



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE MINAS E DE
PETRÓLEO

KEALANÃ MOURA DE ARAUJO

**Modelagem numérica da direção preferencial de propagação de uma fratura
hidráulica em um meio poroelástico bidimensional utilizando elementos
coesivos**

São Paulo
2023

KEALANÃ MOURA DE ARAUJO

**Modelagem numérica da direção preferencial de propagação de uma fratura
hidráulica em um meio poroelástico bidimensional utilizando elementos
coesivos**

Versão original

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de concentração: Engenharia de Petróleo

Orientador: Prof. Dr. Ronaldo Carrion

São Paulo
2023

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, 09 de agosto de 2023

Assinatura do autor: Kealanã Moura de Araújo

Assinatura do orientador: Paulo Luiz

Catálogo-na-publicação

Araújo, Kealanã Moura de
Modelagem numérica da direção preferencial de propagação de uma fratura hidráulica em um meio poroelástico bidimensional utilizando elementos coesivos / K. M. Araújo -- versão corr. -- São Paulo, 2023.
95 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Minas e de Petróleo.

1.Engenharia de Petróleo 2.Fraturamento hidráulico 3.Método dos elementos finitos 4.Elementos coesivos 5.Propagação de fratura I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Minas e de Petróleo II.t.

ARAÚJO, K. M. “**Modelagem numérica da direção preferencial de propagação de uma fratura hidráulica em um meio poroelástico bidimensional utilizando elementos coesivos**”. 2023. 95p. Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Mineral, na área de concentração Engenharia de Petróleo, aprovada em 05 de julho de 2023 pela comissão julgadora constituída pelos doutores:

Prof. Dr. Ronaldo Carrion
Universidade de São Paulo
Presidente

Prof. Dr. Pedro Rogério Cleto
Universidade Estadual Paulista

Prof. Dr. Leonardo José do Nascimento Guimarães
Universidade Federal de Pernambuco

AGRADECIMENTOS

Durante a realização deste mestrado, muitas pessoas contribuíram direta ou indiretamente, por isso, agradeço imensamente a todas elas, principalmente, àquelas que me acompanharam e de alguma forma foram fundamentais para a realização deste sonho.

Individualmente, agradeço:

- a Deus por ser meu consolo e alívio nas horas difíceis;
- à minha querida família, Nilda, Celso, Kelyanne, Gui e Paulo, pelo amor, exemplo, apoio e suporte durante esta jornada;
- à minha segunda querida família, Igor, Carminha e Renon por todo amor, orações e incentivo;
- à Escola Politécnica da USP, aos funcionários, professores e ao meu orientador Ronaldo Carrion pelas discussões, sugestões, instruções e conhecimentos repassados;
- à Petrobras, pelos incentivos e investimentos em pesquisa, em especial, ao Renato Poli, por ser um grande impulsionador deste trabalho, agradeço-o pela disponibilidade, discussões, sugestões, instruções e conhecimentos repassados;
- ao Lamec, em nome da professora Simone e do Anderson pela disponibilidade, confiança e apoio ao meu trabalho;

A todos e a todas, a minha mais sincera gratidão pela generosidade em compartilhar o tempo, os conhecimentos e serem fontes de energia que permitiram a criação desta dissertação e me proporcionaram a oportunidade de uma grande experiência pessoal e acadêmica.

RESUMO

ARAÚJO, K. M. **Modelagem numérica da direção preferencial de propagação de uma fratura hidráulica em um meio poroelástico bidimensional utilizando elementos coesivos**. 2023. 95 p. Dissertação (Mestre em Ciências) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2023.

O fraturamento hidráulico em reservatórios contendo óleo e gás é uma das técnicas mais utilizadas para estimular a produção em poços de petróleo com baixa permeabilidade. Este procedimento é caracterizado pela injeção de fluido a alta pressão na rocha e a fratura hidráulica inicia quando a pressão do fluido excede a mínima tensão principal confinante somada à resistência à tração da rocha. Desse modo, a constante injeção de fluido possibilita a propagação da fratura pelo reservatório. Outro parâmetro importante para a compreensão deste processo é a predição do caminho de propagação das fraturas nas complexas configurações geológicas onde ocorrem as extrações de hidrocarbonetos. Neste contexto, um desafio atual para os pesquisadores é o desenvolvimento de técnicas de modelagem mais precisas a fim de garantir uma predição mais acurada dos fenômenos envolvidos neste problema de engenharia. Em função disso, tópicos ativos de pesquisas para a modelagem numérica do caminho de propagação da fratura incluem: a influência de parâmetros relacionados ao processo de fraturamento e a compreensão dos diferentes regimes de propagação. O presente trabalho objetiva desenvolver um modelo numérico, utilizando elementos finitos coesivos e a técnica de duplicação dos nós desses elementos, intentando investigar as variáveis de interesse, bem como, produzir um algoritmo para simulação do meio poroelástico bidimensional, dos regimes de propagação da fratura e da sua direção preferencial de propagação. Para modelagem analítica do problema se adotou o modelo KGD, aplicado a fraturas curtas e no estado plano de deformação horizontal, e para modelagem numérica o método dos elementos finitos e o método das diferenças finitas foram utilizados em razão da flexibilidade e viabilidade de discretização das áreas de interesse. As análises propostas investigaram: os deslocamentos, o balanço de massa, a pressão, as tensões horizontais e verticais no domínio e as respostas foram comparadas às soluções disponíveis na literatura. Os resultados obtidos mostraram que as respostas correspondem as soluções esperadas. Além disso, mostraram, também, que os elementos coesivos foram capazes de representar satisfatoriamente a área de interface para propagação da fratura e a técnica de duplicação dos nós em todo o domínio proporcionou a obtenção de diferentes caminhos de propagação.

Palavras-chaves: Engenharia de Petróleo. Fraturamento hidráulico. Método dos elementos finitos. Elementos coesivos. Propagação de fratura.

ABSTRACT

ARAUJO, ARAUJO, K. M. **Numerical modeling of the preferred direction of propagation of a hydraulic fracture in a medium two-dimensional poroelastic using cohesive elements**. 2023. 95 p. Masters dissertation (Master of Science) – Polytechnic School of University of São Paulo, São Paulo, 2023.

Hydraulic fracturing in reservoirs containing oil and gas is one of the most used techniques to stimulate production in oil wells with low permeability. This procedure is characterized by the injection of fluid at high pressure into the rock and the hydraulic fracture starts when the fluid pressure exceeds the minimum confining principal stress added to the tensile strength of the rock. In this way, the constant injection of fluid allows the propagation of the fracture through the reservoir. Another important parameter for understanding this process is the prediction of the propagation path of fractures in the complex geological configurations where hydrocarbon extractions occur. In this context, a current challenge for researchers is the development of more accurate modeling techniques in order to guarantee a more accurate prediction of the phenomena involved in this engineering problem. As a result, active research topics for numerical modeling of the fracture propagation path include: the influence of parameters related to the fracturing process and the understanding of different propagation regimes. The present work aims to develop a numerical model, using cohesive finite elements and the technique of duplicating the nodes of these elements, trying to investigate the variables of interest, as well as producing an algorithm for simulating the two-dimensional poroelastic medium, the fracture propagation regimes and its preferred direction of propagation. For analytical modeling of the problem, the KGD model was adopted, applied to short fractures and in the plane state of horizontal strain, and for numerical modeling the finite element method and the finite difference method were used due to the flexibility and viability of discretization areas of interest. The proposed analyzes investigated: the displacements, the mass balance, the pressure, the horizontal and horizontal tensions in the domain and the responses were detected to the solutions available in the literature. The results appreciated that the answers correspond to the solutions available in the literature. Furthermore, we also saw that the cohesive elements were able to satisfactorily represent the interface area for fracture manipulation and the node duplication technique across the domain provided the transmission of different transmission paths.

Keywords: Petroleum Engineering. Hydraulic fracturing. Finite element method. Cohesive elements. Fracture propagation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Fratura vertical em torno de um poço vertical	23
Figura 2 – Propagação de uma fratura hidráulica gerada em um reservatório	23
Figura 3 – Modelos analíticos de propagação de fraturas hidráulicas. A Figura (a) representa o modelo PKN, a Figura (b) o modelo KGD e a Figura (c) o modelo radial	25
Figura 4 – Modelo de deslocamento no meio poroso	32
Figura 5 – Variação no conteúdo de fluido do REV. A região sombreada indica o volume de fluido que escapou e o quadro deformado representa a variação do conteúdo do fluido	35
Figura 6 – Representação de uma fratura no domínio unidimensional no meio contínuo bidimensional	38
Figura 7 – Comportamento da propagação da fratura em função da tensão aplicada	40
Figura 8 – Elemento triangular e nó K	43
Figura 9 – Representação da área coesiva entre os elementos do contorno da fratura na direção $\xi\eta$, válida, também, para a direção x e y	48
Figura 10 – Fluxograma do algoritmo implementado	52
Figura 11 – Modelo do reservatório para simulação do caso de direção preferencial de propagação da fratura	55
Figura 12 – A estrutura dos elementos gerados no <i>gmsk</i> é mostrada no lado esquerdo e no lado direito, tem-se a duplicação dos nós após a fragmentação	56
Figura 13 – Progressão de complexidade do problema	59
Figura 14 – Diagrama de um reservatório submetido a esforços de tração, deslocamento em y restrito na extremidade inferior e deslocamento em x restrito na lateral esquerda	60
Figura 15 – Malha de simulação para o exemplo da mecânica clássica	61
Figura 16 – Tensão vertical σ_v em Pa em um modelo de reservatório submetido a tensão normal na superfície superior	62
Figura 17 – Tensão horizontal σ_h em Pa em um modelo de reservatório submetido a tensão normal na superfície superior	62
Figura 18 – Deslocamento vertical em m de um modelo de reservatório submetido a tensão normal na superfície superior	63
Figura 19 – Representação do modelo para validação das tensões na ponta da fratura	64
Figura 20 – Solução numérica para tensões verticais no modelo de reservatório em Pa	65
Figura 21 – Aproximação da Figura 20 próximo à ponta da fratura	65
Figura 22 – Comparação entre os resultados numéricos e analíticos para $r = 0.5$ m e θ variando de $-\pi$ a π rad	66
Figura 23 – Representação do modelo poroelástico simulado	67

Figura 24 – Malha utilizada para o problema de consolidação de Terzaghi	67
Figura 25 – Validação do código poroelástico linear com o problema de consolidação de Terzaghi: solução para a pressão de poros. As linhas representam as respostas analíticas e os pontos as soluções numéricas	69
Figura 26 – Validação do código poroelástico linear com o problema de consolidação de Terzaghi: solução para o deslocamento vertical. As linhas representam as respostas analíticas e os pontos as soluções numéricas	70
Figura 27 – Comportamento das pressões de poros no problema de consolidação de Terzaghi	70
Figura 28 – Diagrama representativo utilizado no caso de conservação de massa no domínio de aproximação sem fratura	71
Figura 29 – Malhas utilizadas para validação do problema de conservação de massa sem fratura (a) malha com menos elementos na face norte (b) malha mais refinada na face norte	72
Figura 30 – Comportamento do domínio de aproximação sem fratura submetido à injeção de fluido na superfície superior do modelo da Figura 29 (b)	74
Figura 31 – Diagrama representativo utilizado no caso de conservação de massa no domínio de aproximação com fratura	75
Figura 32 – Malhas utilizadas para validação do problema de conservação de massa com fratura (a) malha com menos elementos na interface da fratura (b) malha mais refinada na interface da fratura	76
Figura 33 – Modelo do domínio de aproximação para quadro de propagação da fratura na direção horizontal	79
Figura 34 – Malhas utilizadas para validação do problema de propagação da fratura na direção horizontal (a) malha com 5645 elementos e 2964 nós com menos elementos na interface da fratura e (b) malha com 14465 elementos e 7483 nós mais refinada na interface da fratura	80
Figura 35 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos, no regime de propagação <i>leakoff-toughness</i> , utilizando o modelo da Figura 34 (a), para os casos: (a) Abertura da fratura ao longo do tempo e (b) Comprimento da fratura ao longo do tempo	81
Figura 36 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos, no regime de propagação <i>storage-toughness</i> , utilizando o modelo da Figura 34 (b), para os casos: (a) Abertura da fratura ao longo do tempo e (b) Comprimento da fratura aolongo do tempo	82
Figura 37 – Propagação da fratura na direção horizontal em regime <i>storage-toughness</i>	82
Figura 38 – Comportamento do modelo com a rotação de $\hat{E}_{\eta\xi}$ em E_{ij} (a) $E_{\eta\eta} > E_{\xi\xi}$ (b) $E_{\xi\xi} > E_{\eta\eta}$	83

Figura 39 – Modelo do domínio de aproximação para quadro de propagação da fratura na direção vertical	84
Figura 40 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos, no regime de propagação <i>leakoff-toughness</i> para os casos: (a) Abertura da fratura ao longo do tempo e (b) Comprimento da fratura ao longo do tempo . . .	84
Figura 41 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos, no regime de propagação <i>storage-toughness</i> para os casos: (a) Abertura da fratura ao longo do tempo e (b) Comprimento da fratura ao longo do tempo .	85
Figura 42 – Propagação da fratura na direção vertical em regime <i>storage-toughness</i>	85
Figura 43 – Modelo do domínio de aproximação para simulação do caso de direção preferencial de propagação da fratura	86
Figura 44 – Modelo do reservatório para simulação do caso de direção preferencial de propagação da fratura	87
Figura 45 – Modelo da direção preferencial de propagação da fratura	88

LISTA DE ALGORITMOS

Algoritmo 1 – Algoritmo do simulador hidromecânico	53
Algoritmo 2 – Algoritmo para geração das malhas	54
Algoritmo 3 – Algoritmo para fragmentação das malhas	55

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Valores dos parâmetros adotados para validação do problema da mecânica clássica	61
Tabela 2 – Valores dos parâmetros adotados para o caso de concentração de tensão na ponta da fratura	64
Tabela 3 – Valores dos parâmetros adotados no problema de consolidação de Terzaghi	68
Tabela 4 – Valores dos parâmetros adotados no problema de conservação de massa sem fratura	72
Tabela 5 – Volumetria no domínio de aproximação sem fratura representado pela Figura 29 (a), malha menos discretizada na face norte	73
Tabela 6 – Volumetria no domínio de aproximação sem fratura representado pela Figura 29 (b), malha mais discretizada na face norte	73
Tabela 7 – Valores dos parâmetros adotados no problema de conservação de massa com fratura	75
Tabela 8 – Volumetria no domínio de aproximação com fratura Figura 32 (a), malha menos discretizada na região da fratura	76
Tabela 9 – Volumetria no domínio de aproximação com fratura Figura 32 (b), malha mais discretizada na região da fratura	77
Tabela 10 – Valores dos parâmetros adotados no equilíbrio mecânico da fratura . .	78
Tabela 11 – Equilíbrio mecânico nas paredes da fratura, conforme malha aproximada mostrada na Figura 32 (a)	78
Tabela 12 – Valores dos parâmetros adotados na propagação da fratura em regime <i>leakoff-toughness</i>	80
Tabela 13 – Valores dos parâmetros adotados na propagação da fratura em regime <i>storage-toughness</i>	81
Tabela 14 – Valores dos parâmetros adotados no ensaio de direção preferencial de propagação	87

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

DFN	Rede de Fraturas Discretas
GDL	Grau De Liberdade
MDF	Método das Diferenças Finitas
MEF	Método dos Elementos Finitos
REV	Volume Elementar Representativo
XFEM	Método dos Elementos Finitos Estendidos

LISTA DE SÍMBOLOS

A^e	Área elementar (m^2)
c	Coefficiente de consolidação
C_{ijkl}	Tensor isotrópico de quarta ordem
D	Domínio de aproximação
e_{ij}	Tensor de deformações
E	Módulo de elasticidade (Pa)
F	vetor de forças (N)
g	Gravidade (m/s^2)
G	Módulo de cisalhamento (Pa)
G_f	Energia de Griffith (Pa · m)
h	Altura unitária da fratura (m)
k	Permeabilidade (m^2)
K	Módulo de Bulk (módulo de compressibilidade) (Pa)
K'_s	Módulo de Bulk em ensaio não revestido (módulo de compressibilidade em ensaio não revestido) (Pa)
M	Módulo de Biot (Pa)
N^K	Função de forma do nó K
p	Pressão de poros (Pa)
p^+	Pressão de poros do lado positivo da fratura (Pa)
p^-	Pressão de poros do lado negativo da fratura (Pa)
P^K	Pressão de poros do nó K (Pa)
q_i	Velocidade de Darcy (m/s)
q_ξ	Fluxo na fratura na direção longitudinal ξ (m^3/s)
S_ϵ	Coefficiente de armazenamento sob deformação constante (Pa^{-1})
t	Tempo (s)

$u = u_x$	Deslocamento horizontal (m)
u^+	Deslocamento horizontal do lado positivo da fratura (m)
u^-	Deslocamento horizontal do lado negativo da fratura (m)
U^K	Deslocamento horizontal do nó K
$v = u_y$	Deslocamento vertical (m)
v^+	Deslocamento vertical do lado positivo da fratura (m)
v^-	Deslocamento vertical do lado negativo da fratura (m)
V_f	Volume do fluido (m^3)
V_p	Volume poroso (m^3)
V_s	Volume do sólido (m^3)
V^K	Deslocamento vertical do nó K
w	Abertura na direção transversal do plano da fratura (m)
W_m	Peso das funções de forma no ponto de integração “m”
\bar{x}	Posição espacial no ponto de quadratura “m”(m)
*	
α	Coefficiente de Biot-Willis
β	Variável adimensional
Γ	Contorno do domínio de aproximação
ϵ	Deformação volumétrica
ζ	Incremento de fluido no REV
η_s	Coefficiente de tensão poroelástica
δ_{ij}	Delta de Kronecker
μ	Viscosidade do fluido (Pa · s)
ν	Razão de Poisson
ν_u	Razão de Poisson não drenada
ρ	Densidade da rocha (kg/m^3)

σ_h	Tensão horizontal mínima (Pa)
σ_H	Tensão horizontal máxima (Pa)
σ_{ij}	Tensor total de tensões (Pa)
σ'_{ij}	Tensor de tensões efetivas de Biot (Pa)
σ''_{ij}	Tensor de tensões efetivas de Terzaghi (Pa)
σ_v	Tensão vertical (Pa)
ϕ	Porosidade
Ω	Domínio de aproximação
Ω^+	Domínio de aproximação do lado positivo da fratura
Ω^-	Domínio de aproximação do lado negativo da fratura
*	
∇	Operador divergente

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
1.1	DEFINIÇÃO DO PROBLEMA	19
1.2	OBJETIVOS	21
1.3	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	21
1.3.1	FRATURAMENTO HIDRÁULICO	21
1.3.1.1	Critério de propagação de uma fratura por tração	24
1.3.2	MODELOS ANALÍTICOS	24
1.3.3	MODELOS NUMÉRICOS	25
1.3.3.1	Método dos elementos finitos	27
1.3.3.2	Elementos coesivos de interface	28
1.3.4	RASTREAMENTO DO CAMINHO DA FRATURA	28
2	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA	30
2.1	GEOMECÂNICA DE RESERVATÓRIOS	30
2.1.1	Definições básicas	30
2.1.1.1	Tensões em subsuperfície	30
2.1.1.2	Comportamento mecânico da rocha	30
2.2	POROELASTICIDADE LINEAR	31
2.2.1	Tensões e deformações	31
2.2.2	Condições devido à presença de fluido no volume elementar representativo	33
2.2.3	Módulo de cisalhamento e coeficiente de Poisson	34
2.2.4	Coeficiente de armazenamento sob deformação constante	34
2.2.5	Incremento de fluido	34
2.3	MODELOS CONSTITUTIVOS DO MEIO CONTÍNUO	35
2.3.1	Estado plano de deformações	35
2.3.2	Tensões efetivas	35
2.3.3	Coeficiente de Biot-Willis	36
2.4	EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO	36
2.5	FRATURA	37
2.5.1	Modelo constitutivo da fratura	37
2.5.2	Fluxo na fratura	38
2.5.3	Modelagem do fluxo na fratura	39
2.5.4	Equilíbrio mecânico da fratura	39
2.5.5	Rotação da matriz de rigidez do elemento coesivo	41

2.6	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS APLICADOS À POROELAS- TICIDADE	42
2.7	MODELAGEM DO MEIO POROELÁSTICO CONTÍNUO	42
2.8	MODELAGEM DA FRATURA COM ELEMENTOS COESIVOS	46
2.9	DISCRETIZAÇÃO TEMPORAL	48
2.10	LAÇOS DE DANO	51
3	IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL	52
3.1	ALGORITMO	52
3.2	GERAÇÃO DAS MALHAS	54
3.2.1	Fragmentação da malha	55
3.3	CONDIÇÕES DE CONTORNO	56
3.3.1	Método <i>master-slave</i>	56
3.3.2	Método <i>penalty</i>	57
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	59
4.1	Problema da mecânica clássica	60
4.1.1	Solução analítica	61
4.1.2	Resultados Numéricos	61
4.2	Problema de concentração de tensão na ponta da fratura	63
4.2.1	Solução analítica	63
4.2.2	Soluções Numéricas	64
4.3	Problema de consolidação de Terzaghi	66
4.3.1	Solução analítica	67
4.3.2	Solução Numérica	68
4.3.3	Validação do problema de consolidação de Terzaghi	68
4.4	Conservação de massa no domínio de aproximação sem fratura e com fratura	71
4.4.1	Conservação de massa no domínio de aproximação sem fratura	71
4.4.1.1	Resultados Numéricos	72
4.4.2	Conservação de massa no domínio de aproximação com fratura	74
4.4.2.1	Resultados Numéricos	75
4.5	Equilíbrio mecânico da fratura	77
4.5.1	Resultados Numéricos	77
4.6	Propagação da fratura	78
4.6.1	Propagação da fratura na direção horizontal	79
4.6.1.1	Regime <i>leakoff-toughness</i>	80
4.6.1.2	Regime <i>storage-toughness</i>	81
4.6.1.3	Rotação da matriz de rigidez	83
4.6.2	Propagação da fratura na direção vertical	83

4.6.2.1	Regime <i>leakoff-toughness</i>	84
4.6.2.2	Regime <i>storage-toughness</i>	85
4.7	Direção preferencial de propagação da fratura	86
4.8	Resultados numéricos	86
5	CONCLUSÃO	89
5.1	TRABALHOS FUTUROS	89
	REFERÊNCIAS	91
	Anexo A – Exemplo de <i>script</i> para geração de malhas no <i>gms</i>	95

1 INTRODUÇÃO

1.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

O desenvolvimento e a aplicação de técnicas capazes de favorecer a exploração de jazidas, por meio dos estudos do comportamento do fluido e da rocha sedimentar portadora de óleo ou gás, é um dos principais objetivos da engenharia de petróleo. Isso se dá pelo fato de que quanto melhores as características produtivas da rocha reservatório, mais rentável será a exploração da jazida.

Tendo isso em vista, vários pesquisadores, ([ADACHI *et al.*, 2007](#); [ADACHI; DETOURNAY, 2008](#); [RAHMAN; RAHMAN, 2013](#); [POLI, 2020](#); [WANG; SHAHVALI; SU, 2015](#); [YOSHIOKA; BOURDIN, 2016](#); [MANZOLI *et al.*, 2019](#)), têm desenvolvido métodos analíticos e/ou numéricos capazes de avaliar a produção de um campo de petróleo, seja por meio de estudos da permeabilidade da rocha, da porosidade da rocha, da pressão e/ou do comportamento do fluido. Dentre estas técnicas, têm-se a estimulação de rochas-reservatórios utilizada para aumentar a permeabilidade da rocha e facilitar o escoamento do fluido dos poros da rocha para o poço.

Dentre as várias operações de estimulação de rochas-reservatório, destaca-se a técnica de *fracking* ou fraturamento hidráulico, utilizada para realizar perfurações, a fim de possibilitar a extração de combustíveis líquidos e gasosos do subsolo. A técnica é amplamente utilizada pela engenharia de petróleo, principalmente para aumentar o índice de produtividade ou injetividade dos poços, a qual consiste na injeção, a alta pressão, de uma mistura de água, agente de sustentação (areia ou outro material equivalente) e diversos produtos químicos. Seu objetivo principal é formar e ampliar de forma controlada as fraturas e fissuras no substrato rochoso que contém petróleo e gás natural, permitindo sua extração para a superfície.

O método de fraturamento hidráulico tem sido responsável pela viabilização econômica de muitos campos petrolíferos em todo o mundo. A compreensão dos mecanismos que determinam o fraturamento, assim como a busca por métodos que possibilitem prever a geometria da fratura induzida, é fundamental para determinar a pressão de injeção de fluidos necessária para o fraturamento ocorrer. Além disso, esses conhecimentos são de extrema importância para o desenvolvimento de um projeto de exploração mais eficiente desses campos. O grande diferencial desse procedimento é a sua capacidade de explorar reservas de gás ou petróleo que não seriam acessíveis por métodos convencionais.

O *crack path tracking* ou método de rastreamento do caminho da fratura é uma parte importante da modelagem de fraturas, uma vez que é capaz de modelar com precisão a cinemática associada à abertura de uma fissura e de seu possível fechamento, a partir da determinação da interface de descontinuidade.

Xu *et al.* (2009) afirmam que compreender o processo de fraturamento hidráulico e o comportamento da fratura resultante é essencial para o desenvolvimento de um projeto, de seu planejamento e da execução de um trabalho com o intuito de otimização da produção. Vários autores (MANZOLI *et al.*, 2019; NADERI; IYYER, 2017; MAUTHE; MIEHE, 2017; CLETO *et al.*, 2020; CLETO *et al.*, 2023), impulsionados pela indústria de gás e de petróleo, dedicaram-se ao desenvolvimento de modelos numéricos, que preveem a propagação dessas fraturas no complexo cenário geológico em que ocorre a extração de hidrocarbonetos, destacando-se os modelos de fratura idealizados ou simplificados que permitem uma análise mais rigorosa do problema. Os modelos idealizados não servem apenas como *benchmarks*, ou seja, não apenas comparam performances e desempenhos para códigos numéricos, mas, também, constituem-se como um teste base para a análise da influência dos vários parâmetros do problema e para o estudo dos diferentes regimes de propagação.

Nesta pesquisa são discutidos os processos relacionados ao fraturamento hidráulico e os resultados obtidos por meio de formulações matemáticas implementadas no MATLAB. O objetivo é modelar o meio poroelástico, utilizando elementos coesivos, e avaliar deslocamentos, incremento de volume e tensões. O foco principal é compreender e determinar o caminho preferencial de propagação de uma fratura.

Ressalta-se aqui que, para além desta Introdução, a dissertação está assim organizada:

Na seção 1.3, intitulada **Revisão bibliográfica**, fez-se uma breve discussão sobre fraturamento hidráulico, modelos analíticos, modelos numéricos e rastreamento do caminho da fratura.

