

DEMETRIO CORNILIOS ZACHARIADIS

**ESTUDO DOS EFEITOS DO DESALINHAMENTO ANGULAR  
DE MANCAIS HIDRODINÂMICOS NAS VIBRAÇÕES DE  
ROTORES FLEXÍVEIS**

Tese apresentada à Escola Politécnica da  
Universidade de São Paulo para a obtenção  
do título de Doutor em Engenharia.

São Paulo  
2000

---

CONSULTA  
FT-1559

DEMETRIO CORNILIOS ZACHARIADIS

**ESTUDO DOS EFEITOS DO DESALINHAMENTO ANGULAR  
DE MANCAIS HIDRODINÂMICOS NAS VIBRAÇÕES DE  
ROTORES FLEXÍVEIS**

Tese apresentada à Escola Politécnica da  
Universidade de São Paulo para a obtenção  
do título de Doutor em Engenharia.

Área de Concentração:  
Engenharia Mecânica

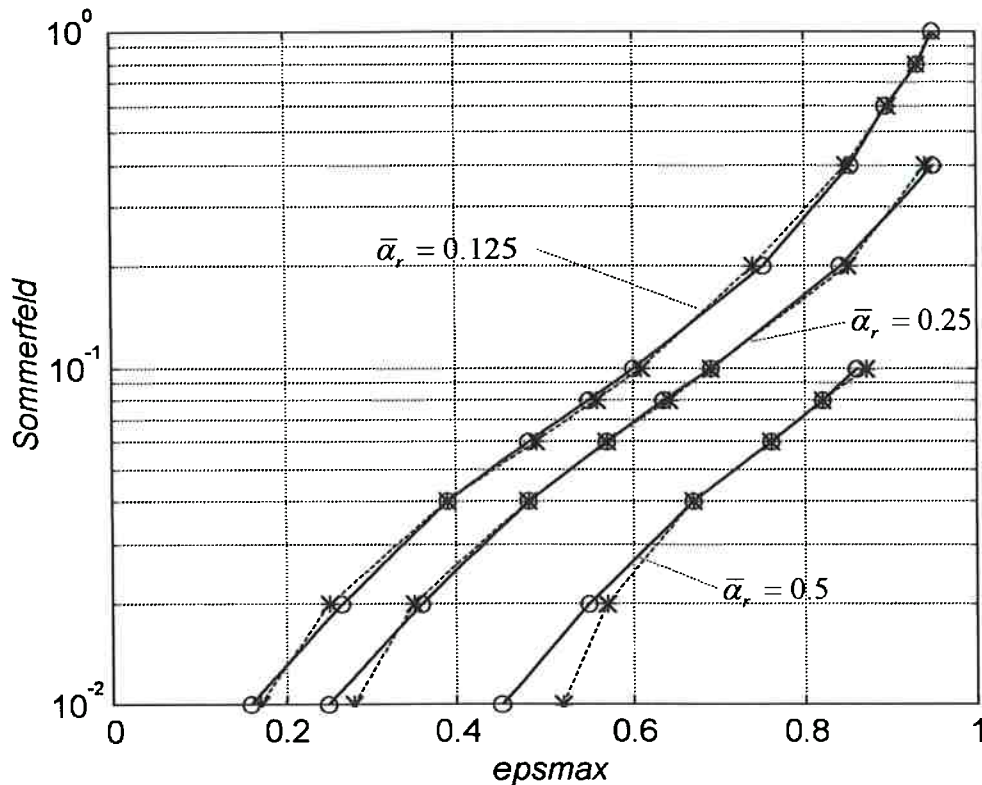
Orientador:  
Francisco Emílio Baccaro Nigro

2000

## Errata

### Alterações em figuras

Na pg. 47, Figura 2.9a, considerar a figura abaixo:



### Alterações no texto

No índice, item 1.3, substituir “trabalho” por “Trabalho”.

No índice, item 4.2, substituir “Sensibilidade” por “Sensibilidade”.

No índice, após o item 5.1, acrescentar “5.1.1 Cálculo da posição de equilíbrio estático....92”

Na pg. ii, substituir American por “American”.

Na pg. iii, substituir “jeffcott” por “Jeffcott”.

Na pg. 22, parágrafo 3, substituir “permanecem” por “permaneçam”.

Na pg. 40, parágrafo 1, substituir “;são” por “; são”.

Na pg. 42, legenda da Tabela 2.4, substituir “percentual” por “porcentual”.

Na pg. 53, parágrafo 1, substituir “mostram a as curvas” por “mostram as curvas”.

Na pg. 54, a legenda da figura 2.12b é igual à da figura 2.12a, substituindo “plano vertical” por “plano horizontal”.

Na pg. 57, equação (3.3), última linha, substituir “ $c_{BB} \Delta \dot{B}$ ” por “ $c_{AB} \Delta \dot{B}$ ”.

Na pg. 61, legenda da Figura 3.1, substituir “ $y_r^s, z_r^s$ ” por “ $\bar{y}_r^s, \bar{z}_r^s$ ”.

Na pg. 71, legenda da Figura 4.2, substituir “fatores” por “Fatores”.

Na pg. 76, parágrafo 1, substituir “4.4d” por “4.4f”.

Na pg. 81, parágrafo 2, substituir “Barret” por “Barrett”.

Na pg. 97, parágrafo 3, substituir “sistema..” por “sistema.”.

Na pg. 101, legenda da tabela 5.1, substituir “ $k_e = 48EI/l_{bb}^3$ ” por “ $k_e = 48EI_e/l_{bb}^3$ ”.

Na pg. 103, parágrafo 1, substituir “apresentada no capítulo 2” por “resumida no Anexo”.

Na pg. 107, legendas das figuras, substituir “FH,” por “FH:”.

Na pg. 112, parágrafo 1, substituir “para amplitudes” por “para as amplitudes”, e “figura 5.11a” por “figura 5.11”.

Na pg. 114, parágrafo 2, substituir “ $r_L$ ” por “ $r_l$ ”.

Na pg. 119, parágrafo 1, substituir " $c_{BB}$ " por " $c_{BB}$ ".

Na pg. 120, substituir " $\approx 4400$ " por " $\approx 4800 \text{ Ns/m}$ " e " $\approx 3800$ " por " $\approx 3900$ ".

Na pg. 135, figura 5.21b, o menor valor apontado corresponde a  $f_{32,II}$ .

Na pg. 141, figura 5.24b, o menor valor apontado corresponde a  $f_{32,I}$ .

Na pg. 144, legenda da figura 5.26a, substituir "5.10" por "5.12".

Na pg. 147, parágrafo 1, substituir " $\bar{\alpha}_{r,2} = 0.291$ " por " $\bar{\alpha}_{r,3} = 0.291$ ".

Na pg. 172, parágrafo 1, substituir " $|\vec{U}_d|$ " por " $|\vec{U}_d/\omega^2|$ ".

Na pg. 175, legenda da figura 6.10, excluir "(amplitudes em  $m$  ou  $rad$ )", e no parágrafo 1, substituir "do nó 3" por "do mancal 3".

Na pg. 176, parágrafo 2, substituir " $C_{b3}$ " por " $\bar{C}_{b3}$ ".

Na pg. 179, parágrafo 5, substituir "uso modelo" por "uso do modelo".

Na pg. 180, parágrafo 3, substituir "para análise" por "para a análise".

#### Na lista de referências bibliográficas

Acrescentar:

Dimarogonas, A., 1996, "Vibration for Engineers", 2<sup>nd</sup> ed., Prentice Hall.

Hamrock, B. J., 1995, "Fundamentals of Fluid Film Lubrication", McGraw Hill.

Hildebrand, F. B., 1976, "Advanced Calculus for Applications, 2<sup>nd</sup> ed. Prentice-Hall

Müller, P. C., Schiehlen, W. O., 1985, "Linear Vibrations", Martinus Nijhoff Publishers.

Pinkus, O., Sternlicht, B., 1961, "Theory of Hydrodynamic Lubrication", McGraw-Hill.

Shigley, J. E., 1984, Elementos de Máquinas, LTC.

Vijayaraghavan, D., Keith, T. G., 1990, "Grid Transformation and Adaption Techniques Applied in the Analysis of Cavitated Journal Bearings", ASME Journal of Tribology, Vol 112, pp. 52-59.

Yu, H., Adams, M. L., 1989, "The Linear Model for Rotor-Dynamic Properties of Journal Bearings and Seals with Combined Radial and Misalignment Motions", Journal of Sound and Vibration, 131(3), pp. 367-378.

Excluir

Barrett, L. E., Gunter, E. J., 1980, "Stabilization of Aerodynamically Excited Turbomachinery with Hydrodynamic Journal Bearings and Supports," Proc. Rotordynamic Instability Problems in High Performance Turbomachinery, pp. 429-452.

Choudhury, P. De, Zsolcsak, S. J., Barth, E. W., 1976, "Effect of Damping on the Lateral Critical Speeds of Rotor-Bearing Systems," ASME Journal of Engineering for Industry, pp. 505-513.

Ruhl, R. L., Booker, J. F., 1972, "A Finite Element Model for Distributed Parameter Turborotor Systems", ASME Journal of Engineering for Industry, pp. 126-132.

#### Modificações de caráter geral

Substituir "Equação de Reynolds" por "equação de Reynolds" (exceto no índice e nos títulos).

## ÍNDICE

	Resumo.....	i
	Agradecimentos.....	ii
	Lista de Símbolos.....	iii
<b>1</b>	<b>Introdução .....</b>	<b>1</b>
	1.1 Desalinhamentos em Mancais Hidrodinâmicos...	1
	1.2 Revisão da Bibliografia .....	5
	1.3 Objetivos e Estrutura do trabalho.....	15
<b>2</b>	<b>Cálculo dos Esforços Hidrodinâmicos em Mancais de Deslizamento.....</b>	<b>18</b>
	2.1 A Equação de Reynolds.....	18
	2.2 Consideração do Desalinhamento Angular.....	20
	2.3 O Efeito de Cunha Axial.....	32
	2.4 Resultados Numéricos e Validação da Formulação.....	36
<b>3</b>	<b>Coefficientes Dinâmicos do Modelo Linear Completo de Mancais Hidrodinâmicos.....</b>	<b>55</b>
	3.1 Coefficientes Dinâmicos.....	55
	3.2 Cálculo dos Coefficientes Dinâmicos.....	58
<b>4</b>	<b>Análise Qualitativa dos Efeitos do Desalinhamento Angular nas Vibrações de Rotores Bi-Apoiados.....</b>	<b>66</b>
	4.1 Rotor de Jeffcott com o Modelo Completo de Mancais Hidrodinâmicos.....	66

4.2	Sensibilidade aos Efeitos do Desalinhamento Angular.....	74
4.2.1	Vibrações livres não amortecidas.....	75
4.2.2	Vibrações forçadas amortecidas.....	80
5	Análise Quantitativa: Utilização do Método dos Elementos Finitos.....	90
5.1	Procedimentos Adotados para a Aplicação do MEF.....	90
5.1.2	Análise de vibrações lineares.....	97
5.2	Exemplos de Análises de Vibrações Lineares.....	101
5.3	Efeitos do Desalinhamento Angular nas Vibrações de Rotores Bi-Apoiados.....	114
5.4	Efeitos do Desalinhamento Angular nas Vibrações de Rotores Hiperestáticos.....	128
5.4.1	Rotor apoiado em quatro mancais.....	128
5.4.2	Rotor apoiado em três mancais.....	136
6	Análise das Vibrações de um Equipamento Industrial.....	151
6.1	Descrição do Equipamento e do Modelo de Análise.....	151
6.2	Análise das Vibrações do Rotor.....	155
6.2.1	Influência do modelo de mancal empregado nos resultados da análise.....	165
7	Conclusões e Trabalhos Futuros.....	178
	Referências Bibliográficas.....	181
	Apêndice 1	
	Anexo	

## Resumo

Considerado irrelevante, até o presente, pela grande maioria dos pesquisadores envolvidos com a dinâmica de rotores, o desalinhamento angular dos moentes de mancais hidrodinâmicos é aqui revelado como fator que pode assumir papel essencial para a correta análise do comportamento dinâmico desses equipamentos.

Para se chegar a essa conclusão, foram desenvolvidas diversas formulações e modelos que propiciam descrições qualitativas e quantitativas dos efeitos do desalinhamento angular nas vibrações lineares de máquinas rotativas.

Com a utilização desses recursos de análise, foi possível identificar diversas situações em que a utilização do modelo de mancais tradicionalmente empregado no estudo de vibrações lineares de rotores leva a resultados inválidos. Para tais situações, é proposto aqui o uso do modelo completo de mancais, que inclui no modelo tradicional os esforços decorrentes das vibrações angulares do moente.

Os recursos desenvolvidos permitem o cálculo dos esforços hidrodinâmicos em mancais bem como dos coeficientes do modelo completo, e a sua utilização na análise de vibrações de rotores através de modelos de elementos finitos.

Os casos enfocados vão desde sistemas muito simples, como o rotor de Jeffcott/Laval, até o estudo de rotores hiperestáticos apoiados em diversos mancais sujeitos a desalinhamentos.

### ***Abstract***

*Disregarded by the great majority of rotordynamics researchers, up to now, the effects of journal's angular misalignment are here shown to be potentially essential for the proper analysis of rotors.*

*In order to attain this conclusion, a variety of models and formulations are presented, providing qualitative and quantitative descriptions of these angular misalignment effects on rotor vibrations.*

*By means of these analysis resources, it was possible to identify several situations in which the use of the traditional 8 coefficient bearing model leads to invalid rotor linear vibration analysis results. In such cases, it is shown here that the use of the complete bearing model, which includes in the traditional one the forces and moments arising from journal's angular vibrations, is the correct procedure.*

*The analysis tools developed in this research permit of the calculation of forces and moments in misaligned bearings, as well as the evaluation of all the dynamic coefficients of the complete bearing model, which are used in linear vibration analyses performed via the finite element method.*

*The cases focused range from very simple models, like the Jeffcott rotor, to statically indeterminate systems with several misaligned bearings.*



### Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Francisco Emílio Baccaro Nigro, pelo acolhimento, exemplo de seriedade profissional, apoio e conhecimentos generosamente transmitidos durante a realização deste trabalho.

Ao Comitê do “International Gas Turbine Institute” da American Society of Mechanical Engineers”, pelo prêmio concedido por ocasião da apresentação de trabalho em Congresso Técnico, que certamente me ajudou a rejuvenescer (Anexo).

Ao Prof. Dr. Carlos C. Tu pelo elucidativo curso sobre mancais.

Ao Prof. Dr. Clóvis de A. Martins pelas utilíssimas “dicas” sobre o MATLAB.

Ao Prof. Dr. Fábio Saltara pelo empréstimo do equipamento de informática.

Ao Dr. Mawabujee Gangash, por disponibilizar a sua valiosa coleção de artigos.

Aos colegas Érico Jones, pela paciência, Eugênia Ghara Faus, pelo deslumbre, e Tulipa Stelde Karni, pelos quitutes.

Símbolos de uso mais freqüente

$A, B$  : inclinações ao redor dos eixos  $Z$  e  $Y$ .

$a_{RT}, a_{TR}, a_{RR}$  : relação entre coeficientes de amortecimento (eq. 4.11, pg. 80).

$c_R$  : folga radial do mancal.

$c_{YY}, c_{YA}$ , etc.: coeficientes de amortecimento.

$D$ : diâmetro do mancal.

$F_h$  : força resultante no moente/mancal.

$f_{32}, f_{16}, f_8$  : fatores de amplificação calculados com o modelo de 32, 16 ou 8 coeficientes.

$f_n$  : freqüência natural amortecida.

$h$ : espessura do filme de fluido lubrificante.

$J_{p,i}$  : momento polar/transversal de inércia.

$k_{YY}, k_{YZ}$ , etc.: coeficientes de rigidez do mancal.

$L$ : comprimento do mancal.

$l$  : comprimento de metade do trecho flexível, rotor de jeffcott.

$r$ : semi eixo maior da órbita elíptica.

$r_c$  : relação entre folga radial e diâmetro do mancal.

$r_k$  : relação entre a rigidez do mancal e do eixo (eq. 4.8 pg. 75).

$r_l$  : relação entre o comprimento do mancal e do eixo (eq. 4.8 pg. 75).

$r_{LD}$  : relação entre o comprimento e o diâmetro do mancal.

$r_{TR}, r_{RT}$ , etc.: relações entre coeficientes de rigidez (eq. 4.8, pg75).

$\omega$  : velocidade angular ou freqüência de rotação.

$w$  : velocidade crítica.

$X, Y, Z$ : eixos do sistema de coordenadas;  $X$  é paralelo ao eixo longitudinal do rotor indeformado.

$\bar{y}, \bar{z}$ : deslocamentos divididos pela folga radial.

$\bar{\alpha}_r, \bar{\beta}_r$ : inclinações divididas pelo máximo desalinhamento angular relativo.

$\delta_r$ : desalinhamento angular relativo.

$\varepsilon$ : excentricidade relativa do moente.

$\rho(\omega)$ : parte real de autovalor.

$\sigma_{ins}$ : velocidade limite de estabilidade.

## 1 INTRODUÇÃO

O comportamento dinâmico de rotores apoiados em mancais hidrodinâmicos é um tema exaustivamente pesquisado, tanto devido à variedade e complexidade dos fenômenos envolvidos, quanto à sua importância para o bom funcionamento de uma infinidade de sistemas.

O aspecto que se pretende focar neste trabalho está relacionado à identificação e avaliação qualitativa e quantitativa dos efeitos de desalinhamentos em mancais hidrodinâmicos nas vibrações de equipamentos rotativos. O desalinhamento é caracterizado pela posição relativa entre os moentes e respectivos mancais, e pode ser classificado em paralelo e angular.

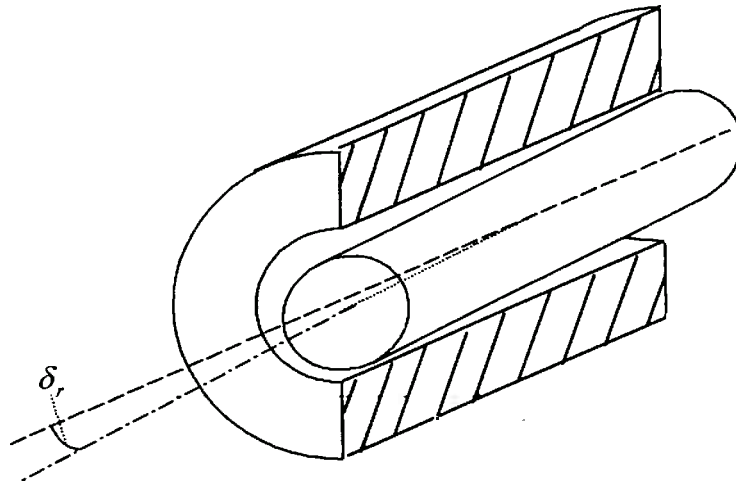
Este assunto já mereceu atenção por parte de outros pesquisadores, principalmente no que se refere à descrição dos efeitos do desalinhamento angular nas propriedades estáticas de mancais, tais como posição de equilíbrio e capacidade de carga, fluxo e temperatura do fluido lubrificante. Os efeitos do desalinhamento angular nas propriedades de rigidez e amortecimento dos mancais — e conseqüentemente, a sua influência no comportamento dinâmico de rotores — são pouco conhecidos, e o seu estudo constitui o foco principal deste trabalho.

Na primeira parte desta introdução são explicitadas as definições de desalinhamento adotadas neste texto e parte da nomenclatura empregada no seu estudo. Em seguida, é apresentado o estado atual do conhecimento relativo ao tema específico desta pesquisa, e finaliza-se o capítulo detalhando os objetivos da tese e a contribuição que se pretende agregar ao estado da arte.

### 1.1 Desalinhamentos em Mancais Hidrodinâmicos

Ocorre desalinhamento angular relativo entre moentes e mancais quando os seus eixos geométricos não são paralelos. Esta situação é claramente caracterizada para a grande maioria dos mancais de geometria conforme, excetuando mancais esféricos ou similares; a figura 1.1 mostra esquematicamente um mancal com desalinhamento angular  $\delta_r$ . O desalinhamento paralelo parece ser um termo contraditório, visto que a operação dos mancais hidrodinâmicos de rotores horizontais normalmente supõe que os eixos geométricos do moente e do mancal

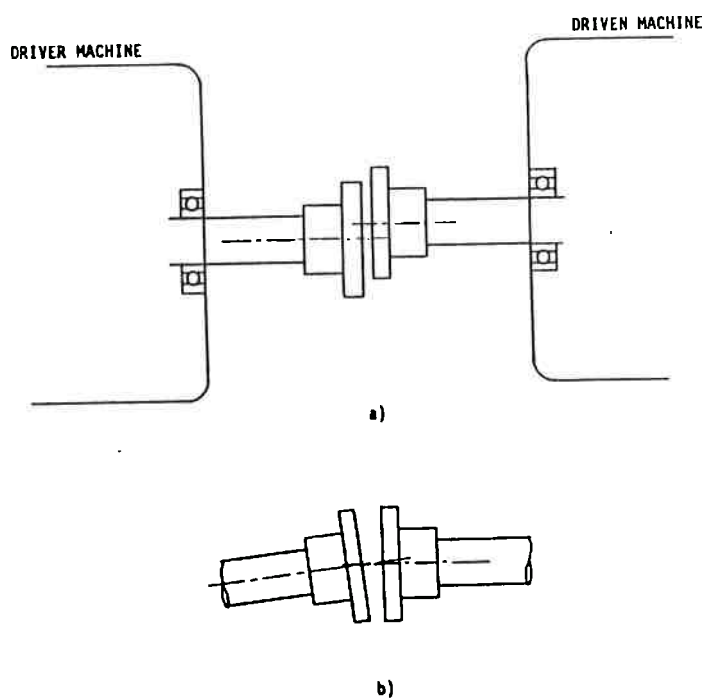
não coincidam, ou seja, que há uma excentricidade entre os eixos; essa excentricidade normalmente é representada pela letra  $e$ , ou  $\varepsilon = e/c_R$  na forma adimensional, denominada excentricidade relativa, onde  $c_R$  é a folga radial do mancal. O contexto no qual se utiliza o termo desalinhamento paralelo refere-se às situações em que a posição relativa entre os eixos geométricos do moente e do mancal não é a especificada ou calculada no projeto da máquina, acarretando mudanças no seu comportamento previsto.



**Figura 1.1** Representação esquemática de um mancal com desalinhamento angular.

Desconsiderando o acoplamento com outras máquinas, os moentes de um rotor bi-apoiado seriam suscetíveis a desalinhamento angular decorrente da deflexão devida ao peso próprio e demais carregamentos estáticos, somado ao desalinhamento proveniente de erros de fabricação, desníveis entre os mancais (ou desalinhamento paralelo dos mesmos) e eventuais distorções térmicas. Tal desalinhamento angular pode ser minimizado se no projeto for prevista a utilização de mancais auto-alinhantes, que acomodariam o desalinhamento causado pelo carregamento estático. Após o posicionamento do eixo nos mancais e efetuada a fixação dos mesmos na carcaça da máquina, a ocorrência de desalinhamento angular estaria associada às demais causas listadas. Considerações análogas são válidas para rotores cujos eixos são suportados em mais de dois mancais.

No caso de sistemas de rotores conectados em linha, a origem mais corriqueira de desalinhamentos é a não-coaxialidade de eixos de máquinas que devem ser unidas por acoplamentos. A não-coaxialidade pode ser paralela ou angular, conforme mostrado na figura 1.2 (Wowk (1991)); normalmente, os dois tipos de não-coaxialidade estarão presentes, e o alinhamento dos eixos durante a montagem do equipamento envolve um procedimento iterativo de medição e movimentação dos mancais dos rotores a serem acoplados.



**Figura 1.2** Desalinhamento paralelo (a) e angular (b) de eixos adjacentes (Wowk (1991)).

Em função da flexibilidade e do tipo de acoplamento empregado para conectar rotores adjacentes, a sua não-coaxialidade seria causadora de desalinhamentos angulares e paralelos dos mancais, na medida em que a vinculação dos eixos aproxima as suas extremidades. Diversos fabricantes de equipamentos recomendam o alinhamento catenário, que é obtido quando os mancais dos rotores são posicionados de forma tal que as extremidades dos eixos a serem acoplados apresentam linhas de centro coincidentes antes da conexão. Nesta configuração, e na ausência de vibrações, cada máquina operaria como se estivesse desacoplada das demais, e os acoplamentos não estariam submetidos a qualquer espécie de esforço proveniente dos eixos.

A variação no tempo do ângulo entre os eixos geométricos do moente e do mancal, devida às vibrações do rotor ou das suas fundações, provoca alterações nos esforços hidrodinâmicos

gerados no filme de fluido lubrificante. No estudo de vibrações lineares, que inclui o cálculo da resposta em regime permanente e a previsão da estabilidade, a variação do desalinhamento angular é descrita como uma vibração de pequena amplitude nas vizinhanças do desalinhamento angular correspondente à situação de equilíbrio estático. Isto é análogo ao estudo de vibrações feito sem a consideração do desalinhamento angular, no qual se leva em conta apenas a variação da excentricidade ao redor da posição relativa de equilíbrio estático. Por analogia com os termos normalmente usados para designar as vibrações dos moentes, denominadas vibrações verticais ou horizontais, será aqui empregado também o termo “vibrações angulares”, para identificar a variação no tempo do desalinhamento angular entre os moentes e os respectivos mancais.

Quando a análise de vibrações lineares é feita sem considerar a variação do desalinhamento angular relativo no tempo, emprega-se o aqui denominado modelo linear plano de mancais hidrodinâmicos, tradicionalmente conhecido como modelo de 8 coeficientes dinâmicos: 4 coeficientes de rigidez e 4 de amortecimento viscoso. Os coeficientes de rigidez multiplicam os deslocamentos de translação que descrevem a variação da posição relativa do centro geométrico do moente nas vizinhanças da sua posição de equilíbrio estático, fornecendo os esforços de restituição; analogamente, os coeficientes de amortecimento multiplicados pela variação de velocidade relativa fornecem os esforços dissipativos aplicados pelo filme de fluido lubrificante no moente. Tal análise é aplicável ao estudo de rotores rígidos, em que o desalinhamento angular permanece constante, ou então, no caso de rotores flexíveis, quando se considera que a influência das vibrações angulares é irrelevante.

Para introduzir no modelo linear de mancais a variação no tempo do desalinhamento angular faz-se necessário o cálculo de coeficientes adicionais. Quando se leva em conta apenas os momentos associados ao desalinhamento angular, deve-se acrescentar 8 coeficientes (4 de rigidez e 4 de amortecimento), resultando em um modelo de 16 coeficientes dinâmicos. A inclusão das forças dependentes do desalinhamento angular, e dos momentos dependentes de translações leva a um modelo de 32 coeficientes, aqui denominado modelo linear completo de mancais hidrodinâmicos. A exclusão dos esforços de inércia deste modelo será comentada oportunamente.

## 1.2 Revisão da Bibliografia

Serão mencionados inicialmente os trabalhos dedicados ao estudo do desalinhamento angular, que precederam, também cronologicamente, os estudos relacionados ao desalinhamento paralelo, normalmente associado a rotores hiperestáticos. Conforme já comentado, a maioria dos trabalhos está relacionada ao comportamento estático.

Os resultados da primeira investigação sistemática foram publicados em 1957 por Dubois et al., que determinaram experimentalmente os efeitos do desalinhamento angular nas características operacionais estáticas de mancais cilíndricos com uma ranhura axial no topo. Segundo os autores, o resultado mais importante referia-se à posição de equilíbrio estático do moente, que era pouco afetada pelo desalinhamento angular do mancal em excentricidades relativas superiores a 50% da folga radial, indicando que o moente comportava-se como se estivesse “pivotado dentro do mancal”. Também foi constatado que o fluxo de óleo lubrificante era pouco afetado pelo desalinhamento angular. Os autores esboçaram ainda um procedimento para levar em conta a deflexão elástica dos moentes de mancais longos.

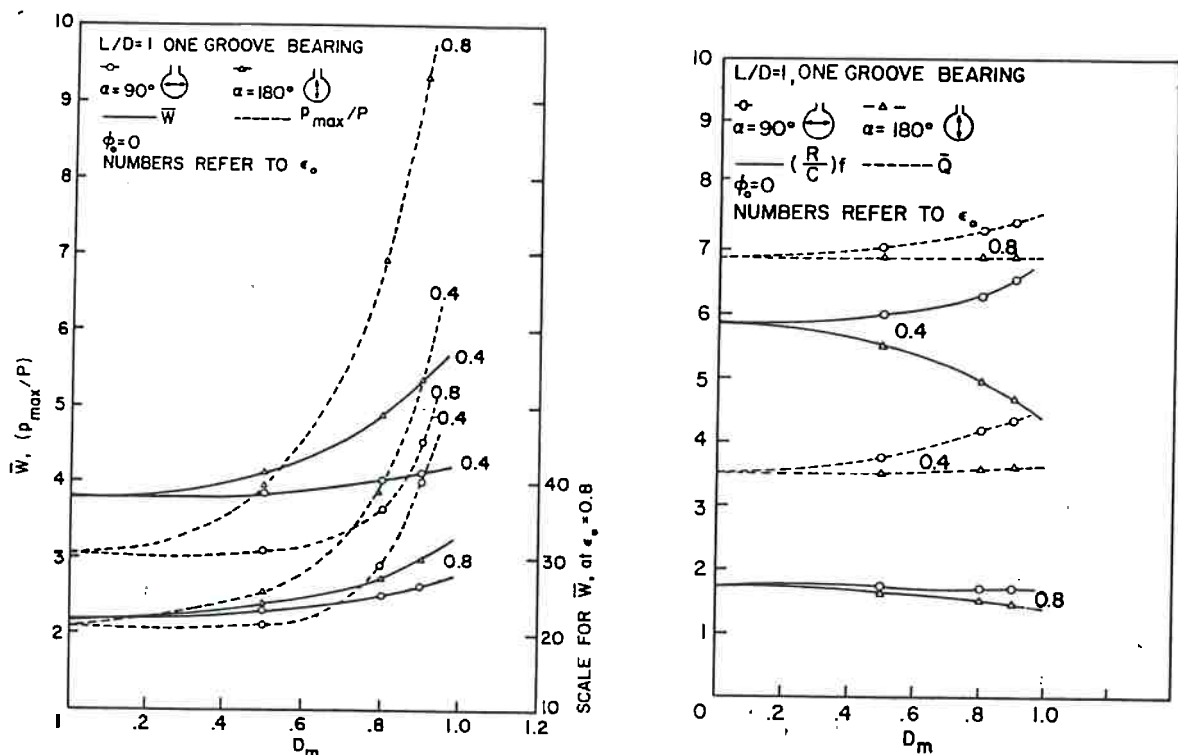
Avaliações teóricas dos momentos decorrentes do desalinhamento em mancais lubrificadas a gás foram apresentadas inicialmente por Ausman (1960) e Rice (1965), que empregaram na obtenção de seus resultados métodos de perturbação e soluções numéricas, respectivamente. Manacorda & Capriz (1965) propuseram o uso da teoria de mancais curtos para o cálculo do campo de pressões em mancais hidrodinâmicos desalinhados e apresentaram expressões analíticas para o cálculo dos momentos.

Uma discussão teórica abrangente dos efeitos do desalinhamento angular estático no comportamento de mancais cilíndricos planos foi apresentada por Smalley & McCallion (1966), que empregaram integrações numéricas da equação de Reynolds convencional para quantificar os esforços reativos (forças e momentos), o fluxo de fluido lubrificante, a força de atrito e o pico de pressão nos mancais. Os resultados mostraram que o desalinhamento angular diminuía a excentricidade no plano médio do mancal, ao mesmo tempo que provocava a diminuição do valor mínimo da espessura do filme de fluido lubrificante, indicando assim que prevalecia uma redução na máxima capacidade de carga do mancal; esses resultados estão de acordo com as medições experimentais anteriormente citadas (Dubois et al., (1957)), nas quais se constatou a redução da folga mínima entre o moente e o mancal. Também foi confirmada a pequena influência do desalinhamento angular no fluxo de



lubrificante, principalmente nas excentricidades usuais de operação, que variam entre 60% e 80% da folga radial. Com relação à força de atrito, verificou-se que ela aumentava com o desalinhamento angular, sofrendo acréscimos que variavam entre 50% nas pequenas excentricidades e 10% em excentricidades de aproximadamente 80% da folga radial. Estudos teóricos conduzidos por Safar (1984) forneceram resultados análogos aos anteriores.

Pinkus & Bupara (1979) e Vijayraghavam & Keith (1989, 1990) efetuaram análises similares incluindo o efeito das ranhuras de alimentação dos mancais, e em linhas gerais obtiveram resultados semelhantes aos anteriores. A figura 1.3 (Pinkus, Bupara (1979)) exemplifica os efeitos do desalinhamento angular na capacidade de carga, pressão máxima, fluxo de lubrificante e força de atrito, indicando que esses efeitos são mais acentuados em pequenas excentricidades e quando se está próximo da condição de roçagem entre o moente e o mancal. Na situação simulada o moente é mantido com excentricidade constante no plano de simetria do mancal e sofre inclinação ao redor de um eixo vertical ( $\alpha = 90^\circ$ ) ou horizontal ( $\alpha = 180^\circ$ ).



**Figura 1.3** Variação da capacidade de carga  $\bar{W}$ , pressão máxima  $P_{max}$ , coeficiente de atrito  $f$  e fluxo de lubrificante  $\bar{Q}$  em função do desalinhamento angular;  $D_m$  mede a razão entre o desalinhamento angular imposto e o máximo desalinhamento angular admissível na excentricidade considerada.

Simulações numéricas mais recentes de Qiu & Tieu (1995), ainda baseadas na forma tradicional da Equação de Reynolds, considerando mancais com ranhuras axiais ou

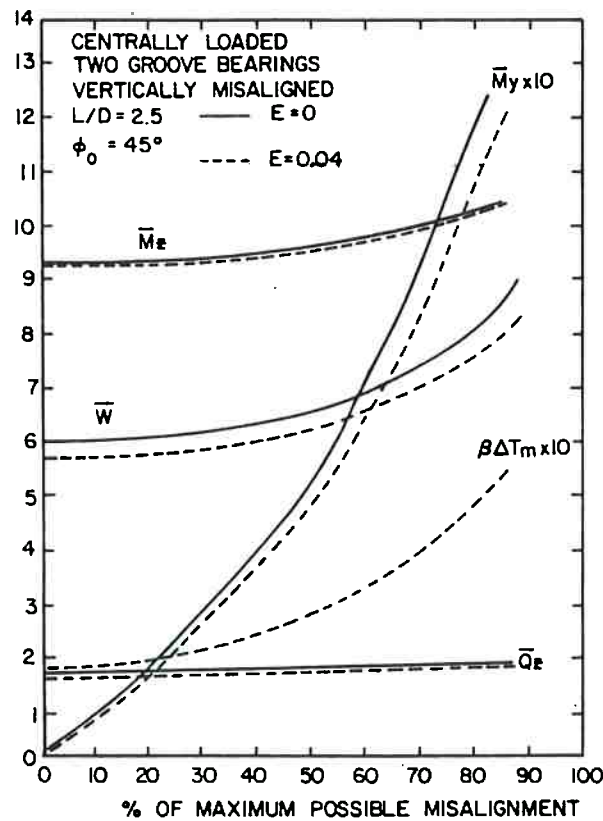
circunferenciais, confirmaram as tendências apresentadas nos resultados anteriores. O fluxo de fluido lubrificante na região cavitada foi introduzido na formulação empregada por Ikeuchi et al. (1985) para estudar o comportamento estático de mancais desalinhados com ranhuras circunferenciais; os resultados desses autores foram análogos aos de todos os demais, e segundo Qiu & Tieu (1995), essa formulação não levou a uma melhor reprodução de resultados experimentais. Arumugan et al. (1996) e Prabhu (1997) confirmaram experimentalmente a redução da espessura mínima do filme de fluido lubrificante. A perda de capacidade de carga causada pelo desalinhamento angular estático foi verificada teórica e experimentalmente também para mancais híbridos por Sato (1983) e San-Andrés (1993).

A possível influência de deformações de origem elastohidrodinâmica nas propriedades de mancais longos estaticamente desalinhados foi investigada teoricamente por Jakeman (1992), que incorporou ao modelo também uma análise térmica simplificada. Os resultados indicaram que os efeitos da deformação da superfície interna do mancal na mínima espessura de filme e na posição do “ponto de apoio do moente” (ou seja, o ponto no qual seria posicionado o “nó” correspondente ao mancal), são desprezíveis, e que a adoção de um mancal rígido é plenamente aceitável. Outros autores, como Garnier et al. (1999), julgam que tais efeitos possam ser relevantes em mancais de motores de combustão interna, que não fazem parte do escopo deste trabalho.

Braun et al. (1991) estudaram teoricamente mancais lubrificadas com fluidos criogênicos e previram que em algumas situações o desalinhamento angular poderia reduzir a pressão máxima no fluido lubrificante; em um artigo complementar por Choy et al. (1992), foi reproduzida a redução da capacidade de carga do mancal desalinhado. A operação de mancais no regime turbulento foi analisada em Safar & Riad (1988), que previram um significativo aumento do coeficiente de atrito em função do desalinhamento angular, principalmente em mancais pouco carregados, tal como fôra observado no caso de escoamento laminar. Esses autores concluíram também que os efeitos do desalinhamento nas propriedades estáticas são pouco afetados pela razão  $L/D$  do mancal.

Efeitos térmicos foram avaliados por Braun et al. (1984), que calcularam a energia dissipada pelo atrito viscoso no fluido, e a troca de calor entre o fluido lubrificante e o eixo, entre o fluido e o mancal, e entre o mancal e o meio circundante. As expressões utilizadas supunham diversas simplificações e apenas foram apresentados resultados ilustrativos, sem avaliar a influência específica do desalinhamento angular no campo de pressões e de velocidades do

escoamento. Pinkus & Bupara (1979) e Mokhtar et al. (1985) adotaram fórmulas simplificadas para expressar a variação da viscosidade em função da temperatura em um mancal adiabático, e verificaram que o desalinhamento angular acentua ligeiramente as diferenças entre as propriedades de mancais isotérmicos e adiabáticos, causando redução da capacidade de carga e do coeficiente de atrito, principalmente em situações próximas à roçagem, conforme exemplificado na figura 1.4. Um modelo para o estudo de mancais desalinhados lubrificado com fluidos não-Newtonianos foi proposto por Buckholz & Lin (1986), e a consideração desses efeitos em mancais adiabáticos foi analisada por Jang & Chang (1987). Como nos demais casos, o desalinhamento angular reduziu a capacidade máxima de carga, principalmente em situações próximas ao máximo desalinhamento angular permissível; verificou-se também um aumento do coeficiente de atrito, principalmente em pequenas excentricidades.



**Figura 1.4** Comportamento adiabático e isotérmico de um mancal desalinhado;  $\bar{M}_z$ : momento de atrito;  $\bar{M}_y$ : momento devido ao desalinhamento angular;  $\beta \Delta T_m$ : diferença entre a temperatura máxima e mínima do fluido lubrificante (Pinkus & Bupara (1979)).

A preocupação com os possíveis efeitos do desalinhamento angular constante no comportamento dinâmico de rotores foi manifestada em Bannister (1976), que calculou os 8 coeficientes do modelo linear de mancais cilíndricos planos desalinhados, e avaliou teórica e experimentalmente a influência desse desalinhamento na resposta ao desbalanceamento de rotores rígidos; os resultados indicaram um aumento na rigidez com uma conseqüente redução das amplitudes de vibrações síncronas, em situações próximas da roçagem. Resultados análogos foram obtidos teoricamente por Braun et al. (1991) e Choy et al. (1992) envolvendo mancais lubrificados com fluidos criogênicos. O cálculo dos coeficientes do modelo plano de mancais ranhurados feito por Qiu & Tieu (1995) mostrou que o desalinhamento angular estático provoca o aumento dos coeficientes de rigidez em excentricidades relativas elevadas,  $\varepsilon \geq 0.7$ , juntamente com uma tendência à redução dos coeficientes de amortecimento; a utilização desses coeficientes no estudo da estabilidade de rotores rígidos indicou um aumento da velocidade limite de estabilidade. Arumugam et al. (1996) desenvolveram procedimentos experimentais para a avaliação desses coeficientes e concluíram que o desalinhamento angular estático provoca pequenas variações nos seus valores.

No estudo das propriedades dinâmicas de mancais híbridos conduzido por Sato (1983) verificou-se experimentalmente que o aumento do desalinhamento angular estático provocava uma redução dos coeficientes de rigidez. Resultados publicados por Bou-Said & Nicolas (1992) mostraram que o desalinhamento pode afetar significativamente todos os coeficientes dinâmicos tanto no regime de operação hidrostático quanto no hidrodinâmico, sem no entanto definir uma tendência de aumento ou redução dos seus valores.

Prabhu (1997) investigou experimentalmente o comportamento estático e dinâmico de um rotor flexível bi-apoiado em cujo plano de simetria foi posicionado um mancal hidrodinâmico submetido a diferentes graus de desalinhamento angular. Além da já citada perda de capacidade de carga, foi verificado que o desalinhamento angular diminuía o tempo de parada do rotor em até 17%, evidenciando o aumento da força de atrito. A análise da resposta em frequência indicou um aumento do grau de amortecimento do sistema, e uma pequena influência do desalinhamento angular estático na amplitude do harmônico de frequência igual ao dobro da de rotação.

A consideração da variação no tempo do desalinhamento angular através do modelo linear de mancais empregado no estudo das vibrações de rotores foi parcialmente introduzida por

Kikuchi (1970), que calculou os 8 coeficientes associados aos momentos empregando a teoria de mancais curtos juntamente com a hipótese de que o campo de pressões seria descrito por uma função cúbica. Os resultados apresentados referem-se a mancais cilíndricos planos sem desalinhamento angular estático. Os coeficientes dinâmicos dos momentos foram posteriormente calculados também por Mukherjee & Rao (1977) relativos a mancais cilíndricos alinhados com razão  $L/D$  variando entre 1 e 2.

O modelo linear completo de mancais hidrodinâmicos mereceu a atenção de um número reduzido de autores. Jakeman (1986) apresentou um procedimento para o cálculo dos 32 coeficientes do modelo por julgar que a sua utilização seria necessária para representar mancais de tubos telescópicos de linhas de eixos de navios; esses mancais costumam ter uma razão  $L/D$  elevada, e por estarem normalmente próximos do propulsor, sustentam uma região do eixo que é submetida a elevados momentos dinâmicos. Este autor citou um trabalho anterior, conduzido por Pafelias (1974), no qual esses coeficientes também foram calculados. San-Andrés (1993) calculou os 32 coeficientes de rigidez e amortecimento, juntamente com os 16 coeficientes da matriz dos esforços de inércia de mancais híbridos submetidos a desalinhamento angular, prevendo a sua utilização no estudo de vibrações de bombas de alta pressão para fluidos criogênicos. Mais recentemente, Jang & Kim (1998) empregaram o método de perturbação desenvolvido por Lund & Thomsem (1978) para o cálculo dos 32 coeficientes dinâmicos de um mancal radial com ranhuras do tipo “espinha de peixe”. Os trabalhos citados apresentaram resultados ilustrativos, correspondentes a configurações de equilíbrio estático particulares, definidas pela posição relativa do centro geométrico do moente e por dois ângulos de desalinhamento; alguns desses resultados serão reproduzidos no decorrer do texto. Finalmente, Nikolakopoulos & Papadopoulos (1994) propuseram um modelo de mancais hidrodinâmicos decorrente da expansão em série de potências das forças e momentos hidrodinâmicos até termos de 3ª ordem; o modelo resultante é composto por 256 coeficientes de rigidez e amortecimento, que engloba os 32 coeficientes do modelo linear completo juntamente com os coeficientes que multiplicam termos quadráticos e cúbicos envolvendo translações, inclinações e respectivas velocidades.

Resultados de análises de vibrações de rotores em que se considerou o desalinhamento angular variável dos moentes de mancais hidrodinâmicos são ainda mais escassos. O modelo de 16 coeficientes proposto por Kikuchi (1970) foi utilizado no estudo de vibrações em regime permanente de rotores de laboratório, e constatou-se que a consideração do

desalinhamento angular reduzia significativamente a amplitude das vibrações nas passagens pelas velocidades críticas; alguns resultados experimentais confirmaram qualitativamente as previsões teóricas. As vibrações não-lineares de um modelo simplificado de rotor de laboratório foram simuladas por Myrick (1973) e Myrick & Rylander (1976), que resolveram numericamente a equação de Reynolds para mancais finitos levando em consideração a variação no tempo do desalinhamento angular dos moentes, sem no entanto quantificar o seu efeito específico no comportamento do rotor. Jakeman (1989) empregou seu modelo de 32 coeficientes para o estudo de vibrações de linhas de eixos de navios, mas não mencionou os efeitos associados à inclusão do desalinhamento angular. Os demais autores citados, San-Andrés (1993), Nikolakopoulos & Papadopoulos (1994), e Jang & Kim (1998) tampouco apresentaram resultados da utilização dos seus modelos.

Outros autores mencionam a utilização do modelo completo de mancais hidrodinâmicos sem no entanto apresentarem quaisquer resultados. É o caso de Lund (1974a, b), que recomenda a consideração do desalinhamento angular no estudo de rotores muito curtos ou que vibram em modos de frequências superiores à primeira velocidade crítica. Yu & Adams (1989) propuseram um modelo matemático para o estudo de vibrações lineares incluindo os efeitos dinâmicos do desalinhamento angular, que seriam relevantes no caso de mancais relativamente longos. Por outro lado, a opinião de Rao (1984) é que tais efeitos sempre poderiam ser ignorados.

Passando ao desalinhamento paralelo, a sua ocorrência normalmente está associada à operação de mancais de rotores hiperestáticos, que podem consistir em um único eixo apoiado em mais do que dois mancais, ou em sistemas de vários rotores acoplados através de suas extremidades ou outros elementos comuns. Apesar de o estudo das vibrações de rotores hiperestáticos não introduzir dificuldades muito significativas no equacionamento, o número de trabalhos publicados sobre o tema é relativamente reduzido em comparação ao número de trabalhos dedicados a sistemas isostáticos.

Alguns dos artigos publicados inicialmente propunham a utilização de técnicas de superposição modal, segundo a qual seriam considerados modos de vibrar do rotor apoiado em suportes rígidos, juntamente com modos de vibrar do rotor totalmente livre de vinculações, como exemplificado em Morton (1972) e Holmes et al. (1978); Black (1974) utilizou os modos correspondentes ao rotor apoiado em mancais representados por molas de rigidez uniforme. As dificuldades e limitações associadas à determinação e seleção desses

modos levou outros autores a empregarem as técnicas do Método das Matrizes de Transferência (MMT) ou do Método dos Elementos Finitos (MEF) para tratar o problema de rotores hiperestáticos de um modo mais geral.

No já citado trabalho de Kikuchi (1970), o MMT foi empregado para discretizar e calcular a resposta em regime permanente de rotores apoiados em três mancais hidrodinâmicos. O procedimento adotado incluía o cálculo das cargas atuantes em cada mancal admitindo o rotor apoiado em suportes rígidos; em seguida, essas cargas eram utilizadas para calcular as posições de equilíbrio estático dos moentes, em função das quais seriam calculados os coeficientes hidrodinâmicos do modelo de 16 coeficientes já descrito. A simplificação de se calcular a posição de equilíbrio estático sem levar em conta a não linearidade das reações hidrodinâmicas compromete a aceitação dos resultados lá apresentados, muito embora o trabalho desenvolvido apresentasse diversos aspectos inovadores. Um enfoque semelhante, empregando o MMT juntamente com o mesmo modelo de mancais curtos de Kikuchi (1970), foi adotado por Horii & Uematsu (1980) em uma investigação elucidativa do efeito do desalinhamento paralelo na estabilidade linear de sistemas resultantes do acoplamento rígido de dois rotores bi apoiados. Neste caso o cálculo das posições de equilíbrio estático dos moentes nos respectivos mancais foi feito considerando a não-linearidade das reações hidrodinâmicas juntamente com os desvios das posições dos mancais em relação às posições correspondentes ao alinhamento catenário. Os resultados apresentados mostraram que altos níveis de desalinhamento paralelo podem afetar substancialmente a estabilidade linear do sistema. Em um artigo posterior, por Kato et al. (1993), sistemas similares foram analisados quanto ao comportamento transiente provocado por abalos sísmicos.

Os efeitos do desalinhamento paralelo também foram estudados por Feng & Hahn (1997), que empregaram o MMT e modelos de mancais finitos em análises de vibrações lineares de rotores hiperestáticos. Estes autores destacaram a dificuldade de se usar valores tabulados dos coeficientes do modelo plano de mancais, pois em sistemas hiperestáticos a direção e a intensidade do carregamento no mancal não é conhecida "a priori", mas depende da deflexão do eixo e das posições relativas entre os mancais; após a determinação iterativa da posição de equilíbrio estático, em que as reações hidrodinâmicas eram calculadas a partir da integração numérica da equação de Reynolds, passava-se ao cômputo dos respectivos coeficientes dinâmicos que seriam empregados na análise de vibrações lineares. Os resultados apresentados no artigo visaram apenas ilustrar a aplicação do procedimento proposto.

Rieger & Zhou (1998a, b) estenderam o uso do MMT para incorporar, nos modelos a serem empregados em estudos de vibrações lineares de rotores, os efeitos de dois níveis de fundações flexíveis. Os autores consideraram conhecidos os valores dos coeficientes do modelo plano de mancais, e não fizeram menção à determinação da posição de equilíbrio estático do sistema nem aos possíveis desalinhamentos associados.

A utilização do MEF para a análise de vibrações de linhas de eixos hiperestáticas juntamente com modelos simplificados dos mancais é comum na Engenharia naval, como exemplificado em Hylarides (1974); Karni et al. (1987) estudaram modelos simplificados de linhas de eixos de navios, sustentadas em apoios rígidos e em um mancal hidrodinâmico longo, correspondente ao mancal do tubo telescópico. Os autores empregaram o MEF também para a solução da equação de Reynolds, e simularam a resposta transiente sob a ação de carregamentos harmônicos no propulsor. Resultados de análises de vibrações lineares via MEF envolvendo o cálculo da resposta ao desbalanceamento em regime permanente e determinação da velocidade limite de estabilidade foram apresentados por Gash (1976). Os mancais e fundações foram considerados rígidos no cálculo das reações estáticas, mas no estudo de vibrações o autor adotou modelos simplificados de fundações flexíveis.

O desalinhamento paralelo dos mancais foi incluído nos modelos de Ding & Krodkiwski (1993) que empregaram o MEF no cálculo da resposta transiente de sistemas de rotores apoiados em diversos mancais hidrodinâmicos. Para diminuir a ordem das matrizes a serem manipuladas, os autores empregaram técnicas de condensação e não levaram em consideração o efeito giroscópico de rodas de palhetas, discos, etc. Modelos análogos foram empregados por Krodkiwski et al. (1994), para a identificação de mudanças no desbalanceamento de rotores hiperestáticos.

Modelos detalhados de mancais e respectivas buchas foram obtidos via MEF por Kicinski et al. (1997), que levaram em consideração também a variação da viscosidade média do fluido lubrificante em função da temperatura, a partir do cálculo da troca de calor entre o mancal e o meio ambiente. Após o cálculo iterativo da posição de equilíbrio estático do sistema e dos coeficientes do modelo plano de mancais, calculava-se a resposta transiente empregando o método de Newmark; nas simulações, as fundações flexíveis eram representadas por sistemas massa-mola equivalentes, e os efeitos giroscópicos das partes rotativas não foram incluídos.



Liu & Novak (1995) dedicaram ênfase aos modelos de elementos finitos das fundações e do solo circundante de conjuntos turbina-gerador, visando o estudo do comportamento do sistema a excitações sísmicas. A representação dos rotores era bastante simplificada, e os autores não se preocuparam em determinar as posições de equilíbrio estático dos moentes em função da rotação; efeitos giroscópicos tampouco foram considerados.

As referências aqui listadas descrevem de maneira completa, à exceção de poucas obras praticamente ignoradas pela maioria dos autores e alguns trabalhos de difícil localização, os conhecimentos relativos aos efeitos dos desalinhamentos de mancais hidrodinâmicos na operação de rotores. A título de resumo, algumas informações consideradas relevantes são destacadas em seguida.

- Efeitos estáticos do desalinhamento angular:
  - reduz a capacidade de carga, provocando a redução da mínima espessura do filme de fluido lubrificante;
  - altera de modo pouco significativo o vazamento de fluido;
  - pode aumentar a força de atrito, principalmente nas pequenas excentricidades;
  - aumenta a rigidez de mancais hidrodinâmicos, principalmente em situações próximas à de roçagem.
- Efeitos térmicos e variações de geometria, ranhuras, etc: não alteram qualitativamente os efeitos do desalinhamento angular descritos acima.
- Efeitos hidroelásticos: considerados irrelevantes na análise de mancais estaticamente desalinhados, dentro do contexto da dinâmica de rotores.
- Efeitos dinâmicos do desalinhamento angular : avaliados explicitamente apenas por um autor, que empregou o modelo de 16 coeficientes; constatou-se que reduzem as amplitudes das vibrações síncronas em regime permanente; não é conhecida a sua influência na estabilidade.
- Efeitos do desalinhamento paralelo em sistemas hiperestáticos: afeta a estabilidade linear; há poucos resultados relativos à resposta forçada.

### 1.3 Objetivos e Estrutura do Trabalho

Tendo em vista os resultados da pesquisa bibliográfica, verifica-se que há um desequilíbrio entre a atenção dedicada à descrição dos efeitos estáticos do desalinhamento angular e os estudos relativos à sua influência no comportamento dinâmico de rotores. Os próprios autores que desenvolveram modelos para o estudo dos efeitos dinâmicos do desalinhamento angular apresentaram poucos resultados descrevendo a sua utilização e relevância, de modo que o tema pode ser considerado pouco explorado. Com relação à consideração do desalinhamento angular no modelo plano de mancais, os resultados obtidos são de abrangência muito limitada, pois aplicam-se apenas a rotores que vibram mantendo a linha de centro do moente paralela a si mesma.

No caso da análise de vibrações de rotores hiperestáticos, que tem sido objeto de estudos mais recentes, não foram encontrados resultados de um estudo sistemático dos efeitos do desalinhamento paralelo dos mancais na resposta forçada. Alguns dos procedimentos desenvolvidos conjugaram a adoção de modelos sofisticados de suportes e fundações com a exclusão de aspectos básicos da dinâmica de rotores, como o efeito giroscópico, o cálculo da posição de equilíbrio estático dos moentes em função da rotação ou a não linearidade das reações hidrodinâmicas na realização desse cálculo.

Uma possível explicação para o uso pouco difundido do modelo linear completo de mancais hidrodinâmicos é a dificuldade de se apresentar valores tabulados dos coeficientes dinâmicos, que dependem da posição relativa de equilíbrio estático do moente, definida por quatro parâmetros: duas coordenadas do centro geométrico do moente e dois ângulos de desalinhamento. Estes parâmetros admitem uma infinidade de combinações, de modo que a sua representação gráfica ou tabular, tal como se faz tradicionalmente com os 8 coeficientes do modelo plano, torna-se impraticável. A consideração do desalinhamento angular dos moentes requer portanto o cálculo dos 32 coeficientes cada vez que se altera a configuração de equilíbrio do rotor, devido a mudanças nas suas propriedades, nas condições de carregamento ou de alinhamento estático, etc. Esse indesejável trabalho adicional, juntamente com a hipótese implícita, embora pouco fundamentada, de que o desalinhamento angular causa efeitos dinâmicos irrelevantes, torna pouco atrativa a adoção do modelo de 32 coeficientes na análise de vibrações de rotores.

Nesse contexto, propõe-se realizar um estudo teórico que preencha, em diversos aspectos, as lacunas apontadas acima. Os objetivos concretos do trabalho são:

- desenvolver modelos para calcular as reações hidrodinâmicas de mancais com desalinhamento angular, empregando as simplificações normalmente aceitas na dinâmica de rotores;
- identificar e quantificar efeitos específicos do desalinhamento angular nas vibrações de rotores flexíveis; no caso de rotores hiperestáticos, será considerado também o desalinhamento paralelo.
- propor parâmetros básicos de projeto que permitam identificar, já nas primeiras análises, rotores cujo comportamento seja sensível aos efeitos dinâmicos do desalinhamento angular, orientando a escolha do modelo de mancais a ser adotado em análises subsequentes, tendo em vista a inclusão desses efeitos.

Durante a realização da pesquisa, diversos artigos com resultados parciais da mesma foram publicados em eventos específicos da área da dinâmica de rotores realizados no exterior. Essas referências serão mencionadas ao longo do texto, e contribuem para evidenciar a relevância e originalidade do assunto estudado.

O desenvolvimento do tema nos capítulos seguintes da tese começa com a apresentação da equação de Reynolds e a sua solução empregando métodos numéricos, visando o cálculo das forças e momentos hidrodinâmicos em mancais desalinhados; introduz-se aqui o Efeito de Cunha Axial, causado por um termo até então ignorado da Equação de Reynolds. O cálculo dos coeficientes do modelo linear completo de mancais hidrodinâmicos é descrito e exemplificado no capítulo 3. Em seguida é apresentado um estudo qualitativo dos efeitos dinâmicos do desalinhamento angular nas vibrações lineares de rotores isostáticos, propiciando uma primeira caracterização desses efeitos na resposta síncrona em regime permanente, bem como a identificação de parâmetros que medem a sensibilidade de rotores a tais efeitos. O estabelecimento de modelos mais gerais, baseados no uso do Método dos Elementos Finitos, e exemplos da sua aplicação na análise completa das vibrações lineares de rotores bi-apoiados e hiperestáticos constitui o conteúdo do capítulo 5; diversos resultados ilustrativos mostram a necessidade da utilização do modelo completo de mancais para que as análises sejam válidas. A análise de um rotor hiperestático para aplicações industriais é

detalhada no capítulo 6, e seus resultados demonstram de maneira inequívoca que as vibrações angulares dos moentes têm importância essencial na descrição do comportamento dinâmico do equipamento. Um resumo dos principais resultados, com indicações relativas à adoção de modelos de mancais a serem usados em análises de vibrações de rotores, seguido de conclusões e recomendações de trabalhos futuros, encerra a parte dissertativa do trabalho no capítulo 7.

## 2 CÁLCULO DOS ESFORÇOS HIDRODINÂMICOS EM MANCAIS DE DESLIZAMENTO

Inicia-se o capítulo com a apresentação da equação de Reynolds aplicável ao estudo de mancais hidrodinâmicos com escoamento em regime laminar, definido entre duas superfícies móveis indeformáveis. Passa-se à consideração do desalinhamento angular relativo entre o moente e o mancal, que introduz no equacionamento o aqui denominado Efeito de Cunha Axial. Em seguida, comenta-se brevemente a resolução da equação de Reynolds com a utilização do Método das Diferenças Finitas e são apresentados diversos resultados numéricos que descrevem os efeitos do desalinhamento angular estático nas reações hidrodinâmicas. As formulações e procedimentos aqui desenvolvidos têm a sua validade comprovada através da reprodução de resultados experimentais e numéricos publicados por outros autores.

### 2.1 A Equação de Reynolds

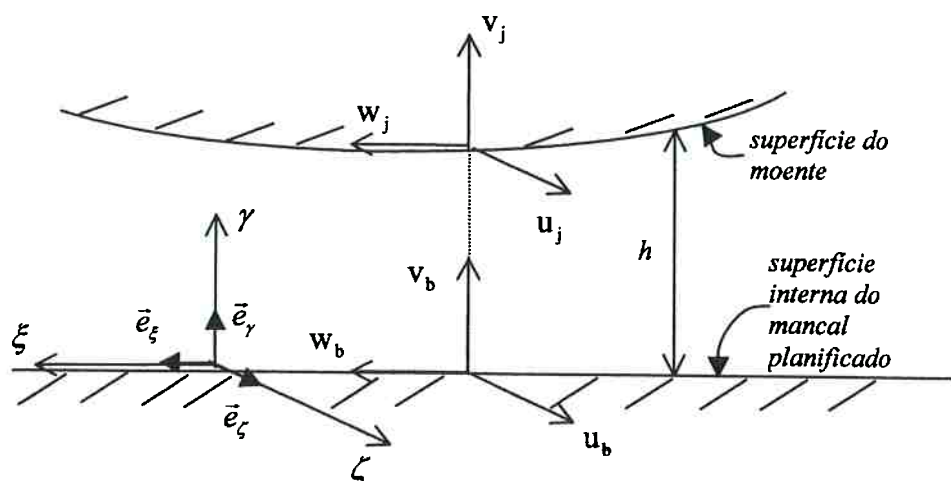
Os esforços hidrodinâmicos decorrentes do escoamento de um fluido lubrificante Newtoniano entre as superfícies indeformáveis do moente e do mancal serão calculados a partir da solução da equação de Reynolds, cuja dedução detalhada pode ser encontrada em diversas referências, como Pinkus & Sternlicht (1961) e Hamrock (1995):

$$\frac{1}{\mu} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial \zeta} \right) \right] = 12(v_j - v_b) + 6h \frac{\partial}{\partial \xi} (w_j + w_b) + 6h \frac{\partial}{\partial \zeta} (u_j + u_b) \dots \quad (2.1)$$

$$- 6(w_j - w_b) \frac{\partial h}{\partial \xi} - 6(u_j - u_b) \frac{\partial h}{\partial \zeta}$$

A equação de Reynolds é obtida a partir das equações de Navier-Stokes e da Continuidade, e relaciona a pressão no fluido com as velocidades das superfícies do moente e do mancal, admitindo-se, no presente estudo, que o escoamento é laminar. A geometria do escoamento é

descrita no sistema local de coordenadas cartesianas de eixos  $(\zeta, \gamma, \xi)$  e versores  $(\vec{e}_\zeta, \vec{e}_\gamma, \vec{e}_\xi)$  mostrado na figura 2.1, situado no plano médio da superfície interna do mancal planejado, de modo que  $-L/2 \leq \zeta \leq L/2$  e  $0 \leq \xi \leq \pi D$ , onde  $L$  é o comprimento total do mancal e  $D$  o seu diâmetro.



**Figura 2.1** Sistema de coordenadas empregado na descrição do filme de fluido lubrificante.

As variáveis na equação de Reynolds são:  $\mu$  - viscosidade;  $p$  - pressão;  $h$  - espessura do filme de fluido lubrificante, medida sobre a normal à superfície do mancal;  $u_b, v_b, w_b$  - componentes da velocidade  $\vec{V}_b$  de um ponto na superfície do mancal ( $\gamma = 0$ );  $u_j, v_j, w_j$  - idem,  $\vec{V}_j$  na superfície do moente ( $\gamma = h$ ). Além das restrições já mencionadas, no processo de dedução da equação (2.1) admitem-se as seguintes hipóteses simplificadoras:

- o fluido lubrificante adere às superfícies móveis e é incompressível;
- consideram-se desprezíveis, quando comparados à pressão hidrodinâmica, os efeitos decorrentes das forças de campo e de inércia;
- a pressão não varia ao longo da espessura do fluido de filme lubrificante, isto é,
 
$$\frac{\partial p}{\partial \gamma} = 0;$$
- o raio de curvatura das superfícies móveis é muito maior que  $h$ ;

- a viscosidade  $\mu$  é constante e igual a um valor médio suposto conhecido;

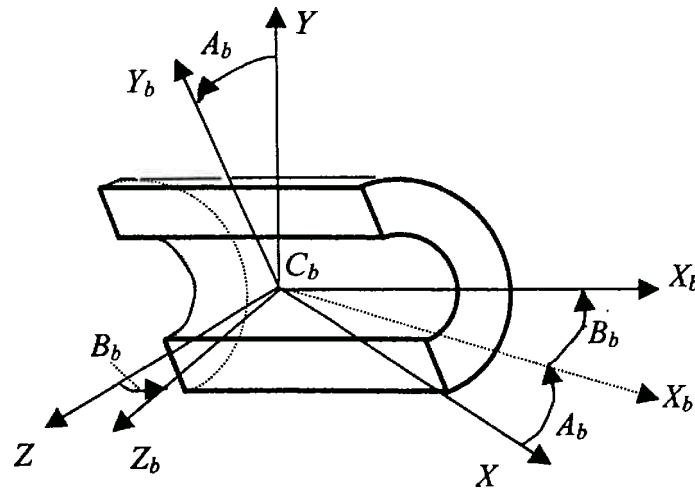
Estas hipóteses são tradicionalmente aceitas no contexto de uma análise de rotores apoiados em mancais hidrodinâmicos cuja ênfase está nas vibrações do sistema. Nos desenvolvimentos que seguem será adotada uma nomenclatura usualmente encontrada na literatura relativa ao tema, que consiste em identificar os termos à direita e à esquerda da igualdade da equação de Reynolds pelas siglas *RHS* (de “right hand side”) e *LHS* (de “left hand side”), respectivamente.

## 2.2 Consideração do Desalinhamento Angular

Para introduzir o desalinhamento angular no equacionamento, definem-se três sistemas de coordenadas cartesianas. O primeiro é um sistema inercial  $S$ , de eixos  $(X, Y, Z)$  e versores  $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ , cujo eixo  $X$  tem a direção da reta que une os centros dos mancais quando estes estão perfeitamente alinhados; o eixo  $Y$  está no plano vertical que contém  $X$ , e no caso de rotores horizontais, identifica a direção do carregamento devido ao peso do rotor (em rotores verticais, o eixo  $Y$  seria qualquer direção horizontal escolhida). O segundo é o sistema  $S_b$ , de eixos  $(X_b, Y_b, Z_b)$  e versores  $(\vec{I}_b, \vec{J}_b, \vec{K}_b)$ , com origem no centro geométrico do mancal,  $C_b$ ; e o terceiro sistema é  $S_j$ ,  $(C_j, X_j, Y_j, Z_j)$ , versores  $(\vec{I}_j, \vec{J}_j, \vec{K}_j)$ , onde  $C_j$  é o centro geométrico do moente.

Conforme mostrado na figura 2.2, o eixo  $X_b$  coincide com o eixo longitudinal do mancal, enquanto  $Y_b$  e  $Z_b$  definem o seu plano médio. Passa-se de  $S$  para  $S_b$  através de duas inclinações: a primeira ao redor do eixo  $Z$ , de magnitude  $A_b$ , resultando o sistema intermediário  $(X'_b, Y'_b, Z'_b)$ ; e a segunda,  $B_b$ , ao redor do eixo  $Y'_b$ , resultando os eixos  $(X_b, Y_b, Z_b)$ . Desta forma, o sistema de coordenadas  $S_b$  é solidário ao plano médio do mancal, que por sua vez pode girar ao redor do eixo  $X_b$ . A matriz de mudança de coordenadas  $T_b$  é dada por

$$\begin{Bmatrix} \vec{I} \\ \vec{J} \\ \vec{K} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos A_b \cos B_b & -\sin A_b & \cos A_b \sin B_b \\ \sin A_b \cos B_b & \cos A_b & \sin A_b \sin B_b \\ -\sin B_b & 0 & \cos B_b \end{bmatrix}}_{T_b} \begin{Bmatrix} \vec{I}_b \\ \vec{J}_b \\ \vec{K}_b \end{Bmatrix} \quad (2.2).$$



**Figura 2.2** Sistemas de coordenadas:  $S$  inercial e  $S_b$  solidário ao plano médio do mancal.

De maneira análoga define-se a matriz relativa ao moente,  $T_j$ , considerando-se agora os ângulos  $A_j$  e  $B_j$ . Em princípio, admite-se que a magnitude do desalinhamento angular compatível com o funcionamento de máquinas rotativas justifica plenamente as linearizações  $\sin A_{j,b} = A_{j,b}$ ,  $\sin B_{j,b} = B_{j,b}$ , e  $\cos A_{j,b} = \cos B_{j,b} = 1$ , de modo que  $\sin A_{j,b} \sin B_{j,b} \approx 0$ ; conseqüentemente,  $T_b$  (e analogamente  $T_j$ ) podem ser rescritas da forma

$$T_{j,b} = \begin{bmatrix} 1 & -A_{j,b} & B_{j,b} \\ A_{j,b} & 1 & 0 \\ -B_{j,b} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3).$$

Finalmente, a relação entre os versores de  $S_b$  e  $S_j$  é dada pela matriz  $T_{bj}$  indicada a seguir



$$\begin{Bmatrix} \bar{I}_b \\ \bar{J}_b \\ \bar{K}_b \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -A_r & B_r \\ A_r & 1 & 0 \\ -B_r & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{T_{bj}} \begin{Bmatrix} \bar{I}_j \\ \bar{J}_j \\ \bar{K}_j \end{Bmatrix} \quad (2.4),$$

onde  $A_r = A_j - A_b$  e  $B_r = B_j - B_b$  são as inclinações relativas entre o moente e o mancal. Neste contexto, a inclinação do moente em relação ao mancal é descrita como uma rotação de um ângulo  $\delta_r$  ao redor de um eixo de versor  $\bar{\rho}_r$ , calculados abaixo:

$$\begin{cases} \delta_r = \sqrt{A_r^2 + B_r^2} \\ \bar{\rho}_r = \frac{(A_r \bar{K}_b + B_r \bar{J}_b)}{\sqrt{A_r^2 + B_r^2}} \end{cases} \quad (2.5).$$

O vetor de rotação instantânea de  $S_b$  correspondente à seqüência de inclinações descrita, adotadas as mesmas linearizações, é  $\bar{W}_{S_b} = -B_b \dot{A}_b \bar{I}_b + \dot{B}_b \bar{J}_b + \dot{A}_b \bar{K}_b$ ; somando-se a este a rotação do mancal ao redor de  $X_b$  com velocidade angular  $\omega_b$ , resulta o vetor de rotação do mancal,  $\bar{W}_b$ , indicado na equação (2.6) juntamente com  $\bar{W}_j$ , que é obtido de modo análogo:

$$\begin{cases} \bar{W}_b = (\omega_b - B_b \dot{A}_b) \bar{I}_b + \dot{B}_b \bar{J}_b + \dot{A}_b \bar{K}_b \\ \bar{W}_j = (\omega_j - B_j \dot{A}_j) \bar{I}_j + \dot{B}_j \bar{J}_j + \dot{A}_j \bar{K}_j \end{cases} \quad (2.6).$$

Quanto às translações do moente e do mancal, admite-se que  $C_b$  e  $C_j$  permanecem sempre no plano médio do mancal, ou seja, não há movimento relativo entre  $C_b$  e  $C_j$  na direção axial.

A figura 2.3 mostra o esquema ilustrativo de uma seção transversal  $s'$  de um mancal cilíndrico desalinhado de raio  $R$ , onde  $P_b$  é um ponto da superfície interna do mancal, e  $P_j$  é o ponto correspondente na superfície do moente, de modo que  $(P_j - P_b) = h \bar{e}_r$ . O ângulo  $\theta'$  é medido a partir de um eixo paralelo a  $Y_b$  passando por  $C_b'(\zeta_b)$ , que é o centro geométrico de  $s'$ , sendo  $\zeta_b$  a coordenada de  $P_b$  em  $X_b$ ; o vetor posição de  $P_b$  em  $S_b$  é dado na equação (2.7),

$$(P_b - C_b) = \zeta_b \bar{I}_b + R(\cos \theta' \bar{J}_b + \sin \theta' \bar{K}_b) \quad (2.7).$$

O eixo  $X_j$  intercepta  $s'$  no ponto  $C'_j(\zeta'_j)$ , que é o centro da elipse  $E'$  definida pela interseção do moente com  $s'$ , e o ângulo  $\alpha'$  é medido a partir de um eixo paralelo a  $Y_b$  passando por  $C'_j(\zeta'_j)$ . A posição dos pontos de  $E'$  em relação a  $C'_j(\zeta'_j)$ , na base de  $S_b$ , é dada por

$$(P_j - C'_j(\zeta'_j)) = r \left[ \frac{\cos \alpha'}{\cos A_r} \bar{J}_b + \left( \frac{\sin \alpha'}{\cos B_r} - \cos \alpha' \tan A_r \tan B_r \right) \bar{K}_b \right] \quad (2.8),$$

onde  $r = R - c_R$  é o raio do moente e  $c_R$  é a folga radial do mancal. Para verificar que a elipse expressa na equação (2.8) corresponde a uma circunferência de centro  $C'_j(\zeta'_j)$ , contida no plano ortogonal ao eixo  $X_j$ , basta empregar a transformação indicada na equação (2.2), substituindo  $A_b$  e  $B_b$  por  $A_r$  e  $B_r$ , respectivamente. Fazendo-se isso, e introduzindo a coordenada de  $P_j$  em  $X_j$ , chega-se à equação

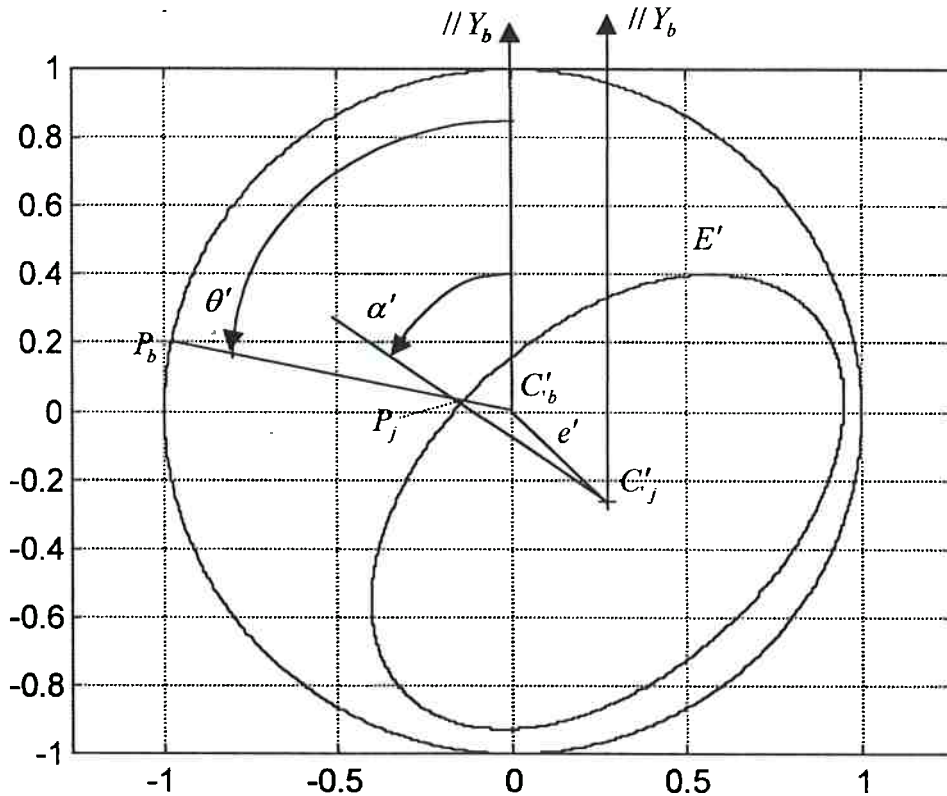
$$(P_j - C_j) = \left( \frac{\zeta_b}{\cos B_r \cos A_r} + \frac{r \cos \alpha \tan A_r}{\cos B_r} - r \sin \alpha \tan B_r \right) \bar{I}_j \dots \quad (2.9),$$

$$+ r(\cos \alpha \bar{J}_j + \sin \alpha \bar{K}_j)$$

que fornece o vetor posição dos pontos  $P_j$  da periferia de  $E'$  em  $S_j$ , onde  $\alpha$  é o ângulo correspondente a  $\alpha'$  no plano  $Y_j Z_j$ .

Antes de simplificar as expressões (2.8) e (2.9), empregando as linearizações previamente apresentadas, julgou-se oportuno substanciar a validade de tais linearizações a partir de alguns resultados quantitativos. A motivação para isso é que, à exceção de apenas duas referências, em nenhum dos demais trabalhos consultados relativos a mancais com desalinhamento angular foi encontrado qualquer espécie de comentário a respeito da “eliptização” da seção transversal do moente (ou do mancal, se  $h$  fosse medida a partir da normal à superfície do moente); somente Smalley & McCallion (1967) e Myrick (1973) mencionaram a “eliptização” da seção do moente, referindo-se a ela como um efeito de pequena ordem ignorado no equacionamento, sem

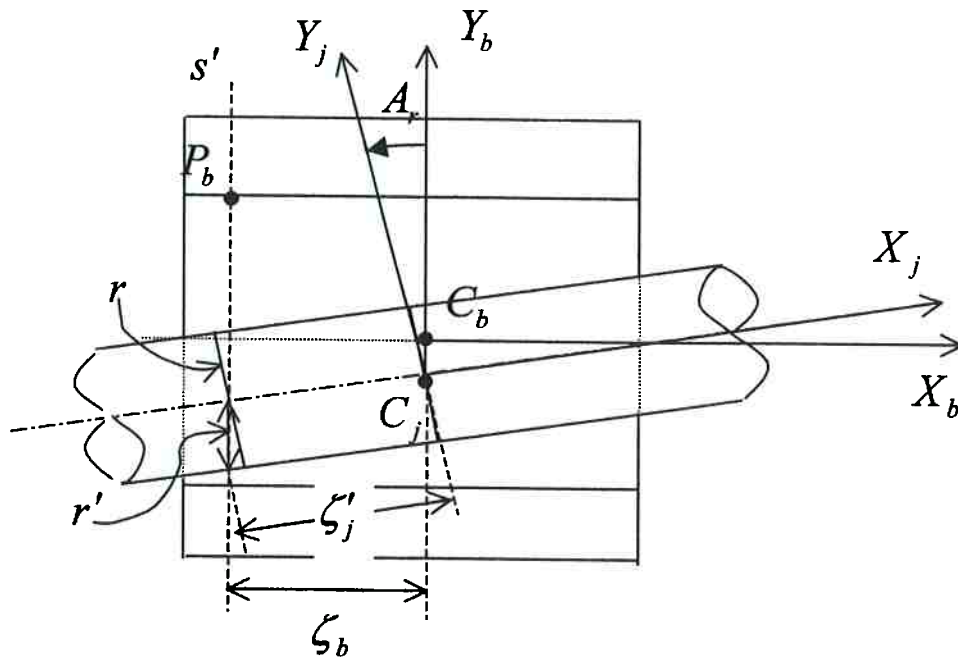
apresentar justificativas para tanto. A discussão a seguir mostra em que condições essa omissão ou inadvertência é aceitável.



**Figura 2.3** Representação esquemática da seção transversal de um mancal desalinhado, onde  $\overline{P_b P_j} = h$ ,  $\overline{P_b C'_b} = R$  e  $\overline{P_j C'_b} = R - h$ . A situação apresentada corresponde a  $A_r < 0$ ,  $B_r > 0$  e  $\zeta > 0$ .

