

JEAN CESARE NEGRI

MODELAGEM ANALITICA MULTIDIMENSIONAL
PARA SIMULAÇÃO DE CAMARAS DE MOTORES DE
COMBUSTAO INTERNA: ESTADO DA ARTE E
UTILIZAÇÃO INTRODUTORIA DO METODO DE
ELEMENTOS FINITOS.

DISSERTAÇÃO APRESENTADA A ESCOLA
POLITECNICA DA USP PARA A OBTENÇÃO DO
TITULO DE MESTRE EM ENGENHARIA.

SAO PAULO, 1989

CONSULTA
FD - 1049

JEAN CESARE NEGRI

ENG. NAVAL, ESCOLA POLITECNICA DA USP, 1978

MODELAGEM ANALITICA MULTIDIMENSIONAL
PARA SIMULAÇÃO DE CAMARAS DE MOTORES DE
COMBUSTÃO INTERNA: ESTADO DA ARTE E
UTILIZAÇÃO INTRODUTÓRIA DO METODO DE
ELEMENTOS FINITOS.

DISSERTAÇÃO APRESENTADA A ESCOLA
POLITECNICA DA USP PARA OBTENÇÃO DO
TITULO DE MESTRE EM ENGENHARIA
MECANICA.

ORIENTADOR: PROF.DR.MARCOS DE MATTOS PIMENTA, DEPTº ENG. MECANICA

SAO PAULO, 1989

JEAN CESARE NEGRI

ENG. NAVAL, ESCOLA POLITECNICA DA USP, 1978

MODELAGEM ANALITICA MULTIDIMENSIONAL
PARA SIMULAÇÃO DE CAMARAS DE MOTORES DE
COMBUSTÃO INTERNA: ESTADO DA ARTE E
UTILIZAÇÃO INTRODUTÓRIA DO METODO DE
ELEMENTOS FINITOS.

ERRATA DA DISSERTAÇÃO APRESENTADA A
ESCOLA POLITECNICA DA USP PARA
OBTENÇÃO DO TITULO DE MESTRE EM
ENGENHARIA MECANICA.

ORIENTADOR: PROF.DR.MARCOS DE MATTOS PIMENTA, DEPTº ENG. MECANICA

SÃO PAULO, 1989

JEAN CESARE NEGRI
ENG. NAVAL, ESCOLA POLITECNICA DA USP, 1978

MODELAGEM ANALITICA MULTIDIMENSIONAL
PARA SIMULAÇÃO DE CAMARAS DE MOTORES DE
COMBUSTÃO INTERNA: ESTADO DA ARTE E
UTILIZAÇÃO INTRODUTÓRIA DO METODO DE
ELEMENTOS FINITOS.

ERRATA DA DISSERTAÇÃO APRESENTADA A
ESCOLA POLITECNICA DA USP PARA
OBTENÇÃO DO TITULO DE MESTRE EM
ENGENHARIA MECANICA.

ORIENTADOR: PROF.DR.MARCOS DE MATTOS PIMENTA, DEPTº ENG. MECANICA

SAO PAULO, 1989

Foram efetuadas as seguintes correções, alterações, substituições e inclusões no texto da dissertação original:

- é incluída a página de "Agradecimentos", 2A (em anexo);
- as páginas 3 e 4 são substituídas por 3A e 4A (em anexo), respectivamente;
- as páginas 5 e 6 são substituídas por 5A e 6A (em anexo), respectivamente;
- na página 7, a nomenclatura é revisada e complementada pelas seguintes grandezas:
 - {F} - matriz de dados conhecidos
 - {FI} - equação matricial de {QI} definida pela expressão 6.5
 - L({QI}) - equação matricial de {QI} definida pela expressão 6.4
 - N - número de intervalos de integração
 - {Q} - matriz de valores nodais da variável dependente
 - {QI} - matriz dos valores nodais da variável dependente I
 - $\Delta\theta$ - intervalo de integração no ângulo do virabrequim
- na página 8, as grandezas h_j e \dot{m}_j são alteradas para h_i e \dot{m}_i , respectivamente;
- na página 10, onde se lê:
 - " [U] - matriz dos coeficientes dos termos de difusão ", lê-se:
 - " [U] - matriz dos coeficientes dos termos de convecção ";
- na página 10, onde se lê:
 - " u_p - velocidade do pistão ", lê-se:
 - " u_p - velocidade instantânea do pistão ";
- na página 11, onde se lê:
 - " z_0 - altura mínima do pistão em PMI " e
 - " z_1 - altura máxima do pistão em PMS ", lê-se, respectivamente:

" z_0 - altura mínima do pistão em PMS " e

" z_1 - altura máxima do pistão em PMI ";

- na página 11, onde se lê:

" Δz - distância entre nós ou elementos finitos ", lê-se:

" Δz - distância entre nós ";

- na página 20, onde se lê "...compressão sem turbulência inicial e...", lê-se "...compressão sem turbulência inicial e...";

- na página 23, a fórmula (3.2) é substituída por:

$$\frac{dx_b}{d\theta} = a (w+1) \left(\frac{\theta - \theta_s}{\Delta\theta_c} \right)^w \exp \left[- a \left(\frac{\theta - \theta_s}{\Delta\theta_c} \right)^{w+1} \right] \quad (3.2)$$

- na página 23, figura 3.1, onde se lê:

" z - coordenada θ parcial ", lê-se:

" z - coordenada espacial ";

- na página 24, o texto 3.1.2 corresponde a um item:

" 3.1.2 Transferência de Calor ";

- na página 24, a fórmula (3.3) é substituída por:

$$Nu = c R_e^d P_r^{e_1} \quad (3.3)$$

- na página 26, onde se lê "...condições de contorno nas irregularidades das ...", lê-se "...condições de contorno nas irregularidades das ...";

- na página 26, a fórmula (3.6) é substituída por:

$$\dot{E} = \sum_1 \dot{m}_i h_i - \dot{Q}_w - \dot{W} \quad (3.6)$$

- na página 28, figura 3.2, a escala da ordenada da taxa de liberação de calor é corrigida para (kcal/m³/grau);
- na página 32, onde se lê "... , e a fase de combustão plenamente...", lê-se "... , e a fase de combustão plenamente..";
- na página 38, onde se lê "...Cálculos do número de Reynolds em cilindros...", incluir "...Cálculos do número de Reynolds (vide definição no item 7.2) em cilindros...";
- na página 40, onde se lê "...A menor escala turbulenta aumenta efetivamente a difusão térmica. A velocidade e...", lê-se "... A menor escala turbulenta aumenta efetivamente a difusão térmica, a velocidade e...";
- na página 41, onde se lê "...Para MCI com combustível injetado...", lê-se "...Para MCI com combustível injetado...";
- na página 43, no texto "...O mecanismo de Zeldovich, apresentado no método zero-dimensional (item 3.1) é...", incluir "...O mecanismo de Zeldovich, apresentado no método zero-dimensional (item 3.1), é...";
- na página 44, onde se lê "...Técnicas com bases químicas, assumir certas reações em equilíbrio e solução por procedimento cinético são por vezes utilizadas...", lê-se "...deste ponto os intervalos (Δt). Neste caso, técnicas baseadas em equilíbrio químico, que assumem certas reações em equilíbrio, e solução por procedimento cinético são por vezes utilizadas...";
- na página 44, onde se lê "...Um outro método alternativo bastante usado para a solução de chamas finas é...", lê-se "...Um outro método alternativo bastante usado para a solução de chamas finas é...";

- na página 47, substituir o título do item 3.3.6.1 por:
" 3.3.6.1 Laboratório Nacional de "Los Alamos" [9] ";
- na página 47, onde se lê "...uso de equacionamento implícito Eurliano...", lê-se "...uso de equacionamento implícito Euleriano...";
- na página 48, substituir o título do item 3.3.6.2 por:
" 3.3.6.2 Universidade de "Princeton" [9] ";
- na página 48, item 3.3.6.2, onde se lê:
"- sub-modelo de turbulência ;", incluir:
"- sub-modelo de turbulência K - ϵ ;";
- na página 49, substituir o título do item 3.3.6.5 por:
" 3.3.6.5 Laboratório Nacional "Lawrence Livermore" [9] ";
- na página 49, item 3.3.6.5, onde se lê:
"- malha (Euleriana) rentangular estacionário;", lê-se:
"- malha (Euleriana) rentangular estacionária;";
- na página 50, onde se lê "...MCI de ciclo Otto da alta taxa...", lê-se "...MCI de ciclo Otto de alta taxa...";
- na página 51, onde se lê "...globais, são discriminados abaixo:...", lê-se "...globais, são discriminadas abaixo:..."
- na página 55, onde se lê:
" u - velocidade média do pistão:... ", lê-se:
" \bar{u} - velocidade média do pistão:... ";
- na página 55, a fórmula de Δt é substituída por: " $\Delta\theta / (6.n)$ ";
- na página 55, onde se lê "...os valores do número de Reynolds para...", lê-se "...os valores do número de Reynolds médio (vide definição no item 7.2) para...";
- na página 55, onde se lê "...O número de Courant (...", lê-se

"...O número de Courant local (...";

- na página 56, as equações 4.5, 4.6 e 4.8 são substituídas por:

$$\frac{1}{z_p} \frac{\partial}{\partial t} (\rho z_p \phi) + \frac{1}{z_p} \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \tilde{u} \phi) - \frac{\Gamma \phi}{z_p^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} = S_\phi \quad (4.5)$$

$$L(\rho) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{z_p} \frac{\partial m}{\partial \xi} + \frac{\rho u_p}{z_p} = 0 \quad (4.6)$$

$$L(j) = C_p \frac{\partial j}{\partial t} + \frac{C_p}{z_p} \frac{\partial}{\partial \xi} (j \tilde{u}) + \frac{C_p j u_p}{z_p} - \frac{k^*}{z_p^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} - \frac{\partial p}{\partial t} \quad (4.8)$$

$$- \frac{\tilde{u}}{z_p} \frac{\partial p}{\partial \xi} - \frac{4}{3} \frac{u}{z_p^2} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} \right)^2 = 0$$

- na página 57, substituir a condição de contorno:

$$" k^* \frac{\partial t}{\partial \xi} = 0 " \quad \text{por} \quad " k^* \frac{\partial T}{\partial \xi} = 0 "$$

- na página 59, onde se lê "...A principal característica do método...", lê-se "...A principal característica do método...";

- nas páginas 60 e 61, onde se lê "...espacial é o "híbrido-escoamento avançado", sendo o termo S_ϕ linearizado e aproximado por diferenças centrais...", lê-se "...espacial é o "central e diferenças adiantadas", sendo que o termo S_ϕ é linearizado e adotado o esquema de diferenças centrais...";

- na página 61, figura 5.1, a notação no eixo axial é substituída por "z, ξ ";

- na página 65, onde se lê "...A aplicação direta da teoria clássica do MEF em problemas de escoamento não é possível, pois a expressão da conservação da quantidade de movimento é

explicitamente não linear, devido a sua forma tipicamente euleriana,...", lê-se "...A aplicação direta em problemas de escoamento da teoria clássica do MEF, devido a sua forma original ser tipicamente euleriana, não é possível, pois a expressão da conservação da quantidade de movimento é explicitamente não linear...";

- na página 68, as fórmulas (6.5) e (6.7) são substituídas por:

$$\{FI\} = \{QI\}_{j+1} - \{QI\}_j - \Delta t \left[\tau \{QI\}_{j+1} + (1-\tau) \{QI\}_j \right] \{0\} \quad (6.5)$$

$$\{QI\}_{j+1}^{p+1} = \{QI\}_{j+1}^p + \{6QI\}_{j+1}^{p+1} \quad (6.7)$$

- na página 70, onde se lê "...Os termos [JI] e {FI} incorporam operações com matrizes, cuja dimensão é idêntica ao número de elementos finitos considerados na malha...", lê-se "...Os termos [JI] e {FI} incorporam operações com matrizes, cuja dimensão é idêntica ao número de nós considerados na malha....";
- o capítulo 7, páginas 71 a 76, é integralmente substituído pelas páginas 71A, 72A, 73A, 74A, 75A, 76A, 76B, 76C, 76D, 76E, 76F, 76G, 76H, 76I, 76J e 76L (em anexo);
- a página 78 é substituída por 78A (em anexo);
- na página 79, os valores de S_ϕ para as equações da energia turbulenta e taxa de dissipação estão invertidos, então a definição correta é:

$$S_\phi - \text{energia turbulenta: } G - \rho\epsilon + s_t'$$

$$S_\phi - \text{taxa de dissipação: } \frac{\epsilon}{k} (C_1 G - C_2 \rho\epsilon) + \rho\epsilon \bar{V} \cdot \bar{u} + s_t'$$

- na página 80, o primeiro termo da equação da continuidade é corrigido, sendo dado por " $\Delta_e [A200]$ ";

- na página B7, anexo 3 - programa de cálculo do MEF, foram canceladas as linhas 560 e 6520, sendo acrescentadas e/ou revisadas as seguintes linhas, relacionadas abaixo:

```

105 REM DANG- PASSO DE INTEGRAÇÃO NO ANGULO
125 REM CVP- PARA CVP=1, CV E CONSTANTE; PARA CVP=0, CV E FUNÇÃO DA TEMPERATURA
240 READ ZP1,ZP0,DZP,DANG,RMV
250 READ CV,CVP,V1,CD,RU
482 ANG1=180
485 LPRINT "ZP1=";ZP1,"ZP0=";ZP0,"ANG=";ANG1,"DZP=";DZP
487 LPRINT "DANG=";DANG,"UP=";UP,"RPM=";RPM
575 IF DZP=0 THEN 577 ELSE 580
577 ANG2=ANG1+DANG
578 ZP=ZP0+RMV*(1-COS(ANG2*2*3.141592654#/360))
579 GOTO 610
610 DT=(ANG2-ANG1)/(360*RPM/60)
6378 IF CVP=0 THEN 6379 ELSE 6380
6379 GOSUB 9000
6391 IF ANG2=360 THEN 6392 ELSE 6423
6392 R1(1)=R1(1)
6393 R2(1)=R2(1)
6394 R3(1)=R3(1)
6395 R4(1)=R4(1)
6396 R5(1)=R5(1)
6397 U1(1)=U1(1)
6398 U2(1)=U2(1)
6399 U3(1)=U3(1)
6400 U4(1)=U4(1)
6401 U5(1)=U5(1)
6402 T1(1)=T1(1)
6403 T2(1)=T2(1)
6404 T3(1)=T3(1)
6405 T4(1)=T4(1)
6406 T5(1)=T5(1)
6407 P1(1)=P1(1)
6408 P2(1)=P2(1)
6409 P3(1)=P3(1)
6410 P4(1)=P4(1)
6411 P5(1)=P5(1)
6412 M1(1)=M1(1)
6413 M2(1)=M2(1)
6414 M3(1)=M3(1)
6415 M4(1)=M4(1)
6416 M5(1)=M5(1)
6417 J1(1)=J1(1)
6418 J2(1)=J2(1)
6419 J3(1)=J3(1)
6420 J4(1)=J4(1)
6421 J5(1)=J5(1)
6422 I=1
6423 I=I+1
6424 IF ANG2>=540 THEN 6550 ELSE 6425
6425 IF DZP=0 THEN 577 ELSE 6427
6427 ZP=ZP-DZP
6428 IF ANG2=360 THEN 6450 ELSE 6430
6560 DATA 5,2,0,0,0,0,0.2582,0.2582,0.2582,0,0,0,20
6570 DATA 0.14,0.01,0,1,0.069
6580 DATA 0.240,1,1.8982D-6,6.3325D-6,29.27
9000 REM CÁLCULO CV FUNÇÃO DA TEMPERATURA
9010 TB=(T1(1)+T2(1)+T3(1)+T4(1)+T5(1))/500
9020 CVN=9.3375-122.56*TB^(-1.5)+256.30*TB^(-2)-196.08*TB^(-3)
9030 CVD=0.9403+0.0048044*TB^1.5-42.679*TB^(-1.5)+56.615*TB^(-2)
9035 CV=(.79*CVN+.21*CVD)/28.97
9040 RETURN
9050 END

```

- na página 99, referência 7, onde se lê "...report B60029SAE...", lê-se "...report B60029 SAE...";
- na página 100, referência 12, onde se lê " 12. Schlichting H. Boundary...", lê-se " 12. Schlichting, H.. Boundary...";

AGRADECIMENTOS

Dedico este trabalho em especial a minha esposa, Rosângela, e meu filho, Victor Daniel, destacando o auxílio direto e indireto e o entendimento às privações na respectiva elaboração.

Agradeço ao professor Dr. Pimenta pela paciência e otimismo manifestados durante o trabalho.

Agradeço ao professor e eng^o Gilberto de Arruda Bueno pelo incentivo e condições permanentes dadas para o cumprimento do meu programa de mestrado.

INDICE

1.	INTRODUÇÃO.....	13
2.	OBJETIVO.....	18
3.	MÉTODOS DE ANÁLISE EXISTENTES.....	21
3.1	Zero-Dimensional.....	21
3.1.1	Taxa de Combustão.....	22
3.1.2	Transferência de Calor.....	24
3.1.3	Cálculo dos Óxidos de Nitrogênio.....	25
3.1.4	Análise Termodinâmica.....	25
3.1.4.1	Equações Auxiliares.....	25
3.1.4.2	Equações Básicas.....	26
3.1.5	Resultados Típicos.....	27
3.2	Quasi-Dimensional.....	31
3.2.1	Processo de Combustão.....	31
3.2.2	Resultados Típicos.....	32
3.3	Multidimensional.....	35
3.3.1	Descrição Geométrica.....	37
3.3.2	Turbulência e Aproximações do Escoamento.....	38
3.3.3	Reações Químicas.....	42
3.3.4	Condições de Contorno.....	45
3.3.5	Equação Fundamental.....	46

3.3.6	Tipos de Abordagem e Aplicações.....	47
3.3.6.1	Laboratório Nacional de " <i>Los Alamos</i> " [9].....	47
3.3.6.2	Universidade de " <i>Princeton</i> " [9].....	48
3.3.6.3	Laboratório de Pesquisa da GM [9]...	48
3.3.6.4	" <i>Imperial College</i> " [9].....	49
3.3.6.5	Laboratório Nacional " <i>Lawrence Livermore</i> " [9].....	49
3.3.6.6	Outras Organizações [9].....	50
4.	DEFINIÇÃO DO PROBLEMA.....	53
5.	APLICAÇÃO DO METODO DE DIFERENÇAS FINITAS (MDF).....	58
6.	APLICAÇÃO DO METODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF).....	65
7.	ANALISE COMPARATIVA DOS RESULTADOS.....	71A
7.1	Variação no Intervalo de Integração.....	74A
7.2	Variação na Rotação do Modelo.....	76B
7.3	Gradiente do Campo de Pressão.....	76G
7.4	Variação no Calor Específico.....	76H
7.5	Solução para Fluido Ideal.....	76I
7.6	Uso de Sistema com 2 Elementos Finitos.....	76J
7.7	Sensibilidade e Erro Matemático.....	76L
8.	COMENTARIOS FINAIS E CONCLUSÕES.....	77
9.	ANEXO 1 - DEFINIÇÃO DOS COEFICIENTES DA EQUAÇÃO GERAL FUNDAMENTAL [11].....	79
10.	ANEXO 2 - ALGORITMO MATRICIAL DO MEF.....	80
11.	ANEXO 3 - PROGRAMA DE CALCULO DO MEF.....	87
12.	REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS.....	99

INDICE DE FIGURAS E TABELAS

Tabela 1.1 - Potência instalada [1].....	13
Figura 3.1 - Estrutura de avaliação e simulação do método zero-dimensional [4 e 11].....	23
Figura 3.2 - Curvas típicas provenientes de um ensaio de MCI, utilizando o método zero-dimensional [7 e 8].....	28
Figura 3.3 - Estudo paramétrico do efeito da variação da taxa de compressão sobre o consumo, utilizando o método zero-dimensional [11]....	29
Figura 3.4 - Resultados do método quasi-dimensional, indicando o atraso de ignição em função do ponto de faísca da vela, para diversas porcentagens de recirculação do gás de escape (RGE) [11].....	33
Figura 3.5 - Resultados comparativos da emissão de NO_x prevista, através do método quasi-dimensional, com os dados experimentais [11]..	34
Figura 3.6 - Diagrama do método multidimensional [5].....	36
Figura 4.1 - Modelo esquemático do cilindro com malha unidimensional.....	54
Figura 5.1 - Câmara em cilindro confinado - malha empregada no cálculo MDF e localização de variáveis [11].....	61
Tabela 7.1 - Erros absolutos percentuais das previsões : MEF - MDF - solução analítica.....	74A

- Figura 7.1 - Erros absolutos percentuais da temperatura em função do ângulo do virabrequim, para diferentes intervalos de integração ($\Delta\theta$)....75A
- Figura 7.2 - Erros absolutos percentuais da pressão em função do ângulo do virabrequim, para diferentes intervalos de integração ($\Delta\theta$)....76A
- Figura 7.3 - Erros absolutos percentuais da densidade em função do ângulo do virabrequim, para diferentes intervalos de integração ($\Delta\theta$)....76A
- Figura 7.4 - Número de Reynolds local máximo instantâneo em função do ângulo do virabrequim, para diferentes rotações do modelo.....76D
- Figura 7.5 - Número de Reynolds global médio instantâneo em função do ângulo do virabrequim, para diferentes rotações do modelo.....76D
- Tabela 7.2 - Número de Reynolds médio.....76E
- Tabela 7.3 - Intervalo de integração ($\Delta\theta$) mínimo em função da rotação do modelo.....76F
- Tabela 7.4 - Resultados comparativos dos gradientes de pressão obtidos dos cálculos segundo MEF e solução analítica para $\theta = 360^\circ$76H
- Figura 7.6 - Temperatura em função do ângulo do virabrequim para C_p função da temperatura e C_p constante.....76I

7. ANÁLISE COMPARATIVA DOS RESULTADOS

O algoritmo algébrico detalhado para os elementos finitos, dispostos na câmara do cilindro conforme figura 4.1, foi obtido a partir do sistema matricial (6.8 e 6.9), utilizando as equações fundamentais desenvolvidas, incluídas no anexo 2. Nestas condições, considerando as condições de contorno, onde as velocidades (\tilde{u}) são fixas e nulas, foram sintetizadas 18 equações a 18 incógnitas para os campos de velocidade, pressão, temperatura e densidade no domínio.

Nas condições iniciais, foi assumida a uniformidade das variáveis ao longo do domínio, sendo adotados os seguintes valores para velocidade, densidade, temperatura e pressão, 0 m/s, 0,1162 kgfs²/m², 300 k e 10⁴ kgf/m², respectivamente. As propriedades do ar e demais grandezas necessárias para o cálculo estão apresentadas no anexo 3, juntamente com a listagem do programa de computador.

O ciclo de integração numérica percorrido é inicializado no PMI ($\theta = 180^\circ$) com o pistão em repouso, seguindo uma compressão e sucessiva expansão, retornando ao ponto inicial ($\theta = 540^\circ$).

Após a integração inicial de alguns ciclos, algumas importantes e interessantes observações foram diagnosticadas:

- a solução é de forma primária influenciada pelos valores da viscosidade artificial (v_n^m), utilizada nos termos de convecção nas equações de conservação, sendo que em alguns casos há perda da condição física e falta de convergência, como por exemplo, no intervalo $-1 \gg v_n^m \gg 1$ ou o uso de valores da viscosidade

artificial nulos na equação da quantidade de movimento e diferentes de zero nas demais equações;

- há falta de reversibilidade no ciclo, sendo que os valores finais de temperatura, pressão e densidade são inferiores aos iniciais;
- o fenômeno de reversibilidade é sensivelmente influenciado para pequenas variações no valor de C_p e no intervalo de integração;
- a precisão da solução é melhorada com a diminuição do passo espacial de integração (Δz_F);

Cumprida a etapa de avaliação da solução matemática e física gerada pelo algoritmo, no passo seguinte, foi efetuada uma interpretação dos resultados preliminares e otimização do sistema.

O fenômeno de falta de reversibilidade não é exclusivo do presente sistema, já que a sua existência foi destacada no capítulo 5, na solução segundo MDF [11]. Os autores daquele trabalho mencionam que há diferenças no escoamento durante a compressão e expansão, sendo gerados diferentes campos de velocidade, pressão e temperatura. Neste caso, podem ser obtidas imprecisões grosseiras nas estimativas. A solução encontrada naquele trabalho [11] foi o acerto e aferição dos termos de geração na equação da energia, em particular no trabalho de compressão, utilizando um esquema de solução discretizada diferenciado. No algoritmo segundo MEF também foi observado que os erros no campo de pressão são superiores aos de temperatura.

A solução adotada no presente trabalho, para minimizar este

efeito, foi a substituição do intervalo de integração no curso (Δz_p) pelo ângulo do virabrequim ($\Delta\theta$), adotando na simulação padrão o valor correspondente de 1° .

No tocante a viscosidade artificial, baseado em análises de estabilidade apresentadas em [18], foi adotado o valor de $1\sqrt{15}$ nos termos de convecção da equação de Navier-Stokes, enquanto que nas demais equações foi assumido o valor nulo.

A simulação padrão adotada tem intervalo de integração de 1° , apresenta a solução através de duas iterações em cada ponto, o calor específico é constante (0,24 kcal/kgk), a rotação do modelo é de 20 rpm e os valores são retirados do nó 3 (figura 4.1). Nestas circunstâncias, a solução do ciclo demanda em micro-computador, versão IBM-PC-XT de 8MHz, 11 horas de processamento na linguagem "basic".

As conclusões da análise dos resultados obtidas são sintetizadas abaixo:

- as variáveis dependentes, velocidade, densidade, temperatura e pressão, não apresentam reversibilidade em relação a pontos simétricos ao PMS ($\theta = 360^\circ$), sendo que a densidade, temperatura e pressão apresentam valores superiores à solução analítica na compressão (erro percentual > 0) e inferiores na expansão (erro percentual < 0), enquanto que a velocidade tem característica oposta;
- os valores de temperatura, pressão e densidade são uniformes ao longo do domínio, com variações menores que 0,01%;
- a equação analítica (5.2) é satisfeita, sendo que a diferença

absoluta da velocidade relativa (\bar{u}) obtida em relação a solução analítica é inferior a 0,003m/s;

- as variações de pressão no domínio previstas na equação (5.3) são neutralizadas devido a baixa rotação assumida no modelo.

Na tabela 7.1 são apresentados os erros absolutos percentuais dos cálculos MDF [11] e MEF em relação a solução analítica [11]. Observa-se que os maiores erros percentuais, com um valor máximo de 2,13%, ocorrem no resultado numérico do campo de pressão. Fenômeno similar também ocorre na solução segundo MDF [11].

**Tabela 7.1 - Erros absolutos percentuais das previsões:
MEF-MDF - solução analítica**

ÂNGULO (graus)	ERROS (%)					
	TEMPERATURA		PRESSÃO		DENSIDADE	
	MEF	MDF	MEF	MDF	MEF	MDF
210	0,10	0,5	0,29	2,6	0,24	-0-
270	0,29		1,05		0,73	
330	0,58		2,12		1,52	
360	0,04		0,05		0,02	
390	0,64		2,13		1,51	
450	0,31		1,07		0,74	
510	0,10		0,31		0,24	
540	0		0		0	

7.1 Variação no Intervalo de Integração

A influência do intervalo de integração na precisão do cálculo, segundo o MEF em relação a solução analítica, é apresentada nas figuras 7.1, 7.2 e 7.3.

Os maiores erros absolutos percentuais das variáveis densidade, temperatura e pressão são verificados nos pontos 330° e 390° . O erro absoluto percentual ao longo do ciclo apresenta a mesma variação do número de Courant global instantâneo ($\Delta t u_p / z_p$). Os maiores erros estão diretamente associados aos maiores números de Courant, sendo que o erro desaparece no PMI e PMS, onde o pistão tem velocidade nula e o número de Courant é zero.

