

EMERSON BORGES SANTANA

**DINÂMICA E ESTABILIDADE DE TUBOS  
SUJEITOS A ESCOAMENTOS INTERNO  
INCOMPRESSÍVEL E EXTERNO  
COMPRESSÍVEL**

São Paulo  
2022

EMERSON BORGES SANTANA

**DINÂMICA E ESTABILIDADE DE TUBOS  
SUJEITOS A ESCOAMENTOS INTERNO  
INCOMPRESSÍVEL E EXTERNO  
COMPRESSÍVEL**

**Versão Corrigida**

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

São Paulo  
2022

EMERSON BORGES SANTANA

**DINÂMICA E ESTABILIDADE DE TUBOS  
SUJEITOS A ESCOAMENTOS INTERNO  
INCOMPRESSÍVEL E EXTERNO  
COMPRESSÍVEL**

**Versão Corrigida**

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de Concentração:

Hidrodinâmica, Dinâmica e Controle de Sistemas Oceânicos

Orientador:

Gustavo R. S. Assi

São Paulo  
2022

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_

Assinatura do autor: \_\_\_\_\_

Assinatura do orientador: \_\_\_\_\_

#### Catálogo-na-publicação

Santana, Emerson Borges

Dinâmica e estabilidade de tubos sujeitos a escoamentos interno incompressível e externo compressível / E. B. Santana -- versão corr. -- São Paulo, 2022.

130 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Naval e Oceânica.

1.Vibrações mecânicas 2.Interação fluido-estrutura 3.Dinâmica e estabilidade 4.E escoamento axial 5.Tubos transportando fluido I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Naval e Oceânica II.t.

## RESUMO

Esta dissertação apresenta um modelo que descreve o comportamento dinâmico linear de um tubo sujeito simultaneamente a escoamento interno incompressível e escoamento externo compressível parcialmente confinado, e que servirá de base para estudos de estabilidade a pequenas perturbações de parâmetros. O sistema consiste em um tubo flexível, disposto em posição vertical, cujo fluxo interno se dá da extremidade superior engastada para a extremidade inferior livre; e um tubo externo rígido, concêntrico, de menor comprimento e de maior diâmetro. Há, portanto, a formação de uma região anular entre os tubos pela qual o escoamento externo ocorre em sentido oposto ao interno. O sistema tem aplicação tecnológica em cavernas de sal em águas ultra profundas para armazenamento e separação de  $\text{CH}_4$  com alto teor de  $\text{CO}_2$ .

**Palavras-Chave** – estabilidade, escoamento axial, interação fluido-estrutura, cavernas de sal.

# ABSTRACT

This dissertation presents a model that describes the linear dynamic behavior of a pipe subject to both incompressible internal flow and partially confined, compressible, external flow, which will serve as a basis in stability to small parameter disturbance analysis. The system consists of a vertical flexible pipe, whose internal flow occurs from the top end to the free bottom end; and a rigid, shorter, concentric, outer pipe of larger diameter. Therefore, there is the formation of an annular region between the tubes through which the external flow occurs in the opposite direction to the internal. The system has technological application in ultra deep water salt caverns for CO<sub>2</sub>—CH<sub>4</sub> storage and separation.

**Keywords** – stability, axial flow, fluid-structure interaction, salt caverns.

# LISTA DE SÍMBOLOS

$\rho$	Vetor de densidades
$\mathbf{L}$	Vetor de cotas
$\mathcal{M}$	Momento fletor
$\Omega, \omega$	Frequência angular dimensional, adimensional
$\theta$	Coordenada angular
$A_f$	Área da seção transversal interna do tubo flexível
$A_o$	Área da seção transversal externa do tubo flexível
$A_{ch}$	Área da seção transversal da região anular
$D_i$	Diâmetro interno do tubo flexível
$D_o$	Diâmetro externo do tubo flexível
$D_{ch}$	Diâmetro interno do tubo rígido
$EI$	Rigidez à flexão
$F_A$	Força hidrodinâmica invíscida por unidade de comprimento
$F_f$	Força de atrito total por unidade de comprimento
$F_{en}$	Força normal externa por unidade de comprimento
$F_{et}$	Força tangencial externa por unidade de comprimento
$F_{in}$	Força normal interna por unidade de comprimento
$F_{it}$	Força tangencial interna por unidade de comprimento
$g$	Aceleração da gravidade
$M$	Número de Mach
$M_t$	Massa do tubo flexível por unidade de comprimento
$r$	Coordenada radial
$T$	Esforço interno normal
$t, \tau$	Tempo dimensional, adimensional
$U_i$	Velocidade do fluido interno
$U_o$	Velocidade do fluido externo
$w, \eta$	Deslocamento lateral dimensional, adimensional
$x, \xi$	Coordenada longitudinal dimensional, adimensional
$z$	Coordenada transversal

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>Revisão Bibliográfica</b>	<b>14</b>
<b>3</b>	<b>Métodos</b>	<b>18</b>
3.1	Obtenção do diagrama de Argand para estudo de estabilidade . . . . .	18
3.2	Tipos de perda de estabilidade . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Modelo teórico</b>	<b>25</b>
4.1	Dedução da equação do movimento . . . . .	25
4.2	Adimensionalização da equação do movimento . . . . .	39
4.3	Métodos de solução . . . . .	40
4.4	Método das Diferenças Finitas . . . . .	41
4.5	Método híbrido de Fourier-Galerkin . . . . .	44
4.6	Simulação de remoção de fluido circundante . . . . .	45
<b>5</b>	<b>Resultados</b>	<b>47</b>
5.1	Parâmetros físicos . . . . .	48
5.2	Resultados teóricos quantitativos . . . . .	51
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>54</b>
6.1	Aspectos gerais . . . . .	54
6.2	Discussão qualitativa de resultados . . . . .	55
6.3	Trabalhos futuros . . . . .	56
	<b>Apêndice A</b>	<b>57</b>



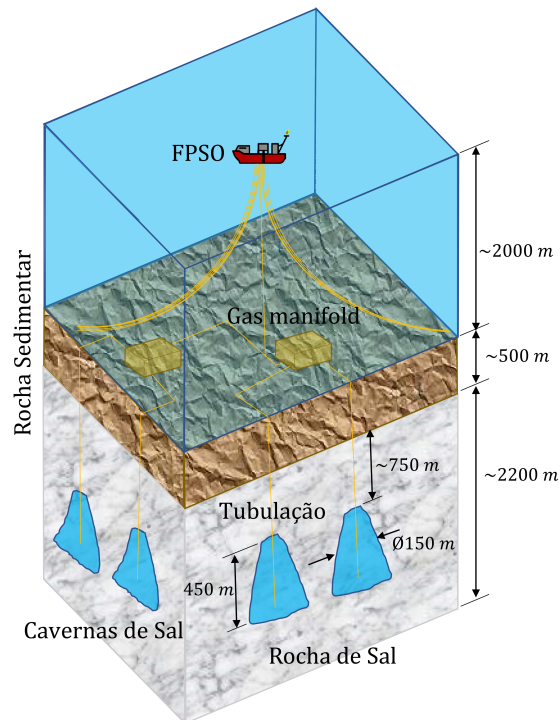
<b>Apêndice B</b>	<b>60</b>
<b>Apêndice C</b>	<b>62</b>
<b>Apêndice D</b>	<b>65</b>
<b>Apêndice E</b>	<b>67</b>
E.1 Montagem da matriz para obtenção das frequências do sistema . . . . .	70
<b>Apêndice F</b>	<b>74</b>
<b>Apêndice G</b>	<b>80</b>
<b>Apêndice H</b>	<b>82</b>
H.1 Método das Diferenças Finitas . . . . .	82
H.1.1 Obtenção dos adimensionais do problema . . . . .	82
H.1.2 Método das secantes . . . . .	83
H.1.2.1 Função para cálculo de $\det(A)$ . . . . .	84
H.1.3 Código para cálculo dos somatórios . . . . .	87
H.2 Método de Fourier-Galerkin . . . . .	87
H.2.0.1 Função para cálculo de $\det(A)$ . . . . .	87
H.2.0.2 Funções para cálculo das integrais . . . . .	91
<b>Apêndice I</b>	<b>96</b>
I.1 Simulação 1 . . . . .	96
I.2 Simulação 2 . . . . .	102
I.3 Simulação 3 . . . . .	107
I.4 Simulação 4 . . . . .	113
I.5 Simulação 5 . . . . .	118
I.6 Simulação 6 . . . . .	124



# 1 INTRODUÇÃO

Cavernas de sal têm sido utilizadas como reservatórios para hidrocarbonetos em domos salinos *onshore* e *offshore* em águas rasas. Além disso, dado o interesse mundial pela mitigação das emissões de gases do efeito estufa, elas também têm sido vistas como uma solução para captura e armazenamento de carbono. No contexto da exploração de petróleo no pré-sal brasileiro, pesquisadores associados ao Projeto 34 do Research Centre for Gas Innovation (RCGI) propuseram uma nova aplicação para as cavernas de sal. Dado que o gás associado do pré-sal brasileiro tem alto teor de  $\text{CO}_2$ , o que o invalida para uso em aplicações práticas diretamente, ele precisa passar por um tratamento prévio com o fito de reduzir o conteúdo de  $\text{CO}_2$  para cerca de 3%, que é realizado, atualmente, através de tecnologia de membranas (COSTA et al., 2019b; COSTA et al., 2019a). O  $\text{CO}_2$  obtido após o processo é então reinjetado no reservatório para recuperação de óleo aprimorada (*EOR* na sigla em inglês), que possibilita um ganho de produtividade na exploração do reservatório. Dado que este processo é repetido diversas vezes ao longo da exploração do reservatório, há uma tendência de aumento do teor de  $\text{CO}_2$  no gás associado, que, por sua vez, pode ultrapassar a capacidade de tratamento das membranas. Dentro deste cenário, e tendo em vista outras desvantagens do sistema de membranas de ordens econômica e técnica, os pesquisadores referidos propuseram a construção de cavernas na camada de sal localizada acima do pré-sal. As cavernas ficariam abaixo de cerca de 2000 m de lâmina d'água, 500 m de rocha sedimentária e 750 m de rocha de sal, tal como pode ser visto no esboço presente na Figura 1. A construção se daria por lixiviação da rocha de sal – processo que gera salmoura como resíduo – utilizando a água do mar até as cavernas alcançarem cerca de 450 m de altura e 150 m de diâmetro, aproximadamente. Para o transporte de água para a lixiviação, remoção da salmoura produzida e injeção do gás associado (considerado como uma mistura de  $\text{CH}_4$  e  $\text{CO}_2$ ) são utilizados tubos que podem ser vistos de maneira esquemática na Figura 2. Durante a lixiviação, há dois procedimentos que podem ser adotados: a) Circulação Direta - a água é injetada pelo tubo central e a salmoura removida pela região anular; b) Circulação Reversa - a água é injetada pela região anular e a salmoura removida pelo tubo central (COSTA,

Figura 1: Visão esquemática das cavernas de sal em águas ultra profundas.

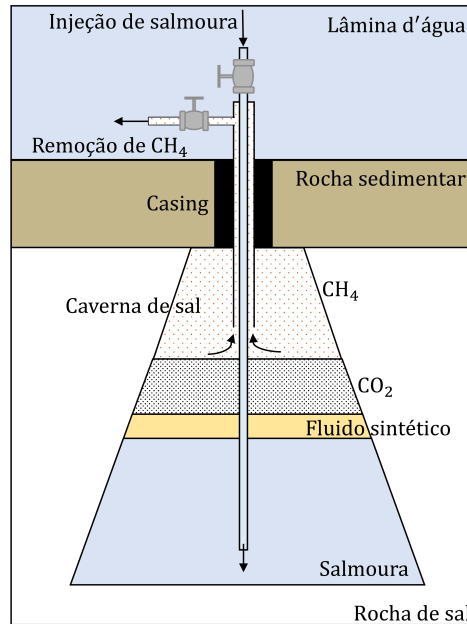


Fonte: Adaptado de Technomar.

2018). Após o fim da lixiviação e remoção da salmoura, a mistura de  $\text{CH}_4$  e  $\text{CO}_2$  é injetada na caverna através da região anular formada pelos tubos. Uma vez que a pressão exercida nas cavernas pela atmosfera, coluna d'água e camadas rochosas alcança cerca de 450 bar, a mistura gasosa passa por transição de fase para o estado supercrítico. Nesta condição, a separação de  $\text{CH}_4$  e  $\text{CO}_2$  é espontânea e se dá por diferença de densidades, que contrasta com a separação química não-espontânea da tecnologia de membranas. Após certo intervalo de tempo, o  $\text{CH}_4$  supercrítico concentra-se na região superior da caverna, e o  $\text{CO}_2$  supercrítico, por ser mais denso, concentra-se na região inferior, mas acima da salmoura que resta devido à impossibilidade de remoção. Ressalta-se que antes do preenchimento da caverna com  $\text{CH}_4$  e  $\text{CO}_2$ , uma fina camada de fluido sintético é injetada dado que  $\text{CO}_2$  e salmoura são fluidos miscíveis entre si. Completa a separação, o  $\text{CH}_4$  em elevado nível de pureza pode ser succionado através da região anular e destinado para aplicações práticas e comercialização, enquanto que o  $\text{CO}_2$  permanece capturado na caverna. Sucessivos ciclos de injeção de gás associado e remoção de  $\text{CH}_4$  supercrítico podem ser realizados até que a caverna fique completamente preenchida de  $\text{CO}_2$  e possa ser abandonada.

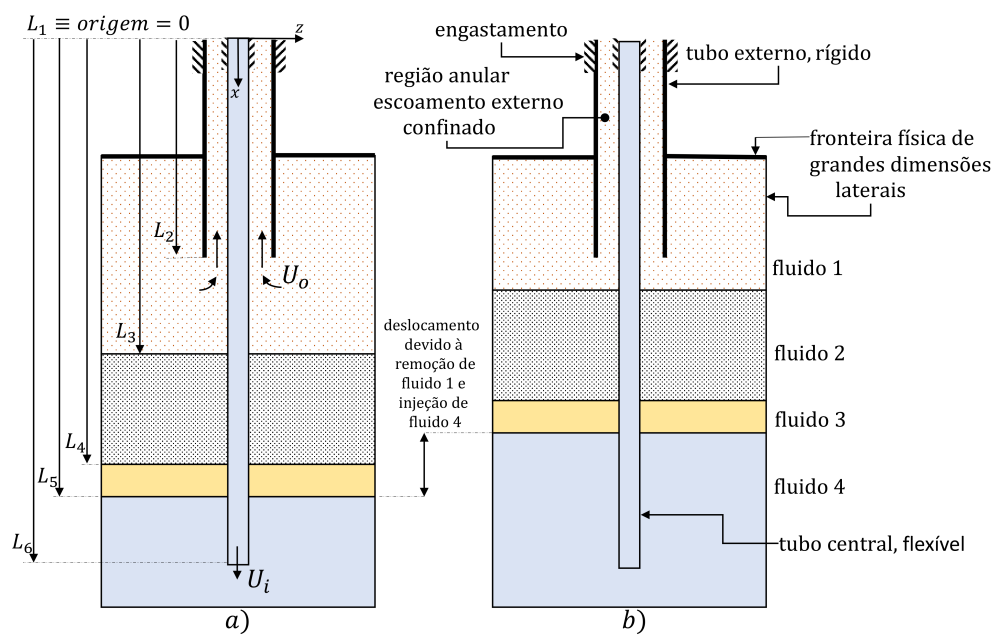
Tendo essa aplicação como motivação, o presente trabalho visa estudar a dinâmica e estabilidade do tubo central. Para este fim, o sistema é modelado como um tubo flexível, disposto em posição vertical, cujo fluxo interno se dá da extremidade superior

Figura 2: Esboço do sistema de tubulação utilizado para construção e operação da caverna de sal para armazenamento e separação dos constituintes do gás associado.



Fonte: Autor.

Figura 3: Esboço do sistema. a) No início do processo de injeção de fluido 4 através do tubo flexível e remoção de fluido 1 pela região anular. b) Após certo tempo do procedimento de adição e remoção de fluidos, há mudança no nível de cada coluna de fluido.



Fonte: Autor.

engastada para a extremidade inferior livre; e um tubo externo rígido, concêntrico, de menor comprimento e de maior diâmetro. Há, portanto, a formação de uma região anular entre os tubos pela qual o escoamento externo ocorre em sentido oposto ao interno. Na região externa do tubo flexível pode haver inúmeras colunas de fluidos imiscíveis entre si, que visa representar justamente o  $\text{CH}_4$  e  $\text{CO}_2$  supercríticos, fluido sintético e salmoura ao longo do tubo.

O estudo da dinâmica do sistema se dará pela dedução da equação linear do movimento do tubo. Através de um método numérico essa equação será resolvida para que a estabilidade do tubo seja aferida. Entende-se por estabilidade a tendência do tubo em permanecer-se em movimento oscilatório dentro das proximidades do ponto de equilíbrio estático quando receber uma perturbação. Caso haja a tendência do tubo se afastar do ponto de equilíbrio indefinidamente, diz-se que o comportamento é instável. Por perturbação se entende a variação de quaisquer parâmetros da equação do movimento que descreve a dinâmica do problema. Na maior parte da literatura especializada, o parâmetro de maior interesse é a velocidade de escoamento, i.e., deseja-se descobrir a velocidade (ligada matematicamente à vazão) a partir da qual o sistema deixará de ser estável e passará a ser instável. A esta velocidade de escoamento dá-se o nome de “velocidade crítica”.

Não obstante, no presente trabalho a busca não é por uma “velocidade crítica de escoamento”, seja interna ou externa, que provocaria a desestabilização do sistema. As velocidades de escoamento interno e externo serão assumidas como estáveis (ou seja, menor que o valor crítico pré-calculado), serão tidas como “velocidades de serviço ou operação”. Dado que há injeção de um fluido pelo tubo flexível para dentro do espaço fechado na parte inferior deste, e remoção de outro fluido pela região anular formada pelos tubos rígido e flexível na parte superior, há uma tendência do nível do fluido injetado aumentar, e uma tendência do fluido removido ter o comprimento de sua coluna diminuído. Os fluidos presentes entre as camadas superior e inferior não tem o comprimento de suas colunas alterados, já que não são nem adicionados e nem removidos do espaço fechado, mas tem a tendência de se deslocarem para cima dado que o volume inferior está sendo aumentado e o superior diminuído. A Figura 3 b) ajuda a visualizar o explicado, devendo ser lida como um momento posterior no tempo em relação à Figura 3 a). O fluido 4 aumentou de volume se comparado com a Figura 3 a), e se tivesse a posição do seu nível medido a partir da origem, tal como na Figura 3 a) pela cota  $L_5$ , notaríamos uma diminuição dela. O mesmo se daria com as cotas que medem os níveis dos fluidos intermediários (eles estão “subindo”). As cotas inalteradas são a  $L_1$ , que é definida como a origem com valor 0;  $L_2$ , que é o comprimento do tubo rígido; e  $L_6$ , que é comprimento do tubo central

flexível. O aumento de volume do fluido inferior e a diminuição de volume do fluido superior, que geram os deslocamentos dos fluidos intermediários, são considerados como sendo aumentos quase-estáticos. Isso se deve ao fato das vazões de injeção e remoção serem de uma ordem de grandeza muito inferior ao volume total do espaço fechado. O tempo para que as colunas sejam deslocadas em um valor apreciável acaba sendo muito alto, de tal forma que seria errôneo considerar estar acontecendo um escoamento ao longo do tubo central na porção abaixo da cota  $L_2$ . O que de fato ocorre não é fluxo, mas elevação vagarosa das colunas de fluidos. Já na região confinada formada entre os tubos ocorre escoamento de fato, por estar ela sujeita a sucção. O objetivo central do estudo de estabilidade do presente trabalho é, portanto, verificar qual é o impacto da elevação das colunas de fluidos ao longo do comprimento do tubo flexível quando este se apresenta em operação de injeção de fluido e tendo um escoamento externo ocorrendo na região anular confinada. As mudanças de posições dos fluidos externos equivalem a mudanças de propriedades físicas (densidade, viscosidade etc.) ao longo do tubo que implicam em mudanças das forças atuantes no sistema e nos pontos de aplicação destas. Essas mudanças podem ter um caráter estabilizador, caso a nova disposição dos fluidos ajude a dissipar a energia do sistema, ou desestabilizador caso ajude a aumentar a energia do sistema. Adicionalmente, neste trabalho serão investigadas as influências do diâmetro e comprimento do tubo rígido na estabilidade do sistema.

O presente artigo visa produzir um modelo de baixa hierarquia para resolver este problema proposto de interação fluido-estrutura. O objetivo não é buscar por acurácia numérica ou prestar um foco específico no que tange uma análise quantitativa. A finalidade aqui é compreender o sistema no âmbito qualitativo; é explorar e descrever os fenômenos previstos através de um estudo analítico-numérico; é proporcionar uma ideia das ordens de grandeza envolvidas. O modelo aqui proposto serve como uma base para análises de alta hierarquia que tenha fins quantitativos, tal como análises multifísicas de problemas de interação fluido-estrutura utilizando mecânica dos fluidos computacional para resolver os campos de escoamento e método dos elementos finitos para solução dos deslocamentos do tubo de maneira combinada e integrada.

Este artigo está organizado da seguinte maneira: na Seção 2 é realizada uma breve revisão bibliográfica que perpassa pelas origens da área de pesquisa de escoamentos axiais interno e externo em estruturas tubulares, chegando ao estado da arte atual; o foco é posicionar o presente trabalho dentro da literatura especializada. Na Seção 3 é explicado o processo de resolução do problema proposto através da replicação de resultados obtidos em trabalhos anteriores. Na Seção 4 o modelo teórico é desenvolvido para obtenção da

equação do movimento, que é posteriormente adimensionalizada; os métodos matemáticos desenvolvidos na Seção 3 são então aplicados para obtenção de resultados. Na Seção 6 as conclusões preliminares são apresentadas e as atividades futuras são descritas.



## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O tema de oscilação lateral em estrutura tubular sob escoamento axial interno passa a ganhar grande atenção nos primeiros anos da década de 1950. O principal objetivo era avaliar o efeito do escoamento na frequência natural do tubo. Nesse sentido, encontram-se os escritos de [Niordson \(1953\)](#) e [Handelman \(1955\)](#). Diversas condições vinculares foram estudadas por estes autores e já reportavam a observação de um fenômeno de instabilidade análogo à flambagem de colunas sob carga compressiva.

Com estudos de dinâmica de tubos articulados em balanço com escoamento interno, [Benjamin \(1962\)](#) foi o primeiro a reportar o fenômeno de instabilidade oscilatória. O autor desenvolveu uma teoria amparada em observações experimentais, e conseguiu chegar, mesmo com modelos com poucos graus de liberdade, a conclusões importantes, como o fato de tubos horizontais em balanço não apresentarem flambagem, mas somente instabilidade oscilatória, ao passo que tubos verticais estariam sujeitos a ambas formas de instabilidades.

[Gregory e Paidoussis \(1966\)](#) desenvolveram uma teoria para estudar tubos horizontais modelados como sistemas contínuos, i.e., com infinitos graus de liberdade. Obtendo a equação do movimento através da aplicação da segunda lei de Newton, os autores propõem três métodos de análise para obtenção das frequências complexas em função da velocidade do escoamento, dos quais o mais relevante é o método de Galerkin, que permite transformar a equação diferencial do movimento em um conjunto de equações lineares. A frequência complexa do sistema é então encontrada através de um processo iterativo de minimização auxiliado por computador eletrônico e aplicado à matriz de coeficientes do sistema linear. Este método foi adotado pela grande maioria das publicações posteriores sobre tubos sob escoamento axial.

[Paidoussis \(1966\)](#) estudou experimentalmente as instabilidades em tubos em diversas situações vinculares e sujeitos a escoamento axial externo. Foi demonstrado que o formato geométrico da extremidade livre em um tubo com vínculos engastado a montante e livre a jusante é de grande relevância para o comportamento dinâmico do tubo. Quão mais afilada é a extremidade a jusante, que poderia ser interpretada como um bocal cônico,

maior a tendência de apresentar perda de estabilidade com o incremento da velocidade de escoamento. Em extremidades absolutamente rombudas, como é o caso estudado pelo presente trabalho, não se é notado perda de estabilidade. [Hannoyer e Paidoussis \(1978\)](#), que estudaram tubos sujeitos simultaneamente a escoamentos axiais interno e externo, também analisaram o efeito do formato da extremidade livre a jusante, e chegaram à conclusão que se ela é rombuda, então o tubo é incondicionalmente estável.

[Paidoussis e Luu \(1985\)](#) investigaram analiticamente a dinâmica e estabilidade de um tubo em balanço com fluxo em sentido negativo (i.e., aspirando fluido). Verifica-se que o modelo proposto é inerentemente instável quando se inicia um escoamento interno com velocidade infinitesimalmente pequena. Com sucessivos incrementos na velocidade de escoamento, alcança-se a velocidade crítica, valor a partir do qual o modelo prevê a estabilização do tubo. Não obstante, dado a não aderência entre os resultados obtidos pelo modelo teórico desenvolvido e o comportamento observado em experimentos realizados, nos quais nenhuma perda de estabilidade foi observada, [Paidoussis \(1999\)](#) propõe um novo modelo defendendo que tubos com vínculos engastado-livre sujeitos a escoamento em sentido negativo não só não são desestabilizados por escoamentos internos infinitesimais, mas também permanecem estáveis a velocidades de escoamentos substancialmente elevadas. A justificativa apresentada é o cancelamento da força centrífuga que ocorre no processo de balanço de forças para obtenção da equação do movimento e que é tida como a força responsável pelo mecanismo de perda de estabilidade do sistema. [Kuiper e Metrikine \(2005\)](#) retomam a questão de estabilidade em tubos aspiradores e argumentam que embora os termos de força centrífuga sejam eliminados, a força de Coriolis tem o poder de gerar amortecimento negativo, que levaria a uma perda de estabilidade do sistema sujeito a velocidade negativa infinitesimal (pelo menos teoricamente). Dentro de todo esse embate teórico-analítico sobre a perda ou não de estabilidade em tubos aspiradores, ressalta-se que até o ano de 2007 não havia publicação alguma na literatura especializada reportando a observação experimental de instabilidades neste tipo de sistema. [Kuiper e Metrikine \(2008\)](#) realizaram então o primeiro experimento que verificou a presença de instabilidade em tubos aspiradores. Foi constatado que há uma velocidade crítica de escoamento acima da qual o tubo começa a oscilar de maneira irregular, alternando entre uma oscilação orbital de baixa amplitude e um movimento quase-caótico. Não se observou aumentos relevantes da amplitude de oscilação com os aumentos da velocidade de escoamento. Não obstante, [Paidoussis \(1998\)](#) questiona se as observações de [Kuiper e Metrikine \(2008\)](#) podem ser de fato consideradas como instabilidade. Mas de qualquer forma, a taxa de transferência de energia para o tubo aspirador observada é bastante baixa, sendo que na

presença de algum meio de dissipação, tal como fluido externo em repouso, a velocidade crítica pode ultrapassar demasiadamente o intervalo de velocidades de interesse prático. A realidade é que, até o presente momento, não há consenso científico se tubos aspiradores podem sofrer ou não perda de estabilidade, e nem qual seria o mecanismo físico que o levaria a tal condição.

Com base no exposto acima, é razoável considerar que o caso de um tubo sujeito simultaneamente a escoamento interno positivo e externo negativo seja um caso mais crítico que o de um tubo aspirador com escoamento externo positivo, i.e., está sujeito a perda de estabilidade em velocidades consideravelmente mais baixas. Por esta razão, no presente trabalho optou-se por analisar somente o primeiro caso.

[Paidoussis e Ostoja-Starzewski \(1981\)](#) examinaram o caso de um tubo flexível bi-apoiado imerso em um escoamento subsônico, podendo estar confinado ou não. Foi utilizado três abordagens para dedução da força hidrodinâmica invíscida, sendo que o presente artigo utiliza as principais ideias de uma delas: a teoria tridimensional. O modelo prevê que instabilidades por divergência e *flutter* são possíveis. Os parâmetros críticos foram vistos como tendo uma dependência bastante fraca do número de Mach do escoamento compressível.

[Moditis, Paidoussis e Ratigan \(2016\)](#) desenvolveram um modelo para estudo de dinâmica e estabilidade de tubos como os utilizados no processo de produção de salmoura e armazenamento de hidrocarbonetos. Este trabalho é a base do desenvolvimento aqui proposto. O fluido que escoava interna e externamente é incompressível, o que facilita deveras a modelagem do problema. No artigo não é trabalhado as ideias de separação de gases, nem análise de estabilidade por deslocamento quase-estático de colunas de fluidos externos distintos. A estabilidade é estudada em relação aos parâmetros de velocidade de escoamento e grau de confinamento. Este último parâmetro é estudado em dois aspectos: a) impacto do quociente entre os diâmetros dos tubos rígido e flexível e b) quanto ao quociente entre os comprimentos dos tubos. Verificou-se que quanto mais estreita é a região anular, e quanto mais longo é o tubo rígido em relação ao flexível, maior é a chance de ocorrer instabilidade oscilatória em sistemas curtos. Em sistemas longos, verificou-se que há uma sucessão de instabilidades oscilatória e estática. Já sistemas muito longos a tendência é perda de estabilidade estática.

[Giacobbi, Semler e Paidoussis \(2020\)](#) estudam analítica e numericamente a dinâmica de um tubo flexível sob escoamento interno cuja densidade do fluido varia ao longo do comprimento. Uma aplicação prática de interesse é o transporte de fluidos compressíveis

a altas velocidades ou cuja temperatura do ambiente varia ao longo da extensão do tubo. Analisam tubos bi-apoiados e em balanço, sendo que no primeiro caso verificou-se perda de estabilidade por divergência e no segundo por *flutter*. Verificou-se que a densidade na extremidade de descarga tem um grande impacto na estabilidade do sistema. Exclusivamente para o caso de tubos em balanço, concluiu-se que a magnitude da variação de densidade tem relevante influência no modo e na velocidade crítica do *flutter*.

## 3 MÉTODOS

Esta seção trata de esclarecer os procedimentos utilizados no estudo de estabilidade que se seguirá utilizando como base os trabalhos clássicos da literatura especializada. Pode ser entendida, outrossim, como uma seção de validação de metodologia, pois replica resultados já conhecidos de estudos anteriores através das mesmas técnicas empregadas na solução do problema do presente artigo.

### 3.1 Obtenção do diagrama de Argand para estudo de estabilidade

A subárea da Mecânica que trata dos princípios e métodos aqui abordados chama-se Vibrações de Sistemas Contínuos. O objeto de estudo é o movimento oscilatório de sistemas que contenham infinitos graus de liberdade ([MEIROVITCH, 2010](#)). O início de qualquer análise se dá com a obtenção da equação do movimento do sistema em estudo, que pode ser realizada utilizando uma abordagem de equilíbrio dinâmico, uma formulação de equações integrais ou métodos variacionais. Neste trabalho se optou pelo equilíbrio dinâmico, em específico o uso da segunda lei de Newton.

A eq. [3.1](#) apresenta a equação adimensional do movimento transversal de uma viga de Euler-Bernoulli horizontal, cuja dedução pode ser verificada em [Rao \(2007\)](#). Este modelo é ideal para vigas esbeltas, ou seja, cujo diâmetro equivalente seja suficientemente menor que o seu comprimento. Inúmeras são as combinações possíveis de vínculos, que são traduzidas no modelo como condições de contorno.

$$\frac{\partial^4 \eta}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} = 0 \quad (3.1)$$

Após a aplicação do método de separação de variáveis na equação acima, é encontrado um típico problema de autovalores e autovetores, que, neste caso, tem solução analítica trivial. Os autovalores  $\lambda$  se relacionam com as frequências naturais do sistema pela

igualdade  $\lambda = \omega^2$ . A eq. 3.2 apresenta o vetor de frequências naturais que contém os quatro primeiros valores para uma viga engastada-livre.

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 3.516 & 22.034 & 61.697 & 120.903 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Paidoussis (1969) propôs a seguinte equação do movimento para o caso de um tubo vertical que está sob a ação de escoamento interno:

$$\frac{\partial^4 \eta}{\partial \xi^4} + [u^2 - \gamma(1 - \xi)] \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} + 2\beta^{\frac{1}{2}} u \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi \partial \tau} + \gamma \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} = 0. \quad (3.3)$$

O tubo é considerado uma viga de Euler-Bernoulli engastada na extremidade superior e livre na inferior, e o fluido escoava de cima para baixo. Note que a equação acima assemelha-se muito à eq. 3.1. Novas quantidades adimensionais aparecem:  $\gamma$  está relacionado ao peso do tubo e do fluido,  $u$  à velocidade de escoamento, e  $\beta$  é a proporção entre as massas do tubo e do fluido. Como pode ser visto, devido à disposição vertical e ao escoamento interno novas forças aparecem. Na equação é possível ver as forças restauradora e inercial, tal como na eq. 3.1, mas, da esquerda para a direita, vê-se a força centrífuga (contribuição da velocidade de escoamento) e trativa (contribuição do peso), depois há a força de Coriolis na derivada parcial cruzada (graças à velocidade de escoamento), e por último o peso do sistema em si.

O parâmetro de maior interesse, geralmente, é a velocidade de escoamento. O objetivo é encontrar a velocidade crítica que ao ser ultrapassada torna o sistema instável. Já o parâmetro que deve ser monitorado para aferir a estabilidade do sistema é a frequência adimensional  $\omega$ , que normalmente é um número complexo. Sabe-se da teoria de Vibrações que a parte real  $Re(\omega)$  está relacionada à frequência de oscilação circular do corpo, enquanto que a parte imaginária  $Im(\omega)$  está ligada ao amortecimento das oscilações. Se se tem que  $Im(\omega) > 0$ , conclui-se que as oscilações do corpo em estudo são amortecidas, ou seja, a energia que o sistema venha a receber é dissipada para o ambiente. Mas caso o incremento da velocidade de escoamento venha a fazer que  $Im(\omega) < 0$ , o sistema passaria a ter um “amortecimento negativo” das oscilações, ou melhor dizendo, amplificação das oscilações. Isso equivale a dizer que o sistema não consegue dissipar toda a energia que está recebendo do escoamento e passa a ter seu nível energético aumentando, fazendo que os deslocamentos laterais de oscilação sejam amplificados a cada ciclo. Já o caso em que  $Im(\omega) = 0$  pode ter dois significados: caso  $u = 0$  tem-se estabilidade neutra; caso  $u > 0$ ,  $Im(\omega) = 0$  indica um ponto crítico.

Isto posto, o desafio é encontrar a nova frequência  $\omega$  quando o parâmetro  $u$  recebe um

incremento. Para isso, inicia-se considerando que os deslocamentos laterais são da forma  $\eta(\xi, \tau) = Y(\xi)e^{i\omega\tau}$ , que ao ser substituído em 3.2, produz

$$\frac{d^4Y}{d\xi^4} + [u^2 - \gamma(1 - \xi)] \frac{d^2Y}{d\xi^2} + (\gamma + 2i\omega\beta^{\frac{1}{2}}u) \frac{dY}{d\xi} - \omega^2Y = 0. \quad (3.4)$$

Devido à inexequibilidade de se encontrar facilmente uma solução analítica para esta equação diferencial ordinária, buscam-se métodos numéricos que produzam soluções razoáveis. Paidoussis (1969) utiliza o método de Galerkin para gerar seus resultados.  $Y(\xi)$  é escrita como uma superposição dos infinitos modos normais do tubo, i.e., das autofunções de 3.1. Em algum momento essa superposição é truncada, uma vez que é considerado que o movimento do tubo pode ser aproximado a uma superposição de poucos modos normais. Esse processo permite transformar o sistema contínuo em um sistema discreto, ou em outras palavras, um sistema com um número finito de graus de liberdade. No presente trabalho, por outro lado, utilizar-se-á o método das diferenças finitas (MDF). De agora em diante executa-se, a fim de exemplo, o processo de obtenção da velocidade crítica  $u_{cr}$  para um sistema com  $\beta = 0,58$  e  $\gamma = 100$ .

São utilizadas as aproximações centrais 3.5 de segunda ordem que pode ser encontradas através do método de Fornberg (1988).

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^4Y}{d\xi^4} \right|_{\xi=k\Delta\xi} &\cong \frac{Y_{k+2} - 4Y_{k+1} + 6Y_k - 4Y_{k-1} + Y_{k-2}}{\Delta\xi^4}, \\ \left. \frac{d^3Y}{d\xi^3} \right|_{\xi=k\Delta\xi} &\cong \frac{Y_{k+2} - 2Y_{k+1} + 2Y_{k-1} - Y_{k-2}}{2\Delta\xi^3}, \\ \left. \frac{d^2Y}{d\xi^2} \right|_{\xi=k\Delta\xi} &\cong \frac{Y_{k+1} - 2Y_k + Y_{k-1}}{\Delta\xi^2}, \\ \left. \frac{dY}{d\xi} \right|_{\xi=k\Delta\xi} &\cong \frac{Y_{k+1} - Y_{k-1}}{2\Delta\xi}, \\ Y|_{\xi=k\Delta\xi} &= Y_k. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Após a discretização do domínio físico (ver Figura 4) com  $N = 20$ , as aproximações presentes em 3.5 são substituídas em 3.4, e aplicando a equação resultante para os pontos discretos de  $k = 1$  a  $k = N$ , e aplicando também as aproximações nas condições de contorno em 4.73, é obtido o sistema de equações lineares homogêneas do tipo  $[A]\{Y\} = \{0\}$ . Para haver solução não-trivial, é mandatório que  $\det[A] = 0$ . O objetivo passa, então, a ser buscar valores de  $\omega$  tal que  $\det[A] = 0$ . Substituir valores de  $\omega$  a esmo em  $[A]$  seria uma forma extremamente ineficiente, ou até mesmo impossível, de obter a

solução do problema. Em assim sendo, um método iterativo é de extrema importância para que o processo de busca de  $\omega$  seja eficiente. O método das secantes é ideal para o caso. Nele é necessário, inicialmente, uma primeira estimativa de  $\omega$ , que deve ser um valor razoável para que haja convergência para o valor correto. O leitor pode lembrar neste momento as semelhanças entre as Equações 3.1 e 3.3 que sugerem que as frequências naturais em 3.2 podem ser boas estimativas iniciais. Entretanto, para que não ocorra divergência do método, é necessário que se faça uma transformação gradativa para que 3.1 “se transforme” em 3.3. Em outras palavras, o que é feito é “transformar” uma viga horizontal em um tubo vertical com escoamento axial interno. Como o parâmetro que se deseja estudar é  $u$ , é necessário ignorá-lo de 3.4 por ora. Dessa maneira, tem-se a equação

$$\frac{d^4 Y}{d\xi^4} + \gamma(\xi - 1) \frac{d^2 Y}{d\xi^2} + \gamma \frac{dY}{d\xi} - \omega^2 Y = 0. \quad (3.6)$$

Se o parâmetro  $\gamma$  for igual a 0, então 3.6 é uma equação de viga horizontal com as frequências naturais dadas por 3.2. Pequenos incrementos devem ser dados sucessivamente partindo de  $\gamma = 0$  até se chegar no desejado  $\gamma = 100$ , tomando 3.2 como estimativa inicial no método das secantes. É produzido, portanto:

$$\omega_\gamma = \begin{bmatrix} 3,516 & 22,034 & 61,697 & 120,903 \\ 5,289 & 23,850 & 63,330 & 121,837 \\ 9,464 & 30,144 & 70,599 & 129,824 \\ 12,861 & 36,422 & 78,578 & 139,020 \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

sendo a primeira linha para  $\gamma = 0$ , a segunda para  $\gamma = 10$ , a terceira para  $\gamma = 50$  e a última para o desejado  $\gamma = 100$ . Fica, por fim, concluído a “transformação” da viga horizontal em uma viga vertical.

Cabe agora “transformar” a viga vertical em um tubo com escoamento axial interno para que se encontre  $u_{cr}$ . Tomando a última linha de 3.7 como primeira estimativa, e em seguida dando um pequeno incremento em  $u = 0$ , pode-se aplicar o método das secantes. Assim é repetido sucessivamente até que se encontre a velocidade crítica. Plotando as frequências adimensionais obtidas no diagrama de Argand para cada incremento em  $u$ , é possível obter uma visualização mais adequada para análise dos dados.

## 3.2 Tipos de perda de estabilidade

O diagrama de Argand, por convenção, é elaborado desprezando o complexo conjugado, e por esta razão somente os primeiro e quarto quadrantes são apresentados. Ana-



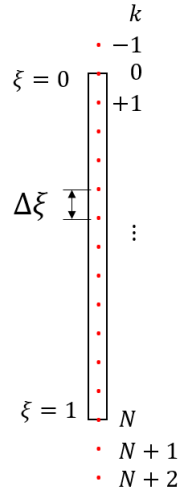
lisando a Figura 5 percebe-se que o modo 4 é o que gera a desestabilização do sistema, por ser o primeiro modo a cruzar o eixo horizontal. Isso ocorre em  $u \cong 16$ , mas é possível notar que com o aumento sucessivo de  $u$ , o modo 4 tende a buscar a reestabilização, pois  $Im(\omega)$  aumenta momentaneamente. Entretanto, quando  $u$  chega próximo de 17 o aumento da velocidade gera cada vez valores mais negativos de  $Im(\omega)$ , e conforme  $u \rightarrow \infty$ ,  $Im(\omega) \rightarrow -\infty$ . É possível notar que o modo 2 também cruza o eixo horizontal, mas ele não é o modo crítico, pois isso ocorre entre  $20 < u < 22$ , que é maior que o  $u \cong 16$  do modo 4.

Tendo em vista as ideias expostas acima, a pergunta que o leitor deve estar se fazendo é se o previsto no diagrama de Argand de fato ocorre em um experimento real, i.e., se quando o parâmetro  $u_{cr}$  é atingido as oscilações laterais tendem a crescer exponencialmente até o infinito.

Cabe agora explicar ao leitor que essa é a conclusão da teoria linear. A hipótese de pequenos deslocamentos é central para o desenvolvimento do modelo de Paidoussis (1969) e também para o modelo aqui proposto. Mas essa hipótese é violada quando a velocidade crítica é alcançada. Nesse momento, os termos não-lineares, que foram desprezados no processo de dedução da equação de movimento, passam a ter relevância, pois os deslocamentos laterais já não podem mais ser considerados pequenos. A teoria linear permite, com grande acurácia já demonstrada experimentalmente (PAIDOUSSIS, 1998), prever o ponto crítico, mas o que acontece após ultrapassá-lo somente uma teoria não-linear é capaz de descrever.

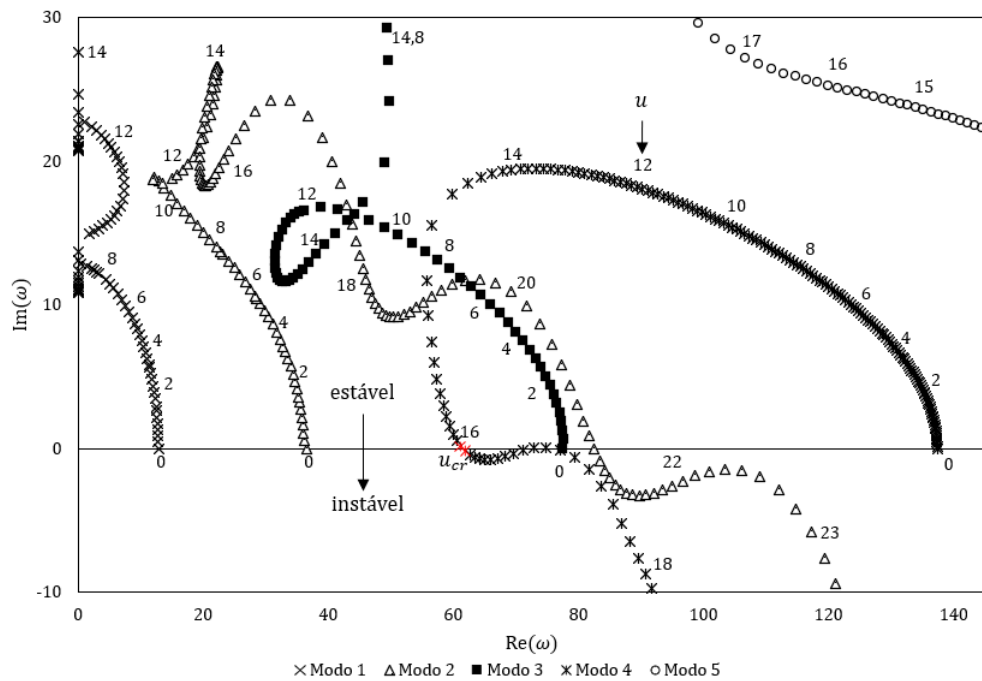
Com apoio da Figura 6 como exemplo, que é o diagrama de Argand de um sistema desenvolvido pelo presente autor mas ainda não publicado, é possível notar um outro tipo de  $u_{cr}$ . Se na Figura 5 tem-se  $u_{cr}$  para  $Re(\omega) > 0$ , neste outro caso  $u_{cr}$  ocorre com  $Re(\omega) = 0$ . Uma vez que a parte real de  $\omega$  indica frequência circular, fica claro que o primeiro caso a perda de estabilidade é *oscilatória*, ao passo que a segunda é *estática*. A este tipo a literatura especializada dá o nome de *divergência*, análoga à flambagem de coluna, e àquela *flutter*. A teoria linear prevê que o crescimento do deslocamento lateral é estático, i.e., sem oscilações, e indefinido. Devido aos termos não-lineares, é observado experimentalmente que o tubo pode buscar novos pontos de equilíbrio, ficando com um aspecto curvado. Em Paidoussis (1998) o leitor pode checar algumas figuras que mostram este comportamento pós-crítico. Com sucessivo aumento de  $u$  após a divergência, o tubo pode vir a apresentar novo movimento oscilatório e posteriormente apresentar comportamento caótico. Mas como já dito, tudo isso só pode ser previsto com uma teoria não-linear do movimento.