Apenas para facilitar a visualização, a figura 2.4 mostra um corte longitudinal de um mancal desalinhado de um ângulo  $A_r$  em relação ao moente, cujo centro  $C_j$  está sobre o eixo  $Y_b$ . Nesta situação particular, o semi-eixo maior de  $E'$  é paralelo a  $Y_b$  e mede  $r' = r / \cos A_r$ , o semi-eixo menor de comprimento  $r$  é paralelo a  $Z_b$ , e a coordenada de  $C'_j(\zeta'_j)$  em  $X_j$  é  $\zeta'_j = \zeta_b / \cos A_r$ . Essa diferença entre os semi-eixos caracteriza uma falta de circularidade da seção transversal do moente e afeta o cálculo das velocidades dos pontos da sua periferia e da espessura do filme de fluido. Por outro lado, os moentes sempre apresentam faltas de circularidade decorrentes dos processos de fabricação, e isto não compromete a aplicação das formulações tradicionais, desde que a ovalização esteja dentro dos limites de tolerância. É necessário portanto verificar se os

níveis de “eliptização” decorrentes do desalinhamento angular também podem ser desprezados, o que simplifica sobremaneira o equacionamento, através da adoção das já mencionadas linearizações.



**Figura 2.4** Corte longitudinal de um mancal com desalinhamento angular relativo no plano  $Y_b X_b$ .

A máxima “eliptização” da seção do moente corresponde ao máximo desalinhamento angular possível, dado por  $\delta_{\max} = \arctan\left(\frac{2c_R}{L}\right)$ ; definindo os adimensionais

$$\begin{cases} r_c = c_R/D \\ r_{LD} = L/D \end{cases} \quad (2.10),$$

obtem-se

$$\delta_{\max} = \arctan\left(\frac{2r_c}{r_{LD}}\right) \quad (2.11),$$

válida para um mancal cilíndrico. A expressão (2.11) mostra que mancais curtos com folgas radiais elevadas são suscetíveis aos maiores níveis de desalinhamento angular máximo. O valor  $r_{LD} = 1/8$  corresponde a um mancal muito curto, e será adotado para estimar os graus de

desalinhamento angular máximo que poderiam ser encontrados em aplicações. Com relação à folga radial, o seu valor depende de diversos parâmetros, entre eles a velocidade periférica do moente, o material empregado no revestimento do mancal e o seu acabamento superficial, a finalidade do equipamento, etc. Segundo Spotts (1985), os valores de  $r_c$  podem variar entre  $r_c \approx 0.012$  para eixos de diâmetro inferior a 12.7 mm e  $r_c \approx 0.0009$  para diâmetros de até 140 mm. Outros autores, como Shigley (1984), Avallone & Baumeister (1987), e Dubbel (1994), recomendam valores entre  $r_c \approx 0.003$  e  $r_c \approx 0.0003$ .

A tabela 2.1 mostra os valores de  $\delta_{\max}$  calculados a partir de relações entre  $r_c$  e  $D$  relativas a dois tipos de mancais, extraídas de Shigley (1984); são mostrados também os resultados de  $r' - r$  e as tolerâncias correspondentes.

**Tabela 2.1** Máximo desalinhamento angular relativo, falta de circularidade e tolerância dimensional de dois tipos de mancais.

$r_{LD} = \frac{1}{8}$	Mancal tipo E*			Mancal tipo D**			Tolerância Dimensional (mm)	
	$r_c \times 10^{-3}$	$\delta_{\max}$ (rad)	$r' - r$ (mm)	$r_c \times 10^{-3}$	$\delta_{\max}$ (rad)	$r' - r$ (mm)	ASA	IT-5
$D$ (mm) até								
12.7	3.90	0.062	0.012	1.40	0.022	0.0016	0.0082	0.008
25.4	3.10	0.050	0.016	1.29	0.021	0.0028	0.0101	0.009
50.8	2.44	0.039	0.019	1.00	0.016	0.0033	0.0128	0.013
76.2	2.13	0.034	0.022	0.84	0.013	0.0035	0.0146	0.013
101.6	1.90	0.030	0.023	0.75	0.012	0.0037	0.0161	0.015
127.0	1.76	0.028	0.025	0.69	0.011	0.0038	0.0173	0.018
152.4	1.64	0.026	0.026	0.63	0.010	0.0038	0.0184	0.018
177.8	1.55	0.025	0.028	0.58	0.009	0.0039	0.0194	0.018
203.2	1.48	0.024	0.029	0.55	0.009	0.0039	0.0203	0.020

\* E: maquinaria de serviço de desbaste possuindo eixos de aço torneados ou laminados a frio operando em mancais de bronze fundido (acabamento de 1.43 a 2.75  $\mu\text{m}$ , Ra);

\*\* D: maquinaria em geral que gira continuamente ou com movimento alternativo e usa eixos de aço torneados ou laminados a frio, em mancais de bronze fundido e acabados com broqueamento e alargadores (acabamento de 0.70 a 1.38  $\mu\text{m}$ , Ra);

Os valores admissíveis de falta de circularidade são estabelecidos empiricamente, e na falta de requisitos específicos, adotam-se os mesmos limites aceitos para as tolerâncias dimensionais (Curtis, 1986). A penúltima coluna da tabela 2.1 mostra os valores de tolerância dimensional  $t_d$  calculados através da expressão  $t_d = 0.00345D^{\frac{1}{3}}$ , conforme um critério tradicional da “American Standards Association” (Spotts, 1985; Juvinal, 1991), aplicável a mancais

hidrodinâmicos. A última coluna da tabela apresenta o critério atualmente mais em uso, cuja unidade de tolerância é designada por IT (ISO Tolerance), sendo IT-5 um padrão de qualidade normalmente requerido para moentes (Agostinho et al., 1988).

Os resultados indicam que os valores de  $\delta_{\max}$  correspondentes ao mancal tipo E acarretam erros de falta de circularidade superiores aos admissíveis, ao passo que no caso do mancal tipo D, a “eliptização” é significativamente inferior à tolerância dimensional. Não faz parte do escopo deste trabalho investigar a influência da falta de circularidade do moente no desempenho de mancais de deslizamento. Portanto, quando forem estudados mancais como os do tipo E, a análise será feita considerando níveis de desalinhamento angular compatíveis com a hipótese, adotada no equacionamento tradicional, de que a seção transversal do moente é circular. Deve-se notar, no entanto, que mancais como os do tipo E constituem casos extremos, em que se combina um mancal muito curto com uma folga radial elevada, cujo emprego é pouco provável. Além disso, a escolha de um mancal com tal acabamento grosseiro normalmente seria acompanhada pela adoção de critérios de tolerância menos restritivos, como o IT-7, por exemplo. O mancal tipo D é representativo de uma classe mais realista de mancais, para os quais a “eliptização” da seção transversal do moente pode ser desprezada mesmo em situações de elevado desalinhamento angular relativo.

Com base nos comentários apresentados, introduz-se nas equações (2.8) e (2.9) as linearizações feitas na equação (2.3), resultando

$$\begin{cases} (P_j - C'_j(\zeta'_j)) = r(\cos a' \vec{J}_b + \sin a' \vec{K}_b) \\ (P_j - C_j) = (\zeta_b + A_r r \cos a' - B_r r \sin a') \vec{I}_j + r(\cos a' \vec{J}_j + \sin a' \vec{K}_j) \end{cases} \quad (2.12)$$

As expressões (2.12) mostram que, mesmo quando se considera a “eliptização” desprezível, a projeção de  $E'$  no eixo  $X_j$  não pode ser ignorada, a menos que se introduzam incoerências no equacionamento.

Já se dispõe dos elementos necessários para desenvolver as expressões das velocidades  $\vec{V}_b$  e  $\vec{V}_j$  dos pontos  $P_b$  e  $P_j$ , indicadas na equação (2.13),

$$\begin{cases} \vec{V}_b = \vec{V}_{C_b} + \vec{W}_b \wedge (P_b - C_b) \\ \vec{V}_j = \vec{V}_{C_j} + \vec{W}_j \wedge (P_j - C_j) \end{cases} \quad (2.13),$$

onde  $\vec{V}_{C_b}$  e  $\vec{V}_{C_j}$  são as velocidades de  $C_b$  e  $C_j$ , e  $\vec{W}_b$ ,  $\vec{W}_j$ ,  $(P_b - C_b)$  e  $(P_j - C_j)$  são apresentados nas equações (2.6), (2.7) e (2.12), respectivamente.

Substituindo  $\vec{V}_{C_b} = \dot{y}_{C_b} \vec{J} + \dot{z}_{C_b} \vec{K}$  (onde  $\dot{y}_{C_b} = \frac{dy_{C_b}}{dt}$ ,  $\dot{z}_{C_b} = \frac{dz_{C_b}}{dt}$ , sendo  $y_{C_b}$  e  $z_{C_b}$  as coordenadas de  $C_b$  em  $S$ ) na expressão de  $\vec{V}_b$  e desenvolvendo o produto vetorial, chega-se a

$$\begin{aligned} \vec{V}_b = & \left[ A_b \dot{y}_{C_b} - B_b \dot{z}_{C_b} + R(\dot{B}_b \sin \theta' - \dot{A}_b \cos \theta') \right] \vec{I}_b \dots \\ & + \left[ \dot{y}_{C_b} + \zeta_b \dot{A}_b - R(\omega_b - B_b \dot{A}_b) \sin \theta' \right] \vec{J}_b + \left[ \dot{z}_{C_b} - \zeta_b \dot{B}_b + R(\omega_b - B_b \dot{A}_b) \cos \theta' \right] \vec{K}_b \end{aligned} \quad (2.14).$$

Na dedução da equação de Reynolds foram desprezados os termos de ordem de grandeza relativa menor ou igual a  $c_R/D$  ou  $c_R/L$ , representados genericamente da forma  $O(c_R/D)$  ou  $O(c_r/L)$ , respectivamente. Para identificar a ordem de grandeza dos termos da equação (2.14) que por uma razão de consistência devem ser desconsiderados, definem-se os seguintes adimensionais:

$$\begin{cases} \bar{p} = \frac{p}{\mu \Omega \left( \frac{R}{c_R} \right)^2} \\ \bar{y}_{C_{j,b}} = \frac{y_{C_{j,b}}}{c_R}; \quad \bar{z}_{C_{j,b}} = \frac{z_{C_{j,b}}}{c_R} \\ \bar{\alpha}_{j,b} = \frac{2c_R A_{j,b}}{L}; \quad \bar{\beta}_{j,b} = \frac{2c_R B_{j,b}}{L} \\ \bar{\zeta} = \frac{2\zeta}{L}; \quad \bar{h} = \frac{h}{c_R} \\ \Omega = \frac{(\omega_j + \omega_b)}{2\pi}; \quad \Omega_j = \frac{\omega_j}{2\pi}; \quad \Omega_b = \frac{\omega_b}{2\pi} \end{cases} \quad (2.15).$$

Substituindo as expressões (2.15) em LHS e na equação (2.14), chega-se a

$$LHS = \Omega c_R \left[ \frac{\partial}{\partial \theta'} \left( \bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta'} \right) + \left( \frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \left( \bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\zeta}} \right) \right] \quad (2.16)$$

e

$$\begin{aligned} \vec{V}_b = & c_R \left[ \frac{2c_R}{L} (\bar{\alpha}_b \dot{y}_{C_b} - \bar{\beta}_b \dot{z}_{C_b}) + \frac{D}{L} (\dot{\bar{\beta}}_b \sin \theta' - \dot{\bar{\alpha}}_b \cos \theta') \right] \bar{I}_b \dots \\ & + \left[ c_R (\dot{y}_{C_b} + \bar{\zeta}_b \dot{\bar{\alpha}}_b) - R \left( \omega_b - 4 \left( \frac{c_R}{L} \right)^2 \bar{\beta}_b \dot{\bar{\alpha}}_b \right) \sin \theta' \right] \bar{J}_b \dots \\ & + \left[ c_R (\dot{z}_{C_b} - \bar{\zeta}_b \dot{\bar{\beta}}_b) + R \left( \omega_b - 4 \left( \frac{c_R}{L} \right)^2 \bar{\beta}_b \dot{\bar{\alpha}}_b \right) \cos \theta' \right] \bar{K}_b, \end{aligned}$$

onde se vê claramente que os termos  $A_b \dot{y}_{C_b}$ ,  $B_b \dot{z}_{C_b}$  e  $B_b \dot{A}_b$  de (2.14) devem ser excluídos, resultando

$$\begin{aligned} \vec{V}_b = & R (\dot{B}_b \sin \theta' - \dot{A}_b \cos \theta') \bar{I}_b + (\dot{y}_{C_b} + \zeta_b \dot{A}_b - R \omega_b \sin \theta') \bar{J}_b \dots \\ & + (\dot{z}_{C_b} - \zeta_b \dot{B}_b + R \omega_b \cos \theta') \bar{K}_b \end{aligned} \quad (2.17).$$

Procedendo de maneira análoga no desenvolvimento de  $\vec{V}_j$ , obtém-se

$$\vec{V}_j = r (\dot{B}_j \sin \alpha' - \dot{A}_j \cos \alpha') \bar{I}_j + (\dot{y}_{C_j} + \zeta_b \dot{A}_j - r \omega_j \sin \alpha') \bar{J}_j + (\dot{z}_{C_j} - \zeta_b \dot{B}_j + r \omega_j \cos \alpha') \bar{K}_j,$$

que expressa na base de  $S_b$  fica

$$\begin{aligned} \vec{V}_j = & \left[ r (\dot{B}_j \sin \alpha' - \dot{A}_j \cos \alpha') + r \omega_j (A_r \sin \alpha' + B_r \cos \alpha') \right] \bar{I}_b \dots \\ & + (\dot{y}_{C_j} + \zeta_b \dot{A}_j - r \omega_j \sin \alpha') \bar{J}_b + (\dot{z}_{C_j} - \zeta_b \dot{B}_j + r \omega_j \cos \alpha') \bar{K}_b \end{aligned} \quad (2.18).$$

Para decompor  $\vec{V}_b$  e  $\vec{V}_j$  na base do sistema de coordenadas locais  $(\zeta, \gamma, \xi)$ , emprega-se a transformação

$$\begin{Bmatrix} \bar{I}_b \\ \bar{J}_b \\ \bar{K}_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos \theta' & \sin \theta' \\ 0 & -\sin \theta' & -\cos \theta' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{e}_\zeta \\ \bar{e}_\gamma \\ \bar{e}_\xi \end{Bmatrix} \quad (2.19),$$



resultando

$$\begin{aligned}\vec{V}_b &= R(\dot{B}_b \sin \theta' - \dot{A}_b \cos \theta') \vec{e}_\zeta \dots \\ &+ \left[ (\dot{y}_{C_b} + \zeta_b \dot{A}_b) \sin \theta' - (\dot{z}_{C_b} - \zeta_b \dot{B}_b) \cos \theta' - R\omega_b \right] \vec{e}_\xi \dots \\ &- \left[ (\dot{y}_{C_b} + \zeta_b \dot{A}_b) \cos \theta' + (\dot{z}_{C_b} - \zeta_b \dot{B}_b) \sin \theta' \right] \vec{e}_\eta\end{aligned}\quad (2.20)$$

e

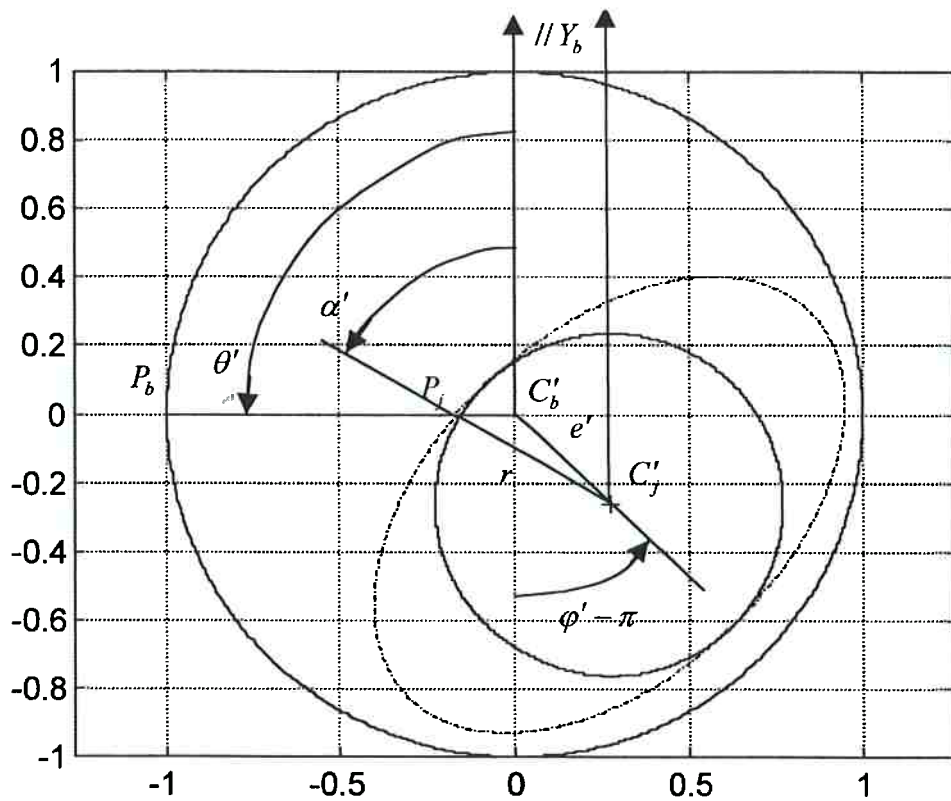
$$\begin{aligned}\vec{V}_j &= \left[ r(\dot{B}_j \sin \alpha' - \dot{A}_j \cos \alpha') + r\omega_j (A_r \sin \alpha' + B_r \cos \alpha') \right] \vec{e}_\zeta \dots \\ &+ \left[ (\dot{y}_{C_j} + \zeta_b \dot{A}_j) \sin \theta' - (\dot{z}_{C_j} - \zeta_b \dot{B}_j) \cos \theta' - r\omega_j \cos(\theta' - \alpha') \right] \vec{e}_\xi \dots \\ &- \left[ (\dot{y}_{C_j} + \zeta_b \dot{A}_j) \cos \theta' + (\dot{z}_{C_j} - \zeta_b \dot{B}_j) \sin \theta' + r\omega_j \sin(\theta' - \alpha') \right] \vec{e}_\eta\end{aligned}\quad (2.21).$$

Na figura 2.5 está novamente representada a seção transversal  $s'$  do mancal, sem a eliptização do moente. O ângulo  $\varphi'$ , denominado ângulo de atitude do moente, é medido a partir de um eixo paralelo a  $Y_b$  por  $C'_b$ , e fornece a inclinação da reta que une  $C'_b$  a  $C'_j$ , denominada linha de centros do mancal, sobre a qual é medida a excentricidade do moente,  $e'$ . Considerando o triângulo  $P_j C'_j C'_b$ , decorre da lei dos senos que  $\frac{r}{\sin(\varphi' - \theta')} = \frac{e'}{\sin(\alpha' - \theta')}$ , e portanto

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin(\theta' - \alpha') = -\frac{e'}{r} \sin(\theta' - \varphi') \\ \cos(\theta' - \alpha') = \left[ 1 - \left( \frac{e'}{r} \right)^2 \sin^2(\theta' - \varphi') \right]^{1/2} \approx 1 \end{array} \right. ,$$

de modo que a expressão de  $\vec{V}_j$  pode ser escrita da forma

$$\begin{aligned}\vec{V}_j &= \left[ r(\dot{B}_j \sin \theta' - \dot{A}_j \cos \theta') + r\omega_j (A_r \sin \theta' + B_r \cos \theta') \right] \vec{e}_\zeta \dots \\ &+ \left[ (\dot{y}_{C_j} + \zeta_b \dot{A}_j) \sin \theta' - (\dot{z}_{C_j} - \zeta_b \dot{B}_j) \cos \theta' - r\omega_j \right] \vec{e}_\xi \dots \\ &- \left[ (\dot{y}_{C_j} + \zeta_b \dot{A}_j) \cos \theta' + (\dot{z}_{C_j} - \zeta_b \dot{B}_j) \sin \theta' - \omega_j e' \sin(\theta' - \varphi') \right] \vec{e}_\eta\end{aligned}\quad (2.22).$$



**Figura 2.5** Seção transversal do mancal, sem considerar a “eliptização” do moente.

Também como consequência da desconsideração da eliptização do moente, resulta a seguinte expressão para a espessura do filme de fluido lubrificante (Pinkus & Sternlicht (1961), Hamrock (1995)):

$$h = c_R - e' \cos(\theta' - \phi') \quad (2.23);$$

substituindo em (2.23) as relações  $e' \cos \phi' = y'_r$ ,  $e' \sin \phi' = z'_r$ , com  $y'_r = (C'_j - C'_b) \cdot \bar{J}_b$  e  $z'_r = (C'_j - C'_b) \cdot \bar{K}_b$ , chega-se a  $h' = c_R - y'_r \cos \theta' - z'_r \sin \theta'$ . Por outro lado,  $(C'_j - C'_b) = (C'_j - C_j) + (C_j - C_b) + (C_b - C'_b)$ , onde  $(C'_j - C_j) = \zeta_b (\bar{I}_b + A_r \bar{J}_b - B_r \bar{K}_b)$ ,  $(C_j - C_b) = (y_{C_j} - y_{C_b}) \bar{J}_b + (z_{C_j} - z_{C_b}) \bar{K}_b$ , e  $(C_b - C'_b) = \zeta_b \bar{I}_b$ , de modo que (2.23) pode ser escrita da forma

$$h(\theta', \zeta) = c_R - (y_r + \zeta A_r) \cos \theta' - (z_r - \zeta B_r) \sin \theta' \quad (2.24),$$

em que  $y_r = (y_{C_j} - y_{C_b})$ ,  $z_r = (z_{C_j} - z_{C_b})$  e se omite o subscrito de  $\zeta$  pois  $\zeta_b = \zeta_j$ .

As expressões (2.23) e (2.24) fornecem a espessura do filme de fluido lubrificante em cada ponto  $p_b$  da superfície interna do mancal, e juntamente com as componentes das velocidades  $\vec{V}_b$  e  $\vec{V}_j$ , serão empregadas para dar a forma final da Equação de Reynolds a ser considerada neste trabalho.

### 2.3 O Efeito de Cunha Axial

Na equação (2.25) está reproduzido o termo à direita da igualdade da equação de Reynolds, já designado como *RHS*:

$$\begin{aligned}
 RHS = 12(v_j - v_b) + 6h \frac{\partial}{\partial \xi} (w_j + w_b) + 6h \frac{\partial}{\partial \zeta} (u_j + u_b) \dots \\
 - 6(w_j - w_b) \frac{\partial h}{\partial \xi} - 6(u_j - u_b) \frac{\partial h}{\partial \zeta}
 \end{aligned} \quad (2.25).$$

As componentes das velocidades  $\vec{V}_b$  e  $\vec{V}_j$  são identificadas nas equações (2.20) e (2.22), e indicadas abaixo,

$$\left\{ \begin{aligned}
 u_j &= (R - c_R) \left[ (\dot{B}_j \sin \theta' - \dot{A}_j \cos \theta') + \omega_j (A_j \sin \theta' + B_j \cos \theta') \right]; \\
 v_j &= - \left[ (\dot{y}_{C_j} + \zeta \dot{A}_j) \cos \theta' + (\dot{z}_{C_j} - \zeta \dot{B}_j) \sin \theta' - \omega_j \frac{\partial h}{\partial \theta'} \right]; \\
 w_j &= \left[ (\dot{y}_{C_j} + \zeta \dot{A}_j) \sin \theta' - (\dot{z}_{C_j} - \zeta \dot{B}_j) \cos \theta' - (R - c_R) \omega_j \right]; \\
 u_b &= R (\dot{B}_b \sin \theta' - \dot{A}_b \cos \theta'); \\
 v_b &= - \left[ (\dot{y}_{C_b} + \zeta \dot{A}_b) \cos \theta' + (\dot{z}_{C_b} - \zeta \dot{B}_b) \sin \theta' \right]; \\
 w_b &= \left[ (\dot{y}_{C_b} + \zeta \dot{A}_b) \sin \theta' - (\dot{z}_{C_b} - \zeta \dot{B}_b) \cos \theta' - R \omega_b \right];
 \end{aligned} \right. \quad (2.26),$$

onde se nota que na expressão correspondente a  $v_j$  foi utilizada a relação  $\frac{\partial h}{\partial \theta'} = e' \sin(\theta' - \varphi')$ , proveniente da equação (2.23).

Introduzindo nas expressões (2.26) os adimensionais definidos em (2.15), resultam as seguintes expressões para as parcelas de *RHS*:

$$\left\{ \begin{array}{l} (v_j - v_b) = -c_R \left[ (\dot{\bar{y}}_r + \bar{\zeta} \dot{\bar{\alpha}}_r) \cos \theta' + (\dot{\bar{z}}_r - \bar{\zeta} \dot{\bar{\beta}}_r) \sin \theta' - 2\pi \Omega_j \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta'} \right]; \\ \frac{\partial (w_j + w_b)}{\partial \xi} = -\frac{c_R}{R} \left\{ \left[ (\dot{\bar{y}}_{C_j} + \dot{\bar{y}}_{C_b}) + \bar{\zeta} (\dot{\bar{\alpha}}_j + \dot{\bar{\alpha}}_b) \right] \cos \theta' + \left[ (\dot{\bar{z}}_{C_j} + \dot{\bar{z}}_{C_b}) - \bar{\zeta} (\dot{\bar{\beta}}_j + \dot{\bar{\beta}}_b) \right] \sin \theta' \right\}; \\ \frac{\partial (u_j + u_b)}{\partial \xi} = 0; \\ (w_j - w_b) = c_R \left[ (\dot{\bar{y}}_r + \bar{\zeta} \dot{\bar{\alpha}}_r) \sin \theta' - (\dot{\bar{z}}_r - \bar{\zeta} \dot{\bar{\beta}}_r) \cos \theta' - 2\pi \Omega_j \right] - 2\pi R (\Omega_j - \Omega_b); \\ (u_j - u_b) = c_R \left\{ \frac{D}{L} \left[ \dot{\bar{\beta}}_r \sin \theta' - \dot{\bar{\alpha}}_r \cos \theta' + \omega_j (\bar{\alpha}_r \sin \theta' + \bar{\beta}_r \cos \theta') \right] \dots \right. \\ \left. - 2 \frac{c_R}{L} \left[ \dot{\bar{\beta}}_j \sin \theta' - \dot{\bar{\alpha}}_j \cos \theta' + \omega_j (\bar{\alpha}_r \sin \theta' + \bar{\beta}_r \cos \theta') \right] \right\} \end{array} \right. \quad (2.27),$$

onde

$$\bar{h} = \frac{h}{c_R} \Rightarrow \bar{h} = 1 - (\bar{y}_r + \bar{\zeta} \bar{\alpha}_r) \cos \theta' - (\bar{z}_r - \bar{\zeta} \bar{\beta}_r) \sin \theta' \quad (2.28).$$

A substituição das expressões

$$\begin{cases}
\frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta'} = (\bar{y}_r + \bar{\zeta} \bar{\alpha}_r) \sin \theta' - (\bar{z}_r - \bar{\zeta} \bar{\beta}_r) \cos \theta' \\
\frac{d\bar{h}}{dt} = -(\dot{\bar{y}}_r + \bar{\zeta} \dot{\bar{\alpha}}_r) \cos \theta' - (\dot{\bar{z}}_r - \bar{\zeta} \dot{\bar{\beta}}_r) \sin \theta' \\
\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{\zeta}} = -\bar{\alpha}_r \cos \theta' + \bar{\beta}_r \sin \theta' \\
\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \left( \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta'} \right) = \bar{\alpha}_r \sin \theta' + \bar{\beta}_r \cos \theta' \\
\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \left( \frac{d\bar{h}}{dt} \right) = -\dot{\bar{\alpha}}_r \cos \theta' + \dot{\bar{\beta}}_r \sin \theta'
\end{cases} \quad (2.29)$$

na primeira e última parcelas da equação (2.27) permite escrevê-las da forma simplificada abaixo,

$$\begin{cases}
(v_j - v_b) = c_R \left( \frac{d\bar{h}}{dt} + 2\pi \Omega_j \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta'} \right) \\
(u_j - u_b) = c_R \frac{D}{L} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \left( \frac{d\bar{h}}{dt} + 2\pi \Omega_j \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta'} \right)
\end{cases} \quad (2.30),$$

onde foram desprezados os termos de  $O\left(\frac{c_R}{L}\right)$ .

Introduzindo na equação (2.25) os resultados apresentados nas equações (2.27) e (2.30), e igualando com *LHS*, dado na equação (2.16), chega-se a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \theta'} \left( \bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta'} \right) + \left( \frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \left( \bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\zeta}} \right) &= 12 \left( \frac{1}{\Omega} \frac{d\bar{h}}{dt} + \pi \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta'} \right) \dots \\
&- 12 \frac{r_C}{r_{LD}^2} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \left[ \frac{1}{\Omega} \frac{d\bar{h}}{dt} + 2\pi \frac{\Omega_j}{\Omega} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta'} \right] \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{\zeta}} \dots \\
&- 12 r_C \bar{h} \left\{ \left[ (\dot{\bar{y}}_C + \dot{\bar{y}}_{C_s}) + \bar{\zeta} (\dot{\bar{\alpha}}_j + \dot{\bar{\alpha}}_b) \right] \cos \theta' \dots \right. \\
&+ \left. \left[ (\dot{\bar{z}}_C + \dot{\bar{z}}_{C_s}) + \bar{\zeta} (\dot{\bar{\beta}}_j + \dot{\bar{\beta}}_b) \right] \sin \theta' \dots \right. \\
&- \left. (\dot{\bar{y}}_r + \bar{\zeta} \dot{\bar{\alpha}}_r) \sin \theta' - (\dot{\bar{z}}_r - \bar{\zeta} \dot{\bar{\beta}}_r) \cos \theta' - 2\pi \Omega_j \right\} \quad (2.31).
\end{aligned}$$

O primeiro e o terceiro termos de *RHS* são de  $O(1)$  e  $O\left(\frac{c_R}{D}\right)$ , respectivamente, o que leva à desconsideração deste último. O termo intermediário de *RHS* é de  $O\left(\frac{r_C}{r_{LD}^2}\right)$  e não pode ser desprezado “a priori”, devido à possibilidade de  $\left(\frac{r_C}{r_{LD}^2}\right)$  assumir valores significativamente superiores a  $\left(\frac{c_R}{D}\right)$ .

Resulta portanto a seguinte expressão para a Equação de Reynolds adaptada ao estudo de mancais hidrodinâmicos com desalinhamento angular:

$$\frac{1}{\mu} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial \zeta} \right) \right] = 12 \frac{dh}{dt} + 6(\omega_j + \omega_b) \frac{\partial h}{\partial \theta'} - 6R \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \frac{dh}{dt} + \omega_j \frac{\partial h}{\partial \theta'} \right] \frac{\partial h}{\partial \zeta} \quad (2.32).$$

O termo  $6R \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \frac{dh}{dt} + \omega_j \frac{\partial h}{\partial \theta'} \right] \frac{\partial h}{\partial \zeta}$  de *RHS* não foi encontrado em nenhuma das referências consultadas durante a realização deste trabalho, e por ser proporcional a  $\frac{\partial h}{\partial \zeta}$ , é aqui denominado

Efeito de Cunha Axial.

Conforme mostrado na equação (2.31), é de se esperar que o Efeito de Cunha Axial só afete o comportamento de mancais curtos. Em mancais com  $r_{LD} \geq 1$  o termo relativo ao Efeito de Cunha Axial terá  $O\left(\frac{c_R}{D}\right)$ , e a sua manutenção no equacionamento será irrelevante, tal como ocorreria com os demais termos dessa ordem. Neste trabalho serão estudados apenas mancais com folga radial constante, deixando-se a análise de mancais com  $c_R = c_R(\zeta)$  ou  $c_R = c_R(\zeta, \theta')$  para trabalhos futuros.

A avaliação numérica da influência do Efeito de Cunha Axial nos esforços reativos em mancais hidrodinâmicos com desalinhamento angular será apresentada no próximo item, juntamente com outros exemplos de integração da equação de Reynolds utilizando o método das diferenças finitas.

## 2.4 Resultados Numéricos e Validação da Formulação

A determinação do campo de pressões no mancal será feita a partir da integração da Equação de Reynolds empregando o método das diferenças finitas. Seguindo a recomendação de Smalley & McCallion (1967) e Pinkus & Bupara (1979), adota-se a mudança de variável  $\Pi = \bar{h}^{-3/2} \bar{p}$  proposta por Vogelpohl (1937), que torna a integração da Equação de Reynolds mais rápida e acurada. A equação (2.32), já adimensionalizada e em função da variável  $\Pi$  é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta'^2} + \frac{1}{r_{LD}^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \zeta'^2} = \frac{1}{\bar{h}^{3/2}} \frac{12}{\Omega} \left[ \frac{d\bar{h}}{dt} + \pi \Omega \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta'} - \frac{r_C}{r_{LD}^2} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \zeta'} \left( \frac{d\bar{h}}{dt} + 2\pi \Omega_j \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta'} \right) \right] \dots \\ + \frac{3\Pi}{4\bar{h}^2} \left\{ \left( \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta'} \right)^2 + 2\bar{h} \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial \theta'^2} + \frac{1}{r_{LD}^2} \left[ \left( \frac{\partial \bar{h}}{\partial \zeta'} \right)^2 + 2\bar{h} \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial \zeta'^2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.33).$$

Adotando diferenças finitas centrais, divide-se a superfície interna do mancal em uma malha de  $N_{\theta'} \times N_{\zeta'}$  retângulos de lados  $\delta\theta' = 2\pi/N_{\theta'}$  e  $\delta\zeta' = 2/N_{\zeta'}$ , e chega-se à seguinte expressão para o valor da pressão em cada ponto da malha,

$$\Pi_{m,n} = \frac{1}{\Delta_{\Pi}} \left[ C_C + C_{\theta'} (\Pi_{m+1,n} + \Pi_{m-1,n}) + C_{\zeta'} (\Pi_{m,n+1} + \Pi_{m,n-1}) \right], \quad \begin{cases} m = 1, \dots, N_{\theta'} + 1 \\ n = 1, \dots, N_{\zeta'} + 1 \end{cases} \quad (2.34),$$

onde

$$\begin{cases} \Delta_{\Pi} = 2 \left[ \delta\zeta'^2 + r_{LD}^{-2} \delta\theta'^2 + \frac{3}{8} f(\bar{h}) (\delta\theta' \delta\zeta')^2 \right] \\ C_C = -12 \bar{h}^{-3/2} \left[ \pi \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta'} + \Omega^{-1} \frac{d\bar{h}}{dt} - \frac{r_C}{r_{LD}^2} \frac{\partial}{\partial \zeta'} \left( \Omega^{-1} \frac{d\bar{h}}{dt} + 2\pi \frac{\Omega_j}{\Omega} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta'} \right) \frac{\partial \bar{h}}{\partial \zeta'} \right] (\delta\theta' \delta\zeta')^2 \\ C_{\theta'} = \delta\zeta'^2; C_{\zeta'} = r_{LD}^{-2} \delta\theta'^2 \end{cases} \quad (2.35)$$

e

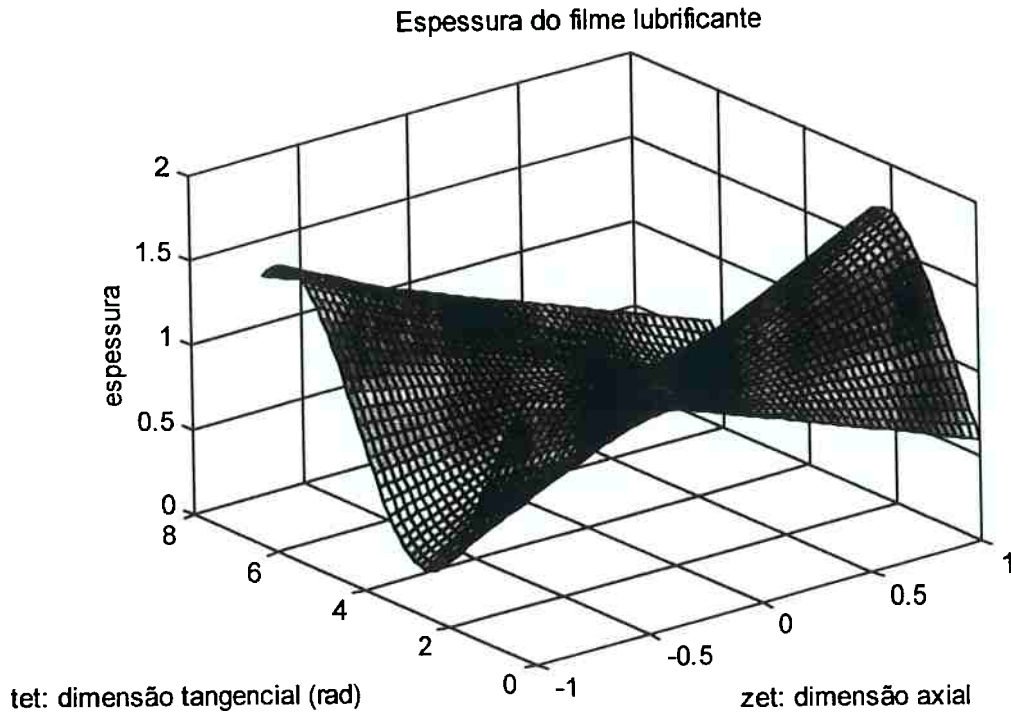
$$f(\bar{h}) = \bar{h}^{-2} \left\{ \left( \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta'} \right)^2 + 2\bar{h} \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial \theta'^2} + r_{LD}^{-2} \left[ \left( \frac{\partial \bar{h}}{\partial \zeta} \right)^2 + 2\bar{h} \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial \zeta^2} \right] \right\} \quad (2.36)$$

Determina-se o campo de pressões resolvendo as equações (2.34) através do processo iterativo de Gauss-Seidel com “sobre-relaxação sucessiva”, em que se utiliza o “fator de sobre-relaxação ótima” sugerido por Lloyd & McCallion (1968).

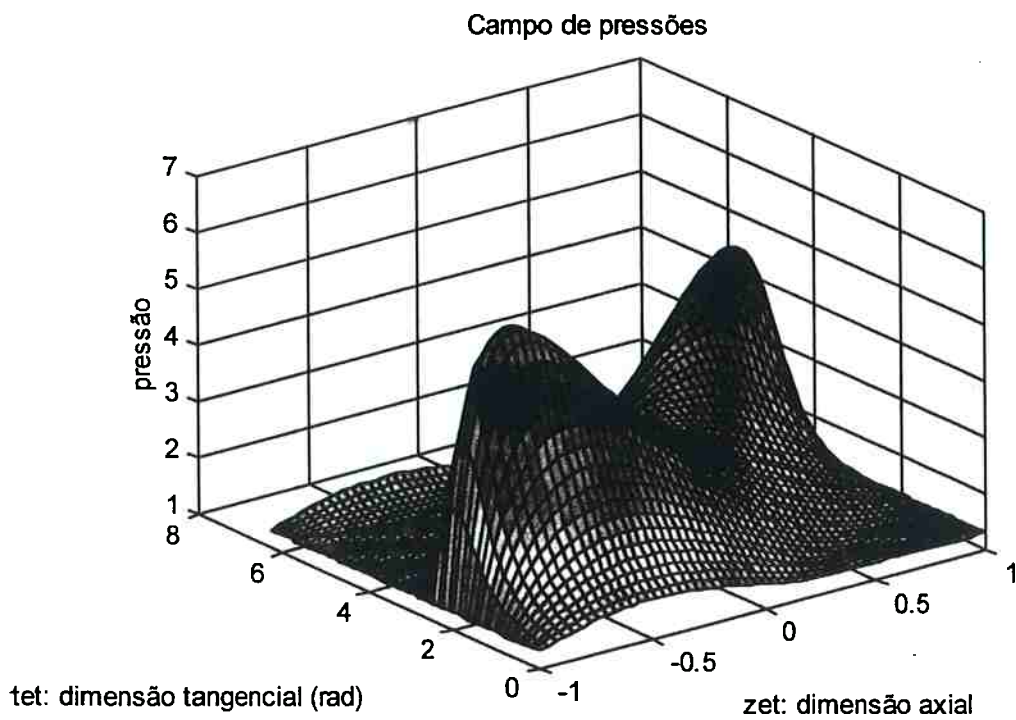
Como condição de contorno adota-se  $\bar{p} = \bar{p}_{atm}$  ( $\bar{p}_{atm}$  é a pressão atmosférica) em  $\bar{\zeta} = \pm 1$  ou nas arestas de ranhuras de alimentação; adota-se também a condição  $\bar{p} = \bar{p}_{atm}$  sempre que em algum ponto da malha resulte  $\bar{p} \leq \bar{p}_{atm}$ . Essas condições equivalem a admitir que o lubrificante é fornecido ao mancal sem pressurização através de ranhuras, ou através de orifícios situados na região de cavitação, e que a pressão de cavitação do lubrificante é  $\bar{p}_{cav} = \bar{p}_{atm}$ . Não será considerada neste trabalho, apesar de não acarretar dificuldades adicionais, a condição de contorno  $\bar{p} = \bar{p}_{in}$  nas ranhuras, onde  $\bar{p}_{in}$  seria um valor de pressão de alimentação superior a  $\bar{p}_{atm}$ . O processo iterativo é encerrado quando a variação relativa de  $\bar{p}$  em cada ponto da malha é menor que  $1 \times 10^{-5}$  em duas iterações sucessivas.

A título de exemplo, são mostrados nas figuras 2.6a, 2.6b (exemplo 2.1), e 2.7a, 2.7b (exemplo 2.2), a espessura do filme de fluido lubrificante e o campo de pressões correspondentes a um mancal cilíndrico plano (i.e., com orifício de alimentação na região cavitada) com  $r_c = 1 \times 10^{-3}$ ,  $r_{LD} = 1$  e  $\mu \Omega = 0.3 \text{ N/m}^2$ . A situação mostrada nas figuras 2.6 corresponde a  $\bar{\alpha}_r = \bar{\beta}_r = 0.5$  e  $\bar{y}_r = \bar{z}_r = -0.1$ ; os gráficos do exemplo 2.2 resultam de  $\bar{\alpha}_r = -0.5$ ,  $\bar{\beta}_r = 0.5$  e  $\bar{y}_r = \bar{z}_r = -0.15$ . Em ambos os casos a malha é definida por  $N_{\theta'} = 54 \times N_{\zeta} = 54$  elementos.

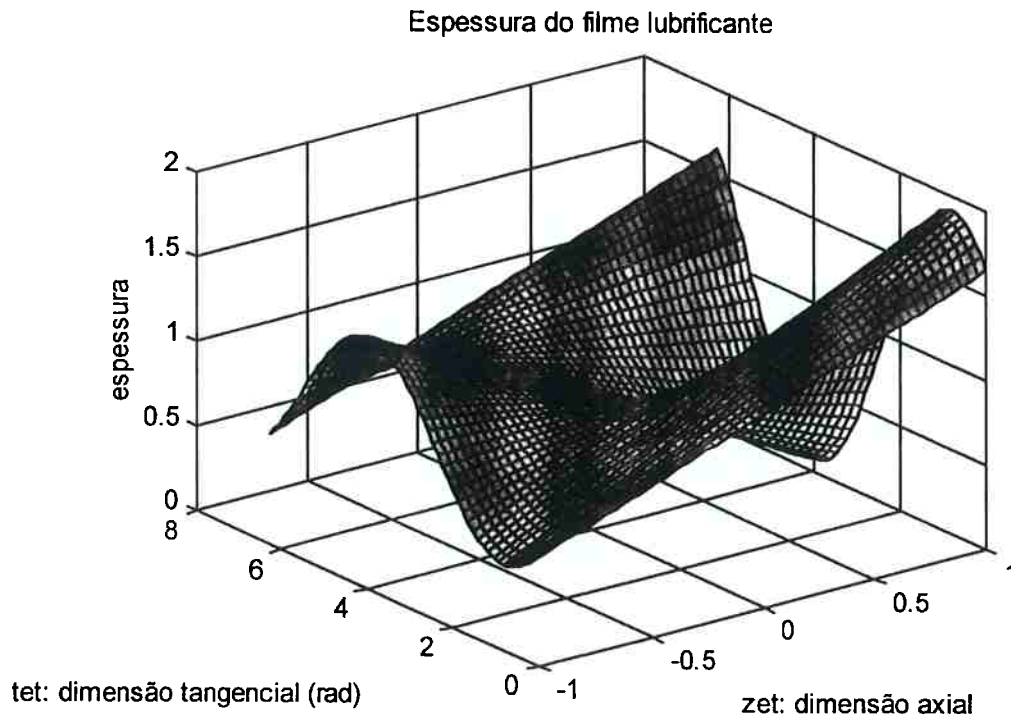




**Figura 2.6a** Espessura do filme de fluido lubrificante (exemplo 2.1)

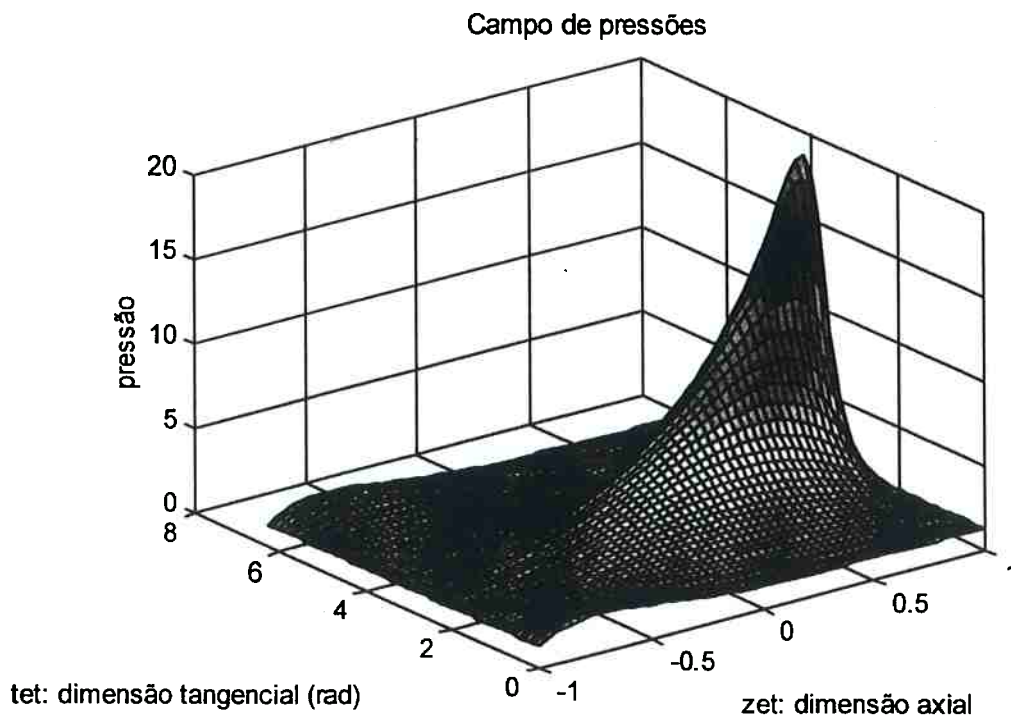


**Figura 2.6b** Campo de pressões no filme de fluido lubrificante (exemplo 2.1)



**Figura 2.7a** Espessura do filme de fluido lubrificante (exemplo 2.2)

Figura 2.7a



**Figura 2.7b** Campo de pressões no filme de fluido lubrificante (exemplo 2.2)

Os esforços relativos atuantes no moente são calculados a partir da integração do campo de pressões, empregando-se as expressões,

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{y_j} = -\frac{\mu L \Omega R^3}{2c_R^2} \bar{F}_{y_j}; \quad \bar{F}_{y_j} = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \bar{p}(\theta', \bar{\zeta}) \cos \theta' d\theta' d\bar{\zeta}; \\ F_{z_j} = -\frac{\mu L \Omega R^3}{2c_R^2} \bar{F}_{z_j}; \quad \bar{F}_{z_j} = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \bar{p}(\theta', \bar{\zeta}) \sin \theta' d\theta' d\bar{\zeta}; \\ M_{y_j} = \frac{\mu L^2 \Omega R^3}{4c_R^2} \bar{M}_{y_j}; \quad \bar{M}_{y_j} = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \bar{\zeta} \bar{p}(\theta', \bar{\zeta}) \sin \theta' d\theta' d\bar{\zeta}; \\ M_{z_j} = -\frac{\mu L^2 \Omega R^3}{4c_R^2} \bar{M}_{z_j}; \quad \bar{M}_{z_j} = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \bar{\zeta} \bar{p}(\theta', \bar{\zeta}) \cos \theta' d\theta' d\bar{\zeta}; \end{array} \right. \quad (2.37),$$

cuas integrais são calculadas pelo método de Simpson. A força e o momento resultantes são indicados na equação (2.38), juntamente com a expressão aqui adotada para o número adimensional de Sommerfeld,  $S_o$ ; são apresentados também o número de Reynolds,  $R_e$  e o número de Reynolds crítico,  $R_{e_c}$ , definidos na norma DIN 31652 (1983), segundo a qual o escoamento no mancal será laminar se  $R_e < R_{e_c}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_h = \frac{\mu L \Omega R^3}{2c_R^2} \bar{F}_h; \quad \bar{F}_h = \sqrt{\bar{F}_{y_j}^2 + \bar{F}_{z_j}^2} \\ M_h = \frac{\mu L^2 \Omega R^3}{4c_R^2} \bar{M}_h; \quad \bar{M}_h = \sqrt{\bar{M}_{y_j}^2 + \bar{M}_{z_j}^2} \\ S_o = \frac{4F_h c_R^2}{\mu L D^3 \omega}; \quad R_e = \frac{\rho R \omega c_R}{\mu}; \quad R_{e_c} = 41.3 \sqrt{\frac{R}{2c_R}} \end{array} \right. \quad (2.38),$$

onde  $\rho$  é a densidade do fluido lubrificante.

A escolha dos valores de  $N_{\theta'}$  e  $N_{\bar{\zeta}}$  mais apropriados para o cálculo das reações hidrodinâmicas será discutida comentando-se os resultados das tabelas 2.2, 2.3 e 2.4, relativas ao mancal dos exemplos anteriores, e que mostram a variação desses esforços em função do refinamento da malha de diferenças finitas. Nas tabelas 2.2 e 2.3 o grau de refinamento da malha é diminuído a partir de  $N_{\theta'} = N_{\bar{\zeta}} = 72$ , reduzindo-se os valores de  $N_{\theta'}$  e  $N_{\bar{\zeta}}$  alternadamente; são apresentados também alguns resultados complementares em que  $N_{\theta'} = N_{\bar{\zeta}}$ .

**Tabela 2.2** Resultados relativos ao exemplo 2.1;  $\bar{h}_{\min} = 0.2789$  em  $\bar{\zeta} = -1$ .

malha	$N_{\theta'}$	$N_{\bar{\zeta}}$	$\bar{F}_{y_j}$	$\bar{F}_{z_j}$	$\bar{M}_{y_j}$	$\bar{M}_{z_j}$	$\bar{p}_{\max}$	$\theta'_{\bar{p}_{\max}}$	$\bar{\zeta}_{\bar{p}_{\max}}$	$S_o$
1	72	72	4.0867	-2.4565	-3.5020	0.5903	6.0791	2.0944	-0.7222	1.1920
2	72	54	4.0851	-2.4560	-3.4961	0.5907	6.0767	2.0944	-0.7407	1.1916
3	54	72	4.0863	-2.4551	-3.5037	0.5898	6.0809	2.0944	-0.7222	1.1918
4	54	54	4.0847	-2.4541	-3.4979	0.5902	6.0784	2.0944	-0.7407	1.1913
5	54	36	4.0788	-2.4525	-3.4810	0.5920	6.0724	2.0944	-0.7222	1.1898
6	36	54	4.0870	-2.4563	-3.4992	0.5911	6.0833	2.0944	-0.7407	1.1920
7	36	36	4.0811	-2.4541	-3.4822	0.5931	6.0772	2.0944	-0.7222	1.1905
8	36	18	4.0499	-2.4432	-3.3936	0.6023	5.9816	2.0944	-0.7778	1.1824
9	18	36	4.0736	-2.4585	-3.4892	0.5969	6.1023	2.0944	-0.7222	1.1895
10	18	18	4.0512	-2.4452	-3.4007	0.6048	6.0064	2.0944	-0.7778	1.1830
11	18	12	3.9809	-2.4266	-3.2541	0.6285	5.9376	2.0944	-0.6667	1.1656
12	12	18	4.1048	-2.5268	-3.3724	0.6117	6.0475	2.0944	-0.7778	1.2050
13	24	24	4.0680	-2.4436	-3.4567	0.5909	6.0672	2.0944	-0.7500	1.1864
14	30	30	4.0731	-2.4440	-3.4743	0.5933	6.0775	2.0944	-0.7333	1.1875

**Tabela 2.3** Resultados relativos ao exemplo 2.2;  $\bar{h}_{\min} = 0.0808$  em  $\bar{\zeta} = 1$ .

malha	$N_{\theta'}$	$N_{\bar{\zeta}}$	$\bar{F}_{y_j}$	$\bar{F}_{z_j}$	$\bar{M}_{y_j}$	$\bar{M}_{z_j}$	$\bar{p}_{\max}$	$\theta'_{\bar{p}_{\max}}$	$\bar{\zeta}_{\bar{p}_{\max}}$	$S_o$
1	72	72	11.1476	-1.2595	-0.2235	5.7149	19.6261	3.5779	0.8611	2.8046
2	72	54	11.1240	-1.2689	-0.2149	5.6936	19.5414	3.5779	0.8889	2.7990
3	54	72	11.1516	-1.2595	-0.2241	5.7173	19.8036	3.6070	0.8889	2.8055
4	54	54	11.1296	-1.2675	-0.2167	5.6969	19.7582	3.6070	0.8889	2.8003
5	54	36	11.0669	-1.2902	-0.1954	5.6398	19.6320	3.6070	0.8889	2.7854
6	36	54	11.1294	-1.2800	-0.2082	5.6941	19.5854	3.6652	0.8889	2.8005
7	36	36	11.0658	-1.3041	-0.1859	5.6357	19.4433	3.6652	0.8889	2.7854
8	36	18	10.7555	-1.4170	-0.0849	5.3559	18.7816	3.6652	0.8889	2.7120
9	18	36	11.2053	-1.2201	-0.2641	5.7275	18.6727	3.4907	0.8333	2.8172
10	18	18	10.8945	-1.3363	-0.1586	5.4462	17.7824	3.4907	0.8889	2.7434
11	18	12	10.4708	-1.4862	-0.0351	5.0631	17.7848	3.4907	0.8333	2.6435
12	12	18	11.1785	-1.2642	-0.2344	5.6420	19.8922	3.6652	0.8889	2.8108
13	24	24	10.9737	-1.3324	-0.1627	5.5392	18.8476	3.6652	0.9167	2.7632
14	30	30	11.0121	-1.3357	-0.1606	5.5842	19.4018	3.5605	0.8667	2.7730

Tabela 2.4 Variação percentual dos resultados em função do grau de refinamento.

			Exemplo 2.1			Exemplo 2.2		
			Valores de referência			Valores de referência		
malha	$N_{\theta'}$	$N_{\bar{\zeta}}$	$S_{o_{ref}}$	$\bar{p}_{max_{ref}}$	$\bar{M}_{h_{ref}}$	$S_{o_{ref}}$	$\bar{p}_{max_{ref}}$	$\bar{M}_{h_{ref}}$
1	72	72	1.1920	6.0791	3.5514	2.8046	19.6261	5.7193
			Variação porcentual 100 × ...			Variação porcentual 100 × ...		
malha	$N_{\theta'}$	$N_{\bar{\zeta}}$	$\frac{\Delta S_o}{S_{o_{ref}}}$	$\frac{\Delta \bar{p}_{max}}{\bar{p}_{max_{ref}}}$	$\frac{\Delta \bar{M}_h}{\bar{M}_{h_{ref}}}$	$\frac{\Delta S_o}{S_{o_{ref}}}$	$\frac{\Delta \bar{p}_{max}}{\bar{p}_{max_{ref}}}$	$\frac{\Delta \bar{M}_h}{\bar{M}_{h_{ref}}}$
2	72	54	-0.03	-0.04	-0.16	-0.20	-0.43	-0.38
3	54	72	-0.02	0.03	0.05	0.03	0.90	0.04
4	54	54	-0.06	-0.01	-0.12	-0.15	0.67	-0.32
5	54	36	-0.19	-0.11	-0.58	-0.69	0.03	-1.33
6	36	54	0	0.07	-0.07	-0.15	-0.21	-0.37
7	36	36	-0.13	-0.03	-0.54	-0.69	-0.93	-1.41
8	36	18	-0.81	-1.60	-2.95	-3.30	-4.30	-6.34
9	18	36	-0.21	0.38	-0.32	0.45	-4.86	0.25
10	18	18	-0.76	-1.20	-2.74	-2.18	-9.39	-4.73
11	18	12	-2.22	-2.33	-6.68	-5.74	-9.36	-11.47
12	12	18	1.09	-0.52	-3.49	0.22	1.36	-3.11
13	24	24	-0.47	-0.20	-1.26	-1.48	-3.97	-3.11
14	30	30	-0.38	-0.03	-0.75	-1.13	-1.14	-2.32
$\Delta S_o = S_o - S_{o_{ref}}, \Delta \bar{p}_{max} = \bar{p}_{max} - \bar{p}_{max_{ref}}, \Delta \bar{M}_h = \bar{M}_h - \bar{M}_{h_{ref}}$								

Na tabela 2.4 é mostrada a variação porcentual de  $S_o$ ,  $\bar{p}_{\max}$  e  $\bar{M}_h$  em relação aos respectivos valores de referência, que correspondem à malha  $N_{\theta'} = 72 \times N_{\bar{\zeta}} = 72$ .

Os resultados das tabelas mostram que os valores das grandezas calculadas variam pouco em função do refinamento da malha. As maiores variações correspondem à situação do exemplo 2.2, devido ao brusco aumento de pressão próximo à extremidade do mancal em  $\bar{\zeta} = 1$  associado a um pequeno valor de  $\bar{h}_{\min}$ , conforme visualizado nas figuras 2.7. Verifica-se também que as maiores variações percentuais em  $S_o$  e  $\bar{M}_h$  decorrem da utilização de malhas mais grosseiras na direção axial, indicando que o grau de refinamento deve ser equivalente nas duas direções, ou seja, que devem ser empregadas malhas aproximadamente “quadradas” com  $N_{\theta'} \approx N_{\bar{\zeta}}$ . Essa característica torna as malhas empregadas em mancais com desalinhamento angular diferentes das usualmente adotadas em mancais alinhados, em que  $N_{\theta'} > N_{\bar{\zeta}}$ . Os resultados relativos às malhas quadradas, isto é, malhas 4, 7, 10, 13, e 14 mostram claramente a convergência dos valores calculados em função do grau de discretização do campo de pressões. As grandezas mais afetadas pelo refinamento da malha são  $\bar{p}_{\max}$  e  $\bar{M}_h$ , que no entanto podem ser calculadas com razoável precisão sem grande refinamento da malha, sendo suficientes valores da ordem de  $N_{\theta'} = 30 \times N_{\bar{\zeta}} = 30$  (900 elementos). O valor do pico de pressão e a sua localização podem ser determinados com maior precisão a partir de interpolações, como efetuado em Smalley & McCallion (1967), ou através de refinamentos na malha. Por outro lado, o que se considera prioritário neste trabalho é o cálculo das reações hidrodinâmicas visando a análise de vibrações de rotores, o qual pode ser feito, conforme já comentado, empregando-se malhas quadradas de aproximadamente 1000 elementos. Esse nível de discretização é da ordem do adotado por Smalley & McCallion (1967), Bannister (1976), Myrick & Rylander (1976), Pinkus & Bupara (1979) e Jakeman (1986, 1989), entre outros. A maioria dos mancais analisados por esses autores tinha  $r_{LD} < 1$  e nas malhas adotadas empregou-se  $N_{\theta'} > N_{\bar{\zeta}}$ , tal como costuma ser feito com mancais alinhados; dentre eles, apenas Bannister (1976) optou por malhas quadradas de  $N_{\theta'} = N_{\bar{\zeta}} = 32$  elementos em todas as análises, enquanto os demais variaram o tamanho da

malha conforme a situação. A maioria deles constatou a necessidade de um maior refinamento da malha à medida em que diminuía o valor de  $\bar{h}_{\min}$ .

Resultados de uma análise semelhante à anterior, envolvendo mancais com  $r_{LD} = 0.5$ , mostraram que neste caso não é necessário adotar  $N_{\theta'} \approx N_{\bar{\zeta}}$ , bastando empregar malhas com  $N_{\theta'} \approx 2N_{\bar{\zeta}}$  de aproximadamente 600 elementos. Julgou-se desnecessário apresentar esses resultados, que apenas confirmam as análises efetuadas pelos demais autores.

Levando em conta as informações apresentadas, será adotada uma malha quadrada padrão de  $N_{\theta'} = N_{\bar{\zeta}} = 36$  (1296 elementos) nas situações em que  $\bar{h}_{\min} \geq 0.1$  (ou,  $\varepsilon'_{\max} \leq 0.9$ ) e  $r_{LD} \geq 0.5$ .

Nos casos em que  $\bar{h}_{\min} < 0.1$  a malha será refinada até que a variação dos resultados seja de no máximo 0.5 %, independentemente da variação do valor do pico de pressão ou da sua localização. Para  $r_{LD} < 0.5$  a malha padrão será de  $N_{\theta'} = 36 \times N_{\bar{\zeta}} = 18$ , sujeita às mesmas restrições de  $\bar{h}_{\min}$  do caso anterior. Uma alternativa ao uso de malhas com elementos de dimensões fixas seria o uso de malhas adaptativas, que permitiriam um refinamento local das regiões de menor espessura do filme (Vijayaraghavan & Keith (1989, 1990)). Todavia, tendo em conta que na maioria das análises de vibrações de rotores raramente é necessário considerar excentricidades superiores a 90 % da folga radial, a escolha de uma malha fixa, ao invés de malhas com elementos de dimensões variáveis, visa economizar o tempo de processamento numérico. Quando se julgar oportuno um cálculo mais preciso da pressão máxima ou de algum outro resultado de interesse no estudo do comportamento estático de mancais, será empregado o refinamento da malha. Apenas a título de comparação, Smalley & McCallion (1967) empregaram malhas de  $N_{\theta'} = 32 \times N_{\bar{\zeta}} = 16$  para excentricidades de até 95 % da folga radial, e  $N_{\theta'} = 64 \times N_{\bar{\zeta}} = 32$  nas excentricidades maiores, independentemente do valor de  $r_{LD}$ ; Myrick & Rylander (1976) utilizaram malhas de  $N_{\theta'} = 16 \times N_{\bar{\zeta}} = 6$  na simulação de transientes de rotores simples apoiados em mancais cilíndricos planos com  $r_{LD} = 0.46$ , levando em conta o desalinhamento angular dos moentes.

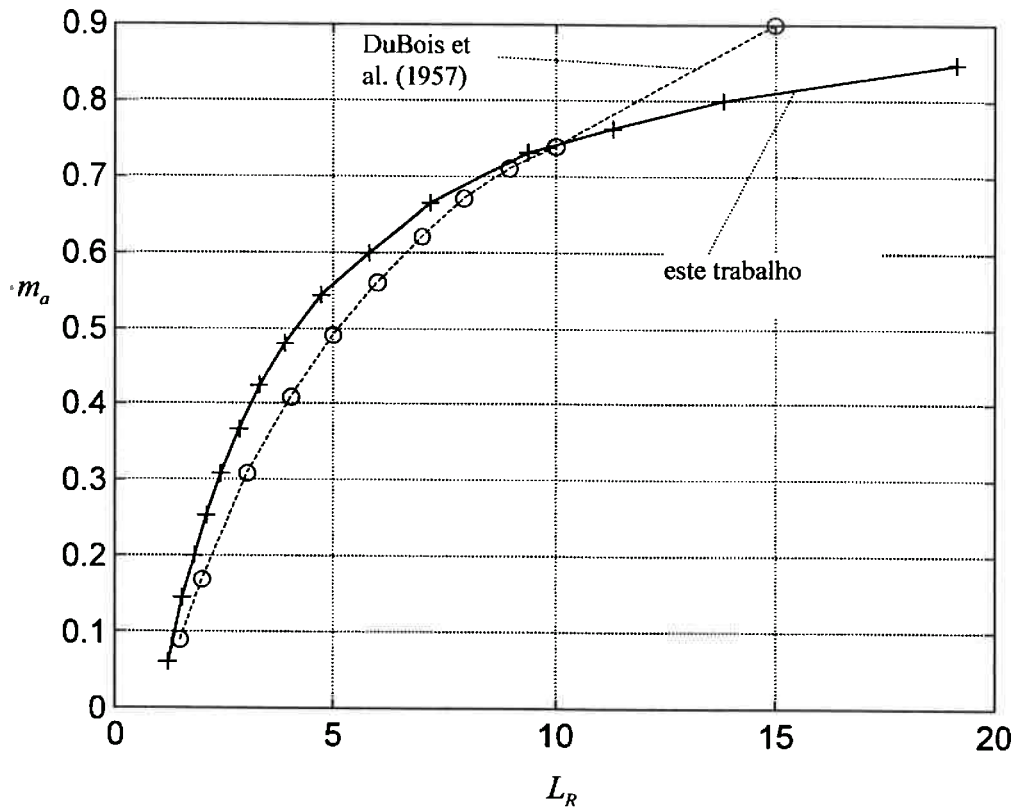
O estabelecimento da validade das formulações e resultados apresentados será feito através da reprodução de resultados experimentais e numéricos de outros pesquisadores. Dentre os poucos resultados experimentais disponíveis, os publicados por Dubois et al. (1957) são os mais

completos, e descrevem uma gama variada de situações envolvendo o desalinhamento angular estático de um mancal cilíndrico com uma ranhura axial no topo. Utilizando a nomenclatura desses autores, serão comparados resultados extraídos da figura 8 do referido trabalho, que apresenta a relação entre o Número de Sommerfeld  $S_o$ , o parâmetro  $m_a$  que mede o desalinhamento angular estático, e o parâmetro  $L_R$  que relaciona esse desalinhamento com a reação hidrodinâmica  $F_h$ . O significado dos parâmetros é o seguinte: “Dada uma carga  $P_o$  sustentada por um mancal alinhado,  $h_o$  é a espessura mínima (constante ao longo do comprimento do mancal) do filme de fluido lubrificante; introduzindo desalinhamento angular relativo, a espessura mínima passa a ser  $h_e$  em alguma das extremidades do mancal, e  $m_a$  mede essa redução relativa de espessura através da expressão  $m_a = (h_o - h_e)/h_o$ . O parâmetro  $L_R$  é dado por  $L_R = P_e/P_o$ , onde  $P_e$  é o valor de  $F_h$  correspondente a um mancal alinhado operando com uma excentricidade  $e_e = 1 - h_e$ ”. Os resultados experimentais e os numéricos obtidos com a formulação aqui proposta são apresentados na figura 2.8, correspondentes a um mancal com  $r_{LD} = 1$ ,  $r_c = 1 \times 10^{-3}$  e  $S_o = 0.398$ , submetido a desalinhamento angular crescente variando de  $\bar{\alpha}_r = 0$  até  $\bar{\alpha}_r = 0.8$ ; para a ranhura de alimentação adotou-se uma abertura de  $20^\circ$ . Os resultados numéricos apresentados envolveram a solução da equação algébrica não linear,

$$\bar{F}_h(\bar{y}_r, \bar{z}_r, \bar{\alpha}_r, \bar{\beta}_r) + \bar{P}_0 = \bar{0} \quad (2.39),$$

onde  $\bar{P}_0 = -P_o \bar{J}_b$  é a carga estática atuante no moente, que é feita empregando-se a rotina “fsolve” do “pacote de rotinas” do MATLAB (Hanselman & Littlefield, 1995).





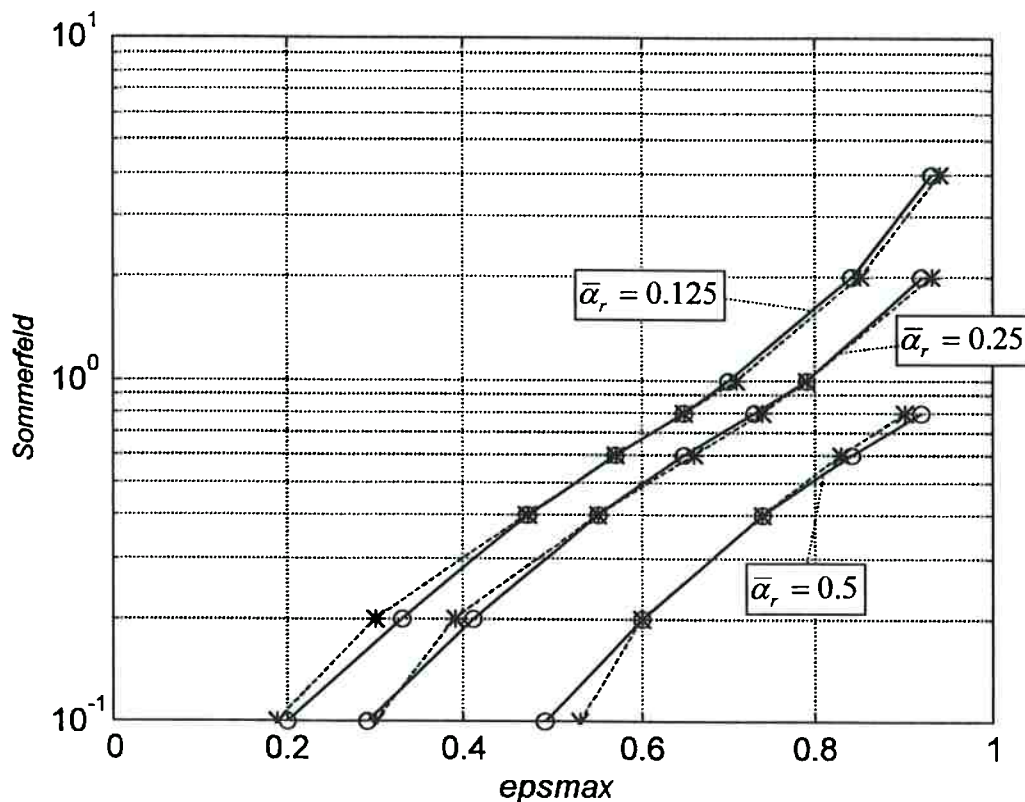
**Figura 2.8** Comparação com resultados experimentais de DuBois et al. (1957).

Os gráficos da figura 2.8 mostram que há boa correspondência entre resultados numéricos e experimentais, principalmente no que se refere à tendência de crescimento de  $L_R$  à medida em que diminui a espessura mínima do filme. Fica aparente também que próximo da situação de contato metálico entre o moente e o mancal a formulação aqui apresentada é insuficiente para uma boa previsão quantitativa das grandezas envolvidas. Deve-se levar em conta no entanto que não são conhecidas todas as variáveis medidas nos experimentos, como por exemplo o controle da temperatura do lubrificante durante os ensaios; tampouco é fornecida a largura da ranhura de alimentação do mancal. É de se supor que à medida em que aumenta o desalinhamento angular, maior será a influência da ranhura no campo de pressões, o que também pode ter influído na divergência de resultados a partir de  $m_a \approx 0.8$ .

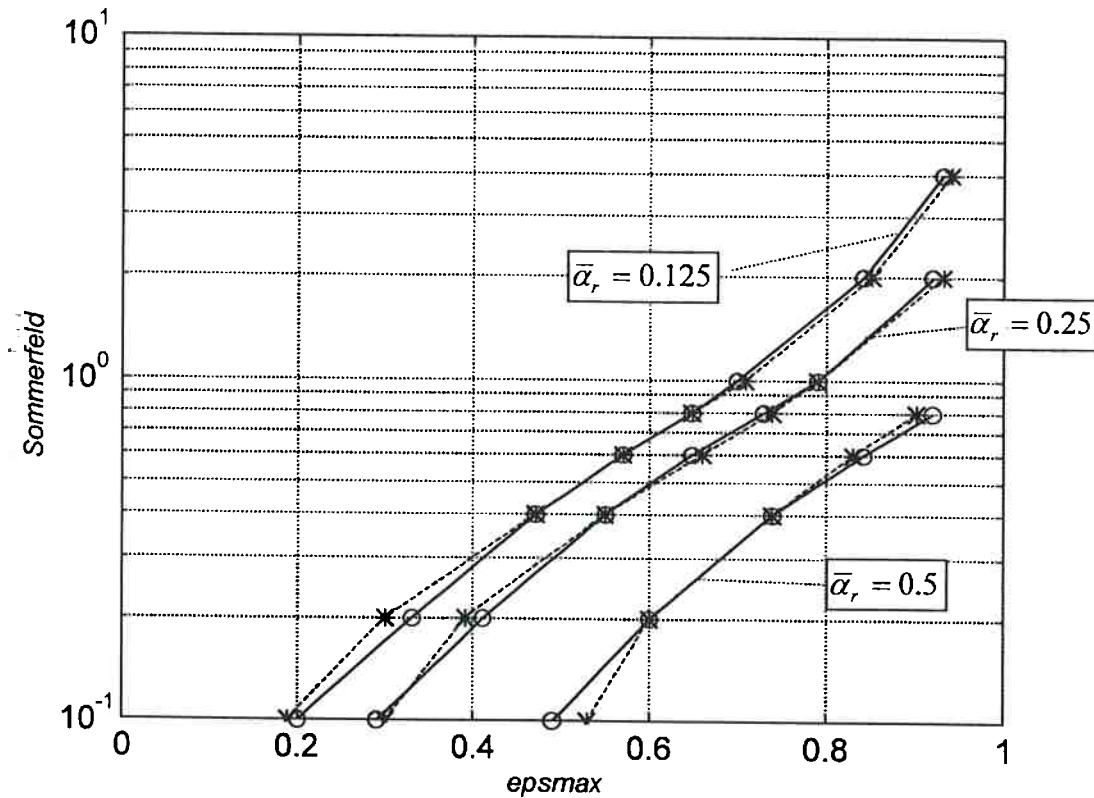
Smalley & McCallion (1967) e Qiu & Tieu (1995) encontraram correlações semelhantes entre seus resultados numéricos e os dos experimentos aqui considerados; nos gráficos apresentados pelos últimos, constata-se também nitidamente a inversão entre os valores dos esforços

calculados e medidos, semelhante à mostrada na figura 2.8, onde se verifica que até  $m_a \approx 0.73$  os esforços calculados numericamente são inferiores aos experimentais, ocorrendo o contrário a partir desse ponto em razão da elevada taxa de crescimento de  $L_R$ .

Uma situação análoga à das simulações anteriores será considerada agora na comparação com os resultados numéricos apresentados nas figuras 5.9 e 5.10 do trabalho de Smalley & McCallion (1967). Os gráficos dessas figuras mostram a relação entre  $S_o$  e a máxima excentricidade relativa na extremidade do mancal,  $\varepsilon'_e = e'_e/c_r$ , em função de diferentes graus de desalinhamento angular  $\bar{\alpha}_r$ . O mancal considerado é do tipo cilíndrico plano com  $r_{LD} = 0.25$  (figura 5.9 da referência) e  $r_{LD} = 0.75$  (figura 5.10 da referência), ambos com  $r_c = 0.5 \times 10^{-3}$ ; os resultados comparativos são apresentados nas figuras 2.9a e 2.9b.



**Figura 2.9a** Comparação com resultados numéricos de Smalley & McCallion (1967); mancal com  $r_{LD} = 0.25$  submetido a  $\bar{\alpha}_r = 0.125$ ,  $\bar{\alpha}_r = 0.25$  e  $\bar{\alpha}_r = 0.50$ ; \* este trabalho,  $\circ$  referência; Sommerfeld:  $S_o$ ; epsmax:  $= \varepsilon'_e$ .



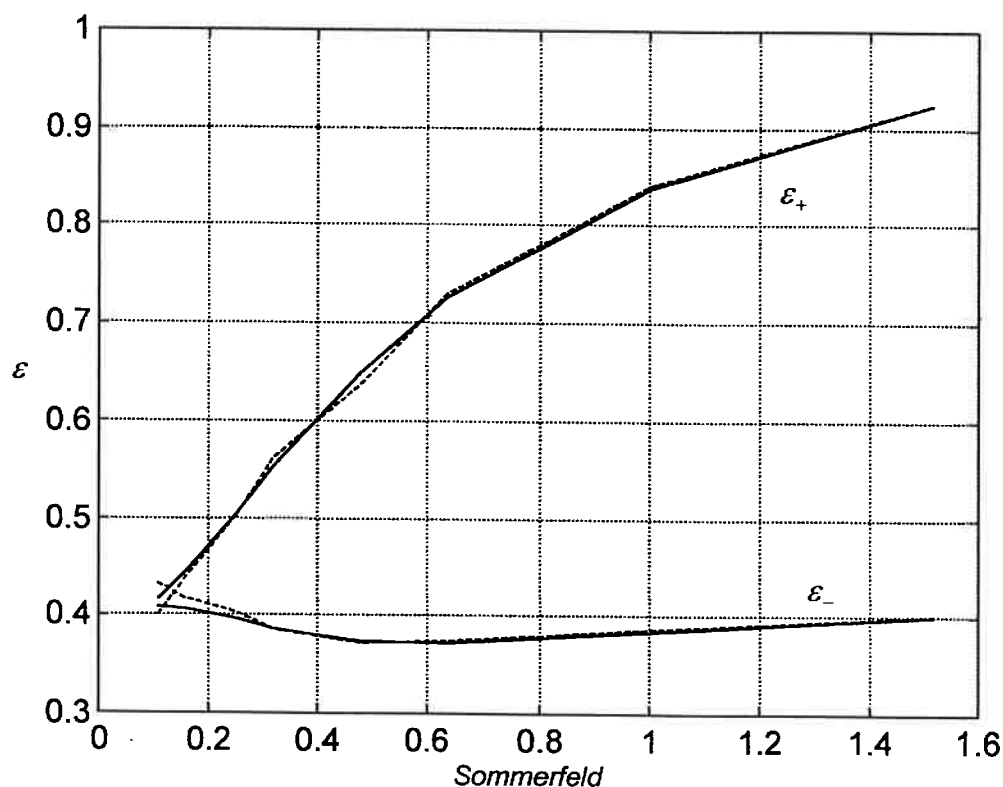
**Figura 2.9b** Idem à anterior, mancal com  $r_{LD} = 0.75$  submetido a  $\bar{\alpha}_r = 0.125$ ,  $\bar{\alpha}_r = 0.25$  e  $\bar{\alpha}_r = 0.50$ ; \* este trabalho, o referência; Sommerfeld:  $S_o$ ;  $\epsilon'_{max} := \epsilon'_i$ .

Nota-se que a coincidência entre resultados é quase total, a menos dos pontos referentes a  $\bar{\alpha}_r = 0.5$  nas situações em que o mancal está menos carregado, isto é,  $S_o = 0.01$  no caso  $r_{LD} = 0.25$  e  $S_o = 0.1$  no caso  $r_{LD} = 0.75$ . Não foi possível identificar a origem dessa discrepância — em concreto, verificou-se que não decorre do refinamento das malhas, nem do critério de convergência do campo de pressões ou de parâmetros relativos à busca de soluções na determinação da posição de equilíbrio estático — que de qualquer forma corresponde a uma diferença percentual inferior a 13% em apenas uma pequena parcela dos resultados. Resta a possibilidade de que os autores do trabalho de referência tenham adotado uma pressão de alimentação superior à atmosférica, que influiria de modo mais significativo nos resultados relativos aos menores valores de  $\epsilon'_i$ .

