

NAZEM NASCIMENTO

Eng. Mecânico, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetã - UNESP, 1976.

VIBRAÇÕES DE EIXOS FLEXÍVEIS
BI-APOIADOS : ANÁLISE MODAL.

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da USP para a obtenção
do Título de Mestre em Engenharia.

Orientador: Prof. Dr. Octávio Maizza Neto
Professor Assistente Doutor do Departamento de Engenharia
Mecânica da Escola Politécnica da USP.

São Paulo, 1979.

A MEUS PAIS
A MINHA ESPOSA

AGRADECIMENTOS

Os mais profundos ao Prof.Dr.O.Maizza Neto, pela incansável orientação e incentivo, sem o que a concretização deste trabalho não seria possível.

Aos Diretores da FEG, Prof.Dr.D.Bassi, Prof.Dr.E.Vana, Prof.P.C.R.Rangel, Sr.J.A.M.Santos e Sr.G.I.F.Fernandes, pelo apoio na realização do trabalho.

Ao Chefe do Deptº de Mecânica Aplicada da FEG, Prof.Dr.V.J.Oliva.

Ao Prof.Dr.R.A.Malik e ao Prof.C.A.P.Amorim.

Aos Profs. da Pós-Graduação da Escola Politécnica da USP.

Aos Profs. colegas do Deptº de Mecânica Aplicada da FEG.

À Secretária Srta.Z.Araujo.

Aos Técnicos do Deptº de Mecânica Aplicada, da Oficina Mecânica e do Centro de Processamento de Dados da FEG.

Ao Desenhista Sr.M.P.Peres, à Fotógrafa Srta.R.M.R.Rangel, ao Impressor Sr.J.C.Silva e ao Encadernador Sr.J.N.Marcondes.

De forma especial aos meus pais, José e Geralda, por me terem transmitido o devido suporte moral na primeira educação.

À minha esposa, Marta.

De todos, sinto-me devedor.

RESUMO

A presente dissertação analisa a modelagem matemática de eixos flexíveis em rotação. A análise modal é utilizada para a obtenção de um conjunto de equações diferenciais que representam a superposição de um movimento flexível com um hipotético movimento rígido.

O equacionamento do sistema é feito com o uso das equações de Lagrange, e o modelo matemático é linearizado, permitindo o cálculo das frequências naturais do sistema; a influência dos termos não lineares é estudada através da simulação dinâmica dos modelos linear e não linear.

É desenvolvida uma parte experimental, permitindo a obtenção das frequências naturais do sistema. São feitas comparações dos resultados experimentais com os obtidos no presente trabalho, bem como de métodos convencionais.

ABSTRACT

This work deals with the modelling of flexible rotating shafts. This mathematical model has been utilized for obtaining a group of differential equations which represent the motion, using superposition of the shaft flexible motion over one hypothetical rigid body motion.

Equations of Lagrange has been used for the development of relevant equations and the mathematical model is linearized thus permitting the determination of the natural frequencies of the system. The influence of non-linear terms is also studied through the dynamic simulation of linear and non-linear models.

An experiment has been developed for determination and verification of natural frequencies for the proposed system. A comparison has been made between the experimental and theoretical results obtained by the present investigation and those obtained by other conventional methods.

ÍNDICE

Nomenclatura	viii
Lista de figuras	xi
Lista de tabelas	xii
Capítulo I - Introdução	1
Capítulo II - Modelagem do Sistema	
2.1 Modelo Físico	6
2.2 Descrição Cinemática	8
2.2.1 Barra 1	8
2.2.2 Barra 2	9
2.2.3 Mancal 0_1	10
2.2.4 Mancal 0_2	11
2.2.5 Rotores	11
2.3 Energia Cinética	12
2.4 Energia Potencial	16
Capítulo III - Equacionamento	
3.1 Modos de Vibração	20
3.2 Integrais	21
3.3 Expressões das Energias	23
3.3.1 Energia Potencial	24
3.3.2 Energia Cinética	25
3.4 Equações do Movimento	28
3.4.1 Função de Dissipação de Rayleigh	29
3.4.2 Equação 1	29
3.4.3 Equação 2	30
3.4.4 Equação 3	31
3.4.5 Equação 4	32
3.4.6 Representação Compacta	33

3.5	Linearização	35
3.5.1	Normalização	35
3.5.2	Linearização	40
Capítulo IV - Descrição das Partes de Programação e Experimental		
4.1	Programação	47
4.2	Parte Experimental	48
Capítulo V - Resultados		
5.1	Mancais Rígidos	57
5.2	Mancais Flexíveis	62
5.3	Simulações	69
Capítulo VI - Conclusões e Sugestões para Futuras Pesquisas		
6.1	Introdução	74
6.2	Conclusões	74
6.3	Sugestões para Futuras Pesquisas	75
Apêndices		
	Apêndice A - Vibrações Transversais de Barras	78
	Apêndice B - Princípio da Ortogonalidade	83
	Apêndice C - Adimensionalização	86
	Apêndice D - Autovalores	89
	Apêndice E - Métodos Comparativos de Determinação de Freqüências Naturais	91
	Apêndice F - Listagens	95
	Referências Bibliográficas	110

NOMENCLATURA

$\underline{A}, \underline{B}, \dots$	matrizes
$\underline{a}, \underline{b}, \dots$	vetores
$\vec{A}, \vec{B}, \dots, \vec{a}, \vec{b}, \dots$	vetores geométricos
$\dot{A}, \dot{a}, \dots, \ddot{A}, \ddot{a}, \dots$	derivada em relação ao tempo de $A, a, \dots \vec{A}, \vec{a}, \dots$
\bar{A}, \bar{a}, \dots	grandezas A, a, \dots adimensionalizadas
A_{ij}, A_i, \dots	elementos de matrizes e vetores
c	coeficientes
$\cos (\cdot)$	co-seno de \cdot
E	módulo de Young
EI	rigidez à flexão
g	aceleração da gravidade
I	momento de inércia de área
\underline{I}	matriz identidade
J	momento de inércia de massa
J_{bU}	momento de inércia de b em relação ao eixo U .
k_a	constante de amortecimento dos mancais

k_m	constante de mola dos mancais
k_t	constante modal
l_b	comprimento das barras
l_r	posição dos rotores
m	massa
m_b	massa das barras
m_m	massa dos mancais
m_r	massa dos rotores
n	coeficientes
q	componente modal dependente do tempo coordenada generalizada
$\text{sen} (\cdot)$	seno de \cdot
t	tempo
T	energia cinética
u, v, x, y	comprimento
\bar{u}, \bar{v}	posição de centro de massa
V	energia potencial
θ	ângulo
μ	massa por unidade de comprimento

ϕ	componente modal dependente de condições de contorno
ρ	variável normalizada
$\underline{0}$	matriz nula
\cdot^T	transposta de matriz ou vetor
\cdot^{-1}	inversa de matriz

LISTA DE FIGURAS

Fig. 2.1	Esquema do sistema físico	6
Fig. 2.2	Vetor posição dos elementos do sistema . .	8
Fig. 2.3	Esquema para a determinação da energia po tencial	16
Fig. 4.1	Esquema de montagem do sistema de acionamen to	48
Fig. 4.2	Sistema de acionamento	50
Fig. 4.3	Esquema do mancal rígido	50
Fig. 4.4	Mancal rígido	51
Fig. 4.5	Esquema do conjunto mancais rígidos-eixo-ro tores	51
Fig. 4.6	Conjunto mancais rígidos-eixo-rotor . . .	52
Fig. 4.7	Esquema do mancal flexível	52
Fig. 4.8	Mancal flexível	53
Fig. 4.9	Esquema do conjunto mancais flexíveis-eixo- tores	54
Fig. 4.10	Conjunto mancais flexíveis-eixo-rotor . .	54
Fig. 5.1	Primeira forma flexível de vibrar do siste ma	60
Fig. 5.2	Segunda forma flexível de vibrar do siste ma	61
Fig. 5.3	Primeira forma flexível de vibrar do siste ma	66
Fig. 5.4	Segunda forma flexível de vibrar do siste ma	66
Fig. 5.5	Primeira forma rígida de vibrar do sistema	67
Fig. 5.6	Segunda forma rígida de vibrar do sistema	67

Fig. 5.7	Simulação dinâmica do modelo linear	70
Fig. 5.8	Simulação dinâmica do modelo não linear	71
Fig. A.1	- Viga com carregamento distribuído uniforme mente	78
Fig. E.1	Esquema de um sistema eixo-rotor, bi-apo iado	91
Fig. E.2	Formas dinâmicas de uma barra flexível bi- apoiada	92
Fig. E.3	Esquema de uma barra rígida, bi-apoiada so bre molas	93
Fig. E.4	Formas dinâmicas de uma barra rígida bi-apo iadas sobre molas	94

LISTA DE TABELAS

Tab. 3.1	Valores característicos para um eixo bi-apo iado	21
Tab. 5.1	Freqüências naturais do sistema com mancais rígidos. Resultados do trabalho e experi mentais	60
Tab. 5.2	Freqüências naturais do sistema com mancais rígidos. Resultados experimentais e de mē todos convencionais	61
Tab. 5.3	Freqüências naturais do sistema com mancais flexíveis. Resultados do trabalho e experi mentais	65
Tab. 5.4	Freqüências naturais do sistema com mancais flexíveis. Resultados experimentais e de métodos convencionais	68
Tab. C.1	Parâmetros adimensionalizadores	86

INTRODUÇÃO

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

A dinâmica de rotores é um campo do conhecimento científico que se torna importante face a aplicação diversificada, principalmente a turbinas a gás e volantes.

O estudo de vibrações em sistemas contínuos foi apresentado em uma primeira forma por Timoshenko [T3], onde o equacionamento do sistema é feito em função das formas dinâmicas. O estudo evolui, principalmente no que diz respeito ao cálculo matricial, como é feito por Thomson [T1], não apresentando inovações sensíveis, relativas à análise do elemento flexível.

Conquanto seja farta a bibliografia existente sobre a análise de sistemas contínuos flexíveis, nota-se uma escassez bastante acentuada de trabalhos com a utilização da técnica de análise modal, embora a mesma já tenha tido uma comprovação [M1] dentro das necessidades de projetos em engenharia. Apenas recentemente tem havido aplicações dessa técnica [C4] e [W1], que tem surgido com um potencial bastante alto.

O mérito da técnica de análise modal está na possibilidade da obtenção de um modelo que represente as formas rígidas e flexíveis do sistema.

O escopo da presente dissertação é comprovar o poder da técnica de análise modal para o estudo de vibrações de eixos flexíveis.

Um sistema mecânico é modelado, através da técnica de decomposição modal, por um conjunto de equações não lineares, que, após a linearização, permitem a obtenção de informações, com as quais se pode julgar a validade, dentro de padrões aceitáveis na engenharia mecânica, do uso para o estudo de elementos flexíveis.

A modelagem matemática do sistema deriva das equações do movimento de uma barra flexível, bi-apoiada sobre molas e amor

tecedores, possuindo rotores acoplados na direção longitudinal, representando a superposição de um movimento flexível sobre um hipotético movimento rígrado do conjunto eixo-rotor.

São obtidas as expressões das energias cinética e potencial, e, a partir daí, as equações de Lagrange que regem o comportamento dinâmico do sistema.

O movimento elástico da barra é truncado no segundo modo, e um sistema não linear de quatro graus de liberdade é obtido. Uma boa aproximação para a forma dinâmica da barra flexível durante o movimento é encontrada com o uso de condições de contorno apropriadas.

O sistema de equações diferenciais obtido é lineariza-
do e resultados experimentais mostram boas aproximações para os valores das freqüências naturais do sistema, quando comparadas com os valores calculados do modelo matemático linearizado.

Embora no trabalho a forma dinâmica da barra flexível tenha sido truncada no segundo modo, a técnica de análise modal permite que o truncamento seja feito no modo que se julgar necessário, obtendo-se como consequência um modelo com maior ou menor número de graus de liberdade.

A técnica de análise modal, devido a facilidade com que permite equacionar os problemas com elementos flexíveis, se apresenta com perspectivas de amplitudes quantitativamente apreciáveis, como se pode deduzir, a partir das conclusões do trabalho.

No capítulo dois da dissertação apresenta-se o modelo físico adotado, com a descrição cinemática das várias partes compontes do sistema, e as expressões das energias cinética e potencial.

No capítulo três, admitindo-se as formas dinâmicas da barra flexível, e, truncando-as no segundo modo, escrevem-se as ex

pressões das energias cinética e potencial de forma mais adequada. São obtidas as equações de Lagrange do movimento do sistema, que são escritas sob a forma normalizada, após o que se processa a linearização das mesmas.

No capítulo quatro é feita a descrição da parte de programação e da parte experimental, com a apresentação de desenhos e fotografias dos equipamentos utilizados.

No capítulo cinco os resultados obtidos do trabalho para os casos de mancais rígidos e flexíveis, comparando-os com resultados experimentais e de métodos convencionais. São feitas simulações dinâmicas dos modelos linear e não linear, e tecidos comentários.

No capítulo seis são apresentadas conclusões e sugestões para futuras pesquisas.

MODELAGEM DO SISTEMA

CAPÍTULO II

MODELAGEM DO SISTEMA

2.1 MODELO FÍSICO

É mostrado na figura 2.1 um esquema do sistema físico. O sistema é composto por um eixo flexível bi-apoiado, ao qual vários rotores são conectados, sendo os mancais de apoio caracterizados pela existência de efeito elástico e de amortecimento. O movimento real do eixo é tido como a superposição dos movimentos de uma hipotética parte rígida com uma parte flexível, respectivamente chamadas de barra 1 e barra 2. Os mancais de apoio das extremidades esquerda e direita são também chamados de mancal 1 e mancal 2.

Admite-se:

que o movimento do sistema é plano e
que os rotores e os mancais têm massas concentradas.

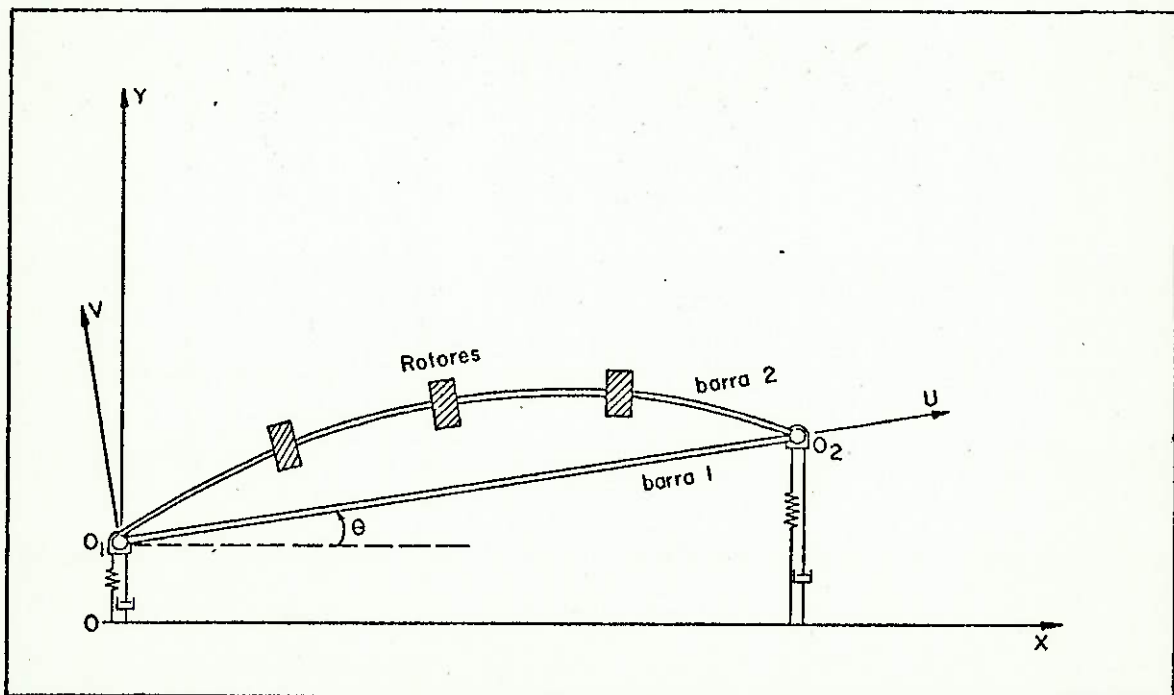


figura 2.1
Esquema do sistema físico

Para descrever o movimento, dois sistemas de referência são definidos:

$[0, X, Y]$ - sistema de referência inercial com origem em O .

$[0_1, U, V]$ - sistema de referência não inercial, acoplado à parte rígida do eixo, barra 1, com origem em O_1 .

Para simplificar a notação, a representação em forma de matriz para os sistemas de referência pode ser introduzida:

$\{\vec{v}_0\} = \begin{Bmatrix} \vec{v}_x \\ \vec{v}_y \end{Bmatrix}$ - vetor unitário do sistema OXY

$\{\vec{v}_1\} = \begin{Bmatrix} \vec{v}_u \\ \vec{v}_v \end{Bmatrix}$ - vetor unitário do sistema O_1UV

Então

$$\{\vec{v}_1\} = [C] \{\vec{v}_0\} \quad (2.1.1)$$

onde $[C]$ é a matriz de transformação rotacional $[A1]$:

$$[C] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.1.2)$$

sendo $\theta(t)$ o ângulo entre os eixos U e X .

2.2. DESCRIÇÃO CINEMÁTICA

A posição de qualquer ponto pode ser descrita pela de finição conveniente de um conjunto de coordenadas.

Após a obtenção do vetor posição para cada ponto do sistema, se obtém a velocidade do respectivo ponto, para a posterior obtenção da energia cinética do sistema.

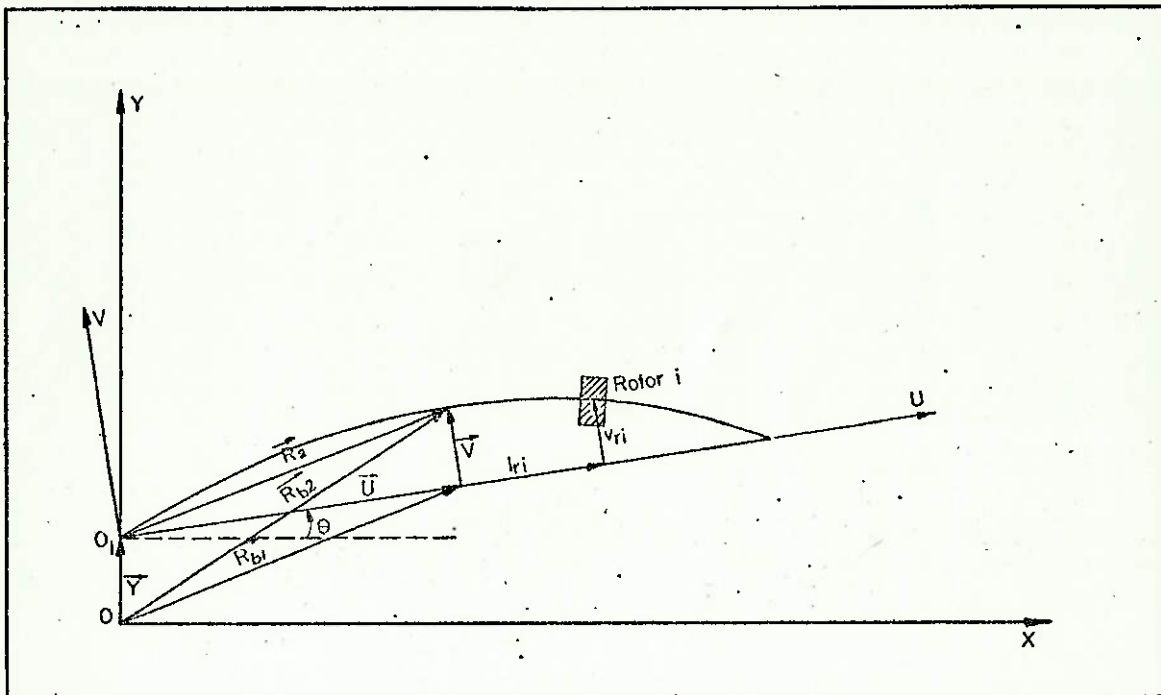


figura 2.2

Vetor posição dos elementos do sistema

2.2.1 BARRA 1

O vetor posição de qualquer ponto da barra 1 é dado por:

$$\vec{R}_{b1} = \{v_0\}^T \{Y\} + \{\vec{U}_1\}^T \{U\} \quad (2.2.1)$$

onde $\{Y\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ y \end{Bmatrix}$ e

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Portanto $\dot{\vec{R}}_{b1} = \{\vec{U}_0\}^T \{Y\} + \{\vec{U}_0\}^T [C]^T \{U\}$ (2.2.2)

$$= \begin{Bmatrix} \vec{U}_x & \vec{U}_y \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \vec{U}_x & \vec{U}_y \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\dot{\vec{R}}_{b1} = (u \cos \theta) \vec{U}_x + (y + u \sin \theta) \vec{U}_y \quad (2.2.3)$$

A velocidade de qualquer ponto da barra 1 é dada pela derivação da expressão (2.2.3).

$$\dot{\dot{\vec{R}}}_{b1} = (-\dot{\theta} u \sin \theta) \vec{U}_x + (\dot{y} + \dot{\theta} u \cos \theta) \vec{U}_y \quad (2.2.4)$$

2.2.2 BARRA 2

O vetor posição de qualquer ponto da barra 2 é dado por:

$$\vec{R}_{b2} = \vec{R}_{b1} + \{\vec{U}_1\}^T \{V\} \quad (2.2.5)$$

onde $\{V\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ v \end{Bmatrix}$

Portanto, $\vec{R}_{b2} = \vec{R}_{b1} + \{\vec{U}_0\}^T [C]^T \{V\}$ (2.2.6)

$$= \vec{R}_{b1} + \{\vec{U}_x \vec{U}_y\} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ v \end{Bmatrix}$$

$$\vec{R}_{b2} = (u \cos \theta - v \sin \theta) \vec{U}_x + (y + u \sin \theta + v \cos \theta) \vec{U}_y$$
 (2.2.7)

A velocidade de qualquer ponto da barra 2 é dada pela derivação da expressão (2.2.7):

$$\dot{\vec{R}}_{b2} = (-\dot{\theta} u \sin \theta - \dot{v} \sin \theta - \dot{\theta} v \cos \theta) \vec{U}_x + (\dot{y} + \dot{\theta} u \cos \theta + \dot{v} \cos \theta - \dot{\theta} v \sin \theta) \vec{U}_y$$
 (2.2.8)

2.2.3 MANCAL 0_1

O vetor posição do mancal 0_1 é dado por:

$$\vec{R}_{m1} = y \vec{U}_y$$
 (2.2.9)

A velocidade do mancal 0_1 é dada pela derivação da expressão (2.2.9):

$$\dot{\vec{R}}_{m1} = \dot{y} \vec{U}_y$$
 (2.2.10)

2.2.4 MANCAL 0_2

O vetor posição do mancal 0_2 é dado por:

$$\vec{R}_{m2} = (l_{b1} \cos \theta) \vec{U}_x + (y + l_{b1} \operatorname{sen} \theta) \vec{U}_y \quad (2.2.11)$$

onde l_{b1} = comprimento da barra 1.

A velocidade do mancal 0_2 é dada pela derivação da expressão (2.2.11):

$$\dot{\vec{R}}_{m2} = (-\dot{\theta} l_{b1} \operatorname{sen} \theta) \vec{U}_x + (\dot{y} + \dot{\theta} l_{b1} \cos \theta) \vec{U}_y \quad (2.2.12)$$

2.2.5 ROTORES

O vetor posição do centro de massa de cada rotor é dado por:

$$\begin{aligned} \vec{R}_{ri} &= (l_{ri} \cos \theta - v_{ri} \operatorname{sen} \theta) \vec{U}_x + \\ &+ (y + l_{ri} \operatorname{sen} \theta + v_{ri} \cos \theta) \vec{U}_y \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

onde l_{ri} = abscissa do i -ésimo rotor no sistema 0_1UV e

v_{ri} = ordenada do i -ésimo rotor no sistema 0_1UV .

