

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA POLITÉCNICA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA NAVAL E OCEÂNICA

DANIEL LÓPEZ GIRALDO

**Estudo numérico e experimental da fratura dúctil usando corpos de prova em flexão assimétrica em quatro pontos**

São Paulo  
2023

DANIEL LÓPEZ GIRALDO

**Estudo numérico e experimental da fratura dúctil usando corpos de prova em flexão assimétrica em quatro pontos**

**Versão Original**

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de Concentração: Engenharia Naval e Oceânica.

Orientador: Prof. Dr. Diego Felipe Sarzosa Burgos.

São Paulo  
2023

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

### Catálogo-na-publicação

López, Daniel

Estudo numérico e experimental da fratura dúctil usando corpos de prova em flexão assimétrica em quatro pontos / D. López -- São Paulo, 2023. 60 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Naval e Oceânica.

1.Mecânica da fratura 2. Modos combinados de carregamento 3. Flexão Assimétrica em Quatro Pontos 4. Indústria offshore I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Naval e Oceânica II.t.

## **AGRADECIMENTOS**

Ao professor Dr. Diego Felipe Sarzosa Burgos pela orientação e supervisão no desenvolvimento deste trabalho.

À Universidade de São Paulo, à Escola Politécnica, ao Departamento de Engenharia Naval e Oceânica e ao Laboratório de Mecânica Offshore por disponibilizar os recursos necessários para o desenvolvimento deste trabalho.

À CAPES pela bolsa concedida.

Aos colegas do grupo NAMEF e LMO, em especial Javier Plata e Emílio Justiniano, pela troca de conhecimento e pela grande ajuda na realização de tarefas essenciais para este trabalho.

Aos colegas Iago Santos e Marcus Nathan pelas mentorias e ajudas na parte numérica.

Ao Dr. Rafael Savioli por sua grande contribuição no procedimento experimental, fornecendo boas ideias e desenvolvendo um dispositivo especial para ser utilizado nos ensaios FPAB.

Ao Dr. Caio Santos pela grande colaboração no processo e análise dos dados do método DIC.

À minha família pelo amor e apoio que sempre me deram, especialmente minha mãe Mariluz Giraldo, minha maior motivação.

## RESUMO

A determinação experimental da tenacidade à fratura de materiais dúcteis sob o modo de carga I, com base no comportamento da Integral J, foi amplamente formalizada na norma técnica ASTM E 1820-99 (Método de Ensaio para Medição da Resistência à Fratura), e no procedimento ESIS P1-92. No entanto, no que diz respeito aos modos de carregamento combinados, ainda faltam regras geralmente aceitas para a avaliação da tenacidade à fratura, apesar de sua importância em muitas situações da engenharia. Sabe-se que a medição da tenacidade à fratura com base na Integral J é altamente dependente da relação do modo combinado, da geometria do corpo testado e do estado geral de deformação do corpo de prova. Esta pesquisa consiste no desenvolvimento de um protocolo experimental para o teste de flexão assimétrica em quatro pontos, pelo qual seja possível estudar a resposta a fratura de materiais metálicos sob modos de carregamento combinados. A confiabilidade dos resultados será avaliada a partir da comparação de testes experimentais e computacionais com diferentes configurações dos parâmetros do ensaio. Análises numéricas usando o método de elementos finitos são usados para definição dos parâmetros de ensaio e caracterização dos valores de tenacidade do material. Os resultados obtidos são favoráveis à metodologia proposta, apresentando consistência entre resultados computacionais e resultados experimentais.

Palavras-chave: fratura, tenacidade, flexão, assimetria, Elementos Finitos.

## **ABSTRACT**

The experimental determination of the fracture toughness of ductile materials under load mode I, based on the behavior of the J-integral, was extensively formalized in ASTM E 1820-99 (Standard Test Method for Measurement of Fracture Toughness) and in ESIS procedure P1-92. However, with respect to combined loading modes, generally accepted rules for the evaluation of fracture toughness are still lacking, despite their importance in many engineering situations. It is known that the measurement of fracture toughness based on the J-integral is highly dependent on the combined mode relationship, the geometry of the tested body and the general state of strain of the sample. This research consists of the development of an experimental protocol for the four-point asymmetric bending test, by means of which it is possible to study the response to fracture of metallic materials under combined load modes. The reliability of the results will be evaluated by comparing experimental and computational tests with different settings of the assay parameters. Numerical analyzes using the finite element method are used to define the test conditions and characterize the toughness values of the material. The results obtained are favorable to the proposed methodology, showing consistency between the computational results and the experimental results.

Keywords: fracture, tenacity, bending, asymmetry, finite elements.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: ilustração de risers. ....	14
Figura 2: tubo cladeado com liga resistente a corrosão. ....	15
Figura 3: concentração de tensões em torno de um orifício [4]. ....	18
Figura 4: liberação de energia de deformação e novas superfícies de trinca [5]. ....	19
Figura 5: modos de carregamento aplicáveis ao corpo trincado [17]. ....	19
Figura 6: tensões na ponta da trinca [17]. ....	20
Figura 7: deslocamento de abertura da ponta da trinca (CTOD) [17]. ....	22
Figura 8: (a) ilustração da curva P-CMOD; (b) incrementos utilizados para definir $J_{pk}$ . .....	23
Figura 9: ponta da trinca submetida a modo combinado de carregamento [20]. ....	24
Figura 10: corpo de prova de tensão compacta de cisalhamento [20]. ....	25
Figura 11: corpo de prova utilizado num ensaio de flexão assimétrica em quatro pontos [20]. ....	25
Figura 12: geometria utilizada por Barr e Derradj [23]. ....	26
Figura 13: geometria da amostra e configurações do ensaio FPAB [33]. ....	28
Figura 14: modelo de flexão assimétrica em quatro pontos com $c = 0$ . ....	28
Figura 15: distribuição da carga P nos roletes de carga. ....	29
Figura 16: corte no plano da trinca. ....	29
Figura 17: diagrama de força cisalhante e momento fletor. ....	30
Figura 18: valores do K adimensional para o ensaio FPAB ( $b_2/W = 2.5$ ) [24]. ....	31
Figura 19: medição do CMOD sob modo combinado de carregamento I e II [34]. ....	32
Figura 20: parâmetros geométricos relacionados à abertura da trinca [30]. ....	34
Figura 21: medições de área necessárias para o cálculo da integral J [35]. ....	34
Figura 22: curva de tensão verdadeira x deformação plástica verdadeira para o aço A285 grau C [38]. ....	37
Figura 23: parâmetros do modelo FPAB. ....	37
Figura 24: modelo numérico do ensaio de flexão simétrica em quatro pontos. ....	38
Figura 25: malha definida na ponta da trinca. ....	38
Figura 26: plano da trinca após simulação. ....	39
Figura 27: resultados numéricos e experimentais da curva P-CMOD. ....	39
Figura 28: tensão verdadeira x deformação plástica verdadeira da liga de alumínio 5083-H112 [30]. ....	40

Figura 29: parâmetros do ensaio FPAB. ....	41
Figura 30: modelo numérico do ensaio FPAB. ....	42
Figura 31: (a) costura; (b) frente de propagação da trinca. ....	42
Figura 32: malha na ponta da trinca no modelo FPAB. ....	43
Figura 33: resultados comparativos do ângulo equivalente de modo combinado. ....	44
Figura 34: curvas $FV - \delta V$ . ....	45
Figura 35: curva $M - \theta$ . ....	45
Figura 36: parâmetros do ensaio FPAB. ....	46
Figura 37: ensaio experimental FPAB. ....	47
Figura 38: superfície do corpo de prova preparada ser aplicado o método DIC. ....	48
Figura 39: procedimento de calibração das câmeras digitais. ....	48
Figura 40: processo de captura de imagens. ....	49
Figura 41: interface do software especializado VIC-3D. ....	49
Figura 42: seleção dos pontos de interesse no software VIC-3D. ....	49
Figura 43: curva $P - CMOD$ para ensaios FPAB com $c = 5mm$ . ....	50
Figura 44: curva $P - CMOD$ para ensaios FPAB com $c = 0$ . ....	50
Figura 45: curva $P - e1$ no ponto com deformação unitária crescente ( $c = 5mm$ ). ....	51
Figura 46: curva $P - e1$ no ponto com deformação unitária crescente ( $c = 0$ ). ....	51
Figura 47: pré-trincas dos corpos de prova (a) CP01 (b) CP02. ....	51
Figura 48: corpo de prova deformado após o término do ensaio FPAB. ....	52
Figura 49: ampliação na ponta da trinca após o ensaio FPAB. ....	52
Figura 50: modelo numérico do ensaio FPAB. ....	54
Figura 51: malha refinada na área da trinca do modelo FPAB. ....	54
Figura 52: corpo de prova real versus modelo numérico. ....	55
Figura 53: resultados comparativos da curva $P - CMOD$ ( $c = 5mm$ ). ....	55
Figura 54: resultados comparativos da curva $P - CMOD$ ( $c = 0$ ). ....	55
Figura 55: resultados comparativos da curva $P - e1$ ( $c = 5mm$ ). ....	56
Figura 56: resultados comparativos da curva $P - e1$ ( $c = 0$ ). ....	56



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Propriedades elastoplásticas para o aço A285 grau C [38].	36
Tabela 2 – Valores utilizados no modelo FPAB.	37
Tabela 3 – Propriedades elastoplásticas da liga de alumínio 5083-H112 [30].	40
Tabela 4 – Valores utilizados nos modelos FPAB dirigidos ao cálculo do $\beta_{eq}$ .	41
Tabela 5 – Valores utilizados nos modelos FPAB dirigidos ao cálculo da integral J.	41
Tabela 6 - Resultados comparativos dos fatores de intensidade de tensões KI e KII. .....	43
Tabela 7 – Resultados obtidos da integral J.	45
Tabela 8 – Valores ensaiados em FPAB.	46

## LISTA DE SIMBOLOS

$G_c$	Taxa crítica de liberação de energia
$L$	Comprimento do corpo de prova
$W$	Largura do corpo de prova
$B$	Espessura do corpo de prova
$a$	Comprimento da trinca
$a_0$	Comprimento inicial da trinca
$b$	Ligamento remanescente do corpo de prova
$\sigma$	Tensão normal
$\tau$	Tensão de cisalhamento
$K$	Fator de intensidade de tensões
$K_c$	Tenacidade à fratura
$K_I$	Fator de intensidade de tensões em modo I
$K_{II}$	Fator de intensidade de tensões em modo II
$K_{III}$	Fator de intensidade de tensões em modo III
$f_I$	Forma adimensional do $K_I$
$f_{II}$	Forma adimensional do $K_{II}$
$f_{III}$	Forma adimensional do $K_{III}$
$r, \alpha$	Coordenadas polares da ponta da trinca ao campo de tensões
$J_1$	Primeiro invariante do tensor desviador
$J_2$	Segundo invariante do tensor desviador
$J$	Integral J
$J_e$	Parcela elástica da Integral J
$J_p$	Parcela plástica da Integral J
$J_T$	Taxa total de liberação de energia
$J_I$	Taxa de liberação de energia em modo I
$J_{II}$	Taxa de liberação de energia em modo II
$\rho$	Densidade
$E$	Módulo de elasticidade
$\sigma_y$	Tensão de escoamento
$\sigma_u$	Tensão última
$\nu$	Coeficiente de Poisson
$\delta$	Abertura da ponta da trinca
$\delta_I$	Abertura da trinca em modo I

$\delta_{II}$	Abertura da trinca em modo II
$F_V$	Força de cisalhamento no plano da trinca
$\delta_V$	Deslocamento cisalhante da boca da trinca
$M$	Momento fletor no plano da trinca
$\theta$	Ângulo de abertura entre os planos da trinca
$A_p$	Área plástica na curva P – CMOD
$\beta_{eq}$	Ângulo equivalente de modo combinado
$r_p$	Fator de rotação plástico
$b_1$	Braço de momento curto
$b_2$	Braço de momento longo
$c$	Distância entre a linha de carga e o plano da trinca
$P$	Carga concentrada
$R_1$	Ação da carga sob o rolete do braço curto
$R_2$	Ação da carga sob o rolete do braço longo
$S_{int}$	Distância entre roletes internos
$S_{ext}$	Distância entre roletes externos

## **LISTA DE SIGLAS E ABREVIações**

LEFM	Mecânica da Fratura Elástica Linear
CTOD	Abertura da ponta da trinca
CMOD	Abertura da boca da trinca
SG	Entalhe lateral
FPAB	Flexão Assimétrica em Quatro Pontos
DIC	Correlação Digital de Imagens
EXP	Experimental
CRA	Liga Resistente à Corrosão
LMO	Laboratório de Mecânica Offshore
SCR	Risers de aço em catenária

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	14
1.1	Objetivo.....	16
2	FUNDAMENTOS DA MECÂNICA DA FRATURA.....	17
2.1	Mecânica da Fratura Elástica Linear.....	18
2.2	Mecânica da Fratura Elastoplástica.....	21
2.3	Modo combinado de carregamento.....	24
3	FLEXÃO ASSIMÉTRICA EM QUATRO PONTOS.....	26
3.1	Desenvolvimento do ensaio.....	26
3.2	Corpo de prova e detalhes do ensaio.....	27
3.3	Força de cisalhamento e momento fletor.....	29
3.4	Métodos analíticos para o cálculo da tenacidade à fratura.....	31
4	ESTUDOS DE VERIFICAÇÃO.....	36
4.1	Modelo de dano.....	36
4.2	Determinação da tenacidade à fratura num ensaio FPAB.....	39
5	PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL.....	46
6	RESULTADOS NUMÉRICOS E DISCUSSÃO.....	54
7	CONCLUSÕES.....	57
	REFERÊNCIAS.....	58

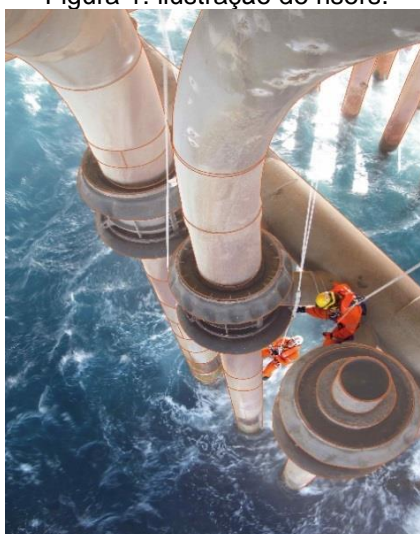
## 1 INTRODUÇÃO.

As descobertas de petróleo e gás natural na camada pré-sal do litoral brasileiro representam um enorme potencial de exploração e colocam o Brasil em uma posição estratégica frente à grande demanda de energia mundial. Neste contexto, a produção e exploração de tais reservas trazem consigo uma série de desafios tecnológicos decorrentes de novos requisitos de projeto como, por exemplo, a exploração em águas profundas. A criação de novas ferramentas de engenharia torna-se essencial para a viabilização técnica e econômica desses novos campos de petróleo.

Em particular, o sistema de tubulações submarinas para transporte de petróleo possui grande relevância em novos projetos, uma vez que a necessidade de exploração em águas profundas exige a aplicação de critérios específicos de engenharia, além da possibilidade do surgimento de casos não cobertos por normas de projeto tradicionais, tais como a British Standard BS [1] ou American Petroleum Institute API [2].

Uma alternativa viável para transporte de petróleo do fundo do mar até as plataformas é a utilização de risers rígidos (SCRs – Steel Catenary Risers), por conta de possuírem menor custo e maior capacidade estrutural quando comparados às tubulações flexíveis [3]. A Figura 1 ilustra um conjunto de risers usados no escoamento da produção em uma plataforma offshore.

Figura 1: ilustração de risers.



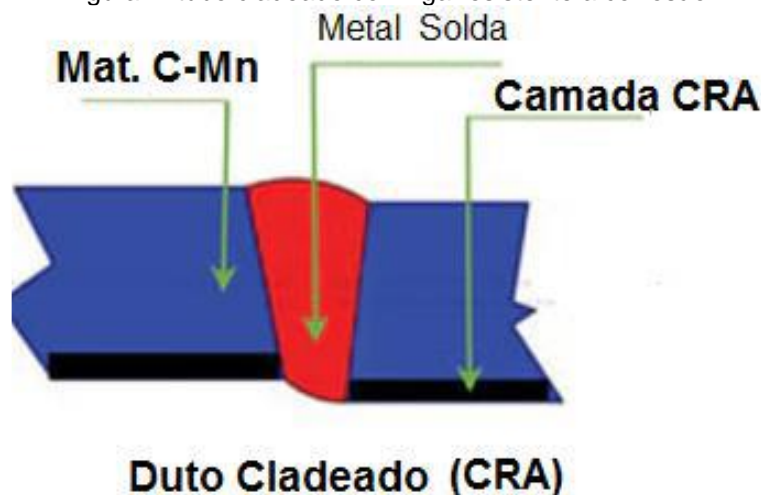
Entretanto, o uso de dutos rígidos de aço carbono estruturais de classe API 5L, comumente utilizados na fabricação de risers para sistemas oceânicos

convencionais pode representar um sério obstáculo ao desenvolvimento destes novos campos produtores por conta da suscetibilidade à corrosão.

