ESCOLA POLITÉCNICA DA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

ALEXIS ZAKARTCHOUK JUNIOR

# PROJETO DE UM OBSERVADOR PASSIVO NÃO-LINEAR E DE UM CONTROLADOR BACKSTEPPING PARA NAVIOS DE SUPERFÍCIE

São Paulo

2010

ALEXIS ZAKARTCHOUK JUNIOR

# PROJETO DE UM OBSERVADOR PASSIVO NÃO-LINEAR E DE UM CONTROLADOR BACKSTEPPING PARA NAVIOS DE SUPERFÍCIE

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Engenharia

São Paulo
2010

ALEXIS ZAKARTCHOUK JUNIOR

# PROJETO DE UM OBSERVADOR PASSIVO NÃO-LINEAR E DE UM CONTROLADOR BACKSTEPPING PARA NAVIOS DE SUPERFÍCIE

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Engenharia Naval e Oceânica

Orientador: Professor Doutor Helio Mitio Morishita

São Paulo
2010

**Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.**

**São Paulo, de fevereiro de 2010.**

**Assinatura do autor** _____

**Assinatura do orientador** _____

FICHA CATALOGRÁFICA

**Zakartchouk Junior, Alexis**
**Projeto de um observador passivo não-linear e de um controlador backstepping para navios de superfície / A. Zakartchouk Junior. -- ed.rev. -- São Paulo, 2010.**
**93 p.**

**Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Naval e Oceânica.**

**1. Sistemas de posicionamento dinâmico 2. Controle automático I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Naval e Oceânica II. t.**

# DEDICATÓRIA

Ao meu querido conjunto $\alpha$-limite,
Alexis e Walkíria.

# AGRADECIMENTOS

À Marinha do Brasil e ao Centro de Projetos de Navios pela oportunidade concedida para a obtenção deste título.

Ao Centro de Coordenação de Estudos da Marinha em São Paulo, em especial aos Capitães-de-Mar-e-Guerra (EN) Álvaro Rodrigues Fernandes, Sérgio Sarquis Attié e Joaquim Rocha dos Santos.

Ao Professor Doutor Helio Mitio Morishita, orientador e amigo.

Ao Capitão-de-Fragata (EN) Flávio Jun Edamatu, orientador e amigo desde os tempos da graduação.

Aos amigos do Departamento de Tecnologia de Combustíveis Nucleares do Centro Tecnológico da Marinha em São Paulo, especialmente os da Seção de Dinâmica e Controle.

Sobretudo ao bom Deus e a minha família.

E a todos que colaboraram direta ou indiretamente na execução deste trabalho.

*Se as circunstâncias me conduzirem, eu encontrarei o lugar onde a verdade está oculta, mesmo se estiver de fato oculta no âmago.*

*(Hamlet)*

# RESUMO

Sistemas de Posicionamento Dinâmico (SPD) são sistemas de controle que visam assegurar que um veículo oceânico se mantenha em uma determinada posição ou acompanhe uma trajetória de referência, mediante o emprego exclusivo de seus propulsores. Um SPD pode ser desmembrado em vários módulos específicos, com funções bem determinadas. Os módulos mais importantes são os sistemas de medição de posição e aproamento, o estimador de estados, o controlador e o algoritmo de alocação de empuxos. Atualmente, o Filtro de Kalman Estendido (FKE) é o estimador padrão para todos os SPD comercialmente disponíveis. Entretanto, o emprego do FKE implica em uma série de desvantagens. A sintonização do sistema é demorada e difícil, em função do elevado número de parâmetros de sintonização. Estabilidade assintótica global não pode ser conferida ao sistema. Adicionalmente, é necessário aplicar a técnica de programação de ganhos, uma vez que as equações cinemáticas de movimento do modelo devem ser linearizadas para aproximadamente 36 ângulos de guinada. A fim de eliminar estes óbices, o presente estudo propõe o desenvolvimento de um SPD totalmente não-linear, composto por um observador passivo não-linear e um controlador não-linear “backstepping”.

Palavras-chave: Observador não-linear. Backstepping. Posicionamento dinâmico.

# ABSTRACT

Dynamic Positioning Systems (DPS) are control systems used to maintain the vessel on a desired position or pre-defined path exclusively by means of active thrusters. A DPS can be separated into a set of dedicated modules with designated tasks. The most significant modules are the position and heading measurement systems, the state estimator, the controller and the thrust allocation algorithm. Nowadays, the Extended Kalman Filter (EKF) is the standard state estimator for all commercial DPS. However, the EKF technique presents several drawbacks. There is a large number of tuning parameters which requires a time-consuming tuning procedure. Global asymptotic stability cannot be assured to the system. Furthermore, it requires the use of a gain-scheduling technique, since the model is linearized about approximately 36 yaw angles due to the kinematics equations of motions. To solve these problems, this study proposes the development of a fully nonlinear DPS comprising a passive nonlinear observer and a nonlinear backstepping controller.

Keywords: Nonlinear observer. Backstepping. Dynamic positioning.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

# LISTA DE TABELAS

# LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

- B Boca
- D Pontal
- DGPS Differential Dynamic Positioning System
- DP Dynamic Positioning
- DPS Dynamic Positioning System
- EKF Extended Kalman Filter
- EPUSP Escola Politécnica da USP
- FFT Fast Fourier Transform
- FKE Filtro de Kalman Estendido
- FPSO Floating Production and Offloading System
- GLONASS Global Navigation Satellite System
- GPS Global Positioning System
- H Calado
- LQG Linear Quadrático Gaussiano
- Loa Comprimento Total
- Lpp Comprimento entre Perpendiculares
- MIMO Multiple Input Multiple Output
- PD Proporcional-Derivativo
- PI Proporcional-Integral
- PID Proporcional-Integral-Derivativo
- PM Pierson-Moskowitz
- RAO Response Amplitude Operator
- RF Rádio Freqüência
- ROV Remote Operated Vehicle
- SISO Single Input Single Output
- SPD Sistema de Posicionamento Dinâmico
- TPN Tanque de Provas Numérico
- UFRJ Universidade Federal do Rio de Janeiro
- USP Universidade de São Paulo

SUMÁRIO

# 1. INTRODUÇÃO

## 1.1 Definição do Problema

Sistemas de posicionamento dinâmico (SPD) são sistemas de controle que visam assegurar que um veículo oceânico se mantenha em uma determinada posição ou acompanhe uma trajetória de referência, mediante o emprego exclusivo de seus propulsores.

As perturbações ambientais que agem sobre o veículo induzem dois movimentos distintos. Os esforços de onda de primeira ordem induzem movimentos de alta freqüência enquanto que os esforços de onda de segunda ordem, ventos e correntes induzem movimentos estacionários e de baixa freqüência. O SPD deve contrabalançar somente estes movimentos, mantendo a posição média do veículo o mais próxima possível da posição desejada. A contraposição dos movimentos de alta freqüência deve ser evitada por demandar uma grande quantidade de energia e causar o desgaste prematuro do sistema propulsor e o aumento excessivo do consumo de combustível.

Na maioria das vezes, o SPD conta somente com medições ruidosas de posição e aproamento, corrompidas por efeitos de primeira ordem. Desta forma, para implementar a ação de controle, o sistema necessita de um observador de estados que forneça estimativas de posição, aproamento e velocidades livres de ruído e de componentes oscilatórias de alta freqüência. O ponto crucial no projeto do observador consiste em remover o ruído e as componentes de alta freqüência das estimativas, a fim de evitar que entrem na malha de controle e causem a modulação dos propulsores.

O emprego de veículos dotados de SPD se acentuou nos últimos anos em virtude da expansão da indústria de prospecção e produção de petróleo em alto mar. No contexto brasileiro, merece destaque a operação das unidades de produção e armazenamento FPSO, utilizadas em grande número pela Petrobrás. A operação de descarregamento destas unidades envolve o acoplamento de um navio aliviador, exigindo o posicionamento preciso de ambas as embarcações.

Atualmente, os SPD encontraram emprego em outros segmentos da indústria marítima, sendo utilizados em operações de lançamento e manutenção de dutos submarinos, suporte a mergulho, combate a incêndio, escavação submarina, dragagem, resgate submarino, acompanhamento de submersíveis tipo ROV, pesquisas, atracação automática em portos e manutenção de posição em fundeadouros e canais.

Em função desta grande diversidade de tarefas, os SPD equipam diversos tipos de navios como plataformas semi-submersíveis, plataformas para lançamento de foguetes em alto mar, rebocadores, embarcações de apoio, porta-containeres, barcaças, navios oceanográficos, navios hidrográficos, navios de passageiros, navios de guerra, além dos navios aliviadores e FPSO previamente mencionados. Este fato justifica a importância das pesquisas envolvendo SPD.

## 1.2 Revisão Bibliográfica

Os primeiros SPD surgiram no início da década de 60 como alternativa ao sistema de amarração, atendendo a uma demanda da indústria de prospecção e produção de petróleo que operava em águas cada vez mais profundas. Estes sistemas utilizavam controladores PID em série com filtros passa-baixa ou passa-banda (“notch”) para atenuar a modulação dos propulsores causada pelos efeitos de onda de primeira ordem. Porém, a utilização destes filtros prejudicava, em parte, o desempenho do controlador em função do atraso de fase que introduziam no sistema.

A partir da década de 80, técnicas mais avançadas foram propostas por Balchen; Jenssen e Saelid (1980) e Grimble; Patton e Wise (1980), baseadas no emprego do Filtro de Kalman Estendido (FKE) e do Controlador Linear Quadrático Gaussiano (LQG). No projeto do FKE, a perturbação decorrente do efeito de ondas de primeira ordem era modelada por meio de um sistema amortecido de segunda ordem, excitado por ruído branco. Esta abordagem permitiu desenvolver um estimador de estados capaz de filtrar as componentes de primeira ordem e estimar as componentes de baixa freqüência da posição/aproamento e da velocidade do veículo. Apesar dos inúmeros trabalhos acadêmicos envolvendo a utilização do

controlador LQG, a indústria optou pelo emprego combinado do FKE e do controlador PID, fato este que perdura até os dias atuais.

Diferentemente do ocidente, a Rússia adotou uma abordagem não-linear para os problemas de estimação e controle, baseada na teoria desenvolvida por A.M. Lyapunov no século XIX. No final da década de 70 foi desenvolvida a técnica de controle por modos deslizantes, conforme trabalho de Utkin (1976). A lei de controle era determinada de forma que as trajetórias do sistema “deslizassem” para uma região desejada do espaço de estados e ali permanecessem por tempo indefinido. Devido a sua robustez, esta técnica lidava muito bem com as incertezas de modelagem.

A abordagem não-linear ganhou um certo impulso no ocidente no final da década de 80, com o desenvolvimento da técnica de controle “backstepping”. Sua origem é um pouco incerta uma vez que a idéia central apareceu de forma implícita em diversos trabalhos simultâneos, porém sua formalização pode ser creditada a Krstic; Kanellakopoulos e Kokotovic (1995) que editaram o primeiro livro sobre o assunto.

A década de 90 foi marcada pelo aparecimento de novas linhas de pesquisa em posicionamento dinâmico, visando a aplicação de técnicas alternativas de controle. Neste contexto, merecem destaque os trabalhos de Katebi; Grimble e Zhang (1997) e de Donha e Tannuri (2001) na área de controle $H_\infty$. Nesta mesma época, surgiram também os primeiros trabalhos versando sobre o emprego de controladores não-lineares em SPD.

No final da década de 90, Fossen e Grovlen (1998) desenvolveram um sistema de controle composto por um observador não-linear e um controlador “backstepping”. A estabilidade assintótica global do conjunto foi demonstrada através do método direto de Lyapunov. Contudo, não foram incluídos na estrutura do observador os modelos dos efeitos de onda de primeira ordem e dos esforços ambientais. Apesar de seu cunho intrinsecamente teórico, este trabalho possui o mérito de ser a primeira tentativa de desenvolver um SPD totalmente não-linear.

As limitações do observador supra citado foram sanadas por Fossen e Strand (1999), que projetaram um observador passivo não-linear capaz de filtrar os efeitos de onda de primeira ordem e de estimar os esforços ambientais. A estabilidade assintótica global do observador foi provada através do método direto de Lyapunov e também através do conceito de passividade. O emprego deste conceito reduziu

significativamente o número de ganhos do observador, tornando o seu processo de sintonização simples e intuitivo. A descrição detalhada deste projeto é apresentada em Strand (1999), porém este trabalho não esclarece o método utilizado para a determinação dos ganhos do observador.

O primeiro sistema de controle totalmente não-linear foi desenvolvido por Aarset; Strand e Fossen (1998) que acoplaram o observador desenvolvido por Fossen e Strand (1999) a um controlador “backstepping”. Além da alimentação em avanço dos esforços ambientais, a lei de controle incorporava um termo integral adicional, destinado a melhorar o desempenho do sistema. A estabilidade do conjunto foi demonstrada através do método direto de Lyapunov.

Uma alternativa ao controlador “backstepping” foi apresentada por Loria; Fossen e Panteley (2000) que utilizaram o observador desenvolvido por Fossen e Strand (1999) acoplado a um controlador não-linear PD, com alimentação em avanço dos esforços ambientais. A estabilidade do conjunto foi demonstrada através da validade do princípio da separação. Cabe mencionar que esta técnica possui limitada robustez quanto à incerteza paramétrica, requerendo um conhecimento preciso da dinâmica do navio.

Utilizando o conceito de posicionamento ótimo no ambiente, Fossen e Strand (2001) desenvolveram um sistema de posicionamento dinâmico que alinhava o veículo com a resultante dos esforços ambientais de forma a anular o momento de guinada. O objetivo principal deste projeto era o de minimizar o consumo de combustível durante operações de manutenção de posição de longa duração. Neste trabalho, os autores utilizaram um controlador “backstepping” e deixaram em aberto a possibilidade de se utilizar o observador desenvolvido por Fossen e Strand (1999) ou um FKE.

Baseado em Slotine e Li (1991), Tannuri (2002) desenvolveu um controlador para posicionamento dinâmico utilizando a técnica de modos deslizantes. Neste trabalho, o autor apresenta um modo de controle específico para as operações com liberdade de aproamento realizadas na Bacia de Campos, onde é comum a incidência de agentes ambientais em direções não alinhadas.

Em sua tese de doutorado, Lindegaard (2003) estendeu o trabalho desenvolvido por Loria; Fossen e Panteley (2000) ao utilizar um controlador não-linear PID realimentado com medições de aceleração. Destaca-se neste trabalho o emprego de um observador não-linear dotado de um modelo de ondas de quarta

ordem. A estabilidade do sistema em malha fechada foi demonstrada através da validade do princípio da separação.

Utilizando a formulação de Fossen e Grovlen (1998), Santos (2005) desenvolveu um simulador de manobras em tempo real com sistema de posicionamento dinâmico, obtendo bons resultados.

O emprego da técnica “backstepping” não se limitou a aplicações de posicionamento dinâmico. Witkowska; Tomera e Smierzchalski (2007) desenvolveram um piloto automático de navio através desta técnica e efetuaram um estudo comparativo de desempenho entre o controlador obtido e o controlador clássico PD. Os autores constataram que o controlador “backstepping” é menos robusto que o controlador PD, e que o seu desempenho depende fortemente da precisão do modelo matemático utilizado no projeto. Cabe mencionar que ambos os controladores foram sintonizados através de algoritmo genético.

Todas as referências supra mencionadas partem do princípio de que os parâmetros do espectro de ondas permanecem inalterados durante a operação do veículo, sendo conhecidos a priori, o que é uma hipótese completamente dissociada da realidade.

No trabalho de Torsetnes, Jouffroy e Fossen (2004), detalhado na dissertação de Torsetnes (2004), os autores utilizaram o observador desenvolvido por Fossen e Strand (1999) acoplado a um controlador não-linear PID. Neste trabalho, as freqüências modais eram identificadas externamente ao observador, através de métodos de processamento digital de sinais não explicitados pelo autor. Estas freqüências eram utilizadas para atualizar os ganhos do observador relativos ao modelo de ondas de primeira ordem. A estabilidade do sistema em malha fechada foi demonstrada utilizando conceitos da teoria da contração.

Diversos trabalhos recentes têm dedicado especial atenção ao problema da estimação dos parâmetros do espectro de onda, necessários à atualização dos ganhos do observador. Nguyen; Sorensen e Quek (2007) desenvolveram um sistema onde a freqüência modal era estimada off-line por meio da análise espectral (FFT) das medições dos movimentos de avanço, deriva e guinada. Neste sistema híbrido, um módulo supervisor selecionava a combinação observador/controlador mais apropriada, dentre as várias existentes, em função do estado de mar observado.

Em sua tese de doutorado, Santiago (2008) desenvolveu um observador passivo não-linear adaptativo capaz de identificar, em tempo real, os parâmetros espectrais necessários à atualização do modelo de ondas de primeira ordem. Em função desta característica, o observador quase não necessita ser sintonizado ou ajustado durante a operação do veículo.

No Brasil, merecem destaque os trabalhos desenvolvidos em conjunto pela Escola Politécnica da USP (EPUSP) e a Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Com o apoio da Petrobrás, estas instituições estão investindo continuamente no aprimoramento tecnológico dos tanques de prova onde são conduzidos ensaios de SPD. O aparato experimental existente no tanque de provas da EPUSP pode ser considerado uma bancada de teste de controladores de SPD, sendo descrito em detalhes em Morishita; Tannuri e Lago (2006), Lago (2008) e Morishita *et al.* (2009).

Este aparato subsidiou a realização de diversos projetos. Tannuri e Morishita (2006) ensaiaram um sistema composto por FKE e controlador PD e utilizaram os resultados experimentais para pré-validar o simulador dinâmico conhecido como Tanque de Provas Numérico (TPN). Utilizando o mesmo aparato, Agostinho (2009) implementou e testou um controlador de modos deslizantes.

Em um estudo numérico, Zakartchouk Junior e Morishita (2009a) constataram a possibilidade de usar o observador passivo não-linear proposto por Fossen e Strand (1999) como alternativa ao FKE. Em posse deste resultado e utilizando o aparato experimental supra citado, Zakartchouk Junior e Morishita (2009b) implementaram e testaram um SPD totalmente não-linear, composto pelo observador passivo não-linear e por um controlador “backstepping”.

## 1.3 Objetivos

Os principais módulos que compõem um SPD são os sistemas de medição de posição e aproamento, o observador de estados, o controlador e o algoritmo de alocação de empuxos. Os objetivos do presente trabalho são os seguintes:

**a) Projetar um observador de estados não-linear:** O observador será projetado com base no formalismo da passividade, de forma a assegurar sua

estabilidade assintótica global. O observador deverá fornecer estimativas de posição, aproamento e velocidades livres de ruído e de efeitos de primeira ordem. Adicionalmente, deverá estimar os esforços ambientais de natureza lenta que agem sobre o navio. A estabilidade do observador será provada através do método direto de Lyapunov e através do conceito de passividade.

**b) Projetar um controlador não-linear:** O controlador será projetado através da técnica “backstepping”. Além de estabilizar o sistema na posição desejada, o controlador deverá funcionar como um piloto automático para manobras em baixa velocidade. A estabilidade do sistema em malha fechada (observador e controlador acoplados) será provada através do método direto de Lyapunov.

**c) Avaliar numericamente e experimentalmente o sistema projetado:** Nesta etapa, as teorias desenvolvidas neste trabalho serão validadas através de simulações numéricas e de ensaios experimentais.

## 1.4 Justificativa para a Abordagem Não-Linear do Problema

A maioria dos SPD disponíveis no mercado utiliza o FKE para resolver os problemas de estimação e filtragem de onda. Porém, sua implementação demanda a linearização das equações cinemáticas do movimento em torno de ângulos de guinada pré-definidos, tipicamente 36 pontos de operação espaçados de 10°, a fim de abranger todo o envelope de aproamento, gerando 36 conjuntos de ganho. Durante a operação do navio, o conjunto de ganhos do observador é selecionado automaticamente, em tempo real, em função do ângulo de aproamento do navio (técnica de programação de ganhos).

O processo de sintonização do filtro é demorado e difícil, pois os ganhos são numerosos e na maioria das vezes não possuem relação com os parâmetros físicos do problema, sendo determinados por tentativa e erro ao longo de inúmeras provas de mar. Adicionalmente, o sistema é, no máximo, localmente assintoticamente estável.

O emprego de um observador passivo não-linear visa eliminar estes óbices. A partir do conceito de passividade, demonstra-se que o observador necessita de um único conjunto reduzido de ganhos para assegurar sua estabilidade em todo o

espaço de estados (estabilidade assintótica global). Adicionalmente, as regras de sintonização podem ser obtidas analiticamente. Estes dois fatos conferem robustez, eficiência e simplicidade ao sistema, abreviando significativamente o processo de sintonização.

O emprego do observador passivo não-linear abre também caminho para o desenvolvimento de novas técnicas de controle não-linear, mais alinhadas com a estrutura física dos sistemas como “backstepping”, ”forwarding”, “feedback linearization” e modos deslizantes.

## 1.5 Descrição dos Capítulos

O capítulo 2 apresenta os fundamentos relativos à dinâmica de sistemas não-lineares, introduzindo o método direto de Lyapunov, o conceito de passividade e os fundamentos da teoria de estimação não-linear e da técnica de controle “backstepping”.

O capítulo 3 discute a modelagem matemática do navio, dos esforços ambientais de natureza lenta, dos efeitos de onda de primeira ordem, dos esforços de controle e do sistema de medição.

O capítulo 4 apresenta o projeto do observador não-linear e o seu procedimento de sintonização. Prova-se que o observador é passivo e globalmente assintoticamente estável.

O capítulo 5 apresenta o projeto do controlador “backstepping” e o seu procedimento de sintonização. Prova-se que o sistema observador-controlador é globalmente assintoticamente estável.

O capítulo 6 apresenta os resultados numéricos das simulações relativas ao exemplo de aplicação da teoria desenvolvida.

O capítulo 7 apresenta os resultados experimentais relativos a implementação do sistema no tanque de provas.

O capítulo 8 consolida as conclusões obtidas no decorrer do trabalho e indica os pontos que precisam ser aprofundados em trabalhos futuros.

O capítulo 9 apresenta as referências bibliográficas utilizadas no trabalho.

# 2. FUNDAMENTOS DE SISTEMAS NÃO-LINEARES

## 2.1 Objetivo

O objetivo deste capítulo é apresentar os fundamentos da teoria de sistemas não-lineares, necessários à compreensão do presente trabalho. Serão abordados o método direto de Lyapunov, o conceito de passividade, os aspectos da teoria de estimação não-linear e a técnica de controle “backstepping”.

O método direto de Lyapunov será utilizado na obtenção da lei de controle e nas demonstrações de estabilidade do observador e do controlador. A propriedade de passividade será utilizada na demonstração de estabilidade do observador. Os demais tópicos serão utilizados na construção do observador e do controlador.

## 2.2 Método Direto de Lyapunov

Um sistema composto por $n$ equações diferenciais de primeira ordem pode ser representado pela seguinte equação vetorial:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}) \tag{2.1}$$

O vetor $\dot{\vec{x}} \in \Re^n$ é o vetor de estados e $\vec{f} \in \Re^n$ é o vetor que contém o campo de velocidades deste sistema, conforme definição de Monteiro (2006). Por simplicidade de notação, a equação (2.1) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.2}$$

Freqüentemente, é impossível obter soluções analíticas exatas de equações diferenciais não-lineares. Porém, sob determinadas condições, um sistema não-linear pode ser aproximado, em torno de um ponto de equilíbrio, por um sistema linear. Tal procedimento é conhecido como linearização. Estudando a aproximação linear, pode-se, às vezes, prever o comportamento das soluções do sistema não-linear que se iniciam na vizinhança desse ponto e avaliar a sua estabilidade. Porém,

de acordo com o teorema de Hartman-Grobman, a estabilidade de um ponto de equilíbrio não pode ser determinada examinando os autovalores da matriz jacobiana do sistema linear associado, quando pelo menos um dos autovalores possuir parte real nula. Nesse caso, um caminho para descobrir a estabilidade do ponto de equilíbrio não hiperbólico envolve o uso da teoria da variedade central, desenvolvida em meados do século XX.

O objetivo do presente item é apresentar o método direto de Lyapunov, pelo qual, às vezes, se consegue determinar a estabilidade de um ponto de equilíbrio, sem a necessidade de se realizar a linearização ou de se empregar a teoria da variedade central. Pelo método direto de Lyapunov, obtém-se um conjunto de condições iniciais cujas trajetórias convergem para o ponto de equilíbrio, caso ele seja assintoticamente estável. Assim, tem-se uma idéia da extensão da sua bacia de atração.

No final do século XIX, A.M. Lyapunov elaborou um método para determinar a estabilidade de um ponto de equilíbrio que dispensa a linearização e o cálculo de autovalores; trabalha-se diretamente com as equações originais. Por isto, é chamado de método direto. Lyapunov partiu do seguinte fato: se a energia total (função escalar das variáveis de estado) de um sistema físico decresce monotonicamente com o tempo e apresenta um mínimo local num ponto de equilíbrio, então tal ponto é assintoticamente estável. Embora simples e de extrema utilidade, esta teoria foi relegada no ocidente até a década de 60, quando sua importância foi de fato entendida.

A proposta de analisar a estabilidade de uma solução de equilíbrio, usando uma função escalar das variáveis de estado, foi generalizada por Lyapunov em 1892, o que permitiu estudar estabilidade num contexto mais amplo do que aquele que envolve considerações de energia.

Seja o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \tag{2.3}$$

Admita que o par $(x_1(t), x_2(t))$ seja a solução desse sistema, a partir da condição inicial $(x_1(0), x_2(0))$. Assuma que $V(x_1, x_2)$ seja uma função contínua das

variáveis de estado $(x_1, x_2)$ e que essa função tenha derivadas parciais contínuas numa região do espaço de estados que contém a origem, que é solução de equilíbrio de (2.3). Conforme o sistema evolui, $(x_1, x_2)$ percorre um caminho *C* no espaço de estados. Essa trajetória é dada pelas expressões parametrizadas $x_1 = x_1(t)$ e $x_2 = x_2(t)$. Portanto, $V(x_1, x_2)$ é uma função implícita do tempo $t$ ao longo de *C*, e sua taxa de variação temporal vale:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1(x_1, x_2) + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2(x_1, x_2) \tag{2.4}$$

Essa fórmula é a base do método direto de Lyapunov. Suponha que $V(x_1, x_2) : B \to \Re$ seja contínua e tenha derivadas parciais contínuas em uma região $B$ do espaço de estados, centrada na origem. Se $V(0,0) = 0$, então $V$ é classificada como:

- *Localmente definida positiva*, se $V(x_1, x_2) > 0$ para $(x_1, x_2) \neq (0,0) \in B$.
- *Localmente semidefinida positiva*, se $V(x_1, x_2) \geq 0$ para $(x_1, x_2) \neq (0,0) \in B$.
- *Indefinida*, se $V(x_1, x_2)$ assume valores positivos e negativos para qualquer vizinhança $(0,0)$.

Se a região $B$ corresponde a todo o espaço de estados ($B = \Re^2$), então troca-se a palavra *localmente* pela palavra *globalmente* nas definições acima.

Segundo Lyapunov, $(0,0)$ é localmente assintoticamente estável se existe uma função $V(x_1, x_2)$ contínua e com derivadas parciais contínuas, localmente definida positiva, tal que $-dV/dt$ seja também localmente definida positiva. Note que a condição $-dV/dt > 0$, ou $dV/dt < 0$, implica que $V$ diminui com o passar do tempo. Como o mínimo de $V$ coincide com o ponto de equilíbrio $(x_1^*, x_2^*) = (0,0)$, então tende-se para este ponto. Em outras palavras, tal ponto é, de fato, localmente assintoticamente estável, como mostra a Figura 2.1a.

De acordo com Lyapunov se $-dV/dt$ é localmente semidefinida positiva, então $(0,0)$ é estável. Observe que a condição $-dV/dt \geq 0$, ou $dV/dt \leq 0$, implica que $V$ não aumenta conforme o tempo passa. Portanto, o ponto de equilíbrio

$(x_1^*, x_2^*) = (0,0)$ é localmente estável, já que o sistema fica confinado no interior de uma circunferência centrada em tal ponto, como ilustrado na Figura 2.1b.

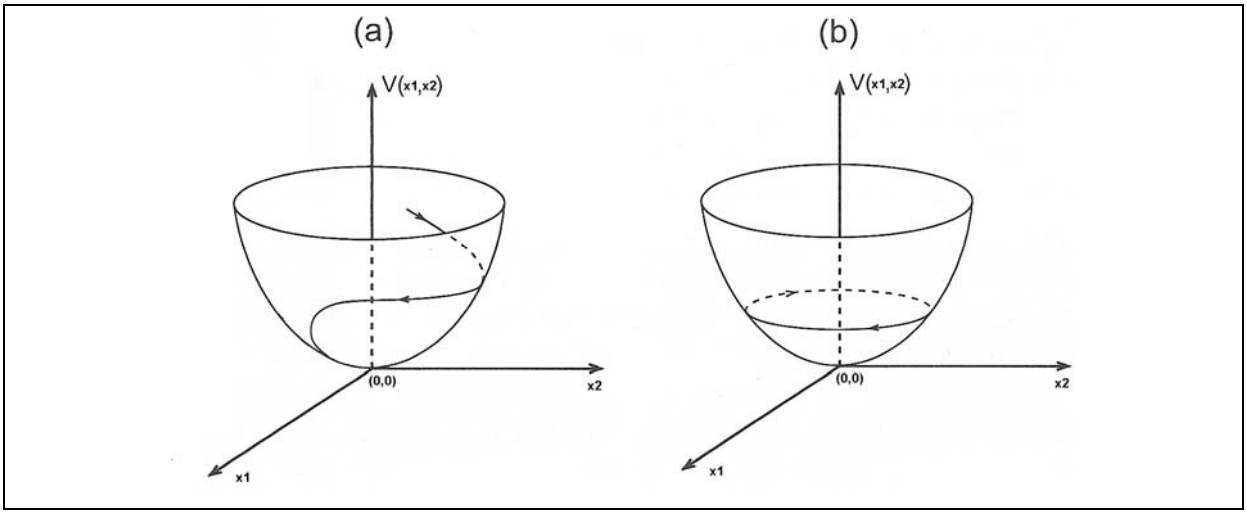



Figura 2.1 - Sistema assintoticamente estável (a) e sistema estável (b)

Chama-se função de Lyapunov uma função $V(x_1, x_2)$ localmente definida positiva, tal que $-dV/dt$ seja localmente semidefinida positiva. Portanto, se existe uma função de Lyapunov $V(x_1, x_2)$ para o sistema (2.3), então o ponto de equilíbrio $(0,0)$ é localmente estável. Além disso, se essa função é tal que $-dV/dt$ é localmente definida positiva, então $(0,0)$ é localmente assintoticamente estável. Neste caso, a distância entre $(x_1(t), x_2(t))$ e $(0,0)$ diminui monotonamente com o tempo, dado que essa trajetória tenha condição inicial $(x_1(0), x_2(0)) \in B$. Se $V$ e $-dV/dt$ são globalmente definidas positivas, então $(0,0)$ é globalmente assintoticamente estável.

Porém, se $-dV/dt$ for semidefinida positiva, não se pode afirmar, de acordo com Lyapunov, que a origem possui estabilidade assintótica. Isto não significa que $(0,0)$ não seja assintoticamente estável. Tal ponto pode, de fato, ser assintoticamente estável. Entretanto, a função de Lyapunov escolhida não permite chegar a essa conclusão.

Em 1952, E. A. Barbashin e seu aluno, N. N. Krasovskii, provaram que quando $-dV/dt$ é semidefinida positiva, pode-se concluir que o ponto de equilíbrio situado na origem á assintoticamente estável, se a única trajetória que pertence ao conjunto em que $dV/dt = 0$ é a origem. Formalmente, seja $S$ o conjunto de pontos

para os quais $dV/dt = 0$; nos demais pontos, $dV/dt < 0$. Considere uma condição inicial em $S$, isto é, $(x_1(0), x_2(0)) \in S$. Segundo o teorema de Barbashin e Krasovskii, $(0,0)$ é assintoticamente estável somente se, permanece-se em $S$ quando $(x_1(0), x_2(0)) = (0,0)$. Este teorema também é conhecido como teorema de LaSalle ou teorema dos conjuntos invariantes (Monteiro (2006)).

