_{6c}(\alpha) \equiv -\frac{l}{T} C_{2c} \left( \frac{\pi}{2} \right) \text{sen}(\alpha) |\text{sen}(\alpha)| - \frac{l}{T} \text{sen}(\alpha) \cos(\alpha) - \left( \frac{l}{2} - 2.4 \frac{l}{T} \right) \cdot \text{sen}(\alpha) |\cos(\alpha)| \quad (2.48a)$$

Testando a expressão 2.48a para  $\alpha \approx 0$ , temos:

$$C_{6c}(\alpha \approx 0) \equiv \frac{\pi T}{l} \left( -\frac{1}{3} + 2.4 \frac{l}{T} \right) \cdot \text{sen}(\alpha \approx 0),$$

o que está coerente com a premissa de que o momento aumenta quando a corrente incide pela popa devido ao efeito desestabilizador do leme.

Finalmente, introduzindo uma função que melhore o seu ajuste aos resultados experimentais<sup>43</sup>, a seguinte expressão heurística é proposta:

$$C_{6c}(\alpha) \equiv -\frac{l}{T} C_{2c} \left( \frac{\pi}{2} \right) \text{sen}(\alpha) |\text{sen}(\alpha)| - \frac{l}{T} \text{sen}(\alpha) \cos(\alpha) - \left( \frac{l}{2} + |\cos \alpha| \right) \frac{\pi T}{l} \left( \frac{l}{2} - 2.4 \frac{l}{T} \right) \cdot \text{sen}(\alpha) |\cos(\alpha)| \quad (2.48b)$$

onde  $C_{2c} \left( \frac{\pi}{2} \right)$  pode ser obtido das expressões 2.36 e 2.37 para os casos 100% e 40% carregados, respectivamente, ou então diretamente de ensaios experimentais.

<sup>43</sup> A utilização da função de ajuste, a rigor, não é necessária, uma vez que os resultados experimentais também se ajustam bem à expressão 2.48a

Para obtenção do momento  $N(\alpha)$ , de acordo com a expressão 2.9, basta agora fazer:

$$N(\alpha) = \frac{1}{2} C_{gc}(\alpha) \rho T L^2 U^2.$$

As comparações entre os resultados fornecidos pela expressão 2.48b e obtidos por ensaio com modelo cativo são apresentadas no item 2.3.

### 2.3-COMPARAÇÃO DAS EXPRESSÕES HEURÍSTICAS COM RESULTADOS

#### EXPERIMENTAIS

Esse item apresenta resultados de ensaios com modelo cativo realizados no IPT [2] e no MARIN, para a tese de Wichers [4]. Esses resultados são comparados aos obtidos pelas expressões desenvolvidas no item anterior, validando-as. Todas as comparações se referem às escalas do modelo.

Os ensaios do IPT foram realizados para dois navios<sup>44</sup>, ambos utilizados atualmente como FPSO's tipo SPM-turret, o "PP Moraes" e o VLCC "Vidal de Negreiros", o primeiro em condições de calado de 100% e 40% e o segundo apenas a 100%. Os ensaios do MARIN foram realizados para um VLCC, também em duas condições de calado, 100% e 40%. As características das embarcações ensaiadas, suas escalas e o número de Reynolds dos modelos baseados na dimensão longitudinal, para velocidades de corrente,  $U_{ipt} \cong 0.2 \text{ m/s}$  e  $U_{MARIN} \cong 0.1 \text{ m/s}$ , são fornecidas na tabela 2.7, abaixo:

NAVIO	FONTTE	ESC.	Re	COND	DWT	$C^B$	L (m)	B (m)	T (m)	S (m <sup>2</sup> )
Moraes	IPT	1/65	$6.4 \cdot 10^5$	100%	55.000	0.821	231.1	26.0	12.8	10304
Moraes	IPT	1/65	$6.4 \cdot 10^5$	40%	ND	0.771	231.1	26.0	5.1	6424
Vidal	IPT	1/90	$6.5 \cdot 10^5$	100%	282.000	0.832	320.0	54.5	21.6	27508
Marin	MARIN	1/82.5	$3.7 \cdot 10^5$	100%	200.000	0.850	310.0	47.2	18.9	22804
Marin	MARIN	1/82.5	$3.7 \cdot 10^5$	40%	ND	0.805	310.0	47.2	7.6	18670

<sup>44</sup> No momento ensaios cativos para outros navios, de portes intermediários entre o "Vidal de Negreiros" e o "PP Moraes" estão sendo realizados e seus resultados poderão futuramente ser utilizados para aperfeiçoar as expressões propostas.

Tabela 2.7 - Características dos navios ensaiados

A tabela 2.8, abaixo, traz os valores experimentais de  $C_{zc}(\pi/2)$  e de  $l/L$ , assim como os valores de  $C_{zc}(\pi/2)$  obtidos das expressões 2.36 e 2.37.

NAVIO	B/2T	$r_c/T$	$C_{zc}(\pi/2)$ calculado	$C_{zc}(\pi/2)$ ensaio <sup>45</sup>	$l/L$ ensaio
Morões 100%	1.02	0.12	1.04	1.05	1.4%
Morões 40%	2.53	0.30	0.50	0.50	8.6%
Vidal 100%	1.26	0.14	0.84	0.85	5.9%
Marin 100%	1.25	0.18	0.72	0.70	3.0%
Marin 40%	3.12	0.46	0.50	0.50	4.8%

Tabela 2.8 - Valores experimentais de  $C_{zc}(\pi/2)$  e  $l/L$ 

As figuras 2.21, 2.22 e 2.23, a seguir, compararam os resultados das expressões heurísticas 2.24 (coef. longitudinal), 2.29d (coef. transversal, com o valor experimental de  $C_{zc}(\pi/2)$ ) e 2.48b (coef. de momento, com o valor experimental de  $l/L$ ).

As figuras 2.21a e 2.21b mostram os resultados para o "PP Moraes" nas condições 100% carregado e a 40% do calado, respectivamente. A figura 2.22 mostra os resultados para o VLC "Vidal de Negreiros" na condição 100% carregado.

Finalmente, as figuras 2.23a e 2.23b mostram os resultados do VLCC ensaiado por Wichers nas condições 100% carregado e a 40% do calado, respectivamente.

De um modo geral pode-se observar que os resultados heurísticos apresentam boa aderência aos resultados experimentais. É interessante, porém, observar que as expressões indicam que o coeficiente transversal apresenta seu valor máximo não exatamente em  $\alpha = \pi/2$ , mas no seu entorno. Essa tendência não é confirmada pelos experimentos realizados no IPT ou no MARIN, porém pode ser constatada em resultados experimentais publicados por Obokata et al. [23].



Com base nas comparações apresentadas, pode-se concluir que as expressões heurísticas podem ser utilizadas para projeto; suas discrepâncias em relação aos experimentos são pequenas e da mesma ordem que as incertezas dos experimentos.

Quanto à utilização das expressões 2.36 e 2.37 para a obtenção de  $C_{zc}(\pi/2)$ , pode-se constatar sua validade para os modelos testados (ver tabela 2.8), o que, porém, não lhes confere confiabilidade geral, uma vez que as expressões foram determinadas a partir desses mesmos modelos! O mesmo não se pode dizer de uma comparação com os resultados para um VLCC de 130.000 Dwt ensaiado pelo Marintek (tanque de provas noruegues), publicados por Faltnsen [15]. As características principais desse navio são fornecidos na tabela 2.9, abaixo:

NAVIO	CONDICÃO	DWT	$C_B$	L (m)	B (m)	T (m) <sup>46</sup>
Marintek	carregado	130.000	0.820	285.6	46.7	13.82
Marintek	lastro	ND	0.779	285.6	46.7	5.94

Tabela 2.9 - Características do navio do Marintek

Os valores calculados e ensaiados de  $C_{zc}(\pi/2)$  para as duas condições de calado, assim como os valores ensaiados de  $l/L$  são mostrados na tabela 2.10:

NAVIO	CONDICÃO	B/2T	$r_c/T$	$C_{zc}(\pi/2)$ calculado	$C_{zc}(\pi/2)$ ensaio	$l/L$ ensaio
Marintek	carregado	1.69	0.18	0.55	0.69	4.38%
Marintek	lastro	3.93	0.42	0.49	0.49	10.82%

Tabela 2.10 - Valores experimentais de  $C_{zc}(\pi/2)$  e  $l/L$

Percebe-se uma subavaliação do coeficiente  $C_{zc}(\pi/2)$  para o caso 100%, obtido da expressão 2.36, indicando uma dependência mais fraca da razão B/2T do que o deduzido pelos resultados disponíveis (IPT e MARIN), ao menos para essa faixa (B/2T > 1.25). Por outro lado, a expressão 2.37, para o caso a 40%, parece se confirmar.

<sup>45</sup> Ver também a tabela 2.4 e sua nota de rodapé.  
<sup>46</sup> O navio ensaiado possui trim pela popa na condição de lastro. Os calados à vante e à ré são:  $T_{AV} = 4.84$  m;  $T_{AR} = 7.04$  m

De qualquer modo, como já foi mencionado, as expressões 2.36 e 2.37, propostas para a dedução de  $C_{zc}(\pi/2)$ , podem e devem ser revistas em função de novas evidências experimentais.

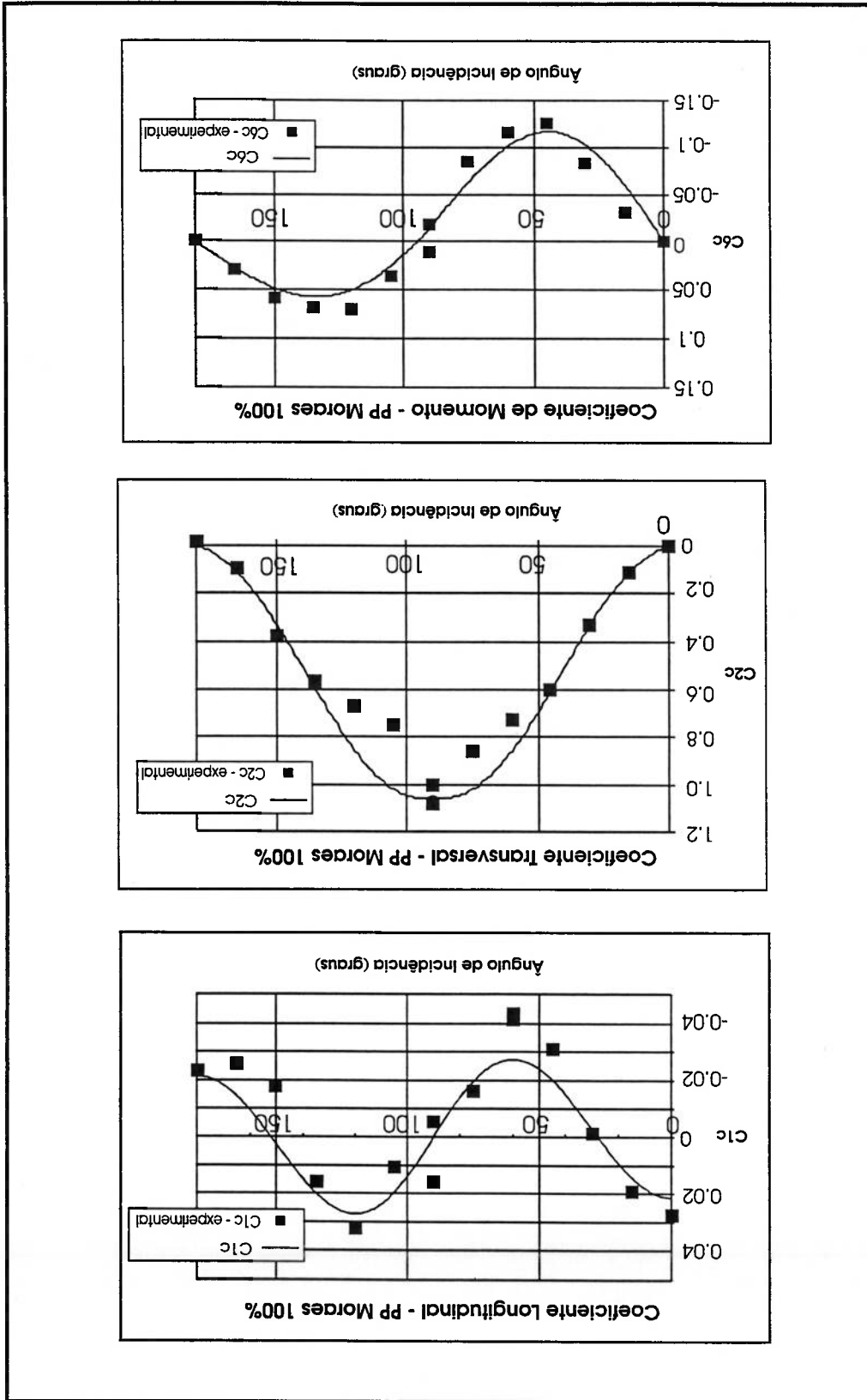
A título de ilustração, a figura 2.24 mostra a comparação dos resultados obtidos pelas expressões heurísticas também para o navio do Marintek<sup>47</sup>, utilizando o valor experimental de  $C_{zc}(\pi/2)$ . Também aí a aderência aos resultados experimentais é boa, com exceção do coeficiente de momento para o caso de lastro, o que pode ser atribuído ao trim pela popa da embarcação, o qual mostra ter grande influência nesse coeficiente. De fato, um trim pela popa parece adicionar um efeito estabilizador/desestabilizador ao casco para incidências de corrente de proa/popa, respectivamente, assim como aumentar esse efeito no leme, uma vez que, com o trim, o leme passa a ficar totalmente submerso, o que normalmente não é o caso em situações de lastro.

---

<sup>47</sup> As curvas de  $C_{lc}(\alpha)$  não foram publicadas por Falinsen.

PP Moraes - 100%

Figura 2.21a - Expressões heurísticas x Resultados experimentais -



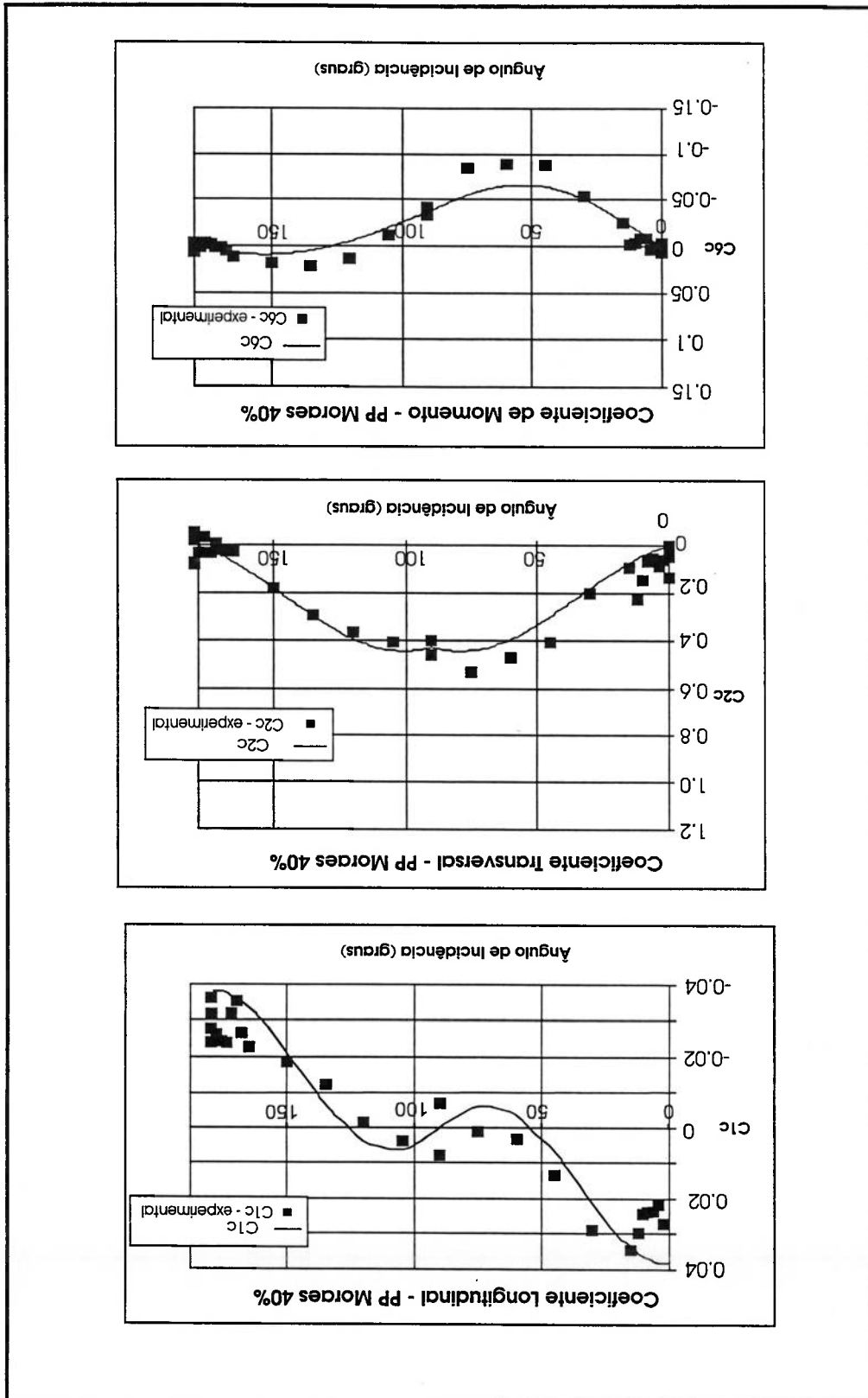


Figura 2.21b - Expressões heurísticas x Resultados experimentais - PP Moraes - 40%

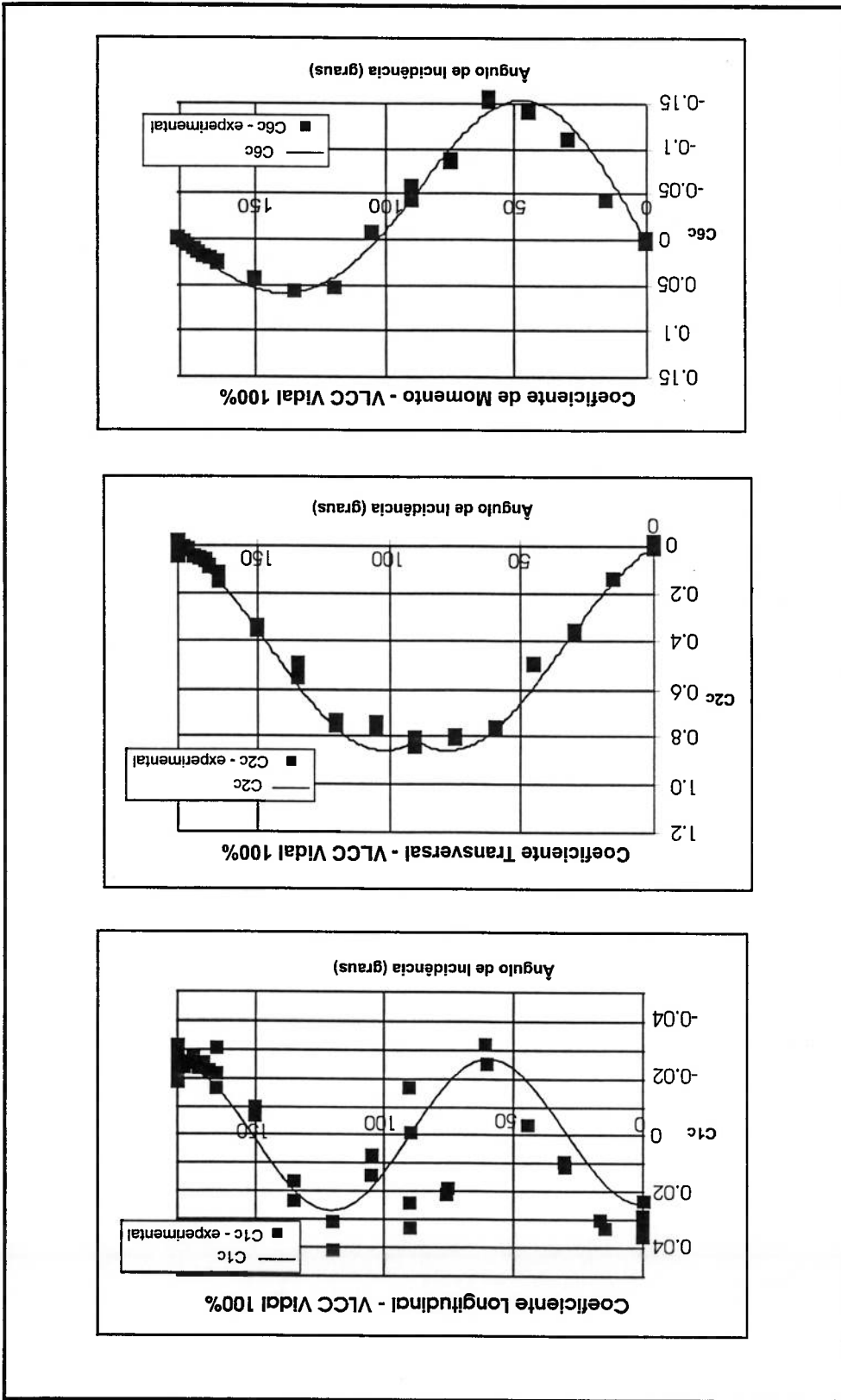


Figura 2.22 - Expressões heurísticas x Resultados experimentais - Vidal de Negreiros - 100%

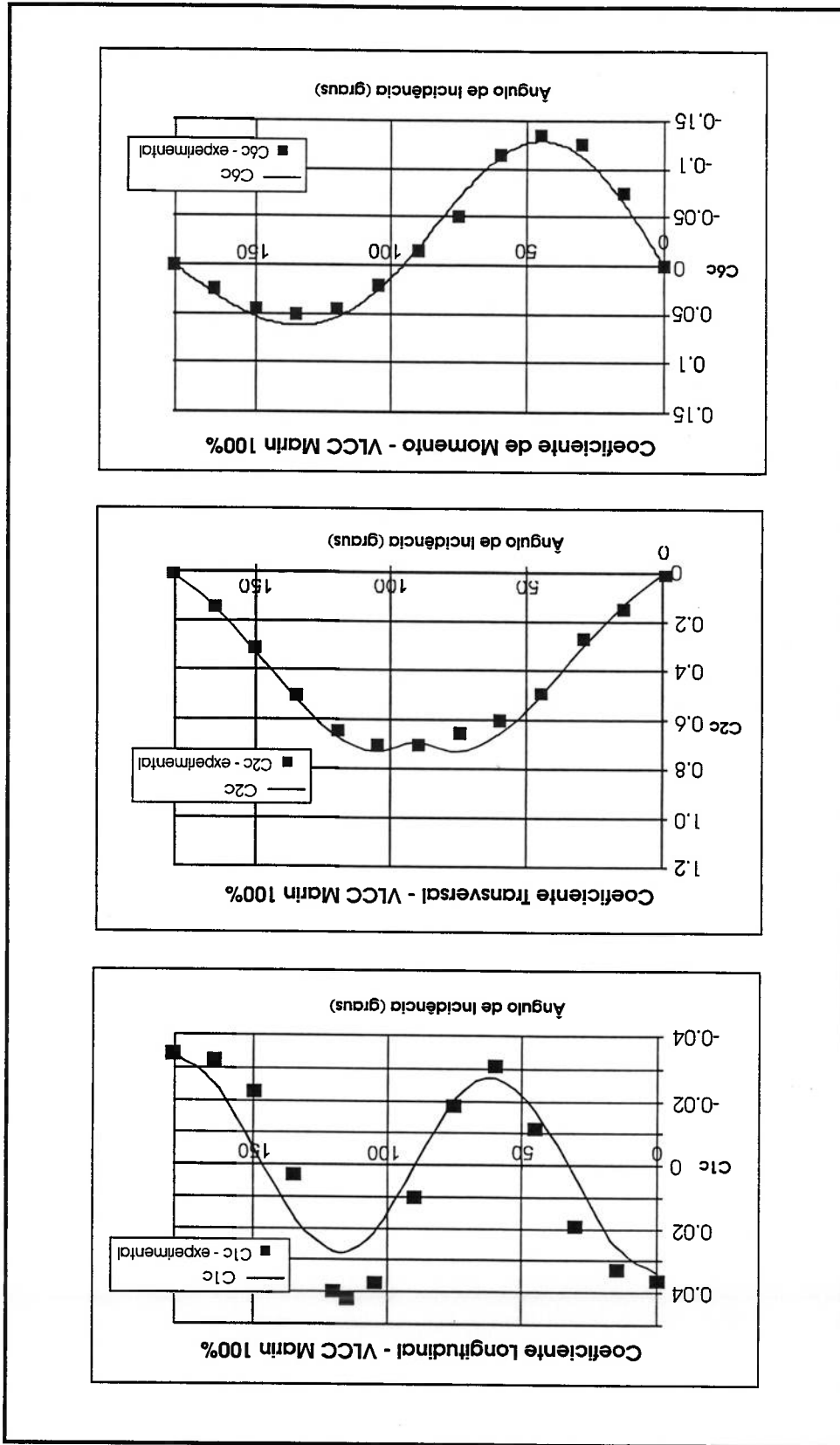


Figura 2.23a - Expressões heurísticas x Resultados experimentais - VLCC Marin - 100%

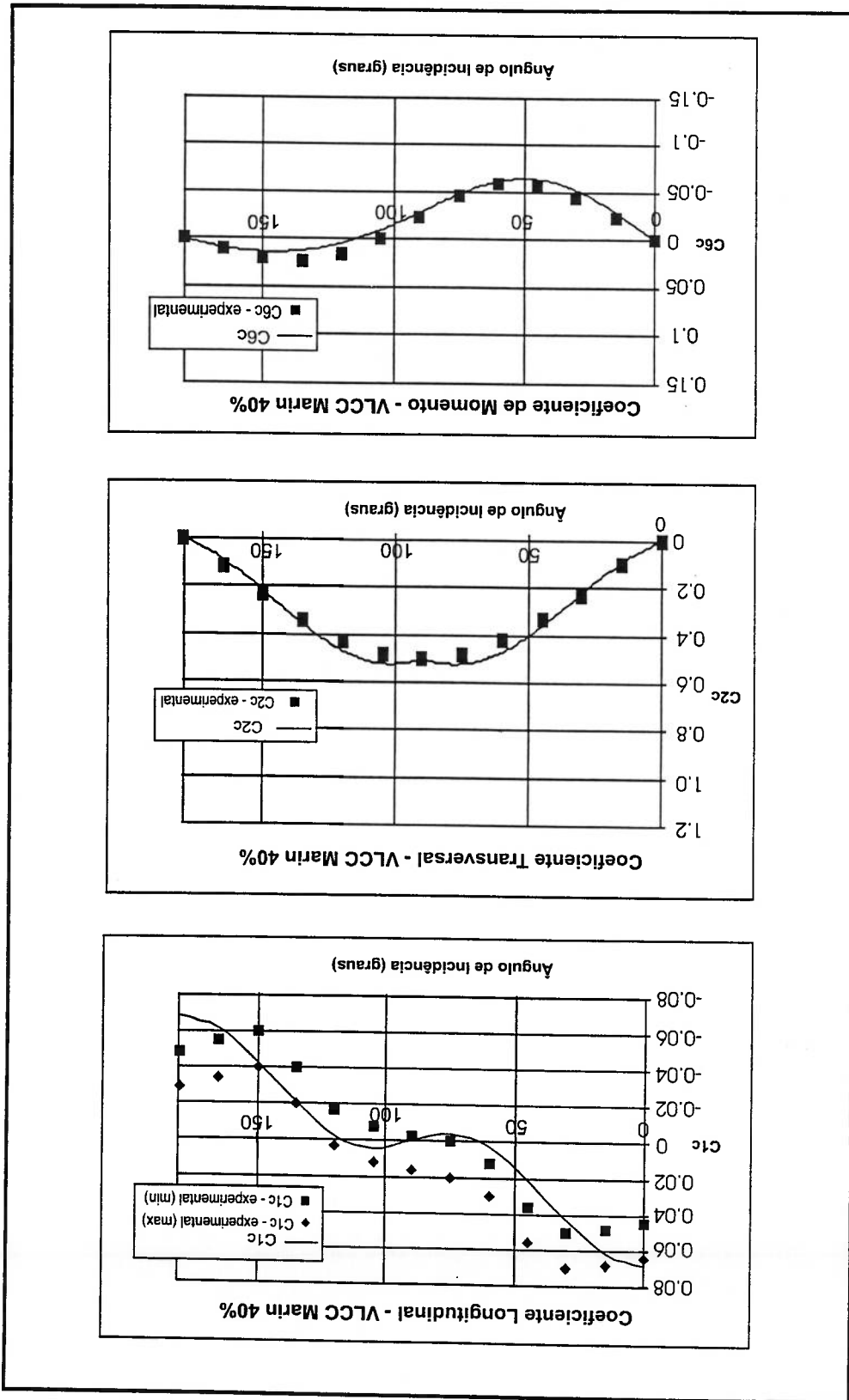
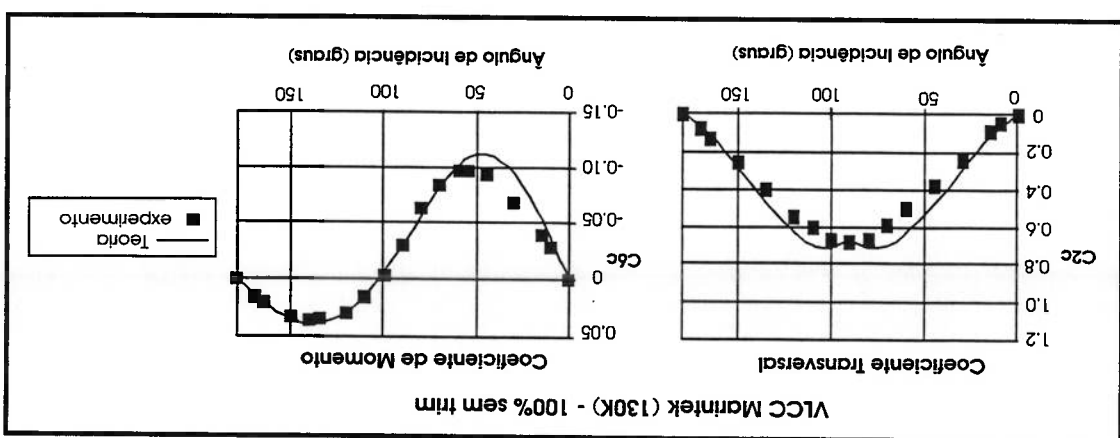
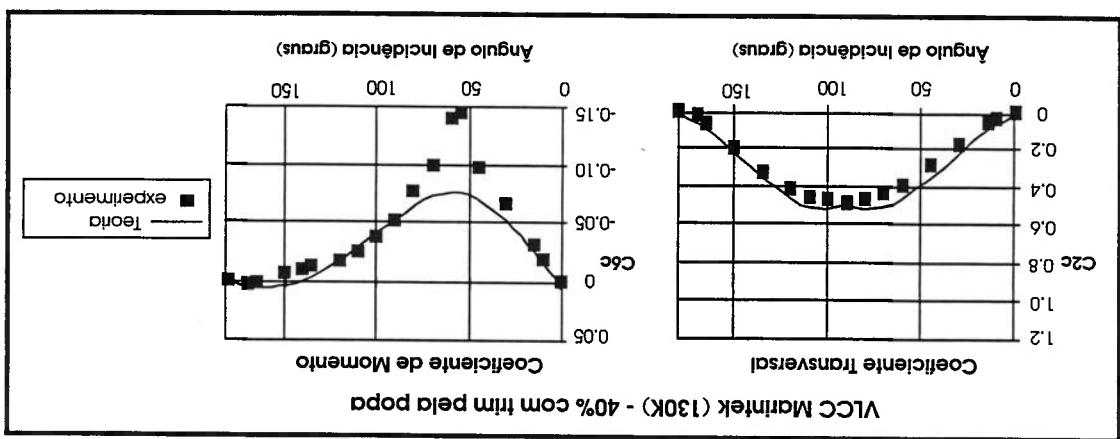


Figura 2.24 - Expressões heurísticas x Resultados Faltinsen (Marintek)





## FORÇAS DE CORRENTE EM PETROLEIROS E BIFURCAÇÃO DO EQUILÍBRIO EM SISTEMAS TIPO *TURRET*

### 3. BIFURCAÇÃO DO EQUILÍBRIO: MODELO FÍSICO-MATEMÁTICO E RESULTADOS EXPERIMENTAIS

#### 3.1 CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

A crescente utilização de navios para produção e armazenamento de petróleo offshore (FPSO) tem motivado as companhias de petróleo do mundo inteiro e, em particular, a Petróbras, a aprofundar o estudo sobre esse tipo de sistema, através de intercâmbios entre empresas [12] e convênios com universidades e centros de pesquisa. Em paralelo e, como consequência parcial desse vetor, o estudo do comportamento dinâmico de navios ancorados por sistema tipo SPM, ou mesmo por sistema de ancoragem convencional tem sido objeto de grande número de trabalhos recentes na área acadêmica (por exemplo, [3], [13], [14], [15], [16], [17] e [18]). Esses trabalhos vêm sendo acompanhados de perto e, muitas vezes patrocinados pelas companhias de petróleo que atuam na produção offshore ou no transporte de óleo para terminais terrestres.

Para abordar o problema, os autores, de modo geral, partem das equações do movimento do sistema baseados em modelos hidrodinâmicos de manobra (por exemplo, [19]), seja a partir de um enfoque qualitativo, ou mesmo para solucioná-lo diretamente através de processamento numérico no domínio do tempo.

