

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

ESCOLA POLITÉCNICA

GABRIELA CARDOSO PRADO

**Validação de Novo Protótipo para Automatizar Testes de Heterogeneidade de
Minérios**

São Paulo

2023

GABRIELA CARDOSO PRADO

Validação de Novo Protótipo para Automatizar Testes de Heterogeneidade de Minérios

Versão Corrigida

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de concentração:

Engenharia Mineral

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Ana Carolina Chierigati

Coorientador: Prof. Dr. Geoffrey John Lyman


São Paulo


2023

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, 13 de julho de 2023

Assinatura do autor: 

Assinatura do orientador: 

Catálogo-na-publicação

Prado, Gabriela Cardoso

Validação de novo protótipo para automatizar testes de heterogeneidade de minérios / G. C. Prado -- versão corr. -- São Paulo, 2023.

106 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Minas e de Petróleo.

1.AMOSTRAGEM (TEORIA) 2.HETEROGENEIDADE (TESTES)
3.AMOSTRAGEM (ERRO FUNDAMENTAL) I.Universidade de São Paulo.
Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Minas e de Petróleo II.t.

AGRADECIMENTOS

À Ana Carolina Chieregati, orientadora e amiga, por me auxiliar em todas as etapas e pela atenção constante. A Geoffrey Lyman, por me mostrar e guiar nos novos caminhos. A Hélio, Homero e Henrique Delboni, que tornaram este projeto possível. Aos cinco, dedico este trabalho.

À minha mãe, Eliane, e às minhas tias: Elizete, Eliete, Silmara, Janaína, Eliza e Elizângela, por me ensinarem desde cedo a força das mulheres e do amor. Aos meus irmãos, Ariani e Mathaus, e aos meus primos: Marcella, Lucas, Ângelo, Amanda e Felipe, pela companhia em todas as horas. Ao meu sobrinho Gael e ao meu tio Gerson, por todas as danças do 'É o Tchan' que passaram e as que virão.

À máfia italiana 60+ da qual faço parte, composta por: Rosana, Bituim, Neidoca, Mariazinha e Lígia, por todo carinho e dedicação aos novos membros.

Aos colegas do PMI, com os quais tenho a oportunidade de trabalhar, pelo apoio cotidiano. À Beleza e Sandra, por arrumarem uma forma de mostrar meu trabalho internacionalmente. À CAPES, por financiar meu projeto.

A todos os amigos, por me manterem sã e pela paciência com o meu 'jeitinho'.

Ao meu companheiro de vida, Ivan, como diria Cazuzza, "*pelo inferno e céu de todo dia, todo o amor que houver nesta vida e algum veneno anti-monotonia*".

RESUMO

O erro fundamental da amostragem (do inglês, *Fundamental Sampling Error*, FSE) é um dos erros de amostragem definidos por Pierre Gy e está relacionado à heterogeneidade constitucional do minério. Mesmo que um procedimento amostral seja considerado ideal ou perfeito, este erro ainda existirá e, portanto, não pode ser eliminado. A Heterogeneidade Intrínseca (IH) pode ser estimada pela fórmula “calibrada” de Gy, que é escrita em função dos parâmetros ou constantes de amostragem K e α . Estes parâmetros podem ser calibrados pelo teste de heterogeneidade padrão, originalmente desenvolvido por Pierre Gy e Francis Pitard, baseado na coleta de fragmentos de rocha, individual e aleatoriamente, de maneira equiprobabilística, a partir de um lote de material particulado, visando estimar a heterogeneidade intrínseca do lote (IHL). Este teste, além de demandar tempo e espaço, pode ser influenciado pela tendência humana de selecionar os fragmentos maiores ou diferentes, gerando um viés difícil de ser quantificado ou mensurado. Para eliminar a variância gerada pelo viés humano, desenvolveu-se um protótipo denominado IHT (*Intrinsic Heterogeneity Tester*), que automatiza o teste de heterogeneidade. O protótipo seleciona fragmentos em fluxo cadente, um a um, por meio de uma contagem a laser predefinida. Visando validar o protótipo, desenvolveu-se o “Estudo Garbanzo”, onde grãos de bico foram pintados simulando teores de minérios e, sequencialmente, passaram pelo processo amostral do IHT diversas vezes. Os resultados dos testes do “Estudo Garbanzo” foram satisfatórios tanto por análise estatística quanto por análise de teor, validando o IHT como alternativa ao teste de heterogeneidade padrão.

Palavras-chave: heterogeneidade intrínseca; erro fundamental da amostragem; teoria da amostragem; teste de heterogeneidade.

ABSTRACT

The Fundamental Sampling Error (FSE) is one of the sampling errors defined by Pierre Gy and is related to the constitutional heterogeneity of the ore. Even if a sampling procedure is considered ideal or perfect, this error will still exist and therefore cannot be eliminated. The Intrinsic Heterogeneity (IH) can be estimated by the “calibrated” formula of Gy, which is written as a function of the sampling parameters or constants K e α . These parameters can be calibrated by the standard heterogeneity test, originally developed by Pierre Gy and Francis Pitard, based on the collection of rock fragments, individually and randomly, in an equiprobabilistic way, from a lot of particulate material, aiming to estimate the intrinsic heterogeneity of the lot (IHL). This test, in addition to demanding time and space, can be influenced by the human tendency to select larger or different fragments, generating a bias that is difficult to quantify or measure. To eliminate the variance generated by human bias, a prototype called IHT (Intrinsic Heterogeneity Tester) was developed, which automates the heterogeneity test. The prototype selects fragments in a falling stream, one by one, by means of a predefined laser count. In order to validate the prototype, the “Garbanzo Study” was developed, where chickpeas were painted simulating ore grades and, sequentially, went through the IHT sampling process several times. The test results of the “Garbanzo Study” were satisfactory both by statistical analysis and by grade analysis, validating the IHT as an alternative to the standard heterogeneity test.

Keywords: intrinsic heterogeneity; fundamental sampling error; sampling theory; heterogeneity test.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Modelo ideal de distribuição normal.....	20
Figura 2 - Componentes do erro global de estimativa.....	24
Figura 3 - Ilustração da definição de heterogeneidade	28
Figura 4 - Exemplo de gráfico di-log com resultados do Teste de Heterogeneidade Padrão.....	31
Figura 5 - Desenho esquemático do Intrinsic Heterogeneity Tester.....	37
Figura 6 - Visão geral do <i>Intrinsic Heterogeneity Tester</i>	38
Figura 7 - Desenho detalhado da descarga	39
Figura 8 - Vista detalhada da descarga.....	40
Figura 9 - Vista detalhada do painel de controle	42
Figura 10 - Diagrama de blocos do <i>Intrinsic Heterogeneity Tester</i>	42
Figura 11 - Partículas azuis - Teste B	44
Figura 12 - Amostra primária - Teste B	44
Figura 13 - Partículas cor de laranja -Teste E	46
Figura 14 - Partículas brancas -Teste E.....	46
Figura 15 - Partículas azuis -Teste E	46
Figura 16 - Amostra primária - Teste E	47
Figura 17 - Partículas brancas -Teste P.....	48
Figura 18 - Partículas vermelhas -Teste P	48
Figura 19 - Partículas cor de laranja -Teste P.....	48
Figura 20 - Amostra primária - Teste P	49
Figura 21 - Distribuição binomial do Teste B.....	52
Figura 22 - Amostras Teste B01.....	53
Figura 23 - Amostras Teste B02.....	55
Figura 24 - Amostras Teste B03.....	56
Figura 25 - Distribuição binomial do Teste E para partículas azuis.....	58
Figura 26 - Distribuição binomial do Teste E para partículas brancas	59
Figura 27 - Distribuição binomial do Teste E para partículas cor de laranja	61
Figura 28 - Amostras Teste E.....	62
Figura 29 - Distribuição binomial do Teste P para partículas vermelhas.....	64
Figura 30 - Distribuição binomial do Teste P para partículas brancas	65

Figura 31 - Distribuição binomial do Teste P para partículas cor de laranja	67
Figura 32 - Amostras Teste P01	68
Figura 33 - Amostras Teste P02.....	70
Figura 34 - Amostras Teste P03.....	71

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Parâmetros Teste B	45
Tabela 2 - Parâmetros Teste E	47
Tabela 3 - Parâmetros Teste P	49
Tabela 4 - Probabilidades Teste B	51
Tabela 5 - Resultados Teste B01	53
Tabela 6 - Resultados Teste B02	54
Tabela 7 - Resultados Teste B03	55
Tabela 8 - Probabilidades Teste E - partículas azuis	57
Tabela 9 - Probabilidades Teste E - partículas brancas	59
Tabela 10 - Probabilidades Teste E - partículas cor de laranja	60
Tabela 11 - Resultados Teste E	62
Tabela 12 - Probabilidades Teste P - partículas vermelhas	63
Tabela 13 - Probabilidades Teste P - partículas brancas	65
Tabela 14 - Probabilidades Teste P - partículas cor de laranja	66
Tabela 15 - Resultados Teste P01	68
Tabela 16 - Resultados Teste P02	69
Tabela 17 - Resultados Teste P03	71
Tabela 18 – Comparação de estatística descritiva Teste B	72
Tabela 19 - Comparação de estatística descritiva Teste B - partículas azuis	73
Tabela 20 - Teores Teste B	73
Tabela 21 - Comparação de estatística descritiva Teste E	74
Tabela 22 - Teores Teste E	74
Tabela 23 - Comparação de estatística descritiva Teste P	75
Tabela 24 - Comparação de estatística descritiva Teste P - partículas vermelhas ...	76
Tabela 25 - Comparação de estatística descritiva Teste P - partículas brancas	76
Tabela 26 - Comparação de estatística descritiva Teste P - partículas cor de laranja	77
Tabela 27 - Teores Teste P	77

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	OBJETIVOS	15
3	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	16
3.1	ESTATÍSTICA.....	16
3.1.1	Probabilidade.....	16
3.1.2	Estatística descritiva.....	16
3.1.3	Variáveis aleatórias.....	19
3.1.4	Distribuições de Interesse.....	19
3.2	AMOSTRAGEM.....	21
3.2.1	Precisão.....	22
3.2.2	Acurácia.....	23
3.2.3	Representatividade.....	23
3.3	AMOSTRAGEM EQUIPROBABILÍSTICA.....	23
3.4	ERROS DE AMOSTRAGEM.....	23
3.4.1	Erro fundamental de amostragem (FSE).....	24
3.4.2	Erro de segregação e agrupamento (GSE).....	26
3.4.3	Erro de flutuação de heterogeneidade (HFE).....	26
3.4.4	Erro de materialização do incremento (IME).....	27
3.4.5	Erro total de amostragem (TSE).....	27
3.4.6	Erro analítico (AE) e erro global de estimativa (OEE).....	27
3.5	A TEORIA DA AMOSTRAGEM.....	27
3.5.1	Heterogeneidade ou homogeneidade?.....	27
3.5.2	Heterogeneidade intrínseca.....	29
3.5.3	Heterogeneidade distribucional.....	29
3.6	TESTE DE HETEROGENEIDADE PADRÃO.....	29

3.7	ESTIMATIVA DA HETEROGENEIDADE INTRÍNSECA	30
4	METODOLOGIA	36
4.1	PROTÓTIPO: <i>INTRINSIC HETEROGENEITY TESTER</i> (IHT)	36
4.1.1	Descrição dos elementos	36
4.1.2	Funcionamento do protótipo	40
4.2	O “ESTUDO GARBANZO” – PARÂMETROS INICIAIS	43
4.3	TESTE B	43
4.4	TESTE E	45
4.5	TESTE P	48
5	RESULTADOS	51
5.1	TESTE B	51
5.1.1	Distribuição Binomial – Teste B	51
5.1.2	Teste B01 – Resultados	52
5.1.3	Teste B02 – Resultados	54
5.1.4	Teste B03 – Resultados	55
5.2	TESTE E	56
5.2.1	Distribuição Binomial – Teste E	56
5.2.2	Teste E – Resultados	61
5.3	TESTE P	63
5.3.1	Distribuição Binomial – Teste P	63
5.3.2	Teste P01 – Resultados	67
5.3.3	Teste P02 – Resultados	69
5.3.4	Teste P03 – Resultados	70
6	COMPARAÇÃO, ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	72
6.1	TESTE B	72
6.2	TESTE E	73
6.3	TESTE P	74

7 CONCLUSÕES.....	78
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	81
APÊNDICE.....	83

1 INTRODUÇÃO

A cadeia de valor da mineração inclui processos de coleta, preparação e análise de amostras, bem como testes geometalúrgicos, físicos e químicos. Por meio desses processos, são formadas as bases para a estimativa dos recursos minerais, das massas e teores de minérios e de seu desempenho na usina de beneficiamento. A importância da amostragem na mineração, desde a exploração até o produto final, é inegável (DOMINY et al., 2016).

As amostras podem ser constituídas de material *in situ*, rochas cominuídas ou testemunhos de furos de sondagens. Em qualquer caso, o objetivo é obter uma amostra representativa que descreva acuradamente o material, ou lote, em questão. A coleta de amostras no campo é seguida de um processo de redução tanto em massa quanto em tamanho de partículas, para que, então, possam ser realizados testes e análises. Esse processo pode se tornar complexo, especialmente para alguns minérios muito heterogêneos como os de ouro (DOMINY et al., 2021).

Os protocolos de amostragem devem ser desenvolvidos levando-se em consideração os objetivos finais e, principalmente, o tipo de mineralização. Uma amostra de má qualidade pode implicar em diversas consequências, tais como: estimativa incorreta de recursos ou reservas, decisões inadequadas para o desenvolvimento da lavra, seleção incorreta de minério e estéril, projetos incorretos de usinas de beneficiamento, entre outros (DOMINY et al., 2021).

Um dos objetivos da Teoria da Amostragem (*Theory of Sampling* ou TOS) de Pierre Gy é o controle dos processos de amostragem para que os resultados sejam representativos e confiáveis. Assim, se o processo amostral respeitar os aspectos científicos e os parâmetros predeterminados da Teoria da Amostragem, garantindo a ausência de erros sistemáticos, ainda assim existirá um erro chamado de “erro fundamental de amostragem” (*Fundamental Sampling Error* ou FSE) e relacionado à heterogeneidade constitucional do minério (GY, 1998). O erro fundamental de amostragem se deve à diferença entre o teor da população ou lote e o teor da amostra coletada para representar aquela população ou lote. Ele é considerado o menor erro existente quando o processo amostral é ideal, ou seja, quando os fragmentos da

amostra são coletados um a um, aleatoriamente e com igual probabilidade de seleção. (FRANÇOIS-BONGARÇON, 2002 *apud* CHIEREGATI E PITARD, 2012).

A heterogeneidade intrínseca do lote (IH_L) é calculada em função do *top-size* ou d_{95} dos fragmentos (d) através da Equação 1. A partir do IH_L é possível calcular a variância do erro fundamental de amostragem e, conseqüentemente, estimar massas mínimas de amostras representativas e otimizar protocolos de amostragem.

$$IH_L = K \cdot d^\alpha \quad (1)$$

Há mais de uma metodologia para estimar os parâmetros ou constantes de amostragem K e α : o teste de heterogeneidade padrão (HT, do inglês *Heterogeneity Test*), desenvolvido por Pierre Gy e Pitard (1993), o teste da árvore (STE, do inglês *Sampling Tree Experiment*), desenvolvido por Dominique François-Bongarçon e apresentado por Minnitt et al. (2007), e o teste ou análise livre de segregação (SFA, do inglês *Segregation Free Analysis*), desenvolvido por Minnitt et al. (2011).

A realização do teste de heterogeneidade padrão é complexa, demanda muito tempo e espaço físico. Por isso, diversos autores propuseram versões simplificadas do teste, que, algumas vezes, apresentam resultados similares e satisfatórios, mas outras, não. É importante ressaltar que nenhuma versão simplificada proposta por esses autores faz a seleção individual e aleatória de fragmentos, mas a divisão em divisores tipo Jones ou rotativos, gerando uma variância adicional aos resultados, a variância do erro de segregação e agrupamento (*Grouping and Segregation Error* ou GSE). O protótipo IHT foi desenvolvido visando realizar a seleção aleatória e individual de fragmentos, como proposto pelo teste padrão.

O “Estudo Garbanzo” surgiu, portanto, da necessidade de validar o IHT como um protótipo adequado e não enviesado para a realização do teste de heterogeneidade.

2 OBJETIVOS

O objetivo geral deste trabalho é avaliar a adequação do protótipo IHT como equipamento mais acurado e alternativo ao teste de heterogeneidade manual, por meio de análises estatísticas dos resultados de testes realizados com o protótipo usando grãos de bico para simular minérios com diferentes teores.

Os objetivos específicos deste trabalho são avaliar a possibilidade de automação do teste de heterogeneidade e eliminar o viés humano normalmente gerado no teste manual, bem como tornar o teste mais rápido, compacto e equiprobabilístico. O viés humano é gerado, principalmente, pela seleção prioritária de partículas maiores, mais fáceis de serem coletadas, mais próximas às mãos do operador, mais brilhantes ou de cor diferente da maior parte do lote.

O uso de um equipamento automático, com seleção equiprobabilística de fragmentos, para a caracterização da heterogeneidade intrínseca de minérios se justifica pelo simples fato de que o viés humano frequentemente gera uma variância adicional à variância do erro fundamental de amostragem e, portanto, deve ser eliminado.

3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

3.1 ESTATÍSTICA

De acordo com Pitard (2019), a definição de 'estatística' segundo Cournot é “a ciência que tem por objetivo coletar e coordenar múltiplos fatos dentro de uma dada categoria de eventos, obtendo, assim, efeitos quantificados que, provavelmente, não acontecem apenas por acaso”. Os conceitos estatísticos são necessários para o desenvolvimento e a compreensão da Teoria da Amostragem, uma vez que, através deles, é possível relacionar a teoria com a realidade.

É importante destacar que as definições estatísticas utilizadas nos itens a seguir não foram elaboradas pelos autores neles citados (PITARD, 2019 e LYMAN, 2019); todavia, dada a importância desses autores no desenvolvimento da Teoria da Amostragem, considerou-se que as definições utilizadas por eles devem ser seguidas para a melhor compreensão da teoria e dos resultados desta pesquisa.

3.1.1 Probabilidade

Pitard (2019) definiu que a probabilidade de um fragmento ser selecionado em um lote, quando há certeza do evento, é escrita como $P = 1$. Já a probabilidade certa do fragmento não ser selecionado é escrita por $P = 0$. Logo, todas as probabilidades do evento estarão inclusas em um intervalo de 0 a 1:

$$0 \leq P \leq 1 \quad (2)$$

A probabilidade de um evento pode ser escrita como uma porcentagem, por exemplo, $P = 0,1$ é estritamente equivalente a $P = 10\%$

3.1.2 Estatística descritiva

3.1.2.1 Média

A estatística descritiva é a normalmente usada. A estimativa da média e do desvio padrão, bem como o histograma dos dados são usados para a estimativa da função densidade de probabilidade, também chamada de função densidade empírica (LYMAN, 2019).

A estimativa da média é dada por:

$$\hat{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i \quad (3)$$

Onde \hat{z} é a média estimada, n é o número de observações estatisticamente independentes e z_i são os valores observados (LYMAN, 2019).

3.1.2.2 Desvio padrão

A estimativa do desvio padrão é dada por:

$$\hat{s}_z = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (z_i - \hat{z})^2} \quad (4)$$

Onde \hat{s}_z é o desvio padrão, \hat{z} é a média estimada, n é o número de observações estatisticamente independentes e z_i são os valores observados (LYMAN, 2019).

Para as variáveis aleatórias os desvios-padrão não podem ser somados, apenas a variância tem a propriedade somativa (PITARD, 2019).

3.1.2.3 Variância

A estimativa da variância é dada por:

$$\hat{s}_z^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (z_i - \hat{z})^2 \quad (5)$$

Onde \hat{s}_z^2 é a variância, \hat{z} é a média estimada, n é o número de observações estatisticamente independentes e z_i são os valores observados (LYMAN, 2019).

3.1.2.4 Variância relativa e desvio padrão relativo

A vantagem de se trabalhar com valores relativos se deve ao fato destes serem adimensionais, dessa forma, os resultados podem ser facilmente comparados de um experimento para outro (PITARD, 2019).

O desvio padrão relativo é dado por:

$$s_R = \frac{s}{\bar{x}} \quad (6)$$

Onde s_R é o desvio padrão relativo, s é o desvio padrão e \bar{x} é a média (PITARD, 2019).

A variância relativa é dada por:

$$s_R^2 = \frac{s^2}{\bar{x}^2} \quad (7)$$

Onde s_R^2 é a variância relativa, s^2 é a variância da população e \bar{x} é a média da população (PITARD, 2019).

3.1.2.5 Histograma

O histograma é feito a partir da ordenação das observações em vários intervalos e tabulação do número de observações em cada intervalo. A probabilidade de um valor cair em cada intervalo é a contagem registrada no intervalo dividida pelo número total de observações. A função probabilidade empírica ($\hat{F}(x)$) é, então, dada pela somatória de probabilidades (k) até o ponto de interesse (x) (LYMAN, 2019)

$$\hat{F}(x) = \sum_{k=1}^{\substack{\text{caixa} \\ \text{que contém } x}} Prob(k) \quad (8)$$

3.1.2.6 Mediana

A mediana \bar{x} é o valor de uma característica que divide a distribuição probabilística em dois conjuntos de igual proporção ou frequência, ou seja, 50% de uma distribuição está abaixo da mediana e 50% está acima (PITARD, 2019). Dentre as medidas de tendência central, a mediana pode ser considerada mais robusta que a média, uma vez que não é tão sensível aos dados, principalmente em casos de distribuição assimétrica (YAMAMOTO, 2013).

3.1.2.7 Moda

A moda γ é o valor de tendência central onde a probabilidade alcança um máximo global ou local, ou seja, o resultado mais provável, que mais aparece (PITARD, 2019).

3.1.3 Variáveis aleatórias

Uma variável aleatória assume um intervalo de valores quando observada repetidamente sob condições nominalmente idênticas. Os valores que as variáveis aleatórias podem assumir são caracterizados por uma função de distribuição cumulativa ou a função densidade de probabilidade (LYMAN, 2019).