## 2.3 Passividade

A passividade de um sistema é definida em função das características da entrada e saída do mesmo. Um sistema com entrada $u$ e saída $y$ é passivo se:

$$V(x(t)) \leq V(x(0)) + \int_0^t u(\tau)^T y(\tau) d\tau \tag{2.5}$$

onde $x(t)$ é o vetor de estados no instante $t$, $x(0)$ é o vetor de estados no instante inicial, $V(x(t))$ é a energia do sistema no instante $t$ e $V(x(0))$ é a energia do sistema no instante inicial. O termo $\int_0^t u(\tau)^T y(\tau) d\tau$ representa a energia fornecida para o sistema entre os instantes 0 e $t$. A equação (2.5) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$V(x(t)) - V(x(0)) \leq \int_0^t u(\tau)^T y(\tau) d\tau \tag{2.6}$$

A diferença entre o acréscimo da energia armazenada no sistema (primeiro membro de (2.6)) e a energia fornecida ao sistema (segundo membro de (2.6)), se existir, representa a energia dissipada pelo sistema.

Derivando (2.6), obtém-se a taxa de variação da energia do sistema:

$$\dot{V}(x(t)) \leq u(t)^T y(t) \tag{2.7}$$

Formalmente, dado o sistema dinâmico não-linear representado pelas equações de estado:

$$\dot{x} = f(x,u) \tag{2.8}$$

$$y = h(x,u) \tag{2.9}$$

onde $x \in \Re^n$. $u \in \Re^p$ e $y \in \Re^p$ são a entrada e a saída do sistema, respectivamente. $f : \Re^n \times \Re^p \to \Re^n$, $f \in C^1$, $f(0,0) = 0$; $h : \Re^n \times \Re^p \to \Re^p$, $h$ contínua, $h(0,0) = 0$.

O sistema não-linear (2.8)-(2.9) será passivo se existir uma função contínua e diferenciável semidefinida positiva $V(x)$ (chamada função de armazenamento) tal que:

$$u^T y \geq \dot{V}(x) \tag{2.10}$$

Adicionalmente, se existir uma função $\Psi(x)$ definida positiva do vetor de estados, tal que:

$$u^T y \geq \dot{V}(x) + \Psi(x) \tag{2.11}$$

o sistema será estritamente passivo.

Na análise de sistemas não-lineares, sempre é possível e útil decompor o sistema original em dois subsistemas, um linear e outro não-linear. A passividade de um sistema linear está relacionada a uma propriedade chamada positividade real.

Uma função de transferência $G(s)$ será positiva real (estritamente positiva real) se:

- Os pólos de $G(s)$ possuírem parte real não positiva (negativa).
- $\mathrm{Re}[G(j\omega)] \geq 0$ $(\mathrm{Re}[G(j\omega)] > 0)$ $\forall$ $\omega \geq 0$. Se o grau relativo do sistema for igual a 1, esta condição implica que $\angle G(j\omega) \geq -90°$ $(\angle G(j\omega) > -90°)$ $\forall$ $\omega \geq 0$.

Desta forma, uma função de transferência positiva real tolera pólos no eixo imaginário, enquanto que uma função de transferência estritamente positiva real não.

Formalizando, um sistema linear invariante no tempo dado por:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{2.12}$$

$$y = Cx \tag{2.13}$$

será passivo (estritamente passivo), se a função de transferência $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ for positiva real (estritamente positiva real).

Se uma função de transferência for estritamente positiva real, existe uma propriedade matemática importante relativa a sua representação no espaço de estados, formalizada no seguinte lema:

**Lema de Kalman-Yakubovich-Popov**: O sistema linear invariante no tempo dado por:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{2.14}$$

$$y = Cx \tag{2.15}$$

com função de transferência:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B \tag{2.16}$$

onde $(A \quad B)$ é controlável e $(A \quad C)$ é observável, será estritamente positivo real se, e somente se, existirem duas matrizes definidas positivas $P = P^T$ e $Q = Q^T$, tal que:

$$A^T P + PA = -Q \tag{2.17}$$

$$B^T P = C \tag{2.18}$$

Se a condição relativa à matriz $Q$ for relaxada para semidefinida positiva, então o sistema será positivo real.

A passividade de uma planta não-linear é uma propriedade que assume grande importância no projeto de sistemas de controle através de métodos de conservação de energia. De acordo com Marquez (2003) e Khalil (1996), o sistema resultante da conexão por realimentação de dois sistemas passivos (estritamente passivos) também será passivo (estritamente passivo). Adicionalmente, se um sistema for passivo (estritamente passivo), a origem do sistema em malha fechada será estável (assintoticamente estável). Desta forma, o emprego de um controlador passivo em uma planta passiva garante a estabilidade do sistema em malha fechada.

## 2.4 Estimação Não-linear

Na maioria das aplicações práticas, o vetor de estados requerido para a implementação da lei de controle não pode ser construído unicamente através de medições. As medições de alguns estados podem ser proibitivas, em função do elevado custo dos sensores. Outros estados sequer podem ser medidos, por representarem variáveis internas inacessíveis do processo. A solução deste problema envolve o emprego de um observador de estado.

O observador de estados é um sistema dinâmico que visa reconstruir, de maneira aproximada, os estados não medidos de um sistema real observável. A idéia do observador de estados é reproduzir o sistema real através de um modelo matemático, de forma que o estado do modelo matemático (acessível) convirja para o estado do sistema real.

O observador compara a saída do sistema real e a saída do modelo matemático, calcula o erro de estimação e efetua as correções no intuito de aproximar o modelo matemático ao sistema real. Quando o erro de estimação tender a zero, o estado do modelo matemático tenderá para o estado do sistema real e o observador será capaz de fornecer uma estimativa justa dos estados não medidos do sistema real.

O projeto de observadores de estados para sistemas lineares invariantes no tempo envolve uma técnica consagrada pelo uso, baseada no principio da separação. Segundo esse principio, os autovalores do observador não são afetados pelos autovalores do sistema de controle com realimentação e vice-versa, implicando que ambos podem ser projetados de forma independente (Kailath (1980)).

Primeiramente se projeta a lei de controle, assumindo a existência dos estados reais e depois se projeta o observador. Posteriormente, na lei de controle, os estados reais são substituídos pelas estimativas do observador. Se o observador e o sistema de controle com realimentação forem estáveis, o sistema decorrente do acoplamento entre ambos também o será.

Porém, o princípio da separação e suas decorrências não valem para todos os sistemas não-lineares. De acordo com Marquez (2003), o projeto de observadores não-lineares é um tema que não possui uma solução universal, podendo ser abordado de diversas maneiras.

No presente trabalho, o observador será projetado através da técnica de passivação da dinâmica dos erros de estimação, conforme detalhado por Fossen e Strand (1999). Esta técnica consiste em assegurar a passividade do sistema que descreve a dinâmica dos erros de estimação. Uma vez assegurada essa propriedade, os erros de estimação convergirão assintoticamente para zero e o problema de reconstrução de estados estará resolvido.

A formalização matemática desta abordagem é apresentada por Shim; Seo e Teel (2003).

O único conceito que necessita ser formalizado neste item refere-se a observabilidade de sistemas não-lineares. Considere o sistema SISO não-linear dado por:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \tag{2.19}$$

$$y = h(x) \tag{2.20}$$

onde $u \in \Re$ é a entrada do sistema, $x \in \Re^n$ é o vetor de estados e $y \in \Re$ é a saída (medição) do sistema. Seja $U$ um subconjunto aberto de $\Re^n$ que contém $x$. Considere que $x_u(t, x_0)$ seja a solução do sistema (2.19)-(2.20) no instante $t$, originada pela entrada $u$ e pelo estado inicial $x_0$ e que $y(x_u(t, x_0))$ seja a saída $y$ quando o estado $x$ for $x_u(t, x_0)$.

Um par de estados $(x_0^1, x_0^2)$ é chamado de distinguível, se existir uma função de entrada $u$ tal que $y(x_u(t, x_0^1)) \neq y(x_u(t, x_0^2))$.

Por sua vez, o sistema (2.19)-(2.20) é localmente observável em $x_0 \in U \subset \Re^n$ se cada estado $x \neq x_0 \in U$ for distinguível de $x_0$. Em outras palavras, o sistema é localmente observável em uma vizinhança $U \subset \Re^n$ se existir uma entrada $u \in \Re$ tal que $y(x_u(t, x_0^1)) = y(x_u(t, x_0^2)) \quad \forall\ t \in [0, t] \quad \Leftrightarrow \quad x_0^1 = x_0^2$.

## 2.5 Metodologia “Backstepping”

O objetivo deste item é apresentar o conceito do controlador “backstepping”, desenvolvido por Krstic; Kanellakopoulos e Kokotovic (1995).

Embora guarde muita semelhança com a técnica de “feedback linearization”, a metodologia “backstepping” se distingue por manter e explorar as não-linearidades “boas” (estabilizadoras) do sistema e anular somente as “más” (desestabilizadoras), mediante a adição de amortecimento não-linear, o que confere maior robustez ao projeto.

Esta característica torna o emprego da metodologia “backstepping” atrativo, pois o cancelamento de todas as não-linearidades do sistema (“feedback linearization”) exige modelos precisos, dificilmente obtidos na prática.

Considere o sistema não-linear dados pelas equações:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\xi \tag{2.21}$$

$$\dot{\xi} = u \tag{2.22}$$

onde $x \in \Re^n$, $\xi \in \Re$ e o vetor de estados $[x \quad \xi]^T \in \Re^{n+1}$. A função $u \in \Re$ é a entrada de controle e as funções $f$ e $g : D \to \Re^n$ são suaves.

Esta estrutura pode ser considerada como uma conexão em cascata dos sistemas (2.21) e (2.22), conforme mostrado pela Figura 2.2.

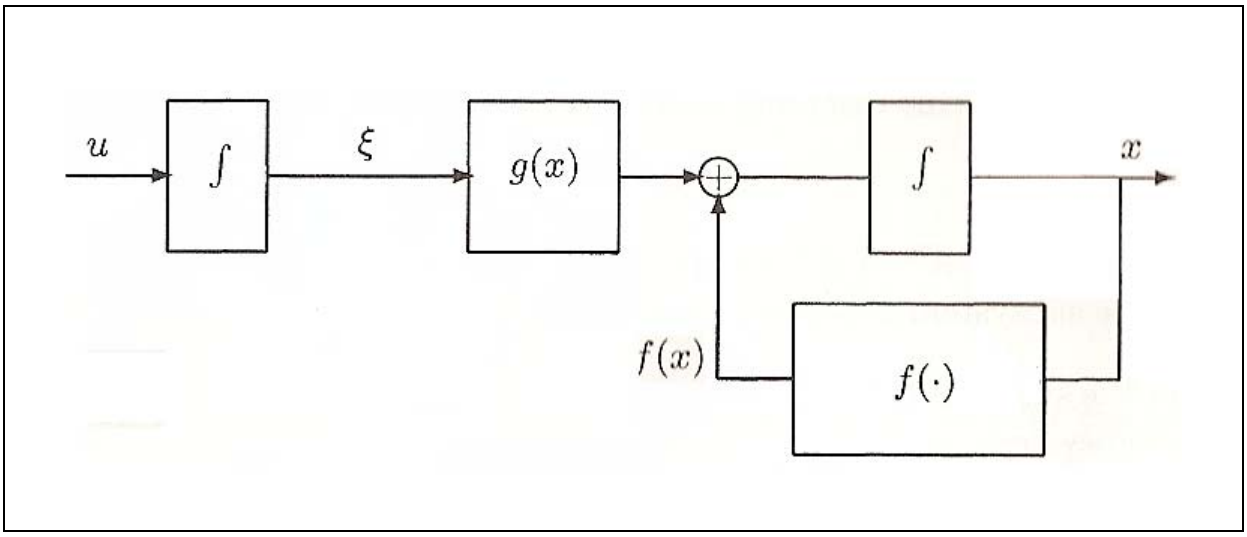



Figura 2.2 - Sistema original

Adicionalmente, as seguintes hipóteses são feitas:

a) A função $f : \Re^n \to \Re^n$ satisfaz $f(\vec{0}) = \vec{0}$. Logo, a origem é um ponto de equilíbrio do subsistema $\dot{x} = f(x)$.

b) A variável de estado $\xi$ pode ser entendida como um controle virtual para o subsistema (2.21). Assume-se a existência de uma lei de controle na forma $\xi = \phi(x)$, com $\phi(\vec{0}) = 0$ e de uma função de Lyapunov $V_1 : D \to \Re^+$ tal que:

$$\dot{V}_1(x) = \frac{\partial V_1}{\partial x}[f(x) + g(x)\phi(x)] \leq -V_a(x) \leq 0 \tag{2.23}$$

$\forall \; x \in D$. $V_a : D \to \Re^+$ é uma função semidefinida positiva em $D$.

O objetivo da metodologia “backstepping” é achar uma lei de controle que torne o sistema (2.21)-(2.22) assintoticamente estável. A implementação desta técnica é feita em duas etapas:

**Etapa 1**: O primeiro passo é adicionar e subtrair o termo $g(x)\phi(x)$ ao subsistema (2.21), conforme mostrado na Figura 2.3. O seguinte sistema equivalente é obtido:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\phi(x) + g(x)[\xi - \phi(x)] \tag{2.24}$$

$$\dot{\xi} = u \tag{2.25}$$

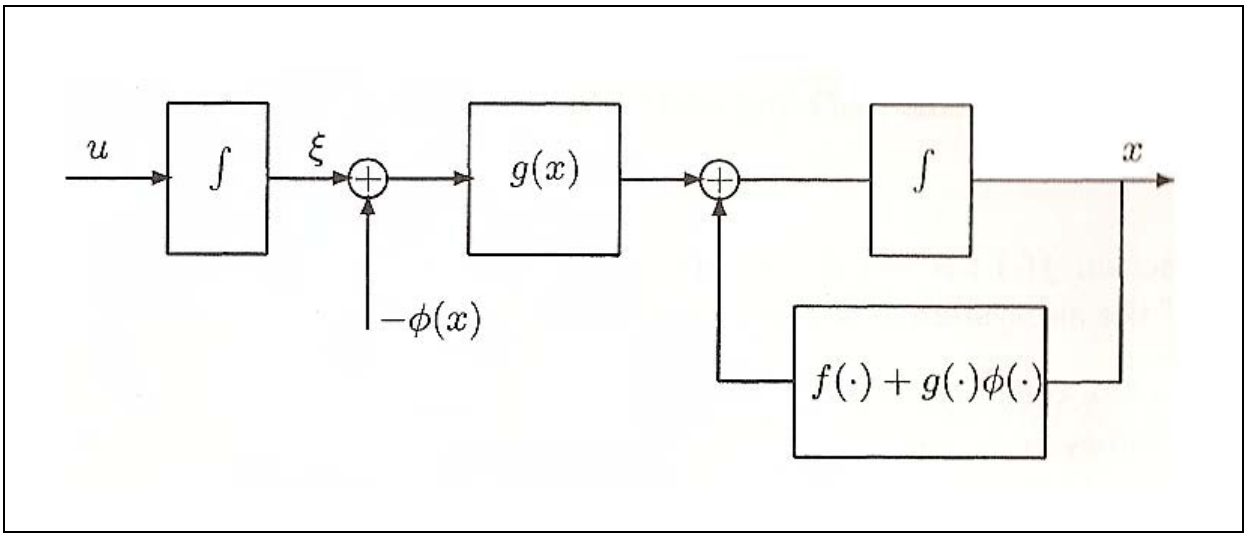



Figura 2.3 - Sistema modificado pela introdução de *φ(x)*

Define-se:

$$z = \xi - \phi(x) \tag{2.26}$$

$$\dot{z} = \dot{\xi} - \dot{\phi}(x) = u - \dot{\phi}(x) \tag{2.27}$$

onde:

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial x}\dot{x} = \frac{\partial \phi}{\partial x}[f(x) + g(x)\xi] \tag{2.28}$$

Esta mudança de variável pode ser entendida como um retrocesso (“backstepping”) de $-\phi(x)$ através do integrador, conforme mostrado pela Figura 2.4. Fisicamente, a variável $z$ representa o desvio do controle virtual $\xi$ em relação ao seu valor desejado $\phi(x)$.

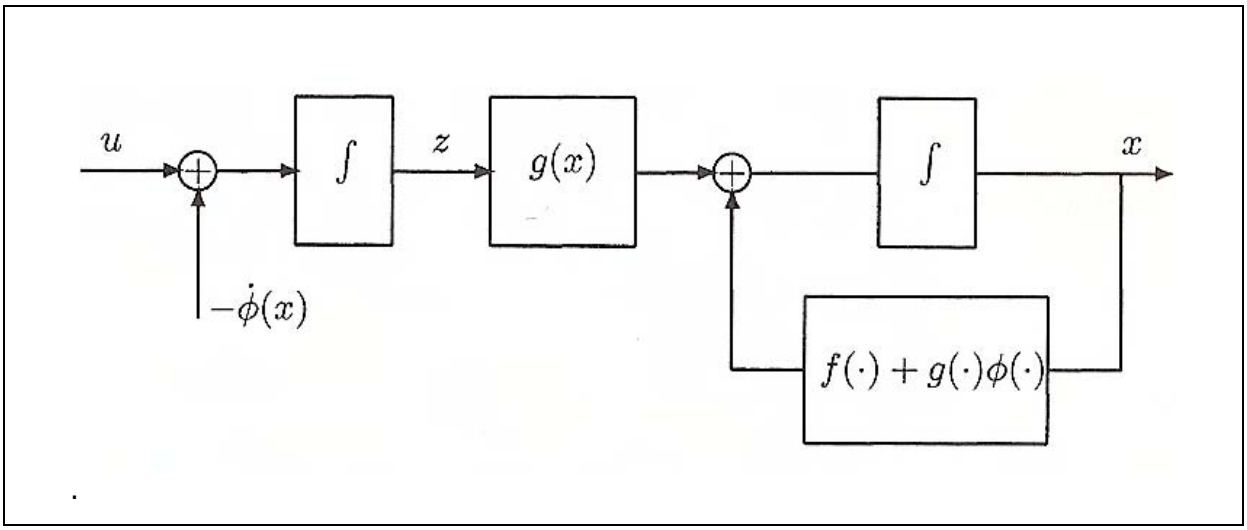



Figura 2.4 - Sistema após o retrocesso de $\phi(x)$

Definindo:

$$v = \dot{z} \tag{2.29}$$

o sistema resultante se reduz a:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\phi(x) + g(x)z \tag{2.30}$$

$$\dot{z} = v \tag{2.31}$$

conforme mostrado Figura 2.5.

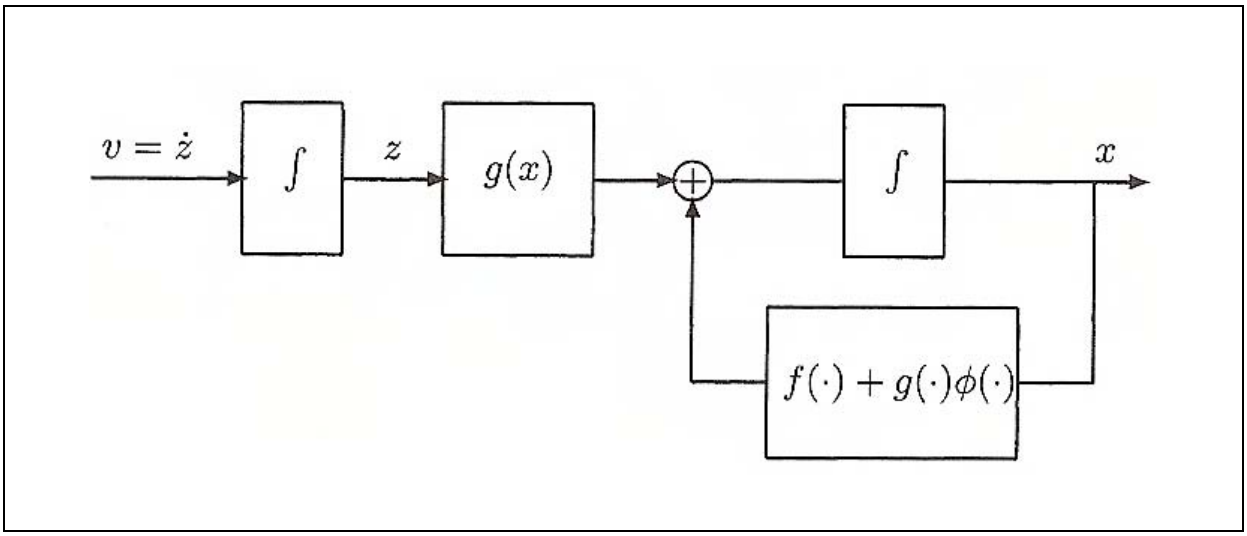



Figura 2.5 - Sistema final, após mudança de variáveis

Cabe mencionar que:

a) O sistema (2.30)-(2.31) é equivalente ao sistema (2.21)-(2.22).

b) O sistema (2.30)-(2.31) também pode ser considerado como uma conexão em cascata de dois subsistemas, conforme mostrado pela Figura 2.5. Porém, o

subsistema (2.30) incorpora a lei de controle $\phi(x)$ e portanto é assintoticamente estável quando a entrada é nula. Esta característica será utilizada no projeto de uma lei de controle que estabilize o sistema completo (2.30)-(2.31).

**Etapa 2**: Para estabilizar o sistema completo (2.30)-(2.31), considere a seguinte função candidata de Lyapunov:

$$V = V(x,z) = V_1(x) + \frac{1}{2}z^2 \tag{2.32}$$

Desta forma, chega-se a:

$$\dot{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x}[f(x) + g(x)\phi(x) + g(x)z] + z\dot{z} \tag{2.33}$$

$$\dot{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x}f(x) + \frac{\partial V_1}{\partial x}g(x)\phi(x) + \frac{\partial V_1}{\partial x}g(x)z + zv \tag{2.34}$$

Escolhendo:

$$v = -\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}g(x) + kz\right),\ k > 0 \tag{2.35}$$

Implica que:

$$\dot{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x}f(x) + \frac{\partial V_1}{\partial x}g(x)\phi(x) - kz^2 \tag{2.36}$$

Reagrupando os termos de (2.36), resulta:

$$\dot{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x}[f(x) + g(x)\phi(x)] - kz^2 \le -V_a(x) - kz^2 \tag{2.37}$$

Observando (2.37), conclui-se que a origem $(x = 0 \quad z = 0)$ é assintoticamente estável. Adicionalmente, como $z = \xi - \phi(x)$ e $\phi(\vec{0}) = 0$ por hipótese, a origem do sistema original $(x = 0 \quad \xi = 0)$ é também assintoticamente estável. Se as condições forem válidas em todo o espaço de estados e se $V$ for ilimitada radialmente, então a origem será globalmente assintoticamente estável.

De acordo com (2.27), a lei de controle pode ser escrita da seguinte forma:

$$u = \dot{z} + \dot{\phi}(x) \tag{2.38}$$

Substituindo as equações (2.28), (2.29), (2.35) e (2.26) em (2.38), resulta:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}[f(x) + g(x)\xi] - \frac{\partial V_1}{\partial x} g(x) - k[\xi - \phi(x)] \tag{2.39}$$

Estes resultados podem ser generalizados para diversos sistemas físicos, como o sistema mecânico massa-mola-amortecedor. A dinâmica deste sistema é dada pelas seguintes equações:

$$m\dot{v} + d(v)v + k(x)x = \tau \tag{2.40}$$

$$\dot{x} = v \tag{2.41}$$

$$y = x \tag{2.42}$$

O projeto do controlador será efetuado em duas etapas, a saber:

**Etapa 1:** A primeira variável de erro $z_1$ deve ser convenientemente escolhida, de acordo com o objetivo de projeto. Se o objetivo for assegurar acompanhamento de trajetória, $z_1$ pode ser definida como :

$$z_1 = y - y_d \tag{2.43}$$

onde $z_1$ é o erro de acompanhamento e $y_d \in C^2$ é a trajetória de referência.

A derivada da variável $z_1$ é dada por:

$$\dot{z}_1 = \dot{y} - \dot{y}_d = v - \dot{y}_d \tag{2.44}$$

A principal idéia da metodologia “backstepping” é escolher um termo de (2.44) para ser o controle virtual $\xi$. Desta forma, escolhe-se:

$$\xi = v \tag{2.45}$$

Substituindo (2.45) em (2.44), resulta:

$$\dot{z}_1 = \xi - \dot{y}_d \tag{2.46}$$

O objetivo da metodologia “backstepping” é obter uma lei de controle $\tau$ que assegure $y \to y_d$ para $t \to \infty$, o que equivale a $z_1 \to 0$ para $t \to \infty$. Nesta situação, o equilíbrio em (2.46) é assegurado somente se $(z_1 \quad \xi) = (0 \quad \dot{y}_d)$. Em outras palavras, o objetivo da metodologia “backstepping” é achar uma lei de controle $\tau$ que torne este ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.

O primeiro passo consiste em achar uma função $\xi = \alpha_1$ que estabilize (2.46). Desta forma, define-se a seguinte função de Lyapunov para (2.46):

$$V_1 = \frac{1}{2} z_1^2 \tag{2.47}$$

Derivando (2.47) chega-se a:

$$\dot{V}_1 = z_1 \dot{z}_1 \tag{2.48}$$

Substituindo (2.46) em (2.48), lembrando que $\xi = \alpha_1$, resulta:

$$\dot{V}_1 = z_1(\alpha_1 - \dot{y}_d) \tag{2.49}$$

A função de estabilização $\alpha_1$ deve ser selecionada a fim de tornar $\dot{V}_1$ definida negativa. Selecionando $\alpha_1$ como:

$$\alpha_1 = -k_1 z_1 + \dot{y}_d \tag{2.50}$$

onde $k_1 > 0$ é um ganho de projeto, resulta:

$$\dot{V}_1 = -z_1 k_1 z_1 \tag{2.51}$$

De acordo com a metodologia “backstepping”, define-se a segunda variável de erro $z_2$ como:

$$z_2 = \xi - \alpha_1 \tag{2.52}$$

Fisicamente, a variável $z_2$ pode ser entendida como o desvio do controle virtual $\xi$ em relação ao seu valor desejado $\alpha_1$. A derivada da variável $z_2$ é dada por:

$$\dot{z}_2 = \dot{\xi} - \dot{\alpha}_1 \tag{2.53}$$

Substituindo (2.50) e (2.52) em (2.46) e incorporando (2.53), obtém-se o seguinte sistema dinâmico:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -k_1 z_1 + z_2 & (2.54) \\ \dot{z}_2 = \dot{\xi} - \dot{\alpha}_1 & (2.55) \end{cases}$$

Desenvolvendo (2.55), utilizando (2.45) e (2.50), implica:

$$\dot{z}_2 = \dot{\xi} - \dot{\alpha}_1 = \dot{v} + k_1 \dot{z}_1 - \ddot{y}_d \tag{2.56}$$

Inserindo (2.40) em (2.56), resulta:

$$\dot{z}_2 = -m^{-1} d(v) v - m^{-1} k(x) x + m^{-1} \tau + k_1 \dot{z}_1 - \ddot{y}_d \tag{2.57}$$

Agrupando os termos conhecidos de (2.57) na função $\varphi$, resulta:

$$\varphi = -m^{-1} d(v) v - m^{-1} k(x) x + k_1 \dot{z}_1 - \ddot{y}_d \tag{2.58}$$

Logo, (2.57) se reduz a:

$$\dot{z}_2 = m^{-1} \tau + \varphi \tag{2.59}$$

Substituindo (2.59) no sistema (2.54)-(2.55), resulta:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -k_1 z_1 + z_2 & (2.60) \\ \dot{z}_2 = m^{-1}\tau + \varphi & (2.61) \end{cases}$$

O sistema (2.60)-(2.61) é análogo ao sistema (2.30)-(2.31).

**Etapa 2:** A lei de controle $\tau$ será determinada através do método direto de Lyapunov. Define-se a seguinte função de Lyapunov para o sistema (2.60)-(2.61):

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} z_2^2 = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} z_2^2 \tag{2.62}$$

Derivando (2.62), chega-se a:

$$\dot{V}_2 = z_1 \dot{z}_1 + z_2 \dot{z}_2 \tag{2.63}$$

Substituindo (2.51), (2.60) e (2.61) em (2.63), resulta:

$$\dot{V}_2 = \dot{V}_1 + z_1 z_2 + z_2 [m^{-1}\tau + \varphi] \tag{2.64}$$

A função de controle $\tau$ deve ser selecionada a fim de tornar $\dot{V}_2$ definida negativa. Selecionando $\tau$ como:

$$\tau = -m(\varphi + k_2 z_2 + z_1) \tag{2.65}$$

onde $k_2 > 0$ é um ganho de projeto, resulta:

$$\dot{V}_2 = \dot{V}_1 - z_2 k_2 z_2 \tag{2.66}$$

Como $\dot{V}_1$ é definida negativa, nota-se que $\dot{V}_2$ também é definida negativa. Substituindo (2.65) em (2.61), o sistema (2.60)-(2.61) se reduz a:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -k_1 z_1 + z_2 & (2.67) \\ \dot{z}_2 = -k_2 z_2 - z_1 & (2.68) \end{cases}$$

Como $V_2$ é ilimitada radialmente e $\dot{V}_2$ é definida negativa, a origem $(z_1 \quad z_2) = (0 \quad 0)$ do sistema (2.67)-(2.68) é globalmente assintoticamente estável. Conseqüentemente, de acordo com a equação (2.52), o ponto de equilíbrio $(z_1 \quad \xi) = (0 \quad \dot{y}_d)$ de (2.46) também é globalmente assintoticamente estável.

Se o objetivo de projeto fosse regular a posição $y = x$ em zero, bastaria impor $y_d = \dot{y}_d = \ddot{y}_d = 0$ na formulação obtida. Cabe mencionar que a solução encontrada para este problema (lei de controle $\tau$) não é única, uma vez que as funções de Lyapunov $V_1$ e $V_2$ também não são únicas (Monteiro (2006)).

# 3. MODELO MATEMÁTICO DO SISTEMA

## 3.1 Equações Cinemáticas do Movimento

Em aplicações de posicionamento dinâmico, apenas os movimentos de avanço, deriva e guinada do navio são considerados. De forma a descrever estes movimentos, torna-se conveniente definir um sistema referencial solidário ao navio (doravante denominado referencial móvel) e um sistema referencial inercial, fixo a Terra (doravante denominado referencial fixo), conforme ilustrado na Figura 3.1. A origem do referencial móvel é arbitrada no plano longitudinal de simetria do navio, a uma distancia $x_G$ de seu centro de gravidade.