A velocidade de cada rotor é dada pela derivação da expressão (2.2.13):

$$\begin{aligned} \dot{\vec{R}}_{ri} = & (-\dot{\theta} l_{ri} \operatorname{sen} \theta - \dot{v}_{ri} \operatorname{sen} \theta - \dot{\theta} v_{ri} \operatorname{cos} \theta) \vec{U}_x + \\ & + (\dot{y} + \dot{\theta} l_{ri} \operatorname{cos} \theta + \dot{v}_{ri} \operatorname{cos} \theta - \dot{\theta} v_{ri} \operatorname{sen} \theta) \vec{U}_y \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

2.3 ENERGIA CINÉTICA

De (2.2.8), (2.2.10), (2.2.12) e (2.2.14), obtêm-se a expressão da energia cinética total do sistema:

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} \int_{m_{b2}} \dot{\vec{R}}_{b2} \cdot \dot{\vec{R}}_{b2} dm + \\ & \frac{1}{2} \dot{\vec{R}}_{m1} \cdot \dot{\vec{R}}_{m1} m_{m1} + \frac{1}{2} \dot{\vec{R}}_{m2} \cdot \dot{\vec{R}}_{m2} m_{m2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\dot{\vec{R}}_{ri} \cdot \dot{\vec{R}}_{ri} m_{ri}) \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

onde n = número de rotores

Para o desenvolvimento da expressão (2.3.1), é necessário o cálculo dos produtos escalares:

De (2.2.4):

$$\dot{\vec{R}}_{b1} \cdot \dot{\vec{R}}_{b1} = \dot{y}^2 + 2 \dot{y} \dot{\theta} u \operatorname{cos} \theta + \dot{\theta}^2 u^2 \quad (2.3.2)$$

De (2.2.8), usando (2.2.4):

$$\begin{aligned} \dot{\vec{R}}_{b2} \cdot \dot{\vec{R}}_{b2} = & \dot{y}^2 + \dot{v}^2 + \dot{\theta}^2 u^2 + \dot{\theta}^2 v^2 + 2 \dot{\theta} \dot{v} u + \\ & + 2 \dot{y} \dot{\theta} u \operatorname{cos} \theta + 2 \dot{y} \dot{v} \operatorname{cos} \theta - 2 \dot{y} \dot{\theta} v \operatorname{sen} \theta \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

De (2.2.10):

$$\dot{\vec{R}}_{m1} \cdot \dot{\vec{R}}_{m1} = \dot{y}^2 \quad (2.3.4)$$

De (2.2.12):

$$\dot{\vec{R}}_{m2} \cdot \dot{\vec{R}}_{m2} = \dot{y}^2 + 2 \dot{y} \dot{\theta} l_{b1} \cos \theta + \dot{\theta}^2 l_{b1}^2 \quad (2.3.5)$$

De (2.2.14):

$$\begin{aligned} \dot{\vec{R}}_{ri} \cdot \dot{\vec{R}}_{ri} = & \dot{y}^2 + \dot{v}_{ri}^2 + \dot{\theta}^2 l_{ri}^2 + \dot{\theta}^2 v_{ri}^2 + 2 \dot{\theta} \dot{v}_{ri} l_{ri} + \\ & + 2 \dot{y} \dot{\theta} l_{ri} \cos \theta + 2 \dot{y} \dot{v}_{ri} \cos \theta - 2 \dot{y} \dot{\theta} v_{ri} \sin \theta \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Com a substituição das equações de (2.3.2) a (2.3.6) em (2.3.1) obtém-se:

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} \int_{m_{b2}} (\dot{y}^2 + \dot{v}^2 + \dot{\theta}^2 u^2 + \dot{\theta}^2 v^2 + 2 \dot{\theta} \dot{v} u + \\ & + 2 \dot{y} \dot{\theta} u \cos \theta + 2 \dot{y} \dot{v} \cos \theta - 2 \dot{y} \dot{\theta} v \sin \theta) dm + \\ & + \frac{1}{2} m_{m1} \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m_{m2} (\dot{y}^2 + 2 \dot{y} \dot{\theta} l_{b1} \cos \theta + \dot{\theta}^2 l_{b1}^2) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_{ri} (\dot{y}^2 + \dot{v}_{ri}^2 + \dot{\theta}^2 l_{ri}^2 + \dot{\theta}^2 v_{ri}^2 + 2 \dot{\theta} \dot{v}_{ri} l_{ri} + \\ & + 2 \dot{y} \dot{\theta} l_{ri} \cos \theta + 2 \dot{y} \dot{v}_{ri} \cos \theta - 2 \dot{y} \dot{\theta} v_{ri} \sin \theta) \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

Da expressão (2.3.7) obtêm-se a expressão da energia cinética total do sistema de uma forma mais adequada:

$$\begin{aligned}
 T = & \frac{1}{2} (m_{b2} + m_{m1} + m_{m2} + c_{mr}) \dot{y}^2 + \frac{1}{2} (J_{b2V} + \\
 & + J_{b2U} + m_{m2} l_{b1}^2 + c_{mlqr} + c_{mvqr}) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} c_{mvpqr} + \\
 & + (\bar{u}_{b2} m_{b2} + m_{m2} l_{b1} + c_{mlr}) \dot{y} \dot{\theta} \cos \theta - (\bar{v}_{b2} m_{b2} + \\
 & + c_{mvr}) \dot{y} \dot{\theta} \sin \theta + c_{mvpr} \dot{y} \cos \theta + c_{mlvpr} \dot{\theta} + \frac{1}{2} \int_{m_{b2}} \dot{v}^2 dm + \\
 & + \dot{\theta} \int_{m_{b2}} \dot{v} u dm + \dot{y} \cos \theta \int_{m_{b2}} \dot{v} dm \quad (2.3.8)
 \end{aligned}$$

onde

$$c_{mr} = \sum_{i=1}^n m_{ri} \quad ; \quad (2.3.9)$$

$$c_{mlqr} = \sum_{i=1}^n m_{ri} l_{ri}^2 \quad ; \quad (2.3.10)$$

$$c_{mvqr} = \sum_{i=1}^n m_{ri} v_{ri}^2 \quad ; \quad (2.3.11)$$

$$c_{mvpqr} = \sum_{i=1}^n m_{ri} \dot{v}_{ri}^2 \quad ; \quad (2.3.12)$$

$$c_{mlr} = \sum_{i=1}^n m_{ri} l_{ri} \quad ; \quad (2.3.13)$$

$$e_{mvr} = \sum_{i=1}^n m_{ri} v_{ri} ; \quad (2.3.14)$$

$$e_{mvpr} = \sum_{i=1}^n m_{ri} \dot{v}_{ri} ; \quad (2.3.15)$$

$$e_{mlvpr} = \sum_{i=1}^n m_{ri} l_{ri} \dot{v}_{ri} ; \quad (2.3.16)$$

$$e_{mlvr} = \sum_{i=1}^n m_{ri} l_{ri} v_{ri} ; \quad (2.3.17)$$

$$J_{b2V} = \int_{m_{b2}} u^2 dm \quad (2.3.18)$$

é o momento de inércia da barra 2 em relação ao eixo V;

$$J_{b2U} = \int_{m_{b2}} v^2 dm \quad (2.3.19)$$

é o momento de inércia da barra 2 em relação ao eixo U;

$$\bar{u}_{b2} = \frac{1}{m_{b2}} \int_{m_{b2}} u dm \quad (2.3.20)$$

é a abscissa do centro de massa da barra 2, no sistema 0_1^{UV} e

$$\bar{v}_{b2} = \frac{1}{m_{b2}} \int_{m_{b2}} v \, dm \quad (2.3.21)$$

é a ordenada do centro de massa da barra 2, no sistema O_1UV .

2.4 ENERGIA POTENCIAL

A energia potencial do sistema pode ser tida como a composição das energias potencial gravitacional, potencial elástica da parte flexível da barra e potencial elástica das molas dos mancais.

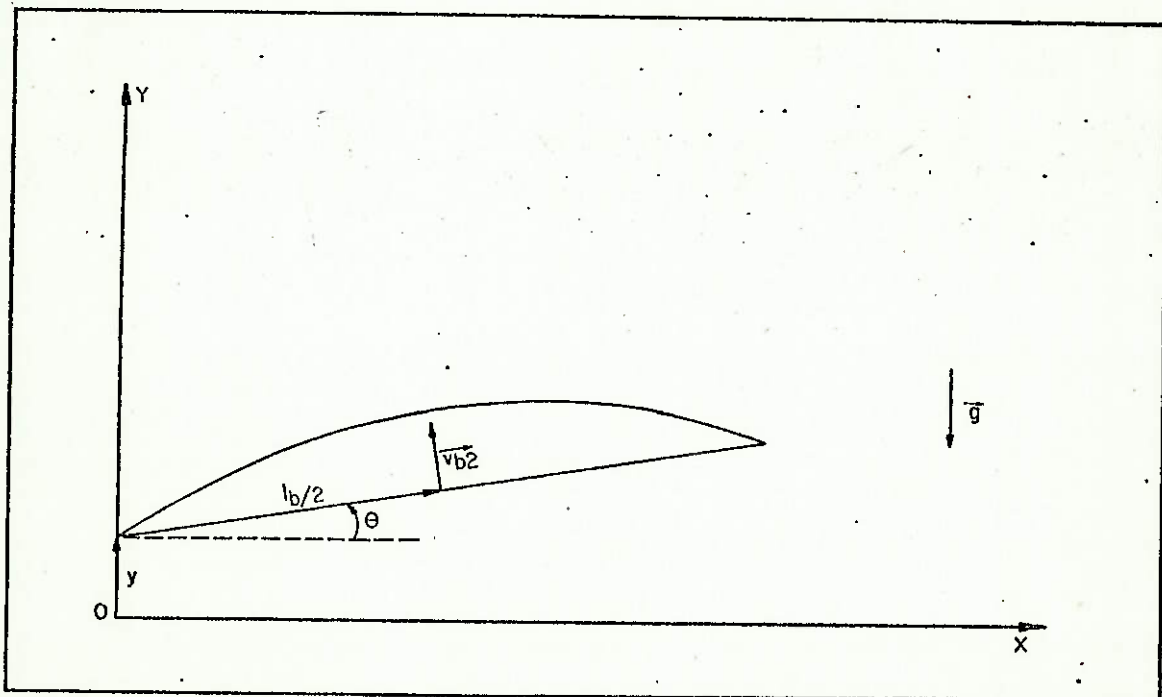


figura 2.3

Esquema para a determinação da energia potencial

\vec{g} é a componente da aceleração da gravidade na direção OY

$$\vec{g} = \{\vec{U}_0\}^T \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} \quad (2.4.1)$$

Admite-se:

que a deflexão angular da barra 1 é pequena;
 que as molas dos mancais são lineares;
 que as molas dos mancais não estão distendidas para $y = 0$ e $\theta = 0$;
 o eixo OX como referência de energia potencial gravitacional;
 o valor V_{ref} como referência de energia potencial elástica e que
 as barras 1 e 2 são homogêneas e de secção reta constante.

Portanto, para a expressão da energia potencial total do sistema obtém-se:

$$\begin{aligned} V = & m_{m1} g y + m_{m2} g (y + l_{b1} \text{sen } \theta) + \\ & + m_{b2} g (y + \frac{1}{2} l_{b1} \text{sen } \theta + \bar{v}_{b2} \text{cos } \theta) + \\ & + g \sum_{i=1}^n m_{ri} (y + l_{ri} \text{sen } \theta + v_{ri} \text{cos } \theta) + \frac{1}{2} \int_0^{l_{b2}} EI \left(\frac{\partial^2 v}{\partial u^2} \right)^2 du + \\ & + \frac{1}{2} k_{m1} y^2 + \frac{1}{2} k_{m2} (y + l_{b1} \text{sen } \theta)^2 + V_{ref} \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

Da expressão (2.4.2) obtém-se a expressão da energia potencial total do sistema de uma forma mais adequada:

$$V = (m_{b2} + m_{m1} + m_{m2} + c_{mr}) g y + (m_{b2} \bar{v}_{b2} +$$

$$\begin{aligned}
& + c_{mvr}) g \cos \theta + \frac{1}{2} [(m_{b2} + 2 m_{m2}) l_{b1} + 2 c_{mlr}] g \sin \theta + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^{l_{b2}} EI \left(\frac{\partial^2 v}{\partial u^2} \right)^2 du + \frac{1}{2} k_{m1} y^2 + \frac{1}{2} k_{m2} (y^2 + 2 y l_{b1} \sin \theta + \\
& + l_{b1}^2 \sin^2 \theta) + V_{ref}
\end{aligned}$$

onde c_{mr} , c_{mlr} e c_{mvr} são dados, respectivamente, pelas expres
sões (2.3.9), (2.3.13) e (2.3.14).

EQUACIONAMENTO

CAPÍTULO III

EQUACIONAMENTO

3.1 MODOS DE VIBRAÇÃO

Para escrever as equações do movimento do modelo pro posto, é possível fazer uso da chamada análise modal [T3].

Baseada nesta análise, a solução do movimento flexível pode ser tida como composta da combinação linear de funções satis fazendo as condições de contorno geométricas, multiplicadas por coordenadas generalizadas, dependentes do tempo.

$$\text{Então, } v = \sum_{i=1}^j \phi_i(u) q_i(t) \quad (3.1.1)$$

onde $\phi_i(u)$ são funções que devem satisfazer às condições de con torno geométricas, para a barra flexível, no sistema de referência O_1UV , e $q_i(t)$ são coordenadas generalizadas dependentes do tempo.

O sistema é agora representado por $(j + 2)$ graus de li berdade: as coordenadas generalizadas $q_i(t)$, $i = 1, j$, o ângulo $\theta(t)$ e o deslocamento $y(t)$.

Admitindo que as amplitudes dos modos a vibrar de alta ordem são pequenas, comparadas com a amplitude do modo a vibrar de primeira ordem, pode-se truncar o sistema para $j = 2$, resultando, portanto, um sistema com 4 graus de liberdade: $q_1(t)$, $q_2(t)$, $\theta(t)$ e $y(t)$.

Então:

$$v = \phi_1(u) q_1(t) + \phi_2(u) q_2(t) \quad (3.1.2)$$

Devido a ortogonalidade das funções ϕ (Ap.B), tem-se:

$$\int_0^{\ell_{b2}} \phi_i(u) \phi_j(u) du = 0 \quad , \quad i \neq j \quad (3.1.3)$$

Sendo as extremidades do eixo apoiadas tem-se (Ap.A):

$$\phi_i = k_t \text{ sen } \lambda_i u \quad (3.1.4)$$

onde k_t é uma constante arbitrária, i diz respeito aos modos de vi braço e os λ_i são dados pela tabela 3.1

i	$\lambda_i \ell_{b2}$
1	π
2	2π

tabela 3.1

Valores característicos para um eixo bi-apoiado

3.2 INTEGRAIS

Sendo as integrais resolvidas no sistema de referência móvel, tem-se as extremidades do eixo articuladas.

Admite-se:

que a distribuição de massa ao longo do comprimento da barra 2 seja constante e
que a rigidez à flexão da barra 2 seja constante.

Portanto, para as integrais da expressão (2.3.8) obtêm-se:

$$\begin{aligned} \int_{m_{b2}} \dot{v}^2 dm &= \int_{m_{b2}} (\phi_1 \dot{q}_1 + \phi_2 \dot{q}_2)^2 \\ &= n_{k1} \dot{q}_1^2 + n_{k2} \dot{q}_2^2 \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

onde $n_{k1} = n_{k2} = \frac{1}{2} m_{b2} k_t^2$ (3.2.2)

$$\begin{aligned} \int_{m_{b2}} \dot{v} u dm &= \int_{m_{b2}} (\phi_1 \dot{q}_1 + \phi_2 \dot{q}_2) u dm \\ &= n_{w1} \dot{q}_1 + n_{w2} \dot{q}_2 \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

onde $n_{w1} = \frac{1}{\pi} k_t \ell_{b2} m_{b2}$ e (3.2.4)

$$n_{w2} = -\frac{1}{2\pi} k_t \ell_{b2} m_{b2} \quad (3.2.5)$$

$$\begin{aligned} \int_{m_{b2}} \dot{v} dm &= \int_{m_{b2}} (\phi_1 \dot{q}_1 + \phi_2 \dot{q}_2) dm \\ &= n_{z1} \dot{q}_1 \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

onde $n_{z1} = \frac{2}{\pi} k_t m_{b2}$ (3.2.7)

$$\int_{m_{b2}} u v \, dm = \int_{m_{b2}} (\phi_1 q_1 + \phi_2 q_2) u \, dm$$

$$= n_{w1} q_1 + n_{w2} q_2 \quad (3.2.8)$$

onde n_{w1} e n_{w2} são dados, respectivamente, por (3.2.4) e (3.2.5).

Para a integral da expressão (2.4.3) obtêm-se:

$$\frac{1}{2} \int_0^{l_{b2}} EI \left(\frac{\partial^2 v}{\partial u^2} \right)^2 du = \frac{1}{2} EI \int_0^{l_{b2}} (\phi_1'' q_1 + \phi_2'' q_2)^2 du$$

$$= n_{y1} q_1^2 + n_{y2} q_2^2 \quad (3.2.9)$$

onde $n_{y1} = \frac{EI \pi^4 k_t^2}{4 l_{b2}^3}$ e $(3.2.10)$

$$n_{y2} = \frac{4 EI \pi^4 k_t^2}{l_{b2}^3} \quad (3.2.11)$$

3.3 EXPRESSÕES DAS ENERGIAS

Substituindo-se os resultados obtidos no item (3.2), nas expressões (2.3.8) e (2.4.3), obtêm-se a forma final para as expressões das energias cinética e potencial do sistema.

Admite-se:

que as massas dos mancais são iguais;

que os comprimentos das barras são iguais;

que as constantes elásticas dos mancais são iguais;

que o centro de massa da barra 2 está sobre ela própria e sobre seu ponto médio.

$$m_m = m_{m1} = m_{m2} \quad (3.3.1)$$

$$l_b = l_{b1} = l_{b2} \quad (3.3.2)$$

$$k_m = k_{m1} = k_{m2} \quad (3.3.3)$$

$$\bar{v}_{b2} = v_c = v(u = \frac{1}{2} l_b) \quad (3.3.4)$$

$$\bar{u}_{b2} = \frac{1}{2} l_b \quad (3.3.5)$$

Chamando:

$$m_b = m_{b2} \quad (3.3.6)$$

3.3.1 ENERGIA POTENCIAL

De (3.1.2) e (3.3.4) obtêm-se:

$$v_c = \phi_{1c} q_1 + \phi_{2c} q_2 \quad (3.3.7)$$

De (2.3.14) e (3.1.2) obtêm-se:

$$c_{mvr} = \sum_{i=1}^n m_{ri} (\phi_{1ri} q_1 + \phi_{2ri} q_2)$$

$$= c_{mf1r} q_1 + c_{mf2r} q_2 \quad (3.3.8)$$

onde

$$c_{mf1r} = \sum_{i=1}^n m_{ri} \phi_{1ri} \quad e \quad (3.3.9)$$

$$c_{mf2r} = \sum_{i=1}^n m_{ri} \phi_{2ri} \quad (3.3.10)$$

Substituindo-se (3.2.9), (3.3.1), (3.3.2), (3.3.3), (3.3.4), (3.3.6), (3.3.7) e (3.3.8) em (2.4.3) obtêm-se a forma final para a expressão da energia potencial total do sistema:

$$V = (m_b + 2m_m + c_{mr}) g y + \left[\left(\frac{m_b}{2} + m_m \right) \ell_b + c_{mlr} \right] g \operatorname{sen} \theta + [(m_b \phi_{1c} + c_{mf1r}) q_1 + (m_b \phi_{2c} + c_{mf2r}) q_2] \times$$

$$\times g \cos \theta + n_{y1} q_1^2 + n_{y2} q_2^2 + k_m (y^2 + y \ell_b \operatorname{sen} \theta + \frac{1}{2} \ell_b^2 \operatorname{sen}^2 \theta) + V_{ref} \quad (3.3.11)$$

3.3.2 ENERGIA CINÉTICA

De (2.3.11) e (3.1.2) obtêm-se:

$$\begin{aligned}
 c_{mvqr} &= \sum_{i=1}^n m_{ri} (\phi_{1ri} q_1 + \phi_{2ri} q_2)^2 \\
 &= c_{mf1qr} q_1^2 + c_{mf2qr} q_2^2 + 2 c_{mf12r} q_1 q_2
 \end{aligned}
 \tag{3.3.12}$$

onde

$$c_{mf1qr} = \sum_{i=1}^n m_{ri} \phi_{1ri}^2, \tag{3.3.13}$$

$$c_{mf2qr} = \sum_{i=1}^n m_{ri} \phi_{2ri}^2 \quad e \tag{3.3.14}$$

$$c_{mf12r} = \sum_{i=1}^n m_{ri} \phi_{1ri} \phi_{2ri} \tag{3.3.15}$$

De (2.3.12), (3.1.2), (3.3.13), (3.3.14) e (3.3.15)

obtêm-se:

$$\begin{aligned}
 c_{mvpr} &= \sum_{i=1}^n m_{ri} (\phi_{1ri} \dot{q}_1 + \phi_{2ri} \dot{q}_2)^2 \\
 &= c_{mf1qr} \dot{q}_1^2 + c_{mf2qr} \dot{q}_2^2 + 2 c_{mf12r} \dot{q}_1 \dot{q}_2
 \end{aligned}
 \tag{3.3.16}$$

De (2.3.15), (3.1.2), (3.3.9) e (3.3.10) obtêm-se:

$$c_{mvpr} = \sum_{i=1}^n m_{ri} (\phi_{1ri} \dot{q}_1 + \phi_{2ri} \dot{q}_2)$$

$$= c_{mf1r} \dot{q}_1 + c_{mf2r} \dot{q}_2 \quad (3.3.17)$$

De (2.3.16) e (3.1.2) obtêm-se:

$$\begin{aligned} c_{mlvpr} &= \sum_{i=1}^n m_{ri} l_{ri} (\phi_{1ri} \dot{q}_1 + \phi_{2ri} \dot{q}_2) \\ &= c_{mlf1r} \dot{q}_1 + c_{mlf2r} \dot{q}_2 \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

onde

$$c_{mlf1r} = \sum_{i=1}^n m_{ri} l_{ri} \phi_{1ri} \quad e \quad (3.3.19)$$

$$c_{mlf2r} = \sum_{i=1}^n m_{ri} l_{ri} \phi_{2ri} \quad (3.3.20)$$

De (2.3.17), (3.1.2), (3.3.19) e (3.3.20) obtêm-se:

$$\begin{aligned} c_{mlvr} &= \sum_{i=1}^n m_{ri} l_{ri} (\phi_{1ri} q_1 + \phi_{2ri} q_2) \\ &= c_{mlf1r} q_1 + c_{mlf2r} q_2 \end{aligned} \quad (3.3.21)$$

Substituindo-se (3.2.1), (3.2.3), (3.2.6), (3.2.8), (3.3.1), (3.3.2), (3.3.5), (3.3.6), (3.3.7), (3.3.8), (3.3.12), (3.3.16), (3.3.17), (3.3.18) e (3.3.21) em (2.3.8) a forma final para a expressão da energia cinética total do sistema:

$$T = \frac{1}{2} (m_b + 2m_m + c_{mr}) \dot{y}^2 + \frac{1}{2} (J_{b2V} +$$

$$\begin{aligned}
& + J_{b2U} + m_m \ell_b^2 + c_{mlqr} + c_{mf1qr} q_1^2 + c_{mf2qr} q_2^2 + \\
& + 2 c_{mf12r} q_1 q_2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} (c_{mf1qr} \dot{q}_1^2 + c_{mf2qr} \dot{q}_2^2 + \\
& + 2 c_{mf12r} \dot{q}_1 \dot{q}_2) + \left[\left(\frac{m_b}{2} + m_m \right) \ell_b + c_{mlr} \right] \dot{y} \dot{\theta} \cos \theta - \\
& - \left[(\phi_{1c} m_b + c_{mf1r}) q_1 + (\phi_{2c} m_b + c_{mf2r}) q_2 \right] \dot{y} \dot{\theta} \sin \theta + \\
& + \left[(n_{w1} + c_{mlf1r}) \dot{q}_1 + (n_{w2} + c_{mlf2r}) \dot{q}_2 \right] \dot{\theta} + \left[(n_{z1} + c_{mf1r}) \dot{q}_1 + \right. \\
& \left. + (c_{mf2r}) \dot{q}_2 \right] \dot{y} \cos \theta + \frac{1}{2} n_{k1} \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} n_{k2} \dot{q}_2^2 \tag{3.3.22}
\end{aligned}$$

3.4 EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

Se q_1 , q_2 , θ e y são admitidos como sendo um conjunto de coordenadas generalizadas, é possível escrever as equações do movimento usando as equações de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} = 0 \tag{3.4.1}$$

onde R é chamada de função de dissipação de Rayleigh [L1].