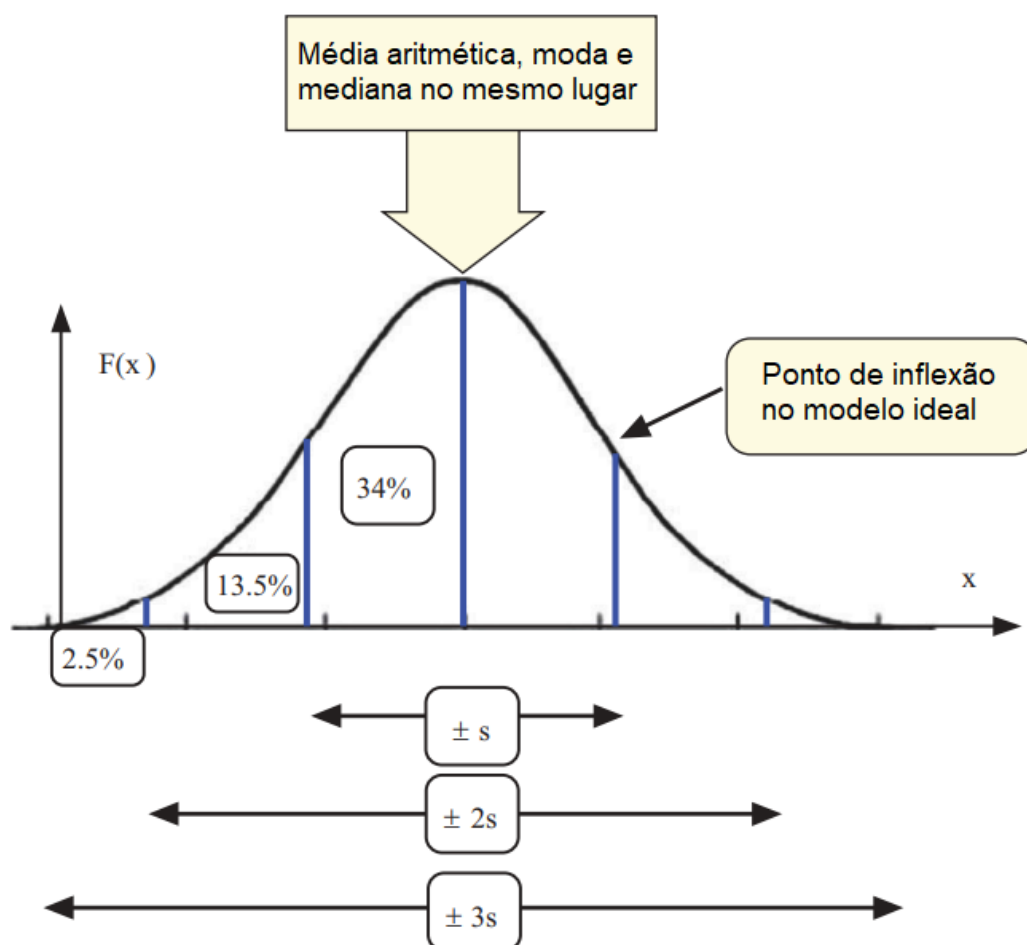
Um exemplo prático, para definição das variáveis aleatórias, proposto por Pitard (2019), é descrito a seguir: quando determinamos o teor de ouro a_s de amostras selecionadas de um lote de material fragmentado proveniente de uma mina, serão obtidas várias categorias de valores para a_s , onde cada uma delas será associada a um domínio de probabilidade. O que ocorre, então, é a associação de diversos possíveis valores de uma variável (no exemplo, teor de ouro) com a chance de que esses valores sejam observados.

3.1.4 Distribuições de Interesse

3.1.4.1 Distribuição normal ou gaussiana

O modelo Gaussiano é a distribuição mais utilizada na estatística convencional. O teorema do limite central, utilizado nessa distribuição, enuncia que se um conjunto de possíveis valores de um componente provém de amostras suficientemente grandes, a distribuição dos valores médios obtidos dessas amostras tende a formar uma distribuição Gaussiana em formato de sino (PITARD, 2019). A distribuição está representada na Figura 1.

Figura 1 - Modelo ideal de distribuição normal



Fonte: traduzido de Pitard (2019), p. 53

Na Figura 1, s representa o desvio padrão estimado. Sendo assim, nas distâncias $\pm s$ existe a probabilidade de se encontrarem 68% dos valores; nas distâncias $\pm 2s$ a probabilidade é de 95%; e nas distâncias $\pm 3s$, 99,7% (PITARD, 2019).

3.1.4.2 Distribuição de Poisson

Segundo Lyman (2019), quando eventos acontecem aleatoriamente, porém com uma média (λ), o número de eventos que ocorrem em um determinado intervalo de tempo (t) seguirá uma distribuição de Poisson. O número esperado de eventos (n) é, então:

$$n = \lambda t \quad (9)$$

A probabilidade de que os eventos ocorram nesse intervalo é dada por:

$$p(J|n) = \frac{n^J e^{-n}}{J!} \quad (10)$$

O valor esperado do número de eventos é igual à variância do número de eventos, portanto:

$$E\{J\} = var \{J\} = n \quad (11)$$

3.1.4.3 Distribuição binomial

Segundo Lyman (2019), a distribuição binomial é proveniente de um processo de Bernoulli, onde ensaios independentes, com probabilidade de sucesso p ou probabilidade de fracasso $1 - p$, são realizados n vezes. O número de sucessos é J . A função densidade de probabilidade é dada por:

$$p(J|n, p) = \frac{n!}{J!(n-J)!} p^J (1-p)^{n-J} \quad (12)$$

O valor esperado é:

$$E\{J\} = np \quad (13)$$

A variância de J é:

$$var \{J\} = np(1-p) \quad (14)$$

O limite da distribuição binomial quando np permanece constante enquanto n aumenta é uma distribuição de Poisson com o parâmetro:

$$\lambda = np \quad (15)$$

3.2 AMOSTRAGEM

Amostragem, no sentido amplo, pode ser definida como uma sequência de operações, seletivas ou não, com a finalidade de retirar uma ou várias amostras de um lote de material, ou população. No sentido estrito, ela é caracterizada como o processo de seleção de uma parte reduzida de um lote, a fim de reduzir seu volume sem alterar

significativamente suas demais características (GY, 1992). Essa parte reduzida é denominada 'amostra'.

Na mineração, as amostras indicam as características do minério e sua variabilidade, sendo utilizadas como base de dados para o planejamento, a implantação e a otimização de processos na mina e na usina. O processo amostral pode ocorrer de duas formas (CHIEREGATI E PITARD, 2012):

- Por incrementos: seleção de incrementos em determinados intervalos de tempo ou distância, que serão posteriormente unidos aos demais para a formação da amostra final;
- Por fracionamento: divisão de toda a amostra em duas ou mais partes iguais (alíquotas), sequencialmente, até chegar a uma amostra final.

Independentemente do processo amostral, a massa da amostra final deve ser calculada e dada como suficiente (FRANÇOIS-BONGARÇON, 2010).

A amostra é uma parte da população que deveria ter as características – teor, granulometria, cor, umidade e quaisquer outros atributos – comuns a toda população dentro de um intervalo aceitável de precisão e acurácia. Um dos objetivos da amostragem é, portanto, garantir que a amostra seja representativa do lote amostrado (CHIEREGATI E PITARD, 2012).

3.2.1 Precisão

A seleção de uma amostra é dita precisa quando o erro de seleção (SE) é pouco disperso ao redor de sua média, independentemente se a diferença entre esta média e a verdadeira média do erro de seleção $m(SE)$ é zero ou diferente de zero. A precisão mede a variabilidade dos valores das amostras em torno de sua média e esta medida é geralmente dada pela variância do erro de seleção de amostra, $\sigma^2(SE)$ (PITARD, 2019).

Precisão, então, refere-se ao grau de reprodutibilidade dos teores das amostras (DOMINY, 2021).

3.2.2 Acurácia

A acurácia independe da precisão. A seleção de uma amostra é dita acurada quando a média do erro de seleção de amostra, $m(SE)$, está próxima de zero, ou seja, o valor de $m(SE)$ é o valor do viés de amostragem (PITARD, 2019).

3.2.3 Representatividade

Quanto à representatividade, uma amostra será considerada representativa se a soma do quadrado da média real do erro de seleção de amostra ($m(SE)$) e da variância do erro de seleção de amostra ($\sigma^2(SE)$) for menor que um dado valor padrão de representatividade $r_0^2(SE)$ (PITARD, 2019), conforme equação abaixo:

$$r^2(SE) = m^2(SE) + \sigma^2(SE) \leq r_0^2(SE) \quad (16)$$

É importante ressaltar que, mesmo que a amostra final seja representativa do lote, o lote pode não ser representativo do corpo de minério. Portanto, a representatividade pode ser dividida em dois aspectos:

- I. Representatividade *in situ*;
- II. Representatividade das sub-amostras.

A análise do aspecto I pode feita pela coleta e estudo de múltiplas amostras de campo, furos gêmeos ou testes de viés; já o aspecto II pode ser modelado pela aplicação da equação do erro fundamental de amostragem (FSE) após cominuição do material, testes de viés e estudo de possíveis erros sistemáticos (DOMINY, 2021).

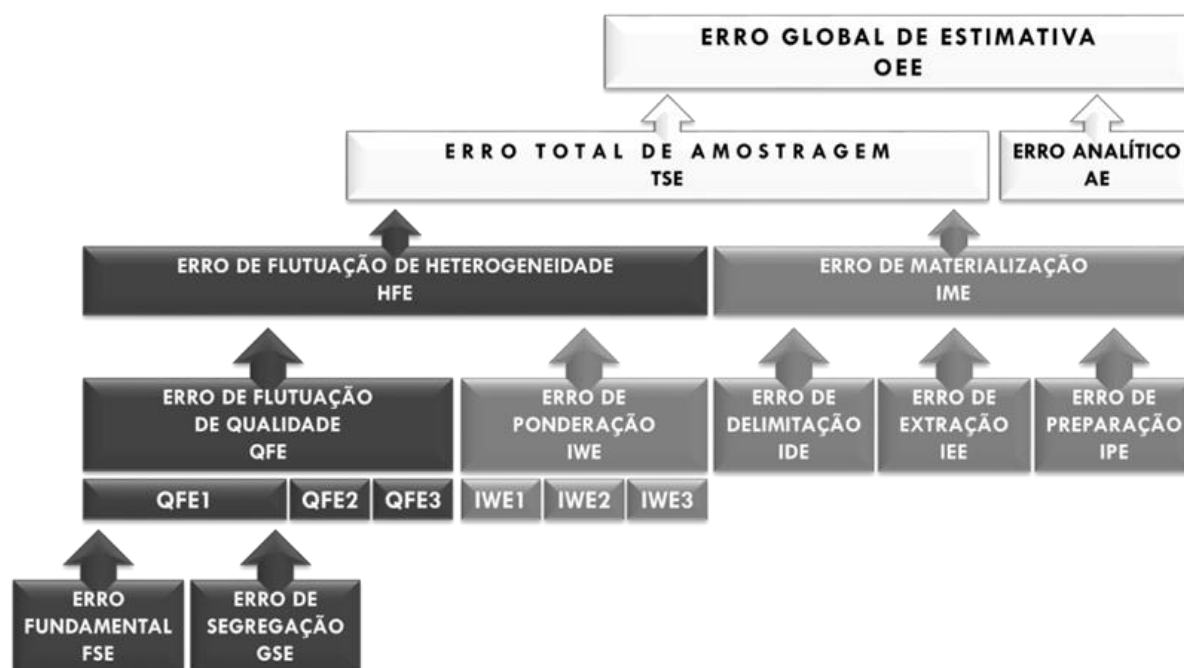
3.3 AMOSTRAGEM EQUIPROBABILÍSTICA

A amostragem probabilística corresponde a um processo amostral que é conduzido de forma que todas as partículas do lote, de um determinado tamanho e composição, têm a mesma probabilidade de fazerem parte da amostra (LYMAN, 2019).

3.4 ERROS DE AMOSTRAGEM

A somatória de erros independentes é o que define o erro total de amostragem. A Figura 2 apresenta os erros ou incertezas que compõem erro global de estimativa.

Figura 2 - Componentes do erro global de estimativa



Fonte: Chierigati e Pitard (2018), p. 38

3.4.1 Erro fundamental de amostragem (FSE)

Se os fragmentos têm a mesma probabilidade de seleção e a amostragem é aleatória, surge um erro de amostragem devido à diferença entre o teor do lote e o da amostra. Esse erro é chamado de ‘erro fundamental de amostragem’ (*Fundamental Sampling Error* ou FSE), considerado o menor erro existente se o processo amostral for ideal. (FRANÇOIS-BONGARÇON; GY, 2002 *apud* CHIEREGATI E PITARD, 2018).

O erro fundamental é caracterizado por sua variância, calculada pela “fórmula de Gy”, representada a seguir (GY, 1967 *apud* CHIEREGATI E PITARD, 2012).

$$s_{FSE}^2 = \left(\frac{1}{M_s} - \frac{1}{M_L} \right) \times f \times g \times c \times l \times d^3 \quad (17)$$

Sendo:

- s_{FSE}^2 a variância relativa do erro fundamental de amostragem;
- d o tamanho máximo dos fragmentos, ou d_{95} ;
- c o fator mineralogia, calculado por:

$$c = \gamma_M \frac{(1 - a_L)^2}{a_L} + \gamma_g(1 - a_L) \quad (18)$$

- γ_M é a densidade do mineral de interesse;
- γ_g é a densidade média dos minerais de ganga;
- a_L é o teor do mineral de interesse no lote, em decimal;
- f é o fator forma, onde:
 - $f = 0,1$ para minerais laminares;
 - $f = 0,2$ para materiais moles e submetidos a tensões mecânicas;
 - $f = 0,5$ para a maioria dos minerais;
 - $f = 0,523$ para fragmentos esféricos;
 - $1 < f < 10$ para minerais aciculares;
- g é o fator granulometria, onde:
 - $g = 0,25$ para minerais não calibrados;
 - $g = 0,55$ para materiais calibrados;
 - $g = 0,75$ para materiais naturalmente calibrados;
- l é o fator liberação: as formas de calcular esse fator são diversas, mas a prática comum é atribuir um valor de acordo com o grau de heterogeneidade do material:
 - $l = 0,05$ para materiais muito homogêneos;
 - $l = 0,10$ para materiais homogêneos;
 - $l = 0,20$ para materiais medianos;
 - $l = 0,40$ para materiais heterogêneos;
 - $l = 0,80$ para materiais muito heterogêneos;
- M_s é a massa da amostra;
- M_L é a massa do lote.

O FSE é, então, uma função das principais características do minério: tamanho, forma, liberação dos minerais, composição mineralógica e massa dos materiais amostrados. Este erro não pode ser eliminado, porém, testes de heterogeneidade permitem estimar o FSE e garantir que amostras de massas corretas sejam coletadas, minimizando o FSE em cada etapa de amostragem (MINNITT, 2022).

3.4.2 Erro de segregação e agrupamento (GSE)

Quando se coleta um incremento para formar uma amostra, ele é composto por vários fragmentos, logo, a amostra não é composta por fragmentos aleatórios e sim por grupos aleatórios de fragmentos. Surge, então, um erro denominado 'erro de segregação e agrupamento' (*Grouping and Segregation Error* ou GSE) (CHIEREGATI, 2007). Por consequência, quanto maior o grupo de fragmentos, maior será esse erro.

O GSE pode ser identificável, quantificado e medido, em termos de variância relativa e é, principalmente, uma função da densidade e do tamanho da partícula. Considera-se que a relação principal entre a precisão da amostragem e a densidade do material é fortemente influenciada pelo GSE, sendo os materiais mais densos os que mais contribuem para o GSE. Em casos extremos, a variância do GSE pode ser até quatro vezes maior que a do FSE (MINNITT, 2022).

3.4.3 Erro de flutuação de heterogeneidade (HFE)

Segundo Chierigati e Pitard (2018), o 'erro de flutuação de heterogeneidade' (*Heterogeneity Fluctuation Error* ou HFE) é calculado como a soma de outros dois erros complementares:

- Erro de flutuação da qualidade (QFE), relacionado à variação de teor;
- Erro de flutuação da quantidade ou erro de ponderação (IWE), relacionado à variação de massa.

Ambos os erros têm três componentes de heterogeneidade (1, 2 e 3) que podem ser classificados como:

- 1) Componente aleatório: efeitos de curto prazo;
- 2) Componente não aleatório: efeitos de longo prazo;
- 3) Componente periódico: efeitos cíclicos.

É importante ressaltar que o erro fundamental da amostragem (FSE) e o erro de segregação e agrupamento (GSE) estão inclusos no componente de curto prazo. O erro de ponderação é desprezível se a amostragem respeitar as proporções existentes na população.

3.4.4 Erro de materialização do incremento (IME)

Define-se o 'erro de materialização do incremento' (*Increment Materialization Error* ou IME) como a soma dos erros de delimitação (IDE), extração (IEE) e preparação (IPE) do incremento. Esses erros são oriundos da materialização dos grupos de fragmentos que compõem os incrementos de uma amostra, ou seja, do processo de seleção dos pontos dentro de um domínio de interesse (CHIEREGATI E PITARD, 2018).

3.4.5 Erro total de amostragem (TSE)

O 'erro total de amostragem' (*Total Sampling Error* ou TSE) é a soma do erro de flutuação da heterogeneidade (HFE) com o erro de materialização do incremento (IME) (CHIEREGATI E PITARD, 2012).

3.4.6 Erro analítico (AE) e erro global de estimativa (OEE)

O 'erro analítico' (*Analytical Error* ou AE) é o erro gerado por operações analíticas, como: determinação de umidade, análises químicas, entre outras. Este erro faz parte do erro global de estimativa, porém não do erro total de amostragem. (CHIEREGATI E PITARD, 2018).

O 'erro global de estimativa' (*Overall Estimation Error* ou OEE) é a soma do erro total de amostragem (TSE) com o erro analítico (AE) (CHIEREGATI E PITARD, 2012).

3.5 A TEORIA DA AMOSTRAGEM

A Teoria da Amostragem (*Theory of Sampling* ou TOS), criada por Pierre Gy, visa ao controle dos componentes do erro total de amostragem para a confiabilidade dos resultados. Ou seja, se o processo amostral respeitar os aspectos científicos e os parâmetros predeterminados, o único erro remanescente será o erro fundamental de amostragem, relacionado à heterogeneidade constitucional do minério (GY, 1998).

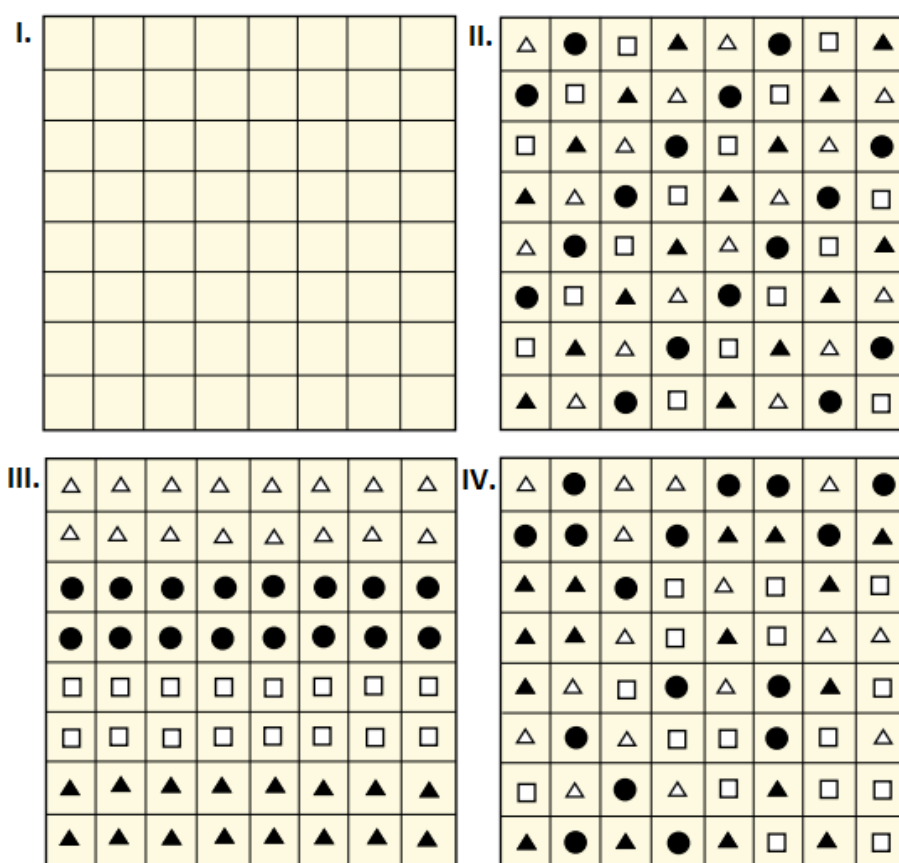
3.5.1 Heterogeneidade ou homogeneidade?

Um lote tem constituição homogênea quando todas suas unidades são estritamente idênticas, logo, sua constituição heterogênea se dá quando suas unidades não são estritamente idênticas. As unidades podem ser completamente ou parcialmente

idênticas, dependendo das propriedades a serem consideradas. Em suma, a heterogeneidade pode ser escrita como um escalar ou função, enquanto a homogeneidade seria o caso limite, como valor zero (PITARD, 2019).

Na Figura 3, extraída de Pitard (2019), tem-se a representação de um lote formado por 64 quadrados, nas situações I, II, III e IV, descritas a seguir.

Figura 3 - Ilustração da definição de heterogeneidade



Fonte: Pitard (2019), p. 107 a 109

Segundo Pitard (2019), observa-se, então:

- I. Constituição e distribuição homogênea;
- II. Constituição heterogênea e distribuição modular homogênea: a unidade é diferente de quatro quadrados adjacentes, horizontalmente ou verticalmente;
- III. Constituição e distribuição heterogênea, segregação perfeita das unidades;
- IV. Constituição heterogênea e distribuição naturalmente homogênea: as unidades têm distribuição aleatória, ou seja, não há relação entre conteúdo e posição.

3.5.2 Heterogeneidade intrínseca

A heterogeneidade intrínseca (IH, do inglês *intrinsic heterogeneity*), ou constitucional (CH, do inglês *constitution heterogeneity*), é o componente da heterogeneidade conduzido pelas diferenças entre tamanho de partículas e variação na composição entre uma partícula e outra. Quanto maior a diferença entre a quantidade de analito alvo (ou teor) nas partículas, maior será o valor do IH. Normalmente, quanto maior o tamanho da partícula, maior o IH. Por exemplo, uma jarra que contém seixos de mármore branco, com o mesmo tamanho, massa e composição química, possui um IH igual a zero. Já uma jarra que contém seixos de mármore branco e preto, de mesmo tamanho, possui IH positivo. O IH não pode ser negativo pois é uma variância (LYMAN, 2019).

Para um conjunto de unidades que formam um lote, localizadas em um ambiente físico e/ou químico definido e estável, a heterogeneidade constitucional é bem definida e constante, logo, a homogeneização não tem nenhum efeito sobre as unidades e o IH associado a elas (PITARD, 2019).

3.5.3 Heterogeneidade distribucional

A heterogeneidade distribucional (DH, do inglês *distribution heterogeneity*) relaciona a heterogeneidade que deriva da variação de concentração de um analito alvo com a posição dos fragmentos no lote amostrado. Por exemplo, se o lote é uma pilha, DH está diretamente relacionado com a posição, mas se o lote é uma massa transportada por um transportador de correia, a 'posição' se transforma em 'tempo' (LYMAN, 2019).

3.6 TESTE DE HETEROGENEIDADE PADRÃO

O teste de heterogeneidade padrão, proposto por Gy (1967) e Pitard (1993), consiste na coleta manual de fragmentos aleatórios, um a um individualmente, dentro de uma mesma faixa granulométrica, simulando um procedimento ideal de amostragem. Para tal, os lotes são homogeneizados e distribuídos em uma superfície lisa, de forma que todos os fragmentos sejam acessíveis e tenham igual probabilidade de seleção. Essa distribuição é feita sobre uma malha previamente desenhada sobre a mesa e, para

cada amostra, é selecionado um fragmento de cada célula da malha. O procedimento é realizado para diferentes frações granulométricas.