Figura 4: Processo de discretização do domínio físico.



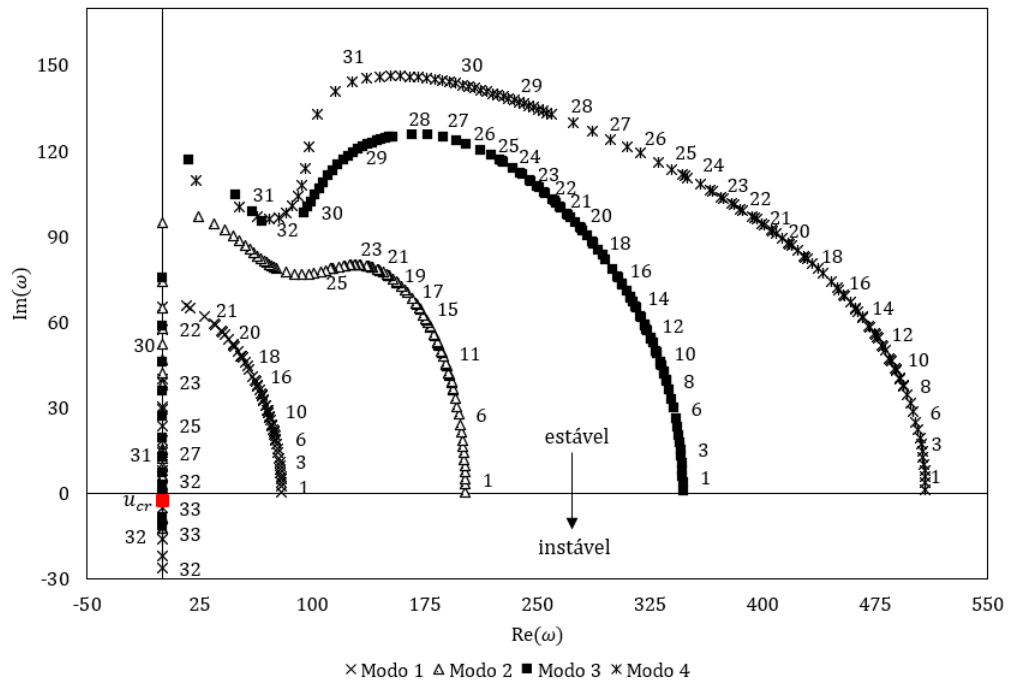
Fonte: Autor.

Figura 5: Frequência adimensional do sistema em função da velocidade de escoamento com  $\gamma = 100$  e  $\beta = 0,58$ .



Fonte: Reprodução de [Paidoussis \(1969\)](#)

Figura 6: Diagrama de Argand para um sistema que perde estabilidade por divergência.



Fonte: Autor.

Como demonstrado acima, a abordagem que é utilizada pelo presente trabalho gera resultados equivalentes aos presentes em [Paidoussis \(1969\)](#) e demais trabalhos do gênero. Fica, à vista disso, validado o procedimento de análise.

## 4 MODELO TEÓRICO

### 4.1 Dedução da equação do movimento

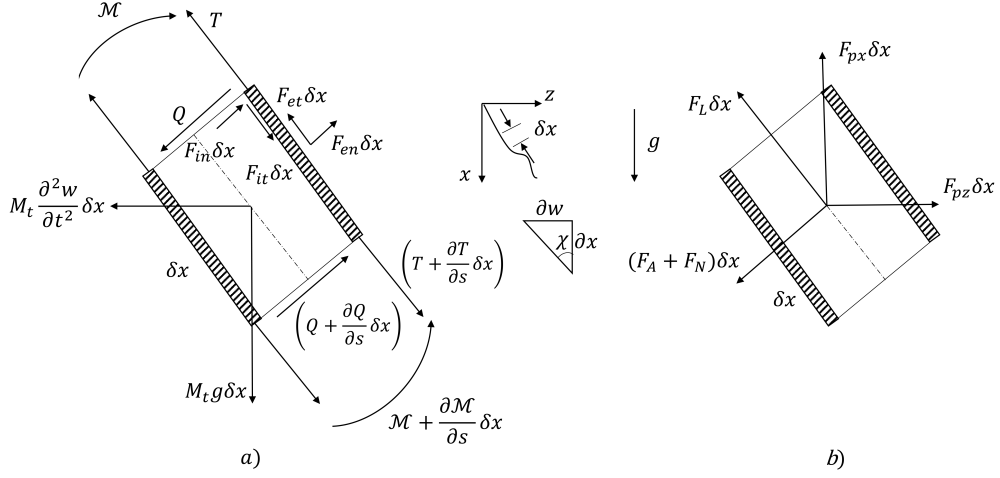
O procedimento para dedução da equação do movimento do sistema cá proposto tem como principal paradigma o trabalho de [Moditis, Paidoussis e Ratigan \(2016\)](#). Algumas mudanças e adaptações são necessárias pelos motivos expostos na Seção 2. O método é iniciado com o diagrama de corpo livre do tubo flexível em estudo contendo todos os esforços que surgem devido ao escoamento interno e ao externo parcialmente confinado (vide Figura 7 a). Aplica-se a segunda lei de Newton, i.e., somatório das forças é igual a massa vezes aceleração. Levando em conta a hipótese de pequenos deslocamentos laterais que permite, dessa forma, a aproximação  $\cos \chi = 1$  e  $\sin \chi = \partial w / \partial x$ , sendo  $\chi$  a inclinação da linha neutra do tubo, a equação obtida pode ser então decomposta na direção vertical  $x$  e na direção horizontal  $z$ , presentes nas Equações 4.1 e 4.2, respectivamente. O tubo modelado apresenta perfil esbelto, com seu comprimento sendo muito maior que o seu diâmetro, condição suficiente para ser considerado uma viga de Euler-Bernoulli. Assim, a força cortante pode ser aproximada como  $Q = -\partial(EI\partial^2 y / \partial x^2) / \partial x$ . Substituindo  $Q$  nas Equações 4.1 e 4.2 e desprezando os termos de segunda ordem e superiores, uma vez que o modelo deve ser linear, são obtidas as Equações 4.3 e 4.4.

$$\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( Q \frac{\partial w}{\partial x} \right) + M_t g - (F_{in} + F_{en}) \frac{\partial w}{\partial x} + F_{it} - F_{et} = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial Q}{\partial x} - M_t \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + F_{in} + F_{en} + (F_{in} - F_{et}) \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} + M_t g + \left( F_{it} - F_{in} \frac{\partial w}{\partial x} \right) - F_{en} \frac{\partial w}{\partial x} - F_{et} = 0 \quad (4.3)$$

Figura 7: Diagrama de corpo livre. (a) Esforços no elemento de tubo. (b) Esforços externos no elemento de tubo.



Fonte: Baseado em Paidoussis (1998).

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial w}{\partial x} \right) + M_t \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left( F_{in} + F_{it} \frac{\partial w}{\partial x} \right) - F_{en} + F_{et} \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (4.4)$$

Por meio da aplicação da segunda lei de Newton no elemento de fluido (Figura 8 a), e posterior decomposição nas direções  $x$  e  $z$ , são encontradas as relações (Equações 4.5 e 4.6) que possibilitam a obtenção das forças de contato interno  $F_{in}$  e  $F_{it}$ .

$$F_{it} - F_{in} \frac{\partial w}{\partial x} = A_f \rho_n g - \frac{\partial}{\partial x} (A_f p_i) \quad (4.5)$$

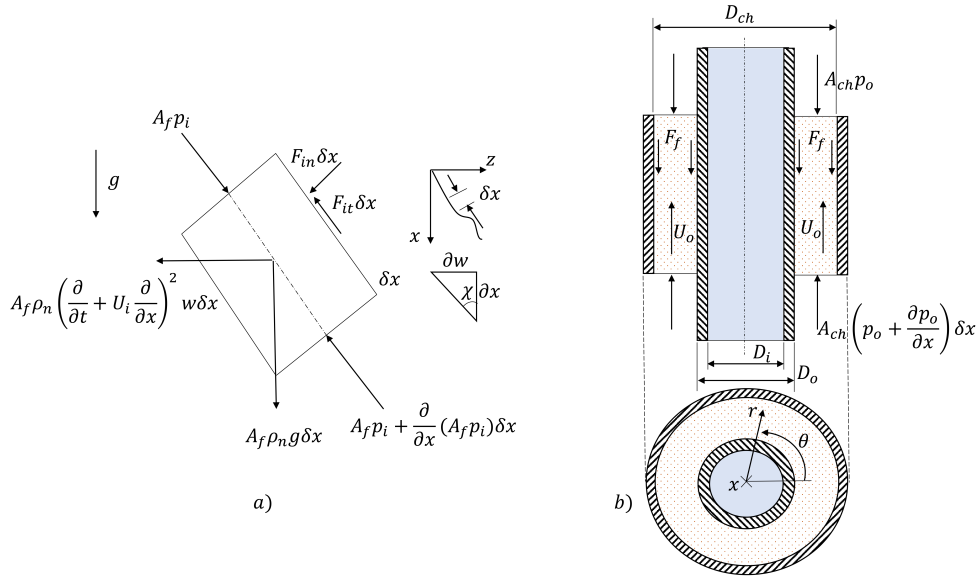
$$- \left( F_{in} + F_{it} \frac{\partial w}{\partial x} \right) = A_f \rho_n \left( \frac{\partial}{\partial x} + U_i \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 w + \frac{\partial}{\partial x} \left( A_f p_i \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (4.6)$$

Através da substituição das Equações 4.5 e 4.6 nas Equações 4.3 e 4.4, são obtidas as Equações 4.7 e 4.8, relativas às direções vertical  $x$  e horizontal  $z$ , respectivamente.

$$\frac{\partial T}{\partial x} + M_t g + \left[ A_f \rho_n g - \frac{\partial}{\partial x} (A_f p_i) \right] - F_{en} \frac{\partial w}{\partial x} - F_{et} = 0 \quad (4.7)$$

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial w}{\partial x} \right) + M_t \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left[ A_f \rho_n \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_i \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 w + \frac{\partial}{\partial x} \left( A_f p_i \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] - F_{en} + F_{et} \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (4.8)$$

Figura 8: Diagrama de corpo livre e sistema de coordenadas cilíndricas. a) Elemento de fluido. b) Região anular.



Fonte: Baseado em [Moditis, Paidoussis e Ratigan \(2016\)](#).

Decompondo as forças de contato externo  $F_{en}$  e  $F_{et}$  em  $x$  e  $z$  (Figura 7 a) e igualando-as à decomposição das forças externas atuantes no elemento de tubo (Figura 7 b) nas mesmas direções, obtém-se as Equações 4.9 e 4.10.

$$-F_{en} \frac{\partial w}{\partial x} - F_{et} = -F_L - F_{px} \quad (4.9)$$

$$-F_{en} + F_{et} \frac{\partial w}{\partial x} = (F_A + F_N) - F_{pz} + F_L \frac{\partial w}{\partial x} \quad (4.10)$$

Dentro da área de pesquisa em interação fluido-estrutura, principalmente em relação à elaboração de modelos lineares para estudo de escoamento axial externo, é validado ([PAIDOUSSIS, 1998](#)) trabalhar com duas forças laterais externas independentes entre si (Figura 7 b), no caso  $F_A$  e  $F_N$ . A primeira é uma força de caráter invíscido, i.e., sem qualquer relação com a viscosidade do fluido, e visa adicionar ao sistema as contribuições da massa do fluido externo que se associa ao movimento oscilatório da estrutura tubular (massa adicional). Já a última tem a finalidade de adicionar a contribuição da viscosidade do fluido na dinâmica do sistema. Em outras palavras, estas duas forças podem ser deduzidas separada e independentemente.

Para dedução de  $F_A$ , o fluxo parcialmente confinado é considerado um escoamento potencial que recebe uma pequena perturbação devido aos pequenos deslocamentos laterais do tubo. Define-se  $\Psi$  como o potencial de velocidade e  $\Phi$  como o potencial de perturbação

que estão relacionados conforme a Equação 4.11. O vetor velocidade  $V$  pode ser obtido através da aplicação do operador gradiente ao potencial de velocidade vide Equação 4.12.

$$\Psi = -U_o x + \Phi \quad (4.11)$$

$$V = \nabla \Psi = -U_o \check{i} + \nabla \Phi = \left( -U_o + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \check{i} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \check{\theta} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \check{r} \quad (4.12)$$

A equação que descreve o movimento tridimensional de um escoamento compressível, invíscido, irrotacional e isentrópico é dada pela Equação 4.13, cuja dedução está disponível no Apêndice A, e cujo termo  $G = -gx$  é o potencial gravitacional que está relacionado à força da gravidade pela igualdade  $B = -\nabla G$ .

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \left[ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} (V \cdot V) + V \cdot \nabla \left( \frac{V \cdot V}{2} + G \right) \right] = 0 \quad (4.13)$$

Substituindo as Equações 4.11 e 4.12 em 4.13 obtém-se a Equação 4.14, na qual os termos de ordem superior encontram-se desprezados.

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - 2U_o \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t} - g \frac{\partial \Phi}{\partial x} + U_o^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right] = 0 \quad (4.14)$$

Esta equação assemelha-se à equação de onda para um escoamento compressível não-permanente como a apresentada por Paidoussis e Ostoja-Starzewski (1981), com a exceção do termo envolvendo a gravidade, que se deve ao fato destes autores estarem estudando um sistema horizontal, enquanto que aqui estuda-se um sistema vertical.

As Equações 4.15 e 4.16 são as condições de contorno da Equação 4.14. Ambas são condições de impermeabilidade. A primeira garante que não há uma componente radial da velocidade do fluido externo na superfície do tubo rígido, dado este ser imóvel. A segunda garante que a velocidade radial do fluido na superfície do tubo flexível é igual à própria velocidade do tubo (oscilação lateral). Para mais detalhes no processo de dedução das condições de contorno, verificar Paidoussis (1998).

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r=\frac{D_{ch}}{2}} = 0 \quad (4.15)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r=\frac{D_o}{2}} = \left( \frac{\partial w}{\partial t} - U_o \frac{\partial w}{\partial x} \right) \cos \theta \quad (4.16)$$

Uma vez que o fluido é considerado invíscido, a pressão estática do escoamento potencial considerado não deveria variar ao longo da direção vertical  $x$ . Não obstante, o movimento oscilatório da estrutura tubular provoca perturbações no escoamento, que acabam por gerar a pressão de perturbação, dada pela Equação 4.17 e cuja dedução pode ser checada no Apêndice B.

$$\bar{p} = -\rho \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} - U_o \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \quad (4.17)$$

Através da integração da pressão de perturbação ao redor da seção do tubo flexível, é possível obter a força lateral invíscida  $F_A$ , como mostra a Equação 4.18.

$$F_A = \int_0^{2\pi} \bar{p} \frac{D_o}{2} \cos \theta d\theta \quad (4.18)$$

Dessa forma, fica claro que a determinação de  $F_A$  depende diretamente da solução da Equação 4.14. Para tal fim, a abordagem seguirá procedimento análogo ao adotado por Paidoussis e Ostoja-Starzewski (1981) e Ostoja-Starzewski (1982).

O primeiro passo é realizar uma combinação entre as transformações de coordenadas de Lorentz e Galileu. Trata-se de uma técnica comum no procedimento de solução deste tipo de equação. As novas coordenadas são apresentadas na Equação 4.19.

$$x' = x; r' = r\sqrt{1 - M^2}; \theta' = \theta; t' = t + \frac{xM}{c(1 - M^2)} \quad (4.19)$$

Assumindo se tratar de um movimento harmônico simples, é possível escrever o potencial de perturbação como se segue.

$$\Phi(x, r, \theta, t) = e^{i\Omega t} \phi(x, r, \theta) \quad (4.20)$$

Substituindo na Equação 4.20 as coordenadas transformadas acima, obtém-se

$$\Phi(x, r', \theta, t) = e^{i\Omega t} e^{i\mu x} \phi(x, r', \theta), \quad (4.21)$$

sendo  $\mu = \Omega M^2 / (U_o (1 - M^2))$ , e que, por sua vez, pode ser substituída na Equação 4.14, e após algumas manipulações algébricas, produz a Equação 4.22, uma espécie de Equação de Helmholtz com um termo adicional (no caso o segundo termo do lado esquerdo da equação). O termo com o operador laplaciano é apresentado na Equação 4.23.



$$(1 - M^2) \nabla^2 \phi + \left[ \frac{4\Omega}{U_o} M^2 i + \frac{g}{c^2} \right] \frac{\partial \phi}{\partial x} + \left[ \frac{\Omega^2}{c^2} \left( \frac{1 - 4M^2}{1 - M^2} \right) + \frac{g}{c^2} \frac{\Omega}{U_o} \frac{M^2}{1 - M^2} i \right] \phi = 0 \quad (4.22)$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial}{\partial r'} \left( r' \frac{\partial \phi}{\partial r'} \right) + \frac{1}{r'^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (4.23)$$

O procedimento para solução da Equação 4.22 inicia-se com o método de separação de variáveis. Parte do processo é desenvolvido no Apêndice C para que esta seção permaneça mais fluida. Retoma-se, então, as Equações C.1 e C.15,

$$\phi(x, r', \theta) = X(x) R(r') \Theta(\theta), \quad (C.1)$$

$$\Phi(x, r', \theta, t) = e^{i\Omega t} e^{(i\mu x + a)x} R(r') \Theta(\theta), \quad (C.15)$$

sendo  $a$  definido pela Equação C.3.

Com a substituição de C.15 na condição de contorno dada pela Equação 4.16, encontra-se a igualdade

$$e^{i\Omega t} e^{(i\mu x + a)x} \Theta(\theta) \left. \frac{dR(r')}{dr} \right|_{r=\frac{D_o}{2}} = \left( \frac{\partial w}{\partial t} - U_o \frac{\partial w}{\partial x} \right) \cos \theta, \quad (4.24)$$

que permite concluir que  $\Theta(\theta) = \cos(\theta)$ .

Fazendo a seguinte mudança de notação

$$\left. \frac{dR(r')}{dr} \right|_{r=\frac{D_o}{2}} = R'(D_o/2), \quad (4.25)$$

multiplicando os lados esquerdo e direito da Equação 4.24 por  $R(r') / R'(D_o/2)$ , e levando em conta a Equação C.15, encontra-se

$$\Phi(x, r', \theta, t) = \frac{R(r')}{R'(D_o/2)} \left( \frac{\partial w}{\partial t} - U_o \frac{\partial w}{\partial x} \right) \cos \theta. \quad (4.26)$$

Ao substituir a Equação 4.26 em 4.17, obtém-se a expressão que permite o cálculo da perturbação na pressão estática no domínio do escoamento. Entretanto, o interesse é encontrar a distribuição de pressão exatamente na superfície da estrutura tubular para que, em seguida, seja calculada  $F_A$ . Para isso, basta que  $R(r')$  seja tomado como  $R(D_o/2)$  logo

$$\bar{p} = -\rho \frac{R(D_o/2)}{R'(D_o/2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2U_o \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + U_o^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \quad (4.27)$$

Levando a expressão acima para a Equação 4.18, encontra-se

$$F_A = -\frac{\rho D_o}{2} \frac{R(D_o/2)}{R'(D_o/2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2U_o \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + U_o^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta, \quad (4.28)$$

que ao ter a integral resolvida produz a expressão final para a força hidrodinâmica invíscida  $F_A$ , válida na região de escoamento externo parcialmente confinado

$$F_A = -\frac{\rho \pi D_o}{2} \frac{R(D_o/2)}{R'(D_o/2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2U_o \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + U_o^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \quad (4.29)$$

Cabe neste momento determinar o valor do quociente  $R(D_o/2)/R'(D_o/2)$  para que  $F_A$  fique completamente definida. Para determinação de  $R(D_o/2)$ , basta que se faça a substituição de  $D_o/2$  na Equação C.12. Já  $R'(D_o/2)$  pode ser encontrado com o auxílio da fórmula de derivação vista em C.16, que após a álgebra necessária produz

$$R'(\kappa_n r) = C_1 \left( \kappa_n H_o^{(1)}(\kappa_n r) - \frac{1}{r} H_1^{(1)}(\kappa_n r) \right) + C_2 \left( \kappa_n H_o^{(2)}(\kappa_n r) - \frac{1}{r} H_1^{(2)}(\kappa_n r) \right), \quad (4.30)$$

sendo  $H_o^{(1)}$  uma função de Bessel de terceiro tipo com  $p = 0$ . Todos os demais componentes estão definidos no Apêndice C. Composto os termos e fazendo as substituições de argumentos, chega-se a

$$\frac{R(a)}{R'(a)} = \frac{H_1^{(1)}(\kappa_n D_o/2) + C H_1^{(2)}(\kappa_n D_o/2)}{\left[ \kappa_n H_o^{(1)}\left(\frac{\kappa_n D_o}{2}\right) - \frac{2}{D_o} H_1^{(1)}\left(\frac{\kappa_n D_o}{2}\right) + C \left( \kappa_n H_o^{(2)}\left(\frac{\kappa_n D_o}{2}\right) - \frac{2}{D_o} H_1^{(2)}\left(\frac{\kappa_n D_o}{2}\right) \right) \right]}, \quad (4.31)$$

sendo  $C = C_2/C_1$ .  $C$ , por sua vez, é determinado utilizando a condição de contorno do fluido na superfície do tubo rígido (Equação 4.15), que permite concluir que

$$\left. \frac{dR(r')}{dr} \right|_{r=\frac{D_{ch}}{2}} = R'(D_{ch}/2) = 0, \quad (4.32)$$

logo

$$C = \frac{C_2}{C_1} = \frac{\kappa_n H_o^{(1)}(\kappa_n D_{ch}/2) - \frac{2}{D_{ch}} H_1^{(1)}(\kappa_n D_{ch}/2)}{-\kappa_n H_o^{(2)}(\kappa_n D_o/2) + \frac{2}{D_o} H_1^{(2)}(\kappa_n D_o/2)}. \quad (4.33)$$

Dessa forma, conclui-se o cálculo de  $F_A$  entre  $L_1$  e  $L_2$  (ver Figura 3 a). Segundo Paidoussis (1973), a massa adicional  $M_A$  de um tubo submerso em um fluido não-confinado pode ser calculada através do produto entre a massa específica do fluido e a área da seção transversal do tubo. Utiliza-se no presente trabalho esta relação, mas observando a necessidade de contar o efeito da variação de fluidos ao longo do comprimento do tubo. O modelo aqui produzido deseja ser o mais geral possível no aspecto de não se limitar em um número de colunas de fluidos pré-estabelecido. Faz-se necessário definir, então, o

número de colunas  $n$ . Tomando como exemplo a Figura 3, constata-se que há 4 fluidos diferentes ao longo da estrutura tubular. Para facilitar a computação numérica, o fluido menos denso, que se encontra, por conseguinte, na camada superior do reservatório, é considerado como sendo duas colunas distintas – a primeira é a que está escoando pela região anular, e a segunda é a camada abaixo que está estática. Todos os demais fluidos são considerados uma só coluna cada. Logo, neste caso de exemplo teremos  $n = 5$  colunas. As propriedades dos fluidos (densidade, viscosidade etc.) são indexadas partindo da origem para a extremidade inferior da estrutura tubular. Isto posto, é possível definir os vetores de propriedade contendo os valores numéricos. É possível declarar, portanto, o vetor de posições  $\mathbf{L}$ .

$$\mathbf{L} = \left[ L_1 \quad L_2 \quad L_3 \quad \cdots \quad L_n \quad L_{n+1} \right] \quad (4.34)$$

O valor a ocupar a primeira posição do vetor é  $L_1 = 0$ , considerado a origem.  $L_2$  é o comprimento da região de confinamento. De  $L_3$  até  $L_n$  tem-se os níveis de cada fluido.  $L_{n+1}$ , o último elemento do vetor, é o próprio comprimento do tubo. Utiliza-se a massa específica na Equação 4.35 como exemplo de vetor de propriedade, sendo o mesmo padrão válido para as demais grandezas físicas envolvidas.

$$\boldsymbol{\rho} = \left[ \rho_1 \quad \rho_2 \quad \rho_3 \quad \cdots \quad \rho_n \right]. \quad (4.35)$$

Torna-se agora viável a determinação da massa adicional na região não-confinada, como pode ser verificado na equação

$$M_A = A_o \sum_{j=2}^n \left\{ \rho_j H_{L_j, L_{j+1}}^x \right\} + A_o \rho_n \tilde{H}(x - L_{n+1}), \quad (4.36)$$

sendo as funções  $\tilde{H}(x - \beta)$  e  $H_{\alpha, \beta}^x$  definidas por

$$\tilde{H}(x - \beta) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < \beta \\ 1, & \text{se } x = \beta \end{cases} \quad (4.37)$$

$$H_{\alpha, \beta}^x = H(x - \alpha) - H(x - \beta) \quad (4.38)$$

na qual a função de Heaviside é

$$H(x - \alpha) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq \alpha \\ 1, & \text{se } x > \alpha \end{cases} \quad (4.39)$$

A derivada material da quantidade de movimento de  $M_A$  gera a força hidrodinâmica invíscida que age na estrutura tubular na região não-confinada (LIGHTHILL, 1960). A Equação 4.40 apresenta a adaptação da Equação 4.29 para que sua ação se dê somente na região confinada, já a Equação 4.41 mostra a expressão da força de mesma natureza que atua no restante da extensão do tubo flexível. A soma de ambas é a expressão final de  $F_A$  válida em toda a extensão do tubo flexível.

$$F_A^{(1)} = -\frac{\rho_1 \pi D_o}{2} \frac{R(D_o/2)}{R'(D_o/2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2U_o \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + U_o^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) [1 - H(x - L_2)] \quad (4.40)$$

$$F_A^{(2)} = \left\{ A_o \sum_{j=2}^n \left\{ \rho_j H_{L_j, L_{j+1}}^x \right\} + A_o \rho_n \tilde{H}(x - L_{n+1}) \right\} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (4.41)$$

As forças viscosas são determinadas usando as expressões propostas por Taylor (1952) e levando em conta as adaptações necessárias de acordo com Moditis, Paidoussis e Ratigan (2016). As Equações 4.42 e 4.43 apresentam as forças nas direções tangencial e normal em relação ao eixo do tubo central, respectivamente.

$$F_L = \frac{1}{2} C_f \rho_1 D_o U_o^2 [1 - H(x - L_2)] \quad (4.42)$$

$$F_N = \frac{1}{2} C_f \rho_1 D_o U_o [1 - H(x - L_2)] \left\{ \frac{\partial w}{\partial t} - U_o [1 - H(x - L_2)] \frac{\partial w}{\partial x} \right\} + b \frac{\partial w}{\partial t} \quad (4.43)$$

$C_f$  é um coeficiente de atrito que pode ser calculado utilizando as fórmulas semi-empíricas de Hannyer e Paidoussis (1978). O coeficiente de amortecimento viscoso  $b$  é calculado seguindo a abordagem de Paidoussis et al. (2008), mas cuja origem são os trabalhos de Chen, Wambsganss e Jendrzejczyk (1976) e Siniavskii, Fedotovskii e Kukhtin (1980). Assim, a expressão básica para  $b$  depende do número de Stokes  $S = \mathbb{R}(\Omega) D_o^2 / 4\nu$ , do grau de confinamento  $\bar{\gamma} = D_o / D_{ch}$ , da densidade do fluido circundante, da área da seção transversal do tubo flexível e da frequência circular de oscilação  $\mathbb{R}(\Omega)$ . Ora, o número de Stokes depende da viscosidade cinemática do fluido  $\nu$ , que no modelo aqui proposto varia ao longo da extensão da estrutura tubular. O mesmo é verdadeiro para

a densidade e grau de confinamento. Logo, levando o exposto em conta, determina-se a expressão para o amortecimento  $b$  conforme a Equação 4.44,

$$b = 4\sqrt{2}\frac{A_o}{D_o}\mathbb{R}^{\frac{1}{2}}(\Omega)\sum_{j=1}^n\left\{b_{u_j}H_{L_j,L_{j+1}}^x + b_{u_n}\tilde{H}(x - L_{n+1})\right\} \quad (4.44)$$

sendo  $\mathbf{b}_u$  o vetor que permite a contabilização da variação de propriedades físicas do fluido e do grau de confinamento:

$$\mathbf{b}_u = \left[ \frac{1+\bar{\gamma}^3}{(1-\bar{\gamma}^2)^2}\rho_1\sqrt{\nu_1} \quad \rho_2\sqrt{\nu_2} \quad \rho_3\sqrt{\nu_3} \quad \rho_4\sqrt{\nu_4} \quad \cdots \quad \rho_n\sqrt{\nu_n} \right]. \quad (4.45)$$

Cabe agora definir  $F_{px}$  e  $F_{pz}$  (ver Figura 7 b), que são as forças hidrostáticas nas direções  $x$  e  $z$ , respectivamente. Ambas são causadas pela pressão estática agindo na superfície externa do tubo flexível. A força resultante da composição de  $F_{px}$  e  $F_{pz}$  com duas outras é a chamada força de empuxo. Para mais detalhes e verificação do processo de dedução, recomenda-se que o leitor consulte [Paidoussis \(2004\)](#).

$$F_{px} = -\frac{\partial}{\partial x}(A_o p_o) + A_o \frac{\partial p_o}{\partial x}, \quad (4.46)$$

$$F_{pz} = A_o \frac{\partial}{\partial x} \left( p_o \frac{\partial w}{\partial x} \right). \quad (4.47)$$

Da mesma maneira que [Moditis, Paidoussis e Ratigan \(2016\)](#), considera-se que os fenômenos referentes à sucção, que faz com que o fluido que está entre  $L_2$  e  $L_3$  passe a escoar entre  $L_1$  e  $L_2$ , ficam confinados em uma região infinitesimal em  $x = L_2$ . Na região anular há variação da pressão estática devido à perda de carga (viscosidade do fluido) e à variação de cota (gravidade). Na região não-confinada a distribuição de pressão é hidrostática. O procedimento que se seguirá é derivado do mesmo autor supracitado. A Figura 8 b) é o diagrama de corpo livre da região anular. Aplicando a segunda lei de Newton na região, produz-se

$$A_{ch} \frac{\partial p_o}{\partial x} + F_f + A_{ch}\rho_1 g = 0. \quad (4.48)$$

Partindo da ideia de que a tensão cisalhante na superfície interna do tubo rígido é igual à da superfície externa do tubo flexível, deduz-se que  $F_f = F_L(S_{tot}/S_o)$ , sendo  $S_{tot} = \pi(D_{ch} + D_o)$  a área por unidade de comprimento total da superfície que está em contato com o fluido, e  $S_o$  é a área por unidade de comprimento da superfície do tubo central. Ao

multiplicar a Equação 4.45 por  $A_o/A_{ch}$ , substituir  $F_f$  e rearranjar os termos, encontra-se

$$A_o \frac{\partial p_o}{\partial x} = F_L \left( \frac{D_o}{D_h} \right) + A_o \rho_1 g, \quad (4.49)$$

na qual  $D_h = (D_{ch} - D_o)$ . A pressão estática externa é uma pressão relativa, logo é possível defini-la como  $p_o = 0$  em  $x = 0$ . Ao integrar a Equação 4.49, gera-se

$$p_o(x) = \left[ \frac{F_L}{A_o} \left( \frac{D_o}{D_h} \right) + \rho_1 g \right] x, \quad (4.50)$$

que é válida no intervalo  $L_1 \leq x < L_2$ .

Sabendo que a pressão estática na região não-confinada ( $L_2 \leq x \leq L_{n+1}$ ) é hidrostática, resulta que o gradiente de pressão é

$$\frac{\partial p_o}{\partial x} = g \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \rho_j H_{L_j, L_{j+1}}^x \right\} + \rho_n g H(x - L_n), \quad (4.51)$$

e ao ser integrado produz

$$p_o(x) = g \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \rho_j \left[ (x - L_j) H_{L_j, L_{j+1}}^x + (L_{j+1} - L_j) H(x - L_{j+1}) \right] \right\} + \rho_n g (x - L_n) H(x - L_n) + C_1, \quad (4.52)$$

sendo  $C_1$  a constante de integração. Para determiná-la, faz-se um balanço de energia (MODITIS; PAIDOUSSIS; RATIGAN, 2016) na entrada da região anular. Considerando  $x_1 = L_2^-$  como a posição imediatamente interna ao confinamento e  $x_2 = L_2^+$  imediatamente externa, aplica-se o balanço entre elas que gera

$$p_o(x_2) = p_o(x_1) + \frac{1}{2} \rho_1 U_o^2 + \rho_1 g h_a. \quad (4.53)$$

Na equação acima,  $h_a = K_1 U_o^2 / 2g$  é a perda de carga singular na entrada da região anular e  $K_1$  é uma constante que depende da geometria da entrada da região anular. Composto as Equações 4.50 e 4.52 em 4.53, verifica-se que

$$C_1 = \left[ \frac{|F_L|}{A_o} \left( \frac{D_o}{D_h} \right) L_2 \right] + \frac{1}{2} \rho_1 U_o^2 + \rho_1 g h_a. \quad (4.54)$$

Finalmente, é possível determinar o gradiente de pressão ao longo de toda a extensão do

tubo flexível:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_o}{\partial x} = & \frac{1}{2A_o} C_f \rho_1 D_o U_o^2 \frac{D_o}{D_h} [1 - H(x - L_2)] + \left[ \frac{1}{2} \rho_1 U_o^2 + \rho_1 g h_a \right] \delta_D(x - L_2) \\ & + g \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \rho_j H_{L_j, L_{j+1}}^x \right\} + \rho_n g H(x - L_n), \quad (4.55) \end{aligned}$$

e integrando-o

$$\begin{aligned} p_o(x) = & \frac{1}{2A_o} C_f \rho_1 D_o U_o^2 \frac{D_o}{D_h} [1 - H(x - L_2)] x \\ & + \left[ \frac{1}{2A_o} C_f \rho_1 D_o U_o^2 \frac{D_o}{D_h} L_2 + \frac{1}{2} \rho_1 U_o^2 + \rho_1 g h_a \right] H(x - L_2) \\ & + g \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \rho_j \left[ (x - L_j) H_{L_j, L_{j+1}}^x + (L_{j+1} - L_j) H(x - L_{j+1}) \right] \right\} + \rho_n g (x - L_n) H(x - L_n), \quad (4.56) \end{aligned}$$

sendo  $\delta_D(x - L_2)$  a função delta de Dirac.

Dando prosseguimento à mesma abordagem inspirada em [Moditis, Paidoussis e Rattigan \(2016\)](#), pode-se substituir as Equações 4.42 e 4.46 em 4.9, e em seguida substituir 4.9 em 4.7, que produz o balanço de forças atuantes na direção  $x$  como mostra a Equação 4.57.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (T - A_f p_i + A_o p_o) = & - (M_t + \rho_n A_f) g + A_o g \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \rho_j H_{L_j, L_{j+1}}^x \right\} + A_o \rho_n g H(x - L_n) \\ & + \frac{1}{2} C_f \rho_1 D_o U_o^2 \left( \frac{D_o}{D_h} + 1 \right) [1 - H(x - L_2)] + A_o \left[ \frac{1}{2} \rho_1 U_o^2 + \rho_1 g h_a \right] \delta_D(x - L_2) \quad (4.57) \end{aligned}$$

Substituindo as Equações 4.40 e 4.41, 4.42, 4.43 e 4.47 em 4.10 e, posteriormente, substituindo 4.10 em 4.8, encontra-se a equação do movimento na direção  $z$

$$\begin{aligned}
& EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \\
& - \frac{\partial}{\partial x} \left[ (T - A_f p_i + A_o p_o) \frac{\partial w}{\partial x} \right] + M_t \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + A_f \rho_n \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2A_f \rho_n U_i \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + A_f \rho_n U_i^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
& \quad - \frac{\rho_1 \pi D_o}{2} \frac{R(D_o/2)}{R'(D_o/2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2U_o \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + U_o^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) [1 - H(x - L_2)] \\
& + A_o \sum_{j=2}^n \left\{ \rho_j H_{L_j, L_{j+1}}^x \right\} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + A_o \rho_n \tilde{H}(x - L_{n+1}) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{1}{2} C_f \rho_1 D_o U_o [1 - H(x - L_2)] \frac{\partial w}{\partial t} \\
& \quad + 4\sqrt{2} \frac{A_o}{D_o} \mathbb{R}^{\frac{1}{2}}(\Omega) \left[ \sum_{j=1}^n \left\{ b_{u_j} H_{L_j, L_{j+1}}^x \right\} + b_{u_n} \tilde{H}(x - L_{n+1}) \right] \frac{\partial w}{\partial t} = 0. \quad (4.58)
\end{aligned}$$

Integrando a Equação 4.57 de  $x$  a  $L_{n+1}$ , obtém-se o termo de tensionamento e pressurização

$$\begin{aligned}
& (T - A_f p_i + A_o p_o)|_x = \\
& \quad (M_t + \rho_n A_f) g (L_{n+1} - x) - A_o g \sum_{j=1}^n \left\{ \rho_j (L_{j+1} - x) H_{L_j, L_{j+1}}^x \right\} \\
& - A_o g \sum_{j=2}^n \left\{ \rho_j (L_{j+1} - L_j) H_{L_1, L_j}^x \right\} - \frac{1}{2} C_f \rho_1 D_o U_o^2 \left( \frac{D_o}{D_h} + 1 \right) (L_2 - x) [1 - H(x - L_2)] \\
& \quad - A_o \left[ \frac{1}{2} \rho_1 U_o^2 + \rho_1 g h_a \right] [1 - H(x - L_2)] + (T - A_f p_i + A_o p_o)|_{L_{n+1}}. \quad (4.59)
\end{aligned}$$

Substituindo 4.59 em 4.58 e rearranjando os termos, encontra-se a equação do movi-



mento do sistema proposto

$$\begin{aligned}
& EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \\
& + \left\{ - (M_t + \rho_n A_f) g (L_{n+1} - x) + A_o g \sum_{j=1}^n \left\{ \rho_j (L_{j+1} - x) H_{L_j, L_{j+1}}^x \right\} \right. \\
& + A_o g \sum_{j=2}^n \left\{ \rho_j (L_{j+1} - L_j) H_{L_1, L_j}^x \right\} + \frac{1}{2} C_f \rho_1 D_o U_o^2 \left( \frac{D_o}{D_h} + 1 \right) (L_2 - x) [1 - H(x - L_2)] \\
& + A_o \left[ \frac{1}{2} \rho_1 U_o^2 + \rho_1 g h_a \right] [1 - H(x - L_2)] - (T - A_f p_i + A_o p_o)|_{L_{n+1}} + A_f \rho_n U_i^2 \\
& \quad - \frac{\rho_1 \pi D_o}{2} \frac{R(D_o/2)}{R'(D_o/2)} U_o^2 [1 - H(x - L_2)] \left. \right\} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
& + 2 \left\{ A_f \rho_n U_i + \frac{\rho_1 \pi D_o}{2} \frac{R(D_o/2)}{R'(D_o/2)} U_o [1 - H(x - L_2)] \right\} \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} \\
& + \left\{ (M_t + \rho_n A_f) g - A_o g \sum_{j=1}^n \left\{ \rho_j H_{L_j, L_{j+1}}^x \right\} - A_o g \rho_n \tilde{H}(x - L_2) \right. \\
& - \frac{1}{2} C_f \rho_1 D_o U_o^2 \left( \frac{D_o}{D_h} + 1 \right) [1 - H(x - L_2)] - A_o \left[ \frac{1}{2} \rho_1 U_o^2 + \rho_1 g h_a \right] \delta_D(x - L_2) \left. \right\} \frac{\partial w}{\partial x} \\
& + \left\{ \frac{1}{2} C_f \rho_1 D_o U_o [1 - H(x - L_2)] + 4\sqrt{2} \frac{A_o}{D_o} \mathbb{R}^{\frac{1}{2}}(\Omega) \left[ \sum_{j=1}^n \left\{ b_{u_j} H_{L_j, L_{j+1}}^x \right\} + b_{u_n} \tilde{H}(x - L_{n+1}) \right] \right\} \frac{\partial w}{\partial t} \\
& + \left\{ M_t + A_f \rho_n - \frac{\rho_1 \pi D_o}{2} \frac{R(D_o/2)}{R'(D_o/2)} [1 - H(x - L_2)] + A_o \sum_{j=2}^n \left\{ \rho_j H_{L_j, L_{j+1}}^x \right\} \right. \\
& \quad \left. + A_o \rho_n \tilde{H}(x - L_{n+1}) \right\} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (4.60)
\end{aligned}$$

inspirada sobretudo em [Moditis, Paidoussis e Ratigan \(2016\)](#) e [Paidoussis e Ostoj-Starzewski \(1981\)](#).

As condições de contorno na extremidade engastada são

$$w|_{x=0} = \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad (4.61)$$

e na extremidade livre

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=L_{n+1}} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \Big|_{x=L_{n+1}} = 0. \quad (4.62)$$

Tomando as mesmas ideias utilizadas para obtenção da Equação 4.53, é possível relacionar as pressões interna e externa na extremidade inferior do tubo através de um balanço de energia como visto abaixo.

$$p_i(L_{n+1}) = p_o(L_{n+1}) + \rho_n g h_e - \frac{1}{2} \rho_n U_i^2. \quad (4.63)$$

O valor  $h_e = K_2 U_i^2 / g$  é a perda de carga singular relacionada aos fenômenos de descarga de fluido e  $K_1$  é uma constante relacionada à geometria da extremidade da estrutura tubular que pode ser obtida em manuais de hidráulica. Já  $p_o(L_{n+1})$  é determinado através da Equação 4.56, ou seja

$$p_o(L_{n+1}) = \frac{1}{2A_o} C_f \rho_1 D_o U_o^2 \frac{D_o}{D_h} L_2 + \frac{1}{2} \rho_1 U_o^2 + \rho_1 g h_a + g \sum_{j=1}^{n-1} \{ \rho_j [(L_{j+1} - L_j) H(L_{n+1} - L_{j+1})] \} + \rho_n g (L_{n+1} - L_n). \quad (4.64)$$

## 4.2 Adimensionalização da equação do movimento

Definindo os seguintes valores

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{L_{n+1}}, \quad \eta = \frac{w}{L_{n+1}}, \quad \tau = \left( \frac{EI}{M_t + \rho_n A_f + \rho_n A_o} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{t}{L_{n+1}^2}, \quad \ell = \frac{\mathbf{L}}{L_{n+1}}, \\ \boldsymbol{\varrho} &= \frac{g}{EI} A_o L_{n+1}^3 \boldsymbol{\rho}, \quad \boldsymbol{\beta}_u = \frac{\sqrt{2}\pi D_o}{M_t + \rho_n A_f + \rho_n A_o} \mathbf{b}_u, \quad \boldsymbol{\zeta} = \frac{A_o}{M_t + \rho_n A_f + \rho_n A_o} \boldsymbol{\rho} \\ c_f &= \frac{4}{\pi} C_f, \quad \alpha = \frac{D_i}{D_o}, \quad \bar{\gamma} = \frac{D_o}{D_{ch}}, \quad u_o = \left( \frac{\rho_1 A_o}{EI} \right)^{\frac{1}{2}} L_{n+1} U_o, \quad u_i = \left( \frac{\rho_n A_f}{EI} \right)^{\frac{1}{2}} L_{n+1} U_i, \\ \varsigma &= \frac{2}{D_o} \frac{R(D_o/2)}{R'(D_o/2)}, \quad \Gamma = \frac{T|_{L_{n+1}}}{EI} L_{n+1}^2, \quad \Pi_i = \frac{p_i|_{L_{n+1}}}{EI} A_f L_{n+1}^2, \quad \Pi_o = \frac{p_o|_{L_{n+1}}}{EI} A_o L_{n+1}^2, \\ \gamma &= \frac{(M_t + \rho_n A_f)}{EI} g L_{n+1}^3, \quad \beta_i = \frac{\rho_n A_f}{M_t + \rho_n A_f + \rho_n A_o}, \\ \beta_o &= \frac{\rho_1 A_o}{M_t + \rho_n A_f + \rho_n A_o}, \quad \beta_t = \frac{M_t}{M_t + \rho_n A_f + \rho_n A_o}, \\ \varepsilon &= \frac{L_{n+1}}{D_o}, \quad h = \frac{D_o}{D_h}, \quad \omega = \left( \frac{M_t + \rho_n A_f + \rho_n A_o}{EI} \right)^{\frac{1}{2}} \Omega L_{n+1}^2 \\ \alpha_{ch} &= \frac{D_i}{D_o}, \quad \mu = 4\sqrt{2} \frac{A_o}{D_o} \frac{1}{L_{n+1}} \frac{EI}{(M_t + \rho_n A_f + \rho_n A_o)^{\frac{1}{4}}}. \quad (4.65) \end{aligned}$$

e substituindo-os na Equação 4.60, encontra-se a equação adimensional do movimento.