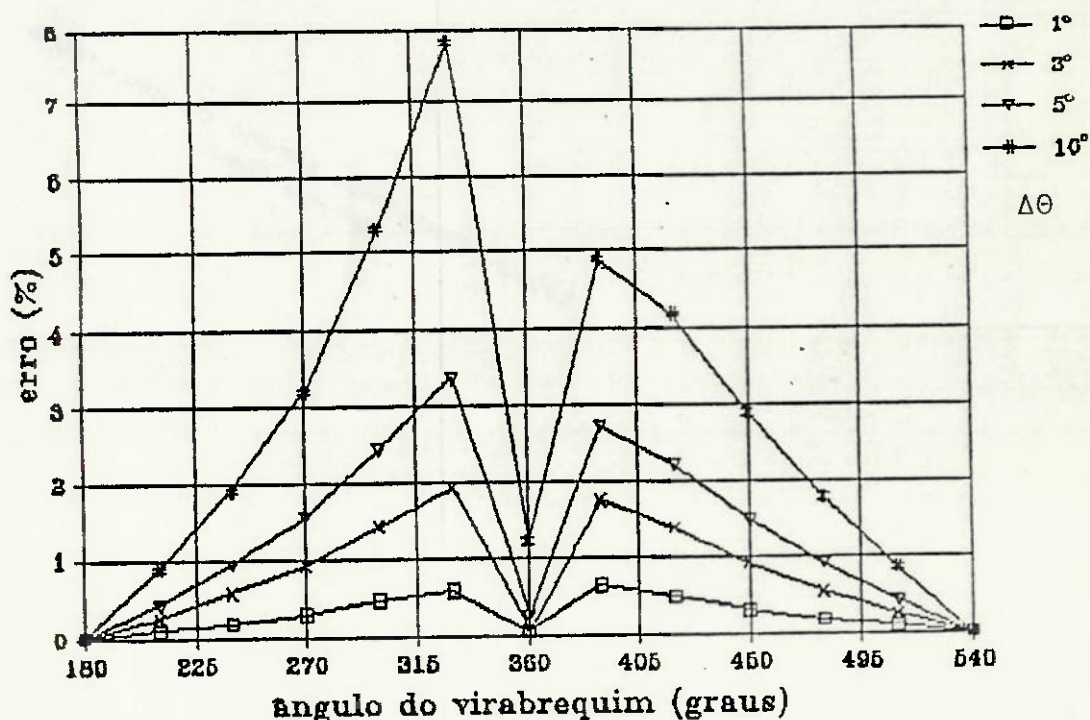


Figura 7.1 - Erros absolutos percentuais da temperatura em função do ângulo do virabrequim, para diferentes intervalos de integração ($\Delta\theta$)

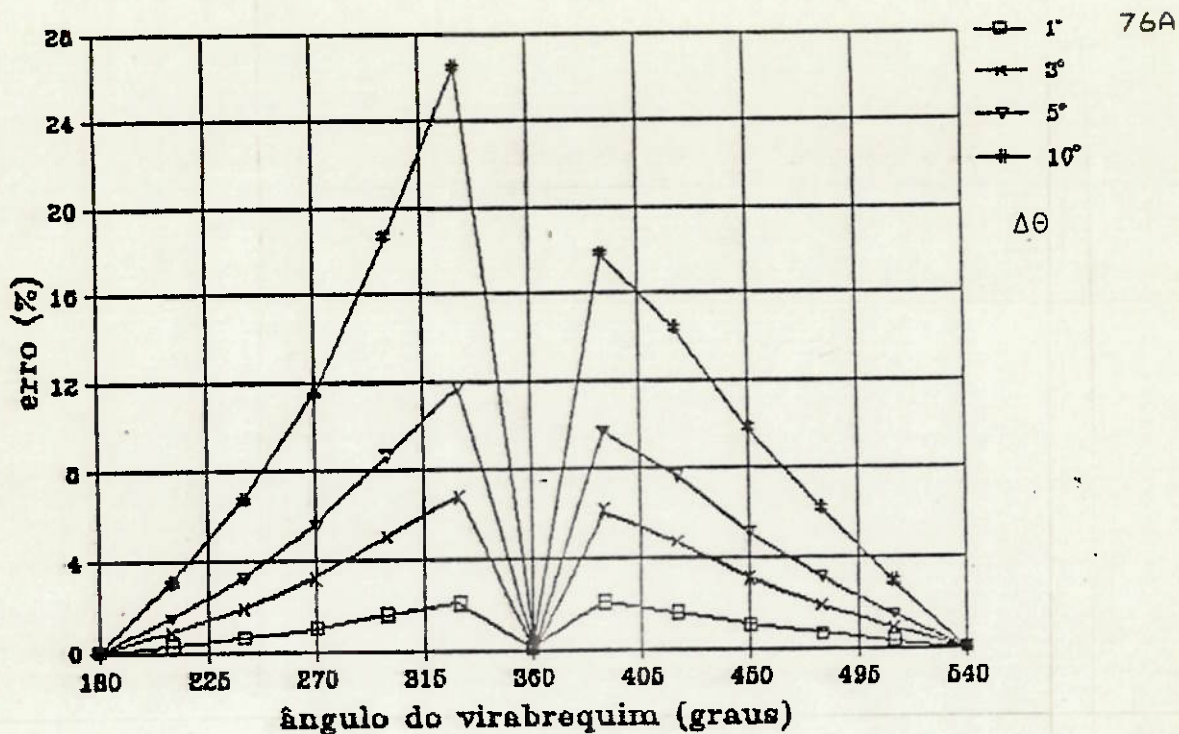


Figura 7.2 - Erros absolutos percentuais da pressão em função do ângulo do virabrequim, para diferentes intervalos de integração ($\Delta\theta$)

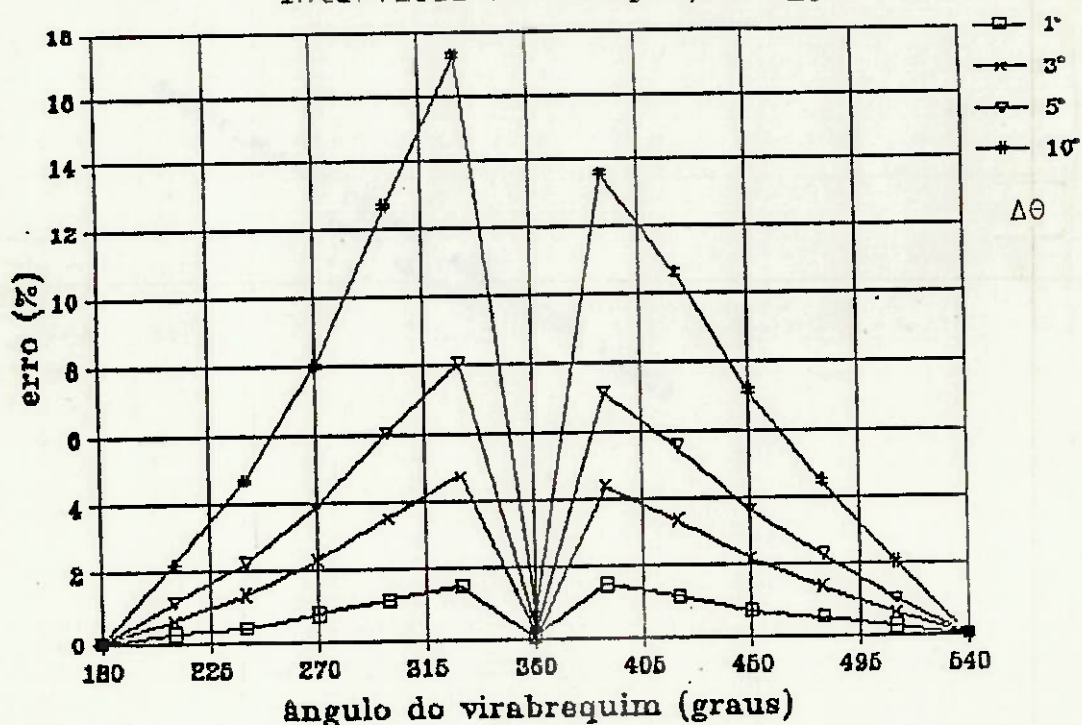


Figura 7.3 - Erros absolutos percentuais da densidade em função do ângulo do virabrequim, para diferentes intervalos de integração ($\Delta\theta$)

A precisão do cálculo do ciclo, vinculada ao ponto de maior erro absoluto percentual ($\theta = 330^\circ$), pode ser parametrizada em função do número de intervalos de integração (N), similar ao realizado no capítulo 5 para o MDF [11]. Desta forma, em relação a solução analítica são sintetizadas as seguintes correlações para os erros máximos:

-temperatura: $4,28/N^{1,13}$;

-pressão: $12,82/N^{1,09}$;

-densidade: $7,30/N^{1,05}$.

Inversamente ao que ocorre com as variáveis temperatura, pressão e densidade, a precisão absoluta do campo de velocidades aumenta com o acréscimo no intervalo de integração. Os maiores erros associados à velocidade são obtidos nos pontos próximos ao PMI no fim do ciclo, sendo que a diferença máxima em relação a solução analítica obtida para o intervalo de integração de 1° , em $\theta = 540^\circ$, é de 0,0025m/s.

7.2 Variação na Rotação do Modelo

Foi pesquisada a influência da rotação do modelo nas variáveis dependentes. Além da condição padrão de 20 rpm e intervalo de integração de 1° , foram simulados ciclos a 10, 60, 100, 500 e 1000 rpm. Os ciclos nas condições de 500 e 1000 rpm foram prematuramente interrompidos, visto que já nos primeiros pontos de integração a solução não apresentava estabilidade e comportamento físico. Os valores das variáveis temperatura, pressão e densidade, na condição de 10 e 60 rpm, apresentam o

mesmo nível de precisão que a condição padrão de 20 rpm, ao longo de todo o ciclo. No tocante ao campo de velocidades, é observado que a precisão diminui com o aumento da rotação, atingindo diferenças absolutas máximas em relação a solução analítica em, $\theta = 540^\circ$, de 0,0014m/s, 0,0025m/s e 0,0441m/s para 10, 20 e 60 rpm, respectivamente.

Estas mesmas constatações são verificadas na condição de 100 rpm, entretanto, para os pontos próximos ao fim do ciclo ($\theta > 480^\circ$), o erro absoluto das variáveis aumenta, havendo no caso da velocidade perda da reversibilidade.

Nas figuras 7.4, 7.5 e tabela 7.2, são apresentados alguns valores típicos do número de Reynolds para diversas rotações em função da posição θ no ciclo.

A definição dos números de Reynolds aplicados é dada a seguir:

-Reynolds local máximo instantâneo: é o número de Reynolds local avaliado no nó 5, sendo a expressão correspondente dada por:

$\rho/\mu \ u_p \ z_p/4$, onde ρ , u_p e z_p são obtidos da solução analítica para cada θ .

-Reynolds global médio instantâneo: é o número de Reynolds médio ao longo da câmara entre os nós 1 e 5, sendo a expressão dada por:

$\rho/\mu \ u_p/2 \ z_p$, onde $u_p/2$ é a velocidade média do campo.

-Reynolds médio: é o número de Reynolds médio ao longo do ciclo, sendo a expressão dada por: $\rho/\mu \ \bar{u} \ D$, onde ρ e \bar{u} são os respectivos valores médios ao longo do ciclo.

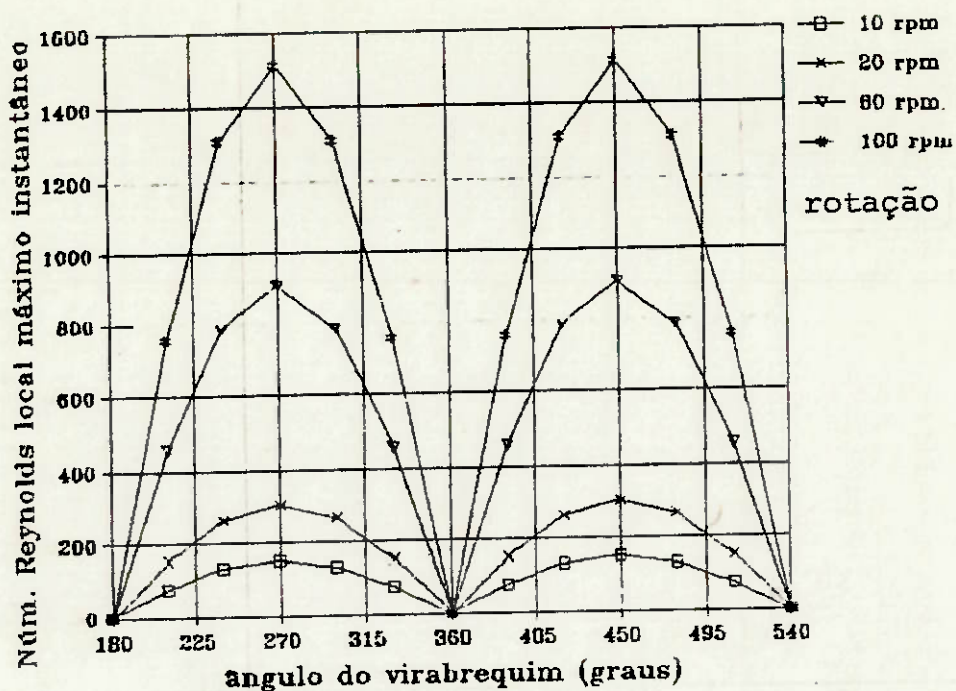


Figura 7.4 - Número de Reynolds local máximo instantâneo em função do ângulo do virabrequim, para diferentes rotações do modelo

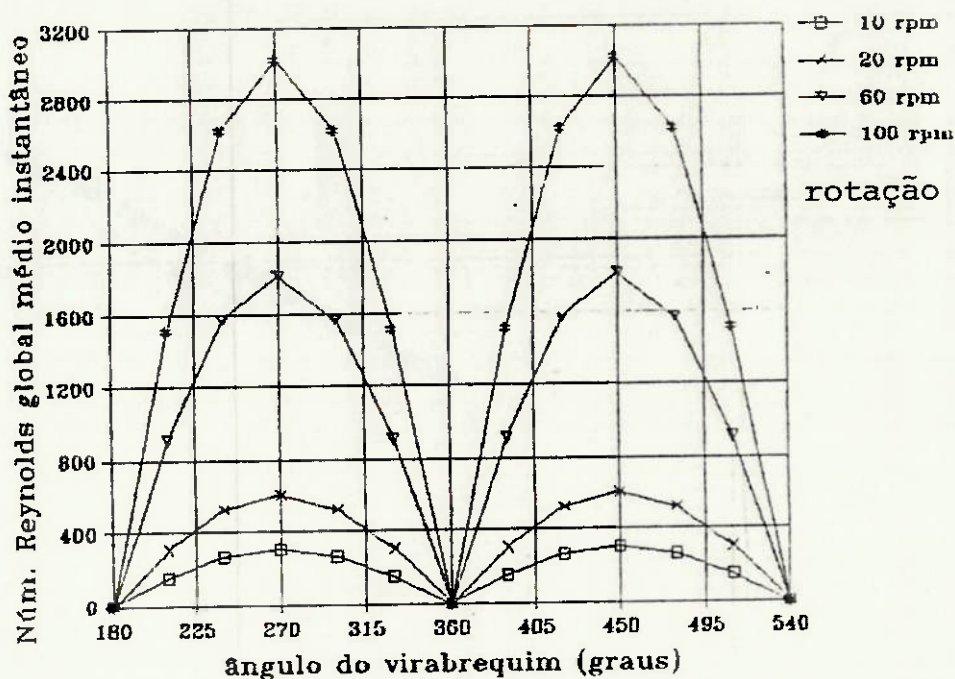


Figura 7.5 - Número de Reynolds global médio instantâneo em função do ângulo do virabrequim, para diferentes rotações do modelo

Não existe na bibliografia uma especificação sobre o número de Reynolds a ser aplicado para o escoamento na configuração sob análise, de pistão acionado em cilindro confinado. Na tabela 7.2 são apresentados valores do número de Reynolds médio, como calculados originariamente em escoamento no interior de tubos.

Tabela 7.2 - Número de Reynolds médio

ROTAÇÃO DO MODELO (rpm)	Número de Reynolds médio
10	1.535
20	3.069
60	9.206
100	15.347

O número de Reynolds global médio instantâneo, como acima definido, onde o comprimento característico (z_p) é tomado na direção paralela ao escoamento, fornece para cada instante uma avaliação do escoamento na câmara.

Conforme mencionado no item anterior, a precisão das variáveis densidade, temperatura e pressão aumenta com o decréscimo do intervalo de integração, enquanto que com a velocidade ocorre o oposto. Desta forma, para cada rotação existe um valor mínimo para o intervalo de integração ($\Delta\theta$), que possibilita a solução numérica do ciclo. Na tabela 7.3, são apresentados para cada rotação o intervalo de integração ($\Delta\theta$) mínimo, associando a variável com o máximo erro absoluto percentual obtido na solução.

Tabela 7.3 - Intervalo de integração ($\Delta\theta$) mínimo em função da rotação do modelo.

ROTAÇÃO DO MODELO (rpm)	INTERVALO DE INTEGRAÇÃO ($\Delta\theta$) MÍNIMO (graus)	ERRO ABSOLUTO PERCENTUAL MÁXIMO (variável pressão) (%)	DIFERENÇA ABSOLUTA MÁXIMA NA VELOCIDADE (m/s)
20	0,625	1,4	0,0295
60	1,2	2,6	0,0224
100	1,5	3,2	0,023
300	2,73	6,1	0,024
1000	4,5	10,4	0,0094

A precisão das variáveis densidade, temperatura e pressão é inalterada com a variação da rotação, desde que o intervalo de integração aplicado apresente solução. Portanto, os erros percentuais apresentados nas figuras 7.1, 7.2 e 7.3 podem ser aplicados para rotações diferentes de 20 rpm, por exemplo, para rotações até 1000rpm são válidas as curvas com intervalo de integração ($\Delta\theta$) maior ou igual a 5°.

Com o objetivo de otimizar a precisão, desvinculando o respectivo limite ao intervalo de integração mínimo, foi experimentada na simulação padrão com rotação de 20rpm a variação do intervalo de integração ($\Delta\theta$) ao longo do ciclo. Neste sentido foram adotados dois intervalos discretos de variação, isto é, $\Delta\theta = 0,625^\circ$ para os pontos $180^\circ \leq \theta \leq 270^\circ$ e $450^\circ < \theta \leq 540^\circ$, e $\Delta\theta = 0,50^\circ$ para $270^\circ < \theta \leq 450^\circ$. Os

resultados obtidos para densidade, temperatura e pressão têm precisão superior aos da simulação padrão, sendo que os máximos erros absolutos percentuais são 0,85%, 0,31% e 1,16%, respectivamente. A máxima diferença absoluta da velocidade relativa em relação a solução analítica é de 0,049m/s. Foi observado que devido a menor precisão da velocidade no fim do ciclo os resultados finais não são idênticos aos iniciais, contudo o erro absoluto não ultrapassa 0,25%.

7.3 Gradiente do Campo de Pressão

A confirmação da equação do gradiente do campo de pressão (5.3) ficou prejudicada devido às baixas rotações e acelerações do pistão, associadas ao regime laminar onde o algoritmo foi desenvolvido. Para as médias rotações ($100\text{rpm} \leq n \leq 1000\text{rpm}$) a análise foi afetada em função da perda de precisão, vinculada ao limite do intervalo de integração aplicado, conforme apresentado no item anterior.

Para as simulações entre 10 e 60 rpm, o maior gradiente de pressão encontrado entre os nós extremos (1 e 5), de acordo com equação 5.3, é inferior a $2 \times 10^{-2} \text{ kgf/m}^2$. Este valor se confunde ao próprio erro matemático da solução numérica.

Na tabela 7.4 abaixo, são apresentados para $\theta = 360^\circ$ (PMS) os valores dos gradientes de pressão entre os nós 1-5 e 1-2, obtidos do algoritmo numérico e da solução analítica (5.3) [11] para simulações de 10, 20 e 60 rpm.

Tabela 7.4 - Resultados comparativos dos gradientes de pressão obtidos dos cálculos segundo MEF e solução analítica para $\theta = 360^\circ$

SOLUÇÃO	ROTAÇÃO DO MODELO (rpm)	Gradiente de pressão (kgf/m ²)	
		$ P_5 - P_1 $	$ P_2 - P_1 $
ANALÍTICA	10	$5,38 \times 10^{-4}$	$3,37 \times 10^{-5}$
	20	$2,15 \times 10^{-3}$	$1,35 \times 10^{-4}$
	60	$1,94 \times 10^{-2}$	$1,21 \times 10^{-3}$
MEF	10	0,2	0,4
	20	0,2	0,1
	60	0	0,2

7.4 Variação no Calor Específico

Foi pesquisada a influência da variação do calor específico (C_p) com a temperatura na solução da simulação padrão, onde a rotação do modelo é mantida em 20 rpm, com intervalo de integração de 1° e duas iterações no ponto.

Os erros percentuais absolutos em relação a solução analítica para as variáveis temperatura e pressão são superiores aos alcançados com a simulação mantendo C_p constante. Os erros absolutos percentuais máximos para temperatura e pressão, segundo a solução com C_p função da temperatura são idênticos a 5,1%, enquanto que para C_p constante são 0,64% e 2,13%, respectivamente. Este resultado era esperado, visto que a solução analítica foi obtida, admitindo-se C_p constante.

No tocante a densidade foram mantidos os mesmos erros percentuais. Entretanto, na velocidade houve um acréscimo na diferença absoluta máxima em relação a solução analítica de 0,0025m/s para 0,0039m/s.

Na figura 7.6 são apresentadas as curvas de temperatura em função do ângulo do virabrequim, segundo as duas soluções.

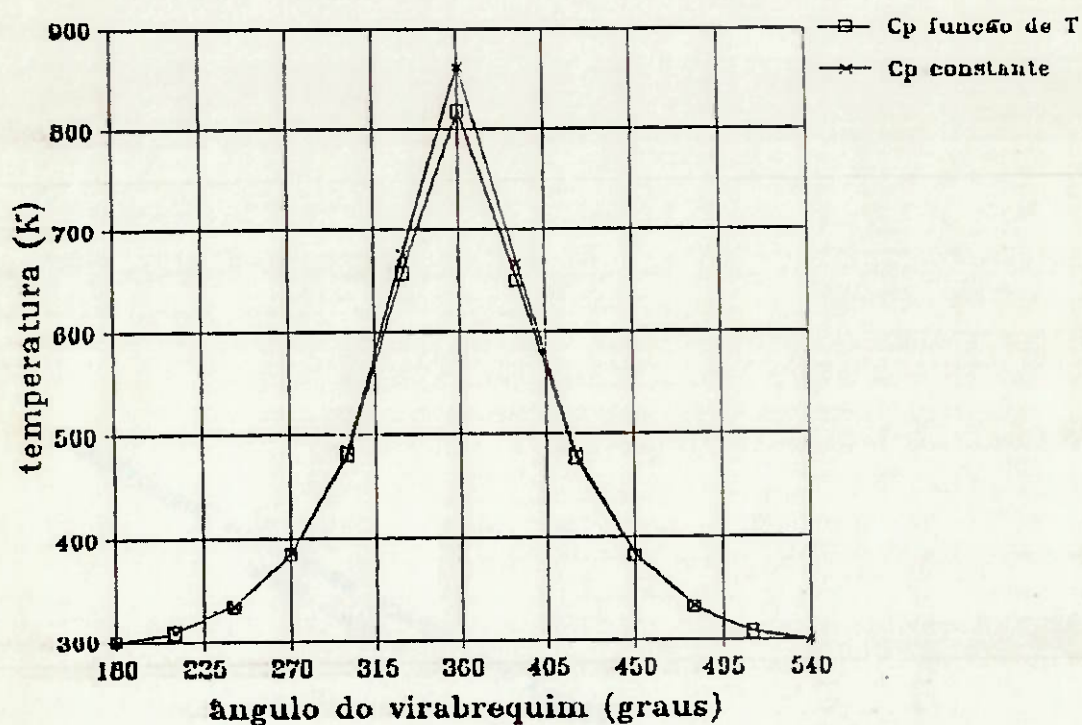


Figura 7.6 - Temperatura em função do ângulo do virabrequim para C_p função da temperatura e C_p constante

7.5 Solução para Fluido Ideal

Foi experimentada uma simulação sem a aplicação do termo correspondente a dissipação viscosa $\{-4/3 \mu/z_p^2 (\partial \tilde{u} / \partial \xi)^2\}$, nas respectivas equações da energia (4.8) dos elementos finitos. Os

resultados obtidos para as variáveis temperatura e pressão foram idênticos aos obtidos com a simulação padrão, concluindo-se que este termo não tem influência na solução.

A simulação, considerando escoamento do ar como fluido ideal, isto é, viscosidade e condutibilidade térmica nulas, também não apresentou variações nos resultados em relação a simulação padrão. A única constatação foi um pequeno acréscimo na diferença absoluta da velocidade em relação a solução analítica, passando de um valor máximo de 0,0025m/s para 0,0045m/s.

7.6 Uso de Sistema com 2 Elementos Finitos

O sistema com 2 elementos finitos testado é composto pelos nós 1, 3 e 5, conforme configuração apresentada na figura 4.1.

Os resultados obtidos para as variáveis densidade, temperatura e pressão, segundo a simulação padrão (rotação de 20rpm, intervalo de integração de 1º e 2 iterações no ponto), foram idênticos aos gerados com o sistema de 5 nós. No tocante ao campo de velocidade, a diferença absoluta em relação a solução analítica foi ligeiramente inferior, apresentando os valores de 0,0011m/s e 0,0025m/s para os sistemas de 3 e 5 nós, respectivamente.

Em seguida foi simulado o sistema com 3 nós (2 elementos finitos) utilizando base cardinal quadrática ($\{N_z\}$). Neste caso, é assumido um comportamento das variáveis dependentes segundo uma equação polinomial de 2º grau, havendo a necessidade da inclusão de 2 nós adicionais entre os nós 1-3 e 3-5, para definir os novos

coeficientes desconhecidos das equações. Desta forma, a configuração final é igual a da figura 4.1. A precisão obtida para densidade, temperatura e pressão foi igual ao do sistema de 5 nós (4 elementos finitos) utilizando base cardinal linear. Quanto a velocidade, a diferença máxima absoluta em relação a solução analítica foi ligeiramente superior, 0,0033m/s contra 0,0025m/s obtida através do sistema de 5 nós com aproximação linear.

7.7 Sensibilidade e Erro Matemático

A sensibilidade e reversibilidade da solução do algoritmo foram confirmadas através da realização de uma simulação com os dados padrões, iniciando o ciclo em PMS. Os erros absolutos percentuais das variáveis em relação a solução analítica foram similares aos obtidos com a simulação padrão. A diferença máxima da velocidade em relação a solução analítica e os erros absolutos máximos para a temperatura, pressão e densidade foram 0,0063m/s, 0,64%, 2,16% e 1,69%, respectivamente.

O erro matemático envolvido na solução do algoritmo foi avaliado mantendo artificialmente o pistão inerte na posição inicial PMI e efetuando o processamento ao longo do ciclo. O erro absoluto percentual das variáveis em relação aos dados exatos e a desuniformidade do valor das variáveis ao longo do campo junto aos nós não ultrapassam 0,01%.

trabalho e a confirmação do MEF neste tipo de problema, os resultados alcançados, reportados no capítulo anterior, obtidos através do algoritmo matemático desenvolvido via MEF, apresentam erro menor que 2,2% e representam o fenômeno físico envolvido. Para a simulação otimizada no intervalo de integração, o erro absoluto máximo é inferior a 1,2%.

Vale ressaltar que a configuração analisada, de câmara em cilindro confinado segundo um ciclo de compressão e expansão, pode ter aplicação direta na simulação de motores Stirling.

A partir do cumprimento desta etapa um amplo caminho de desenvolvimento pode ser diagnosticado, destacando-se pela ordem de complexidade:

- desvincular a hipótese de uniformidade das propriedades físicas, incluindo, por exemplo, a respectiva variação com a temperatura;
- pesquisar a influência de novos valores e representações para C_p , viscosidades artificiais e termos de geração, visando melhoria nas condições de reversibilidade, precisão e representabilidade do problema real;
- estudar a influência da aplicação de um maior número de nós e polinômios ou bases cardinais de grau superior;
- utilizar sistemas de coordenadas bi e tri-dimensionais;
- aplicar sub-modelos para escoamento turbulento, necessários para operação com rotações superiores;
- incorporar e representar os tempos de admissão e exaustão;
- aplicar sub-modelos representativos de escoamento reativo, combustão e produção de espécies.

INDICE

1. INTRODUÇÃO
2. OBJETIVO
3. METODOS DE ANALISE EXISTENTES
 - 3.1 Zero-Dimensional
 - 3.1.1 Taxa de Combustão
 - 3.1.2 Transferência de Calor
 - 3.1.3 Cálculo dos Oxidos de Nitrogênio
 - 3.1.4 Análise Termodinâmica
 - 3.1.4.1 Equações Auxiliares
 - 3.1.4.2 Equações Básicas
 - 3.1.5 Resultados Típicos
 - 3.2 Quasi-Dimensional
 - 3.2.1 Processo de Combustão
 - 3.2.2 Resultados Típicos
 - 3.3 Multidimensional
 - 3.3.1 Descrição Geométrica
 - 3.3.2 Turbulência e Aproximações do escoamento
 - 3.3.3 Reações Químicas
 - 3.3.4 Condições de contorno.
 - 3.3.5 Equação Fundamental

3.3.6 Tipos de Abordagem e Aplicações

3.3.6.1 Laboratório Nacional de Los Alamos

3.3.6.2 Universidade de Princeton

3.3.6.3 Laboratórios de Pesquisa da GM

3.3.6.4 "Imperial College"

3.3.6.5 Laboratório Nacional Lawrence Livermore

3.3.6.6 Outras Organizações

4. DEFINIÇÃO DO PROBLEMA
5. APLICAÇÃO DO METODO DE DIFERENÇAS FINITAS (MDF)
6. APLICAÇÃO DO METODO DE ELEMENTOS FINITOS (MEF)
7. ANALISE COMPARATIVA DOS RESULTADOS
8. COMENTARIOS FINAIS E CONCLUSOES
9. ANEXO 1 - DEFINIÇÃO DOS COEFICIENTES DA EQUAÇÃO GERAL FUNDAMENTAL
10. ANEXO 2 - ALGORITMO MATRICIAL DO MEF
11. ANEXO 3 - PROGRAMA DE CALCULO DO MEF
12. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

INDICE DE FIGURAS E TABELAS

- Tabela 1.1 - Potência instalada [1]
- Figura 3.1 - Estrutura de avaliação e simulação do método zero-dimensional [4 e 11]
- Figura 3.2 - Curvas típicas provenientes de um ensaio de MCI, utilizando o método zero-dimensional [7 e 8]
- Figura 3.3 - Estudo paramétrico do efeito da variação da taxa de compressão sobre o consumo, utilizando o método zero-dimensional [11]
- Figura 3.4 - Resultados do método quasi-dimensional, indicando o atraso de ignição em função do ponto de faísca da vela, para diversas porcentagens de recirculação do gás de escape (RGE) [11]
- Figura 3.5 - Resultados comparativos da emissão de NO_x prevista, através do método quasi-dimensional, com os dados experimentais [11]
- Figura 3.6 - Diagrama do método multidimensional [5]
- Figura 4.1 - Modelo esquemático do cilindro com malha unidimensional
- Figura 5.1 - Câmara em cilindro confinado - malha empregada no cálculo MDF e localização de variáveis [11]
- Figura 7.1 - Resultados comparativos de temperatura obtidos dos cálculos segundo MEF(M) e da solução analítica(A)

Figura 7.2 - Resultados comparativos de pressão obtidos dos cálculos segundo MEF(M) e da solução analítica(A)

Figura 7.3 - Resultados comparativos de densidade obtidos dos cálculos segundo MEF(M) e da solução analítica(A)

Tabela 7.1 - Erros percentuais das previsões: MEF - MDF - solução analítica

NOMENCLATURA

a	- parâmetro de eficiência
$[A\cdot]$	- hipermatrizes especificadas no anexo 2
A_f	- área da frente de chama
a_p	- aceleração instantânea do pistão
$a_{p.m\acute{a}x}$	- máxima aceleração instantânea do pistão
APMS	- ângulo em graus antes do PMS
BSFC	- consumo específico efetivo de combustível
BSHC	- emissão específica efetiva de HC
BSNO	- emissão específica efetiva de NO
c	- constante
$[C]$	- matriz dos coeficientes dos termos transitórios
c_1	- constante
c_2	- constante
C_p	- calor específico do gás a pressão constante
C_v	- calor específico do gás a volume constante
d	- constante
D	- diâmetro do pistão
e	- energia
e_1	- constante
\dot{E}	- taxa de variação da energia interna
$f_c(q_\beta)$	- funções específicas não lineares
$[FIJ]$	- matriz dos coeficientes dos termos da variável dependente J
\bar{h}	- coeficiente de transferência de calor
$[H]$	- matriz dos coeficientes dos termos da condição de contorno

- h_j - entalpia das massas \dot{m}_j
 ISFC - consumo específico indicado de combustível
 ISHC - emissão específica indicada de HC
 ISNO - emissão específica indicada de NO
 j - ρT
 \bar{j} - média escalar dos valores de $\{j\}$ no domínio
 $\{j\}$ - matriz vetor dos valores nodais de j
 $[J|J] = [J (FI)] \equiv \frac{\partial \{FI\}}{\partial \{QJ\}}$ - jacobiano de Newton de $\{FI\}$ em relação $\{QJ\}$
 k - grau do polinômio ou da base cardinal
 k^* - condutibilidade térmica do gás
 K - energia cinética turbulenta
 $[K]$ - matriz dos coeficientes dos termos de difusão
 $\ell(q_\alpha^h)$ - equação diferencial das condições de contorno da variável dependente
 $L(q_\alpha^h)$ - equação diferencial da variável (q_α^h)
 m - $\rho \bar{u}$
 \dot{m}_j - fluxo de massa para o interior do sistema
 \bar{m} - média escalar dos valores de $\{M\}$ no domínio
 $\{M\}$ - matriz vetor dos valores nodais de m
 n - rotação do motor
 $\{N_k\}$ - matriz da base cardinal de grau k
 N_u - número de Nusselt
 p - pressão
 $\{P\}$ - matriz vetor dos valores nodais de p