Os modelos clássicos de manobra se utilizam de expansões tipo Taylor para descrever os esforços hidrodinâmicos atuantes sobre o sistema flutuante. A simplificação do modelo se dá, portanto, de acordo com a ordem dessa expansão. Alguns autores levam a expansão até 5ª ordem (por exemplo, [20]), obtendo os coeficientes do polinômio, as chamadas *derivadas hidrodinâmicas*, de ensaios com modelos reduzidos. Disparidades na obtenção das derivadas hidrodinâmicas de ordem superior ( $\geq 3$ ) são frequentes, como ilustra a tabela 3.1 (fonte: [21]):

LABORATÓRIO	1	2	3	4	5
$Y_{\psi} = (e^{\psi} Y / e^{\psi})$	0.384	0.343	0.371	0.370	0.329
$N_{\psi} = (e^{\psi} N / e^{\psi})$	0.146	0.144	0.121	0.128	0.137
$Y_{\psi\psi} = (e^{\psi} Y / e^{\psi^2})$	1.225	1.862	1.304	1.024	1.230
$N_{\psi\psi} = (e^{\psi} N / e^{\psi^2})$	-0.028	-0.091	0.081	-0.636	-0.039

**Tabela 3.1- Derivadas hidrodinâmicas de 1ª e 3ª ordens em relação ao ângulo de incidência da corrente sobre um mesmo navio, obtidas por diferentes instituições**

Da tabela depreende-se que quanto maior a ordem da derivada, maiores são as discrepâncias, o que é, inclusive, intuitivo. Mais que isso, em sistemas SPM-turret, o tipo de bifurcação do equilíbrio, se sub- ou super-crítica, é determinado pelo sinal da razão  $\left( N_{\psi\psi} Y / Y_{\psi\psi} \right)$ , (ver, por exemplo, [18]). Como, pela tabela,  $Y_{\psi\psi} > 0$ , resta que o tipo de bifurcação e, portanto, a estabilidade estrutural do sistema, dependerá exclusivamente do sinal de  $N_{\psi\psi}$ . Ainda observando a tabela, vemos que não apenas a magnitude, mas também o sinal de  $N_{\psi\psi}$  pode variar de instituição para instituição, implicando em conclusões diferentes até mesmo sobre a estabilidade estrutural do sistema. Ou seja, a robustez do modelo dinâmico do SPM-turret via teoria de manobra, é posta em questão.

A presente abordagem do problema, por outro lado, abre mão da expansão tipo Taylor e determina o polinômio que descreve as forças e momento de corrente agindo sobre o casco no plano horizontal a partir de teoria de asa e de arrasto (ver capítulo 2), com seus coeficientes sendo obtidos por relações geométricas da embarcação. O termo quadrático,  $B \cdot \alpha |\alpha|$ , é preservado (na expansão tipo Taylor da teoria clássica de manobras o termo quadrático, nesse caso do tipo  $(\alpha^2)$ , se perde em prol da imparidade da função) e, mostra-se mais adiante, seu coeficiente, B, determina o comportamento

<sup>1</sup>No capítulo 2, o ângulo de incidência,  $\alpha$ , é definido da forma usual em ensaios de modelos cativos, onde a corrente (fluido em movimento) incide sobre o casco. Em teoria de manobras, o casco se move em relação a um fluido estacionário e, o ângulo de ataque, ou aprumo,  $\psi$ , é definido de tal forma que:  $\alpha = (\pi - \psi)$ , o que não altera as derivadas hidrodinâmicas.

pós-crítico do sistema, o qual, também mostra-se, será sempre estruturalmente estável. A robustez do modelo dinâmico é, portanto, garantida. Resultados experimentais obtidos no tanque de provas do IPT atestam a teoria proposta nesse trabalho.

### 3.2 MODELO DINÂMICO - EQUAÇÕES DO MOVIMENTO NO PLANO

Em primeiro lugar, são apresentadas as equações do movimento para um navio livre, sem vínculos, sobre o qual incide corrente uniforme,  $U$  (a dedução completa das equações encontra-se no Anexo B).

A seguir, o caso particular do SPM-turret de rigidez horizontal infinita (caso do ensaio de estabilidade direcional realizado no tanque de provas do IPT) é apresentado e discutido.

#### 3.2.1 NAVIO LIVRE

Seja um navio livre, sujeito à ação de corrente uniforme, de acordo com a figura 3.1, abaixo:

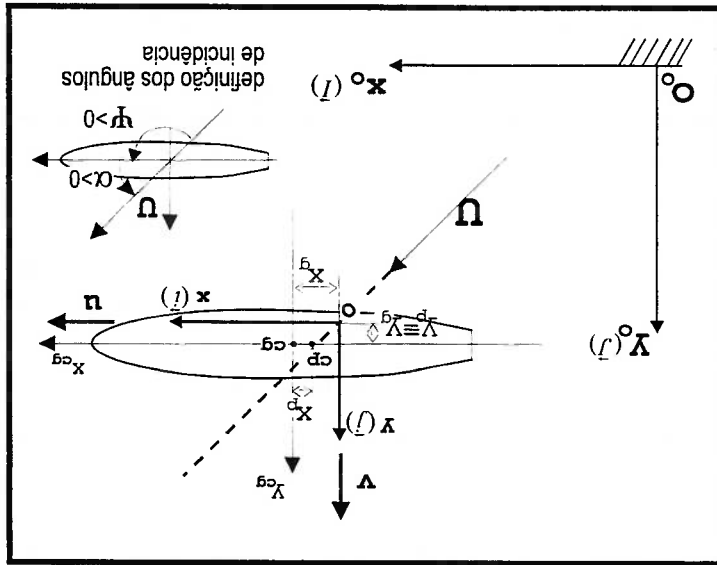


Figura 3.1 - Navio sob correnteza uniforme  
Sistemas coordenados, definições

A ação da correnteza de velocidade  $U$ , agindo com ângulo de incidência,  $\alpha$ , sobre o casco, gera esforços no plano horizontal que levam o navio a se deslocar da posição inicial. As equações que descrevem seu movimento em função das forças hidrodinâmicas externas são, de acordo com as convenções da figura 3.1 e utilizando, como ângulo de incidência (usual em teoria de manobras):

$$\Psi = (\pi - \alpha),$$

são:

$$(3.1) \quad \left\{ \begin{aligned} X(U; \dot{u}; \dot{v}; \dot{\Psi}; \ddot{u}; \ddot{v}; \ddot{\Psi}) &= M(\ddot{u} - y^g \ddot{v} - x^g \ddot{\Psi}); \\ Y(U; \dot{u}; \dot{v}; \dot{\Psi}; \ddot{u}; \ddot{v}; \ddot{\Psi}) &= M(\ddot{v} + x^g \ddot{u} + y^g \ddot{\Psi}); \\ N(U; \dot{u}; \dot{v}; \dot{\Psi}; \ddot{u}; \ddot{v}; \ddot{\Psi}) &= [I_{z, cg} + M(x_z^g + y_z^g)](\ddot{u} + \ddot{v} + \ddot{\Psi}) - y^g \ddot{v} - x^g \ddot{\Psi} \end{aligned} \right.$$

onde:

$M$  = massa do navio;

$I_{z, cg}$  = momento de inércia polar do navio no plano horizontal, em relação ao centro de

gravidade;

$u, \dot{u}, v, \dot{v}, \Psi, \dot{\Psi}$  = velocidades e acelerações lineares e angulares, da origem,  $O$ , do

sistema coordenado adotado, fixo ao navio, em relação ao sistema fixo à terra, nas suas

direções longitudinal, transversal e em torno da vertical, respectivamente;

$(x^g; y^g) =$  coordenadas do centro de gravidade do navio, no sistema coordenado

adotado;

$X(U; \dot{u}; \dot{v}; \dot{\Psi}; \ddot{u}; \ddot{v}; \ddot{\Psi}); Y(U; \dot{u}; \dot{v}; \dot{\Psi}; \ddot{u}; \ddot{v}; \ddot{\Psi}); N(U; \dot{u}; \dot{v}; \dot{\Psi}; \ddot{u}; \ddot{v}; \ddot{\Psi}) =$  forças e

momento hidrodinâmicos no plano horizontal causados pela correnteza interagindo com o movimento do navio, nas suas direções longitudinal, transversal e em torno do eixo

vertical, respectivamente.

Escrevendo as forças e o momento como uma soma de uma parcela puramente potencial e de outra, viscosa, obtida por ensaio com modelo cativo<sup>2</sup> (ou pelas expressões heurísticas do capítulo 2), complementada por um termo viscoso, função da velocidade angular (esse termo não é obtido no ensaio cativo), temos:

$$\left\{ \begin{aligned} X(U; u; v; \psi; \Phi) &= X^{pot}(U; u; v; \psi; \Phi) + X^{visc}(U; u; v; \psi; \Phi) + X^V(\psi); \\ Y(U; u; v; \psi; \Phi) &= Y^{pot}(U; u; v; \psi; \Phi) + Y^{visc}(U; u; v; \psi; \Phi) + X^V(\psi); \\ N(U; u; v; \psi; \Phi) &= N^{pot}(U; u; v; \psi; \Phi) - N^{MUNK}(U; u; v; \psi; \Phi) \end{aligned} \right. \left. \begin{array}{l} \text{inclui } N^{MUNK} \\ \text{modelo cativo} \end{array} \right. + N^{visc}(U; u; v; \psi; \Phi) + N^{MUNK}(U; u; v; \psi; \Phi) + N^{visc}(\psi), \quad (3.2)$$

onde:

$X^{pot}; Y^{pot}; N^{pot}$  = forças inerciais longitudinal, transversal e momento de origem potencial;

$N^{MUNK}$  = momento de Munk, de origem potencial;

$X^{visc}; Y^{visc}; N^{visc}$  = forças (inerciais e de fricção) longitudinal, transversal e momento de origem viscosa.

Podese, ainda, definir a velocidade do navio livre relativa ao meio fluido:

$$U^m = \underbrace{(u + U \cos \Phi)}_{\dot{u}} \hat{i} + \underbrace{(v - U \sin \Phi)}_{\dot{v}} \hat{j} + \underbrace{\dot{\psi}}_{\dot{\Phi}} \hat{k},$$

e, portanto:

$$\left\{ \begin{aligned} u^m &= u + U \cos \Phi; \\ v^m &= v - U \sin \Phi; \\ \dot{\psi}^m &= \dot{\psi}. \end{aligned} \right.$$

<sup>2</sup> O momento do caso cativo contém uma parcela potencial (Momento de Munk), que deve ser subtraída da expressão de  $N_p$ , ao se adicionar essa parcela a  $N_p^m$ , de modo a não haver duplicidade de termos.

Utilizando as velocidades relativas ao meio, a expressão 3.2 pode ser reescrita na

forma:

$$\left\{ \begin{aligned} X(u; u; v; v; \psi; \psi) &= X(u; u; v; v; \psi; \psi) = X^{pot}(u; u; v; v; \psi; \psi) + X^{visc}(u; u; v; v; \psi; \psi) \\ Y(u; u; v; v; \psi; \psi) &= Y(u; u; v; v; \psi; \psi) = Y^{pot}(u; u; v; v; \psi; \psi) + Y^{visc}(u; u; v; v; \psi; \psi) \\ N(u; u; v; v; \psi; \psi) &= N(u; u; v; v; \psi; \psi) = N^{pot}(u; u; v; v; \psi; \psi) + N^{visc}(u; u; v; v; \psi; \psi) \end{aligned} \right.$$

chegando-se a:

$$\left\{ \begin{aligned} (M + M_{11}) \ddot{u} - (M y^g + M_{11} y^p) \ddot{\psi} - (M + M_{22}) \ddot{v} + (M x^g + M_{22} x^p + M_{26}) \ddot{\psi} + (M + M_{11}) \ddot{u} - (M y^g + M_{11} y^p) \ddot{\psi} - \\ + (M_{22} - M_{11}) U \dot{\psi} \operatorname{sen} \psi - X(u; u; v; v; \psi; \psi) - X^{visc}(u; u; v; v; \psi; \psi) = 0 \\ (M + M_{22}) \ddot{v} + (M x^g + M_{22} x^p + M_{26}) \ddot{\psi} + (M + M_{11}) \ddot{u} - (M y^g + M_{11} y^p) \ddot{\psi} - \\ - (M_{22} - M_{11}) U \dot{\psi} \cos \psi - Y(u; u; v; v; \psi; \psi) - Y^{visc}(u; u; v; v; \psi; \psi) = 0 \\ [I_{z^{ce}} + M(x^g)^2 + y^g)^2 + M_{11} y^p + M_{22} x^p + M_{26}] \ddot{\psi} - (M y^g + M_{11} y^p) \ddot{u} + \\ + (M x^g + M_{22} x^p + M_{26}) \ddot{v} + (M_{26} + M_{22} x^p + M_{26}) \ddot{\psi} + (M y^g + M_{11} y^p) \ddot{v} \\ - N(u; u; v; v; \psi; \psi) - N^{visc}(u; u; v; v; \psi; \psi) = 0 \end{aligned} \right.$$

.....(3.3a)

onde:

$M_{11}, M_{22}, M_{66}, M_{26}$  = inércias adicionais do fluido nas direções x, y e em torno de z;

$(x^p, y^p)$  = coordenadas do centro de pressão do navio;

$X(u; u; v; v; \psi; \psi); Y(u; u; v; v; \psi; \psi); N(u; u; v; v; \psi; \psi)$  = forças e momento no plano horizontal oriundos do

ensaio de modelo cativo (ou das expressões heurísticas do capítulo 2), generalizadas

para o caso do navio se movendo:

$$\left\{ \begin{aligned} X(u; u; v; v; \psi; \psi) &= \frac{2}{l} \rho L T U^2 C_{Lc}^m(\psi; \psi); \\ Y(u; u; v; v; \psi; \psi) &= \frac{2}{l} \rho L T U^2 C_{Lz}^m(\psi; \psi); \\ N(u; u; v; v; \psi; \psi) &= \frac{2}{l} \rho L^2 T U^2 C_{Nc}^m(\psi; \psi); \end{aligned} \right.$$

onde, do capítulo 2:

$$\left\{ \begin{aligned} C_{1c}(\Psi_m) &= -\frac{0.105}{S} \text{Re}_{02} \frac{L}{TL} \cos(\Psi_m) - 0.573 \frac{L}{T} [\cos(3\Psi_m) - \cos(\Psi_m)]; \\ C_{2c}(\Psi_m) &= \left( C_\gamma - \frac{2L}{\pi T} \right) \text{sen}(\Psi_m) \left| \text{sen}(\Psi_m) \right| + \frac{2L}{\pi T} \text{sen}_3(\Psi_m) + \frac{L}{\pi T} \left( 1 + 0.4 \frac{T}{C_B} \right) \text{sen}(\Psi_m) \left| \cos(\Psi_m) \right|; \\ C_{6c}(\Psi_m) &= -\frac{L}{l} \left( C_\gamma - \frac{2L}{\pi T} \right) \text{sen}(\Psi_m) \left| \text{sen}(\Psi_m) \right| + \frac{L}{\pi T} \text{sen}(\Psi_m) \cos(\Psi_m) - \\ &\quad - \left( \frac{2}{1 + |\cos(\Psi_m)|} \right) \cdot \frac{L}{\pi T} \left( 1 - 2.4 \frac{L}{T} \right) \text{sen}(\Psi_m) \left| \cos(\Psi_m) \right|. \end{aligned} \right.$$

que, observando as seguintes relações:

$$\left\{ \begin{aligned} U_m &= \sqrt{u_m^2 + v_m^2} = \sqrt{(u + U \cos \Psi)^2 + (U \text{sen} \Psi - v)^2}; \\ \cos \Psi_m &= \frac{U_m}{u} = \frac{\sqrt{u_m^2 + v_m^2}}{u + U \cos \Psi}; \\ \text{sen} \Psi_m &= \frac{U_m}{v} = \frac{\sqrt{u_m^2 + v_m^2}}{(U \text{sen} \Psi - v)}. \end{aligned} \right.$$

forneçem:

$$\left\{ \begin{aligned} X(n_m; v_m) &= \frac{2}{l} p L T \left[ u_m U_m \left( 0.573 \frac{L}{T} - \frac{\text{Re}_{02}}{S} \frac{L}{TL} \right) - 0.573 \frac{L}{T} \left( \frac{U_m}{u_m} - 3 \frac{u_m v_m^2}{U_m^2} \right) \right]; \\ Y(n_m; v_m) &= \frac{2}{l} p L T \left[ \frac{U_m}{u_m} \left[ \left( C_\gamma - \frac{2L}{\pi T} \right) |v_m| v_m + \frac{L}{\pi T} \left( 1 + 0.4 \frac{T}{C_B} \right) |u_m| v_m \right] + \frac{2L}{\pi T} \frac{U_m}{v_m} \right]; \\ N(n_m; v_m) &= \frac{2}{l} p L^2 T \left[ \frac{|U_m|}{u_m} \right] - \frac{L}{l} \left( C_\gamma - \frac{2L}{\pi T} \right) |v_m| v_m - \\ &\quad - \left( \frac{2}{1 + |u_m/U_m|} \right) \cdot \frac{L}{\pi T} \left( \frac{2}{1} - 2.4 \frac{L}{T} \right) |u_m| v_m + \frac{L}{\pi T} u_m v_m \end{aligned} \right.$$

Portanto, temos, finalmente:

$$\left. \begin{aligned}
 & \left[ \frac{1}{2} \rho L^2 T u^m \right] \left( \frac{0.573}{T} \frac{L}{0.105 S} \text{Re}^{0.2} T L \right) \left[ -0.573 \frac{L}{U^m} - 3 \frac{u^m}{U^m} \right] - X^{\text{visc}}(\Phi) = 0 \\
 & \left( M_{11} + M_{11} \right) u^m - \left( M_{y^g} + M_{11} y^d \right) \Phi + \left( M_{22} + M_{22} \right) v^{\Phi} + \left( M_{26} + M_{26} \right) x^p - M_{26} x^g - M_{11} \Phi^2 \text{sen } \Phi - \\
 & \left[ \frac{1}{2} \rho L^2 T \right] \left\{ \left[ \frac{u^m}{U^m} \right] \left[ C_Y - \frac{\pi T}{2L} \left| v^m \right| + \frac{\pi T}{3} \frac{v^m}{U^m} \right] + \left[ \frac{\pi T}{3} \frac{v^m}{U^m} \right] \right\} - Y^{\text{visc}}(\Phi) = 0 \\
 & \left( M_{22} + M_{22} \right) v^m + \left( M_{x^g} + M_{22} x^p + M_{26} \right) v^{\Phi} + \left( M_{x^g} + M_{22} x^p + M_{26} \right) u^{\Phi} + \left( M_{y^g} + M_{11} y^d \right) v^{\Phi} - N^{\text{visc}}(\Phi) - \\
 & \left[ \frac{1}{2} \rho L^2 T \right] \left\{ \left[ \frac{u^m}{U^m} \right] \left[ \frac{L}{U^m} \right] \left[ C_Y - \frac{\pi T}{2L} \left| v^m \right| \right] + \left[ \frac{L}{U^m} \right] \left[ \frac{\pi T}{2} \left( \frac{1}{2} - 2.4 \frac{L}{T} \right) \left| u^m \right| \right] \right\} + \left[ \frac{L}{\pi T} \frac{u^m}{v^m} + \frac{L}{\pi T} \frac{u^m}{v^m} \right] = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (3.3b)$$

Pode-se, alternativamente, escrever as equações do movimento em termos das velocidades e acelerações relativas ao meio:

$$\left. \begin{aligned}
 & \left( M_{11} + M_{11} \right) \dot{u}^m - \left( M_{y^g} + M_{11} y^d \right) \dot{\Phi} - \left( M_{22} + M_{22} \right) v^{\dot{\Phi}} + \left( M_{26} + M_{26} \right) \dot{x}^p - M_{26} \dot{x}^g - \\
 & \left( M_{22} + M_{22} \right) \dot{v}^m + \left( M_{x^g} + M_{22} x^p + M_{26} \right) \dot{\Phi} + \left( M_{x^g} + M_{22} x^p + M_{26} \right) \dot{u}^m - \left( M_{y^g} + M_{11} y^d \right) \dot{v}^{\dot{\Phi}} - \\
 & \left[ \frac{1}{2} \rho L^2 T \dot{x}^p + M_{26} \dot{x}^g + M_{22} \dot{x}^p + M_{22} \dot{x}^g + 2 M_{26} \dot{x}^p \right] \dot{\Phi} + \\
 & - X^{\text{visc}}(\dot{\Phi}) - Y^{\text{visc}}(\dot{\Phi}) = 0, \\
 & \left( M_{22} + M_{22} \right) \dot{v}^m + \left( M_{x^g} + M_{22} x^p + M_{26} \right) \dot{\Phi} + \left( M_{x^g} + M_{22} x^p + M_{26} \right) \dot{u}^m - \left( M_{y^g} + M_{11} y^d \right) \dot{v}^{\dot{\Phi}} - \\
 & \left( M_{22} + M_{22} \right) \dot{v}^m + \left( M_{x^g} + M_{22} x^p + M_{26} \right) \dot{\Phi} + \left( M_{x^g} + M_{22} x^p + M_{26} \right) \dot{u}^m - N^{\text{visc}}(\dot{\Phi}) = 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (3.3c)$$



Ou, por outra via, usando uma expansão tipo Taylor para descrever as forças hidrodinâmicas proporcionais às velocidades e, mantendo a parcela potencial apenas nos termos proporcionais às acelerações, tem-se:

$$(3.4) \quad \left\{ \begin{aligned} & (M + M_{11})\ddot{u} - (M_{11}y^p + M_{11}y^d)\ddot{\psi} - M_{11}v\dot{v} - M_{11}v\dot{\psi} - M_{11}v\dot{\psi} - X(u; v; \psi; \dot{\psi}) = 0; \\ & (M + M_{22})\ddot{v} + (M_{22}x^p + M_{26} + M_{26}x^g)\ddot{\psi} + M_{26}u\dot{u} - M_{26}y^g\dot{v} - M_{26}y^g\dot{\psi} - N(u; v; \psi; \dot{\psi}) = 0; \\ & [I_{z, cg} + M(x_g^2 + y_g^2) + M_{11}y^p + M_{22}x^p + M_{66} + 2M_{26}x^p]\ddot{\psi} - (M_{11}y^p + M_{26}y^g)\ddot{u} + \\ & + (M_{22}x^p + M_{26}x^g + M_{26}v)\dot{v} + M_{26}x^g\dot{u} + M_{26}v\dot{v} - N(u; v; \psi; \dot{\psi}) = 0. \end{aligned} \right.$$

onde:  
 $X(u; v; \psi; \dot{\psi}); Y(u; v; \psi; \dot{\psi}); N(u; v; \psi; \dot{\psi})$  = forças e momento no plano horizontal oriundos de expansão em somatório tipo Taylor, com coeficientes obtidos experimentalmente.

### 3.2.2 NAVIO ANCORADO POR SISTEMA SPM-turret

Seja um navio ancorado por um sistema tipo SPM-turret, sobre o qual incide corrente uniforme,  $U$ , de acordo com a figura 3.2, abaixo:

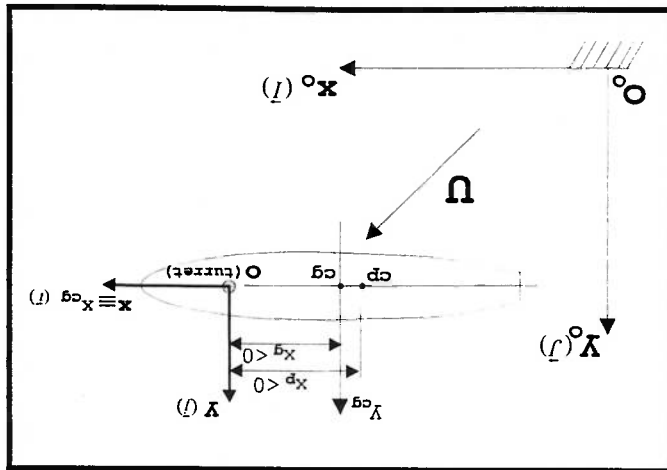


Figura 3.2 - Navio ancorado por SPM-turret sujeito a corrente

Retomando a expressão 3.1, com  $y_g = 0$ , agora acrescida das forças no vínculo

(turret) temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} X(U; u; v; \psi; \dot{\psi}) + X_T = M(u - \psi v - x^g \psi^2); \\ Y(U; u; v; \psi; \dot{\psi}) + Y_T = M(v + x^g \dot{\psi} + \dot{\psi} u); \\ N(U; u; v; \psi; \dot{\psi}) = [I_{z, cg} + Mx_g^2 \ddot{\psi} + Mx_g^g (\dot{v} + u \dot{\psi})]. \end{array} \right.$$

onde:

$$X_T = -K_x x; \text{ (reação do vínculo na direção x)}$$

$$Y_T = -K_y y; \text{ (reação do vínculo na direção y)}$$

### 3.2.3 ENSAIO DE ESTABILIDADE DIRECIONAL

No intuito de estudar o equilíbrio do navio ancorado por SPM-turret, num primeiro momento, de uma maneira mais direta, foi concebido o ensaio de estabilidade direcional, onde o único grau de liberdade do sistema é o ângulo de yaw.

Nesse tipo de ensaio, o modelo é rebocado no tanque de provas pelo carro dinâmométrico através de uma haste vertical rígida. A conexão do modelo à haste se dá através de um sistema de juntas e rolamentos de modo que seja preservado apenas o grau de liberdade de yaw. Por outro lado, a fim de evitar interferências indesejáveis, o modelo possui também liberdade linear e angular no plano vertical (heave, roll e pitch). O arranjo elaborado para o ensaio de estabilidade direcional é ilustrado na figura 3.3. O anexo I traz desenhos da haste e da junta assim como fotos do modelo no tanque de provas.

<sup>3</sup> Por suposição, o SPM-turret não introduz reação de vínculo ao momento, pois sua rigidez angular no plano horizontal é desprezível.

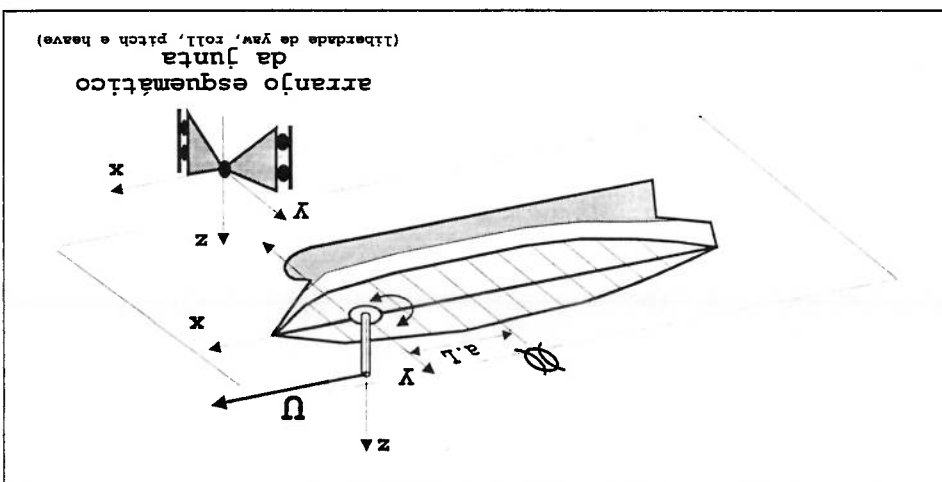


Figura 3.3 - Arranjo de ensaio de estabilidade direcional

Estando o modelo rigidamente conectado ao carro dinâmométrico (equivalente a ter rigidez linear infinita nas suas direções longitudinal e transversal), apenas com liberdade angular no plano horizontal, temos:

$$u = \dot{u} = v = \dot{v} = 0,$$

e a equação do movimento do navio, relativa ao sistema fixo à terra, se reduz a:

$$\begin{cases} X(U; \Psi; \dot{\Psi}; \ddot{\Psi}) + X_r = -M \ddot{x} \\ Y(U; \Psi; \dot{\Psi}; \ddot{\Psi}) + Y_r = M \ddot{y} \\ N(U; \Psi; \dot{\Psi}; \ddot{\Psi}) = [I_{z, \text{cg}} + M x^2] \ddot{\Psi} \end{cases}$$

Todo o sistema fica, portanto, determinado a partir, unicamente, da solução da terceira equação diferencial:

$$N(U; \Psi; \dot{\Psi}; \ddot{\Psi}) = I_{z_i} \ddot{\Psi}. \tag{3.5a}$$

Ou, por outro lado, partindo da expressão 3.3a, para  $y_p = y_g = 0$ , temos:

$$(I_{z, \text{cg}} + M x^2 + M_{22} x^2 + M_{66} + 2M_{26} x^2) \ddot{\Psi} - N(u^n; v^m) - N^{\text{visc}}(\dot{\Psi}) = 0. \tag{3.5b}$$

Sendo, no caso:

$$\begin{cases} u_m = U \cos \Psi; \\ v_m = -U \sin \Psi; \end{cases}$$

temos:

$$N(u_m; v_m) = N(U; \Psi).$$

Rearranjando a expressão 3.5b, temos:

$$N(U; \Psi) + N^{visc}(\Psi) - (M_{z2} x_2^d + M_{66} + 2M_{26} x_2^d) \ddot{\Psi} = I_{z1} \ddot{\Psi}. \tag{3.6}$$

Iguando as expressões 3.5b e 3.6 e, expandindo o termo proporcional à velocidade angular,  $\Psi$ , até 1ª ordem:

$$N(U; \Psi; \dot{\Psi}; \ddot{\Psi}) = N(U; \Psi) + N^{visc}(\Psi) - (M_{z2} x_2^d + M_{66} + 2M_{26} x_2^d) \ddot{\Psi} = I_{z1} \ddot{\Psi} \\ = N(U; \Psi) + \frac{\partial N}{\partial \dot{\Psi}} \Big|_{\dot{\Psi}=0} \dot{\Psi} - (M_{z2} x_2^d + M_{66} + 2M_{26} x_2^d) \ddot{\Psi} = I_{z1} \ddot{\Psi}.$$

E a equação do movimento fica:

$$(I_{z1} + M_{z2} x_2^d + M_{66} + 2M_{26} x_2^d) \ddot{\Psi} - \frac{\partial N}{\partial \dot{\Psi}} \Big|_{\dot{\Psi}=0} \dot{\Psi} - N(U; \Psi) = 0. \tag{3.7}$$

No nosso caso, tanto os resultados do tanque de provas para o momento,  $N$ , quanto a expressão heurística que o descreve, são referentes à baliza 5, meia-nau. Ao transferi-lo para o ponto do turet, origem do sistema coordenado adotado, temos, de acordo com a figura 3.4, abaixo:

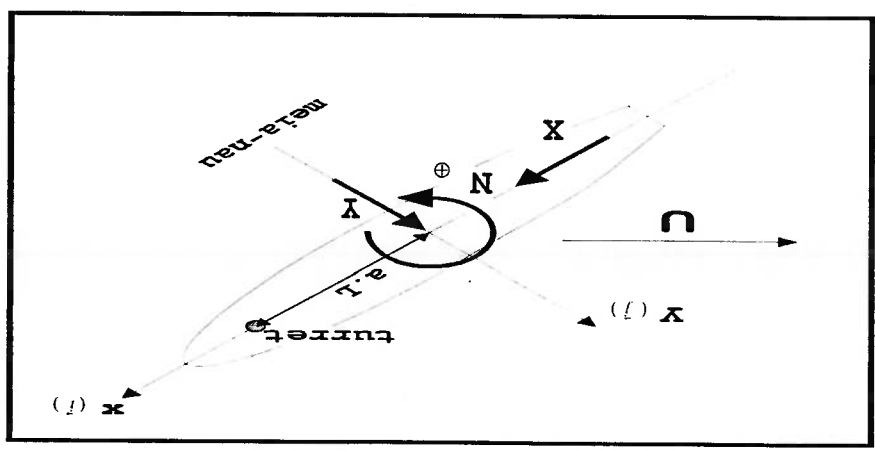


Figura 3.4 - Transferência do momento para o turret

$$N(U; \Psi) = N^{\oplus}(U; \Psi) - Y(U; \Psi) \cdot a.L. \quad (3.8)$$

onde:

$N(U; \Psi)$  = momento devido à corrente, no plano horizontal, medido no turret;

$N^{\oplus}(U; \Psi)$  = momento devido à corrente, no plano horizontal, medido na baliza 5 (meia-

nav);

$Y(U; \Psi)$  = força transversal devido à corrente, no plano horizontal;

$a.L$  = distância do turret à meia-nav, como porcentagem do comprimento do navio,  $L$ .

Sendo assim, a equação do movimento fica:

$$(I_{z_1} + M_{z_2} x_p^2 + M_{z_3} + 2M_{z_0} x_p) \ddot{\Psi} - \left. \frac{\partial \Psi}{\partial N} \right|_{(\Psi=0)} \Psi - N^{\oplus}(U; \Psi) - Y(U; \Psi) \cdot a.L = 0. \quad (3.9)$$

## 3.3 ESTABILIDADE E ESTUDO DA BIFURCAÇÃO - ANÁLISE TEÓRICA

Definindo:

$$\hat{N}_{\psi_0} = \left[ \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial N} \right]_{(\psi=0)} \cdot \left[ \frac{1}{I_{z_1} + M_{22} x_2^d + M_{66} + 2M_{26} x_6^d} \right]$$

e,

$$\hat{N}(U; \Psi) = \left[ \frac{Y(U; \Psi) \cdot a.L - N^{\ominus}(U; \Psi)}{I_{z_1} + M_{22} x_2^d + M_{66} + 2M_{26} x_6^d} \right]$$

podemos reescrever a expressão 3.9:

$$\hat{\Psi} + \hat{N}_{\psi_0} \Psi + \hat{N}(U; \Psi) = 0. \quad (3.10)$$

Analisando a expressão 3.10 (a análise detalhada encontra-se no anexo C), temos a seguinte condição para perda da estabilidade estrutural do sistema (ocorrência de

bifurcação):

$$\left( \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial N} \right)_{\psi=0} = 0, \quad (\text{bifurcação}) \quad (3.11a)$$

o que ocorre para uma posição do turrel, distante a.L da seção mestra (meia-nau), tal que  $a = a_{CR}$ , sendo:

$$a_{CR} = \frac{\left( \frac{1}{2} + 2,4 \frac{L}{T} \right)}{\left( 1 + 0,4 \frac{L}{C_B B} \right)} \quad (3.11b)$$

e a condição para que a posição de equilíbrio trivial,  $\Psi = 0$ , seja estável é:

$$\left( \frac{\partial^2 N}{\partial \Psi^2} \right)_{\Psi=0} > 0, \quad \text{(estabilidade)} \quad (3.11c)$$

o que ocorre para  $a > a_{CR}$ .

