MARCO AURÉLIO DE MESQUITA

ESTUDO DE SISTEMAS FECHADOS DE FILAS EM TRANSPORTE FLUVIAL

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Engenharia.

São Paulo

1994

MARCO AURÉLIO DE MESQUITA

ESTUDO DE SISTEMAS FECHADOS DE FILAS EM TRANSPORTE FLUVIAL

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Engenharia.

Área de Concentração:
Engenharia Naval

Orientador:
Marco Antonio Brinati

São Paulo
1994

a meus pais,
Sônia e Juraci,
e à Rosalina

AGRADECIMENTOS

Ao Prof.Dr. Marco Antonio Brinati pela orientação e incentivo ao desenvolvimento desta pesquisa.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo pela bolsa de estudos concedida na fase inicial do programa de mestrado.

Ao Departamento de Engenharia de Produção pelo apoio e suporte técnico.

Ao Centro de Computação Eletrônica da Universidade de São Paulo pela acessoria prestada na fase de processamento computacional dos modelos.

A todos os amigos que colaboraram para a realização deste trabalho.

SUMÁRIO

Lista de figuras

Lista de tabelas

Lista de símbolos

Resumo

"Abstract"

1 INTRODUÇÃO 1

1.1 Avaliação Econômica de Projetos de Transportes ... 1

1.2 Características do Transporte Fluvial 3

1.3 Modelagem e Análise de Desempenho 10

1.4 Objetivos e Delineamento do Trabalho 17

2 MODELOS MARKOVIANOS DE FILAS 19

2.1 Conceitos Básicos 19

2.2 Redes Abertas de Filas 28

2.3 Redes Fechadas de Filas 34

2.4 Métodos Computacionais para Redes Fechadas de Filas com Solução em Forma de Produto 43

2.5 Métodos Computacionais para Cadeias de Markov 54

3 REDES CIRCULARES DE FILAS COM DISTRIBUIÇÕES EXPONENCIAIS EM TRANSPORTE FLUVIAL 57

3.1 Descrição do Problema 57

3.2 Modelagem 61

3.3 Implementação Computacional 74
3.4 Análise de Resultados 94
3.5 Distribuição da Quantidade de Viagens Redondas ... 100
3.6 Discussões 105

4 REDES CIRCULARES DE FILAS COM DISTRIBUIÇÕES ERLANG EM TRANSPORTE FLUVIAL 108

4.1 Distribuições Erlang 109
4.2 Modelo $M/E_r/1$ 112
4.3 Modelagem para Rede Circular 117
4.4 Implementação Computacional 129
4.5 Análise de Resultados 135
4.6 Discussões 145

5 REDES CIRCULARES COM DISTRIBUIÇÕES EXPONENCIAIS E DESMEMBRAMENTO DOS COMBOIOS NOS PORTOS 147

5.1 Descrição do Problema 148
5.2 Modelo M/M/c com Desmembramento 150
5.3 Modelagem para Rede Circular 156
5.4 Implementação Computacional 165
5.5 Análise de Resultados 170
5.6 Discussões 177

6 CONCLUSÕES 178

6.1 Síntese do Trabalho 179
6.2 Limitações dos Modelos Propostos 181
6.3 Desdobramentos da Pesquisa 182

ANEXO A - Cadeias de Markov 184

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 201

APÊNDICES

Apêndice I - Implementação Computacional do Algoritmo da Cadeia de Markov em Tempo Contínuo para o Problema ABA-AUTOPROP.

Apêndice II - Implementação Computacional do Algoritmo da Convolução para Redes Circulares com Atendimento Exponencial.

Apêndice III - Implementação Computacional do Algoritmo da Análise do Valor Médio para Redes Circulares com Atendimento Exponencial.

Apêndice IV - Implementação Computacional do Modelo ABA-AUTOPROP com Distribuição Erlang para os Tempos de Atendimento e Distribuição Exponencial para os Tempos de Viagem.

Apêndice V - Implementação Computacional do Modelo ABA-AUTOPROP com Distribuição Erlang para os Tempos de Atendimento e Distribuição Erlang de Ordem Dois para os Tempos de Viagem.

Apêndice VI - Implementação Computacional do Modelo ABA-AUTOPROP com Distribuição Erlang para os Tempos de Atendimento e Distribuição Erlang de Ordem Quatro para os Tempos de Viagem.

Apêndice VII - Implementação Computacional do Modelo ABA-AUTOPROP com Distribuição Erlang para os Tempos de Atendimento e Distribuição Erlang de Ordem Oito para os Tempos de Viagem.

Apêndice VIII - Implementação Computacional do Modelo ABA-COMBOIO com Distribuições Exponenciais e Desmembramento dos Comboios nos Portos.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 Eclusa - entrada da embarcação a montante 6

Figura 1.2 Elcusa - fechamento da comporta superior e início da descida da embarcação com o esvaziamento da câmara interna 7

Figura 1.3 Eclusa - abertura da comporta inferior e saída da embarcação a jusante 7

Figura 1.4 Diagrama do problema ABA-AUTOPROP 10

Figura 1.5 Tempo de viagem redonda em função da quantidade de embarcações para um problema ABA-AUTOPROP, com tempos de atendimento e viagem constantes 13

Figura 1.6 Vazão em função da quantidade de embarcações para um problema ABA-AUTOPROP, com tempos de atendimento e viagem constantes 14

Figura 2.1 Diagrama das taxas de transição entre estados de um processo de nascimento e morte em tempo contínuo 21

Figura 3.1 Diagrama do problema ABA-AUTOPROP 58

Figura 3.2 Algoritmo para elaboração da matriz Q do modelo ABA-AUTOPROP 78

Figura 3.3 Algoritmo para cálculo do produto $\pi^n \cdot P$. 80

Figura 3.4 Algoritmo para obtenção das distribuições marginais do modelo ABA-AUTOPROP 80

Figura 3.5 Algoritmo da convolução para cálculo da constante de normalização de uma rede circular 85

Figura 3.6 Algoritmo da convolução para cálculo das distribuições marginais de uma rede circular 88

Figura 3.7 Algoritmo da análise de valor médio para cálculo de medidas de desempenho em redes circulares com um único berço de atracação por porto 91

Figura 3.8 Algoritmo da análise de valor médio para determinação das distribuições marginais em redes circulares com um ou dois berços de atracação em cada porto 93

Figura 3.9 Vazão em função da quantidade de embarcações do exemplo 3.4; casos determinístico (a) e exponencial (b) ... 94

Figura 3.10 Tempo de ciclo em função da quantidade de embarcações do exemplo 3.4`; casos determinístico (a) e exponencial (b) ... 95

Figura 3.11 Vazão em função da quantidade de embarcações do exemplo 3.4, considerando-se: a) $c_1=c_2=1$; b) $c_1=1$ e $c_2=2$; c) $c_1=c_2=2$ 96

Figura 3.12 Tempo de ciclo em função da quantidade de embarcações do exemplo 3.4, considerando-se: a) $c_1=c_2=1$; b) $c_1=1$ e $c_2=2$; c) $c_1=c_2=2$ 97

Figura 3.13 Vazão pela quantidade de embarcações do exemplo 3.4, considerando-se: a) $1/\mu_1=1/\mu_2=1$; b) $1/\mu_1=1/\mu_2=1,25$; c) $1/\mu_1=1$ e $1/\mu_2=1,5$ 98

Figura 3.14 Tempo de ciclo pela quantidade de embarcações do exemplo 3.4, considerando-se: a) $1/\mu_1=1/\mu_2=1$; b) $1/\mu_1=1/\mu_2=1,25$; c) $1/\mu_1=1$ e $1/\mu_2=1,5$. 99

Figura 4.1 Distribuições Erlang de ordem r=1,2,4 e 8 e parâmetro $\mu=1$ 111

Figura 4.2 Algoritmo para construção da matriz Q do modelo ABA-AUTOPROP com distribuições Erlang para os tempos de atendimento e exponenciais para os tempos de viagem .. 134

Figura 4.3 Algoritmo para obtenção das distribuições marginais do modelo ABA-AUTOPROP com distribuições Erlang para os tempos de atendimento e exponenciais para os tempos de viagem .. 135

Figura 4.4 Vazão em função da quantidade de embarcações do do problema ABA-AUTOPROP para diferentes distribuições dos tempos de atendimento e razão 2:1 141

Figura 4.5 Tempo de ciclo em função da quantidade de embarcações do problema ABA-AUTOPROP para diferentes distribuições dos tempos e razão 2:1 142

Figura 4.6 Vazão em função da quantidade de embarcações do problema ABA-AUTOPROP para diferentes distribuições dos tempos de atendimento e razão 4:1 143

Figura 4.7 Tempo de ciclo em função da quantidade de embarcações do problema ABA-AUTOPROP para diferentes distribuições dos tempos e razão 4:1 144

Figura 5.1 Diagrama das taxas de transição entre estados do modelo M/M/c com desmembramento 152

Figura 5.2 Algoritmo para elaboração da matriz Q do modelo ABA-COMBOIO 168

Figura 5.3 Algoritmo para obtenção das distribuições marginais da quantidade de empurradores nos portos do modelo ABA-COMBOIO 169

Figura 5.4 Vazão em função de n para configurações com embarcações autopropelidas (a) e comboios (b); caso determinístico 171

Figura 5.5 Tempo de ciclo em função de n para configurações com embarcações autopropelidas (a) e comboios (b); caso determinístico 171

Figura 5.6 Vazão em função da quantidade de empurradores e barcaças adicionais do problema ABA-COMBOIO, com razão entre tempos de 2:1 173

Figura 5.7 Tempo médio de viagem redonda em função da quantidade de empurradores e barcaças do problema ABA-COMBOIO, com razão entre tempos de 2:1 174

Figura 5.8 Vazão em função da quantidade de empurradores e barcaças adicionais do problema ABA-COMBOIO, com razão entre tempos de 4:1 175

Figura 5.9 Tempo médio de viagem redonda em função da quantidade de empurradores e barcaças do problema ABA-COMBOIO, com razão entre tempos de 4:1 176

LISTA DE TABELAS

Tabela 1.1 Participação das modalidades de transporte de carga no Brasil de 1977 a 1982 5

Tabela 3.1 Ordenação dos estados de uma rede circular com M portos e N embarcações .. 63

Tabela 3.2 Estados da cadeia de Markov em tempo contínuo do exemplo 3.1 68

Tabela 3.3 Distribuição estacionária dos estados da cadeia de Markov em tempo contínuo do exemplo 3.1 69

Tabela 3.4 Estados e distribuicão estacionária da cadeia de Markov do exemplo 3.2 74

Tabela 3.5 Quantidade de estados e transições do modelo ABA-AUTOPROP 76

Tabela 3.6 Vazão e tempo médio de viagem redonda em função da quantidade de embarcações do exemplo 3.4 86

Tabela 3.7 Distribuições marginais da quantidade de embarcações nos portos do exemplo 3.5 (n=1,...5) 88

Tabela 3.8 Distribuições marginais da quantidade de embarcações nos portos do exemplo 3.5 (n=6,...10) 89

Tabela 3.9 Vazão em função da quantidade de embarcações do exemplo 3.4, considerando-se: a) $c_1=c_2=1$; b) $c_1=1$ e $c_2=2$; c) $c_1=c_2=2$ 96

Tabela 3.10 Tempo médio de viagem redonda em função da quantidade de embarcações do exemplo 3.4, considerando-se: a) $c_1=c_2=1$; b) $c_1=1$ e $c_2=2$; c) $c_1=c_2=2$ 97

Tabela 3.11 Vazão em função da quantidade de embarcações do exemplo 3.4, considerando-se: a) $1/\mu_1=1/\mu_2=1$; b) $1/\mu_1=1/\mu_2=1,25$; c) $1./\mu_1=1$ e $1/\mu_2=1,5$. 98

Tabela 3.12 Tempo médio de viagem redonda em função da quantidade de embarcações do exemplo 3.4, considerando-se: a) $1/\mu_1=1/\mu_2=1$; b) $1/\mu_1=1/\mu_2=1,25$; c) $1/\mu_1=1$ e $1/\mu_2=1,5$. 99

Tabela 3.13 Estados e distribuição estacionária da cadeia de Markov em tempo contínuo do exemplo 3.5 103

Tabela 3.14 Distribuição da quantidade de viagens redondas no intervalo de tempo (0,10) do exemplo 3.5 104

Tabela 4.1 Ordenação dos estados de uma rede circular ABA-AUTOPROP com N embarcações e r_1 e r_2 estágios de atendimento nos portos A e B, respectivamente 121

Tabela 4.2 Coeficientes de variação de distribuições Erlang de ordem r 129

Tabela 4.3 Quantidade de estados e de transições no modelo ABA-AUTOPROP com distribuições exponenciais para os tempos de viagem e distribuições Erlang de ordem r para os tempos de atendimento 131

Tabela 4.4 Quantidade de estados e de transições no modelo ABA-AUTOPROP com distribuições Erlang de ordem 2 para os tempos de viagem e distribuições Erlang de ordem r para os tempos de atendimento 131

Tabela 4.5 Quantidade de estados e de transições no modelo ABA-AUTOPROP com distribuições Erlang de ordem 4 para os tempos de viagem e distribuições Erlang de ordem r para os tempos de atendimento 132

Tabela 4.6 Quantidade de estados e de transições no modelo ABA-AUTOPROP com distribuições Erlang de ordem 8 para os tempos de viagem e distribuições Erlang de ordem r para os tempos de atendimento 132

Tabela 4.7 Medidas de desempenho para o problema ABA-AUTOPROP com distribuições Erlang e com os seguintes parâmetros: a) N=5; b) $c_1=c_2=1$; c) $1/\mu_1=1/\mu_2=1$ e $1/\mu_3=1/\mu_4=2$. 137

Tabela 4.8 Medidas de desempenho para o problema ABA-AUTOPROP com distribuições Erlang e com os seguintes parâmetros: a) N=5; b) $c_1=c_2=1$; c) $1/\mu_1=1/\mu_2=1$ e $1/\mu_3=1/\mu_4=4$. 137

Tabela 4.9 Medidas de desempenho para o problema ABA-AUTOPROP com distribuições Erlang e com os seguintes parâmetros: a) N=10; b) $c_1=c_2=1$; c) $1/\mu_1=1/\mu_2=1$ e $1/\mu_3=1/\mu_4=2$. 138

Tabela 4.10 Medidas de desempenho para o problema ABA-AUTOPROP com distribuições Erlang e com os seguintes parâmetros: a) N=10; b) $c_1=c_2=1$; c) $1/\mu_1=1/\mu_2=1$ e $1/\mu_3=1/\mu_4=4$. 138

Tabela 4.11 Vazão e tempo de viagem redonda para o problema ABA-AUTOPROP com tempos de viagem e de atendimento constantes 139

Tabela 4.12 Vazão em função da ordem das distribuições Erlang dos tempos de viagem e atendimento para as configurações (a) e (c) do problema ABA-AUTOPROP 139

Tabela 4.13 Vazão em função da ordem das distribuições Erlang dos tempos de viagem e atendimento para as configurações (b) e (d) do problema ABA-AUTOPROP 139

Tabela 4.14 Vazão em função da quantidade de embarcações para um problema ABA-AUTOPROP com distribuições Erlang de ordem 4 para os tempos de viagem e parâmetros: a) $c_1=c_2=1$; b) $1/\mu_1=1/\mu_2=1$, $1/\mu_3=1/\mu_4=2$ 141

Tabela 4.15 Tempo médio de viagem redonda em função da quantidade de embarcações para um problema ABA-AUTOPROP com distribuições Erlang de ordem 4 para os tempos de viagem e parâmetros: a) $c_1=c_2=1$; b) $1/\mu_1=1/\mu_2=1$, $1/\mu_3=1/\mu_4=2$ 142

Tabela 4.16 Vazão em função da quantidade de embarcações para um problema ABA-AUTOPROP com distribuições Erlang de ordem 4 para os tempos de viagem e parâmetros: a) $c_1=c_2=1$; b) $1/\mu_1=1/\mu_2=1$, $1/\mu_3=1/\mu_4=4$ 143

Tabela 4.17 Tempo médio de viagem redonda em função da quantidade de embarcações para um problema ABA-AUTOPROP com distribuições Erlang de ordem 4 para os tempos de viagem e parâmetros: a) $c_1=c_2=1$; b) $1/\mu_1=1/\mu_2=1$, $1/\mu_3=1/\mu_4=4$ 144

Tabela 5.1 Ordenação dos estados de um modelo ABA-COMBOIO 158

Tabela 5.2 Estados da cadeia de Markov em tempo contínuo do exemplo 5.1 163

Tabela 5.3 Distribuição estacionária dos estados da cadeia de Markov em tempo contínuo do exemplo 5.1 164

Tabela 5.4 Distribuições marginais da quantidade de barcaças e empurradores nos portos do exemplo 5.1 165

Tabela 5.5 Quantidade de estados e transições no modelo ABA-COMBOIO com b barcaças adicionais em cada porto 167

Tabela 5.6 Vazão em função da quantidade de empurradores e de barcaças adicionais nos portos para o problema ABA-COMBOIO, com razão entre os tempos de viagem e de atendimento de 2:1 173

Tabela 5.7 Tempo médio de viagem redonda em função da quantidade de empurradores e de barcaças adicionais nos portos para o problema ABA-COMBOIO, com razão entre os tempos de viagem e de atendimento de 2:1 174

Tabela 5.8 Vazão em função da quantidade de empurradores e de barcaças adicionais nos portos para o problema ABA-COMBOIO, com razão entre os tempos de viagem e de atendimento de 4:1 175

Tabela 5.9 Tempo médio de viagem redonda em função da quantidade de empurradores e de barcaças adicionais nos portos para o problema ABA-COMBOIO, com razão entre os tempos de viagem e de atendimento de 4:1 176

LISTA DE SÍMBOLOS

$E[X]$	- expectância da variável aletória X.
$V[X]$	- variância da variável aletória X.
$p(k)=P[X=k]$	- função de probabilidade da variável aleatória discreta X.
$P(z)$	- transformada z ou geométrica de uma variável aleatória discreta X.
$f(x), g(x)$	- função densidade de probabilidade da variável aleatória contínua X.
ABA-AUTOPROP	- modelo de rede circular com dois portos e uma frota de embarcações autopropelidas.
ABA-COMBOIO	- modelo de rede circular com dois portos e uma frota de comboios de empurra.
N	- quantidade de embarcações (autopropelidas/ comboios) em uma rede circular.
M	- quantidade de portos em uma rede circular.
c_i	- quantidade de berços de atracação no porto i.
b_i	- quantidade de barcaças adicionais no porto i.
T_i	- tempo de atendimento de uma embarcação no porto i.
T_{M+i}	- tempo de viagem de uma embarcação ou comboio do porto i para o porto seguinte do roteiro em uma rede circular.
$1/\mu_i$	- expectância do tempo de atendimento de uma embarcação no porto i.
$1/\mu_{M+i}$	- expectância do tempo de viagem do porto i para o porto seguinte do roteiro em uma rede circular.

$1/\mu_0$	- expectância do tempo total de viagem entre os portos em cada ciclo ou viagem redonda de uma rede circular.
μ_i	- taxa de atendimento em berço de atracação no porto i.
λ_i	- taxa de chegada em um porto i.
λ, $\lambda(n)$	- vazão em uma rede circular com n embarcações.
$\rho_i=\lambda_i/c_i\mu_i$	- índice de congestionamento ou de utilização do porto i.
L_i	- quantidade de embarcações no porto i.
$E[L_i]$, $E[L_i(n)]$	- expectância da quantidade de embarcações no porto i, dado que há n embarcações na rede.
W_i	- tempo de permanência das embarcações no porto i.
$E[W_i]$, $E[W_i(n)]$	- expectância do tempo de permanência das embarcações no porto i, dado que há n embarcações na rede.
T_{vr}	- tempo de viagem redonda das embarcações em uma rede circular.
$E[T_{vr}]$, $E[T_{vr}(n)]$	- expectância do tempo de viagem redonda das embarcações em uma rede circular.
L_i^e	- quantidade de empurradores no porto i.
$E[L_i^e]$	- expectância da quantidade de empurradores no porto i.
W_i^e	- tempo de permanência dos empurradores no porto i.

$E[W_i^e]$	- expectância do tempo de permanência dos empurradores no porto i.
T_{vr}^e	- tempo de viagem redonda dos empurradores em uma rede circular.
$E[T_{vr}^e]$	- expectância do tempo de viagem redonda dos empurradores em uma rede circular.
$p_i(k)$, $p_i^n(k)$	- distribuição marginal da quantidade de embarcações, da carga de trabalho ou da quantidade de barcaças no porto i, dado que há n embarcações na rede.
$q_i(k)$	- distribuição marginal da quantidade de embarcações ou da quantidade de empurradores no porto i.
$\{X(t),\ t\geq 0\}$	- representação de um processo estocástico em tempo contínuo.
$\{X_n,\ n=0,1,\ldots\}$	- representação de um processo estocástico em tempo discreto.
S	- espaço amostral de um processo estocástico.
$\mathbf{N}(t)=$	
$(N_1(t),\ldots,N_M(t))$	- vetor-estado de uma rede de filas com M nós, em um dado instante t.
$\mathbf{n}=(n_1,\ldots,n_M)$	- vetor-estado de uma rede de filas com M nós.
$p(\mathbf{n},t)=P[\mathbf{N}(t)=\mathbf{n}]$	- probabilidade que o sistema se encontre em um estado **n** no instante t.
$p(\mathbf{n})=\lim_{t\to\infty}p(\mathbf{n},t)$	- probabilidade que o sistema se encontre em um estado **n** no instante t, em regime estacionário.

$\mathbf{Q}=[q_{ij}]$	- matriz geradora infinitesimal de probabilidades ou das taxas de transição entre estados de uma cadeia de Markov em tempo contínuo.
$\mathbf{P}=[p_{ij}]$	- matriz das probabilidades de transição entre estados de uma cadeia de Markov em tempo discreto.
$\pi=[\pi_j]$	- distribuição estacionária de uma cadeia de Markov.
$\mathbf{I}$	- matriz identidade.
Λ	- taxa de transições em um processo markoviano uniformizado.
$\Omega(k/n)$	- função probabilidade da quantidade de transições com recompensa um, dado que houve n transições, em um processo markoviano uniformizado.
$\Omega(k,j/n)$	- função probabilidade conjunta da quantidade de transições com recompensa um e estado final j, dado que houve n transições, em um processo markoviano uniformizado.
M/M/c	- representação de um sistema isolado de fila com processo de chegada Poisson, tempos de atendimento exponenciais e c servidores em paralelo.
$M/E_r/1$	- representação de um sistema isolado de fila com processo de chegada Poisson, tempos de atendimento Erlang e um único servidor.
p_{ij}	- fração dos clientes que partem do nó i para o nó j em uma rede de filas.
e_i	- taxa proporcional da quantidade de visitas dos clientes ao nó i em uma rede de filas.

$x_i=e_i/\mu_i$	- tempo médio proporcional de atendimento dos clientes no nó i em uma rede de filas.
$f_i(k)$	- função-fatorial para determinação da distribuição conjunta em uma rede com solução analítica em forma de produto.
$A(N,M)$	- conjunto dos vetores-estado de uma rede com M nós e N clientes.
$A_0(N,M)$	- conjunto dos vetores-estado de uma rede circular com M nós e N clientes, agregando em um componente 0 a quantidade de clientes em trânsito.
$G(N)$	- constante de normalização de uma rede circular com distribuições exponenciais para os tempos de serviço.
J	- quantidade de estados de uma cadeia de Markov em tempo contínuo.
K	- quantidade de transições de uma cadeia de Markov em tempo contínuo.
$g_m(n)$	- função auxilar do método da convolução para determinação da constante de normalização G(N).
$h_i(k)$	- função auxilar do método da convolução para determinação das distribuições marginais.
$\alpha_i(k)$	- quantidade de embarcações em atendimento dado que há k embarcações no porto i.
$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{n})$	- função de indexação dos estados.
$\boldsymbol{\phi}_i(\mathbf{n})$, $\boldsymbol{\phi}_j^k(\mathbf{n})$	- componentes da função de indexação dos estados, $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{n})$.
DA	- vetor contendo os elementos da diagonal principal da matriz esparsa A.

NA	- vetor contendo os elementos não nulos fora da diagonal principal, ordenados por linha e por coluna, da matriz A.
IA	- vetor contendo a quantidade de elementos não nulos fora da diagonal principal em cada linha da matriz A.
JA	- vetor contendo os índices j de cada elemento não nulo fora da diagonal principal, ordenados por linha e por coluna, da matriz A.
r_i	- ordem da distribuição Erlang dos tempos de atendimento no porto i em uma rede circular.
r_{M+i}	- ordem da distribuição Erlang dos tempos de viagem das embarcações do porto i para o porto seguinte do roteiro em uma rede circular.
$\beta_i(k)$	- quantidade de embarcações dado que há uma carga de k estágios de atendimento no porto i.
B(N)	- conjunto dos estados do modelo ABA-AUTOPROP com distribuições Erlang de ordem r_i (i=1,2) para os tempos de atendimento nos portos, distribuições exponenciais para os tempos de viagem e uma frota constituída de N embarcações.
$n_{M+i}{}^k$	- quantidade de embarcações no k-ésimo estágio da viagem do porto i para o porto seguinte do roteiro em uma rede circular.
$B^*(N, r_3, r_4)$	- conjunto dos estados do modelo ABA-AUTOPROP com distribuições Erlang de ordem r_i (i=1,2) para os tempos de atendimento nos portos, distribuições Erlang de ordem r_{2+i} (i=1,2) para os tempos de viagem e uma frota constituída de N embarcações.

$R=2+r_3+r_4$	- dimensão dos vetores-estado do problema ABA-AUTOPROP com distribuições Erlang para os tempos de viagem e de atendimento.
N_b	- quantidade de barcaças na frota em uma rede circular com comboios de empurra.
n_b	- quantidade de barcaças por comboio.
$C(N,M)$	- conjunto dos vetores-estado de uma rede circular com a frota constituída de comboios de empurra.
$\gamma_i(k)$	- quantidade de empurradores no porto i, dado que há k barcaças, em uma rede circular com a frota constituída de comboios de empurra.
$int(x)$	- função que fornece a parte inteira do argumento x.
$frac(x)$	- função que fornece a parte fracionária do argumento x.
$min(x,y)$	- função que fornece o valor mínimo entre os argumentos x e y.
$max(x,y)$	- função que fornece o valor máximo entre os argumentos x e y.

RESUMO

O transporte fluvial é usualmente indicado para a movimentação de grandes volumes de carga a longas distâncias. A concretização das vantagens potenciais do transporte fluvial pressupõe o correto dimensionamento dos sistemas de transporte.

Neste trabalho, apresentam-se modelos analíticos para avaliar a capacidade de transporte de uma frota em operação circular entre um dado número de portos. Os modelos incorporam tempos de atendimento e viagem aleatórios, que provocam a formação de filas nos portos. O efeito das filas é o aumento do tempo de permanência das embarcações nos portos, acarretando uma redução da capacidade de transporte.

Adotou-se, inicialmente, um modelo de rede circular de filas com distribuições exponenciais para a análise, em regime estacionário, do desempenho de uma frota de embarcações autopropelidas. A seguir, substituem-se as distribuições exponenciais por distribuições Erlang.

Em um segundo cenário, admite-se que a frota seja composta por comboios fluviais, formados por empurradores e barcaças, que proporcionam maior flexibilidade de operação. Para este segundo problema, foi desenvolvido um novo modelo de redes de filas, admitindo-se ainda que os tempos de atendimento e viagem sejam variáveis aleatórias exponenciais.

Ao longo do trabalho, são apresentados e discutidos resultados da aplicação dos modelos mencionados para algumas configurações de sistemas de transporte fluvial de carga.

"ABSTRACT"

Inland waterway transportation is usually recommended for moving large amounts of low value goods over long distances. In order to profit by all potencial advantages of the inland waterway transportation, the transportation systems must be suitably designed.

This dissertation presents analytical queueing models to evaluate the transportation capacity of a vessel fleet in cyclic operation among a given number of ports. These models assume port and voyage times to be random variables, which causes the occurrence of queues at the ports. The queue effect is the increase of in-port times with the consequent reduction of fleet transportation capacity.

At first, a cyclic queue model with exponential service times is used to analyze the performance of a self-propelled barge fleet under stationary conditions. Further, it is assumed Erlang distributions in order to consider a broader range of configurations.

Thereafter, a new cyclic model is proposed to study the transportation capacity of a tow fleet operating among a given numer of ports. In this case, only exponential distributions are considered.

Computational results for all the proposed models are presented and discussed.

1 INTRODUÇÃO

O objetivo deste capítulo é apresentar o sistema de transporte fluvial de carga que se pretende estudar ao longo deste trabalho. A seção 1.1 abre o capítulo com uma discussão a respeito da análise de projetos de transportes. Na seção 1.2, é feita uma apresentação do transporte fluvial de carga. A seguir, na seção 1.3, discutem-se formas de modelagem e análise de desempenho destes sistemas. A seção 1.4 encerra o capítulo com uma descrição dos objetivos da pesquisa e do conteúdo dos capítulos seguintes.

1.1 Avaliação Econômica de Projetos de Transportes

A existência de uma eficiente infra-estrutura de transporte constitui um requisito fundamental para o desenvolvimento econômico dos países.

Os produtores rurais necessitam de meios de transporte para escoamento da produção e recebimento de insumos (fertilizantes, combustíveis, equipamentos, etc). A eficiência do transporte contribui para reduzir os custos e aumentar o volume de produção, proporcionando, a longo prazo, a integração econômica de novas regiões produtoras.

A expansão da indústria, da mesma forma, requer um transporte eficiente das matérias-primas e dos produtos industrializados. No comércio exterior, a disponibilidade de instalações portuárias e transporte terrestre adequados pode assegurar preços competitivos aos produtos nacionais no mercado exterior e reduzir os custos de importação de produtos estrangeiros.

O transporte de carga concentra-se em três modalidades principais: rodoviário, ferroviário e hidroviário (interior[1], cabotagem e longo curso). No caso específico do transporte de granéis, deve-se acrescentar a modalidade dutoviária como alternativa de grande importância.

Estas modalidades possibilitam múltiplas configurações de sistemas de transporte, incluindo os sistemas integrados caracterizados pela participação de diferentes modalidades no transporte de um determinado produto.

Em países subdesenvolvidos, há uma forte demanda por investimentos em transportes. São necessários investimentos na ampliação e manutenção da malha viária, renovação da frota, construção de terminais, aquisição de sistemas de controle e comunicação, etc. Em geral, a maior parte destes investimentos tem origem pública e deve estar inserida em uma política nacional de transportes que tenha por objetivo contribuir eficientemente para o desenvolvimento sócio-econômico do país.

---

[1] A navegação interior compreende a navegação fluvial e a navegação lacustre.

Em virtude da importância estratégica e do grande volume de recursos necessários, torna-se indispensável realizar criteriosa avaliação econômica dos investimentos neste setor. ADLER (1978) apresenta metodologias para avaliação econômica de projetos de transporte com aplicações nos setores rodoviários, ferroviários, portuários e de aviação.

Um aspecto fundamental na avaliação das alternativas de um projeto de transporte de cargas é a necessidade de previsão do comportamento de cada uma das alternativas possíveis. A natureza probabilística da demanda, dos processos de transferência de carga e de movimentação dos veículos impõe algumas dificuldades ao estudo deste problema. Uma alternativa é recorrer à utilização de modelos que, como abstrações da realidade, são elaborados para captar os aspectos essenciais do comportamento do sistema real.

No presente trabalho, utilizam-se conceitos de processos estocásticos na busca de modelos analíticos que permitam avaliar o comportamento de algumas configurações particulares de sistemas de transporte fluvial de carga. Estes modelos, estritamente operacionais, fornecem subsídios para a avaliação econômica subseqüente de projetos de transporte fluvial.

1.2 Características do Transporte Fluvial

A experiência mostra que o transporte fluvial é apropriado para o deslocamento de cargas de baixo valor agregado em grandes

volumes e longas distâncias. Por exigir menores investimentos e menor consumo de combustível, esta modalidade de transporte pode proporcionar custos unitários ($/t•km) inferiores aos alcançados nos transportes ferroviário e rodoviário.

A utilização do transporte fluvial combinado com outras modalidades (rodoviário, ferroviário e dutoviário) possibilita uma redução do custo final de transporte. Este conceito, denominado intermodalidade, amplia consideravelmente a região de influência das hidrovias.

No Brasil, apesar da extensa bacia hidrográfica, a utilização do transporte fluvial de carga é bastante reduzida. Na década de 80, os maiores volumes de transporte hidroviário concentravam-se na Bacia Amazônica e na Bacia do Sul (rios Jacuí, Taquarí, Lagoa dos Patos e Lagoa Mirim).

Na Bacia Amazônica, dadas as condições geográficas da região, a navegação interior representa o principal meio de transporte, tanto de passageiros como de carga.

No Rio Grande do Sul, o transporte hidroviário, integrado ao transporte rodoviário e ferroviário, representa uma importante via de escoamento da produção de grãos com destino ao porto marítimo de Rio Grande.

FIGUEIREDO (1984) apresenta dados comparativos da participação das diferentes modalidades de transporte de carga no país, que são reproduzidos na tabela 1.1. Nesta referência, o

autor aponta a navegação interior como uma alternativa mais racional de transporte para a produção agrícola das regiões norte e centro-oeste do país. Na modalidade ferroviária, destacam-se o transporte de minério de ferro e derivados de petróleo.

Tabela 1.1 Participação das modalidades de transporte de carga no Brasil de 1977 a 1982.

Modos de Transporte	Composição percentual (t•km)					
	1977	1978	1979	1980	1981	1982
Aeroviário	0.25	0.27	0.28	0.29	0.30	0.34
Dutoviário	3.08	3.71	3.47	3.36	3.23	3.17
Ferroviário	22.01	21.41	22.60	24.28	23.18	22.09
Nav. Interior	0.65	0.64	0.73	0.75	0.81	0.91
Nav. de Cabotagem	12.89	13.22	13.53	12.67	12.69	13.30
Rodoviário	61.12	60.75	59.39	58.65	59.79	60.19
Total	100	100	100	100	100	100

A implantação da Hidrovia Tietê-Paraná representa, em razão do elevado nível de atividade econômica na sua área de influência, um grande estímulo para o crescimento do transporte fluvial no país.

A viabilização da navegação fluvial na Bacia Tietê-Paraná deve-se à construção de barragens providas de eclusas ao longo dos rios para geração de energia hidrelétrica. A formação de grandes reservatórios melhora as condições de navegabilidade das embarcações.

Eclusas e canais artificiais constituem dois importantes componentes da infra-estrutura de uma hidrovia interior. As

eclusas são dispositivos projetados para permitir a transposição das embarcações de um lado a outro dos reservatórios; os canais são construídos para interligar bacias ou trechos navegáveis de uma mesma hidrovia.

As figuras a seguir ilustram a transposição de uma eclusa por uma embarcação. A figura 1.1 mostra uma embarcação, a montante do reservatório, no instante de entrada na eclusa. A figura 1.2 apresenta a embarcação no interior da eclusa, com ambas as comportas fechadas. Pelo acionamento de um sistema de válvulas, inicia-se, então, o esvaziamento da câmara e a descida da embarcação. A figura 1.3 mostra, após o esvaziamento completo e a abertura da comporta inferior, a embarcação no instante de saída da eclusa.

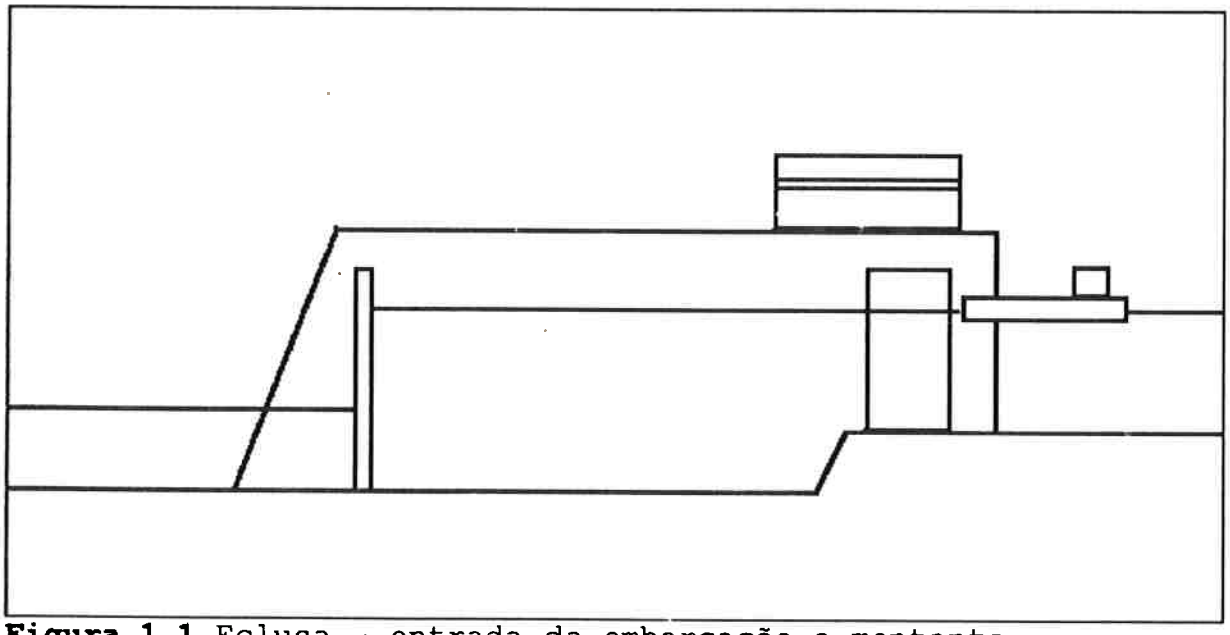

Figura 1.1 Eclusa - entrada da embarcação a montante.

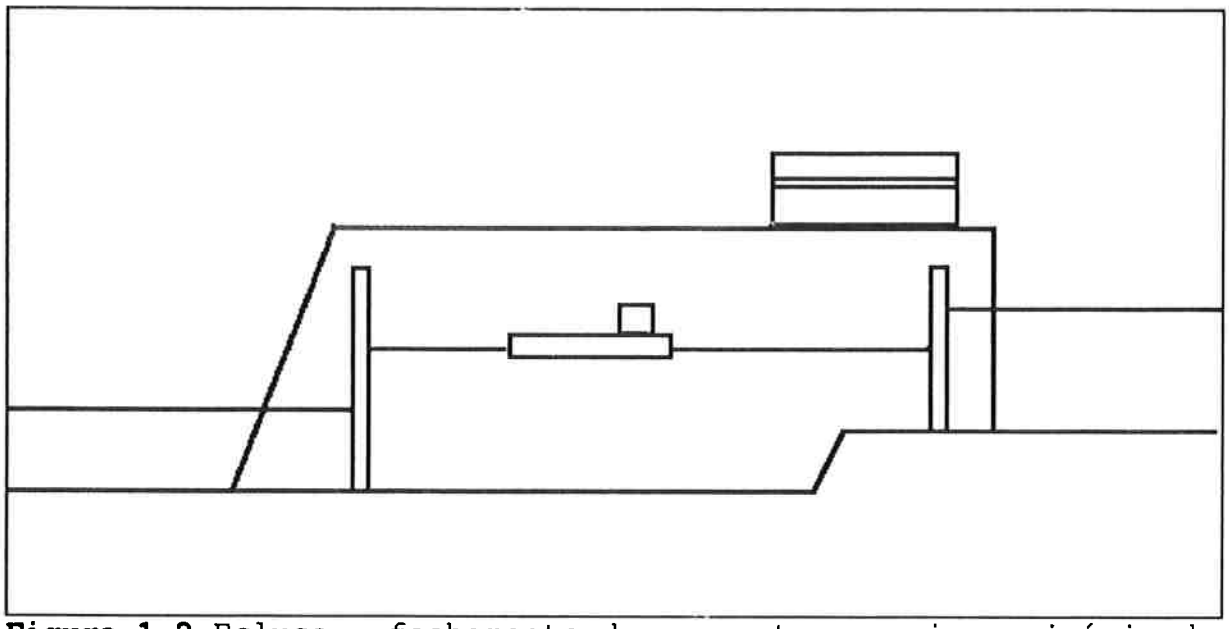

Figura 1.2 Eclusa - fechamento da comporta superior e início da descida da embarcação com o esvaziamento da câmara interna.

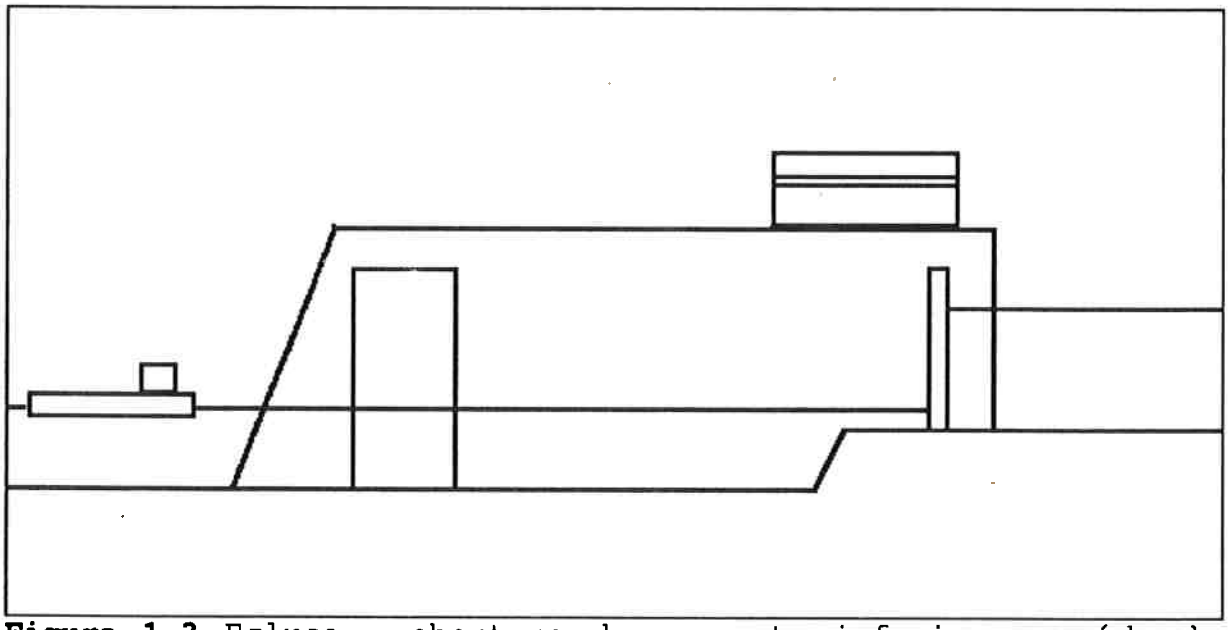

Figura 1.3 Eclusa - abertura da comporta inferior e saída da embarcação a jusante.

Para assegurar custos reduzidos de transporte, a hidrovia necessita de portos ou terminais eficientes. Basicamente, estes terminais contêm berços de atracação, equipamentos de transferência de cargas, instalações para armazenagem (armazéns, silos e tanques), pátio de manobras para os veículos da interface terrestre e instalações administrativas. LIMA JR (1988) propõe metodologias para o dimensionamento deste tipo de terminal.

A frota fluvial pode ser formada por embarcações autopropelidas ou por comboios de empurra. Estes são constituídos de uma embarcação específica para propulsão, denominada empurrador, e de um conjunto de embarcações destinadas exclusivamente à acomodação das cargas, chamadas barcaças ou chatas (em razão das formas do casco).

A princípio, os comboios proporcionam maior flexibilidade operacional aos sistemas de transporte que as embarcações autopropelidas. A escolha entre autopropelidas e diferentes configurações de comboio deve levar em consideração restrições de navegabilidade da hidrovia (profundidade, dimensões de eclusas e canais, etc) e fatores econômicos (volume de carga, custos de empurradores e barcaças, etc).

Uma configuração que se observa com freqüência no transporte fluvial é a operação circular de uma frota homogênea entre um pequeno número de portos, muitas vezes privativos. Para aumentar a utilização dos recursos do sistema, é desejável que tanto a frota quanto os terminais operem continuamente (24 h/dia).

Quando a frota é constituída por comboios, há uma forma alternativa de operação, caracterizada pela substituição das barcaças de um empurrador que chega ao porto, por outro conjunto preparado anteriormente. Neste tipo de operação, os portos, não necessariamente todos, devem dispor de conjuntos de barcaças adicionais. Consegue-se, desta forma, reduzir o tempo de permanência dos empurradores nos portos.

BRINATI (1983) mostra que a viabilidade econômica da operação com desmembramento dos comboios depende basicamente da relação entre os custos de capital do empurrador e das barcaças.

Uma questão importante que se coloca refere-se ao dimensionamento do sistema de transporte com base em uma certa demanda de carga predefinida. Um enfoque tradicional consiste em calcular o tempo de ciclo ou viagem redonda das embarcações para, a seguir, verificar qual a quantidade de embarcações necessárias para atender a demanda fixada.

Freqüentemente, as características probabilísticas da operação da frota e dos portos são ignoradas. As aleatoriedades destes processos podem provocar a formação de filas de embarcações nos portos. Neste caso, deve-se acrescentar ao tempo de ciclo das embarcações parcelas referentes ao tempo de espera em cada porto. O aumento do tempo médio de ciclo das embarcações resulta na diminuição da quantidade de viagens e, conseqüentemente, na redução da capacidade de transporte da frota considerada.

1.3 Modelagem e Análise de Desempenho

A figura 1.4 representa um sistema de transporte fluvial designado ABA-AUTOPROP. Este sistema é constituído de uma frota de N embarcações autopropelidas semelhantes, em operação cíclica e contínua entre dois portos. Cada embarcação da frota navega a uma velocidade de serviço constante, V_s (km/h), e apresenta uma capacidade de carga, DWT (t).

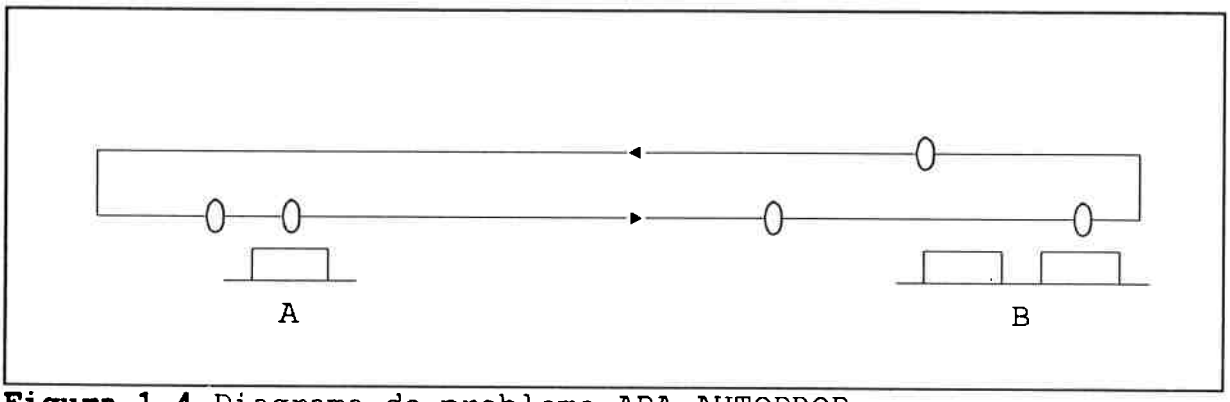

Figura 1.4 Diagrama do problema ABA-AUTOPROP.

Seja d (km) a distância entre os portos A e B. No sentido de A para B existe uma demanda anual uniforme de D (t/ano) de uma carga C_1, chamada carga principal. No sentido inverso, as embarcações transportam um outro tipo de carga C_2 que, por apresentar um volume de carga inferior, é denominada carga secundária.

O dimensionamento deste sistema hidroviário, considerado isoladamente, consiste, no caso mais geral, em determinar a configuração dos portos e da frota de forma a atender a demanda ao menor custo.

A configuração dos portos tem como variáveis principais a quantidade de berços de atracação (c), as taxas de transferência dos equipamentos de carga/descarga e a capacidade de armazenagem. Em relação à frota, as principais variáveis são a quantidade, N, a velocidade de serviço, V_s e a capacidade de carga das embarcações, DWT.

BALAU (1976) considera um problema semelhante de dimensionamento de uma frota de comboios fluviais para transporte de bauxita entre uma jazida e uma usina siderúrgica na região amazônica. Desenvolve-se um modelo de otimização que tem como variáveis de decisão a quantidade, as dimensões e a velocidade dos comboios. Neste modelo, o tempo de viagem redonda das embarcações é constante, sendo determinado, basicamente, em função da velocidade (tempos de viagem), da taxa de transferência de carga e da capacidade de carga dos comboios (tempos de porto). Desprezam-se eventuais tempos de espera das embarcação nos portos devido à formação de filas.

Em outro cenário de transporte, CABRERA; MAHER (1973) analisam a operação de um sistema formado por uma escavadeira e uma frota de caminhões utilizados na remoção e transporte de terra durante a construção de rodovias. Mostra-se como as aleatoriedades presentes no carregamento dos caminhões no local

de escavação e na movimentação dos caminhões influenciam a capacidade de transporte.

Retomando o problema ABA-AUTOPROP proposto no início desta seção, considere-se que cada porto tenha um único berço de atracação ($c_1=c_2=1$). Admita-se que os tempos de atendimento e viagem sejam fixos e, para efeito da análise que se segue, que o tempo de atendimento no porto A seja superior ao tempo de atendimento no porto B. Sejam t_1 e t_2 ($t_1 \geq t_2$) os tempos de atendimento das embarcações nos portos A e B, t_3 e t_4 os tempos de viagem das embarcações de A para B e de B para A. Suponha-se que, em um instante inicial t igual a zero, todas as N embarcações encontram-se em fila no porto A e, neste instante, inicia-se o atendimento da primeira embarcação da fila.

Neste exemplo determinístico, verifica-se que, se N é menor ou igual ao quociente $(t_1+t_2+t_3+t_4)/t_1$, todas as embarcações terão sido atendidas em A antes que a primeira embarcação retorne àquele porto. Verifica-se que, ao longo da operação deste sistema, as embarcações não precisam aguardar nos portos para serem atendidas e o tempo de ciclo ou viagem redonda, t_{vr}, em qualquer viagem, será sempre constante e igual a soma $t_1+t_2+t_3+t_4$.

Por outro lado, se N é maior que $(t_1+t_2+t_3+t_4)/t_1$, o porto A não estará disponível para a primeira embarcação no instante de seu primeiro retorno. O tempo de ciclo, neste caso, deve ser igual ao produto $N \cdot t_1$, que é fixo e igual para todas as embarcações da frota.

Uma importante medida de desempenho é a freqüência de chegada das embarcações aos portos, denominada vazão. Seja λ a vazão[2], então $\lambda=N/t_{vr}$. As figuras 1.5 e 1.6 mostram as relações entre tempo de viagem redonda e vazão em função da quantidade de embarcações na frota, para um problema ABA-AUTOPROP, em que t_1 e t_2 são iguais a um e t_3 e t_4 são iguais a quatro.

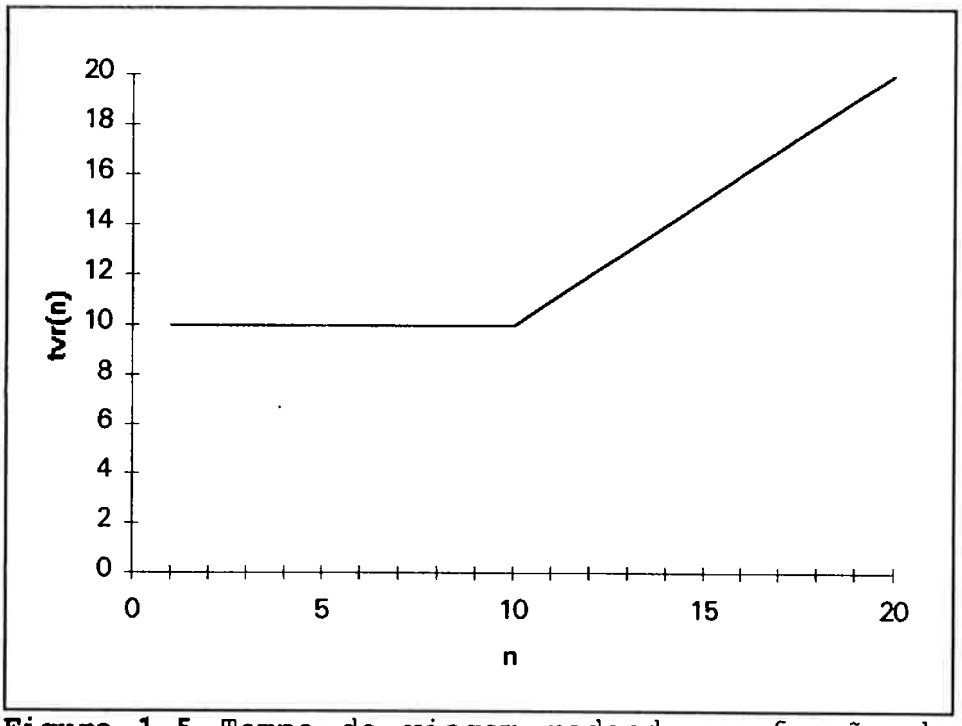

Figura 1.5 Tempo de viagem redonda em função da quantidade de embarcações para um problema ABA-AUTOPROP, com tempos de atendimento e viagem constantes.

[2] Em redes com maior número de portos e roteiros não circulares define-se uma vazão λ_i para cada porto i. No exemplo dado, ambos os portos apresentam a mesma vazão λ.

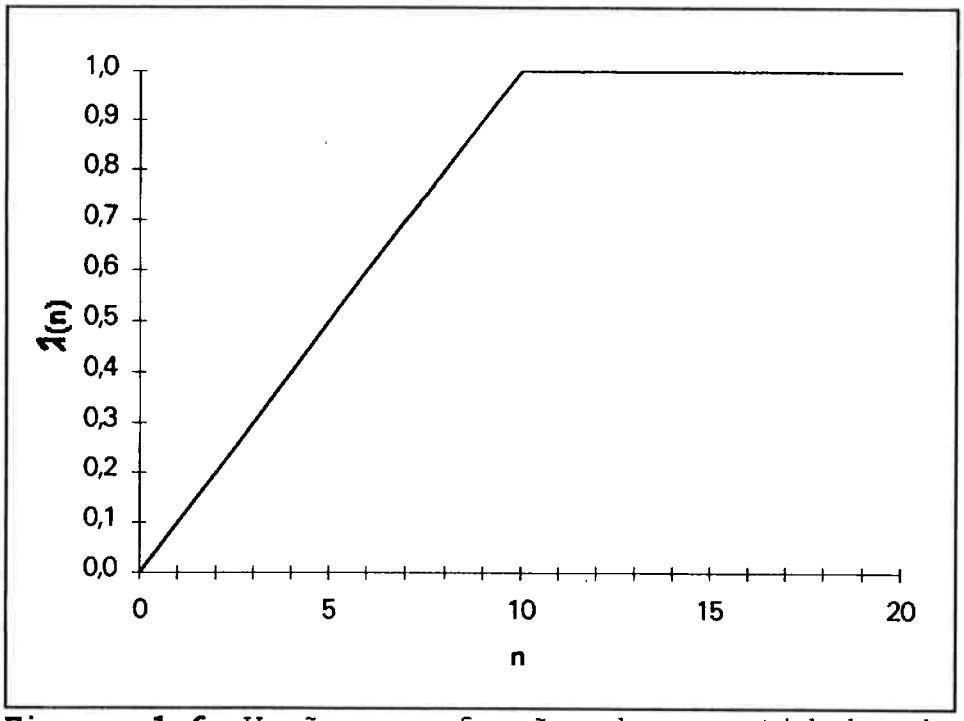

Figura 1.6 Vazão em função da quantidade de embarcações para um problema ABA-AUTOPROP, com tempos de atendimento e viagem constantes.

Outros indicadores de desempenho podem ser definidos como, por exemplo: a) índice de congestionamento ou índice de utilização dos berços de atracação em cada porto, que equivalem à fração do tempo em que os berços permanecem ocupados; b) extensão dos períodos em que cada porto permanece ocioso (ou ocupado); c) tempo de permanência das embarcações nos portos (tempo de espera e atendimento); d) índice de rotatividade das embarcações, medido pela razão entre o tempo navegando (t_3+t_4) e o tempo de ciclo ou viagem redonda das embarcações (t_{vr}); etc.

É importante frisar que, no caso determinístico, conhecidas as condições iniciais do sistema, é possível, com maior ou menor grau de dificuldade, prever o comportamento futuro do sistema. Análises semelhantes podem ser feitas para outras situações, como

por exemplo, casos onde haja múltiplos berços de atracação por portos, frota de comboios com desembramento, etc.

Na maioria das vezes, modelos estocásticos são mais adequados para representar a operação dos sistemas de transportes. Em um modelo estocástico para o problema ABA-AUTOPROP, os tempos de atendimento das embarcações em cada porto, T_1 e T_2, são considerados variáveis aleatórias, caracterizadas por distribuições de probabilidades G_1 e G_2. Da mesma forma, os tempos de viagem, T_3 e T_4, são variáveis aleatórias dadas por distribuições de probabilidades G_3 e G_4. Quando houver mais de um berço de atracação, em um mesmo porto, admite-se, usualmente, que todos os berços de um mesmo porto operem conforme o mesmo padrão.

A natureza estocástica torna o problema bastante mais complexo pois, dado o estado inicial do sistema, é possível determinar apenas probabilisticamente o comportamento deste ao longo do tempo. Por exemplo, a quantidade de carga transportada de A para B, desde o instante inicial até um instante arbitrário t, passa a ser uma variável aleatória.

A simulação e os modelos analíticos probabilísticos constituem duas alternativas para abordagem do problema descrito. A simulação é uma ferramenta bastante empregada devido à maior flexibilidade e facilidade para solução que oferece na modelagem dos mais complexos sistemas. Na simulação, a qualidade dos resultados é comumente expressa em termos de intervalos de confiança.

BOTTER et al. (1988) apresentam um exemplo de emprego da simulação para avaliação do desempenho de um sistema rodo-hidro-duto-ferroviário de transporte de álcool e derivados de petróleo na região de influência da hidrovia Tietê-Paraná. No modelo desenvolvido, destacam-se a representação da interface da hidrovia com as modalidades terrestres, a operação de transposição de eclusas e a alternativa de desmembramento dos comboios nos portos.

Uma alternativa é recorrer à teoria de filas que, a partir de conceitos de processos estocásticos, fornece modelos analíticos para a avaliação do desempenho de sistemas de atendimento.

BRINATI (1981) utiliza um modelo de filas com único servidor, representado pela notação G/G/1, para avaliar o tempo de espera dos comboios nos portos. São analisados duas configurações, com e sem desmembramento dos comboios. O intervalo entre chegadas é conhecido a priori e caracterizado por distribuições Erlang e os tempos de atendimento são considerados variáveis aleatórias normais. A partir dos resultados obtidos, é possível calcular os tempos médios de espera de empurradores e barcaças nos portos.

Apesar da grande generalidade do modelo, verificou-se que a hipótese implícita de independência entre intervalos de chegadas em cada porto não é justificada quando se tem um sistema fechado. Surgem, então, os modelos de redes de filas que, ao contrário do modelo anterior, prevêem a existência de múltiplos nós

interdependentes. Uma revisão detalhada desta classe de modelos é apresentada no capítulo 2.

KOENIGSBERG; LAM (1976) foram os pioneiros na aplicação de modelos de redes circulares de filas para avaliar a operação de uma frota entre dois portos. O modelo proposto consiste de quatro estágios em seqüência, correspondentes aos portos e às viagens, que são percorridos pelas embarcações em um processo cíclico. Os nós correspondentes aos portos apresentam um número de servidores equivalentes à quantidade de berços de atracação, enquanto os estágios relativos às viagens possuem uma quantidade suficiente de servidores, tal que todas as embarcações possam ser atendidas simultaneamente. As distribuições de probabilidades dos tempos de atendimento em cada estágio são consideradas exponenciais.

YOSHIZAKI (1989) aplica um modelo semelhante na análise de desempenho de um sistema rodoviário de transporte de carga. Na implementação computacional do modelo, empregou-se o método da convolução, que torna mais eficiente a determinação das distribuições estacionárias e das medidas de desempenho.

1.4 Objetivos e Delineamento do Trabalho

O objetivo deste trabalho é fornecer modelos analíticos que, levando em consideração as características estocásticas dos processos, permitam avaliar o desempenho de algumas configurações de sistemas fechados de transporte fluvial de carga.

2 MODELOS MARKOVIANOS DE FILAS

Neste capítulo, apresentam-se alguns tópicos referentes ao estudo de modelos de filas que podem ser analisados a partir de cadeias de Markov em tempo contínuo, denominados modelos markovianos de filas. A seção 2.1 reúne alguns conceitos básicos referentes à análise destes modelos. Na seção 2.2, faz-se uma revisão dos modelos markovianos de rede aberta de filas, enquanto, na seção 2.3, são considerados os modelos de rede fechada de filas. Na seção 2.4, discutem-se métodos de solução de redes fechadas de filas que apresentam soluções analíticas em forma de produto. A seção 2.5 trata de métodos computacionais utilizados para a solução de cadeias de Markov em tempo contínuo.

2.1 Conceitos Básicos

A teoria de filas fornece modelos para o estudo de sistemas de prestação de serviços que estão sujeitos à formação de filas. Estes sistemas podem ser formados por um único ou por múltiplos postos de serviços. No primeiro caso, tem-se um sistema isolado de fila e, no segundo, uma rede de filas.

Um sistema isolado de fila pode ser especificado a partir do processo de chegada dos clientes, do processo de atendimento e da

quantidade de servidores. A maior parte dos modelos de filas refere-se aos casos em que os processos de chegada e de atendimento são, pelo menos um deles, estocásticos. Nos modelos estocásticos, o processo de chegada é normalmente caracterizado por uma seqüência de variáveis aleatórias independentes com a mesma distribuição de probabilidades, representando os intervalos entre chegadas consecutivas; o processo de atendimento é definido por uma disciplina de atendimento, que determina a ordem de atendimento dos clientes presentes no sistema, e por uma distribuição de probabilidades para a duração dos tempos de atendimento dos clientes. Quando há múltiplos servidores em paralelo, admite-se, em geral, que todos sejam idênticos e que operem de forma independente. Em alguns casos, definem-se características adicionais como, por exemplo, uma capacidade máxima para a quantidade de clientes no sistema, a existência de classes diferentes de clientes, etc.

A partir da definição do sistema de fila, vários processos podem ser estudados. Dois importantes processos freqüentemente analisados são: a) $\{N(t), t \geq 0\}$, onde $N(t)$ representa a quantidade de clientes presentes no sistema em cada instante t; b) $\{W_n, n=1,2,...\}$, onde W_n representa o tempo de atendimento do n-ésimo cliente[1]. Estes processos podem ser analisados tanto em regime transitório quanto em regime estacionário. Em geral, a análise em regime estacionário é bastante mais simples que a análise em regime transitório.

---

[1] O processo $\{N(t), t \geq 0\}$ constitui um processo estocástico em tempo contínuo, enquanto $\{W_n, n=1,2,...\}$ constitui um processo em tempo discreto.

Conforme mencionado anteriormente, neste capítulo, consideram-se os modelos markovianos de filas, isto é, modelos em que o processo $\{N(t),\ t\geq 0\}$ pode ser estudado por cadeias de Markov em tempo contínuo. Neste grupo, encontram-se os modelos que são classificados como processos de nascimento e morte em tempo contínuo.

A figura 2.1 representa o diagrama das taxas de transição entre estados de um processo de nascimento e morte em tempo contínuo, com parâmetros $\{\lambda(n)$ e $\mu(n+1),\ n=0,1,...\}$, que, em alguns modelos de filas, é utilizado para estudar o processo $\{N(t),\ t\geq 0\}$. As transições de $n \rightarrow n+1$ correspondem à chegada de um novo cliente ao sistema, enquanto as transições de $n \rightarrow n-1$ $(n>0)$ correspondem à saída de um cliente que acaba de ser atendido.

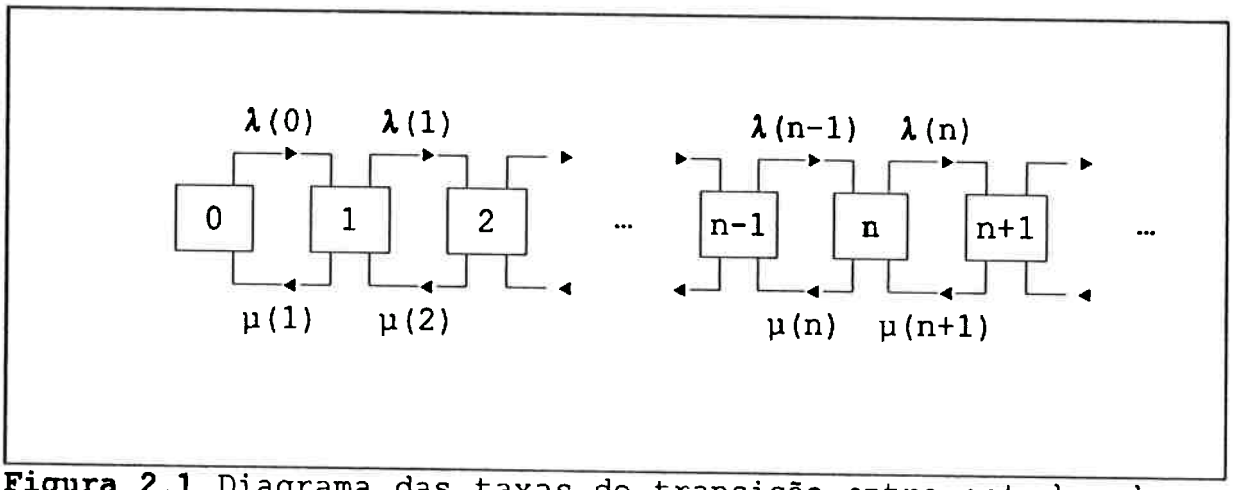

Figura 2.1 Diagrama das taxas de transição entre estados de um processo de nascimento e morte em tempo contínuo.

A dinâmica do processo $\{N(t),\ t\geq 0\}$ pode ser determinada, do ponto de vista probabilístico, a partir das equações diretas de Chapman-Kolmogorov. Seja $p(n,t)=P[N(t)=n]$, então

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}p(0,t) &= -\lambda(0)p(0,t)+\mu(1)p(1,t) \\
\frac{d}{dt}p(n,t) &= -(\lambda(n)+\mu(n))p(n,t) \\
&\quad +\lambda(n-1)p(n-1,t)+\mu(n+1)p(n+1,t) \\
&\qquad n=1,2,\ldots
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Para se resolver o sistema de equações diferenciais (2.1), é necessário especificar as condições iniciais, ou seja, a distribuição de probabilidades dos estados no instante zero, $\{p(n,0),\ n=0,1,\ldots\}$. Este tipo de análise, que leva em consideração a variável tempo, é chamada análise em regime transitório.

Seja $p(n)=\lim_{t\to\infty}p(n,t)$ $(n=0,1,\ldots)$. Admitindo-se a existência do regime estacionário, a distribuição estacionária, $\{p(n),\ n=0,1,\ldots\}$, pode ser calculada pela solução do seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{aligned}
\lambda(0)p(0) &= \mu(1)p(1) \\
(\lambda(n)+\mu(n))p(n) &= \lambda(n-1)p(n-1)+\mu(n+1)p(n+1) \\
&\qquad n=1,2,\ldots
\end{aligned} \tag{2.2}$$

De (2.2), obtém-se:

$$p(n)=p(0)\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda(k)}{\mu(k+1)} \qquad n=1,2,\ldots \tag{2.3}$$

Finalmente, impondo-se que $\sum_n p(n)=1$, obtém-se:

$$p(0)=\frac{1}{1+\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda(k)}{\mu(k+1)}} \tag{2.4}$$

As equações (2.2) são denominadas equações de balanço global entre estados, pois, para cada estado n, igualam-se as taxas de entrada às taxas de saída do processo deste estado[2].

KLEINROCK (1975) mostra que o processo $\{N(t),\ t\geq 0\}$ será ergódico e, portanto, apresentará uma distribuição estacionária, $\{p(n),\ n=0,1,\ldots\}$, desde que haja um valor n_c tal que, para todo $k\geq n_c$, tenha-se $\lambda(k)/\mu(k+1)<1$.

Diferentes modelos podem ser obtidos a partir da definição dos parâmetros $\lambda(n)$ e $\mu(n+1)$ $(n=0,1,\ldots)$. Dentre estes modelos, está o modelo de fila M/M/c, que é caracterizado por um processo de chegada dos clientes Poisson com taxa λ e pela existência de c servidores idênticos em paralelo, com os tempos de atendimento

---

[2] Este sistema de equações pode ser apresentado na forma matricial $\pi Q=0$, onde π corresponde à distribuição estacionária dos estados da cadeia de Markov em tempo contínuo e Q corresponde à matriz das taxas de transição entre estados ou matriz geradora infinitesimal de probabilidades.

dos clientes constituindo uma seqüência de variáveis aleatórias independentes com distribuição exponencial de probabilidades e média $1/\mu$.

O modelo[3] M/M/c corresponde a um processo de nascimento e morte com parâmetros $\lambda(n)=\lambda$ e $\mu(n+1)=\alpha(n+1)\mu$ $(n=0,1,...)$, onde $\alpha(k)=\min(c,k)$ e os parâmetros λ e μ são números reais estritamente positivos[4]. Neste caso particular, a condição de existência do regime estacionário é satisfeita se $(\lambda/c\mu)<1$. A distribuição estacionária, admitindo-se que $(\lambda/c\mu)<1$, é dada por

$$p(n) = \begin{cases} \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{n!}p(0) & n=1,\dots,c-1 \\ \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{c!\,c^{n-c}}p(0) & n=c,c+1,\dots \end{cases} \tag{2.5}$$

onde

$$p(0) = \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1}\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}+\frac{(\lambda/\mu)^n}{c!\,(1-\lambda/c\mu)}} \tag{2.6}$$

---

[3] Na teoria de filas, utiliza-se a notação A/B/c, denominada notação de Kendall, para representar sistemas isolados de fila, onde A representa a distribuição de probabilidades dos intervalos entre chegadas sucessivas de clientes, B representa a distribuição dos tempos de atendimento em cada servidor e c a quantidade de servidores idênticos em paralelo.

[4] Os parâmetros λ e μ são denominados taxa de chegada e taxa de atendimento, respectivamente.

Dois casos particulares do modelo acima são obtidos considerando-se: a) um único servidor (M/M/1); b) infinitos servidores (M/M/∞). No modelo M/M/1 a distribuição estacionária da quantidade de clientes no sistema, dado que $(\lambda/\mu)<1$, apresenta distribuição geométrica expressa por

$$p(n) = (1-\lambda/\mu)(\lambda/\mu)^n \qquad n=0,1,\ldots \tag{2.7}$$

No modelo M/M/∞, a condição para existência de regime estacionário é sempre satisfeita $(\lambda<\infty)$ e a distribuição estacionária é uma distribuição de Poisson com média (λ/μ), ou seja,

$$p(n) = \frac{e^{-\lambda/\mu}(\lambda/\mu)^n}{n!} \qquad n=0,1,\ldots \tag{2.8}$$

A distribuição (2.8) também é válida para modelos com processo de chegada Poisson, infinitos servidores e distribuições arbitrárias para os tempos de atendimento, que são representados por M/G/∞.

Conhecida a distribuição estacionária, $\{p(n), n=0,1,\ldots\}$, de um dado sistema isolado de filas, determina-se a expectância da quantidade de clientes no sistema, E[L], por

$$E[L] = \sum_{n=0}^{\infty} np(n) \tag{2.9}$$

Para calcular o tempo médio de permanência dos clientes no sistema, aplica-se a fórmula de Little, que fornece

$$E[W] = \frac{E[L]}{\lambda} \tag{2.10}$$

KLEINROCK (1975), GROSS; HARRIS (1985) e MEDHI (1991) apresentam vários outros modelos que podem ser analisados a partir de processos de nascimento e morte em tempo contínuo. Dentre estes modelos encontram-se casos em que o sistema apresenta capacidade finita ou a população é finita.

Existem modelos que, embora não possam ser analisados como processos de nascimento e morte, constituem cadeias de Markov em tempo contínuo. Podem-se destacar os modelos de filas com chegada em grupos e atendimento individual ($M^X/M/c$, onde X é uma variável aleatória discreta que representa a quantidade de clientes em cada chegada) e os modelos com chegada Poisson e atendimento em grupo (M/M(a,b)/1, onde a e b representam a quantidade mínima e máxima, respectivamente, de clientes atendidos simultaneamente).

Outro exemplo é o modelo $M/E_r/1$, no qual os tempos de atendimento são variáveis aleatórias com distribuição Erlang de ordem r. Mesmo modelos como a fila M/G/1, onde o processo $\{N(t), t \geq 0\}$ não é markoviano, podem ser analisados por cadeias de Markov

em tempo contínuo. (Vide KLEINROCK (1975), GROSS; HARRIS (1985) e MEDHI (1991).)

Os modelos que admitem processo de chegada Poisson apresentam a importante propriedade de que, em regime estacionário, a distribuição da quantidade de clientes vista por um cliente no instante de chegada, $\{a(n), n=0,1,...\}$, é igual à distribuição estacionária da quantidade de clientes no sistema, $\{p(n), n=0,1,...\}$.

Em relação ao modelo M/M/c, BURKE (1956) demonstra que o processo de saída dos clientes, em regime estacionário, também constitui um processo de Poisson com a mesma taxa λ do processo de chegada. Adicionalmente, mostra-se que o modelo M/M/c é o único a apresentar tal propriedade, conhecida como teorema de Burke.

Uma generalização dos modelos markovianos de filas isolados consiste em considerar múltiplos postos de serviço, dando origem às redes markovianas de filas. Nestas redes, cada posto de serviço, usualmente denominado nó, apresenta uma dada quantidade de servidores idênticos em paralelo e tempos de atendimentos com distribuição exponencial. Nas redes, os processos de chegada dos clientes aos postos de serviço são mais complexos. Deve-se especificar um processo global de chegada dos clientes ao sistema e o processo de movimentação dos clientes no interior da rede, o que resulta em diferentes processos de chegada de clientes em cada posto de serviço.

As redes são classificadas em abertas e fechadas. Nas redes abertas, os clientes entram e saem da rede após percorrerem um dado número de nós. Já nas redes fechadas, existe uma quantidade fixa de clientes no interior da rede, que movem-se indefinidamente dentro dela. Nas seções 2.2 e 2.3, estes sistemas são analisados em maior detalhe.

2.2 Redes Abertas de Filas

JACKSON (1954) apresenta um modelo formado por uma seqüência de M nós e que possui as seguintes características: os clientes chegam ao nó 1 segundo um processo de chegadas Poisson; após o atendimento neste nó, seguem para o nó 2 e assim, sucessivamente, até atingir o M-ésimo nó de onde deixam o sistema. Em cada nó i, existem c_i servidores em paralelo, que atendem os clientes pela ordem de chegada, sendo os tempos de atendimento variáveis aleatórias independentes com distribuição exponencial e média $1/\mu_i$ $(i=1,\ldots,M)$.

A título de ilustração, considere-se um sistema com dois postos de serviço (M=2), onde cada posto apresenta um único servidor $(c_1=c_2=1)$ com taxa de atendimento μ_i $(i=1,2)$. Seja λ a taxa do processo de chegada Poisson de clientes ao nó 1. Neste caso, tem-se um modelo markoviano cujos estados podem ser representados por um vetor $\mathbf{N}(t)=(N_1(t),N_2(t))$. Seja $p(n_1,n_2,t)=P[N_1(t)=n_1,N_2(t)=n_2]$ $(n_1,n_2=0,1,\ldots,\ t\geq 0)$, então a

distribuição $p(n_1,n_2,t)$ pode ser determinada resolvendo-se o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\frac{d}{dt}p(n_1,n_2,t)=\lambda p(n_1-1,n_2,t)+\mu_1 p(n_1+1,n_2-1,t)+\mu_2 p(n_1,n_2+1,t)$$
$$-(\lambda+\mu_1+\mu_2)p(n_1,n_2,t)$$
$$n_1>0 \qquad n_2>0$$

$$\frac{d}{dt}p(n_1,0,t)=\lambda p(n_1-1,0,t)+\mu_2 p(n_1,1,t)-(\lambda+\mu_1)p(n_1,0,t)$$
$$n_1>0$$

$$\frac{d}{dt}p(0,n_2,t)=\mu_1 p(1,n_2-1,t)+\mu_2 p(0,n_2+1,t)-(\lambda+\mu_2)p(n_1,n_2,t)$$
$$n_2>0$$

$$\frac{d}{dt}p(0,0,t)=\mu_2 p(0,1,t)-\lambda p(0,0,t)$$

(2.11)

Neste sistema, o primeiro estágio constitui um sistema M/M/1. Das propriedades dos modelos M/M/c, o processo de chegada ao nó 2 será Poisson; a taxa de chegadas ao nó 2 será igual a λ, caso λ/μ_1 seja menor que 1, e igual a μ_1, caso contrário.

A condição necessária e suficiente para que o processo $\{\mathbf{N}(t),\ t\geq 0\}$ seja ergódico é que tanto λ/μ_1 quanto λ/μ_2 sejam menores que 1. Neste caso, a distribuição estacionária dos estados pode ser calculada resolvendo-se o seguinte sistema de equações lineares, denominado equações de balanço global entre estados:

$$(\lambda+\mu_1+\mu_2)p(n_1,n_2)=\lambda p(n_1-1,n_2)+\mu_1 p(n_1+1,n_2-1)+\mu_2 p(n_1,n_2+1)$$
$$n_1>0 \qquad n_2>0$$

$$(\lambda+\mu_1)p(n_1,0)=\lambda p(n_1-1,0)+\mu_2 p(n_1,1)$$
$$n_1>0$$

$$(\lambda+\mu_2)p(n_1,n_2)=\mu_1 p(1,n_2-1)+\mu_2 p(0,n_2+1)$$
$$n_2>0$$

$$\lambda p(0,0)=\mu_2 p(0,1)$$

(2.12)

cuja solução é dada por

$$p(n_1,n_2)=(1-\lambda_1/\mu_1)\,(\lambda_1/\mu_1)^{n_1}(1-\lambda_2/\mu_2)\,(\lambda_2/\mu_2)^{n_2} \qquad (2.13)$$

A expressão anterior, mostra que, em regime estacionário, a quantidade de clientes no nó 1, em um determinado instante t, e a quantidade de clientes no nó 2, neste mesmo instante, são independentes. Além disso, as distribuições marginais de $N_1(t)$ e $N_2(t)$, em regime estacionário, são iguais às distribuições estacionárias da quantidade de clientes nos modelos de filas M/M/1 com taxas de chegadas λ e taxas de atendimento μ_1 e μ_2, respectivamente.

Estes resultados podem ser generalizados para M>2, admitindo-se que cada um dos M nós apresente taxas de

atendimentos μ_i e c_i servidores em paralelo (i=1,...,M). Neste caso, admitindo-se que $(\lambda/c_i\mu_i)<1$ (i=1,...,M), a solução em regime estacionário é dada por

$$p(\mathbf{n}) = \prod_{i=1}^{M} p_i(n_i) \tag{2.14}$$

onde $\mathbf{n}=(n_1,...,n_M)$ e $p_i(k)$ (i=1,...,M; k=0,1,...) corresponde à distribuição estacionária de um modelo $M/M/c_i$ com taxas λ e μ_i. Pelo teorema de Burke, conclui-se que, nesta rede, o processo de chegada em qualquer nó i é Poisson com parâmetro λ.

Considere-se uma rede seqüencial de filas formada por dois postos de serviço (M=2), cada posto apresentando um único servidor ($c_1=c_2=1$) e tempos de atendimento aleatórios com distribuições exponenciais e média $1/\mu_i$ (i=1,2). Suponha-se que os clientes, após o atendimento no posto 1, retornem para o fim da fila deste mesmo posto com probabilidade p ou prossigam para o posto 2 com probabilidade 1-p e, a partir daí, deixem o sistema.

Pode-se mostrar que a distribuição estacionária conjunta da quantidade de clientes em cada nó é dada por

$$p(n_1,n_2) = (1-\rho_1)\,\rho_1^{n_1}\,(1-\rho_2)\,\rho_2^{n_2} \tag{2.15}$$

onde $\rho_1=\lambda/(1-p)\mu_1$ e $\rho_2=\lambda/\mu_2$. Para que o sistema entre em regime estacionário, é necessário que ρ_1 e ρ_2 sejam menores que 1. Neste exemplo, apesar da distribuição ser expressa em forma de produto, o processo de chegada ao posto 1 deixa de ser um processo de Poisson. De uma forma geral, quando se permite a realimentação, direta ou indireta, o processo de chegada em um dado nó deixa de ser Poisson. DISNEY (1987) explora as características de processos de tráfego de clientes em diferentes redes de filas.

JACKSON (1957) apresenta um modelo, mais geral que o modelo seqüencial. Considere-se uma rede com M nós, cada qual contendo c_i servidores idênticos em paralelo $(i=1,\ldots,M)$. Clientes procedentes do meio externo chegam ao nó i conforme um processo Poisson com taxa ψ_i (cada nó recebe também clientes provenientes de outros nós da rede). Os clientes, em cada nó i, são atendidos pela ordem de chegada e os tempos de atendimento são dados por distribuições exponenciais com média $1/\mu_i$ $(i=1,\ldots,M)$. Uma vez concluído o atendimento no nó i, cada cliente dirige-se (instantâneamente) ao nó j, com probabilidade p_{ij}, ou deixa o sistema, com probabilidade $1-\sum_j p_{ij}$.

Seja λ_i a taxa média de chegadas ao nó i (internas e externas). Utilizando-se argumentos de continuidade, em regime estacionário, estas taxas são determinadas pela solução do seguinte sistema de equações lineares:

$$\lambda_i=\psi_i+\sum_{j=1}^{M}\lambda_j p_{ji} \qquad i=1,\ldots,M \tag{2.16}$$

Define-se o estado do sistema, em regime estacionário, como sendo um vetor $\mathbf{n}=(n_1,\ldots,n_M)$ onde n_i representa o número de clientes na fila e em atendimento no nó i, em um dado instante t. A partir destas considerações, Jackson formula o seguinte teorema:

"Defina-se $p_i(k)$ $(i=1,2,\ldots,M;\ k=0,1,2,\ldots)$ pelas seguintes equações (onde os $p_i(0)$ são determinados pelas condições $\sum_i p_i(k)=1$):

$$p_i(k) = \begin{cases} \dfrac{(\lambda_i/\mu_i)^k}{k!}\, p_i(0) & (k \le c_i) \\ \dfrac{(\lambda_i/\mu_i)^k}{c_i!\, c_i^{k-c_i}}\, p_i(0) & (k \ge c_i) \end{cases} \tag{2.17}$$

"Então, uma distribuição estacionária do estado da cadeia descrita é dada pela seguinte expressão em forma de produto:

$$p(\mathbf{n}) = p_1(n_1)\, p_2(n_2) \cdots p_M(n_M) \tag{2.18}$$

"Observadas as condições $\lambda_i < c_i\mu_i$ $(i=1,\ldots,M)$."

A principal conclusão do teorema acima, segundo JACKSON (1957), é que, em regime estacionário, cada nó desta rede comporta-se como se fosse um sistema isolado $M/M/c_i$ com taxas de chegada λ_i e taxas de atendimento μ_i. A existência da distribuição estacionária depende de que seja satisfeita a condição $\lambda_i < c_i\mu_i$, $i=1,\ldots,M$.

JACKSON (1963) considera um sistema de filas ainda mais geral. Admite-se um processo de chegada de clientes externos ao sistema que tenha intervalos entre chegadas consecutivas dados por variáveis aleatórias independentes, com distribuição exponencial e parâmetro λ variável em função da quantidade de clientes no sistema ($\lambda(N)$, $N=\sum_i n_i$)[5]. Analogamente, os tempos de atendimento em cada nó i passam a ser variáveis aleatórias com distribuição exponencial e parâmetro μ_i variável em função do número de clientes no nó i ($\mu_i(n_i)$)[6]. Como resultado principal, são apresentadas expressões em forma de produto para o cálculo da distribuição estacionária.

2.3 Redes Fechadas de Filas

GORDON; NEWELL (1967) analisam um sistema fechado de filas constituído de M nós com atendimento exponencial e N clientes dentro da rede. Em cada nó i, há c_i servidores em paralelo, com taxa de atendimento μ_i. Ao final do atendimento no nó i, cada cliente segue instantâneamente ao nó j, com probabilidade p_{ij} ($i,j=1,\ldots,M$; $\sum_j p_{ij}=1$, $i=1,\ldots,M$). Define-se um vetor aleatório $\mathbf{N}(t)=(N_1(t),\ldots,N_M(t))$, onde a componente $N_i(t)$ representa a quantidade de clientes no nó i, com restrição adicional que $\sum_i N_i(t)=N$.

---

[5] $\lambda(k)\geq 0$, $k=0,1,\ldots$.

[6] A função $\mu_i(k)$, $k=0,1,\ldots$, deve apresentar as seguintes propriedades: a) $\mu_i(0)=0$; b) $\mu_i(k)>0$, $k=1,2,\ldots$.

Verifica-se que o processo $\{\mathbf{N}(t)=(N_1(t),\ldots,N_M(t)),\ t\geq 0\}$ constitui uma cadeia de Markov em tempo contínuo irredutível e com um número finito de estados, o que implica na existência de uma distribuição estacionária. A partir das equações de balanço global entre estados, obtém-se a distribuição das probabilidades de estado em regime estacionário que é dada por

$$p(\mathbf{n}) = \frac{1}{G(N)} \prod_{i=1}^{M} f_i(n_i) \qquad \mathbf{n} \in A(N,M) \tag{2.19}$$

onde

$$A(N,M) = \{(n_1,\ldots,n_M) \mid n_i \in \mathbf{N}\ (i=1,\ldots,M),\ \sum_{i=1}^{M} n_i = N\} \tag{2.20}$$

$$f_i(k) = \begin{cases} \dfrac{x_i^k}{k!} & k \leq c_i \\ \dfrac{x_i^k}{c_i!\, c_i^{k-c_i}} & k > c_i \end{cases} \qquad i=1,\ldots,M; \quad k=0,1,\ldots,N \tag{2.21}$$

$$G(N) = \sum_{\mathbf{n} \in A(N,M)} \prod_{i=1}^{M} f_i(n_i) \tag{2.22}$$

G(N) é uma constante de normalização, tal que a soma das probabilidades seja igual a 1. Em (2.21), $x_i=e_i/\mu_i$, $i=1,...,M$, onde os valores de e_i são dados por qualquer solução não trivial do seguinte sistema homogêneo de equações lineares[7]:

$$e_i = \sum_{j=1}^{M} e_j p_{ji} \qquad i=1,\dots,M \tag{2.23}$$

Novamente, a distribuição estacionária (2.19) é expressa na forma de produto. Neste caso, no entanto, verifica-se que as distribuições marginais não são independentes, dado que $\sum_i N_i(t)=N$.

Uma característica importante do modelo é a quantidade de estados, J, que é dada pela expressão

$$J = \binom{N+M-1}{M-1} \tag{2.24}$$

Pela expressão acima, verifica-se que o número de estados torna-se muito elevado mesmo para valores relativamente pequenos de M e N. Por exemplo, para M=5 e N=20, tem-se J=10626.

GORDON; NEWELL (1967) demonstram a equivalência da rede fechada considerada com o modelo apresentado por JACKSON (1957).

---

[7] O conjunto $\{e_i,\ i=1,...,M\}$ fornece uma proporção entre as quantidades médias de visitas dos clientes a cada nó i, em regime estacionário.

Esta equivalência pode ser verificada assintóticamente, a medida que a quantidade de clientes, N, tende ao infinito.

Um caso particular importante das redes fechadas de filas, denominadas redes circulares de filas, foi analisado por KOENIGSBERG (1958). Nestas redes circulares, existem M nós que são percorridos seqüencialmente pelos N clientes existentes na rede, formando um ciclo fechado. A diferença básica em relação ao modelo anterior está nas probabilidades de transição dos clientes entre os nós da rede que, nas redes circulares, são dadas por

$$p_{ij}=\begin{cases}1, & se\ (j=i+1) \\ & ou\ (i=M\ e\ j=1) \\ 0, & caso\ contrário\end{cases} \qquad i,j=1,\ldots,M \qquad (2.25)$$

POSNER; BERNHOLTZ (1968) consideram uma rede fechada similar à apresentada por GORDON; NEWELL (1967), onde os tempos de deslocamento ("time lags") entre dois nós i e j são variáveis aleatórias com função repartição $G_{ij}(t)$ arbitrária. Adicionalmente, permite-se que a taxa de atendimentos no nó i seja função do número de clientes, $\mu_i(k)$, neste nó.

Seja $\mathbf{n}=(n_1,n_2,\ldots,n_M)$ um vetor de números inteiros não negativos tal que $\sum_i n_i \leq N$. Cada componente n_i $(i=1,\ldots,M)$ representa a quantidade de clientes existentes no posto i, em um dado instante t, em regime estacionário, e $N-\sum_i n_i$ corresponde ao número de clientes em trânsito, dado que o sistema encontra-se no estado **n**. Então, demonstra-se que:

$$p(\mathbf{n}) = C \frac{(E[H])^{n_0}}{n_0!} \prod_{i=1}^{M} f_i(n_i) \tag{2.26}$$

onde

$$f_i(k) = \prod_{j=1}^{k} \frac{e_i}{\mu_i(j)} \tag{2.27}$$

$$e_i = \sum_{j=1}^{M} e_j p_{ij} \tag{2.28}$$

$$E[H] = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} e_{ij} E[H_{ij}] \tag{2.29}$$

$$E[H_{ij}] = \int_0^{\infty} dG_{ij}(t) \qquad i,j=1,\ldots,M \tag{2.30}$$

$$e_{ij} = e_i p_{ij} \qquad i,j=1,\ldots,M \tag{2.31}$$

C é uma constante de normalização e n_0 equivale à quantidade de clientes em trânsito no instante t ($n_0=N-\sum_i n_i$). As variáveis $\grave{e}_i$ (i=1,...M) representam uma proporção entre as expectâncias das quantidades de visitas dos clientes aos diferentes nós. Analogamente, os valores e_{ij} (i,j=1,...M) representam uma proporção entre as expectâncias das quantidades de passagens dos clientes pelas diferentes trilhas da rede. $E[H_{ij}]$ corresponde ao tempo médio consumido pelos clientes na trilha (i,j).

Calculando-se o limite da expressão (2.26) para E[H] tendendo ao zero, obtém-se a distribuição correspondente ao caso em que os deslocamentos entre nós são instantâneos.

POSNER; BERNHOLTZ (1968), mostram que a distribuição estacionária da rede de GORDON; NEWELL (1967) é equivalente à distribuição estacionária de uma rede circular com as mesmas quantidades de clientes e de postos de serviço, cada posto com uma taxa de serviço igual a $\mu_i(k)/e_i$. Da mesma forma, uma rede fechada contendo M nós e com tempos de deslocamento não nulos entre nós apresenta a mesma distribuição estacionária que uma rede circular com M+1 nós, feitas as devidas adaptações nas taxas de atendimento dos diferentes estágios.

Segundo POSNER; BERNHOLTZ (1968), todos os tempos de deslocamento podem ser combinados para formar um nó virtual M+1 com infinitos servidores em paralelo e taxas de atendimento 1/E[H]. Visto que nenhuma hipótese é feita a respeito do tipo de distribuição para os tempos de deslocamento entre os nós da rede original, fica demonstrado que o tempo de serviço no nó virtual

da rede circular não precisa ser necessariamente exponencial. Na verdade, se qualquer nó ou posto de serviço de uma rede fechada possui uma quantidade de servidores suficientes para atender a todos os clientes da rede simultâneamente, a solução é independente da forma da distribuição do tempo de atendimento naquele nó.

BASKETT et al. (1975) introduziram o conceito de classes de clientes em redes fechadas de filas. Além das diferentes classes de clientes, consideram quatro tipos de disciplinas alternativas de filas e a possibilidade de mudança de classe dos clientes ao final dos atendimentos. Novamente, obtém-se uma solução em forma de produto para a distribuição estacionária dos estados da rede.

As redes de filas consideradas até aqui são usualmente denominadas redes markovianas de filas pois constituem cadeias de Markov em tempo contínuo. Em geral, a questão central na análise destas redes é a determinação da distribuição estacionária das probabilidades de estado.

A determinação da distribuição estacionária de uma cadeia de Markov implica a resolução de um sistema homogêneo de equações lineares de ordem igual ao número de estados da cadeia. Freqüentemente, a quantidade de estados associada às redes de filas é tão elevada que inviabiliza o cálculo destas probabilidades a partir da solução numérica destes sistemas de equações. Assim, a existência de uma solução analítica para a distribuição estacionária simplifica o cálculo.

Alguns autores dedicaram-se ao estudo das condições necessárias para que uma rede apresente uma solução analítica similar às apresentadas anteriormente, usualmente denominadas soluções em forma de produto. (Vide CHANDY (1977).)

Outro aspecto importante no estudo das redes fechadas de filas, que apresentam solução analítica para a distribuição estacionária das probabilidades de estados, refere-se a determinação da constante de normalização. HARRISON (1985) apresenta uma expressão para o cálculo da constante de normalização para algumas configurações particulares de redes fechadas. Por exemplo, para uma rede fechada composta de nós com um único servidor, em que a constante G(N) é dada por

$$G(N) = \sum_{n \in A(N,M)} \prod_{i=1}^{M} x_i^{n_i} \qquad (2.32)$$

HARRISON (1985) demonstra que, se os x_i são todos distintos, é válida a seguinte expressão:

$$G(N) = \sum_{i=1}^{M} \frac{x_i^{N+M-1}}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)} \qquad (2.33)$$

HARRISON (1985) apresenta também outros casos para os quais foram obtidos resultados similares. KOENIGSBERG (1958) obteve

resultados semelhantes para redes circulares com postos dotados de um único servidor.

Devido a dificuldade para obtenção de expressões similares para casos mais gerais, usualmente recorre-se aos métodos numéricos. BUZEN (1973) propôs um algoritmo recursivo para o cálculo da constante de normalização para a rede fechada de filas com atendimentos exponenciais. Este procedimento, conhecido como algoritmo da convolução, é discutido em maior detalhe por BRUELL; BALBO (1980). Além do cálculo da constante de normalização, são apresentados procedimentos que permitem calcular as distribuições marginais e alguns parâmetros de desempenho. O algoritmo da convolução é discutido na sub-seção 2.4.1.

REISER; LAVENBERG (1980) propuseram um procedimento de solução de redes fechadas, denominado análise do valor médio, que permite calcular recursivamente o tamanho médio das filas, os tempos médios espera e os fluxos em uma rede fechada com múltiplas classes, sem necessidade da obtenção da constante G(N). O detalhamento deste procedimento para redes com uma única classe de clientes é realizado na sub-seção 2.4.2.

Nos modelos markovianos de filas que não apresentam uma solução analítica para a distribuição estacionária, a solução do modelo consiste na resolução do sistema de equações lineares, $\pi Q=0$, onde π representa a distribuição estacionária dos estados e Q a matriz geradora infinitesimal de probabilidades ou matriz das taxas de transição entre estados.

2.4 Métodos Computacionais para Redes Fechadas de Filas com Solução em Forma de Produto

Os procedimentos que são apresentados nesta seção referem-se às redes fechadas com uma única classe de clientes e com distribuições exponenciais em cada posto de serviço. Estes procedimentos visam aumentar a eficiência computacional da determinação das distribuições marginais da quantidade de clientes em cada posto bem como de algumas medidas de desempenho em regime estacionário. As sub-seções 2.4.1 e 2.4.2 baseiam-se em BRUEL; BALBO (1980).

2.4.1 Método da Convolução

A maior dificuldade de aplicação das redes fechadas de filas está associada ao rápido crescimento da quantidade de estados, que dificulta a determinação da distribuição estacionária e das medidas de desempenho do sistema.

BUZEN (1973) desenvolveu um algoritmo computacionalmente eficiente para a determinação da constante de normalização de uma rede fechada com tempos de atendimento exponenciais que, além do cálculo da distribuição estacionária conjunta, fornece as distribuições marginais e medidas de desempenho como tamanho médio das médias, tempos médios de espera, índices de utilização, etc.

Considere-se uma rede fechada com N clientes (uma única classe) e M postos de serviço. O nó i possui c_i servidores em paralelo com taxa de atendimento μ_i; as distribuições dos tempos de atendimentos são exponenciais e o deslocamento dos clientes entre os nós é instantâneo; p_{ij} representa a fração das partidas do nó i que segue para o nó j. Então, a distribuição em equilíbrio da quantidade de clientes na rede é dada por

$$p(\mathbf{n}) = \frac{1}{G(N)} \prod_{i=1}^{M} f_i(n_i) \qquad \mathbf{n} \in A(N,M) \tag{2.34}$$

Para que a soma das probabilidades seja 1, é necessário que

$$G(N) = \sum_{\mathbf{n} \in A(N,M)} \prod_{i=1}^{M} f_i(n_i) \tag{2.35}$$

Para desenvolver o algoritmo, define-se uma função auxiliar $g_m(n)$, tal que

$$g_m(n) = \sum_{\mathbf{n} \in A(n,m)} \prod_{i=1}^{m} f_i(n_i) \qquad n=0,\ldots,N; \quad m=1,\ldots,M; \tag{2.36}$$

Note-se que $g_M(n)=G(n)$ $(n=0,1,\ldots,N)$, onde $G(n)$ seria a constante de normalização para a rede fechada com n clientes. A função auxiliar $g_m(n)$ pode ser interpretada como sendo a constante de

normalização de uma rede com m nós, n clientes e os mesmos valores e_i (i=1,...,m).

Da definição (2.36), tem-se: a) $g_m(0)=1$, m=1,...,M; b) $g_1(n)=f_1(n)$, n=1,...,N. Para m>1, demonstra-se que

$$g_m(n)=\sum_{k=0}^{n} f_m(k)\, g_{m-1}(n-k) \qquad n=1,\ldots,N \tag{2.37}$$

que é a expressão central do procedimento.

Como cada nó é constituído de c_i servidores em paralelo, pode-se mostrar ainda que

$$g_m(n)=g_{m-1}(n)+\frac{x_m}{c_m}\Big[g_m(n-1) + \sum_{k=0}^{c_m-2}\left(\frac{c_m-k-1}{k+1}\right) f_m(k)\, g_{m-1}(n-1-k)\Big] \qquad n=1,\ldots,N;\quad m=2,\ldots,M \tag{2.38}$$

Esta última expressão, conforme BRUEL; BALBO (1980), envolve um menor número de operações para o cálculo de $g_m(n)$.

Para os casos particulares nos quais a quantidade de servidores em paralelo no nó m, c_m, é um ou dois, a equação anterior pode ainda ser reduzida, respectivamente, as seguintes formas:

a) se $c_m=1$, então

$$g_m(n) = g_{m-1}(n) + x_m g_m(n-1) \qquad n=1,2,\ldots,N \tag{2.39}$$

b) se $c_m=2$, então

$$\begin{aligned} g_m(1) &= g_{m-1}(1) + x_m \\ g_m(n) &= g_{m-1}(n) + \frac{x_m}{2}\left[g_m(n-1) + g_{m-1}(n-1)\right] \qquad n=2,\ldots,N \end{aligned} \tag{2.40}$$

O algoritmo da convolução utiliza a expressão (2.38) para o cálculo recursivo de G(N). Inicializa-se o procedimento com $f_1(n)$ (n=1,...,N). A cada passo, são calculados os novos valores de $g_m(n)$ (m=2,...,M), acrescentando-se o m-ésimo nó. Após M-1 iterações, determinam-se os valores de G(n) (n=0,1,...,N).

Um procedimento análogo pode ser utilizado para o cálculo das distribuições estacionárias marginais do número de clientes em cada fila. A distribuição marginal da quantidade de clientes no nó i, $p_i^N(k)$, é dada por

$$p_i^N(k) = \sum_{\substack{n \in A(N,M) \\ n_i = k}} \frac{1}{G(N)} \prod_{j=1}^{M} f_j(n_j) \qquad i=1,\ldots,M; \quad k=0,\ldots,N \tag{2.41}$$

A expressão (2.41) pode ser expressa da seguinte forma:

$$p_i^N(k) = \frac{f_i(k)}{G(N)} \sum_{\substack{n \in A(N-k,M) \\ n_i=0}} \prod_{j=1}^{M} f_j(n_j) \qquad i=1,\ldots,M; \quad k=0,\ldots,N \tag{2.42}$$

Seja uma função auxiliar, $h_i(k)$, dada por

$$h_i(k) = \sum_{\substack{n \in A(k,M) \\ n_i=0}} \prod_{j=1}^{M} f_j(n_j) \qquad i=1,\ldots,M; \quad k=0,1.\ldots,N \tag{2.43}$$

A partir da definição (2.43), a distribuição marginal $p_i^N(k)$ pode ser expressa por

$$p_i^N(k) = \frac{f_i(k)}{G(N)} h_i(N-k) \qquad i=1,\ldots,M; \quad k=0,\ldots,N \tag{2.44}$$

Considerando-se que haja n clientes na rede (n=1,...,N) e impondo-se que a soma das probabilidades marginais de cada nó i seja igual a 1, conclui-se que

$$\frac{1}{G(n)} \sum_{k=0}^{n} f_i(k)\, h_i(n-k) = 1 \qquad i=1,\ldots,M \tag{2.45}$$

Em decorrência da expressão (2.45), obtém-se:

$$h_i(n) = G(n) - \sum_{k=1}^{n} f_i(k)\, h_i(n-k) \qquad i=1,\ldots,M \tag{2.46}$$

Os valores das funções auxiliares $h_i(n)$ são calculados iterativamente, com a condição de contorno $h_i(0)=G(0)=1$ $(i=1,\ldots,M)$. Desenvolvendo-se a expressão (2.46), obtém-se:

$$h_i(n) = G(n) - \frac{x_i}{c_i}\left[G(n-1) + \sum_{k=0}^{c_i-1} \left(\frac{c_i-k-1}{k+1}\right) f_i(k)\, h_i(n-1-k)\right] \tag{2.47}$$

$$i=1,\ldots,M; \quad n=1,\ldots,N$$

Para os casos particulares em que há um ou dois servidores em paralelo, esta equação simplifica-se da seguinte forma:

a) se $c_i=1$, então

$$h_i(n) = G(n) - x_i G(n-1) \qquad n=0,1,\ldots,N \tag{2.48}$$

b) se $c_i=2$, então

$$\begin{aligned} h_i(1) &= G(1) - x_i \\ h_i(n) &= G(n) - \frac{x_i}{2}\left[G(n-1) + h_i(n-1)\right] \qquad n=2,\ldots,N \end{aligned} \tag{2.49}$$

O passo seguinte é a determinação das medidas de desempenho, em regime estacionário, da rede fechada de filas. A partir da distribuição estacionária marginal, $p_i(k)$, dado que há N clientes na rede, calculam-se, para cada nó i (i=1,...,M), os seguintes parâmetros:

a) o fluxo de clientes por unidade de tempo, λ_i, por

$$\lambda_i = \sum_{k=1}^{N} \alpha_i(k)\,\mu_i p_i(k) \tag{2.50}$$

(onde $\alpha_i(k)=\min(k,c_i)$).

b) a expectância da quantidade de clientes presentes em um dado instante, $E[L_i]$, por

$$E[L_i] = \sum_{k=1}^{N} k p_i(k) \tag{2.51}$$

c) a expectância do tempo de permanência dos clientes, $E[W_i]$, por

$$E[W_i] = \frac{E[L_i]}{\lambda_i} \tag{2.52}$$

d) o índice de congestionamento, ρ_i, por

$$\rho_i = \sum_{k=1}^{N} \frac{\alpha_i(k)}{c_i} p_i(k) = \frac{\lambda_i}{c_i \mu_i} \qquad (2.53)$$

A expressão (2.52) deriva da clássica fórmula de Little.

Adicionalmente, demonstra-se que o cálculo dos fluxos λ_i pode ser feito pela seguinte expressão:

$$\lambda_i(n) = e_i \frac{G(n-1)}{G(n)} \qquad i=1,\ldots,M; \quad n=1,2,\ldots \qquad (2.54)$$

Esta expressão tem a vantagem de fornecer as vazões $\lambda_i(n)$, admitindo-se diferentes quantidades de clientes na rede, sem a necessidade de determinação das distribuições marginais.

2.4.2 Análise do Valor Médio

Nesta sub-seção apresenta-se o método proposto por REISER; LAVENBERG (1980) particularizado para uma rede fechada com uma única classe de clientes e atendimentos com distribuição exponencial.

A análise do valor médio (AVM), segundo REISER; LAVENBERG (1980), baseia-se em dois princípios:

a) no instante de sua chegada a um nó qualquer, um cliente observa a rede com a mesma distribuição de probabilidade que um observador externo quando há um cliente a menos no sistema;

b) aplica-se a fórmula de Little para a rede como um todo e individualmente para cada nó.

Inicialmente, considere-se o caso particular de uma rede circular formada por M nós, sendo que cada nó possui um único ou infinitos servidores.

Seja $\lambda(n)$ o fluxo na rede, que é comum para todos os nós, considerando-se n clientes na rede. Definam-se $E[L_i(n)]$ e $E[W_i(n)]$, respectivamente, a expectância da quantidade de clientes e a expectância do tempo de permanência dos clientes referentes ao nó i (i=1,...,M), admitindo-se n clientes na rede (n=0,1,...).

Neste caso particular, uma solução para o sistema $e_i=\sum_j e_j p_{ji}$ (i=1,...,M) é obtida com $e_i=1$ para i=1,...,M. Assim, obtêm-se:

$$\lambda(n) = \frac{G(n-1)}{G(n)} \tag{2.55}$$

$$E[L_i(n)] = \lambda(n)\ E[W_i(n)] \tag{2.56}$$

$$E[W_i(n)] = \begin{cases} \frac{1}{\mu_i}(1+E[W_i(n-1)]) & se \quad c_i=1 \\ \frac{1}{\mu_i} & se \quad c_i=\infty \end{cases} \qquad (2.57)$$

Com exceção de $\lambda(n)$, (2.55), todos os demais parâmetros são independentes da constante de normalização. Uma forma alternativa de cálculo do fluxo $\lambda(n)$ pode ser obtida pela aplicação do princípio (b) acima mencionado. Se o número de clientes no sistema é fixo e igual a n e o tempo médio de execução de um ciclo completo é $\sum_i E[W_i(n)]$, então:

$$\lambda(n) = \frac{n}{\sum_{i=1}^{M} E[W_i(n)]} \qquad (2.58)$$

Combinando-se as expressões acima, acrescentando-se a condição de contorno $E[L_i(0)]=0$ $(i=1,...,M)$, obtém-se um procedimento recursivo de cálculo das principais medidas de desempenho da rede. Este procedimento, segundo REISER; LAVENBERG (1980), além de mais intuitivo, em geral, envolve um menor número de operações (maior eficiência) e melhor estabilidade numérica se comparado ao método da convolução.

A generalização da AVM para redes fechadas com probabilidade de transição entre nós p_{ij} e c_i servidores em paralelo em cada posto i $(i,j=1,...,M)$ é feita pelas expressões mostradas a seguir: (Vide BRUELL; BALBO (1980).)

a) tempo médio de espera

$$E[W_i(n)] = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\alpha_i(k)} \mu_i p_i^{n-1}(k-1) \qquad i=1,\ldots,M \tag{2.59}$$

b) fluxo

$$\lambda_i(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{\sum_{j=1}^{M} e_j E[W_j(n)]}, & se\ i=1 \\ \lambda_1(n)\, e_i, & se\ i \neq 1 \end{cases} \tag{2.60}$$

c) expectância da quantidade de clientes no nó i

$$E[L_i(n)] = \lambda_i(n)\, E[W_i(n)] \tag{2.61}$$

d) distribuição marginal

$$\begin{aligned} p_i^n(k) &= \frac{e_i}{\alpha_i(k)\,\mu_i} \lambda_i(n)\, p_i^{n-1}(k-1) \qquad k=1,\ldots,n \\ p_i^n(0) &= 1 - \sum_{k=1}^{n} p_i^n(k) \end{aligned} \tag{2.62}$$

A inicialização do procedimento é feita impondo-se $p_i^0(0)=1$ para $i=1,\ldots,M$. No cálculo do fluxo $\lambda_i(n)$ em (2.60), escolhe-se o nó 1 como uma referência e, a partir do fluxo neste nó, determinam-

se os fluxos nos demais. Ao final do procedimento, têm-se as medidas de desempenho e as distribuições marginais de cada posto de serviço.