- $p - p_0$ - diferença de pressão entre os pontos ξ e $\xi = 0$
 PMI - ponto morto inferior
 PMS - ponto morto superior
 P_r - número de Prandtl
 q_α - solução exata da variável dependente
 q_α^h - aproximação semi-discreta da variável dependente
 q_α^e - aproximação discreta da variável dependente
 $\{QI\}$ - matriz dos valores nodais da variável dependente
 $\{QI\}'$ - matriz dos valores nodais transitórios da variável dependente
 \dot{Q}_w - taxa de perda de calor pelas fronteiras
 $dQ/d\theta$ - taxa de liberação de calor
 $\{\delta QI\}$ - matriz vetor dos valores nodais de incremento da variável dependente
 r - coordenada independente radial
 \bar{r} - raio de manivela do virabrequim
 $\{R\}$ - matriz vetor dos valores nodais de ρ
 R^* - constante universal dos gases
 R_e - número de Reynolds
 r_v - taxa de compressão
 R^n - domínio n-dimensional do problema
 ∂R - superfície de contorno do domínio
 S - curso do pistão
 S_T - velocidade de chama turbulenta igual a $k_1 S_L$, sendo k_1 uma constante e S_L velocidade de chama laminar

- S_ϕ - termo de geração
 t - coordenada independente de tempo
 Δt - passo de integração temporal
 T - temperatura
 T^0 - temperatura no estado de referência
 $\{T\}$ - matriz vetor dos valores nodais de T
 $\{\bar{T}\}$ - matriz vetor dos valores médios temporais entre t_{j+1} e t_j de $\{T\}$
 \vec{u} - vetor velocidade (componentes nas três coordenadas espaciais)
 u - velocidade axial do fluido em relação a z
 \bar{u} - velocidade média do pistão
 \tilde{u} - $(u - \xi u_p)$ velocidade relativa do fluido em relação a superfície coordenada
 $[U]$ - matriz dos coeficientes dos termos de difusão
 $\{\tilde{U}\}$ - matriz vetor dos valores nodais de \tilde{u}
 $\{\bar{\tilde{U}}\}$ - matriz vetor dos valores médios temporais entre t_{j+1} e t_j de $\{\tilde{U}\}$
 u_e - velocidade de arraste proporcional a intensidade turbulenta
 u_p - velocidade do pistão
 v - velocidade radial do fluido em relação a r
 V_D - volume deslocado ($V_{PMI} - V_{PMS}$)
 V_P - volume instantâneo do cilindro
 V_{PMI} - volume do cilindro em PMI

V_{PMS}	- volume do cilindro em PMS
w	- parâmetro de inclinação da curva
\dot{W}	- taxa de trabalho realizado pelo movimento das fronteiras
x_b	- fração de massa queimada
x_e	- fração de massa arrastada
z	- coordenada independente axial
z_0	- altura mínima do pistão em PMI
z_1	- altura máxima do pistão em PMS
z_p	- posição instantânea do pistão
Δz	- distância entre nós ou elementos finitos
Δz_p	- passo de integração espacial

notação grega

β	- multiplicador escalar para gerar difusividade artificial
β_1	- multiplicador escalar, coeficiente de relaxação
β_2	- multiplicador escalar, para gerar viscosidade artificial
Γ_ϕ	- coeficiente de difusão
δ	- espessura da chama
Δ_e	- distância adimensional entre os elementos finitos
ϵ	- taxa de dissipação
θ	- ângulo do virabrequim
θ_s	- ângulo do virabrequim onde ocorre o início da combustão

- $\Delta\theta_c$ - intervalo de ângulo do virabrequim onde ocorre a combustão
 μ - viscosidade dinâmica do gás
 μ_{eff} - viscosidade efetiva do gás (laminar + turbulenta)
 v_n^m - fatores escalares de multiplicação, viscosidade artificial
 ξ - (z/z_p) coordenada independente axial adimensional
 ξu_p - velocidade axial da superfície coordenada em relação a z
 ρ - densidade do gás
 $\bar{\rho}$ - média escalar dos valores de $\{\rho\}$ no domínio
 ρ^0 - densidade do gás no estado de referência
 ρ_u - densidade da mistura não queimada
 τ - tempo característico da reação para combustão da massa de um turbilhão
 ϕ - variável dependente
 Ψ - fator implícito ($0 \leq \Psi \leq 1$)

Índices

- $\{\cdot\}_{j+1,j}$ = $\{\cdot\}_{j+1}$ + $\{\cdot\}_j$ - matriz vetor dos valores nodais do argumento em t_{j+1} e t_j
 $\{\cdot\}^T$ - matriz linha ou transposta
 j - contador de tempo
 p - contador de iteração

1. INTRODUÇÃO

O sistema mundial de transporte veicular é composto de dezenas de milhões de unidades em operação, apresentando uma imensa potência instalada.

Na tabela abaixo é mostrada a quantificação destas grandezas nas condições brasileiras, americanas e mundiais, e em comparação com a energia elétrica. Nota-se que a potência veicular instalada é cerca de 20 a 25 vezes maior que a elétrica.

Tabela 1.1 - Potência instalada [1]

Item	Mundial (2)	Estados Unidos (3)	Brasil (3)
Número de veículos(x 10 ³ unid.)	442.934,0	163.861,0	11.204,6
Potencia veicular instalada (x 10 ⁴ HP) (1)	62.010,8	22.940,5	1.120,5
Potencia elétrica instalada (x 10 ⁴ HP)	3.028,5	905,1	53,8

1. no cálculo de potência veicular instalada foi considerado um valor específico médio de 140(mundial e Estados Unidos) e 100 (Brasil) HP/veículo.
2. dados disponíveis de 1982.
3. dados disponíveis de 1983.

A unidade motriz deste sistema é eminentemente baseada nos motores alternativos de combustão interna (MCI), ciclos Otto e Diesel. Estes motores utilizam principalmente combustíveis

tradicionais derivados de petróleo, isto é, gasolina e óleo diesel.

Na última década com a ocorrência de dois importantes eventos, a crise de energia e as posições normativas e legislativas sobre a poluição ambiental, este sistema tem sido afetado sobremaneira. Citando como exemplificação os valores das quantidades envolvidas nos Estados Unidos [9], os automóveis respondem por 50% do consumo do petróleo, que representa 20% da energia total consumida, e são responsáveis por 50% da poluição na atmosfera. Em 1983, o consumo médio diário de petróleo naquele país foi de $13,9 \times 10^6$ barris [2], enquanto que no Brasil a cifra foi de 1×10^6 barris/dia [3].

Neste contexto, atualmente são utilizados bilhões de dólares na produção de veículos mais limpos e eficientes, onde é procurada a caracterização do motor de combustão interna (MCI), para que seja atingido o melhor compromisso e balanço entre os poluentes gerados e o combustível consumido. Com este objetivo, diversas pesquisas e desenvolvimentos têm sido realizados no conjunto veículo-motor, direcionados para o aumento da eficiência de uso e disponibilidade energética, tais como, uso de componentes de ligas leves e cerâmicos, aplicação de dispositivos e processadores de controle eletrônico, otimização dos projetos de motor e carroceria, implantação de combustíveis alternativos provenientes da biomassa; ou direcionados para o controle de emissões, tais como, uso de catalisadores-oxidantes e introdução de combustíveis limpos.

O principal meio para a otimização do MCI é através da análise dos complexos e simultâneos processos físico-químicos com geometria variável que ocorrem no interior do cilindro, a qual até a pouco tempo era obtida por meio de uma atividade experimental e primária de tentativa e erro. A investigação experimental envolvendo ensaios de equipamentos em verdadeira grandeza ou em escala reduzida tem severas limitações, no tocante a impossibilidade de reprodução fiel do equipamento no protótipo, dispêndio excessivo em termos econômicos e temporal, dificuldades na extrapolação dos resultados e imprecisão nas medidas efetuadas.

Por outro lado, o desenvolvimento da tecnologia computacional e das técnicas numéricas têm possibilitado o aparecimento de modelos matemáticos, os quais representando o mecanismo físico do problema real, surgem como a ferramenta fundamental para a simulação de MCI. Os métodos teóricos de análise oferecem um entendimento mais completo dos processos físicos, a identificação das variáveis de controle e habilidade em prever comportamento do MCI numa ampla faixa de variação das condições de operação e projeto.

As vantagens do cálculo teórico sobre a investigação experimental são:

- baixo custo do processamento em relação aos envolvidos com a realização de testes;
- rapidez na geração de informações e agilidade de simular diversas configurações;

- obtenção de informação completa, com a possibilidade de cálculo de todas as variáveis sobre o pleno domínio da simulação;
- habilidade em prever condições "perigosas" sem risco (p.ex. simulação com combustíveis ou substâncias tóxicas e explosivas);
- habilidade em simular condições perfeitamente ideais, por exemplo, parede adiabática.

A principal desvantagem do cálculo teórico, entretanto, é a falta de adequação da modelagem matemática ao processo físico-químico envolvido, bem como a desvinculação presente entre os diversos sub-modelos. Entre os processos que carecem de uma melhor representação destacam-se os fenômenos de turbulência no escoamento e na chama, formação de poluentes, condições de contorno e jato de combustível. Uma desvantagem de segunda ordem, contudo relevante, é o erro matemático envolvido, englobando erros de linearização e discretização ou truncamento das equações diferenciais envolvidas, além dos arredondamentos inerentes ao processamento.

Os métodos teóricos de análise são classificados em três categorias [11]:

- zero-dimensional;
- quasi-dimensional;
- multidimensional.

Alguns autores [4] denominam os métodos zero-dimensional e quasi-dimensional como métodos fenomenológicos ou globais.

O método zero-dimensional é derivado da 1ª lei da termodinâmica sendo o tempo a única variável independente. As

variáveis dependentes são tratadas de forma uniforme no domínio da câmara de combustão. E, a taxa de combustão da carga é obtida empiricamente.

O método quasi-dimensional apresenta uma estruturação idêntica ao zero-dimensional, diferenciado somente na abordagem da taxa de queima, a qual é derivada teoricamente de sub-modelos físicos. Desta forma, este método tem o potencial de avaliar o efeito das variações nas condições de operação e projeto do motor, mesmo que estas variações impliquem em mudanças no processo de combustão.

O método multidimensional promove a resolução numérica sobre o domínio em uma, duas ou três dimensões das equações diferenciais fundamentais da continuidade, quantidade de movimento, energia e conservação de espécies. O requisito básico para que o método seja bem sucedido é a adoção de adequados sub-modelos para representar os processos envolvidos. Este método oferece a condição de fornecer dados detalhados e completos sobre a distribuição espacial e temporal do campo de velocidades, pressão, temperatura e componentes dentro do cilindro do MCI.

O método multidimensional tem um potencial de avaliação, diagnóstico e previsão, além de uma capacidade de indicar parâmetros para o projeto de MCI, bastante superior aos dois restantes. E no enfoque e no desenvolvimento incipiente da metodologia de cálculo através de elementos finitos que este trabalho pretende apresentar sua contribuição.

2. OBJETIVO

O objetivo principal do presente trabalho é o desenvolvimento da solução do escoamento não reativo em cilindro com pistão acionado, utilizando o cálculo numérico através da técnica dos elementos finitos. O método dos elementos finitos (MEF), originariamente desenvolvido para análise de estruturas sólidas, foi inicialmente aplicado na análise de elementos de estruturas irregulares de aviões na década de 50. Somente na década de 70 surgiram os primeiros trabalhos de resolução numérica de escoamento através do MEF, em alternativa ao método de diferenças finitas (MDF).

O MDF, onde as equações algébricas discretizadas são obtidas através da expansão das equações diferenciais por série de Taylor, tem sido utilizado na solução de escoamento em cilindros confinados com pistão em movimento, sendo que diversos e significativos resultados têm sido reportados em trabalhos publicados [5, 9, 11, 16 e 17].

Por outro lado, não há na bibliografia atualmente disponível menção de resultados neste tipo de problema utilizando o MEF.

Neste sentido, é desenvolvido um sistema de equações algébricas discretizadas através do princípio de mínimos pesos residuais para um cilindro confinado com pistão acionado, preenchido com ar, na condição de escoamento laminar, segundo uma configuração uni-dimensional. Vale ressaltar que esta representação com escoamento laminar possui uma solução analítica, sendo a melhor base de comparação para a verificação

da precisão do método numérico. Além disso, os resultados obtidos são comparados com os resultados disponíveis oriundos da aplicação do MDF.

O MEF não é basicamente um método diferente do MDF, possui na verdade capacidade extra de ser utilizado em malhas irregulares. A distinção entre os dois métodos está na forma da escolha dos perfis das variáveis dependentes e na obtenção das equações discretizadas. No MEF (cálculo variacional) é assumida uma variação contínua das variáveis dependentes ao longo da malha, enquanto no MDF a variável dependente é avaliada somente nos pontos discretos da malha, não havendo informação sobre a sua variação nos intervalos [10].

Alguns autores concluem que o MEF tem maior potencial de representação de geometrias irregulares e produção de resultados mais precisos que o MDF [10].

Na sequência dos tópicos, é apresentado inicialmente o estado da arte, englobando características, sub-modelos, potencial e aplicações típicas, dos três métodos de análise: zero-dimensional, quasi-dimensional e multidimensional.

Em seguida é definido o problema analisado, incluindo a configuração e hipóteses assumidas. A análise é efetuada para o domínio deformável, compreendendo a câmara num cilindro confinado com pistão sob acionamento externo. O escoamento é assumido não reativo, na condição uni-dimensional e o regime laminar. A solução é varrida no transiente de um ciclo compreendendo um tempo de compressão e expansão, respectivamente.

A partir do problema estabelecido e apresentado o desenvolvimento do método multidimensional utilizando MDF e MEF. No tocante ao MDF são utilizadas a estrutura e a solução desenvolvidas pelo "Imperial College" [11 e 16]. A solução alternativa proposta através do MEF é baseada no princípio dos mínimos pesos residuais, cuja metodologia é apresentada em [18].

Finalmente, é realizada uma análise comparativa entre os resultados disponíveis através da solução analítica, do MDF e obtidos do MEF.

Concluindo, vale ressaltar que o presente trabalho, de aplicação do MEF em cilindro confinado, é a parte introdutória de um método mais completo de análise do MCI. Na configuração apresentada vincula-se a simulação de metade do ciclo motor, isto é, os tempos de compressão sem turbulência inicial e expansão sem combustão inicial. Portanto, a partir deste ponto, surge o direcionamento para a incorporação de sub-modelos de admissão, escape, combustão, jato e formação de poluentes, além da aplicação de dimensionalidade superior, no sentido de representar de forma mais direta os fenômenos físicos do MCI.

3. METODOS DE ANALISE EXISTENTES

A aplicação dos métodos de análise pode ser dividida em dois grupos em função do objetivo procurado, a saber, entendimento e projeto [11]. O enfoque entendimento por sua vez pode ser subdividido em diagnóstico, previsão e síntese. O diagnóstico objetiva a interpretação dos dados experimentais. A previsão, ao inverso, estende o entendimento do problema além do experimental. E, na síntese são desenvolvidos conceitos ou estratégias, além dos resultados obtidos no diagnóstico e previsão; neste campo são efetuados estudos paramétricos de processos físicos. Quando a função é projeto, o objetivo é o dimensionamento de sistemas, tais como, estrutural, de escoamento de gás ou combustão.

O ponto fundamental de qualquer modelagem é o fato de não se poder esperar algo de um modelo onde não se tem compreensão física. Desta forma, não há sentido a preocupação com as técnicas de resolução das equações, quando o mecanismo físico desconhecido é o problema real.

3.1 Zero-Dimensional

O método zero-dimensional é fundamentado em teorias da termodinâmica e processos de reações químicas que ocorrem na câmara de combustão [4, 6, 7 e 8].

O método tem larga aplicação em MCI de ciclos Otto, Diesel e de carga estratificada com pré-câmara ou câmara aberta. São baseados na 1ª lei da termodinâmica, onde a única variável

independente e o tempo ou o ângulo do virabrequim (θ), portanto, apenas equações diferenciais ordinárias são manipuladas. Os processos físico-químicos que ocorrem no meio ambiente termodinâmico são descritos através de sub-modelos fenomenológicos aproximativos, destacando os principais: o mecanismo de Zeldovich [4] para prever as emissões de NO_x nos gases queimados, variação cossenoidal da taxa de combustão [4], modelo de troca de calor pelas paredes do cilindro [4 e 6].

A estrutura da avaliação e simulação convencional de MCI, incluindo diversos sub-modelos fenomenológicos, é apresentada na figura 3.1 a seguir.

A seguir são apresentados os principais sub-modelos fenomenológicos aplicados, as hipóteses assumidas, as equações básicas adotadas e resultados típicos de aplicação.

3.1.1 Taxa de Combustão

A taxa de combustão é especificada através de sub-modelos, onde o início de combustão (θ_s), a duração de combustão ($\Delta\theta_c$) e o ângulo do virabrequim (θ) são associados. Duas funções típicas são:

- variação cossenoidal [4]:

$$\frac{dx_b}{d\theta} = \frac{\pi}{2\Delta\theta_c} \text{sen} \left(\pi \frac{\theta - \theta_s}{\Delta\theta_c} \right) \quad (3.1)$$

- função Wiebe (4)

$$\frac{dx_b}{d\theta} = a (w+1) \left(\frac{\theta-\theta_s}{\Delta\theta_c}\right)^w \exp \left[- a \left(\frac{\theta-\theta_s}{\Delta\theta_c}\right)^{w+1} \right] \quad (3.2)$$

Estas funções fornecem a taxa que a massa não queimada é consumida pela chama, indicando a forma que a taxa de energia é liberada no interior da câmara.

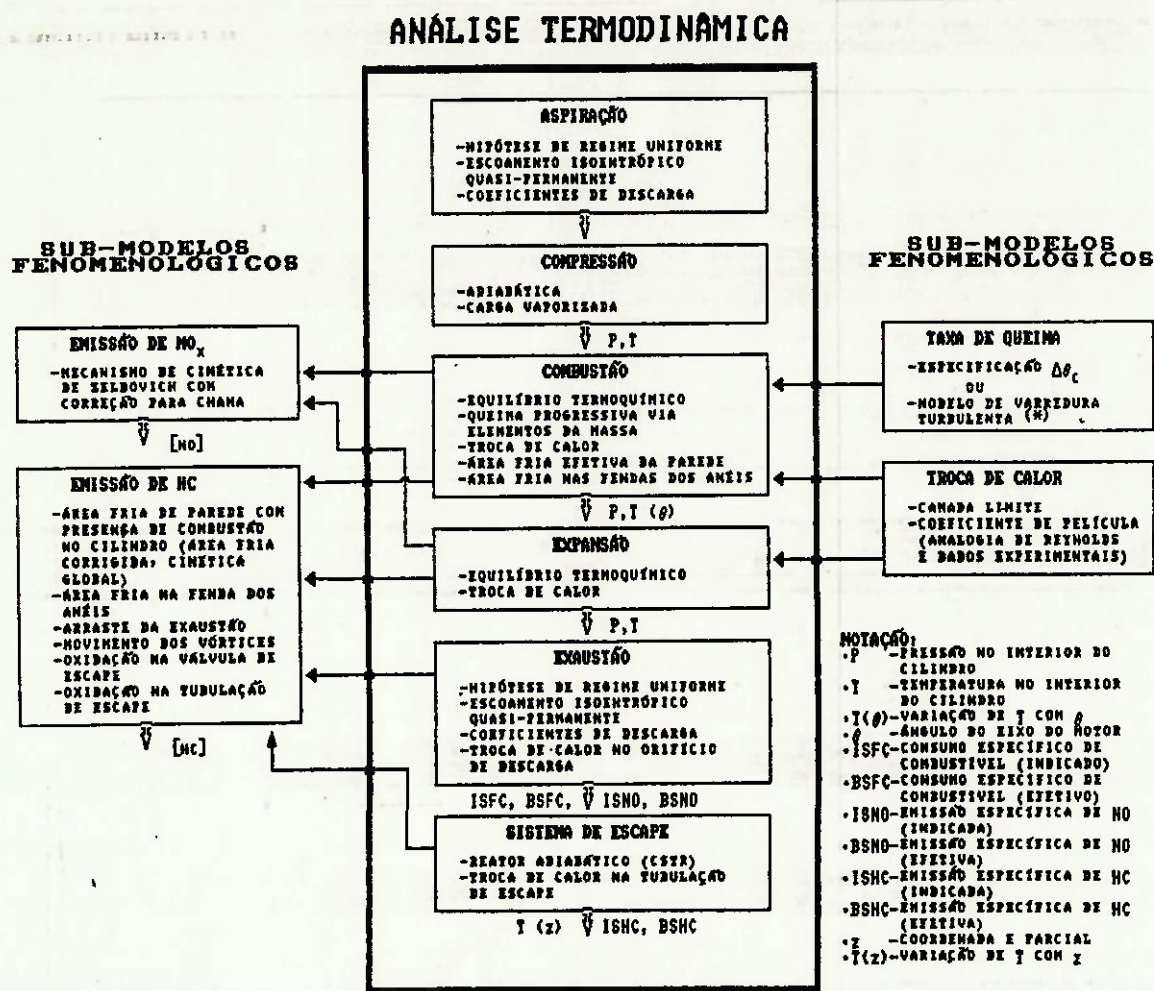


Figura 3.1- Estrutura de avaliação e simulação do método zero-dimensional [4 e 11]

(*) sub-modelo utilizado somente no método quasi-dimensional

3.1.2 Transferência de Calor

O sub-modelo utilizado para transferência de calor pelas fronteiras em MCI é dado de forma primária pela correlação entre os adimensionais, Nusselt, Reynolds e Prandtl.

$$Nu = R_e^d P_r^{e_1} \quad (3.3)$$

Esta função é derivada da troca de calor em escoamento permanente, turbulento, não reativo, no interior de tubos e sobre placas. As constantes (c), (d) e (e₁) são obtidas de dados experimentais para um sistema particular. Para aplicação em MCI seus valores típicos [4] são:

- d = 0,8
- e₁ = 0
- c = 0,023

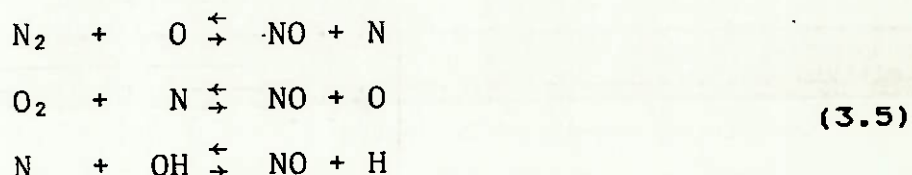
Existem outros sub-modelos mais específicos para MCI, Woschni e Hohenberg [6], que modificam a escala de velocidade dependendo do estágio no qual o ciclo se encontra. Entretanto, a principal limitação destes sub-modelos é a não consideração da troca de calor pela frente de chama durante a combustão.

A equação fundamental para o coeficiente de troca de calor desenvolvida por Hohenberg [6], aplicada em MCI de ciclo Diesel de câmara aberta, é dada por:

$$\bar{h} = c_1 \frac{V}{p}^{0,06} p^{0,8} T^{0,4} (\bar{u} + c_2)^{0,8} \quad (3.4)$$

3.1.3 Cálculo dos Oxidos de Nitrogênio

O sub-modelo utilizado para estimar a formação do óxido de nitrogênio (NO) é o mecanismo de Zeldovich [4]. Os valores de temperatura, pressão e relações de concentração, obtidos da solução das equações básicas, são usados como dados de entrada para o cálculo de NO, admitindo equilíbrio termoquímico. As reações resolvidas são:



Estimativas da contribuição da chama na formação do NO têm sido obtidas através de correlações empíricas.

3.1.4 Análise Termodinâmica

3.1.4.1 Equações Auxiliares

O escoamento nos tempos de aspiração e exaustão, através das tubulações, válvulas e orifícios, é modelado por equações que governam o escoamento adiabático reversível. Nas tubulações é admitido escoamento uni-dimensional e regime permanente, onde através das equações envolvidas são obtidas a queda de pressão, forças de atrito e troca de calor. Coeficientes empíricos e de descarga são usados para simular condições de contorno nas irregularidades das tubulações e válvulas, respectivamente.

3.1.4.2 Equações Básicas

A equação fundamental aplicada na análise é a 1ª lei da termodinâmica para sistemas abertos, sintetizada na forma global [4] como:

$$\dot{E} = \sum_j \dot{m}_j h_j - \dot{Q}_w - \dot{W} \quad (3.6)$$

A formulação diferencial para as propriedades do gás em relação ao tempo é normalmente obtida da expressão acima.

As equações complementares utilizadas são a quantidade de movimento e de estado, sendo em geral aplicada a condição de gás perfeito.

As propriedades dos gases, isto é, calor específico, entalpia, energia interna e entropia, são especificadas por dados oriundos de curvas ajustadas para vapor de combustível, ar e produtos de combustão, ou através de cálculos de equilíbrio termodinâmico.

3.1.5 Resultados Típicos

Um tipo de aplicação bastante difundido, utilizando o método zero-dimensional, é o cálculo da taxa de liberação de calor com o tempo ou ângulo do virabrequim, durante a combustão num MCI de ciclo Diesel.

O processo de cálculo consiste em medir experimentalmente os valores de pressão em função do ângulo de virabrequim, através, por exemplo, de um transdutor piezo-elétrico, na região do ciclo onde ocorre a fase de combustão.

De posse destes valores digitalizados, alimenta-se o sistema, sendo que da equação de estado obtém-se a temperatura, das curvas ajustadas obtém-se os valores da energia interna e da 1ª lei de termodinâmica para sistemas fechados obtém-se o calor liberado e a respectiva taxa de liberação de calor. Na figura 3.2 está apresentado um conjunto de curvas típicas, geradas neste tipo de aplicação.

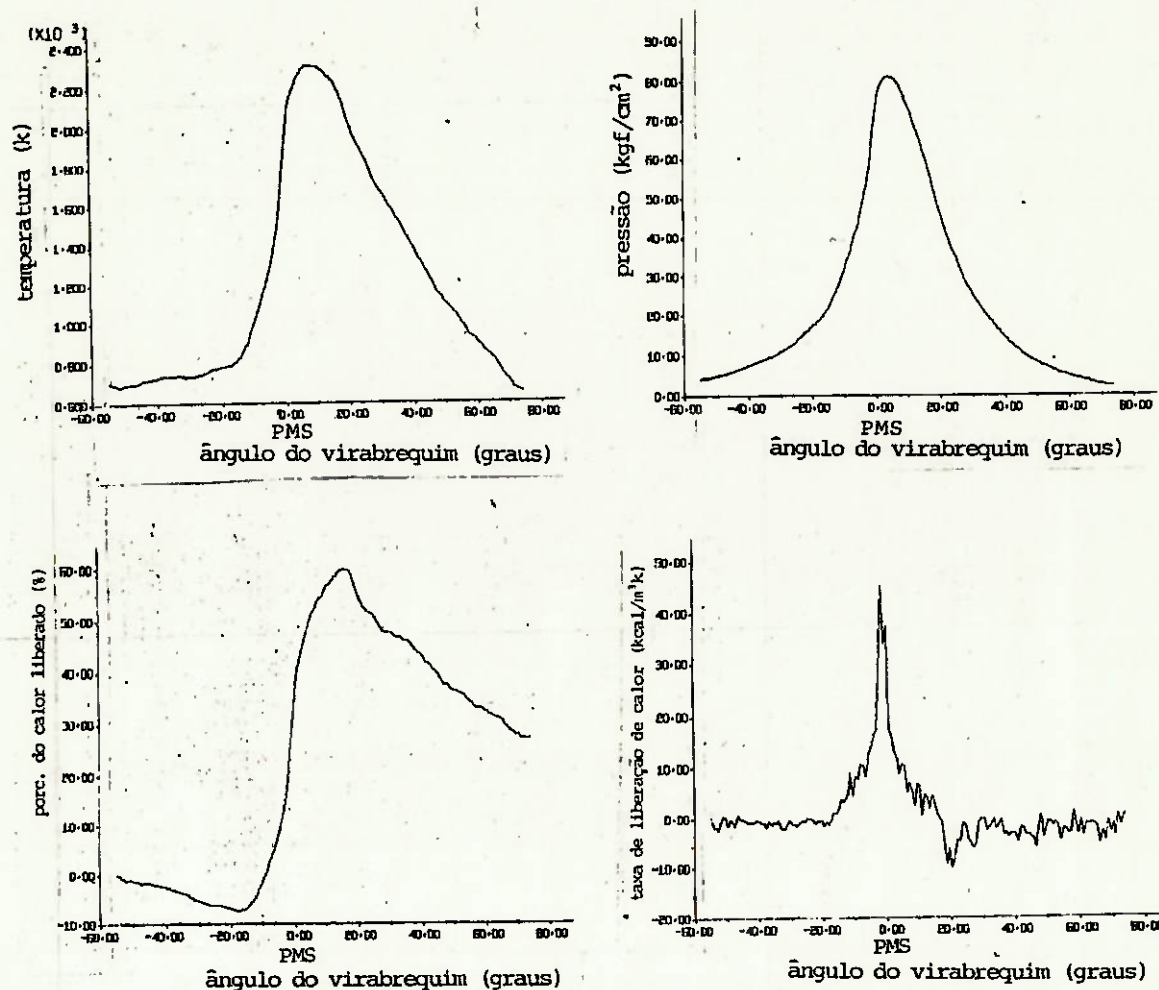


Figura 3.2 - Curvas típicas provenientes de um ensaio de MCI, utilizando o método zero-dimensional [7 e 8].

Uma outra aplicação típica do método zero-dimensional é o estudo paramétrico do efeito das variações de projeto e condições de operação do MCI, desde que mantidas as condições de simetria no escoamento e combustão, sobre a potência, eficiência e emissão de NO_x. Na figura 3.3 é apresentado um exemplo de estudo, onde é examinado o efeito da variação da taxa de compressão sobre o consumo de um MCI.