Utilizando as expressões heurísticas do capítulo 3 para expressar os esforços

$Y(U; \Psi)$  e  $N^{\oplus}(U; \Psi)$  e definindo:

$$A(a) = \left[ \frac{3}{2}(a_{CR} - a) + \left( \frac{a}{1} - \frac{4}{4} + 1,2 \frac{L}{T} \right) \right];$$

$$B(a) = \left[ \left( LC^{2c}(\pi/2) \frac{\pi T}{1} - \frac{2}{1} \right) \cdot \frac{\left( a + \frac{L}{T} \right)}{\left( 1 + 0,4 \frac{C_B}{C_B} \frac{L}{B} \right)} \right];$$

$$C(a) = (a_{CR} - a),$$

a condição de equilíbrio 3.11a fica:

$$\frac{\pi T}{L} \cdot \left( 1 + 0,4 \frac{C_B}{L} \right) \cdot \left[ A(a)\Psi^3 + B(a)\Psi|\Psi| - C(a)\Psi \right] = 0,$$

ou, simplesmente:

$$\left[ A(a)\Psi^3 + B(a)\Psi|\Psi| - C(a)\Psi \right] = 0, \quad \text{(equilíbrio)} \quad (3.13)$$

e a condição de estabilidade fica:

$$\left[ 3A(a)\Psi^2 + 2B(a)\Psi - C(a) \right] > 0 \quad \text{(estabilidade)} \quad (3.14)$$

<sup>4</sup> No capítulo 2,  $N^{\oplus}(U; \Psi)$  é denominado simplesmente  $N(U; \Psi)$ , ambos se referindo ao momento hidrodinâmico no plano horizontal causado por corrente uniforme, medido na seção mestra.

Por outro lado, quando o sistema bifurca, o que ocorre quando  $a < a_{CR}$ , ou seja,  $C(a) > 0$ , ele assumirá uma nova posição de equilíbrio,  $\Psi = \Psi_e \neq 0$ , e a expressão 3.13 se reduz a:

$$[A(a)\Psi_e^2 + B(a)|\Psi_e| - C(a)] = 0, \quad (3.15)$$

com a condição de estabilidade se tornando:

$$[-B(a)|\Psi_e| + 2C(a)] > 0, \quad (3.16a)$$

ou, ainda:

$$[2A(a)\Psi_e^2 + B(a)|\Psi_e|] > 0. \quad (3.16b)$$

Analisando a expressão 3.16a, observando que  $B(a) > 0$ , temos que a única posição estável de equilíbrio quando  $a > a_{CR}$ , ou seja,  $C(a) < 0$  é a posição trivial,  $\Psi = 0$ .

Voltando à expressão 3.15, observa-se que suas **raízes estáveis**,  $\Psi = \Psi_e \neq 0$ , dependerão do sinal de  $A(a)$ , de tal forma que:

•  $A(a) > 0$

$$\Psi_e = \pm \left\{ \frac{B(a)}{2A(a)} + \sqrt{\left(\frac{B(a)}{2A(a)}\right)^2 + \frac{C(a)}{A(a)}} \right\}; A(a) > 0, \quad (3.17a)$$

$$\Psi_e = \pm \left\{ \frac{B(a)}{2|A(a)|} - \sqrt{\left(\frac{B(a)}{2|A(a)|}\right)^2 - \frac{C(a)}{|A(a)|}} \right\}; A(a) < 0. \quad (3.17b)$$



As raízes fornecidas pelas expressões 3.17a e 3.17b determinam, portanto, o comportamento pós-crítico do sistema, ou seja, os seus ângulos de equilíbrio de yaw quando  $a > a_{CR}$ , ângulos esses que são estáveis, independentemente do sinal de  $A(a)$ .

Analisando as vizinhanças do ponto de bifurcação, onde  $0 \leq (a_{CR} - a) \ll 1$ , isto é,  $(0 \leq C(a) \ll 1)$ , temos que, nessa faixa, vale a expressão:

$$\Psi_e \cong \pm \frac{B(a)}{(a_{CR} - a)}; (0 \leq a_{CR} - a \ll 1), \quad (3.18)$$

que nos mostra que o ângulo de equilíbrio pós-bifurcação **crece linearmente** com o parâmetro de posicionamento do *turret*,  $a$ , nas vizinhanças do ponto de bifurcação (onde  $a = a_{CR}$ ).

Esse resultado contrasta com resultados obtidos através da expansão da força hidrodinâmica por expansão tipo série de Taylor (ver, por exemplo, [18] e [22]). Por esse tipo de abordagem, o termo quadrático  $B(a)\Psi_e^2$ , não é considerado ao se realizar a expansão da força hidrodinâmica. No nosso caso, significaria considerar o termo  $B(a) = 0$ .

Fazendo  $B(a) = 0$  na expressão 3.17a, válida para  $A(a) > 0$ , observa-se facilmente que o ângulo passa a crescer com a **raiz quadrada** do parâmetro de posicionamento do *turret*,  $a$ .

Mais do que isso, quando  $A(a) < 0$ , observa-se de 3.17b, que não haveria ângulo de equilíbrio pós-bifurcação estável, caracterizando um caso de bifurcação sub-crítica ou catastrófica. De fato, nesse caso, teríamos (ver [18]):

- quando  $a > a_{CR} \Rightarrow$  sistema estável em  $\Psi = 0$ ;
- quando  $a > a_{CR} \Rightarrow$  sistema perde a estabilidade, com bifurcação podendo ser supercrítica ( $\Psi_e \neq 0$  estável) ou subcrítica/catastrófica ( $\Psi_e \neq 0$  instável) dependendo, em última análise, de:

- Se  $a \cdot L \cdot Y_{\psi\psi\psi} > N_{\psi\psi\psi} \Rightarrow$  supercrítica;
- Se  $a \cdot L \cdot Y_{\psi\psi\psi} < N_{\psi\psi\psi} \Rightarrow$  subcrítica ou catastrófica.

Resumindo a argumentação acima, temos que o comportamento pós-crítico do sistema depende do sinal de  $A(a)$ : se  $A(a) > 0$ , tem-se bifurcação supercrítica e, portanto, **existe**  $\psi_e \neq 0$  estável; por outro lado, se  $A(a) < 0$ , tem-se bifurcação subcrítica, ou seja, **não existe**  $\psi_e \neq 0$  estável. Diz-se, portanto, que o modelo é **estruturalmente instável** quando  $A(a) = 0$ , tudo dependendo do sinal das terceiras derivadas da força lateral e do momento em relação ao ângulo de incidência.

Vê-se que, a não inclusão do termo quadrático no desenvolvimento das forças hidrodinâmicas em  $U$  e  $\psi$  (ou, como visto, em  $u^m$  e  $v^m$ ) as quais, em última análise, compõem o termo não-linear de restauração da equação dinâmica do sistema, implicará que a sua **estabilidade estrutural** dependa de derivadas hidrodinâmicas de terceira ordem em  $\psi$ . Dadas as incertezas na determinação experimental dessas derivadas, a confiabilidade da análise de estabilidade do sistema, incluindo seu comportamento pós-crítico (quando  $a > a_{CR}$ ) fica bastante comprometida não só em termos **quantitativos**, mas também **qualitativos**, esse último ponto em cheque a própria **robustez** do modelo dinâmico em relação a variações dos parâmetros que o governam (no caso, as derivadas hidrodinâmicas). Portanto, o modelo matemático clássico, que desconsidera o termo quadrático e não-robusto, posta a inevitável imprecisão na determinação das terceiras derivadas, as quais sempre interferirão fortemente no comportamento do modelo, conforme apontado em [18].

Um cenário completamente diferente se desenha quando o termo quadrático,  $B(a)|\psi|^\alpha$ , é incorporado ao modelo. Como  $B(a) > 0$ , o modelo será é estruturalmente estável, uma vez que um diagrama de bifurcação similar será sempre observado independentemente dos valores dos demais parâmetros. Mais do que isso, esse modelo é robusto, uma vez que o coeficiente  $B(a)$ , que define o comportamento do sistema, é conhecido com precisão e é dominante para  $\psi < 1$ . Portanto, mesmo mudanças de sinal em  $A(a)$  pouco afetarão o comportamento do modelo.

A seguir, resultados experimentais ilustram e atestam o modelo proposto.

### 3.4 ESTABILIDADE E ESTUDO DA BIFURCAÇÃO - RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Ensaio de estabilidade direcional (ver figura 3.3) foram realizados no IPT [2] para 2 navios, o "PP Moraes" e o "Vidal de Negreiros", nas condições 100% carregado e a 40% do calado. A tabela 3.2, abaixo, traz as características principais dos navios ensaiados:

NAVIO	COND.	DWT	$C_B$	L (m)	B (m)	T (m)
Moraes	100%	55.000	0.821	231.1	26.0	12.8
Moraes	40%	ND	0.771	231.1	26.0	5.1
Vidal	100%	282.000	0.832	320.0	54.5	21.6
Vidal	40%	ND	0.758	320.0	54.4	8.64

**Tabela 3.2** - Características principais dos navios ensaiados

Com as características principais da tabela podemos calcular o valor teórico da posição crítica do turet,  $a_{CR}$ , através da expressão 3.11b.

Os coeficientes de força transversal e os braços do momento para incidência de través para os mesmos navios, por sua vez, são mostrados na tabela 3.3:

NAVIO	B/2T	$r_c/T$	$C_{2c}(\pi/2)$ calculado	$C_{2c}(\pi/2)$ ensaio <sup>5</sup>	I/L
Moraes	1.02	0.12	1.04	1.05	1.4%
Moraes	2.53	0.30	0.50	0.50	8.6%
Vidal	1.26	0.14	0.84	0.85	5.9%
Vidal	3.16	0.38	0.50	0.50	ND

**Tabela 3.3** - Coeficiente transversal e braço do momento de través dos navios ensaiados

<sup>5</sup> Ver também a tabela 2.4 e sua nota de rodapé.

Utilizando os valores experimentais disponíveis de  $C_{zc}(\pi/2)$  e de  $l/L$ , e estimando com base nos resultados do Marin e do Marintek, para o "Vidal de Negreiros" a 40% do calado:

$$\left(\frac{l}{L}\right)^{\text{Vidal,40\%}} \cong 5.0\%$$

podemos calcular os valores experimentais aproximados de  $a_{CR}$  utilizando os valores experimentais do primeiro ponto bifurcado do ensaio  $(a_1; |\Psi_{e,1}|)$ , para cada navio e relacionando-os através da expressão 3.18:

$$|\Psi_{e,1}| \cong \pm \frac{B(a_1)}{(a_{CR} - a_1)}; (0 \leq a_{CR} - a_1 \ll 1),$$

sendo (expressão 3.12):

$$B(a_1) = \left[ \left( LC_{zc}(\pi/2) - \frac{\pi T}{2} \right) \frac{\left( a_1 + \frac{l}{L} \right)}{\left( 1 + 0,4 \frac{C_B T}{C_B B} \right)} \right]$$

A determinação do valor experimental de  $a_{CR}$  é imprecisa, visto que é impossível determinar com exatidão o ponto a partir do qual o sistema bifurca, não só porque o ensaio é realizado para pontos discretos, como também devido às imperfeições inerentes a qualquer ensaio. O procedimento proposto também é impreciso e será tão melhor quanto melhores e mais exatas forem as medidas do ângulo de equilíbrio pós-crítico,  $\Psi_e$ .

A tabela 3.4, abaixo, lista os valores teórico e experimental de  $a_{CR}$ :

Para a comparação do comportamento pós-crítico teórico com o experimental, utilizou-se os valores de  $A(a)$  e  $C(a)$  calculados com o  $a_{CR}$  teórico, uma vez que, mais que o valor que fornece  $a_{CR}$ , pretende-se testar a função teórica que descreve  $\Psi_e = f(a)$ , expressões 3.17a e 3.17b.

As figuras 3.5 e 3.6 compararam os resultados das expressões 3.17a e 3.17b aos resultados experimentais.

Os ensaios foram realizados para duas velocidades diferentes, 0.2 e 0.5 m/s (escala do modelo), procurando acessar a sensibilidade do modelo a imperfeições não contabilizadas na teoria como, por exemplo, formação de ondas. As velocidades utilizadas correspondem a números de Froude seccionais de 0.10 e 0.25, respectivamente, para o "PP Moraes" e de 0.08 e 0.24 para o "Vidal de Negreiros".

Pode-se observar, como se poderia esperar, que as diferenças entre os valores experimentais obtidos para as duas velocidades aumenta à medida que  $\Psi_e$  cresce, uma vez que a geração de ondas aumenta com o ângulo de ataque. Ao mesmo tempo, na condição 100%, onde forças de corrente são maiores, essas diferenças são menores que no caso 40%, onde as forças de corrente são menores e a importância relativa das forças de formação de ondas é maior. De qualquer maneira, observa-se que formação de ondas de fato ocorre, influenciando o resultado.

**Tabela 3.4 - Valor teórico e experimental de  $a_{CR}$**

NAVIO	$a_{CR}$ teoria	$a_{CR}$ ensaio	ERRO
Moraes 100%	0.36	0.42	-14.3%
Moraes 40%	0.22	0.21	4.8%
Vidal 100%	0.38	0.36	5.5%
Vidal 40%	0.22	0.19	13.0%

Atendo-nos aos casos de velocidade mais baixa, uma boa aderência aos resultados experimentais é observada, exceto por assimetrias encontradas nos modelos (principalmente no "Vidal de Negreiros" a 40%), atribuídas a imperfeições variadas.

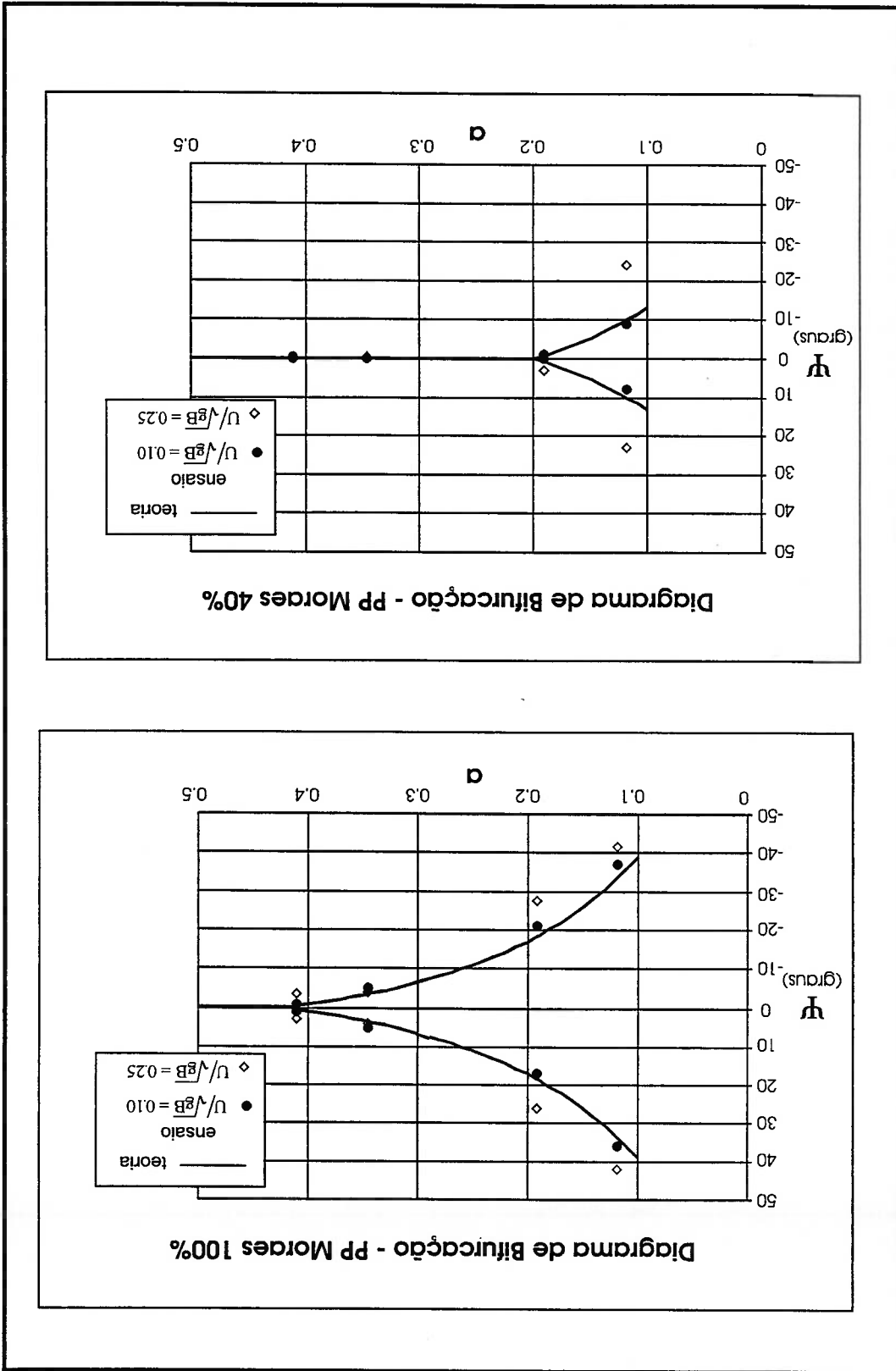


Figura 3.5 - Diagrama de bifurcação para o "PP Moraes" (100% e 40%)

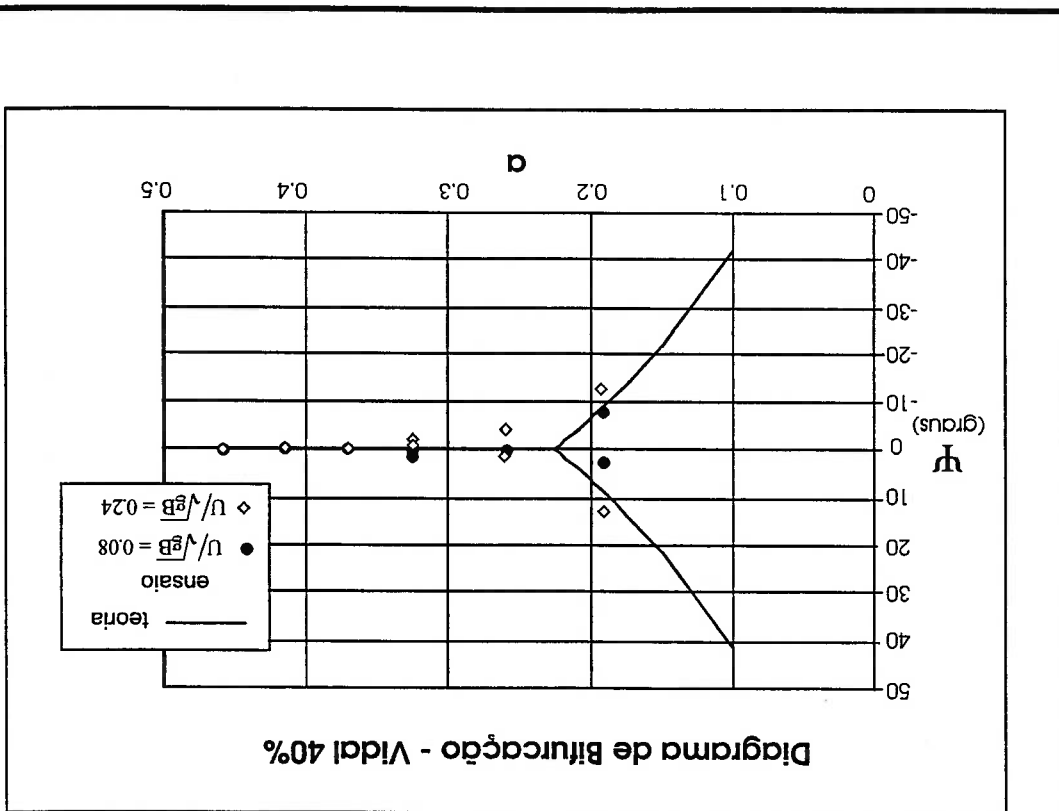
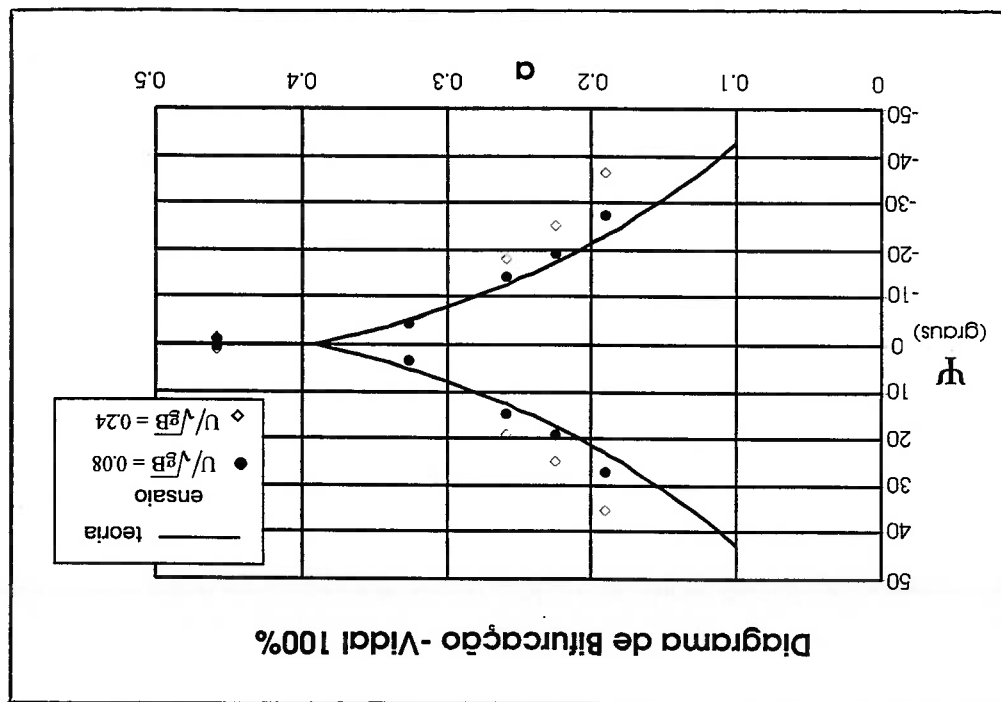


Figura 3.6 - Diagrama de bifurcação para o "Vidal de Negreiros" (100% e 40%)



## FORÇAS DE CORRENTE EM PETROLEIROS E BIFURCAÇÃO DO EQUILÍBRIO EM SISTEMAS TIPO *TURRET*

### 4. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

O trabalho apresentou expressões heurísticas para os esforços (força e momento) no plano horizontal causado por escoamento estacionário incidindo sobre o casco de um navio, em função do ângulo de incidência.

A metodologia utilizada para isso parte de teoria de asa curta incorporando fatores de correção obtidos dos coeficientes de manobra lineares derivados por Clarke [7], na faixa  $0 < \alpha < \alpha_{stall}$ , combinada com as expressões clássicas oriundas da condição de *cross-flow*, para  $\alpha > \alpha_{stall}$ . A argumentação utilizada no desenvolvimento das expressões não é nova (ver, por exemplo, [10] e [23]), porém a condução do problema, combinando teoria de asa com *cross-flow* e incorporando os coeficientes do Clarke é.

As expressões dos coeficientes de força longitudinal,  $C_{1\alpha}(\alpha)$ , e transversal,  $C_{2\alpha}(\alpha)$ , são determinados a partir da divisão dessas forças em duas componentes: a primeira de arrasto viscoso e a segunda de asa, essa subdividida em duas, sustentação e arrasto induzido.

A componente de asa de  $C_{1\alpha}(\alpha)$  é expandida em série de Fourier que, somada à componente de arrasto, proporcional a  $\cos\alpha|\cos\alpha|$ , fornece a forma final da expressão.

A componente de asa de  $C_{2\alpha}(\alpha)$ , por outro lado, é mantida na sua forma original, apenas incorporando a correção para a forma do navio baseada no trabalho de Clarke. Sendo assim, a expressão final desse coeficiente apresenta termos proporcionais a  $\sin\alpha|\cos\alpha|$ ,  $\sin\alpha|\sin\alpha|$  e  $\sin^3\alpha$ , ou seja, proporcionais a  $\alpha$ ,  $\alpha|\alpha|$  e  $\alpha^3$  quando  $\alpha \ll 1$ .

O coeficiente de momento,  $C_{6\alpha}(\alpha)$ , por sua vez, é determinado a partir do momento de Munk, ajustado pela correção proposta por Clarke que o “assimetrizava” por

levar em conta o efeito estabilizador do leme quando a corrente incide pela proa e desestabilizador pela popa. Adiciona-se, ao momento assim determinado, uma parcela viscosa oriunda do *cross-flow*. Como resultado final, chega-se a uma expressão cujas parcelas são proporcionais a  $\sin\alpha|\sin\alpha|$ ,  $\sin\alpha\cos\alpha$  e  $\sin\alpha|\cos\alpha|$ , ou seja, a  $\alpha|\alpha|$  e  $\alpha$  quando  $\alpha \ll 1$ .

As expressões são válidas para navios sem banda ou trim, e com leme. Alguns ajustes foram feitos no final, a partir da comparação das expressões com resultados de ensaio de modelo cativo e o resultado final é bastante bom, como atestam as comparações finais.

As expressões assim obtidas foram usadas na análise da bifurcação do equilíbrio e determinação do comportamento pós-crítico de petroleiros com apenas um grau de liberdade, o movimento de yaw,

sob ação exclusiva de correnteza.

O equilíbrio do navio pivotado no turet, distante a  $L$  da meia-nau, para  $\alpha \ll 1$  depende então da diferença entre  $C_{66}(\alpha)$  e  $C_{2c}(\alpha) \cdot a$ , ou seja, de um momento que, por sua vez, depende da localização do turet,  $a$ , e de  $\alpha$ ,  $\alpha|\alpha|$  e  $\alpha^3$ , podendo ser restaurador ou desestabilizador,

Mostra-se que existe um valor de  $a = a_{cr}$ , facilmente determinado por características geométricas da embarcação, abaixo do qual ocorre bifurcação. Uma vez bifurcado, o sistema encontra um novo ângulo de equilíbrio o qual sempre é estável, dentro da premissa de ação exclusiva da correnteza.

Aqui pode-se marcar a diferença entre o modelo matemático proposto por esse trabalho para o estudo da bifurcação e o usual, baseado em teoria clássica de manobra, onde, ao desenvolver os esforços hidrodinâmicos em séries de Taylor, toma-se apenas os termos ímpares, deixando de lado o termo quadrático, por ser par. Ocorre que esse termo quadrático deve ser expresso como  $\alpha|\alpha|$ , ímpar, e não  $\alpha^2$ , par, e é dominante na faixa de  $\alpha \ll 1$ . A bifurcação do equilíbrio é governada, portanto, pelo coeficiente

$B(a)$ , onde  $B(a)$  é o coeficiente de proporcionalidade de  $\alpha|\alpha|^1$ , ou, se se preferir, a derivada hidrodinâmica de segunda ordem da força lateral e depende apenas de características geométricas do navio, além do coeficiente  $C_{z_c}(\pi/2)$  e da razão  $l/L$ , todos possíveis de serem determinados com precisão.

Em outras palavras, a força lateral, obtida pela condição de *cross-flow* domina o cenário pós-bifurcação garantindo sempre a estabilidade do novo ângulo de equilíbrio atingido pela embarcação.

Pelo modelo matemático usual, por outro lado, o cenário pós-bifurcação depende de derivadas hidrodinâmicas de terceira ordem, podendo o novo ângulo de equilíbrio ser estável (bifurcação supercrítica) ou instável (bifurcação subcrítica ou catstrófica). Ou seja, a **estabilidade estrutural** do sistema assim descrito, depende dessas derivadas cuja determinação, por seu turno, é uma tarefa experimental muito difícil, como a experiência comprova. Diferenças muitas vezes superiores a 100% entre valores obtidos por instituições diferentes não é fato incomum, havendo, inclusive, casos de diferenças de sinal, o que implica em diferenças **estruturais** no comportamento pós-crítico do sistema.

Sendo assim, o modelo matemático proposto apresenta uma **robustez** a variações dos parâmetros hidrodinâmicos que governam os esforços sobre o navio não encontrada no modelo matemático dito clássico e esse é o resultado mais importante do trabalho.

Do ponto de vista de projeto de sistemas de ancoragem, a aplicação dos resultados do trabalho é imediata:

- Uso das expressões heurísticas nos programas de cálculo de ancoragem (no domínio do tempo ou da frequência), ao invés das “tabelas da OCIMF”, uma vez que as primeiras permitem calcular os esforços como função das características geométricas da embarcação, o que não ocorre no caso da OCIMF;

---

<sup>1</sup> A parcela da restauração proporcional a  $\alpha|\alpha|^1$  é escrita como  $B(a) \cdot \alpha|\alpha|^1$ , ou, usando a definição usual para o ângulo em teoria de manobras,  $\Psi = (\pi - \alpha)$ , como  $B(a) \cdot \Psi|\Psi|^1$ .

- Inclusão do termo quadrático nos simuladores temporais em uso para cálculo de sistemas de ancoragem melhorando sua precisão e confiabilidade (Inoue et al. [24] apresenta um modelo matemático que inclui esse termo explicitamente);
- Aprofundamento do estudo dos efeitos do leme na estabilização de FPSO's tipo SPM, em particular aqueles ancorados através de turet. Isso abre caminho para projeto de lemes estabilizadores especiais para SPM's, possibilitando, inclusive, a instalação do turet (e, consequentemente, dos risers) mais próximo à meia-nau. Alguns ensaios de estabilidade direcional para navios sem leme, com leme convencional (esses utilizados no trabalho, capítulo 3) e com lemes não convencionais já foram realizados no IPT, com resultados promissores.

Um exemplo do trabalho de investigação da influência de lemes na bifurcação é ilustrado na figura 4.1, onde os resultados de ensaios de estabilidade direcional realizados com o "Vidal de Negreiros" nas condições 100% e 40% são mostrados. Os ensaios foram feitos rebocando-se o navio sem leme, com leme normal e com leme duplo<sup>2</sup> a velocidades de 0.2 e 0.5 m/s (Números de Froude seccionais de 0.08 e 0.24, respectivamente).

Para o caso 100%, mais instável, basta mostrar o ensaio a 0.2 m/s, onde os efeitos dos lemes normal e duplo em contraste com o casco nu já se fazem ver. Para o caso 40%, mais estável, o ensaio a 0.2 m/s não oferece o mesmo contraste entre as três situações e, portanto, optou-se por mostrar o ensaio a 0.5 m/s.

A tabela 4.1, abaixo, mostra os valores de  $(a_{CR})_{EXP}$  para os casos ensaiados<sup>3</sup>:

CONDICÃO	$(a_{CR})_{EXP}$ sem leme	$(a_{CR})_{EXP}$ com leme	$(a_{CR})_{EXP}$ leme duplo
100%	0.46	0.36	0.22
40%	0.30	0.23	> 0.19

Tabela 4.1 -  $(a_{CR})_{EXP}$  para o "Vidal de Negreiros"

<sup>2</sup> O leme normal tem dimensões: corda=c; altura=h. O leme duplo: corda=c; altura=2h.

<sup>3</sup> Aplicou-se aqui o mesmo procedimento adotado anteriormente (ver capítulo 3) para o cálculo de  $(a_{CR})_{EXP}$ . Embora a expressão que determina B(a), necessaria para esse cálculo, apenas seja válida para o caso com leme normal, as diferenças esperadas não são tão grandes que não permitam essa pequena digressão para um cálculo aproximado.

A influência do leme normal é significativa em ambos os casos, provocando uma diminuição da ordem de  $30\%$  no valor de  $(a^{CR})^{EXP}$ . Em ambos os casos observa-se claramente o efeito estabilizador do leme duplo, possibilitando a instalação do turret bastante próximo à meia-nau.