Esta função é definida como

$$R = \frac{1}{2} \sum_j k_j \dot{q}_j^2 \tag{3.4.2}$$

3.4.1 FUNÇÃO DE DISSIPACÃO DE RAYLEIGH

Admite-se que os amortecedores dos mancais são lineares e iguais.

Portanto, obtêm-se para a função R :

$$R = \frac{1}{2} k_a \left[\frac{d}{dt} (y) \right]^2 + \frac{1}{2} k_a \left[\frac{d}{dt} (y + 2 l_b \text{ sen } \theta) \right]^2 \quad (3.4.3)$$

onde os termos entre parênteses são as velocidades das extremidades das barras.

Fazendo as derivadas indicadas na expressão (3.4.3), obtêm-se a forma final da expressão da função de dissipação de Rayleigh:

$$R = k_a (\dot{y}^2 + 2 \dot{y} \dot{\theta} l_b \cos \theta + 2 \dot{\theta}^2 l_b^2 \cos^2 \theta) \quad (3.4.4)$$

Das expressões (3.3.11), (3.3.22), (3.4.1) e (3.4.4) obtêm-se as equações que regem o movimento do sistema.

3.4.2 EQUAÇÃO 1

$$M_{11} \ddot{q}_1 + M_{12} \ddot{q}_2 + M_{13} \ddot{\theta} + M_{14} \ddot{y} =$$

$$= C_{11} q_1 + F_1 \quad (3.4.5)$$

onde $M_{11} = n_{k1} + c_{mf1qr}$ (3.4.6)

$$M_{12} = c_{mf12r} \quad (3.4.7)$$

$$M_{13} = n_{w1} + c_{mlf1r} \quad (3.4.8)$$

$$M_{14} = (n_{z1} + c_{mf1r}) \cos \theta \quad (3.4.9)$$

$$C_{11} = -2 n_{y1} \quad (3.4.10)$$

$$F_1 = -(m_b \phi_{1c} + c_{mf1r}) g \cos \theta + (c_{mf1qr} q_1 + c_{mf12r} q_2) \dot{\theta}^2 + (n_{z1} - m_b \phi_{1c}) \dot{y} \dot{\theta} \operatorname{sen} \theta \quad (3.4.11)$$

3.4.3 EQUAÇÃO 2

$$M_{21} \ddot{q}_1 + M_{22} \ddot{q}_2 + M_{23} \ddot{\theta} + M_{24} \ddot{y} =$$

$$= C_{22} q_2 + F_2 \quad (3.4.12)$$

onde $M_{21} = M_{12}$ (3.4.13)

$$M_{22} = n_{k2} + c_{mf2qr} \quad (3.4.14)$$

$$M_{23} = n_{w2} + c_{mlf2r} \quad (3.4.15)$$

$$M_{24} = c_{mf2r} \cos \theta \quad (3.4.16)$$

$$C_{22} = -2 n_{y2} \quad (3.4.17)$$

$$F_2 = -(m_b \phi_{2c} + c_{mf2r}) g \cos \theta + (c_{mf2qr} q_2 + c_{mf12r} q_1) \dot{\theta}^2 - (m_b \phi_{2c}) \dot{y} \dot{\theta} \cos \theta \quad (3.4.18)$$

3.4.4. EQUAÇÃO 3

$$M_{31} \ddot{q}_1 + M_{32} \ddot{q}_2 + M_{33} \ddot{\theta} + M_{34} \ddot{y} = C_{33} \theta + F_3 \quad (3.4.19)$$

onde $M_{31} = M_{13} \quad (3.4.20)$

$$M_{32} = M_{23} \quad (3.4.21)$$

$$M_{33} = J_{b2V} + J_{b2U} + m_m l_b^2 + c_{mlqr} +$$

$$+ c_{mf1qr} q_1^2 + c_{mf2qr} q_2^2 + 2 c_{mf12r} q_1 q_2 \quad (3.4.22)$$

$$M_{34} = \left[\left(\frac{m_b}{2} + m_m \right) l_b + c_{mlr} \right] \cos \theta - \left[(m_b \phi_{1c} + \right. \\ \left. + c_{mf1r}) q_1 + (m_b \phi_{2c} + c_{mf2r}) q_2 \right] \sin \theta \quad (3.4.23)$$

$$C_{33} = 0 \quad (3.4.24)$$

$$F_3 = - \left[\left(\frac{m_b}{2} + m_m \right) l_b + c_{mlr} \right] g \cos \theta - k_m l_b (y + \\ + l_b \sin \theta) \cos \theta - k_a l_b (\dot{y} + l_b \dot{\theta} \cos \theta) \cos \theta + \left[(m_b \phi_{1c} + \right. \\ \left. + c_{mf1r}) q_1 + (m_b \phi_{2c} + c_{mf2r}) q_2 \right] g \sin \theta - 2 \left[(c_{mf1qr} q_1 + \right. \\ \left. + c_{mf12r} q_2) \dot{q}_1 + (c_{mf2qr} q_2 + c_{mf12r} q_1) \dot{q}_2 \right] \dot{\theta} + \\ \left. + \left[(m_b \phi_{1c} - n_{z1}) \dot{q}_1 + (m_b \phi_{2c}) \dot{q}_2 \right] \dot{y} \sin \theta \quad (3.4.25)$$

3.4.5 EQUAÇÃO 4

$$M_{41} \ddot{q}_1 + M_{42} \ddot{q}_2 + M_{43} \ddot{\theta} + M_{44} \ddot{y} = \\ = C_{44} y + F_4 \quad (3.4.26)$$

onde $M_{41} = M_{14}$ (3.4.27)

$$M_{42} = M_{24} \quad (3.4.28)$$

$$M_{43} = M_{34} \quad (3.4.29)$$

$$M_{44} = m_b + 2 m_m + c_{mr} \quad (3.4.30)$$

$$C_{44} = -2 k_m \quad (3.4.31)$$

$$\begin{aligned}
 F_4 = & -(m_b + 2 m_m + c_{mr}) g - k_m l_b \text{sen } \theta - \\
 & - k_a (2 \dot{y} + l_b \dot{\theta} \cos \theta) + [(m_b \phi_{1c} + 2 c_{mf1r} + n_{z1}) \dot{q}_1 + \\
 & + (m_b \phi_{2c} + 2 c_{mf2r}) \dot{q}_2] \dot{\theta} \text{sen } \theta + \left[\left(\frac{m_b}{2} + m_m \right) l_b + c_{mlr} \right] \times \\
 & \times \dot{\theta}^2 \text{sen } \theta + [(m_b \phi_{1c} + c_{mf1r}) q_1 + (m_b \phi_{2c} + c_{mf2r}) q_2] \times \\
 & \times \dot{\theta}^2 \cos \theta
 \end{aligned} \quad (3.4.32)$$

3.4.6 REPRESENTAÇÃO COMPACTA

Portanto, as equações do movimento são:

$$M_{11} \ddot{q}_1 + M_{12} \ddot{q}_2 + M_{13} \ddot{\theta} + M_{14} \ddot{y} = C_{11} q_1 + F_1 \quad (3.4.33)$$

$$M_{21} \ddot{q}_1 + M_{22} \ddot{q}_2 + M_{23} \ddot{\theta} + M_{24} \ddot{y} = C_{22} q_2 + F_2 \quad (3.4.34)$$

$$M_{31} \ddot{q}_1 + M_{32} \ddot{q}_2 + M_{33} \ddot{\theta} + M_{34} \ddot{y} = C_{33} \theta + F_3 \quad (3.4.35)$$

$$M_{41} \ddot{q}_1 + M_{42} \ddot{q}_2 + M_{43} \ddot{\theta} + M_{44} \ddot{y} = C_{44} y + F_4 \quad (3.4.36)$$

Essas equações podem ser escritas na forma matricial:

$$\underline{M}(t) \ddot{\underline{\xi}} = \underline{C} \underline{\xi} + \underline{F} \quad (3.4.37)$$

onde $\underline{M}(t) = [M_{ij}]$, $i, j = 1, 4$ (3.4.38)

$$\ddot{\underline{\xi}} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} \quad (3.4.39)$$

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \quad (3.4.40)$$

$$\underline{\xi} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \theta \\ y \end{bmatrix} \quad (3.4.41)$$

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} \quad (3.4.42)$$

3.5 LINEARIZAÇÃO

O sistema de equações (3.4.37) pode ser escrito da forma:

$$\ddot{\underline{\xi}} = \underline{C}' \underline{\xi} + \underline{F}' \quad (3.5.1)$$

onde $\underline{C}' = \underline{M}^{-1}(t) \underline{C}$ e $\underline{F}' = \underline{M}^{-1}(t) \underline{F}$ (3.5.2)

$$\underline{F}' = \underline{M}^{-1}(t) \underline{F} \quad (3.5.3)$$

3.5.1 NORMALIZAÇÃO

Um novo conjunto de variáveis pode ser definido de forma que o sistema de equações (3.5.1) seja normalizado [K1].

As novas variáveis são chamadas de ρ_i , $i = 1, 8$, tais que:

$$\underline{\rho} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \rho_4 \\ \rho_5 \\ \rho_6 \\ \rho_7 \\ \rho_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \theta \\ y \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{\theta} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \quad (3.5.4)$$

Portanto, obtém-se:

$$\dot{\underline{\rho}} = \underline{C}_n \underline{\rho} + \underline{F}_n \quad (3.5.5)$$

onde $\underline{C}_n = \left[\begin{array}{c|c} \underline{0} & \underline{I} \\ \hline \underline{M}^{-1}(t) \underline{C} & \underline{0} \end{array} \right]$ e $\underline{F}_n = \left[\begin{array}{c} \underline{0} \\ \hline \underline{M}^{-1}(t) \underline{F} \end{array} \right]$ (3.5.6)

$$\underline{F}_n = \left[\begin{array}{c} \underline{0} \\ \hline \underline{M}^{-1}(t) \underline{F} \end{array} \right] \quad (3.5.7)$$

Com essa mudança de variáveis, $\underline{M}(t)$ e \underline{C} e o vetor \underline{F} são dados por:

$$M_{11} = n_{k1} + c_{mf1qr} \quad (3.5.8)$$

$$M_{12} = c_{mf12r} \quad (3.5.9)$$

$$M_{13} = n_{w1} + c_{mlf1r} \quad (3.5.10)$$

$$M_{14} = (n_{z1} + c_{mf1r}) \cos \rho_3 \quad (3.5.11)$$

$$M_{21} = M_{12} \quad (3.5.12)$$

$$M_{22} = n_{k2} + c_{mf2qr} \quad (3.5.13)$$

$$M_{23} = n_{w2} + c_{mlf2r} \quad (3.5.14)$$

$$M_{24} = (c_{mf2r}) \cos \rho_3 \quad (3.5.15)$$

$$M_{31} = M_{13} \quad (3.5.16)$$

$$M_{32} = M_{23} \quad (3.5.17)$$

$$M_{33} = J_{b2V} + J_{b2U} + m_m \ell_b^2 + c_{mlqr} +$$

$$+ c_{mf1qr} \rho_1^2 + c_{mf2qr} \rho_2^2 + 2 c_{mf12r} \rho_1 \rho_2 \quad (3.5.18)$$

$$M_{34} = \left[\left(\frac{m_b}{2} + m_m \right) l_b + c_{m\ell r} \right] \cos \rho_3 - \left[(m_b \phi_{1c} + c_{mf1r}) \rho_1 + (m_b \phi_{2c} + c_{mf2r}) \rho_2 \right] \operatorname{sen} \rho_3 \quad (3.5.19)$$

$$M_{41} = M_{14} \quad (3.5.20)$$

$$M_{42} = M_{24} \quad (3.5.21)$$

$$M_{43} = M_{34} \quad (3.5.22)$$

$$M_{44} = m_b + 2 m_m + c_{mr} \quad (3.5.23)$$

$$C_{11} = -2 n_{y1} \quad (3.5.24)$$

$$C_{22} = -2 n_{y2} \quad (3.5.25)$$

$$C_{33} = 0 \quad (3.5.26)$$

$$C_{44} = -2 k_m \quad (3.5.27)$$

$$C_{ij} = 0, \quad i \neq j \quad (3.5.28)$$

$$F_1 = -(m_b \phi_{1c} + c_{mf1r}) g \cos \rho_3 + (c_{mf1qr} \rho_1 +$$

$$c_{mf12r} \rho_2) \rho_7^2 + (n_{z1} - m_b \phi_{1c}) \rho_7 \rho_8 \text{ sen } \rho_3 \quad (3.5.29)$$

$$F_2 = -(m_b \phi_{2c} + c_{mf2r}) g \cos \rho_3 + (c_{mf2qr} \rho_2 + c_{mf12r} \rho_1) \rho_7^2 - (m_b \phi_{2c}) \rho_7 \rho_8 \text{ sen } \rho_3 \quad (3.5.30)$$

$$F_3 = -\left[\left(\frac{m_b}{2} + m_m\right) l_b + c_{mlr}\right] g \cos \rho_3 - k_m l_b (\rho_4 + l_b \text{ sen } \rho_3) \cos \rho_3 - k_a l_b (\rho_8 + l_b \rho_7 \cos \rho_3) + [(m_b \phi_{1c} + c_{mf1r}) \rho_1 + (m_b \phi_{2c} + c_{mf2r}) \rho_2] g \text{ sen } \rho_3 - 2 [(c_{mf1qr} \rho_1 + c_{mf12r} \rho_2) \rho_5 + (c_{mf2qr} \rho_2 + c_{mf12r} \rho_1) \rho_6] \rho_7 + [(m_b \phi_{1c} - n_{z1}) \rho_5 + (m_b \phi_{2c}) \rho_6] \rho_8 \text{ sen } \rho_3 \quad (3.5.31)$$

$$F_4 = -\left[m_b + 2m_m + c_{mr}\right] g - k_m l_b \text{ sen } \rho_3 - k_a (2 \rho_8 + l_b \rho_7 \cos \rho_3) + \left[\left(\frac{m_b}{2} + m_m\right) l_b + c_{mlr}\right] \rho_7^2 \text{ sen } \rho_3 + [(m_b \phi_{1c} + c_{mf1r}) \rho_1 + (m_b \phi_{2c} + c_{mf2r}) \rho_2] \rho_7^2 \cos \rho_3 + [(m_b \phi_{1c} + 2c_{mf1r} + n_{z1}) \rho_5 + (m_b \phi_{2c} + 2c_{mf2r}) \rho_6] \rho_7 \text{ sen } \rho_3 \quad (3.5.32)$$

3.5.2 LINEARIZAÇÃO

Para o modelo proposto, a linearização das equações (3.5.5) é agora obtida [K4].

Os senos e cossenos da matriz \underline{M} são representados em séries de potência e para as matrizes \underline{C} e \underline{F} se faz a expansão em séries de Taylor.

Em ambos os casos os termos de ordem superior ou igual a dois são desprezados e a linearização é feita em torno da situação de equilíbrio do sistema: equilíbrio estático e equilíbrio dinâmico: $\underline{\rho} = \underline{0}$.

O sistema de equações diferenciais linear pode ser escrito da forma:

$$\dot{\underline{\rho}} = \underline{A} \underline{\rho} + \underline{B} \quad (3.5.33)$$

onde $\underline{A} = \left[\begin{array}{c|c} \underline{0} & \underline{I} \\ \hline \underline{M}^{-1} \underline{C} & \underline{M}^{-1} \underline{E} \end{array} \right]$ e $(3.5.34)$

$$\underline{B} = \left[\begin{array}{c} \underline{0} \\ \hline \underline{M}^{-1} \underline{F} \end{array} \right] \quad (3.5.35)$$

sendo $\underline{M} = [M_{ij}] \quad i, j = 1, 4 \quad , \quad (3.5.36)$

$$\underline{C} = [C_{ij}] \quad i, j = 1, 4 \quad , \quad (3.5.37)$$

$$\underline{E} = [E_{ij}] \quad i, j = 1, 4 \quad e \quad (3.5.38)$$

$$\underline{F} = [F_i] \quad i = 1, 4 \quad (3.5.39)$$

Os termos de (3.5.36) são:

$$M_{11} = n_{k1} + e_{mf1qr} \quad (3.5.40)$$

$$M_{12} = e_{mf12r} \quad (3.5.41)$$

$$M_{13} = n_{w1} + e_{mlf1r} \quad (3.5.42)$$

$$M_{14} = n_{z1} + e_{mf1r} \quad (3.5.43)$$

$$M_{21} = M_{12} \quad (3.5.44)$$

$$M_{22} = n_{k2} + e_{mf2qr} \quad (3.5.45)$$

$$M_{23} = n_{w2} + e_{mlf2r} \quad (3.5.46)$$

$$M_{24} = e_{mf2r} \quad (3.5.47)$$

$$M_{31} = M_{13} \quad (3.5.48)$$

$$M_{32} = M_{23} \quad (3.5.49)$$

$$M_{33} = J_{b2V} + J_{b2U} + m_m l_b^2 + c_{mlqr} \quad (3.5.50)$$

$$M_{34} = \left(\frac{m_b}{2} + m_m\right) l_b + c_{mlr} \quad (3.5.51)$$

$$M_{41} = M_{14} \quad (3.5.52)$$

$$M_{42} = M_{24} \quad (3.5.53)$$

$$M_{43} = M_{34} \quad (3.5.54)$$

$$M_{44} = m_b + 2 m_m + c_{mr} \quad (3.5.55)$$

Os termos de (3.5.37) são:

$$C_{11} = -2 n_{y1} \quad (3.5.56)$$

$$C_{12} = 0 \quad (3.5.57)$$

$$C_{13} = 0 \quad (3.5.58)$$

$$C_{14} = 0 \quad (3.5.59)$$

$$C_{21} = C_{12} \quad (3.5.60)$$

$$C_{22} = -2 n_{y2} \quad (3.5.61)$$

$$C_{23} = 0 \quad (3.5.62)$$

$$C_{24} = 0 \quad (3.5.63)$$

$$C_{31} = C_{13} \quad (3.5.64)$$

$$C_{32} = C_{23} \quad (3.5.65)$$

$$C_{33} = -k_m \ell_b^2 \quad (3.5.66)$$

$$C_{34} = -k_m \ell_b \quad (3.5.67)$$

$$C_{41} = C_{14} \quad (3.5.68)$$

$$C_{42} = C_{24} \quad (3.5.69)$$

$$C_{43} = C_{34} \quad (3.5.70)$$

$$C_{44} = -2 k_m \quad (3.5.71)$$

Os termos de (3.5.38) são:

$$E_{11} = 0 \quad (3.5.72)$$

$$E_{12} = 0 \quad (3.5.73)$$

$$E_{13} = 0 \quad (3.5.74)$$

$$E_{14} = 0 \quad (3.5.75)$$

$$E_{21} = E_{12} \quad (3.5.76)$$

$$E_{22} = 0 \quad (3.5.77)$$

$$E_{23} = 0 \quad (3.5.78)$$

$$E_{24} = 0 \quad (3.5.79)$$

$$E_{31} = E_{13} \quad (3.5.80)$$

$$E_{32} = E_{23} \quad (3.5.81)$$

$$E_{33} = -k_a \ell_b^2 \quad (3.5.82)$$

$$E_{34} = -k_a \ell_b \quad (3.5.83)$$

$$E_{41} = E_{14} \quad (3.5.84)$$

$$E_{42} = E_{24} \quad (3.5.85)$$

$$E_{43} = E_{34} \quad (3.5.86)$$

$$E_{44} = -2 k_a \quad (3.5.87)$$

Os termos de (3.5.39) são:

$$F_1 = -(m_b \phi_{1c} + e_{mf1r}) g \quad (3.5.88)$$

$$F_2 = -(m_b \phi_{2c} + e_{mf2r}) g \quad (3.5.89)$$

$$F_3 = -\left[\left(\frac{m_b}{2} + m_m\right) \ell_b + e_{mlr}\right] g \quad (3.5.90)$$

$$F_4 = -[m_b + 2 m_m + e_{mr}] g \quad (3.5.91)$$

DESCRIÇÃO DAS PARTES DE PROGRAMAÇÃO E EXPERIMENTAL

CAPÍTULO IV

DESCRIBÇÃO DAS PARTES DE PROGRAMAÇÃO E EXPERIMENTAL

4.1 PROGRAMAÇÃO

Foi desenvolvida uma programação em linguagem FORTRAN IV (Ap.F), para calcular as frequências naturais do sistema, e fazer a simulação dinâmica do mesmo.

O programa é desenvolvido na seqüência: leitura de dados, cálculo de coeficientes, formação das matrizes do sistema não normalizado e normalizado, determinação das frequências naturais e impressão de resultados.

O programa foi inicialmente processado no Centro de Processamento de Dados da Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, que possui um computador Burroughs B/1700 e, posteriormente, no Centro de Computação Eletrônica da Universidade de São Paulo, que possui um computador Burroughs B/6700.

O cálculo das frequências naturais é feito pela determinação dos auto-valores da matriz do sistema normalizado (Ap.D), com a utilização da subrotina EIGRF, da biblioteca de subrotinas do CCE/USP.

A simulação dinâmica das equações linear e não linear tem o objetivo de obter informações sobre a influência, no sistema, dos termos não lineares.

Para a simulação, se faz uso do programa DISIS da biblioteca de programas do DEM/EPUSP, no qual a integração numérica das equações diferenciais é feita pelo método de Runge - Kutta de quarta ordem.

4.2 PARTE EXPERIMENTAL

A parte experimental da presente dissertação foi desenvolvida no Laboratório de Dinâmica da Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá.

Uma bancada para testes foi projetada, construída e montada, pelos Técnicos da Oficina Mecânica e do Departamento de Mecânica Aplicada da FEG.

Para o acionamento do sistema, foi utilizado um variador de velocidades RINGCONE, com motor WEG de 2 CV e velocidade nominal 1725 RPM, permitindo a obtenção de velocidades de 150 a 1700 RPM.

Para aumentar a faixa de trabalho, foram construídos jogos de polias com relação de raios 3/1 e 1/3, permitindo a obtenção de velocidades de 50 a 5100 RPM.

O sistema de acionamento é apresentado nas figuras 4.1 e 4.2 .

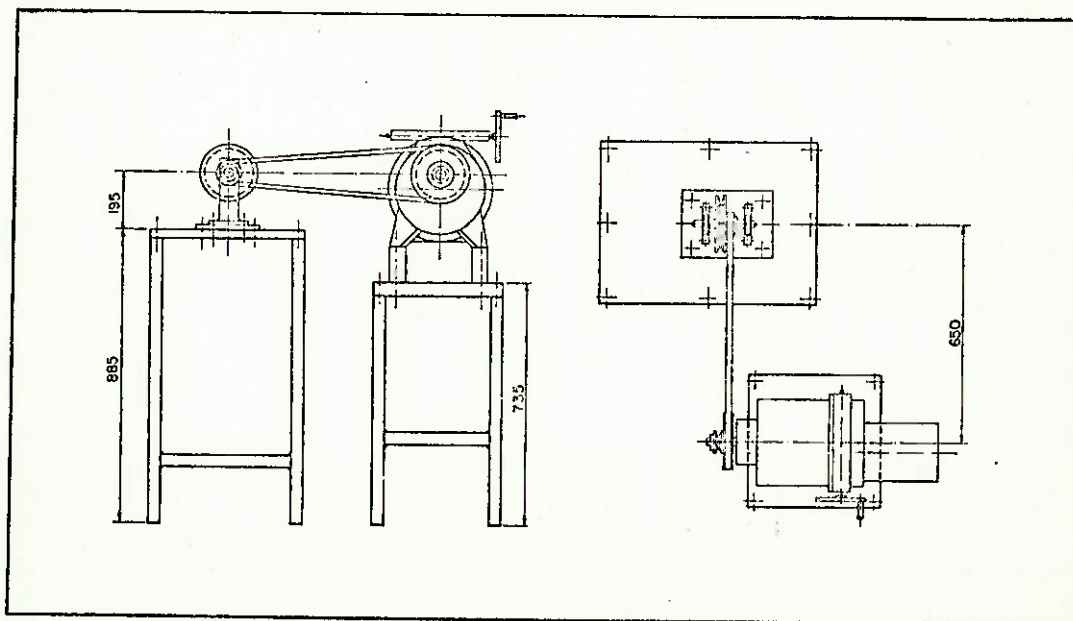


figura 4.1

Esquema de montagem do sistema de acionamento

Desenvolveu-se a parte experimental com o objetivo de se verificar a teoria desenvolvida para os seguintes casos:

1. Mancais rígidos: situação em que se considera as extremidades da barra flexível, fixas, sendo o movimento total do sistema apenas o da parte flexível.