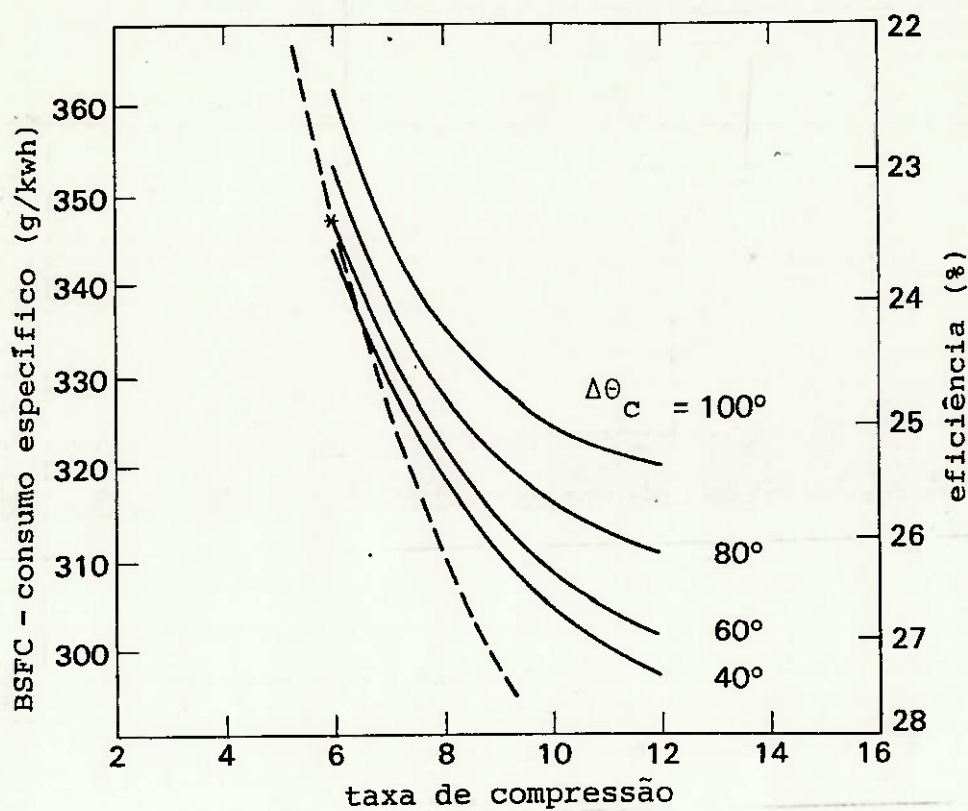


Figura 3.3 - Estudo paramétrico do efeito da variação da taxa de compressão sobre o consumo, utilizando o método zero-dimensional [11].

Em relação aos métodos quasi-dimensional e multidimensional o método zero-dimensional apresenta uma menor complexidade em termos de abordagens física e matemática do problema. Oferece uma expressiva previsão do desempenho de MCI existentes, complementando os resultados experimentais, tendo, contudo, menos sucesso na avaliação de projetos modificados.

O método zero-dimensional pode prever informações sobre a operação e emissão do MCI, em função do efeito de determinadas modificações no projeto e nas variáveis de operação, quando as modificações do escoamento e do processo de combustão não são fatores dominantes do problema.

As principais vantagens do método zero-dimensional são destacadas a seguir:

- os sub-modelos são baseados em formulações físicas fundamentais, representando a compreensão do fenômeno, sendo que a validade da descrição é relativamente fácil de ser verificada, através da comparação entre a teoria e os dados experimentais;
- o analista, com base no entendimento físico e dados disponíveis, tem completo controle sobre quais os fenômenos a serem incluídos e o nível de detalhe apropriado para cada um;
- o sistema computacional utilizado é relativamente simples, não exigindo alta demanda de memória, apresentando um baixo custo de processamento.

Entre as desvantagens ressalta-se:

- ausência de detalhamento espacial das variáveis dependentes envolvidas, pressão, velocidade, temperatura, componentes de espécies;
- necessidade de especificação a priori da taxa de combustão;
- os fenômenos que ocorrem em MCI são suficientemente complexos, sendo que a obtenção de uma formulação em sub-modelos globais adequada, seja por falta de um entendimento físico ou de dados, é extremamente difícil;

- a maioria dos sub-modelos são independentes e ligados pela simulação global termodinâmica, sendo difícil assegurar um bom grau de interação dos vários fenômenos.

3.2 Quasi-Dimensional

Os métodos zero e quasi-dimensional têm estruturação termodinâmica idêntica e são também conhecidos conjuntamente como métodos de análise global ou métodos termoquímicos.

O método quasi-dimensional em relação ao zero-dimensional incorpora dois sub-modelos fenomenológicos baseados em relevantes hipóteses físico-químicas, a saber, um sub-modelo empírico para representar o processo de mistura ar-combustível e um outro para a combustão (figura 3.1). O objetivo é introduzir um acoplamento que existe entre o projeto de MCI e as condições de operação com o processo de combustão, sem a complexidade dos modelos multidimensionais.

3.2.1 Processo de Combustão

Um sub-modelo aproximado [11] para MCI de ignição por faísca admite que a área da frente de chama, assumida como uma seção superficial de esfera, propaga-se através da mistura não queimada a velocidade turbulenta. Desta forma, a taxa de combustão é dada por:

$$\frac{dx_p}{d\theta} = \rho_u A_f S_T \quad (3.7)$$

Um sub-modelo alternativo foi desenvolvido por Tabaczynski, [11] no qual o processo de propagação de chama é admitido como uma primeira fase de arraste turbulento da mistura não queimada para a frente de chama, sendo seguida por um processo de queima laminar com uma escala de comprimento característico. Assim, a taxa de arraste de massa para a frente de chama é dada por:

$$\frac{dx_e}{d\theta} = \rho_u A_f u_e \quad (3.8)$$

E, a correspondente taxa de combustão, é dada por:

$$\frac{dx_b}{d\theta} = (x_e - x_b) / \zeta \quad (3.9)$$

Vale ressaltar que o sub-modelo de Tabaczynski [11], admite a divisão do processo de combustão em duas fases, ou seja, o atraso de ignição, que é a queima de um turbilhão individual, e a fase de combustão plenamente desenvolvida, que é o arraste e queima de vários turbilhões.

3.2.2 Resultados Típicos

Um tipo de aplicação envolvendo variação no processo de combustão é o estudo da influência da recirculação do gás de escape (RGE), para diversos pontos de faísca da vela, sobre o atraso resultante da ignição da massa [11]. Na figura 3.4 estão representadas as curvas características deste fenômeno.

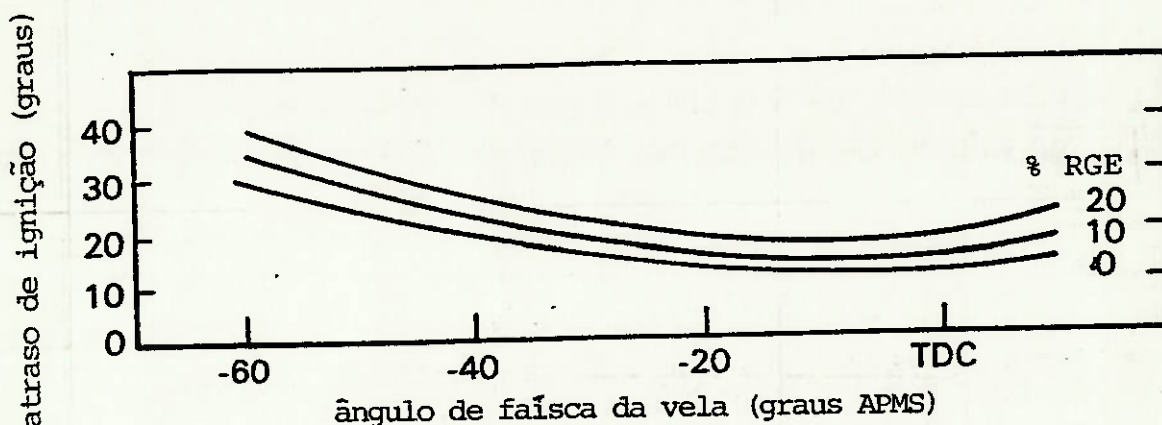


Figura 3.4 - Resultados do método quasi-dimensional, indicando o atraso de ignição em função do ponto de faísca da vela, para diversas porcentagens de recirculação do gás de escape (RGE) [11].

Uma aplicação, onde é importante a modelagem do processo de mistura ar-combustível, é a previsão de emissão de NOx em função do ângulo de injeção para MCI de câmaras de carga-estratificada. Na figura 3.5 estão sintetizados os resultados deste estudo em comparação com os dados experimentais [11].

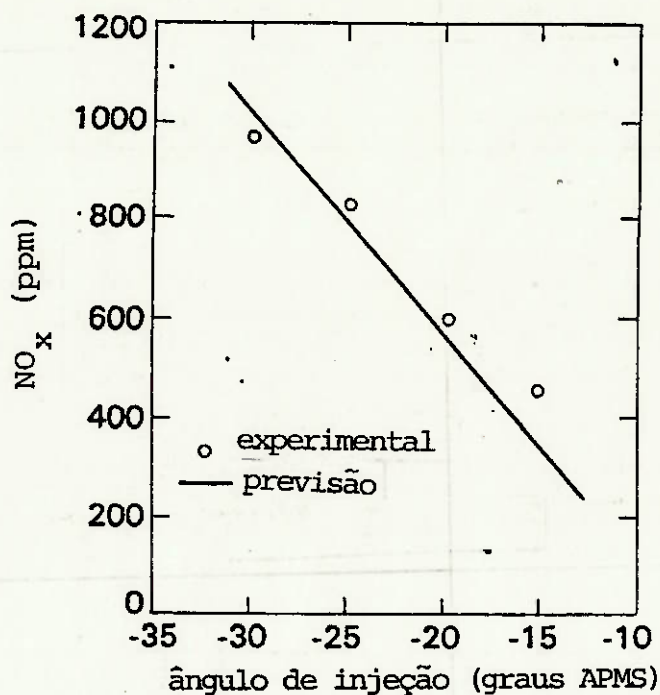


Figura 3.5 - Resultados comparativos da emissão de NO_x prevista, através do método quasi-dimensional, com os dados experimentais [11].

O método quasi-dimensional tem capacidade de análise superior ao método zero-dimensional, visto que retira da avaliação do problema o vínculo da limitação de identidade do processo de combustão. Desta forma, pode prever informações sobre a operação e emissão do MCI, em função do efeito de determinadas modificações de projeto e variáveis de operação, mesmo quando há alterações no processo de combustão. Nestas condições, para que a avaliação tenha precisão é imperativo que o sub-modelo usado para o processo de combustão incorpore variáveis que quantifiquem as modificações sob análise.

De forma similar ao método zero-dimensional, os custos computacionais do método quasi-dimensional são baixos, sendo que ambos deverão ainda por um bom tempo desenvolver um importante papel na análise de MCI e ser a base de simulação.

Entretanto, tendo em vista que os métodos globais não têm a capacidade de examinar e prever as interações dos sub-modelos e as variações espaciais das variáveis dependentes, a análise e o projeto de MCI deverão gradativamente substituir estes métodos, de aplicação mais interpolativa, por métodos mais aproximativos do problema real, de aplicação mais extrapolativa, isto é, os multidimensionais.

3.3 Multidimensional

O método multidimensional tem concepção e natureza diferente em relação aos métodos globais. Neste tipo de método, as equações diferenciais parciais fundamentais de conservação, juntamente com sub-modelos adequados que representam os processos de turbulência, química, camada limite, etc., são resolvidas numericamente, considerando as condições de contorno e iniciais do problema. O objetivo do método é fornecer informações detalhadas sobre a distribuição espacial e temporal da velocidade, pressão, temperatura e componentes do gás no interior do cilindro do MCI, durante os quatro tempos do ciclo.

Uma estrutura do método multidimensional [5] é apresentada na figura 3.6 abaixo. Um conjunto de sub-modelos abrangendo química, turbulência, aproximações do escoamento, escoamento de

multifases, geometria e radiação são aplicados nas equações fundamentais, as quais junto com as condições iniciais e de contorno formam o problema. Em seguida, uma técnica numérica de resolução é adotada ultimando a previsão.

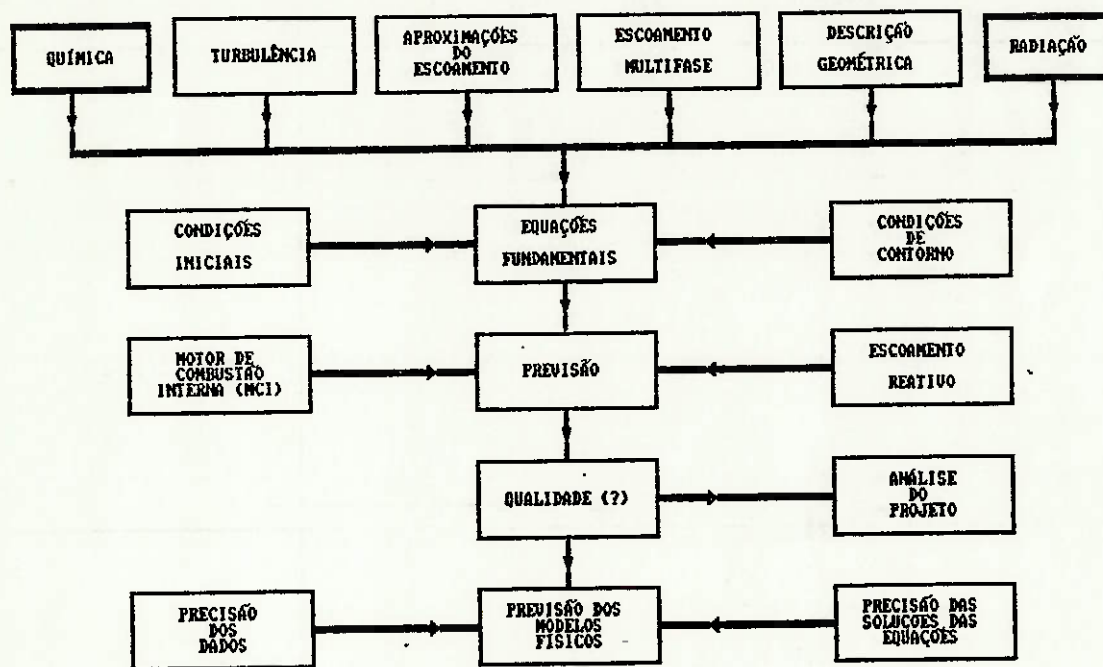


Figura 3.6- Diagrama do método multidimensional [5]

O potencial de realização de um método completo existe, em função da combinação de dois importantes trabalhos em desenvolvimento, a saber, progresso permanente na elaboração de uma detalhada e precisa representação matemática dos processos, e aperfeiçoamento das técnicas numéricas para solução das equações fundamentais. Estes dois campos, quando suficientemente desenvolvidos e combinados, poderão gerar métodos de análise precisos, fornecendo dados sobre configurações ótimas de câmaras de combustão, pontos de abertura de válvulas, avanços de injeção e outras características de projeto de um determinado MCI, tais como, variação no espaço e no tempo na câmara das velocidades, pressões, temperaturas, concentrações ou outras quantificações de interesse.

As representações geométrica e dos processos físico-químicos, através de sub-modelos, envolvidos no domínio da câmara de MCI, aplicados no método multidimensional, serão a seguir discutidos.

3.3.1 Descrição Geométrica

A representação bi-dimensional é adotada e normalmente feita em coordenadas cilíndricas, com a câmara em condições axisimétricas e havendo possibilidade de movimento rotacional do ar sobre o eixo de simetria. Outra possível representação é a planar, aplicada quando o pistão está próximo ao topo, admitindo-se condições simétricas nos planos paralelos à face superior do pistão. Além da escolha de um adequado plano referencial, existem outras técnicas para redução do número de variáveis

independentes, tais como, transformação ou troca de coordenadas. Apesar da geometria das câmaras de MCI ser tri-dimensional, a representação bi-dimensional tem fornecido resultados próximos aos reais [9 e 11].

Atualmente, alguns fatores não justificam a opção pela representação tri-dimensional, a saber:

- falta de precisão comprovada em simulação bi-dimensional;
- grandes cargas de memória e elevados tempos de processamento;
- falta de instrumentação de medida para comparar as previsões.

3.3.2 Turbulência e Aproximações do Escoamento

Cálculos do número de Reynolds em cilindros de MCI mostram que o escoamento é turbulento. Sobre a turbulência não existe ainda uma teoria fundamental completa, entretanto sub-modelos empíricos e semi-empíricos têm comportamento satisfatório em algumas aplicações específicas. Diversos aspectos da turbulência devem ser considerados na análise. O primeiro e básico é o aumento do transporte de massa, quantidade de movimento e energia provocado pela turbulência. Este efeito é normalmente modelado, assumindo-se que o fluxo da difusão turbulenta é proporcional ao gradiente de uma variável dependente. O coeficiente de proporcionalidade é chamado coeficiente de difusividade turbulenta e sua determinação é o principal problema nesta aproximação.

Um outro importante aspecto da turbulência é a existência de estrutura de grande escala, que tem um importante papel na transição do escoamento laminar para turbulento.

A mais simples aproximação da difusividade turbulenta é através de expressões algébricas, sendo o comprimento de mistura de Prandtl um exemplo típico, contudo sua aplicação é inadequada em câmara de MCI.

O nível seguinte de aproximação é através de modelos diferenciais de turbulência, conhecidos também como modelos de fluxo estatístico [11], onde a difusividade turbulenta é obtida pela combinação dimensional de variáveis turbulentas, as quais satisfazem equações diferenciais de transporte adicionais. O sub-modelo deste tipo mais amplamente usado é o K- ϵ , onde K é a energia cinética turbulenta e ϵ é a taxa de dissipação. Este sub-modelo apresenta boa representação em vários casos, contudo falha quando estruturas de grande escala têm papel importante, ou o escoamento turbulento é anisotrópico.

Uma outra alternativa em desenvolvimento é a aproximação da difusividade turbulenta por modelos de simulação de turbilhão [11]. Um sub-modelo que tem tido relevante expansão é o SGS (escala de sub-malha). A idéia básica neste caso é modelar somente os movimentos turbulentos pequenos que não são precisamente representados pela malha aplicada. As escalas maiores de movimento são normalmente calculadas como efeito convectivo.

A tendência atual para a representação da turbulência em câmaras de MCI é a aplicação do sub-modelo SGS, modelando os

pequenos movimentos turbulentos através do sub-modelo diferencial K- ϵ .

A turbulência da chama é o efeito de menor conhecimento e de maior dificuldade de modelagem. É convencional distinguir entre as chamas turbulentas, as pré-misturadas e de difusão.

Nas chamas pré-misturadas, características de MCI de ciclo Otto, as escalas de comprimento de turbulência têm diferentes efeitos físicos. A menor escala turbulenta aumenta efetivamente a difusão térmica. A velocidade e a espessura da chama, enquanto que a maior escala primariamente deforma ou "enruga" a frente de chama, aumentando assim a velocidade de chama, pois a "chama enrugada" tem maior área superficial e consome maior quantidade de mistura combustível por unidade de tempo.

A mais apropriada forma de calcular as propriedades das chamas turbulenta pré-misturadas parece ser através do sub-modelo SGS, visto que somente as escalas de turbulência menores que Δz contribuem para a difusividade turbulenta, enquanto que o efeito de "enrugamento" da chama é automaticamente representado como efeito convectivo. Vale ressaltar que parte do "enrugamento" da chama pode ser perdido na representação ou mesmo representado de forma falsa nos modelos bi-dimensionais. Desta forma, o modelo SGS não fornece bases fundamentais para o cálculo da velocidade de chama turbulenta. Entretanto, o sub-modelo pode ser utilizado de forma menos fundamental, isto é, ajustando a taxa de reação química com a difusividade turbulenta, para produzir a correta velocidade de chama, obtida de correlações empíricas.

Para MCI com combustível injetado, onde a chama tem as características da pré-misturada e de difusão, a situação é menos favorável, visto que a velocidade de chama não é bem conhecida e provavelmente varie amplamente no tempo e no espaço. Atualmente, as medidas limitam-se em ajustar as taxas de reação química para fornecer aproximadamente a correta duração da queima. Neste caso, os detalhes históricos da queima não são precisamente avaliados.

O MCI com combustível injetado apresenta dificuldades para a simulação numérica, pois produz ao contrário do MCI com combustível aspirado uma mistura não homogênea de ar-combustível, a qual é desejável, por exemplo, em motores de carga estratificada. O jato é composto de um grande número de pequenas gotas com um amplo espectro de tamanho. Existem duas técnicas para a modelagem do jato, levando em conta suas interações com o escoamento interno no cilindro. A primeira é através de uma descrição contínua, baseada em conceitos estatísticos, assumindo que a função distribuição pode ser definida localmente para o jato. A função distribuição simula, na verdade, um elevado número de gotas e é representada num determinado ponto do espaço por sua posição, velocidade, raio e temperatura. Esta distribuição é equacionada através de expressões matemáticas, contudo o elevado número de variáveis independentes envolvidas (tempo, duas ou três de posição, duas ou três componentes de velocidade, raio, temperatura e outras possíveis) torna a sua aplicação menos atrativa.

A segunda técnica é o método da partícula discreta (método de Monte Carlo). É também um método estatístico, porém o jato é

representado por partículas discretas computacionais, cada qual por sua vez representando um grupo de gotas de características similares, tais como, tamanho, temperatura, etc. Na realidade, é realizada uma amostragem estatística da função distribuição e as partículas discretas resultantes (parcelas ou grupos de gotas) interagem e trocam massa, quantidade de movimento e energia com o gás do meio.

O sub-modelo de partícula discreta tem aplicação mais difundida, sendo limitada para avaliação de jatos finos, onde as interações entre partículas não são importantes. A inclusão de jatos densos envolve o efeito do volume deslocado e a aglomeração devido às colisões. O principal efeito da turbulência em jatos é a difusão de partículas, porém como cada partícula discreta representa um grupo de gotas, os efeitos de dispersão ou espalhamento do grupo não são representados. Outra dificuldade sobre o uso deste sub-modelo é a necessidade de dados sobre as características do bico injetor, tais como, tamanho de gotas e distribuição de velocidade.

O sub-modelo de partícula discreta necessita de sub-modelos para especificar a interação das gotas com o seu meio, com o gás externo e com as paredes do cilindro.

Além disso, efeitos como, alta pressão, circulação interna de gotas, combustíveis com multicomponentes, decomposição do combustível, interação das gotas com as paredes ou obstáculos, não foram ainda formulados.

3.3.3 Reações Químicas

Mesmo para reações químicas simples estão envolvidos complexos mecanismos, grande número de passagens por reações e espécies químicas intermediárias. Para o cálculo numérico de escoamento reativo existem sérias restrições nos mecanismos de reações, para que o processamento (tempo e memória) seja possível. Além destas limitações, existe a necessidade do detalhamento do mecanismo das reações químicas. Utiliza-se na análise multidimensional esquemas globais simplificados de cinética química, onde as reações de interesse são modeladas para pequenos números de reações e de espécies químicas. Estes esquemas foram desenvolvidos para poucos combustíveis e o trabalho na área continua.

Por outro lado, além do consumo de combustível, outra importante análise é a formação de poluentes. O mecanismo de Zeldovich, apresentado no método zero-dimensional (item 3.1) é utilizado para a previsão de NO_x , não existindo atualmente sub-modelo mais completo. Sub-modelos de previsão mais complexos de geração de fuligem e hidrocarbonetos não queimados, na área resfriada próxima à parede, também estão em desenvolvimento.

Nos problemas reativos, em geral a escala do tempo químico é muito menor que a do tempo para as características fluido-dinâmicas. É ineficiente o uso da variação do tempo (Δt) pela menor escala. Por outro lado, as variáveis que necessitam de um intervalo de tempo pequeno, estabilizam-se para variações quase permanentes depois de um pequeno transiente inicial, podendo ser aumentados a partir deste ponto os intervalos (Δt).

Técnicas com bases químicas, assumir certas reações em equilíbrio e solução por procedimento cinético são por vezes utilizadas.

No tocante a solução numérica da chama, é frequentemente encontrada a situação em que a espessura da chama δ é menor que o comprimento espacial da resolução Δz , necessário para representar outras características do campo de escoamento. Em chamas laminares onde esta situação é mais frequente, a frente de chama é normalmente representada por uma descontinuidade, porém a velocidade da chama deve ser especificada, apresentando assim, a desvantagem desta especificação. No caso de chamas turbulentas o cálculo de propagação de chama ainda não está disponível, devendo-se recorrer a correlações empíricas, similares às utilizadas no método quasi-dimensional.

Um outro método alternativo bastante usado para a solução de chamas finais é aumentar artificialmente a espessura destas, através de uma elevação proporcional da difusividade térmica por um fator β ($\beta > 1$), enquanto reduz-se a taxa de reação $1/\beta$. Esta transformação tem o efeito de aumentar a espessura da chama na razão do valor β . Nestas condições, a velocidade da chama é mantida constante, visto que a escala da chama permanece fina comparada com as outras escalas de medida do campo de escoamento. Além disso, como o fator β pode ser dependente do espaço e do tempo, a difusividade térmica em regiões longe da chama pode ser multiplicada por $\beta \approx 1$, a fim de não incorrer em erros na transferência de calor.

3.3.4 Condições de Contorno

As camadas limite de velocidade e temperatura nos cilindros de MCI são muito finas para possibilitar a resolução explícita através da estrutura da malha. No entanto, a sua existência não pode ser desprezada, pois determinam os fluxos de quantidade de movimento e calor para as paredes, as quais são essencialmente as condições de contorno para a simulação numérica. As correlações de atrito viscoso e de troca de calor desenvolvidas empiricamente não são úteis, visto que são especificadas para uma geometria particular e são de natureza global (fluxo integrado sobre todo o cilindro). Necessita-se de fluxos locais para a simulação numérica multidimensional.

Desde que a camada limite é turbulenta, pode-se aplicar a "lei logaritmica da parede" para a determinação dos fluxos. Deve-se, contudo, assumir na sua aplicação que a célula da malha mais próxima da parede esteja contida na região da lei, além disso é importante ter em mente que esta lei é válida para escoamento permanente em superfícies retas, sendo questionável a sua aplicação em escoamentos transitórios com possíveis recirculações.

As características internas da câmara indicam que as equações diferenciais são do tipo elípticas.

Finalizando, ressalta-se que as condições de contorno podem ser ficticiamente acertadas, por exemplo, bloquear a atividade de certos volumes de controle para amoldar superfícies irregulares,

ou usar altos valores de viscosidade para aproximar a velocidade de uma fronteira a zero.

3.3.5 Equação Fundamental

O método multidimensional, utilizando as aproximações e os sub-modelos acima mencionados, prevê a solução da equação diferencial parcial fundamental generalizada, dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) + \text{div} (\rho\vec{u}\phi) = \text{div} (\Gamma_{\phi}(\text{grad}\phi)) + S_{\phi} \quad (3.10)$$

As equações específicas, continuidade, quantidade de movimento, energia e conservação de espécies, são derivadas desta equação após as devidas substituições.

A solução numérica através do MDF e MEF é alcançada discretizando a equação acima, estruturando a região contínua em elementos discretos. Existem diversos esquemas para formação das equações algébricas discretizadas, por exemplo, diferenças centrais ou exponencial no MDF e cálculo variacional ou princípio dos mínimos pesos residuais no MEF. A convergência da solução numérica é alcançada, vinculando o esquema adotado ao número de Péclet e utilizando fatores conhecidos como viscosidades artificiais, nos termos de convecção, para corrigir o erro gerado na discretização. Qualquer que seja o esquema aplicado a convergência deve ser garantida. Outro aspecto importante na solução, considerando que o número de Mach é menor que 0,1, é a estabilidade, avaliada a partir do número de Courant. Neste caso,

os esquemas Crank-Nicholson e implícito são mais favoráveis que o explícito.

3.3.6 Tipos de Abordagem e Aplicações

Feita a apresentação dos principais modelos e sub-modelos físico-químicos aplicados na análise multidimensional de MCI, serão agora descritos os modelos numéricos computacionais, englobando escoamento reativo, em uso e em desenvolvimento pelos mais importantes grupos e organizações que vêm trabalhando ativamente nesta área.

3.3.6.1 Laboratório Nacional de Los Alamos [9]

Os trabalhos neste centro de pesquisa estão voltados para o desenvolvimento de um modelo numérico completo, para a simulação de escoamento reativo em MCI de carga homogênea e de injeção de combustível. A principal ênfase do trabalho é dada ao motor de carga estratificada com injeção direta, porém o modelo foi desenvolvido para uma aplicabilidade geral. O modelo conhecido por "*Conchas Spray*" é bi-dimensional (planar e axisimétrico) e as suas características são:

- uso de equacionamento implícito Eurliano combinado com o método "ALE" ("*Arbitrary Lagrangian-Eulerian Method*");
- possibilidade de escoamento com movimento de rotação dos gases sobre o eixo de simetria;
- único sub-modelo para turbulência SGS;

- equilíbrio químico parcial;
- algoritmo para automaticamente retirar e introduzir células no interior da malha durante os cálculos;
- método para acelerar a convergência da iteração de pressão;
- lei logarítmica turbulenta nas fronteiras;
- sub-modelo de partícula discreta para jatos.

3.3.6.2 Universidade de Princeton [9]

O modelo conhecido por "REC" foi desenvolvido para geometria bi-dimensional. As características são:

- método numérico implícito Euleriano;
- malha retangular;
- sub-modelo de turbulência;
- método descrito com variável de posição axial dependente do tempo.

3.3.6.3 Laboratório de Pesquisa da GM [9]

Dois grupos vêm desenvolvendo modelos na área. Um dos modelos é baseado no modelo "CONCHAS", utilizando o sub-modelo K- ϵ de turbulência. Enquanto que o outro é baseado no modelo desenvolvido pela "Scientific Research Laboratories Inc." para escoamento reativo e apresenta como principais características:

- método numérico implícito linearizado;
- geometria bi-(planar ou axisimétrica) ou tri-dimensional;

- possibilidade de escoamento com movimento de rotação dos gases sobre o eixo de simetria na geometria bi-dimensional;
- sub-modelo de turbulência $k-\epsilon$ associado a sub-modelos na região próxima à parede.

3.3.6.4 "Imperial College" [9]

Esta equipe tem desenvolvido e aplicado modelos numéricos para escoamento não reativo e reativo em câmaras de MCI, incluindo a representação de jatos. A modelagem e suas características serão vistas no capítulo 5, quando será abordada a representação matemática do processo.

Os resultados obtidos através deste método serão comparados com os gerados no desenvolvimento deste trabalho via MEF.

3.3.6.5 Laboratório Nacional Lawrence Livermore [9]

Este instituto tem apresentado diversos cálculos de simulação para MCI, através de modelo bi-dimensional (planar e axisimétrico) em escoamento reativo. O modelo conhecido por "TDC" apresenta as características:

- malha (Euleriana) retangular estacionário;
- capacidade de movimento das fronteiras;
- sub-modelo de turbulência SGS;
- espessamento artificial da chama;
- representação de jatos através da descrição contínua.

Um modelo tri-dimensional, sem a representação de jatos, também foi obtido. Diversos cálculos numéricos têm sido reportados por este Instituto, incluindo escoamento axisimétrico em motores acionados com movimento de válvula, combustão de misturas homogêneas de combustível-ar em câmaras circulares, e injeção de jatos combustíveis líquidos e jatos de gases no interior de câmaras bi-dimensionais com ar estagnado ou em movimento em torno do eixo de simetria.