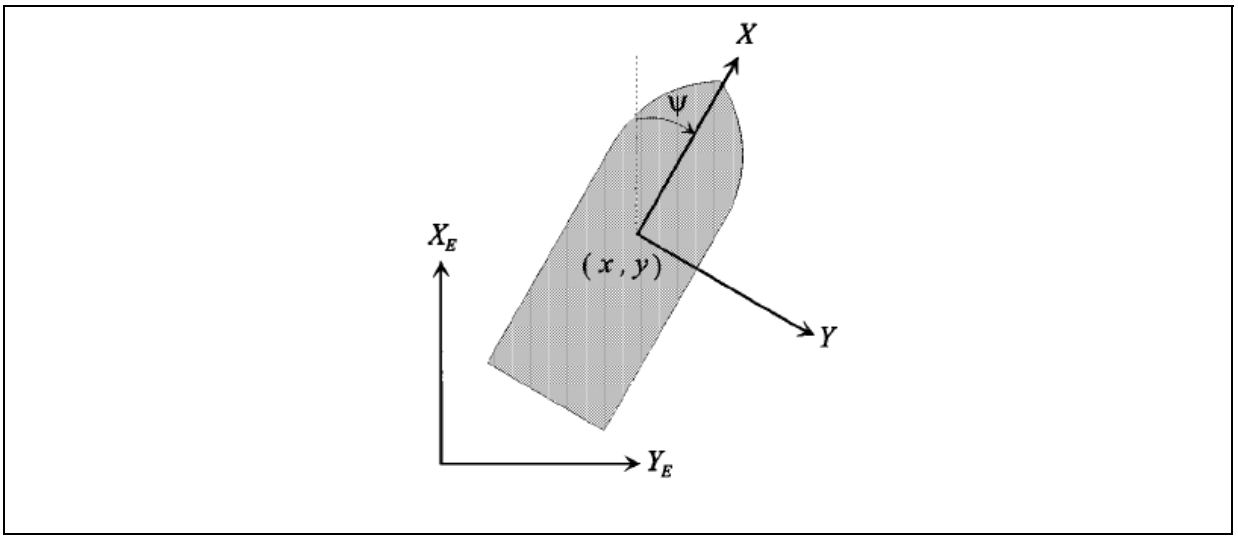



Figura 3.1 - Definição dos referenciais fixo e móvel

As velocidades, expressas no referencial móvel, são agrupadas no vetor $\nu = [u \quad v \quad r]^T$, correspondendo aos movimentos de avanço, deriva e guinada. A posição e o ângulo de aproamento, expressos no referencial fixo, são agrupados no vetor $\eta = [x \quad y \quad \psi]^T$. A relação entre os vetores de velocidade nos referenciais fixo e móvel é expressa pela seguinte equação:

$$\dot{\eta} = J(\eta)\nu \tag{3.1}$$

onde $J(\eta)$ é uma matriz de transformação não singular e ortogonal dada por:

$$J(\eta) = J(\psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

## 3.2 Modelo do Navio

O modelo proposto por Fossen (1994) para descrever o movimento horizontal de baixa freqüência do navio é dado por:

$$M\dot{\nu} + C(\nu)\nu + D(\nu)\nu = \tau_e + \tau_c \tag{3.3}$$

onde:

$$M(U) = M_{RB}(U) + M_A(U) \tag{3.4}$$

$$C(\nu) = C_{RB}(\nu) + C_A(\nu) \tag{3.5}$$

$$D(\nu) = D_L + D_N(\nu) \tag{3.6}$$

sendo:

Velocidade do Navio:

$$U = \sqrt{u^2 + v^2} \tag{3.7}$$

Matriz de Inércia de Corpo Rígido:

$$M_{RB} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & mx_G \\ 0 & mx_G & I_Z \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

Matriz de Inércia Adicional:

$$M_A = \begin{bmatrix} -X_{\dot{u}} & 0 & 0 \\ 0 & -Y_{\dot{v}} & -Y_{\dot{r}} \\ 0 & -N_{\dot{v}} & -N_{\dot{r}} \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

Matriz de Forças Centrípetas e de Coriolis de Corpo Rígido:

$$C_{RB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & m(x_G r + v) \\ 0 & 0 & mu \\ m(x_G r + v) & -mu & 0 \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

Matriz de Forças Centrípetas e de Coriolis Adicional:

$$C_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & Y_{\dot{v}} v + Y_{\dot{r}} r \\ 0 & 0 & -X_{\dot{u}} u \\ -Y_{\dot{v}} v - Y_{\dot{r}} r & X_{\dot{u}} u & 0 \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

Matriz de Amortecimento - Parcela Linear:

$$D_L = \begin{bmatrix} -X_u & 0 & 0 \\ 0 & -Y_v & -Y_r \\ 0 & -N_v & -N_r \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

Matriz de Amortecimento - Parcela Não-linear:

$$D_N = \begin{bmatrix} |\nu|^T D_{N1}\nu \\ |\nu|^T D_{N2}\nu \\ |\nu|^T D_{N3}\nu \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

As parcelas $\tau_e \in \Re^3$ e $\tau_c \in \Re^3$ representam os esforços ambientais e de controle, respectivamente. Os coeficientes hidrodinâmicos são definidos de acordo com SNAME (1950).

De acordo com Fossen (1994) e Berge e Fossen (2000), as matrizes $M$, $C$ e $D$ dependem da freqüência de onda e da velocidade de avanço do navio. Tendo em vista que somente os movimentos de baixa freqüência são controlados, os seguintes valores assintóticos serão utilizados neste trabalho:

$$M = \lim_{\omega \to 0}[M(\omega)] \tag{3.14}$$

$$C = \lim_{\omega \to 0}[C(\omega)] \tag{3.15}$$

$$D = \lim_{\omega \to 0}[D(\omega)] \tag{3.16}$$

Como conseqüência desta hipótese, $\dot{M} = 0$. Adicionalmente, para velocidades de avanço próximas de zero, $Y_r = N_v$ e $Y_{\dot{r}} = N_{\dot{v}}$ (Berge e Fossen (2000)).

Arbitrando que a origem do referencial móvel coincida com o centro de gravidade do navio, e aplicando os resultados apresentados acima, as matrizes $M$, $C$ e $D_L$ se reduzem a:

$$M = \begin{bmatrix} m - X_{\dot{u}} & 0 & 0 \\ 0 & m - Y_{\dot{v}} & -Y_{\dot{r}} \\ 0 & -Y_{\dot{r}} & I_Z - N_{\dot{r}} \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -(m - Y_{\dot{v}})v + Y_{\dot{r}} r \\ 0 & 0 & (m - X_{\dot{u}})u \\ (m - Y_{\dot{v}})v - Y_{\dot{r}} r & -(m - X_{\dot{u}})u & 0 \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

$$D_L = \begin{bmatrix} -X_u & 0 & 0 \\ 0 & -Y_v & -Y_r \\ 0 & -Y_r & -N_r \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

Como os termos de velocidade $u$, $v$ e $r$ são pequenos em aplicações de posicionamento dinâmico, pode-se desprezar a matriz $C$ no modelo (3.3). Segundo Berge e Fossen (2000), pode-se também desprezar a parcela de amortecimento não-linear $D_N$. Desta forma, o modelo (3.3) se reduz a:

$$M\dot{\nu} + D\nu = \tau_e + \tau_c \tag{3.20}$$

## 3.3 Modelo dos Esforços Ambientais

O modelo que descreve os esforços ambientais de baixa freqüência causados por efeitos de onda de segunda ordem, ventos e correntes é dado pelo seguinte processo de Markov de primeira ordem:

$$\dot{b} = -T^{-1}b + \Psi n \tag{3.21}$$

$$\tau_e = J^T(\eta)b \tag{3.22}$$

Neste modelo, $b \in \Re^3$ é o vetor de esforços ambientais, $n \in \Re^3$ é um vetor de ruído branco Gaussiano de média zero, $T \in \Re^{3x3}$ é a matriz diagonal de constantes de tempo e $\Psi \in \Re^{3x3}$ é uma matriz diagonal que multiplica a amplitude de $n$.

## 3.4 Modelo de Ondas de Primeira Ordem

A finalidade do modelo de ondas de primeira ordem é estimar os movimentos de alta freqüência do navio. A idéia é utilizar este modelo para construir um filtro “notch” dentro da estrutura do observador. Conforme já mencionado, a filtragem das componentes oscilatórias de alta freqüência das estimativas do observador (filtragem de onda) visa impedir que o controlador tente compensar os movimentos do navio induzidos pelos esforços de onda de primeira ordem.

Os movimentos de alta freqüência do navio podem ser obtidos a partir da realização no tempo de seus respectivos espectros. De acordo com Grimble; Patton e Wise (1980), estes espectros são dados por:

$$P_i(\omega) = \left|RAO_i(\omega,\beta)\right|^2 S(\omega) \tag{3.23}$$

onde $RAO_i$ (i = 1, 2 e 3) é o Operador de Resposta em Amplitude do navio (função de transferência que relaciona a amplitude do movimento de alta freqüência e a amplitude das ondas incidentes), $\beta$ é o ângulo de incidência das ondas em relação ao navio e $S(\omega)$ é o espectro de ondas do mar. As Figuras 3.2, 3.3 e 3.4, extraídas de Tannuri e Kubota (2006), exemplificam a obtenção do espectro do movimento de deriva (i=2) de um petroleiro, considerando a incidência de ondas de través ($\beta = 90$).

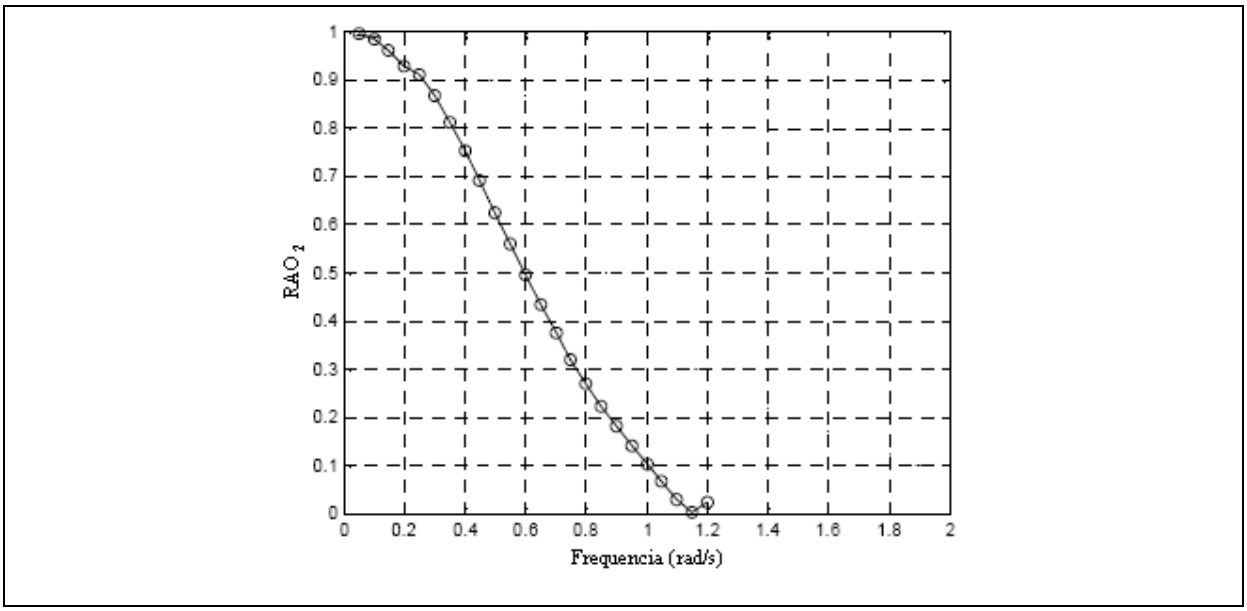



Figura 3.2 - $RAO_2(\omega, \beta = 90)$

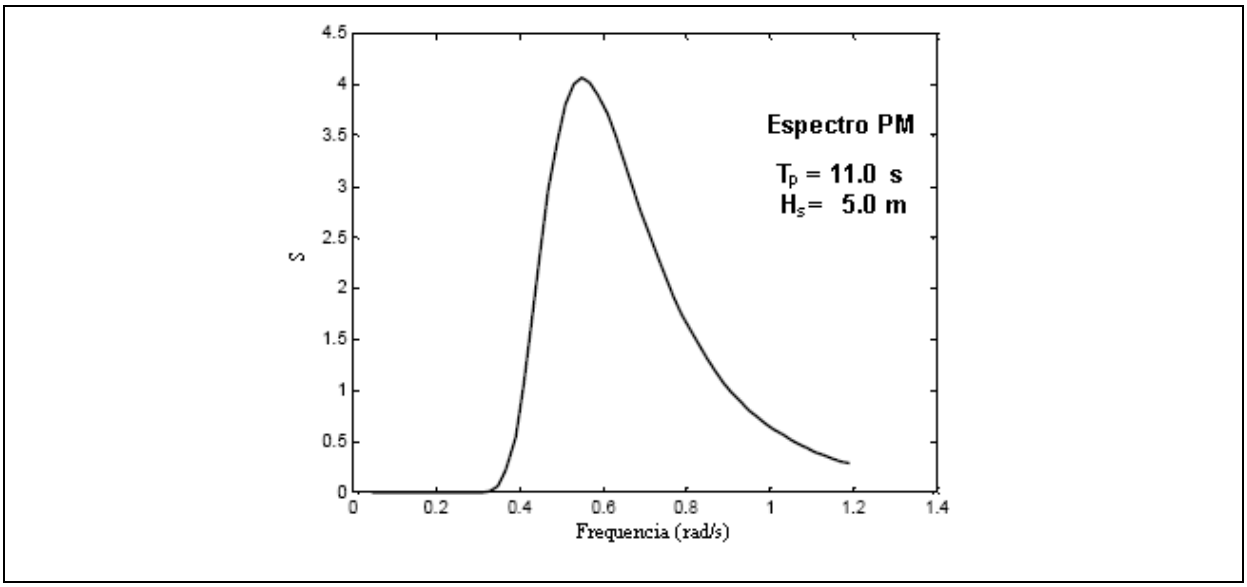



Figura 3.3 - Espectro de onda $S(\omega)$

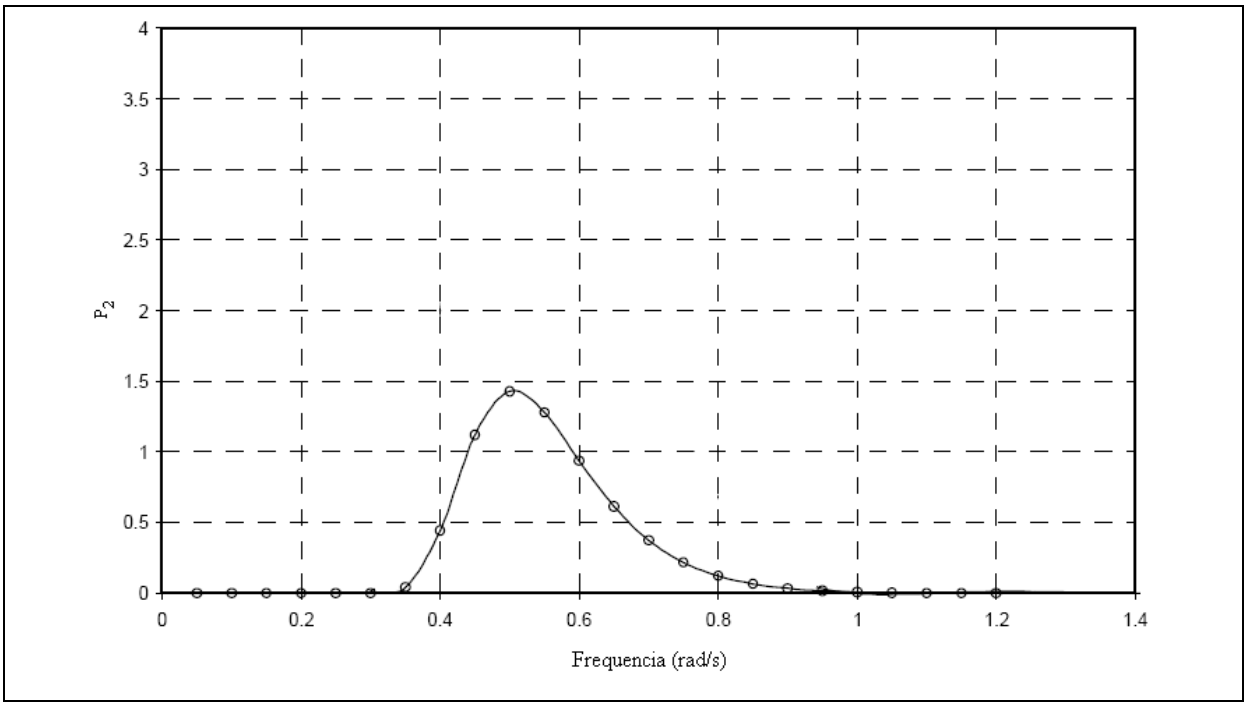



Figura 3.4 - Espectro $P_2(\omega)$

Porém, as dificuldades em medir a direção de incidência das ondas ($\beta$) e modelar a dinâmica de alta freqüência do navio ($RAO_i$) tornam o uso da equação (3.23) impraticável. Para contornar este problema, Fossen e Strand (1999) recomendam o emprego da seguinte aproximação para o espectro de resposta:

$$P_i = \left| h_w^i(j\omega) \right|^2 \tag{3.24}$$

onde:

$$h_w^i(s) = \frac{\sigma_i s}{s^2 + 2\zeta_i \omega_{0i} s + \omega_{0i}^2} \tag{3.25}$$

sendo $\omega_{0i}$ (i = 1, 2 e 3) a freqüência modal do espectro do movimento de alta freqüência do navio e $\zeta_i$ (i = 1, 2 e 3) o amortecimento espectral deste mesmo espectro. $\sigma_i$ (i = 1, 2 e 3) é um parâmetro adicional de ajuste da aproximação.

De acordo com Fossen e Strand (1999), o emprego desta aproximação quadrática (a função de transferência $h_w^i(s)$ é de segunda ordem) permite obter uma boa representação dos movimentos de alta freqüência do navio. Aproximações de ordem superior propiciariam uma melhor representação destes movimentos, porém as dimensões das matrizes de ganho do observador seriam maiores, refletindo o aumento no número de parâmetros a se determinar.

A representação de (3.25) no espaço de estados é dada por:

$$\dot{\xi} = \Omega\xi + \Sigma w \tag{3.26}$$

$$\eta_w = \Gamma\xi \tag{3.27}$$

onde $\xi \in \Re^6$ é o vetor de estados, $w \in \Re^3$ é um vetor de ruído branco Gaussiano de média zero, $\Omega$, $\Sigma$ e $\Gamma$ são matrizes constantes de dimensão apropriada.

A resposta total do navio é obtida a partir do principio da superposição linear, isto é, a partir da soma das respostas em alta freqüência $\eta_w = [x_w \quad y_w \quad \psi_w]^T$ e baixa freqüência $\eta = [x \quad y \quad \psi]^T$, conforme mostrado pela Figura 3.5.

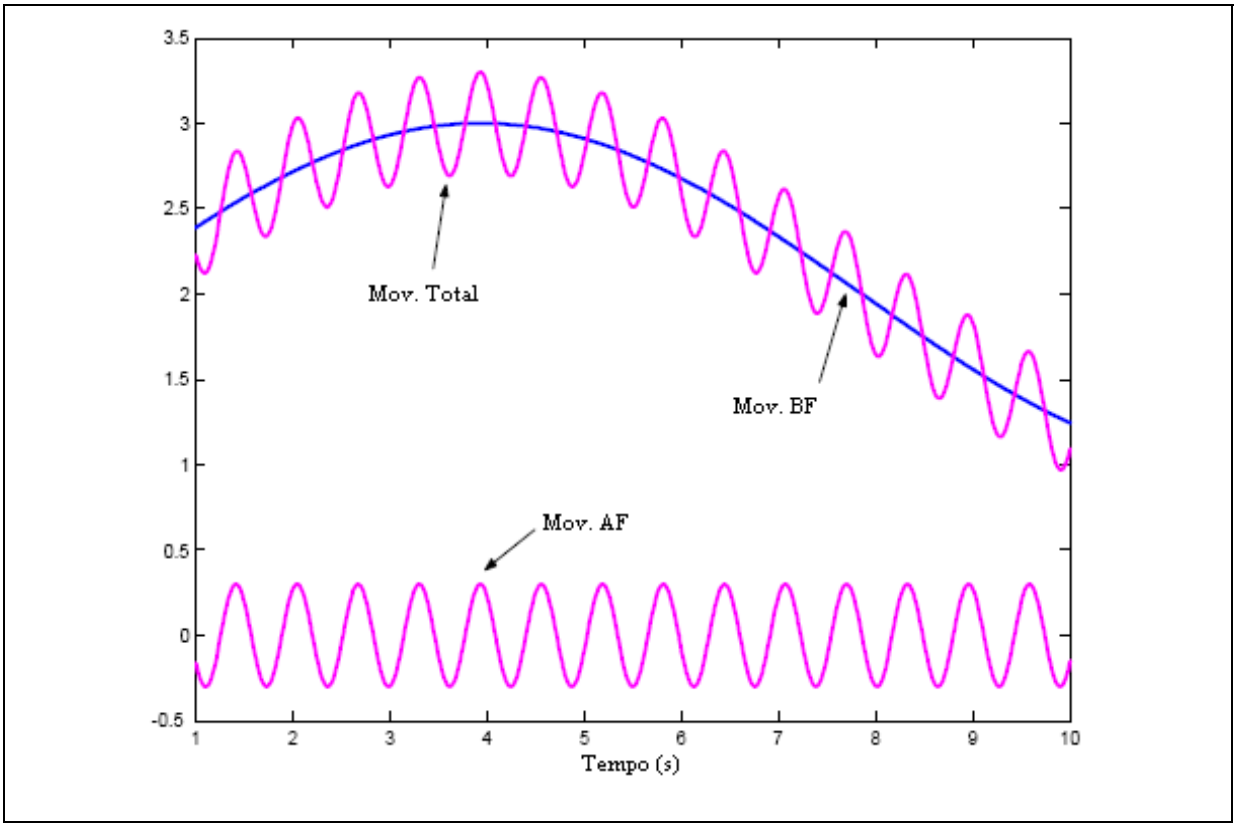



Figura 3.5 - Composição do movimento do navio

Desenvolvendo (3.26) e (3.27) obtêm-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{3x3} & I_{3x3} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{3x3} \\ \Sigma_2 \end{bmatrix} w \tag{3.28}$$

$$\eta_w = [0_{3x3} \quad I_{3x3}] \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \tag{3.29}$$

onde $\xi_1, \xi_2 \in \Re^3$ e:

$$\Omega_{21} = -\begin{bmatrix} \omega_{01} & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{02} & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{03} \end{bmatrix} \tag{3.30}$$

$$\Omega_{22} = -\begin{bmatrix} 2\zeta_1\omega_{01} & 0 & 0 \\ 0 & 2\zeta_2\omega_{02} & 0 \\ 0 & 0 & 2\zeta_3\omega_{03} \end{bmatrix} \tag{3.31}$$

$$\Sigma_2 = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \tag{3.32}$$

## 3.5 Modelo dos Esforços de Controle

O modelo para os esforços de controle é dado por:

$$\tau_c = B_u u \tag{3.33}$$

onde $\tau_c \in \Re^3$ é o vetor dos esforços de controle gerados pelo sistema propulsor. Os sinais de saída do controlador são indicados por $u \in \Re^r$ $(r \geq 3)$ e $B_u \in \Re^{3xr}$ é a matriz constante que descreve como os esforços de controle são distribuídos.

## 3.6 Modelo de Medições

Na maioria das vezes, o sistema de posicionamento dinâmico dispõe somente de medições de posição e de aproamento. Dentre os inúmeros sistemas de medição de posição disponíveis no mercado destacam-se os sistemas hidroacústicos e os sistemas de navegação via satélite como o GPS (EUA) e o GLONASS (Rússia). O ângulo de aproamento é normalmente medido através da agulha giroscópica.

A maioria dos navios utiliza o sistema GPS para obter medições de posição. Porém, a precisão deste sistema é degradada para usuários civis, implicando em erros da ordem de 50 metros (rms). Entretanto, para navios posicionados dinamicamente, este problema foi contornado com o uso do GPS Diferencial

(DGPS). A principal idéia deste sistema consiste em calcular os erros do sistema GPS a partir de uma estação em terra com posição conhecida. Estes erros são posteriormente transmitidos aos navios para que efetuem as correções nos sinais do GPS. Graças a este sistema, os erros de posição foram reduzidos para menos de um metro, o que corresponde a precisão da maioria dos sistemas de posicionamento dinâmico disponíveis no mercado.

O ângulo de aproamento é normalmente medido através da agulha giroscópica, sendo que os desvios podem ser compensados pela agulha magnética. A precisão das medidas é da ordem de 0,1°.

Desta forma, as medições de posição e aproamento podem ser escritas da seguinte maneira:

$$y = \eta + \eta_w + d \tag{3.34}$$

onde $y \in \Re^3$ é o vetor contendo as medições de posição e aproamento, $\eta_w \in \Re^3$ é o vetor contendo a resposta do navio em alta freqüência, $\eta \in \Re^3$ é o vetor contendo a resposta do navio em baixa freqüência e $d \in \Re^3$ é um vetor de ruído de medição.

## 3.7 Modelo Total

Para construir o modelo total e avaliar a sua estabilidade através do método de Lyapunov, as seguintes hipóteses são feitas:

**$\alpha_1$)** $M = M^T > 0$. Esta hipótese é valida para navios longitudinalmente simétricos, em condições de baixa velocidade. Adicionalmente, será assumido que os termos de massas adicionais independem da freqüência de onda, implicando que $\dot{M} = 0$. Estas premissas são razoáveis para aplicações de posicionamento dinâmico.

**$\alpha_2$)** $x(D + D^T)x^T > 0$, $\forall\ x \neq 0$.

**$\alpha_3$)** O modelo de esforços ambientais e o modelo de ondas serão alimentados pelo erro de estimação de posição/aproamento ao invés de ruído branco Gaussiano de média zero. Desta forma, $n = w = 0$.

**$\alpha_4$)** O ruído branco de medição será desconsiderado por ser muito menor do que os movimentos de alta freqüência induzidos pelas ondas. Desta forma, $d = 0$.

**$\alpha_5$)** $J(\eta) = J(y)$. Esta hipótese é razoável dado que a magnitude de $\psi_w$ será menor que 5° em condições ambientais extremas (mar 5-10) e menor que 1° em condições ambientais normais (mar 1-5).

A aplicação das hipóteses **$\alpha_1$** a **$\alpha_5$** em (3.1), (3.3), (3.21), (3.26) e (3.34) resulta no seguinte modelo:

$$\dot{\xi} = \Omega\xi \tag{3.35}$$

$$\dot{\eta} = J(y)\nu \tag{3.36}$$

$$\dot{b} = -T^{-1}b \tag{3.37}$$

$$M\dot{\nu} + D\nu = \tau_c + J^T(y)b \tag{3.38}$$

$$y = \eta + \eta_w = \eta + \Gamma\xi \tag{3.39}$$

De forma a simplificar a notação, (3.35), (3.36) e (3.39) podem ser escritas na forma de estado:

$$\dot{\eta}_0 = A_0\eta_0 + B_0 J(y)\nu \tag{3.40}$$

$$y = C_0\eta_0 \tag{3.41}$$

onde:

$$\eta_0 = \begin{bmatrix} \xi^T & \eta^T \end{bmatrix}^T \tag{3.42}$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} \Omega_{6x6} & 0_{6x3} \\ 0_{3x6} & 0_{3x3} \end{bmatrix} \tag{3.43}$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 0_{6x3} \\ I_{3x3} \end{bmatrix} \tag{3.44}$$

$$C_0 = \begin{bmatrix} \Gamma & I_{3x3} \end{bmatrix} \tag{3.45}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0_{3x3} & I_{3x3} \end{bmatrix} \tag{3.46}$$

# 4. PROJETO DO OBSERVADOR DE ESTADOS PASSIVO

## 4.1 Considerações Gerais

O objetivo deste capítulo é projetar um observador de estados passivo não-linear. A partir das medições de posição e aproamento disponíveis, o observador deverá fornecer estimativas de posição e aproamento (vetor $\hat{\eta}$) e velocidades (vetor $\hat{\nu}$) livres de ruído e de efeitos de primeira ordem. Adicionalmente, deverá estimar os esforços ambientais de natureza lenta que agem sobre o navio (vetor $\hat{b}$). Este projeto é baseado no trabalho de Fossen e Strand (1999).

A questão fundamental no projeto do observador de estados consiste em como remover o ruído e os efeitos de primeira ordem das estimativas, uma vez que as medições são ruidosas e incorporam a resposta de alta freqüência do navio. Conforme já mencionado, a introdução de sinais oscilatórios de alta freqüência na malha de controle ocasiona a modulação do comando aos propulsores que por sua vez ocasiona a degradação prematura do sistema propulsor e o aumento excessivo do consumo de combustível.

## 4.2 Equações do Observador

De forma a reproduzir a dinâmica relativa às equações (3.35) a (3.39), o observador não-linear será descrito pelas seguintes equações:

$$\dot{\hat{\xi}} = \Omega\hat{\xi} + K_1\tilde{y} \tag{4.1}$$

$$\dot{\hat{\eta}} = J(y)\hat{\nu} + K_2\tilde{y} \tag{4.2}$$

$$\dot{\hat{b}} = -T^{-1}\hat{b} + K_3\tilde{y} \tag{4.3}$$

$$M\dot{\hat{\nu}} = -D\hat{\nu} + J^T(y)\hat{b} + \tau_c + J^T(y)K_4\tilde{y} \tag{4.4}$$

$$\hat{y} = \hat{\eta} + \Gamma\hat{\xi} \tag{4.5}$$

onde $\tilde{y} = y - \hat{y} \in \Re^3$ é o erro de estimação de posição/aproamento, $K_1 \in \Re^{6x3}$, $K_2 \in \Re^{3x3}$, $K_3 \in \Re^{3x3}$ e $K_4 \in \Re^{3x3}$ são matrizes de ganho do observador. O sistema dado por (4.1), (4.2) e (4.5) pode ser escrito na forma de estados:

$$\dot{\hat{\eta}}_0 = A_0\hat{\eta}_0 + B_0 J(y)\hat{\nu} + K\tilde{y} \tag{4.6}$$

$$\hat{y} = C_0\hat{\eta}_0 \tag{4.7}$$

onde:

$$\hat{\eta}_0 = \begin{bmatrix} \hat{\xi}^T & \hat{\eta}^T \end{bmatrix}^T \tag{4.8}$$

$$K = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

## 4.3 Dinâmica dos Erros de Estimação

Os erros de estimação são definidos como $\tilde{\eta}_0 = \eta_0 - \hat{\eta}_0 \in \Re^9$, $\tilde{\nu} = \nu - \hat{\nu} \in \Re^3$ e $\tilde{b} = b - \hat{b} \in \Re^3$. A dinâmica destes erros pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\dot{\tilde{\eta}}_0 = (A_0 - KC_0)\tilde{\eta}_0 + B_0 J(y)\tilde{\nu} \tag{4.10}$$

$$\dot{\tilde{b}} = -T^{-1}\tilde{b} - K_3\tilde{y} \tag{4.11}$$

$$M\dot{\tilde{\nu}} = -D\tilde{\nu} + J^T(y)\tilde{b} - J^T(y)K_4\tilde{y} \tag{4.12}$$

Definindo as variáveis:

$$\tilde{z} = K_4\tilde{y} - \tilde{b} \tag{4.13}$$

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{\eta}_0 \\ \tilde{b} \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

a equação (4.12) pode ser escrita da seguinte forma:

$$M\dot{\tilde{\nu}} = -D\tilde{\nu} - J^T(y)\tilde{z} \tag{4.15}$$

e as equações (4.10), (4.11) e (4.14) podem ser compactadas na seguinte forma de estados:

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + BJ(y)\tilde{\nu} \tag{4.16}$$

$$\tilde{z} = C\tilde{x} \tag{4.17}$$

onde:

$$A = \begin{bmatrix} A_0 - KC_0 & 0 \\ -K_3C_0 & -T^{-1} \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

$$B = \begin{bmatrix} B_0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

$$C = \begin{bmatrix} K_4C_0 & -I \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

A dinâmica dos erros é mostrada na Figura 4.1, onde dois novos termos de erro são definidos:

$$\varepsilon_z = -J^T(y)\tilde{z} \tag{4.21}$$

$$\varepsilon_v = J(y)\tilde{v} \tag{4.22}$$

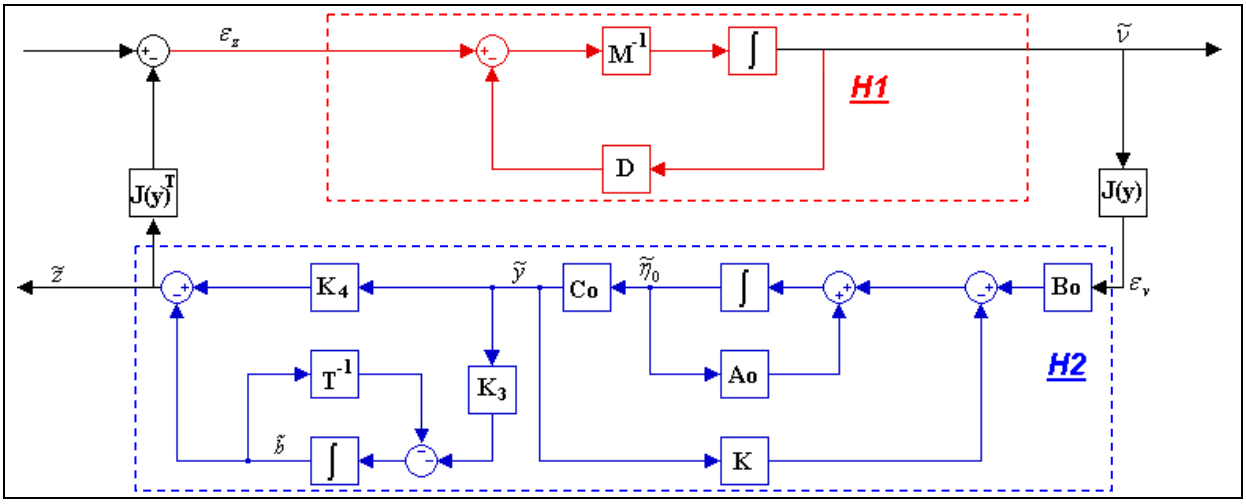



Figura 4.1 - Dinâmica dos erros do observador

A estrutura do observador é mostrada no Apêndice A.