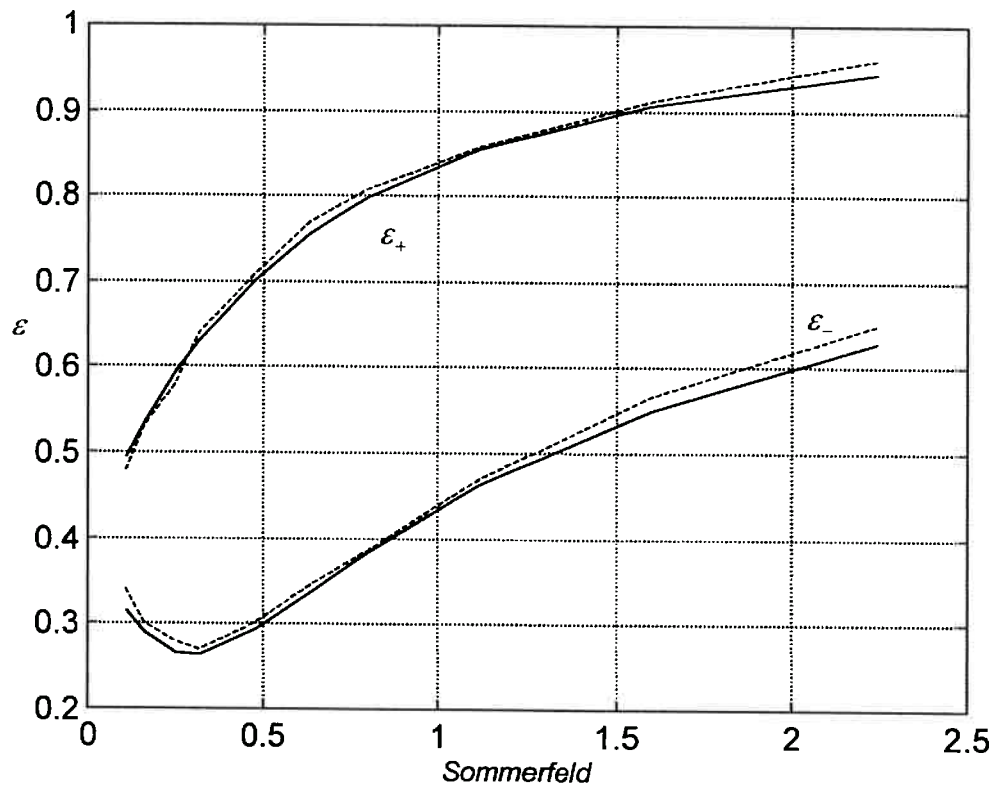
Para finalizar a validação da formulação e procedimentos aqui propostos para o cálculo dos esforços hidrodinâmicos, serão também reproduzidos resultados extraídos de Qiu & Tieu (1995),

envolvendo agora um mancal de  $r_{LD} = 1.0$ , alimentado por duas ranhuras axiais com abertura de  $20^\circ$  situadas no plano  $X_b Z_b$ .

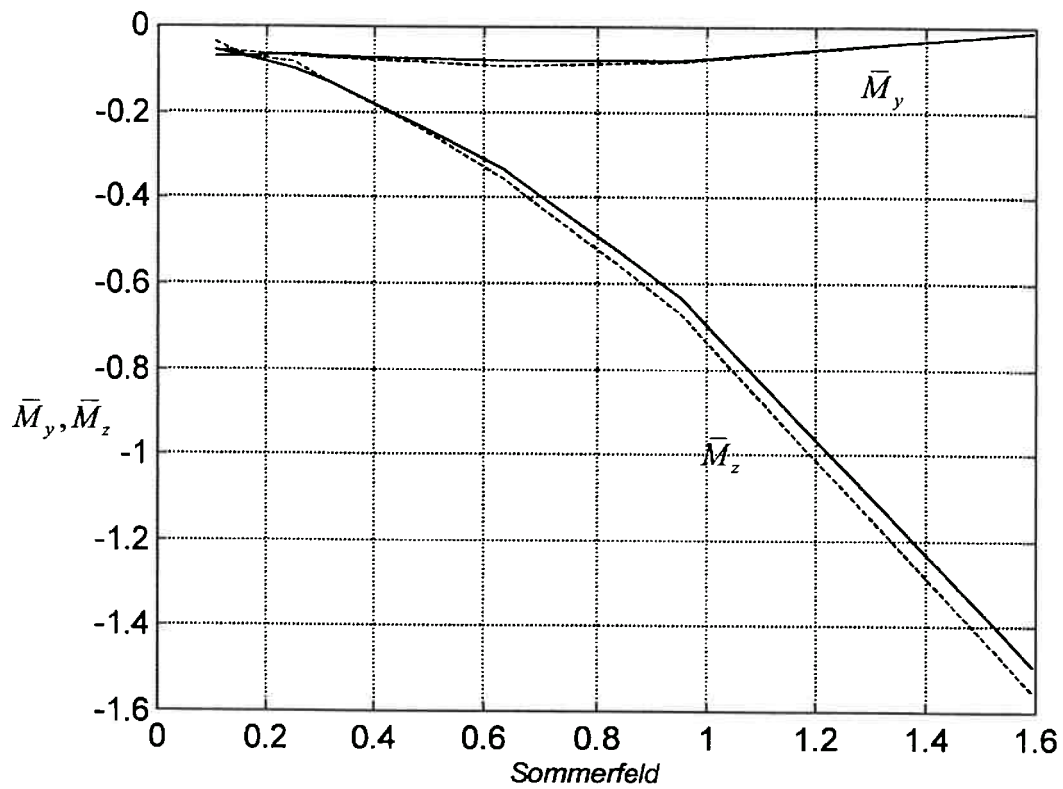
Nas figuras 2.10a e 2.10b são apresentados os valores das excentricidades nas extremidades do mancal,  $\varepsilon_+ = \varepsilon(\bar{\zeta} = 1)$  e  $\varepsilon_- = \varepsilon(\bar{\zeta} = -1)$ , juntamente com os resultados extraídos das figuras 3(a) e 3(b) do trabalho citado. Nas figuras 2.11 são apresentadas as componentes dos momentos,  $\bar{M}_y$  e  $\bar{M}_z$ , correspondentes às situações anteriores. Cumpre advertir que estão trocadas as legendas da figura 7(b) da publicação citada, da qual foram extraídos os valores dos momentos resultantes do desalinhamento  $\bar{\beta}_r = 0.4$ , de modo que onde lá está escrito  $\bar{M}_x$  deve-se ler  $\bar{M}_y$ , e vice-versa.



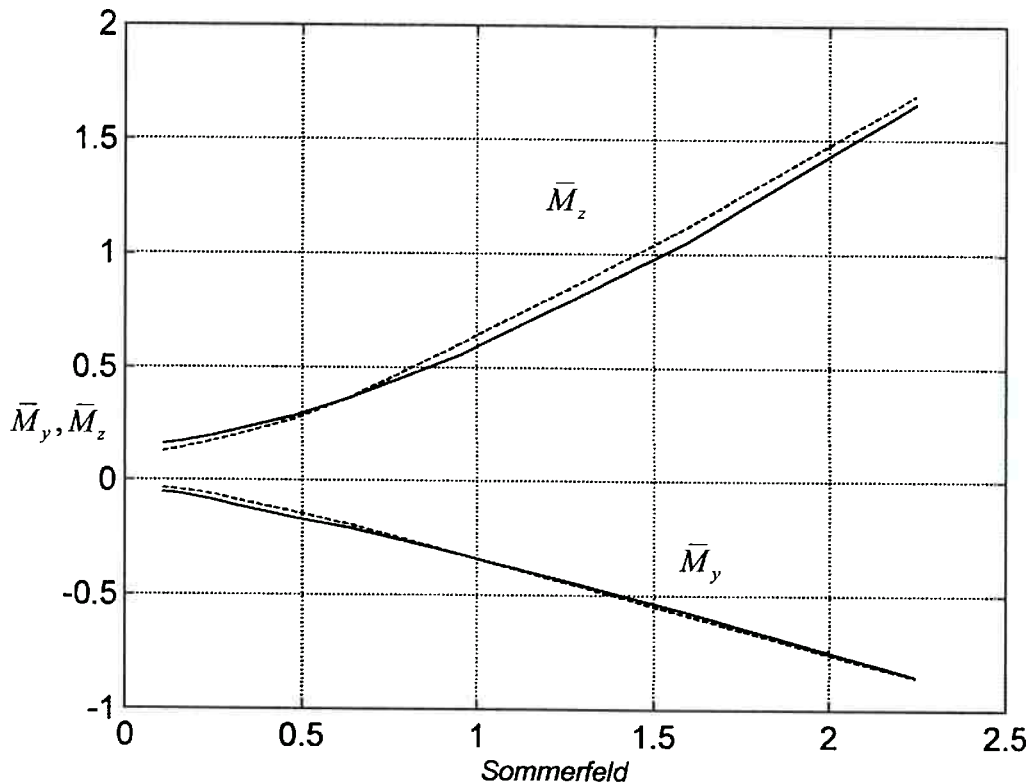
**Figura 2.10a** Comparação com resultados numéricos de QIU & TIEU (1995);  $\varepsilon_+$  e  $\varepsilon_-$  decorrentes de um desalinhamento angular  $\bar{\alpha}_r = 0.4$  (corresponde ao caso  $\gamma = 0$ ,  $\tau = 0.4$  da figura 3(a) da referência); - este trabalho, - - referência.



**Figura 2.10b** Idem à figura anterior, com  $\varepsilon_+$  e  $\varepsilon_-$  decorrentes de um desalinhamento angular  $\bar{\beta}_r = 0.4$  (corresponde ao caso  $\gamma = \pi/2$ ,  $\tau = 0.4$  da figura 3(b) da referência); - este trabalho, - - referência.



**Figura 2.11a** Comparação com resultados numéricos de QIU & TIEU (1995);  $\bar{M}_y$  e  $\bar{M}_z$ , decorrentes de um desalinhamento angular  $\bar{\alpha}_r = 0.4$  (corresponde ao caso  $\gamma = 0$ ,  $\tau = 0.4$  da figura 7(a) da referência); - este trabalho, - - referência.

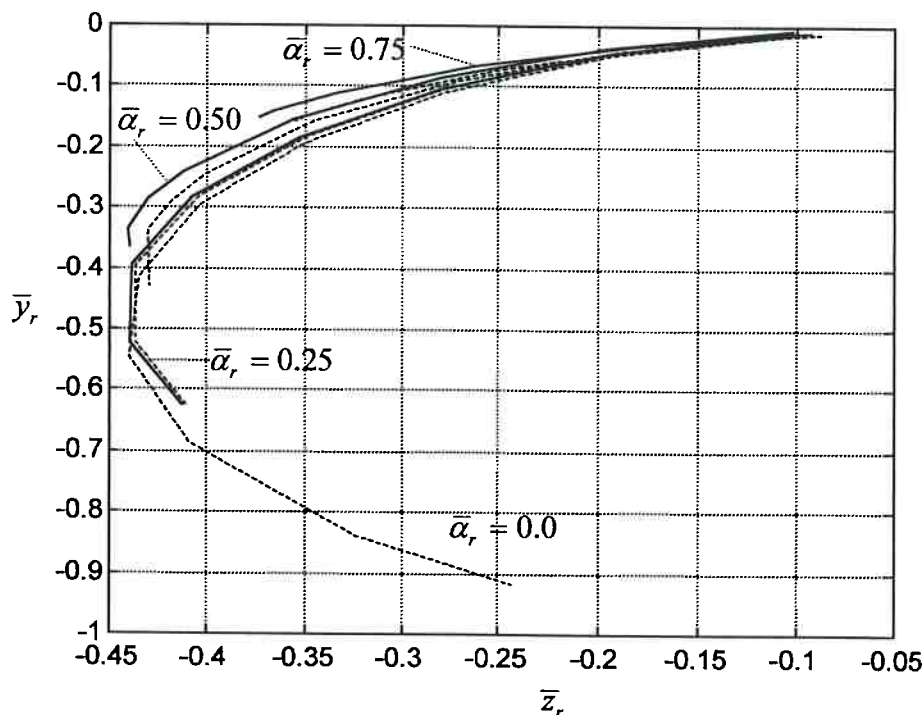


**Figura 2.11b** Idem à figura anterior, com  $\bar{M}_y$  e  $\bar{M}_z$ , decorrentes de um desalinhamento angular  $\bar{\beta}_r = 0.4$  (corresponde ao caso  $\gamma = \pi/2$ ,  $\tau = 0.4$  da figura 7(b) da referência); - este trabalho, - - referência.

Novamente a correlação dos resultados é muito boa, e com certeza parte das discrepâncias deve ser atribuída às imprecisões inerentes ao processo de leitura dos valores nos gráficos do artigo considerado. Outra possível fonte de discrepâncias é que naquele trabalho foram empregadas malhas com  $N_{\theta'} = 360 \times N_{\bar{\zeta}} = 30$  (malha de 10800 elementos), ao passo que nos cálculos efetuados por este autor o grau de refinamento máximo, dentro dos critérios previamente apresentados, foi de  $N_{\theta'} = N_{\bar{\zeta}} = 56$  (3136 elementos).

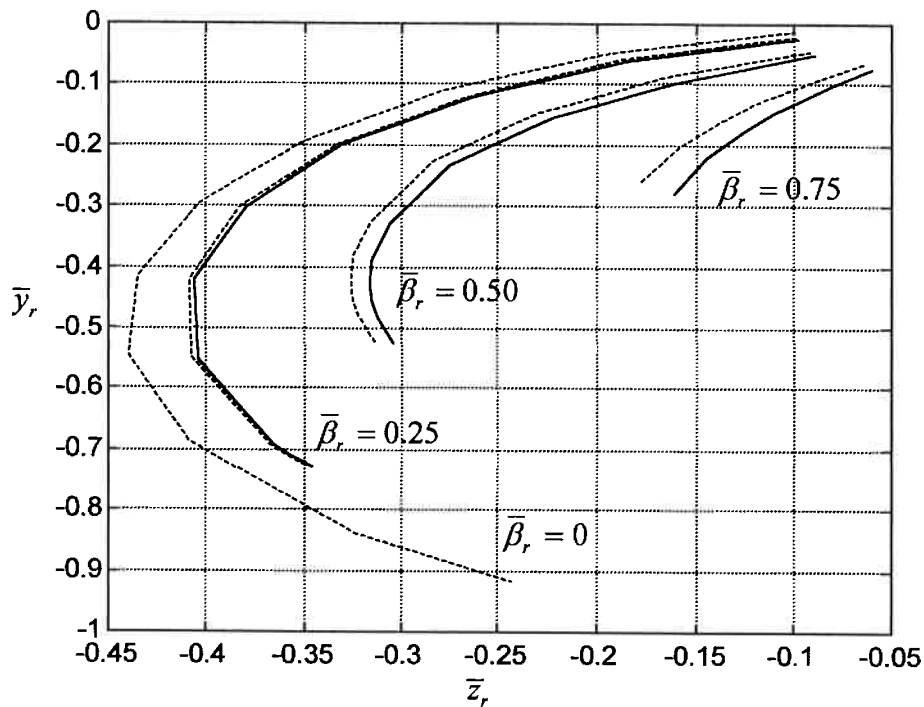
Com base nas verificações apresentadas, considera-se que a formulação e o procedimento propostos para o cálculo de reações hidrodinâmicas são adequados para analisar o efeito específico do desalinhamento angular relativo dos moentes no contexto do estudo de vibrações de rotores.

Para encerrar este capítulo, serão apresentados alguns resultados ilustrativos do Efeito de Cunha Axial sobre a posição de equilíbrio estático do moente de um mancal cilíndrico liso, com razão  $r_{LD} = 0.125$  e  $r_c = 1.0 \times 10^{-3}$ , submetido a desalinhamentos angulares relativos  $\bar{\alpha}_r$  e  $\bar{\beta}_r$  que variam entre 0.0 e 0.75. Os gráficos das figuras 2.12a e 2.12b mostram a as curvas das posições de equilíbrio estático do moente;  $f_{ave} = 1$  identifica os resultados obtidos com a consideração do efeito de Cunha Axial.



**Figura 2.12a** Lugar geométrico das posições de equilíbrio estático; desalinhamento no plano vertical,  $r_{LD} = 1/8$ ,  $r_c = 1.0 \times 10^3$ ;  $f_{ave} = 1$ : —,  $f_{ave} = 0$ : - -.





**Figura 2.12b** Espessura mínima do filme vs.  $S_o$ ; desalinhamento no plano vertical,  $r_{LD} = 1/8$ ,  $r_c = 1.0 \times 10^3$ ;  $f_{axe} = 1$ : —,  $f_{axe} = 0$ : - -.

Nota-se que mesmo para mancais curtos a influência do Efeito de Cunha Axial é pequena, a menos que o grau de desalinhamento angular relativo seja muito elevado. Um estudo mais aprofundado desse efeito será objeto de pesquisas futuras, enfocando mancais com seção transversal não uniforme.

### 3 COEFICIENTES DINÂMICOS DO MODELO LINEAR COMPLETO DE MANCAIS HIDRODINÂMICOS

As formulações e procedimentos estabelecidos para o cálculo dos esforços hidrodinâmicos serão agora empregados na determinação dos 32 coeficientes dinâmicos do modelo completo de mancais que será utilizado no estudo de vibrações lineares. Após uma breve revisão do significado desses coeficientes, passa-se à descrição da técnica a ser empregada no seu cálculo. Em seguida serão reproduzidos resultados obtidos por outros autores, como meio para validar o procedimento aqui implantado.

#### 3.1 Coeficientes Dinâmicos

Os coeficientes dinâmicos são empregados para calcular a variação das forças e momentos hidrodinâmicos atuantes no moente e no mancal nas vizinhanças das respectivas posições de equilíbrio estático. Os coeficientes de rigidez, multiplicados pelos deslocamentos relativos entre o moente e o mancal, resultam os esforços de restituição; analogamente, os coeficientes de amortecimento multiplicam as velocidades relativas, resultando os esforços dissipativos.

A posição de equilíbrio estático do moente em relação ao mancal é descrita por quatro parâmetros: as duas coordenadas do seu centro geométrico,  $y_r^s, z_r^s$  (definidas no plano transversal médio do mancal), e os dois ângulos que definem o desalinhamento angular,  $A_r^s$  e  $B_r^s$ ; este conjunto de parâmetros será designado genericamente por  $q_r^s$ . No estudo de vibrações lineares supõe-se que a amplitude da oscilação relativa entre o moente e o mancal é pequena, de modo que a força e o momento hidrodinâmicos, variáveis em função da posição e velocidade relativas, podem ser calculados desconsiderando-se os termos não lineares das suas expansões em Série de Taylor.

Sendo os esforços hidrodinâmicos

$$\begin{cases} \bar{F}_h = \bar{F}_h(y_r, z_r, A_r, B_r, \dot{y}_r, \dot{z}_r, \dot{A}_r, \dot{B}_r) \\ \bar{M}_h = \bar{M}_h(y_r, z_r, A_r, B_r, \dot{y}_r, \dot{z}_r, \dot{A}_r, \dot{B}_r) \end{cases} \quad (3.1),$$

as expansões das respectivas coordenadas são mostradas na equação (3.2):

$$\begin{cases} F_y = F_y^s + \frac{\partial F_y}{\partial y} \Big|_{q_r} \Delta y + \frac{\partial F_y}{\partial z} \Big|_{q_r} \Delta z + \frac{\partial F_y}{\partial A} \Big|_{q_r} \Delta A + \frac{\partial F_y}{\partial B} \Big|_{q_r} \Delta B + \dots \\ \quad \frac{\partial F_y}{\partial \dot{y}} \Big|_{q_r} \Delta \dot{y} + \frac{\partial F_y}{\partial \dot{z}} \Big|_{q_r} \Delta \dot{z} + \frac{\partial F_y}{\partial \dot{A}} \Big|_{q_r} \Delta \dot{A} + \frac{\partial F_y}{\partial \dot{B}} \Big|_{q_r} \Delta \dot{B} \\ F_z = F_z^s + \frac{\partial F_z}{\partial y} \Big|_{q_r} \Delta y + \frac{\partial F_z}{\partial z} \Big|_{q_r} \Delta z + \frac{\partial F_z}{\partial A} \Big|_{q_r} \Delta A + \frac{\partial F_z}{\partial B} \Big|_{q_r} \Delta B + \dots \\ \quad \frac{\partial F_z}{\partial \dot{y}} \Big|_{q_r} \Delta \dot{y} + \frac{\partial F_z}{\partial \dot{z}} \Big|_{q_r} \Delta \dot{z} + \frac{\partial F_z}{\partial \dot{A}} \Big|_{q_r} \Delta \dot{A} + \frac{\partial F_z}{\partial \dot{B}} \Big|_{q_r} \Delta \dot{B} \\ M_y = M_y^s + \frac{\partial M_y}{\partial y} \Big|_{q_r} \Delta y + \frac{\partial M_y}{\partial z} \Big|_{q_r} \Delta z + \frac{\partial M_y}{\partial A} \Big|_{q_r} \Delta A + \frac{\partial M_y}{\partial B} \Big|_{q_r} \Delta B + \dots \\ \quad \frac{\partial M_y}{\partial \dot{y}} \Big|_{q_r} \Delta \dot{y} + \frac{\partial M_y}{\partial \dot{z}} \Big|_{q_r} \Delta \dot{z} + \frac{\partial M_y}{\partial \dot{A}} \Big|_{q_r} \Delta \dot{A} + \frac{\partial M_y}{\partial \dot{B}} \Big|_{q_r} \Delta \dot{B} \\ M_z = M_z^s + \frac{\partial M_z}{\partial y} \Big|_{q_r} \Delta y + \frac{\partial M_z}{\partial z} \Big|_{q_r} \Delta z + \frac{\partial M_z}{\partial A} \Big|_{q_r} \Delta A + \frac{\partial M_z}{\partial B} \Big|_{q_r} \Delta B + \dots \\ \quad \frac{\partial M_z}{\partial \dot{y}} \Big|_{q_r} \Delta \dot{y} + \frac{\partial M_z}{\partial \dot{z}} \Big|_{q_r} \Delta \dot{z} + \frac{\partial M_z}{\partial \dot{A}} \Big|_{q_r} \Delta \dot{A} + \frac{\partial M_z}{\partial \dot{B}} \Big|_{q_r} \Delta \dot{B} \end{cases} \quad (3.2),$$

onde  $F_y^s$ ,  $F_z^s$ ,  $M_y^s$  e  $M_z^s$  são as componentes de  $\bar{F}_h$  e  $\bar{M}_h$  na posição de equilíbrio estático, com  $\Delta y = (y_r - y_r^s)$ ,  $\Delta z = (z_r - z_r^s)$ ,  $\Delta A = (A_r - A_r^s)$ ,  $\Delta B = (B_r - B_r^s)$ ,  $\Delta \dot{y} = \dot{y}_r$ ,  $\Delta \dot{z} = \dot{z}_r$ ,  $\Delta \dot{A} = \dot{A}_r$  e  $\Delta \dot{B} = \dot{B}_r$ .

As derivadas parciais presentes na equação (3.2) constituem os coeficientes dinâmicos de rigidez e de amortecimento do mancal, identificados na equação (3.3),

$$\begin{cases} \Delta F_y = k_{YY} \Delta y + k_{YZ} \Delta z + k_{YA} \Delta A + k_{YB} \Delta B + c_{YY} \Delta \dot{y} + c_{YZ} \Delta \dot{z} + c_{YA} \Delta \dot{A} + c_{YB} \Delta \dot{B} \\ \Delta F_z = k_{ZY} \Delta y + k_{ZZ} \Delta z + k_{ZA} \Delta A + k_{ZB} \Delta B + c_{ZY} \Delta \dot{y} + c_{ZZ} \Delta \dot{z} + c_{ZA} \Delta \dot{A} + c_{ZB} \Delta \dot{B} \\ \Delta M_y = k_{BY} \Delta y + k_{BZ} \Delta z + k_{BA} \Delta A + k_{BB} \Delta B + c_{BY} \Delta \dot{y} + c_{BZ} \Delta \dot{z} + c_{BA} \Delta \dot{A} + c_{BB} \Delta \dot{B} \\ \Delta M_z = k_{AY} \Delta y + k_{AZ} \Delta z + k_{AA} \Delta A + k_{AB} \Delta B + c_{AY} \Delta \dot{y} + c_{AZ} \Delta \dot{z} + c_{AA} \Delta \dot{A} + c_{AB} \Delta \dot{B} \end{cases} \quad (3.3),$$

onde  $\Delta F_y = F_y - F_y^s$ ,  $\Delta F_z = F_z - F_z^s$ ,  $\Delta M_y = M_y - M_y^s$  e  $\Delta M_z = M_z - M_z^s$ .

Escrevendo a equação (3.3) em forma matricial, obtém-se as matrizes de rigidez  $K_{4 \times 4}$  e de amortecimento  $C_{4 \times 4}$  do mancal, explicitadas abaixo:

$$\begin{Bmatrix} \Delta F_y \\ \Delta M_y \\ \Delta F_z \\ \Delta M_z \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} k_{YY} & k_{YB} & k_{YZ} & k_{YA} \\ k_{BY} & k_{BB} & k_{BZ} & k_{BA} \\ k_{ZY} & k_{ZB} & k_{ZZ} & k_{ZA} \\ k_{AY} & k_{AB} & k_{AZ} & k_{AA} \end{bmatrix}}_K \begin{Bmatrix} \Delta y \\ \Delta B \\ \Delta z \\ \Delta A \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} c_{YY} & c_{YB} & c_{YZ} & c_{YA} \\ c_{BY} & c_{BB} & c_{BZ} & c_{BA} \\ c_{ZY} & c_{ZB} & c_{ZZ} & c_{ZA} \\ c_{AY} & c_{AB} & c_{AZ} & c_{AA} \end{bmatrix}}_C \begin{Bmatrix} \Delta \dot{y} \\ \Delta \dot{B} \\ \Delta \dot{z} \\ \Delta \dot{A} \end{Bmatrix} \quad (3.4).$$

No contexto das hipóteses formuladas para a obtenção da Equação de Reynolds aqui empregada (equação 2.1), o conjunto de 32 coeficientes apresentado na equação (3.4) descreve de maneira completa a variação dos esforços gerados no filme de fluido lubrificante para pequenas oscilações relativas entre o moente e o mancal.

Com relação aos esforços de inércia, cuja relevância no comportamento dinâmico de mancais é aventada por alguns autores, como Yu & Adams (1989), existe consenso entre a grande maioria dos autores de que a exclusão de tais esforços é plenamente justificável no caso de mancais hidrodinâmicos convencionais. Dentre a longa relação de autores que dão sustentação à afirmação anterior, basta destacar alguns dos já referenciados neste texto: Lund (1974a, 1974b, 1978), Bannister (1976), Jakeman (1986,1989), Braun et al. (1991), Nikolakopoulos & Papadopoulos (1994) e Jang & Kim (1998). A seguinte citação, extraída de Pinkus (1987), fornece um argumento oportuno para não alongar este assunto: “...apesar das valentes tentativas de provar a sua importância, os esforços de inércia exercem no máximo um efeito de segunda ordem nos resultados”.

Definidos os coeficientes dinâmicos do mancal, passa-se agora à descrição do procedimento numérico adotado para o seu cálculo.

### 3.2 Cálculo dos Coeficientes Dinâmicos

O cálculo dos coeficientes dinâmicos consiste na avaliação das derivadas parciais mostradas na equação (3.2). Os métodos usualmente empregados para tanto são: a) derivação numérica dos esforços hidrodinâmicos, proposto em diversos trabalhos como Cameron & Ettles (1981), e Goodwin (1989); b) método das perturbações, detalhadamente descrito em Lund & Thomsem (1978), entre outros. Neste trabalho será adotada a derivação numérica dos esforços hidrodinâmicos, seguindo um procedimento semelhante ao definido por Jakeman (1986). Isto se deve à forma escolhida para a Equação de Reynolds visando a sua integração numérica (equação 2.33), que dificulta a utilização do método das perturbações mencionado devido à presença de expoentes fracionários. A discussão deste problema e a sua possível solução não serão enfocados neste trabalho.

A derivação numérica dos esforços hidrodinâmicos requer o cálculo de  $\Delta \vec{F}_h$  e  $\Delta \vec{M}_h$  resultantes da adição ou subtração de perturbações no valor de uma das variáveis que definem a posição de equilíbrio estático  $q_r^s$ , mantendo-se constantes todas as demais coordenadas. Dada a acentuada não linearidade dos esforços hidrodinâmicos, essas perturbações devem ter a menor magnitude possível, compatível com precisão envolvida no cálculo de  $\vec{F}_h$  e  $\vec{M}_h$ . Em princípio, as perturbações poderiam ser função de  $\varepsilon$  ou de  $h_{\min}$ , uma vez que os coeficientes dinâmicos variam muito em função dessas grandezas; no entanto, como as malhas usadas na discretização do campo de pressões também foram adequadas em função de  $h_{\min}$ , conforme o critério definido no capítulo anterior, serão atribuídos valores constantes às perturbações. Esses valores são determinados a partir de testes de convergência dos valores dos coeficientes dinâmicos, comentados adiante. A equação (3.5) apresenta as magnitudes das perturbações, relacionadas às coordenadas identificadas pelos subscritos:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_y = p_z = \bar{p}_{y,z} c_R, \text{ com } \bar{p}_{y,z} = 0.01; \\ p_y = p_z = \bar{p}_{y,z} \omega R, \text{ com } \bar{p}_{y,z} = 0.00001; \\ p_A = p_B = \bar{p}_{A,B} \delta_{\max}, \text{ com } \bar{p}_{A,B} = 0.005; \\ p_A = p_B = \bar{p}_{A,B} \frac{\omega R}{L}, \text{ com } \bar{p}_{A,B} = 0.0001; \end{array} \right. \quad (3.5),$$

onde  $\bar{p}_y$ ,  $\bar{p}_z$ , etc., são as amplitudes das perturbações adimensionais.

O valor de cada coeficiente corresponde à média calculada a partir da imposição de  $\pm \bar{p}_y$ ,  $\pm \bar{p}_z$ , etc. Por exemplo,  $F_{yy+}$  corresponde a  $\Delta F_{y(+p_y)} = F_y(y_r^s + p_y) - F_y^s$ , enquanto que  $F_{yy-} = \Delta F_{y(-p_y)} = F_y(y_r^s - p_y) - F_y^s$ ; o valor de  $k_{yy}$  é então dado por  $k_{yy} = \frac{F_{yy+} - F_{yy-}}{2p_y}$ . Analogamente,  $M_{zy+}$  corresponde a  $\Delta M_{z(+p_y)} = M_z(y_r^s + p_y) - M_z^s$ , e

$M_{zy-} = M_z(y_r^s - p_y) - M_z^s$ , de modo que  $k_{Ay} = \frac{M_{zy+} - M_{zy-}}{2p_y}$ . As expressões empregadas

no cálculo dos coeficientes estão agrupadas nas equações (3.6) e (3.7):

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{yy} = \frac{F_{yy+} - F_{yy-}}{2p_y}; \quad k_{yz} = \frac{F_{yz+} - F_{yz-}}{2p_z}; \quad k_{yA} = \frac{F_{yA+} - F_{yA-}}{2p_A}; \quad k_{yB} = \frac{F_{yB+} - F_{yB-}}{2p_B} \\ k_{zy} = \frac{F_{zy+} - F_{zy-}}{2p_y}; \quad k_{zz} = \frac{F_{zz+} - F_{zz-}}{2p_z}; \quad k_{zA} = \frac{F_{zA+} - F_{zA-}}{2p_A}; \quad k_{zB} = \frac{F_{zB+} - F_{zB-}}{2p_B} \\ k_{Ay} = \frac{M_{zy+} - M_{zy-}}{2p_y}; \quad k_{Az} = \frac{M_{zz+} - M_{zz-}}{2p_z}; \quad k_{AA} = \frac{M_{zA+} - M_{zA-}}{2p_A}; \quad k_{AB} = \frac{M_{zB+} - M_{zB-}}{2p_B} \\ k_{By} = \frac{M_{yy+} - M_{yy-}}{2p_y}; \quad k_{Bz} = \frac{M_{yz+} - M_{yz-}}{2p_z}; \quad k_{BA} = \frac{M_{yA+} - M_{yA-}}{2p_A}; \quad k_{BB} = \frac{M_{yB+} - M_{yB-}}{2p_B} \end{array} \right. \quad (3.6),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{yy} = \frac{F_{y\dot{y}^+} - F_{y\dot{y}^-}}{2 p_{\dot{y}}}; \quad c_{yz} = \frac{F_{y\dot{z}^+} - F_{y\dot{z}^-}}{2 p_{\dot{z}}}; \quad c_{yA} = \frac{F_{y\dot{A}^+} - F_{y\dot{A}^-}}{2 p_{\dot{A}}}; \quad c_{yB} = \frac{F_{y\dot{B}^+} - F_{y\dot{B}^-}}{2 p_{\dot{B}}}; \\ c_{zy} = \frac{F_{z\dot{y}^+} - F_{z\dot{y}^-}}{2 p_{\dot{y}}}; \quad c_{zz} = \frac{F_{z\dot{z}^+} - F_{z\dot{z}^-}}{2 p_{\dot{z}}}; \quad c_{zA} = \frac{F_{z\dot{A}^+} - F_{z\dot{A}^-}}{2 p_{\dot{A}}}; \quad c_{zB} = \frac{F_{z\dot{B}^+} - F_{z\dot{B}^-}}{2 p_{\dot{B}}}; \\ c_{Ay} = \frac{M_{y\dot{y}^+} - M_{y\dot{y}^-}}{2 p_{\dot{y}}}; \quad c_{Az} = \frac{M_{y\dot{z}^+} - M_{y\dot{z}^-}}{2 p_{\dot{z}}}; \quad c_{AA} = \frac{M_{y\dot{A}^+} - M_{y\dot{A}^-}}{2 p_{\dot{A}}}; \quad c_{AB} = \frac{M_{y\dot{B}^+} - M_{y\dot{B}^-}}{2 p_{\dot{B}}}; \\ c_{By} = \frac{M_{y\dot{y}^+} - M_{y\dot{y}^-}}{2 p_{\dot{y}}}; \quad c_{Bz} = \frac{M_{y\dot{z}^+} - M_{y\dot{z}^-}}{2 p_{\dot{z}}}; \quad c_{BA} = \frac{M_{y\dot{A}^+} - M_{y\dot{A}^-}}{2 p_{\dot{A}}}; \quad c_{BB} = \frac{M_{y\dot{B}^+} - M_{y\dot{B}^-}}{2 p_{\dot{B}}}; \end{array} \right. \quad (3.7).$$

Os coeficientes são adimensionalizados empregando-se as expressões indicadas abaixo,

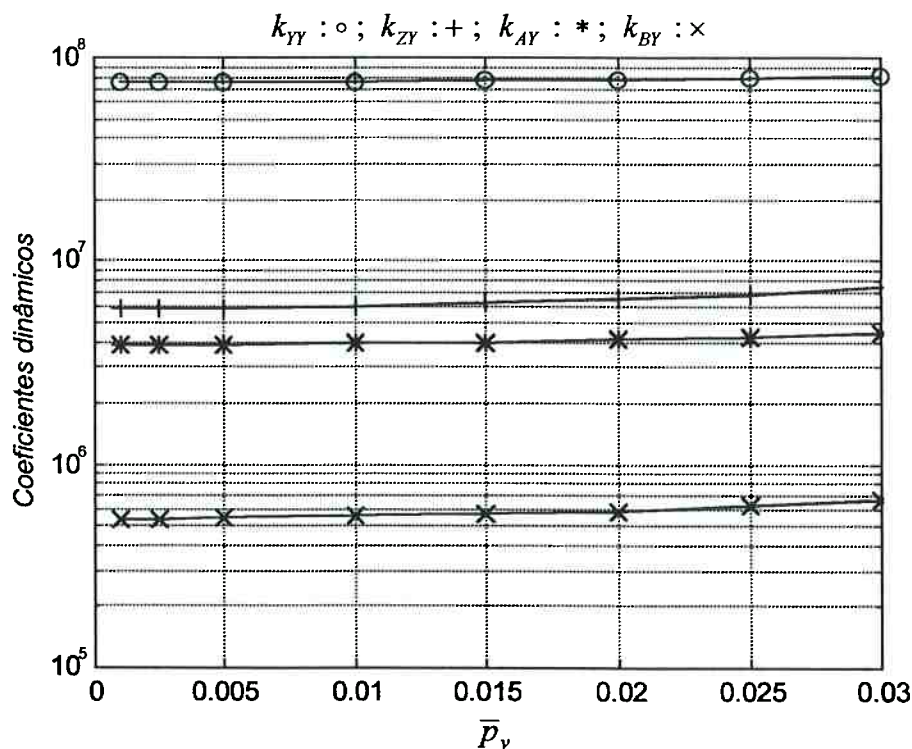
$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{k}_{tt} = k_{tt} \frac{c_R}{F_h}; \quad \bar{k}_{tr} = k_{tr} \frac{c_R}{F_h L}; \quad \bar{k}_{rt} = k_{rt} \frac{c_R}{F_h L}; \quad \bar{k}_{rr} = k_{rr} \frac{c_R}{F_h L^2}; \\ \bar{c}_{tt} = c_{tt} \frac{\omega c_R}{F_h}; \quad \bar{c}_{tr} = c_{tr} \frac{\omega c_R}{F_h L}; \quad \bar{c}_{rt} = c_{rt} \frac{\omega c_R}{F_h L}; \quad \bar{c}_{rr} = c_{rr} \frac{\omega c_R}{F_h L^2}; \end{array} \right. \quad (3.8),$$

onde o subscrito  $t$  refere-se às translações e respectivas velocidades, e  $r$  às inclinações e velocidades angulares.

Na falta de medições experimentais dos coeficientes dinâmicos do modelo completo, resta como alternativa comparar os resultados obtidos segundo o procedimento aqui apresentado com os coeficientes publicados por Jakeman (1986), relativos a um mancal cilíndrico com duas ranhuras axiais de ângulo de abertura igual a  $28.65^\circ$ , sujeito a carregamento estático no plano vertical; o mancal tem  $r_{LD} = 2.0$  e  $r_c = 1.0 \times 10^{-3}$ .

Conforme já mencionado, foram realizados testes de convergência visando definir as magnitudes das perturbações apresentadas na equação (3.5). Estes testes consistiram no cálculo dos valores dos coeficientes dinâmicos em situações correspondentes a pequenos valores de  $h_{\min}$ , pois é nestas circunstâncias que os esforços hidrodinâmicos variam de maneira mais acentuada em função das perturbações. A figura 3.1 ilustra os resultados desses testes, mostrando a convergência dos valores de  $k_{yy}$ ,  $k_{zy}$ ,  $k_{Ay}$  e  $k_{By}$  à medida em que se reduz a magnitude de  $\bar{p}_y$ ; nos testes, o valor da perturbação era diminuído até que

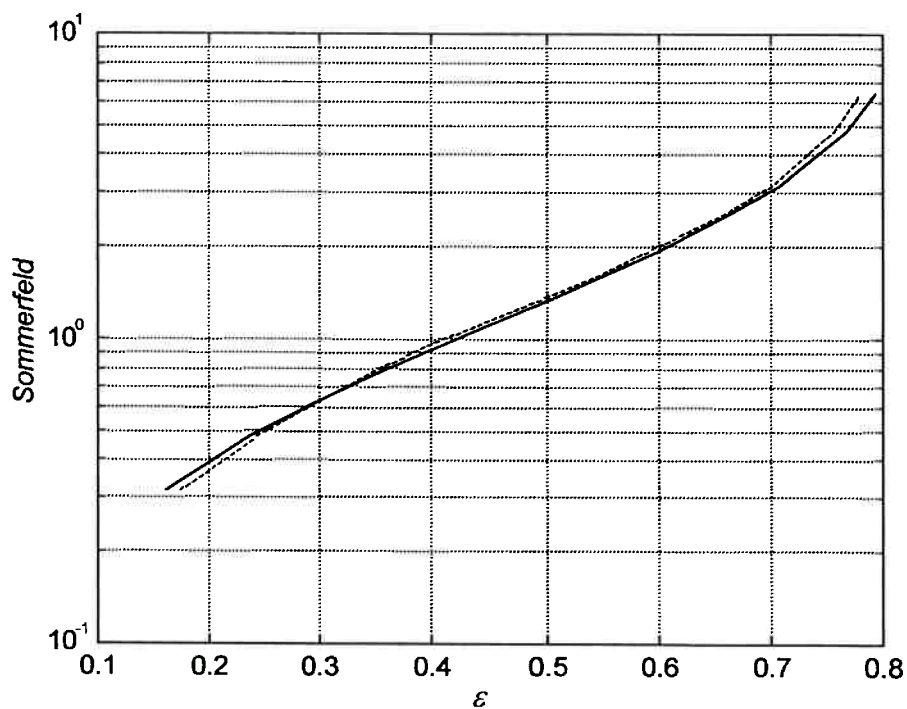
a variação dos valores dos coeficientes em dois cálculos sucessivos fosse menor do que 0.5%. Os demais testes de convergência forneceram resultados análogos aos mostrados na figura 3.1.



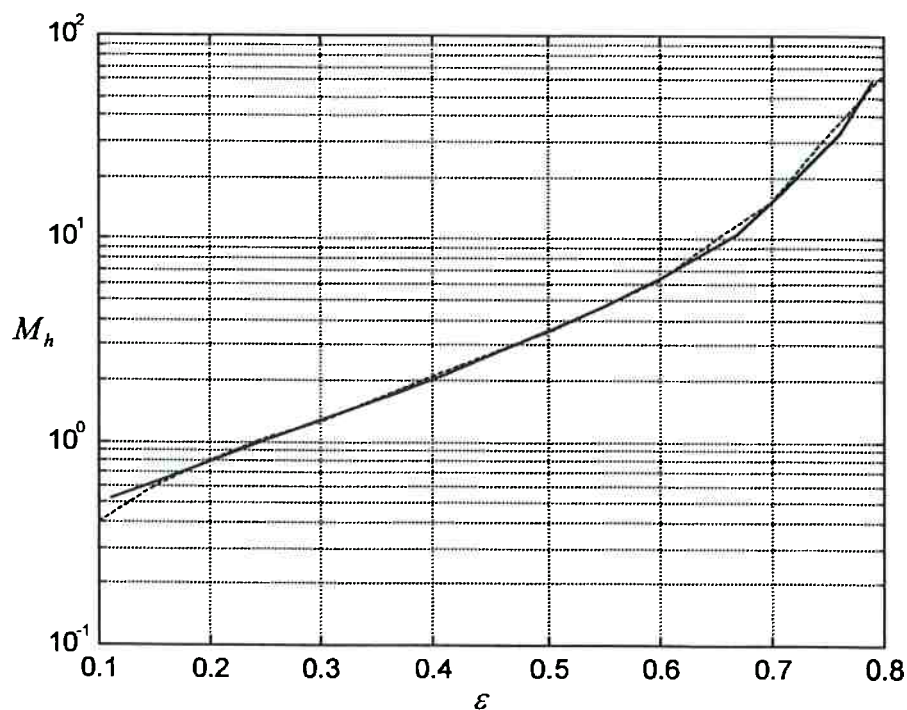
**Figura 3.1** Variação de  $k_{YY}$ ,  $k_{ZY}$ ,  $k_{AY}$  e  $k_{BY}$  em função de  $\bar{p}_y$ ; a posição de equilíbrio estático considerada no cálculo dos coeficientes é definida por  $y_r^s = -0.6634$ ,  $z_r^s = -0.3851$ ,  $\bar{\alpha}_r^s = 0.2$ , e  $\bar{\beta}_r^s = 0.0$ .

Previamente ao cálculo dos coeficientes, foi feita a determinação da curva  $S_o \times \varepsilon$  do mancal descrito acima, sujeito a um desalinhamento angular estático dado por  $\bar{\alpha}_r^s = 0.2$ ; a figura 3.2 mostra os resultados obtidos juntamente com os extraídos da figura 3 de Jakeman (1986). Na figura 3.3 são comparados os valores de  $M_h$  correspondentes a essas posições de equilíbrio estático, e nas figuras 3.4 a 3.7 são apresentados os valores de apenas 16 coeficientes dinâmicos, pois os valores dos demais coeficientes não foram publicados no trabalho de referência, por falta de espaço; nos gráficos, os resultados calculados neste trabalho são unidos por linhas de diversos tipos, indicadas nas figuras, enquanto os valores extraídos da referência são representados por pontos de diferentes formatos.

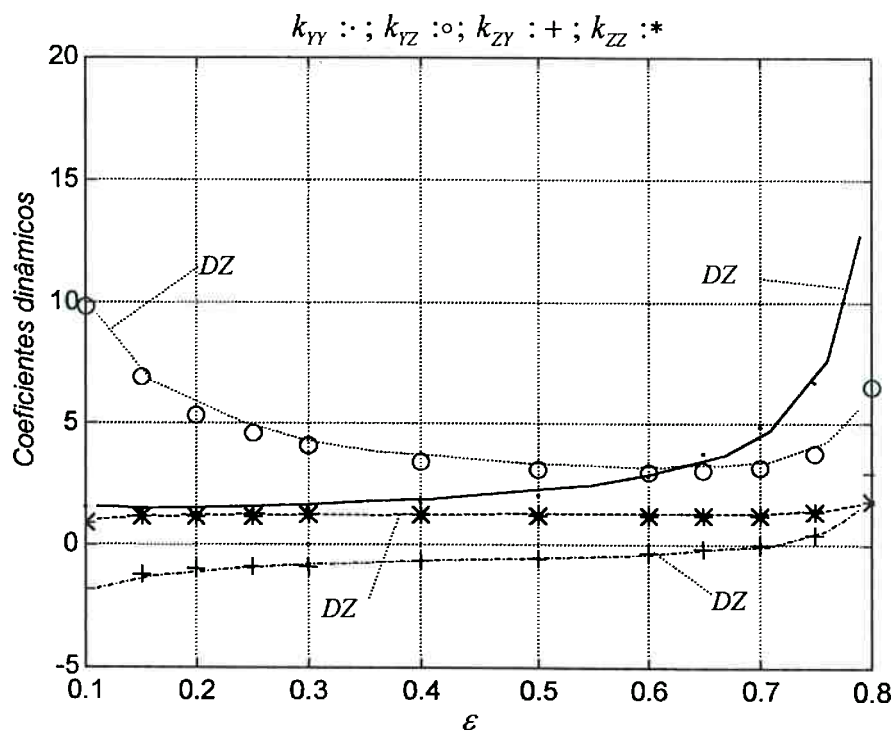




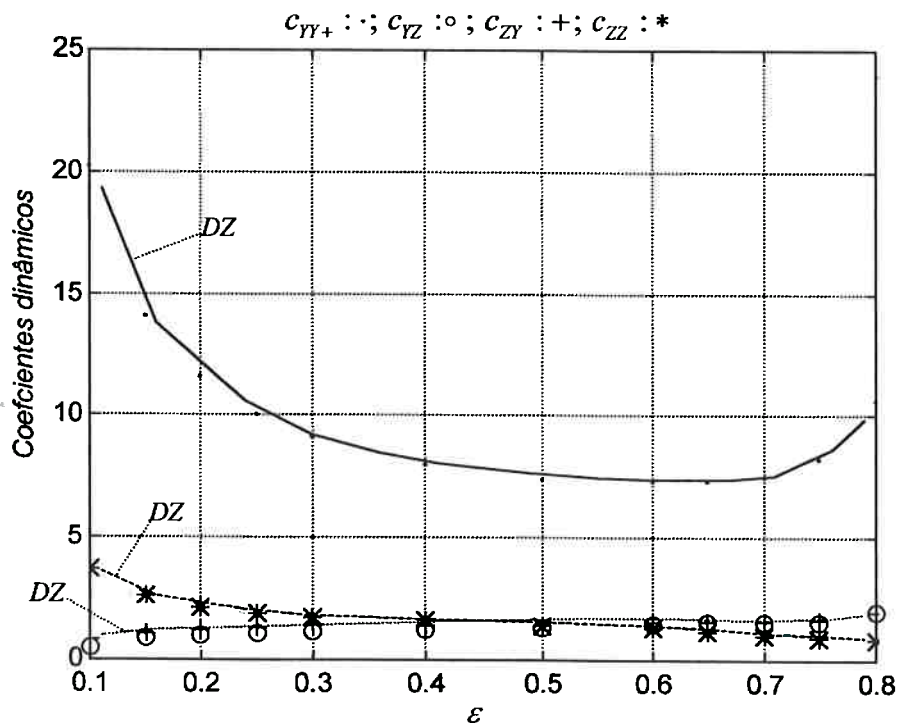
**Figura 3.2** Número de Sommerfeld em função da excentricidade no plano médio do mancal, - este trabalho.



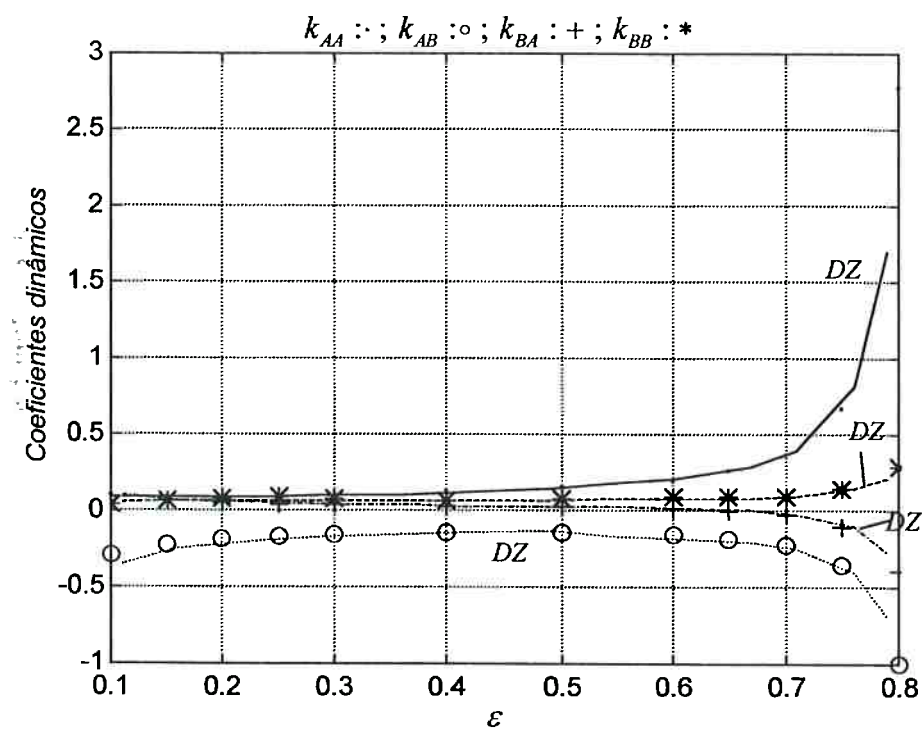
**Figura 3.3** Variação de  $M_h$  em função de  $\varepsilon$ , com  $\bar{\alpha}_r^s = 0.2$  ( $M_h$  extraído da figura 6 de Jakeman (1986)); - este trabalho.



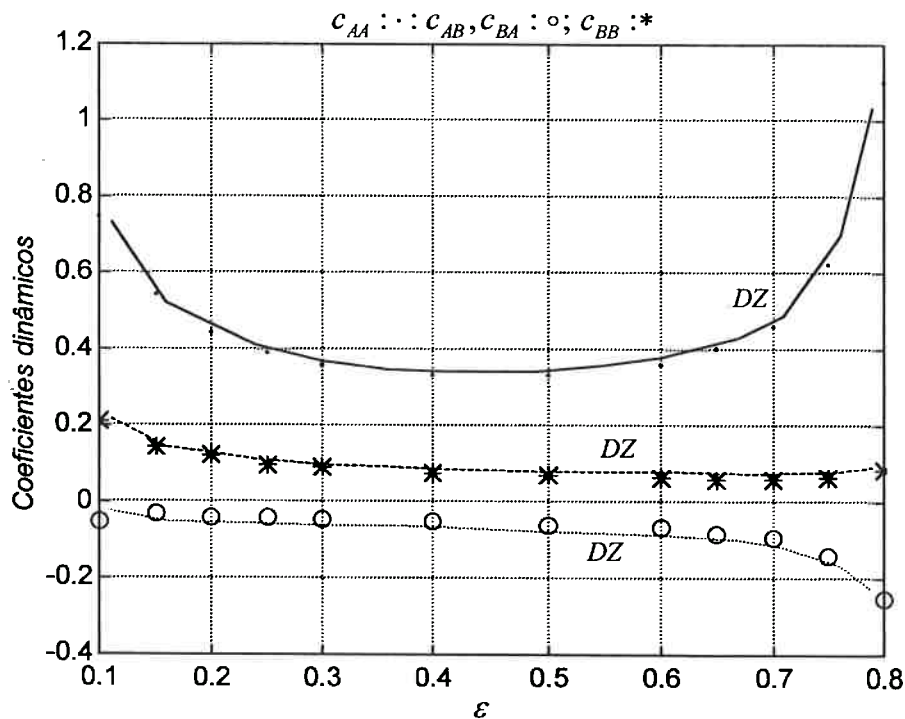
**Figura 3.4** Variação de  $\bar{k}_{YY}$ ,  $\bar{k}_{YZ}$ ,  $\bar{k}_{ZY}$  e  $\bar{k}_{ZZ}$  em função de  $\varepsilon$  (correspondem aos coeficientes  $\bar{A}_{YY}$ ,  $\bar{A}_{YX}$ ,  $\bar{A}_{XY}$  e  $\bar{A}_{XX}$  da figura 7 da referência).



**Figura 3.5** Variação de  $\bar{c}_{YY}$ ,  $\bar{c}_{YZ}$ ,  $\bar{c}_{ZY}$  e  $\bar{c}_{ZZ}$  em função de  $\varepsilon$  (correspondem aos coeficientes  $\bar{B}_{YY}$ ,  $\bar{B}_{YX}$ ,  $\bar{B}_{XY}$  e  $\bar{B}_{XX}$  da figura 9 da referência).



**Figura 3.6** Variação de  $\bar{k}_{AA}$ ,  $\bar{k}_{AB}$ ,  $\bar{k}_{BA}$  e  $\bar{k}_{BB}$  em função de  $\varepsilon$  (correspondem aos coeficientes  $\bar{A}_{\gamma\gamma}$ ,  $\bar{A}_{\gamma\lambda}$ ,  $\bar{A}_{\lambda\gamma}$  e  $\bar{A}_{\lambda\lambda}$  da figura 8 da referência); DZ: este trabalho.



**Figura 3.7** Variação de  $\bar{c}_{AA}$ ,  $\bar{c}_{AB}$ ,  $\bar{c}_{BA}$  e  $\bar{c}_{BB}$  em função de  $\varepsilon$  (correspondem aos coeficientes  $\bar{B}_{\gamma\gamma}$ ,  $\bar{B}_{\gamma\lambda}$ ,  $\bar{B}_{\lambda\gamma}$  e  $\bar{B}_{\lambda\lambda}$  da figura 10 da referência).

Todos os resultados apresentados são muito próximos aos da referência; as discrepâncias nos valores dos coeficientes decorrem em parte dos inevitáveis erros de leitura dos valores nos gráficos da referência, e também refletem as pequenas diferenças nas posições de equilíbrio estático.

Nos próximos capítulos serão apresentados diversos conjuntos de valores dos coeficientes do modelo completo, relativos a diferentes tipos de mancais.

#### 4. ANÁLISE QUALITATIVA DOS EFEITOS DO DESALINHAMENTO ANGULAR NAS VIBRAÇÕES DE ROTORES BI-APOIADOS

O modelo tradicionalmente empregado para a análise qualitativa do comportamento dinâmico de rotores, denominado rotor de Jeffcott ou Laval, será aqui adotado para extrair informações relativas à influência das vibrações angulares dos moentes na resposta em regime permanente de rotores bi-apoiados.

Após apresentar o equacionamento geral, empregando o modelo linear completo de mancais hidrodinâmicos, serão feitas simplificações adicionais visando identificar os efeitos específicos de coeficientes associados ao desalinhamento angular. A análise da resposta ao desbalanceamento fornecerá indicações a respeito da sensibilidade de rotores convencionais ao desalinhamento angular variável no tempo, orientando a escolha do modelo de mancais que deverá ser feita em análises mais detalhadas.

##### 4.1 Rotor de Jeffcott com o Modelo Completo de Mancais Hidrodinâmicos

Para a adoção do modelo de Jeffcott admite-se que um rotor bi-apoiado aproximadamente simétrico pode ser representado por apenas metade do eixo, tal como indicado na figura 4.1.

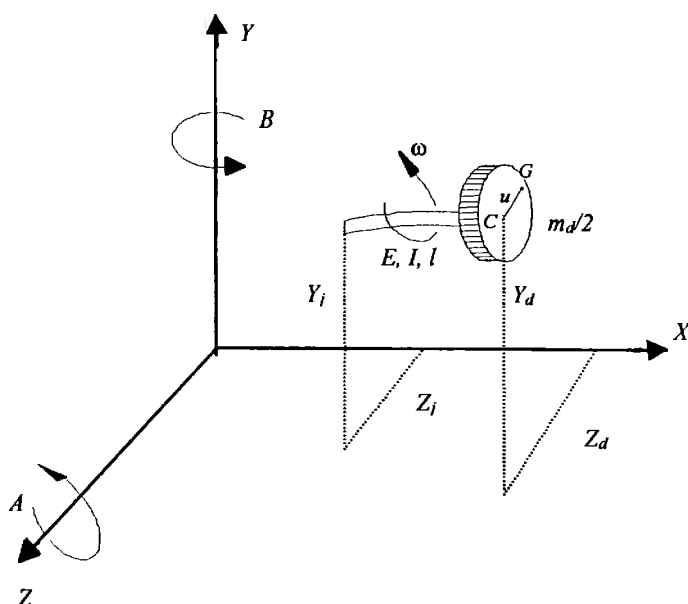


Figura 4.1 - Rotor de Jeffcott

O comprimento entre os centros dos mancais é  $l_{bb}$ , e  $l_f$  é o comprimento do trecho flexível do eixo. A massa total do sistema é  $m_t = m_f + M$ , onde  $m_f$  é a massa distribuída na porção flexível e  $M$  é a massa da parte “rígida” do rotor, que ocupa a região central do mesmo (são considerados como “rígidos” os segmentos de eixo nos quais estão montados elementos representados por discos espessos, tais como rodas de palhetas, engrenagens, etc., ou trechos que flexionam pouco no 1º modo de vibrar). As relações entre  $l_{bb}$  e  $l_f$ , e entre  $m_t$ ,  $m_f$  e  $M$  dependem das características de cada sistema particular, e afetam o seu comportamento estático e dinâmico. O equacionamento do rotor de Jeffcott juntamente com o modelo completo de mancais hidrodinâmicos, detalhado em seguida, foi apresentado originalmente por Zachariadis (1997, 1998); a nomenclatura segue em linhas gerais a adotada por Rao (1983).

Para efeitos do cálculo da resposta, uma massa modal equivalente  $m_d$  é concentrada em um disco situado no plano de simetria do rotor. Desconsiderando quaisquer forças dissipativas além das provenientes dos mancais, as equações de movimento do disco com desbalanceamento  $u$ , e a condição de equilíbrio do moente que oscila em relação a um mancal fixo são dadas nas equações (4.1) e (4.2) respectivamente:

$$\begin{cases} m_d \ddot{Y}_d + 2k_1(Y_d - Y_j) - 2k_2 A_j = m_d \omega^2 u \sin \omega t \\ m_d \ddot{Z}_d + 2k_1(Z_d - Z_j) + 2k_2 B_j = -m_d \omega^2 u \cos \omega t \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_{YY}^* & k_{YB}^* & k_{YZ}^* & k_2 + k_{YA}^* \\ k_{BY}^* & k_3 + k_{BB}^* & -k_2 + k_{BZ}^* & k_{BA}^* \\ k_{ZY}^* & -k_2 + k_{ZB}^* & k_1 + k_{ZZ}^* & k_{ZA}^* \\ k_2 + k_{AY}^* & k_{AB}^* & k_{AZ}^* & k_3 + k_{AA}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_j \\ B_j \\ Z_j \\ A_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 Y_d \\ -k_2 Z_d \\ k_1 Z_d \\ k_2 Y_d \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

onde  $k_{YY}^* = k_{YY} + i\omega c_{YY}$ ,  $k_{AB}^* = k_{AB} + i\omega c_{AB}$ , etc., e  $k_1 = 12EI/l^3$ ,  $k_2 = 6EI/l^2$ , e  $k_3 = 4EI/l$  são os coeficientes de rigidez do eixo, com  $l = l_f/2$ .

Para resolver a equação (4.1) é necessário expressar  $Y_j, Z_j, A_j$  e  $B_j$  em função de  $Y_d$  e  $Z_d$ ; da equação (4.2) resulta

$$\begin{Bmatrix} Y_j \\ B_j \\ Z_j \\ A_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11}^* & d_{12}^* \\ d_{21}^* & d_{22}^* \\ d_{31}^* & d_{32}^* \\ d_{41}^* & d_{42}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_d \\ Z_d \end{Bmatrix} \quad (4.3),$$

em que os  $d_{ij}^*$  são calculados numericamente. Substituindo na equação (4.1), obtém-se

$$\begin{cases} m_d \ddot{Y}_d + K_1^* Y_d + K_{12}^* Z_d = m_d \omega^2 u \sin \omega t \\ m_d \ddot{Z}_d + K_2^* Z_d + K_{21}^* Y_d = -m_d \omega^2 u \cos \omega t \end{cases} \quad (4.4),$$

onde

$$\begin{cases} K_1^* = [2k_1(1 - d_{11}^*) - 2k_2 d_{41}^*] \\ K_2^* = [2k_1(1 - d_{32}^*) - 2k_2 d_{22}^*] \\ K_{12}^* = -2(k_1 d_{12}^* + k_2 d_{42}^*) \\ K_{21}^* = -2(k_1 d_{31}^* + k_2 d_{21}^*) \end{cases} \quad (4.5).$$

A resposta em regime permanente supõe soluções da forma

$$\begin{cases} Y_d = Y_d^+ e^{i\omega t} + Y_d^- e^{-i\omega t} \\ Z_d = Z_d^+ e^{i\omega t} + Z_d^- e^{-i\omega t} \end{cases} \quad (4.6),$$

que após substituição na equação (4.5) fornece as amplitudes de vibração

$$\begin{Bmatrix} Y_d^+ \\ Y_d^- \\ Z_d^+ \\ Z_d^- \end{Bmatrix} = \frac{m_d \omega^2 u}{\Delta} \begin{Bmatrix} -i(K_2^* - m_d \omega^2) + K_{12}^* \\ i(K_2^* - m_d \omega^2) + K_{12}^* \\ -(K_1^* - m_d \omega^2) + iK_{21}^* \\ (K_1^* - m_d \omega^2) - iK_{21}^* \end{Bmatrix} \quad (4.7),$$

onde  $\Delta = 2[(K_1^* - m_d \omega^2)(K_2^* - m_d \omega^2) - K_{12}^* K_{21}^*]$ .

Para ilustrar a utilização do modelo, será efetuado o cálculo da resposta em regime permanente de um rotor bi-apoiado já estudado com finalidades análogas em Zachariadis (1998)

$$\text{rotor: } l_{bb} = 2.05 \text{ m}; \quad l_f = 0.6l_{bb} = 1.230 \text{ m}; \quad m_r = 635 \text{ kg}; \quad m_d = 476.3 \text{ kg};$$

$$I_f = 1.41 \times 10^{-5} \text{ m}^4 \text{ (momento de área do trecho flexível do eixo).}$$

$$\text{mancais: } L = 0.05 \text{ m}; \quad D = 0.1 \text{ m}; \quad c_R = 89 \text{ } \mu\text{m}; \quad \mu = 0.011 \text{ Ns/m}^2 .$$

Os mancais têm duas ranhuras axiais com ângulo de abertura de  $20^\circ$ , conforme visto nos capítulos precedentes, e serão consideradas 5 situações, envolvendo diferentes combinações de desalinhamentos angulares relativos dos moentes, mostradas na tabela 4.1 juntamente com os principais resultados do cálculo da resposta. Na apresentação dos resultados, os fatores de amplificação correspondentes aos diferentes modelos são identificados pelos subscritos 32 (modelo completo), 16 (modelo de 16 coeficientes) e 8 (modelo plano).

**Tabela 4.1** Resumo do cálculo de resposta;  $f_{32}, f_{16}, f_8$ : fatores de amplificação máximos,  $w_{32}, w_{16}, w_8$ : velocidades críticas; entre parêntesis são fornecidos os erros decorrentes da não utilização do modelo completo.

caso	$\bar{\alpha}_r$	$\bar{\beta}_r$	$f_{32}$	$w_{32}$	$f_{16}$	$w_{16}$	$f_8$	$w_8$
1	0.0	0.0	9.31	65.6	9.31	65.6	9.50 (2.1)	65.7 (0.2)
2	0.25	0.0	9.58	65.1	9.30 (-2.9)	65.7 (0.9)	9.54 (-0.4)	65.8 (1.1)
3	0.50	0.0	11.15	64.4	10.07 (-9.7)	65.7 (2.0)	10.59 (-5.0)	65.9 (2.3)
4	0.0	0.25	8.93	66.1	9.46 (5.9)	65.6 (-0.8)	9.68 (8.4)	65.8 (-0.5)
5	0.0	0.50	8.90	66.6	10.50 (18.0)	65.5 (-1.7)	10.95 (23.1)	65.7 (-1.4)

Na figura 4.2 são apresentados os resultados calculados com o uso do modelo completo, correspondentes ao caso 1;  $f_{y32} = Y_d/u$  e  $f_{z32} = Z_d/u$  são os fatores de amplificação das vibrações verticais e horizontais, respectivamente, e  $f_{32} = r/u$ , onde  $r$  é o semi eixo maior da órbita elíptica descrita pelo centro do disco. Tal como Rao (1983) e Barret et al. (1978), entre outros, adotou-se a simplificação, compatível com o tipo de estudo efetuado, de supor que os coeficientes dinâmicos dos mancais são constantes na passagem pela velocidade crítica. As matrizes de amortecimento e rigidez dos mancais, correspondentes aos casos descritos na tabela 4.1, são mostradas abaixo.



Caso 1

$$\bar{K}_b = \begin{bmatrix} 3.25 & 0 & 3.69 & 0 \\ 0 & 0.06 & 0 & 0.01 \\ -0.50 & 0 & 1.75 & 0 \\ 0 & -0.09 & 0 & 0.13 \end{bmatrix}; \bar{C}_b = \begin{bmatrix} 6.89 & 0 & 2.00 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0 & -0.05 \\ 2.00 & 0 & 2.02 & 0 \\ 0 & -0.06 & 0 & 0.15 \end{bmatrix}$$

Caso 2

$$\bar{K}_b = \begin{bmatrix} 3.48 & 0.25 & 3.66 & -0.28 \\ 0.01 & 0.06 & 0.10 & 0.01 \\ -0.45 & 0.08 & 1.68 & 0.03 \\ -0.40 & -0.15 & -0.28 & 0.17 \end{bmatrix}; \bar{C}_b = \begin{bmatrix} 6.82 & 0.12 & 1.86 & -0.54 \\ 0.11 & 0.06 & 0.06 & -0.06 \\ 1.86 & 0.06 & 1.90 & -0.13 \\ -0.53 & -0.06 & -0.12 & 0.19 \end{bmatrix}$$

Caso 3

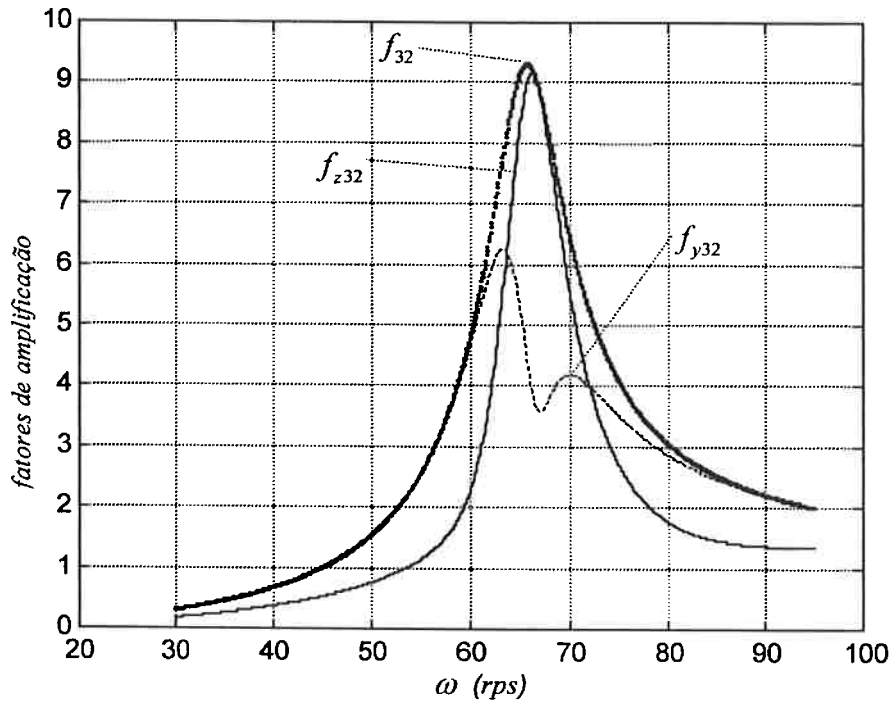
$$\bar{K}_b = \begin{bmatrix} 4.41 & 0.61 & 3.83 & -0.84 \\ 0.05 & 0.10 & 0.21 & -0.01 \\ -0.37 & 0.18 & 1.63 & 0.01 \\ -1.07 & -0.22 & -0.67 & 0.37 \end{bmatrix}; \bar{C}_b = \begin{bmatrix} 7.06 & 0.26 & 1.75 & -1.20 \\ 0.25 & 0.07 & 0.12 & -0.10 \\ 1.75 & 0.13 & 1.77 & -0.27 \\ -1.18 & -0.10 & -0.26 & 0.38 \end{bmatrix}$$

Caso 4

$$\bar{K}_b = \begin{bmatrix} 3.48 & -0.29 & 3.86 & 0.26 \\ -0.09 & 0.08 & -0.20 & -0.01 \\ -0.39 & -0.21 & 1.85 & 0.10 \\ 0.18 & -0.12 & 0.28 & 0.16 \end{bmatrix}; \bar{C}_b = \begin{bmatrix} 6.98 & -0.24 & 1.89 & 0.25 \\ -0.24 & 0.07 & -0.16 & -0.07 \\ 1.89 & -0.16 & 2.02 & 0.21 \\ 0.25 & -0.07 & 0.21 & 0.17 \end{bmatrix}$$

Caso 5

$$\bar{K}_b = \begin{bmatrix} 4.27 & -0.75 & 4.72 & 0.69 \\ -0.32 & 0.21 & -0.59 & -0.07 \\ -0.05 & -0.60 & 2.47 & 0.32 \\ 0.52 & -0.27 & 0.74 & 0.26 \end{bmatrix}; \bar{C}_b = \begin{bmatrix} 7.61 & -0.59 & 1.81 & 0.55 \\ -0.56 & 0.17 & -0.36 & -0.13 \\ 1.81 & -0.40 & 2.38 & 0.52 \\ 0.55 & -0.14 & 0.50 & 0.27 \end{bmatrix}$$



**Figura 4.2** fatores de amplificação, modelo completo de mancais, caso 1.

Os resultados da tabela 4.1 indicam que podem ocorrer situações distintas, em que  $f_{32}$  é maior que  $f_8$  e  $f_{16}$ , ou o contrário, com  $f_{32}$  menor que os outros valores, como visualizado nas figuras 4.3a e 4.3b. Nota-se também que  $f_{16}$  é sempre menor que  $f_8$ , e que as velocidades críticas são pouco afetadas pelo desalinhamento angular estático ou pelo modelo de mancais utilizado. Verifica-se que para este tipo de mancal, a imposição de desalinhamentos angulares no plano do carregamento do mancal, que no caso é o plano vertical  $XY$ , provoca o aumento dos fatores de amplificação. Por outro lado, a imposição de desalinhamentos no plano horizontal, ou, ao redor do eixo  $Y$ , resulta amplitudes de vibrações menores.

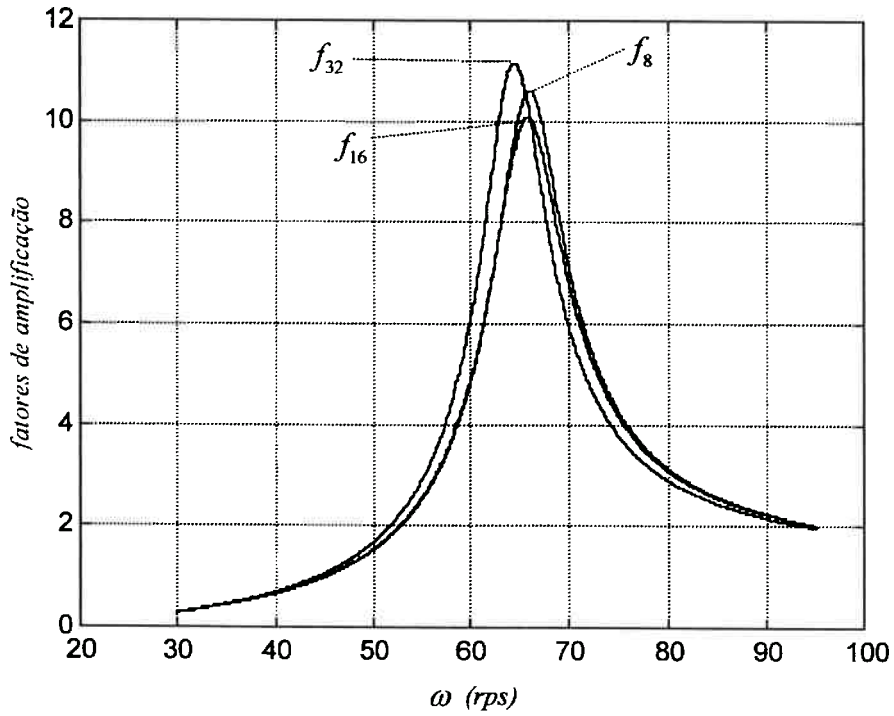


Figura 4.3a Comparação entre os fatores de amplificação no caso 3.

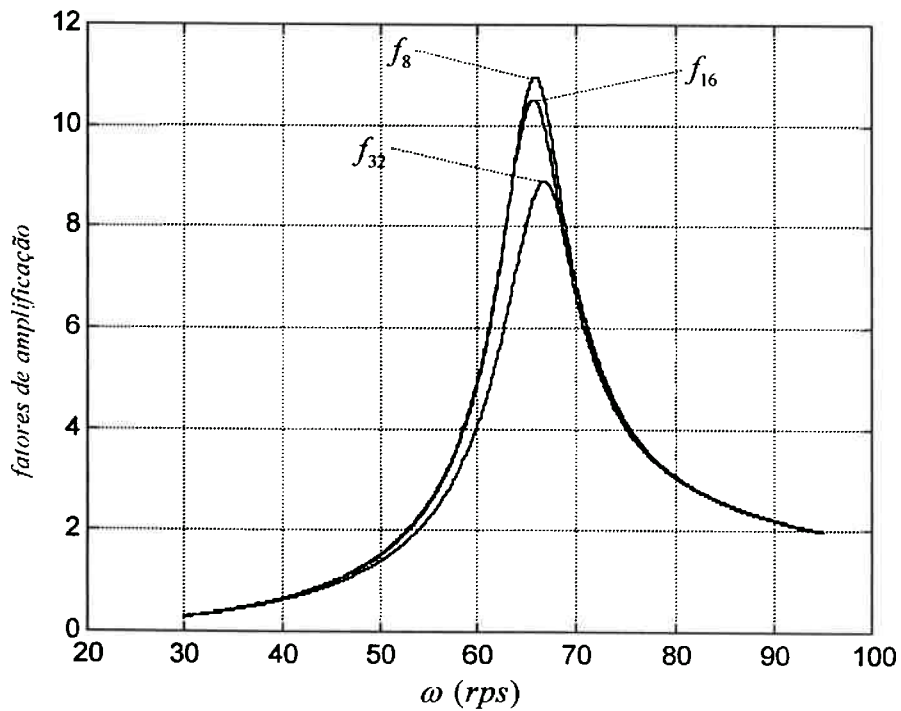


Figura 4.3b Comparação entre os fatores de amplificação no caso 5

Considerando agora um mancal com uma ranhura circunferencial de 5.0 mm de largura, e mantidas inalteradas todas as demais propriedades, serão estudadas três situações análogas às

anteriores, descritas na tabela 4.2. Como este mancal requer excentricidades maiores para suportar a mesma carga que o anterior, não foi possível aplicar desalinhamentos estáticos da ordem de 50% do desalinhamento angular máximo.

**Tabela 4.2** Resumo do cálculo de resposta, mancal com ranhura circunferencial

Caso	$\bar{\alpha}_r$	$\bar{\beta}_r$	$f_{32}$	$w_{32}$	$f_{16}$	$w_{16}$	$f_8$	$w_8$
6	0.0	0.0	14.80	65.5	14.80	65.5	16.87 (14.0)	65.9 (0.6)
7	0.25	0.0	25.00	63.2	18.17 (-27.3)	65.0 (2.9)	23.53 (-5.9)	65.6 (3.8)
8	0.0	0.25	14.61	67.4	16.36 (12.0)	65.4 (-3.0)	19.66 (34.6)	65.8 (-2.4)

Os resultados da tabela 4.2 mostram que este tipo de mancal, em uma mesma situação de carregamento que o anterior, acentua as diferenças entre os fatores de amplificação calculados com os diferentes modelos de mancal; isso vale também na situação em que o mancal está alinhado, que a princípio deve ser a condição normal de operação do equipamento. Mantiveram-se as mesmas tendências verificadas no casos anteriores, mas a maior excentricidade relativa dos moentes intensificou os efeitos do desalinhamento angular ao redor do eixo Z, provocando um grande aumento em  $f_{32}$  no caso 7. As matrizes de rigidez e amortecimento do mancal nos casos 6 a 8 são indicadas abaixo.