No capítulo 2, intitulado **Formulação matemática**, buscou-se definir e estabelecer alguns conceitos para a área, apresentando variáveis, equações e modelos constitutivos utilizados na elaboração do problema. Além disso, foram explicitados os parâmetros metodológicos utilizados na pesquisa, de modo a evidenciar como a formulação matemática foi manipulada e utilizada para obtenção dos resultados.

No capítulo 3, intitulado **Implementação computacional**, apresenta-se um esquema do algoritmo elaborado, o algoritmo de inicialização do modelo, o algoritmo de geração das malhas, o algoritmo de fragmentação das malhas e os métodos adotados para imposição das condições de contorno.

No capítulo 4, intitulado **Resultados e Discussões**, foram resumidos os resultados obtidos por meio das simulações realizadas, apresentando, inicialmente, o caso mais simples, de um problema puramente mecânico, no meio poroelástico bidimensional, depois, o problema de consolidação de Terzaghi e, ainda no meio sem fratura, o seu respectivo balanço de massa. Posteriormente, inseriu-se o caminho de fratura, analisou-se a concentração de tensão na sua ponta, efetuou-se o balanço de massa neste novo cenário, constatou-se o equilíbrio mecânico nas paredes da fratura, obteve-se a propagação da fratura em dois

regimes de propagação (*leakoff-toughness* e *storage toughness*) e, por fim, realizou-se o caso mais complexo de escolha de mais de um caminho de propagação de fratura.

No capítulo 5, intitulado **Conclusões**, foram resumidos os resultados obtidos por meio dos ensaios, além de terem sido ressaltados aspectos importantes relacionados aos métodos e técnicas utilizadas para modelagem do fraturamento hidráulico.

Na seção de **Referências**, foram apresentadas as obras que serviram de base para discussão, referências pontuais no texto, elaboração e solução dos exemplos apresentados.

1.2 OBJETIVOS

O objetivo geral deste trabalho é estudar o comportamento de propagação da fratura em um meio poroelástico, avaliar e discutir os efeitos que parâmetros de interesse desempenham no comportamento da fratura e da rocha, tais como, tensão aplicada, viscosidade e permeabilidade. Além disso, pretende-se desenvolver um código computacional, baseado no método dos elementos finitos, capaz de prever a direção preferencial de propagação de fraturas hidráulicas em um reservatório. Nesse sentido, será implementado um modelo de zona coesiva com o intuito de aproximar de forma efetiva a modelagem do comportamento de poços de petróleo submetidos a fluidos com pressão superior à da fratura, por meio da simulação implícita da ponta da fratura.

Dessa forma, acredita-se que o desenvolvimento do código possibilitará estabelecer um melhor projeto de exploração dos campos petrolíferos. Isso resultará em uma maior previsibilidade dos fenômenos envolvidos no processo e na obtenção de resultados mais produtivos, econômicos e seguros em termos operacionais.

1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

1.3.1 FRATURAMENTO HIDRÁULICO

O fraturamento hidráulico ocorre quando a pressão do fluido no interior dos poros ultrapassa a menor tensão principal mais a resistência à tração da rocha, originando uma ruptura por tração do material (BESERRA, 2015).

Adachi e Detournay (2008) descreveram a solução numérica de um problema de propagação de fratura hidráulica, em um meio permeável, com comportamento elástico linear, restrita a casos em que a resistência do meio e a defasagem entre o fluido e a ponta da fratura eram considerados nulos. Apesar das condições restritivas, os autores mencionados apresentaram resultados relevantes para a estimulação de reservatórios de hidrocarbonetos, uma vez que a limitação da solução se mostrou uma boa aproximação da solução real.

Xu *et al.* (2010) construíram um modelo matemático para uma rede de fraturas que caracterizava e previa seu crescimento em formações naturalmente fraturadas. O modelo representava a fratura como uma elipsoide, contendo várias fraturas, que consistiam em conjuntos perpendiculares de fraturas planares verticais com espaçamentos médios, d_x e d_y , respectivamente. Dito de outra forma, o modelo representava o crescimento da rede de fraturas como um todo, uma vez que o efeito de fraturas individuais eram contabilizadas a partir de uma média.

Ainda em ambientes naturalmente fraturados, Rahman e Rahman (2013) mostraram que uma fratura natural desempenha um papel importante na propagação de uma fratura induzida pelo processo de fraturamento hidráulico. A partir de três estágios, os autores construíram, desenvolveram e validaram analiticamente um modelo de poço intacto no qual foi possível, no primeiro estágio, avaliar o comportamento da deformação da rocha e avaliar as alterações na tensão *in situ* como resultado da injeção e/ou produção. No estágio 2, o poço intacto foi utilizado para iniciar a fratura e seu modelo de propagação. Por fim, no último estágio, o método foi estendido para a introdução de uma fratura natural no sistema e na modelagem da interação com uma fratura induzida e sua propagação.

No modelo semi-analítico desenvolvido por Wang, Shahvali e Su (2015), foi incorporada uma abordagem de difusividade fractal em que foi considerada a teoria fractal para porosidade, permeabilidade e representação do fluxo no meio estudado. Desse modo, os autores representaram de forma mais realista o comportamento do fluxo no REV e, conseqüentemente, deram origem a curvas mais confiáveis para análise de pressão transiente, em formações petrolíferas fechadas. Os autores demonstraram que ao considerar a permeabilidade e porosidade constantes no REV, as soluções obtidas concordam com a solução clássica de fluxo trilinear e porosidade dupla.

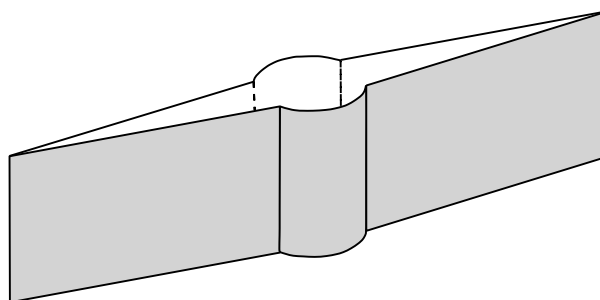
Yoshioka e Bourdin (2016), por sua vez, propuseram um simulador com uma abordagem variacional para fratura. A primeira parte do simulador foi analisada por comparação com os critérios clássicos de Griffith e, na segunda, expandiram para inclusão da poroelasticidade e tensões *in situ*, utilizando as soluções analíticas existentes de propagação de fratura, acionada por fluido para validação do código.

Ressalta-se o simulador proposto por Mauthe e Miehe (2017), que aborda diversos aspectos cruciais na modelagem do fraturamento hidráulico. Entre esses aspectos, estão o comportamento do sólido, do fluido e a interação entre eles. Além disso, o simulador leva em consideração a propagação de fraturas por caminhos desconhecidos a priori e o fluxo de fluido dentro das fraturas em desenvolvimento. Por meio de exemplos numéricos representativos, os autores desenvolveram um simulador capaz de demonstrar a performance de um campo de fase contínuo para a fratura em um meio poroso saturado de fluido e formularam um método robusto de elementos finitos para resolução do problema. Concluiu-se que a abordagem utilizada no estudo apresentou resultados satisfatórios, com exceção da região da ponta da fratura. Isso ocorreu devido ao fato de que a permeabilidade dentro

da fratura era proporcional à abertura, enquanto na ponta da fratura a abertura era nula. Apesar dessa limitação na região da ponta, a abordagem adotada mostrou-se eficaz na obtenção de resultados promissores.

Considerando a aplicação da lei de Hooke para o comportamento elástico linear e assumindo que a rocha é isotrópica e homogênea, é possível observar que em situações em que a tensão vertical é maior do que as tensões horizontais ($\sigma_v > \sigma_H > \sigma_h$) ocorre a formação de uma fratura hidráulica vertical induzida. Nesse caso, o plano da fratura é perpendicular à menor tensão principal horizontal, resultando na formação de duas fraturas simétricas que se originam a partir da perfuração de um poço. Essas fraturas se desenvolvem perpendicularmente à menor tensão principal, conforme ilustrado na Figura 1.

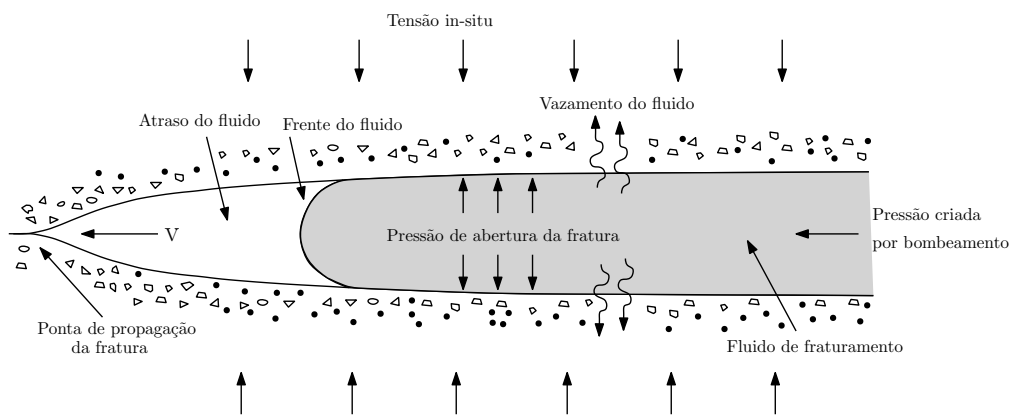
Figura 1 – Fratura vertical em torno de um poço vertical



Fonte: Adaptado de Beserra (2015, p. 103)

Segundo Ziaei-Rad *et al.* (2016), uma simulação precisa do processo de fraturamento hidráulico requer a consideração de um sistema totalmente acoplado, a fim de obter a variação espacial do campo de pressão ao longo da fratura, especialmente quando a viscosidade do fluido não é desprezível, como na maioria das aplicações. A Figura 2, representa os processos envolvidos durante a propagação da fratura.

Figura 2 – Propagação de uma fratura hidráulica gerada em um reservatório



Fonte: Adaptado de Cheng (2016, p.36)

Adachi e Detournay (2008) estabelecem que o fraturamento hidráulico envolve a realização de quatro etapas distintas: a deformação mecânica do meio sólido, por meio da concentração de tensões; o fluxo de fluido no interior da fratura, induzindo o início da fratura; a propagação da fratura, devido as forças de coesão do meio e a filtração de fluido pelo meio permeável (rochas adjacentes).

Para a filtração do fluido pelo meio permeável, é considerado o modelo de filtração de Carter. Neste modelo, o meio é permeável e unidimensional, com o processo independente da pressão. A filtração de fluidos se relaciona com a dilatação das rochas adjacentes, dado que a redução da filtração com o tempo resulta do aumento da pressão das rochas adjacentes, que pressionam a fratura na direção do fechamento.

No estudo conduzido por Wang *et al.* (2009), foi desenvolvido um modelo numérico abrangendo os efeitos de filtração, dano e campo de tensões. Os autores sugeriram a partir dos resultados, a existência de quatro processos, os quais já foram anteriormente citados. Ademais, eles expõem que as condições de tensão *in situ* prevalecem quando a taxa de injeção é relativamente baixa na propagação de fraturas e vice-versa.

1.3.1.1 Critério de propagação de uma fratura por tração

A deformação da fratura é modelada a partir da teoria da elasticidade linear, que estabelece uma relação não local entre a pressão do fluido e o comprimento da fratura por meio de uma equação integral. Já o fluxo de fluido é modelado por meio da teoria da lubrificação, expressa a partir de uma equação diferencial não linear, que relaciona a taxa de fluxo de fluido, o comprimento da fratura e o gradiente de pressão (ANDERSON, 2005). Para um corpo submetido à tração, considera-se um comportamento elástico durante a nucleação até a propagação da fratura, que é caracterizada por uma concentração de tensão na ponta, conseqüentemente há uma singularidade numérica, na qual a tensão tende ao infinito.

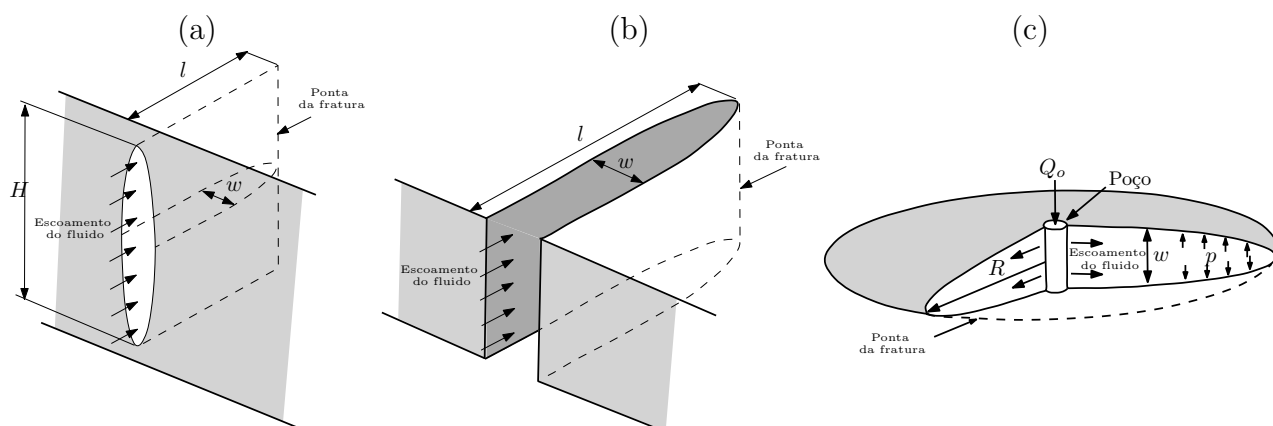
1.3.2 MODELOS ANALÍTICOS

Nesta seção, conforme exposto por Adachi *et al.* (2007), serão apresentados os três modelos analíticos principais para o fraturamento hidráulico, quais sejam: o modelo PKN, o modelo KGD e o modelo radial.

O modelo PKN, inicialmente conhecido como PK, foi desenvolvido por Perkins, Kern *et al.* (1961) como uma adaptação de uma solução de fratura no plano de tensões. Após as contribuições de Nordgren (1972) e inclusão dos efeitos de perda do fluido, obteve-se a formação do modelo PKN, conforme Figura 3 (a), aplicável para longas fraturas, com

alturas limitadas e constantes, área transversal elíptica e com a fratura no estado plano de deformações no plano vertical.

Figura 3 – Modelos analíticos de propagação de fraturas hidráulicas. A Figura (a) representa o modelo PKN, a Figura (b) o modelo KGD e a Figura (c) o modelo radial



Fonte: Adaptado de Adachi et al. (2007, p.741)

O modelo KGD, desenvolvido por [Khristianovic e Zheltov \(1955\)](#) e posteriormente aprimorado por [Geertsma e Klerk \(1969\)](#), apresenta um cálculo da largura da fratura que é independente da altura. Esse modelo, ilustrado na Figura 3 (b), é aplicável a fraturas curtas e no estado plano de deformação horizontal.

Por fim, apresenta-se o modelo radial, também conhecido como *penny-shaped*, que é aplicável em reservatórios homogêneos. Nesse modelo, a injeção de fluido ocorre em um ponto central, em uma pequena seção perfurada. Considera-se que a fratura seja desprezível em relação à camada do reservatório, e sua propagação assume uma forma circular, conforme ilustrado na Figura 3 (c).

1.3.3 MODELOS NUMÉRICOS

Existem diferentes métodos numéricos que podem ser empregados na modelagem e análise da propagação da frente de fratura. Esses métodos baseiam-se em princípios fundamentais, como a teoria da elasticidade linear para analisar a deformação da rocha, a lei de Darcy para descrever o comportamento do fluido e a teoria da mecânica da fratura para estudar a propagação da fratura ([BESERRA, 2015](#)).

Visando uma representação mais precisa e realista do comportamento da fratura e do fluxo de fluido no meio, alguns elementos são levados em conta no processo de modelagem, são eles: considera-se um meio contínuo, que é o reservatório; delimitando seu interior (contorno) pode haver canais estreitos de alta permeabilidade que permitem o

fluxo de fluido, que são as fraturas; a injeção desse fluido ocorre em um ponto específico, geralmente, por meio de um poço e; por último, ao longo da propagação da fratura, a posição da sua ponta pode variar. Desse modo, essa abordagem considera a complexidade do fenômeno de fraturamento em subsuperfície, levando em consideração as características físicas e geométricas das fraturas, bem como os mecanismos de injeção e propagação envolvidos.

Quando o corpo possui uma forma irregular, as propriedades do material são heterogêneas e há não linearidades no sólido, o método dos elementos finitos é muitas vezes utilizado para resolução desta problemática. Uma das causas é o vasto campo de estudos, *softwares* comerciais disponíveis e sua flexibilidade para trabalhar com elementos heterogêneos.

A propagação da fratura é orientada por uma lei coesiva que relaciona tensões e deslocamentos (CARRIER; GRANET, 2012). Assim, a malha é discretizada na região de interesse e elementos coesivos com espessura nula são inseridos no canal de interface para representação das discontinuidades, resolução do sistema e solução das não linearidades.

Lecampion, Bungler e Zhang (2018) subdividiram os modelos em dois grupos de métodos, listados da seguinte forma: o primeiro grupo rastreia a frente da fratura em cada intervalo de tempo determinado, tendo-se uma representação discreta da fratura. O segundo grupo “captura” a posição da frente da fratura, a partir da discretização da malha, por meio da representação contínua das propriedades da fratura, como é o caso dos algoritmos que utilizam modelos de elementos coesivos.

Além disso, uma abordagem alternativa para simular o fraturamento é utilizar o modelo constitutivo de dano, no qual a fratura é representada por elementos com resistência à tração reduzida e a permeabilidade do meio está relacionada aos deslocamentos na direção x ou y , ou seja, às aberturas das fraturas. Essa abordagem considera o efeito do dano na propagação das fraturas e permite estudar a interação entre o fluxo de fluido e as características da fratura.

Outros métodos amplamente utilizados para simulação nesses casos incluem: uma rede de fraturas discretas (DFN) e o método dos elementos finitos estendidos (XFEM). A abordagem DFN, busca descrever o sistema de fraturas de modo estatístico, construindo uma série de respostas de fraturas discretas com base em observações de campo de tais propriedades (ROGERS; ELMO; DERSHOWITZ, 2011). De modo geral, quando várias fraturas naturais (preexistentes) com geometrias distintas estão conectadas forma-se uma rede. A abordagem via DFN permite representar essa rede de forma discreta, sendo que sua geração é realizada com base em dados estatísticos. O XFEM, por sua vez, permite o enriquecimento das funções de forma dos elementos finitos cortados pela fratura, a fim de representar as singularidades de deslocamento, deformação e tensão próximo a uma fratura (JUNIOR, 2018).

1.3.3.1 Método dos elementos finitos

O método dos elementos finitos (MEF) é amplamente utilizado em trabalhos sobre fraturamento hidráulico devido à sua flexibilidade e capacidade de simular numericamente as condições desejadas, destacando-se, assim, entre os artigos e materiais de estudo utilizados para a execução deste trabalho.

Ziaei-Rad *et al.* (2016) utilizaram o MEF para desenvolver um esquema de identificação de fissuras a partir de uma abordagem de campo de fase. O estudo propôs um algoritmo que permite a identificação de fissuras e suas derivações. Além disso, o algoritmo foi facilitado pelo método de supressão não máxima, que reduziu a busca pelo caminho da fissura para um subconjunto menor do domínio computacional, promovendo uma aproximação da topologia do caminho da fissura.

No estudo realizado por Chen *et al.* (2017), foram apresentados modelos de interação na zona coesiva entre uma fratura induzida pelo processo de fraturamento hidráulico e a presença de uma fratura natural. Esses modelos foram formulados com base na lei de tração-separação, que controla o processo de fraturamento. Os autores analisaram condições de campo, tais como: a tensão *in-situ*, as propriedades da rocha e da fratura, o ângulo de intersecção e os parâmetros de tratamento (taxa de injeção do fluido e viscosidade do fluido). Os resultados obtidos nesse estudo forneceram informações quantitativas sobre o comportamento das fraturas hidráulicas. Isso incluiu a distribuição de tensões nas interfaces, a evolução da geometria das fraturas e a relação entre pressão e injeção de fluido.

Manzoli *et al.* (2019) desenvolveram um simulador para propagação da fratura, no meio poroelástico, e, como consequência, resolveram o problema hidromecânico de forma acoplada. Em continuidade a esses estudos, Cleto *et al.* (2020) mostraram a técnica de fragmentação da malha para lidar com a evolução de múltiplas fraturas, e Cleto *et al.* (2023) validaram o método para cenários tridimensionais.

Camargo *et al.* (2022) propuseram uma metodologia para acoplar malhas não correspondentes em estruturas geológicas de meio poroso. Eles utilizaram elementos finitos de acoplamento e um método de penalidade para garantir a continuidade do campo de pressão ao conectar as malhas.

Como exposto por Wawrzynek e Ingraffea (1987), há muito tempo se utiliza o método dos elementos finitos para representação de problemas da mecânica da fratura e, ao longo dos anos, a formulação se tornou cada vez mais rigorosa. Assim, os autores citados mostram que para uma boa modelagem da fratura, deve-se ter um bom refinamento na sua ponta.

1.3.3.2 Elementos coesivos de interface

A utilização de modelos com elementos coesivos é uma abordagem simples e útil quando se deseja mapear fraturas já existentes ou quando há conhecimento prévio sobre o caminho da fratura. [Chen et al. \(2017\)](#) predefiniram um caminho para fratura a partir de elementos coesivos, os quais possuem propriedades de tração-separação embutidas, o que significa que eles são capazes de simular o comportamento de fratura ao longo desse caminho. A formulação do modelo de interação na zona coesiva se organiza basicamente em três pontos, quais sejam: as leis coesivas de tração-separação, que controlam o processo de fraturamento, em que a propagação da fratura ocorre a partir de uma zona de plastificação iniciada em sua ponta, o que diminui as forças coesivas do material; em segundo lugar, equações dinâmicas do fluido que descrevem o fluxo de fluido que abre o canal da fratura e a difusão do fluido nas rochas permeáveis ao redor da fratura. Essas equações levam em conta a interação fluido-fratura que são essenciais para compreender a dinâmica do fluido e são consideradas para descrever o fluxo de fluido que abre o canal da fratura e a difusão do fluido nas rochas permeáveis ao redor da fratura. Por fim, a lei de fricção é incorporada ao modelo para representar a capacidade de cisalhamento interfacial da fratura.

[Chen e Borst \(2019\)](#) contribuíram com o emprego da técnica conhecida como *Powell-Sabin B-splines* para modelagem de trinca coesa, sem uma interface predefinida, por meio de triângulos, fizeram uma introdução direta do caminho da fratura no domínio físico.

Nos elementos coesivos de interface, a fratura é caracterizada na interface de dois elementos contínuos de forma discreta. A [Figura 6](#) demonstra a interface entre dois elementos coesivos no caminho de abertura da fratura. Neste cenário, os elementos coesivos foram separados dos elementos do contínuo e colapsados na direção perpendicular ao seu comprimento deixando, portanto, de ser um elemento bidimensional e tornando-se um elemento unidimensional, uma linha na direção longitudinal.

1.3.4 RASTREAMENTO DO CAMINHO DA FRATURA

[Parvaneh e Foster \(2016\)](#) elaboraram um estudo comparativo para investigar características numéricas de interações, em diferentes intervalos de tempo, para atualização do caminho da fratura, pelo emprego de estratégias de rastreamento local e global. Assumindo um comportamento elástico linear do sistema, efetuaram a localização da fratura quando a tensão principal máxima excedia a resistência à tração, utilizaram a direção ortogonal a de maior tensão principal como orientação da localização da superfície e implementaram a relação tração-separação para determinar os saltos de deslocamento ao longo das paredes.

Os autores obtiveram, que para pequenos intervalos de tempo, entre as atualizações, ao final de cada período, o caminho da fratura era mais preciso.

A técnica de rastreamento do caminho da fratura local, apresentada por [Manzoli *et al.* \(2013\)](#) relaciona a direção da fratura com os pontos de descontinuidades dos elementos adjacentes aos elementos da fratura que continuam na direção normal a máxima tensão principal. Para o rastreamento local e global do caminho da fratura, desenvolveram algoritmos, efetuaram análises numéricas e obtiveram que há um maior esforço computacional quando se utiliza o rastreamento global do caminho da fratura uma vez que são analisados a cada *time step* todos os elementos do domínio e, para o local, utilizaram apenas as área de interesse, próximas a fratura.

[Ziaei-Rad *et al.* \(2016\)](#) apresentaram três exemplos representativos para validação do algoritmo criado para detectar uma área delimitadora do campo de fase estudado na fratura utilizando o MATLAB. O algoritmo se mostrou eficaz para determinar o caminho de apenas uma fratura, entretanto, para casos em que há ramificações da fratura, foi avaliada a possibilidade da apresentação de erros na identificação de caminhos com direções preferenciais de propagação.

Na determinação do caminho de propagação da fratura, [Naderi e Iyyer \(2017\)](#) utilizaram um algoritmo de rastreamento local com o critério da direção da máxima tensão principal, iniciando a propagação da fratura quando a tensão na ponta da fratura excedia a força de coesão entre os elementos. Nesse caso, os resultados se mostraram satisfatórios para o elemento tetraédrico utilizado e passível de extensão para os demais tipos de elementos. Conforme exposto por [Ziaei-Rad *et al.* \(2016\)](#), os referidos autores também indicaram a dificuldade e robustez do algoritmo nos casos em que se verificam ramificações de fratura.

2 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

2.1 GEOMECÂNICA DE RESERVATÓRIOS

Segundo [Zoback \(2010\)](#), a chave para a compreensão do modelo geomecânico é o conhecimento sobre o estado de tensão, já que a falha do poço ocorre quando a concentração de tensão ao redor da circunferência excede a tensão da rocha.

2.1.1 Definições básicas

2.1.1.1 Tensões em subsuperfície

A tensão vertical (σ_v) ou tensão de sobrecarga é definida como um potencial hidráulico escalar, a qual age em um espaço poroso interconectado em profundidade e é dada por:

$$\sigma_v \equiv \int_0^z \rho(z)gz \approx \bar{\rho}gz. \quad (1)$$

onde a magnitude de σ_v é equivalente à integração das densidades das rochas da superfície para a profundidade de interesse z , $\rho(z)$ é a densidade em função da profundidade, g é a aceleração gravitacional e $\bar{\rho}$ é uma média das massas específicas das camadas de rocha acima do ponto z . Por outro lado, a determinação da tensão horizontal mínima (σ_h) é frequentemente realizada por meio de medições diretas em testes de fraturamento hidráulico ou de filtração. Já a tensão horizontal máxima (σ_H), devido à dificuldade de obtenção por medição direta, é estimada com base em dados conhecidos das rochas próximas aos poços e nos limites máximos e mínimos obtidos em experimentos.

A partir de avaliações da geologia regional, dos dados conhecidos por meio de fraturas hidráulicas induzidas e dos *breakouts*, durante a perfuração dos poços, obtém-se a orientação das tensões principais ([POLI, 2020](#)).