3.3.6.6 Outras Organizações [9]

Simulações numéricas semelhantes têm sido realizadas por outros grupos, destacando-se:

- "Science Applications, Inc.";
- "University of Maryland";
- "Volkswagenwerk AG";
- "Fiat Research";
- "Polytechnic of Milan";
- "British Leyland Advanced Technology Laboratory".

Deve ser ressaltado o trabalho desenvolvido pela "Volkswagenwerk AG" sobre o estudo do efeito da geometria da câmara de combustão, no consumo de MCI de ciclo Otto da alta taxa de compressão. Foi obtida uma concordância bastante singular entre os cálculos e os resultados experimentais.

O método multidimensional tem potencial, por definição, de produzir análise completa dos fenômenos físico-químicos que ocorrem no interior dos cilindros do MCI, contudo está atualmente

limitado, sobretudo devido a imprecisão dos sub-modelos aplicados.

As técnicas numéricas para solução do método estão surgindo como importantes ferramentas neste desenvolvimento. O progresso na área está ocorrendo de forma incrivelmente rápida, entretanto devido a grande complexidade dos processos envolvidos, ocorrem limitações nas sub-modelagens e toda a previsão obtida necessita de comprovação experimental. As áreas que necessitam de uma melhor representação e desenvolvimento, incluindo os métodos globais, são discriminados abaixo:

- turbulência e propagação de chama turbulenta;
- velocidade e temperatura na camada limite;
- desenvolvimento e validação de esquemas cinéticos globais;
- modelagem de formação de poluentes com o uso de esquemas cinéticos detalhados;
- desenvolvimento e validação de sub-modelos de formação de fuligem e oxidação para MCI de ciclo Diesel;
- desenvolvimento de sub-modelos simplificados de troca de calor por radiação em MCI de ciclo Diesel;
- validação de sub-modelos de jatos espessos;
- melhoria na representação da condição de escoamento através das válvulas.

Apesar da falta de representação de alguns fenômenos físico-químicos, o trabalho continua, sendo que a avaliação através de sub-modelos grosseiros em muitos casos atende a precisão procurada. Na verdade, o grau de sensibilidade de um fenômeno através de sua representação matemática não pode ser avaliada a

priori, necessitando de trabalhos de verificação experimental. Portanto, todos os sub-modelos, incluindo os grosseiros, podem ter boa representação, pois o processo físico-químico não necessita de ampla e detalhada representação; se os resultados obtidos são insensíveis ao detalhe do processo.

Concluindo, vale ressaltar que o progresso da modelagem e técnicas de medição têm tido tal evolução que certamente estará disponível um método amplo multidimensional antes que a última fração de petróleo seja consumida.

4. DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

A análise é efetuada para o domínio deformável, compreendendo a câmara num cilindro confinado com pistão sob acionamento externo. As hipóteses assumidas para a resolução são discriminadas a seguir:

- escoamento axial uni-direcional (movimento radial desprezado);
- escoamento não reativo em regime laminar;
- paredes adiabáticas;
- variações de pressão e temperatura desprezadas ao longo do raio;
- propriedades (viscosidade, condutibilidade térmica, calor específico) uniformes;
- cilindro e pistão perfeitamente circulares com folga desprezível;
- altura da biela \gg raio de manivela;
- o regime de funcionamento é permanente, com rotação constante e condições externas uniformes, sendo o escoamento submetido a variações cíclicas uniformes;
- no termo de energia dado pela entalpia de estagnação $(C_v T + p/\rho + u^2/2)$ é desprezada a parcela da energia cinética, sendo a energia específica dada por $C_p T$;
- gás com comportamento de gás perfeito.

A configuração adotada é dada segundo o modelo esquemático da figura 4.1.

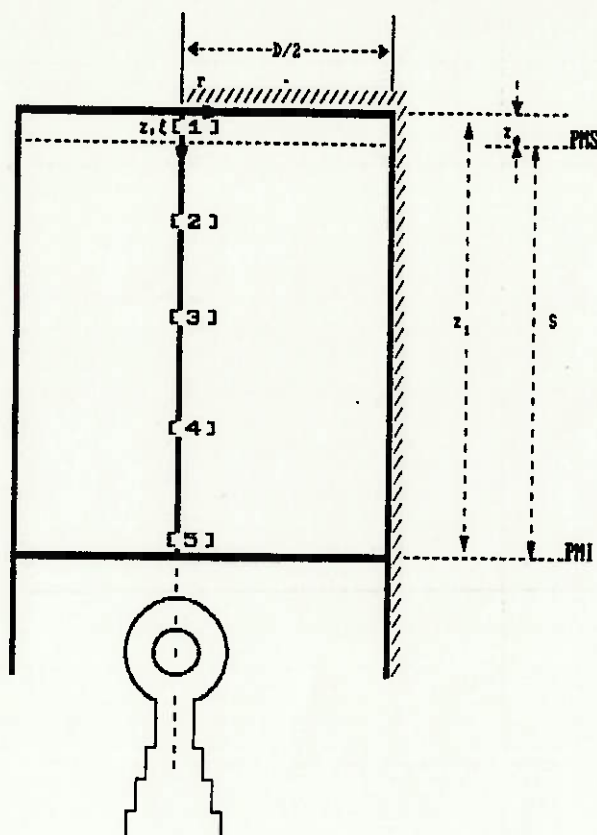


Figura 4.1 - Modelo esquemático do cilindro com malha unidimensional

As características e grandezas típicas do modelo são:

- S - curso do pistão : 0,13 m
 D - diâmetro do pistão : 0,13 m
 z_0 - altura mínima do pistão (PMS): 0,01m
 z_1 - altura máxima do pistão (PMI): 0,14m
 V_{PMI} - volume do cilindro em PMI: 1.858,2 cm³
 V_{PMS} - volume do cilindro em PMS: 132,7 cm³
 V_D - volume deslocado ($V_{PMI} - V_{PMS}$): 1.715,5 cm³
 r_v - relação de compressão (V_{PMI}/V_{PMS}): 14
 \bar{r} - raio de manivela: 0,065 m
 θ - ângulo do eixo de manivela em relação ao PMS

z_p - altura instantânea do pistão: $z_p = z_0 + \bar{r} (1 - \cos\theta)$ (m) (4.1)

n - rotação do motor (rpm)

u_p - velocidade instantânea do pistão:

$$\frac{\pi n \bar{r}}{30} \sin\theta \quad (\text{m/s}) (4.2)$$

u - velocidade média do pistão:

$$\frac{Sn}{30} \quad (\text{m/s}) (4.3)$$

a_p - aceleração instantânea do pistão:

$$\frac{\pi^2 n^2 \bar{r}}{900} \cos\theta \quad (\text{m/s}^2) (4.4)$$

z - variável independente axial

ξ - variável independente axial adimensional: z/z_p

u - velocidade axial do fluido em relação a z

ξu_p - velocidade axial da superfície coordenada em relação a z

\tilde{u} - velocidade relativa do fluido em relação a superfície coordenada: $u - \xi u_p$

t - variável independente de tempo:

- número de nós do grid: 5 (espaçados em 25%)

Δz_p - passo espacial da solução: 0,00125 m

Δt - passo temporal da solução: derivado de Δz_p , dado por $\Delta\theta/120$

A rotação do motor (n) adotada nos cálculos foi de 20 rpm. Nestas condições, os valores do número de Reynolds para velocidades do pistão média e máxima são 712 e 1119, respectivamente. O número de Courant ($4u_p \Delta t / z_p$) máximo encontrado no cálculo do ciclo é de 0,88 no ponto imediatamente após o PMS, contudo na maior parte do ciclo o seu valor absoluto

não ultrapassa 0,01. A variação do número de Péclet ($z_p/4 \rho u_p/\mu$) ficou compreendida entre -298 e 234, para o campo de escoamento.

A solução é varrida no transiente de um ciclo, composto de uma compressão e expansão, iniciando e finalizando no PMI.

A partir da equação fundamental 3.10 é obtida a equação específica para este problema, considerando as transformações de variável (ξ) e de velocidade (\tilde{u}).

$$\frac{1}{z_p} \frac{\partial}{\partial t} (\rho z \phi) + \frac{1}{z_p} \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \tilde{u} \phi) - \frac{\Gamma \phi}{z_p} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} = S_\phi \quad (4.5)$$

As quatro equações particulares envolvidas no problema são dadas a seguir.

- continuidade

$$L(\rho) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{z_p} \frac{\partial m}{\partial \xi} + \frac{\rho u_p}{z_p} = 0 \quad (4.6)$$

- quantidade de movimento

$$L(m) = \frac{\partial m}{\partial t} + \frac{1}{z_p} \frac{\partial (m \tilde{u})}{\partial \xi} + \frac{m u_p}{z_p} + \frac{1}{z_p} \frac{\partial p}{\partial \xi} - \frac{4}{3} \frac{\mu}{z_p^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} = 0 \quad (4.7)$$

- energia

$$L(j) = C_p \frac{\partial j}{\partial t} + \frac{C_p}{z_p} \frac{\partial}{\partial \xi} (j \tilde{u}) + \frac{C_p j \tilde{u}}{z_p} - \frac{K^*}{z_p^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} - \frac{\partial p}{\partial t} \quad (4.8)$$

$$- \frac{\tilde{u}}{z_p} \frac{\partial p}{\partial \xi} - \frac{4}{3} \frac{\mu}{z_p^2} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} \right)^2 = 0$$

- estado (gases perfeitos)

$$L(p) = .p - R*j = 0 \quad (4.9)$$

Nas condições de contorno são consideradas fronteiras compostas de paredes impermeáveis e adiabáticas, prevalecendo o princípio da aderência. O movimento do pistão está representado de forma intrínseca nas equações. A quantidade u_p/z_p representa a contração e expansão da fronteira, provocada pelo movimento do pistão. As condições de contorno sintetizadas são:

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= 0 \text{ ou } u = 0 \text{ em } \left[\begin{array}{l} z = 0 \text{ ou } \xi = 0; \\ z = z_p \text{ ou } \xi = 1; \end{array} \right. \\ k * \frac{\partial t}{\partial \xi} &= 0 \text{ em } \left[\begin{array}{l} z = 0 \text{ ou } \xi = 0 \text{ e} \\ z = z_p \text{ ou } \xi = 1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

As condições iniciais ($t = 0$) uniformes assumidas são velocidade (\tilde{u}) nula, pressão e temperatura atmosféricas.

5. APLICAÇÃO DO MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS (MDF)

O objetivo do presente capítulo é complementar as informações do método multidimensional baseado no MDF. Neste sentido foi escolhido o método "RPM" (*"Reciprocating Piston Motion"*), desenvolvido pelo *"Imperial College of Science and Technology"* [11 e 16], onde são apresentados detalhes constitutivos do método, procedimento de cálculo e resultados de simulação para o problema definido no capítulo 4.

A versão inicial do método, oriundo de 1973, apresentava um procedimento de solução das equações diferenciais fundamentais através do MDF para escoamento laminar, não reativo, axisimétrico, em câmara de cilindro confinado e acionado. Com o tempo o método foi aperfeiçoado para incorporar configurações mais reais e complexas, tais como, escoamento turbulento com movimento de rotação do ar, pistão e câmara de combustão com múltiplas formas, abertura e fechamento de válvulas.

O método "RPM" é um procedimento numérico e geral, para solucionar o conjunto de equações diferenciais parciais não lineares, que representam os processos no MCI, em particular, o movimento de oscilação periódica do pistão. As simplificações adotadas, principalmente ausência de combustão, permitem que os resultados da simulação sejam precisamente aferidos com os dados experimentais, possibilitando maior sucesso em aplicações evolutivas.

A principal característica do método é a "malha-sanfona", que tem a capacidade de contrair e expandir em função do movimento ascendente e descendente do pistão.

A representação inicial foi obtida para escoamento laminar, em seguida foi sintetizada a representação do escoamento turbulento, utilizando o sub-modelo K- ϵ . A escolha do sub-modelo K- ϵ em alternativa ao SGS foi devido a possibilidade de simplificações em sistemas bi-dimensionais e aplicação mais consagrada neste tipo de problema.

Mesmo para escoamento laminar o conjunto de equações diferenciais é de difícil solução, sendo que a natureza não linear com as necessárias interligações das equações, aliada a situações de escoamento mais complexas, como por exemplo, recirculação, exigem um método numérico para o cálculo.

Na solução do escoamento turbulento, há dificuldades adicionais, pois o sub-modelo turbulento adotado (K- ϵ) incorpora novos termos desconhecidos, que são resolvidos através de equações diferenciais adicionais.

No equacionamento do escoamento turbulento, as variáveis dependentes juntamente com as velocidades foram consideradas compostas por termos médios e de flutuação. Os novos termos adicionais englobando as variáveis flutuantes foram representadas via uma lei tipo Newtoniana pela nova grandeza de proporcionalidade desconhecida, viscosidade turbulenta, que por sua vez é assumida como função direta das novas variáveis K- ϵ .

A equação geral fundamental na sua forma final para escoamento turbulento é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u\phi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\rho v\phi) - \frac{\partial}{\partial z} (\Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial z}) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial r}) - S_{\phi} = 0 \quad (5.1)$$

As variáveis dependentes médias são idênticas às instantâneas exemplificadas para o caso laminar (4.5), sendo que no caso da equação da energia é incluído o termo $K/2$. O termo Γ_{ϕ} representa a difusividade efetiva. A discriminação deste termo, bem como do coeficiente S_{ϕ} , de acordo com a equação específica, é fornecida no anexo 1.

Na figura 5.1, estão esquematizados o tipo de câmara de um cilindro confinado e a malha aplicada na condição axisimétrica para discretização das equações diferenciais, segundo o MDF. No esquema lateral, à direita, uma parte típica do malha está representada, onde são definidos os locais de cálculo das variáveis dependentes. As velocidades axial e radial são situadas sobre as interfaces dos volumes de controle, enquanto que as demais variáveis são calculadas nos nós, posicionados no centro dos volumes de controle.

A equação 5.1, após a transformação de variáveis para representar a fronteira móvel, é discretizada, utilizando expansão por série finitas de Taylor, aplicando em seguida o esquema implícito. A solução do conjunto de equações algébricas, para cada passo temporal, é obtida de forma iterativa, onde são ajustados e balanceados os campos de pressão e velocidade. O esquema aplicado para solução espacial é o "híbrido-escoamento

avançado", sendo o termo S_ϕ linearizado e aproximado por diferenças centrais.

linearizado e aproximado por

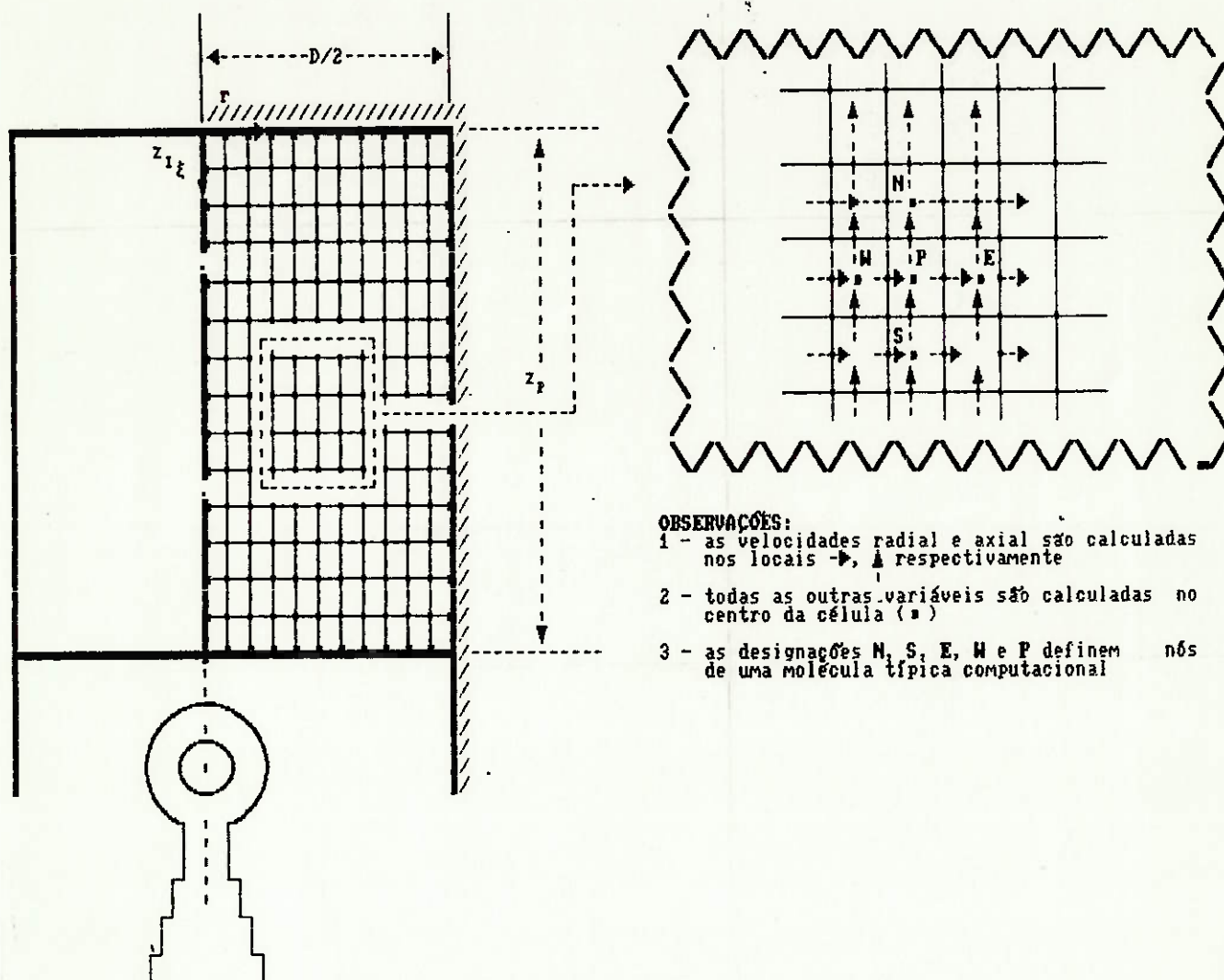


Figura 5.1 - Câmara em cilindro confinado - malha empregada no cálculo MDF e localização de variáveis [11]

O método "RPM" foi aplicado para resolução do escoamento laminar sob condições isoentrópicas e axialmente unidimensional, similar ao problema definido no capítulo 4. Estas condições estão vinculadas a baixa velocidade do pistão, paredes da câmara adiabáticas e movimento radial desprezado, como na região central de um cilindro com alta relação diâmetro/curso. Nestas circunstâncias, as variações de pressão e temperatura ao longo do raio podem ser desprezadas, conseqüentemente a densidade será uniforme. A viscosidade e a condutibilidade térmica, dependentes em primeira ordem da temperatura, também terão comportamento uniforme.

Nestas condições as equações fundamentais são simplificadas, podendo ser gerada uma solução analítica com os seguintes resultados [11 e 16]:

$$\frac{u}{u_p} = \xi \quad (5.2)$$

$$\frac{p-p_0}{\rho^0 S |a_{p.m\grave{a}x}|} = \frac{-a_p}{|a_{p.m\grave{a}x}|} \frac{\xi^2}{2} \quad (5.3)$$

$$\frac{T}{T^0} = \left[\frac{S + z_0}{z_p} \right] \frac{R^*}{C_p - R^*} \quad (5.4)$$

Do resultado analítico, algumas constatações podem ser diretamente obtidas :

- a temperatura obedece o comportamento segundo o processo termodinâmico isoentrópico;
- a velocidade aumenta linearmente do cabeçote do cilindro para a superfície do pistão;
- a tensão normal du/dz sobre o escoamento é uniforme (u_p/z_p);
- a pressão tem variação quadrática direta com ξ e oposta com a aceleração.

Por outro lado, a solução do método multidimensional "RPM", comparada com os resultados analíticos acima, apresenta as seguintes relações [11 e 16]:

- a equação da continuidade (5.2) é plenamente satisfeita;
- a pressão adimensional (5.3) é avaliada com um erro percentual de π/N , onde N é o número de intervalos de tempo adotados na solução, portanto para um período de tempo correspondente a 3° de ângulo de virabrequim (θ) o erro é de cerca 2,6%;
- a temperatura adimensional (5.4) é avaliada com pequeno erro percentual dado por $8\pi^2/N^2$, isto é, cerca de 0,5% para $\theta = 3^\circ$;
- o método reproduz a reversibilidade da solução analítica.

O autor do trabalho [11 e 16] afirma que a boa concordância do método não foi conseguida por acaso, visto que foi necessária uma série de ajustes, especialmente no termo de geração S_ϕ , para que o comportamento reversível fosse atingido.

Nos trabalhos [11 e 16] são analisadas seis configurações adicionais de câmara, mais representativas do MCI. Resultado particularmente interessante foi obtido para regime turbulento com a configuração apresentada no capítulo 4, cujos resultados analíticos para regime laminar foram apresentados acima. Foi

observado que os vetores de velocidade na maior parte do ciclo de simulação têm característica axialmente uni-direcional, variando em módulo não mais que 10% em relação aos valores previstos na solução analítica para escoamento laminar, equação (5.2). Comportamento diverso ocorre nas regiões da câmara quando o pistão está próximo ao PMS e PMI, onde os efeitos combinados de inércia, tensão viscosa e gradiente de pressão oposta produzem um vórtice de baixa intensidade.

6. APLICAÇÃO DO METODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF)

O conceito básico do MEF é o princípio da extremização do variacional, similar ao princípio da mínima energia potencial, tradicionalmente utilizado em problemas de meio sólido, para obtenção do conjunto de equações de equilíbrio de cada elemento. O ponto fundamental está que um corpo atinge o estado de equilíbrio, quando a energia é mínima.

Apesar do conceito original do MEF ter mais de um século de existência, somente em 1972 surgiram as primeiras soluções para problemas de escoamentos não lineares. A aplicação direta da teoria clássica do MEF em problemas de escoamento não é possível, pois a expressão da conservação da quantidade de movimento é explicitamente não linear, devido a sua forma tipicamente euleriana. Esta característica explica a opção natural de solução pelo MDF, onde as derivadas parciais são substituídas por quociente de diferenças finitas. A viabilização do MEF para problemas de escoamento foi obtida através da integração das equações fundamentais de conservação sobre o domínio discretizado, utilizando o teorema da divergência de Green, e substituindo os fluxos nas células por quocientes de diferenças, produzindo volumes finitos.

O procedimento para aplicação do MEF segue a seguinte sequência:

- Discretização do meio: É o processo onde o meio contínuo é subdividido num sistema de elementos finitos equivalentes. O MEF tem a vantagem de melhor representar domínios irregulares,

através de elementos em forma de triângulos ou quadriláteros e tetraedros ou hexaedros em representações bi e tri-dimensionais, respectivamente. Não existe uma receita pré-estabelecida para a discretização, em geral maiores concentrações de elementos são aplicadas em regiões de altos gradientes e próximos ao contorno do domínio. O número de elementos afeta a convergência e a precisão da solução.

- Seleção do modelo de função: A distribuição exata da variável dependente (q_α) é aproximada por uma função, normalmente do tipo polinomial. A partir do grau do polinômio k escolhido, é feita a representação da variável no domínio através de base cardinal matricial $\{N_k\}$, onde: $q_\alpha = \sum_e q_\alpha^e$ e $q_\alpha^e = \{N_k\}^T \{Q\}_e$. Na construção da base cardinal são escolhidos os graus de liberdade dos elementos e o sistema de coordenada.
- Elaboração do sistema de matriz para o elemento finito: Utilizando a aproximação da variável dependente através da base cardinal e o princípio variacional ou método de pesos residuais, é obtido para o elemento um sistema matricial em equilíbrio do tipo: $[K] \{Q\} = \{F\}$, onde $[K]$ é a matriz de dados do meio, englobando as respectivas propriedades; $\{Q\}$ é a matriz dos valores nodais desconhecidos da variável dependente e $\{F\}$ é a matriz de informações conhecidas do meio, englobando valores internos e de contorno.
- Elaboração do sistema algébrico para o domínio discretizado: É feita a combinação dos sistemas de matrizes individuais de cada elemento, obtendo-se o sistema algébrico do domínio a ser

resolvido por técnica matemática, por exemplo, método iterativo de Newton e inversão de matrizes.

Na solução do problema presente, descrito no capítulo 4, foi utilizado o princípio dos mínimos pesos residuais e o método de iteração de Newton para o alcance da convergência do algoritmo matricial.

A equação diferencial fundamental do problema, incorporando a transformação de variáveis para representar o movimento do pistão, foi dada em (4.5). Para auxiliar a apresentação da metodologia será utilizada para a equação fundamental a formulação genérica uni-dimensional dada por:

$$L(q_\alpha) = \frac{\partial q_\alpha}{\partial t} + \frac{1}{z_p} \frac{\partial}{\partial \xi} (\bar{u} q_\alpha + f_\alpha) = 0 \quad (6.1)$$

A aproximação semi-discreta $q_\alpha^h(\xi, t)$ da solução exata da variável dependente $q_\alpha(\xi, t)$ é obtida através do emprego de distribuições polinomiais truncadas de grau k , definidas sobre o domínio discretizado.

$$q_\alpha(\xi, t) \approx q_\alpha^h(\xi, t) = \sum_{e=1}^M q_\alpha^e(\xi, t) \quad (6.2)$$

onde:

$$q_\alpha^e(\xi, t) = \{N_k(\xi)\}^T \{QI(t)\}$$

Utilizando o procedimento dos mínimos pesos residuais, o algoritmo genérico do elemento finito é dado por:

$$\int_{R^n} \{N_k\} L(q_\alpha^h) d\xi + \beta_1 \int_{\partial R} \{N_k\} \ell(q_\alpha^h) d\xi + \beta_2 \int_{R^n} \{N_k\} \nabla L(q_\alpha^h) d\xi \equiv \{0\} \quad (6.3)$$

Esta expressão fornece para cada variável dependente (4.6 a 4.9) a equação algébrica matricial, cuja forma genérica é dada por:

$$L(\{QI\}) = [C] \{QI\}' + ([U] + [K] + [H]) \{QI\} + \{FIJ\} \{QJ\} \equiv \{0\} \quad (6.4)$$

A solução desta equação é alcançada utilizando expansão por série.

$$\{FI\} = \{QI\}_{j+1} - \{QI\}_j - \Delta t \left[\psi \{QI\}'_{j+1} + (1-\psi) \{QI\}'_j \right] \equiv \{0\} \quad (6.5)$$

Em seguida é aplicado o método de iteração de Newton, cujo algoritmo é:

$$[J(FI)]_{j+1}^p \{\delta QI\}_{j+1}^{p+1} = -\{FI\}_{j+1}^p \quad (6.6)$$

$$\{QI\}_{j+1}^{p+1} \equiv \{QI\}_{j+1}^p + \{\delta Q\}_{j+1}^{p+1} \quad (6.7)$$

Para cada variável dependente, o conjunto de equações matriciais $\{FI\}$ e $[J(FI)]$ é obtido substituindo-se a correspondente equação fundamental (4.6 a 4.9) em (6.3), obtendo-se uma expressão do tipo 6.4. Em seguida substitui-se (6.4) em (6.5). A solução é inicializada admitindo $\{QI\}_{j+1}^1 = \{QI\}_j$, substituindo em seguida nos termos $[J(FI)]_{j+1}^1$ e $\{FI\}_{j+1}^1$ em (6.6) para a obtenção de $\{\delta Q\}_{j+1}^2$. A iteração seguinte é obtida calculando-se $\{QI\}_{j+1}^2$ em (6.7).

Na síntese das matrizes foi adotado para as variáveis dependentes a distribuição linear ($k = 1$), sendo que nas bases cardinais foi aplicado um sistema de coordenadas natural, com origem no centro do intervalo de um par de elementos finitos.

Nos cálculos foi utilizado o esquema de Crank-Nicholson ou regra de integração trapezoidal ($\Psi=1/2$).

No anexo 2 é apresentado o algoritmo matricial para para cada equação fundamental do problema.

Em termos simbólicos, o algoritmo de iteração de Newton, equações (6.6) e (6.7), pode ser representado na forma:

$$\begin{bmatrix} [JRR] & [JRM] & & & \\ [JMR] & [JMM] & & & [JMP] \\ [JJR] & [JJM] & [JJJ] & [JJP] & \\ & & [JPJ] & [JPP] & \end{bmatrix}_{j+1}^p \begin{bmatrix} \{\delta R\} \\ \{\delta M\} \\ \{\delta J\} \\ \{\delta P\} \end{bmatrix}_{j+1}^{p+1} = - \begin{bmatrix} \{FR\} \\ \{FM\} \\ \{FJ\} \\ \{FP\} \end{bmatrix}_{j+1}^p \quad (6.8)$$

$$\begin{bmatrix} \{R\} \\ \{M\} \\ \{J\} \\ \{P\} \end{bmatrix}_{j+1}^{p+1} = \begin{bmatrix} \{R\} \\ \{M\} \\ \{J\} \\ \{P\} \end{bmatrix}_{j+1}^p + \begin{bmatrix} \{\delta R\} \\ \{\delta M\} \\ \{\delta J\} \\ \{\delta P\} \end{bmatrix}_{j+1}^{p+1} \quad (6.9)$$

Os termos $[JI]$ e $\{FI\}$ incorporam operações com matrizes, cuja dimensão é idêntica ao número de elementos finitos considerados na malha.

7. ANÁLISE COMPARATIVA DOS RESULTADOS

O algoritmo algébrico detalhado para os elementos finitos, dispostos na câmara do cilindro conforme figura 4.1, foi obtido a partir do sistema matricial (6.8 e 6.9), utilizando as equações fundamentais desenvolvidas, incluídas no anexo 2. Nestas condições, considerando as condições de contorno, onde as velocidades (\vec{u}) são fixas e nulas, foram sintetizadas 18 equações a 18 incógnitas para os campos de velocidade, pressão, temperatura e densidade no domínio.

Nas condições iniciais foi assumida a uniformidade das variáveis ao longo do domínio, sendo adotados os seguintes valores para densidade, temperatura e pressão = 0,1162 kgfs²/m⁴, 300 k e 10⁴ kgf/m², respectivamente. As propriedades do ar e demais grandezas necessárias para o cálculo estão apresentadas no anexo 3, juntamente com a listagem do programa de computador. O ciclo de integração numérica percorrido é inicializado no PMI ($\theta = 360^\circ$) com o pistão em repouso, seguindo uma compressão e sucessiva expansão, retornando ao ponto inicial ($\theta = 540^\circ$).

Após a integração inicial de alguns ciclos, algumas importantes e interessantes observações foram diagnosticadas:

- a solução é de forma primária influenciada pelos valores da viscosidade artificial (ν_n^m) utilizada nos termos de convecção nas equações de conservação, sendo que em alguns casos há perda da condição física e falta de convergência;

- há falta de reversibilidade no ciclo, sendo que os valores finais de temperatura, pressão e densidade são inferiores aos iniciais;
- o fenômeno de reversibilidade é sensivelmente influenciado para pequenas variações no valor de C_p ;
- a precisão da solução é melhorada com a diminuição do passo espacial de integração (Δz_p);
- o número de elementos finitos parece não ter influência preponderante na solução, visto que foi experimentada a integração com 3 elementos e as variações obtidas foram pequenas, menor que 2%;

Cumprida a etapa da avaliação da solução matemática e física gerada pelo algoritmo, no passo seguinte foi efetuada uma interpretação dos resultados preliminares e otimização do sistema.

O fenômeno de falta de reversibilidade não é exclusivo do sistema presente, já que a sua existência foi destacada no capítulo 5, na solução segundo MDF [11]. Os autores daquele trabalho mencionam que há diferenças no escoamento durante a compressão e expansão, sendo gerados diferentes campos de velocidade, pressão e temperatura. Neste caso, podem ser obtidas imprecisões grosseiras nas estimativas. A solução encontrada foi o acerto e aferição dos termos de geração na equação da energia, em particular no trabalho de compressão, utilizando um esquema de solução discretizada diferenciado. No algoritmo segundo MEF também foi observado que os erros no campo de pressão são

superiores aos de temperatura, cerca de 25% contra 7%, respectivamente.

A solução adotada, no trabalho presente, para minimizar este efeito foi alterar o calor específico no ciclo, de tal maneira que durante a compressão foi aplicado um valor inferior (6%) para possibilitar o aumento nos níveis dos campos de temperatura e pressão e na expansão um valor superior (7,5%) garante uma menor dissipação. Observa-se que o valor médio de C_p no ciclo é próximo ao inicialmente adotado.

No tocante a viscosidade artificial, baseado em análises de estabilidade apresentadas em [18], foi adotado o valor de $1/\sqrt{15}$ nos termos de convecção da equação da quantidade de movimento, enquanto que nas demais equações foi assumido o valor nulo.

E, finalmente foi adotado para última solução um passo de integração (Δz_p) de 0,00125 m, gerando intervalos de ângulo de virabrequim de 1 a 10° . Nestas circunstâncias, a solução do ciclo demanda em micro-computador, versão IBM-PC-XT de 8MHz, 4 horas de processamento na linguagem basic.

As conclusões da análise dos resultados obtidas são sintetizadas abaixo:

- os valores de temperatura, pressão e densidade são uniformes ao longo do domínio, com variações menores que 0,05%;
- a equação analítica (5.2) é plenamente satisfeita, sendo que o nível de velocidade relativa (\tilde{u}) obtido é inferior a 10^{-4} ;
- as variações de pressão no domínio previstas na equação (5.3) são neutralizadas devido a baixa rotação assumida no modelo.

Nas figuras 7.1, 7.2 e 7.3, são apresentadas curvas, onde podem ser comparados os valores de temperatura, pressão e densidade, por exemplo para o no 3, entre o cálculo numérico através do MEF e a solução analítica. Na solução analítica os valores de temperatura foram obtidos da expressão (5.4), sendo que a pressão e a densidade foram obtidas das equações termodinâmicas para processo isoentrópico e de gases perfeitos, respectivamente.

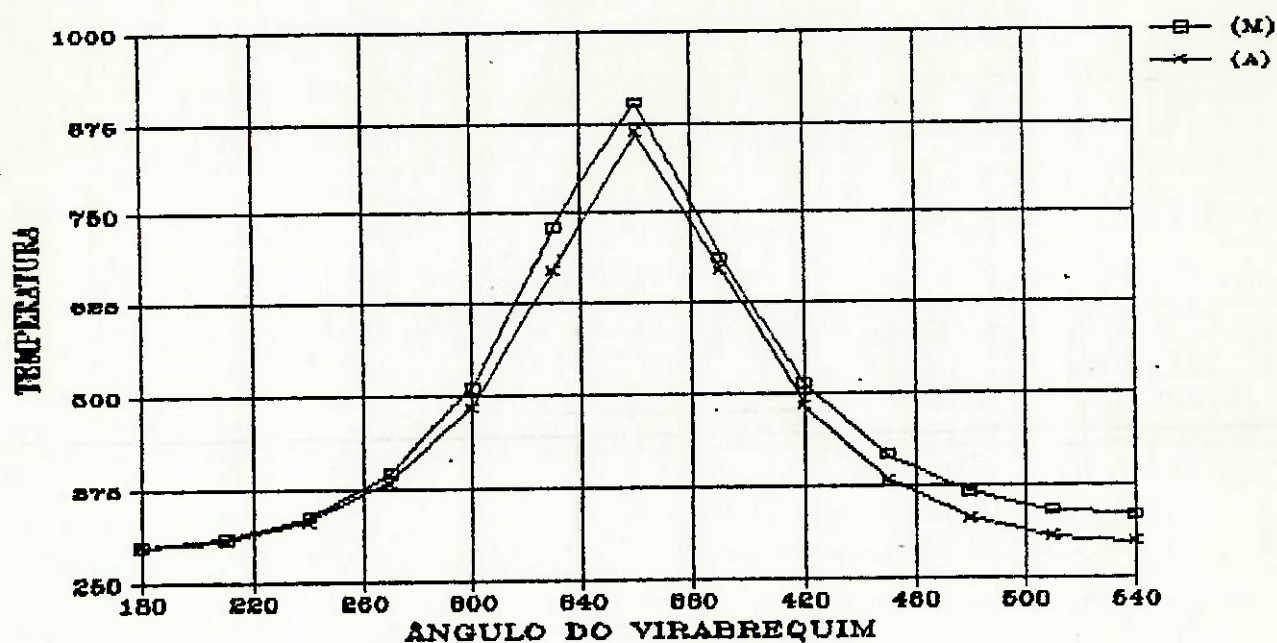


Figura 7.1 - Resultados comparativos de temperatura obtidos dos cálculos segundo MEF (M) e da solução analítica (A).

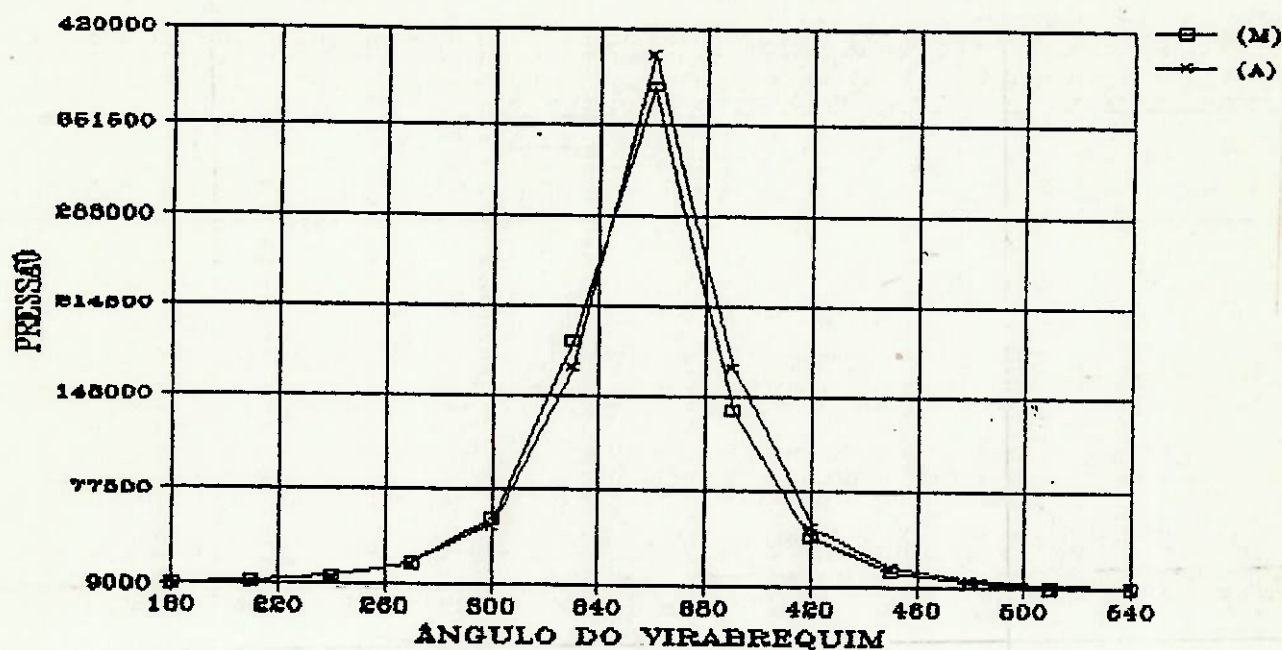


Figura 7.2 - Resultados comparativos de pressão obtidos dos cálculos segundo MEF (M) e da solução analítica (A).

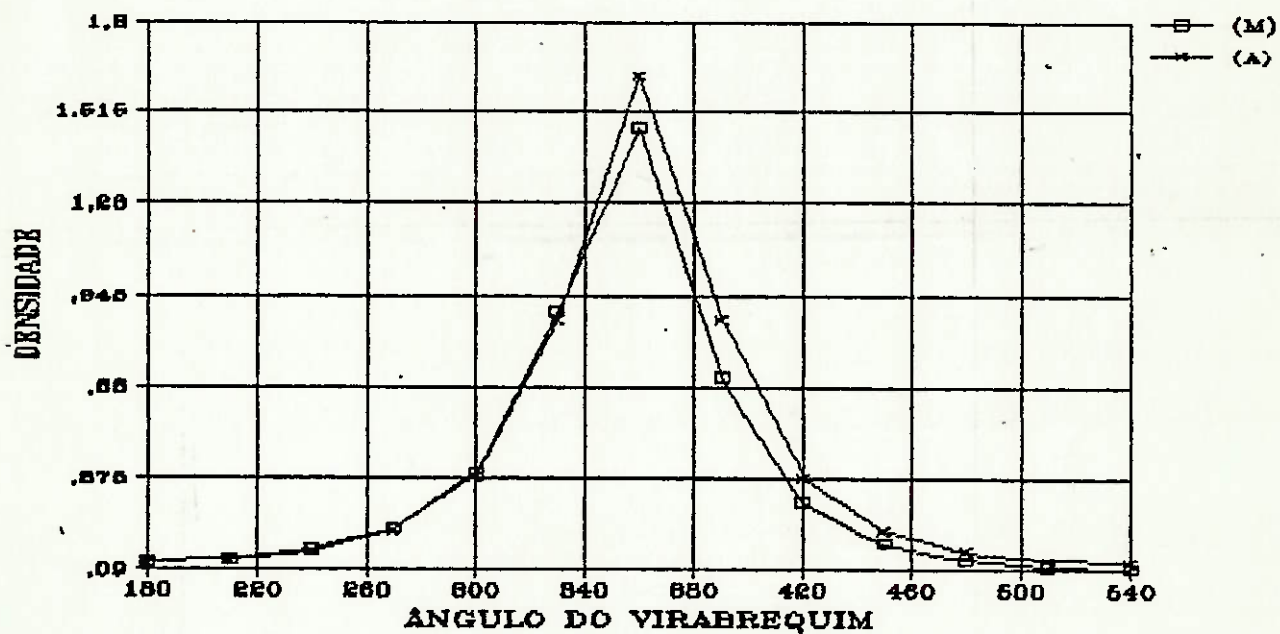


Figura 7.3 - Resultados comparativos de densidade obtidos dos cálculos segundo MEF (M) e da solução analítica (A).

Na tabela 7.1 são apresentados os erros percentuais dos cálculos MDF [11] e MEF em relação a solução analítica[11].

Tabela 7.1 - Erros percentuais das previsões:
MEF - MDF - Solução analítica

Angulo (Graus)	Erros(%)					
	Temperatura		Pressão		Densidade	
	MEF	MDF	MEF	MDF	MEF	MDF
240	1,7		3,4		1,7	
300	5,5		8,2		2,6	
360	4,9		5,8		10,1	
420	6,0	0,5	15,2	2,6	20,0	---
480	10,2		11,2		19,4	
540	12,0		8,2		18,0	

Observa-se que na compressão os erros percentuais, menores que 10%, são aceitáveis, contudo no estágio de expansão os erros são maiores, concluindo-se que o acerto único de C_p não foi suficiente para minimizá-los.

8. COMENTARIOS FINAIS E CONCLUSOES

A revisão bibliográfica efetuada indicou que os métodos de análise tipo zero e quasi-dimensional apresentam um elevado grau de desenvolvimento e confiabilidade, sendo atualmente a base para simulação de MCI [4, 7, 8 e 11].

Os métodos multidimensionais surgem com a necessidade de se obter dados de simulação de ordem extrapolativa, principalmente para o enfoque projeto de MCI. O resultado principal do método é a obtenção de campos de temperatura, pressão, velocidade e espécies químicas com detalhamento espacial e temporal na câmara de MCI, visando em última análise a geração de dados para a otimização da eficiência, desempenho e produção de poluentes. Atualmente não existe disponível um método poderoso que forneça informações completas sobre os fenômenos que ocorrem no interior da câmara de MCI, ao longo das diferenciadas condições de operação. Resultados de desenvolvimento [5, 9, 11, 16 e 18] na área, sob condições simplificadas de operação, apresentam adequada concordância experimental. O trabalho de aperfeiçoamento dos métodos prossegue, notadamente na área de sub-modelos e técnicas numéricas de solução.

Por outro lado, os dados bibliográficos disponíveis indicam a ausência de resultados para análise de câmaras de MCI através do MEF. Neste sentido, foi definido e analisado um problema, exposto no capítulo 4, com configuração simplificada em relação ao MCI real, em termos dimensionais, físicos e de ciclo percorrido. Considerando, entretanto, que o enfoque principal do presente

trabalho e a confirmação do MEF neste tipo de problema, os resultados alcançados, reportados no capítulo anterior, obtidos através do algoritmo matemático desenvolvido via MEF, apresentam precisão menor que 20% e representam o fenômeno físico envolvido.

Vale ressaltar que a configuração analisada, de câmara em cilindro confinado segundo um ciclo de compressão e expansão, pode ter aplicação direta na simulação de motores Stirling.

A partir do cumprimento desta etapa um amplo caminho de desenvolvimento pode ser diagnosticado, destacando-se pela ordem de complexidade:

- desvincular a hipótese de uniformidade das propriedades físicas, incluindo, por exemplo, a respectiva variação com a temperatura;
- pesquisar a influência de novos valores e representações para C_p , viscosidades artificiais e termos de geração, visando melhoria nas condições de reversibilidade e precisão;
- estudar a influência da aplicação de um maior número de elementos finitos e polinômios ou bases cardinais de grau superior;
- utilizar sistemas de coordenadas bi e tri-dimensionais;
- aplicar sub-modelos para escoamento turbulento, necessários para operação com rotações superiores;
- incorporar e representar os tempos admissão e exaustão;
- aplicar sub-modelos representativos de escoamento reativo, combustão e produção de espécies.

9. ANEXO 1 - DEFINIÇÃO DOS COEFICIENTES DA EQUAÇÃO GERAL

FUNDAMENTAL [11]

Equação	ϕ	Γ_ϕ	S_ϕ
u quantidade de movimento	u	μ_{eff}	$\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_{eff} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu_{eff} \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z} (\mu_{eff} \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho k) + s_u'$
v quantidade de movimento	v	μ_{eff}	$\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_{eff} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu_{eff} \frac{\partial v}{\partial r} \right) - 2 \mu_{eff} \frac{v}{r^2} - \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial r} (\mu_{eff} \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho k) + s_v'$
continuidade	1	0	s_r'
energia total	e	μ_{eff}/σ_h	$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \mu_{eff} \left(1 - \frac{1}{\sigma_h} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u^2 + v^2}{2} \right) \right\} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \mu_{eff} \left(1 - \frac{1}{\sigma_h} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u^2 + v^2}{2} \right) \right\}$ $+ \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \mu_{eff} \left(\frac{1}{\sigma_k} - \frac{1}{\sigma_h} \right) \frac{\partial k}{\partial z} \right\} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \mu_{eff} \left(\frac{1}{\sigma_k} - \frac{1}{\sigma_h} \right) \frac{\partial k}{\partial r} \right\} + s_e'$
energia turbulenta	K	μ_{eff}/σ_k	$\frac{\epsilon}{k} (C_1 G - C_2 \rho \epsilon) + \rho \epsilon \nabla \cdot \mathbf{u} + s_k'$
taxa de dissipação	ϵ	$\mu_{eff}/\sigma_\epsilon$	$G - \rho \epsilon + s_\epsilon'$

Observações

- $\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv)$; $G = \mu_{eff} \left[2 \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 \right\} + \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + 2 \left(\frac{v}{r} \right)^2 \right] - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{u} (\mu_{eff} \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho k)$
- Os termos S' contém correlações envolvendo flutuações de densidade, os quais foram desprezados, devido a não disponibilidade de uma técnica para modelagem;
- A difusão turbulenta de calor é expressa através da lei de Fourier e a difusão da energia turbulenta e da taxa de dissipação são expressas através da lei de Fick;
- σ_h é o número de Prandtl turbulento, admitido 0,9;
 σ_k é o número de Schmidt turbulento (K), admitido 1,0;
 σ_ϵ é o número de Schmidt turbulento (ϵ), admitido 1,2;

Para os outros coeficientes empíricos que aparecem, foram admitidos os seguintes valores:

$$C_1 = 1,44; \quad C_2 = 1,92 \quad \text{e} \quad C_\mu = 0,09.$$

10. ANEXO 2 - ALGORITMO MATRICIAL DO MEF

-Continuidade

$$\{FR\}_{j+1} = \left(\Delta_e [200] + v_1^1 [A210] \right) \left(\{R\}_{j+1} - \{R\}_j \right)$$

$$+ \frac{\Delta t}{2z_p} \left[[A210] \{M\} + v_1^2 \{0\}^T [A3011] \{R\} \right]$$

$$+ \Delta_e u_p \left([A200] + v_1^3 [A210] \{R\} \right)_{j+1,j}$$

$$[JRR] = \Delta_e [A200] + v_1^1 [A210] +$$

$$+ \frac{\Delta t}{2z_p} v_1^2 \left[\{0\}^T [A3011] - \left(\frac{\bar{m}}{\bar{\rho}^2} \right) \{R\}_{j+1}^T [A3110] \right]$$

$$+ \frac{\Delta t}{2z_p} \Delta_e u_p \left([A200] + v_1^3 [A210] \right)$$

$$[JRM] = \frac{\Delta t}{2z_p} \left([A210] + v_1^2 [A211] \right)$$

$$[JRJ] = 0$$

$$[JRP] = 0$$

-Quantidade de Movimento

$$\{FM\}_{j+1} = \Delta_e \left([A200] + v_2^1 [A210] \right) \left(\{M\}_{j+1} - \{M\}_j \right)$$

$$+ \frac{\Delta t}{2z_p} \left[\{\bar{U}\}^T [A3010] \{M\} + v_2^2 \{\bar{U}\}^T [A3011] \{M\} \right]$$

$$+ [A210] \{P\} + \frac{4}{3} \frac{\mu}{z_p} [A3011] \{\bar{U}\}$$

$$+ \Delta_e u_p \left([A200] + v_2^3 [A210] \{M\} \right) \Big]_{j+1, j}$$

$$[JMR] = - \frac{\Delta t}{2z_p} \left(\frac{\bar{m}}{\rho^2} \right) \{M\}_{j+1}^T \left([A3010] + v_2^2 [A3110] \right)$$

$$- \frac{\Delta t}{2z_p^2} \frac{4}{3} \mu \left(\frac{\bar{m}}{\rho^2} \right) [A3011]$$

$$[JMM] = \Delta_e [A200] + v_2^1 [A210]$$

$$+ \frac{\Delta t}{2z_p} \left[\{\bar{U}\}_{j+1}^T [A3010] + v_2^2 \{\bar{U}\}_{j+1}^T [A3011] \right.$$

$$+ \left(\frac{1}{\rho}\right) \{M\}_{j+1}^T [A3010] + v_2^2 \{M\}_{j+1}^T [A3110]$$

$$\left. + \frac{4}{3} \frac{\mu}{z_p} \left(\frac{1}{\rho}\right) [A3011] + \Delta_e u_p \left([A200] + v_2^3 [A210] \right) \right]$$

$$[JMJ] = 0$$

$$[JMP] = \frac{\Delta t}{2z_p} [A210]$$

-Energia

$$\{FJ\}_{j+1} = (\Delta_e c_p [A200] + v_3^1 c_p [A210]) (\{J\}_{j+1} - \{J\}_j)$$

$$- \Delta_e [A200] (\{P\}_{j+1} - \{P\}_j)$$

$$+ \frac{\Delta t}{2z_p} \left[c_p (\{\bar{U}\}^T [A3010] \{J\} + v_3^2 \{\bar{U}\}^T [A3011] \{J\}) \right]$$

$$+ \frac{k^*}{z_p} [A3011] \{T\} - \{\bar{U}\}^T [A3010] \{P\}$$

$$- \frac{4}{3} \frac{\mu}{z_p} \{\bar{U}\}^T [3011] \{\bar{U}\}$$

$$+ c_p u_p \Delta_e \left([A200] + v_3^3 [A210] \{J\} \right)_{j+1,j}$$

$$\begin{aligned}
 [JJR] = & - \frac{\Delta t}{2z_p} \left[c_p \left(\frac{\bar{m}}{\bar{\rho}^2} \right) \{J\}_{j+1}^T [A3010] \right. \\
 & + v_3^2 c_p \left(\frac{\bar{m}}{\bar{\rho}^2} \right) \{J\}_{j+1}^T [A3110] + \frac{k^*}{z_p} \frac{\bar{j}}{\bar{\rho}^2} [A3011]
 \end{aligned}$$

$$\left. - \left(\frac{\bar{m}}{\bar{\rho}^2} \right) \{P\}_{j+1}^T [A3010] - \left(\frac{\bar{m}}{\bar{\rho}^2} \right) \frac{4}{3} \frac{\mu}{z_p} \frac{2}{2} [A3011] \{\bar{U}\}_{j+1} \right]$$

$$[JJM] = \frac{\Delta t}{2z_p} \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \right) \left[c_p \{J\}_{j+1}^T [A3010] + v_3^2 c_p \{J\}_{j+1}^T [A3110] \right.$$

$$\left. - \{P\}_{j+1}^T [A3010] - \frac{4}{3} \frac{\mu}{z_p} \frac{2}{2} [A3011] \{\bar{U}\}_{j+1} \right]$$

$$[JJJ] = \Delta_e c_p [A200] + v_3^1 c_p [A210]$$

$$+ \frac{\Delta t}{2z_p} \left[c_p \{\bar{U}\}_{j+1}^T [A3010] + v_3^2 c_p \{\bar{U}\}_{j+1}^T [A3011] \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \right) \frac{k^*}{z_p} [A3011] + c_p u_p \Delta_e \left([A200] + v_3^3 [A210] \right) \right]$$

$$[JJP] = - \frac{\Delta t}{2z_p} \{\bar{U}\}_{j+1}^T [A3010] - \Delta_e [A200]$$

-Pressão

$$\{FP\}_{j+1} = \Delta_e [A200] \{P\}_{j+1} - R^* \Delta_e [A200] \{J\}_{j+1}$$

$$[JPR] = 0$$

$$[JPM] = 0$$

$$[JPJ] = -R^* \Delta_e [A200]$$

$$[JPP] = \Delta_e [A200]$$

-Hipermatrices

$$[A200] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[A210] = \frac{1}{2 \Delta_e} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[A211] = \frac{1}{\Delta_e^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[A3010] = \frac{1}{6 \Delta_e} \begin{bmatrix} \begin{Bmatrix} -2 \\ -1 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} -1 \\ -2 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$[A3011] = \frac{1}{2 \Delta_e^2} \begin{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$[A3110] = \frac{1}{2 \Delta_e^2} \begin{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \end{bmatrix}$$

11. ANEXO 3 - PROGRAMA DE CALCULO DO MEF

```
10 REM CALCULO SEF MCI ESCOAMENTO UNIDIMENSIONAL, SEM REACAO, LAMINAR
20 REM NE- NUMERO DE ELEMENTOS FINITOS
30 REM NI- NUMERO DE ITERACOES
40 REM VID11,VID12,VID13- VISCOSIDADES ARTIFICIAIS (EQ. CONTINUIDADE)
50 REM VID21,VID22,VID23- VISCOSIDADES ARTIFICIAIS (EQ. QUANT. DE MOVIMENTO)
60 REM VID31,VID32,VID33- VISCOSIDADES ARTIFICIAIS (EQ. ENERGIA)
70 REM RPM- ROTACAO DO MODELO
80 REM ZP1- ALTURA MAXIMA DO PISTAO
90 REM ZP0- ALTURA MINIMA DO PISTAO
100 REM DZP- PASSO DE INTEGRALAO
110 REM RMV- RAI0 DE MANIVELA
120 REM CV- CALOR ESPECIFICO A PRESSAO CONSTANTE
130 REM VI- VISCOSIDADE DINAMICA
140 REM CO- CONDUTIBILIDADE TERMICA
150 REM RU- CONSTANTE UNIVERSAL DOS GASES
160 REM R1,R2,R3,R4,R5- VALORES NODAIS DE {R}
170 REM U1,U2,U3,U4,U5- VALORES NODAIS DE {U}
180 REM T1,T2,T3,T4,T5- VALORES NODAIS DE {T}
190 REM P1,P2,P3,P4,P5- VALORES NODAIS DE {P}
200 REM M1,M2,M3,M4,M5- VALORES NODAIS DE {M}
210 REM J1,J2,J3,J4,J5- VALORES NODAIS DE {J}
220 CLEAR
230 READ NE,NI,VID11,VID12,VID13,VID21,VID22,VID23,VID31,VID32,VID33,RPM
240 READ ZP1,ZP0,DZP,RMV
250 READ CV,VI,CO,RU
260 DIM A(20,20),B(20),C(20,20),D(20),M(20)
270 DIM R1(225),R2(225),R3(225),R4(225),R5(225)
280 DIM U1(225),U2(225),U3(225),U4(225),U5(225)
290 DIM T1(225),T2(225),T3(225),T4(225),T5(225)
300 DIM P1(225),P2(225),P3(225),P4(225),P5(225)
310 DIM M1(225),M2(225),M3(225),M4(225),M5(225)
320 DIM J1(225),J2(225),J3(225),J4(225),J5(225)
330 READ R1(1),R2(1),R3(1),R4(1),R5(1)
340 READ U1(1),U2(1),U3(1),U4(1),U5(1)
350 READ T1(1),T2(1),T3(1),T4(1),T5(1)
```

```

360 READ P1(1),P2(1),P3(1),P4(1),P5(1)
370 C1=1/427
380 C2=9.8
390 M1(1)=R1(1)*U1(1)
400 M2(1)=R2(1)*U2(1)
410 M3(1)=R3(1)*U3(1)
420 M4(1)=R4(1)*U4(1)
430 M5(1)=R5(1)*U5(1)
440 J1(1)=C2*R1(1)*T1(1)
450 J2(1)=C2*R2(1)*T2(1)
460 J3(1)=C2*R3(1)*T3(1)
470 J4(1)=C2*R4(1)*T4(1)
480 J5(1)=C2*R5(1)*T5(1)
490 LPRINT "R1=";R1(1),"R2=";R2(1),"R3=";R3(1),"R4=";R4(1),"R5=";R5(1)
500 LPRINT "U1=";U1(1),"U2=";U2(1),"U3=";U3(1),"U4=";U4(1),"U5=";U5(1)
510 LPRINT "T1=";T1(1),"T2=";T2(1),"T3=";T3(1),"T4=";T4(1),"T5=";T5(1)
520 LPRINT "P1=";P1(1),"P2=";P2(1),"P3=";P3(1),"P4=";P4(1),"P5=";P5(1)
530 LPRINT "M1=";M1(1),"M2=";M2(1),"M3=";M3(1),"M4=";M4(1),"M5=";M5(1)
540 LPRINT "J1=";J1(1),"J2=";J2(1),"J3=";J3(1),"J4=";J4(1),"J5=";J5(1)
550 DE=1/(NE-1)
560 ANG1=180
570 I=2
580 ZP=ZP1-DZP
590 AG=(1-(ZP-ZP0)/RMV)
600 ANG2=360-(1.570796327#-ATN(AG/SQR(1-AG*AG)))*(360/(2*3.141592654#))
610 D1=(ANG2-ANG1)/120
620 UP=3.141592654#*RPM*RMV*SIN(ANG2*2*3.141592654#/360)/30
630 LPRINT "ZP=";ZP,"ANG=";ANG2,"DT=";DT,"UP=";UP
640 R1(I)=R1(I-1)
650 R2(I)=R2(I-1)
660 R3(I)=R3(I-1)
670 R4(I)=R4(I-1)
680 R5(I)=R5(I-1)
690 U1(I)=U1(I-1)
700 U2(I)=U2(I-1)
710 U3(I)=U3(I-1)
720 U4(I)=U4(I-1)
730 U5(I)=U5(I-1)
740 T1(I)=T1(I-1)
750 T2(I)=T2(I-1)
760 T3(I)=T3(I-1)
770 T4(I)=T4(I-1)
780 T5(I)=T5(I-1)
790 P1(I)=P1(I-1)
800 P2(I)=P2(I-1)
810 P3(I)=P3(I-1)
820 P4(I)=P4(I-1)
830 P5(I)=P5(I-1)
840 M1(I)=M1(I-1)
850 M2(I)=M2(I-1)
860 M3(I)=M3(I-1)
870 M4(I)=M4(I-1)
880 M5(I)=M5(I-1)
890 J1(I)=J1(I-1)
900 J2(I)=J2(I-1)
910 J3(I)=J3(I-1)
920 J4(I)=J4(I-1)
930 J5(I)=J5(I-1)
940 C3=DE/3
950 C4=DE/6
960 C5=DE/12
970 C6=1/(12*DE)
980 C7=1/(2*DE)
990 CB=CV/(12*DE)
1000 C9=VID11/(2*DE)
1010 D1=VID12/(2*DE^2)

```



```

1020 D2=VID12/(4*DE^2)
1030 D3=VID13/4
1040 E9=VID21/(2*DE)
1050 F2=VID22/(4*DE^2)
1060 F3=VID23/4
1070 F9=VID31/(2*DE)
1080 G2=VID32/(4*DE^2)
1090 G3=VID33/4
1100 D4=DT/ZP
1110 D5=D1*UP/ZP
1120 D6=DT/(ZP^2)
1130 D7=8*VI/(4*DE^2*3)
1140 DB=CV*VID32/(4*DE^2)
1150 D9=2*CO/(4*DE^2*C2)
1160 FOR JJ=1 TO NI
1170 U1B=(U1(I-1)+U1(I))/2
1180 U2B=(U2(I-1)+U2(I))/2
1190 U3B=(U3(I-1)+U3(I))/2
1200 U4B=(U4(I-1)+U4(I))/2
1210 U5B=(U5(I-1)+U5(I))/2
1220 RB=(R1(I)+R2(I)+R3(I)+R4(I)+R5(I))/5
1230 MB=(U1(I)*R1(I)+U2(I)*R2(I)+U3(I)*R3(I)+U4(I)*R4(I)+U5(I)*R5(I))/5
1240 JB=C2*(R1(I)*T1(I)+R2(I)*T2(I)+R3(I)*T3(I)+R4(I)*T4(I)+R5(I)*T5(I))/5
1250 E1=MB/(RB^2)
1260 E2=1/RB
1270 E3=JB/(RB^2)
1280 LPRINT "U1B=";U1B,"U2B=";U2B,"U3B=";U3B,"U4B=";U4B,"U5B=";U5B
1290 LPRINT "RB=";RB,"MB=";MB,"JB=";JB
1300 A(1,1)=C3-C9+D2*D4*(U1B+U2B)-D2*D4*E1*(R1(I)-R2(I))+D5*(C4-D3)
1310 A(1,2)=C4-C9-D2*D4*(U1B+U2B)-D2*D4*E1*(R1(I)-R2(I))+D5*(C5-D3)
1320 A(1,3)=0
1330 A(1,4)=0
1340 A(1,5)=0
1350 A(1,6)=D4*(-C7/2-D1)
1360 FOR J=7 TO 18
1370 A(1,J)=0
1380 NEXT J
1390 W1=R1(I)*(-C3+C9-D2*D4*(U1(I)+U2(I))+D5*(-C4+D3))
1400 W2=R1(I-1)*(C3-C9-D2*D4*(U1(I-1)+U2(I-1))+D5*(-C4+D3))
1410 W3=R2(I)*(-C4+C9+D2*D4*(U1(I)+U2(I))+D5*(-C5+D3))
1420 W4=R2(I-1)*(C4-C9+D2*D4*(U1(I-1)+U2(I-1))+D5*(-C5+D3))
1430 W5=M1(I)*C7/2*D4+M1(I-1)*C7/2*D4+M2(I)*C7/2*D4+M2(I-1)*C7/2*D4
1440 B(1)=W1+W2+W3+W4+W5
1450 A(2,1)=C4+C9-D2*D4*(U1B+U2B)-D2*D4*E1*(-R1(I)+R2(I))+D5*(C5+D3)
1460 A(2,2)=2*C3+D2*D4*(U1B+2*U2B+U3B)-D2*D4*E1*(-R1(I)+2*R2(I)-R3(I))+D5*C3
1470 A(2,3)=C4-C9-D2*D4*(U2B+U3B)-D2*D4*E1*(R2(I)-R3(I))+D5*(C5-D3)
1480 A(2,4)=0
1490 A(2,5)=0
1500 A(2,6)=D1*2*D4
1510 A(2,7)=-C7/2*D4-D1*D4
1520 FOR J=8 TO 18
1530 A(2,J)=0
1540 NEXT J
1550 W1=R1(I)*(-C4-C9+D2*D4*(U1(I)+U2(I))+D5*(-C5-D3))
1560 W2=R1(I-1)*(C4+C9+D2*D4*(U1(I-1)+U2(I-1))+D5*(-C5-D3))
1570 W3=R2(I)*(-2*C3-D2*D4*(U1(I)+2*U2(I)+U3(I))-D5*C3)
1580 W4=R2(I-1)*(2*C3-D2*D4*(U1(I-1)+2*U2(I-1)+U3(I-1))-D5*C3)
1590 W5=R3(I)*(-C4+C9+D2*D4*(U2(I)+U3(I))+D5*(-C5+D3))
1600 W6=R3(I-1)*(C4-C9+D2*D4*(U2(I-1)+U3(I-1))+D5*(-C5+D3))
1610 W7=C7/2*D4*(-M1(I)-M1(I-1))+M3(I)+M3(I-1)
1620 B(2)=W1+W2+W3+W4+W5+W6+W7
1630 A(3,1)=0
1640 A(3,2)=C4+C9-D2*D4*(U2B+U3B)-D2*D4*E1*(-R2(I)+R3(I))+D5*(C5+D3)
1650 A(3,3)=2*C3+D2*D4*(U2B+2*U3B+U4B)-D2*D4*E1*(-R2(I)+2*R3(I)-R4(I))+D5*C3
1660 A(3,4)=C4-C9-D2*D4*(U3B+U4B)-D2*D4*E1*(R3(I)-R4(I))+D5*(C5-D3)
1670 A(3,5)=0

```

```

1680 A(3,6)=C7/2*D4-D1*D4
1690 A(3,7)=D1*2*D4
1700 A(3,8)=-C7/2*D4-D1*D4
1710 FOR J=9 TO 18
1720 A(3,J)=0
1730 NEXT J
1740 W1=R2(I)*(-C4-C9+D2*D4*(U2(I)+U3(I))+D5*(-C5-D3))
1750 W2=R2(I-1)*(C4+C9+D2*D4*(U2(I-1)+U3(I-1))+D5*(-C5-D3))
1760 W3=R3(I)*(-2*C3-D2*D4*(U2(I)+2*U3(I)+U4(I))-D5*C3)
1770 W4=R3(I-1)*(2*C3-D2*D4*(U2(I-1)+2*U3(I-1)+U4(I-1))-D5*C3)
1780 W5=R4(I)*(-C4+C9+D2*D4*(U3(I)+U4(I))+D5*(-C5+D3))
1790 W6=R4(I-1)*(C4-C9+D2*D4*(U3(I-1)+U4(I-1))+D5*(-C5+D3))
1800 W7=C7/2*D4*(-M2(I)-M2(I-1)+M4(I)+M4(I-1))
1810 B(3)=W1+W2+W3+W4+W5+W6+W7
1820 A(4,1)=0
1830 A(4,2)=0
1840 A(4,3)=C4+C9-D2*D4*(U3B+U4B)-D2*D4*E1*(-R3(I)+R4(I))+D5*(C5+D3)
1850 A(4,4)=2*C3+D2*D4*(U3B+2*U4B+U5B)-D2*D4*E1*(-R3(I)+2*R4(I)-R5(I))+D5*C3
1860 A(4,5)=C4-C9-D2*D4*(U4B+U5B)-D2*D4*E1*(R4(I)-R5(I))+D5*(C5-D3)
1870 A(4,6)=0
1880 A(4,7)=C7/2*D4-D1*D4
1890 A(4,8)=D1*2*D4
1900 FOR J=9 TO 18
1910 A(4,J)=0
1920 NEXT J
1930 W1=R3(I)*(-C4-C9+D2*D4*(U3(I)+U4(I))+D5*(-C5-D3))
1940 W2=R3(I-1)*(C4+C9+D2*D4*(U3(I-1)+U4(I-1))+D5*(-C5-D3))
1950 W3=R4(I)*(-2*C3-D2*D4*(U3(I)+2*U4(I)+U5(I))-D5*C3)
1960 W4=R4(I-1)*(2*C3-D2*D4*(U3(I-1)+2*U4(I-1)+U5(I-1))-D5*C3)
1970 W5=R5(I)*(-C4+C9+D2*D4*(U4(I)+U5(I))+D5*(-C5+D3))
1980 W6=R5(I-1)*(C4-C9+D2*D4*(U4(I-1)+U5(I-1))+D5*(-C5+D3))
1990 W7=C7/2*D4*(-M3(I)-M3(I-1)+M5(I)+M5(I-1))
2000 B(4)=W1+W2+W3+W4+W5+W6+W7
2010 A(5,1)=0
2020 A(5,2)=0
2030 A(5,3)=0
2040 A(5,4)=C4+C9-D2*D4*(U4B+U5B)-D2*D4*E1*(-R4(I)+R5(I))+D5*(C5+D3)
2050 A(5,5)=C3+C9+D2*D4*(U4B+U5B)-D2*D4*E1*(-R4(I)+R5(I))+D5*(C4+D3)
2060 A(5,6)=0
2070 A(5,7)=0
2080 A(5,8)=C7/2*D4-D1*D4
2090 FOR J=9 TO 18
2100 A(5,J)=0
2110 NEXT J
2120 W1=R4(I)*(-C4-C9+D2*D4*(U4(I)+U5(I))+D5*(-C5-D3))
2130 W2=R4(I-1)*(C4+C9+D2*D4*(U4(I-1)+U5(I-1))+D5*(-C5-D3))
2140 W3=R5(I)*(-C3-C9-D2*D4*(U4(I)+U5(I))+D5*(-C4-D3))
2150 W4=R5(I-1)*(C3+C9-D2*D4*(U4(I-1)+U5(I-1))+D5*(-C4-D3))
2160 W5=-C7/2*D4*(M4(I)+M4(I-1)+M5(I)+M5(I-1))
2170 B(5)=W1+W2+W3+W4+W5
2180 A(6,1)=-C6*D4*E1*(2*M1(I)+M2(I))-F2*D4*E1*(-M1(I)+M2(I))+D7*D6*E1
2190 A(6,2)=-C6*D4*E1*(M1(I)-M3(I))-F2*D4*E1*(-M1(I)+2*M2(I)-M3(I))-2*D7*D6*E1
2200 A(6,3)=C6*D4*E1*(M2(I)+M3(I)*2)-F2*D4*E1*(M2(I)-M3(I))+D7*D6*E1
2210 A(6,4)=0
2220 A(6,5)=0
2230 A(6,6)=2*C3+C6*D4*(U1(I)-U3(I))+F2*D4*(U1(I)+2*U2(I)+U3(I))
2240 A(6,6)=A(6,6)+C6*D4*E2*(M1(I)-M3(I))+F2*D4*E2*(-M1(I)+2*M2(I)-M3(I))
2250 A(6,6)=A(6,6)+2*D7*D6*E2+C3*D5
2260 A(6,7)=C4-E9-C6*D4*(U2(I)+2*U3(I))-F2*D4*(U2(I)+U3(I))
2270 A(6,7)=A(6,7)-C6*D4*E2*(M2(I)+2*M3(I))+F2*D4*E2*(M2(I)-M3(I))
2280 A(6,7)=A(6,7)-D7*D6*E2+D5*(C5-F3)
2290 FOR J=8 TO 13
2300 A(6,J)=0
2310 NEXT J
2320 A(6,14)=C7/2*D4
2330 A(6,15)=0

```

```

2340 A(6,16)=-C7/2*D4
2350 A(6,17)=0
2360 A(6,18)=0
2370 W1=M1(I)*(-C4-E9-C6*D4*(2*U1(I)+U2(I))+F2*D4*(U1B+U2B)+D5*(-C5-F3))
2380 W2=M1(I-1)*(C4+E9-C6*D4*(2*U1(I-1)+U2(I-1))+F2*D4*(U1B+U2B)+D5*(-C5-F3))
2390 W3=M2(I)*(-2*C3-C6*D4*(U1(I)-U3(I))-F2*D4*(U1B+2*U2B+U3B)-C3*D5)
2400 W4=M2(I-1)*(2*C3-C6*D4*(U1(I-1)-U3(I-1))-F2*D4*(U1B+2*U2B+U3B)-C3*D5)
2410 W5=M3(I)*(-C4+E9+C6*D4*(U2(I)+2*U3(I))+F2*D4*(U2B+U3B)+D5*(-C5+F3))
2420 W6=M3(I-1)*(C4-E9+C6*D4*(U2(I-1)+2*U3(I-1))+F2*D4*(U2B+U3B)+D5*(-C5+F3))
2430 W7=C7/2*D4*(P3(I)+P3(I-1)-P1(I)-P1(I-1))
2440 WB=D7*D6*(U1(I)+U1(I-1)-2*U2(I)-2*U2(I-1)+U3(I)+U3(I-1))
2450 B(6)=W1+W2+W3+W4+W5+W6+W7+WB
2460 A(7,1)=0
2470 A(7,2)=-C6*D4*E1*(2*M2(I)+M3(I))-F2*D4*E1*(-M2(I)+M3(I))+D7*D6*E1
2480 A(7,3)=-C6*D4*E1*(M2(I)-M4(I))-F2*D4*E1*(-M2(I)+2*M3(I)-M4(I))-2*D7*D6*E1
2490 A(7,4)=-C6*D4*E1*(M3(I)+M4(I)*2)-F2*D4*E1*(M3(I)-M4(I))+D7*D6*E1
2500 A(7,5)=0
2510 A(7,6)=C4+E9+C6*D4*(U2(I)*2+U3(I))-F2*D4*(U2(I)+U3(I))
2520 A(7,6)=A(7,6)+C6*D4*E2*(2*M2(I)+M3(I))+F2*D4*E2*(-M2(I)+M3(I))
2530 A(7,6)=A(7,6)-D7*D6*E2+D5*(C5+F3)
2540 A(7,7)=2*C3+C6*D4*(U2(I)-U4(I))+F2*D4*(U2(I)+2*U3(I)+U4(I))
2550 A(7,7)=A(7,7)+C6*D4*E2*(M2(I)-M4(I))+F2*D4*E2*(-M2(I)+2*M3(I)-M4(I))
2560 A(7,7)=A(7,7)+2*D7*D6*E2+C3*D5
2570 A(7,8)=C4-E9-C6*D4*(U3(I)+2*U4(I))-F2*D4*(U3(I)+U4(I))
2580 A(7,8)=A(7,8)-C6*D4*E2*(M3(I)+2*M4(I))+F2*D4*E2*(M3(I)-M4(I))
2590 A(7,8)=A(7,8)-D7*D6*E2+D5*(C5-F3)
2600 FOR J=9 TO 14
2610 A(7,J)=0
2620 NEXT J
2630 A(7,15)=C7/2*D4
2640 A(7,16)=0
2650 A(7,17)=-C7/2*D4
2660 A(7,18)=0
2670 W1=M2(I)*(-C4-E9-C6*D4*(2*U2(I)+U3(I))+F2*D4*(U2B+U3B)+D5*(-C5-F3))
2680 W2=M2(I-1)*(C4+E9-C6*D4*(2*U2(I-1)+U3(I-1))+F2*D4*(U2B+U3B)+D5*(-C5-F3))
2690 W3=M3(I)*(-2*C3-C6*D4*(U2(I)-U4(I))-F2*D4*(U2B+2*U3B+U4B)-C3*D5)
2700 W4=M3(I-1)*(2*C3-C6*D4*(U2(I-1)-U4(I-1))-F2*D4*(U2B+2*U3B+U4B)-C3*D5)
2710 W5=M4(I)*(-C4+E9+C6*D4*(U3(I)+2*U4(I))+F2*D4*(U3B+U4B)+D5*(-C5+F3))
2720 W6=M4(I-1)*(C4-E9+C6*D4*(U3(I-1)+2*U4(I-1))+F2*D4*(U3B+U4B)+D5*(-C5+F3))
2730 W7=C7/2*D4*(P4(I)+P4(I-1)-P2(I)-P2(I-1))
2740 WB=D7*D6*(U2(I)+U2(I-1)-2*U3(I)-2*U3(I-1)+U4(I)+U4(I-1))
2750 B(7)=W1+W2+W3+W4+W5+W6+W7+WB
2760 A(8,1)=0
2770 A(8,2)=0
2780 A(8,3)=-C6*D4*E1*(2*M3(I)+M4(I))-F2*D4*E1*(-M3(I)+M4(I))+D7*D6*E1
2790 A(8,4)=-C6*D4*E1*(M3(I)-M5(I))-F2*D4*E1*(-M3(I)+2*M4(I)-M5(I))-2*D7*D6*E1
2800 A(8,5)=C6*D4*E1*(M4(I)+M5(I)*2)-F2*D4*E1*(M4(I)-M5(I))+D7*D6*E1
2810 A(8,6)=0
2820 A(8,7)=C4+E9+C6*D4*(U3(I)*2+U4(I))-F2*D4*(U3(I)+U4(I))
2830 A(8,7)=A(8,7)+C6*D4*E2*(2*M3(I)+M4(I))+F2*D4*E2*(-M3(I)+M4(I))
2840 A(8,7)=A(8,7)-D7*D6*E2+D5*(C5+F3)
2850 A(8,8)=2*C3+C6*D4*(U3(I)-U5(I))+F2*D4*(U3(I)+2*U4(I)+U5(I))
2860 A(8,8)=A(8,8)+C6*D4*E2*(M3(I)-M5(I))+F2*D4*E2*(-M3(I)+2*M4(I)-M5(I))
2870 A(8,8)=A(8,8)+2*D7*D6*E2+C3*D5
2880 FOR J=9 TO 15
2890 A(8,J)=0
2900 NEXT J
2910 A(8,16)=C7/2*D4
2920 A(8,17)=0
2930 A(8,18)=-C7/2*D4
2940 W1=M3(I)*(-C4-E9-C6*D4*(2*U3(I)+U4(I))+F2*D4*(U3B+U4B)+D5*(-C5-F3))
2950 W2=M3(I-1)*(C4+E9-C6*D4*(2*U3(I-1)+U4(I-1))+F2*D4*(U3B+U4B)+D5*(-C5-F3))
2960 W3=M4(I)*(-2*C3-C6*D4*(U3(I)-U5(I))-F2*D4*(U3B+2*U4B+U5B)-C3*D5)
2970 W4=M4(I-1)*(2*C3-C6*D4*(U3(I-1)-U5(I-1))-F2*D4*(U3B+2*U4B+U5B)-C3*D5)
2980 W5=M5(I)*(-C4+E9+C6*D4*(U4(I)+2*U5(I))+F2*D4*(U4B+U5B)+D5*(-C5+F3))
2990 W6=M5(I-1)*(C4-E9+C6*D4*(U4(I-1)+2*U5(I-1))+F2*D4*(U4B+U5B)+D5*(-C5+F3))

```

3000 $W7=C7/2*D4*(P5(I)+P5(I-1)-P3(I)-P3(I-1))$
 3010 $WB=D7*D6*(U3(I)+U3(I-1)-2*U4(I)-2*U4(I-1)+U5(I)+U5(I-1))$
 3020 $B(B)=W1+W2+W3+W4+W5+W6+W7+WB$
 3030 $A(9,1)=CB*D4*E1*(J1(I)*2+J2(I))-DB*D4*E1*(J1(I)-J2(I))-D9*D6*E3$
 3040 $A(9,1)=A(9,1)+(-C6*D4*E1*(P1(I)*2+P2(I))+D7*D6*E1*(U1(I)+U2(I)))*C1$
 3050 $A(9,2)=CB*D4*E1*(J1(I)+J2(I)*2)-DB*D4*E1*(J1(I)-J2(I))+D9*D6*E3$
 3060 $A(9,2)=A(9,2)+(-C6*D4*E1*(P1(I)+P2(I)*2)-D7*D6*E1*(U1(I)+U2(I)))*C1$
 3070 $A(9,3)=0$
 3080 $A(9,4)=0$
 3090 $A(9,5)=0$
 3100 $A(9,6)=-CB*D4*E2*(J1(I)+2*J2(I))+DB*D4*E2*(J1(I)-J2(I))$
 3110 $A(9,6)=A(9,6)+(C6*D4*E2*(P1(I)+P2(I)*2)+D7*D6*E2*(U1(I)+U2(I)))*C1$
 3120 $A(9,7)=0$
 3130 $A(9,8)=0$
 3140 $A(9,9)=C3*CV-F9*CV-C6*CV*D4*(2*U1(I)+U2(I))+CV*G2*D4*(U1B+U2B)$
 3150 $A(9,9)=A(9,9)+D9*D6*E2+D5*(C4*CV-G3*CV)$
 3160 $A(9,10)=CV*C4-F9*CV-C6*CV*D4*(U1(I)+U2(I)*2)-CV*G2*D4*(U1B+U2B)$
 3170 $A(9,10)=A(9,10)-D9*D6*E2+D5*CV*(C5-G3)$
 3180 $A(9,11)=0$
 3190 $A(9,12)=0$
 3200 $A(9,13)=0$
 3210 $A(9,14)=(C6*D4*(2*U1(I)+U2(I))-C3)*C1$
 3220 $A(9,15)=(C6*D4*(U1(I)+2*U2(I))-C4)*C1$
 3230 $A(9,16)=0$
 3240 $A(9,17)=0$
 3250 $A(9,18)=0$
 3260 $W1=J1(I)*(-C3*CV+F9*CV+CV*C6*D4*(2*U1(I)+U2(I))-G2*CV*D4*(U1B+U2B))$
 3270 $W1=W1+J1(I)*(D5*CV*(-C4+G3))$
 3280 $W2=J1(I-1)*(C3*CV-F9*CV+CV*C6*D4*(2*U1(I-1)+U2(I-1))-CV*G2*D4*(U1B+U2B))$
 3290 $W2=W2+J1(I-1)*(CV*D5*(-C4+G3))$
 3300 $W3=J2(I)*(-CV*C4+F9*CV+CV*C6*D4*(U1(I)+U2(I)*2)+G2*CV*D4*(U1B+U2B))$
 3310 $W3=W3+J2(I)*(CV*D5*(-C5+G3))$
 3320 $W4=J2(I-1)*(CV*C4-F9*CV+CV*C6*D4*(U1(I-1)+2*U2(I-1))+G2*CV*D4*(U1B+U2B))$
 3330 $W4=W4+J2(I-1)*(D5*CV*(-C5+G3))$
 3340 $W5=2*CO/(4*DE^2)*D6*(-T1(I)-T1(I-1)+T2(I)+T2(I-1))$
 3350 $W6=P1(I)*(-C6*C1*D4*(2*U1(I)+U2(I))+C3*C1)$
 3360 $W6=W6+P1(I-1)*(-C6*C1*D4*(2*U1(I-1)+U2(I-1))-C3*C1)$
 3370 $W7=P2(I)*(-C6*C1*D4*(U1(I)+2*U2(I))+C4*C1)$
 3380 $W7=W7+P2(I-1)*(-C6*C1*D4*(U1(I-1)+2*U2(I-1))-C4*C1)$
 3390 $WB=D7/2*C1*D6*(U1(I)+U2(I))*(U1(I)-U2(I))$
 3400 $WB=WB+D7/2*C1*D6*(U1(I-1)+U2(I-1))*(U1(I-1)-U2(I-1))$
 3410 $B(9)=W1+W2+W3+W4+W5+W6+W7+WB$
 3420 $A(10,1)=-CB*D4*E1*(2*J1(I)+J2(I))-DB*D4*E1*(-J1(I)+J2(I))+D9*D6*E3$
 3430 $A(10,1)=A(10,1)+(C6*D4*E1*(2*P1(I)+P2(I))+D7*D6*E1*(-U1(I)-U2(I)))*C1$
 3440 $A(10,2)=-CB*D4*E1*(J1(I)-J3(I))-DB*D4*E1*(-J1(I)+2*J2(I)-J3(I))-2*D9*D6*E3$
 3450 $A(10,2)=A(10,2)+(C6*D4*E1*(P1(I)-P3(I))+D7*D6*E1*(U1(I)+2*U2(I)+U3(I)))*C1$
 3460 $A(10,3)=CB*D4*E1*(J2(I)+2*J3(I))-DB*D4*E1*(J2(I)-J3(I))+D9*D6*E3$
 3470 $A(10,3)=A(10,3)+(-C6*D4*E1*(P2(I)+P3(I)*2)+D7*D6*E1*(-U2(I)-U3(I)))*C1$
 3480 $A(10,4)=0$
 3490 $A(10,5)=0$
 3500 $A(10,6)=CB*D4*E2*(J1(I)-J3(I))+DB*D4*E2*(-J1(I)+2*J2(I)-J3(I))$
 3510 $A(10,6)=A(10,6)+(-C6*D4*E2*(P1(I)-P3(I))-D7*D6*E2*(U1(I)+U2(I)*2+U3(I)))*C1$
 3520 $A(10,7)=CB*D4*E2*(-J2(I)-2*J3(I))+DB*D4*E2*(J2(I)-J3(I))$
 3530 $A(10,7)=A(10,7)+(C6*D4*E2*(P2(I)+2*P3(I))-D7*D6*E2*(-U2(I)-U3(I)))*C1$
 3540 $A(10,8)=0$
 3550 $A(10,9)=CV*C4+F9*CV+CV*C6*D4*(2*U1(I)+U2(I))-DB*D4*(U1B+U2B)$
 3560 $A(10,9)=A(10,9)-D9*D6*E2+D5*CV*(C5+G3)$
 3570 $A(10,10)=2*CV*C3+CV*C6*D4*(U1(I)-U3(I))+DB*D4*(U1B+2*U2B+U3B)$
 3580 $A(10,10)=A(10,10)+2*D9*D6*E2+D5*CV*C3$
 3590 $A(10,11)=CV*C4-F9*CV-CV*C6*D4*(U2(I)+2*U3(I))-DB*D4*(U2B+U3B)$
 3600 $A(10,11)=A(10,11)-D9*D6*E2+D5*CV*(C5-G3)$
 3610 $A(10,12)=0$
 3620 $A(10,13)=0$
 3630 $A(10,14)=(-C6*D4*(2*U1(I)+U2(I))-C4)*C1$
 3640 $A(10,15)=(-C6*D4*(U1(I)-U3(I))-2*C3)*C1$
 3650 $A(10,16)=(C6*D4*(U2(I)+U3(I)*2)-C4)*C1$

3660 A(10,17)=0
 3670 A(10,18)=0
 3680 W1=J1(I)*(-CV*C4-CV*F9-CV*C6*D4*(2*U1(I)+U2(I))+DB*D4*(U1B+U2B))
 3690 W1=W1+J1(I)*(D5*CV*(-C5-G3))
 3700 W2=J1(I-1)*(CV*C4+CV*F9-CV*C6*D4*(2*U1(I-1)+U2(I-1))+DB*D4*(U1B+U2B))
 3710 W2=W2+J1(I-1)*(D5*CV*(-C5-G3))
 3720 W3=J2(I)*(-2*CV*C3-CV*C6*D4*(U1(I)-U3(I))-DB*D4*(U1B+2*U2B+U3B))
 3730 W3=W3+J2(I)*D5*CV*(-C3)
 3740 W4=J2(I-1)*(2*CV*C3-CV*C6*D4*(U1(I-1)-U3(I-1))-DB*D4*(U1B+2*U2B+U3B))
 3750 W4=W4+J2(I-1)*D5*CV*(-C3)
 3760 W5=J3(I)*(-CV*C4+CV*F9+CV*C6*D4*(U2(I)+2*U3(I))+DB*D4*(U2B+U3B))
 3770 W5=W5+J3(I)*(D5*CV*(-C5+G3))
 3780 W6=J3(I-1)*(CV*C4-CV*F9+CV*C6*D4*(U2(I-1)+2*U3(I-1))+DB*D4*(U2B+U3B))
 3790 W6=W6+J3(I-1)*(D5*CV*(-C5+G3))
 3800 W7=2*CO/(4*DE^2)*D6*(T1(I)+T1(I-1)-2*T2(I)-2*T2(I-1)+T3(I)+T3(I-1))
 3810 WB=(C6*C1*D4*(2*U1(I)+U2(I))+C4*C1)*P1(I)
 3820 WB=WB+P1(I-1)*(C6*C1*D4*(2*U1(I-1)+U2(I-1))-C4*C1)
 3830 WB=WB+P2(I)*(C6*C1*D4*(U1(I)-U3(I))+2*C1*C3)
 3840 WB=WB+P2(I-1)*(C6*C1*D4*(U1(I-1)-U3(I-1))-2*C1*C3)
 3850 WB=WB+P3(I)*(-C6*C1*D4*(U2(I)+2*U3(I))+C1*C4)
 3860 WB=WB+P3(I-1)*(-C6*C1*D4*(U2(I-1)+2*U3(I-1))-C1*C4)
 3870 W9=-D7/2*C1*D6*(U1(I)+U2(I))*U1(I)
 3880 W9=W9-D7/2*C1*D6*(U1(I-1)+U2(I-1))*U1(I-1)
 3890 W9=W9+D7/2*C1*D6*(U1(I)+2*U2(I)+U3(I))*U2(I)
 3900 W9=W9+D7/2*C1*D6*(U1(I-1)+U2(I-1)+2*U3(I-1))*U2(I-1)
 3910 W9=W9-D7/2*C1*D6*(U2(I)+U3(I))*U3(I)
 3920 W9=W9-D7/2*C1*D6*(U2(I-1)+U3(I-1))*U3(I-1)
 3930 B(10)=W1+W2+W3+W4+W5+W6+W7+WB+W9
 3940 A(11,1)=0
 3950 A(11,2)=-C8*D4*E1*(2*J2(I)+J3(I))-DB*D4*E1*(-J2(I)+J3(I))+D9*D6*E3
 3960 A(11,2)=A(11,2)+(C6*D4*E1*(2*P2(I)+P3(I))+D7*D6*E1*(-U2(I)-U3(I)))*C1
 3970 A(11,3)=-C8*D4*E1*(J2(I)-J4(I))-DB*D4*E1*(-J2(I)+2*J3(I)-J4(I))-2*D9*D6*E3
 3980 A(11,3)=A(11,3)+(C6*D4*E1*(P2(I)-P4(I))+D7*D6*E1*(U2(I)+2*U3(I)+U4(I)))*C1
 3990 A(11,4)=C8*D4*E1*(J3(I)+2*J4(I))-DB*D4*E1*(J3(I)-J4(I))+D9*D6*E3
 4000 A(11,4)=A(11,4)+(-C6*D4*E1*(P3(I)+P4(I)*2)+D7*D6*E1*(-U3(I)-U4(I)))*C1
 4010 A(11,5)=0
 4020 A(11,6)=C8*D4*E2*(2*J2(I)+J3(I))+DB*D4*E2*(-J2(I)+J3(I))
 4030 A(11,6)=A(11,6)+(-C6*D4*E2*(2*P2(I)+P3(I))-D7*D6*E2*(-U2(I)-U3(I)))*C1
 4040 A(11,7)=C8*D4*E2*(J2(I)-J4(I))+DB*D4*E2*(-J2(I)+2*J3(I)-J4(I))
 4050 A(11,7)=A(11,7)+(-C6*D4*E2*(P2(I)-P4(I))+D7*D6*E2*(U2(I)+U3(I)+2*U4(I)))*C1
 4060 A(11,8)=C8*D4*E2*(-J3(I)-2*J4(I))+DB*D4*E2*(J3(I)-J4(I))
 4070 A(11,8)=A(11,8)+(C6*D4*E2*(P3(I)+2*P4(I))-D7*D6*E2*(-U3(I)-U4(I)))*C1
 4080 A(11,9)=0
 4090 A(11,10)=CV*C4+F9*CV+CV*C6*D4*(2*U2(I)+U3(I))-DB*D4*(U2B+U3B)
 4100 A(11,10)=A(11,10)-D9*D6*E2+D5*CV*(C5+G3)
 4110 A(11,11)=2*CV*C3+CV*C6*D4*(U2(I)-U4(I))+DB*D4*(U2B+2*U3B+U4B)
 4120 A(11,11)=A(11,11)+2*D9*D6*E2+D5*CV*C3
 4130 A(11,12)=CV*C4-F9*CV-CV*C6*D4*(U3(I)+2*U4(I))-DB*D4*(U3B+U4B)
 4140 A(11,12)=A(11,12)-D9*D6*E2+D5*CV*(C5-G3)
 4150 A(11,13)=0
 4160 A(11,14)=0
 4170 A(11,15)=(-C6*D4*(2*U2(I)+U3(I))-C4)*C1
 4180 A(11,16)=(-C6*D4*(U2(I)-U4(I))-2*C3)*C1
 4190 A(11,17)=(C6*D4*(U3(I)+U4(I)*2)-C4)*C1
 4200 A(11,18)=0
 4210 W1=J2(I)*(-CV*C4-CV*F9-CV*C6*D4*(2*U2(I)+U3(I))+DB*D4*(U2B+U3B))
 4220 W1=W1+J2(I)*(D5*CV*(-C5-G3))
 4230 W2=J2(I-1)*(CV*C4+CV*F9-CV*C6*D4*(2*U2(I-1)+U3(I-1))+DB*D4*(U2B+U3B))
 4240 W2=W2+J2(I-1)*(D5*CV*(-C5-G3))
 4250 W3=J3(I)*(-2*CV*C3-CV*C6*D4*(U2(I)-U4(I))-DB*D4*(U2B+2*U3B+U4B))
 4260 W3=W3+J3(I)*D5*CV*(-C3)
 4270 W4=J3(I-1)*(2*CV*C3-CV*C6*D4*(U2(I-1)-U4(I-1))-DB*D4*(U2B+2*U3B+U4B))
 4280 W4=W4+J3(I-1)*D5*CV*(-C3)
 4290 W5=J4(I)*(-CV*C4+CV*F9+CV*C6*D4*(U3(I)+2*U4(I))+DB*D4*(U3B+U4B))
 4300 W5=W5+J4(I)*(D5*CV*(-C5+G3))
 4310 W6=J4(I-1)*(CV*C4-CV*F9+CV*C6*D4*(U3(I-1)+2*U4(I-1))+DB*D4*(U3B+U4B))