Caso 6

$$\bar{K}_b = \begin{bmatrix} 8.18 & 0 & 4.98 & 0 \\ 0 & 0.15 & 0 & -0.05 \\ 0.64 & 0 & 1.85 & 0 \\ 0 & -0.40 & 0 & 0.67 \end{bmatrix}; \bar{C}_b = \begin{bmatrix} 7.91 & 0 & 1.90 & 0 \\ 0 & 0.09 & 0 & -0.15 \\ 1.90 & 0 & 1.16 & 0 \\ 0 & -0.15 & 0 & 0.63 \end{bmatrix}$$

caso 7

$$\bar{K}_b = \begin{bmatrix} 11.23 & 1.57 & 5.80 & -3.20 \\ 0.47 & 0.20 & 0.50 & -0.15 \\ 1.1 & 0.48 & 1.95 & -0.40 \\ -3.51 & -0.63 & -1.62 & 1.26 \end{bmatrix}; \bar{C}_b = \begin{bmatrix} 8.79 & 0.57 & 2.04 & -2.39 \\ 0.52 & 0.12 & 0.21 & -0.24 \\ 2.05 & 0.24 & 1.17 & -0.59 \\ -2.26 & -0.23 & -0.52 & 0.95 \end{bmatrix}$$

caso 8

$$\bar{K}_b = \begin{bmatrix} 9.31 & -1.37 & 5.70 & 1.79 \\ -0.64 & 0.25 & -0.63 & -0.13 \\ 1.14 & -0.62 & 2.40 & 0.61 \\ 1.82 & -0.55 & 1.39 & 0.86 \end{bmatrix}; \bar{C}_b = \begin{bmatrix} 8.05 & -0.75 & 1.97 & 1.33 \\ -0.70 & 0.17 & -0.33 & -0.22 \\ 1.98 & -0.36 & 1.48 & 0.74 \\ 1.28 & -0.23 & 0.70 & 0.75 \end{bmatrix}$$

Os exemplos apresentados ilustram possíveis efeitos das vibrações angulares dos moentes no comportamento dinâmico do rotor. Para uma melhor compreensão dos resultados, será efetuada em seguida uma análise qualitativa da influência de alguns dos coeficientes do modelo completo de mancais na resposta em regime permanente. Serão também identificadas algumas das características de um sistema rotativo bi-apoiado que tornam os resultados de uma análise de resposta ao desbalanceamento sensíveis ao modelo adotado para representar mancais hidrodinâmicos.

#### 4.2 Sensibilidade aos Efeitos do Desalinhamento Angular

Dentre os 32 coeficientes do modelo completo, são chamados de coeficientes diretos aqueles que não acoplam as translações nas direções  $Y$  e  $Z$ , nem as rotações ao redor de  $Y$  e  $Z$ . Esses 16 coeficientes diretos são classificados em quatro grupos:

- Força x deslocamento de translação:  $k_{TT} = k_{YY}, k_{ZZ}; c_{TT} = c_{YY}, c_{ZZ};$
- Força x deslocamento angular:  $k_{TR} = k_{YA}, k_{ZB}; c_{TR} = c_{YA}, c_{ZB};$
- Momento x deslocamento de translação:  $k_{RT} = k_{AY}, k_{BZ}; c_{RT} = c_{AY}, c_{BZ};$
- Momento x deslocamento angular:  $k_{RR} = k_{AA}, k_{BB}; c_{RR} = c_{AA}, c_{BB};$

Cada um dos coeficientes genéricos,  $k_{TT}$ ,  $c_{RT}$ , etc., designa coeficientes relacionados a movimentos nas direções  $Y$  ou  $Z$  indistintamente. Considerando apenas os coeficientes diretos chega-se a equações de movimento desacopladas, que serão úteis para extrair resultados qualitativos gerais associados à influência desses coeficientes típicos na resposta em regime permanente.

### 4.2.1 Vibrações livres não amortecidas

Considerando inicialmente a análise de vibrações livres não amortecidas, são definidos os seguintes adimensionais:

$$r_k = \frac{k_{TT}}{k_s}; \quad r_l = \frac{L}{l}; \quad r_{RR} = \frac{\bar{k}_{RR}}{k_{TT}}; \quad r_{TR} = \frac{\bar{k}_{TR}}{k_{TT}}; \quad r_{RT} = \frac{\bar{k}_{RT}}{k_{TT}} \quad (4.8),$$

onde  $k_s$  é a rigidez do eixo,  $k_s = k_1 - \frac{k_2^2}{k_3}$ . O adimensional  $r_k$  fornece a razão entre um coeficiente direto de rigidez do mancal e a rigidez do eixo;  $r_l$  mede a relação entre os comprimentos do mancal e do eixo, e os demais adimensionais medem a razão entre os coeficientes associados às vibrações angulares e os coeficientes de translação diretos.

A rigidez resultante  $K_u$  das equações de movimento desacopladas,  $m_d \ddot{q} + K_u q = 0$ , onde  $q$  representa movimentos segundo  $Y$  ou  $Z$  é dada por

$$K_u = \frac{8k_{TT} \left[ 1 + 3r_k r_l^2 (r_{RR} - r_{RT} r_{TR}) \right]}{\left[ (4 + r_k)(4 + 3r_{RR} r_k r_l^2) - 3(2 + r_{TR} r_k r_l)(2 + r_{RT} r_k r_l) \right]} \quad (4.9)$$

A razão entre a frequência natural não amortecida,  $\omega_u^2 = \frac{K_u}{m_d}$ , e  $\omega_0^2 = \frac{2k_{TT}}{m_d(1+r_k)}$ , que é a frequência natural não amortecida do sistema desacoplado sem consideração do desalinhamento angular é definida como

$$p_\omega^2 = \left( \frac{\omega_u}{\omega_0} \right)^2 = \frac{4(1+r_k) \left[ 1 + 3r_k r_l^2 (r_{RR} - r_{RT} r_{TR}) \right]}{\left[ (4 + r_k)(4 + 3r_{RR} r_k r_l^2) - 3(2 + r_{TR} r_k r_l)(2 + r_{RT} r_k r_l) \right]} \quad (4.10)$$

A equação (4.10) fornece o efeito combinado de  $k_{TR}$ ,  $k_{RT}$ , e  $k_{RR}$  nas frequências naturais não amortecidas do rotor. A expressão mostra que  $k_{TR}$  ou  $k_{RT}$  considerados individualmente causam resultados idênticos em  $p_\omega$ . O efeito concorrente desses três coeficientes sobre  $p_\omega$  é

exemplificado nos gráficos das figuras 4.4a a 4.4d. Os gráficos são obtidos do seguinte modo: para cada par de valores  $r_k$  e  $r_l$ ,  $r_{TR}$  e  $r_{RT}$  são escolhidos como variáveis independentes, e  $r_{RR}$  é determinado usando-se a equação (4.10) de forma a resultar um valor especificado para  $p_\omega$ .

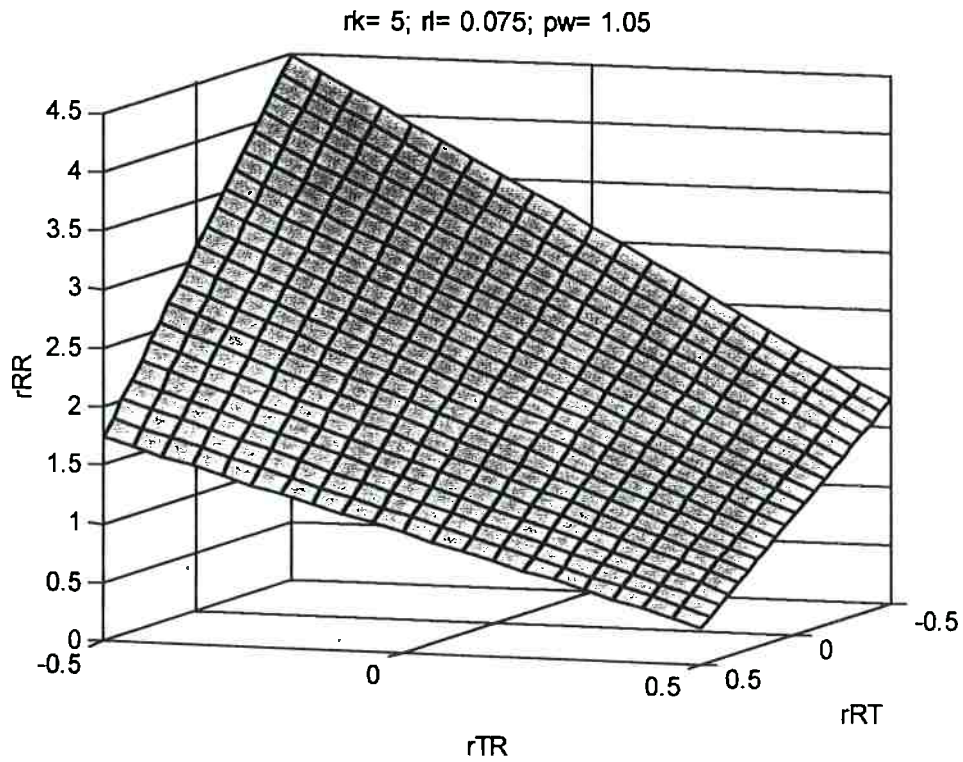
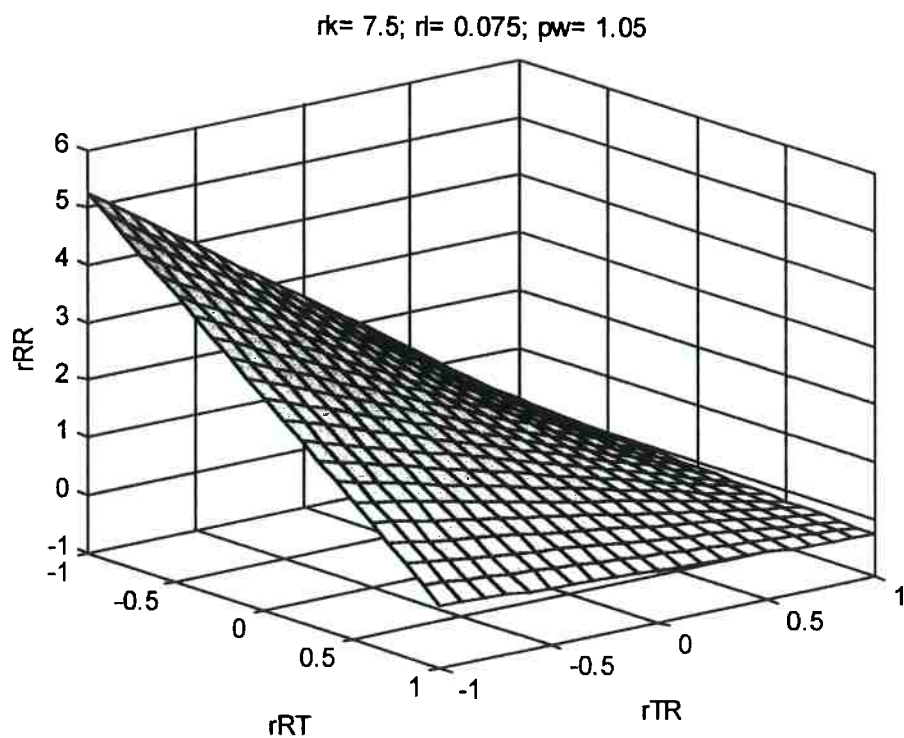
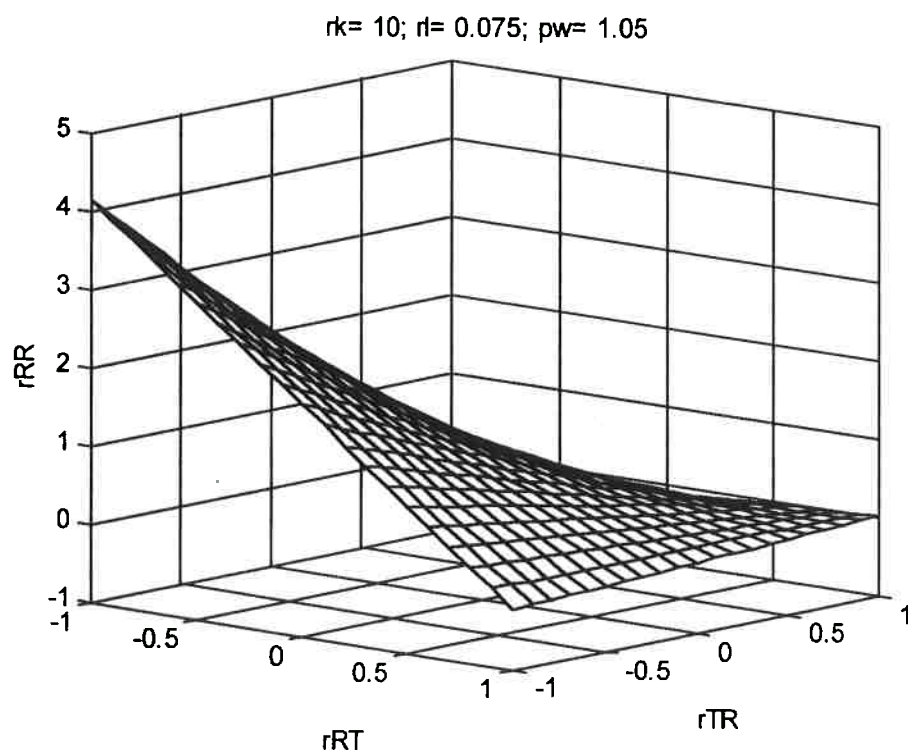


Figura 4.4a Valores de  $r_{RR}$ ,  $r_{TR}$  e  $r_{RT}$  que resultam  $p_\omega = 1.05$ , para  $r_k = 5.0$  e  $r_l = 0.075$ .

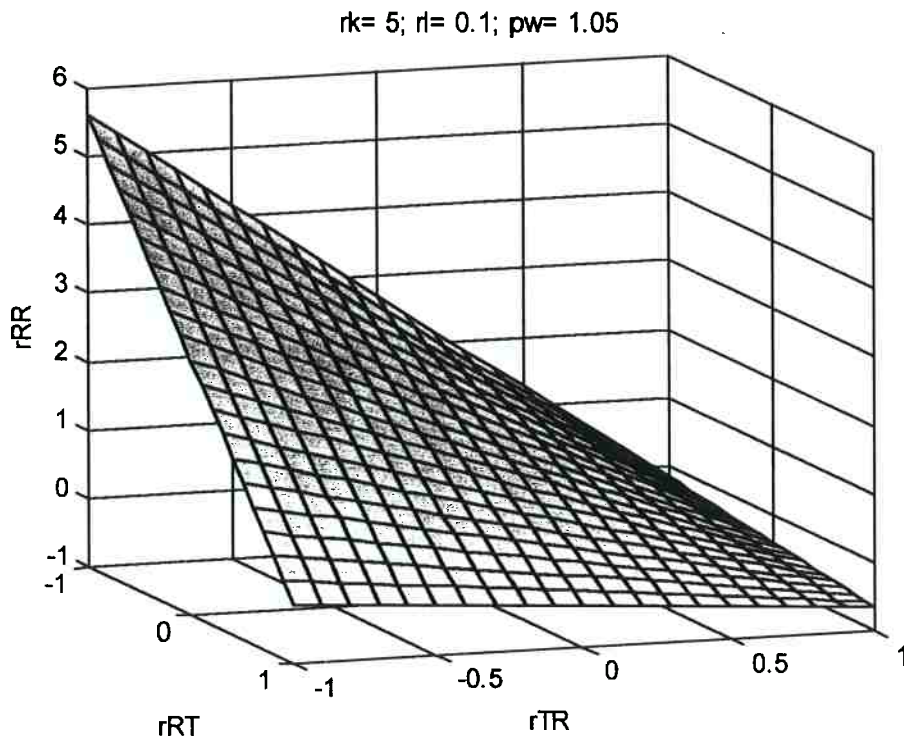


**Figura 4.4b** Valores de  $r_{RR}$ ,  $r_{TR}$  e  $r_{RT}$  que resultam  $p_w = 1.05$ , para  $r_k = 7.5$  e  $r_l = 0.075$ .

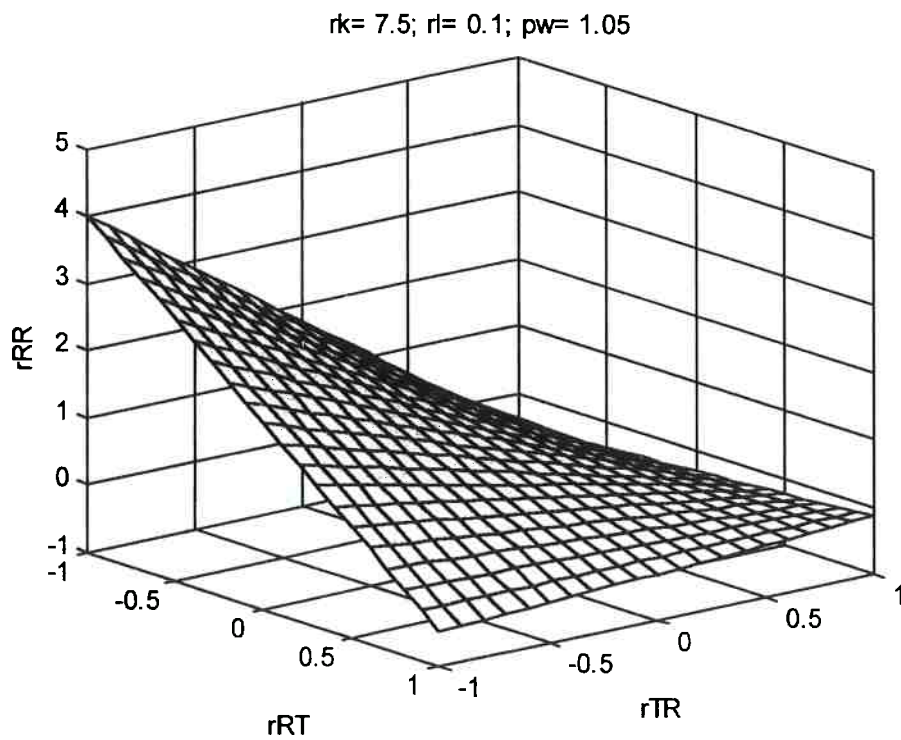


**Figura 4.4c** Valores de  $r_{RR}$ ,  $r_{TR}$  e  $r_{RT}$  que resultam  $p_w = 1.05$ , para  $r_k = 10.0$  e  $r_l = 0.075$ .

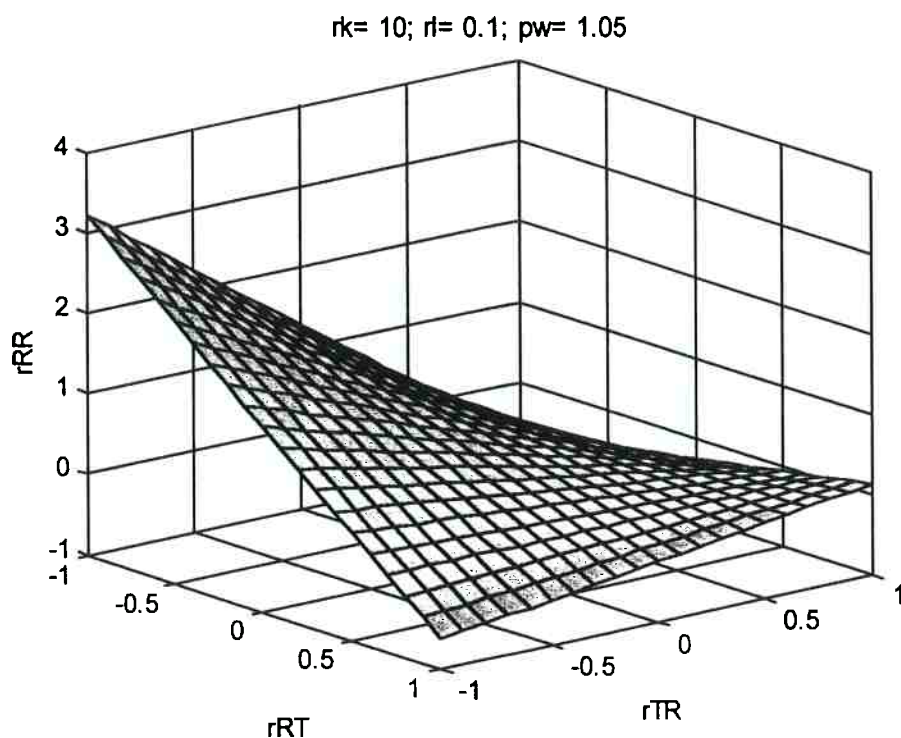




**Figura 4.4d** Valores de  $r_{RR}$ ,  $r_{TR}$  e  $r_{RT}$  que resultam  $p_w = 1.05$ , para  $r_k = 5.0$  e  $r_l = 0.10$ .



**Figura 4.4e** Valores de  $r_{RR}$ ,  $r_{TR}$  e  $r_{RT}$  que resultam  $p_w = 1.05$ , para  $r_k = 7.5$  e  $r_l = 0.10$ .



**Figura 4.4f** Valores de  $r_{RR}$ ,  $r_{TR}$  e  $r_{RT}$  que resultam  $p_w = 1.05$ , para  $r_k = 10.0$  e  $r_l = 0.10$

Os resultados indicam que os efeitos dos coeficientes de desalinhamento angular dependem em grande parte da razão de comprimentos  $r_l$ , e em menor medida da razão de rigidez  $r_k$ . Para  $r_k < 5$  e valores moderados de  $r_l$  ( $r_l \approx 0.75$ ), verifica-se que esses coeficientes devem assumir valores muito elevados para resultar uma variação de apenas 5% na frequência natural não amortecida. À medida em que se aumenta  $r_k$  e  $r_l$ , os efeitos do desalinhamento angular são manifestados a partir de valores mais razoáveis de  $r_{TR}$ ,  $r_{RT}$  e  $r_{RR}$ , mas de uma forma geral, a influência desses coeficientes nas frequências naturais não amortecidas deverá ser de pouca relevância, conforme constatado nos resultados das tabelas 4.1 e 4.2.

Um resultado qualitativo pouco usual é a “flexibilização” do sistema mostrada em alguns gráficos, como o da figura 4.4f: até certos valores de  $r_{RT}$  e  $r_{TR}$ ,  $r_{RR}$  deve diminuir, o que significa que  $r_{TR}$  e  $r_{RT}$  aumentam a rigidez do rotor; acima desses valores de  $r_{TR}$  e  $r_{RT}$ ,  $r_{RR}$  precisa assumir valores maiores de modo a manter o valor de  $p_w$  especificado.

#### 4.2.2 Vibrações forçadas amortecidas

Com a introdução do amortecimento para o cálculo dos fatores de amplificação, é necessário definir um conjunto adicional de adimensionais:

$$a_{RR} = \frac{\bar{c}_{RR}}{\bar{c}_{TT}}; \quad a_{TR} = \frac{\bar{c}_{TR}}{\bar{c}_{TT}}; \quad a_{RT} = \frac{\bar{c}_{RT}}{\bar{c}_{TT}} \quad (4.11),$$

e as equações de movimento desacopladas ficam,

$$m_d \ddot{q} + C^u \dot{q} + K^u q = h(\omega) \quad (4.12),$$

onde  $K^u$  e  $C^u$  são a rigidez e o amortecimento equivalentes do sistema, e  $h(\omega)$  é a excitação harmônica correspondente à direção considerada. Os efeitos de  $k_{RT}^*$ ,  $k_{TR}^*$  e  $k_{RR}^*$  na resposta em regime permanente serão estudados individualmente.

Considerando inicialmente somente  $k_{RT}^*$  e  $k_{TT}^*$ , os coeficientes de rigidez e amortecimento indicados na equação (4.12) resultam

$$K_{RT}^u = \frac{4k_{TT} \left\{ k_{TT}^2 [2(1+r_k) - 3r_k r_l r_{RT}] + \omega^2 r_k c_{TT}^2 (2 - 3r_l a_{RT}) \right\}}{k_{TT}^2 [2(1+r_k) - 3r_k r_l r_{RT}]^2 + \omega^2 r_k^2 c_{TT}^2 (2 - 3r_l a_{RT})^2} \quad (4.13)$$

$$C_{RT}^u = \frac{4k_{TT}^2 c_{TT} [2 - 3r_k r_l (r_{RT} - a_{RT})]}{k_{TT}^2 [2(1+r_k) - 3r_k r_l r_{RT}]^2 + \omega^2 r_k^2 c_{TT}^2 (2 - 3r_l a_{RT})^2} \quad (4.14)$$

e o fator de amplificação nas velocidades críticas é dado por  $f_{RT}^u = \frac{1}{2 \zeta_{RT}^u \sqrt{1 - (\zeta_{RT}^u)^2}}$ , onde

$$\zeta_{RT}^u = \frac{C_{RT}^u}{2\sqrt{K_{RT}^u m_d}}. \text{ Como os valores típicos do fator de amortecimento de rotores raramente}$$

ultrapassam 20% do amortecimento crítico, o fator de amplificação pode ser calculado com

boa aproximação (erro de  $\approx 2.0\%$ ) empregando-se a fórmula simplificada (Rao, 1993):  $f_{RT}^u = \frac{1}{2\zeta_{RT}^u}$ .

As expressões anteriores podem ser empregadas para estimar  $f_{RT}^u$  na análise de sistemas específicos, com valores particulares de  $k_{RT}$  e  $c_{RT}$ . Para fins ilustrativos, é possível obter expressões mais gerais se for considerado o amortecimento ótimo do mancal, definido por Barret et al. (1978) como sendo o coeficiente de amortecimento  $C_{bo}$  que minimiza o fator de amplificação de rotores com  $r_k \geq 2$ :

$$C_{bo} = \frac{(1+r_k)}{2} m_d \omega_r \quad (4.15).$$

Para tais rotores flexíveis é válido que  $\sqrt{\frac{K^u}{m_d}} \approx \omega_r$ , onde  $\omega_r$  é a frequência natural do rotor em apoios rígidos, e a expressão (4.15) pode ser introduzida nas equações (4.13) e (4.14) a fim de calcular  $f_{RT}^u$ ; definindo a razão entre fatores de amplificação  $p_{RT} = \frac{f_{RT}^u}{f_0^u}$ , onde  $f_0^u$  é o fator de amplificação calculado sem a consideração do desalinhamento angular, chega-se ao resultado

$$p_{RT} = \frac{C_0^u}{C_{RT}^u} \sqrt{\frac{K_{RT}^u}{K_0^u}} \quad (4.16),$$

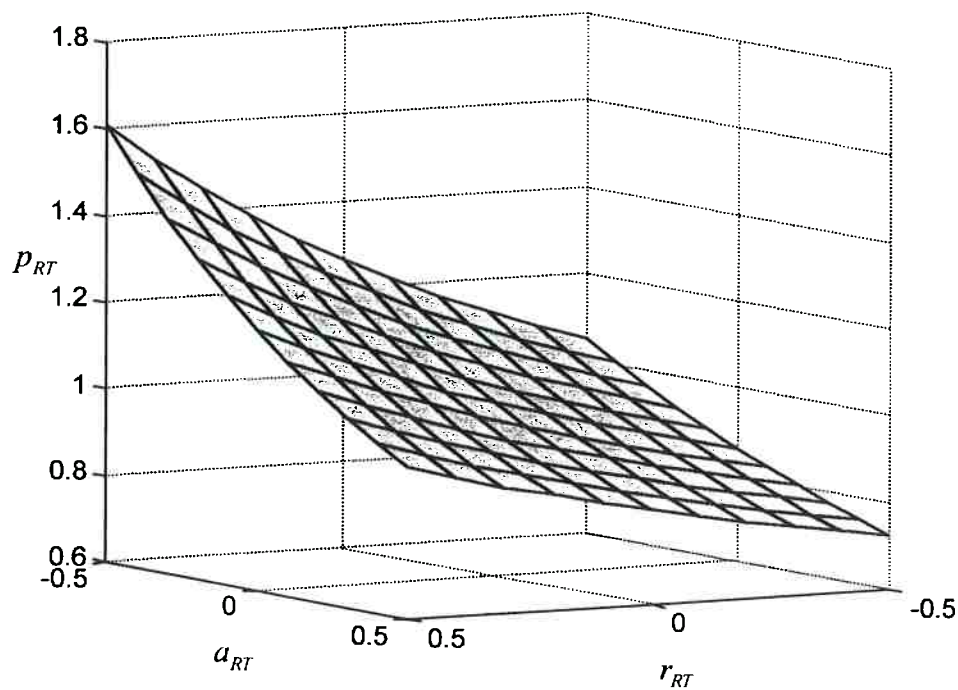
onde

$$\frac{C_0^u}{C_{RT}^u} = \frac{[2(1+r_k) - 3r_k r_l r_{RT}]^2 + (1+r_k)^2 (2 - 3r_l a_{RT})^2}{4(1+r_k)^2 [2 - 3r_k r_l (r_{RT} - a_{RT})]} \quad (4.17a),$$

$$\frac{K_{RT}^u}{K_0^u} = \frac{4(1+r_k) [2r_k (1+r_k) - 3r_k^2 r_l r_{RT} + (1+r_k)^2 (2 - 3r_l a_{RT})]}{(1+2r_k) \{ [2(1+r_k) - 3r_k r_l r_{RT}]^2 + (1+r_k)^2 (2 - 3r_l a_{RT})^2 \}} \quad (4.17b),$$

e  $K_0^u$  e  $C_0^u$  são a rigidez e o amortecimento equivalentes sem a consideração do desalinhamento angular.

A combinação dos efeitos de  $r_{RT}$  e  $a_{RT}$  nos valores dos fatores de amplificação correspondentes ao pico de resposta é exemplificada nas figuras 4.5a a 4.5e. Tal como na análise de vibrações livres, pode-se verificar que o efeito individual de  $k_{TR}^*$  é o mesmo que de  $k_{RT}^*$ . Deve-se notar que a equação (4.16) não é válida para todas as possíveis combinações de valores de  $r_{RT}$  e  $a_{RT}$  (ou  $r_{TR}$  e  $a_{TR}$ ), sendo útil apenas para identificar tendências no comportamento.



**Figura 4.5a** Efeito de  $r_{RT}$  e  $a_{RT}$  em  $p_{RT}$ ,  $r_k = 5.0$  e  $r_l = 0.05$ .

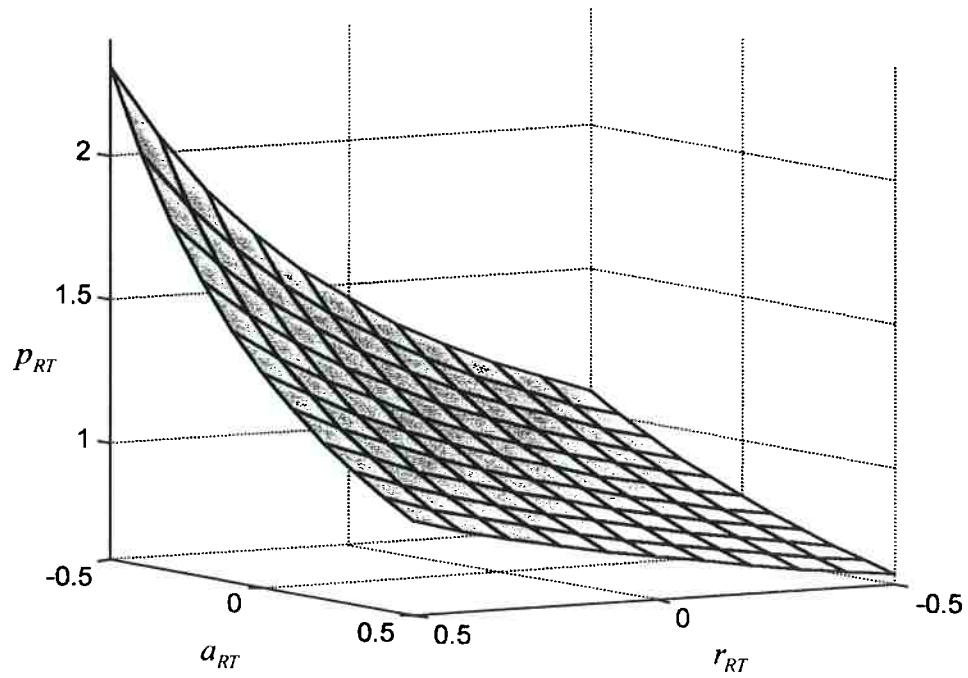


Figura 4.5b Efeito de  $r_{RT}$  e  $a_{RT}$  em  $p_{RT}$ ,  $r_k = 5.0$  e  $r_l = 0.75$ .

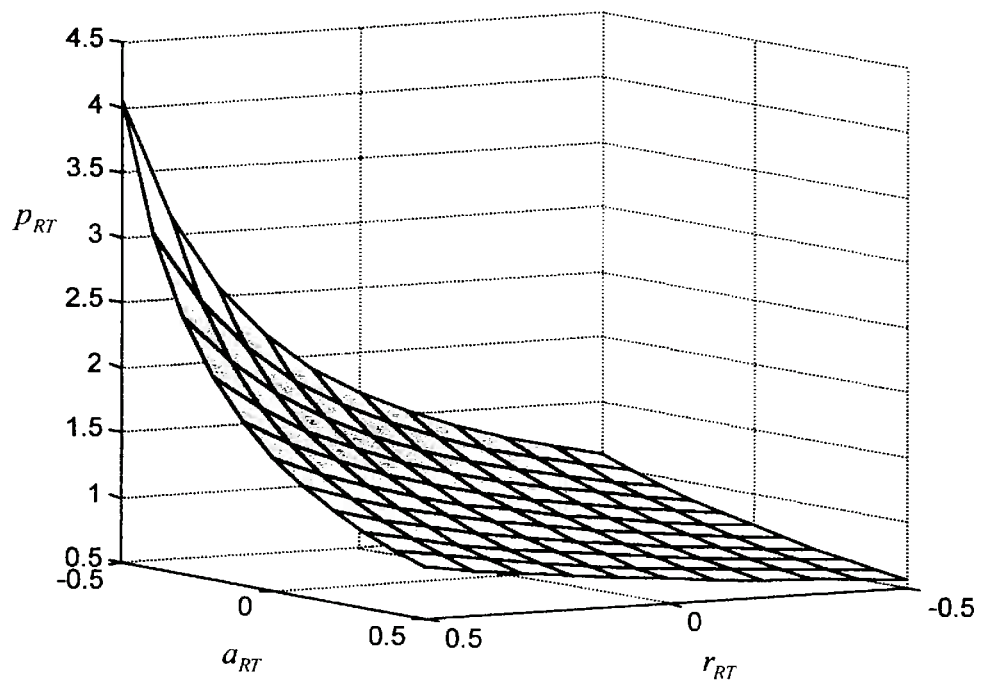


Figura 4.5c Efeito de  $r_{RT}$  e  $a_{RT}$  em  $p_{RT}$ ,  $r_k = 5.0$  e  $r_l = 0.10$ .

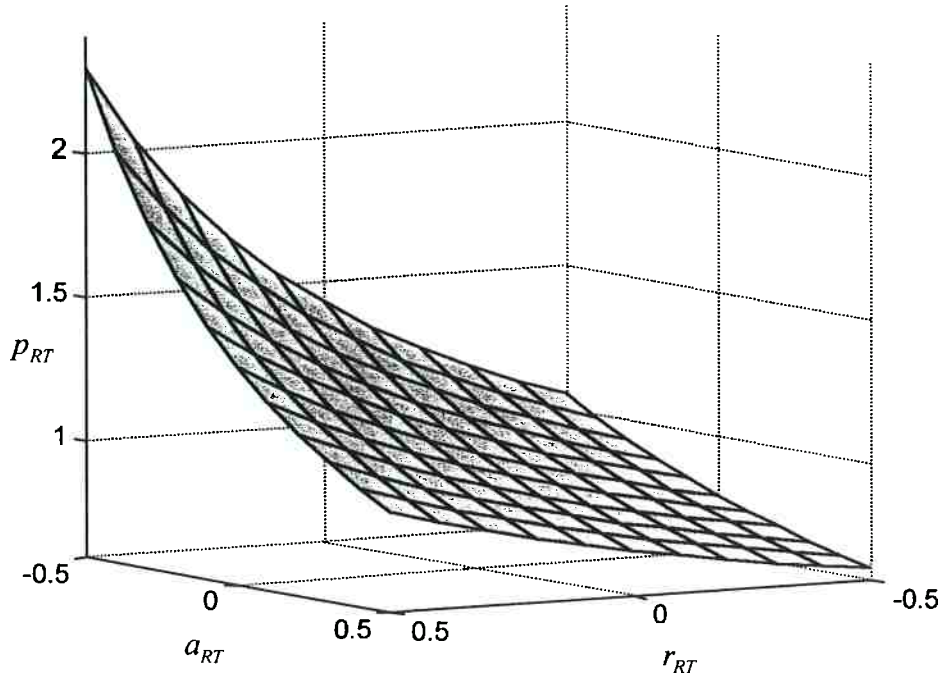


Figura 4.5d Efeito de  $r_{RT}$  e  $a_{RT}$  em  $p_{RT}$ ,  $r_k = 7.5$  e  $r_l = 0.05$

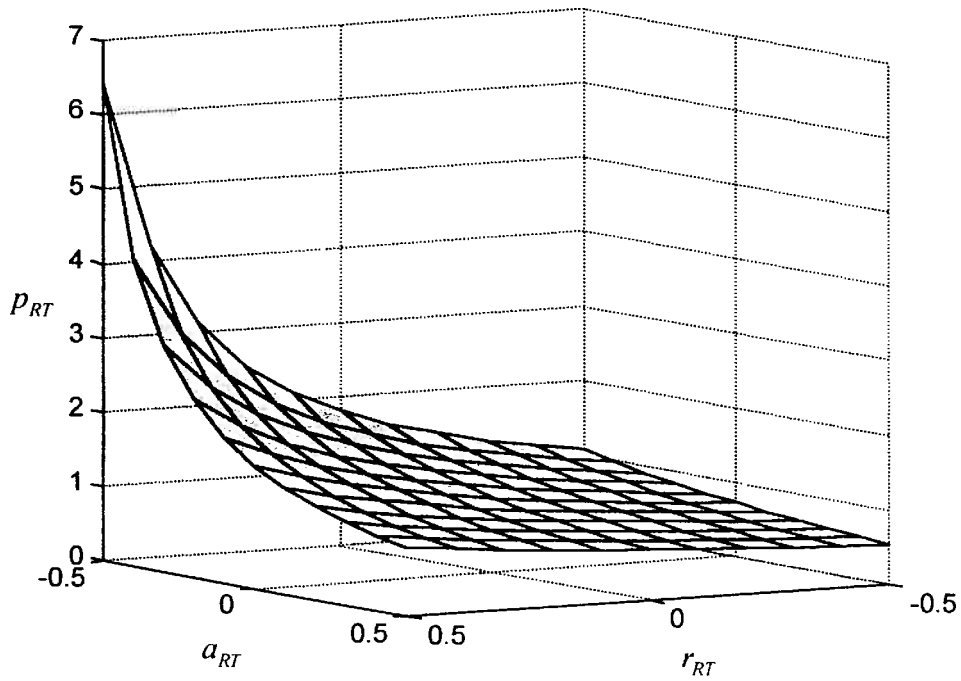


Figura 4.5e Efeito de  $r_{RT}$  e  $a_{RT}$  em  $p_{RT}$ ,  $r_k = 7.5$  e  $r_l = 0.075$ .

Finalmente, a influência de  $r_{RR}$  e  $a_{RR}$  no pico de resposta pode ser visualizada empregando-se a expressão (4.18), que é obtida de maneira análoga à da equação (4.16):

$$P_{RR} = \frac{C_0^u}{C_{RR}^u} \sqrt{\frac{K_{RR}^u}{K_0^u}} \quad (4.18),$$

onde  $\frac{C_0^u}{C_{RR}^u}$  e  $\frac{K_{RR}^u}{K_0^u}$  são calculados pelas equações (4.19); exemplos de resultados são dados nas figuras 4.6a a 4.6d.

$$\begin{aligned} \frac{C_0^u}{C_{RR}^u} = & \left\{ \left[ 4(1+r_k) + 3r_k r_l^2 (4+r_k) r_{RR} - 3r_l^2 (1+r_k)^2 a_{RR} \right]^2 + \dots \right. \\ & \left. (1+r_k)^2 \left[ 4 + 3r_k r_l^2 r_{RR} + 3r_l^2 (4+r_k) a_{RR} \right]^2 \right\} \dots \\ & / \left\{ 8(1+r_k)^2 \left\{ 4 + 24r_k r_l^2 r_{RR} + 9r_l^2 (1+2r_k + 2r_k^2) a_{RR} + 36r_l^4 \left[ r_k^2 r_{RR}^2 + (1+r_k)^2 a_{RR}^2 \right] \right\} \right\} \end{aligned} \quad (4.19a)$$

$$\begin{aligned} \frac{K_{RR}^u}{K_0^u} = & \left\{ 8(1+r_k)^2 \left[ 4(1+3r_k + 2r_k^2) + 3r_k r_l^2 (5+18r_k + 10r_k^2) r_{RR} \right] + \dots \right. \\ & \left. 9r_l^4 (1+6r_k + 2r_k^2) \left[ r_k r_{RR}^2 + (1+r_k)^2 a_{RR}^2 \right] \right\} \dots \\ & / \left\{ (1+3r_k + 2r_k^2) \left\{ \left[ 4(1+r_k) + 3r_k r_l^2 (4+r_k) r_{RR} - 3r_l^2 (1+r_k)^2 a_{RR} \right]^2 + \dots \right. \right. \\ & \left. \left. (1+r_k)^2 \left[ 4 + 3r_k r_l^2 r_{RR} + 3r_l^2 (4+r_k) a_{RR} \right]^2 \right\} \right\} \end{aligned} \quad (4.19b)$$



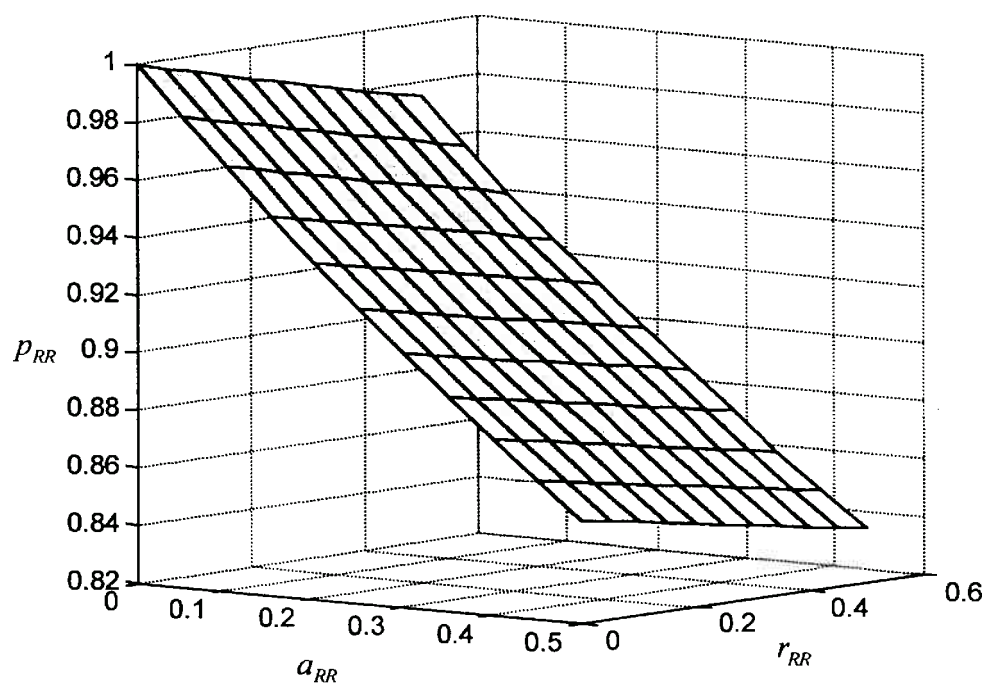


Figura 4.6a Efeito de  $r_{RR}$  e  $a_{RR}$  em  $p_{RR}$ ,  $r_k = 5.0$  e  $r_l = 0.05$ .

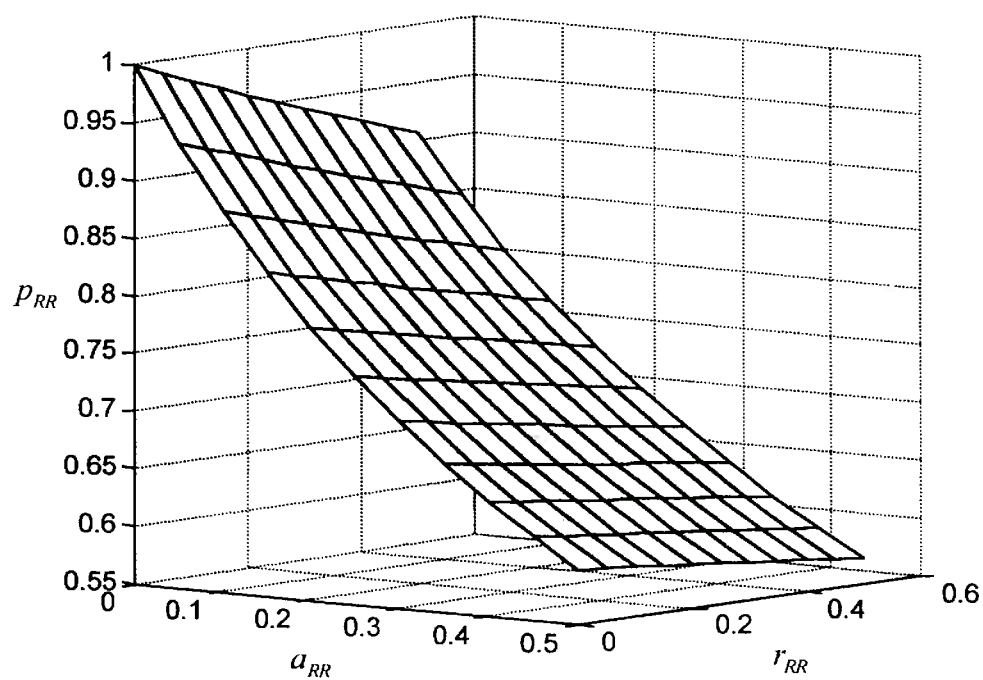


Figura 4.6b Efeito de  $r_{RR}$  e  $a_{RR}$  em  $p_{RR}$ ,  $r_k = 5.0$  e  $r_l = 0.10$ .

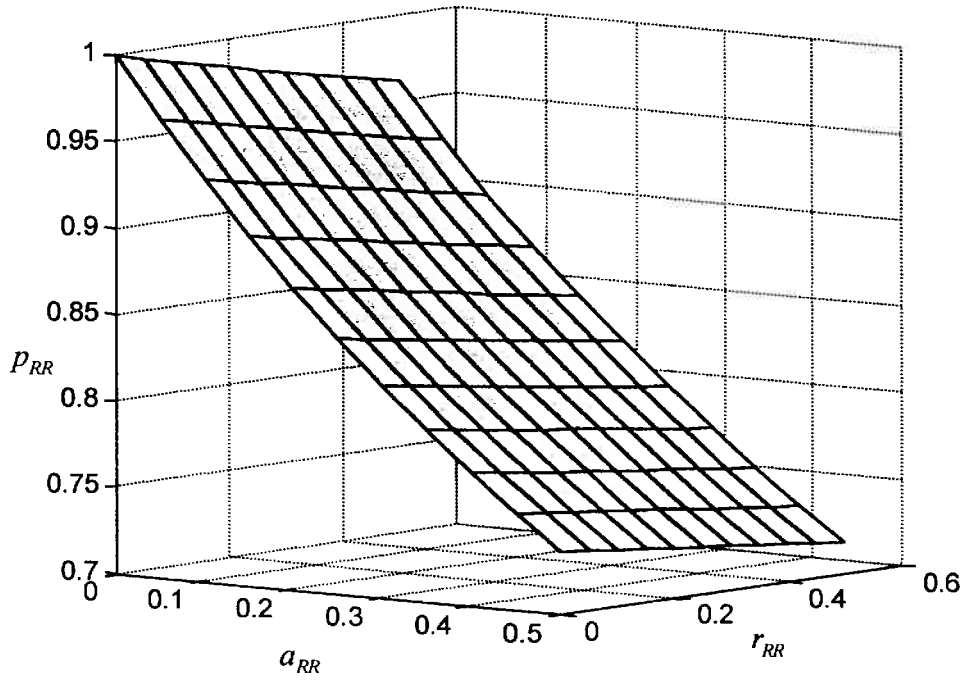


Figura 4.6c Efeito de  $r_{RR}$  e  $a_{RR}$  em  $p_{RR}$ ,  $r_k = 7.5$  e  $r_l = 0.05$ .

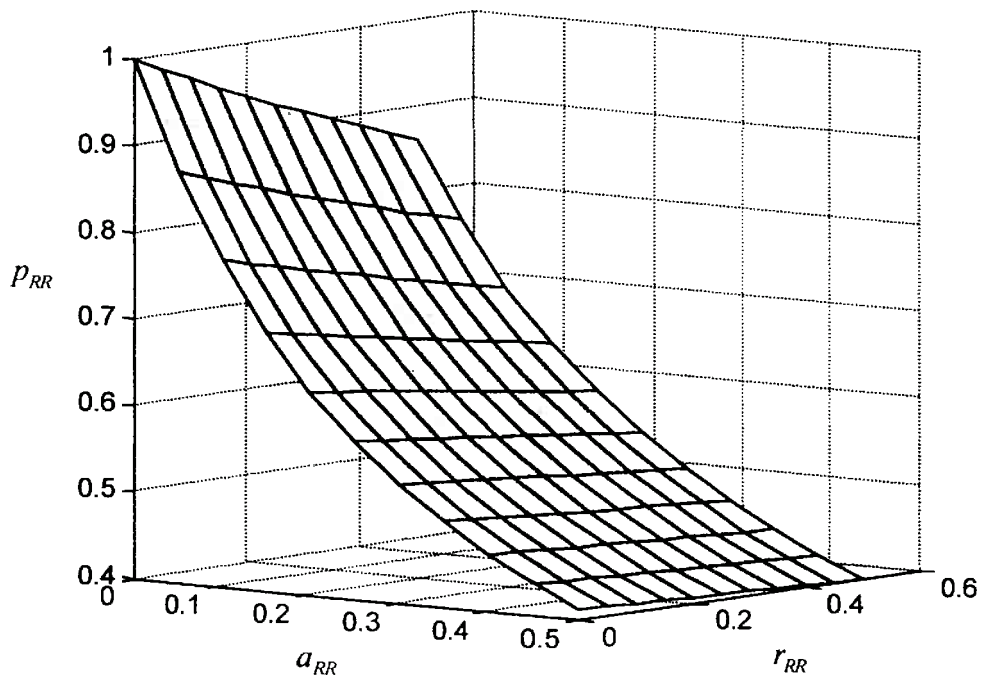


Figura 4.6d Efeito de  $r_{RR}$  e  $a_{RR}$  em  $p_{RR}$ ,  $r_k = 7.5$  e  $r_l = 0.10$ .

O aspecto geral dos gráficos mostrados nas figuras 4.5 e 4.6 indica que os coeficientes  $k_{RT}$  ou  $k_{TR}$ , quando positivos, podem aumentar o fator de amplificação de maneira significativa, enquanto que  $k_{RR}$  e  $c_{RR}$  causam resultados opostos, pois introduzem um “efeito de engastamento” nos mancais. Observa-se que mesmo pequenos valores de  $r_{RR}$  ou  $a_{RR}$  reduzem as amplitudes de maneira relevante. O valor de  $r_l$  afeta significativamente a resposta dinâmica, e quando combinado com valores elevados de  $r_k$ , tornam o sistema muito sensível aos efeitos do desalinhamento angular.

Os gráficos das figuras 4.5a a 4.5e mostram que valores negativos de coeficientes do tipo  $c_{RT}$  ou  $c_{TR}$  tendem a causar grandes aumentos nos fatores de amplificação; por outro lado, coeficientes negativos do tipo  $k_{RT}$  ou  $k_{TR}$  provocam efeitos opostos, mas de menor intensidade, de modo que quando os coeficientes  $r_{RT}$  e  $a_{RT}$  (ou  $r_{TR}$  e  $a_{TR}$ ) têm magnitudes semelhantes, tende a prevalecer o aumento de amplitudes associado aos coeficientes de amortecimento negativos. No caso contrário, quando  $r_{RT}$  e  $a_{RT}$  (ou  $r_{TR}$  e  $a_{TR}$ ) são positivos e de magnitudes equivalentes, o efeito líquido é a redução de amplitudes, mas de forma menos acentuada que o aumento provocado no caso anterior.

Esses resultados qualitativos são congruentes com as curvas de resposta mostradas nas figuras 4.3. Para aquele rotor em particular,  $k_s \approx 3.8 \times 10^7 \text{ N/m}$ , de modo que  $r_{ky}$  varia entre aproximadamente 3.0 e 4.0 nos casos 1 a 5, enquanto  $r_{kz}$  assume valores ao redor de 2.0. O que torna aquele rotor sensível aos efeitos do desalinhamento angular é o valor ligeiramente elevado de  $r_l$ , dado por  $r_l = 0.081$ . Neste contexto, é possível associar os resultados dos casos 3 e 7, em que se obteve  $f_{32} > f_8$ , aos comentários feitos acima, relativos ao amortecimento negativo, conforme se observa pelos valores de  $c_{AY}$  e  $c_{YA}$  nas respectivas matrizes de amortecimento. Os casos 6 a 8 levam a uma manifestação mais evidente dos efeitos das vibrações angulares dos moentes devido aos valores mais elevados de  $r_{ky}$ , que chega a 10.2 no caso 7. No caso 8 predomina o efeito redutor de amplitudes causado pelos coeficientes  $r_{RR}$  e  $a_{RR}$ , todos com valores próximos a 0.1; os diversos coeficientes  $r_{RT}$  e  $a_{RT}$  (ou  $r_{TR}$  e  $a_{TR}$ ) têm sinais e magnitudes diversas, e não permitem identificar uma tendência clara quanto ao aumento ou redução das amplitudes.

Como comentário geral deste estudo qualitativo, ficou claro que a consideração das vibrações angulares dos moentes altera pouco as velocidades críticas do rotor. Foram definidos dois parâmetros que medem a sensibilidade de rotores bi-apoiados aos efeitos do desalinhamento angular, que são os adimensionais  $r_k$  e  $r_l$ . Os resultados obtidos indicam que, para os valores usuais de  $r_l$ , que varia entre 0.05 e 0.1, tais efeitos passam a influir no comportamento dinâmico do rotor quando  $r_k$  assume valores superiores a 3.

Essa influência se manifesta principalmente nas diferenças entre os fatores de amplificação calculados com o uso de diferentes modelos de mancais. O modelo de 16 coeficientes resultou fatores de amplificação inferiores aos calculados com o uso do modelo plano, indicando que o efeito redutor de amplitude associado aos coeficientes diretos  $k_{AA}$ ,  $k_{BB}$ ,  $c_{AA}$  e  $c_{BB}$  prevalece sobre a possível influência dos coeficientes cruzados  $k_{AB}$ ,  $k_{BA}$ ,  $c_{AB}$  e  $c_{BA}$ , que podem assumir valores positivos ou negativos.

A comparação entre os valores máximos de  $f_{32}$  e  $f_8$  mostra que, quando  $f_{32} > f_8$ , a diferença entre ambos é pequena; por outro lado, foram obtidos resultados em que  $f_{32} < f_8$  com diferenças da ordem de 35%. Isto indica que o efeito específico mais pronunciado da consideração das vibrações angulares dos moentes no cálculo da resposta em regime permanente de rotores bi-apoiados tende a ser a previsão de níveis de vibração menores que os calculados com o uso do modelo plano. Este resultado foi obtido também em Zachariadis (1998), onde se usou o modelo de Jeffcott aqui apresentado juntamente com um modelo de mancais que usa a teoria de mancais curtos, sucintamente descrito no Anexo.

## 5 ANÁLISE QUANTITATIVA: UTILIZAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

A análise quantitativa dos efeitos dos desalinhamentos dos mancais no comportamento dinâmico de rotores será feita utilizando-se modelos obtidos através da aplicação do Método dos Elementos Finitos (MEF).

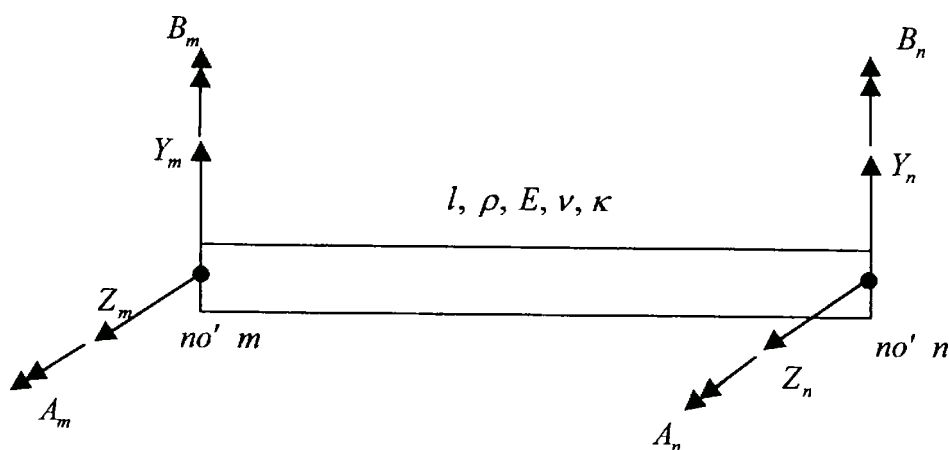
As formulações empregadas serão apresentadas de forma sucinta juntamente com os procedimentos adotados para a aplicação do método, remetendo-se o leitor, sempre que necessário, a algumas das diversas publicações em que os fundamentos e o desenvolvimento do MEF são discutidos detalhadamente, dando-se preferência aos trabalhos voltados primordialmente à análise dinâmica de rotores.

A validade da implementação do MEF aqui efetuada será verificada através da reprodução de resultados obtidos por outros autores. Em seguida, serão feitas análises de vibrações lineares de rotores simples bi-apoiados, visando atestar os resultados qualitativos apresentados no capítulo anterior. Encerra-se o capítulo com um estudo preliminar dos efeitos dos desalinhamentos em rotores hiperestáticos apoiados em três ou quatro mancais

### 5.1 Procedimentos Adotados para a Aplicação do MEF

Os rotores são modelados por eixos flexíveis nos quais estão montados rigidamente discos indeformáveis. As propriedades de inércia e de rigidez dos eixos correspondem às do comumente denominado “elemento de viga de Timoshenko”, que consiste em uma barra prismática homogênea de seção circular, com consideração da deformação por cisalhamento e do momento de inércia transversal. A figura 5.1 mostra de maneira ilustrativa um elemento de eixo, indicando as suas propriedades e os quatro deslocamentos nodais considerados: as translações segundo os eixos  $Y$  e  $Z$  e as rotações  $B$  e  $A$  ao redor desses eixos, respectivamente, conforme já descrito no capítulo 2. Na equação (5.1) é mostrada a seqüência com que esses deslocamentos são armazenados no vetor de coordenadas generalizadas do elemento,

$$\mathbf{q}_e = \{Y_m, B_m, Z_m, A_m, Y_n, B_n, Z_n, A_n\}' \quad (5.1).$$



**Figura 5.1** Elemento de viga de Timoshenko;  $l$ : comprimento,  $\rho$ : densidade,  $E$ : módulo de elasticidade,  $\nu$ : módulo de Poisson,  $\kappa$ : fator de cisalhamento.

As matrizes consistentes de rigidez  $\mathbf{K}_e$  e de inércia  $\mathbf{M}_e$  desse elemento de viga são apresentadas no Apêndice 1, juntamente com o vetor de carregamentos nodais equivalentes  $\mathbf{L}_e$ , e a sua obtenção é descrita em Nelson (1977), Lalanne & Ferraris (1990) e Genta (1993), entre outros. Para discretizar o eixo, definem-se nós nas variações de seção transversal, nas posições dos discos e mancais, e sempre que seja necessário subdividir trechos de eixos cônicos ou de diâmetro constante. As matrizes de inércia  $\mathbf{M}_d$  e de efeito giroscópico  $\mathbf{G}_d$  dos discos também são apresentadas no apêndice 1, e as matrizes de rigidez  $\mathbf{K}_b$  e de amortecimento  $\mathbf{C}_b$  dos mancais já foram apresentadas no capítulo 3. Além do amortecimento proveniente dos mancais, outras formas de amortecimento viscoso equivalente podem ser consideradas, tais como a dissipação de energia por histerese ou o amortecimento introduzido pelo meio circundante, etc; a matriz  $\mathbf{D}_e$  representa de forma genérica esses esforços de amortecimento.

Definido o modelo do rotor e as suas propriedades, as equações resultantes para a análise do sistema completo são escritas em função das matrizes globais de rigidez  $\mathbf{K}_g$ , massa  $\mathbf{M}_g$ , e amortecimento  $\mathbf{D}_g$  do eixo, juntamente com as matrizes de inércia e efeito giroscópico dos discos, de rigidez e amortecimento dos mancais, bem como os diversos vetores de reações e carregamentos estáticos e dinâmicos que serão apresentados em seguida. As técnicas usadas

para a montagem e armazenamento das matrizes globais são descritas detalhadamente em Bathe & Wilson (1976).

### 5.1.1 Cálculo da posição de equilíbrio estático

A etapa prévia à análise de vibrações lineares e a alguns tipos de análises não lineares consiste no cálculo das posições relativas de equilíbrio estático dos moentes, das quais dependem os coeficientes dinâmicos dos mancais. A consideração dos momentos atuantes nos mancais torna o sistema hiperestático, mesmo no caso de rotores bi-apoiados, de modo que em geral não se conhece a priori as cargas atuantes nos mancais. Como consequência, as posições relativas de equilíbrio dos moentes e as cargas atuantes nos mancais devem ser determinadas simultaneamente a partir da resolução do sistema de equações não lineares,

$$\mathbf{K}_g \mathbf{q}^s = \mathbf{F}^s + \mathbf{L}^s \quad (5.2),$$

onde  $\mathbf{q}^s$  é o vetor de coordenadas generalizadas na situação de equilíbrio estático,  $\mathbf{F}^s$  é o vetor de reações hidrodinâmicas dos mancais e  $\mathbf{L}^s$  é o vetor global de carregamentos estáticos, que inclui os já mencionados esforços nodais equivalentes bem como o peso dos discos e todos os demais carregamentos estáticos decorrentes de acoplamentos, engrenagens, etc.

Convém lembrar que o termo “hiperestático” designa tradicionalmente rotores horizontais apoiados em mais do que dois mancais, enquanto que neste estudo também os rotores bi-apoiados são estaticamente indeterminados. Para utilizar a nomenclatura tradicional, mantém-se aqui o sentido usual do termo “hiperestático”, que será empregado apenas para identificar rotores apoiados em três ou mais mancais.

As reações hidrodinâmicas nos mancais são função da diferença entre os deslocamentos dos moentes  $\mathbf{q}_j^s$  e os deslocamentos dos mancais,  $\mathbf{q}_b^s$ . Neste trabalho não é levada em consideração a flexibilidade das fundações dos mancais nem da estrutura da máquina, de modo que os deslocamentos  $\mathbf{q}_b^s$  são admitidos como dados de entrada do problema, e portanto independentes das cargas atuantes nos mancais. Comentários adicionais relativos a esta simplificação serão fornecidos posteriormente.

A resolução da equação (5.2) é feita empregando-se técnicas baseadas no método de Newton-Raphson, e envolve processamentos numéricos trabalhosos, devido à acentuada não

linearidade dos esforços hidrodinâmicos associada ao relativamente elevado número de graus de liberdade dos sistemas estudados, que mesmo no caso de rotores simples, chega à ordem de dezenas. A situação mais crítica ocorre quando é necessário calcular as reações hidrodinâmicas de diversos mancais finitos, o que torna o processo iterativo de solução da equação (5.2) extremamente moroso. Além disso, a solução de sistemas de equações algébricas não lineares depende em grande parte da estimativa fornecida como ponto de partida; se o vetor de partida não for adequado, o número de iterações pode aumentar exageradamente, e em alguns casos não se converge para a solução (Hildebrand, 1956).

Alguns autores, como Kikuchi (1970) e Gash (1976), propuseram a substituição dos mancais por apoios simples, assumindo que as reações correspondentes seriam muito próximas dos valores reais das reações hidrodinâmicas. Desta forma, após o cálculo das reações de apoios simples, a posição de equilíbrio estático de cada moente seria determinada considerando cada mancal separadamente, sem ser necessário resolver o sistema de equações (5.2).

Julgou-se que no contexto deste trabalho essa simplificação é inadmissível a priori, devido à inclusão dos momentos nos esforços reativos hidrodinâmicos; no entanto, verificou-se que no caso de rotores bi-apoiados, bem como no de rotores hiperestáticos com alinhamento catenário, as reações hidrodinâmicas são pouco afetadas pela ação dos momentos, podendo então ser avaliadas em uma primeira aproximação pelas reações de apoios simples. Por outro lado, será mostrado através de exemplos que as reações de apoios simples podem fornecer estimativas totalmente incorretas das reações hidrodinâmicas quando os mancais de rotores hiperestáticos estão submetidos a desalinhamentos paralelos.

Após testar diversas alternativas, definiu-se que o procedimento para a solução da equação (5.2) será dividido em três etapas: na primeira, efetua-se o cálculo das reações de apoios simples, conforme já mencionado, obtendo-se assim uma estimativa das forças reativas hidrodinâmicas e dos desalinhamentos angulares relativos dos moentes; em seguida, utilizam-se os resultados da primeira etapa para calcular as excentricidades relativas dos moentes considerados isoladamente; na terceira etapa, faz-se a condensação estática da equação (5.2), visando reduzir a ordem do sistema, e inicia-se o processo iterativo de solução empregando como vetor de partida as excentricidades e desalinhamentos angulares determinados nas duas etapas anteriores.

Com relação aos rotores hiperestáticos cujos mancais são submetidos a desalinhamentos paralelos e/ou angulares, a aplicação do procedimento descrito é feita em duas situações



distintas. A primeira envolve rotores aos quais é aplicável o alinhamento catenário; neste caso, o desalinhamento dos mancais pode ser imposto gradualmente a partir da situação de alinhamento catenário, até se atingir o nível de desalinhamento no qual se deseja efetuar a análise de vibrações. O segundo contexto é o de rotores aos quais não se aplica o alinhamento catenário, tal como definido no capítulo 1, que ocorre, por exemplo, em equipamentos constituídos por um único eixo apoiado em diversos mancais. Nesses casos, pode-se procurar, através do cálculo das reações de apoios simples, uma configuração inicial na qual as reações nos mancais sejam pouco afetadas pela deflexão do eixo, isto é, deve-se posicionar os mancais de forma tal que a linha elástica do rotor apresente curvaturas suaves (ou grandes raios de curvatura); nessas condições as reações de apoios simples normalmente fornecem estimativas razoáveis das reações hidrodinâmicas, permitindo a aplicação do procedimento para o cálculo da posição de equilíbrio estático. Definida a configuração de equilíbrio correspondente à situação descrita acima, passa-se à imposição gradual dos desalinhamentos dos mancais, tal como no caso dos rotores com alinhamento catenário. As diversas formulações utilizadas nesses procedimentos serão apresentadas nos próximos parágrafos.

Quando se considera o rotor sustentado em apoios simples, os desalinhamentos paralelos impostos aos mancais são iguais às translações dos moentes, e a equação de equilíbrio correspondente é

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ij} \\ \mathbf{K}_{ji} & \mathbf{K}_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_i \\ \mathbf{q}_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{L}_i^s \\ \mathbf{L}_j^s \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_j \end{Bmatrix} \quad (5.3),$$

onde  $\mathbf{q}_i$  contém todos os graus de liberdade do rotor, excetuando os de translação dos moentes, que são armazenados no vetor  $\mathbf{q}_j$ ;  $\mathbf{K}_{ii}$ ,  $\mathbf{K}_{ij}$ ,  $\mathbf{K}_{ji}$  e  $\mathbf{K}_{jj}$  são sub-matrizes de  $\mathbf{K}_g$  correspondentes à partição feita em  $\mathbf{q}$ ;  $\mathbf{L}_i^s$  e  $\mathbf{L}_j^s$  são os esforços nodais equivalentes atuantes em  $\mathbf{q}_i$  e  $\mathbf{q}_j$ , respectivamente, e  $\mathbf{R}_j$  contém as reações de apoios simples. Decorre diretamente de (5.3) que

$$\begin{cases} \mathbf{q}_i = \mathbf{K}_{ii}^{-1} (\mathbf{L}_i^s - \mathbf{K}_{ij} \mathbf{q}_j) \\ \mathbf{R}_j = (\mathbf{K}_{jj} - \mathbf{K}_{ji} \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ij}) \mathbf{q}_j + \mathbf{K}_{ji} \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{L}_i^s - \mathbf{L}_j^s \end{cases} \quad (5.4).$$

Os elementos de  $\mathbf{R}_j$  são as componentes verticais e horizontais das forças reativas nos apoios rígidos, e os desalinhamentos angulares dos moentes são extraídos de  $\mathbf{q}_j$ . Com esses

valores, é feito o cálculo da posição de equilíbrio estático de cada moente separadamente, de maneira análoga à apresentada no capítulo 2, isto é, considerando que o moente pertence a um eixo rígido com desalinhamento angular estático sob a ação da força calculada na equação (5.4).

A condensação estática do sistema de equações não lineares representado na equação (5.2) consiste em expressar os graus de liberdade  $\mathbf{q}_i$ , em função dos graus de liberdade dos moentes,  $\mathbf{q}_j$  (quatro graus de liberdade por moente), de maneira análoga ao procedimento tradicionalmente adotado no estudo de estruturas lineares (Bathe & Wilson, 1976). Particionando  $\mathbf{q}$  da forma  $\mathbf{q} = \{\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j\}'$ , onde  $\mathbf{q}_j$  contém todos os graus de liberdade dos moentes, a equação (5.2) fica

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ij} \\ \mathbf{K}_{ji} & \mathbf{K}_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_i^s \\ \mathbf{q}_j^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{L}_i^s \\ \mathbf{L}_j^s \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}^s \end{Bmatrix} \quad (5.5).$$

Expressando  $\mathbf{q}_i$  em função de  $\mathbf{q}_j$ , de modo análogo ao apresentado na equação (5.4), chega-se à equação

$$(\mathbf{K}_{jj} - \mathbf{K}_{ji}\mathbf{K}_{ii}^{-1}\mathbf{K}_{ij})\mathbf{q}_j = \mathbf{L}_j^s + \mathbf{F}^s - \mathbf{K}_{ji}\mathbf{K}_{ii}^{-1}\mathbf{L}_i^s \quad (5.6),$$

que consiste em um sistema de  $4 \cdot (N^{\text{o}} \text{ de mancais})$  equações algébricas não lineares, cuja resolução é feita utilizando-se a rotina “fsolve” do “pacote de rotinas” do MATLAB (Hanselman & Littlefield, 1995).

Em cada iteração é necessário recalcular os campos de pressão de todos os mancais, o que constitui a operação mais demorada do processo. Uma considerável economia de tempo é possível quando esses campos de pressão são armazenados após cada iteração, e utilizados como dados de entrada na iteração seguinte. Constatou-se nas diversas simulações efetuadas que boas estimativas iniciais de  $\mathbf{q}_j$ , consideradas como tais aquelas em que as diferenças entre os valores iniciais das coordenadas e os valores calculados após a solução da equação (5.6) são de aproximadamente 5%, requerem de 20 a 40 iterações para se chegar à resposta. O critério de convergência adotado para a interrupção do processo iterativo é que a variação do valor de  $\|\mathbf{F}^s\|$  seja menor que 0.5 % em duas iterações sucessivas, compatível com o critério adotado para o refinamento da malha usada no cálculo do campo de pressões do mancal. Todo o processo de determinação da posição de equilíbrio estático fica bastante simplificado

quando se utiliza a Teoria de Mancais Curtos para o cálculo das reações hidrodinâmicas, situação em que a equação (5.6) é resolvida rapidamente, mesmo que o vetor de partida seja uma estimativa grosseira da solução.

Caso fosse considerada a flexibilidade das fundações do rotor, seria necessário realizar um cálculo iterativo também dos valores dos deslocamentos dos mancais, que seriam avaliados após cada cálculo das reações hidrodinâmicas. Essas reações constituiriam parte dos carregamentos atuantes na carcaça do equipamento estudado, que por sua vez teria que ser discretizada juntamente com a estrutura de suporte. Para manter a coerência com a consideração da flexibilidade da estrutura na análise estática, seria necessário efetuar uma análise de vibrações dessa estrutura visando desenvolver também modelos de rigidez, inércia e amortecimento equivalentes, que seriam incluídos na análise de vibrações da máquina. Gash (1976) propôs que esses modelos dinâmicos simplificados das fundações fossem obtidos experimentalmente, desde que não se considerasse o desalinhamento angular do rotor. Ding & Krodkiewski (1993) supuseram que a inércia e rigidez equivalentes das fundações de rotores hiperestáticos poderiam ser obtidas analítica ou experimentalmente sem maiores dificuldades, mas nas suas simulações consideraram apenas fundações rígidas. Especial atenção à flexibilidade dos suportes dos mancais foi dada por Kicinski et al. (1997), que desenvolveram modelos de aproximadamente 60000 graus de liberdade para cada uma das estruturas de suporte dos mancais de um turbo gerador, com a finalidade de calcular somente as suas propriedades de rigidez equivalentes.

Embora esses procedimentos sejam aplicáveis, em hipótese, ao estudo aqui proposto, a sua implementação demandaria recursos de tempo, equipamentos e “softwares” comerciais não disponíveis no decorrer desta pesquisa. Além das dificuldades de modelagem e simulação das vibrações das fundações, seria necessário também propor modelos para o cálculo da inércia, amortecimento e rigidez equivalentes relativas ao desalinhamento angular dos mancais, visto que os modelos apresentados pelos autores citados consideraram apenas as translações dos suportes. Ainda com relação a esses trabalhos, conforme já comentado na Introdução, a consideração da flexibilidade das fundações foi acompanhada de simplificações que limitam a validade dos modelos lá propostos, como a não consideração do efeito giroscópico. Por outro lado, a inclusão da flexibilidade das fundações nos modelos aqui adotados teria finalidade apenas ilustrativa, sem alterar a validade dos demais resultados e conclusões. Corroboram esta afirmação Lund & Wang (1986), que ao comentarem os resultados de uma análise de um rotor de 45.5 m de comprimento e 304.000 kg de massa total, concluíram que

“excetuando algumas ressonâncias locais, as fundações exercem uma influência intrascendente na resposta dinâmica do rotor”. Neste contexto, a análise da possível influência da flexibilidade das fundações é excluída do presente estudo, devendo ser abordada em trabalhos futuros.

A validação do procedimento adotado para o cálculo da posição de equilíbrio estático de rotores apoiados em mancais hidrodinâmicos, dentro das limitações apontadas, será feita a partir dos exemplos apresentados no item 5.2.

### 5.1.2 Análise de vibrações lineares

Após a determinação das posições de equilíbrio estático dos moentes em diferentes frequências de operação do rotor, efetua-se o cálculo dos coeficientes de rigidez e amortecimento dos mancais, e definem-se os polinômios que serão empregados para calcular os valores desses coeficientes em qualquer velocidade de rotação do eixo. Passa-se em seguida ao estudo de vibrações lineares do rotor, que neste trabalho compreende o cálculo da resposta em regime permanente a excitações harmônicas e o estudo de vibrações livres amortecidas do sistema.

A equação de movimento do rotor é dada por

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{D} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{h} \quad (5.7),$$

onde  $\mathbf{M}$  é a matriz de massa do eixo acrescida das matrizes de inércia dos discos,  $\mathbf{D}$  é a matriz global de amortecimento na qual está incorporado o amortecimento dos mancais,  $\mathbf{G}$  é a matriz global de efeito giroscópico e  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez resultante da inclusão dos coeficientes de rigidez dos mancais em  $\mathbf{K}_g$ . O vetor  $\mathbf{h} = \mathbf{h}(t)$  de carregamentos harmônicos inclui o desbalanceamento estático e dinâmico dos discos, e outros esforços cíclicos que atuem no sistema..

Considerando inicialmente apenas as componentes síncronas desses carregamentos, o cálculo da resposta em regime permanente requer a solução da equação (5.8) (Müller & Schiehlen, 1985),

$$\left[ -\omega^2 \mathbf{M} + i\omega(\mathbf{D} + \mathbf{G}) + \mathbf{K} \right] \mathbf{Q} = \mathbf{H} \quad (5.8),$$

onde

$$\begin{cases} \mathbf{Q} = \frac{1}{2}(\mathbf{Q}_c - i\mathbf{Q}_s) \\ \mathbf{H} = \frac{1}{2}(\mathbf{H}_c - i\mathbf{H}_s) \end{cases} \quad (5.9),$$

que são definidos a partir de

$$\begin{cases} \mathbf{q} = \mathbf{Q}_c \cos \omega t + \mathbf{Q}_s \sin \omega t \\ \mathbf{h} = \mathbf{H}_c \cos \omega t + \mathbf{H}_s \sin \omega t \end{cases} \quad (5.10).$$

A excitação síncrona de maior relevância na maioria dos equipamentos rotativos é composta pelos desbalanceamentos estático e dinâmico dos discos, representados genericamente pelos vetores  $\vec{U}_e$  e  $\vec{U}_d$  na figura 5.2. Conforme mostrado no **Apêndice 1**,  $\vec{U}_d$  consiste em um momento cujas componentes são dadas por

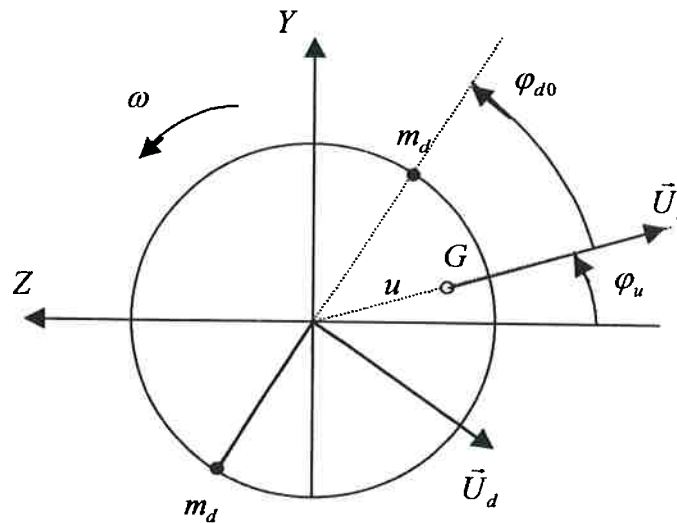
$$\vec{U}_d = \omega \left( J_{XY} \vec{J} + J_{XZ} \vec{K} \right) \quad (5.11),$$

com  $J_{XY,Z} = \frac{d(J_{XY,Z})}{dt}$ , onde  $J_{XY}$  e  $J_{XZ}$  são produtos de inércia do disco. Esses produtos de inércia estão associados à falta de homogeneidade na distribuição de massa do disco, caso em que tendem a ser de pequena relevância; ou então, decorrem da falta de perpendicularidade entre o plano médio do disco e o eixo, situação esta em que os esforços dinâmicos podem atingir níveis significativos mesmo no caso de discos finos. Para computar as magnitudes do desbalanceamento dinâmico, independentemente da sua origem, admite-se que este decorre da existência de duas pequenas massas iguais a  $m_d$ , defasadas de  $180^\circ$  e posicionadas nas faces do disco (de espessura  $l_d$  e raio  $r_d$ ); a figura 5.2 exemplifica as posições dessas massas, sendo  $\varphi_{d_0}$  o ângulo medido entre o plano longitudinal que as contém e o plano longitudinal que contém o centro de massa  $G$  do disco, que no instante inicial define o ângulo  $\varphi_{u_0}$  com o plano  $XZ$ . Desta forma, as massas  $m_d$  não alteram a posição de  $G$ , resultando as seguintes expressões para os desbalanceamentos:

$$\begin{cases} \vec{U}_e = -M u \omega^2 \left( \cos \varphi_u \vec{K} - \sin \varphi_u \vec{J} \right) \\ \vec{U}_d = -m_d r_d l_d \omega^2 \left( \cos \varphi_d \vec{J} + \sin \varphi_d \vec{K} \right) \end{cases} \quad (5.12),$$

onde  $u = |G - C_d|$  é a excentricidade do centro de massa  $G$  do disco de centro  $C_d$ ,  $\varphi_u = \varphi_{u_0} + \omega t$  e  $\varphi_d = \varphi_{d_0} + \omega t$ , de modo que os vetores  $\mathbf{H}_c$  e  $\mathbf{H}_s$  correspondentes são

$$\mathbf{H}_c = -\omega^2 \begin{Bmatrix} -Mu \sin \varphi_{u_0} \\ m_d r_d l_d \cos(\varphi_{u_0} + \varphi_{d_0}) \\ Mu \cos \varphi_{u_0} \\ m_d r_d l_d \sin(\varphi_{u_0} + \varphi_{d_0}) \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{H}_s = -\omega^2 \begin{Bmatrix} -Mu \cos \varphi_{u_0} \\ m_d r_d l_d \sin(\varphi_{u_0} + \varphi_{d_0}) \\ -Mu \sin \varphi_{u_0} \\ -m_d r_d l_d \cos(\varphi_{u_0} + \varphi_{d_0}) \end{Bmatrix} \quad (5.13).$$



**Figura 5.2** Desbalanceamentos estático  $\vec{U}_e$  e dinâmico  $\vec{U}_d$ .

O cálculo da resposta a carregamentos não síncronos, caso sejam considerados relevantes, é feito de maneira análoga.