A condição inicial para que um lote seja adequado ao teste de heterogeneidade é:

$$n > 10 \times Q \times p \quad (19)$$

Ou seja, o número de fragmentos n presente em cada fração granulométrica deve ser maior que 10 vezes o número de grupos coletados p multiplicado pelo número de fragmentos Q coletados por grupo.

Após a coleta das amostras, os grupos são pesados e analisados quimicamente.

3.7 ESTIMATIVA DA HETEROGENEIDADE INTRÍNSECA

I. Pitard (1993)

A fórmula de Gy (Equação 17), apesar de permitir o cálculo da variância do erro fundamental de amostragem em qualquer etapa do processo e qualquer tamanho de partícula, é limitada pela dificuldade de se definirem alguns fatores de Gy para o minério a ser estudado. A melhor maneira de se usar a fórmula de Gy é calibrá-la para cada tipo de minério e, para isto, realiza-se o teste de heterogeneidade para estimar as constantes K (multiplicação dos fatores de Gy) e α (expoente da fórmula cúbica original de Gy), utilizadas na fórmula a seguir:

$$s_{FSE}^2 = K d^\alpha \left(\frac{1}{M_s} - \frac{1}{M_L} \right) \quad (20)$$

Para se estimarem as constantes K e α é necessário calcular o 'fator constante de heterogeneidade constitucional' ou 'heterogeneidade intrínseca do lote' (IH_L) para diferentes valores de diâmetro nominal dos fragmentos (d).

O fator IH_L pode ser estimado pela fórmula simplificada proposta por Pitard (1993, cap. 11, item 11.4.1):

$$EST\ IH_L = g \sum_i \frac{(a_i - a_L)^2 M_S^2}{a_L^2 M_L} \quad (21)$$

Sendo:

- g = fator granulometria (explicado no item 3.4.1.);
- a_i = teor da amostra;
- a_L = teor médio do lote:

$$a_L = \frac{1}{M_L} \sum a_i \times M_s \quad (22)$$

- M_s = massa da amostra;
- M_L = massa média do lote.

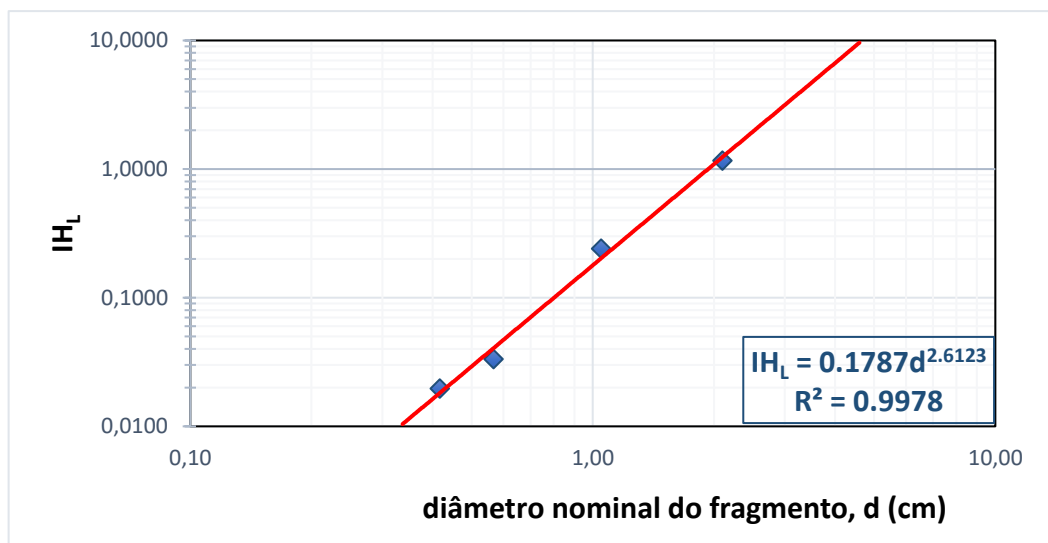
Já para o diâmetro nominal, utiliza-se a seguinte equação:

$$d = \sqrt[3]{\frac{d_1^3 + d_2^3}{2}} \quad (23)$$

Sendo d_1 e d_2 as aberturas das malhas utilizadas no peneiramento (superior e inferior), em centímetros.

Com os dados de $EST IH_L$ e d obtidos, traça-se um gráfico di-log, no qual é possível estimar K e α através da linha de tendência de potência, como pode ser observado na Figura 4.

Figura 4 - Exemplo de gráfico di-log com resultados do Teste de Heterogeneidade Padrão



Fonte: adaptado de Chiaregati, et.al (2023)

II. Lyman (2022)

Lyman (2022) sugere uma mudança na fórmula de estimativa do fator IH_L , agora chamado de IH_C , baseado no fato de que não está claro que a heterogeneidade intrínseca estimada provém do lote ou dos grupos de partículas. A fórmula modificada é, considerando a constante de heterogeneidade intrínseca (IH_C), então:

$$IH_C = g \sum_{j=1}^{N_G} \frac{(a_j - a_G)^2 M_j^2}{a_G^2 M_G} \quad (24)$$

Onde:

- g = fator granulometria (explicado no item 3.4.1.);
- a_j = teor de um grupo de partículas;
- M_j = massa de um grupo de partículas;
- M_G = massa do total dos N_G grupos;
- a_G = teor médio dos grupos, dado por:

$$a_G = \frac{1}{M_G} \sum_{j=1}^{N_G} a_j \times M_j \quad (25)$$

Considerando a fração mássica, y_j , do j -ésimo grupo dentro dos N_G grupos como:

$$y_j = \frac{M_j}{M_G} \quad (26)$$

Pode-se escrever o IH_C como:

$$IH_C = \frac{g}{a_G^2} \sum_{j=1}^{N_G} y_j M_j (a_j - a_G)^2 \quad (27)$$

Se todos os grupos são escolhidos de uma única fração granulométrica e o número de partículas (n) é o mesmo para todos os grupos, então a massa dos grupos será similar e pode-se escrever M_j como \overline{M}_j bem como y_j será \overline{y}_j . O IH_C é simplificado, então:

$$IH_C = \frac{g}{a_G^2} \bar{y}_J \bar{M}_J \sum_{J=1}^{N_G} (a_J - a_G)^2 \quad (28)$$

Além disso, devido às massas similares, a fração mássica pode ser aproximada por:

$$\bar{y}_J \approx \frac{1}{N_G} \quad (29)$$

Então:

$$IH_C = \frac{g}{a_G^2} \bar{M}_J \sum_{J=1}^{N_G} \frac{(a_J - a_G)^2}{N_G} \quad (30)$$

Os termos somatórios agora podem ser reconhecidos como a variância da média de teor de analitos dos grupos em torno da média de teor de todos os grupos.

Se as partículas possuem a mesma densidade, ρ_{ij} , a massa da partícula será \bar{m}_i . Logo, a massa média do grupo de n partículas será dada por:

$$\bar{M}_J = n\bar{m}_i \quad (31)$$

Então,

$$IH_C = \frac{g}{a_G^2} \frac{n\bar{m}_i}{N_G} \sum_{J=1}^{N_G} (a_J - a_G)^2 \quad (32)$$

A Equação 32 é estatisticamente igual à fórmula da variância \hat{s}_x^2 de uma variável x com N observações:

$$\hat{s}_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{x})^2 \quad (33)$$

III. Comparação (LYMAN, 2022)

O FSE é a variância relativa associada à extração de uma massa M_s de um lote M_L . A fórmula de Gy, de maneira geral, pode ser expressa por:

$$\sigma_{FSE}^2 = \frac{var \{a_S\}}{a_L^2} = \left[\frac{1}{M_S} - \frac{1}{M_L} \right] \sum_{i=1}^{N_S} x_i v_i \sum_{j=1}^{N_C} \rho_{ij} y_{ij} \left(\frac{a_{ij} - a_L}{a_L} \right)^2 \quad (34)$$

Onde x_i é a fração mássica do lote que pertence a i -ésima fração granulométrica, v_i é o volume médio da partícula na i -ésima fração granulométrica, ρ_{ij} é a densidade da partícula de composição j na fração i , y_{ij} é a fração mássica das partículas de composição j e fração granulométrica i , a_{ij} é o teor médio das partículas e a_L é o teor médio do lote, composto por todas as frações granulométricas. Lyman (2019) ressalta que a fórmula de Gy, encontrada em Pitard (1993) é expressa em termos de massa de partícula e massa de fração granulométrica, mas o resultado é o mesmo.

A vantagem da forma escrita nesse trabalho é que a variância é expressa nos termos de quantidade, que são os resultados apresentados nas análises granulométricas e químicas. A massa de uma partícula, que pertence à fração granulométrica i e composição j , é escrita por:

$$m_{ij} = v_i \rho_{ij} \quad (35)$$

O volume da partícula é dado por:

$$v_i = f \left(\frac{d_1^3 + d_{i-1}^3}{2} \right) \quad (36)$$

Onde f é o fator forma, geralmente considerado 0,5. Se as frações granulométricas diminuem, em massa, pela metade, o volume será reduzido por um fator 8, o que torna a diferença de composição das frações mais grossas como o fator dominante no cálculo da variância do erro fundamental. Então, a heterogeneidade intrínseca, para cada fração granulométrica, pode ser definida como:

$$IH_i = \sum_{j=1}^{N_C} \rho_{ij} y_{ij} \left(\frac{a_{ij} - a_L}{a_L} \right)^2 \quad (37)$$

Para que as equações (32) e (37) sejam expressas nas mesmas unidades, é necessário multiplicar o IH_i por v_i , então:

$$IH_i v_i = \frac{\overline{m}_i}{a_G^2} \sum_{j=1}^{N_C} p_{ij} (a_{ij} - a_L)^2 \quad (38)$$

Considerando, então, o caso extremo onde a partícula carrega ou não o analito de interesse, o teor do lote a_L é igual à probabilidade de seleção da partícula, p .

$$\sum_{j=1}^2 p_{ij} (a_{ij} - a_L)^2 = (1-p)(0-p)^2 + p(1-p)^2 = p \quad (39)$$

Se a_j é o teor dos grupos de n partículas, a variância de x é a variância binomial média do teor de n partículas, dada por:

$$\sigma_x^2 = \frac{p(1-p)}{n} \quad (40)$$

Logo,

$$\sum_{j=1}^{N_G} (a_j - a_G)^2 = (N_G - 1) \frac{p(1-p)}{n} \quad (41)$$

A Equação 41 evidencia a importância do número de partículas, bem como do número de grupos.

Outra questão a ser considerada é o uso do teor do grupo a_G , ao invés do teor do lote a_L . O uso do teor das frações granulométricas usadas no teste de heterogeneidade, ao invés do teor do lote, tende a causar uma subestimativa da heterogeneidade, como no caso das frações mais finas que normalmente têm um teor maior do analito de interesse que as frações mais grossas. A diferença entre os ensaios em grupo e a média dos grupos será menor que a diferença entre o ensaio do grupo e o ensaio do lote. A fórmula seria, então:

$$\frac{1}{N_G} \sum_{j=1}^{N_G} (a_j - a_G)^2 = \frac{1}{N_G} \sum_{j=1}^{N_G} (a_j - a_L)^2 + (a_G - a_L)^2 \quad (42)$$

4 METODOLOGIA

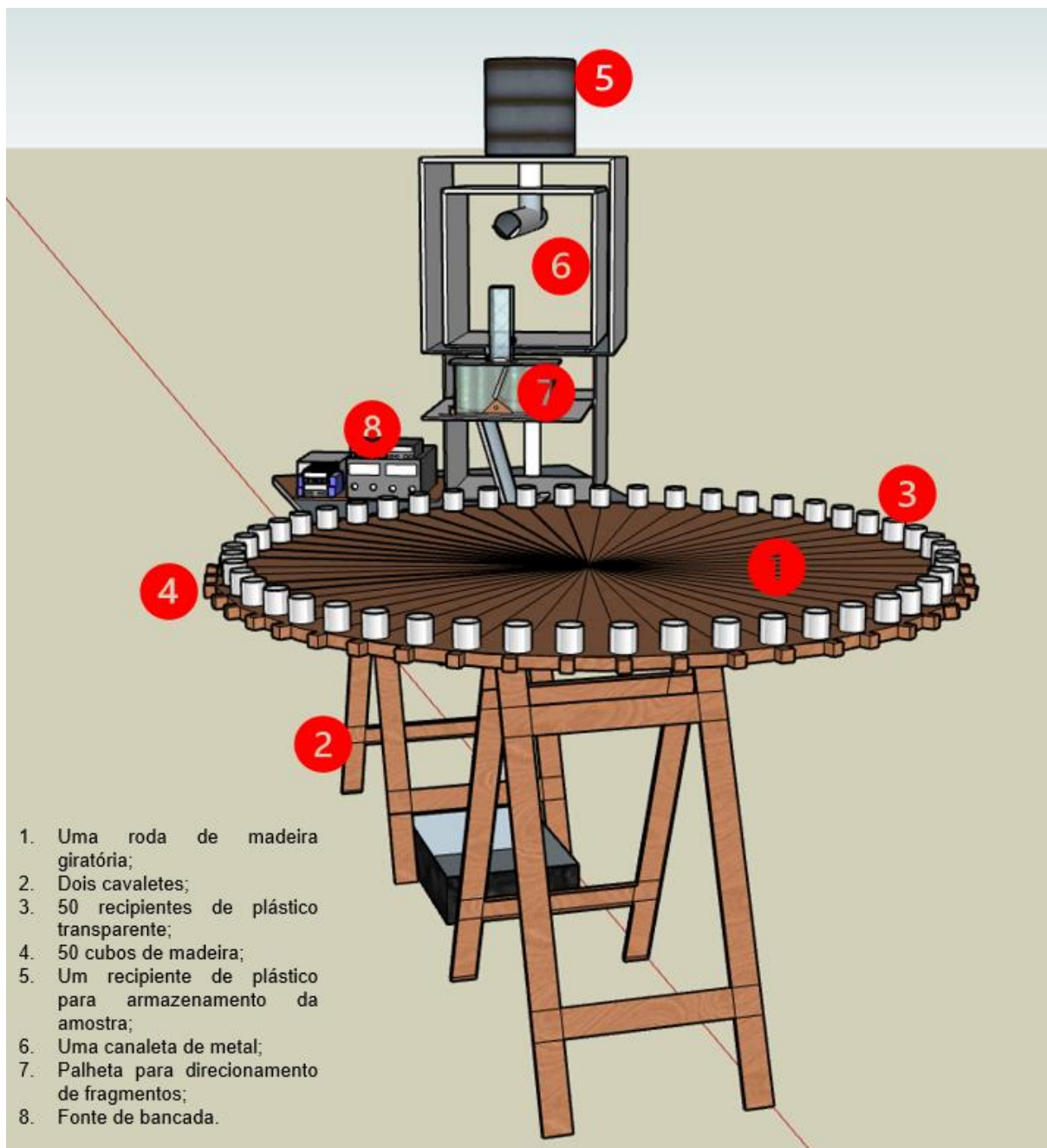
4.1 PROTÓTIPO: *INTRINSIC HETEROGENEITY TESTER (IHT)*

4.1.1 Descrição dos elementos

O protótipo desenvolvido para automatizar teste de heterogeneidade pode ser visto como um robô, composto por:

- Uma roda de madeira giratória de diâmetro igual a 130 cm;
- Quatro rodinhas de plástico de diâmetro igual a 5 cm;
- Uma mesa de madeira com 175 cm de comprimento e 72 cm de largura;
- Dois cavaletes com 80 cm de altura, 80 cm de largura e 45 cm de abertura;
- 50 recipientes de 150 mL de plástico transparente;
- 50 cubos de madeira com arestas de 2 cm;
- Um recipiente de plástico de 10 L para armazenamento da amostra;
- Dois cubos de madeira vazados com arestas de 32 cm;
- Um cubo de madeira vazado com arestas de 40 cm;
- Duas chapas quadradas de madeira com 32 cm;
- Uma canaleta de metal de 54 cm;
- Um paralelepípedo de vidro vazado com 15 cm;
- Duas palhetas para direcionamento de fragmentos e travamento da mesa;
- Três tubos de PVC de 2 polegadas;
- Um emissor e um receptor de laser;
- Dois espelhos;
- Uma fonte de bancada;
- Dois contadores digitais;
- Dois contadores digitais com predeterminador;
- Uma ventoinha;
- Um interruptor.

Nas Figuras 4 a 7 são apresentadas as vistas do projeto do IHT e fotos do protótipo já construído.

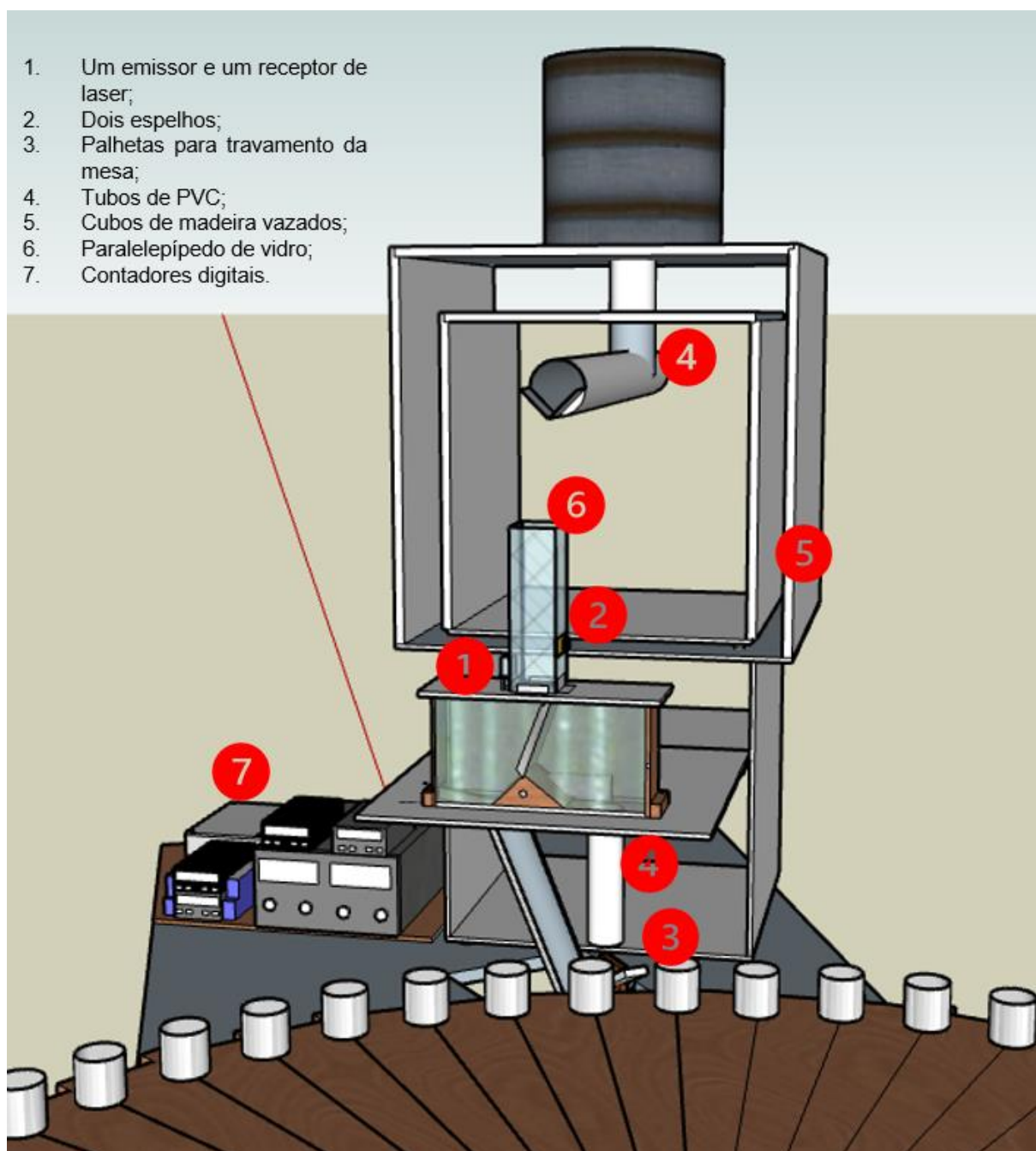
Figura 5 - Desenho esquemático do *Intrinsic Heterogeneity Tester*

Fonte: Acervo da autora

Figura 6 - Visão geral do *Intrinsic Heterogeneity Tester*

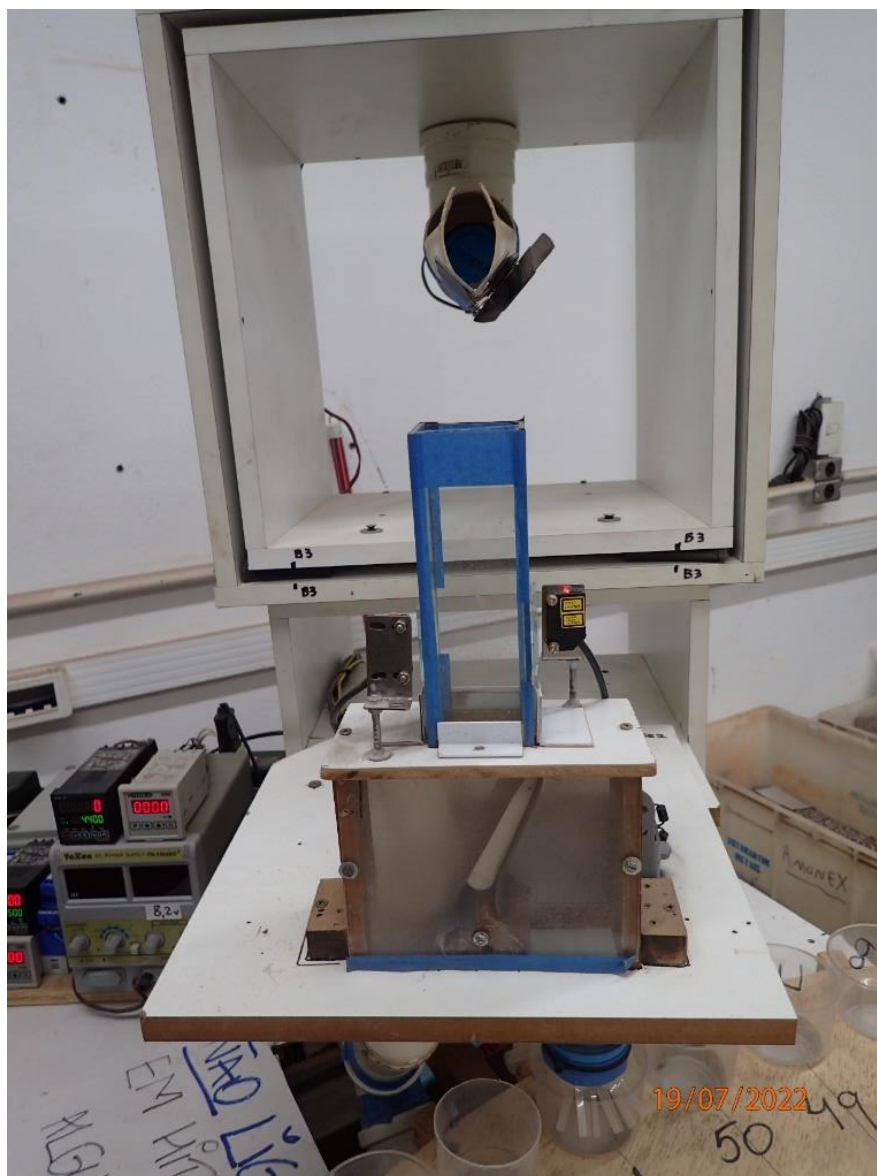
Fonte: Acervo da autora

Figura 7 - Desenho detalhado da descarga



Fonte: Acervo da autora

Figura 8 - Vista detalhada da descarga



Fonte: Acervo da autora

4.1.2 Funcionamento do protótipo

Antes de ligar o protótipo, a amostra a ser testada deve ser colocada dentro do recipiente de armazenamento. O protótipo é iniciado através de seu interruptor, que liga o laser e a fonte de bancada. Ao acionar a fonte de bancada, os contadores são acionados e inicia-se a vibração da calha para que os fragmentos sejam direcionados, em linha, um a um, até a descarga.