Nesse caso, tem-se $\theta=0$ e $y=0$, possuindo então o sistema 2 graus de liberdade, representados pelas coordenadas generalizadas $q_1(t)$ e $q_2(t)$. As frequências naturais do sistema são relativas à parte flexível da barra, correspondentes às duas formas dinâmicas de vibrar.

A simplificação das equações que regem o comportamento do sistema, para a obtenção da situação acima descrita, se faz com a eliminação, na expressão (3.4.37), das linhas e colunas correspondentes a θ e y .

2. Mancais flexíveis: situação em que se considera as extremidades da barra flexível, soltas, sendo o movimento total do sistema a superposição do movimento da parte flexível sobre o da hipotética parte rígida.

As frequências naturais do sistema são relativas às partes flexível e rígida da barra, correspondendo às quatro formas dinâmicas de vibrar, duas flexíveis e duas rígidas.

Na parte experimental com mancais rígidos foram utilizados um eixo de aço AISI 1020 e rotores de bronze; as extremidades do eixo foram fixadas em rolamentos auto-compensadores, de forma a ter-se extremidades bi-apoiadas, sem o que a expressão (3.1.4) e a tabela 3.1 teriam de ser modificadas.

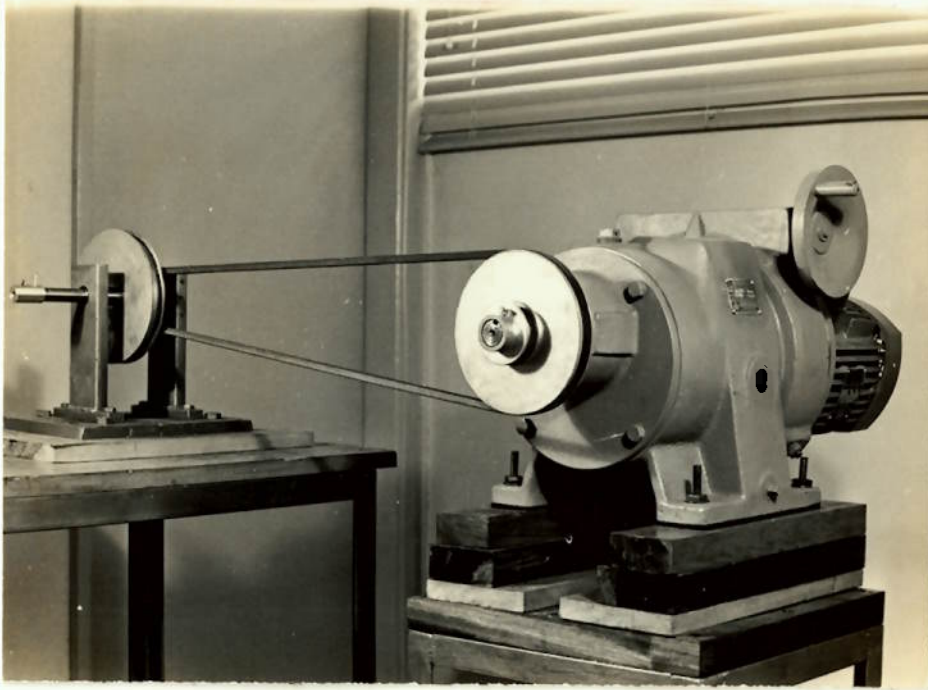


figura 4.2
Sistema de acionamento

O mancal rígado é apresentado nas figuras 4.3 e 4.4 .

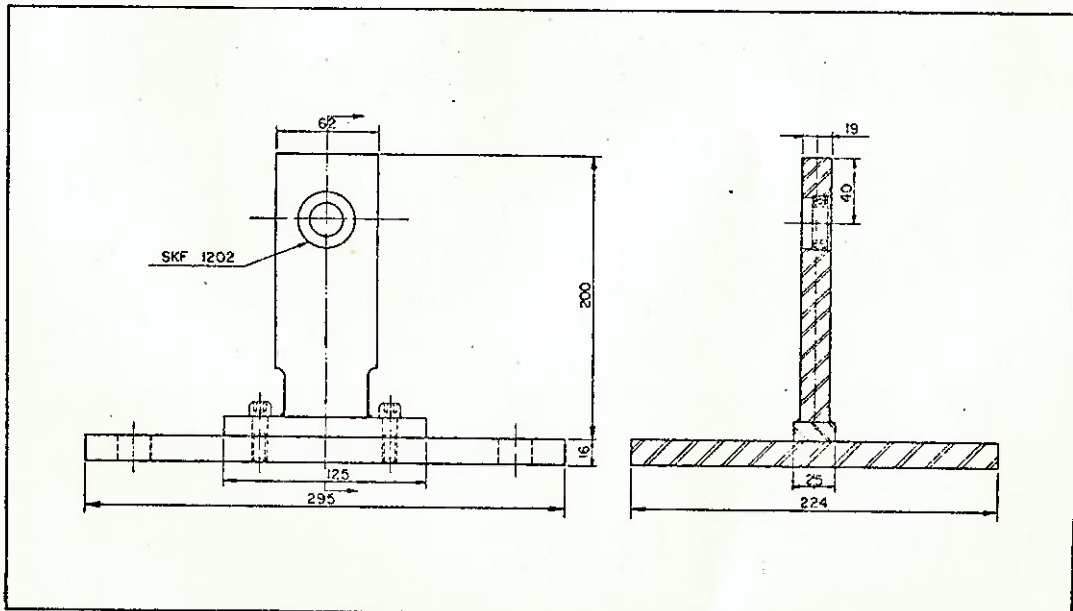


figura 4.3
Esquema do mancal rígado

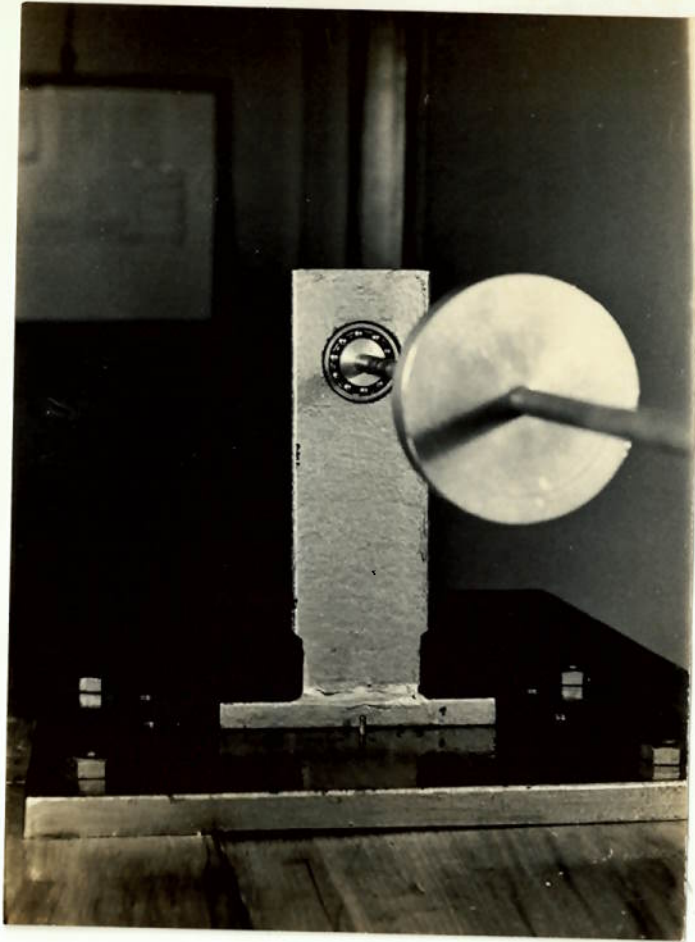


figura 4.4 - Mancal rígido

O acionamento do sistema é feito através de cabo flexível. O conjunto eixo-rotor utilizado para o caso de mancais rígidos é apresentado nas figuras 4.5 e 4.6.

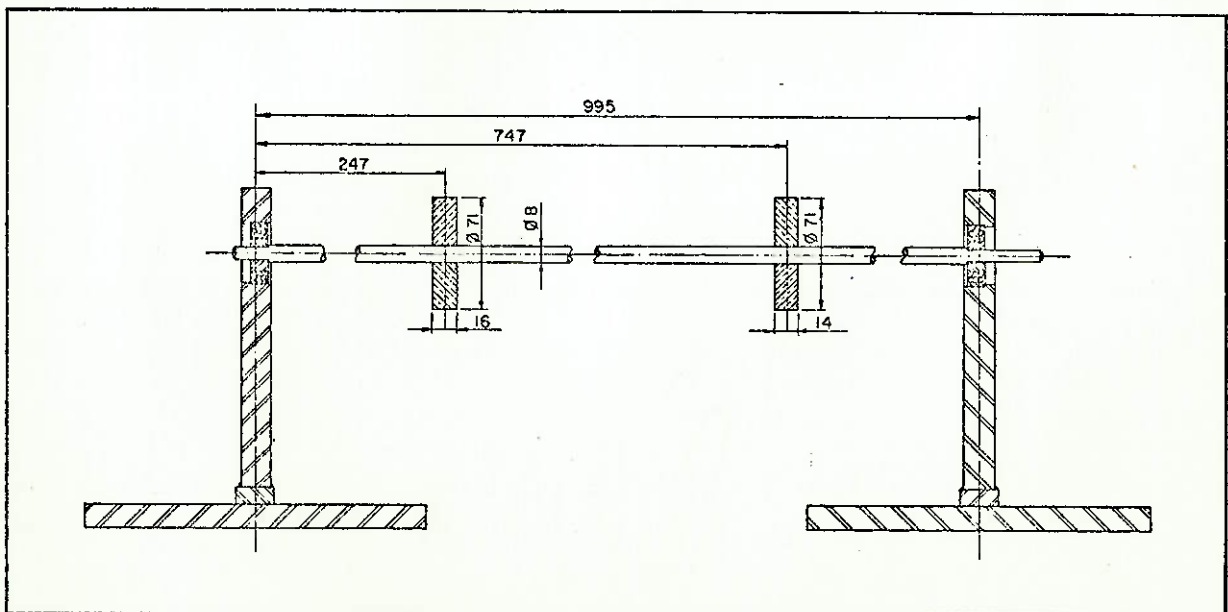


figura 4.5

Esquema do conjunto mancais rígidos-eixo-rotor

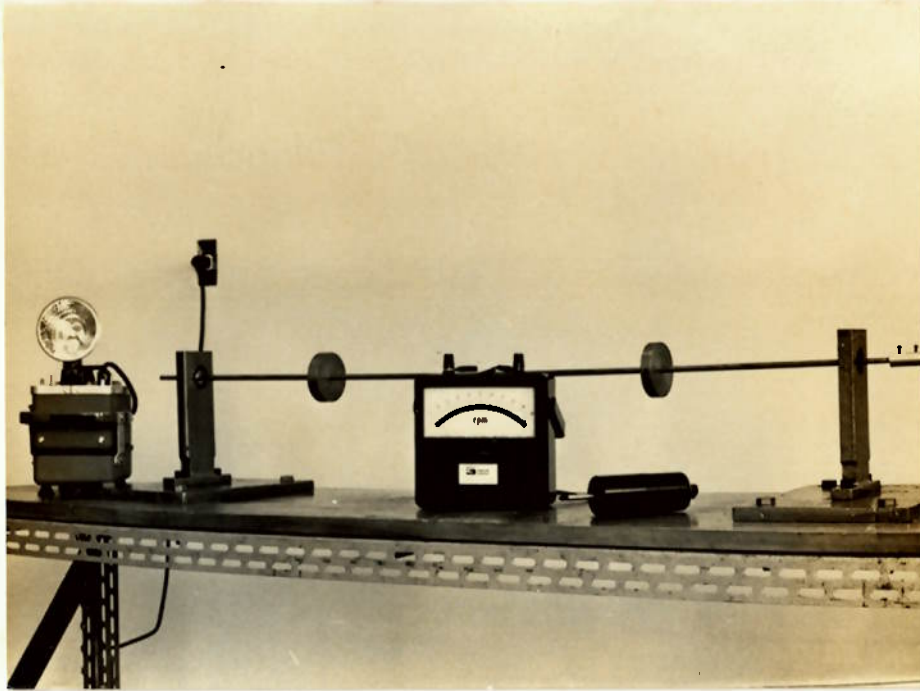


figura 4.6
Conjunto mancais rígidos-eixo-rotore

Na parte experimental com mancais flexíveis foram utilizados eixo e rotores idênticos; as extremidades do eixo foram fixadas em rolamentos prensados em suportes de alumínio, com movimento livre na vertical, direcionado por guias verticais laterais e apoiado em molas de aço, também construídas e avaliadas no Laboratório.

O mancal flexível é apresentado nas figuras 4.7 e 4.8.

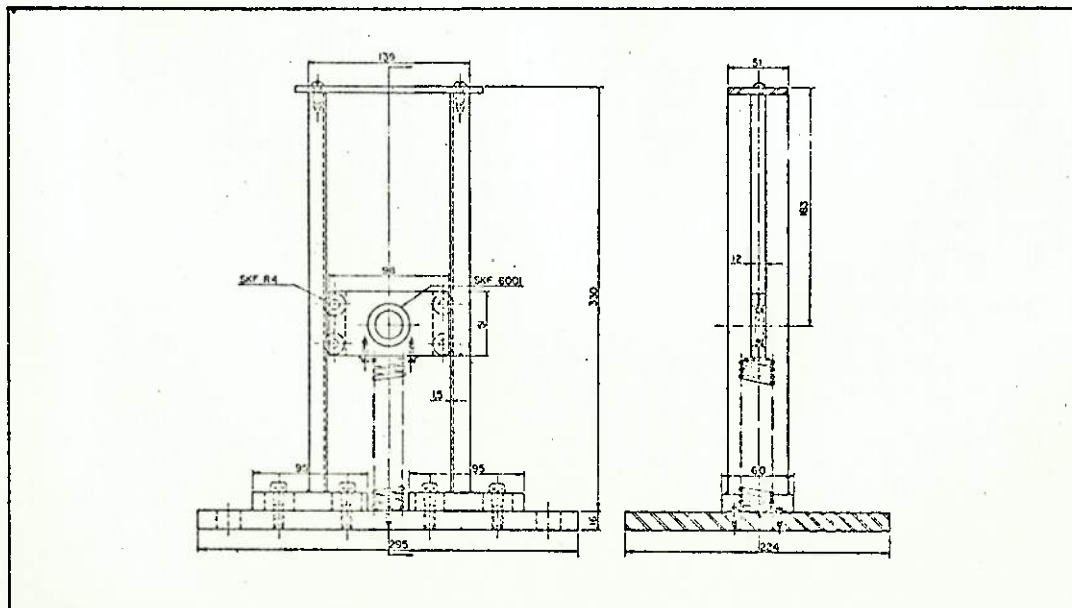


figura 4.7
Esquema do mancal-flexível

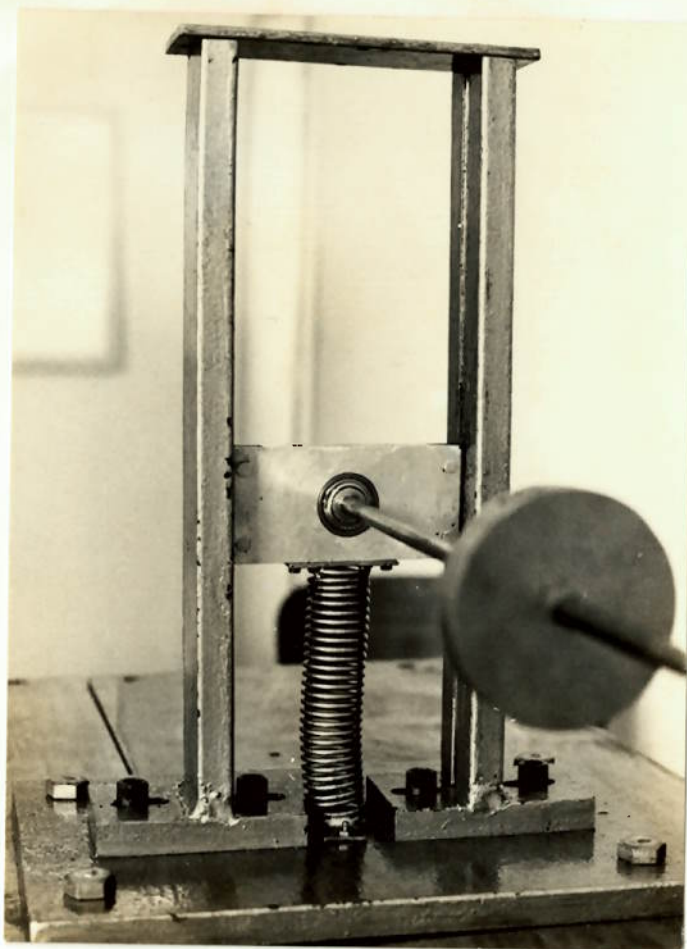


figura 4.8
Mancal flexível

Para a determinação das frequências naturais relativas ao movimento flexível do eixo, o acionamento do sistema é feito através de cabo flexível; para as frequências relativas ao movimento rígido, o acionamento é feito através de um sistema biela-manivela, para se visualizar melhor o movimento rígido.

O conjunto eixo-rotor utilizado para o caso de mancas flexíveis é apresentado nas figuras 4.9 e 4.10.

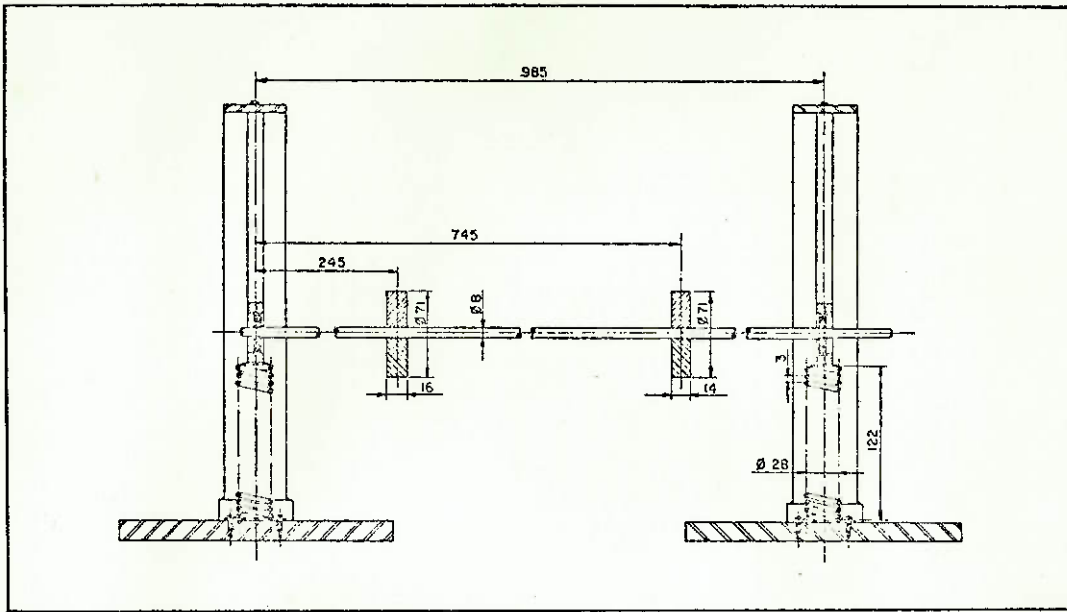


figura 4.9

Esquema do conjunto mancais flexíveis-eixo-rotoreis

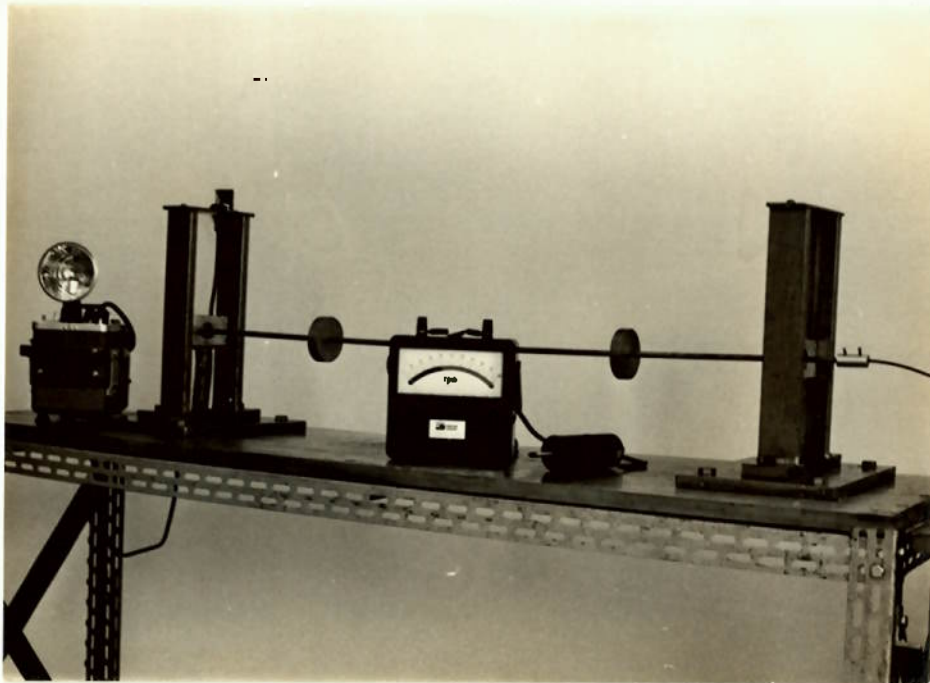


figura 4.10

Conjunto mancais flexíveis-eixo-rotoreis

As medidas são feitas acionando-se o equipamento e variando-se a velocidade até se atingir regiões próximas da freqüência natural do sistema, onde cresce acentuadamente a amplitude do movimento oscilatório.

As amplitudes máximas foram detetadas e medidas através de um estroboscópio STROBOTAC 1538-A e um tacômetro YEW.

O procedimento é repetido para o caso de mancais rígidos e flexíveis, determinando-se no primeiro caso as duas freqüências naturais e no segundo as quatro freqüências naturais.

São tiradas fotografias do sistema em movimento, mostrando para o caso de mancais rígidos, dois modos flexíveis de vibrar, e para o caso de mancais flexíveis, quatro modos de vibrar, dois rígidos e dois flexíveis.

RESULTADOS

CAPÍTULO V

RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos de aplicações feitas para sistemas com mancais rígidos e flexíveis. Os resultados dos cálculos são listados, tabelados e comparados com valores experimentais.

São apresentadas fotografias das formas de vibrar do sistema.

Os resultados experimentais são também comparados com valores obtidos de métodos convencionais (Ap.E) e comentários são tecidos.

As características do sistema, mancais, eixo e rotores, são mostradas na listagem dos resultados.

São apresentados os resultados das simulações dinâmicas dos sistemas de equações lineares e não lineares, que regem o comportamento do sistema com mancais flexíveis.

5.1 MANCAIS RÍGIDOS

Modelo onde as extremidades do eixo flexível são fixas. É representado pelas coordenadas generalizadas $q_1(t)$ e $q_2(t)$, sendo importante o fato de ser um modelo linear, representado pela simplificação da expressão (3.4.37).