As reservas do pré-sal estão associadas à elevada concentração de elementos agregados aos hidrocarbonetos, particularmente dióxido de carbono ( $\text{CO}_2$ ) e ácido sulfídrico ( $\text{H}_2\text{S}$ ) que, na presença de água (a qual também está invariavelmente associada ao petróleo e gás), podem produzir elementos altamente corrosivos, capazes de produzir severos danos a todo sistema de tubulações, dutos submarinos e risers para transporte de gás e óleo da cabeça do poço até a plataforma.

Uma solução para este problema é a aplicação de um revestimento metálico fabricado em material resistente à corrosão (CRA – Corrosion Resistant Alloy), internamente à tubulação de aço carbono. Tal configuração bimetalica, comumente denominado tubo cladeado, consiste essencialmente de uma tubulação de material CRA com espessura relativamente pequena, fisicamente ou metalurgicamente unida à tubulação externa principal de aço carbono. A Figura 2 ilustra uma junta soldada de um tubo revestido, onde a solda circunferencial é feita do mesmo material usado no revestimento interno, resistente à corrosão.

Figura 2: tubo cladeado com liga resistente a corrosão.



Embora eficaz contra os efeitos nocivos da corrosão, a utilização destes tubos bimetalicos em dutos submarinos introduz uma série de desafios adicionais à viabilidade técnica e econômica. Entre elas está a fabricação de juntas soldadas com materiais dissimilares com evidente não-homogeneidade mecânica e metalúrgica, que originam condições de trabalho específicas que não são totalmente cobertas por normas tradicionais de projeto [1] [2]. Outro ponto de atenção é a

caracterização adequada da tenacidade à fratura da junta soldada circumferencial desses tubos.

A verificação da integridade estrutural do sistema de risers é um tópico essencial para a correta operação do sistema de produção de óleo e gás. Diferentes modos de falha devem ser verificados durante o projeto e operação do riser. O mecanismo de fratura dúctil será considerado neste estudo. Dependendo dos possíveis carregamentos aplicados na estrutura, diferentes modos de fratura podem ocorrer. Por exemplo momentos de torção e flexão irão gerar modos diferentes de abertura de trinca em componentes trincados.

### 1.1 Objetivo.

O objetivo desta pesquisa é estudar a fratura dúctil de materiais metálicos quando submetidos a modos I e II combinados de carregamentos. Um objetivo específico será definir um protocolo experimental do ensaio de flexão assimétrica em quatro pontos para o cálculo da tenacidade à fratura em modos de carregamento combinados (I e II) em materiais metálicos. As condições dos ensaios experimentais serão identificadas por modelos de elementos finitos simulando a geometria de flexão em quatro pontos com variadas opções de carga e propriedades mecânicas. Modelos fenomenológicos de dano serão utilizados para prever a resposta experimental obtida dos ensaios do laboratório. Os efeitos do carregamento em modo I e II na tenacidade do material será discutido e analisado com base nos resultados experimentais e numéricos.



## 2 FUNDAMENTOS DA MECÂNICA DA FRATURA.

A mecânica da fratura é a ciência dos corpos trincados. Trincas são defeitos inerentes envolvidos em materiais ou estruturas que se tornam concentrações de tensão. Por isso, uma análise de tensão comum é inadequada para avaliar sua resistência mecânica.

Inglis mostrou que defeitos ou arestas vivas dentro de uma placa podem criar concentrações de tensão muitas vezes maiores do que a tensão aplicada à placa e revelou defeitos que, tendo um menor raio de curvatura, produzem uma maior concentração de tensões [4].

Em seguida, Griffith cria os critérios de energia para a propagação de trincas e calcula a energia de entrada para formar novas superfícies de fraturas [5] [6]. Ele definiu o parâmetro estabelecido como critério para o balanço de energia da fratura ( $G_c$ ), e revelou que  $G_c$  é proporcional à raiz quadrada do comprimento inicial da trinca ( $\sqrt{a_0}$ ). Posteriormente, foi sugerido o fator de intensidade de tensões ( $K$ ), que é proporcional a  $\sigma * \sqrt{a}$ . O  $K$  proposto pelo estudo da mecânica da fratura permite calcular a quantidade de tensão acumulada ao redor da ponta de uma trinca. Esta abordagem é bastante aceitável comparada às técnicas comuns de análise de tensão.  $K_c$  foi atribuído ao termo do  $K$  crítico ou ao termo de tenacidade à fratura.

Irwin definiu a taxa crítica de liberação de energia ( $G_c$ ), propôs  $G_c$  como uma propriedade do material e o definiu como uma entrada de energia crítica para criar uma unidade de superfície de fratura [7].

Na década de 1960, as pesquisas sobre a plasticidade na ponta da trinca começaram a tomar atenção dos pesquisadores. Cottrell e Wells sugeriram o método de deslocamento da abertura da ponta da trinca como um critério de fratura (CTOD – Crack Tip Opening Displacement) [8] [9]. Outros propuseram "Tensão Tangencial Máxima" [10], "Taxa Máxima de Liberação de Energia" [11] e "Densidade de Energia de Deformação Mínima" [12].

O estudo de Rice sustentou uma grande melhora [13]. Rice generalizou os problemas de plasticidade da ponta da trinca ao sugerir uma integral de linha independente do caminho de integração e propôs uma expressão analítica para calcular a energia elástica e plástica ao redor da ponta do defeito. Como os cálculos foram baseados nos invariantes do tensor desviador  $J_1$  e  $J_2$ , essa técnica é conhecida como a Integral  $J$ . Rice foi pioneiro em uma nova era para o estudo da

mecânica da fratura e, então, os estudos da mecânica da fratura elasto-plástica se tornaram mais confiáveis. Depois que os cálculos do fator de intensidade de tensões se tornaram mais fáceis, os pesquisadores desenvolveram compêndios para estudos de diferentes trincas e geometrias de corpos de prova [14] [15] [16].

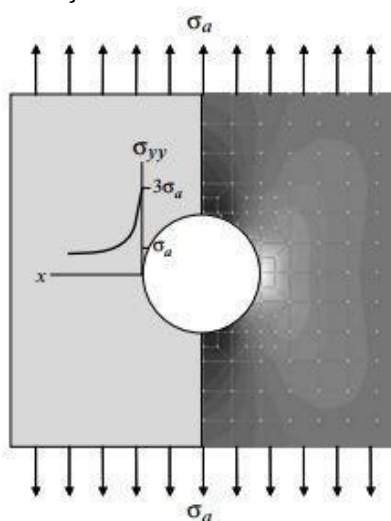
## 2.1 Mecânica da Fratura Elástica Linear.

Os conceitos da Mecânica da Fratura, estabelecidos antes de 1960, são aplicáveis apenas a materiais que atendam à Lei de Hooke. Apesar das correções introduzidas no início de 1948, incluindo a plasticidade em pequena escala, essas análises são restritas a estruturas nas quais o comportamento é elástico linear.

Desde 1960, as teorias da mecânica da fratura foram desenvolvidas levando em consideração vários tipos de comportamento não linear (ou seja, plasticidade, viscoplasticidade e viscoelasticidade), bem como efeitos dinâmicos. No entanto, todos esses resultados recentes são extensões da Mecânica da Fratura Elástica Linear (LEFM – Linear Elastic Fracture Mechanics). Portanto, um conhecimento sólido dos fundamentos da LEFM é essencial para compreender os conceitos mais avançados da Mecânica da Fratura.

Inglis mostrou concentrações de tensão em torno de um orifício em uma placa plana (Figura 3). A quantidade de tensão ativa em torno do furo foi consideravelmente maior do que a tensão aplicada ao domínio remoto [4].

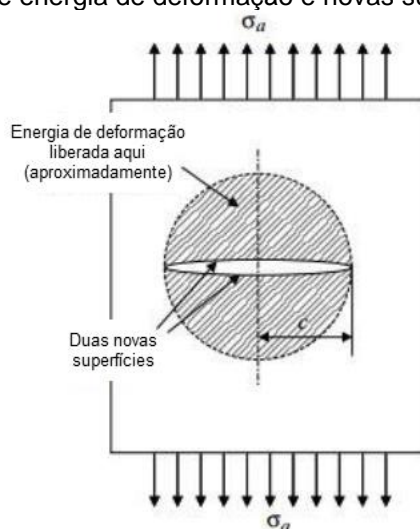
Figura 3: concentração de tensões em torno de um orifício [4].



O estudo de Inglis excluiu dois parâmetros importantes, a forma e o tamanho das impurezas. Griffith estendeu o estudo de Inglis usando a teoria da elasticidade e

combinou o conhecimento da energia de deformação com o fenômeno da fratura. Griffith mostrou que quando a trinca propaga, ela cria superfícies e a criação de novas superfícies requer energia. Portanto, a criação de novas superfícies é governada pela energia de tensão do corpo. Griffith propôs o equilíbrio entre a entrada de energia necessária para criar superfícies de trincas e a liberação de energia de deformação como "critério de balanço de energia" (Figura 4) [5].

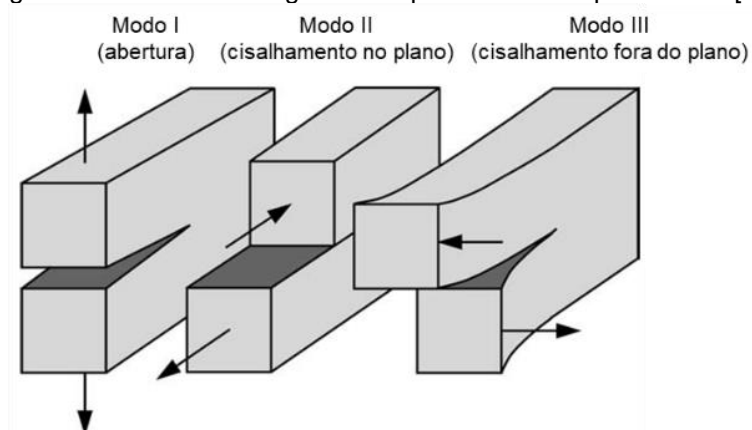
Figura 4: liberação de energia de deformação e novas superfícies de trinca [5].



### 2.1.1 Fator de intensidade de tensões (**K**).

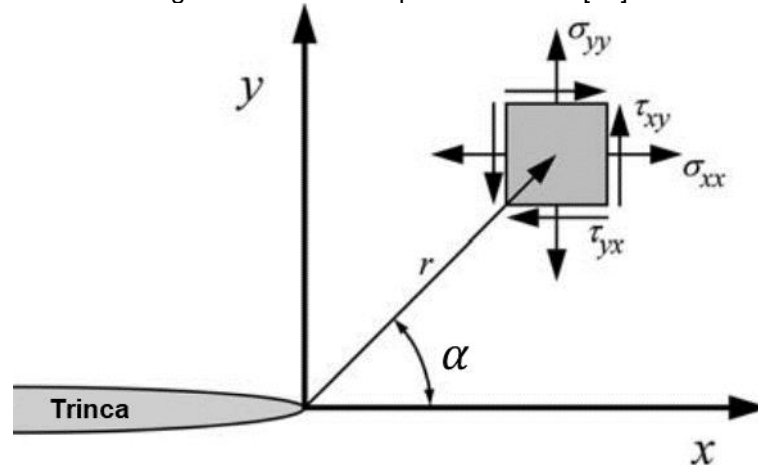
Em geral, três tipos diferentes de modos de carregamento governam o início e a propagação de uma trinca (Figura 5). O modo I é definido como o modo de abertura da trinca por tração, o modo II corresponde ao modo deslizante ou modo de cisalhamento plano e o modo III corresponde ao modo de rasgamento ou cisalhamento fora do plano.

Figura 5: modos de carregamento aplicáveis ao corpo trincado [17].



Westergaard propôs expressões analíticas para o cálculo de tensões e deslocamentos ao redor da ponta de uma trinca para o fator de intensidade de tensões no modo I ( $K_I$ ) [18]. Em seguida, o estudo de Williams propôs as demais expressões analíticas para as tensões na ponta da trinca e calculou os deslocamentos nos modos II e III [19].

Figura 6: tensões na ponta da trinca [17].



A equação do campo de tensões é dada por:

$$\sigma_{ij} = \left( \frac{K}{\sqrt{r}} \right) f_{ij}(\alpha) + \text{termos de ordem superior}$$

Onde  $\sigma_{ij}$  corresponde a tensão,  $r$  e  $\alpha$  são as coordenadas polares apresentadas na Figura 6,  $K$  é uma constante chamada de fator de intensidade de tensão e  $f_{ij}$  é uma função adimensional de  $\alpha$ .

Observa-se que existe uma singularidade devido ao fator  $1/\sqrt{r}$ . Desse modo, o primeiro termo da tensão  $\sigma_{ij}$  tende ao infinito à medida que  $r$  decresce e pode-se demonstrar que os termos de ordem superior permanecem finitos ou tendem a zero. Para contornar essa singularidade, Irwin justificou que mesmo para os materiais mais frágeis ocorre uma pequena deformação plástica da ponta da trinca, quebrando sua agudez, e, portanto, níveis de tensão infinitos não ocorrem na prática.

O fator de intensidade de tensões ( $K$ ) corresponde a magnitude da tensão singular e é diretamente governado pela quantidade de tensão aplicada e pelo comprimento da trinca. A forma da trinca, a geometria do domínio de tensão e as condições de contorno do domínio também tem influência sob o  $K$ . Para geometrias tipo viga é comum expressar o  $K$  da seguinte forma:

$$K_I = \sigma_{xx} \sqrt{\pi a} f_I(a/W) \quad \text{para o modo de carga I}$$

$$K_{II} = \tau_{xy} \sqrt{\pi a} f_{II}(a/W) \quad \text{para o modo de carga II}$$

$$K_{III} = \tau_{zx} \sqrt{\pi a} f_{III}(a/W) \quad \text{para o modo de carga III}$$

Onde  $\sigma_{xx}$  é a tensão normal,  $\tau_{xy}$  o cisalhamento dentro do plano,  $\tau_{zx}$  o cisalhamento fora do plano,  $a$  o comprimento da trinca e as funções  $f_i$  são chamadas de fator de intensidade de tensões adimensional e dependem da relação  $a/W$ , sendo  $W$  a largura do corpo de prova. É importante notar que as propriedades elásticas do material como o módulo de elasticidade ( $E$ ) e o coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) não afetam os valores do  $K$ .

A tenacidade à fratura é definida como o valor crítico do  $K$  ( $K_c$ ). À medida que o  $K$  atinge esse valor crítico, a ponta da trinca não consegue suportar as tensões que tem torno dela e por tanto se propaga. A tenacidade à fratura como uma propriedade do material é definida como a resistência do material à propagação de trincas (fraturamento), e é diretamente governada pelas propriedades mecânicas do material e pela geometria do domínio.

## 2.2 Mecânica da Fratura Elastoplástica.

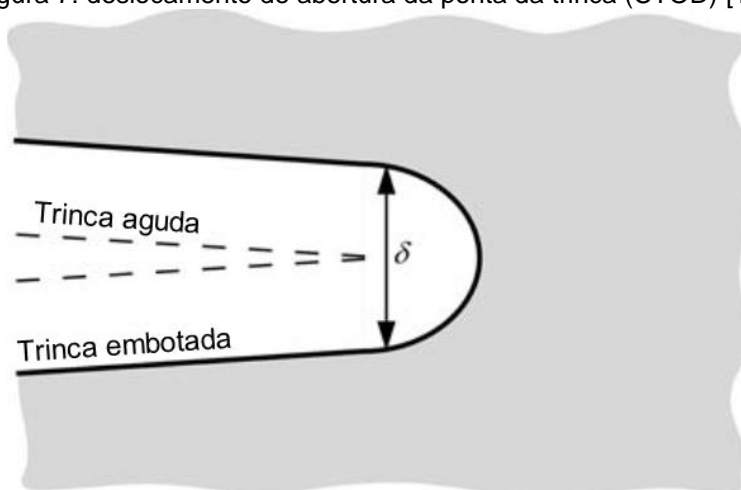
A tensão macroscópica aplicada a uma estrutura ou material, também chamada de tensão remota, torna-se infinita nas proximidades da ponta da trinca, ou seja, quando  $r$  tende a 0 (Figura 6) segundo a LEFM. Como é sabido, a resistência de um material é limitada pela tensão de escoamento e quando a tensão aplicada excede a tensão de escoamento, ocorre a deformação plástica. A região próxima à ponta da trinca, que foi plasticamente deformada, é chamada de deformação em pequena escala nos estudos de mecânica da fratura. As formulações elásticas lineares nesta região não são válidas. Se esta região for relativamente pequena, as zonas de plasticidade podem ser consideradas desprezíveis e abordagens mecânicas de fratura elástica linear podem ser usadas. No entanto, se esta região não for suficientemente pequena, em vez de usar abordagens da Mecânica da Fratura elástica linear, abordagens da Mecânica da Fratura elasto-plástica são empregadas. Essas abordagens são o deslocamento de abertura da ponta da trinca (CTOD) e a Integral de contorno  $J$ .