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^4 \eta}{\partial \xi^4} \\
& + \left\{ \gamma (\xi - \ell_{n+1}) + \sum_{j=1}^n \left\{ \varrho_j (\ell_{j+1} - \xi) H_{\ell_j, \ell_{j+1}}^\xi \right\} + \sum_{j=2}^n \left\{ \varrho_j (\ell_{j+1} - \ell_j) H_{\ell_1, \ell_j}^\xi \right\} \right. \\
& + \frac{1}{2} c_f \varepsilon u_o^2 (1+h) (\ell_2 - \xi) [1 - H(\xi - \ell_2)] + \frac{1}{2} u_o^2 (1+K_1) [1 - H(\xi - \ell_2)] - \Gamma + \Pi_i - \Pi_o + u_i^2 \\
& \quad \left. - \varsigma u_o^2 [1 - H(\xi - \ell_2)] \right\} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} + 2 \left\{ u_i \beta_i^{\frac{1}{2}} + \varsigma u_o \beta_o^{\frac{1}{2}} [1 - H(\xi - \ell_2)] \right\} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau \partial \xi} \\
& + \left\{ \gamma - \sum_{j=1}^n \left\{ \varrho_j H_{\ell_j, \ell_{j+1}}^\xi \right\} - \varrho_n \tilde{H}(\xi - \ell_2) - \frac{1}{2} c_f \varepsilon u_o^2 (1+h) [1 - H(\xi - \ell_2)] \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} u_o^2 (1+K_1) \delta_D(\xi - \ell_2) \right\} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + \left\{ \frac{1}{2} c_f \varepsilon u_o \beta_o^{\frac{1}{2}} [1 - H(\xi - \ell_2)] \right. \\
& + \mu \varepsilon^{-1} \mathbb{R}^{1/2}(\omega) \left[ \sum_{j=1}^n \left\{ \beta_{u_j} H_{\ell_j, \ell_{j+1}}^\xi \right\} + \beta_{un} \tilde{H}(\xi - \ell_{n+1}) \right] \left. \right\} \frac{\partial \eta}{\partial \tau} + \left\{ \beta_t + \beta_i - \varsigma \beta_o [1 - H(\xi - \ell_2)] \right. \\
& \quad \left. + \sum_{j=2}^n \left\{ \zeta_j H_{\ell_j, \ell_{j+1}}^\xi \right\} + \zeta_n \tilde{H}(\xi - \ell_{n+1}) \right\} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} = 0. \quad (4.66)
\end{aligned}$$

As condições de contorno adimensionais são:

$$\eta|_{\xi=0} = \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \Big|_{\xi=1} = \frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi^3} \Big|_{\xi=1} = 0. \quad (4.67)$$

As Equações 4.63 e 4.64 adimensionalizadas são dadas por 4.68 e 4.69, respectivamente.

$$\Pi_i = \alpha^2 \Pi_o + \frac{1}{2} u_i^2 (K_2 - 1) \quad (4.68)$$

$$\Pi_o = \frac{1}{2} c_f \varepsilon u_o^2 h \ell_2 + \frac{1}{2} u_o^2 (1+K_1) + \sum_{j=1}^n \left\{ \varrho_j [(\ell_{j+1} - \ell_j) H(\ell_{n+1} - \ell_{j+1})] \right\} \quad (4.69)$$

### 4.3 Métodos de solução

Para solução numérica do presente modelo são propostos o método das diferenças finitas (MDF) e um método híbrido de Fourier-Galerkin (MFG). Aspectos gerais da formulação de ambos os métodos estão descritos nos apêndices D e E.

Considerando a oscilação lateral da estrutura tubular um movimento harmônico simples, tem-se que

$$\eta(\xi, \tau) = Y(\xi)e^{i\omega\tau}, \quad (4.70)$$

cujas derivadas parciais são:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} &= \frac{\partial Y(\xi)}{\partial \xi} e^{i\omega\tau}, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 Y(\xi)}{\partial \xi^2} e^{i\omega\tau}, \quad \frac{\partial^4 \eta}{\partial \xi^4} = \frac{\partial^4 Y(\xi)}{\partial \xi^4} e^{i\omega\tau}, \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi \partial \tau} &= \frac{\partial Y(\xi)}{\partial \xi} i\omega e^{i\omega\tau}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial \tau} = i\omega Y(\xi) e^{i\omega\tau}, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} = -\omega^2 Y(\xi) e^{i\omega\tau}, \end{aligned} \quad (4.71)$$

e podem ser substituídas em 4.66 possibilitando transformar esta que é uma equação diferencial parcial em uma equação diferencial ordinária como visto abaixo.

$$\begin{aligned} \frac{d^4 Y}{d\xi^4} + \left\{ \gamma(\xi - \ell_{n+1}) + \sum_{j=1}^n \left\{ \varrho_j (\ell_{j+1} - \xi) H_{\ell_j, \ell_{j+1}}^\xi \right\} + \sum_{j=2}^n \left\{ \varrho_j (\ell_{j+1} - \ell_j) H_{\ell_1, \ell_j}^\xi \right\} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} c_f \varepsilon u_o^2 (1+h) (\ell_2 - \xi) [1 - H(\xi - \ell_2)] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} u_o^2 (1+K_1) [1 - H(\xi - \ell_2)] - \Gamma + \Pi_i - \Pi_o + u_i^2 \right. \\ \left. + \varsigma u_o^2 [1 - H(\xi - \ell_2)] \right\} \frac{d^2 Y}{d\xi^2} + \left\{ 2i\omega \left\{ u_i \beta_i^{\frac{1}{2}} + \varsigma u_o \beta_o^{\frac{1}{2}} [1 - H(\xi - \ell_2)] \right\} \right. \\ \left. + \gamma - \sum_{j=1}^n \left\{ \varrho_j H_{\ell_j, \ell_{j+1}}^\xi \right\} - \varrho_n \tilde{H}(\xi - \ell_2) - \frac{1}{2} c_f \varepsilon u_o^2 [1 - H(\xi - \ell_2)] \right. \\ \left. - \frac{1}{2} u_o^2 (1+K_1) \delta_D(\xi - \ell_2) \right\} \frac{dY}{d\xi} + \left\{ i\omega \left\{ \frac{1}{2} c_f \varepsilon u_o \beta_o^{\frac{1}{2}} [1 - H(\xi - \ell_2)] \right\} \right. \\ \left. + \mu \varepsilon^{-1} \mathbb{R}^{1/2}(\omega) \left[ \sum_{j=1}^n \left\{ \beta_{u_j} H_{\ell_j, \ell_{j+1}}^\xi \right\} + \beta_{u_n} \tilde{H}(\xi - \ell_{n+1}) \right] \right\} - \omega^2 \left\{ \beta_t + \beta_i \right. \\ \left. - \varsigma \beta_o [1 - H(\xi - \ell_2)] + \sum_{j=2}^n \left\{ \zeta_j H_{\ell_j, \ell_{j+1}}^\xi \right\} + \zeta_n \tilde{H}(\xi - \ell_{n+1}) \right\} \right\} Y = 0 \quad (4.72) \end{aligned}$$

Aplicando a Equação 4.70 em 4.67, produz-se as novas condições de contorno dadas em 4.73.

$$Y|_{\xi=0} = \frac{dY}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = \frac{d^2 Y}{d\xi^2} \Big|_{\xi=1} = \frac{d^3 Y}{d\xi^3} \Big|_{\xi=1} = 0 \quad (4.73)$$

## 4.4 Método das Diferenças Finitas

O método das diferenças finitas (MDF) será utilizado para a solução da equação proposta. Aspectos gerais para obtenção dos esquemas de diferenças finitas podem ser vistos

no D. Realiza-se aproximações centrais de segunda, quarta e sexta ordem. Busca-se, assim, maior acurácia nas aproximações. Fosse utilizado somente aproximações de segunda ordem, a implementação certamente seria mais simples, entretanto o número necessário de pontos discretos para obtenção de convergência seria consideravelmente maior, aumentando o número de equações do sistema linear e, portanto, mais lento de ser solucionado. As aproximações de segunda e quarta ordem são utilizadas nos pontos próximos às extremidades haja vista que somente há 4 condições de contorno e a aplicação de aproximação de sexta ordem nessa região impediria o fechamento do sistema de equações.

O esquema de aplicação segue a Figura 4, sendo  $k$  o índice de posição do ponto discreto e  $N$  o número total de pontos discretos, com  $N = 6$  o mínimo. A extremidade engastada fica em  $k = 0$  e a livre em  $k = N$ . Em assim sendo, apresenta-se as aproximações como se segue.

Para  $2 < k < N - 1$ :

$$\begin{aligned}
& Y|_{\xi=k\Delta\xi} = Y_k, \\
& \left. \frac{dY}{d\xi} \right|_{\xi=k\Delta\xi} \cong \frac{Y_{k+3} - 9Y_{k+2} + 45Y_{k+1} - 45Y_{k-1} - 9Y_{k-2} - Y_{k-3}}{60\Delta\xi}, \\
& \left. \frac{d^2Y}{d\xi^2} \right|_{\xi=k\Delta\xi} \cong \frac{Y_{k+3} - 13,5Y_{k+2} + 135Y_{k+1} - 245Y_k + 135Y_{k-1} - 13,5Y_{k-2} - Y_{k-3}}{90\Delta\xi^2}, \\
& \left. \frac{d^4Y}{d\xi^4} \right|_{\xi=k\Delta\xi} \cong \frac{7Y_{k+4} - 96Y_{k+3} + 676Y_{k+2} - 1952Y_{k+1} + 2730Y_k}{240\Delta\xi^4} \\
& \quad + \frac{-1952Y_{k-1} + 676Y_{k-2} - 96Y_{k-3} + 7Y_{k-4}}{240\Delta\xi^4}.
\end{aligned} \tag{4.74}$$

Para  $N - 1 \leq k \leq 2$ :

$$\begin{aligned}
& Y|_{\xi=k\Delta\xi} = Y_k, \\
& \left. \frac{dY}{d\xi} \right|_{\xi=k\Delta\xi} \cong \frac{-Y_{k+2} + 8Y_{k+1} - 8Y_{k-1} + Y_{k-2}}{12\Delta\xi}, \\
& \left. \frac{d^2Y}{d\xi^2} \right|_{\xi=k\Delta\xi} \cong \frac{-Y_{k+2} + 16Y_{k+1} - 30Y_k + 16Y_{k-1} - Y_{k-2}}{12\Delta\xi^2}, \\
& \left. \frac{d^4Y}{d\xi^4} \right|_{\xi=k\Delta\xi} \cong \frac{Y_{k+2} - 4Y_{k+1} + 6Y_k - 4Y_{k-1} + Y_{k-2}}{\Delta\xi^4}.
\end{aligned} \tag{4.75}$$

E as condições de contorno aproximadas são:

$$\begin{aligned}
& Y|_{\xi=0} = 0 \therefore Y_0 = 0, \\
& \left. \frac{dY}{d\xi} \right|_{\xi=1} \cong \frac{Y_{+1} - Y_{-1}}{2\Delta\xi} = 0 \therefore -Y_{-1} + Y_{+1} = 0, \\
& \left. \frac{d^2Y}{d\xi^2} \right|_{\xi=1} \cong \frac{-Y_{N+2} + 16Y_{N+1} - 30Y_N + 16Y_{N-1} - Y_{N-2}}{12\Delta\xi^2} = 0 \\
& \therefore -Y_{N+2} + 16Y_{N+1} - 30Y_N + 16Y_{N-1} - Y_{N-2} = 0, \\
& \left. \frac{d^3Y}{d\xi^3} \right|_{\xi=1} \cong \frac{Y_{N+2} - 2Y_{N+1} + 2Y_{N-1} - Y_{N-2}}{2\Delta\xi^3} = 0 \\
& \therefore Y_{N+2} - 2Y_{N+1} + 2Y_{N-1} - Y_{N-2} = 0.
\end{aligned} \tag{4.76}$$

Aplicando as aproximações dadas pelas Equações 4.74 e 4.75 em 4.72 para os pontos discretos  $k = 1$  a  $k = N$ , e tomando as condições de contorno aproximadas logo acima, é obtido o sistema de equações lineares  $[A]\{Y\} = \{0\}$  tal que:

$$\begin{bmatrix}
-1 & 0 & 1 & \cdots & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & & & -1 & 16 & -30 & 16 & -1 \\
0 & 0 & & \cdots & & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\
\vdots & & \ddots & & & & & & & \vdots \\
& & & \cdots & & & & & & \vdots
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
Y_{-1} \\
Y_0 \\
Y_1 \\
\vdots \\
Y_{N-2} \\
Y_{N-1} \\
Y_N \\
Y_{N+1} \\
Y_{N+2}
\end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix}
0 \\
0 \\
0 \\
\vdots \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0
\end{Bmatrix}, \tag{4.77}$$

sendo as quatro primeiras linhas da matriz  $A$  destinadas para as condições de contorno, as duas seguintes para as equações de segunda e quarta ordem ( $k \leq 2$ ), as intermediárias para as de sexta ordem ( $2 < k < N - 1$ ), e as duas últimas de segunda e quarta ordem ( $k \geq N - 1$ ).

Para solução não trivial do sistema de equações, é condição necessária — e suficiente — que  $\det(A) = 0$  seja verdadeiro. Através do método das secantes é possível encontrar valores de  $\omega$  que permitam que a condição seja obedecida para quaisquer conjuntos de adimensionais.

## 4.5 Método híbrido de Fourier-Galerkin

Aspecto gerais do desenvolvimento do método estão reunidos no apêndice E. Considerando que a solução da equação 4.72 pode ser aproximada pela série de Fourier

$$Y(\xi) \cong \bar{Y}(\xi) = \sum_{\bar{n}=0}^{N \neq \infty} \{\beta_{2\bar{n}-1} \sin \bar{n}\pi\xi + \beta_{2\bar{n}} \cos \bar{n}\pi\xi\} / \sqrt{2}, \quad (\text{E.3})$$

e substituindo esta solução aproximada na equação 4.72, se é obtida a aproximação desta equação diferencial ordinária:

$$D(\xi, \omega) = \sum_{r=0}^4 f_r(\xi, \omega) \frac{d^r}{d\xi^r} \sum_{\bar{n}=0}^{N \neq \infty} \{\beta_{2\bar{n}-1} \sin \bar{n}\pi\xi + \beta_{2\bar{n}} \cos \bar{n}\pi\xi\} / \sqrt{2}, \quad (\text{E.4})$$

sendo os coeficientes  $f_r(\xi, \omega)$

$$f_4 = 1, \quad (4.78)$$

$$f_3 = 0, \quad (4.79)$$

$$\begin{aligned} f_2 = & \gamma(\xi - \ell_{n+1}) + \sum_{j=1}^n \left\{ \varrho_j (\ell_{j+1} - \xi) H_{\ell_j, \ell_{j+1}}^\xi \right\} + \sum_{j=2}^n \left\{ \varrho_j (\ell_{j+1} - \ell_j) H_{\ell_1, \ell_j}^\xi \right\} \\ & + \frac{1}{2} c_f \varepsilon u_o^2 (1+h) (\ell_2 - \xi) [1 - H(\xi - \ell_2)] + \frac{1}{2} u_o^2 (1+K_1) [1 - H(\xi - \ell_2)] \\ & - \Gamma + \Pi_i - \Pi_o + u_i^2 + \varsigma u_o^2 [1 - H(\xi - \ell_2)], \quad (4.80) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1 = & 2i\omega \left\{ u_i \beta_i^{\frac{1}{2}} + \varsigma u_o \beta_o^{\frac{1}{2}} [1 - H(\xi - \ell_2)] \right\} \\ & + \gamma - \sum_{j=1}^n \left\{ \varrho_j H_{\ell_j, \ell_{j+1}}^\xi \right\} - \varrho_n \tilde{H}(\xi - \ell_2) - \frac{1}{2} c_f \varepsilon u_o^2 [1 - H(\xi - \ell_2)] \\ & - \frac{1}{2} u_o^2 (1+K_1) \delta_D(\xi - \ell_2), \quad (4.81) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_0 = & i\omega \left\{ \frac{1}{2} c_f \varepsilon u_o \beta_o^{\frac{1}{2}} [1 - H(\xi - \ell_2)] \right. \\ & + \mu \varepsilon^{-1} \mathbb{R}^{1/2}(\omega) \left[ \sum_{j=1}^n \left\{ \beta_{u_j} H_{\ell_j, \ell_{j+1}}^\xi \right\} + \beta_{u_n} \tilde{H}(\xi - \ell_{n+1}) \right] - \omega^2 \left\{ \beta_t + \beta_i \right. \\ & \left. \left. - \varsigma \beta_o [1 - H(\xi - \ell_2)] + \sum_{j=2}^n \left\{ \zeta_j H_{\ell_j, \ell_{j+1}}^\xi \right\} + \zeta_n \tilde{H}(\xi - \ell_{n+1}) \right\}, \quad (4.82) \right. \end{aligned}$$

e as derivadas de  $Y(\xi)$  aproximadas por

$$\frac{dY}{d\xi} \cong \frac{d\bar{Y}}{d\xi} = \sum_{\bar{n}=0}^{N \neq \infty} \bar{n}\pi \{ \beta_{2\bar{n}-1} \cos \bar{n}\pi\xi - \beta_{2\bar{n}} \sin \bar{n}\pi\xi \} / \sqrt{2}, \quad (4.83)$$

$$\frac{d^2Y}{d\xi^2} \cong \frac{d^2\bar{Y}}{d\xi^2} = \sum_{\bar{n}=0}^{N \neq \infty} (\bar{n}\pi)^2 \{ -\beta_{2\bar{n}-1} \sin \bar{n}\pi\xi - \beta_{2\bar{n}} \cos \bar{n}\pi\xi \} / \sqrt{2}, \quad (4.84)$$

$$\frac{d^3Y}{d\xi^3} \cong \frac{d^3\bar{Y}}{d\xi^3} = \sum_{\bar{n}=0}^{N \neq \infty} (\bar{n}\pi)^3 \{ -\beta_{2\bar{n}-1} \cos \bar{n}\pi\xi + \beta_{2\bar{n}} \sin \bar{n}\pi\xi \} / \sqrt{2}, \quad (4.85)$$

e

$$\frac{d^4Y}{d\xi^4} \cong \frac{d^4\bar{Y}}{d\xi^4} = \sum_{\bar{n}=0}^{N \neq \infty} (\bar{n}\pi)^4 \{ \beta_{2\bar{n}-1} \sin \bar{n}\pi\xi + \beta_{2\bar{n}} \cos \bar{n}\pi\xi \} / \sqrt{2}. \quad (4.86)$$

Impondo que

$$\int_0^1 D(\xi, \omega) \sin p\pi\xi d\xi = 0, \quad (4.87)$$

e

$$\int_0^1 D(\xi, \omega) \cos p\pi\xi d\xi = 0 \quad (4.88)$$

com  $p = 1, 2, 3, 4, \dots, p \neq \infty$ , é possível produzir um conjunto de equações lineares homogêneas, que juntamente com as condições de contorno produzem o sistema linear que levará a um problema de autovalores.

## 4.6 Simulação de remoção de fluido circundante

Aplicando o procedimento descrito na Seção 3, é possível obter o diagrama de Argand do sistema e verificar o valor de  $\omega$ , para cada modo, para as velocidades de trabalho  $u_i$  e  $u_o$ . Após isso, é possível iniciar a segunda etapa da análise, que trata de verificar o efeito do deslocamento das colunas de fluidos na estabilidade do sistema. Para isso, é definido o parâmetro adimensional de deslocamento  $\delta$ , que se relaciona com o sistema da seguinte forma:

$$\ell = \begin{bmatrix} 0 & l_2 & l_3 - \delta & l_4 - \delta & l_5 - \delta & \dots & l_n - \delta & 1 \end{bmatrix} \quad (4.89)$$

Quando  $\delta = 0$ , as frequências adimensionais do sistema são as mesmas obtidas na primeira parte do estudo de estabilidade em função de  $u_i$  e  $u_o$ . Provocando pequenas alterações sucessivas deste parâmetro, i.e., incrementando-o até que se alcance o valor de deslocamento final desejado, é possível utilizar o método das secantes para a obtenção



dos novos valores de  $\omega$  do sistema. Plotando a frequência complexa  $\omega$  em função de  $\delta$  no diagrama de Argand, processo análogo ao observado na Seção 3 para a velocidade do escoamento interno  $u$ , é possível analisar o efeito que a remoção e injeção de fluidos provoca na estrutura tubular.

## 5 RESULTADOS

Nesta seção são apresentados os resultados das simulações realizadas. Os diagramas de Argand e adimensionais estão reunidos no apêndice I.

A solução do problema proposto é obtida a partir da solução do sistema linear 4.77, proveniente da aplicação do Método das Diferenças Finitas, para um conjunto particular de adimensionais gerados através das fórmulas de 4.65, que produz um problema de autovalores padrão. Partindo deste problema se é possível encontrar as frequências complexas adimensionalizadas  $\omega$  do sistema para cada modo de vibração, sendo a parte real a própria frequência circular de vibração e a parte imaginária o amortecimento. Em caso de  $Im(\omega) < 0$ , tem-se um amortecimento negativo, que é sinônimo de amplificação de oscilações, ou seja, o sistema torna-se instável. Dá-se o nome de velocidade crítica à menor velocidade, entre todos os modos de vibração, na qual  $Im(\omega) = 0$  e um aumento infinitesimal na velocidade tornaria  $Im(\omega) < 0$ .

Também foi proposto no presente trabalho uma segunda alternativa de solução utilizando um método híbrido de Fourier-Galerkin. Entretanto, os resultados apresentados neste trabalho foram inteiramente obtidos através da aplicação do Método das Diferenças Finitas. Não obstante, ressalta-se que tal método híbrido teve importância fundamental na validação dos códigos computacionais através da realização de depuração comparativa, isto é, para inúmeros conjuntos de adimensionais as simulações foram realizadas com ambos os métodos com o fito de eliminar inconsistências de programação computacional. Isso se deu pela comparação dos resultados gerados pela aplicação independente dos dois métodos, tão logo se observou a convergência entre eles, foram então considerados validados. Os códigos foram programados com a linguagem MATLAB e estão disponíveis no apêndice H.

As simulações apresentadas são o resultado final de uma série de outras simulações intermediárias, uma vez que à medida que a quantidade de pontos discretos  $N$  tende a infinito, a solução converge para um determinado valor. Dessa forma, para cada agrupamento adimensional, aumentou-se sucessivamente o valor de  $N$ , até que a diferença entre

as duas últimas velocidades críticas  $u_{cr}$  obtidas ficasse menor que a tolerância admissível de  $10^{-3}$ . No Método das Secantes a tolerância admissível foi de  $10^{-5}$ .

Ao longo das simulações, verificou-se que quão maior é o adimensional  $\gamma$ , maior deve ser a quantidade de pontos discretos  $N$  para chegar à convergência do resultado. Ressalta-se que, em termos dimensionais, é o comprimento do tubo  $L$  o maior responsável pela quantidade adequada de pontos discretos, uma vez que  $\gamma$  é proporcional ao cubo de  $L$ . Ou seja, dado um tubo de massa  $M_t$  e rigidez  $EI$ , com um mesmo fluido escoando internamente, quão mais longo ele for, maior será o custo de tempo de simulação.

São apresentadas 6 simulações, divididas em 2 blocos. O primeiro bloco corresponde às simulações 1 a 5. O segundo bloco agrupa os resultados da simulação 6.

## 5.1 Parâmetros físicos

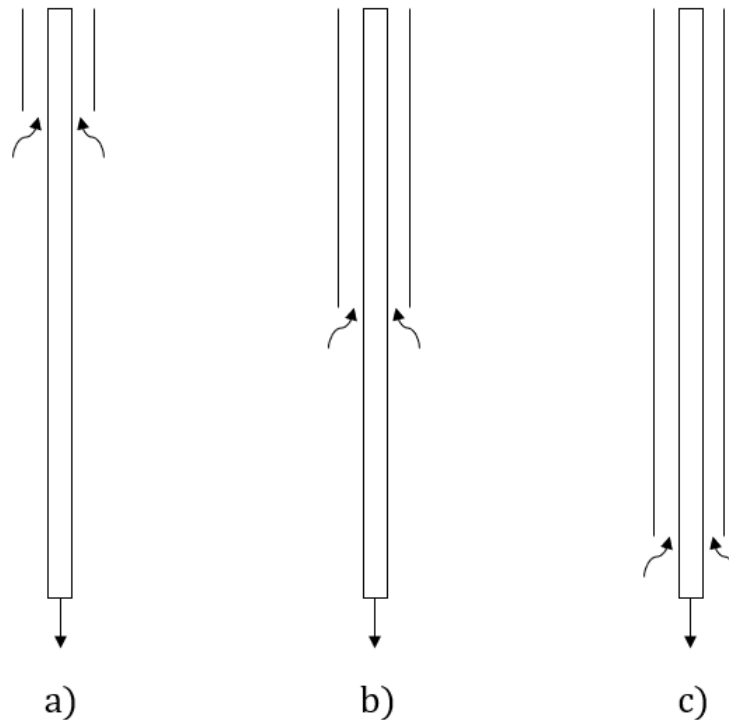
A geração de adimensionais partiu de grandezas físicas pré-selecionadas, conforme pode ser visto na subseção [H.1.1](#). Isso se deu para que a consistência física do modelo proposto fosse respeitada através da correspondência direta entre o modelo dimensional e o adimensional. A variação dos adimensionais aqui estudados também respeitou esta correspondência.

A seleção das grandezas físicas partiu, a princípio, do conjunto de materiais e fluidos comuns ao problema de engenharia que motivou o presente trabalho. Entretanto, visando uma maior abrangência científica ao alcançar certas magnitudes de valores adimensionais que seriam difíceis de serem obtidos partindo de grandezas comuns a problemas práticos, algumas grandezas foram selecionadas a despeito de sua aplicabilidade prática em problemas tecnológicos. Com isso foi possível uma geração mais ampla de resultados, não só úteis para o problema tecnológico proposto, mas também para qualquer outro problema de qualquer natureza que seja análogo matematicamente ao aqui exposto.

O primeiro bloco de simulações teve como objetivo estudar a influência na velocidade crítica do sistema de dois parâmetros de grande relevância: os comprimentos dos tubos externo e interno. Para isso, todos os parâmetros dimensionais foram fixados, com exceção do comprimento do tubo interno  $L_{n+1}$  e o do tubo externo  $L_2$ . Para cada comprimento  $L_{n+1}$  selecionado houve 10 aumentos incrementais de  $L_2$ , iniciando com  $L_2 = 0$ , isto é, um cenário sem tubo externo, e finalizando com  $L_2 = 0,9L_{n+1}$ , ou seja, com uma região anular em 90% do comprimento do tubo interno. Os incrementos intermediários foram de 10% de  $L_{n+1}$  cada. A figura abaixo esquematiza o procedimento. O comprimento do

tubo interno foi aumentado gradativamente a cada simulação com o objetivo de produzir diferentes ordens de grandeza de  $\gamma$ , que dá uma abrangência das simulações desde tubos curtos até tubos longos, todos respeitando a hipótese simplificadora inicial que permite uma modelagem física seguindo o modelo de viga de Euler-Bernoulli. Da simulação 1 à simulação 5 os valores de  $L_{n+1}$  selecionados foram, respectivamente, 10 m, 70 m, 150 m, 300 m e 740 m. Abaixo estão agrupados os parâmetros físicos gerais do primeiro bloco de simulações:

Figura 9: a)  $L_2 = 0,1L_{n+1}$ . b)  $L_2 = 0,5L_{n+1}$ . c)  $L_2 = 0,9L_{n+1}$ .



Fonte: Autor.

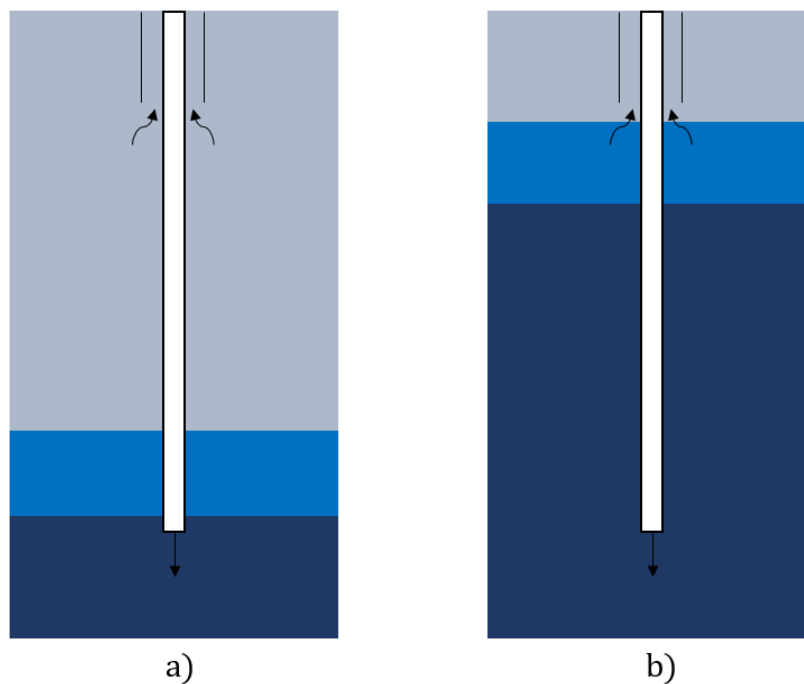
Tabela 1: Parâmetros físicos do primeiro bloco de simulações.

$D_o$	0,1	m
$D_i$	0,15	m
$D_{ch}$	0,25	m
$E$	$70 \cdot 10^9$	Pa
$d$	$2,71 \cdot 10^3$	kg/m <sup>3</sup>
$I$	$1,9942 \cdot 10^{-5}$	m <sup>4</sup>
$g$	9,81	m/s <sup>2</sup>
$\rho$	$1 \cdot 10^3$	kg/m <sup>3</sup>
$\nu$	$1 \cdot 10^{-6}$	m <sup>2</sup> /s
$C_f$	0,0125	

O bloco 2 teve como objetivo simular um procedimento de remoção do fluido de menor massa específica de uma caverna de sal com um tubo interno de 1.000 metros em três

cenários distintos de comprimento do tubo externo. Para isso, primeiro foi determinado a velocidade crítica  $u_{cr}$  para cada caso, como uma maneira de emular uma operação próxima do limite de vazão, visando máxima produtividade. Em um segundo momento, foi dado início à simulação de remoção, que consiste na elevação quase-estática das camadas de fluido que circundam os tubos. Uma velocidade levemente inferior à velocidade crítica foi deixada constante, e após isso inicia-se a variação do parâmetro adimensional  $\delta$ , que é o responsável por elevar as camadas de fluido. Esta elevação de camadas nada mais é que a redistribuição espacial dos parâmetros físicos dos fluidos externos. A remoção completa do fluido da primeira camada não ocorre, pois as hipóteses simplificadoras do modelo proposto incluem uma situação de regime permanente, que só consegue ser respeitado em mudanças quase-estáticas. Uma remoção completa do fluido da camada superior induziria um regime transiente, e esta situação não está contemplada no modelo proposto. A figura a seguir exemplifica as etapas de simulação. Em a) tem-se a configuração na qual a velocidade crítica é obtida, e em b) a configuração final de remoção. Os parâmetros físicos utilizados seguem na tabela abaixo.

Figura 10: a) Configuração inicial. b) Configuração final.



Fonte: Autor.

Tabela 2: Parâmetros físicos do segundo bloco de simulações.

$L_3$	850	m
$L_4$	990	m
$D_i$	0,381 (15)	m (pol)
$D_o$	0,508 (20)	m (pol)
$D_{ch}$	0,635 (25)	m (pol)
$E$	$210 \cdot 10^9$	Pa
$d$	$7,83 \cdot 10^3$	kg/m <sup>3</sup>
$I$	0,0022	m <sup>4</sup>
$g$	9,81	m/s <sup>2</sup>
$\rho_1$	$0,372 \cdot 10^3$	kg/m <sup>3</sup>
$\rho_2$	$0,372 \cdot 10^3$	kg/m <sup>3</sup>
$\rho_3$	$0,870 \cdot 10^3$	kg/m <sup>3</sup>
$\rho_4$	$1,3 \cdot 10^3$	kg/m <sup>3</sup>
$\nu_1$	$2 \cdot 10^{-6}$	m <sup>2</sup> /s
$\nu_2$	$2 \cdot 10^{-6}$	m <sup>2</sup> /s
$\nu_3$	$0,115 \cdot 10^{-6}$	m <sup>2</sup> /s
$\nu_4$	$1,38 \cdot 10^{-6}$	m <sup>2</sup> /s
$C_f$	0,0125	

## 5.2 Resultados teóricos quantitativos

Nesta seção são agrupados todos os resultados numéricos de  $u_{cr}$ ,  $\omega_{cr}$  e  $\delta_{cr}$  para cada simulação realizada.

Tabela 3: Simulação 1.

$\ell_2$	$u_{cr}$	$Re(\omega_{cr})$	Instabilidade	Modo
0	5,46	13,89	<i>Flutter</i>	Modo 2
0,1	5,49	13,96	<i>Flutter</i>	Modo 2
0,2	5,38	14,41	<i>Flutter</i>	Modo 2
0,3	4,85	15,24	<i>Flutter</i>	Modo 2
0,4	4,12	15,59	<i>Flutter</i>	Modo 2
0,5	3,95	13,92	<i>Flutter</i>	Modo 2
0,6	4,02	10,86	<i>Flutter</i>	Modo 2
0,7	3,90	8,34	<i>Flutter</i>	Modo 1
0,8	3,61	6,47	<i>Flutter</i>	Modo 1
0,9	3,03	4,79	<i>Flutter</i>	Modo 1

Tabela 4: Simulação 2.

$\ell_2$	$u_{cr}$	$Re(\omega_{cr})$	Instabilidade	Modo
0	10,87	29,08	<i>Flutter</i>	Modo 3
0,1	11,19	30,22	<i>Flutter</i>	Modo 3
0,2	11,16	34,44	<i>Flutter</i>	Modo 3
0,3	10,09	20,64	<i>Flutter</i>	Modo 2
0,4	8,62	16,25	<i>Flutter</i>	Modo 2
0,5	8,15	11,88	<i>Flutter</i>	Modo 2
0,6	7,85	8,16	<i>Flutter</i>	Modo 1
0,7	7,56	5,99	<i>Flutter</i>	Modo 1
0,8	7,23	5,13	<i>Flutter</i>	Modo 1
0,9	6,85	5,14	<i>Flutter</i>	Modo 1

Tabela 5: Simulação 3.

$\ell_2$	$u_{cr}$	$Re(\omega_{cr})$	Instabilidade	Modo
0	24,27	91,01	<i>Flutter</i>	Modo 4
0,1	25,92	91,04	<i>Flutter</i>	Modo 4
0,2	25,80	37,88	<i>Flutter</i>	Modo 3
0,3	25,39	0	<i>Divergência</i>	Modo 2
0,4	29,51	0	<i>Divergência</i>	Modo 4
0,5	26,99	0	<i>Divergência</i>	Modo 4
0,6	22,17	0	<i>Divergência</i>	Modo 3
0,7	18,53	0	<i>Divergência</i>	Modo 2
0,8	19,12	0	<i>Divergência</i>	Modo 3
0,9	15,46	0	<i>Divergência</i>	Modo 1

Tabela 6: Simulação 4.

$\ell_2$	$u_{cr}$	$Re(\omega_{cr})$	Instabilidade	Modo
0	79,10	364,61	<i>Flutter</i>	Modo 4
0,1	-	-	-	-
0,2	-	-	-	-
0,3	-	-	-	-
0,4	-	-	-	-
0,5	42,82	0	<i>Divergência</i>	Modo 1
0,6	40,19	0	<i>Divergência</i>	Modo 1
0,7	37,96	0	<i>Divergência</i>	Modo 1
0,8	36,06	0	<i>Divergência</i>	Modo 1
0,9	34,40	0	<i>Divergência</i>	Modo 1

Tabela 7: Simulação 5.

$\ell_2$	$u_{cr}$	$Re(\omega_{cr})$	Instabilidade	Modo
0	-	-	-	-
0,1	-	-	-	-
0,2	164,80	0	<i>Divergência</i>	Modo 1
0,3	143,40	0	<i>Divergência</i>	Modo 1
0,4	128,52	0	<i>Divergência</i>	Modo 1
0,5	117,41	0	<i>Divergência</i>	Modo 1
0,6	111,79	0	<i>Divergência</i>	Modo 2
0,7	101,68	0	<i>Divergência</i>	Modo 1
0,8	95,93	0	<i>Divergência</i>	Modo 1
0,9	90,87	0	<i>Divergência</i>	Modo 1

Tabela 8: Simulação 6.

$\ell_2$	$u_{cr}$	$Re(\omega_{cr})$	$\delta_{cr}$	Instabilidade	Modo
0,1	25,46	1030,05	0,4	<i>Flutter</i>	Modo 4
0,2	24,45	353,18	0,3	<i>Flutter</i>	Modo 2
0,3	25,12	25,24	0,4	<i>Flutter</i>	Modo 2



## 6 CONCLUSÕES

### 6.1 Aspectos gerais

Dada a natureza do problema tecnológico que motivou as investigações do presente trabalho, foi desenvolvido um modelo físico e matemático de baixa hierarquia para o estudo da estabilidade dinâmica deste sistema. O problema de engenharia real foi formatado para análise a partir de hipóteses simplificadoras, que o transformaram em uma viga de Euler-Bernoulli com uma extremidade engastada e a outra livre, e com fluxo de fluido incompressível por ele com sentido da extremidade engastada para a livre; coaxialmente, há um tubo externo, de maior diâmetro e menor comprimento, que forma uma região anular com a passagem de um escoamento compressível de direção contrária ao fluxo interno; circundando ambos os tubos, há camadas de fluidos imiscíveis entre si ordenadas por suas massas específicas, ficando os fluidos mais densos na região inferior, e os menos densos na região superior. O objetivo geral, além do desenvolvimento dos modelos teóricos, foi o de realizar simulações com determinados conjuntos de parâmetros físicos a fim de testar o modelo desenvolvido e também gerar mais dados para a literatura especializada em escoamento axial em torno de estruturas esbeltas.

Duas soluções numéricas foram propostas, utilizando o método das diferenças finitas e o método híbrido de Fourier-Galerkin. O processo computacional de solução, como foi visto, consistiu em “transformar” uma viga horizontal de Euler-Bernoulli, cujas frequências naturais são de amplo conhecimento, no sistema tubular proposto. Essa transformação é feita de maneira gradual através da adição de cada termo de 4.66 em 3.1 até que elas se equivalham. Para a obtenção das novas frequências complexas quando um novo termo de 4.66 é adicionado em 3.1, utilizou-se o método das secantes. Este método necessita de uma estimativa inicial, que precisa ser razoável para que haja convergência para o valor correto. Como estimativa inicial, utilizou-se sempre as frequências complexas calculadas no termo adicionado anteriormente, sendo que para a primeira adição de termo, as próprias frequências naturais da viga horizontal são utilizadas. As velocidades

de escoamento, por serem os parâmetros de maior impacto na dinâmica do problema, são deixadas por último. Após o cálculo das frequências complexas do sistema para as velocidades de trabalho, foi exposto o último procedimento de análise, que consistiu em variar as cotas de nível dos fluidos que circundam a estrutura tubular.

Foi verificado ao longo dos estudos realizados que os comprimentos dos tubos interno e externo têm grande relevância no comportamento dinâmico do sistema, uma vez que a variação deles trazem mudanças consideráveis na magnitude da vazão crítica e no modo de perda de estabilidade. Também foram realizadas simulações de remoção de fluidos, que demonstraram teoricamente haver a possibilidade de gerar perda de estabilidade, mas com um impacto muito menor na resposta dinâmica se comparado com a variação da velocidade de escoamento ou dos comprimentos do tubos. A remoção de fluido equivale a mudar, de maneira quase-estática, a distribuição das propriedades do sistema (densidade, viscosidade etc.), que, por conseguinte, mudam as forças viscosas, inerciais etc. ao longo da direção longitudinal do tubo flexível, e por isso pode vir a desestabilizar o sistema.

## 6.2 Discussão qualitativa de resultados

As conclusões gerais que se seguem são baseadas em uma quantidade reduzida de simulações e parâmetros físicos. Por essa razão, elas não podem ser generalizadas e tomadas em absoluto. São válidas, portanto, ao conjunto de resultados gerados na presente investigação. Não constituiu como objetivo deste trabalho uma descrição ampla e exaustiva do comportamento qualitativo deste tipo de sistema. Ao que se observou a partir dos dados levantados, qualquer conclusão deve seguir da realização prévia de uma simulação. Não obstante, algumas tendências de comportamento foram notadas. A) Para um dado comprimento de tubo interno, o aumento sucessivo do comprimento do tubo externo tende a reduzir a velocidade crítica de escoamento e a frequência de oscilação. B) Quanto mais curto for o tubo interno, maior é a tendência dele de perder a instabilidade por *flutter*. C) Caso o tubo seja longo, a perda de estabilidade por *flutter* tende a ocorrer para menores comprimentos do tubo externo, e a partir de um limiar de comprimento do tubo externo, a perda de estabilidade passa a ser por divergência. D) Quanto mais longo for o tubo interno, maior a tendência dele de perder estabilidade por divergência. Isso se deve ao fato de a divergência ser análoga à flambagem de colunas, e os coeficientes de  $\partial^2 \eta / \partial \xi^2$  da equação adimensionalizada do movimento serem análogos à carga compressiva (flambagem é bastante comum em estruturas longas e esbeltas).

Em relação ao procedimento de remoção de fluido, as tendências a seguir foram no-

tadas: A) O modelo teórico desenvolvido no presente trabalho prevê ser possível a perda de estabilidade neste caso. B) O impacto na estabilidade dinâmica da variação espacial quase-estaticamente das propriedades físicas dos fluidos circundantes é muito menor se comparado à variação da velocidade de escoamento ou comprimentos dos tubos, isto é, o sistema é muito menos sensível a este tipo de variação. C) As viscosidades dos fluidos circundantes exercem papéis fundamentais na possibilidade ou não de ocorrência de perda de estabilidade. D) Em caso de fluidos com massas específicas similares, caso haja diferença considerável de viscosidade entre eles, a posição em que se encontra o mais e o menos viscoso terá relevância na ocorrência ou não de perda de estabilidade. E) Na hipótese do fluido menos viscoso ter maior massa específica, a possibilidade de perda de estabilidade é maior. A estas observações obtidas a partir das simulações atribui-se explicação à capacidade dissipativa de energia que fluidos viscosos têm. Tubos em contato com fluidos mais viscosos tem uma menor tendência de perda de estabilidade devido às forças dissipativas de energia. Todavia, não se deve tomar este fato como definitivo sobre um sistema. Ressalta-se que se trata de um modelo com muitos parâmetros e por isso a mera análise de parâmetros isolados não permite conclusões a priori. O sistema deve ser analisado como um todo, a despeito de certas tendências.

### 6.3 Trabalhos futuros

A realização de experimentos controlados em laboratório é de extrema importância para a proposição de pontos de melhoria e validação do modelo teórico proposto. A realização de simulações de interação fluido-estrutura de alta hierarquia seria uma alternativa relevante também no processo de validação.

A proposição de outras configurações de simulação, como por exemplo o estudo da variação do diâmetro hidráulico da região anular, estudo de escoamento parado na região anular e também escoamentos interno e externo independentes (no presente trabalho ambos são dependentes), traria contribuições relevantes para a expansão de dados da literatura especializada.

Não foi objetivo deste trabalho a produção de algoritmos computacionais otimizados para a obtenção dos adimensionais críticos e geração dos diagramas de Argand a partir dos métodos numéricos cá desenvolvidos, tarefa que ficará para a posterioridade. Uma comparação de desempenho entre os métodos, a fim de buscar a otimização de custo computacional, também seria de grande relevância.

## APÊNDICE A

Neste apêndice é deduzida a equação que descreve o movimento tridimensional de um escoamento compressível, invíscido, irrotacional e isentrópico em regime não-permanente.

O primeiro passo é aplicar a Equação da continuidade [A.1](#) que é obtida a partir do princípio de conservação de massa, sendo  $V$  a velocidade e  $\rho$  a densidade do fluido. Portanto:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + V \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot V = 0 \quad (\text{A.1})$$

Dado que o escoamento é considerado irrotacional, é possível definir o potencial de velocidades  $\Psi$ , tal que

$$V = \nabla \Psi \quad (\text{A.2})$$

Em assim sendo, a Equação da Quantidade de Movimento [A.3](#) pode ser obtida, na qual  $p$  é a pressão e  $B$  a força de corpo (no caso a força da gravidade).

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \Psi) + \nabla \left( \frac{V \cdot V}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + B \quad (\text{A.3})$$

Multiplicando cada elemento da Equação [A.3](#) pelo diferencial  $dx_i$  (notação de Einstein) e somando os valores obtidos, tem-se a Equação [A.4](#), na qual a força de corpo  $B$  é substituída por  $-\nabla G$ .

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} dx_i \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{V \cdot V}{2} \right) dx_i = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} dx_i - \frac{\partial G}{\partial x_i} dx_i \quad (\text{A.4})$$

Simplificando a Equação [A.4](#) obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial t} (d\Psi) + d \left( \frac{V \cdot V}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} dp - dG, \quad (\text{A.5})$$

que ao ser integrada gera a Equação A.6, chamada Equação de Bernoulli para regime não-permanente.

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{V \cdot V}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + G = f(t) \quad (\text{A.6})$$

Derivando a Equação A.6 em relação ao tempo, chega-se a

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{dp}{\rho} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{V \cdot V}{2} + G \right). \quad (\text{A.7})$$

Dado que o escoamento é isentrópico, a relação entre pressão e densidade dada pela Equação A.8 é válida.

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = k, \quad (\text{A.8})$$

sendo  $k$  um valor constante.

Partindo da Equação A.8 é possível demonstrar a igualdade dada por

$$\int \frac{dp}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma-1} k \rho^{\gamma-1}, \quad (\text{A.9})$$

que, por conseguinte, induz à equação abaixo, sendo  $c$  a velocidade do som.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{dp}{\rho} = \frac{c^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (\text{A.10})$$

Substituindo a Equação A.10 em A.7, obtém-se

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{V \cdot V}{2} + G \right). \quad (\text{A.11})$$

Após aplicação do operador gradiente na Equação A.6 e substituição das Equações A.8, A.9 e A.2, produz-se

$$\frac{c^2}{\rho} \nabla \rho = - \left[ \frac{\partial V}{\partial t} + \nabla \left( \frac{V \cdot V}{2} \right) + \nabla G \right] \quad (\text{A.12})$$

Fazendo o produto escalar da Equação A.12 com o vetor  $V$ , chega-se à equação

$$\frac{V \cdot \nabla \rho}{\rho} = -\frac{1}{c^2} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{V \cdot V}{2} \right) + V \cdot \nabla \left( \frac{V \cdot V}{2} \right) + V \cdot \nabla G \right] \quad (\text{A.13})$$

Ao substituir as Equações A.11 e A.13 na Equação A.1 e lembrando que  $\nabla \cdot V = \nabla^2 \Psi$ , chega-se a pretendida equação tridimensional do escoamento compressível não-

permanente.