Seguem-se: listagem dos resultados dos cálculos; tabela contendo os valores calculados no trabalho e experimentais, com as respectivas diferenças percentuais, tabela 5.1; fotografias da primeira e segunda formas flexíveis de vibrar do eixo, respectivamente, figuras 5.1 e 5.2; tabela contendo os valores experimentais e calculados por métodos convencionais, com as respectivas diferenças percentuais, tabela 5.2.

```

*****
*
*           VIBRACOES DE EIXOS - ANALISE MODAL
*
*           PARTE NUMERICA - CPD/FEG E CCE/USP
*
*           PARTE EXPERIMENTAL - LABORATORIO DE DINAMICA FEG
*
*****

```

*** PROBLEMA ESTUDADO COM MANCAIS RIGIDOS ***

*** VARIAVEIS ESTUDADAS ***

COORDENADA GENERALIZADA 01

COORDENADA GENERALIZADA 02

*** VARIAVEIS ADIMENSIONALIZADORAS ***

* COMPRIMENTO DO EIXO	.995E+00	METROS
* MASSA DO EIXO	.410E+00	KILOGRAMAS NEWTONS*SEGUNDO**2/METRO
* RIGIDEZ A FLEXAO DO EIXO	.414E+02	NEWTONS*METRO**2
* TEMPO	.987E-01	SEGUNDOS

*** GRANDEZAS DIMENSIONAIS ***

*** CARACTERISTICAS DO EIXO ***

* MASSA	-	.410E+00	KILOGRAMAS
* COMPRIMENTO	-	.995E+00	METROS
* RIGIDEZ A FLEXAO	-	.414E+02	NEWTONS*METRO**2
* MOMENTO INERCIA PARTE FLEXIVEL RELACAO EIXO V	-	.137E+00	KILOGRAMAS*METRO**2
* MOMENTO INERCIA PARTE FLEXIVEL RELACAO EIXO U	-	.200E-02	KILOGRAMAS*METRO**2
* CONSTANTE MODAL	-	.100E+01	METROS

*** CARACTERISTICAS DOS MANCAIS ***

* MASSA	-	.190E+01	KILOGRAMAS
* CONSTANTE AMORTECIMENTO	-	.100E+07	NEWTONS*SEGUNDO/METRO
* CONSTANTE FOLA	-	.100E+07	NEWTONS/METRO

*** CARACTERISTICAS DOS ROTORES ***

* ROTOR	ABCISSA	MASSA
	METROS	KILOGRAMAS
1	.247E+00	.563E+00
2	.747E+00	.478E+00

*** GRANDEZAS ADIMENSIONAIS ***

*** CARACTERISTICAS DO EIXO ***

* MASSA	-	.100E+01
* COMPRIMENTO	-	.100E+01
* RIGIDEZ FLEXAO	-	.100E+01
* MOMENTO INERCIA PARTE FLEXIVEL RELACAO EIXO V	-	.338E+00
* MOMENTO INERCIA PARTE FLEXIVEL RELACAO EIXO U	-	.493E+02
* CONSTANTE MODAL	-	.101E+01

*** CARACTERISTICAS DOS MANCAIS ***

* MASSA	-	.463E+01
* CONSTANTE AMORTECIMENTO	-	.241E+06
* CONSTANTE MOLA	-	.238E+05

*** CARACTERISTICAS DOS ROTORES ***

* ROTOR	ABCISSA	MASSA
1	.248E+00	.137E+01
2	.751E+00	.117E+01

*** MATRIZ DO SISTEMA NORMALIZADO E LINEARIZADO ***

0.	0.	.100E+01	0.
0.	0.	0.	.100E+01
-.276E+02	.209E+02	0.	0.
.131E+01	-.257E+03	0.	0.

*** VETOR DE VALORES INICIAIS ***

0.
0.
-.155E+02
.631E-01


```

*****
*
*   *** FREQUENCIAS NATURAIS DO SISTEMA ***
*
*   * MODOS FLEXIVEIS DE VIBRAR
*
*           VALOR ADIMENSIONAL           VALOR DIMENSIONAL
*
*   * MODO 1           .526E+01           .533E+02   RADIANDS/SEGUNDO
*
*   * MODO 2           .160E+02           .163E+03   RADIANDS/SEGUNDO
*
*****

```

ordem	trabalho (rad/s)	experimental (rad/s)	diferença percentual (%)
1	53.3	51.8	-2.8
2	163.0	165.3	1.4

tabela 5.1

Freqüências naturais do sistema com mancais rígidos
resultados do trabalho e experimentais

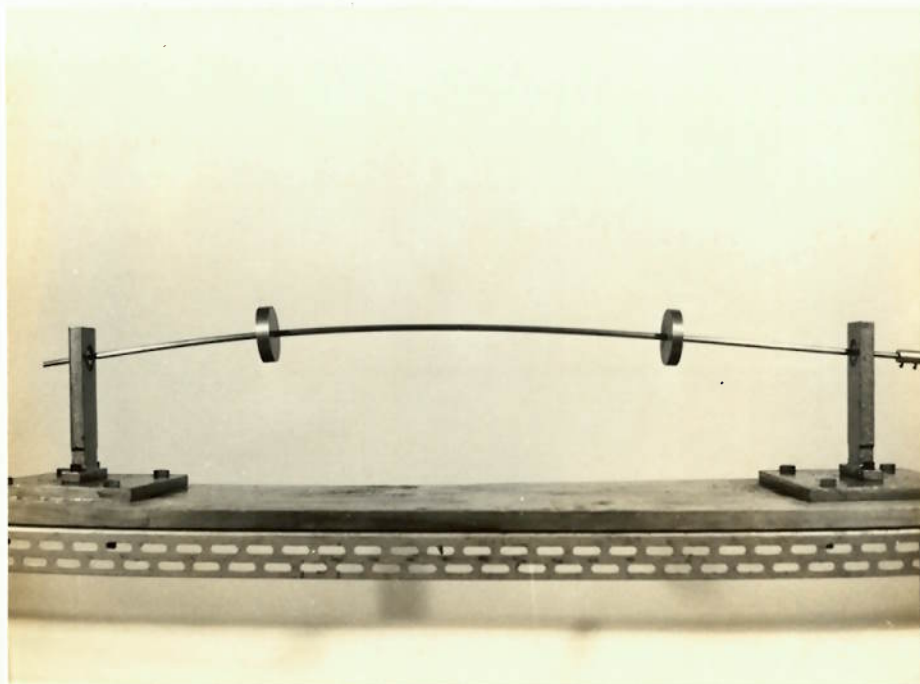


figura 5.1

Primeira forma flexível de vibrar do sistema

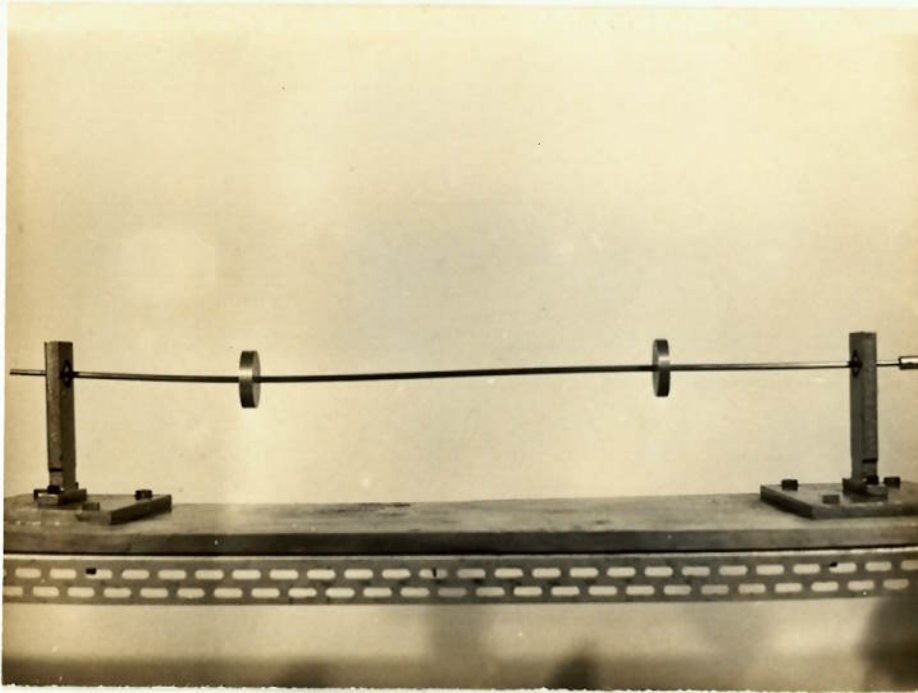


figura 5.2
Segunda forma flexível de vibrar do sistema

ordem	experimental (rad/s)	outros métodos (rad/s)	diferença percentual (%)
1	51.8	43.7	18.5
2	165.3	123.6	33.7

tabela 5.2
Frequências naturais do sistema com mancais rígidos
Resultados experimentais e de métodos convencionais

Os resultados aqui obtidos são bastante expressivos, embora alguns fatores possam ser citados como fontes de erros na determinação experimental das frequências naturais do sistema: rigidez não suficientemente elevada da bancada de testes, dificuldade na leitura da primeira frequência natural, face a amplitudes

elevadas dessa forma de vibrar e percepção visual do elemento humano.

O truncamento das formas flexíveis, no segundo modo, produz resultados satisfatórios, e as hipóteses afetas a esse modelo se tornam bem fundamentadas.

O cálculo das frequências naturais do sistema, a partir da admissão das formas dinâmicas da parte flexível, produz melhores resultados que o cálculo a partir de métodos convencionais.

Sendo o modelo matemático linear, não se introduzem erros nos cálculos das frequências naturais do sistema.

As formas dinâmicas do sistema flexível são bastante visíveis nas fotografias.

Portanto, pode-se ter uma confiabilidade bastante grande na modelagem matemática de um sistema mecânico, obtida através da admissão das formas dinâmicas de vibrar desse sistema.

5.2 MANCAIS FLEXÍVEIS

Modelo onde as extremidades do eixo são apoiadas sobre molas. É representado pelas coordenadas generalizadas $q_1(t)$, $q_2(t)$, $\theta(t)$ e $y(t)$, sendo o modelo, não linear.

Seguem-se: listagem dos resultados dos cálculos; tabela contendo os valores calculados no trabalho e experimentais, com as respectivas diferenças percentuais, tabela 5.3; fotografias da primeira e segunda formas flexíveis de vibrar do eixo, respectivamente, figuras 5.3 e 5.4; fotografias da primeira e segunda formas rígidas de vibrar, respectivamente, figuras 5.5 e 5.6; tabela contendo os valores experimentais e calculados por métodos convencionais, com as respectivas diferenças percentuais, tabela 5.4.

```

*****
*
*          VIBRACOES DE EIXOS - ANALISE MODAL
*
*          PARTE NUMERICA - CPD/FEG E CCE/USP
*
*          PARTE EXPERIMENTAL - LABORATORIO DE DINAMICA FEG
*
*****

```

*** PROBLEMA ESTUDADO COM MANCAIS FLEXIVEIS ***

*** VARIAVEIS ESTUDADAS ***

COORDENADA GENERALIZADA Q1
 COORDENADA GENERALIZADA Q2
 ANGLLO COM HORIZONTAL TETA
 DESLOCAMENTO VERTICAL Y

*** VARIAVEIS ADIMENSIONALIZADAS ***

* COMPRIMENTO DO EIXO	.985E+00	METROS
* MASSA DO EIXO	.410E+00	KILOGRAMAS NEWTONS*SEGUNDO**2/METRO
* RIGIDEZ A FLEXAO DO EIXO	.414E+02	NEWTONS*METRO**2
* TEMPO	.973E-01	SEGUNDOS

*** GRANDEZAS DIMENSIONAIS ***

*** CARACTERISTICAS DO EIXO ***

* MASSA	-	.410E+00	KILOGRAMAS
* COMPRIMENTO	-	.985E+00	METROS
* RIGIDEZ A FLEXAO	-	.414E+02	NEWTONS*METRO**2
* MOMENTO INERCIA PARTE FLEXIVEL RELACAO EIXO V	-	.137E+00	KILOGRAMAS*METRO**2
* MOMENTO INERCIA PARTE FLEXIVEL RELACAO EIXO U	-	.200E-02	KILOGRAMAS*METRO**2
* CONSTANTE MODAL	-	.100E+01	METROS

*** CARACTERISTICAS DOS MANCAIS ***

* MASSA	-	.180E+00	KILOGRAMAS
* CONSTANTE AMORTECIMENTO	-	.100E+02	NEWTONS*SEGUNDO/METRO
* CONSTANTE MOLA	-	.101E+04	NEWTONS/METRO

*** CARACTERISTICAS DOS ROTORES ***

* ROTOR	ABCISSA	MASSA
	METROS	KILOGRAMAS
1	.245E+00	.563E+00
2	.745E+00	.478E+00

*** CARACTERISTICAS DO EIXO ***

* MASSA - .100E+01
 * COMPRIMENTO - .100E+01
 * RIGIDEZ FLEXAO - .100E+01
 * MOMENTO INERCIA PARTE FLEXIVEL RELACAO EIXO V - .344E+00
 * MOMENTO INERCIA PARTE FLEXIVEL RELACAO EIXO U - .503E-02
 * CONSTANTE MODAL - .102E+01

*** CARACTERISTICAS DOS MANCAIS ***

* MASSA - .439E+00
 * CONSTANTE AMORTECIMENTO - .237E+01
 * CONSTANTE MOLLA - .234E+02

*** CARACTERISTICAS DOS ROTORES ***

* ROTOR	ABCISSA	MASSA
1	.249E+00	.137E+01
2	.756E+00	.117E+01

*** MATRIZ DO SISTEMA NORMALIZADO E LINEARIZADO ***

0.	0.	0.	0.	.100E+01	0.	0.	0.
0.	0.	0.	0.	0.	.100E+01	0.	0.
0.	0.	0.	0.	0.	0.	.100E+01	0.
0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	.100E+01
-.11E+03	.297E+02	.535E+02	.107E+03	0.	0.	0.	0.
.18E+01	-.374E+03	-.118E+02	-.337E+00	0.	0.	0.	0.
.37E+00	-.445E+03	-.447E+02	.116E-01	0.	0.	0.	0.
.63E+02	.219E+03	-.167E+02	-.7P2E+02	0.	0.	0.	0.

*** MATRIZ DO SISTEMA NORMALIZADO E LINEARIZADO ***

COM AMORTECIMENTO NOS MANCAIS

0.	0.	0.	0.	.100E+01	0.	0.	0.
0.	0.	0.	0.	0.	.100E+01	0.	0.
0.	0.	0.	0.	0.	0.	.100E+01	0.
0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	.100E+01
-.11E+03	.297E+02	.535E+02	.107E+03	0.	0.	.302E+01	.602E+01
.18E+01	-.374E+03	-.118E+02	-.337E+00	0.	0.	-.667E+00	-.190E-01
.37E+00	-.445E+03	-.447E+02	.116E-01	0.	0.	-.252E+01	.656E-03
.63E+02	.219E+03	-.167E+02	-.7P2E+02	0.	0.	-.942E+00	-.441E+01

*** VETOR DE VALORES INICIAIS ***

0.

0.

0.

0.

.312E+01

-.503E-01

-.102E-01

-.115E+02

*** FREQUÊNCIAS NATURAIS DO SISTEMA ***

MODOS FLEXÍVEIS DE VIBRAR

VALOR ADIMENSIONAL

VALOR DIMENSIONAL

* MODO 1 .545E+01 .560E+02 RADIANS/SEGUNDO

* MODO 2 .197E+02 .203E+03 RADIANS/SEGUNDO

MODOS RÍGIDOS DE VIBRAR

VALOR ADIMENSIONAL

VALOR DIMENSIONAL

* MODO 1 .348E+01 .357E+02 RADIANS/SEGUNDO

* MODO 2 .134E+02 .138E+03 RADIANS/SEGUNDO

ordem	trabalho (rad/s)	experimental (rad/s)	diferença percentual (%)
1	56.0	52.5	- 6.3
2	203.0	175.3	- 13.6
3	35.7	30.5	- 14.6
4	138.0	107.4	- 22.2

tabela 5.3

Frequências naturais do sistema com mancais flexíveis
resultados do trabalho e experimentais

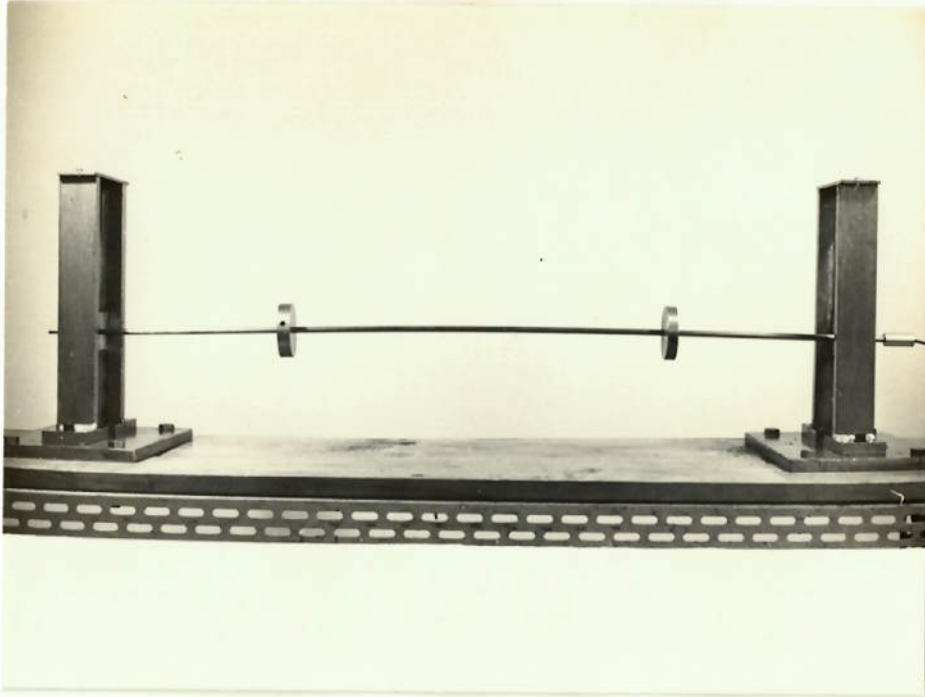


figura 5.3

Primeira forma flexível de vibrar do sistema

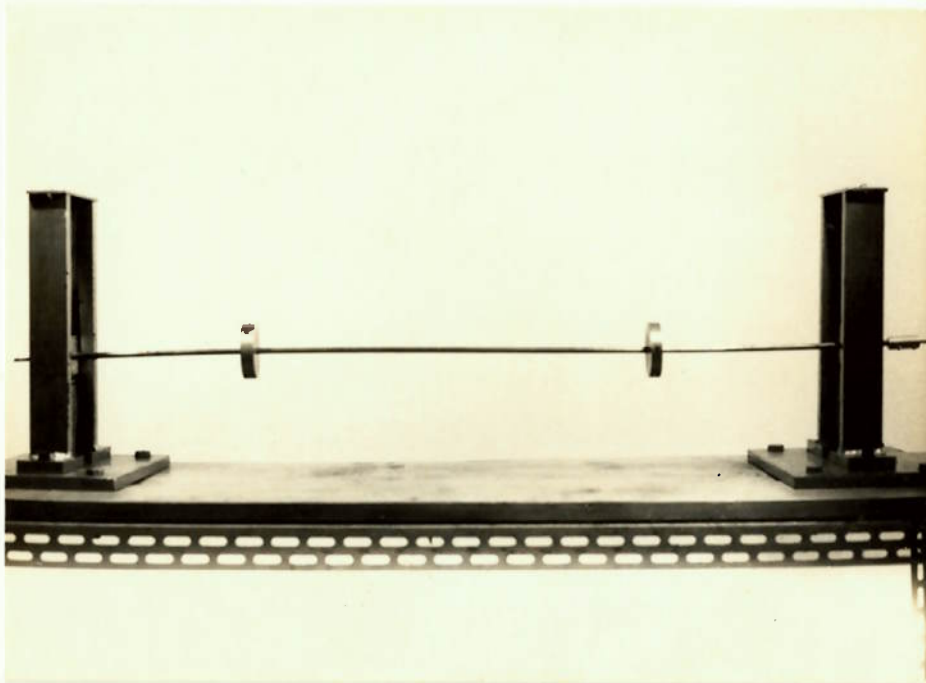


figura 5.4

Segunda forma flexível de vibrar do sistema

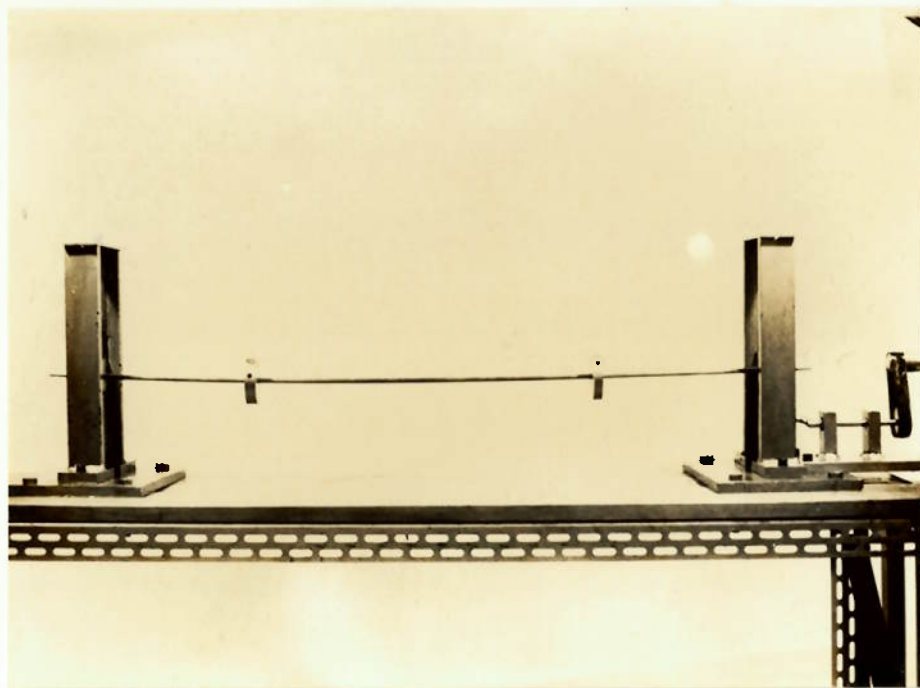


figura 5.5
Primeira forma rígida de vibrar do sistema

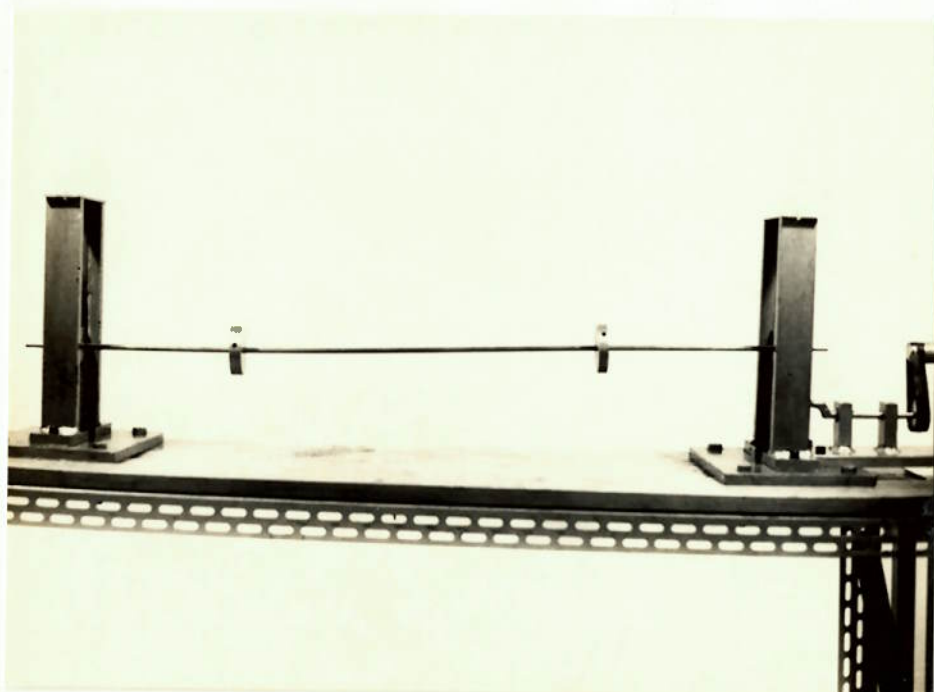


figura 5.6
Segunda forma rígida de vibrar do sistema

ordem	experimental (rad/s)	outros métodos (rad/s)	diferença percentual (%)
1	52.5	43.7	20.1
2	175.3	123.6	41.8
3	30.5	35.5	-14.1
4	107.4	102.3	5.0

tabela 5.4

Freqüências naturais do sistema com mancais flexíveis
Resultados experimentais e de métodos convencionais

Os resultados obtidos foram bons, podendo-se citar como fatores que introduzem erros nas medidas, além dos anteriormente citados, diferença nas massas e nas constantes elásticas dos mancais, e uma linearidade não perfeita das molas.

As coordenadas generalizadas adotadas representam com fidedignidade satisfatória o comportamento do sistema e as hipóteses feitas não comprometem a modelagem.

Percebe-se com clareza, das fotografias, as formas dinâmicas do sistema.

Como as condições de contorno geométricas do eixo, nas extremidades junto aos mancais, ficam inalteradas, neste caso, foram admitidas as mesmas formas dinâmicas, para a parte flexível, do caso anterior.

É importante a citação de as freqüências naturais te

rem sido obtidas a partir de um modelo linearizado, visto que as equações diferenciais que regem o comportamento do sistema são não lineares.

A superposição do movimento flexível ao rígido é o principal tópico do trabalho, e, a partir dos resultados obtidos, pode-se recomendar e confiar nessa técnica.