Os fragmentos caem da calha e passam pelos emissores de laser, que estão vinculados ao contador parcial, responsável pela contagem dos fragmentos em queda. Essa contagem ocorre até que se atinja o número ' n ' predefinido pelo operador e, imediatamente, aciona a palheta para direcionar o n -ésimo fragmento lido pelo laser ao recipiente de plástico posicionado sob a descarga da amostra. Os demais fragmentos são direcionados ao chute de descarga do rejeito. O contador parcial informa ao contador total que o fragmento foi coletado. A contagem do laser aciona, também, a palheta que trava a mesa e o motor da roda de madeira, girando a roda e direcionando o próximo recipiente de plástico sob a descarga da amostra. Esse processo se repete até que sejam coletados os fragmentos definidos pelo operador para cada recipiente e, então, o contador total de fragmentos desativa a fonte de bancada.

Em um exemplo prático e resumido, considera-se o contador parcial predefinido para 10 fragmentos (coleta de 1 fragmento a cada 10 que passam pelo contador laser) e o contador total para 100 (coleta de 100 fragmentos no total). Neste exemplo, ao ligar o protótipo e iniciar a vibração da calha, os fragmentos começam a cair e se inicia a contagem no contador parcial. Quando o décimo fragmento passa pelo laser, a palheta direciona o fragmento para o recipiente plástico da amostra e o motor da roda a faz girar $7,2^\circ$ (distância angular entre dois recipientes consecutivos), posicionando o próximo recipiente abaixo da descarga da amostra. Simultaneamente, o contador parcial informa ao contador total que a contagem chegou a 10. Neste ponto, o contador total passa de 0 a 1 e o parcial reinicia a contagem no 0, até atingir novamente 10 e coletar o próximo fragmento. Este procedimento se repete até que o contador total chegue a 100 (100 fragmentos coletados). No fim deste teste, cada um dos 50 recipientes plásticos deverá conter 2 fragmentos.

O painel de controle, representado na Figura 9, consiste em uma fonte de bancada, dois contadores simples e dois contadores com predeterminador. Enquanto os contadores sobre a fonte são utilizados para contar os fragmentos, os contadores à esquerda da fonte são utilizados para contar o tempo de resposta do motor e da palheta da roda.

Figura 9 - Vista detalhada do painel de controle

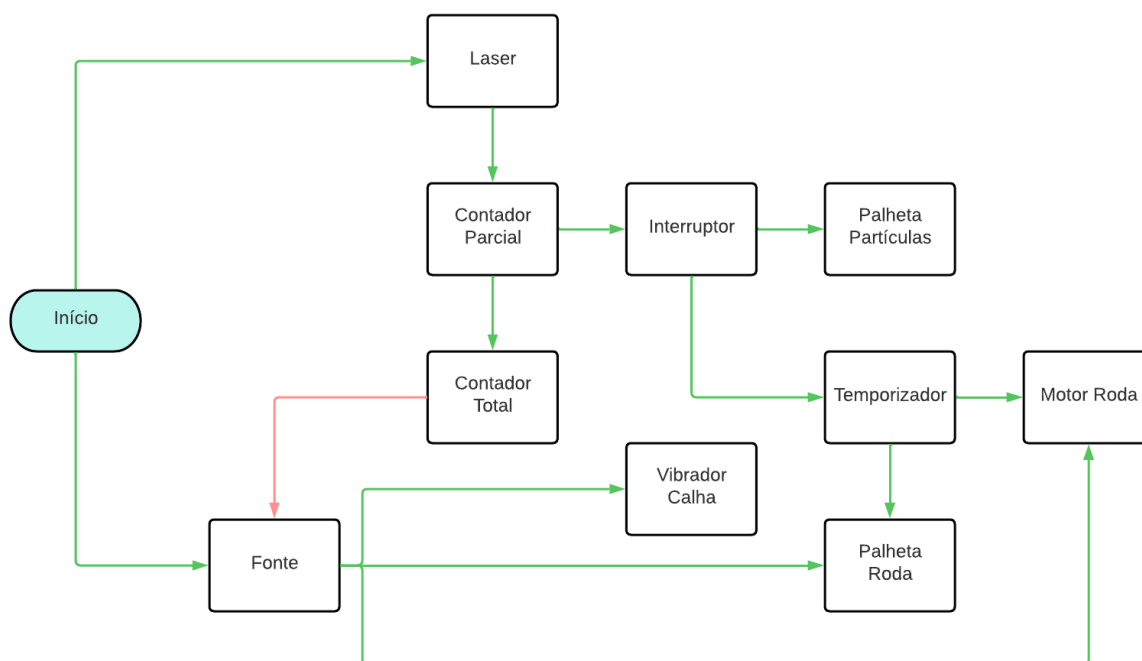


Fonte: Acervo da autora

O diagrama de blocos da Figura 10 representa a linguagem gráfica para os controladores lógicos programáveis. As setas em verde indicam a sequência de comandos para acionar, enquanto a seta vermelha indica o único comando para desligar.

Figura 10 - Diagrama de blocos do *Intrinsic Heterogeneity Tester*

Diagrama de Bloco



Fonte: Acervo da autora

4.2 O “ESTUDO GARBANZO” – PARÂMETROS INICIAIS

O “Estudo Garbanzo” teve como objetivo analisar a variância de uma mesma amostra que passa diversas vezes pelo mesmo processo. Não é possível realizar esse teste com minério, uma vez que o processo de preparação e análise química é destrutivo e não permite que o teste seja refeito com a mesma amostra. O número de grãos coloridos em cada incremento é uma estimativa não enviesada da média do valor do lote. Se considerarmos que as amostras constituem um intervalo de valores apropriados e estatisticamente válidos, conclui-se que mais amostras fornecem uma melhor estimativa da média (MINNITT, 2022).

Sendo assim, foram selecionados alguns tipos de grãos para a realização do teste e, dentre eles, o grão de bico foi escolhido devido à sua superfície rugosa e por ter 12 mm de diâmetro, características mais próximas dos fragmentos de rocha que os demais grãos (feijões, favas), que apresentavam superfície lisa e comprimento entre 5 e 10 mm.

A amostra primária de grão de bico continha 25.460 g. Para a estimativa de massa de cada partícula foram pesados 100 grupos de 10 partículas não pintadas, o que resultou em uma massa média de partícula de 0,57113 g. O conteúdo das amostras está detalhado no Apêndice A.

4.3 TESTE B

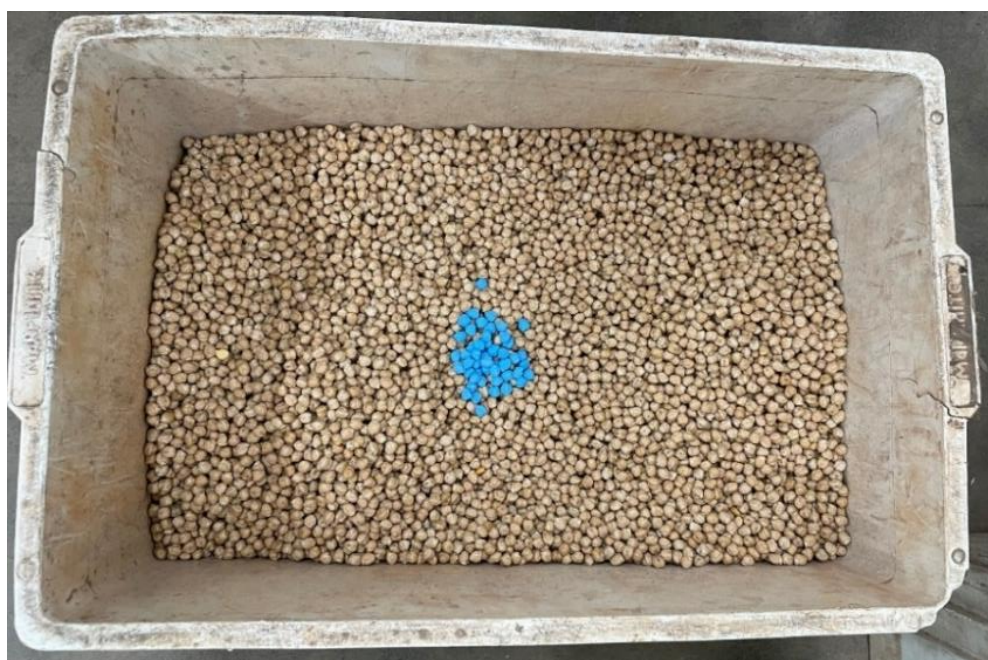
O primeiro teste realizado, denominado “Teste B” (‘B’ de ‘baixo teor’), teve como objetivo simular um minério de baixo teor. Foram selecionadas 50 partículas da amostra primária, as quais foram pintadas de azul (Figura 11) e, posteriormente, voltaram à amostra primária, representada na Figura 12.

Figura 11 - Partículas azuis - Teste B



Fonte: Acervo da autora

Figura 12 - Amostra primária - Teste B



Fonte: Acervo da autora

A amostra de grão de bico foi misturada e colocada no reservatório do IHT. É importante ressaltar que 100% da amostra inicial foi utilizada na realização dos testes.

Através da massa estimada de uma partícula, calculou-se a quantidade total de partículas, que foi de, aproximadamente, 44.578 partículas. Considerando as 50 partículas pintadas de azul, o teor do lote com partículas azuis foi estimado em 0,11%. Conforme o item 3.6 apresentado anteriormente, a seleção deve ser feita de maneira que 1 partícula seja coletada a cada 10. Para atender a esse critério e com base na quantidade disponível de grãos de bico, estimou-se que cada um dos 50 grupos deveria ter 88 partículas.

O resumo dos parâmetros para realização do Teste B estão representados na Tabela 1.

Tabela 1 - Parâmetros Teste B

Número de partículas por grupo	88
Massa de uma partícula (g)	0,57113
Massa total (g)	25460
Número estimado de partículas	44578
Número de grupos	50
Número de partículas coletadas	4400
Chute	10,1314
Teor azul (%)	0,11%

Fonte: Elaboração própria

O Teste B foi realizado três vezes com a mesma amostra primária no IHT. Os testes foram, então, denominados B01, B02 e B03. Durante todos os testes, a vibração da calha de descarga de partículas foi controlada de acordo com a intensidade do fluxo, ou seja, quando o movimento das partículas na calha estava muito devagar, a vibração foi aumentada e quando o movimento estava muito rápido, a vibração foi diminuída. Este procedimento foi realizado para que o fluxo fosse constante na maior parte do tempo.

4.4 TESTE E

O segundo teste realizado, denominado “Teste E” (‘E’ de ‘experimental’), teve como objetivo simular um minério polimetálico com teor total de aproximadamente 45%. Para esse teste, as partículas foram selecionadas por massa. Foram 1.360,31 g de partículas cor de laranja (Figura 13), 2.637,58 g de partículas brancas (Figura 14) e

7.506,29 g de partículas azuis (Figura 15). As partículas sem cor representam, então, 13.955,82 g. A Figura 15 mostra todas as partículas misturadas no lote.

Figura 13 - Partículas cor de laranja -Teste E



Fonte: Acervo da autora

Figura 14 - Partículas brancas -Teste E



Fonte: Acervo da autora

Figura 15 - Partículas azuis -Teste E



Fonte: Acervo da autora

Figura 16 - Amostra primária - Teste E



Fonte: Acervo da autora

Considerando as massas das partículas pintadas, o teor do “mineral” azul foi estimado em 29,48%, o teor do “mineral” branco em 10,36% e o teor do “mineral” laranja em 5,34%. Conforme item 3.6 apresentado anteriormente, a seleção deve ser feita de maneira que 1 partícula seja coletada a cada 10. Para atender a este critério e com base na quantidade disponível de grãos de bico, estimou-se que cada um dos 50 grupos deveria ter 88 partículas. O Teste E foi realizado apenas uma vez no IHT. O resumo dos parâmetros para realização do Teste E estão representados na Tabela 2.

Tabela 2 - Parâmetros Teste E

Número de partículas por grupo	88
Massa de uma partícula (g)	0,57113
Massa total (g)	25460
Número estimado de partículas	44578
Número de grupos	50
Número de partículas coletadas	4400
Chute	10,1314
Teor azul (%)	29,48%
Teor branco (%)	10,36%
Teor laranja (%)	5,34%

Fonte: Elaboração própria

Durante o Teste E, a vibração da calha de descarga de partículas foi controlada de acordo com a intensidade fluxo.

4.5 TESTE P

O terceiro teste realizado, denominado “Teste P” (‘P’ de ‘polimetálico’), teve como objetivo simular um minério polimetálico com teor próximo ao teor real de uma mina polimetálica de Cu, Pb e Zn do Brasil. Para esse teste, as partículas foram selecionadas por massa. Utilizou-se a mesma massa de partículas brancas (Figura 17) do Teste E, ou seja, 2.637,58 g. A massa de partículas vermelhas foi de 260,44 g (Figura 18) e de partículas cor de laranja foi de 3.726,93 g (Figura 19). As partículas sem cor representam, então, 18.835,05 g. A Figura 19 mostra todas as partículas misturadas no lote.

Figura 17 - Partículas brancas -Teste P



Fonte: Acervo da autora

Figura 18 - Partículas vermelhas -Teste P



Fonte: Acervo da autora

Figura 19 - Partículas cor de laranja -Teste P



Fonte: Acervo da autora

Figura 20 - Amostra primária - Teste P



Fonte: Acervo da autora

Considerando as massas das partículas pintadas, o teor do “mineral” branco foi estimado em 10,36%, o teor do “mineral” laranja em 14,64% e o teor do “mineral” vermelho em 1,02%. Da mesma maneira que nos outros testes, cada um dos 50 grupos foi composto por 88 partículas. O resumo dos parâmetros para realização do Teste P são apresentados na Tabela 3. Ressalta-se que as partículas azuis da Figura 19 não foram consideradas um “mineral” diferente para o Teste P, mas somente as brancas, vermelhas e laranjas.

Tabela 3 - Parâmetros Teste P

Número de partículas por amostra	88
Massa de uma partícula (g)	0,57113
Massa total (g)	25460
Número estimado de partículas	44578
Número de grupos	50
Número de partículas coletadas	4400
Chute	10,1314
Teor branco (%)	10,36%
Teor laranja (%)	14,64%
Teor vermelho (%)	1,02%

Fonte: Elaboração própria

O Teste P foi realizado três vezes no IHT, com a mesma amostra primária. Os três testes foram, então, denominados P01, P02 e P03.

Diferentemente dos testes B e E, a vibração da calha de descarga de partículas se manteve constante durante cada Teste P. A vibração da calha é controlada pela tensão da fonte de bancada (U), e as tensões utilizadas foram as seguintes:

- Teste P01: $U = 6,7 \text{ V}$
- Teste P02: $U = 7,2 \text{ V}$
- Teste P03: $U = 6,5 \text{ V}$

É importante ressaltar que, quando a vibração da calha é constante, o fluxo de partículas tem velocidade oscilante. Decidiu-se, portanto, não ajustar essa velocidade durante cada um dos três testes P, visando: (i) verificar se o robô poderia trabalhar durante todo o teste sem intervenção humana e (ii) verificar a influência da vibração da calha na coleta dos fragmentos.

5 RESULTADOS

5.1 TESTE B

5.1.1 Distribuição Binomial – Teste B

Segundo Lyman (2019), a distribuição binomial ocorre quando ensaios independentes têm probabilidade p de sucesso e $(1 - p)$ de fracasso. Para os testes realizados neste estudo, as partículas têm ou não tem cor, logo, esta é a distribuição aqui representada.

Para um grupo de 44.578 partículas com 50 partículas azuis onde são coletadas 4.400 partículas, a probabilidade de sucesso é igual ao teor do lote, todavia, seu cálculo é dado a seguir:

$$p = \frac{50}{44578} * 100 = 0,11\%$$

O valor esperado de sucessos e a variância são:

$$E\{J\} = np = 4400 * 0,0011 = 4,9352$$

$$var\{J\} = np(1 - p) = 4400 * 0,0011 * (1 - 0,0011) = 4,9296$$

É natural que o valor esperado de sucesso e a variância sejam próximos, uma vez que a probabilidade de fracasso é significativamente maior que a de sucesso e, então, np se torna constante com o aumento de n .

Na Tabela 4, estão apresentados os resultados dos cálculos da função densidade de probabilidade (vide item 3.1.4.3) para o Teste B.

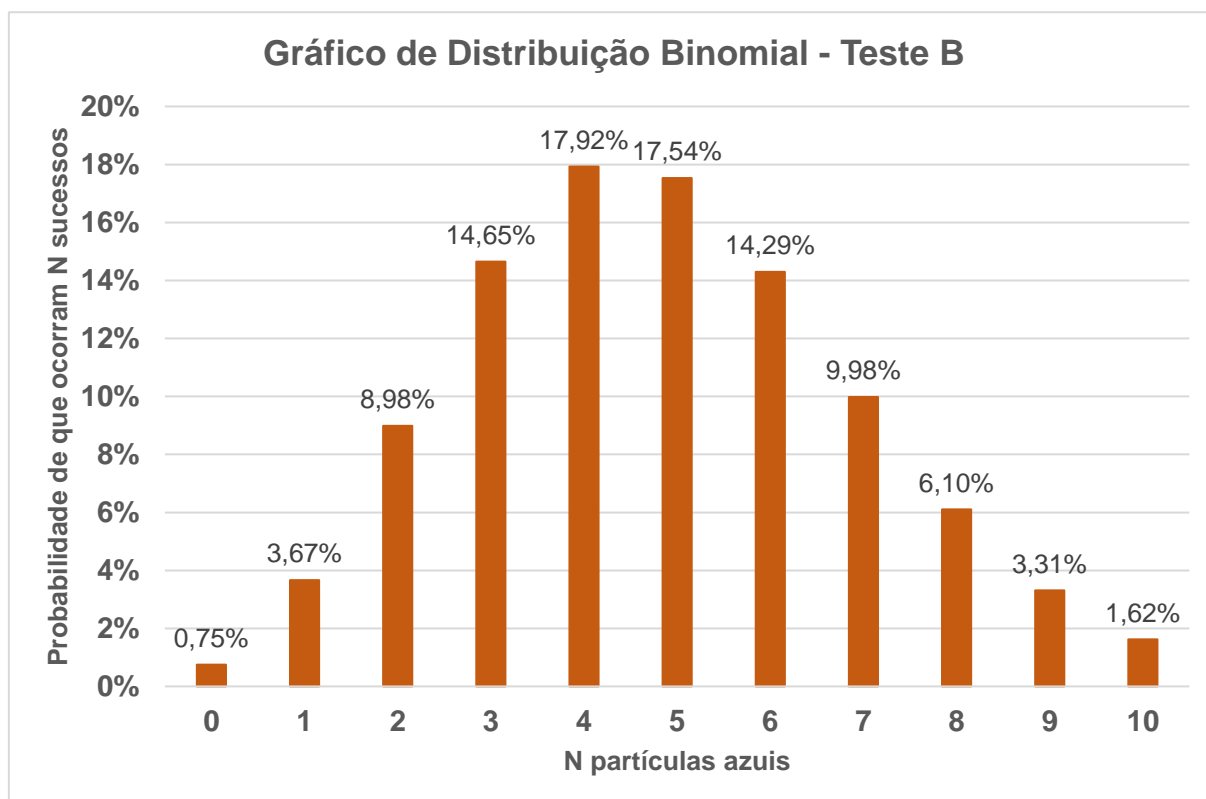
Tabela 4 - Probabilidades Teste B

	N partículas azuis										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Probabilidade de que ocorram N sucessos	0,72%	3,54%	8,75%	14,40%	17,78%	17,55%	14,43%	10,17%	6,27%	3,44%	1,69%
Probabilidade de que ocorram no máximo N sucessos	0,72%	4,26%	13,01%	27,41%	45,18%	62,73%	77,17%	87,34%	93,62%	97,05%	98,75%

Fonte: Elaboração própria

É possível observar que a maior probabilidade de sucesso está na coleta de 4 ou 5 partículas azuis, que são os valores inteiros ao redor do valor esperado de 4,8908. Na Figura 21, está representado o gráfico da distribuição binomial do Teste B.

Figura 21 - Distribuição binomial do Teste B



Fonte: Elaboração própria

5.1.2 Teste B01 – Resultados

O Teste B01 apresentou resultados estatisticamente satisfatórios. Foram coletadas 4.537 partículas com média de 90,74 partículas por amostra. Além disso, o Teste B01 coletou 5 partículas azuis, condizente com o projetado pela distribuição binomial. A Tabela 5 apresenta os resultados resumidos do teste; o conteúdo das amostras está detalhado no Apêndice B.

Tabela 5 - Resultados Teste B01

TESTE B01	
total de partículas coletadas	4537
partículas azuis coletadas	5
teor (%)	0,11%
máximo de partículas por amostra	96
mínimo de partículas por amostra	87
moda de partículas por amostra	91
média de partículas por amostra	90,74
variância de partículas por amostra	3,6724

Fonte: Elaboração própria

A Figura 22 apresenta as amostras coletadas pelo IHT no Teste B01. As partículas azuis se encontram nas amostras 1, 9, 12, 23 e 38.

Figura 22 - Amostras Teste B01



Fonte: Acervo da autora

5.1.3 Teste B02 – Resultados

O Teste B02 apresentou resultados estatisticamente satisfatórios. Foram coletadas 4.468 partículas com média de 89,36 partículas por amostra. Além disso, o Teste B02 coletou 4 partículas azuis, condizente com o projetado pela distribuição binomial. A Tabela 6 apresenta os resultados resumidos do teste; o conteúdo das amostras está detalhado no Apêndice B.

Tabela 6 - Resultados Teste B02

TESTE B02	
total de partículas coletadas	4468
partículas azuis coletadas	4
teor (%)	0,09%
máximo de partículas por amostra	94
mínimo de partículas por amostra	85
moda de partículas por amostra	90
média de partículas por amostra	89,36
variância de partículas por amostra	3,4704

Fonte: Elaboração própria

A Figura 23 apresenta as amostras coletadas pelo IHT no Teste B02. As partículas azuis se encontram nas amostras 3, 12, 34 e 37.