### 2.2.1 Deslocamento de abertura da ponta da trinca (CTOD).

Wells mostrou que à medida que a trinca se propaga, devido à região plástica ao redor da ponta da trinca, ela mudava de uma trinca aguda para uma trinca embotada [9]. Também notou que a quantidade de embotamento era proporcional à dureza do material. À medida que a tenacidade do material aumentava, o grau de embotamento da trinca também aumentava. Assim, Wells estabeleceu matematicamente uma relação entre a tenacidade à fratura e o grau de embotamento da trinca inicialmente aguda. Essa medição é chamada de deslocamento de abertura da ponta da trinca (CTOD).

Na Figura 7 se ilustra uma trinca inicialmente aguda que foi embotada devido à deformação plástica, resultando em um deslocamento finito na ponta da trinca.

Figura 7: deslocamento de abertura da ponta da trinca (CTOD) [17].



### 2.2.2 Integral de contorno J.

Considerando a interpretação energética da Integral J proposta por Rice [13], ela pode ser determinada como:

$$J = -\frac{d\Pi}{Bda}$$

Onde  $\Pi$  é a energia potencial, B a espessura do corpo trincado e da o incremento diferencial no tamanho da trinca. A energia potencial é dada pela diferença entre a energia de deformação e o trabalho feito pelas forças externas. Assim sendo, J pode ser interpretada como a diferença de energia absorvida por corpos trincados com tamanhos de trinca a e a + da, respetivamente, para materiais

com resposta elastoplástica. Observa-se que a definição anterior de  $J$  em termos de quantidades mesuráveis, carga e deslocamento, permite o cálculo experimental da força motriz em corpos trincados.

Um procedimento amplamente utilizado para calcular a tenacidade à fratura dúctil segue um procedimento incremental que atualiza as parcelas elásticas e plásticas de  $J$  durante descarregamentos pré-definidos durante o ensaio:

$$J^k = J_e^k + J_p^k$$

Onde o termo elástico é obtido por:

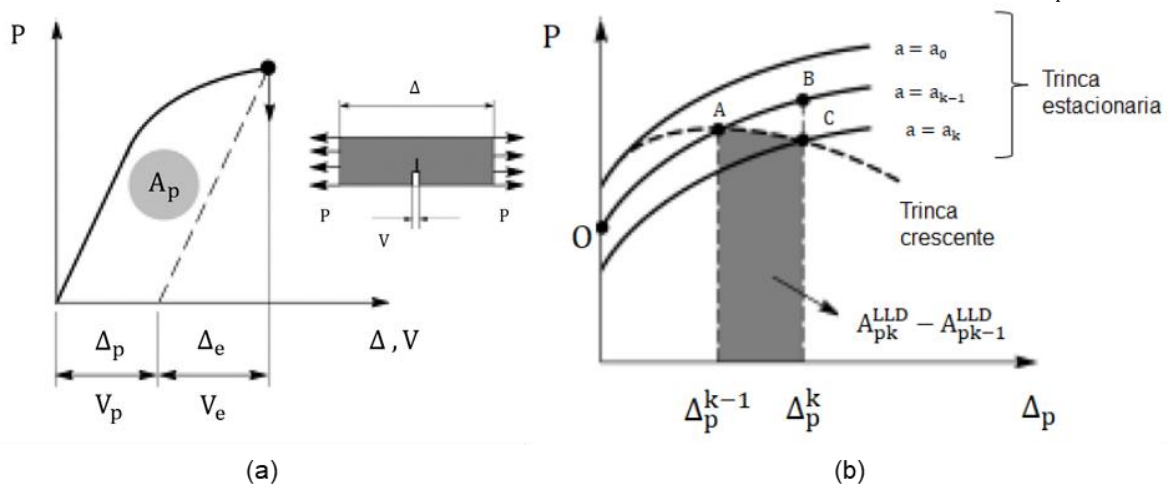
$$J_e^k = \left( \frac{K^2}{E} \right)_k$$

Sendo  $K$  o fator de intensidade de tensões da geometria trincada e  $E$  o módulo de elasticidade do material.

A parcela plástica da Integral  $J$  pode ser estimada por uma formulação incremental em função da curva carga ( $P$ ) versus deslocamento da boca do corpo de prova (CMOD):

$$J_p^k = \left[ J_p^{k-1} + \frac{\eta_{\text{CMOD}}^{k-1}}{b_{k-1}B} (A_p^k - A_p^{k-1}) \right] \left( 1 - \frac{\gamma_{\text{LLD}}^{k-1}}{b_{k-1}} \Delta a \right)$$

Figura 8: (a) ilustração da curva P-CMOD; (b) incrementos utilizados para definir  $J_p^k$ .



Onde  $A_p^k$  é a área plástica na curva  $P - \text{CMOD}$  ilustrada na Figura 8(a),  $b_{k-1}$  é o ligamento remanescente instantâneo do corpo de prova,  $\eta_{\text{CMOD}}$  representa um parâmetro adimensional que relaciona a contribuição plástica da energia de

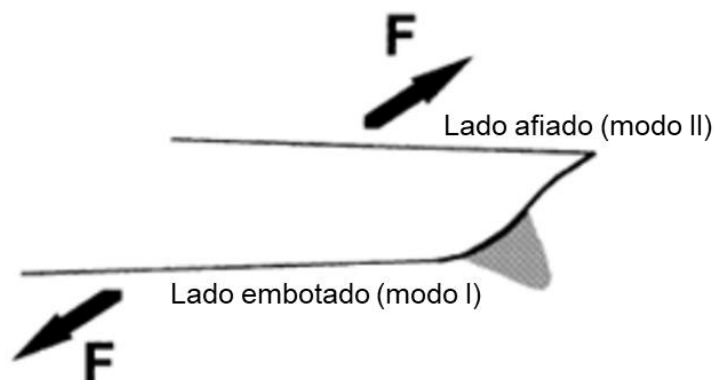
deformação no valor de  $J$ , e o termo entre parêntesis é a correção no valor de  $J$  necessário para trincas em crescimento estável, como ilustrado na Figura 8(b).

### 2.3 Modo combinado de carregamento.

Embora a determinação da tenacidade à fratura em modo I (modo de abertura) já esteja bem desenvolvida e normalizada, até agora não há uma metodologia definida para a determinação da tenacidade à fratura em modos de carregamento combinados, apesar de sua importância na engenharia [20].

No modo combinado modo I e modo II coexistem dois mecanismos de fratura distintos, o modo I, mecanismo de tração que tende a causar embotamento na ponta da trinca e o modo II, mecanismo de cisalhamento no plano que tende a deixar a ponta da trinca mais aguda. O predomínio de um mecanismo sobre o outro vai depender da proporção de um modo de carregamento sobre o outro, condição de encruamento e microestrutura [20]. Figura 9 ilustra a ponta de uma trinca submetida a um modo combinado de carregamento (modo I + modo II).

Figura 9: ponta da trinca submetida a modo combinado de carregamento [20].



Para determinar a relação entre os carregamentos de modo I e modo II, Hallback e Nilsson propuseram o ângulo equivalente de modo combinado  $\beta_{eq}$ :

$$\beta_{eq} = \tan^{-1} \left( \frac{K_I}{K_{II}} \right)$$

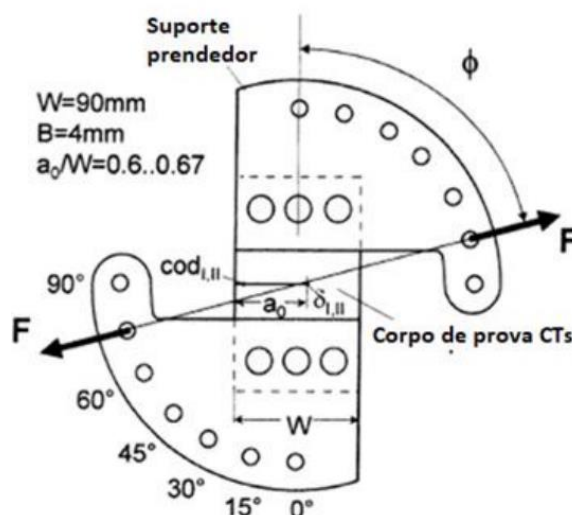
Onde  $K_I$  e  $K_{II}$  correspondem com o fator de intensidade de tensões no modo I e modo II respectivamente.

O ensaio de tensão compacta de cisalhamento, embora não seja ainda normalizado, é o ensaio mais utilizado para a determinação da tenacidade à fratura



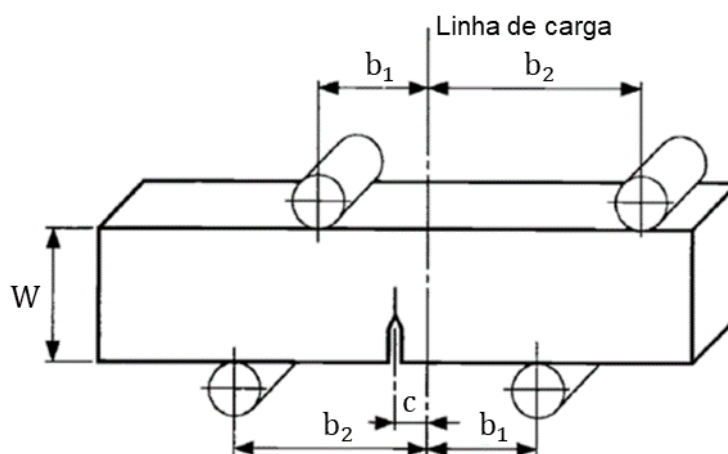
em modo combinado de carregamento. Na Figura 10 se ilustra o corpo de prova utilizado nesse tipo de ensaio, onde  $\Phi$  é o ângulo de aplicação da carga.  $\Phi$  igual a  $0^\circ$  corresponde a uma configuração de modo I puro, com  $\Phi = 90^\circ$  tem-se uma configuração de modo II puro e valores intermediários de  $\Phi$ , representam configurações em modo combinado.

Figura 10: corpo de prova de tensão compacta de cisalhamento [20].



Outro ensaio utilizado para determinar a tenacidade à fratura em modo combinado é o ensaio de flexão assimétrica em quatro pontos. A Figura 11 ilustra um ensaio típico de flexão assimétrica em quatro pontos, onde a variável  $c$  controla a mistura de modos. Com  $c = 0$  tem-se uma configuração de modo II puro,  $c = \infty$  corresponde a uma configuração de modo I puro e valores intermediários de  $c$  representam configurações em modo combinado. As relações  $b_1/W$  e  $b_2/W$  são chamadas de braço de momento curto e braço de momento longo respetivamente.

Figura 11: corpo de prova utilizado num ensaio de flexão assimétrica em quatro pontos [20].



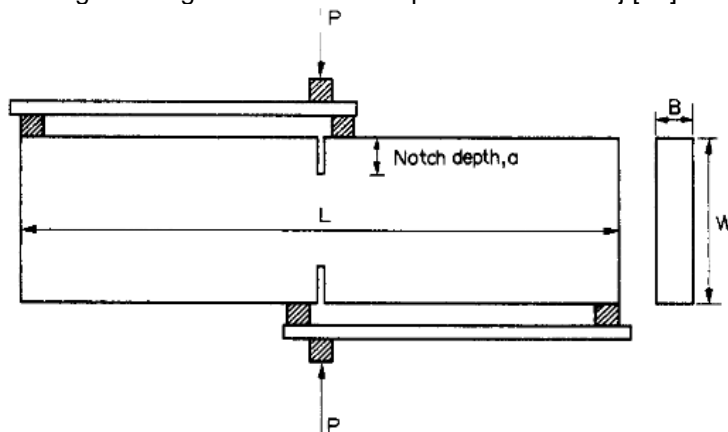
### 3 FLEXÃO ASSIMÉTRICA EM QUATRO PONTOS.

Um dos objetivos desta pesquisa é definir um protocolo experimental do ensaio de flexão assimétrica em quatro pontos (FPAB – Four Point Asymmetric Bending), para o cálculo da tenacidade à fratura em modos de carregamento combinados. Portanto, esta seção apresenta os avanços mais relevantes que surgiram de pesquisas anteriores, as configurações e parâmetros principais do ensaio e os métodos analíticos utilizados no cálculo da tenacidade à fratura.

#### 3.1 Desenvolvimento do ensaio.

O ensaio FPAB foi proposto pela primeira vez por Arrea e Ingrassia [21]. Este trabalho teve como objetivo determinar a energia de fratura por cisalhamento e os parâmetros de fraturamento do concreto no modo combinado (modo I e modo II). O trabalho de Bazant e Pfeiffer abordou o efeito da largura do corpo de prova no comportamento de fraturamento do concreto usando o ensaio FPAB [22]. Barr e Derradj aplicaram o ensaio FPAB com amostras de entalhes de borda dupla para investigar os efeitos do tamanho na falha por cisalhamento (Figura 12) [23].

Figura 12: geometria utilizada por Barr e Derradj [23].



Fett conduziu uma série de estudos de determinação de tenacidade à fratura no modo I e no modo II usando o ensaio FPAB [24]. He e Hutchinson propuseram novas fórmulas analíticas para estimar o modo I e o modo II do fator de intensidade de tensões ( $K$ ) no ensaio FPAB [25]. Yoshihara determinou a tenacidade à fratura no modo II da madeira [26]. Aliha, et al., realizaram uma série de experimentos de tenacidade à fratura no modo II usando amostras de mármore [27]. O objetivo principal desse estudo foi determinar a distância correta do braço de momento curto

( $b_1/W$ ) para satisfazer a fratura frágil apenas no modo II. Determinaram que para fornecer um efeito de cisalhamento puro no plano da trinca, a relação  $b_1/W$  deve ser maior que 0,5.

Ayatollahi, et al., conduziram ensaios FPAB para determinarem as distâncias ideais do braço de momento curto e braço de momento longo para criar condições de carregamento apenas no modo II [28]. Propuseram que a distância do braço de momento longo deveria ser três vezes maior que a distância do braço de momento curto ( $b_2/b_1 = 3$ ) para satisfazer o efeito de cisalhamento puro no plano da trinca. Também afirmaram que o comprimento da trinca adimensional ( $a/W$ ) deve ser maior que 0,3 para carregamentos apenas no modo II. Ayatollahi e Aliha definiram as tensões em torno da ponta da trinca [29]. Afirmaram que, para pequenas distâncias de braço de momento curto ( $b_1/W < 0,5$ ), tensões com magnitude considerável foram observadas, e isso produz deformação significativa no modo I no plano da trinca.

Qian e Yang estudaram o início da fratura dúctil no modo misto (modo I e modo II), para uma liga de alumínio [30]. Eles aplicaram o método de detecção de deformação e obtiveram resultados mais conservadores. Alkan determinou a tenacidade à fratura em pedras [31]. Entre os métodos que utilizou está o FPAB para o cálculo da tenacidade à fratura apenas em modo II. Também desenvolveu modelos de elementos finitos para comparar e validar os resultados experimentais.

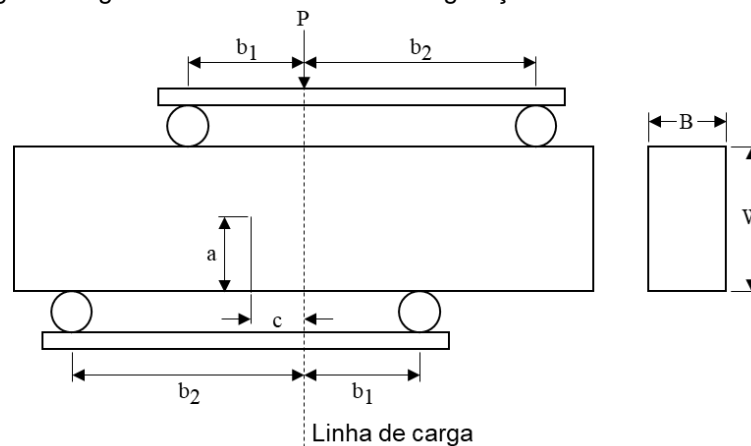
### 3.2 Corpo de prova e detalhes do ensaio.

A geometria geral do corpo de prova é selecionada como uma viga (Figura 11). Vigas são elementos estruturais bem conhecidos na análise de engenharia e em pesquisas anteriores já foi adquirida uma experiência considerável que permite o cálculo preciso dos parâmetros estruturais para vigas sob diferentes configurações de carga. Outra vantagem de usar uma amostra tipo viga é que as tensões e deflexões são diretamente proporcionais às cargas aplicadas. Essa condição exige que a ação das cargas aplicadas não seja afetada pela mudança na forma da viga devido à flexão [32].