5.3 SIMULAÇÕES

Os resultados das simulações dinâmicas dos modelos linear e não linear, para o caso de mancais flexíveis, são apresentados, respectivamente, nas figuras 5.7 e 5.8.

Essas simulações resultam da integração numérica das equações diferenciais pelo método de Ringe-Kutta de quarta ordem e o sistema é simulado sem excitação em um intervalo de tempo de cinco segundos.

Os gráficos representam a variação, no domínio do tempo, das quatro coordenadas generalizadas que descrevem o movimento do sistema: $q_1(t)$, $q_2(t)$, $\theta(t)$ e $y(t)$.

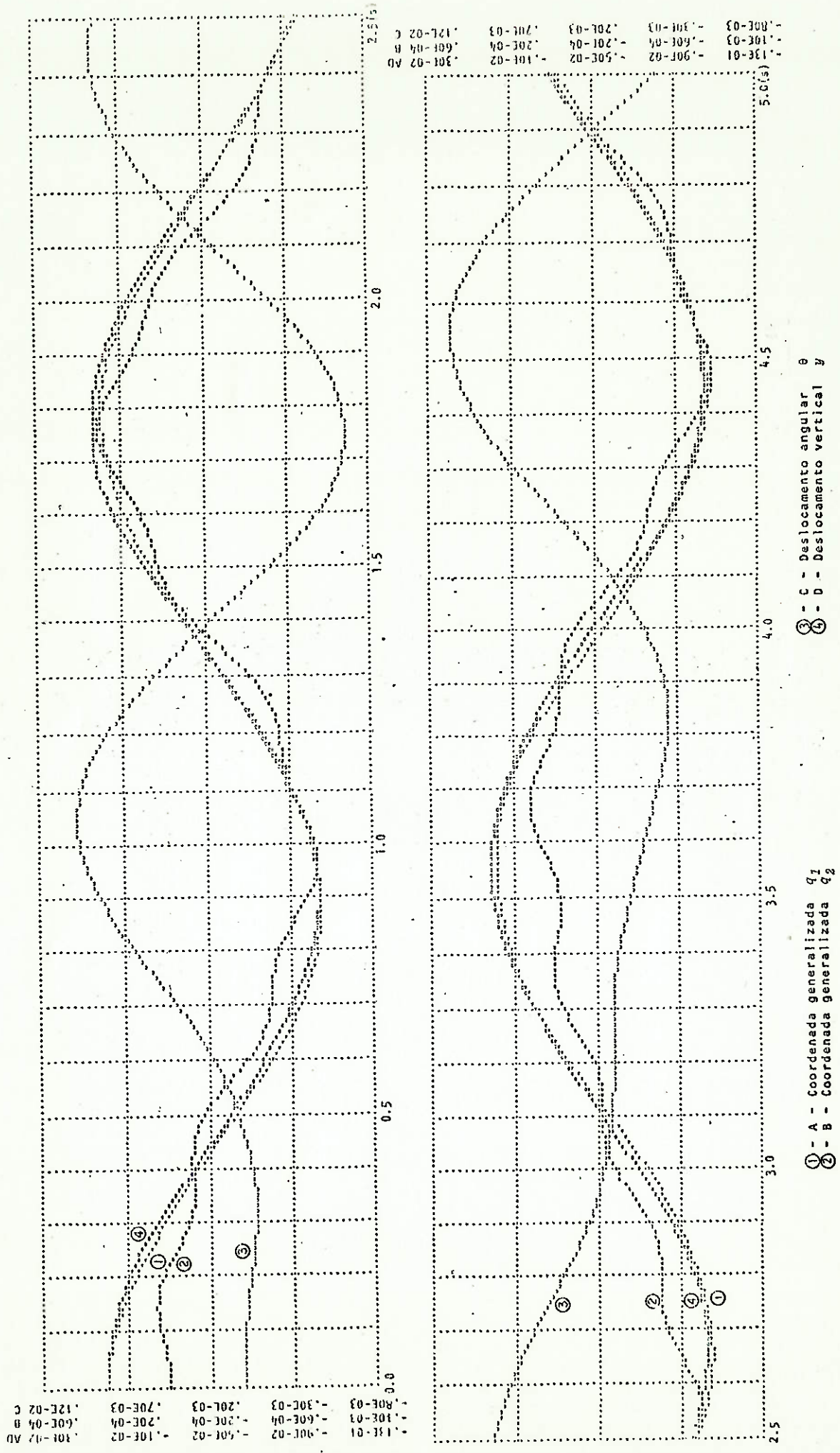


figura 5.8

Simulação dinâmica do modelo não linear

Os modelos linear e não linear tem comportamentos idênticos no que diz respeito as formas dinâmicas, havendo uma acentuada diferença nas amplitudes das oscilações das grandezas em cada um dos modelos.

No modelo não linear aparecem forças funções do campo gravitacional e das velocidades, o que se pode entender como um sistema acrescido de fatores de amortecimento, com conseqüente redução das amplitudes das oscilações.

As frequências relativas às quatro formas de vibrar do sistema linear são maiores que as relativas ao sistema não linear.

CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS

6.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo os resultados principais da dissertação são sintetizados.

Algumas conclusões sobre o modelo proposto para o estudo de eixos flexíveis são discutidas e sugestões para futuras pesquisas são dadas.

6.2 CONCLUSÕES

Este estudo apresenta a aplicação de um modelo não-convencional para a análise de eixos flexíveis. O fato de o modelo introduzir o comportamento flexível sobre o hipotético movimento rígido, é importante no estudo do desempenho do sistema.

As coordenadas generalizadas representam, de forma satisfatória, o comportamento do sistema, tanto no caso de mancais rígidos como no caso de mancais flexíveis.

O modelo linear é satisfatório para representar o comportamento real do sistema.

Embora não se tenha estendido o estudo, fazendo-se o truncamento das formas dinâmicas do eixo flexível no terceiro modo, os resultados experimentais mostram que o truncamento no segundo modo é uma boa aproximação para o modelo proposto.

O fato do modelo ser representado na forma matricial, simplifica o procedimento de linearização e pode ser utilizado

para a simulação dinâmica dos modelos linearizado e não linearizado, bem como para mais de dois modos para a parte flexível.

Embora não se tenha explorado a adimensionalização do modelo, a mesma foi feita para se obter resultados mais amplos, com validade não apenas para os exemplos apresentados, mas sim de uma forma geral para outras configurações geométricas de sistemas eixo-rotoreis.

As simulações dinâmicas são feitas para um pequeno intervalo de tempo, devido ao tempo de processamento excessivamente grande, necessário para a integração numérica das equações diferenciais não lineares.

Conclui-se, portanto, que a técnica de análise modal, para a modelagem de sistemas mecânicos contendo elementos flexíveis, com a superposição de um movimento flexível sobre um movimento rígido, se apresenta como uma ferramenta bastante importante dentro do estudo da mecânica, face ser uma técnica de fácil domínio, e que leva a resultados satisfatórios.

Uma análise mais completa do comportamento do modelo proposto, linearizado e não linearizado, necessitaria de técnicas mais sofisticadas de medidas, e não somente das frequências naturais do sistema, mas também, por exemplo, medidas relacionadas com as componentes flexíveis, efeito de amortecimento dos mancais e influência dos termos não lineares.

6.3 SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS

O trabalho apresentado nesta dissertação sugere alguns problemas para futuras pesquisas:

1. Comparar os resultados obtidos no modelo proposto, fazendo o truncamento das formas dinâmicas da parte flexível no

primeiro e no terceiro modos;

2. Examinar a validade do modelo para eixos com rigidez à flexão variável ao longo do comprimento;

3. Examinar a validade do modelo para acoplamento de rotores com relação espessura/diâmetro, grande, a ponto de influenciar a rigidez à flexão do eixo;

4. Estender o modelo para representar um movimento espacial, considerando efeitos de torção;

5. Estender a técnica de análise modal para o estudo de eixos com condições de vinculação (condições de contorno) diferentes como, por exemplo, eixos bi-engastados e engastado-apoiados;

6. Estender a técnica de análise modal para eixos com pequena relação diâmetro/comprimento e com pequena rigidez como, por exemplo, cordas, onde há possibilidade de visualização de várias formas dinâmicas da parte flexível;

7. Analisar o efeito da existência de amortecedores nas extremidades do eixo, apoiado sobre mancais flexíveis, cujas conclusões poderiam ser estendidas para eixos apoiados sobre mancais com lubrificação.

APÊNDICES

APÊNDICE A

VIBRAÇÕES TRANSVERSAIS DE BARRAS

Considere-se uma barra com uma distribuição de carga por unidade de comprimento, W [S1]:

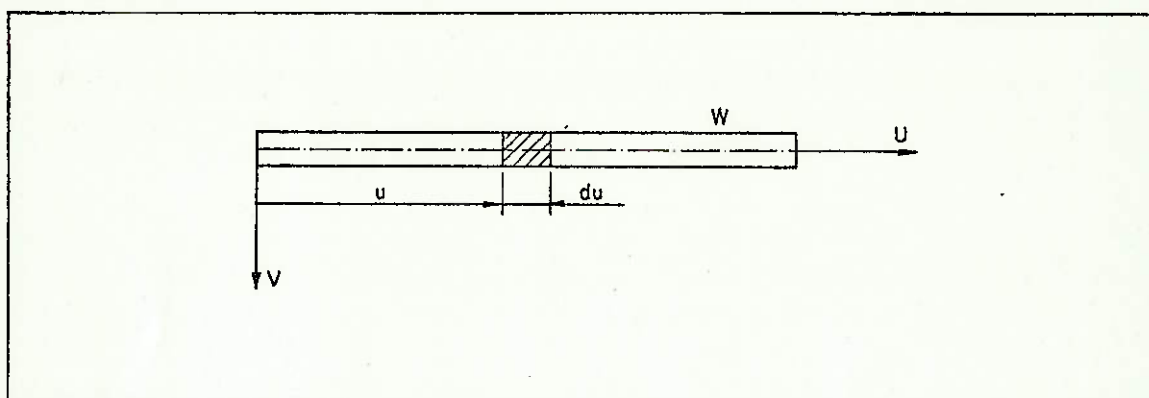


figura A.1

Viga com carregamento distribuído uniformemente

A equação da curva de deflexão da barra é dada por:

$$EI \frac{\partial^2 v}{\partial u^2} = -M \quad (A1)$$

onde

EI é a rigidez à flexão da viga,

v é a deflexão e

M é o momento fletor em uma secção transversal qual quer

Admitindo-se EI constante e diferenciando (A1), ob têm-se:

$$EI \frac{\partial^3 v}{\partial u^3} = -Q \quad (A2)$$

onde Q é a força cortante em uma secção transversal qual_ quer.

Diferenciando (A2), obtém-se:

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial u^4} = W \quad (A3)$$

Na vibração transversal livre, as forças de inércia são consideradas como a intensidade da distribuição de carga.

Então

$$W = \frac{-\gamma A}{g} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (A4)$$

onde γ é o peso específico do material e
 A é a área da secção reta da barra

Substituindo-se (A4) em (A3) obtém-se a equação diferencial do movimento para vibrações transversais de vigas:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \alpha^2 \frac{\partial^4 v}{\partial u^4} = 0 \quad (A5)$$

onde $\alpha^2 = \frac{EI g}{\gamma A}$

Admitindo-se que:

$$v = \phi(u) \quad q(t), \quad (A6)$$

e substituindo-se em (A5), obtêm-se:

$$\phi(u) \ddot{q}(t) + \alpha^2 \phi^{(IV)}(u) q(t) = 0, \quad \text{ou} \quad (A7)$$

$$\frac{\phi^{(IV)}}{\phi} = \frac{-1}{\alpha^2} \frac{\ddot{q}}{q} \quad (A8)$$

Como o lado esquerdo da igualdade (A8) é só função de u e o lado direito é só função de t , ambos devem ser iguais a uma constante. Denominando-se essa constante de p^2/α^2 , obtêm-se:

$$\ddot{q} + p^2 q = 0 \quad \text{e} \quad (A9)$$

$$\phi^{(IV)} - \frac{p^2}{\alpha^2} \phi = 0 \quad (A10)$$

As soluções de (A9) e (A10) podem ser escritas, respectivamente, da seguinte forma:

$$q(t) = A \cos p t + B \sin p t \quad \text{e} \quad (A11)$$

$$\begin{aligned} \phi(u) = & C_1 \cos \lambda u + C_2 \sin \lambda u + C_3 \cosh \lambda u + \\ & + C_4 \sinh \lambda u \end{aligned} \quad (A12)$$

Para a determinação das constantes C , é necessário saber o tipo de vínculo existente nas extremidades da viga, em função dos quais se determina as condições de contorno necessárias.

Essas condições estão relacionadas com:

deslocamento : v ,

inclinação : $\frac{\partial v}{\partial u}$,

momento fletor: $\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}$ e

força cortante: $\frac{\partial^3 v}{\partial u^3}$

Para o caso aqui tratado, viga bi-apoiada, em ambas as extremidades se tem deslocamento e momento fletor nulos.

Portanto,

$$\phi(u=0) = 0 \quad (A13)$$

$$\phi(u=L) = 0 \quad (A14)$$

$$\frac{d^2 \phi}{du^2}(u=0) = 0 \quad (A15)$$

$$\frac{d^2 \phi}{du^2}(u=L) = 0 \quad (A16)$$

De (A12), (A13), (A14), (A15) e (A16) obtêm-se:

$$\phi_i(u) = C \operatorname{sen}(\lambda_i u) \quad (\text{A17})$$

onde i diz respeito ao modo de vibração,
 C é uma constante arbitrária e

$$\lambda_i = i \pi / L \quad (\text{A18})$$

APÊNDICE B

PRINCÍPIO DA ORTOGONALIDADE

A equação diferencial do movimento para vibrações transversais de vigas é dada por [S1]:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 v}{\partial u^2} = 0 \quad (\text{B1})$$

Admite-se que a solução da equação diferencial é da forma:

$$v = \phi(u) q(t) \quad (\text{B2})$$

onde ϕ é a função normal de vibração

Uma das equações resultantes para o movimento da viga é (Ap.A):

$$\phi^{(IV)} - \frac{p^2}{a^2} \phi = 0 \quad (\text{B3})$$

Sendo ϕ_i e ϕ_j duas funções normais, correspondentes a dois modos normais de vibração, obtêm-se de (B3):

$$\frac{d^4 \phi_i}{du^4} = \frac{p_i^2}{a^2} \phi_i \quad (\text{B4})$$

$$\frac{d^4 \phi_j}{du^4} = \frac{p_j^2}{\alpha^2} \phi_j \quad (B5)$$

Multiplicando-se (B4) por ϕ_j , (B5) por ϕ_i e subtraindo-se o primeiro resultado do segundo, obtêm-se:

$$\frac{p_j^2 - p_i^2}{\alpha^2} \phi_i \phi_j = \frac{d^4 \phi_j}{du^4} \phi_i - \frac{d^4 \phi_i}{du^4} \phi_j \quad (B6)$$

De (B6):

$$\frac{p_j^2 - p_i^2}{\alpha^2} \int_0^L \phi_i \phi_j du = \int_0^L \left(\frac{d^4 \phi_j}{du^4} \phi_i - \frac{d^4 \phi_i}{du^4} \phi_j \right) du \quad (B7)$$

Fazendo a integração do membro à direita de (B7), obtêm-se:

$$\begin{aligned} \frac{p_j^2 - p_i^2}{\alpha^2} \int_0^L \phi_i \phi_j du = & \left(\frac{d^3 \phi_j}{du^3} \phi_i - \frac{d^3 \phi_i}{du^3} \phi_j + \right. \\ & \left. + \frac{d^2 \phi_i}{du^2} \frac{d\phi_j}{du} - \frac{d^2 \phi_j}{du^2} \frac{d\phi_i}{du} \right) \end{aligned} \quad (B8)$$

que é a condição de ortogonalidade para os modos normais de vibração.

Para o caso aqui tratado, viga bi-apoiada, em ambas as extremidades se tem deslocamento e momento fletor nulos.

Portanto,

$$\phi (u=0) = 0 \quad (\text{B9})$$

$$\phi (u=L) = 0 \quad (\text{B10})$$

$$\frac{d^2\phi}{du^2} (u=0) = 0 \quad (\text{B11})$$

$$\frac{d^2\phi}{du^2} (u=L) = 0 \quad (\text{B12})$$

De (B8), (B9), (B10), (B11) e (B12), obtêm-se:

$$\frac{p_j^2 - p_i^2}{\alpha^2} \int_0^L \phi_i \phi_j du = 0 \quad (\text{B13})$$

E, portanto,

$$\int_0^L \phi_i \phi_j du = 0 \quad , \quad i \neq j \quad (\text{B14})$$

APÊNDICE C

ADIMENSIONALIZAÇÃO

Para se ter uma melhor idéia sobre o efeito dos parâmetros do sistema e para se obter resultados mais gerais, trabalha-se com variáveis adimensionais.

A adimensionalização é conseguida a partir das quantidades dadas na tabela C.1 .

Quantidade Física	Símbolo	Dimensão
Comprimento do eixo	l_b	L
Rigidez à flexão do eixo	EI	FL^2
Massa do eixo	m_b	M FT^2L^{-1}

tabela C.1

Parâmetros adimensionalizadores

Importantes quantidades físicas podem ser derivadas da tabela C.1 .

tempo $t = \left(\frac{m_b l_b^3}{EI} \right)^{1/2}$ (C1)

frequência $t^{-1} = \left(\frac{EI}{m_b l_b^3} \right)^{1/2}$ (C2)

força $f = \frac{EI}{l_b^2}$ (C3)

obtêm-se agora a adimensionalização das quantidades envolvidas no problema:

posição dos rotores $\bar{l}_{ri} = \frac{l_{ri}}{l_b}$; (C4)

massa dos rotores $\bar{m}_{ri} = \frac{m_{ri}}{m_b}$; (C5)

comprimento do eixo $\bar{l}_b = \frac{l_b}{l_b}$; (C6)

massa do eixo $\bar{m}_b = \frac{m_b}{m_b}$; (C7)

rigidez à flexão do eixo $\bar{EI} = \frac{EI}{EI}$; (C8)

momento de inércia do eixo I em relação ao eixo V

$\bar{J}_{b1V} = \frac{J_{b1V}}{m_b l_b^2}$; (C9)

momento de inércia do eixo 2 em relação ao eixo V

$$\bar{J}_{b2V} = \frac{J_{b2V}}{m_b \ell_b^2} ; \quad (C10)$$

momento de inércia do eixo 2 em relação ao eixo U

$$\bar{J}_{b2U} = \frac{J_{b2U}}{m_b \ell_b^2} ; \quad (C11)$$

massa dos mancais $\bar{m}_m = \frac{m_m}{m_b} ; \quad (C12)$

constante de amortecimento dos mancais

$$\bar{k}_a = \frac{k_a \ell_b}{(EI \cdot m_b / \ell_b)^{1/2}} ; \quad (C13)$$

constante de mola dos mancais

$$\bar{k}_m = \frac{k_m \ell_b^3}{EI} \quad e \quad (C14)$$

constante modal

$$\bar{k}_t = \frac{k_t}{\ell_b} \quad (C15)$$

APÊNDICE D

AUTOVALORES

Para um sistema não amortecido, de vários graus de liberdade, a equação do movimento escrita na forma matricial torna-se:

$$\underline{M} \ddot{\underline{x}} + \underline{k} \underline{x} = \underline{0} \quad (D1)$$

onde \underline{M} = matriz de massa,
 \underline{k} = matriz de rigidez e,
 \underline{x} = vetor de deslocamentos

De (D1) obtém-se:

$$\underline{I} \ddot{\underline{x}} + \underline{A} \underline{x} = \underline{0} \quad (D2)$$

onde $\underline{I} = \underline{M}^{-1} \underline{M}$ = matriz unitária e
 $\underline{A} = \underline{M}^{-1} \underline{k}$ = matriz dinâmica.

Admitindo-se o movimento harmônico:

$$\ddot{X} = -\lambda X \quad (D3)$$

onde $\lambda = \omega^2$ (D4)

a equação (D2) torna-se:

$$[A - \lambda I] \{ X \} = \underline{0} \quad (D5)$$

De (D5) obtêm-se a equação característica do sistema, que advém do determinante:

$$|A - \lambda I| = 0 \quad (D6)$$

As raízes λ_i da equação característica são denominadas autovalores e as frequências naturais do sistema são determinadas a partir de [T1]:

$$\lambda_i = \omega_i^2 \quad (D7)$$

Pela substituição dos λ_i em (D5), obtêm-se o perfil de modo correspondente a X_i , que é denominado autovetor.

APÊNDICE E

MÉTODOS COMPARATIVOS DE DETERMINAÇÃO DE FREQUÊNCIAS NATURAIS

1. BARRAS FLEXÍVEIS

Considere-se um eixo, suportando dois rotores, a igual distância das extremidades, sendo o peso do eixo desprezado, se comparado com o peso dos rotores [H1]:

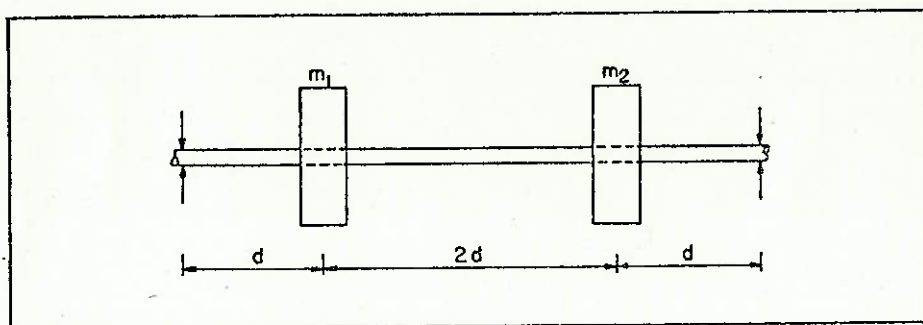


figura E.1

Esquema de um sistema eixo-rotor, bi-apoiado

As duas primeiras frequências naturais do sistema são dadas por:

$$w_{c1} = \sqrt{\frac{\alpha_1}{(m_1 + m_2)}} \quad (E1)$$

onde α_1 = constante equivalente à força necessária para produzir uma deflexão estática unitária.

m_1 = massa do rotor 1

m_2 = massa do rotor 2

sendo $\alpha_1 = \frac{3 EI}{4 d^3}$ (E2)

onde EI = rigidez à flexão do eixo

$$W_{c2} = \sqrt{\frac{\alpha_2}{(m_1 + m_2)}} \quad (E3)$$

sendo $\alpha_2 = \frac{6 EI}{d^3}$ (E4)

São as seguintes as duas primeiras formas dinâmicas de uma barra flexível bi-apoiada:

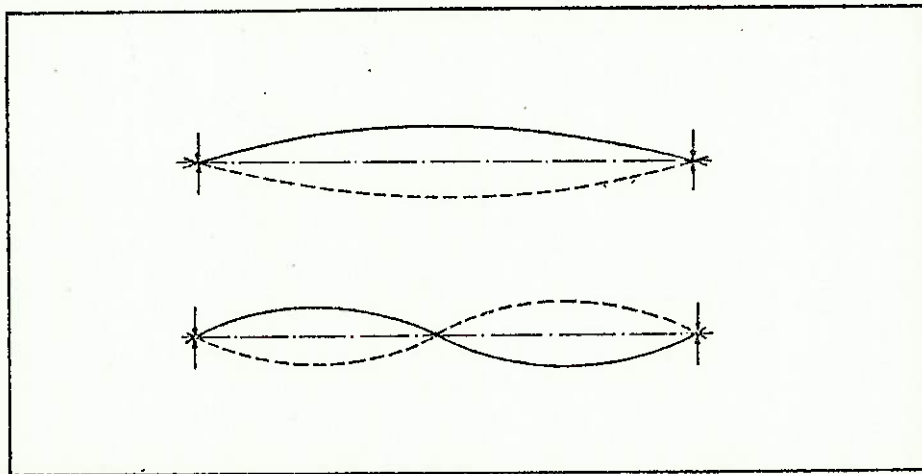


figura E.2

Formas dinâmicas de uma barra flexível bi-apoiada

II. BARRAS RÍGIDAS

Considere-se um eixo rígido com centro de gravidade coincidindo com o centro geométrico, apoiado nas extremidades por molas com características elásticas iguais [S1]:

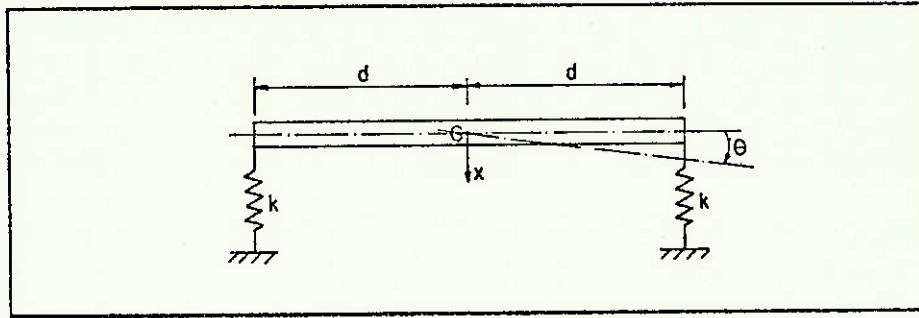


figura E.3

Esquema de uma barra rígida, bi-apoiada sobre molas

Sendo x e θ as coordenadas que definem a posição da barra, tem-se a equação que regem o movimento.

$$m \ddot{x} + k(x - \theta d) + k(x + \theta d) = 0 \quad (E5)$$

$$J_G \ddot{\theta} - k(x - \theta d)d + k(x + \theta d)d = 0 \quad (E6)$$

de onde se obtêm:

$$m \ddot{x} + 2kx = 0 \quad (E7)$$

$$J_G \ddot{\theta} + 2kd^2\theta = 0 \quad (E8)$$

Admitindo-se o movimento harmônico e escrevendo-se as expressões (E7) e (E8) em forma matricial obtêm-se:

$$\begin{bmatrix} 2k - m\omega^2 & 0 \\ 0 & 2kd^2 - J_G\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (E9)$$

De (E9) obtêm-se as freqüências naturais do sistema:

$$\omega_{c1} = \sqrt{\frac{2k}{m}} \quad (E10)$$

$$\omega_{c2} = \sqrt{\frac{2kd^2}{J_G}} \quad (E11)$$

onde m = massa do sistema

J_G = momento de inércia em relação ao ponto G.