Figura 23 - Amostras Teste B02



Fonte: Acervo da autora

5.1.4 Teste B03 – Resultados

O Teste B03 apresentou resultados estatisticamente satisfatórios. Foram coletadas 4.523 partículas com média de 90,46 partículas por amostra. Além disso, o Teste B03 coletou 5 partículas azuis, condizente com o projetado pela distribuição binomial. A Tabela 7 apresenta os resultados resumidos do teste; o conteúdo das amostras está detalhado no Apêndice B.

Tabela 7 - Resultados Teste B03

TESTE B03	
total de partículas coletadas	4523
partículas azuis coletadas	5
teor (%)	0,11%
máximo de partículas por amostra	96
mínimo de partículas por amostra	85
moda de partículas por amostra	90
média de partículas por amostra	90,46
variância de partículas por amostra	5,4884

Fonte: Elaboração própria

A Figura 24 apresenta as amostras coletadas pelo IHT no Teste B03. As partículas azuis se encontram nas amostras 16, 21, 25, 42 e 47.

Figura 24 - Amostras Teste B03



Fonte: Acervo da autora

5.2 TESTE E

5.2.1 Distribuição Binomial – Teste E

Do mesmo modo que para o Teste B, no Teste E as partículas têm ou não têm cor, logo, a distribuição representada neste teste é, também, a binomial.

I. Partículas azuis

A amostra primária contém 25.460 g com 7.506,29 g de partículas azuis e são coletadas 4.400 partículas no total. Portanto, a probabilidade de sucesso é igual ao teor do lote, todavia, seu cálculo é apresentado a seguir:

$$p = \frac{7506,29}{25460} * 100 = 29,48\%$$

O valor esperado de sucessos e a variância são:

$$E\{J\} = np = 4400 * 0,2948 = 1297,12$$

$$var\{J\} = np(1 - p) = 4400 * 0,2948 * (1 - 0,2948) = 914,73$$

Para as partículas azuis, o valor esperado de sucesso e a variância não são próximos, uma vez que a probabilidade de fracasso não é significativamente maior que a de sucesso.

Na Tabela 8, estão apresentados os resultados dos cálculos da função densidade de probabilidade (vide item 3.1.4.3) para o Teste E – partículas azuis.

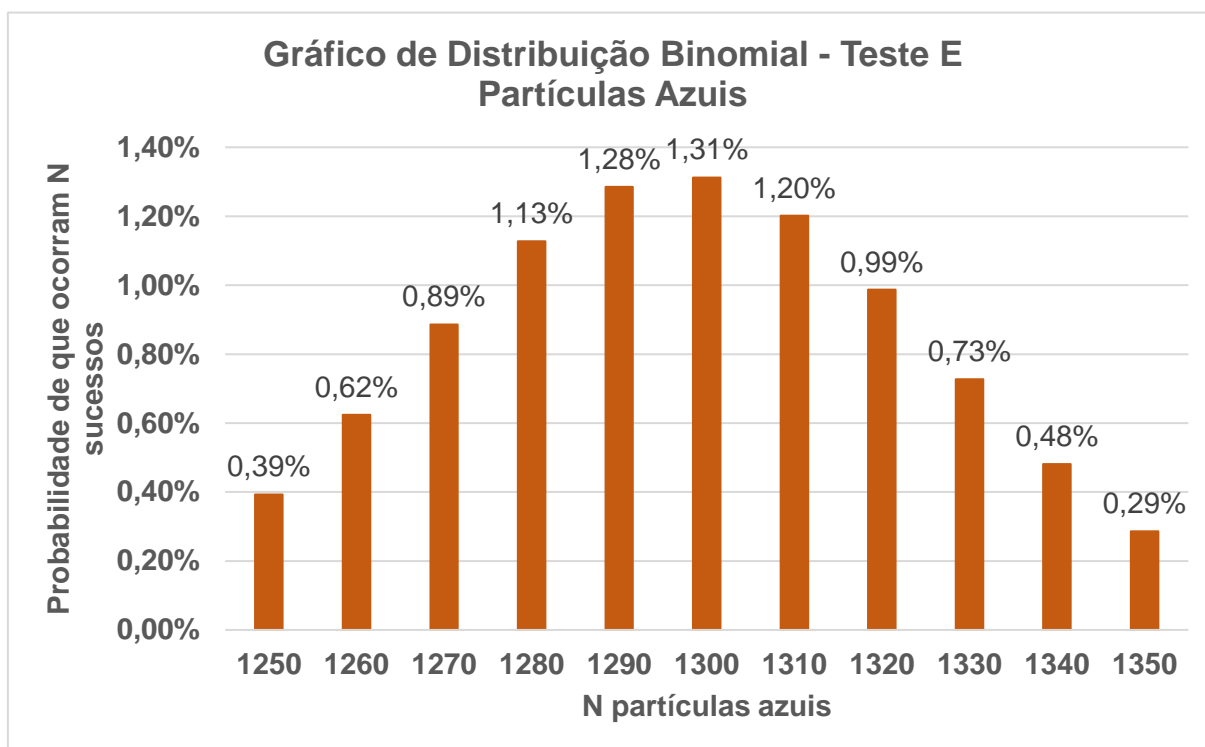
Tabela 8 - Probabilidades Teste E - partículas azuis

	N partículas azuis										
	1250	1260	1270	1280	1290	1300	1310	1320	1330	1340	1350
Probabilidade de que ocorram N sucessos	0,39%	0,62%	0,89%	1,13%	1,28%	1,31%	1,20%	0,99%	0,73%	0,48%	0,29%
Probabilidade de que ocorram no máximo N sucessos	6,12%	11,28%	18,95%	29,19%	41,42%	54,54%	67,16%	78,05%	86,50%	92,39%	96,08%

Fonte: Elaboração própria

É possível observar que a maior probabilidade de sucesso está no intervalo entre 1.290 e 1.300, o qual contém o valor esperado de 1.297,12. Na Figura 25, está representado o gráfico da distribuição binomial do Teste E para partículas azuis.

Figura 25 - Distribuição binomial do Teste E para partículas azuis



Fonte: Elaboração própria

II. Partículas brancas

A amostra primária contém 25.460 g com 2.637,58 g de partículas brancas e são coletadas 4.400 partículas no total. Portanto, a probabilidade de sucesso é igual ao teor do lote, todavia, seu cálculo é apresentado a seguir:

$$p = \frac{2637,58}{25460} * 100 = 10,36\%$$

O valor esperado de sucessos e a variância são:

$$E\{J\} = np = 4400 * 0,1036 = 455,84$$

$$var\{J\} = np(1 - p) = 4400 * 0,1036 * (1 - 0,1036) = 408,62$$

Para as partículas brancas, o valor esperado de sucesso e a variância não são próximos, uma vez que a probabilidade de fracasso não é significativamente maior que a de sucesso. Entretanto, nota-se que a diferença entre eles é menor nas partículas brancas que nas azuis, onde a probabilidade de sucesso é maior.

Na Tabela 9, estão apresentados os resultados dos cálculos da função densidade de probabilidade (vide item 3.1.4.3) para o Teste E – partículas brancas.

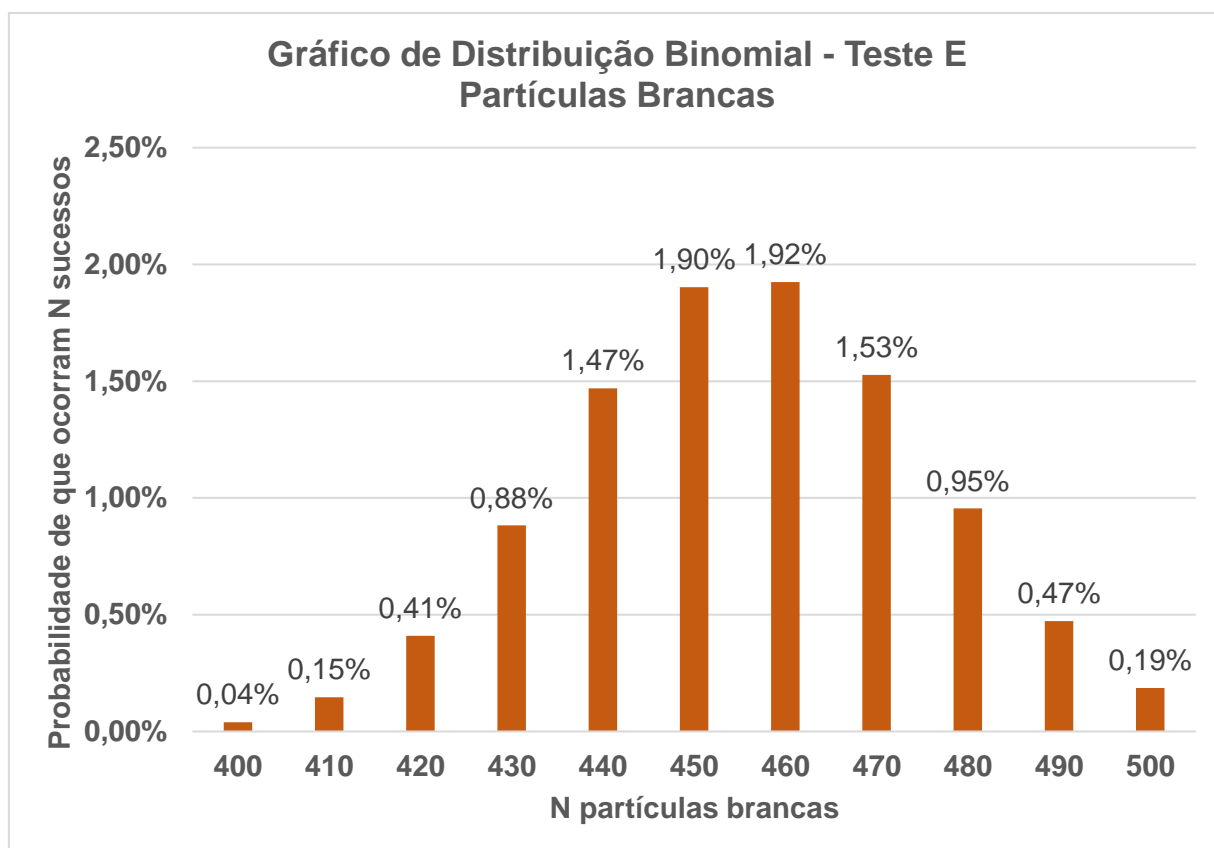
Tabela 9 - Probabilidades Teste E - partículas brancas

	N partículas brancas										
	400	410	420	430	440	450	460	470	480	490	500
Probabilidade de que ocorram N sucessos	0,04%	0,15%	0,41%	0,88%	1,47%	1,90%	1,92%	1,53%	0,95%	0,47%	0,19%
Probabilidade de que ocorram no máximo N sucessos	0,27%	1,16%	3,90%	10,43%	22,48%	39,82%	59,36%	76,68%	88,82%	95,57%	98,56%

Fonte: Elaboração própria

É possível observar que a maior probabilidade de sucesso está no intervalo entre 450 e 460, o qual contém o valor esperado de 455,84. Na Figura 26, está representado o gráfico da distribuição binomial do Teste E para partículas brancas.

Figura 26 - Distribuição binomial do Teste E para partículas brancas



Fonte: Elaboração própria

III. Partículas cor de laranja

A amostra primária contém 25.460 g com 1.360,31 g de partículas cor de laranja e são coletadas 4.400 partículas no total. Portanto, a probabilidade de sucesso é igual ao teor do lote, todavia, seu cálculo é dado a seguir:

$$p = \frac{1360,31}{25460} * 100 = 5,34\%$$

O valor esperado de sucessos e a variância são:

$$E\{J\} = np = 4400 * 0,0534 = 234,96$$

$$var\{J\} = np(1 - p) = 4400 * 0,0534 * (1 - 0,0534) = 222,41$$

Para as partículas cor de laranja, o valor esperado de sucesso e a variância são relativamente próximos, uma vez que a probabilidade de fracasso é significativamente maior que a de sucessos.

Na Tabela 10, estão apresentados os resultados dos cálculos da função densidade de probabilidade (vide item 3.1.4.3) para o Teste E – partículas cor de laranja.

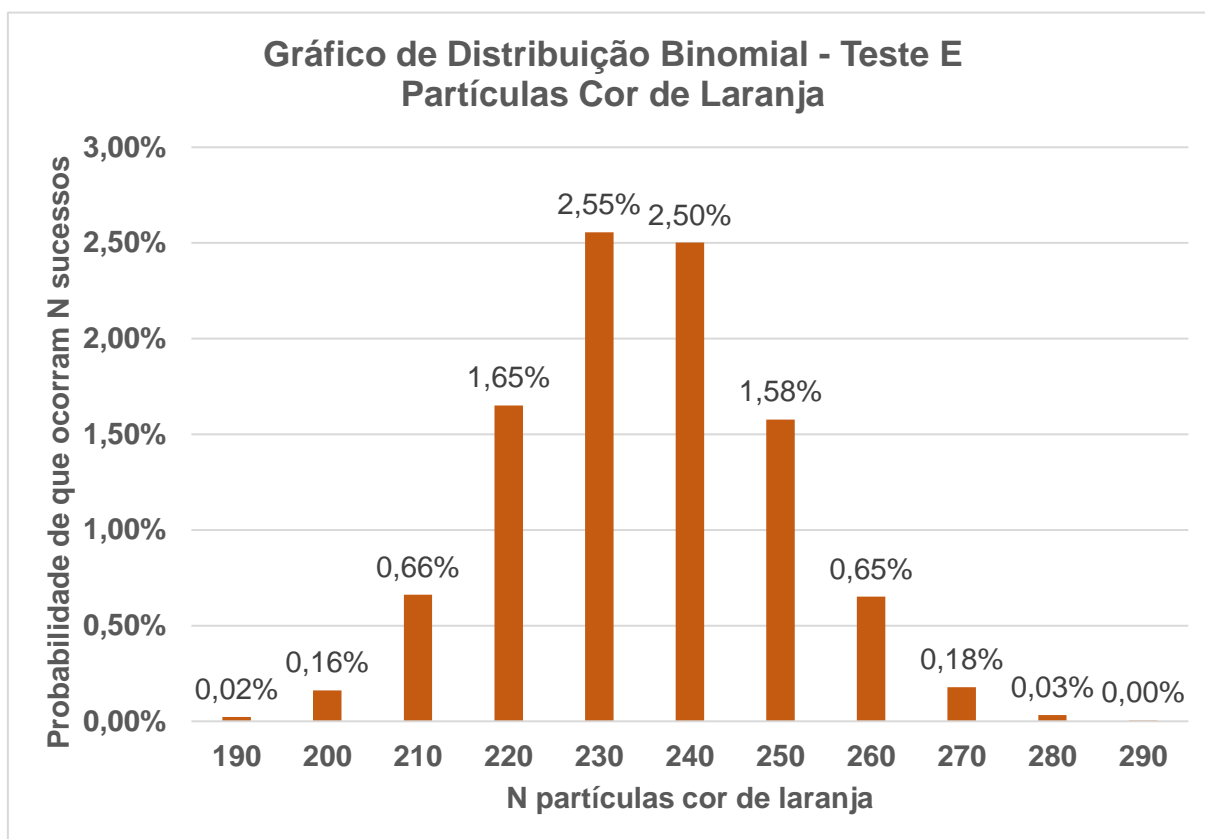
Tabela 10 - Probabilidades Teste E - partículas cor de laranja

	N partículas cor de laranja										
	190	200	210	220	230	240	250	260	270	280	290
Probabilidade de que ocorram N sucessos	0,02%	0,16%	0,66%	1,65%	2,55%	2,50%	1,58%	0,65%	0,18%	0,03%	0,00%
Probabilidade de que ocorram no máximo N sucessos	0,11%	0,92%	4,87%	16,62%	38,59%	64,80%	85,11%	95,49%	99,03%	99,85%	100,0%

Fonte: Elaboração própria

É possível observar que a maior probabilidade de sucesso está no intervalo entre 230 e 240, o qual contém o valor esperado de 234,96. Na Figura 27, está representado o gráfico da distribuição binomial do Teste E para partículas cor de laranja.

Figura 27 - Distribuição binomial do Teste E para partículas cor de laranja



Fonte: Elaboração própria

5.2.2 Teste E – Resultados

O Teste E apresentou resultados estatisticamente satisfatórios. Foram coletadas 4.414 partículas com média de 88,28 partículas por amostra. O Teste E coletou 1.170 partículas azuis, 485 partículas brancas e 221 partículas cor de laranja. Nota-se aqui que as partículas azuis foram coletadas abaixo do valor esperado e as partículas brancas foram coletadas acima do valor esperado, todavia, nota-se que a aproximação do resultado com o valor esperado é maior na medida em que a probabilidade de sucesso diminui. Esta observação é evidente nas partículas cor de laranja, que têm a menor probabilidade de sucesso e o valor mais próximo do esperado.

A Tabela 11 apresenta os resultados resumidos do teste; o conteúdo das amostras está detalhado no Apêndice C.

Tabela 11 - Resultados Teste E

TESTE E	
total de partículas coletadas	4414
partículas azuis coletadas	1170
teor azul (%)	26,51%
partículas brancas coletadas	485
teor branco (%)	10,99%
partículas cor de laranja coletadas	221
teor laranja (%)	5,01%
máximo de partículas por amostra	91
mínimo de partículas por amostra	83
moda de partículas por amostra	89
média de partículas por amostra	88,28
variância de partículas por amostra	2,3216

Fonte: Elaboração própria

A Figura 28 apresenta as amostras coletadas pelo IHT no Teste E.

Figura 28 - Amostras Teste E



Fonte: Acervo da autora

5.3 TESTE P

5.3.1 Distribuição Binomial – Teste P

Do mesmo modo que para os testes B e E, no Teste P as partículas têm ou não tem cor, logo, a distribuição representada neste teste é, também, a binomial.

I. Partículas vermelhas

A amostra primária contém 25.460 g com 260,44 g de partículas vermelhas e são coletadas 4.400 partículas no total. Portanto, a probabilidade de sucesso é igual ao teor do lote, todavia, seu cálculo é apresentado a seguir:

$$p = \frac{260,44}{25460} * 100 = 1,02\%$$

O valor esperado de sucessos e a variância são:

$$E\{J\} = np = 4400 * 0,0102 = 45,01$$

$$var\{J\} = np(1 - p) = 4400 * 0,0102 * (1 - 0,0102) = 44,55$$

Para as partículas vermelhas, o valor esperado de sucesso e a variância são relativamente próximos, uma vez que a probabilidade de fracasso é significativamente maior que a de sucessos.

Na Tabela 12, estão apresentados os resultados dos cálculos da função densidade de probabilidade (vide item 3.1.4.3) para o Teste P – partículas vermelhas.

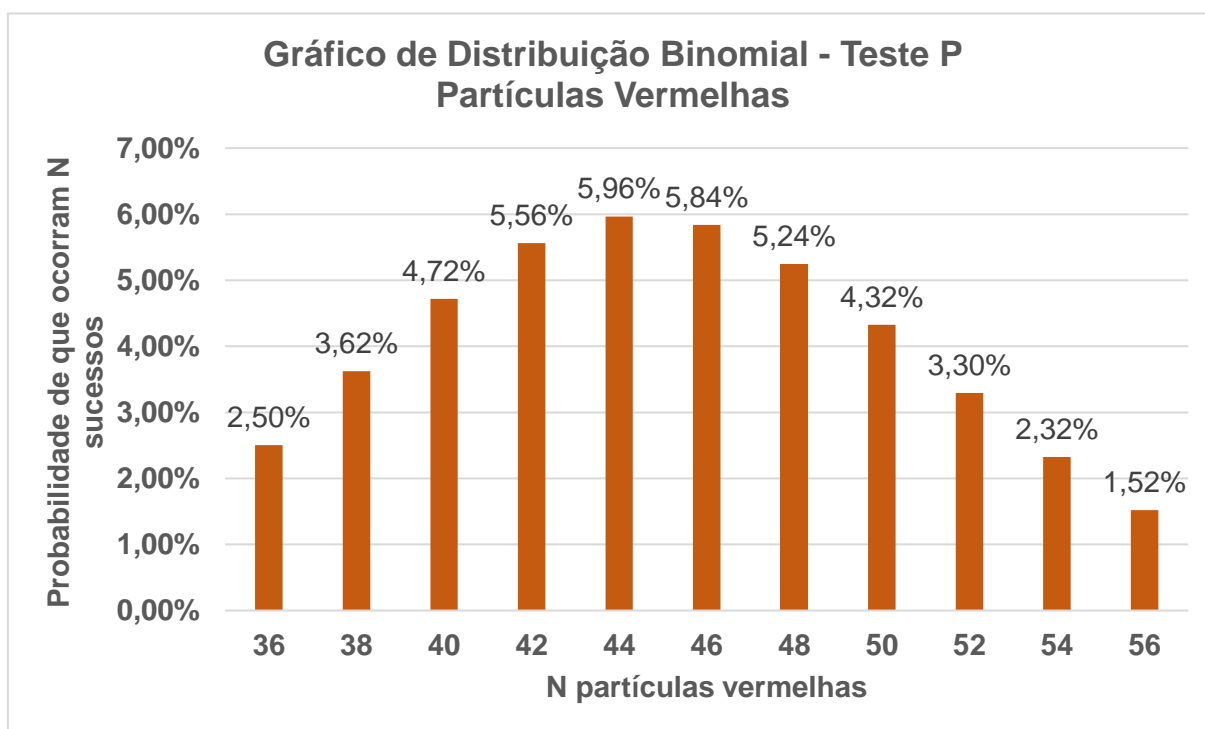
Tabela 12 - Probabilidades Teste P - partículas vermelhas

	N partículas vermelhas										
	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56
Probabilidade de que ocorram N sucessos	2,50%	3,62%	4,72%	5,56%	5,96%	5,84%	5,24%	4,32%	3,30%	2,32%	1,52%
Probabilidade de que ocorram no máximo N sucessos	9,80%	16,48%	25,39%	36,14%	47,93%	59,74%	70,56%	79,70%	86,81%	91,93%	95,35%

Fonte: Elaboração própria

É possível observar que a maior probabilidade de sucesso está no intervalo entre 44 e 46, que são os valores inteiros mais próximos ao valor esperado de 45,01. Na Figura 29, está representado o gráfico da distribuição binomial do Teste P para partículas vermelhas.

Figura 29 - Distribuição binomial do Teste P para partículas vermelhas



Fonte: Elaboração própria

II. Partículas brancas

A amostra primária contém 25.460 g com 2.637,58 g de partículas brancas e são coletadas 4400 partículas no total. Portanto, a probabilidade de sucesso é igual ao teor do lote, todavia, seu cálculo é apresentado a seguir:

$$p = \frac{2637,58}{25460} * 100 = 10,36\%$$

O valor esperado de sucessos e a variância são:

$$E\{J\} = np = 4400 * 0,1036 = 455,84$$

$$var\{J\} = np(1 - p) = 4400 * 0,1036 * (1 - 0,1036) = 408,62$$

Para as partículas brancas, o valor esperado de sucesso e a variância não são próximos, uma vez que a probabilidade de fracasso não é significativamente maior que a de sucessos.

Na Tabela 13, estão apresentados os resultados dos cálculos da função densidade de probabilidade (vide item 3.1.4.3) para o Teste E – partículas brancas.