O estudo da estabilidade das vibrações livres do rotor nas vizinhanças das posições de equilíbrio estático, que variam em função da sua velocidade angular  $\omega$ , requer a obtenção da solução homogênea da equação (5.7); essa equação pode ser escrita na forma (Müller & Schiehlen, 1985):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{D} + \mathbf{G}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{Z}} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} \quad (5.14),$$

onde  $\mathbf{0}$  é a matriz nula e  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade. Definindo  $\tilde{\mathbf{q}} = \{\mathbf{q} \ \dot{\mathbf{q}}\}'$ , com  $\tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{Q}} e^{\lambda t}$ , chega-se ao problema de autovalor

$$(\mathbf{Z} - \lambda \mathbf{I}) \tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{0} \quad (5.15),$$

cujos autovalores

$$\lambda(\omega) = \rho(\omega) + i f_n(\omega) \quad (5.16)$$

e respectivos autovetores  $\tilde{Q}(\omega)$  são complexos conjugados. O sistema será estável enquanto as partes reais  $\rho(\omega)$  dos autovalores forem negativas, o que normalmente se verifica em velocidades de operação inferiores às primeiras velocidades críticas; esses autovalores são seqüenciados em ordem crescente dos valores das freqüências naturais amortecidas  $f_n(\omega)$  do rotor. Convém lembrar que, devido às simplificações inerentes ao processo de discretização do rotor, os autovalores correspondentes às freqüências mais elevadas não têm significado físico.

Define-se como velocidade limite de estabilidade  $\sigma_{ins}$  o valor de velocidade de operação do equipamento em que a parte real de pelo menos um dos autovalores do modelo assume valor nulo. Na maioria dos sistemas rotativos isso ocorre com algum dos primeiros autovalores, isto é, aqueles aos quais correspondem as menores freqüências, e que geralmente são calculados de modo confiável sem que seja necessário adotar modelos muito detalhados para a discretização do rotor.

O valor de  $\sigma_{ins}$  também pode ser estimado a partir da simulação de transientes, através da evolução das amplitudes de vibração do sistema, que crescem em função do tempo nas velocidades de operação instáveis.

## 5.2 Exemplos de Análises de Vibrações Lineares

Os exemplos aqui apresentados visam validar o procedimento proposto no item anterior, através da comparação com resultados obtidos por outros autores.

Hori & Uematsu (1980) empregaram o MMT para estudar a influência do desalinhamento paralelo de mancais hidrodinâmicos na estabilidade de sistemas resultantes do acoplamento rígido de dois rotores bi-apoiados. Os autores combinaram quatro rotores de propriedades distintas, mostradas na tabela 5.1; cada eixo tem diâmetro constante, exceto na região dos moentes, e sustenta um disco no meio do vão.

**Tabela 5.1** Propriedades dos rotores bi-apoiados (Hori & Uematsu, 1980):  $l_{tot}$  - comprimento total do rotor;  $l_{bb}$  - comprimento entre mancais;  $\Phi_e$  - diâmetro externo;  $M_d$  - massa do disco;  $J_d, J_p$  - momentos transversal e polar de inércia;  $M_j$  - massa dos moentes;  $R_{j_i}$  - reações de apoio;  $E$  - módulo de elasticidade;  $I_e = \pi\Phi_e^4/64$ ,  $k_e = 48EI/l_{bb}^3$ ,  $\rho_e$  - densidade.

Propriedades	Rotor			
	A	B	C	D
$l_{tot}$ (m)	0.70	0.70	0.70	0.70
$l_{bb}$ (m)	0.60	0.60	0.60	0.60
$\Phi_e$ (m)	0.015	0.020	0.020	0.020
$M_d$ (kg)	9.20	5.20	9.20	29.20
$J_d = J_p$ ( $kg\ m^2$ )	0.10	0.10	0.10	0.68
$M_j$ (kg)	0.12	0.10	0.10	0.10
$k_e$ ( $10^5\ N/m$ )	1.16	3.67	3.67	3.67
$R_{j_i}$ (N)	51.07	34.96	54.58	151.69
$E = 2.1 \times 10^{11}$ ( $N/m^2$ ); $\rho_e = 7850\ kg/m^3$				

Os valores do módulo de elasticidade e da densidade do eixo foram arbitrados por não terem sido fornecidos na referência; faltaram também as propriedades de inércia dos acoplamentos rígidos, que foram então consideradas desprezíveis. Com relação aos momentos de inércia



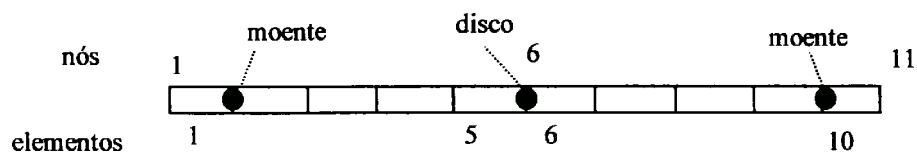
dos discos, os dados fornecidos na referência (esses valores são  $J_d = J_p = 1.0 \text{ kg mm}^2$  para os discos dos rotores A, B e C, e  $J_d = J_p = 6.8 \text{ kg mm}^2$  para o disco do rotor D) são incompatíveis com as possíveis dimensões dos mesmos ; supondo que tenha havido apenas um erro de digitação, mantiveram-se os valores da referência, tendo sido alteradas somente as ordens de grandeza.

Os mancais hidrodinâmicos são do tipo cilíndrico liso, e suas propriedades são apresentadas na tabela 5.2, juntamente com as velocidades limite de estabilidade dos quatro rotores. A figura 5.3 mostra o modelo aqui adotado para o estudo dos rotores; foram acrescentadas massas nos nós 2 e 10 (moentes), e 6 (disco).

**Tabela 5.2** Dados dos mancais e velocidades limite de estabilidade dos rotores.

Propriedades dos mancais	Rotor	$\sigma_{ins} (rps)$ *	$\sigma_{ins} (rps)$ **	diferença percentual
$D = 0.036 (m)$	A	35.8	35.7	-0.3
$L = 0.018 (m)$	B	65.7	66.5	1.2
$c_r = 90 \times 10^{-6} (m)$	C	54.5	55.4	1.7
$\mu = 14 \times 10^{-3} (Pa s)$	D	53.8	52.4	-2.6

\* (Hori & Uematsu, 1980); \*\* este trabalho



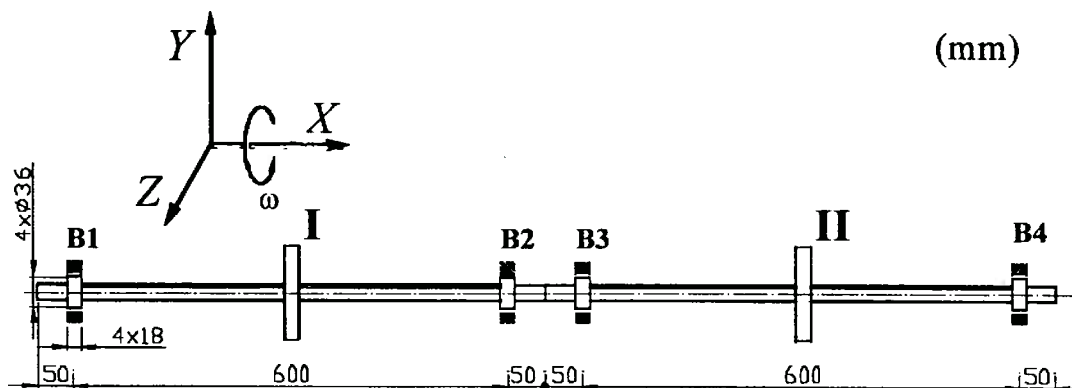
**Figura 5.3** Modelo de elementos finitos dos rotores A, B, C e D.

Os autores do trabalho de referência calcularam as reações hidrodinâmicas empregando a Teoria de Mancais Curtos tal como apresentada por Kikuchi (1970), por eles julgada apta para avaliar também os valores dos momentos hidrodinâmicos decorrentes da variação do desalinhamento angular relativo no tempo. Conforme já comentado na Introdução, essa formulação visa a obtenção do modelo linear de 16 coeficientes dinâmicos de mancais curtos

sem desalinhamento angular estático. Nas simulações aqui efetuadas preferiu-se a Teoria de Mancais Curtos convencional, apresentada no capítulo 2; essa opção permitirá comparar os resultados aqui obtidos com os apresentados em um terceiro trabalho, a ser comentado adiante.

Os resultados da tabela 5.2 mostram que há boa correspondência entre os valores calculados para as velocidades limite de estabilidade, que são pouco afetadas pelas diferenças nos modelos de mancais empregados, mesmo no caso de mancais relativamente carregados, como os do rotor D.

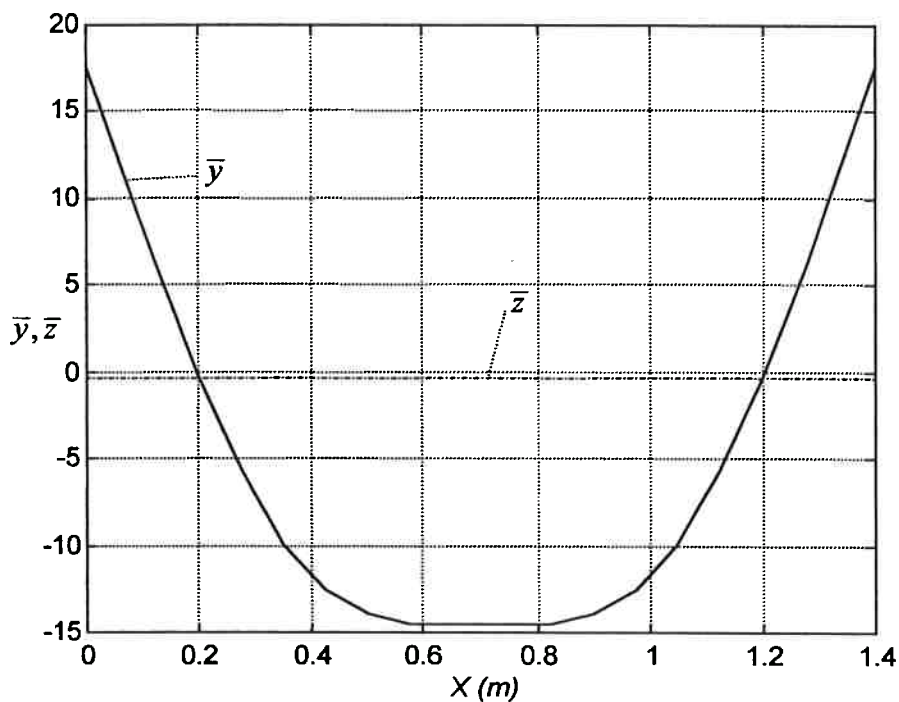
Na figura 5.4 é mostrado o rotor hiperestático decorrente do acoplamento rígido de dois rotores bi-apoiados; cada um dos rotores é modelado conforme mostrado na figura 5.3, resultando modelos de 20 elementos. Os rotores hiperestáticos são identificados pelas letras AA, AB, BA, etc, que indicam a posição (à direita ou à esquerda) e o tipo de rotor bi-apoiado considerado.



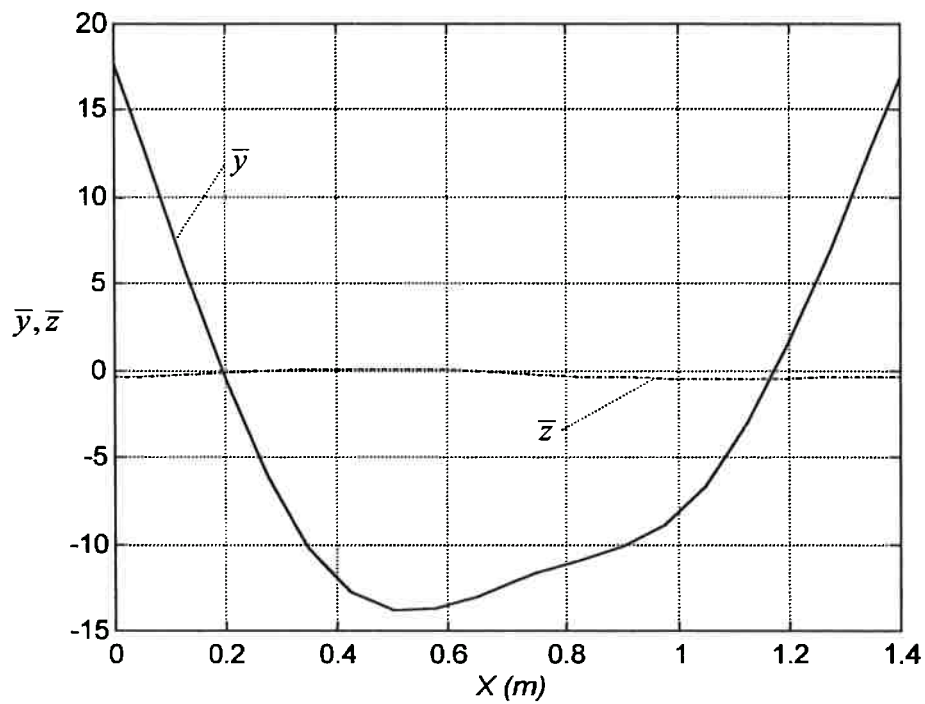
**Figura 5.4** Rotor hiperestático resultante do acoplamento de dois rotores bi-apoiados.

No trabalho de referência estudou-se o efeito de desalinhamentos paralelos do mancal 3 sobre as velocidades limite de estabilidade do rotor. Esses desalinhamentos paralelos são quantificados pelos adimensionais  $m_{y3} = \frac{Y'_{b3}}{c_R}$  e  $m_{z3} = \frac{Z'_{b3}}{c_R}$ , onde  $Y'_{b3}$  e  $Z'_{b3}$  são as translações do mancal 3 medidas a partir das posições que resultam na configuração de alinhamento catenário, como a mostrada na figura 5.5a relativa ao rotor AA. Dado que os modelos de mancais adotados não permitem a consideração do desalinhamento angular

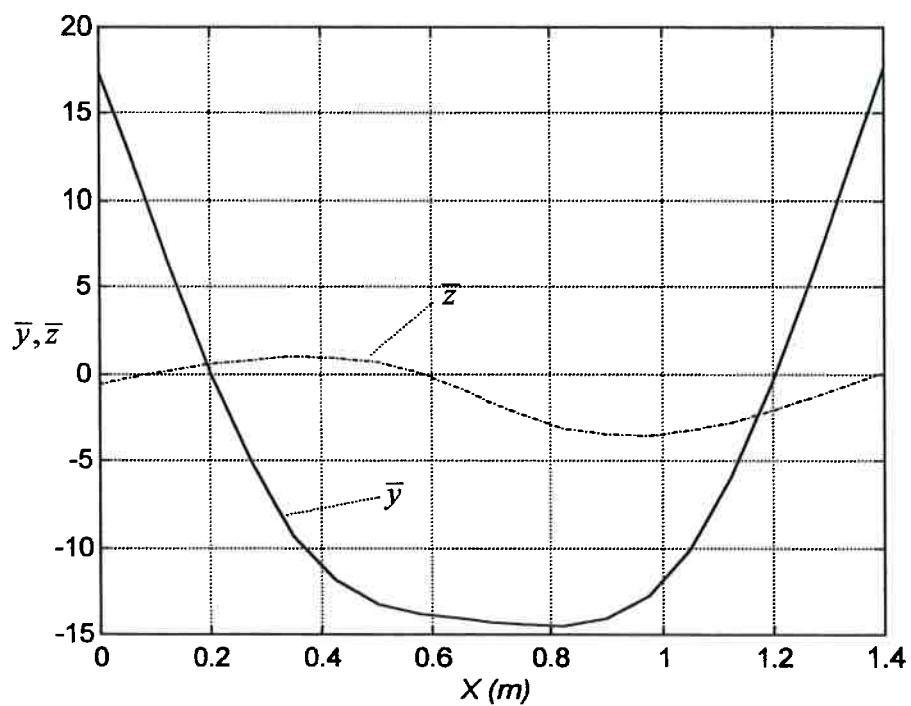
estático, é necessário supor que à medida em que o mancal 3 é deslocado, todos os mancais são desalinhados angularmente de modo a permanecerem paralelos aos respectivos moentes. A título de exemplo, as figuras 5.5b e 5.5c mostram as projeções horizontais e verticais das linhas elásticas do rotor AA correspondentes a  $m_{y3} = 3$  e  $m_{z3} = -3$ , respectivamente; na tabela 5.3 é mostrada a disparidade entre as reações hidrodinâmicas e as reações de apoios simples nessas situações.



**Figura 5.5a** Linha elástica do rotor AA na condição de alinhamento catenário,  $\omega = 35$  rps .



**Figura 5.5b** Linha elástica do rotor AA correspondente a  $m_{y_3} = 3$ , em  $\omega = 35 \text{ rps}$ .

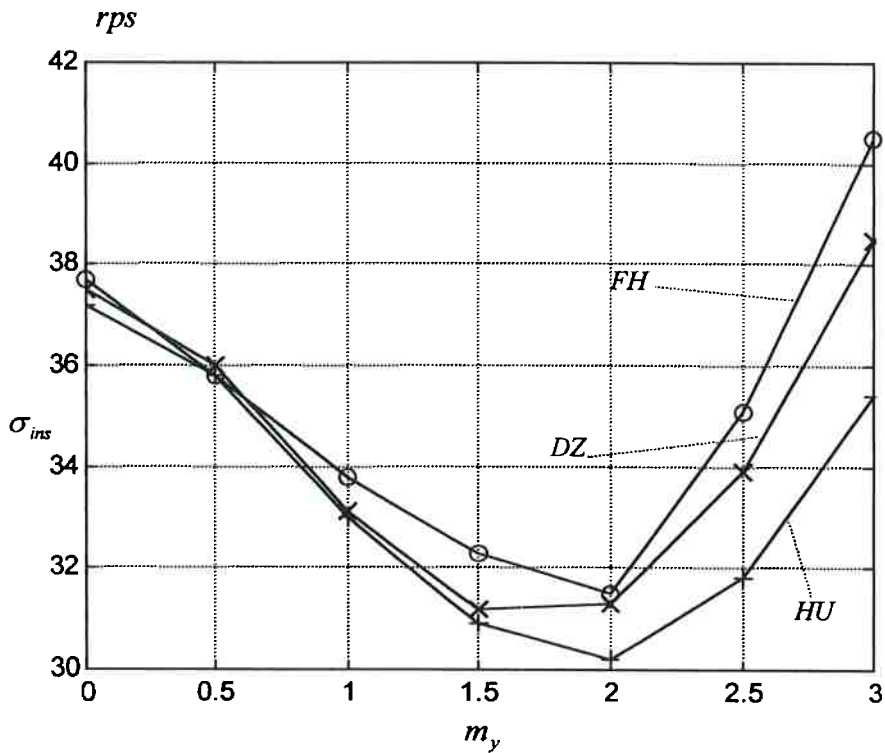


**Figura 5.5c** Linha elástica do rotor AA correspondente a  $m_{z_3} = -3$ , em  $\omega = 33 \text{ rps}$ .

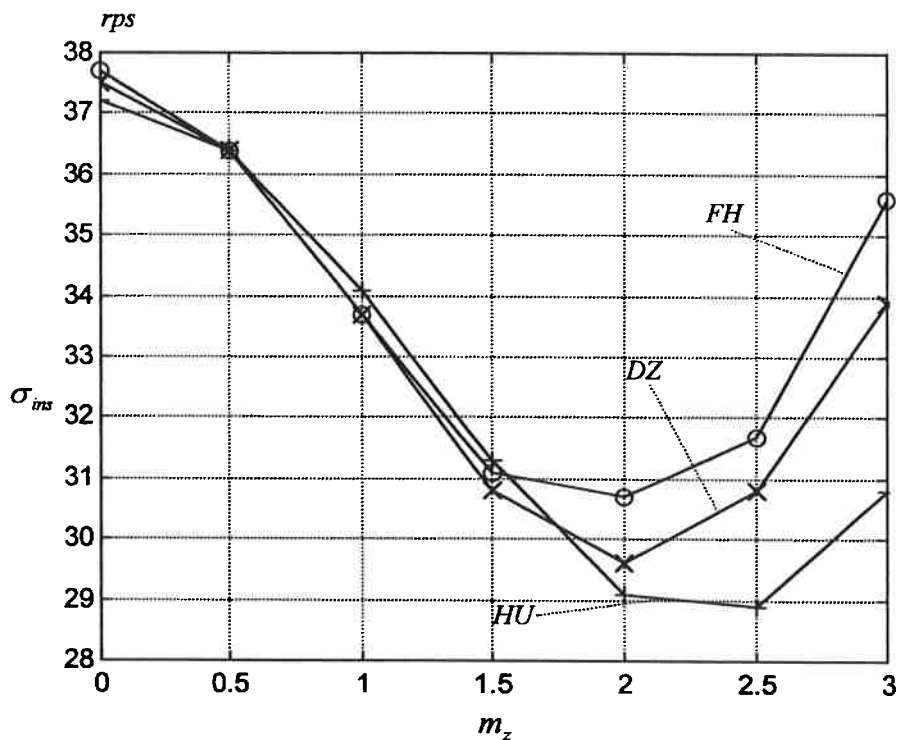
**Tabela 5.3** Reações hidrodinâmicas  $F_{y,z}^s$  (Teoria de Mancais Curtos) e de apoios simples

		Mancais			
		1	2	3	4
$m_{y3} = 3$	Reações (N)				
	$F_y^s$	55.10	-14.75	119.11	44.81
	$F_z^s$	-0.86	9.82	-9.59	0.63
$m_{z3} = -3$	$R_y$	62.05	-100.36	203.94	38.64
	$F_y^s$	49.76	66.91	35.42	52.18
	$F_z^s$	-5.23	75.79	-77.10	6.54
	$R_z$	51.07	51.06	51.06	51.07
		-10.92	151.37	-152.93	12.48

Este mesmo rotor AA foi estudado por Feng & Hahn (1998), também com o objetivo de validar as formulações por eles desenvolvidas, nas quais foi empregado o MMT juntamente com a Teoria de Mancais Curtos convencional. Os valores de  $\sigma_{ins}$  aqui calculados, bem como os das duas referências mencionadas, são comparados nas figuras 5.6a e 5.6b. Devido à simetria do sistema, os resultados não dependem dos sinais de  $m_{y3}$  ou  $m_{z3}$ , e a tangente à curva na origem é nula nos gráficos da referência original.



**Figura 5.6a** Comparação dos valores de  $\sigma_{ins}$  do rotor AA:  $-3 \leq m_{y3} \leq 3$ ; DZ: este trabalho, HU: Hori&Uematsu (1980), FH; Feng&Hahn (1998).



**Figura 5.6b** Comparação dos valores de  $\sigma_{ins}$  do rotor AA:  $-3 \leq m_{z3} \leq 3$ ; DZ: este trabalho, HU: Hori&Uematsu (1980), FH; Feng&Hahn (1998).

A correspondência entre os três conjuntos de resultados é muito boa até  $m_{y3} \approx \pm 1.5$  e  $m_{z3} \approx \pm 2.0$ ; a partir desse ponto, os resultados de Feng & Hahn (1998) divergem dos da

referência original, chegando a uma diferença máxima de 16%, muito embora nos dois trabalhos tenha sido empregada a mesma técnica de discretização. Os resultados obtidos neste trabalho divergem de maneira menos acentuada dos resultados de Hori & Uematsu (1980), chegando a uma diferença inferior a 10% nos níveis de desalinhamento máximo. Segundo Feng & Hahn (1998), as divergências devem-se às diferenças nos modelos de mancais e a possíveis discrepâncias nas propriedades dos eixos. Além desses fatores, pode-se também supor que diferentes critérios para o cálculo da posição de equilíbrio estático e dos autovalores, associados a diferenças de modelagem, tenham contribuído de modo cumulativo para as divergências mostradas.

Passa-se agora ao cálculo da resposta em regime permanente. Para tanto, será estudado o rotor da figura 5.7 (Feng & Hahn, 1998), que consiste em um eixo homogêneo apoiado em três mancais planos idênticos, submetido a excitação por desbalanceamento estático; trata-se agora de um rotor ao qual não se aplica o alinhamento catenário. O eixo mede 2.0 m e tem um diâmetro de 0.1 m; as propriedades dos mancais são:  $D = 0.1\text{ m}$ ,  $L = 0.05\text{ m}$ ,  $c_R = 1.0 \times 10^{-4}\text{ m}$  e  $\mu = 0.007\text{ Ns/m}^2$ . Os autores analisaram a influência do desalinhamento estático paralelo na direção horizontal do mancal intermediário, de magnitude  $-0.3 \leq m_{z2} \leq 0.3$ , sobre a estabilidade e a resposta em regime permanente do rotor. A configuração a partir da qual foram impostos os desalinhamentos paralelos no mancal 2 corresponde àquela em que os três mancais suportam carregamentos estáticos iguais, com os moentes nas mesmas posições de equilíbrio estático relativo; a linha elástica correspondente a  $m_{z2} = 0.3$  é mostrada na figura 5.8. Conforme apresentado nas figuras 5.9a a 5.9c (figuras 12(a) a 12(c) da referência), o comportamento dinâmico do rotor foi pouco afetado pelos desalinhamentos impostos.

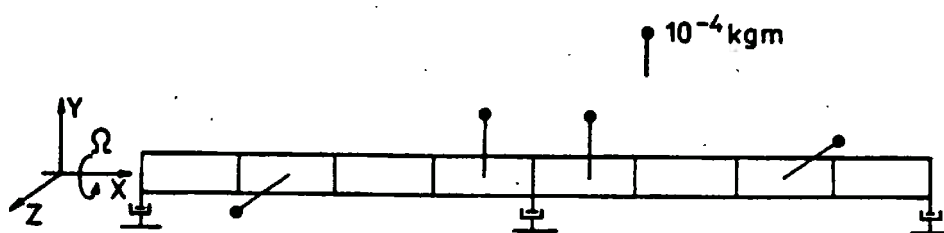


Figura 5.7 Rotor homogêneo apoiado em três mancais (Feng & Hahn, 1998).

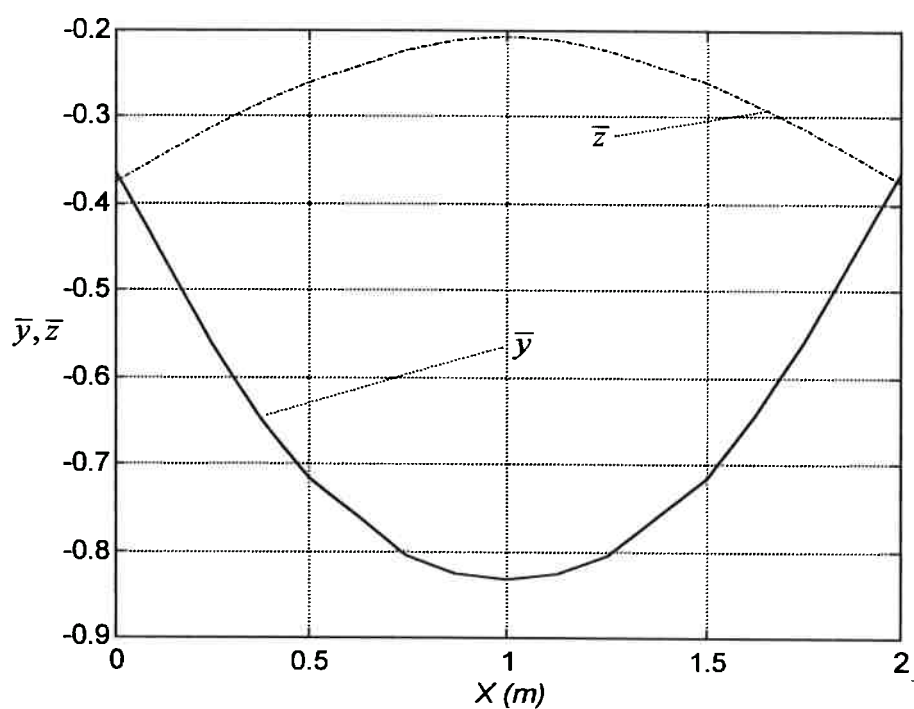


Figura 5.8 Rotor na configuração correspondente a  $m_{z2} = 0.3$

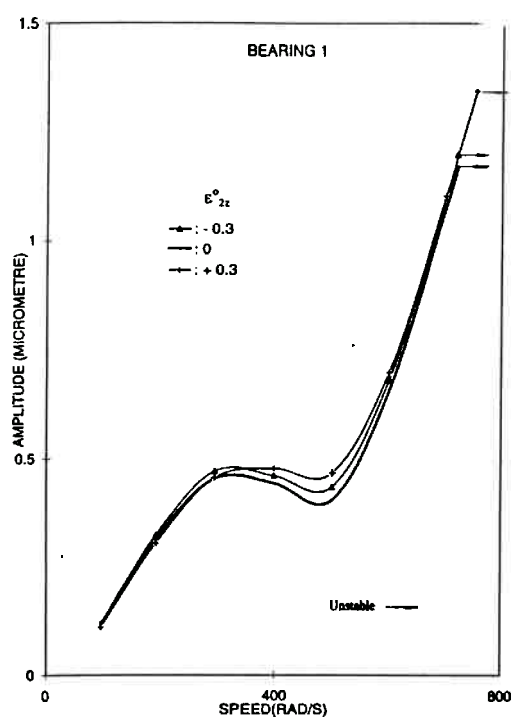
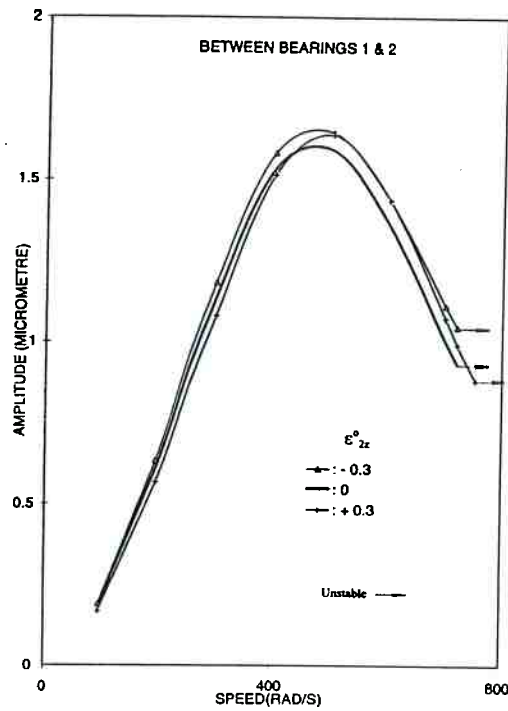
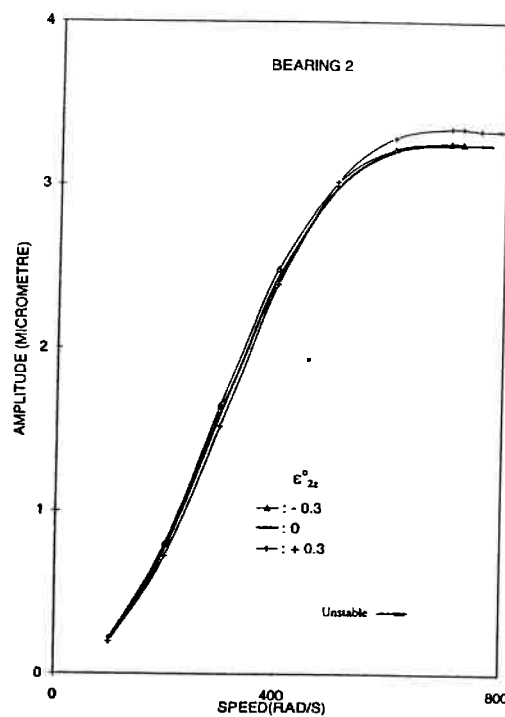


Figura 5.9a Curva de resposta em frequência (amplitude de translação) do mancal da esquerda: nó 1 (Feng & Hahn, 1998).





**Figura 5.9b** Curva de resposta em frequência (amplitude de translação) do nó 4, entre os mancais 1 e 2 (Feng & Hahn, 1998).



**Figura 5.9c** Curva de resposta em frequência (amplitude de translação) do mancal central: nó 7 (Feng & Hahn, 1998).

Neste trabalho foi adotada a mesma discretização empregada por Feng & Hahn (1998), indicada na figura 5.7, e que consiste em um modelo de 12 elementos; os resultados aqui calculados, apresentados nas figura 5.10a a 5.10c, correspondem à situação  $m_{z2} = 0.3$ .

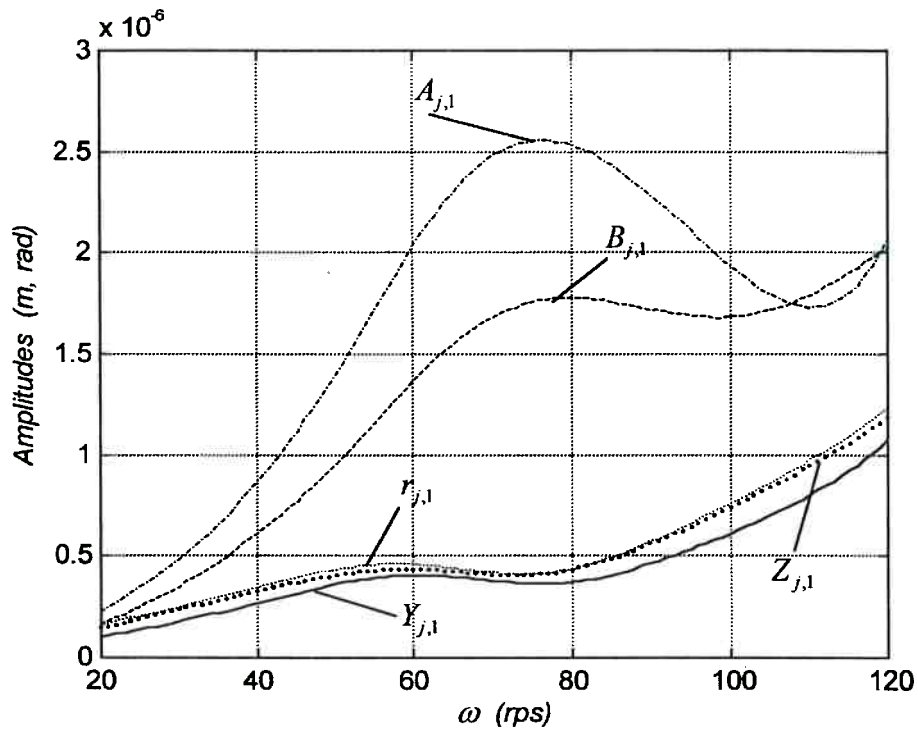


Figura 5.10a Curvas de resposta em frequência do nó 1 (mancal da esquerda).

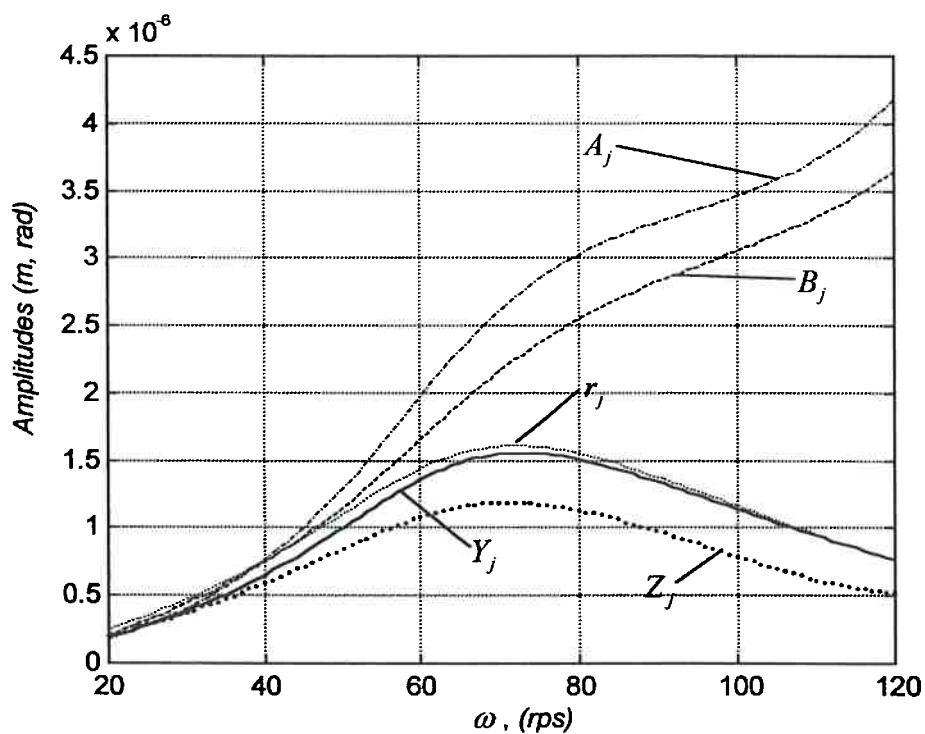
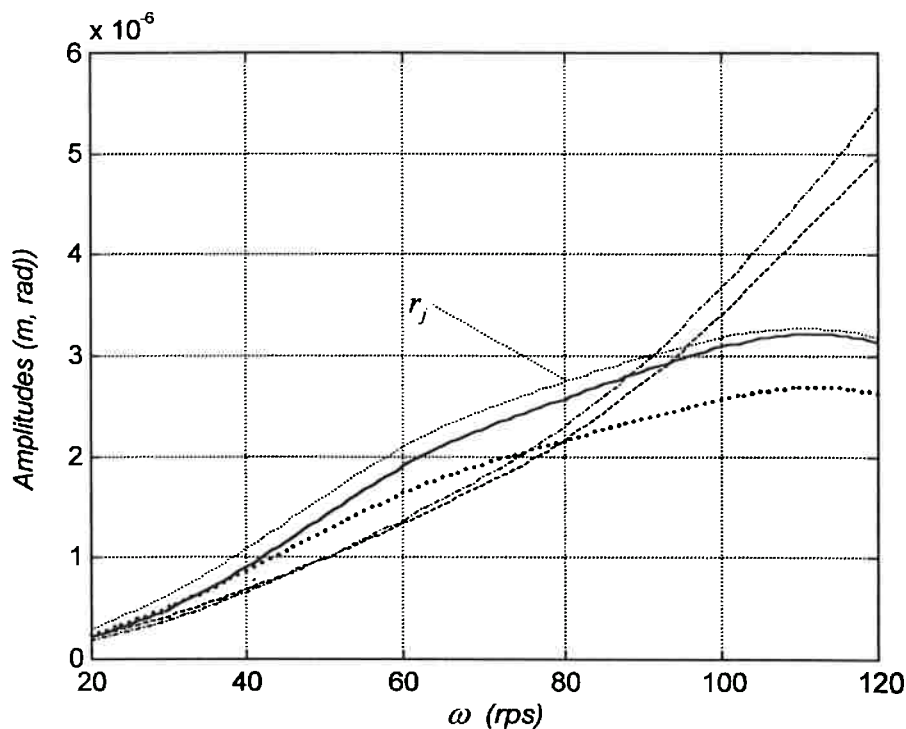
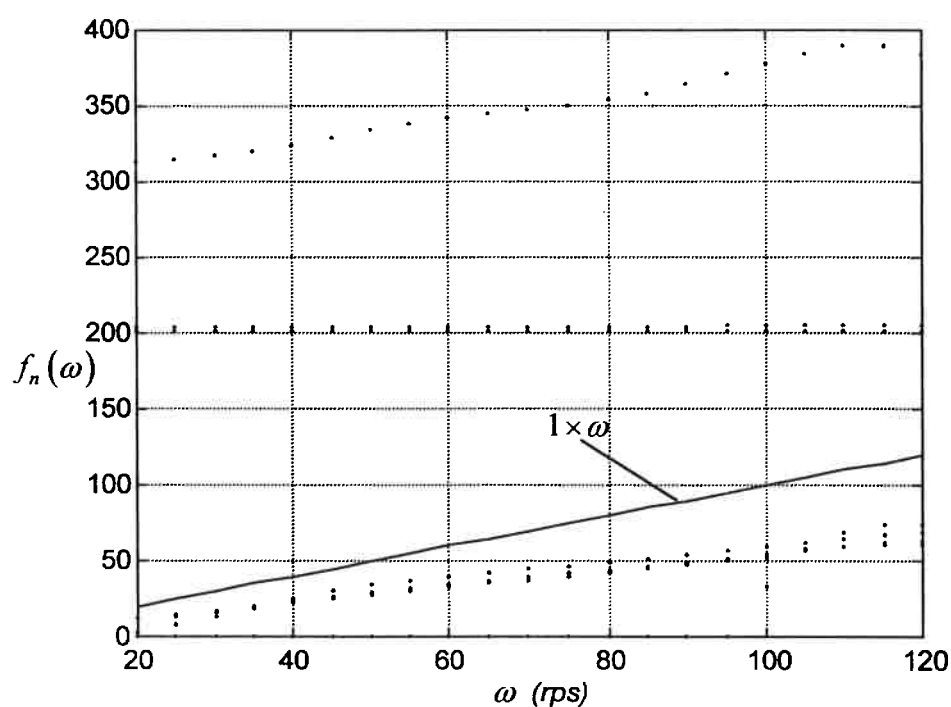


Figura 5.10b Curvas de resposta em frequência do nó 4 (entre os mancais 1 e 2)



**Figura 5.10c** Curvas de resposta em frequência, nó 7 (mancal 2).

Comparando os gráficos das figuras 5.9 e 5.10 observa-se que os valores calculados para amplitudes, velocidades críticas e velocidade limite de estabilidade são próximos. As discrepâncias verificadas podem advir de diversos fatores, como diferenças nos critérios de determinação das posições de equilíbrio e dos coeficientes dinâmicos, o número de velocidades em que os coeficientes foram calculados e o grau dos polinômios interpoladores utilizados para avaliar esses coeficientes em velocidades intermediárias. Deve-se lembrar também que, como as discretizações empregadas nos dois estudos foram idênticas, os resultados obtidos com a aplicação do MMT convencional são menos confiáveis que os obtidos através do MEF. Isto se deve principalmente ao tipo de matriz de inércia empregada nos dois métodos - massa consistente no MEF e “massa nodal” no MMT convencional - e reflete-se claramente nos autovalores. Feng e Hahn (1998) forneceram as 7 primeiras frequências naturais amortecidas correspondentes a  $\omega = 114.8$  rps: 61.8, 65.4, 69.4, 200.2, 204.4, 385.5, e 438.2 rps; a figura 5.11a mostra os gráficos das 7 primeiras frequências naturais aqui calculadas. Independentemente das pequenas diferenças entre os valores, chama a atenção que no trabalho de referência as frequências passam de 69.4 para 200.2 rps, enquanto que no gráfico da figura 5.11a verifica-se a existência de uma frequência adicional entre aqueles valores.



**Figura 5.11** Frequências naturais amortecidas,  $f_n(\omega)$ .

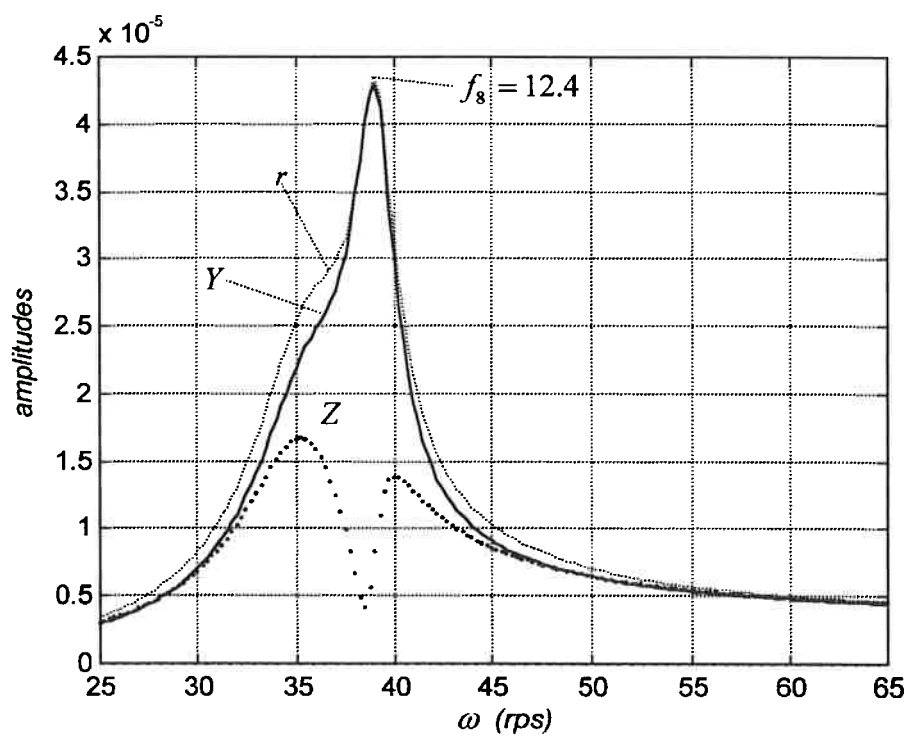
Os dois exemplos apresentados com o fim de averiguar a validade da implementação do MEF aqui descrita enfocaram rotores hiperestáticos, que constituem sistemas de análise mais complexa que a de rotores bi-apoiados, principalmente no que se refere ao cálculo das posições de equilíbrio estático dos moentes. Os casos estudados foram escolhidos entre os poucos exemplos disponíveis publicados por autores de renome com dados suficientes para realizar simulações. As pequenas discrepâncias observadas entre os resultados aqui calculados e os obtidos nas referências podem ser atribuídas a fatores inerentes às técnicas de discretização adotadas, e também à relativa complexidade do problema, que envolve a obtenção de diversos resultados intermediários que influem de maneira cumulativa nos resultados finais. Levando em conta todos esses fatores, considera-se que o procedimento aqui apresentado fornece resultados tão válidos quanto os de outros autores que pesquisaram temas correlatos. Nos próximos itens serão estudados os efeitos dos desalinhamentos dos mancais nas vibrações de rotores simples, semelhantes aos analisados até aqui.

### 5.3 Efeitos do Desalinhamento Angular nas Vibrações de Rotores Bi-Apoiados

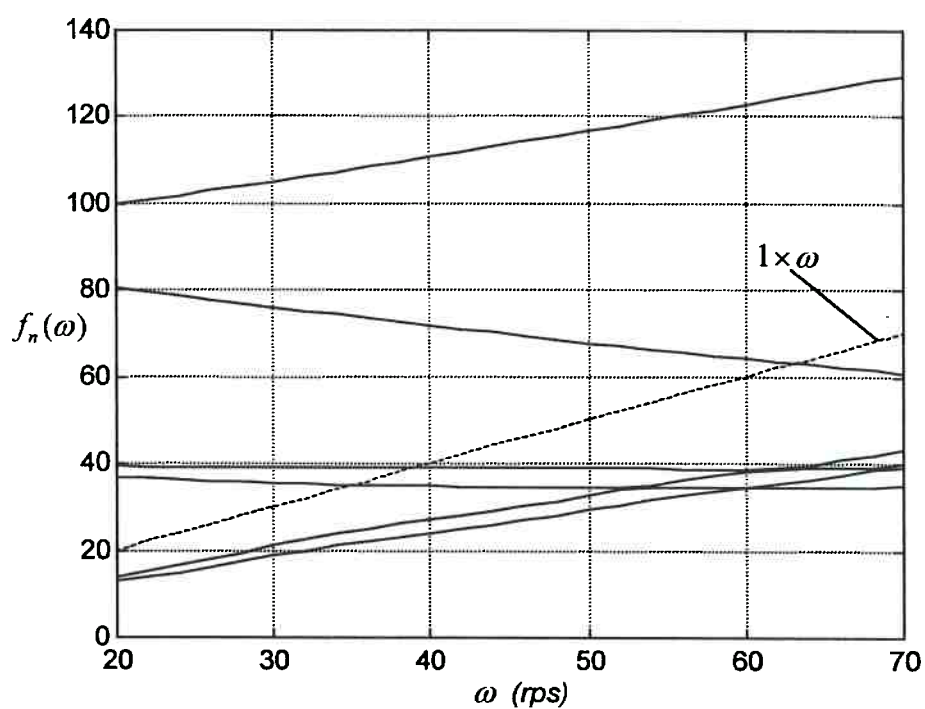
Para efetuar uma avaliação quantitativa dos efeitos do desalinhamento angular nas vibrações de rotores bi-apoiados, será considerado o rotor B estudado no item anterior, cujas propriedades foram fornecidas na tabela 5.1. Esta escolha deve-se ao fato de este rotor apresentar características compatíveis com as encontradas em equipamentos industriais, conforme pode ser verificado pelos resultados da análise de vibrações lineares apresentada a seguir.

A figura 5.12a mostra a curva de resposta em frequência do rotor B submetido a um desbalanceamento estático  $u = 3.5 \times 10^{-6} \text{ m}$ , calculada com a utilização do modelo plano de mancais hidrodinâmicos; nas figuras 5.12b e 5.12c são mostrados os resultados da análise de vibrações livres amortecidas deste rotor, que indicam a possibilidade de ocorrência de velocidades críticas em  $\omega \approx 35 \text{ rps}$ ,  $\omega \approx 39 \text{ rps}$  e  $\omega \approx 63 \text{ rps}$ . Os valores dos coeficientes diretos de rigidez correspondentes à velocidade crítica  $\omega_8 = 39 \text{ rps}$  são  $k_{yy} \approx 1.09 \times 10^6$  e  $k_{zz} \approx 0.86 \times 10^6 \text{ N/m}$ , resultando  $r_{ky} \approx 6.0$  e  $r_{kz} \approx 4.7$ ; considerando esses valores juntamente com a relação entre o comprimento do mancal e do eixo,  $r_L = 0.06$ , é de se esperar que esse rotor seja moderadamente sensível aos efeitos do desalinhamento angular, conforme as previsões qualitativas apresentadas no capítulo 4.

O fator de amplificação na passagem pela velocidade crítica,  $f_8 = 12.4$ , ultrapassa de modo não exagerado o valor máximo normalmente recomendado que é  $f_8 = 10.0$ , de modo que o estudo de viabilidade de um rotor com essas características não seria necessariamente descartado. Os demais rotores descritos na tabela 5.1 apresentam valores de  $r_k$  muito elevados, como por exemplo o rotor A, ao qual corresponde  $r_{ky} = 29.7$  na passagem pela velocidade crítica, o que caracterizaria uma máquina imprópria para aplicações industriais.



**Figura 5.12a** Curva de resposta do rotor B; mancais sem desalinhamento angular relativo, modelo plano de mancais.



**Figura 5.12b** Freqüências naturais amortecidas do rotor B.

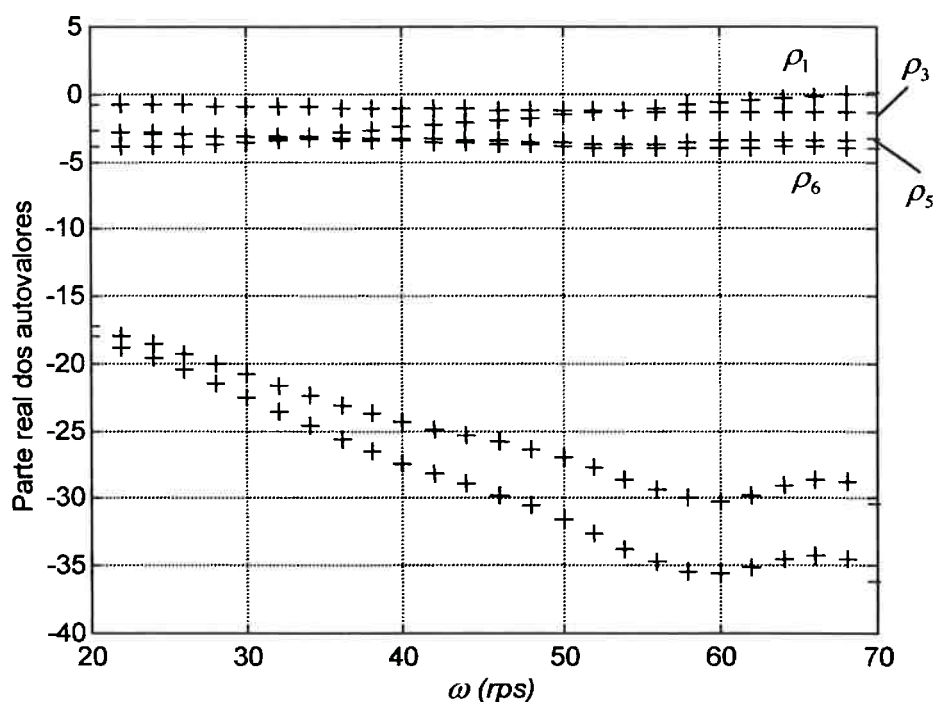


Figura 5.12c Estabilidade das posições de equilíbrio do rotor B.

Os casos aqui enfocados estão descritos na tabela 5.4, que mostra os valores dos desalinhamentos angulares relativos dos moentes, os fatores de amplificação nas passagens pelas velocidades críticas, as velocidades críticas e as velocidades limite de estabilidade calculados com a utilização de diferentes modelos lineares do mancal. Em todos os casos, os 8 coeficientes do modelo plano têm o mesmo valor desses coeficientes nos modelos de 16 e 32 coeficientes; no caso 1,  $\sigma_8$  e  $f_8$  identificam a velocidade limite de estabilidade e o máximo fator de amplificação obtidos em uma análise sem qualquer consideração de desalinhamento angular. Nos casos 2 a 5 os valores de  $\sigma_8$  e  $f_8$  correspondem a análises nas quais se considera apenas o desalinhamento angular estático. Constatou-se nos 5 casos analisados que a forma da linha elástica do rotor foi muito pouco afetada pelos esforços decorrentes do desalinhamento angular estático.

**Tabela 5.4** Velocidades críticas, velocidades limite de estabilidade e fatores de amplificação máximos para diferentes combinações de  $\bar{\alpha}_r$  e  $\bar{\beta}_r$ ; entre parêntesis são indicados os erros percentuais relevantes cometidos em cada caso, decorrentes da utilização do modelo plano e de 16 coeficientes dinâmicos.

Caso	1	2	3	4	5
$\bar{\alpha}_r$	0	0.25	0.50	0	0
$\bar{\beta}_r$	0	0	0	0.25	0.50
$\sigma_8$	67.6	68.9	69.7	69.4	75.2 (3.0)
$\sigma_{16}$	67.7	68.9	69.7	69.3	75.2 (3.0)
$\sigma_{32}$	67.7	68.9	69.6	69.1	73.0
$w_8$	39.0	39.0	38.9	39.0	39.0
$w_{16}$	38.9	39.0	39.0	39.0	39.0
$w_{32}$	38.9	39.0	39.5	38.8	38.3
$f_8$	12.4 (4.2)	12.8 (6.7)	14.2 (6.8)	13.1 (13.9)	15.3 (35.4)
$f_{16}$	11.9	12.1	12.8 (-3.8)	12.4 (7.8)	13.8 (22.1)
$f_{32}$	11.9	12.0	13.3	11.5	11.3

Verifica-se que as velocidades limite de estabilidade são afetadas pelo grau de desalinhamento angular estático bem como pelo modelo linear de mancais adotado; as maiores diferenças entre os valores de  $\sigma_{ins}$  ocorrem no caso 5, e serão comentadas posteriormente. As velocidades críticas são praticamente insensíveis ao desalinhamento angular relativo, conforme já havia sido constatado no capítulo 4.

As diferenças mais significativas envolvem os fatores de amplificação, e podem ser claramente visualizadas nas figuras 5.13 e 5.14. Na figura 5.13 é mostrada a variação de  $f_{32}$  nos casos 1, 2 e 3 ( $f_{32,1}$ ,  $f_{32,2}$  e  $f_{32,3}$ ); a figura 5.14 apresenta os gráficos de  $f_{8,1}$  e  $f_{8,5}$ , juntamente com os de  $f_{32,1}$ ,  $f_{32,4}$  e  $f_{32,5}$ . A curva de  $f_{8,1}$  é a que se obtém na análise usual de vibrações lineares de rotores, com a utilização do modelo plano de mancais; o gráfico de  $f_{8,5}$  é obtido utilizando-se o modelo plano do mancal com desalinhamento angular estático, e comparado com o gráfico de  $f_{32,5}$ , acarreta erros de até 35% nos resultados. O uso do modelo



de 16 coeficientes também pode fornecer resultados insatisfatórios, chegando a um erro de 22% no caso 5.

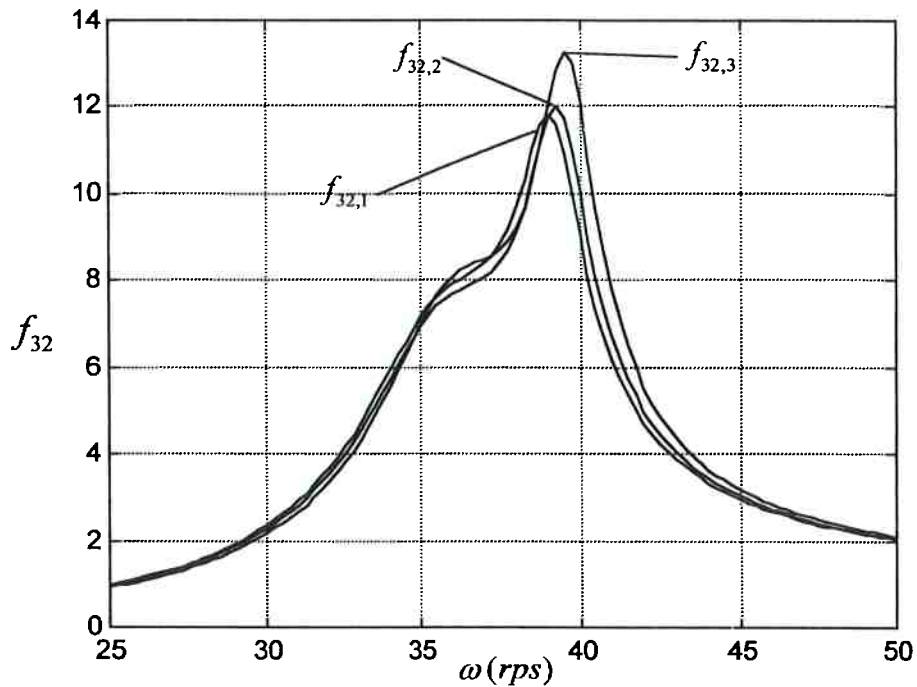


Figura 5.13 Comparação dos valores de  $f_{32}$  nos casos 1, 2 e 3.

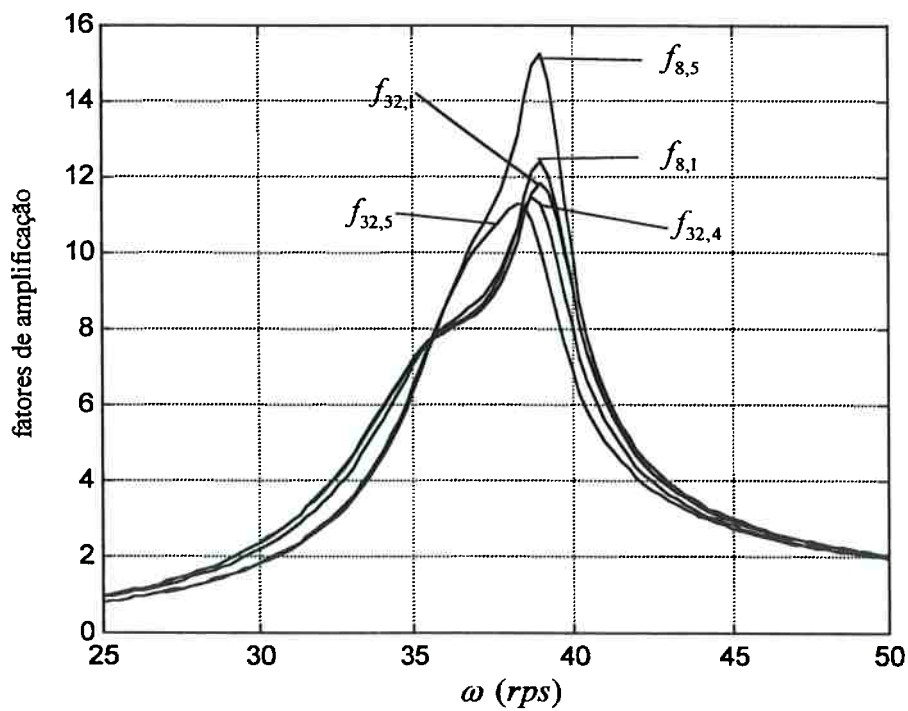


Figura 5.14 Comparação dos valores de  $f_8$  e  $f_{32}$  nos casos 1, 4 e 5.

Observa-se na tabela 5.4 que em todos os casos os valores de  $f_{16}$  são inferiores aos valores de  $f_8$  correspondentes, evidenciando a ação dos momentos associados aos coeficientes  $k_{AA}$ ,  $k_{BB}$ ,  $c_{AA}$ ,  $c_{BB}$  etc. na redução das amplitudes de vibração. No caso 3,  $f_{32}$  é superior a  $f_{16}$ , enquanto que nos casos 4 e 5,  $f_{32}$  é inferior a  $f_{16}$ , manifestando um comportamento oposto. Para uma melhor compreensão desse conjunto de resultados, são indicadas abaixo as matrizes adimensionais de rigidez e de amortecimento dos mancais relativas aos casos 1, 3 e 5, para  $\omega = 40 \text{ rps}$ :

•Caso 1

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} 2.82 & 0 & 3.65 & 0 \\ 0 & 0.07 & 0 & 0.01 \\ -0.78 & 0 & 2.21 & 0 \\ 0 & -0.09 & 0 & 0.12 \end{bmatrix}; \bar{C} = \begin{bmatrix} 6.45 & 0 & 2.33 & 0 \\ 0 & 0.07 & 0 & -0.06 \\ 2.35 & 0 & 2.99 & 0 \\ 0 & -0.06 & 0 & 0.13 \end{bmatrix};$$

•Caso 3

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} 3.58 & -0.49 & 3.71 & 0.57 \\ -0.053 & 0.10 & -0.19 & 0.01 \\ -0.78 & -0.16 & 2.03 & -0.03 \\ 0.78 & -0.19 & 0.57 & 0.26 \end{bmatrix}; \bar{C} = \begin{bmatrix} 6.64 & -0.24 & 2.03 & 1.00 \\ -0.24 & 0.10 & -0.09 & -0.10 \\ 2.03 & -0.08 & 2.75 & 0.26 \\ 1.00 & -0.10 & 0.26 & 0.31 \end{bmatrix};$$

•Caso 5

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} 3.61 & 0.77 & 4.72 & -0.56 \\ 0.29 & 0.26 & 0.69 & -0.06 \\ -0.34 & 0.71 & 3.22 & -0.29 \\ -0.43 & -0.27 & -0.74 & 0.22 \end{bmatrix}; \bar{C} = \begin{bmatrix} 7.02 & 0.60 & 2.30 & -0.52 \\ 0.59 & 0.20 & 0.48 & -0.15 \\ 2.31 & 0.49 & 3.54 & -0.55 \\ -0.51 & -0.15 & -0.54 & 0.24 \end{bmatrix}.$$

Os efeitos dos momentos hidrodinâmicos são estimados a partir dos valores dos coeficientes  $r_{AA}$ ,  $r_{BB}$ ,  $a_{AA}$  e  $a_{BB}$  (equações 4.8 e 4.11) nesses três casos:

$$r_{AA,1} = 0.043; \quad r_{BB,1} = 0.032; \quad r_{AA,3} = 0.073; \quad r_{BB,3} = 0.050; \quad r_{AA,5} = 0.061; \quad r_{BB,5} = 0.081;$$

$$a_{AA,1} = 0.020; \quad a_{BB,1} = 0.023; \quad a_{AA,3} = 0.047; \quad a_{BB,3} = 0.036; \quad a_{AA,5} = 0.034; \quad a_{BB,5} = 0.057.$$

Os valores acima mostram que esses adimensionais aumentam juntamente com o desalinhamento angular relativo, justificando a crescente diferença entre os valores de  $f_8$  e  $f_{16}$  nesses casos.

A interpretação dos resultados obtidos com a utilização do modelo completo é muito mais complexa, devido ao grande número de variáveis envolvidas; os valores dos diversos adimensionais considerados na análise qualitativa do capítulo 4 são dados abaixo:

$$\begin{array}{l}
 r_{YA,1} = 0.0; \quad r_{ZB,1} = 0.0; \quad r_{YA,3} = 0.16; \quad r_{ZB,3} = -0.08; \quad r_{YA,5} = -0.16; \quad r_{ZB,5} = 0.22; \\
 a_{YA,1} = 0.0; \quad a_{ZB,1} = 0.0; \quad a_{YA,3} = 0.15; \quad a_{ZB,3} = -0.03; \quad a_{YA,5} = -0.08; \quad a_{ZB,5} = 0.14; \\
 r_{AY,1} = 0.0; \quad r_{BZ,1} = 0.0; \quad r_{AY,3} = 0.22; \quad r_{BZ,3} = -0.09; \quad r_{AY,5} = -0.12; \quad r_{BZ,5} = 0.21; \\
 a_{AY,1} = 0.0; \quad a_{BZ,1} = 0.0; \quad a_{AY,3} = 0.15; \quad a_{BZ,3} = -0.03; \quad a_{AY,5} = -0.07; \quad a_{BZ,5} = 0.14.
 \end{array}$$

A possibilidade de se utilizar estes adimensionais juntamente com os gráficos apresentados no capítulo 4, relativos aos efeitos dos coeficientes  $r_{TR}$ ,  $r_{RT}$ ,  $a_{TR}$  e  $a_{RT}$  no fator de amplificação, está condicionada pelo fato de aqueles gráficos terem sido obtidos admitindo que os mancais proporcionavam amortecimento ótimo. Utilizando a expressão (4.15), chega-se aos seguintes valores aproximados para os coeficientes de amortecimento ótimo nas direções vertical e horizontal:  $c_{YY,o} \approx 4400$ , e  $c_{ZZ,o} \approx 3800 \text{ N s/m}$ ; comparando com  $\bar{c}_{YY} \approx 10400$  e  $\bar{c}_{ZZ} \approx 4600 \text{ N s/m}$  (valores médios de  $c_{YY}$  e  $c_{ZZ}$  nos casos 1,3 e 5), vê-se que há uma significativa diferença entre  $\bar{c}_{YY}$  e  $c_{YY,o}$ , o que prejudica a utilidade daqueles gráficos nesta análise específica. Há também a necessidade de se considerar simultaneamente a influência de diversos coeficientes de sinais opostos, o que dificulta ainda mais a utilização dos citados gráficos. Por outro lado, os adimensionais e coeficientes de rigidez e amortecimento apresentados permitem calcular os coeficientes de rigidez e amortecimento equivalentes, definidos nas equações (4.13) e (4.14) do capítulo 4, e mostrados na tabela 5.5. Nessa tabela,  $K_{YY}^u$  e  $C_{YY}^u$  são os coeficientes de rigidez e amortecimento equivalentes na direção  $Y$ , calculados considerando-se apenas os coeficientes diretos  $k_{YY}$  e  $c_{YY}$ ; com a inclusão dos coeficientes que relacionam translações e rotações, obtém-se os demais coeficientes de rigidez e amortecimento mostrados. Um procedimento análogo fornece os coeficientes  $K_{ZZ}^u$ ,  $K_{ZB}^u$ , etc. Os fatores de amplificação são calculados utilizando a expressão simplificada, indicada no item 4.2.2 .

**Tabela 5.5** Rigidez e amortecimento equivalentes, e fatores de amplificação do sistema desacoplado (análise qualitativa).

	Caso1	Caso3	Caso5
$K_{YY}^u$	$3.56 \times 10^5$	$3.55 \times 10^5$	$3.56 \times 10^5$
$C_{YY}^u$	85.10	75.81	73.81
$f_{YY}^u$	15.70	17.58	18.08
$K_{YA}^u$	$3.56 \times 10^5$	$3.60 \times 10^5$	$3.54 \times 10^5$
$C_{YA}^u$	85.10	77.30	77.10
$f_{YA}^u$	15.70	17.35	17.25
$K_{AY}^u$	$3.56 \times 10^5$	$3.61 \times 10^5$	$3.54 \times 10^5$
$C_{AY}^u$	85.10	74.35	75.25
$f_{AY}^u$	15.70	18.06	17.68
$K_{ZZ}^u$	$3.38 \times 10^5$	$3.36 \times 10^5$	$3.43 \times 10^5$
$C_{ZZ}^u$	127.71	137.48	94.24
$f_{ZZ}^u$	10.19	9.30	13.89
$K_{ZB}^u$	$3.38 \times 10^5$	$3.34 \times 10^5$	$3.48 \times 10^5$
$C_{ZB}^u$	127.71	138.98	92.42
$f_{ZB}^u$	10.19	9.30	14.27
$K_{BZ}^u$	$3.38 \times 10^5$	$3.34 \times 10^5$	$3.48 \times 10^5$
$C_{BZ}^u$	127.71	139.41	92.93
$f_{BZ}^u$	10.19	9.27	14.19

No que se refere ao caso 3, verifica-se claramente uma tendência de aumento de  $f_{YY}^u$ , associada a uma redução de  $C_{YY,3}^u$  em relação a  $C_{YY,1}^u$ . Com a inclusão dos coeficientes  $k_{YA}$  e  $c_{YA}$  no modelo plano, ocorre uma ligeira redução no fator de amplificação, pois  $C_{YA,3}^u$  é ligeiramente superior a  $C_{YY,3}^u$ ; ocorre o inverso quando se incluem os coeficientes  $k_{AY}$  e  $c_{AY}$ , resultando  $f_{AY,3}^u > f_{YY,3}^u$ . Tudo indica que o efeito líquido da inclusão dos coeficientes  $k_{YA}$ ,  $c_{YA}$ ,  $k_{AY}$  e  $c_{AY}$  consiste em um aumento no fator de amplificação das vibrações verticais, que

não é totalmente suplantado pela redução de amplitudes proporcionada pelos momentos, acarretando  $f_{32,3} > f_{16,3}$ .

Os resultados do caso 5 mostram que a inclusão dos coeficientes  $k_{YA}$ ,  $c_{YA}$ ,  $k_{AY}$  e  $c_{AY}$  no modelo plano causa uma redução da amplitude de vibrações verticais, pois  $f_{YA,5}^u$  e  $f_{AY,5}^u$  são menores que  $f_{YY,5}^u$ . Este efeito, somado à redução de amplitudes provocada pelos momentos, justificaria a obtenção de  $f_{32,5} < f_{8,5}$ , mas não de forma tão acentuada como a mostrada na figura 5.14.

A explicação para a significativa diferença nos valores de  $f_{32}$  e  $f_8$  no caso 5 está também associada ao aumento das amplitudes de vibrações horizontais, provocada pela diminuição dos coeficientes de amortecimento  $C_{ZZ,5}^u$ ,  $C_{ZB,5}^u$  e  $C_{BZ,5}^u$  em relação aos valores correspondentes nos demais casos. Compreende-se melhor esse efeito comparando as curvas das figuras 5.15a, 5.15b e 5.15c, que mostram os gráficos das vibrações nas direções horizontal e vertical, juntamente com o semi-eixo maior da órbita elíptica do disco, calculados com o uso do modelo completo, para os casos 1, 3 e 5, respectivamente. Observa-se que no caso 1 o pico de vibração horizontal ocorre próximo de  $\omega = 35 \text{ rps}$ , e que há pouco acoplamento com as vibrações verticais na passagem pela velocidade crítica em  $\omega = 39 \text{ rps}$ . No caso 3 é visível um aumento no valor do pico de amplitude da resposta horizontal, que ocorre em uma rotação de aproximadamente  $36 \text{ rps}$ . Novamente há pouco acoplamento com as vibrações verticais na passagem pela velocidade crítica, e o aspecto da curva de resposta nas imediações do pico de amplitude denota uma redução no amortecimento, conforme já comentado.

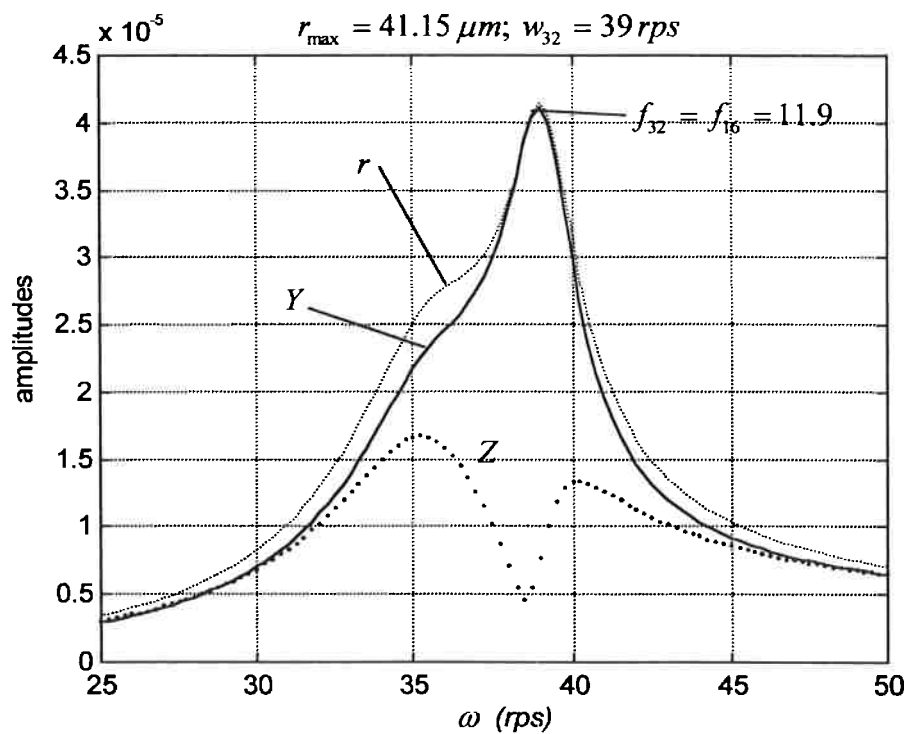


Figura 5.15a Curvas de resposta e valor de  $f_{32}$ , caso 1 da tabela 5.4.

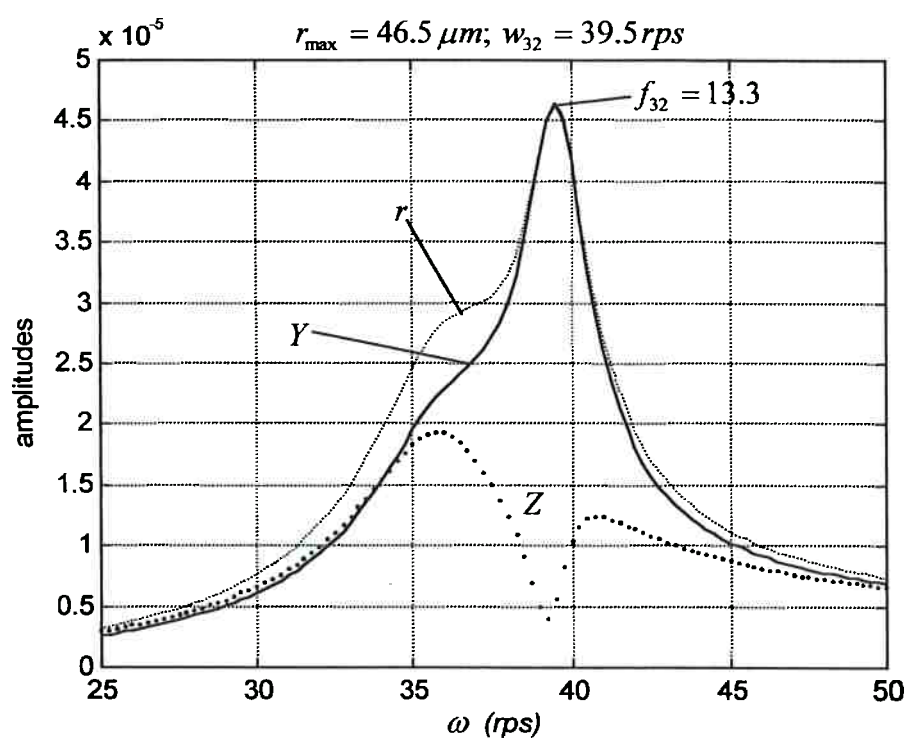
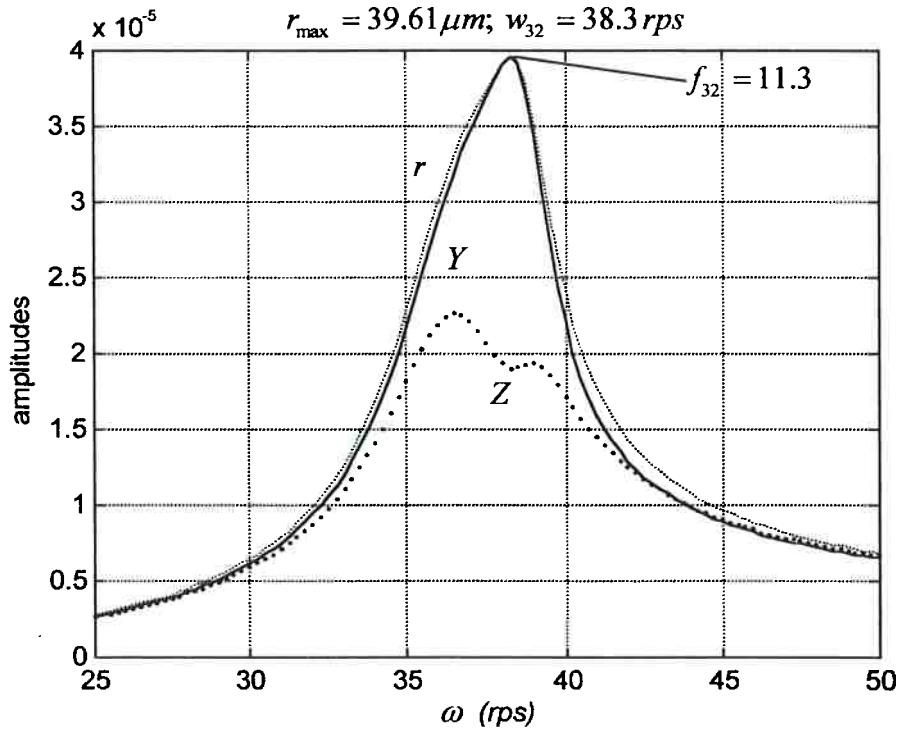


Figura 5.15b Curvas de resposta e valor de  $f_{32}$ , caso 3 da tabela 5.4.