São as seguintes as formas dinâmicas de uma barra rígida bi-apoiada sobre molas:

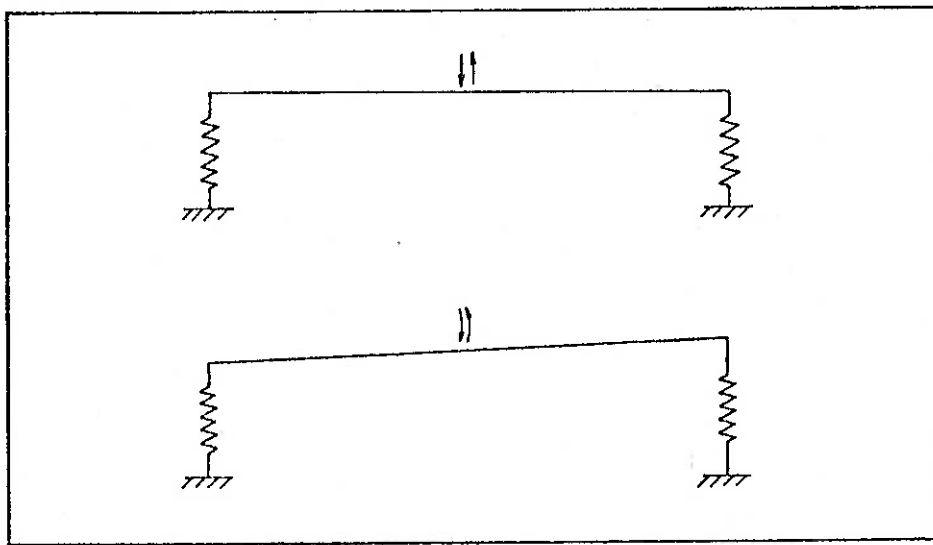


figura E.4

Formas dinâmicas de uma barra rígida bi-apoiada sobre molas

APENDICE F - LISTAGENS

FACULDADE DE ENGENHARIA DE GUARATINGUETA
 UNESP
 DEPARTAMENTO DE MECANICA APLICADA
 PROFESSOR JAZEM NASCIMENTO

DETERMINACAO DE "FREQUENCIAS NATURAIS
 "CONDICOES DE ESTABILIDADE

VIBRACAOES DE EIXOS -ANALISE MODAL

VARIAVEIS FORNECIDAS AO PROGRAMA

ICOD -CODIGO
 ICOD=1 MANCAIS RIGIDOS
 VARIAVEIS ESTUDADAS -COORDENADA GENERALIZADA Q1
 -COORDENADA GENERALIZADA Q2

 ICOD=2 MANCAIS FLEXIVEIS
 VARIAVEIS ESTUDADAS -COORDENADA GENERALIZADA Q1
 -COORDENADA GENERALIZADA Q2
 -ANGULO CUM HORIZONTAL TETA
 -DESLOCAMENTO VERTICAL Y

 NMSG -NUMERO DE LINHAS DE MENSAGENS (MAXIMO 10)
 MENS(I,J) -MENSAGENS
 NROT -NUMERO DE ROTORES (MAXIMO 20)
 LROTD(I) -ABCISSA DE CADA ROTOR
 METROS
 MROTD(I) -MASSA DE CADA ROTOR
 KILOGRAMAS

 LBD -COMPRIMENTO DO EIXO
 METROS
 MBD -MASSA DO EIXO
 KILOGRAMAS

 JB2VD -MOMENTO DE INERCIA DO EIXO 2 EM RELACAO A V
 KILOGRAMAS*METRO**2
 JB2UD -MOMENTO DE INERCIA DO EIXO 2 EM RELACAO A U
 KILOGRAMAS*METRO**2
 EIBD -RIGIDEZ A FLEXAO DO EIXO
 NEWTONS*METRO**2

 MMD -MASSA DOS MANCAIS
 KILOGRAMAS
 CMMD -CONSTANTE DE MOLLA DOS MANCAIS
 NEWTONS/METRO
 CAMD -CONSTANTE DE AMORTECIMENTO DOS MANCAIS
 NEWTONS*SEGUNDO/METRO

C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C

KTMD -CONSTANTE MODAL
METROS

VARIAVEIS ADMENSIONALIZADORAS

LBD -COMPRIMENTO DO EIXO
(L)
MBO -MASSA DO EIXO
(M) CU (F*L**2+T**2)
EIBD -RIGIDEZ A FLEXAO DO EIXO
(F*L**2)

DIMENSION MENS(10,20),LROTD(20),MROTD(20),LROT(20),MROT(20)
DIMENSION M(4,4),D(4,4),E(4,4),G(4,1),M2(2,2),D2(2,2),E2(2,2)
DIMENSION G2(2,1),M4(4,4),D4(4,4),E4(4,4),G4(4,1),VTM2(4),L12(4)
DIMENSION L22(4),MI2(2,2),VTM4(16),L14(16),L24(16),MI4(4,4)
DIMENSION MID2(2,2),MIG2(2,1),MID4(4,4),MIE4(4,4),MIG4(4,1)
DIMENSION B4(4,1),ASA4(4,4),E3(8,1),ASA8(8,8),ACA8(8,8)
DIMENSION W1(4),W2(8),WK1(4),WK2(8),Z1(4,4),Z2(8,8),WE1(8),WE2(16)
DIMENSION WKE1(8),WKE2(16),ZE1(32),ZE2(128)
DIMENSION W3(8),WK3(8),Z3(8,8),WE3(16),WKE3(16),ZE3(128)
DIMENSION AX(4,4),AY(8,8),AZ(3,8)
COMPLEX W1,W2,WK1,WK2,Z1,Z2,W3,WK3,Z3
EQUIVALENCE (W1,WE1),(W2,WE2),(WK1,WKE1),(WK2,WKE2)
EQUIVALENCE (Z1,ZE1),(Z2,ZE2),(W3,WE3),(WK3,WKE3),(Z3,ZE3)
REAL MR,MLR,MLGR,MF1R,MF2R,MF1GR,MF2GR,MF12R,MLF1R,MLF2R
REAL NK1,NK2,NK1,NK2,NZ1,NY1,NY2
REAL M2,M4,MI2,MI4,MID2,MIG2,MID4,MIE4,MIG4
REAL LRCTD,MROTD, JB2VL,JB2UD,MMO,KTMD,LBD,MBO
REAL LRCT,MROT,LB,ME, -JB2V,JB2U,MM,KTMD

C
C
C

LEITURAS DOS DADOS

READ(5,69)ICOD,NMSG

READ(5,71)((MENS(I,J),J=1,20),I=1,NMSG)
READ(5,70)NROT
READ(5,72)(LROTD(I),MROTD(I),I=1,NROT)
READ(5,72)LBD,MBO, JB2VD,JB2UD,EIBD
READ(5,73)M4D,CAMD,CMMD,KTMD

C
C
C

CONSTANTES

N1=1
N2=2
N4=4
N8=8
GE=9.81
PI=3.141592653589793

C
C

ADIMENSIONALIZACAO

```

LP=LBD/LBD
JP1V=JB1VD/(MBD*LBD**2)
MP=MRP/MBD
JP2V=JB2VD/(MBD*LBD**2)
JP2U=JB2UD/(MBD*LBD**2)
EIB=EIBD/EIPD
MV=MMD/MBD
CAM=CAMD*LBD/SORT(EIBD*MBD/LBD)
CMM=CAMD*LBD**3/EIBD
KTMD=KTMD/LBD
DO 60 I=1,NROT
LPOT(I)=LROT(I)/LBD
MPOT(I)=MRCT(I)/MBD
TEP=TEP/SORT(MBD*LBD**3/EIBD)
GFAD=GE*TEP**2/LBD
BM=MB/2.

```

CÁLCULO DOS COEFICIENTES E DAS MATRIZES

```

MP=0.
MLR=0.
MLQR=0.
MF1R=0.
MF2R=0.
MF1QR=0.
MF2QR=0.
MF12R=0.
MLF1R=0.
MLF2R=0.
DO 100 I=1,NROT
ARG1=PI*LROT(I)/LB
ARG2=2.*PI*LROT(I)/LB
F1=KTMD*SIN(ARG1)
F2=KTMD*SIN(ARG2)
MD=MR+MPOT(I)
MLR=MLR+MPOT(I)*LROT(I)
MLQR=MLQR+MPOT(I)*LROT(I)**2
MF1R=MF1R+MPOT(I)*F1
MF2R=MF2R+MPOT(I)*F2
MF1QR=MF1QR+MPOT(I)*F1**2
MF2QR=MF2QR+MPOT(I)*F2**2
MF12R=MF12R+MPOT(I)*F1*F2
MLF1R=MLF1R+MPOT(I)*LROT(I)*F1
MLF2R=MLF2R+MPOT(I)*LROT(I)*F2
100 ARG1C=PI/2.
ARG2C=PI
F1C=KTMD*SIN(ARG1C)
F2C=KTMD*SIN(ARG2C)
NK1=(MB*KTMD**2)/2.
NK2=NK1
NW1=KTMD*LB*MB/PI
NW2=- (KTMD*LB*MB)/(2.*PI)
NZ1=2.*KTMD*MB/PI
NY1=(EIB*(PI**4)*(KTMD**2))/(4*(LB**3))
NY2=(4.*EIP*(PI**4)*(KTMD**2))/(LB**3)
M(1,1)=MF1QR+NK1
M(1,2)=MF12R
M(1,3)=MLF1R+NW1
M(1,4)=MF1R+NZ1

```

```

M(2,1)=M(1,2)
M(2,2)=MF2QR+MK2
M(2,3)=MLFQR+MK2
M(2,4)=MF2R
M(3,1)=M(1,3)
M(3,2)=M(2,3)
M(3,3)=JB1V+JB2V+JB2U+MM*LB**2+MLQR
M(3,4)=(BM+MM)*LB+MLR
M(4,1)=M(1,4)
M(4,2)=M(2,4)
M(4,3)=M(3,4)
M(4,4)=(BM+MM)*2.+MR
D(1,1)=-2.*NY1
D(1,2)=0.
D(1,3)=0.
D(1,4)=0.
D(2,1)=C(1,2)
D(2,2)=-2.*NY2
D(2,3)=0.
D(2,4)=0.
D(3,1)=D(1,3)
D(3,2)=D(2,3)
D(3,3)=-CMM*LB**2
D(3,4)=-CMM*LB
D(4,1)=D(1,4)
D(4,2)=D(2,4)
D(4,3)=D(3,4)
D(4,4)=-2.*CMM
E(1,1)=0.
E(1,2)=0.
E(1,3)=0.
E(1,4)=0.
E(2,1)=E(1,2)
E(2,2)=0.
E(2,3)=0.
E(2,4)=0.
E(3,1)=E(1,3)
E(3,2)=E(2,3)
E(3,3)=-CAM*LB**2
E(3,4)=-CAM*LB
E(4,1)=E(1,4)
E(4,2)=E(2,4)
E(4,3)=E(3,4)
E(4,4)=-2.*CAM
G(1,1)=-*(BM*F1C+MF1R)*GE
G(2,1)=-*(BM*F2C+MF2R)*GE
G(3,1)=-*((BM+MM)*LB+MLR)*GE
G(4,1)=-*((BM+MM)*2.+MR)*GE

```

```

IMPRESSAO DE MENSAGENS E DADOS

```

```

WRITE(6,74)(( MENS(I,J),J=1,20),I=1,MSG)

```

```

GO TO(11,12),ICOD
11 WRITE(6,121)
GO TO 5
12 WRITE(6,122)
5 WRITE(6,123)
WRITE(6,124)LBD,MBD,EIBD
WRITE(6,106)TEP

```

```

WRITE(6,81)
WRITE(6,151)MBO
WRITE(6,152)LBO
WRITE(6,153)EIBL

```

```

WRITE(6,155)JB2VD
WRITE(6,156)JB2UD
WRITE(6,157)KTMUD
WRITE(6,88)
WRITE(6,158)MMD
WRITE(6,159)CAMU
WRITE(6,160)CMMU
WRITE(6,112)
WRITE(6,113)
WRITE(6,161)
WRITE(6,114)(I,LROT(I),MROT(I),I=1,NROT)
WRITE(6,93)
WRITE(6,81)
WRITE(6,82)4B
WRITE(6,83)LB
WRITE(6,84)EIB

```

```

WRITE(6,86)JB2V
WRITE(6,87)JB2U
WRITE(6,94)KTMD
WRITE(6,88)
WRITE(6,89)4M
WRITE(6,90)CAM
WRITE(6,91)CMM
WRITE(6,112)
WRITE(6,113)
WRITE(6,114)(I,LROT(I),MROT(I),I=1,NROT)

```

```

C
C C
C   FORMACAO DAS MATRIZES E VETOR DO SISTEMA

```

```

13  GO TO(13,14),ICOD
    DJ 170 I=1,N2
    G2(I,1)=G(I,1)
    DJ 170 J=1,N2
    M2(I,J)=M(I,J)
    D2(I,J)=D(I,J)
170  E2(I,J)=E(I,J)
    GJ TO 6
14  DJ 171 I=1,N4
    G4(I,1)=G(I,1)
    DJ 171 J=1,N4
    M4(I,J)=M(I,J)
    D4(I,J)=D(I,J)
171  E4(I,J)=E(I,J)

```

```

C
C C
C   CALCULO DA MATRIZ INVERSA E PRODUTO DE MATRIZES

```

```

6  GO TO(15,16),ICOD
15  CALL VETOR(42,N2,VTM2)
    CALL MINV(VTM2,N2,DTM,L12,L22)
    IF(DTM.EQ.0.) GO TO 43
    GO TO 44
43  WRITE(6,141)
    GO TO 1000
44  CONTINUE

```



```

CALL CNORM(VTM2,N2,M12)
CALL MULTI(M12,L2,MID2,N2,N2,N2)
CALL MULTI(M12,G2,MIG2,N2,N2,N1)
GO TO 280
16 CALL VETOR(M4,N4,VTM4)
CALL MINV(VTM4,N4,DTM,L14,L24)
IF(DTM .EQ. 0.) GO TO 45
GO TO 46
45 WRITE(6,141)
GO TO 1000
46 CONTINUE
CALL CNORM(VTM4,N4,M14)
CALL MULTI(M14,D4,MID4,N4,N4,N4)
CALL MULTI(M14,E4,MIE4,N4,N4,N4)
CALL MULTI(M14,G4,MIG4,N4,N4,N1)
280 CONTINUE
C
C   FORMACAO DO SISTEMA NORMALIZADO
C
GO TO(17,18),ICOD
17 DO 210 I=1,N2
II=I+N2
B4(I,1)=0.
B4(II,1)=MIG2(I,1)
DO 210 J=1,N2
JJ=J+N2
ASA4(I,J)=0.
ASA4(II,JJ)=0.
ASA4(II,J)=MID2(I,J)
IF(I .EQ. J)GO TO 51
GO TO 52
51 ASA4(I,JJ)=1.
GO TO 210
52 ASA4(I,JJ)=0.
210 CONTINUE
DO 300 I=1,N4
DO 300 J=1,N4
300 AX(I,J)=ASA4(I,J)
GO TO 19
18 DO 215 I=1,N4
II=I+N4
B8(I,1)=0.
B8(II,1)=MIG4(I,1)
DO 215 J=1,N4
JJ=J+N4
ASA8(I,J)=0.
ACA8(I,J)=0.
ASA8(II,JJ)=0.
ACA8(II,JJ)=MIE4(I,J)
ASA8(II,J)=MID4(I,J)
ACA8(II,J)=MID4(I,J)
IF(I .EQ. J)GO TO 53
GO TO 54
53 ASA8(I,JJ)=1.
ACA8(I,JJ)=1.
GO TO 215
54 ASA8(I,JJ)=0.
ACA8(I,JJ)=0.
215 CONTINUE
DO 305 I=1,N8

```

```

      DJ 305 J=1,N8
      AY(I,J)=ASAB(I,J)
305  AZ(I,J)=ACAB(I,J)
      19  CONTINUE
C
C      IMPRESSAO
C
      GO TO(21,22),ICOD
21  WRITE(6,130)
      WRITE(6,138)((ASA4(I,J),J=1,N4),I=1,N4)
      WRITE(6,129)
      WRITE(6,136)(B4(I,1),I=1,N4)
      GO TO 800
22  WRITE(6,130)
      WRITE(6,140)((ASAB(I,J),J=1,N8),I=1,N8)
      WRITE(6,131)
      WRITE(6,140)((ACAB(I,J),J=1,N8),I=1,N8)
      WRITE(6,129)
      WRITE(6,136)(B8(I,1),I=1,N8)
800  CONTINUE
C
C      CALCULO DOS AUTO VALORES
C
      IJOB=0
      GO TO (25,26),ICOD
25  CALL EIGRF(ASA4,N4,N4, IJOB,WE1,ZE1,N4,WKE1,IER1)
      VCMR1=AIMAG(W1(1))
      VCMR2=AIMAG(W1(3))
      VCMR1D=VCMR1/TEP
      VCMR2D=VCMR2/TEP
      WRITE(6,176)
      WRITE(6,172)VCMR1,VCMR1D,VCMR2,VCMR2D
      WRITE(6,177)
      GO TO 900
26  CALL EIGRF(ASAB,N8,N8, IJOB,WE2,ZE2,N8,WKE2,IER2)
      CALL EIGRF(ACAB,N8,N8, IJOB,WE3,ZE3,N8,WKE3,IER3)
      VCMF1=AIMAG(W2(3))
      VCMF2=AIMAG(W2(1))
      VCMF3=AIMAG(W2(5))
      VCMF4=AIMAG(W2(7))
      VCMF1D=VCMF1/TEP
      VCMF2D=VCMF2/TEP
      VCMF3D=VCMF3/TEP
      VCMF4D=VCMF4/TEP
      WRITE(6,176)
      WRITE(6,172)VCMF1,VCMF1D,VCMF2,VCMF2D
      WRITE(6,173)
      WRITE(6,172)VCMF3,VCMF3D,VCMF4,VCMF4D
      WRITE(6,177)
C
C      IMPRESSAO DE VALORES PARA SIMULACAO
C      SISTEMA NAO LINEARIZADO
C
900  CONTINUE
      WRITE(6,182)
      GO TO (31,32),ICOD
31  WRITE(6,186)MF1R,MF2R,MF13R,MF20R
      WRITE(6,187)MF12R,NZ1,F1C,F2C
      WRITE(6,174)NY1,NY2,GEAD
      WRITE(6,142)DTM

```

```

WRITE(6,181)
WRITE(6,137)((MI2(I,J),J=1,N2),I=1,N2)
WRITE(6,165)
WRITE(6,167)(W1(I),I=1,N4)
WRITE(6,168)IER1
GO TO 1000
32 WRITE(6,186)MF1R,MF2R,MF1QR,MF2QR
WRITE(6,187)MF1ZR,NZ1,F1C,F2C
WRITE(6,188)MLR,MR
WRITE(6,174)NY1,NY2,GEAD
WRITE(6,142)DTM
WRITE(6,181)
WRITE(6,138)((MI4(I,J),J=1,N4),I=1,N4)
WRITE(6,165)
WRITE(6,167)(W2(I),I=1,N8)
WRITE(6,168)IER2
WRITE(6,166)
WRITE(6,167)(W3(I),I=1,N8)
WRITE(6,168)IER3
69 FORMAT(I1,I2)
70 FORMAT(I2)
71 FORMAT(20A4)
72 FORMAT(6(E1),3,2X)
73 FORMAT(4(E1),3,2X)
74 FORMAT(1H1,///,(21X,20A4))
81 FORMAT(///,21X,'*** CARACTERISTICAS DO EIXO ***')
82 FORMAT(//,21X,'* MASSA',43X,'-',E12.3)
83 FORMAT(//,21X,'* COMPRIMENTO',37X,'-',E12.3)
84 FORMAT(//,21X,'* RIGIDEZ FLEXAO',34X,'-',E12.3)
86 FORMAT(//,21X,'* MOMENTO INERCIA PARTE FLEXIVEL RELACAO EIXO V -')
C,E12.3)
87 FORMAT(//,21X,'* MOMENTO INERCIA PARTE FLEXIVEL RELACAO EIXO U -')
C,E12.3)
88 FORMAT(///,21X,'*** CARACTERISTICAS DOS MANCAIS ***')
89 FORMAT(//,21X,'* MASSA',43X,'-',E12.3)
90 FORMAT(//,21X,'* CONSTANTE AMORTECIMENTO',25X,'-',E12.3)
91 FORMAT(//,21X,'* CONSTANTE MOLA',34X,'-',E12.3)
92 FORMAT(1H1,///,21X,'*** GRANDEZAS DIMENSIONAIS ***')
93 FORMAT(1H1,///,21X,'*** GRANDEZAS ADIMENSIONAIS ***')
94 FORMAT(//,21X,'* CONSTANTE MOLA',33X,'-',E12.3)
105 FORMAT(1H1,///,21X,'*** SISTEMA GERADO -NUMERO DE VARIAV
CEIS ESTUDADAS ZERO')
106 FORMAT(///,21X,'* TEMPO',30X,E12.3,5X,'SEGUNDOS')
108 FORMAT(//,21X,'*** VETOR G')
110 FORMAT(1H1,///,21X,'*** NUMERO DE VARIAVEIS ESTUDADAS DIFERE
CENTE DO NUMERO DE VARIAVEIS LISTADAS')
112 FORMAT(///,21X,'*** CARACTERISTICAS DOS ROTORES ***')
113 FORMAT(//,21X,'* ROTOR',13X,'ABCISSA',23X,'MASSA')
114 FORMAT(//,24X,I2,10X,E12.3,18X,E12.3)
120 FORMAT(//,21X,'*** VARIAVEIS ESTUDADAS')
121 FORMAT(////,21X,'*** PROBLEMA ESTUDADO COM MANCAIS RIGIDOS
C***,///,21X,'*** VARIAVEIS ESTUDADAS ***',///,26X,'COORDENADA
C GENERALIZADA Q1',///,26X,'COORDENADA GENERALIZADA Q2')
122 FORMAT(////,21X,'*** PROBLEMA ESTUDADO COM MANCAIS FLEXIVEIS
C ***',///,21X,'*** VARIAVEIS ESTUDADAS ***',///,26X,'COORDENAD
CA GENERALIZADA Q1',///,26X,'COORDENADA GENERALIZADA Q2',///,26X,
C'ANGULO COM HORIZONTAL TETA',///,26X,'DESLOCAMENTO VERTICAL
C Y')