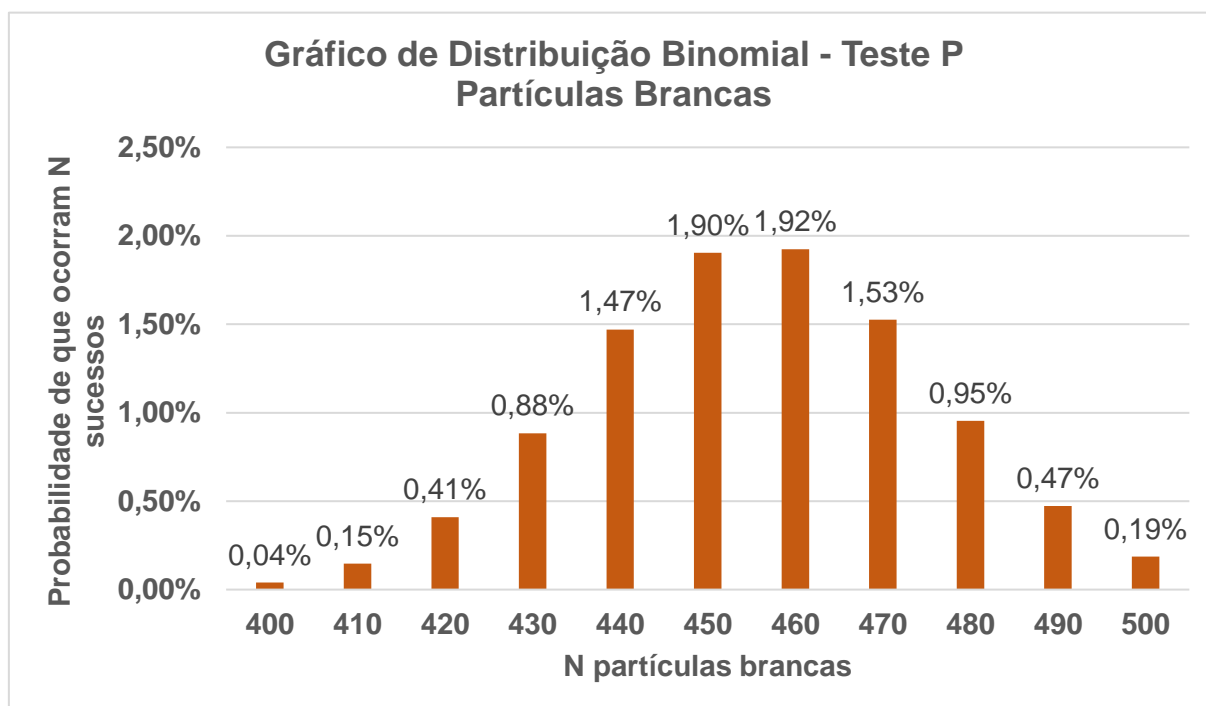
Tabela 13 - Probabilidades Teste P - partículas brancas

	N partículas brancas										
	400	410	420	430	440	450	460	470	480	490	500
Probabilidade de que ocorram N sucessos	0,04%	0,15%	0,41%	0,88%	1,47%	1,90%	1,92%	1,53%	0,95%	0,47%	0,19%
Probabilidade de que ocorram no máximo N sucessos	0,27%	1,16%	3,90%	10,43%	22,48%	39,82%	59,36%	76,68%	88,82%	95,57%	98,56%

Fonte: Elaboração própria

É possível observar que a maior probabilidade de sucesso está no intervalo entre 450 e 460, o qual contém o valor esperado de 455,84. Na Figura 30, está representado o gráfico da distribuição binomial do Teste P para partículas brancas.

Figura 30 - Distribuição binomial do Teste P para partículas brancas



Fonte: Elaboração própria

III. Partículas cor de laranja

A amostra primária contém 25.460 g com 3.726,93 g de partículas cor de laranja e são coletadas 4.400 partículas no total. Portanto, a probabilidade de sucesso é igual ao teor do lote, todavia, seu cálculo é apresentado a seguir:

$$p = \frac{3726,93}{25460} * 100 = 14,64\%$$

O valor esperado de sucessos e a variância são:

$$E\{J\} = np = 4400 * 0,1464 = 644,09$$

$$var\{J\} = np(1 - p) = 4400 * 0,1464 * (1 - 0,1464) = 549,60$$

Para as partículas cor de laranja, o valor esperado de sucesso e a variância não são próximos, uma vez que a probabilidade de fracasso não é significativamente maior que a de sucessos.

Na Tabela 14 estão representados os cálculos da função densidade de probabilidade (vide item 3.1.4.3) para o Teste P – partículas cor de laranja.

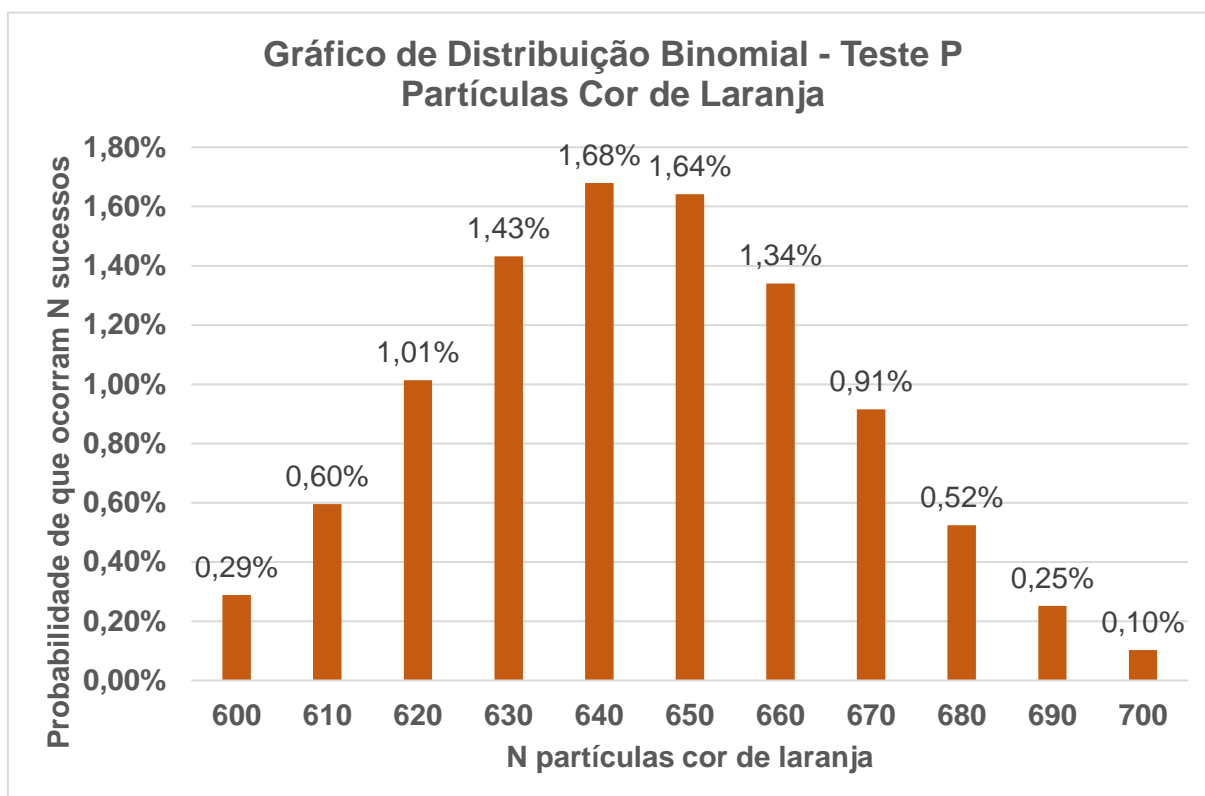
Tabela 14 - Probabilidades Teste P - partículas cor de laranja

	N partículas cor de laranja										
	600	610	620	630	640	650	660	670	680	690	700
Probabilidade de que ocorram N sucessos	0,29%	0,60%	1,01%	1,43%	1,68%	1,64%	1,34%	0,91%	0,52%	0,25%	0,10%
Probabilidade de que ocorram no máximo N sucessos	3,06%	7,52%	15,72%	28,23%	44,11%	60,95%	75,88%	86,97%	93,89%	97,53%	99,14%

Fonte: Elaboração própria

É possível observar que a maior probabilidade de sucesso está no intervalo entre 640 e 650, o qual contém o valor esperado de 644,09. Na Figura 31, está representado o gráfico da distribuição binomial do Teste P para partículas cor de laranja.

Figura 31 - Distribuição binomial do Teste P para partículas cor de laranja



Fonte: Elaboração própria

5.3.2 Teste P01 – Resultados

O Teste P01 apresentou resultados estatisticamente satisfatórios. Foram coletadas 4.436 partículas com média de 90,74 partículas por amostra. O Teste P01 coletou 42 partículas vermelhas, 452 partículas brancas e 607 partículas cor de laranja. Nota-se aqui que o número de partículas vermelhas e brancas é muito próximo do valor esperado. Ainda que as partículas cor de laranja não apresentem um valor tão próximo quanto as outras, seu resultado também é condizente com a distribuição binomial.

A Tabela 15 apresenta os resultados resumidos do teste; o conteúdo das amostras está detalhado no Apêndice D.

Tabela 15 - Resultados Teste P01

TESTE P01	
total de partículas coletadas	4436
partículas vermelhas coletadas	42
teor vermelho (%)	0,95%
partículas brancas coletadas	452
teor branco (%)	10,24%
partículas cor de laranja coletadas	607
teor laranja (%)	13,75%
máximo de partículas por amostra	96
mínimo de partículas por amostra	87
moda de partículas por amostra	91
média de partículas por amostra	90,74
variância de partículas por amostra	3,6724

Fonte: Elaboração própria

A Figura 32 apresenta as amostras coletadas pelo IHT no Teste P01.

Figura 32 - Amostras Teste P01



Fonte: Acervo da autora

5.3.3 Teste P02 – Resultados

O Teste P02 apresentou resultados estatisticamente satisfatórios. Foram coletadas 4.527 partículas com média de 90,54 partículas por amostra. O Teste P02 coletou 37 partículas vermelhas, 424 partículas brancas e 611 partículas cor de laranja. Nota-se que o número de partículas de todas as cores foi coletado abaixo do valor esperado, entretanto, os resultados são condizentes com a distribuição binomial.

A Tabela 16 apresenta os resultados resumidos do teste; o conteúdo das amostras está detalhado no Apêndice D.

Tabela 16 - Resultados Teste P02

TESTE P02	
total de partículas coletadas	4527
partículas vermelhas coletadas	37
teor vermelho (%)	0,82%
partículas brancas coletadas	424
teor branco (%)	9,61%
partículas cor de laranja coletadas	611
teor laranja (%)	13,84%
máximo de partículas por amostra	97
mínimo de partículas por amostra	86
moda de partículas por amostra	89
média de partículas por amostra	90,54
variância de partículas por amostra	4,5684

Fonte: Elaboração própria

A Figura 33 apresenta as amostras coletadas pelo IHT no Teste P02.

Figura 33 - Amostras Teste P02



Fonte: Acervo da autora

5.3.4 Teste P03 – Resultados

O Teste P03 apresentou resultados estatisticamente satisfatórios. Foram coletadas 4.512 partículas com média de 90,24 partículas por amostra. O Teste P02 coletou 39 partículas vermelhas, 446 partículas brancas e 646 partículas cor de laranja. Nota-se aqui que o número de partículas de todas as cores foi muito próximo do valor esperado, condizente com a distribuição binomial.

A Tabela 17 apresenta os resultados resumidos do teste; o conteúdo das amostras está detalhado no Apêndice D.

Tabela 17 - Resultados Teste P03

TESTE P03	
total de partículas coletadas	4512
partículas vermelhas coletadas	39
teor vermelho (%)	0,86%
partículas brancas coletadas	446
teor branco (%)	10,10%
partículas cor de laranja coletadas	646
teor laranja (%)	14,64%
máximo de partículas por amostra	94
mínimo de partículas por amostra	87
moda de partículas por amostra	90
média de partículas por amostra	90,24
variância de partículas por amostra	2,8624

Fonte: Elaboração própria

A Figura 34 apresenta as amostras coletadas pelo IHT no Teste P03.

Figura 34 - Amostras Teste P03



Fonte: Acervo da autora

6 COMPARAÇÃO, ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

6.1 TESTE B

Os resultados de estatística descritiva para a amostragem feita pelo IHT no Teste B estão resumidos na Tabela 18, onde é possível observar que os testes apresentam coeficientes de variação (CV) próximos. De maneira conservadora, considera-se o maior CV como o a medida de precisão do protótipo IHT para o Teste B, sendo então igual a 2,62%.

Tabela 18 – Comparação de estatística descritiva Teste B

Análise de Partículas - Total			
	TESTE B01	TESTE B02	TESTE B03
Máximo	96	94	96
Mínimo	87	85	85
Moda	91	90	90
Média	90,74	89,36	90,46
Variância	3,6724	3,4704	5,4884
Variância Relativa	0,000446	0,000435	0,000671
Desvio Padrão	1,94	1,88	2,37
CV	2,13%	2,11%	2,62%

Fonte: Elaboração própria

Na Tabela 19, estão apresentados os resultados de estatística descritiva para as partículas azuis do Teste B. Nota-se, neste caso, um elevado CV, que ocorre devido à probabilidade de fracasso ser, aproximadamente, 100 vezes a probabilidade de sucesso.

As medidas de precisão (comparação entre teores dos testes B01, B02 e B03) e acurácia (comparação dos teores B01, B02 e B03 com o teor do lote), ou seja, de representatividade da seleção das partículas coloridas será feita por meio da análise de teores, apresentada na Tabela 20. O CV pode ser visto, então, como medida do efeito pepita produzido pelo baixo teor de partículas azuis.

Tabela 19 - Comparação de estatística descritiva Teste B - partículas azuis

Análise de Partículas - Azuis			
	TESTE B01	TESTE B02	TESTE B03
Máximo	1	1	1
Mínimo	0	0	0
Moda	0	0	0
Média	0,1	0,08	0,1
Variância	0,09	0,07	0,09
Variância Relativa	9,00	11,50	9,00
Desvio Padrão	0,30	0,27	0,30
CV	303,05%	342,56%	303,05%

Fonte: Elaboração própria

Tabela 20 - Teores Teste B

Análise de teor	
	Azul
Teste B01	0,11%
Teste B02	0,09%
Teste B03	0,11%
Lote	0,11%

Fonte: Elaboração própria

Os teores encontrados no Teste B estão de acordo com a distribuição binomial e próximos do valor real do lote.

6.2 TESTE E

Os resultados de estatística descritiva para a amostragem feita pelo IHT no Teste E estão resumidos na Tabela 21, onde é possível observar que, para o total de partículas, o teste apresenta coeficiente de variação (CV) próximo aos apresentados no Teste B. Considera-se o CV como o a medida de precisão do protótipo IHT para o Teste E, sendo então igual a 1,74%.

Tabela 21 - Comparação de estatística descritiva Teste E

Análise de Partículas - Teste E				
	Total	Azul	Branco	Laranja
Máximo	91	34	18	12
Mínimo	83	13	4	1
Moda	89	22	8	4
Média	88,28	23,4	9,7	4,42
Variância	2,3690	23,9592	8,5816	4,4935
Variância Relativa	0,00030	0,04376	0,09121	0,23000
Desvio Padrão	1,54	4,89	2,93	2,12
CV	1,74%	20,92%	30,20%	47,96%

Fonte: Elaboração própria

Nota-se também que, para as partículas coloridas, o CV diminui ao passo que o teor aumenta. A medida da acurácia da seleção das partículas coloridas será feita pela análise de teores, representada na Tabela 22. Visto que o Teste E foi realizado apenas uma vez, não há medida de precisão da seleção.

Tabela 22 - Teores Teste E

Análise de teor			
	Azul	Branco	Laranja
Teste E	26,51%	10,99%	5,01%
Lote	29,48%	10,36%	5,34%

Fonte: Elaboração própria

Os teores encontrados no Teste E estão de acordo com a distribuição binomial e próximos do valor real do lote.

6.3 TESTE P

Os resultados de estatística descritiva para a amostragem feita pelo IHT no Teste P estão resumidos na Tabela 23, onde é possível observar que os testes apresentam coeficiente de variação (CV) próximo. De maneira conservadora, considera-se o maior CV como o a medida de precisão do Teste P, sendo então igual a 2,38%.

Tabela 23 - Comparação de estatística descritiva Teste P

Análise de Partículas - Total			
	TESTE P01	TESTE P02	TESTE P03
Máximo	91	97	94
Mínimo	86	86	87
Moda	89	89	90
Média	88,72	90,54	90,24
Variância	1,10	4,66	2,92
Variância Relativa	0,00014	0,00057	0,00036
Desvio Padrão	1,05	2,16	1,71
CV	1,18%	2,38%	1,89%

Fonte: Elaboração própria

O Teste P foi realizado com três tensões, constantes e distintas, na fonte de bancada, principal responsável pela vibração da calha de descarga de partículas. É importante ressaltar que a vibração da calha sofre pequenas alterações dependendo da quantidade de amostra presente no reservatório do protótipo IHT e, portanto, durante os testes B e E, as tensões eram modificadas manualmente durante todo o processo amostral, o que não ocorreu no Teste P. As tensões utilizadas foram:

- Teste P01: $U = 6,7 \text{ V}$
- Teste P02: $U = 7,2 \text{ V}$
- Teste P03: $U = 6,5 \text{ V}$

A tensão do teste P01 foi escolhida por ter sido a tensão mais utilizada ao longo dos demais testes. A partir desta, selecionou-se uma tensão ligeiramente maior e outra ligeiramente menor. As tensões foram definidas antes do início do teste e puderam-se observar algumas interferências no processo, como:

- O reservatório cheio tornou o processo mais lento, enquanto o reservatório vazio tornou-o mais rápido, como esperado;
- No Teste P02, onde a tensão foi maior, as partículas se acumulavam na calha, o que fazia com que caíssem juntas na descarga;
- No Teste P03, onde a tensão foi menor, as partículas eram menos influenciadas pela vibração e, então, algumas vezes, acumulavam-se e se empurravam ao longo da calha, o que ocasionava a queda conjunta de partículas;

- Dependendo da velocidade de queda das partículas e de seu ponto de contato com a palheta durante o acionamento, elas eram arremessadas de volta, através do paralelepípedo de vidro, para fora do protótipo.

A influência da vibração da calha fica evidente nos dados de estatística descritiva apresentados na Tabela 23, principalmente pela variância e o coeficiente de variação, que são menores no Teste P01, considerado ótimo, e maiores no Teste P02, que apresentou o desempenho menos satisfatório devido à maior frequência da vibração.

Quanto às partículas coloridas, observa-se o mesmo efeito que no Teste E: quanto maior o teor, menor o coeficiente de variação. Além disso, é notável que os resultados são próximos para todos os parâmetros em todos os testes. Os resultados estão representados nas Tabelas 24 a 26 a seguir.

Tabela 24 - Comparação de estatística descritiva Teste P - partículas vermelhas

Análise de Partículas Vermelhas			
	TESTE P01	TESTE P02	TESTE P03
Máximo	3	3	3
Mínimo	0	0	0
Moda	0	0	1
Média	0,84	0,74	0,78
Variância	0,93	0,71	0,65
Variância Relativa	1,32426	1,30095	1,07101
Desvio Padrão	0,97	0,84	0,81
CV	115,08%	114,06%	103,49%

Fonte: Elaboração própria

Tabela 25 - Comparação de estatística descritiva Teste P - partículas brancas

Análise de Partículas Brancas			
	TESTE P01	TESTE P02	TESTE P03
Máximo	15	16	15
Mínimo	4	1	2
Moda	8	8	7
Média	9,04	8,48	8,92
Variância	6,60	8,01	8,43
Variância Relativa	0,08074	0,11138	0,10599
Desvio Padrão	2,57	2,83	2,90
CV	28,42%	33,37%	32,56%

Fonte: Elaboração própria

Tabela 26 - Comparação de estatística descritiva Teste P - partículas cor de laranja

Análise de Partículas cor de laranja			
	TESTE P01	TESTE P02	TESTE P03
Máximo	23	20	21
Mínimo	4	5	5
Moda	13	13	13
Média	12,14	12,22	12,92
Variância	13,48	12,09	10,79
Variância Relativa	0,09147	0,08097	0,06466
Desvio Padrão	3,67	3,48	3,29
CV	30,24%	28,46%	25,43%

Fonte: Elaboração própria

Ressalta-se que o CV, neste caso, não pode ser utilizado como medida de precisão do protótipo IHT. Para tal será feita a análise dos teores, apresentada na Tabela 27, a partir da qual podem ser avaliadas a precisão (comparação entre teores dos testes P01, P02 e P03 para cada cor) e a acurácia (comparação dos teores P01, P02 e P03 com o teor do lote para cada cor), ou seja, a representatividade da seleção das partículas coloridas.

Tabela 27 - Teores Teste P

Análise de teor (%)			
	Vermelho	Branco	Laranja
Teste P01	0,95%	10,19%	13,68%
Teste P02	0,82%	9,37%	13,50%
Teste P03	0,86%	9,88%	14,32%
Lote	1,02%	10,36%	14,64%

Fonte: Elaboração própria

Os teores encontrados no Teste P estão de acordo com a distribuição binomial e próximos do valor real do lote.

7 CONCLUSÕES

A caracterização da heterogeneidade constitucional ou intrínseca do minério é imprescindível para o cálculo de massas mínimas de amostras representativas e a otimização de protocolos de amostragem, porém, é um procedimento pouco difundido na indústria mineral. Os testes realizados no protótipo IHT visaram à validação de um método alternativo simplificado, automatizado e equiprobabilístico de teste de heterogeneidade, que permite isolar o erro fundamental de amostragem sem inserir vieses durante a seleção de partículas.

O IHT foi desenvolvido com o objetivo de eliminar o viés humano frequentemente gerado pelo teste de heterogeneidade manual, bem como tornar o teste mais rápido, compacto e aleatório. O viés humano insere uma variância adicional – difícil de ser mensurada – à variância do erro fundamental de amostragem, podendo tornar os resultados do teste enviesados ou pouco confiáveis. Com base nos resultados dos testes realizados com grãos de bico no IHT, foi possível quantificar o coeficiente de variação para os testes realizados.

Além das vantagens anteriormente descritas, o IHT é capaz de realizar o teste em dois ou três dias por fração granulométrica, dependendo do tipo de minério e número de fragmentos por amostra. Essa duração corresponde a, aproximadamente, metade do tempo demandado pelo teste de heterogeneidade manual.

Uma vez que toda a amostra primária passa pelo protótipo, é possível garantir que o processo realizado pelo IHT é equiprobabilístico, dando chances iguais de seleção a todas as partículas, e que as características individuais do fragmento (tais como tamanho ou cor) não interferem no processo de seleção. Ainda que os fragmentos mais densos passem primeiro pelo IHT, sua probabilidade de seleção é a mesma que a dos fragmentos menos densos, que passam depois devido ao efeito de segregação no recipiente de armazenamento da amostra. Essa aleatoriedade não é garantida no teste manual, o que foi comprovado, em trabalhos anteriores, pelas diferenças sistemáticas observadas nas massas das sub-amostras de uma mesma fração granulométrica do teste padrão, as quais costumam diminuir continuamente ao longo do teste, ou seja, o teste manual dá preferência de seleção às partículas maiores.