**Figura 5.15c** Curvas de resposta e valor de  $f_{32}$ , caso 5 da tabela 5.4.

Já os gráficos da figura 5.15c mostram que o pico de resposta horizontal é de maior magnitude que nos casos anteriores, e que ocorre em uma rotação ainda mais elevada, próxima de 36.5 rps. É evidente também que as vibrações nas direções Y e Z apresentam um maior grau de acoplamento, e que o amortecimento na passagem pela crítica é maior. A redução de amplitude de vibração vertical decorre desse acoplamento, que intensifica a dissipação de energia proporcionada pelo amortecimento na direção horizontal.

Observando as figuras 5.15d e 5.15e, que mostram os gráficos das amplitudes de vibração calculadas com os modelos de 8 e 16 coeficientes no caso 5, nota-se que esse acoplamento de vibrações é muito menos intenso, e que portanto só pode ser causado pelos diversos coeficientes do tipo  $k_{TR}$ ,  $c_{TR}$ ,  $k_{RT}$  e  $c_{RT}$  presentes unicamente no modelo de 32 coeficientes. Dentre esses coeficientes há vários de magnitude significativa, como  $\bar{k}_{YB,5} = 0.77$ ,  $\bar{k}_{AZ,5} = -0.74$ ,  $\bar{c}_{YB,5} = 0.60$ ,  $\bar{c}_{BY,5} = 0.59$ ,  $\bar{c}_{ZA,5} = -0.55$  e  $\bar{c}_{AZ,5} = -0.54$ , cujo efeito específico não foi avaliado no estudo qualitativo do capítulo 4.

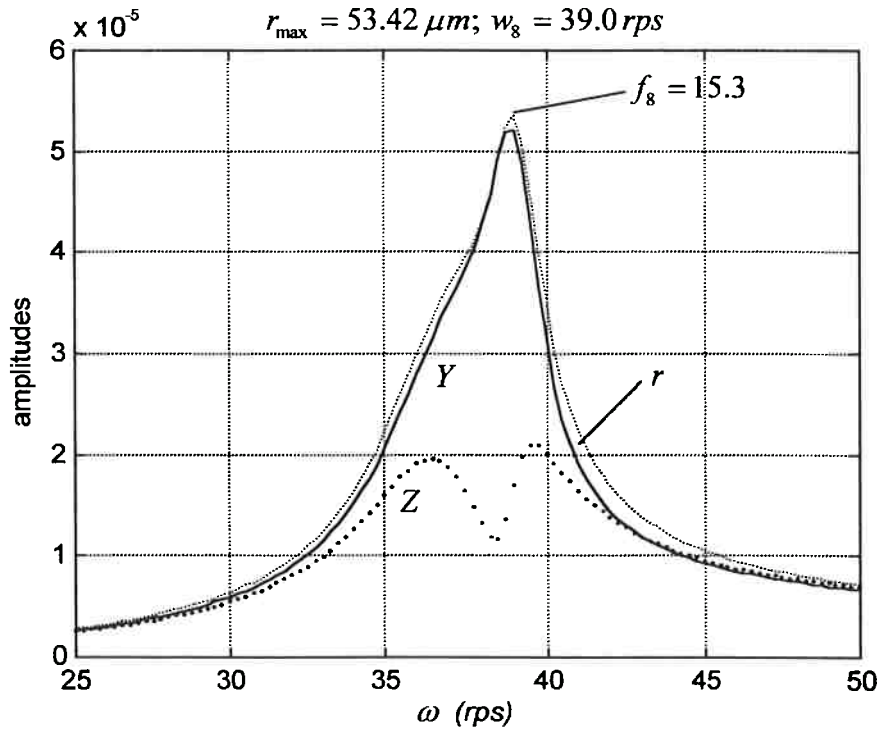


Figura 5.15d Curvas de resposta e valor de  $f_8$ , caso 5 da tabela 5.4.

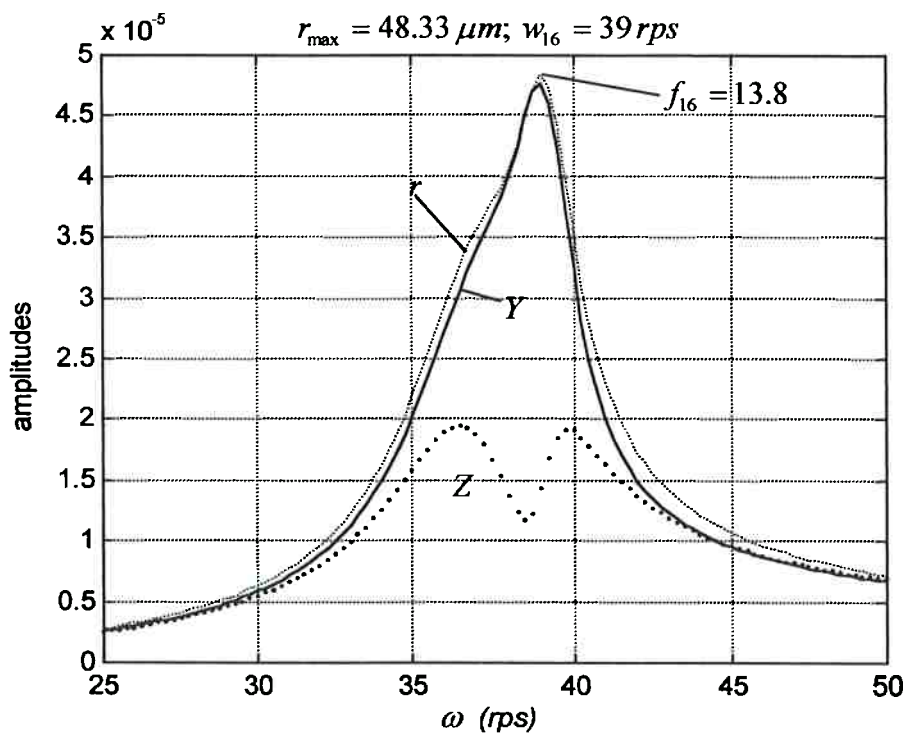
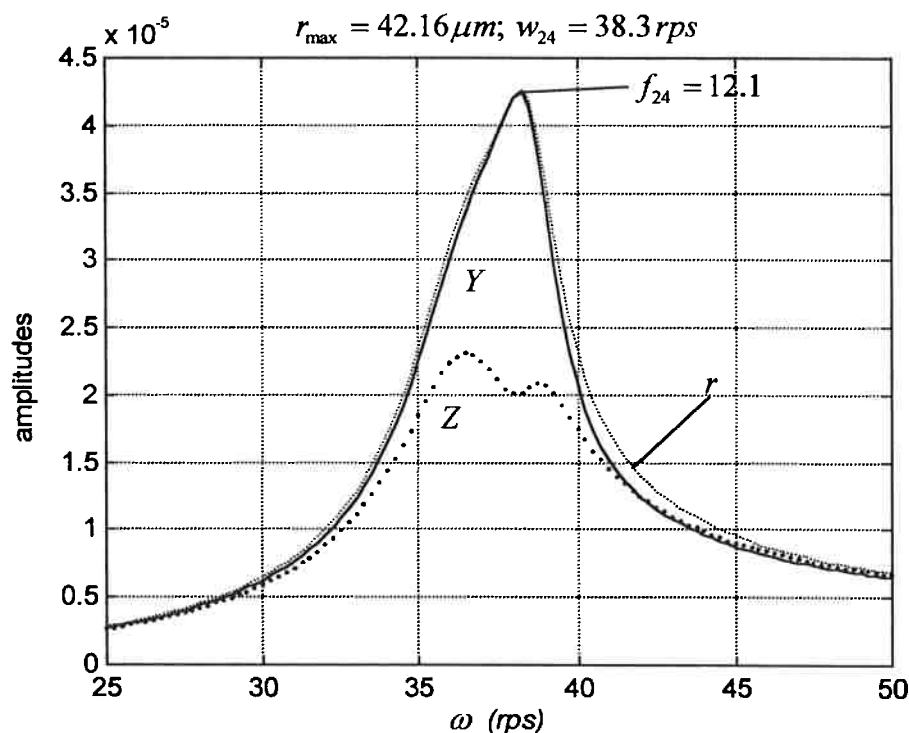


Figura 5.15e Curvas de resposta e valor de  $f_{16}$ , caso 5 da tabela 5.4.



Finalmente, para mostrar que o acoplamento e a conseqüente redução da amplitude de vibração são provocados pelos coeficientes do modelo completo, foi feito o cálculo da resposta excluindo das matrizes os coeficientes  $k_{RR}$  e  $c_{RR}$  relativos aos momentos, resultando um modelo de 24 coeficientes. Os resultados são mostrados na figura 5.15f, e comparando-os com os da figura 5.15e, constata-se claramente que a redução da amplitude é devida principalmente à presença dos coeficientes que acoplam forças a desalinhamentos angulares e momentos a translações, do modelo completo de mancais.



**Figura 5.15f** Rotor B, modelo de 24 coeficientes dinâmicos para verificação da origem do acoplamento entre vibrações verticais e horizontais na passagem pela velocidade crítica.

Retornando aos resultados da análise de estabilidade apresentados na tabela 5.4, verifica-se que  $\sigma_8$  e  $\sigma_{16}$  são ligeiramente superiores a  $\sigma_{32}$  nos casos 3 e 4, enquanto no caso 5 essa superioridade é mais nítida. É bem sabido que a estabilidade de rotores apoiados em mancais hidrodinâmicos depende primordialmente da relação entre os valores dos coeficientes cruzados de rigidez, que promovem o acoplamento de vibrações em diferentes direções, e os coeficientes diretos. No caso do modelo plano, a análise da estabilidade enfoca os 4 coeficientes de rigidez  $k_{YY}$ ,  $k_{YZ}$ ,  $k_{ZY}$  e  $k_{ZZ}$ ; no contexto deste estudo, a análise requer a consideração de todos os coeficientes de rigidez envolvidos, o que é encarado como impraticável. Será apenas verificado, para o caso concreto do rotor estudado, se o

acoplamento de vibrações promovido pelos coeficientes do tipo  $k_{TR}$  e  $k_{RT}$  também pode ser causador das diferenças observadas entre os valores de  $\sigma_8$ ,  $\sigma_{16}$  e  $\sigma_{32}$ . Considerando que esse acoplamento é mais nítido no caso 5, foi feito o cálculo de  $\sigma_{ins}$  correspondente ao modelo de 24 coeficientes descrito acima, resultando também  $\sigma_{ins} = 73.0 \text{ rps}$ . Este resultado indica que existe uma relação, pelo menos neste exemplo, entre os referidos coeficientes e a estabilidade do rotor. Constatou-se também que a imposição de desalinhamentos angulares ao mancal eleva o limite de estabilidade, chegando a um aumento de 7.3 % no caso 5.

De qualquer forma, mesmo que não seja possível identificar de um modo geral a origem das diferenças entre os resultados do estudo de estabilidade, estas são bem menos significativas que os erros cometidos no cálculo da resposta em regime permanente quando não se usa o modelo completo de mancais. Conforme já comentado, os resultados do caso 5 da tabela 5.4 tornam evidente que a simples consideração do desalinhamento angular estático no cálculo dos 8 coeficientes do modelo plano de mancais, ou ainda a inclusão dos coeficientes relacionados apenas aos momentos, pode levar a resultados significativamente incorretos. Por outro lado, os resultados relativos ao caso 1 dessa mesma tabela mostram que, mantido o alinhamento dos mancais durante a operação do equipamento, a influência do desalinhamento angular variável no tempo será pequena.

Foi verificado também, em todos os casos aqui enfocados, que o efeito da consideração das vibrações angulares dos moentes é a previsão de amplitudes de vibração inferiores às calculadas com o uso do modelo plano de mancais, confirmando os resultados qualitativos do capítulo 4.

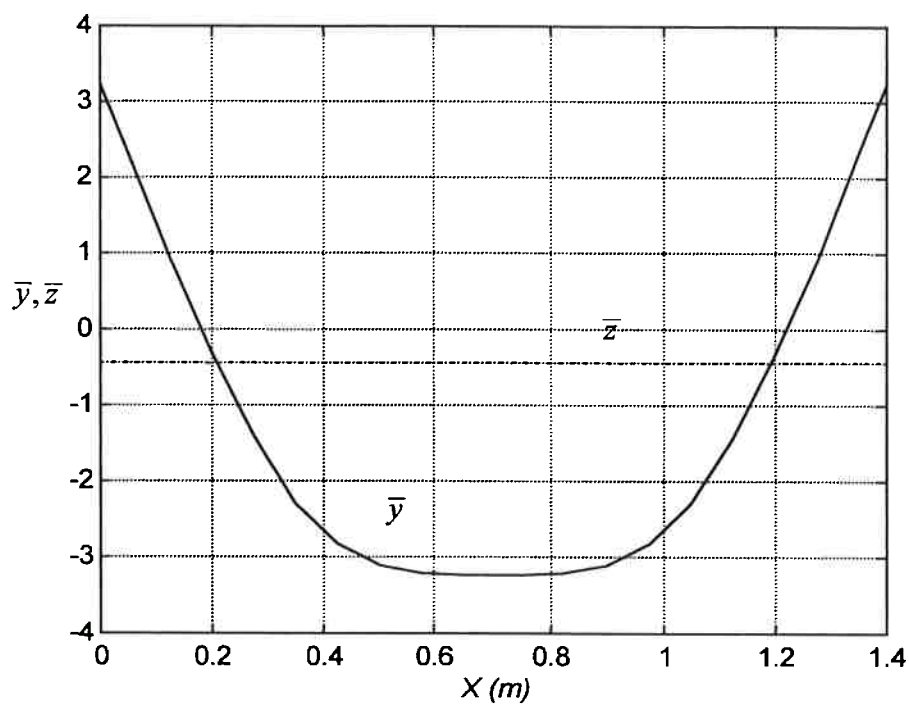
No próximo item será avaliada a influência dos desalinhamentos dos mancais no comportamento dinâmico de alguns tipos particulares de rotores hiperestáticos.

## 5.4 Efeitos do Desalinhamento Angular nas Vibrações de Rotores Hiperestáticos

O estudo de rotores hiperestáticos será centrado em dois tipos de arranjos, encontrados em uma ampla variedade de equipamentos: rotores apoiados em quatro mancais, compostos por dois rotores bi-apoiados rigidamente conectados, e rotores apoiados em três mancais. Dado que existem inúmeras possibilidades de combinação dos parâmetros que definem esses sistemas, o objetivo do estudo é fornecer alguns resultados ilustrativos, e, quando possível, indicar generalizações a nível qualitativo.

### 5.4.1 Rotor apoiado em quatro mancais

O rotor de quatro mancais considerado é composto por dois rotores tipo B, cujo comportamento dinâmico foi analisado no item anterior; o sistema resultante está representado na figura 5.4. A configuração de referência é a de alinhamento catenário, sem desalinhamento angular entre moentes e mancais, mostrada na figura 5.16. A excitação provém do desbalanceamento estático dos discos, de magnitude  $u = 3.5 \times 10^{-6} \text{ m}$ , e o ângulo entre os dois vetores  $\vec{U}_e$  é  $\varphi_{I,II}^e = \varphi_{u,II_0} - \varphi_{u,I_0}$ , onde  $I$  e  $II$  identificam o disco da esquerda e da direita, respectivamente.



**Figura 5.16** Rotor BB com alinhamento catenário.

Os resultados da análise de vibrações livres amortecidas, em que foi utilizado o modelo completo de mancais, são mostrados na figuras 5.17a e 5.17b; na figura 5.17a estão assinalados os pontos onde ocorreram as velocidades críticas, próximas a 35 e 52 rps. As velocidades limite de estabilidade calculadas com o uso do modelo completo e do modelo plano são  $\sigma_{32} = 70.2$  e  $\sigma_8 = 69.9$  rps, respectivamente.

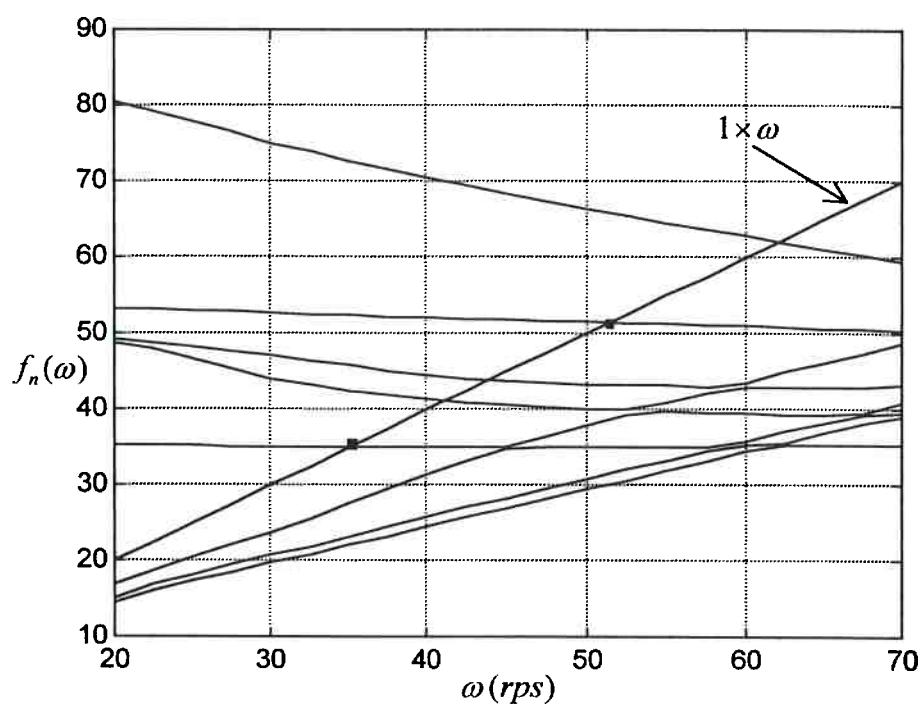


Figura 5.17a Frequências naturais amortecidas do rotor BB.

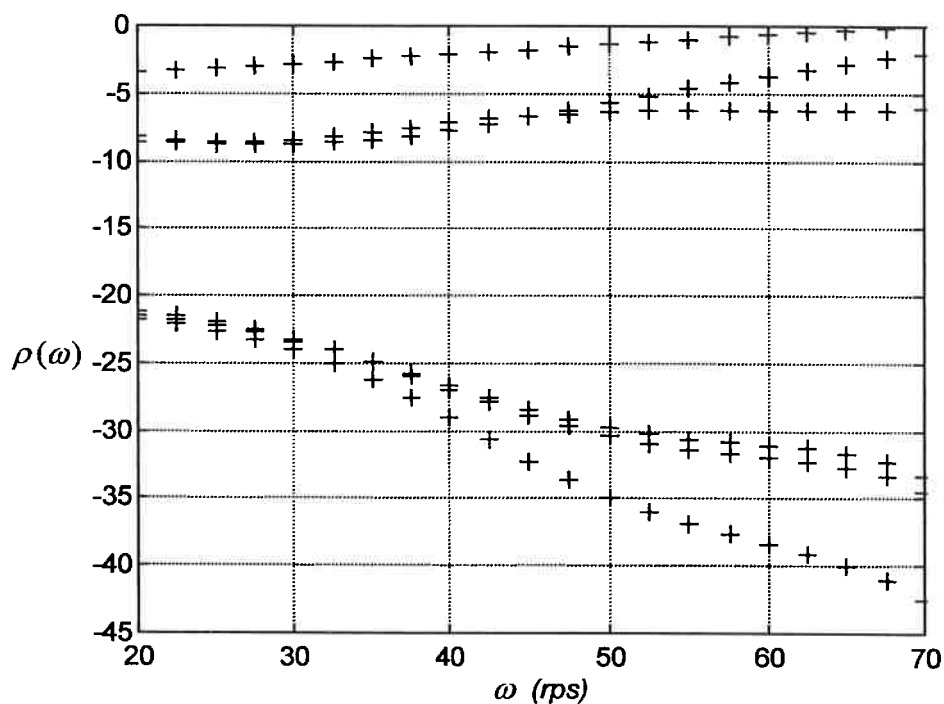
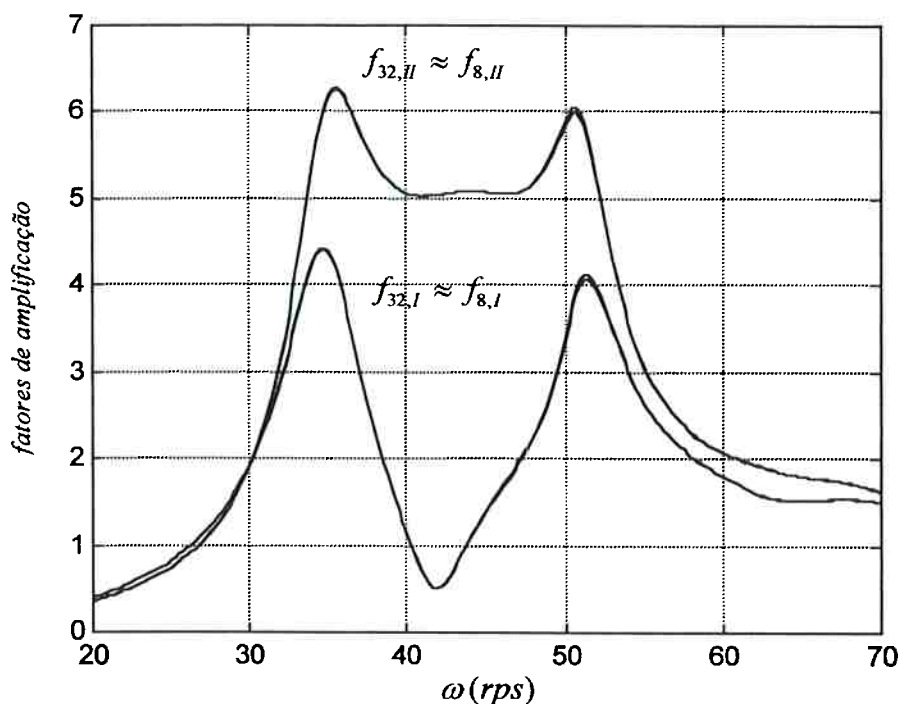


Figura 5.17b Estabilidade das posições de equilíbrio estático.

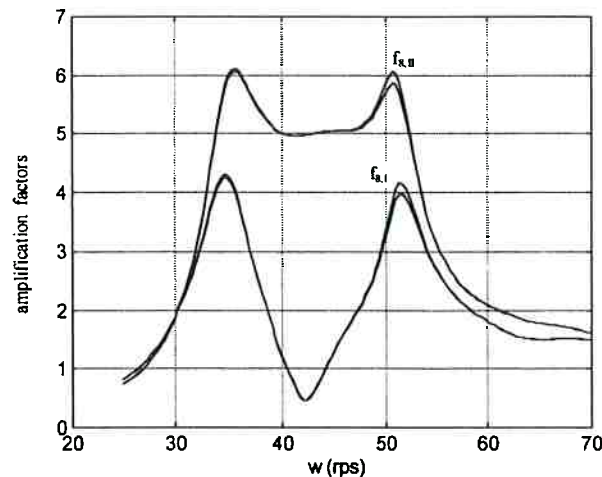
Comparando a resposta ao desbalanceamento calculada com o uso do modelo plano e completo de mancais, para diferentes valores de  $\varphi_{i,u}^e$ , constata-se que as diferenças são mínimas, conforme exemplificado na figura 5.18, que mostra os fatores de amplificação dos

dois discos; analogamente, os valores de  $\sigma_{32}$  e  $\sigma_8$  indicam que a velocidade limite de estabilidade foi muito pouco afetada pelo tipo de mancal empregado no cálculo.



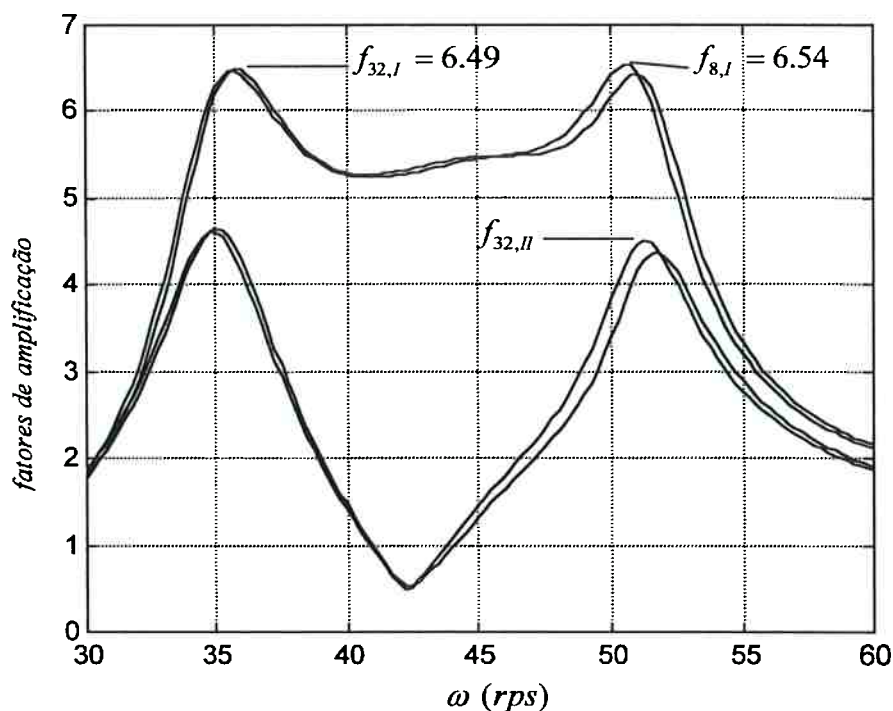
**Figura 5.18** Resposta ao desbalanceamento, rotor BB, comparação entre  $f_8$  e  $f_{32}$ ,  $\varphi_{I,II}^e = \pi/2$ .

Esses resultados não dependem unicamente do tipo de mancal empregado, conforme pode ser visto na figura 5.19 (Zachariadis, 1999), que mostra as curvas de resposta desse mesmo rotor apoiado em mancais curtos duplos. As propriedades desses mancais foram determinadas de modo a resultar mancais duplos equivalentes aos mancais empregados, caso esses fossem representados por mancais curtos. Neste caso, mantiveram-se o diâmetro, a folga radial e o comprimento total, resultante da soma do comprimento de duas pistas iguais, com  $L_l = L_r = 0.008 \text{ m}$ , e uma ranhura de largura  $L_g = 0.002 \text{ m}$ ; a viscosidade foi mudada para  $\mu = 0.08 \text{ Ns/m}^2$ . Sabendo que este tipo de mancal tende a magnificar os efeitos do desalinhamento angular, nas condições indicadas no capítulo 4, conclui-se que para esta configuração esses efeitos são pouco significativos.



**Figura 5.19** Curvas de resposta de rotor BB apoiado em quatro mancais curtos duplos, sem desalinhamento angular relativo dos moentes (Zachariadis, 1999).

A influência do desalinhamento angular relativo será avaliada considerando o rotor ainda em alinhamento catenário, mas na situação correspondente à do caso 3 da tabela 5.4, de modo que  $\bar{\alpha}_{r,1} = \bar{\alpha}_{r,3} = -0.5$  e  $\bar{\alpha}_{r,2} = \bar{\alpha}_{r,4} = 0.5$ , com  $\bar{\beta}_{r,i} = 0.0$ . As curvas de resposta mostradas na figura 5.20 mostram que a influência do desalinhamento angular ainda é pequena. Nota-se também que neste caso há pequenas diferenças nos valores das velocidades críticas, e que obteve-se  $f_{32} > f_8$ , correspondentes ao disco II na passagem pela velocidade crítica próxima a 51.5 rps; as velocidades limite de estabilidade são  $\sigma_{32} \approx \sigma_8 = 69.5$  rps.



**Figura 5.20** Curvas de resposta de rotor BB apoiado em quatro mancais, com desalinhamento angular relativo  $|\bar{\alpha}_{r,i}| = 0.5$  e  $\varphi_{1,II}^e = 3\pi/2$ .

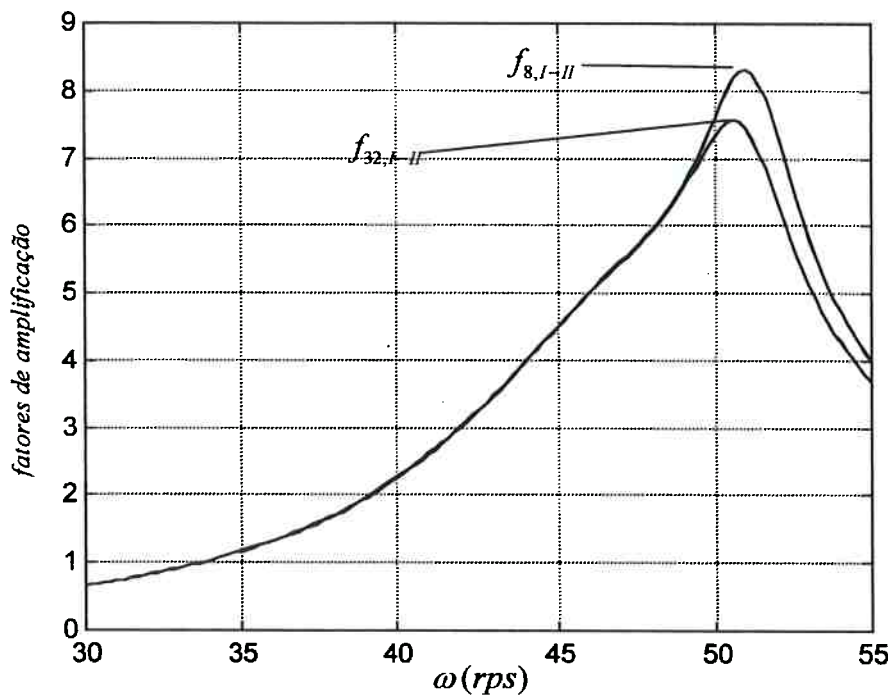
Uma possível explicação para os resultados anteriores é que a existência de um trecho de rigidez relativamente elevada entre os mancais internos introduz um efeito de engastamento que suplanta quase que completamente os momentos associados aos coeficientes  $k_{RR}$  e  $c_{RR}$ , sem suprimir o efeito enrijecedor dos coeficientes  $k_{RT}$  e  $k_{TR}$ , o que torna os resultados obtidos com o uso do modelo completo muito semelhantes aos do modelo plano de mancais. Procedendo de maneira análoga à anterior, considere-se agora os mancais com desalinhamentos angulares relativos correspondentes ao caso 5 da tabela 5.4, dados por  $\bar{\beta}_{r,1} = \bar{\beta}_{r,3} = -0.5$  e  $\bar{\beta}_{r,2} = \bar{\beta}_{r,4} = 0.5$ , com  $\bar{\alpha}_{r,i} = 0.0$ ; a tabela 5.6 mostra os resultados do cálculo da resposta em regime permanente para diferentes valores de  $\varphi_{1,II}^e$ . Em todas as tabelas que seguem, a diferença percentual é dada por  $100(f_8 - f_{32})/f_{32}$ .



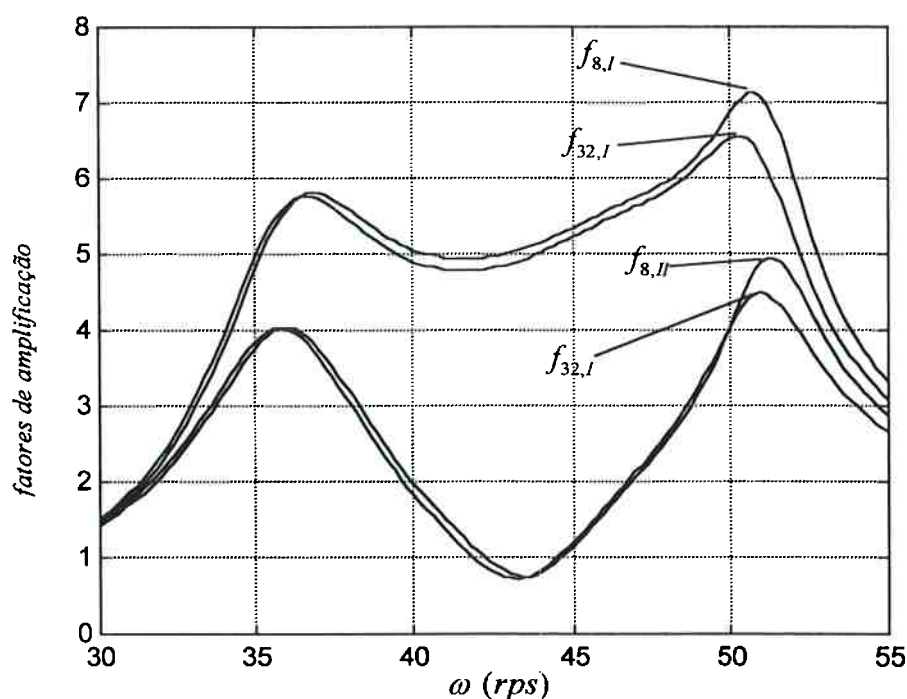
**Tabela 5.6** Velocidades críticas e fatores de amplificação máximos, rotor BB com  $|\bar{\beta}_{r,i}| = 0.5$ .

$\varphi_{I,II}^e$	$w_{32}$	$w_8$	$f_{32,max}$		$f_{8,max}$		diferença porcentual	
			I	II	I	II	I	II
0	50.6	51.0	7.58	7.58	8.32	8.32	9.8	9.8
$\pi/2$	50.4	50.8	4.49	6.56	4.95	7.13	10.3	8.7
$\pi$	36.2	36.4	6.83	6.83	6.87	6.87	0.6	0.6
$3\pi/2$	50.4	50.8	6.56	4.49	7.13	4.95	8.7	10.3

As curvas de resposta relativas a  $\varphi_{I,II}^e = 0.0$  e  $\varphi_{I,II}^e = 3\pi/2$  são mostradas nas figuras 5.21a e 5.21b, e as velocidades limite de estabilidade valem  $\sigma_{32} = 73.2$  e  $\sigma_8 = 74.3$  rps.



**Figura 5.21a** Curvas de resposta, rotor BB com  $|\bar{\beta}_{r,i}| = 0.5$  e  $\varphi_{I,II}^e = 0.0$ .



**Figura 5.21b** Curvas de resposta, rotor BB com  $|\bar{\beta}_{r,i}| = 0.5$  e  $\phi_{i,II}^e = 3\pi/2$ .

As diferenças decorrentes da utilização do modelo completo são mais nítidas neste caso, e têm as mesmas características apontadas no caso 5 da tabela 5.4, referente ao rotor B bi-apoiado, ou seja, há uma redução de amplitudes de vibração nas passagens pelas velocidades críticas e uma pequena redução também no valor de  $\sigma_{ins}$ . Neste caso, a influência dos coeficientes do tipo  $k_{RT}$  e  $c_{RT}$  é de promover o acoplamento entre vibrações verticais e horizontais, reduzindo a sua amplitude mesmo que o efeito dos coeficientes  $k_{RR}$  e  $c_{RR}$  seja desprezível, conforme já comentado.

Considerando em conjunto os resultados das figuras 5.20 e 5.21 conclui-se que a configuração analisada é pouco sensível aos efeitos do desalinhamento angular, cuja influência era muito mais nítida no comportamento do rotor B estudado isoladamente. A característica dessa configuração que deve ter reduzido os efeitos do desalinhamento angular na resposta é a rigidez relativamente elevada do trecho de eixo situado entre os mancais internos, que introduz um efeito de engastamento bem mais significativo que os momentos hidrodinâmicos aplicados pelos mancais.

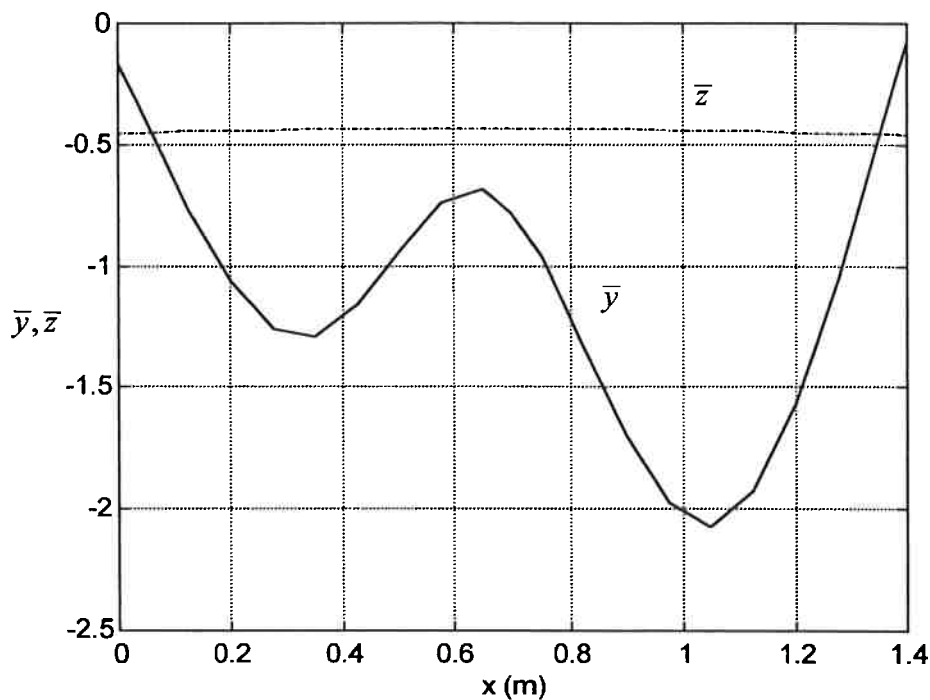
### 5.4.2 Rotor apoiado em três mancais

Passando agora ao estudo de rotores apoiados em três mancais, será analisado o rotor resultante da eliminação do mancal 3 do sistema anterior. Considere-se inicialmente que os três mancais estão alinhados ao eixo não deformado, resultando a linha elástica mostrada na figura 5.22. Nesta configuração, as coordenadas dos moentes em  $\omega = 20 \text{ rps}$  e as respectivas reações são dadas na tabela 5.7 (os valores de  $\bar{\beta}_r$  são desprezíveis):

**Tabela 5.7** Reações verticais, coordenadas absolutas e desalinhamentos angulares relativos dos moentes; rotor BB em 3 mancais.

Mancal	1	2	3
$R_y \text{ (N)}$	23.2	86.6	29.8
$\bar{y}_j$	-0.406	-0.686	-0.468
$\bar{z}_j$	-0.449	-0.434	-0.456
$\bar{\alpha}_r$	-0.043	-0.007	0.071

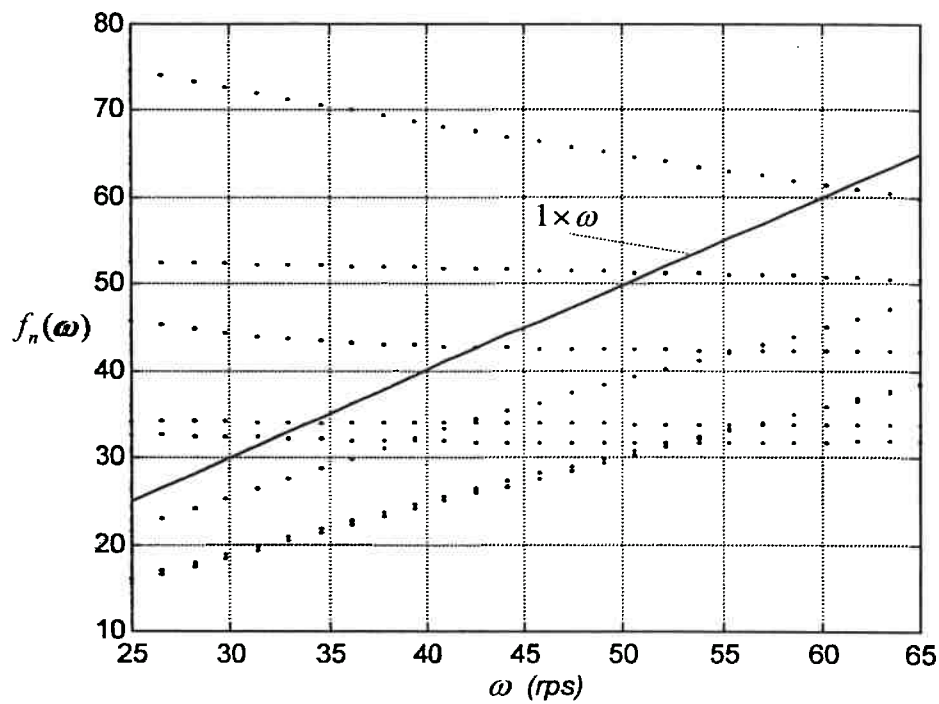
Nota-se que o mancal intermediário está excessivamente carregado, o que pode ser facilmente corrigido com a imposição de um desalinhamento paralelo para baixo, conforme será feito posteriormente.



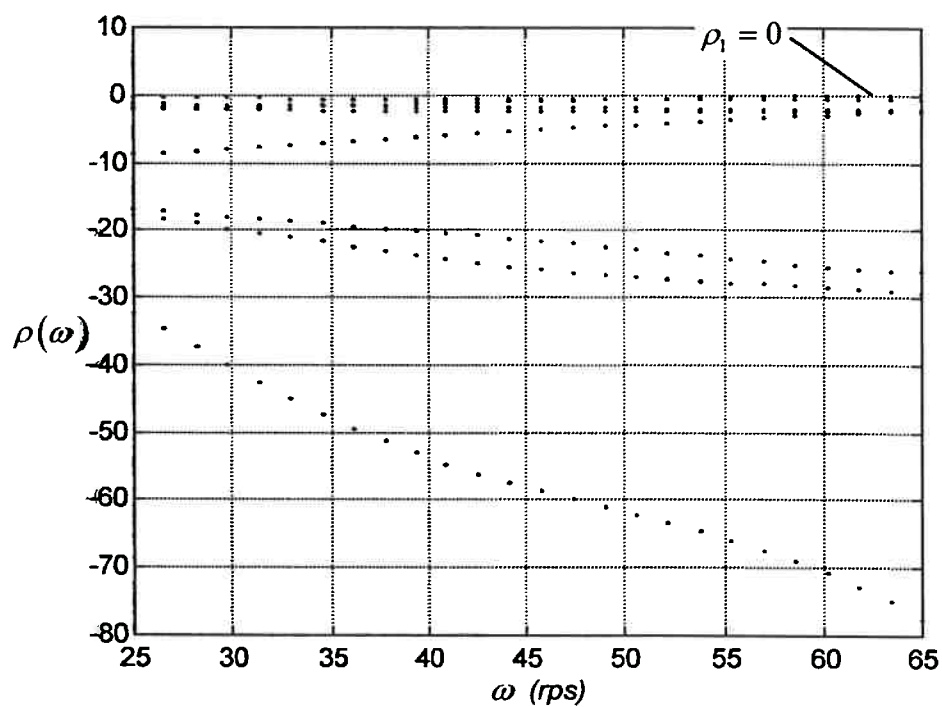
**Figura 5.22** Linha elástica do rotor BB apoiado em três mancais em linha.

Para anular o desalinhamento angular relativo dos moentes, foram impostos aos respectivos mancais desalinhamentos angulares idênticos aos mostrados na tabela 5.7, ou seja,  $\bar{\alpha}_{b,1} = -0.043$ ,  $\bar{\alpha}_{b,2} = -0.007$  e  $\bar{\alpha}_{b,3} = 0.071$ . A rigor, a correção das inclinações dos mancais uma única vez não garante a anulação dos desalinhamentos angulares relativos, pois cada vez que se altera um dos  $\bar{\alpha}_{b,i}$ , muda a linha elástica do rotor, de modo que os valores de  $\bar{\alpha}_{b,i}$  que resultam  $\bar{\alpha}_{r,i}$  nulos devem ser determinados iterativamente. Neste caso, porém, como os valores de  $\bar{\alpha}_{r,i}$  são pequenos, e os mancais são relativamente curtos, bastou impor a inclinação mencionada para se obter  $\bar{\alpha}_{r,i} \approx 0$  nos três moentes.

Os resultados do estudo de vibrações livres são mostrados nas figuras 5.23a e 5.23b, e os valores de  $\sigma_{ins}$  correspondentes são  $\sigma_{32} \approx \sigma_8 = 62.5$  rps; os resultados do cálculo da resposta ao desbalanceamento estão resumidos na tabela 5.8.



**Figura 5.23a** Freqüências naturais amortecidas, rotor BB apoiado em três mancais sem desalinhamento angular relativo.



**Figura 5.23b** Estabilidade das posições de equilíbrio, rotor BB apoiado em três mancais sem desalinhamento angular relativo.

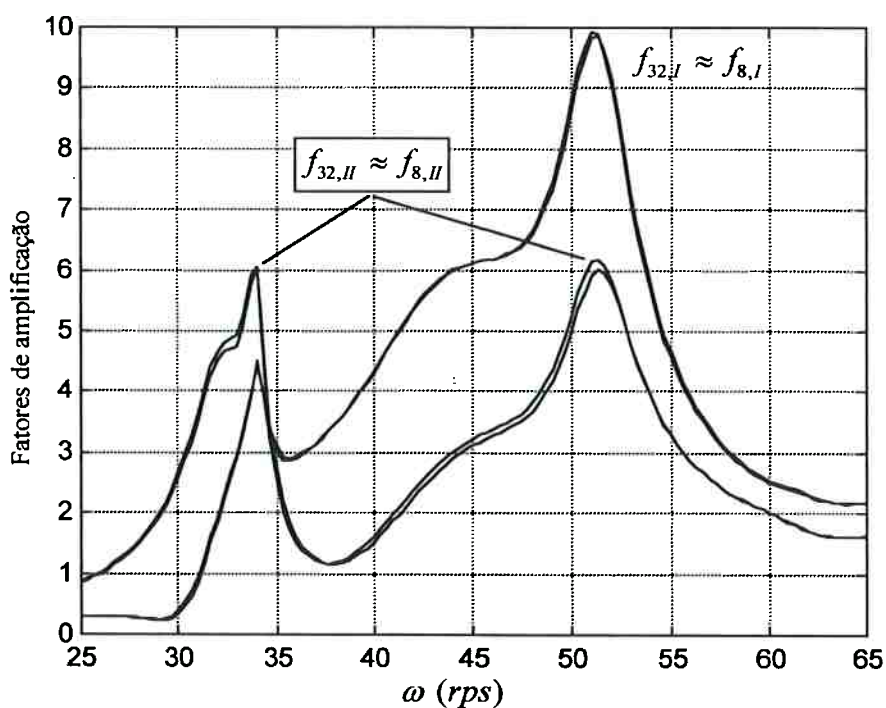
**Tabela 5.8** Velocidades críticas e fatores de amplificação máximos, rotor BB apoiado em três mancais sem desalinhamento angular relativo.

$\varphi_{I,II}^e$	$w_{32}$	$w_8$	$f_{32,max}$		$f_{8,max}$		diferença percentual	
			I	II	I	II	I	II
0	51.3	51.3	9.55	5.95	9.65	6.15	1.1	3.4
$\pi/2$	34.0	34.0	9.42	18.15	10.57	19.96	12.2	10.0
$\pi$	34.0	34.0	14.00	24.31	15.53	26.90	10.9	10.7
$3\pi/2$	34.0	34.0	11.00	17.16	12.12	19.05	10.2	11.0

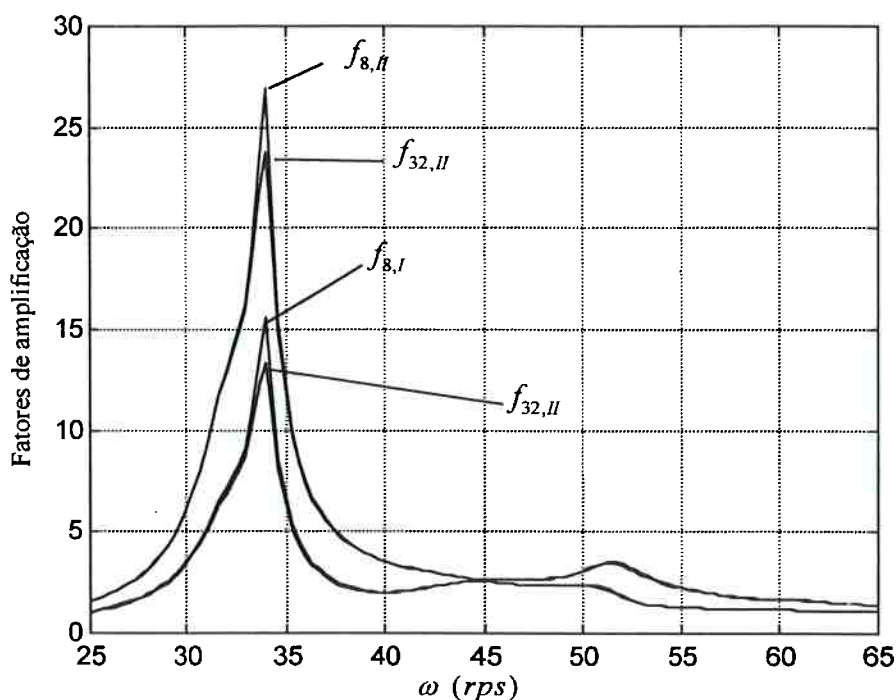
As curvas de resposta são semelhante às obtidas para a configuração seguinte, em que se impôs um desalinhamento angular  $\bar{\alpha}_{r,2} = 0.25$ , resultante de uma inclinação  $\bar{\alpha}_{b,2} = -0.259$  no segundo mancal. O valor de  $\bar{\alpha}_{b,2}$  foi determinado de modo iterativo, até resultar o valor de  $\bar{\alpha}_{r,2}$  desejado; não foi necessário alterar os valores de  $\bar{\alpha}_{b,1}$  e  $\bar{\alpha}_{b,3}$  para manter  $\bar{\alpha}_{r,1}$  e  $\bar{\alpha}_{r,3}$  praticamente nulos. Novamente, os valores de  $\sigma_{ins}$  calculados com o modelo completo e plano são muito próximos, e valem  $\sigma_{32} \approx \sigma_8 = 62.8$  rps; a tabela 5.9 apresenta o resumo dos resultados do cálculo da resposta, e as figuras 5.24a e 5.24b ilustram o aspecto das curvas de resposta.

**Tabela 5.9** Velocidades críticas e fatores de amplificação máximos, rotor BB apoiado em três mancais, mancais 1 e 2 sem desalinhamento angular relativo,  $\bar{\alpha}_{r,2} = 0.25$ .

$\varphi_{I,II}^e$	$w_{32}$	$w_8$	$f_{32,max}$		$f_{8,max}$		diferença porcentual	
			I	II	I	II	I	II
0	51.3	51.3	9.87	6.04	9.94	6.20	0.7	2.7
$\pi/2$	34.0	34.0	9.14	17.93	10.64	20.00	16.4	11.6
$\pi$	34.0	34.0	13.32	23.80	15.57	26.91	16.9	13.1
$3\pi/2$	34.0	34.0	10.50	16.78	12.10	19.00	15.2	13.2



**Figura 5.24a** Curva de resposta do rotor BB apoiado em três mancais, com  $\varphi_{I,II}^e = 0.0$  (tabela 5.9).



**Figura 5.24b** Curva de resposta do rotor BB apoiado em três mancais, com  $\varphi_{I,II}^e = \pi$  (tabela 5.9).

Ainda considerando os mancais externos sem desalinhamento angular relativo, e impondo agora  $\bar{\beta}_{r,2} = 0.25$  no mancal intermediário, resultam os valores da tabela 5.10; as velocidades limite de estabilidade são um pouco inferiores, dadas por  $\sigma_{32} \approx \sigma_8 = 58.5 \text{ rps}$ .

**Tabela 5.10** Velocidades críticas e fatores de amplificação máximos, rotor BB apoiado em três mancais, mancais 1 e 2 sem desalinhamento angular relativo,  $\bar{\beta}_{r,2} = 0.25$  e  $\bar{\alpha}_{r,2} = 0.0$ .

$\varphi_{I,II}^e$	$w_{32}$	$w_8$	$f_{32,\max}$		$f_{8,\max}$		diferença porcentual	
			I	II	I	II	I	II
0	51.3	34.0	9.87	6.22	10.10	6.52	2.3	4.8
$\pi/2$	34.0	34.0	10.37	19.50	10.94	20.50	5.5	5.1
$\pi$	34.0	34.0	15.03	25.67	15.92	27.50	5.9	7.1
$3\pi/2$	34.0	34.0	11.47	17.68	12.37	19.49	7.9	10.2



A grande diferença entre  $w_{32}$  e  $w_8$  quando  $\varphi_{I,II}^e = 0.0$  é entendida observando-se a figura 5.24a, que mostra curvas de resposta semelhantes às deste caso; conforme indicado nessa figura, os picos de vibrações do disco II nas passagens pelas críticas têm amplitudes muito semelhantes, embora resultem de ressonâncias em rotações distintas.

Comparando os valores de  $f_8$  da tabela 5.8, em que não há desalinhamento angular relativo, com os valores de  $f_8$  das tabelas 5.9 e 5.10, constata-se que a consideração do desalinhamento angular estático alterou pouco os coeficientes do modelo plano de mancais. As diferenças entre  $f_8$  e  $f_{32}$  devem-se principalmente à consideração dos coeficientes do modelo completo, e, contrariando os resultados anteriores, foi o desalinhamento angular no plano vertical ( $\bar{\alpha}_{r,2} = 0.25$ ) que causou as maiores reduções de amplitude. Isso decorre do relativo excesso de carregamento do mancal intermediário na direção vertical, o que torna o campo de pressões no filme de fluido lubrificante mais sensível a variações de espessura no plano vertical do que no plano horizontal.

Obtém-se uma distribuição mais uniforme de carregamentos nos mancais impondo um desalinhamento paralelo para baixo no mancal intermediário. Os resultados indicados na tabela 5.11 correspondem a um desalinhamento paralelo  $m_{y,2} = -11.0$  (aproximadamente 1.0 mm), medido a partir de  $Y_{b,2} = 0.0$ ; os mancais são mantidos paralelos ao eixo  $X$ , de modo que  $\bar{\alpha}_{r,i} = \bar{\alpha}_{j,i}$ , e os  $\bar{\beta}_{r,i}$  resultantes são praticamente nulos.

**Tabela 5.11** Reações verticais, coordenadas absolutas e desalinhamentos angulares relativos dos moentes; rotor BB em 3 mancais com  $m_{y,2} = -11.0$ .

Mancal	1	2	3
$R_y (N)$	42.4	51.1	46.3
$\bar{y}_j$	-0.515	-11.588	-0.528
$\bar{z}_j$	-0.451	-0.453	-0.447
$\bar{\alpha}_r$	-0.274	-0.030	0.291

Nota-se que o valor de  $\bar{\alpha}_{r,2}$  equivale a somente 3% do desalinhamento angular máximo relativo, de modo que apenas os desalinhamentos angulares relativos dos mancais 1 e 3 influem significativamente nos resultados.

Como era de se esperar, o aumento de excentricidade relativa dos mancais 1 e 3 tornou o rotor mais estável em relação à configuração anterior, em que os três mancais estavam em linha, resultando  $\sigma_{32} \approx \sigma_8 = 67.0 \text{ rps}$ . A linha elástica do rotor é mostrada na figura 5.25, e o resumo do cálculo da resposta em frequência é fornecido na tabela 5.12; as figuras 5.26a e 5.26b ilustram o aspecto das curvas de resposta correspondentes a  $\varphi_{i,II}^e = 0.0$  e  $\varphi_{i,II}^e = \pi/2$ .

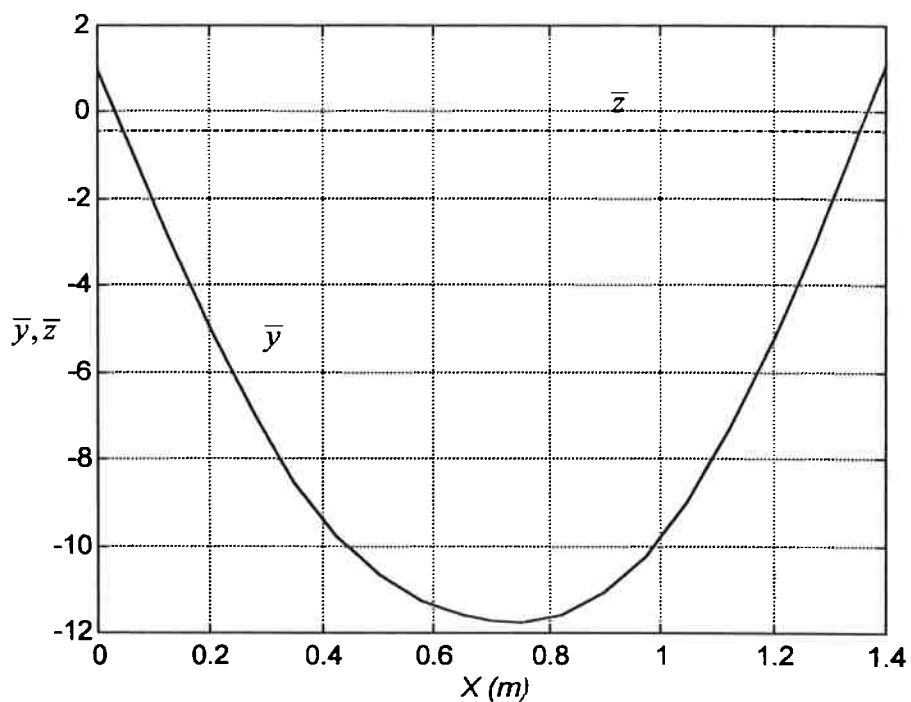


Figura 5.25 Linha elástica do rotor BB apoiado em três mancais, com  $m_{y,2} = -11.0$ .

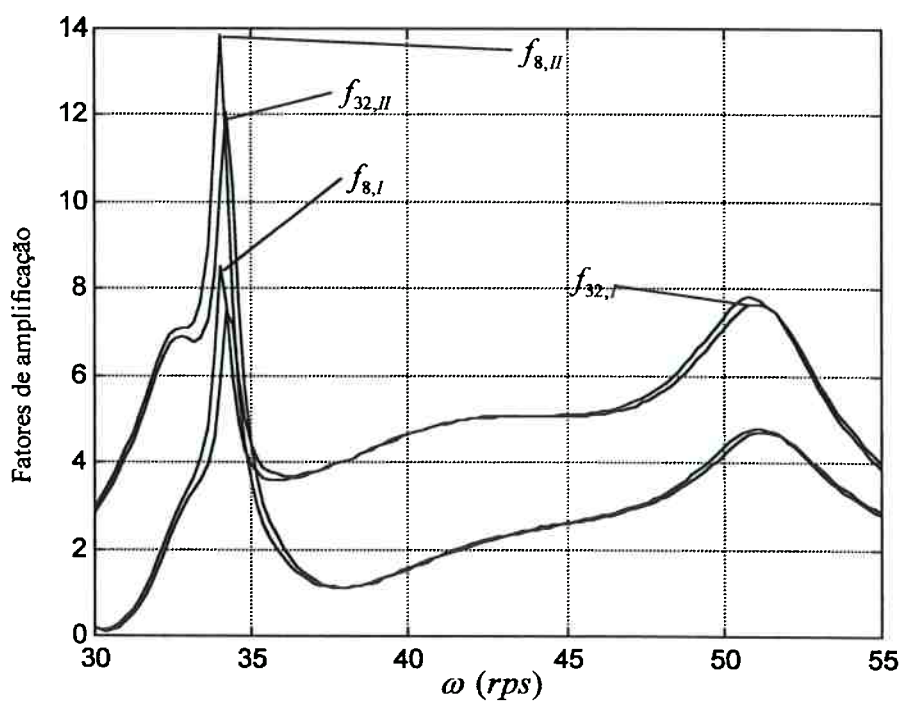
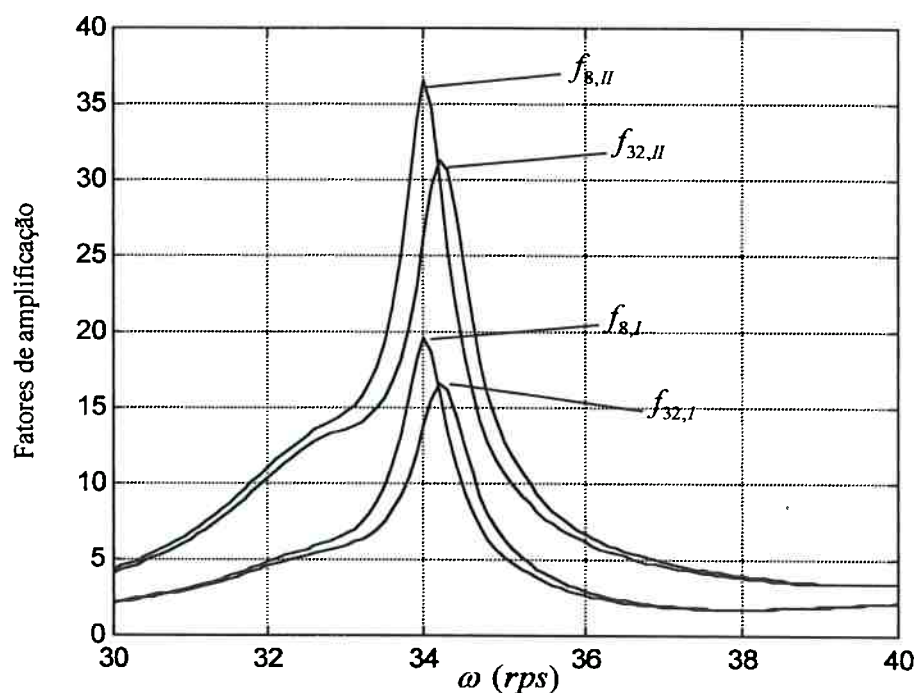


Figura 5.26a Curvas de resposta do rotor BB apoiado em três mancais, com  $m_{y,2} = -11.0$  e  $\varphi_{I,II}^e = 0.0$  (tabela 5.10).

**Tabela 5.12** Velocidades críticas e fatores de amplificação máximos, rotor BB apoiado em três mancais, com  $m_{y,2} = -11.0$ ,  $\bar{\alpha}_{r,1} = -0.274$ ,  $\bar{\alpha}_{r,2} = -0.030$  e  $\bar{\alpha}_{r,3} = 0.291$ .

$\varphi_{1,II}^e$	$w_{32}$	$w_8$	$f_{32,max}$		$f_{8,max}$		diferença porcentual	
			I	II	I	II	I	II
0	34.3	34.0	7.67	12.08	8.52	13.86	11.1	14.7
$\pi/2$	34.3	34.0	16.59	31.37	19.62	36.51	18.3	16.4
$\pi$	34.3	34.0	22.77	40.34	28.44	49.80	24.9	23.5
$3\pi/2$	34.3	34.0	17.92	29.43	22.16	36.54	23.7	24.2



**Figura 5.26b** Curvas de resposta do rotor BB apoiado em três mancais, com  $m_{y,2} = -11.0$  e  $\varphi_{1,II}^e = \pi/2$  (tabela 5.12).

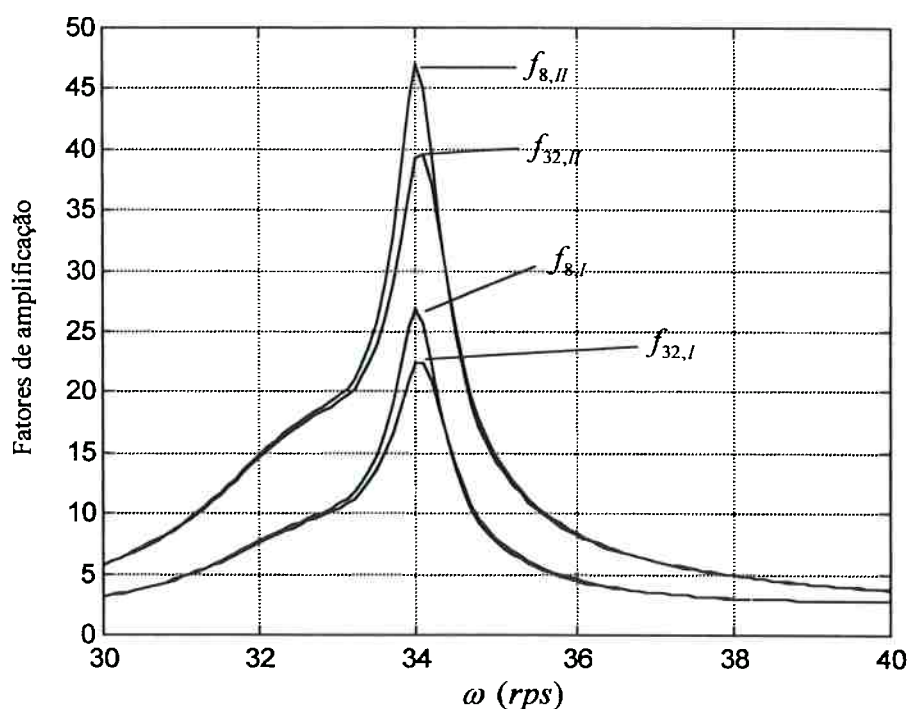
Os resultados da tabela 5.12 mostram que as diferenças entre  $f_{32}$  e  $f_8$  são significativas, evidenciando mais uma vez que a utilização do modelo plano de mancais com desalinhamento angular é incorreta. É importante notar que, em relação aos resultados das tabelas 5.8, 5.9 e 5.10 houve um aumento considerável dos fatores

de amplificação, principalmente do disco II, que ultrapassam o valor máximo normalmente aceito ( $f_{32} = 10.0$ ) para todos os valores de  $\varphi_{I,II}^e$ . Isto mostra que o efeito vantajoso do desalinhamento paralelo do mancal 2, que redundava em um aumento de aproximadamente 7 % em  $\sigma_{ins}$ , traz como contrapartida um desempenho pior do rotor na passagem pelas velocidades críticas.

Impondo aos mancais os desalinhamentos angulares  $\bar{\alpha}_{b,1} = -0.274$ ,  $\bar{\alpha}_{b,2} = -0.030$  e  $\bar{\alpha}_{b,3} = 0.291$ , resultam desalinhamentos angulares relativos praticamente nulos para os três moentes. O rotor fica um pouco mais estável, com  $\sigma_{32} = 68.5$  e  $\sigma_8 = 68.0 rps$ , e os resultados do cálculo da resposta em regime permanente são resumidos na tabela 5.13; a figura 5.27 ilustra o aspecto das curvas de resposta na passagem pela velocidade crítica.

**Tabela 5.13** Velocidades críticas e fatores de amplificação máximos, rotor BB apoiado em três mancais, com  $m_{y,2} = -11.0$ ,  $\bar{\alpha}_{r,i} \approx 0.0$  e  $\bar{\beta}_{r,i} \approx 0.0$ .

$\varphi_{I,II}^e$	$w_{32}$	$w_8$	$f_{32,max}$		$f_{8,max}$		diferença porcentual	
			I	II	I	II	I	II
0	34.1	34.0	7.70	10.94	7.96	12.87	3.4	17.6
$\pi/2$	34.1	34.0	15.17	28.89	18.50	34.54	22.0	19.6
$\pi$	34.1	34.0	22.38	39.23	26.88	47.03	20.1	19.9
$3\pi/2$	34.1	34.0	17.65	28.71	20.93	34.40	18.6	19.8

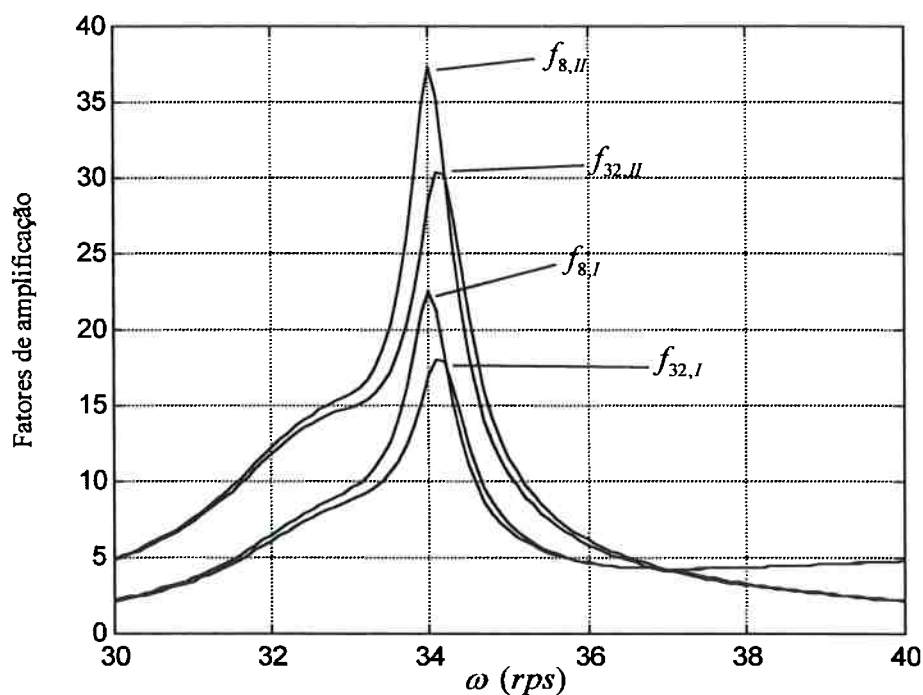


**Figura 5.27** Curva de resposta do rotor BB apoiado em três mancais, com  $m_{y,2} = -11.0$ , desalinhamentos angulares relativos nulos e  $\varphi_{I,II}^e = \pi$  (tabela 5.13).

Para encerrar esta série de exemplos, serão obtidos resultados concernentes a duas situações em que os três moentes apresentam desalinhamento angular relativo. Atribuindo novamente valores nulos às inclinações dos mancais 1 e 3 no plano vertical, isto é,  $\bar{\alpha}_{b,1} = \bar{\alpha}_{b,3} = 0.0$ , resulta  $\bar{\alpha}_{r,1} = -0.274$  e  $\bar{\alpha}_{r,2} = 0.291$ . Impondo  $\bar{\alpha}_{b,2} = -0.380$  resulta  $\bar{\alpha}_{r,2} = 0.350$ , enquanto os valores de  $\bar{\alpha}_{r,1}$  e  $\bar{\alpha}_{r,3}$  permanecem praticamente inalterados e os valores de  $\bar{\beta}_{r,i}$  continuam desprezíveis, inferiores a 0.1% do máximo desalinhamento angular relativo, como nos casos anteriores. Os valores de  $\sigma_{ms}$  correspondentes são  $\sigma_{32} = 67.7$  e  $\sigma_8 = 67.6$  rps, e a tabela 5.14 apresenta os resultados do cálculo da resposta em regime permanente; a figura 5.28 mostra as curvas de resposta relativas a  $\varphi_{I,II}^e = 3\pi/2$ .

**Tabela 5.14** Velocidades críticas e fatores de amplificação máximos, rotor BB apoiado em três mancais, com  $m_{y,2} = -11.0$ ,  $\bar{\alpha}_{r,1} = -0.274$ ,  $\bar{\alpha}_{r,2} = 0.350$ ,  $\bar{\alpha}_{r,3} = 0.291$ , e  $\bar{\beta}_{r,i} \approx 0.0$ .

$\varphi_{1,II}^e$	$w_{32}$	$w_8$	$f_{32,max}$		$f_{8,max}$		diferença percentual	
			I	II	I	II	I	II
0	34.2	34.0	8.09	12.07	8.60	13.84	6.3	14.7
$\pi/2$	34.2	34.0	15.96	31.17	20.21	37.60	26.70	20.6
$\pi$	34.2	34.0	23.17	42.09	29.14	51.14	25.8	21.5
$3\pi/2$	34.2	34.0	17.84	30.26	22.60	37.31	26.7	23.3



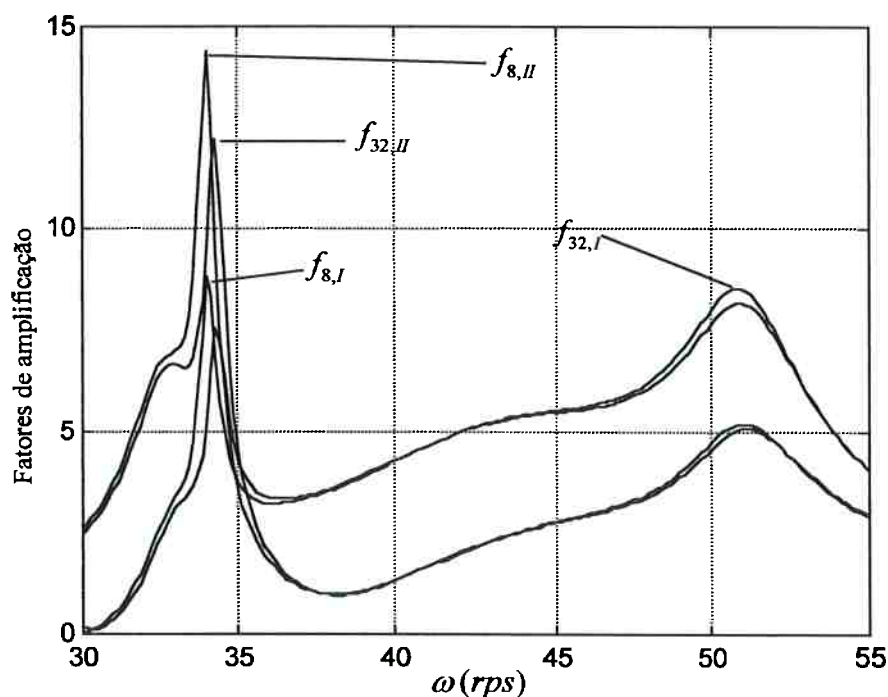
**Figura 5.28** Curva de resposta do rotor BB apoiado em três mancais, com  $m_{y,2} = -11.0$  e  $\varphi_{1,II}^e = 3\pi/2$  (tabela 5.14).

Finalmente, impondo  $\bar{\beta}_{b,2} = -0.351$  e  $\bar{\alpha}_{b,2} = 0.0$  resulta  $\bar{\beta}_{r,2} = -0.350$  e  $\bar{\alpha}_{r,2} = -0.030$ , enquanto  $\bar{\alpha}_{r,1}$  e  $\bar{\alpha}_{r,3}$  mantêm valores praticamente iguais aos do caso anterior. Há um pequeno acréscimo de  $\sigma_{ms}$ , dado por  $\sigma_{32} = 68.8$  e  $\sigma_8 = 68.3$  rps, mas diminuem as diferenças entre  $f_{32}$  e  $f_8$ , conforme mostrado na tabela 5.15;

mesmo assim, há uma nítida distinção entre as curvas de resposta exemplificadas nas figuras 5.29a e 5.29b, onde se nota também claramente a diferença entre  $w_{32}$  e  $w_8$ .

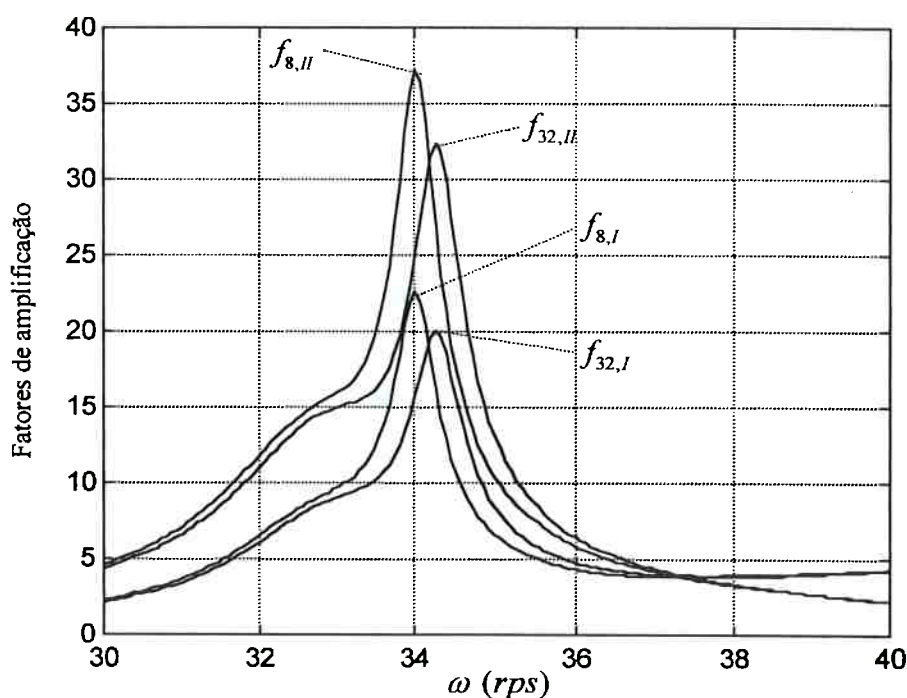
**Tabela 5.15** Velocidades críticas e fatores de amplificação máximos, rotor BB apoiado em três mancais, com  $m_{y,2} = -11.0$ ,  $\bar{\alpha}_{r,1} = -0.274$ ,  $\bar{\alpha}_{r,2} = 0.030$ ,  $\bar{\alpha}_{r,3} = 0.291$ ,  $\bar{\beta}_{r,2} = 0.350$  e  $\bar{\beta}_{r,1} \approx \bar{\beta}_{r,3} \approx 0.0$ .