2.1.1.2 Comportamento mecânico da rocha

O conhecimento das deformações e das tensões são fundamentais para a compreensão da propagação de fraturas hidráulicas. As falhas da rocha podem ocorrer de três modos: por compressão, por tração ou por cisalhamento. No primeiro caso, a perda de integridade da rocha se dá por compressão ou quando abrange processos complexos que envolvem falhas microscópicas criadas a partir de pequenas trincas de tração e de deslizamentos por atrito nos grãos limites da rocha ou quando há processos que ocorrem em corpos de prova submetidos a elevadas tensões confinantes. Logo, a ruptura da rocha por compressão

acontece no momento em que as tensões que atuam na massa rochosa excedem sua resistência à compressão.

No segundo caso, é possível que a falha por tração ocorra ao redor dos poços em determinados estados de tensão devido à concentração de tensões em suas paredes. Exemplos marcantes desse tipo de falha é o fraturamento hidráulico e o fraturamento hidráulico induzido. Neste último caso, a pressão do fluido é intencionalmente elevada acima da tensão principal mínima, ultrapassando assim a resistência à tração da rocha, a fim de propagar uma fratura que pode ser preenchida com areia ou outro material conhecido como agente de sustentação. O objetivo da formação das fraturas é aumentar a permeabilidade da formação, enquanto o agente de sustentação atua para evitar que a fratura se feche por completo quando a injeção de fluido for interrompida. No processo de expansão da propagação das fraturas hidráulicas, por outro lado, a resistência da rocha à tração é praticamente insignificante.

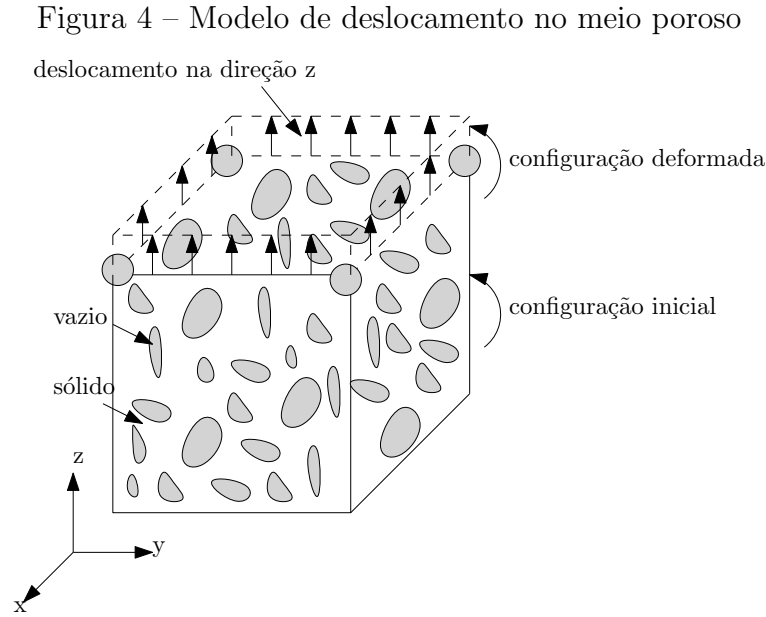
Comparativamente, [Zoback \(2010\)](#) afirma que, ao contrário da resistência à compressão, a resistência à tração não parece depender da tensão efetiva simples, especialmente em rochas de baixa porosidade/baixa permeabilidade. Além disso, [Junior \(2018\)](#) mostra que a deformabilidade da rocha em modo compressivo é geralmente representada por modelos constitutivos empíricos, enquanto que a deformabilidade em modo de tração e propagação da fratura são descritos plenamente pela mecânica da fratura.

No terceiro e último caso, fraturas por cisalhamento estão relacionadas às modificações nas suas condições hidráulicas e aos deslocamentos significativos que podem gerar perda de integridade dos poços. Pelos aspectos das falhas, esses colapsos podem resultar na perda de integridade por sobrepressão de fluidos no plano de falha ou por perdas na rocha adjacente.

2.2 POROELASTICIDADE LINEAR

2.2.1 Tensões e deformações

A Figura 4 ilustra um meio poroso. A moldura, por sua vez, é um volume elementar que engloba tanto a fase sólida quanto os espaços vazios presentes na estrutura formada pelo meio. Segundo [Cheng \(2016\)](#), quando um meio poroso é deformado, a deformação total é composta pela deformação da fase sólida e dos espaços vazios.



Fonte: Adaptado de Cheng (2016, p. 65)

Para obtenção de um modelo prático, interpretam-se as tensões (σ_{ij}) e as deformações (e_{ij}) como quantidades médias ao longo de um volume, conhecido como volume elementar representativo (REV) nas vizinhanças do ponto de interesse. Ao examinar uma seção transversal do meio poroso, como mostrado na Figura 4, observa-se que parte do espaço é ocupado pelo sólido e parte pelo fluido, podendo-se, assim, decompor as tensões totais. Desse modo, o somatório de forças aplicadas nas fases sólidas e fluidas, dividido pela área total da seção transversal, é separado em dois componentes parciais, associados com as fases dos materiais, tendo-se a seguinte relação:

$$\sigma_{ij} = (1 - \phi)\sigma_{ij}^s - \phi\delta_{ij}p, \quad (2)$$

onde σ_{ij}^s é a tensão da parte sólida, considerada também como o tensor das tensões totais atuando nas faces do volume, δ_{ij} é o delta de Kronecker, ϕ é a porosidade e p a pressão de poros.

Estabelecendo-se o equilíbrio mecânico através das reações às forças tanto do sólido quanto do fluido e considerando o fluido perfeito, a tensão exercida pelo fluido é representada pela pressão de poros, ou seja, a pressão do fluido que preenche os poros da rocha.

Convencionalmente, define-se que tensões positivas indicam estados de tração, enquanto tensões negativas representam estados de compressão. No entanto, no contexto da poroelasticidade, adota-se que pressões positivas correspondem a fluidos em compressão. Nesse sentido, um meio poroelástico sujeito a um estado de compressão apresenta uma diminuição na tensão total e um aumento na pressão.

As deformações são definidas pelos deslocamentos das superfícies proporcionados pela fase sólida e pelos espaços vazios. Para tanto, define-se um vetor de deslocamento

do sólido $u = (u_x, u_y, u_z)$, como se pôde observar no exemplo apresentado na Figura 4. Baseando-se nestes deslocamentos, define-se o tensor de deformações de segunda ordem:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial u_j} + \frac{\partial u_j}{\partial u_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (3)$$

onde se adotou a notação tensorial em que a vírgula no subscrito seguido de um índice mostra uma derivada parcial em relação à coordenada espacial nesta direção, isto é, $u_{i,j} = \partial u_i / \partial u_j$. Relacionando o tensor de deformações com o tensor de tensões totais (lei de Hooke):

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl}. \quad (4)$$

onde C_{ijkl} é um tensor de quarta ordem que para o meio elástico linear isotrópico:

$$C_{ijkl} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} + G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \quad (5)$$

onde G é o módulo de cisalhamento, ν o coeficiente de Poisson e δ_{ij} é o delta de Kronecker.

Por seu turno, em função da Equação (3), a deformação volumétrica total é:

$$e = e_{ii} = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = \nabla \cdot \vec{u}, \quad (6)$$

onde os índices repetidos representam o somatório de Einstein e $\nabla \cdot$ se apresenta como o operador divergente. Para o caso estudado, consideram-se apenas as pequenas deformações lineares do meio, por esse motivo, desconsideram-se as não linearidades geométricas para situações de grandes deformações.

2.2.2 Condições devido à presença de fluido no volume elementar representativo

Os ensaios no meio poroelástico, devido à presença do fluido no REV, podem ser realizados em duas condições, a saber: drenada e não drenada. O estado drenado ocorre quando o fluido percola através da rocha e sai pelos limites do REV, mantendo a pressão de poros constante. Por outro lado, o estado não drenado ocorre quando o fluido é retido dentro do REV por uma camada impermeável, resultando na ausência de troca de fluido com as regiões adjacentes (POLI, 2020).

Em virtude da presença do fluido, as constantes elásticas apresentam significados distintos nos casos drenados ou não drenados. Observa-se que, para casos drenados, as constantes se referem às propriedades da parte sólida do REV, enquanto que, em casos não drenados são propriedades combinadas da parte sólida e do fluido presente no REV.

2.2.3 Módulo de cisalhamento e coeficiente de Poisson

O módulo de cisalhamento (G), para um meio isotrópico, é definido como a razão entre a tensão cisalhante aplicada no corpo (σ_{ij}) e o ângulo de deformação (γ_{ij}) correspondente, logo:

$$G = \frac{\sigma_{ij}}{\gamma_{ij}}. \quad (7)$$

O coeficiente de Poisson (ν) é uma constante adimensional que assume tipicamente valores entre 0 e 0,5 e é definido pela razão entre a deformação transversal (e_{jj}) e a longitudinal (e_{ii}) em um corpo submetido a uma carga axial, portanto,

$$\nu = \left. \frac{e_{jj}}{e_{ii}} \right|_{\Delta p=0; \sigma_{jj}=0}, \quad (8)$$

para $i \neq j$.

2.2.4 Coeficiente de armazenamento sob deformação constante

No meio poroso pode haver injeção ou extração de fluido em virtude da pressão de poros, [Cheng \(2016\)](#) introduz o conceito de coeficiente de armazenamento, o qual é definido como o volume de fluido ganho ou perdido em uma estrutura poroelástica por unidade de volume da estrutura como resultado do aumento ou declínio unitário da pressão de poros. Assim, o coeficiente de armazenamento sob deformação constante é:

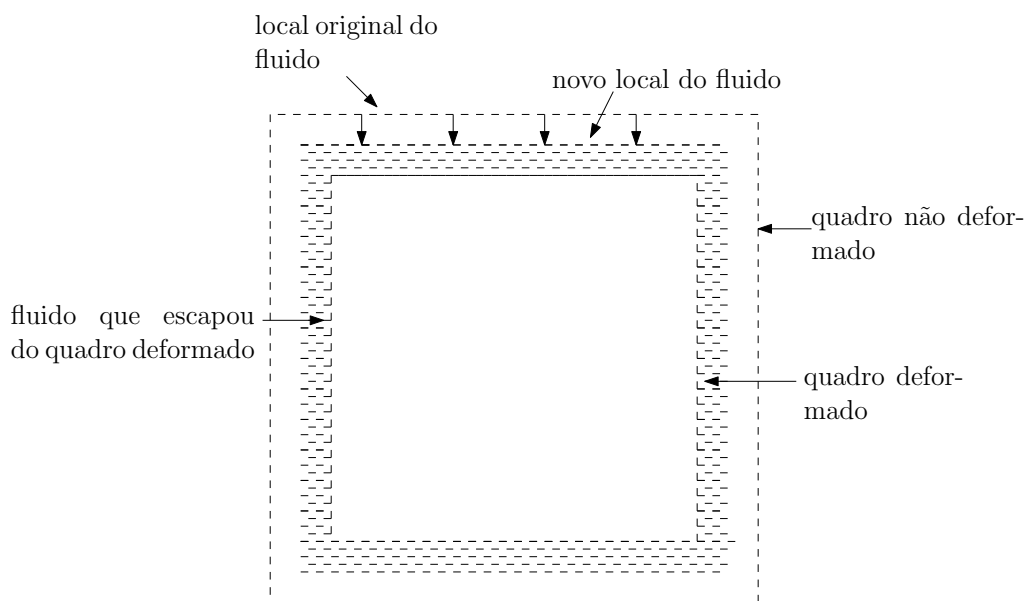
$$S_\epsilon = \frac{1}{M} = \left. \frac{\partial \zeta}{\partial p} \right|_{\Delta \epsilon=0}. \quad (9)$$

2.2.5 Incremento de fluido

[Biot \(1941\)](#) introduziu o conceito de incremento de volume ou fluido, que representa a variação no conteúdo de fluido do meio poroso, ou seja, a quantidade de volume que entra no REV por unidade de volume do REV, conforme será mostrado na Equação (10) e na Figura 5.

$$\zeta = \frac{\delta V_p - \delta V_f}{V} = \alpha \epsilon + S_\epsilon p \quad (10)$$

Figura 5 – Variação no conteúdo de fluido do REV. A região sombreada indica o volume de fluido que escapou e o quadro deformado representa a variação do conteúdo do fluido



Fonte: Adaptado de Cheng (2016, p. 68)

2.3 MODELOS CONSTITUTIVOS DO MEIO CONTÍNUO

2.3.1 Estado plano de deformações

Estruturas longas e prismáticas, que não variam em sua seção transversal ao longo do eixo longitudinal, quando submetidas a carregamentos no eixo transversal e com deslocamento desprezível em uma direção, se enquadram em um caso de estado plano de deformação. Isso significa que problemas geomecânicos, como o carregamento em um reservatório de petróleo ou outra estrutura submersa que é significativamente maior em uma direção, podem ser representados por este estado. Dessa forma, é possível simplificar a análise e compreender melhor o comportamento dessas estruturas em condições específicas.

Se o carregamento for muito maior na direção z , reduz-se o problema para um sistema bidimensional no plano (x, y) em que as componentes do deslocamento independem da coordenada z , então, tem-se as seguintes condições:

$$u_z = 0, \quad \epsilon_{zz} = \epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0. \quad (11)$$

2.3.2 Tensões efetivas

Exposta inicialmente por Terzaghi (1923), a lei das tensões efetivas enuncia casos em que o comportamento da rocha é governado pelo somatório de tensões e pela contribuição

da pressão de poros. O referido autor afirma que as tensões em qualquer ponto de uma seção de uma massa de solo podem ser computadas pelas tensões principais totais que agem neste ponto. Caso esteja preenchido com fluido a uma pressão p , considera-se a tensão principal total composta por duas partes. Uma parte, p , age no fluido e no sólido, em qualquer direção, com mesma intensidade e é chamada de tensão neutra. A outra parte é composta pela fração de tensão principal total. Assim, expressa-se o tensor de tensões efetivas de Terzaghi (σ''_{ij}) como:

$$\sigma''_{ij} = \sigma_{ij} + p \delta_{ij}. \quad (12)$$

Posteriormente, Biot (1973) verificou a influência da variação da pressão de poros na compressibilidade do meio poroso e introduziu o tensor de tensões efetivas de Biot (σ'_{ij}):

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + \alpha p \delta_{ij}. \quad (13)$$

Reescrevendo a tensão efetiva de Biot em função da tensão efetiva de Terzaghi:

$$\sigma'_{ij} = \sigma''_{ij} - p \delta_{ij}(1 - \alpha). \quad (14)$$

2.3.3 Coeficiente de Biot-Willis

O coeficiente de Biot-Willis (α) é uma propriedade do sólido e do REV, que independe do fluido e se relaciona à compressibilidade da parte sólida da rocha. É definido como a razão entre o volume de fluido adicionado e a deformação volumétrica do REV:

$$\alpha = \left. \frac{\partial \zeta}{\partial \epsilon} \right|_{\Delta p = 0} = 1 - \frac{K}{K'_s}, \quad (15)$$

em que K'_s é o módulo de compressibilidade em ensaio não revestido.

2.4 EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

As equações governantes são obtidas considerando que o REV está em um estado de equilíbrio de forças para cada instante de tempo. De acordo com Wang (2000), um REV sujeito a tensões em suas faces deve permanecer estático e em equilíbrio rotacional. Analisando-se cada coordenada no meio bidimensional, tem-se as seguintes equações de equilíbrio de forças:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + F_x = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + F_y = 0. \quad (17)$$

onde F_x e F_y são forças por unidade de massa.

Em notação tensorial, desprezando as forças de corpo:

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad (18)$$

substituindo na Equação (13), a condição de equilíbrio para a tensão efetiva é:

$$\sigma'_{ij,j} = \alpha p_{,i}, \quad (19)$$

e a equação de equilíbrio em função da tensão total:

$$\sigma_{ij} = 2 G e_{ij} + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \epsilon - \alpha p \delta_{ij}. \quad (20)$$

Substituindo a deformação pela definição da Equação (3), obtém-se as equações de equilíbrio de forças em função dos deslocamentos e da pressão de poros que associados às componentes de tensão, são:

$$\left[\frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] + \left[G \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + G \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \right] = \alpha \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (21)$$

$$\left[G \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + G \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] + \left[\frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] = \alpha \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (22)$$

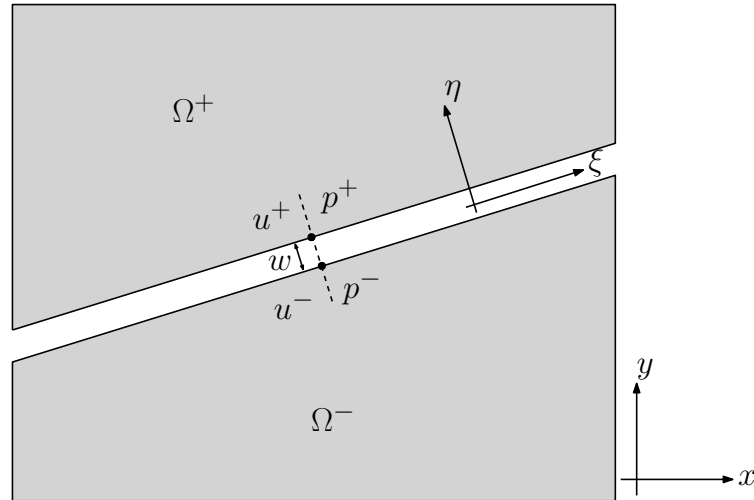
em que, considera-se $u_x = u$ e $u_y = v$. O lado esquerdo das equações (21 e (22) é o divergente das tensões efetivas, comparando as equações 21, 22 e 19.

2.5 FRATURA

2.5.1 Modelo constitutivo da fratura

Para constituição da fratura, considera-se a propagação unidimensional em um meio contínuo bidimensional, formado por duas superfícies lisas, separadas por uma abertura constante. Como é possível ver na Figura 6, o eixo ξ coincide com a direção de propagação da fissura, a parte superior do domínio representa o lado positivo e a parte inferior o lado negativo.

Figura 6 – Representação de uma fratura no domínio unidimensional no meio contínuo bidimensional



Fonte: Adaptado de Poli (2020, p. 54)

A dilatação ou contração deste tipo de fratura se relaciona diretamente com a pressão de fluido interna, uma vez que estas pressões produzirão cargas estruturais sobre a parede da fratura que resultarão no aumento de sua abertura, com conseqüente incremento de condutividade hidráulica (JUNIOR, 2018).

2.5.2 Fluxo na fratura

Considerando-se o confinamento do fluxo no interior da fratura, cujo fluido é incompressível, o escoamento é laminar e ao se desprezar os parâmetros térmicos, a rugosidade das paredes da fratura, a abertura variável e os fluxos turbulentos devido às altas velocidades, idealiza-se a velocidade de escoamento no interior de uma fratura como um modelo de fluxo entre placas paralelas (WITHERSPOON *et al.*, 1980; ZIMMERMAN; BODVARSSON, 1996; SNOW, 1965).

Desse modo, baseada nas equações de Navier-Stokes, a vazão no interior da fratura é dada por:

$$q_{\xi} = -\frac{w^3 h}{12\mu} p_{,\xi}, \quad (23)$$

onde w é a abertura e h a altura da fratura.

Resolveu-se o caráter não linear do fluxo multifásico no meio poroso utilizando elementos de espessura nula no contorno da fratura, selecionando pequenos passos de tempo no laço de iterações e executando laços para estabilização do dano.

2.5.3 Modelagem do fluxo na fratura

No método de fraturamento hidráulico, considera-se gradiente de pressão transversal $p_{,\eta}$ nulo. Além disso, para um fluido incompressível, o divergente do fluxo específico é igual ao volume de fluido no interior da fratura. Logo:

$$q_{k,k} + \dot{w} = 0. \quad (24)$$

Como o gradiente de pressão transversal $p_{,\eta}$ é nulo no interior da fratura, mas não no seu contorno, adota-se como condição de contorno entre a fratura e o meio contínuo, em razão da filtração de fluido da fratura para a rocha, que as pressões no lado positivo e lado negativo da fratura são iguais, logo:

$$p^+(\xi) = p^-(\xi). \quad (25)$$

Para igualdade destes termos, na implementação computacional, utilizou-se o método *Master-Slave* ou o método *penalty* que serão apresentados posteriormente na seção 4.3.

Portanto, com base nas Equações (23) e (24), o balanço de fluxo no domínio da fratura é:

$$q_{\eta,\eta} - \left(\frac{w^3 h}{12\mu} p_{,\xi} \right)_{,\xi} + \dot{w} = 0, \quad (26)$$

onde h é considerado unitário para a aproximação do estado plano de deformações.

2.5.4 Equilíbrio mecânico da fratura

Após a abertura da fratura, assume-se um equilíbrio estático nas paredes como condição de contorno mecânica para o meio contínuo ao redor da fratura, logo, a tensão total na direção η é igual à pressão de poros:

$$\sigma_{\eta\eta} = p. \quad (27)$$

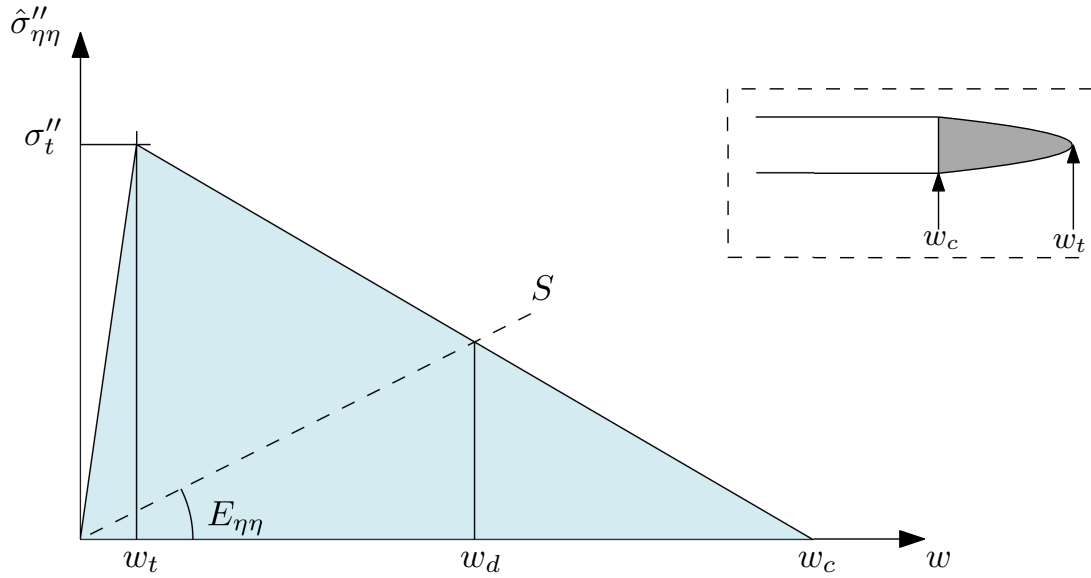
Entre os elementos coesivos, adota-se um tensor de rigidez \hat{E}_{kl} , que controla a coesão entre as duas faces da fratura, definido como:

$$\hat{E}_{kl} = \begin{bmatrix} E_{\eta\eta} & 0 \\ 0 & E_{\xi\xi} \end{bmatrix}, \quad (28)$$

onde \hat{E}_{kl} é um tensor diagonal, uma vez que, desconsidera-se que a abertura normal gere uma coesão cisalhante e vice-versa. Os componentes do tensor são obtidos na direção η pela inclinação da reta S da Figura 7 e pela definição da Equação (4), uma função de w_d , variável de estado que representa o dano normal em um determinado ponto da fratura, e

de σ_t'' , o limite de resistência à tração do material. Na direção ξ a componente é obtida por uma constante atribuída no método *penalty* descrito na seção 4.3.2. Desprezando-se o dano no sentido de cisalhamento, isto é, considerando $E_{\xi\xi}$ constante, a medida que a rocha rompe ($w > w_t$), sendo w_t a abertura de ruptura do material, $E_{\eta\eta}$ diminui e o dano aumenta.

Figura 7 – Comportamento da propagação da fratura em função da tensão aplicada



Fonte: Adaptado de Poli (2020)

Na área pintada do triângulo, a energia coesiva de Griffith (G_c) para o material é irreversível e, conseqüentemente, constante em cada posição. Considerando-se, portanto, a seguinte equação constitutiva:

$$\sigma_{\eta\eta}'' = \sigma_{\eta\eta}''(w_d, w(\xi)) = E_{\eta\eta}w, \quad (29)$$

em que w é a abertura normal do elemento coesivo.

Para $w_t \leq w_d \leq w_c$, a rigidez obedece a seguinte equação:

$$E_{\eta\eta} = \frac{(w_c - w_d)}{(w_c - w_t)} \frac{\sigma_t''}{w_d}. \quad (30)$$

onde w_c é a abertura de fratura e no caso $w_d \geq w_c$, região mais afastada da ponta da fratura, o material está fraturado e, portanto, $E_{\eta\eta} = 0$. Tendo assim, a condição de equilíbrio para tensão:

$$\hat{\sigma}_{\eta\eta}'' = 0, \quad (31)$$

válida para todo o domínio.

2.5.5 Rotação da matriz de rigidez do elemento coesivo

A matriz de rotação R é usada na transformação do sistema de coordenadas locais durante a rotação das arestas, que representam os elementos de fratura, no eixo $\xi\eta$, para o eixo de coordenadas globais xy que permanece fixo.

Em um meio bidimensional R é dada por:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_x & \eta_y \\ \xi_x & \xi_y \end{bmatrix}, \quad (32)$$

onde θ é o ângulo de rotação, η_i é o vetor normal unitário e ξ_i o vetor tangente unitário. Segundo [Borst et al. \(2012\)](#), os componentes de um vetor \hat{t}_i no sistema de coordenadas $\xi\eta$ pode ser obtido do vetor t_i , em xy a partir da relação:

$$t_i = R_{ik} \hat{t}_k, \quad (33)$$

O vetor tensão normal e cisalhante das forças coesivas em coordenadas locais $\xi\eta$ pode ser escrita como:

$$\hat{t}_k = \hat{E}_{kl} \hat{w}_l, \quad (34)$$

onde

$$\hat{t}_k = \begin{bmatrix} t_\eta \\ t_\xi \end{bmatrix}, \quad (35)$$

t_η é o vetor tensão normal e t_ξ o vetor tensão cisalhante no eixo de coordenadas locais $\xi\eta$.