Na literatura, abreviações para dimensões e parâmetros do corpo de prova, como o comprimento e a espessura da viga não coincidem. Neste estudo, essas dimensões são apresentadas na Figura 13, onde  $W$  é a largura da viga,  $B$  a espessura,  $P$  a carga concentrada aplicada,  $b_1$  o braço de momento curto,  $b_2$  o braço

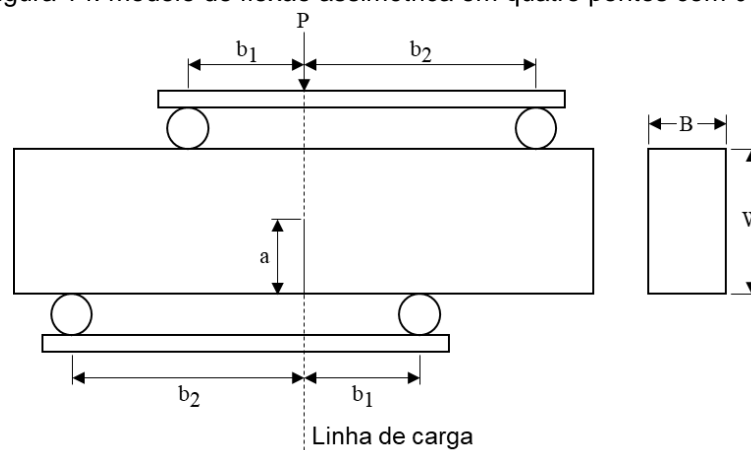
de momento longo,  $a$  o comprimento da trinca e  $c$  a distância entre a linha de ação da carga e o plano da trinca.

Figura 13: geometria da amostra e configurações do ensaio FPAB [33].



O ensaio FPAB consiste em dois pontos de carga e dois pontos de suporte configurados de forma assimétrica. A distância entre cada par de pontos é igual ( $b_1 + b_2$ ) e as configurações arbitrárias desses pontos não produzem as mesmas condições de cisalhamento e abertura no plano da trinca. A criação de um efeito de cisalhamento puro no plano da trinca é satisfeita por técnicas de análise estrutural que usam o conceito de "equilíbrio de tensão de cisalhamento". Esta condição requer que o momento fletor total ao longo do eixo paralelo ao plano da trinca seja igual a zero. Note-se que com  $c = 0$  se tem uma configuração de cisalhamento puro (modo II), pois o momento fletor ao longo do plano trinca seria zero. Mesmo assim, o modelo continua sendo assimétrico e terá apenas deslocamento cisalhante entre os planos da trinca.

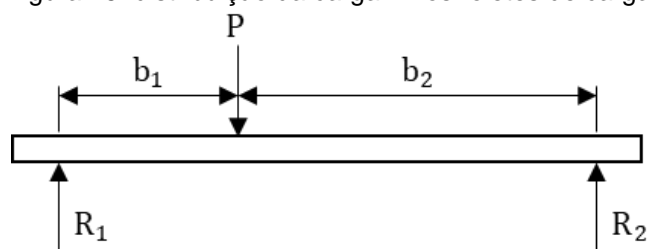
Figura 14: modelo de flexão assimétrica em quatro pontos com  $c = 0$ .



### 3.3 Força de cisalhamento e momento fletor.

Uma breve análise estática do corpo de prova é realizada para calcular a força de cisalhamento ( $F_V$ ) e o momento fletor ( $M$ ) que atuam no plano da trinca. Esses valores são necessários para o cálculo da tenacidade à fratura. Primeiramente, é analisada a barra que distribui a carga ( $P$ ) nos roletes de carga (Figura 15).

Figura 15: distribuição da carga  $P$  nos roletes de carga.



Realizando um somatório de momentos no ponto de aplicação da reação  $R_1$ , obtém-se o valor da reação  $R_2$ :

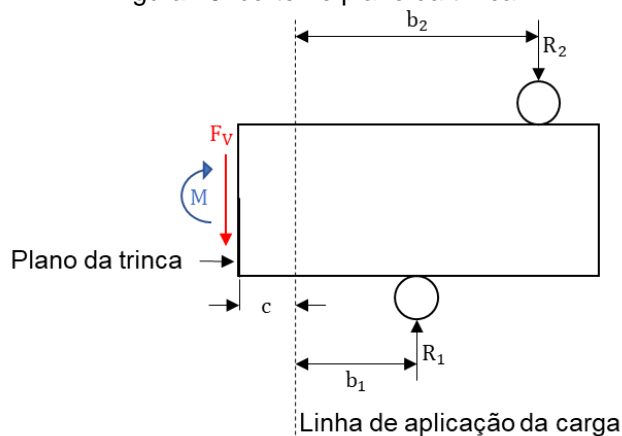
$$R_2 = \frac{b_1}{b_1 + b_2} P$$

E realizando um somatório de forças, o valor de  $R_1$  é obtido:

$$R_1 = \frac{b_2}{b_1 + b_2} P$$

Uma vez conhecidas todas as ações que atuam no corpo de prova, é possível fazer um corte no plano da trinca e calcular os valores da força de cisalhamento e do momento fletor que ali atuam (Figura 16).

Figura 16: corte no plano da trinca.



Executando uma somatória de forças obtemos:

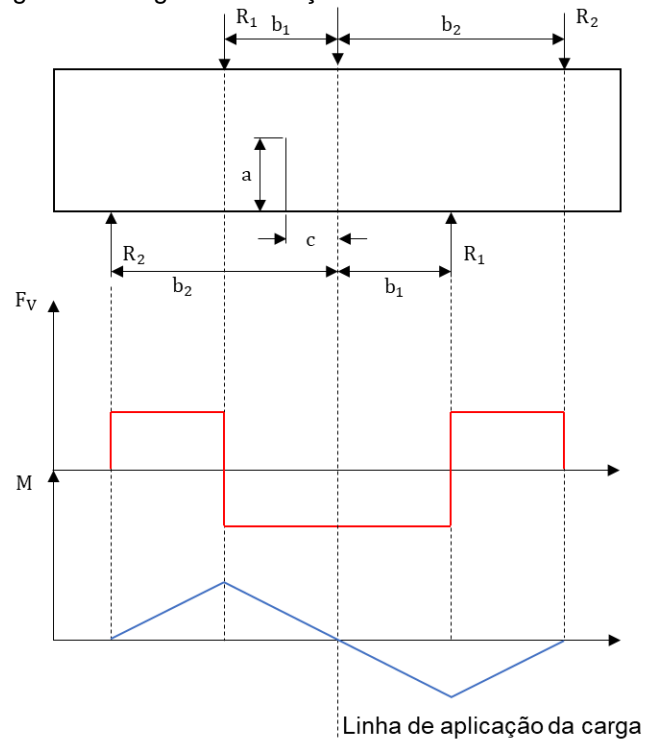
$$\begin{aligned}\sum F &= 0 \\ -F_V + R_1 - R_2 &= 0 \\ F_V &= R_1 - R_2 \\ F_V &= \frac{(b_2 - b_1)}{(b_2 + b_1)} P\end{aligned}$$

E executando um somatório de momentos no plano de corte obtemos:

$$\begin{aligned}\sum M &= 0 \\ -M + (c + b_1)R_1 - (c + b_2)R_2 &= 0 \\ M &= cR_1 + b_1R_1 - cR_2 - b_2R_2 \\ M &= c(R_1 - R_2) \\ M &= cF_V\end{aligned}$$

Esses resultados obtidos coincidem com as expressões propostas por He e Hutchinson [25]. Na Figura 17 se ilustra o digrama de força cisalhante e momento fletor.

Figura 17: diagrama de força cisalhante e momento fletor.



### 3.4 Métodos analíticos para o cálculo da tenacidade à fratura.

#### 3.4.1 Fator de intensidade de tensões (K).

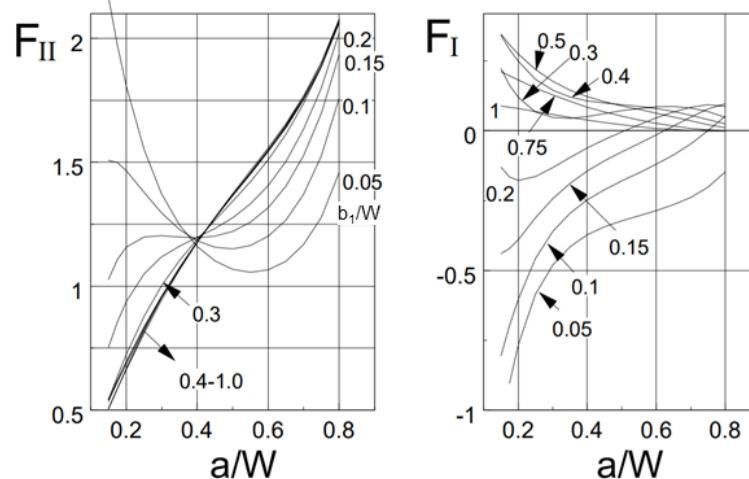
Os fatores de intensidade de tensões para os modos I e II ( $K_I$  e  $K_{II}$ ) já foram investigados para o ensaio FPAB, e há duas soluções bem desenvolvidas para calculá-los. A primeira solução foi proposta por Fett, que definiu  $K_I$  e  $K_{II}$  para corpos de prova do ensaio FPAB como [24]:

$$K_I = \frac{P}{BW} \left(1 - \frac{b_1}{b_2}\right) F_I \sqrt{\pi a}$$

$$K_{II} = \frac{P}{BW} \left(1 - \frac{b_1}{b_2}\right) F_{II} \sqrt{\pi a}$$

Onde os fatores de intensidade de tensões adimensionais  $F_I$  e  $F_{II}$  podem-se obter a partir dos gráficos fornecidos por Fett, apenas para configurações que tenham um  $b_2/W = 2.5$  (Figura 18).

Figura 18: valores do K adimensional para o ensaio FPAB ( $b_2/W = 2.5$ ) [24].



A segunda solução notável foi proposta por He e Hutchinson, que definiram  $K_I$  e  $K_{II}$  para corpos de prova do ensaio FPAB como [25]:

$$K_I = \frac{6cF_V}{W^2} \sqrt{\pi a} F_I(a/W)$$

$$K_{II} = \frac{F_V}{\sqrt{W}} \frac{(a/W)^{3/2}}{(1 - a/W)^{1/2}} F_{II}(a/W)$$

Neste caso, He e Hutchinson forneceram expressões matemáticas definitivas para calcular os fatores de intensidade de tensões adimensionais  $F_I$  e  $F_{II}$ .

$$F_I\left(\frac{a}{W}\right) = 1,122 - 1,121\left(\frac{a}{W}\right) + 3,740\left(\frac{a}{W}\right)^2 + 3,873\left(\frac{a}{W}\right)^3 - 19,05\left(\frac{a}{W}\right)^4 + 22,55\left(\frac{a}{W}\right)^5$$

Para  $\frac{a}{W} \leq 0,7$

$$F_{II}\left(\frac{a}{W}\right) = 7,264 - 9,37\left(\frac{a}{W}\right) + 2,74\left(\frac{a}{W}\right)^2 + 1,87\left(\frac{a}{W}\right)^3 - 1,04\left(\frac{a}{W}\right)^4$$

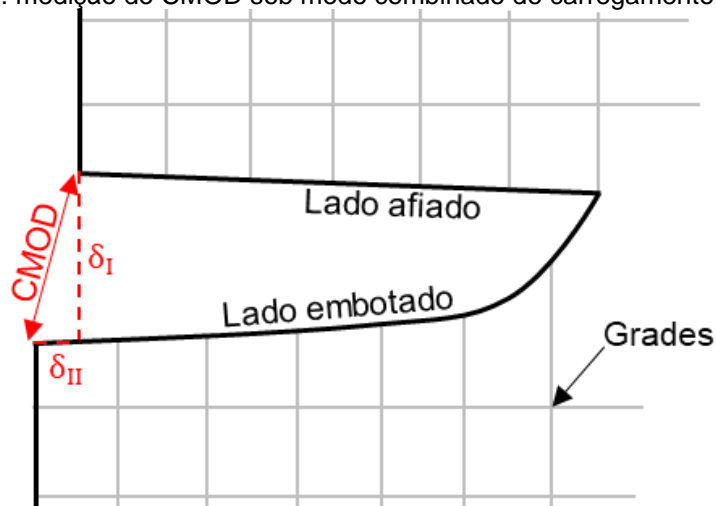
Para  $0 \leq \frac{a}{W} < 1$

### 3.4.2 Abertura da boca da trinca (CMOD).

Para determinar a abertura da boca da trinca (CMOD – Crack Mouth Opening Displacement) de um corpo de prova submetido a um modo combinado de carregamento I e II, é necessário medir as componentes de deslocamento de abertura ( $\delta_I$ ) e deslocamento cisalhante ( $\delta_{II}$ ), assim:

$$CMOD = \sqrt{\delta_I^2 + \delta_{II}^2}$$

Figura 19: medição do CMOD sob modo combinado de carregamento I e II [34].



Como ilustrado na Figura 19,  $\delta_I$  e  $\delta_{II}$  podem ser determinados medindo o deslocamento relativo das grades na superfície de um corpo de prova com um microscópio óptico ou através da técnica de correlação de imagem digital DIC (Digital Image Correlation).



### 3.4.3 Integral de contorno J.

Tohgo e Ishii propuseram um método para determinar os valores da integral J, de corpos de prova trincados sob modo combinado de carregamento I e II em flexão, medindo a deformação local no plano da trinca [35]. Eles separaram a taxa total de liberação de energia ( $J_T$ ) em:

$$J_T = J_I + J_{II}$$

Onde  $J_I$  é a taxa de liberação de energia em modo de abertura:

$$J_I = \frac{2}{bB} \int_0^\theta M d\theta$$

e  $J_{II}$  é a taxa de liberação de energia no modo cisalhante:

$$J_{II} = J_{II}^e + J_{II}^p$$

Note-se que o cálculo de  $J_I$  traz implicitamente a soma das parcelas elástica e plástica, no entanto,  $J_{II}$  está composto de uma parcela elástica:

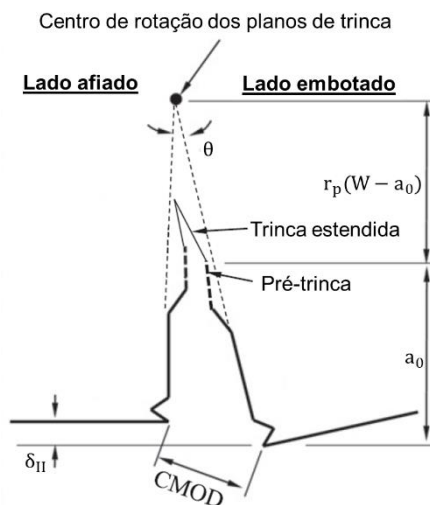
$$J_{II}^e = \frac{K_{II}^2}{E'} \quad E' = \begin{cases} E & \text{estado plano de tensão} \\ \frac{E}{1-\nu^2} & \text{estado plano de deformação} \end{cases}$$

e uma parcela plástica:

$$J_{II}^p = \frac{2}{bB} \left[ \int_0^{\delta_{II}} F_V d\delta_{II} - \frac{1}{2} F_V \delta_{II} \right]$$

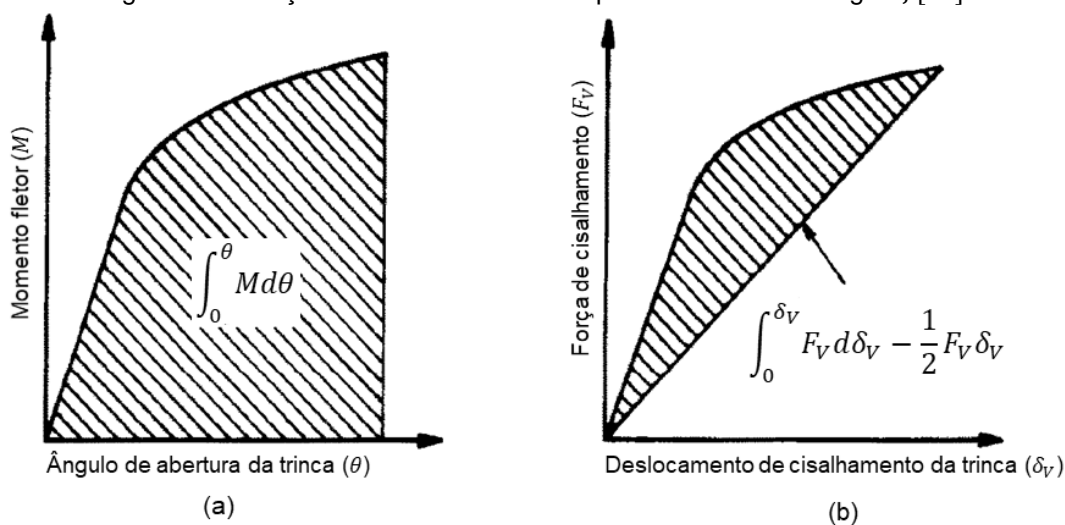
Nas equações anteriores,  $b$  corresponde ao ligamento remanescente do corpo de prova,  $B$  é a espessura do corpo de prova,  $M$  e  $F_V$  são o momento fletor e a força cortante aplicada no plano da trinca respectivamente,  $\theta$  representa o ângulo de abertura entre os planos da trinca (Figura 20),  $K_{II}$  denota o fator de intensidade de tensões no modo II,  $E$  e  $\nu$  são o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson respectivamente e  $\delta_{II}$  corresponde ao deslocamento cisalhante entre os planos da trinca (Figura 20).