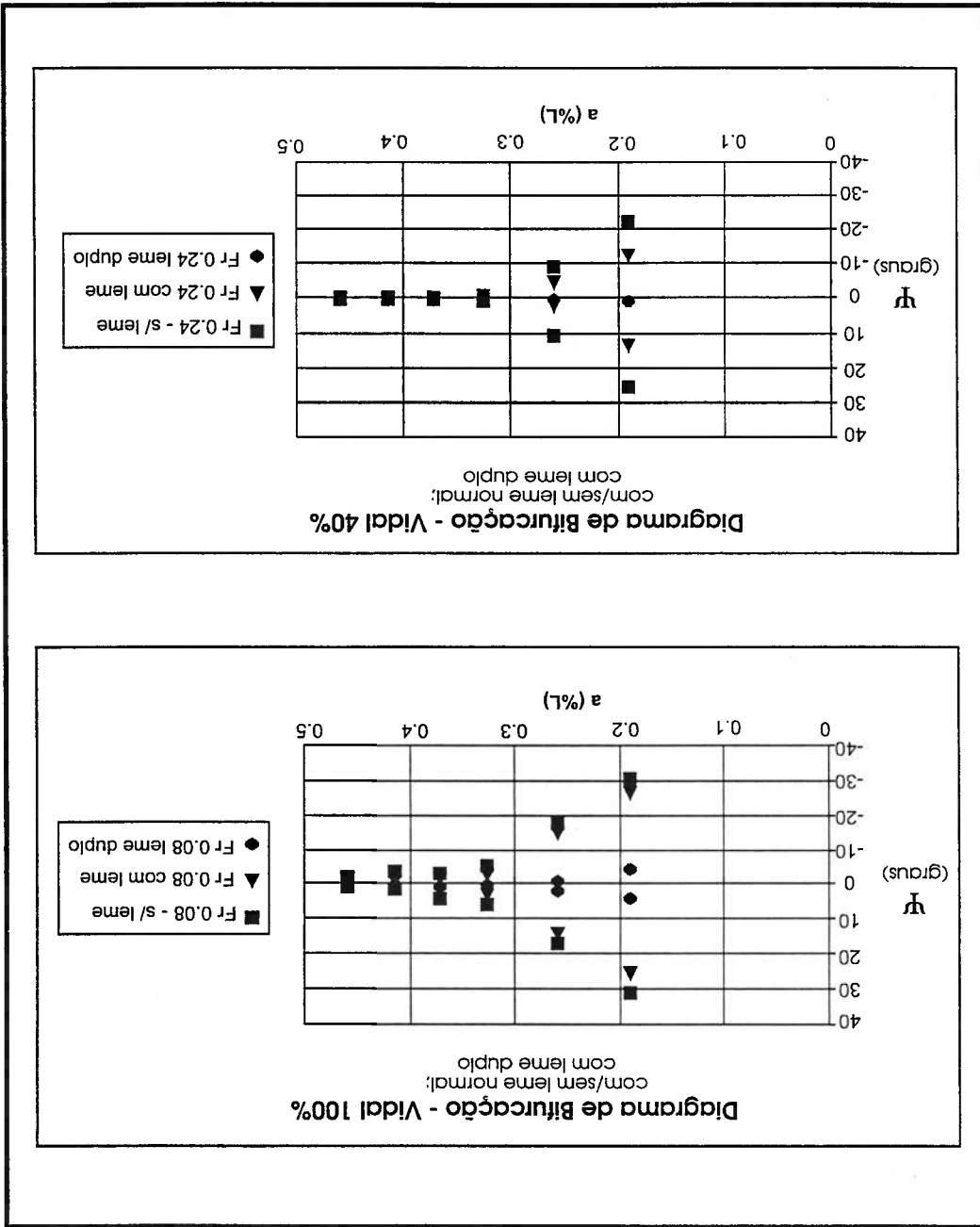


Figura 4.1 - Diagramas de Bifurcação para o "Vidal de Negreiros" sem/com leme e com leme duplo

À luz dos resultados apresentados, recomenda-se os seguintes desdobramentos:

- Aprofundar o estudo do efeito de lemes na estabilidade e comportamento pós-crítico de navios;
- Estudar a influência de trim (com ênfase a trim pela popa, mais útil e usual) no momento causado pela corrente sobre o casco e seus impactos na sua estabilidade direcional;
- Estudar a alternativa de se combinar a instalação do turrel fora da linha de centro longitudinal do navio (introduz um momento de giro) com um ângulo permanente no leme (compensa com um contra-momento de giro), de modo a aumentar a rigidez angular do sistema no plano horizontal;
- Estudar a influência da lâmina d'água nas expressões heurísticas para os esforços de corrente, ampliando sua faixa de aplicação (por exemplo, monobóias em águas rasas);
- Aperfeiçoar e consolidar a expressão proposta para o cálculo de  $C_z(\pi/2)$  com base em ensaios bidimensionais<sup>4</sup>;
- Prosseguir nos ensaios de estabilidade direcional, adicionando novos graus de liberdade ao sistema como, por exemplo, molas nos sentidos longitudinal e transversal do navio;
- Realizar ensaios de rotação (*yaw-rotating* ou similar) para extrair a força proporcional à velocidade angular, não resgatada pelo ensaio de modelo cativo.

<sup>4</sup> Uma bateria de ensaios bidimensionais do tipo realizado por Hoerner [1] está atualmente em andamento no IPT, visando fornecer dados mais confiáveis para esse fim.

ANEXO A

**ALGUMAS RELAÇÕES MATEMÁTICAS DA TEORIA POTENCIAL**

Tomando as equações de campo para o fluido contido num determinado volume

de controle, temos:

$$(A.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bullet \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \nabla) \cdot \bar{u} = - \frac{p}{\Delta \rho} - \bar{g} \cdot \bar{k} + \nu \Delta^2 \bar{u}; \\ \bullet \text{div}(\bar{u}) = 0, \end{array} \right.$$

que pode ser desenvolvida para o caso de  $\bar{u} = \nabla \Phi$  como se segue.

Tomando a expressão da aceleração convectiva, temos:

$$(\bar{u} \cdot \nabla) \cdot \bar{u} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z},$$

ou seja:

$$(A.2) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Delta \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Delta \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Delta \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

Por outro lado:

$$(A.3) \quad \begin{aligned} & \Delta \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] \\ &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] \end{aligned}$$

Analogamente:

$$\Delta \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \left[ \Delta \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \right]; \quad (A.4)$$

e,

$$\Delta \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \left[ \Delta \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \right]; \quad (A.5)$$

Substituindo as primeiras parcelas das equações A.3, A.4 e A.5 em A.2, temos:

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u} = (\nabla \Phi \cdot \nabla) \cdot \nabla \Phi = \Delta \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 \right] + \Delta \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] + \Delta \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \Delta \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \Delta (\nabla \Phi)^2; \quad (A.5)$$

Voltando à expressão A.1, com  $\mathbf{u} = \nabla \Phi$  e a equação A.5, ficamos com:

$$\left\{ \begin{aligned} & \bullet \frac{\partial (\Delta \Phi)}{\partial t} + \frac{1}{2} \Delta (\nabla \Phi)^2 = - \frac{p}{\Delta \rho} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{k} + \nu \Delta^2 (\Delta \Phi); \\ & \bullet \text{div}(\Delta \Phi) = 0. \end{aligned} \right.$$

A conservação de massa, no caso, fica  $\text{div}(\nabla \Phi) = \Delta^2 \Phi = 0$ , eliminando o termo

$\nu \Delta^2 (\Delta \Phi)^2$ , que garante a condição de contorno  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_s = 0$  (essa condição nos diz que a

partícula fluida não escorrega sobre o corpo).

No escoamento potencial, portanto, a partícula fluida **escorrega** sobre o corpo e

a condição de contorno sobre o mesmo se reduz a  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_s = 0$ .

Isso também pode ser visto por outro lado, sabendo-se que num fluido ideal, o

escoamento é irrotacional ( $\text{rot}(\mathbf{u}) = 0$ ) devido à inexistência da viscosidade. No caso

bidimensional, prova-se facilmente que  $\nabla^2 \mathbf{u} = -2 \text{rot}(\bar{\Omega})$ , onde  $\bar{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot}(\mathbf{u})$ . Portanto,

sendo o fluido ideal, o campo de velocidades é irrotacional e  $\nabla^2 \mathbf{u} = 0$ , eliminando o

termo da equação de Navier-Stokes, responsável pela condição de não-escorregamento



da partícula fluida sobre o corpo ( $\nabla^2 \bar{u} = 0$ ). Isso implica que não há geração de

vórtices em qualquer ponto do fluido nem, em particular, na camada limite.

A equação A.1 fica, portanto, reduzida a:

$$\frac{\partial(\Delta\Phi)}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta(\Delta\Phi)^2 = -\frac{\rho}{\Delta p} - g\bar{k} \Rightarrow \Delta \left[ \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\Delta\Phi)^2 + \frac{\rho}{p} \right] + g\bar{k} = \bar{0} \quad \dots(A.6)$$

Integrando A.6, temos o campo de pressão associado ao escoamento do fluido

ideal (escoamento potencial) dado pela **equação de Bernoulli**:

$$\boxed{p(\bar{x}, t) = -\rho \frac{\partial\Phi(\bar{x}, t)}{\partial t} - \rho g z - \frac{1}{2}\rho |\Delta\Phi(\bar{x}, t)|^2} \quad (A.7)$$

Seja, agora, o problema potencial de escoamento estacionário descrito no

capítulo 2 (corrente incidindo sobre o casco de um navio com velocidade  $U = cte$  - ver

figuras 2.1 e 2.6), onde:

$$\bar{u} = \nabla\Phi,$$

Nesse caso:

$$\frac{\partial\Phi(\bar{x}, t)}{\partial t} = 0.$$

A função potencial pode ser escrita como:

$$\Phi = U\phi,$$

sendo  $\phi$  a função potencial para  $U = cte = 1$ , obedecendo às seguintes condições:

- $\Delta^2\phi = 0;$
- $\Delta\phi \cdot \bar{n}_s = 0;$
- $\Delta\phi \rightarrow \cos\alpha \cdot \bar{i} + \text{sen}\alpha \cdot \bar{j}$  no  $\infty.$

A expressão A.7 se reduz a:

<sup>1</sup> A parcela hidrostática,  $\rho g z$ , pode ser deixada de fora, pois, nesse caso, os efeitos gravitacionais podem ser desprezados.

$$p(\underline{x}, t) = -\frac{1}{2} \rho |\Delta \Phi(\underline{x}, t)|^2 = -\frac{1}{2} \rho |\Delta(U\phi)|^2 = -\frac{1}{2} \rho U^2 |\Delta\phi|^2, \quad (A.8)$$

e as forças e momentos agindo sobre o casco são dados pelas expressões:

$$\underline{F} = \int_S p \underline{n} \, dS; \quad (A.9)$$

$$\underline{N} = \int_S \underline{r}(dS) \times p \underline{n} \, dS. \quad (A.10)$$

### A.1 - FORÇAS

A expressão da força nas direção x devido ao potencial  $\Phi$  é:

$$(\underline{F} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}; \quad \underline{n} = n_x\bar{i} + n_y\bar{j} + n_z\bar{k}.)$$

$$X = \int_S p \, n_x \, dS = -\frac{1}{2} \rho \int_S |\Delta\Phi|^2 n_x \, dS = -\frac{1}{2} \rho U^2 \int_S |\Delta\phi|^2 n_x \, dS;$$

De acordo com a figura 2.6, podemos escrever:

$$\int_S |\Delta\phi|^2 n_x \, dS = \underbrace{\int_S |\Delta\phi|^2 n_x \, dS}_{0} + \int_{S_\infty} |\Delta\phi|^2 n_x \, dS;$$

Definindo:  $\bar{Q} = |\Delta\phi|^2 \bar{i} \Rightarrow \bar{Q} \cdot \underline{n} = |\Delta\phi|^2 n_x$ , podemos aplicar o teorema do

divergente:

$$\int_S |\Delta\phi|^2 n_x \, dS = \int_S \bar{Q} \cdot \underline{n} \, dS + \int_{S_\infty} \bar{Q} \cdot \underline{n} \, dS = \int_V \text{div}(\bar{Q}) \, dV;$$

Mas:

$$\text{div}(\bar{Q}) = \text{div}(|\Delta\phi|^2 \bar{i}) = \frac{\partial}{\partial x} (|\Delta\phi|^2).$$

Portanto:

$$\int_V \text{div}(\bar{Q}) \, dV = \int_V \frac{\partial}{\partial x} (|\Delta\phi|^2) \, dV = \int_V \Delta \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \, dV. \quad (A.11)$$

Por outro lado:

$$\int_V \frac{\partial \phi}{\partial x} \Delta^2 \phi \, dV = 0 = \int_V \Delta \cdot \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \Delta \phi \right) \, dV - \int_V (\Delta \phi) \cdot \Delta \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \, dV \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_V \Delta \cdot \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \Delta \phi \right) \, dV = \int_V (\Delta \phi) \cdot \Delta \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \, dV = \underbrace{\int_V \text{div} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \Delta \phi \right) \, dV}_{\text{teorema de divergente}} \Leftrightarrow$$

=> aplicando o teorema do divergente =>

$$\Leftrightarrow \int_V \Delta \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \cdot \Delta \phi \, dV = \int_V \frac{\partial \phi}{\partial x} \Delta (\Delta \phi) \, dV + \underbrace{\int_V \frac{\partial \phi}{\partial x} (\Delta \phi) \cdot \Delta \phi \, dV}_0 = 0$$

Substituindo esse resultado na eq. A.11, temos:

$$\boxed{2. \int_V (\Delta \phi) \cdot \Delta \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \, dV = \int_V \Delta \phi \cdot \Delta \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \, dV = 0}$$

Analogamente, para as direções y e z:

$$\boxed{\int_V \Delta \phi \cdot \Delta \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \, dV = 0; \int_V \Delta \phi \cdot \Delta \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \, dV = 0}$$

### A.2 - MOMENTO NO PLANO HORIZONTAL (N)

A abordagem será **bidimensional**, visando a simplificação e, consequentemente, melhor visibilidade do desenvolvimento. No caso tridimensional os resultados são similares.

Tomando a equação A.10, temos:

$$\vec{N} = \int_S \vec{r} \times p \vec{n} \, dS.$$

onde:

$$\vec{N} = \int_S p (\vec{x} \vec{n}_y - \vec{y} \vec{n}_x) \, dS \Leftrightarrow \vec{N} = \begin{cases} N_x = \int_S p (\vec{x} \vec{n}_y - \vec{y} \vec{n}_x) \, dS \\ N_y = \int_S p (\vec{y} \vec{n}_x - \vec{x} \vec{n}_y) \, dS \\ N_z = \int_S p (\vec{z} \vec{n}_x - \vec{x} \vec{n}_z) \, dS \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow N_z = \int_S p(x_n y - y n_x) dS \quad (A.12)$$

Substituindo a expressão da pressão, A.8 em A.12, e denominando  $N_z = N$  para facilitar a notação, temos:

$$N = -\frac{1}{2} \rho \int_S (\Delta \Phi)_z (x_n y - y n_x) dS \quad (A.13)$$

Escrevendo o potencial  $\Phi$ , de acordo com a figura A.12, como:

$$\Phi = U^x \phi_1 + U^y \phi_2 \Leftrightarrow \Delta \Phi = U^x \Delta \phi_1 + U^y \Delta \phi_2 \quad (A.14)$$

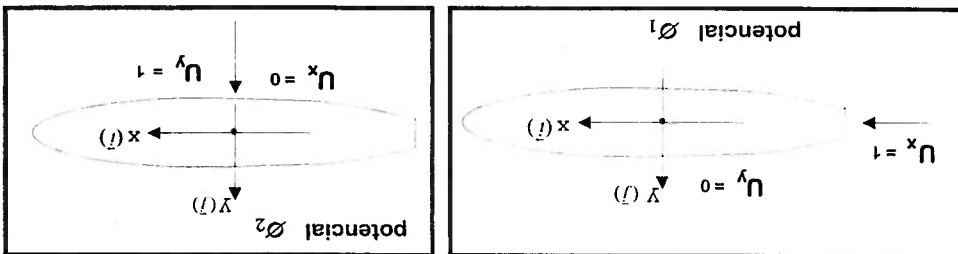


Figura A.1

Onde as seguintes condições são obedecidas:

- $\Delta^2 \phi_1 = 0;$
- $\Delta \phi_1 \cdot \vec{n}|_S = 0;$
- $\Delta \phi_1 \rightarrow \vec{i} \text{ no } \infty.$
- $\Delta^2 \phi_2 = 0;$
- $\Delta \phi_2 \cdot \vec{n}|_S = 0;$
- $\Delta \phi_2 \rightarrow \vec{j} \text{ no } \infty.$

E, substituindo A.14 na expressão A.13, temos:

$$N = -\frac{1}{2} \rho \int_S (U^x \Delta \phi_1 + U^y \Delta \phi_2) (x_n y - y n_x) dS = -\frac{1}{2} \rho \int_S \left[ (U^x \Delta \phi_1)_z + (U^y \Delta \phi_2)_z + (2U^x U^y \Delta \phi_1 \Delta \phi_2)_z \right] (x_n y - y n_x) dS \quad (A.15)$$

<sup>2</sup> A origem e orientação do sistema coordenado é qualquer. Por simples comodidade foi tomado sobre a linha de centro, seus eixos coincidindo com as direções longitudinal e transversal do navio. A origem é qualquer, por exemplo, a meia-nau.

Tomando cada parcela da expressão A.15, temos:

A.15.A:

Definido:

$$(A.15.A.1) \quad \vec{v} = -(\nabla\phi_1)_z \vec{y}_1 + (\nabla\phi_1)_z \vec{x}_1 \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{n} = (\Delta\phi_1)_z (x_1 n_y - y_1 n_x); \quad \text{E, também:}$$

$$(A.15.A.2) \quad \text{div } \vec{v} = \nabla \cdot [-(\nabla\phi_1)_z \vec{y}_1 + (\nabla\phi_1)_z \vec{x}_1] = x_1 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)_z - y_1 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right)_z = 2 \Delta \phi_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} - 2 \Delta \phi_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \left[ x_1 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)_z - y_1 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right)_z \right]$$

Por outro lado, tomando a parcela A de A.15 e substituindo as expressões A.15.A.1 e

A.15.A.2:

$$\int_S (U^x \Delta \phi_1)_z (x_1 n_y - y_1 n_x) dS = \int_S (U^x \Delta \phi_1)_z (x_1 n_y - y_1 n_x) dS + \underbrace{\int_S 0}_{\text{ver nota *}} dS =$$

$$= U^x_z \int_S \nabla \cdot \vec{n} dS = U^x_z \int_V \text{div}(\vec{v}) dV =$$

$$= U^x_z \int_V 2 \Delta \phi_1 \cdot \left[ x_1 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)_z - y_1 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right)_z \right] dV =$$

$$= 2 U^x_z \left[ \int_V \overbrace{x_1 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)_z}^A dV - \int_V \overbrace{y_1 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right)_z}^B dV \right];$$

$$(A.15.A.3) \quad = 2 U^x_z \left[ \int_V \overbrace{x_1 \Delta \phi_1 \cdot \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right)_z}^A dV - \int_V \overbrace{y_1 \Delta \phi_1 \cdot \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)_z}^B dV \right]$$

Nota (\*):

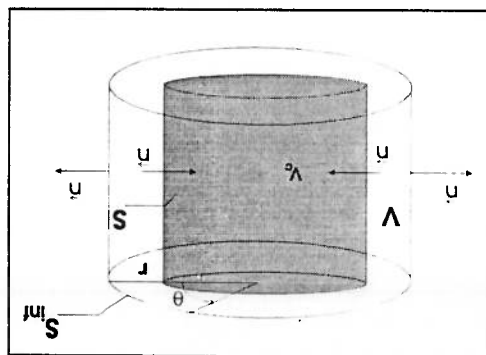


Figura A.2

TEOREMA DO DIVERGENTE:

$$\int_V \text{div } \vec{v} dV = \int_{\partial V} \vec{v} \cdot \vec{n} dS, \text{ onde: } \partial V = S \cup S_\infty;$$

Portanto:

$$\int_V \vec{v} \cdot \vec{n} d(\partial V) = \int_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS + \int_{S_\infty} \vec{v} \cdot \vec{n} dS_\infty;$$

Mas, também, de acordo com a figura A.2 (caso bidimensional):

$$S_\infty = S_{\text{cilindro}};$$

Sendo assim, temos:

$$\int_{S_\infty} (\vec{U} \cdot \vec{\Delta} \phi)_z (x \vec{n}_y - y \vec{n}_x) dS_\infty = \int_{-\pi}^0 (\vec{U} \cdot \vec{\Delta} \phi)_z (r \cos \theta \sin \theta - r \sin \theta \cos \theta) r d\theta = 0.$$

Faremos, agora, uso das seguintes identidades:

$$\int_V x \frac{\partial}{\partial x} \left( \Delta \phi \right) dV = 0 = \int_V \Delta \left( x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dV - \int_V x \Delta \phi dV;$$

$$\int_V y \frac{\partial}{\partial y} \left( \Delta \phi \right) dV = 0 = \int_V \Delta \left( y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dV - \int_V y \Delta \phi dV;$$

Tomando a parcela A de A.15.A.3, temos:

$$\int_{\hat{V}} x \Delta \phi_1 \cdot \Delta \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right) dV = \int_{\hat{V}} \Delta \cdot \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right) x \Delta \phi_1 \cdot \Delta \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right) dV - \int_{\hat{V}} \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} dV;$$

E, analogamente, com a parcela B de A.15.A.3, temos:

$$\int_{\hat{V}} y \Delta \phi_1 \cdot \Delta \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) dV = \int_{\hat{V}} \Delta \cdot \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) y \Delta \phi_1 \cdot \Delta \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) dV - \int_{\hat{V}} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial \phi_1}{\partial y} dV.$$

E, portanto, a diferença entre as parcelas A e B, fica:

$$\int_{\hat{V}} x \Delta \phi_1 \cdot \Delta \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right) dV - \int_{\hat{V}} y \Delta \phi_1 \cdot \Delta \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) dV = \int_{\hat{V}} \Delta \cdot \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right) x \Delta \phi_1 \cdot \Delta \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right) dV - \int_{\hat{V}} \Delta \cdot \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) y \Delta \phi_1 \cdot \Delta \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) dV.$$

Aplicando o teorema do divergente, temos:

$$\int_{\hat{V}} \Delta \cdot \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right) x \Delta \phi_1 \cdot \Delta \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right) dV - \int_{\hat{V}} \Delta \cdot \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) y \Delta \phi_1 \cdot \Delta \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) dV = \int_{\hat{S}} x \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \Delta \phi_1 \cdot \underline{n} dS + \int_{\hat{S}} y \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \Delta \phi_1 \cdot \underline{n} dS - \int_{\hat{S}} x \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \Delta \phi_1 \cdot \underline{n} dS - \int_{\hat{S}} y \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \Delta \phi_1 \cdot \underline{n} dS.$$

Sobram, portanto, os termos:

$$\int_{\hat{S}} x \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \Delta \phi_1 \cdot \underline{n} dS - \int_{\hat{S}} y \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \Delta \phi_1 \cdot \underline{n} dS. \quad (\text{A.15.A.4})$$

Escrevendo, como no capítulo 2 (ver expressão 2.10), o potencial  $\phi_1$  em termos do potencial  $\hat{\phi}_1$  (corpo se move com velocidade constante  $U^x = -1$ , no fluido em repouso), temos:

$$\phi_1 = x - \hat{\phi}_1 \Leftrightarrow \Delta \phi_1 = \Delta \hat{\phi}_1; \quad \phi_1 = x - \hat{\phi}_1;$$

De modo que:

- $\Delta^2 \hat{\phi}_1 = 0;$
- $\Delta \hat{\phi}_1 \cdot \underline{n}|_{\hat{S}} = U^x;$  ( $\underline{n}$  para dentro do casco)
- $\hat{\phi}_1 \Big|_{r \rightarrow \infty} \approx \frac{r}{\cos \theta}.$

Temos, em  $S_\infty$  (ver figura A.2),  $\begin{cases} x = r \cos \theta; \\ y = r \sin \theta; \end{cases} \Leftrightarrow r^2 = x^2 + y^2$ :

$$(A.15.A.5) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} = 1 - \frac{\partial \phi_1}{\partial x} = 1 - A_1 \frac{1}{(1 - 2 \cos^2 \theta) r^2}; \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial y} = -\frac{\partial \phi_1}{\partial y} = -\frac{\partial \phi_1}{\partial y} = \frac{2 A_1 \sin \theta \cos \theta}{r^2}. \end{aligned} \right.$$

Substituindo as expressões A.15.A.5 em A.15.A.4, temos:

$$\begin{aligned} & \int_{S_\infty} x \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \Delta \phi_1 \cdot \bar{n} dS_\infty - \int_{S_\infty} y \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \Delta \phi_1 \cdot \bar{n} dS_\infty = \\ & = \int_{2\pi}^0 \left[ 2 A_1 r \sin \theta \cos^2 \theta \frac{r^2}{r^2} - r \sin \theta \left( 1 - A_1 \frac{r^2}{(1 - 2 \cos^2 \theta) r^2} \right) \right] \cos \theta r d\theta = \\ & = \int_{2\pi}^0 \left[ 2 A_1 \sin \theta \cos^2 \theta - r \sin \theta + A_1 \sin \theta \frac{r}{(1 - 2 \cos^2 \theta) r} \right] \cos \theta r d\theta = \\ & = \int_{2\pi}^0 \left[ 2 A_1 \sin \theta \cos^3 \theta - r^2 \sin \theta \cos \theta + A_1 \sin \theta \cos \theta - 2 A_1 \sin \theta \cos^3 \theta \right]_{r \rightarrow \infty} d\theta = \\ & = \int_{2\pi}^0 -r^2 \sin \theta \cos \theta \Big|_{r \rightarrow \infty} d\theta + A_1 \int_{2\pi}^0 \sin \theta \cos \theta d\theta = 0 \end{aligned}$$

Portanto, retomando a parcela A de A.15:

$$\int_{S_\infty} (U^x \Delta \phi_1)_z (x n_y - y n_x) dS = 2U_z^x \left[ \int_{\hat{V}} x \Delta \phi_1 \cdot \Delta \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right) dV - \int_{\hat{V}} y \Delta \phi_1 \cdot \Delta \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) dV \right] = 0$$

Fazendo o mesmo procedimento para a parcela B da expressão A.15,

chegaremos a:

$$\int_{S_\infty} (U^y \Delta \phi_2)_z (x n_y - y n_x) dS = 2U_z^y \left[ \int_{\hat{V}} x \Delta \phi_2 \cdot \Delta \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right) dV - \int_{\hat{V}} y \Delta \phi_2 \cdot \Delta \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) dV \right] = 0$$

Portanto, a expressão A.15, que fornece o momento de Munk no plano horizontal, se

reduz a:

$$N = -\rho U^x U^y \int_S (\Delta \phi_1 \cdot \Delta \phi_2)_z (x n_y - y n_x) dS \quad (A.16)$$



Partindo da integral sobre o casco na expressão A.16, temos:

$$\int_{s_{\infty}}^s (\nabla\phi_1 \cdot \nabla\phi_2)(x, y, -y, n_x) ds = \int_{s_{\infty}}^s (\nabla\phi_1 \cdot \nabla\phi_2)(x, n_y, -y, n_x) ds + \int_{s_{\infty}}^s (\nabla\phi_1 \cdot \nabla\phi_2)(x, n_y, -y, n_x) ds + \underbrace{0}_{\text{ver nota *}}$$

(A.17)

Definindo:

$$F = -y(\nabla\phi_1 \cdot \nabla\phi_2)(x, n_y) + x(\nabla\phi_1 \cdot \nabla\phi_2)(x, n_x)$$

temos:

$$F \cdot \bar{n} = -y(\nabla\phi_1 \cdot \nabla\phi_2)(x, n_y) + x(\nabla\phi_1 \cdot \nabla\phi_2)(x, n_x) = (x, n_y, -y, n_x) \cdot$$

Aplicando o teorema do divergente a A.17, temos:

$$\int_{s_{\infty}}^s (\nabla\phi_1 \cdot \nabla\phi_2)(x, n_y, -y, n_x) ds = \int_{\Delta} \Delta \cdot [ -y(\nabla\phi_1 \cdot \nabla\phi_2)(x, n_y) + x(\nabla\phi_1 \cdot \nabla\phi_2)(x, n_x) ] dV =$$

$$= \int_{\Delta} \left[ -y \frac{\partial}{\partial x} (e^{\nabla\phi_1 \cdot \nabla\phi_2}) + x \frac{\partial}{\partial y} (e^{\nabla\phi_1 \cdot \nabla\phi_2}) \right] dV =$$

$$= \int_{\Delta} \left[ -y \frac{\partial}{\partial x} (e^{\nabla\phi_2}) + x \frac{\partial}{\partial y} (e^{\nabla\phi_2}) \right] dV + \int_{\Delta} \left[ -y \frac{\partial}{\partial x} (e^{\nabla\phi_1}) + x \frac{\partial}{\partial y} (e^{\nabla\phi_1}) \right] dV +$$

$$= \int_{\Delta} \left[ -y \frac{\partial}{\partial x} (e^{\nabla\phi_2}) + x \frac{\partial}{\partial y} (e^{\nabla\phi_2}) \right] dV + \int_{\Delta} \left[ -y \frac{\partial}{\partial x} (e^{\nabla\phi_1}) + x \frac{\partial}{\partial y} (e^{\nabla\phi_1}) \right] dV +$$

$$= \int_{\Delta} \left[ -y \frac{\partial}{\partial x} (e^{\nabla\phi_2}) + x \frac{\partial}{\partial y} (e^{\nabla\phi_2}) \right] dV + \int_{\Delta} \left[ -y \frac{\partial}{\partial x} (e^{\nabla\phi_1}) + x \frac{\partial}{\partial y} (e^{\nabla\phi_1}) \right] dV +$$

(A.18)

Por outro lado, utilizaremos as seguintes identidades:

(I.1)

$$\Delta \cdot \left( y \frac{\partial}{\partial x} \nabla\phi_2 \right) = y \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\nabla\phi_2) \right] + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \nabla\phi_2 \right] y + \frac{\partial}{\partial y} \nabla\phi_2 + \frac{\partial}{\partial y} \nabla\phi_1$$

portanto:

$$\int_V \hat{\rho} \frac{\partial x}{\partial \phi_2} \Delta_2 \phi_1 \Delta_1 \rho \, dV = 0 = \int_V \hat{\rho} \frac{\partial x}{\partial \phi_2} \Delta_1 \phi_1 \Delta_2 \rho \, dV - \int_V \hat{\rho} \frac{\partial x}{\partial \phi_2} \Delta_1 \phi_1 \Delta_2 \rho \, dV \quad (11)$$

$$\Delta_1 \left( \frac{\partial x}{\partial \phi_1} \Delta_2 \phi_2 \right) = \Delta_2 \left( \frac{\partial x}{\partial \phi_2} \Delta_1 \phi_1 \right) + \Delta_2 \phi_2 \frac{\partial x}{\partial \phi_1} + \Delta_1 \phi_1 \frac{\partial x}{\partial \phi_2}$$

portanto:

$$\int_V \hat{\rho} \frac{\partial x}{\partial \phi_1} \Delta_2 \phi_2 \Delta_1 \rho \, dV = 0 = \int_V \hat{\rho} \frac{\partial x}{\partial \phi_1} \Delta_2 \phi_2 \Delta_1 \rho \, dV - \int_V \hat{\rho} \frac{\partial x}{\partial \phi_1} \Delta_2 \phi_2 \Delta_1 \rho \, dV \quad (12)$$

$$\Delta_2 \left( \frac{\partial y}{\partial \phi_2} \Delta_1 \phi_1 \right) = \Delta_1 \left( \frac{\partial y}{\partial \phi_1} \Delta_2 \phi_2 \right) + \Delta_1 \phi_1 \frac{\partial y}{\partial \phi_2} + \Delta_2 \phi_2 \frac{\partial y}{\partial \phi_1}$$

portanto:

$$\int_V \hat{\rho} \frac{\partial y}{\partial \phi_2} \Delta_2 \phi_1 \Delta_1 \rho \, dV = 0 = \int_V \hat{\rho} \frac{\partial y}{\partial \phi_2} \Delta_2 \phi_1 \Delta_1 \rho \, dV - \int_V \hat{\rho} \frac{\partial y}{\partial \phi_2} \Delta_2 \phi_1 \Delta_1 \rho \, dV \quad (13)$$

$$\Delta_1 \left( \frac{\partial y}{\partial \phi_1} \Delta_2 \phi_2 \right) = \Delta_2 \left( \frac{\partial y}{\partial \phi_2} \Delta_1 \phi_1 \right) + \Delta_2 \phi_2 \frac{\partial y}{\partial \phi_1} + \Delta_1 \phi_1 \frac{\partial y}{\partial \phi_2}$$

portanto:

$$\int_V \hat{\rho} \frac{\partial y}{\partial \phi_1} \Delta_2 \phi_2 \Delta_1 \rho \, dV = 0 = \int_V \hat{\rho} \frac{\partial y}{\partial \phi_1} \Delta_2 \phi_2 \Delta_1 \rho \, dV - \int_V \hat{\rho} \frac{\partial y}{\partial \phi_1} \Delta_2 \phi_2 \Delta_1 \rho \, dV \quad (14)$$

Substituindo as parcelas A, B, C e D da expressão A.18 pelas identidades I.1, I.2, I.3 e I.4, respectivamente, ficamos com:

$$\int_S (\nabla \phi_1 \cdot \nabla \phi_2) (x n_y - y n_x) dS =$$

$$= - \int_V \Delta \cdot \left( y \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \nabla \phi_1 \right) dV + \int_V \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \nabla \phi_1 dV - \int_V \Delta \cdot \left( x \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \nabla \phi_1 \right) dV + \int_V \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \nabla \phi_1 dV - \int_V \Delta \cdot \left( x \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \nabla \phi_2 \right) dV + \int_V \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \nabla \phi_2 dV - \int_V \Delta \cdot \left( y \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \nabla \phi_2 \right) dV + \int_V \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \nabla \phi_2 dV$$

$$= \underbrace{- \int_V \Delta \cdot \left( y \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \nabla \phi_1 \right) dV}_{A} + \underbrace{\int_V \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \nabla \phi_1 dV}_{B} - \underbrace{\int_V \Delta \cdot \left( x \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \nabla \phi_1 \right) dV}_{C} + \underbrace{\int_V \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \nabla \phi_1 dV}_{D} - \underbrace{\int_V \Delta \cdot \left( x \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \nabla \phi_2 \right) dV}_{D} + \underbrace{\int_V \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \nabla \phi_2 dV}_{D} - \underbrace{\int_V \Delta \cdot \left( y \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \nabla \phi_2 \right) dV}_{D} + \underbrace{\int_V \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \nabla \phi_2 dV}_{D}$$

.....(A.19)

Aplicando o teorema do divergente às parcelas da expressão A.19, temos:

Parcela A:

$$(A.19.A) \quad - \int_V \Delta \cdot \left( y \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \nabla \phi_1 \right) dV = - \int_S y \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \nabla \phi_1 \cdot \bar{n} dS - \int_V y \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} \nabla \phi_1 \cdot \bar{n} dS$$

Parcela B:

$$(A.19.B) \quad \int_V \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \nabla \phi_1 dV = \int_S y \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \nabla \phi_1 \cdot \bar{n} dS + \int_V y \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} \nabla \phi_1 \cdot \bar{n} dS$$