```

```

123 FORMAT(////,21X,'*** VARIÁVEIS ADIMENSIONALIZADORAS ***')
124 FORMAT(//,21X,'* COMPRIMENTO DO EIXO',14X,E12.3,5X,'METROS',//,
C21X,'* MASSA DO EIXO',20X,E12.3,5X,'KILOGRAMAS',//,75X,'NEWTONS*
SEGUNDO**2/METRO',//,21X,'* RIGIDEZ A FLEXÃO DO EIXO',7X,E12.3,
C5X,'NEWTONS*METRO**2')
129 FORMAT(////,21X,'*** VETOR DE VALORES INICIAIS ***')
130 FORMAT(1H1,////,21X,'*** MATRIZ DO SISTEMA NORMALIZADO E LINE
CARIZADO ***')
131 FORMAT(////,21X,'*** MATRIZ DO SISTEMA NORMALIZADO E LINEARIZ
CAO ***',//,26X,'COM AMORTECIMENTO NOS MANCAIS')
132 FORMAT(1H1,////,21X,'*** MATRIZ M DO SISTEMA ESTUDADO')
133 FORMAT(//,21X,'*** MATRIZ E DO SISTEMA ESTUDADO')
134 FORMAT(//,21X,'*** MATRIZ C DO SISTEMA ESTUDADO')
135 FORMAT(//,21X,'*** VETOR G DO SISTEMA ESTUDADO')
136 FORMAT(//,23X,E12.3)
137 FORMAT(//,11X,2E11.3)
138 FORMAT(//,23X,4E12.3)
140 FORMAT(//,11X,8E12.3)
141 FORMAT(1H1,////,21X,'*** MATRIZ DOS COEFICIENTES E SINGULAR
C ***')
142 FORMAT(//,21X,'*** DETERMINANTE DA MATRIZ M ',E12.3)
151 FORMAT(//,21X,'* MASSA',43X,'-',E12.3,5X,'KILOGRAMAS')
152 FORMAT(//,21X,'* COMPRIMENTO',37X,'-',E12.3,5X,'METROS')
153 FORMAT(//,21X,'* RIGIDEZ A FLEXÃO',32X,'-',E12.3,5X,'NEWTONS*METRO*
C*2')
155 FORMAT(//,21X,'* MOMENTO INERCIA PARTE FLEXIVEL RELACAO EIXO V -'
C,E12.3,5X,'KILOGRAMAS*METRO**2')
156 FORMAT(//,21X,'* MOMENTO INERCIA PARTE FLEXIVEL RELACAO EIXO U -'
C,E12.3,5X,'KILOGRAMAS*METRO**2')
157 FORMAT(//,21X,'* CONSTANTE MODAL',33X,'-',E12.3,5X,'METROS')
158 FORMAT(//,21X,'* MASSA',43X,'-',E12.3,5X,'KILOGRAMAS')
159 FORMAT(//,21X,'* CONSTANTE AMORTECIMENTO',25X,'-',E12.3,5X,'NEWTONS
C*SEGUNDO/METRO')
160 FORMAT(//,21X,'* CONSTANTE MOLLA',34X,'-',E12.3,5X,'NEWTONS/METRO')
161 FORMAT(//,41X,'METROS',24X,'KILOGRAMAS')
165 FORMAT(1H1,21X,'*** AUTO VALORES DO SISTEMA NORMALIZADO',//,
C25X,'PARTE REAL',8X,'PARTE IMAGINARIA')
166 FORMAT(////,21X,'*** AUTO VALORES DO SISTEMA NORMALIZADO ',//,
C26X,'COM AMORTECIMENTO DOS MANCAIS',//,26X,'PARTE REAL',8X,'PA
RTE IMAGINARIA')
167 FORMAT(//,21X,E12.3,6X,E12.3)
168 FORMAT(////,21X,'*** CODIGO DE ERRO',5X,I3)
172 FORMAT(11X,'*',98X,'*',//,11X,'*',98X,'*',//,11X,'*',8X,'* MODO 1',
C15X,E12.3,15X,E12.3,5X,'RADIANDS/SEGUNDO',7X,'*',//,11X,'*',98X,'*'
C,//,11X,'*',3X,'* MODO 2',15X,E12.3,15X,E12.3,5X,'RADIANDS/SEGUNDO'
C,7X,'*')
173 FORMAT(11X,'*',98X,'*',//,11X,'*',8X,'* MODOS RIGIDOS DE VIBRAR'
C,62X,'*',//,11X,'*',98X,'*',//,11X,'*',28X,'VALOR ADIMENSIONAL',10X
C,'VALOR DIMENSIONAL',23X,'*')
174 FORMAT(////,11X,'NY1 =',5X,E12.3,5X,'NY2 =',5X,E12.3,////,11X,'G
CE =',5X,E12.3)
176 FORMAT(1H1,////,11X,100('***'),//,11X,'*',98X,'*',//,11X,'*',8X,'***
C FREQUENCIAS NATURAIS DO SISTEMA ***',46X,'*',//,11X,'*',98X,
C,'*',//,11X,'*',8X,'* MODOS FLEXIVEIS DE VIBRAR',60X,'*',//,11X,
C,'*',98X,'*',//,11X,'*',26X,'VALOR ADIMENSIONAL',10X,'VALOR DIMENS
CIONAL',23X,'*')
177 FORMAT(11X,'*',98X,'*',//,11X,100('***'))
181 FORMAT(////,21X,'*** MATRIZ DO SISTEMA INVERTIDA')

```

```

182 FORMAT(1H1,///,21X,'*** VALORES PARA SIMULACAO NAO LINEAR')
186 FORMAT(///,11X,'MF1F  =',5X,E12.3,5X,'MF2R  =',5X,E12.3,///,11X,'M
CF1QR  =',5X,E12.3,5X,'MF2QR  =',5X,E12.3)
187 FORMAT(///,11X,'MF12R =',5X,E12.3,5X,'NZ1   =',5X,E12.3,///,11X,'F
C1C    =',5X,E12.3,5X,'F2C    =',5X,E12.3)
188 FORMAT(///,11X,'MLR    =',5X,E12.3,5X,'NR     =',5X,E12.3)
1000 CALL EXIT
      END

```

```

SUBROUTINE CNDRP(R,L,Q)
DIMENSION R( 1),Q(L,L)
K=1
DO 1 J=1,L
DO 1 I=1,L
Q(I,J)=R(K)
1 K=K+1
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE VETCR(Q,J,R)
DIMENSION Q(J,J),R( 1)
K=J+J
IJ=1
M=1.
1 L=L+1
2 R(IJ)=Q(L,M)
IF(L-J)3,4,4
3 L=L+1
IJ=IJ+1
GO TO 2
4 IF(K-J)5,6,6
5 M=M+1
IJ=IJ+1
GO TO 1
6 CONTINUE
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE MULTI(A,B,C,M,L,N)
DIMENSION A(M,L),B(L,N),C(M,N)
DO 10 I=1,M
DO 10 J=1,N
C(I,J)=0.
10 CONTINUE
DO 20 I=1,M
DO 20 J=1,N
DO 20 K=1,L
C(I,J)=C(I,J)+A(I,K)*B(K,J)
20 CONTINUE
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE MINV(A,N,D,L,M)
DIMENSION A(1),L(1),M(1)
D=1.0
NK=-N
DO 30 K=1,N
NK=NK+K
L(K)=K
M(K)=K
KK=NK+K
BIGA=A(KK)
DO 20 J=K,N
IZ=N+(J-1)
DO 20 I=K,N
IJ=IZ+I
10 IF(ABS(BIGA)-ABS(A(IJ)))15,20,20
15 BIGA=A(IJ)
L(K)=I
M(K)=J
20 CONTINUE
J=L(K)
IF(J=K)35,35,25
25 KI=K-N
DO 30 I=1,N
KI=KI+N
HOLD=-A(KI)
JI=KI-K+J
A(KI)=A(JI)
30 A(JI)=HOLD
35 I=M(K)
IF(I=K)45,45,38
38 JP=I*(I-1)
DO 40 J=1,N
JK=IK+J
JI=JP+J
HOLD=-A(JK)
A(JK)=A(JI)
40 A(JI)=HOLD
45 IF(ABS(BIGA)-1.E-20)46,46,48
46 D=0.0
RETURN
48 DO 55 I=1,N
IF(I=K)50,55,50
50 IK=NK+I
A(IK)=A(IK)/(-BIGA)
55 CONTINUE
DO 65 I=1,N
IK=NK+I
HOLD=A(IK)
IJ=I-N
DO 65 J=1,N
IJ=IJ+N
IF(I=K)60,65,60
60 IF(J=K)62,65,62
62 KJ=IJ-I+K
A(IJ)=HOLD*A(KJ)+A(IJ)
65 CONTINUE
KJ=K-N
DO 75 J=1,N
KJ=KJ+N

```

```
      IF(J-K)70,75,70
70  A(KJ)=A(KJ)/BIGA
75  CONTINUE
      D=D*BIGA
      A(KK)=1.0/BIGA
80  CONTINUE
      K=N
100 K=K-1
      IF(K)150,150,105
105 I=L(K)
      IF(I-K)120,120,108
108 JQ=N*(K-1)
      JR=N*(I-1)
      DO 110 J=1,N
      JK=JQ+J
      HOLD=A(JK)
      JI=JR+J
      A(JK)=-A(JI)
110 A(JI)=HOLD
120 J=M(K)
      IF(J-K)100,100,125
125 KI=K-N
      DO 130 I=1,N
      KI=KI+N
      HOLD=A(KI)
      JI=KI-K+J
      A(KI)=-A(JI)
130 A(JI)=HOLD
      GO TO 100
150 RETURN
      END
```

```
*SET SEPARATE
```

```
C  
C  
C  
C  
C
```

```
MANCAIS FLEXIVEIS - SIMULACAO LINEAR  
GRANDEZAS ADIMENSIONAIS  
1 ROTOR
```

```
SUBROUTINE POSIM
```

```
COMMON T,DT,Y(20),DY(20),STIME,FTIME,NEWDT,IFWRT,N
```

```
C
```

```
IFWRT=10  
DATA A51/-1.5 /,A52/29.7 /,A53/53.5 /,A54/107. /  
DATA A61/1.86 /,A62/-37.4 /,A63/-11.8 /,A64/-0.337 /  
DATA A71/0.376 /,A72/ -445.0 /,A73/44.7 /,A74/ 0.0116 /  
DATA A81/63.5 /,A82/219.0 /,A83/-16.7 /,A84/-78.2 /  
DATA P5/3.12 /,B6/-0.0503 /,B7/-0.0102 /,B8/11.5 /  
DY(1)=Y(5)  
DY(2)=Y(6)  
DY(3)=Y(7)  
DY(4)=Y(8)  
DY(5)=A51*Y(1)+A52*Y(2)+A53*Y(3)+A54*Y(4)+B5  
DY(6)=A61*Y(1)+A62*Y(2)+A63*Y(3)+A64*Y(4)+B6  
DY(7)=A71*Y(1)+A72*Y(2)+A73*Y(3)+A74*Y(4)+B7  
DY(8)=A81*Y(1)+A82*Y(2)+A83*Y(3)+A84*Y(4)+B8  
RETURN  
END
```


SSSET SEPARATE

C
C
C
C
C

MANCAS FLXIVEIS - SIMULACAO NAO LINEAR
VALORES ADIMENSIONAIS
1 ROTOR

SUBROUTINE FOSIM

COMMON T,DT,Y(20),DY(20),STIME,FTIME,NEWDT,IFWRT,N
REAL MI11,MI12,MI13,MI14,MI21,MI22,MI23,MI24,MI31,MI32,MI33,MI34
REAL MI41,MI42,MI43,MI44,MB,LB,MM,NZ1,NY1,NY2
REAL MF1R,MF2R,MF1QR,MF2QR,MF12R,MLR,MR

IFWRT=10

DATA MI11/2.29/, MI12/-0.037/, MI13/-0.0075/, MI14/-1.26 /
DATA MI21/-0.037/, MI22/0.465/, MI23/0.554/, MI24/-0.273/
DATA MI31/-0.0075/, MI32/0.554/, MI33/2.13/, MI34/-1.06/
DATA MI41/-1.26 /, MI42/-0.273/, MI43/-1.06/, MI44/1.46/
DATA MF1R/1.80/, MF2R/ 0.211 /, MF1QR/1.28/, MF2QR/2.61/
DATA MF12R/0.165 /, NZ1/0.646/, F1C/1.02/, F2C/0.0/
DATA MLR/1.22/, MR/2.54/, NY1/25.1/, NY2/402.0/
DATA GE/0.0942/, MB/1.0/,LB/1.0/, MM/0.439/
DATA CM/42.1/,CA/0.0/
BM=MB/2.

C
C

DY(1)=Y(5)
DY(2)=Y(6)
DY(3)=Y(7)
DY(4)=Y(8)

C

DY(5)=MI11*(-(MB*F1C+MF1R)*GE*
COS(Y(3)))+(MF1QR*Y
C(1)+MF12R*Y(2))*Y(7)**2+(NZ1-MB*F1C)*Y(7)*Y(8)*SIN(Y(3))+MI12*(
C-(MB*F2C+MF2R)*GE*
COS(Y(3)))+(MF2QR*Y(2)+MF12R*Y(1))*Y(7)**2-MB*F
C2C*Y(7)*Y(8)*SIN(Y(3))+MI13*(-(BM+MM)*LB+MLR)*GE*
COS(Y(3))-CM*LB
C*(Y(4)+LB*SIN(Y(3)))*COS(Y(3))-CA*LB*(Y(8)+LB*Y(7)*
COS(Y(3)))+(CM
C*F1C+MF1R)*Y(1)+(MB*F2C+MF2R)*Y(2)*GE*SIN(Y(3))
F2C*(MF1QR*Y(1)+
CMF12R*Y(2))*Y(5)+(MF2QR*Y(2)+MF12R*Y(1))*Y(6)*Y(7)+
((MB*F1C-NZ1)*
CY(5)+MB*F2C*Y(6))*Y(8)*SIN(Y(3))+(-2*(BM+MM)+MR)*
GE*CM*LB*SIN
C(Y(3))-CA*(Y(8)+LB*Y(7)*COS(Y(3)))+(BM+MM)*LB+MLR)*
Y(7)**2*S
CIN(Y(3))+((MB*F1C+MF1R)*Y(1)+(MB*F2C+MF2R)*Y(2))*Y(7)
**2*COS(Y(3)
C)+((MB*F1C+2*MF1R+NZ1)*Y(5)+(MB*F2C+2*MF2R)*Y(6))*Y(7)*
SIN(Y(3))
C)*MI14-2*NY1*MI11*Y(1)-2*NY2*MI12*Y(2)-2*CM*MI14*Y(4)

C

DY(6)=MI21*(-(MB*F1C+MF1R)*GE*
COS(Y(3)))+(MF1QR*Y
C(1)+MF12R*Y(2))*Y(7)**2+(NZ1-MB*F1C)*Y(7)*Y(8)*SIN(Y(3))+MI22*(
C-(MB*F2C+MF2R)*GE*
COS(Y(3)))+(MF2QR*Y(2)+MF12R*Y(1))*Y(7)**2-MB*F
C2C*Y(7)*Y(8)*SIN(Y(3))+MI23*(-(BM+MM)*LB+MLR)*GE*
COS(Y(3))-CM*LB
C*(Y(4)+LB*SIN(Y(3)))*COS(Y(3))-CA*LB*(Y(8)+LB*Y(7)*
COS(Y(3)))+(CM
C*F1C+MF1R)*Y(1)+(MB*F2C+MF2R)*Y(2)*GE*SIN(Y(3))-2*(MF1QR*Y(1)+
CMF12R*Y(2))*Y(5)+(MF2QR*Y(2)+MF12R*Y(1))*Y(6)*Y(7)+
((MB*F1C-NZ1)*
CY(5)+MB*F2C*Y(6))*Y(8)*SIN(Y(3))+(-2*(BM+MM)+MR)*
GE*CM*LB*SIN
C(Y(3))-CA*(Y(8)+LB*Y(7)*COS(Y(3)))+(BM+MM)*LB+MLR)*
Y(7)**2*S
CIN(Y(3))+((MB*F1C+MF1R)*Y(1)+(MB*F2C+MF2R)*Y(2))*Y(7)
**2*COS(Y(3)
C)+((MB*F1C+2*MF1R+NZ1)*Y(5)+(MB*F2C+2*MF2R)*Y(6))*Y(7)*
SIN(Y(3))
C)*MI24-2*NY1*MI21*Y(1)-2*NY2*MI22*Y(2)-2*CM*MI24*Y(4)

C

DY(7)=MI31*(-(MB*F1C+MF1R)*GE*
COS(Y(3)))+(MF1QR*Y
C(1)+MF12R*Y(2))*Y(7)**2+(NZ1-MB*F1C)*Y(7)*Y(8)*SIN(Y(3))+MI32*(-(MB*F2C+MF2R)*GE*

```

CCNS(Y(3))+(MF20R*Y(2)+MF12R*Y(1))*(Y(7))**2-MB*F2C*Y(7)*Y(8)*SIN(Y
C(2)))+(-(BM+MM)*LB+MLR)*GE*COS(Y(3))-CM*LP*(Y(4)+LB*SIN(Y(3))
C)*COS(Y(3))-CA*LB*(Y(8)+LB*Y(7)*COS(Y(3)))+(MB*F1C+MF1R)*Y(1)+(MB
C*F2C+MF2R)*Y(2))*GE*SIN(Y(3))-2.*(MF10R*Y(1)+MF12R*Y(2))*Y(5)+(MF
C20R*Y(2)+MF12R*Y(1))*Y(6))*Y(7)+(MB*F1C-NZ1)*Y(5)+MB*F2C*Y(6))*Y(
C8)*SIN(Y(3))*MI33+MI34*(-CM*LB*SIN(Y(3))-CA*(2.*Y(8))
CLB*Y(7)+COS(Y(3)))+(BM+MM)*LB+MLR)*(Y(7))**2*SIN(Y(3)))+(MB*F1C+M
CF1R)*Y(1)+(MB*F2C+MF2R)*Y(2))*Y(7))**2+COS(Y(3)))+(MB*F1C+2.*MF1R
C+NZ1)*Y(5)+(MB*F2C+2.*MF2R)*Y(6))*Y(7)*SIN(Y(3))-(2.*(BM+MM)+MR)*
CGF)
CY(1)          -2.*NY2*MI32*Y(2)-2.*CM*MI34*Y(4)-2.*NY1*MI31*

```

c

```

DY(A)=MI41*(-(MB*F1C+MF1R)*GE*COS(Y(3))+(MF10R*Y(1
C)+MF12R*Y(2))*(Y(7))**2+(NZ1-MB*F1C)*Y(7)*Y(8)*SIN(Y(3)))+MI42*(-(
CM*F2C+MF2R)*GE*COS(Y(3))+(MF20R*Y(2)+MF12R*Y(1))*(Y(7))**2-MB*F2C
C*Y(7)*Y(8)*SIN(Y(3)))+MI43*(-(BM+MM)*LB+MLR)*GE*COS(Y(3))-CM*LB*(
CY(4)+LB*SIN(Y(3)))*COS(Y(3))-CA*LP*(Y(8)+LB*Y(7)*COS(Y(3)))+(MB*F
C1C+MF1R)*Y(1)+(MB*F2C+MF2R)*Y(2))*GE*SIN(Y(3))-2.*(MF10R*Y(1)+MF1
C2R*Y(2))*Y(5)+(MF20R*Y(2)+MF12R*Y(1))*Y(6))*Y(7)+(MB*F1C-NZ1)*Y(5
C)+MR*F2C*Y(6))*Y(8)*SIN(Y(3)))+(2.*(BM+MM)+MR)*GE-CM*LP*SIN(Y(
C3))-CA*(2.*Y(8)+LB*Y(7)*COS(Y(3)))+(BM+MM)*LB+MLR)*(Y(7))**2*SIN(
CY(3)))+(MB*F1C+MF1R)*Y(1)+(MB*F2C+MF2R)*Y(2))*Y(7))**2+COS(Y(3))+
C((MB*F1C+2.*MF1R+NZ1)*Y(5)+(MB*F2C+2.*MF2R)*Y(6))*Y(7)*SIN(Y(3))
C*MI44-2.*NY1*MI41*Y(1)-2.*NY2*MI42*Y(2)-2.*CM*MI44*Y(4)
RETURN
END

```

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [A1] AMARAL, L. H. *Álgebra linear e geometria*. Rio de Janeiro, Almeida Neves, 1974.
- [A2] ANDERSON, R. A. *Fundamentals of vibrations*. New York, Mac Millan /c1967/
- [B1] BABIO, F. L. & COTÉS, H. M. *Introducción a la teoría de vibraciones mecánicas*. Barcelona, Labor /1968/
- [C1] CHURCH, A. H. *Mechanical vibrations*. 2ª ed. New York, John Wiley /c1957/
- [C2] CRANDALL, S. H., et all *An introduction to the mechanics of solids*. Tokyo, McGraw Hill Kogakusha, 1972.
- [C3] CREDE, C. E. *Choque e vibração nos projetos de engenharia*. Trad. por Edgar F. C. Souza e Renato Teixeira. Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico, 1972.
- [C4] CROMER, J. C., et all. *A building block approach to the dynamic behavior of complex structures using experimental and analytical modal modeling techniques*. Shock Vib. Bull., Villeurbanne, 48(1): 77 - 91, Sept. 1978.
- [C5] CROOPNICK, S. R.; LIN, Y. H. & STRUNCE, R.R. *A survey of automatic control Techniques for large space structure*. In: IFAC Symposium on automatic control in space ,8, Oxford, july 1979. Oxford, Pergamon Press, 1979: p275 - 284.
- [G1] GIACAGLIA, G. E. *Mecânica analítica*. Rio de Janeiro, Almeida Neves /c1978/

- [G2] GOLDSTEIN, H. *Classical mechanics*. Massachusetts, Addison Wesley /c1950/
- [H1] HANDBOOK of power drives. Morden, Trade and Technical press, S. d. .
- [H2] HURTY, W. C. & RUBINSTEIN, M. F. *Dynamics of structures*. Englewood Cliffs, Prentice - Hall /c1964/
- [J1] JACOBSEN, L. S. & AYRE, R. S. *Engineering vibrations: with applications to structures and machinery*. New York, McGraw Hill, 1958.
- [K1] KAPLAN, W. *Ordinary differential equations*. Palo Alto, Addison Wesley /c1958/
- [K2] KIBBLE, T. W. B. *Mecânica clássica*. Trad. por A. L. da R. Barros e D. M. Redondo. São Paulo, Polígono, 1970.
- [K3] KOHLI, D; HUNTER, D. & SANDOR, G. N. *Elastodynamic analysis of a completely elastic system*. Journal of Engineering for Industry, Trans. ASME, New York, 99(3): 604 - 609, Aug. 1977.
- [K4] KREIDER, D. L., et al *Equações diferenciais*. Trad. por Elga F. Gomide. São Paulo, Ed. da Univ. de São Paulo, 1972.
- [L1] LEECH, J. W. *Mecânica analítica*. Trad. por Carlos C. de Oliveira. Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico e Ed. da Univ. de São Paulo, 1971.
- [M1] MAIZZA NETO, O. *Modal analysis and control of flexible manipulator arms*. Cambridge, Massachusetts Institut of Techonology, 1974. (NASA Contract NAS - 28055) /Tese/

- [P1] PESTEL, E. C. & LECKIE, F. A. *Matrix methods in elastomechanics*. New York, McGraw Hill /c1963/
- [S1] SETO, W. W. *Vibrações mecânicas*. Trad. por Fernando V. H. de Silva e Nagê Negrão. Rio de Janeiro, McGraw Hill do Brasil, 1971.
- [S2] SKUDRZYR, E. *Simple and complex vibratory systems*. Pennsylvania, The Pennsylvania State University Press, 1968.
- [T1] THOMSON, W. T. *Teoria da vibração com aplicações*. Trad. por Cássio Sigaud. Rio de Janeiro, Interciência, 1978.
- [T2] TIMOSHENKO, S. P. *Resistência dos materiais*. Trad. por José R. de Carvalho. Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico, 1969.
- [T3] TIMOSHENKO, S. P. *Vibration problems in engineering*. New York, Van Nostrand, 1937
- [T4] TOLANI, S. K. & ROCKE, R. D. *Modal truncation of substructures used in free vibration analysis*. Journal of Engineering for Industry, Trans. ASME, New York, 98(3): 827 - 834, Aug. 1976.
- [W1] WOLFF, F. H. & MOLNAR, A.J. *Reduced system models using modal oscillators for subsystems (rationally normalized modes)* Shock Vib. Bull., Pittsburgh, 48(1): 111 - 118, Sept. 1978.