Figura 20: parâmetros geométricos relacionados à abertura da trinca [30].



O termo  $\int_0^\theta M d\theta$  corresponde à área abaixo da curva  $M - \theta$  apresentada na Figura 21(a), e o termo  $\int_0^{\delta_{II}} F_V d\delta_{II} - 1/2 F_V \delta_{II}$  corresponde à área abaixo da curva  $F_V - \delta_V$  apresentada na Figura 21(b).

Figura 21: medições de área necessárias para o cálculo da integral J [35].



O método descrito para calcular a Integral J se baseia na medição precisa do ângulo de abertura ( $\theta$ ) e o deslocamento cisalhante entre os planos da trinca ( $\delta_{II}$ ). Tohgo e Ishii assumiram que o centro de rotação dos planos da trinca permanece fixo para corpos de prova com a mesma profundidade de trinca inicial sob diferentes modos combinados de carregamento [35]. O presente estudo segue uma suposição semelhante, assumindo que o centro de rotação depende apenas da profundidade inicial da trinca ( $a_0$ ), convertendo o ângulo de abertura ( $\theta$ ) em:

$$\theta = \frac{\text{CMOD}}{a_0 + r_p(W - a_0)}$$

Onde  $W$  corresponde à largura do corpo de prova e  $r_p$  é chamado de fator de rotação plástico, tendo um valor de 0.44 como sugerido na norma ASTM E1820 para corpos de prova de trinca simples sob flexão [36]. Substituindo a equação anterior no cálculo do  $J_I$ , é revelado que a taxa de liberação de energia do modo I ( $J_I$ ) opera na área sob a curva de carga ( $P$ ) versus o deslocamento da boca da trinca (CMOD).

## 4 ESTUDOS DE VERIFICAÇÃO.

Nesta seção são apresentados dois estudos de verificação que foram desenvolvidos para colocar em prática o conteúdo teórico apresentado nos capítulos anteriores. Basicamente, os estudos consistem em desenvolver modelos numéricos no software ABAQUS a fim de replicar resultados experimentais encontrados na literatura.

### 4.1 Modelo de dano.

Para obter uma boa correlação entre os resultados numéricos e experimentais, é necessário utilizar um bom modelo de dano que represente corretamente a falha do material. Cuenca e Sarzosa [37] e Santos e Sarzosa [38] desenvolveram um modelo numérico de dano dependente da triaxialidade de tensões e do ângulo de lode para o aço A285. O objetivo deste primeiro estudo de verificação é usar esse modelo numérico de dano para replicar a curva P-CMOD reportada por Ferreira et al., a partir de ensaios experimentais de flexão simétrica em quatro pontos no mesmo aço A285 [39].

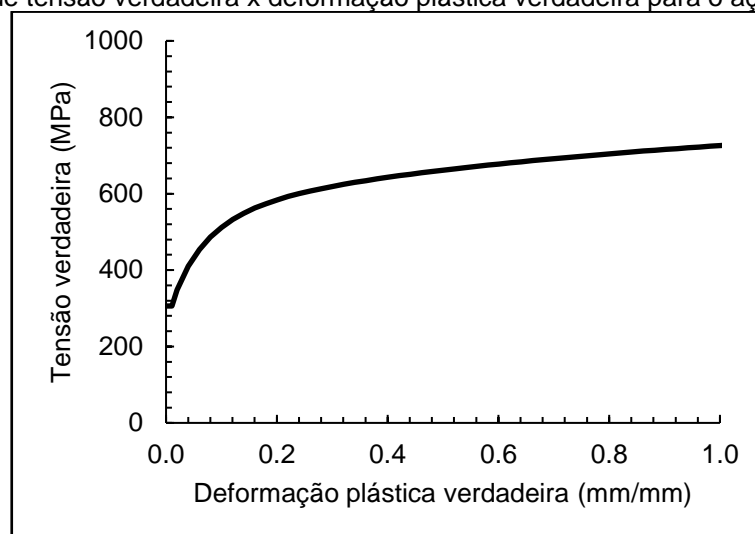
As propriedades elastoplásticas que serão utilizadas nas análises numéricas foram recuperadas do trabalho de Santos e Sarzosa [38], e são fornecidas na Tabela 1, onde  $\rho$  é a densidade,  $E$  o Módulo de Young,  $\sigma_y$  a tensão de escoamento,  $\sigma_u$  a tensão última e  $\nu$  o coeficiente de Poisson.

Tabela 1 – Propriedades elastoplásticas para o aço A285 grau C [38].

Material	$\rho$ (kg/mm <sup>3</sup> )	$E$ (MPa)	$\sigma_y$ (MPa)	$\sigma_u$ (MPa)	$\nu$
Aço A285 Grau C	$7.8 * 10^{-6}$	207000	306	478	0.3

A inserção das propriedades plásticas no Abaqus é realizada pelo fornecimento da curva tensão verdadeira-deformação plástica verdadeira do material. Esta curva também foi recuperada do trabalho de Santos e Sarzosa [38] e é apresentada na Figura 22.

Figura 22: curva de tensão verdadeira x deformação plástica verdadeira para o aço A285 grau C [38].



As dimensões do corpo de prova e os parâmetros utilizados são fornecidos na Tabela 2.

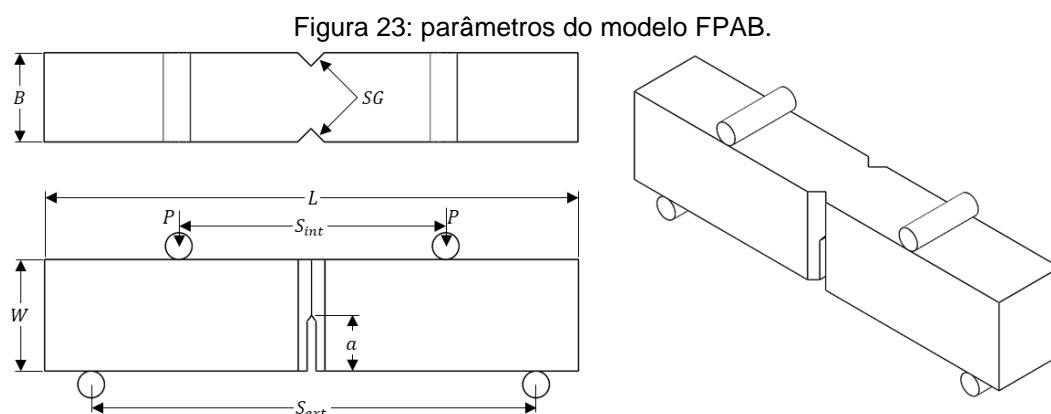


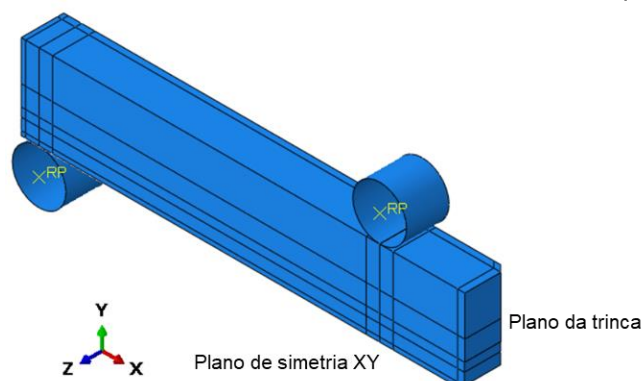
Tabela 2 – Valores utilizados no modelo FPAB.

Parâmetro	Valor
L	122mm
W	19mm
B	19mm
$a/W$	0.21
$S_{int}/W$	2
$S_{ext}/W$	6
SG	0.075W a 90°/por lado
P	15mm

Os entalhes laterais ou Side-Groove (SG) visam remover a região plana de tensões ao redor das laterais da trinca, o que influencia nos resultados de tenacidade à fratura. Este parâmetro é especificado com a profundidade e o ângulo do entalhe.

Como o ensaio de flexão simétrica tem dupla simetria, apenas um quarto de modelo foi desenvolvido (Figura 24). O plano da trinca tem uma condição de contorno que restringe o deslocamento ao longo do eixo X, o que representa a simetria em relação ao plano YZ. Da mesma forma, o plano de simetria XY tem uma condição de contorno que restringe o deslocamento ao longo do eixo Z. O rolete inferior representa o rolete de apoio e por tanto tem aplicada uma condição de contorno que restringe o deslocamento e rotações em todas as direções. O rolete superior representa o rolete de carga e tem aplicada uma condição de contorno que permite apenas o deslocamento na direção Y.

Figura 24: modelo numérico do ensaio de flexão simétrica em quatro pontos.



Uma vez que as condições de contorno são definidas, a próxima etapa é definir a malha. O processo de malha é a parte crucial da modelagem, pois a qualidade das malhas afeta diretamente os resultados dos cálculos numéricos. O procedimento de malha na ponta da trinca requer cuidados especiais e recomenda-se que seja uma malha refinada. Neste caso, foi utilizada uma malha de elementos meramente retangulares e a malha refinada que foi definida na ponta da trinca é apresentada na Figura 25.

Figura 25: malha definida na ponta da trinca.

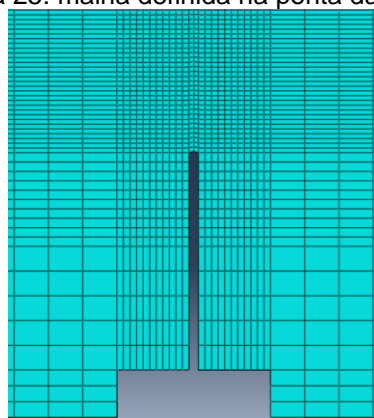
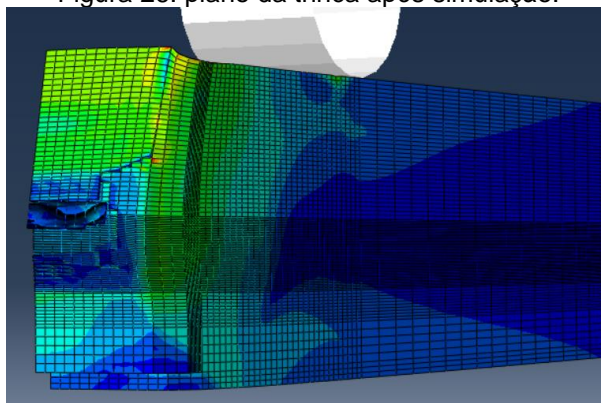
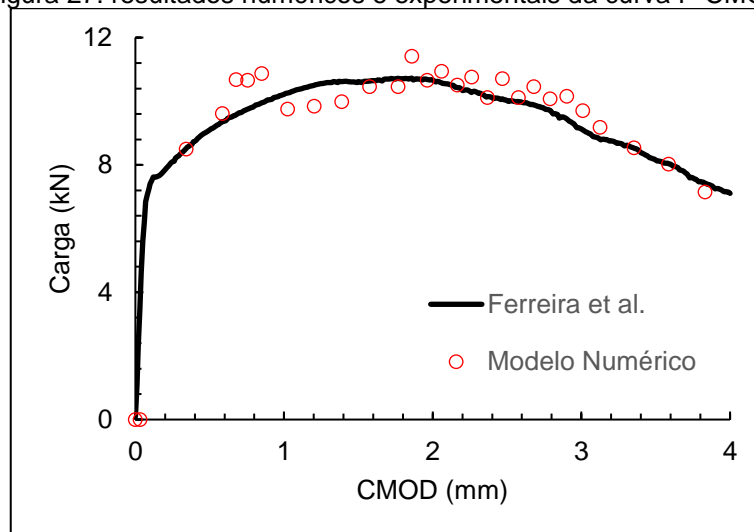


Figura 26: plano da trinca após simulação.



A Figura 26 mostra o resultado da simulação no plano da trinca. Note-se que graças ao critério de dano incluído, o modelo elimina elementos após a tensão aplicada atingir um valor crítico, ou seja, que o modelo utilizado simula a fratura dúctil. Finalmente, a curva P-CMOD obtida é apresentada na Figura 27.

Figura 27: resultados numéricos e experimentais da curva P-CMOD.



Comparando os resultados obtidos, pode-se concluir que este estudo de validação foi bem-sucedido.

#### 4.2 Determinação da tenacidade à fratura num ensaio FPAB.

Qian e Yang [30] determinaram o início da fratura dúctil da liga de alumínio 5083-H112, a partir de ensaios experimentais de flexão assimétrica em quatro pontos (FPAB). O objetivo deste segundo estudo de verificação é desenvolver um modelo numérico do ensaio FPAB que recupere os resultados obtidos experimentalmente por Qian e Yang [30]. Como não se conhece um modelo de dano estudado e calibrado para este material, o modelo numérico não apresentara

propagação da trinca, o que significa que o modelo irá parar assim que a fratura dúctil começar. Isto permite fazer sentido a este estudo de verificação, uma vez que os resultados que se pretendem replicar correspondem também ao início da fratura dúctil.

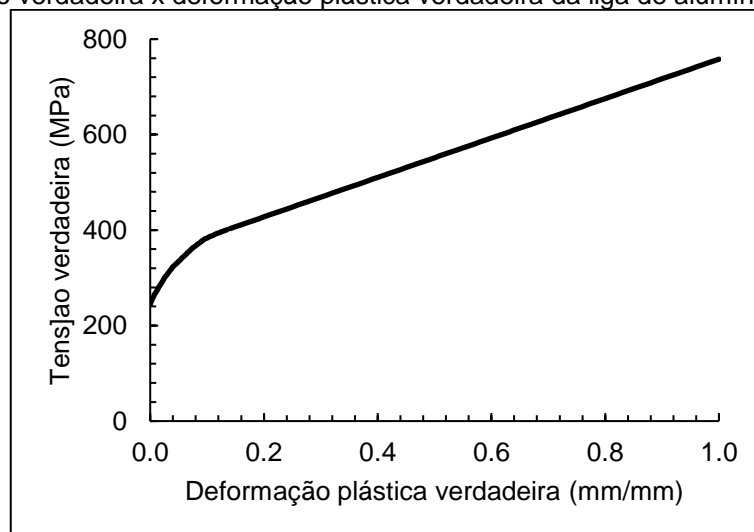
As propriedades elasto-plásticas que serão utilizadas nas análises numéricas foram recuperadas do trabalho de Qian e Yang [30], e são fornecidas na Tabela 3, onde  $E$  é o Módulo de Young,  $\sigma_y$  a tensão de escoamento,  $\sigma_u$  a tensão última e  $\nu$  o coeficiente de Poisson.

Tabela 3 – Propriedades elastoplásticas da liga de alumínio 5083-H112 [30].

Material	$E$ (MPa)	$\sigma_y$ (MPa)	$\sigma_u$ (MPa)	$\nu$
Liga de alumínio 5083-H112	69000	243	347	0.35

A inserção das propriedades plásticas no Abaqus é realizada pelo fornecimento da curva tensão verdadeira-deformação plástica verdadeira do material. Esta curva também foi recuperada do trabalho de Qian e Yang [30] e é apresentada na Figura 28.

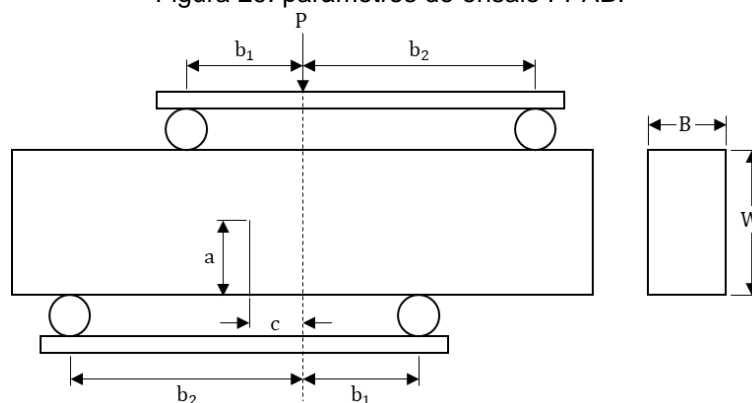
Figura 28: tensão verdadeira x deformação plástica verdadeira da liga de alumínio 5083-H112 [30].



Qian e Yang [30] reportaram o ângulo equivalente de modo combinado ( $\beta_{eq}$ ) para os corpos de prova e parâmetros fornecidos na Tabela 4, e reportaram o cálculo da Integral J para os corpos de prova e parâmetros fornecidos na Tabela 5.



Figura 29: parâmetros do ensaio FPAB.