A abertura da fratura ao longo do eixo ξ é calculada a partir da solução dos deslocamentos nas coordenadas globais xy :

$$w_j = u_j^+ - u_j^-, \quad (36)$$

onde u_j é o vetor de deslocamentos no eixo xy e os sobrescritos $+$ e $-$ indicam a posição na interface positiva ou negativa da fratura, respectivamente, conforme [Figura 6](#). Assim, a abertura da fratura $w(\xi)$ é:

$$\hat{w}_l = R_{lj} w_j, \quad (37)$$

onde

$$\hat{w}_l = \begin{bmatrix} w_\eta \\ w_\xi \end{bmatrix}, \quad (38)$$

e substituindo este termo na Equação (34):

$$\hat{t}_k = \hat{E}_{kl} R_{lj} w_j. \quad (39)$$

Desse modo, a partir da definição da Equação (33), chega-se ao vetor de forças que atuam na interface no sistema de coordenadas global xy :

$$t_i = R_{ik} \hat{t}_k = R_{ik} R_{jl} \hat{E}_{kl} w_j \quad (40)$$

onde t_i são as componentes do vetor de tensão resultantes t_x e t_y para o equilíbrio mecânico da interface da fratura.

2.6 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS APLICADOS À POROELASTICIDADE

Vários métodos podem ser utilizados para modelagens numéricas de equações diferenciais parciais, dentre eles, destacam-se os métodos utilizados neste trabalho: o método dos elementos finitos (MEF) e o método das diferenças finitas (MDF). Estes métodos propõem a discretização do domínio no espaço e no tempo para obtenção de soluções aproximadas com custo computacional acessível.

Normalmente, para simulações de sistemas de equilíbrio mecânico e de dinâmica dos fluidos, utiliza-se o MEF, o qual é reconhecido como um procedimento numérico para análise de estruturas e meios contínuos que permite a representação de geometrias e condições de contorno complexas a partir do uso de funções interpoladoras e diversos tipos de elementos.

O MDF consiste na reformulação do problema contínuo em um problema discreto utilizando fórmulas de diferenças finitas em uma malha adequada. Geralmente, utilizam-se expansões por séries de Taylor em torno de um ponto base para obtenção de soluções aproximadas. Segundo [Junior \(2006\)](#), a ideia básica do MDF é dividir o tempo total de análise em intervalos de tempo Δt , no qual se procura satisfazer às soluções das equações em cada instante discreto de tempo.

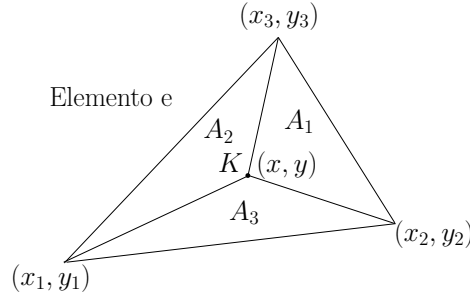
Este capítulo apresenta a formulação matemática implementada no MATLAB para modelagem do meio contínuo, da fratura e do acoplamento hidromecânico. Além disso, apresenta-se, também, a discretização temporal das variáveis e a organização do laço de dano.

Para modelagem do meio poroelástico contínuo e discretização temporal, adotou-se a notação utilizada por [Wang \(2000\)](#), entretanto, durante a realização da pesquisa, optou-se por continuar o equacionamento na notação tensorial, conforme será exposto a seguir.

2.7 MODELAGEM DO MEIO POROELÁSTICO CONTÍNUO

Discretiza-se o domínio do problema em uma malha de elementos finitos, considerando o estado plano de deformação. Conforme [Wang \(2000\)](#), as incógnitas nodais desconhecidas são: U^K , V^K e P^K que se referem ao componente x do deslocamento, ao componente y do deslocamento e a pressão de poros, respectivamente, do nó K . A seguir, apresenta-se o tipo de elemento utilizado:

Figura 8 – Elemento triangular e nó K



Fonte: Adaptado de Wang (2000, p. 240)

As interpolações são definidas pelas funções de forma do elemento $N^K(x, y)$:

$$\hat{u}^e(x, y) = \sum_{K=1}^{NNOS} N^K(x, y)U^K, \quad (41)$$

$$\hat{v}^e(x, y) = \sum_{K=1}^{NNOS} N^K(x, y)V^K, \quad (42)$$

$$\hat{p}^e(x, y) = \sum_{K=1}^{NNOS} N^K(x, y)P^K, \quad (43)$$

onde o caractere acima da variável indica que a variável é uma aproximação, ou seja, uma solução de teste, o sobrescrito e designa o número do elemento, K é o número do nó local (1, 2 ou 3 para o elemento triangular) e $NNOS$ se refere ao número total de nós. Desse modo, as funções de forma para o elemento triangular são:

$$N^1(x, y) = \frac{1}{2A^e}[(x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] = \frac{A^1}{A^e}, \quad (44)$$

$$N^2(x, y) = \frac{1}{2A^e}[(x_3y_1 - x_1y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y] = \frac{A^2}{A^e}, \quad (45)$$

$$N^3(x, y) = \frac{1}{2A^e}[(x_1y_2 - x_2y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y] = \frac{A^3}{A^e}, \quad (46)$$

onde,

$$2A^e = (x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3), \quad (47)$$

e A^1 , A^2 e A^3 são as subáreas opostas aos nós 1, 2 e 3, respectivamente, e A^e é a área do elemento.

De modo geral, o método de resíduo ponderado consiste na minimização do erro ponderado ou residual das equações governantes quando as soluções testes são inseridas. Nas aproximações de Galerkin, as funções de forma nodais são também as funções peso. Funções de forma nodais $N^L(x, y)$ são definidas como a união das funções de forma dos elementos para cada elemento, no conjunto de elementos, que contém o nó L . Para cada

equação governante, resulta-se uma equação de resíduo ponderado, para cada função de forma $N^L(x, y)$. Assim, aplicando-se estas definições na Equação (21):

$$\int \int_{\Omega} \left[\frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x \partial y} + G \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} + G \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y \partial x} - \alpha \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} \right] N^L(x, y) dx dy = 0. \quad (48)$$

Após manipulações algébricas, integrando por partes e reduzindo a ordem das derivadas de segunda ordem na Equação (48):

$$\int \int_D \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} N^L dx dy = \int_{\Gamma} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} N^L n_x dl - \int \int_D \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \frac{\partial N^L}{\partial x} dx dy, \quad (49)$$

$$\int \int_D \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x \partial y} N^L dx dy = \int_{\Gamma} \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} N^L n_x dl - \int \int_D \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} \frac{\partial N^L}{\partial x} dx dy, \quad (50)$$

$$\int \int_D \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y \partial x} N^L dx dy = \int_{\Gamma} \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} N^L n_y dl - \int \int_D \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} \frac{\partial N^L}{\partial y} dx dy, \quad (51)$$

$$\int \int_D \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} N^L dx dy = \int_{\Gamma} \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} N^L n_y dl - \int \int_D \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} \frac{\partial N^L}{\partial y} dx dy, \quad (52)$$

onde Γ é o contorno do domínio do problema e dl é a distância diferencial ao longo do contorno. Substituindo às soluções aproximadas obtidas nas Equações (41), (42) e (43) na equação (48) e considerando as simplificações obtidas nas Equações (49), (50), (51) e (52) é possível encontrar:

$$\begin{aligned} & \int \int_D \left[\frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial N^K}{\partial x} \frac{\partial N^L}{\partial x} + G \frac{\partial N^K}{\partial y} \frac{\partial N^L}{\partial y} \right] U^K dx dy \\ & + \int \int_D \left[\frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial N^K}{\partial y} \frac{\partial N^L}{\partial x} + G \frac{\partial N^K}{\partial x} \frac{\partial N^L}{\partial y} \right] V^K dx dy \\ & + \int \int_D \left[\alpha \frac{\partial N^K}{\partial x} N^L \right] P^K dx dy \\ & - \int_{\Gamma} [(\sigma_{xx} + \alpha p)n_x + \sigma_{xy}n_y] N^L dl = 0. \end{aligned} \quad (53)$$

Assim, do mesmo modo, obtém-se as equações de equilíbrio de forças para a direção y :

$$\begin{aligned} & \int \int_D \left[\frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial N^K}{\partial x} \frac{\partial N^L}{\partial y} + G \frac{\partial N^K}{\partial y} \frac{\partial N^L}{\partial x} \right] U^K dx dy \\ & + \int \int_D \left[\frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial N^K}{\partial y} \frac{\partial N^L}{\partial y} + G \frac{\partial N^K}{\partial x} \frac{\partial N^L}{\partial x} \right] V^K dx dy \\ & + \int \int_D \left[\alpha \frac{\partial N^K}{\partial y} N^L \right] P^K dx dy \\ & - \int_{\Gamma} [\sigma_{xy}n_x + (\sigma_{yy} + \alpha p)n_y] N^L dl = 0. \end{aligned} \quad (54)$$

E, por fim, aplica-se para a difusão do fluido:

$$\begin{aligned}
& \int \int_D \alpha \left[N^L \frac{\partial N^K}{\partial x} \frac{\partial U^K}{\partial t} + N_L \frac{\partial N^K}{\partial y} \frac{\partial V^K}{\partial t} \right] dx dy \\
& \quad + \int \int_D S_\epsilon N^L N^K \frac{\partial P^K}{\partial t} dx dy \\
& + \int \int_D \frac{k}{\mu} \left[\frac{\partial N^K}{\partial x} \frac{\partial N^L}{\partial x} + \frac{\partial N^K}{\partial y} \frac{\partial N^L}{\partial y} \right] P^K dx dy \\
& \quad - \int_\Gamma \left[\frac{\partial p}{\partial x} n_x + \frac{\partial p}{\partial y} n_y \right] N^L dl = 0.
\end{aligned} \tag{55}$$

Nesta última equação, observa-se que o integrando, na integral de contorno, representa o fluxo normal do fluido sobre a superfície e, posteriormente, este termo deverá ser substituído para inserção da continuidade hidráulica.

Conforme [Becker, Carey e Oden \(1981\)](#), as integrais das Equações (53), (54), (55) podem ser resolvidas por quadratura Gaussiana que calculada em função dos pontos de integração de Gauss é:

$$\int \int_\Omega f(\mathbf{x}) d\Omega = \sum_{m=0}^N W_m f(\bar{\mathbf{x}}_m), \tag{56}$$

onde $\bar{\mathbf{x}}_m$ é a posição espacial do ponto de quadratura m , W_m é o peso do ponto na integração e N é a ordem da quadratura Gaussiana. Neste trabalho, foram utilizados funções de forma e de teste de primeira ordem para todas as variáveis.

Para os elementos coesivos que estão no contorno da fratura dois pontos de integração de Gauss foram utilizados para aproximação das variáveis. Para os demais elementos, no contínuo, apenas um ponto de integração.

O procedimento usual dos elementos finitos consiste no somatório da contribuição de cada elemento que compõe o sistema. Nesse caso, somam-se as contribuições de cada elemento nas Equações (53), (54) e (55) e são fornecidas as matrizes globais do sistema. Logo, reescrevendo as Equações (53) e (54) no formato matricial:

$$[S_{11}] \{U\} + [S_{12}] \{V\} + [S_{13}] \{P\} = \{B_1\}, \tag{57}$$

$$[S_{21}] \{U\} + [S_{22}] \{V\} + [S_{23}] \{P\} = \{B_2\}, \tag{58}$$

onde $\{U\}$, $\{V\}$ e $\{P\}$ são vetores coluna das variáveis nodais desconhecidas e os componentes das matrizes $[S_{ij}]$ são:

$$\begin{aligned}
S_{11}^{LK} &= \int \int_D \left[\frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial N^K}{\partial x} \frac{\partial N^L}{\partial x} + G \frac{\partial N^K}{\partial y} \frac{\partial N^L}{\partial y} \right] dx dy \\
S_{12}^{LK} &= \int \int_D \left[\frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial N^K}{\partial y} \frac{\partial N^L}{\partial x} + G \frac{\partial N^K}{\partial x} \frac{\partial N^L}{\partial y} \right] dx dy \\
S_{13}^{LK} &= \int \int_D \left[\alpha \frac{\partial N^K}{\partial x} N^L \right] dx dy \\
S_{21}^{LK} &= \int \int_D \left[\frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial N^K}{\partial x} \frac{\partial N^L}{\partial y} + G \frac{\partial N^K}{\partial y} \frac{\partial N^L}{\partial x} \right] dx dy \\
S_{22}^{LK} &= \int \int_D \left[\frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial N^K}{\partial y} \frac{\partial N^L}{\partial y} + G \frac{\partial N^K}{\partial x} \frac{\partial N^L}{\partial x} \right] dx dy \\
S_{23}^{LK} &= \int \int_D \left[\alpha \frac{\partial N^K}{\partial y} N^L \right] dx dy \\
B_1^L &= \int_{\Gamma} [(\sigma_{xx} + \alpha p)n_x + \sigma_{xy}n_y] N^L dl \\
B_2^L &= \int_{\Gamma} [\sigma_{xy}n_x + (\sigma_{yy} + \alpha p)n_y] N^L dl.
\end{aligned} \tag{59}$$

onde B_1^L e B_2^L são as tensões efetivas de Biot. Por outro lado, as integrais da Equação (55) podem ser reescritas como uma matriz de primeira ordem de equações diferenciais:

$$[A_1] \left\{ \frac{dU}{dt} \right\} + [A_2] \left\{ \frac{dV}{dt} \right\} + [A_3] \left\{ \frac{dP}{dt} \right\} + [A_4] \{P\} = \{B_3\}, \tag{60}$$

em que os coeficientes das matrizes $[A_1]$, $[A_2]$, $[A_3]$, $[A_4]$ e B_3 são:

$$\begin{aligned}
A_1^{LK} &= \int \int_D \alpha \frac{\partial N^K}{\partial x} N^L dx dy \\
A_2^{LK} &= \int \int_D \alpha \frac{\partial N^K}{\partial y} N^L dx dy \\
A_3^{LK} &= \int \int_D S_{\epsilon} N^L N^K dx dy \\
A_4^{LK} &= \int \int_D \frac{k}{\mu} \left[\frac{\partial N^K}{\partial x} \frac{\partial N^L}{\partial x} + \frac{\partial N^K}{\partial y} \frac{\partial N^L}{\partial y} \right] dx dy \\
B_3^L &= \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial p}{\partial x} n_x + \frac{\partial p}{\partial y} n_y \right] N^L dl.
\end{aligned} \tag{61}$$

2.8 MODELAGEM DA FRATURA COM ELEMENTOS COESIVOS

Com base na equação de fluxo (Equação (26)), nas aproximações numéricas feitas utilizando o método dos elementos finitos e no fluxo proposto por [Becker, Carey e Oden](#)

(1981) é possível formular a fratura com elementos coesivos de interface e o acoplamento hidromecânico no meio poroelástico linear.

Aplicando o método dos elementos finitos na Equação (24) e introduzindo a formulação fraca do problema:

$$\int_{\Omega} q_{\eta,\eta} N^L d\Omega + \int_{\Omega} q_{\xi,\xi} N^L d\Omega + \int_{\Omega} \dot{w} N^L d\Omega = 0, \quad (62)$$

onde w é a abertura normal da fratura.

Integrando por partes e aplicando o teorema da divergência de Gauss no termo do divergente do fluxo na direção perpendicular à interface da fratura η :

$$\int_{\Omega} q_{\eta,\eta} N^L d\Omega = \int_{\Gamma_{\eta}} q_{\eta} n_{\eta} N^L d\Gamma - \int_{\Omega} q_{\eta} N_{,\eta}^L d\Omega, \quad (63)$$

onde a primeira integral corresponde ao acoplamento dos elementos coesivos unidimensionais e representa a filtração da fratura para o contínuo (*leakage*), sendo assim, igual a B_3^L na Equação (61), e a segunda o fluxo normal na fratura, portanto, nulo.

Realizando as mesmas operações no termo da Equação (62) na direção longitudinal ξ :

$$\int_{\Omega} q_{\xi,\xi} N^L d\Omega = \int_{\Gamma_{\xi}} q_{\xi} n_{\xi} N^L d\Gamma - \int_{\Omega} q_{\xi} N_{,\xi}^L d\Omega, \quad (64)$$

em que a primeira integral, representa o acoplamento do ponto de injeção de fluido, elemento adimensional que configura o poço:

$$\int_{\Gamma_{\xi}} q_{\xi} n_{\xi} N^L d\Gamma = q_{\text{poço}}, \quad (65)$$

e a segunda integral o termo de fluxo da Equação (23):

$$\int_{\Omega} q_{\xi} N_{,\xi}^L d\Omega = -\frac{1}{12\mu} \int_{\Gamma_{\xi}} w^3 p_{,\xi} N_{,\xi}^L d\Gamma_{\xi}. \quad (66)$$

Nota-se, que esta expressão de permeabilidade depende da abertura ao cubo dos nós dos elementos coesivos, sendo, portanto, não linear e que em razão do laço de dano e do método totalmente implícito adotados foi tratada de forma linear.

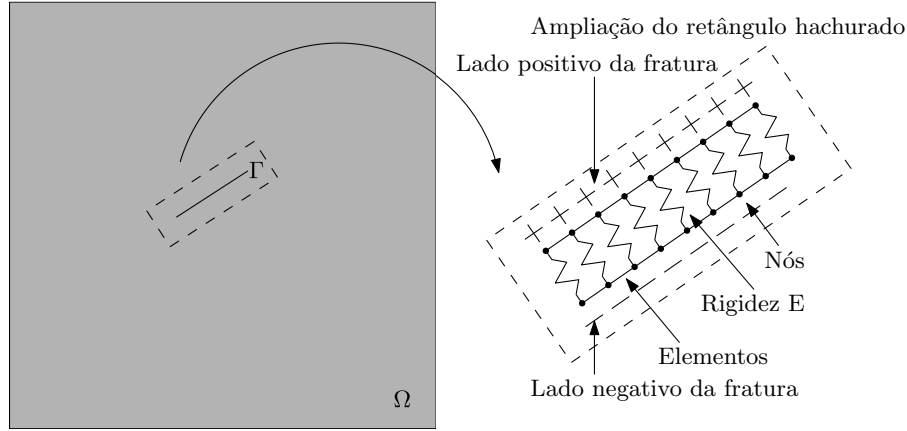
O termo que modela a estocagem, representada pela integral de \dot{w} na Equação (62), é:

$$\int_{\Omega} \dot{w} N^L d\Omega = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Gamma} (w^{t+\Delta t} - w^t) N^L d\Gamma. \quad (67)$$

Observa-se que, como as aberturas ocorrem somente nos elementos coesivos no caminho da fratura, a integral no domínio torna-se uma integral no contorno.

As forças coesivas entre os elementos do contorno da fratura, por sua vez, foram modeladas por meio da instalação de componentes de rigidez entre os nós dos elementos da parte positiva e negativa, conforme demonstrado na Figura 9. Esta rigidez, por sua vez, depende dos valores dos danos calculados, conforme Equação(30).

Figura 9 – Representação da área coesiva entre os elementos do contorno da fratura na direção $\xi\eta$, válida, também, para a direção x e y



Fonte: Elaboração própria (2023)

Reescrevendo os termos, B_1^L e B_2^L de acoplamento mecânico da Equação (59), na notação tensorial:

$$B_i = \int_{\Gamma} t'_i N^L d\Gamma, \quad (68)$$

substituindo, a partir da Equação (14), a tensão efetiva de Biot pela tensão efetiva de Terzaghi, variável conhecida da Figura 7, chega-se a seguinte equação de acoplamento hidromecânico:

$$\int_{\Gamma} t'_i N^L d\Gamma = \int_{\Gamma} t''_i N^L d\Gamma - \int_{\Gamma} p n_i (1 - \alpha) N^L d\Gamma, \quad (69)$$

substituindo t''_i pela tensão coesiva definida na Equação (40):

$$\int_{\Gamma} t'_i N^L d\Gamma = \int_{\Gamma} R_{ik} R_{jl} \hat{E}_{kl} w_j N^L d\Gamma - \int_{\Gamma} p n_i (1 - \alpha) N^L d\Gamma, \quad (70)$$

2.9 DISCRETIZAÇÃO TEMPORAL

No que se refere a este trabalho, foi utilizado um tipo de acoplamento totalmente acoplado ou implícito, ou seja, discretizou-se o sistema em um único domínio e se resolveram as equações simultaneamente. Expandindo-se as Equações (57) e (58) para um elemento triangular linear com três nós, considerando o sistema totalmente implícito, tem-se as seguintes aproximações no tempo:

$$\begin{aligned}
[S_{11}]_{3 \times 3} \begin{Bmatrix} \beta U^t + (1 - \beta)U^{t+\Delta t} \\ \beta U^t + (1 - \beta)U^{t+\Delta t} \\ \beta U^t + (1 - \beta)U^{t+\Delta t} \end{Bmatrix} + [S_{12}]_{3 \times 3} \begin{Bmatrix} \beta V^t + (1 - \beta)V^{t+\Delta t} \\ \beta V^t + (1 - \beta)V^{t+\Delta t} \\ \beta V^t + (1 - \beta)V^{t+\Delta t} \end{Bmatrix} \\
+ [S_{13}]_{3 \times 3} \begin{Bmatrix} \beta P^t + (1 - \beta)P^{t+\Delta t} \\ \beta P^t + (1 - \beta)P^{t+\Delta t} \\ \beta P^t + (1 - \beta)P^{t+\Delta t} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{Bmatrix}, \tag{71}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[S^{21}]_{3 \times 3} \begin{Bmatrix} \beta U_1^t + (1 - \beta)U_1^{t+\Delta t} \\ \beta U_2^t + (1 - \beta)U_2^{t+\Delta t} \\ \beta U_3^t + (1 - \beta)U_3^{t+\Delta t} \end{Bmatrix} + [S^{22}]_{3 \times 3} \begin{Bmatrix} \beta V_1^t + (1 - \beta)V_1^{t+\Delta t} \\ \beta V_2^t + (1 - \beta)V_2^{t+\Delta t} \\ \beta V_3^t + (1 - \beta)V_3^{t+\Delta t} \end{Bmatrix} \\
+ [S^{23}]_{3 \times 3} \begin{Bmatrix} \beta P_1^t + (1 - \beta)P_1^{t+\Delta t} \\ \beta P_2^t + (1 - \beta)P_2^{t+\Delta t} \\ \beta P_3^t + (1 - \beta)P_3^{t+\Delta t} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{Bmatrix}, \tag{72}
\end{aligned}$$

onde β é uma variável adimensional, que vale 1 para casos explícitos e 0 para casos implícitos.

Transformando as equações diferenciais em variáveis discretizadas para cada nó e aproximando as derivadas por diferenças finitas, a partir da aplicação de expansão por série de Taylor, obtêm-se as seguintes substituições:

$$\begin{aligned}
\left\{ \frac{dU}{dt} \right\} &= \frac{1}{\Delta t} (\{U\}^{t+\Delta t} - \{U\}^t) \\
\left\{ \frac{dV}{dt} \right\} &= \frac{1}{\Delta t} (\{V\}^{t+\Delta t} - \{V\}^t) \\
\left\{ \frac{dP}{dt} \right\} &= \frac{1}{\Delta t} (\{P\}^{t+\Delta t} - \{P\}^t). \tag{73}
\end{aligned}$$

Ao reescrever a Equação (60) e substituir as derivadas, chega-se a:

$$\begin{aligned}
[A^1]_{3 \times 3} \begin{Bmatrix} \frac{1}{\Delta t} (U_1^{t+\Delta t} - U_1^t) \\ \frac{1}{\Delta t} (U_2^{t+\Delta t} - U_2^t) \\ \frac{1}{\Delta t} (U_3^{t+\Delta t} - U_3^t) \end{Bmatrix} + [A^2]_{3 \times 3} \begin{Bmatrix} \frac{1}{\Delta t} (V_1^{t+\Delta t} - V_1^t) \\ \frac{1}{\Delta t} (V_2^{t+\Delta t} - V_2^t) \\ \frac{1}{\Delta t} (V_3^{t+\Delta t} - V_3^t) \end{Bmatrix} + \\
[A^3]_{3 \times 3} \begin{Bmatrix} \frac{1}{\Delta t} (P_1^{t+\Delta t} - P_1^t) \\ \frac{1}{\Delta t} (P_2^{t+\Delta t} - P_2^t) \\ \frac{1}{\Delta t} (P_3^{t+\Delta t} - P_3^t) \end{Bmatrix} + [A^4]_{3 \times 3} \begin{Bmatrix} \beta P_1^t + (1 - \beta)P_1^{t+\Delta t} \\ \beta P_2^t + (1 - \beta)P_2^{t+\Delta t} \\ \beta P_3^t + (1 - \beta)P_3^{t+\Delta t} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{Bmatrix}. \tag{74}
\end{aligned}$$

Considerando o caso implícito, no qual $U = U^{t+\Delta t}$, multiplica-se a Equação (74) por Δt e separam-se as variáveis das Equações (71), (72) e (74) em expressões do lado direito e esquerdo:

$$\begin{aligned}
& [S^{11}]_{3 \times 3} \begin{Bmatrix} (1 - \beta)U_1^{t+\Delta t} \\ (1 - \beta)U_2^{t+\Delta t} \\ (1 - \beta)U_3^{t+\Delta t} \end{Bmatrix} + [S^{12}]_{3 \times 3} \begin{Bmatrix} (1 - \beta)V_1^{t+\Delta t} \\ (1 - \beta)V_2^{t+\Delta t} \\ (1 - \beta)V_3^{t+\Delta t} \end{Bmatrix} \\
& \quad + [S^{13}]_{3 \times 3} \begin{Bmatrix} (1 - \beta)P_1^{t+\Delta t} \\ (1 - \beta)P_2^{t+\Delta t} \\ (1 - \beta)P_3^{t+\Delta t} \end{Bmatrix} \\
& = \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{Bmatrix} - [S^{11}]_{3 \times 3} \begin{Bmatrix} \beta U_1^t \\ \beta U_2^t \\ \beta U_3^t \end{Bmatrix} - [S^{12}]_{3 \times 3} \begin{Bmatrix} \beta V_1^t \\ \beta V_2^t \\ \beta V_3^t \end{Bmatrix} \\
& \quad - [S^{13}]_{3 \times 3} \begin{Bmatrix} \beta P_1^t \\ \beta P_2^t \\ \beta P_3^t \end{Bmatrix}, \tag{75}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [S^{21}]_{3 \times 3} \begin{Bmatrix} (1 - \beta)U_1^{t+\Delta t} \\ (1 - \beta)U_2^{t+\Delta t} \\ (1 - \beta)U_3^{t+\Delta t} \end{Bmatrix} + [S^{22}]_{3 \times 3} \begin{Bmatrix} (1 - \beta)V_1^{t+\Delta t} \\ (1 - \beta)V_2^{t+\Delta t} \\ (1 - \beta)V_3^{t+\Delta t} \end{Bmatrix} \\
& \quad + [S^{23}]_{3 \times 3} \begin{Bmatrix} (1 - \beta)P_1^{t+\Delta t} \\ (1 - \beta)P_2^{t+\Delta t} \\ (1 - \beta)P_3^{t+\Delta t} \end{Bmatrix} \\
& = \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{Bmatrix} - [S^{21}]_{3 \times 3} \begin{Bmatrix} \beta U_1^t \\ \beta U_2^t \\ \beta U_3^t \end{Bmatrix} - [S^{22}]_{3 \times 3} \begin{Bmatrix} \beta V_1^t \\ \beta V_2^t \\ \beta V_3^t \end{Bmatrix} \\
& \quad - [S^{23}]_{3 \times 3} \begin{Bmatrix} \beta P_1^t \\ \beta P_2^t \\ \beta P_3^t \end{Bmatrix}, \tag{76}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [A^1]_{3 \times 3} \begin{Bmatrix} U_1^{t+\Delta t} \\ U_2^{t+\Delta t} \\ U_3^{t+\Delta t} \end{Bmatrix} + [A^2]_{3 \times 3} \begin{Bmatrix} V_1^{t+\Delta t} \\ V_2^{t+\Delta t} \\ V_3^{t+\Delta t} \end{Bmatrix} \\
& + [A^3]_{3 \times 3} \begin{Bmatrix} P_1^{t+\Delta t} \\ P_2^{t+\Delta t} \\ P_3^{t+\Delta t} \end{Bmatrix} + [A^4]_{3 \times 3} \Delta t \begin{Bmatrix} (1 - \beta)P_1^{t+\Delta t} \\ (1 - \beta)P_2^{t+\Delta t} \\ (1 - \beta)P_3^{t+\Delta t} \end{Bmatrix} \\
& = \Delta t \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{Bmatrix} + [A^1]_{3 \times 3} \begin{Bmatrix} U_1^t \\ U_2^t \\ U_3^t \end{Bmatrix} + [A^2]_{3 \times 3} \begin{Bmatrix} V_1^t \\ V_2^t \\ V_3^t \end{Bmatrix} \\
& \quad + [A^3]_{3 \times 3} \begin{Bmatrix} P_1^t \\ P_2^t \\ P_3^t \end{Bmatrix} - [A^4]_{3 \times 3} \Delta t \begin{Bmatrix} \beta P_1^t \\ \beta P_2^t \\ \beta P_3^t \end{Bmatrix}.
\end{aligned} \tag{77}$$

Nota-se que os termos do lado esquerdo das Equações (75), (76) e (77) multiplicam as incógnitas do sistema, portanto, referem-se aos valores que construirão a matriz de rigidez. Já os termos do lado direito, construirão o vetor de forças. Assim, implementou-se no MATLAB, um algoritmo que soluciona simultaneamente as variáveis desconhecidas para todos os nós, em cada passo de tempo, conforme será exposto no capítulo seguinte.