4320 $W6=W6+J4(I-1)*(D5*CV*(-C5+G3))$
 4330 $W7=2*CD/(4*DE^2)*D6*(T2(I)+T2(I-1)-2*T3(I)-2*T3(I-1)+T4(I)+T4(I-1))$
 4340 $WB=(C6*C1*D4*(2*U2(I)+U3(I))+C4*C1)*P2(I)$
 4350 $WB=WB+P2(I-1)*(C6*C1*D4*(2*U2(I-1)+U3(I-1))-C4*C1)$
 4360 $WB=WB+P3(I)*(C6*C1*D4*(U2(I)-U4(I))+2*C1*C3)$
 4370 $WB=WB+P3(I-1)*(C6*C1*D4*(U2(I-1)-U4(I-1))-2*C1*C3)$
 4380 $WB=WB+P4(I)*(-C6*C1*D4*(U3(I)+2*U4(I))+C1*C4)$
 4390 $WB=WB+P4(I-1)*(-C6*C1*D4*(U3(I-1)+2*U4(I-1))-C1*C4)$
 4400 $W9=-D7/2*C1*D6*(U2(I)+U3(I))*U2(I)$
 4410 $W9=W9-D7/2*C1*D6*(U2(I-1)+U3(I-1))*U2(I-1)$
 4420 $W9=W9+D7/2*C1*D6*(U2(I)+2*U3(I)+U4(I))*U3(I)$
 4430 $W9=W9+D7/2*C1*D6*(U2(I-1)+U3(I-1))*2*U4(I-1)*U3(I-1)$
 4440 $W9=W9-D7/2*C1*D6*(U3(I)+U4(I))*U4(I)$
 4450 $W9=W9-D7/2*C1*D6*(U3(I-1)+U4(I-1))*U4(I-1)$
 4460 $B(11)=W1+W2+W3+W4+W5+W6+W7+WB+W9$
 4470 $A(12,1)=0$
 4480 $A(12,2)=0$
 4490 $A(12,3)=-CB*D4*E1*(2*J3(I)+J4(I))-DB*D4*E1*(-J3(I)+J4(I))+D9*D6*E3$
 4500 $A(12,3)=A(12,3)+(C6*D4*E1*(2*P3(I)+P4(I))+D7*D6*E1*(-U3(I)-U4(I)))*C1$
 4510 $A(12,4)=-CB*D4*E1*(J3(I)-J5(I))-DB*D4*E1*(-J3(I)+2*J4(I)-J5(I))-2*D9*D6*E3$
 4520 $A(12,4)=A(12,4)+(C6*D4*E1*(P3(I)-P5(I))+D7*D6*E1*(U3(I)+2*U4(I)+U5(I)))*C1$
 4530 $A(12,5)=CB*D4*E1*(J4(I)+2*J5(I))-DB*D4*E1*(J4(I)-J5(I))+D9*D6*E3$
 4540 $A(12,5)=A(12,5)+(-C6*D4*E1*(P4(I)+P5(I)*2)+D7*D6*E1*(-U4(I)-U5(I)))*C1$
 4550 $A(12,6)=0$
 4560 $A(12,7)=CB*D4*E2*(2*J3(I)+J4(I))+DB*D4*E2*(-J3(I)+J4(I))$
 4570 $A(12,7)=A(12,7)+(-C6*D4*E2*(2*P3(I)+P4(I))-D7*D6*E2*(-U3(I)-U4(I)))*C1$
 4580 $A(12,8)=CB*D4*E2*(J3(I)-J5(I))+DB*D4*E2*(-J3(I)+2*J4(I)-J5(I))$
 4590 $A(12,8)=A(12,8)+(-C6*D4*E2*(P3(I)-P5(I))-D7*D6*E2*(U3(I)+U4(I)*2+U5(I)))*C1$
 4600 $A(12,9)=0$
 4610 $A(12,10)=0$
 4620 $A(12,11)=CV*C4+F9*CV+CV*C6*D4*(2*U3(I)+U4(I))-DB*D4*(U3B+U4B)$
 4630 $A(12,11)=A(12,11)-D9*D6*E2+D5*CV*(C5+G3)$
 4640 $A(12,12)=2*CV*C3+CV*C6*D4*(U3(I)-U5(I))+DB*D4*(U3B+2*U4B+U5B)$
 4650 $A(12,12)=A(12,12)+2*D9*D6*E2+D5*CV*C3$
 4660 $A(12,13)=CV*C4-F9*CV-CV*C6*D4*(U4(I)+2*U5(I))-DB*D4*(U4B+U5B)$
 4670 $A(12,13)=A(12,13)-D9*D6*E2+D5*CV*(C5-G3)$
 4680 $A(12,14)=0$
 4690 $A(12,15)=0$
 4700 $A(12,16)=(-C6*D4*(2*U3(I)+U4(I))-C4)*C1$
 4710 $A(12,17)=(-C6*D4*(U3(I)-U5(I))-2*C3)*C1$
 4720 $A(12,18)=(C6*D4*(U4(I)+U5(I)*2)-C4)*C1$
 4730 $W1=J3(I)*(-CV*C4-CV*F9-CV*C6*D4*(2*U3(I)+U4(I))+DB*D4*(U3B+U4B))$
 4740 $W1=W1+J3(I)*(D5*CV*(-C5-G3))$
 4750 $W2=J3(I-1)*(CV*C4+CV*F9-CV*C6*D4*(2*U3(I-1)+U4(I-1))+DB*D4*(U3B+U4B))$
 4760 $W2=W2+J3(I-1)*(D5*CV*(-C5-G3))$
 4770 $W3=J4(I)*(-2*CV*C3-CV*C6*D4*(U3(I)-U5(I))-DB*D4*(U3B+2*U4B+U5B))$
 4780 $W3=W3+J4(I)*D5*CV*(-C3)$
 4790 $W4=J4(I-1)*(2*CV*C3-CV*C6*D4*(U3(I-1)-U5(I-1))-DB*D4*(U3B+2*U4B+U5B))$
 4800 $W4=W4+J4(I-1)*D5*CV*(-C3)$
 4810 $W5=J5(I)*(-CV*C4+CV*F9+CV*C6*D4*(U4(I)+2*U5(I))+DB*D4*(U4B+U5B))$
 4820 $W5=W5+J5(I)*(D5*CV*(-C5+G3))$
 4830 $W6=J5(I-1)*(CV*C4-CV*F9+CV*C6*D4*(U4(I-1)+2*U5(I-1))+DB*D4*(U4B+U5B))$
 4840 $W6=W6+J5(I-1)*(D5*CV*(-C5+G3))$
 4850 $W7=2*CD/(4*DE^2)*D6*(T3(I)+T3(I-1)-2*T4(I)-2*T4(I-1)+T5(I)+T5(I-1))$
 4860 $WB=(C6*C1*D4*(2*U3(I)+U4(I))+C4*C1)*P3(I)$
 4870 $WB=WB+P3(I-1)*(C6*C1*D4*(2*U3(I-1)+U4(I-1))-C4*C1)$
 4880 $WB=WB+P4(I)*(C6*C1*D4*(U3(I)-U5(I))+2*C1*C3)$
 4890 $WB=WB+P4(I-1)*(C6*C1*D4*(U3(I-1)-U5(I-1))-2*C1*C3)$
 4900 $WB=WB+P5(I)*(-C6*C1*D4*(U4(I)+2*U5(I))+C1*C4)$
 4910 $WB=WB+P5(I-1)*(-C6*C1*D4*(U4(I-1)+2*U5(I-1))-C1*C4)$
 4920 $W9=-D7/2*C1*D6*(U3(I)+U4(I))*U3(I)$
 4930 $W9=W9-D7/2*C1*D6*(U3(I-1)+U4(I-1))*U3(I-1)$
 4940 $W9=W9+D7/2*C1*D6*(U3(I)+2*U4(I)+U5(I))*U4(I)$
 4950 $W9=W9+D7/2*C1*D6*(U3(I-1)+U4(I-1))*2*U5(I-1)*U4(I-1)$
 4960 $W9=W9-D7/2*C1*D6*(U4(I)+U5(I))*U5(I)$
 4970 $W9=W9-D7/2*C1*D6*(U4(I-1)+U5(I-1))*U5(I-1)$

```

4980 B(12)=W1+W2+W3+W4+W5+W6+W7+W8+W9
4990 A(13,1)=0
5000 A(13,2)=0
5010 A(13,3)=0
5020 A(13,4)=-CB*D4*E1*(2*J4(I)+J5(I))-DB*D4*E1*(-J4(I)+J5(I))+D9*D6*E3
5030 A(13,4)=A(13,4)+(C6*D4*E1*(2*P4(I)+P5(I))+D7*D6*E1*(-U4(I)-U5(I)))*C1
5040 A(13,5)=-CB*D4*E1*(J4(I)+2*J5(I))-DB*D4*E1*(-J4(I)+J5(I))-D9*D6*E3
5050 A(13,5)=A(13,5)+(C6*D4*E1*(P4(I)+2*P5(I))+D7*D6*E1*(U4(I)+U5(I)))*C1
5060 A(13,6)=0
5070 A(13,7)=0
5080 A(13,8)=CB*D4*E2*(2*J4(I)+J5(I))+DB*D4*E2*(-J4(I)+J5(I))
5090 A(13,8)=A(13,8)+(-C6*D4*E2*(2*P4(I)+P5(I))-D7*D6*E2*(-U4(I)-U5(I)))*C1
5100 A(13,9)=0
5110 A(13,10)=0
5120 A(13,11)=0
5130 A(13,12)=CV*C4+CV*F9+CV*C6*D4*(2*U4(I)+U5(I))-DB*D4*(U4B+U5B)
5140 A(13,12)=A(13,12)-D9*D6*E2+D5*CV*(C5+G3)
5150 A(13,13)=CV*C3+CV*F9+CV*C6*D4*(U4(I)+2*U5(I))+DB*D4*(U4B+U5B)
5160 A(13,13)=A(13,13)+D9*D6*E2+D5*CV*(C4+G3)
5170 A(13,14)=0
5180 A(13,15)=0
5190 A(13,16)=0
5200 A(13,17)=(-C6*D4*(2*U4(I)+U5(I))-C4)*C1
5210 A(13,18)=(-C6*D4*(U4(I)+2*U5(I))-C3)*C1
5220 W1=J4(I)*(-CV*C4-CV*F9-CV*C6*D4*(2*U4(I)+U5(I))+DB*D4*(U4B+U5B))
5230 W1=W1+D5*CV*(-C5-G3)*J4(I)
5240 W2=J4(I-1)*(CV*C4+CV*F9-CV*C6*D4*(2*U4(I-1)+U5(I-1))+DB*D4*(U4B+U5B))
5250 W2=W2+J4(I-1)*(D5*CV*(-C5-G3))
5260 W3=J5(I)*(-CV*C3-CV*F9-CV*C6*D4*(U4(I)+2*U5(I))-DB*D4*(U4B+U5B))
5270 W3=W3+J5(I)*(D5*CV*(-C4-G3))
5280 W4=J5(I-1)*(CV*C3+CV*F9-CV*C6*D4*(U4(I-1)+2*U5(I-1))-DB*D4*(U4B+U5B))
5290 W4=W4+J5(I-1)*(D5*CV*(-C4-G3))
5300 W5=2*CD/(4*DE^2)*D6*(T4(I)+T4(I-1)-T5(I)-T5(I-1))
5310 W6=P4(I)*(C1*C6*D4*(2*U4(I)+U5(I))+C1*C4)
5320 W6=W6+P4(I-1)*(C1*C6*D4*(2*U4(I-1)+U5(I-1))-C4*C1)
5330 W6=W6+P5(I)*(C1*C6*D4*(U4(I)+2*U5(I))+C1*C3)
5340 W6=W6+P5(I-1)*(C1*C6*D4*(U4(I-1)+2*U5(I-1))-C1*C3)
5350 W7=D7/2*C1*D6*(U4(I)+U5(I))*(-U4(I)+U5(I))
5360 W8=D7/2*C1*D6*(U4(I-1)+U5(I-1))*(-U4(I-1)+U5(I-1))
5370 B(13)=W1+W2+W3+W4+W5+W6+W7+W8
5380 FOR II=14 TO 18
5390 FOR J=1 TO 8
5400 A(II,J)=0
5410 NEXT J
5420 NEXT II
5430 A(14,9)=-RU*C3
5440 A(14,10)=-RU*C4
5450 A(14,11)=0
5460 A(14,12)=0
5470 A(14,13)=0
5480 A(14,14)=C3
5490 A(14,15)=C4
5500 A(14,16)=0
5510 A(14,17)=0
5520 A(14,18)=0
5530 B(14)=-C3*P1(I)-C4*P2(I)+RU*C3*J1(I)+C4*RU*J2(I)
5540 A(15,9)=-RU*C4
5550 A(15,10)=-RU*2*C3
5560 A(15,11)=-RU*C4
5570 A(15,12)=0
5580 A(15,13)=0
5590 A(15,14)=C4
5600 A(15,15)=2*C3
5610 A(15,16)=C4
5620 A(15,17)=0
5630 A(15,18)=0

```

```
5640 B(15)=-C4*P1(I)-2*C3*P2(I)-C4*P3(I)+RU*C4*J1(I)+RU*2*C3*J2(I)
5650 B(15)=B(15)+RU*C4*J3(I)
5660 A(16,9)=0
5670 A(16,10)=-RU*C4
5680 A(16,11)=-RU*2*C3
5690 A(16,12)=-RU*C4
5700 A(16,13)=0
5710 A(16,14)=0
5720 A(16,15)=C4
5730 A(16,16)=2*C3
5740 A(16,17)=C4
5750 A(16,18)=0
5760 B(16)=-C4*P2(I)-2*C3*P3(I)-C4*P4(I)+RU*C4*J2(I)+RU*2*C3*J3(I)
5770 B(16)=B(16)+RU*C4*J4(I)
5780 A(17,9)=0
5790 A(17,10)=0
5800 A(17,11)=-RU*C4
5810 A(17,12)=-RU*2*C3
5820 A(17,13)=-RU*C4
5830 A(17,14)=0
5840 A(17,15)=0
5850 A(17,16)=C4
5860 A(17,17)=2*C3
5870 A(17,18)=C4
5880 B(17)=-C4*P3(I)-2*C3*P4(I)-C4*P5(I)+RU*C4*J3(I)+RU*2*C3*J4(I)
5890 B(17)=B(17)+RU*C4*J5(I)
5900 A(18,9)=0
5910 A(18,10)=0
5920 A(18,11)=0
5930 A(18,12)=-RU*C4
5940 A(18,13)=-RU*C3
5950 A(18,14)=0
5960 A(18,15)=0
5970 A(18,16)=0
5980 A(18,17)=C4
5990 A(18,18)=C3
6000 B(18)=-C4*P4(I)-C3*P5(I)+RU*C4*J4(I)+RU*C3*J5(I)
6010 GOSUB 8000
6020 R1(I)=R1(I)+DR1
6030 R2(I)=R2(I)+DR2
6040 R3(I)=R3(I)+DR3
6050 R4(I)=R4(I)+DR4
6060 R5(I)=R5(I)+DR5
6070 M1(I)=0
6080 M2(I)=M2(I)+DM2
6090 M3(I)=M3(I)+DM3
6100 M4(I)=M4(I)+DM4
6110 M5(I)=0
6120 J1(I)=J1(I)+DJ1
6130 J2(I)=J2(I)+DJ2
6140 J3(I)=J3(I)+DJ3
6150 J4(I)=J4(I)+DJ4
6160 J5(I)=J5(I)+DJ5
6170 P1(I)=P1(I)+DP1
6180 P2(I)=P2(I)+DP2
6190 P3(I)=P3(I)+DP3
6200 P4(I)=P4(I)+DP4
6210 P5(I)=P5(I)+DP5
6220 U1(I)=M1(I)/R1(I)
6230 U2(I)=M2(I)/R2(I)
6240 U3(I)=M3(I)/R3(I)
6250 U4(I)=M4(I)/R4(I)
6260 U5(I)=M5(I)/R5(I)
6270 T1(I)=J1(I)/(C2*R1(I))
6280 T2(I)=J2(I)/(C2*R2(I))
6290 T3(I)=J3(I)/(C2*R3(I))
```



```

6300 T4(I)=J4(I)/(C2*R4(I))
6310 T5(I)=J5(I)/(C2*R5(I))
6320 LPRINT "R1=";R1(I),"R2=";R2(I),"R3=";R3(I),"R4=";R4(I),"R5=";R5(I)
6330 LPRINT "M1=";M1(I),"M2=";M2(I),"M3=";M3(I),"M4=";M4(I),"M5=";M5(I)
6340 LPRINT "U1=";U1(I),"U2=";U2(I),"U3=";U3(I),"U4=";U4(I),"U5=";U5(I)
6350 LPRINT "J1=";J1(I),"J2=";J2(I),"J3=";J3(I),"J4=";J4(I),"J5=";J5(I)
6360 LPRINT "T1=";T1(I),"T2=";T2(I),"T3=";T3(I),"T4=";T4(I),"T5=";T5(I)
6370 LPRINT "P1=";P1(I),"P2=";P2(I),"P3=";P3(I),"P4=";P4(I),"P5=";P5(I)
6380 NEXT JJ
6390 ANG1=ANG2
6400 I=I+1
6410 ZP=ZP-DZP
6420 IF ANG2=360 THEN 6450 ELSE 6430
6430 IF ANG2>360 THEN 6470 ELSE 6440
6440 IF ZP>=ZPO THEN 590 ELSE 6490
6450 ZP=ZP+DZP+DZO
6460 GOTO 6510
6470 ZP=ZP+2*DZP
6480 IF ZP<=ZP1 THEN 6510 ELSE 6550
6490 DZO=ZP+DZP-ZPO
6500 ZP=ZPO
6510 AG=(1-(ZP-ZPO)/RMV)
6520 CV=.258
6530 ANG2=360+(1.570796327#-ATN(AG/SQR(1-AG*AG)))*(360/(2*3.141592654#))
6540 GOTO 610
6550 END
6560 DATA 5,1,0,0,0,0.2582,0.2582,0.2582,0,0,0,20
6570 DATA 0.14,0.01,0.00125,0.065
6580 DATA 0.226,1.8982D-6,6.3325D-6,29.27
6590 DATA 0.1162,0.1162,0.1162,0.1162,0.1162
6600 DATA 0,0,0,0,0
6610 DATA 300,300,300,300,300
6620 DATA 1D4,1D4,1D4,1D4,1D4
8000 REM CALCULO COEFICIENTES (A)  MATRIZES AX=B
8010 N=4*NE-2
8020 FOR I1=1 TO N
8030 FOR J1=1 TO N
8040 LPRINT "I1=";I1,"J1=";J1,"B=";B(I1),"A=";A(I1,J1)
8050 NEXT J1
8060 NEXT I1
8070 J1=1
8080 IF J1>=N THEN 8310 ELSE 8090
8090 I1=J1+1
8100 IF I1>N THEN 8220 ELSE 8110
8110 IF ABS(A(J1,J1))>=ABS(A(I1,J1)) THEN 8200 ELSE 8120
8120 FOR K1=J1 TO N
8130 C(J1,K1)=A(J1,K1)
8140 A(J1,K1)=A(I1,K1)
8150 A(I1,K1)=C(J1,K1)
8160 NEXT K1
8170 D(J1)=B(J1)
8180 B(J1)=B(I1)
8190 B(I1)=D(J1)
8200 I1=I1+1
8210 GOTO 8100
8220 FOR L1=J1+1 TO N
8230 M(L1)=A(L1,J1)/A(J1,J1)
8240 FOR K1=J1 TO N
8250 A(L1,K1)=A(L1,K1)-M(L1)*A(J1,K1)
8260 NEXT K1
8270 B(L1)=B(L1)-M(L1)*B(J1)
8280 NEXT L1
8290 J1=J1+1
8300 GOTO 8080
8310 REM CALCULO DOS RESIDUOS
8320 DP5=B(18)/A(18,18)

```

```

8330 DP4=(B(17)-A(17,18)*DP5)/A(17,17)
8340 DP3=(B(16)-A(16,18)*DP5-A(16,17)*DP4)/A(16,16)
8350 DP2=(B(15)-A(15,18)*DP5-A(15,17)*DP4-A(15,16)*DP3)/A(15,15)
8360 DP1=(B(14)-A(14,18)*DP5-A(14,17)*DP4-A(14,16)*DP3-A(14,15)*DP2)/A(14,14)
8370 DJ5=(B(13)-A(13,18)*DP5-A(13,17)*DP4-A(13,16)*DP3-A(13,15)*DP2)
8380 DJ5=(DJ5-A(13,14)*DP1)/A(13,13)
8390 DJ4=(B(12)-A(12,18)*DP5-A(12,17)*DP4-A(12,16)*DP3-A(12,15)*DP2)
8400 DJ4=(DJ4-A(12,14)*DP1-A(12,13)*DJ5)/A(12,12)
8410 DJ3=(B(11)-A(11,18)*DP5-A(11,17)*DP4-A(11,16)*DP3-A(11,15)*DP2)
8420 DJ3=(DJ3-A(11,14)*DP1-A(11,13)*DJ5-A(11,12)*DJ4)/A(11,11)
8430 DJ2=(B(10)-A(10,18)*DP5-A(10,17)*DP4-A(10,16)*DP3-A(10,15)*DP2)
8440 DJ2=(DJ2-A(10,14)*DP1-A(10,13)*DJ5-A(10,12)*DJ4-A(10,11)*DJ3)/A(10,10)
8450 DJ1=(B(9)-A(9,18)*DP5-A(9,17)*DP4-A(9,16)*DP3-A(9,15)*DP2-A(9,14)*DP1)
8460 DJ1=(DJ1-A(9,13)*DJ5-A(9,12)*DJ4-A(9,11)*DJ3-A(9,10)*DJ2)/A(9,9)
8470 DM4=(B(8)-A(8,18)*DP5-A(8,17)*DP4-A(8,16)*DP3-A(8,15)*DP2-A(8,14)*DP1)
8480 DM4=(DM4-A(8,13)*DJ5-A(8,12)*DJ4-A(8,11)*DJ3-A(8,10)*DJ2-A(8,9)*DJ1)/A(8,8)
8490 DM3=(B(7)-A(7,18)*DP5-A(7,17)*DP4-A(7,16)*DP3-A(7,15)*DP2-A(7,14)*DP1)
8500 DM3=(DM3-A(7,13)*DJ5-A(7,12)*DJ4-A(7,11)*DJ3-A(7,10)*DJ2-A(7,9)*DJ1)
8510 DM3=(DM3-A(7,8)*DM4)/A(7,7)
8520 DM2=(B(6)-A(6,18)*DP5-A(6,17)*DP4-A(6,16)*DP3-A(6,15)*DP2-A(6,14)*DP1)
8530 DM2=(DM2-A(6,13)*DJ5-A(6,12)*DJ4-A(6,11)*DJ3-A(6,10)*DJ2-A(6,9)*DJ1)
8540 DM2=(DM2-A(6,8)*DM4-A(6,7)*DM3)/A(6,6)
8550 DR5=(B(5)-A(5,18)*DP5-A(5,17)*DP4-A(5,16)*DP3-A(5,15)*DP2-A(5,14)*DP1)
8560 DR5=(DR5-A(5,13)*DJ5-A(5,12)*DJ4-A(5,11)*DJ3-A(5,10)*DJ2-A(5,9)*DJ1)
8570 DR5=(DR5-A(5,8)*DM4-A(5,7)*DM3-A(5,6)*DM2)/A(5,5)
8580 DR4=(B(4)-A(4,18)*DP5-A(4,17)*DP4-A(4,16)*DP3-A(4,15)*DP2-A(4,14)*DP1)
8590 DR4=(DR4-A(4,13)*DJ5-A(4,12)*DJ4-A(4,11)*DJ3-A(4,10)*DJ2-A(4,9)*DJ1)
8600 DR4=(DR4-A(4,8)*DM4-A(4,7)*DM3-A(4,6)*DM2-A(4,5)*DR5)/A(4,4)
8610 DR3=(B(3)-A(3,18)*DP5-A(3,17)*DP4-A(3,16)*DP3-A(3,15)*DP2-A(3,14)*DP1)
8620 DR3=(DR3-A(3,13)*DJ5-A(3,12)*DJ4-A(3,11)*DJ3-A(3,10)*DJ2-A(3,9)*DJ1)
8630 DR3=(DR3-A(3,8)*DM4-A(3,7)*DM3-A(3,6)*DM2-A(3,5)*DR5-A(3,4)*DR4)/A(3,3)
8640 DR2=(B(2)-A(2,18)*DP5-A(2,17)*DP4-A(2,16)*DP3-A(2,15)*DP2-A(2,14)*DP1)
8650 DR2=(DR2-A(2,13)*DJ5-A(2,12)*DJ4-A(2,11)*DJ3-A(2,10)*DJ2-A(2,9)*DJ1)
8660 DR2=(DR2-A(2,8)*DM4-A(2,7)*DM3-A(2,6)*DM2-A(2,5)*DR5-A(2,4)*DR4)
8670 DR2=(DR2-A(2,3)*DR3)/A(2,2)
8680 DR1=(B(1)-A(1,18)*DP5-A(1,17)*DP4-A(1,16)*DP3-A(1,15)*DP2-A(1,14)*DP1)
8690 DR1=(DR1-A(1,13)*DJ5-A(1,12)*DJ4-A(1,11)*DJ3-A(1,10)*DJ2-A(1,9)*DJ1)
8700 DR1=(DR1-A(1,8)*DM4-A(1,7)*DM3-A(1,6)*DM2-A(1,5)*DR5-A(1,4)*DR4)
8710 DR1=(DR1-A(1,3)*DR3-A(1,2)*DR2)/A(1,1)
8720 LPRINT "DP1=";DP1,"DP2=";DP2,"DP3=";DP3,"DP4=";DP4,"DP5=";DP5
8730 LPRINT "DJ1=";DJ1,"DJ2=";DJ2,"DJ3=";DJ3,"DJ4=";DJ4,"DJ5=";DJ5
8740 LPRINT "DM2=";DM2,"DM3=";DM3,"DM4=";DM4
8750 LPRINT "DR1=";DR1,"DR2=";DR2,"DR3=";DR3,"DR4=";DR4,"DR5=";DR5
8760 RETURN
8770 END

```

12. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1. 1983/84 Statistical Yearbook. New York, 34 issue, ONU, Department of International Economic and Social Affairs, Statistical Office, 1986, p.820, 826, 1011 - 1013.
2. Holmes, A. et alii. Financial times energy world compiled. London, FT Business Information, 1985, p.18-19.
3. Balanco Energético Nacional - 1986. Brasília, Ministério das Minas e Energia, 1987, p.38.
4. Blumberg, P.N. et alii. Phenomenological models for reciprocating internal combustion engines. London, Progress in Energy and Combustion Science, Pergamon Press Ltd., 1979, v.5, p.123-167.
5. McDonald, H. Combustion modeling in two and three dimensions - some numerical considerations. London, Progress in Energy and Combustion Science, Pergamon Press Ltd., 1979, v.5, p.97-122.
6. Hohenberg, G.F.. Advanced approaches for heat transfer calculations. Warrendale, report 790825 SAE - Society of Automotive Engineers Inc., 1979.
7. Mayes, T.K. et alii. Cylinder pressure data acquisition and heat release analysis on a personal computer. Warrendale, report 860029SAE - Society of Automotive Engineers Inc., 1986.

8. Nigro, F.E.B. et alii.. Determinação da razão de liberação de calor durante a combustão de ésteres de óleos vegetais em motores Diesel. São Paulo, IPT, 1983.
9. Butler, T.D. et alii. Multidimensional numerical simulation of reactive flow in internal combustion engines. London, Progress in Energy and Combustion Science, Pergamon Press Ltd., 1981, v.7, p.293-315.
10. Patankar, S.V.. Numerical heat transfer and fluid flow. 1^ª, Hemisphere Publishing Corporation, 1980.
11. Mattavi, J.N. et alii. Combustion modeling in reciprocating engines. New York, Proceedings of the Symposium on Combustion Modeling in Reciprocating Engines, 1^ª, Plenum Press, 1980.
12. Schlichting, H. Boundary layer theory. New York, 4^ª McGraw Hill Book Company Inc, 1960.
13. Roache, P.J.. Computational fluid dynamics. Albuquerque, Hermosa Publishers.
14. Giacosa, D.. Motori endotermici. Milão, 13^ª, Ulrico Hoepli Editore SPA, 1979.
15. Taylor, C.F.. Análise de motores de combustão interna, São Paulo, editoras Edgard Blücher Ltda. e da Universidade de São Paulo, 1976, v. 1 e 2.
16. Gosman, A.D. et alii. Computer simulation of in-cylinder flow, heat transfer and combustion: a progress report. Viena, 13th International Congress on Combustion Engines, 1979, p.D21/1-D21/27.

17. Wakisaka, T. et alii. Three dimensional numerical analysis of in-cylinder flows in reciprocating engines. Warrendale, report 860464 SAE - Society of Automotive Engineers Inc., 1986.
18. Baker, A.J.. Finite element computational fluid mechanics. 1st, Hemisphere Publishing Corporation, 1983.