Tabela 4 – Valores utilizados nos modelos FPAB dirigidos ao cálculo do  $\beta_{eq}$ .

Parâmetro	Valor
L	196mm
W	36mm
B	18,2mm
a/W	0.2
b <sub>1</sub>	40mm
b <sub>2</sub>	80mm
c	2mm, 4mm, 6mm, 7mm, 10mm, 15mm e 20mm
P	1N

Tabela 5 – Valores utilizados nos modelos FPAB dirigidos ao cálculo da integral J.

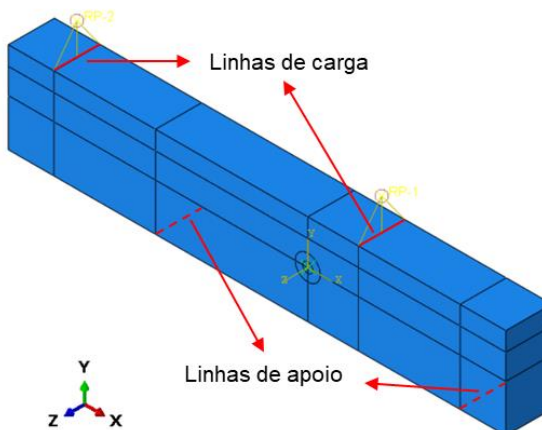
Modelo	L (mm)	B (mm)	W (mm)	a/W	b <sub>1</sub> (mm)	b <sub>2</sub> (mm)	c (mm)	P (kN)
M1	196	18.2	36	0.517	40	80	20	70
M6	196	18.2	36	0.525	40	80	0	140

Como se trata de um modelo em estado plano de deformação, se aplicou uma condição de contorno que restringe todo o modelo a se deslocar ao longo do eixo Z. Neste estudo, cilindros rígidos não foram usados para simular os pontos de carga e apoio, em vez disso, foram configurados pontos de referência diretamente no corpo de prova. A carga unitária foi aplicada por meio de pontos de referência acoplados cinematicamente às respectivas linhas de carga (Figura 30).

O acoplamento cinemático cria links entre os pontos de referência e as regiões de nós influenciadas que o usuário seleciona. Assim, as cargas concentradas que foram aplicadas nos pontos de referência, foram distribuídas às linhas de carga na parte superior do corpo de prova. Nos pontos de referência foi aplicada uma condição de contorno que permite o deslocamento apenas na direção

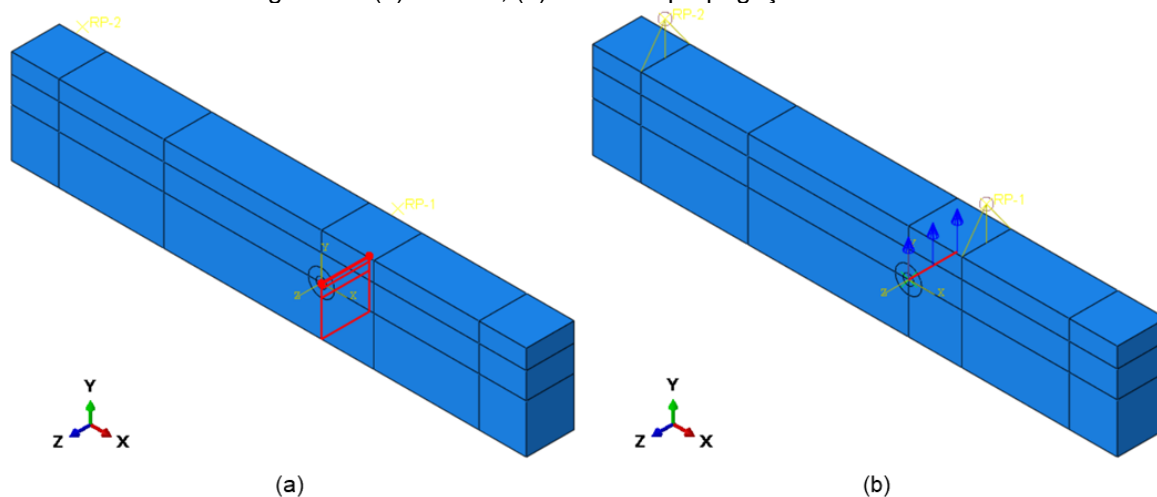
Y. Nas linhas de apoio foi aplicada uma condição de contorno que restringe o deslocamento na direção Y.

Figura 30: modelo numérico do ensaio FPAB.



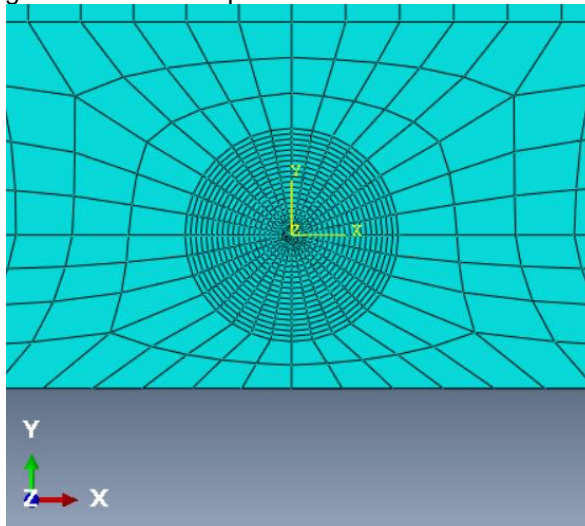
É importante mencionar que neste modelo numérico a trinca não foi definida explicitamente no corpo de prova, ao invés disso, foi definida implicitamente a partir da definição de uma costura e a frente de propagação da trinca. Isso são ferramentas de análise oferecidas pelo Abaqus para o estudo de corpos trincados. Em sua forma mais simples, a costura é uma aresta com espessura zero que tem a capacidade de se dividir sem resistência durante o carregamento. Abaqus estabelece nós duplicados com juntas sobrepostas ao longo da costura. A costura deve ser embutida numa parte sólida do corpo de prova, como um plano. Uma vez que a costura é definida, os procedimentos de modelagem de trincas podem ser executados. Na Figura 31 se ilustram a costura e o frente de propagação da trinca definidos no modelo numérico.

Figura 31: (a) costura; (b) frente de propagação da trinca.



Para definir a malha neste modelo numérico foi feita uma divisória cilíndrica ao redor da ponta da trinca (malha tipo “teia de aranha”). Um ponto importante no processo de malha em problemas de trinca é o tamanho da região integral do contorno da trinca. Regiões integrais de contorno incorretas que são excessivamente grandes ou pequenas podem levar a resultados imprecisos para os fatores de intensidade de tensões. O Abaqus sugere certas técnicas para o tamanho da região integral do contorno que estão relacionadas ao comprimento da trinca. Seguindo essas sugestões, o tamanho da região integral de contorno mais externa foi fixado em 5mm, e a região integral de contorno mais interna (primeira região integral de contorno) foi fixado em 0.5mm (Figura 32).

Figura 32: malha na ponta da trinca no modelo FPAB.



Do modelo numérico foram obtidos os fatores de intensidade de tensões para cada modo de falha ( $K_I$  e  $K_{II}$ ), e foram comparados com resultados calculados a partir das equações propostas por He e Hutchinson [25].

Tabela 6 - Resultados comparativos dos fatores de intensidade de tensões  $K_I$  e  $K_{II}$ .

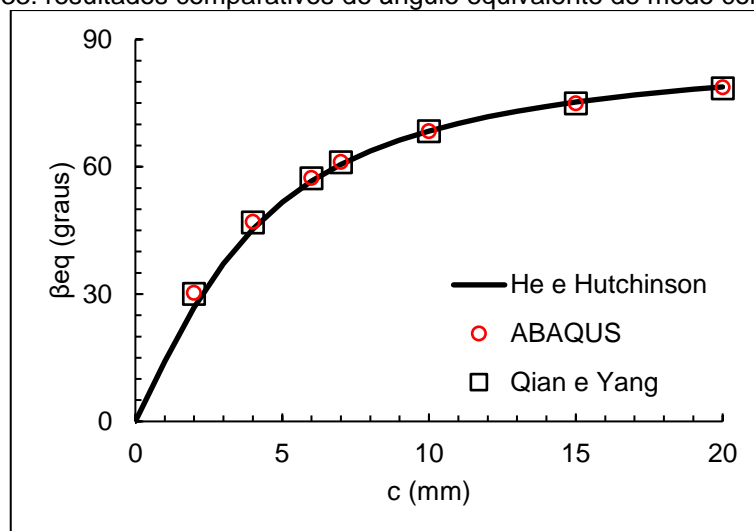
CONFIGURAÇÕES			ABAQUS		HE E HUTCHINSON	
$c$ (mm)	$b_1$ (mm)	$b_2$ (mm)	$K_I$ ( $\text{Pa}\sqrt{\text{m}}$ )	$K_{II}$ ( $\text{Pa}\sqrt{\text{m}}$ )	$K_I$ ( $\text{Pa}\sqrt{\text{m}}$ )	$K_{II}$ ( $\text{Pa}\sqrt{\text{m}}$ )
2			31.10	53.21	26.91	53.22
4			58.16	54.19	53.82	53.22
6			85.70	54.87	80.73	53.22
7	40	80	99.68	54.94	94.19	53.22
10			141.50	56.07	134.55	53.22
15			212.44	57.10	201.83	53.22
20			283.52	56.43	269.11	53.22

A partir dos valores obtidos de  $K_I$  e  $K_{II}$  é possível calcular o ângulo equivalente de modo combinado, que foi definido por Hallback e Nilsson da seguinte forma [40]:

$$\beta_{eq} = \tan^{-1} \left( \frac{K_I}{K_{II}} \right)$$

Por fim, a curva  $c$  versus  $\beta_{eq}$  obtida é apresentada na Figura 33.

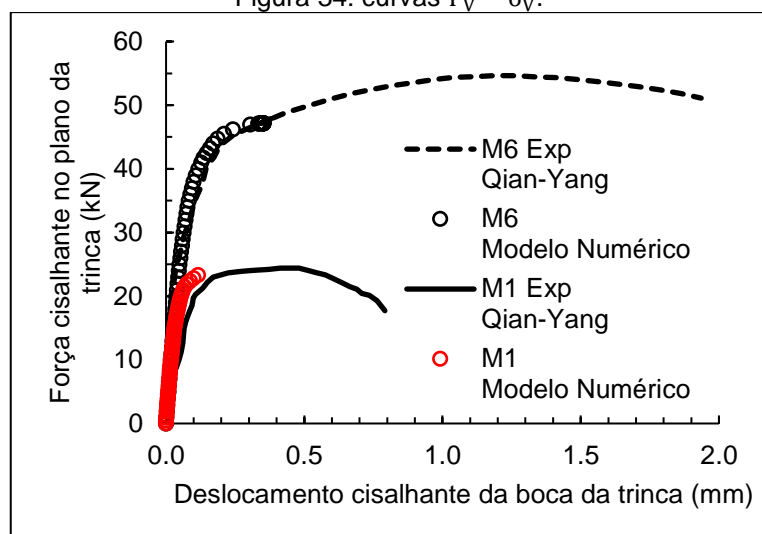
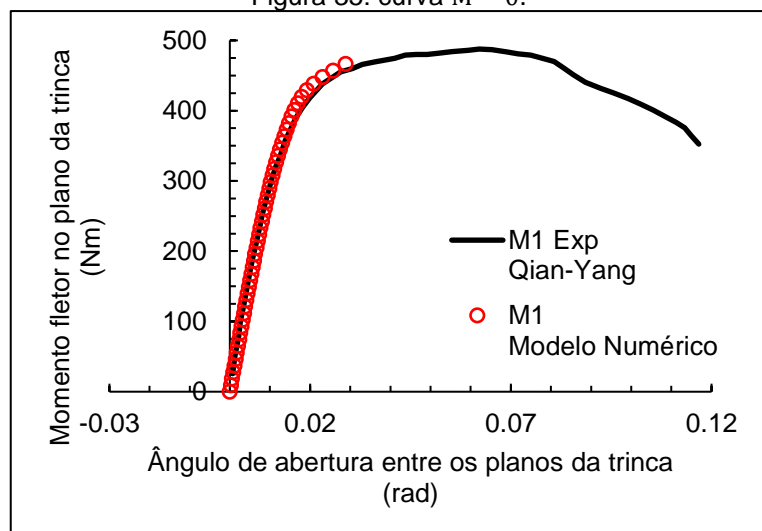
Figura 33: resultados comparativos do ângulo equivalente de modo combinado.



Pode-se concluir que o estudo de verificação direcionado ao cálculo dos fatores de intensidade de tensões foi um bom sucesso.

Para o estudo de verificação direcionado ao cálculo da integral  $J$ , foram obtidas a curva da força de cisalhamento que atua no plano da trinca ( $F_V$ ) versus o deslocamento cisalhante da boca da trinca ( $\delta_V$ ), apresentada na Figura 34, e a curva do momento fletor que atua no plano da trinca ( $M$ ) versus o ângulo de abertura entre os planos da trinca ( $\theta$ ), apresentada na Figura 35, as quais são de importância crucial para os cálculos da integral  $J$  em cada modo de carregamento  $J_I$  e  $J_{II}$ . No caso do modelo M6, dado que a distância entre a linha de carga e o plano da trinca ( $c$ ) é zero, apresenta momento fletor nulo no plano da trinca. Portanto, este caso terá apenas a curva  $F_V$  versus  $\delta_V$ .

É importante lembrar que o modelo numérico desenvolvido neste estudo de verificação não possui modelo de dano e, portanto, as curvas obtidas não apresentam propagação. Porém, o modelo numérico para quando se inicia a fratura dúctil, sendo este o ponto de interesse para o cálculo da Integral  $J$ .

Figura 34: curvas  $F_V - \delta_V$ .Figura 35: curva  $M - \theta$ .

Finalmente, os resultados obtidos da Integral J são apresentados na Tabela 7 e se conclui que o estudo de verificação foi bem sucedido.

Tabela 7 – Resultados obtidos da integral J.

Modelo	$J_{Tc}$	$J_{Tc}$
	(kJ/m <sup>2</sup> ) (Modelo Numérico)	(kJ/m <sup>2</sup> ) (QIAN – YANG)
M1	45.36	46.70
M6	65.19	61.30

## 5 PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL.

Como os estudos de verificação foram bem-sucedidos, foram executados ensaios experimentais de flexão assimétrica em quatro pontos, visando cumprir o objetivo proposto no presente trabalho: "...definir um protocolo experimental do ensaio de flexão assimétrica em quatro pontos para o cálculo da tenacidade à fratura em modos de carregamento combinados (I e II) em materiais metálicos."

Foram ensaiados 4 corpos de prova de aço A285 grau C, uma vez que existe um modelo numérico de dano devidamente verificado na seção 4.1. As propriedades elastoplásticas e a curva de tensão verdadeira-deformação plástica verdadeira deste material, foram devidamente relatadas na Tabela 1 e Figura 22 respectivamente.

As dimensões dos corpos de prova e os parâmetros ensaiados são fornecidos na Tabela 8. Foram executados dois ensaios numa configuração que maximiza o modo de carga II ( $c = 0$ ) e dois ensaios com modo combinado de carga I e II ( $c = 5\text{mm}$ ).

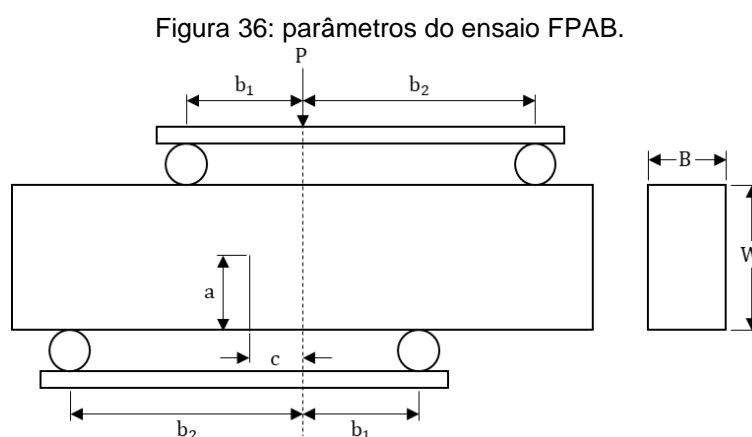
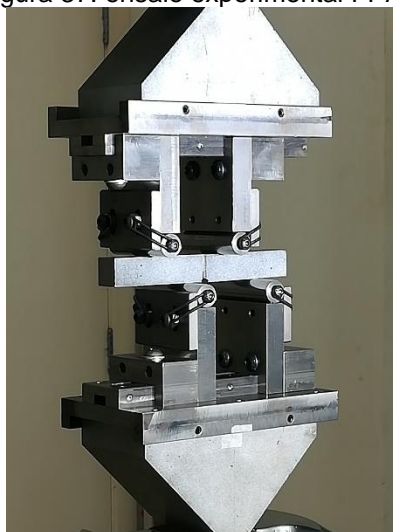


Tabela 8 – Valores ensaiados em FPAB.