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \left[ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} (V \cdot V) + V \cdot \nabla \left( \frac{V \cdot V}{2} + G \right) \right] = 0 \quad (\text{A.14})$$

## APÊNDICE B

Neste apêndice o procedimento para obtenção da pressão de perturbação é realizado e baseia-se em [Chan \(1984\)](#).

Dado um escoamento compressível de um fluido invíscido, em regime não-permanente, considerado irrotacional e isentrópico, é possível definir um potencial de velocidade  $\Psi$  tal que a Equação [A.2](#) é válida.

O potencial de velocidade (Equação [B.1](#)) é constituído por dois elementos, sendo o primeiro permanente (não varia com o tempo), e o segundo, que é gerado por pequenas perturbações no escoamento, e de carácter não-permanente. Substituindo a Equação [B.1](#) em [A.2](#), obtém-se [B.2](#).

$$\Psi = -U_o x + \Phi \quad (\text{B.1})$$

$$V = \left( -U_o + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \tilde{i} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \tilde{\theta} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \tilde{r} \quad (\text{B.2})$$

De maneira análoga, é possível definir a pressão estática do escoamento

$$p = p_o + \bar{p}, \quad (\text{B.3})$$

composta pelo termo em estado permanente  $p_o$ , e a pressão de perturbação  $\bar{p}$ .

Aplicando a Equação de Bernoulli [B.4](#) no escoamento proposto, é possível relacionar o potencial de velocidade e a pressão estática, tal que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gx = \frac{p_s}{\rho}, \quad (\text{B.4})$$

na qual  $p_s$  é a pressão de estagnação.

Dado que se trabalha aqui com a hipótese de pequenas perturbações, a velocidade ao quadrado que aparece na Equação [B.4](#) pode ser simplificada ao reter-se somente os termos

lineares, como apresentado abaixo.

$$V^2 = U_o^2 - 2U_o \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (\text{B.5})$$

Assumindo que o escoamento não-perturbado também segue a Equação de Bernoulli, obtém-se

$$\frac{p_o}{\rho} + \frac{U_o^2}{2} + gz = \frac{p_s}{\rho}. \quad (\text{B.6})$$

Substituindo as Equações B.5 e B.6 em B.4, produz-se a Equação B.7 que permite a obtenção da pressão de perturbação uma vez que o potencial de perturbação seja conhecido.

$$\bar{p} = -\rho \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} - U_o \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \quad (\text{B.7})$$



## APÊNDICE C

Este apêndice trata da solução de parte da 4.22 utilizando o método da separação de variáveis.

Propõe-se, inicialmente, uma solução de  $\phi(x, r', \theta)$  que se dê como uma multiplicação de três funções que dependam, cada uma, de somente uma das três variáveis de  $\phi$ , tal como pode ser visto na Equação abaixo.

$$\phi(x, r', \theta) = X(x) R(r') \Theta(\theta) \quad (\text{C.1})$$

Fazendo a divisão de todo o lado esquerdo da 4.22 por  $(1 - M^2)$ , obtém-se C.2, cujos coeficientes  $a$  e  $k^2$  são dados por C.3 e C.4, respectivamente.

$$\nabla^2 \phi + a \frac{\partial \phi}{\partial x} + k^2 \phi = 0 \quad (\text{C.2})$$

$$a = \frac{4iM^2\Omega/U_o + g/c^2}{1 - M^2} \quad (\text{C.3})$$

$$k^2 = \frac{U_o(1 - 4M^2)\Omega^2 + gM^2i\Omega}{U_o c^2 (1 - M^2)^2} \quad (\text{C.4})$$

Com a substituição da Equação C.1 na Equação 4.22, e posteriormente multiplicando o resultado por  $r'^2/(XR\Theta)$ , encontra-se C.5, na qual tem-se a separação concluída.

$$\frac{r'^2}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r'^2} + \frac{r'}{R} \frac{\partial R}{\partial r'} + \frac{1}{\theta} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} + \frac{r'^2}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{ar'^2}{X} \frac{\partial X}{\partial x} + k^2 r'^2 = 0 \quad (\text{C.5})$$

Uma vez que a solução precisa ser periódica em  $\theta$ , há de ser observado o resultado negativo como se segue abaixo.

$$\frac{1}{\theta} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} = -m^2 \quad (\text{C.6})$$

Substituindo C.6 em C.5, tem-se

$$\frac{r'^2}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r'^2} + \frac{r'}{R} \frac{\partial R}{\partial r'} - m^2 + \frac{r'^2}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{ar'^2}{X} \frac{\partial X}{\partial x} + k^2 r'^2 = 0. \quad (\text{C.7})$$

E ao dividir C.7 por  $r'^2$  produz-se

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r'^2} + \frac{1}{Rr'} \frac{\partial R}{\partial r'} - \frac{m^2}{r'} + \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{ar'^2}{X} \frac{\partial X}{\partial x} + k^2 = 0. \quad (\text{C.8})$$

Para que haja consistência física, a solução em  $x$  não pode ser periódica, por essa razão o resultado deve ser positivo tal como se segue na Equação C.9.

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{a}{X} \frac{\partial X}{\partial x} = +2a^2 \quad (\text{C.9})$$

E ao substituir C.9 em C.8, tem-se

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r'^2} + \frac{1}{Rr'} \frac{\partial R}{\partial r'} - \frac{m^2}{r'} + 2a^2 + k^2 = 0, \quad (\text{C.10})$$

que ao ser multiplicada por  $R$  gera

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'} \frac{\partial R}{\partial r'} + \left( \kappa - \frac{m^2}{r'} \right) R = 0, \quad (\text{C.11})$$

sendo  $\kappa = 2a^2 + k^2$ . A Equação C.11 é uma forma de se apresentar a equação de Bessel, cuja solução é de conhecimento comum e por este motivo não será desenvolvida aqui.

Segue-se ao longo do desenvolvimento aqui presente os mesmos passos tomados por [Ostoja-Starzewski \(1982\)](#), fazendo as adaptações necessárias. Uma vez que se trata de um movimento de onda, a solução geral adotada para a Equação C.11 será as funções de Bessel de terceiro tipo, também chamadas de funções de Hankel. Logo, a solução geral é dada por

$$R(\kappa_n r) = C_1 H_1^{(1)}(\kappa_n r) + C_2 H_1^{(2)}(\kappa_n r), \quad (\text{C.12})$$

sendo  $C_1$  e  $C_2$  constantes de integração. A coordenada original  $r$  é resgatada através da igualdade presente na Equação 4.19, que permite definir  $\kappa_n = \kappa \sqrt{1 - M^2}$ . As funções de Hankel são combinações das equações de Bessel de primeira ordem ( $J_1$ ) e segunda ordem ( $Y_1$ ), obedecendo as relações

$$H_1^{(1)} = J_1(\kappa_n r) + iY_1(\kappa_n r), \quad (\text{C.13})$$

$$H_1^{(2)} = J_1(\kappa_n r) - iY_1(\kappa_n r). \quad (\text{C.14})$$

É trivial verificar que a solução para a Equação C.9 é  $X(x) = e^{ax}$ . Substituindo-a em C.1e, após isso, substituindo o resultado obtido na Equação 4.21, encontra-se

$$\Phi(x, r', \theta, t) = e^{i\Omega t} e^{(i\mu x + a)x} R(r') \Theta(\theta). \quad (\text{C.15})$$

Os passos seguintes para determinação das funções  $\Theta(\theta)$  e  $R(r')$  são realizados na Seção 4 para uma melhor experiência do leitor. Não obstante, apresenta-se aqui a fórmula necessária para a operação de derivação de uma função do tipo apresentado na Equação C.12 (OSTOJA-STARZEWSKI, 1982).

$$\frac{d}{dx} [r^p H_p^{(\cdot)}(\kappa_n r)] = \kappa_n r^p H_{p-1}^{(\cdot)}(\kappa_n r) \quad (\text{C.16})$$

## APÊNDICE D

Este apêndice introduz, através da dedução da fórmula de aproximação da derivada parcial de quarta ordem com acurácia de  $O(h^6)$ , o procedimento padrão para obtenção dos esquemas de diferenças finitas centrais utilizados na solução numérica do problema proposto.

Considerando a malha uniforme conforme a figura abaixo, é possível realizar expansões em séries de Taylor para cada valor da função de  $Y$  em torno do ponto  $k$ :

$$Y_{k+i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ih)^n}{n!} \frac{d^n Y_k}{d\xi^n}, \quad i = -\infty, \dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots, \infty, \quad (\text{D.1})$$

sendo  $k$  o índice do ponto de interesse e  $i$  o índice de adjacência.

Para a obtenção da ordem de acurácia desejada  $O(h^6)$ , é necessário fazer o truncamento da série infinita no termo adequado, que neste caso é a décima derivada, que é proporcional a  $h^{10}$ , uma vez que a derivada quarta, que é a aproximação de interesse, é proporcional a  $h^4$ .

Somando as expansões para os dois pontos mais próximos de  $Y_k$ , encontra-se a equação

$$Y_{k+1} + Y_{k-1} = 2Y_k + \frac{2h^2}{2!} \frac{d^2 Y_k}{d\xi^2} + \frac{2h^4}{4!} \frac{d^4 Y_k}{d\xi^4} + \frac{2h^6}{6!} \frac{d^6 Y_k}{d\xi^6} + \frac{2h^8}{8!} \frac{d^8 Y_k}{d\xi^8} + \frac{2h^{10}}{10!} \frac{d^{10} Y_k}{d\xi^{10}}, \quad (\text{D.2})$$

da qual é necessário eliminar 4 termos: as derivadas segunda, sexta, oitava e décima. Para isso, outras três equações são demandadas para que as combinações lineares pertinentes sejam possíveis. O mais conveniente é selecionar as expansões mais próximas possíveis do

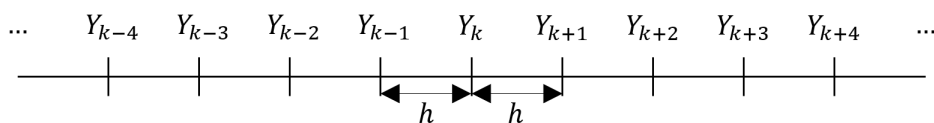


Figura 11: Malha unidimensional uniforme.

ponto  $Y_k$ , logo

$$Y_{k+2} + Y_{k-2} = 2Y_k + \frac{8h^2}{2!} \frac{d^2 Y_k}{d\xi^2} + \frac{32h^4}{4!} \frac{d^4 Y_k}{d\xi^4} + \frac{128h^6}{6!} \frac{d^6 Y_k}{d\xi^6} + \frac{512h^8}{8!} \frac{d^8 Y_k}{d\xi^8} + \frac{2048h^{10}}{10!} \frac{d^{10} Y_k}{d\xi^{10}}, \quad (\text{D.3})$$

$$Y_{k+3} + Y_{k-3} = 2Y_k + \frac{18h^2}{2!} \frac{d^2 Y_k}{d\xi^2} + \frac{162h^4}{4!} \frac{d^4 Y_k}{d\xi^4} + \frac{1458h^6}{6!} \frac{d^6 Y_k}{d\xi^6} + \frac{13122h^8}{8!} \frac{d^8 Y_k}{d\xi^8} + \frac{118098h^{10}}{10!} \frac{d^{10} Y_k}{d\xi^{10}}, \quad (\text{D.4})$$

$$Y_{k+4} + Y_{k-4} = 2Y_k + \frac{32h^2}{2!} \frac{d^2 Y_k}{d\xi^2} + \frac{512h^4}{4!} \frac{d^4 Y_k}{d\xi^4} + \frac{8192h^6}{6!} \frac{d^6 Y_k}{d\xi^6} + \frac{131072h^8}{8!} \frac{d^8 Y_k}{d\xi^8} + \frac{2097152h^{10}}{10!} \frac{d^{10} Y_k}{d\xi^{10}}. \quad (\text{D.5})$$

Após o processo de combinação linear para eliminação de termos indesejados, é produzido a aproximação de sexta ordem da derivada quarta

$$\frac{d^4 Y}{d\xi^4} \cong \frac{7Y_{k+4} - 96Y_{k+3} + 676Y_{k+2} - 1952Y_{k+1} + 2730Y_k}{240\Delta\xi^4} + \frac{-1952Y_{k-1} + 676Y_{k-2} - 96Y_{k-3} + 7Y_{k-4}}{240\Delta\xi^4} + O(h^6). \quad (\text{D.6})$$

Todas as aproximações das demais derivadas podem ser deduzidas de maneira análoga.

## APÊNDICE E

Neste apêndice é introduzido brevemente o método híbrido de Galerkin-Fourier. Para maiores detalhes sobre o método recomenda-se o trabalho de [Hannoyer \(1972\)](#).

Dado uma equação diferencial linear da forma de

$$\sum_{r=0}^4 f_r(\xi, \omega) \frac{d^r Y(\xi)}{d\xi^r} = 0, \quad (\text{E.1})$$

com as condições de contorno

$$\sum_{r=0}^3 g_r^j(\omega) \frac{d^r Y(\xi_j)}{d\xi^r} = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad \xi_1 = \xi_2 = 0, \quad \xi_3 = \xi_4 = 1, \quad (\text{E.2})$$

tem-se que uma forma de resolver numericamente este tipo de problema é através de séries de funções. As séries de Fourier são ótimas candidatas para o caso, uma vez que são facilmente diferenciáveis e satisfazem as condições de contorno, bastando que se garanta que elas sejam contínuas no domínio de análise através do ajuste do período das funções. Selecionando como período o valor 2, obtém-se

$$Y(\xi) = \sum_{\bar{n}=-\infty}^{\infty} a_{\bar{n}} \frac{e^{i\bar{n}\pi\xi}}{\sqrt{2}}, \quad (\text{E.3})$$

que pode ser reescrita através da utilização da fórmula de Euler, logo

$$Y(\xi) = \sum_{\bar{n}=-\infty}^{\infty} a_{\bar{n}} \frac{\cos \bar{n}\pi\xi + i \sin \bar{n}\pi\xi}{\sqrt{2}}. \quad (\text{E.4})$$

É conveniente para fins de implementação do método numérico alterar o domínio  $\bar{n}[-\infty, \infty]$  para  $\bar{n}[0, \infty]$ , que produz

$$Y(\xi) = \sum_{\bar{n}=0}^{\infty} \frac{\beta_{2\bar{n}-1} \sin \bar{n}\pi\xi + \beta_{2\bar{n}} \cos \bar{n}\pi\xi}{\sqrt{2}}, \quad (\text{E.5})$$

sendo  $\beta_{2\bar{n}-1} = a_{\bar{n}} + a_{-\bar{n}}$  e  $\beta_{2\bar{n}} = i(a_{\bar{n}} - a_{-\bar{n}})$  com  $\beta_0 = a_0$  e  $\beta_{-1} = 0$ . Trucando a série

infinita em um valor  $N$  conveniente, gera-se a aproximação

$$Y(\xi) \cong \bar{Y}(\xi) = \sum_{\bar{n}=0}^N \frac{\beta_{2\bar{n}-1} \sin \bar{n}\pi\xi + \beta_{2\bar{n}} \cos \bar{n}\pi\xi}{\sqrt{2}}, \quad (\text{E.6})$$

Quando a aproximação E.5 é substituída no lado esquerdo da equação diferencial E.1, é bastante provável que o resultado não seja igual a zero, mas sim igual a um resíduo  $D(\xi, \omega)$ . Integrando este resíduo ao longo do domínio  $0 \leq \xi \leq 1$ , ponderado pela função  $\sqrt{2} \exp ip\pi\xi$ , se é obtida

$$d_p = \int_0^1 \sqrt{2} D(\xi, \omega) e^{ip\pi\xi} d\xi, \quad p \in [-\infty, \infty], \quad (\text{E.7})$$

na qual

$$D(\xi, \omega) = \sum_{r=0}^4 f_r(\xi, \omega) \frac{d^r}{d\xi^r} \sum_{\bar{n}=0}^N \frac{\beta_{2\bar{n}-1} \sin \bar{n}\pi\xi + \beta_{2\bar{n}} \cos \bar{n}\pi\xi}{\sqrt{2}}, \quad (\text{E.8})$$

ou em termos de  $a_{\bar{n}}$  e  $a_{-\bar{n}}$

$$D(\xi, \omega) = \sum_{r=0}^4 f_r(\xi, \omega) \frac{d^r}{d\xi^r} \sum_{\bar{n}=0}^N \frac{a_{\bar{n}} e^{i\bar{n}\pi\xi} + a_{-\bar{n}} e^{-i\bar{n}\pi\xi}}{\sqrt{2}}. \quad (\text{E.9})$$

A correspondência entre os valores de  $d_p$  e os valores de  $a_n$  é dada por uma matriz complexa. Entretanto, é possível obter tal correspondência através de uma matriz real, que pode levar a autovalores reais, por meio das definições que seguirão abaixo.

Substituindo o domínio  $p \in [-\infty, \infty]$  por  $p \in [0, \infty]$  e utilizando a fórmula de Euler na equação E.7, produz-se

$$D_{2p} = d_{+p} + d_{-p} = \int_0^1 2\sqrt{2} D(\xi, \omega) \cos p\pi\xi d\xi, \quad (\text{E.10})$$

sendo

$$d_{+p} = \int_0^1 \sqrt{2} D(\xi, \omega) (\cos p\pi\xi + i \sin p\pi\xi) d\xi \quad (\text{E.11})$$

e

$$d_{-p} = \int_0^1 \sqrt{2} D(\xi, \omega) (\cos p\pi\xi - i \sin p\pi\xi) d\xi. \quad (\text{E.12})$$

Calculando  $D_{2p-1} = i(d_{-p} - d_{+p})$  encontra-se

$$D_{2p-1} = \int_0^1 2\sqrt{2} D(\xi, \omega) \sin p\pi\xi d\xi, \quad (\text{E.13})$$

e utilizando a propriedade de diferenciação de  $\bar{Y}(\xi)$

$$\frac{d^r \bar{Y}}{d\xi^r} = \sum_{\bar{n}=0}^N \left[ (i\bar{n}\pi)^r a_{\bar{n}} \frac{e^{i\bar{n}\pi\xi}}{\sqrt{2}} + (-1)^r (i\bar{n}\pi)^r a_{-\bar{n}} \frac{e^{-i\bar{n}\pi\xi}}{\sqrt{2}} \right] \quad (\text{E.14})$$

torna-se possível reescrever as equações E.10 e E.13:

$$D_{2p} = \sum_{r=0}^4 \sum_{\bar{n}=0}^N C_{p\bar{n}}^r \quad (\text{E.15})$$

$$D_{2p-1} = \sum_{r=0}^4 \sum_{\bar{n}=0}^N S_{p\bar{n}}^r \quad (\text{E.16})$$

sendo

$$C_{p\bar{n}}^r = (i\bar{n}\pi)^r \left\{ [a_{\bar{n}} + (-1)^r a_{-\bar{n}}] \int_0^1 2f_r(\xi, \omega) \cos p\pi\xi \cos \bar{n}\pi\xi d\xi \right. \\ \left. + i [a_{\bar{n}} - (-1)^r a_{-\bar{n}}] \int_0^1 2f_r(\xi, \omega) \cos p\pi\xi \sin \bar{n}\pi\xi d\xi \right\} \quad (\text{E.17})$$

e

$$S_{p\bar{n}}^r = (i\bar{n}\pi)^r \left\{ [a_{\bar{n}} + (-1)^r a_{-\bar{n}}] \int_0^1 2f_r(\xi, \omega) \sin p\pi\xi \cos \bar{n}\pi\xi d\xi \right. \\ \left. + i [a_{\bar{n}} - (-1)^r a_{-\bar{n}}] \int_0^1 2f_r(\xi, \omega) \sin p\pi\xi \sin \bar{n}\pi\xi d\xi \right\}. \quad (\text{E.18})$$

É possível verificar dois casos a depender do valor de  $r$ . Caso  $r = 2s$ :

$$i^r [a_{\bar{n}} + (-1)^r a_{-\bar{n}}] = (-1)^s \beta_{2\bar{n}} \quad (\text{E.19})$$

e

$$i^{r+1} [a_{\bar{n}} - (-1)^r a_{-\bar{n}}] = (-1)^s \beta_{2\bar{n}-1}, \quad (\text{E.20})$$

logo

$$C_{p\bar{n}}^r = (-1)^s (\bar{n}\pi)^r [\beta_{2\bar{n}} \text{FCC}_{p\bar{n}}^r + \beta_{2\bar{n}-1} \text{FSC}_{\bar{n}p}^r] \quad (\text{E.21})$$

e

$$S_{p\bar{n}}^r = (-1)^s (\bar{n}\pi)^r [\beta_{2\bar{n}} \text{FSC}_{p\bar{n}}^r + \beta_{2\bar{n}-1} \text{FSS}_{\bar{n}p}^r]. \quad (\text{E.22})$$

E caso  $r = 2s + 1$ :

$$i^r [a_{\bar{n}} + (-1)^r a_{-\bar{n}}] = (-1)^s \beta_{2\bar{n}-1} \quad (\text{E.23})$$

e

$$i^{r+1} [a_{\bar{n}} - (-1)^r a_{-\bar{n}}] = (-1)^s \beta_{2\bar{n}}, \quad (\text{E.24})$$



logo

$$C_{p\bar{n}}^r = (-1)^s (\bar{n}\pi)^r [\beta_{2\bar{n}-1} FCC_{p\bar{n}}^r - \beta_{2\bar{n}} FSC_{\bar{n}p}^r] \quad (\text{E.25})$$

e

$$S_{p\bar{n}}^r = (-1)^s (\bar{n}\pi)^r [\beta_{2\bar{n}-1} FSC_{p\bar{n}}^r - \beta_{2\bar{n}} FSS_{\bar{n}p}^r], \quad (\text{E.26})$$

sendo que

$$FCC_{p\bar{n}}^r = \int_0^1 2f_r(\xi, \omega) \cos p\pi\xi \cos \bar{n}\pi\xi d\xi, \quad (\text{E.27})$$

$$FSC_{p\bar{n}}^r = \int_0^1 2f_r(\xi, \omega) \sin p\pi\xi \cos \bar{n}\pi\xi d\xi, \quad (\text{E.28})$$

$$FSC_{\bar{n}p}^r = \int_0^1 2f_r(\xi, \omega) \sin \bar{n}\pi\xi \cos p\pi\xi d\xi, \quad (\text{E.29})$$

e

$$FSS_{p\bar{n}}^r = \int_0^1 2f_r(\xi, \omega) \sin p\pi\xi \sin \bar{n}\pi\xi d\xi. \quad (\text{E.30})$$

## E.1 Montagem da matriz para obtenção das frequências do sistema

Dadas as condições de contorno do sistema:

$$\bar{Y}|_{\xi=0} = 0 \Rightarrow \sum_{\bar{n}=0}^N \beta_{2\bar{n}} = 0, \quad (\text{E.31})$$

$$\left. \frac{d\bar{Y}}{d\xi} \right|_{\xi=0} = 0 \Rightarrow \sum_{\bar{n}=0}^N \bar{n}\pi \beta_{2\bar{n}-1} = 0, \quad (\text{E.32})$$

$$\left. \frac{d^2\bar{Y}}{d\xi^2} \right|_{\xi=1} = 0 \Rightarrow \sum_{\bar{n}=0}^N -(\bar{n}\pi)^2 \cos \bar{n}\pi \beta_{2\bar{n}} = 0, \quad (\text{E.33})$$

$$\left. \frac{d^3\bar{Y}}{d\xi^3} \right|_{\xi=1} = 0 \Rightarrow \sum_{\bar{n}=0}^N -(\bar{n}\pi)^3 \cos \bar{n}\pi \beta_{2\bar{n}-1} = 0, \quad (\text{E.34})$$

e os conjuntos de equações homogêneas

$$D_{2p} = \sum_{\bar{n}=0}^N \left\{ [FCC_{p\bar{n}}^0 - \bar{n}\pi FSC_{\bar{n}p}^1 - (\bar{n}\pi)^2 FCC_{p\bar{n}}^2 + (\bar{n}\pi)^4 FCC_{p\bar{n}}^4] \beta_{2\bar{n}} + [FSC_{\bar{n}p}^0 + \bar{n}\pi FCC_{p\bar{n}}^1 - (\bar{n}\pi)^2 FSC_{\bar{n}p}^2 + (\bar{n}\pi)^4 FSC_{\bar{n}p}^4] \beta_{2\bar{n}-1} \right\} = 0 \quad (\text{E.35})$$

e

$$D_{2p-1} = \sum_{\bar{n}=0}^N \left\{ \left[ FSC_{p\bar{n}}^0 - \bar{n}\pi FSS_{p\bar{n}}^1 - (\bar{n}\pi)^2 FSC_{p\bar{n}}^2 + (\bar{n}\pi)^4 FSC_{p\bar{n}}^4 \right] \beta_{2\bar{n}} \right. \\ \left. + \left[ FSS_{p\bar{n}}^0 + \bar{n}\pi FSC_{p\bar{n}}^1 - (\bar{n}\pi)^2 FSS_{p\bar{n}}^2 + (\bar{n}\pi)^4 FSS_{p\bar{n}}^4 \right] \beta_{2\bar{n}-1} \right\} = 0, \quad (\text{E.36})$$

torna-se necessário avaliar as seguintes integrais:

$$\int_0^1 2 \cos p\pi\xi \cos \bar{n}\pi\xi d\xi, \quad (\text{E.37})$$

$$\int_0^1 2 \sin p\pi\xi \cos \bar{n}\pi\xi d\xi, \quad (\text{E.38})$$

$$\int_0^1 2 \sin \bar{n}\pi\xi \cos p\pi\xi d\xi, \quad (\text{E.39})$$

$$\int_0^1 2 \sin p\pi\xi \sin \bar{n}\pi\xi d\xi, \quad (\text{E.40})$$

$$\int_0^1 2\xi \cos p\pi\xi \cos \bar{n}\pi\xi d\xi, \quad (\text{E.41})$$

$$\int_0^1 2\xi \sin p\pi\xi \cos \bar{n}\pi\xi d\xi, \quad (\text{E.42})$$

$$\int_0^1 2\xi \sin \bar{n}\pi\xi \cos p\pi\xi d\xi, \quad (\text{E.43})$$

$$\int_0^1 2\xi \sin p\pi\xi \sin \bar{n}\pi\xi d\xi, \quad (\text{E.44})$$

$$\int_0^1 2H_{a,b}^\xi \cos p\pi\xi \cos \bar{n}\pi\xi d\xi, \quad (\text{E.45})$$

$$\int_0^1 2H_{a,b}^\xi \sin p\pi\xi \cos \bar{n}\pi\xi d\xi, \quad (\text{E.46})$$

$$\int_0^1 2H_{a,b}^\xi \sin \bar{n}\pi\xi \cos p\pi\xi d\xi, \quad (\text{E.47})$$

$$\int_0^1 2H_{a,b}^\xi \sin p\pi\xi \sin \bar{n}\pi\xi d\xi, \quad (\text{E.48})$$

$$\int_0^1 2H_{a,b}^\xi \xi \cos p\pi\xi \cos \bar{n}\pi\xi d\xi, \quad (\text{E.49})$$

$$\int_0^1 2H_{a,b}^\xi \xi \sin p\pi\xi \cos \bar{n}\pi\xi d\xi, \quad (\text{E.50})$$

$$\int_0^1 2H_{a,b}^\xi \xi \sin \bar{n}\pi\xi \cos p\pi\xi d\xi, \quad (\text{E.51})$$

e

$$\int_0^1 2H_{a,b}^\xi \xi \sin p\pi\xi \sin \bar{n}\pi\xi d\xi, \quad (\text{E.52})$$

que será feito no apêndice F.

Com os conjuntos de equações homogêneas e as aproximações das condições de contorno, torna-se então possível a montagem matricial do sistema de equações  $[A]\{\boldsymbol{\beta}\} = \{\mathbf{0}\}$ , sendo

$A =$

	$n = 0$	$n = 1$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 2$	$\dots$	$\dots$	$n = N$	$n = N$
$BC1$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$BC2$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$BC3$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$BC4$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$p = 0, D_0$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$p = 1, D_2$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$p = 1, D_1$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$p = 2, D_4$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$p = 2, D_3$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$p = 3, D_6$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$p = 3, D_5$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\vdots$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\vdots$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$p = P, D_{2P}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$p = P, D_{2P-1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.

(E.53)

e

$$\boldsymbol{\beta} = \left\{ \begin{array}{c} \beta_0 \\ \beta_2 \\ \beta_1 \\ \beta_4 \\ \beta_3 \\ \beta_6 \\ \beta_5 \\ \beta_8 \\ \beta_7 \\ \beta_{10} \\ \beta_9 \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_{2n} \\ \beta_{2n-1} \end{array} \right\}. \quad (\text{E.54})$$

As quatro primeiras linhas da matriz  $[A]$ ,  $BC1$  a  $BC4$ , são reservadas, respectivamente, para as aproximações das condições de contorno [E.31](#) a [E.34](#). Note-se que para a garantia de que  $[A]$  seja uma matriz quadrada,  $P$  deve ser igual a  $N - 2$ , caso contrário não há a possibilidade de se calcular  $\det[A]$ . As demais linhas da matriz são reservadas para os conjuntos de equações  $D_{2p}$  e  $D_{2p-1}$ . Para solução não-trivial, é condição suficiente que  $\det[A]$  seja zero. Com este caminho é possível obter as frequências  $\omega$  do modelo.

## APÊNDICE F

Este apêndice trata do resultado das integrais E.37 a E.52.

$$\int_0^1 2 \cos p\pi\xi \cos \bar{n}\pi\xi d\xi = \begin{cases} 0, & \text{se } p \neq \bar{n} \\ 1, & \text{se } p = n \text{ e } p \neq 0 \\ 2, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{F.1})$$

$$\int_0^1 2 \sin p\pi\xi \cos \bar{n}\pi\xi d\xi = \begin{cases} 0, & \text{se } \text{mod}(p + \bar{n}, 2) = 0 \\ \frac{2}{(p+\bar{n})\pi} + \frac{2}{(p-\bar{n})\pi}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{F.2})$$

$$\int_0^1 2 \sin \bar{n}\pi\xi \cos p\pi\xi d\xi = \begin{cases} 0, & \text{se } \text{mod}(\bar{n} + p, 2) = 0 \\ \frac{2}{(\bar{n}+p)\pi} + \frac{2}{(\bar{n}-p)\pi}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{F.3})$$

$$\int_0^1 2 \sin p\pi\xi \sin \bar{n}\pi\xi d\xi = \begin{cases} 0, & \text{se } p \neq \bar{n} \\ 1, & \text{se } p = n \text{ e } p \neq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{F.4})$$

$$\int_0^1 2\xi \cos p\pi\xi \cos \bar{n}\pi\xi d\xi = \begin{cases} 1, & \text{se } p = \bar{n} = 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{se } p = \bar{n} \text{ e } p \neq 0 \\ \frac{-2\bar{n}^2(-\cos \bar{n}\pi \cos p\pi + 1) + 2p^2(\cos \bar{n}\pi \cos p\pi - 1)}{\pi^2(\bar{n}^2 - p^2)^2}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{F.5})$$

$$\int_0^1 2\xi \sin p\pi\xi \cos \bar{n}\pi\xi d\xi = \begin{cases} 0, & \text{se } p = \bar{n} = 0 \\ -\frac{1}{\pi(\bar{n}+p)}, & \text{se } p = \bar{n} \text{ e } p \neq 0 \\ \frac{2\bar{n}^2 p\pi \cos \bar{n}\pi \cos p\pi - 2p^3\pi \cos \bar{n}\pi \cos p\pi}{\pi^2(\bar{n}^2 - p^2)^2}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{F.6})$$

$$\int_0^1 2\xi \sin \bar{n}\pi\xi \cos p\pi\xi d\xi = \begin{cases} 0, & \text{se } p = \bar{n} = 0 \\ -\frac{1}{\pi(\bar{n}+p)}, & \text{se } p = \bar{n} \text{ e } p \neq 0 \\ \frac{2p^2\bar{n}\pi \cos \bar{n}\pi \cos p\pi - 2\bar{n}^3\pi \cos \bar{n}\pi \cos p\pi}{\pi^2(\bar{n}^2 - p^2)^2}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{F.7})$$

$$\int_0^1 2\xi \sin p\pi\xi \sin \bar{n}\pi\xi d\xi = \begin{cases} 0, & \text{se } p = \bar{n} = 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{se } p = \bar{n} \text{ e } p \neq 0 \\ \frac{4p\bar{n}(\cos \bar{n}\pi \cos p\pi - 1)}{\pi^2(\bar{n}^2 - p^2)^2}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{F.8})$$

É possível reescrever a equação E.45 como se segue:

$$\int_0^1 2H_{a,b}^\xi \cos p\pi\xi \cos \bar{n}\pi\xi d\xi = \int_a^b 2 \cos p\pi\xi \cos \bar{n}\pi\xi d\xi, \quad (\text{F.9})$$

que tem como resultado para  $p = \bar{n} = 0$

$$\int_a^b 2 \cos p\pi\xi \cos \bar{n}\pi\xi d\xi = 2(b - a), \quad (\text{F.10})$$

para  $p = n$  e  $p \neq 0$

$$\int_a^b 2 \cos p\pi\xi \cos \bar{n}\pi\xi d\xi = \frac{-(ap - bp)}{p} - \frac{\frac{\sin 2p\pi a}{2} - \frac{\sin 2p\pi b}{2}}{p\pi}, \quad (\text{F.11})$$

e para demais casos

$$\int_a^b 2 \cos p\pi\xi \cos \bar{n}\pi\xi d\xi = \frac{2(\bar{n} \cos p\pi b \sin \bar{n}\pi b - p \cos \bar{n}\pi b \sin p\pi b)}{\pi(\bar{n}^2 - p^2)} - \frac{2(\bar{n} \cos p\pi a \sin \bar{n}\pi a - p \cos \bar{n}\pi a \sin p\pi a)}{\pi(\bar{n}^2 - p^2)}. \quad (\text{F.12})$$

É possível reescrever a equação E.46 como se segue:

$$\int_0^1 2H_{a,b}^\xi \sin p\pi\xi \cos \bar{n}\pi\xi d\xi = \int_a^b 2 \sin p\pi\xi \cos \bar{n}\pi\xi d\xi, \quad (\text{F.13})$$

que tem como resultado para  $p = \bar{n} = 0$

$$\int_a^b 2 \sin p\pi\xi \cos \bar{n}\pi\xi d\xi = 0, \quad (\text{F.14})$$

para  $p = n$  e  $p \neq 0$

$$\int_a^b 2 \sin p\pi\xi \cos \bar{n}\pi\xi d\xi = \frac{\cos 2p\pi a - \cos 2p\pi b}{2p\pi}, \quad (\text{F.15})$$

e para demais casos

$$\int_a^b 2 \sin p\pi\xi \cos \bar{n}\pi\xi d\xi = \frac{\cos(\bar{n}-p)\pi b - \cos(\bar{n}-p)\pi a}{\pi(\bar{n}-p)} + \frac{\cos(\bar{n}+p)\pi a - \cos(\bar{n}+p)\pi b}{\pi(\bar{n}+p)}. \quad (\text{F.16})$$

É possível reescrever a equação E.47 como se segue:

$$\int_0^1 2H_{a,b}^\xi \sin \bar{n}\pi\xi \cos p\pi\xi d\xi = \int_a^b 2 \sin \bar{n}\pi\xi \cos p\pi\xi d\xi, \quad (\text{F.17})$$

que tem como resultado para  $p = \bar{n} = 0$

$$\int_a^b 2 \sin \bar{n}\pi\xi \cos p\pi\xi d\xi = 0, \quad (\text{F.18})$$

para  $p = \bar{n}$  e  $p \neq 0$

$$\int_a^b 2 \sin \bar{n}\pi\xi \cos p\pi\xi d\xi = \frac{\cos 2p\pi a - \cos 2p\pi b}{2p\pi}, \quad (\text{F.19})$$

e para demais casos

$$\int_a^b 2 \sin \bar{n}\pi\xi \cos p\pi\xi d\xi = \frac{\cos(p-\bar{n})\pi b - \cos(p-\bar{n})\pi a}{\pi(p-\bar{n})} + \frac{\cos(p+\bar{n})\pi a - \cos(p+\bar{n})\pi b}{\pi(p+\bar{n})}. \quad (\text{F.20})$$

É possível reescrever a equação E.48 como se segue:

$$\int_0^1 2H_{a,b}^\xi \sin p\pi\xi \sin \bar{n}\pi\xi d\xi = \int_a^b 2 \sin p\pi\xi \sin \bar{n}\pi\xi d\xi, \quad (\text{F.21})$$

que tem como resultado para  $p = \bar{n} = 0$

$$\int_a^b 2 \sin p\pi\xi \sin \bar{n}\pi\xi d\xi = 0, \quad (\text{F.22})$$

para  $p = \bar{n}$  e  $p \neq 0$

$$\int_a^b 2 \sin p\pi\xi \sin \bar{n}\pi\xi d\xi = \frac{\frac{\sin 2p\pi a}{2} - \frac{\sin 2p\pi b}{2}}{p\pi} - \frac{\pi(a-b)}{\pi}, \quad (\text{F.23})$$

e para demais casos

$$\int_a^b 2 \sin p\pi\xi \sin \bar{n}\pi\xi d\xi = \frac{2(\bar{n} \cos \bar{n}\pi a \sin p\pi a - p \cos p\pi a \sin \bar{n}\pi a)}{\pi(\bar{n}^2 - p^2)} - \frac{2(\bar{n} \cos \bar{n}\pi b \sin p\pi b - p \cos p\pi b \sin \bar{n}\pi b)}{\pi(\bar{n}^2 - p^2)}. \quad (\text{F.24})$$

É possível reescrever a equação E.49 como se segue:

$$\int_0^1 2H_{a,b}^\xi \cos p\pi\xi \cos \bar{n}\pi\xi d\xi = \int_a^b 2\xi \cos p\pi\xi \cos \bar{n}\pi\xi d\xi, \quad (\text{F.25})$$

que tem como resultado para  $p = \bar{n} = 0$

$$\int_a^b 2\xi \cos p\pi\xi \cos \bar{n}\pi\xi d\xi = b^2 - a^2, \quad (\text{F.26})$$

para  $p = n$  e  $p \neq 0$

$$\int_a^b 2\xi \cos p\pi\xi \cos \bar{n}\pi\xi d\xi = -2 \frac{\frac{(\pi^2 a^2)}{4} - \frac{(\pi^2 b^2)}{4}}{\pi^2} - 2 \frac{\frac{\cos 2p\pi a}{8} - \frac{\cos 2p\pi b}{8} + p \frac{\pi a \sin 2p\pi a - \pi b \sin 2p\pi b}{4}}{\pi^2 p^2}, \quad (\text{F.27})$$

e para demais casos

$$\begin{aligned} \int_a^b 2\xi \cos p\pi\xi \cos \bar{n}\pi\xi d\xi &= \frac{2 \cos \bar{n}\pi b \cos p\pi b (\bar{n}^2 + p^2) - 2 \cos \bar{n}\pi a \cos p\pi a (\bar{n}^2 + p^2)}{\pi^2 \bar{n}^4 - 2\pi^2 \bar{n}^2 p^2 + \pi^2 p^4} \\ &+ \frac{-4\bar{n}p \sin \bar{n}\pi a \sin p\pi a + 4\bar{n}p \sin \bar{n}\pi b \sin p\pi b}{\pi^2 \bar{n}^4 - 2\pi^2 \bar{n}^2 p^2 + \pi^2 p^4} - \frac{2\bar{n}a \cos p\pi a \sin \bar{n}\pi a}{\pi(\bar{n}^2 - p^2)} \\ &+ \frac{2pa \cos \bar{n}\pi a \sin p\pi a + 2\bar{n}b \cos p\pi b \sin \bar{n}\pi b - 2pb \cos \bar{n}\pi b \sin p\pi b}{\pi(\bar{n}^2 - p^2)}. \end{aligned} \quad (\text{F.28})$$

É possível reescrever a equação E.50 como se segue:

$$\int_0^1 2H_{a,b}^\xi \sin p\pi\xi \cos \bar{n}\pi\xi d\xi = \int_a^b 2\xi \sin p\pi\xi \cos \bar{n}\pi\xi d\xi, \quad (\text{F.29})$$

que tem como resultado para  $p = \bar{n} = 0$

$$\int_a^b 2\xi \sin p\pi\xi \cos \bar{n}\pi\xi d\xi = 0, \quad (\text{F.30})$$

para  $p = n$  e  $p \neq 0$

$$\int_a^b 2\xi \sin p\pi\xi \cos \bar{n}\pi\xi d\xi = \frac{\frac{\sin 2p\pi b}{2} - p\pi b \cos 2p\pi b}{2p^2 \pi^2} - \frac{\frac{\sin 2p\pi a}{2} - p\pi a \cos 2p\pi a}{2p^2 \pi^2}, \quad (\text{F.31})$$



e para demais casos

$$\begin{aligned} \int_a^b 2\xi \sin p\pi\xi \cos \bar{n}\pi\xi d\xi &= \frac{2 \cos \bar{n}\pi b \sin p\pi b (\bar{n}^2 + p^2) - 2 \cos \bar{n}\pi a \sin p\pi a (\bar{n}^2 + p^2)}{\pi^2 \bar{n}^4 - 2\pi^2 \bar{n}^2 p^2 + \pi^2 p^4} \\ &+ \frac{4\bar{n}p \cos p\pi a \sin \bar{n}\pi a - 4\bar{n}p \cos p\pi b \sin \bar{n}\pi b}{\pi^2 \bar{n}^4 - 2\pi^2 \bar{n}^2 p^2 + \pi^2 p^4} - \frac{2pa \cos \bar{n}\pi a \cos p\pi a}{\pi(\bar{n}^2 - p^2)} \\ &+ \frac{2pb \cos \bar{n}\pi b \cos p\pi b - 2\bar{n}a \sin \bar{n}\pi a \sin p\pi a + 2\bar{n}b \sin \bar{n}\pi b \sin p\pi b}{\pi(\bar{n}^2 - p^2)}. \end{aligned} \quad (\text{F.32})$$

É possível reescrever a equação E.51 como se segue:

$$\int_0^1 2H_{a,b}^\xi \xi \sin \bar{n}\pi\xi \cos p\pi\xi d\xi = \int_a^b 2\xi \sin \bar{n}\pi\xi \cos p\pi\xi d\xi, \quad (\text{F.33})$$

que tem como resultado para  $p = \bar{n} = 0$

$$\int_a^b 2\xi \sin p\pi\xi \cos \bar{n}\pi\xi d\xi = 0, \quad (\text{F.34})$$

para  $p = n$  e  $p \neq 0$

$$\int_a^b 2\xi \sin p\pi\xi \cos \bar{n}\pi\xi d\xi = \frac{\frac{\sin 2p\pi b}{2} - p\pi b \cos 2p\pi b}{2p^2\pi^2} - \frac{\frac{\sin 2p\pi a}{2} - p\pi a \cos 2p\pi a}{2p^2\pi^2}, \quad (\text{F.35})$$

e para demais casos

$$\begin{aligned} \int_a^b 2\xi \sin \bar{n}\pi\xi \cos p\pi\xi d\xi &= \frac{4\bar{n}p \cos \bar{n}\pi a \sin p\pi a - 4\bar{n}p \cos \bar{n}\pi b \sin p\pi b}{\pi^2 \bar{n}^4 - 2\pi^2 \bar{n}^2 p^2 + \pi^2 p^4} \\ &+ \frac{2 \cos p\pi b \sin \bar{n}\pi b (\bar{n}^2 + p^2) - 2 \cos p\pi a \sin \bar{n}\pi a (\bar{n}^2 + p^2)}{\pi^2 \bar{n}^4 - 2\pi^2 \bar{n}^2 p^2 + \pi^2 p^4} + \frac{2\bar{n}a \cos \bar{n}\pi a \cos p\pi a}{\pi(\bar{n}^2 - p^2)} \\ &+ \frac{2pa \sin \bar{n}\pi a \sin p\pi a - 2pb \sin \bar{n}\pi b \sin p\pi b - 2\bar{n}b \cos \bar{n}\pi b \cos p\pi b}{\pi(\bar{n}^2 - p^2)}. \end{aligned} \quad (\text{F.36})$$

É possível reescrever a equação E.52 como se segue:

$$\int_0^1 2H_{a,b}^\xi \xi \sin p\pi\xi \sin \bar{n}\pi\xi d\xi = \int_a^b 2\xi \sin p\pi\xi \sin \bar{n}\pi\xi d\xi, \quad (\text{F.37})$$

que tem como resultado para  $p = \bar{n} = 0$

$$\int_a^b 2\xi \sin p\pi\xi \sin \bar{n}\pi\xi d\xi = 0, \quad (\text{F.38})$$

para  $p = n$  e  $p \neq 0$

$$\int_a^b 2\xi \sin p\pi\xi \sin \bar{n}\pi\xi d\xi = -2 \frac{\frac{(\pi^2 a^2)}{4} - \frac{(\pi^2 b^2)}{4}}{\pi^2} + 2 \frac{\frac{\cos 2p\pi a}{8} - \frac{\cos 2p\pi b}{8} + p \frac{\pi a \sin 2p\pi a - \pi b \sin 2p\pi b}{4}}{\pi^2 p^2}, \quad (\text{F.39})$$

e para demais casos

$$\begin{aligned} \int_a^b 2\xi \sin p\pi\xi \sin \bar{n}\pi\xi d\xi &= \frac{2 \sin \bar{n}\pi b \sin p\pi b (\bar{n}^2 + p^2) - 2 \sin \bar{n}\pi a \sin p\pi a (\bar{n}^2 + p^2)}{\pi^2 \bar{n}^4 - 2\pi^2 \bar{n}^2 p^2 + \pi^2 p^4} \\ &+ \frac{4\bar{n}p \cos \bar{n}\pi b \cos p\pi b - 4\bar{n}p \cos \bar{n}\pi a \cos p\pi a}{\pi^2 \bar{n}^4 - 2\pi^2 \bar{n}^2 p^2 + \pi^2 p^4} + \frac{2\bar{n}a \cos \bar{n}\pi a \sin p\pi a}{\pi(\bar{n}^2 - p^2)} \\ &+ \frac{2pb \cos p\pi b \sin \bar{n}\pi b - 2\bar{n}b \cos \bar{n}\pi b \sin p\pi b - 2pa \cos p\pi a \sin \bar{n}\pi a}{\pi(\bar{n}^2 - p^2)}. \end{aligned} \quad (\text{F.40})$$

## APÊNDICE G

Este apêndice tem como objetivo introduzir brevemente o método das secantes.