2.10 LAÇOS DE DANO

Para os casos com propagação de fratura, é necessária a estabilização do dano em um laço de iterações (YOON; KIM, 2018). Desta forma, uma função dano é criada a partir das máximas aberturas obtidos na Equação (36), esta função armazena todas as aberturas que danificaram o sistema nos passos de tempo e laço de dano anteriores e são dados de entrada para o termo de acoplamento implementado na Equação (70) para seleção do $E_{\eta\eta}$ da iteração atual. Assim, resolve-se o sistema linear várias vezes, até a solução das variáveis ficar estável e, por fim, os máximos valores dentre estas aberturas tornam-se as respostas daquela iteração no tempo.

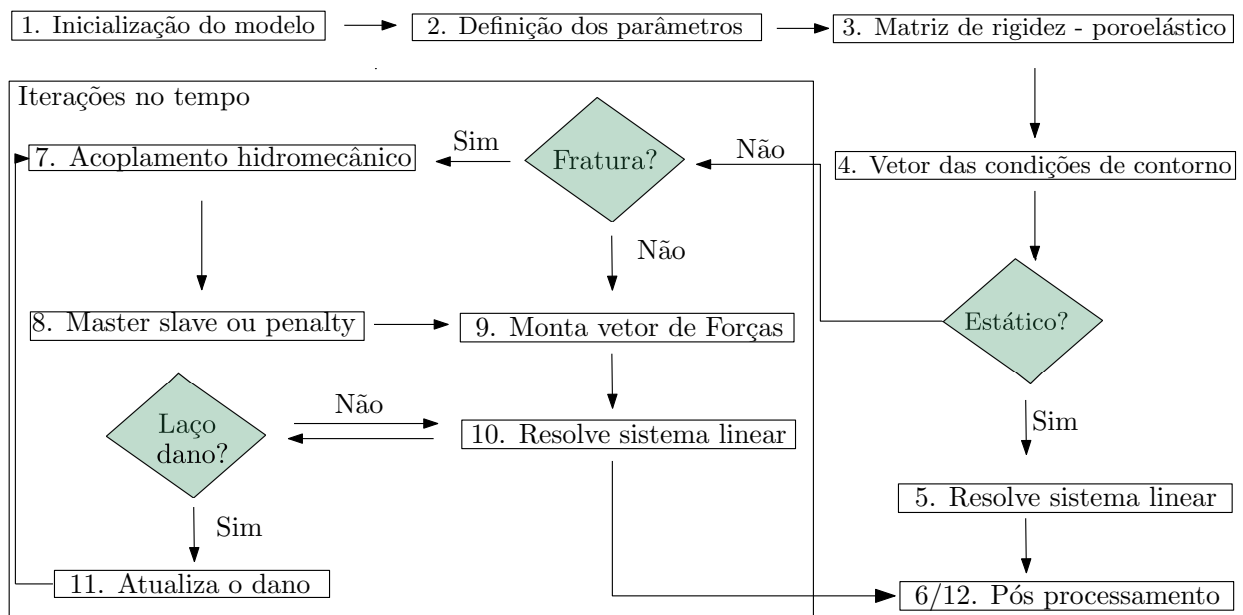
3 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

3.1 ALGORITMO

Inicia-se a simulação computacional determinando as características da malha de interesse e aplicando as condições de contorno necessárias. Em seguida, determinam-se os valores de tensão e de pressão aplicáveis ao sistema de equações lineares e se executa o primeiro passo de tempo para obtenção dos deslocamentos iniciais, estes são sob condição não drenada, no qual as constantes elásticas combinam propriedades da parte sólida e do fluido e a pressão é constante e conhecida para garantia da condição estática inicial do problema.

O fluxograma do algoritmo implementado é exposto na Figura 10.

Figura 10 – Fluxograma do algoritmo implementado



Fonte: Elaboração própria (2023)

As informações podem ser assim sumarizadas:

1. Geração da malha e inicialização do modelo.
2. Definem-se as propriedades do meio e condições de tensão e de pressões iniciais.
3. Computa-se a matriz de rigidez do sistema poroelástico.
4. Cria-se um vetor chamado gdl_0 para aplicação das condições de contorno de Dirichlet, desse modo, indicam-se os graus de liberdade que terão suas linhas e colunas cortadas da matriz de rigidez.

5. Caso o problema desejado esteja em equilíbrio mecânico, com condições de contorno para um problema estático, calcula-se o vetor de forças global, em seguida resolve-se o sistema linear encontrando as soluções iniciais para o caso estático.
6. Por fim, a partir dos deslocamentos e pressões obtidos, calculam-se as deformações e tensões e se analisam os resultados. Caso contrário, determina-se a duração do laço de tempo para cada iteração.
7. Dentro do laço de iterações, avalia-se se o problema tem fratura ou não, se sim, inserem-se as contribuições da fratura e do fluxo na matriz de rigidez. Se não, segue para o cálculo do vetor de forças.
8. Nesta etapa, aplica-se o método *master-slave*, na primeira iteração para aplicar a condição de Dirichlet $p = 0$ e o *penalty* para igualar os valores dos GDL desejados.
9. Calcula-se o vetor de forças para cada iteração.
10. Obtém-se o valor dos deslocamentos e pressão para cada iteração.
11. Caso haja laço de dano, atualiza-se o dano global para cada nó na interface da fratura, a partir do valor de abertura, em seguida, monta-se novamente a matriz de rigidez com as contribuições da fratura até a estabilização do dano.
12. Como última etapa do ciclo, calculam-se as deformações, as tensões total e efetivas (Terzaghi e Biot) nos elementos e o incremento de fluido.

Após o cumprimento das etapas, faz-se o pós-processamento dos resultados obtidos.

Algoritmo 1 Algoritmo do simulador hidromecânico

Inicialização do modelo

Montagem da matriz de rigidez do meio poroelástico

for t=1:iteraçõest

 for d=1:iteraçõesd

 Verifica se é a primeira iteração no tempo

 if t=1

 Inicializa $p=0$ e obtem-se u e v iniciais

 end

 Monta a matriz de rigidez com acoplamento hidromecânico

 Monta o vetor de forças

 Resolve o sistema linear

 Calcula a abertura dos elementos coesivos

 Monta o vetor de danos

 end

 Monta o vetor das soluções u, v e p

end

Pós-processamento

3.2 GERAÇÃO DAS MALHAS

A geração da malha é uma etapa importante para a qualidade dos resultados fornecidos pelo MEF. Assim, em geral, a medida que cresce o número de elementos na malha melhor a convergência da solução numérica obtida. Desse modo, avaliou-se para cada teste ensaiado a complexidade do problema e, conseqüentemente, a necessidade de malhas mais refinadas.

As malhas utilizadas para modelagem nesta pesquisa foram geradas no *gmsh* (GEUZAINÉ; REMACLE, 2009). Em ambos os casos, utilizaram-se comandos organizados em blocos que identificavam os pontos para geração das superfícies que formariam o domínio (reservatório) e o seu contorno (fratura). Desse modo, as linhas foram criadas interligando os pontos e na região da fratura, área de interesse mais refinada, adicionavam-se mais pontos para aumento da proporção de elementos gerados quando comparado ao restante do domínio. Além disso, utilizou-se a função booleana para separação do contorno do domínio.

Após a geração da malha fez-se um tratamento dos dados utilizando a biblioteca *libMesh* para identificação dos elementos coesivos e conversão do formato de saída do *gmsh* .msh no formato de entrada do MATLAB .txt. A seguir, apresenta-se a estrutura do algoritmo (Anexo A deste trabalho) utilizado para geração das malhas.

Algoritmo 2 Algoritmo para geração das malhas

Definição dos pontos para construção da geometria da malha

Inserção das linhas formando o contorno para o malhamento

Marcação das arestas do contorno do domínio em norte, sul, leste e oeste

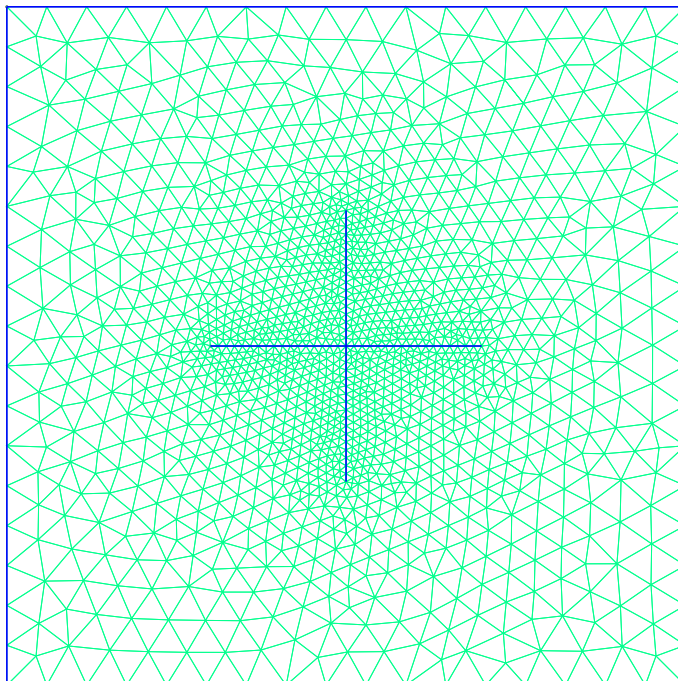
Definição do tamanho dos elementos para o campo de malhamento (sizing field)

Execução do malhamento

Exportação dos dados no formato .msh

A Figura 11 demonstra um modelo de malha gerado no *gmsh* com dois caminhos retos de propagação de fratura e todos os elementos do domínio divididos por elementos coesivos.

Figura 11 – Modelo do reservatório para simulação do caso de direção preferencial de propagação da fratura



Fonte: Elaboração própria (2023) - Algoritmo de geração da malha, disponibilizado no Anexo A

3.2.1 Fragmentação da malha

A fragmentação da malha para abertura da fratura, utiliza a técnica de duplicação dos nós nos elementos coesivos. Executa-se o algoritmo utilizando a biblioteca *libMesh*, (KIRK *et al.*, 2006), no qual os dados de entrada são o arquivo de saída do *gmsh*, que lista todos os elementos e compara para cada lado se alguma aresta apresenta nós com a mesma coordenada, caso a resposta seja sim, identifica o elemento e a aresta compartilhada, mantém o valor da aresta do elemento e renumera sequencialmente os nós, conforme o seguinte algoritmo:

Algoritmo 3 Algoritmo para fragmentação das malhas

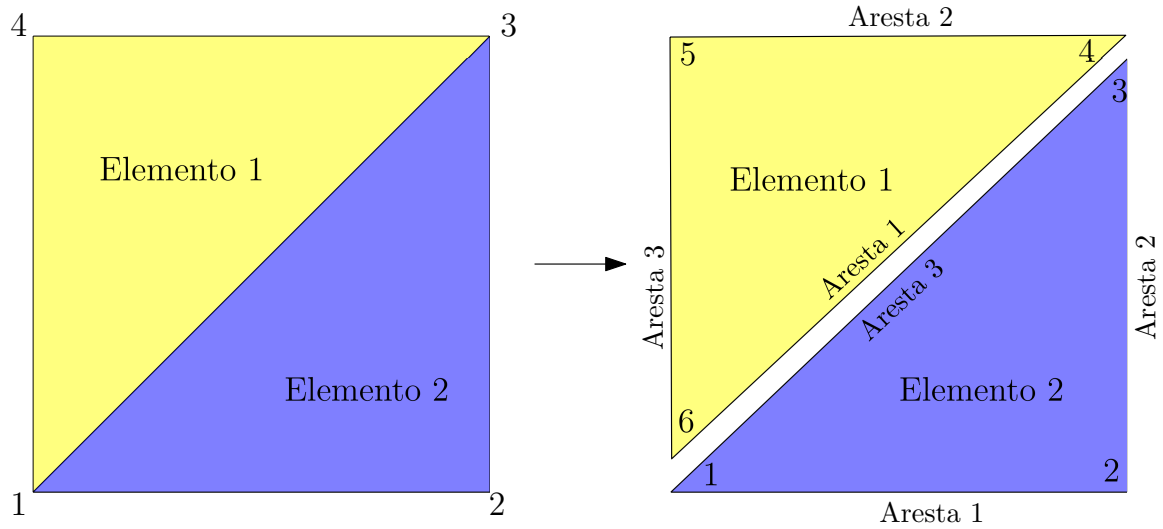
Identificação dos lados dos elementos que interligam os mesmos nós

Renumeração sequencial dos nós dos elementos

Exportação dos dados no formato `.txt`

A Figura 12 apresenta a comparação entre os elementos na malha gerada no *gmsh* e na malha após a fragmentação. Assim, o par de nós na interface da fratura tem as mesmas coordenadas, mas graus de liberdade diferentes.

Figura 12 – A estrutura dos elementos gerados no *gmsh* é mostrada no lado esquerdo e no lado direito, tem-se a duplicação dos nós após a fragmentação



Fonte: Elaboração própria (2023)

3.3 CONDIÇÕES DE CONTORNO

Para modelagem do acoplamento hidromecânico, adota-se a seguinte condição inicial:

$$P^K = 0 \quad \forall \quad K \quad \text{em} \quad t = 0, \quad (78)$$

e a condição de contorno:

$$P^{K+} = P^{K-} \quad (79)$$

a Equação (78) é válida para todos os nós do contínuo e a Equação (79) para todos os nós no contorno da fratura.

3.3.1 Método *master-slave*

De acordo com Felippa (2004), na aplicação do *master-slave*, para cada restrição desejada, selecionam-se os graus de liberdade (GDL) *master* (mestre) e *slave* (escravo). Posteriormente, removem-se do vetor soluções iniciais (\mathbf{u}) todas as variáveis referentes aos GDL escravos e assim, um vetor reduzido apenas com os GDL livres ($\hat{\mathbf{u}}$). Este novo vetor contém somente os GDL mestre e os demais GDL do problema. Em seguida, gera-se uma matriz de transformação (\mathbf{T}), constituída por uma matriz identidade que teve a coluna do grau de liberdade escravo removida e sua contribuição adicionada na coluna do grau de liberdade mestre e linha do grau de liberdade escravo, e é aplicada relacionando \mathbf{u} e $\hat{\mathbf{u}}$. Desta forma, este procedimento produz um conjunto de equações modificadas que são

expressas em função do novo conjunto de GDL ($\hat{\mathbf{u}}$). Assim, o novo vetor incógnitas do sistema torna-se:

$$\hat{u}_n = T_{mn}u_m, \quad (80)$$

a matriz de rigidez:

$$\hat{K}_{mn} = T_{ni}K_{ij}T_{mj}, \quad (81)$$

e o vetor de forças:

$$\hat{f}_m = T_{nm}f_n. \quad (82)$$

Desta forma, a nova solução do sistema é:

$$\hat{K}_{mn}\hat{u}_n = \hat{f}_m. \quad (83)$$

Neste trabalho, o método *master-slave* foi empregado na restrição da condição de contorno apresentada na Equação (78) sob condições específicas de exemplos com apenas um caminho de propagação da fratura disponível, isto é, apenas os elementos coesivos, nas arestas que constituem o caminho da fratura, com os nós duplicados, exemplificados nos casos de regimes de propagação da fratura na direção horizontal ou vertical que serão apresentados na seção 5.6. Entretanto, observou-se que o método não pode ser aplicado diretamente para cenários em que toda a malha está duplicada, uma vez que, os nós do elemento coesivo podem apresentar a função de *master* e *slave* simultaneamente. Desse modo, optou-se pelo método *penalty* na realização do ensaio da direção preferencial de propagação da fratura.

Comprovou-se a eficiência entre os dois métodos por meio da comparação entre os resultados de propagação da fratura em uma única direção, apresentados na seção 5.6. Na aplicação das restrições dos graus de liberdade foi escolhido nos casos de propagação da fratura na direção horizontal o método *master-slave* e nos casos de propagação da fratura na direção vertical o método *penalty*.

3.3.2 Método *penalty*

O método *penalty* surge neste trabalho como uma alternativa na restrição dos graus de liberdade em malhas com todos os nós duplicados. O método utiliza funções de penalidade para modificar princípios variacionais usados em análise de elementos para impor restrições e é ilustrado em vários problemas de interesse em elasticidade e mecânica dos fluidos. Embora o processo seja aproximado, bons resultados são alcançados (WATSON, 2006).

Em sua forma clássica, o método assume que dois corpos em contato se sobrepõem e essa sobreposição resulta em uma força de contato. Desse modo, grandes termos de penalidade são associados a problemas de integração no domínio temporal e a abordagem

de força de contato concentrada geralmente assume que as forças de contato nodais são uma função da penetração de nós de contato individuais no alvo, enquanto a força de contato distribuída é geralmente avaliada a partir da forma e tamanho da sobreposição entre o contator e o alvo (MUNJIZA; ANDREWS, 2000).

Assim, a fim de igualar os graus de liberdade de pressão nos nós da parte positiva e negativa do elemento coesivo na interface da fratura, Figura 6, insere-se um termo na matriz de rigidez destes nós na posição referente ao gdl de pressão conforme equação a seguir:

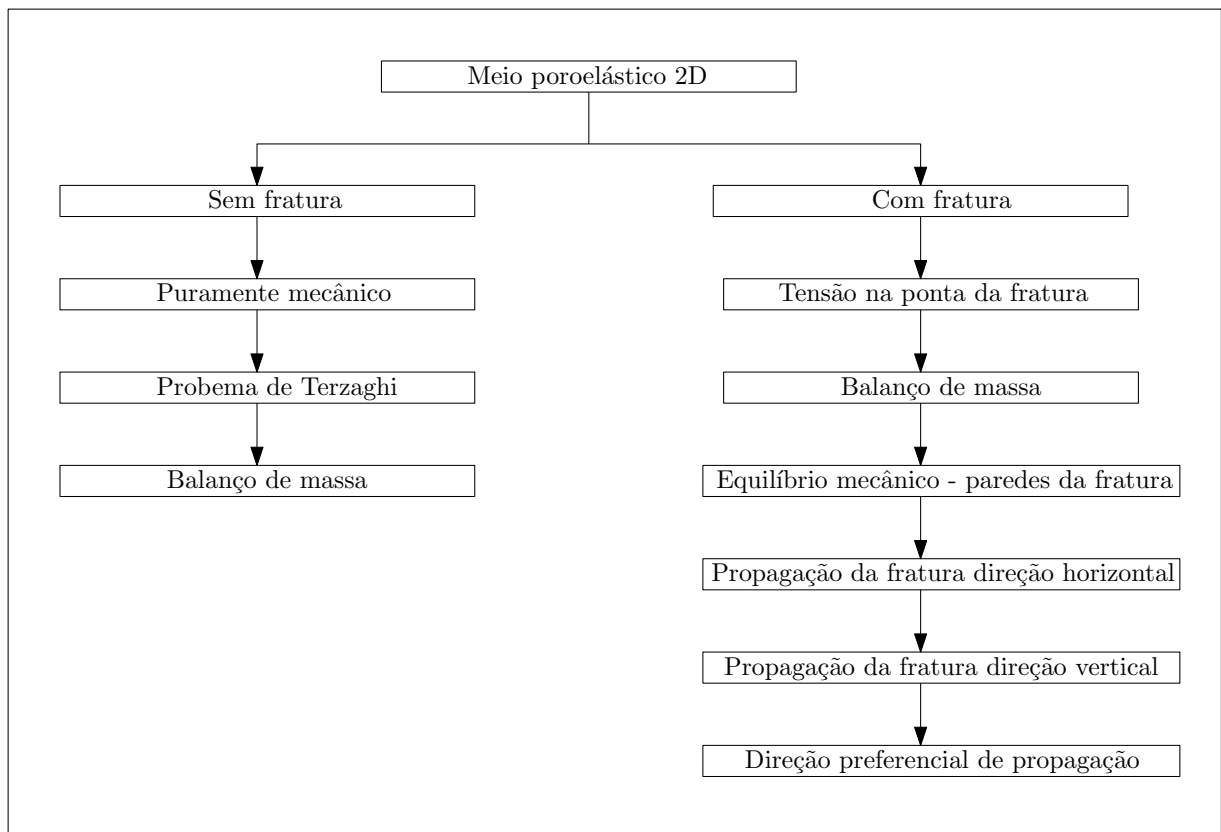
$$K^{KL} = \int_{\Gamma} h N^K N^L d\Gamma, \quad (84)$$

onde h é uma constante com alto valor, escolhido de forma a impôr estas condições sobre as demais.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Este capítulo apresenta os principais resultados alcançados nesse trabalho referentes à modelagem numérica da técnica de fraturamento hidráulico no meio poroelástico bidimensional utilizando elementos finitos coesivos. Na Figura 13 é possível visualizar os problemas investigados.

Figura 13 – Progressão de complexidade do problema



Fonte: Elaboração própria (2023)

Como ilustrado na Figura 13, inicia-se a implementação com o caso mais simples possível, isto é, um problema linear, sem fratura e puramente mecânico. Em seguida, tem-se o cenário com o meio drenado, baseado no problema de consolidação de Terzaghi e depois um balanço de massa do sistema.

Além disso, insere-se a fratura e suas contribuições são analisadas. Em um primeiro momento, estuda-se a concentração de tensão na ponta, depois o balanço de massa nesta situação, dois tipos de propagação, quais sejam: em regime *leakoff-toughness* e em regime *storage-toughness*, que em função do acoplamento hidromecânico, exigiram um maior esforço computacional como será exposto na seção 5.6 e por fim, a direção preferencial de propagação da fratura.

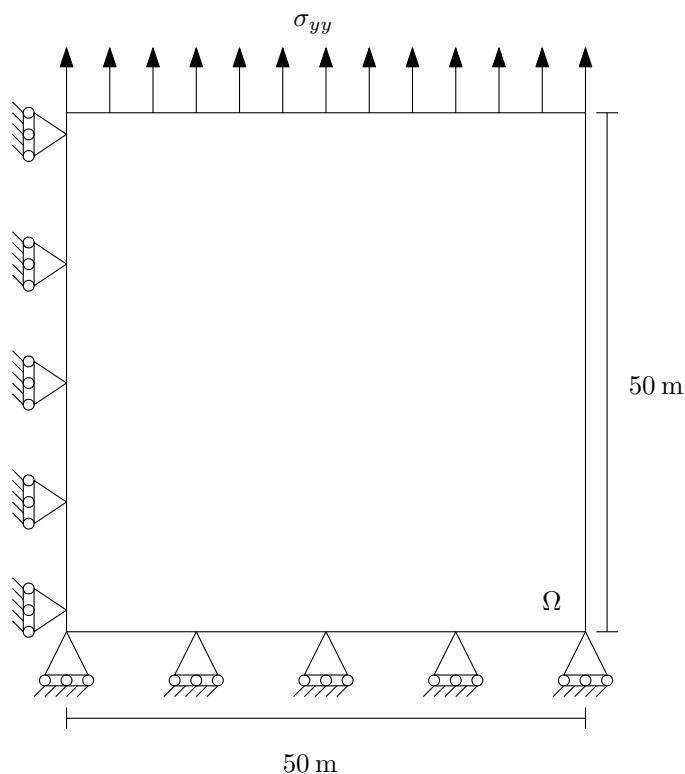
A validação e teste das soluções numéricas desenvolvidas foi por meio de soluções analíticas para modelos conhecidos e no pós-processamento foram comparadas as soluções entre si, considerando uma pequena margem de erro, para validação da solução.

A validação do código para o meio poroelástico utilizou a solução analítica do problema de Terzaghi, a validação da abertura da fratura utilizou o caso da mecânica da fratura de concentração de tensões na ponta submetida a esforços de tração e os regimes de propagação da fratura as soluções expostas por [Carrier e Granet \(2012\)](#).

4.1 PROBLEMA DA MECÂNICA CLÁSSICA

O problema puramente mecânico avalia as variáveis tensões e deformações, segundo a mecânica clássica. Desse modo, foi aplicada uma tensão de tração na parte superior (σ_{yy}) do domínio, os deslocamentos foram restringidos em y na extremidade inferior e em x na lateral esquerda para simetria do problema, conforme Figura 14.

Figura 14 – Diagrama de um reservatório submetido a esforços de tração, deslocamento em y restrito na extremidade inferior e deslocamento em x restrito na lateral esquerda



Fonte: Elaboração própria (2023)

4.1.1 Solução analítica

A lei de Hooke, Equação (4), segmento da teoria da elasticidade linear, exemplifica o problema de reservatórios submetidos à esforços de tração. A teoria afirma que a deformação do material é proporcional à força aplicada sobre ele.