Corpo de Prova	$c$ (mm)	$B$ (mm)	$W$ (mm)	$a/W$	$b_1$ (mm)	$b_2$ (mm)
CP01	5	19	19	0.55	15	45
CP02						
CP03						
CP04	0					

Todos os corpos de prova apresentam entalhe lateral ou Side-Groove (SG) de  $0,075W$  com ângulo de  $90^\circ$  em cada lado. Os ensaios foram executados no Laboratório de Mecânica Offshore da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

Figura 37: ensaio experimental FPAB.



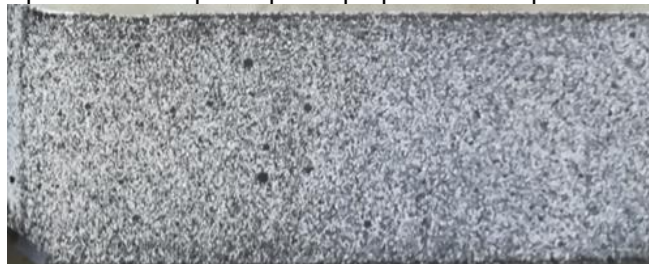
Para obter as medições do CMOD foi utilizado o método de Correlação Digital de Imagens (DIC – Digital Image Correlation). O método DIC é um método óptico preciso e sem contato usado para medir o deslocamento ou deformação de um elemento ou material estrutural submetido a carregamento externo. Consiste principalmente de uma ou mais câmeras digitais usadas para capturar imagens consecutivas da superfície da amostra, antes e durante o período de deformação. As imagens obtidas são posteriormente analisadas num software DIC especializado, é aplicada uma análise de correlação matemática e, por fim, é criado um conjunto de mapas de deslocamentos e deformações para toda a superfície da amostra. A medição de deslocamento ou deformação usando o método DIC requer das seguintes etapas consecutivas:

- Preparação da superfície da amostra analisada:

Inicialmente, a amostra analisada deve ser preparada aplicando-se um padrão único de pontos aleatórios em sua superfície. O padrão de pontos pode ser a textura natural da superfície, mas neste caso foi feito artificialmente pela aplicação de pontos aleatórios de tinta branca na superfície do corpo de prova (Figura 38).

O objetivo desta preparação é observar as mudanças na posição desses pontos durante o período de deformação.

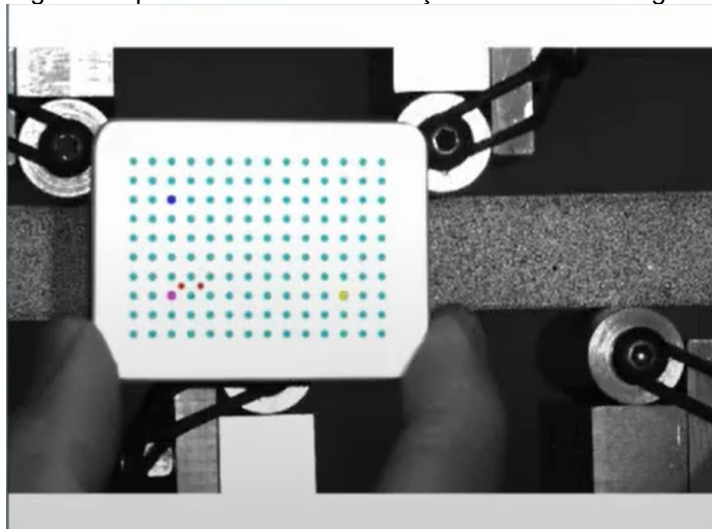
Figura 38: superfície do corpo de prova preparada ser aplicado o método DIC.



- Calibração das câmeras digitais usando o dispositivo de calibração do sistema DIC:

Antes de iniciar a captação das imagens da amostra analisada durante sua deformação, é necessária a calibração do posicionamento das câmeras digitais com instrumento apropriado. Neste caso, foi utilizada uma placa de calibração especial que acompanha o kit do procedimento DIC (Figura 39).

Figura 39: procedimento de calibração das câmeras digitais.



- Captura de imagens da superfície do objeto ou material examinado antes e durante seu movimento ou deformação:

Primeiramente, uma imagem é capturada antes da aplicação da carga (imagem de referência) e, em depois, uma série de imagens é capturada durante o período de deformação, aplicando a iluminação adequada ao corpo de prova ensaiado (Figura 40). Neste caso foi estipulado a captura de uma imagem por segundo.



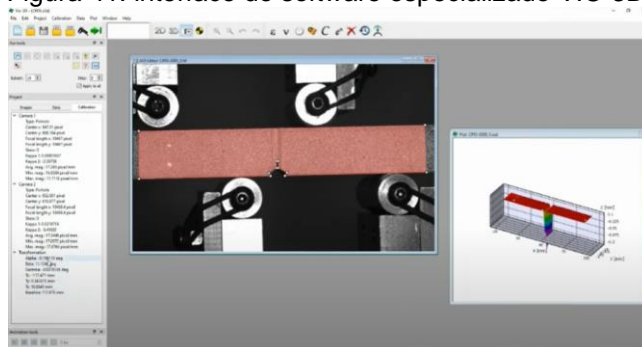
Figura 40: processo de captura de imagens.



- Análise das imagens capturadas usando um software DIC especializado:

Para realizar a análise de correlação matemática e posteriormente obter os resultados de interesse, foi utilizado o software especializado VIC-3D ().

Figura 41: interface do software especializado VIC-3D.



- Visualização dos resultados:

Finalmente, os pontos de interesse foram selecionados e a curva P-CMOD foi obtida para cada ensaio de flexão assimétrica em quatro pontos.

Figura 42: seleção dos pontos de interesse no software VIC-3D.

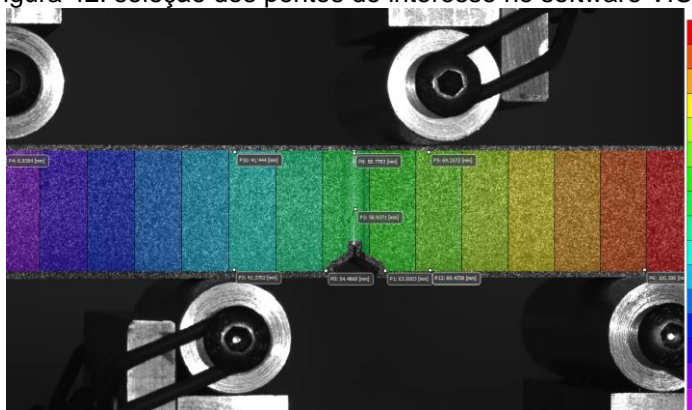
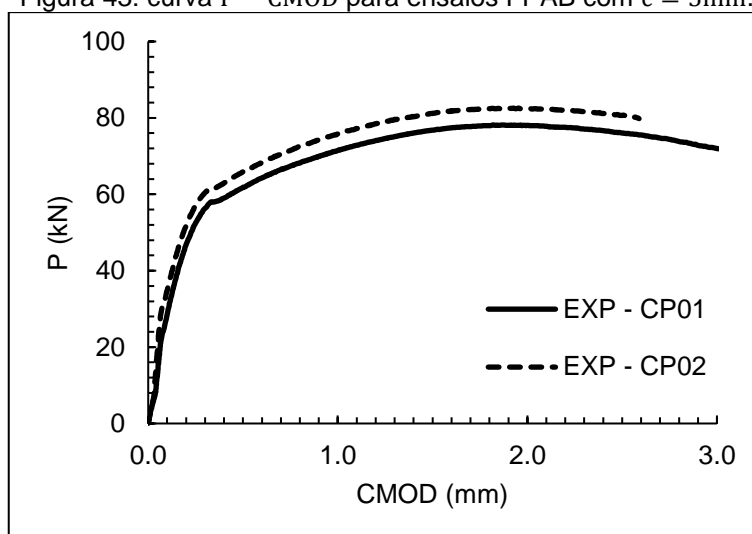
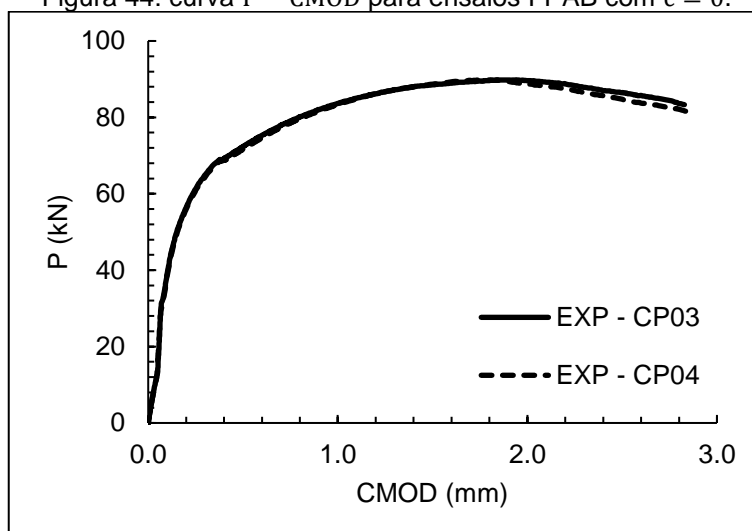


Figura 43: curva P – CMOD para ensaios FPAB com  $c = 5\text{mm}$ .Figura 44: curva P – CMOD para ensaios FPAB com  $c = 0$ .

Além disso, foi identificado um ponto com deformação unitária crescente que pode servir como curva de comparação com relação ao modelo numérico desenvolvido.

A diferença nas amplitudes dos carregamentos, apresentada nas Figura 43 e na

Figura 45, pode ser explicada pela diferença no comprimento da pré-trinca gerada antes ao ensaio de fratura, resultando em razões  $a/W$  ligeiramente divergentes. Os comprimentos das pré-trincas dos corpos de prova são indicados na Figura 47. As curvas da Figura 43 têm também uma diferença no instante em que a aplicação do carregamento foi interrompida.

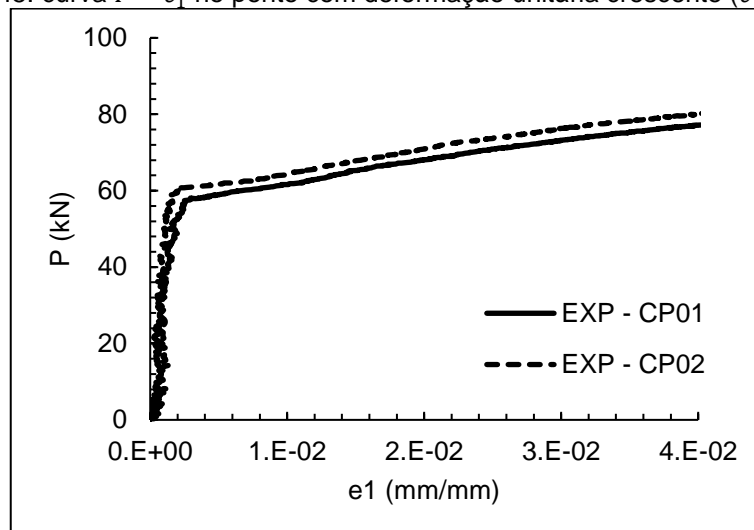
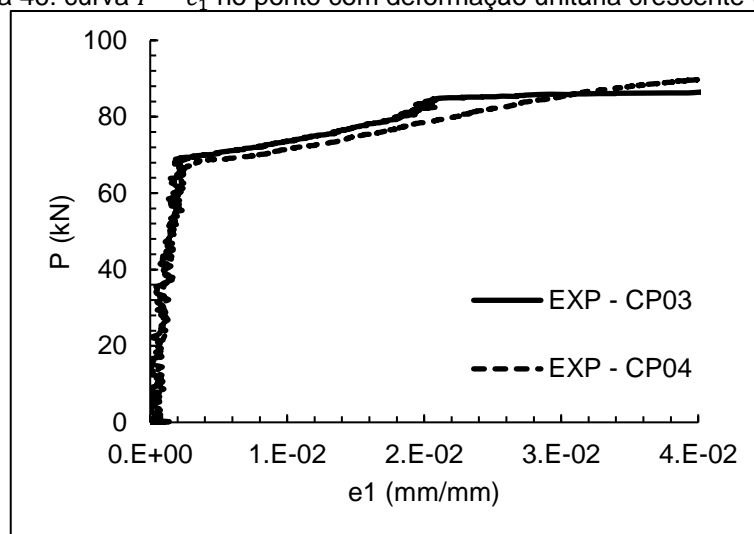
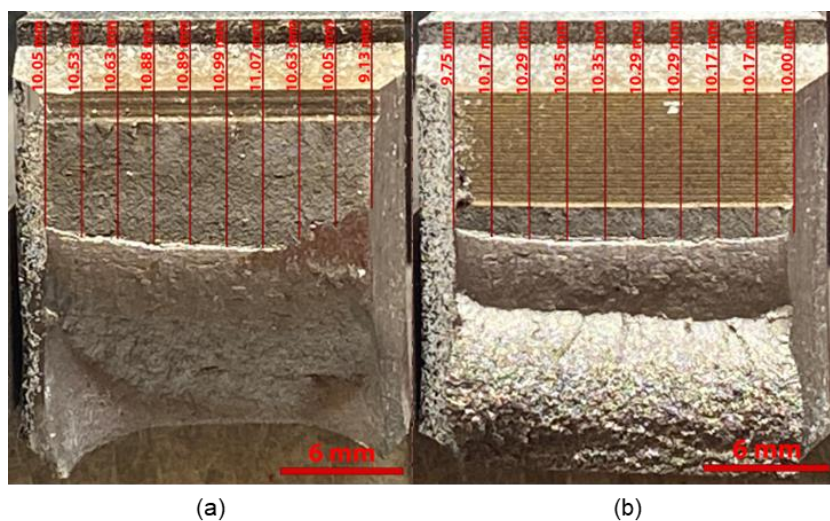
Figura 45: curva  $P - e_1$  no ponto com deformação unitária crescente ( $c = 5mm$ ).Figura 46: curva  $P - e_1$  no ponto com deformação unitária crescente ( $c = 0$ ).

Figura 47: pré-trincas dos corpos de prova (a) CP01 (b) CP02.



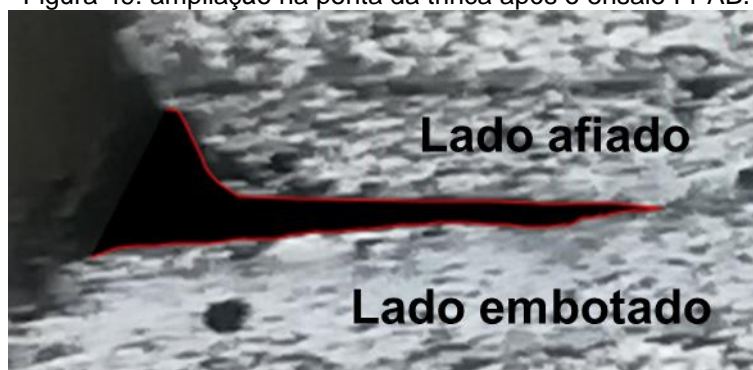
A Figura 48 ilustra o estado na área da trinca após o término do ensaio de flexão assimétrica em quatro pontos, onde o resultado de um modo combinado de carregamento pode ser facilmente observado.

Figura 48: corpo de prova deformado após o término do ensaio FPAB.



Ampliando ainda mais a ponta da trinca é possível observar o lado afiado e o lado embotado (Figura 49).

Figura 49: ampliação na ponta da trinca após o ensaio FPAB.

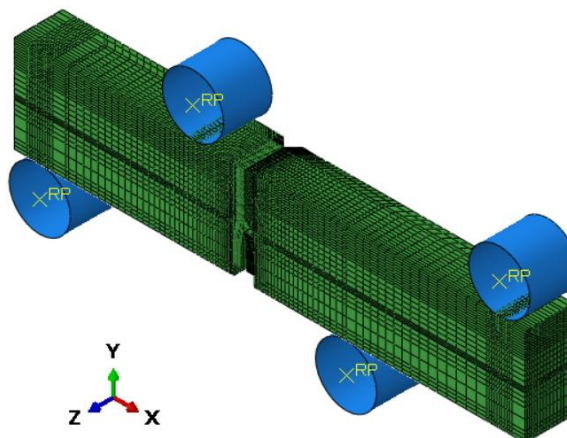




## 6 RESULTADOS NUMÉRICOS E DISCUSSÃO.

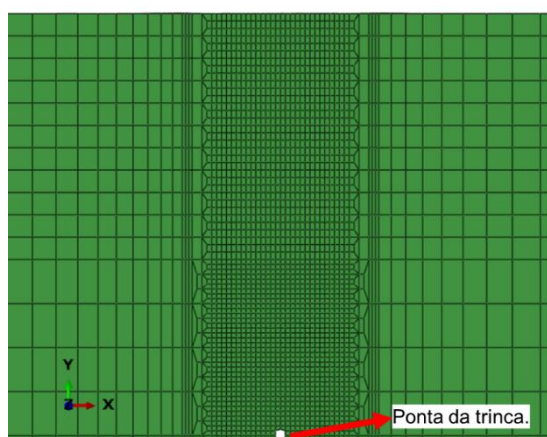
Mais uma vez, modelos numéricos foram desenvolvidos no Abaqus com o objetivo de recuperar os resultados obtidos experimentalmente. O modelo de dano desenvolvido por Cuenca e Sarzosa e Santos e Sarzosa foi utilizado [37] [38]. O modelo numérico desenvolvido é apresentado na Figura 50.