O método das secantes é um algoritmo iterativo para busca de raízes de funções. Ele funciona com base na obtenção de sucessivas raízes de retas secantes que vão convergindo para a raiz da função de interesse a cada passo. É semelhante ao método de Newton-Raphson, também conhecido como método das tangentes, mas tendo como vantagem a não necessidade do cálculo de derivadas.

A primeira iteração necessita de duas estimativas iniciais,  $\omega_0$  e  $\omega_1$ , que estejam suficientemente próximas da raiz da função  $f(\omega)$  para haver garantia de convergência. A próxima estimativa pode ser obtida através da fórmula

$$\omega_{n+1} = \omega_n - \frac{\omega_n - \omega_{n-1}}{f(\omega_n) - f(\omega_{n-1})} f(\omega_n), \quad (\text{G.1})$$

que deve ser utilizada até que a diferença entre os valores obtidos pelas duas últimas iterações esteja abaixo da tolerância preestabelecida.

Um exemplo de aplicação do método das secantes:

Dada a função  $f(\omega) = \omega^3 + \omega^2 - \omega + 10$  e tomando  $\omega_0 = -3$  e  $\omega_1 = -1$ , e aplicando a equação G.1 sucessivamente até a convergência, os valores abaixo são produzidos.

A visualização gráfica do método das secantes é bastante elucidativa para o devido entendimento do algoritmo. Na figura abaixo está esboçado as três primeiras iterações do método.

	$\omega_{n+1}$	$f(\omega)$
$\omega_2$	-2,3750	4,619
$\omega_3$	-3,3704	- 13,556
$\omega_4$	-2,6280	1,385
$\omega_5$	-2,6968	0,357
$\omega_6$	-2,7207	- 0,016
$\omega_7$	-2,7197	0,000
$\omega_8$	-2,7197	0,000

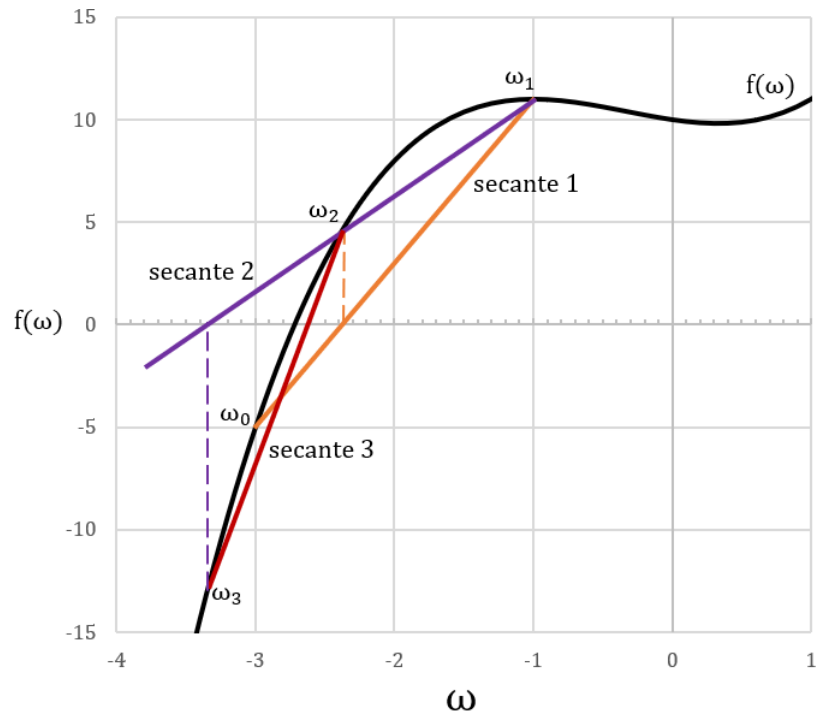


Figura 12: Aplicação gráfica do método das secantes.

# APÊNDICE H

Neste apêndice são apresentados os códigos computacionais para MATLAB utilizados para solução do problema proposto.

## H.1 Método das Diferenças Finitas

### H.1.1 Obtenção dos adimensionais do problema

```

1 clear all
2 clc
3
4 % ### Grandezas e constantes de entrada ###
5
6 L = [0 300 750 800]; % Vetor de cotas [m]
7 Di = .127; % Diametro interno do tubo [m]
8 Do = .1524; % Diametro externo do tubo [m]
9 Dch = .254; % Diametro da regio anular [m]
10 rho = [1 1 1]*10^3; % Vetor de densidades [kg/m^3]
11 % Vetor de viscosidades cinematicas [m^2/s]
12 ni = [1 1 1]*10^-6;
13 g = 9.81; % Aceleracao da gravidade [m/s^2]
14 E = 70*10^9; % Modulo de elasticidade do tubo [Pa]
15 me = 2.71*10^3; % Massa especifica do tubo [kg/m^3]
16 Cf = .0125; % Coeficiente de atrito
17 K1 = 0.9; % Constante geometrica entrada do canal anular
18 K2 = 1; % Constante geometrica da descarga do tubo
19
20 % ### Calculo de grandezas ###
21
22 Af = pi*Di^2/4; % Area da secao transversal interna [m^2]
23 Ao = pi*Do^2/4; % Area da secao transversal externa [m^2]
24 Dh = Dch - Do; % Diametro hidraulico do canal anular [m^2]
25 I = pi*(Do^4-Di^4)/64; % Momento de inercia do tubo [m^4]
26 EI = E*I; % Rigidez a flexao [N.m^2]
27 Mt = me*(Ao-Af); % Massa linear do tubo [kg/m]
28
29 % ### Calculo dos adimensionais ###
30
31 n = length(rho);

```

```

32 gamabarra = Do/Dch;
33 alfach = Dch/Do;
34 cf = 4*Cf/pi;
35 h = Do/Dh;
36 alfa = Di/Do;
37 mi = 4*2^(1/2)*(Ao/Do)*(1/L(n+1))*(EI/(Mt ...
38     +rho(n)*Af+Ao*rho(n)))^(1/4);
39 epsilon = L(n+1)/Do;
40 betai = rho(n)*Af/(Mt+rho(n)*Af+Ao*rho(n));
41 betao = rho(1)*Ao/(Mt+rho(n)*Af+Ao*rho(n));
42 betat = Mt/(Mt+rho(n)*Af+Ao*rho(n));
43 l = L/L(n+1);
44 Rho = (g*Ao*(L(n+1))^3/EI)*rho;
45 gama = (Mt + rho(n)*Af)*g*(L(n+1))^3/EI;
46 zeta = (Ao/(Mt+rho(n)*Af+Ao*rho(n)))*rho;
47 bu = rho.*ni.^(1/2);
48 bu(1) = ((1+gamabarra^3)/(1 - gamabarra^2)^2)*bu(1);
49 betau = L(n+1)^2/(EI*(Mt+rho(n)*Af+Ao*rho(n)))^(1/2)*bu;
50
51 % Calculos auxiliares para obtencao de "sigma"
52 omega = 22.034;
53 cof = (EI/(Mt+Af*rho(n)+Ao*rho(n)))^(1/2)*omega/L(n+1)^2;
54 Omega = cof*omega;
55 som = 1400;
56 lambda = Omega/som;
57 a = lambda*Do/2;
58 b = lambda*Dch/2;
59
60 C = (lambda*besselh(0,1,b) ...
61     -2*besselh(1,1,b)/Dch)/(2*besselh(1,2,b)/Dch ...
62     -lambda*besselh(0,2,b));
63 RRl = (besselh(1,1,a) ...
64     +C*besselh(1,2,a))/(lambda*besselh(0,1,a)...
65     -2*besselh(1,1,a)/Do +C*(lambda*besselh(0,2,a) ...
66     -2*besselh(1,2,a)/Do));
67 RRl = real(RRl);
68
69 sigma = 2*RRl/Do;

```

## H.1.2 Método das secantes

```

1  ui = 0; % Velocidade inicial
2  uif = 40; % Velocidade final
3  p = 0.1; % Passo
4  nu = int64((uif-ui)/p);
5  omega0 = 1.52394e+02 + 2.77873e-01i; % Frequencia iteracao 0
6  omegal = 1.53153e+02 + 2.81514e-01i; % Frequencia iteracao 1
7  f = 'determinante'; % Funcao para calculo de det(A)
8  tol = 0.00001; % Tolerancia
9
10 % Vetor para armazenamento das frequencias
11 OMEGA = zeros(nu+1,1);
12 OMEGA(1,1) = omegal;
13

```

```

14 % Metodo das secantes
15 for k = 1:1:nu
16     ui = ui + p;
17     y0 = omega0;
18     y1 = omega1;
19     y2 = y1 - feval(f, ui, y1)*((y1 ...
20         - y0)/(feval(f, ui, y1) - feval(f, ui, y0)));
21     ui
22     cont = 1
23     while abs(y2 - y1) > tol
24         y0 = y1;
25         y1 = y2;
26         y2 = y1 - feval(f, ui, y1)*((y1 ...
27             - y0)/(feval(f, ui, y1) - feval(f, ui, y0)));
28         ui
29         cont = cont + 1
30     end
31     OMEGA(k+1,1) = y2;
32     omega0 = OMEGA(k,1);
33     omega1 = OMEGA(k+1,1)
34 end
35
36 REAL = real(OMEGA);
37 IMAGINARIO = imag(OMEGA);
38 plot (REAL,IMAGINARIO) % Diagrama de Argand

```

### H.1.2.1 Função para cálculo de $\det(A)$

```

1 function calcDet = determinante(ui, omega)
2     N = 500; % Numero de pontos discretos
3     dksi = 1/N;
4     uo = ui*alfa/(alfach^2 -1);
5
6     a = 1/dksi^4;
7     aa = 1/(12*dksi^2);
8     aaa = 1/(12*dksi);
9     d = 1/(240*dksi^4);
10    dd = 1/(90*dksi^2);
11    ddd = 1/(60*dksi);
12
13    % Matrizes auxiliares para montagem de de [A]
14    v = 7:1:N+2;
15    w1 = v-6; w2 = v-5; w3 = v-4;
16    w4 = v-3; w5 = v-2;
17    w6 = v-1; w7 = v; w8 = v+1; w9 = v+2;
18
19    v0 = zeros(1,4); v0(1) = 5;
20    v0(2) = 6; v0(3) = N+3; v0(4) = N+4;
21    w10 = v0-4; w11 = v0-3; w12 = v0-2;
22    w13 = v0-1; w14 = v0;
23
24    x1 = zeros(1,N-4); x2 = x1;
25    x3 = x1; x4 = x1; x5 = x1;
26    x6 = x1; x7 = x1;

```

```

27     x8 = x1; x9 = x1;
28     x10 = zeros(1,4);
29     x11 = x10;
30     x12 = x10; x13 = x10;
31     x14 = x10;
32
33     vc = zeros(1,12); vc(1) = 1; vc(2) = 1;
34     vc(3) = 2; vc(4) = 3; vc(5) = 3; vc(6) = 3;
35     vc(7) = 3; vc(8) = 3; vc(9) = 4; vc(10) = 4;
36     vc(11) = 4; vc(12) = 4;
37
38     wc = zeros(1,12); wc(1) = 1; wc(2) = 3;
39     wc(3) = 2; wc(4) = N; wc(5) = N+1; wc(6) = N+2;
40     wc(7) = N+3; wc(8) = N+4; wc(9) = N;
41     wc(10) = N+1; wc(11) = N+3; wc(12) = N+4;
42
43     xc = zeros(1,12); xc(1) = -1; xc(2) = 1;
44     xc(3) = 1; xc(4) = -1; xc(5) = 16;
45     xc(6) = -30; xc(7) = 16; xc(8) = -1;
46     xc(9) = -1; xc(10) = 2; xc(11) = -2;
47     xc(12) = 1;
48
49     y = 1;
50     for k = 1:1:N
51
52         Delta = -omega^2*(betat +betai ...
53             -sigma*betao*(1 -H3(k*dksi , l(2))) +zetaH(k)) ...
54             +i*omega*(mi*real(omega)^(1/2)*betauH(k));
55         Chi = (gama*(k*dksi -l(n+1)) +RhoLH(k) +RhoLH2(k) ...
56             +(alfa^2 -1)*RhoL(k));
57         Iota = (gama -RhoH(k));
58
59         Chi = Chi +cf*epsilon*uo^2*(1+h)*(l(2) ...
60             -k*dksi)*(1 -H3(k*dksi , l(2)))/2 ...
61             +uo^2*(1+K1)*(1 -H3(k*dksi , l(2)))/2 ...
62             +(alfa^2-1)*(cf*h*l(2)*epsilon*uo^2/2 ...
63             +uo^2*(1+K1)/2) +ui^2*(K2-1)/2 +ui^2 ...
64             -sigma*uo^2*(1 -H3(k*dksi , l(2)));
65         Iota = Iota +2i*omega*(ui*betai^(1/2) ...
66             +sigma*uo*betao^(1/2)*(1 -H3(k*dksi , l(2))))...
67             -cf*epsilon*uo^2*(h+1)*(1 -H3(k*dksi , l(2)))/2 ...
68             -uo^2*(1+K1)*H2(k*dksi , l(2))/2;
69         Delta = Delta +i*omega*cf*betao^(1/2)*epsilon*uo*(1 ...
70             -H3(k*dksi , l(2)))/2;
71
72
73     if k < 3 || k >= N-1
74         x10(y) = a -Chi*aa +Iota*aaa;
75         x11(y) = -4*a +Chi*16*aa -Iota*8*aaa;
76         x12(y) = 6*a -Chi*30*aa +Delta;
77         x13(y) = -4*a +Chi*16*aa +Iota*8*aaa;
78         x14(y) = a -Chi*aa -Iota*aaa;
79
80         y = y + 1;

```



```

81     end
82     if k >= 3 && k < N-1
83         x1(k-2) = 7*d;
84         x2(k-2) = -96*d +Chi*dd -Iota*ddd;
85         x3(k-2) = 676*d -Chi*13.5*dd +Iota*9*ddd;
86         x4(k-2) = -1952*d +Chi*135*dd -Iota*45*ddd;
87         x5(k-2) = 2730*d -Chi*245*dd +Delta;
88         x6(k-2) = -1952*d +Chi*135*dd +Iota*45*ddd;
89         x7(k-2) = 676*d -Chi*13.5*dd -Iota*9*ddd;
90         x8(k-2) = -96*d +Chi*dd +Iota*ddd;
91         x9(k-2) = 7*d;
92     end
93 end
94 A = sparse(v,w1,x1,N+4,N+4) +sparse(v,w2,x2,N+4,N+4) ...
95     +sparse(v,w3,x3,N+4,N+4) +sparse(v,w4,x4,N+4,N+4) ...
96     +sparse(v,w5,x5,N+4,N+4) +sparse(v,w6,x6,N+4,N+4)...
97     +sparse(v,w7,x7,N+4,N+4) +sparse(v,w8,x8,N+4,N+4) ...
98     +sparse(v,w9,x9,N+4,N+4) +sparse(v0,w10,x10,N+4,N+4) ...
99     +sparse(v0,w11,x11,N+4,N+4) +sparse(v0,w12,x12,N+4,N+4)...
100     +sparse(v0,w13,x13,N+4,N+4) +sparse(v0,w14,x14,N+4,N+4) ...
101     +sparse(vc,wc,xc,N+4,N+4);
102
103 G = A*10^-11;
104 calcDet = det(G);
105
106 function heaviside1 = H1(ksi ,lj ,lj1)
107     heaviside1 = H(ksi ,lj)-H(ksi ,lj1);
108
109     function heav = H(ksi , l)
110         if ksi <= l
111             heav = 0;
112         else
113             heav = 1;
114         end
115     end
116 end
117
118 function heaviside2 = H2(ksi ,ln1)
119     if ksi ~ = ln1
120         heaviside2 = 0;
121     else
122         heaviside2 = 1;
123     end
124 end
125
126 function heaviside3 = H3(ksi , l2)
127     if ksi <= l2
128         heaviside3 = 0;
129     else
130         heaviside3 = 1;
131     end
132 end
133 end

```

### H.1.3 Código para cálculo dos somatórios

```

1 zetaH = zeros(N,1);
2 RhoH = zeros(N,1);
3 RhoLH = zeros(N,1);
4 RhoLH2 = zeros(N,1);
5 RhoL = zeros(N,1);
6 betauH = zeros(N,1);
7
8 for k = 1:1:N
9
10     zetaH = zeros(n,1);
11     rhoh = zeros(n,1);
12     rholh = zeros(n,1);
13     rholh2 = zeros(n,1);
14     rhol = zeros(n,1);
15     betauh = zeros(n,1);
16
17     for q = 1:1:n
18         if k ~ = N
19             if q > 1
20                 zetaH(q) = zeta(q)*(H1(k*dksi , l(q) , l(q+1)));
21                 rholh2(q) = Rho(q)*(l(q+1) ...
22                     -l(q))*(H1(k*dksi , l(1) , l(q)));
23                 end
24                 rhoh(q) = Rho(q)*(H1(k*dksi , l(q) , l(q+1)));
25                 rhoh(q) = Rho(q)*(H1(k*dksi , l(q) , l(q+1)));
26                 rholh(q) = Rho(q)*(l(q+1) ...
27                     -k*dksi)*(H1(k*dksi , l(q) , l(q+1)));
28                 betauh(q) = betau(q)*(H1(k*dksi , l(q) , l(q+1)));
29             end
30             rhol(q) = Rho(q)*(l(q+1) -l(q));
31         end
32
33     zetaH(k) = sum(zetaH) +zeta(n)*H2(k*dksi , l(n+1));
34     RhoH(k) = sum(rhoh) +Rho(n)*H2(k*dksi , l(n+1));
35     RhoLH(k) = sum(rholh);
36     RhoLH2(k) = sum(rholh2);
37     RhoL(k) = sum(rhol);
38     betauH(k) = sum(betauh) +betau(n)*H2(k*dksi , l(n+1));
39
40 end

```

## H.2 Método de Fourier-Galerkin

### H.2.0.1 Função para cálculo de $\det(A)$

```

1 function calcDet = determinante(ui , omega)
2     q = 29; % Dimensao matriz
3     BC = zeros(4,q); % Condiçoes de contorno
4     D = zeros(q-4,q); % D2n, D2n-1
5     A = zeros(q); % [A]
6

```



```

61         *integral3(n,p,w,l(z),l(z+1));
62     RhoLLHint(w,z) = Rho(z)*(l(z+1)-l(z)) ...
63         *integral3(n,p,w,l(1),l(z));
64     end
65     RhoLHint(w,z) = Rho(z)*l(z+1) ...
66         *integral3(n,p,w,l(z),l(z+1));
67     RhoksiHint(w,z) = Rho(z) ...
68         *integral2(n,p,w,l(z),l(z+1));
69     RhoLLint(w,z) = Rho(z)*(l(z+1)-l(z)) ...
70         *integral0(n,p,w)*(alfa^2-1);
71     RhoHint(w,z) = Rho(z) ...
72         *integral3(n,p,w,l(z),l(z+1));
73     betauHint(w,z) = betau(z) ...
74         *integral3(n,p,w,l(z),l(z+1));
75     end
76 end
77
78 D(2*p+j,2*n) = f01*integral0(n,p,1) ...
79     -f02*integral3(n,p,1,0,l(2))...
80     +f03*integral3(n,p,1,0,l(2))...
81     +sum(zetaHint(1,2:nn)) ...
82     +sum(betauHint(1,1:nn))...
83     -n*pi*(f11*integral0(n,p,3) ...
84     -sum(RhoHint(3,1:nn))...
85     +f12*integral0(n,p,3) ...
86     +f13*integral3(n,p,3,0,l(2)) ...
87     -f14*integral4(n,p,3,l(2))...
88     -(n*pi)^2*(f21*integral0(n,p,1) ...
89     +f22*integral1(n,p,1)...
90     +sum(RhoLHint(1,1:nn)) ...
91     -sum(RhoksiHint(1,1:nn))...
92     +sum(RhoLLHint(1,2:nn)) ...
93     +sum(RhoLLint(1,1:nn))...
94     +f23*l(2)*integral3(n,p,1,0,l(2)) ...
95     -f23*integral2(n,p,1,0,l(2))...
96     +f24*integral3(n,p,1,0,l(2)) ...
97     +f25*integral0(n,p,1))...
98     +(n*pi)^4*f4*integral0(n,p,1); % gama2n
99 D(2*p+j,2*n+1) = f01*integral0(n,p,3) ...
100     -f02*integral3(n,p,3,0,l(2))...
101     +f03*integral3(n,p,3,0,l(2))...
102     +sum(zetaHint(3,2:nn)) ...
103     +sum(betauHint(3,1:nn))...
104     +(n*pi)*(f11*integral0(n,p,1) ...
105     -sum(RhoHint(1,1:nn))...
106     +f12*integral0(n,p,1) ...
107     +f13*integral3(n,p,1,0,l(2)) ...
108     -f14*integral4(n,p,1,l(2))...
109     -(n*pi)^2*(f21*integral0(n,p,3) ...
110     +f22*integral1(n,p,3)...
111     +sum(RhoLHint(3,1:nn)) ...
112     -sum(RhoksiHint(3,1:nn))...
113     +sum(RhoLLHint(3,2:nn)) ...
114     +sum(RhoLLint(3,1:nn))...

```

```

115         +f23*l(2)*integral3(n,p,3,0,l(2)) ...
116         -f23*integral2(n,p,3,0,l(2))...
117         +f24*integral3(n,p,3,0,l(2)) ...
118         +f25*integral0(n,p,3)...
119         +(n*pi)^4*f4*integral0(n,p,3); % gama2n-1
120
121     if p >= 1
122     D(2*p+1,2*n) = f01*integral0(n,p,2) ...
123         -f02*integral3(n,p,2,0,l(2))...
124         +f03*integral3(n,p,2,0,l(2))...
125         +sum(zetaHint(2,2:nn)) ...
126         +sum(betaHint(2,1:nn))...
127         -(n*pi)*(f11*integral0(n,p,4) ...
128         -sum(RhoHint(4,1:nn))...
129         +f12*integral0(n,p,4) ...
130         +f13*integral3(n,p,4,0,l(2)) ...
131         -f14*integral4(n,p,4,l(2))...
132         -(n*pi)^2*(f21*integral0(n,p,2) ...
133         +f22*integral1(n,p,2)...
134         +sum(RhoLHint(2,1:nn)) ...
135         -sum(RhoksiHint(2,1:nn))...
136         +sum(RhoLLHint(2,2:nn)) ...
137         +sum(RhoLLint(2,1:nn))...
138         +f23*l(2)*integral3(n,p,2,0,l(2)) ...
139         -f23*integral2(n,p,2,0,l(2))...
140         +f24*integral3(n,p,2,0,l(2)) ...
141         +f25*integral0(n,p,2)...
142         +(n*pi)^4*f4*integral0(n,p,2); % gama2n
143     D(2*p+1,2*n+1) = f01*integral0(n,p,4) ...
144         -f02*integral3(n,p,4,0,l(2))...
145         +f03*integral3(n,p,4,0,l(2))...
146         +sum(zetaHint(4,2:nn)) ...
147         +sum(betaHint(4,1:nn))...
148         +n*pi*(f11*integral0(n,p,2) ...
149         -sum(RhoHint(2,1:nn))...
150         +f12*integral0(n,p,2) ...
151         +f13*integral3(n,p,2,0,l(2)) ...
152         -f14*integral4(n,p,2,l(2))...
153         -(n*pi)^2*(f21*integral0(n,p,4) ...
154         +f22*integral1(n,p,4)...
155         +sum(RhoLHint(4,1:nn)) ...
156         -sum(RhoksiHint(4,1:nn))...
157         +sum(RhoLLHint(4,2:nn)) ...
158         +sum(RhoLLint(4,1:nn))...
159         +f23*l(2)*integral3(n,p,4,0,l(2)) ...
160         -f23*integral2(n,p,4,0,l(2))...
161         +f24*integral3(n,p,4,0,l(2)) ...
162         +f25*integral0(n,p,4)...
163         +(n*pi)^4*f4*integral0(n,p,4); % gama2n-1
164     end
165 end
166
167 for w = 1:1:2
168     for z = 1:1:nn

```

```

169         if z > 1
170             zetaHintn0(w,z) = -omega^2*zeta(z) ...
171                 *integral3(0,p,w,l(z),l(z+1));
172         end
173         betauHintn0(w,z) = betau(z) ...
174             *integral3(0,p,w,l(z),l(z+1));
175     end
176 end
177
178 D(2*p+j,1) = f01*integral0(0,p,1) ...
179     -f02*integral3(0,p,1,0,l(2))...
180     +f03*integral3(0,p,1,0,l(2))...
181     +sum(zetaHintn0(1,2:nn)) ...
182     +sum(betauHintn0(1,1:nn)); % gama2n, gama-1 = 0
183
184     if p >= 1
185     D(2*p+1,1) = f01*integral0(0,p,2) ...
186         -f02*integral3(0,p,2,0,l(2))...
187         +f03*integral3(0,p,2,0,l(2))...
188         +sum(zetaHintn0(2,2:nn)) ...
189         +sum(betauHintn0(2,1:nn)); % gama2n-1, gama-1 = 0
190     end
191 end
192
193 A(1:4,:) = BC;
194 A(5:q,:) = D;
195 calcDet = det(A);
196 end

```

## H.2.0.2 Funções para cálculo das integrais

```

1 function integrais = integral0(n,p,t)
2     if t == 1 % CCpn
3         if p ~ = n
4             integrais = 0;
5         elseif p == n && p ~ = 0
6             integrais = 1;
7         else
8             integrais = 2;
9         end
10    end
11
12    if t == 2 % SCpn
13        if mod(p+n,2) == 0
14            integrais = 0;
15        else
16            integrais = 2/((p+n)*pi) + 2/((p-n)*pi);
17        end
18    end
19    if t == 3 % SCnp
20        if mod(p+n,2) == 0
21            integrais = 0;
22        else
23            integrais = 2/((n+p)*pi) + 2/((n-p)*pi);

```

```

24     end
25 end
26
27 if t == 4 % SSpn
28     if p ~ = n
29         integra1s = 0;
30     elseif p == n && p ~ = 0
31         integra1s = 1;
32     else
33         integra1s = 0;
34     end
35 end
36 end
37
38 function integra1s1 = integrall(n,p,t)
39     if t == 1 % ksiCCpn
40         if n == p && p == 0
41             integra1s1 = 1;
42         elseif p == n && p ~ = 0
43             integra1s1 = 1/2;
44         else
45             integra1s1 = (- n^2*(- 2*cos(pi*n)*cos(pi*p) ...
46                 + 2) + 2*p^2*(cos(pi*n)*cos(pi*p) ...
47                 - 1))/(pi^2*(n^2 - p^2)^2);
48         end
49     end
50
51     if t == 2 % ksiSCpn
52         if p == n && p == 0
53             integra1s1 = 0;
54         elseif p == n && p ~ = 0
55             integra1s1 = -1/(pi*(p+n));
56         else
57             integra1s1 = (n^2*(+2*p*pi*cos(pi*n) ...
58                 *cos(pi*p)) - 2*p^3*pi*cos(pi*n) ...
59                 *cos(pi*p))/(pi^2*(n^2 - p^2)^2);
60         end
61     end
62
63     if t == 3 % ksiSCnp
64         if p == n && p == 0
65             integra1s1 = 0;
66         elseif p == n && p ~ = 0
67             integra1s1 = -1/(pi*(p+n));
68         else
69             integra1s1 = (- n*(- 2*p^2*pi*cos(pi*n) ...
70                 *cos(pi*p)) - 2*n^3*pi*cos(pi*n) ...
71                 *cos(pi*p))/(pi^2*(n^2 - p^2)^2);
72         end
73     end
74
75     if t == 4 % ksiSSpn
76         if p == n && p == 0
77             integra1s1 = 0;

```

```

78     elseif p == n && p ~ = 0
79         integrais1 = 1/2;
80     else
81         integrais1 = (+ p*(2*n*(2*cos(pi*n)*cos(pi*p) ...
82             - 2)))/(pi^2*(n^2 - p^2)^2);
83     end
84 end
85 end
86
87 function integrais2 = integral2(n,p,t,a,b)
88     if t == 1 % HksiCCpn
89         if p == n && p == 0
90             integrais2 = b^2 - a^2;
91         elseif p == n && p ~ = 0
92             integrais2 = -(2*((pi^2*a^2)/4 ...
93                 -(b^2*pi^2)/4))/pi^2 - (2*(cos(2*pi*a*p)/8 ...
94                 -cos(2*pi*b*p)/8 ...
95                 +p*((a*pi*sin(2*pi*a*p))/4 ...
96                 -(b*pi*sin(2*pi*b*p))/4)))/(p^2*pi^2);
97         else
98             integrais2 = (2*cos(pi*b*n)*cos(pi*b*p)*(n^2 ...
99                 + p^2))/(pi^2*n^4 - 2*pi^2*n^2*p^2 ...
100                 +pi^2*p^4) - (2*cos(pi*a*n)*cos(pi*a*p)*(n^2 ...
101                 + p^2))/(pi^2*n^4 - 2*pi^2*n^2*p^2 + pi^2*p^4) ...
102                 -(4*n*p*sin(pi*a*n)*sin(pi*a*p))/(pi^2*(n^4 ...
103                 - 2*n^2*p^2 + p^4)) + (4*n*p*sin(pi*b*n) ...
104                 *sin(pi*b*p))/(pi^2*(n^4 - 2*n^2*p^2 + p^4))...
105                 -(2*a*n*cos(pi*a*p)*sin(pi*a*n))/(pi*(n^2 - p^2))...
106                 +(2*a*p*cos(pi*a*n)*sin(pi*a*p))/(pi*(n^2 - p^2))...
107                 +(2*b*n*cos(pi*b*p)*sin(pi*b*n))/(pi*(n^2 - p^2))...
108                 -(2*b*p*cos(pi*b*n)*sin(pi*b*p))/(pi*(n^2 - p^2));
109         end
110     end
111
112     if t == 2 % HksiSCpn
113         if p == n && p == 0
114             integrais2 = 0;
115         elseif p == n && p ~ = 0
116             integrais2 = (sin(2*pi*b*p)/2 ...
117                 -b*p*pi*cos(2*pi*b*p))/(2*p^2*pi^2) ...
118                 -(sin(2*pi*a*p)/2 -a*p*pi*cos(2*pi*a*p))/(2*p^2*pi^2);
119         else
120             integrais2 = (2*cos(pi*b*n)*sin(pi*b*p)*(n^2 ...
121                 +p^2))/(pi^2*n^4 - 2*pi^2*n^2*p^2 +pi^2*p^4)...
122                 -(2*cos(pi*a*n)*sin(pi*a*p)*(n^2 ...
123                 +p^2))/(pi^2*n^4 - 2*pi^2*n^2*p^2 +pi^2*p^4)...
124                 +(4*n*p*cos(pi*a*p)*sin(pi*a*n))/(pi^2*(n^4 - 2*n^2*p^2 +p^4))...
125                 -(4*n*p*cos(pi*b*p)*sin(pi*b*n))/(pi^2*(n^4 - 2*n^2*p^2 +p^4))...
126                 -(2*a*p*cos(pi*a*n)*cos(pi*a*p))/(pi*(n^2 -p^2))...
127                 +(2*b*p*cos(pi*b*n)*cos(pi*b*p))/(pi*(n^2 -p^2))...
128                 -(2*a*n*sin(pi*a*n)*sin(pi*a*p))/(pi*(n^2 -p^2))...
129                 +(2*b*n*sin(pi*b*n)*sin(pi*b*p))/(pi*(n^2 -p^2));
130         end
131     end

```



```

132
133   if t == 3 % HksiSCnp
134       if p == n && p == 0
135           integrais2 = 0;
136       elseif p == n && p ~= 0
137           integrais2 = (sin(2*pi*b*p)/2 ...
138               -b*p*pi*cos(2*pi*b*p))/(2*p^2*pi^2)...
139               -(sin(2*pi*a*p)/2 -a*p*pi*cos(2*pi*a*p))/(2*p^2*pi^2);
140       else
141           integrais2 = (4*n*p*cos(pi*a*n)*sin(pi*a*p))/(pi^2*n^4 ...
142               -2*pi^2*n^2*p^2 +pi^2*p^4) ...
143               -(2*cos(pi*a*p)*sin(pi*a*n)*(n^2 ...
144               +p^2))/(pi^2*(n^4 -2*n^2*p^2 +p^4))...
145               -(4*n*p*cos(pi*b*n)*sin(pi*b*p))/(pi^2*n^4 ...
146               -2*pi^2*n^2*p^2 +pi^2*p^4)...
147               +(2*cos(pi*b*p)*sin(pi*b*n)*(n^2 ...
148               +p^2))/(pi^2*(n^4 -2*n^2*p^2 +p^4))...
149               +(2*a*n*cos(pi*a*n)*cos(pi*a*p))/(pi*(n^2 -p^2))...
150               -(2*b*n*cos(pi*b*n)*cos(pi*b*p))/(pi*(n^2 -p^2))...
151               +(2*a*p*sin(pi*a*n)*sin(pi*a*p))/(pi*(n^2 -p^2))...
152               -(2*b*p*sin(pi*b*n)*sin(pi*b*p))/(pi*(n^2 -p^2));
153       end
154   end
155
156   if t == 4 % HksiSSpn
157       if p == n && p == 0
158           integrais2 = 0;
159       elseif p == n && p ~= 0
160           integrais2 = (2*(cos(2*pi*a*p)/8 -cos(2*pi*b*p)/8 ...
161               +p*((a*pi*sin(2*pi*a*p))/4 -(b*pi*sin(2*pi*b*p))/4)))/(p^2*pi^2) ...
162               -(2*((pi^2*a^2)/4 -(b^2*pi^2)/4))/pi^2;
163       else
164           integrais2 = (4*n*p*cos(pi*b*n)*cos(pi*b*p))/(pi^2*n^4 ...
165               -2*pi^2*n^2*p^2 +pi^2*p^4) ...
166               -(4*n*p*cos(pi*a*n)*cos(pi*a*p))/(pi^2*n^4 ...
167               -2*pi^2*n^2*p^2 + pi^2*p^4)...
168               -(2*sin(pi*a*n)*sin(pi*a*p)*(n^2 + p^2))/(pi^2*(n^4 ...
169               - 2*n^2*p^2 + p^4))...
170               +(2*sin(pi*b*n)*sin(pi*b*p)*(n^2 + p^2))/(pi^2*(n^4 ...
171               - 2*n^2*p^2 + p^4))...
172               +(2*a*n*cos(pi*a*n)*sin(pi*a*p))/(pi*(n^2 - p^2))...
173               -(2*a*p*cos(pi*a*p)*sin(pi*a*n))/(pi*(n^2 - p^2))...
174               -(2*b*n*cos(pi*b*n)*sin(pi*b*p))/(pi*(n^2 - p^2))...
175               +(2*b*p*cos(pi*b*p)*sin(pi*b*n))/(pi*(n^2 - p^2));
176       end
177   end
178 end
179
180 function integrais3 = integral3(n,p,t,a,b)
181     if t == 1 % HCCpn
182         if p == n && p == 0
183             integrais3 = 2*b - 2*a;
184         elseif p == n && p ~= 0
185             integrais3 = -(a*p -b*p)/p -(sin(2*pi*a*p)/2 ...

```

```

186         -sin(2*pi*b*p)/2)/(p*pi);
187     else
188         integrais3 = (2*(n*cos(pi*b*p)*sin(pi*b*n) ...
189             -p*cos(pi*b*n)*sin(pi*b*p)))/(pi*(n^2 -p^2))...
190             -(2*(n*cos(pi*a*p)*sin(pi*a*n) ...
191             -p*cos(pi*a*n)*sin(pi*a*p)))/(pi*(n^2 -p^2));
192     end
193 end
194
195 if t == 2 % HSCpn
196     if p == n && p == 0
197         integrais3 = 0;
198     elseif p == n && p ~= 0
199         integrais3 = (cos(2*pi*a*p) -cos(2*pi*b*p))/(2*p*pi);
200     else
201         integrais3 = cos(b*pi*(n -p))/(pi*(n -p)) ...
202             -cos(a*pi*(n -p))/(pi*(n -p))...
203             +cos(pi*a*(n +p))/(pi*(n +p)) ...
204             -cos(pi*b*(n +p))/(pi*(n +p));
205     end
206 end
207
208 if t == 3 % HSCnp
209     if p == n && p == 0
210         integrais3 = 0;
211     elseif p == n && p ~= 0
212         integrais3 = (cos(2*pi*a*p) -cos(2*pi*b*p))/(2*p*pi);
213     else
214         integrais3 = cos(b*pi*(p -n))/(pi*(p -n)) ...
215             -cos(a*pi*(p -n))/(pi*(p -n))...
216             +cos(pi*a*(p +n))/(pi*(p +n)) ...
217             -cos(pi*b*(p +n))/(pi*(p +n));
218     end
219 end
220
221 if t == 4 % HSSpn
222     if p == n && p == 0
223         integrais3 = 0;
224     elseif p == n && p ~= 0
225         integrais3 = (sin(2*pi*a*p)/2 - sin(2*pi*b*p)/2)/(p*pi) ...
226             -(pi*a - pi*b)/pi;
227     else
228         integrais3 = (2*(n*cos(pi*a*n)*sin(pi*a*p) ...
229             -p*cos(pi*a*p)*sin(pi*a*n)))/(pi*(n^2 -p^2)) ...
230             -(2*(n*cos(pi*b*n)*sin(pi*b*p) ...
231             -p*cos(pi*b*p)*sin(pi*b*n)))/(pi*(n^2 -p^2));
232     end
233 end
234 end

```

# APÊNDICE I

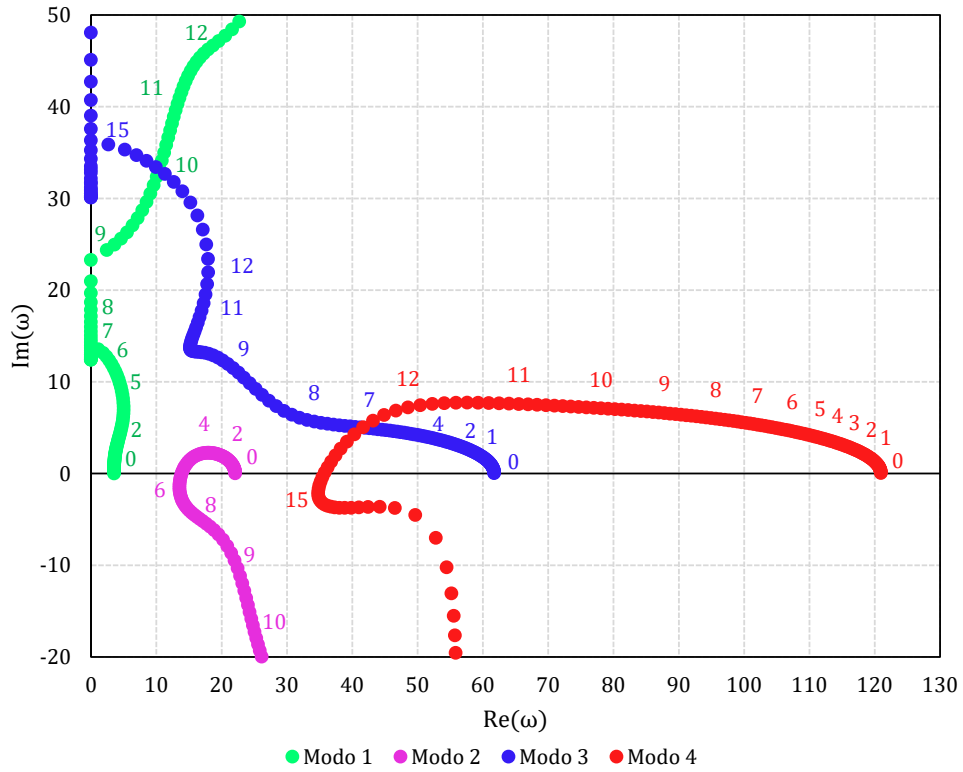
Neste apêndice são apresentados os resultados das simulações realizadas para o modelo matemático proposto.