## 4.4 Determinação dos Ganhos do Observador

Os ganhos do observador devem ser escolhidos de forma que o sistema ***H2***, mostrado na Figura 4.1, seja estritamente positivo real (Fossen e Strand (1999)).

**Proposição P1:** Se as matrizes de ganho do observador possuírem a seguinte estrutura:

$$K_1 = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{12} & 0 \\ 0 & 0 & k_{13} \\ k_{21} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{23} \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} k_{31} & 0 & 0 \\ 0 & k_{32} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{bmatrix} \tag{4.24}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \tag{4.25}$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix} \tag{4.26}$$

então, os elementos $k_{ij} < 0$ (i = 1), $k_{ij} > 0$ (i >1), $\lambda_i > 0$ e $k_i > 0$ podem ser escolhidos de forma que o sistema ***H2*** (mapeamento $\varepsilon_v \mapsto \tilde{z}$) seja estritamente positivo real e satisfaça o lema de Kalman-Yakubovich-Popov.

**Prova:** Como $K_3$ e $K_4$ são diagonais, o mapeamento $\varepsilon_v \mapsto \tilde{z}$ pode ser representado por uma matriz diagonal de funções de transferência, isto é, por funções de transferência desacopladas.

$$\tilde{z}(s) = H(s)\varepsilon_v(s) \tag{4.27}$$

$$H(s) = H_0(s)H_B(s) \tag{4.28}$$

$$H_0(s) = C_0(sI - A_0 + KC_0)^{-1}B_0 \tag{4.29}$$

$$H_B(s) = K_4 + (sI + T^{-1})K_3 \tag{4.30}$$

A estrutura diagonal de $H(s)$ é mostrada na Figura 4.2. As funções de transferência $h_0^i(s)$ (i = 1, 2 e 3) de $H_0(s)$ e $h_B^i(s)$ (i = 1, 2 e 3) de $H_B(s)$ são dadas por:

$$h_o^i(s) = \frac{s^2 + 2\zeta_i\omega_{0i}s + \omega_{0i}{}^2}{s^3 + (k_{2i} + k_{3i} + 2\zeta_i\omega_{0i})s^2 + (\omega_{0i}{}^2 + 2\zeta_i\omega_{0i}K_{3i} - k_{1i}\omega_{0i}{}^2)s + \omega_{0i}{}^2K_{3i}} \tag{4.31}$$

$$h_B^i(s) = k_i \frac{s + [(1/T_i) + (\lambda_i / k_i)]}{s + (1/T_i)} \approx k_i \frac{s + (\lambda_i / k_i)}{s + (1/T_i)} \text{ pois } T_i >>1 \tag{4.32}$$

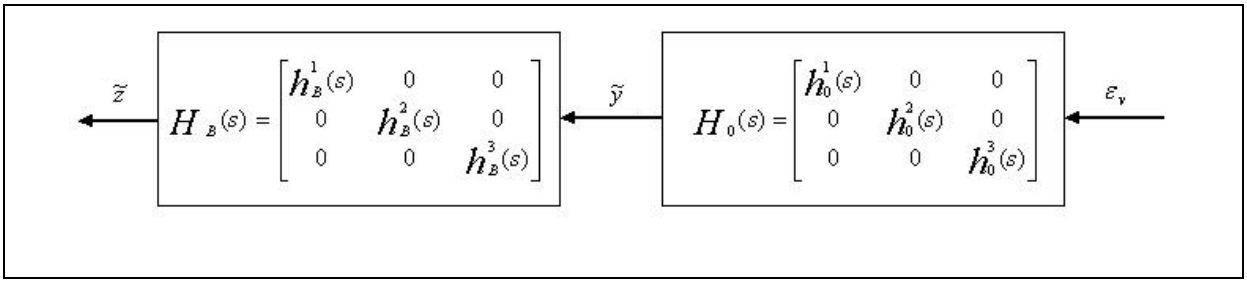



Figura 4.2 - Estrutura das matrizes de funções de transferência

A fim de evidenciar os parâmetros de filtragem, a equação (4.31) pode ser escrita da seguinte forma:

$$h_o^i(s) = \frac{s^2 + 2\zeta_i \omega_{0i} s + \omega_{0i}{}^2}{(s^2 + 2\zeta_{ni} \omega_{0i} s + \omega_{0i}{}^2)(s + \omega_{ci})} \tag{4.33}$$

onde $\omega_{0i}$ (i = 1, 2 e 3) é a freqüência modal do espectro do movimento de alta freqüência do navio e $\zeta_i$ (i = 1, 2 e 3) é o amortecimento espectral deste mesmo espectro. $\omega_{ci}$ (i = 1, 2 e 3) é a freqüência de corte do filtro e $\zeta_{ni}$ (i = 1, 2 e 3) é o amortecimento do “notch”.

Igualando (4.31) e (4.33), obtém-se as seguintes equações para os ganhos do observador:

$$k_{1i} = -2\left(\frac{\omega_{ci}}{\omega_{0i}}\right)(\zeta_{ni} - \zeta_i) \tag{4.34}$$

$$k_{2i} = 2\omega_{0i}(\zeta_{ni} - \zeta_i) \tag{4.35}$$

$$k_{3i} = \omega_{ci} \tag{4.36}$$

Para que o sistema ***H2*** seja estritamente positivo real e atenda o Lema de Kalman-Yakubovich-Popov, as três funções de transferência $h^i(s)$ devem apresentar fase maior do que -90°, conforme exemplificado na Figura 4.3.

Este requisito pode ser facilmente atendido se a seguinte regra de sintonização for aplicada:

$$\left(\frac{1}{T_i}\right) << \left(\frac{\lambda_i}{k_i}\right) < \omega_{0i} < \omega_{ci} \tag{4.37}$$

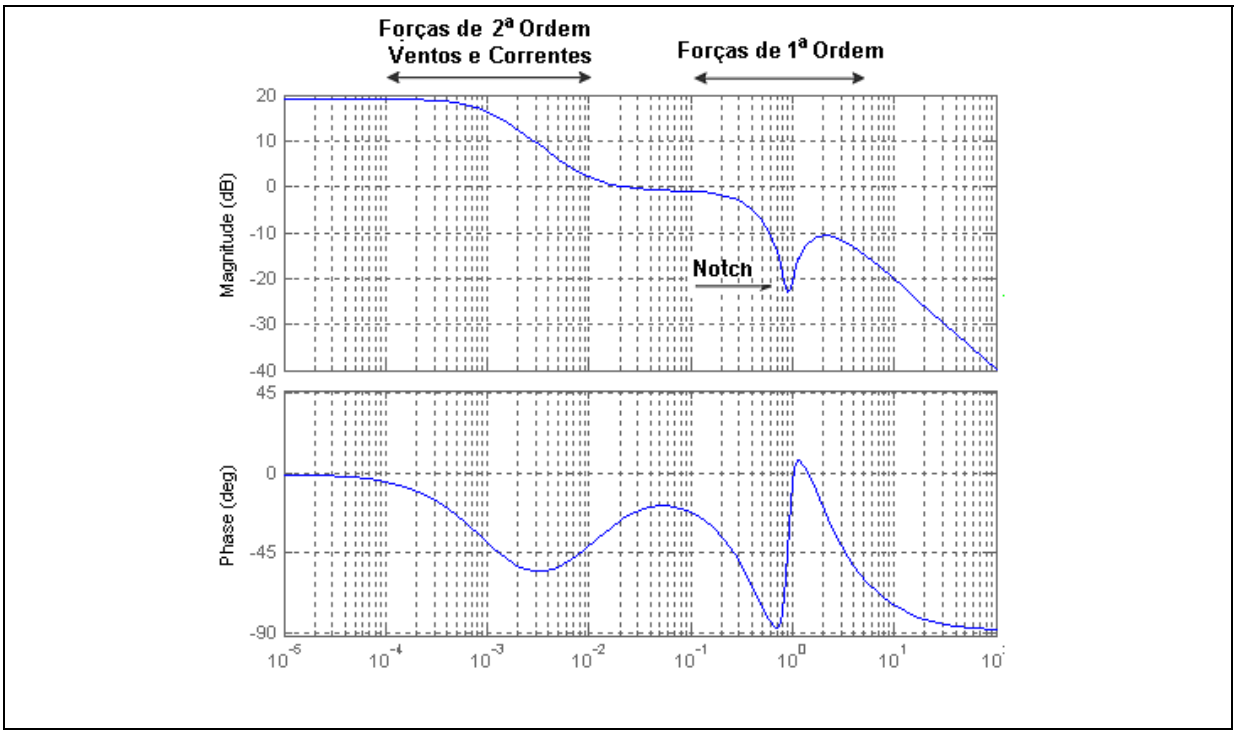



Figura 4.3 - Exemplo de diagrama de Bode de $h^i(s)$

É importante notar que apenas os ganhos da matriz $K_1$ dependem dos parâmetros que caracterizam o espectro do movimento de alta freqüência do navio. O amortecimento espectral pode ser considerado constante, porém a freqüência modal depende fortemente do espectro de ondas, que é variável. Este comportamento não estacionário demanda uma constante sintonia dos parâmetros de filtragem. A freqüência modal pode ser estimada "off-line" através de técnicas de análise espectral, a partir das medições de posição e aproamento.

## 4.5 Análise da Estabilidade do Observador

**Teorema 4.1:** Atendidas as hipóteses $\alpha_1$ a $\alpha_5$, o observador não-linear dado pelas equações (4.1) a (4.5) é globalmente assintoticamente estável.

**Prova:** Considere a seguinte função candidata de Lyapunov:

$$V = \tilde{\nu}^T M \tilde{\nu} + \tilde{x}^T P \tilde{x} \tag{4.38}$$

onde $P$ é uma matriz simétrica qualquer. Derivando $V$ ao longo das trajetórias de $\tilde{\nu}$ e $\tilde{x}$, obtém-se:

$$\dot{V} = \dot{\tilde{\nu}}^T M\tilde{\nu} + \tilde{\nu}^T M\dot{\tilde{\nu}} + \dot{\tilde{x}}^T P\tilde{x} + \tilde{x}^T P\dot{\tilde{x}} \tag{4.39}$$

Seja:

$$\alpha = \dot{\tilde{\nu}}^T M\tilde{\nu} + \tilde{\nu}^T M\dot{\tilde{\nu}} \quad ; \quad \beta = \dot{\tilde{x}}^T P\tilde{x} + \tilde{x}^T P\dot{\tilde{x}} \tag{4.40}$$

Substituindo (4.15) na expressão de $\alpha$ resulta:

$$\alpha = [M^{-1}(-D\tilde{\nu} - J(y)^T\tilde{z})]^T M\tilde{\nu} + \tilde{\nu}^T M[M^{-1}(-D\tilde{\nu} - J(y)^T\tilde{z})]$$

$$= [-M^{-1}D\tilde{\nu} - M^{-1}J(y)^T\tilde{z}]^T M\tilde{\nu} + \tilde{\nu}^T(-D\tilde{\nu} - J(y)^T\tilde{z})$$

$$= [-\tilde{\nu}^T D^T (M^T)^{-1} - \tilde{z}^T J(y)(M^T)^{-1}]M\tilde{\nu} + \tilde{\nu}^T(-D\tilde{\nu} - J(y)^T\tilde{z})$$

$$= -\tilde{\nu}^T D^T\tilde{\nu} - \tilde{z}^T J(y)\tilde{\nu} - \tilde{\nu}^T D\tilde{\nu} - \tilde{\nu}^T J(y)^T\tilde{z}$$

$$\therefore \alpha = -\tilde{\nu}^T(D + D^T)\tilde{\nu} - 2\tilde{\nu}^T J(y)^T\tilde{z} \tag{4.41}$$

Substituindo (4.16) na expressão de $\beta$ resulta:

$$\beta = (A\tilde{x} + BJ(y)\tilde{\nu})^T P\tilde{x} + \tilde{x}^T P\left(A\tilde{x} + BJ(y)\tilde{\nu}\right)$$

$$= \tilde{x}^T A^T P\tilde{x} + \tilde{\nu}^T J(y)^T B^T P\tilde{x} + \tilde{x}^T PA\tilde{x} + \tilde{x}^T PBJ(y)\tilde{\nu}$$

$$= \tilde{x}^T(A^T P + PA)\tilde{x} + 2\tilde{\nu}^T J(y)^T B^T P\tilde{x}$$

$$= -\tilde{x}^T Q\tilde{x} + 2\tilde{\nu}^T J(y)^T C\tilde{x}$$

$$\therefore \beta = -\tilde{x}^T Q\tilde{x} + 2\tilde{\nu}^T J(y)^T\tilde{z} \tag{4.42}$$

Logo substituindo (4.41) e (4.42) em (4.39) resulta:

$$\dot{V} = -\tilde{\nu}^T(D + D^T)\tilde{\nu} - \tilde{x}^T Q\tilde{x} \tag{4.43}$$

Como as matrizes $(D + D^T)$ e $Q$ são definidas positivas, $\dot{V}$ é definida negativa e os erros do observador $\tilde{\nu}$ e $\tilde{x} = [\tilde{\xi}^T \quad \tilde{\eta}^T \quad \tilde{b}^T]^T$ convergem assintoticamente para zero.

## 4.6 Passividade do Observador

A dinâmica dos erros do observador (Figura 4.1) pode ser entendida como a conexão dos subsistemas ***H₁*** (mapeamento $\varepsilon_z \mapsto \tilde{\nu}$) e ***H₂*** (mapeamento $\varepsilon_v \mapsto \tilde{z}$). Os dois subsistemas são conectados pelas matrizes $J(y)$ e $J(y)^T$.

**Proposição P2:** O mapeamento ***H₁*** ($\varepsilon_z \mapsto \tilde{\nu}$ ) é estritamente passivo.

**Prova:** Considere a seguinte função de armazenamento definida positiva:

$$U = \frac{1}{2}\tilde{\nu}^T M \tilde{\nu} \tag{4.44}$$

Derivando $U$ ao longo da trajetória de $\tilde{\nu}$, obtêm-se:

$$\dot{U} = \frac{1}{2}[\dot{\tilde{\nu}}^T M \tilde{\nu} + \tilde{\nu}^T M \dot{\tilde{\nu}}] \tag{4.45}$$

$$\dot{U} = -\frac{1}{2}\tilde{\nu}^T (D + D^T)\nu - \tilde{z}^T J(y)\nu \tag{4.46}$$

Como $\varepsilon_z = -J^T(y)\tilde{z}$, (4.46) se reduz a:

$$\varepsilon_z^T \tilde{\nu} = \dot{U} + \frac{1}{2}\tilde{\nu}^T (D + D^T)\nu \tag{4.47}$$

Integrando (4.47), chega-se a:

$$\int_{to}^{t} \varepsilon_z^T(\tau)\tilde{\nu}(\tau)d\tau = U + \frac{1}{2}\int_{to}^{t} \tilde{\nu}^T(\tau)(D + D^T)\nu(\tau)d\tau \tag{4.48}$$

A matriz $M$ é definida positiva e (4.44) pode ser transformada na seguinte inequação:

$$U \leq \frac{1}{2}\lambda_{\min}(M)\tilde{\nu}^T \tilde{\nu} \tag{4.49}$$

Portanto, (4.48) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\int_{to}^{t} \varepsilon_z^T(\tau)\tilde{\nu}(\tau)d\tau \geq \alpha \tilde{\nu}^T \tilde{\nu} + \beta \tag{4.50}$$

onde $\alpha = \frac{1}{2}\lambda_{\min}(M)$ é uma constante positiva e $\beta = \frac{1}{2}\int_{to}^{t} \tilde{\nu}^T(\tau)(D + D^T)\nu(\tau)d\tau \geq 0$ é a energia dissipada devido ao amortecimento hidrodinâmico. Desta forma, decorre da definição que o sistema ***H₁*** é estritamente passivo.

**Teorema 4.2:** O observador não-linear dado pelas equações (4.1) a (4.5) é estritamente passivo.

**Prova:** Como o sistema ***H₁*** é estritamente passivo (proposição P2) e o sistema ***H₂*** é estritamente positivo real (proposição P1), o sistema (***H₁***+***H₂***) representando a dinâmica dos erros do observador é estritamente passivo e o observador não-linear dado pelas equações (4.1) a (4.5) é globalmente assintoticamente estável.

# 5. PROJETO DO CONTROLADOR “BACKSTEPPING”

## 5.1 Considerações Gerais

O objetivo deste capítulo é projetar um controlador através da metodologia “backstepping” que utilize as estimativas fornecidas pelo observador passivo não-linear desenvolvido no capítulo anterior. Além de funcionar como regulador em aplicações de posicionamento dinâmico, o controlador também deverá atuar como piloto automático em manobras de baixa velocidade (inferiores a 2 m/s).

O projeto do controlador “backstepping” é baseado no trabalho de Aarset; Strand e Fossen (1998), que pode ser considerado uma extensão do trabalho de Fossen e Grovlen (1998). A abordagem utilizada nestes trabalhos se assemelha à generalização da técnica apresentada no item 2.5, aplicável ao problema de acompanhamento de trajetória, porém difere desta por considerar os erros de estimação do observador como perturbações desestabilizadoras a serem dominadas por amortecimento artificial não-linear.

Conforme já visto, a metodologia “backstepping” é desenvolvida a partir do modelo matemático do sistema e introduz novas variáveis em sua estrutura como as variáveis de erro $z_i$, o controle virtual $\zeta$ e as funções de estabilização $\alpha_i$. A finalidade das funções de estabilização é compensar as não-linearidades do sistema que afetam a sua estabilidade. O método permite a criação e o emprego de não-linearidades artificiais, arbitrariamente definidas, a fim de eliminar as não-linearidades indesejáveis do sistema (Fossen e Strand (1998)). É possível também utilizar estas não-linearidades para limitar os efeitos das perturbações determinísticas e estocásticas que agem sobre o sistema.

A idéia central da técnica consiste em achar uma lei de controle $\tau_c$ que torne a origem do sistema dinâmico $(z_1, z_2, ... z_i)$ globalmente assintoticamente estável. A variável de erro $z_1$ é definida subjetivamente, de acordo com os objetivos do projeto. Por exemplo, se o objetivo do projeto for assegurar acompanhamento de trajetória, $z_1$ pode ser definida como o erro de acompanhamento. As demais variáveis de erro são definidas objetivamente, conforme preconizado pela metodologia.

## 5.2 Determinação da Lei de Controle

Tendo em vista a estrutura do modelo matemático do sistema, o projeto do controlador será efetuado em duas etapas (*i = 2*), a saber:

**Etapa 1**: Define-se a primeira variável de erro $z_1 \in \Re^3$ como:

$$z_1 = \hat{\eta} - \eta_d + K_I \int_o^t (\hat{\eta} - \eta_d) dt \tag{5.1}$$

onde $\eta_d \in C^2$ é a trajetória de referência, especificada em relação ao referencial fixo, e $K_I \in \Re^{3x3}$ é a matriz de ganhos do termo integral.

Neste projeto, a ação integral é incluída na lei de controle através da alimentação em avanço das estimativas dos esforços ambientais. De acordo com Aarset; Strand e Fossen (1998), o termo integral adicional de (5.1) serve para compensar os efeitos das dinâmicas não modeladas, melhorando assim o desempenho do sistema.

Contudo, na implementação da metodologia “backstepping”, adota-se a hipótese de que a modelagem é perfeita, o que implica na nulidade do termo integral de (5.1). Conforme será visto, este fato afeta a localização do ponto de equilíbrio do sistema no espaço de estados, mas não as suas características de estabilidade. Como o objetivo da metodologia é conferir estabilidade assintótica global a este ponto (independentemente de sua localização no espaço de estados), a hipótese adotada não implica em perda de generalidade.

Derivando (5.1) e aplicando (4.2), chega-se a:

$$\dot{z}_1 = \dot{\hat{\eta}} - \dot{\eta}_d + K_I(\hat{\eta} - \eta_d) = J(y)\hat{\nu} + K_2\tilde{y} - \dot{\eta}_d + K_I(\hat{\eta} - \eta_d) \tag{5.2}$$

A principal idéia da metodologia “backstepping” é escolher um termo de (5.2) para ser o controle virtual $\zeta$ . Desta forma, escolhe-se:

$$\zeta = J(y)\hat{\nu} \tag{5.3}$$

Substituindo (5.3) em (5.2), chega-se a:

$$\dot{z}_1 = \zeta - \dot{\eta}_d + K_I(\hat{\eta} - \eta_d) + K_2\tilde{y} \tag{5.4}$$

Neste sistema, $K_2\tilde{y}$ pode ser entendido como um termo forçante de perturbação.

O objetivo da metodologia “backstepping” é obter uma lei de controle $\tau_c$ que assegure $\hat{\eta} \to \eta_d$ para $t \to \infty$, o que equivale a $z_1 \to 0$ para $t \to \infty$. Nesta situação, o equilíbrio em (5.4) é assegurado somente se $(z_1 \quad \zeta) = (0 \quad \dot{\eta}_d)$. Em outras palavras, o objetivo da metodologia “backstepping” é achar uma lei de controle $\tau_c$ que torne este ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.

O primeiro passo consiste em achar uma função $\zeta = \alpha_1$ que estabilize (5.4). Desta forma, define-se a seguinte função de Lyapunov para (5.4):

$$V_1 = \frac{1}{2} z_1^T K_P z_1 \tag{5.5}$$

onde $K_P \in \Re^{3x3}$ é uma matriz de ganhos diagonal estritamente positiva, introduzida na formulação para viabilizar a implementação experimental do sistema.

Derivando (5.5) chega-se a:

$$\dot{V}_1 = z_1^T K_P \dot{z}_1 \tag{5.6}$$

Substituindo (5.4) em (5.6), lembrando que $\zeta = \alpha_1$, resulta:

$$\dot{V}_1 = z_1^T K_P (\zeta - \dot{\eta}_d + K_I(\hat{\eta} - \eta_d) + K_2 \tilde{y}) = z_1^T K_P (\alpha_1 - \dot{\eta}_d + K_I(\hat{\eta} - \eta_d) + K_2 \tilde{y}) \tag{5.7}$$

A função de estabilização $\alpha_1$ deve ser selecionada a fim de tornar $\dot{V}_1$ definida negativa. Selecionando $\alpha_1$ como:

$$\alpha_1 = -(C_1 + D_1) z_1 + \dot{\eta}_d - K_I(\hat{\eta} - \eta_d) \tag{5.8}$$

onde $C_1 \in \Re^{3x3}$ e $D_1 \in \Re^{3x3}$ são matrizes diagonais estritamente positivas, resulta:

$$\dot{V}_1 = -z_1^T K_P [(C_1 + D_1) z_1 - K_2 \tilde{y}] \tag{5.9}$$

Nota-se que $\dot{V}_1$ será definida negativa se o termo $D_1 z_1$ dominar o termo de perturbação $K_2 \tilde{y}$. Para que isto ocorra, a matriz $D_1$ deve ser estruturada conforme preconizado no item 5.3.

De acordo com a metodologia “backstepping”, define-se a segunda variável de erro $z_2 \in \Re^3$ como:

$$z_2 = \zeta - \alpha_1 \tag{5.10}$$

A variável $z_2$ pode ser entendida como o desvio do controle virtual $\zeta$ em relação ao seu valor desejado $\alpha_1$. A derivada da variável $z_2$ é dada por:

$$\dot{z}_2 = \dot{\zeta} - \dot{\alpha}_1 \tag{5.11}$$

Substituindo (5.8) e (5.10) em (5.4) e incorporando (5.11), obtém-se o seguinte sistema dinâmico:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -(C_1 + D_1)z_1 + z_2 + K_2\tilde{y} & (5.12) \\ \dot{z}_2 = \dot{\zeta} - \dot{\alpha}_1 & (5.13) \end{cases}$$

Desenvolvendo (5.13):

$$\dot{z}_2 = \dot{\zeta} - \dot{\alpha}_1 = J(y)\dot{\hat{\nu}} + \dot{J}(y)\hat{\nu} + (C_1 + D_1)\dot{z}_1 - \ddot{\eta}_d + K_I\dot{\hat{\eta}} - K_I\dot{\eta}_d \tag{5.14}$$

O termo $\dot{J}(y)\hat{\nu}$ pode ser expresso da seguinte maneira:

$$\dot{J}(y) = J(y)S(\rho) \tag{5.15}$$

onde $\rho = [0 \quad 0 \quad r + \dot{\psi}_w]^T$ e $S$ é uma matriz anti-simétrica dada por:

$$S(h) = \begin{bmatrix} 0 & -h_3 & h_2 \\ h_3 & 0 & -h_1 \\ -h_2 & h_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.16}$$

onde $h = [h_1 \quad h_2 \quad h_3]^T$.

Levando em conta que $\tilde{\rho} = \rho - \hat{\rho}$, o termo $\dot{J}(y)\hat{\nu}$ pode ser escrito como:

$$\dot{J}(y)\hat{\nu} = J(y)S(\rho)\hat{\nu} = J(y)[S(\hat{\rho})\hat{\nu} + S(\tilde{\rho})\hat{\nu}] = J(y)[S(\hat{\rho})\hat{\nu} - S(\hat{\nu})\tilde{\rho}] \tag{5.17}$$

pois $S(\tilde{\rho})\hat{\nu} = -S(\hat{\nu})\tilde{\rho}$. Adicionalmente, $\tilde{\rho}$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$\tilde{\rho} = L\tilde{\nu} + N\tilde{\xi} \tag{5.18}$$

onde:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.19}$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.20}$$

Logo, (5.17) se reduz a:

$$\dot{J}(y)\hat{\nu} = J(y)S(\hat{\rho})\hat{\nu} - J(y)S(\hat{\nu})(L\tilde{\nu} + N\tilde{\xi}) \tag{5.21}$$

Substituindo (4.2), (4.4) e (5.21) em (5.14) resulta:

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 = & -J(y)S(\hat{\nu})L\tilde{\nu} - J(y)S(\hat{\nu})N\tilde{\xi} + J(y)S(\hat{\rho})\hat{\nu} + J(y)[-M^{-1}D\hat{\nu} + M^{-1}\tau_c + \\ & + M^{-1}J^T(y)\hat{b} + M^{-1}J^T(y)K_4\tilde{y}] - (C_1 + D_1)^2 z_1 + (C_1 + D_1)z_2 + (C_1 + D_1)K_2\tilde{y} + \\ & - \ddot{\eta}_d - K_I\dot{\eta}_d + K_I[J(y)\hat{\nu} + K_2\tilde{y}] \end{aligned} \tag{5.22}$$

Agrupando os termos conhecidos de (5.22), obtém-se:

$$\varphi = J(y)S(\hat{\rho})\hat{\nu} - J(y)M^{-1}D\hat{\nu} + J(y)M^{-1}J^T(y)\hat{b} - (C_1 + D_1)^2 z_1 + (C_1 + D_1)z_2 - \ddot{\eta}_d + \\ - K_I\dot{\eta}_d + K_I J(y)\hat{\nu} \tag{5.23}$$

Substituindo (5.23) em (5.22) resulta:

$$\dot{z}_2 = -J(y)S(\hat{\nu})L\tilde{\nu} - J(y)S(\hat{\nu})N\tilde{\xi} + \varphi + J(y)M^{-1}\tau_c + [J(y)M^{-1}J^T(y)K_4 + \\ + (C_1 + D_1)K_2 + K_I K_2]\tilde{y} \tag{5.24}$$

Definindo:

$$\Omega_1 = J(y)M^{-1}J^T(y)K_4 + (C_1 + D_1)K_2 + K_I K_2 \tag{5.25}$$

$$\Omega_2 = -J(y)S(\hat{\nu})L \tag{5.26}$$

$$\Omega_3 = -J(y)S(\hat{\nu})N \tag{5.27}$$

a equação (5.24) se reduz a:

$$\dot{z}_2 = J(y)M^{-1}\tau_c + \varphi + \Omega_1\tilde{y} + \Omega_2\tilde{\nu} + \Omega_3\tilde{\xi} \tag{5.28}$$

Substituindo (5.28) em (5.13), o sistema (5.12)-(5.13) se reduz a:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -(C_1 + D_1)z_1 + z_2 + K_2\tilde{y} & (5.29) \\ \dot{z}_2 = J(y)M^{-1}\tau_c + \varphi + \Omega_1\tilde{y} + \Omega_2\tilde{\nu} + \Omega_3\tilde{\xi} & (5.30) \end{cases}$$

Neste sistema, $K_2\tilde{y}$ e $(\Omega_1\tilde{y} + \Omega_2\tilde{\nu} + \Omega_3\tilde{\xi})$ podem ser entendidos como termos forçantes de perturbação.

**Etapa 2:** A lei de controle $\tau_c$ será determinada através do método direto de Lyapunov. Define-se a seguinte função de Lyapunov para o sistema (5.29)-(5.30):

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2}z_2^T z_2 = \frac{1}{2}z_1^T K_P z_1 + \frac{1}{2}z_2^T z_2 \tag{5.31}$$

Derivando (5.31), chega-se a:

$$\dot{V}_2 = z_1^T K_P \dot{z}_1 + z_2^T \dot{z}_2 \tag{5.32}$$

Substituindo (5.9), (5.29) e (5.30) em (5.32), resulta:

$$\dot{V}_2 = \dot{V}_1 + z_1^T K_P z_2 + z_2^T[J(y)M^{-1}\tau_c + \varphi + \Omega_1\tilde{y} + \Omega_2\tilde{\nu} + \Omega_3\tilde{\xi}] \tag{5.33}$$

A função de controle $\tau_c$ deve ser selecionada a fim de tornar $\dot{V}_2$ definida negativa. Selecionando $\tau_c$ como:

$$\tau_c = -MJ^T(y)[\varphi + (C_2 + D_2)z_2 + K_P z_1] \tag{5.34}$$

onde $C_2 \in \Re^{3x3}$ e $D_2 \in \Re^{3x3}$ são matrizes diagonais estritamente positivas, resulta:

$$\dot{V}_2 = \dot{V}_1 - z_2^T[(C_2 + D_2)z_2 - (\Omega_1\tilde{y} + \Omega_2\tilde{\nu} + \Omega_3\tilde{\xi})] \tag{5.35}$$

Como $\dot{V}_1$ é definida negativa, $\dot{V}_2$ será definida negativa se o termo $D_2 z_2$ dominar o termo de perturbação $(\Omega_1\tilde{y} + \Omega_2\tilde{\nu} + \Omega_3\tilde{\xi})$. Para que isto ocorra, a matriz $D_2$ deve ser estruturada conforme preconizado no item 5.3.

Nota-se em (5.34) que a matriz de ganhos $K_P$ permite o ajuste dos esforços de controle às limitações físicas do sistema propulsor.

Substituindo (5.34) em (5.30), o sistema (5.29)-(5.30) se reduz a:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -(C_1 + D_1)z_1 + z_2 + K_2\tilde{y} & (5.36) \\ \dot{z}_2 = -(C_2 + D_2)z_2 - K_P z_1 + \Omega_1\tilde{y} + \Omega_2\tilde{\nu} + \Omega_3\tilde{\xi} & (5.37) \end{cases}$$

Como $V_2$ é ilimitada radialmente e $\dot{V}_2$ é definida negativa, a origem $(z_1 \quad z_2) = (0 \quad 0)$ do sistema (5.36)-(5.37) é globalmente assintoticamente estável. Conseqüentemente, de acordo com a equação (5.10), o ponto de equilíbrio $(z_1 \quad \xi) = (0 \quad \dot{\eta}_d)$ de (5.4) também é globalmente assintoticamente estável.

A dinâmica do sistema (5.36)-(5.37) pode ser escrita matricialmente da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} K_P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \left\{ -\begin{bmatrix} K_P(C_1 + D_1) & 0 \\ 0 & (C_2 + D_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & K_P \\ -K_P & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \tag{5.38}$$

Nota-se que a matriz que multiplica o vetor de estados pode ser desmembrada em duas matrizes, uma diagonal e a outra anti-simétrica. Este fato demonstra que a metodologia “backstepping” foi implementada corretamente. A estrutura do controlador é apresentada no Apêndice B.