Figura 50: modelo numérico do ensaio FPAB.



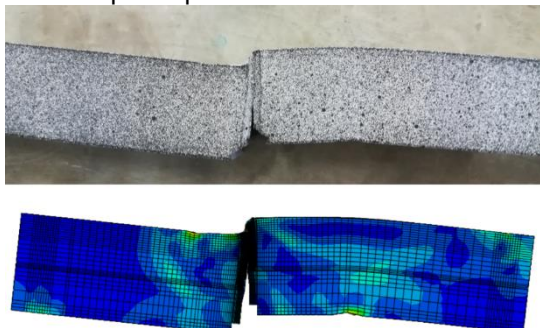
Neste caso foi feito um modelo com apenas uma simetria (plano XY). Os roletes da parte superior foram configurados como roletes de apoio e tem aplicada uma condição de contorno que restringe seu deslocamento e rotação em todas as direções. Os roletes da parte inferior foram configurados como roletes de carga e tem aplicada uma condição de contorno que permite eles se deslocar apenas na direção Y. O plano frontal XY do corpo de prova tem aplicado uma condição de contorno que restringe seu deslocamento na direção Z para representar a simetria no plano XY. Na parte traseira pode-se apreciar o entalhe lateral ou Side-Groove (SG). Na Figura 51 é apresentada a malha refinada utilizada na área da trinca.

Figura 51: malha refinada na área da trinca do modelo FPAB.



Na Figura 52 é apresentada uma comparação entre o corpo de prova real ensaiado experimentalmente e o corpo de prova desenvolvido no modelo numérico.

Figura 52: corpo de prova real versus modelo numérico.



Os ensaios foram executados no Laboratório de Mecânica Offshore da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

Figura 53: resultados comparativos da curva P – CMOD ( $c = 5\text{mm}$ ).

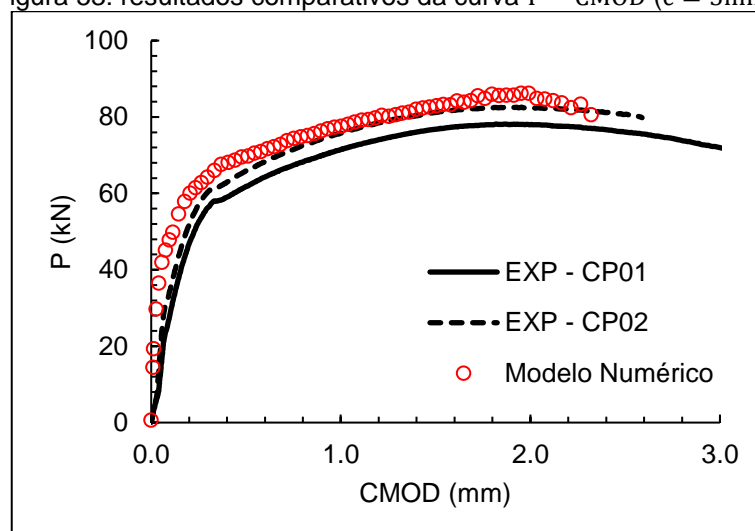


Figura 54: resultados comparativos da curva P – CMOD ( $c = 0$ ).

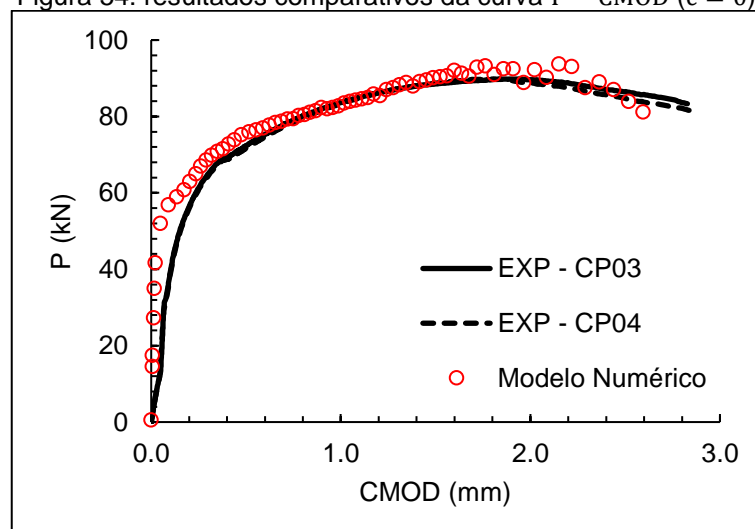
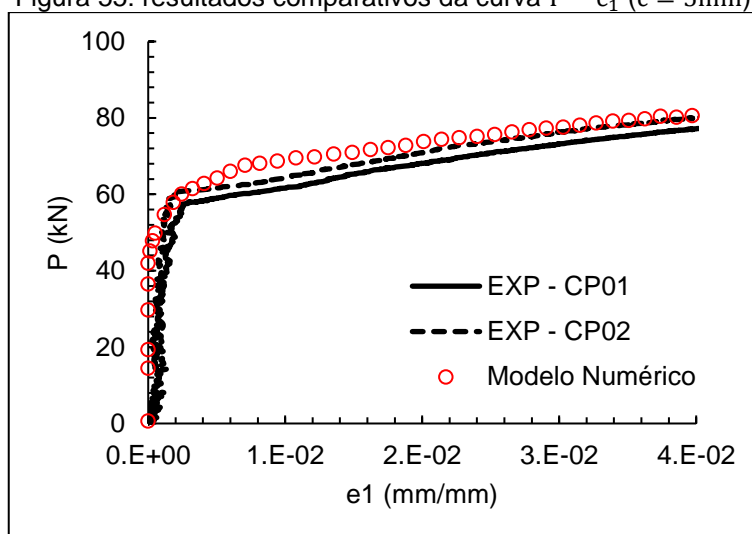
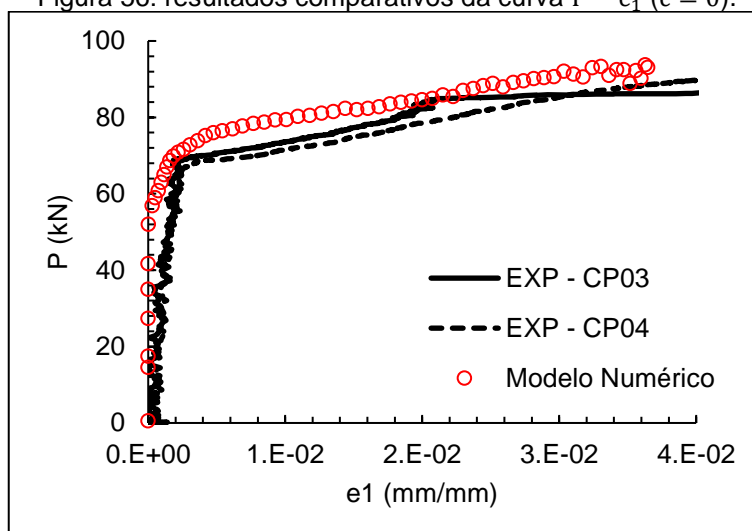


Figura 55: resultados comparativos da curva  $P - e_1$  ( $c = 5\text{mm}$ ).Figura 56: resultados comparativos da curva  $P - e_1$  ( $c = 0$ ).

Pode-se observar uma boa correlação entre os resultados experimentais e numéricos, concluindo-se que o modelo numérico desenvolvido recupera bastante bem as curvas obtidas experimentalmente.



## 7 CONCLUSÕES.

A determinação da tenacidade à fratura em modos combinados de carregamento (modo I e modo II), a partir de ensaios de flexão assimétrica em quatro pontos foi apresentada.

O modelo fenomenológico de dano desenvolvido por Cuenca e Sarzosa [37] e Santos e Sarzosa [38] foi utilizado e devidamente validado em modelos numéricos desenvolvidos com material ASTM A285 grau C.

A curva  $P - CMOD$  obtida experimentalmente por Ferreira et al. [39] foi recuperada a partir de um modelo numérico desenvolvido no Abaqus.

Os valores de Integral J obtidos experimentalmente por Qian e Yang [30] foram recuperados a partir de modelos numéricos desenvolvidos no Abaqus. As equações propostas por He e Hutchinson [25] para o cálculo do fator de intensidade de tensões em ensaios de flexão assimétrica em quatro pontos foram validadas. As equações propostas por Tohgo e Ishii [35] para o cálculo da Integral J em ensaios de flexão assimétrica em quatro pontos foram validadas.

Ensaio experimentais de flexão assimétrica em quatro pontos foram executados no material ASTM A285 grau C. Foi utilizado o método DIC para obter as curvas  $P - CMOD$  e  $P - e_1$ . Modelos numéricos foram desenvolvidos para recuperar os resultados obtidos experimentalmente.

Uma correlação muito boa foi obtida entre todos os resultados experimentais e numéricos comparados.

## REFERÊNCIAS.

- [1] British Institute, Guide to methods for assessing the acceptability of flaws in metallic structures, BS 7910, 2005.
- [2] American Petroleum Institute & American Society of Mechanical Engineers, Fitness-For-Service, API 579-1 / ASME FFS-1, 2007.
- [3] A. Patrick de Leão, C. Caldas Sardinha, M. Amaral e A. P. Santana, “Análise dos sistemas de Risers utilizados na produção de óleo em sistema submarinos,” Cadenos de graduação - Ciências exatas e tecnológicas, Aracajú, 2014.
- [4] C. E. Inglis, “Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners,” *Transactions of the Society of Naval Architects and Marine Engineers*, vol. 55, pp. 219-230, 1913.
- [5] A. A. Griffith, “The phenomena of rupture and flow in solids,” *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, vol. A221, pp. 163-198, 1920/1921.
- [6] A. A. Griffith, “The theory of rupture,” *Proceedings of the first International Congress for Applied Mechanics*, pp. 53-64, 1924.
- [7] G. R. Irwin, “Analysis of stress and strains near the end of a crack traversing a plate,” *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1957.
- [8] A. H. Cottrell, “Theoretical aspects of radiation damage and brittle fracture In steel pressure vessels,” *Steels for reactor pressure circuits: Report of a symposium held in London on 30 November-2 December 1960 by the Iron and Steel Institute for the British Nuclear Energy Conference*, p. 281, 1961.
- [9] A. A. Wells, “Unstable crack propagation in metals: cleavage and fast fracture,” *Proceedings of the Crack Propagation Symposium*, vol. 1, p. 84, 1963.
- [10] F. Erdogan e G. H. Sih, “On the Crack Extension in Plates Under Plane Loading and Transverse Shear,” *ASME Journal of Basic Engineering*, vol. 85, pp. 519-527, 1963.
- [11] M. A. Hussain e S. L. Pu, “Strain energy release rate for a crack under combined mode I and mode II,” em *Fracture Analysis: Proceedings of the 1973 National Symposium on Fracture Mechanics, Part II*, ASTM - STP 560, 1974, pp. 2-28.
- [12] G. C. Sih, “Strain energy density factor applied to mixed mode crack problems,” *International Journal of Fracture Mechanics*, vol. 10, pp. 305-321, 1974.
- [13] J. R. Rice, “A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks,” *Journal of Applied Mechanics*, vol. 35, pp. 379-386, 1968.
- [14] H. Tada, P. C. Paris e G. R. Irwin, *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, Hellertown: Del. Research Corporation, 1973.
- [15] D. P. Rooke e D. J. Cartwright, *Compendium of Stress Intensity Factors*, London: HMSO, 1976.
- [16] Y. Murakami, *Stress Intensity Factors Handbook*, Oxford: Pergamon Press, 1986.

- [17] T. L. Anderson, *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications*, 3rd ed., Boca Ratón: CRC Press, 2005.
- [18] H. M. Westergaard, "Stresses at a crack, size of the crack and the bending of reinforced concrete," *Proceedings*, vol. 30, pp. 93-102, 1933.
- [19] M. Williams, "On the stress distribution at the base of a stationary crack," *ASME Journal of Applied Mechanics*, vol. 24, pp. 109-114, 1957.
- [20] C. C. R. Brandão, "Análise da influência da tensão de cisalhamento de flexão na tenacidade à fratura do aço AISI 8630," Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2018.
- [21] M. Arrea e A. R. Ingraffea, "Mixed Mode Crack Propagation in Mortar and Concrete," Cornell University, Ithaca, 1982.
- [22] Z. P. Bazant e P. A. Pfeiffer, "Shear fracture tests of concrete," *Materials and Structures*, vol. 19, nº 2, pp. 111-121, 1986.
- [23] B. Barr e M. Derradi, "Numerical study of shear (mode II) type test specimen geometry," *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 35, nº 1/2/3, pp. 171-180, 1990.
- [24] T. Fett, "Stress intensity factors and weight functions for special crack problems," Forschungszentrum Karlsruhe, Karlsruhe, 1998.
- [25] M. Y. He e J. W. Hutchinson, "Asymmetric four-point crack specimen," *ASME Journal of Applied Mechanics*, vol. 67, nº 1, pp. 207-209, 2000.
- [26] H. Yoshihara, "Mode II fracture mechanics properties of wood measured by the asymmetric four-point bending test using a single-edge-notched specimen," *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 75, nº 16, pp. 4724-4739, 2008.
- [27] M. R. M. Aliha, M. R. Ayatollahi e B. Kharazi, "Mode II brittle fracture assessment using ASFPB specimen," *International Journal of Fracture*, vol. 159, nº 2, pp. 241-246, 2009.
- [28] M. R. Ayatollahi, M. Dehghany e Z. Kaveh, "Computation of V-notch shape factors in four-point bend specimen for fracture tests on brittle materials," *Archive of Applied Mechanics*, vol. 83, nº 3, pp. 345-356, 2013.
- [29] M. R. Ayatollahi e M. R. M. Aliha, "On the use of an anti-symmetric four-point bend specimen for mode II fracture experiments," *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, vol. 34, nº 11, pp. 898-907, 2011.
- [30] X. Qian e W. Yang, "Initiation of ductile fracture in mixed-mode I and II aluminum alloy specimens," *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 93, pp. 189-203, 2012.
- [31] U. Alkan, "Investigation of fracture toughness with four point asymmetric bending on rectangular rock specimens," Middle East Technical University, Ankara, 2015.
- [32] P. S. Timoshenko e J. M. Gere, *Theory of Elastic Stability*, Mineola: Dover Publications, 2013.
- [33] D. A. Apostol, D. M. Constantinescu, L. Marsavina e E. Linul, "Particularities of the asymmetric

four-point bending testing of polyurethane foams," *UPB Scientific Bulletin, Series D: Mechanical Engineering*, vol. 78, nº 2, pp. 57-66, 2016.

- [34] Y. Wang, W. Wang, B. Zhang e C.-Q. Li, "A review on mixed mode fracture of metals," *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 235, 2020.
- [35] K. Tohgo e H. Ishii, "Elastic-plastic fracture toughness test under mixed mode I-II loading," *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 41, pp. 529-540, 1992.
- [36] American Society for Testing and Materials, Standard Test Method for Measurement of Fracture Toughness, West Conshohocken: ASTM E1820-11, 2012.
- [37] C. A. Cuenca e D. F. Sarzosa Burgos, "Modeling ductile fracture using critical strain locus and softening law for a typical pressure vessel steel," *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, vol. 183, nº 104081, 2020.
- [38] I. S. Santos e D. F. Sarzosa Burgos, "Failure Limit State Investigation of Misaligned Welded Plates by Using a Damage Model-Based Upon Triaxiality and Lode Parameters," em *ASME 2020 Pressure Vessels & Piping Conference*, 2020.
- [39] D. A. Ferreira, R. Savioli e D. F. Sarzosa Burgos, "New formulation for fracture toughness characterization using four-point bend specimens," *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 241, nº 107409, 2021.
- [40] N. Hallback e F. Nilsson, "Mixed-mode I/II fracture behaviour of an aluminium alloy," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 42, nº 9, pp. 1345-1374, 1994.
- [41] A. C. Fischer-Cripps, *Introduction to Contact Mechanics*, New York: Springer, 2007.
- [42] R. H. Martin e B. D. Davidson, "Mode II fracture toughness evaluation using four point bend, end notched flexure test," *Plastics, Rubber and Composites Processing and Applications*, vol. 28, nº 8, pp. 401-406, 1999.
- [43] A. Krishnan e L. R. Xu, "A short-beam shear fracture approach to measure the mode II fracture toughness of materials with preferred interfaces," *International Journal of Fracture*, vol. 169, nº 1, pp. 15-25, 2010.