## I.1 Simulação 1

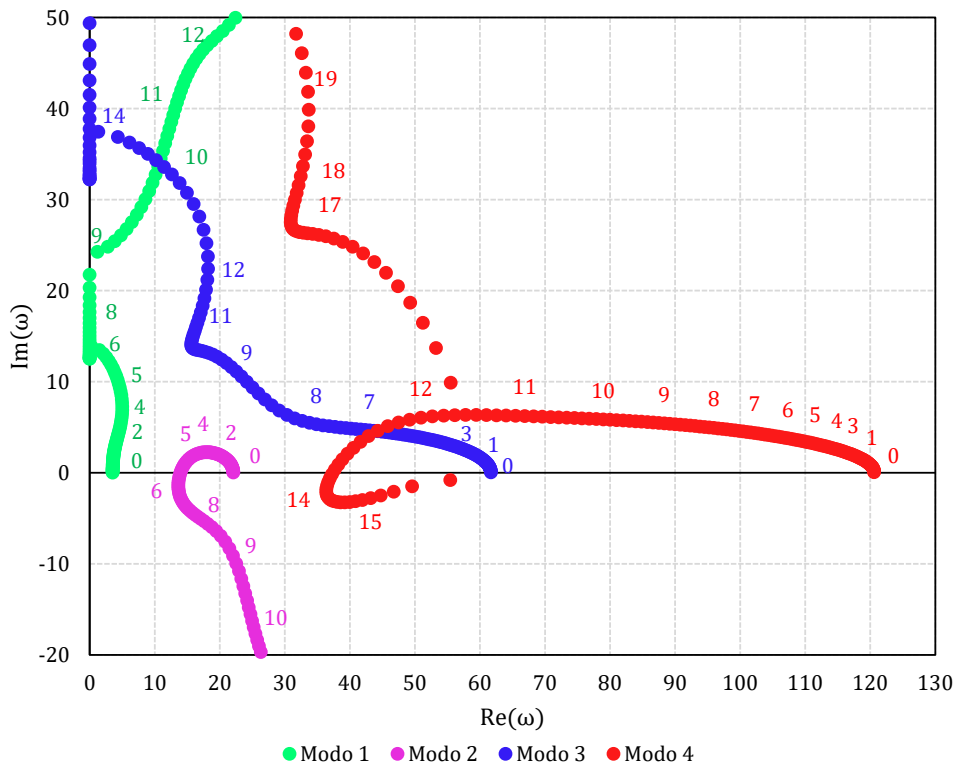
$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\rho} &= [0,12419 \quad 0,12419]; \quad \boldsymbol{\beta}_u = [0,03480 \quad 0,01172]; \quad \boldsymbol{\zeta} = [0,33898 \quad 0,33898]; \\
 c_f &= 0,01592; \quad \alpha = 0,66667; \quad \bar{\gamma} = 0,60000; \quad \varsigma = -2,13107; \quad \Gamma = 0; \quad \gamma = 0,24217; \\
 \beta_i &= 0,15066; \quad \beta_o = 0,33898; \quad \beta_t = 0,51036; \\
 K_1 &= 0,9; \quad K_2 = 1; \quad \varepsilon = 66,66667; \quad h = 1,50000; \quad \alpha_{ch} = 1,66667; \quad \mu = 0,85251. \quad (\text{I.1})
 \end{aligned}$$

Figura 13: Diagrama de Argand para variação de  $u_i$

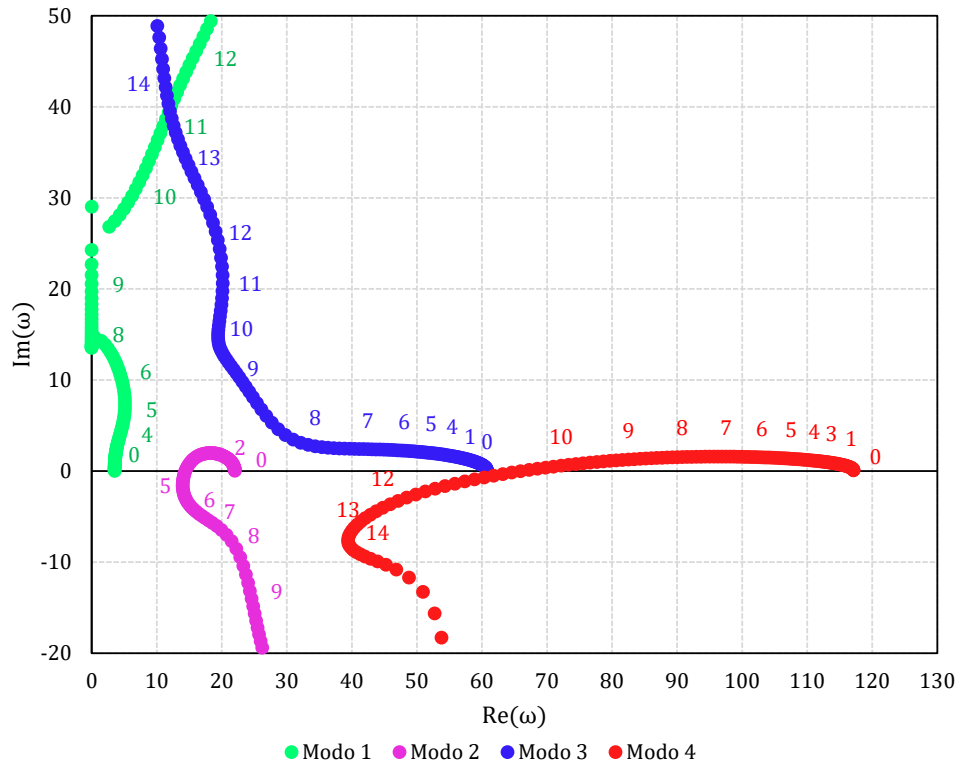
(a)  $\ell_2 = 0, 0$



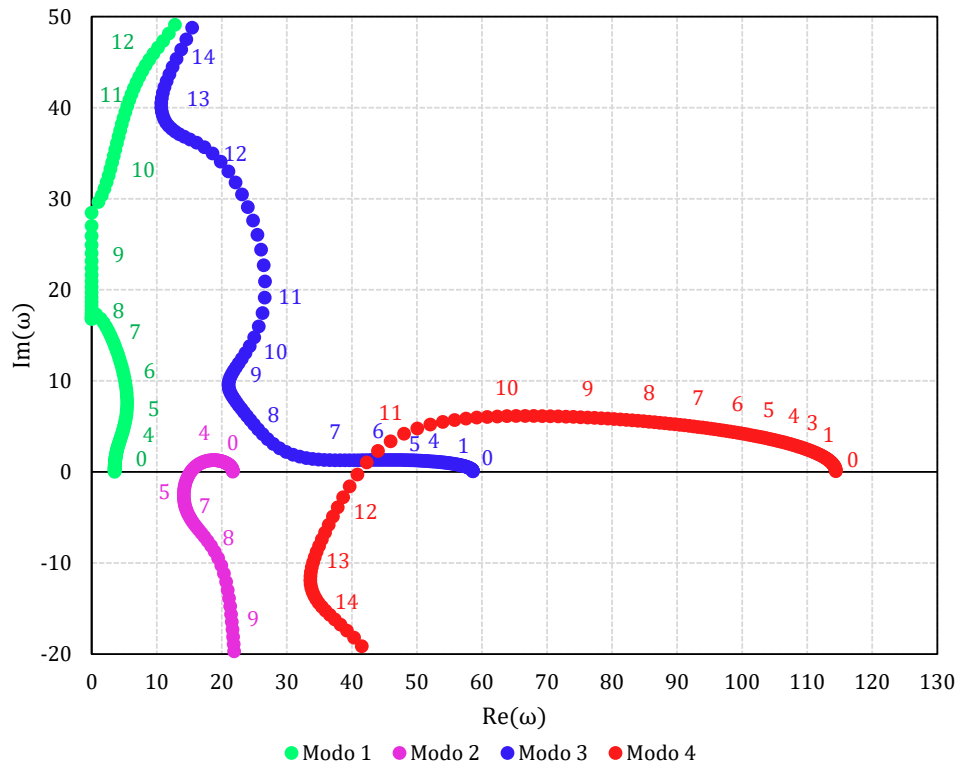
(b)  $\ell_2 = 0, 1$



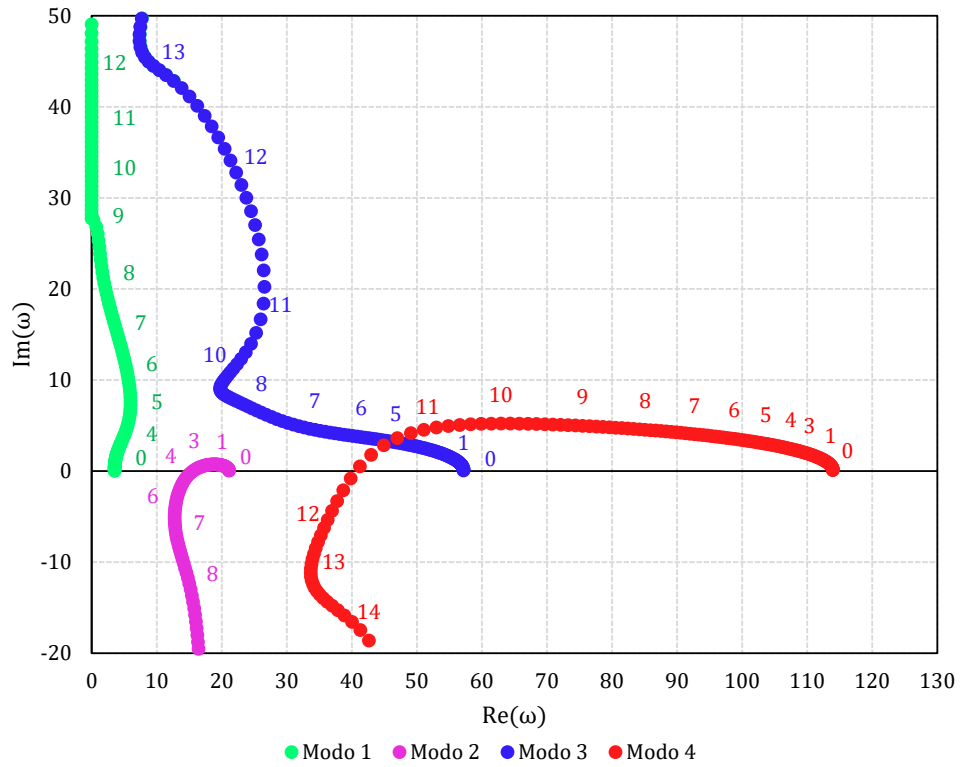
(c)  $\ell_2 = 0, 2$



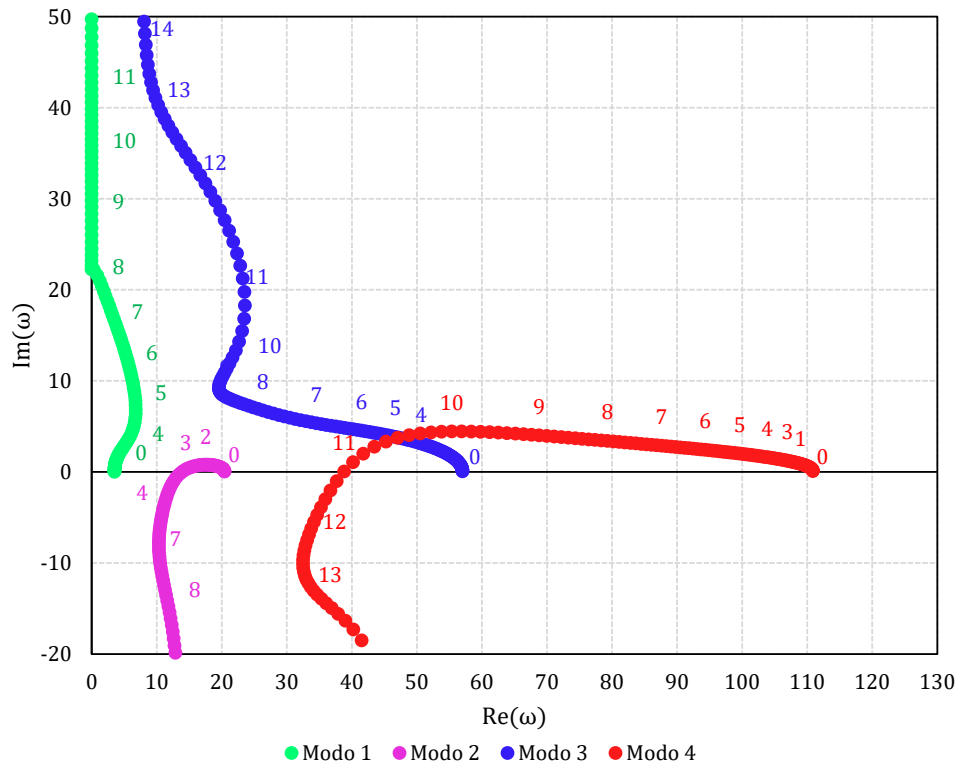
(d)  $\ell_2 = 0, 3$



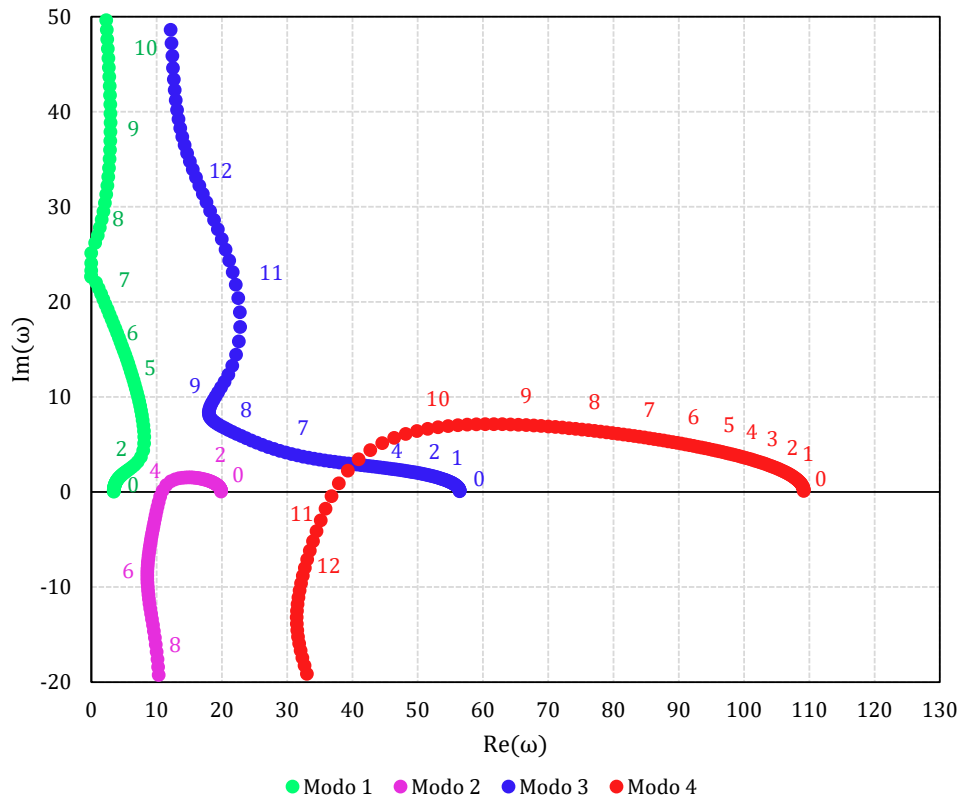
(e)  $\ell_2 = 0, 4$



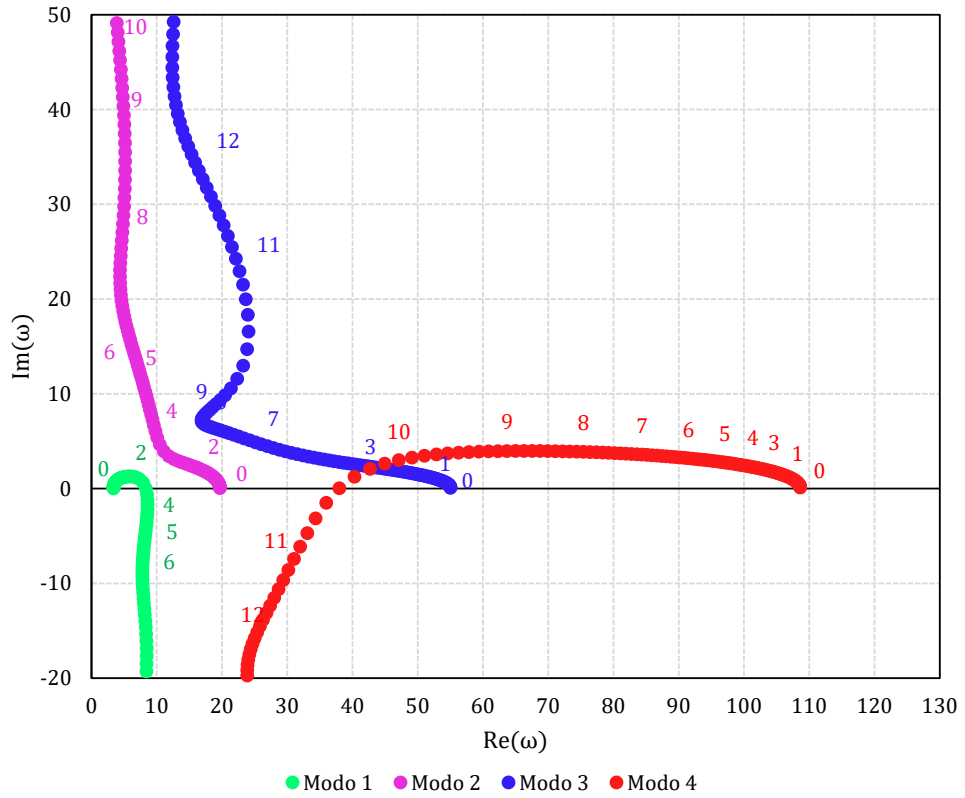
(f)  $\ell_2 = 0, 5$



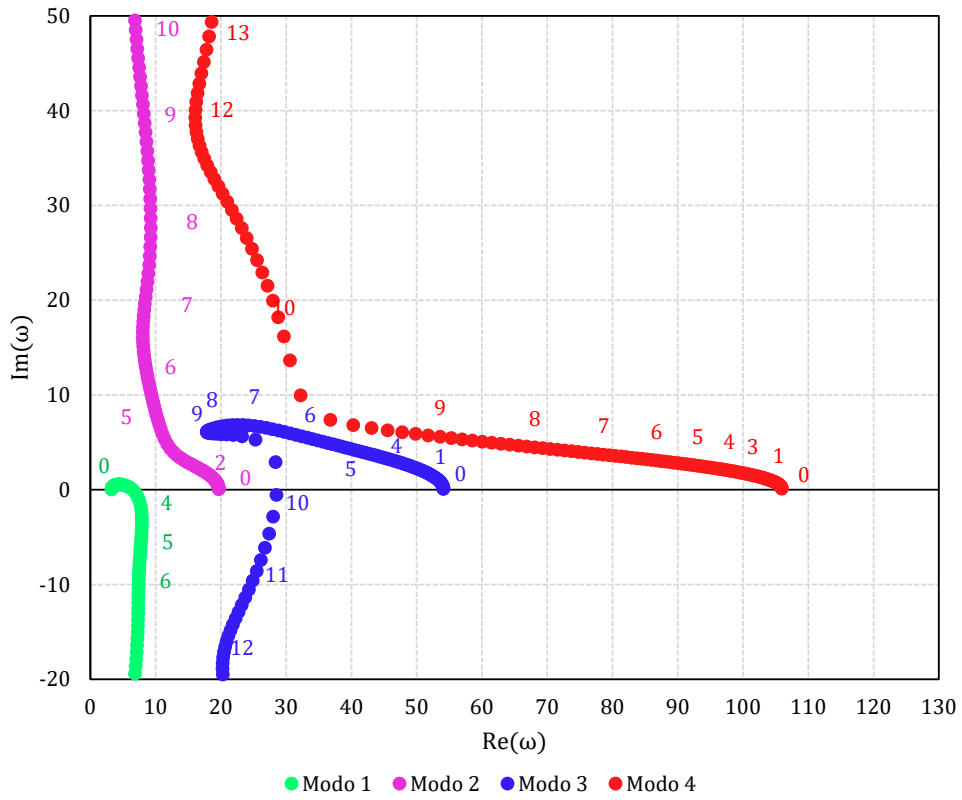
(g)  $\ell_2 = 0, 6$



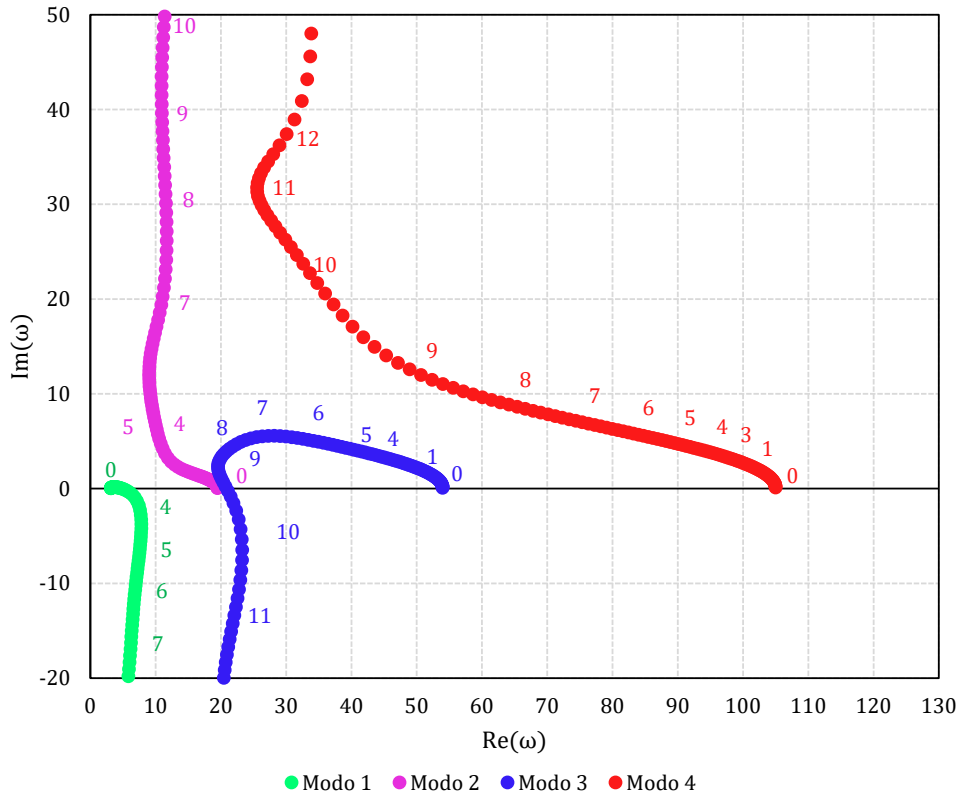
(h)  $\ell_2 = 0, 7$



(i)  $\ell_2 = 0,8$



(j)  $\ell_2 = 0,9$



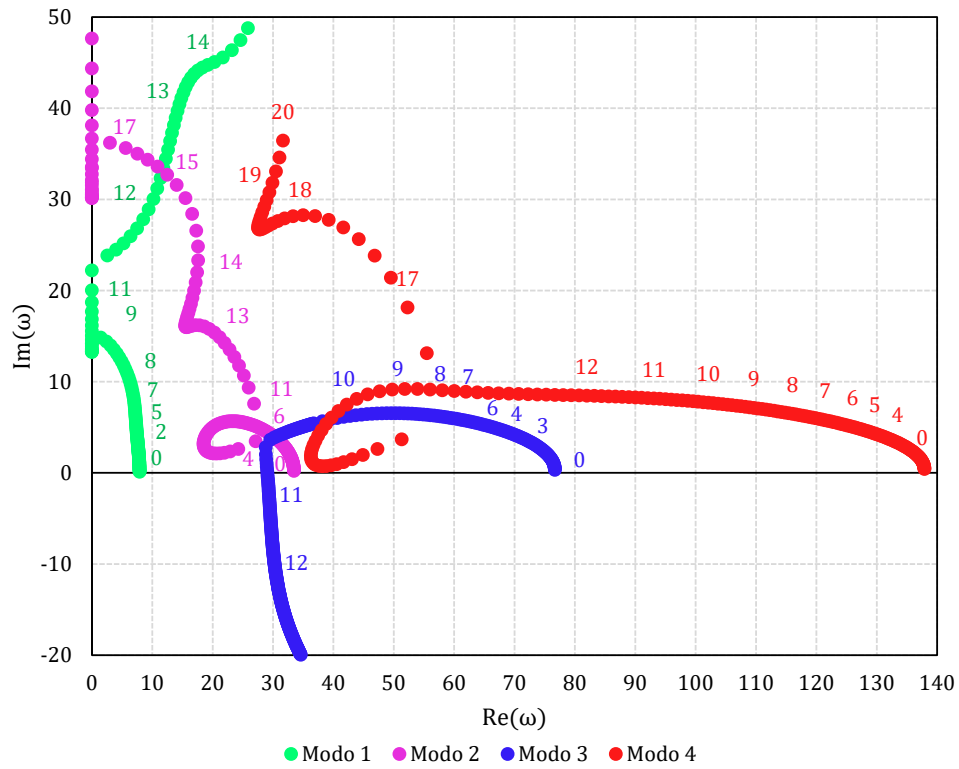


## I.2 Simulação 2

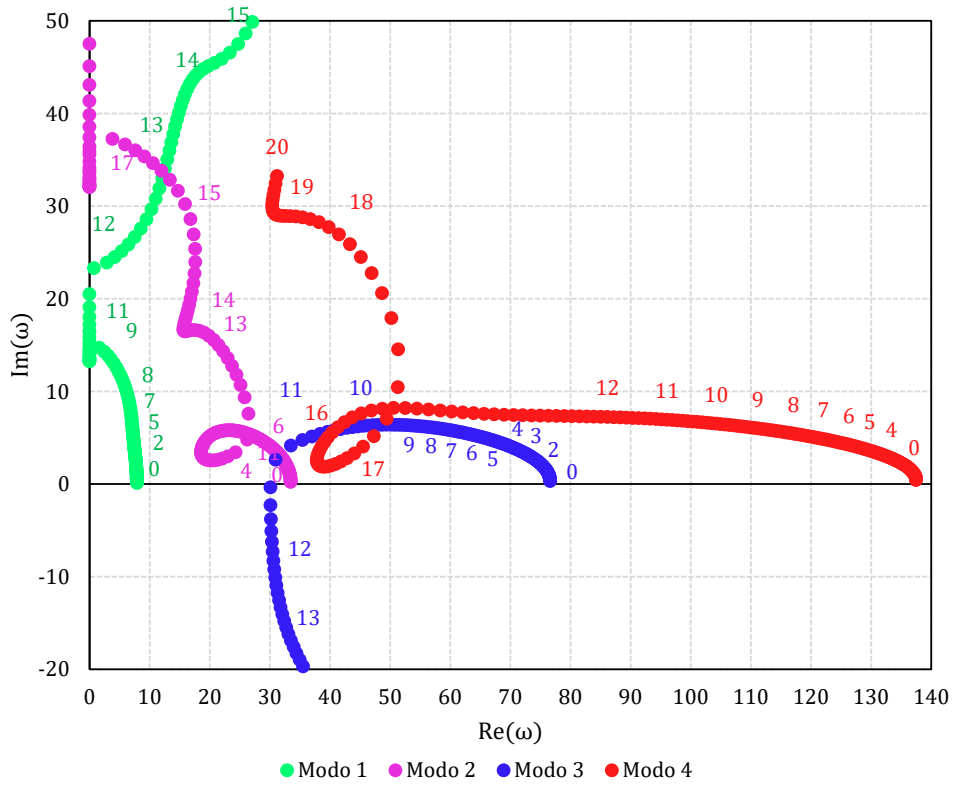
$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho} &= \begin{bmatrix} 42,59653 & 42,59653 \end{bmatrix}; \boldsymbol{\beta}_u = \begin{bmatrix} 1,70526 & 0,57441 \end{bmatrix}; \boldsymbol{\zeta} = \begin{bmatrix} 0,33898 & 0,33898 \end{bmatrix}; \\ c_f &= 0,01592; \alpha = 0,66667; \bar{\gamma} = 0,60000; \varsigma = -2,12500; \Gamma = 0; \gamma = 83,06323; \\ \beta_i &= 0,15066; \beta_o = 0,33898; \beta_t = 0,51036; \\ K_1 &= 0,9; K_2 = 1; \varepsilon = 466,66667; h = 1,50000; \alpha_{ch} = 1,66667; \mu = 0,12179. \end{aligned} \quad (\text{I.2})$$

Figura 14: Diagrama de Argand para variação de  $u_i$

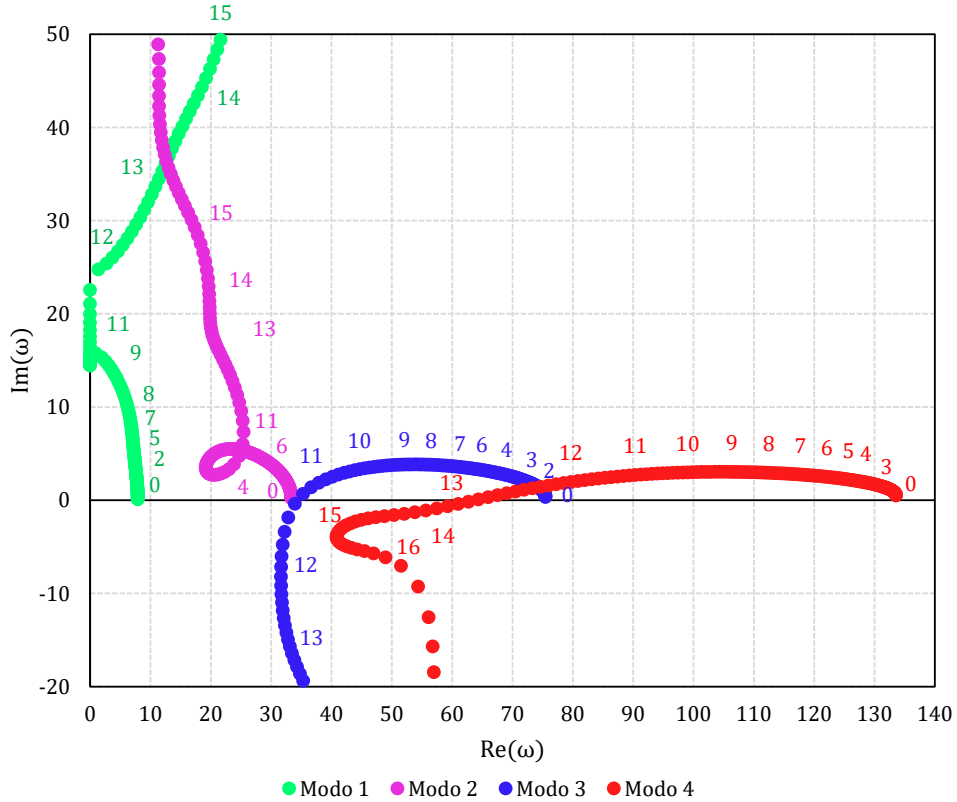
(a)  $\ell_2 = 0,0$



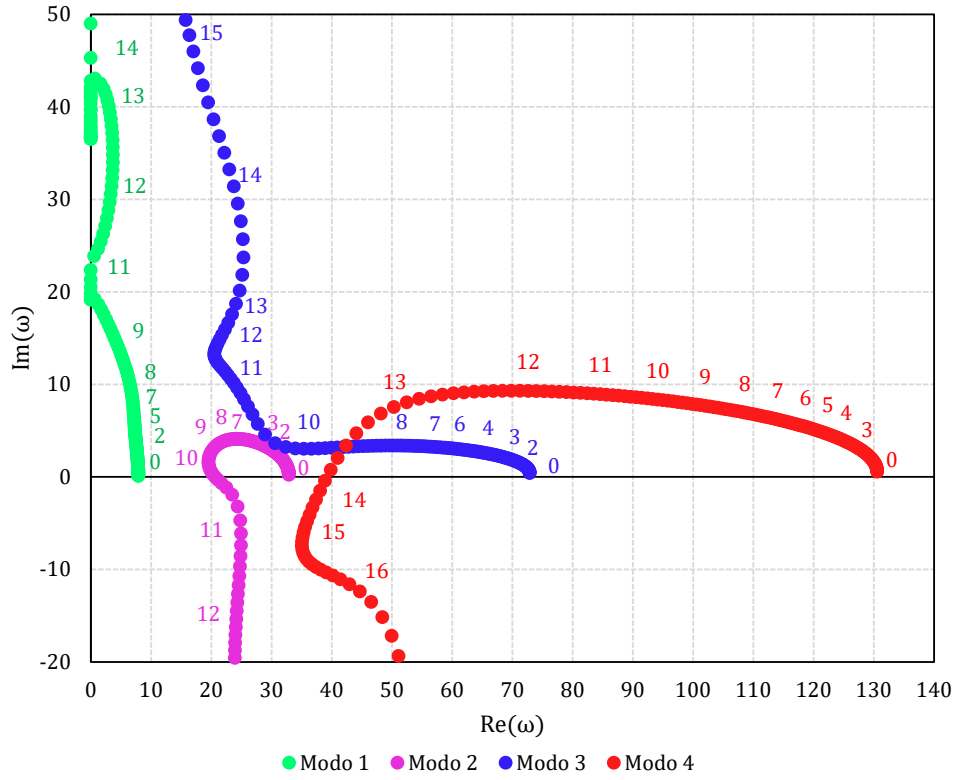
(b)  $\ell_2 = 0, 1$



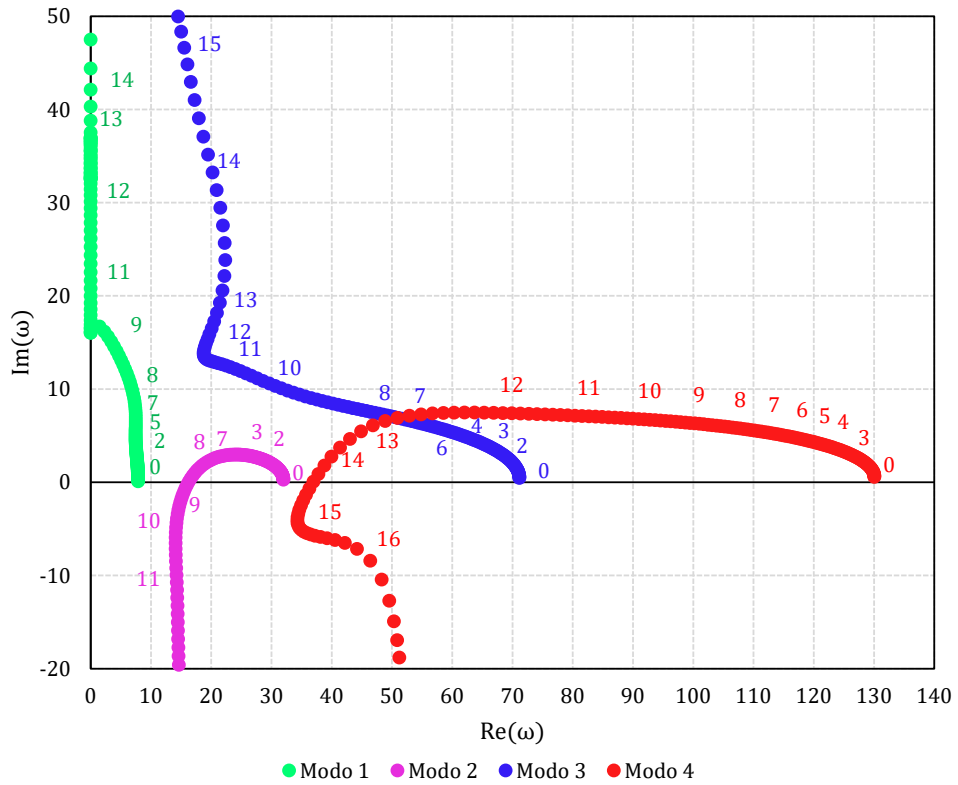
(c)  $\ell_2 = 0, 2$



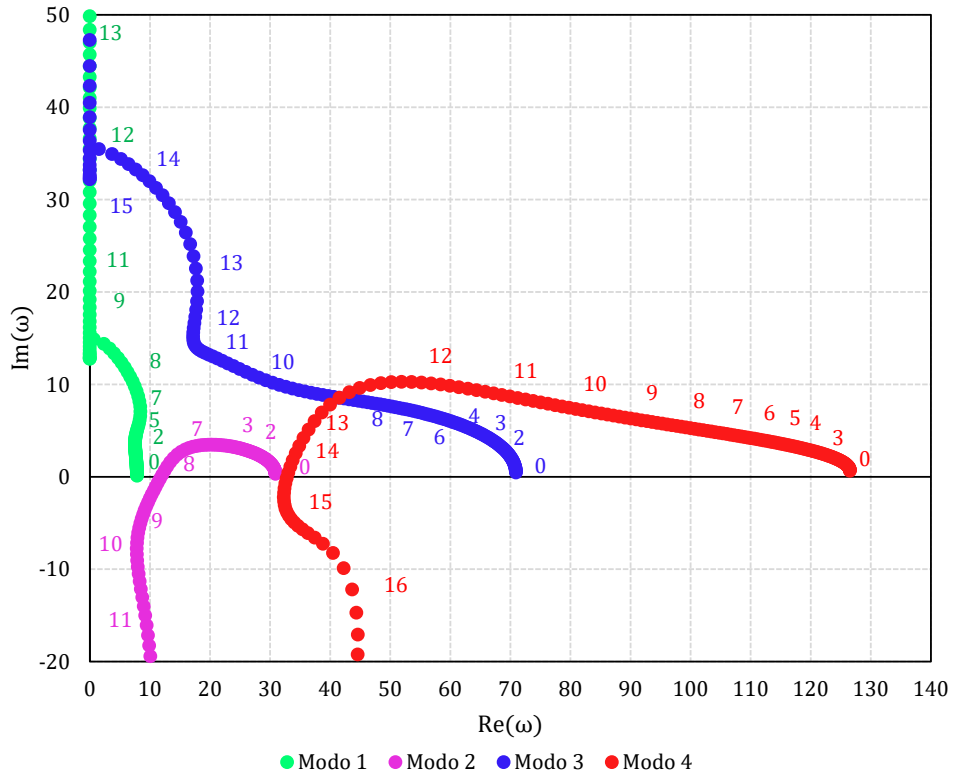
(d)  $\ell_2 = 0, 3$



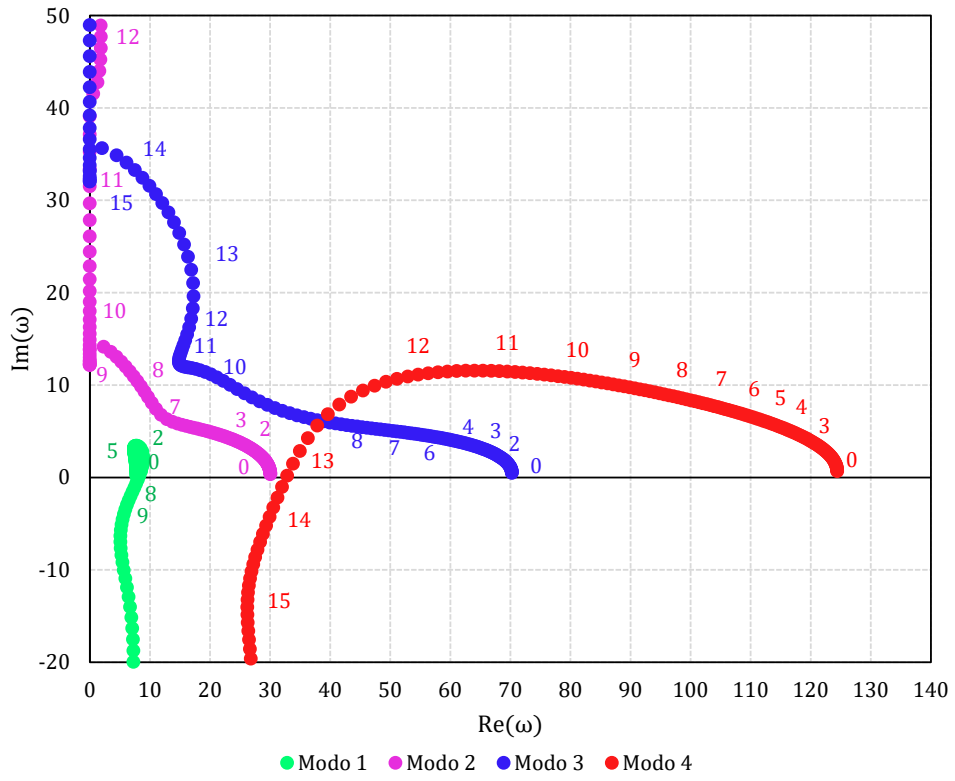
(e)  $\ell_2 = 0, 4$



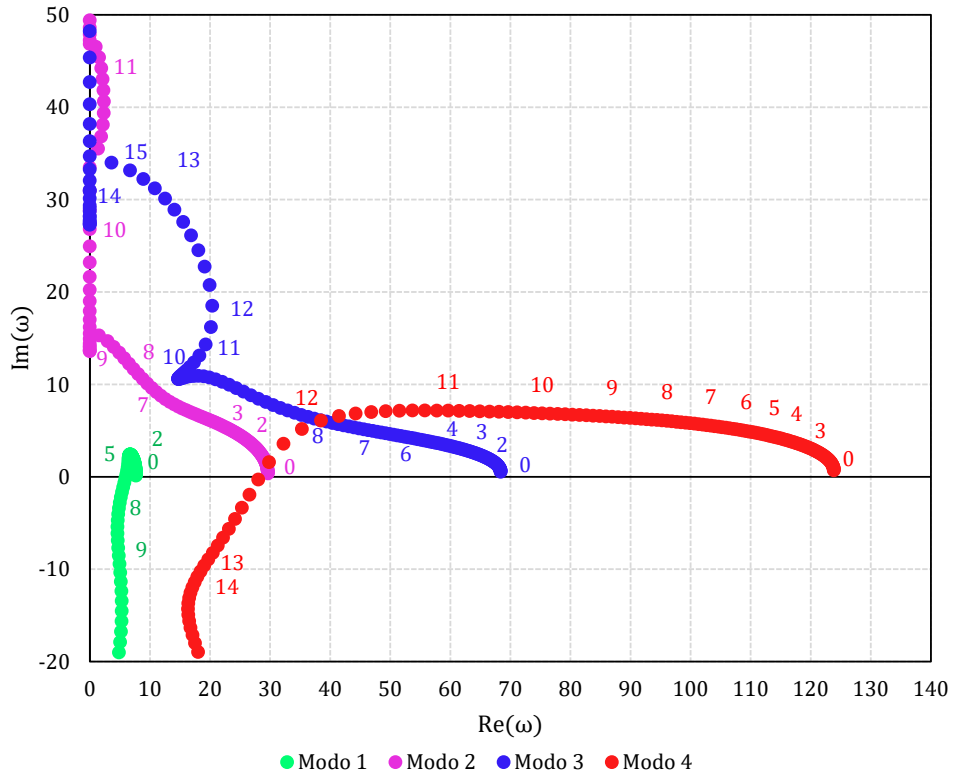
(f)  $\ell_2 = 0,5$



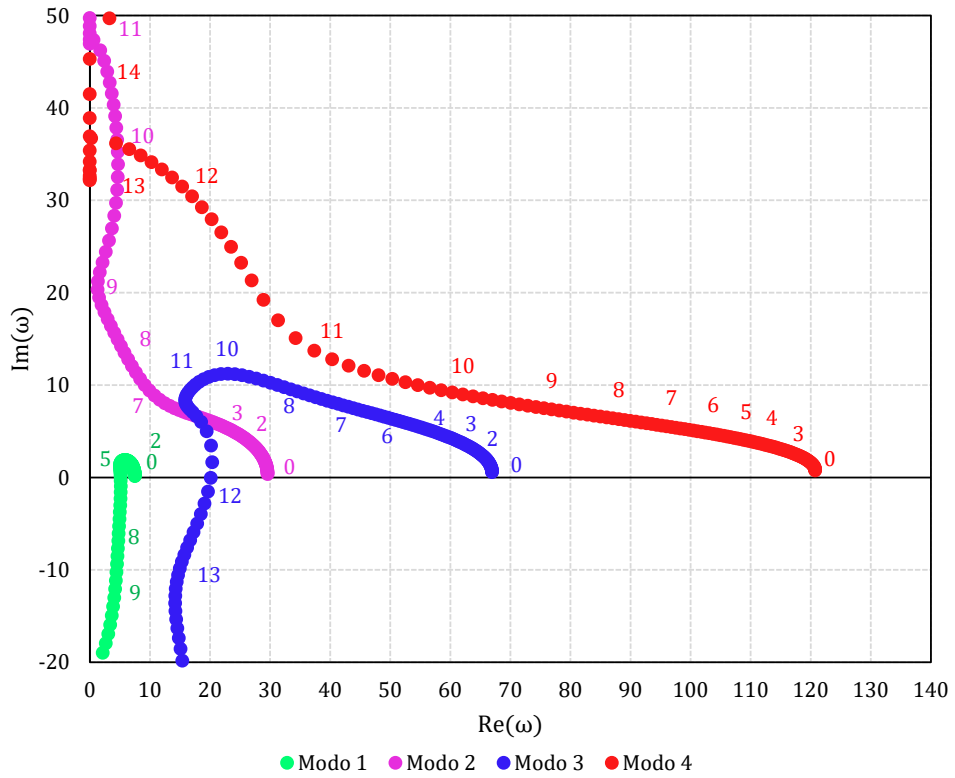
(g)  $\ell_2 = 0,6$

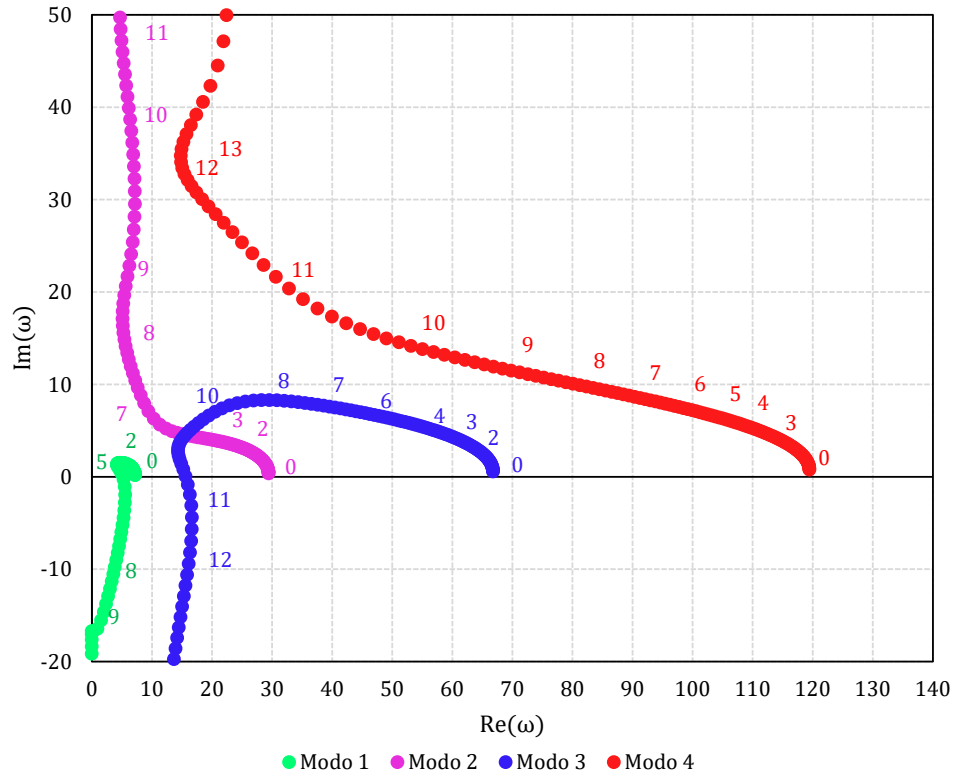


(h)  $\ell_2 = 0, 7$



(i)  $\ell_2 = 0, 8$



(j)  $\ell_2 = 0,9$ 

Fonte: Autor.