## 5.3 Determinação dos Ganhos do Controlador

A metodologia “backstepping” considera os erros de estimação do observador ($\tilde{y}$, $\tilde{\nu}$ e $\tilde{\xi}$) como perturbações a serem dominadas pelo amortecimento não-linear introduzido artificialmente no sistema (Krstic; Kanellakopoulos e Kokotovic (1995)).

Desta forma, o termo de perturbação $K_2\tilde{y}$ de (5.36) deve ser dominado pelo termo de amortecimento $D_1 z_1$. A matriz $D_1$ é estruturada da seguinte maneira:

$$D_1 = \begin{bmatrix} d_1 k_1^T k_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 k_2^T k_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 k_3^T k_3 \end{bmatrix} \tag{5.39}$$

onde $d_i > 0$ ($i$ = 1, 2 e 3) são constantes positivas de projeto e $k_i$ ($i$ = 1, 2 e 3) são os vetores coluna da matriz $K_2^T$ do observador.

De forma similar, o termo de perturbação $(\Omega_1\tilde{y} + \Omega_2\tilde{v} + \Omega_3\tilde{\xi})$ de (5.37) deve ser dominado pelo termo de amortecimento $D_2 z_2$. A matriz $D_2$ é estruturada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} D_2 = diag\{ & d_4(\omega_1^T\omega_1 + \omega_4^T\omega_4 + \omega_7^T\omega_7), \\ & d_5(\omega_2^T\omega_2 + \omega_5^T\omega_5 + \omega_8^T\omega_8), \\ & d_6(\omega_3^T\omega_3 + \omega_6^T\omega_6 + \omega_9^T\omega_9)\} \end{aligned} \tag{5.40}$$

onde $d_i > 0$ ($i$ = 4, 5 e 6) são constantes positivas de projeto, $\omega_i$ ($i$ = 1, 2 e 3) são os vetores coluna da matriz $\Omega_1^T$, $\omega_i$ ($i$ = 4, 5 e 6) são os vetores coluna da matriz $\Omega_2^T$ e $\omega_i$ ($i$ = 7, 8 e 9) são os vetores coluna da matriz $\Omega_3^T$.

$C_1$ e $C_2$ são matrizes diagonais estritamente positivas e constantes, utilizadas para assegurar que (5.9) e (5.35) sejam definidas negativas.

Cabe mencionar que existem propostas para ajustar os ganhos do controlador utilizando algoritmos de otimização como redes neurais e algoritmo genético, porém este assunto foge ao escopo deste trabalho.

## 5.4 Dinâmica dos Erros do Sistema em Malha Fechada

Definindo $z = \begin{bmatrix} z_1^T & z_2^T \end{bmatrix}^T$, a dinâmica dos erros do sistema em malha fechada é descrita pelas seguintes equações:

$$R\dot{z} = -C_z z - D_z z + Ez + W_1\tilde{y} + W_2\tilde{v} + W_3\tilde{\xi} \tag{5.41}$$

$$\dot{e}_I = \hat{\eta} - \eta_d \tag{5.42}$$

$$M\dot{\tilde{v}} = -D\tilde{v} - J^T(y)\tilde{z} \tag{5.43}$$

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + BJ(y)\tilde{v} \tag{5.44}$$

$$\tilde{z} = C\tilde{x} \tag{5.45}$$

onde:

$$R = \begin{bmatrix} K_P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{5.46}$$

$$C_z = \begin{bmatrix} K_P C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1'} & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \tag{5.47}$$

$$D_z = \begin{bmatrix} K_P D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{1'} & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} \tag{5.48}$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & K_P \\ -K_P & 0 \end{bmatrix} \tag{5.49}$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} K_P K_2 \\ \Omega_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{2'} \\ \Omega_1 \end{bmatrix} \tag{5.50}$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega_2 \end{bmatrix} \tag{5.51}$$

$$W_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega_3 \end{bmatrix} \tag{5.52}$$

## 5.5 Estabilidade do Sistema em Malha Fechada

A estabilidade do sistema dado pelas equações (5.41)-(5.45) será provada através do método direto de Lyapunov. A função de Lyapunov para este sistema será a soma de duas funções de Lyapunov, uma referente ao observador e outra referente ao controlador:

$$V = V_{obs} + V_{con} \tag{5.53}$$

A função de Lyapunov do observador será a mesma adotada no capítulo 4, dada por (4.38):

$$V_{obs} = \tilde{\nu}^T M \tilde{\nu} + \tilde{x}^T P \tilde{x} \tag{5.54}$$

Para a presente demonstração, a função de Lyapunov escolhida para o controlador é dada por:

$$V_{con} = \frac{1}{2} z^T R z \tag{5.55}$$

Derivando (5.53), chega-se a:

$$\dot{V} = \dot{V}_{obs} + \dot{V}_{con} \tag{5.56}$$

De acordo com (4.43), a derivada da função de Lyapunov referente ao observador é dada por:

$$\dot{V}_{obs} = -\tilde{\nu}^T (D + D^T) \tilde{\nu} - \tilde{x}^T Q \tilde{x} \tag{5.57}$$

A derivada da função de Lyapunov referente ao controlador é dada por:

$$\dot{V}_{con} = z^T R \dot{z} \tag{5.58}$$

$$\dot{V}_{con} = z^T R R^{-1} (-C_z z - D_z z + E z + W_1 \tilde{y} + W_2 \tilde{\nu} + W_3 \tilde{\xi}) \tag{5.59}$$

Mas $z^T E z = 0 \;\; \forall z$, logo:

$$\dot{V}_{con} = -z^T C_z z - z^T D_z z + z^T W_1 \tilde{y} + z^T W_2 \tilde{\nu} + z^T W_3 \tilde{\xi} \tag{5.60}$$

Substituindo (5.57) e (5.60) em (5.56), resulta:

$$\dot{V} = -z^T C_z z - z^T D_z z + z^T W_1 \tilde{y} + z^T W_2 \tilde{\nu} + z^T W_3 \tilde{\xi} - \tilde{\nu}^T (D + D^T) \tilde{\nu} - \tilde{x}^T Q \tilde{x} \tag{5.61}$$

A fim de completar os quadrados nos termos cruzados de (5.61), adicionam-se os seguintes termos iguais a zero:

$$\frac{1}{4} (\tilde{y}^T G_1 \tilde{y} - \tilde{y}^T G_1 \tilde{y}) = 0 \tag{5.62}$$

$$\frac{1}{4} (\tilde{\nu}^T G_2 \tilde{\nu} - \tilde{\nu}^T G_2 \tilde{\nu}) = 0 \tag{5.63}$$

$$\frac{1}{4} (\tilde{\xi}^T G_3 \tilde{\xi} - \tilde{\xi}^T G_3 \tilde{\xi}) = 0 \tag{5.64}$$

onde:

$$G_1 = g_1 I \;\; ; \;\; g_1 = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{d_i} \tag{5.65}$$

$$G_2 = g_2 I \;\; ; \;\; g_2 = \sum_{i=4}^{6} \frac{1}{d_i} \tag{5.66}$$

$$G_3 = g_3 I \;\; ; \;\; g_3 = \sum_{i=4}^{6} \frac{1}{d_i} \tag{5.67}$$

Desta forma, (5.61) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\dot{V} = z^T(-C_z z - D_z z + W_1\tilde{y} + W_2\tilde{\nu} + W_3\tilde{\xi}) - \frac{1}{4}(\tilde{y}^T G_1\tilde{y} + \tilde{\nu}^T G_2\tilde{\nu} + \tilde{\xi}^T G_3\tilde{\xi}) + \\ -\tilde{x}^T(Q - \frac{1}{4}C_y{}^T G_1 C_y - \frac{1}{4}C_\xi{}^T G_3 C_\xi)\tilde{x} - \tilde{\nu}^T(D + D^T - \frac{1}{4}G_2)\tilde{\nu} \tag{5.68}$$

sendo:

$$\tilde{y} = C_y\tilde{x} \tag{5.69}$$

$$\tilde{\xi} = C_\xi\tilde{x} \tag{5.70}$$

Será provado no apêndice C que:

$$z^T(-D_z z + W_1\tilde{y} + W_2\tilde{\nu} + W_3\tilde{\xi}) - \frac{1}{4}(\tilde{y}^T G_1\tilde{y} + \tilde{\nu}^T G_2\tilde{\nu} + \tilde{\xi}^T G_3\tilde{\xi}) \le 0 \tag{5.71}$$

Desta forma, (5.68) se reduz a seguinte inequação:

$$\dot{V} \le -z^T C_z z - \tilde{x}^T(Q - \frac{1}{4}C_y{}^T G_1 C_y - \frac{1}{4}C_\xi{}^T G_3 C_\xi)\tilde{x} - \tilde{\nu}^T(D + D^T - \frac{1}{4}G_2)\tilde{\nu} \tag{5.72}$$

Expandindo $z$ em (5.72) obtêm-se:

$$\dot{V} \le -z_1{}^T C_{1'} z_1 - z_2{}^T C_2 z_2 - \tilde{x}^T(Q - \frac{1}{4}C_y{}^T G_1 C_y - \frac{1}{4}C_\xi{}^T G_3 C_\xi)\tilde{x} - \tilde{\nu}^T(D + D^T - \frac{1}{4}G_2)\tilde{\nu} \tag{5.73}$$

Tendo em vista as características das matrizes $C_{1'}$ e $C_2$, é fácil ver que $\dot{V}$ será definida negativa se:

$$Q - \frac{1}{4}C_y{}^T G_1 C_y - \frac{1}{4}C_\xi{}^T G_3 C_\xi > 0 \tag{5.74}$$

$$(D + D^T) - \frac{1}{4}G_2 > 0 \tag{5.75}$$

Portanto, dentro das hipóteses $\alpha_1$ a $\alpha_5$, o sistema (5.41)-(5.45) é globalmente assintoticamente estável, de acordo com o método direto de Lyapunov.

Ressalta-se que as matrizes $G_1$, $G_2$ e $G_3$ não são necessárias à implementação do controlador.

# 6. RESULTADOS NUMÉRICOS

## 6.1 Descrição das Simulações

As simulações consideraram um navio aliviador da classe Suezmax, similar aos utilizados pela Petrobrás em águas brasileiras. As características principais do navio, na condição de carregamento nominal, são mostradas na Tabela 6.1:

Tabela 6.1 - Características principais do navio carregado

| | | |
|---|---|---|
| Δ | : | 175181 t |
| Loa | : | 272 m |
| Lpp | : | 258 m |
| B | : | 46 m |
| D | : | 24, 4 m |
| H | : | 16,2 m |

Os demais dados relativos ao navio (matrizes $M$ e $D$) e os ganhos do sistema são apresentados no Apêndice D.

Cabe mencionar que os autovalores adimensionais da matriz dinâmica $A = -M^{-1}D$ são $\lambda_1 = \text{-}0{,}0003$, $\lambda_2 = \text{-}0{,}0077$ e $\lambda_3 = 0{,}00001$. Logo, o navio não é estável direcionalmente, pois o autovalor adimensional associado ao movimento de guinada é positivo. Conforme será visto, este fato não afetou o desempenho do sistema em malha fechada graças a robustez e ao efeito estabilizador da lei de controle.

O navio aliviador foi modelado utilizando a formulação proposta por Fossen (1994), dada pela equação (3.20). O modelo foi submetido a perturbações ambientais de natureza estocástica. A posição e o aproamento fornecidos pelo modelo foram corrompidos por efeitos de onda de primeira ordem e por ruído de medição.

As perturbações ambientais de natureza estocástica foram obtidas, para cada grau de liberdade, a partir da integração de ruído branco multiplicado por uma constante de ajuste.

Os movimentos de alta freqüência do navio (decorrentes dos esforços de onda de primeira ordem) foram gerados, para cada grau de liberdade, a partir da realização no tempo de seus respectivos espectros. Estes espectros foram obtidos a partir dos RAOs do navio e do espectro de mar de Pierson-Moskowitz relativo a estado de mar 5.

As matrizes $K_1$ e $K_2$ do observador foram sintonizadas de acordo com a formulação proposta no capítulo 4. As demais matrizes de ganho do sistema foram sintonizadas por tentativa e erro, uma vez que a obtenção da sintonia ótima do conjunto não faz parte do escopo deste trabalho.

O desempenho do observador foi avaliado na simulação em malha aberta, enquanto que o desempenho do conjunto observador-controlador foi averiguado na simulação em malha fechada.

Na simulação em malha fechada, os valores de referência (“set-point”) para $x$, $y$ e $\psi$ foram arbitrados da seguinte maneira:

- A posição $x$ foi alterada de 0 para 10 m, em 1000 s, seguindo uma trajetória suave de referência.
- A posição $y$ foi mantida em 0 m durante todo o tempo de simulação.
- O ângulo de aproamento $\psi$ foi alterado de 0 para 20°, em 2000 s, seguindo uma trajetória suave de referência.

A dinâmica dos atuadores e o algoritmo de alocação de empuxo não foram considerados nestas simulações.

Os resultados relativos à simulação em malha aberta são mostrados nas Figuras 6.1 (gráficos de posição e aproamento), 6.2 (gráficos de velocidades), 6.3 (gráficos dos movimentos de primeira ordem) e 6.4 (gráficos dos esforços ambientais).

Os resultados relativos à simulação em malha fechada são mostrados nas Figuras 6.5 (gráficos de posição e aproamento), 6.6 (gráficos de velocidades), 6.7 (gráficos dos movimentos de primeira ordem), 6.8 (gráficos dos esforços ambientais) e 6.9 (gráficos dos esforços de controle).

## 6.2 Resultados das Simulações

a) Simulação do Sistema em Malha Aberta

Na Figura 6.1, a linha azul representa a medição de posição ou aproamento, corrompida por efeitos de primeira ordem e ruído. A linha vermelha representa a estimativa do observador. Nota-se que o observador forneceu estimativas razoavelmente precisas, livres de ruído e de efeitos de primeira ordem.

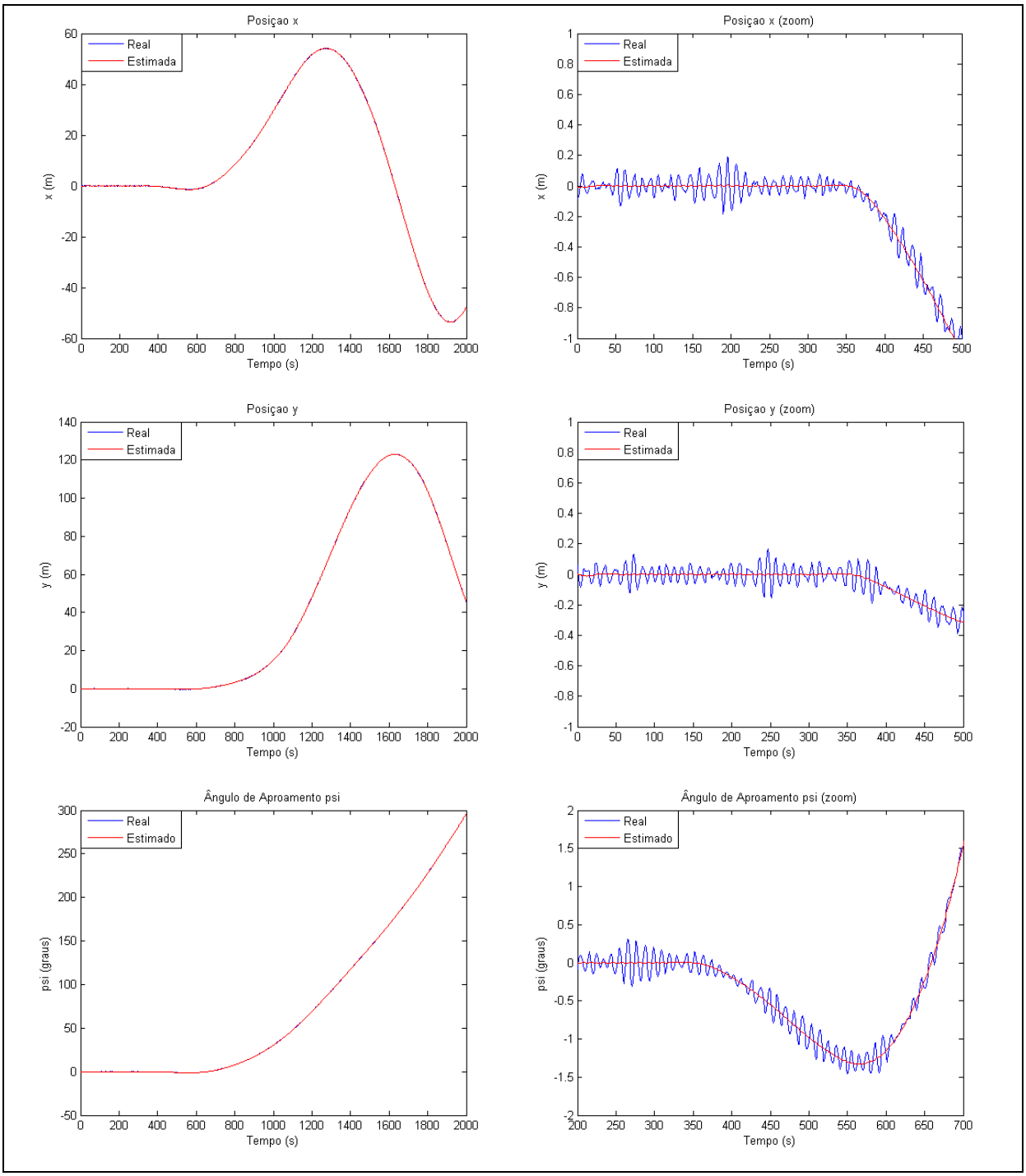



Figura 6.1 - Posição e aproamento

Na Figura 6.2, a linha azul representa a velocidade real, corrompida por efeitos de primeira ordem e ruído, enquanto que a linha vermelha representa a estimativa do observador. Nota-se que o observador forneceu estimativas razoavelmente precisas, livres de ruído e de componentes oscilatórias de alta freqüência.

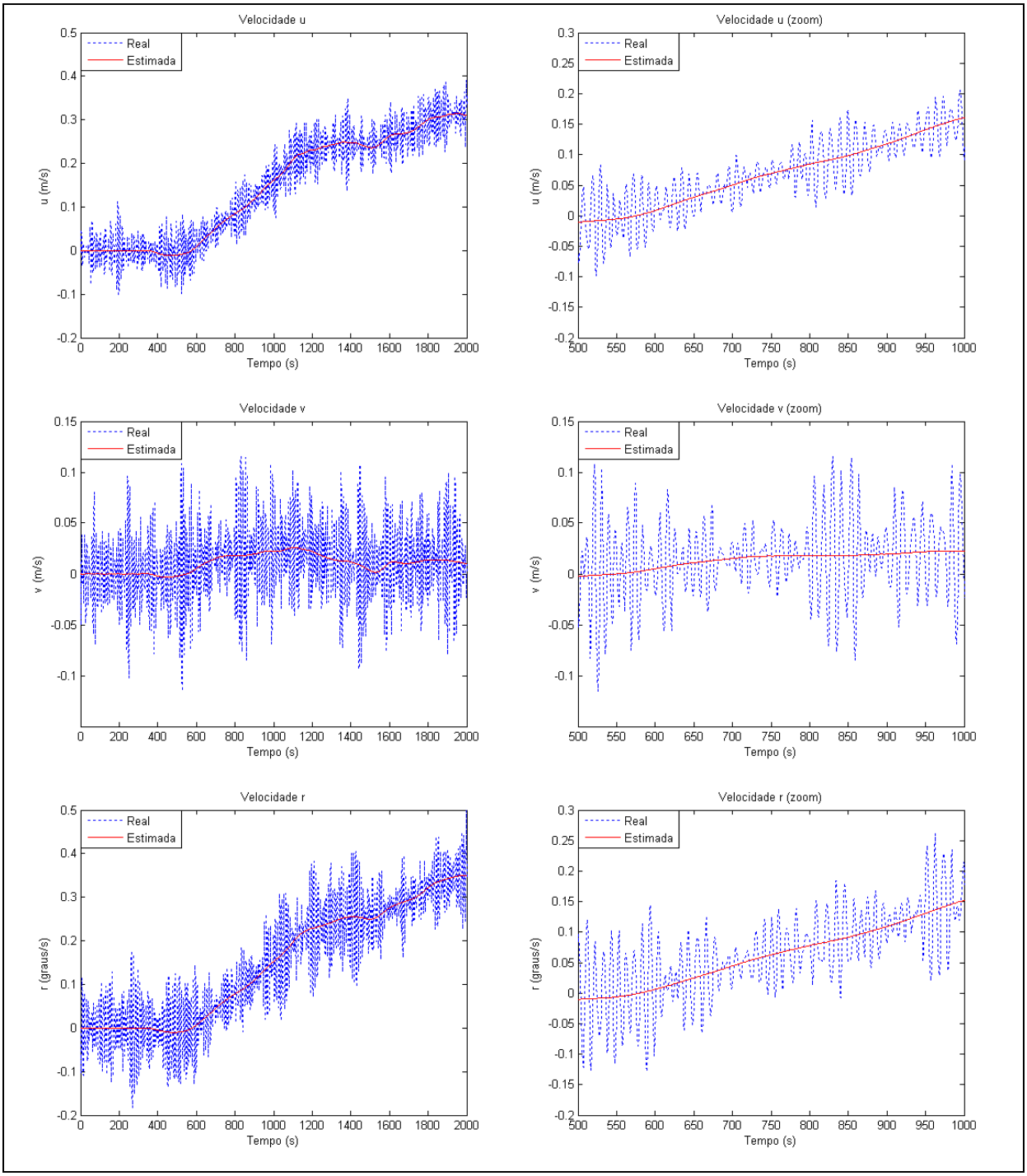



Figura 6.2 - Velocidades

Na Figura 6.3, a linha lilás representa o movimento real, enquanto que a linha preta representa o movimento estimado pelo observador. Nota-se que o observador (mais especificamente o seu modelo de ondas de primeira ordem) conseguiu reproduzir muito bem o movimento de alta freqüência do navio, o que justifica a excelente qualidade da filtragem de onda obtida.

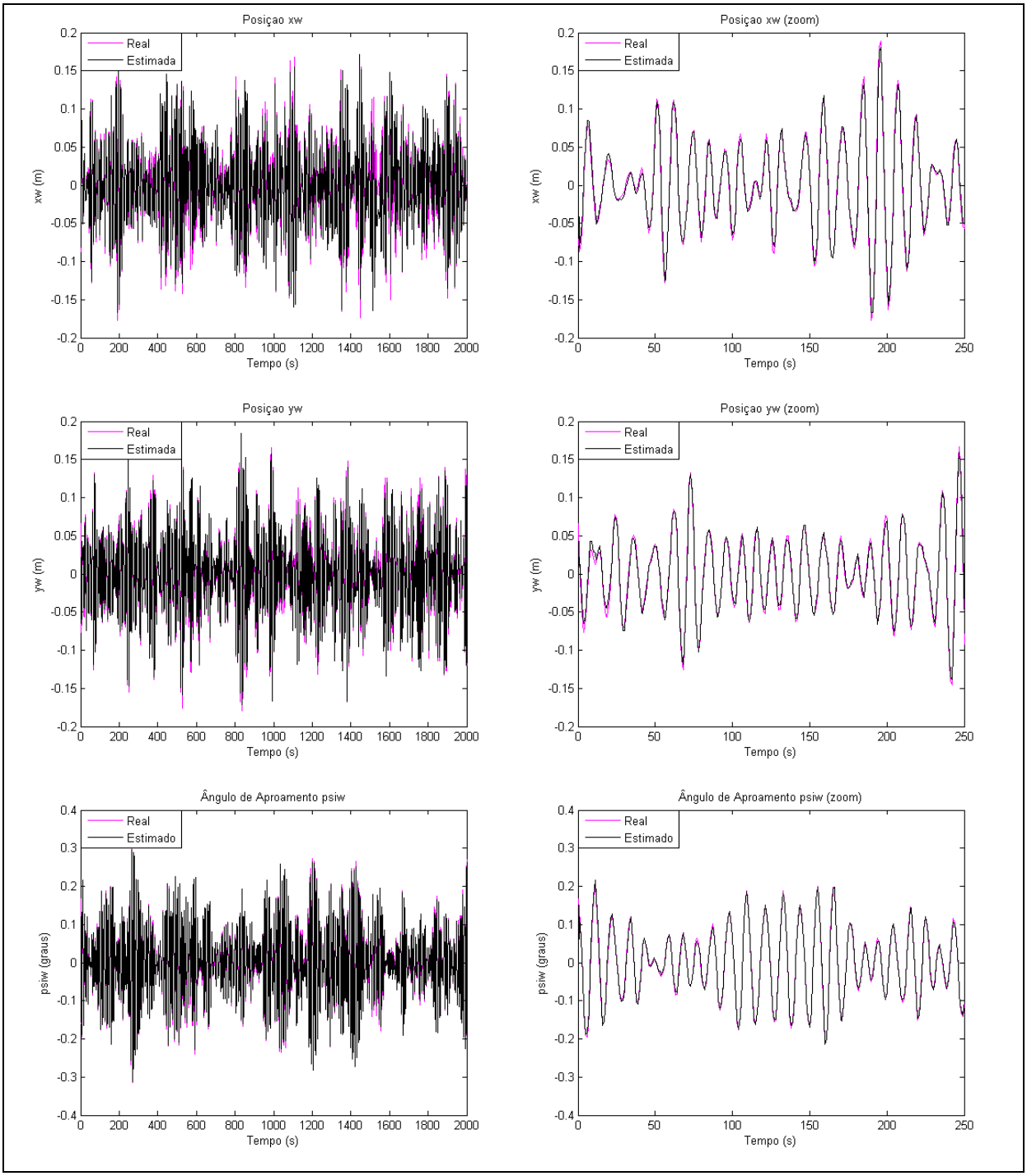



Figura 6.3 - Movimentos de primeira ordem

Na Figura 6.4, a linha azul representa o esforço real aplicado no navio enquanto que a linha vermelha representa o esforço estimado pelo observador. Considerando a simplicidade do modelo de esforços ambientais do observador, pode-se dizer que as estimativas ficaram suficientemente precisas. O atraso de fase observado não comprometeu a precisão das demais estimativas (especialmente as de posição e aproamento).

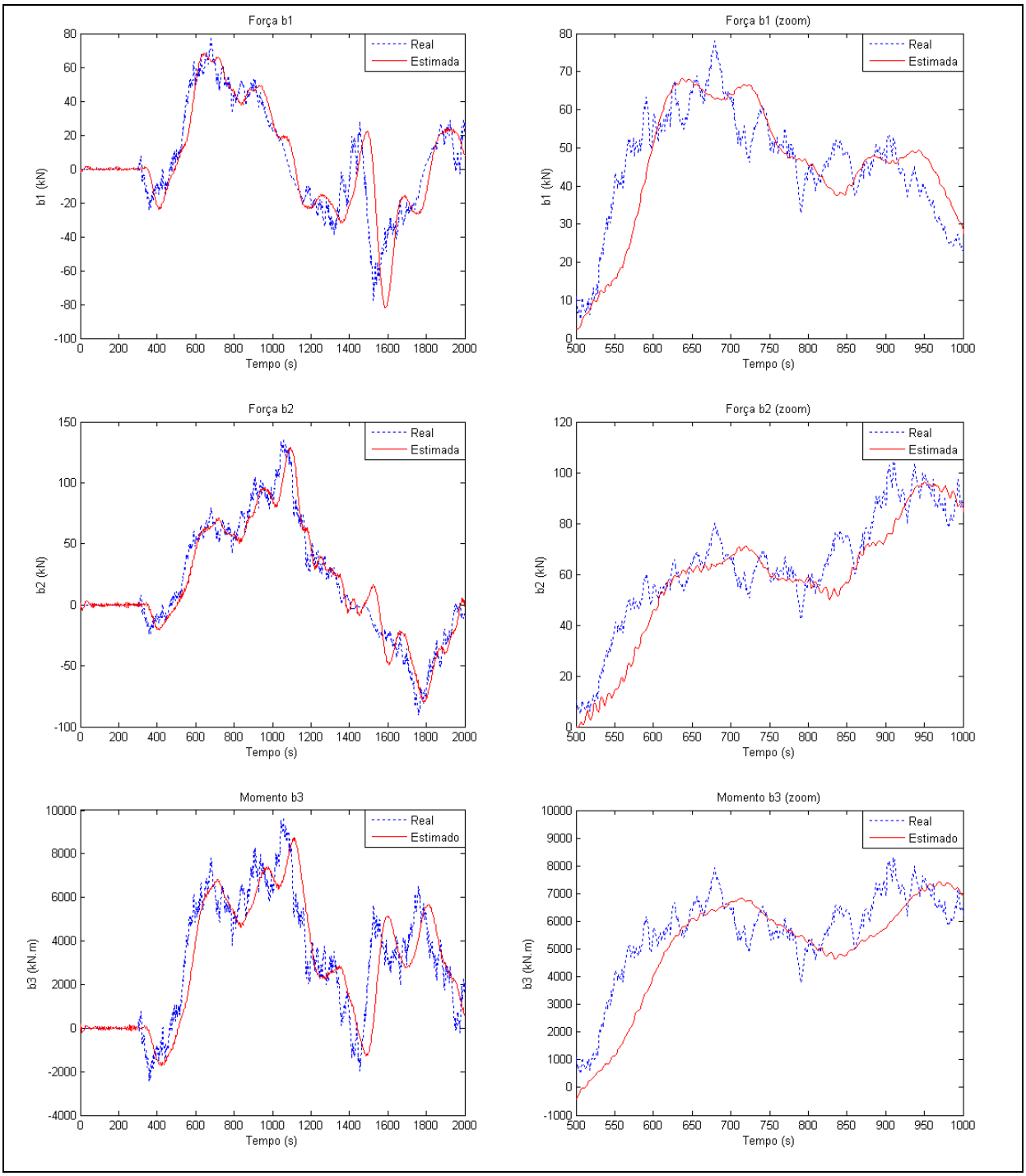



Figura 6.4 - Esforços ambientais

b) Simulação do Sistema em Malha Fechada

Na Figura 6.5, a linha preta representa a trajetória de referência. A linha azul representa a medição de posição ou aproamento e a linha vermelha representa a estimativa do observador. Nota-se que o sistema conseguiu acompanhar a trajetória de referência (avanço e guinada) ou manter a posição determinada (deriva).

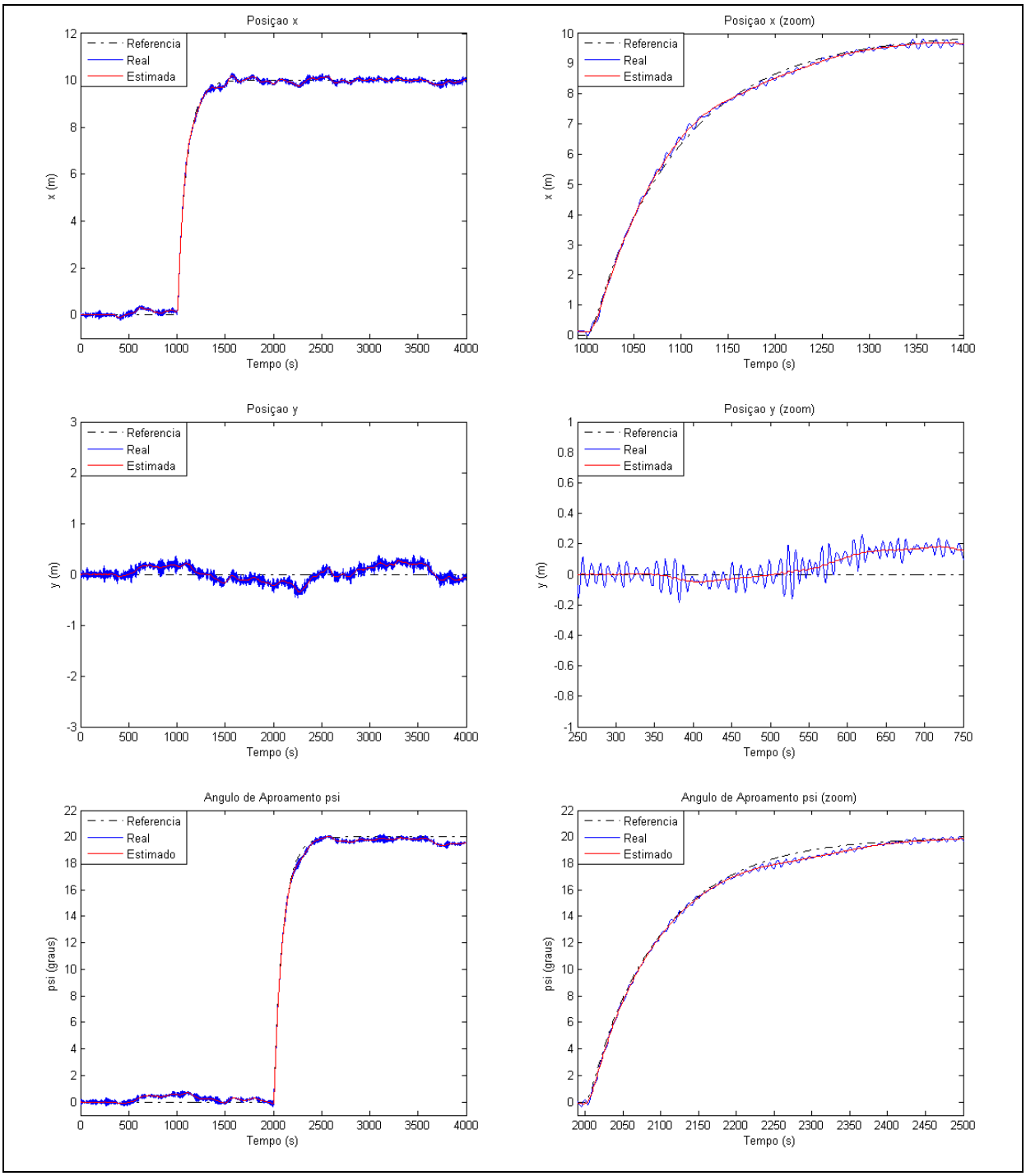



Figura 6.5 - Posição e aproamento

Na Figura 6.6, a linha azul representa a velocidade real, corrompida por efeitos de primeira ordem e ruído, enquanto que a linha vermelha representa a estimativa do observador. Nota-se que o observador forneceu estimativas de velocidade razoavelmente precisas, livres de ruído e de componentes oscilatórias de alta freqüência.