4.1.2 Resultados Numéricos

Para validação do caso estático, submetido a esforços de tração, foram adotados os parâmetros apresentados na Tabela 1:

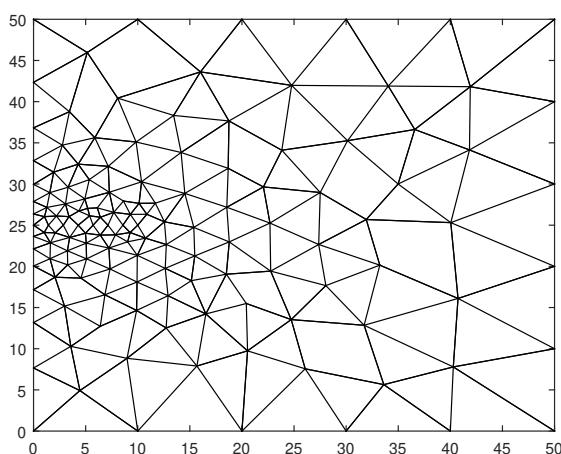
Tabela 1 – Valores dos parâmetros adotados para validação do problema da mecânica clássica

Parâmetro	valor
G	6 GPa
ν	0.25
σ_v	1 MPa

Fonte: Elaboração própria (2023)

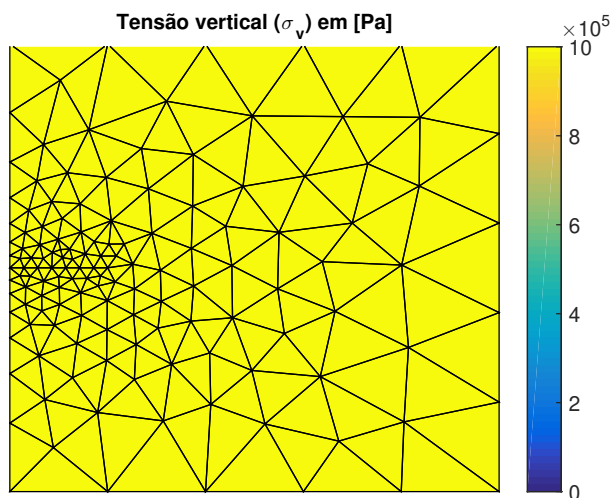
A Figura 15 retrata a malha, com 247 elementos e 146 nós, utilizada para aproximação do domínio.

Figura 15 – Malha de simulação para o exemplo da mecânica clássica



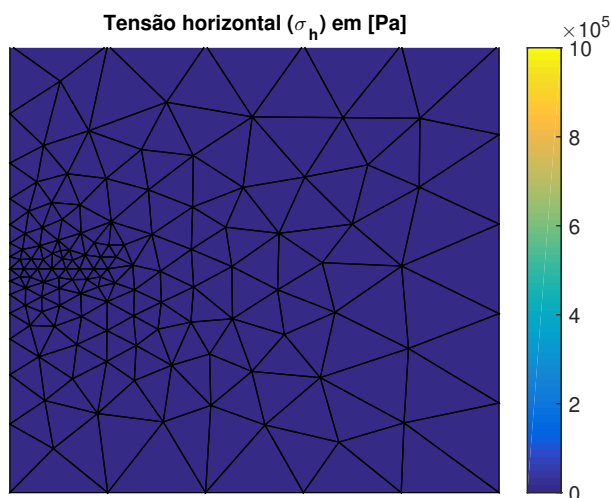
Fonte: Elaboração própria (2023)

Figura 16 – Tensão vertical σ_v em Pa em um modelo de reservatório submetido a tensão normal na superfície superior



Fonte: Elaboração própria (2023)

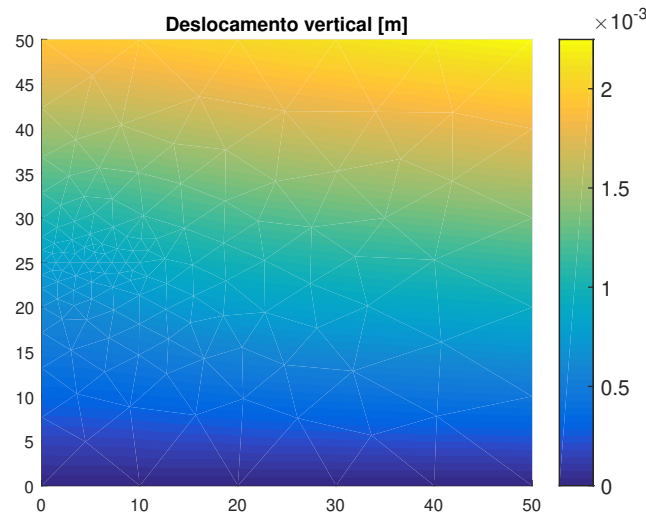
Figura 17 – Tensão horizontal σ_h em Pa em um modelo de reservatório submetido a tensão normal na superfície superior



Fonte: Elaboração própria (2023)

As Figuras 16 e 17 representam o comportamento esperado para as tensões verticais e horizontais, respectivamente, em casos de corpos submetidos a esforços de tração em uma única direção. Desse modo, todos os elementos estão com o mesmo valor de tensão vertical e horizontal, sendo a tensão vertical igual à tensão aplicada inicialmente (1 MPa) e a tensão horizontal nula. A Figura 18, por sua vez, representa os deslocamentos esperados na direção y .

Figura 18 – Deslocamento vertical em m de um modelo de reservatório submetido a tensão normal na superfície superior



Fonte: Elaboração própria (2023)

4.2 PROBLEMA DE CONCENTRAÇÃO DE TENSÃO NA PONTA DA FRATURA

Schijve (2001) apresenta a solução analítica que valida o modelo com uma fratura no centro do bloco submetido à tração na extremidade superior. A Figura 19 demonstra a representação do modelo utilizado.

O modelo com condições de pressão nula no domínio foi simulado por meio da aplicação de uma tensão vertical na face superior do bloco e a duplicação dos nós na região da fratura (comprimento “a” da Figura 19).

4.2.1 Solução analítica

O fator de intensidade K é definido como:

$$\beta = \sqrt{\frac{\tan(\frac{\pi a}{b})}{\frac{\pi a}{b}}} \quad (85)$$

$$K = \beta \sigma_V \sqrt{\pi a} \quad (86)$$

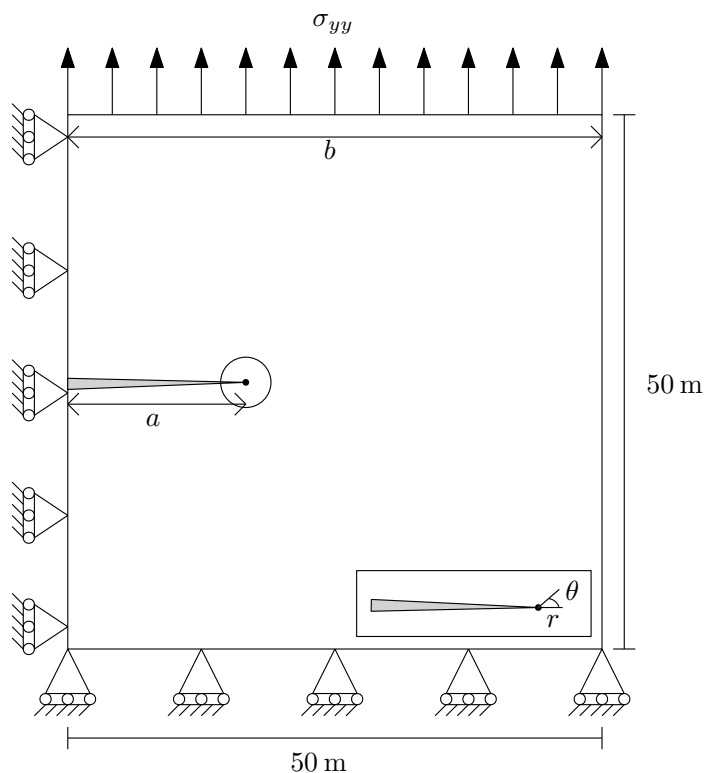
e o tensor de tensões:

$$\sigma_{xx} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right] \quad (87)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right] \quad (88)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (89)$$

Figura 19 – Representação do modelo para validação das tensões na ponta da fratura



Fonte: Elaboração própria (2023)

4.2.2 Soluções Numéricas

Os parâmetros do problema são expostos na Tabela 2.

Tabela 2 – Valores dos parâmetros adotados para o caso de concentração de tensão na ponta da fratura

Parâmetro	Valor
G	6 GPa
ν	0,2
a	10 m
b	50 m
σ_{yy}	$1 \cdot 10^6$ Pa
r	0.5 m

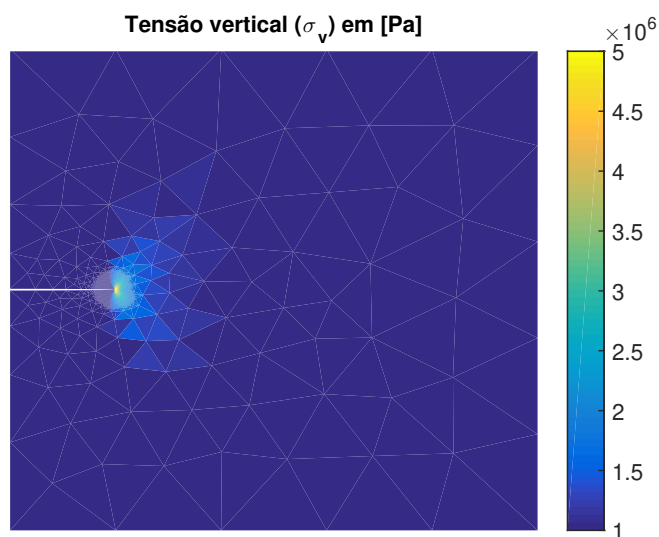
Fonte: Elaboração própria (2023)

No problema apresentado, adotou-se uma malha com 3121 elementos e 1602 nós, mais refinada na ponta da fratura, por causa da elevada concentração de tensão nesta área e dos elementos lineares utilizados para modelagem do sistema. A Figura 20 apresenta as

tensões verticais no modelo de reservatório e a Figura 21 é uma ampliação da Figura 20 evidenciando a ponta da fratura.

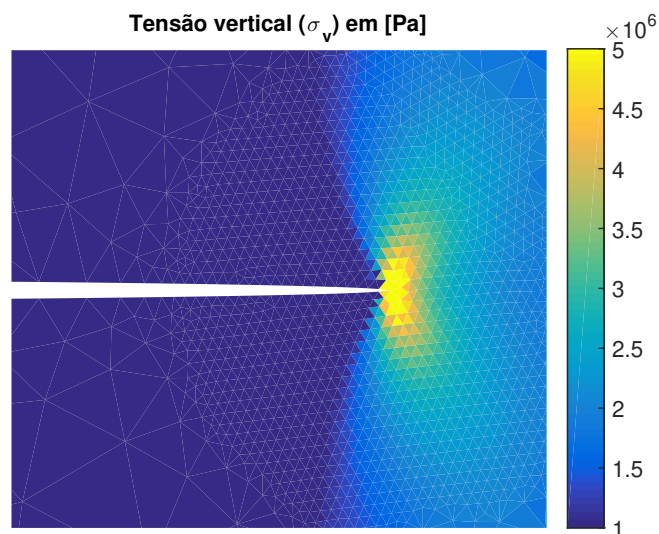
Observa-se na Figura 21, uma maior concentração de tensão na ponta da fratura e à medida que se afasta da ponta as tensões diminuem, tendo-se nas laterais e extremidades do domínio tensões com valores similares a tensão inicial aplicada, causando o chamado “efeito borboleta” na distribuição de tensão.

Figura 20 – Solução numérica para tensões verticais no modelo de reservatório em Pa



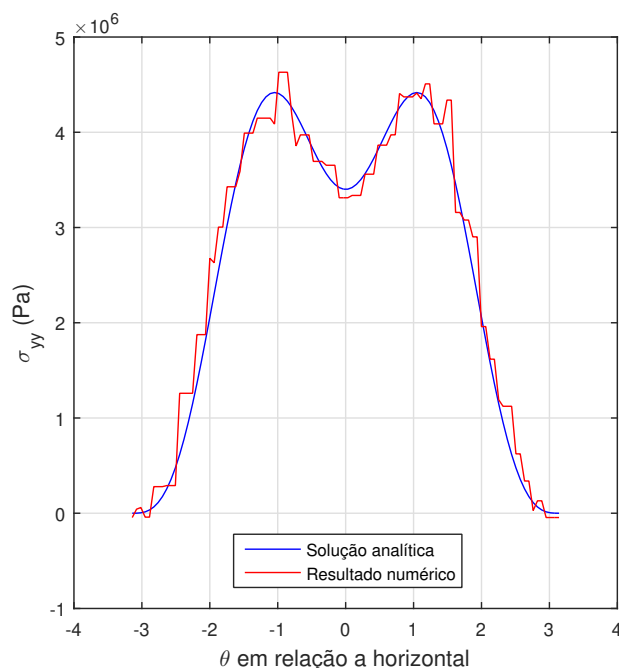
Fonte: Elaboração própria (2023)

Figura 21 – Aproximação da Figura 20 próximo à ponta da fratura



Fonte: Elaboração própria (2023)

Figura 22 – Comparação entre os resultados numéricos e analíticos para $r = 0.5$ m e θ variando de $-\pi$ a π rad



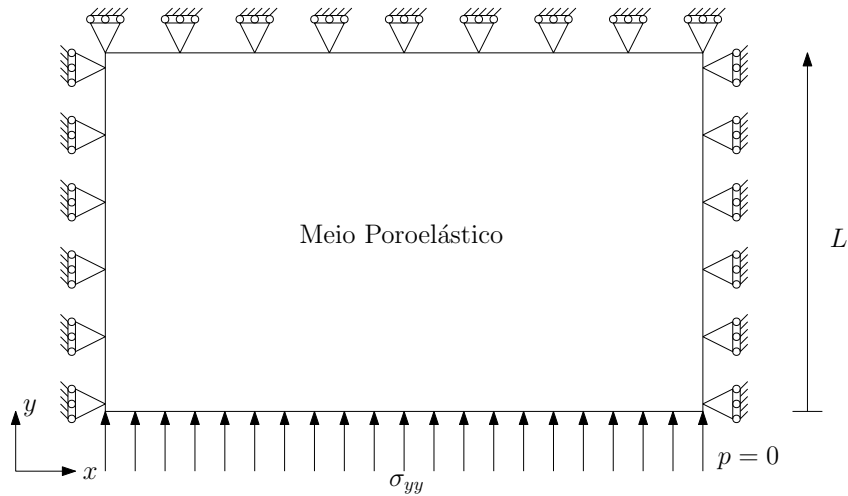
Fonte: Elaboração própria (2023)

Percebe-se na Figura 22 que em consequência das tensões constantes nos elementos, a resposta numérica apresenta o comportamento esperado. Entretanto, embora haja uma elevada discretização da malha na região de interesse, ocorrem pequenas divergências entre as soluções analíticas e as respostas numéricas.

4.3 PROBLEMA DE CONSOLIDAÇÃO DE TERZAGHI

Fundamentado na teoria da poroelasticidade linear, o problema de consolidação de Terzaghi apresenta uma camada de solo, não perturbada, de espessura L , apoiada sobre uma base rígida impermeável e selada ($\Delta p = 0$) na extremidade. Na outra extremidade, há uma distribuição uniforme de tensão aberta para a atmosfera ($p = 0$), conforme mostrado na Figura 23.

Figura 23 – Representação do modelo poroelástico simulado

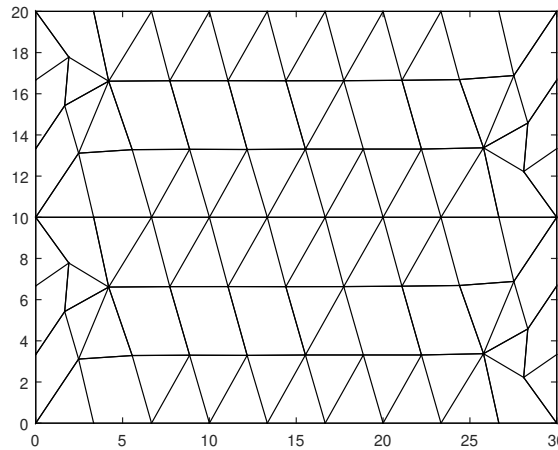


Fonte: Elaboração própria (2023)

Na ilustração 23, σ_{yy} é a magnitude da tensão vertical. A condição inicial do sistema é pressão nula e as condições de contorno aplicadas são: deslocamento vertical da face superior ($y = L$) nulo, ou seja, $v = 0$ e deslocamentos horizontais nulos ($x = 0$) para as laterais direita e esquerda.

A Figura 24 mostra a malha utilizada para o problema com 124 elementos e 78 nós.

Figura 24 – Malha utilizada para o problema de consolidação de Terzaghi



Fonte: Elaboração própria (2023)

4.3.1 Solução analítica

A equação analítica para pressão apresentada por Cheng (2016), para o problema de consolidação de Terzaghi, é:

$$p(h, t) = \frac{\sigma_V \eta_s}{GS} F_1(h^*, t^*), \quad (90)$$

onde, η_s/GS é constante e igual a 1 para este problema.

$$h^* = \frac{h}{H}, \quad t^* = \frac{ct}{4h^2}, \quad (91)$$

$$F_1(h^*, t^*) = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{4}{m\pi} \operatorname{sen} \frac{m\pi}{h^*} e^{-m^2\pi^2 t^*}. \quad (92)$$

Para o deslocamento vertical a solução é:

$$u_v = \frac{\sigma_V H}{2G} \left[\frac{1 - 2\nu_u}{1 - \nu_u} (1 - h^*) + \frac{\nu_u - \nu}{(1 - \nu_u)(1 - \nu)} F_2(h^*, t^*) \right], \quad e \quad (93)$$

$$F_2(h^*, t^*) = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} = \frac{8}{m^2\pi^2} \cos \frac{m\pi}{h^*} (1 - e^{-m^2\pi^2 t^*}). \quad (94)$$

4.3.2 Solução Numérica

A Tabela 3 lista os parâmetros utilizados para validação da solução numérica. Os resultados foram organizados em uma escala crescente para cada passo de tempo escolhido. Selecionou-se um tempo máximo de 60 s, conforme indicado na tabela. Calcularam-se os valores de pressão e deslocamento vertical correspondentes para seis instantes de tempo diferentes (1 s, 3 s, 5 s, 10 s, 30 s e 60 s).

Tabela 3 – Valores dos parâmetros adotados no problema de consolidação de Terzaghi

Parâmetro	Valor
G	6 GPa
ν	0,2
S_ϵ	$7,96 \cdot 10^{-11} \text{ Pa}^{-1}$
α	0,79
k	$1,88 \cdot 10^{-13} \text{ m}^2$
μ	$9,96 \cdot 10^{-4} \text{ Pa}\cdot\text{s}$
L	20 m
Δt	0,1 s
t_{max}	60 s
σ_v	$-1 \cdot 10^8 \text{ Pa}$

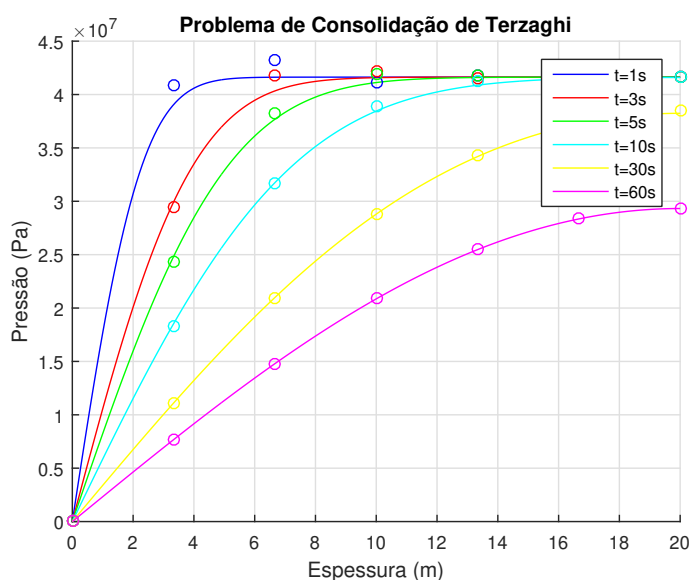
Fonte: Elaboração própria (2023)

4.3.3 Validação do problema de consolidação de Terzaghi

Percebe-se na Figura 25 que a pressão se mantém nula na face inferior do domínio e a partir da aplicação da tensão, há um comportamento drenado do sistema que proporciona o aumento da pressão de poros.

A Figura 25 mostra que ao passo em que se aproxima da extremidade superior a pressão aumenta. Desse modo, com o decorrer do tempo, espera-se a saída do fluido pela extremidade inferior do bloco e, conseqüentemente, a redução da pressão de poros. Nos instantes iniciais, nota-se uma pequena divergência entre as soluções, esta instabilidade ocorre pelo modelo ensaiado, não atender as condições de Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi (LBB), a qual impõe que a interpolação do campo dos deslocamentos seja uma ordem maior que a interpolação do campo das pressões. À medida em que ocorrem os passos seguintes, há a convergência entre solução numérica e analítica.

Figura 25 – Validação do código poroelástico linear com o problema de consolidação de Terzaghi: solução para a pressão de poros. As linhas representam as respostas analíticas e os pontos as soluções numéricas

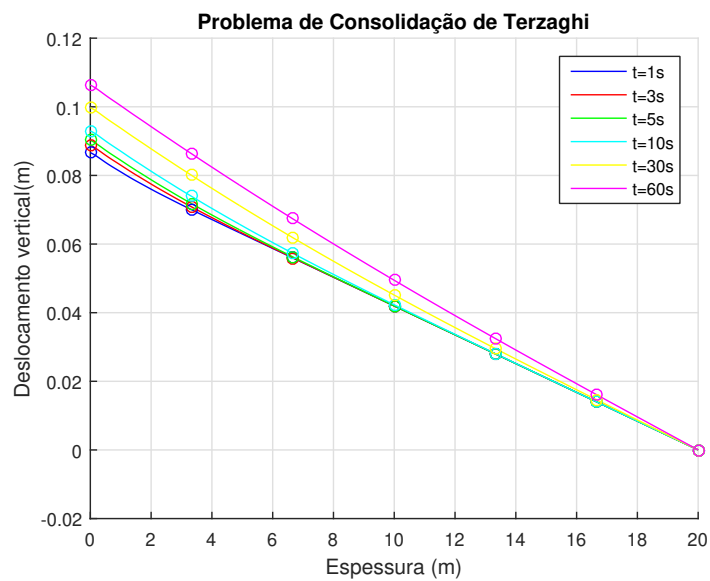


Fonte: Elaboração própria (2023)

Na Figura 26, é possível verificar, que os deslocamentos verticais na extremidade inferior do bloco são maiores quando comparados a todo o domínio e atingem deslocamento nulo para altura máxima. Nesse caso, ao tempo em que aumenta a espessura, há um aumento nos deslocamentos, implicando na saída de fluido do sistema.

Na animação representada pela Figura 27, vê-se o comportamento das pressões de poros no modelo de reservatório para o problema de consolidação de Terzaghi.

Figura 26 – Validação do código poroelástico linear com o problema de consolidação de Terzaghi: solução para o deslocamento vertical. As linhas representam as respostas analíticas e os pontos as soluções numéricas



Fonte: Elaboração própria (2023)

Figura 27 – Comportamento das pressões de poros no problema de consolidação de Terzaghi

Fonte: Elaboração própria (2023)

4.4 CONSERVAÇÃO DE MASSA NO DOMÍNIO DE APROXIMAÇÃO SEM FRATURA E COM FRATURA

A equação de continuidade para o balanço de massa no domínio é dada por:

$$\dot{\zeta} + \nabla \cdot \vec{q} = 0 \quad (95)$$

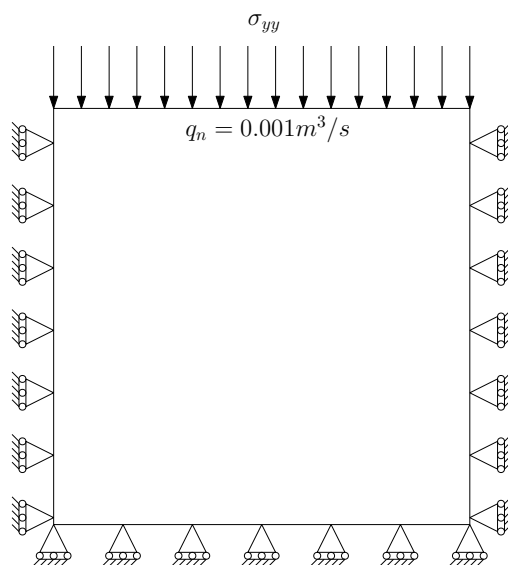
onde ζ é o incremento de fluido apresentado na seção 2.2.5 e q é a vazão de fluido no contorno do domínio.

Segundo Cheng (2016), o divergente do fluxo específico de um REV é igual à taxa de variação do conteúdo de fluido no volume. Assim, definiu-se o volume de controle, uma estrutura sólida e porosa com conservação de massa sólida, preenchido por fluido que pode entrar e sair do REV, possibilitando a análise do balanço de massa do sistema.

4.4.1 Conservação de massa no domínio de aproximação sem fratura

Este ensaio considera um meio poroelástico linear com deslocamentos restritos na direção x nas laterais esquerda e direita, restritos na direção y na extremidade inferior do bloco e submetido a esforços de compressão na extremidade superior tendo, também, uma injeção de fluido nos elementos da face norte, como se pode observar na Figura 28.

Figura 28 – Diagrama representativo utilizado no caso de conservação de massa no domínio de aproximação sem fratura



Fonte: Elaboração própria (2023)

4.4.1.1 Resultados Numéricos

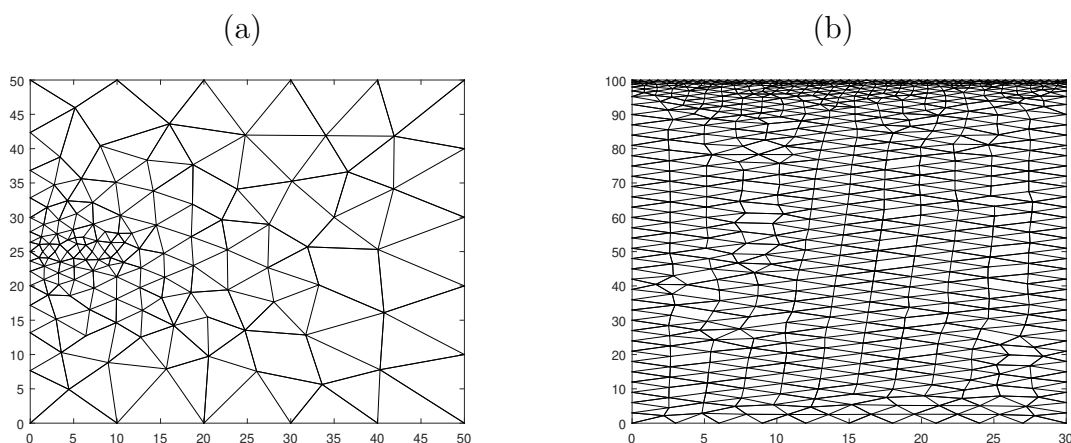
Neste problema, constatou-se a necessidade de uma malha mais refinada na face norte para redução do erro calculado no balanço de massa realizado. A seguir, serão apresentados os parâmetros adotados, os quais podem ser visualizados na Tabela 4; as malhas utilizadas, exibidas comparativamente na Figura 29, a malha (a) tem 247 elementos e 146 nós e a malha (b) 1324 elementos e 730 nós, e, por último, os resultados obtidos, os quais aparecem listados nas Tabelas 5 e 6.

Tabela 4 – Valores dos parâmetros adotados no problema de conservação de massa sem fratura

Parâmetro	Valor
G	28.6 GPa
ν	0,32
S_ϵ	$1 \cdot 10^{-11} Pa^{-1}$
α	0,32
k	$1 \cdot 10^{-14} m^2$
μ	$1 \cdot 10^{-3} Pa.s$
Δt	100 s
t_{max}	1000 s
σ_v	$-1 \cdot 10^8 Pa$
q_n	$0.001 m^3/s$

Fonte: Elaboração própria (2023)

Figura 29 – Malhas utilizadas para validação do problema de conservação de massa sem fratura (a) malha com menos elementos na face norte (b) malha mais refinada na face norte



Fonte: Elaboração própria (2023)

Verifica-se que, para este problema, os resultados são mais sensíveis ao refino da malha e, conseqüentemente, a quantidade de elementos na área de entrada da vazão. Isto se dá pela metodologia adotada para pós processamento das variáveis, em que o modelo com mais elementos reduziu os erros de aproximação e apresentou melhores soluções. As Tabelas 5 e 6 mostram nas colunas de ζ , uma constante correspondente ao valor de vazão (q_n) injetada em cada elemento, multiplicada pelo somatório do comprimento de suas arestas em cada passo de tempo.

Tabela 5 – Volumetria no domínio de aproximação sem fratura representado pela Figura 29 (a), malha menos discretizada na face norte

ITERAÇÃO	VOL. FACE NORTE (m^3)	ζ (m^3)	BALANÇO	ERRO (%)
1	3.6047	5.000	1.3953	38,71
2	4.1231	5.000	0.8769	21,28
3	4.3170	5.000	0.6830	15,82
4	4.4207	5.000	0.5793	13,10
5	4.4854	5.000	0.5146	11,47
6	4.5290	5.000	0.4710	10,40
7	4.5595	5.000	0.4405	9,66
8	4.5813	5.000	0.4187	9,14
9	4.5970	5.000	0.4030	8,77
10	4.6084	5.000	0.3916	8,5

Fonte: Elaboração própria (2023)

Tabela 6 – Volumetria no domínio de aproximação sem fratura representado pela Figura 29 (b), malha mais discretizada na face norte

ITERAÇÃO	VOL. FACE NORTE (m^3)	ζ (m^3)	BALANÇO	ERRO (%)
1	2.9219	3.000	0.078	2,67
2	2.96	3.000	0.0400	1,35
3	2.97	3.000	0.0300	1,01
4	2.975	3.000	0.025	0,84
5	2.9781	3.000	0.022	0,73
6	2.9803	3.000	0.020	0,66
7	2.9819	3.000	0.018	0,61
8	2.9832	3.000	0.017	0,56
9	2.9843	3.000	0.016	0,53
10	2.9852	3.000	0.015	0,49

Fonte: Elaboração própria (2023)

A animação representada na Figura 30 demonstra o comportamento do sistema para uma das malhas investigadas, a qual pode ser visualizada na Figura 29 (b).

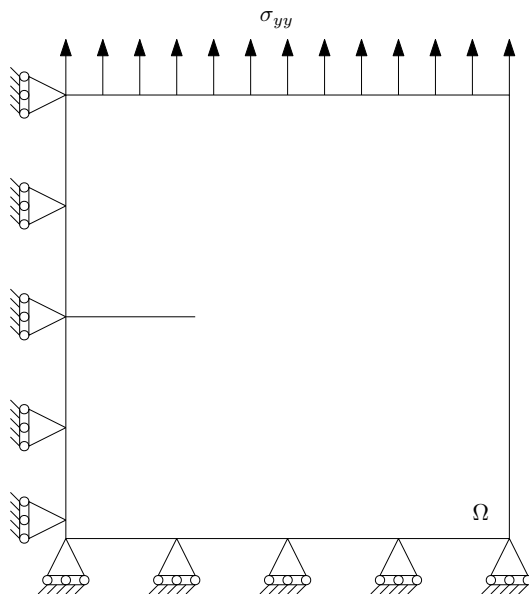
Figura 30 – Comportamento do domínio de aproximação sem fratura submetido à injeção de fluido na superfície superior do modelo da Figura 29 (b)

Fonte: Elaboração própria (2023)

4.4.2 Conservação de massa no domínio de aproximação com fratura

O ensaio de conservação de massa no domínio de aproximação com fratura considerou um modelo com nós duplicados na interface da fratura, submetido a uma carga mecânica de tração na superfície superior e deslocamentos restritos em x na lateral esquerda e y na superfície inferior, conforme exibido na Figura 31.

Figura 31 – Diagrama representativo utilizado no caso de conservação de massa no domínio de aproximação com fratura



Fonte: Elaboração própria (2023)

4.4.2.1 Resultados Numéricos

A Tabela 7 sistematiza os parâmetros adotados para este ensaio.

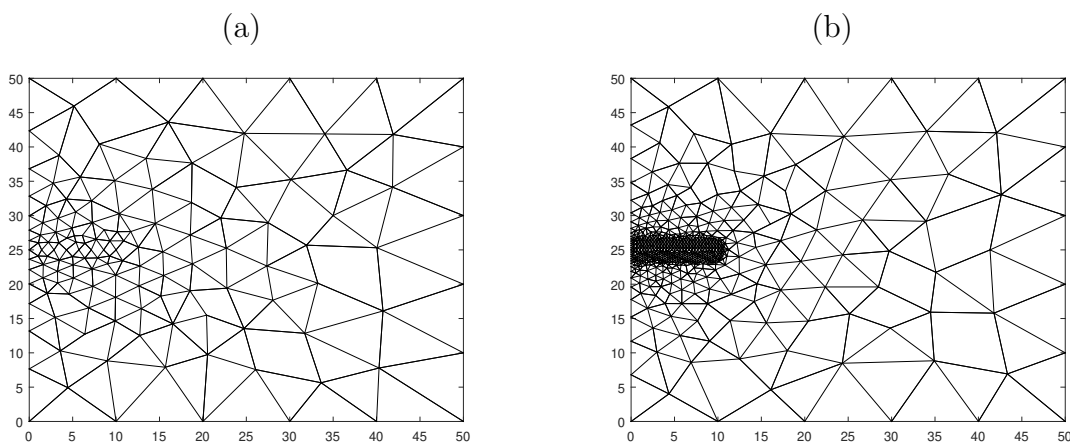
Tabela 7 – Valores dos parâmetros adotados no problema de conservação de massa com fratura

Parâmetro	Valor
G	1 GPa
ν	0,25
S_ϵ	$1.45 \cdot 10^{-11} \text{ Pa}^{-1}$
α	0,32
k	$1 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2$
μ	$1 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$
Δt	100 s
t_{max}	1000 s
σ_v	$1 \cdot 10^7 \text{ Pa}$

Fonte: Elaboração própria (2023)

As Figuras 32 (a) com 247 elementos e 146 nós e 32 (b) com 1321 elementos e 714 nós retratam as malhas simuladas.

Figura 32 – Malhas utilizadas para validação do problema de conservação de massa com fratura (a) malha com menos elementos na interface da fratura (b) malha mais refinada na interface da fratura



Fonte: Elaboração própria (2023)

Os resultados são expostos nas Tabelas 8 e 9.

Tabela 8 – Volumetria no domínio de aproximação com fratura Figura 32 (a), malha menos discretizada na região da fratura

ITERAÇÃO	VOL. FRATURA (m^3)	ζ IT (m^3)	ζ ACUMULADO (m^3)
1	0.5242	0.5242	0.5242
2	0.7729	0.2487	0.7729
3	0.8909	0.1180	0.8909
4	0.9469	0.0560	0.9469
5	0.9735	0.0266	0.9735
6	0.9861	0.0126	0.9861
7	0.9921	0.0060	0.9921
8	0.9949	0.0028	0.9949
9	0.9963	0.0013	0.9963
10	0.9969	0.0007	0.9969

Fonte: Elaboração própria (2023)

Comparando os resultados, pode-se perceber que a malha mais refinada, dados da Tabela 9, apresentou um aumento no incremento de fluido na fratura quando comparada a malha menos refinada, dados da Tabela 8. Diante disso, acredita-se que esta diferença ocorre em razão da maior quantidade de elementos na área, o que pode contribuir para um melhor acoplamento do sistema.

Tabela 9 – Volumetria no domínio de aproximação com fratura Figura 32 (b), malha mais discretizada na região da fratura

ITERAÇÃO	VOL. FRATURA (m^3)	ζ IT (m^3)	ζ ACUMULADO (m^3)
1	0.5469	0.5469	0.5469
2	0.7939	0.2471	0.7939
3	0.9055	0.1116	0.9055
4	0.9560	0.0504	0.9560
5	0.9787	0.0228	0.9787
6	0.9890	0.0103	0.9890
7	0.9937	0.0046	0.9937
8	0.9958	0.0021	0.9958
9	0.9967	0.00095	0.9967
10	0.9971	0.0004	0.9971

Fonte: Elaboração própria (2023)

4.5 EQUILÍBRIO MECÂNICO DA FRATURA

O diagrama que representa o teste de equilíbrio mecânico nas paredes da fratura é demonstrado na Figura 31. Na realização deste teste, dentre os termos de fratura, os quais foram anteriormente mencionados na seção 3.3, desconsiderou-se o termo de coesão, isto é, o dano elementar é constante e igual a zero e a abertura da fratura foi estimada e constante.

Como já discutido na seção 2.8.3.1, para o equilíbrio mecânico da fratura, assumiu-se um equilíbrio estático nas suas paredes e, por conseguinte, as tensões totais na direção normal (η) são iguais à pressão de poros nos nós dos elementos que a constituem, conforme a Equação (27).

4.5.1 Resultados Numéricos

A Tabela 10 mostra os valores dos parâmetros adotados e a Figura 32 (a) retrata a malha utilizada na simulação (construída com 7 elementos em cada lado da fratura e 8 nós). A Tabela 11 apresenta as soluções numéricas de tensão total na direção η , concordando com os valores de pressão de poros até 2 nós antes da ponta da fratura.

Tabela 10 – Valores dos parâmetros adotados no equilíbrio mecânico da fratura

Parâmetro	Valor
G	1 GPa
ν	0,32
S_c	$1 \cdot 10^{-11} Pa^{-1}$
α	0,32
k	$1 \cdot 10^{-7} m^2$
μ	$1 \cdot 10^{-3} Pa.s$
Δt	100 s
t_{max}	200 s
σ_v	$5 \cdot 10^6 Pa$
w	$1 \cdot 10^{-3} m$

Fonte: Elaboração própria (2023)

Tabela 11 – Equilíbrio mecânico nas paredes da fratura, conforme malha aproximada mostrada na Figura 32 (a)

Nº DE NÓS/ELEMENTOS	PRESSÃO DE POROS (MPa)	σ_η (MPa)	ERRO (%)
1	-7.1256	7.1703	0.6271
2	-7.1256	7.1034	0.3125
3	-7.1256	7.1533	0.38925
4	-7.1256	7.1004	0.35373
5	-7.1256	7.1295	0.05546
6	-7.1256	6.8114	4.4092
7	-7.1256	3.5405	50.31
8	-7.1256	-	-

Fonte: Elaboração própria (2023)

Verifica-se que para os esforços de tração aplicados, a pressão de poros possui um comportamento negativo e as tensões um comportamento positivo, como esperado e ressalta-se, que para o cálculo do erro, foram considerados os valores absolutos de pressão e tensão. Além disso, observa-se que, próximo à ponta da fratura, há um aumento no erro entre os valores avaliados, acredita-se, também, que isto se dá devido à elevada concentração de tensão na ponta da fratura, gerando um distúrbio nesta área, e os elementos lineares utilizados para representação do sistema que não capturam o comportamento perto desse local com precisão.

4.6 PROPAGAÇÃO DA FRATURA

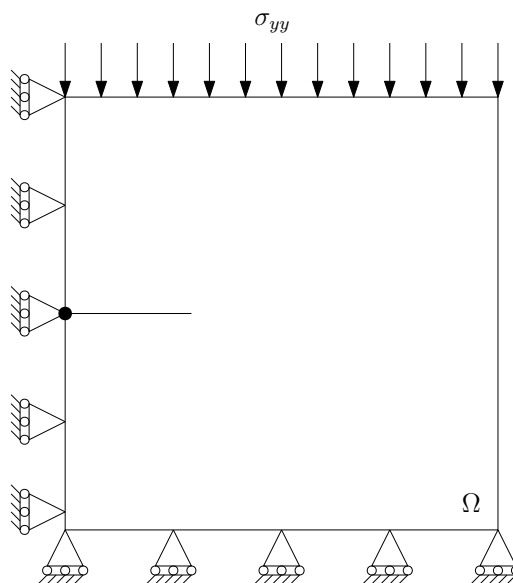
A fim de avaliar o comportamento e propagação da fratura, dois modelos foram simulados, a saber: o primeiro em regime *leakoff-thoughtness* e o segundo *storage-toughness*.

A validação destes modelos foi baseada nos resultados de [Carrier e Granet \(2012\)](#). Desta forma, coletaram-se os dados gráficos para comparação das respostas. O modelo *leakoff-thoughness* é caracterizado por uma maior difusão hidráulica no meio em consequência de uma maior permeabilidade. O regime *storage-thoughness*, por seu turno, caracteriza-se por uma baixa filtração no meio, proveniente de uma permeabilidade menor. Assim, neste último caso, o fluido injetado proporciona o aumento de volume no interior da fratura.

4.6.1 Propagação da fratura na direção horizontal

A Figura 33 ilustra o domínio de aproximação utilizado para validação. Nesse ensaio, tem-se um ponto de injeção de fluido no início dos elementos coesivos localizados na região de interface de fratura, que promove a abertura da fratura apenas no plano de direção x , as condições adotadas foram deslocamentos restritos em x na lateral esquerda, em y na superfície inferior e uma tensão vertical (σ_{yy}) aplicada nos elementos da superfície superior.

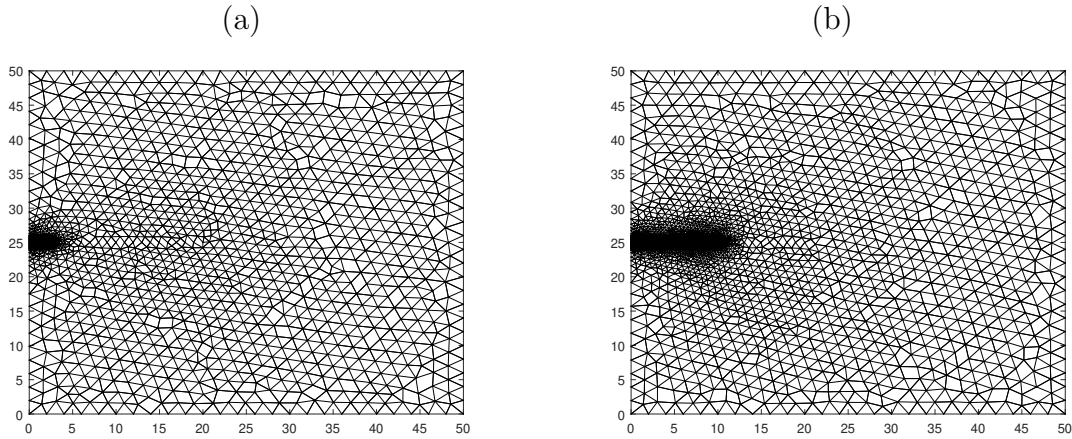
Figura 33 – Modelo do domínio de aproximação para quadro de propagação da fratura na direção horizontal



Fonte: Elaboração própria (2023)

Ressalta-se que para resolução dos problemas de propagação, foram observados maiores esforços computacionais quando comparados com os casos mostrados anteriormente, observou-se que isto decorre da necessidade de um maior refino da malha para simulação destes problemas, como mostrado na Figura 34, passos de tempos pequenos e a utilização do laço de dano para estabilização da abertura.

Figura 34 – Malhas utilizadas para validação do problema de propagação da fratura na direção horizontal (a) malha com 5645 elementos e 2964 nós com menos elementos na interface da fratura e (b) malha com 14465 elementos e 7483 nós mais refinada na interface da fratura



Fonte: Elaboração própria (2023)

4.6.1.1 Regime *leakoff-toughness*

A tabela 12 apresenta os valores dos parâmetros aplicados, já as Figuras 35 (a) e (b) apresentam a comparação entre a solução de Carrier e Granet (2012) e os resultados numéricos obtidos para abertura da fratura (μm) e do comprimento da fratura (m) em função do tempo (s).

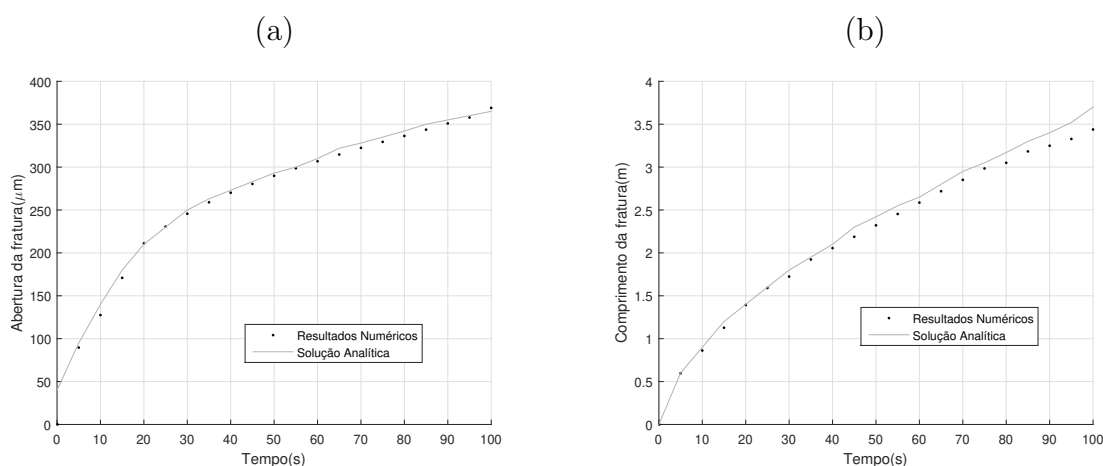
Tabela 12 – Valores dos parâmetros adotados na propagação da fratura em regime *leakoff-toughness*

Parâmetro	Valor
G	7.083 GPa
ν	0.2
S_ϵ	$1.4456 \cdot 10^{-11} \text{ Pa}^{-1}$
α	0.75
k	$5 \cdot 10^{-15} \text{ m}^2$
μ	$1 \cdot 10^{-4} \text{ Pa}\cdot\text{s}$
Δt	0.1 s
t_{max}	100 s
σ_v	$-5 \cdot 10^6 \text{ Pa}$
q_0	$0.001 \text{ m}^3/\text{s}$
σ_t''	$1.25 \cdot 10^6 \text{ Pa}$
G_f	120 Pa.m

Fonte: Elaboração própria (2023)

Pode-se observar, nas Figuras 35 (a) e (b) que todos os nós no primeiro passo de tempo estão fechados. A medida que há injeção de fluido, ocorre a abertura da fratura e, em seguida, sua propagação. Verifica-se, ainda, a concordância entre as simulações tanto para a abertura da fratura quanto para o comprimento, mostrando, assim, que a solução obtida por meio dos elementos coesivos utilizados foi satisfatória.

Figura 35 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos, no regime de propagação *leakoff-toughness*, utilizando o modelo da Figura 34 (a), para os casos: (a) Abertura da fratura ao longo do tempo e (b) Comprimento da fratura ao longo do tempo



Fonte: Elaboração própria (2023)

4.6.1.2 Regime *storage-toughness*

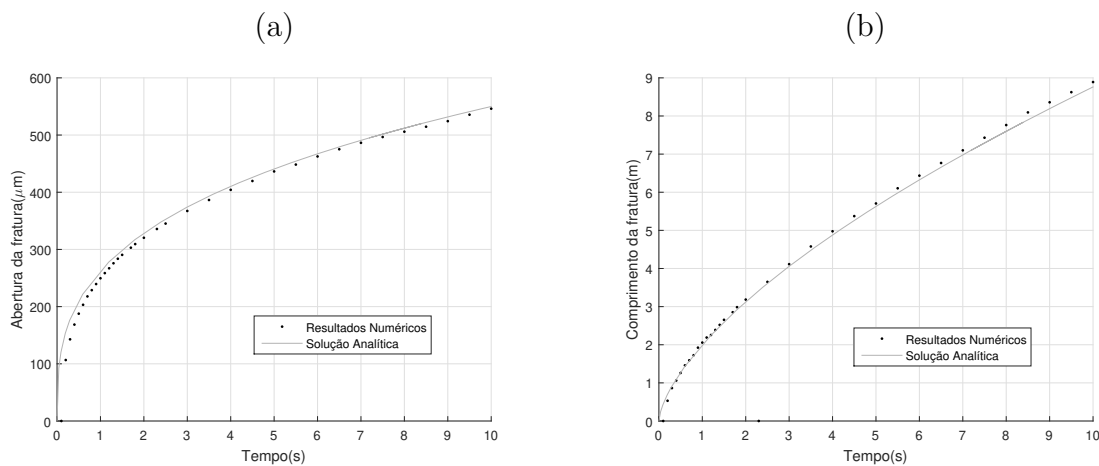
No regime *storage-toughness*, em razão da baixa filtração para o meio, observam-se maiores valores de pressão na interface da fratura e, também, fraturas mais longas, como mostrado na animação da Figura 37 e no gráfico da Figura 36. Além disso, os valores de abertura e comprimento, em ambos os casos, concordam com as soluções apresentadas por Carrier e Granet (2012). A Tabela 13 apresenta os valores que divergiram em relação à Tabela 12.

Tabela 13 – Valores dos parâmetros adotados na propagação da fratura em regime *storage-toughness*

Parâmetro	Valor
k	$1 \cdot 10^{-16} \text{ m}^2$
t_{max}	10 s
σ_v	$-3.7 \cdot 10^6 \text{ Pa}$

Fonte: Elaboração própria (2023)

Figura 36 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos, no regime de propagação *storage-toughness*, utilizando o modelo da Figura 34 (b), para os casos: (a) Abertura da fratura ao longo do tempo e (b) Comprimento da fratura ao longo do tempo



Fonte: Elaboração própria (2023)

Figura 37 – Propagação da fratura na direção horizontal em regime *storage-toughness*

Fonte: Elaboração própria (2023)

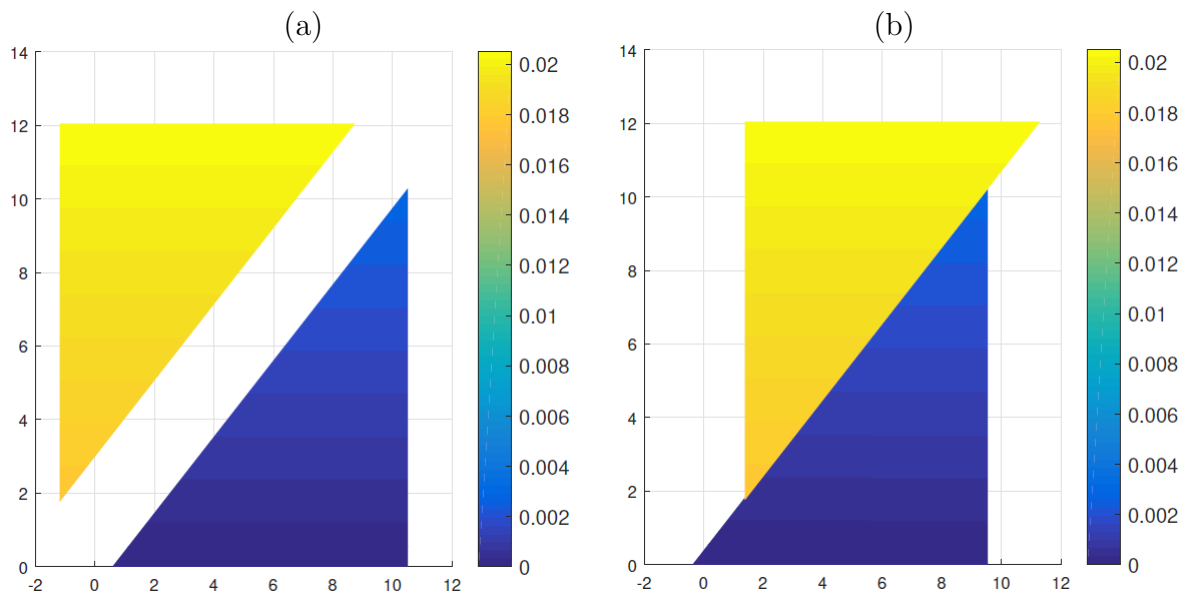
Uma particularidade observada nos cenários de propagação de fratura, quando comparado aos demais ensaios apresentados nesta dissertação, é o maior esforço computacional exigido neste tipo de simulação. Isso se dá, pela necessidade de uma melhor

discretização da malha e da realização de várias iterações para estabilização do dano. Desse modo, maior foi o tempo para solução do sistema e pós-processamento dos resultados. Quantitativamente, nos casos de propagação, horas foram necessárias para obtenção dos resultados numéricos, enquanto, nos demais casos, apenas, segundos ou minutos.

4.6.1.3 Rotação da matriz de rigidez

As Figuras 38 (a) e (b) exemplificam o comportamento de rotação do modelo com a transformação de $\hat{E}_{\eta\xi}$ em E_{ij} . Em ambos os casos, o modelo está restrito em y na extremidade inferior e os parâmetros são iguais, exceto para os termos de rigidez em η e ξ . A Figura 38 (a) apresenta o deslocamento vertical em m quando a rigidez na direção normal $E_{\eta\eta}$ é maior do que a rigidez da direção cisalhante $E_{\xi\xi}$ e a Figura 38 (b) o inverso.

Figura 38 – Comportamento do modelo com a rotação de $\hat{E}_{\eta\xi}$ em E_{ij} (a) $E_{\eta\eta} > E_{\xi\xi}$
(b) $E_{\xi\xi} > E_{\eta\eta}$

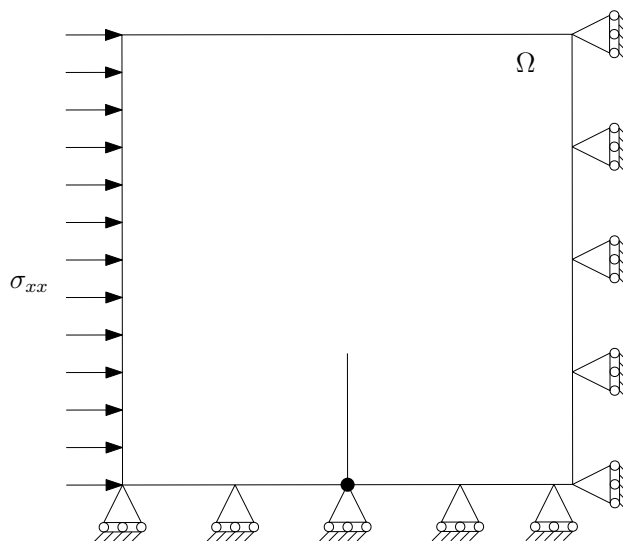


Fonte: Elaboração própria (2023)

4.6.2 Propagação da fratura na direção vertical

Um dos testes para validação da matriz de rotação implementada, foi a rotação do domínio de aproximação em 90° no sentido anti-horário, para verificação do comportamento de propagação da fratura neste sentido. Assim, o novo ponto de injeção de fluido está na superfície inferior do bloco, a interface da fratura está na direção y , os deslocamentos estão restritos em x na lateral direita, em y na superfície inferior e a tensão de compressão (σ_{xx}) é aplicada nos elementos da lateral esquerda, conforme demonstrado na Figura 39.

Figura 39 – Modelo do domínio de aproximação para quadro de propagação da fratura na direção vertical

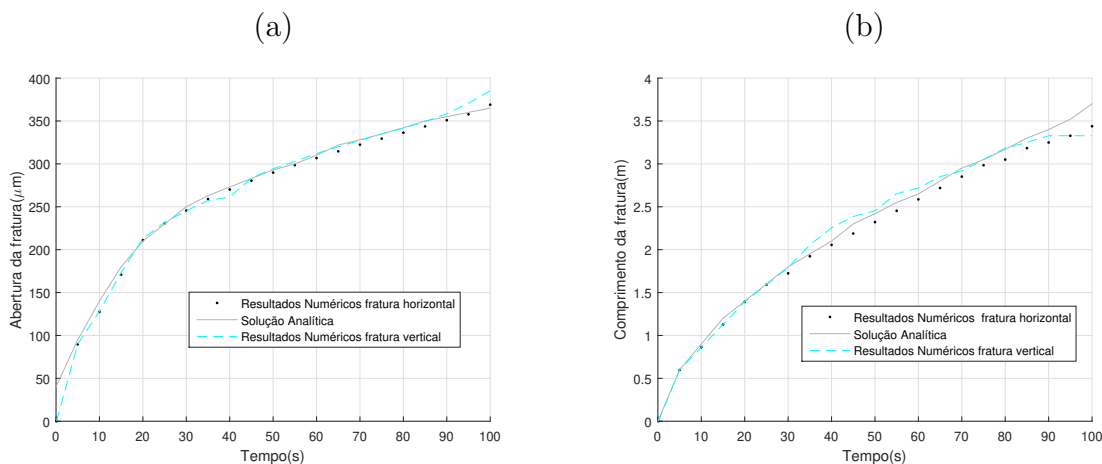


Fonte: Elaboração própria (2023)

4.6.2.1 Regime *leakoff-toughness*

Observa-se nos gráficos das Figuras 40 (a) e (b) e Figuras 41 (a) e (b) que em ambos os regimes de propagação avaliados os resultados numéricos na direção vertical convergiram com os resultados obtidos para propagação da fratura na direção horizontal e a solução de Carrier e Granet (2012), validando, assim, os termos de rotação implementados.

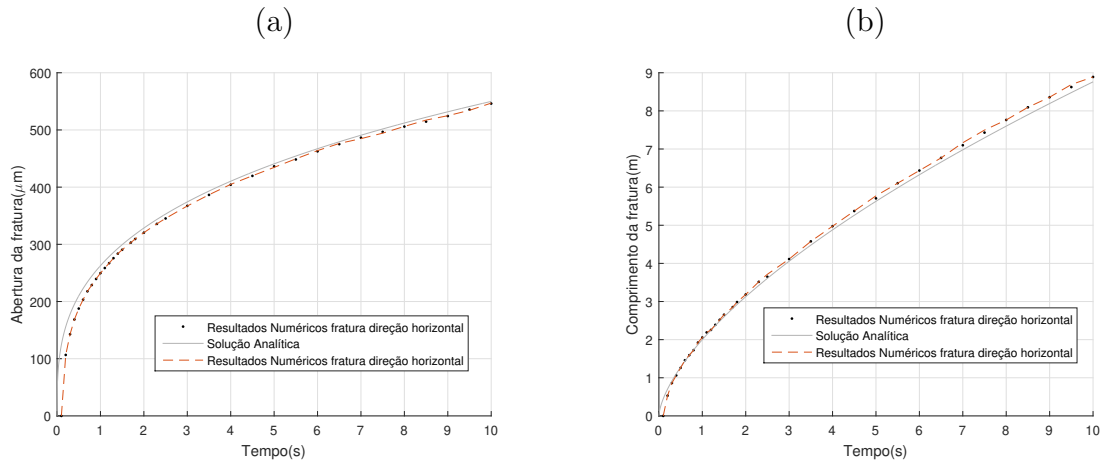
Figura 40 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos, no regime de propagação *leakoff-toughness* para os casos: (a) Abertura da fratura ao longo do tempo e (b) Comprimento da fratura ao longo do tempo



Fonte: Elaboração própria (2023)

4.6.2.2 Regime *storage-toughness*

Figura 41 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos, no regime de propagação *storage-toughness* para os casos: (a) Abertura da fratura ao longo do tempo e (b) Comprimento da fratura ao longo do tempo



Fonte: Elaboração própria (2023)

Figura 42 – Propagação da fratura na direção vertical em regime *storage-toughness*

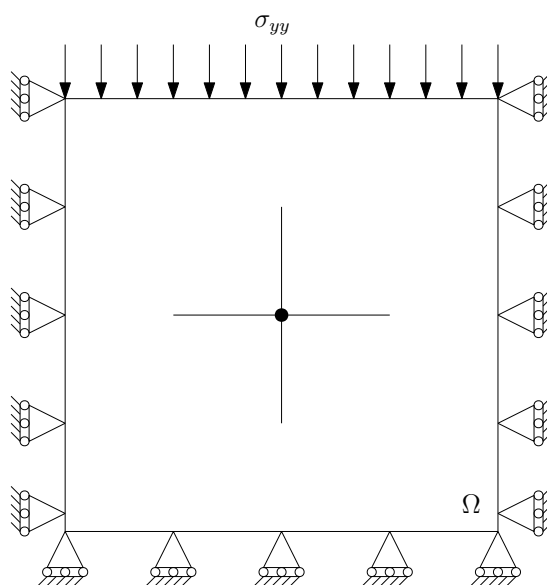
Fonte: Elaboração própria (2023)

A Figura 41 e a animação da Figura 42 mostram as respostas de abertura e comprimento da fratura no regime de propagação *storage-toughness* e ressaltam a igualdade entre os resultados obtidos para o comprimento da fratura nas direções x e y .

4.7 DIREÇÃO PREFERENCIAL DE PROPAGAÇÃO DA FRATURA

O modelo simulado neste caso, apresentado na Figura 43, utilizou a teoria da mecânica da fratura para determinação da direção preferencial de propagação. A injeção de fluido é feita por meio de um poço localizado no centro do reservatório e dois caminhos estão disponíveis para propagação, uma interface com elementos coesivos está localizada na direção x e outra interface na direção y . Além disso, todos os nós da malha estão duplicados. Desse modo, cada aresta contida no domínio, representa um elemento coesivo.

Figura 43 – Modelo do domínio de aproximação para simulação do caso de direção preferencial de propagação da fratura



Fonte: Elaboração própria (2023)

4.8 RESULTADOS NUMÉRICOS

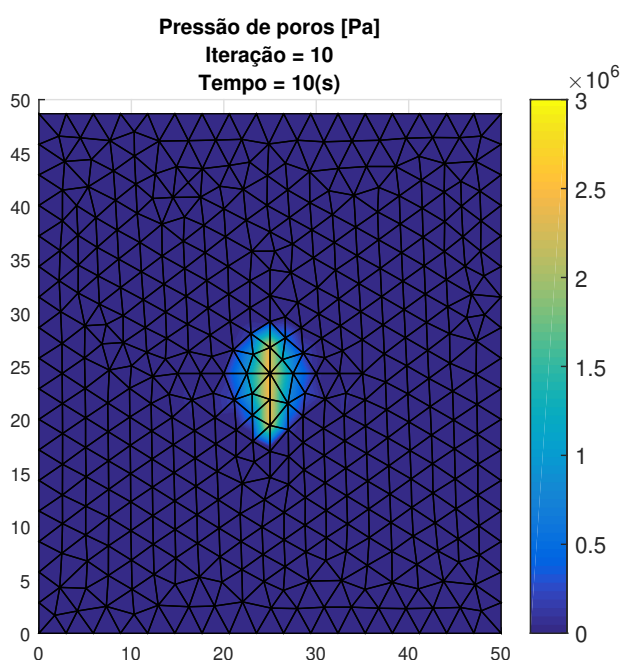
A Tabela 14 apresenta os valores dos parâmetros adotados no ensaio de direção preferencial de propagação, a Figura 44 os resultados numéricos obtidos e a Figura 45 a animação referente a estes resultados.

Tabela 14 – Valores dos parâmetros adotados no ensaio de direção preferencial de propagação

Parâmetro	Valor
G	7.083 GPa
ν	0.2
S_ϵ	$1.4456 \cdot 10^{-11}$
α	0.75
k	$1 \cdot 10^{-15} \text{ m}^2$
μ	$1 \cdot 10^{-4} \text{ Pa.s}$
dt	1 s
t_{max}	10 s
σ_v	$-5 \cdot 10^6 \text{ Pa}$
q_0	$0.001 \text{ m}^3/\text{s}$
σ_t''	$1.25 \cdot 10^6 \text{ Pa}$
G_f	120 Pa.m

Fonte: Elaboração própria (2023)

Figura 44 – Modelo do reservatório para simulação do caso de direção preferencial de propagação da fratura



Fonte: Elaboração própria (2023)

A animação da Figura 45 mostra a distribuição de pressão ao longo do modelo estudado. De acordo com Rocha e Azevedo (2019), a direção de propagação de uma fratura é função do ambiente existente no subsolo e dos esforços oferecidos pelas tensões *in situ*. Assim, uma fratura tende a se abrir na direção perpendicular à menor tensão *in*

situ. No ensaio realizado, a menor tensão *in situ* é horizontal, conseqüentemente, a fratura se propaga perpendicularmente a esta tensão, produzindo, assim, uma fratura vertical ao eixo do poço.

Figura 45 – Modelo da direção preferencial de propagação da fratura

Fonte: Elaboração própria (2023)

5 CONCLUSÃO

Esta dissertação abordou a elaboração e validação de um simulador numérico capaz de prever a direção preferencial de propagação de uma fratura hidráulica utilizando elementos finitos coesivos. Para isto, um algoritmo foi implementado e validado para representação do reservatório de petróleo com acoplamento hidromecânico em um meio bidimensional. Os resultados obtidos se mostraram numericamente satisfatórios quando comparados com os dados disponíveis na literatura.

Os elementos finitos lineares mostraram-se capazes de modelar com precisão os ensaios numéricos realizados, sendo eles: a validação do meio poroelástico submetido à esforços puramente mecânicos; do meio poroelástico linear, por meio do problema de consolidação de Terzaghi; do balanço de massa, do meio poroelástico submetido à tensões de tração, compressão e injeção de fluido; ensaios de concentração de tensão na ponta da fratura; equilíbrio mecânico nas paredes da fratura; propagação da fratura e predição da direção preferencial de propagação.

Além disso, foi possível verificar, que o modelo de dano adotado e a discretização temporal de maneira totalmente implícita, possibilitou resolver as não linearidades do sistema. Verificou-se, também, que a técnica de duplicação dos nós e refino da malha apenas na região de interesse se mostraram alternativas simples, viáveis e que dependendo da quantidade de elementos necessários, com baixo esforço computacional, dispensando o uso de técnicas de reconstrução da malha.

Por fim, observou-se que para os casos com malhas mais refinadas, nos exemplos dos regimes de propagação da fratura, o esforço computacional foi elevado quando comparado aos demais ensaios, destacando, assim, a necessidade de outras alternativas para modelos mais complexos.

5.1 TRABALHOS FUTUROS

A seguir, apresentam-se os tópicos de interesse para trabalhos futuros:

1. Otimizar o tempo de processamento paralelizando o algoritmo;
2. Avaliar outros cenários de direção preferencial de fratura, dentre eles, os casos com fraturas inclinadas.
3. Otimizar numericamente a estimativa do dano;
4. Incorporar novos processos físicos no modelo, como as influências de variáveis térmicas e interações químicas;
5. Desenvolver modelos tridimensionais, desprezando as simplificações impostas pelo estado plano de deformação;

6. Avaliar as influências que fraturas naturais desempenham nas fraturas hidráulicas induzidas;
7. Incorporar o fenômeno de fechamento da fratura e analisar sua influência nas variáveis de interesse.

REFERÊNCIAS

- ADACHI, J.; SIEBRITS E, m.; PEIRCE, A.; DESROCHES, J. Computer simulation of hydraulic fractures. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, Elsevier, v. 44, n. 5, p. 739–757, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 24.
- ADACHI, J. I.; DETOURNAY, E. Plane strain propagation of a hydraulic fracture in a permeable rock. *Engineering Fracture Mechanics*, Elsevier, v. 75, n. 16, p. 4666–4694, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 19, 21 e 24.
- ANDERSON, T. Fracture mechanisms in nonmetals. *Fracture mechanics: fundamentals and applications, 3rd ed. Boca Raton: CRC Press/Taylor & Francis Group*, p. 257–295, 2005. Citado na página 24.
- BECKER, E. B.; CAREY, G. F.; ODEN, J. T. *Finite elements: an introduction.* : Prentice Hall, 1981. v. 1. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 47.
- BESERRA, L. B. d. S. *Análise hidromecânica do fraturamento hidráulico via elementos finitos com descontinuidades fortes incorporadas.* Thesis (PhD) — Universidade Federal de Pernambuco, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 25.
- BIOT, M. A. General theory of three-dimensional consolidation. *Journal of applied physics*, American Institute of Physics, v. 12, n. 2, p. 155–164, 1941. Citado na página 34.
- BIOT, M. A. Nonlinear and semilinear rheology of porous solids. *Journal of Geophysical Research*, Wiley Online Library, v. 78, n. 23, p. 4924–4937, 1973. Citado na página 36.
- BORST, R. D.; CRISFIELD, M. A.; REMMERS, J. J.; VERHOOSSEL, C. V. *Nonlinear finite element analysis of solids and structures.* : John Wiley & Sons, 2012. Citado na página 41.
- CAMARGO, M.; CLETO, P. R.; MAEDO, M. A.; RODRIGUES, E. A.; JR, L. A. B.; MANZOLI, O. L. Modeling the hydrodynamic behavior of fractures and barriers in porous media using coupling finite elements. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, Elsevier, v. 208, p. 109700, 2022. Citado na página 27.
- CARRIER, B.; GRANET, S. Numerical modeling of hydraulic fracture problem in permeable medium using cohesive zone model. *Engineering fracture mechanics*, Elsevier, v. 79, p. 312–328, 2012. Citado 6 vezes nas páginas 26, 60, 79, 80, 81 e 84.
- CHEN, L.; BORST, R. de. Cohesive fracture analysis using powell-sabin b-splines. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, Wiley Online Library, v. 43, n. 2, p. 625–640, 2019. Citado na página 28.
- CHEN, Z.; JEFFREY, R. G.; ZHANG, X.; KEAR, J. *et al.* Finite-element simulation of a hydraulic fracture interacting with a natural fracture. *Spe Journal*, Society of Petroleum Engineers, v. 22, n. 01, p. 219–234, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 28.
- CHENG, A. Theory and applications of transport in porous media. *Poroelasticity*, Springer Switzerland, v. 27, 2016. Citado 4 vezes nas páginas 31, 34, 67 e 71.

- CLETO, P. R.; CAMARGO, M.; MAEDO, M. A.; RODRIGUES, E. A.; MANZOLI, O. L. Three-dimensional high aspect ratio interface elements for simulating 3d hydraulic fracturing in deformable porous media. *Computers & Structures*, Elsevier, v. 283, p. 107057, 2023. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 27.
- CLETO, P. R.; MANZOLI, O. L.; SÁNCHEZ, M.; MAEDO, M. A.; BESERRA, L. B.; GUIMARÃES, L. J. Hydro-mechanical coupled modeling of hydraulic fracturing using the mesh fragmentation technique. *Computers and Geotechnics*, Elsevier, v. 124, p. 103591, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 27.
- FELIPPA, C. A. Introduction to finite element methods. *University of Colorado*, Boulder CO, v. 885, 2004. Citado na página 56.
- GEERTSMA, J.; KLERK, F. D. A rapid method of predicting width and extent of hydraulically induced fractures. *Journal of petroleum technology*, SPE, v. 21, n. 12, p. 1571–1581, 1969. Citado na página 25.
- GEUZAINÉ, C.; REMACLE, J.-F. Gmsh: A 3-d finite element mesh generator with built-in pre-and post-processing facilities. *International journal for numerical methods in engineering*, Wiley Online Library, v. 79, n. 11, p. 1309–1331, 2009. Citado na página 54.
- JUNIOR, L. C. d. S. *Uma aplicação dos métodos dos elementos finitos e diferenças finitas à interação fluido-estrutura*. Thesis (Mater's) — Universidade de Brasília, 2006. Citado na página 42.
- JUNIOR, L. C. d. S. *Análise geomecânica da injeção de fluidos em subsuperfície*. Thesis (PhD) — Universidade de Brasília, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 26, 31 e 38.
- KHRISTIANOVIC, S.; ZHELTOV, Y. P. Formation of vertical fractures by means of highly viscous liquid. In: *World petroleum congress proceedings*. 1955. p. 579–586. Citado na página 25.
- KIRK, B. S.; PETERSON, J. W.; STOGNER, R. H.; CAREY, G. F. libmesh: a c++ library for parallel adaptive mesh refinement/coarsening simulations. *Engineering with Computers*, Springer, v. 22, p. 237–254, 2006. Citado na página 55.
- LECAMPION, B.; BUNGER, A.; ZHANG, X. Numerical methods for hydraulic fracture propagation: A review of recent trends. *Journal of natural gas science and engineering*, Elsevier, v. 49, p. 66–83, 2018. Citado na página 26.
- MANZOLI, O.; CLARO, G.; RODRIGUES, E.; JR, J. L. A local-global scheme for tracking crack path in three-dimensional solids. *Computers and Concrete*, Techno-Press, v. 12, n. 3, p. 261–283, 2013. Citado na página 29.
- MANZOLI, O. L.; CLETO, P. R.; SÁNCHEZ, M.; GUIMARÃES, L. J.; MAEDO, M. A. On the use of high aspect ratio finite elements to model hydraulic fracturing in deformable porous media. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 350, p. 57–80, 2019. Citado 3 vezes nas páginas 19, 20 e 27.
- MAUTHE, S.; MIEHE, C. Hydraulic fracture in poro-hydro-elastic media. *Mechanics Research Communications*, Elsevier, v. 80, p. 69–83, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 22.

MUNJIZA, A.; ANDREWS, K. Penalty function method for combined finite–discrete element systems comprising large number of separate bodies. *International Journal for numerical methods in engineering*, Wiley Online Library, v. 49, n. 11, p. 1377–1396, 2000. Citado na página 58.

NADERI, M.; IYYER, N. 3d modeling of arbitrary cracking in solids using augmented finite element method. *Composite Structures*, Elsevier, v. 160, p. 220–231, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 29.

NORDGREN, R. Propagation of a vertical hydraulic fracture. *Society of petroleum engineers journal*, SPE, v. 12, n. 04, p. 306–314, 1972. Citado na página 24.

PARVANEH, S.; FOSTER, C. On numerical aspects of different updating schedules for tracking fracture path in strain localization modeling. *Engineering Fracture Mechanics*, Elsevier, v. 152, p. 26–57, 2016. Citado na página 28.

PERKINS, T.; KERN, L. R. *et al.* Widths of hydraulic fractures. *Journal of Petroleum Technology*, Society of Petroleum Engineers, v. 13, n. 09, p. 937–949, 1961. Citado na página 24.

POLI, R. E. B. *Modelagem numérica do fraturamento hidráulico de um meio poroelástico utilizando o método dos elementos finitos coesivos com adaptatividade de malha*. Thesis (Mater's) — Escola Politecnica da Universidade de São Paulo, 2020. Citado 4 vezes nas páginas 19, 30, 33 e 40.

RAHMAN, M.; RAHMAN, S. Studies of hydraulic fracture-propagation behavior in presence of natural fractures: Fully coupled fractured-reservoir modeling in poroelastic environments. *International Journal of Geomechanics*, American Society of Civil Engineers, v. 13, n. 6, p. 809–826, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 22.

ROCHA, L. A. S.; AZEVEDO, C. T. d. *Projetos de poços de petróleo*. : Interciência, 2019. v. 1. Citado na página 87.

ROGERS, S.; ELMO, D.; DERSHOWITZ, W. Understanding hydraulic fracture geometry and interactions in pre-conditioning through dfn and numerical modeling. In: ONEPETRO. *45th US Rock Mechanics/Geomechanics Symposium*. 2011. Citado na página 26.

SCHIJVE, J. *Fatigue crack growth under variable-amplitude loading*. : Springer, 2001. Citado na página 63.

SNOW, D. T. *A parallel plate model of fractured permeable media*. : University of California, Berkeley, 1965. Citado na página 38.

TERZAGHI, K. von. Die berechnung der durchlassigkeit des tones aus dem verlauf der hydromechanischen spannungserscheinungen. *Sitzungsber. Akad. Wiss.(Wien). Math.-Naturwiss. Kl., Abt. Iia*, v. 132, p. 125–138, 1923. Citado na página 35.

WANG, H. F. *Theory of linear poroelasticity with applications to geomechanics and hydrogeology*. : Princeton university press, 2000. v. 2. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 42.

WANG, S.; SUN, L.; AU, A.; YANG, T.; TANG, C. 2d-numerical analysis of hydraulic fracturing in heterogeneous geo-materials. *Construction and Building Materials*, Elsevier, v. 23, n. 6, p. 2196–2206, 2009. Citado na página 24.

- WANG, W.; SHAHVALI, M.; SU, Y. A semi-analytical fractal model for production from tight oil reservoirs with hydraulically fractured horizontal wells. *Fuel*, Elsevier, v. 158, p. 612–618, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 22.
- WATSON, G. A. *Numerical analysis: proceedings of the Dundee Conference on Numerical Analysis, 1975*. : Springer, 2006. v. 506. Citado na página 57.
- WAWRZYNEK, P. A.; INGRAFFEA, A. Interactive finite element analysis of fracture processes: an integrated approach. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Elsevier, v. 8, n. 2, p. 137–150, 1987. Citado na página 27.
- WITHERSPOON, P. A.; WANG, J. S.; IWAI, K.; GALE, J. E. Validity of cubic law for fluid flow in a deformable rock fracture. *Water resources research*, Wiley Online Library, v. 16, n. 6, p. 1016–1024, 1980. Citado na página 38.
- XU, W.; THIERCELIN, M. J.; GANGULY, U.; WENG, X.; GU, H.; ONDA, H.; SUN, J.; CALVEZ, J. L. *et al.* Wiremesh: a novel shale fracturing simulator. In: SOCIETY OF PETROLEUM ENGINEERS. *International oil and gas conference and exhibition in China*. 2010. Citado na página 22.
- XU, W.; THIERCELIN, M. J.; WALTON, I. C. *et al.* Characterization of hydraulically-induced shale fracture network using an analytical/semi-analytical model. In: SOCIETY OF PETROLEUM ENGINEERS. *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*. 2009. Citado na página 20.
- YOON, H. C.; KIM, J. Spatial stability for the monolithic and sequential methods with various space discretizations in poroelasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 114, n. 7, p. 694–718, 2018. Citado na página 51.
- YOSHIOKA, K.; BOURDIN, B. A variational hydraulic fracturing model coupled to a reservoir simulator. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, Elsevier, v. 88, p. 137–150, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 22.
- ZIAEI-RAD, V.; SHEN, L.; JIANG, J.; SHEN, Y. Identifying the crack path for the phase field approach to fracture with non-maximum suppression. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 312, p. 304–321, 2016. Citado 3 vezes nas páginas 23, 27 e 29.
- ZIMMERMAN, R. W.; BODVARSSON, G. S. Hydraulic conductivity of rock fractures. *Transport in porous media*, Springer, v. 23, p. 1–30, 1996. Citado na página 38.
- ZOBACK, M. D. *Reservoir geomechanics*. : Cambridge university press, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 31.

Anexo A – EXEMPLO DE *SCRIPT* PARA GERAÇÃO DE MALHAS NO *GMSH*

```

SetFactory("OpenCASCADE");
lc = 3;
// Geometria da malha
Point(1) = {0, 0, 0, lc};
Point(2) = {50, 0, 0, lc};
Point(3) = {50, 50, 0, lc};
Point(4) = {0, 50, 0, lc};
Line(1) = {1, 2};
Line(2) = {3, 2};
Line(3) = {3, 4};
Line(4) = {4, 1};
// Geometria da fratura
Point(20) = { 25, 25, 0, lc };
Point(21) = { 15, 25, 0, lc };
Point(22) = { 35, 25, 0, lc };
Point(23) = { 25, 15, 0, lc };
Point(24) = { 25, 35, 0, lc };
Line(5) = {20, 21};
Line(6) = {20, 22};
Line(7) = {20, 23};
Line(8) = {20, 24};
Line Loop(1) = {4, 1, -2, 3};
Plane Surface(1) = {1};
// Força o contorno da fratura para o malhamento
BooleanFragments{ Line{5}; Delete; }{ Surface{1}; Delete; }
BooleanFragments{ Line{6}; Delete; }{ Surface{1}; Delete; }
BooleanFragments{ Line{7}; Delete; }{ Surface{1}; Delete; }
BooleanFragments{ Line{8}; Delete; }{ Surface{1}; Delete; }
// Identifica e lista os contornos do domínio
Physical Surface("Domain") = {1};
Physical Line("N") = {10};
Physical Line("S") = {11};
Physical Line("E") = {12};
Physical Line("W") = {9};
// Definição do sizing field
Field[1] = Distance;
Field[1].CurvesList = {8, 13, 14, 15};
Field[1].Sampling = 10;
Field[2] = Threshold;
Field[2].InField = 1;
Field[2].SizeMin = lc / 5;
Field[2].SizeMax = lc;
Field[2].DistMin = 2;
Field[2].DistMax = 5;
Field[3] = Min;
Field[3].FieldsList = {2};
// Executa o malhamento
Background Field = 3;
Mesh 2;
// Exporta os dados
Save "poco_centro.msh"

```