### I.3 Simulação 3

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} 419,13494 & 419,13494 \end{bmatrix}; \boldsymbol{\beta}_u = \begin{bmatrix} 7,83030 & 2,63757 \end{bmatrix}; \boldsymbol{\zeta} = \begin{bmatrix} 0,33898 & 0,33898 \end{bmatrix};$$

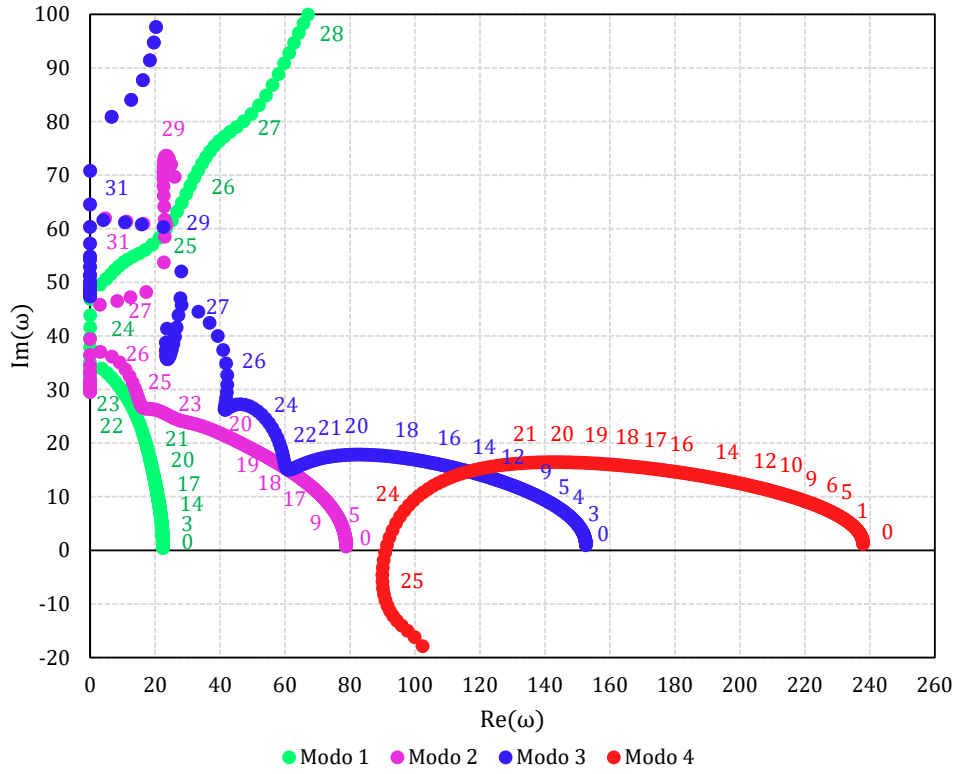
$$c_f = 0,01592; \alpha = 0,66667; \bar{\gamma} = 0,60000; \varsigma = -2,12500; \Gamma = 0; \gamma = 817,31314;$$

$$\beta_i = 0,15066; \beta_o = 0,33898; \beta_t = 0,51036;$$

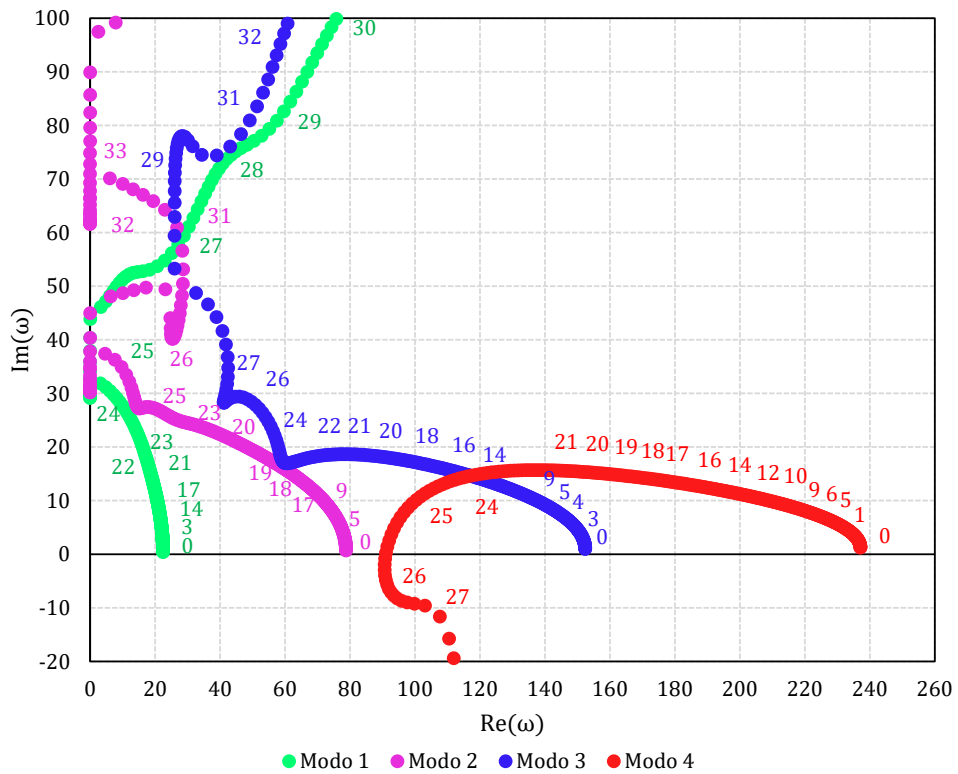
$$K_1 = 0,9; K_2 = 1; \varepsilon = 1000; h = 1,50000; \alpha_{ch} = 1,66667; \mu = 0,05683. \quad (\text{I.3})$$

Figura 15: Diagrama de Argand para variação de  $u_i$

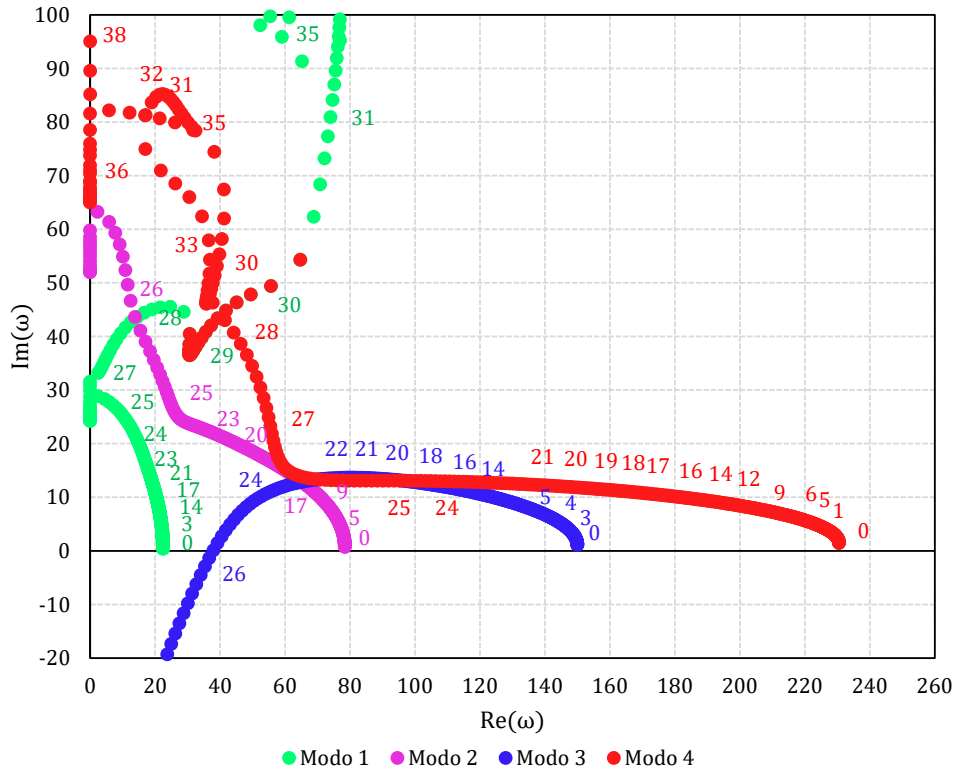
(a)  $\ell_2 = 0, 0$



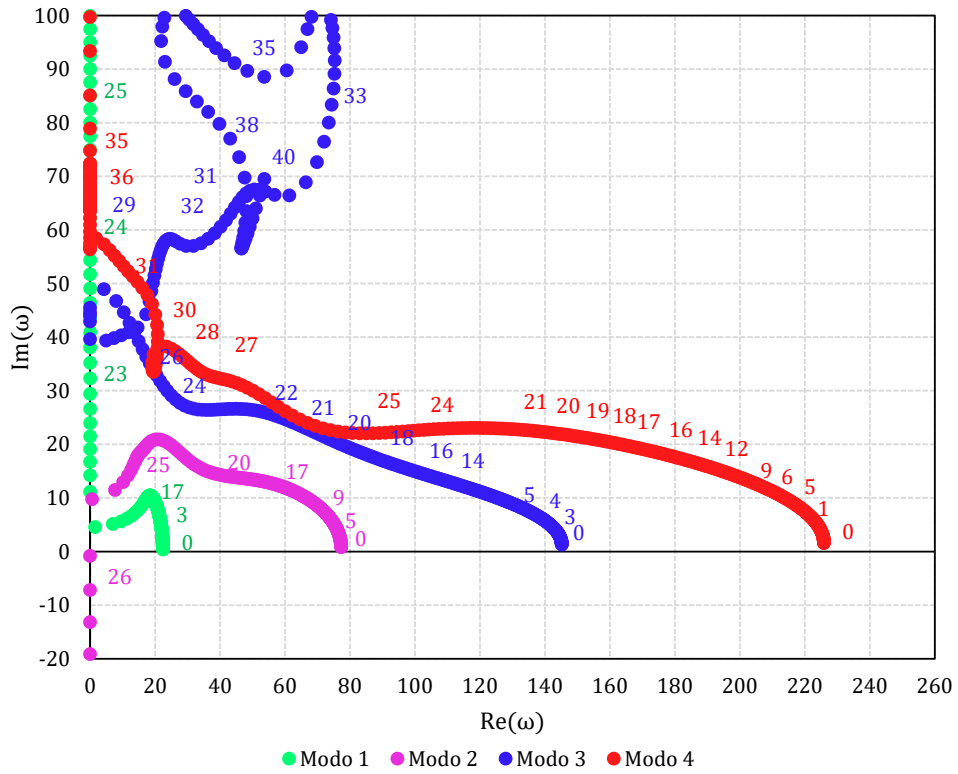
(b)  $\ell_2 = 0, 1$



(c)  $\ell_2 = 0, 2$

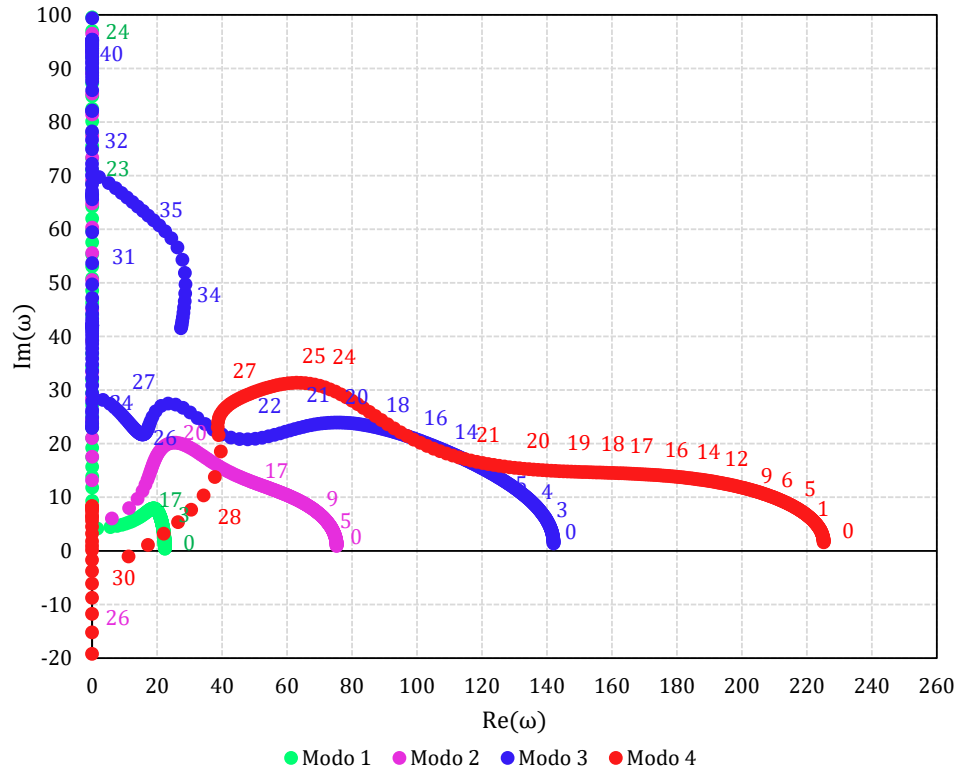


(d)  $\ell_2 = 0, 3$

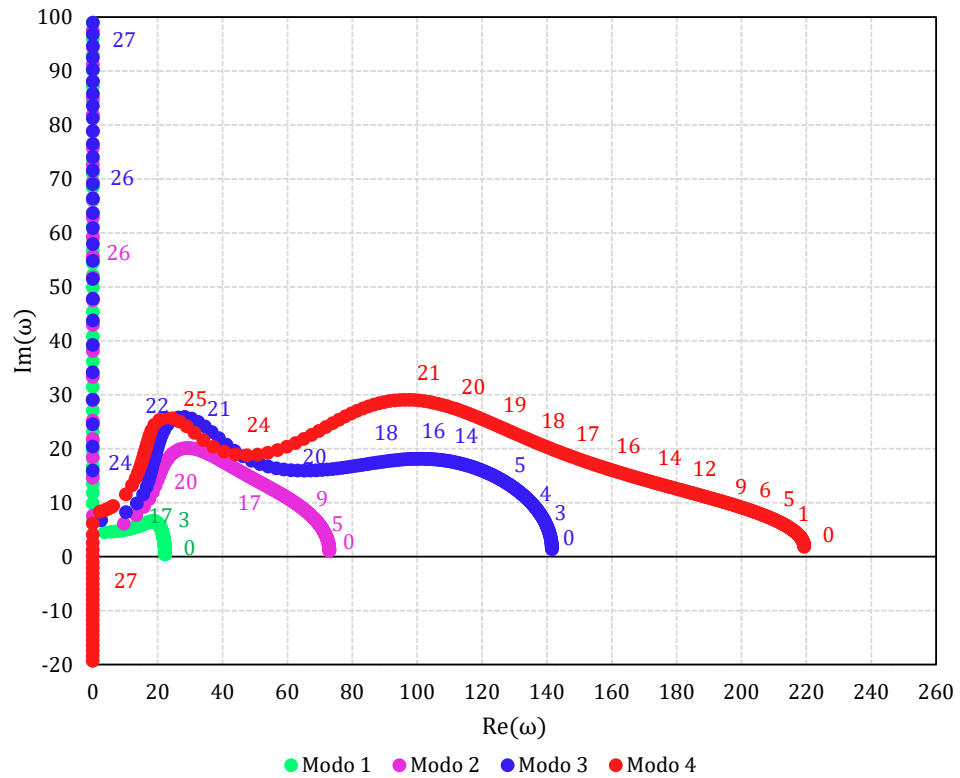




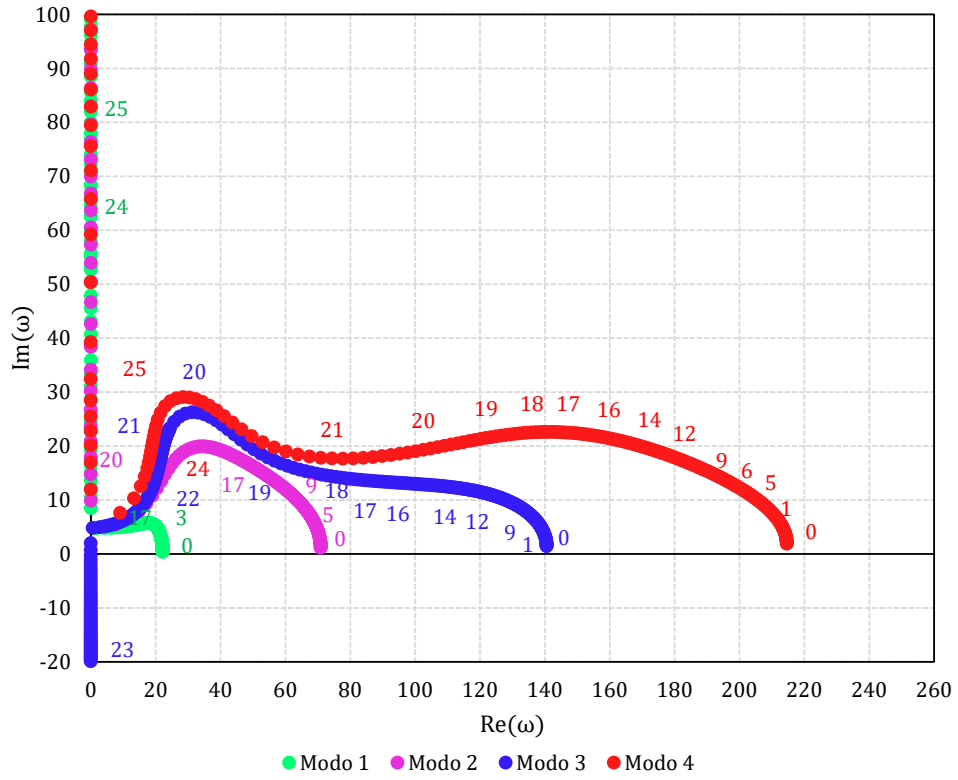
(e)  $\ell_2 = 0, 4$



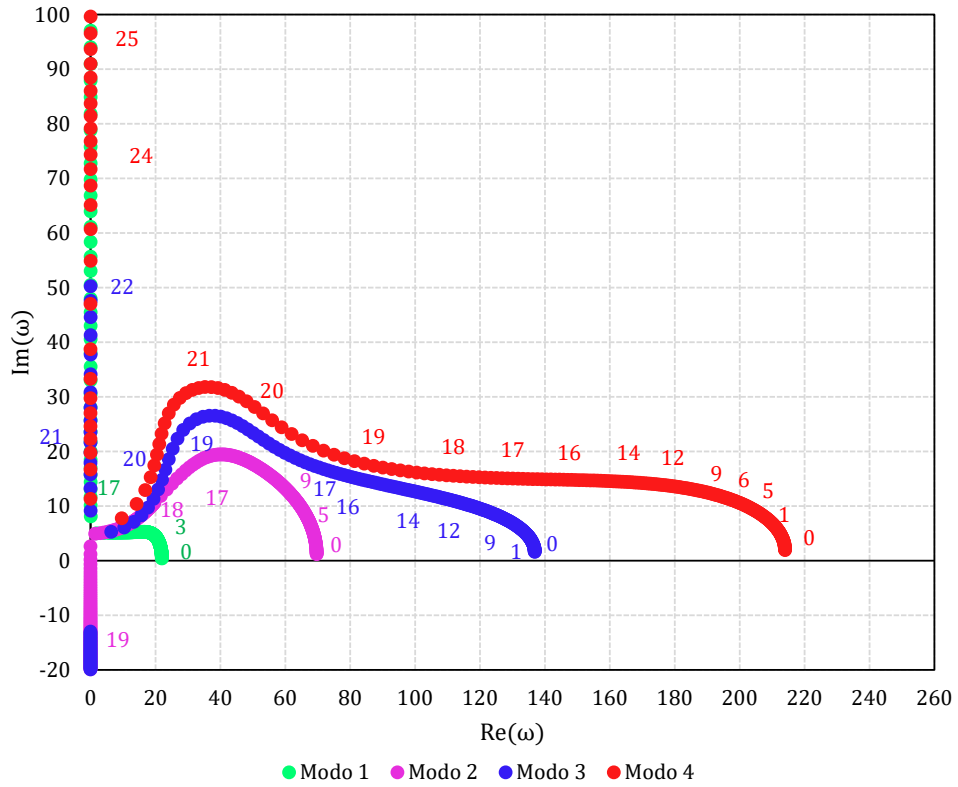
(f)  $\ell_2 = 0, 5$



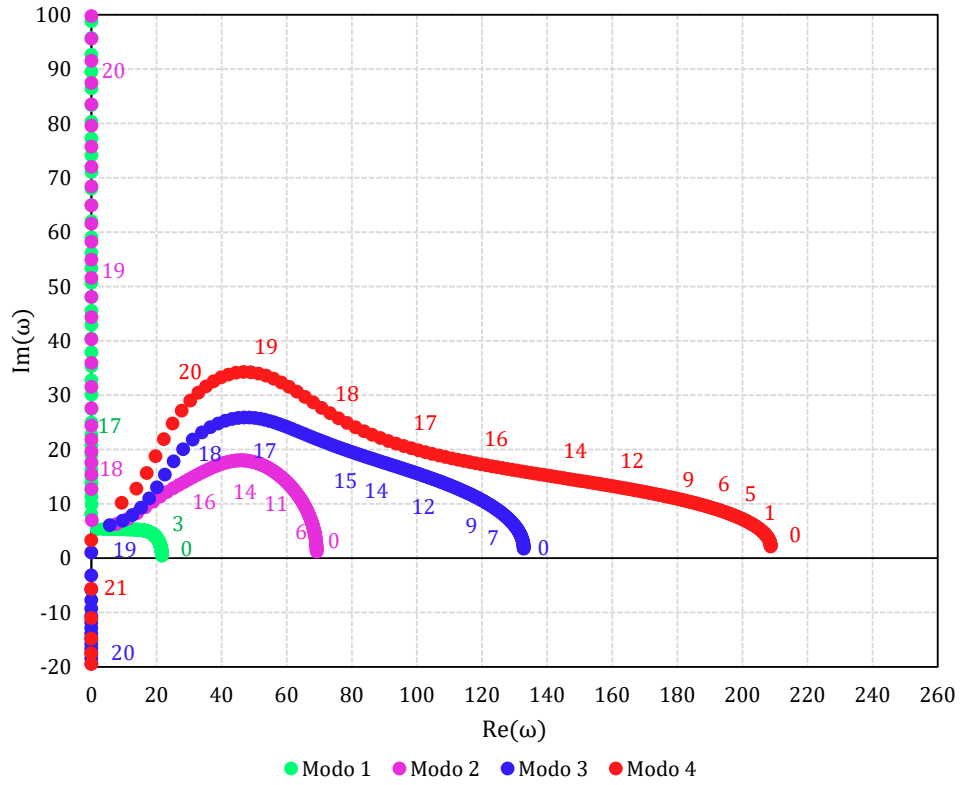
(g)  $\ell_2 = 0, 6$



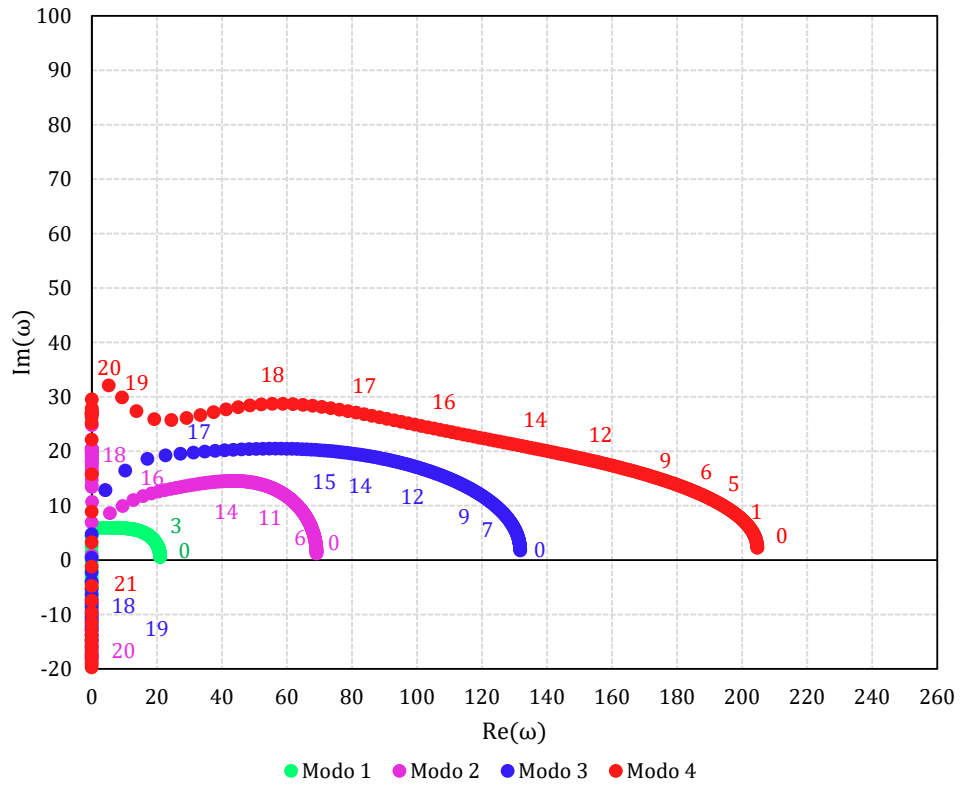
(h)  $\ell_2 = 0, 7$



(i)  $\ell_2 = 0,8$



(j)  $\ell_2 = 0,9$



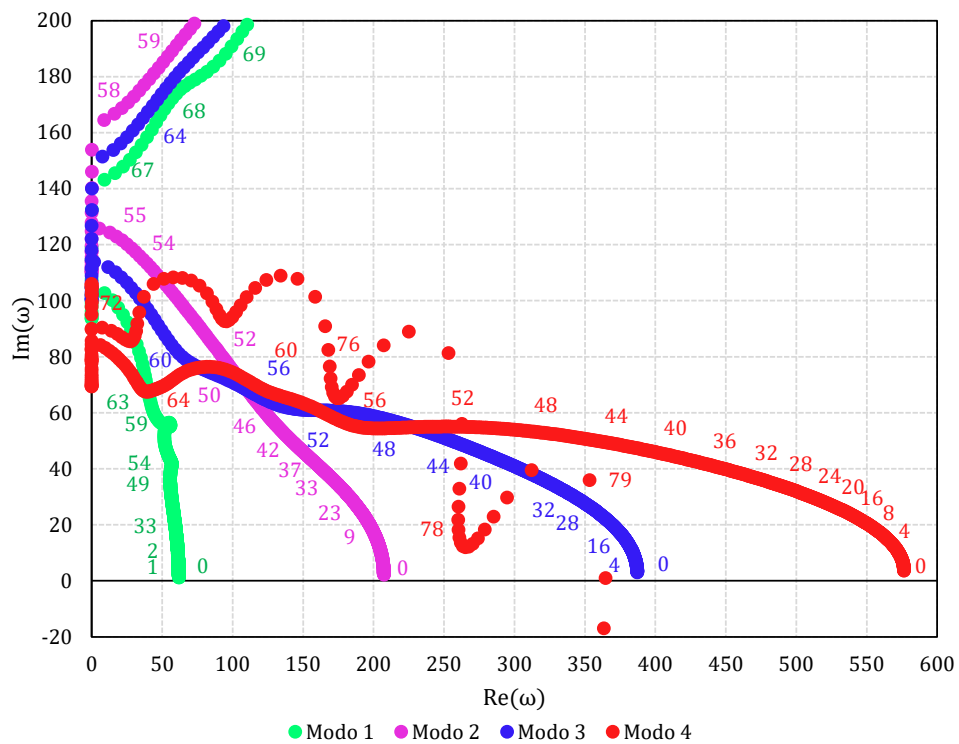
Fonte: Autor.

## I.4 Simulação 4

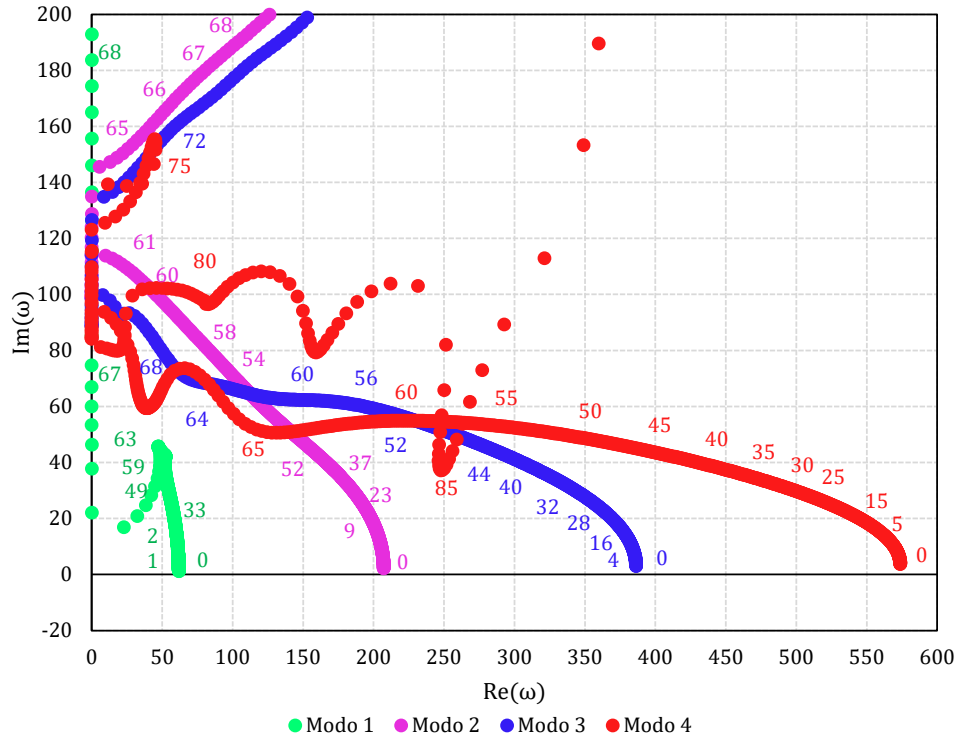
$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho} &= \begin{bmatrix} 3353,07956 & 3353,07956 \end{bmatrix}; \boldsymbol{\beta}_u = \begin{bmatrix} 31,32119 & 10,55030 \end{bmatrix}; \\ \boldsymbol{\zeta} &= \begin{bmatrix} 0,33898 & 0,33898 \end{bmatrix}; \\ c_f &= 0,01592; \alpha = 0,66667; \bar{\gamma} = 0,60000; \varsigma = -2,12500; \Gamma = 0; \gamma = 6538,50514; \\ \beta_i &= 0,15066; \beta_o = 0,33898; \beta_t = 0,51036; \\ K_1 &= 0,9; K_2 = 1; \varepsilon = 2000; h = 1,50000; \alpha_{ch} = 1,66667; \mu = 0,02842. \quad (\text{I.4}) \end{aligned}$$

Figura 16: Diagrama de Argand para variação de  $u_i$

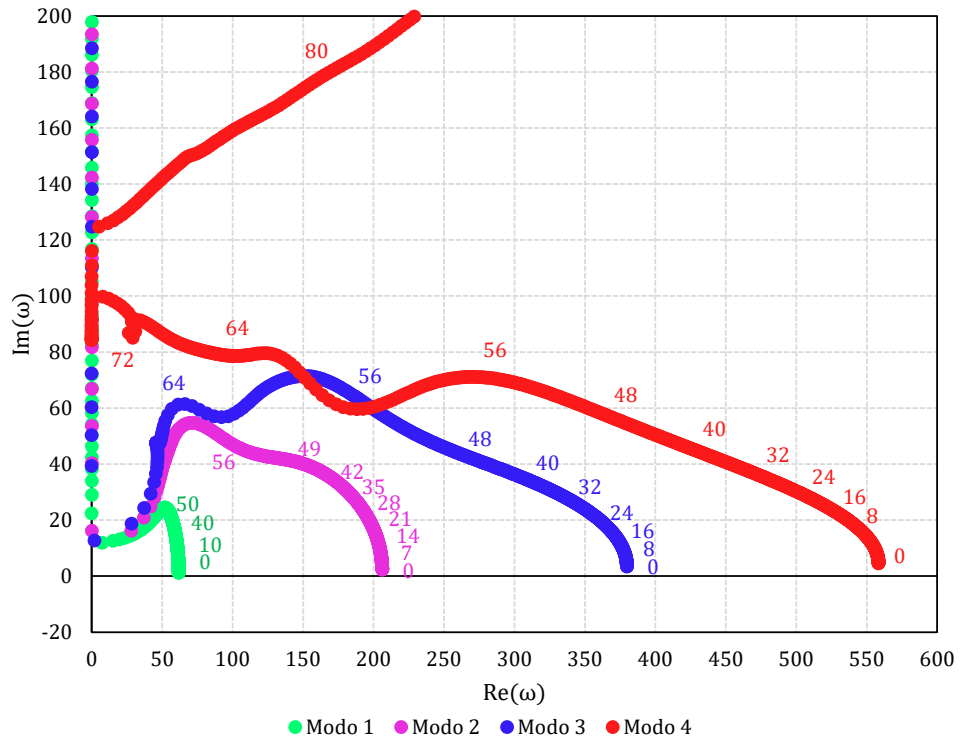
(a)  $\ell_2 = 0,0$



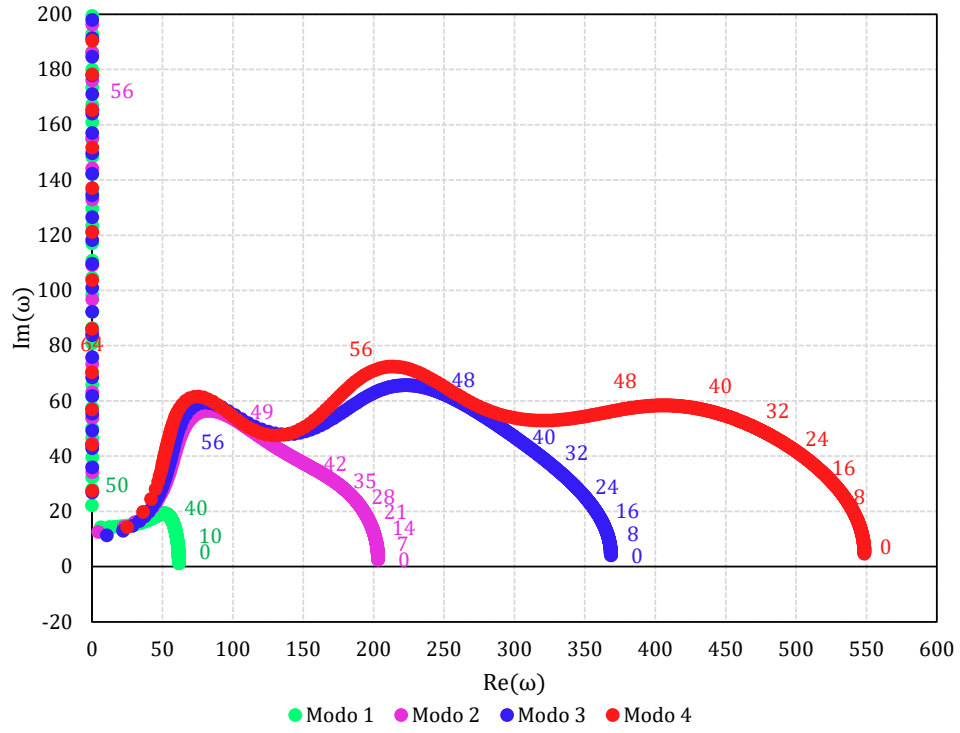
(b)  $\ell_2 = 0, 1$



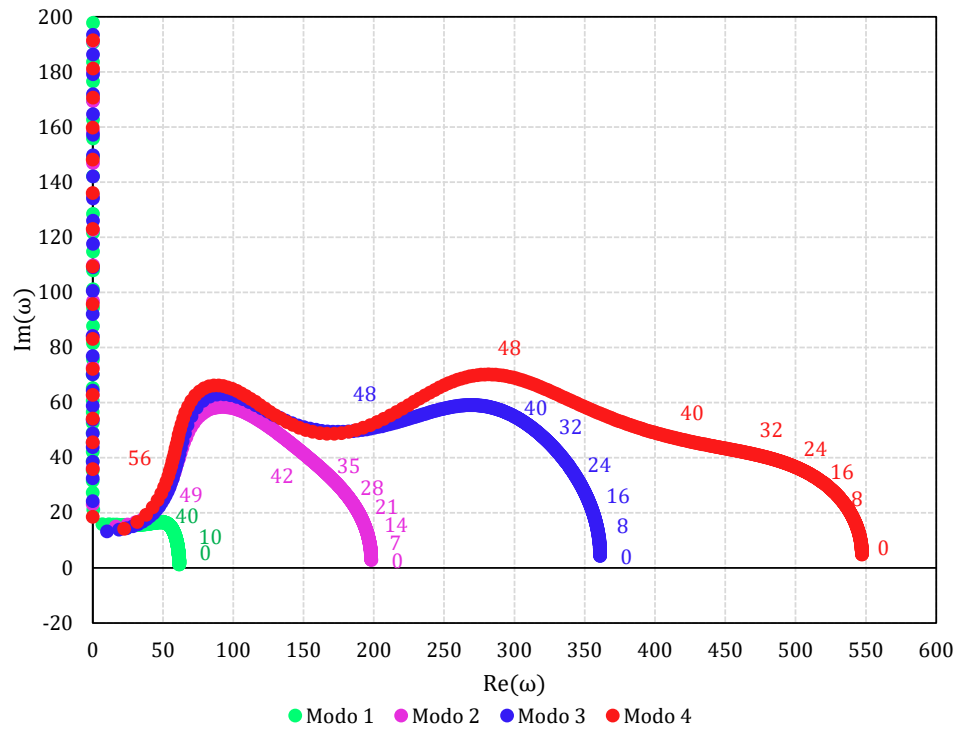
(c)  $\ell_2 = 0, 2$



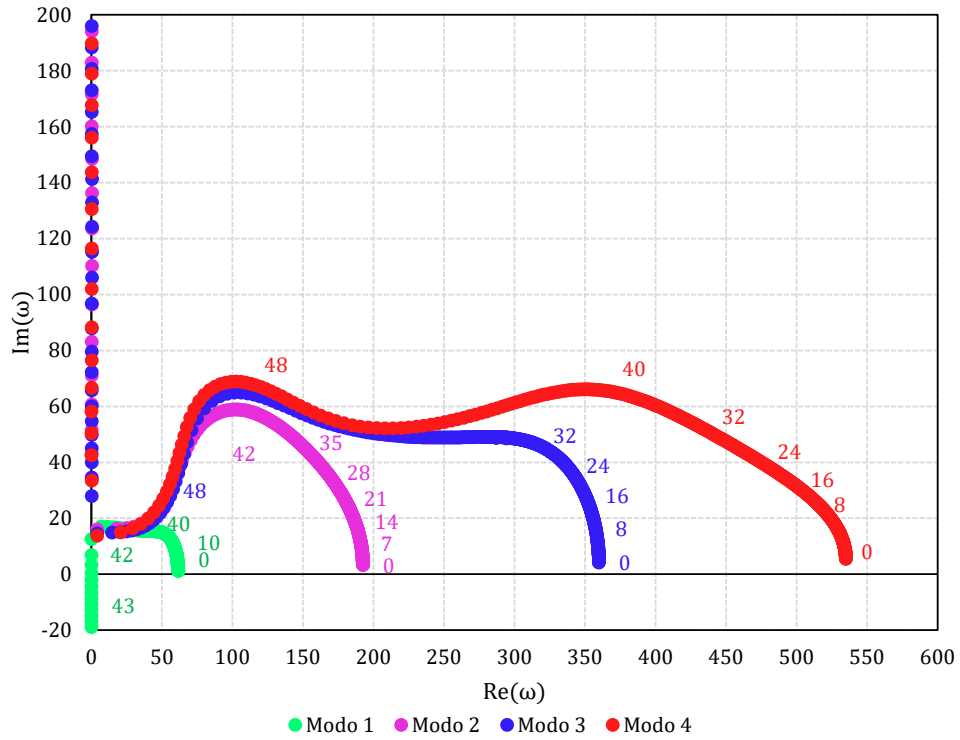
(d)  $\ell_2 = 0, 3$



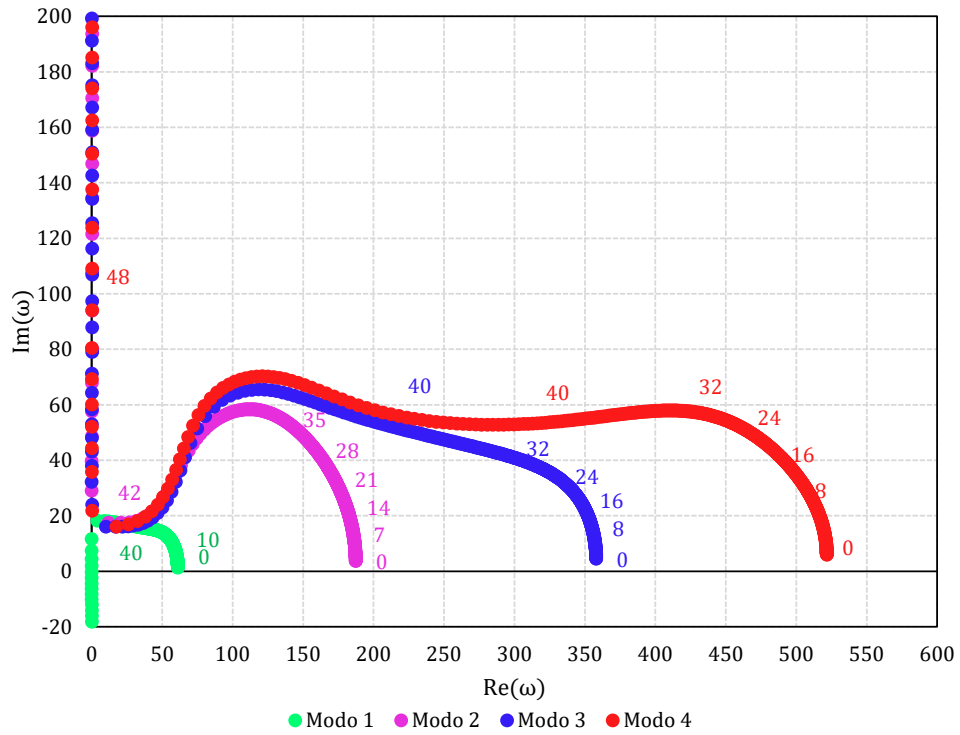
(e)  $\ell_2 = 0, 4$



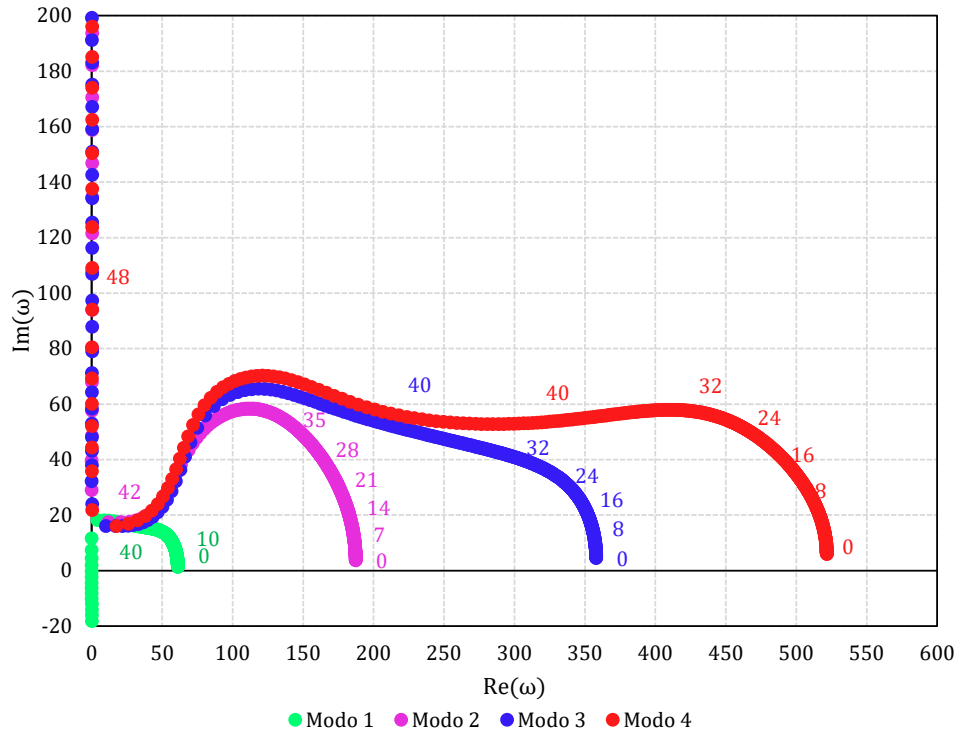
(f)  $\ell_2 = 0, 5$



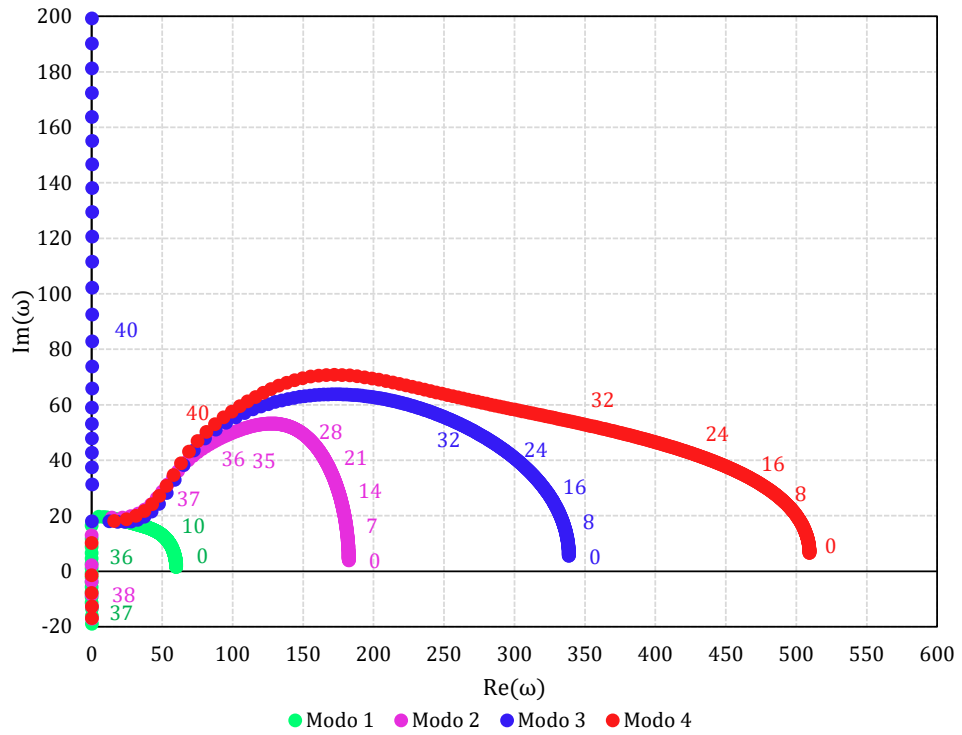
(g)  $\ell_2 = 0, 6$



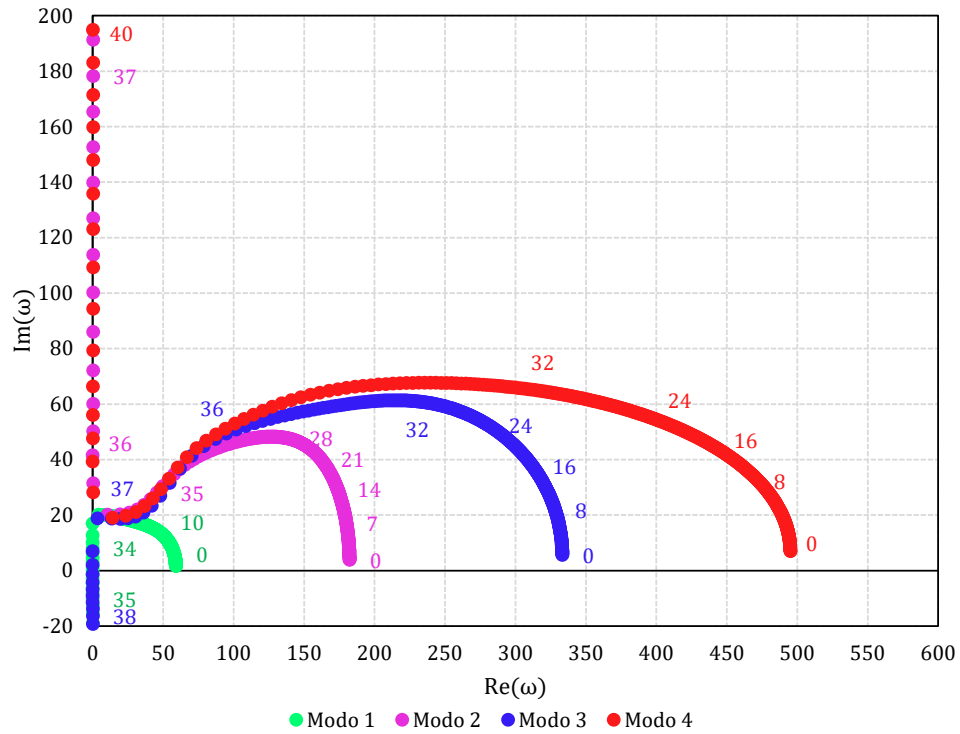
(h)  $\ell_2 = 0,7$



(i)  $\ell_2 = 0,8$





(j)  $\ell_2 = 0,9$ 

Fonte: Autor.