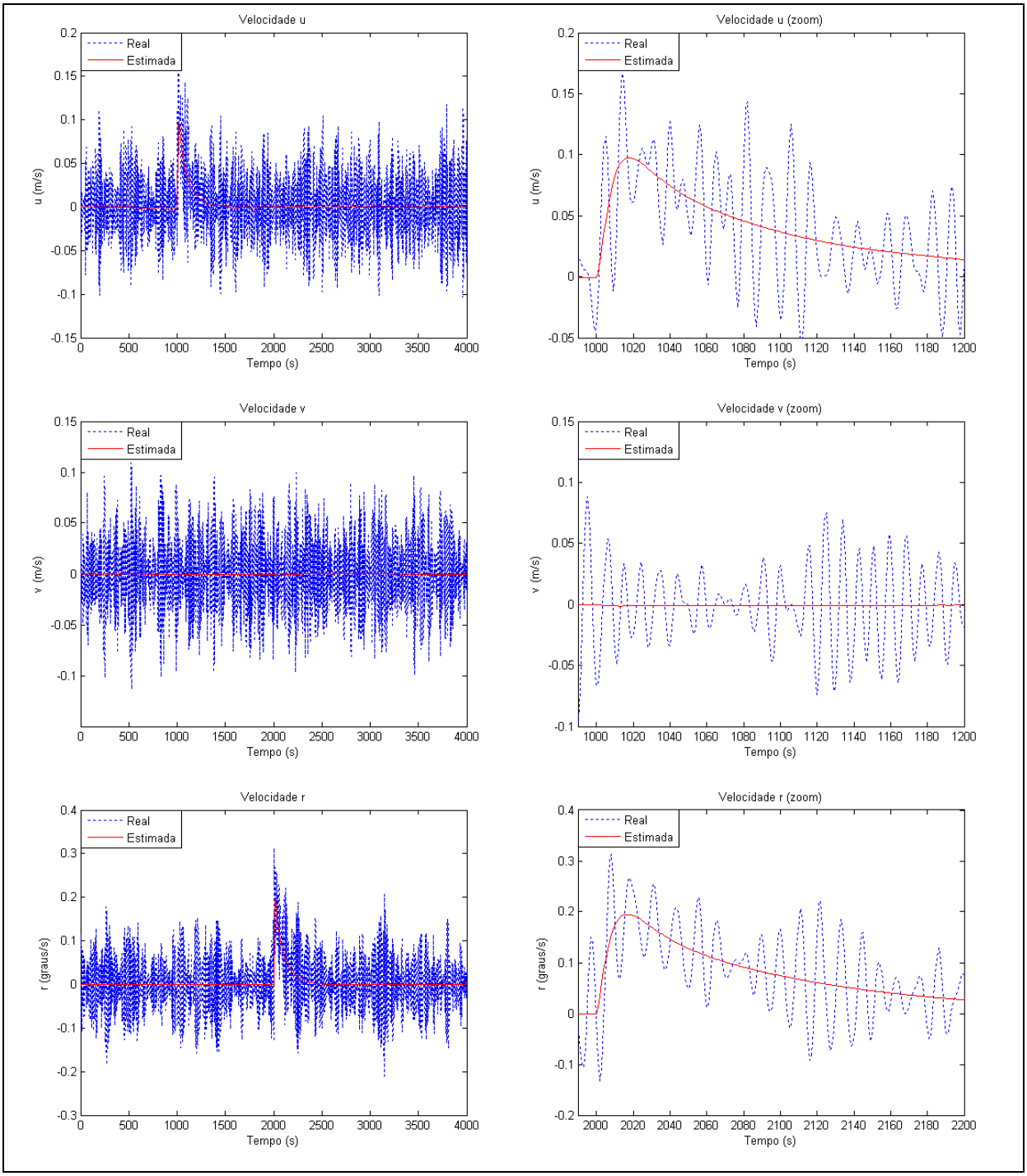



Figura 6.6 - Velocidades

Na Figura 6.7, a linha lilás representa o movimento real, enquanto que a linha preta representa o movimento estimado pelo observador. Nota-se que o observador (mais especificamente o seu modelo de ondas de primeira ordem) conseguiu reproduzir muito bem o movimento de alta freqüência do navio, o que justifica a excelente qualidade da filtragem de onda obtida.

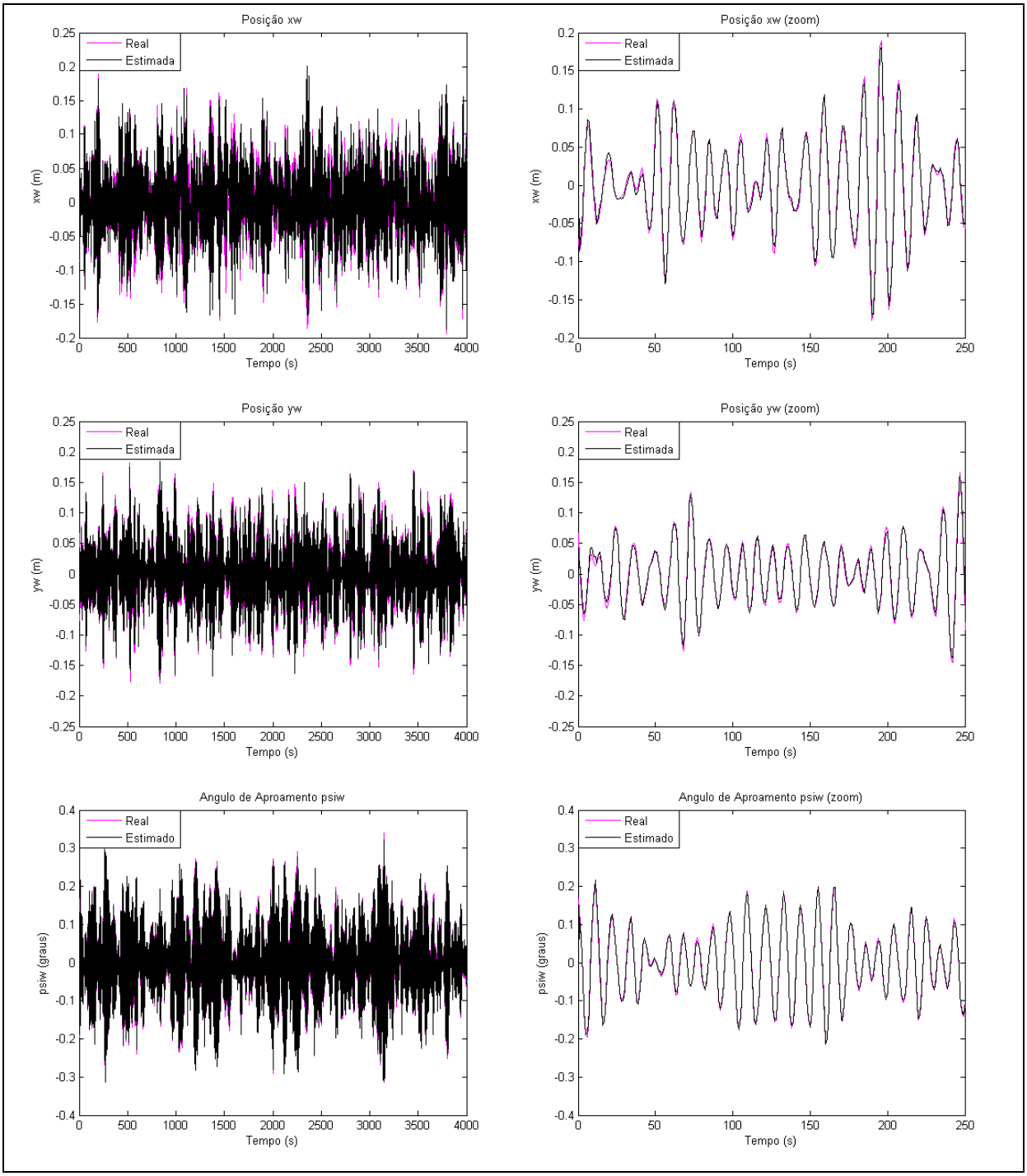



Figura 6.7 - Movimentos de primeira ordem

Na Figura 6.8, a linha azul representa o esforço real aplicado no navio enquanto que a linha vermelha representa o esforço estimado pelo observador. Considerando a simplicidade do modelo de esforços ambientais do observador, pode-se dizer que as estimativas ficaram suficientemente precisas. O atraso de fase observado não comprometeu a precisão das demais estimativas (especialmente as de posição e aproamento) nem o desempenho do sistema.

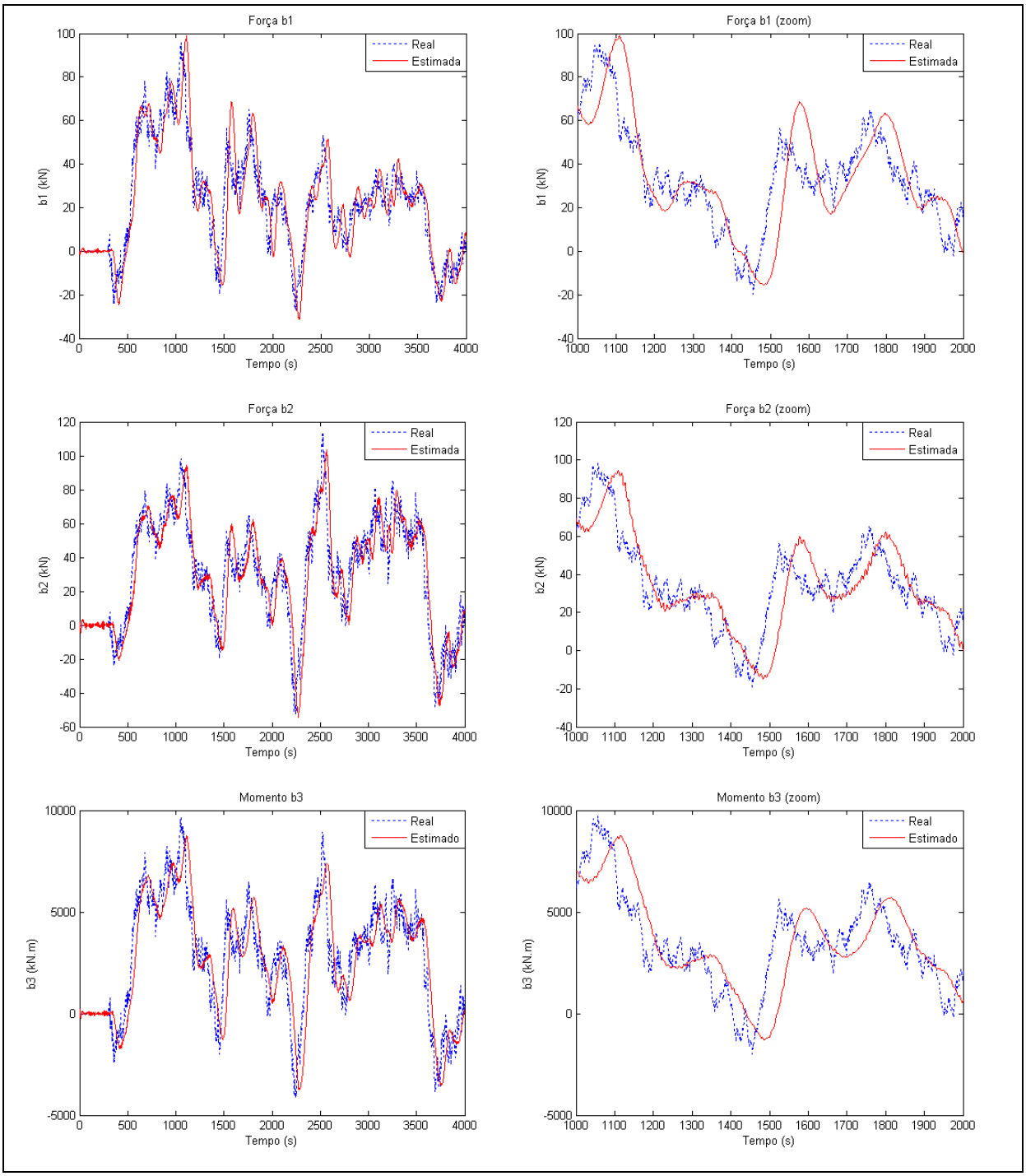



Figura 6.8 - Esforços ambientais

A Figura 6.9 mostra os gráficos que confrontam os esforços de controle (representados em preto) e as perturbações ambientais (representadas em lilás), Conforme o esperado, nota-se que os esforços de controle tendem a anular as perturbações ambientais durante a manutenção de posição. A pequena modulação verificada nos sinais de controle se deve ao elevado estado de mar considerado na simulação.

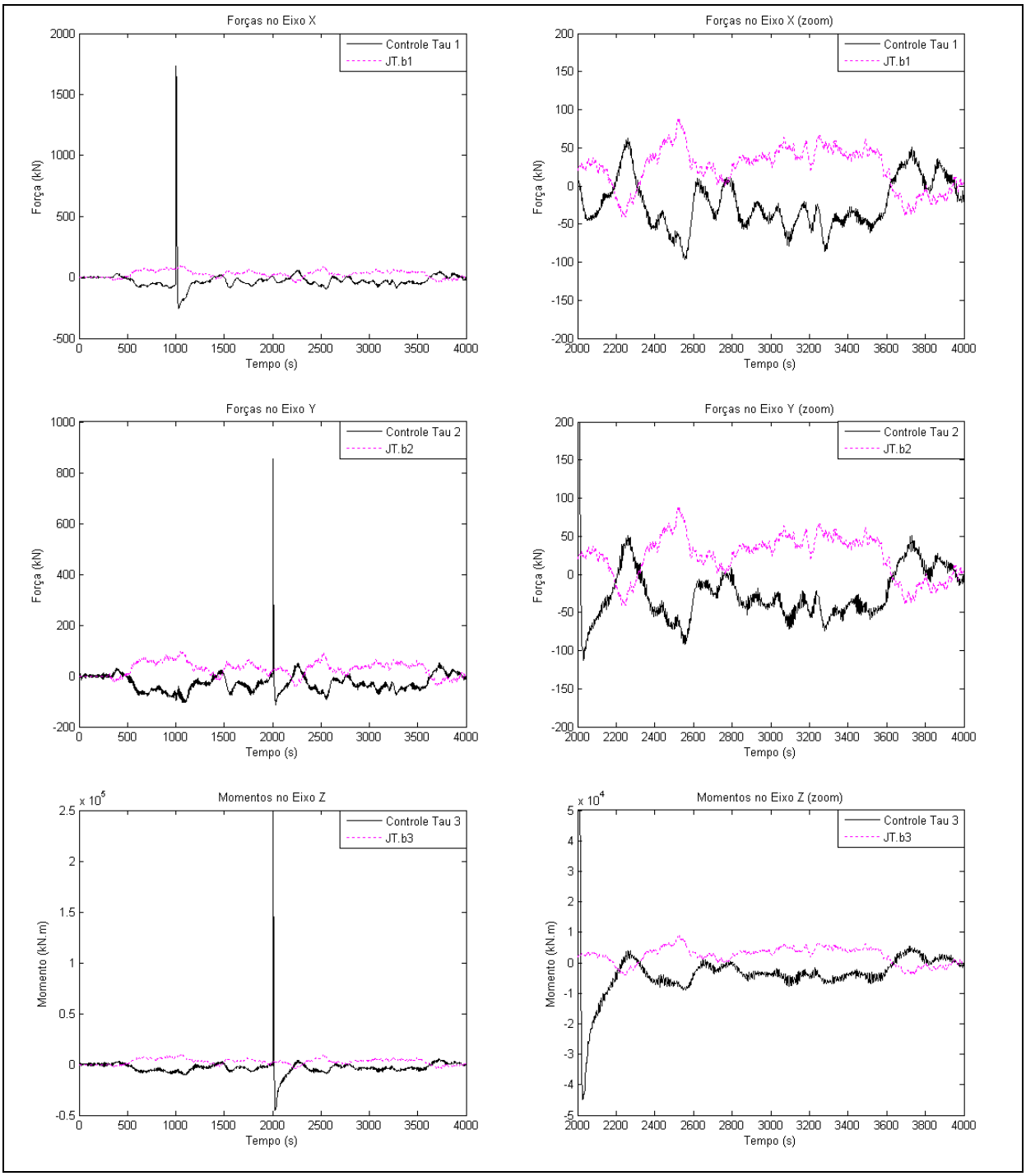



Figura 6.9 - Esforços de controle

## 6.3 Análise dos Resultados Numéricos

As simulações demonstraram o excelente desempenho do sistema projetado, recomendando sua implementação experimental em tanque de provas. As principais constatações decorrentes deste estudo numérico são as seguintes:

- O fechamento da malha não afetou a dinâmica do observador. Em ambas as simulações, as estimativas apresentaram a mesma qualidade e precisão.
- A sintonização do conjunto observador-controlador foi extremamente rápida e simples.
- A introdução da matriz de ganhos $K_p$ na formulação do controlador se mostrou de fundamental importância, na medida que permite o ajuste dos esforços de controle às limitações do sistema propulsor.
- O controlador “backstepping” pode ser considerado uma versão não-linear do controlador clássico PID, uma vez que a lei de controle é construída a partir do erro de posição, integral do erro de posição e velocidade.
- É possível assegurar estabilidade e desempenho ao sistema em malha fechada. Porém, a obtenção do desempenho desejado demanda um maior esforço de sintonização, em função da falta de uma metodologia de determinação de ganhos.
- Embora não evidenciado nos resultados, constatou-se que o sistema é robusto. A robustez do sistema foi avaliada mantendo-se a sintonização nominal do conjunto e arbitrando-se variações na planta. Verificou-se que o sistema tolerou variações de até 30% na condição de carregamento nominal do navio sem apresentar variações significativas de desempenho.
- O termo $-T^{-1}\hat{b}$ do modelo de esforços ambientais do observador pode ser descartado, sem prejuízo de desempenho. Este fato simplifica ainda mais a sintonização do observador, uma vez que a matriz $T$ pode ser desconsiderada e somente duas matrizes ($K_3$ e $K_4$) necessitarão ser sintonizadas por tentativa e erro.
- A alimentação em avanço dos esforços ambientais pode ser descartada pelo controlador, sem prejuízo de desempenho. Isto é possível graças ao termo integral adicional introduzido em sua formulação.

# 7. RESULTADOS EXPERIMENTAIS

## 7.1 Descrição do Aparato Experimental

O funcionamento do sistema de posicionamento dinâmico desenvolvido neste trabalho foi comprovado experimentalmente no tanque de provas do Departamento de Engenharia Naval e Oceânica da USP, através de ensaios envolvendo um modelo de navio em escala reduzida.

O observador passivo não-linear e o controlador “backstepping” foram inseridos no aparato experimental desenvolvido por Lago (2008), no lugar do Filtro de Kalman e do controlador PID, respectivamente.

Além do tanque de provas e do modelo, o aparato experimental é composto pelos módulos indicados na Figura 7.1, descritos a seguir:

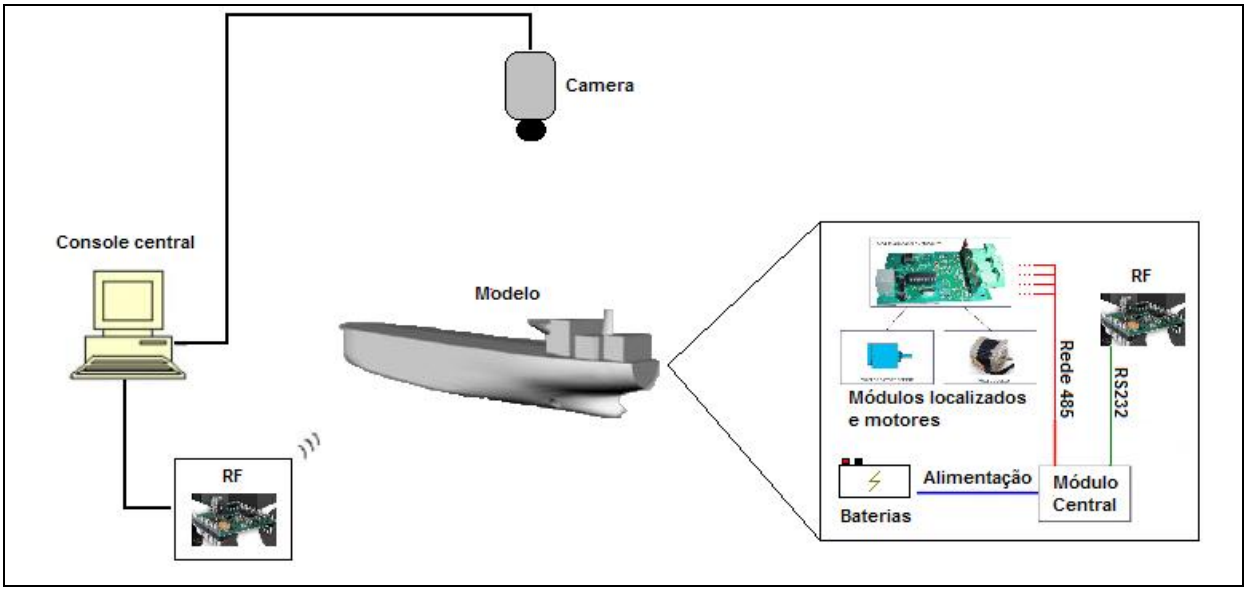



Figura 7.1 - Aparato experimental utilizado nos ensaios

- Console central: responsável pela execução dos algoritmos de localização e de controle do modelo e também pela comunicação via rádio freqüência com o modelo.
- Módulo de aquisição da posição: responsável pela captura da imagem do modelo (câmera) e pelo cálculo de sua posição (algoritmo de localização).

- Módulos de Rádio Freqüência (RF): responsáveis pela comunicação sem fios entre o console central e os módulos embarcados.
- Módulo central embarcado: responsável pelo gerenciamento da comunicação com o console central e com os demais módulos embarcados.
- Módulos localizados: responsáveis pelo controle de rotação em cada propulsor.

O modelo possui dois “leds” instalados nas extremidades, próximos a popa e proa. A câmera captura a imagem destes “leds” e o console central, através do algoritmo de localização, calcula a posição da seção média (com precisão de 8,5 mm) e o ângulo de aproamento (com precisão de 1°) do modelo. Estes dados, juntamente com os valores de referência (“set-point”), são enviados a um arquivo texto a cada décimo de segundo.

O console central, através do algoritmo de controle (observador passivo, controlador “backstepping” e o programa de alocação de empuxos), lê o arquivo texto e calcula as forças que cada propulsor deverá desenvolver de forma a controlar o modelo. Posteriormente, converte estas forças em rotações e as comunica, via módulos de RF, para o módulo central embarcado.

O módulo central embarcado repassa esta informação aos módulos localizados que controlam a rotação em cada propulsor.

Cabe registrar que o algoritmo de controle, implementado em Matlab/Simulink, possui um bloco que impõe que a simulação ocorra em tempo real. O computador utilizado no experimento foi um Pentium III 800 MHz.

## 7.2 Descrição do Modelo

O experimento utilizou um modelo em escala reduzida (1:125) do navio aliviador considerado nas simulações do capítulo anterior, em um tanque de provas com 21 m de comprimento, 5 m de largura e 1,5 m de profundidade, dotado de um gerador de ondas monocromático. Além do propulsor principal, o modelo possui dois propulsores transversais, instalados nos túneis de popa e de proa. As Figuras 7.2 e 7.3 ilustram o modelo utilizado.

Figura 7.2 - Modelo ensaiado

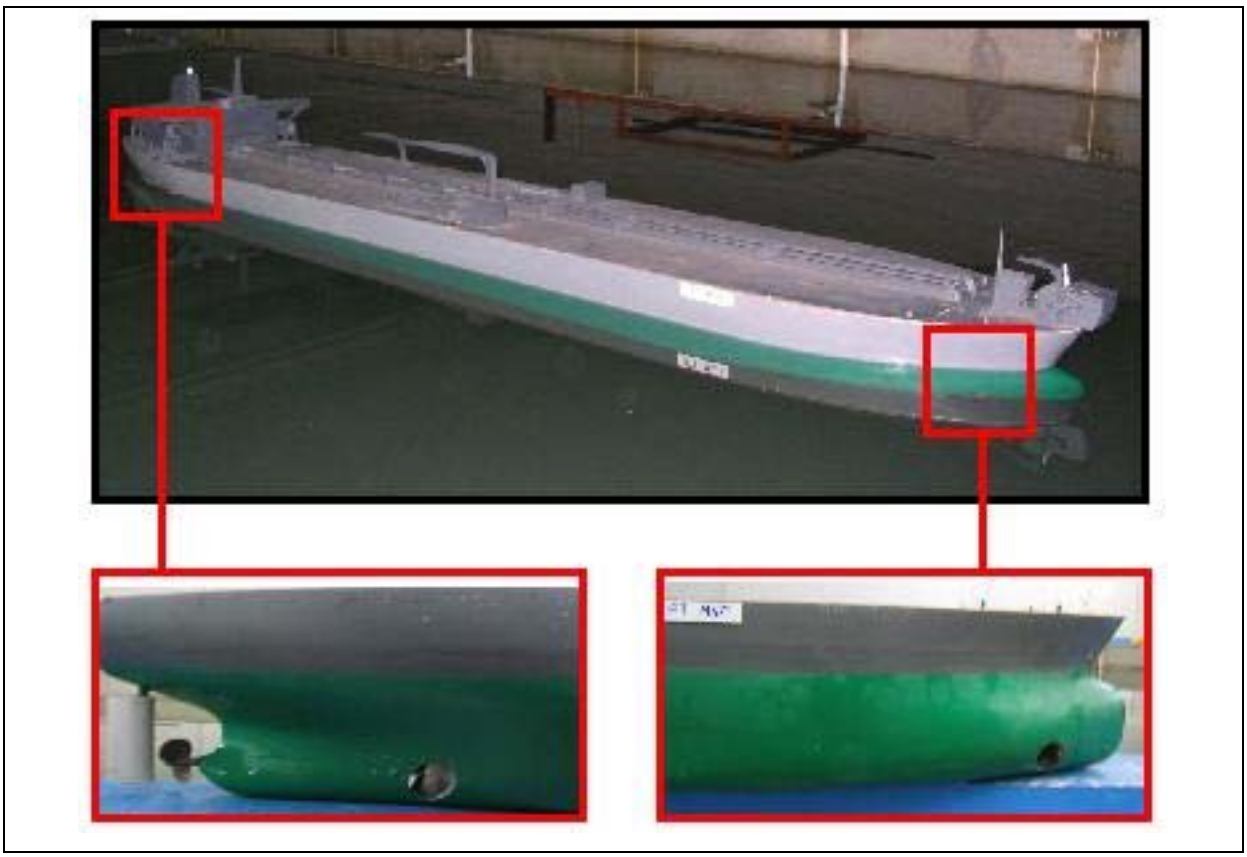


Figura 7.3 - Disposição dos propulsores no casco

As características principais do modelo, na condição de carregamento nominal, são mostradas na Tabela 7.1:

Tabela 7.1 - Características principais do modelo carregado

| | | |
|---|---|---|
| Δ | : | 79,5 kg |
| Loa | : | 2182 mm |
| Lpp | : | 2064 mm |
| B | : | 368 mm |
| D | : | 195 mm |
| H | : | 130 mm |

A localização e as características dos propulsores são apresentadas na Tabela 7.2:

Tabela 7.2 - Localização e características dos propulsores

| **Propulsor** | **Localização* (mm)** | **Diâmetro (mm)** | **Empuxo (gf)** |
|---|---|---|---|
| (1) Principal | 70 | 62 | 100/-100 |
| (2) Túnel popa | 250 | 35 | 100/-68 |
| (3) Túnel proa | 2050 | 35 | 68/-100 |

* Em relação ao espelho de popa

## 7.3 Algoritmo de Alocação de Empuxos

O algoritmo de alocação de empuxo visa determinar a intensidade e a direção da força a ser desenvolvida pelos propulsores a fim de atender, com custos mínimos, os comandos do controlador.

Tendo em vista que os propulsores transversais distam 0,9 m da seção média, o seguinte algoritmo de alocação de empuxo foi utilizado:

$$\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -0{,}9 & 0{,}9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \tag{7.1}$$

Neste algoritmo, $\tau_1$ e $\tau_2$ são as forças de controle nas direções $x$ e $y$, respectivamente e $\tau_3$ é o momento de controle, calculados pelo controlador. $F_1$, $F_2$ e $F_3$ são as forças dos propulsores principal, de popa e de proa, respectivamente.

## 7.4 Descrição dos Ensaios

O funcionamento e o desempenho do sistema projetado foram avaliados experimentalmente, através de três ensaios, a saber:

**a) Ensaio de manutenção de posição em ondas:**

Este ensaio visou avaliar a capacidade do sistema manter o modelo numa determinada posição, na presença de ondas. O modelo foi posicionado no tanque de provas, na posição de referência $[x = 2{,}0 \quad y = -2{,}0 \quad \psi = 20]$. O ensaio foi dividido em três partes:

- Entre 0 s e 200 s nenhuma perturbação ambiental foi arbitrada.
- Entre 200 s e 400 s foram geradas ondas de 5 mm de altura, na freqüência de 1 Hz, no sentido longitudinal do tanque de provas.
- Entre 400 s e 500 s o modelo de ondas de primeira ordem do observador foi desligado de forma a avaliar o efeito sobre o sinal de controle.

Os resultados obtidos são mostrados nas Figuras 7.4 (gráficos de posição e aproamento) e 7.5 (gráficos dos sinais de controle e respectivos espectros).

**b) Ensaio de manobra em águas tranqüilas:**

Este ensaio visou avaliar a capacidade do sistema executar uma mudança de posição, na ausência de perturbações externas. Adicionalmente, os resultados deste ensaio foram comparados com novos resultados numéricos, obtidos para o modelo em escala reduzida. O ensaio foi dividido em três partes:

- O modelo foi estabilizado na posição inicial de referência $[x = 2{,}0 \quad y = -2{,}0 \quad \psi = 0]$.
- Em 50 s, a posição de referência foi alterada para $[x = 3{,}0 \quad y = -2{,}5 \quad \psi = -10]$.
- Em 150 s, a posição de referência foi novamente alterada para $[x = 2{,}0 \quad y = -2{,}0 \quad \psi = 0]$.

Os resultados obtidos são mostrados nas Figuras 7.6 (gráficos de posição e aproamento) e 7.7 (comparação dos resultados experimentais e numéricos).