$\varphi_{1,II}^e$	$w_{32}$	$w_8$	$f_{32,max}$		$f_{8,max}$		diferença porcentual	
			I	II	I	II	I	II
0	34.3	34.0	8.19	12.26	8.82	14.41	7.7	17.5
$\pi/2$	34.3	34.0	18.90	34.50	20.40	37.57	7.9	9.0
$\pi$	34.3	34.0	26.08	45.00	29.20	50.89	12.0	13.1
$3\pi/2$	34.3	34.0	20.04	32.37	22.57	37.23	12.6	15.0



**Figura 5.29a** Curva de resposta do rotor BB apoiado em três mancais, com  $m_{y,2} = -11.0$  e  $\varphi_{1,II}^e = 0$  (tabela 5.15).





**Figura 5.29b** Curva de resposta do rotor BB apoiado em três mancais, com  $m_{y,2} = -11.0$  e  $\varphi_{I,II}^e = 3\pi/2$  (tabela 5.15).

Em linhas gerais, os resultados relativos ao rotor de três mancais indicam claramente que a consideração do desalinhamento angular no modelo de 8 coeficientes leva a resultados incorretos, mesmo quando o nível de desalinhamento angular é apenas moderado, como nos exemplos aqui apresentados. Pode-se afirmar, portanto, que o estudo do comportamento dinâmico deste tipo de rotores flexíveis, apoiados em mancais com desalinhamento angular, requer o uso do modelo de 32 coeficientes dinâmicos.

Os resultados das tabelas 5.8 e 5.13 mostram que na ausência de desalinhamento angular relativo, a utilização do modelo plano também é insatisfatória, podendo acarretar erros de aproximadamente 20 %, muito embora tais erros sejam “a favor da segurança”. No entanto, esses erros “a favor da segurança” devem ser acolhidos com cautela, pois não se pode excluir a priori a possibilidade de se obter em algum caso  $f_{32} > f_8$  nas passagens pelas velocidades críticas, tal como exemplificado na análise qualitativa do capítulo 4 ou mostrado na figura 5.20.

Essa maior sensibilidade de rotores apoiados em três mancais aos efeitos das vibrações angulares dos moentes será apresentada de modo ainda mais evidente no próximo capítulo.

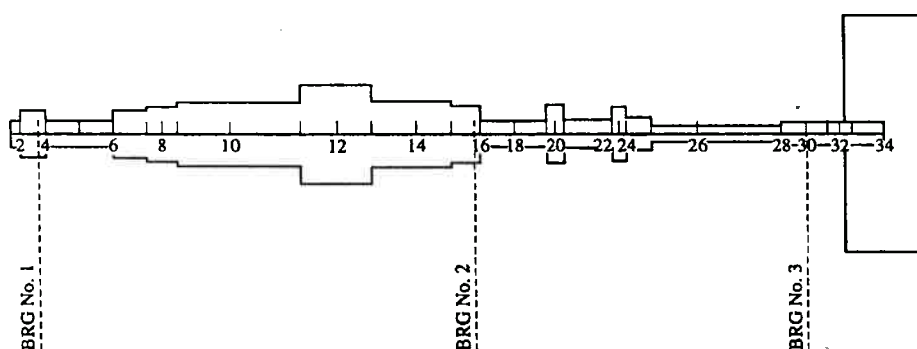
## 6 ANÁLISE DAS VIBRAÇÕES DE UM EQUIPAMENTO INDUSTRIAL

Os resultados apresentados nos capítulos precedentes serão agora consolidados através da análise das vibrações de um rotor previsto para aplicações industriais. Foi escolhido um equipamento proposto para estudo por Dimarogonas (1996), e segundo esse autor, trata-se da bomba do sistema de arrefecimento de um reator projetada no “Electric Power Research Institute”.

A comparação entre os resultados obtidos com a utilização do modelo completo de mancais e com a utilização do modelo plano mostra que há diferenças substanciais, evidenciando a necessidade da consideração do desalinhamento angular relativo dos moentes na análise dinâmica do equipamento.

### 6.1 Descrição do Equipamento e do Modelo de Análise

A figura 6.1 foi extraída da referência e fornece a descrição do equipamento juntamente com a numeração dos nós do modelo de elementos finitos empregado na análise. O rotor tem um comprimento total de  $7.221\text{ m}$ , e as demais dimensões foram obtidas da figura, que foi feita em escala uniforme.



**Figura 6.1** Rotor analisado: dimensões e numeração dos nós do modelo de elementos finitos.

As coordenadas dos nós, começando pelo nó 1, o primeiro da esquerda, são dadas na tabela 6.1:

**Tabela 6.1** Coordenadas dos nós do modelo de elementos finitos do rotor.

nó	1	2	3	4	5	6
$X (m)$	0.000	0.042	0.197	0.253	0.540	0.827
nó	7	8	9	10	11	12
$X (m)$	1.120	1.247	1.374	1.822	2.379	2.685
nó	13	14	15	16	17	18
$X (m)$	2.990	3.380	3.660	3.780	3.880	4.150
nó	19	20	21	22	23	24
$X (m)$	4.420	4.485	4.550	4.980	5.045	5.110
nó	25	26	27	28	29	30
$X (m)$	5.290	5.650	6.000	6.360	6.500	6.650
nó	31	32	33	34		
$X (m)$	6.790	6.930	7.080	7.221		

O material é aço com módulo de elasticidade  $E = 2.10 \times 10^{11} N/m^2$  e densidade  $\rho = 7850 kg/m^3$ . A partir do desenho fornecido na referência, foram calculados os diâmetros dos elementos, fornecidos na tabela 6.2.

**Tabela 6.2** Diâmetros dos elementos.

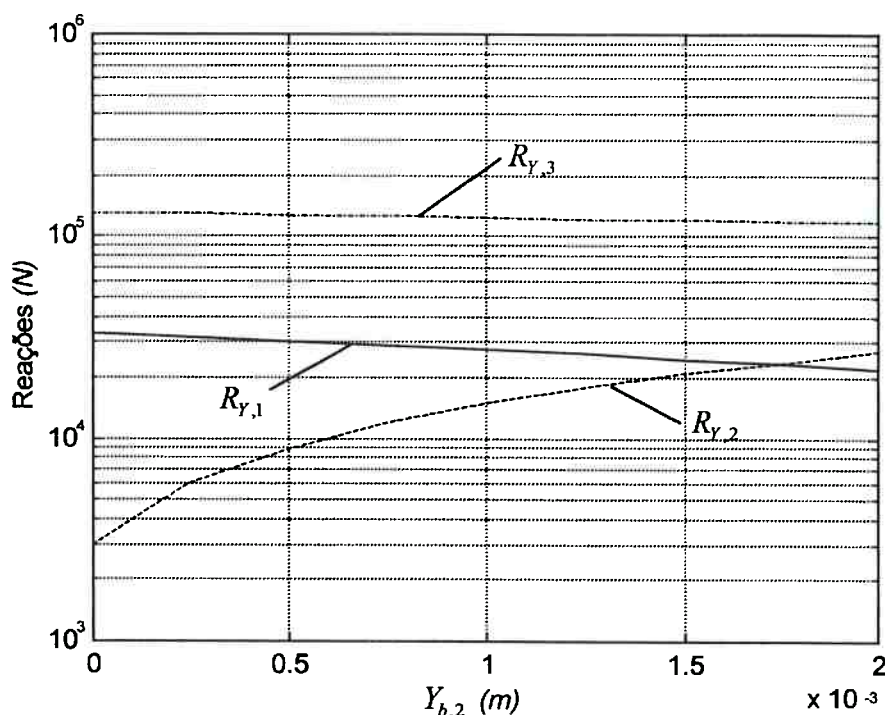
Diâmetro (m)	Elementos
0.186	25 a 27
0.220	17,18, 28 a 33
0.250	4, 5
0.260	21, 24
0.320	1
0.390	6
0.420	2, 3, 7, 8, 15, 16,
0.460	9, 10, 13, 14
0.480	19, 20, 22, 23
0.850	11, 12

Foi admitida a existência de discos nos nós 12 (disco 1), 20 (disco 2), 23 (disco 3) e 34 (disco 4). As inércias dos discos 1, 2 e 3 são calculadas pelo programa de geração das matrizes do modelo de elementos finitos, e a introdução de discos nesses nós visa

apenas permitir a consideração do momento giroscópico dos trechos de eixo correspondentes; os valores dos momentos polares de inércia desses discos foram estimados a partir dos comprimentos e diâmetros fornecidos nas tabelas 6.1 e 6.2, resultando:  $J_{p1} = 224.0 \text{ kg m}^2$  e  $J_{p2} = J_{p3} = 4.9 \text{ kg m}^2$ .

A massa do disco em balanço (disco 4) foi determinada subtraindo da massa total,  $M_{tot} = 16899 \text{ kg}$ , a massa do restante do rotor, resultando  $M_4 = 9455 \text{ kg}$ . Não se dispõe de dados a respeito da geometria desse disco; as suas dimensões, extraídas da figura 6.1, são  $D_{disco4} \approx 2.0 \text{ m}$  e  $L_{disco4} \approx 0.56 \text{ m}$ , resultando o momento polar de inércia  $J_{p4} = 4800 \text{ kg m}^2$  e momento transversal  $J_{t4} = 2650 \text{ kg m}^2$ . Tampouco se dispõe de dados sobre a rigidez do eixo na interseção com o disco 4; ademais, a figura fornecida não permite saber ao certo se o comprimento total informado refere-se apenas ao trecho entre os nós 1 e 34, ou se engloba também o disco 4. Independentemente do valor exato do comprimento do trecho de eixo que sustenta o disco 4, a sua rigidez deverá ser muito superior à do trecho de eixo adjacente, de modo que atribuiu-se ao elemento 33 uma rigidez infinita, e utilizou-se o valor do diâmetro indicado na tabela 6.2 apenas para o cálculo da massa. De qualquer forma, verificou-se que as propriedades desse trecho de eixo afetam pouco o comportamento do rotor, e não interferem na comparação dos resultados obtidos com a utilização de diferentes modelos de mancal, que é a finalidade principal deste estudo.

Definiu-se a priori que dentre os tipos de mancais apresentados no capítulo 2, para os quais foram desenvolvidos programas específicos para o cálculo dos esforços hidrodinâmicos e coeficientes dinâmicos, será empregado o mancal com duas ranhuras axiais, por ser o que normalmente resulta os maiores valores de  $\sigma_{ins}$ . A atribuição de valores às propriedades dos mancais, que estão situados nos nós 3, 16 e 30 do modelo, requer uma estimativa prévia da carga suportada por cada um deles; a figura 6.2 mostra as reações verticais de apoio rígido em função do desalinhamento paralelo vertical do mancal intermediário. O valor dessas reações será utilizado para determinar os comprimentos dos mancais, visto que os seus diâmetros já foram definidos na figura 6.1, ou seja  $D_1 = D_2 = 0.42 \text{ m}$  e  $D_3 = 0.22 \text{ m}$ ; como os mancais 1 e 2 têm o mesmo diâmetro, decidiu-se adotar valores iguais também para os seus comprimentos.



**Figura 6.2** Reações verticais de apoios rígidos em função do desalinhamento paralelo vertical do mancal intermediário.

É previsível que a situação mais favorável para a estabilidade do rotor corresponde àquela em que nenhum dos mancais está com pouca carga, ou, com pouca excentricidade, de modo que, observando os gráficos da figura 6.2, conclui-se que será conveniente impor valores de  $Y_{b,2}$  entre 1.5 e 2.0 mm. Desta forma, as cargas serão de aproximadamente 25000 N nos mancais 1 e 2, e de 116000 N no mancal 3. Adotando  $L_1 = L_2 = 0.105 \text{ m}$  e  $L_3 = 0.33 \text{ m}$ , resultam as seguintes pressões médias nos mancais,  $p_1 = p_2 \approx 0.6 \text{ MPa}$  e  $p_3 \approx 1.6 \text{ MPa}$ , cujos valores estão de acordo com os normalmente recomendados (Shigley, 1984).

A escolha de folgas radiais leva em conta as razões entre o comprimento e o diâmetro de cada mancal, dadas por  $r_{LD,1} = r_{LD,2} = 0.25$  e  $r_{LD,3} = 1.50$ , bem como a velocidade na superfície do moente; seguindo as recomendações de Dubbel (1994), chega-se às seguintes relações entre folga radial e diâmetro,  $r_{C,1} = r_{C,2} = 1.0 \times 10^{-3}$  e  $r_{C,3} = 1.3 \times 10^{-3}$ , resultando  $c_{R,1} = c_{R,2} = 420 \times 10^{-6} \text{ m}$  e  $c_{R,3} = 286 \times 10^{-6} \text{ m}$ .

Finalmente, adota-se por simplicidade um mesmo valor de viscosidade do fluido lubrificante para os três mancais, dado por  $\mu = 0.03 \text{ Ns/m}^2$ , que conforme será verificado posteriormente, garante escoamento laminar até a máxima velocidade de operação estável do rotor. Fica assim definido o conjunto de parâmetros necessário para a análise de vibrações do equipamento, cujos resultados serão apresentados no próximo item. Antes de prosseguir, convém lembrar que não se pretende fornecer aqui qualquer espécie de sugestão relativa ao projeto da bomba, de modo que as propriedades adotadas para os mancais visam apenas viabilizar a análise do rotor, sem pretender criticar o seu desempenho.

## 6.2 Análise das Vibrações do Rotor

Inicialmente, verifica-se a validade da hipótese de que a estabilidade do rotor aumenta com o aumento da carga no mancal 2, até que esta atinja valores equivalentes ao carregamento do mancal 1. A tabela 6.3 mostra a variação das reações verticais nos mancais em função de  $m_{y,2}$ , medido a partir de  $Y_{b,2} = 0.0 \text{ m}$ , juntamente com os valores de  $\sigma_{32}$  correspondentes; como as reações variam ligeiramente também em função de  $\omega$ , na tabela 6.3 são mostrados os seus valores médios.

**Tabela 6.3** Reações verticais nos mancais e  $\sigma_{32}$  em função de  $m_{y,2}$ .

$m_{y,2}$	$R_{y,i} \text{ (N)}$			$\sigma_{32} \text{ (rps)}$
	Mancal 1	Mancal 2	Mancal 3	
0.0	32320	5750	127730	29.9
1.000	30680	9860	125260	33.8
2.000	28850	13840	123110	38.7
3.000	27000	18050	120750	40.3
4.000	25150	22320	118330	42.0
4.762	23750	25430	116620	43.4

O valor  $m_{y,2} = 4.762$ , ao qual corresponde  $Y_{b,2} = 2.0 \text{ mm}$ , foi adotado para definir a configuração na qual será feita a análise de vibrações do rotor; a linha elástica resultante é apresentada na figura 6.3a, e pode ser comparada com a linha elástica correspondente a  $m_{y,2} = 0.0$  mostrada na figura 6.3b. Na obtenção dos resultados da

tabela 6.3 os mancais foram inclinados de modo a resultar desalinhamento angular relativo nulo dos respectivos moentes. Os valores dessas inclinações, na configuração de referência, serão fornecidos adiante.

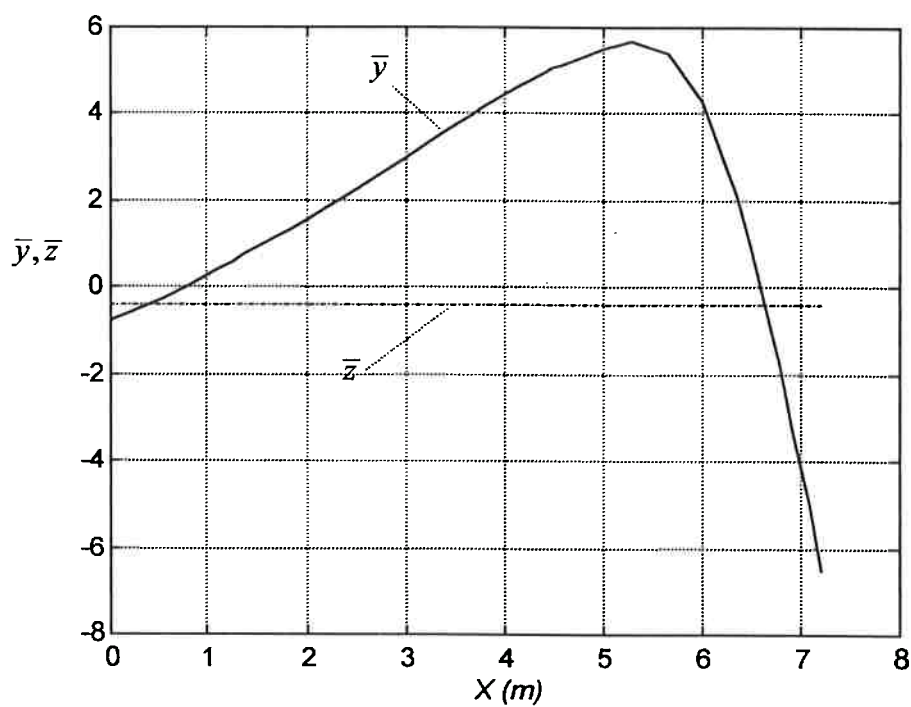


Figura 6.3a Linha elástica do rotor na configuração de referência para a análise de vibrações, em  $\omega = 35 \text{ rps}$ .

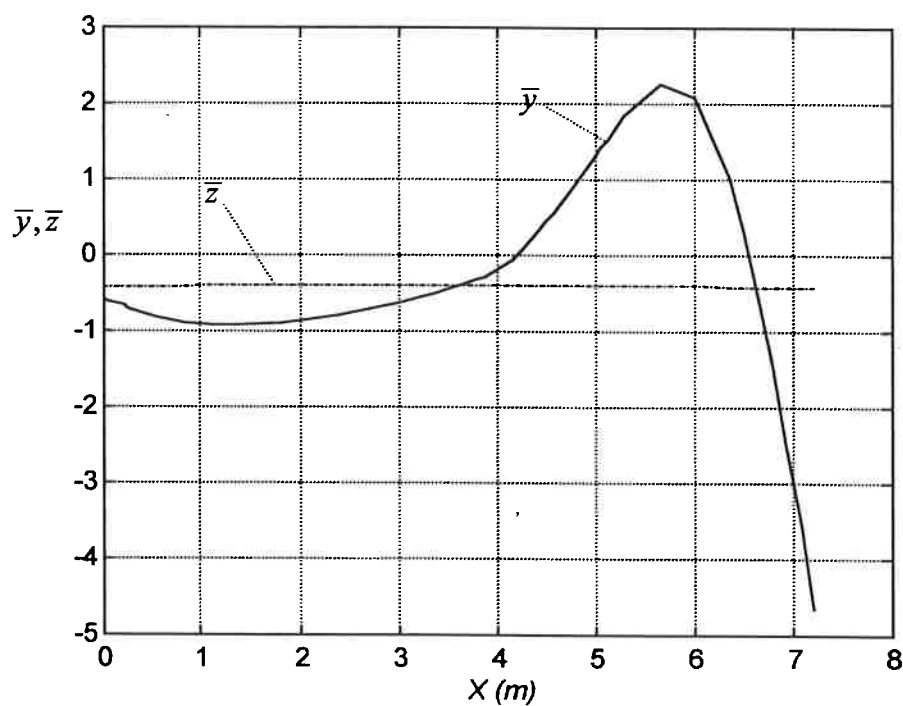
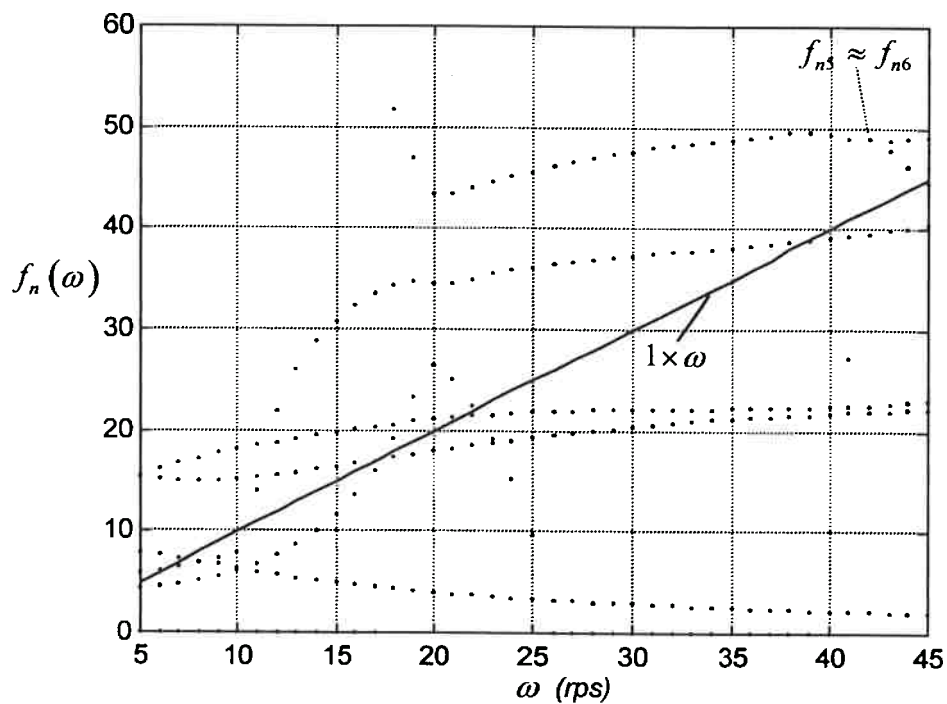
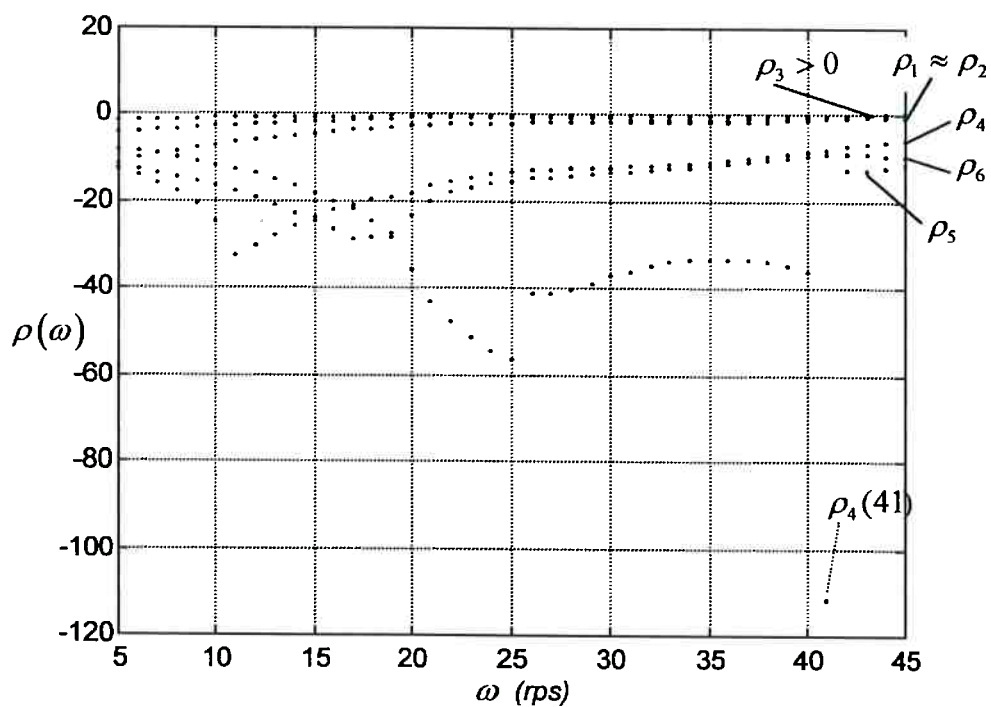


Figura 6.3b Linha elástica do rotor para  $m_{y,2} = 0.0$ .

Os resultados da análise de vibrações livres são apresentados nas figuras 6.4a e 6.4b; conforme os gráficos dessas figuras, somente as seis primeiras frequências são relevantes para a interpretação dos resultados do cálculo da resposta.



**Figura 6.4a** Frequências naturais amortecidas.

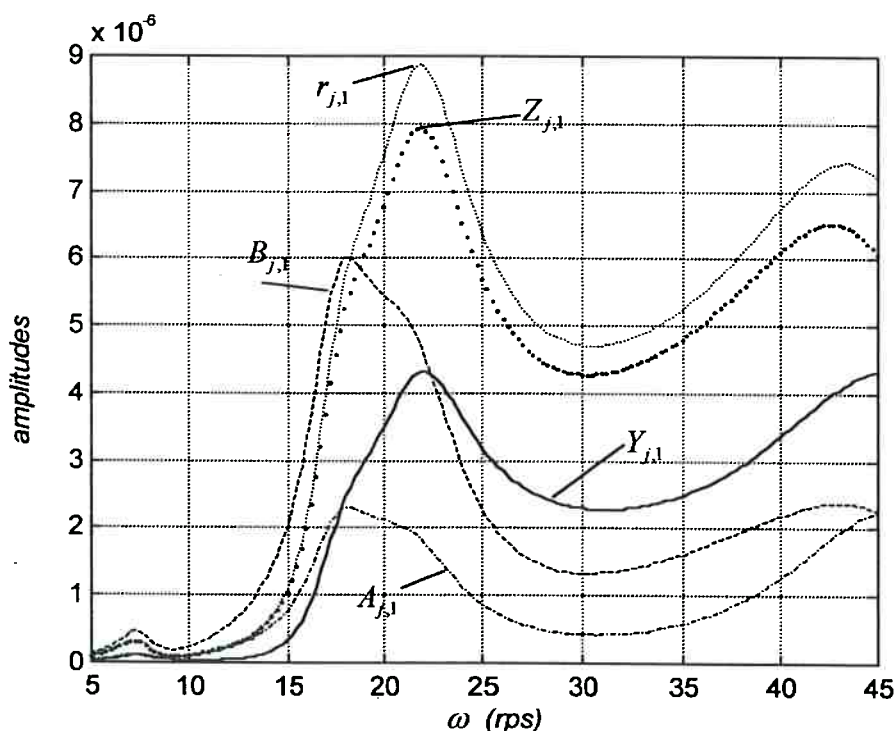


**Figura 6.4b** Estabilidade das posições de equilíbrio estático.



Conhecido o valor da velocidade máxima de operação estável do rotor,  $\omega_{\max} \approx 45 \text{ rps}$ , é possível calcular os números de Reynolds dos mancais (equação 2.38), que resultam  $R_{e1,2} \approx 708$  e  $R_{e3} \approx 252$ ; comparando-os com os respectivos valores críticos,  $R_{e,1,2} \approx 924$  e  $R_{e,3} \approx 810$ , verifica-se que o valor adotado para a viscosidade garante o escoamento em regime laminar nos três mancais.

Para efetuar o cálculo da resposta em regime permanente, considera-se inicialmente que o disco 4 tem um desbalanceamento estático de magnitude  $u = 7 \mu\text{m}$ ; posteriormente, será acrescentado o carregamento proveniente do desbalanceamento dinâmico do disco. As curvas de resposta das figuras 6.5a a 6.5h fornecem uma descrição geral das vibrações nos mancais, discos e no nó onde ocorre a máxima amplitude entre os mancais; todos estes resultados foram obtidos com o uso do modelo completo de mancais hidrodinâmicos. Nas figuras e tabelas, os resultados relativos aos discos 1 a 4 serão identificados pelos algarismos *I, II, III e IV*, enquanto os relativos aos moentes e mancais pelos subscritos *j* e *b* respectivamente; nos gráficos das amplitudes, estas são dadas em *m* (translações) ou radianos (inclinações).



**Figura 6.5a** Amplitudes das vibrações do moente do mancal 1 (nó 3).

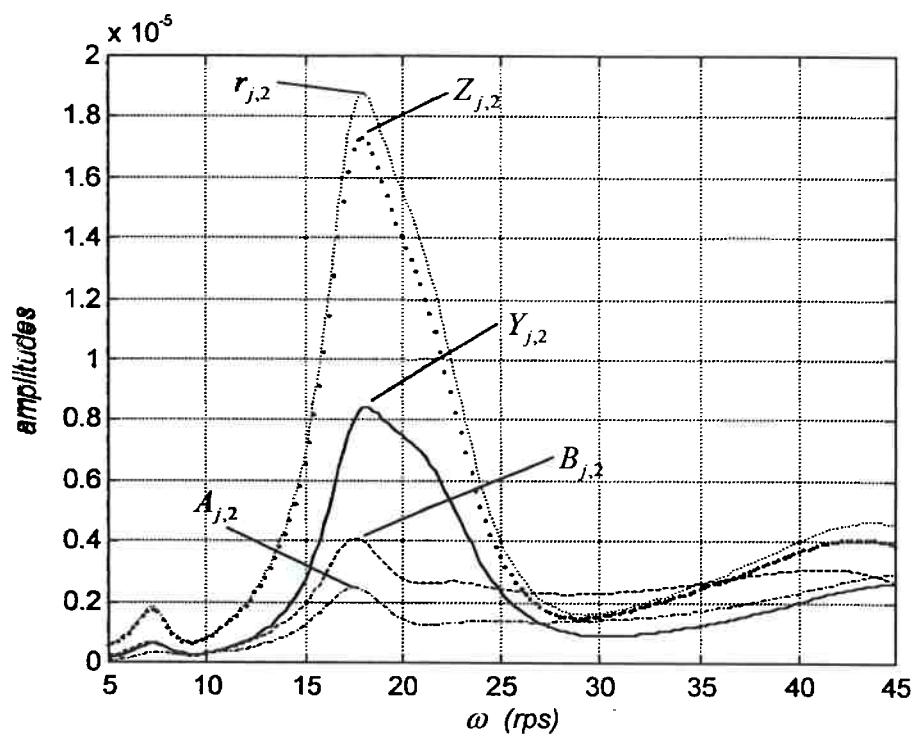


Figura 6.5b Amplitudes das vibrações do moente do mancal 2 (nó 16).

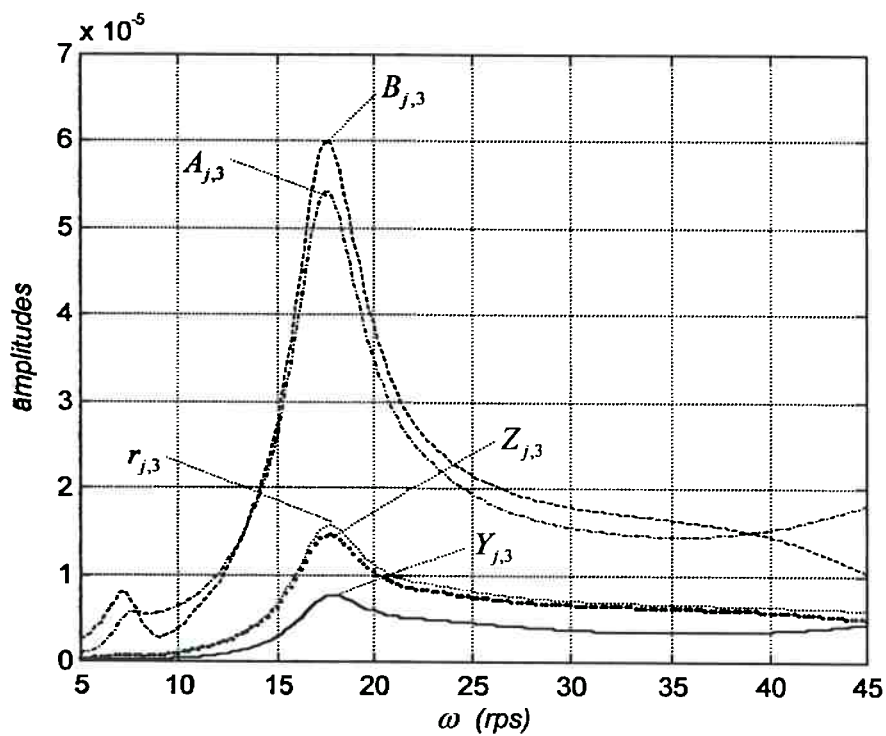


Figura 6.5c Amplitudes das vibrações do moente do mancal 3 (nó 30).

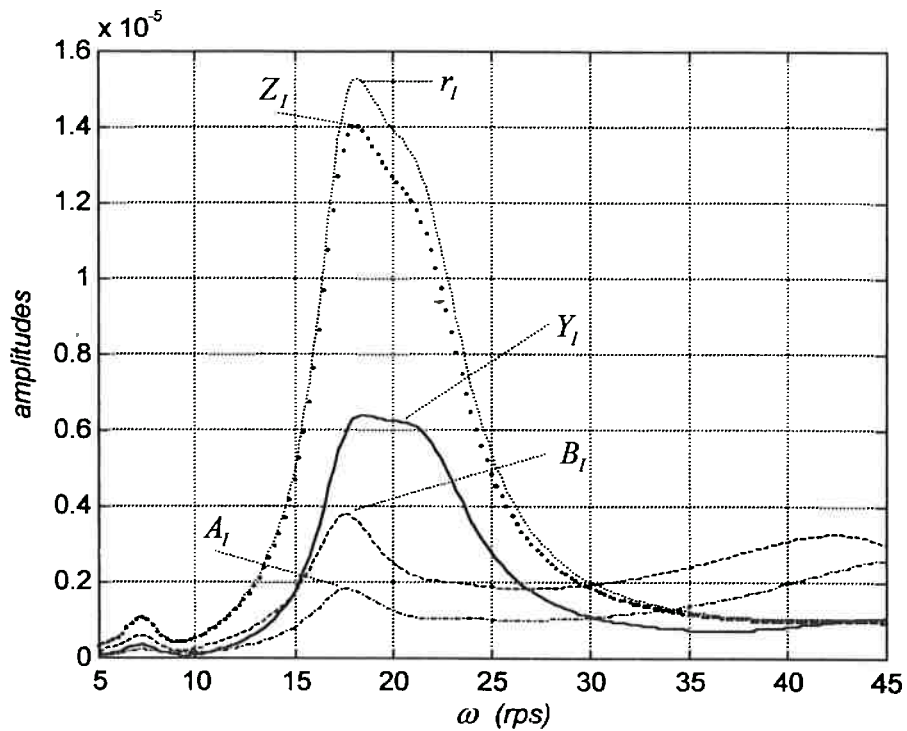


Figura 6.5d Amplitudes das vibrações do disco 1 (nó 12).

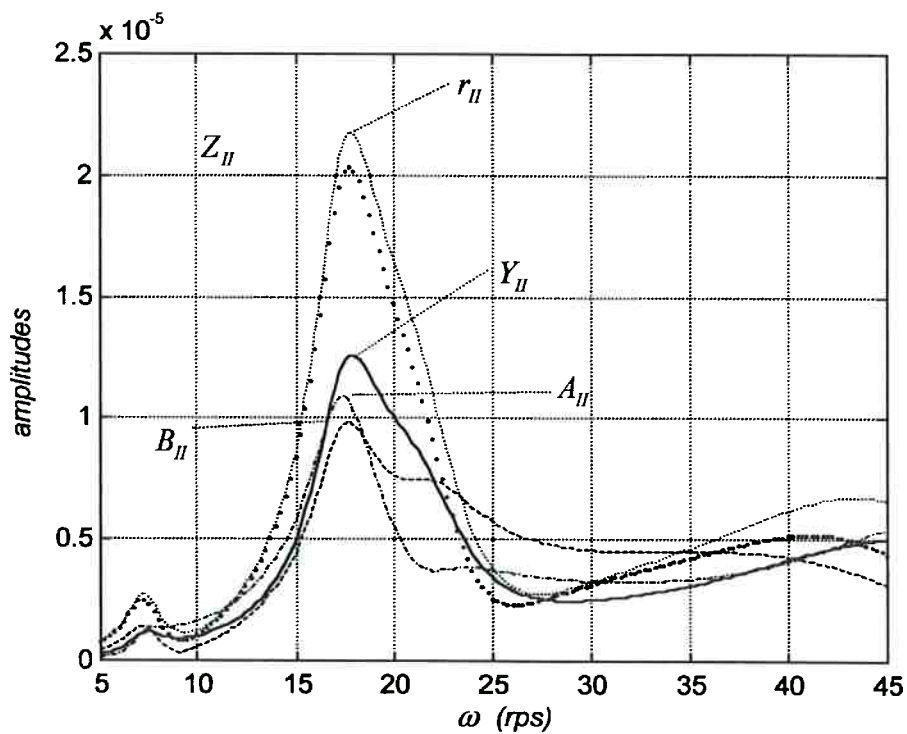


Figura 6.5e Amplitudes das vibrações do disco 2 (nó 20).

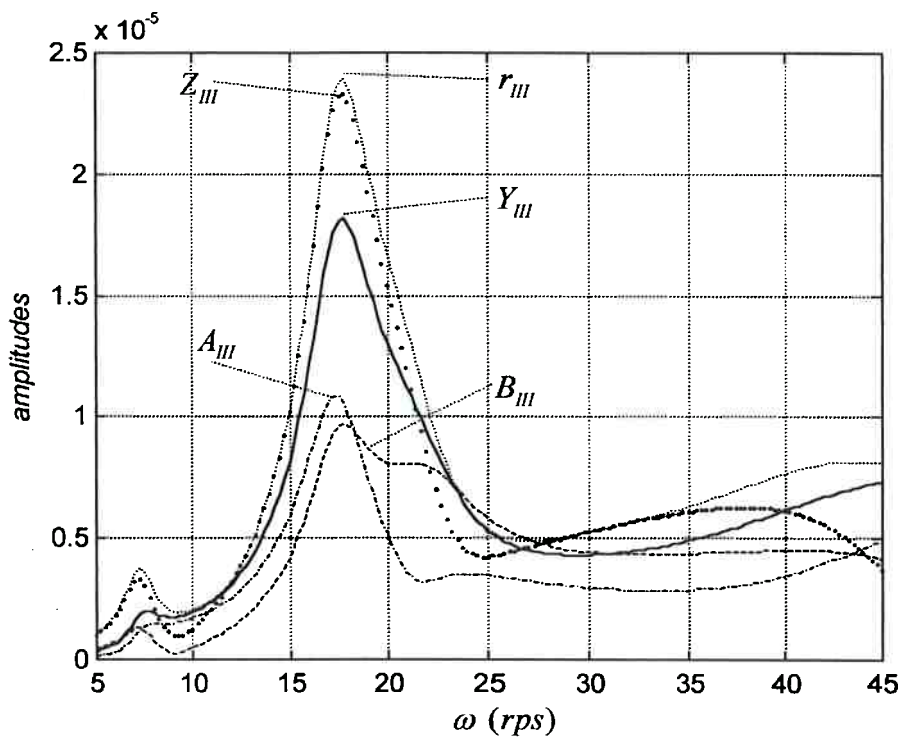


Figura 6.5f Amplitudes das vibrações do disco 3 (nó 23).

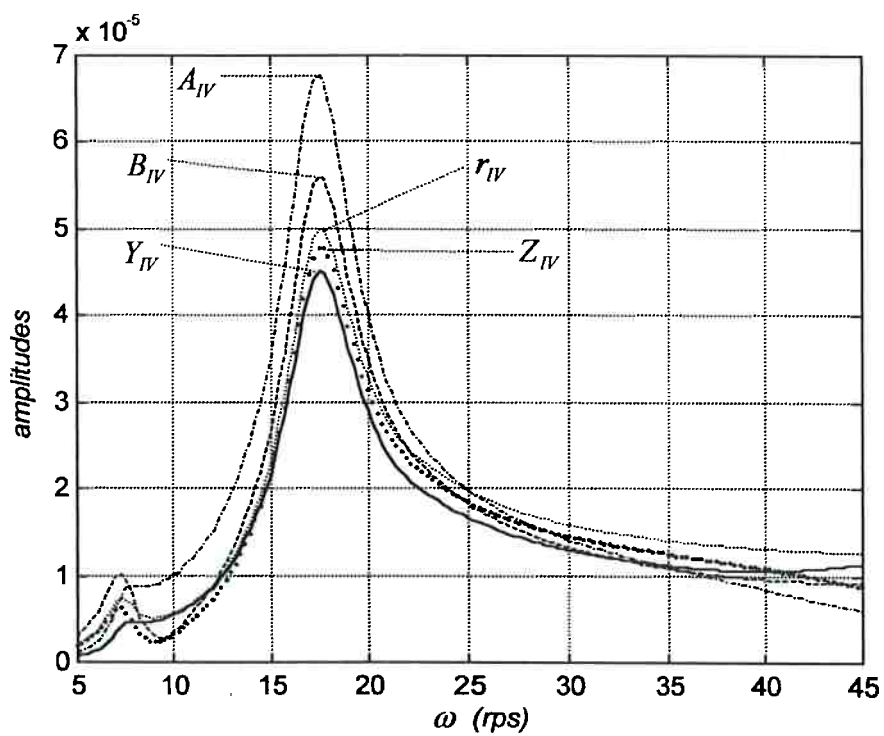
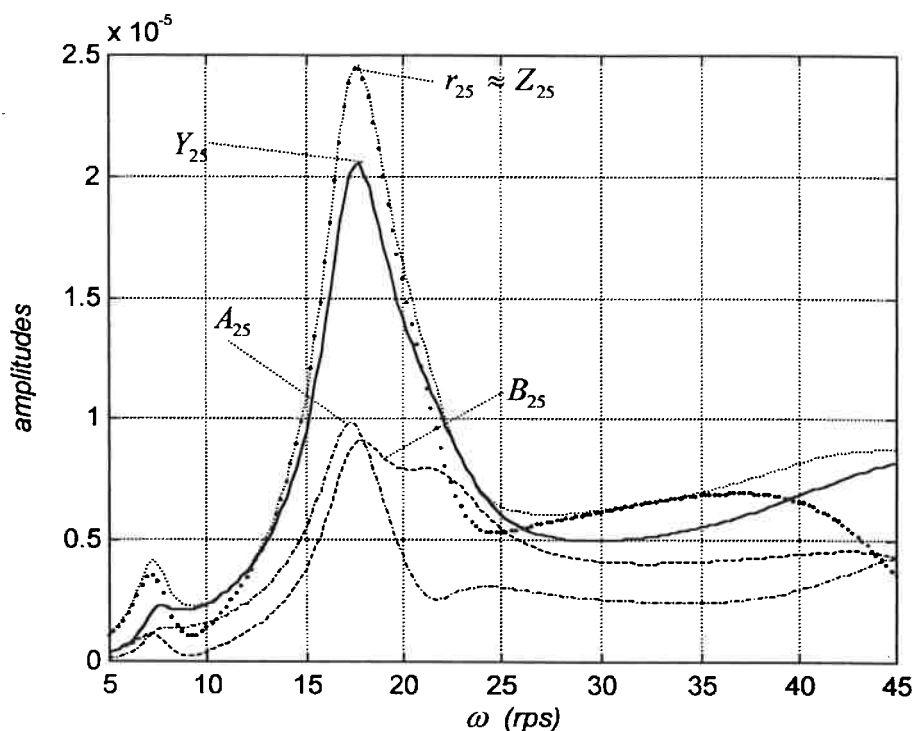


Figura 6.5g Amplitudes das vibrações do disco 4 (nó 34).



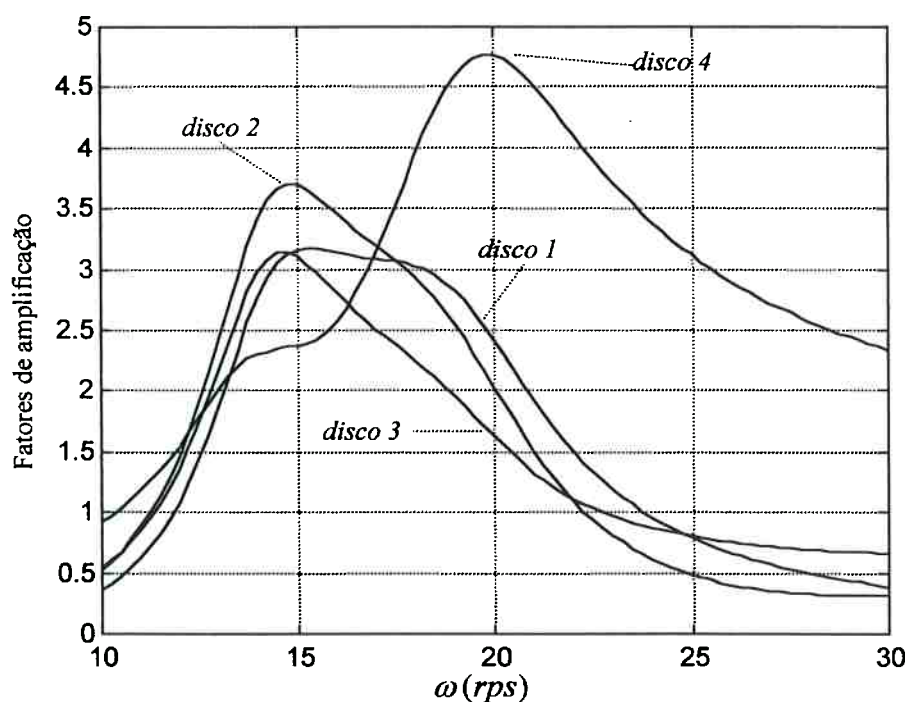
**Figura 6.5h** Amplitudes das vibrações do nó 25, entre os mancais 2 e 3.

Em todas as curvas de resposta nota-se uma velocidade crítica com vibrações de pequena amplitude em  $\omega \approx 7 \text{ rps}$ , que coincide com a 2<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup> frequências naturais amortecidas, mostradas na figura 6.4a; no caso, o aumento de amplitude decorre do pequeno amortecimento do 3<sup>o</sup> modo, pois  $\rho_3(7) \approx -1.0$  enquanto  $\rho_2(7) \approx -14.5$ . Em  $\omega \approx 17 \text{ rps}$  ocorre uma situação análoga, e os picos das amplitudes são significativamente maiores, o que está associado ao menor amortecimento dos modos correspondentes nesta rotação, conforme observado na figura 6.4b. Uma terceira velocidade crítica, observável nos gráficos das figuras 6.5a, 6.5d, 6.5e, 6.5f e 6.5h próxima a  $\omega = 22 \text{ rps}$ , envolvendo agora  $f_{n3}$  e  $f_{n4}$ , está associada à ressonância com  $f_{n3}(22) = 21.3 \text{ rps}$ , pois  $\rho_3(22) \approx -2.3$  e  $\rho_4(22) \approx -47.0$ . Finalmente, uma 4<sup>a</sup> velocidade crítica ocorre entre  $\omega \approx 39 \text{ rps}$  e  $\sigma_{ins}$ , devida a ressonâncias com  $f_{n4}$  e  $f_{n5}$ .

Conforme já comentado no capítulo 5, o aumento de  $\sigma_{ins}$  proporcionado pela melhor distribuição de cargas nos mancais pode estar associado a um desempenho pior nas passagens pelas velocidades críticas. Tal comportamento foi exibido também pelo rotor aqui analisado, conforme os resultados mostrados na figuras 6.6a e 6.6b. Na figura 6.6a são apresentados os fatores de amplificação nos discos para  $m_{Y,2} = 0.0$ ; o

valor do máximo fator de amplificação no disco 4 é de aproximadamente 4.8, enquanto que na configuração de referência a amplitude máxima de vibração é  $49.9 \mu\text{m}$  (ver figura 6.5g), o que resulta um fator de amplificação 7.1 . A variação do fator de amplificação no disco 4 em função de  $m_{y,2}$  é mostrada na figura 6.6b, onde se nota que os menores níveis de vibrações correspondem a  $m_{y,2} \approx 1$  .

Os resultados apresentados até aqui descrevem os passos iniciais da análise de vibrações lineares de um rotor, incluindo a avaliação dos efeitos do desalinhamento paralelo dos mancais, o nível das vibrações nas passagens pelas velocidades críticas, e a velocidade limite de estabilidade do equipamento. Alguns resultados adicionais, que também poderiam fazer parte de uma análise introdutória de vibrações, como a resposta ao desbalanceamento dinâmico, serão apresentados no próximo item, juntamente com a comparação dos efeitos decorrentes do uso de diferentes modelos de mancais hidrodinâmicos.



**Figura 6.6a** Fatores de amplificação nos discos para  $m_{y,2} = 0$  .

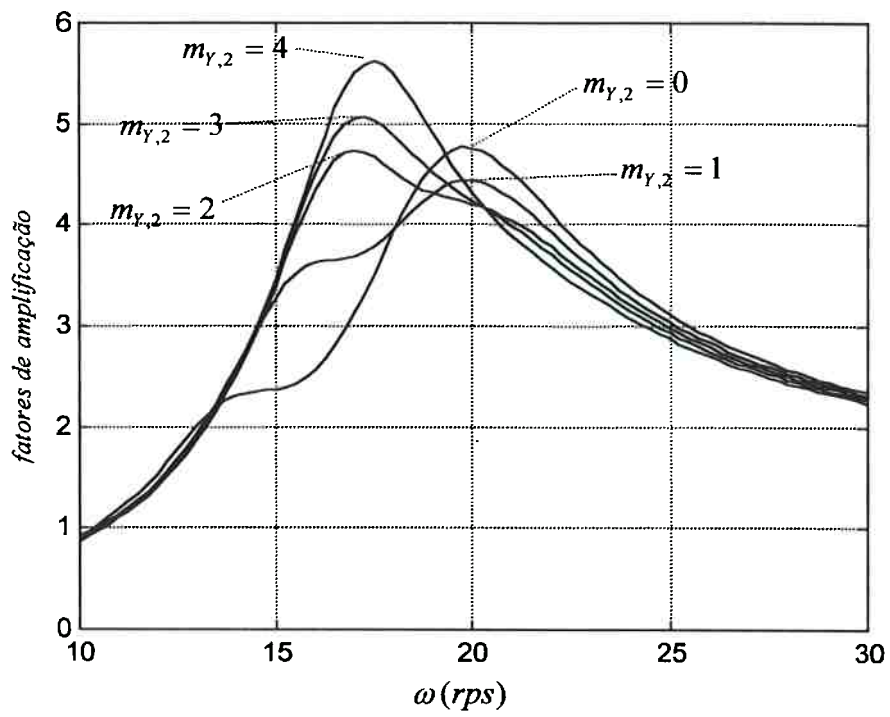


Figura 6.6b Variação da curva de resposta do disco 4 em função de  $m_{Y,2}$ .

### 6.2.1 Influência do modelo de mancal empregado nos resultados da análise

A comparação entre os resultados obtidos com a utilização do modelo completo de mancais e os obtidos com o uso do modelo plano será feita em quatro situações distintas. A primeira, denominada caso 1, é a situação de referência, à qual correspondem os resultados mostrados nas figuras 6.4 e 6.5, calculados com o uso do modelo completo. Nos casos 2 e 3 impõe-se desalinhamentos angulares  $\bar{\alpha}_{b,3}$  e  $\bar{\beta}_{b,3}$  que resultam  $\bar{\alpha}_{r,3} = 0.25$  e  $\bar{\beta}_{b,3} = 0.25$ , mantendo nulos os desalinhamentos angulares relativos nos mancais 1 e 2. No caso 4 é feita uma avaliação da influência do momento giroscópico nos resultados calculados com a utilização dos modelos completo e plano de mancais, considerando a configuração do caso 1. As coordenadas absolutas dos mancais e respectivos moentes nos casos 1, 2 e 3 são mostradas na tabela 6.4, para  $\omega = 35 \text{ rps}$ , juntamente com os valores médios das cargas nos mancais.

**Tabela 6.4** Coordenadas absolutas dos moentes em  $\omega = 35 \text{ rps}$  e carregamento médio nos mancais.

Mancal		Caso 1		Caso 2		Caso 3	
		$\bar{q}_b$	$\bar{q}_j$	$\bar{q}_b$	$\bar{q}_j$	$\bar{q}_b$	$\bar{q}_j$
1	$\bar{y}_{b,j}$	0	-0.572	0	-0.596	0	-0.590
	$\bar{\beta}_{b,j}$	0	$\approx 0$	0	$\approx 0$	0	$\approx 0$
	$\bar{z}_{b,j}$	0	-0.423	0	-0.420	0	-0.418
	$\bar{\alpha}_{b,j}$	0.084	0.084	0.084	0.084	0.086	0.086
	$F_y(N)$	23640		24420		23030	
	$F_z(N)$	$\approx 0$		$\approx 0$		-150	
2	$\bar{y}_{b,j}$	4.762	4.160	4.762	4.177	4.762	4.156
	$\bar{\beta}_{b,j}$	0	$\approx 0$	0	$\approx 0$	0.001	0.001
	$\bar{z}_{b,j}$	0	-0.418	0	-0.425	0	-0.436
	$\bar{\alpha}_{b,j}$	0.135	0.135	0.136	0.136	0.133	0.133
	$F_y(N)$	25560		22880		27690	
	$F_z(N)$	$\approx 0$		$\approx 0$		810	
3	$\bar{y}_{b,j}$	0	-0.452	0	-0.432	0	-0.465
	$\bar{\beta}_{b,j}$	0	$\approx 0$	0	$\approx 0$	-0.268	-0.018
	$\bar{z}_{b,j}$	0	-0.398	0	-0.391	0	-0.361
	$\bar{\alpha}_{b,j}$	-0.867	-0.867	-1.142	-0.892	-0.834	-0.834
	$F_y(N)$	116580		118480		115060	
	$F_z(N)$	$\approx 0$		$\approx 0$		-660	



Não foram estudadas situações com valores maiores de  $\bar{\alpha}_{r,3}$  e  $\bar{\beta}_{b,3}$ , pois já nos casos 2 e 3, o mancal só passa a operar sem roçamento a partir de  $\omega \approx 10 \text{ rps}$ , que é uma rotação relativamente próxima da 1ª velocidade crítica.

A avaliação da influência do momento giroscópico aplicado pelo disco 4 é feita atribuindo aos seus momentos de inércia valores 15 % inferiores aos definidos no item anterior, de modo que no caso 4 foram considerados  $J_{p4} = 4080 \text{ kgm}^2$  e  $J_{r4} = 2253 \text{ kgm}^2$ .

Os resultados mais relevantes da análise de vibrações são apresentados na tabela 6.5, e incluem os fatores de amplificação máximos, as velocidades críticas principais e as velocidades limite de estabilidade; entre parêntesis são mostrados os erros porcentuais decorrentes da utilização do modelo plano em cada caso.

**Tabela 6.5** Comparação dos resultados obtidos com a utilização dos modelos completo e plano de mancais.

Caso	1	2	3	4
$f_{32,I}$	2.18	1.77	2.38	1.94
$f_{8,I}$	3.16 (45.0)	4.68 (164.4)	3.07 (29.0)	3.21 (65.5)
$f_{32,II}$	3.12	2.62	3.24	2.94
$f_{8,II}$	5.31 (70.2)	7.15 (172.9)	5.31 (61.4)	5.72 (94.6)
$f_{32,III}$	3.41	2.80	3.64	3.28
$f_{8,III}$	6.17 (80.9)	7.82 (179.3)	6.32 (73.6)	6.79 (107.0)
$f_{32,IV}$	7.13	5.65	6.75	6.83
$f_{8,IV}$	12.0 (68.3)	13.09 (131.7)	11.20 (65.9)	13.03 (90.8)
$w_{32}$	17.5	15.8	19.5	17.0
$w_8$	16.0 (-8.6)	15.8	16.4 (-15.9)	15.0 (-11.8)
$\sigma_{32}$	43.4	42.8	48.8	42.7
$\sigma_8$	43.3	43.4 (1.4)	46.9 (-3.9)	41.9 (-1.9)

O aspecto das curvas de resposta dos discos é mostrado nas figuras 6.7a a 6.7d, que comparam  $f_{32}$  e  $f_8$  relativos ao caso 1; na figura 6.7e são mostrados resultados relativos ao caso 3.

A grande diferença porcentual entre os fatores de amplificação em todos os casos deve-se sem dúvida ao mancal 3, que é longo e sustenta o eixo no seu trecho mais flexível. A grande influência dos esforços associados às vibrações angulares do moente deste mancal pode ser entendida observando os gráficos da figura 6.5c, onde se vê que os valores de  $A_{j,3}$  e  $B_{j,3}$  entre  $\omega = 15$  e  $\omega = 20$  rps são muito maiores que os desalinhamentos angulares dos moentes dos mancais 1 e 2, nestas mesmas velocidades, mostrados nas figuras 6.5a e 6.5b respectivamente. Observa-se também que as amplitudes das translações dos moentes dos três mancais têm magnitudes semelhantes, indicando que a amplitude das vibrações dos discos depende da intensidade das vibrações angulares do moente do 3º mancal.

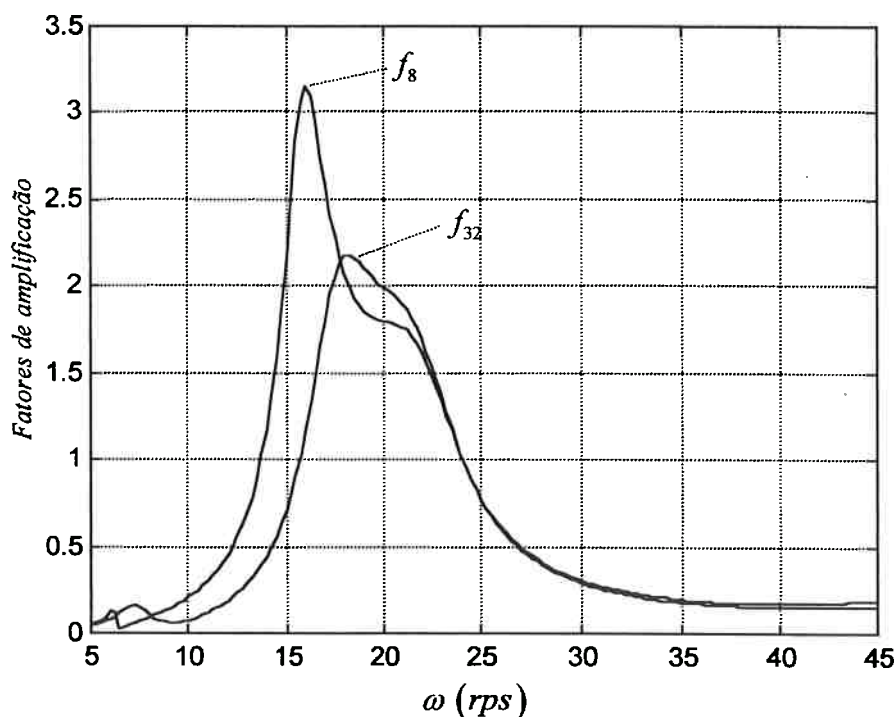


Figura 6.7a Comparação entre  $f_{32}$  e  $f_8$ , disco I, caso 1

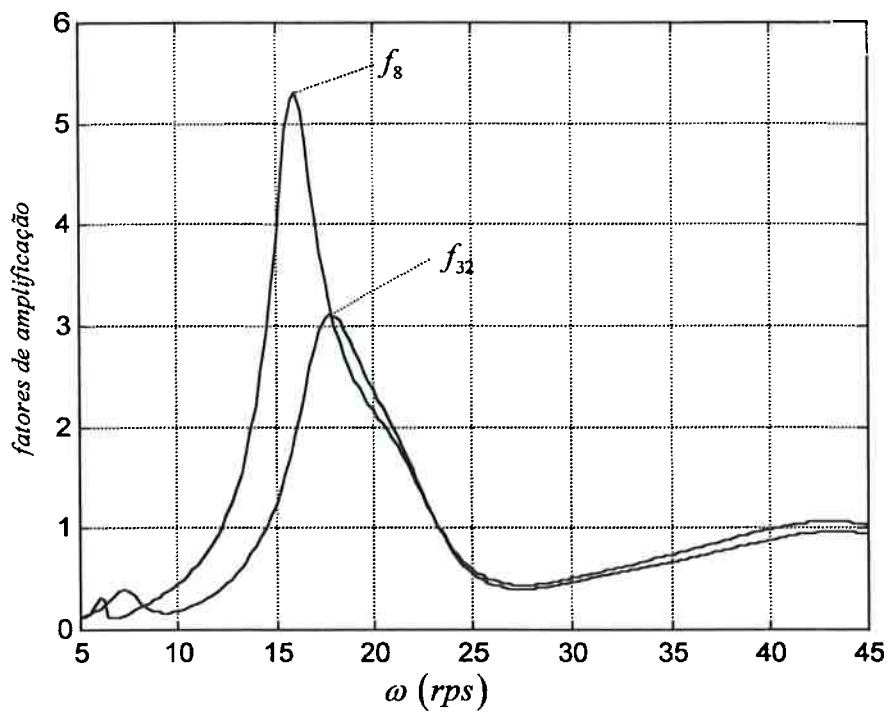


Figura 6.7b Comparação entre  $f_{32}$  e  $f_8$ , disco II, caso 1.

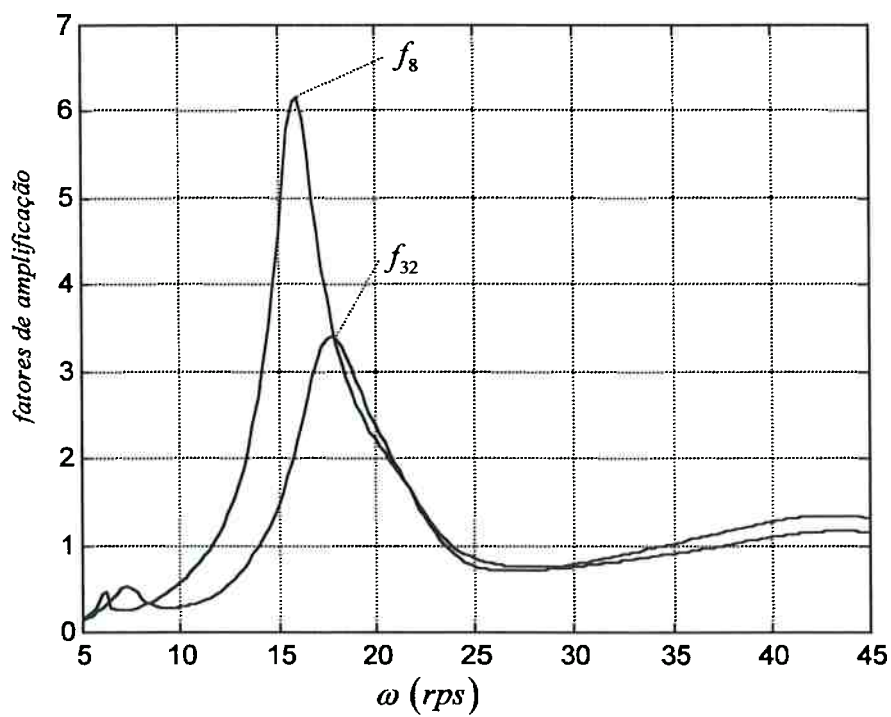


Figura 6.7c Comparação entre  $f_{32}$  e  $f_8$ , disco III, caso 1.

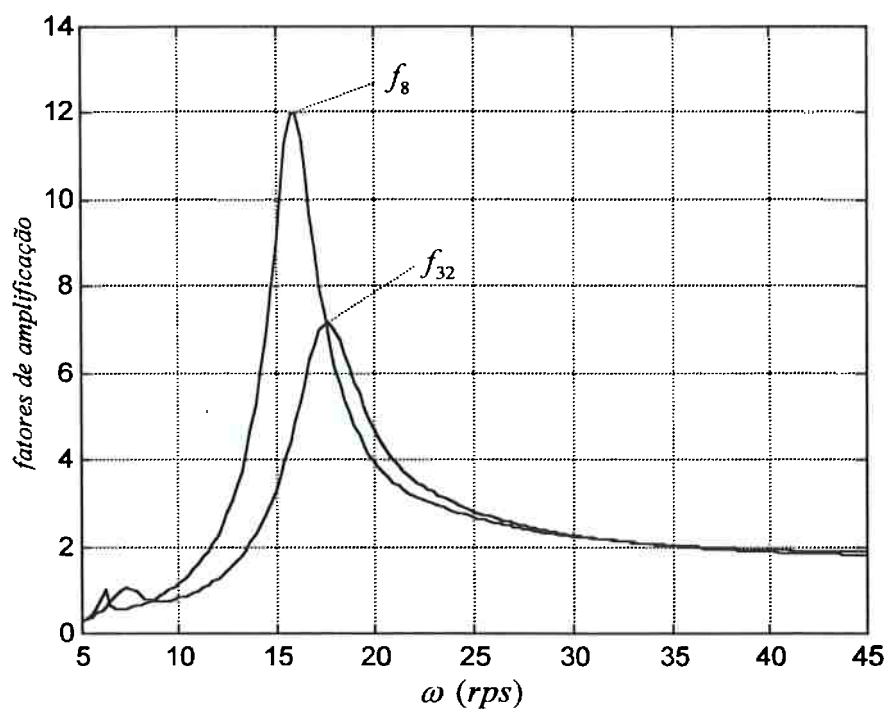


Figura 6.7d Comparação entre  $f_{32}$  e  $f_8$ , disco IV, caso 1.

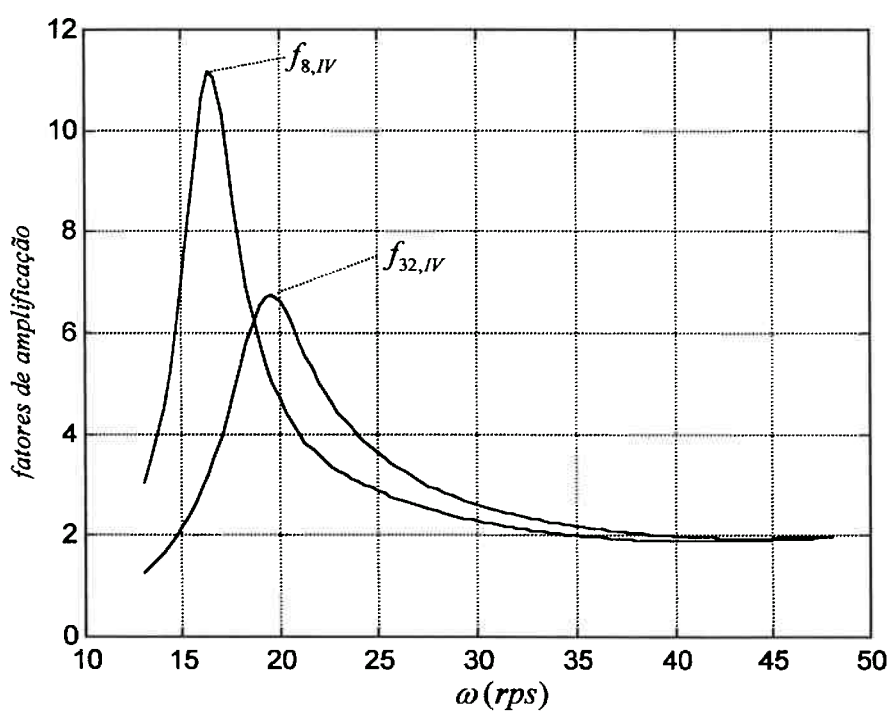


Figura 6.7e Comparação entre  $f_{32}$  e  $f_8$ , disco IV, caso 3.

No caso 1 as diferenças entre  $f_{32}$  e  $f_8$  decorrem exclusivamente da ação dos momentos aplicados pelo mancal, enquanto nos casos 2 e 3 comparecem todos os

coeficientes do modelo completo; as matrizes de rigidez e de amortecimento do mancal 3, em  $\omega = 15 \text{ rps}$  são mostradas abaixo.

### Caso 1

$$\bar{K}_{b3} = \begin{bmatrix} 4.96 & 0 & 3.61 & 0 \\ 0 & 0.08 & 0 & -0.02 \\ 0.11 & 0 & 1.44 & 0 \\ 0 & -0.18 & 0 & 0.30 \end{bmatrix}; \bar{C}_{b3} = \begin{bmatrix} 7.81 & 0 & 1.89 & 0 \\ 0 & 0.06 & 0 & -0.09 \\ 1.89 & 0 & 1.18 & 0 \\ 0 & -0.10 & 0 & 0.36 \end{bmatrix}$$

### Caso 2

$$\bar{K}_{b3} = \begin{bmatrix} 7.18 & 0.86 & 4.35 & -1.72 \\ 0.28 & 0.13 & 0.29 & -0.10 \\ 0.56 & 0.28 & 1.59 & -0.25 \\ -1.78 & -0.38 & -0.87 & 0.73 \end{bmatrix}; \bar{C}_{b3} = \begin{bmatrix} 8.45 & 0.34 & 1.88 & -1.41 \\ 0.33 & 0.08 & 0.13 & -0.16 \\ 1.88 & 0.14 & 1.10 & -0.34 \\ -1.40 & -0.16 & -0.34 & 0.62 \end{bmatrix}$$

### Caso 3

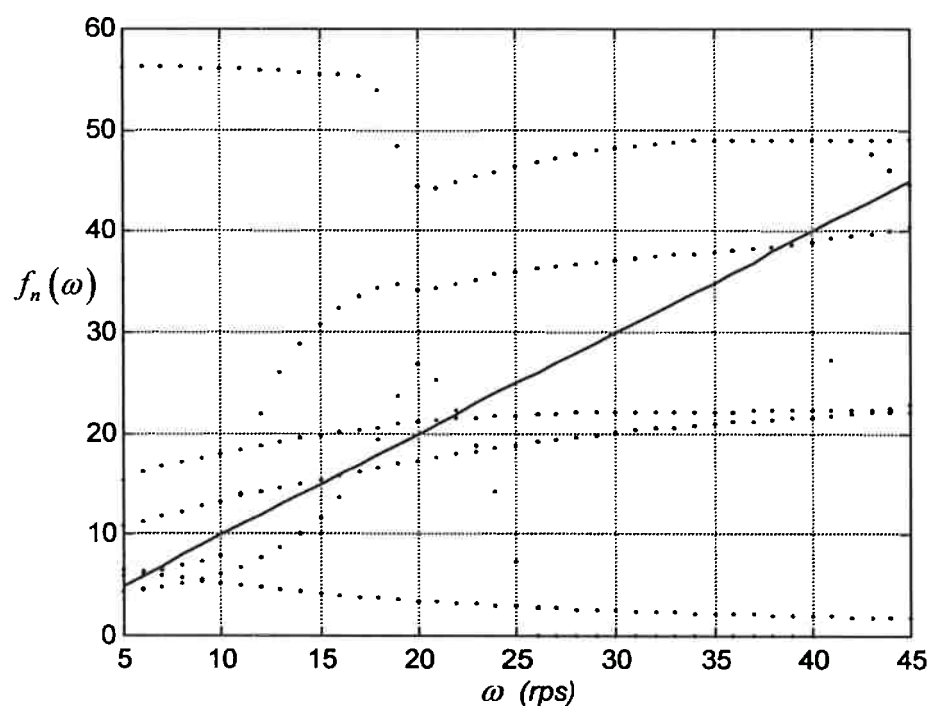
$$\bar{K}_{b3} = \begin{bmatrix} 5.58 & -0.70 & 4.12 & 0.78 \\ -0.30 & 0.16 & -0.39 & -0.07 \\ 0.37 & -0.39 & 1.04 & 0.29 \\ 0.76 & -0.31 & 0.70 & 0.43 \end{bmatrix}; \bar{C}_{b3} = \begin{bmatrix} 8.00 & -0.50 & 1.91 & 0.76 \\ -0.51 & 0.12 & -0.27 & -0.16 \\ 1.90 & -0.27 & 1.38 & 0.48 \\ 0.76 & -0.16 & 0.48 & 0.47 \end{bmatrix}$$

A redução de amplitudes no caso 1 deve estar associada principalmente ao valor significativo de  $\bar{k}_{AA}$  ou mesmo  $\bar{k}_{AB}$  quando comparados com  $\bar{k}_{ZZ}$  e  $\bar{k}_{ZY}$ ; tal comparação é cabível tendo em mente a importância do acoplamento de vibrações descrito no capítulo 5. Analogamente,  $\bar{c}_{AA}$  tem uma magnitude significativa em comparação com  $\bar{c}_{ZZ}$ . O efeito da ausência dos coeficientes relacionados ao desalinhamento angular pode ser observado também nos gráficos das figuras 6.8a e 6.8b, que mostram os resultados da análise de vibrações livres amortecidas no caso 1, obtidos com a utilização do modelo plano. Nas ressonâncias com a 2<sup>a</sup>. e 3<sup>a</sup>. frequências naturais amortecidas em  $\omega \approx 16 \text{ rps}$  o aumento de amplitudes está associado ao pequeno amortecimento do 3<sup>o</sup>. modo dado por  $\rho_3(16) = -0.66$ .

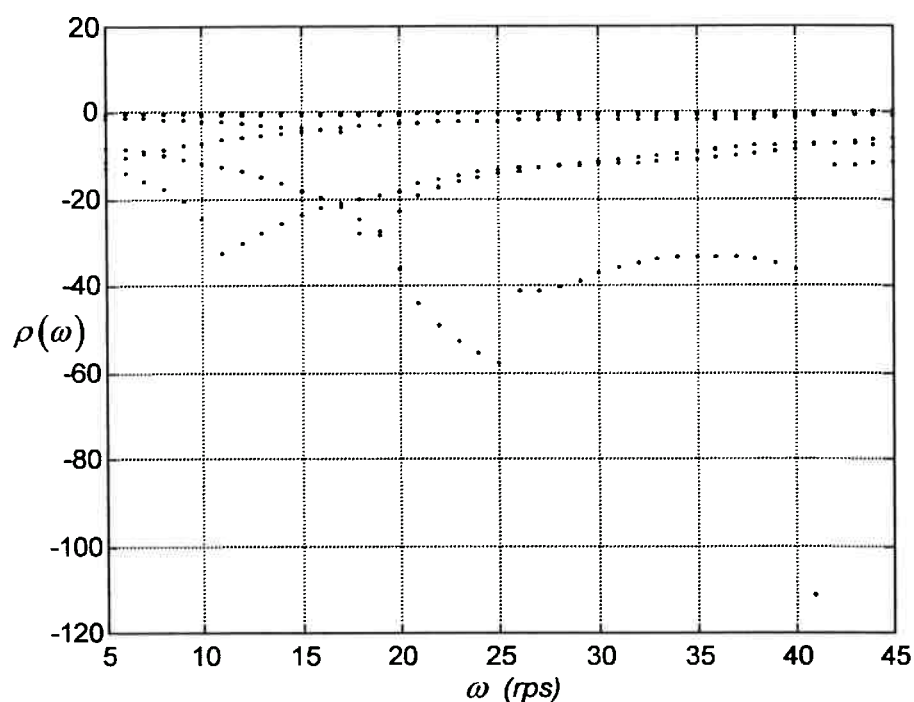
Nos casos 2 e 3 diversos coeficientes do tipo  $\bar{k}_{RR}$ ,  $\bar{k}_{RT}$ ,  $\bar{c}_{RR}$  e  $\bar{c}_{RT}$  têm valores relativamente elevados, e causaram efeitos distintos: no caso 2 acentuou-se a diferença entre  $f_{32}$  e  $f_8$ , enquanto no caso 3 houve um sensível aumento na diferença

entre  $w_{32}$  e  $w_8$ . Em todos os casos confirmou-se a pequena influência das vibrações angulares nas velocidades limite de estabilidade.

Os resultados do caso 4 mostram que a redução do momento giroscópico afeta de modo mais significativo os fatores de amplificação calculados com o uso do modelo plano de mancais. Isto se entende facilmente pois, na ausência da ação dos momentos hidrodinâmicos proporcionados pela inclinação relativa dos moentes, o momento giroscópico passa a ser o único mecanismo redutor da amplitude das vibrações angulares do moente do mancal 3 na passagem pelas velocidades críticas.

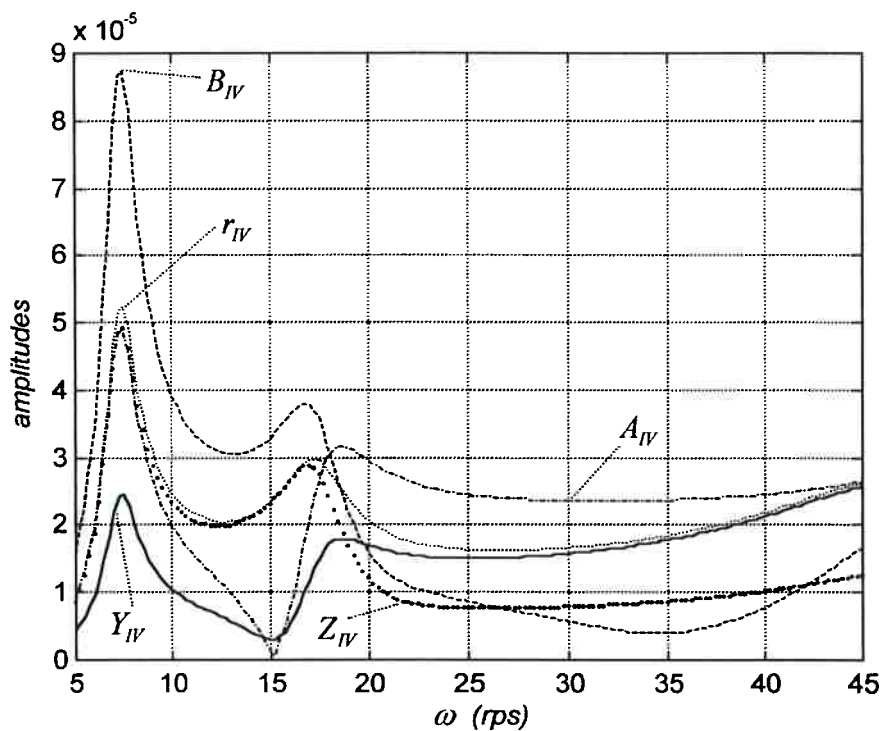


**Figura 6.8a** Frequências naturais amortecidas, caso 1, modelo plano de mancais.

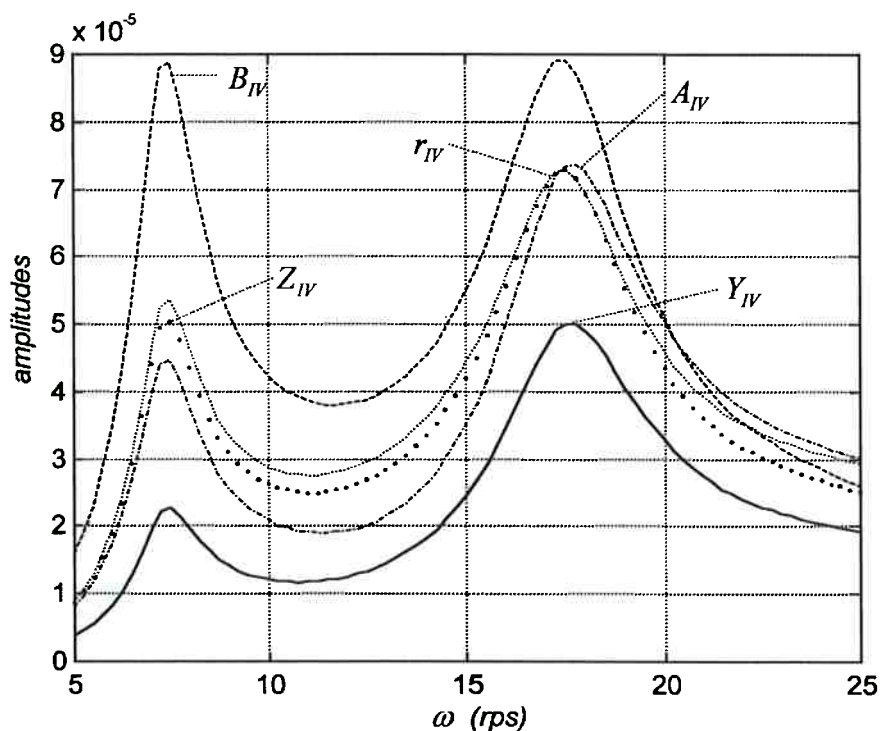


**Figura 6.8b** Estabilidade das posições de equilíbrio estático.

Para uma última comparação de resultados obtidos com o uso dos dois tipos de modelos de mancais será introduzido agora um desbalanceamento dinâmico no disco 4, de magnitude  $|\vec{U}_d| = 0.15 \text{ kg m}^2$ , defasado do desbalanceamento estático de um ângulo  $\varphi_{d0}$ . Este desbalanceamento dinâmico, quando considerado isoladamente, resulta fatores de amplificação máximos semelhantes aos causados pelo desbalanceamento estático, conforme mostrado na figura 6.9a, que mostra as amplitudes de vibração do disco 4 calculadas com o uso do modelo completo de mancais, na configuração do caso 1; o cálculo do fator de amplificação é feito dividindo-se a amplitude máxima da órbita do centro do disco pela magnitude do desbalanceamento estático, dada por  $u = 7.0 \mu\text{m}$ .