Outra vantagem do protótipo IHT está relacionada ao espaço físico. Como os fragmentos não necessitam ser espalhados sobre mesas, pois a alimentação se dá por fluxo cadente, o espaço utilizado para realização do teste corresponde a, aproximadamente, $\frac{1}{4}$ do espaço ocupado pelo teste padrão.

Quanto aos resultados dos Testes B, E e P, observou-se que as amostras coletadas pelo IHT são representativas e condizentes com as distribuições estatísticas. Comprovou-se, também, a influência da velocidade do fluxo de fragmentos nos resultados dos testes. É importante citar que tanto a média quanto a moda da quantidade de partículas de cada grupo foram diferentes da quantidade predeterminada. Isto ocorre devido à queda conjunta de partículas – uma consequência da vibração da calha e das características do grão de bico –, observada na realização de todos os testes e analisada através dos resultados do Teste P.

Vale observar, também, que nos testes E e P, o teor do lote foi calculado por massa de grupos de partículas, enquanto os teores das 50 sub-amostras foram calculados por contagem de partículas. Como as partículas usadas no estudo são binárias, ou seja, contém ou não contém cor (os “minerais” estão liberados), se as porcentagens calculadas por massa equivalem a valores não inteiros, não é possível chegar a valores idênticos de teor calculado pela contagem de partículas. Além disso, observou-se, para estes testes, uma leve tendência de subestimativa de teores das sub-amostras comparativamente com os teores dos lotes. Visando avaliar a tendência observada, foram pesados 100 grupos de 10 partículas coloridas e a massa estimada da partícula colorida foi 0,58215 g, ou seja, aproximadamente 2% maior que a massa estimada da partícula sem cor (0,57113 g). Essa diferença justifica os teores subestimados, uma vez que, ao calcular o teor por contagem, não se considera que a partícula colorida (“mineral” de interesse) é mais pesada. Entretanto, este problema específico não ocorrerá nos testes realizados com amostras de minério, cujos teores são calculados por análise química.

Sabendo-se que a representatividade de um método de seleção é dada pela união de precisão e acurácia, e que o protótipo IHT é comprovadamente equiprobabilístico e, portanto, não-enviesado e acurado, as medidas de precisão do protótipo podem ser vistas, também, como uma medida de sua representatividade. Com base nos

resultados deste estudo, conclui-se que o protótipo IHT está validado no que diz respeito à correta estimativa da heterogeneidade intrínseca de materiais particulados, podendo ser considerado uma alternativa ao teste de heterogeneidade padrão.

Vale salientar que, o fato de o estudo de validação ter sido realizado com grãos de bico, e não com minério, não invalida as conclusões apresentadas neste trabalho. A escolha do uso de grãos de bico é justificada, principalmente, pelos seguintes motivos: (i) verificação da repetibilidade do teste, impossível de ser realizada com análises químicas de amostras de minério; (ii) possibilidade de aplicação da estatística para distribuições binomiais, impossível de ser realizada com fragmentos mistos de rocha; e (iii) possibilidade de cálculo de teor por contagem de grãos, eliminando a necessidade de gasto com análises químicas.

Salienta-se, por fim, que o processo de patenteamento do novo protótipo IHT está, na presente data, em andamento na agência dedicada ao registro de propriedade intelectual da Universidade de São Paulo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- CHIEREGATI, A. C. **Reconciliação pró-ativa em empreendimentos mineiros**. Tese de doutorado. Departamento de Engenharia de Minas e de Petróleo. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo, 2007. 201p.
- CHIEREGATI, A.C.; PITARD, F. Fundamentos teóricos da amostragem. In: CHAVES, A.P. et al. **Manuseio de sólidos granulados**. 2.ed. rev. e aprimorada. Teoria e prática do tratamento de minérios, v. 5. São Paulo: Oficina de Textos, 2012. Cap. 7, p. 323-364.
- CHIEREGATI, A.C.; PITARD, F.F. Amostragem. In: LUZ, A. B; FRANÇA, S.C.A.; BRAGA, P.F.A. **Tratamento de Minérios**. 6 ed. São Paulo: CETEM/MCTIC, 2018. cap. 2, p. 27-65.
- Chierigati, A.C.; Prado, G.C.; Fernandes, F.L.; Villanova, F.L.S.P.; Dominy, S.C. **A Comparison between the Standard Heterogeneity Test and the Simplified Segregation Free Analysis for Sampling Protocol Optimisation**. Minerals, 13 (680), 2023.
- DOMINY, S.C. **Importance of good sampling practice throughout the gold mine value chain**. Mining Tech, 125, 2016. p. 129-141.
- DOMINY, S.C.; XIE, Y. **Optimising sampling protocols via the heterogeneity test: challenges in coarse gold mineralisation**. Mining Tech, 125, 2016. p. 103-113.
- DOMINY, S.C.; PLATTEN, I.M.; GLASS, H.J.; PUREVGEREL, S.; CUFFLEY, B.W. **Determination of Gold Particle Characteristics for Sampling Protocol Optimisation**. Minerals, 11(10), 2021.
- DOMINY, S.C.; GLASS, H.J.; MINNITT, R.C.A. **Sampling Broken Ore Residues in Underground Gold Workings: Implications for Reconciliation and Lost Revenue**. Minerals, 12(6), 2022.
- FRANÇOIS-BONGARÇON, D. & GY, P. **Critical aspects in mill and plants: a guide to understanding sampling audits**. Journal of the South African IMM, 102, nº 8, África do Sul, 2002.
- FRANÇOIS-BONGARÇON, D. **Aspects of Incremental Sampling and Samplers**. In: Sampling Conference, 2010.
- GY, P. **“L’Echantillonnage des minerais en vrac - théorie générale”**, v. 1, Société de l’Industrie Minérale, Saint-Etienne. 1967. 470 p.
- GY, P. **Sampling of heterogeneous and dynamic material systems: theories of heterogeneity, sampling and homogenizing**. Data handling in science and technology, v. 10. Amsterdam: Elsevier, 1992. 652 p.
- GY P. **Introduction to the theory of sampling I. Heterogeneity of a population of uncorrelated units**. In: Trends in Analytical Chemistry, v. 14, n. 2, 1995. p. 67-76.

GY, P. **Sampling for analytical purposes**. 1st ed., traduzido por: JOHN, A.G.R.1998. 176 p.

LYMAN, G. J. **Mathematical developments in particulate sampling theory**. In: 9th World Conference on Sampling and Blending, China, 2019.

LYMAN, G. J. **Theory and practice of particulate sampling an engineering approach**. Australia, 2019.

LYMAN, G. J. **Notes on Heterogeneity Calculation – Confidential**. Technical Document 78. 2022.

MINNITT, R.C.A.; RICE, P.M.; SPANGENBERG, C. **Part 2: Experimental calibration of sampling parameters K and alpha for Gy's formula by the sampling tree method**. The Journal of The Southern African Institute of Mining and Metallurgy, vol. 107, 2007. p. 513-518.

MINNITT, R.C.A.; FRANÇOIS-BONGARÇON, D.; PITARD, F.F. **Segregation Free Analysis for calibrating the constants K and α for use in Gy's formula**. In: 5th World Conference on Sampling and Blending. Chile, 2011.

MINNITT, R. **The Grouping and Segregation Error in the Rice Experiment**. Minerals, 12(3), 2022.

PITARD, F. **Pierre Gy's sampling theory and sampling practice: heterogeneity, sampling correctness, and statistical process control**. 2nd. ed. CRC Press, 1993.

PITARD, F. **Theory of sampling and sampling practice**. 3rd. ed. CRC Press, 2019.

YAMAMOTO, J.K.; LANDIM, P.M.B. **Geoestatística: conceitos e definições**. 1 ed. São Paulo: Oficina de Textos, 2013. 215 p.

APÊNDICE

Apêndice A – Dados experimentais – Massas de partículas sem cor

Tabela A1 - Massas dos grupos 1 a 50 – partículas sem cor

Grupo	Massa (g)
1	5,69
2	5,81
3	5,94
4	5,64
5	5,83
6	5,78
7	5,4
8	5,95
9	5,82
10	5,75
11	5,46
12	5,98
13	5,74
14	5,89
15	5,86
16	5,59
17	5,62
18	5,61
19	5,67
20	5,97
21	5,96
22	5,84
23	5,58
24	5,48
25	5,78
26	5,07
27	5,58
28	5,63
29	5,51
30	5,58
31	5,65
32	5,79
33	5,72
34	5,91
35	5,95
36	5,69
37	5,9
38	5,8
39	5,41
40	5,74
41	5,72
42	5,64
43	5,69
44	5,73
45	5,78
46	5,65
47	5,63
48	5,65
49	5,58
50	5,5

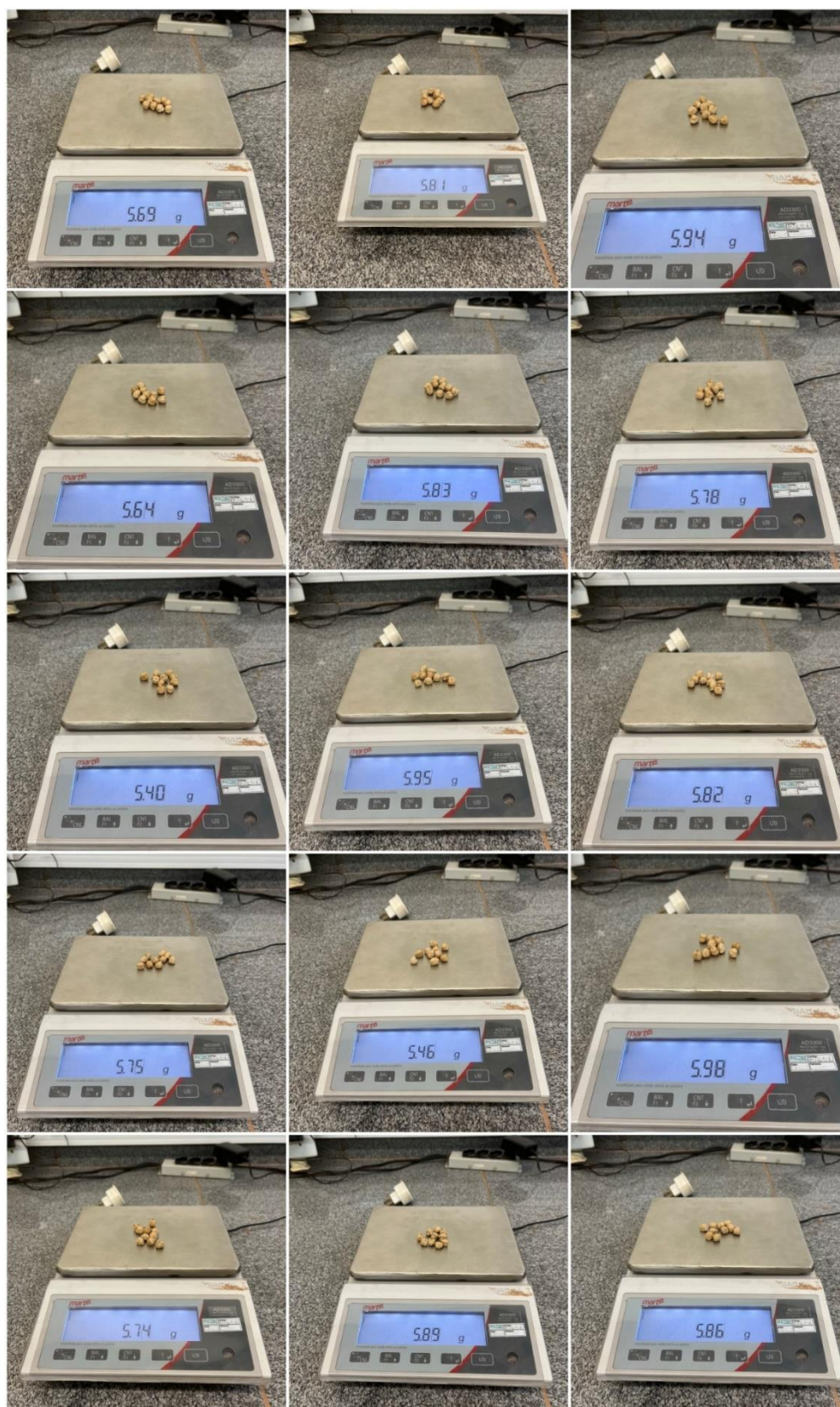
Fonte: elaboração própria

Tabela A2 - Massas dos grupos 51 a 100 – partículas sem cor

Grupo	Massa (g)
51	5,58
52	5,74
53	5,52
54	5,95
55	5,62
56	5,53
57	5,89
58	5,62
59	5,44
60	5,59
61	5,85
62	6,06
63	5,65
64	5,76
65	5,56
66	5,54
67	5,63
68	5,69
69	5,52
70	5,95
71	5,67
72	5,67
73	5,85
74	5,75
75	5,76
76	5,48
77	5,83
78	5,87
79	5,58
80	6,1
81	5,58
82	5,82
83	5,84
84	5,78
85	6,18
86	5,86
87	5,86
88	5,88
89	5,24
90	5,39
91	5,67
92	5,8
93	6,04
94	5,62
95	6,01
96	5,57
97	5,5
98	5,72
99	5,97
100	5,41