**c) Ensaio de manobra em ondas e vento:**

Este ensaio visou avaliar a capacidade do sistema executar uma mudança de posição, na presença de ondas e vento. As ondas foram geradas na altura de 10 mm, na freqüência de 1 Hz, no sentido longitudinal do tanque, a partir de 50 s. O vento, gerado por um ventilador, foi incidido sobre a proa do modelo segundo um ângulo de 45° em relação a sua linha de centro. O ensaio foi dividido em três partes:

- O modelo foi estabilizado na posição inicial de referência $[x = 2{,}0 \quad y = -2{,}0 \quad \psi = 0]$.
- Em 250 s, a posição de referência foi alterada para $[x = 3{,}0 \quad y = -2{,}5 \quad \psi = -10]$.
- Em 350 s, a posição de referência foi novamente alterada para $[x = 2{,}0 \quad y = -2{,}0 \quad \psi = 0]$.

Os resultados obtidos são mostrados nas Figuras 7.8 (gráficos de posição e aproamento) e 7.9 (gráficos dos sinais de controle).

Neste ensaio foi utilizada uma nova eletrônica embarcada nos módulos localizados, capaz de assegurar um controle de rotação dos propulsores mais preciso. Este fato exigiu que o sistema fosse sintonizado novamente.

Em todos os ensaios, as derivadas primeira e segunda da trajetória de referência foram consideradas nulas na implementação da lei de controle. As mudanças de referência foram comandadas somente após as estimativas de posição e aproamento do observador convergirem para os valores medidos.

Os dados relativos ao modelo (matrizes $M$ e $D$) e os ganhos do sistema são apresentados no Apêndice E.

Cabe mencionar que as matrizes $K_1$ e $K_2$ do observador foram sintonizadas de acordo com a formulação proposta no capítulo 4. As demais matrizes de ganho do observador e do controlador foram sintonizadas por tentativa e erro, uma vez que a obtenção da sintonia ótima do sistema não faz parte do escopo deste trabalho.

## 7.5 Resultados dos Ensaios

a) Ensaio de manutenção de posição em ondas

Na Figura 7.4, a linha azul representa a medição de posição ou aproamento e a linha vermelha representa a estimativa do observador. Nota-se que o sistema foi capaz de manter o modelo na posição desejada na presença de ondas. Esta capacidade não foi comprometida após o desligamento do filtro de ondas, em 400 s.

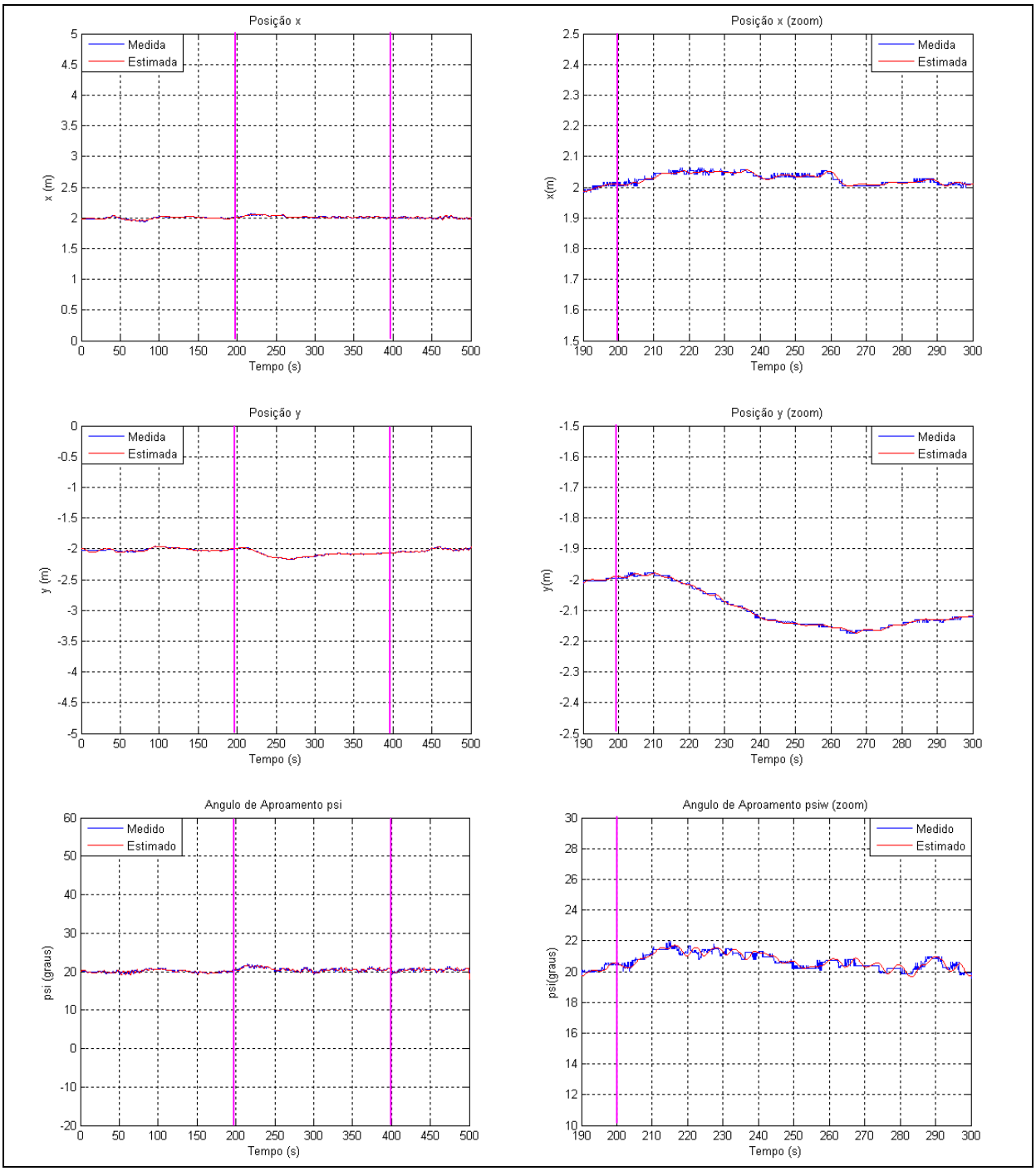



Figura 7.4 - Posição e aproamento

A Figura 7.5 apresenta os gráficos dos esforços de controle (à esquerda) e seus respectivos espectros (à direita). Nota-se que estes sinais ficaram pouco modulados mesmo após o início da geração de ondas, em 200 s. Porém, após o desligamento do filtro de ondas em 400 s, estes sinais ficaram extremamente modulados. Os gráficos dos espectros dos sinais de controle corroboram esta observação, demonstrando a eficiência do filtro.

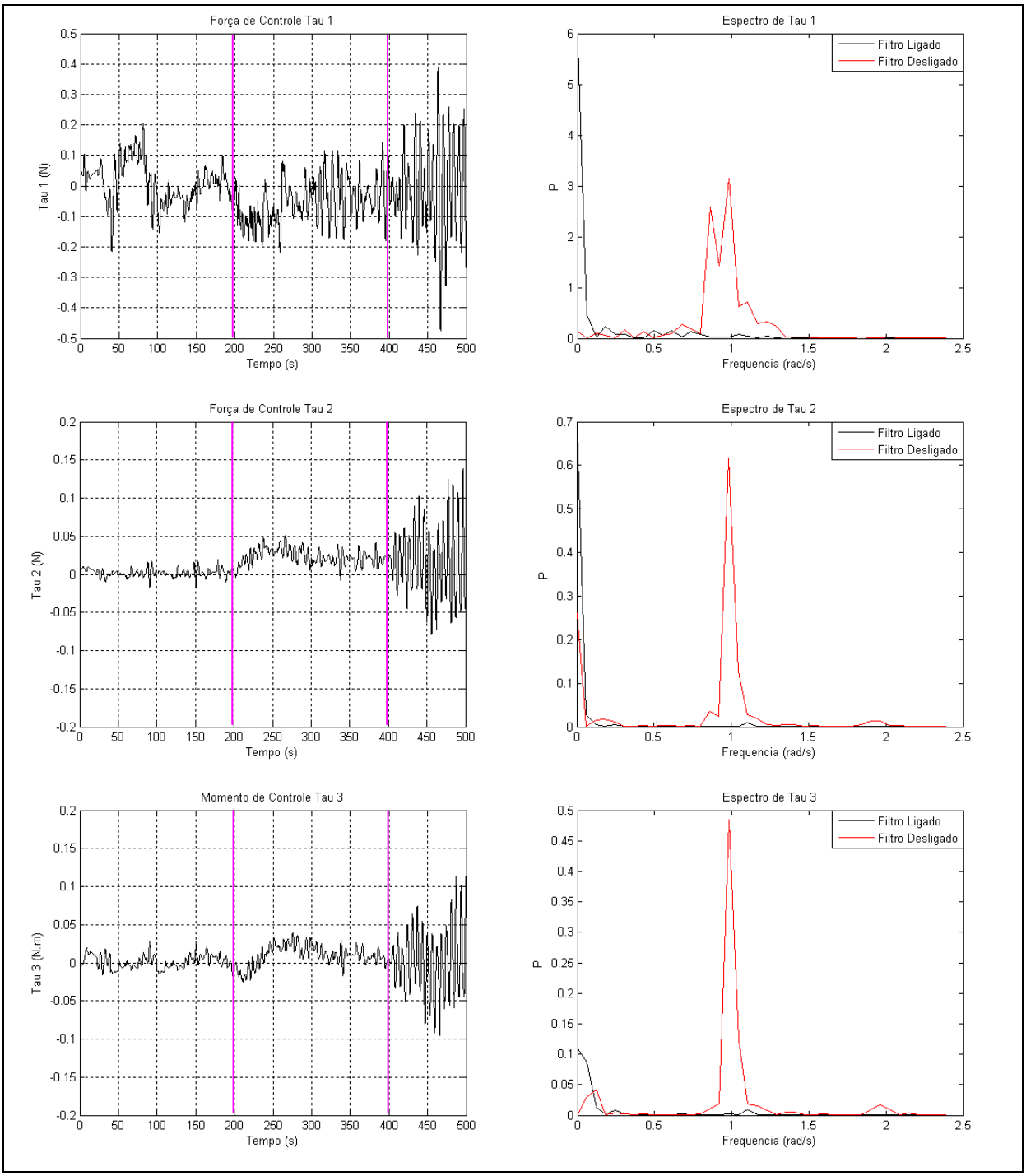



Figura 7.5 - Sinais de controle e respectivos espectros

b) Ensaio de manobra em águas tranqüilas

Na Figura 7.6, a linha preta tracejada representa a trajetória de referência. A linha azul representa a medição de posição ou aproamento e a linha vermelha representa a estimativa do observador. Nota-se que o sistema conseguiu executar as manobras comandadas, respondendo criticamente às mudanças de referência.

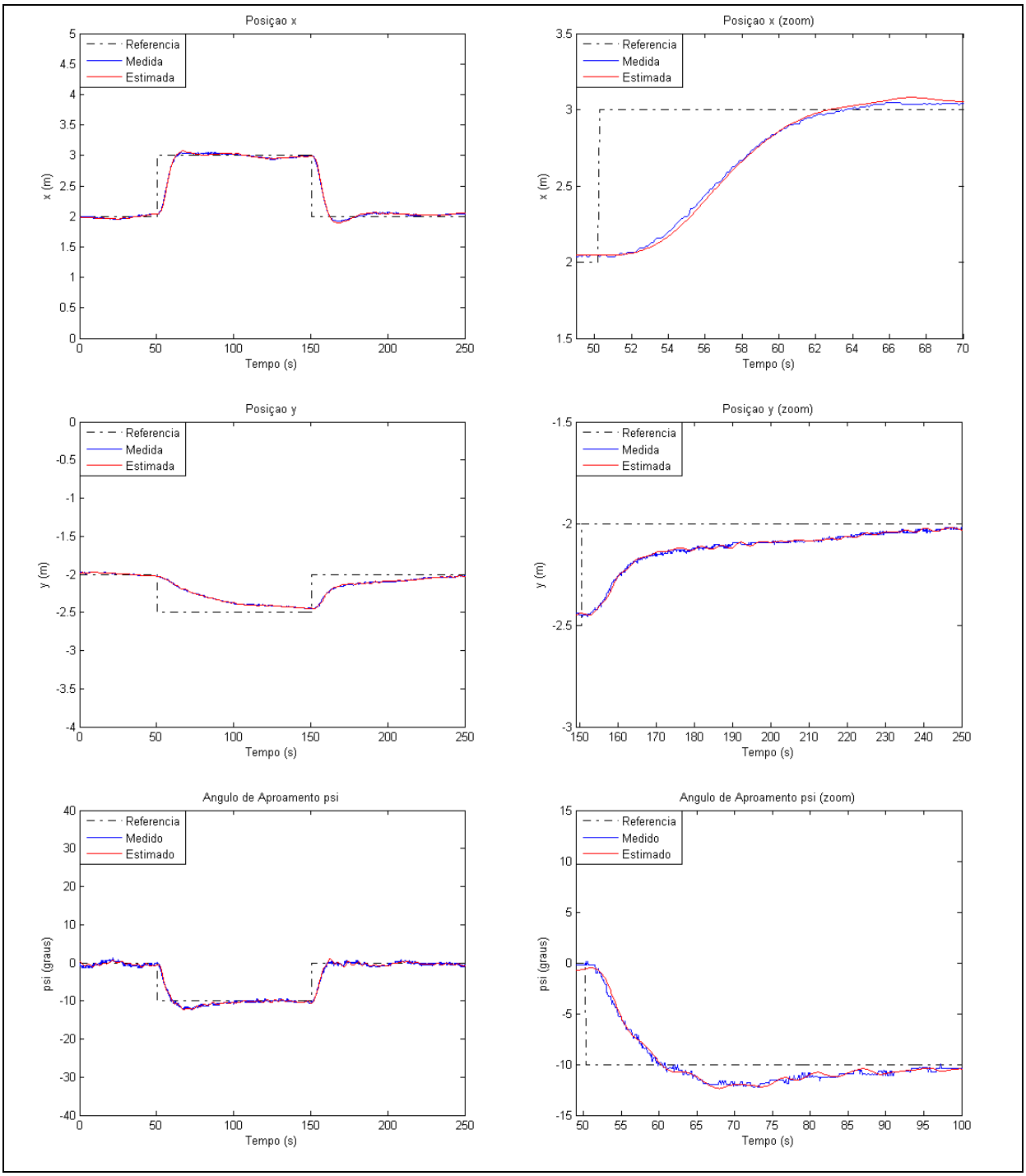



Figura 7.6 - Posição e aproamento

A Figura 7.7 apresenta a comparação entre os resultados experimentais (linha azul) e numéricos (linha vermelha), relativos ao modelo. Nota-se uma boa aderência entre os resultados, sendo que as diferenças observadas decorrem da imprecisão das curvas de empuxo versus rotação dos propulsores utilizadas no algoritmo. Avaliando os gráficos dos esforços de controle, percebe-se que a energia demandada pela ação de controle é praticamente a mesma em ambos os casos.

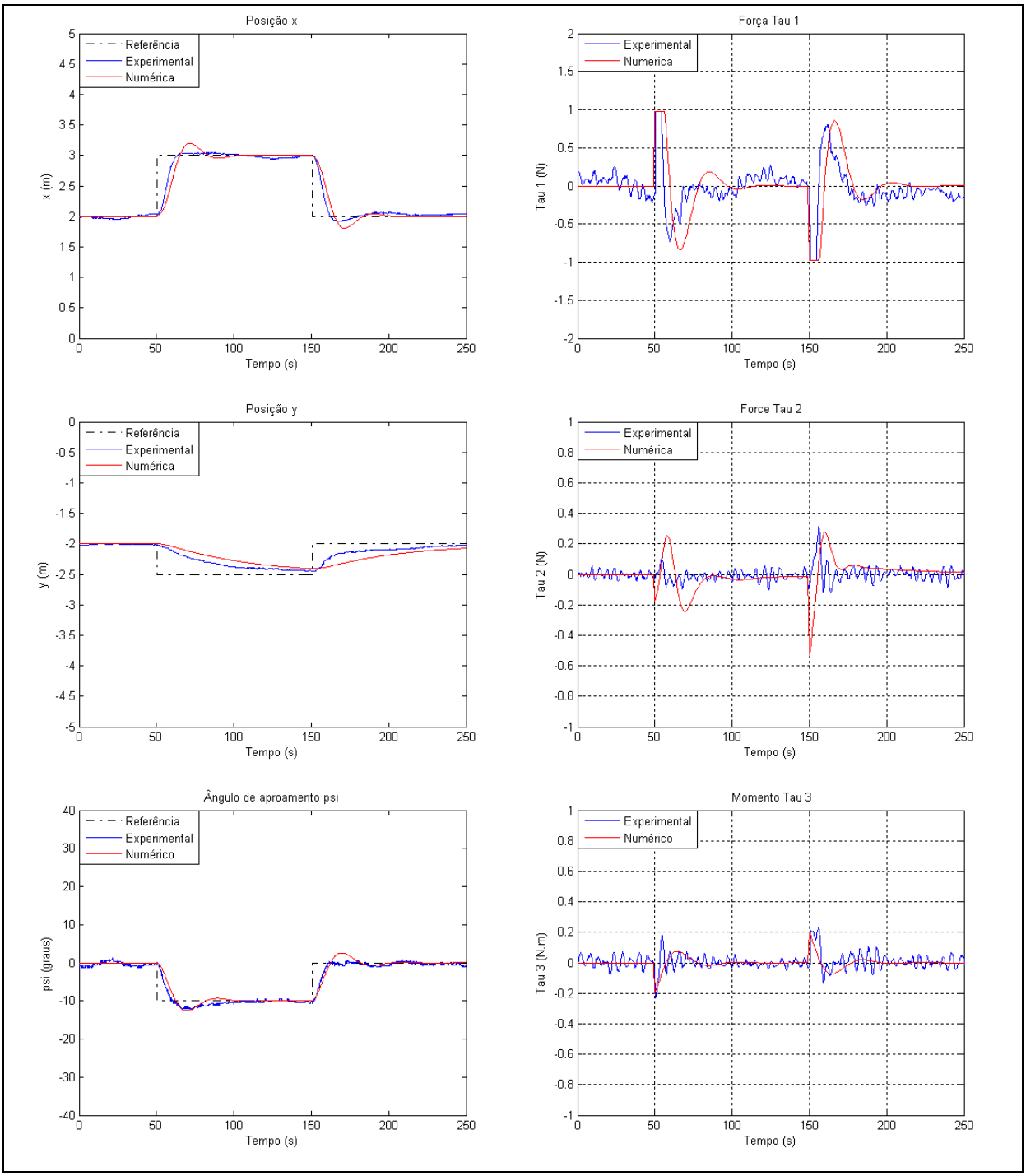



Figura 7.7 - Comparação dos resultados experimentais e numéricos do modelo

c) Ensaio de manobra em ondas e vento

Na Figura 7.8, a linha preta tracejada representa a trajetória de referência, a linha azul representa a medição de posição ou aproamento e a linha vermelha representa a estimativa do observador. Nota-se que o sistema conseguiu executar bem as manobras mesmo na presença de ondas e vento.

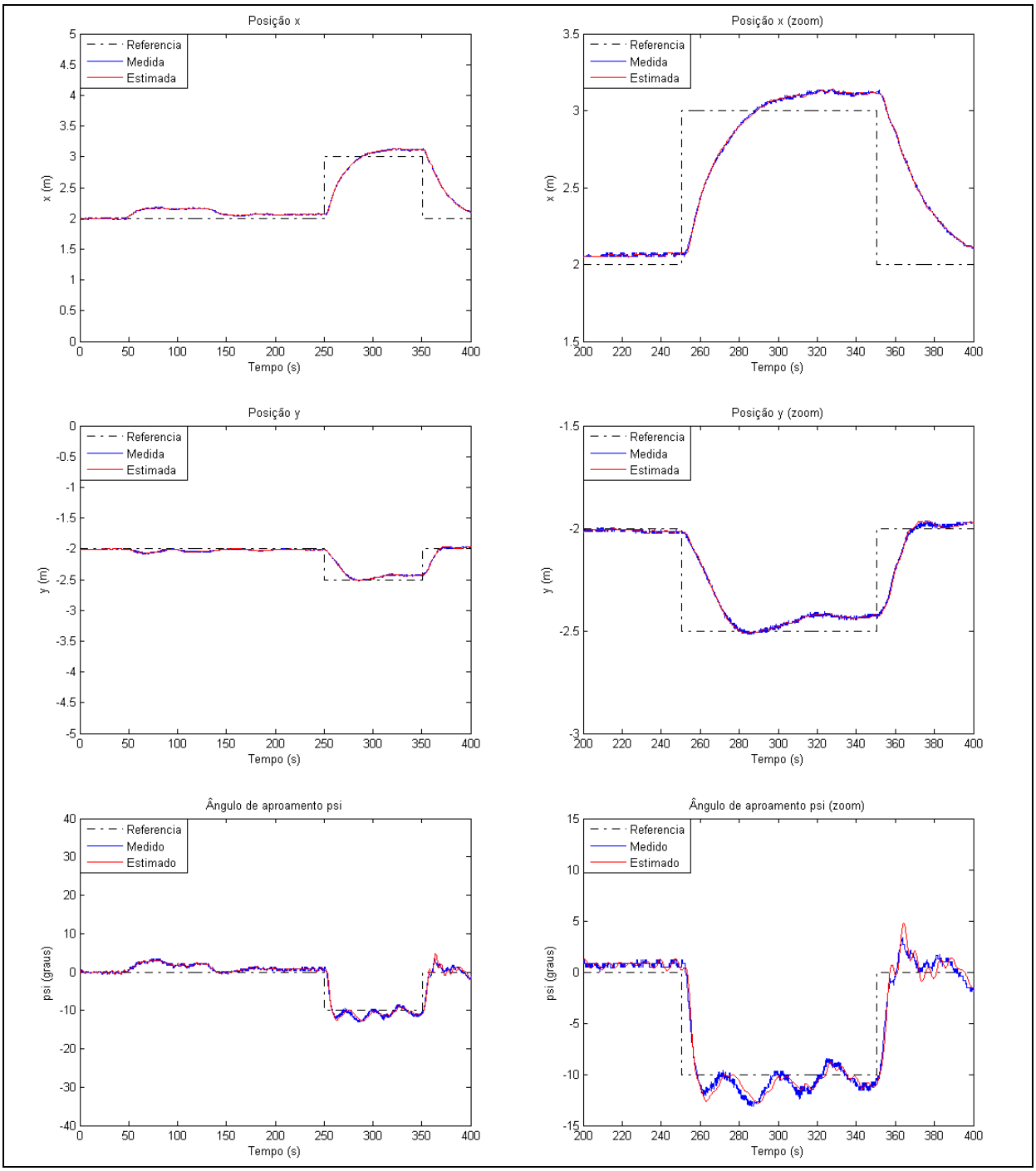



Figura 7.8 - Posição e aproamento

A Figura 7.9 apresenta os gráficos dos sinais de controle.

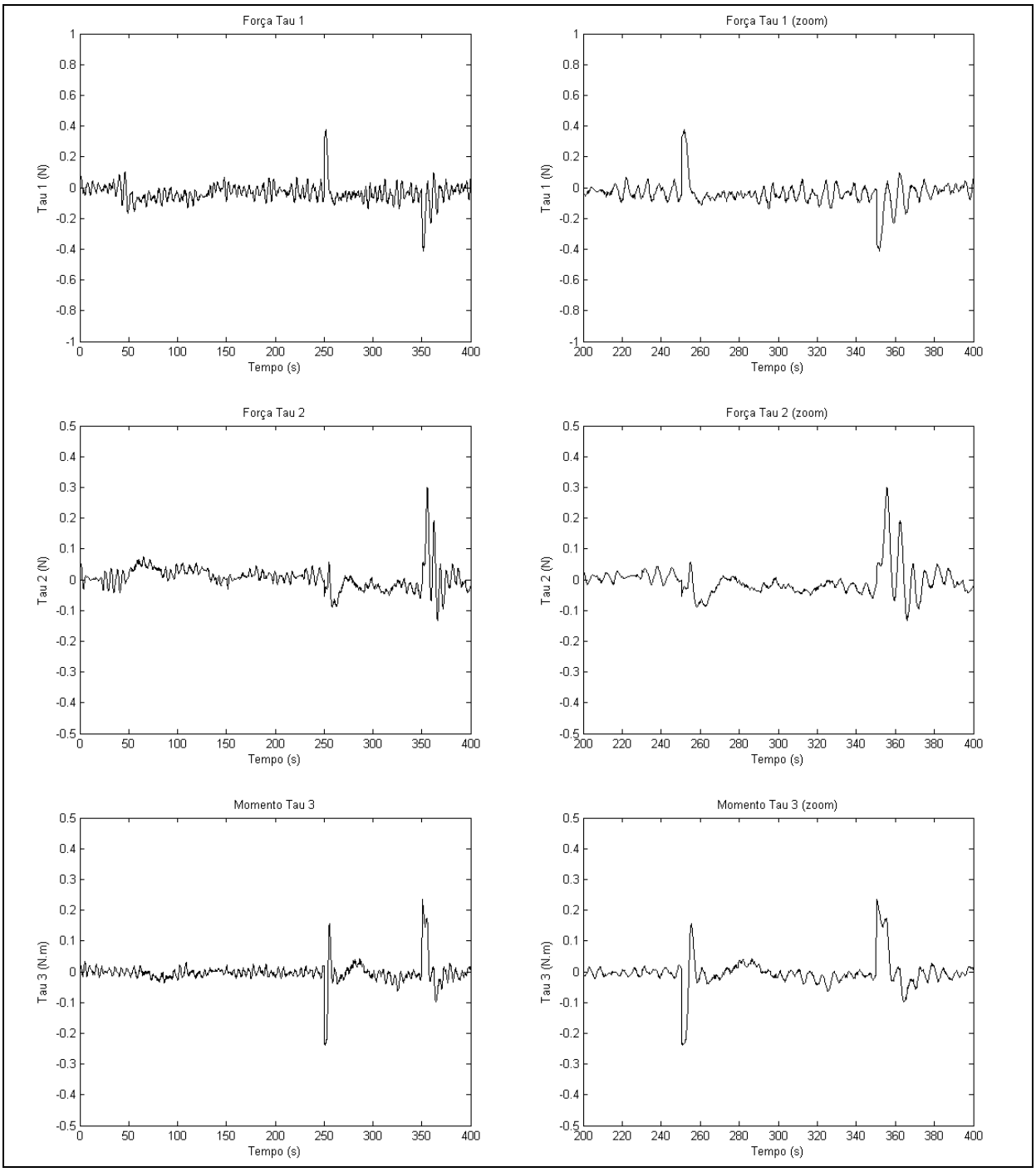



Figura 7.9 - Sinais de controle

Nota-se que o emprego da nova eletrônica embarcada nos módulos localizados (que demandou uma nova sintonização), alterou significativamente o desempenho do sistema, justificando as diferenças encontradas nos resultados dos ensaios (b) (Figura 7.7) e (c) (Figuras 7.8 e 7.9).

## 7.6 Análise dos Resultados Experimentais

O sistema projetado foi implementado experimentalmente em um tanque de provas e apresentou ótimos resultados. As principais constatações decorrentes destes ensaios são as seguintes:

- A sintonização do observador foi extremamente rápida e simples, porém a sintonização do controlador demandou um esforço maior de tentativa e erro. Cabe mencionar que esta dificuldade não foi percebida no estudo numérico apresentado no capítulo anterior.
- A introdução da matriz de ganhos $K_p$ na formulação do controlador se mostrou de fundamental importância para a implementação experimental do sistema. Sem esta matriz devidamente ajustada, esta implementação seria inexeqüível.
- Ficou evidente a necessidade de uma política de distribuição de ganhos entre os movimentos de deriva e guinada. Se os ganhos do controlador relativos a um destes movimentos estiverem superestimados, o controle do outro movimento será prejudicado. Este fato decorre das limitações físicas dos propulsores laterais, utilizados para controlar simultaneamente estes dois modos.
- Embora não evidenciado nos resultados, constatou-se que o sistema é robusto. A robustez do sistema foi avaliada mantendo-se a sintonização nominal do conjunto e arbitrando-se variações na planta. Constatou-se que o sistema tolerou variações de até 30% na condição de carregamento nominal do modelo sem apresentar variações significativas de desempenho. Cabe mencionar que as matrizes $M$ e $D$ utilizadas no experimento apresentam uma imprecisão considerável, pois os coeficientes de massa adicional e amortecimento linear foram extrapolados de um navio real.
- Ressalta-se que o desempenho do sistema poderia ser melhorado mediante otimização dos ganhos. Particularmente, no ensaio de manobra em ondas e vento, nota-se que os ganhos relativos ao movimento de avanço poderiam ser aumentados de forma a conferir uma maior potência de controle.

# 8. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Este trabalho consistiu no projeto de um observador de estados passivo e de um controlador “backstepping”, ambos não-lineares, para aplicações de posicionamento dinâmico (regulação) e piloto automático (acompanhamento de trajetória). Ambos foram implementados experimentalmente e o desempenho do conjunto foi avaliado, ainda que preliminarmente, através de ensaios em tanque de provas. Os resultados demonstraram o ótimo desempenho do sistema projetado.

A principal vantagem da abordagem não-linear reside no fato de que as equações cinemáticas do movimento não necessitam ser linearizadas em torno de vários ângulos de guinada pré-definidos. Desta forma, um único conjunto reduzido de ganhos é suficiente para assegurar a estabilidade do sistema em todo o espaço de estados, implicando em estabilidade assintótica global. Adicionalmente, em função da forte influência que a física do problema exerce sobre o projeto, algumas regras de sintonização podem ser obtidas analiticamente. Estes fatos simplificam e abreviam significativamente o processo de sintonização, reduzindo o número de provas de mar necessárias para comissionar o sistema.

Uma vantagem específica da metodologia “backstepping” é a flexibilidade de projeto. A técnica confere total liberdade ao engenheiro de controle para definir as funções de Lyapunov, as funções de estabilização, a lei de controle e as não-linearidades artificiais. Diferentemente de outras técnicas de controle, a metodologia visa eliminar somente as não-linearidades indesejáveis do sistema. Este aspecto assume grande importância em aplicações de controle de veículos oceânicos, pois a eliminação de todas as não-linearidades exigiria o emprego de modelos perfeitos, o que é impossível na prática.

No tocante a implementação experimental do sistema, constatou-se a necessidade peremptória de incluir a matriz de ganhos $K_P$ na formulação do controlador. Esta matriz permite o ajuste dos esforços de controle às limitações físicas do sistema propulsor.

Embora existam propostas para ajustar os ganhos do sistema utilizando algoritmos de otimização, optou-se pela sintonização por tentativa e erro. A sintonização do observador de estados passivo (cinco ganhos por grau de liberdade,

sendo que três ganhos são determinados por regras analíticas) foi simples e intuitiva. Na sintonização do controlador (seis ganhos por grau de liberdade), constatou-se uma certa dificuldade de se obter um ajuste que assegurasse a estabilidade e sobretudo, o desempenho do sistema.

Recomenda-se que a linha de pesquisa adotada neste trabalho tenha prosseguimento com o estudo dos seguintes temas:

- Elaboração de uma metodologia para o ajuste dos ganhos utilizando redes neurais ou algoritmo genético.
- Elaboração de um estudo comparativo de desempenho entre o SPD desenvolvido neste trabalho e os SPD comercialmente disponíveis.
- Desenvolvimento de um observador adaptativo capaz de identificar, em tempo real, as freqüências modais de um espectro de movimento de alta freqüência bi-modal.
- Desenvolvimento de um controlador “backstepping” adaptativo capaz de estimar, em tempo real, os parâmetros da planta desconhecidos ou variantes no tempo, necessários à implementação da lei de controle.

# 9. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] AARSET, M. F., STRAND, J. P., FOSSEN T. I. **Nonlinear vectorial observer backstepping with integral action and wave filtering for ships.** Proceedings of the IFAC Conference on Control Applications in Marine Systems (CAMS'98), Fukuoka, Japan, pp. 83-89, 1998.

[2] AGOSTINHO, A. C. **Controle por modos deslizantes aplicado a sistema de posicionamento dinâmico.** 2009. 90 p. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2009.

[3] ANDERSON, B. D. O., MOORE, J. B. **Optimal control: linear quadratic methods.** Prentice Hall Inc., New Jersey, 1990.