Parcela C:

$$(A.19.C) \quad \int_V \Delta \cdot \left( x \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \nabla \phi_1 \right) dV = \int_S x \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \nabla \phi_1 \cdot \bar{n} dS + \int_V x \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2} \nabla \phi_1 \cdot \bar{n} dS$$

Parcela D:

$$(A.19.D) \quad \int_V \Delta \cdot \left( x \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \nabla \phi_2 \right) dV = \int_S x \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \nabla \phi_2 \cdot \bar{n} dS + \int_V x \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} \nabla \phi_2 \cdot \bar{n} dS$$

Substituindo as expressões A.19.A, B, C e D em A.19, temos:

$$\int_S (\nabla\phi_1 \cdot \nabla\phi_2)(x_n y_n - y_n x_n) dS = \underbrace{-\int_S y \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} \nabla\phi_1 \cdot \bar{n} dS}_{A} - \underbrace{\int_S y \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \nabla\phi_2 \cdot \bar{n} dS}_{B} + \underbrace{\int_S x \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \nabla\phi_1 \cdot \bar{n} dS}_{C} + \underbrace{\int_S x \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \nabla\phi_2 \cdot \bar{n} dS}_{D}$$

.....(A.20)

Mais uma vez escrevendo os potenciais  $\phi_1$  e  $\phi_2$  em termos dos potenciais  $\phi_1$  (corpo se move com velocidade constante  $U^x = -1$ , no fluido em repouso) e  $\phi_2$  (se move com velocidade constante  $U^y = -1$ , no fluido em repouso), temos:

$$\begin{cases} \phi_1 = x - \phi_1 \Rightarrow \Delta\phi_1 = \bar{i} - \nabla\phi_1; \\ \phi_2 = y - \phi_2 \Rightarrow \Delta\phi_2 = \bar{j} - \nabla\phi_2. \end{cases}$$

De modo que:

- $\Delta^2\phi_1 = 0;$
- $\Delta\phi_1 \cdot \bar{n}|_S = n_x;$  (n para dentro)
- $\Delta\phi_1 \approx A_1 \cdot \frac{r}{\cos\theta} \Big|_{r \rightarrow \infty}$
- $\Delta^2\phi_2 = 0;$
- $\Delta\phi_2 \cdot \bar{n}|_S = n_y;$  (n para dentro)
- $\Delta\phi_2 \approx A_2 \cdot \frac{r}{\text{sen}\theta} \Big|_{r \rightarrow \infty}$

Sendo  $\begin{cases} x = r \cos\theta; \\ y = r \text{sen}\theta; \end{cases} \Rightarrow r^2 = x^2 + y^2$  (ver figura A.2), temos, em  $S_\infty$ :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} = 1 - \frac{\partial \phi_1}{\partial x} = 1 - A_1 \frac{\partial}{\partial x} (1 - 2 \cos^2 \theta); \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial y} = -1 = -\frac{\partial \phi_1}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} (2 A_1 \text{sen}\theta \cos\theta). \end{aligned} \right. \quad \text{e,} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \phi_2}{\partial x} = -\frac{\partial \phi_2}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} (2 A_2 \text{sen}\theta \cos\theta); \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial y} = 1 - \frac{\partial \phi_2}{\partial y} = 1 - A_2 \frac{\partial}{\partial y} (1 - 2 \text{sen}^2 \theta). \end{aligned} \right.$$

Também, em  $S_\infty$ :

$$\begin{aligned} \Delta\phi_1 \cdot \bar{n} &= [1 - A_1] \left[ \frac{\partial}{\partial x} (1 - 2 \cos^2 \theta) \right] \cos\theta + \left[ \frac{\partial}{\partial y} (2 A_1 \text{sen}\theta \cos\theta) \right] \text{sen}\theta = \\ &= \cos\theta - A_1 \cos\theta + \frac{\partial}{\partial x} (2 A_1 \text{sen}\theta \cos\theta) \cos\theta + \text{sen}\theta = \\ &= \cos\theta \left( \frac{r^2}{A_1} + 1 \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta\phi_2 \cdot \bar{n} &= \left( \frac{2A_2 \text{sen}\theta \cos\theta}{r^2} \right) \cos\theta + \left[ 1 - A_2 \left( \frac{1 - 2\text{sen}^2\theta}{r^2} \right) \right] \text{sen}\theta = \\ &= \text{sen}\theta - \frac{A_2 \text{sen}\theta}{r^2} + \frac{2A_2 \text{sen}\theta}{r^2} (\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta) = \\ &= \text{sen}\theta \left( \frac{A_2}{r^2} + 1 \right); \end{aligned}$$

Substituindo as expressões de  $\frac{\partial\phi_1}{\partial x}, \frac{\partial\phi_1}{\partial y}, \frac{\partial\phi_2}{\partial x}, \frac{\partial\phi_2}{\partial y}$  e de  $\Delta\phi_1 \cdot \bar{n}, \Delta\phi_2 \cdot \bar{n}$  convenientemente em A.20, teremos, parcela por parcela:

Parcela A:

$$\begin{aligned} - \int_{2\pi}^{s_x} y \frac{\partial\phi_2}{\partial x} \Delta\phi_1 \cdot \bar{n} dS_\infty &= - \int_{2\pi}^0 r \text{sen}\theta \left( \frac{2A_2 \text{sen}\theta \cos\theta}{r^2} \right) \left[ \cos\theta \left( \frac{A_1}{r^2} + 1 \right) \right] r d\theta = \\ &= \int_{2\pi}^0 -2A_2 \text{sen}^2\theta \cos\theta \left[ \cos\theta \left( \frac{A_1}{r^2} + 1 \right) \right] d\theta = \\ &= \int_{2\pi}^0 (-2A_2 \text{sen}^2\theta \cos^2\theta - \frac{2A_1 A_2}{r^2} \text{sen}^2\theta \cos^2\theta) d\theta \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \\ &= \int_{2\pi}^0 -2A_2 \text{sen}^2\theta \cos^2\theta d\theta = -\frac{\pi A_2}{2}; \end{aligned}$$

(A.20.A)

Parcela B:

$$\begin{aligned} - \int_{2\pi}^{s_x} y \frac{\partial\phi_1}{\partial x} \Delta\phi_2 \cdot \bar{n} dS_\infty &= - \int_{2\pi}^0 r \text{sen}\theta \left[ 1 - \frac{A_1 (1 - 2\cos^2\theta)}{r^2} \right] \left[ \text{sen}\theta \left( \frac{A_2}{r^2} + 1 \right) \right] r d\theta = \\ &= - \int_{2\pi}^0 (r^2 \text{sen}\theta - A_1 \text{sen}\theta + 2A_1 \text{sen}\theta \cos^2\theta) \left[ \text{sen}\theta \left( \frac{A_2}{r^2} + 1 \right) \right] r d\theta = \\ &= \int_{2\pi}^0 (-r^2 \text{sen}^2\theta - A_2 \text{sen}^2\theta + A_1 \text{sen}^2\theta + A_1 \text{sen}^2\theta + A_2 \text{sen}^2\theta \cos^2\theta - \frac{2A_1 A_2 \text{sen}^2\theta \cos^2\theta}{r^2}) d\theta; \end{aligned}$$

(A.20.B)

Parcela C:

$$\int_{2\pi}^{s_{\infty}} x \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \phi_1^2} \Delta \phi_1 \cdot \bar{n} dS_{\infty} = \int_{2\pi}^0 r \cos \theta \left[ 1 - \frac{A_2(1 - 2 \sin^2 \theta)}{r^2} \right] \left[ \cos \theta \left( \frac{r^2}{A_1} + 1 \right) \right] r d\theta =$$

$$\int_{2\pi}^0 (r^2 \cos \theta - A_2 \cos \theta + 2A_2 \cos \theta \sin^2 \theta) \left[ \cos \theta \left( \frac{r^2}{A_1} + 1 \right) \right] d\theta =$$

$$\int_{2\pi}^0 \left( r^2 \cos^2 \theta + A_1 \cos^2 \theta - A_2 \cos^2 \theta - A_1 A_2 \cos^2 \theta \frac{r^2}{A_1} + 2A_2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{2A_1 A_2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{r^2} \right) d\theta ;$$

(A.20.C)

Somando as parcelas A.20.B e A.20.C, temos:

$$-\int y \frac{\partial \phi_1}{\partial \phi_1} \Delta \phi_1 \cdot \bar{n} dS_{\infty} + \int x \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \phi_1^2} \Delta \phi_1 \cdot \bar{n} dS_{\infty} =$$

$$\int_{2\pi}^0 \left[ r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + A_1 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - A_2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - \right.$$

$$\left. - \frac{A_1 A_2}{r^2} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + 2A_2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta - 2A_1 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \right] d\theta =$$

$$\left[ A_1 - A_2 + 2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta (A_2 - A_1) \right] d\theta = \frac{2}{3\pi} (A_1 - A_2);$$

Parcela D:

$$\int_{2\pi}^{s_{\infty}} x \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \phi_1^2} \Delta \phi_1 \cdot \bar{n} dS_{\infty} = \int_{2\pi}^0 r \cos \theta \left( \frac{2A_1 \sin \theta \cos \theta}{r^2} \right) \left[ \sin \theta \left( \frac{r^2}{A_2} + 1 \right) \right] r d\theta =$$

$$\int_{2\pi}^0 2A_1 \sin \theta \cos^2 \theta \left[ \sin \theta \left( \frac{r^2}{A_2} + 1 \right) \right] d\theta =$$

$$\int_{2\pi}^0 (2A_1 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{2A_1 A_2}{r^2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta) d\theta =$$

$$\int_{2\pi}^0 2A_1 \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi A_1}{2};$$

(A.20.D)

Portanto, somando todas as parcelas de A.20 e voltando a A.18, temos, finalmente:

$$\int (\Delta \phi_1 \cdot \Delta \phi_2)(x_n y_n - y_n x_n) dS = -\frac{\pi A_2}{2} + \frac{3\pi (A_1 - A_2)}{2} + \frac{\pi A_1}{2} \Rightarrow$$

$$\int_S \hat{i} \cdot \hat{n} dS = \int_S \hat{i} \cdot (-\hat{n}^p) dS = - \int_S \hat{i} \cdot \hat{n}^p dS = - \int_{V^c} \text{div}(\hat{i} \cdot x) dV^c = - \int_{V^c} \text{div} \hat{i} dV^c;$$

do corpo, vale a igualdade:

porém, também está definida dentro do corpo. Portanto, tomando a normal para fora A normal está definida para dentro do corpo (ver figura A.2). A coordenada  $x$ ,

$$\int_S (x \Delta \hat{\phi}_1) \cdot \hat{n} dS = \int_S x \cdot \hat{n} dS = \int_S x \cdot \hat{i} \cdot \hat{n} dS;$$

Parcela A:

Tomando cada parcela da expressão A.23, temos:

$$\int_S (x \Delta \hat{\phi}_1) \cdot \hat{n} dS + \int_S (x \Delta \hat{\phi}_1) \cdot \hat{n} dS_\infty = \underbrace{\int_S (\hat{\phi}_1 \hat{i}) \cdot \hat{n} dS}_C + \underbrace{\int_S (\hat{\phi}_1 \hat{i}) \cdot \hat{n} dS_\infty}_D. \quad (\text{A.23})$$

Aplicando o teorema do divergente a ambas parcelas de A.22, temos:

$$\int_V \Delta \cdot (x \Delta \hat{\phi}_1) dV = \int_V \frac{\partial \hat{\phi}_1}{\partial x} dV = \int_V \Delta \cdot (\hat{\phi}_1 \hat{i}) dV. \quad (\text{A.22})$$

A partir de I.5 temos:

$$\Leftrightarrow \int_V \Delta \cdot (y \Delta \hat{\phi}_2) dV = \int_V \frac{\partial \hat{\phi}_2}{\partial y} dV. \quad (\text{I.6})$$

$$\int_V y \Delta^2 \hat{\phi}_2 dV = 0 = \int_V \Delta \cdot (y \Delta \hat{\phi}_2) dV - \int_V \frac{\partial \hat{\phi}_2}{\partial y} dV \Leftrightarrow$$

e,

$$\Leftrightarrow \int_V \Delta \cdot (x \Delta \hat{\phi}_1) dV = \int_V \frac{\partial \hat{\phi}_1}{\partial x} dV; \quad (\text{I.5})$$

$$\int_V x \Delta^2 \hat{\phi}_1 dV = 0 = \int_V \Delta \cdot (x \Delta \hat{\phi}_1) dV - \int_V \frac{\partial \hat{\phi}_1}{\partial x} dV \Leftrightarrow$$

Resta ainda determinar  $A_1$  e  $A_2$ . Para isso, usaremos as seguintes identidades:

$$\Leftrightarrow \int_S (\Delta \hat{\phi}_1 \cdot \Delta \hat{\phi}_2) (x n_y - y n_x) dS = 2\pi (A_1 - A_2). \quad (\text{A.21})$$

$$\int_{\hat{V}} (\nabla \phi_1)_z dV = \int_{\hat{S}} \underbrace{\phi_1}_{\hat{u}} \cdot \hat{n} dS + \int_{\hat{S}_\infty} \underbrace{0}_{\hat{u}} \cdot \hat{n} dS;$$

e, aplicando o teorema da divergência à  $\int_{\hat{V}} \nabla \cdot (\phi_1 \hat{u}) dV$  temos:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \int_{\hat{V}} \nabla \cdot (\phi_1 \hat{u}) dV &= \int_{\hat{V}} \nabla \cdot (\phi_1 \hat{u}) dV = 0 = \int_{\hat{V}} \nabla \cdot (\phi_1 \hat{u}) dV - \int_{\hat{V}} \nabla \cdot (\phi_1 \hat{u}) dV \\ \Leftrightarrow \int_{\hat{V}} \phi_1 \nabla^2 \hat{u} dV &= 0 = \int_{\hat{V}} \nabla \cdot (\phi_1 \hat{u}) dV - \int_{\hat{V}} \nabla \cdot (\phi_1 \hat{u}) dV \end{aligned}$$

Fazendo uso da seguinte identidade:

$$\int_{\hat{S}} (\phi_1 \hat{i}) \cdot \hat{n} dS = \int_{\hat{S}} \phi_1 n_x dS;$$

Parcela C:

(A.23.B)

$$\begin{aligned} \therefore \int_{\hat{S}_\infty} (\phi_1 \hat{i}) \cdot \hat{n} dS &= \int_{\hat{S}_\infty} \phi_1 n_x dS = \int_{\hat{S}_\infty} \phi_1 \cos^2 \theta dS = \int_{\hat{S}_\infty} \phi_1 \cos^2 \theta dS = \int_{\hat{S}_\infty} \phi_1 \cos^2 \theta dS \\ \therefore \hat{x} \cdot \hat{n} &= \frac{r}{A_1} \left[ \cos^2 \theta - 2 \cos^4 \theta - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right]; \\ \therefore \nabla \hat{u} \cdot \hat{n} &= \frac{r}{A_1} \left[ (1 - 2 \cos^2 \theta) \hat{i} - 2 \sin \theta \cos \theta \hat{j} \right] \left[ \hat{i} + \hat{j} \right] \\ &= \frac{r}{A_1} \left[ \cos \theta - 2 \sin \theta \cos \theta \right] \left[ \cos \theta - 2 \cos^3 \theta - 2 \sin^2 \theta \cos \theta \right] \\ \therefore \nabla \hat{u} \cdot \hat{n} &= \frac{r}{A_1} \left[ (1 - 2 \cos^2 \theta) \hat{i} - 2 \sin \theta \cos \theta \hat{j} \right]; \\ \therefore \nabla \hat{u} \cdot \hat{n} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( A_1 \frac{r}{\cos \theta} \right) \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \left( A_1 \frac{r}{\cos \theta} \right) \hat{j} = A_1 \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{r}{\cos \theta} \right) \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{r}{\cos \theta} \right) \hat{j} \right] \\ \therefore \nabla \hat{u} \cdot \hat{n} &\approx A_1 \frac{r}{\cos \theta}; \end{aligned}$$

Em  $S_\infty$  temos:

Parcela B:

$$\therefore \int_{\hat{S}} \hat{x} \cdot \hat{n} dS = -V_c \quad (A.23.A)$$



$$\therefore \int_S \hat{\phi}_1 n^x dS = \int_V \Delta \hat{\phi}_1 dV = \frac{d}{M_{11}}$$

(A.23.C)

Parcela D:

$$\int_S \hat{\phi}_1 n^x dS = \int_{2\pi}^{\infty} \int_{\cos\theta}^0 A_1 \frac{1}{\cos\theta} \cos\theta r d\theta = \int_{2\pi}^0 A_1 \cos^2 \theta d\theta ;$$

$$\therefore \int_S \hat{\phi}_1 n^x dS = \pi A_1$$

(A.23.D)

Somando todas as parcelas A.23.A, B, C e D, chegamos a:

$$-V_c - \pi A_1 = \frac{d}{M_{11}} + \pi A_1 ;$$

$$\therefore A_1 = -\frac{1}{2\pi} \left( V_c + \frac{d}{M_{11}} \right)$$

(A.24)

Procedendo de modo análogo a partir da identidade I.6, chegamos a:

$$\therefore A_2 = -\frac{1}{2\pi} \left( V_c + \frac{d}{M_{22}} \right)$$

(A.25)

Substituindo  $A_1$  e  $A_2$  em A.21, temos:

$$\int_S (\Delta \hat{\phi}_1 \cdot \Delta \hat{\phi}_2)(x n^y - y n^x) dS = 2\pi \left( -\frac{1}{2\pi} \right) \left[ \left( V_c + \frac{d}{M_{11}} \right) - \left( V_c + \frac{d}{M_{22}} \right) \right] = -\frac{d}{M_{11}} (M_{11} - M_{22})$$

Portanto, a expressão do Momento de Munk, A.16, fica:

$$N = -\rho U^x U^y \int_S (\Delta \hat{\phi}_1 \Delta \hat{\phi}_2)(x n^y - y n^x) dS = -U^x U^y (M_{11} - M_{22}),$$

ou, como mais freqüentemente encontrada na literatura:

$$N = -(M_{zz} - M_{11})U^2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha$$

(A.26)

A figura A.3, abaixo, ilustra esse resultado:

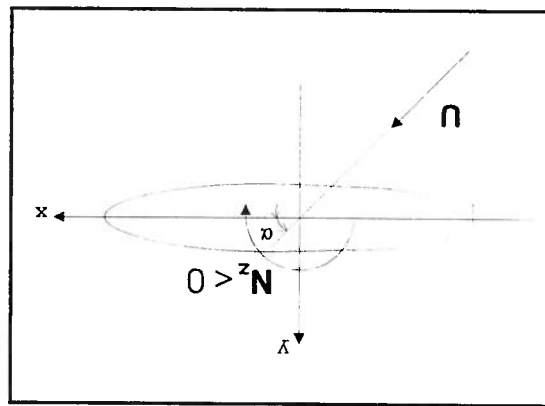
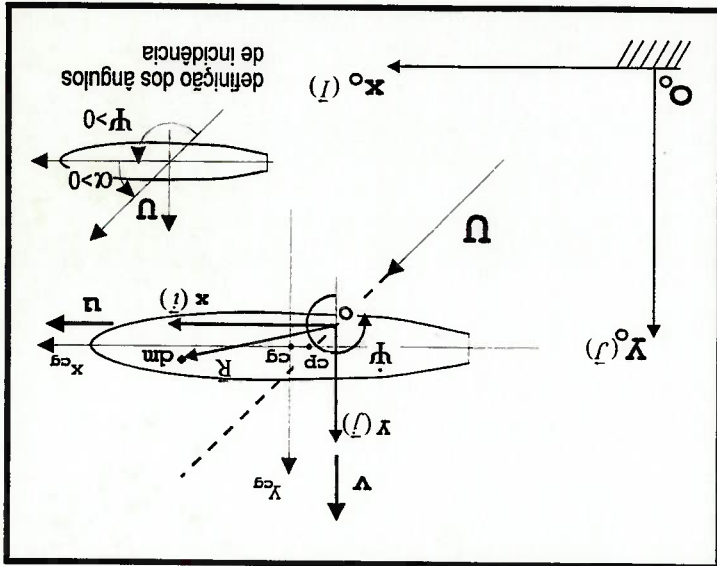


Figura A.3

**ANEXO B**

**EQUAÇÕES DO MOVIMENTO DE UM NAVIO NO PLANO HORIZONTAL  
SUJEITO A CORRENTE UNIFORME**

As equações que regem o movimento no plano horizontal de um navio sujeito a corrente uniforme,  $U$ , incidindo sobre o casco com um ângulo de ataque,  $\alpha$ , de acordo com a figura B.1, abaixo, serão desenvolvidas a partir das expressões da energia cinética do navio e do fluido no seu entorno.



**Figura B.1 - Navio sujeito à corrente**  
Sistemas coordenados locais (fixos ao navio) e global (fixo à terra)

Como é usual em teoria clássica de manobras, as equações serão escritas em termos do ângulo:

$$\Psi = (\pi - \alpha)$$

- Observar que:
- $\dot{\alpha} = -\dot{\Psi}$ ;  $\ddot{\alpha} = -\ddot{\Psi}$ ; (a variação temporal de  $\alpha$  é tal que quando ele aumenta,  $\Psi$  diminui e vice-versa)
  - $\cos \alpha = -\cos \Psi$ ;  $\sin \alpha = \sin \Psi$ .

e, num sistema coordenado fixo ao navio<sup>2</sup>. No intuito de generalizar o resultado, o sistema local adotado é deslocado do sistema local principal, mantendo-se, porém, paralelo a ele.

Sua origem,  $O$ , dista  $(x_g; y_g)$  do centro de gravidade,  $CG$ , e  $(x_p; y_p)$  do centro de pressão,  $CP$ . Os sentidos positivos do sistema coordenado são, de acordo com a figura B.1: eixo  $x$  - apontando para a proa, eixo  $y$  - apontando para bombordo e, eixo  $z$  - apontando para cima.

O desenvolvimento das equações foi dividido em duas partes; a primeira determina a equação do movimento para o corpo rígido, sujeito a forças externas quaisquer, nas suas direções longitudinal e transversal, além de momento em torno do seu eixo vertical, respectivamente,  $X$ ,  $Y$  e  $N$ .

Na segunda parte, as forças e momento externos  $X$ ,  $Y$  e  $N$  causados pela ação do fluido sobre o casco em movimento serão determinados, com base em resultados do escoamento potencial complementados pelas equações heurísticas apresentadas no capítulo 2.

## B.1 EQUAÇÕES DO MOVIMENTO DO NAVIO NO PLANO HORIZONTAL SUJEITO À AÇÃO DE FORÇAS EXTERNAS

De acordo com a figura, o vetor velocidade do elemento infinitesimal de massa,  $dm$ , pode ser escrito como:

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{\Omega} \times \vec{R};$$

onde:

$\vec{u} = u \vec{i} + v \vec{j}$ ; (velocidade linear, em relação à terra, da origem,  $O$ , escrita no sistema coordenado local adotado)

$\vec{\Omega} = \Psi \vec{k}$ ; (velocidade angular do navio)

<sup>2</sup> Defina-se: sistema local = sistema solidário ao navio; sistema global = sistema fixo à terra; sistema local principal = sistema local para o qual os momentos estáticos são nulos.

$$\vec{R} = x \vec{i} + y \vec{j}. \text{ (vetor posição do elemento de massa, dm)}$$

Portanto:

$$\vec{v} = (u - \psi y) \vec{i} + (v + \psi x) \vec{j}. \quad (\text{B.1})$$

Sendo assim, a energia cinética do elemento, dm, fica:

$$dT = \frac{1}{2} dm \vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} dm \left[ (u - \psi y)^2 + (v + \psi x)^2 \right],$$

e, para o corpo inteiro do navio, sendo V, seu volume total:

$$T = \int_V dT = \frac{1}{2} \int_V \left[ (u - \psi y)^2 + (v + \psi x)^2 \right] dm;$$

que, sendo desenvolvida, fornece:

$$T = \frac{1}{2} M u^2 - S_x u \psi + \frac{1}{2} I_{z_0} \psi^2 + \frac{1}{2} M v^2 + S_y v \psi. \quad (\text{B.2})$$

onde:

M = massa total do corpo;

$$S_x = \int_V y dm = M y_g = \text{momento estático do corpo em relação ao eixo x;}$$

$$S_y = \int_V x dm = M x_g = \text{momento estático do corpo em relação ao eixo y;}$$

$$I_{z_0} = \int_V R^2 dm = \int_V (x^2 + y^2) dm = \text{momento polar de inércia do corpo em relação à}$$

origem, O, do sistema coordenado adotado.

O vetor quantidade de movimento do sistema escrito no sistema coordenado

local, será, portanto:

$$\vec{P} = \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{u}} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{v}} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{w}} \right) \vec{k} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{P} = \underbrace{\left( M u - S_x \dot{\Psi} \right)}_{\vec{P}_x} \vec{i} + \underbrace{\left( M v + S_y \dot{\Psi} \right)}_{\vec{P}_y} \vec{j} + \underbrace{\left( I_{z_0} \dot{\Psi} - S_x u + S_y v \right)}_{\vec{A}_0} \vec{k}. \quad (\text{B.3})$$

Derivando a expressão B.3 em relação ao tempo<sup>3</sup>, temos a soma das forças

externas agentes sobre o casco:

$$\frac{D}{Dt}(\vec{P}) = \vec{F}.$$

Temos, portanto:

$$\frac{D \vec{P}_x}{Dt} = \frac{D}{Dt} \left( M u - S_x \dot{\Psi} \right) \vec{i} + \left( M u - S_x \dot{\Psi} \right) \frac{d \vec{i}}{dt}; \quad (\text{B.4a})$$

$$\frac{D \vec{P}_y}{Dt} = \frac{D}{Dt} \left( M v + S_y \dot{\Psi} \right) \vec{j} + \left( M v + S_y \dot{\Psi} \right) \frac{d \vec{j}}{dt}; \quad (\text{B.4b})$$

$$\frac{D \vec{A}_0}{Dt} = \frac{D}{Dt} \left( I_{z_0} \dot{\Psi} - S_x u + S_y v \right) \vec{k} + \left( I_{z_0} \dot{\Psi} - S_x u + S_y v \right) \frac{d \vec{k}}{dt}. \quad (\text{B.4c})$$

Observando que:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\vec{i}}(t) &= \cos \Psi \vec{i} + \sin \Psi \vec{j}; \\ \dot{\vec{j}}(t) &= -\sin \Psi \vec{i} + \cos \Psi \vec{j}, \end{aligned} \right.$$

chega-se a:

<sup>3</sup> A derivada temporal total deve levar em consideração que o sistema coordenado no qual a expressão do vetor quantidade de movimento está escrito, se move em relação ao meio.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{i}(t)}{dt} &= -\psi \text{sen } \psi \bar{i} + \psi \cos \psi \bar{j} = \psi (-\text{sen } \psi + \cos \psi); \\ \frac{d\bar{j}(t)}{dt} &= -\psi \cos \psi \bar{i} - \psi \text{sen } \psi \bar{j} = -\psi (\cos \psi + \text{sen } \psi); \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{i}}{dt} &= \psi \bar{j}; \\ \frac{d\bar{j}}{dt} &= -\psi \bar{i}. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad (B.5)$$

Derivando as expressões B.4a e B.4b em relação ao tempo, substituindo as derivadas dos versores pelas expressões B.5, chega-se a:

$$\frac{D}{Dt}(\bar{P}^x) = M\dot{u}\bar{i} + M\dot{v}\bar{j} - S^x\dot{\psi}\bar{i} - S^x\dot{\psi}^2\bar{j} = (M\dot{u} - S^x\dot{\psi})\bar{i} + \dot{\psi}(M\dot{v} - S^x\dot{\psi})\bar{j}; \quad (B.6a)$$

$$\frac{D}{Dt}(\bar{P}^y) = M\dot{v}\bar{j} - M\dot{u}\dot{\psi}\bar{i} + S^y\dot{\psi}\bar{i} - S^y\dot{\psi}^2\bar{j} = (-\dot{\psi})(M\dot{v} + S^y\dot{\psi})\bar{i} + (M\dot{v} + S^y\dot{\psi})\bar{j}; \quad (B.6b)$$

A derivação temporal de B.4c pode ser mais facilmente visualizada e realizada, através da expressão B.7, de acordo com a figura B.2, abaixo:

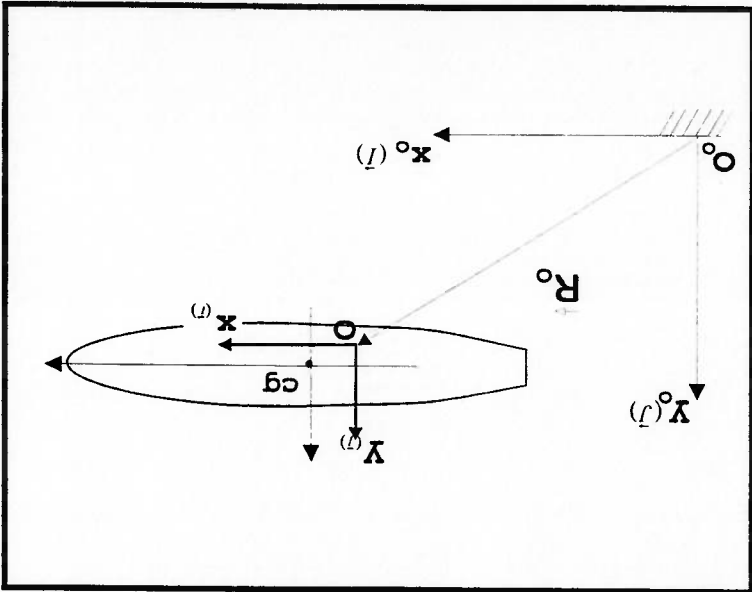


Figura B.2 - Quant. de movimento angular do navio em torno da origem fixa à terra

$$\bar{A}_{o_o} = \bar{R}_o \times \bar{P} + \bar{A}_{o_o,\Omega}; \quad (\text{B.7})$$

onde:

$\bar{A}_{o_o}$  = vetor quantidade de movimento angular total do navio em torno da origem fixa à terra ;

$\bar{R}_o = x_o \bar{i} + y_o \bar{j}$  ; (vetor posição da origem fixa ao navio em relação à terra)

$\bar{P} = P_x \bar{i} + P_y \bar{j}$  ; (vetor quantidade de movimento linear do navio em relação à terra

medida no sistema coordenado de origem O, fixo ao navio);

$\bar{A}_{o_o,\Omega} = I_{z_o,\Omega} \Psi \bar{K}$  ; (vetor quantidade de movimento angular do navio, em relação à

origem fixa à terra, devido exclusivamente ao movimento angular do mesmo)

Fazendo  $O_o \equiv O$ , instantaneamente, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{R}_o = \bar{0}; \\ \bar{A}_{o_o} = \bar{A}_{o_o,\Omega} = \bar{A}_{o_o}; \\ \left( \bar{i}; \bar{j}; \bar{k} \right) \equiv \left( \bar{i}; \bar{j}; \bar{k} \right), \end{array} \right.$$

a expressão da quantidade de movimento angular se simplifica para (ver equação B.3):

$$\bar{A}_{o_o} = \bar{A}_{o_o} = (I_{z_o,\Omega} \dot{\Psi} - S_x u + S_y v) \bar{k};$$

e sua derivada temporal fica:

$$\frac{D}{Dt} (\bar{A}_{o_o}) = \frac{d\bar{R}_o}{dt} \times \bar{P} + \bar{R}_o \times \frac{d\bar{P}}{dt} + \frac{d\bar{A}_{o_o,\Omega}}{dt} + \frac{d\bar{R}_o}{dt} \times \bar{P} + \frac{d\bar{A}_{o_o}}{dt}; \quad (\text{B.8})$$

sendo:



$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\bar{R}_o}{dt} &= \bar{u} \bar{i} + \bar{v} \bar{j}; \\ \bar{F} &= (M\bar{u} - S^x \bar{\psi}) \bar{i} + (M\bar{v} + S^y \bar{\psi}) \bar{j}; \\ \frac{d\bar{k}}{dt} &= \bar{0}, \end{aligned} \right.$$

temos, finalmente:

$$\frac{D}{Dt} (\bar{A}_o) = \frac{D}{Dt} (\bar{A}_o) = [I_{z_o} \bar{\psi} + S^y (\bar{v} + \bar{u} \bar{\psi}) - S^x (\bar{u} - \bar{v} \bar{\psi})] \bar{k}; \quad (B.9)$$

Retomando as expressões B.6a e B.6b, juntamente com B.9, chega-se ao sistema de equações do movimento do navio no plano horizontal, em relação ao sistema fixo à terra, escrito num sistema coordenado paralelo ao sistema local principal:

$$\left\{ \begin{aligned} X(U; \bar{u}; \bar{v}; \bar{\psi}) &= M\bar{u} - S^x \bar{\psi} - \psi (M\bar{v} + S^y \bar{\psi}); \\ Y(U; \bar{u}; \bar{v}; \bar{\psi}) &= M\bar{v} + S^y \bar{\psi} + \psi (M\bar{u} - S^x \bar{\psi}); \\ N(U; \bar{u}; \bar{v}; \bar{\psi}) &= I_{z_o} \bar{\psi} - S^x (\bar{u} - \bar{v} \bar{\psi}) + S^y (\bar{v} + \bar{u} \bar{\psi}). \end{aligned} \right. \quad (B.10a)$$

Ou ainda, podemos substituir:

$$\left\{ \begin{aligned} S^x &= M y^g; \\ S^y &= M x^g; \\ I_{z_o} &= I_{z_{cg}} + M(x_z^g)^2 + y_z^g, \end{aligned} \right.$$

obtendo:

$$\left\{ \begin{aligned} X(U; \bar{u}; \bar{v}; \bar{\psi}) &= M(\bar{u} - y^g \bar{\psi} - \psi \bar{v} - x^g \bar{\psi}^2); \\ Y(U; \bar{u}; \bar{v}; \bar{\psi}) &= M(\bar{v} + x^g \bar{\psi} + \psi \bar{u} - y^g \bar{\psi}^2); \\ N(U; \bar{u}; \bar{v}; \bar{\psi}) &= [I_{z_{cg}} + M(x_z^g)^2 + y_z^g] [\bar{\psi} + M(x^g \bar{v} + \bar{u} \bar{\psi}) - y^g (\bar{u} - \bar{v} \bar{\psi})]. \end{aligned} \right. \quad (B.10b)$$

Uma maneira mais simples de se chegar à expressão do momento é através da mudança de base diretamente, compondo momentos e forças no plano horizontal:

$$N^o = N = N_{cg} + N_{trans} + X_{cg} x^g - X_{cg} y^g;$$

onde:

$$N_{cg} = I_{z_{cg}} \bar{\psi}; \quad N_{trans} = M(x_z^g)^2 + y_z^g \bar{\psi}; \quad X_{cg} = M(\bar{u} - \bar{v} \bar{\psi}); \quad Y_{cg} = M(\bar{v} + \bar{u} \bar{\psi}).$$

## B.2 FORÇAS E MOMENTO EXTERNOS DEVIDO À AÇÃO DE CORRENTE UNIFORME SOBRE O NAVIO EM MOVIMENTO

Conforme já discutido no capítulo 2, as forças e momento no plano horizontal causados pela ação da corrente sobre o casco, têm origem em mecanismos diversos.