2.5 Métodos Computacionais para Cadeias de Markov

Nas seções 2.2 e 2.3, foram apresentados modelos de redes de filas que, além de constituírem cadeias de Markov em tempo contínuo, apresentam soluções analíticas para o cálculo da distribuição estacionária. Existem casos, no entanto, em que não é possível determinar uma expressão geral para a distribuição estacionária conjunta. Nestes casos, deve-se resolver o sistema de equações lineares $\pi Q=\mathbf{0}$. A solução numérica, no entanto, fica restrita aos casos em que a cadeia apresenta um número finito de estados[8].

WALLACE; ROSEMBERG (1966) propuseram um método numérico para solução de cadeias de Markov. O procedimento elaborado para calcular as distribuições de probabilidade em equilíbrio é similar ao método da potência para a resolução de sistemas de equações lineares. Seja π^n a distribuição estacionária na n-ésima iteração, calcula-se $\pi^{n+1}=\pi^n R$, onde R é igual a matriz $\alpha P+(1-\alpha)I$ ou igual a matriz $\beta Q+I$ dependendo se se deseja resolver um sistema $\pi=\pi P$ (cadeia de Markov em tempo discreto) ou $\pi Q=\mathbf{0}$ (cadeia de Markov em tempo contínuo). Os escalares α e β são escolhidos

[8] Quando a cadeia apresenta uma quantidade infinita de estados, a solução pode ser obtida truncando-se o espaço amostral.

de forma a assegurar uma convergência eficiente do método de solução.

SILVA; MUNTZ (1992) propõem métodos numéricos de solução de cadeias de Markov que são aplicadas à modelagem de desempenho e confiabilidade de sistemas de computação/comunicação. Segundo os autores, a evolução dos computadores e os avanços em técnicas de análise numérica permitem que se resolva, atualmente, modelos de grande porte (modelos com número de estados entre 10^5 e 10^6).

SILVA; MUNTZ (1992) limitam-se a análise de cadeias de Markov em tempo discreto ($\pi=\pi P$), pois, conforme demonstrado, os casos contínuos podem ser analisados a partir do equivalente discreto obtido da seguinte forma: $P=Q/\Lambda+I$, onde Λ é maior ou igual ao maior valor absoluto da diagonal de Q. Esta forma de análise de cadeias de Markov em tempo contínuo é denominada método da uniformização. (Vide ROSS (1989).)

Em geral, apesar do elevado número de estados, a matriz infinitesimal de probabilidades é esparsa, no sentido em que apenas uma pequena parte de seus elementos é diferente de zero. Isto se deve ao número restrito de transições possíveis a partir de cada estado do sistema. Para se aplicar um método equivalente ao método da potência, é interessante utilizar uma forma especial para a armazenagem da matriz Q.

Na referência PISSANETZKY (1984), encontram-se algumas formas de representação de matrizes esparsas, além de alguns algoritmos de álgebra linear adaptados a estas formas de

representação. O procedimento de solução das cadeias de Markov consideradas nos capítulos 4 e 5 utilizam alguns destes conceitos e procedimentos.

3 REDES CIRCULARES DE FILAS COM DISTRIBUIÇÕES EXPONENCIAIS EM TRANSPORTE FLUVIAL

O objetivo deste capítulo é avaliar a capacidade de transporte de uma frota de embarcações autopropelidas em operação circular entre um dado número de portos. Uma descrição detalhada do sistema de transporte fluvial em consideração é encontrada na seção 3.1. Na seção 3.2, é apresentado o modelo de rede circular de filas com distribuições exponenciais, que será utilizado na análise de desempenho do sistema, em regime estacionário. A seção 3.3 é destinada aos métodos computacionais de resolução do modelo proposto. A seção 3.4 apresenta alguns resultados obtidos pela aplicação do modelo exponencial. Na seção 3.5, aplica-se o método da uniformização para calcular a distribuição da quantidade de viagens realizadas durante um certo intervalo de tempo, para um caso particular. A seção 3.6 encerra o capítulo com algumas considerações adicionais referentes aos modelos apresentados.

3.1 Descrição do Problema

No capítulo 1, apresentou-se o problema ABA-AUTOPROP, representado na figura 3.1, constituído por dois portos A e B e uma frota homogênea com N embarcações autopropelidas, operando entre eles.

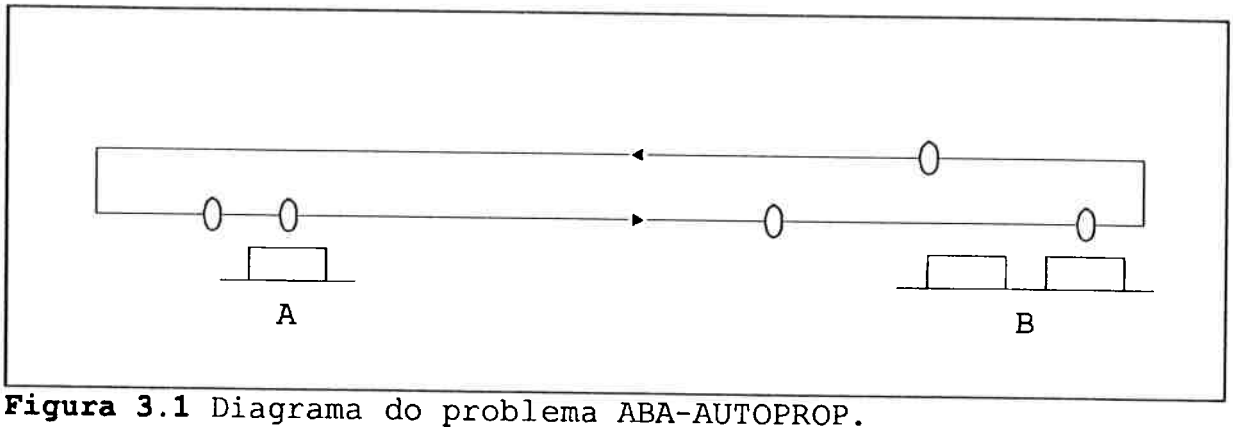

Figura 3.1 Diagrama do problema ABA-AUTOPROP.

Neste sistema, admite-se que os tempos de deslocamento das embarcações entre os portos, em cada sentido, sejam variáveis aleatórias independentes com mesma distribuição de probabilidades e que não haja restrições em relação à quantidade de embarcações em viagem simultaneamente.

Nos portos, o atendimento das embarcações, que consiste no embarque e desembarque de cargas, é feito em um berço de atracação e consome um certo tempo que apresenta, para cada porto, uma dada distribuição de probabilidades.

Pode haver, em um mesmo porto, mais de um berço de atracação. Neste caso, supõe-se que estes sejam iguais e que operem de forma semelhante e independente. As embarcações são atendidas, em cada porto, pela ordem de chegada e a operação destes portos é considerada contínua ao longo do tempo.

Em decorrência da aleatoriedade dos processos de atendimento e viagem das embarcações, a quantidade de viagens redondas

realizadas em um dado intervalo de tempo (0,t) é também uma variável aleatória. Esta variável determina a quantidade de carga transportada pela frota, durante o intervalo de tempo considerado.

Seja $N_{vr}(t)$ a quantidade de viagens redondas completadas no intervalo de tempo (0,t). A contagem das viagens redondas pode ser feita considerando-se, arbitrariamente, uma viagem redonda completada sempre que uma embarcação parte do porto B.

A princípio, conhecidos o estado do sistema no instante zero e as distribuições dos tempos de viagem e dos tempos de atendimento nos portos, é possível determinar a distribuição de $N_{vr}(t)$.

Dada a dificuldade em calcular a distribuição de $N_{vr}(t)$, utiliza-se para avaliação da capacidade de transporte do sistema, em regime estacionário, uma vazão λ definida por

$$\lambda \triangleq \lim_{t\to\infty} \frac{N_{vr}(t)}{t} \qquad (3.1)$$

Esta vazão λ, que mede o fluxo de embarcações na rede por unidade de tempo, pode ser obtida, conhecendo-se a distribuição estacionária da quantidade de embarcações no porto B.

Outras medidas de desempenho, como o tempo médio de permanência das embarcações em cada porto, o tempo médio de

viagem redonda das embarcações, o comprimento médio das filas e o índice de congestionamento dos portos, serão também utilizadas na análise de desempenho do sistema. Em geral, estas medidas serão calculadas, considerando-se o sistema em regime estacionário.

Quando se considera um maior número de portos, é importante salientar a existência de diferentes modalidades de problemas dependendo do tipo de roteiro das embarcações. Por exemplo, em uma rede com três portos, identificam-se as seguintes alternativas:

a) ABCA - as embarcações da frota partem de A para B, de B para C e, finalmente, de C para A, realizando um roteiro circular;

b) ABCBA - similar ao anterior exceto que, no retorno de C para A, as embarcações passam novamente em B;

c) ABA-ACA - neste caso as embarcações são dividas em dois grupos, cada um operando entre dois portos, tendo o porto A em comum.

A diferença básica dos problemas (b) e (c) em relação ao (a) é a existência, em um dado porto, de duas classes de embarcações com destinos e, eventualmente, padrões de atendimento diferentes, o que dificulta a modelagem destes sistemas.

Os modelos propostos neste e nos capítulos seguintes consideram apenas os problemas similares ao (a), denominados redes circulares. No caso geral, considera-se a existência de M

($M \geq 2$) portos, que são percorridos seqüencialmente pelas embarcações da frota ($1 \rightarrow 2 \rightarrow \ldots \rightarrow M \rightarrow 1$).

3.2 Modelagem

A partir da definição do problema, apresenta-se um modelo de rede circular de filas que permite avaliar o desempenho destes sistemas de transporte em regime estacionário.

Esta seção está dividida em duas subseções. Na seção 3.2.1, apresenta-se o modelo proposto, enfatizando sua característica de cadeia de Markov em tempo contínuo. A seção 3.2.2 destaca a existência da solução analítica em forma de produto para o cálculo da distribuição estacionária e a possibilidade de agregação de estados da cadeia que, por simplificarem a solução, ampliam as potencialidades do modelo.

3.2.1 Apresentação do Modelo

Considere-se uma rede circular com M portos, onde o porto i, $i=1,\ldots,M$, apresenta c_i berços de atracação semelhantes e independentes. As embarcações que chegam ao porto i são atendidas pela ordem de chegada e os tempos de atendimento são variáveis aleatórias independentes que apresentam distribuição exponencial e média $1/\mu_i$ ($i=1,\ldots,M$). Sejam os tempos de deslocamento entre

dois portos consecutivos i e i+1 também variáveis aleatórias independentes com distribuição exponencial e média $1/\mu_{M+i}$ $(i=1,\ldots,M)$ e considere-se a frota constituída de N embarcações semelhantes.

Com as hipóteses anteriores, pode-se estudar o problema a partir de uma cadeia de Markov em tempo contínuo $\{X(t),\ t\geq 0\}$ com espaço amostral finito $S=\{1,\ldots,J\}$.

Cada estado j desta cadeia está associado biunivocamente a um vetor $\mathbf{n}\in A(N,M)=\{(n_1,n_2,\ldots,n_{2M})\,|\,n_i\in\mathbf{N},\ i=1,\ldots,2M;\ \sum_i n_i=N\}$, em que os componentes n_i correspondem à quantidade de embarcações no porto i e os componentes n_{M+i} ao número de embarcações em trânsito entre o porto i e i+1 $(i=1,\ldots,M)$[1].

O espaço amostral S apresenta uma quantidade de estados, J, dada por

$$J=\binom{N+2M-1}{2M-1} \tag{3.2}$$

Para efeito de análise da cadeia de Markov em tempo contínuo, convencionou-se que os estados serão ordenados como mostra a tabela 3.1. Define-se, então, uma função $\phi(\mathbf{n})$ que, para cada vetor $\mathbf{n}\in A(N,M)$, fornece o valor j do estado correspondente em S $(j=1,\ldots,J)$.

---

[1] Em particular, o componente n_{2M} corresponde à quantidade de embarcações em viagem do porto M para o porto 1.

Tabela 3.1 Ordenação dos estados de uma rede circular com M portos e N embarcações.

n	$\phi(\mathbf{n})$
(0 ,..., 0 , 0 , N)	1
(0 ,..., 0 , 1 ,N-1)	2
(0 ,..., 0 , 2 ,N-2)	3
⋮	⋮
(0 ,..., 0 , N , 0)	N+1
(0 ,..., 1 , 0 ,N-1)	N+2
(0 ,..., 1 , 1 ,N-2)	N+3
⋮	⋮
(0 ,..., 1 ,N-1, 0)	2N+1
(0 ,..., 2 , 0 ,N-2)	2N+2
(0 ,..., 2 , 1 ,N-3)	2N+3
⋮	⋮
⋮	⋮
⋮	⋮
(N ,..., 0 , 0 , 0)	J

Considerando-se a ordenação apresentada na tabela 3.1, a função $\phi(\mathbf{n})$ pode ser calculada pela seguinte expressão

$$\phi(\mathbf{n}) = \sum_{i=1}^{2M} \phi_i(\mathbf{n}) + 1 \qquad (3.3)$$

onde

$$\phi_i(\mathbf{n}) = \binom{N-\sum_{k=1}^{i-1} n_i+M-i}{M-i} - \binom{N-\sum_{k=1}^{i} n_i+M-i}{M-i} \qquad i=1,\ldots,2M \qquad (3.4)$$

Cada parcela $\phi_i(\mathbf{n})$ representa a quantidade de estados que apresentam os primeiros (i-1) componentes iguais aos do estado **n**

e o i-ésimo componente uma unidade inferior ao correspondente do estado **n**.

As transições entre estados ocorrem quando termina o atendimento de uma embarcação em um dado porto ou quando termina uma viagem de uma embarcação entre dois portos. A estes dois eventos correspondem, respectivamente, as seguintes transições no espaço amostral S:

a) $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{n}) \rightarrow \boldsymbol{\phi}(n_1,\ldots,n_i-1,\ldots,n_M,n_{M+1},\ldots,n_{M+i}+1,\ldots,n_{2M})$ $\quad (n_i>0)$;

b) $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{n}) \rightarrow \boldsymbol{\phi}(n_1,\ldots,n_{i+1}+1,\ldots,n_M,n_{M+1},\ldots,n_{M+i}-1,\ldots,n_{2M})$ $\quad (n_{M+i}>0)$.[2]

A taxa de transição, no caso (a), é dada por $\boldsymbol{\alpha}_i(n_i)\mu_i$, onde $\boldsymbol{\alpha}_i(k)=\min(k,c_i)$. No segundo caso, a taxa de transição é dada por $n_{M+i}\mu_i$, pois não há limitações ao número de embarcações em viagem simultaneamente em cada trecho.

A cadeia de Markov em tempo contínuo associada aos modelos é sempre irredutível e apresenta um número finito de estados. Seja Q a matriz geradora infinitesimal de probalidades da cadeia de Markov em tempo contínuo associada a um modelo com M portos e N embarcações. A distribuição estacionária desta cadeia é determinada pela solução do sistema de equações lineares

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi} Q &= \mathbf{0} \\ \sum_{j=1}^{J} \pi_j &= 1 \end{aligned} \qquad (3.5)$$

---

[2] Quando i=M, tem-se: $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{n}) \rightarrow \boldsymbol{\phi}(n_1+1,\ldots,n_M,n_{M+1},\ldots,n_{2M}-1)$, dado que $(n_{2M}>0)$.

onde $\pi_j = \lim_{t\to\infty} P(X(t)=j)$, $j=1,\ldots,J$.

A partir desta distribuição estacionária conjunta, obtêm-se as distribuições marginais da quantidade de embarcações em cada porto, em regime estacionário.

Sejam $p(\mathbf{n})=\pi_{\phi(\mathbf{n})}$ a distribuição estacionária conjunta e $p_i(k)$ a distribuição marginal da quantidade de embarcações no porto i ($i=1,\ldots,M$; $k=0,\ldots,N$). As distribuições marginais $p_i(k)$ são dadas por

$$p_i(k) = \sum_{\mathbf{n}\in A(N,M)\ |\ n_i=k} p(\mathbf{n}) \qquad k=0,\ldots,N;\ \ i=1,\ldots,M \tag{3.6}$$

Determinadas as distribuições marginais $p_i(k)$ ($i=1,\ldots,M$; $k=0,\ldots,N$), calculam-se a vazão, λ, e a expectância da quantidade de embarcações no porto i, $E[L_i]$, pelas seguintes expressões:

$$\lambda = \sum_{k=1}^{N} \alpha_i(k)\,\mu_i p_i(k) \tag{3.7}$$

$$E[L_i] = \sum_{k=1}^{N} k p_i(k) \qquad i=1,2,\ldots,M \tag{3.8}$$

onde $\alpha_i(k)=\min(k,c_i)$ corresponde à quantidade de embarcações em atendimento no porto i.[3]

Conhecidas a expectância da quantidade de embarcações em cada porto e a vazão, λ, é possível, aplicando-se a fórmula de Little, calcular o tempo médio de permanência das embarcações em cada porto i, $E[W_i]$, e o tempo médio de viagem redonda destas embarcações, $E[T_{vr}]$, da seguinte forma:

$$E[W_i] = \frac{E[L_i]}{\lambda} \qquad i=1,\ldots,M \tag{3.9}$$

$$E[T_{vr}] = \sum_{i=1}^{M} \left(E[W_i] + \frac{1}{\mu_{M+i}}\right) \tag{3.10}$$

O índice de congestionamento do porto i, ρ_i, pode ser calculado pela expressão

$$\rho_i = \sum_{k=1}^{N} \frac{\alpha_i(k)}{c_i} p_i(k) = \frac{\lambda}{c_i \mu_i} \qquad i=1,2,\ldots,M \tag{3.11}$$

Em particular, se $c_i=1$, então $\rho_i=(1-p_i(0))$ e $\lambda=\mu_i\rho_i=\mu_i(1-p_i(0))$.

---

[3] A expressão (3.7) pode ser obtida, atribuindo-se uma recompensa $\alpha_i(k)\mu_i$ por unidade de tempo para cada estado j com k embarcações no porto i. Em regime estacionário, a recompensa acumulada por unidade de tempo é equivalente à vazão λ.

Uma outra forma de calcular $E[T_{vr}]$ pode ser obtida aplicando-se o seguinte raciocínio. Considere-se a rede como um sistema isolado de fila, onde o atendimento dos clientes consiste da viagem de B para A, do atendimento em A, da viagem de A para B e, finalmente, do atendimento em B. Admita-se que haja N clientes neste sistema e que cada cliente atendido em B seja substituído automaticamente por um novo cliente. Neste sistema, a taxa de chegada de clientes seria igual a λ, o tempo médio de permanência dos clientes igual a $E[T_{vr}]$ e a quantidade de clientes presentes no sistema constante e igual a N. Aplicando-se a fórmula de Little para este sistema, obtém-se:

$$N = \lambda \cdot E[T_{vr}] \tag{3.12}$$

que fornece uma nova expressão para o cálculo de $E[T_{vr}]$, conhecidos N e λ.

Exemplo 3.1 Considere-se um sistema ABA-AUTOPROP com N=2 embarcações. Sejam os portos dotados de um único berço de atracação ($c_1=c_2=1$), os tempos médios de atendimento das embarcações nos portos $1/\mu_1=1/\mu_2=1$ e os tempos médios de viagem $1/\mu_3=1/\mu_4=4$.

Este modelo apresenta J=10 estados, relacionados na tabela 3.2.

Tabela 3.2 Estados da cadeia de Markov em tempo contínuo do exemplo 3.1.

n	**ϕ(n)**
(0, 0, 0, 2)	1
(0, 0, 1, 1)	2
(0, 0, 2, 0)	3
(0, 1, 0, 1)	4
(0, 1, 1, 0)	5
(0, 2, 0, 0)	6
(1, 0, 0, 1)	7
(1, 0, 1, 0)	8
(1, 1, 0, 0)	9
(2, 0, 0, 0)	10

A matriz geradora infinitesimal de probabilidades do processo é mostrada a seguir.

$$Q=\begin{bmatrix} -0.50 & & & & & & 0.50 & & & \\ & -0.50 & & 0.25 & & & & 0.25 & & \\ & & -0.50 & & 0.50 & & & & & \\ 1.00 & & & -1.25 & & & & & 0.25 & \\ & 1.00 & & & -1.25 & 0.25 & & & & \\ & & & 1.00 & & -1.00 & & & & \\ & 1.00 & & & & & -1.25 & & & 0.25 \\ & & 1.00 & & & & & -1.25 & 0.25 & \\ & & & & 1.00 & & 1.00 & & -2.00 & \\ & & & & & & & 1.00 & & -1.00 \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

Resolvendo-se o sistema de equações $\pi Q=0$, com $\sum_j \pi_j=1$, obtém-se a distribuição estacionária de probabilidade dos estados da cadeia de Markov em tempo contínuo mostrada na tabela 3.3.

Tabela 3.3 Distribuição estacionária dos estados da cadeia de Markov em tempo contínuo do exemplo 3.1.

n	$\phi(\mathbf{n})$	p(**n**)
(0, 0, 0, 2)	1	0.156863
(0, 0, 1, 1)	2	0.313725
(0, 0, 2, 0)	3	0.156863
(0, 1, 0, 1)	4	0.078431
(0, 1, 1, 0)	5	0.078431
(0, 2, 0, 0)	6	0.019608
(1, 0, 0, 1)	7	0.078431
(1, 0, 1, 0)	8	0.078431
(1, 1, 0, 0)	9	0.019608
(2, 0, 0, 0)	10	0.019608

As distribuições estacionárias marginais da quantidade de embarcações nos portos, neste exemplo idênticas para ambos, são dadas por $p_i(0)=0.803922$, $p_i(1)=0.176471$ e $p_i(2)=0.019608$ $(i=1,2)$.

Finalmente, obtêm-se :

a) $\lambda = 0.196$;

b) $E[L_1] = E[L_2] = 0.216$;

c) $E[W_1] = E[W_2] = 1.10$;

d) $E[T_{vr}] = 10.20$;

e) $u_1 = u_2 = 0.196$. □

No exemplo 3.1, os tempos médios podem ser considerados adimensionais. Desta forma, os resultados obtidos podem ser estendidos para outros casos similares que apresentem uma mesma proporção de 4:1 entre tempos médios de viagem e atendimento. Por exemplo, considere-se um sistema similar ao anterior com tempos médios de atendimento $1/\mu_1=1/\mu_2=2$ e tempos médios de viagem $1/\mu_3=1/\mu_4=8$. A solução da cadeia de Markov em tempo contínuo, neste caso, fornece a mesma distribuição estacionária obtida no

exemplo 3.1. Em decorrência, ter-se-ia, neste novo exemplo, os seguintes resultados: a) $\lambda = 0.098$; b) $E[L_1] = E[L_2] = 0.216$; c) $E[W_1] = E[W_2] = 2.20$; d) $E[T_{vr}] = 20.40$; e) $u_1 = u_2 = 0.196$.

3.2.2 A Solução em Forma de Produto

Na realidade, o modelo apresentado na seção anterior é um caso particular das redes fechadas de filas com atendimento exponencial apresentadas no capítulo 2. Uma propriedade importante destes modelos, que constituem cadeias de Markov em tempo contínuo finitas e irredutíveis, é a existência de uma expressão analítica para o cálculo da distribuição estacionária.

Nos modelos de redes circulares com tempos de atendimento e de viagem exponenciais, a distribuição estacionária das probabilidades de estado pode ser obtida diretamente pela seguinte expressão:

$$p(\mathbf{n}) = \frac{1}{G(N)} \prod_{i=1}^{M} f_i(n_i) \prod_{i=M+1}^{2M} \frac{(1/\mu_i)^{n_i}}{n_i!} \qquad \mathbf{n} \in A(N,M) \qquad (3.14)$$

onde G(N) é uma constante e a função $f_i(k)$ é dada por

$$f_i(k) = \begin{cases} \dfrac{(1/\mu_i)^k}{k!}, & se\ k \le c_i \\ \dfrac{(1/\mu_i)^k}{c_i^{k-c_i} c_i!}, & caso\ contrário \end{cases} \tag{3.15}$$

para i=1,...,M e k=0,...,N.

A constante G(N) é calculada de tal forma que a soma das probabilidades seja 1. Assim

$$G(N) = \sum_{n \in A(N,M)} \left(\prod_{i=1}^{M} f_i(n_i) \prod_{i=M+1}^{2M} \frac{(1/\mu_i)^{n_i}}{n_i!} \right) \tag{3.16}$$

A utilização das expressões anteriores elimina a necessidade de resolução do sistema de equações lineares $\pi Q=\mathbf{0}$ para obtenção da distribuição estacionária. É importante lembrar que, mesmo para valores relativamente pequenos de M e N, a ordem J da matriz Q poder ser bastante elevada. Por exemplo, para M=3 e N=15, ter-se-ia J=15504 estados.

Uma segunda simplificação pode ser obtida a partir da agregação de estados da cadeia de Markov como se segue. Seja $A_0(N,M) = \{(m_0, m_1, \ldots, m_M) \mid m_i \in \mathbf{N},\ i=0,1,\ldots,M;\ \sum_i m_i = N\}$ um conjunto de estados onde m_0 representa a quantidade total de embarcações em trânsito e m_i (i=1,2,...,M) a quantidade de embarcações no

porto i. A quantidade de estados contidos no conjunto $A_0(N,M)$ é dada por

$$J=\binom{N+M}{M} \tag{3.17}$$

Seja $p(\mathbf{m})$ a distribuição estacionária dos estados agregados $\mathbf{m}$ ($\mathbf{m}\in A_0(N,M)$). Das equações (3.12), (3.13) e (3.14) decorre que

$$\begin{aligned} p(\mathbf{m}) &= \sum_{\substack{\mathbf{n}\in A(N,M) \mid \\ n_i=m_i \quad i=1,\dots,M \\ n_{M+1}+\dots+n_{2M}=m_0}} p(\mathbf{n}) \\ &= \frac{1}{G(N)} \prod_{i=1}^{M} f_i(m_i) \sum_{\substack{\mathbf{n}\in A(N,M) \mid \\ n_{M+1}+\dots+n_{2M}=m_0}} \prod_{i=M+1}^{2M} \frac{(1/\mu_i)^{n_i}}{n_i!} \end{aligned} \tag{3.18}$$

Sabendo-se que

$$\sum_{\mathbf{n}\in a(n,m)} \prod_{i=1}^{m} \frac{x_i^{n_i}}{n_i!} = \frac{(x_1+x_2+\dots+x_m)^n}{n!} \qquad \forall\, n,m\in\mathbb{N}^+,\ x_i\in\mathbf{R} \tag{3.19}$$

onde $a(n,m)=\{(n_1,n_2,\dots,n_m) \mid n_i\in\mathbf{N},\ i=1,\dots,m;\ \sum_i n_i=n\}$ e definindo-se μ_0 tal que $1/\mu_0=1/\mu_{M+1}+1/\mu_{M+2}+\dots+1/\mu_{2M}$, obtém-se:

$$p(\boldsymbol{m}) = \frac{1}{G(N)} \frac{(1/\mu_0)^{m_0}}{m_0!} \prod_{i=1}^{M} f_i(m_i) \tag{3.20}$$

onde

$$G(N) = \sum_{\boldsymbol{m} \in A_0(N,M)} \left(\frac{(1/\mu_0)^{m_0}}{m_0!} \prod_{i=1}^{M} f_i(m_i) \right) \tag{3.21}$$

A partir das expressões (3.18) e (3.19), calculam-se as distribuições marginais do número de embarcações em cada porto, como se segue.

$$p_i(k) = \sum_{\boldsymbol{m} \in A_0(N,M) \mid m_i = k} p(\boldsymbol{m}) \qquad i=1,\ldots,M; \quad k=0,\ldots,N \tag{3.22}$$

Exemplo 3.2 Aplicando-se os procedimentos descritos ao problema do exemplo 3.1, para o qual $1/\mu_0=8$, obtém-se a distribuição estacionária apresentada na tabela 3.4.

As distribuições marginais da quantidade de embarcações nos portos e, conseqüentemente, as medidas de desempenho, são as mesmas anteriormente obtidas, no exemplo 3.1.

Tabela 3.4 Estados e distribuição estacionária da cadeia de Markov em tempo contínuo do exemplo 3.2.

m	ϕ(m)	$\frac{(1/\mu_0)^{m_0}}{m_0!}\prod_{i=1}^{M} f_i(m_i)$	p(m)
(0, 0, 2)	1	1	0.019608
(0, 1, 1)	2	1	0.019608
(0, 2, 0)	3	1	0.019608
(1, 0, 1)	4	8	0.156863
(1, 1, 0)	5	8	0.156863
(2, 0, 0)	6	32	0.627451
-	-	G(2)=51	1

□

3.3 Implementação Computacional

O objetivo desta seção é discutir os procedimentos computacionais de resolução dos modelos de redes de filas examinados neste capítulo.

A subseção 3.3.1 propõe um procedimento, designado método da cadeia de Markov, que, dados os parâmetros da rede, elabora a matriz das taxas de transição entre estados, calcula a distribuição estacionária conjunta e, finalmente, calcula as distribuições marginais. Ainda que, nos casos de redes circulares com distribuições exponenciais para os tempos de atendimento e viagem, a solução do sistema $\pi Q=0$ para obtenção da distribuição estacionária seja desnecessária, tal procedimento está sendo apresentado pois ele é a base dos procedimentos adotados nos capítulos 4 e 5, cujos modelos não possuem soluções analíticas.

Nas subseções 3.3.2 e 3.3.3 são apresentados os métodos da convolução e da análise do valor médio, que se utilizam de propriedades particulares apresentadas pelos modelos com distribuições exponenciais. Os resultados destas duas últimas subseções são obtidos a partir da forma geral destes métodos apresentados no capítulo 2. Os apêndices I, II e III apresentam as implementações computacionais dos procedimentos contidos nas subseções 3.3.1, 3.3.2 e 3.3.3, respectivamente.

3.3.1 Método da Cadeia de Markov em Tempo Contínuo

Com o intuito de facilitar a compreensão do método, este será apresentado com base no modelo ABA-AUTOPROP. O primeiro passo do método consiste em construir a matriz Q das taxas de transição entre estados da cadeia de Markov em tempo contínuo. Q é uma matriz quadrada de ordem J com a propriedade de possuir uma grande quantidade de elementos nulos fora da diagonal principal, sendo, por isso, classificada como uma matriz esparsa.

As expressões (3.21) fornecem a quantidade de estados da cadeia, J, e a quantidade de elementos não nulos fora da diagonal principal[4], K. Estes parâmetros são necessários para o dimensionamento das estruturas de dados da implementação computacional do modelo.

---

[4] Este parâmetro é igual à quantidade de transições possíveis entre os estados da cadeia.

$$J = \binom{N+3}{3}$$

$$K = \sum_{i=1}^{4} \binom{N-1}{i-1} \cdot \binom{4}{i} \cdot i \qquad N=1,2,\ldots \qquad (3.21)$$

Na segunda expressão, cada parcela corresponde ao produto da quantidade de estados que apresentam i componentes não nulos pela quantidade de transições associadas a cada um destes estados. Devem ser considerados nulos os coeficientes binominais em que o termo superior é menor que o inferior.

A tabela 3.5 apresenta valores de J e K para alguns exemplos do modelo ABA-AUTOPROP, variando-se a quantidade de embarcações.

Tabela 3.5 Quantidade de estados e transições do modelo ABA-AUTOPROP.

N	J	K
1	4	4
5	56	140
10	286	880
15	816	2720
20	1771	6160

A matriz Q será representada por quatro vetores denominados DQ, NQ, IQ e JQ. O vetor DQ, de ordem J, contém os elementos da diagonal principal em valor absoluto. O vetor NQ, de ordem K, contém os elementos não nulos fora da diagonal principal, ordenados por linha e por coluna. Os vetores IQ e JQ armazenam informações que permitem identificar a posição de cada elemento de NQ na matriz Q. O vetor IQ, de ordem J+1, tem na primeira posição o valor 1 e, da segunda em diante, o valor da

posição anterior acrescido da quantidade de elementos não nulos fora da diagonal existentes em cada linha. No vetor JQ, de ordem K, apresentam-se as colunas a que cada componente do vetor NQ pertence.

Esta forma de representação da matriz Q, quando comparada à representação matricial tradicional, reduz consideravelmente a quantidade de informações a serem armazenadas. Por exemplo, a partir dos dados da tabela 3.5, verifica-se que, no caso N=10, a matriz Q teria 286x286 componentes reais, enquanto os vetores DQ e NQ teriam, respectivamente, 286 e 880 componentes reais e os vetores IQ e JQ teriam, respectivamente, 287 e 880 componentes inteiros.

Para o modelo ABA-AUTOPROP, adotando-se a ordenação de estados ilustrada na tabela 3.1, a função $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{n})$ é expressa por

$$\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{n}) = \binom{N+3}{3} - \binom{N-n_1+3}{3} + \binom{N-n_1+2}{2} - \binom{N-n_1-n_2+2}{2} + n_3+1 \qquad (3.22)$$

Feitas estas considerações preliminares, apresenta-se, na figura 3.2, o procedimento de elaboração da matriz Q. Em linhas gerais, o procedimento consiste em percorrer o espaço amostral S e, para cada estado i, determinar os estados j acessíveis a partir de i; calculam-se as taxas de transição do estado i para cada um dos estados j, armazenando-se estas taxas, adequadamente, nos vetores que representam a matriz Q.

```
entrada : N, c1, c2, μ1, μ2, μ3, μ4;
saída   : DQ[j], NQ[k], IQ[j], JQ[k];
início
  j ← 1, k ← 1;
  para n1 de 0 a N faça
    para n2 de 0 a N-n1 faça
      para n3 de 0 a N-n1-n2 faça
        início
          n4 ← N-n1-n2-n3;
          α1(n1) ← min(n1,c1);  α2(n2) ← min(n2,c2);
          DQ[j] ← α1(n1)μ1+α2(n2)μ2+n3μ3+n4μ4;
          IQ[j] ← 1;
          se (n1>0) então
            início
              m ← (n1-1,n2,n3+1,n4);
              NQ[k] ← α1(n1)μ1;      JQ[k] ← φ(m);
              k ← k+1;
            fim;
          se (n2>0) então
            início
              m ← (n1,n2-1,n3,n4+1);
              NQ[k] ← α2(n2)μ2;      JQ[k] ← φ(m);
              k ← k+1;
            fim;
          se (n3>0) então
            início
              m ← (n1,n2+1,n3-1,n4);
              NQ[k] ← n3μ3;    JQ[k] ← φ(m);
              k ← k+1;
            fim;
          se (n4>0) então
            início
              m ← (n1+1,n2,n3,n4-1);
              NQ[k] ← n4μ4;    JQ[k] ← φ(m);
              k ← k+1;
            fim;
          j ← j+1;
        fim;
  IQ[j] ← k;
fim.
```

Figura 3.2 Algoritmo para elaboração da matriz Q do modelo ABA-AUTOPROP.

O cálculo da distribuição estacionária é feito pelo método da uniformização. Seja uma matriz P dada por

$$P = \frac{Q}{\Lambda} + I \qquad (3.23)$$

onde I é uma matriz identidade e Λ é arbitrado como sendo igual ao maior valor absoluto entre os elementos da diagonal de Q ($\Lambda \geq \max_i(|q_{ii}|)$). A distribuição estacionária pode ser obtida, resolvendo-se o sistema $\pi=\pi P$, $\sum_j \pi_j=1$ [5].

A matriz P será representada por vetores DP, NP, IP e JP, de forma análoga à apresentada no caso da matriz Q. Para se obter estes vetores, referentes a matriz P do processo uniformizado, identifica-se, inicialmente, o maior componente do vetor DQ e atribui-se este valor a Λ. A seguir, cada componente de NP é calculado pela divisão do componente correspondente de NQ por Λ; os componentes do vetor DP são obtidos pela soma de 1 ao resultado da divisão da cada componente correspondente de DQ por $-\Lambda$, pois os valores da diagonal de Q estão armazenados em valor absoluto no vetor DQ. Os vetores IP e JP são idênticos aos originais IQ e JQ.

A distribuição estacionária é obtida, resolvendo-se iterativamente o sistema $\pi=\pi P$, a partir de uma distribuição inicial arbitrária. Considera-se o processo iterativo concluído quando a maior diferença relativa entre cada componente j ($j=1,\ldots,J$) dos vetores π^{n+1} e π^n for inferior a uma pré-

[5] A matriz P obtida é uma matriz estocástica, pois apresenta apenas elementos não negativos e que, em cada linha, têm soma 1.

determinada margem de erro, ϵ. Para se calcular o produto de π^n por P, utiliza-se o algoritmo apresentado na figura 3.3.

Determinada a distribuição π, dentro da margem de erro estabelecida, passa-se ao cálculo das distribuições marginais. Este procedimento está apresentado na figura 3.4.

```
entrada : J, π^n[j], DP[j], NP[k], IP[j], JP[k];
saída   : π^(n+1)[j];
início
  para j de 1 a J faça π^(n+1)[j] ← 0.0;
  para j de 1 a J faça
    início
      para k de IP[j] a IP[j+1]-1
        faça π^(n+1)[JP[k]] ← π^(n+1)[JP[k]]+NP[k]•π^n[j];
      π^(n+1)[j] ← π^(n+1)[j]+DP[j]•π^n[j];
    fim;
fim.
```

Figura 3.3 Algoritmo para cálculo do produto $\pi^n \bullet P$.

```
entrada : N, π[j];
saída   : p1[k], p2[k];
início
  para k de 0 a N faça p1[k] ← 0, p2[k] ← 0;
  j ← 1;
  para n1 de 0 a N faça
    para n2 de 0 a N-n1 faça
      para n3 de 0 a N-n1-n2 faça
        início
          n4 ← N-n1-n2-n3;
          p1[n1] ← p1[n1]+π[j], p2[n2] ← p2[n2]+π[j];
          j ← j+1;
        fim;
fim.
```

Figura 3.4 Algoritmo para obtenção das distribuições marginais do modelo ABA-AUTOPROP.

A partir destas distribuições marginais, podem ser calculadas medidas de desempenho do sistema como o número médio de embarcações no porto, o tempo médio de permanência no porto, o índice de congestionamento, etc.

Exemplo 3.3 Considere-se o modelo ABA-AUTOPROP do exemplo 3.1, que apresenta os seguintes parâmetros: a) N=2; b) $c_1=c_2=1$; c) $1/\mu_1=1/\mu_2=1$ e $1/\mu_3=1/\mu_4=4$.

Para este modelo, aplicando-se as equações (3.21), têm-se J=10 e K=16. A matriz Q correspondente ao modelo, representada na forma dos vetores DQ, NQ, JQ e IQ, é dada a seguir.

DQ = [0,50 0,50 0,50 1,25 1,25 1,00 1,25 1,25 2,00 1,00]
NQ = [0,50 0,25 0,25 0,50 1,00 0,25 1,00 0,25 1,00 1,00
0,25 1,00 0,25 1,00 1,00 1,00]
JQ = [7 4 8 5 1 9 2 6 4 2 10 3 9 5 7 8]
IQ = [1 2 4 5 7 9 10 12 14 16 17]

Neste exemplo, Λ=2.0 e a matriz P é representada por

DP = [0,750 0,750 0,750 0,375 0,375 0,500 0,375 0,375
0,000 0,500]
NP = [0,250 0,125 0,125 0,250 0,500 0,125 0,500 0,125
0,500 0,500 0,125 0,500 0,125 0,500 0,500 0,500]

além dos vetores IP e JP que são idênticos a IQ e JQ, respectivamente.

Finalmente, aplicando-se o algoritmo apresentado na figura 3.3, obtém-se a distribuição estacionária conjunta π.

$$\pi = [0.156863 \quad 0.313725 \quad 0.156863 \quad 0.048431 \quad 0.078431 \quad 0.019608 \quad 0.078431 \quad 0.019608 \quad 0.019608 \quad 0.019608] \qquad \square$$

3.3.2 Método da Convolução

O método da convolução permite calcular recursivamente a constante de normalização G(N), que determina a distribuição estacionária de probabilidades dos estados. Nesta sub-seção, os procedimentos são apresentados com base em redes circulares com uma quantidade arbitrária de portos ($M \geq 2$), considerando-se os estágios relativos às viagens agregados.

Conforme apresentado no capítulo 2, define-se uma função auxiliar, $g_m(n)$, que é dada por

$$g_m(n) = \sum_{n \in A_0(n,m)} \frac{(1/\mu_0)^{n_0}}{n_0!} \prod_{i=1}^{m} f_i(n_i) \qquad n=0,\ldots,N; \quad m=0,\ldots,M \qquad (3.24)$$

onde $A_0(n,m)=\{(n_0,n_1,\ldots,n_m) \mid n_i \in \mathbf{N},\ i=1,\ldots,m;\ \sum_i n_i=n\}$ e $f_i(k)$ é dada por (3.13). Da definição (3.24), seguem-se as seguintes propriedades:

a) condições de contorno

$$
\begin{aligned}
g_m(0) &= 1 && m=0,\dots,M \\
g_0(n) &= \frac{(1/\mu_0)^n}{n!} \\
&= \frac{1/\mu_0}{n} g_0(n-1) && n=1,\dots,N
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

b) para m,n>0

$$
g_m(n) = \sum_{k=0}^{n} f_m(k)\, g_{m-1}(n-k) \tag{3.26}
$$

A expressão (3.26) pode ser simplificada, conforme visto no capítulo 2, se o porto m (m=1,...,M) possui um ou dois berços, da seguinte forma:

a) se c_m=1, então

$$
g_m(n) = g_{m-1}(n) + \frac{1}{\mu_m} g_m(n-1) \qquad n=1,\dots,N \tag{3.27}
$$

b) se c_m=1, então

$$
\begin{aligned}
g_m(1) &= g_{m-1}(1) + \frac{1}{\mu_m} \\
g_m(n) &= g_{m-1}(n) + \frac{1}{2\mu_m}\left[g_m(n-1) + g_{m-1}(n-1)\right] && n=2,\dots,N
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

Estas expressões são utilizadas no algoritmo apresentado na figura 3.5 para o cálculo de $g_M(n)=G(n)$, $n=0,1,\ldots,N$. Neste algoritmo, utiliza-se um único vetor G, de dimensão N+1, para armazenar os valores da função $g_m(n)$; pressupõe-se que os portos apresentam um ou dois berços de atracação.

Determinadas as constantes G(n) (n=0,1,...,N), podem-se obter as vazões $\lambda(n)$, sem o cálculo preliminar das distribuições estacionárias marginais, empregando-se a seguinte expressão:

$$\lambda(n)=\frac{G(n-1)}{G(n)} \qquad n=1,2,\ldots,N \tag{3.29}$$

Exemplo 3.4 Considere-se um problema ABA-AUTOPROP com os seguintes parâmetros: a) $c_1=c_2=1$, b) $1/\mu_1=1/\mu_2=1$ e c) $1/\mu_0=8$.

Aplicando-se o método da convolução e a expressão (3.29), determinam-se os valores de $\lambda(n)$, n=1,...,N. Os tempos médios de viagem redonda com n clientes, $E[T_{vr}(n)]$, são obtidos, conforme (3.10), pelo quociente $n/\lambda(n)$. Na tabela 3.6, são mostrados os valores de $\lambda(n)$ e $E[T_{vr}(n)]$, para n variando de 1 a 20.

É interessante observar que, para N=10, admitindo-se que os tempos de atendimento e viagem fossem determinísticos, ter-se-ia uma vazão $\lambda=1,0$. Na tabela 3.6, verifica-se que, adotando-se a hipótese de distribuição exponencial para estes tempos, a vazão do sistema reduz-se cerca de 25%. □

```
entrada : M, N, c1, ... , cM, μ0, μ1, ... , μM;
saída   : G[n];
início
  G[0] ← 1.0;
  para n de 1 a N faça G[n] ← (1/μ0)•G[n-1]/n;
  para m de 1 a M faça
    início
      se cm=1 então
        para n de 1 a N faça G[n] ← G[n]+(1/μm)•G[n-1];
      senão
        início
          b ← G[1];
          G[1] ← G[1]+1/μm;
          para n de 2 a N faça
            início
              a ← b;
              b ← G[n];
              G[n] ← G[n]+(1/μm)•(G[n-1]+a)/2;
            fim;
        fim;
    fim;
fim.
```

Figura 3.5 Algoritmo da convolução para cálculo da constante de normalização de uma rede circular.

Prosseguindo na análise da rede circular pelo método da convolução, a distribuição marginal do número de embarcações no porto i, (i=1,...,M), admitindo-se a existência de N embarcações na rede, $p_i^N(k)$ (k=0,...,N), pode ser obtida pela seguinte expressão:

$$p_i^N(k) = \frac{1}{G(N)} f_i(k)\, h_i(N-k) \qquad i=1,\ldots,M; \quad k=0,\ldots,N \qquad (3.30)$$

Tabela 3.6 Vazão e tempo médio de viagem redonda em função da quantidade de embarcações do exemplo 3.4.

n	$\lambda(n)$	$E[T_{vr}(n)]$
1	0.1000	10.00
2	0.1961	10.20
3	0.2876	10.43
4	0.3739	10.70
5	0.4542	11.01
6	0.5279	11.37
7	0.5944	11.78
8	0.6533	12.25
9	0.7046	12.77
10	0.7483	13.36
11	0.7850	14.01
12	0.8152	14.72
13	0.8399	15.48
14	0.8599	16.28
15	0.8761	17.12
16	0.8893	17.99
17	0.9002	18.89
18	0.9092	19.80
19	0.9167	20.73
20	0.9231	21.67

A função auxiliar $h_i(n)$, definida no capítulo 2, é expressa da seguinte forma:

$$h_i(n) = \sum_{\substack{n \in A_0(k,M) \\ n_i=0}} \frac{(1/\mu_0)^{n_0}}{n_0!} \prod_{j=1}^{M} f_j(n_j) \qquad i=1,\ldots,M; \quad n=0,\ldots,N \tag{3.31}$$

Expressões recursivas para o cálculo da função $h_i(n)$ são obtidas, impondo-se que a soma das probabilidades $p_i^N(k)$ $(k=0,\ldots,N)$ seja igual a 1. Desta forma, para $i=1,\ldots,M$, obtém-se:

$$h_i(0)=1$$

$$h_i(n)=G(n)-\sum_{k=1}^{n} f_i(k)\,h_i(n-k) \qquad n=1,\ldots,N \tag{3.32}$$

Novamente, as expressões (3.32) podem ser simplificadas, se o porto i (i=1,..,M) possui um ou dois berços, da seguinte forma:

a) se $c_i=1$, então

$$h_i(n)=G(n)-\frac{1}{\mu_i}G(n-1) \qquad n=1,\ldots,N \tag{3.33}$$

b) se $c_i=2$, então

$$h_i(1)=G(1)-\frac{1}{\mu_i}$$

$$h_i(n)=G(n)-\frac{1}{2\mu_i}\left[G(n-1)+h_i(n-1)\right] \qquad n=2,\ldots,N \tag{3.34}$$

com a condição de contorno que $h_i(0)=1$ (i=1,...,M).

A figura 3.6 apresenta o algoritmo para determinação das distribuições marginais a partir da expressão (3.30) e das relações apropriadas para o cálculo de $h_i(n)$. Este algoritmo tem como dados de entrada, além dos parâmetros da rede, o vetor G(n) (n=0,...,N).

```
entrada M, N, c1, ... , cM, μ1, ... , μM, G[n];
saída   p1^N[k], ... , pM^N[k];
início
  para i de 1 a M faça
    início
      fi[0] ← 1.0, fi[1] ← 1/μi,
      hi[0] ← 1.0, hi[1] ← G[1]-1/μi;
      se ci=1 então
        para n de 2 a N
        faça fi[n] ← (1/μi)•fi[n-1],
             hi[n] ← G[n]-(1/μi)•G[n-1];
      senão
        para n de 2 a N
        faça fi[n] ← (1/μi)•fi[n-1]/2,
             hi[n] ← G[n]-(1/μi)•(G[n-1]+hi[n-1])/2;
      para n de 0 a N faça pi[n] ← fi[n]•hi[N-n]/G[N];
    fim;
fim.
```

Figura 3.6 Algoritmo da convolução para cálculo das distribuições marginais de uma rede circular.

Exemplo 3.5 Prosseguindo-se com o modelo ABA-AUTOPROP do exemplo anterior, para n variando de 1 a 10, obtêm-se as distribuições estacionárias marginais apresentadas nas tabelas 3.7 e 3.8.

Tabela 3.7 Distribuições marginais da quantidade de embarcações nos portos do exemplo 3.5 (n=1,...,5).

k	$p_i^1(k)$	$p_i^2(k)$	$p_i^3(k)$	$p_i^4(k)$	$p_i^5(k)$
0	0.9000	0.8039	0.7124	0.6261	0.5458
1	0.1000	0.1765	0.2312	0.2663	0.2844
2		0.0196	0.0508	0.0864	0.1210
3			0.0056	0.0190	0.0393
4				0.0021	0.0086
5					0.0010

Tabela 3.8 Distribuições marginais da quantidade de embarcações nos portos do exemplo 3.5 (n=6,...,10).

k	$p_i^6(k)$	$p_i^7(k)$	$p_i^8(k)$	$p_i^9(k)$	$p_i^{10}(k)$
0	0.4721	0.4056	0.3467	0.2954	0.2517
1	0.2881	0.2806	0.2650	0.2443	0.2211
2	0.1501	0.1713	0.1833	0.1867	0.1828
3	0.0639	0.0892	0.1119	0.1292	0.1397
4	0.0207	0.0380	0.0583	0.0788	0.0967
5	0.0045	0.0123	0.0248	0.0411	0.0590
6	0.0005	0.0027	0.0080	0.0175	0.0307
7		0.0003	0.0018	0.0057	0.0131
8			0.0002	0.0012	0.0042
9				0.0001	0.0009
10					0.0001

□

3.3.3 Análise do Valor Médio

O princípio básico da análise do valor médio, conforme exposto no capítulo 2, refere-se à propriedade de que, em uma rede fechada com N clientes e em regime estacionário, a distribuição de probabilidades do número de clientes observados por um cliente qualquer, no instante de chegada ao nó i, é igual à distribuição estacionária do número de clientes no nó i desta mesma rede com N-1 clientes.

Este método torna-se particularmente simples quando se trata de uma rede onde os nós apresentam um único ou infinitos servidores e se deseja avaliar apenas valores médios do tempo de espera, tamanho das filas e fluxos nos nós. A seguir, discute-se a aplicação da análise do valor médio para a rede circular estudada neste capítulo.

Considere-se, inicialmente, uma rede circular onde cada porto tenha um único berço de atracação. Sejam $\lambda(n)$, $E[W_i(n)]$ e $E[L_i(n)]$ $(i=1,...,M)$, respectivamente, a vazão, o tempo médio de permanência das embarcações e a expectância da quantidade de embarcações no porto i, em regime estacionário, quando há n embarcações na rede.

Em decorrência do teorema da chegada apresentado no capítulo 2, quando há um único berço de atracação em um dado porto i, pode-se calcular o tempo médio de permanência das embarcações neste porto pela seguinte expressão:

$$E[W_i(n)] = \frac{1}{\mu_i}(1+E[L_i(n-1)]) \qquad i=1,\ldots,M \tag{3.35}$$

onde $E[L_i(0)]=0$ $(i=1,...,M)$ [6].

Conhecendo-se os tempos médios de permanência das embarcações nos portos, determinam-se a vazão e, pela aplicação da fórmula de Little, a expectância da quantidade de embarcações em cada porto, dadas pelas seguintes expressões:

$$\lambda(n) = \frac{n}{\frac{1}{\mu_0} + \sum_{i=1}^{M} E[W_i(n)]} \tag{3.36}$$

[6] O tempo médio de espera de um cliente na fila corresponde ao tempo médio de atendimento de $E[L_i(n-1)]$ clientes.

$$E[L_i(n)] = \lambda(n) E[W_i(n)] \qquad i=1,\ldots,M \tag{3.37}$$

onde $1/\mu_0 = 1/\mu_{M+1} + \ldots + 1/\mu_{2M}$.

A combinação destas expressões resulta no algoritmo da figura 3.7, que permite calcular a vazão, o tempo médio de viagem redonda, os tempos médios de permanência nos portos, os índices de congestionamento dos portos e as expectâncias da quantidade de embarcações em cada porto, para uma rede circular onde os portos possuem um único berço de atracação. A generalização do procedimento apresentado na figura 3.7, quando há portos com múltiplos berços de atracação, é discutida a seguir.

```
entrada : M, N, μ0, μ1, ... , μM;
saída   : E[Wi(n)], E[Tvr(n)], λ(n), E[Li(n)], ρi(n);
início
  E[Li(0)] ← 0.0;
  para n de 1 a N faça
    início
      E[Tvr(n)] ← 1/μ0;
      para i de 1 a M faça
        início
          E[Wi(n)] ← (1/μi)•(1+E[Li(n-1)]);
          E[Tvr(n)] ← E[Tvr(n)]+E[Wi(n)];
        fim;
      λ(n) ← n/E[Tvr(n)];
      para i de 1 a M faça
        início
          ρi(n) ← (1/μi)•λ(n);
          E[Li(n)] ← λ(n)•E[Wi(n)];
        fim;
    fim;
fim.
```

Figura 3.7 Análise do valor médio para cálculo de medidas de desempenho em redes circulares com um único berço de atracação por porto.

Seja $p_i^n(k)$ $(k=0,...,n)$ a distribuição do número de embarcações no porto i, quando há n embarcações no sistema. A partir da equação (3.30) e utilizando-se as expressões (3.13), (3.29) e a definição $\alpha_i(k)$, pode-se mostrar que:

$$p_i^n(k) = \frac{(1/\mu_i)}{\alpha_i(k)} \lambda(n)\, p_i^{n-1}(k-1) \qquad k=1,\dots,n; \quad i=1,\dots,M \quad (3.38)$$

Como a soma das probabilidades deve ser igual a 1, obtém-se, para o cálculo de $p_i^n(0)$, a seguinte expressão:

$$p_i^n(0) = 1 - \sum_{k=1}^{n} p_i^n(k) \qquad i=1,\dots,M \qquad (3.39)$$

Conhecida a distribuição marginal $p_i^n(k)$ $(k=0,1,...,n)$, determina-se o tempo médio de permanência das embarcações no porto i que, conforme visto no capítulo 2, é dado por

$$E[W_i(n)] = \sum_{k=1}^{n} k \frac{(1/\mu_i)}{\alpha_i(k)} p_i^{n-1}(k-1) \qquad (3.40)$$

Aplicando-se as expressões (3.38) a (3.40) e, a seguir, (3.36), com a condição de contorno $p_i^0(0)=1$ $(i=1,...,M)$, obtém-se, recursivamente, as distribuições marginais $p_i^n(k)$, a vazão $\lambda(n)$,

as expectâncias do tempo de permanência, $E[W_i(n)]$, e da quantidade de embarcações, $E[L_i(n)]$, no porto i, para n variando de 1 até N. Este procedimento é apresentado na figura 3.8.

```
entrada : M, N, c1, ... cM, μ0, μ1, ... , μM;
saída   : E[Wi(n)], E[Tvr(n)], λ(n), E[Li(n)], ρi(n), pi^n[k];
início
  pi^0(0) ← 1.0;
  para n de 1 a N faça
    início
      E[Tvr(n)] ← 1/μ0;
      para i de 1 a M faça
        início
          E[Wi(n)] ← (1/μi)•pi^(n-1)[0];
          se ci=1 então
            para k de 2 a n
              faça E[Wi(n)] ← E[Wi(n)]+k•(1/μi)•pi^(n-1)[k-1];
          senão
            para k de 2 a n
              faça E[Wi(n)] ← E[Wi(n)]+k•(1/μi)•pi^(n-1)[k-1]/2;
          E[Tvr(n)] ← E[Tvr(n)]+E[Wi(n)];
        fim;
      λ(n) ← n/E[Tvr(n)];
      para i de 1 a M faça
        início
          a ← 0.0;
          para k de 1 a n faça
            início
              pi^n[k] ← (1/μi)•λ(n)•pi^(n-1)[k-1]/2;
              a ← a+pi^n[k];
            fim;
          faça pi^n[0] ← 1-a,
               E[Li(n)] ← λ(n)•E[Wi(n)];
          se ci=1
          então ρi=(1-pi^n[0]);
          senão ρi=(1-2•pi^n[0]-pi^n[1]);
        fim;
    fim;
fim.
```

Figura 3.8 Algoritmo da análise do valor médio para determinação das distribuições marginais em redes circulares com um ou dois berços de atracação por porto.

3.4 Análise de Resultados

Na seção 3.3 foram apresentados os algoritmos para análise em regime estacionário dos modelos de redes circulares de filas com atendimento exponencial.

No exemplo 3.4, utilizou-se o algoritmo da convolução para avaliar a vazão e o tempo médio de viagem redonda em uma rede circular com parâmetros: a) $c_1=c_2=1$; b) $1/\mu_1=1/\mu_2=1$; c) $1/\mu_3=1/\mu_4=4$. Os valores de $\lambda(n)$ e $E[T_{vr}(n)]$ $(n=1,\ldots,20)$ obtidos, mostrados na tabela 3.6, são apresentados graficamente nas figuras 3.9 e 3.10, respectivamente, juntamente com os resultados correspondentes ao caso determinístico, isto é, onde os tempos de atendimento e viagem são fixos.

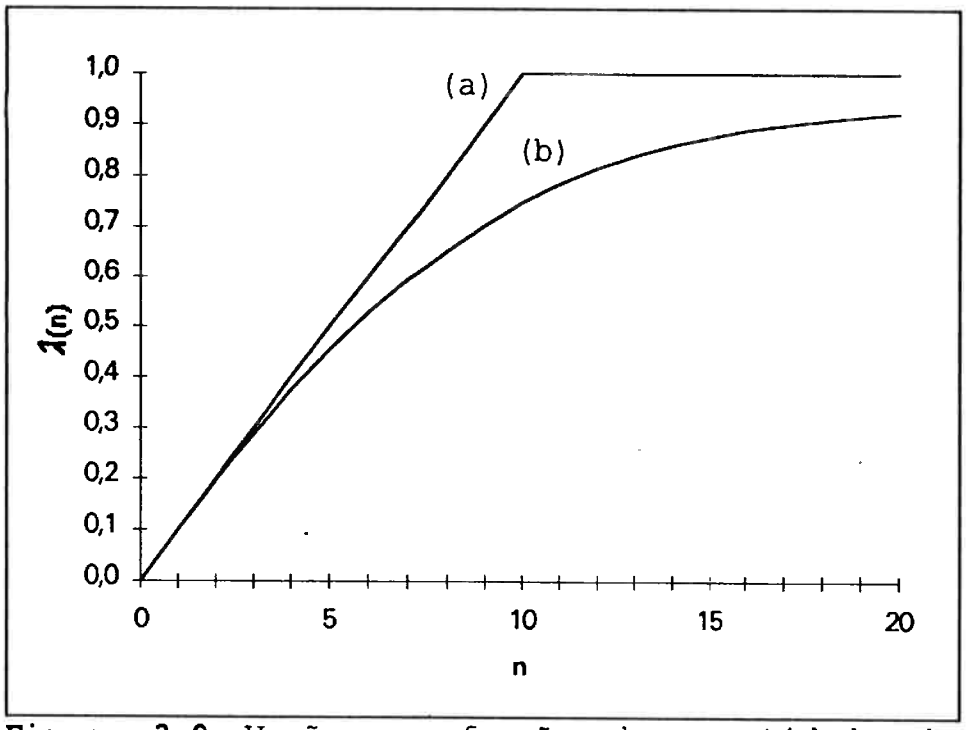

Figura 3.9 Vazão em função da quantidade de embarcações do exemplo 3.4; casos determinístico (a) e exponencial (b).

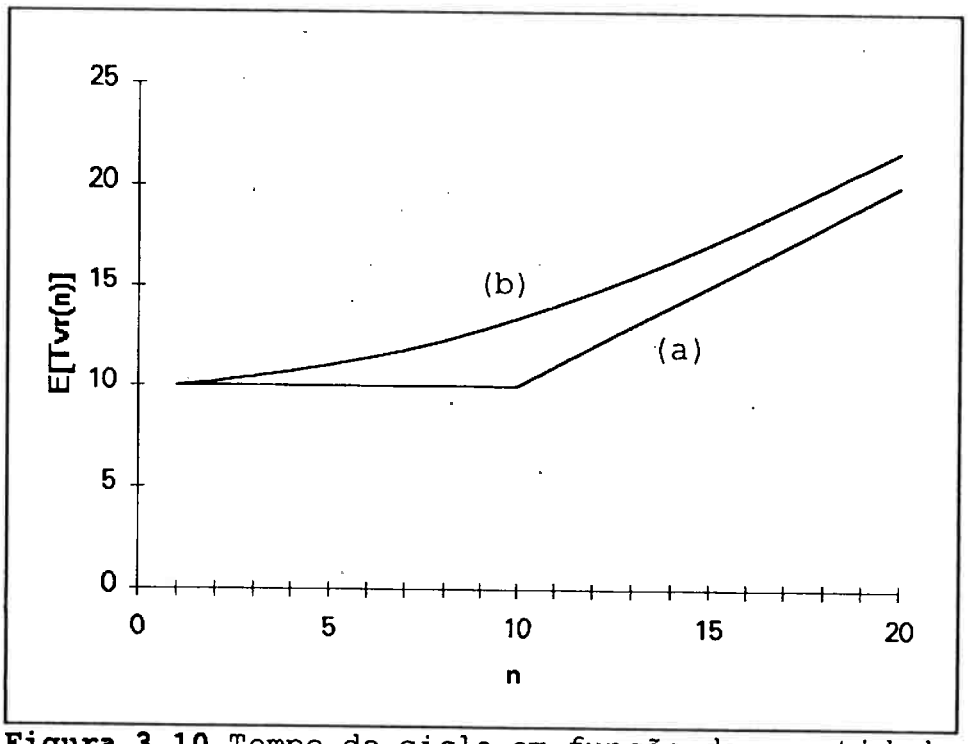

Figura 3.10 Tempo de ciclo em função da quantidade de embarcações do exemplo 3.4; casos determinístico (a) e exponencial (b).

Considere-se que, no exemplo 3.4, alterem-se as quantidades de berços de atracação nos portos, mantendo-se os demais parâmetros constantes. As tabelas 3.9 e 3.10 apresentam, respectivamente, a vazão e o tempo médio de viagem redonda em três situações distintas: a) $c_1=c_2=1$; b) $c_1=1$ e $c_2=2$; c) $c_1=c_2=2$. Nas figuras 3.11 e 3.12, apresentam-se estes resultados graficamente.

Ainda em relação ao exemplo 3.4, mantidos os tempos médios de viagem e um único berço de atracação por porto, foram considerados variações nos tempos médios de atendimento. A vazão e os tempos médios viagem redonda são apresentados nas tabelas 3.11 e 3.12 e nas figuras 3.13 e 3.14, considerando-se: a) $1/\mu_1=1/\mu_2=1$; b) $1/\mu_1=1/\mu_2=1,25$; c) $1/\mu_1=1$ e $1/\mu_2=1,5$.

Tabela 3.9 Vazão em função da quantidade de embarcações do exemplo 3.4, considerando-se: a) $c_1=c_2=1$; b) $c_1=1$ e $c_2=2$; c) $c_1=c_2=2$.

n	λ(n)		
	(a)	(b)	(c)
0	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.1000	0.1000	0.1000
2	0.1961	0.1980	0.2000
3	0.2876	0.2935	0.2997
4	0.3739	0.3857	0.3988
5	0.4542	0.4738	0.4970
6	0.5279	0.5572	0.5940
7	0.5944	0.6348	0.6895
8	0.6533	0.7057	0.7832
9	0.7046	0.7690	0.8746
10	0.7483	0.8241	0.9635
11	0.7850	0.8703	1.0494
12	0.8152	0.9078	1.1319
13	0.8399	0.9369	1.2107
14	0.8599	0.9585	1.2854
15	0.8761	0.9737	1.3556
16	0.8893	0.9840	1.4210
17	0.9002	0.9906	1.4813
18	0.9092	0.9947	1.5364
19	0.9167	0.9970	1.5863
20	0.9231	0.9984	1.6308

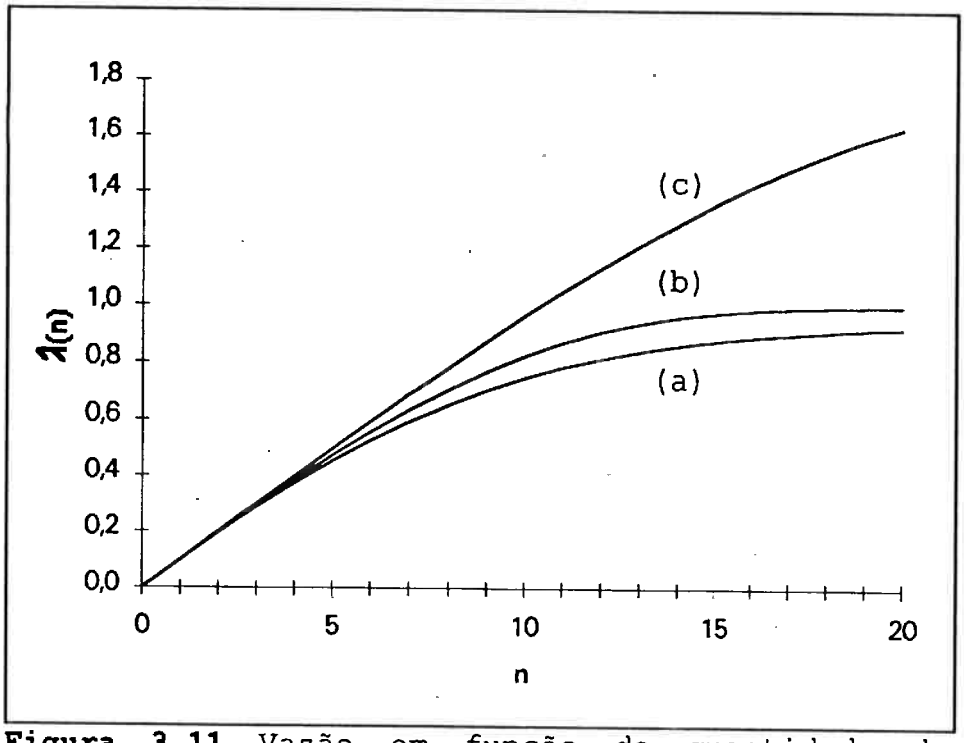

Figura 3.11 Vazão em função da quantidade de embarcações do exemplo 3.4, considerando-se: a) $c_1=c_2=1$; b) $c_1=1$ e $c_2=2$; c) $c_1=c_2=2$.

Tabela 3.10 Tempo médio de viagem redonda em função da quantidade de embarcações do exemplo 3.4, considerando-se: a) $c_1=c_2=1$; b) $c_1=1$ e $c_2=2$; c) $c_1=c_2=2$.

n	$E[T_{vr}(n)]$		
	(a)	(b)	(c)
0	-	-	-
1	10.00	10.00	10.00
2	10.20	10.10	10.00
3	10.43	10.22	10.01
4	10.70	10.37	10.03
5	11.01	10.55	10.06
6	11.37	10.77	10.10
7	11.78	11.03	10.15
8	12.25	11.34	10.22
9	12.77	11.70	10.29
10	13.36	12.13	10.38
11	14.01	12.64	10.48
12	14.72	13.22	10.60
13	15.48	13.88	10.74
14	16.28	14.61	10.89
15	17.12	15.40	11.06
16	17.99	16.26	11.26
17	18.89	17.16	11.48
18	19.80	18.10	11.72
19	20.73	19.06	11.98
20	21.67	20.03	12.26

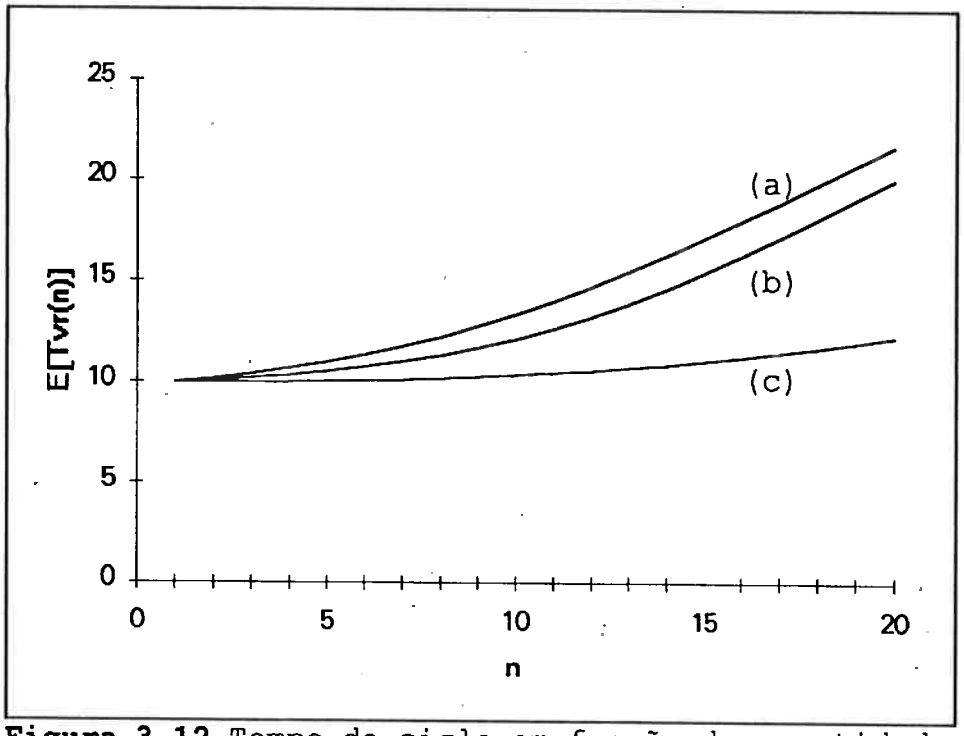

Figura 3.12 Tempo de ciclo em função da quantidade de embarcações do exemplo 3.4, considerando-se: a) $c_1=c_2=1$; b) $c_1=1$ e $c_2=2$; c) $c_1=c_2=2$.

Tabela 3.11 Vazão em função da quantidade de embarcações do exemplo 3.4, considerando-se: a) $1/\mu_1=1/\mu_2=1$; b) $1/\mu_1=1/\mu_2=1,25$; c) $1/\mu_1=1$ e $1/\mu_2=1,5$.

n	λ(n)		
	(a)	(b)	(c)
0	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.1000	0.0952	0.0952
2	0.1961	0.1852	0.1850
3	0.2876	0.2691	0.2684
4	0.3739	0.3461	0.3443
5	0.4542	0.4153	0.4118
6	0.5279	0.4763	0.4703
7	0.5944	0.5288	0.5193
8	0.6533	0.5730	0.5589
9	0.7046	0.6093	0.5898
10	0.7483	0.6387	0.6130
11	0.7850	0.6621	0.6299
12	0.8152	0.6807	0.6418
13	0.8399	0.6955	0.6500
14	0.8599	0.7072	0.6555
15	0.8761	0.7168	0.6593
16	0.8893	0.7246	0.6617
17	0.9002	0.7310	0.6634
18	0.9092	0.7365	0.6645
19	0.9167	0.7412	0.6652
20	0.9231	0.7452	0.6657

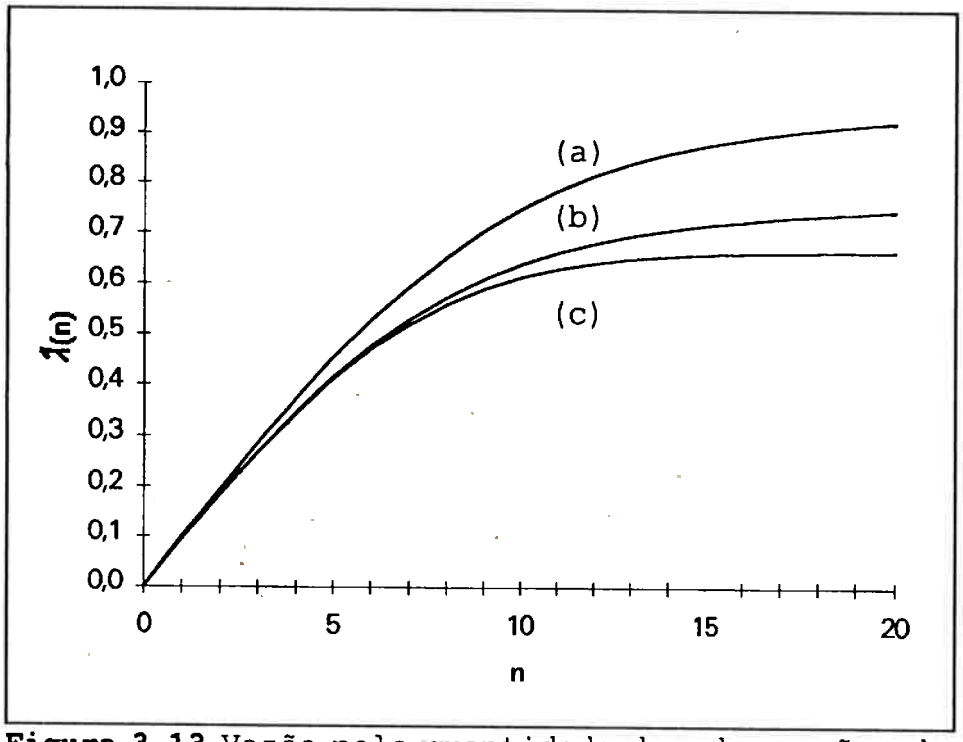

Figura 3.13 Vazão pela quantidade de embarcações do exemplo 3.4, considerando-se: a) $1/\mu1=1/\mu2=1$; b) $1/\mu1=1/\mu2=1,25$; c) $1/\mu1=1$ e $1/\mu2=1,5$.

Tabela 3.12 Tempo médio de viagem redonda em função da quantidade de embarcações do exemplo 3.4, considerando-se: a) $1/\mu_1=1/\mu_2=1$; b) $1/\mu_1=1/\mu_2=1,25$; c) $1/\mu_1=1$ e $1/\mu_2=1,5$.

n	$E[T_{vr}(n)]$		
	(a)	(b)	(c)
0	-	-	-
1	10.00	10.50	10.50
2	10.20	10.80	10.81
3	10.43	11.15	11.18
4	10.70	11.56	11.62
5	11.01	12.04	12.14
6	11.37	12.60	12.76
7	11.78	13.24	13.48
8	12.25	13.96	14.31
9	12.77	14.77	15.26
10	13.36	15.66	16.31
11	14.01	16.61	17.46
12	14.72	17.63	18.70
13	15.48	18.69	20.00
14	16.28	19.80	21.36
15	17.12	20.93	22.75
16	17.99	22.08	24.18
17	18.89	23.25	25.63
18	19.80	24.44	27.09
19	20.73	25.63	28.56
20	21.67	26.84	30.04

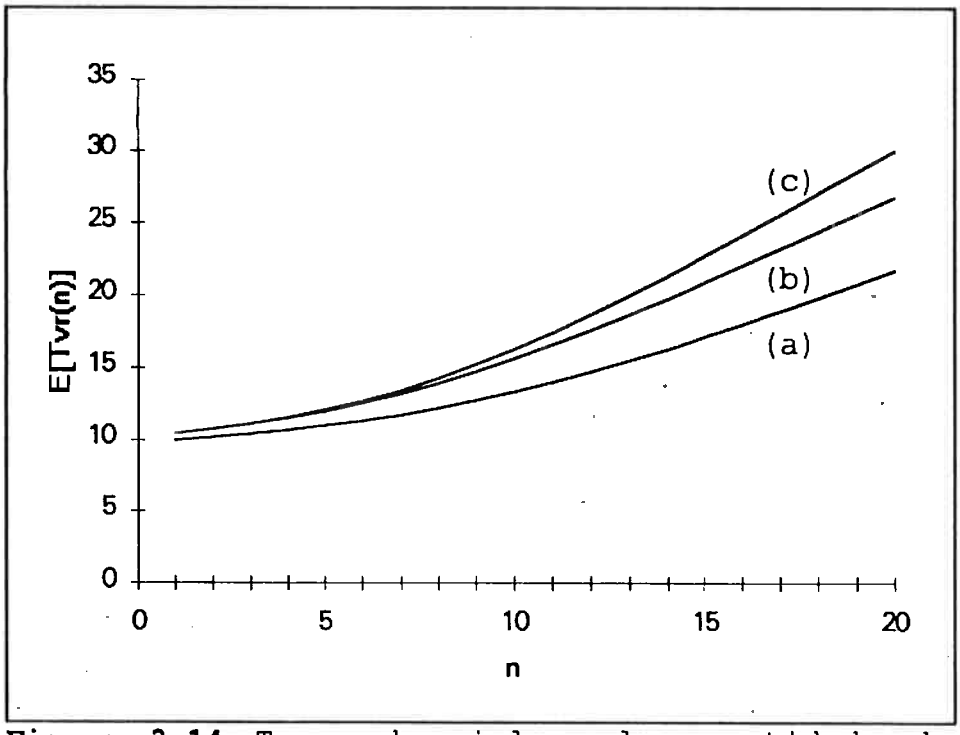

Figura 3.14 Tempo de ciclo pela quantidade de embarcações do exemplo 3.4, para: a) $1/\mu1=1/\mu2=1$; b) $1/\mu1=1/\mu2=1,25$; c) $1/\mu1=1$ e $1/\mu2=1,5$.

3.5 Distribuição da Quantidade de Viagens Redondas

Nas seções precedentes mostrou-se que, em uma rede circular em regime estacionário, a expectância da quantidade de viagens redondas em um certo intervalo de tempo (0,t) pode ser calculada pelo produto da vazão λ pela duração t do intervalo. Nesta subseção, mostra-se como calcular a distribuição da quantidade de viagens redondas concluídas durante um intervalo de tempo (0,t), conhecidas as condições iniciais, isto é, a distribuição de probabilidades de estado no instante 0, $\pi(0)$.

Para alcançar este objetivo, utiliza-se o método da uniformização para análise em regime transitório de cadeias de Markov em tempo contínuo.

Pelo método da uniformização, uma cadeia de Markov em tempo contínuo $\{X(t),\ t\geq 0\}$, com matriz geradora infinitesimal de probabilidades Q, é analisada a partir de um segundo processo que apresenta os mesmos estados e possui a seguinte forma de transição: a) as transições ocorrem segundo um processo de Poisson $\{Z(t),\ t\geq 0\}$ com taxa $\Lambda\geq\max_i\{|q_{ii}|\}$; b) nos instantes de transição, estas se dão conforme uma cadeia de Markov em tempo discreto $\{Y_n,\ n=0,1,...\}$ caracterizada pela matriz de probabilidades de transição dadas por $P=Q/\Lambda+I$. Por construção, $X(t)=Y_{Z(t)}$.

Considere-se a aplicação deste procedimento a uma cadeia de Markov em tempo contínuo de um modelo de rede circular de filas.

Atribuindo-se uma recompensa $\rho_1=1$ a cada transição referente à conclusão de uma viagem redonda que, por convenção, corresponde ao fim de um atendimento no porto B; $\rho_2=0$ para as demais transições; calcula-se a distribuição da recompensa acumulada no período, que é igual a quantidade de viagens redondas realizadas no período, a partir da seguinte expressão:

$$P(N_{vr}(t)=k) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{e^{-\Lambda t}(\Lambda t)^n}{n!} \Omega(k/n) \qquad (3.41)$$

onde $\Omega(k/n)$ corresponde a probabilidade que, dado que n transições ocorreram no intervalo de tempo (0,t), observou-se k ($k \leq n$) transições com recompensa 1. O termo que multiplica $\Omega(k/n)$ equivale a probabilidade de haver n transições no período considerado. Assim, para se calcular a distribuição desejada, necessita-se apenas mostrar com se calcula $\Omega(k/n)$.

Seja $\Omega(k,j/n)$ a probabilidade condicional que, dado que ocorreram n transições, acumulou-se uma recompensa de k unidades e que o estado final (após a última transição) seja j ($j=1,\ldots,J$). Em decorrência desta definição,

$$\Omega(k/n) = \sum_{j=1}^{J} \Omega(k,j/n) \qquad (3.42)$$

Pode-se calcular $\Omega(k,j/n)$ utilizando-se as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
&\Omega(0,j/0)=\pi_j(0)\\
&\Omega(0,j/n)=\sum_{i|f_{ij}=0}\Omega(0,i/n-1)p_{ij}\\
&\Omega(k,j/n)=\sum_{i|f_{ij}=1}\Omega(k-1,i/n-1)p_{ij}+\sum_{i|f_{ij}=0}\Omega(k,i/n-1)p_{ij}\\
&\qquad\qquad j=1,\dots,J;\quad k=1,\dots,n;\quad n=1,2,\dots
\end{aligned}\tag{3.43}$$

onde:

a) p_{ij} são os elementos da matriz P;

b) $f_{ij}=1$ se a transição $i \rightarrow j$ corresponde à recompensa ρ_1 e $f_{ij}=0$, em caso contrário;

c) $\pi_j(0)$ corresponde à probabilidade do estado no instante zero ser igual a j.

A distribuição da recompensa acumulada será igual à distribuição da quantidade de viagens redondas concluídas, para a condição inicial e intervalo considerados. A aplicação deste procedimento é ilustrada a partir do seguinte exemplo.

Exemplo 3.5 Considere-se o problema ABA-AUTOPROP com os seguintes parâmetros: a) N=2; b) $c_1=c_2=1$; c) $1/\mu_1=1/\mu_2=1$ e $1/\mu_3=1/\mu_4=4$. Suponha-se que se deseja calcular a distribuição de probabilidades da quantidade de viagens concluídas durante um intervalo de tempo (0,10), sabendo-se que o processo encontra-se em regime estacionário, no instante 0.

Conforme visto no exemplo 3.2, a matriz geradora infinitesimal de probabilidades do processo corresponde a

$$Q=\begin{bmatrix} -0.50 & & & & & & 0.50 & & & \\ & -0.50 & & 0.25 & & & & 0.25 & & \\ & & -0.50 & & 0.50 & & & & & \\ 1.00 & & & -1.25 & & & & & 0.25 & \\ & 1.00 & & & -1.25 & 0.25 & & & & \\ & & & 1.00 & & -1.00 & & & & \\ & 1.00 & & & & & -1.25 & & & 0.25 \\ & & 1.00 & & & & & -1.25 & 0.25 & \\ & & & & 1.00 & & 1.00 & & -2.00 & \\ & & & & & & & 1.00 & & -1.00 \end{bmatrix} \tag{3.43}$$

A distribuição estacionária é a apresentada na tabela 3.13.

Tabela 3.13 Estados e distribuição estacionária da cadeia de Markov em tempo contínuo do exemplo 3.5.

j	**n**	π_j
1	(0, 0, 0, 2)	0.156862
2	(0, 0, 1, 1)	0.313725
3	(0, 0, 2, 0)	0.156862
4	(0, 1, 0, 1)	0.078431
5	(0, 1, 1, 0)	0.078431
6	(0, 2, 0, 0)	0.019607
7	(1, 0, 0, 1)	0.078431
8	(1, 0, 1, 0)	0.078431
9	(1, 1, 0, 0)	0.019607
10	(2, 0, 0, 0)	0.019607

Neste exemplo, arbitra-se Λ=2. A matriz P do processo uniformizado é dada por

$$P=\begin{bmatrix} 0.750 & & & & & & 0.250 & & & \\ & 0.750 & & 0.125 & & & & 0.125 & & \\ & & 0.750 & & 0.250 & & & & & \\ 0.500 & & & 0.375 & & & & & 0.125 & \\ & 0.500 & & & 0.375 & 0.125 & & & & \\ & & & 0.500 & & 0.500 & & & & \\ & 0.500 & & & & & 0.375 & & & 0.125 \\ & & 0.500 & & & & & 0.375 & 0.125 & \\ & & & & 0.500 & & 0.500 & & 0.000 & \\ & & & & & & & 0.500 & & 0.500 \end{bmatrix} \tag{3.44}$$

A quantidade de viagens redondas realizadas em (0,10) é equivalente à soma da quantidade de transições ocorridas entre os pares de estados (4,1), (5,2), (6,4) e (9,7) do processo uniformizado. Admitindo-se que no instante zero o sistema esteja em equilíbrio, calculam-se as distribuições $\Omega(k/n)$ por (3.41) e (3.42). A seguir, a partir de (3.40), obtém-se a distribuição desejada. Para efeito de cálculo, uma quantidade máxima de eventos foi fixada em $N_{max}=50$ e daí obteve-se a distribuição de probabilidades para a quantidade de viagens redondas apresentada na tabela 3.14.

Tabela 3.14 Distribuição da quantidade de viagens redondas no intervalo de tempo (0,10) do exemplo 3.5.

k	$P(N_{vr}(10)=k)$
0	0.053308
1	0.260789
2	0.415236
3	0.218166
4	0.047684
5	0.004588
6	0.000216
7	0.000005
8	0.000000
⋮	⋮

Neste caso, constata-se que $E[N_{vr}(t)]=\lambda t$, isto é, $E[N_{vr}(10)]=10\lambda=1.96$. □

3.6 Discussões

Nesta seção, tecem-se algumas considerações a respeito da adequação do modelo proposto neste capítulo para análise do problema de transporte fluvial.

O primeiro aspecto está relacionado à hipótese de que os tempos de atendimentos das embarcações, em um dado porto, constituem uma seqüência de variáveis aleatórias independentes com distribuição exponencial. Conforme discutido no capítulo 2, a hipótese de distribuição exponencial, apesar de pouco representativa, confere aos modelos de redes de filas maior facilidade de solução. No capítulo 4, será considerado, em lugar da distribuição exponencial, distribuições Erlang que podem representar melhor os processos de atendimento das embarcações e permitem que os modelos sejam analisados por cadeias de Markov em tempo contínuo.

Mesmo admitindo-se distribuições mais gerais para os tempos de atendimento, é importante ressaltar que, na realidade, os tempos de atendimentos consecutivos não são necessariamente independentes. As condições portuárias, que são também influenciadas pelos subsistemas terrestres, têm, em geral, maior influência no tempo de atendimento das embarcações que,

especificamente, as aleatoriedades dos processos de transfêrencia de carga.

No modelos apresentado neste capítulo, tratou-se sempre com uma frota de embarcações autropropelidas. Estes modelos também podem ser utilizados para representar uma frota de comboios em operação circular, admitindo-se que não haja desmembramento dos comboios nos portos. Neste caso, deve-se especificar a distribuição de probabilidades do tempo de atendimento dos comboios integrados. No capítulo 5, apresentam-se modelos markovianos de redes de filas mais apropriados para os casos em que se tem a operação com desmembramento de comboios fluviais.

É importante ressaltar, novamente, que os modelos que apresentam solução analítica em forma de produto são bastante mais simples de se resolver, pois dispensam a resolução númerica dos sistemas de equações de balanço global entre estados ($\pi Q=\mathbf{0}$). Além disto, os parâmetros temporais podem ser considerados adimensionais, permitindo que se tirem conclusões mais gerais dos resultados obtidos.

No capítulo 2, foram apresentados modelos de redes de filas com classes de clientes. A princípio, a introdução do conceito de classe permite decompor a frota em grupos homogêneos com roteiros diferentes, o que daria maior flexibilidade aos modelos. Uma restrição, neste caso, é que, com a hipótese de atendimento pela ordem de chegada, a distribuição estacionária seria obtida na forma de produto se, e somente se, em um dado porto, todas as

embarcações, independentemente da classe a que pertencem, tenham uma mesma distribuição exponencial de tempos de atendimento.

Por fim, destacam-se alguns pontos que ainda podem ser explorados no modelo apresentado: a) analisar o comportamento da variável aleatória $N_{vr}(t)$ para valores grandes de t; b) determinar outras medidas de desempenho como a variância dos tempos de viagem redonda e expectância dos intervalos de tempo que o porto permanece ocioso. Em relação ao item (a), pelo teorema central do limite, é razoável supor que, para valores relativamente grandes de t, a variável aleatória $N_{vr}(t)$ tenha uma distribuição aproximadamente normal; neste caso, conhecida a média $E[N_{vr}(t)]=\lambda t$, resta determinar uma expressão para variância. Em ambos os casos, (a) e (b), uma abordagem possível consiste em estudar o processo de trânsito dos clientes na rede, conforme DISNEY (1987), que utiliza de processos de renovação markoviano para a análise do fluxo em redes markovianas de filas.

4 REDES CIRCULARES DE FILAS COM DISTRIBUIÇÕES ERLANG EM TRANSPORTE FLUVIAL

No capítulo anterior, foi examinada a aplicação de redes circulares de filas com tempos de atendimento exponenciais para avaliar o desempenho de sistemas fechados de transporte fluvial de carga. Neste capítulo, pretende-se analisar a influência das distribuições de probabilidades dos tempos de atendimento e dos tempos de viagem das embarcações no desempenho operacional de um problema ABA-AUTOPROP. Esta análise é feita substituindo-se as distribuições exponenciais por distribuições da família Erlang, sendo o efeito desta substituição aferido pelo cálculo da vazão, dos tempos médios de permanência das embarcações nos portos e do tempo médio de viagem redonda.

As seções 4.1 e 4.2 apresentam conceitos básicos referentes à família de distribuições Erlang e sua aplicação em modelos de filas. A seção 4.1 é destinada à distribuição Erlang, apresentada a partir do método da decomposição dos atendimentos em estágios. Na seção 4.2, apresenta-se o modelo clássico de fila isolada $M/E_r/1$, caracterizado por um processo de chegada Poisson e um único servidor com distribuição Erlang de ordem r para os tempos de atendimento. A seguir, na seção 4.3, propõem-se modelos com distribuições Erlang para redes circulares, admitindo-se que os portos apresentem um único berço de atracação. A seção 4.4 apresenta a implementação computacional dos modelos e, na seção

4.5, discutem-se resultados obtidos para algumas configurações particulares analisadas. A seção 4.6 encerra o capítulo com uma discussão a respeito dos modelos propostos. As implementações computacionais dos algoritmos desenvolvidos neste capítulo são apresentadas nos apêndices IV, V, VI e VII.

4.1 Distribuições Erlang

A distribuição exponencial é freqüentemente adotada nos modelos de filas devido à facilidade de solução que esta proporciona aos modelos. No entanto, a distribuição exponencial não reproduz bem alguns processos de atendimento encontrados em situações reais.

Uma variável aleatória contínua, X, que apresenta distribuição exponencial de probabilidades, tem função densidade de probabilidade, f(x), dada por

$$f(x) = \begin{cases} \mu e^{-\mu x}, & se\ x \geq 0 \\ 0, & caso\ contrário \end{cases} \qquad (4.1)$$

onde μ é o parâmetro da distribuição ($\mu>0$). A variável aleatória X, com função densidade de probabilidade dada por (4.1), apresenta expectância $E[X]=1/\mu$ e variância $V[X]=1/\mu^2$. A distribuição exponencial apresenta algumas propriedades importantes, dentre elas destaca-se a propriedade conhecida como falta de memória, apresentada matematicamente da seguinte forma:

$$P(X>t+s \mid X>s) = P(X>t) \qquad t,s>0 \tag{4.2}$$

Seja X uma variável aleatória com distribuição exponencial, que represente o tempo de atendimento de um cliente em um sistema de filas. Pela propriedade (4.2), dado que o cliente encontra-se em atendimento por um intervalo de tempo s, o intervalo de tempo restante para a conclusão do atendimento tem distribuição exponencial com o mesmo parâmetro μ, ou seja, o intervalo de tempo transcorrido não exerce nenhuma influência no intervalo de tempo que falta para conclusão do atendimento.

Considere-se, agora, a decomposição de um atendimento em r (r=1,2,...) estágios ou fases consecutivos. Admitindo-se que os tempos de permanência dos clientes em cada estágio de atendimento tenham distribuição exponencial com parâmetro rμ, a função densidade de probabilidade do tempo total de atendimento de um cliente, g(x), que corresponde à soma de r variáveis aleatórias independentes com mesma distribuição de probabilidades (vide ROSS (1989)), é dada pela expressão

$$g(x) = \frac{r\mu\ (r\mu x)^{r-1}\ e^{(-r\mu x)}}{(r-1)!} \qquad x\geq 0 \tag{4.3}$$

A distribuição g(x), com parâmetros r e μ, é denominada distribuição Erlang de ordem r. Em particular, se r=1, tem-se uma

distribuição exponencial[1]. As distribuções da família Erlang, representadas por (4.3), apresentam média e variância dadas por

$$E[X] = \frac{1}{\mu} \qquad V[X] = \frac{1}{r\mu^2} \tag{4.4}$$

A figura 4.1 apresenta as funções densidade de probabilidade g(x) de ordem r=1, 2, 4 e 8, com média 1/μ=1.

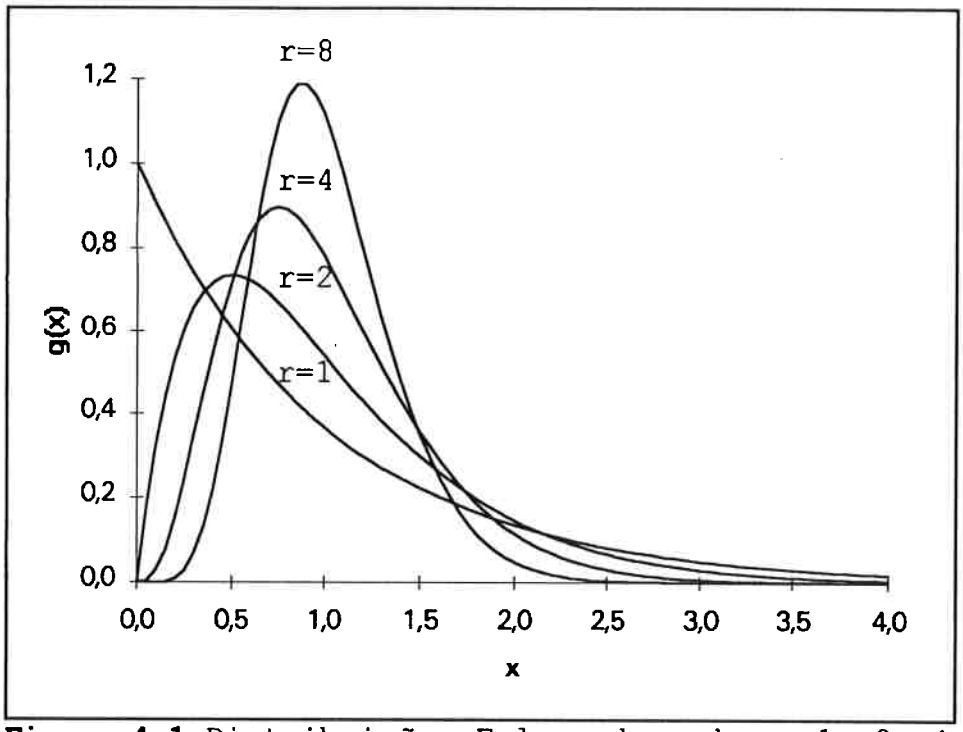

Figura 4.1 Distribuições Erlang de ordem r=1, 2, 4 e 8 e parâmetro μ=1.

Pelo Teorema Central do Limite, a medida que a ordem r cresce, as distribuições correspondentes aproximam-se da

[1] As distribuições Erlang de ordem r constituem casos particulares de distribuições gama com parâmetros α=r (inteiro) e β=μ.

distribuição normal. Por outro lado, das equações (4.4), verifica-se que a variância de uma dada distribuição Erlang é inversamente proporcional à ordem r. No limite, quando r tende ao infinito, tem-se uma função impulso no ponto $1/\mu$, o que corresponderia a um tempo de atendimento determinístico, ou seja, igual a $1/\mu$, com probabilidade 1.

KLEINROCK (1975) apresenta alternativas de decomposição de atendimentos em estágios com distribuições exponenciais, dispondo-os em série, em paralelo ou combinações entre ambos, de tal forma a se obterem outras distribuições de probabilidades.

4.2 Modelo $M/E_r/1$

Nesta seção, examina-se o modelo de filas $M/E_r/1$. Neste modelo, admite-se que o processo de chegada dos clientes seja Poisson com taxa λ e que o tempo de atendimento, no único servidor, apresente distribuição Erlang de ordem r e média $1/\mu$. Uma condição necessária e suficiente para existência do regime estacionário é que $\rho=\lambda/\mu<1$.

A análise do sistema pode ser feita por um processo em tempo contínuo $\{X(t),\ t\geq 0\}$ com espaço amostral $S=\{0,1,...\}$, onde cada estado j é caracterizado por apresentar, em um dado instante t, uma carga de trabalho de j estágios de atendimento. Esta carga de trabalho é dada pela soma da quantidade de estágios de atendimentos que falta para concluir o atendimento do cliente em

serviço com a quantidade de estágios associada aos clientes na fila[2]. Se, em um determinado instante t, $X(t)=j$ $(j=0,1,\ldots)$, então dois eventos podem ocorrer:

a) chegada de um cliente, caso em que ocorre uma transição $j \rightarrow j+r$;

b) conclusão de um estágio de atendimento, caso em que a transição é $j \rightarrow j-1$ $(j>0)$. Quando $j-1$ é múltiplo de r, a conclusão do estágio corresponde à saída de um cliente.

O processo $\{X(t),\ t\geq 0\}$ constitui uma cadeia de Markov em tempo contínuo com matriz geradora infinitesimal de probabilidades, Q, dada por

$$Q = \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \\ \vdots \\ (r) \\ (r+1) \\ (r+2) \\ \vdots \end{array} \begin{bmatrix} -\lambda & & & \cdots & \lambda & & & \cdots \\ r\mu & -(\lambda+r\mu) & & \cdots & & \lambda & & \cdots \\ & r\mu & -(\lambda+r\mu) & \cdots & & & \lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ & & & \cdots & -(\lambda+r\mu) & & & \cdots \\ & & & \cdots & r\mu & -(\lambda+r\mu) & & \cdots \\ & & & \cdots & & r\mu & -(\lambda+r\mu) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

A distribuição estacionária dos estados, $\{p(k),\ k=0,1,\ldots\}$, pode ser calculada resolvendo-se o seguinte sistema de equações lineares:

---

[2] Cada cliente na fila corresponde a r estágios de atendimento.

$$
\begin{aligned}
\lambda p(0) &= r\mu p(1) \\
(\lambda+r\mu)p(k) &= r\mu p(k+1) && k=1,\ldots,r-1 \\
(\lambda+r\mu)p(k) &= r\mu p(k+1)+\lambda p(k-r) && k=r,r+1,\ldots \\
\sum_{k=0}^{\infty} p(k) &= 1
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

A solução do sistema de equações (4.6) é comumente expressa na forma da transformada z da distribuição estacionária {p(k), k=0,1,...}, designada[3] por P(z). A partir de combinações lineares das equações (4.6), obtém-se a seguinte expressão para P(z):

$$
P(z) = \frac{r\mu(1-z)p(0)}{r\mu-(\lambda+r\mu)z+\lambda z^{r+1}} \tag{4.7}
$$

Utilizando-se a propriedade que $P(1)=\sum_k p(k)=1$, obtém-se[4] $p(0)=(1-\rho)$. Substituindo-se p(0) em (4.7), obtém-se:

$$
P(z) = \frac{(1-\rho)}{1-\frac{\lambda}{r\mu}(z+z^2+\ldots+z^r)} \tag{4.8}
$$

---

[3] A transformada P(z), por definição, é dada por

$$
P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p(k)\, z^k
$$

[4] Para derivar esta expressão, calcula-se o limite da expressão (4.7) para z tendendo a 1.

A transformada inversa aplicada em P(z) fornece a distribuição {p(k), k=0,1,...} desejada. Conforme KLEINROCK (1975), a distribuição {p(k), k=0,1,...} pode ser determinada por

$$p(k) = (1-\rho) \sum_{i=1}^{r} \frac{a_i}{z_i^k} \qquad k=0,1,\ldots \tag{4.9}$$

onde z_1, z_2, ... , z_r são r raízes reais e distintas do polinômio $1 - (\lambda/r\mu)(z+z^2+\ldots+z^r)$ e os coeficientes a_i são dados por

$$a_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{r} \frac{1}{(1-\frac{z_i}{z_j})} \qquad i=1,\ldots,r \tag{4.10}$$

Conhecida a distribuição estacionária {p(k), k=0,1,...}, determina-se a distribuição estacionária da quantidade de clientes no sistema em um dado instante t, {q(n), n=0,1,...}, pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned} q(0) &= p(0) \\ q(n) &= \sum_{k=(n-1)\cdot r+1}^{nr} p(k) \qquad n=1,2,\ldots \end{aligned} \tag{4.11}$$

Seja E[L] a expectância da quantidade de clientes e E[W] o tempo médio de permanência dos clientes no sistema. Estas medidas podem ser calculadas, empregando-se as seguintes expressões:

$$E[L] = \sum_{n=1}^{\infty} nq(n) \tag{4.12}$$

$$E[W] = \frac{E[L]}{\lambda} \tag{4.13}$$

Nesta seção, mostrou-se como se determina a distribuição estacionária da quantidade de estágios em uma fila $M/E_r/1$, aplicando-se a transformada z para resolução das equações de balanço global entre estados. Uma alternativa para a determinação da distribuição estacionária $\{p(k),\ k=0,1,...\}$, seria considerar um valor máximo, N_{max}, para a quantidade de clientes no sistema, tal que, quando houvesse N_{max} clientes, nenhum novo cliente seria admitido no sistema. Desta forma, a cadeia de Markov passa a conter um número finito de estados $(r \cdot N_{max}+1)$, permitindo que se resolva numericamente o sistema de equações das probabilidades de estados correspondente. Estes resultados podem ser utilizados como uma aproximação para a distribuição real $\{p(k),\ k=0,1,...\}$, sendo a qualidade desta aproximação tanto melhor quanto maior o valor de N_{max} fixado.

Outro aspecto importante está relacionado à generalização do modelo $M/E_r/1$ para c servidores em paralelo. A análise dos modelos $M/E_r/c$ torna-se relativamente mais complexa pois, ao contrário do modelo com servidor único, onde o estado pode ser representado por um escalar, necessita-se de um vetor com r componentes, onde o i-ésimo componente $(i=1,...,r)$ representa a quantidade de clientes no i-ésimo estágio de atendimento, além de

um escalar representando a quantidade de clientes na fila. Para uma discussão mais aprofundada, vide GROSS (1985).

4.3 Modelagem para Rede Circular

Nesta seção, são propostos modelos para o problema ABA-AUTOPROP, apresentado no capítulo 1, admitindo-se que os portos apresentem um único berço de atracação e que os tempos de atendimento e viagem sejam variáveis aleatórias independentes com distribuição Erlang de ordem r (r=1,2,...). A existência de um único berço de atracação permite que os estados dos portos sejam representados de forma semelhante à apresentada no modelo $M/E_r/1$, isto é, representando-se o estado em um dado porto pela soma da quantidade de estágios de atendimentos restantes para conclusão do atendimento em curso com a quantidade de estágios associada aos clientes na fila.

Os modelos desenvolvidos nesta seção constituem cadeias de Markov em tempo contínuo, finitas e irredutíveis. Ao contrário do modelo de rede circular com atendimento exponencial, apresentado no capítulo 3, que apresenta uma solução analítica em forma de produto para determinação da distribuição estacionária, a distribuição estacionária de probabilidades nos modelos com distribuições Erlang deve ser obtida pela solução numérica do sistema de equações $\boldsymbol{\pi}Q=\mathbf{0}$, $\sum_j \pi_j=1$.

Conhecida a distribuição estacionária da cadeia de Markov em tempo contínuo, determinam-se as distribuições marginais estacionárias da quantidade de embarcações em cada porto. Para avaliar o desempenho, em cada situação, são calculadas, a partir das distribuições marginais, as seguintes medidas:

a) vazão (λ);

b) tempo médio de espera nos portos ($E[W_i]$, $i=1,2$);

c) tempo médio de viagem redonda ($E[T_{vr}]$).

Esta seção está dividida em duas subseções. Na subseção 4.3.1, é apresentado o modelo em que os tempos de viagem são considerados exponenciais e os tempos de atendimento nos portos apresentam distribuição Erlang de ordem r ($r=1,2,...$). Na subseção 4.3.2, considera-se uma generalização do modelo, adotando-se distribuições Erlang tanto para os tempos de atendimento nos portos quanto para os tempos de viagem.

4.3.1 Modelo com Distribuição Exponencial para os Tempos de Viagem.

Considere-se um sistema ABA-AUTOPROP em que os portos A e B apresentam um único berço de atracação e a frota é formada por N embarcações autopropelidas semelhantes. Sejam os tempos de viagem entre os portos variáveis aleatórias independentes com distribuições exponenciais e média $1/\mu_3$, no sentido de A para B, e $1/\mu_4$, no sentido inverso. Admita-se que os atendimentos no porto A sejam constituídos de r_1 estágios sucessivos, cada

estágio com duração dada por uma variável aleatória com distribuição exponencial e parâmetro $r_i\mu_1$ $(r_1=1,2,...)$. Analogamente, considere-se que os atendimentos no porto B sejam compostos de r_2 estágios consecutivos, com duração dadas por variáveis aleatórias independentes com distribuição exponencial e parâmetro $r_2\mu_2$ $(r_2=1,2,...)$ [5].

Este sistema pode ser estudado por uma cadeia de Markov em tempo contínuo, $\{X(t),\ t\geq 0\}$, com espaço amostral finito, $S=\{1,...,J\}$. Cada estado j do espaço amostral S corresponde a um vetor $\mathbf{n}=(n_1,n_2,n_3,n_4)$, onde os componentes n_1 e n_2 representam a carga de trabalho, medida em número de estágios, existente nos portos A e B, respectivamente, em um dado instante t, e n_3 e n_4 representam, respectivamente, a quantidade de embarcações em viagem de A para B e vice-versa, no instante t.

Sejam $\beta_i(k)=\text{int}[(k+r_i-1)/r_i]$ $(i=1,2)$, onde a função int(x) fornece a parte inteira do argumen[illegible] conjunto dos vetores **n** que correspondem aos [illegible] Markov em tempo contínuo. Então, B[illegible]

FD-1673 Schon, Claudio Geraldo
2exs. Estudo microestrutural da austenita d
uma liga de ferro contendo 8% de cromo e
1,2% de carbono. Sao Paulo, 1994.
95p. + apendice
94-06-27
Dissertacao (Mestrado) - Escola Poli-
tecnica da Universidade de Sao Paulo.
Dep. de Eng. Metalurgica e de Materiais.
Orientador: Helio Goldenstein
7637

[5] Os tempos de atendimento nos [illegible] portanto, distribuições Erlang de or[illegible] As expectâncias dos tempos de atend[illegible] iguais a $1/\mu_1$, no porto A, e $1/\mu_2$, n[illegible]

[6] A função $\beta_i(k)$ $(k=0,...,r_i\cdot N;$ [illegible] de embarcações presentes no porto i, [illegible] é k.

$$B(N) = \{(n_1, n_2, n_3, n_4) \mid n_i \in \mathbb{N}, \quad i=1,\ldots,4; \\ \beta_1(n_1) + \beta_2(n_2) + n_3 + n_4 = N\} \tag{4.14}$$

Para calcular a quantidade de estados, J, da cadeia de Markov associada ao modelo, utiliza-se o seguinte raciocínio:

a) calcula-se a quantidade de alternativas de repartição das N embarcações da frota entre os quatro nós da rede circular (portos e viagens) tal que cada porto tenha pelo menos uma embarcação. Pelo método da decomposição em estágios, cada uma destas alternativas dá origem a $r_1 \cdot r_2$ estados no espaço amostral.

b) idem, tal que o porto A não tenha nenhuma embarcação e o porto B apresente pelo menos uma embarcação. Neste caso, cada alternativa dá origem a r_2 estados.

c) idem, tal que o porto B não tenha nenhuma embarcação e o porto A apresente pelo menos uma embarcação. Neste caso, há r_1 estados por alternativa.

d) calcula-se a quantidade de repartições das N embarcações exclusivamente entre os nós referentes às viagens. Cada uma destas alternativas dá origem a um estado apenas.

Aplicando-se o procedimento acima, deduz-se a seguinte expressão para o cálculo da quantidade de estados, J:

$$J = \binom{N+1}{3} \cdot r_1 \cdot r_2 + \binom{N+1}{2} \cdot (r_1 + r_2) + \binom{N+1}{1} \tag{4.15}$$

Da mesma forma que no modelo do capítulo 3, necessita-se definir uma função $\phi(\mathbf{n})$ que estabeleça a correspondência entre os vetores $\mathbf{n} \in B(N)$ e os estados j do espaço amostral S. Para isto, considera-se a ordenação dos estados apresentada na tabela 4.1.

Tabela 4.1 Ordenação dos estados de uma rede circular ABA-AUTOPROP com N embarcações e r_1 e r_2 estágios de atendimento nos portos A e B, respectivamente.

$\mathbf{n}$	$\phi(\mathbf{n})$
(0 , 0 , 0 , N)	1
(0 , 0 , 1 ,N-1)	2
(0 , 0 , 2 ,N-2)	3
⋮	⋮
(0 , 0 , N , 0)	N+1
(0 , 1 , 0 ,N-1)	N+2
(0 , 1 , 1 ,N-2)	N+3
⋮	⋮
(0 , 1 ,N-1, 0)	2N+1
(0 , 2 , 0 ,N-1)	2N+2
(0 , 2 , 1 ,N-2)	2N+3
⋮	⋮
⋮	⋮
(0 , r_2 ,N-1, 0)	$(r_2+1)\cdot N+1$
(0 ,r_2+1, 0 ,N-2)	$(r_2+1)\cdot N+2$
(0 ,r_2+1, 1 ,N-3)	$(r_2+1)\cdot N+3$
⋮	⋮
⋮	⋮
(0 ,$r_2\cdot N$, 0 , 0)	$(N+1)\cdot N\cdot r_2/2+N+1$
(1 , 0 , 0 ,N-1)	$(N+1)\cdot N\cdot r_2/2+N+2$
(1 , 0 , 1 ,N-2)	$(N+1)\cdot N\cdot r_2/2+N+3$
⋮	⋮
⋮	⋮
⋮	⋮
($r_1\cdot N$, 0 , 0 , 0)	J

Com base na ordenação da tabela 4.1, determina-se a seguinte expressão para $\phi(\mathbf{n})$:

$$\phi(\boldsymbol{n}) = \sum_{i=1}^{4} \phi_i(\boldsymbol{n}) + 1 \qquad (4.16)$$

onde os componentes $\boldsymbol{\phi}_i(\mathbf{n})$ (i=1,...,4) são interpetrados da mesma forma que no capítulo 3, ou seja, representam a quantidade de estados que apresentam os primeiros (i-1) componentes iguais aos do estado **n** e o i-ésimo componente uma unidade inferior ao correspondente do estado **n**. As funções $\boldsymbol{\phi}_i(\mathbf{n})$ são dadas por

$$\boldsymbol{\phi}_1(\boldsymbol{n}) = \begin{cases} 0, & se\ \beta_1(n_1)=0 \\ \binom{N+1}{1} + \binom{N+1}{2}\cdot r_2 + \left[\binom{N+1}{2} - \binom{N-\beta_1(n_1)+2}{2}\right]\cdot r_1 \\ \quad + \left[\binom{N+1}{3} - \binom{N-\beta_1(n_1)+2}{3}\right]\cdot r_1 r_2 \\ \quad + \left[\binom{N-\beta_1(n_1)+1}{1} + \binom{N-\beta_1(n_1)+1}{2}\cdot r_2\right]\cdot(n_1 - r_1(\beta_1(n_1)-1)-1), \\ & caso\ contrário \end{cases} \tag{4.17}$$

$$\boldsymbol{\phi}_2(\boldsymbol{n}) = \begin{cases} 0, & se\ \beta_2(n_2)=0 \\ \binom{N-\beta_1(n_1)+1}{1} + \left[\binom{N-\beta_1(n_1)+1}{2} - \binom{N-\beta_1(n_1)-\beta_2(n_2)+2}{2}\right]\cdot r_2 \\ \quad + \binom{N-\beta_1(n_1)-\beta_2(n_2)+1}{1}\cdot(n_2 - r_2(\beta_2(n_2)-1)-1), \\ & caso\ contrário \end{cases} \tag{4.18}$$

$$\boldsymbol{\phi}_3(\boldsymbol{n}) = n_3 \tag{4.19}$$

$$\boldsymbol{\phi}_4(\boldsymbol{n}) = 0 \tag{4.20}$$

Definida a função $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{n})$, passa-se à analise das transições entre estados. As transições entre estados ocorrem quando termina uma viagem e a embarcação chega ao porto ou quando se tem um estágio de atendimento concluído. Neste último caso, se o estágio corresponde ao r_i-ésimo estágio de atendimento de uma embarcação no porto i (i=1,2), então a embarcação deixa o porto i e parte em viagem para o outro porto; havendo alguma embarcação na fila no porto i, inicia-se, em seguida, um novo antendimento. Estas transições estão representadas a seguir:

a$_1$) $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{n}) \rightarrow \boldsymbol{\phi}(n_1-1, n_2, n_3, n_4)$ $\quad (n_1>0$ e $\mathrm{frac}[(n_1+r_1-1)/r_1]>0)$;

a$_2$) $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{n}) \rightarrow \boldsymbol{\phi}(n_1-1, n_2, n_3+1, n_4)$ $\quad (n_1>0$ e $\mathrm{frac}[(n_1+r_1-1)/r_1]=0)$;

b$_1$) $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{n}) \rightarrow \boldsymbol{\phi}(n_1, n_2-1, n_3, n_4)$ $\quad (n_2>0$ e $\mathrm{frac}[(n_2+r_2-1)/r_2]>0)$;

b$_2$) $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{n}) \rightarrow \boldsymbol{\phi}(n_1, n_2-1, n_3, n_4+1)$ $\quad (n_2>0$ e $\mathrm{frac}[(n_2+r_2-1)/r_2]=0)$;

c) $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{n}) \rightarrow \boldsymbol{\phi}(n_1, n_2+r_2, n_3-1, n_4)$ $\quad (n_3>0)$;

d) $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{n}) \rightarrow \boldsymbol{\phi}(n_1+r_1, n_2, n_3, n_4-1)$ $\quad (n_4>0)$;

onde a função frac(x) retorna a parte fracionária do argumento real x. As transições em (a) e (b) ocorrem a uma taxa $r_1\mu_1$ e $r_2\mu_2$, respectivamente. Em (c), a taxa de transição é μ_3 e, nas transições (d), a taxa é μ_4.

Resolvendo-se o sistema $\boldsymbol{\pi}Q=\mathbf{0}$, $\sum_j \pi_j=1$, obtém-se a distribuição estacionária dos estados da cadeia de Markov em tempo contínuo. Sejam $p(\mathbf{n})=\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{\phi}(\mathbf{n})}$ a distribuição estacionária conjunta e $p_i(k)$ a distribuição marginal estacionária da carga de trabalho no porto i (i=1,2). As distribuições marginais $p_i(k)$ são dadas por

$$p_i(k) = \sum_{\mathbf{n}\in B(N)\ |\ n_i=k} p(\mathbf{n}) \qquad k=0,\ldots,r_i\cdot N;\ \ i=1,2 \qquad (4.21)$$

Determinadas as distribuições $\{p_i(k),\ k=0,\ldots,r_i \cdot N;\ i=1,2\}$, obtém-se a distribuição da quantidade de embarcações no porto i $(i=1,2)$, $\{q_i(n),\ n=0,\ldots,N;\ i=1,2\}$, conforme as expressões a seguir.

$$
\begin{aligned}
q_i(0) &= p_i(0) \qquad\qquad i=1,2 \\
q_i(n) &= \sum_{k=(n-1)\cdot r_i+1}^{n\cdot r_i} p_i(k) \qquad n=1,2,\ldots,N;\ \ i=1,2
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

Finalmente, conhecidas as distribuições marginais estacionárias da quantidade de embarcações em cada porto, $\{q_i(n),\ n=0,\ldots,N;\ i=1,2\}$, calculam-se a vazão (λ) do sistema, os tempos médios de permanência das embarcações nos portos $(E[W_i],\ i=1,2)$ e o tempo médio de viagem redonda das embarcações $(E[T_{vr}])$, que, de forma similar à apresentada no capítulo 3, são dados por

$$\lambda = \sum_{k=1}^{N} \alpha_i(k)\, \mu_i q_i(k) \tag{4.23}$$

$$E[L_i] = \sum_{k=1}^{N} k q_i(k) \qquad i=1,2 \tag{4.24}$$

$$E[W_i] = \frac{E[L_i]}{\lambda} \qquad i=1,2 \tag{4.25}$$

$$E[T_{vr}] = \sum_{i=1}^{2} (E[W_i] + \frac{1}{\mu_{2+i}}) \qquad (4.26)$$

4.3.2 Modelos com Distribuição Erlang para os Tempos de Viagem.

Nesta subseção considera-se uma generalização do modelo da seção 4.3.1, permitindo-se que os tempos de viagens sejam representados por distribuições Erlang de ordens genéricas r_3 (viagem de A para B) e r_4 (viagem de B para A). Neste caso, considera-se cada viagem como uma seqüência de r_i nós consecutivos e independentes com distribuição exponencial e taxas $r_i\mu_i$ $(i=3,4)$.

O modelo correspondente constitui uma cadeia de Markov em tempo contínuo, $\{X(t),\ t\geq 0\}$ com espaço amostral finito, $S=\{1,\ldots,J\}$. Cada estado j corresponde, agora, a um vetor $\mathbf{n}=(n_1,n_2,n_3^1,\ldots,n_3^{r3},n_4^1,\ldots,n_4^{r4})$, onde:

a) os componentes n_1 e n_2 representam a carga de trabalho nos portos A e B, respectivamente, em um dado instante t;

b) n_3^k $(k=1,\ldots,r_3)$, representa a quantidade de embarcações que se encontram no k-ésimo estágio da viagem do porto A para o porto B, no instante t;

c) analogamente, n_4^k $(k=1,\ldots,r_4)$ representa a quantidade de embarcações que se encontram no k-ésimo estágio da viagem do porto B para o porto A, no instante t.

Seja $B^*(N, r_3, r_4)$ o conjunto dos vetores **n** que correspondem a estados viáveis da cadeia de Markov em tempo contínuo. Este conjunto é dado por

$$B^*(N, r_3, r_4) = \{ (n_1, n_2, n_3^1, \ldots, n_3^{r_3}, n_4^1, \ldots, n_4^{r_4}) \mid n_i, n_j^k \in \mathbb{N} \\ i=1,2;\ j=3,4;\ k=1,\ldots,r_j;\ \beta_1(n_1) + \beta_2(n_2) + n_3 + n_4 = N \} \tag{4.27}$$

onde $\beta_i(n) = \text{int}[(n+r_i-1)/r_i]$ $(i=1,2)$ e $n_j = \sum_k n_j^k$ $(j=3,4)$.

Seja $R=2+r_3+r_4$ $(r_3, r_4=1,2,\ldots)$. A quantidade de estados do espaço amostral do processo $\{X(t),\ t \geq 0\}$, J, é dada por

$$J = \binom{N+R-3}{R-1} \cdot r_1 \cdot r_2 + \binom{N+R-3}{R-2} \cdot (r_1 + r_2) + \binom{N+R-3}{R-3} \tag{4.28}$$

Em relação à ordenação dos estados, considera-se uma ordenação semelhante à da tabela 4.1, exceto que o vetor de estado **n** apresenta R componentes. Sendo assim, a função $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{n})$ é dada por

$$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{n}) = \boldsymbol{\phi}_1(\mathbf{n}) + \boldsymbol{\phi}_2(\mathbf{n}) + \sum_{i=1}^{r_3} \boldsymbol{\phi}_3{}^i(\mathbf{n}) + \sum_{i=1}^{r_4} \boldsymbol{\phi}_4{}^i(\mathbf{n}) + 1 \tag{4.29}$$

onde

$$\phi_1(\boldsymbol{n}) = \begin{cases} 0, & se\ \beta_1(n_1)=0 \\ \binom{N+R-3}{R-3} + \binom{N+R-3}{R-2}\cdot r_2 + \left[\binom{N+R-3}{R-2} - \binom{N-\beta_1(n_1)+R-2}{R-2}\right]\cdot r_1 \\ \quad + \left[\binom{N+R-3}{R-1} - \binom{N-\beta_1(n_1)+R-2}{R-1}\right]\cdot r_1\cdot r_2 \\ \quad + \left[\binom{N-\beta_1(n_1)+R-3}{R-3} + \binom{N-\beta_1(n_1)+R-3}{R-2}\cdot r_2\right]\cdot(n_1 - r_1(\beta_1(n_1)-1)-1), \\ & caso\ contrário \end{cases} \tag{4.30}$$

$$\phi_2(\boldsymbol{n}) = \begin{cases} 0, & se\ \beta_2(n_2)=0 \\ \binom{N-\beta_1(n_1)+R-3}{R-3} \\ \quad + \left[\binom{N-\beta_1(n_1)+R-3}{R-2} - \binom{N-\beta_1(n_1)-\beta_2(n_2)+R-2}{R-2}\right]\cdot r_2 \\ \quad + \binom{N-\beta_1(n_1)-\beta_2(n_2)+R-3}{R-3}\cdot(n_2 - r_2(\beta_2(n_2)-1)-1), \\ & caso\ contrário \end{cases} \tag{4.31}$$

$$\phi_3{}^i(\boldsymbol{n}) = \binom{N-\beta_1(n_1)-\beta_2(n_2)-(\sum_{k=1}^{i-1} n_3{}^k)+R-i-2}{R-i-2} - \binom{N-\beta_1(n_1)-\beta_2(n_2)-(\sum_{k=1}^{i} n_3{}^k)+R-i-2}{R-i-2} \quad i=1,\ldots,r_3 \tag{4.32}$$

$$\phi_4{}^{i}(\mathbf{n}) = \binom{N-\beta_1(n_1)-\beta_2(n_2)-n_3-(\sum_{k=1}^{i-1} n_4{}^k)+R-i-r_3-2}{R-i-r_3-2} - \binom{N-\beta_1(n_1)-\beta_2(n_2)-n_3-(\sum_{k=1}^{i} n_4{}^k)+R-i-r_3-2}{R-i-r_3-2} \quad i=1,\ldots,r_4 \tag{4.33}$$

As transições entre estados, neste segundo modelo, são as seguintes:

$a_1)$ $\phi(\mathbf{n}) \rightarrow \phi(n_1-1, n_2, n_3{}^1, \ldots, n_3{}^{r3}, n_4{}^1, \ldots, n_4{}^{r4})$

$(n_1>0$ e $\mathrm{frac}[(n_1+r_1-1)/r_1]>0)$;

$a_2)$ $\phi(\mathbf{n}) \rightarrow \phi(n_1-1, n_2, n_3{}^1+1, \ldots, n_3{}^{r3}, n_4{}^1, \ldots, n_4{}^{r4})$

$(n_1>0$ e $\mathrm{frac}[(n_1+r_1-1)/r_1]=0)$;

$b_1)$ $\phi(\mathbf{n}) \rightarrow \phi(n_1, n_2-1, n_3{}^1, \ldots, n_3{}^{r3}, n_4{}^1, \ldots, n_4{}^{r4})$

$(n_2>0$ e $\mathrm{frac}[(n_2+r_2-1)/r_2]>0)$;

$b_2)$ $\phi(\mathbf{n}) \rightarrow \phi(n_1, n_2-1, n_3{}^1, \ldots, n_3{}^{r3}, n_4{}^1+1, \ldots, n_4{}^{r4})$

$(n_2>0,\ \mathrm{frac}([(n_2+r_2-1)/r_2]=0)$;

$c_1)$ $\phi(\mathbf{n}) \rightarrow \phi(n_1, n_2, n_3{}^1, \ldots, n_3{}^k-1, n_3{}^{k+1}+1, \ldots, n_3{}^{r3}, n_4{}^1, \ldots, n_4{}^{r4})$

$(n_3{}^k>0,\ k=1,\ldots,r_3-1)$;

$c_2)$ $\phi(\mathbf{n}) \rightarrow \phi(n_1, n_2+r_2, n_3{}^1, \ldots, n_3{}^{r3}-1, n_4{}^1, \ldots, n_4{}^{r4})$ $(n_3{}^{r3}>0)$;

$d_1)$ $\phi(\mathbf{n}) \rightarrow \phi(n_1, n_2, n_3{}^1, \ldots, n_3{}^{r3}, n_4{}^1, \ldots, n_4{}^k-1, n_4{}^{k+1}+1, \ldots, n_4{}^{r4})$

$(n_4{}^k>0,\ k=1,\ldots,r_4-1)$;

$d_2)$ $\phi(\mathbf{n}) \rightarrow \phi(n_1+r_1, n_2, n_3{}^1, \ldots, n_3{}^{r3}, n_4{}^1, \ldots, n_4{}^{r4}-1)$ $(n_4{}^{r4}>0)$.

As taxas de transição em (a), (b), (c) e (d) são, respectivamente, $r_1\mu_1$, $r_2\mu_2$, $r_3\mu_3$ e $r_4\mu_4$.

Elaborada a matriz geradora infinitesimal, Q, os passos seguintes são: a) determinar a distribuição estacionária pela solução do sistema linear $\pi Q=\mathbf{0}$, $\sum_j \pi_j=1$; b) calcular as distribuições marginais da carga de trabalho em cada porto, $\{p_i(k),\ k=0,\ldots,r_i \cdot N;\ i=1,2\}$; c) determinar as distribuições marginais da quantidade de embarcações em cada porto, $\{q_i(k),\ n=0,\ldots,N;\ i=1,2\}$; d) calcular as medidas de desempenho.

4.4 Implementação Computacional

Na implementação computacional dos modelos foram consideradas distribuições Erlang de ordem r=1, 2, 4 e 8, mostradas na figura 4.1, e que possuem os coeficientes de variação[7] apresentados na tabela 4.2. É importante salientar que a escolha de r tem efeito sobre a dimensão dos modelos, como será mostrado adiante.

Tabela 4.2 Coeficientes de variação de distribuições Erlang de ordem r.

r	c.v.
1	1.0000
2	0.7071
4	0.5000
8	0.3536

O procedimento computacional para resolução do modelo é similar ao procedimento apresentado na seção 3.3.1, do capítulo

[7] Razão entre o desvio padrão e a média de uma distribuição.

anterior. Elabora-se a matriz geradora infinitesimal de probabilidades, que é armazenada em vetores DQ, NQ, IQ e JQ. Conforme visto no capítulo 3, o vetor DQ contém os componentes da diagonal principal de Q em valor absoluto; o vetor NQ, os componentes não nulos fora da diagonal, ordenados por linha e por coluna; enquanto os vetores IQ e JQ contêm índices que permitem identificar a posição dos componentes não nulos fora da diagonal principal de Q.

As dimensões destes vetores DQ, NQ, IQ e JQ são determinadas pela quantidade de estados da cadeia de Markov em tempo contínuo, J, dada por (4.28), e pela quantidade de transições entre estados, K, que, no caso mais geral dos modelos que admitem distribuições Erlang para os tempos de atendimento e viagem, é dada por

$$K = \sum_{i=1}^{R} \binom{N-1}{i-1} \cdot \left[\binom{R-2}{i-2} \cdot r_1 \cdot r_2 + \binom{R-2}{i-1} \cdot (r_1 + r_2) + \binom{R-2}{i} \right] \cdot i \qquad (4.34)$$

onde $R=2+r_3+r_4$.

Utilizando-se as expressões (4.28) e (4.34), pode-se avaliar a dimensão dos modelos, variando-se a quantidade de embarcações, N, e a ordem das distribuições Erlang dos tempos de atendimento e viagem, r_i (i=1,2,3,4). Os valores de J e K, considerando-se algumas combinações dos parâmetros N e r_i (i=1,2,3,4), são apresentados nas tabelas 4.3, 4.4, 4.5 e 4.6.

Tabela 4.3 Quantidade de estados e de transições no modelo ABA-AUTOPROP com distribuições exponenciais para os tempos de viagem e distribuições Erlang de ordem r para os tempos de atendimento.

N	r	J	K
5	1	56	140
	2	146	390
	4	446	1250
	8	1526	4410
10	1	286	880
	2	891	2880
	4	3091	10300
	8	11451	38820
15	1	816	2720
	2	2736	9470
	4	9936	35150
	8	37776	135230
20	1	1771	6160
	2	6181	22160
	4	22981	83800
	8	88501	325640

Tabela 4.4 Quantidade de estados e de transições no modelo ABA-AUTOPROP com distribuições Erlang de ordem 2 para os tempos de viagem e distribuições Erlang de ordem r para os tempos de atendimento.

N	r	J	K
5	1	252	756
	2	560	1764
	4	1512	4956
	8	4760	16044
10	1	3003	12012
	2	8294	34628
	4	26598	114312
	8	94094	411488
15	1	15504	69768
	2	47328	220592
	4	162384	773568
	8	598128	2.9e06
20	1	53130	255024
	2	171787	849156
	4	610995	3.1e06
	8	2.3e06	1.2e07

Tabela 4.5 Quantidade de estados e de transições no modelo ABA-AUTOPROP com distribuições Erlang de ordem 4 para os tempos de viagem e distribuições Erlang de ordem r para os tempos de atendimento.

N	r	J	K
5	1	2002	7150
	2	3652	13420
	4	8272	31240
	8	22792	88000
10	1	92378	486200
	2	213928	1.2e06
	4	602888	3.4e06
	8	2.0e06	1.1e07
15	1	1.3e06	8.2e06
	2	3.4e06	2.2e07
	4	1.1e07	7.0e07
	8	3.7e07	2.5e08
20	1	1.0e07	6.9e07
	2	2.9e07	2.0e08
	4	9.4e07	6.7e08
	8	3.4e08	2.4e09

Tabela 4.6 Quantidade de estados e de transições no modelo ABA-AUTOPROP com distribuições Erlang de ordem 8 para os tempos de viagem e distribuições Erlang de ordem r para os tempos de atendimento.

N	r	J	K
5	1	26334	107730
	2	39444	163476
	4	72504	305064
	8	165984	708624
10	1	8.4e06	5.6e07
	2	1.6e07	1.1e08
	4	3.7e07	2.5e08
	8	1.1e08	7.3e08
15	1	5.7e08	4.8e09
	2	1.2e09	1.0e10
	4	3.2e09	2.8e10
	8	1.0e10	8.9e10
20	1	1.6e10	1.5e11
	2	3.8e10	3.7e11
	4	1.1e11	1.1e12
	8	3.6e11	3.6e12

A figura 4.2 apresenta um algoritmo para construção da matriz geradora infinitesimal de probabilidades, Q, da cadeia de Markov em tempo contínuo associada ao modelo da seção 4.3.1, ou seja, que admite distribuições exponenciais para os tempos de viagem. Procedimentos semelhantes são obtidos, considerando-se distribuições Erlang para os tempos de viagem ($r_3, r_4>1$).

De forma análoga ao método da cadeia de Markov em tempo contínuo do capítulo 3, construída a matriz Q das taxas de transição entre estados, aplica-se o processo de uniformização da cadeia de Markov em tempo contínuo. Obtém-se, então, uma cadeia de Markov em tempo discreto com matriz de probabilidades de transição entre estados P. Determina-se iterativamente a distribuição estacionária $\{\pi_j,\ j=1,...J\}$ da cadeia de Markov em tempo discreto, que é a mesma distribuição estacionária do processo em tempo contínuo, a partir de $\pi=\pi P$. Os procedimentos para construção da matriz P do processo uniformizado e para resolução iterativa do sistema $\pi=\pi P$ são os mesmos apresentados no capítulo anterior.

Determinada a distribuição estacionária conjunta, $\{\pi_j,\ j=1,...J\}$, calculam-se as distribuições marginais da quantidade de trabalho (estágios de atendimento) e de embarcações nos portos, $\{p_i(k),\ k=0,...,r_i \cdot N;\ i=1,2\}$ e $\{q_i(n),\ n=0,...,N;\ i=1,2\}$, respectivamente. A figura 4.3 mostra um procedimento para determinação das distribuições marginais da quantidade de embarcações em cada porto, $\{q_i(n),\ n=0,...,N;\ i=1,2\}$, a partir da distribuição conjunta. Por fim, conhecidas as distribuições $\{q_i(n),\ n=0,...,N;\ i=1,2\}$, calculam-se as medidas de desempenho.

```
entrada : N, r1, r2, μ1, μ2, μ3, μ4;
saída   : DQ[j], NQ[k], IQ[j], JQ[k];
início
  j ← 1; k ← 1;
  para n1 de 0 a r1N faça
    para n2 de 0 a r2(N-β1(n1)) faça
      para n3 de 0 a N-β1(n1)-β2(n2) faça
        início
          n4 ← N-β1(n1)-β2(n2)-n3;
          δ1 ← min(1,n1);        δ2 ← min(1,n2);
          DQ[j] ← δ1r1μ1+δ2r2μ2+n3μ3+n4μ4;
          IQ[j] ← k;
          se (n1>0) e (frac[(n1+r1-1)/r1]>0) então
            início
              m ← (n1-1,n2,n3,n4);
              NQ[k] ← r1μ1;     JQ[k] ← φ(m);   k ← k+1;
            fim;
          se (n1>0) e (frac[(n1+r1-1)/r1]=0) então
            início
              m ← (n1-1,n2,n3+1,n4);
              NQ[k] ← r1μ1;     JQ[k] ← φ(m);   k ← k+1;
            fim;
          se (n2>0) e (frac[(n2+r2-1)/r2]>0) então
            início
              m ← (n1,n2-1,n3,n4);
              NQ[k] ← r2μ2;     JQ[k] ← φ(m);   k ← k+1;
            fim;
          se (n2>0) e (frac[(n2+r2-1)/r2]=0) então
            início
              m ← (n1,n2-1,n3,n4+1);
              NQ[k] ← r2μ2;     JQ[k] ← φ(m);   k ← k+1;
            fim;
          se (n3>0) então
            início
              m ← (n1,n2+r2,n3-1,n4);
              NQ[k] ← n3μ3;     JQ[k] ← φ(m);   k ← k+1;
            fim;
          se (n4>0) então
            início
              m ← (n1+r1,n2,n3,n4-1);
              NQ[k] ← n4μ4;     JQ[k] ← φ(m);   k ← k+1;
            fim;
        j ← j+1;
        fim;
  IQ[j] ← k;
fim.
```

Figura 4.2 Algoritimo para construção da matriz Q do modelo ABA-AUTOPROP com distribuições exponenciais para os tempos de viagem e Erlang para os tempos de atendimento.

```
entrada : N, r1, r2, π[j];
saída   : q1[n], q2[n];
início
  para k de 0 a N faça q1[k] ← 0;
  para k de 0 a N faça q2[k] ← 0;
  j ← 1;
  para n1 de 0 a r1•N faça
    para n2 de 0 a r2•(N-β1(n1)) faça
      para n3 de 0 a N-β1(n1)-β2(n2) faça
        início
          n4 ← N-β1(n1)-β2(n2)-n3;
          q1[β1(n1)] ← q1[β1(n1)]+π[j];
          q2[β2(n2)] ← q2[β2(n2)]+π[j];
          j ← j+1;
        fim;
fim.
```

Figura 4.3 Algoritmo para obtenção das distribuições marginais do modelo ABA-AUTOPROP com distribuições Erlang para tempos de atendimento e exponenciais para tempos de viagem.

Os apêndices IV, V, VI e VII, contêm implementações computacionais que consideram, respectivamente, $r_v(=r_3=r_4)=$ 1, 2, 4 e 8 e valores de r_1 e r_2 entre 1 e 8.

4.5 Análise de Resultados

A partir da implementação computacional do modelo descrito na seção 4.3, foram analisadas algumas configurações particulares do problema ABA-AUTOPROP.

As tabelas 4.7, 4.8, 4.9 e 4.10 mostram a vazão, os tempos médios de permanência nos portos e o tempo médio de viagem redonda, relativos ao problema ABA-AUTOPROP, considerando-se 5 e 10 embarcações na rede, relações entre tempos de viagem e

atendimento de 2:1 e 4:1 e diferentes distribuições da família Erlang para os tempos de viagem e atendimento. Nas tabelas 4.9 e 4.10, não há uma coluna referente a ordem 8 para os tempos de viagem; estes casos não foram resolvidos devido às limitações computacionais para resolução dos modelos correspondentes[8].

Estes resultados mostram que o desempenho melhora (maior vazão e menores tempos de porto e viagem redonda) a medida que se reduz o coeficiente de variação das distribuições dos tempos de viagem e atendimento, isto é, a medida que crescem as ordens destas distribuições. De uma forma geral, constata-se que as medidas de desempenho são mais sensíveis a variações na ordem dos tempos de atendimento nos portos do que na dos tempos de viagem.

Verifica-se também que, se os tempos de atendimento nos portos são exponenciais (r_p=1), as medidas de desempenho são invariáveis em relação à ordem das distribuições dos tempos de viagem[9], r_v. Este fato confirma a propriedade das redes markovianas de filas, de que a distribuição estacionária é independente da forma da distribuição dos postos que apresentam infinitos servidores. Por outro lado, esta independência não se observa quando os tempos de atendimento nos portos não são exponenciais, isto é, para um mesmo valor de r_p (>1), as medidas de desempenho variam com a ordem das distribuições dos tempos de viagem.

---

[8] Os algoritmos foram implementados no sistema Convex do Centro de Computação Eletrônica da Universidade de São Paulo, utilizando-se um compilador C.

[9] As diferenças encontradas podem ser atribuídas ao procedimento numérico.

Tabela 4.7 Medidas de desempenho para o problema ABA-AUTOPROP com distribuições Erlang e com os seguintes parâmetros: a) N=5; b) $c_1=c_2=1$; c) $1/\mu_1=1/\mu_2=1$, $1/\mu_3=1/\mu_4=2$.

Medidas de Desemp.	r_p	r_v			
		1	2	4	8
λ	1	0.642381	0.642380	0.642381	0.642384
	2	0.675055	0.677290	0.680240	0.683629
	4	0.696220	0.700016	0.705586	0.712558
	8	0.708562	0.713172	0.720467	0.730207
E[W]	1	1.891783	1.891777	1.891760	1.891754
	2	1.703416	1.691177	1.675186	1.656946
	4	1.590817	1.571352	1.543162	1.508472
	8	1.528252	1.505481	1.469978	1.423673
$E[T_{vr}]$	1	7.783540	7.783549	7.783545	7.783503
	2	7.406799	7.382361	7.350351	7.313910
	4	7.181634	7.142694	7.086309	7.016969
	8	7.056541	7.010933	6.939944	6.847374

Tabela 4.8 Medidas de desempenho para o problema ABA-AUTOPROP com distribuições Erlang e com os seguintes parâmetros: a) N=5; b) $c_1=c_2=1$; c) $1/\mu_1=1/\mu_2=1$, $1/\mu_3=1/\mu_4=4$.

Medidas de Desemp.	r_p	r_v			
		1	2	4	8
λ	1	0.454169	0.454168	0.454166	0.454162
	2	0.464252	0.464526	0.464953	0.465737
	4	0.469809	0.470082	0.470640	0.471832
	8	0.472712	0.472934	0.473509	0.474868
E[W]	1	1.504571	1.504570	1.504578	1.504600
	2	1.385018	1.381839	1.376884	1.367810
	4	1.321328	1.318233	1.311898	1.298545
	8	1.288612	1.286192	1.279665	1.264624
$E[T_{vr}]$	1	11.00912	11.00914	11.00918	11.00927
	2	10.77000	10.76365	10.75376	10.73566
	4	10.64262	10.63643	10.62382	10.59699
	8	10.57725	10.57229	10.55946	10.52923

Tabela 4.9 Medidas de desempenho para problema ABA-AUTOPROP com distribuições Erlang e com os seguintes parâmetros: a) N=10 b) $c_1=c_2=1$; c) $1/\mu_1=1/\mu_2=1$, $1/\mu_3=1/\mu_4=2$.

Medidas de Desemp.	r_p	r_v		
		1	2	4
λ	1	0.857577	0.857578	0.857580
	2	0.904310	0.906192	0.908039
	4	0.936348	0.939627	0.942672
	8	0.957094	0.961269	0.964857
E[W]	1	3.830354	3.830361	3.830345
	2	3.529111	3.517609	3.506395
	4	3.339924	3.321280	3.304018
	8	3.224170	3.201479	3.181735
$E[T_{vr}]$	1	11.66076	11.66075	11.66072
	2	11.05815	11.03518	11.01274
	4	10.67978	10.64251	10.60814
	8	10.44828	10.40291	10.36422

Tabela 4.10 Medidas de desempenho para problema ABA-AUTOPROP com distribuições Erlang e com os seguintes parâmetros: a) N=10 b) $c_1=c_2=1$; c) $1/\mu_1=1/\mu_2=1$, $1/\mu_3=1/\mu_4=4$.

Medidas de Desemp.	r_p	r_v		
		1	2	4
λ	1	0.748320	0.748319	0.748323
	2	0.783584	0.785869	0.788768
	4	0.806440	0.810449	0.815870
	8	0.819962	0.825023	0.832212
E[W]	1	2.681661	2.681662	2.681636
	2	2.380975	2.362404	2.339010
	4	2.200180	2.169440	2.128422
	8	2.098004	2.060467	2.007741
$E[T_{vr}]$	1	13.36326	13.36328	13.36321
	2	12.76187	12.72477	12.67800
	4	12.40018	12.33884	12.25685
	8	12.19568	12.12087	12.01616

A tabela 4.11 apresenta a vazão e o tempo de viagem redonda correspondentes às configurações mostradas nas tabelas 4.7 a 4.10, designadas por (a), (b), (c) e (d), respectivamente, admitindo-se que tanto os tempos de viagem quanto os tempos de atendimentos sejam constantes. Na tabela 4.12, encontra-se uma comparação entre as vazões obtidas nos casos (a) e (c) e, na tabela 4.13, os dados correspondentes às configurações (b) e (d).

Tabela 4.11 Vazão e tempo de viagem redonda para o problema ABA-AUTOPROP com tempos de viagem e de atendimento constantes.

	λ	t_{vr}
(a)	0,833	6
(b)	0,500	10
(c)	1,000	10
(d)	1,000	10

Tabela 4.12 Vazão em função da ordem das distribuições Erlang dos tempos de viagem e atendimento para as configurações (a) e (c) do problema ABA-AUTOPROP.

	(a)		(c)	
	λ	Δ%	λ	Δ%
$r_p=r_v=\infty$	0,833		1,000	
$r_p=r_v=8$	0,730	-12,4%	-	-
$r_p=r_v=4$	0,706	-15,2%	0,943	- 5,7%
$r_p=r_v=2$	0,677	-18,7%	0,906	- 9,4%
$r_p=r_v=1$	0,642	-22,9%	0,858	-14,2%

Tabela 4.13 Vazão em função da ordem das distribuições Erlang dos tempos de viagem e atendimento para as configurações (b) e (d) do problema ABA-AUTOPROP.

	(b)		(d)	
	λ	Δ%	λ	Δ%
$r_p=r_v=\infty$	0,500		1,000	
$r_p=r_v=8$	0,475	-5,0%	-	-
$r_p=r_v=4$	0,471	-5,8%	0,816	-18,4%
$r_p=r_v=2$	0,465	-7,0%	0,786	-21,4%
$r_p=r_v=1$	0,454	-9,2%	0,748	-25,2%

Os dados das tabelas 4.12 e 4.13 mostram que a influência do coeficiente de variação das distribuições é maior quando n está próximo do ponto de saturação. Entende-se por ponto de saturação o valor mínimo de n que, admitindo-se tempos de viagem e atendimento constantes, alcança a vazão (produção) máxima do sistema de transporte.

Esse mesmo efeito pode ser observado, fixando-se uma distribuição para os tempos de viagem e variando-se a quantidade de embarcações e a ordem das ditribuições do tempos de atendimento nos portos.

As tabelas 4.14 e 4.15 apresentam, respectivamente, a vazão e o tempo médio de viagem redonda das embarcações em função da quantidade de embarcações em um problema ABA-AUTOPROP, considerando-se uma distribuição Erlang de ordem 4 para os tempos de viagem, razão entre tempos médios de viagem e atendimento nos portos de 2:1 e distribuições Erlang de ordem r = 1, 2, 4 e 8 para os tempos de viagem. As figuras 4.4 e 4.5 representam, respectivamente, as funções vazão e tempo médio de viagem redonda em função da quantidade de embarcações.

Nas tabelas 4.16 e 4.17, encontram-se os resultados para os casos com razão de 4:1 entre tempos médios de viagem e atendimento. As figuras 4.6 e 4.7 exibem graficamente estes mesmos resultados.

Tabela 4.14 Vazão em função da quantidade de embarcações para um problema ABA-AUTOPROP com distribuições Erlang de ordem 4 para os tempos de viagem e parâmetros: a) $c_1=c_2=1$; b) $1/\mu_1=1/\mu_2=1$, $1/\mu_3=1/\mu_4=2$.

n	λ(n)			
	$r_p=1$	$r_p=2$	$r_p=4$	$r_p=8$
1	0,1667	0,1667	0,1667	0,1667
2	0,3158	0,3205	0,3230	0,3242
3	0,4453	0,4591	0,4668	0,4708
4	0,5541	0,5798	0,5955	0,6040
5	0,6424	0,6802	0,7056	0,7205
6	0,7117	0,7593	0,7935	0,8154
7	0,7648	0,8180	0,8576	0,8844
8	0,8048	0,8595	0,9000	0,9518
9	0,8348	0,8882	0,9263	0,9649
10	0,8576	0,9080	0,9427	0,9649

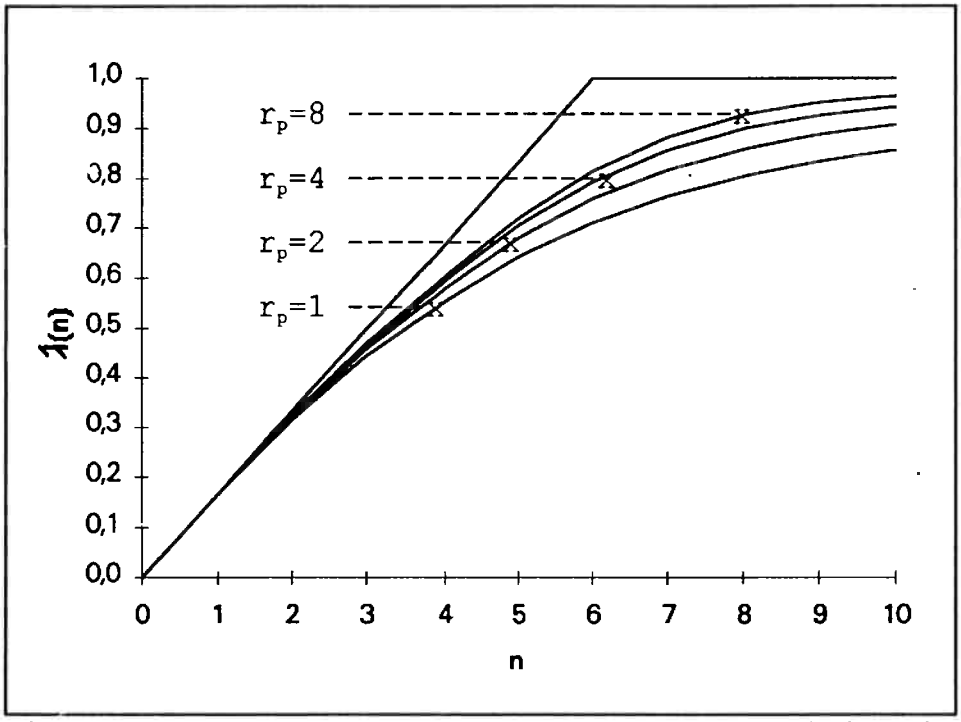

Figura 4.4 Vazão em função de quantidade de embarcações do problema ABA-AUTOPROP para diferentes distribuições dos tempos de atendimento e razão 2:1.

Tabela 4.15 Tempo médio de viagem redonda em função da quantidade de embarcações para um problema ABA-AUTOPROP com distribuições Erlang de ordem 4 para os tempos de viagem e parâmetros: a) $c_1=c_2=1$; b) $1/\mu_1=1/\mu_2=1$, $1/\mu_3=1/\mu_4=2$.

n	$E[T_{vr}(n)]$			
	$r_p=1$	$r_p=2$	$r_p=4$	$r_p=8$
1	6,00	6,00	6,00	6,00
2	6,33	6,24	6,19	6,17
3	6,74	6,54	6,43	6,37
4	7,22	6,90	6,72	6,62
5	7,78	7,35	7,09	6,94
6	8,43	7,90	7,56	7,36
7	9,15	8,56	8,16	7,92
8	9,94	9,31	8,89	8,62
9	10,78	10,13	9,72	9,46
10	11,66	11,01	10,61	10,36

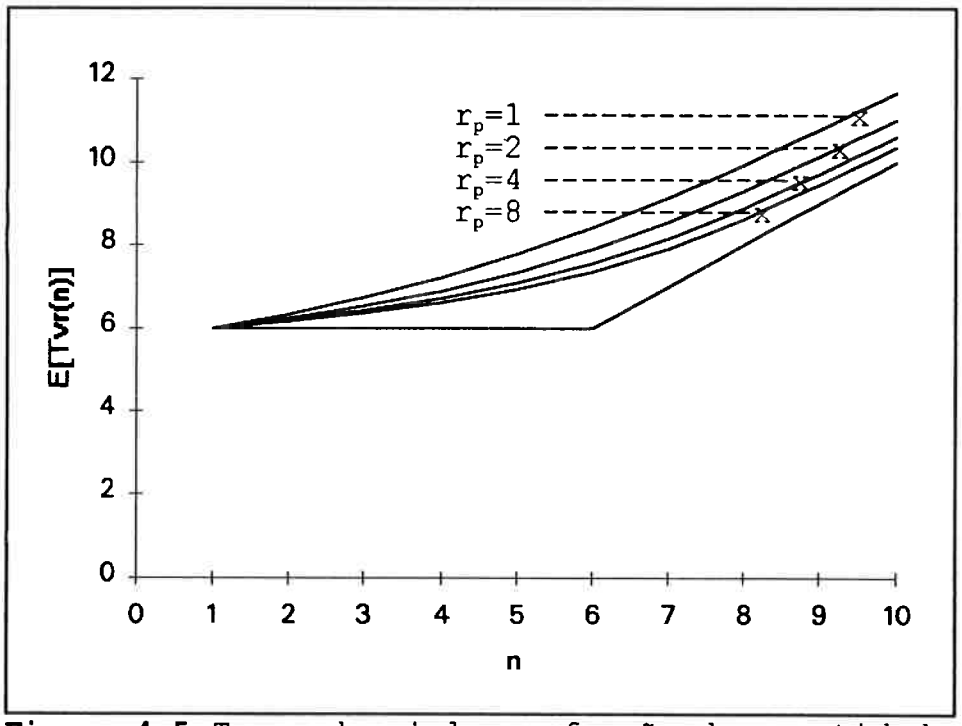

Figura 4.5 Tempo de ciclo em função da quantidade de embarcações do problema ABA-AUTOPROP para diferentes distribuições dos tempos e razão 2:1.

Tabela 4.16 Vazão em função da quantidade de embarcações para um problema ABA-AUTOPROP com distribuições Erlang de ordem 4 para os tempos de viagem e parâmetros: a) $c_1=c_2=1$; b) $1/\mu_1=1/\mu_2=1$, $1/\mu_3=1/\mu_4=4$.

n	$\lambda(n)$			
	$r_p=1$	$r_p=2$	$r_p=4$	$r_p=8$
1	0,1000	0,1000	0,1000	0,1000
2	0,1961	0,1971	0,1976	0,1978
3	0,2876	0,2907	0,2922	0,2930
4	0,3739	0,3802	0,3835	0,3851
5	0,4542	0,4650	0,4706	0,4735
6	0,5279	0,5441	0,5530	0,5576
7	0,5944	0,6169	0,6298	0,6366
8	0,6533	0,6824	0,7000	0,7095
9	0,7046	0,7399	0,7624	0,7752
10	0,7483	0,7888	0,8159	0,8322

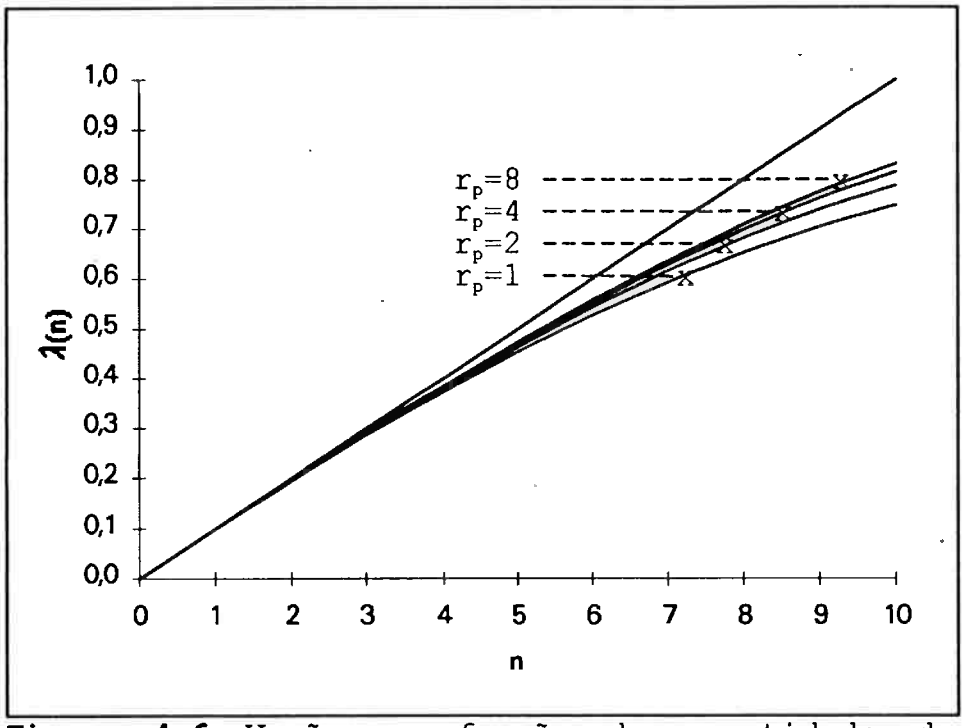

Figura 4.6 Vazão em função de quantidade de embarcações do problema ABA-AUTOPROP para diferentes distribuições dos tempos de atendimento e razão 4:1.

Tabela 4.17 Tempo médio de viagem redonda em função da quantidade de embarcações para um problema ABA-AUTOPROP com distribuições Erlang de ordem 4 para os tempos de viagem e parâmetros: a) $c_1=c_2=1$; b) $1/\mu_1=1/\mu_2=1$, $1/\mu_3=1/\mu_4=4$.

n	$E[T_{vr}(n)]$			
	$r_p=1$	$r_p=2$	$r_p=4$	$r_p=8$
1	10,00	10,00	10,00	10,00
2	10,20	10,15	10,12	10,11
3	10,43	10,32	10,27	10,24
4	10,70	10,52	10,43	10,39
5	11,01	10,75	10,62	10,56
6	11,37	11,03	10,85	10,76
7	11,78	11,35	11,12	11,00
8	12,25	11,72	11,43	11,28
9	12,77	12,16	11,81	11,61
10	13,36	12,68	12,26	12,02

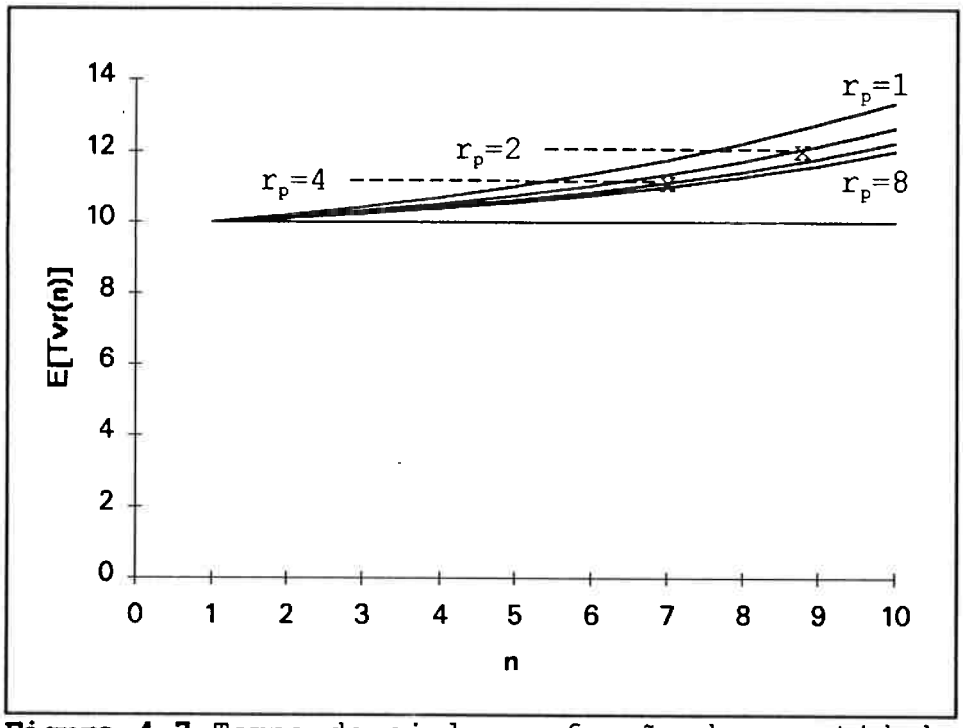

Figura 4.7 Tempo de ciclo em função da quantidade de embarcações do problema ABA-AUTOPROP para diferentes distribuições dos tempos e razão 4:1.

4.5 Discussões

Nesta seção discutem-se dois aspectos relacionados aos modelos propostos neste capítulo. O primeiro aspecto está relacionado ao crescimento da quantidade de estados em função dos parâmetros do modelo e o segundo à possibidade de acrescentar, nos modelos, múltiplos berços de atracação por porto.

Basicamente, os modelos propostos neste capítulo permitem, a partir do método da decomposição dos atendimentos em estágios, avaliar a influência do coeficiente de variação das distribuições dos tempos de atendimento e viagem no desempenho da frota. No entanto, a medida que aumenta a quantidade de estágios por atendimento (que corresponde à ordem das distrbiuções Erlang), ocorre um rápido crescimento na quantidade de estados da cadeia de Markov em tempo contínuo associada ao modelo. A grande quantidade de estados e a ausência de uma solução em forma de produto limitam a aplicação desta metodologia às configurações com menor número de portos e embarcações.

A hipótese de existência de um único berço de atracação por porto, conforme explicado anteriormente, permite representar o estado em cada porto por um escalar, que fornece a carga de trabalho existente no porto em cada instante t. Quando há múltiplos berços por porto, pode-se utilizar um vetor em que o componente zero represente a quantidade de embarcações no porto e o componente j ($j=1,\ldots,r_i$; $i=1,\ldots,M$), a quantidade de embarcações que se encontram no j-ésimo estágio de atendimento no

porto i, sendo a quantidade total de embarcações em atendimento nunca superior à quantidade de berços de atracação c_i (i=1,...,M). Para introduzir esta modificação no modelo ABA, é necessário redefinir o espaço de estados e a função de indexação dos estados, $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{n})$. Deve-se esperar, no entanto, um crescimento na quantidade de estados, se comparado ao caso com um único berço de atracação por porto.

5 REDES CIRCULARES COM DISTRIBUIÇÕES EXPONENCIAIS E DESMEMBRAMENTO DOS COMBOIOS NOS PORTOS.

Neste capítulo, analisa-se a operação circular e com desmembramento de uma frota de comboios fluviais. Uma descrição do sistema de transporte fluvial em consideração é encontrada na seção 5.1. Na seção 5.2, apresenta-se um modelo semelhante ao modelo clássico de filas M/M/c para representar a operação com desmembramento em um porto isoladamente, admitindo-se que o processo de chegada dos comboios seja Poisson e que haja c berços de atracação para carga e descarga das barcaças. A seção 5.3 traz um modelo de cadeia de Markov em tempo contínuo, que permite analisar a operação circular de uma frota de comboios fluviais. Neste modelo, os tempos de atendimentos das barcaças nos portos e os tempos de viagem dos comboios são variáveis aleatórias com distribuições exponenciais. A seção 5.4 trata da implementação computacional deste modelo, para o caso particular de uma rede com dois portos e comboios formados por um empurrador e uma única barcaça, designado modelo ABA-COMBOIO. Na seção 5.5, é feita uma análise de resultados para alguns casos particulares considerados. Ao final do capítulo, seção 5.6, é feita uma discussão a respeito do modelo proposto.

5.1 Descrição do Problema

Conforme discutido no capítulo 1, a operação com desmembramento visa reduzir o tempo de permanência dos empurradores nos portos. Neste capítulo, desenvolve-se um modelo que possibilita a avaliação do desempenho operacional de algumas configurações de operação com desmembramento.

O problema de transporte em análise é caracterizado por uma rede circular com M portos e uma frota com N empurradores (embarcações propulsoras) e N_b barcaças (embarcações de carga). Por hipótese, tanto o conjunto dos empurradores quanto o conjunto das barcaças são homogêneos, isto é, são formados por veículos idênticos. Admite-se que cada comboio seja formado por um empurrador e um conjunto de n_b barcaças.

Os comboios executam um roteiro circular entre os M portos da rede, transportando uma certa quantidade de carga por viagem redonda. Adotando-se arbitrariamente um dos portos como ponto de partida, numeram-se os portos de 1 a M, iniciando-se pelo porto escolhido, seguindo o roteiro dos comboios. Cada porto i possui c_i berços de atracação semelhantes e independentes ($i=1,\ldots,M$).

Considere-se que cada porto i seja provido de uma quantidade b_i de barcaças adicionais ($b_i=0,1,\ldots;\ i=1,\ldots,M$)[1]. Suponha-se que, nos portos em que haja barcaças adicionais ($b_i>0$), ocorra a

---

[1] A frota de embarcações passa a ter N empurradores e $N_b=N\bullet n_b+\sum_i b_i$ barcaças.

seguinte forma de operação: a) quando um comboio chega ao porto, ocorre o desmembramento e as n_b barcaças são acrescentadas à fila de barcaças a serem atendidas; b_1) se o porto apresenta pelo menos n_b barcaças prontas naquele momento, forma-se um novo comboio com o empurrador que acaba de chegar e as n_b primeiras barcaças, que segue viagem[2]; b_2) caso não haja um número suficiente de barcaças prontas para formar um novo comboio, o empurrador entra em uma fila de empurradores a espera de barcaças, antes prosseguir a viagem. Nos portos em que não há barcaças adicionais (b_i=0), os empurradores devem aguardar a atendimento (preparação) das barcaças dos respectivos comboios.

A distribuição dos tempos de atendimento das barcaças em cada porto e a distribuição dos tempos de viagem dos comboios entre os portos são conhecidas a priori; os tempos de acoplamento e desacoplamento dos comboios são desprezados frente aos tempos de atendimento das barcaças.

Deseja-se calcular alguns índices de desempenho semelhantes aos apresentados no capítulo 3. Em primeiro lugar, analisa-se a variável $N_{vr}(t)$, que representa a quantidade de viagens redondas concluídas em um intervalo de tempo (0,t), conhecida a condição inicial no instante 0. Para efeito de contagem da quantidade de viagens redondas, será considerado que uma viagem redonda (ciclo) se completa, sempre que se concluir o atendimento de uma barcaça no porto M. Define-se $\lambda=\lim_{t\to\infty} N_{vr}(t)/t$, que representa a vazão ou fluxo de embarcações, em regime estacionário, no intervalo (0,t).

---

[2] A existência de n_b barcaças prontas implica que não haja nenhum empurrador na fila, naquele instante no porto.

Além do parâmetro λ, calculam-se os tempos médios de permanência dos empurradores nos portos e os tempos médios de viagem redonda dos comboios. O cálculo do tempo médio de permanência de um empurrador em um dado porto é feito a partir da fórmula de Little, depois de obtidas a vazão e a distribuição da quantidade de empurradores no referido porto. Pode-se calcular, também, um índice de congestionamento dos portos em relação à quantidade de barcaças na fila, em regime estacionário.

5.2 Modelo M/M/c com Desmembramento

Seja um porto dotado de c berços de atracação, semelhantes e independentes, onde são atendidas as barcaças dos comboios que chegam ao porto. Considere-se que os comboios sejam padronizados (embarcações semelhantes), que os tempos de atendimento das barcaças sejam variáveis aleatórias independentes com distribuição exponencial e média $1/\mu$ e que o processo de chegada dos comboios, formados por um empurrador e uma única barcaça (n_b=1), caracaterize um processo Poisson com taxa λ.

Suponha-se que o porto dispõe de b (b=0,1,...) barcaças extras e que, em um dado instante inicial, t=0, estas barcaças estejam prontas e ordenadas. Considere-se que, a partir deste instante, inicie-se o processo de chegada dos comboios, designados pela ordem de chegada. O primeiro comboio a chegar no porto é desmembrado; a barcaça entra em atendimento, o empurrador forma um novo comboio com a primeira barcaça pronta e segue

viagem. Este processo se repete, até a chegada do b-ésimo comboio, podendo, neste período, ocorrer a formação de uma fila de barcaças para atendimento. A partir de então, o empurrador do n-ésimo comboio (n>b) forma um novo comboio com a barcaça deixada no porto pelo (n-b)-ésimo comboio. Eventualmente, esta barcaça pode encontrar-se pronta no instante de chegada do n-ésimo comboio, neste caso, um novo comboio é formado e parte imediatamente; caso contrário, o empurrador deve aguardar a barcaça em uma fila de empurradores.

Para estudar o processo, considerar-se-á uma variável aleatória X(t) que represente a quantidade de barcaças aguardando ou em atendimento no porto, no instante t. A partir de X(t), é possível determinar a quantidade de empurradores presentes no porto no instante t, Y(t), por

$$Y(t) = \begin{cases} 0, & se\ X(t) \leq b \\ X(t) - b, & caso\ contrário \end{cases} \qquad (5.1)$$

O processo {X(t), t≥0} constitui um processo de nascimento e morte em tempo contínuo com espaço amostral S={0,1,...}, cujo diagrama de transições entre estados é apresentado na figura 5.1.

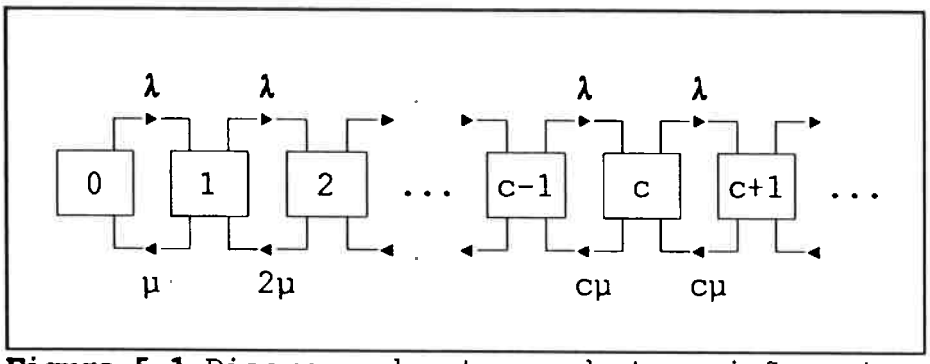

Figura 5.1 Diagrama das taxas de transição entre estados do modelo M/M/c com desmembramento.

A matriz geradora infinitesimal de probabilidades deste processo, Q, é dada por

$$Q = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ c-1 \\ c \\ c+1 \\ \vdots \end{array} \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & & \cdots & & & & \cdots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \cdots & & & & \cdots \\ & 2\mu & -(\lambda+\mu) & \cdots & & & & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ & & & \cdots & -(\lambda+\mu) & \lambda & & \cdots \\ & & & \cdots & c\mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \cdots \\ & & & \cdots & & c\mu & -(\lambda+\mu) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

Seja p(k) a probabilidade de haver k barcaças aguardando ou em atendimento no porto, em um determinado instante t, em regime estacionário. Admitindo-se que $\lambda/c\mu<1$, a distribuição {p(k) k=0,1,2,...} existe e pode ser determinada a partir do seguinte sistema de equações lineares:

$$
\begin{aligned}
\lambda p(0) &= \mu p(1) \\
(\lambda+k\mu)p(k) &= \lambda p(k-1) + (k+1)\mu p(k+1) \qquad k=1,2,\ldots,c-1 \\
(\lambda+c\mu)p(k) &= \lambda p(k-1) + c\mu p(k+1) \qquad k=c,c+1,\ldots \qquad (5.3) \\
\sum_{k=0}^{\infty} p(k) &= 1
\end{aligned}
$$

Da resolução do sistema de equações (5.3), obtêm-se

$$
p(k) = \begin{cases} \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{n!}p(0) & k=1,\ldots,c-1 \\[2ex] \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{c!\,c^{n-c}}p(0) & k=c,c+1,\ldots \end{cases} \qquad (5.4)
$$

e

$$
p(0) = \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^n}{c!\,(1-\lambda/c\mu)}} \qquad (5.5)
$$

Seja q(n) a probabilidade de haver n empurradores no porto, no instante t, em regime estacionário. Esta distribuição pode ser calculada, a partir da distribuição {p(k), k=0,1,...}, como se segue:

$$q(0) = \sum_{k=0}^{b} p(k)$$
$$q(n) = p(n+b) \qquad n=1,2,\ldots \tag{5.6}$$

Conhecida a distribuição {q(n), n=0,1,...}, determina-se a expectância da quantidade de empurradores no porto, $E[L^e]$, e, pela aplicação da fórmula de Little, obtém-se o tempo médio de permanência dos empurradores no porto, $E[W^e]$.

$$E[L^e] = \sum_{n=1}^{\infty} nq(n) \tag{5.7}$$

$$E[W^e] = \frac{E[L^e]}{\lambda} \tag{5.8}$$

O índice de congestionamento do porto é dado por $\rho=\lambda/c\mu$.

O modelo apresentado pressupõe que cada comboio seja formado por um empurrador e uma única barcaça. Considere-se, então, que cada comboio seja contituído por um empurrador e um conjunto de n_b barcaças. Seja X(t) uma v.a. que represente a quantidade de barcaças na fila ou em atendimento no porto. Admitindo-se que os tempos de atendimento das barcaças sejam variáveis aletórias com distribuições exponenciais, então, o processo {X(t), t≥0} constitui, novamente, uma cadeia de Markov em tempo contínuo com espaço amostral S={0,1,...}.

Ao contrário do caso particular em que $n_b=1$, que dá origem a um processo de nascimento e morte em tempo contínuo, o processo $\{X(t),\ t\geq 0\}$ apresenta as seguintes transições entre estados:

a) $j \rightarrow j+n_b$, que corresponde à chegada de um comboio;

b) $j \rightarrow j-1$ $(j>0)$, que corresponde ao atendimento de uma barcaça.

Resolvendo-se as equações de balanço global entre estados, determina-se a distribuição estacionária da quantidade de barcaças na fila ou em atendimento nos portos. A condição para existência do regime estacionário é que $\rho=(n_b\lambda/c\mu)<1$, ou seja, que a taxa média de chegada de barcaças ao porto seja inferior a capacidade máxima média de atendimento do porto[3].

Para que um empurrador não tenha que aguardar no porto é necessário que, no instante de sua chegada ao porto, haja pelo menos n_b barcaças prontas. A quantidade de empurradores no porto, em um dado instante t, Y(t), está relacionada com X(t) pela seguinte expressão:

$$Y(t) = \begin{cases} 0, & se\ X(t) \leq b \\ int\left(\dfrac{X(t)-b+n_b-1}{n_b}\right), & caso\ contrário \end{cases} \qquad (5.9)$$

onde int(x) fornece a parte inteira do argumento real x. Assim, determinada a distribuição estacionária da quantidade de

[3] Este sistema de fila é similar aos modelos de fila isolada com chegada em grupo e atendimento individual.

barcaças, $\{p(k), k=0,1,...\}$, em regime estacionário, determina-se a distribuição da quantidade de empurradores no porto, $\{q(n), n=0,1,...\}$ e, conseqüentemente, o tempo médio de permanência destes empurradores no porto.

5.3 Modelagem para Rede Circular

Nesta seção, utiliza-se uma cadeia de Markov em tempo contínuo como modelo para a operação circular e com desmembramento de uma frota de comboios entre M portos.

Suponha-se que a frota seja formada por N empurradores e que cada porto apresente c_i berços de atracação e b_i barcaças adicionais $(i=1,...,M)$. Considere-se que cada comboio seja formado por um empurrador e uma única barcaça $(n_b=1)$ e que os tempos de atendimento das barcaças e os tempos de viagem dos comboios sejam variáveis aleatórias exponenciais. Sejam $1/\mu_i$ o tempo médio de atendimento de uma barcaça no porto i e $1/\mu_{M+i}$ o tempo médio de viagem de um comboio do porto i para o porto i+1[4].

A análise do sistema de transporte é feita por uma cadeia de Markov em tempo contínuo $\{X(t), t\geq 0\}$ que assume valores no espaço amostral $S=\{1,...,J\}$. Cada estado j desta cadeia está associado a um vetor $\mathbf{n}\in C(N,M)$ dado por

[4] No caso particular i=M, $1/\mu_{2M}$ representa o tempo médio de viagem dos comboios do porto M para o porto 1.

$$C(N,M)=\{(n_1,\ldots,n_M,n_{M+1},\ldots,n_{2M})\,|\,n_i\in\mathbb{N},\ \sum_{i=1}^{M}\gamma_i(n_i)+n_{M+i}=N\} \quad (5.10)$$

onde:

a) os componentes n_i representam a quantidade de barcaças aguardando ou em atendimento no porto i (i=1,...,M);

b) os componentes n_{M+i} representam o número de comboios em viagem entre os portos i e i+1 (i=1,...,M-1) e o componente n_{2M} representa a quantidade de comboios em viagem entre os portos M e 1;

c) a função $\gamma_i(k)$ (i=1,...,M) determina a quantidade de empurradores presentes no porto i em uma dado instante t ($\gamma_i(k)=\max(k-b_i,0)$, i=1,...,M).

De forma análoga ao modelos dos capítulos anteriores, necessita-se especificar uma forma de ordenação dos estados da cadeia de Markov em tempo contínuo associada ao modelo e uma função de indexação dos estados $\phi(\mathbf{n})$ que relacione os vetores **n** aos estados j. A tabela 5.1 apresenta a ordenação dos estados para o caso particular em que M=2.

Tabela 5.1 Ordenação dos estados de um modelo ABA-COMBOIO.

$\phi(\mathbf{n})$	$\mathbf{n}$
1	(0 , 0 , 0 , N)
2	(0 , 0 , 1 , N-1)
3	(0 , 0 , 2 , N-2)
⋮	⋮
N+1	(0 , 0 , N , 0)
N+2	(0 , 1 , 0 , N)
N+3	(0 , 1 , 1 , N-1)
⋮	⋮
⋮	⋮
$b_2(N+1)+N+1$	(0 , b_2 , N , 0)
$b_2(N+1)+N+2$	(0 , b_2+1, 0 , N-1)
$b_2(N+1)+N+3$	(0 , b_2+1, 1 , N-2)
⋮	⋮
⋮	⋮
$b_2(N+1)+(N+2)(N+1)/2$	(0 , b_2+N, 0 , 0)
$b_2(N+1)+(N+2)(N+1)/2+1$	(1 , 0 , 0 , N)
⋮	⋮
⋮	⋮
⋮	⋮
J	(b_1+N, 0 , 0 , 0)

No caso particular do modelo ABA-COMBOIO, considerando-se a ordenação apresentada na tabela 5.1, a função $\phi(\mathbf{n})$ é dada por

$$\phi(\boldsymbol{n}) = \phi_1(\boldsymbol{n}) + \phi_2(\boldsymbol{n}) + \phi_3(\boldsymbol{n}) + \phi_4(\boldsymbol{n}) + 1 \tag{5.11}$$

onde:

$$\phi_1(\boldsymbol{n}) = \begin{cases} n_1 \cdot \left[\binom{N+2}{2} + b_2 \cdot (N+1)\right], & se\ n_1 = 0, \ldots, b_1 \\ \binom{N+3}{3} - \binom{N-\gamma_1(n_1)+3}{3} & \\ \quad + b_2 \cdot \left[\binom{N+2}{2} + \binom{N-\gamma_1(n_1)+2}{2}\right] & \\ \quad + b_1 \left[\binom{N+2}{2} + b_2 \cdot (N+1)\right], & caso\ contrário \end{cases} \tag{5.12}$$

$$\phi_2(\boldsymbol{n}) = \begin{cases} n_2 \cdot (N-\gamma_1(n_1)+1), & se\ n_2=0,\ldots,b_2 \\ \binom{N-\gamma_1(n_1)-\gamma_2(n_2)+2}{2} & \\ \quad + b_2 \cdot (N-\gamma_1(n_1)+1), & caso\ contrário \end{cases} \tag{5.13}$$

$$\phi_3(\boldsymbol{n}) = n_3 \tag{5.14}$$

$$\phi_4(\boldsymbol{n}) = 0 \tag{5.15}$$

Retomando o caso geral com M portos, existem dois tipos de eventos nesta rede circular que gorvernam as transições da cadeia de Markov em tempo contínuo $\{X(t),\ t \geq 0\}$:

a) término de atendimento de uma barcaça no porto i $(i=1,\ldots,M)$;

b) chegada de um comboio ao porto i $(i=1,\ldots,M)$.

Ao evento (a) estão associadas duas transições possíveis entre estados do espaço amostral:

$a_1)$ $\phi(\mathbf{n}) \rightarrow (n_1,\ldots,n_i-1,\ldots,n_M,n_{M+1},\ldots,n_{2M})$ $\quad (n_i=0,\ldots,b_i)$;

$a_2)$ $\phi(\mathbf{n}) \rightarrow (n_1,\ldots,n_i-1,\ldots,n_M,n_{M+1},\ldots n_{M+i}+1,\ldots,n_{2M})$

$(n_i=b_i+1,\ldots)$.

A primeira transição ocorre quando não há nenhum empurrador esperando no porto i, enquanto na segunda, existe pelo menos um empurrador que, com a conclusão do atendimento da barcaça, forma um novo comboio e inicia viagem em direção ao porto seguinte do roteiro.

Analogamente, ao evento (b) estão associadas às seguintes transições da cadeia:

$b_1)$ $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{n}) \rightarrow (n_1,\ldots,n_i+1,\ldots,n_M,n_{M+1},\ldots,n_{M+i-1}-1,\ldots,n_{2M})$[5]

$(n_{M+i-1}>0,\ n_i \geq b_i)$;

$b_2)$ $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{n}) \rightarrow (n_1,\ldots,n_i+1,\ldots,n_M,n_{M+1},\ldots,n_{M+i-1}-1,n_{M+i}+1,\ldots,n_{2M})$[6]

$(n_{M+i-1}>0,\ n_i<b_i)$.

No primeiro caso, não há nenhuma barcaça pronta no porto i e, por isto, o empurrador deve aguardar em fila antes de partir. Por outro lado, em (b_2), existe pelo menos uma barcaça pronta, que permite a formação de um novo comboio com o empurrador que chega ao porto e o início de uma nova viagem.

A solução do modelo consiste em determinar a distribuição estacionária da cadeia de Markov[7]. Ao contrário do modelo do capítulo 3, que possui uma expressão em forma de produto para a probabilidade estacionária dos estados, não foi encontrada uma expressão analítica semelhante para o modelo em questão. A determinação da distribuição estacionária $\{\boldsymbol{\pi}_j,\ j=1,\ldots,J\}$ deve, então, ser obtida a partir do sistema de equações lineares

---

[5] Em particular, no caso do porto 1, tem-se:

$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{n}) \rightarrow (n_1+1,\ldots,n_M,n_{M+1},\ldots,n_{2M}-1)$ $\qquad (n_{2M}>0,\ n_1 \geq b_1)$;

[6] Novamente, no caso do porto 1, tem-se:

$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{n}) \rightarrow (n_1+1,\ldots,n_M,n_{M+1}+1,\ldots,n_{2M}-1)$ $\qquad (n_{2M}>0,\ n_1<b_1)$;

[7] Pelas hipóteses adotadas, verifica-se que a cadeia de Markov em tempo contínuo associada ao modelo é finita e irredutível e, portanto, apresenta uma distribuição estacionária.

$$\boldsymbol{\pi}\, Q = \mathbf{0}$$
$$\sum_{j=1}^{J} \pi_j = 1 \qquad (5.16)$$

onde Q é a matriz geradora infinitesimal da cadeia.

A partir da distribuição estacionária conjunta $\{\pi_j, j=1,\ldots,J\}$, obtêm-se as distribuições estacionárias marginais da quantidade de barcaças aguardando ou em atendimento em cada porto $\{p_i(k),\ k=0,\ldots,N+b_i;\ i=1,\ldots,M\}$ e, de forma similar ao modelo M/M/c com desmembramento visto em 5.2, as distribuições estacionárias marginais da quantidade de empurradores em cada porto $\{q_i(n),\ n=0,\ldots,N;\ i=1,\ldots,M\}$.

A determinação da vazão pode ser feita, a partir da distribuição da quantidade de barcaças na fila ou em atendimento de qualquer porto i da rede, $\{p_i(k),\ k=0,1,\ldots,N+b_i;\ i=1,\ldots,M\}$, pela expressão abaixo.

$$\lambda = \sum_{k=1}^{N+b_i} \alpha_i(k)\,\mu_i p_i(k) \qquad i=1,\ldots,M \qquad (5.17)$$

onde $\alpha_i(k)=\min(k,c_i)$.

A partir da distribuição $\{q_i(n),\ n=0,1,\ldots,N;\ i=1,\ldots,M\}$, determina-se a expectância da quantidade de empurradores no porto i, $E[L_i^e]$.

$$E[L_i^e] = \sum_{k=1}^{N} n q_i(n) \qquad i=1,\ldots,M \tag{5.18}$$

Da fórmula de Little, obtém-se o tempo médio de permanência dos empurradores no porto i e, a seguir, o tempo médio de viagem redonda dos empurradores.

$$E[W_i^e] = \frac{E[L_i^e]}{\lambda} \qquad i=1,\ldots,M \tag{5.19}$$

$$E[T_{vr}^e] = \sum_{i=1}^{M} \left(E[W_i^e] + \frac{1}{\mu_{M+i}} \right) \tag{5.20}$$

O índice congestionamento do porto pode ser calculado pela expressão

$$\rho_i = \sum_{k=1}^{N+b_i} \frac{\alpha_i(k)}{c_i} p_i(k) = \frac{\lambda}{c\mu_i} \qquad i=1,\ldots,M \tag{5.21}$$

Exemplo 5.1 Considere-se um problema ABA-COMOBIO com um único comboio (N=1) e uma barcaça adicional em cada porto ($b_1=b_2=1$). Sejam $c_1=c_2=1$, $1/\mu_1=1/\mu_2=1$ e $1/\mu_3=1/\mu_4=4$.

Os estados da cadeia de Markov em tempo contínuo associada ao modelo estão apresentados na tabela 5.2.

Tabela 5.2 Estados da Cadeia de Markov em tempo contínuo do exemplo 5.1.

n	**ϕ(n)**
(0,0,0,1)	1
(0,0,1,0)	2
(0,1,0,1)	3
(0,1,1,0)	4
(0,2,0,0)	5
(1,0,0,1)	6
(1,0,1,0)	7
(1,1,0,1)	8
(1,1,1,0)	9
(1,2,0,0)	10
(2,0,0,0)	11
(2,1,0,0)	12

A matriz geradora infinitesimal de probabilidades, Q, é dada em (5.19). Na representação da matriz Q, foram omitidos os elementos da diagonal principal que correspondem, em cada linha, ao oposto da soma do elementos da linha.

$$Q=\begin{bmatrix} \bullet & & & & & & 0,25 & & & & & \\ & \bullet & 0,25 & & & & & & & & & \\ 1,00 & & \bullet & & & & & & 0,25 & & & \\ & 1,00 & & \bullet & 0,25 & & & & & & & \\ & & 1,00 & & \bullet & & & & & & & \\ 1,00 & & & & & \bullet & & & & & 0,25 & \\ & 1,00 & & & & & \bullet & 0,25 & & & & \\ & & 1,00 & & & 1,00 & & \bullet & & & & 0,25 \\ & & & 1,00 & & & 1,00 & & \bullet & 0,25 & & \\ & & & & 1,00 & & & 1,00 & & \bullet & & \\ & & & & & & 1,00 & & & & \bullet & \\ & & & & & & & & 1,00 & & 1,00 & \bullet \end{bmatrix}$$

(5.19)

Resolvendo-se o sistema $\pi Q=\mathbf{0}$ e $\sum\pi_j=1$ obtém-se a distribuição conjunta apresentada na tabela 5.3.

Tabela 5.3 Distribuição estacionária dos estados da Cadeia de Markov em tempo contínuo do exemplo 5.1.

j	π_j
1	0.38790
2	0.38790
3	0.08863
4	0.00834
5	0.00339
6	0.00834
7	0.08863
8	0.01043
9	0.01043
10	0.00130
11	0.00339
12	0.00130

As distribuições estacionárias marginais da quantidade de barcaças, $\{p_i(k),\ k=0,1,2;\ i=1,2\}$, e da quantidade de empurradores, $\{q_i(k),\ k=0,1;\ i=1,2\}$, para os portos 1 e 2, são,

por razão da simetria, iguais. Estas distribuições estão apresentadas na Tabela 5.4.

Tabela 5.4 Distribuições marginais da quantidade de barcaças e empurradores nos portos do exemplo 5.1.

k	p(k)	q(k)
0	0.87617	0.99530
1	0.11913	0.00469
2	0.00469	-

A partir destas distribuições, calculam-se:

a) $\lambda = 0.12382$;

b) $E[L_1^e] = E[L_2^e] = 0.00469$;

c) $E[W_1^e] = E[W_2^e] = 0.03788$;

d) $E[T_{vr}^e] = 8.07576$.

5.4 Implementação Computacional

Nesta seção discutem-se alguns aspectos computacionais do modelo ABA-COMBOIO. No apêndice VIII, apresenta-se uma implementação deste modelo em linguagem C, que elabora a matriz das taxas de transição entre estados, resolve o sistema de equações de balanço global entre estados para determinação das distribuições estacionárias, determina as distribuições marginais e calcula alguns índices de desempenho.

O procedimento computacional para resolução do modelo é semelhante ao apresentado no capítulo 3, seção 3.3.1. A matriz geradora infinitesimal de probabilidades é armazenada em vetores DQ, NQ, IQ e JQ. DQ contém os componentes da diagonal principal de Q em valor absoluto, NQ, os componentes não nulos fora da diagonal, ordenados por linha e por coluna e os vetorer IQ e JQ contêm índices que permitem identificar a posição dos componentes não nulos fora da diagonal principal de Q.

As dimensões dos vetores DQ, NQ, IQ e JQ são determinadas pela quantidade de estados da cadeia de Markov em tempo contínuo, J, e pela quantidade de transições entre estados, K, que podem ser calculadas pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned} J = & \binom{N-1}{3} + \binom{N-1}{2}\cdot(b_1+b_2+4) \\ & + \binom{N-1}{1}\cdot(b_1b_2+3\cdot(b_1+b_2)+6) \\ & + \binom{N-1}{0}\cdot(2b_1b_2+3\cdot(b_1+b_2)+4) \end{aligned} \tag{5.23}$$

$$\begin{aligned} K = & \binom{N-1}{3}\cdot 4 + \binom{N-1}{2}\cdot(4\cdot(b_1+b_2)+12) \\ & + \binom{N-1}{1}\cdot(4b_1b_2+9\cdot(b_1+b_2)+12) \\ & + \binom{N-1}{0}\cdot(6b_1b_2+6\cdot(b_1+b_2)+4) \end{aligned} \tag{5.24}$$

Utilizando-se as expressões (5.23) e (5.24), foram calculados os parâmetros J e K para algumas configurações do modelo ABA-COMBOIO, admitindo-se a existência de b embarcações adicionais em cada porto. Os resultados obtidos estão expressos na tabela 5.5 a seguir.

Tabela 5.5 Quantidade de estados e transições no modelo ABA-COMBOIO com b barcaças adicionais em cada porto.

N	b	J	K
5	0	56	140
	1	104	294
	2	164	492
	3	236	734
10	0	286	880
	1	429	1384
	2	594	1972
	3	781	2644
15	0	816	2720
	1	1104	3774
	2	1424	4952
	3	1776	6254
20	0	1771	6160
	1	2254	7964
	2	2779	9932
	3	3346	12064

O procedimento de solução do modelo ABA-COMBOIO inicia-se pela construção da matriz geradora infinitesimal de probabilidades, Q, associada ao modelo, o que é feito aplicando-se o algoritmo apresentado na figura 5.2.

```
entrada : N, c1, c2, b1, b2, μ1, μ2, μ3, μ4;
saída   : DQ[j], NQ[k], IQ[j], JQ[k];
início
  j ← 1, k ← 1;
  para n1 de 0 a N+b1 faça
    para n2 de 0 a N-γ1(n1)+b2 faça
      para n3 de 0 a N-γ1(n1)-γ1(n2) faça
        início
          n4 ← N-γ1(n1)-γ1(n2)-n3;
          α1(n1) ← min(n1,c1);          α2(n2) ← min(n2,c2);
          DQ[j] ← α1(n1)μ1+α2(n2)μ2+n3μ3+n4μ4;
          IQ[j] ← 1;
          se (n1>0) então
            início
              se (γ1(n1)>0)
              então m ← (n1-1,n2,n3+1,n4)
              senão m ← (n1-1,n2,n3,n4);
              NQ[k] ← α1(n1)μ1;        JQ[k] ← φ(m);
              k ← k+1;
            fim;
          se (n2>0) então
            início
              se (γ2(n2)>0)
              então m ← (n1,n2-1,n3,n4+1)
              senão m ← (n1,n2-1,n3,n4);
              NQ[k] ← α2(n2)μ2;        JQ[k] ← φ(m);
              k ← k+1;
            fim;
          se (n3>0) então
            início
              se (γ1(n1)>0)
              então m ← (n1,n2+1,n3-1,n4)
              senão m ← (n1,n2+1,n3-1,n4+1)
              NQ[k] ← n3μ3;     JQ[k] ← φ(m);
              k ← k+1;
            fim;
          se (n4>0) então
            início
              se (γ2(n2)>0)
              então m ← (n1+1,n2,n3,n4-1)
              senão m ← (n1+1,n2+1,n3,n4-1)
              NQ[k] ← n4μ4;     JQ[k] ← φ(m);
              k ← k+1;
            fim;
          j ← j+1;
        fim;
  IQ[j] ← k;
fim.
```

Figura 5.2 Algoritmo para elaboração da matriz Q do modelo ABA-COMBOIO.

De forma análoga ao método da cadeia de Markov em tempo contínuo do capítulo 3, construída a matriz Q das taxas de transição entre estados, aplica-se o processo de uniformização à cadeia de Markov em tempo contínuo. Obtém-se, então, uma cadeia de Markov em tempo discreto com matriz de probabilidades de transição entre estados P. Determina-se iterativamente a distribuição $\{\pi_j,\ j=1,\ldots J\}$, a partir de $\pi=\pi P$, que é a mesma distribuição estacionária do processo em tempo contínuo. Estes procedimentos são os mesmos utilizados nos capítulos 3 e 4.

A seguir, calculam-se as distribuições marginais da quantidade de barcaças na fila ou em atendimento e da quantidade de empurradores nos portos, $\{p_i(k),\ k=0,\ldots,N+b_i;\ i=1,2\}$ e $\{q_i(n),\ n=0,\ldots,N;\ i=1,2\}$. O procedimento para a obtenção das distribuições marginais da quantidade de empurradores nos portos é mostrado na figura 5.3.

```
entrada : N, b1, b2, π[j];
saída   : q1[n], q2[n];
início
  para k de 0 a N faça q1[k] ← 0, q2[k] ← 0;
  j ← 1;
  para n1 de 0 a N+b1 faça
    para n2 de 0 a N-γ1(n1)+b2 faça
      para n3 de 0 a N-γ1(n1)-γ2(n2) faça
        início
          n4 ← N-γ1(n1)-γ2(n2)-n3;
          q1[γ1(n1)] ← q1[γ1(n1)]+π[j];
          q2[γ2(n2)] ← q2[γ2(n2)]+π[j];
          j ← j+1;
        fim;
fim.
```

Figura 5.3 Algoritmo para obtenção das distribuições marginais da quantidade de empurradores nos portos do modelo ABA-COMBOIO.

5.5 Análise de Resultados

Antes de discutir os resultados obtidos para o problema ABA-COMBOIO, apresenta-se uma comparação entre a opção de operação com uma frota de embarcações autopropelidas e uma frota de comboios com desmembramento nos portos, considerando-se tempos de viagem entre os portos e de atendimento constantes. Considerem-se um problema ABA e as seguintes configurações:

a) uma frota de embarcações autopropelidas com tempos de atendimento nos portos iguais a 1, tempos de viagem entre os portos iguais a 4 e um berço de atracação por porto;

b) uma frota de comboios formados por um empurrador e uma barcaça com capacidades de carga equivalentes às das embarcações autopropelidas da configuração anterior, tempos de viagem dos comboios entre os portos iguais a 4, tempos de atendimento das barcaças iguais a 1 e um berço de atracação em cada porto.

As figuras 5.4 e 5.5 apresentam, para as configurações (a) em tracejado e (b) em traço contínuo, a vazão e o tempo de viagem redonda em função da quantidade n, que representa, no caso (a), a quantidade de embarcações autopropelidas e, no caso (b), a quantidade de comboios (empurradores). Verifica-se, por exemplo, que a produção de uma frota com 10 embarcações autopropelidas (λ=1) pode ser alcançada, na operação com comboios fluviais e com desmembramento, com uma frota de 8 empurradores e 10 barcaças (uma barcaça adicional em cada porto).

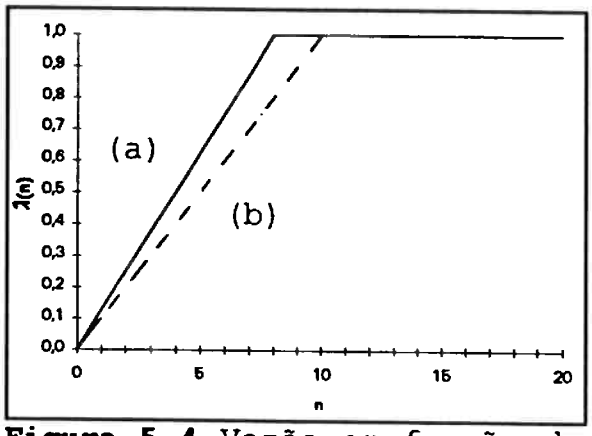

Figura 5.4 Vazão em função de n para configurações com embarcações autopropelidas (a) e comboios (b); caso determinístico.

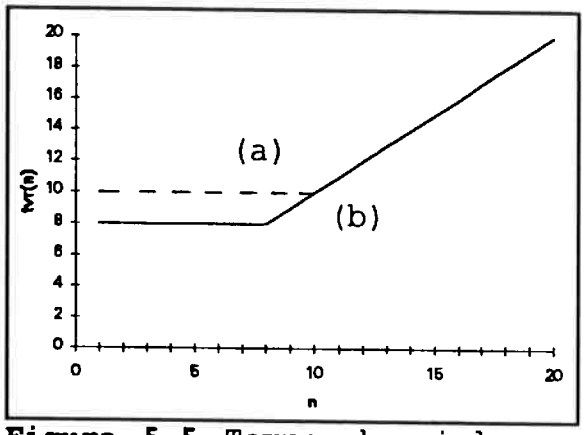

Figura 5.5 Tempo de ciclo em função de n para configurações com embarcações autopropelidas (a) e comboios (b); caso determinístico.

No caso particular do problema ABA-COMBOIO determinístico, nota-se que não há vantagens em acrescentar mais que uma embarcação em cada porto. Observa-se também que, a partir do ponto de saturação da rede (n=10), as barcaças adcionais perdem o efeito no aumento da produção da frota. Estes fatos não se verificam nos casos estocásticos. Quando se considera que os tempos de viagem entre os portos e os tempos de atendimento das barcaças são variáveis aleatórias, em determinadas situações, é conveniente acrescentar mais de uma barcaça por porto.

As tabelas 5.6 e 5.7 apresentam a vazão e o tempo médio de viagem redonda de um exemplo do problema ABA-COMBOIO probabilístico, onde se consideram uma razão de 2:1 entre os tempos médio de viagem e de atendimento, comboios formados por um empurrador e uma barcaça, um único berço de atracação em cada porto e uma quantidade de barcaças por porto variando de 0 a 3.

Uma segunda configuração, considerando-se uma razão de 4:1 entre os tempos médios de viagem e atendimento, também foi analisada e os resultados são apresentados nas tabelas 5.8 e 5.9. As figuras 5.6 a 5.9 apresentam estes resultados graficamente.

Da análise destes resultados, pode-se concluir que a disponibilidade de barcaças adicionais nos portos propicia maiores incrementos na produção para os casos em que se têm menores índices de congestionamento do sistema (menores valores de n). No entanto, para valores muito baixos de n, a inclusão de uma segunda barcaça extra em cada porto traz um pequeno aumento na produção.

O modelo apresentado neste capítulo pode ser utilizado de duas formas distintas:

a) fixada uma produção desejada, determinar quais as configurações possíveis para alcançá-la;

b) para uma dada configuração com uma certa quantidade de comboios, avaliar a influência do acréscimo de barcaças adicionais nos portos.

No primeiro caso, a configuração do sistema tem como variáveis principais a quantidade de comboios (n), a quantidade de barcaças adicionais e a quantidade de berços de atracação nos portos. A escolha da melhor alternativa, conforme destacado anteriormente, depende da estrutura de custos das diferentes alternativas do problema.

Tabela 5.6 Vazão em função da quantidade de empurradores e de barcaças adicionais nos portos para o problema ABA-COMBOIO, com razão entre tempos de viagem e de atendimento de 2:1.

n	λ(n)			
	$b_1=b_2=0$	$b_1=b_2=1$	$b_1=b_2=2$	$b_1=b_2=3$
1	0,1667	0,2380	0,2483	0,2498
2	0,3158	0,4274	0,4720	0,4890
3	0,4453	0,5707	0,6397	0,6792
4	0,5541	0,6742	0,7474	0,7946
5	0,6424	0,7466	0,8110	0,8528
6	0,7117	0,7965	0,8484	0,8815
7	0,7648	0,8313	0,8717	0,8977
8	0,8048	0,8561	0,8877	0,9084
9	0,8348	0,8745	0,8996	0,9164
10	0,8576	0,8887	0,9089	0,9230
11	0,8751	0,8999	0,9166	0,9286
12	0,8889	0,9091	0,9231	0,9333
13	0,9000	0,9167	0,9286	0,9375
14	0,9091	0,9231	0,9334	0,9412
15	0,9167	0,9286	0,9375	0,9445

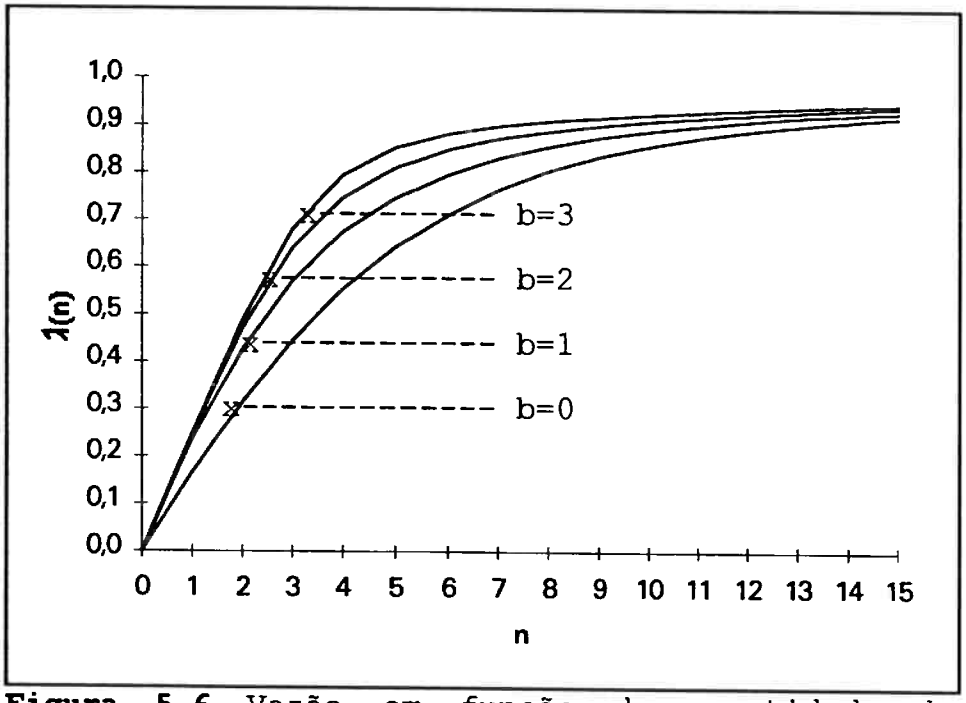

Figura 5.6 Vazão em função da quantidade de empurradores e barcaças do problema ABA-COMBOIO, com razão entre tempos de 2:1.

Tabela 5.7 Tempo médio de viagem redonda em função da quantidade de empurradores e de barcaças adicionais nos portos para o problema ABA-COMBOIO, com razão entre tempos de viagem e de atendimento de 2:1.

n	$E[T_{vr}(n)]$			
	$b_1=b_2=0$	$b_1=b_2=1$	$b_1=b_2=2$	$b_1=b_2=3$
1	6,00	4,20	4,03	4,00
2	6,33	4,68	4,24	4,09
3	6,74	5,26	4,69	4,42
4	7,22	5,93	5,35	5,03
5	7,78	6,70	6,17	5,86
6	8,43	7,53	7,07	6,81
7	9,15	8,42	8,03	7,80
8	9,94	9,34	9,01	8,81
9	10,78	10,29	10,01	9,82
10	11,66	11,25	11,00	10,83
11	12,57	12,22	12,00	11,85
12	13,45	13,20	13,00	12,86
13	14,44	14,18	14,00	13,87
14	15,40	15,17	15,00	14,88
15	16,36	16,15	16,00	15,88

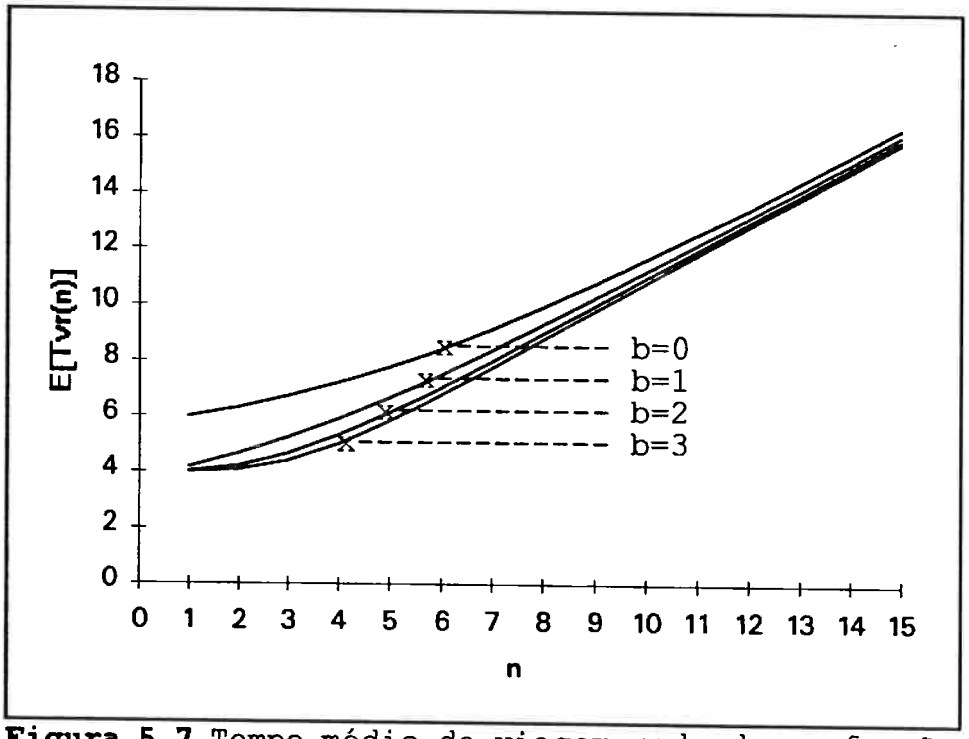

Figura 5.7 Tempo médio de viagem redonda em função da quantidade de empurradores e barcaças do problema ABA-COMBOIO, com razão entre tempos de 2:1.

Tabela 5.8 Vazão em função da quantidade de empurradores e de barcaças adicionais nos portos para o problema ABA-COMBOIO, com razão entre tempos de viagem e de atendimento de 4:1.

n	λ(n)			
	$b_1=b_2=0$	$b_1=b_2=1$	$b_1=b_2=2$	$b_1=b_2=3$
1	0,1000	0,1238	0,1249	0,1250
2	0,1961	0,2402	0,2486	0,2498
3	0,2876	0,3478	0,3676	0,3731
9	0,3739	0,4458	0,4780	0,4913
5	0,4542	0,5332	0,5761	0,5990
6	0,5279	0,6094	0,6594	0,6906
7	0,5944	0,6743	0,7269	0,7627
8	0,6533	0,7284	0,7795	0,8156
9	0,7046	0,7724	0,8190	0,8523
10	0,7483	0,8076	0,8483	0,8772
11	0,7850	0,8355	0,8700	0,8943
12	0,8152	0,8574	0,8862	0,9064
13	0,8399	0,8748	0,8986	0,9154
14	0,8599	0,8886	0,9084	0,9225
15	0,8761	0,8998	0,9163	0,9283

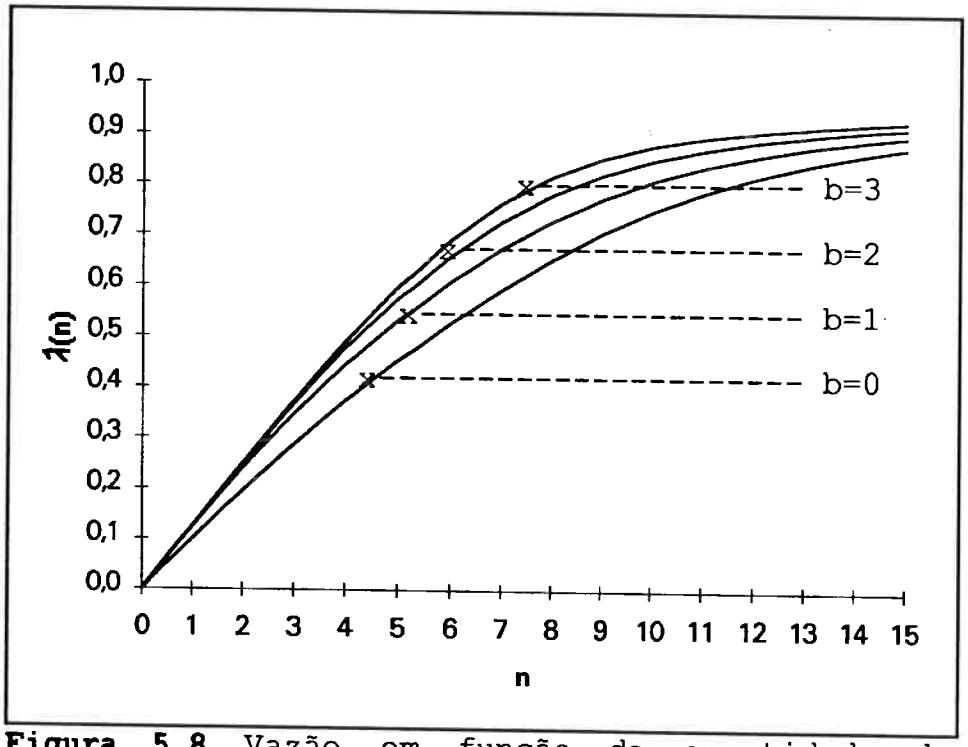

Figura 5.8 Vazão em função da quantidade de empurradores e barcaças do problema ABA-COMBOIO, com razão entre tempos de 4:1.

Tabela 5.9 Tempo médio de viagem redonda em função da quantidade de empurradores e de barcaças adicionais nos portos para o problema ABA-COMBOIO, com razão entre tempos de viagem e de atendimento de 4:1.

n	$E[T_{vr}(n)]$			
	$b_1=b_2=0$	$b_1=b_2=1$	$b_1=b_2=2$	$b_1=b_2=3$
1	10,00	8,08	8,00	8,00
2	10,20	8,33	8,04	8,01
3	10,43	8,63	8,16	8,04
4	10,70	8,97	8,37	8,14
5	11,01	9,38	8,68	8,35
6	11,37	9,85	9,10	8,69
7	11,78	10,38	9,63	9,18
8	12,25	10,98	10,26	9,81
9	12,77	11,65	10,99	10,56
10	13,36	12,38	11,79	11,40
11	14,01	13,17	12,64	12,30
12	14,72	14,00	13,54	13,24
13	15,48	14,86	14,47	14,20
14	16,28	15,75	15,41	15,18
15	17,12	16,67	16,37	16,16

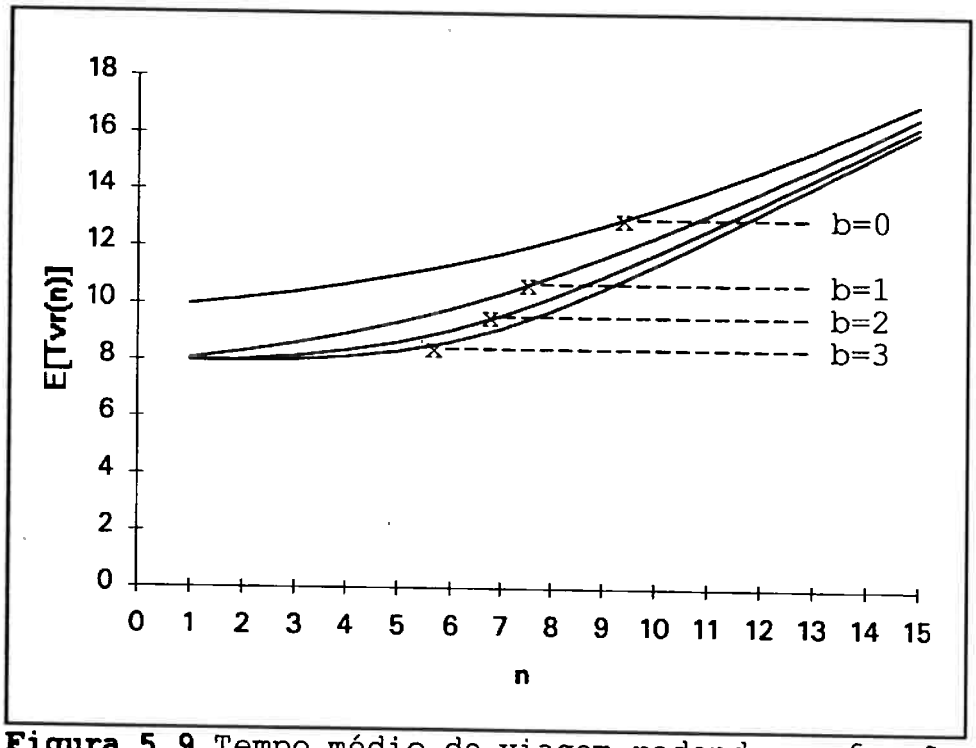

Figura 5.9 Tempo médio de viagem redonda em função da quantidade de empurradores e barcaças do problema ABA-COMBOIO, com razão entre tempos de 4:1.

5.6 Discussões

O modelo apresentado neste capítulo, pode ser generalizado de duas formas: a) incluir uma maior número de portos; b) considerar comboios formados por duas ou mais barcaças. Neste último caso, ter-se-ia uma situação semelhante ao problema de filas com chegada em grupo (barcaças) e atendimento individual, acrescentando-se ainda a possibilidade de, com preparação prévia de barcaças em um dado porto, reduzir o tempo de permanência dos empurradores.

Da análise dos resultados obtidos, verifica-se que a inclusão de barcaças extras e a operação com desmembramento nos portos oferece maiores vantagens quando se tem um baixo índice de congestionamento no sistema. Caso contrário, a alternativa mais adequada para aumentar a produção deve ser a construção de novos berços de atracação nos portos.

Conforme mencionado no capítulo 1, um estudo mais detalhado de viabilidade econômica depende de outros parâmetros que não apenas os de desempenho operacional. Assim, por exemplo, uma análise comparativa entre as alternativas de sistemas de transporte fluvial com embarcações autoprelidas ou comboios de empurra carece de dados de natureza econômica. Neste trabalho, o enfoque básico é o desenvolvimento de um modelo operacional que possa fornecer subsídios para um estudo mais geral de natureza econômica.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa apresentada nesta dissertação teve como objetivo central identificar modelos analíticos de filas que permitissem a avaliação da capacidade de transporte de uma frota homogênea de embarcações fluviais em operação cíclica e continua entre um determinado número de portos. Foram consideradas duas configurações básicas destes sistemas de transporte em função do tipo das embarcações que constituem a frota. Em uma primeira configuração, analisou-se a operação de uma frota formada por embarcações autopropelidas que, admitindo-se que os tempos de atendimento e de viagem destas embarcações sejam variáveis aleatórias independentes com distribuições Erlang, pode ser estudada por modelos markovianos de redes fechadas de filas. A configuração seguinte é caracterizada pela existência de uma frota de comboios fluviais e pela hipótese de distribuição exponencial para os tempos de atendimento e de viagem. Neste segundo caso, verifica-se a possibilidade do desmembramento dos comboios nos portos, com a substituição das barcaças por outro conjunto previamente preparado, reduzindo o tempo de permanência dos empurradores nos portos e aumentando a utilização dos berços de atracação e demais instalações portuárias. Uma síntese do trabalho é apresentada na seção 6.1 que destaca as contribuições desta pesquisa. A seção 6.2 trata das limitações dos modelos propostos e a seção 6.3 indica alguns possíveis caminhos para continuidade da pesquisa ora desenvolvida.

6.1 Síntese do Trabalho

Com o intuito de avaliar a eficiência de um sistema fechado de transporte de carga fluvial, buscou-se na teoria de filas modelos analíticos que permitissem a análise, em regime estacionário, do desempenho destes sistemas. É importante salientar que a pesquisa centralizou-se em aspectos de natureza operacional. Uma análise comparativa entre as diferentes configurações deve levar em consideração, além das medidas de desempenho operacional, parâmetros de natureza econômica.

Dada a interdependência dos processos na rede circular considerada, adotou-se um modelo de rede de filas em contraposição aos modelos isolados de fila. No capítulo 3, aplicou-se um modelo markoviano de rede de filas para avaliar o desempenho de uma frota de N embarcações autopropelidas em operação circular e contínua entre M portos. O procedimento de solução do modelo incorpora a técnica de agregação dos estados e procedimentos de solução mais eficientes encontrados na literatura. Estas características tornam o modelo implementável em micro-computadores com capacidade para análise de configurações bastante significativas.

Uma hipótese básica do modelo adotado no capítulo 3 consiste em supor que o processo de atendimento das embarcações (carga/descarga) em cada porto e o deslocamento das mesmas entre os portos possam ser representados por variáveis aleatórias independentes com distribuição exponencial de probabilidades.

Dado que a distribuição exponencial não representa bem os processos de atendimento e movimentação das embarcações, desenvolveu-se, no capítulo 4, um procedimento de análise da rede circular que, a partir do método da decomposição dos atendimentos e das viagens em estágios, permite avaliar o desempenho da frota de embarcações autopropelidas, adotando-se distribuições de probabilidades mais representativas.