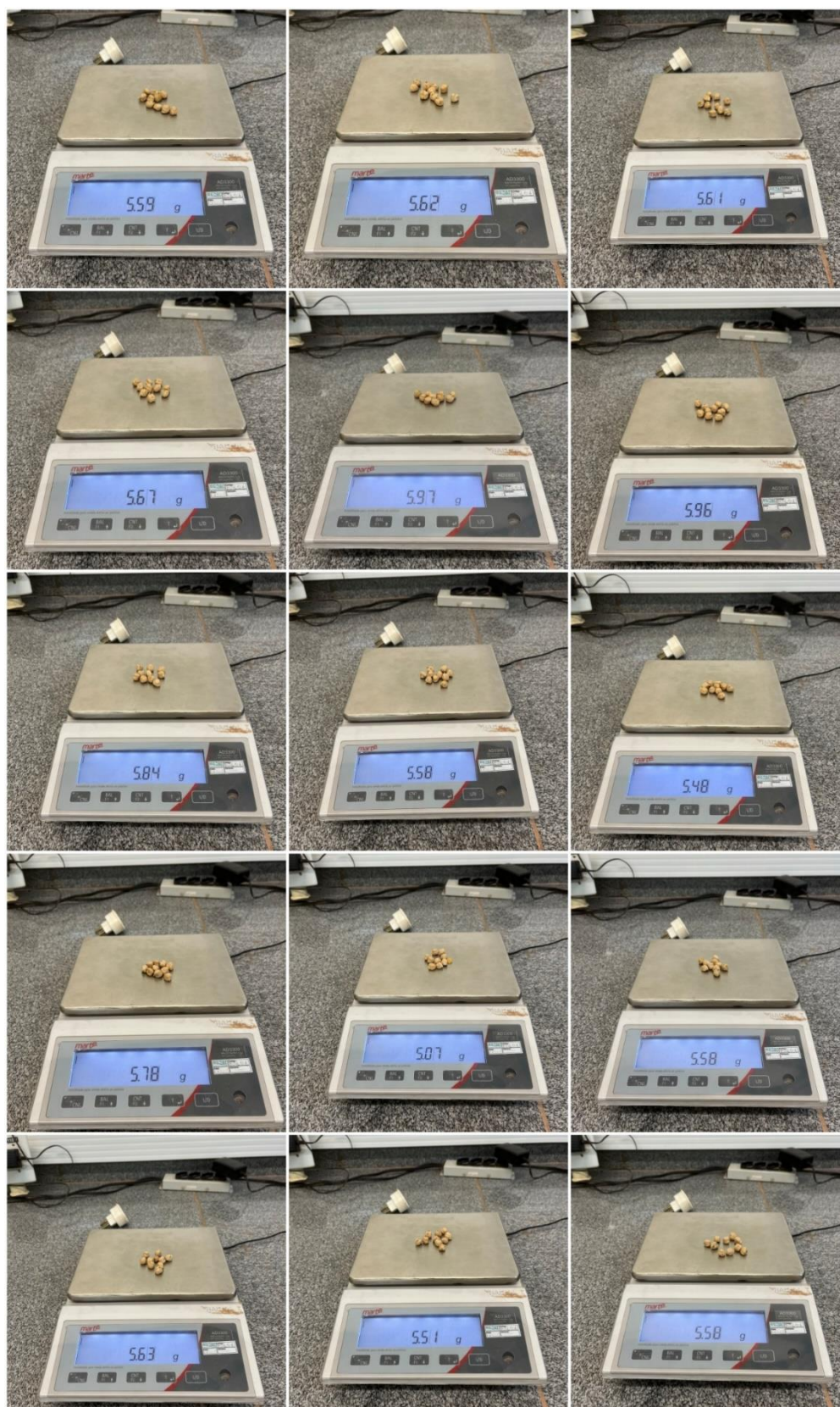
Fonte: elaboração própria

Figura A1 - Grupos 1 a 15 – partículas sem cor



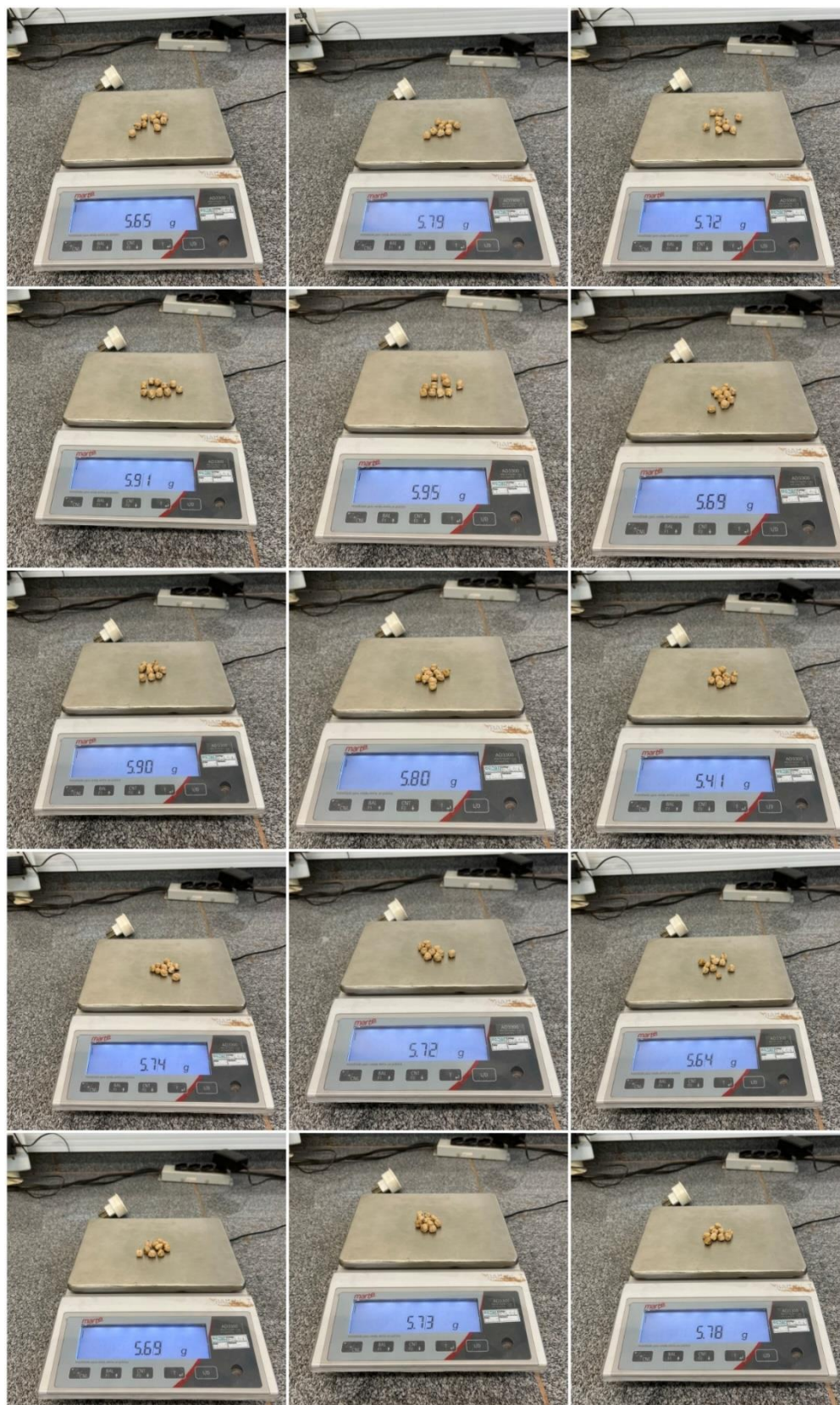
Fonte: elaboração própria

Figura A2 - Grupos 16 a 30 – partículas sem cor



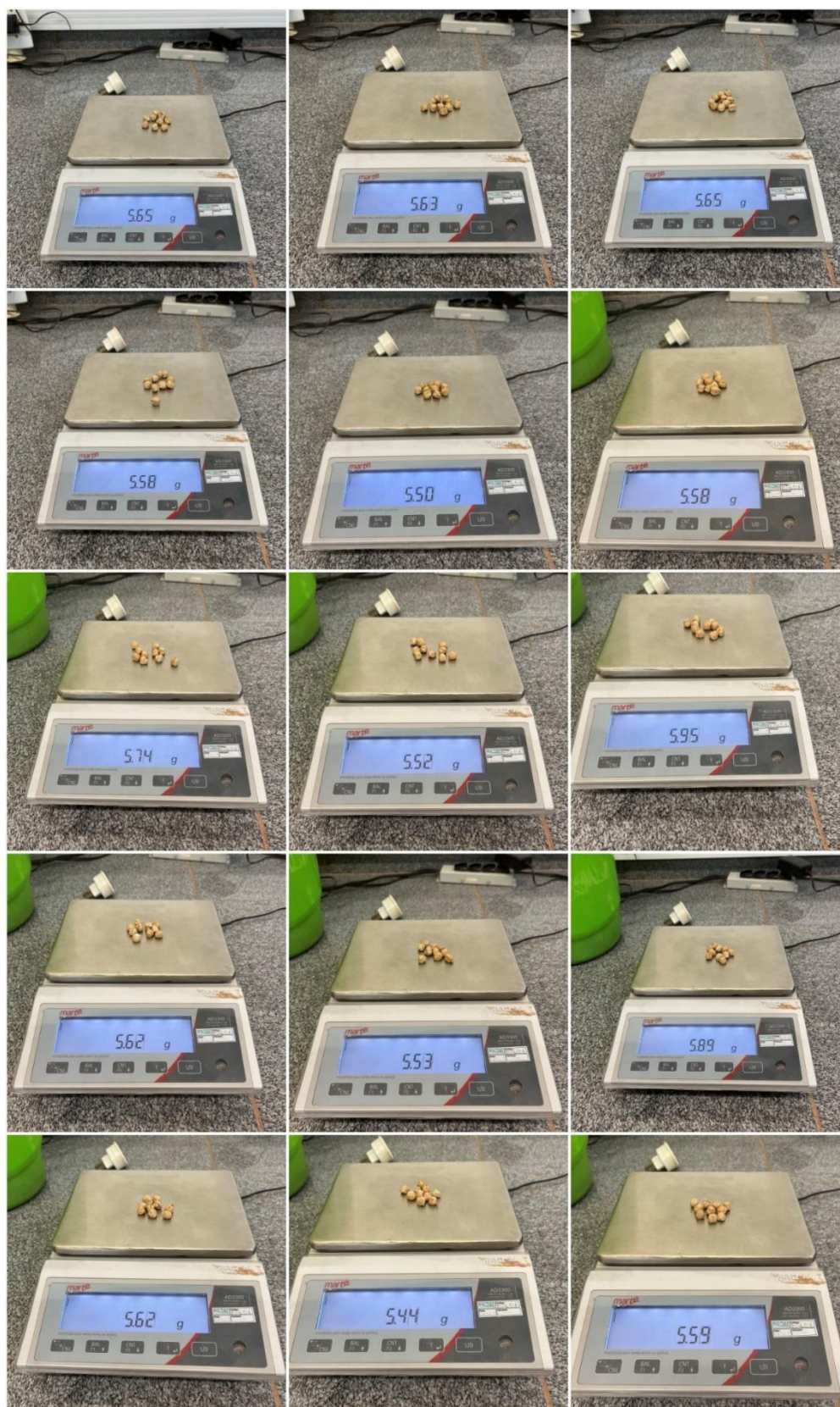
Fonte: elaboração própria

Figura A3 - Grupos 31 a 45 – partículas sem cor



Fonte: elaboração própria

Figura A4 - Grupos 46 a 60 – partículas sem cor



Fonte: elaboração própria

Figura A5 - Grupos 61 a 75 – partículas sem cor



Fonte: elaboração própria

Figura A6 - Grupos 76 a 90 – partículas sem cor



Fonte: elaboração própria

Figura A7 - Grupos 91 a 100 – partículas sem cor



Fonte: elaboração própria

Apêndice B – Dados experimentais - Teste B

Tabela B1 – Dados experimentais dos Teste B01, B02 e B03

Amostra	Teste B01		Teste B02		Teste B03	
	Total	Azul	Total	Azul	Total	Azul
1	90	1	90	0	89	0
2	91	0	90	0	92	0
3	91	0	89	1	89	0
4	88	0	90	0	93	0
5	91	0	88	0	95	0
6	91	0	90	0	92	0
7	91	0	86	0	89	0
8	90	0	88	0	88	0
9	91	1	89	0	91	0
10	96	0	91	0	90	0
11	91	0	88	0	90	0
12	90	1	90	1	86	0
13	92	0	90	0	89	0
14	89	0	89	0	90	0
15	94	0	91	0	96	0
16	90	0	89	0	90	1
17	91	0	90	0	94	0
18	89	0	92	0	91	0
19	93	0	87	0	91	0
20	90	0	89	0	88	0
21	94	0	87	0	88	1
22	91	0	90	0	90	0
23	91	1	88	0	91	0
24	88	0	90	0	89	0
25	88	0	88	0	92	1
26	93	0	87	0	90	0
27	92	0	91	0	93	0
28	91	0	85	0	93	0
29	94	0	89	0	89	0
30	89	0	89	0	86	0
31	89	0	90	0	91	0
32	87	0	90	0	89	0
33	95	0	90	0	89	0
34	88	0	94	1	91	0
35	90	0	90	0	90	0
36	89	0	91	0	90	0
37	88	0	90	1	90	0
38	91	1	88	0	88	0
39	91	0	85	0	91	0
40	92	0	89	0	92	0
41	89	0	89	0	87	0
42	88	0	89	0	95	1
43	90	0	90	0	93	0
44	93	0	93	0	90	0
45	91	0	90	0	85	0
46	90	0	89	0	90	0
47	91	0	92	0	94	1
48	92	0	94	0	91	0
49	92	0	88	0	89	0
50	91	0	87	0	94	0

Fonte: elaboração própria

Apêndice C – Dados experimentais - Teste E

Tabela C1 – Dados experimentais do Teste E01

Amostra	Teste E01			
	Total	Azul	Branco	Laranja
1	88	20	13	2
2	89	22	5	3
3	91	14	14	6
4	89	13	10	2
5	88	23	6	6
6	90	29	8	3
7	91	34	11	5
8	87	22	10	3
9	87	18	12	3
10	86	19	8	7
11	88	24	4	4
12	89	15	12	2
13	90	20	8	4
14	90	26	9	10
15	89	33	8	5
16	88	27	7	4
17	90	28	13	6
18	89	25	8	6
19	87	22	11	2
20	90	28	8	4
21	89	25	7	3
22	87	23	12	6
23	88	26	8	3
24	90	24	8	3
25	87	19	12	3
26	89	19	12	4
27	89	24	10	5
28	88	33	13	1
29	88	18	12	6
30	87	21	8	2
31	91	18	8	12
32	87	27	5	4
33	88	28	9	1
34	87	30	7	6
35	83	22	5	5
36	88	26	7	4
37	89	25	7	6
38	89	30	11	3
39	89	26	13	4
40	87	28	14	8
41	89	22	16	4
42	86	23	11	5
43	89	24	8	7
44	88	30	9	4
45	86	23	9	3
46	87	17	11	4
47	86	18	8	2
48	90	18	10	5
49	89	20	18	5
50	88	21	12	6

Fonte: elaboração própria

Apêndice D – Dados experimentais - Teste P

Tabela D1 – Dados experimentais do Teste P01

Amostra	Teste P-01			
	Total	Vermelho	Branco	Laranja
1	89	3	7	13
2	88	0	6	12
3	91	0	8	14
4	86	2	7	11
5	88	1	6	12
6	89	1	13	11
7	88	3	10	10
8	88	1	6	9
9	89	2	11	16
10	90	3	14	13
11	88	1	5	13
12	90	0	10	10
13	89	1	14	8
14	88	0	11	13
15	90	3	10	8
16	90	1	8	12
17	87	0	13	13
18	90	0	11	19
19	89	0	8	12
20	90	1	11	9
21	89	1	6	13
22	89	0	8	4
23	90	1	9	7
24	89	0	9	12
25	87	1	4	15
26	87	1	8	8
27	90	0	8	10
28	89	3	8	21
29	89	0	12	13
30	89	1	8	8
31	89	0	11	18
32	89	1	6	13
33	88	0	5	15
34	88	2	15	10
35	89	0	7	23
36	91	0	10	16
37	88	0	7	12
38	88	0	11	10
39	87	1	8	7
40	89	0	6	12
41	88	0	5	14
42	88	1	10	11
43	88	0	9	10
44	88	0	10	21
45	88	1	12	13
46	89	2	10	10
47	90	1	9	9
48	88	0	12	10
49	89	0	10	12
50	89	2	10	12

Fonte: elaboração própria

Tabela D2 – Dados experimentais do Teste P02

Amostra	Teste P-02			
	Total	Vermelho	Branco	Laranja
1	91	1	6	13
2	93	2	12	14
3	90	1	1	9
4	89	0	7	15
5	90	1	7	11
6	89	0	9	16
7	86	1	6	16
8	89	0	9	18
9	88	1	8	14
10	89	0	6	17
11	91	0	9	14
12	89	1	11	9
13	90	1	8	17
14	93	0	6	9
15	89	0	10	6
16	89	1	7	8
17	91	0	8	14
18	89	0	3	11
19	89	0	5	6
20	94	0	6	13
21	89	0	9	9
22	93	0	8	16
23	89	1	13	10
24	94	1	7	13
25	89	2	16	5
26	91	1	7	13
27	90	2	11	13
28	91	0	11	14
29	88	0	5	12
30	92	0	10	20
31	93	1	10	9
32	90	0	8	12
33	91	0	7	8
34	90	1	8	14
35	93	2	10	9
36	90	0	8	14
37	89	0	9	18
38	95	3	9	10
39	89	1	13	10
40	90	3	9	16
41	91	1	4	10
42	88	2	8	13
43	93	1	6	12
44	97	1	10	7
45	88	2	8	12
46	94	0	14	15
47	92	2	6	17
48	89	0	13	13
49	89	0	12	7
50	92	0	11	10

Fonte: elaboração própria

Tabela D3 – Dados experimentais do Teste P03

Amostra	Teste P-03			
	Total	Vermelho	Branco	Laranja
1	88	1	7	17
2	87	0	7	13
3	90	0	2	13
4	89	1	8	13
5	89	0	11	13
6	89	1	9	11
7	91	0	7	11
8	90	1	11	8
9	92	1	6	13
10	92	0	7	11
11	91	1	4	17
12	88	1	8	10
13	88	1	9	9
14	91	2	11	13
15	89	1	9	13
16	89	0	6	14
17	89	0	9	14
18	90	1	7	18
19	91	3	10	13
20	92	1	13	13
21	92	3	13	9
22	89	0	6	13
23	91	2	10	12
24	89	1	12	13
25	90	0	9	12
26	90	0	7	21
27	91	1	13	14
28	90	1	15	10
29	90	2	11	9
30	87	2	14	9
31	92	1	9	13
32	93	0	11	16
33	90	0	13	10
34	88	0	4	16
35	88	0	7	13
36	90	1	11	5
37	89	2	5	12
38	92	0	7	6
39	91	0	9	11
40	89	1	9	14
41	92	0	13	19
42	89	1	10	16
43	94	1	7	18
44	94	0	12	10
45	94	2	11	18
46	90	0	6	12
47	90	1	12	11
48	90	0	6	15
49	91	1	4	13
50	92	0	9	19

Fonte: elaboração própria

Apêndice E – Dados experimentais – Massas de partículas com cor

Tabela E1 - Massas dos grupos 1 a 50 – partículas com cor

Grupo	Massa (g)
1	5,97
2	5,80
3	5,96
4	5,70
5	6,01
6	5,94
7	6,13
8	5,76
9	6,01
10	5,44
11	5,67
12	5,88
13	5,64
14	5,75
15	5,79
16	5,86
17	5,80
18	5,78
19	5,97
20	5,86
21	6,29
22	5,54
23	5,48
24	6,01
25	6,16
26	5,95
27	6,02
28	5,92
29	5,78
30	5,91
31	5,56
32	5,89
33	5,77
34	5,82
35	5,78
36	6,01
37	5,81
38	6,06
39	5,47
40	6,06
41	6,05
42	6,13
43	5,75
44	5,34
45	5,73
46	5,81
47	6,13
48	5,73
49	5,90
50	6,00

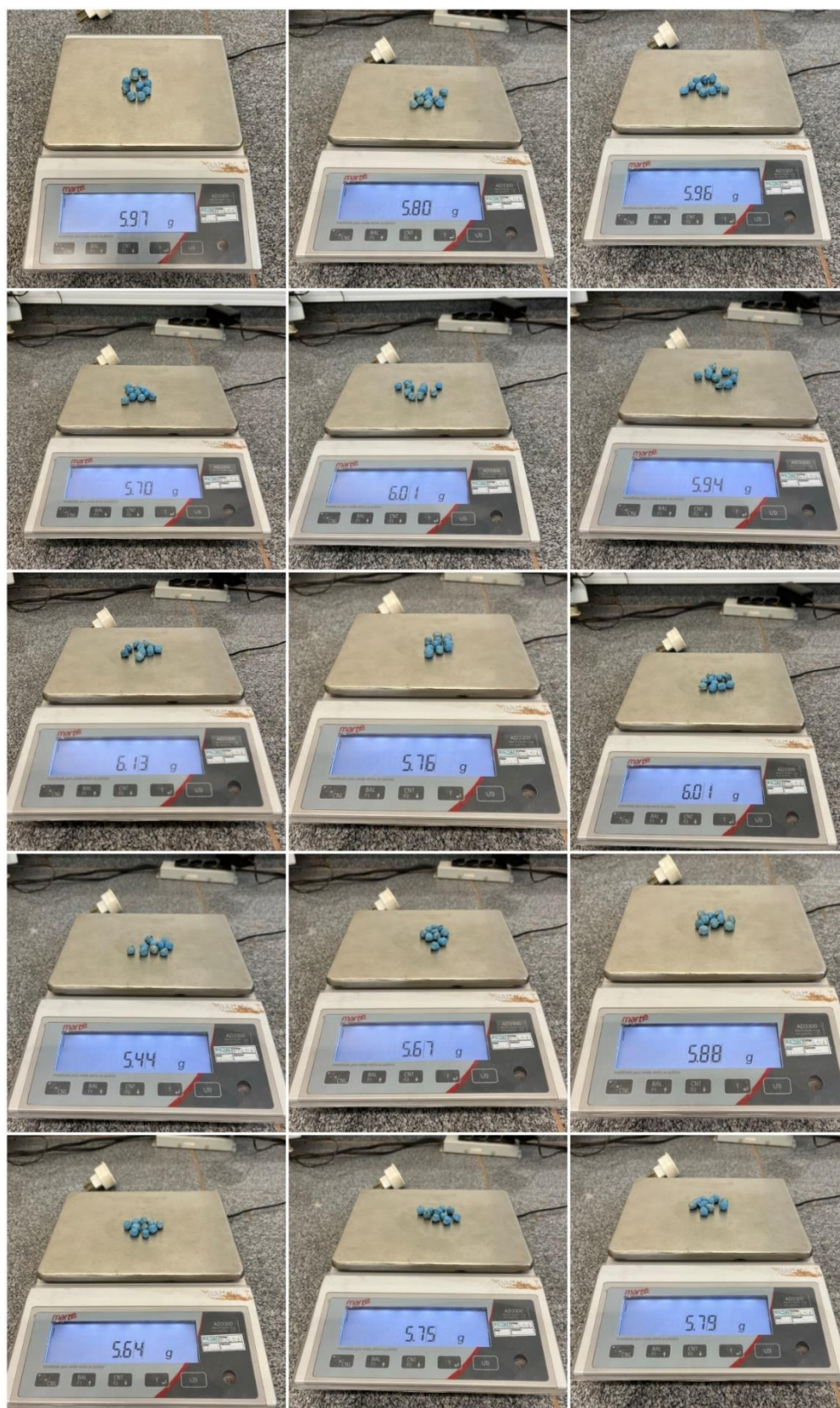
Fonte: elaboração própria

Tabela E2 - Massas dos grupos 51 a 100 – partículas com cor

Grupo	Massa (g)
51	5,62
52	5,90
53	6,10
54	5,67
55	5,53
56	5,80
57	5,33
58	5,57
59	6,12
60	5,90
61	5,73
62	5,94
63	5,65
64	5,93
65	5,75
66	5,66
67	5,87
68	5,84
69	5,67
70	5,51
71	5,68
72	5,88
73	5,82
74	5,82
75	5,52
76	5,84
77	5,61
78	5,62
79	5,60
80	5,89
81	5,67
82	5,95
83	5,80
84	5,73
85	5,56
86	5,52
87	5,73
88	5,77
89	6,05
90	5,73
91	5,88
92	5,85
93	6,06
94	5,90
95	6,29
96	5,85
97	5,62
98	6,05
99	6,01
100	6,18

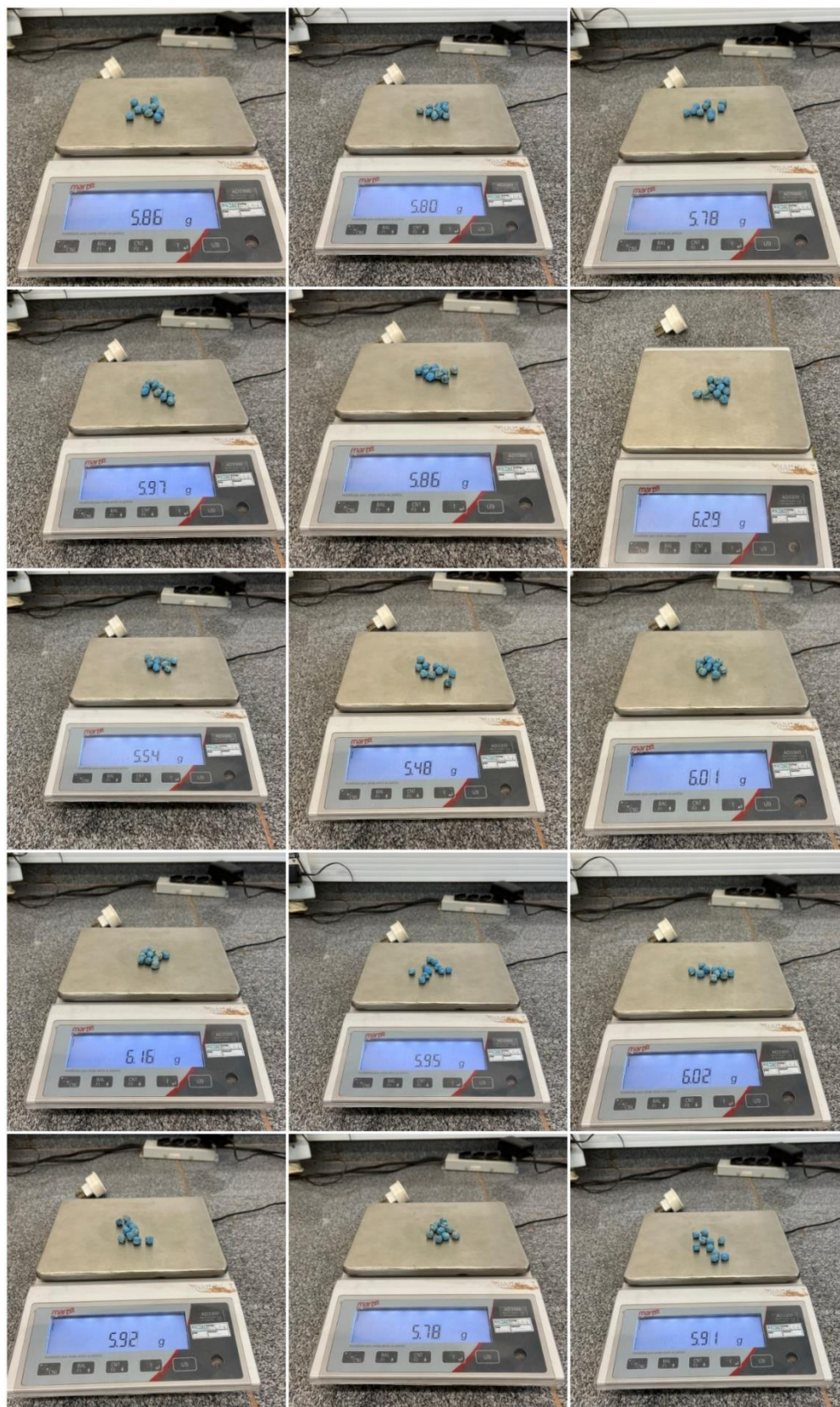
Fonte: elaboração própria

Figura E1 - Grupos 1 a 15 – partículas com cor



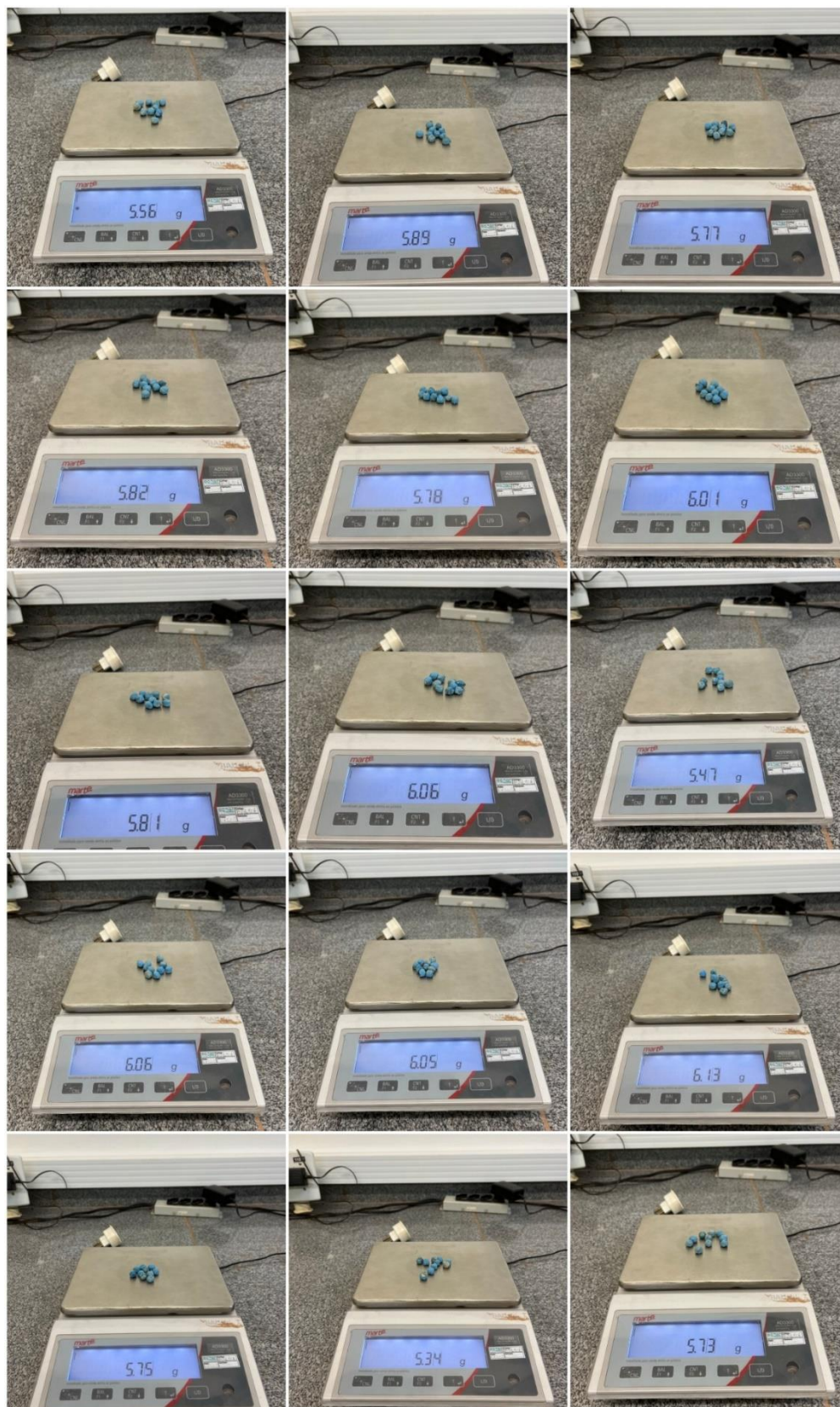
Fonte: elaboração própria

Figura E2 - Grupos 16 a 30 – partículas com cor



Fonte: elaboração própria

Figura E3 - Grupos 31 a 45 – partículas com cor



Fonte: elaboração própria

Figura E4 - Grupos 46 a 60 – partículas com cor



Fonte: elaboração própria

Figura E5 - Grupos 61 a 76 – partículas com cor (exceto grupo 66)



Fonte: elaboração própria

Figura E6 - Grupos 77 a 91 – partículas com cor



Fonte: elaboração própria

Figura E7 - Grupos 92 a 100 – partículas com cor



Fonte: elaboração própria