O capítulo 2 sugere expressões heurísticas para essas forças e momento, no caso de modelo cativo, onde as forças longitudinal e transversal são de origem puramente viscosa sendo que, o momento é composto de uma parcela viscosa e uma potencial (Momento de Munk).

Para o modelo cativo:

$$u = v = \dot{u} = \dot{v} = \ddot{u} = \ddot{v} = 0,$$

de modo que as forças e o momento ali descritos se referem a um caso particular, ou seja, são:

$$(B.11) \left\{ \begin{array}{l} X(U;0;0;0;0;0;0;0;0) = X^{visc}(U;\Psi) = \frac{2}{1} \rho L T U^2 C_{1c}(\Psi); \\ Y(U;0;0;0;0;0;0;0;0) = Y^{visc}(U;\Psi) = \frac{2}{1} \rho L T U^2 C_{2c}(\Psi); \\ N(U;0;0;0;0;0;0;0;0) = N^{visc}(U;\Psi) + N^{MUNK}(U;\Psi) = \frac{2}{1} \rho L^2 T U^2 C_{6c}(\Psi). \end{array} \right.$$

Portanto, a presente dedução, busca resgatar a parcela inercial dos esforços, de origem momentaneamente potencial e, por isso, pode ser realizada como se a interação do navio em movimento com a corrente ocorresse em fluido invíscido. Esses esforços são também função das demais variáveis não abrangidas pelo ensaio cativo e, portanto, complementam as expressões heurísticas do capítulo 2<sup>5</sup>.

Resumindo a argumentação acima, temos:

<sup>5</sup> Como o momento do caso cativo já possui uma parcela potencial (Momento de Munk), ela deve ser subtraída da expressão final do momento inercial para não haver duplicidade de termos.

$$\left\{ \begin{aligned} X(U; u; v; \psi; \Phi) &= X^{pot}(U; u; v; \psi; \Phi) + X^{visc}(U; u; v; \psi; \Phi); \\ Y(U; u; v; \psi; \Phi) &= Y^{pot}(U; u; v; \psi; \Phi) + Y^{visc}(U; u; v; \psi; \Phi); \\ N(U; u; v; \psi; \Phi) &= N^{pot}(U; u; v; \psi; \Phi) + N^{visc}(U; u; v; \psi; \Phi). \end{aligned} \right.$$

onde:

$X^{pot}; Y^{pot}; N^{pot}$  = forças inerciais longitudinal, transversal e momento de origem potencial;  
 $N^{MUNK}$  = momento de Munk, de origem potencial;  
 $X^{visc}; Y^{visc}; N^{visc}$  = forças (inerciais e de fricção) longitudinal, transversal e momento de origem viscosa.

Despreza-se as parcelas viscosas proporcionais às acelerações, portanto:

$$\left\{ \begin{aligned} X^{visc}(u; v; \Phi) &\approx 0; \\ Y^{visc}(u; v; \Phi) &\approx 0; \\ N^{visc}(u; v; \Phi) &\approx 0. \end{aligned} \right.$$

restando, apenas:

$$\left\{ \begin{aligned} X(U; u; v; \psi; \Phi) &= X^{pot}(U; u; v; \psi; \Phi) + X^{visc}(U; u; v; \psi; \Phi); \\ Y(U; u; v; \psi; \Phi) &= Y^{pot}(U; u; v; \psi; \Phi) + Y^{visc}(U; u; v; \psi; \Phi); \\ N(U; u; v; \psi; \Phi) &= N^{pot}(U; u; v; \psi; \Phi) + N^{visc}(U; u; v; \psi; \Phi). \end{aligned} \right. \quad (B.12a)$$

O ensaio de modelo cativo, ou ainda, as expressões heurísticas do capítulo 2, de acordo com a expressão B.11, nos fornecem os esforços viscosos proporcionais à velocidade da corrente,  $U$ , e ao ângulo de incidência,  $\psi$ , uma vez que são realizados com as velocidades lineares,  $u$  e  $v$ , e angular,  $\psi$ , nulas. Porém, como será visto mais adiante, pode-se generalizar seus resultados para casos onde as velocidades lineares,  $u$  e  $v$ , não são nulas, conseguindo-se, assim, resgatar os termos proporcionais a essas duas variáveis, não sendo possível, porém, fazer o mesmo para a velocidade angular. Sendo assim, é interessante rescrever a expressão B.12a da forma:

$$\left. \begin{aligned} X(U; u; v; \Phi) &= X^{pot}(U; u; v; \Phi) + X^{visc}(U; u; v; \Phi) + X^{visc}(\Phi); \\ Y(U; u; v; \Phi) &= Y^{pot}(U; u; v; \Phi) + Y^{visc}(U; u; v; \Phi) + X^{visc}(\Phi); \\ N(U; u; v; \Phi) &= N^{pot}(U; u; v; \Phi) + N^{visc}(U; u; v; \Phi) + X^{visc}(\Phi). \end{aligned} \right\} \text{(B.12b)}$$

Resgatando a expressão B.11 e, incluindo as velocidades lineares,  $u$  e  $v$ , como variáveis abrangidas pelas expressões obtidas pelo modelo cativo, temos:

$$\left. \begin{aligned} X(U; u; v; \Phi) &= X^{pot}(U; u; v; \Phi) + X^{visc}(U; u; v; \Phi) + X^{visc}(\Phi); \\ Y(U; u; v; \Phi) &= Y^{pot}(U; u; v; \Phi) + Y^{visc}(U; u; v; \Phi) + X^{visc}(\Phi); \\ N(U; u; v; \Phi) &= N^{pot}(U; u; v; \Phi) - \underbrace{N^{MUNK}(U; u; v; \Phi)}_{\text{inclui } N^{MUNK}} + N^{visc}(U; u; v; \Phi) + \underbrace{N^{MUNK}(U; u; v; \Phi) + N^{visc}(U; u; v; \Phi)}_{\text{modelo cativo}} \end{aligned} \right\} \dots \text{(B.12c)}$$

Para a formulação do problema, vamos analisar o potencial de velocidades em torno do casco do navio livre gerado pela ação da correnteza de um fluido inviscido sobre o mesmo<sup>6</sup> e estudar a variação de energia cinética desse fluido em movimento devido à presença do navio.

A presença do navio no escoamento do fluido funciona como um obstáculo ao seu livre curso, causando uma diminuição de energia cinética do mesmo, calculada num volume que contenha o navio.

Com a ação da corrente uniforme, o navio passa a possuir velocidades relativas ao sistema fixo à terra, nas suas direções longitudinal e transversal, respectivamente  $u$  e  $v$ , em relação ao meio fluido, teremos, no sistema coordenado fixo ao navio:

$$\vec{U}_m = u_m \vec{i} + v_m \vec{j} + \psi_m \vec{k}, \quad \text{(B.13a)}$$

onde:

$$\vec{U}_m = \vec{v} - \vec{U}.$$

<sup>6</sup> O caso em questão se limita ao potencial bidimensional, uma vez que estamos estudando o movimento no plano horizontal apenas.

Sendo, de acordo com as definições da figura B.1:

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{U} &= U \cos \alpha \vec{i} + U \sin \alpha \vec{j} = -U \cos \Psi \vec{i} + U \sin \Psi \vec{j}, \\ \vec{V} &= u \vec{i} + v \vec{j}. \end{aligned} \right.$$

temos:

$$\vec{U}^m = (u + U \cos \Psi) \vec{i} + (v - U \sin \Psi) \vec{j} + \dot{\Psi} \vec{k},$$

e, portanto:

$$\left\{ \begin{aligned} u^m &= u + U \cos \Psi; \\ v^m &= v - U \sin \Psi; \\ \dot{\Psi}^m &= \dot{\Psi}. \end{aligned} \right.$$

(B.13b)

Podemos, também, introduzir o conceito de ângulo de incidência instantâneo sobre o casco, relativo ao meio fluido,  $\Psi^m(t)$ , de acordo com a figura B.3:

$$\Psi^m(t) = \Psi(t) + \delta \Psi(u(t), v(t)) = \arctg \left( \frac{u^m}{v^m} \right), \quad (B.13c)$$

onde:

$\Psi(t)$  = ângulo de incidência geométrico, instantâneo do navio em relação ao eixo fixo à terra;  
 $\delta \Psi(u, v)$  = ângulo cinemático instantâneo, em relação ao meio fluido, devido ao movimento do navio em relação à terra.

<sup>7</sup> Quando o navio não se move e tem aprornamento constante em relação à terra, e não havendo variação da direção de incidência da corrente, o ângulo em relação ao meio também é constante ( $\Psi^m(t) = \Psi(t) = \Psi_0 = \text{cte}$ ). Se o navio passa a girar com velocidade angular,  $\dot{\Psi}(t)$ , o ângulo de incidência varia instantaneamente ( $\dot{\Psi}^m(t) = \dot{\Psi}(t) = \dot{\Psi}_0 + \dot{\Psi}(t)$ ). Ao passar também a se deslocar com velocidade linear, em relação à terra e, consequentemente, em relação à corrente, a qual se mantém constante em relação à terra, teremos uma variação cinemática instantânea do ângulo de ataque do navio em relação ao meio fluido, dada pela expressão B.13c.

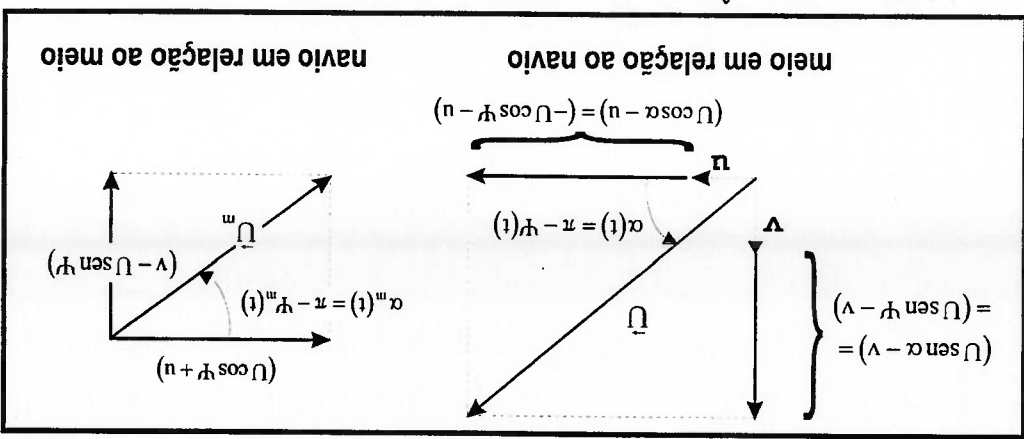


Figura B.3 - Ângulo de incidência em relação ao meio fluido

Para o ângulo de incidência instantâneo relativo ao meio fluido,  $\Psi_m$ , valem as

seguintes relações:

$$\left. \begin{aligned}
 U_m &= \sqrt{u^2 + v^2} \\
 \cos \Psi_m &= \frac{u}{U_m} = \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{u + U \cos \Psi} \\
 \sin \Psi_m &= \frac{v}{U_m} = \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{(U \sin \Psi - v)}
 \end{aligned} \right\} \text{(B.13d)}$$

Em relação ao meio, podemos escrever a expressão B.12c:

$$\left. \begin{aligned}
 X(U; u; v; \Psi; \Phi) &= X(u^m; v^m; \Psi^m; \Phi^m) = X(u^{\text{pot}}; v^m; \Psi^m; \Phi^m) + X^{\text{visc}}(u^m; v^m; \Psi^m; \Phi^m) \\
 Y(U; u; v; \Psi; \Phi) &= Y(u^m; v^m; \Psi^m; \Phi^m) = Y(u^{\text{pot}}; v^m; \Psi^m; \Phi^m) + Y^{\text{visc}}(u^m; v^m; \Psi^m; \Phi^m) \\
 N(U; u; v; \Psi; \Phi) &= N(u^m; v^m; \Psi^m; \Phi^m) = N(u^{\text{pot}}; v^m; \Psi^m; \Phi^m) + N^{\text{visc}}(u^m; v^m; \Psi^m; \Phi^m)
 \end{aligned} \right\} \text{.....(B.14)}$$

Garantidos pelo princípio de Galileu, a variação de energia cinética no fluido causada pela presença do navio pode ser calculada estudando o problema num

referencial solidário ao navio, como um corpo que se move com velocidade  $U^m$  num meio fluido em repouso<sup>8</sup>. Ou seja, tomemos o caso onde o navio se move com velocidades longitudinal,  $u^m$ , transversal,  $v^m$ , e angular,  $\psi$ , medidos no sistema coordenado paralelo ao sistema principal<sup>10</sup>, em fluido invíscido estacionário<sup>10</sup>, de acordo com a figura B.4, abaixo. Agindo assim, estamos incluindo tanto a ação da correnteza como os movimentos do navio, medidos num sistema coordenado de origem arbitrária

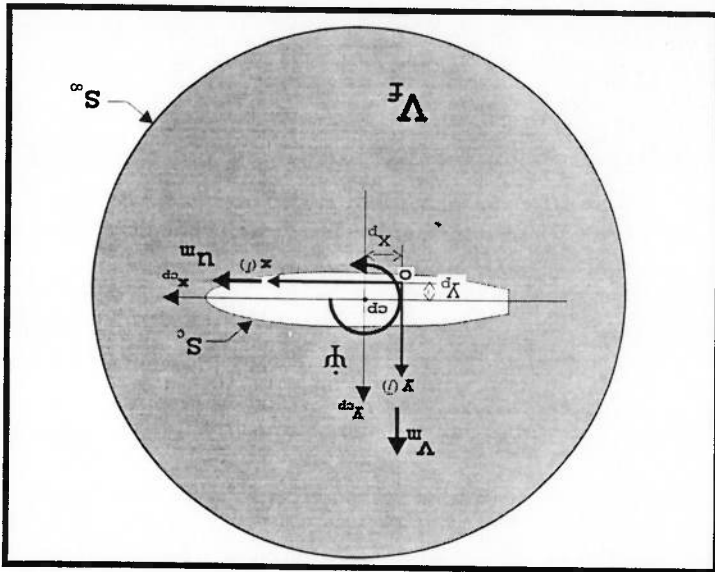


Figura B.4 - Navio se move em fluido invíscido estacionário

Devido às velocidades longitudinal,  $u^m$ , transversal,  $v^m$ , e angular,  $\psi$ , aplicadas no ponto O, fora do centro de pressão, CP, há um potencial de velocidades no fluido,  $\Phi_0$ .

Sendo  $\Phi_0$  o potencial de velocidades em torno do casco medido na origem O, no caso do escoamento estacionário:

<sup>8</sup> Observar que nesse caso a variação da energia cinética será positiva, uma vez que o movimento do navio fornece energia cinética ao meio fluido, enquanto que no caso da correnteza agindo sobre o navio, a variação da energia cinética será negativa, uma vez que o casco estará retirando energia cinética do fluido. Estaremos obtendo, através dessa abordagem, os esforços do navio sobre o fluido e, para obtermos os esforços do fluido sobre o navio, devemos mudar o sinal dos mesmos. <sup>10</sup> Essa alteração é feita pois o nosso interesse reside na determinação da variação de energia cinética e, consequentemente, da quantidade de movimento, sofrida pelo fluido devido ao navio se movendo, e não na energia cinética/quantidade de movimento totais do fluido em  $V^m$ , pois essas seriam infinitas, uma vez que todo o volume fluido, infinito por suposição, se movimenta com velocidade U. Como já visto no capítulo 2, essa mudança de base não altera os resultados do problema, e não há perda de generalidade no que diz respeito ao campo de velocidades em torno do casco.

$$\Phi_0 = u^m \phi_{0,1} + v^m \phi_{0,2} + \Psi \phi_{0,6},$$

podemos definir o potencial  $\Phi_0$ :

$$\Phi_0 = u^m \phi_{0,1} + v^m \phi_{0,2} + \Psi \phi_{0,6}; \quad (B.15)$$

onde:

$\phi_{0,1}$  = potencial de velocidades no fluido causado por velocidade longitudinal unitária,

$u^m = 1$ , aplicada ao navio através da origem O, tal que:

$$\phi_{0,1} = x - \phi_{0,1}.$$

$\phi_{0,2}$  = potencial de velocidades no fluido causado por velocidade transversal unitária,

$v^m = 1$ , aplicada ao navio através da origem O, tal que:

$$\phi_{0,2} = y - \phi_{0,2}.$$

$\phi_{0,6}$  = potencial de velocidades no fluido causado por velocidade angular unitária,

$\Psi = 1$ , aplicada ao navio em torno da origem O, tal que:

$$\phi_{0,6} = -\phi_{0,6}.$$

Portanto:

$$\Phi_0 = u^m (x - \phi_{0,1}) + v^m (y - \phi_{0,2}) - \Psi \phi_{0,6} = u^m \phi_{0,1} + v^m \phi_{0,2} + \Psi \phi_{0,6},$$

ou seja:

$$\Phi_0 = u^m x + v^m y - \Phi_0.$$

Portanto, valem as condições de contorno:



<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\Delta_2 \hat{\phi}_{0,1} = 0;</math></li> <li>• <math>\Delta \hat{\phi}_{0,1} \cdot \bar{n} _{S_c} = n_x;</math></li> <li>• <math>\Delta \hat{\phi}_{0,1} \rightarrow 0 \text{ no } \infty.</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\Delta_2 \hat{\phi}_{0,2} = 0;</math></li> <li>• <math>\Delta \hat{\phi}_{0,2} \cdot \bar{n} _{S_c} = n_y;</math></li> <li>• <math>\Delta \hat{\phi}_{0,2} \rightarrow 0 \text{ no } \infty.</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\Delta_2 \hat{\phi}_{0,6} = 0;</math></li> <li>• <math>\Delta \hat{\phi}_{0,6} \cdot \bar{n} _{S_c} = -y n_x + x n_y;</math><sup>11</sup></li> <li>• <math>\Delta \hat{\phi}_{0,6} \rightarrow 0 \text{ no } \infty.</math></li> </ul>
---	---	---

É conveniente, para a dedução da energia cinética do fluido contido em  $V_f$ , feita a seguir, que se expresse os potenciais acima em termos dos potenciais unitários oriundos da aplicação das velocidades no centro de pressão, CP. Temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\phi}_{0,1} = \hat{\phi}_1; \\ \hat{\phi}_{0,2} = \hat{\phi}_2; \\ \hat{\phi}_{0,6} \neq \hat{\phi}_6. \end{array} \right. \quad 12$$

onde:

$\hat{\phi}_1$  = potencial, para velocidade longitudinal unitária aplicada através do centro de pressão, CP;

$\hat{\phi}_2$  = potencial, para velocidade transversal unitária aplicada através do centro de pressão, CP;

$\hat{\phi}_6$  = potencial, para velocidade angular unitária aplicada em torno do centro de pressão, CP.

No caso do potencial  $\hat{\phi}_{0,6}$ , temos:

$$\Delta \hat{\phi}_{0,6} \cdot \bar{n}|_{S_c} = -y n_x + x n_y. \quad (B.16)$$

Porém, temos (ver figura B.4):

<sup>11</sup> Sobre a superfície do corpo,  $S_c$ , o vetor velocidade da partícula fluida "empurrada" pelo corpo que gira com velocidade angular,  $\Psi$ , em torno da origem, O, do sistema coordenado adotado é:

$$\bar{v} = \Delta \hat{\phi}_{0,6} \cdot \bar{n}|_{S_c} = \Psi \times \bar{R} = -y \Psi \bar{i} + x \Psi \bar{j}. \dots \text{se } \Psi = 1 \Rightarrow \Delta \hat{\phi}_{0,6} \cdot \bar{n}|_{S_c} = -y \bar{i} + x \bar{j};$$

$$\text{e, como: } \bar{n} = n_x \bar{i} + n_y \bar{j}, \text{ temos: } \Delta \hat{\phi}_{0,6} \cdot \bar{n}|_{S_c} = -y n_x + x n_y.$$

<sup>12</sup> Os potenciais causados pelas velocidades lineares são iguais devido ao paralelismo entre o sistema coordenado adotado e o sistema coordenado principal.

$$\begin{cases} x = x_{cp} + x_p; \\ y = y_{cp} + y_p. \end{cases}$$

que, substituídas na expressão B.15, fornece:

$$\Delta\hat{\phi}_{0,6} \cdot \bar{n}|_s = -(y_{cp} + y_p) n_x + (x_{cp} + x_p) n_y + \underbrace{\Delta\hat{\phi}_{0,6} \cdot \bar{n}|_s}_{-y_p n_x + x_p n_y}$$

Portanto:

$$\Delta\hat{\phi}_{0,6} \cdot \bar{n}|_s = \Delta\hat{\phi}_{0,6} \cdot \bar{n}|_s - y_p n_x + x_p n_y.$$

Como:

$$\begin{cases} y_p = \text{constante} \Rightarrow \Delta y_p = 0; \\ x_p = \text{constante} \Rightarrow \Delta x_p = 0, \end{cases}$$

Podemos escrever:

$$\hat{\phi}_{0,6} = \hat{\phi}_{0,6} - y_p \hat{\phi}_1 + x_p \hat{\phi}_2; \quad 13$$

e, portanto, em toda a região fluida e, não apenas sobre a superfície do corpo, vale:

$$\Delta\hat{\phi}_{0,6} = \Delta\hat{\phi}_{0,6} - y_p \Delta\hat{\phi}_1 + x_p \Delta\hat{\phi}_2. \quad (B.17)$$

Retomando a expressão B.16, podemos escrever:

$$\Phi_0 = u^m \hat{\phi}_1 + v^m \hat{\phi}_2 + \Psi(\hat{\phi}_6 - y_p \hat{\phi}_1 + x_p \hat{\phi}_2),$$

e, o campo de velocidades no fluido, medido na origem O, fica:

$$\Delta\hat{\Phi}_0 = u^m \Delta\hat{\phi}_1 + v^m \Delta\hat{\phi}_2 + \Psi(\Delta\hat{\phi}_6 - y_p \Delta\hat{\phi}_1 + x_p \Delta\hat{\phi}_2). \quad (B.18)$$

Agora, podemos escrever a expressão da energia cinética na região fluida, devido ao navio, medida na origem O:

<sup>13</sup> A relação obedece às condições de contorno de  $\hat{\phi}_{0,6}$ .

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_V \Delta \Phi_0^2 \Big|_z dV_f$$

No caso, a função potencial  $\Phi_0 \in \Re$  (função real) e, portanto,  $|\Delta \Phi_0^2|_z = (\Delta \Phi_0^2)^2$ ,

portanto:

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_V (\Delta \Phi_0^2)^2 dV_f \Rightarrow \text{(substituindo a expressão B.18)} \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{1}{2} \rho \int_V [u_z^2 (\Delta \Phi_1^2)^2 + v_z^2 (\Delta \Phi_2^2)^2 + w_z^2 (\Delta \Phi_6^2)^2 + x_z^2 (\Delta \Phi_2^2)^2 + y_z^2 (\Delta \Phi_1^2)^2 -$$

$$- 2x_z y_z (\Delta \Phi_1^2)^2 + 2x_z w_z (\Delta \Phi_6^2)^2 - 2y_z w_z (\Delta \Phi_2^2)^2 - 2x_z y_z (\Delta \Phi_1^2)^2 + 2v_z w_z (\Delta \Phi_2^2)^2 + 2u_z w_z (\Delta \Phi_6^2)^2 -$$

$$- 2v_z w_z (\Delta \Phi_2^2)^2 + 2u_z w_z (\Delta \Phi_6^2)^2 + 2u_z v_z (\Delta \Phi_1^2)^2 + 2u_z w_z (\Delta \Phi_6^2)^2] dV_f =$$

$$- 2u_z w_z (\Delta \Phi_1^2)^2 + 2u_z v_z (\Delta \Phi_2^2)^2 + 2u_z w_z (\Delta \Phi_6^2)^2] dV_f =$$

$$\frac{1}{2} \rho \int_V u_z^2 (\Delta \Phi_1^2)^2 dV_f + \frac{1}{2} \rho \int_V v_z^2 (\Delta \Phi_2^2)^2 dV_f + \frac{1}{2} \rho \int_V w_z^2 (\Delta \Phi_6^2)^2 dV_f + \frac{1}{2} \rho \int_V x_z^2 (\Delta \Phi_2^2)^2 dV_f +$$

$$\frac{1}{2} \rho \int_V y_z^2 (\Delta \Phi_1^2)^2 dV_f - \rho \int_V x_z y_z (\Delta \Phi_1^2)^2 dV_f - \rho \int_V x_z w_z (\Delta \Phi_6^2)^2 dV_f - \rho \int_V y_z w_z (\Delta \Phi_2^2)^2 dV_f -$$

$$\rho \int_V x_z y_z (\Delta \Phi_1^2)^2 dV_f + \rho \int_V x_z w_z (\Delta \Phi_6^2)^2 dV_f - \rho \int_V y_z w_z (\Delta \Phi_2^2)^2 dV_f - \rho \int_V x_z y_z (\Delta \Phi_1^2)^2 dV_f +$$

$$\rho \int_V v_z w_z (\Delta \Phi_2^2)^2 dV_f + \rho \int_V u_z w_z (\Delta \Phi_6^2)^2 dV_f + \rho \int_V u_z v_z (\Delta \Phi_1^2)^2 dV_f + \rho \int_V u_z w_z (\Delta \Phi_6^2)^2 dV_f -$$

$$- \rho \int_V u_z w_z (\Delta \Phi_1^2)^2 dV_f + \rho \int_V v_z w_z (\Delta \Phi_2^2)^2 dV_f + \rho \int_V u_z w_z (\Delta \Phi_6^2)^2 dV_f + \rho \int_V x_z^2 (\Delta \Phi_2^2)^2 dV_f +$$

$$\underbrace{\rho \int_V y_z^2 (\Delta \Phi_1^2)^2 dV_f}_{=0 \text{ (simetria eixo x)}} +$$

Reagrupando os termos da expressão da energia cinética do fluido no volume

$V_f$ , temos, finalmente:

$$T = M_{11} \left( \frac{u_2^2}{2} + \frac{u_m^2}{2} y_p^2 - u_m \psi y_p \right) + M_{22} \left( \frac{v_2^2}{2} + \frac{v_m^2}{2} x_p^2 + v_m \psi x_p \right) + M_{66} \left( \frac{\psi^2}{2} \right) + M_{26} (\psi^2 x_p + v_m \psi) \quad (\text{B.19})^{14}$$

A quantidade de movimento do fluido devido ao movimento do casco fica:

$$\bar{p} = \left( \frac{\partial T}{\partial u} \right) + \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right) + \left( \frac{\partial T}{\partial \psi} \right),$$

ou seja:

$$\bar{p} = \left( \frac{\partial T}{\partial u} \right) \bar{i} + \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right) \bar{j} + \left( \frac{\partial T}{\partial \psi} \right) \bar{k};$$

e, portanto:

$$\bar{p} = (M_{11} u_m - M_{11} y_p \psi) \bar{i} + [M_{22} (v_m + x_p \psi) + M_{26} \psi] \bar{j} + [M_{11} (\psi y_p^2 - u_m y_p) + M_{22} (\psi x_p^2 + v_m x_p) + M_{66} \psi + M_{26} (2\psi x_p + v_m)] \bar{k} \quad (\text{B.20})$$

A derivada temporal do vetor quantidade de movimento, fica:

$$\frac{D\bar{p}}{Dt} = \frac{dP_x}{dt} \bar{i} + P_x \frac{d\bar{i}}{dt} + \frac{dP_y}{dt} \bar{j} + P_y \frac{d\bar{j}}{dt} + \frac{dA_0}{dt} \bar{k} + A_0 \frac{d\bar{k}}{dt} = 0$$

Em procedimento análogo ao realizado para a obtenção da derivada temporal da quantidade de movimento do navio, temos, para o fluido:

<sup>14</sup> Uma forma mais simples de se obter a expressão da energia cinética do fluido expressa em termos de velocidades medidas num sistema coordenado fora do centro de pressão seria:  
 obter a expressão da energia cinética expressa em termos de velocidades medidas no sistema principal

$$T = M_{11} \frac{u_{cp}^2}{2} + M_{22} \frac{v_{cp}^2}{2} + M_{66} \frac{\psi_{cp}^2}{2} + M_{26} v_{cp} \psi_{cp};$$

escrever as velocidades medidas no sistema principal em termos das velocidades no sistema coordenado adotado (mudança de base)  $(u_{cp} = u - y_p \psi; v_{cp} = v + x_p \psi; \psi_{cp} = \psi)$ ;

substituir as velocidades escritas na nova base, na expressão da energia cinética para o sistema principal, resultando, também, na expressão B.19.

$$\frac{D\bar{P}}{Dt} = (M_{11}\dot{u}_m - M_{11}y^p\dot{\psi})\bar{i} + (M_{11}u_m - M_{11}y^p\dot{\psi})\bar{j} + (M_{22}\dot{v}_m + M_{22}x^p\dot{\psi} + M_{26}\dot{\psi})\bar{j} - (M_{22}v_m + M_{22}x^p\dot{\psi} + M_{26}\dot{\psi})\bar{i} + \frac{d\bar{A}_o}{dt}\bar{k},$$

que, reagrupada, fornece:

$$\frac{D\bar{P}}{Dt} = [M_{11}\dot{u}_m - M_{11}y^p\dot{\psi} - M_{22}v_m\dot{\psi} - \psi_2(M_{22}x^p + M_{26})]\bar{i} + [M_{22}\dot{v}_m + \psi(M_{22}x^p + M_{26}) + M_{11}u_m\dot{\psi} - \psi_2 M_{11}y^p]\bar{j} + \frac{d\bar{A}_o}{dt}\bar{k} \quad (B.21)$$

Por outro lado, também de acordo com o procedimento anterior e com as

convenções da figura B.2<sup>15</sup>, a derivada temporal da componente angular,  $\bar{A}_o$ , fica, em

expressão equivalente à expressão B.8:

$$\frac{D}{Dt}(\bar{A}_o) = \frac{D}{Dt}(\bar{A}_o) = \frac{d\bar{R}_o}{dt} \times \bar{P} + \overbrace{\frac{d\bar{P}}{dt} \times \bar{R}_o}^0 + \frac{d\bar{A}_o}{dt} = \frac{d\bar{R}_o}{dt} \times \bar{P} + \frac{d\bar{A}_o}{dt}. \quad (B.22)$$

onde:

$\bar{A}_o$  = quantidade de movimento angular total do fluido devido ao movimento do navio, medida no sistema fixo ao navio, instantaneamente coincidente com a quantidade de movimento angular medida no sistema estacionário (fixo à terra),  $\bar{A}_{o_0}$ ;

$\bar{R}_o = x_o\bar{i} + y_o\bar{j}$ ; (vetor posição da origem fixa ao navio medido no sistema estacionário, nulo no instante onde os dois sistemas coordenados coincidem);

$\bar{P} = P_x\bar{i} + P_y\bar{j}$ ; (vetor quantidade de movimento linear do navio medido no sistema coordenado de origem O, fixo ao navio);

Sendo:

<sup>15</sup> A figura B.2 ilustra o navio se movendo em torno de uma origem estacionária, sendo que o sistema coordenado principal móvel tem origem no centro de gravidade, CG, uma vez que a análise em questão se refere ao movimento do navio. Para a análise do movimento do fluido em torno do navio, o sistema coordenado principal móvel tem origem no centro de pressão, CP, única diferença entre os dois casos.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{R}_0}{dt} &= u_m \mathbf{i} + v_m \mathbf{j}; \\ \mathbf{F} &= (M_{11} u_m - M_{11} y_p \dot{\Psi}) \mathbf{i} + [M_{22} (v_m + x_p \dot{\Psi}) + M_{26} \dot{\Psi}] \mathbf{j}; \\ \bar{\mathbf{A}}_0 &= [M_{11} (\dot{\Psi} y_p^2 - u_m y_p) + M_{22} (\dot{\Psi} x_p^2 + v_m x_p) + M_{66} \dot{\Psi} + M_{26} (2\dot{\Psi} x_p + v_m)] \mathbf{k}. \end{aligned} \right\}$$

temos, finalmente:

$$\frac{D}{Dt}(\bar{\mathbf{A}}_0) = \frac{D}{Dt}(\bar{\mathbf{A}}_0) = [M_{22} (u_m v_m + x_p u_m \dot{\Psi}) - M_{11} (u_m v_m - y_p v_m \dot{\Psi}) + M_{26} u_m \dot{\Psi}] \mathbf{k} + \underbrace{\text{parcela que origina o Momento de Munk}}_{\text{parcela que origina o Momento de Munk}} [M_{11} y_p^2 + M_{22} x_p^2 + M_{66} + 2M_{26} x_p] - \dot{u}_m M_{11} y_p + \dot{v}_m (M_{22} x_p + M_{26}) \mathbf{k} + \dots \dots \dots (B.23)$$

A expressão B.20 fornece, como já dito, a quantidade de movimento do fluido no plano horizontal, provocada pelo movimento do casco. Portanto, sua derivada temporal, expressões B.21 e B.22, fornecem as forças e o momento exercidos pelo casco sobre o fluido. Nos interessa, porém, as forças e o momento do fluido sobre o casco, que são, portanto (lembrando que o índice "pot" se refere ao fato de se tratar da parcela potencial, na suposição de que o fluido é invisível):

$$\bar{\mathbf{F}}_{\text{pot}} = - \frac{D\mathcal{P}}{Dt}$$

Temos, então, as forças e o momento, de origem potencial, no plano horizontal:

$$\left. \begin{aligned} X^{\text{pot}} &= -[M_{11} \dot{u}_m - M_{11} y_p \dot{\Psi} - M_{22} v_m \dot{\Psi} + \dot{\Psi}^2 (M_{22} x_p + M_{26})]; \\ Y^{\text{pot}} &= -[M_{22} \dot{v}_m + \dot{\Psi} (M_{22} x_p + M_{26}) + M_{11} u_m \dot{\Psi} - \dot{\Psi}^2 M_{11} y_p]; \\ N^{\text{pot}} &= -\left\{ M_{22} (u_m v_m + x_p u_m \dot{\Psi}) - M_{11} (u_m v_m - y_p v_m \dot{\Psi}) + M_{26} u_m \dot{\Psi} \right\} + \\ &+ \left\{ \dot{\Psi} (M_{11} y_p^2 + M_{22} x_p^2 + M_{66} + 2M_{26} x_p) - \dot{u}_m M_{11} y_p + \dot{v}_m (M_{22} x_p + M_{26}) \right\}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (B.24a)$$

Analisando a expressão B.24, vemos que, para o caso de modelo cativo, onde:

$$u = v = \dot{u} = \dot{v} = \dot{\Psi} = \ddot{\Psi} = 0,$$

temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_m = U \cos \Psi; \\ v_m = -U \sin \Psi; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_m = 0; \\ v_m = 0. \end{array} \right.$$

Portanto, para o modelo cativo em fluido invíscido:

$$\left\{ \begin{array}{l} X^{pot} = 0; \\ Y^{pot} = 0; \\ N^{pot} = [M_{22} - M_{11}] U^2 \sin \Psi \cos \Psi. \rightarrow \text{Momento de Munk} \end{array} \right. \quad (B.24b)$$

Lembrando que, seguindo as convenções da figura B.1,

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \Psi = \text{sen } \alpha; \\ \cos \Psi = -\text{cos } \alpha, \end{array} \right.$$

esse resultado confirma a dedução da parte potencial do modelo cativo feita no capítulo 2 e nos diz que, para adicionar as forças e momento de origem potencial aos resultados heurísticos, devemos subtrair o Momento de Munk da expressão de  $N^{pot}$ , pois esse já estará incluído na medição do ensaio de modelo cativo e, consequentemente, na expressão heurística que a reflete.

Temos, portanto, lembrando que o resultado obtido para o modelo cativo (expressão B.11) inclui o momento de Munk, ou seja:

$$\left\{ \begin{array}{l} X(U; 0; 0; 0; 0; \Psi; 0; 0) = X(u_m; 0; 0; 0; 0; v_m; 0; 0) = X^{visc}(u_m; v_m); \\ Y(U; 0; 0; 0; 0; \Psi; 0; 0) = Y(u_m; 0; 0; 0; 0; v_m; 0; 0) = Y^{visc}(u_m; v_m); \\ N(U; 0; 0; 0; 0; \Psi; 0; 0) = N(u_m; 0; 0; 0; 0; v_m; 0; 0) = N^{MUNK}(u_m; v_m) + N^{visc}(u_m; v_m), \end{array} \right.$$

substituindo a expressão B.24a, sem a parcela do momento de Munk, em B.14:

$$\left\{ \begin{array}{l} X = -[M_{11} u_m - M_{11} y^p \Psi - M_{22} v_m \Psi + \Psi^2 (M_{22} x^p + M_{26})] + X(u_m; v_m) + X^{visc}(\Psi); \\ Y = -[M_{22} v_m + \Psi (M_{22} x^p + M_{26}) + M_{11} u_m \Psi - \Psi^2 M_{11} y^p] + Y(u_m; v_m) + Y^{visc}(\Psi); \\ N = -[u_m \Psi (M_{22} x^p + M_{26}) + M_{11} y^p v_m \Psi + \Psi (M_{11} y^2 + M_{22} x^2 + M_{66} + 2M_{26} x^p) - \\ - u_m M_{11} y^p + v_m M_{22} x^p + M_{26}] + N(u_m; v_m) + N^{visc}(\Psi). \end{array} \right. \quad (B.25)$$

B.2 EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

Substituindo a expressão B.25 em B.10b, temos:

$$\left[ \begin{aligned} & -M_{11}\dot{u}_m - M_{11}y^p\ddot{\psi} - M_{22}v^m\dot{\psi} + \psi^2(M_{22}x^p + M_{26}) + X(u_m; v_m) + X^{visc}(\psi) = \\ & -M_{22}\dot{v}_m + \psi(M_{22}x^p + M_{26}) + M_{11}u^m\dot{\psi} - \psi^2M_{11}y^p + Y(u_m; v_m) + Y^{visc}(\psi) = \\ & = M(\dot{v} + x^g\dot{\psi} + \psi u - y^g\dot{\psi}^2); \\ & -u^m\dot{\psi}(M_{22}x^p + M_{26}) + M_{11}y^p v^m\dot{\psi} + \psi(M_{11}y^2 + M_{66} + 2M_{26}x^p) - \\ & -\dot{u}_m(M_{11}y^p + v^m(M_{22}x^p + M_{26})) + N(u_m; v_m) + N^{visc}(\psi) = \\ & = [I^{zcg} + M(x^g_2 + y^g_2)]\ddot{\psi} + M[\dot{x}^g + u\dot{\psi} - y^g(\dot{u} - v\dot{\psi})] \end{aligned} \right]$$

Retornando a expressão B.13b e derivando-a em relação ao tempo, temos:

$$\left\{ \begin{aligned} u_m &= u + U \cos \psi; \\ \dot{u}_m &= \dot{u} - U \dot{\psi} \sin \psi; \\ v_m &= v - U \sin \psi; \\ \dot{v}_m &= \dot{v} - U \dot{\psi} \cos \psi. \end{aligned} \right\}$$

Substituindo os as expressões acima na expressão anterior, reagrupando-a, temos, finalmente:

$$\left\{ \begin{aligned} & (M + M_{11})\dot{u} - (M_{11}y^p + M_{11}y^2)\ddot{\psi} - (M + M_{22})v\dot{\psi} + (M_{22}x^p + M_{26})\dot{\psi} + (M + M_{11})u\dot{\psi} - (M_{11}y^g + M_{11}y^p)\dot{u} + \\ & + (M_{22} - M_{11})U\dot{\psi} \sin \psi - X(u_m; v_m) - X^{visc}(\psi) = 0, \\ & (M + M_{22})\dot{v} + (M_{22}x^p + M_{26})\dot{\psi} + (M + M_{11})u\dot{\psi} - (M_{11}y^g + M_{11}y^p)\dot{v} - \\ & - (M_{22} - M_{11})U\dot{\psi} \cos \psi - Y(u_m; v_m) - Y^{visc}(\psi) = 0, \\ & [I^{zcg} + M(x^g_2 + y^g_2) + M_{11}y^2 + M_{22}x^2 + M_{66} + 2M_{26}x^p]\ddot{\psi} - (M_{11}y^g + M_{11}y^p)\dot{u} + \\ & + (M_{22}x^g + M_{22}x^p + M_{26})\dot{v} + (M_{22}x^p + M_{26})\dot{\psi} + (M + M_{11})u\dot{\psi} + (M_{11}y^g + M_{11}y^p)v\dot{\psi} \\ & - N(u_m; v_m) - N^{visc}(\psi) = 0. \end{aligned} \right. \tag{B.26}$$

<sup>16</sup> A expressão foi deduzida para um navio livre e, por isso, a somatória das forças hidrodinâmicas (ação) e inerciais do navio (reação) é nula. Quando algum vínculo é introduzido, como por exemplo, ancoragem por turrel, as forças e o momento daí advindos devem ser adicionados.



Apesar de aparentemente completa, a expressão B.26 sofre da limitação de que a dedução da parcela complementar ao resultado heurístico do modelo cativo foi baseada na premissa de que o fluido é invíscido.

Pode-se minimizar essa limitação através da extensão das expressões heurísticas do capítulo 2, válidas para o caso cativo, para o caso do navio em movimento.

Para isso, retomemos a expressão B.11, aqui rescrita para facilitar a leitura:

$$\left. \begin{aligned} X(U;0;0;0;0;0;0;0;0;0) &= \frac{1}{I} d L T U^2 C_{1c}(\Phi); \\ Y(U;0;0;0;0;0;0;0;0;0) &= \frac{1}{I} d L T U^2 C_{2c}(\Phi); \\ N(U;0;0;0;0;0;0;0;0;0) &= \frac{1}{I} d L^2 T U^2 C_{6c}(\Phi). \end{aligned} \right\}$$

Entendendo-se que a expressão acima é um caso particular de uma expressão geral, pode-se generalizá-la escrevendo:

$$\left. \begin{aligned} X(U;\Phi) &= X(U;0;0;0;0;0;0;0;0;0) = \frac{1}{I} d L T U^2 C_{1c}(\Phi) = X(U;0;0;0;0;0;0;0;0;0) \\ Y(U;\Phi) &= Y(U;0;0;0;0;0;0;0;0;0) = \frac{1}{I} d L T U^2 C_{2c}(\Phi) = Y(U;0;0;0;0;0;0;0;0;0) \\ N(U;\Phi) &= N(U;0;0;0;0;0;0;0;0;0) = \frac{1}{I} d L^2 T U^2 C_{6c}(\Phi) = N(U;0;0;0;0;0;0;0;0;0) \end{aligned} \right\}$$

Ou seja, entende-se que, na realidade, vale:

$$\left. \begin{aligned} X(n^m;v^m) &= \frac{1}{I} d L T U^2 C_{1c}(\Phi^m); \\ Y(n^m;v^m) &= \frac{1}{I} d L T U^2 C_{2c}(\Phi^m); \\ N(n^m;v^m) &= \frac{1}{I} d L^2 T U^2 C_{6c}(\Phi^m). \end{aligned} \right\}$$

onde, do capítulo 2, utilizando o ângulo de ataque do navio,  $\Psi_m$ , ao invés do ângulo de incidência da corrente,  $\alpha_m$ , temos:

$$\left\{ \begin{aligned} C_{lc}(\Psi_m) &= -\frac{0.105}{S} \frac{Re_{02}}{TL} \cos(\Psi_m) - 0.573 \frac{L}{T} [\cos(3\Psi_m) - \cos(\Psi_m)]; \\ C_{zc}(\Psi_m) &= \left( C_y - \frac{\pi T}{2L} \frac{L}{U_m} \left| \sin(\Psi_m) \right| \right) \left( \frac{L}{U_m} \left| \sin(\Psi_m) \right| + \frac{\pi T}{2L} \frac{L}{U_m} \left| \sin(\Psi_m) \right| \right) + \frac{\pi T}{2L} \frac{L}{U_m} \left| \sin(\Psi_m) \right| \cos(\Psi_m); \\ C_{yc}(\Psi_m) &= -\frac{L}{U_m} \left( C_y - \frac{\pi T}{2L} \frac{L}{U_m} \left| \sin(\Psi_m) \right| \right) \left( \frac{L}{U_m} \left| \sin(\Psi_m) \right| + \frac{\pi T}{2L} \frac{L}{U_m} \left| \sin(\Psi_m) \right| \right) + \frac{\pi T}{2L} \frac{L}{U_m} \left| \sin(\Psi_m) \right| \cos(\Psi_m); \\ &\quad - \left( \frac{L}{U_m} \left| \sin(\Psi_m) \right| + \frac{\pi T}{2L} \frac{L}{U_m} \left| \sin(\Psi_m) \right| \right) \left( \frac{L}{U_m} \left| \sin(\Psi_m) \right| + \frac{\pi T}{2L} \frac{L}{U_m} \left| \sin(\Psi_m) \right| \right) \cos(\Psi_m). \end{aligned} \right.$$

Podemos agora substituir as relações trigonométricas fornecidas pela expressão B.13d nas expressões acima, resultando, após simplificações algébricas em:

$$\left\{ \begin{aligned} C_{lc}(\Psi_m) &= -\frac{U_m}{U} \left\{ \frac{0.105}{S} \frac{Re_{02}}{TL} + 0.573 \frac{L}{T} \left[ \left( \frac{U_m}{U} \right)^2 - 3 \left( \frac{U_m}{U} \right)^2 - 1 \right] \right\}; \\ C_{zc}(\Psi_m) &= \frac{U_m}{U} \left[ \left( C_y - \frac{\pi T}{2L} \frac{L}{U_m} \left| \sin(\Psi_m) \right| + \frac{\pi T}{2L} \frac{L}{U_m} \left| \sin(\Psi_m) \right| \right) \left( \frac{L}{U_m} \left| \sin(\Psi_m) \right| + \frac{\pi T}{2L} \frac{L}{U_m} \left| \sin(\Psi_m) \right| \right) + \frac{\pi T}{2L} \frac{L}{U_m} \left| \sin(\Psi_m) \right| \right]; \\ C_{yc}(\Psi_m) &= \frac{U_m}{U} \left[ \frac{L}{U_m} \left( C_y - \frac{\pi T}{2L} \frac{L}{U_m} \left| \sin(\Psi_m) \right| + \frac{\pi T}{2L} \frac{L}{U_m} \left| \sin(\Psi_m) \right| \right) \left( \frac{L}{U_m} \left| \sin(\Psi_m) \right| + \frac{\pi T}{2L} \frac{L}{U_m} \left| \sin(\Psi_m) \right| \right) - \right. \\ &\quad \left. \left( \frac{L}{U_m} \left| \sin(\Psi_m) \right| + \frac{\pi T}{2L} \frac{L}{U_m} \left| \sin(\Psi_m) \right| \right) \left( \frac{L}{U_m} \left| \sin(\Psi_m) \right| + \frac{\pi T}{2L} \frac{L}{U_m} \left| \sin(\Psi_m) \right| \right) \cos(\Psi_m) \right]. \end{aligned} \right.$$

As forças e o momento obtidos pelas expressões heurísticas do capítulo 2 (modelo cativo) ficam, então:

$$\left. \begin{aligned} X(u_m; v_m) &= \frac{1}{2} \rho L T U_m^2 \left\{ - \frac{u_m}{U_m} \left[ \frac{0.105}{S} \text{Re}_{0.2} \frac{L}{TL} + 0.573 \frac{L}{T} \left( \frac{u_m}{U_m} \right)^2 - 3 \left( \frac{v_m}{U_m} \right)^2 - 1 \right] \right\}; \\ Y(u_m; v_m) &= \frac{1}{2} \rho L T U_m^2 \left\{ \frac{v_m}{U_m} \left[ \left( C_y - \frac{2L}{\pi T} \right) \left| \frac{u_m}{v_m} \right| + \frac{2L}{\pi T} \left( \frac{u_m}{v_m} \right)^2 + \frac{L}{\pi T} \left( 1 + 0.4 \frac{C_B}{T} \right) \left| \frac{u_m}{U_m} \right| \right] \right\}; \\ N(u_m; v_m) &= \frac{1}{2} \rho L^2 T U_m^2 \left\{ \frac{v_m}{U_m} \left[ - \frac{L}{l} \left( C_y - \frac{2L}{\pi T} \right) \left| \frac{u_m}{v_m} \right| + \frac{L}{\pi T} \left( \frac{u_m}{v_m} \right)^2 - \left( 1 + \left| \frac{u_m}{U_m} \right| \right) \cdot \frac{L}{2} \left( \frac{L}{T} \right)^{2.4} \left| \frac{u_m}{U_m} \right| \right] \right\} \end{aligned} \right\}$$

que, simplificadas, fornecem:

$$\left. \begin{aligned} X(u_m; v_m) &= \frac{1}{2} \rho L T u_m U_m \left[ 0.573 \frac{L}{T} - \frac{0.105}{S} \text{Re}_{0.2} \frac{L}{TL} - 0.573 \frac{L}{T} \left( \frac{u_m}{U_m} \right)^2 - 3 \frac{U_m}{u_m v_m^2} \right]; \\ Y(u_m; v_m) &= \frac{1}{2} \rho L T \left\{ \frac{u_m}{U_m} \left[ \left( C_y - \frac{2L}{\pi T} \right) \left| v_m \right| + \frac{L}{\pi T} \left( 1 + 0.4 \frac{C_B}{T} \right) \left| u_m \right| \right] + \frac{\pi T v_m^3}{2L U_m} \right\}; \\ N(u_m; v_m) &= \frac{1}{2} \rho L^2 T \left\{ \frac{u_m}{U_m} \left[ - \frac{L}{l} \left( C_y - \frac{2L}{\pi T} \right) \left| v_m \right| - \left( 1 + \left| \frac{u_m}{U_m} \right| \right) \cdot \frac{L}{2} \left( \frac{L}{T} \right)^{2.4} \left| \frac{u_m}{U_m} \right| \right] + \frac{\pi T u_m v_m}{2L U_m} \right\} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (B.27)$$

Substituindo a expressão B.27 em B.26, temos as equações do movimento em relação ao sistema coordenado fixo à terra dadas por:

$$\left. \begin{aligned}
 & \left( M_{11} + M_{11}^g \right) \ddot{u} - \left( M_{11} + M_{11}^g \right) \dot{v} \dot{\psi} + \left( M_{22} + M_{22}^g \right) \ddot{v} - M_{26} \ddot{x} - M_{26} \dot{y} \dot{\psi} + \left( M_{22} - M_{11} \right) \dot{u} \dot{\psi} \sin \psi - \\
 & \left[ \frac{1}{2} \rho L T u^m \left( 0.573 \frac{L}{T} - \frac{0.105}{S} \operatorname{Re}^{0.2} \frac{TL}{S} \right) - 0.573 \frac{L}{T} \frac{u^m}{U} - 3 \frac{u^m}{U} \frac{v^m}{U} \right] - X^{\text{visc}}(\psi) = 0 \\
 & \left( M_{22} + M_{22}^g \right) \dot{v} + \left( M_{22} + M_{22}^g \right) \dot{x} \dot{\psi} + \left( M_{11} + M_{11}^g \right) \dot{u} \dot{\psi} - \left( M_{11} + M_{11}^g \right) \dot{y} \dot{\psi}^2 - \left( M_{22} - M_{11} \right) \dot{u} \dot{\psi} \cos \psi - \\
 & \left[ \frac{1}{2} \rho L T \left( \frac{u^m}{U} \right) \left[ C_Y - \frac{\pi T}{2L} \left| v^m \right| + \frac{L}{\pi T} \left( 1 + 0.4 \frac{T}{U} \right) \left| u^m \right| \right] + \frac{\pi T}{3} \frac{v^m}{U} \right] - Y^{\text{visc}}(\psi) = 0 \\
 & \left[ I_{zcg} + M_{22}^g \left( \frac{x^g}{2} + y^g \right) + M_{11}^g \dot{y}^2 + M_{22}^g \dot{x}^2 + M_{66} + 2 M_{26}^g \dot{x} \dot{y} \right] \ddot{\psi} - \left( M_{11} + M_{11}^g \right) \dot{y} \dot{u} + \\
 & \left( M_{22} + M_{22}^g \right) \dot{x} \dot{v} + \left( M_{22} + M_{22}^g \right) \dot{x} \dot{p} + M_{26}^g \dot{x} \dot{\psi} + \left( M_{11} + M_{11}^g \right) \dot{y} \dot{p} \right] \dot{\psi} - \left( M_{22} + M_{11} \right) \dot{y} \dot{\psi}^2 - N^{\text{visc}}(\psi) = 0 \\
 & \left[ \frac{1}{2} \rho L T \left( \frac{u^m}{U} \right) \left[ C_Y - \frac{\pi T}{2L} \left| v^m \right| + \frac{L}{\pi T} \left( 1 + \frac{u^m}{U} \right) \right] + \frac{\pi T}{2} \frac{L}{2} \left( 1 - 2.4 \frac{T}{U} \right) \left| u^m \right| \right] + \frac{L}{\pi T} \frac{u^m}{U} \dot{v} \dot{\psi} = 0
 \end{aligned} \right. \quad \dots \dots \dots (B.28)$$

onde as velocidades relativas ao meio,  $(u^m, v^m, U^m)$ , são dadas pela expressões B.13b e B.13d.

Com o procedimento adotado, recupera-se, portanto, a parcela inercial de origem viscosa dependente das velocidades lineares,  $u$  e  $v$ . A única parcela não recuperada se refere à força inercial viscosa proporcional à velocidade angular,  $\dot{\psi}$ .

Pode-se, também, escrever a equação do movimento em relação ao meio fluido, ou seja, mudando o sistema coordenado, antes fixo à terra, para o fluido. Para isso, a expressão B.10b, que descreve o movimento do navio sujeito à ação de forças externas em relação ao sistema coordenado fixo à terra, deve ser rescrita com as velocidades e acelerações relativas ao fluido,  $(u^m, v^m, \dot{u}^m, \dot{v}^m)$ . Para isso, retoma-se a expressão B.13b e sua derivada temporal:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_m = u + U \cos \Psi; \\ v_m = v - U \sin \Psi; \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_m = \dot{u} - U \dot{\Psi} \sin \Psi; \\ v_m = \dot{v} - U \dot{\Psi} \cos \Psi. \end{array} \right.$$

Das relações acima, obtém-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = u_m - U \cos \Psi; \\ v = v_m + U \sin \Psi; \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{u} = \dot{u}_m + U \dot{\Psi} \sin \Psi; \\ \dot{v} = \dot{v}_m + U \dot{\Psi} \cos \Psi, \end{array} \right.$$

que, substituídas em B.10b, fornecem:

$$\left\{ \begin{array}{l} X = M(\dot{u}_m + U \dot{\Psi} \sin \Psi - y^g \dot{\Psi} - \dot{v}_m + U \dot{\Psi} \cos \Psi) - x^g \dot{\Psi}^2; \\ Y = M(\dot{v}_m + U \dot{\Psi} \cos \Psi + x^g \dot{\Psi} + \dot{u}_m - U \dot{\Psi} \sin \Psi) - y^g \dot{\Psi}^2; \\ N = [I_{z, cg} + M(x^g_2 + y^g_2)] \dot{\Psi} + M(x^g_2 \dot{\Psi} + y^g_2 \dot{\Psi}) \dot{\Psi} + U \dot{\Psi} \cos \Psi + (u_m - U \cos \Psi) \dot{\Psi} - \\ - y^g \dot{\Psi}^2 \end{array} \right.$$

que, simplificada, se torna:

$$\left\{ \begin{array}{l} X = M(\dot{u}_m - y^g \dot{\Psi} - x^g \dot{\Psi}^2); \\ Y = M(\dot{v}_m + x^g \dot{\Psi} + \dot{u}_m - y^g \dot{\Psi}^2); \\ N = [I_{z, cg} + M(x^g_2 + y^g_2)] \dot{\Psi} + M x^g_2 \dot{\Psi} \dot{\Psi} + U \dot{\Psi} + u_m \dot{\Psi} - y^g \dot{\Psi}^2 - v_m \dot{\Psi} \end{array} \right.$$

Ou seja, é exatamente a mesma expressão B.10b, só que utilizando as velocidades relativas ao meio fluido. É interessante observar que a expressão não se modifica pois a corrente possui velocidade,  $U$ , constante em relação ao sistema coordenado fixo à terra. Desta forma, o sistema coordenado fixo ao meio fluido também tem velocidade,  $U$ , constante e, por consequência se trata de um sistema coordenado inercial.

Substituindo a expressão B.25 na expressão acima, temos:

$$\left\{ \begin{aligned} & -[M_{11} \dot{u}^m - M_{11} y^p \dot{\psi}^m - M_{22} v^m \dot{\psi}^m + \psi^2 (M_{22} x^p + M_{26})] + X(u^m; v^m) + X^{visc}(\psi) = \\ & = M(\dot{u}^m - y^g \dot{\psi}^m - x^g \dot{\psi}^2); \\ & -[M_{22} \dot{v}^m + \psi^2 (M_{22} x^p + M_{26}) + M_{11} u^m \dot{\psi}^m - \psi^2 M_{11} y^p] + Y(u^m; v^m) + Y^{visc}(\psi) = \\ & = M(\dot{v}^m + x^g \dot{\psi}^m + y^g \dot{\psi}^2); \\ & -[u^m \dot{\psi}^m (M_{22} x^p + M_{26}) + M_{11} y^p v^m \dot{\psi}^m + \psi^2 (M_{11} y^p + M_{66} + 2M_{26} x^p) - \\ & - \dot{u}^m M_{11} y^p + v^m (M_{22} x^p + M_{26})] + N(u^m; v^m) + N^{visc}(\psi) = \\ & = [I_{zcg} + M(x^g + y^g)] \dot{\psi}^m + M[x^g \dot{v}^m + u^m \dot{\psi}^m - y^g \dot{u}^m - v^m \dot{\psi}^2]; \end{aligned} \right.$$

que, reagrupada, se torna:

$$\left\{ \begin{aligned} & (M + M_{11}) \dot{u}^m - (M y^g + M_{11} y^p \dot{\psi}^m - (M + M_{22}) v^m \dot{\psi}^m + M_{22} x^p + M_{26} - M x^g) \dot{\psi}^2 - \\ & - X(u^m; v^m) - X^{visc}(\psi) = 0; \\ & (M + M_{22}) \dot{v}^m + (M x^g + M_{22} x^p + M_{26}) \dot{\psi}^m + (M + M_{11}) u^m \dot{\psi}^m - (M y^g + M_{11} y^p) \dot{\psi}^2 - \\ & - Y(u^m; v^m) - Y^{visc}(\psi) = 0; \\ & [I_{zcg} + M(x^g + y^g) + M_{11} y^p + M_{22} x^p + M_{66} + 2M_{26} x^p] \dot{\psi}^m + \\ & + (M x^g + M_{22} x^p + M_{26}) \dot{v}^m + u^m \dot{\psi}^m + (M y^g + M_{11} y^p) \dot{v}^m - \dot{u}^m - N(u^m; v^m) - N^{visc}(\psi) = 0. \end{aligned} \right. \dots (B.29)$$

onde as forças e o momento oriundos do capítulo,  $X(u^m; v^m)$ ,  $Y(u^m; v^m)$ ,  $N(u^m; v^m)$ , são obtidos da expressão B.27.

As forças hidrodinâmicas podem, alternativamente, ser escritas sob a ótica da teoria clássica de manobras, com base em experimentos. Sendo assim, não se perde, pelo menos em tese e até uma certa ordem, nenhuma parcela da força. Nesse caso, as forças e o momento hidrodinâmicos podem ser descritos, para um dado ângulo de incidência,  $\psi_0$ , através de expansões tipo Taylor, em torno de<sup>17</sup>:

<sup>17</sup> Em manobras oceânicas se trabalha com baixos ângulos de incidência ( $\psi_0 \ll 1$ ) e, a expansão se dá em torno de  $u = U$ ;  $v = 0$ .

$$\left\{ \begin{aligned} u_0 &= U \cos \psi_0; \\ v_0 &= -U \sin \psi_0; \\ u_0 = v_0 = \dot{\psi}_0 = \ddot{\psi}_0 = 0. \end{aligned} \right.$$

Esse procedimento não é simples, dado que se trata de funções de múltiplas variáveis e torna-se necessário selecionar, entre todos os coeficientes do polinômio obtido com a expansão, aqueles mais relevantes e/ou possíveis de serem obtidos a partir de ensaios experimentais. Além disso, será tão melhor quanto menores forem as variações pequenas em torno do ponto escolhido. O procedimento anterior, por outro lado, é geral e só depende de resultados de ensaios com modelo cativo.

Na teoria de manobra pode-se, por exemplo, fazer:

$$\left\{ \begin{aligned} X(u; v; \psi; \dot{\psi}) + X^{pod}(u; v; \psi; \dot{\psi}) &= X(u; v; \psi; \dot{\psi}); \\ Y(u; v; \psi; \dot{\psi}) + Y^{pod}(u; v; \psi; \dot{\psi}) &= Y(u; v; \psi; \dot{\psi}); \\ N(u; v; \psi; \dot{\psi}) + N^{pod}(u; v; \psi; \dot{\psi}) &= N(u; v; \psi; \dot{\psi}). \end{aligned} \right.$$

decompondo as forças hidrodinâmicas numa parcela que é função das acelerações e outra, das velocidades e do ângulo de incidência onde, apenas:

$$X(u; v; \psi; \dot{\psi}); Y(u; v; \psi; \dot{\psi}) \text{ e } N(u; v; \psi; \dot{\psi})$$

são expandidos.

Nesse caso, temos, das expressões B.10b e B.25, essa última com

$$(u = 0; v = 0; \psi = 0)$$

$$\left\{ \begin{aligned} X^{pod}(u; v; \psi; \dot{\psi}) + X(u; v; \psi; \dot{\psi}) &= M(u - y^g \dot{v} - x^g \dot{v} - x^g \dot{\psi}_2); \\ Y^{pod}(u; v; \psi; \dot{\psi}) + Y(u; v; \psi; \dot{\psi}) &= M(u + x^g \dot{v} + y^g \dot{v} + x^g \dot{\psi}_2); \\ N^{pod}(u; v; \psi; \dot{\psi}) + N(u; v; \psi; \dot{\psi}) &= [I^{z.c.g.} + M(x^g_2 + y^g_2)] \ddot{\psi} + M[x^g \ddot{v} + y^g \ddot{v} + \ddot{\psi} - y^g \dot{v} - x^g \dot{v}]. \end{aligned} \right.$$

<sup>18</sup> Notar que,  $F^{pod}(u; v; \psi) = F^{pod}(u = 0; v = 0; \psi = 0; \dot{\psi}_0 = 0; \ddot{\psi}_0 = 0; \dot{\psi}_0 = 0; \psi_0 = 0)$ .