Dos caso analisados, verificou-se que o desempenho do sistema melhora sistematicamente a medida que se reduz a variabilidade dos processos de movimentação e de transferência de carga. Pode-se afirmar também que o desempenho do sistema é mais sensível a variações do processo de atendimento que a variações dos tempos de viagem entre os portos. De qualquer forma, o modelo exponencial e a análise do caso determinístico fornecem um intervalo para parâmetros, como vazão e tempo médio de viagem redonda, do caso Erlang. Apenas nos casos próximo ao ponto de saturação, onde estes intervalos são relativamente maiores, é que a utilização dos modelos com distribuições Erlang pode fornecer resultados mais precisos.

O modelo de rede circular com atendimento exponencial do capítulo 3 não é adequado para representar a operação de uma frota de comboios formados por um empurrador e um conjunto de n_b barcaças. Neste cenário, dotando-se os portos com barcaças adicionais, torna-se possível a operação com desmembramento dos comboios. No capítulo 5, foram apresentados um modelo para análise da operação com desmembramento em um porto isolado, denominado modelo M/M/c com desmembramento, e um modelo

correspondente para uma rede circular. Um caso particular de rede circular com dois portos e comboios formados por um empurrador e uma barcaça, designado modelo ABA-COMBOIO, foi implementado. Da análise dos resultados, constatou-se que, para situações com baixos índices de congestionamento, a disponibilidade de barcaças adicionais reduz significativamente o tempo de permanência dos empurradores nos portos, aumentando a vazão dos sistemas. Por outro lado, quando o índice de congestionamento é alto, a alternativa para aumentar a vazão consiste na construção de novos berços de atracação nos portos.

6.2 Limitações dos Modelos Propostos

A principal limitação dos modelos está relacionada à hipótese de que os tempos de atendimento das embarcações nos portos constituam uma seqüência de variáveis aleatórias independentes com distribuição de probabilidades conhecida a priori. Na verdade, isto só ocorre em situações reais se o porto dispõe de uma capacidade de armazenamento de carga que permita a operação do subsistema hidroviário independente dos subsistemas terrestres. Isto não se verifica em muitos cenários de transporte fluvial de carga.

Admitindo-se a independência do subsistema hidroviário, discute-se a escolha das distribuições dos tempos de atendimento. Os modelos com tempos exponencias, de solução analítica conhecida, fornecem bons resultados se comparados aos modelos com

distribuições Erlang. A aplicação destes últimos fica restrita a casos em que as ordens das distribuições Erlang e as quantidades de portos e de embarções são pequenas, devido ao rápido crescimento do espaço amostral e conseqüente aumento da dimensão do sistema das equações de balanço global que deve ser resolvido.

No modelo com desmembramento, a limitação está relacionada à hipótese de distribuição exponencial. Não foi desenvolvido um modelo que incorporrasse simultâneamente a característica do desmembramento e a decomposição dos atendimentos das barcaças em estágios. Da mesma forma que no caso de tempos de atendimento Erlang, no modelo com desmembramento não se dispõe de solução analítica, porém o crescimento do espaço amostral é menos acentuado, permitindo que todos os casos apresentados neste trabalho tenham sido implementados em microcomputadores.

Conforme discutido no capítulo 1, a simulação probabilística consiste em uma importante alternativa para análise dos sistemas de transporte fluvial de carga apresentados neste trabalho. Apesar das limitações dos modelos analíticos com distribuições exponenciais propostos, estes modelos podem ser utilizados em análise preliminar destes problemas de transporte.

6.3 Desdobramentos da Pesquisa

Do ponto de vista teórico, o modelo de rede circular com com tempos de atendimento exponenciais, que apresenta solução

analítica em forma de produto e outras propriedades importantes, pode ainda ser explorado no sentido de oferecer outras medidas de desempenho. Um ponto importante seria analisar o comportamento da variável $N_{vr}(t)$ para intervalos de tempos mais longos.

Nos modelos dos capítulos 4 e 5 existem generalizações imediatas relacionadas ao aumento da quantidade de portos na rede, consideração de múltiplos berços de atracação em cada porto (modelo com distribuições Erlang) e comboios formados por mais de uma embarcação (modelo com desmembramento). No caso do modelo ABA-COMBOIO, haveria ainda a possibilidade de incluir distribuições Erlang para os tempos de atendimento das barcaças e de viagem dos comboios. Um outro aspecto consiste em flexibilizar os roteiros das embarcações, permitindo a existência de múltiplos padrões de movimentação na rede de transporte.

Uma idéia que não foi explorada diz respeito à modelagem do problema ABA considerando-se a existência de uma eclusa no percurso das embarcações/comboios entre os portos. Esta situação poderia ser considerada incluindo-se na descrição do estado do sistema o terno (n^1, n^2, θ) onde: a) o componente n^1 representaria a quantidade de embarcações a montante da eclusa; b) n^2 a quantidade a jusante; c) θ seria uma variável binária indicando o nível da eclusa (cheia/vazia). Uma dificuldade deste modelo seria a inclusão de embarcações que operem em outros sistemas e que também se utilizem da eclusa.

ANEXO

A Cadeias de Markov

As cadeias de Markov constituem uma importante classe de processos estocásticos. Do ponto de vista matemático, um processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias, $\{X(t),\ t \in T\}$, que representa a evolução de um sistema ao longo do tempo. O conjunto T, denominado índice do processo, corresponde aos instantes em que o processo é observado e a variável aleatória X(t) representa o estado do processo em um dado instante t.

Se T é um conjunto enumerável, tem-se um processo estocástico em tempo discreto. Caso contrário, tem-se um processo em tempo contínuo. Para diferenciá-los, utilizam-se as notações $\{X_n,\ n=0,1,...\}$ para processos estocásticos em tempo discreto e $\{X(t),\ t \geq 0\}$ para processos estocásticos em tempo contínuo.

O conjunto de valores que a variável aleatória X(t) pode assumir constitui o espaço amostral do processo. Da mesma forma que o índice, o espaço amostral pode ser um conjunto enumerável ou não-enumerável. Definem-se, então, processos em espaço discreto e processos em espaço continuo.

Na teoria de filas, encontram-se diferentes aplicações de processos estocásticos. Por exemplo, considere-se um modelo de fila M/G/1, caracterizado por um processo de chegada Poisson com parâmetro λ e um único servidor com tempo médio de atendimento

$1/\mu$ ($\lambda/\mu<1$). Seja $N(t)$ a quantidade de clientes no sistema em um instante t. O processo $\{N(t),\ t\geq 0\}$ corresponde a um processo estocástico em espaço discreto e em tempo contínuo. Por sua vez, os tempos de permanência dos clientes no sistema, $E[W_n]$, dá origem a um processo em espaço contínuo e em tempo discreto $\{E[W_n],\ n=1,2,...\}$.

Os processos estocásticos são também classificados pelo tipo de relação existente entre as variáveis $X(t)$. A forma mais simples de relação é aquela em que as variáveis de estados são mutuamente independentes e apresentam uma mesma distribuição de probabilidades, ou seja, o processo constitui uma seqüência de variáveis aleatórias independentes com mesma distribuição de probabilidades.

Os processos markovianos caracterizam-se por, dados os valores de $X(t)$ para uma seqüência qualquer de instantes $t_n>t_{n-1}>...t_1>0$ ($n>0$), a varíavel de estado em um instante futuro t ($t>t_n$) depende exclusivamente do estado mais recente do processo $X(t_n)$.

A seção A.1 é dedicada às cadeias de Markov em tempo discreto, que correspondem aos processos markovianos em espaço discreto e em tempo discreto. Os processos markovianos em espaço discreto e em tempo contínuo, designados simplesmente cadeias de Markov em tempo contínuo, são consideradas na seção A.2.

A.1 Cadeias de Markov em Tempo Discreto

Um processo estocástico em tempo discreto $\{X_n, n=0,1,...\}$ com espaço amostral $S=\{1,2,...,N\}$ é uma cadeia de Markov em tempo discreto se, para todo $n>0$ e $i, j, i_{n-1},...,i_0 \in S$, verifica-se a seguinte igualdade:

$$P(X_{n+1}=j|X_n=i,X_{n-1}=i_{n-1},...,X_0=i_0)=P(X_{n+1}=j|X_n=i) \qquad (A.1)$$

A equação (A.1) mostra que a distribuição da variável aleatória X_{n+1} depende apenas do valor assumido pela variável X_n.

As probabilidades condicionais

$$p_{ij}(n)=P(X_{n+1}=j|X_n=i) \qquad i,j\in S \quad n=0,1,... \qquad (A.2)$$

são chamadas probabilidades de transição em um passo do estado i para o estado j no instante n. Diz-se que uma cadeia de Markov apresenta probabilidades de transição estacionárias quando as probabilidades $p_{ij}(n)$ são independentes de n, ou seja,

$$p_{ij}=P(X_{n+1}=j|X_n=i) \qquad i,j\in S \quad n=0,1,... \qquad (A.3)$$

As cadeias de Markov com probabilidades de transição estacionária são caracterizadas pela matriz de probabilidades de transição $\mathbf{P}=[p_{ij}]$. As probilidades p_{ij} devem satisfazer as seguintes condições:

$$p_{ij} \geq 0 \qquad \sum_{j=1}^{N} p_{ij} = 1 \quad i=1,\ldots,N \tag{A.4}$$

A matriz de probabilidades de transição **P** é uma matriz quadrada de ordem igual à quantidade de estados, N, do espaço amostral, S. Eventualmente, a cadeia pode apresentar um número infinito de estados e, desta forma, a matriz **P** contém uma quantidade ilimitada de linhas e colunas.

A.1.1 Equações de Chapman-Kolmogorov

As probabilidades de transição

$$p_{ij}^{(m)} = P(X_{n+m}=j \mid X_n=i) \qquad i,j \in S \quad m,n=0,1,\ldots \tag{A.5}$$

são denominadas probabilidades de transição do estado i para o estado j em m passos. $p_{ij}^{(m)}$ corresponde à probabilidade que, após m transições, o processo passará do estado i para o estado j.

Estas probabilidades de transição em múltiplos passos podem ser calculadas empregando-se as equações de Chapman-Kolmogorov, cuja forma geral é

$$p_{ij}^{(m+n)}=\sum_{k} p_{ij}^{(m)} p_{kj}^{(n)} \qquad i,j,k \in S \quad m,n=0,1,\ldots \tag{A.6}$$

A partir das equações (A.6), obtêm-se:

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(0)} &= \begin{cases} 1 & se\ i=j \\ 0 & caso\ contrário \end{cases} \\ p_{ij}^{(1)} &= p_{ij} \\ p_{ij}^{(m)} &= \sum_{k=1}^{N} p_{ik} p_{kj}^{(m-1)} \qquad m=2,3,\ldots \end{aligned} \tag{A.7}$$

Utilizando-se uma notação matricial onde $\mathbf{P}^{(m)}$ é a matriz formada pelas probabilidades $p_{ij}^{(m)}$, tem-se

$$P^{(m)}=PP^{(m-1)} \qquad m=2,3,\ldots \tag{A.8}$$

Por indução, é possível mostrar que $\mathbf{P}^{(m)}=\mathbf{P}^{m}$.

Seja $\pi_j^{(n)}=P(X_n=j)$ e $\pi^{(n)}=[\pi_j^{(n)}]$ a distribuição de probabilidades de estado no instante n (n=0,1,...). Conhecida a distribuição de probabilidades de estado inicial, $\pi^{(0)}$, é possível

calcular a distribuição de probabilidades do estado em um instante n, $\pi^{(n)}$, a partir das equações

$$\pi_j^{(n)} = \sum_{i=1}^{N} \pi_i^{(0)} p_{ij}^{(n)} \qquad i,j \in S \quad n = 1,2,\ldots \tag{A.9}$$

Na forma matricial, as equações (A.9) são expressas por

$$\pi^{(n)} = \pi^{(0)} P^{(n)} = \pi^{(0)} P^{n} \tag{A.10}$$

A determinação das distribuições $\pi^{(n)}$, levando-se em consideração as condições iniciais, permite analisar o comportamento do processo em regime transitório[1].

Em alguns casos, deseja-se conhecer a distribuição de probabilidades de estados da cadeia de Markov decorrido um grande intervalo de tempo da condição inicial. Neste caso, diz-se que a análise do processo é feita em regime estacionário.

A existência do regime estacionário está condicionada a algumas características da cadeia de Markov e será tratada na seção A.1.3. A seguir, são apresentados alguns conceitos adicionais a respeito dos estados das cadeias de Markov.

---

[1] KLEINROCK (1975) propõe o uso de transformadas geométricas para se determinar expressões analíticas para as probabilidades de estado em regime transitório em cadeias de Markov com inifinitos estados.

A.1.2 Classificação dos Estados

Um estado j é acessível a partir de um estado i se existe algum inteiro positivo m tal que $p_{ij}^{(m)}>0$ $(i \rightarrow j)$. Dois estados i e j comunicam-se se cada um deles é acessível a partir do outro $(i \leftrightarrow j)$. Se um estado i se comunica com outros dois estados j e k, então, pelas equações de Chapmam-Kolmogorov, j e k também se comunicam.

Define-se uma classe qualquer sub-conjunto de estados, A, do espaço amostral, S, que se comunicam entre si e não se comunicam com nenhum outro estado não pertencente ao subconjunto A. Se uma cadeia de Markov apresenta uma única classe, isto é, se todos os estados desta cadeia comunicam-se entre si, então a cadeia é chamada irredutível.

Define-se, para cada estado i, um período d_i como sendo o máximo divisor comum entre os valores de m tais que $p_{ii}^{(m)}>0$. Se $d_i=1$, então diz-se que o estado i é aperiódico e, se $d_i>1$, o estado i será considerado periódico com período d_i. Pode-se mostrar que os estados de uma mesma classe apresentam o mesmo período. As cadeias irredutíveis podem, então, ser classificadas em periódicas e aperiódicas.

Seja

$$f_{ij}^{(1)}=P(X_1=j|X_0=i)$$
$$f_{ij}^{(n)}=P(X_n=j,X_{n-1}\neq j,\ldots,X_1\neq j|X_0=i) \qquad \text{(A.11)}$$

A distribuição $f_{ij}^{(n)}$ é interpretada como a probabilidade que, dado que o estado no instante inicial é i, o processo entre pela primeira vez no estado j após n transições. Esta distribuição de probabilidades pode ser calculada recursivamente, utilizando-se as seguintes expressões:

$$f_{ij}^{(1)}=p_{ij}$$
$$f_{ij}^{(m+1)}=\sum_{k\neq j} p_{ik} f_{kj}^{(m)} \qquad \text{(A.12)}$$

Seja

$$f_i=\sum_{m=1}^{\infty} f_{ii}^{(m)} \qquad i=1,\ldots,N \qquad \text{(A.13)}$$

f_i corresponde à probabilidade de que, dado que o processo deixa o estado i, existe uma probabilidade f_i de que o processo retorne a este estado. Um estado i é transitório se $f_i<1$ e recorrente se $f_i=1$.

Diferenciam-se os estados recorrentes em estados recorrentes nulos e recorrentes positivos. A distinção é feita com base no tempo médio de retorno ao estado. O tempo médio de retorno ao

estado i, dado que o estado inicial é i, μ_{ii}, pode ser calculado utilizando-se a distribuição $f_{ii}^{(n)}$, da seguinte forma:

$$\mu_{ii}=\sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)} \qquad i=1,\ldots,N \tag{A.14}$$

Um estado recorrente i é recorrente positivo se μ_{ii} é finito e recorrente nulo caso contrário. Da mesma forma que a periodicidade é uma característica comum à classe, os estados de uma mesma classe são todos transitórios ou todos recorrentes nulos ou todos recorrentes positivos.

Uma cadeia de Markov irredutível com um número finito de estados é recorrente positiva, isto é, todos os estados da cadeia são recorrentes positivos.

A.1.3 A Distribuição Estacionária

Para uma cadeia de Markov finita, irredutível e aperiódica o limite $\pi_j=\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ existe e é independente de i. Os valores de π_j são obtidos a partir da solução do seguinte sistema de equações:

$$\pi_j = \sum_{i=1}^{N} \pi_i p_{ij} \qquad j=1,\ldots,N$$
$$\sum_{i=1}^{N} \pi_i = 1 \tag{A.15}$$

ou ainda, na forma matricial

$$\pi = \pi P$$
$$\sum_{j=1}^{N} \pi_j = 1 \tag{A.16}$$

A distribuição estacionária ou em equilíbrio π é assim chamada porque, admitindo-se que o estado inicial tenha esta distribuição de probabilidades, a distribuição de probabilidades do estado em qualquer instante posterior será dada pela mesma distribuição π.

As cadeias de Markov irredutíveis periódicas também possuem uma distribuição estacionária dada por (A.15). Nestes casos, no entanto, os π_j são interpretados apenas como a fração do tempo que o processo permanece no estado j.

A.2 Cadeias de Markov em Tempo Contínuo

Um processo estocástico em tempo contínuo $\{X(t), t \geq 0\}$ com espaço amostral $S=\{1,2,...,N\}$ é uma cadeia de Markov em tempo contínuo se, para todo inteiro positivo n, todos os reais $u>0$, $t>t_{n-1}>...>t_1>t_0=0$ e $i, j, i_{n-1},..., i_0 \in S$ verifica-se

$$P(X(t+u)=j \mid X(t)=i, X(t_{n-1})=i_{n-1},...,X(0)=i_0) = P(X(t+u)=j \mid X(t)=i) \qquad (A.17)$$

Analogamente às cadeias de Markov em tempo discreto, em uma cadeia de Markov em tempo contínuo, a distribuição de um estado futuro $X(t+u)$, dados o estado presente $X(t)$ e os estados passados $X(t_i)$ $(i=0,1,...,n-1)$, depende exclusivamente do estado presente e é independente dos estados passados. Se, adicionalmente,

$$P(X(t+u)=j \mid X(t)=i) \qquad (A.18)$$

é independente de u, então a cadeia de Markov em tempo contínuo possui probabilidades de transição homogêneas ou estacionárias.

Uma cadeia de Markov em tempo contínuo possui a propriedade de que, se o processo entra em um estado i qualquer, o tempo de permanência T_i neste estado é uma variável aleatória com distribuição exponencial. Pode-se dizer que, uma cadeia de Markov

em tempo contínuo é um processo estocástico que se move de estado em estado de acordo com uma cadeia de Markov em tempo discreto (cadeia de Markov imersa), mas de tal forma que o tempo de permanência em cada estado, antes de realizar uma transição para o próximo estado, tem distribuição exponencial. Além disso, o tempo que o processo permanece em i e o próximo estado a ser visitado são indenpendentes.

A.2.1 Equações Diferenciais de Kolmogorov

Antes de apresentar as equações de Kolmogorov são necessárias algumas definições adicionais. Seja

$$p_{ij}(t)=P(X(u+t)=j|X(u)=i) \qquad t,u\geq 0 \quad i,j\in S \tag{A.19}$$

a probabilidade que um processo, atualmente no estado i, esteja no estado j, decorrido um intervalo de tempo t. As probabilidades $p_{ij}(t)$, que compõem uma matriz de probabilidades de transição $\mathbf{P}(t)=[p_{ij}(t)]$, devem satisfazer:

$$p_{ij}(0)=\begin{cases} 1 & se\ i=j \\ 0 & caso\ contrário \end{cases}$$

$$p_{ij}(t)\geq 0 \qquad \sum_{j=1}^{N} p_{ij}(t)=1, \quad i=1,\ldots,N \quad t\geq 0 \tag{A.20}$$

Seja a probabilidade que o sistema esteja em um estado j em um dado instante t, definida por

$$p_j(t)=P(X(t)=j) \quad j=1,\ldots,N \quad t\geq 0 \qquad \text{(A.21)}$$

e o vetor $\mathbf{p}(t)=[p_j(t)]$. Então, conhecida a distribuição $\mathbf{p}(0)$ em um instante inicial, pode-se calcular a probabilidade de estado em um instante t qualquer, pela seguinte equação:

$$p(t)=p(0)P(t) \qquad \text{(A.22)}$$

Seja

$$q_{ij}=\lim_{h\to 0}\frac{p_{ij}(h)}{h} \quad i\neq j$$

$$q_{ii}=\lim_{h\to 0}\frac{p_{ii}(h)-1}{h} \qquad \text{(A.23)}$$

A matriz Q, formada pelos elementos q_{ij} definidos acima, é chamada matriz das taxas de transição entre estados ou matriz geradora infinitesimal de probabilidades da cadeia de Markov em tempo contínuo. Esta matriz apresenta como propriedade o fato de que os elementos da diagonal são negativos, os elementos fora da diagonal são positivos e a soma dos elementos de uma mesma linha é igual a zero.

As equações de Kolmogorov compõem um sistema de equações diferenciais cuja solução determina a dinâmica do processo markoviano. A princípio, existem duas formas diferentes destas equaçoes: a) as equações reversas ("backward equations"); b) diretas ("forward equations"). A equações reversas são apresentadas a seguir. Para todo i,j ϵ S e todo t≥0,

$$\frac{dp_{ij}}{dt}(t)=\sum_{k\neq i} q_{ik}p_{kj}(t)-q_{ii}p_{ij}(t) \qquad (A.24)$$

Em alguns casos, como por exemplo para cadeias de Markov com um número finito de estados, são válidas as equações diretas de Kolmogorov ("forward equations"), dadas abaixo.

$$\frac{dp_{ij}}{dt}(t)=\sum_{k\neq j} p_{ik}(t)q_{kj}-q_{ii}p_{ij}(t) \qquad (A.25)$$

A.2.2 Distribuição Estacionária

Os estados de uma cadeia de Markov em tempo contínuo podem ser classificados de forma similiar ao caso em tempo discreto. Um estado j é acessível a partir de um estado i (i→j) se, para algum t>0, $p_{ij}(t)>0$. Dois estados i e j comunicam-se se (i→j) e (j→i).

Uma cadeia de Markov em tempo contínuo é irredutível se todos os estados comunicam-se entre si.

Se uma cadeia de Markov em tempo contínuo {X(t), t≥0} é irredutível, então todos os estados são do mesmo tipo. No caso de serem todos transitórios ou recorrentes nulos, então

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t)=0 \qquad i,j\in S \tag{A.26}$$

Se são todos recorrentes positivos, então

$$p_j=\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) \tag{A.27}$$

existe e é independente do estado inicial i. Os valores de p_j (j=1,...,N) podem ser calculados a partir do seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{gathered} q_{ii}p_i=\sum_{k\neq i} q_{ki}p_k \quad i=1,\ldots,N \\ \sum_{j=1}^{N} p_j=0 \end{gathered} \tag{A.28}$$

ou, na forma matricial, $\pi Q=0$ e $\sum_j \pi_j=1$, onde $\pi_j=p_j$ $(j=1,...,N)$.[2]

As equações (A.28) são chamadas equações de balanço, pois igualam a taxa em que o processo deixa o estado i $(q_{ii}p_i)$ à taxa em que o processo chega a este mesmo estado $(\sum q_{ki}p_k)$. Se estas condições são satisfeitas, então diz-se que o processo encontra-se em equilíbrio.

Uma cadeia de Markov em tempo contínuo que possui distribuição estacionária $\mathbf{p}=[p_j]$ é chamada ergódica. As probabilidades p_j são chamadas probabilidades estacionárias, pois pode-se demonstrar que, se o estado inicial é escolhido conforme a distribuição **p**, então a probabilidade do processo estar em um certo estado j em um dado instante t será p_j, para todo $t \geq 0$ e $i,j \in S$.

A.2.3 Processo Markoviano de Nascimento e Morte em Tempo Contínuo.

Um processo de nascimente e morte em tempo contínuo constitui uma cadeia de Markov em tempo contínuo com estados $\{0,1,2,...\}$ em que a transições a partir de um estado i são permitidas apenas para os estados vizinhos i+1 e i-1 $(i>0)$. As taxas de transição entre estados são dadas por

---

[2] Estas equações derivam das equações diferenciais de Chapman-kolmogorov, igualando-se as derivadas de $p_{ij}(t)$ a zero, o que significa admitir que estas probabilidades são independentes de t. Do ponto de vista probabilístico, equivale dizer que o processo se encontra em regime estacinário.

$$q_{i,i+1}=\lambda_i$$

$$q_{i,i-1}=\mu_i \qquad (A.29)$$

$$q_{ij}=0 \quad |i-j|>1$$

tal que $q_{ii}=-(\lambda_i+\mu_i)$.

Aplicando-se o conceito das equações de balanço para um processo de nascimento e morte e admitindo-se a existência do regime estacionário[3], obtém-se a seguinte distribuição (em forma de produto) estacionária de probabilidades:

$$p_n = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} p_0 \qquad n>0$$

$$p_0 = \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}} \qquad (A.30)$$

[3] A condição necessária e suficiente para a existência do regime estacionário em um processo deste tipo e que exista um certo inteiro positivo k tal que $\lambda_i<\mu_i$ para todo $i\geq k$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ADLER, H.A. **Avaliação econômica dos projetos de transportes:** metodologia e exemplos. Trad. de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1978.

BALAU, J.A.C. Dimensionamento de comboio fluvial para transporte de bauxita na região amazônica. In: NOVAES, A.G.N.. **Métodos de otimização:** aplicações aos transportes. São Paulo, Edgard Blücher, 1978. p.357-378.

BASKETT, F. et al. Open, closed and mixed networks of queues with different classes of customers. **Journal of the Association for Computing Machine.** v.22, n.2, p.248-260, 1975.

BOTTER, R.C. et al. Dimensionamento de um sistema integrado de trnasporte de álcool e óleo na região de influência da hidrovia Tietê-Paraná. In: CONGRESSO NACIONAL DE TRANSPORTES MARÍTIMOS E CONSTRUÇÃO NAVAL, 12, Rio de Janeiro, 1988. **Anais.** Sobena, 1988. v.1, p.13-43.

BRINATI, M.A. Influência das condições de operação portuária sobre o dimensionamento de comboios fluviais. In: CONGRESS OF PAN-AMERICAN INSTITUTE OF NAVAL ENGINEERING, 7, Washington, 1983. **Proceedings.** Washington, IPIN, 1983. v.1, p.402-416.

BRINATI, M.A.; TONON, V.J.; GUELLER, G.F. Avaliação dos tempos de espera e atendimento de comboios fluviais. /Apresentado ao 2. Congresso de Desenvolvimento Tecnológico em Transportes. São Paulo, 1981/

BRUELL, S.C.; BALBO, G. **Computacional algorithms for close queueing networks.** New York, North Holland, 1980.

BURKE, P.J. The output of a queueing system. **Operations Research.** v.4, n.6, p.699-704, 1956.

BUZEN, J.P. Computacional algorithms for closed queueing networks with exponential servers. **Communications of the Association for Computing Machine.** v.16, n.9, p.527-531, 1973.

CABRERA, J.G.; MAHER, M.J. Optimizing earth-moving plant: solution for the excavator-trucks systems. **Highway Research Records.** v.454, p.7-15, 1973.

CHANDY, K.M.; HOWARD, J.H.; TOWSLEY, D.F. Product form and local balance in queueing networks. **Journal of the Association for Computing Machine.** v.24, n.1, p.250-263, 1977.

DISNEY, R.L.; KIESSLER, P.C. **Traffic processes in queueing networks:** a Markov renewal approach. Baltimore, The Johns Hopkins University Press, 1987.

FIGUEIREDO, N. **As perspectivas da navegação interior e suas conseqüências na racinalização energética.** Brasilia, Ministério dos Transportes - Superintendência Nacional da Marinha Mercante, 1984.

GORDON, W.J.; NEWELL, G.P. Closed queueing systems with exponential servers. **Operations Research.** v.15, n.2, p.254-265, 1967.

GROSS, D.; HARRIS, C.M. **Fundamentals of queueing theory.** 2 ed. New York, John Wiley, 1985.

HARRISON, P.G. On normalizing constants in queueing networks. **Operations Research.** v.33, n.2, p.464-468, 1985.

JACKSON, J.R. Jobshop like queueing systems. **Management Science.** v.10, n.1, p.131-142, 1963.

_____. Networks of waiting lines. **Operations Research.** v.5, p.518-522, 1957.

JACKSON, R.R.P. Queueing systems with phase type service. **Operations Research Quarterly.** v.5, p.109-120, 1954.

KLEINROCK, L. **Queueing systems.** New York, John Wiley, 1975. v.1.

KOENIGSBERG, E. Cyclic queues. **Operations Research Quarterly.** v.9, n.1, p.22-35, 1958.

KOENIGSBERG, E.; LAM, R.C. Cyclic queue models of fleet operations. **Operations Research.** v.24, n.3, p.516-529, 1976.

LIMA JR., O.F. **Metodologia para concepção e dimensionamento de terminais multimodais de pequeno e médio porte.** São Paulo, 1988. 251p. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.

MEDHI, J. **Stochastic models in queueing theory.** Londres, Academic Press, 1991.

PISSANETZKY, S. **Sparse matrix technology.** Londres, Academic Press, 1984.

POSNER, M.; BERNHOLTZ, B. Closed finite queueing networks with time lags. **Operations Research.** v.16, n.5, p.962-976, 1968.

REISER, M.; LAVENBERG, S.S. Mean value analysis of closed multichain queueing networks. **Journal of the Association for Computing Machine.** v.27, n.2, p.313-322, 1980.

ROSS, S.M. **Introduction to probability models.** 4 ed. Londres, Academic Press, 1989.

SILVA, E.A.S.; MUNTZ, R.R. **Métodos computacionais de solução de cadeias de Markov: aplicações a sistemas de computação e comunicação.** Porto Alegre, Instituto de Informática da UFRGS, 1992.

WALLACE, V.L.; ROSENBERG, R.S. Markovian models and numerical analysis of computer system behavior. In: SPRING JOINT COMPUTER CONFERENCE, Philadelphia, 1966. **Proceedings.** v.1, p.141-148, 1966.

YOSHIZAKI, H.T.Y. **Análise de desempenho operacional de sistemas logísticos e de trasnporte: aplicação de modelos de redes de filas.** São Paulo, 1989. 85p. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.

APÊNDICES

Apêndice I - Implementação Computacional do Algoritmo da Cadeia de Markov em Tempo Contínuo para o Problema ABA-AUTOPROP.

```
#include "stdio.h"
#include "stdlib.h"
#include "string.h"

FILE      *fp;
char      *fn;
unsigned int   N,c[2],bin[24][4],J,L,IQ[1772],JQ[6160];
float
x[4],u[4],PA[21],PB[21],NQ[6160],DQ[1771],Pi1[1771],Pi2[1771];

int       entrada(int a, char *s[9]);
unsigned int   phi(unsigned int f[4]);
void      matriz(void);
void      prob_conjunta(void);
void      prob_marginal(void);
void      saida(void);

void main(int argc, char *argv[9])
{
  if (!entrada(argc, argv)) exit(0);
  matriz();
  prob_conjunta();
  prob_marginal();
  saida();
}

int entrada(int a, char *s[9])
{
  if (a!=9) return 0;
  N   =atoi(s[1]);
  c[0]=atoi(s[2]);
  c[1]=atoi(s[3]);
  x[0]=atof(s[4]);
  x[1]=atof(s[5]);
  x[2]=atof(s[6]);
  x[3]=atof(s[7]);
  fn  =s[8];
  if ((N<1)||(N>20))                          return 0;
  if ((c[0]<1)||(c[0]>2)||(c[1]<1)||(c[1]>2))          return 0;
  if ((x[0]<=0)||(x[1]<=0)||(x[2]<=0)||(x[3]<=0)) return 0;
  u[0]=1/x[0];
  u[1]=1/x[1];
  u[2]=1/x[2];
  u[3]=1/x[3];
  {
    unsigned int n,m;
    for (n=0;n<24;n++) bin[n][0]=1;
    for (m=1;m<4;m++) bin[0][m]=0;
    for (n=1;n<24;n++)
      for (m=1;m<4;m++)
     bin[n][m]=bin[n-1][m-1]+bin[n-1][m];
  }
  J=bin[N+3][3];

L=bin[N-1][3]*1*4+bin[N-1][2]*4*3+bin[N-1][1]*6*2+bin[N-1][0]*4
*1;
  return 1;
}
```

```
unsigned int phi(unsigned int f[4])
{
  unsigned int a;

a=bin[N+3][3]-bin[N-f[0]+3][3]+bin[N-f[0]+2][2]-bin[N-f[0]-f[1]
+2][2]+f[2];
  return a;
}

void matriz(void)
{
  unsigned int j=0,l=0,e[4],f[4],alfa[2];
  for (e[0]=0;e[0]<=N;e[0]++)
    for (e[1]=0;e[1]<=N-e[0];e[1]++)
      for (e[2]=0;e[2]<=N-e[0]-e[1];e[2]++)
      {
     e[3]=N-e[0]-e[1]-e[2];
     alfa[0]= (e[0]<c[0]) ? e[0] : c[0];
     alfa[1]= (e[1]<c[1]) ? e[1] : c[1];
     DQ[j]=alfa[0]*u[0]+alfa[1]*u[1]+e[2]*u[2]+e[3]*u[3];
     IQ[j]=l;
     if (e[0])
     {
       f[0] =e[0]-1;
       f[1] =e[1];
       f[2] =e[2]+1;
       f[3] =e[3];
       NQ[l]=alfa[0]*u[0];
       JQ[l]=phi(f);
       l++;
     }
     if (e[1])
     {
       f[0] =e[0];
       f[1] =e[1]-1;
       f[2] =e[2];
       f[3] =e[3]+1;
       NQ[l]=alfa[1]*u[1];
       JQ[l]=phi(f);
       l++;
     }
     if (e[2])
     {
       f[0] =e[0];
       f[1] =e[1]+1;
       f[2] =e[2]-1;
       f[3] =e[3];
       NQ[l]=e[2]*u[2];
       JQ[l]=phi(f);
       l++;
     }
     if (e[3])
     {
       f[0] =e[0]+1;
       f[1] =e[1];
       f[2] =e[2];
       f[3] =e[3]-1;
       NQ[l]=e[3]*u[3];
```

```
        JQ[l]=phi(f);
        l++;
      }
      j++;
       }
  IQ[j]=l;
  {
    float qjjmax=0,a;
    for (j=0;j<J;j++) if (DQ[j]>qjjmax) qjjmax=DQ[j];
    a=1/qjjmax;
    for (j=0;j<J;j++)
    {
      if (DQ[j]==qjjmax) DQ[j]=0.0;
      else DQ[j]=1-a*DQ[j];
    }
    for (l=0;l<L;l++) NQ[l]*=a;
  }
}

void prob_conjunta(void)
{
  float        p0,p1,p2,e,ej;
  unsigned int j1,j2,j3,j4;
  p0= (float) 1/J;
  for (j1=0;j1<J;j1++) Pi1[j1]=p0;
  do
  {
    for (j1=0;j1<J;j1++) Pi2[j1]=0;
    for (j1=0;j1<J;j1++)
    {
      p0=Pi1[j1];
      j3=IQ[j1];
      j4=IQ[j1+1];
      for (j2=j3;j2<j4;j2++)
     Pi2[JQ[j2]]+=NQ[j2]*p0;
      Pi2[j1]+=Pi1[j1]*DQ[j1];
    }
    e=0;
    for (j1=0;j1<J;j1++)
    {
      p1=Pi1[j1];
      p2=Pi2[j1];
      if (p1) ej = (p1>p2) ? (p1-p2)/p1 : (p2-p1)/p1;
      else ej= p2 ? 1 : 0;
      if (ej>e) e=ej;
      Pi1[j1]=Pi2[j1];
    }
  } while (e>0.00001);
}

void prob_marginal(void)
{
  unsigned int i,j=0,e[4];
  for (i=0;i<=N;i++) PA[i]=PB[i]=0;
  for (e[0]=0;e[0]<=N;e[0]++)
    for (e[1]=0;e[1]<=N-e[0];e[1]++)
      for (e[2]=0;e[2]<=N-e[0]-e[1];e[2]++)
      {
```

```
      e[3]=N-e[0]-e[1]-e[2];
      PA[e[0]]+=Pi1[j];
      PB[e[1]]+=Pi1[j];
      j++;
       }
}

void saida(void)
{
  fp=fopen(fn,"w");
  fprintf(fp,"                ABA\\AUTOPROP\\EXPONENC\n\n\n");
  fprintf(fp,"    N    cA    cB        xA         xB        xAB
      xBA\n\n");
  fprintf(fp,"%5d    %5d    %5d    %10.4f    %10.4f    %10.4f
%10.4f\n\n\n",N,c[0],c[1],x[0],x[1],x[2],x[3]);
  {
    int    i;
    float  L,T,WA,WB,NA=0,NB=0;
    if (c[0]==1) L=u[0]*(1-PA[0]);
    else L=2*u[0]*(1-PA[0]-0.5*PA[1]);
    T=N/L;
    for (i=1;i<=N;i++) NA+=i*PA[i];
    WA=NA/L;
    for (i=1;i<=N;i++) NB+=i*PB[i];
    WB=NB/L;
    fprintf(fp,"      L          T          WA         WB\n\n");
    fprintf(fp,"%10.6f %10.6f %10.6f %10.6f\n\n\n",L,T,WA,WB);
  }
  {
    int i;
    fprintf(fp,"              n      PA(n)      PB(n)\n\n");
    for  (i=0;i<=N;i++)  fprintf(fp,"                %5d  %10.4f
%10.4f\n",i,PA[i],PB[i]);

  }
  fclose(fp);
}
```

Apêndice II - Implementação Computacional do Algoritmo da Convolução para Redes Circulares com Atendimento Exponencial.

```
#include "stdio.h"
#include "stdlib.h"
#include "string.h"

FILE      *fp;
char      *fn;
unsigned int   M,N,c[6];
float          x[11],G[21],p[6][21];

int  entrada(int a, char *s[8]);
void cte_normalizacao(void);
void prob_marginal(void);
void saida(void);

void main(int argc, char *argv[8])
{
  if (!entrada(argc, argv)) exit(1);
  cte_normalizacao();
  prob_marginal();
  saida();
}

int entrada(int a, char *s[8])
{
  unsigned int i;
  float        xmax;
  if (a<3)          return 0;
  M=atoi(s[1]);
  N=atoi(s[2]);
  if ((M<2)||(M>5)) return 0;
  if ((N<2)||(N>20))     return 0;
  if (a!=3*M+4)     return 0;
  c[0]=N;
  for (i=1;i<=M  ;i++) c[i]=atoi(s[ i+2 ]);
  for (i=1;i<=2*M;i++) x[i]=atof(s[i+M+2]);
  fn  =s[3*M+3];
  for (i=1;i<=M  ;i++) if ((c[i]< 1)||(c[i]>2)) return 0;
  for (i=1;i<=2*M;i++) if (x[i]<=0.0)        return 0;
  xmax=0.0;
  x[0]=0.0;
  for (i=1;i<=M;i++)
  {
    if (x[i]>xmax) xmax=x[i];
    x[0]+=x[M+i];
  }
  for (i=0;i<=M;i++) x[i]/=xmax;
  return 1;
}

void cte_normalizacao(void)
{
  unsigned int i,j;
  G[0]=1;
  for (i=1;i<21;i++) G[i]=x[0]*G[i-1]/i;
  for (j=1;j<=M ;j++)
  {
    if (c[j]==1) for (i=1;i<21;i++) G[i]=G[i]+x[j]*G[i-1];
    else
```

```
  fprintf(fp,"\n\n");
  fprintf(fp,"%5d%5d",M,N);
  for (i=1;i<=M;i++) fprintf(fp,"%10d",c[i]);
  fprintf(fp,"\n\n");
  for (i=0;i<=M;i++) fprintf(fp,"      x[%1d]",i);
  fprintf(fp,"\n\n");
  for (i=0;i<=M;i++) fprintf(fp,"%10.4f",x[i]);
  fprintf(fp,"\n\n");
  {
    float  L[21],T[21];
    for (i=1;i<21;i++)
    {
      L[i]=G[i-1]/G[i];
      T[i]=i/L[i];
    }
    fprintf(fp,"          n    L(n)       T(n)\n");
    fprintf(fp,"\n");
          f  o  r      (  i  =  1  ;  i  <  2  1  ;  i  +  +  )
fprintf(fp,"%10d%10.6f%10.6f\n",i,L[i],T[i]);
  }
  {
    fprintf(fp,"\n");
    fprintf(fp,"\n                    pi(k)\n");
    fprintf(fp,"\n");
    fprintf(fp,"           i       0");
    for (i=1;i<=M;i++) fprintf(fp,"%10d",i);
    fprintf(fp,"\n         k\n");
    for (j=0;j<=N;j++)
    {
      fprintf(fp,"%10d",j);
      for (i=0;i<=M;i++) fprintf(fp,"    %6.4f",p[i][j]);
      fprintf(fp,"\n");
    }
  }
  fclose(fp);
}
```

Apêndice III - Implementação Computacional do Algoritmo da Análise do Valor Médio para Redes Circulares com Atendimento Exponencial.

```
#include "stdio.h"
#include "stdlib.h"
#include "string.h"

FILE      *fp;
char      *fn;
unsigned int   M,N,c[6];
float          x[11],p[6][21];

int  entrada(int a, char *s[8]);
void prob_marginal(void);
void saida(void);

void main(int argc, char *argv[8])
{
  if (!entrada(argc, argv)) exit(1);
  prob_marginal();
  saida();
}

int entrada(int a, char *s[8])
{
  unsigned int i;
  float        xmax;
  if (a<3)          return 0;
  M=atoi(s[1]);
  N=atoi(s[2]);
  if ((M<2)||(M>5)) return 0;
  if ((N<2)||(N>20))     return 0;
  if (a!=3*M+4)     return 0;
  c[0]=N;
  for (i=1;i<=M  ;i++) c[i]=atoi(s[ i+2 ]);
  for (i=1;i<=2*M;i++) x[i]=atof(s[i+M+2]);
  fn  =s[3*M+3];
  for (i=1;i<=M  ;i++) if ((c[i]< 1)||(c[i]>2)) return 0;
  for (i=1;i<=2*M;i++) if (x[i]<=0.0)        return 0;
  xmax=0.0;
  x[0]=0.0;
  for (i=1;i<=M;i++)
  {
    if (x[i]>xmax) xmax=x[i];
    x[0]+=x[M+i];
  }
  for (i=0;i<=M;i++) x[i]/=xmax;
  return 1;
}

void prob_marginal(void)
{
  unsigned int i,j,k;
  float        L,T,W;
  for (i=0;i<=M;i++) p[i][0]=1.0;
  for (j=1;j<=N;j++)
  {
    T=x[0];
    for (i=1;i<=M;i++)
    {
      W=x[i]*p[i][0];
```

```
        if (c[i]==1) for (k=2;k<=j;k++) W+=k*x[i]*p[i][k-1];
        else for (k=2;k<=j;k++) W+=k*x[i]*p[i][k-1]/2.0;
        T+=W;
      }
      L=j/T;
      {
        float a=0.0;
        for (k=j;k>0;k--)
        {
       p[0][k]=x[0]*L*p[0][k-1]/k;
       a+=p[0][k];
        }
        p[0][0]=1-a;
      }
      for (i=1;i<=M;i++)
      {
        float a=0.0;
        if (c[i]==1)
        {
       for (k=j;k>0;k--)
       {
         p[i][k]=x[i]*L*p[i][k-1];
         a+=p[i][k];
       }
       p[i][0]=1-a;
        }
        else
        {
       for (k=j;k>1;k--)
       {
         p[i][k]=x[i]*L*p[i][k-1]/2;
         a+=p[i][k];
       }
       p[i][1]=x[i]*L*p[i][0];
       a+=p[i][1];
       p[i][0]=1-a;
        }
      }
    }
  }

  void saida(void)
  {
    unsigned int i,j;
    fp=fopen(fn,"w");
    fprintf(fp,"                    AB_A\\AUTOPROP\\AVM\n\n");
    fprintf(fp,"    M    N");
    for (i=1;i<=M;i++) fprintf(fp,"      c[%1d]",i);
    fprintf(fp,"\n\n");
    fprintf(fp,"%5d%5d",M,N);
    for (i=1;i<=M;i++) fprintf(fp,"%10d",c[i]);
    fprintf(fp,"\n\n");
    for (i=0;i<=M;i++) fprintf(fp,"      x[%1d]",i);
    fprintf(fp,"\n\n");
    for (i=0;i<=M;i++) fprintf(fp,"%10.4f",x[i]);
    fprintf(fp,"\n\n");
    {
      fprintf(fp,"\n");
```

```
      fprintf(fp,"\n                    pi(k)\n");
      fprintf(fp,"\n");
      fprintf(fp,"          i       0");
      for (i=1;i<=M;i++) fprintf(fp,"%10d",i);
      fprintf(fp,"\n        k\n");
      for (j=0;j<=N;j++)
      {
        fprintf(fp,"%10d",j);
        for (i=0;i<=M;i++) fprintf(fp,"    %6.4f",p[i][j]);
        fprintf(fp,"\n");
      }
    }
    fclose(fp);
  }
```

Apêndice IV - Implementação Computacional do Modelo ABA-AUTOPROP com Distribuição Erlang para os Tempos de Atendimento e Distribuição Exponencial para os Tempos de Viagem.

```
#include "stdio.h"
#include "stdlib.h"
#include "string.h"

FILE      *fp;
char      *fn;
unsigned int    N,k[2],J,L,bin[7][4],IQ[1527],JQ[4410];
float
x[4],u[4],PA[6],PB[6],DQ[1526],NQ[4410],Pi1[1526],Pi2[1526];

int       entrada(int a, char *s[9]);
unsigned int   phi(unsigned int f[4]);
void      matriz(void);
void      prob_conjunta(void);
void      prob_marginal(void);
void      saida(void);

void main(int argc, char *argv[9])
{
  if (!entrada(argc, argv)) exit(0);
  matriz();
  prob_conjunta();
  prob_marginal();
  saida();
}

int entrada(int a, char *s[9])
{
  if (a!=9) return 0;
  N   =atoi(s[1]);
  k[0]=atoi(s[2]);
  k[1]=atoi(s[3]);
  x[0]=atof(s[4]);
  x[1]=atof(s[5]);
  x[2]=atof(s[6]);
  x[3]=atof(s[7]);
  fn  =s[8];
  if ((N<1)||(N>5))                        return 0;
  if ((k[0]<1)||(k[0]>8)||(k[1]<1)||(k[1]>8))          return
0;
  if ((x[0]<=0)||(x[1]<=0)||(x[2]<=0)||(x[3]<=0)) return 0;
  u[0]=1/x[0];
  u[1]=1/x[1];
  u[2]=1/x[2];
  u[3]=1/x[3];
  {
    unsigned int n,m;
    for (n=0;n<7;n++) bin[n][0]=1;
    for (m=1;m<4;m++) bin[0][m]=0;
    for (n=1;n<7;n++)
      for (m=1;m<4;m++)
     bin[n][m]=bin[n-1][m-1]+bin[n-1][m];
  }
  J=+bin[N+1][3]*(k[0]*k[1])
    +bin[N+1][2]*(k[0]+k[1])
    +bin[N+1][1];
  L=+bin[N-1][3]*(  k[0]*k[1]                  )*4
    +bin[N-1][2]*(2*k[0]*k[1]+  (k[0]+k[1])  )*3
```

```
    +bin[N-1][1]*(  k[0]*k[1]+2*(k[0]+k[1])+1)*2
    +bin[N-1][0]*(            +  (k[0]+k[1])+2)*1;
  return 1;
}

unsigned int phi(unsigned int f[4])
{
  unsigned int a=0,i,F[10];
  div_t        beta[2];
  beta[0]=div(f[0]+k[0]-1,k[0]);
  beta[1]=div(f[1]+k[1]-1,k[1]);
  F[0]=beta[0].quot;
  F[1]=F[0]+beta[1].quot;
  for (i=2;i<4;i++) F[i]=F[i-1]+f[i];
  if (beta[0].quot)
    a+=+(bin[  N+1   ][1]+bin[  N+1   ][2]*k[1])
       +(bin[  N+1   ][2]-bin[N-F[0]+2][2]     )*k[0]
       +(bin[  N+1   ][3]-bin[N-F[0]+2][3]     )*k[0]*k[1]

+(bin[N-F[0]+1][1]+bin[N-F[0]+1][2]*k[1])*(f[0]-k[0]*(beta[0].q
uot-1)-1);
  if (beta[1].quot)
    a+=+(bin[N-F[0]+1][1]                  )
       +(bin[N-F[0]+1][2]-bin[N-F[1]+2][2])*k[1]
       +(bin[N-F[1]+1][1]
)*(f[1]-k[1]*(beta[1].quot-1)-1);
  a+=+f[2];
  return a;
}

void matriz(void)
{
  unsigned int e[4],E[4],f[4],j=0,l=0,i;
  div_t        beta[2];
  for (e[0]=0;e[0]<=k[0]*N;e[0]++)
  {
    beta[0]=div(e[0]+k[0]-1,k[0]);
    E[0]   =beta[0].quot;
    for (e[1]=0;e[1]<=k[1]*(N-E[0]);e[1]++)
    {
      beta[1]=div(e[1]+k[1]-1,k[1]);
      E[1]   =E[0]+beta[1].quot;
      for (e[2]=0;e[2]<=N-E[1];e[2]++)
      {
     E[2]=E[1]+e[2];
     e[3]=N-E[2];
     DQ[j]=0;
     if (e[0]) DQ[j]+=k[0]*u[0];
     if (e[1]) DQ[j]+=k[1]*u[1];
     for (i=2;i<4;i++) DQ[j]+=e[i]*u[i];
     IQ[j]=l;
     if (beta[0].quot)
     {
       for (i=0;i<4;i++) f[i]=e[i];
       f[0]--;
       if (!beta[0].rem) f[2]++;
       NQ[l]=k[0]*u[0];
       JQ[l]=phi(f);
```

```
          l++;
        }
        if (beta[l].quot)
        {
          for (i=0;i<4;i++) f[i]=e[i];
          f[l]--;
          if (!beta[l].rem) f[3]++;
          NQ[l]=k[l]*u[l];
          JQ[l]=phi(f);
          l++;
        }
        if (e[2])
        {
          for (i=0;i<4;i++) f[i]=e[i];
          f[l]+=k[l];
          f[2]--;
          NQ[l]=e[2]*u[2];
          JQ[l]=phi(f);
          l++;
        }
        if (e[3])
        {
          for (i=0;i<4;i++) f[i]=e[i];
          f[0]+=k[0];
          f[3]--;
          NQ[l]=e[3]*u[3];
          JQ[l]=phi(f);
          l++;
        }
        j++;
         }
      }
    }
    IQ[j]=l;
    {
      float qjjmax=0,a;
      for (j=0;j<J;j++) if (DQ[j]>qjjmax) qjjmax=DQ[j];
      a=1/qjjmax;
      for (j=0;j<J;j++)
      {
        if (DQ[j]==qjjmax) DQ[j]=0.0;
        else DQ[j]=1-a*DQ[j];
      }
      for (l=0;l<L;l++) NQ[l]*=a;
    }
  }

  void prob_conjunta(void)
  {
    float          p0,p1,p2,e,ej;
    unsigned int j1,j2,j3,j4;
    p0= (float) 1/J;
    for (j1=0;j1<J;j1++) Pi1[j1]=p0;
    do
    {
      for (j1=0;j1<J;j1++) Pi2[j1]=0;
      for (j1=0;j1<J;j1++)
      {
```

```
        p0=Pi1[j1];
        j3=IQ[j1];
        j4=IQ[j1+1];
        for (j2=j3;j2<j4;j2++)
       Pi2[JQ[j2]]+=NQ[j2]*p0;
        Pi2[j1]+=Pi1[j1]*DQ[j1];
      }
      e=0;
      for (j1=0;j1<J;j1++)
      {
        p1=Pi1[j1];
        p2=Pi2[j1];
        if (p1) ej = (p1>p2) ? (p1-p2)/p1 : (p2-p1)/p1;
        else ej= (p2) ? 1 : 0;
        if (ej>e) e=ej;
        Pi1[j1]=Pi2[j1];
      }
    } while (e>0.00001);
  }

  void prob_marginal(void)
  {
    unsigned int  i,j=0,e[4],E[4];
    div_t         beta[2];
    for (i=0;i<=N;i++) PA[i]=PB[i]=0.0;
    for (e[0]=0;e[0]<=k[0]*N;e[0]++)
    {
      beta[0]=div(e[0]+k[0]-1,k[0]);
      E[0]   =beta[0].quot;
      for (e[1]=0;e[1]<=k[1]*(N-E[0]);e[1]++)
      {
        beta[1]=div(e[1]+k[1]-1,k[1]);
        E[1]   =E[0]+beta[1].quot;
        for (e[2]=0;e[2]<=N-E[1];e[2]++)
        {
       E[2]=E[1]+e[2];
       e[3]=N-E[2];
       PA[beta[0].quot]+=Pi1[j];
       PB[beta[1].quot]+=Pi1[j];
       j++;
        }
      }
    }
  }

  void saida(void)
  {
    fp=fopen(fn,"w");
    fprintf(fp,"                ABA\\AUTOPROP\\ERLANG_1\n\n\n");
    fprintf(fp,"    N    kA    kB        xA         xB         xAB
        xBA\n\n");
    fprintf(fp,"%5d %5d %5d %10.4f %10.4f %10.4f
  %10.4f\n\n\n",N,k[0],k[1],x[0],x[1],x[2],x[3]);
    {
      int    i;
      float  L,T,WA,WB,NA=0.0,NB=0.0;
      L=u[0]*(1.0-PA[0]);
      T=N/L;
```

```
    for (i=1;i<=N;i++) NA+=i*PA[i];
    WA=NA/L;
    for (i=1;i<=N;i++) NB+=i*PB[i];
    WB=NB/L;
    fprintf(fp,"      L           T           WA
WB\n\n");
    fprintf(fp,"%10.6f %10.6f %10.6f %10.6f\n\n\n",L,T,WA,WB);
  }
  {
    int i;
    fprintf(fp,"                n      PA(n)      PB(n)\n\n");
    for (i=0;i<=N;i++) fprintf(fp,"          %5d %10.4f
%10.4f\n",i,PA[i],PB[i]);

  }
  fclose(fp);
}
```