[4] BALCHEN, J. G., JENSSEN, N.A., SAELID, S. **Dynamic positioning of floating vessels based on Kalman filtering and optimal control.** Proceedings of the 19th IEEE Conference on Decision and Control, New York, USA, pp. 852-864, 1980.

[5] BALCHEN, J. G., JENSSEN, N.A., SAELID, S. **Dynamic positioning using Kalman filtering and optimal control theory.** Proceedings of IFAC/IFIP Symposium on Automation in Offshore Oil Field Operation, Amsterdam, Holland, pp. 183-186, 1976.

[6] BATEMAN, A., HULL, J., LIN, Z. **A backstepping-based low-and-high gains design for marine vehicles.** International Journal of Robust and Nonlinear Control. Vol. 19, pp. 480-493, 2008.

[7] BERGE, S. P., FOSSEN, T. I. **On the properties of the nonlinear ship equations of motion.** Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems, Vol. 6(4), pp. 365-381, 2000.

[8] CADET, O. **Introduction to Kalman Filter and its use in dynamic positioning systems.** Proceedings of the Dynamic Positioning Conference, Houston, USA, 2003.

[9] CALUGI, F., ROBERTSSON, A., JOHANSSON, R. **An adaptive observer for dynamical ship positioning control using vectorial observer backstepping.** Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control, Maui, USA, pp. 3262-3267, 2003.

[10] DONHA, D. C., TANNURI E. A. **Non-linear semi-submersible positioning system design using an H∞ controller.** Proceedings of the 5th IFAC Conference on Control Applications in Marine Systems (CAMS2001), Glasgow, UK, 2001.

[11] EWINS, D. **Future directions in structural dynamics and the role of experimental technologies therein.** Proceedings of the XIII International Symp. on Dynamic Problems of Mechanics (DINAME2009), Angra dos Reis, Brazil, 2009.

[12] FOSSEN, T.I. **Guidance and control of ocean vehicles.** John Wiley and Sons Ltd., New York, 1994.

[13] FOSSEN, T.I. **Marine control systems: guidance, navigation and control of ships, rigs and underwater vehicles.** Marine Cybernetics, Trondheim, 2002.

[14] FOSSEN, T. I., GROVLEN, A. **Nonlinear output feedback control of dynamically positioned ships using vectorial observer backstepping.** IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 6(1), pp.121-128, 1998.

[15] FOSSEN, T. I., STRAND, J. P. **Nonlinear passive weather optimal positioning control (WOPC) system for ships and rigs: experimental results.** Automatica, Vol. 37(5), pp. 701-715, 2001.

[16] FOSSEN, T. I., STRAND, J. P. **Passive nonlinear observer design for ships using Lyapunov methods: Full scale experiments with a supply vessel.** Automatica, Vol. 35(1), pp. 3-16, 1999.

[17] GRIMBLE, M. J., PATTON, R. J, WISE, D. A. **The design of dynamic positioning control systems using stochastic optimal control theory.** Optimal Control Applications Methods, Vol. 1, pp. 167-202, 1980.

[18] IHLE, I. A., ARCAKC, M., FOSSEN, T. I. **Passivity-based designs for synchronized path-following.** Automatica, Vol. 43, pp. 1508 -1518, 2007.

[19] JENSSEN, N. A. **What is the DP current?** Proceedings of the Dynamic Positioning Conference, Houston, USA, 2006.

[20] KAILATH, T. **Linear Systems**. Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1980.

[21] KATEBI, M. R., GRIMBLE, M. J., ZHANG, Y. **$H_\infty$ Robust Control Design for Dynamic Ship Positioning.** IEEE Proceedings on Control Theory and Application. Vol. 144-2, pp. 110-120, 1997.

[22] KHALIL, H. K. **Nonlinear systems**. Prentice Hall Inc., New Jersey, 1996.

[23] KOKOTOVIC, P., ARCAK, M. **Constructive nonlinear control: a historical perspective.** Automatica, Vol. 37(5), pp. 637-662, 2001.

[24] KRSTIC, M., KANELLAKOPOULOS, I., KOKOTOVIC, P. V. **Nonlinear and Adaptive Control Design**. John Wiley and Sons Inc., New York, 1995.

[25] LAGO, G. A. **Eletrônica embarcada para ensaios de posicionamento dinâmico em tanque de provas.** 2008. 79 p. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.

[26] LINDEGAARD, K. P. **Acceleration feedback in dynamic position.** 2003. 190 p. Tese (Doutorado) - Norwegian University of Science and Technology, Department of Engineering Cybernetics, Trondheim, 2003.

[27] LOHMILLER, W., SLOTINE, J. J. E. **On contraction analysis for non-linear systems.** Automatica 34, pp. 683-696, 1998.

[28] LORIA, A., FOSSEN, T. I., PANTELEY, E. **A separation principle for dynamic positioning of ships: theoretical and experimental results.** IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 8(2), pp. 332-343, 2000.

[29] MARQUEZ, H. J. **Nonlinear control systems: analysis and design.** John Wiley and Sons Ltd., New Jersey, 2003.

[30] MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas Dinâmicos.** Editora Livraria da Física, São Paulo, 2006.

[31] MORISHITA, H. M., TANNURI, E. A. **Experimental and numerical evaluation of a typical dynamic positioning system.** Applied Ocean Research, Vol. 28, pp. 133-146, 2006.

[32] MORISHITA, H. M., TANNURI, E. A., LAGO, G.A. **Experimental set-up for experiments with dynamic positioning system.** Proceedings of the 7th IFAC International Conference on Manoeuvring and Control of Marine Craft (MCMC07), Lisbon, Portugal, 2006.

[33] MORISHITA, H. M., TANNURI, E.A., SAAD, A. C., SPHAIER, S. H., LAGO, G. A., MORATELLI JUNIOR, L. **Laboratory facilities for dynamic positioning systems.** Proceedings of the 8th IFAC International Conference on Manoeuvring and Control of Marine Craft (MCMC09), Guarujá, Brazil, (2009).

[34] NGUYEN, T. D., SORENSEN, A. J., QUEK, S. T. **Design of hybrid controller for dynamic positioning from calm to extreme sea conditions.** Automática, Vol. 43, pp. 768-785, 2007.

[35] ROBERTSSON, A., JOHANSSON, R. **Comments on "nonlinear output feedback control of dynamically positioned ships using vectorial observer**

**backstepping".** IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 6, No. 3, 1998.

[36] SANTIAGO, A. A. **Identificação modal aplicada ao posicionamento dinâmico de sistemas oceânicos.** 2008. 135 p. Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Rio de Janeiro, 2008.

[37] SANTOS, E.M., **Um simulador de manobras em tempo real com sistema de posicionamento dinâmico para treinamento**. 2005. 223 p. Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Rio de Janeiro, 2005.

[38] SHIM, H., SEO, J. H., TEEL, A. R. **Nonlinear observer design via passivation of error dynamics.** Automatica, Vol. 39, pp. 885-892, 1999.

[39] SLOTINE, J. J. E., LI, W. **Applied nonlinear control.** Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1991.

[40] SORENSEN, A. J., SAGATUN, S. I., FOSSEN, T. I. **Design of a dynamic positioning system using model-based control.** Control Engineering Practice, Vol. 4, No. 3, pp. 359-368, 1996.

[41] STRAND, J. P. **Nonlinear position control systems design for marine vessels.** 1999. 184 p. Tese (Doutorado) - Norwegian University of Science and Technology, Department of Engineering Cybernetics, Trondheim, 1999.

[42] TANNURI, E. A. **Desenvolvimento de metodologia de projeto de sistema de posicionamento dinâmico aplicado a operações em alto-mar.** 2002. 239 p. Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2002.

[43] TANNURI, E. A., KUBOTA, L. K. **Adaptive techniques applied to offshore dynamic positioning systems.** Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering (ABCM), Vol. XXVIII, No. 3/323, 2006.

[44] The Society of Naval Architects and Marine Engineers - SNAME (1950). **Nomenclature for treating the motion of submerged body through a fluid**. Technical and Research Bulletin no.1-5.

[45] TORSETNES, G. **Nonlinear control and observer design for dynamic positioning using contraction theory.** 2004. 72 p. Dissertação (Mestrado) - Norwegian University of Science and Technology, Department of Engineering Cybernetics, Trondheim, 2004.

[46] TORSETNES, G., JOUFFROY, J. FOSSEN, T. I. **Nonlinear dynamic positioning of ships with gain-scheduled wave filtering.** IEEE Conference on Decision and Control (CDC'04), Paradise Island, Bahamas, Vol. 3, pp. 3388-3393, 2004.

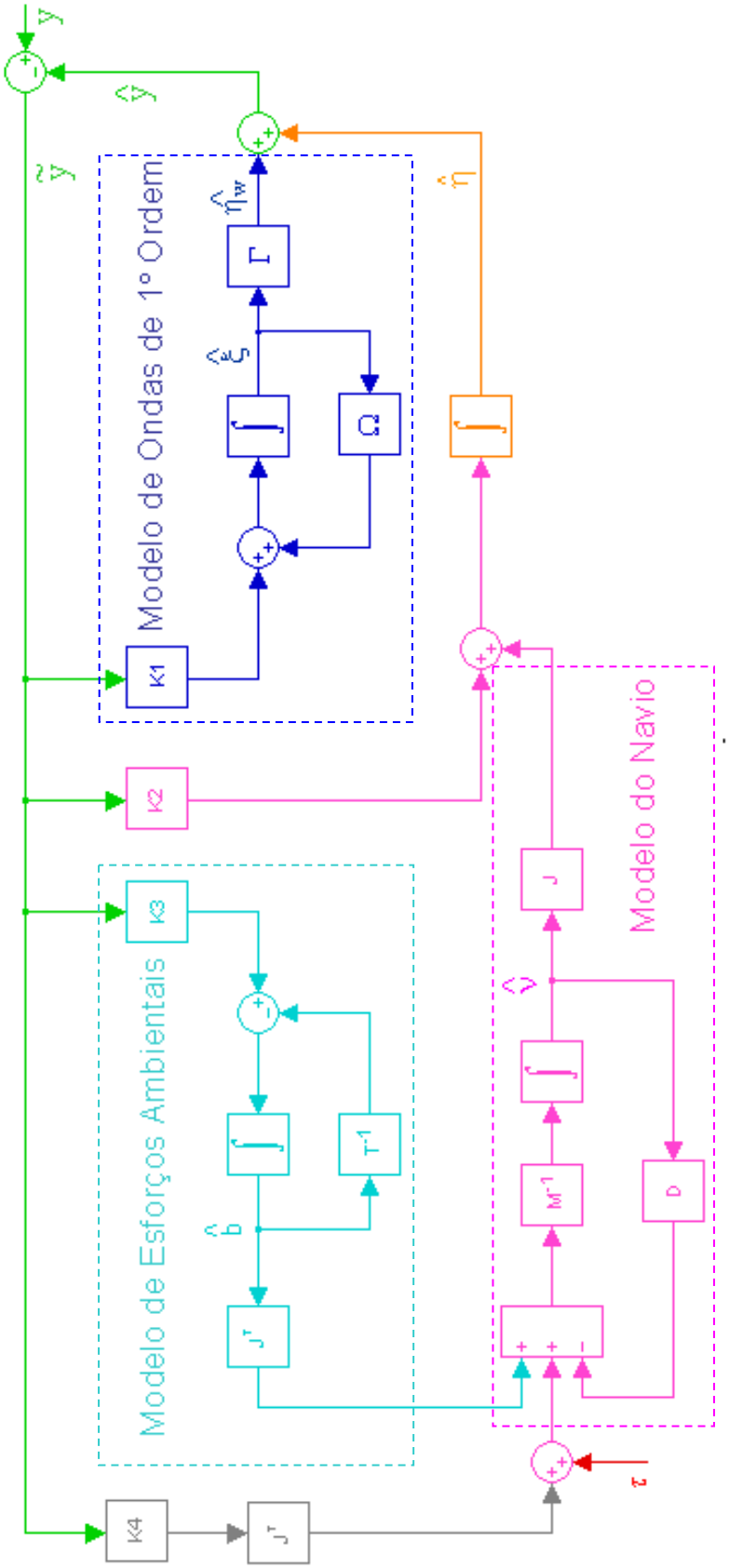
[47] UTKIN, V. I. **Variable structured systems with sliding modes.** IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 22(2), pp. 212-222, 1977.

[48] WITKOWSKA, A., TOMERA, M., SMIERZCHALSKI, R. **A backstepping approach to ship course control.** International Journal of Applied Mathematics and Computer Science. Vol. 17, No. 1, pp. 73-85, 2007.

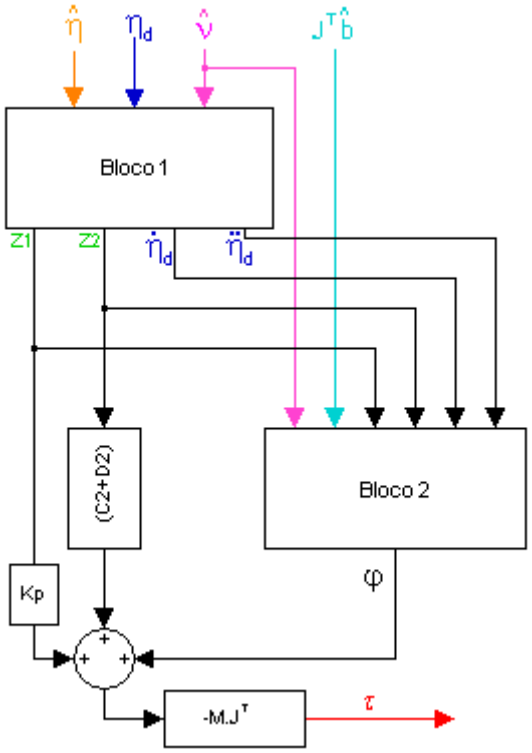
[49] ZAKARTCHOUK JUNIOR, A., MORISHITA, H. M. **Passivity-based nonlinear observer for dynamic positioning.** Proceedings of the XIII International Symp. on Dynamic Problems of Mechanics (DINAME 2009), Angra dos Reis, Brazil, paper DIN09-156, 2009a.

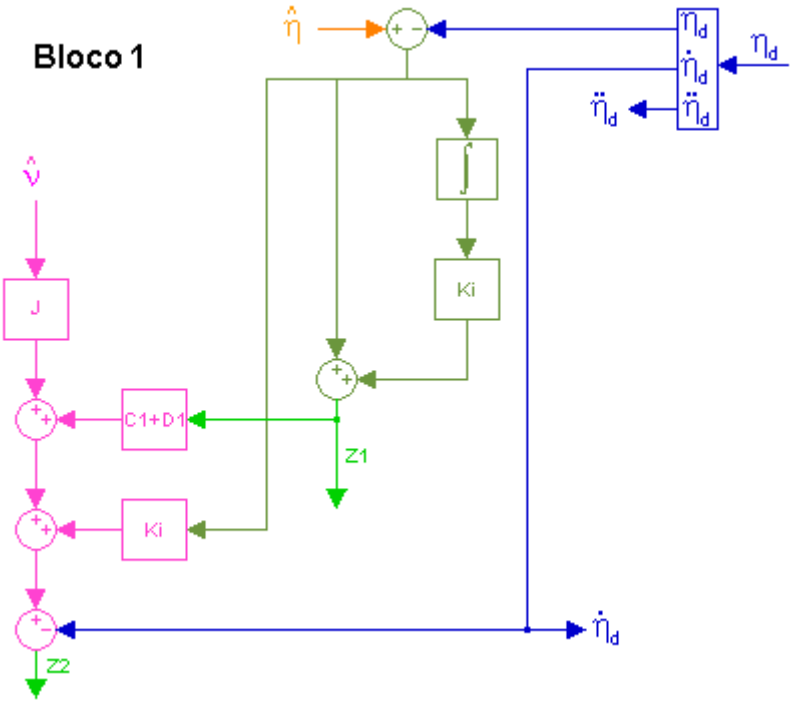
[50] ZAKARTCHOUK JUNIOR, A., MORISHITA, H. M. **A backstepping controller for dynamic positioning of ships: numerical and experimental results for a shuttle tanker model.** Proceedings of the 8$^{th}$ IFAC International Conference on Manoeuvring and Control of Marine Craft (MCMC09), Guarujá, Brazil, pp.394-399, 2009b.

# APÊNDICE A – ESTRUTURA DO OBSERVADOR

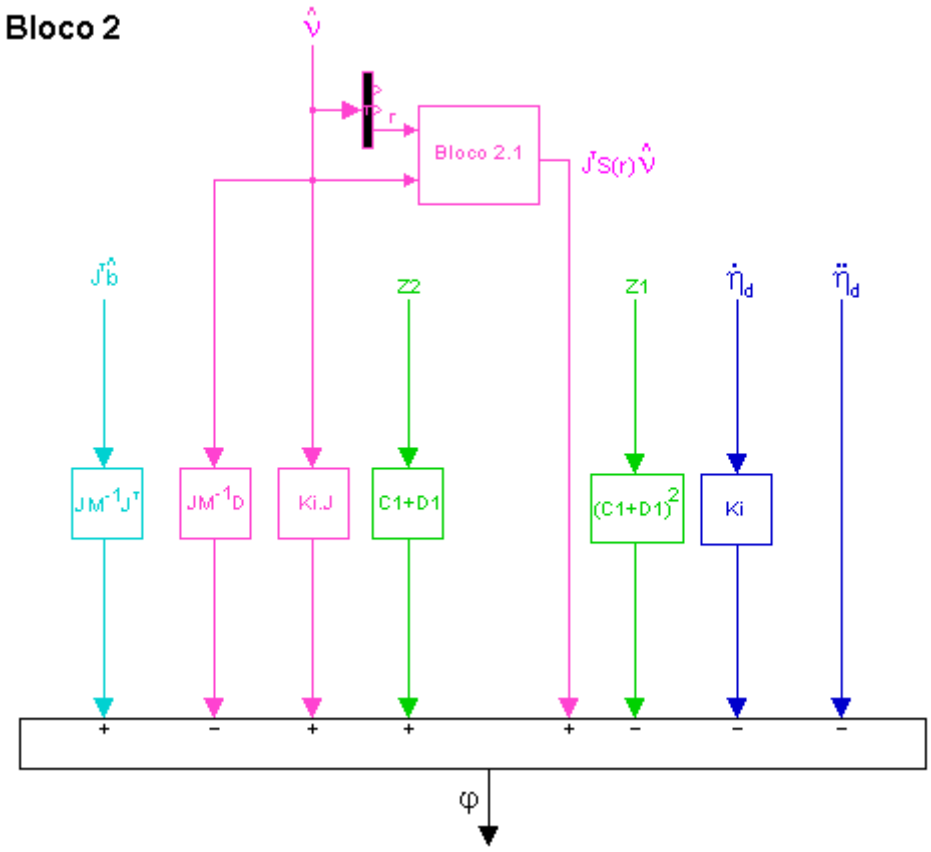


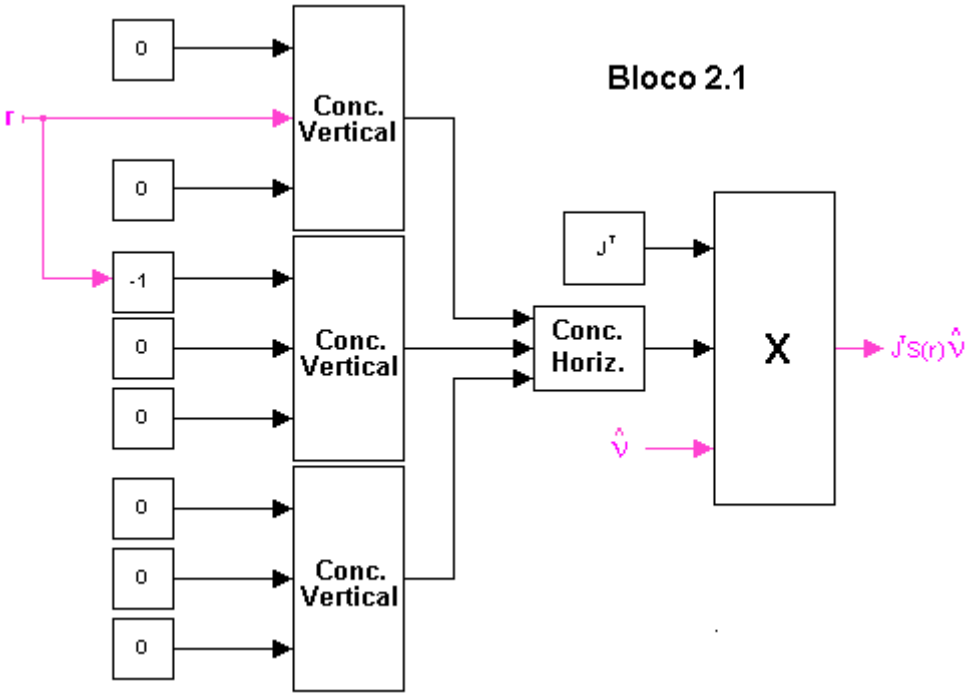
# APÊNDICE B – ESTRUTURA DO CONTROLADOR



# APÊNDICE B (cont.) – ESTRUTURA DO CONTROLADOR



# APÊNDICE C – DEMONSTRAÇÃO DA INEQUAÇÃO 5.71

Será provado que:

$$z^T(-D_z z + W_1\tilde{y} + W_2\tilde{\nu} + W_3\tilde{\xi}) - \frac{1}{4}\left(\tilde{y}^T G_1\tilde{y} + \tilde{\nu}^T G_2\tilde{\nu} + \tilde{\xi}^T G_3\tilde{\xi}\right) \leq 0 \tag{1}$$

Considerando $z = [z_1{}^T, z_2{}^T]^T$ e as equações (5.46) a (5.52), a inequação (1) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &- z_1{}^T D_{1'} z_1 - z_2{}^T D_2 z_2 + z_1{}^T K_{2'}\tilde{y} + z_2{}^T \Omega_1\tilde{y} + z_2{}^T \Omega_2\tilde{\nu} + z_2{}^T \Omega_3\tilde{\xi} \\ &- \tilde{y}^T \frac{G_1}{4}\tilde{y} - \tilde{\nu}^T \frac{G_2}{4}\tilde{\nu} - \tilde{\xi}^T \frac{G_3}{4}\tilde{\xi} \end{aligned} \tag{2}$$

onde $z_1 = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \end{bmatrix}^T$ e $z_2 = \begin{bmatrix} z_{21} & z_{22} & z_{23} \end{bmatrix}^T$.

Expandindo os termos de (2) relacionados a $z_1$ resulta:

$$- z_1{}^T D_{1'} z_1 + z_1{}^T K_{2'}\tilde{y} = \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &= -d_1(k_1 z_{11} - \frac{1}{2d_1}\tilde{y})^T(k_1 z_{11} - \frac{1}{2d_1}\tilde{y}) + \frac{1}{4d_1}\tilde{y}^T\tilde{y} + \\ &- d_2(k_2 z_{12} - \frac{1}{2d_2}\tilde{y})^T(k_2 z_{12} - \frac{1}{2d_2}\tilde{y}) + \frac{1}{4d_2}\tilde{y}^T\tilde{y} + \\ &- d_3(k_3 z_{13} - \frac{1}{2d_3}\tilde{y})^T(k_3 z_{13} - \frac{1}{2d_3}\tilde{y}) + \frac{1}{4d_3}\tilde{y}^T\tilde{y} \end{aligned} \tag{4}$$

onde $d_i > 0$ ($i$ = 1, 2 e 3) são constantes positivas de projeto e $k_i$ ($i$ = 1, 2 e 3) são os vetores coluna da matriz $K_{2'}^T$.

Expandindo os termos de (2) relacionados a $z_2$ resulta:

$$- z_2{}^T D_2 z_2 + z_2{}^T \Omega_1\tilde{y} + z_2{}^T \Omega_2\tilde{\nu} + z_2{}^T \Omega_3\tilde{\xi} = \tag{5}$$

## APÊNDICE C (cont.) – DEMONSTRAÇÃO DA INEQUAÇÃO 5.71

$$
\begin{aligned}
&= -d_4(\omega_1 z_{21} - \frac{1}{2d_4}\tilde{y})^T(\omega_1 z_{21} - \frac{1}{2d_4}\tilde{y}) + \frac{1}{4d_4}\tilde{y}^T\tilde{y} + \\
&- d_5(\omega_2 z_{22} - \frac{1}{2d_5}\tilde{y})^T(\omega_2 z_{22} - \frac{1}{2d_5}\tilde{y}) + \frac{1}{4d_5}\tilde{y}^T\tilde{y} + \\
&- d_6(\omega_3 z_{23} - \frac{1}{2d_6}\tilde{y})^T(\omega_3 z_{23} - \frac{1}{2d_6}\tilde{y}) + \frac{1}{4d_6}\tilde{y}^T\tilde{y} + \\
&- d_4(\omega_4 z_{21} - \frac{1}{2d_4}\tilde{\nu})^T(\omega_4 z_{21} - \frac{1}{2d_4}\tilde{\nu}) + \frac{1}{4d_4}\tilde{\nu}^T\tilde{\nu} + \\
&- d_5(\omega_5 z_{22} - \frac{1}{2d_5}\tilde{\nu})^T(\omega_5 z_{22} - \frac{1}{2d_5}\tilde{\nu}) + \frac{1}{4d_5}\tilde{\nu}^T\tilde{\nu} + \\
&- d_6(\omega_6 z_{23} - \frac{1}{2d_6}\tilde{\nu})^T(\omega_6 z_{23} - \frac{1}{2d_6}\tilde{\nu}) + \frac{1}{4d_6}\tilde{\nu}^T\tilde{\nu} + \\
&- d_4(\omega_7 z_{21} - \frac{1}{2d_4}\tilde{\xi})^T(\omega_7 z_{21} - \frac{1}{2d_4}\tilde{\xi}) + \frac{1}{4d_4}\tilde{\xi}^T\tilde{\xi} + \\
&- d_5(\omega_8 z_{22} - \frac{1}{2d_5}\tilde{\xi})^T(\omega_8 z_{22} - \frac{1}{2d_5}\tilde{\xi}) + \frac{1}{4d_5}\tilde{\xi}^T\tilde{\xi} + \\
&- d_6(\omega_9 z_{23} - \frac{1}{2d_6}\tilde{\xi})^T(\omega_9 z_{23} - \frac{1}{2d_6}\tilde{\xi}) + \frac{1}{4d_6}\tilde{\xi}^T\tilde{\xi}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

onde $d_i > 0$ ($i$ = 4, 5 e 6) são constantes positivas de projeto, $\omega_i$ ($i$ = 1, 2 e 3) são os vetores coluna da matriz $\Omega_1^T$, $\omega_i$ ($i$ = 4, 5 e 6) são os vetores coluna da matriz $\Omega_2^T$ e $\omega_i$ ($i$ = 7, 8 e 9) são os vetores coluna da matriz $\Omega_3^T$.

Como todos os termos quadráticos em (4) e (6) são menores ou iguais a zero, e levando em conta a forma como as matrizes $G_1$, $G_2$ e $G_3$ foram definidas, fica provado que a inequação (1) é semidefinida negativa.

# APÊNDICE D – DADOS DAS SIMULAÇÕES

**Navio:**

$$\mathrm{M} = 10^{11}\begin{bmatrix} 0.0016 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0029 & 0.0194 \\ 0 & 0.0194 & 9.9457 \end{bmatrix} \qquad D = 10^{6}\begin{bmatrix} 0.04 & 0 & 0 \\ 0 & 2.2 & 0 \\ 0 & 0 & 10.3 \end{bmatrix}$$

**Observador:**

$$K_1 = \begin{bmatrix} -2.0000 & 0 & 0 \\ 0 & -1.9837 & 0 \\ 0 & 0 & -1.9475 \\ 0.8100 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8820 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0980 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0.50 & 0 & 0 \\ 0 & 0.54 & 0 \\ 0 & 0 & 0.66 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = 10^{8}\begin{bmatrix} 0.0010 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0025 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad K_4 = 10^{10}\begin{bmatrix} 0.0002 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0005 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{T} = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 \end{bmatrix}$$

**Controlador:**

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1\mathrm{e}-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1\mathrm{e}-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\mathrm{e}-1 \end{bmatrix} \qquad C_2 = \begin{bmatrix} 2.0\mathrm{e}-4 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0\mathrm{e}-8 & 0 \\ 0 & 0 & 2.0\mathrm{e}-6 \end{bmatrix}$$

$$K_p = \begin{bmatrix} 2.0e-3 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0e-7 & 0 \\ 0 & 0 & 2.0e-5 \end{bmatrix} \qquad K_I = 10^{-6}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$d_1 = 1$ $d_2 = 1$ $d_3 = 1$ $d_4 = 2e\text{-}4$ $d_5 = 1e\text{-}8$ $d_6 = 2e\text{-}6$

# APÊNDICE E – DADOS DOS ENSAIOS

**Modelo (ensaios a, b):**

$$M = \begin{bmatrix} 81.4730 & 0 & 0 \\ 0 & 112.4226 & 0 \\ 0 & 0 & 38.5841 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0.1811 & 0 & 0 \\ 0 & 9.9610 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0025 \end{bmatrix}$$

**Observador:**

$$K_1 = \begin{bmatrix} -1.89 & 0 & 0 \\ 0 & -1.89 & 0 \\ 0 & 0 & -1.89 \\ 0.36 & 0 & 0 \\ 0 & 0.36 & 0 \\ 0 & 0 & 0.36 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0.21 & 0 & 0 \\ 0 & 0.21 & 0 \\ 0 & 0 & 0.21 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad K_4 = \begin{bmatrix} 80 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{T} = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 \end{bmatrix}$$

**Controlador:**

$$C_1 = \begin{bmatrix} 2.0\mathrm{e}-2 & 0 & 0 \\ 0 & 2.0\mathrm{e}-2 & 0 \\ 0 & 0 & 2.0\mathrm{e}-2 \end{bmatrix} \qquad C_2 = \begin{bmatrix} 7.0\mathrm{e}-4 & 0 & 0 \\ 0 & 6.5\mathrm{e}-5 & 0 \\ 0 & 0 & 6.0\mathrm{e}-5 \end{bmatrix}$$

$$K_p = \begin{bmatrix} 3.5e-2 & 0 & 0 \\ 0 & 3.2\mathrm{e}-3 & 0 \\ 0 & 0 & 3.0\mathrm{e}-2 \end{bmatrix} \qquad K_I = 10^{-12}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$d_1 = 0.07$ $d_2 = 0.07$ $d_3 = 0.07$ $d_4 = 3e\text{-}3$ $d_5 = 3e\text{-}4$ $d_6 = 3e\text{-}3$

# APÊNDICE E (cont.) – DADOS DOS ENSAIOS

**Modelo (ensaio c):**

$$M = \begin{bmatrix} 81.4730 & 0 & 0 \\ 0 & 112.4226 & 0 \\ 0 & 0 & 38.5841 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0.1811 & 0 & 0 \\ 0 & 9.9610 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0025 \end{bmatrix}$$

**Observador:**

$$K_1 = \begin{bmatrix} -1.89 & 0 & 0 \\ 0 & -1.89 & 0 \\ 0 & 0 & -1.89 \\ 0.36 & 0 & 0 \\ 0 & 0.36 & 0 \\ 0 & 0 & 0.36 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0.21 & 0 & 0 \\ 0 & 0.21 & 0 \\ 0 & 0 & 0.21 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 4.8 & 0 & 0 \\ 0 & 6.4 & 0 \\ 0 & 0 & 1.6 \end{bmatrix} \qquad K_4 = \begin{bmatrix} 120 & 0 & 0 \\ 0 & 160 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{T} = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 \end{bmatrix}$$

**Controlador:**

$$C_1 = \begin{bmatrix} 6.4\mathrm{e}-3 & 0 & 0 \\ 0 & 8.0\mathrm{e}-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1\mathrm{e}-3 \end{bmatrix} \qquad C_2 = \begin{bmatrix} 0.28\mathrm{e}-4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.42\mathrm{e}-4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.02\mathrm{e}-4 \end{bmatrix}$$

$$K_p = \begin{bmatrix} 4.4e-3 & 0 & 0 \\ 0 & 5.2\mathrm{e}-3 & 0 \\ 0 & 0 & 2.6\mathrm{e}-2 \end{bmatrix} \qquad K_I = 10^{-12}\begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$d_1 = 0.02$ $d_2 = 0.03$ $d_3 = 0.22$ $d_4 = 1e\text{-}4$ $d_5 = 3e\text{-}4$ $d_6 = 2e\text{-}3$