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} -M_{11}\ddot{u} + M_{11}y_p\ddot{\psi} + X(u;v;\psi;\psi) &= M(\ddot{u} - y_g\ddot{\psi} - \dot{\psi}v - x_g\dot{\psi}^2); \\ -M_{22}\dot{v} - \ddot{\psi}(M_{22}x_p + M_{26}) + Y(u;v;\psi;\psi) &= M(\dot{v} + x_g\dot{\psi} + \dot{\psi}u - y_g\dot{\psi}^2); \\ -\ddot{\psi}(M_{11}y_p^2 + M_{22}x_p^2 + M_{66} + 2M_{26}x_p) + \ddot{u}M_{11}y_p - \dot{v}(M_{22}x_p + M_{26}) + N(u;v;\psi;\psi) &= [I_{z,ceg} + M(x_g^2 + y_g^2)]\ddot{\psi} + M[x_g(\dot{v} + u\dot{\psi}) - y_g(\ddot{u} - v\dot{\psi})]. \end{aligned} \right.$$

Reagrupando a expressão acima, temos:

$$\left\{ \begin{aligned} (M + M_{11})\ddot{u} - (My_g + M_{11}y_p)\ddot{\psi} - M\dot{\psi}v - Mx_g\dot{\psi}^2 - X(u;v;\psi;\psi) &= 0; \\ (M + M_{22})\dot{v} + (M_{22}x_p + M_{26} + Mx_g)\dot{\psi} + M\dot{\psi}u - My_g\dot{\psi}^2 - Y(u;v;\psi;\psi) &= 0; \\ [I_{z,ceg} + M(x_g^2 + y_g^2) + M_{11}y_p^2 + M_{22}x_p^2 + M_{66} + 2M_{26}x_p]\ddot{\psi} - (M_{11}y_p + My_g)\ddot{u} + \\ (M_{22}x_p + Mx_g + M_{26})\dot{v} + (M_{22}x_p + Mx_g + M_{26})\dot{\psi} + M\dot{\psi}u - My_g\dot{\psi}^2 - N(u;v;\psi;\psi) &= 0. \end{aligned} \right. \quad (B.30)$$



ANEXO C

ANÁLISE DO EQUILÍBRIO DO MODELO EM ENSAIO DE ESTABILIDADE DIRECIONAL

A equação que rege os movimentos angulares do modelo no ensaio de estabilidade direcional é:

$$\Psi + N_{\Psi} \Psi + N(U; \Psi) = 0, \tag{C.1a}$$

onde:

$$N_{\Psi} = \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial N} \right]_{(\Psi=0)} = \frac{I_{z_1} + M_{22} x_2^d + M_{66} + 2M_{26} x_2^d}{I}$$

e,

$$N(U; \Psi) = \left[ \frac{Y(U; \Psi) \cdot a \cdot L - N_{\Theta}(U; \Psi)}{I_{z_1} + M_{22} x_2^d + M_{66} + 2M_{26} x_2^d} \right]$$

A expressão C.1a pode ser escrita na forma de um sistema de E.D.O. de 1ª ordem, para uma dada velocidade de corrente, U, constante, fazendo:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\Psi} &= r = f(\Psi, r); \\ \dot{r} &= -N_{\Psi} r - N(U; \Psi) = g(\Psi, r). \end{aligned} \right. \tag{C.1b}$$

Os pontos de equilíbrio (ou pontos críticos) do sistema são determinados, portanto, de:

$$\left\{ \begin{aligned} f(\Psi, r) = 0 &\Leftrightarrow r = 0; \\ g(\Psi, r) = 0 &\Leftrightarrow N(U; \Psi) = 0. \end{aligned} \right. \tag{C.2a}$$

Ou seja:

$$N(U; \Psi) = \left[ \frac{Y(U; \Psi) \cdot a.L - N^{\oplus}(U; \Psi)}{Y(U; \Psi) \cdot a.L + M_{22} x_z^p + M_{66} + 2M_{26} x_p} \right] = 0 \Rightarrow [Y(U; \Psi) \cdot a.L - N^{\oplus}(U; \Psi)] = 0 \quad \dots \dots \dots (C.2b)$$

Resgatando, do capítulo 3, as expressões que fornecem os termos de C.2b,

temos:

$$\left. \begin{aligned} Y(u_m; v_m) &= \frac{1}{2} \rho L^2 T \left[ \frac{|U_m|}{U_m} \right] \left[ C_y - \frac{2L}{\pi T} |v_m| v_m + \frac{L}{\pi T} (1 + 0.4 \frac{C_B}{B}) |u_m| v_m \right] + \frac{2L}{\pi T} \frac{U_m^3}{v_m^3} \\ N^{\oplus}(u_m; v_m) &= N(u_m; v_m) = \frac{1}{2} \rho L^2 T \left[ \frac{|U_m|}{U_m} \right] \left[ -\frac{L}{l} C_y - \frac{\pi T}{2L} |v_m| v_m - \right. \\ &\quad \left. - \left( 1 + \frac{|u_m|}{U_m} \right) \frac{2}{2} \cdot \frac{L}{\pi T} \left( \frac{1}{2} - 2.4 \frac{L}{T} \right) |u_m| v_m \right] + \frac{L}{\pi T} u_m v_m^3 \end{aligned} \right\} \text{para a notacao usual simplificando}$$

Lembrando que:

$$\left. \begin{aligned} U_m &= \sqrt{u_m^2 + v_m^2} = \sqrt{(u + U \cos \Psi_z)^2 + (U \sin \Psi - v)^2} \\ \cos \Psi_m &= \frac{U_m}{u} = \frac{\sqrt{u_m^2 + v_m^2}}{u + U \cos \Psi_z} \\ \sin \Psi_m &= \frac{U_m}{v} = \frac{\sqrt{u_m^2 + v_m^2}}{(U \sin \Psi - v)} \end{aligned} \right\}$$

e que, para o ensaio de estabilidade direcional:

$$u = \dot{u} = v = \dot{v} = 0,$$

resta, apenas:

$$\left. \begin{aligned} U_m &= U; \\ \cos \Psi_m &= \frac{U_m}{U} = \cos \Psi; \\ \sin \Psi_m &= \frac{U_m}{V_m} = \sin \Psi, \end{aligned} \right\}$$

e, portanto, as expressões dos esforços ficam:

$$\left. \begin{aligned} Y(n_m; v_m) &= Y(U; \Psi) = \frac{2}{l} \rho U^2 L^2 T C_{z_c}(\Psi); \\ N(n_m; v_m) &= N(U; \Psi) = \frac{2}{l} \rho U^2 L^2 T C_{\theta}(\Psi), \end{aligned} \right\}$$

onde:

$$(C.3) \quad \left\{ \begin{aligned} C_{z_c}(\Psi) &= \left( C_Y - \frac{2L}{\pi T} \left| \sin(\Psi) \right| \sin(\Psi) + \frac{2L}{\pi T} \sin^3(\Psi) + \frac{L}{\pi T} \left( 1 + 0.4 \frac{C_B}{C_B} \right) \left| \sin(\Psi) \right| \cos(\Psi) \right); \\ C_{\theta}(\Psi) &= -\frac{L}{\pi T} \left( C_Y - \frac{2L}{\pi T} \left| \sin(\Psi) \right| \sin(\Psi) + \frac{L}{\pi T} \sin(\Psi) \cos(\Psi) - \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{2}{1 + |\cos(\Psi)|} \right)^2 \cdot \frac{L}{\pi T} \left( \frac{1}{2} - 2.4 \frac{L}{T} \right) \left| \sin(\Psi) \right| \cos(\Psi) \right), \end{aligned} \right.$$

Voltando à expressão C.2b, podemos reservar a condição do equilíbrio:

$$\frac{1}{l} \rho U^2 L^2 T \cdot [C_{z_c}(\Psi) \cdot a - C_{\theta}(\Psi)] = 0,$$

o que implica, obviamente, em:

$$(C.4a) \quad [C_{z_c}(\Psi) \cdot a - C_{\theta}(\Psi)] = 0$$

Expandindo os termos trigonométricos em  $\Psi$  da expressão C.3 para pequenos ângulos de ataque, em somatório tipo Taylor até ordem 3, temos:

$$\bullet \quad \sin \Psi \approx \Psi, \quad \cos \Psi \approx 1 - \frac{\Psi^2}{2}, \quad \left| \sin \Psi \right| \cos \Psi \approx \Psi \left( 1 - \frac{\Psi^2}{2} \right) \approx \Psi - \frac{\Psi^3}{6};$$

- $\text{sen } \Psi_3 \approx \Psi_3 \approx \Psi_3 \left( \Psi_3 - \frac{6}{2} \right) \approx \Psi_3^3;$

- $\text{sen } \Psi_3 \cos \Psi_3 \approx \text{sen } \Psi_3 \cos \Psi_3 \approx \Psi_3 \left( 1 - \frac{6}{2} \right) \approx \Psi_3 - \frac{3}{2} \Psi_3^3;$
- $\left( \frac{1 + \cos \Psi_3}{2} \right)^2 \approx \left( \frac{1 + |1 - \Psi_3^2/2|}{2} \right)^2 \approx 1 - \frac{3}{2} \Psi_3^2;$
- $\left( \frac{1 + \cos \Psi_3}{2} \right)^2 \cdot \text{sen } \Psi_3 \cos \Psi_3 \approx \left( 1 - \frac{3}{2} \Psi_3^2 \right) \cdot \left( \Psi_3 - \frac{3}{2} \Psi_3^3 \right) \approx \Psi_3 - \frac{3}{2} \Psi_3^3 - \frac{3}{2} \Psi_3^3.$

Substituindo-os em C.4a, temos:

$$\Psi_3 \left\{ \pi T \left[ a - \frac{3}{2a} \left( 1 + 0,4 C_B \frac{T}{L} \right) - \left( \frac{4}{1} - 1,2 \frac{L}{T} \right) + \frac{3}{2} \left( \frac{2}{1} + 2,4 \frac{L}{T} \right) \right] \right\} + \Psi_3 \left| \Psi_3 \right| \left[ \left( a + \frac{L}{T} \right) \cdot \left( C_y - \frac{2L}{\pi T} \right) + \Psi_3 \left[ a \frac{L}{\pi T} \left( 1 + 0,4 C_B \frac{T}{L} \right) - \pi T \left( \frac{1}{2} + 2,4 \frac{L}{T} \right) \right] \right] = 0. \quad \text{(C.4b)}$$

A solução trivial da expressão C.4b é:

$$\Psi = 0,$$

que, portanto, define o ponto de equilíbrio trivial do sistema C.1b, como:

$$(\Psi, r) = (0, 0).$$

O estudo do sistema em torno do ponto de equilíbrio trivial pode ser feito, linearizando-o nessa vizinhança. Sendo assim, o sistema C.1b linearizado fica:

$$\begin{bmatrix} \dot{\Psi} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\Psi, r)}{\partial \Psi} & \frac{\partial g(\Psi, r)}{\partial \Psi} \\ \frac{\partial f(\Psi, r)}{\partial r} & \frac{\partial g(\Psi, r)}{\partial r} \end{bmatrix}_{(0,0)} \begin{bmatrix} \Psi \\ r \end{bmatrix} \quad J(0,0) \text{ do sistema}$$

ou seja:

$$\begin{bmatrix} \dot{\Psi} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} -e^{N_{\Psi_0}} \left| \frac{\partial \Psi}{\partial N_{\Psi_0}} \right|_{\Psi=0} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{M}} \cdot \begin{bmatrix} r \\ \Psi \end{bmatrix},$$

onde,  $\mathbf{M}$  é a matriz da aplicação linear:

$$T(\Psi, r) = \begin{bmatrix} \dot{\Psi} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} r \\ \Psi \end{bmatrix}.$$

A solução geral do sistema linearizado é, portanto:

$$\begin{bmatrix} \Psi(t) \\ r(t) \end{bmatrix} = C_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \cdot \mathbf{v}_1 + C_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \cdot \mathbf{v}_2,$$

onde as constantes  $C_1$  e  $C_2$  são determinadas pelas condições iniciais e:

$\lambda_{1,2}$  e  $\mathbf{v}_{1,2}$  = autovalores da matriz  $\mathbf{M}$  e seus autovetores associados, respectivamente.

Seja  $\lambda$  autovalor de  $\mathbf{M}$ , temos:

$$\det(\mathbf{M} - \lambda) = 0,$$

que fornece a equação característica do sistema linearizado:

$$\begin{vmatrix} (-\lambda) & -e^{N_{\Psi_0}} \left| \frac{\partial \Psi}{\partial N_{\Psi_0}} \right|_{\Psi=0} \\ 1 & (-\lambda) \end{vmatrix} = 0,$$

$$\therefore \lambda^2 + N_{\Psi_0} \cdot \lambda + e^{N_{\Psi_0}} \left| \frac{\partial \Psi}{\partial N_{\Psi_0}} \right|_{\Psi=0} = 0.$$

Os autovalores são, portanto:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{N_{\Psi_0}}{2} \pm \frac{\sqrt{\left(N_{\Psi_0}\right)^2 - 4 \cdot \left(e^{N_{\Psi_0}} \left| \frac{\partial \Psi}{\partial N_{\Psi_0}} \right|_{\Psi=0}\right)}}{2}.$$

Da expressão C.1a, temos:

(C.5)

$$N_{\psi_0} = \left[ \frac{\partial N}{\partial \psi} \right]_{(\psi=0)} = \frac{1}{1} \cdot (I_{z1} + M_{22} x_2^d + M_{66} + 2M_{26} x_2^d) > 0,$$

uma vez que, sempre:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} > 0;$$

Sendo assim, de acordo com a expressão C.5, a estabilidade do sistema

depende exclusivamente do sinal do termo:

$$\left( \frac{\partial N}{\partial \psi} \right)_{(\psi=0)}$$

Temos:

$$\bullet \left( \frac{\partial N}{\partial \psi} \right)_{(\psi=0)} < 0:$$

$$a) 4 \cdot \left( \frac{\partial N}{\partial \psi} \right)_{(\psi=0)} > (N_{\psi_0})^2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{N_{\psi_0}}{2} \pm i \cdot \frac{\sqrt{4 \cdot \left( \frac{\partial N}{\partial \psi} \right)_{(\psi=0)} - (N_{\psi_0})^2}}{2}$$

e, nesse caso, o ponto de equilíbrio é um **foco estável**;

$$b) 4 \cdot \left( \frac{\partial N}{\partial \psi} \right)_{(\psi=0)} \leq (N_{\psi_0})^2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{N_{\psi_0}}{2} \pm \frac{\sqrt{4 \cdot \left( \frac{\partial N}{\partial \psi} \right)_{(\psi=0)} - (N_{\psi_0})^2}}{2}$$

e, nesse caso, o ponto de equilíbrio é um **nó estável**.

$$\bullet \left( \frac{\partial N}{\partial \psi} \right)_{(\psi=0)} > 0:$$

$$\sqrt{4 \cdot \left( \frac{\partial N}{\partial \psi} \right)_{(\psi=0)} - (N_{\psi_0})^2} > N_{\psi_0} \Rightarrow$$

$\frac{\partial \psi}{\partial t} > 0$  pois o fluido sempre se oporá a uma variação positiva da velocidade angular ( $\frac{\partial \psi}{\partial t} < 0$ ), gerando ( $\frac{\partial N}{\partial \psi} > 0$ ).

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \lambda_2 &= -\frac{N_{\psi_0}}{2} + \frac{\sqrt{(N_{\psi_0})^2 - 4 \cdot \left( \frac{\partial N}{\partial \psi} \Big|_{\psi=0} \right)}}{2} < 0 \\ \lambda_1 &= -\frac{N_{\psi_0}}{2} - \frac{\sqrt{(N_{\psi_0})^2 - 4 \cdot \left( \frac{\partial N}{\partial \psi} \Big|_{\psi=0} \right)}}{2} < 0 \end{aligned} \right.$$

e, nesse caso, o ponto de equilíbrio é **instável** (ponto de sela).

Portanto, o sistema perde a estabilidade estrutural (bifurca), quando:

$$\left( \frac{\partial N}{\partial \psi} \Big|_{\psi=0} \right) = 0. \quad (\text{bifurcação})$$

Derivando a expressão C.4b, temos:

$$\frac{\partial N}{\partial \psi} = 3\psi^2 = \frac{\pi T}{a} \left[ \frac{L}{2a} - \frac{3}{2a} \cdot \left( 1 + 0,4 \frac{C_B}{C_B} \frac{T}{L} \right) - \left( \frac{4}{1} - 1,2 \frac{T}{L} \right) + \frac{3}{2} \left( \frac{2}{1} + 2,4 \frac{T}{L} \right) \right] + 2|\psi| \left[ \left( a + \frac{L}{l} \right) \cdot \left( C_Y - \frac{\pi T}{2L} \right) + \left[ a \frac{L}{\pi T} \left( 1 + 0,4 \frac{C_B}{C_B} \frac{T}{L} \right) - \frac{\pi T}{L} \left( \frac{1}{2} + 2,4 \frac{T}{L} \right) \right] \right]$$

e, a condição de bifurcação fica:

$$\frac{\pi T}{L} \left( 1 + 0,4 \frac{C_B}{C_B} \frac{T}{L} \right) - \frac{\pi T}{L} \left( \frac{1}{2} + 2,4 \frac{T}{L} \right) = 0,$$

$$^z \text{ Sendo: } \frac{\partial N}{\partial \psi} \Big|_{\psi_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{N(\psi_0 + h) - N(\psi_0)}{h}, \text{ mostra-se facilmente que:}$$

$$\bullet \text{ Para } h > 0 \quad \left\{ \begin{aligned} \psi_0 \geq 0, \quad \frac{\partial N}{\partial \psi} \Big|_{\psi_0} &= 3A\psi_0^2 + 2B|\psi_0| - C; \\ \psi_0 < 0, \quad \frac{\partial N}{\partial \psi} \Big|_{\psi_0} &= 3A\psi_0^2 - 2B\psi_0 - C = 3A\psi_0^2 + 2B|\psi_0| - C. \end{aligned} \right.$$

$$\text{Portanto, } \frac{\partial N}{\partial \psi} = 3A\psi^2 + 2B|\psi| - C, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

onde:

$a_{CR}$  = valor do parâmetro  $a$  onde o sistema perde a estabilidade,

$$a_{CR} = \frac{\left(1 + 0,4 \frac{T}{C_B B}\right)}{\left(\frac{1}{2} + 2,4 \frac{T}{L}\right)} \quad (C.6)$$

Destá forma, se:

$$a > a_{CR},$$

a posição trivial de equilíbrio,  $\Psi = 0$ , será estável, pois nesse caso teremos,

$$\left(\frac{\partial N}{\partial \Psi}\right)_{\Psi=0} > 0. \quad (\text{estabilidade})$$

Por outro lado, para simplificar as condições de equilíbrio e estabilidade, podemos definir:

$$(C.7) \quad \begin{aligned} A(a) &= \left[ \frac{3}{2}(a_{CR} - a) + \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{4} + 1,2 \frac{T}{L}\right) \right] \cdot \left[ \frac{1 + 0,4 \frac{T}{C_B B}}{\left(a + \frac{T}{L}\right)} \right]; \\ B(a) &= \left[ \left(\frac{\pi T}{LC_Y} - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1 + 0,4 \frac{T}{C_B B}}{\left(a + \frac{T}{L}\right)}\right) \right]; \\ C(a) &= (a_{CR} - a). \end{aligned}$$

Destá forma, utilizando as expressões C.7, a condição de equilíbrio C.4b fica:



$$\frac{\pi T}{L} \cdot \left(1 + 0,4 \frac{T}{C_B} \right) \cdot [A(a)\Psi^3 + B(a)\Psi|\Psi| - C(a)\Psi] = 0,$$

ou, simplesmente:

$$[A(a)\Psi^3 + B(a)\Psi|\Psi| - C(a)\Psi] = 0, \quad \text{(equilíbrio)} \quad \text{(C.8)}$$

e a condição de estabilidade fica:

$$[3A(a)\Psi^2 + 2B(a)\Psi|\Psi| - C(a)] > 0 \quad \text{(estabilidade)} \quad \text{(C.9)}$$

Por outro lado, quando o sistema bifurca, o que ocorre quando  $a < a_{CR}$ , ou seja,  $C(a) > 0$ , ele assumirá uma nova posição de equilíbrio,  $\Psi = \Psi_e \neq 0$ , e a expressão C.8 se reduz a:

$$[A(a)\Psi_e^2 + B(a)\Psi_e| - C(a)] = 0, \quad \text{(C.10)}$$

com a condição de estabilidade se tornando:

$$[-B(a)\Psi_e| + 2C(a)] > 0, \quad \text{(C.11a)}$$

ou, ainda:

$$[2A(a)\Psi_e^2 + B(a)\Psi_e|] > 0. \quad \text{(C.11b)}$$

Analisando a expressão C.11a, observando que  $B(a) > 0$ ,<sup>3</sup> temos que a única posição estável de equilíbrio quando  $a > a_{CR}$ , ou seja,  $C(a) < 0$  é a posição trivial,  $\Psi = 0$ .

<sup>3</sup> Da expressão C.7, depende-se que, como usualmente  $a > 0$  (o turret é posicionado a vanze da seção mestra) e  $\frac{LC_Y}{\pi T} > \frac{1}{2}$ , temos que  $B(a) > 0$ .

Voltando à expressão C.10, observa-se que suas raízes, que nada mais são que os ângulos de equilíbrio pós-bifurcação,  $\Psi_e \neq 0$ , assumidos pelo modelo de navio, dependem do sinal de  $A(a)$ .

A figura C.1 traz as soluções da expressão C.10 em forma gráfica, o que torna mais fácil sua análise.

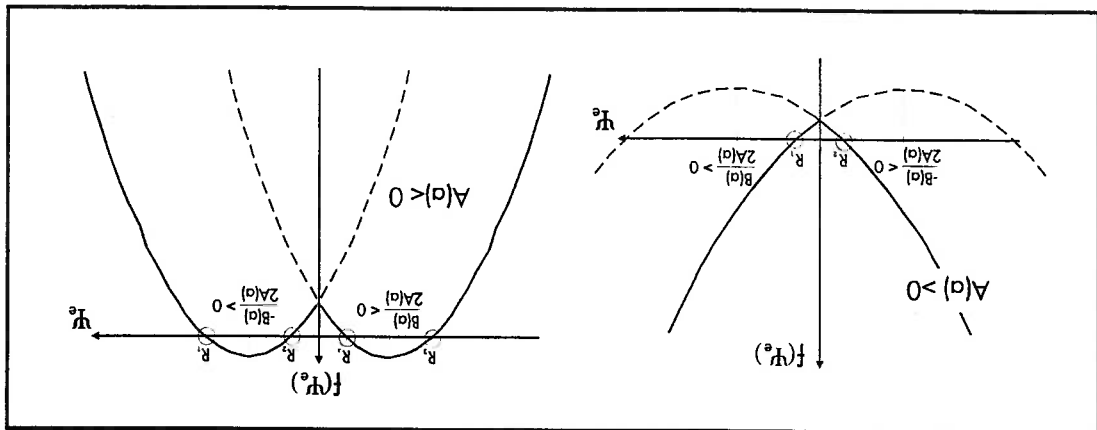


Figura C.1 - Representação Gráfica da expressão C.10

Os trechos de parábola representados por linhas cheias correspondem ao gráfico da função:

$$f(\Psi_e) = A(a)\Psi_e^2 + B(a)|\Psi_e| - C(a),$$

para os casos em que  $A(a) > 0$  e  $A(a) < 0$ ,

As soluções de C.10 são as raízes de  $f(\Psi_e)$ :

- $A(a) > 0$  :

Raízes ( $R_1$  e  $R_2$ ):

† É interessante notar que os gráficos são parábolas "espelhadas" no eixo  $\Psi_e$ , uma vez que, como  $\Psi_e$  é tomado em módulo,  $|\Psi_e|$ , tudo se passa como se só estivéssemos entrando com valores positivos de ângulo na função. Sendo assim, para  $\Psi_e > 0$ , a função se comporta da mesma forma como para  $\Psi_e < 0$ .

$$R_1 = -\frac{2A(a)}{B(a)} + \sqrt{\left(\frac{2A(a)}{B(a)}\right)^2 + \frac{A(a)}{C(a)}}$$

$$R_2 = \frac{2A(a)}{B(a)} - \sqrt{\left(\frac{2A(a)}{B(a)}\right)^2 + \frac{A(a)}{C(a)}}$$

ou seja:

$$R_{1,2} = \Psi_e = \pm \left\{ \frac{2A(a)}{B(a)} \mp \sqrt{\left(\frac{2A(a)}{B(a)}\right)^2 + \frac{A(a)}{C(a)}} \right\}; A(a) > 0, \quad (C.12a)$$

ambas estáveis, de acordo com a condição C.11b.

- $A(a) < 0$  :

Raízes ( $R_1, R_2, R_3, R_4$ ):

$$R_1 = -\frac{2A(a)}{B(a)} - \frac{2A(a)}{1} \sqrt{B(a)^2 + 4A(a)C(a)} = \frac{2|A(a)|}{B(a)} + \sqrt{\left(\frac{2|A(a)|}{B(a)}\right)^2 - \frac{|A(a)|}{C(a)}}$$

$$R_2 = -\frac{2A(a)}{B(a)} + \frac{2A(a)}{1} \sqrt{B(a)^2 + 4A(a)C(a)} = \frac{2|A(a)|}{B(a)} - \sqrt{\left(\frac{2|A(a)|}{B(a)}\right)^2 - \frac{|A(a)|}{C(a)}}$$

$$R_3 = \frac{2A(a)}{B(a)} + \frac{2A(a)}{1} \sqrt{B(a)^2 + 4A(a)C(a)} = -\frac{2|A(a)|}{B(a)} - \sqrt{\left(\frac{2|A(a)|}{B(a)}\right)^2 - \frac{|A(a)|}{C(a)}}$$

$$R_4 = \frac{2A(a)}{B(a)} - \frac{2A(a)}{1} \sqrt{B(a)^2 + 4A(a)C(a)} = -\frac{2|A(a)|}{B(a)} + \sqrt{\left(\frac{2|A(a)|}{B(a)}\right)^2 - \frac{|A(a)|}{C(a)}}$$

ou seja:

$$R_{1,2,3,4} = \Psi_e = \pm \left\{ \frac{2|A(a)|}{B(a)} \mp \sqrt{\left(\frac{2|A(a)|}{B(a)}\right)^2 - \frac{|A(a)|}{C(a)}} \right\}$$

Nesse caso, a condição de estabilidade C.11b pode ser rescrita na forma:

$$\Rightarrow \left( |Y^e| - \frac{B(a)}{2|A(a)|} \right) > 0$$

$$\Rightarrow \overbrace{\left( |Y^e| - \frac{B(a)}{2|A(a)|} \right) \cdot |Y^e|} > 0$$

que, aplicado às raízes  $R_{1,2,3,4}$ , fornece:

$R_1$ :  $|Y^e| = \frac{B(a)}{2|A(a)|} + \sqrt{\left( \frac{B(a)}{2|A(a)|} \right)^2 - \frac{C(a)}{A(a)}}$   $> 0$

$R_2$ :  $|Y^e| = \frac{B(a)}{2|A(a)|} + \sqrt{\left( \frac{B(a)}{2|A(a)|} \right)^2 - \frac{C(a)}{A(a)}}$   $> 0$

$R_3$ :  $|Y^e| = \frac{B(a)}{2|A(a)|} - \sqrt{\left( \frac{B(a)}{2|A(a)|} \right)^2 - \frac{C(a)}{A(a)}}$   $> 0$

$R_4$ :  $|Y^e| = \frac{B(a)}{2|A(a)|} - \sqrt{\left( \frac{B(a)}{2|A(a)|} \right)^2 - \frac{C(a)}{A(a)}}$   $> 0$

$e, R_1$  não é estável.

$R_2$ :  $|Y^e| = \frac{B(a)}{2|A(a)|} - \sqrt{\left( \frac{B(a)}{2|A(a)|} \right)^2 - \frac{C(a)}{A(a)}}$   $> 0$

$R_3$ :  $|Y^e| = \frac{B(a)}{2|A(a)|} + \sqrt{\left( \frac{B(a)}{2|A(a)|} \right)^2 - \frac{C(a)}{A(a)}}$   $> 0$

$R_4$ :  $|Y^e| = \frac{B(a)}{2|A(a)|} + \sqrt{\left( \frac{B(a)}{2|A(a)|} \right)^2 - \frac{C(a)}{A(a)}}$   $> 0$

$e, R_2$  é estável.

$R_3$ :  $|Y^e| = \frac{B(a)}{2|A(a)|} + \sqrt{\left( \frac{B(a)}{2|A(a)|} \right)^2 - \frac{C(a)}{A(a)}}$   $> 0$

$R_4$ :  $|Y^e| = \frac{B(a)}{2|A(a)|} - \sqrt{\left( \frac{B(a)}{2|A(a)|} \right)^2 - \frac{C(a)}{A(a)}}$   $> 0$

$e, R_3$  não é estável.

$R_4$ :  $|Y^e| = \frac{B(a)}{2|A(a)|} - \sqrt{\left( \frac{B(a)}{2|A(a)|} \right)^2 - \frac{C(a)}{A(a)}}$   $> 0$

$R_1$ :  $|Y^e| = \frac{B(a)}{2|A(a)|} + \sqrt{\left( \frac{B(a)}{2|A(a)|} \right)^2 - \frac{C(a)}{A(a)}}$   $> 0$

$e, R_4$  é estável.

Restam, portanto, como **soluções estáveis**, nesse caso:

$$R_{2,a} = \Psi_e = \pm \left\{ \frac{B(a)}{2|A(a)|} - \sqrt{\left(\frac{B(a)}{2|A(a)|}\right)^2 - \frac{C(a)}{|A(a)|}} \right\}; A(a) < 0. \quad (C.12b)$$

Analisemos, agora, o que ocorre quando  $0 \leq (a_{CR} - a) \ll 1$ , isto é,  $(0 \leq C(a) \ll 1)$ . Essa faixa se refere ao início do fenômeno de bifurcação e, sua análise nos permite observar como o sistema se comporta logo após a perda de estabilidade estrutural. Nesse caso temos:

- $A(a) > 0$  (expressão C.12a):

$$\Psi_e = \pm \left\{ \frac{B(a)}{2A(a)} + \sqrt{\left(\frac{B(a)}{2A(a)}\right)^2 + \frac{C(a)}{A(a)}} \right\} = \pm \left\{ \frac{B(a)}{2A(a)} + \sqrt{\left(\frac{B(a)}{2A(a)}\right)^2 \left(1 + \frac{4A(a)C(a)}{B(a)^2}\right)} \right\} = \pm \left\{ \frac{B(a)}{2A(a)} + \sqrt{\left(\frac{B(a)}{2A(a)}\right)^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{4A(a)C(a)}{B(a)^2}} \right\} = \pm \left\{ \frac{B(a)}{2A(a)} + \frac{B(a)}{2A(a)} \sqrt{1 + \frac{4A(a)C(a)}{B(a)^2}} \right\} = \pm \left\{ \frac{B(a)}{2A(a)} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4A(a)C(a)}{B(a)^2}}\right)\right\}$$

e, portanto:

$$\Psi_e \approx \pm \frac{B(a)}{a_{CR} - a}; (0 \leq a_{CR} - a \ll 1).$$

- $A(a) > 0$  (expressão C.12b):

$$\Psi_e =_{\pm} \left\{ \frac{B(a)}{B(a)} \sqrt{\frac{2|A(a)|}{B(a)} - \frac{|A(a)|}{C(a)}} \right\} =_{\pm} \left\{ \frac{B(a)}{B(a)} \sqrt{\frac{2|A(a)|}{B(a)} - \frac{2|A(a)|}{B(a)}} \right\} \sqrt{\frac{4|A(a)|C(a)}{B(a)^2}} =_{\pm} \left\{ \frac{B(a)}{B(a)} \sqrt{\frac{2|A(a)|}{B(a)} - \frac{2|A(a)|}{B(a)}} \right\} =_{\pm} \left\{ \frac{B(a)}{C(a)} \sqrt{\frac{2|A(a)|}{B(a)} - \frac{2|A(a)|}{B(a)}} \right\} =_{\pm} \left\{ \frac{B(a)}{C(a)} \sqrt{\frac{2|A(a)|}{B(a)} - \frac{2|A(a)|}{B(a)}} \right\} =_{\pm} \left\{ \frac{B(a)}{C(a)} \sqrt{\frac{2|A(a)|}{B(a)} - \frac{2|A(a)|}{B(a)}} \right\}$$

e, portanto, da mesma forma que no caso anterior:

$$\Psi_e =_{\pm} \frac{B(a)}{(a_{CR} - a)}; \quad (0 \leq a_{CR} - a \ll 1). \quad (C.13)$$

Em resumo, pode-se observar que os novos ângulos de equilíbrio do navio, após a ocorrência de bifurcação são sempre **estáveis**, independentemente do sinal de  $A(a)$ . Além disso, a expressão C.13 nos mostra que esse ângulo estável de equilíbrio pós-bifurcação  **cresce linearmente**  com o parâmetro de posicionamento do turrel,  $a$ , nas vizinhanças do ponto de bifurcação, (onde  $a = a_{CR}$ ).

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Aranha J.A.P. - "Projeto PROSAM I - Relatório I - Amortecimento e Forças de Corrente, Vento e Ondas", Relatório para a Petrobras (convênio USP/Petrobras), São Paulo, Abril 1995;
2. Instituto de Pesquisas Tecnológicas (IPT) - "Ensaio de Estabilidade Direcional e de Modelo Cativo de Navios Cisternas Ancorados", Relatório Técnico 35.252 para a Petrobras, São Paulo, 1997;
3. Wichers, J.E.W. - "A Simulation Model for a Single Point Moored Tanker", PhD thesis, Technical University of Delft, 1988;
4. Maritime Research Institute Netherlands/ Oil Companies' International Marine Forum - "Prediction of Wind and Current Loads on VLCC's - Update", MARIN Report Z011524-2-OE for OCIMF, Wageningen, 1993;
5. Newman, J.N. - "Marine Hydrodynamics", MIT Press, 6<sup>th</sup> edition, 1977 - 1989;
6. Batchelor, G.K. - "An Introduction to Fluid Dynamics", Cambridge University Press, 1<sup>st</sup> edition, 1967;
7. Clarke, D.; Gedling, P.; Hine, G. - "The Application of Manoeuvring Criteria in Hull Design Using Linear Theory", Proceeding of RINA Meeting, pp. 45-68, 1983;
8. Society of Naval Architects and Marine Engineers - "Principles of Naval Architecture", SNAME, 2<sup>nd</sup> edition, 1967 - 1968;
9. Holtrop, J.; Menem, G. - "A Statistical Power Prediction Method", International Shipbuilding Progress, Vol. 25, 1978;
10. Faltnsen, O.M. - "Sea Loads on Ships and Offshore Structures", Cambridge University Press, pp. 187-200, 1993;
11. Hoerner, S.F. - "Fluid Dynamic Drag", Author's Publication, New Jersey, USA, 1965;
12. Inglis, R. et al. - "Technological Cooperation Agreement Shell/Petrobras - Workshop on Floating Production Systems Design and Operation", Documento Interno Petrobras, Rio de Janeiro, 1993;
13. Papoulias, F.A.; Bernitsas, M.M. - "Autonomous Oscillations, Bifurcations and Chaotic Response of Moored Vessels", Journal of Ship Research, vol. 32 (3), pp. 220-228, 1988;

14. Garza-Rios, L.O.; Bernitsas, M.M. - "Analytical Expressions of the Stability and Bifurcation Boundaries for General Mooring Systems", Journal of Ship Research, vol. 40 (4), pp. 337-350, 1996;
15. Bernitsas, M.M.; Garza-Rios, L.O. - "Effect of Mooring Line Arrangement on the Dynamics of Spread Mooring Systems", Journal Offshore Mechanics and Arctic Engineering, 188 (1), pp. 7-20, 1996;
16. Nishimoto, K.; Brinati, H.; Fucatu C. - "Dynamics of Moored Tankers, SPM and Turrets", ISOPE, EUA, Maio 1996;
17. Fernandes, A.C.; Aratanha, M. - "Classical Assessment to the Single Point Mooring and Turret Dynamic Stability Problems", OMAE, Itália, Maio 1996;
18. Pesce, C.P.; Tammuri, E.A. - "Stability and Dynamics of Offshore Single Point Mooring Systems", Revista Brasileira de Ciências Mecânicas, a ser publicado;
19. Abkowitz, M.A. - "Lectures in Ship Hydrodynamics, Steering and Maneuverability", Report Hy-5, Hydro- og Aerodynamisk Laboratorium, Lyngby, Dinamarca, Maio 1964;
20. Takashina, J. - "Ship Maneuvering Motion due to Tubboats and its Mathematical Model", Journal of the Society of Naval Architects of Japan, vol. 160, pp 93-104, 1986;
21. Kijima, K. - "Influence of Model Scale in the Determination of the Hydrodynamic Derivatives", Journal of the Society of Naval Architects of Japan, vol. 801 (3), pp. 25-30 (em japonês), 1996;
22. Papoulias, F.A.; Bernitsas, M.M. - "Autonomous Oscillations, Bifurcations and Chaotic Response of Moored Vessels", Journal of Ship Research, vol. 32(3), pp. 220-228, Setembro, 1988;
23. Obokata, J.; Sasaki, N.; Nagashima, J. - "On the Estimation of Current Force Induced on a Ship Hull by Some Model Tests", Association of Naval Architects of Western Japan, vol. 180, pp. 47-57 (em japonês), 1981;
24. Inoue, S.; Hirano, M.; Kijima, K. - "Hydrodynamic Derivatives on Ship Maneuvering", International Shipbuilding Progress, vol. 28, n. 321, pp. 112-125, 1981;