Apêndice V - Implementação Computacional do Modelo ABA-AUTOPROP com Distribuição Erlang para os Tempos de Atendimento e Distribuição Erlang de Ordem Dois para os Tempos de Viagem.

```
#include "stdio.h"
#include "stdlib.h"
#include "string.h"

FILE      *fp;
char      *fn;
unsigned int    N,k[2],J,L,bin[8][6],IQ[1940],JQ[5824];
float
x[4],u[6],PA[5],PB[5],DQ[1939],NQ[5824],Pi1[1939],Pi2[1939];

int       entrada(int a, char *s[9]);
unsigned int   phi(unsigned int f[6]);
void      matriz(void);
void      prob_conjunta(void);
void      prob_marginal(void);
void      saida(void);

void main(int argc, char *argv[9])
{
  if (!entrada(argc, argv)) exit(0);
  matriz();
  prob_conjunta();
  prob_marginal();
  saida();
}

int entrada(int a, char *s[9])
{
  if (a!=9) return 0;
  N   =atoi(s[1]);
  k[0]=atoi(s[2]);
  k[1]=atoi(s[3]);
  x[0]=atof(s[4]);
  x[1]=atof(s[5]);
  x[2]=atof(s[6]);
  x[3]=atof(s[7]);
  fn  =s[8];
  if ((N<1)||(N>4))                        return 0;
  if ((k[0]<1)||(k[0]>8)||(k[1]<1)||(k[1]>8))          return
0;
  if ((x[0]<=0)||(x[1]<=0)||(x[2]<=0)||(x[3]<=0)) return 0;
  u[0]=1/x[0];
  u[1]=1/x[1];
  u[2]=u[3]=2/x[2];
  u[4]=u[5]=2/x[3];
  {
    unsigned int n,m;
    for (n=0;n<8;n++) bin[n][0]=1;
    for (m=1;m<6;m++) bin[0][m]=0;
    for (n=1;n<8;n++)
      for (m=1;m<6;m++)
     bin[n][m]=bin[n-1][m-1]+bin[n-1][m];
  }
  J=+bin[N+3][5]*(k[0]*k[1])
    +bin[N+3][4]*(k[0]+k[1])
    +bin[N+3][3];
  L=+bin[N-1][5]*(  k[0]*k[1]                  )*6
    +bin[N-1][4]*(4*k[0]*k[1]+  (k[0]+k[1])  )*5
```

```
    +bin[N-1][3]*(6*k[0]*k[1]+4*(k[0]+k[1])+1)*4
    +bin[N-1][2]*(4*k[0]*k[1]+6*(k[0]+k[1])+4)*3
    +bin[N-1][1]*(  k[0]*k[1]+4*(k[0]+k[1])+6)*2
    +bin[N-1][0]*(           +  (k[0]+k[1])+4)*1;
  return 1;
}

unsigned int phi(unsigned int f[6])
{
  unsigned int a=0,i,F[6];
  div_t        beta[2];
  beta[0]=div(f[0]+k[0]-1,k[0]);
  beta[1]=div(f[1]+k[1]-1,k[1]);
  F[0]=beta[0].quot;
  F[1]=F[0]+beta[1].quot;
  for (i=2;i<6;i++) F[i]=F[i-1]+f[i];
  if (beta[0].quot)
    a+=+(bin[  N+3   ][3]+bin[  N+3   ][4]*k[1])
       +(bin[  N+3   ][4]-bin[N-F[0]+4][4]     )*k[0]
       +(bin[  N+3   ][5]-bin[N-F[0]+4][5]     )*k[0]*k[1]

+(bin[N-F[0]+3][3]+bin[N-F[0]+3][4]*k[1])*(f[0]-k[0]*(beta[0].q
uot-1)-1);
  if (beta[1].quot)
    a+=+(bin[N-F[0]+3][3]                  )
       +(bin[N-F[0]+3][4]-bin[N-F[1]+4][4])*k[1]
       +(bin[N-F[1]+3][3]
)*(f[1]-k[1]*(beta[1].quot-1)-1);
  a+=+bin[N-F[1]+3][3]-bin[N-F[2]+3][3];
  a+=+bin[N-F[2]+2][2]-bin[N-F[3]+2][2];
  a+=+f[4];
  return a;
}

void matriz(void)
{
  unsigned int e[6],E[6],f[6],j=0,l=0,i;
  div_t        beta[2];
  for (e[0]=0;e[0]<=k[0]*N;e[0]++)
  {
    beta[0]=div(e[0]+k[0]-1,k[0]);
    E[0]   =beta[0].quot;
    for (e[1]=0;e[1]<=k[1]*(N-E[0]);e[1]++)
    {
      beta[1]=div(e[1]+k[1]-1,k[1]);
      E[1]   =E[0]+beta[1].quot;
      for (e[2]=0;e[2]<=N-E[1];e[2]++)
      {
     E[2]=E[1]+e[2];
     for (e[3]=0;e[3]<=N-E[2];e[3]++)
     {
       E[3]=E[2]+e[3];
       for (e[4]=0;e[4]<=N-E[3];e[4]++)
       {
         E[4]=E[3]+e[4];
         e[5]=N-E[4];
         DQ[j]=0;
         if (e[0]) DQ[j]+=k[0]*u[0];
```

```
if (e[1]) DQ[j]+=k[1]*u[1];
for (i=2;i<6;i++) DQ[j]+=e[i]*u[i];
IQ[j]=l;
if (beta[0].quot)
{
  for (i=0;i<6;i++) f[i]=e[i];
  f[0]--;
  if (!beta[0].rem) f[2]++;
  NQ[l]=k[0]*u[0];
  JQ[l]=phi(f);
  l++;
}
if (beta[1].quot)
{
  for (i=0;i<6;i++) f[i]=e[i];
  f[1]--;
  if (!beta[1].rem) f[4]++;
  NQ[l]=k[1]*u[1];
  JQ[l]=phi(f);
  l++;
}
if (e[2])
{
  for (i=0;i<6;i++) f[i]=e[i];
  f[2]--;
  f[3]++;
  NQ[l]=e[2]*u[2];
  JQ[l]=phi(f);
  l++;
}
if (e[3])
{
  for (i=0;i<6;i++) f[i]=e[i];
  f[1]+=k[1];
  f[3]--;
  NQ[l]=e[3]*u[3];
  JQ[l]=phi(f);
  l++;
}
if (e[4])
{
  for (i=0;i<6;i++) f[i]=e[i];
  f[4]--;
  f[5]++;
  NQ[l]=e[4]*u[4];
  JQ[l]=phi(f);
  l++;
}
if (e[5])
{
  for (i=0;i<6;i++) f[i]=e[i];
  f[0]+=k[0];
  f[5]--;
  NQ[l]=e[5]*u[5];
  JQ[l]=phi(f);
  l++;
}
j++;
```

```
        }
      }
       }
     }
   }
   IQ[j]=l;
   {
     float qjjmax=0,a;
     for (j=0;j<J;j++) if (DQ[j]>qjjmax) qjjmax=DQ[j];
     a=1/qjjmax;
     for (j=0;j<J;j++)
     {
       if (DQ[j]==qjjmax) DQ[j]=0.0;
       else DQ[j]=1-a*DQ[j];
     }
     for (l=0;l<L;l++) NQ[l]*=a;
   }
 }

 void prob_conjunta(void)
 {
   float          p0,p1,p2,e,ej;
   unsigned int j1,j2,j3,j4;
   p0= (float) 1/J;
   for (j1=0;j1<J;j1++) Pi1[j1]=p0;
   do
   {
     for (j1=0;j1<J;j1++) Pi2[j1]=0;
     for (j1=0;j1<J;j1++)
     {
       p0=Pi1[j1];
       j3=IQ[j1];
       j4=IQ[j1+1];
       for (j2=j3;j2<j4;j2++)
      Pi2[JQ[j2]]+=NQ[j2]*p0;
       Pi2[j1]+=Pi1[j1]*DQ[j1];
     }
     e=0;
     for (j1=0;j1<J;j1++)
     {
       p1=Pi1[j1];
       p2=Pi2[j1];
       if (p1) ej = (p1>p2) ? (p1-p2)/p1 : (p2-p1)/p1;
       else ej= (p2) ? 1 : 0;
       if (ej>e) e=ej;
       Pi1[j1]=Pi2[j1];
     }
   } while (e>0.00001);
 }

 void prob_marginal(void)
 {
   unsigned int  i,j=0,e[6],E[6];
   div_t         beta[2];
   for (i=0;i<=N;i++) PA[i]=PB[i]=0.0;
   for (e[0]=0;e[0]<=k[0]*N;e[0]++)
   {
     beta[0]=div(e[0]+k[0]-1,k[0]);
```

```
    E[0]   =beta[0].quot;
    for (e[1]=0;e[1]<=k[1]*(N-E[0]);e[1]++)
    {
      beta[1]=div(e[1]+k[1]-1,k[1]);
      E[1]   =E[0]+beta[1].quot;
      for (e[2]=0;e[2]<=N-E[1];e[2]++)
      {
     E[2]=E[1]+e[2];
     for (e[3]=0;e[3]<=N-E[2];e[3]++)
     {
       E[3]=E[2]+e[3];
       for (e[4]=0;e[4]<=N-E[3];e[4]++)
       {
         E[4]=E[3]+e[4];
         e[5]=N-E[4];
         PA[beta[0].quot]+=Pi1[j];
         PB[beta[1].quot]+=Pi1[j];
         j++;
       }
     }
      }
    }
  }
}

void saida(void)
{
  fp=fopen(fn,"w");
  fprintf(fp,"                ABA\\AUTOPROP\\ERLANG_2\n\n\n");
  fprintf(fp,"    N    kA    kB        xA         xB         xAB
      xBA\n\n");
  fprintf(fp,"%5d %5d %5d %10.4f %10.4f %10.4f
%10.4f\n\n\n",N,k[0],k[1],x[0],x[1],x[2],x[3]);
  {
    int    i;
    float  L,T,WA,WB,NA=0.0,NB=0.0;
    L=u[0]*(1.0-PA[0]);
    T=N/L;
    for (i=1;i<=N;i++) NA+=i*PA[i];
    WA=NA/L;
    for (i=1;i<=N;i++) NB+=i*PB[i];
    WB=NB/L;
    fprintf(fp,"      L           T           WA
WB\n\n");
    fprintf(fp,"%10.6f %10.6f %10.6f %10.6f\n\n\n",L,T,WA,WB);
  }
  {
    int i;
    fprintf(fp,"              n      PA(n)      PB(n)\n\n");
    for (i=0;i<=N;i++) fprintf(fp,"          %5d %10.4f
%10.4f\n",i,PA[i],PB[i]);

  }
  fclose(fp);
}
```

Apêndice VI - Implementação Computacional do Modelo ABA-AUTOPROP com Distribuição Erlang para os Tempos de Atendimento e Distribuição Erlang de Ordem Quatro para os Tempos de Viagem.

```
#include "stdio.h"
#include "stdlib.h"
#include "string.h"

FILE      *fp;
char      *fn;
unsigned int    N,k[2],J,L,bin[11][10],IQ[1481],JQ[3852];
float
x[4],u[10],PA[4],PB[4],DQ[1480],NQ[3852],Pi1[1480],Pi2[1480];

int       entrada(int a, char *s[9]);
unsigned int   phi(unsigned int f[10]);
void      matriz(void);
void      prob_conjunta(void);
void      prob_marginal(void);
void      saida(void);

void main(int argc, char *argv[9])
{
  if (!entrada(argc, argv)) exit(0);
  matriz();
  prob_conjunta();
  prob_marginal();
  saida();
}

int entrada(int a, char *s[9])
{
  if (a!=9) return 0;
  N   =atoi(s[1]);
  k[0]=atoi(s[2]);
  k[1]=atoi(s[3]);
  x[0]=atof(s[4]);
  x[1]=atof(s[5]);
  x[2]=atof(s[6]);
  x[3]=atof(s[7]);
  fn  =s[8];
  if ((N<1)||(N>3))                        return 0;
  if ((k[0]<1)||(k[0]>8)||(k[1]<1)||(k[1]>8))          return
0;
  if ((x[0]<=0)||(x[1]<=0)||(x[2]<=0)||(x[3]<=0)) return 0;
  u[0]=1/x[0];
  u[1]=1/x[1];
  u[2]=u[3]=u[4]=u[5]=4/x[2];
  u[6]=u[7]=u[8]=u[9]=4/x[3];
  {
    unsigned int n,m;
    for (n=0;n<11;n++) bin[n][0]=1;
    for (m=1;m<10;m++) bin[0][m]=0;
    for (n=1;n<11;n++)
      for (m=1;m<10;m++)
     bin[n][m]=bin[n-1][m-1]+bin[n-1][m];
  }
  J=+bin[N+7][9]*(k[0]*k[1])
    +bin[N+7][8]*(k[0]+k[1])
    +bin[N+7][7];
  L=+bin[N-1][9]*(   k[0]*k[1]                    )*10
    +bin[N-1][8]*( 8*k[0]*k[1]+   (k[0]+k[1])   )* 9
```

```
      +bin[N-1][7]*(28*k[0]*k[1]+ 8*(k[0]+k[1])+ 1)* 8
      +bin[N-1][6]*(56*k[0]*k[1]+28*(k[0]+k[1])+ 8)* 7
      +bin[N-1][5]*(70*k[0]*k[1]+56*(k[0]+k[1])+28)* 6
      +bin[N-1][4]*(56*k[0]*k[1]+70*(k[0]+k[1])+56)* 5
      +bin[N-1][3]*(28*k[0]*k[1]+56*(k[0]+k[1])+70)* 4
      +bin[N-1][2]*( 8*k[0]*k[1]+28*(k[0]+k[1])+56)* 3
      +bin[N-1][1]*(   k[0]*k[1]+ 8*(k[0]+k[1])+28)* 2
      +bin[N-1][0]*(             +   (k[0]+k[1])+ 8)* 1;
  return 1;
}

unsigned int phi(unsigned int f[10])
{
  unsigned int a=0,i,F[10];
  div_t        beta[2];
  beta[0]=div(f[0]+k[0]-1,k[0]);
  beta[1]=div(f[1]+k[1]-1,k[1]);
  F[0]=beta[0].quot;
  F[1]=F[0]+beta[1].quot;
  for (i=2;i<10;i++) F[i]=F[i-1]+f[i];
  if (beta[0].quot)
    a+=+(bin[  N+7   ][7]+bin[  N+7   ][8]*k[1])
       +(bin[  N+7   ][8]-bin[N-F[0]+8][8]     )*k[0]
       +(bin[  N+7   ][9]-bin[N-F[0]+8][9]     )*k[0]*k[1]

+(bin[N-F[0]+7][7]+bin[N-F[0]+7][8]*k[1])*(f[0]-k[0]*(beta[0].q
uot-1)-1);
  if (beta[1].quot)
    a+=+(bin[N-F[0]+7][7]                  )
       +(bin[N-F[0]+7][8]-bin[N-F[1]+8][8])*k[1]
       +(bin[N-F[1]+7][7]
)*(f[1]-k[1]*(beta[1].quot-1)-1);
  a+=+bin[N-F[1]+7][7]-bin[N-F[2]+7][7];
  a+=+bin[N-F[2]+6][6]-bin[N-F[3]+6][6];
  a+=+bin[N-F[3]+5][5]-bin[N-F[4]+5][5];
  a+=+bin[N-F[4]+4][4]-bin[N-F[5]+4][4];
  a+=+bin[N-F[5]+3][3]-bin[N-F[6]+3][3];
  a+=+bin[N-F[6]+2][2]-bin[N-F[7]+2][2];
  a+=+f[8];
  return a;
}

void matriz(void)
{
  unsigned int e[10],E[10],f[10],j=0,l=0,i;
  div_t        beta[2];
  for (e[0]=0;e[0]<=k[0]*N;e[0]++)
  {
    beta[0]=div(e[0]+k[0]-1,k[0]);
    E[0]   =beta[0].quot;
    for (e[1]=0;e[1]<=k[1]*(N-E[0]);e[1]++)
    {
      beta[1]=div(e[1]+k[1]-1,k[1]);
      E[1]   =E[0]+beta[1].quot;
      for (e[2]=0;e[2]<=N-E[1];e[2]++)
      {
     E[2]=E[1]+e[2];
     for (e[3]=0;e[3]<=N-E[2];e[3]++)
```

```
{
  E[3]=E[2]+e[3];
  for (e[4]=0;e[4]<=N-E[3];e[4]++)
  {
    E[4]=E[3]+e[4];
    for (e[5]=0;e[5]<=N-E[4];e[5]++)
    {
      E[5]=E[4]+e[5];
      for (e[6]=0;e[6]<=N-E[5];e[6]++)
      {
     E[6]=E[5]+e[6];
     for (e[7]=0;e[7]<=N-E[6];e[7]++)
     {
       E[7]=E[6]+e[7];
       for (e[8]=0;e[8]<=N-E[7];e[8]++)
       {
         E[8]=E[7]+e[8];
         e[9]=N-E[8];
         DQ[j]=0;
         if (e[0]) DQ[j]+=k[0]*u[0];
         if (e[1]) DQ[j]+=k[1]*u[1];
         for (i=2;i<10;i++) DQ[j]+=e[i]*u[i];
         IQ[j]=l;
         if (beta[0].quot)
         {
           for (i=0;i<10;i++) f[i]=e[i];
           f[0]--;
           if (!beta[0].rem) f[2]++;
           NQ[l]=k[0]*u[0];
           JQ[l]=phi(f);
           l++;
         }
         if (beta[1].quot)
         {
           for (i=0;i<10;i++) f[i]=e[i];
           f[1]--;
           if (!beta[1].rem) f[6]++;
           NQ[l]=k[1]*u[1];
           JQ[l]=phi(f);
           l++;
         }
         if (e[2])
         {
           for (i=0;i<10;i++) f[i]=e[i];
           f[2]--;
           f[3]++;
           NQ[l]=e[2]*u[2];
           JQ[l]=phi(f);
           l++;
         }
         if (e[3])
         {
           for (i=0;i<10;i++) f[i]=e[i];
           f[3]--;
           f[4]++;
           NQ[l]=e[3]*u[3];
           JQ[l]=phi(f);
           l++;
```

```
        }
        if (e[4])
        {
          for (i=0;i<10;i++) f[i]=e[i];
          f[4]--;
          f[5]++;
          NQ[l]=e[4]*u[4];
          JQ[l]=phi(f);
          l++;
        }
        if (e[5])
        {
          for (i=0;i<10;i++) f[i]=e[i];
          f[1]+=k[1];
          f[5]--;
          NQ[l]=e[5]*u[5];
          JQ[l]=phi(f);
          l++;
        }
        if (e[6])
        {
          for (i=0;i<10;i++) f[i]=e[i];
          f[6]--;
          f[7]++;
          NQ[l]=e[6]*u[6];
          JQ[l]=phi(f);
          l++;
        }
        if (e[7])
        {
          for (i=0;i<10;i++) f[i]=e[i];
          f[7]--;
          f[8]++;
          NQ[l]=e[7]*u[7];
          JQ[l]=phi(f);
          l++;
        }
        if (e[8])
        {
          for (i=0;i<10;i++) f[i]=e[i];
          f[8]--;
          f[9]++;
          NQ[l]=e[8]*u[8];
          JQ[l]=phi(f);
          l++;
        }
        if (e[9])
        {
          for (i=0;i<10;i++) f[i]=e[i];
          f[0]+=k[0];
          f[9]--;
          NQ[l]=e[9]*u[9];
          JQ[l]=phi(f);
          l++;
        }
        j++;
      }
    }
```

```
            }
          }
        }
      }
       }
    }
  }
  IQ[j]=l;
  {
    float qjjmax=0,a;
    for (j=0;j<J;j++) if (DQ[j]>qjjmax) qjjmax=DQ[j];
    a=1/qjjmax;
    for (j=0;j<J;j++)
    {
      if (DQ[j]==qjjmax) DQ[j]=0.0;
      else DQ[j]=1-a*DQ[j];
    }
    for (l=0;l<L;l++) NQ[l]*=a;
  }
}

void prob_conjunta(void)
{
  float          p0,p1,p2,e,ej;
  unsigned int j1,j2,j3,j4;
  p0= (float) 1/J;
  for (j1=0;j1<J;j1++) Pi1[j1]=p0;
  do
  {
    for (j1=0;j1<J;j1++) Pi2[j1]=0;
    for (j1=0;j1<J;j1++)
    {
      p0=Pi1[j1];
      j3=IQ[j1];
      j4=IQ[j1+1];
      for (j2=j3;j2<j4;j2++)
     Pi2[JQ[j2]]+=NQ[j2]*p0;
      Pi2[j1]+=Pi1[j1]*DQ[j1];
    }
    e=0;
    for (j1=0;j1<J;j1++)
    {
      p1=Pi1[j1];
      p2=Pi2[j1];
      if (p1) ej = (p1>p2) ? (p1-p2)/p1 : (p2-p1)/p1;
      else ej= (p2) ? 1 : 0;
      if (ej>e) e=ej;
      Pi1[j1]=Pi2[j1];
    }
  } while (e>0.00001);
}

void prob_marginal(void)
{
  unsigned int  i,j=0,e[10],E[10];
  div_t         beta[2];
  for (i=0;i<=N;i++) PA[i]=PB[i]=0.0;
  for (e[0]=0;e[0]<=k[0]*N;e[0]++)
```

```
    {
      beta[0]=div(e[0]+k[0]-1,k[0]);
      E[0]    =beta[0].quot;
      for (e[1]=0;e[1]<=k[1]*(N-E[0]);e[1]++)
      {
        beta[1]=div(e[1]+k[1]-1,k[1]);
        E[1]    =E[0]+beta[1].quot;
        for (e[2]=0;e[2]<=N-E[1];e[2]++)
        {
       E[2]=E[1]+e[2];
       for (e[3]=0;e[3]<=N-E[2];e[3]++)
       {
         E[3]=E[2]+e[3];
         for (e[4]=0;e[4]<=N-E[3];e[4]++)
         {
           E[4]=E[3]+e[4];
           for (e[5]=0;e[5]<=N-E[4];e[5]++)
           {
             E[5]=E[4]+e[5];
             for (e[6]=0;e[6]<=N-E[5];e[6]++)
             {
            E[6]=E[5]+e[6];
            for (e[7]=0;e[7]<=N-E[6];e[7]++)
            {
              E[7]=E[6]+e[7];
              for (e[8]=0;e[8]<=N-E[7];e[8]++)
              {
                E[8]=E[7]+e[8];
                e[9]=N-E[8];
                PA[beta[0].quot]+=Pi1[j];
                PB[beta[1].quot]+=Pi1[j];
                j++;
              }
            }
             }
           }
         }
       }
        }
      }
    }
  }

  void saida(void)
  {
    fp=fopen(fn,"w");
    fprintf(fp,"                    ABA\\AUTOPROP\\ERLANG_4\n\n\n");
    fprintf(fp,"    N    kA    kB        xA        xB        xAB
        xBA\n\n");
    fprintf(fp,"%5d %5d %5d %10.4f %10.4f %10.4f
%10.4f\n\n\n",N,k[0],k[1],x[0],x[1],x[2],x[3]);
    {
      int    i;
      float  L,T,WA,WB,NA=0.0,NB=0.0;
      L=u[0]*(1.0-PA[0]);
      T=N/L;
      for (i=1;i<=N;i++) NA+=i*PA[i];
      WA=NA/L;
```

```
    for (i=1;i<=N;i++) NB+=i*PB[i];
    WB=NB/L;
    fprintf(fp,"      L          T          WA
WB\n\n");
    fprintf(fp,"%10.6f %10.6f %10.6f %10.6f\n\n\n",L,T,WA,WB);
  }
  {
    int i;
    fprintf(fp,"              n      PA(n)      PB(n)\n\n");
    for (i=0;i<=N;i++) fprintf(fp,"          %5d %10.4f
%10.4f\n",i,PA[i],PB[i]);

  }
  fclose(fp);
}
```

Apêndice VII - Implementação Computacional do Modelo ABA-AUTOPROP com Distribuição Erlang para os Tempos de Atendimento e Distribuição Erlang de Ordem Oito para os Tempos de Viagem.

```
#include "stdio.h"
#include "stdlib.h"
#include "string.h"

FILE      *fp;
char      *fn;
unsigned int    N,k[2],J,L,bin[18][18],IQ[473],JQ[912];
float
x[4],u[18],PA[3],PB[3],DQ[472],NQ[912],Pi1[472],Pi2[472];

int       entrada(int a, char *s[9]);
unsigned int   phi(unsigned int f[18]);
void      matriz(void);
void      prob_conjunta(void);
void      prob_marginal(void);
void      saida(void);

void main(int argc, char *argv[9])
{
  if (!entrada(argc, argv)) exit(0);
  matriz();
  prob_conjunta();
  prob_marginal();
  saida();
}

int entrada(int a, char *s[9])
{
  if (a!=9) return 0;
  N   =atoi(s[1]);
  k[0]=atoi(s[2]);
  k[1]=atoi(s[3]);
  x[0]=atof(s[4]);
  x[1]=atof(s[5]);
  x[2]=atof(s[6]);
  x[3]=atof(s[7]);
  fn  =s[8];
  if ((N<1)||(N>2))                        return 0;
  if ((k[0]<1)||(k[0]>8)||(k[1]<1)||(k[1]>8))          return
0;
  if ((x[0]<=0)||(x[1]<=0)||(x[2]<=0)||(x[3]<=0)) return 0;
  u[ 0]=1/x[0];
  u[ 1]=1/x[1];
  u[ 2]=u[ 3]=u[ 4]=u[ 5]=u[ 6]=u[ 7]=u[ 8]=u[ 9]=8/x[2];
  u[10]=u[11]=u[12]=u[13]=u[14]=u[15]=u[16]=u[17]=8/x[3];
  {
    unsigned int n,m;
    for (n=0;n<18;n++) bin[n][0]=1;
    for (m=1;m<18;m++) bin[0][m]=0;
    for (n=1;n<18;n++)
      for (m=1;m<18;m++)
     bin[n][m]=bin[n-1][m-1]+bin[n-1][m];
  }
  J=+bin[N+15][17]*(k[0]*k[1])
    +bin[N+15][16]*(k[0]+k[1])
    +bin[N+15][15];
  L=+bin[N-1][ 4]*(560*k[0]*k[1]+1820*(k[0]+k[1])+4368)*5
    +bin[N-1][ 3]*(120*k[0]*k[1]+ 560*(k[0]+k[1])+1820)*4
```

```
    +bin[N-1][ 2]*( 16*k[0]*k[1]+ 120*(k[0]+k[1])+ 560)*3
    +bin[N-1][ 1]*(    k[0]*k[1]+  16*(k[0]+k[1])+ 120)*2
    +bin[N-1][ 0]*(                    k[0]+k[1] +  16)*1;
  return 1;
}

unsigned int phi(unsigned int f[18])
{
  unsigned int a=0,i,F[18];
  div_t        beta[2];
  beta[0]=div(f[0]+k[0]-1,k[0]);
  beta[1]=div(f[1]+k[1]-1,k[1]);
  F[0]=beta[0].quot;
  F[1]=F[0]+beta[1].quot;
  for (i=2;i<18;i++) F[i]=F[i-1]+f[i];
  if (beta[0].quot)
    a+=+(bin[  N+15   ][15]+bin[  N+15   ][16]*k[1])
       +(bin[  N+15   ][16]-bin[N-F[0]+16][16]     )*k[0]
       +(bin[  N+15   ][17]-bin[N-F[0]+16][17]     )*k[0]*k[1]

+(bin[N-F[0]+15][15]+bin[N-F[0]+15][16]*k[1])*(f[0]-k[0]*(beta[
0].quot-1)-1);
  if (beta[1].quot)
    a+=+(bin[N-F[0]+15][15]                    )
       +(bin[N-F[0]+15][16]-bin[N-F[1]+16][16])*k[1]
       +(bin[N-F[1]+15][15]
)*(f[1]-k[1]*(beta[1].quot-1)-1);
  a+=+bin[N-F[ 1]+15][15]-bin[N-F[ 2]+15][15];
  a+=+bin[N-F[ 2]+14][14]-bin[N-F[ 3]+14][14];
  a+=+bin[N-F[ 3]+13][13]-bin[N-F[ 4]+13][13];
  a+=+bin[N-F[ 4]+12][12]-bin[N-F[ 5]+12][12];
  a+=+bin[N-F[ 5]+11][11]-bin[N-F[ 6]+11][11];
  a+=+bin[N-F[ 6]+10][10]-bin[N-F[ 7]+10][10];
  a+=+bin[N-F[ 7]+ 9][ 9]-bin[N-F[ 8]+ 9][ 9];
  a+=+bin[N-F[ 8]+ 8][ 8]-bin[N-F[ 9]+ 8][ 8];
  a+=+bin[N-F[ 9]+ 7][ 7]-bin[N-F[10]+ 7][ 7];
  a+=+bin[N-F[10]+ 6][ 6]-bin[N-F[11]+ 6][ 6];
  a+=+bin[N-F[11]+ 5][ 5]-bin[N-F[12]+ 5][ 5];
  a+=+bin[N-F[12]+ 4][ 4]-bin[N-F[13]+ 4][ 4];
  a+=+bin[N-F[13]+ 3][ 3]-bin[N-F[14]+ 3][ 3];
  a+=+bin[N-F[14]+ 2][ 2]-bin[N-F[15]+ 2][ 2];
  a+=+f[16];
  return a;
}

void matriz(void)
{
  unsigned int e[18],E[18],f[18],j=0,l=0,i;
  div_t        beta[2];
  for (e[0]=0;e[0]<=k[0]*N;e[0]++)
  {
    beta[0]=div(e[0]+k[0]-1,k[0]);
    E[0]   =beta[0].quot;
    for (e[1]=0;e[1]<=k[1]*(N-E[0]);e[1]++)
    {
      beta[1]=div(e[1]+k[1]-1,k[1]);
      E[1]   =E[0]+beta[1].quot;
      for (e[2]=0;e[2]<=N-E[1];e[2]++)
```

```
 {
E[2]=E[1]+e[2];
for (e[3]=0;e[3]<=N-E[2];e[3]++)
{
  E[3]=E[2]+e[3];
  for (e[4]=0;e[4]<=N-E[3];e[4]++)
  {
    E[4]=E[3]+e[4];
    for (e[5]=0;e[5]<=N-E[4];e[5]++)
    {
      E[5]=E[4]+e[5];
      for (e[6]=0;e[6]<=N-E[5];e[6]++)
      {
     E[6]=E[5]+e[6];
     for (e[7]=0;e[7]<=N-E[6];e[7]++)
     {
       E[7]=E[6]+e[7];
       for (e[8]=0;e[8]<=N-E[7];e[8]++)
       {
         E[8]=E[7]+e[8];
         for (e[9]=0;e[9]<=N-E[8];e[9]++)
         {
           E[9]=E[8]+e[9];
           for (e[10]=0;e[10]<=N-E[9];e[10]++)
           {
          E[10]=E[9]+e[10];
          for (e[11]=0;e[11]<=N-E[10];e[11]++)
          {
            E[11]=E[10]+e[11];
            for (e[12]=0;e[12]<=N-E[11];e[12]++)
            {
              E[12]=E[11]+e[12];
              for (e[13]=0;e[13]<=N-E[12];e[13]++)
              {
                E[13]=E[12]+e[13];
                for (e[14]=0;e[14]<=N-E[13];e[14]++)
                {
               E[14]=E[13]+e[14];
               for (e[15]=0;e[15]<=N-E[14];e[15]++)
               {
                 E[15]=E[14]+e[15];
                 for (e[16]=0;e[16]<=N-E[15];e[16]++)
                 {
                   E[16]=E[15]+e[16];
                   e[17]=N-E[16];
                   DQ[j]=0;
                   if (e[0]) DQ[j]+=k[0]*u[0];
                   if (e[1]) DQ[j]+=k[1]*u[1];
                   for (i=2;i<18;i++) DQ[j]+=e[i]*u[i];
                   IQ[j]=l;
                   if (beta[0].quot)
                   {
                     for (i=0;i<18;i++) f[i]=e[i];
                     f[0]--;
                     if (!beta[0].rem) f[2]++;
                     NQ[l]=k[0]*u[0];
                     JQ[l]=phi(f);
                     l++;
```

```
}
if (beta[l].quot)
{
  for (i=0;i<18;i++) f[i]=e[i];
  f[l]--;
  if (!beta[l].rem) f[10]++;
  NQ[l]=k[l]*u[l];
  JQ[l]=phi(f);
  l++;
}
if (e[2])
{
  for (i=0;i<18;i++) f[i]=e[i];
  f[2]--;
  f[3]++;
  NQ[l]=e[2]*u[2];
  JQ[l]=phi(f);
  l++;
}
if (e[3])
{
  for (i=0;i<18;i++) f[i]=e[i];
  f[3]--;
  f[4]++;
  NQ[l]=e[3]*u[3];
  JQ[l]=phi(f);
  l++;
}
if (e[4])
{
  for (i=0;i<18;i++) f[i]=e[i];
  f[4]--;
  f[5]++;
  NQ[l]=e[4]*u[4];
  JQ[l]=phi(f);
  l++;
}
if (e[5])
{
  for (i=0;i<18;i++) f[i]=e[i];
  f[5]--;
  f[6]++;
  NQ[l]=e[5]*u[5];
  JQ[l]=phi(f);
  l++;
}
if (e[6])
{
  for (i=0;i<18;i++) f[i]=e[i];
  f[6]--;
  f[7]++;
  NQ[l]=e[6]*u[6];
  JQ[l]=phi(f);
  l++;
}
if (e[7])
{
  for (i=0;i<18;i++) f[i]=e[i];
```

```
    f[7]--;
    f[8]++;
    NQ[l]=e[7]*u[7];
    JQ[l]=phi(f);
    l++;
  }
  if (e[8])
  {
    for (i=0;i<18;i++) f[i]=e[i];
    f[8]--;
    f[9]++;
    NQ[l]=e[8]*u[8];
    JQ[l]=phi(f);
    l++;
  }
  if (e[9])
  {
    for (i=0;i<18;i++) f[i]=e[i];
    f[1]+=k[1];
    f[9]--;
    NQ[l]=e[9]*u[9];
    JQ[l]=phi(f);
    l++;
  }
  if (e[10])
  {
    for (i=0;i<18;i++) f[i]=e[i];
    f[10]--;
    f[11]++;
    NQ[l]=e[10]*u[10];
    JQ[l]=phi(f);
    l++;
  }
  if (e[11])
  {
    for (i=0;i<18;i++) f[i]=e[i];
    f[11]--;
    f[12]++;
    NQ[l]=e[11]*u[11];
    JQ[l]=phi(f);
    l++;
  }
  if (e[12])
  {
    for (i=0;i<18;i++) f[i]=e[i];
    f[12]--;
    f[13]++;
    NQ[l]=e[12]*u[12];
    JQ[l]=phi(f);
    l++;
  }
  if (e[13])
  {
    for (i=0;i<18;i++) f[i]=e[i];
    f[13]--;
    f[14]++;
    NQ[l]=e[13]*u[13];
    JQ[l]=phi(f);
```

```
                    l++;
                  }
                  if (e[14])
                  {
                    for (i=0;i<18;i++) f[i]=e[i];
                    f[14]--;
                    f[15]++;
                    NQ[l]=e[14]*u[14];
                    JQ[l]=phi(f);
                    l++;
                  }
                  if (e[15])
                  {
                    for (i=0;i<18;i++) f[i]=e[i];
                    f[15]--;
                    f[16]++;
                    NQ[l]=e[15]*u[15];
                    JQ[l]=phi(f);
                    l++;
                  }
                  if (e[16])
                  {
                    for (i=0;i<18;i++) f[i]=e[i];
                    f[16]--;
                    f[17]++;
                    NQ[l]=e[16]*u[16];
                    JQ[l]=phi(f);
                    l++;
                  }
                  if (e[17])
                  {
                    for (i=0;i<18;i++) f[i]=e[i];
                    f[0]+=k[0];
                    f[17]--;
                    NQ[l]=e[17]*u[17];
                    JQ[l]=phi(f);
                    l++;
                  }
                  j++;
                }
              }
            }
          }
        }
      }
    }
  }
}
IQ[j]=l;
{
```

```
    float qjjmax=0,a;
    for (j=0;j<J;j++) if (DQ[j]>qjjmax) qjjmax=DQ[j];
    a=1/qjjmax;
    for (j=0;j<J;j++)
    {
      if (DQ[j]==qjjmax) DQ[j]=0.0;
      else DQ[j]=1-a*DQ[j];
    }
    for (l=0;l<L;l++) NQ[l]*=a;
  }
}

void prob_conjunta(void)
{
  float          p0,p1,p2,e,ej;
  unsigned int j1,j2,j3,j4;
  p0= (float) 1/J;
  for (j1=0;j1<J;j1++) Pi1[j1]=p0;
  do
  {
    for (j1=0;j1<J;j1++) Pi2[j1]=0;
    for (j1=0;j1<J;j1++)
    {
      p0=Pi1[j1];
      j3=IQ[j1];
      j4=IQ[j1+1];
      for (j2=j3;j2<j4;j2++)
     Pi2[JQ[j2]]+=NQ[j2]*p0;
      Pi2[j1]+=Pi1[j1]*DQ[j1];
    }
    e=0;
    for (j1=0;j1<J;j1++)
    {
      p1=Pi1[j1];
      p2=Pi2[j1];
      if (p1) ej = (p1>p2) ? (p1-p2)/p1 : (p2-p1)/p1;
      else ej= (p2) ? 1 : 0;
      if (ej>e) e=ej;
      Pi1[j1]=Pi2[j1];
    }
  } while (e>0.00001);
}

void prob_marginal(void)
{
  unsigned int  i,j=0,e[18],E[18];
  div_t         beta[2];
  for (i=0;i<=N;i++) PA[i]=PB[i]=0.0;
  for (e[0]=0;e[0]<=k[0]*N;e[0]++)
  {
    beta[0]=div(e[0]+k[0]-1,k[0]);
    E[0]   =beta[0].quot;
    for (e[1]=0;e[1]<=k[1]*(N-E[0]);e[1]++)
    {
      beta[1]=div(e[1]+k[1]-1,k[1]);
      E[1]   =E[0]+beta[1].quot;
      for (e[2]=0;e[2]<=N-E[1];e[2]++)
      {
```

```
E[2]=E[1]+e[2];
for (e[3]=0;e[3]<=N-E[2];e[3]++)
{
  E[3]=E[2]+e[3];
  for (e[4]=0;e[4]<=N-E[3];e[4]++)
  {
    E[4]=E[3]+e[4];
    for (e[5]=0;e[5]<=N-E[4];e[5]++)
    {
      E[5]=E[4]+e[5];
      for (e[6]=0;e[6]<=N-E[5];e[6]++)
      {
     E[6]=E[5]+e[6];
     for (e[7]=0;e[7]<=N-E[6];e[7]++)
     {
       E[7]=E[6]+e[7];
       for (e[8]=0;e[8]<=N-E[7];e[8]++)
       {
         E[8]=E[7]+e[8];
         for (e[9]=0;e[9]<=N-E[8];e[9]++)
         {
           E[9]=E[8]+e[9];
           for (e[10]=0;e[10]<=N-E[9];e[10]++)
           {
          E[10]=E[9]+e[10];
          for (e[11]=0;e[11]<=N-E[10];e[11]++)
          {
            E[11]=E[10]+e[11];
            for (e[12]=0;e[12]<=N-E[11];e[12]++)
            {
              E[12]=E[11]+e[12];
              for (e[13]=0;e[13]<=N-E[12];e[13]++)
              {
                E[13]=E[12]+e[13];
                for (e[14]=0;e[14]<=N-E[13];e[14]++)
                {
               E[14]=E[13]+e[14];
               for (e[15]=0;e[15]<=N-E[14];e[15]++)
               {
                 E[15]=E[14]+e[15];
                 for (e[16]=0;e[16]<=N-E[15];e[16]++)
                 {
                   E[16]=E[15]+e[16];
                   e[17]=N-E[16];
                   PA[beta[0].quot]+=Pil[j];
                   PB[beta[1].quot]+=Pil[j];
                   j++;
                 }
               }
                }
              }
            }
          }
           }
         }
       }
     }
      }
```

```
            }
          }
        }
         }
      }
    }
  }

  void saida(void)
  {
    fp=fopen(fn,"w");
    fprintf(fp,"                    ABA\\AUTOPROP\\ERLANG_8\n\n\n");
    fprintf(fp,"    N    kA    kB        xA        xB        xAB
        xBA\n\n");
    fprintf(fp,"%5d %5d %5d %10.4f %10.4f %10.4f
%10.4f\n\n\n",N,k[0],k[1],x[0],x[1],x[2],x[3]);
    {
      int    i;
      float  L,T,WA,WB,NA=0.0,NB=0.0;
      L=u[0]*(1.0-PA[0]);
      T=N/L;
      for (i=1;i<=N;i++) NA+=i*PA[i];
      WA=NA/L;
      for (i=1;i<=N;i++) NB+=i*PB[i];
      WB=NB/L;
      fprintf(fp,"      L          T          WA
WB\n\n");
      fprintf(fp,"%10.6f %10.6f %10.6f %10.6f\n\n\n",L,T,WA,WB);
    }
    {
      int i;
      fprintf(fp,"                n      PA(n)      PB(n)\n\n");
      for (i=0;i<=N;i++) fprintf(fp,"          %5d %10.4f
%10.4f\n",i,PA[i],PB[i]);

    }
    fclose(fp);
  }
```

Apêndice VIII - Implementação Computacional do Modelo ABA-COMBOIO com Distribuições Exponenciais e Desmembramento dos Comboios nos Portos.

```
#include "stdio.h"
#include "stdlib.h"
#include "string.h"

FILE      *fp;
char      *fn;
unsigned int   N,r[2],s[2],bin[9][4],I,J,IQ[237],JQ[734];
float          x[4],u[4],NQ[734],DQ[236],Pi[236],PA[9],PB[9];

int  entrada(int a, char *st[11]);
void matriz(void);
void prob_conjunta(void);
void prob_marginal(void);
void saida(void);

void main(int argc, char *argv[9])
{
  if (!entrada(argc, argv)) exit(0);
  matriz();
  prob_conjunta();
  prob_marginal();
  saida();
}

int entrada(int a, char *st[11])
{
  if (a!=11) return 0;
  N   =atoi(st[1]);
  r[0]=atoi(st[2]);
  r[1]=atoi(st[3]);
  s[0]=atoi(st[4]);
  s[1]=atoi(st[5]);
  x[0]=atof(st[6]);
  x[1]=atof(st[7]);
  x[2]=atof(st[8]);
  x[3]=atof(st[9]);
  fn  =st[10];
  if ((N<1)||(N>5))                          return 0;
  if ((r[0]<1)||(r[0]>2)||(r[1]<1)||(r[1]>2))          return
0;
  if ((s[0]<0)||(s[0]>3)||(s[1]<0)||(s[1]>3))          return
0;
  if ((x[0]<=0)||(x[1]<=0)||(x[2]<=0)||(x[3]<=0)) return 0;
  {
    float xpmax = x[0]>x[1] ? x[0] : x[1];
    x[0]=x[0]/xpmax;
    x[1]=x[1]/xpmax;
    x[2]=x[2]/xpmax;
    x[3]=x[3]/xpmax;
  }
  u[0]=1/x[0];
  u[1]=1/x[1];
  u[2]=1/x[2];
  u[3]=1/x[3];
  {
    unsigned int n,m;
    for (n=0;n<9;n++) bin[n][0]=1;
    for (m=1;m<4;m++) bin[0][m]=0;
```

```
    for (n=1;n<9;n++)
      for (m=1;m<4;m++)
     bin[n][m]=bin[n-1][m-1]+bin[n-1][m];
  }
  I=bin[N-1][3]
      +bin[N-1][2]*(s[0]+s[1]+4)
      +bin[N-1][1]*(s[0]*s[1]+3*(s[0]+s[1])+6)
         +bin[N-1][0]*(2*s[0]*s[1]+3*(s[0]+s[1])+4);
  J=bin[N-1][3]*4
      +bin[N-1][2]*(4*(s[0]+s[1])+12)
      +bin[N-1][1]*(4*s[0]*s[1]+9*(s[0]+s[1])+12)
         +bin[N-1][0]*(6*s[0]*s[1]+6*(s[0]+s[1])+4);
  return 1;
}

void matriz(void)
{
  unsigned int i=0,j=0,e[4],f[2],g[4],h[2],alfa0,alfa1;
  for (e[0]=0;e[0]<=N+s[0];e[0]++)
  {
    f[0]= e[0]>s[0] ? e[0]-s[0] : 0;
    for (e[1]=0;e[1]<=N+s[1]-f[0];e[1]++)
    {
      f[1]= e[1]>s[1] ? e[1]-s[1] : 0;
      for (e[2]=0;e[2]<=N-f[0]-f[1];e[2]++)
      {
     e[3]=N-f[0]-f[1]-e[2];
     alfa0= e[0]<r[0] ? e[0] : r[0];
     alfa1= e[1]<r[1] ? e[1] : r[1];
     DQ[i]=alfa0*u[0]+alfa1*u[1]+e[2]*u[2]+e[3]*u[3];  /*
modulo qii */
     IQ[i]=j;
     if (e[0])
     {
       if (f[0])
       {
         g[0] =e[0]-1;
         g[1] =e[1];
         g[2] =e[2]+1;
         g[3] =e[3];
         h[0] = g[0]>s[0] ? g[0]-s[0] : 0;
         h[1] = g[1]>s[1] ? g[1]-s[1] : 0;
       }
       else
       {
         g[0] =e[0]-1;
         g[1] =e[1];
         g[2] =e[2];
         g[3] =e[3];
         h[0] = g[0]>s[0] ? g[0]-s[0] : 0;
         h[1] = g[1]>s[1] ? g[1]-s[1] : 0;
       }
       NQ[j]=alfa0*u[0];
       JQ[j]=0;
       if (!h[0]) JQ[j]+=g[0]*(bin[N+2][2]+s[1]*bin[N+1][1]);
       else JQ[j]+=s[0]*(bin[N+2][2]+s[1]*bin[N+1][1])
               +(bin[N+3][3]-bin[N-h[0]+3][3])
                 +s[1]*(bin[N+2][2]-bin[N-h[0]+2][2]);
```

```
    if (!h[1]) JQ[j]+=g[1]*bin[N-h[0]+1][1];
    else JQ[j]+=s[1]*bin[N-h[0]+1][1]
            +(bin[N-h[0]+2][2]-bin[N-h[0]-h[1]+2][2]);
    JQ[j]+=bin[N-h[0]-h[1]+1][1]-bin[N-h[0]-h[1]-g[2]+1][1];
    j++;
  }
  if (e[1])
  {
    if (f[1])
    {
      g[0] =e[0];
      g[1] =e[1]-1;
      g[2] =e[2];
      g[3] =e[3]+1;
      h[0] = g[0]>s[0] ? g[0]-s[0] : 0;
      h[1] = g[1]>s[1] ? g[1]-s[1] : 0;
    }
    else
    {
      g[0] =e[0];
      g[1] =e[1]-1;
      g[2] =e[2];
      g[3] =e[3];
      h[0] = g[0]>s[0] ? g[0]-s[0] : 0;
      h[1] = g[1]>s[1] ? g[1]-s[1] : 0;
    }
    NQ[j]=alfa1*u[1];
    JQ[j]=0;
    if (!h[0]) JQ[j]+=g[0]*(bin[N+2][2]+s[1]*bin[N+1][1]);
    else JQ[j]+=s[0]*(bin[N+2][2]+s[1]*bin[N+1][1])
            +(bin[N+3][3]-bin[N-h[0]+3][3])
              +s[1]*(bin[N+2][2]-bin[N-h[0]+2][2]);
    if (!h[1]) JQ[j]+=g[1]*bin[N-h[0]+1][1];
    else JQ[j]+=s[1]*bin[N-h[0]+1][1]
            +(bin[N-h[0]+2][2]-bin[N-h[0]-h[1]+2][2]);
    JQ[j]+=bin[N-h[0]-h[1]+1][1]-bin[N-h[0]-h[1]-g[2]+1][1];
    j++;
  }
  if (e[2])
  {
    if (e[1]<s[1])
    {
      g[0] =e[0];
      g[1] =e[1]+1;
      g[2] =e[2]-1;
      g[3] =e[3]+1;
      h[0] = g[0]>s[0] ? g[0]-s[0] : 0;
      h[1] = g[1]>s[1] ? g[1]-s[1] : 0;
    }
    else
    {
      g[0] =e[0];
      g[1] =e[1]+1;
      g[2] =e[2]-1;
      g[3] =e[3];
      h[0] = g[0]>s[0] ? g[0]-s[0] : 0;
      h[1] = g[1]>s[1] ? g[1]-s[1] : 0;
    }
```

```
        NQ[j]=e[2]*u[2];
        JQ[j]=0;
        if (!h[0]) JQ[j]+=g[0]*(bin[N+2][2]+s[1]*bin[N+1][1]);
        else JQ[j]+=s[0]*(bin[N+2][2]+s[1]*bin[N+1][1])
                +(bin[N+3][3]-bin[N-h[0]+3][3])
                  +s[1]*(bin[N+2][2]-bin[N-h[0]+2][2]);
        if (!h[1]) JQ[j]+=g[1]*bin[N-h[0]+1][1];
        else JQ[j]+=s[1]*bin[N-h[0]+1][1]
                  +(bin[N-h[0]+2][2]-bin[N-h[0]-h[1]+2][2]);
        JQ[j]+=bin[N-h[0]-h[1]+1][1]-bin[N-h[0]-h[1]-g[2]+1][1];
        j++;
      }
      if (e[3])
      {
        if (e[0]<s[0])
        {
          g[0] =e[0]+1;
          g[1] =e[1];
          g[2] =e[2]+1;
          g[3] =e[3]-1;
          h[0] = g[0]>s[0] ? g[0]-s[0] : 0;
          h[1] = g[1]>s[1] ? g[1]-s[1] : 0;
        }
        else
        {
          g[0] =e[0]+1;
          g[1] =e[1];
          g[2] =e[2];
          g[3] =e[3]-1;
          h[0] = g[0]>s[0] ? g[0]-s[0] : 0;
          h[1] = g[1]>s[1] ? g[1]-s[1] : 0;
        }
        NQ[j]=e[3]*u[3];
        JQ[j]=0;
        if (!h[0]) JQ[j]+=g[0]*(bin[N+2][2]+s[1]*bin[N+1][1]);
        else JQ[j]+=s[0]*(bin[N+2][2]+s[1]*bin[N+1][1])
                +(bin[N+3][3]-bin[N-h[0]+3][3])
                  +s[1]*(bin[N+2][2]-bin[N-h[0]+2][2]);
        if (!h[1]) JQ[j]+=g[1]*bin[N-h[0]+1][1];
        else JQ[j]+=s[1]*bin[N-h[0]+1][1]
                +(bin[N-h[0]+2][2]-bin[N-h[0]-h[1]+2][2]);
        JQ[j]+=bin[N-h[0]-h[1]+1][1]-bin[N-h[0]-h[1]-g[2]+1][1];
        j++;
      }
      i++;
       }
    }
  }
  IQ[i]=j;
  {
    float qiimax=0;
    double alfa;
    for (i=0;i<I;i++) if (DQ[i]>qiimax) qiimax=DQ[i];
    alfa=1/qiimax;
    for (i=0;i<I;i++)
    {
      if (DQ[i]==qiimax) DQ[i]=0;
      else DQ[i]=1-alfa*DQ[i];
```

```
      }
      for (j=0;j<J;j++) NQ[j]*=alfa;
    }
  }

  void prob_conjunta(void)
  {
    float Pi2[236],p0,p1,p2,e,ei;
    unsigned int i1,i2,i3,i4;
    p0= (float) 1/I;
    for (i1=0;i1<I;i1++) Pi[i1]=p0;
    do
    {
      for (i1=0;i1<I;i1++) Pi2[i1]=0;
      for (i1=0;i1<I;i1++)
      {
        p0=Pi[i1];
        i3=IQ[i1];
        i4=IQ[i1+1];
        for (i2=i3;i2<i4;i2++)
       Pi2[JQ[i2]]+=NQ[i2]*p0;
        Pi2[i1]+=Pi[i1]*DQ[i1];
      }
      e=0;
      for (i1=0;i1<I;i1++)
      {
        p1=Pi[i1];
        p2=Pi2[i1];
        if (p1) ei= p1>p2 ? (p1-p2)/p1 : (p2-p1)/p1;
        else ei= p2 ? 1 : 0;
        if (ei>e) e=ei;
        Pi[i1]=Pi2[i1];
      }
    } while (e>0.00001);
  }

  void prob_marginal(void)
  {
    unsigned int i,e[4],f[2];
    for (i=0;i<=N+s[0];i++) PA[i]=0;
    for (i=0;i<=N+s[1];i++) PB[i]=0;
    i=0;
    for (e[0]=0;e[0]<=N+s[0];e[0]++)
    {
      f[0]= e[0]>s[0] ? e[0]-s[0] : 0;
      for (e[1]=0;e[1]<=N+s[1]-f[0];e[1]++)
      {
        f[1]= e[1]>s[1] ? e[1]-s[1] : 0;
        for (e[2]=0;e[2]<=N-f[0]-f[1];e[2]++)
        {
       e[3]=N-f[0]-f[1]-e[2];
       PA[e[0]]+=Pi[i];
       PB[e[1]]+=Pi[i];
       i++;
        }
      }
    }
  }
```

```
void saida(void)
{
  fp=fopen(fn,"w");
  fprintf(fp,"                ABA\\COMBOIO\\EXPONENC\n\n\n");
  fprintf(fp,"    N    rA    rB    sA    sB  xA          xB
 xAB         xBA\n\n");
  fprintf(fp,"%5d %5d %5d %5d %5d %10.4f %10.4f %10.4f
%10.4f\n\n\n",N,r[0],r[1],s[0],s[1],x[0],x[1],x[2],x[3]);
  {
    int    i;
    double L,T,WA,WB,NA=0,NB=0;
    if (r[0]==1) L=u[0]*(1-PA[0]);
    else L=2*u[0]*(1-PA[0]-0.5*PA[1]);
    T=N/L;
    for (i=1;i<=N;i++) NA+=i*PA[s[0]+i];
    WA=NA/L;
    for (i=1;i<=N;i++) NB+=i*PB[s[1]+i];
    WB=NB/L;
    fprintf(fp,"      L           T           WA
WB\n\n");
    fprintf(fp,"%10.6f %10.6f %10.6f %10.6f\n\n\n",L,T,WA,WB);
  }
  {
    int i,imax;
    imax= s[0]>s[1] ? N+s[0] : N+s[1];
    fprintf(fp,"                n      PA(n)       PB(n)\n\n");
    for (i=0;i<=imax;i++) fprintf(fp,"          %5d %10.4f
%10.4f\n",i,PA[i],PB[i]);
  }
  fclose(fp);
}
```