## I.5 Simulação 5

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} 50324,01155 & 50324,01155 \end{bmatrix}; \boldsymbol{\beta}_u = \begin{bmatrix} 190,57205 & 64.19269 \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\zeta} = \begin{bmatrix} 0,33898 & 0,33898 \end{bmatrix};$$

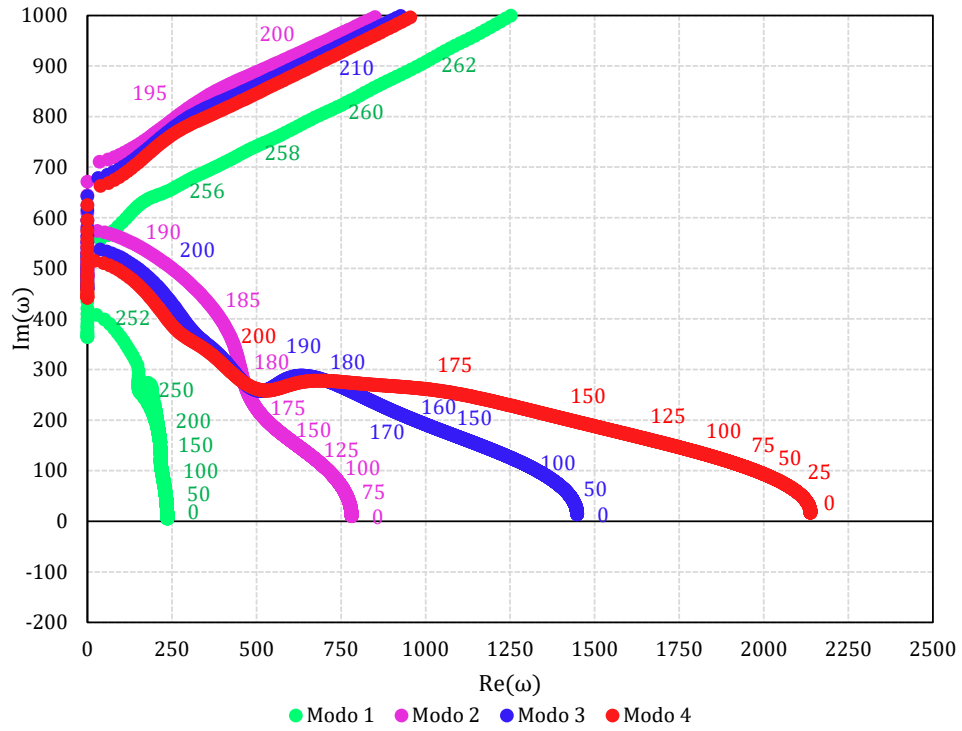
$$c_f = 0,01592; \alpha = 0,66667; \bar{\gamma} = 0,60000; \varsigma = -2,12500; \Gamma = 0; \gamma = 98131,82252;$$

$$\beta_i = 0,15066; \beta_o = 0,33898; \beta_t = 0,51036;$$

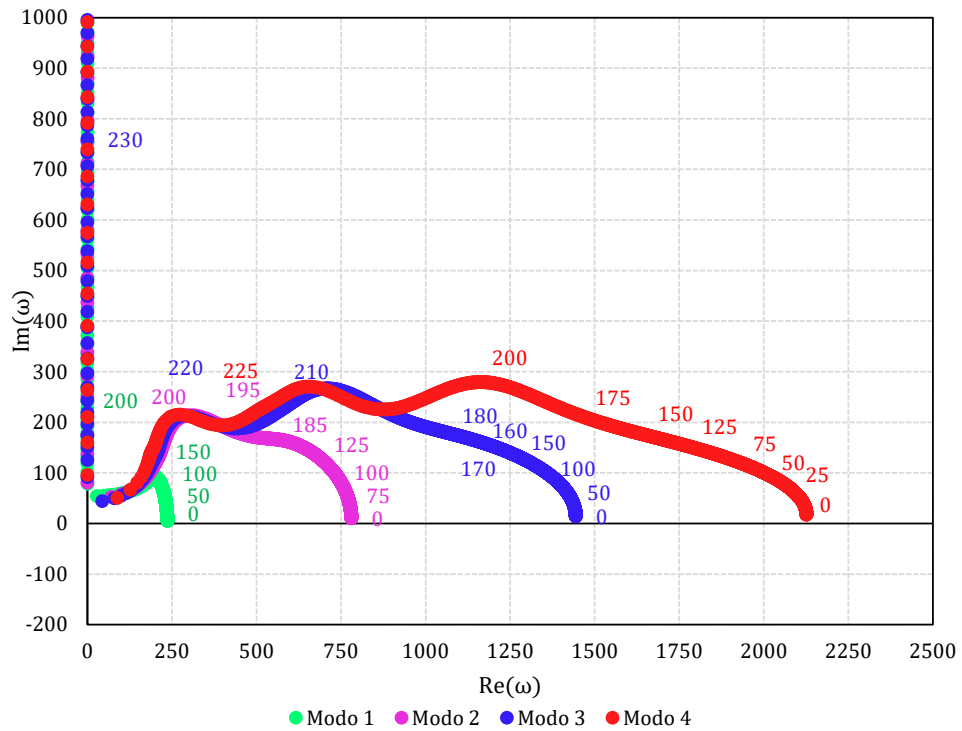
$$K_1 = 0,9; K_2 = 1; \varepsilon = 4933,33333; h = 1,50000; \alpha_{ch} = 1,66667; \mu = 0,01152. \quad (\text{I.5})$$

Figura 17: Diagrama de Argand para variação de  $u_i$

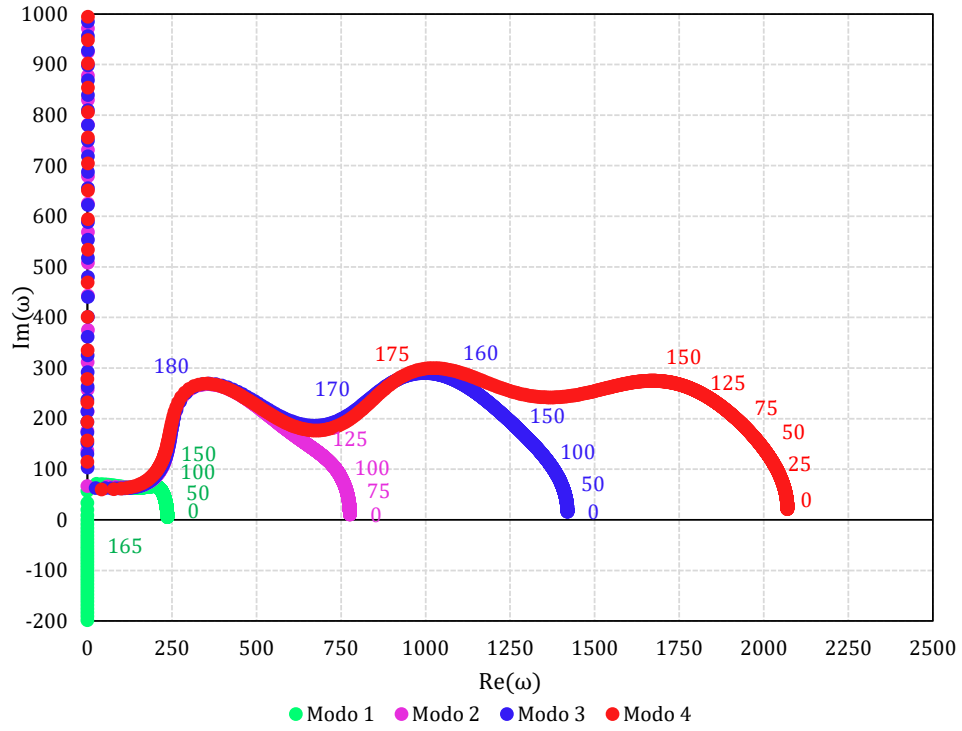
(a)  $\ell_2 = 0, 0$



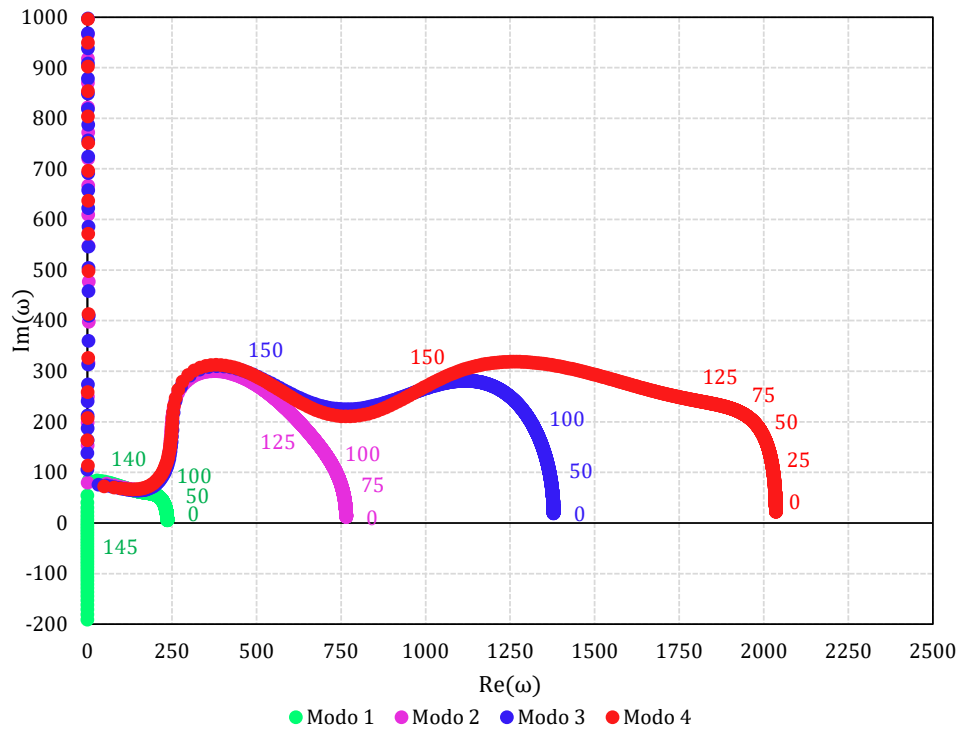
(b)  $\ell_2 = 0, 1$



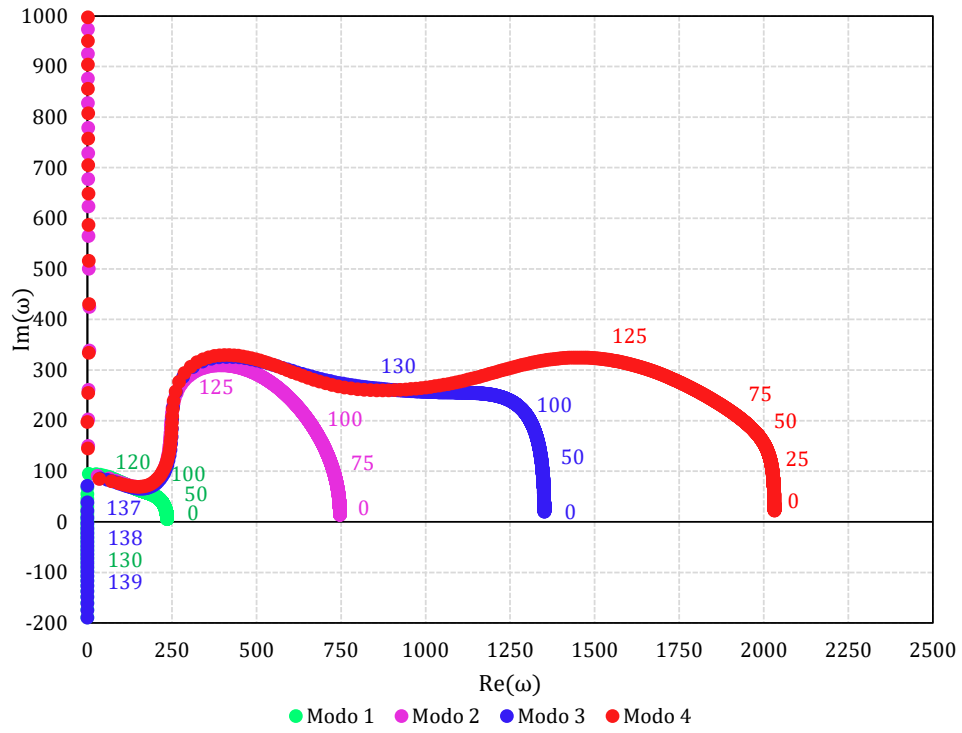
(c)  $\ell_2 = 0, 2$



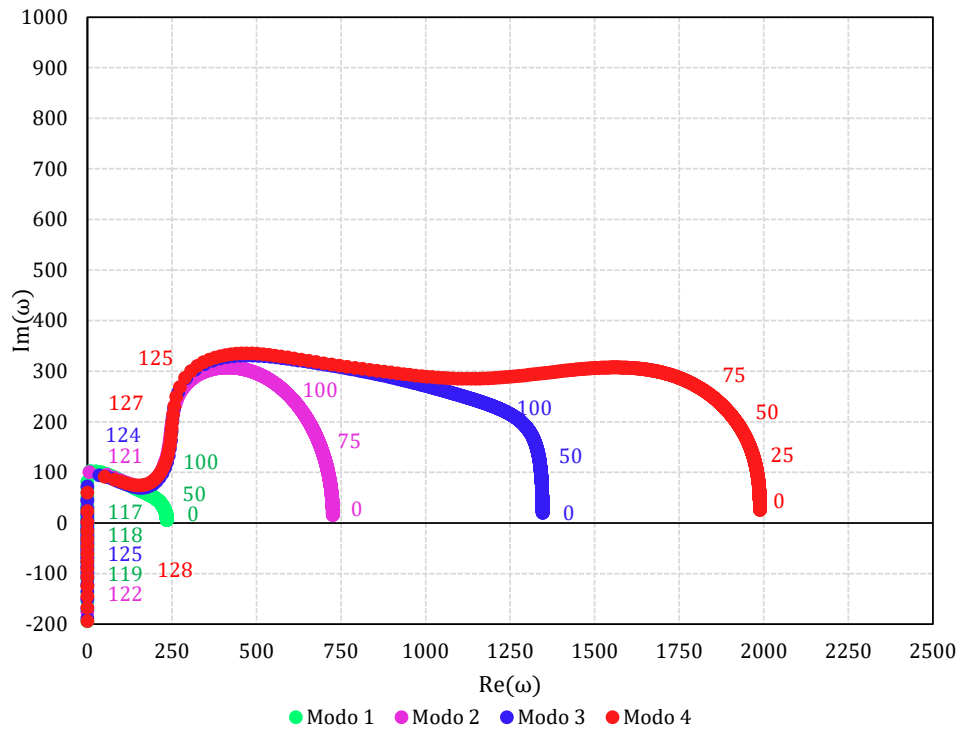
(d)  $\ell_2 = 0, 3$



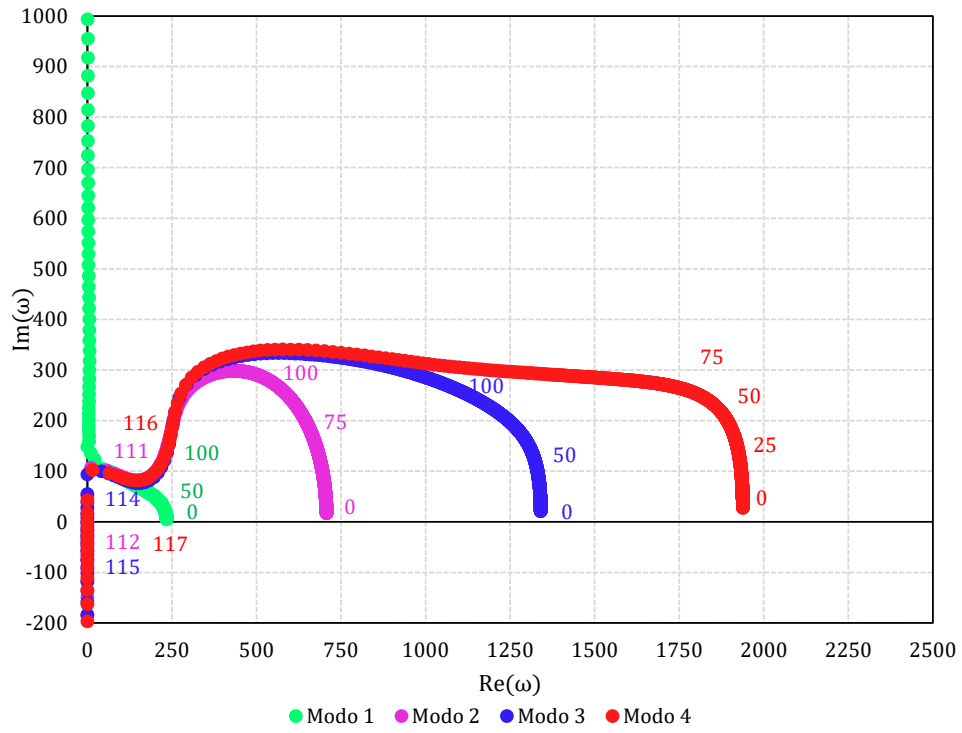
(e)  $\ell_2 = 0, 4$



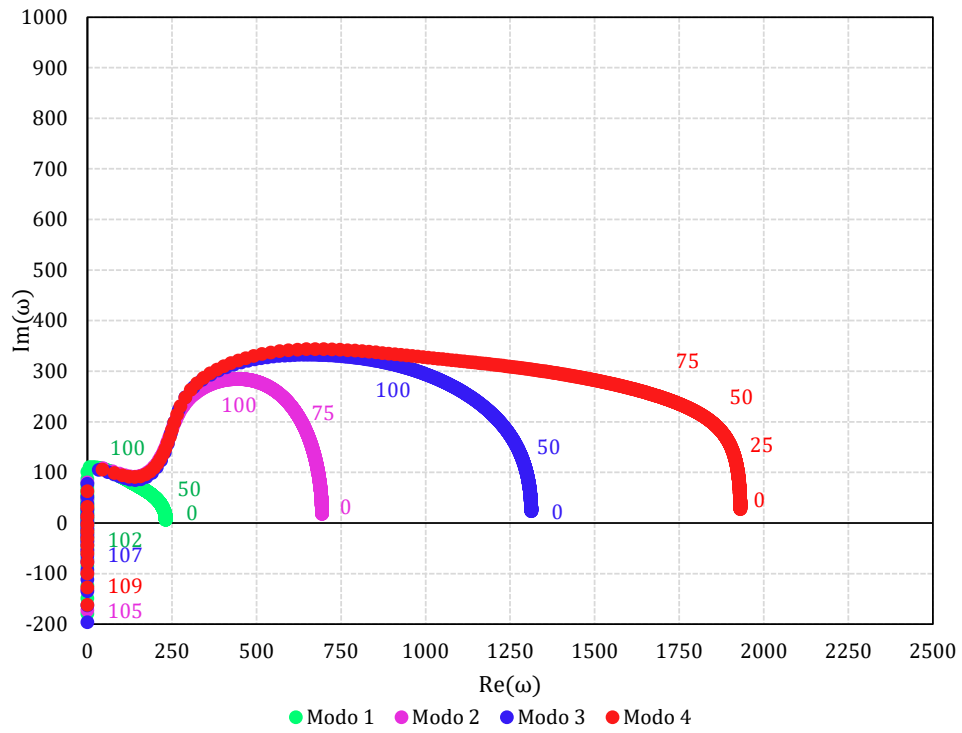
(f)  $\ell_2 = 0, 5$



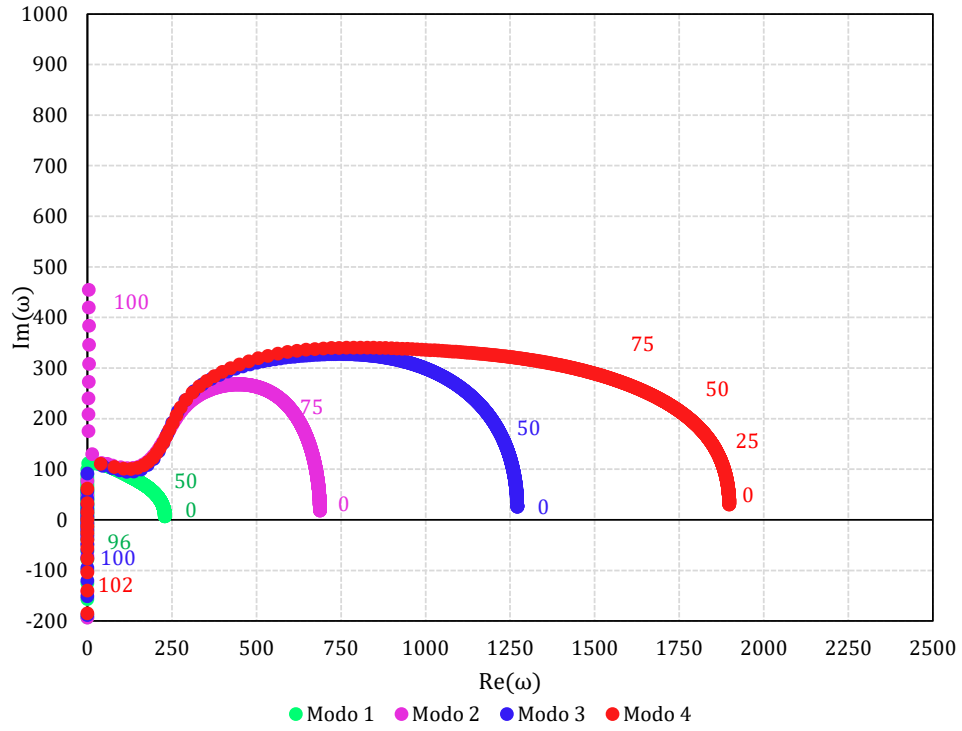
(g)  $\ell_2 = 0, 6$



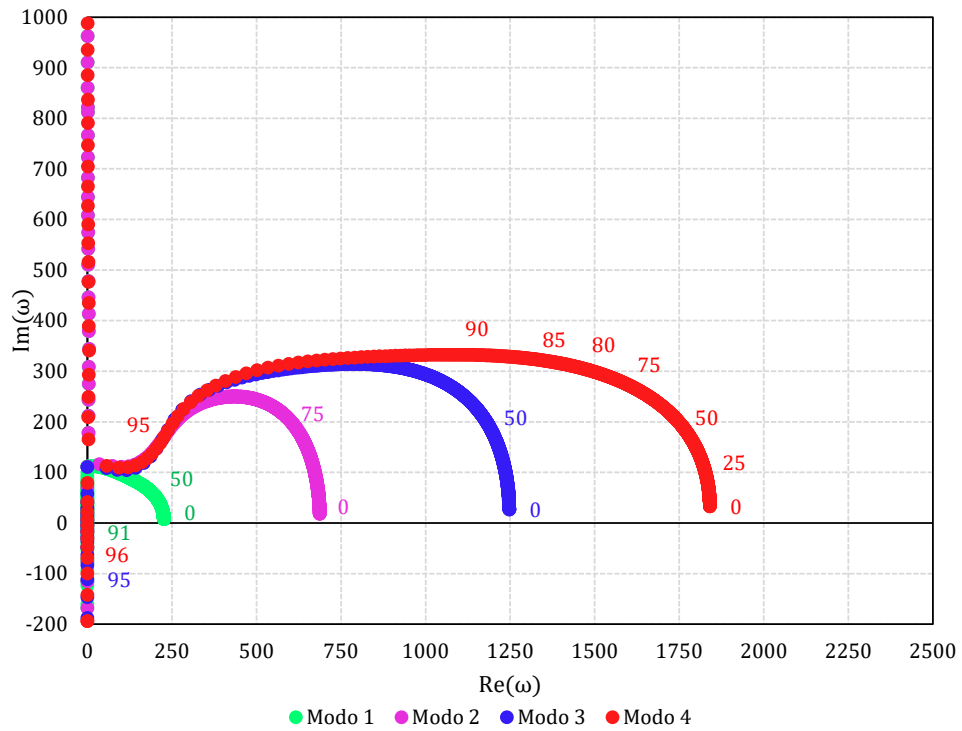
(h)  $\ell_2 = 0, 7$



(i)  $\ell_2 = 0,8$



(j)  $\ell_2 = 0,9$



Fonte: Autor.

## I.6 Simulação 6

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} 1576,11219 & 1576,11219 & 3686,06883 & 5507,91893 \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\beta}_u = \begin{bmatrix} 8,51928 & 0,73022 & 0,40951 & 2,11973 \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\zeta} = \begin{bmatrix} 0,06817 & 0,06817 & 0,15943 & 0,23823 \end{bmatrix};$$

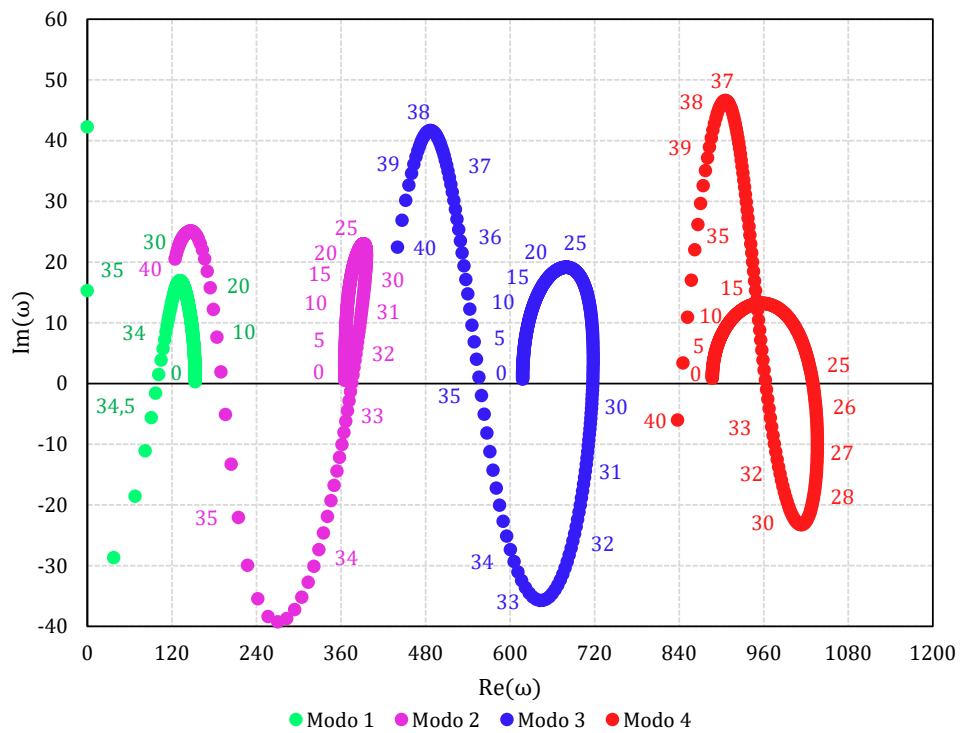
$$c_f = 0,01592; \alpha = 0,75000; \bar{\gamma} = 0,80000; \varsigma = -4,55556; \Gamma = 0; \gamma = 17612,10040;$$

$$\beta_i = 0,13400; \beta_o = 0,06817; \beta_t = 0,62776;$$

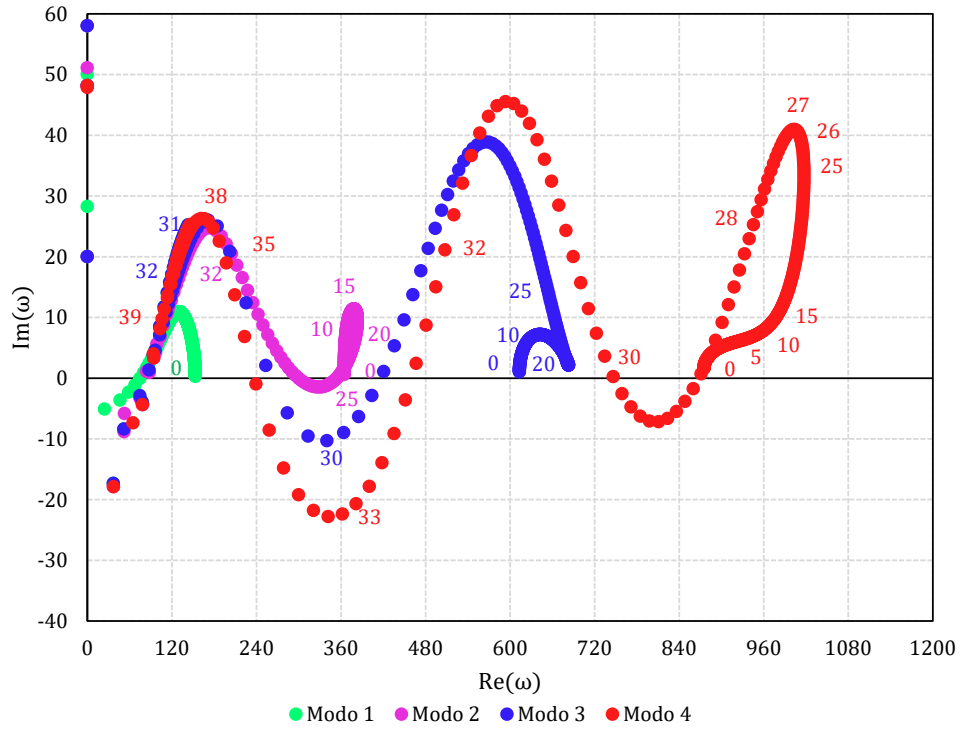
$$K_1 = 0,9; K_2 = 1; \varepsilon = 1968,50394; h = 4,00000; \alpha_{ch} = 1,25000; \mu = 0,05760. \quad (\text{I.6})$$

Figura 18: Diagrama de Argand para variação de  $u_i$

(a)  $\ell_2 = 0,1$



(b)  $\ell_2 = 0, 2$



(c)  $\ell_2 = 0, 3$

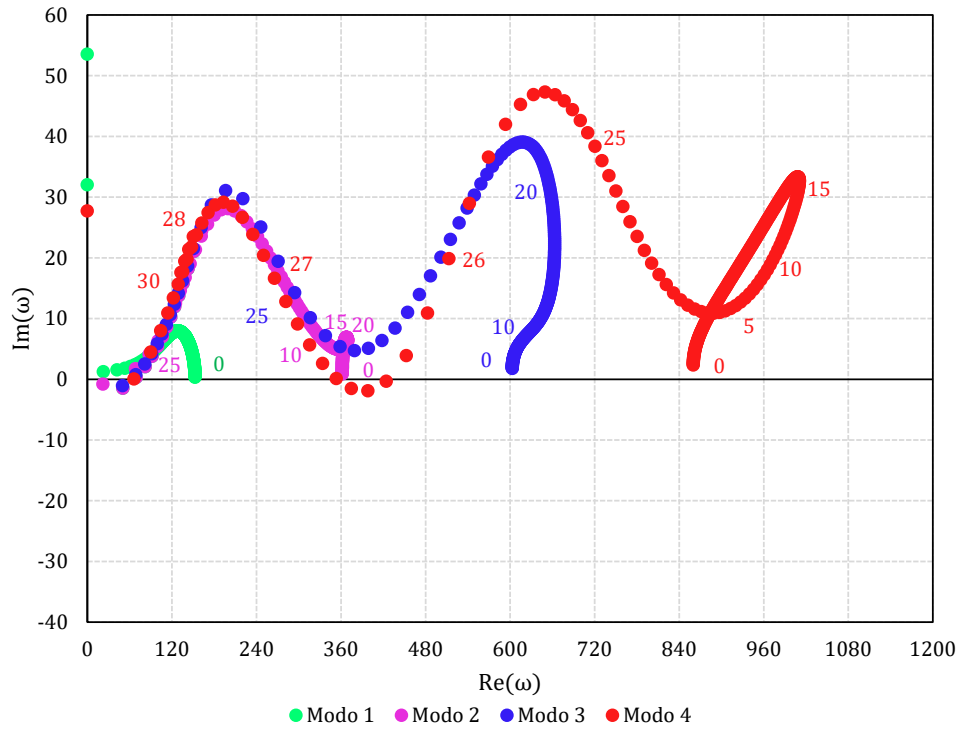
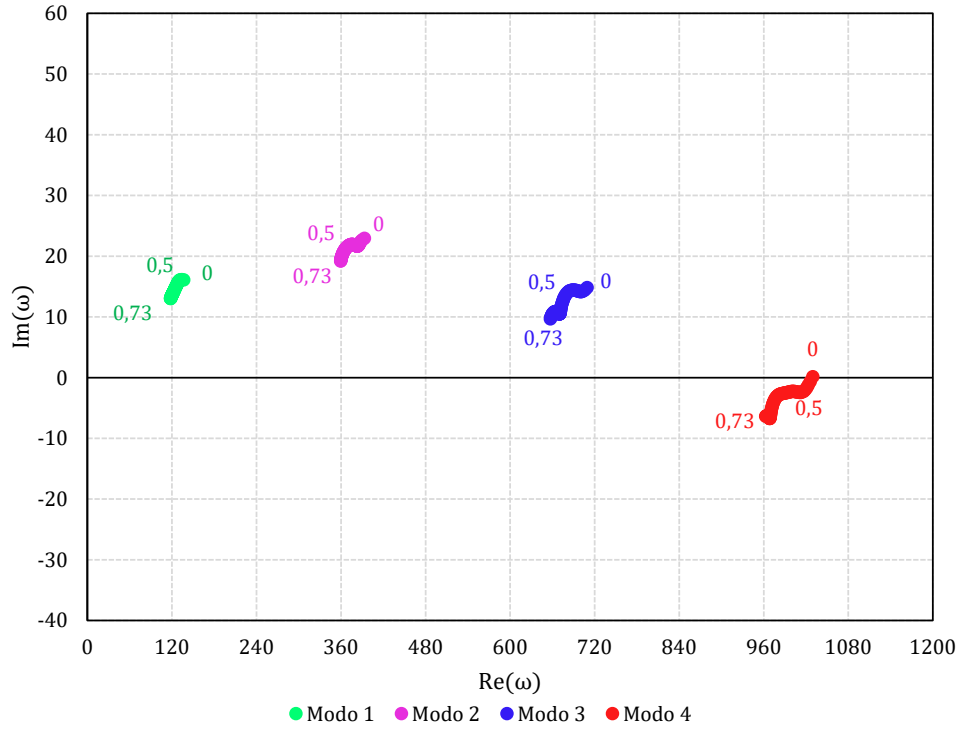
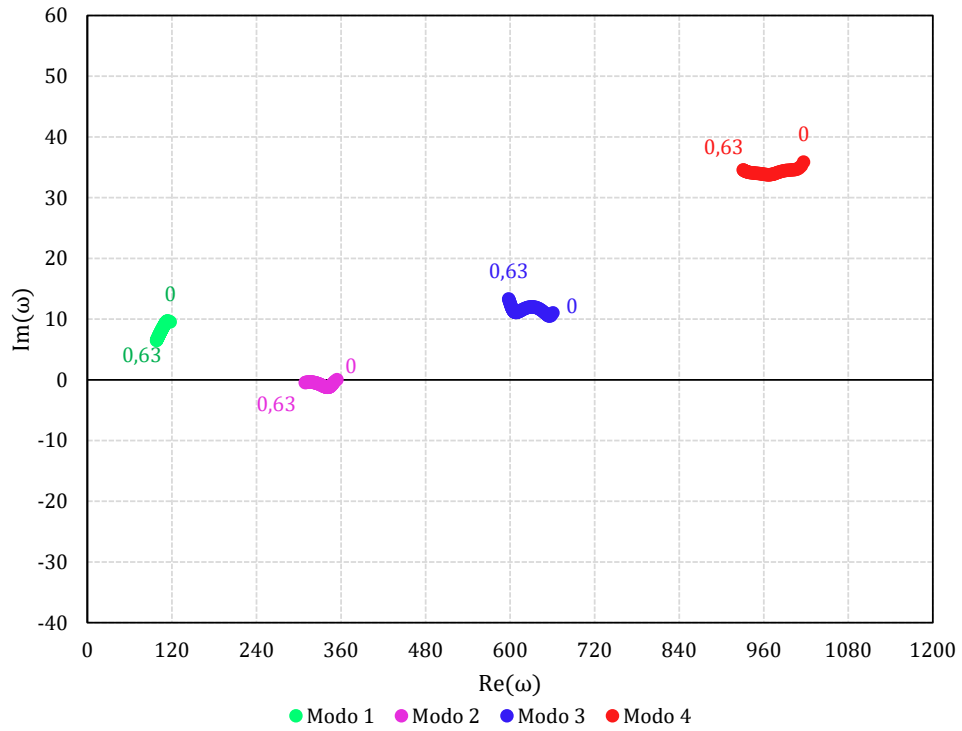
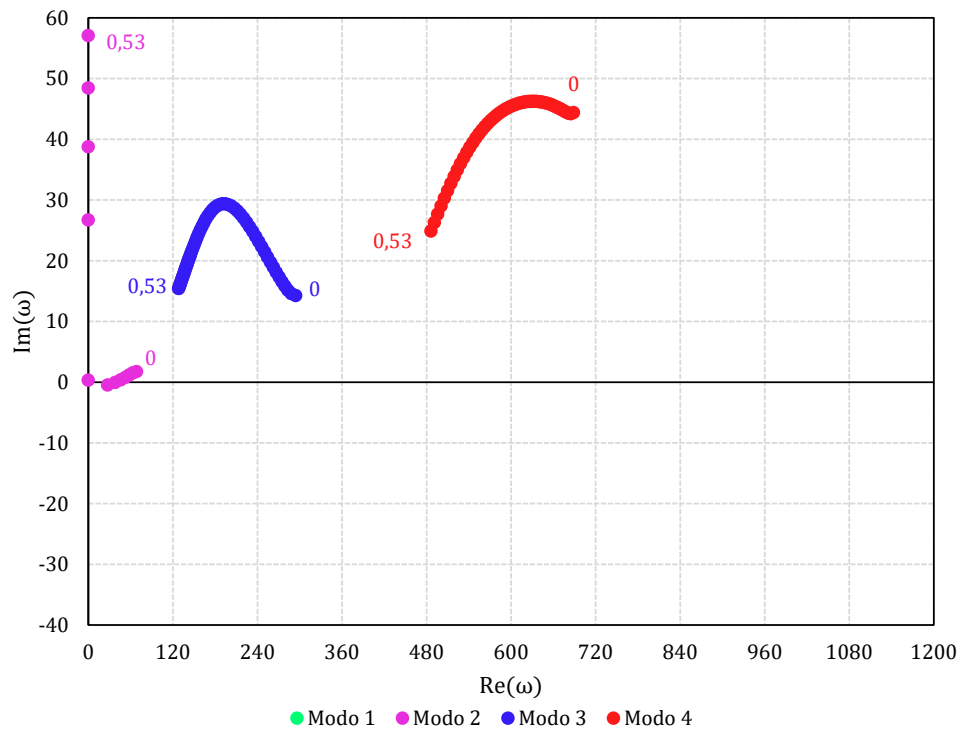




Figura 19: Diagrama de Argand para variação de  $\delta$ (a)  $\ell_2 = 0, 1$ (b)  $\ell_2 = 0, 2$ 

(c)  $\ell_2 = 0, 3$



## REFERÊNCIAS

- BENJAMIN, T. B. Dynamics of a system of articulated pipes conveying fluid-i. theory. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, The Royal Society London, v. 261, n. 1307, p. 457–486, 1962.
- CHAN, S. S. P. *Dynamics and stability of two coaxial cylindrical shells conveying fluid*. Dissertação (Mestrado em Engenharia) — McGill University, 1984.
- CHEN, S.; WAMBSGANSS, M. t.; JENDRZEJCZYK, J. Added mass and damping of a vibrating rod in confined viscous fluids. *American Society of Mechanical Engineers*, 1976.
- COSTA, A. M. d. et al. Experimental salt cavern in offshore ultra-deep water and well design evaluation for co2 abatement. *International Journal of Mining Science and Technology*, Elsevier, v. 29, n. 5, p. 641–656, 2019.
- COSTA, A. M. d. et al. Potential of storing gas with high CO<sub>2</sub> content in salt caverns built in ultra-deep water in brazil. *Greenhouse Gases: Science and Technology*, Wiley Online Library, v. 9, n. 1, p. 79–94, 2019.
- COSTA, P. V. M. d. *Potencial de estocagem subterrânea de gás natural em cavernas de sal abertas por dissolução em domo salino offshore no Brasil*. Tese (Doutorado em Planejamento Energético) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2018.
- FORNBERG, B. Generation of finite difference formulas on arbitrarily spaced grids. *Mathematics of computation*, v. 51, n. 184, p. 699–706, 1988.
- GIACOBBI, D. B.; SEMLER, C.; PAÏDOUSSIS, M. P. Dynamics of pipes conveying fluid of axially varying density. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 473, p. 115202, 2020.
- GREGORY, R.; PAIDOUSSIS, M. Unstable oscillation of tubular cantilevers conveying fluid ii. experiments. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, The Royal Society London, v. 293, n. 1435, p. 528–542, 1966.
- HANDELMAN, G. H. A note on the transverse vibration of a tube containing flowing fluid. *Quarterly of Applied Mathematics*, v. 13, n. 3, p. 326–330, 1955.
- HANNOYER, M. A solution to linear differential equations in the field of dynamics of continuous systems. 1972.
- HANNOYER, M.; PAIDOUSSIS, M. Instabilities of tubular beams simultaneously subjected to internal and external axial flows. 1978.
- KUIPER, G.; METRIKINE, A. Dynamic stability of a submerged, free-hanging riser conveying fluid. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 280, n. 3-5, p. 1051–1065, 2005.

- KUIPER, G.; METRIKINE, A. Experimental investigation of dynamic stability of a cantilever pipe aspirating fluid. *Journal of Fluids and Structures*, Elsevier, v. 24, n. 4, p. 541–558, 2008.
- LIGHTHILL, M. Note on the swimming of slender fish. *Journal of fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 9, n. 2, p. 305–317, 1960.
- MEIROVITCH, L. *Fundamentals of vibrations*. [S.l.]: Waveland Press, 2010.
- MODITIS, K.; PAIDOUSSIS, M.; RATIGAN, J. Dynamics of a partially confined, discharging, cantilever pipe with reverse external flow. *Journal of Fluids and Structures*, Elsevier, v. 63, p. 120–139, 2016.
- NIORDSON, F. I. *Vibrations of a cylindrical tube containing flowing fluid*. [S.l.]: Elanders boktr., 1953.
- OSTOJA-STARZEWSKI, M. *Dynamics of a single flexible cylinder in external axial compressible fluid flow*. Dissertação (Mestrado em Engenharia) — McGill University, 1982.
- PAIDOUSSIS, M. Dynamics of flexible slender cylinders in axial flow part 2. experiments. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 26, n. 4, p. 737–751, 1966.
- PAIDOUSSIS, M. Dynamics of vertical tubular cantilevers conveying fluid(theory to account for small free lateral motions of vertical uniform tubular cantilever conveying fluid). 1969.
- PAIDOUSSIS, M. Dynamics of cylindrical structures subjected to axial flow. *Journal of sound and vibration*, Elsevier, v. 29, n. 3, p. 365–385, 1973.
- PAIDOUSSIS, M. Aspirating pipes do not flutter at infinitesimally small flow. *Journal of fluids and structures*, Elsevier, v. 13, n. 3, p. 419–425, 1999.
- PAIDOUSSIS, M.; LUU, T. Dynamics of a pipe aspirating fluid such as might be used in ocean mining. 1985.
- PAIDOUSSIS, M. et al. Dynamics of a long tubular cantilever conveying fluid downwards, which then flows upwards around the cantilever as a confined annular flow. *Journal of Fluids and Structures*, Elsevier, v. 24, n. 1, p. 111–128, 2008.
- PAIDOUSSIS, M. P. *Fluid-structure interactions: slender structures and axial flow*. 2. ed. Lodon; UK: Elsevier Academic press, 1998. v. 1.
- PAIDOUSSIS, M. P. *Fluid-structure interactions: slender structures and axial flow*. 2. ed. Lodon; UK: Elsevier Academic press, 2004. v. 2.
- PAIDOUSSIS, M. P.; OSTOJA-STARZEWSKI, M. Dynamics of a flexible cylinder in subsonic axial flow. *AIAA journal*, v. 19, n. 11, p. 1467–1475, 1981.
- RAO, S. S. *Vibration of continuous systems*. [S.l.]: Wiley Online Library, 2007. v. 464.
- SINIAVSKII, V.; FEDOTOVSKII, V.; KUKHTIN, A. Oscillation of a cylinder in a viscous liquid. *PriM*, v. 16, p. 62–67, 1980.

TAYLOR, G. I. Analysis of the swimming of long and narrow animals. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, The Royal Society London, v. 214, n. 1117, p. 158–183, 1952.