**Figura 6.9a** Curvas de resposta do disco 4, excitação só por desbalanceamento dinâmico, configuração do caso 1, modelo completo de mancais; (amplitudes em  $m$  ou  $rad$ ).



**Figura 6.9b** Curvas de resposta do disco 4, excitação por desbalanceamento estático e dinâmico, com  $\varphi_{d0} = 0.0$ , configuração do caso 1, modelo completo de mancais; (amplitudes em  $m$  ou  $rad$ ).

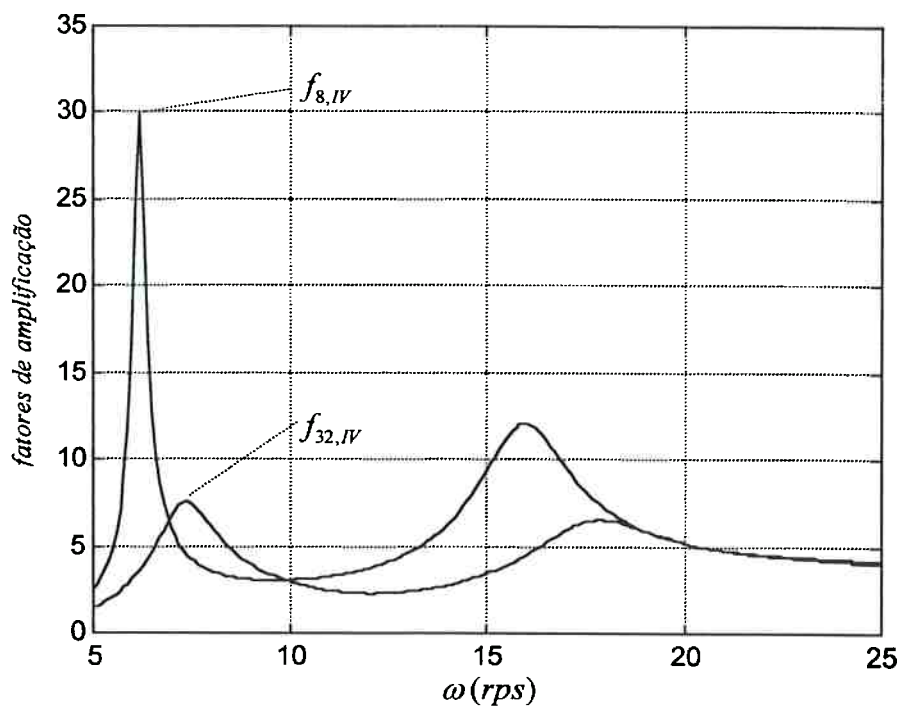


A diferença mais significativa entre as curvas da figura 6.9a e os resultados mostrados na figura 6.5g é o grande aumento das amplitudes na velocidade crítica próxima a  $\omega = 7 \text{ rps}$ , acompanhada de uma redução das amplitudes em  $\omega \approx 17 \text{ rps}$ . A atuação simultânea dos desbalanceamentos estático e dinâmico resulta as curvas da figura 6.9b, em que se nota um aumento das amplitudes das vibrações em  $\omega \approx 17 \text{ rps}$ , acompanhado de pequenas alterações de resultados na crítica próxima a  $\omega = 7 \text{ rps}$ . Na tabela 6.6 são comparados os resultados obtidos com o uso do modelo plano e completo de mancais, em função de diferentes valores de  $\varphi_{d0}$ .

**Tabela 6.6** Efeitos da introdução do desbalanceamento dinâmico em  $f_{32}$ ,  $f_8$ ,  $w_{32}$  e  $w_8$ , rotor na configuração do caso 1.

$\varphi_{d0}$	$w_{32}$	$w_8$	$f_{32,I}$	$f_{8,I}$	$f_{32,II}$	$f_{8,II}$	$f_{32,III}$	$f_{8,III}$	$f_{32,IV}$	$f_{8,IV}$
0.0	17.5	6.2	3.17	5.36	4.61	13.07	5.20	17.47	10.40	29.70
$\pi/2$	17.4	6.2	2.54	5.28	4.00	12.85	4.70	17.19	9.82	29.03
$\pi$	7.4	6.2	1.41	5.46	3.18	13.32	4.29	17.8	7.56	30.04
$3\pi/2$	7.4	6.2	2.07	5.55	3.60	13.53	4.75	18.09	8.70	30.59

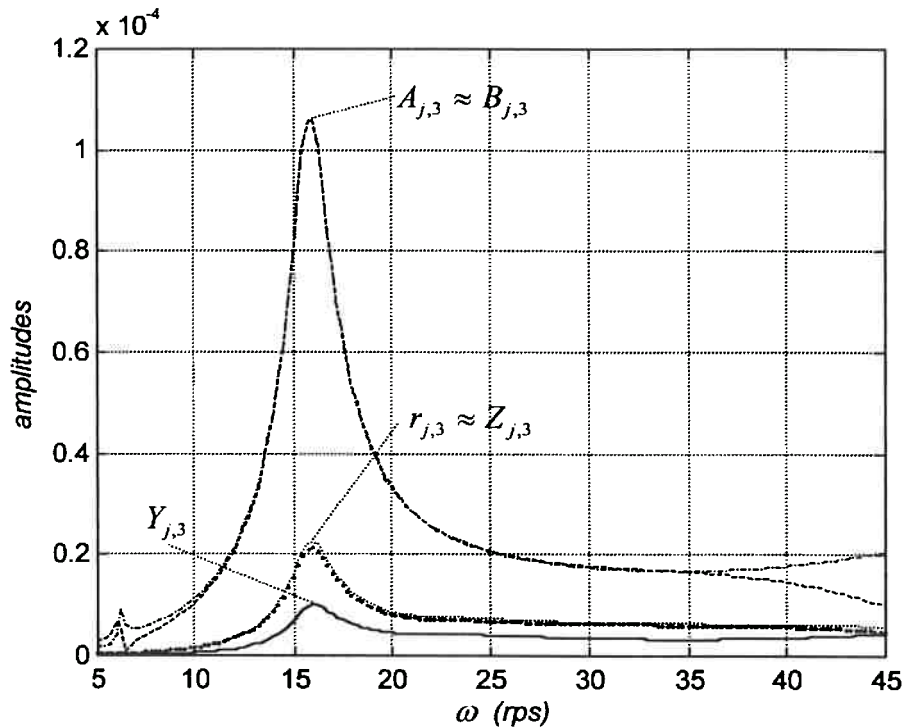
Não se julgou necessário indicar as diferenças percentuais entre os resultados, que em alguns casos chegam a quase 300%; a figura 6.10 permite visualizar as curvas de resposta do disco 4, que sequer parecem pertinentes ao mesmo rotor.



**Figura 6.10** Fatores de amplificação do disco 4, desbalanceamento dinâmico e estático,  $\varphi_{d0} = \pi$ ; (amplitudes em  $m$  ou  $rad$ ).

A origem de diferenças tão acentuadas é análoga à apontada para os resultados apresentados na tabela 6.5, se bem que com efeitos muito mais nítidos. Observando novamente a figura 6.5c, que mostra as amplitudes das vibrações do moente do mancal 3, nota-se que na passagem pela velocidade crítica em  $\omega \approx 7$  rps a amplitude das vibrações verticais e horizontais é praticamente nula, e o que permite identificar a passagem pela velocidade crítica é o pico de amplitudes associado às vibrações angulares. Este resultado não depende, evidentemente, do tipo de modelo de mancais utilizado, conforme se vê nas curvas da figura 6.11, também relativas ao moente do mancal 3, obtidas com o uso do modelo plano e com excitação apenas por desbalanceamento estático. A introdução do desbalanceamento dinâmico promove o aumento das vibrações angulares do moente, sem afetar as suas translações, o que redundará no aumento das amplitudes das vibrações dos discos, conforme mostrado nas figuras 6.9a e 6.9b. A ausência de qualquer espécie de restrição a esse aumento de amplitude dos desalinhamentos angulares do moente do nó 3, quando se usa o modelo plano de mancais, é a origem das grandes diferenças de amplitudes nos discos, mostradas na tabela 6.6. Comparando ainda as magnitudes das partes reais dos autovalores correspondentes a  $\omega \approx 7$  rps, constata-se que quando se usa o modelo

plano, a ressonância envolve a 2ª frequência natural, à qual corresponde  $\rho_2 = -0.16$ , ao passo que, quando se usa o modelo completo, a ressonância ocorre com a 3ª frequência natural amortecida, cuja parte real vale  $\rho_3 = -1.0$ , que é significativamente superior.



**Figura 6.11** Amplitudes das vibrações do moente do mancal 3, excitação por desbalanceamento estático, modelo plano de mancais; (amplitudes em  $m$  ou  $rad$ ).

Um último comentário sobre os resultados da tabela 6.6 leva em consideração as matrizes de rigidez e amortecimento do mancal 3, em  $\omega \approx 6$  rps, apresentadas abaixo:

$$\bar{K}_{b3} = \begin{bmatrix} 12.08 & 0 & 5.46 & 0 \\ 0 & 0.10 & 0 & -0.07 \\ 1.01 & 0 & 1.65 & 0 \\ 0 & -0.35 & 0 & 0.78 \end{bmatrix}; C_{b3} = \begin{bmatrix} 10.98 & 0 & 2.15 & 0 \\ 0 & 0.06 & 0 & 0.13 \\ 2.15 & 0 & 0.88 & 0 \\ 0 & 0.14 & 0 & 0.64 \end{bmatrix}.$$

Comparando com as matrizes relativas ao caso 1, apresentadas anteriormente, constata-se que houve um aumento significativo do valor de  $k_{YY}$ , o que, por analogia com o que ocorre nos rotores bi-apoiados, aumenta a razão  $r_{ky}$  e portanto a importância dos efeitos das vibrações angulares dos moentes. Paralelamente, nota-se

também o aumento das razões  $k_{AA}/k_{ZZ}$  e  $c_{AA}/c_{ZZ}$ , indicando um incremento da importância relativa dos coeficientes dos momentos.

Fica assim identificada claramente uma situação na qual o uso do modelo completo de mancais é imprescindível para a validade da análise dinâmica do rotor. O que caracteriza este tipo de situação é o posicionamento de um mancal em um ponto do eixo onde as amplitudes das translações são pequenas, enquanto as vibrações angulares são relativamente elevadas. O modelo usado para representar tal mancal deve considerar os esforços decorrentes das vibrações angulares do moente, com a inclusão de todos os 32 coeficientes do aqui denominado modelo completo de mancais.

Note-se também que este último exemplo não foi concebido artificialmente pelo autor, mas foi extraído de um livro tradicionalmente empregado para o estudo de vibrações.

## 7 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

A motivação para a realização deste estudo foi a quase total falta de conhecimentos relativos aos efeitos das vibrações angulares dos moentes de mancais hidrodinâmicos no comportamento dinâmico de rotores flexíveis. Com a conclusão do trabalho, pretende-se ter alterado em parte o panorama inicial, agregando ao estado da arte diversos modelos, equacionamentos e resultados originais relacionados abaixo.

No capítulo 2 foi feita a adequação da equação de Reynolds para o contexto deste estudo, e durante o processo de reprodução das expressões apresentadas por outros autores foi feita a identificação do até então ignorado Efeito de Cunha Axial. Já na dedução da expressão desse efeito ficou claro que, no caso de mancais com geometria uniforme, a sua influência seria restrita a mancais muito curtos, o que foi ilustrado em alguns exemplos. Fica então proposto como um primeiro tema para trabalhos futuros o estudo da influência do Efeito de Cunha Axial em mancais de seção transversal variável. Ainda com relação a este capítulo, todos os programas empregados para o cálculo dos esforços hidrodinâmicos foram desenvolvidos pelo autor deste trabalho, e a validade das formulações e procedimentos implementados foi comprovada através da reprodução de resultados experimentais e teóricos publicados por outros autores.

Esses programas foram empregados no cálculo dos 32 coeficientes dinâmicos do modelo completo de mancais, conforme o procedimento descrito no capítulo 3, cuja validade também foi verificada pela reprodução de resultados publicados por outro autor. Diversos exemplos dos valores desses coeficientes, relativos a diferentes tipos de mancais, foram apresentados nos capítulos seguintes.

Uma primeira caracterização qualitativa dos efeitos do desalinhamento angular sobre o comportamento dinâmico de rotores bi-apoiados foi apresentada no capítulo 4, a partir do equacionamento do rotor de Jeffcott/Laval, originalmente desenvolvido pelo autor e publicado em Zachariadis (1997, 1998). Este estudo permitiu identificar dois coeficientes que medem a sensibilidade de rotores bi-apoiados aos efeitos do desalinhamento angular nas suas vibrações: a razão entre a rigidez do mancal e do eixo,  $r_k$ , e a relação entre o comprimento do mancal e o comprimento do eixo,  $r_l$ . Verificou-se que, para a faixa de valores usuais de  $r_l$ , que varia entre 0.05 e 0.1, tais efeitos passam a influir no fator de amplificação das

vibrações nas passagens pelas velocidades críticas quando  $r_k$  assume valores superiores a 3. Nas diversas situações estudadas, envolvendo diferentes níveis de desalinhamento angular estático dos mancais, notou-se que o efeito mais pronunciado da consideração dos desalinhamentos angulares dos moentes no cálculo da reposta é a previsão de níveis de vibração menores que os calculados com o uso do modelo plano de mancais. Por outro lado, o cálculo de velocidades críticas é pouco afetado pelo tipo de modelo de mancais utilizado. Foi possível também associar o aumento ou redução daqueles níveis de vibração aos valores de alguns dos coeficientes do modelo completo de mancais.

Para a obtenção de resultados quantitativos foi desenvolvido um programa que usa o Método dos Elementos Finitos e que permite a consideração de todos os elementos essenciais de uma análise de vibrações lineares de rotores. A validade da implementação do programa foi verificada através da reprodução de resultados encontrados na bibliografia, relativos a sistemas hiperestáticos, cuja análise é mais complexa que a de rotores isostáticos, por requerer um trabalhoso cálculo da configuração de equilíbrio estático do rotor.

Os resultados obtidos no estudo de rotores bi-apoiados confirmaram as previsões qualitativas apresentadas no capítulo 4, e permitiram a identificação de um mecanismo de acoplamento de vibrações, promovido pelo desalinhamento angular dos moentes, que redundava na redução do nível das amplitudes nas passagens pelas velocidades críticas.

Na análise de rotores hiperestáticos foram enfocadas duas configurações básicas. A primeira consistiu em rotores apoiados em quatro mancais, e revelou-se pouco sensível aos efeitos do desalinhamento angular. Em seguida foram estudados rotores apoiados em três mancais, e neste caso ficou nítida a necessidade da utilização do modelo completo de mancais hidrodinâmicos, mesmo na ausência de desalinhamento angular estático, para que os resultados da análise sejam confiáveis. Alguns resultados, relativos aos efeitos do desalinhamento paralelo, mostraram que a utilização deste tipo de desalinhamento visando uma distribuição mais homogênea de cargas pelos mancais, e conseqüentemente o aumento da velocidade limite de estabilidade, pode aumentar também significativamente as amplitudes das vibrações nas passagens pelas velocidades críticas.

A demonstração inequívoca de que a consideração das vibrações angulares dos moentes pode ser essencial para a validade da análise dinâmica de rotores foi apresentada no capítulo 6, onde se estudou um rotor previsto para aplicações industriais. Neste caso, as diferenças entre os resultados calculados com o uso do modelo completo e com o uso do modelo plano foram da

ordem de 300%, caracterizando a total inadequação do modelo tradicionalmente empregado na dinâmica de rotores para a análise desse equipamento. A origem de uma discrepância tão acentuada entre os resultados é o posicionamento de um mancal em um ponto do eixo onde as amplitudes das translações são pequenas, mas que corresponde a um pico de vibrações angulares. Tal ponto do eixo é análogo a um “nó modal”, e a atuação dos esforços hidrodinâmicos associados às vibrações angulares do moente passa a ser a principal restrição ao aumento das vibrações quando o modo correspondente é excitado.

A situação descrita acima poderia ter sido detectada com a utilização do modelo plano de mancais, tal como mostrado no capítulo 6, o que daria ao analista a informação de que para o prosseguimento da análise seria necessário empregar o modelo de 32 coeficientes. No entanto, não se pode dizer que esse seja o único tipo de situação em que os efeitos do desalinhamento angular sejam tão pronunciados. Também não se poderia dizer ao certo que tais efeitos, caso fossem significativos, redundariam necessariamente na previsão de vibrações de menores amplitudes que as calculadas com o uso do modelo plano.

Fica então delineado como campo para trabalhos futuros um estudo sistemático do comportamento dinâmico de rotores hiperestáticos, visando identificar de modo mais claro as características que tornariam necessária a adoção do modelo completo de mancais para análise dinâmica desses equipamentos. Nesse estudo poderão ser incorporados elementos omitidos das análises aqui apresentadas, tal como a consideração da flexibilidade das fundações.

## Referências Bibliográficas

Agostinho, O. S., Rodrigues, A. C. S., Lirani, J., 1988, "Tolerâncias, Ajustes, Desvios e Análise de Dimensões", Edgar Blücher LTDA, São Paulo.

Arumugan, P., Swarnamani, S. and Prabhu, B. S., 1996, "An Experimental Investigation on the Static and Dynamic Characteristics of Journal Bearings Under the Influence of Twisting Misalignment," ASME Paper No. 96-TRIB-11.

Ausman, J. S., "Torque Produced by Misalignment of Hydrodynamic Gas-Lubricated Journal Bearings", Trans. ASME – J. of Basic Eng., Vol. 82, N#2, June 1960, pp. 335-341.

Avallone, E., Baumeister, T., "Mark's Standard Handbook for Mechanical Engineers" 9<sup>th</sup> ed. McGraw-Hill, 1987.

Bannister, R. H., 1976, "A Theoretical and Experimental Investigation Illustrating the Influence of Nonlinearity and Misalignment on the Eight Oil Film Coefficients," Proceedings I. Mech. Eng.-C, pp. 271-278.

Barrett, L. E., Gunter, E. J., Allaire, P. E., 1978, "Optimum Bearing and Support Damping for Unbalance Response and Stability of Rotating Machinery," ASME Journal of Engineering for Power, Vol 100, pp 89-94.

Barrett, L. E., Gunter, E. J., 1980, "Stabilization of Aerodynamically Excited Turbomachinery with Hydrodynamic Journal Bearings and Supports," Proc. Rotordynamic Instability Problems in High Performance Turbomachinery, pp 429-452.

Bathe, K. J., Wilson, E. L., 1976, "Numerical Methods in Finite Element Analysis", Prentice-Hall, New Jersey.

Black, H. F., 1974, "Calculation of Forced Whirling and Stability of Centrifugal Pump Rotor Systems", ASME Journal of Eng. for Industry, pp 1076-1084.

Bou-Said, B., Nicolas, D., "Effects of Misalignment on Static and Dynamic Characteristics of Hybrid Bearings", Tribology Trans., Vol. 35, 2, pp. 325-331.

Braun, M. J., Mullen, R. L., and Hendricks, R. C., 1983, "An Analysis of Temperature Effect in a Finite Journal Bearing with Spatial Tilt and Viscous Dissipation," ASLE Transactions, Vol. 27, 4, pp. 405-412.

Braun, M. J., Choy, F. K., Hu, Y., "Nonlinear Effects in a Plain Journal Bearing: Part 2-Results", J. of Tribology, Vol. 113, pp. 563-570.

Cameron, A., Ettles, C. M. Mc., 1981, "Basic Lubrication Theory", 3<sup>rd</sup> Ed, J. Wiley, New York.

Choy, F. K., Braun, M. J., Hu, Y., "Nonlinear Transient and Frequency Response Analysis of a Hydrodynamic Journal Bearing", J. of Tribology, Vol. 114, pp. 448-454.

Curtis, M. A., 1986, "Tool Design for Manufacturing", John Wiley & Sons, New York.

Buckholz, R. H., and Lin, J. F., 1986, "The Effect of Journal Bearing Misalignment on Load and Cavitation for Non-Newtonian Lubricants," ASME Journal of Tribology, Vol. 108, pp. 645-654.



Choudhury, P. De, Zsolcsak, S. J., Barth, E. W., 1976, "Effect of Damping on the Lateral Critical Speeds of Rotor-Bearing Systems," ASME Journal of Engineering for Industry, pp 505-513.

DIN 31652, 1983, "Hydrodynamic plain journal bearings designed for operation under steady-state conditions", Beuth Verlag, Berlin.

Ding, J., Krodkiewski, J. M., 1993, "Inclusion of Static Indetermination in the Mathematical Model for Nonlinear Dynamic Analyses of Multi-Bearing Rotor System", J. Sound and Vibration, 164(2), pp. 267-280.

Dubbel, H., 1994, " – Handbook of Mechanical Engineering", Springer-Verlag, Heilderberg.

DuBois, G. B., Ocvirk, F. W., and Wehe, R. L., 1957, "Properties of Misaligned Journal Bearings," Trans. ASME, VOL. 79, pp. 1205-1212.

Feng, N. S., Hahn, E. J., 1997, "Effects of Misalignment on the Stability and Unbalance Response of Statically Indeterminate Rotating Machinery," NASA Conference Publication N# 3344, pp. 163-175.

Feng, N. S., Hahn, E. J., 1998, "Vibration Analysis of Statically Indeterminate Rotors with Hydrodynamic Bearings", ASME J. of Tribology, Vol. 120, pp 781-78.

Garnier, T., Bonneau, D., Grente, C., 1999, "Three-Dimensional EHD Behaviour of the Engine Block/Crankshaft Assembly for a Four Cylinder Inline Automotive Engine", ASME J. of Tribology, Vol.121, pp721-730.

Gash, R., "Vibration of Large Turbo Rotors in Fluid Film Bearings on an Elastic Foundation", J. of Sound and Vibration, Vol. 47, 1976, pp53-73.

Genta, G., 1993, "Vibration of Structures and Machines", Springer-Verlag, New York.

Goodwin M. J., 1989, "Dynamics os Rotor-Bearing Systems", Unwin Hyman Ltd, London.

Hanselman, D., Littlefield, B., 1995, "The Student edition of MATLAB", The MathWork Inc.

Holmes A. G., Ettles, C. M. McC., Mayes, I. W., 1978, "The Dynamics of Multi-Rotor Systems Supported on Oil Film Bearings", Trans. ASME, J of Mechanical Design, Vol. 100, pp. 156-164.

Hori, Y., Uematsu R., 1980, "Influence of Misalignment of Support Journal Bearing on Stability of Multirotor Systems," Tribology International Oct., pp. 249-252.

Hylarides, S., 1974, "Transverse Vibrations of Ship's Propulsion Systems, part I, Theoretical Analysis", Report No. 197 M, Netherlands Ship Research Centre TNO, Delft, 19 pp.

Ikeuchi, K., Katsuse, S., Hamamura, K., Mori, H., 1985, "Effects of Misalignment in Full Journal Bearing With Circunferential Oil Groove", Proc. J.S.L.E. International Tribology Conference, Jul. 8-10, Tokio, pp 67-72.

Jakeman, R. W., 1986, "Performance and Oil Film Dynamic Coefficients of a Misaligned Sterntube Bearing," ASLE Transactions, Vol. 29, 4, pp. 441-450.

Jakeman, R. W., 1989, "Influence of Sterntube Bearings on Lateral Vibration Amplitudes in Marine Propeller Shafting," *Tribology International*, Vol. 22, 2, pp. 125-136.

Jakeman, R. W., 1992, "An Elastohydrodynamic Analysis of a Misaligned Sterntube Bearing", *J. of Physics D: Applied Ph.*, Vol 25, pp A101-107.

Jang, G. H., Kim, Y. J., 1998, "Calculation of Dynamic Coefficients in a Hydrodynamic Bearing Considering Five Degrees of Freedom for a General Rotor-Bearing System, ASME Paper N# 98-TRIB-39, ASME/STLE Tribology Conference, Toronto, Canada.

Jang, J. Y., Chang, C. C., "Adiabatic Solutions for a Misaligned Journal Bearing With Non-Newtonian Lubricants", *Tribology International*, Vol 20, 5, 1987, pp. 267-275.

Juvinall, R. C., Marshek, K. M., "Fundamentals of Machine Component Design" 3<sup>rd</sup> ed. John Wiley, 1991.

Karassik, I., McGuire, J. T., 1998, "Centrifugal Pumps", 2<sup>nd</sup> ed., Chapman & Hall

Karni, Z. H., Parsons, M. G., Mourelatos, Z. P., "Time-Varying Behaviour of a Statically Indeterminate Shafting System in a Hydrodynamic Journal Bearing", *J. of Tribology*, Vol. 109, pp. 115-123.

Kato, T., Matsuoka, H., Hori, Y., "Seismic Response of a Linearly Stable, Misaligned Multirotor System", *Tribology Trans.* Vol. 36, 2 1993, 311-315.

Kicinski, J., Drozdowski R., Materny, P., 1997, "The Nonlinear Analysis of the Effect of Support Construction Properties on the Dynamic Properties of Multi-Support Rotor Systems," *J. Sound and Vibration*, 206(4), pp. 523-539.

Kikuchi, K., 1970, "Analysis of Unbalance Vibration of Rotating Shaft System with Many Bearings and Disks," *Bull. of JSME*, Vol 13, 61, pp. 864-872.

Krodkiewski, J. M., Ding, J., Zhang, N., 1994, "Identification of Unbalance Change Using a Nonlinear Mathematical Model for Multi- Bearing Rotor Systems, *J. Sound and Vibration* 169(5), pp. 685-698.

Lalanne, M., Ferraris, G., 1990, "Rotordynamics Prediction in Engineering", J. Willey & Sons, Sussex.

Liu, W., Novak, M., 1995, "Dynamic Behaviour of Turbine-Generator-Foundation Systems," *Earthquake Eng. and Structural Dyn.*, Vol. 24, pp. 339-360.

Lloyd, T., McCallion, H., 1968, "Recent Developments in Fluid Film Lubrication Theory", *Proc. Inst. Mech. Eng.*, Vol. 182, 3A, pp 36-50.

Lund, J. W., 1974, "Stability and Damped Critical Speeds of a Flexible Rotor in Fluid-Film Bearings," *ASME Journal of Engineering for Industry*, pp. 509-517.

Lund, J. W., 1974, "Modal Response of a Flexible Rotor in Fluid-Film Bearings," *ASME Journal of Engineering for Industry*, pp. 525-533.

Lund, J. W., Thomsem, K. K., 1978, "A Calculation Method and data for the Dynamic Coefficients of Oil Lubricated Journal Bearings", "Topics in Fluid Film Bearing and Rotor Bearing System Design and Optimization," ASME, pp. 1-28.

Lund, J. W., Wang, Z., 1986, "Application of the Riccati Method to a Rotor Dynamic Analysis of Long Shafts on a Flexible Foundation", ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, Vol. 108, pp. 177-181.

Manacorda, L. G., and Capriz, G., 1965, "Torque Produced By Misalignment in Short Lubricated Bearings," ASME Journal of Basic Engineering, pp. 847-849.

Mokhtar, M. O. A., Safar, Z. S., and Abd-El-Rahman, M. A. M., 1985, "An Adiabatic Solution of Misaligned Journal Bearings," ASME Journal of Tribology, Vol. 107, pp. 263-267.

Morton, P. G., 1972, "Analysis of Rotors Supported Upon Many Bearings," J. Mechanical Eng. Science Vol 14, 1 pp. 25-33.

Mukherjee, A., and Rao, J. S., 1977, "Stiffness and Damping Coefficients of an Inclined Journal Bearing," Mechanism and Machine Theory, Vol. 12, pp. 339-355.

Myrick, S. T., 1973, "Transient and Steady-State Response of Flexible Rotors: Real Hydrodynamic Bearing Systems", Ph. D. diss., Univ. Texas.

Myrick, S. T., Rylander, H. G., 1976, "Analysis of Flexible Rotor Whirl and Whip Using a Realistic Hydrodynamic Journal Bearing Model", ASME J. of Eng. for Industry, Vol 98, pp. 1135-1144.

Nelson, H. D., 1977, "A Finite Rotating Shaft Element Using Timoshenko Beam Theory", Engineering Research Center, Arizona State University, ERC-R-77023.

Nikolakopoulos, P. G., and Papadopoulos, C. A., 1994, "Non-Linearities in Misaligned Journal Bearings", Tribology International, Vol. 27, 4, pp. 243-257.

Pinkus, O., and Bupara, S. S., 1979, "Adiabatic Solutions for Finite Journal Bearings", ASME Journal of Lubrication Technology, Vol. 101, pp. 492-496.

Pinkus, O., and Bupara, S. S., 1979, "Analysis of Misaligned Grooved Journal Bearings", ASME Journal of Lubrication Technology, Vol. 101, pp. 503-509.

Pinkus, O., 1987, "The Reynolds Centennial: A Brief History of the Theory of Hydrodynamic Lubrication", J. of Tribology, Vol.109, pp 2-20.

Prabhu, B. S., "An Experimental Investigation on the Misalignment Effects in Journal Bearings", Tribology Trans. Vol 40, 2, pp. 235-242.

Qiu, Z. L., and Tieu, A. K., 1995, "Misalignment Effect on the Static and Dynamic Characteristics of Hydrodynamic Journal Bearings," ASME Journal of Tribology, Vol. 117, pp. 717-723.

Rao, J. S., 1983, Rotordynamics, Wiley Eastern.

Rao, J. S., 1993, "Quality Factors of Rotors with Hydrodynamic Bearings," ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, Vol 115, pp. 261-265.

Rice, J. R., 1965, "Misalignment Torques of Hydrodynamic Gas-Lubricated Journal Bearings," ASME Journal of Basic Engineering, pp. 193-198.

Rieger, N. F., Zhou, S., 1998, "Development and Verification of Transfer Matrix Unbalance Response Procedure for Three-Level Rotor-Foundation Systems", J. Vibration and Acoustics, Vol 120, pp. 240-251.

Ruhl, R. L., Booker, J. F., 1972, "A Finite Element Model for Distributed Parameter Turborotor Systems", ASME Journal of Engineering for Industry, pp. 126-132.

Safar, Z. S., "Energy Loss Due to Misalignment of journal Bearings", Tribology International, Vol 17, 2, pp. 107-109.

Safar, Z. S., Riad, M. S. M., "Prediction of the Coefficient of Friction of a Misaligned Turbulent Flow Journal Bearing", Tribology International, Vol 21, 1, pp. 15-19.

San Andres, L., 1993, "Effect of Shaft Misalignment on the Operation of a Turbulent Flow Hydrostatic Bearing," ASME Journal of Tribology, Vol. 115, pp. 355-363.

Sato, Y., Ogiso, S., "Load Capacity and Stiffness of Misaligned Hydrostatic Recessed Journal Bearings", Wear, 92, 1983, pp. 231-241.

Shiau, T. N., Chang, J. R., 1993, "Multi-objective Optimization of Rotor-Bearing System with Critical Speeds Constraints," ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, Vol. 115, pp. 246-255.

Smalley, A. J., and McCallion, H., 1966-67, "The Effect of Journal Misalignment on the Performance of a Journal Bearing Under Steady Running Conditions," Proc. of the Inst. of Mech. Eng., Vol. 181, 3B, pp. 45-54.

Spotts, M. F., "Design of Machine Elements", 6<sup>th</sup> ed, Prentice Hall, 1985.

Vijayaraghavan, D., and Keith, T. G., 1989, "Effect of Cavitation on the Performance of a Grooved Misaligned Journal Bearing," Wear, Vol. 134, pp. 377-397.

Vogelpohl, G., 1937, "Beiträge zur Kenntnis der Gleitlagerreibung", V. D. I. Forsch., No.386, 28 pp.

Wowk, V., 1991, "Machinery Vibration: Measurement and Analysis", McGraw-Hill.

Zachariadis, D. C., 1997, "Preliminary Estimation of Journal's Angular Misalignment Effects on Rotor Vibrations", Proceedings of the 2<sup>nd</sup> International Conf. On Hydrodynamic Bearing-Rotor System Dynamics, Xi-an, China, pp. 220-227.

Zachariadis, D. C., 1998, "Short Bearing Model for the Evaluation of Journal's Dynamic Angular Misalignment Effects on Rotor Vibrations," ASME Paper 98-GT-397, ASME 43<sup>rd</sup> Gas Turbine Technical Congress, Stockholm, Sweden.

Zachariadis, D. C., 1999, "Linear Vibrations of Statically Indeterminate Rotors on Angular Misaligned Hydrodynamic Bearings", ASME Paper 99-GT-333, ASME 44<sup>th</sup> Gas Turbine Technical Congress, Indianapolis, USA.

## Apêndice 1

Matrizes do elemento de vigas de Timoshenko (Genta, 1993):

$$K_e = \frac{EI}{l^3(1+f)} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ (4+f)l^2 & -6l & (2-f)l^2 & \\ & 12 & -6l & \\ & & & (4+f)l^2 \end{bmatrix},$$

onde  $f = \frac{12EI\kappa}{GA l^2}$ ,  $\kappa = \frac{6(1+\nu)(1+m^2)}{(7+6\nu)(1+m^2)^2 + (20+12\nu)m^2}$ ,  $m = b/a$ , sendo  $b$  o raio

externo do eixo,  $a$  o raio interno,  $G$  o módulo de cisalhamento e  $A$  a área da seção transversal.

$$M_e = \frac{\rho A l}{420(1+f)^2} \begin{bmatrix} m_1 & l m_2 & m_3 & -l m_4 \\ & l^2 m_5 & l m_4 & -l^2 m_6 \\ & & m_1 & -l m_2 \\ & & & l^2 m_5 \end{bmatrix} + \frac{\rho I}{30l(1+f)^2} \begin{bmatrix} m_7 & l m_8 & -m_7 & l m_8 \\ & l^2 m_9 & -l m_8 & -l^2 m_{10} \\ & & m_7 & -l m_8 \\ & & & l^2 m_9 \end{bmatrix}$$

onde  $m_1 = 156 + 294f + 140f^2$ ,  $m_2 = 22 + \frac{77}{2}f + \frac{35}{2}f^2$ ,  $m_3 = 54 + 126f + 70f^2$ ,

$m_4 = 13 + \frac{63}{2}f + \frac{35}{2}f^2$ ,  $m_5 = 4 + 7f + \frac{7}{2}f^2$ ,  $m_6 = 3 + 7f + \frac{7}{2}f^2$ ,  $m_7 = 36$ ,

$m_8 = 3 - 15f$ ,  $m_9 = 4 + 5f + 10f^2$ ,  $m_{10} = 1 + 5f - 5f^2$ .

Matrizes de inércia e de efeito giroscópico dos discos:

$$G_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega J_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega J_p & 0 & 0 \end{bmatrix}; M_d = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ & J_t & 0 & 0 \\ & & m & 0 \\ & & & J_t \end{bmatrix},$$

onde  $m$  é a massa do disco.

Produtos de inércia do disco com desbalanceamento dinâmico descrito na figura 5.2:

$J_{XY} = -m_d r_d l_d \sin \varphi$ ,  $J_{XZ} = -m_d r_d l_d \cos \varphi$ ,  $J_{YZ} = -m_d r_d^2 \sin 2\varphi$ . Substituindo esses valores na matriz de inércia do disco e aplicando o Teorema do Momento Angular, chega-se à expressão dos esforços aplicados pelo disco sobre o eixo:

$$\vec{U}_d = -m_d r_d l_d \omega^2 (\cos \varphi_d \vec{J} + \sin \varphi_d \vec{K}).$$



The Society shall not be responsible for statements or opinions advanced in papers or discussion at meetings of the Society or of its Divisions or Sections, or printed in its publications. Discussion is printed only if the paper is published in an ASME Journal. Authorization to photocopy for internal or personal use is granted to libraries and other users registered with the Copyright Clearance Center (CCC) provided \$3/article is paid to CCC, 222 Rosewood Dr., Danvers, MA 01923. Requests for special permission or bulk reproduction should be addressed to the ASME Technical Publishing Department.

Copyright © 1999 by ASME

All Rights Reserved

Printed in U.S.A.

## LINEAR VIBRATIONS OF STATICALLY INDETERMINATE ROTORS ON ANGULAR MISALIGNED HYDRODYNAMIC BEARINGS

Demetrio C. Zachariadis

Rotordynamics Research Group  
Dept. of Mechanical Engineering  
Escola Politécnica  
Universidade de São Paulo  
Av. Prof. Mello Moraes, 2231  
São Paulo, S.P., 05508-900  
Brasil  
e-mail: dczachar@usp.br

### ABSTRACT

The influence of journal's static and dynamic angular misalignment on the synchronous unbalance response and linear stability threshold of statically indeterminate rotors is analysed. Both short and finite bearing models are considered in order to calculate hydrodynamic reactions, and rotating parts are modeled using beam finite elements. The results provide descriptions of the effects of the consideration of the 32 coefficient bearing model on linear vibrations analyses, together with guidelines for early design stage identification of rotor systems sensitive to angular misalignments.

### NOMENCLATURE

$A, B$ : angular displacements	$\mu$ : lubricant viscosity
$C$ : bearing, journal centre	$\omega$ : rotor angular velocity
$L$ : bearing length	<u>Subscripts</u>
$X, Y, Z$ : coordinate system	$b$ : bearing
$c$ : radial clearance	$g$ : groove
$f$ : amplification factor	$j$ : journal
$p$ : pressure	$l$ : left
$r$ : bearing radius	$r$ : right
$u$ : unbalance	$s$ : shaft
$y, z$ : relative displacements	<u>Superscripts</u>
$\alpha, \beta$ : relative tilt angles	$s$ : static equilibrium

### INTRODUCTION

Multi shaft rotors, comprising several equipment connected at their common ends frequently occur in rotating machinery. These systems may experience static coupling misalignment, in which the shafts of two adjacent rotors are not on the same centreline when assembled, or tend to this situation during operation. The noncoaxial condition can be parallel misalignment or angular misalignment, and in most practical situations one finds a combination of the two kinds

of misalignment in both vertical and horizontal directions. In site correction of noncoaxial rotors involves a repetitive procedure of measurement and move of the bearing foundations.

Manufacturers often recommend the catenary alignment, achieved when the bearings of adjacent rotors are so arranged that the mating ends of the shafts keep the same height and inclination that they would present if operated separately at a certain speed. Assuming that torque and speed requisites can be met, and in the absence of vibrations, the catenary alignment configuration should be the ideal one for the use of flexible couplings, since there would be no strains on them.

Because of assemblage and manufacturing deviations, elastic and thermal distortions, and even due to flow and pressure changes at different speeds and horsepower rating, many multi bearing systems are forced into that situation of coupling misalignment.

As the shafts are strained towards each other, the relative positions between journals and respective bearings are altered. Journals of hydrodynamic bearings are thus likely to operate with static angular misalignment, instead of the normally assumed parallel condition, and this affects their properties such as static equilibrium position and load capacity, lubricant side leakage, friction and heat generated within the fluid film. In the presence of lateral vibrations, the journals also experience dynamic angular misalignment, in which the angle between the journal and bearing centrelines varies in time, especially in the passages through critical speeds. These factors tend to accelerate flexible coupling wear, and a possible strategy is to adopt rigid connections between rotors, resulting in a continuous shaft supported on many bearings.

Multi bearing equipment originally conceived as a single shaft, probably with varying section, are commonly found as well; they experience the same bearing misalignment problems described above, and both kinds of systems constitute statically indeterminate rotors.

Among early papers on the subject of statically indeterminate

rotors vibrations, some propose the use of truncated modal series approaches, as exemplified in Morton (1972) and Holmes et al. (1978). The two most widely used methods for rotor vibration analyses, Transfer Matrix Method (TMM) and Finite Element Method (FEM), have been adopted by several authors in order to perform linear and nonlinear simulations, as listed below.

Kikuchi (1970) used TMM together with a short bearing model to evaluate the steady state unbalance response of a three bearing system, but did not consider the nonlinear characteristic of the hydrodynamic bearing reactions in order to evaluate the static equilibrium position of the journals and corresponding dynamic coefficients.

A similar approach was adopted by Hori and Uematsu (1980) in an elucidative investigation of the linear stability threshold of four bearing systems, representing two single span rotors rigidly coupled. This time, static equilibrium positions were calculated taking into account the nonlinearity of oil film reactions, together with bearing parallel misalignment, in which the bearings are displaced from the positions corresponding to the catenary alignment condition, but keeping the parallelism between journal and bearing axis.

Parallel misalignment effects were also studied by Feng and Hahn (1997), who used TMM and finite bearing models to perform rotor linear vibration analyses. These authors pointed out that in statically indeterminate systems the load direction is not constant relative to the bearings, which may hinder the use of tabulated dynamic coefficients. Rieger and Zhou (1998a, b) extended TMM rotor models to include two levels of flexible foundations in the calculation of unbalance steady state response and linear stability threshold. The authors assumed that the dynamic properties of the bearings were known and no particular attention seems to have been devoted to the calculation of the static equilibrium position of the rotor assembly.

Bearing parallel misalignment was included by Ding and Krodkiewski (1993) in their FEM rotor models, used to perform time marching response calculations of complex systems. The authors adopted condensation techniques and neglected gyroscopic effects; finite length bearing reactions were calculated at each integration step. The same procedure was followed in the identification of system unbalance changes by Krodkiewski et al. (1994).

Detailed FEM discretization of casing and bearing bushes, including thermoelastic deformation was presented in Kicinski et al. (1997). Complete foundation and underlying soil medium models were proposed by Liu and Novak (1995), in order to analyse the effects of seismic excitations on turbine generator sets. Both previous references considered linearized bearing models and did not include gyroscopic effects in their time marching response calculations.

Besides the aforementioned relevance of bearing parallel misalignment, some authors investigated the influence of static tilt on hydrodynamic bearing operation. A comprehensive study comprising the determination of static properties and eight dynamic coefficients of misaligned bearings, as well as its effects on the linear stability of rigid rotors was presented by Qiu and Tieu (1995).

Dynamic angular misalignment deserved attention from Kikuchi (1970), but in a limited way. This author adopted short bearing theory together with the assumption that "the oil film pressure is distributed in the form of a cubic curve", and derived angular displacement dependent moment coefficients for a plain cylindrical bearing with no

angular static misalignment. The resulting bearing linear model comprises 16 dynamic coefficients ( 8 coefficients of the traditional planar bearing model plus 8 moment coefficients), and was also used by Hori and Uematsu (1980). Moment coefficients were also calculated by Mukehrjee and Rao (1977), considering a finite bearing model.

The complete stiffness and damping bearing matrices are obtained through the inclusion of angular displacement dependent forces and translation displacement dependent moments, leading to a 32 coefficient model. Calculations of these coefficients for finite bearings are exemplified in Jakeman (1986) and San-Andrés (1993).

A discussion whether the 32 coefficient bearing model should be adopted instead of the well founded 8 coefficient model was first presented in Zachariadis (1998), concerning steady state unbalance response of single span machines. The same subject is readdressed here, focusing statically indeterminate rotor systems on hydrodynamic bearings, whose journals experience static and dynamic angular misalignment superimposed to parallel static misalignment, as described in the foregoing.

Standard Finite Element Method procedures are adopted to represent rotating parts and perform linear vibration analysis. Finite and short bearing models are considered for the calculation of hydrodynamic reactions and dynamic coefficients, with preference to the latter, due to its expediency.

Numerical results evidence the influence of static and dynamic angular misalignment on the steady state unbalance response and stability threshold of some typical configurations of statically indeterminate rotors, providing guidelines for the choice of the appropriate bearing model to be adopted in similar analyses of such systems.

## ANALYSIS PROCEDURE

Shaft dynamic properties are represented by the mass and stiffness matrices of the well known Timoshenko beam element. Wheels, disks, etc., are assumed to be rigid, and their gyroscopic effects are included.

A nonlinear static analysis must be performed at selected rotor speeds to determine the static configuration of the system, and calculate the absolute static equilibrium position of each model node, which depends on the external static loads and bearing static misalignments. This requires the iterative solution of Eq. (1),

$$K_s q = R + L^s \quad (1)$$

where  $K_s$  is the stiffness matrix of the shaft,  $q$  is the vector of coordinates,  $R$  is the vector of nonlinear bearing reactions and  $L^s$  includes all external static loads, like weights and concentrated forces and moments due to gears, couplings, etc. The initial guess for the iterative process are the bearing reactions and the rotor deformed shape calculated considering the bearings as being rigid; static condensation techniques may also be applied in order to reduce the size of Eq. (1).

Once the absolute static equilibrium position is known, one can calculate the corresponding dynamic coefficients of the bearings, and the complete set of linear differential equations is obtained,

$$[M_s + M_r] \ddot{q} + [D_s + D_r + G] \dot{q} + [K_s + K_b] q = f(t) \quad (2)$$



where  $M_r$  and  $K_r$  are the consistent mass and stiffness matrices,  $M_r$  is the rotating rigid elements mass matrix,  $D$  is a general damping matrix,  $D_b$  and  $K_b$  are the bearing damping and stiffness matrices,  $G$  is the skew symmetric gyroscopic matrix and  $f(t)$  is the harmonic forcing terms vector. Procedures for the calculation of synchronous unbalance response and stability threshold are briefly described in the appendix.

## BEARING MODELS

The type of bearing considered in this analysis consists of a plain cylindrical bearing with two lands separated by an annular groove; in a general case, each land may have independent geometric properties, as shown in Fig.1 together with the coordinate system.

Considering the bearing and shaft portion within it as rigid bodies, the forces and moments acting on the journal are functions of the relative displacements between  $C_j$  and  $C_b$ , given by  $y = Y_j - Y_b$ ,  $z = Z_j - Z_b$ , where  $Y_j$ ,  $Z_j$ ,  $Y_b$ ,  $Z_b$  are the absolute coordinates of  $C_j$  and  $C_b$  respectively, and the relative tilt angles,  $\alpha = A_j - A_b$ ,  $\beta = B_j - B_b$ , where  $A_j$ ,  $B_j$ ,  $A_b$  and  $B_b$  are the journal's and bearing's absolute tilt angles, as well as the corresponding velocities. The nondimensional thickness of the fluid film is given in Eq. (3)

$$H(\theta', \zeta) = 1 - (\bar{y} + \zeta \bar{\alpha}) \cos \theta' - (\bar{z} - \zeta \bar{\beta}) \sin \theta' \quad (3)$$

where  $\bar{y} = y/c_r$ ,  $\bar{z} = z/c_r$ ,  $\bar{\alpha} = \alpha L/2c_r$ , and  $\bar{\beta} = \beta L/2c_r$ ;  $\zeta$  is the axial coordinate of the unwrapped bearing internal surface,  $-L/2 \leq \zeta \leq L/2$ , related to  $\bar{\zeta}$  through  $\zeta = L\bar{\zeta}/2$ , so  $-1 \leq \bar{\zeta} \leq 1$ ;  $\theta'$  is the angular coordinate, with  $\theta' = 0$  at  $\varphi = 0$ .

Assuming the conventionally adopted hypotheses (isothermal, laminar flow), the pressure field is calculated from the integration of the Reynolds equation,

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta'^2} + \left(\frac{2r}{L}\right)^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \zeta'^2} = \frac{12}{H^3} \left( \pi H' + \frac{1}{\omega} \dot{H} \right) + \dots$$

$$\frac{3\Pi}{4H^3} \left[ H'^2 + 2HH'' + \left(\frac{2r}{L}\right)^2 (\bar{H}'^2 + 2\bar{H}\bar{H}'') \right] \quad (4)$$

with  $\Pi = \bar{p}H^{3/2}$ ,  $p = \mu\omega \left(\frac{r}{c_r}\right)^2 \bar{p}$ , where  $\Pi$  and  $\bar{p}$  are nondimensional, and  $H' = \partial H/\partial \theta'$ ,  $\bar{H}' = \partial H/\partial \bar{\zeta}$ ,  $\dot{H} = \partial H/\partial t$ .

Figure 2 depicts the nondimensional pressure field in a two equal land bearing with the following properties:  $L_l = L_r = 8$  mm;  $L_g = 2$  mm;  $r_r = r_j = 18.0$  mm;  $c_r = c_j = 90$   $\mu$  m;  $\bar{y} = -0.56$ ,  $\bar{z} = -0.22$ ,  $\bar{\alpha} = 0.1$ ,  $\bar{\beta} = -0.2$ ; a central finite difference approach and the successive overrelaxation method are used to solve Eq. (4), together with the condition  $p(\theta', \zeta) = p_{\text{min}}$  in the cavitation region.

As a linear vibration analysis requires the iterative determination of the static equilibrium position at each selected rotor speed, the obtainment of a complete response curve may require thousands of

integrations of the Reynolds equation. Moreover, since the equilibrium position of each journal is a function of four independent parameters, two coordinates for the journal centre and two tilt angles, there are no available tabulated stiffness and damping coefficients, so these 32 coefficients must be also numerically calculated. The whole process is extremely time consuming, and is not appropriate unless one desires a detailed quantitative description of the behaviour of a specific equipment.

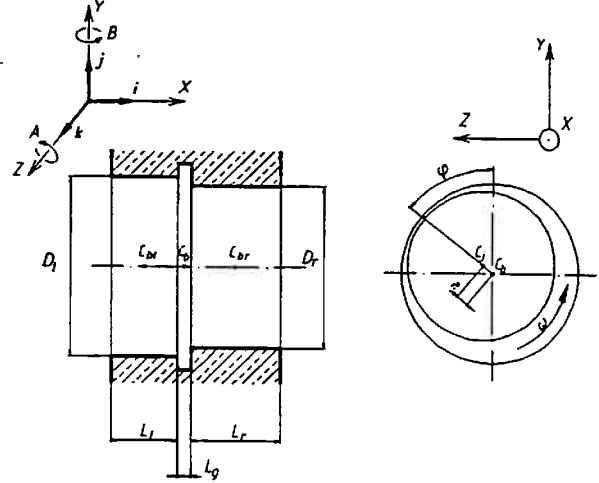


Fig. 1 Double bearing model and coordinate system; generic geometry

A simple means to speed up the analysis, with little loss of accuracy, is to make some simplifying assumptions in order to adopt the short bearing theory, which is possible due to the particular bearing geometry here considered. It can be verified that if each land has an  $L/2r$  ratio less than 0.25, and the static eccentricity of each journal does not exceed 80% of the respective radial clearance, the resulting short bearing hydrodynamic reactions are good approximations of the forces and moments calculated from the integration of pressure fields like the one exemplified in Fig 2. The two-land bearing can then be represented by a double short bearing, and analytical expressions are available to calculate the hydrodynamic forces and moments, as well as the dynamic coefficients of the 32 coefficient bearing model. Within the context of this paper, devoted to the presentation of illustrative comparative results, the adoption of the double short bearing model does not affect the analyses and derived conclusions. A complete description of this double short bearing model is given in Zachariadis (1998); the expressions used to calculate the nonlinear forces and moments considered in vector  $R$  of Eq. (1), and the expressions for the dynamic coefficients of the stiffness and damping bearing matrices shown in Eq. (5) are reproduced in the appendix.

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{YY} & k_{YB} & k_{YZ} & k_{YA} \\ k_{BY} & k_{BB} & k_{BZ} & k_{BA} \\ k_{ZY} & k_{ZB} & k_{ZZ} & k_{ZA} \\ k_{AY} & k_{AB} & k_{AZ} & k_{AA} \end{bmatrix}; [C] = \begin{bmatrix} c_{YY} & c_{YB} & c_{YZ} & c_{YA} \\ c_{BY} & c_{BB} & c_{BZ} & c_{BA} \\ c_{ZY} & c_{ZB} & c_{ZZ} & c_{ZA} \\ c_{AY} & c_{AB} & c_{AZ} & c_{AA} \end{bmatrix} \quad (5)$$

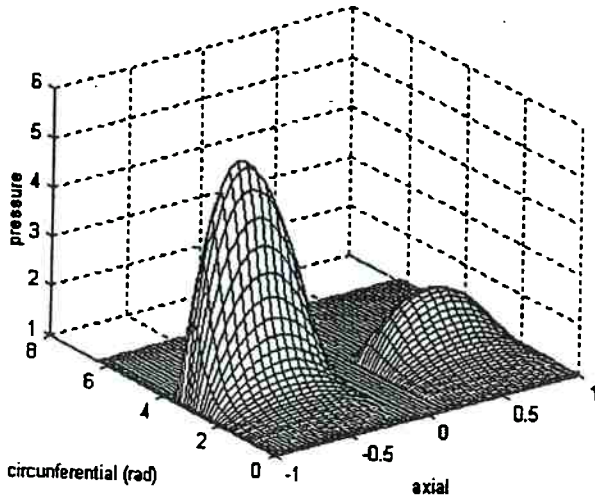


Fig. 2 Nondimensional pressure field; two equal land bearing

### NUMERICAL RESULTS

Multi bearing systems resulting from the assemblage of two equal length single span rotors previously studied in Hori and Uematsu (1980) will be analysed. The original properties of the cylindrical plain bearings are given in Table 1, together with the ones of the equivalent double short bearing with two equal lands adopted here; Table 2 gives the properties of each individual rotor A and B.

Table 1 Bearing properties

	Hori and Uematsu (1980)	Double short bearing
Diameter	36 mm	36 mm
Length	18 mm	$L_l = L_r = 8$ mm; $L_g = 2$ mm
Radial clearance	90 $\mu$ m	90 $\mu$ m
Viscosity	14 mPa s	80 mPa s

The nondimensional  $r_{by}$  is the ratio between bearing direct stiffness,  $k_{yy}$ , and shaft stiffness,  $k_s = 48EI/l_{bb}^3$ , and gives a measure of the sensitiveness of a single span rotor to dynamic angular misalignment effects on the amplification factor, as presented in the previous paper on the theme; the amplification factor is defined as the ratio between the maximum whirl radius of the disk and its unbalance.

Due to its high  $r_{by}$  value, rotor A has a remote connection with industrial equipment, and should be seen as a laboratory rotor. Rotor B presents a moderately high value of  $r_{by}$  and it can be assumed to represent operating machines. It is clear, comparing the values of  $f_8$  and  $f_{32}$ , and of  $\sigma_8$  and  $\sigma_{32}$ , that dynamic angular misalignment affects the amplification factors in a much more evident way than it influences the stability thresholds results. Table 2 also shows results concerning the static angular misalignment condition, in which the bearings remain aligned to the undeformed rotor and the shaft deflects due to gravity loads. The differences between the aligned and angular misalignment conditions are more noticeable for rotor A, and

indicate that the influence of static angular misalignment, although significant, is by far less relevant than the influence of the dynamic angular misalignment on the amplification factors. Critical speeds are seen to be quite insensitive to angular misalignments.

Table 2 Properties of rotors A and B;  $w_{32,s}$ ,  $f_{32,s}$  and  $\sigma_{32,s}$  are calculated using the 32 and 8 coefficient bearing models respectively

Properties	Rotor			
	A		B	
Length (m)	0.7		0.7	
Length between bearings, $l_{bb}$ (m)	0.6		0.6	
Diameter (m)	0.015		0.020	
Mass of disk (kg)	9.2		5.2	
Moment of inertia of disk, $I_p = I_t$ ( $\text{kg m}^2$ )	0.1		0.1	
$r_{by} = 2k_{yy}/k_s$	55.9		6.1	
Critical speed (rps)	$w_{32}$	$w_8$	$w_{32}$	$w_8$
	aligned	17.0	17.4	39.2
angular misaligned	$w_{32}$	$w_8$	$w_{32}$	$w_8$
	aligned	17.9	17.4	39.2
Peak amplification factors	$f_{32}$	$f_8$	$f_{32}$	$f_8$
	aligned	31.5	98.7	10.7
angular misaligned	$f_{32}$	$f_8$	$f_{32}$	$f_8$
	aligned	38.3	121.7	10.6
Stability threshold (rps)	$\sigma_{32}$	$\sigma_8$	$\sigma_{32}$	$\sigma_8$
	aligned	35.6	35.5	66.6
angular misaligned	$\sigma_{32}$	$\sigma_8$	$\sigma_{32}$	$\sigma_8$
	aligned	39.9	38.9	66.9

Density: 7850  $\text{kg/m}^3$ ; Young's modulus,  $E = 2.1 \times 10^{11} \text{N/m}^2$

### Four Bearing Systems

First, four bearing systems will be studied, such as the one displayed in Fig. 3; rotors AA, BB and AB are analogous, and in the latter, rotor A is on the left. The rotors are rigidly coupled at their common ends between bearings B2 and B3; catenary alignment conditions for these three systems are given in Table 3, and the corresponding deflected shapes in the vertical plane due to gravity loads are shown in Fig. 4 (the shapes appear distorted because the vertical axis scale is artificially augmented).

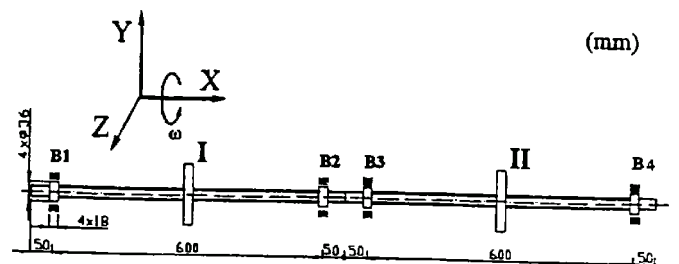


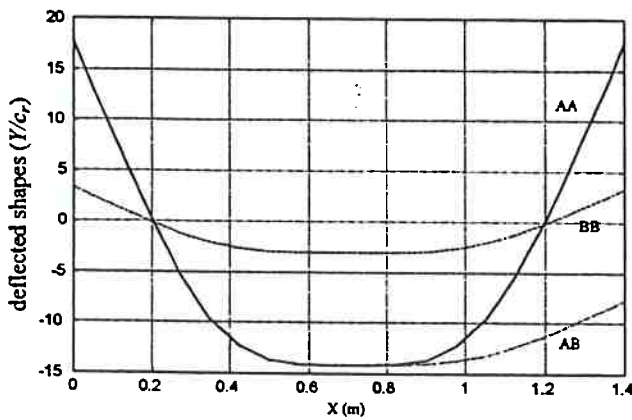
Fig. 3 Four bearing rotor: sketch of AA, AB and BB systems

Both disks are assumed to have equal unbalance vectors of magnitude  $u$ , given by  $u_i = u(\sin \phi_i^j \mathbf{j} - \cos \phi_i^j \mathbf{k})$ ; the phase angle

between unbalance vectors is  $\varphi_{I,II}^* = \varphi_{II}^* - \varphi_I^*$ , where I and II identify the left and right disks respectively. Table 4 shows the influence of the phase angle, or the unbalance distribution on the maximum amplification factors of the disks of system AA.

**Table 3 Four bearing rotor systems; bearing arrangement for catenary alignment configuration**

Rotor system	Vertical position and tilt angle	Bearing			
		1	2	3	4
AA	$Y_{bi}(10^{-3} \text{ m})$	1.240	-1.230	-1.230	1.240
	$A_{bi}(10^{-3} \text{ rad})$	-8.240	0	0	8.240
BB	$Y_{bi}(10^{-3} \text{ m})$	0.250	-0.250	-0.250	0.250
	$A_{bi}(10^{-3} \text{ rad})$	-1.640	0	0	1.640
AB	$Y_{bi}(10^{-3} \text{ m})$	1.240	-1.230	-1.235	-0.735
	$A_{bi}(10^{-3} \text{ rad})$	-8.240	0	0	1.640



**Fig. 4 Four bearing rotor: catenary alignment configuration; vertical displacements are divided by  $c_r$**

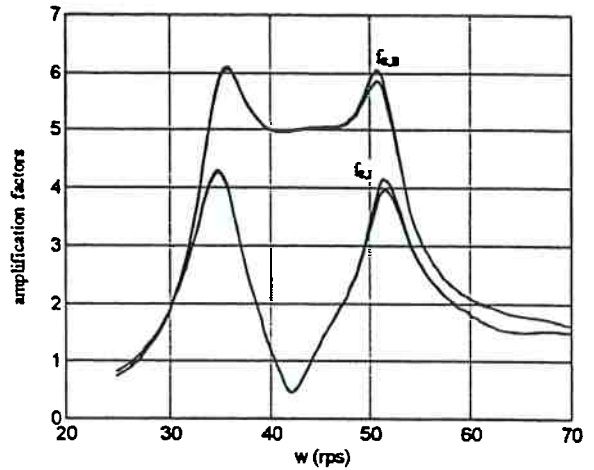
**Table 4 Unbalance distribution effects on maximum amplification factors; AA system**

$\varphi_{I,II}^*$	$f_{32}$		$f_8$		$100(f_8 - f_{32})/f_{32}$	
	I	II	I	II	I	II
0	27.9	27.9	59.9	59.9	114.7	114.7
$\pi/4$	25.1	26.7	54.5	56.3	117.1	110.9
$\pi/2$	18.7	21.7	40.8	44.2	118.2	103.7
$3\pi/4$	10.3	13.7	21.6	25.6	109.7	86.9
$\pi$	10.4	10.4	10.6	10.6	1.9	1.9

Results in table 4 show that except for  $\varphi_{I,II}^* = \pi$ , the inclusion of dynamic angular misalignment yields differences of the order of 100% between  $f_{32}$  and  $f_8$ . This is half the difference between  $f_{32}$  and  $f_8$  calculated when rotor A is assumed to operate alone, indicating that in this statically indeterminate configuration, the sensitiveness to dynamic angular misalignment is reduced. Critical speeds and stability thresholds are very little affected:  $w_{32}$  and  $w_8$  have similar

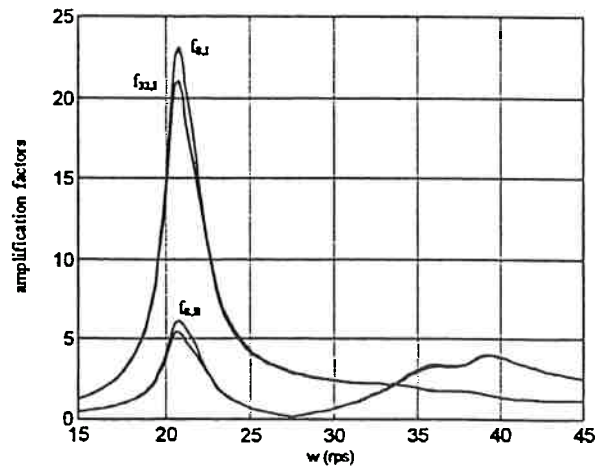
values around 23.3 rps, and  $\sigma_{32,8} \approx 37.7$  rps.

Analogous calculations for system BB indicate that this rotor is almost insensitive to dynamic angular misalignment, and the differences between  $f_{32}$  and  $f_8$  are less than 5%. Figure 5 displays the response curves of disks I and II for  $\varphi_{I,II}^* = \pi/2$ ;  $f_8$  assumes slightly higher values on the second critical speed. The critical speeds occur at approximately 35 and 52 rps and the stability threshold is  $\sigma_{32,8} \approx 67$  rps.



**Fig. 5 Response curves, BB system;  $\varphi_{I,II}^* = \pi/2$**

System AB behaves very similarly to system BB under catenary alignment conditions, and is little sensitive to dynamic angular misalignment. Introducing parallel misalignment at the bearings changes the shape of the response curves, but the resulting amplification factors  $f_{32}$  and  $f_8$  do not differ significantly. Figure 6 shows the effects of lowering bearing 3 ( $Y_{b3} = -1.325$  mm) and keeping the others in the positions described in table 3; the resulting difference between  $f_{32}$  and  $f_8$  is of about 9%.



**Fig. 6 Response curves, rotor AB;  $\sigma_{32,8} \approx 41,7$**

### Three Bearing Systems

The analysis of three bearing systems helps to interpret the previous results. Consider system BB supported on bearings 1, 2 and 4, which are assumed to be aligned to the undeformed rotor, the shaft deflects due to gravity load and the journals experience static angular misalignment, as shown in Fig. 7.

Table 5 shows the influence of the phase angle  $\varphi_{1,B}^*$  on the peak amplification factors of the disks, indicating that in this configuration the effects of the dynamic angular misalignment are much more pronounced than those displayed in Fig. 5. Compared to table 2 results, there is an increase of about 100% on the difference between  $f_{32}$  and  $f_8$  calculated when rotor B is operated separately. The curves in Fig. 8 indicate that the critical speeds have similar values; the same holds for the stability thresholds,  $\sigma_{32,8} \approx 61.3$ .

Table 5 Unbalance distribution effects on peak amplification factors; BB three bearing system

$\varphi_{1,B}^*$	$f_{32}$		$f_8$		$100(f_8 - f_{32})/f_{32}$	
	I	II	I	II	I	II
0	9.2	5.8	9.6	6.1	4.4	5.2
$\pi/2$	7.3	14.8	10.3	19.6	41.1	32.4
$\pi$	11.1	19.5	15.1	26.2	36.0	34.4
$3\pi/2$	9.0	13.6	11.8	18.5	31.1	36.0

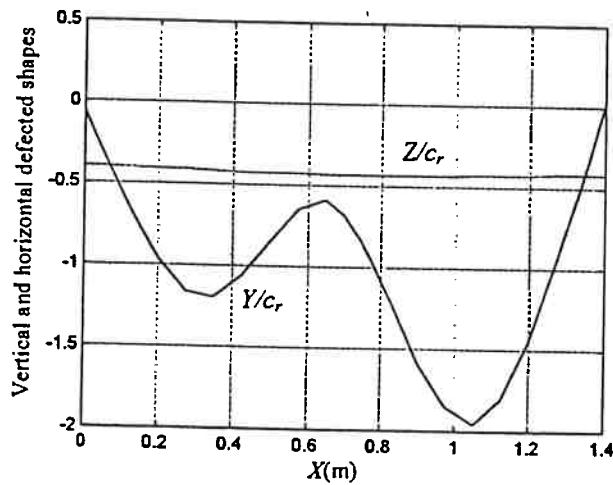


Fig. 7 Three bearing rotor: BB system; vertical ( $Y/c_r$ ) and horizontal ( $Z/c_r$ ) deflected shapes

The main difference between the three and four bearing systems is the clamping effect provided by bearings 2 and 3 of the latter. The four bearing configuration is a much more effective means to inhibit high amplitudes at the first critical speed than the clamping effects associated to dynamic angular misalignment. Thus, four bearing systems consisting on two single span machines rigidly coupled at their common ends are likely to be little sensitive to dynamic angular

misalignment effects, and linear vibration analyses can be safely performed considering the 8 coefficient bearing model. Conversely, the three bearing configuration may increase the influence of dynamic angular misalignment on the amplification factors, so this kind of system had better be analysed with the consideration of those effects, regarding the reliability of the results. It can also be verified that the use of bearings with larger  $L/2r$  ratios makes the differences between  $f_{32}$  and  $f_8$  more noticeable, as shown in Zachariadis (1998).

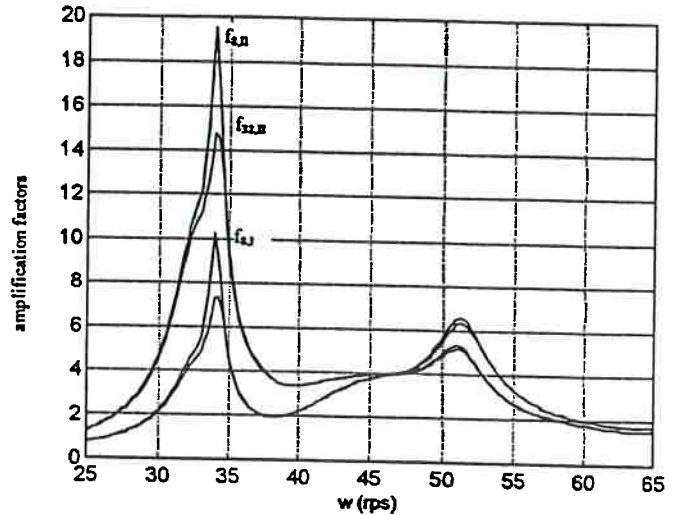


Fig. 8 Response curves; BB three bearing system,  $\varphi_{1,B}^* = \pi/2$

### CONCLUSIONS

Two basic configurations of statically indeterminate rotors were analysed in order to provide a qualitative description of journal's static and dynamic angular misalignment effects on the system's synchronous unbalance steady state response and stability threshold. The use of a short bearing model rendered the analysis more expedient with little loss of accuracy.

Critical speeds and stability thresholds are seen to be quite insensitive to angular misalignment effects. Amplification factors may be very susceptible to dynamic angular misalignment, especially in three bearing equipment, such as pump and driver systems. Four bearing rotors, with inner bearings closely positioned tend to reduce the relevance of angular misalignment effects.

### REFERENCES

- Ding, J., and Krodkiewski, J. M., 1993, "Inclusion of Static Indetermination in the Mathematical Model for Nonlinear Dynamic Analyses of Multi-Bearing Rotor System," *Journal of Sound and Vibration*, 164(2), pp. 267-280.
- Feng, N. S., and Hahn, E. J., 1997, "Effects of Misalignment on the Stability and Unbalance Response of Statically Indeterminate Rotating Machinery," NASA Conference Publication N# 3344, pp. 163-175.
- Holmes, A. G., Ettles, C. M. McC., and Mayes, I. W., 1978, "The Dynamics of Multi-Rotor Systems Supported on Oil Film

Bearings," ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 100, pp 156-164.

Hori, Y., and Uematsu R., 1980, "Influence of Misalignment of Support Journal Bearing on Stability of Multirotor Systems," Tribology International Oct., pp. 249-252.

Jakeman, R. W., 1986, "Performance and Oil Film Dynamic Coefficients of a Misaligned Sterntube Bearing," ASLE Transactions, Vol. 29, 4, pp. 441-450.

Kicinski, J., Drozdowski R., and Materny, P., 1997, "The Nonlinear Analysis of the Effect of Support Construction Properties on the Dynamic Properties of Multi-Support Rotor Systems," Journal of Sound and Vibration, 206(4), pp. 523-539.

Kikuchi, K., 1970, "Analysis of Unbalance Vibration of Rotating Shaft System with Many Bearings and Disks," Bull. of JSME, Vol 13, 61, pp. 864-872.

Krodkiewski, J. M., Ding, J., and Zhang, N., 1994, "Identification of Unbalance Change Using a Nonlinear Mathematical Model for Multi-Bearing Rotor Systems," Journal of Sound and Vibration 169(5), pp. 685-698.

Liu, W., and Novak, M., 1995, "Dynamic Behaviour of Turbine-Generator-Foundation Systems," Earthquake Eng. and Structural Dyn., Vol. 24, pp. 339-360.

Morton, P. G., 1972, "Analysis of Rotors Supported Upon Many Bearings," J. Mechanical Eng. Science Vol. 14, 1 pp. 25-33.

Mukherjee, A., and Rao, J. S., 1977, "Stiffness and Damping Coefficients of an Inclined Journal Bearing," Mechanism and Machine Theory, Vol. 12, pp. 339-355.

Qiu, Z. L., and Tieu, A. K., 1995, "Misalignment Effect on the Static and Dynamic Characteristics of Hydrodynamic Journal Bearings," ASME Journal of Tribology, Vol. 117, pp. 717-723.

Rieger, N. F., and Zhou, S., 1998a, "Development and Verification of Transfer Matrix Unbalance Response Procedure for Three-Level Rotor-Foundation Systems," ASME Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 120, pp. 240-251.

Rieger, N. F., and Zhou, S., 1998b, "An Instability Analysis Procedure for Three-Level Multi-Bearing Rotor-Foundation Systems," ASME Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 120, pp. 753-762.

San Andrés, L., 1993, "Effect of Shaft Misalignment on the Operation of a Turbulent Flow Hydrostatic Bearing," ASME Journal of Tribology, Vol. 115, pp. 355-363.

Zachariadis, D. C., 1998, "Short Bearing Model for the Evaluation of Journal's Dynamic Angular Misalignment Effects on Rotor Vibrations," ASME Paper 98-GT-397.

## APPENDIX

### Calculation of Steady State Response and Stability Threshold

In order to calculate the steady state synchronous response, one writes  $q = Q_c \cos \omega t + Q_s \sin \omega t$ ,  $f(t) = f_c \cos \omega t + f_s \sin \omega t$ , and solves

$$(-\omega^2[M_r + M_s] + i\omega[D_r + D_s + G] + [K_r + K_s])Q = F \quad (6)$$

where  $Q = \frac{1}{2}(Q_c - iQ_s)$ ,  $F = \frac{1}{2}(f_c - if_s)$ , and  $i = \sqrt{-1}$ .

The stability analysis requires the calculation of the eigenvalues of

$$\begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M_r + M_s]^{-1}[K_r + K_s] & -[M_r + M_s]^{-1}[D_r + D_s + G] \end{bmatrix} \quad (7)$$

where  $[0]$  is a null matrix and  $[I]$  is the identity matrix. The system is unstable at a certain speed  $\omega$  if at least one of the eigenvalues, within the frequency range of interest, has positive real part.

### Short Bearing Reactions and Dynamic Coefficients

The  $\pi$ -film hydrodynamic reactions are calculated using Eqs. (8) and (9) below,

$$F_r = -\frac{\mu r L^3}{c^2} \left\{ \left[ (\omega - 2\dot{\phi}) \left( \frac{4\varepsilon^2 \cos \varphi + \pi\varepsilon a(\varepsilon) \sin \varphi}{4a(\varepsilon)^4} \right) \right] + \dots \right. \\ \left. \dots \dot{\varepsilon} \left[ \frac{\pi b(\varepsilon) \cos \varphi + 4\varepsilon a(\varepsilon) \sin \varphi}{2a(\varepsilon)^3} \right] \right\} \quad (8)$$

$$F_s = \frac{\mu r L^3}{c^2} \left\{ \left[ (\omega - 2\dot{\phi}) \left( \frac{\pi\varepsilon a(\varepsilon) \cos \varphi - 4\varepsilon^2 \sin \varphi}{4a(\varepsilon)^4} \right) \right] + \dots \right. \\ \left. \dots \dot{\varepsilon} \left[ \frac{4\varepsilon a(\varepsilon) \cos \varphi - \pi b(\varepsilon) \sin \varphi}{2a(\varepsilon)^3} \right] \right\} \quad (9)$$

where  $a(\varepsilon) = (1 - \varepsilon^2)^{1/2}$  and  $b(\varepsilon) = (1 + 2\varepsilon^2)$ .

Substituting the nondimensional eccentricities  $\varepsilon_r$  and  $\varepsilon_s$ , and also  $\cos \varphi_{l,r}$ ,  $\sin \varphi_{l,r}$  in Eqs. (8) and (9), one gets the hydrodynamic fluid film reactions acting on each short bearing. The resulting forces and moments exerted by the double bearing on the journal are then,

$$F = (F_{r1} + F_{r2})j + (F_{s1} + F_{s2})k; \\ M = (F_{s1}l_1 - F_{s2}l_2)j + (F_{r1}l_1 - F_{r2}l_2)k \quad (10)$$

Under static equilibrium conditions, the hydrodynamic forces are  $F_y^s$  and  $F_x^s$ , and the corresponding expressions for the eight dynamic coefficients of the planar bearing result from

$$k_{rr1,r} = \frac{\partial F_{r1,r}^s}{\partial y_{1,r}}, \quad c_{rr1,r} = \frac{\partial F_{r1,r}^s}{\partial \dot{y}_{1,r}}, \quad \text{etc.}$$

The coefficients of the bearing stiffness matrix of Eq. (5) are  $k_{rr} = k_{r1} + k_{r2}$ ;  $k_{rz} = k_{r2z}$ ;  $k_{zr} = k_{z1} + k_{z2}$ ;  $k_{zz} = k_{z1z} + k_{z2z}$ ;  $k_{r1} = -k_{r1l_1} + k_{r1r_1}$ ;  $k_{r2} = k_{r2l_1} - k_{r2r_1}$ ;  $k_{z1} = k_{z1l_1} + k_{z1r_1}$ ;  $k_{z2} = k_{z2l_1} - k_{z2r_1}$ ;  $k_{z1z} = k_{z1l_1} - k_{z1r_1}$ ;  $k_{z2z} = k_{z2l_1} + k_{z2r_1}$ ;  $k_{r1r_1} = k_{r1l_1}^2 + k_{r1r_1}^2$ ;  $k_{r2r_1} = -k_{r2l_1}^2 - k_{r2r_1}^2$ ;  $k_{z1l_1} = -k_{z1l_1}^2 - k_{z1r_1}^2$ ; and  $k_{z2l_1} = k_{z2l_1}^2 + k_{z2r_1}^2$ .

Matrix  $[C]$  is analogous, and its coefficients are obtained substituting  $k_{rr}, k_{rz}, \dots$  by  $c_{rr}, c_{rz}, \dots$

OUR REFERENCE NUMBER	YOUR REFERENCE NUMBER	INVOICE DATE	INVOICE AMOUNT	AMOUNT PAID	DISCOUNT	NET AMOUNT
12901	T99 AWARDS	05/10/99	1,000.00	1,000.00		1,000.00
TRX DESCRIPTION: 1999 Beginning Engineer Award						
						\$1,000.00

ORIGINAL DOCUMENT IS PRINTED ON CHEMICAL REACTIVE PAPER & HAS A MICROPRINTED BORDER

**INTERNATIONAL GAS TURBINE INSTITUTE**  
THE AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS  
SUITE 370  
5775-B GLENRIDGE DRIVE  
ATLANTA, GA 30328-5380

NationsBank of Georgia, N.A.  
Atlanta, Georgia

64-5/610

One Thousand Dollars And 0 Cents

DATE	CONTROL NO.	AMOUNT
05/17/99	12123	\$*****1,000.00

PAY  
TO THE  
ORDER OF

Demetrio Cornilios Zachariadis

VOID AFTER NINETY DAYS

*George Ondyke Jr.*  
*Ann E. Miller*

THE REVERSE SIDE OF THIS DOCUMENT INCLUDES AN ARTIFICIAL WATERMARK - HOLD AT AN ANGLE TO VIEW

⑈012123⑈ ⑆061000052⑆ 010 371 1801⑈

INTERNATIONAL GAS TURBINE INSTITUTE  
THE AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS