

WALTER JORGE AUGUSTO PONGE-FERREIRA

**MÉTODO DE ENSAIO E ANÁLISE DE CARACTERÍSTICAS  
DINÂMICAS E VELOCIDADES CRÍTICAS EM  
IMPELIDORES DE VENTILADORES CENTRÍFUGOS  
EXCITADOS AERODINAMICAMENTE**

Dissertação apresentada à Escola  
Politécnica da Universidade de São Paulo  
para obtenção do título de Mestre em  
Engenharia.

São Paulo  
1994

WALTER JORGE AUGUSTO PONGE-FERREIRA

**MÉTODO DE ENSAIO E ANÁLISE DE CARACTERÍSTICAS  
DINÂMICAS E VELOCIDADES CRÍTICAS EM  
IMPELIDORES DE VENTILADORES CENTRÍFUGOS  
EXCITADOS AERODINAMICAMENTE**

Dissertação apresentada à Escola  
Politécnica da Universidade de São Paulo  
para obtenção do título de Mestre em  
Engenharia.

Área de Concentração:  
Engenharia Mecânica

Orientador:  
Francisco Emílio Baccaro Nigro

São Paulo  
1994



## S U M Á R I O

1.	Introdução .....	1
2.	Breve histórico e Revisão Bibliográfica .....	7
3.	Vibrações em Impelidores de ventiladores centrífugos .....	17
3.1.	Definição do Sistema em Estudo .....	18
3.2.	Características Dinâmicas Estruturais de Ventiladores .....	23
3.2.1.	Classificação dos Ventiladores .....	24
3.2.2.	Partes dos Ventiladores Centrífugos .....	28
3.2.3.	Características Físicas e de Operação .....	29
3.2.4.	Características Dinâmicas Estruturais .....	30
3.2.5.	Classificação dos Modos de Vibração .....	36
3.3.	Desacoplamento da Dinâmica do Impelidor .....	44
3.4.	Fontes e Mecanismos de Vibração .....	47
3.4.1.	Movimento Imposto pelo Cubo .....	48
3.4.2.	Excitação Aerodinâmica .....	50
3.4.3.	Efeito de filtro do Número Finito de Pás .....	52
3.5.	Enrijecimento devido à Rotação e Coeficiente de Southwell .....	55
3.5.1	Método de Rayleigh-Ritz para Determinação da Dinâmica de Disco em Rotação .....	57
3.5.2.	Método de Southwell .....	61
3.5.3.	Equação do Movimento de Corpos Flexíveis em Rotação .....	65
3.6.	Movimento Rotativo e Velocidades Críticas de Disco .....	72
3.6.1.	Ondas Estacionárias e em Movimento .....	73
3.6.2	Velocidades Críticas de Disco e Diagrama de Campbell .....	83
3.7.	Trabalho sobre os modos de vibração .....	91
3.7.1.	Trabalho de uma Força Pontual Estacionária e Constante .....	92
3.7.2.	Trabalho de uma força oscilante estacionária .....	94
3.7.3.	Influência da forma espacial do pulso de pressão no trabalho exercido sobre o modo de vibração .....	97
3.8.	Outros efeitos .....	99
3.8.1.	Redução do Módulo de Elasticidade com a Temperatura .....	99
3.8.2.	Largura da Faixa de Amplificação nas Ressonâncias .....	100
3.8.3.	Outros efeitos .....	101
4.	Metodologia De Ensaio E Análise De Vibrações Em Impelidores De Ventiladores Centrífugos .....	103
4.1.	Linhas Gerais da Metodologia de Ensaio e Análise .....	107

4.2.	Análise Modal Experimental do impelidor estacionário.....	107
4.2.1.	Montagem Experimental e Instrumentação .....	108
4.2.2.	Métodos de Ensaio de Análise Modal Experimental .....	110
4.2.3.	Pesquisa Preliminar de Ressonâncias .....	114
4.2.4.	Ensaio de Ressonância pela Fase.....	117
4.2.5.	Ensaio de Separação Numérica dos Modos .....	119
4.3.	Estimação das Condições Críticas .....	121
4.4.	Avaliação da Severidade das Condições Críticas .....	125
5.	Ensaio de disco uniforme engastado no centro.....	127
5.1	Resultados analíticos da dinâmica de um disco axissimétrico engastado no centro.....	129
5.2	Modelo de Elementos Finitos do Disco.....	132
5.3	Análise Modal Experimental do Disco.....	138
6	Estudo da dinâmica de impelidor centrífugo .....	166
6.1.	Estudo do Impelidor Original.....	170
6.1.1.	Modelo de Elementos Finitos do Impelidor Original.....	170
6.1.2.	Ensaio de Análise Modal Experimental do Impelidor Original.....	193
6.2.	Modificação Estrutural do Impelidor.....	196
6.3.	Estudo do Impelidor Modificado.....	197
6.3.1.	Modelo de Elementos Finitos do Impelidor Modificado.....	197
6.3.2.	Ensaio de Análise Modal Experimental do Impelidor Modificado.....	209
6.4.	Conclusões do Estudo do Impelidor Centrífugo.....	212
7.	Conclusões.....	214



## 1. INTRODUÇÃO

*Resumo* [ O trabalho de pesquisa desenvolvido aborda a dinâmica vibratória de impelidores<sup>1</sup> de ventiladores centrífugos excitados à vibrar por ação aerodinâmica. A finalidade da pesquisa foi estudar o fenômeno conhecido como velocidade crítica de disco em ventiladores centrífugos, e desenvolver uma metodologia de ensaio e análise destes impelidores para determinação de suas características dinâmicas e, para avaliação da confiabilidade estrutural à vibração quando em operação. O trabalho de pesquisa visou desenvolver uma metodologia de ensaio e análise para impelidores de ventiladores centrífugos semelhante ao procedimento de ensaio atualmente já normalizado pela ANSI/ASHRAE 87.1-1992 para impelidores de ventiladores axiais de pequeno porte. O objetivo maior é colocar a disposição do mercado nacional a tecnologia para o desenvolvimento de ventiladores, bem como, possibilitar uma avaliação e comparação objetiva das características dinâmicas dos impelidores centrífugos de diferentes produtores. A importância técnica do problema abordado para a projeto de ventiladores centrífugos reforça o valor comercial desta tecnologia. ]

---

<sup>1</sup> No presente trabalho adotou-se o neologismo **impelidor** para designar o componente do ventilador formado pelo conjunto disco-cubo, pás e tampa, por acharmos esta designação menos dúbil do que simplesmente **disco** ou **rotor** de ventilador e mais adequada do que **roda de ventilador**.

A recente globalização da economia mundial tem sinalizado novas condições de contorno ao setor industrial nacional e internacional (SOUZA, 1993). Primeiramente existe a tendência e mesmo o esforço explícito no sentido de derrubar barreiras comerciais e tecnológicas que permitam a atuação empresarial sobre um mercado mundial ou de grandes blocos comerciais. Como consequência desta tendência econômica, os setores produtivos que almejam sobreviver a esta transformação são impelidos a aprimorar a competitividade de seu empreendimento e a qualidade dos seus produtos e serviços. A importância e o elevado custo da capacitação tecnológica, dada a velocidade com que o desenvolvimento tecnológico se processa no mundo contemporâneo, obriga que sejam adotadas estratégias empresariais e gerenciais para a capacitação tecnológica das empresas (PEREIRA DE CASTRO, 1993a). Empresas de pequeno e médio porte nem sempre podem arcar com este custo, sendo obrigadas a procurar fontes externas para a tecnologia que necessitam. Em muitos casos, a importação de 'know-how' estrangeiro não está mais a disposição, pois antigos parceiros ou fornecedores de tecnologia passam a enxergar a indústria nacional como concorrente no mercado globalizado e restringem o fornecimento de tecnologia (FIORI, 1993). Além disso, a indústria dos países economicamente desenvolvidos impõe o seu padrão de alta qualidade e avançada tecnologia a todos os seus concorrentes e avança com sua insaciável produtividade sobre todos os mercados. Desta forma, existe a necessidade das empresas de



pequeno e médio porte adquirirem a tecnologia e/ou formarem parcerias tecnológicas. Além da importância para o desenvolvimento industrial, o conhecimento tecnológico adquire, cada vez mais no capitalismo moderno, importância comercial em si mesmo, transformado-se ele próprio, o conhecimento tecnológico, em uma mercadoria com grande potencial mercadológico (PEREIRA DE CASTRO, 1993b). Os países que não pretendem permanecer aquém da transformação das economias industriais em produtoras do setor terciário, terão que enfrentar o desafio da produção científica e tecnológica (TOFFLER & TOFFLER, 1994).

O segundo aspecto da globalização do mercado apresenta-se na necessidade de criarem-se critérios e procedimentos de avaliação tecnológica e reconhecimento mútuo da certificação de qualidade. Para exemplificar esta tendência, vemos atualmente uma verdadeira revolução no sentido de uma normalização e credenciamento a nível mundial. Exemplo dessa mudança, é o presente esforço da indústria nacional para se credenciar nos sistemas de qualidade da série ISO 9000. Também nota-se o reavivamento do esforço de normalização a nível mundial, como pode-se verificar na reorganização do comité técnico TC-108 - Mechanical Vibration and Shock da International Organization for Standardization - ISO.

A indústria nacional de ventiladores de grande porte tem possibilidade de sobreviver no mercado global, pois o processo de produção de ventiladores de grande porte tem características peculiares de produção, que obrigam a uma

produção individual de cada ventilador, sem grande possibilidade de produção seriada e automatizada. Nessa área não é a disponibilidade de um parque industrial de última geração que garante a vantagem comercial, mas sim o domínio da tecnologia de produto e de processo de produção ágil, versátil, de qualidade e de baixo custo que determina a competitividade de uma empresa. A garantia de disponibilidade de tecnologia importada torna-se cada vez menos segura, posto que os principais detentores da tecnologia no mundo tendem a encarar a indústria nacional como concorrente num mercado globalizado. Em contatos recentes com esse segmento industrial sentimos o interesse no desenvolvimento de projetos de pesquisa na tecnologia de ventiladores de grande porte. O trabalho de pesquisa visa suprir esta necessidade da indústria nacional de ventiladores, colocando à disposição do mercado a tecnologia de análise e avaliação de impelidores de ventiladores centrífugos.

Desde o trabalho pioneiro de CAMPBELL (1924), constatou-se a importância do problema do controle das características dinâmicas de impelidores e do conhecimento das velocidades críticas de disco no projeto de rodas de turbinas a vapor e compressores seguros e confiáveis. A busca de maiores desempenhos dos ventiladores industriais também torna este aspecto crítico para o projeto destes. Aumentar o desempenho de ventiladores centrífugos significa estender a faixa de utilização desses ventiladores para regiões de maior produção de pressão. Isto implica na construção de



ventiladores com maior velocidade periférica, e portanto, maiores velocidades de rotação e maiores diâmetros (JORGENSEN - 1978). O conseqüente aumento dos esforços centrífugos impede que se possa acrescentar indiscriminadamente elementos estruturais na periferia dos impelidores, Implicando assim, na redução das frequências naturais dos impelidores. As frequências naturais de discos variam com o quadrado da dimensão linear, quando as espessuras são mantidas constantes (SOUTHWELL, 1922). Deste forma, nos ventiladores centrífugos de grande porte e grande desempenho, as frequências de excitação, múltiplas da velocidade de rotação, aproximam-se das frequências naturais do impelidor, aumentando a probabilidade de ocorrência de ressonâncias. Constatação esta, que se respalda no crescente relato de falhas em ventiladores causados por problemas dinâmicos. O conhecimento a nível mundial adquirido na área ainda não se encontra plenamente consagrado, o que justifica do ponto de vista técnico, o estudo de metodologias de análise e projeto da dinâmica de impelidores de ventiladores centrífugos industriais.

O trabalho de pesquisa desenvolvido aborda o tema do ponto de vista da análise experimental, auxiliada pela análise numérica pelo método dos elementos finitos. O objetivo foi desenvolver uma metodologia de ensaio de protótipos, que permitisse auxiliar o desenvolvimento do produto e avaliar objetivamente o seu desempenho no aspecto da integridade estrutural. Permeando este processo, como não poderia deixar de ser, sentiu-se a necessidade de aprofundar o

conhecimento sobre os mecanismos de vibração em ventiladores centrífugos.



## 2. BREVE HISTÓRICO E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA:

Nosso interesse pelo problema da dinâmica estrutural de impelidores de ventiladores centrífugos surgiu da necessidade de atender à solicitação de clientes do Laboratório de Ensaio Dinâmicos e Vibrações da Divisão de Mecânica e Eletricidade do IPT. Desta forma nossa abordagem do problema remonta aos procedimentos empregados anteriormente pelo laboratório. O laboratório tem vasta experiência prática na análise experimental de ventiladores para determinação de suas características dinâmicas, tendo realizado 11 trabalhos com ventiladores centrífugos desde 1982.

A natureza dos nossos trabalhos sobre dinâmica de impelidores centrífugos foi eminentemente experimental. O objetivo básico foi sempre a determinação experimental das características dinâmicas, i.e., frequências naturais, modos de vibração e amortecimento. Os trabalhos foram evoluindo de maneira a tratar cada vez mais profundamente o assunto, partindo do mero levantamento de características dinâmicas básicas nos primeiros trabalhos para uma avaliação da confiabilidade estrutural dos ventiladores considerando condições reais de operação. Um relato dos resultados de um desses trabalhos encontra-se publicado (PONGE-FERREIRA & NIGRO, 1993), cujos resultados também foram usados como de caso de estudo na presente dissertação.

Para o aprimoramento da metodologia de ensaio deu-se ênfase inicialmente à melhoria das técnicas experimentais de identificação das propriedades dinâmicas de estruturas. Com os ensaios realizados em 1992 sentiu-se a necessidade de complementar os conhecimentos sobre dinâmica de impelidores. Desta forma, concretizou-se a idéia de adotar o assunto como tema de dissertação de mestrado, qual seja, formalizar uma metodologia, fundada em base científica, para ensaio e análise das características dinâmicas de impelidores centrífugos.

Os estudos sobre vibração de estruturas em rotação foram abordados inicialmente no projeto de rotores de turbinas à vapor e compressores, hélices de aviões, turbinas à gás e hélices de helicópteros. LALANNE (1980) e TRAXLER (1977) apresentam revisões sobre vibrações em turbomáquinas. Somente recentemente começou-se a dar atenção também à dinâmica de ventiladores industriais (EBERSBACH, HOHLRIEDER & IRRETIER, 1987). Entretanto os procedimentos para este caso são similares aos anteriores, diferindo apenas nas características particulares de cada tipo de máquina. Do ponto de vista teórico a abordagem pode ser exatamente a mesma, entretanto na prática depara-se com limitações de recursos disponíveis para o projeto de grandes ventiladores, que em geral não são produzidos em série, ao contrário de turbinas à gás e vapor. Desta forma, deve-se preferir procedimentos mais simples e menos dispendiosos de recursos e tempo na elaboração do procedimento de ensaio e análise de impelidores. Este é o ponto crucial onde um

critério de seleção dos modos de vibração perigosos pode simplificar todo o procedimento de análise.

A abordagem por nós adotada para enfrentar o problema baseia-se nas abordagens dadas pelos pesquisadores clássicos, SOUTHWELL (1922) e CAMPBELL (1924), que serviram de referência para todos os demais trabalhos desenvolvidos na área.

LAMB & SOUTHWELL (1921) publicaram um artigo sobre o estudo do efeito da rotação sobre as características dinâmicas de um disco. Estudaram o caso de um disco homogêneo uniforme livre em movimento rotacional. Primeiramente resolvem as equações de vibração transversal de uma membrana, sem rigidez à flexão, quando submetida aos esforços de rotação. A solução é obtida por separação de variáveis, sendo que na direção radial é adotada uma série exponencial. Então apresentam a solução da vibração transversal de um disco em repouso dada por KIRSCHHOFF (1850) apud SOUTHWELL (1922). Em seguida apresentam a equação diferencial do disco com rigidez à flexão submetido a rotação. Não consideram os efeitos da força cortante e da inércia rotacional da seção na equação diferencial parcial do movimento. Observam que mesmo num caso simples de disco homogêneo uniforme, a solução analítica considerando-se os dois efeitos simultaneamente é demasiadamente complexa. Sugerem a adoção do método de Rayleigh citando *Theory of Sound*. Observam que por esse método obtém-se uma estimativa superior para as frequências naturais.



Em seguida, os autores sugerem a composição dos dois efeitos pela formula que ficou conhecida como Formula de Southwell:

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2 \quad (2.1)$$

com:

$$p_1^2 = \frac{V_1(\phi)}{T(\phi)} \quad p_2^2 = \frac{V_2(\phi)}{T(\phi)}$$

onde:  $p_1$  = frequência natural devido unicamente a restituição elástica;

$p_2$  = frequência natural devido unicamente ao efeito centrífugo;

$V_1(\phi)$  = energia potencial elástica;

$V_2(\phi)$  = energia potencial devido à força centrífuga;

$T(\phi)$  = proporcional a energia cinética.

Este resultado representa um limite inferior para a frequência natural. No artigo seguinte, SOUTHWELL (1922) resolve o problema para placa anular engastada no centro. A abordagem é a mesma, somente explicitando a solução da vibração da membrana em rotação em termos de função de Bessel (BUTKOV, 1978). Propõe a adoção do método de Rayleigh incorporando o desenvolvimento de Ritz, que ele atribui a LAMB (1921). Entretanto, Southwell mostra que a adoção de uma forma aproximada do modo de vibração que pareça aceitável pode levar a erros significativos na estimativa pelo método de Rayleigh-Ritz. Nesta época é amplamente reconhecido que a solução das vibrações em estruturas reais é muito mais complexa, sendo praticamente



estão a disposição diversas soluções analíticas para todos os casos mais simples de vibração em discos (VOGEL & SKINNER, 1965). Existem diversos estudos sobre a vibração de discos com algumas modificações, e.g, excentricidade do engastamento central (KHURASIA & OLUNLOYO, 1985) e placas anulares interligadas por molas lineares (GUPTA & PASSERELLO, 1982). Também existem diversos estudos da resposta de discos a forças em movimento (WEISENSEL & SCHLANCK, 1988).

O problema de obter-se modelos matemáticos precisos para a vibração de impelidores reais permaneceu por muito tempo. Com o advento do método dos elementos finitos, que é a extensão natural do método de Rayleigh-Ritz para estruturas discretizadas (PETYT, 1982), pôde-se modelar estruturas mais complexas, e esforço considerável foi despendido nas técnicas de modelagem de impelidores por este método. Assim, além de tornar possível a modelagem de impelidores com geometria complexa, pode-se introduzir na análise os efeitos térmicos, de rotação e interação com o fluido. A modelagem completa do rotor com todos os efeitos decorrentes da rotação é apresentada, entre outros, por HENRY<sup>2</sup>. Além dos termos usuais na análise dinâmica de estruturas discretas, são acrescentados os efeitos decorrentes

---

<sup>2</sup> HENRY, R. (INSA - Institut National des Structures Appliquées de Lyon, Laboratoire de Mécanique des Structures, France). **Vibration in rotating machinery - Part 2: Vibrações em discos e pás.** Campinas, jun. 1987. (Curso de Dinâmica de Turbomáquinas - UNICAMP - GEPRM).

da rotação. Dada a complexidade dos modelos, são recomendadas técnicas de redução de modelos. São aproveitadas simetrias do impelidor (ERRETT et al., 1985) ou ainda melhor, a periodicidade da estrutura do rotor. Para tal utilizam-se técnicas de síntese (GHOSH & RAJAMANI, 1985) e a teoria de propagação de ondas (MEAD, 1982). Outras técnicas de modelagem também são encontradas, como a Matriz de Transferência (THOMSON, 1984), em especial quando combinadas com a teoria de propagação de ondas. A flexibilidade do método dos elementos finitos favorece sua ampla utilização, inclusive permitindo estudar o modelo termoelástico acoplado ao problema aerodinâmico (HENRY<sup>3</sup>). Entretanto, devido a elevada complexidade das estruturas dos impelidores, os modelos são utilizados primordialmente na fase de desenvolvimento de projeto, não podendo ser dispensada a verificação por via experimental. Diversos trabalhos comparam resultados de modelagem com os resultados experimentais (IRRETIER, 1988, BANYAY & GUTZWILLER, 1982).

O enfoque adotado no magnífico trabalho de CAMPBELL (1924) norteou todos os trabalhos realizados na área. Campbell abordou todos os pontos essenciais na análise de rodas de turbinas. Em grande medida, todos os trabalhos desenvolvidos na área a partir de então consistem somente na incorporação de recursos mais modernos de análise e ensaio. Primeiramente, enunciou o princípio pelo qual o

---

<sup>3</sup> Op. cit.

disco de turbina pode ser excitado por uma distribuição de pressão irregular estática e estacionária. Fundamentou seu trabalho fortemente em procedimentos experimentais. Campbell faz um levantamento de casos de falhas riquíssimo, discute o mecanismo de excitação, as ondas em movimento e estacionárias, apresentando inúmeros resultados experimentais; estuda a dissipação de energia e o trabalho realizado sobre os modos de vibração pelas forças estacionárias, descreve os recursos de teste de discos de turbinas e define velocidades críticas e ressonâncias minoritárias. Campbell mostra que a força estacionária exerce trabalho sobre uma onda que permanece estacionária em relação ao referencial absoluto. Isto pode acontecer no caso dos discos, devido a simetria axial dos mesmos. Entretanto, nos casos práticos sempre há assimetrias do impelidor que orientam os modos de vibração em relação a posições fixas do rotor. Existem diversos trabalhos que estudam o efeito da introdução de assimetrias nos impelidores. Em particular, no caso dos impelidores de ventiladores centrífugos, o pequeno número de pás, que podem ser inclusive curvas, faz com que o impelidor não seja axissimétrico. Neste caso, os modos de vibração são sempre fixos ao rotor. KUSHNER (1980) percebeu a limitação na explicação de Campbell para estes casos, e reformulou-a novamente, dando conta do fato do modo não estar estacionário. Entretanto, trata-se na essência da mesma explicação. Unicamente, Campbell restringiu sua análise ao efeito sobre a onda com movimento retrógrado, que fica

estacionária nas velocidades críticas. A outra onda em movimento que compõe o modo de vibração pode ser desconsiderada, pois o trabalho médio das forças de excitação sobre ela é nulo.

Existem pesquisas sobre identificação dos modos de vibração com o rotor em movimento (EBERSBACH & IRRETIER, 1988 e 1990). Entretanto, os procedimentos ainda não estão disponíveis para determinação das características de impelidores de ventiladores em condições reais de operação. Primeiramente, necessitam de instrumentação complexa, que não pode ser incorporada facilmente nos rotores reais. Além disso, os erros de medição ainda são muito grandes (LADKANY et al., 1990). Portanto, a determinação das características dinâmicas ainda é preferencialmente executada com o rotor em repouso. A disseminação das técnicas de análise modal experimental e a disponibilidade atual de instrumentação e software facilitaram bastante os trabalhos de identificação. Já existem alguns procedimentos normalizados para medição de mobilidade mecânica em geral (ISO 7626) e especificamente para análise modal experimental de ventiladores axiais (ANSY/ASHRAE 87.1 - 1992). Entretanto os impelidores centrífugos apresentam uma dinâmica demasiadamente complexa, caracterizando-se por apresentar aglutinados de frequências e modos de forma complexa. Acontecem inclusive modos com características de vibração local em placas. Desta forma, torna-se difícil obter o comportamento real com ferramentas de modelagem, e mesmo obter um modelo numérico aceitável a partir dos resultados



do ensaio. Felizmente, os modos mais perigosos costumam ser mais bem comportados.

O desenvolvimento da metodologia de ensaio e análise de impelidores centrífugos foi orientado pelo método normalizado existente para ventiladores axiais (ANSI/ASHRAE 87.1 - 1992). Combinam-se os resultados da análise modal experimental do impelidor em repouso, com o coeficiente de Southwell obtido de modelagem por elementos finitos, ou conhecimento prévio, e se avalia o comportamento dinâmico em operação. Em relação ao procedimento desta norma, faz-se necessário realizar alguns comentários. Primeiro, no caso de impelidores centrífugos existe uma grande quantidade de modos de vibração na faixa de frequência de interesse, o que torna o levantamento de todos os modos demasiadamente dispendioso. Seria desejável dispor-se de critérios para avaliação, a priori, dos modos mais perigosos. Entretanto, devido essa mesma complexidade do comportamento dinâmico, acreditamos que não se obtenham todas as informações necessárias da modelagem. Seria necessário dispor-se de um modelo por demais refinado para este fim. Desta forma, a ênfase do trabalho, ao contrário de ter se pautado em técnicas de modelagem e identificação, foi dada na compreensão do fenômeno de vibração provocada não uniformidade espacial de distribuição de pressão. Sabe-se que um pulso de pressão não pode excitar igualmente todos os modos de vibração, mesmo quando o ventilador opera na velocidade crítica (PONGE-FERREIRA & NIGRO, 1993). Além da verificação da coincidência de possíveis frequências de

excitação com frequências naturais, deve-se verificar a apropriação das forças para excitar o determinado modo. Tal procedimento permite selecionar os modos mais perigosos. Neste trabalho, a seleção deste modos é feita ainda de maneira qualitativa, esperando-se que a continuidade do trabalho permita quantificar inequivocamente a severidade de cada modo de vibração.

### 3. VIBRAÇÕES EM IMPELIDORES DE VENTILADORES CENTRÍFUGOS

Nessa parte do trabalho são apresentados os fundamentos dos diversos aspectos relevantes na análise da dinâmica estrutural de impelidores, bem como teorias que auxiliam a compreensão do fenômeno vibratório em ventiladores.

Os dois principais aspectos no estudo da dinâmica vibratória de impelidores referem-se aos efeitos provocados pelo movimento de rotação do rotor e às características periódicas cíclicas da estrutura do impelidor. A ação das forças de inércia do movimento de rotação provocam o aumento das frequências naturais do impelidor. Além disso, a rotação do impelidor provoca um acoplamento entre a coordenada de posição angular e a variável de tempo. De fato, forças externas, estacionárias em relação ao referencial estacionário, são forças em movimento para o impelidor que gira. No caso geral, estas forças também podem variar no tempo. Portanto é necessário estudar, em cada instante, qual a fase do sinal de força comparada à fase do movimento vibratório na posição de atuação da força naquele instante. A existência de periodicidades cíclicas na estrutura do impelidor também lhe confere características dinâmicas próprias.

Ao iniciar-se a descrição da abordagem dada ao estudo de um determinado problema, sente-se a necessidade de classificar, definir e nomear. Não se trata de mero nominalismo, na realidade, esboça-se aqui a verdadeira alma

da metodologia de estudo e o campo onde será travada a batalha.

### 3.1. Definição do Sistema em Estudo

A escolha do termo *impelidor* para designar a roda do ventilador unicamente, em contraposição ao termo *rotor*, que designa o conjunto do impelidor, eixo-árvore e mancais, denuncia a classe de problemas que se pretendeu tratar neste trabalho, bem como a maneira como o problema foi abordado.

A escolha do objeto de estudo na abordagem de um problema de engenharia, i.e., a escolha do que se adota como sistema e vizinhança, e de onde a fronteira insere um corte no todo para isolar um aspecto peculiar do fenômeno estudado, são sempre arbitrários e denunciam tanto o objetivo que se tem em mente, como os recursos de que se dispõem (BISHOP & JOHNSON, 1979). Em geral é prudente localizar a fronteira do sistema em uma secção onde as variáveis de estado são conhecidas e de fácil representação, de forma a poder tratar o problema peculiar como um fenômeno isolado.

No estudo da dinâmica de ventiladores a primeira opção a fazer corresponde à seleção do problema estrutural isolado, ou a abordagem conjunta com a mecânica dos fluidos e a termodinâmica. A abordagem termo-fluido-estrutural é por



demais complexa<sup>4</sup> e desnecessária no estudo da dinâmica estrutural de impelidores. Para o estudo estrutural de ventiladores, em particular quando em regime permanente, a análise termodinâmica reduz-se meramente à determinação das temperaturas de operação e das propriedades dos materiais nestas temperaturas. O desacoplamento do problema fluídico do estrutural, em geral, requer do analista uma dose maior de ousadia na formulação de hipóteses e de humildade na interpretação dos resultados. Alguns fenômenos impedem que seja feita a análise isoladamente, e.g., no estudo de "flutter". No caso dos impelidores centrífugos, onde as deflexões devido à vibração são muito pequenas e o fluido é de baixa densidade, a hipótese de desacoplamento do problema dinâmico estrutural da dinâmica do fluido é satisfatória. A restrição maior neste caso se dá no tocante a validade dos resultados do amortecimento, quando este for determinado em condições diferentes das condições reais de operação.

O objetivo do trabalho foi estudar problemas estruturais de impelidores de ventiladores centrífugos onde ressonâncias do impelidor pudessem ser excitadas aerodinamicamente quando em funcionamento. A finalidade do trabalho é propiciar uma metodologia de avaliação da segurança

---

<sup>4</sup> HENRY, R. (INSA - Institut National des Structures Appliquée de Lyon, Laboratoire de Mecanique des Structure, France). **Vibration in rotating machinery - Part 2: Vibrações em discos e pás.** Campinas, jun. 1987. (Curso de Dinâmica de Turbomáquinas - UNICAMP - GEPRM).

estrutural do próprio impelidor e propor um meio de verificar se este tipo de mecanismo de geração de vibração pode ocorrer em funcionamento.

O estudo da dinâmica estrutural de rotores de ventiladores pode ser dividido em duas classes de problemas distintos (TRAEXLER, 1977 e LALANNE, 1980). Em primeiro lugar, pode-se estudar o comportamento dinâmico do conjunto do rotor, i.e., os possíveis movimentos que o rotor e suas partes realizam em decorrência dos esforços de inércias dos diversos componentes do rotor (discos ou impelidores, eixo-árvore, pedestais e fundação) e das deformações dos elementos flexíveis (eixo-árvore, mancais hidrodinâmicos, pedestais e eventual flexibilidade dos discos ou impelidores). A essa classe de problemas pode-se dar o nome genérico de dinâmica de rotores. São questões fundamentais nesta classe de problemas as velocidades críticas transversais e torcionais do rotor, a resposta ao desbalanceamento, a estabilidade do movimento de precessão do rotor, instabilidades hidrodinâmicas dos mancais e ressonâncias estruturais dos pedestais, da fundação e demais partes estacionárias do ventilador. O estudo da dinâmica de rotores diz respeito a aspectos fundamentais da integridade e comportamento dinâmico dos ventiladores como um todo.

A segunda classe de problemas enfoca a dinâmica estrutural do impelidor isoladamente, i.e., do conjunto estrutural em rotação, composto, a grosso modo, pelas pás e os diversos elementos estruturais que fixam estas últimas ao

eixo-árvore através do cubo. Nesta abordagem estuda-se o comportamento interno do impelidor. Sua interrelação com os demais elementos do ventilador são tratadas como condições de contorno e como excitações externas atuando sobre o impelidor. O fato que torna esta abordagem possível é a ocorrência de um certo grau de desacoplamento dos movimentos vibratórios principais do impelidor em relação à dinâmica das demais partes do rotor.

A abordagem adotada no trabalho enquadra-se nesta segunda classe de problemas. São duas as razões que justificam a escolha desta classe de problemas para avaliar a segurança de impelidores quanto a sua integridade estrutural. Em primeiro lugar, o problema enfocado segundo este procedimento corresponde à principal causa de falha estrutural de impelidores, segundo a única norma técnica que aborda especificamente a integridade estrutural de ventiladores, embora dedicada a ventiladores axiais de pequeno porte (ANSI/ASHRAE 87.1 - 1992), e segundo a bibliografia publicada (CAMPBELL, 1924, DIEHL, 1983 e IRRETIER, 1988). A preocupação com esse tipo de problema também reflete nossa experiência anterior na análise de dez impelidores centrífugos de grande porte (PONGE-FERREIRA & NIGRO, 1993). A segunda razão para a escolha desta abordagem reside no fato de que problemas estruturais internos ao impelidor, que são causa freqüente de trincas, serem pouco perceptíveis quando observados por transdutores externos ao impelidor, como transdutores de proximidade nos mancais e acelerômetros nos pedestais ou na carcaça do



ventilador. Neste sentido, considerou-se satisfatório e exequível abordar o problema através da análise modal experimental do impelidor em repouso, introduzindo-se posteriormente os efeitos provenientes da rotação. O uso de tal procedimento mostrou-se adequado para detectar e identificar as causas de problemas estruturais em impelidores, bem como orientar as medidas necessárias para correção dos eventuais problemas (MOFFA & LEON, 1982).

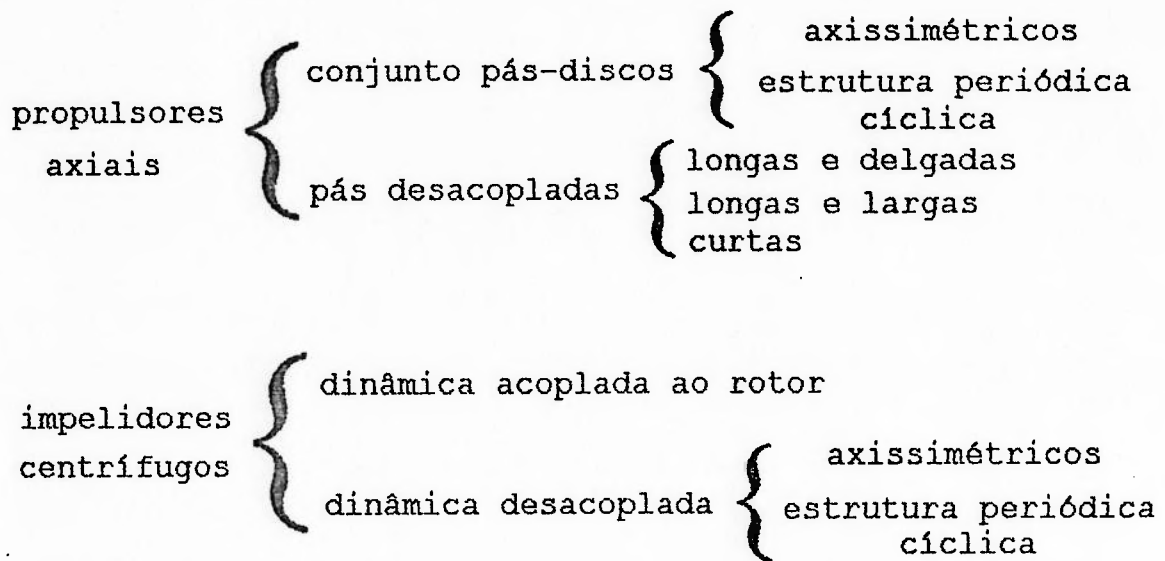
Certamente a abordagem adotada não contempla todos os complexos aspectos da integridade de ventiladores em operação. Outras técnicas como, por exemplo, recursos de diagnóstico de falhas e de monitoração de máquinas rotativas através da medição de vibrações, também são de grande importância para o controle da dinâmica do ventilador como um todo (MITCHELL, 1981; BS 848/6-1989 e CSI Application Paper, 1989). Entretanto estas técnicas não são apropriadas para detectar e identificar a origem dos problemas estruturais internos ao impelidor. A medição das reações nos mancais sofre de falta de observabilidade do estado dinâmico interno do impelidor. E em operação não se tem controlabilidade sobre a dinâmica do impelidor. Portanto o estado dinâmico interno do impelidor não é totalmente identificável nestas condições (LJUNG, 1987).

Sem sombra de dúvida, a abordagem mais completa compreenderia a medição da vibração das partes do impelidor em condições reais de funcionamento (WACHTER et al., 1984). Para isso, seria necessário instrumentar o impelidor com transdutores embarcados, em número suficiente para

interpretar a forma da vibração forçada, e ter um certo controle sobre o mecanismo de excitação. Fora o alto custo associado a esta abordagem e as dificuldades técnicas de realiza-la, também fica-se vulnerável aos elevados erros experimentais associados a complexidade de tal ensaio (ANSI/ASHRAE 87.1 - 1992). Atualmente, pelo que sabemos, este tipo de exploração restringe-se a trabalhos acadêmicos de pesquisa (BERLIOZ et al., 1991; EBERSBACH & IRRETIER, 1988 e 1990; REYNOLDS et al., 1989), não sendo utilizada como ferramenta de avaliação de impelidores reais em funcionamento. EBERSBACH e IRRETIER (1990) estudaram a dinâmica de um disco axissimétrico em ensaio de laboratório. Mesmo controlando a excitação e medindo as tensões no disco em rotação, não foi possível identificar as formas dos modos de vibração. Nesta pesquisa estimou-se apenas as frequências naturais e os amortecimentos.

### **3.2. Características Dinâmicas Estruturais de Ventiladores**

Do ponto de vista estrutural os ventiladores são classificados segundo o grau de acoplamento entre as diversas partes do impelidor/propulsor e rotor, bem como, pelo comportamento dinâmico básico de cada uma das suas partes.



**FIGURA 3.1:** Classificação das rodas de ventilador do ponto de vista estrutural

### 3.2.1. Classificação dos Ventiladores

Em primeiro lugar, distingue-se entre ventiladores axiais e centrífugos. Esta distinção vem da mecânica dos fluidos e baseia-se na direção do fluxo no ventilador (JORGENSEN, 1983). Pode-se adotar esta distinção também na classificação dos ventiladores do ponto de vista estrutural, pois os dois tipos tem características construtivas bem diferentes. Impelidores de fluxo misto são, em geral, estruturalmente semelhantes aos impelidores centrífugos.

COMMITTEE ON INDUSTRIAL VENTILATION (1984) apresenta resumidamente a classificação e nomenclatura dos diversos tipos e das partes de ventiladores.

Propulsores de ventiladores axiais compõem-se de um cubo ou disco central no qual são presas as pás. Estes ventiladores são classificados quanto ao grau de acoplamento das pás ao cubo/disco, bem como quanto ao comportamento dinâmico básico das pás, i.e., comportamento de viga nas pás delgadas e longas, comportamento de placa nas pás largas e longas e comportamento de corpo sólido nas pás curtas<sup>5</sup>.

Impelidores de ventiladores centrífugos compõem-se de um cubo central no qual é preso um disco, ao qual, por sua vez, são presas as pás. Desta forma, o comportamento dinâmico dos impelidores centrífugos é fortemente determinado pelas características do disco e demais elementos de fixação das pás.

No caso de ventiladores centrífugos, distingue-se entre impelidores de dupla entrada e de entrada simples com relação ao número de entradas de ar. Além disso existem impelidores sem tampas laterais às pás, com tampa em um único lado e com tampa dos dois lados, denominados respectivamente de abertos, semi-abertos e fechados. Estas diferenças estruturais conferem características dinâmicas peculiares a cada tipo de ventilador.

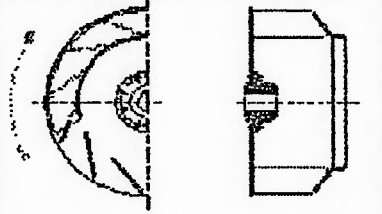
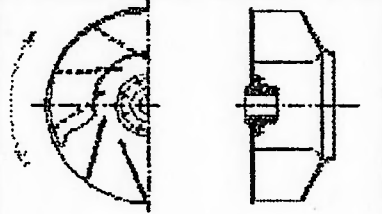
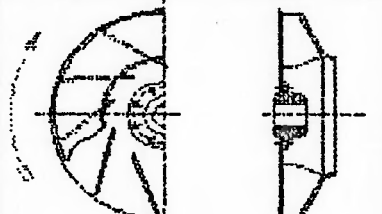
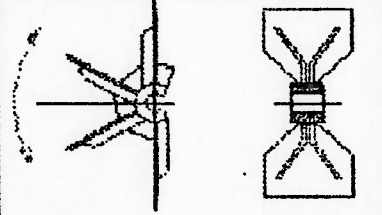
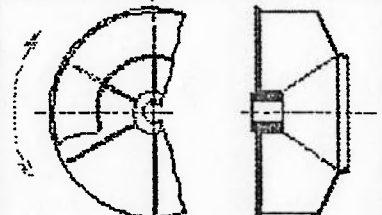
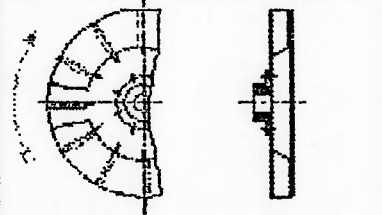
Outra classificação, importante do ponto de vista da mecânica dos fluidos, refere-se à forma e direção das pás

---

<sup>5</sup> op. cit.



e ao ângulo de saída destas. Existem impelidores de pás retas e curvas, radiais ou de ângulo de saída radial, inclinadas para trás e para frente em relação ao sentido de rotação do ventilador. Na figura 3.2 são apresentadas algumas configurações geométricas típicas de impelidores. Estas diferenças estão relacionadas com o desempenho, faixa de aplicação e peculiaridades de diferentes aplicações dos ventiladores (JORGENSEN, 1978).

 <p>Pás inclinadas para trás</p> <p>Vazão: 180 m<sup>3</sup>/s Pressão total: 500 mmCA</p>	 <p>Pás inclinadas para trás</p> <p>Vazão: 40 m<sup>3</sup>/s Pressão total: 500 mmCA</p>	 <p>Pás inclinadas para trás</p> <p>Vazão: 16 m<sup>3</sup>/s Pressão total: 1800 mmCA</p>
 <p>Aberto com pás retas radiais</p> <p>Vazão: 40 m<sup>3</sup>/s Pressão total: 550 mmCA</p>	 <p>Pás retas radiais</p> <p>Vazão: 45 m<sup>3</sup>/s Pressão total: 550 mmCA</p>	 <p>Pás retas radiais</p> <p>Vazão: 5 m<sup>3</sup>/s Pressão total: 2500 mmCA</p>

Fonte: KWCA Controle Ambiental S.A.

**FIGURA 3.2: Exemplos de ventiladores centrífugos com diversas geometrias de impelidor e pás**

Outros detalhes construtivos dos impelidores também lhes conferem características estruturais distintas. ECK (1973) apresenta diversas características construtivas de ventiladores. Em particular, a forma de fixação das diversas partes tem importância para a distribuição e concentração de tensões e para o amortecimento estrutural. Em geral, as falhas estruturais causadas por vibração se iniciam em regiões com grandes tensões estáticas e com concentração de tensão. As tensões dinâmicas sobrepõem-se a estas, levando ao surgimento de trincas ou mesmo a ruptura. Os impelidores também são classificados como axissimétricos ou como impelidores de estrutura periódica cíclica. No caso de haver um grande número de pás, usual em compressores e turbinas, pode-se tratar o impelidor do ponto de vista da dinâmica estrutural como sendo axissimétrico. Isso permite que sejam adotadas técnicas de modelagem simplificadoras como apresentadas por FERRARIS et al.<sup>6</sup>. A periodicidade cíclica também confere características dinâmicas próprias a este tipo de impelidores.

Os impelidores com número reduzido de pás ou que apresentam pás muito curvas não podem ser tratados como axissimétricos. Os impelidores de ventiladores centrífugos de grande porte enquadram-se normalmente neste tipo. Felizmente, em geral, podem ser encontradas subestruturas que se repetem ao longo da circunferência do impelidor. Estes impelidores podem ser tratados como estruturas

---

<sup>6</sup> op. cit.

periódicas cíclicas (HENRY & FERRARIS, 1983), o que permite utilizar a teoria de propagação de ondas. Assim, pode-se reduzir o número de graus de liberdade dos modelos e evitar o surgimento de modos de vibração com autovalores repetidos (MEAD, 1982). Além de facilitar a modelagem, o fato de existirem periodicidades na estrutura do impelidor também lhe conferem características dinâmicas próprias, cujo entendimento auxilia a interpretação e análise do comportamento vibratório dos impelidores.

### 3.2.2. Partes dos Ventiladores Centrífugos

Os ventiladores centrífugos são compostos basicamente pelo rotor e pela voluta, além do sistema de acionamento. Diversas formas construtivas são apresentadas por JORGENSEN (1983).

Normalmente o rotor é montado sobre mancais de deslizamento, no caso de grandes ventiladores, e ligado ao acionamento através do acoplamento flexível. O rotor é composto pelo eixo-árvore e pelo impelidor.

Os componentes básicos dos impelidores centrífugos são:

- cubo central de fixação no eixo-árvore;
- disco central ou lateral;
- tampa ou cones laterais;
- pás principais e intermediárias;
- flange, cone ou anel de entrada;

- diversos reforços estruturais, como anéis e chapas de reforço; e
- alguns outros elementos funcionais, e.g., chapas de desgaste.

### 3.2.3. Características Físicas e de Operação

O estudo da dinâmica estrutural dos ventiladores centrífugos torna-se importante para ventiladores de grande porte, pois a propensão para ocorrência de falhas aumenta com o raio do impelidor e a velocidade periférica. Embora seja do nosso conhecimento que tenham ocorrido falhas por vibração mesmo em impelidores pequenos.

Tipicamente, os ventiladores ensaiados tem diâmetro superior a 1600 mm, e operam com velocidade de rotação relativamente baixa, 800 rpm a 1800 rpm. Alguns impelidores centrífugos chegam a ter mais de cinco metros de diâmetro. A largura das pás em geral é inferior a 500 mm. Estes impelidores tem massa elevada, que normalmente supera 1000 Kg. A temperatura de operação do fluido depende da aplicação. Os ventiladores para ventilação operam em temperatura próxima ou ligeiramente superior à ambiente, mas em algumas aplicações de exaustão, como em usinas de cimento, podem operar até a 450° C. Normalmente os impelidores apresentam 6 a 12 pás, às vezes intercaladas com pás intermediárias mais curtas.



As características físicas e de operação de alguns ventiladores de grande porte ensaiados são apresentadas na tabela 3.1.

TABELA 3.1: CARACTERÍSTICAS FÍSICAS E DE OPERAÇÃO DOS VENTILADORES DE GRANDE PORTE ENSAIADOS

CARACTERÍSTICA	IMPELIDOR	Nº 1	Nº 2	Nº 3
Aplicação	industrial	alimentos.	cimento	side-rurgia
Partes Principais	disco	lateral plano	lateral plano	central plano
	tampa(s)	lateral plana	lateral cônica	lateral cônica
	tipo de pás	radial reta	curva saída radial	curva para trás
	nº de pás principais	6	12	10
	nº de pás intermediárias	6	-	-
	nº de entradas	1	1	2
Dimensões (mm)	diâmetro externo	1650	2769	2259
	largura das pás	500	612-359	
Massa (kg)	total do impelidor	600	2160	2000
	eixo ensaio ou trabalho	90 e	800 e	2900 t
Rotação (rpm)	nominal	1180	1180	1770
	máxima	1230		
Temperatura(°C)		80	350	70
Meio	ar com pó em suspensão	A	A e B	A e C
Desempenho	Vazão ( $10^3 \text{ m}^3/\text{h}$ )		286	240
	Pressão estática (mmCA)		1118	2000
	Potência (BHP)		1595	

A = Aderente; B = Abrasivo; C = Corrosivo.

#### 3.2.4. Características Dinâmicas Estruturais

Do ponto de vista da dinâmica estrutural, os impelidores centrífugos tem características bastante complexas.

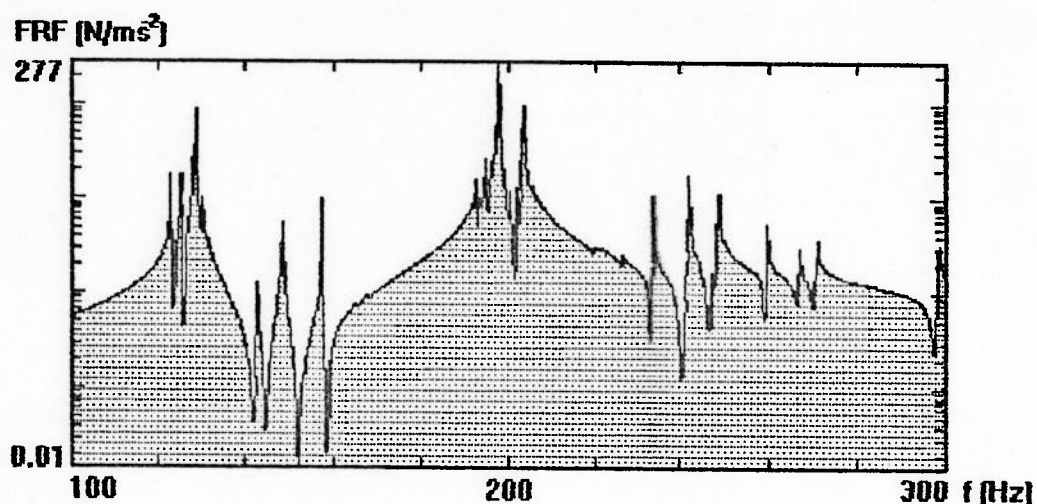
Os impelidores apresentam grande número de frequências naturais agrupadas em aglutinados de frequência<sup>7</sup>, sendo a frequência mais baixa em torno de 100 Hz. A principal faixa de frequência de interesse para a dinâmica vibratória é limitada superiormente por algo entre a metade da frequência de passagem de pás<sup>8</sup>, e.g., 120 Hz a 150 Hz, e a frequência do modo de vibração com número de diâmetros nodais igual a metade do número de pás, e.g., 120 Hz a 200 Hz.

As funções de resposta em frequência dos impelidores caracterizam-se por apresentar faixas de frequência com grande densidade de modos de vibração, enquanto em outras ressonâncias são quase ausentes. Este fato decorre da periodicidade cíclica da estrutura dos impelidores e pode ser melhor entendido através da teoria de propagação de ondas em estruturas periódicas (MEAD, 1982). Na figura 3.3 é apresentada uma FRF típica de impelidor.

---

<sup>7</sup> Tradução adotada para "frequency cluster".

<sup>8</sup> Frequência de passagem de pás é definida como a frequência de rotação multiplicada pelo número de pás do impelidor.



**FIGURA 3.3:** Função de Resposta em Frequência típica de um Impelidor Centrífugo

Além disso, nos aglutinados as frequências naturais apresentam valores muito próximos. Na realidade, deve-se esperar que existam praticamente em todas as ressonâncias dois modos de vibração com frequências quase-coincidentes. Teoricamente, nos impelidores axissimétricos todos os modos de vibração com um ou mais diâmetros nodais são modos com autovetores degenerados, i.e., tem autovalores com multiplicidade igual ou superior a dois. Isto significa que a forma destes modos de vibração não tem orientação fixa com relação ao impelidor, i.e., as linhas nodais podem estar orientadas para qualquer direção angular. Estes modos teriam frequências naturais coincidentes com multiplicidade dois. Na prática, devido ao número finito de pás e devido às imperfeições construtivas, nenhum impelidor é perfeitamente axissimétrico, isto faz com que as duas frequências naturais se dissintonizem ligeiramente.

A análise experimental de modos de vibração degenerados é mais complexa e requer a utilização de múltiplos excitadores. A dessintonização decorrente de imperfeições facilita a identificação dos modos de vibração. Pode-se aproveitar deste fato e introduzir intencionalmente alguma imperfeição ou descontinuidade local em algum ponto do impelidor. Todavia a análise modal experimental com um único excitador ainda permanece problemática devido à proximidade das frequências naturais, principalmente quando o amortecimento dos modos é semelhante.

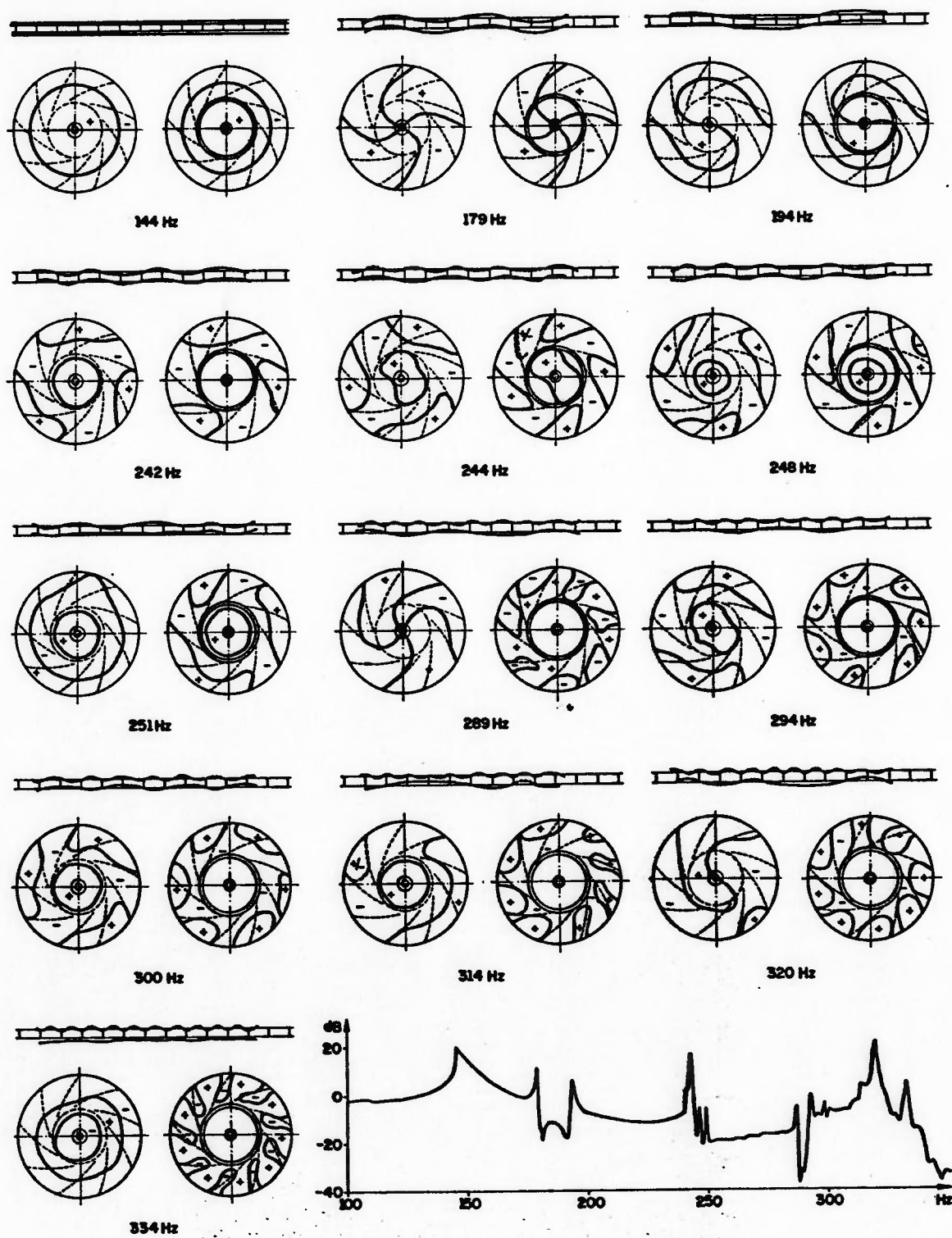
Existe divergência quanto à influência da introdução de imperfeições na dinâmica de estruturas axissimétricas e com periodicidade cíclica. TOBIAS e ARNOLD (1957) observam que a introdução de imperfeições em discos axissimétrico reduz a intensidade das vibrações. MEAD (1982) afirma que as não periodicidades sempre aumentam a resposta em algum ponto da estrutura periódica.

As formas dos primeiros modos de vibração de estruturas axissimétricas apresentam padrões geométricos relativamente simples e fáceis de serem medidos e interpretados. Nas estruturas periódicas cíclicas mesmo estes modos podem apresentar padrões mais complexos. Em ambos os casos, os modos de vibração com frequência natural mais alta apresentam padrões bastante complexos.

As formas dos modos de vibração apresentados na figura 3.4 exemplificam os padrões típicos encontrados nos impelidores de ventiladores centrífugos. Na figura é mostrada a localização das linhas nodais em cada modo de vibração



identificado experimentalmente. Para cada modo é mostrado o disco à esquerda, a tampa à direita e acima destes dois é mostrado a forma do modo de vibração na periferia desenvolvida do impelidor. No canto inferior esquerdo da figura é apresentada uma FRF típica do impelidor.



**FIGURA 3.4:** Formas típicas dos modos de vibração de um impelidor centrífugo

### 3.2.5. Classificação dos Modos de Vibração

Como usual em dinâmica de sistemas, os modos de vibração são ordenados em frequências naturais crescentes. Cada modo de vibração é caracterizado por uma forma de vibração, uma frequência natural, um amortecimento e uma massa generalizada. Estes três últimos são propriedades globais das estruturas, i.e., teoricamente se manifestam da mesma forma em qualquer ponto da estrutura.

As formas dos modos de vibração revelam características locais da estrutura e correspondem justamente ao comportamento espacial da estrutura em vibração. A análise das formas dos modos de vibração é de suma importância na avaliação da confiabilidade estrutural de sistemas vibrantes. É pela forma que se localizam as regiões com maiores tensões e se analisa a sensibilidade do comportamento da estrutura a modificações estruturais. Também é necessário estudar a forma dos modos de vibração para analisar se uma determinada distribuição de esforços ou um determinado movimento imposto é capaz de excitar alguma ressonância.

Além disso, a compreensão e identificação dos padrões das formas dos modos de vibração permite classificar e ordenar os modos de vibração em famílias com características dinâmicas semelhantes. A associação das formas de vibração a descrições sucintas ou apelidos, embora em grande medida arbitrária, é muito importante para a análise das vibrações. A representação numérica ou vetorial das formas

dos modos de vibração corresponde a descrição dos modos de vibração na forma de dados brutos, i.e, informação na sua forma mais básica, que é muito difícil de ser analisada e avaliada. É justamente com a tipificação das formas dos modos em padrões inteligíveis que estes dados brutos se transformam em conhecimento (SENDOV, 1993). Assim permitindo interpretar e avaliar as características dinâmicas da estrutura, além de auxiliar e facilitar a condução dos ensaios e da análise. Portanto, é relevante considerar as maneiras como os modos de vibração podem ser tipificados e classificados.

A primeira associação que é feita, consiste em designar os modos de vibração pelos nomes das partes da estrutura que apresentam maiores deflexões neste modos, pois é isso que se observa durante os ensaios ou na análise numérica. Assim, costuma-se falar em modos de vibração das pás, da tampa ou do disco. Devemos ter em mente que este tipo de ordenação visa basicamente a comunicação, revelando muito pouco sobre a verdadeira natureza da dinâmica da estrutura. Os parâmetros modais são sempre propriedades de toda a estrutura. O que difere de um modo para outro é como a energia potencial e cinética se encontram acumuladas na estrutura em uma dada frequência natural. É comum que regiões com grandes deflexões sejam exatamente as regiões com pouca deformação, assim sendo pouco significativas para a energia potencial dos modos. A rigidez e o pequeno movimento das partes aparentemente paradas são às vezes os aspectos mais significativos dos modos de vibração.



Também é comum descrever os modos de vibração pelo aspecto geral das deflexões das partes do sistema. Assim, por exemplo, fala-se de modos de torsão ou flexão das pás. Novamente, esta ordenação também tem sua finalidade básica na comunicação. Embora ela tente descrever os aspectos fundamentais das deformações e tensões existentes nas partes das estruturas, esta designação torna-se em grande medida arbitrária para as formas de padrões complexos que os modos de vibração apresentam. Porque, enquanto algumas regiões torcem, outras sofrem esforços de flexão ou mesmo de tração, às vezes isto ocorrendo em regiões de um mesmo componente da estrutura.

Todavia, quando utilizadas com cuidado, as maneiras apresentadas acima para se designar as formas dos modos de vibração são muito úteis e auxiliam a compreensão do problema em estudo.

Os modos de vibração de discos axissimétricos caracterizam-se por apresentar linhas nodais diametrais e circunferenciais (GUPTA & PASSERELLO, 1982). Isto pode ser observado na equação em coordenadas polares  $(r, \theta)$  dos modos de vibração de uma placa circular que é dada a seguir (LEISSA, 1969):

$$W_n = [A_n \cdot J_n(kr) + C_n \cdot I_n(kr)] \cdot \cos(n\theta) \quad (3.2)$$

onde:  $W_n$  = deflexão transversal do disco;

$J_n$  = função de Bessel de 1ª ordem;

$I_n$  = função modificada de Bessel de 1ª ordem;

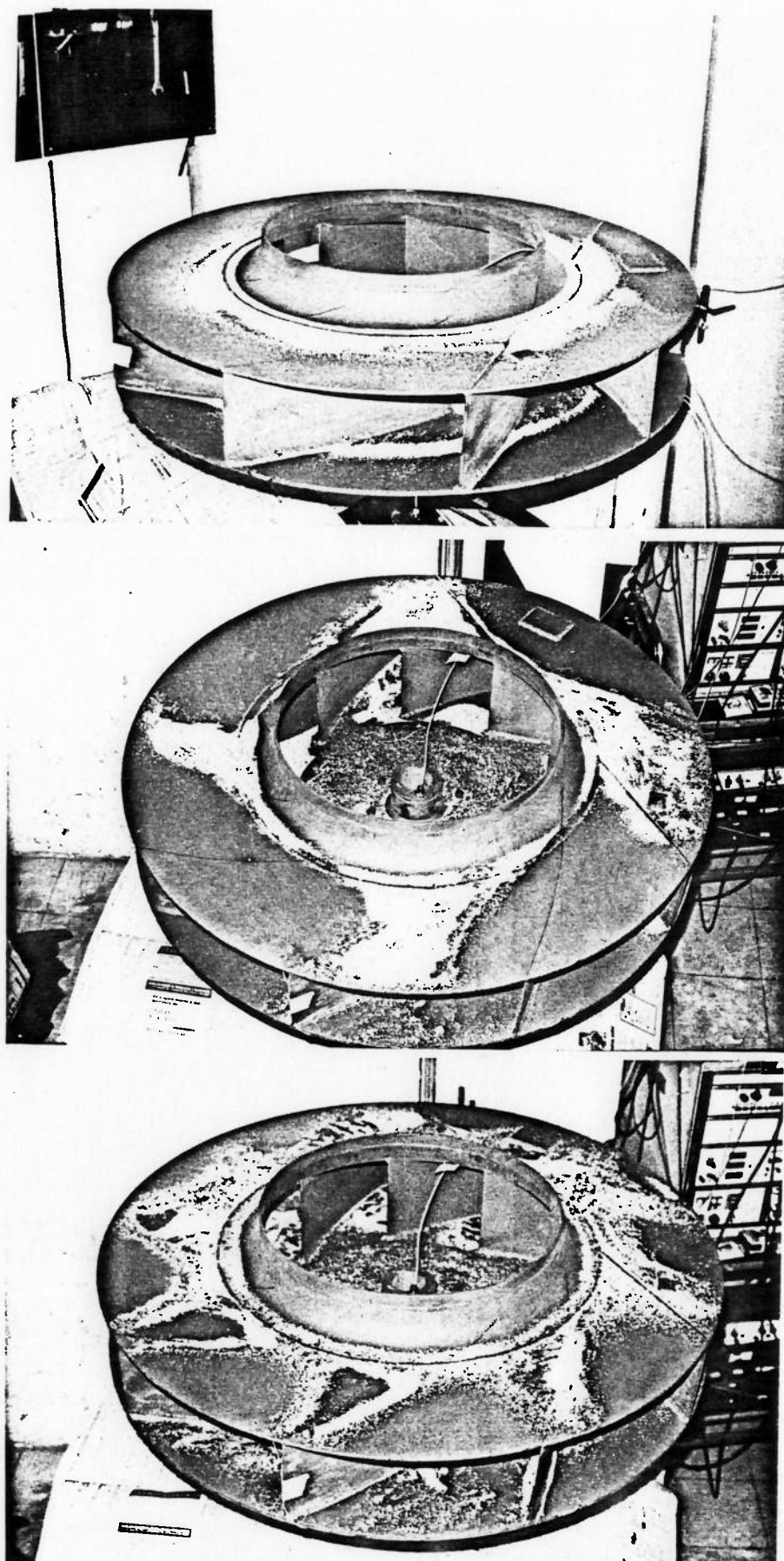
$A_n, B_n$  = coeficientes dos modos de vibração;

$k$  = número de circunferências nodais;

$n$  = número de diâmetros nodais.

Esta equação é válida para discos com deslocamento finito no centro e com condições de contorno simétricas com relação a um ou mais diâmetros do disco.

Impelidores axissimétricos também apresentam formas de vibração com circunferências e diâmetros nodais (IRRETIER, 1988), que são utilizados para classificar e ordenar os modos de vibração (CAMPBELL, 1924). Impelidores com pequenas assimetrias apresentam formas dos modos de vibração com padrões semelhantes (KHURASIA & OLUNLOYO, 1985). O número de diâmetros nodais tem importância singular na avaliação das circunstâncias nas quais um disco ou impelidor em rotação pode ser excitado. Assim, sempre que as formas dos modos de vibração puderem ser associadas a números de diâmetros e circunferências nodais, pode-se utilizar tal classificação para descrever e analisar a dinâmica dos impelidores. Na figura 3.5 são mostrados três modos de vibração de um impelidor axissimétrico ensaiado com a técnica da areia (CAMPBELL, 1924). Os três modos apresentam uma circunferência nodal, dois e quatro diâmetros nodais, respectivamente. Pode-se observar a curvatura dos diâmetros nodais provocada pela existência das pás curvas.



**FIGURA 3.5:** Formas dos modos de vibração de um impelidor centrífugo ensaiado pela técnica da areia

No caso de impelidores com estrutura periódica cíclica, as linhas nodais não se apresentam sempre em diâmetros e circunferências. Mesmo em impelidores perfeitos, i.e., com estrutura perfeitamente periódica, surgem modos de vibração que não são passíveis de serem classificados desta maneira. Pode-se então fazer uso de alguns conceitos da teoria de propagação de ondas em estruturas periódicas para ordenar e classificar os modos de vibração (HENRY & FERRARIS, 1984).

Suponhamos uma estrutura periódica com  $N$  elementos estruturais idênticos acoplados um ao outro. Caso uma excitação senoidal permanente seja aplicada a um dos elementos, produz-se uma onda que se transmite para os demais elementos com características diferentes em cada frequência. Pode-se mostrar que a relação da amplitude e da fase do movimento entre dois pontos correlatos de elementos periódicos consecutivos é função da frequência de excitação e independe do par de elementos tomados (MEAD, 1982).

Existem regiões no espectro de frequência, chamadas de *zonas de atenuação*, em que todos os elementos vibram em fase, sendo que a amplitude da onda se reduz de elemento para elemento. Nestas regiões não há propagação de energia de um elemento para outro. A taxa logarítmica de redução da amplitude é chamada de *constante de atenuação*. Em outras regiões do espectro, chamadas de *zonas de propagação*, a onda apresenta a mesma amplitude em todos os elementos, mas o movimento vibratório não se dá mais em fase em todos os elementos. Nestas regiões há propagação de energia de um elemento para outro. A diferença de fase do movimento entre



dois pontos correlatos de elementos consecutivos é chamada de *constante de fase*.

Assim, pode-se descrever a relação entre o deslocamento de dois pontos correlatos quaisquer de elementos consecutivos de uma estrutura periódica pela seguinte relação:

$$\delta_i = \delta_{i-1} \cdot e^{-(\mu + i\varepsilon)} \quad (3.3)$$

onde:  $\delta_i$  = deslocamento da vibração no elemento  $i$ ;  
 $\mu$  = constante de atenuação;  
 $\varepsilon$  = constante de fase; e  
 $i = \sqrt{-1}$ .

Ao expoente complexo da equação 3.3, dá-se o nome de *constante de propagação*. Esta constante, traduz de alguma maneira, o comportamento espacial da dinâmica de estruturas periódicas. Verifica-se que em estruturas periódicas, com qualquer número de elementos periódicos, para quaisquer condições de contorno e possíveis singularidades que alterem a propagação e reflexão das ondas, todas as frequências naturais tendem a se concentrar nas zonas de propagação definidas pelas características dinâmicas de um elemento periódico. É justamente este fato que desponta no surgimento de aglutinados de frequência nas funções de resposta em frequência de estruturas periódicas cíclicas. Como as ressonâncias constituem-se de ondas estacionárias, verifica-se também que cada frequência natural de uma estrutura periódica esta associada a um valor específico da constante de fase, ou seja, para cada modo de vibração existe uma relação de fase específica entre o movimento

vibratório de pontos correlatos de dois elementos periódicos consecutivos.

A soma de todas as defasagem do movimento dos diversos pontos correlatos ao longo da volta da estrutura cíclica tem que ser um múltiplo de  $2\pi$ , ou seja, vale a seguinte expressão:

$$\delta_0 = \delta_N = \delta_0 \cdot (e^{i\varepsilon})^N \quad (3.4)$$

logo:

$$e^{j2N} = 1 \quad (3.5)$$

E:

$$\varepsilon = 2\pi D/N \quad (3.6)$$

com:

$$D = \begin{cases} 0, 1, 2, \dots, N/2 & \text{para } N \text{ par} \\ 0, 1, 2, \dots, (N-1)/2 & \text{para } N \text{ impar} \end{cases}$$

Onde  $D$  é o número de ondas ao longo da circunferência e corresponde ao número de diâmetros na formulação axissimétrica (BERLIOZ et al., 1991).

Esta relação simplesmente significa que a onda que se propagou circunferencialmente ao longo do sistema cíclico deve retornar ao ponto inicial, após ter completado uma volta, com a mesma fase do movimento oscilatório inicial, de forma que a onda permaneça estacionária.

Portanto, cada modo de vibração pode ser caracterizado pela constante de fase a ele associada, que dá indícios da constituição espacial da forma do modo de vibração. Similarmente ao número de diâmetros nodais, a constante de

fase pode ser utilizada para classificar e ordenar os modos de vibração em estruturas periódicas cíclicas. Além disso pode-se considerar a relação da fase nas duas fronteiras dos elementos para reduzir a modelagem de estruturas periódicas cíclicas ao cálculo estrutural de um único elemento (HENRY & FERRARIS, 1984 e BERLIOZ et al., 1991). Para simplificar a linguagem, quando nos referirmos ao longo do trabalho ao número de diâmetros nodais em estruturas que claramente não apresentam simetria axial, estamos nos referindo ao parâmetro  $D$  da equação 3.6, ou seja, ao número de ondas completas ao longo da circunferência.

### 3.3. Desacoplamento da Dinâmica do Impelidor

Nesta seção será discutido em que condições a dinâmica do impelidor pode ser considerada desacoplada da dinâmica do resto do rotor. Deste análise pode-se deduzir as formas pelas quais o impelidor pode ser excitado, que serão discutidos na seção seguinte. A discussão apresentada neste tópico é de suma importância para compreender e avaliar os efeitos das condições de fixação do impelidor, durante os ensaios, nos diferentes modos de vibração.

Podemos dividir os modos de vibração do impelidor em duas categorias. Na primeira incluímos todos os modos de vibração que teoricamente apresentam equilíbrio de forças e

momentos internamente ao impelidor. Na segunda categoria consideramos os demais modos de vibração.

Com relação à vibração transversal ao plano do impelidor, incluímos na primeira categoria todos os modos de vibração de estruturas axissimétricas com mais de um diâmetro nodal, ou os modos com duas ou mais ondas completas ao longo da circunferência do impelidor nas estruturas periódicas cíclicas.

As forças de inércia existentes devido ao movimento vibratório nos modos de vibração desta categoria estão equilibradas. Para cada porção do impelidor com uma determinada velocidade de vibração e momento angular em relação a um polo qualquer, existe uma outra porção semelhante com velocidade e momento angular de mesma magnitude, mas com sentidos contrários à primeira. De tal forma que a quantidade de movimento linear e angular total do impelidor durante todo o movimento se conserva. Isso acontece porque para que existam modos de vibração em uma estrutura cíclica, devemos ter um número inteiro de ondas ao longo da circunferência do impelidor. Portanto, em um dado instante do movimento vibratório existe o mesmo número de ventres de vibração se movendo para os dois sentidos transversais. Neste caso, os esforços internos somente são desequilibrados pelas singularidades estruturais que perturbam a simetria ou periodicidade da estrutura. Nestes casos o desequilíbrio de esforços é portanto um efeito de segunda ordem. Os resultados dos ensaios de análise modal experimental corroboram com a hipótese de desacoplamento,

pois o cubo situa-se sobre duas ou mais linhas nodais destes modos de vibração. Isto significa que o cubo, que se comporta com corpo rígido, não apresenta deslocamento linear nem angular.

Pertencem a segunda categoria os modos de vibração com apenas um ou nenhum diâmetro nodal, i.e., com no máximo uma onda ao longo da circunferência. Estes não tem os esforços de inércia equilibrados internamente ao impelidor. O movimento vibratório destes modos tende a estar acoplado com a dinâmica do restante do rotor, pois para estes modos existem momentos e forças de reação no cubo. Logo a dinâmica vibratória do impelidor nestes modos pode ser influenciada pela flexibilidade do eixo-árvore, mancais e pedestais.

BERLIOZ et al. (1991) apresentam resultados experimentais e numéricos da análise de um impelidor centrífugo onde mostram que somente os modos com apenas um diâmetro ou apenas uma circunferência nodal são sensíveis às condições de contorno do cubo.

A segunda razão que permite considerar a dinâmica do impelidor desacoplada decorre do fato do cubo dos impelidores apresentar massa elevada quando comparada a massa efetiva dos modos de vibração, enquanto o eixo-árvore, de massa também elevada, é suspenso por mancais e pedestais relativamente flexíveis, especialmente no caso de mancais hidrodinâmicos. Portanto o cubo atua como filtro mecânico para as vibrações transmitidas do impelidor pelo eixo-árvore e vice-versa.



O cubo, por ser extremamente rígido, quando comparado às demais partes do impelidor também não acopla as deformações do impelidor que apresentam tendência a fletir o cubo com eventuais deformações do eixo-árvore. Restam apenas os movimentos de corpo rígido do cubo como única possibilidade de acoplar a dinâmica do impelidor ao movimento do eixo-árvore.

A mesma análise feita para as vibração transversal do impelidor é válida para a vibração torcional, considerada em relação ao eixo do rotor. Neste caso todavia existe um número bem menor de modos de vibração. Em geral, somente o primeiro modo torcional do impelidor encontra-se na faixa de frequência à considerar.

### **3.4. Fontes e Mecanismos de Vibração**

Nesta seção são apresentados diversos mecanismos de excitação de vibração em impelidores centrífugos. Vale mencionar que somente os modos de vibração excitados de alguma maneira são críticos para a integridade estrutural do impelidor.

SOEDEL (1974) discute diversas fontes e mecanismos de vibração em propulsores. São discutidas tanto as vibrações impostas por fontes externas, com as vibrações auto-excitadas, importantes no caso de propulsores axiais. Nos ventiladores centrífugos não é esperada a ocorrência de 'flutter' devido a rigidez elevada de suas partes.

Nos ventiladores centrífugos, as excitações podem ser aplicadas ao impelidor através de dois caminhos: pelo movimento vibratório imposto pelo cubo; ou por forças aerodinâmicas aplicadas diretamente nas partes do impelidor oriundas da distribuição de pressão sobre a superfície do impelidor.

#### 3.4.1. Movimento Imposto pelo Cubo

Algum processo vibratório proveniente de fora do rotor que se transmita pelo eixo-árvore pode fazer com que o cubo do impelidor vibre. Por exemplo, a vibração decorrente do desalinhamento dos mancais ou do acoplamento, podem provocar o surgimento de uma vibração na direção radial e axial do rotor na frequência do segundo harmônico da velocidade de rotação. A vibração transmitida pelo eixo-árvore impõem um movimento vibratório ao cubo do impelidor. Toda vibração proveniente do eixo é aplicada ao impelidor na forma de movimento de corpo rígido do cubo. Em geral este movimento vibratório tem trajetória com orientação fixa em relação às partes estacionárias do ventilador.

O efeito líquido do movimento imposto pelo cubo sobre todos os modos de vibração equilibrados internamente é praticamente nulo. Pois se a vibração do cubo fornece trabalho para uma região do movimento vibratório, estará

retirando energia de outra região que se move em sentido contrário.

Assim resta apenas estudar o efeito do movimento imposto pelo cubo sobre os modos de vibração desequilibrados internamente ao impelidor. Os modos de vibração que pertencem a esta categoria são os modos com nenhum ou apenas um diâmetro nodal. Os modos que não apresentam nenhum diâmetro nodal, como por exemplo, o modo de "guarda-chuva" mostrado na figura 3.5-a, estão acoplados às oscilações axiais do eixo-árvore. Os modos com apenas um diâmetro nodal ficam acoplados às oscilações angulares do eixo-árvore na posição do cubo.

As oscilações radiais e angulares do impelidor acopladas ao movimento do eixo-árvore são tratados justamente no estudo das velocidades críticas transversais do rotor. Em geral, a flexibilidade do impelidor não influencia estas vibrações, embora isto possa ocorrer em alguns casos (ALMEIDA & NEVES, 1989). As oscilações torcionais do impelidor acopladas ao movimento torcional do eixo-árvore são tratados no estudo das velocidades críticas torcionais do rotor.

O último caso à comentar de vibração transmitida pelo eixo corresponde à vibração na direção axial do impelidor. De fato, uma excitação na direção axial pode excitar os modos sem nenhum diâmetro nodal na frequência da excitação. Este caso deve ser considerado na análise da dinâmica dos ventiladores.

Entretanto, em geral, todos os problemas decorrentes dos modos de vibração que apresentam a dinâmica do impelidor

acoplada à dinâmica do eixo-árvore são detectáveis nas vibrações medidas nas partes estacionárias do ventilador. Somente no caso do impelidor ser extremamente flexível em relação ao eixo-árvore de massa elevada que a vibração do impelidor poderia ficar oculta à observação nos mancais (SIMTH & SIMMONS, 1980).

#### 3.4.2. Excitação Aerodinâmica

Agora, resta analisar a ação do fluido sobre o impelidor. Podemos modelar a interação do fluido com a dinâmica do impelidor como sendo uma distribuição não uniforme de pressão, onde a excitação independe da vibração do impelidor e é aplicada diretamente sobre as superfícies das partes do impelidor. Tal simplificação pode ser feita se não houver acoplamento da dinâmica do fluido com a dinâmica estrutural, como é o caso nos ventiladores centrífugos.

Na realidade o fluido agirá como elemento de dissipação de energia, atenuando alguns movimentos vibratórios (TOBIAS & ARNOLD, 1957).

Podemos dividir as excitações aerodinâmicas em duas categorias: as provenientes de distribuições não uniformes de pressão e as decorrentes de distúrbios aleatórios. O segundo tipo, de natureza estocástica, possui banda larga e excita todo o espectro de frequências e está associado à turbulência e ao descolamento da camada limite. De uma maneira geral, excita igualmente todos os modos de vibração

do impelidor. A ocorrência deste tipo de excitação está correlacionada com a eficiência e o ruído acústico gerado pelo ventilador.

O campo de pressão ao longo da voluta do ventilador não é uniforme no espaço nem constante no tempo. Podemos supor, entretanto, para entendimento do fenômeno, que a principal parcela da distribuição de pressão permaneça estacionária na voluta, i.e., os pontos de aplicação das forças tem posição angular fixa em relação à voluta. A não uniformidade dessa distribuição de pressão no espaço é decorrente do fluxo não uniforme do fluido no ventilador. As descontinuidades da voluta, e.g., a região do 'cut-off', são as principais responsáveis por essa não uniformidade espacial. Pode-se avaliar este efeito na determinação das velocidades críticas estudando uma função descontínua no 'cut-off', e.g., uma função degrau ou um impulso unipolar no espaço<sup>9</sup>.

Já outros tipos de perturbação no fluxo de ar provocam variações na distribuição de pressões no tempo, como por exemplo, aquela derivado da influência do número finito de pás. Desta forma, surge uma distribuição de pressão oscilante no tempo e estacionária no espaço proveniente da passagem das pás pelos obstáculos ou descontinuidades da voluta. Este tipo de excitação ocorre particularmente na passagem das pás pelo 'cut-off', e pode ser estudada por

---

<sup>9</sup> Função 5.2: 'unipolarer Impuls, Stoss' da DIN 5483/01 - 1983.



uma função de pulso bipolar<sup>10</sup> estacionária no espaço com intensidade oscilante no tempo.

Em ambos os casos, a distribuição de pressão tende a inflar um setor do impelidor, pois atua simultaneamente nas superfícies internas do setor entre pás do impelidor. Não é improvável que ocorram também desequilíbrios laterais não uniformes e estacionários significativos nos impelidores centrífugos. Com a finalidade de reduzir o esforço axial sobre o mancal de escora nos ventiladores centrífugos é comum colocar aletas no lado externo do disco para produzir uma contra-pressão no impelidor. Se existir um desequilíbrio da distribuição da contra-pressão no disco como função da posição angular do rotor na voluta, poderia ocorrer uma excitação aerodinâmica unilateral no impelidor. O presente trabalho estuda precisamente os mecanismos pelos quais a distribuição não uniforme de pressão pode excitar vibrações no impelidor, mesmo que seja constante no tempo. Assim a análise detalhada deste mecanismo é feita ao longo do resto deste capítulo.

### 3.4.3. Efeito de filtro do Número Finito de Pás

Chamemos de setor à fração do impelidor delimitada por duas pás consecutivas. Quando uma pá atravessa uma singularidade

---

<sup>10</sup> Função 5.3: 'Wechselimpuls, Knall' ou 'double shock pulse' da DIN 5483/01 - 1983.

na voluta, todo um setor do impelidor enxerga a perturbação de pressão causada por esta singularidade. Esta perturbação de pressão propaga-se rapidamente para dentro do setor do impelidor até atingir as superfícies das pás, da tampa e do disco. Desta forma, qualquer perturbação de pressão tende a se espalhar por todo o setor e fica delimitada por ele. Assim, é lícito acreditar que os pulsos de pressão provocados pela perturbação que o 'cut-off' causa no escoamento, tenham largura aproximadamente igual à distância entre pás.

O fato de o pulso de pressão ter uma largura finita, aproximadamente igual à distância entre pás, implica que qualquer onda que tenha comprimento inferior a duas vezes a distância entre pás não seja adequadamente excitada pelo pulso de pressão. Isto pode ser mostrado matematicamente com auxílio da transformada de Fourier (BRIGHAM, 1974). Podemos definir um pulso de pressão com largura angular finita pela seguinte expressão:

$$p(\theta, t) = \begin{cases} P_0(\theta, t) & | \quad -\theta_0/2 < \theta < \theta_0/2 \\ 0 & | \quad -\theta_0/2 > \theta > \theta_0/2 \end{cases} \quad (3.7)$$

com:

$$\theta_0 \approx \frac{2\pi}{B} \quad (3.8)$$

onde:  $p$  = distribuição de pressão ao longo do perímetro do impelidor (N/rad);  
 $\theta$  = coordenada angular (rad);  
 $t$  = tempo (s);  
 $\theta_0$  = largura do pulso de pressão (rad);

B = número de pás do impelidor.

Tomando a transformada de Fourier do pulso de pressão sobre a variável angular  $\theta$ , obteremos o espectro do pulso em função do comprimento de onda em medida angular  $\lambda_\theta$ , ou seja:

$$p(\theta, t) \xleftrightarrow{\text{Fourier}} P(\lambda_\theta, t)$$

onde:  $p(\theta, t)$  = função de pressão no domínio de origem;

$P(\lambda_\theta, t)$  = transformada no domínio de Fourier;

$\theta$  = variável da posição angular (rad);

$\lambda_\theta$  = comprimento de onda em medida angular (rad).

Se supusermos por simplificação que o pulso de pressão é constante e uniforme no intervalo angular de comprimento  $\theta_0$ , i.e.:

$$P_0(\theta, t) = P_0 \quad (3.9)$$

então:

$$P(\lambda_\theta) = P_0 \cdot \theta_0 \cdot \frac{\text{sen}(\pi \theta_0 / \lambda_\theta)}{\pi \cdot \theta_0 / \lambda_\theta} \quad (3.10)$$

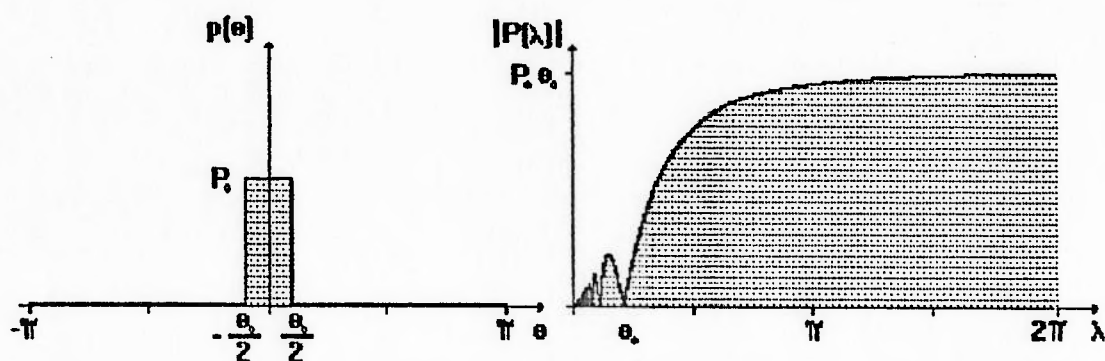


FIGURA 3.6: Pulso de comprimento finito e espectro em função do comprimento de onda

A figura 3.6 mostra um pulso uniforme constante de largura  $\theta_0$  e a transformada de Fourier deste pulso. Pode-se verificar que o pulso tem pouca energia em comprimentos de onda inferiores à largura do pulso. Em particular, a ação do pulso sobre uma onda com comprimento igual a largura do pulso é nula, pois enquanto o pulso fornece trabalho para o movimento vibratório em meio comprimento de onda, retira quantidade igual de energia na outra metade da onda.

### 3.5. Enrijecimento devido à Rotação e Coeficiente de Southwell

Nesta seção são discutidos os efeitos da rotação do impelidor sobre suas propriedades modais. É de longa data reconhecido que haverá um aumento no valor das frequências naturais de estruturas similares à discos quando em rotação em torno do seu eixo (SOUTHWELL, 1921).

Uma vez que a determinação experimental dos modos de vibração é realizada com o impelidor estacionário, é necessário quantificar o efeito da rotação do impelidor sobre as frequências naturais. A discussão que segue aborda este aspecto.

A determinação analítica das propriedades modais de estruturas em rotação é bastante complexa. Embora exista solução para algumas estruturas simples uniformes, como discos e vigas radiais e axiais (LIKINS et al., 1973).

O Método de Rayleigh-Ritz é tradicionalmente recomendado para solução da dinâmica de estruturas em rotação (SOUTHWELL, 1921; STODOLA, 1945; TIMOSHENKO, 1937). Por este método supõe-se conhecida a forma do modo de vibração, donde podem ser determinados os valores das frequências naturais igualando-se a energia cinética total à energia potencial total da estrutura em vibração harmônica.

SOUTHWELL (1921) propõe uma simplificação ao método de Rayleigh, que consiste em calcular separadamente as frequências naturais que o sistema teria se as forças centrífugas e de restituição elástica agissem isoladamente. Posteriormente, obtém-se a frequência natural do sistema flexível em rotação pela composição destes dois valores através de uma fórmula simplificada.

O método dos elementos finitos apresenta-se como a opção natural para determinação dos parâmetros modais de estruturas complexas em rotação (LIKINS et al., 1973; LAURENSEN, 1976; HENRY & FERRARIS, 1984; EBERSBACH et al., 1987 e 1988; BERLIOZ et al., 1991), já que se trata de uma



extensão do método de Rayleigh-Ritz para estruturas discretizadas em elementos ditos finitos (PETYT, 1982). Neste método, as funções de interpolação são as funções semi-definidas que aproximam a forma dos modos de vibração dentro dos elementos e os deslocamentos nodais são os parâmetros de Ritz que devem ser minimizados para determinação das frequências naturais. Caso sejam garantidas a continuidade e compatibilidade das funções de interpolação e de suas derivadas nas fronteiras dos elementos, o método dos elementos finitos equivale ao método de Rayleigh-Ritz. Por esse método pode-se considerar além dos efeitos de enrijecimento geométrico do campo de forças centrípetas, também o efeito de flexibilização da aceleração centrípeta e o efeito da aceleração de Coriolis.

### 3.5.1 Método de Rayleigh-Ritz para Determinação da Dinâmica de Disco em Rotação

O método de RAYLEIGH (1894) consiste na determinação das frequências naturais à partir da adoção de funções aproximadas para as formas de vibração. Inicialmente deve-se adotar alguma função que aproxime a forma do modo de vibração para o qual se deseja determinar a frequência natural, e que obedeça as condições de contorno do problema em estudo. Escolhida a função para a forma do modo de vibração, calcula-se a energia potencial total e a energia cinética total acumulados no modo de vibração. Pela

conservação da energia igualamos estas duas quantidades, i.e.:

$$T(\varphi) = V(\varphi) \quad (3.11)$$

onde:  $V(\varphi)$  = energia potencial total do modo  $\varphi$ ;

$T(\varphi)$  = energia cinética total do modo  $\varphi$ .

Como os modos de vibração de estruturas lineares pouco ou não amortecidas são reais e os movimento de vibração são harmônicos, pode-se escrever a energia cinética do sistema na seguinte forma:

$$T(\varphi) = \omega_n^2 \cdot F(\varphi) \quad (3.12)$$

onde:  $F(\varphi)$  = é função da distribuição de inércia e do modo de vibração.

Assim a frequência natural correspondente ao modo de vibração estudado pode ser calculada pela seguinte fórmula:

$$\omega_n^2 = \frac{V(\varphi)}{F(\varphi)} \quad (3.13)$$

Demonstra-se que para um erro de primeira ordem na função do modo de vibração, o erro na frequência natural correspondente será de segunda ordem (BISHOP & JOHNSON, 1979). Além disso, o valor da frequência natural calculada por este método será mínimo se a forma do modo de vibração adotada para o cálculo coincidir com a forma verdadeira do modo de vibração. Desta forma, o resultado da frequência natural, calculado para uma aproximação do modo de vibração, representa um limite superior para o valor exato da frequência natural.

Valendo-se deste fato, Ritz propôs aprimorar o método adotando funções parametrizadas semi-definidas para aproximação do modo de vibração, i.e.:

$$\varphi = \varphi(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_k) \quad (3.14)$$

onde:  $\varphi$  = função aproximada para a forma do modo de vibração;

$\tau_i$  = conjunto de  $k$  parâmetros inicialmente não definidos da função  $\varphi$ .

Assim, calcula-se os valores dos parâmetros  $\tau_i$  que produzem o melhor resultado para a frequência natural através da determinação do mínimo valor do coeficiente de Rayleigh em função dos possíveis valores dos parâmetros  $\tau_i$ , i.e., resolve-se o seguinte sistema de equações:

$$\frac{\partial \omega_n^2}{\partial \tau_i} = 0 \quad (3.15)$$

Assim, obtém-se o conjunto de valores dos parâmetros  $\tau_i$  que produzem a melhor aproximação da frequência natural para uma dada função parametrizada.

O Método de Rayleigh-Ritz é amplamente utilizado para determinação das frequências naturais em sistemas relativamente simples, tais como, placas e membranas circulares e vigas, estacionárias e em rotação, com secções e propriedades constantes e variáveis. STODOLA (1945) e TIMOSHENKO (1937) utilizam o Método de Rayleigh para determinar as frequências naturais dos primeiros modos de vibração de pás longas e discos de turbomáquinas em rotação. Entretanto para sistemas com geometria mais

complexa o cálculo da energia potencial e cinética torna-se bastante complexo, principalmente se existe mais de uma forma de acúmulo de energia potencial, como no caso de corpos flexíveis em rotação. Além disso, torna-se difícil definir formas aproximadas para os modos de vibração em estruturas reais.

Para discos ou estruturas similares é adotada a seguinte função para o movimento vibratório em um modo de vibração:

$$w(r, \theta, t) = A_0 \cdot \Phi(r) \cdot \text{sen}(D\theta) \cdot \cos(\omega_n t) \quad (3.16)$$

onde:  $A_0$  = amplitude máxima do movimento vibratório;  
 $\Phi(r)$  = função aproximada para a forma do modo de vibração ao longo do raio do disco;  
 $D$  = número de diâmetros nodais, i.e., número de ondas ao longo da circunferência do disco;  
 $\omega_n$  = frequência natural do sistema;  
 $(r, \theta)$  = coordenada polar de um ponto qualquer do disco.

No caso de estruturas flexíveis em rotação, calcula-se a energia potencial de deformação elástica,  $V_1$ , e o trabalho das forças de inércia de rotação sobre o modo de vibração,  $V_2$ , para uma dada forma aproximada do modo de vibração. Com estes valores determina-se a frequência natural pela seguinte expressão:

$$\omega_n^2 = \frac{V_1(\varphi) + V_2(\varphi)}{F(\varphi)} \quad (3.17)$$

com  $F$  definida em 3.12.

### 3.5.2. Método de Southwell

LAMB e SOUTHWELL (1921) propõe uma simplificação ao método de Rayleigh para determinação das frequências naturais de estruturas flexíveis em rotação. Determinar-se separadamente a frequência natural do sistema estacionário, i.e., sem rotação, e a frequência natural que o sistema teria devido ao efeito isolado das forças centrífugas, desprezando-se a rigidez à deformação. Estas frequências parciais são dadas pelas seguintes expressões:

$$\omega_1^2 = \frac{V_1(\varphi)}{F(\varphi)} \quad (3.18)$$

e:

$$\omega_2^2 = \frac{V_2(\varphi)}{F(\varphi)} \quad (3.19)$$

Nestas expressões, a função da forma do modo de vibração é escolhida de maneira a se obter o menor valor para cada uma das frequências isoladamente.

Então a frequência natural do sistema, considerando a ação simultânea dos efeitos de enrijecimento devido à rotação e das forças de restituição elásticas, pode ser obtida pela seguinte expressão:

$$\omega_n^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 \quad (3.20)$$

A frequência natural obtida pelo Método de Southwell representa um limite inferior para a frequência natural exata do sistema (BISHOP & JOHNSON, 1979). É evidente que



se a função adotada para a forma do modo de vibração corresponder a forma exata do modo de vibração então o procedimento de Southwell, tal como o de Rayleigh, conduzem ao valor exato da frequência natural.

Para estruturas flexíveis em rotação, a frequência natural ao quadrado do sistema devido unicamente a ação das forças centrífugas é proporcional à frequência de rotação do sistema ao quadrado, i.e.:

$$\omega_2^2 = S \cdot \Omega^2 \quad (3.21)$$

onde:  $\omega_2$  = frequência natural devido ao efeito isolado da rotação (rad/s);

S = coeficiente de enrijecimento centrífugo ou coeficiente de Southwell (adimensional);

$\Omega$  = velocidade de rotação angular do sistema (rad/s).

Assim, pode-se escrever a expressão 3.20 na forma conhecida como Fórmula de Southwell:

$$\omega_n^2 = \omega_{n=0}^2 + S \cdot \Omega^2 \quad (3.22)$$

onde:  $\omega_n$  = frequência natural do sistema em rotação (rad/s);

$\omega_{n=0}$  = frequência natural do sistema estacionário (rad/s);

S = Coeficiente de Southwell (adimensional);

$\Omega$  = velocidade de rotação angular da estrutura (rad/s).

O Coeficiente de Soutwell é função da geometria, da distribuição de massa de uma estrutura e da forma do modo

de vibração. O efeito de enrijecimento tratado pela Fórmula de Southwell também é conhecido como rigidez geométrica (LAURENSEN, 1976), e pode ser representado como uma rigidez adicional que é somada a rigidez elástica da estrutura.

LAMB e SOUTHWELL (1921) apresentam os valores do Coeficiente de Southwell para discos uniformes engastados no centro e livres na periferia, que são reproduzidos na tabela 3.2 a seguir:

**TABELA 3.2: VALORES DO COEFICIENTE DE SOUTHWELL DOS MODOS DE VIBRAÇÃO DE DISCOS UNIFORMES EM ROTAÇÃO**

Nº de Diâmetros Nodais D	Nº de Circunferências Nodais C		
	1	2	3
0	1	2,35	4,05
1	5,95	8,95	12,3
2	14,2	18,85	23,85
3	25,75	32,05	38,7

DEN HARTOG (1956) afirma que os coeficientes de Southwell sempre apresentam valores maiores que a unidade para discos e pás radiais de ventiladores. Esta afirmação é válida para todos os modos de vibração de estruturas em rotação compostas de elementos preferencialmente radiais, livres nos diâmetros externos e fixos nos diâmetros internos, e que vibram predominantemente na direção tangencial ou axial. LIKINS et al. (1973) estudaram o efeito da rotação sobre as características modais de estruturas elásticas. Em particular, apresentam o efeito do enrijecimento centrífugo, i.e., a rigidez geométrica, sobre massas concentradas dispostas em três configurações flexíveis

diferentes. Os autores mostram que elementos estruturais dispostos radialmente, com borda externa livre e borda interna com articulação flexível, tendem a apresentar aumento da frequência natural com a rotação devido à rigidez geométrica. Ao contrário, os elementos estruturais radiais, com a borda interna livre e a borda externa com articulação flexível, tendem a diminuir as frequências naturais, desestabilizando o sistema. Os elementos estruturais dispostos axialmente, i.e., paralelos ao eixo de rotação, apresentam rigidez geométrica nula. Os elementos estruturais que compõem os impelidores centrífugos são preferencialmente radiais e vinculados pela parte central, entretanto, existem alguns elementos que tem a borda interna livre para vibrar, como é o caso de pás curtas, que não chegam a ser presas no cubo central. Portanto, embora a tendência geral da rigidez geométrica seja de aumentar as frequências naturais dos impelidores, pode-se supor que a ação das forças centrífugas sobre alguns elementos estruturais contribua para reduzi-las. Podendo, pelo menos teoricamente, ser esperados Coeficientes de Southwell, inferiores a unidade, principalmente considerando-se os efeitos das acelerações centrípetas e de Coriolis discutidos na seção seguinte.

### 3.5.3. Equação do Movimento de Corpos Flexíveis em Rotação

O enrijecimento geométrico tratado nas seções anteriores é somente um dos efeitos decorrentes da rotação de estruturas flexíveis. Além desse efeito, existem as influências da aceleração centrípeta e da aceleração de Coriolis. A rigidez geométrica depende basicamente da geometria da estrutura. Desta deriva o campo de tensões gerado pelo movimento de rotação, a partir do qual pode-se calcular o trabalho das forças centrífugas sobre os modos de vibração. A influência da aceleração centrípeta e de Coriolis depende basicamente da direção de deflexão dos pontos da estrutura em vibração em relação à direção do eixo de rotação.

LIKINS et al. (1973) estudaram a influência da rotação sobre estruturas flexíveis contínuas, apresentam a formulação pelo método dos elementos finitos e discutem em particular o efeito da rotação sobre uma massa concentrada em rotação com vínculo flexível. HENRY<sup>11</sup> desenvolveu as expressões para formulação pelo método dos elementos finitos da dinâmica vibratória de estruturas flexíveis em rotação. LAURENSEN (1976) estudou o efeito da rotação sobre vigas uniformes em balanço com diferentes orientações espaciais em relação ao eixo de rotação. Também aplicou o método dos elementos finitos neste estudo. Reproduzimos em seguida o desenvolvimento sucinto apresentado por LAURENSEN para formulação na forma matricial das equações

---

<sup>11</sup> op cit.

diferenciais do movimento vibratório de estruturas flexíveis discretas em rotação.

O vetor posição de um ponto  $i$  de uma estrutura flexível, conforme mostrado na figura 3.7, é dado pela seguinte relação:

$$\vec{r}_i = \vec{p}_i + \vec{u}_i \quad (3.23)$$

onde:  $\vec{r}_i$  = posição do ponto  $i$  da estrutura;  
 $\vec{p}_i$  = posição não deformada do ponto  $i$ ;  
 $\vec{u}_i$  = deflexão do ponto  $i$  em relação à posição não deformada.

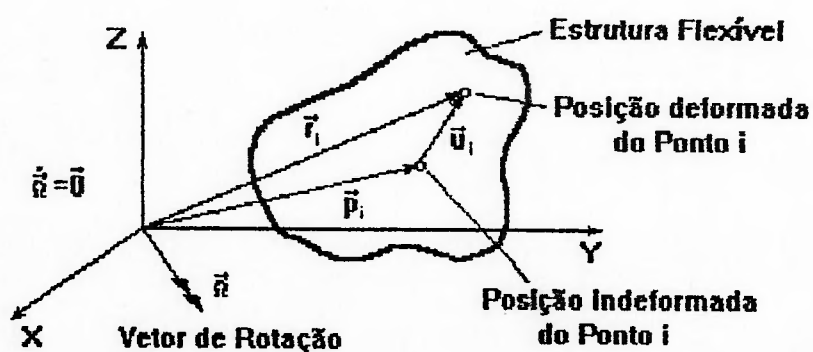


FIGURA 3.7: Deflexão do ponto  $i$  de uma estrutura flexível em rotação

Derivando-se um e duas vezes o vetor de posição em relação ao tempo, obtém-se a velocidade e aceleração do ponto, que são dados por:

$$\dot{\vec{r}}_i = \vec{\Omega} \wedge (\vec{p}_i + \vec{u}_i) + \dot{\vec{u}}_i \quad (3.24)$$



e:

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \bar{\Omega} \wedge [\bar{\Omega} \wedge (\bar{\mathbf{p}}_i + \bar{\mathbf{u}}_i)] + 2\bar{\Omega} \wedge \dot{\mathbf{u}}_i + \ddot{\mathbf{u}}_i \quad (3.25)$$

onde a velocidade de rotação foi suposta constante, i.e.:

$$\dot{\bar{\Omega}} = \bar{\mathbf{0}} \quad (3.26)$$

Podemos aplicar a segunda Lei de Newton para cada ponto material  $i$  e escrever a seguinte relação matricial para toda a estrutura discreta:

$$\mathbf{F} = \mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{R}} \quad (3.27)$$

onde:  $\mathbf{F}$  = vetor de  $3N$  elementos com as componentes nas três direções ortogonais da resultante das forças nos ponto de massa da estrutura;

$\mathbf{M}$  = matriz  $3N$  por  $3N$  de massa do sistema discreto;

$\ddot{\mathbf{R}}$  = vetor de  $3N$  elementos com as projeções nas três direções ortogonais da aceleração  $\ddot{\mathbf{r}}_i$  dos pontos da estrutura;

$N$  = número de pontos ou nós da estrutura discretizada.

Considerando-se somente as forças de restituição elástica agindo sobre os nós da estrutura, obtém-se a seguinte equação matricial para a dinâmica vibratória de estruturas flexíveis em rotação:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + 2\mathbf{M}\bar{\Omega}\dot{\mathbf{U}} + (\mathbf{K} + \mathbf{M}\bar{\Omega}^2)\mathbf{U} = -\mathbf{M}\bar{\Omega}^2\mathbf{P} \quad (3.28)$$

onde:  $\mathbf{U}$  = vetor de deflexões dos nós da estrutura;

$\mathbf{P}$  = vetor da posição não deformada dos nós;



Podemos transformar a equação 3.30 em uma equação homogênea, fazendo uma translação de coordenadas das deflexões para a posição de equilíbrio da estrutura em rotação em regime permanente. A posição de equilíbrio é obtida pela solução estática de equação 3.30, ou seja:

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_c(\sigma_0) + \mathbf{M}\bar{\Omega}\bar{\Omega})\mathbf{U}_0 = -\mathbf{M}\bar{\Omega}\bar{\Omega}\mathbf{P} \quad (3.31)$$

onde:  $\mathbf{U}_0$  = deflexão de equilíbrio estático devido às forças de inércia centrífugas.

Observa-se que a equação 3.31 é não linear, pois a solução estática depende dos valores da matriz de rigidez que é função das tensões estáticas e essas por sua vez são determinadas pela deformações estáticas. Portanto é necessário aplicar algum processo iterativo para solução da equação 3.31.

Nas novas coordenadas da deflexão obtemos a seguinte equação da dinâmica vibratória de estruturas flexíveis em rotação:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + 2\mathbf{M}\bar{\Omega}\dot{\mathbf{U}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_c(\sigma_0) + \mathbf{M}\bar{\Omega}\bar{\Omega})\mathbf{U} = 0 \quad (3.32)$$

É interessante estudar a influência de cada um dos termos da equação 3.32 na dinâmica vibratória de impelidores centrífugos.

A parcela  $\mathbf{K}_c(\sigma_0)\mathbf{U}$  constitui-se das forças do campo de tensões gerado pela rotação e corresponde justamente ao trabalho virtual destas forças sobre o modo de vibração que é calculado no procedimento de Southwell. Como vimos anteriormente, esta parcela é responsável pelo enrijecimento centrífugo do impelidor, que pode ser

descrito de maneira simplificada pela fórmula de Southwell (3.22). Como o impelidor é composto basicamente por elementos estruturais fixos pelo centro e as maiores deflexões ocorrem na direção transversal ao plano do impelidor, a rigidez geométrica basicamente enrijece o sistema provocando o aumento das frequências naturais.

A parcela  $2M\dot{\Omega}U$  corresponde à contribuição da aceleração de Coriolis para a dinâmica do movimento. O efeito básico da aceleração de Coriolis consiste em acoplar o movimento vibratório nas duas direções do plano do impelidor. Os modos de vibração de sistemas com grande influência da aceleração de Coriolis são complexos, sendo que cada modo de vibração do sistema estacionário se divide em dois modos de vibração com frequências distintas. A aceleração de Coriolis provoca a redução de uma das frequências naturais e o aumento da outra. A aceleração de Coriolis é responsável pelo surgimento de dois movimentos de precessão, direta e inversa, nos rotores com grandes volantes fora da posição central do vão entre mancais. Felizmente, a aceleração de Coriolis não tem efeito significativo na dinâmica de impelidores centrífugos, pois as deflexões predominantes tem mesma direção do vetor de rotação angular, donde se conclui que o produto vetorial do vetor de rotação pelo vetor de deflexão é nulo. Desta forma podemos desprezar o efeito da aceleração de Coriolis na determinação das características dinâmicas dos impelidores em operação.

A parcela  $M\ddot{\omega}\omega$  da equação diferencial corresponde a ação das forças centrípetas sobre o movimento vibratório. Como o movimento de vibração tem predominantemente a direção do vetor de rotação angular, essa parcela não tem efeito significativo na dinâmica de impelidores centrífugos.

Portanto, da análise precedente, podemos concluir que o efeito primordial da rotação sobre as características dinâmicas de impelidores e demais estruturas com comportamento dinâmico similar aos discos, consiste no surgimento do campo de forças centrífugas em regime permanente que é capaz de acumular energia potencial do movimento vibratório da estrutura. Esta parcela é adequadamente representada pela Fórmula de Southwell. Assim, no caso dos impelidores centrífugos, o estudo da influência da rotação sobre as características dinâmicas reduz-se à determinação do Coeficiente de Southwell.



### 3.6. Movimento Rotativo e Velocidades Críticas de Disco

O principal complicador na análise das características dinâmicas de impelidores centrífugos decorre do fato do impelidor estar em rotação em relação às principais fontes de excitação aerodinâmicas. Desta forma, as fontes que são estacionárias encontram-se em movimento sobre o impelidor quando observadas de um referencial fixo no impelidor. Em decorrência deste fato ocorre um deslocamento em frequência<sup>12</sup> das fontes de excitação quando observadas do referencial rotativo. Além disso, a fase relativa entre excitação e resposta depende tanto do histórico temporal<sup>13</sup> do sinal de força e do movimento, como, da posição instantânea de atuação da força que se move sobre a estrutura. Pode-se dizer que ocorre um acoplamento entre a coordenada espacial e a variável tempo. Assim, para entender o mecanismo pelo qual as fontes aerodinâmicas estacionárias agem sobre o impelidor em rotação é necessário compreender inicialmente o comportamento dos modos de vibração no impelidor e em seguida analisar como as forças aerodinâmicas atuam sobre o impelidor, i.e., em que condições elas fornecem energia para o movimento vibratório.

---

<sup>12</sup> Tradução empregada para o termo 'frequency shift'.

<sup>13</sup> Tradução empregada para o termo 'time history'.

### 3.6.1. Ondas Estacionárias e em Movimento

CAMPBELL (1924) propõe analisar a vibração em discos de turbinas observando que um modo de vibração pode ser decomposto em duas ondas em movimento, com mesma frequência, mas que se movem em sentidos contrários sobre o disco. Assim, a vibração na periferia de um disco que vibra em um dado modo de vibração pode ser descrita como:

$$w(\theta, t) = A_0 \operatorname{sen}(D\theta) \cos(\omega_n t) \quad (3.33)$$

onde:  $w$  = deflexão do disco na direção transversal;  
 $\theta$  = posição angular de um ponto sobre o disco;  
 $t$  = tempo;  
 $A_0$  = amplitude da vibração na periferia do disco;  
 $D$  = número de diâmetros nodais;  
 $\omega_n$  = frequência natural do modo de vibração.

Esta equação representa uma onda fixa no referencial em rotação com o disco vibrando no  $n$ ésimo modo de vibração  $A_0 \operatorname{sen}(D\theta)$  em movimento harmônico  $\cos(\omega_n t)$  com frequência  $\omega_n$ . Podemos decompor a onda fixa no disco em duas ondas em movimento através da seguinte identidade trigonométrica:

$$A_0 \operatorname{sen}(D\theta) \cos(\omega_n t) = \frac{A_0}{2} \operatorname{sen} \left[ D \left( \theta - \frac{\omega_n t}{D} \right) \right] + \frac{A_0}{2} \operatorname{sen} \left[ D \left( \theta + \frac{\omega_n t}{D} \right) \right] \quad (3.34)$$

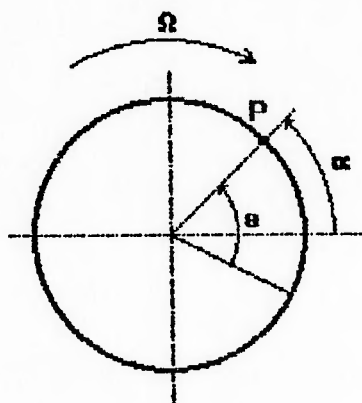


FIGURA 3.8: Coordenadas absoluta e relativa de um ponto do disco em rotação

Como o disco se encontra em rotação com velocidade constante, podemos relacionar a posição angular de um ponto P sobre o disco em coordenadas relativas e absolutas pela seguinte expressão que segue as convenções mostradas na figura 3.8:

$$\theta(t) = \alpha + \Omega t \quad (3.35)$$

onde:  $\alpha$  = posição angular no referencial estacionário;  
 $\theta$  = posição angular no referencial em rotação fixo ao disco;  
 $\Omega$  = velocidade de rotação angular do disco.

Assim, o modo de vibração fixo no disco quando observado no referencial estacionário toma a seguinte forma:

$$w(\alpha, t) = \frac{A_0}{2} \text{sen}[D\alpha - (\omega_n - D\Omega)t] + \frac{A_0}{2} \text{sen}[D\alpha + (\omega_n + D\Omega)t] \quad (3.36)$$

Ocorre portanto um deslocamento em frequência, i.e., cada modo de vibração fixo no disco manifesta-se em duas

freqüências distintas quando observado no referencial estacionário. O deslocamento em freqüência decorrente da rotação do disco pode ser escrito pela seguinte expressão:

$$\omega_r = \omega_n \mp D\Omega \quad (3.37)$$

onde:  $\omega_n$  = freqüência natural no referencial rotativo;  
 $\omega_r$  = freqüência natural no referencial estacionário;  
 $D$  = número de diâmetros nodais;  
 $\Omega$  = velocidade angular de rotação.

Logo podemos rescrever a equação 3.36 na seguinte forma:

$$w(\alpha, t) = \frac{A_0}{2} \text{sen}(D\alpha - \omega_1 t) + \frac{A_0}{2} \text{sen}(D\alpha + \omega_2 t) \quad (3.38)$$

$$\text{onde: } \omega_{1,2} = \omega_n \pm D\Omega$$

Portanto, um modo de vibração fixo no disco é observado no referencial estacionário como duas ondas de mesma amplitude e freqüências diferentes que se movem em sentidos contrários. A primeira onda com freqüência menor move-se no mesmo sentido da rotação, enquanto a segunda com freqüência maior, move-se no sentido contrário à rotação.

Podemos representar as freqüências das ondas observadas no referencial rotativo e no referencial estacionário em função da velocidade de rotação como mostra a figura 3.9.

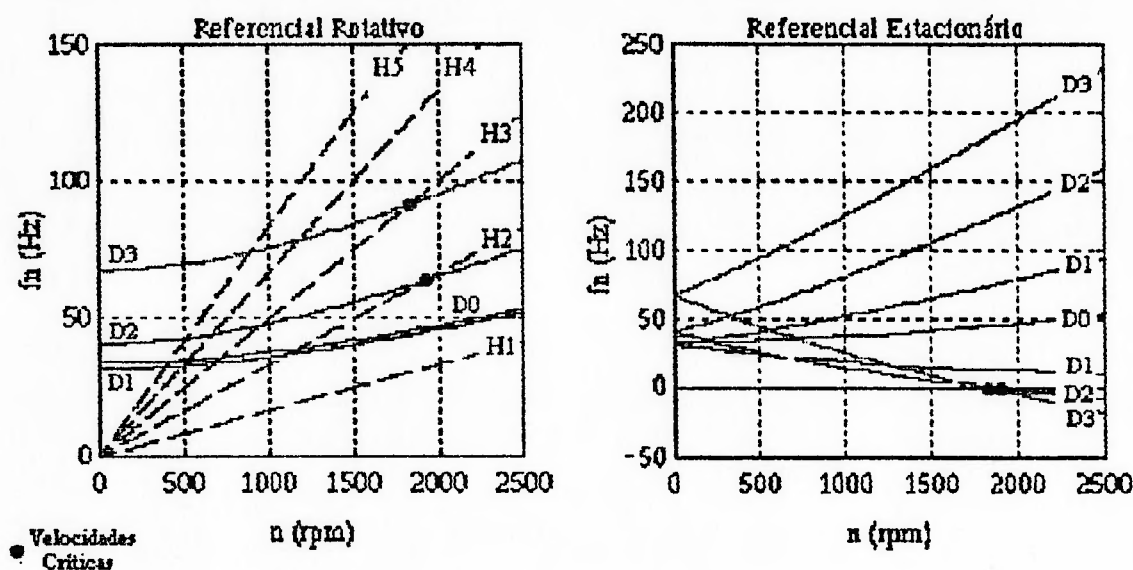


FIGURA 3.9: Freqüências naturais dos modos de vibração fixos no disco observadas no referencial estacionário e rotativo em função da velocidade de rotação

Neste exemplo são mostradas as freqüências naturais correspondentes aos modos de vibração com 0, 1, 2 e 3 diâmetros nodais (denotados com D0, D1, D2 e D3 nos gráficos) de um disco homogêneo engastado no centro. O gráfico da esquerda representa as freqüências naturais como observadas no referencial rotativo. Devido ao enrijecimento com a rotação, as freqüências naturais variam parabolicamente conforme a Fórmula de Southwell com a velocidade de rotação. Neste gráfico também são marcados os harmônicos da velocidade de rotação (denotados com H1, H2, H3, H4 e H5 no gráfico), que são as retas proporcionais à velocidade de rotação. Este diagrama é conhecido como



Diagrama de Campbell e se consagrou como uma maneira prática de avaliar a proximidade da rotação de operação de uma condição crítica. O gráfico da direita representa as mesmas frequências naturais agora observadas no referencial estacionário.

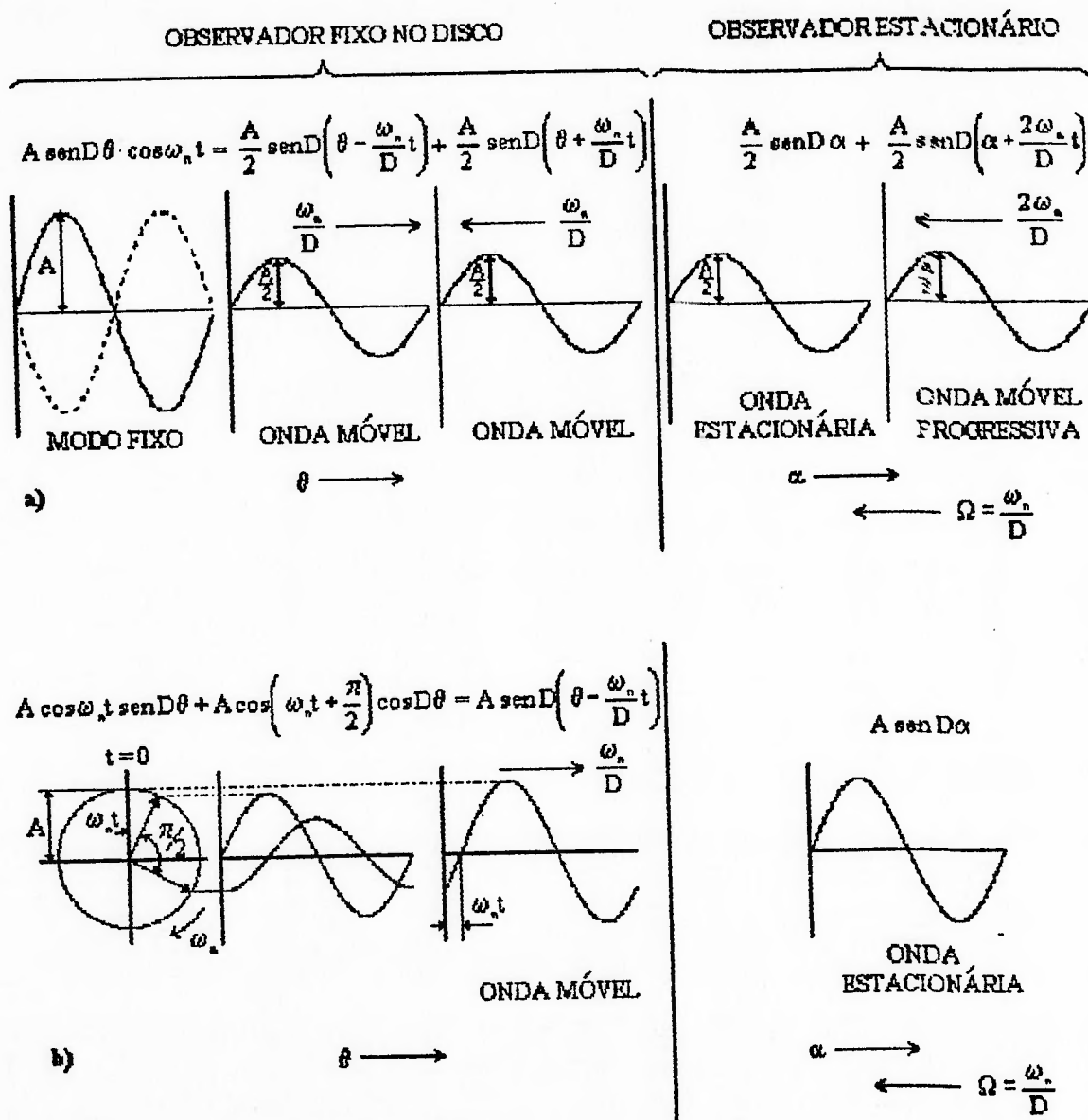
Como será visto adiante, sempre que a velocidade de movimento da onda retrógrada, i.e., com movimento em sentido contrário à rotação do disco, for igual à velocidade de rotação do ventilador, a onda retrógrada permanece estacionária no referencial estacionário. Nestas condições uma força estacionária e constante pode excitar a ressonância do modo de vibração correspondente.

Como vimos, segundo a hipótese de CAMPBELL (1924), o modo de vibração permanece fixo no impelidor. Nestas condições uma força estacionária constante exerce trabalho médio positivo sobre a onda estacionária na condição descrita no parágrafo anterior. Também deve haver uma onda em movimento na direção de rotação do rotor, com frequência igual a duas vezes a frequência de rotação e amplitude igual a da onda estacionária.

Todavia, os resultados experimentais apresentados na fig. 33 página 62 no trabalho de CAMPBELL (1924) estão em contradição com as hipóteses anteriores, pois a onda em movimento apresenta amplitude aproximadamente igual a metade da onda estacionária. Surgiu então a necessidade de explicar esta diferença. CAMPBELL argumentou que a onda em movimento apresentaria maior amortecimento devido ao

movimento em relação ao ar. Porém a questão permaneceu aberta e foram cogitadas outras explicações.

TOBIAS e ARNOLD (1957) apresentam uma revisão das diversas explicações dadas para a questão das ondas em movimento e ondas estacionárias. Os autores concluem que todas as explicações dadas podem ser agrupadas em duas espécies de argumentação, resumidas na figura 3.10. Pela primeira, que corresponde a argumentação de CAMPBELL, considera-se que o disco vibra em um único modo de vibração com orientação fixa no disco. Este vibração fixa ao rotor seria equivalente a duas ondas com amplitudes iguais, uma em movimento retrógrado e outra em movimento progressivo em relação à rotação do disco. Pela segunda argumentação, considera-se que o movimento vibratório decorrente de dois modos de vibração semelhantes fixos ao disco com orientação e amplitudes adequadas equivale a uma onda estacionária no referencial absoluto.



Reproduzido de TOBIAS & ARNOLD (1957)

FIGURA 3.10: Relação entre ondas estacionárias e ondas em movimento

Nenhuma das duas explicações é integralmente suportada pelas evidências experimentais. O fato da onda estacionária não ter a mesma amplitude da onda móvel refuta a primeira explicação. Em contrapartida, caso a segunda explicação fosse correta, a onda móvel progressiva com duas vezes a

velocidade de rotação não poderia ser observada no referencial estacionário, como foi por CAMPBELL (1924) na fig. 63 da página 100.

TOBIAS e ARNOLD (1957) afirmam que ambas explicações se aplicam para casos limites. A primeira é válida para estruturas em rotação com assimetria acentuada, de forma que o modo de vibração tenha orientação claramente definida em relação ao impelidor. Nesse caso as frequências naturais do par de modos de vibração semelhantes estariam razoavelmente dessintonizadas. A segunda explicação corresponde ao caso contrário, para as estruturas quase perfeitamente axissimétricas. Neste caso, existem dois modos de vibração com frequências naturais quase-coincidentes. Estes modos são ortogonais, i.e., estão em quadratura no tempo e estão defasados de meia onda quanto à sua orientação espacial.

TOBIAS e ARNOLD (1957) apresentam a seguinte fórmula geral para vibração livre de um disco quase-axissimétrico com imperfeições suficientes para orientar os modos de vibração sobre o disco:

$$w = w_1 + w_2 = A_1 f_n(r) \cos D(\theta - \beta_1) \cos(\omega_1 t - \varepsilon_1) + A_2 f_n(r) \sin D(\theta - \beta_2) \cos(\omega_2 t - \varepsilon_2) \quad (3.39)$$

onde:  $w_{1,2}$  = vibração nos dois modos de vibração semelhantes com frequências naturais próximas;

$A_{1,2}$  = amplitude das duas ondas;

$f_n(r)$  = forma do modo de vibração na direção radial;

$D$  = número de diâmetros nodais;

- $\theta$  = posição angular no referencial do disco;  
 $\omega_{1,2}$  = frequências naturais quase-coincidentes;  
 $\beta_{1,2}$  = posição arbitrária de orientação dos modos de  
vibração no disco;  
 $\epsilon_{1,2}$  = fase inicial dos dois movimentos no tempo.

Esta equação representa a sobreposição de dois modos de vibração semelhantes. No caso da imperfeição que perturba a simetria axial do disco tender à zero, as duas frequências naturais tendem ao mesmo valor e a posição dos dois modos tende a ser simétrica ( $\beta_1 \equiv \beta_2$ ). A fase inicial dos dois movimentos depende das condições iniciais. Os dois casos limites, onda estacionária e onda fixa no disco, são os dois casos limites para esta expressão.

Na pesquisa de TOBIAS e ARNOLD (1957) são apresentadas as respostas forçadas dos discos quase-axissimétricos estacionários e em rotação. Os resultados experimentais apresentados indicam que as vibrações de estruturas axissimétricas com pequenas imperfeições apresentam comportamento não linear. No disco em rotação, a vibração permanece estacionária no início do movimento vibratório em um dado modo de vibração. A medida que amplitude de vibração cresce o disco torna-se mais rígido ocorrendo o correspondente aumento da frequência natural. Em um determinado ponto, o movimento estacionário colapsa, e a onda anteriormente estacionária se divide em duas ondas com movimento retrógrado e progressivo em relação à rotação do disco. Esta explicação dá conta dos fatos experimentais apresentados por CAMPBELL (1924).



Os impelidores centrífugos são estruturas periódicas cíclicas e não apresentam simetria axial. Portanto, os modos de vibração dos impelidores tem orientação angular definida e assim as vibrações excitadas são fixas no impelidor (KUSHNER, 1980).

Para avaliar o grau de imperfeição em relação a condição de simetria axial TOBIAS e ARNOLD (1957) propõe o seguinte fator de imperfeição:

$$\Delta = \frac{f_2 - f_1}{f_1} \quad (3.40)$$

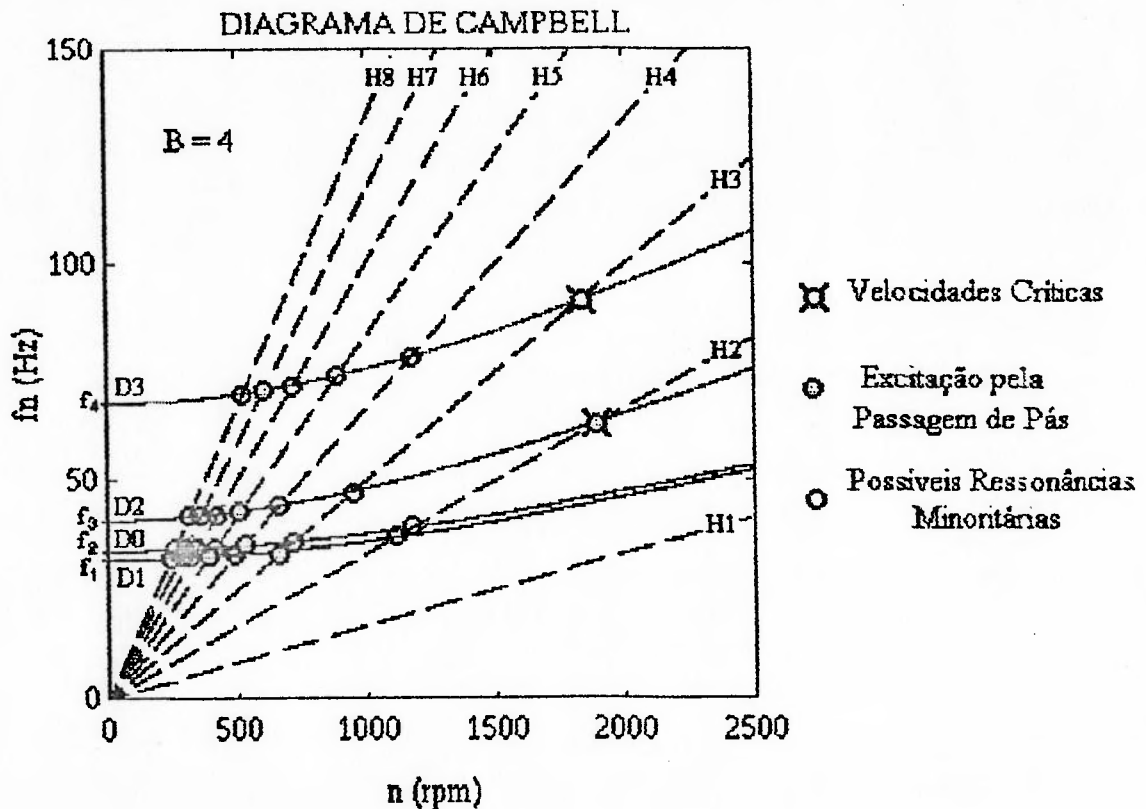
onde:  $\Delta$  = fator de imperfeição de modos quase-axissimétricos;

$f_{1,2}$  = frequências naturais quase-coincidentes.

O fator de imperfeição pode ser utilizado para avaliar a validade da hipótese de simetria axial.

### 3.6.2. Velocidades Críticas de Disco e Diagrama de Campbell

A título de esclarecer a utilização do Diagrama de Campbell, voltemos a considerar as condições nas quais os modos de vibração fixos no impelidor podem ser excitados por forças aerodinâmicas estacionárias. A figura 3.11 reproduz o Diagrama de Campbell mostrado na figura 3.9, supondo tratar-se de um impelidor com quatro pás (denotado com B na figura 3.11).



**FIGURA 3.11:** Diagrama de Campbell de um impelidor com quatro pás

Vimos que a frequência aparente da onda retrógrada diminui conforme a velocidade de rotação aumenta. Para cada modo de vibração existe uma rotação específica na qual a onda retrógrada no disco permanece parada para um observador estacionário, ou seja, a frequência aparente da onda retrógrada é nula, i.e.:

$$\Omega_{cr} = \frac{\omega_n}{D} \Rightarrow \omega_1 = 0 \quad (3.41)$$

A velocidade de rotação em que a onda retrógrada permanece estacionária  $\Omega_{cr}$  é chamada por CAMPBELL (1924) de

velocidade de rotação crítica de disco<sup>14</sup>. Nesta rotação uma força estacionária constante é capaz de fornecer energia para o movimento vibratório.

As velocidades de rotação críticas de disco são as intersecções das frequências naturais aparentes das ondas retrógradas com o eixo da abcissa quando observadas no diagrama no referencial estacionário da figura 3.9. Portanto, a cada modo de vibração corresponde uma velocidade crítica de rotação, que é função da frequência natural  $\omega_n$  e do número de diâmetros nodais  $D$ .

Quando observadas no Diagrama de Campbell, as velocidades de rotação críticas correspondem as velocidades de rotação nas quais as retas dos harmônicos da velocidade de rotação com ordem igual ao número de diâmetros nodais de cada modo de vibração interceptam as hipérbolas das respectivas frequências naturais.

Além das velocidades críticas principais, descritas anteriormente, podem ocorrer outras condições nas quais os modos de vibração podem absorver energia de forças estacionárias, que oscilam numa dada frequência  $\omega_r$ . Se esta frequência satisfizer a relação da equação 3.37, a fonte de vibração poderá excitar a ressonância do impelidor. No caso de ventiladores, as fontes de vibração estacionários apresentam em geral frequência de oscilação harmônica com a velocidade de rotação. Portanto, também poderá acontecer ressonância do impelidor se a frequência

---

<sup>14</sup> Tradução empregada para o termo 'Disk Critical Speed'.

de excitação da fonte estacionário satisfizer a seguinte expressão:

$$\frac{\omega_n}{\Omega} = |\pm H_r \pm D| \quad \left| \quad H_r = \frac{\omega_r}{\Omega} \right. \quad (3.42)$$

onde:  $\omega_r$  = frequência de excitação da fonte estacionária (rad/s);

$\omega_n$  = frequência natural do impelidor (rad/s);

$H_r$  = ordem do harmônico da velocidade de rotação (adimensional);

$\Omega$  = velocidade de rotação angular (rad/s).

Em particular, a passagem das pás por perturbações do fluxo de ar, associadas a descontinuidades na voluta, produz uma excitação oscilante estacionária. Para um observador estacionário esta excitação ocorre na frequência de passagem de pás, dada pela seguinte expressão:

$$\omega_r = B\Omega \quad (3.43)$$

onde:  $B$  = número de pás do impelidor.

Para um observador no referencial rotativo, a excitação pela passagem das pás se manifestará em outras frequências, deslocadas devido ao movimento de rotação. Considerando-se apenas uma única descontinuidade ao longo da volta, representada pelo 'cut-off', a condição de ressonância pode ser descrita pela seguinte expressão:

$$H_n = |\pm(B \pm D)| \quad \left| \quad H_n = \frac{\omega_n}{\Omega} \right. \quad (3.44)$$

onde:  $H_n$  = frequência natural adimensional do  $n$ ésimo modo de vibração;

D = número de diâmetros nodais do  $n^{\text{ésimo}}$  modo de vibração.

Chamamos de possíveis ressonâncias minoritárias (KUSNER, 1980) as demais condições nas quais há concordância das frequências naturais com qualquer outro harmônico da velocidade de rotação. Conservadoramente, também pode-se considerar estas condições como sendo críticas, pois para ventiladores em geral existe a possibilidade de ocorrer ressonância da roda do ventilador. Observando o Diagrama de Campbell, mostrado na figura 3.11, verifica-se que existem inúmeras possíveis ressonâncias minoritárias, mesmo quando só são analisados poucos modos de vibração, como é o caso do exemplo da figura. Se considerarmos os demais modos de vibração da faixa de frequência de interesse, constata-se que praticamente não existe condição de operação não crítica. Portanto, é necessário dispor de um critério, ao menos qualitativo, que permita selecionar os modos de vibração realmente perigosos.

Para propulsores axiais com dinâmica das pás pouco acoplada, deve-se estudar a periculosidade de todos os harmônicos. Neste caso, é necessário verificar a fase do movimento vibratório de cada pá quando atravessa alguma perturbação do fluxo de ar. KUSHNER (1980) propôs um algoritmo para cálculo de um *fator de resposta na ressonância*<sup>15</sup> que justamente avalia o efeito médio das perturbações de fluxo sobre as pás considerando-se a fase

---

<sup>15</sup> Tradução empregada para o termo 'Resonant Response Factor'.



perturbações de fluxo sobre as pás considerando-se a fase do movimento das pás e a posição de ocorrência de perturbações ao longo da volta. Com este fator pode-se avaliar quais ressonâncias minoritárias podem absorver energia e qual a periculosidade de cada uma. Na norma ANSI/ASHRAE 87.1 - 92 são indicados os harmônicos relevantes para cada modo de vibração de propulsores axiais.

Todavia, no caso de impelidores centrífugos, onde todo o impelidor vibra como um corpo único, o trabalho fornecido por forças aerodinâmicas estacionárias aos modos de vibração é reduzido nas ressonâncias minoritárias. Somente ocorre fornecimento de energia devido às imperfeições construtivas que quebram a simetria periódica dos impelidores. Caso contrário, o trabalho médio sobre os modos de vibração do impelidor é nulo nos casos dos harmônicos que não correspondem às velocidades críticas principais e a excitação de passagem de pás.

Portanto, para os impelidores centrífugos as duas principais condições de ressonância são:

- 1º) velocidades de rotação críticas de disco;
- 2º) excitação pela passagem de pás.

Estas condições podem ser representadas no diagrama da figura 3.12, chamado doravante de Diagrama  $H \times D$ , onde são indicados os número de diâmetros nodais  $D$  (ou a constante de fase  $s$ ) na abcissa e os harmônicos da velocidade de rotação  $H$  na ordenada. Neste diagrama são marcados os modos de vibração nos pontos dados pelo par ordenado  $(H_n, D)$ , que

modais do impelidor. Simultaneamente, são marcadas as condições de ressonância correspondentes às velocidade críticas de disco e à excitação pela passagem das pás. Como pode ser observado na figura 3.12, estas duas condições ocorrem sobre retas com  $45^\circ$  de inclinação que interceptam os eixos das abcissas e das ordenadas nos valores iguais ao número de pás,  $B$ , do impelidor. Neste exemplo, considerou-se a velocidade de rotação igual a 1800 rpm. No Diagrama H/D construído para uma dada velocidade de rotação, as condições críticas são indicadas pela coincidência das características modais com os pontos de possível excitação.

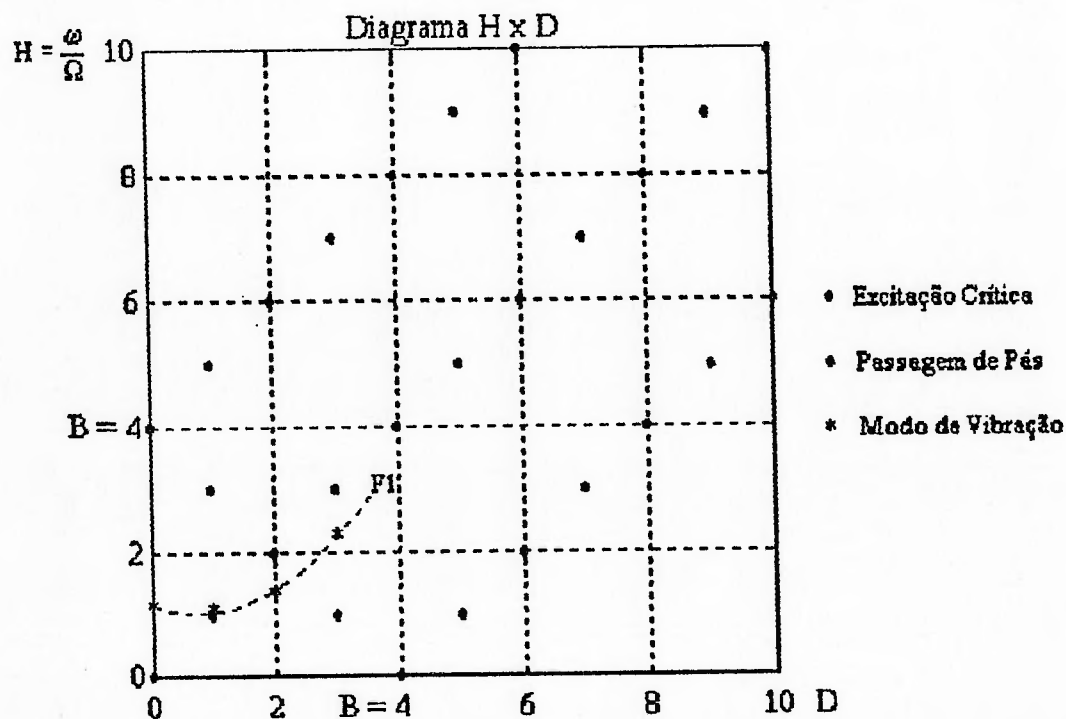


FIGURA 3.12: Diagrama - Harmônico da Rotação versus Número de Diâmetros Nodais

Outra peculiaridade interessante da representação das características modais no Diagrama consiste na ordenação que os modos de vibração com características semelhantes apresentam nesta representação. Por exemplo, no diagrama da figura 3.12, foi identificada a família dos modos com nenhuma circunferência nodal, denotadas com F1 no gráfico. Observa-se que os modos de vibração semelhantes tem tendência de situarem-se sobre curvas de aspecto simples neste diagrama. Este fato pode auxiliar na ordenação dos modos de vibração em famílias de comportamento semelhante.

### 3.7. Trabalho sobre os modos de vibração

Na análise dos modos de vibração problemáticos para uma determinada condição de operação devemos avaliar a provável severidade das vibrações forçadas em operação. A determinação direta da resposta do sistema é por demais complexa e imprecisa. Seria necessário a determinação de todas as características dinâmicas do impelidor, em especial, a determinação dos amortecimentos e das massas generalizadas. Um ensaio para identificação precisa deste parâmetros é bastante complexo.

Uma forma simplificada de avaliar a severidade de vibração é adotada por CAMPBELL (1924). Consiste em estimar aproximadamente o amortecimento global do sistema e comparar com o trabalho exercido pelas forças de excitação sobre os modos de vibração. Embora não seja possível determinar completamente a severidade esperada para as vibrações forçadas, pode-se comparar o trabalho das diversas excitações sobre os modos de vibração. Assim, dispõem-se ter elementos para avaliar a severidade relativa de cada condição crítica.

Para essa análise é necessário determinar as formas dos modos de vibração e conhecer as características da excitação aerodinâmica. Com os recursos atualmente disponíveis é possível obter um boa estimativa do modo de

vibração, entretanto, não contamos com o conhecimento das características da excitação.

A estimação do trabalho realizado por funções hipotéticas para a distribuição de pressões, discutidas no item 3.4, permite ao menos ampliar nosso conhecimento sobre o fenômeno e fornece subsídios para uma avaliação qualitativa das diversas condições críticas.

### **3.7.1. Trabalho de uma Força Pontual Estacionária e Constante**

CAMPBELL (1921) argumenta que existem duas formas de fornecimento de energia através da excitação aerodinâmica nas turbinas. A primeira, chamada de 'feathering' é um mecanismo de vibração auto-excitado, onde a potência fornecida varia com o quadrado da amplitude de vibração. A segunda forma, de interesse na determinação das velocidades críticas, provém do trabalho realizado por um pulso de pressão estático e estacionário sobre o modo de vibração. CAMPBELL argumenta que a primeira forma de fornecimento de energia só se torna eficaz para amplitudes de vibração maiores. Além disso, acredita que a segunda forma seja o mecanismo de excitação primordialmente responsável pelas falhas em disco de turbinas.

CAMPBELL calcula a potência fornecida por uma força pontual estacionária e constante sobre a onda retrógrada que permanece estacionária nas velocidades críticas. Assim,

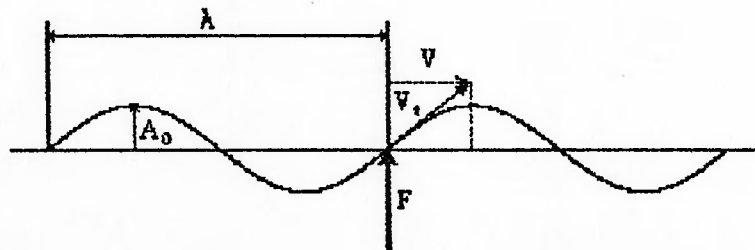
consideramos que uma força  $F$  é aplicada sobre um diâmetro nodal da onda estacionária. De acordo com a figura 3.13, a velocidade de vibração transversal ao disco  $v_t$  do ponto do disco observado instantaneamente pela força  $F$  é dada pela seguinte expressão:

$$v_t = \frac{2\pi VA_0}{\lambda} \quad (3.45)$$

onde:  $A_0$  = é a amplitude da onda estacionária;

$\lambda$  = o comprimento da onda;

$V$  = a velocidade periférica do disco que é igual a velocidade de propagação da onda.



**FIGURA 3.13:** Onda estacionária na periferia desenvolvida de um disco com uma força pontual estática atuando sobre um nó do movimento

Como a velocidade transversal do ponto observado pela força e a própria força tem amplitudes constantes, a potência fornecida pela força  $\dot{W}$  para a onda estacionária fica:

$$\dot{W} = \frac{2\pi VA_0 F}{\lambda} \quad (3.46)$$



Integrando esta expressão e eliminando o valor do raio do ponto de aplicação da força da expressão, obtemos a seguinte expressão para a energia fornecida por volta à onda estacionária:

$$W = 2\pi D A_0 F \quad (3.47)$$

onde:  $W$  = trabalho da força sobre a onda estacionária;  
 $D$  = número de diâmetros nodais do modo de vibração correspondente;  
 $A_0$  = amplitude da onda estacionária; e  
 $F$  = intensidade da força constante.

CAMPBELL não comenta a ação desta força sobre a onda progressiva simultânea que se move com duas vezes a velocidade de rotação. Todavia, o trabalho médio da força constante sobre uma onda em movimento é nulo.

### 3.7.2. Trabalho de uma força oscilante estacionária

Consideremos agora a ação de uma força pontual estacionária sobre o modo de vibração fixo no disco.

Representado a força oscilante estacionária pela seguinte expressão:

$$F(\alpha, t) = F_0 \cos(\omega_0 t) \delta(\alpha) \quad (3.48)$$

e tomado a expressão da vibração no  $n^{\text{ésimo}}$  modo de vibração fixo ao disco:

$$w(\theta, t) = A_0 \cos(\omega_0 t) \text{sen}(\omega_n t) \quad (3.49)$$

- onde:  $F_0$  = intensidade máxima da força estacionária;  
 $A_0$  = amplitude da onda fixa no disco;  
 $\omega_0$  = frequência de oscilação da força medida no referencial estacionário;  
 $\omega_n$  = frequência natural do  $n^{\text{ésimo}}$  modo de vibração do disco observada no referencial rotativo;  
 $\alpha$  = posição angular medida no referencial estacionário;  
 $\theta$  = posição angular medida no referencial fixo no disco.

O trabalho médio da força oscilante sobre a onda fixa no disco é dado por:

$$\bar{W} = \int_0^{\tau} F(\alpha, t) \cdot \dot{w}(\theta, t) dt \quad (3.50)$$

- onde:  $\bar{W}$  = trabalho médio da força oscilante estacionária sobre a vibração fixa no disco;  
 $\dot{w}$  = velocidade de vibração transversal de um ponto fixo do disco;  
 $\tau$  = múltiplo comum do período de oscilação da força e do período natural do modo de vibração.

Se considerarmos o disco em rotação com velocidade constante  $\Omega$  temos a seguinte relação:

$$\theta = \alpha + \Omega t \quad (3.51)$$

com:

$$\dot{\Omega} = 0$$

Assim o trabalho médio da força oscilante estacionária sobre a vibração fixa no disco fica:

$$\bar{W} = \frac{\omega_n F_0 A_0}{4} \int_0^T \cos[(\omega_0 + \omega_n + D\Omega)t] + \cos[(\omega_0 + \omega_n - D\Omega)t] + \cos[(\omega_0 - \omega_n + D\Omega)t] + \cos[(\omega_0 - \omega_n - D\Omega)t] dt \quad (3.52)$$

Verifica-se facilmente que o trabalho médio é nulo a menos que o argumento de uma das parcelas do integrando se anule. Assim temos quatro condições nas quais o modo de vibração absorve energia da força estacionária, que são:

$$\omega_n = |\pm\omega_0 \pm D\Omega| \quad (3.53)$$

Se considerarmos que a frequência de oscilação da força estacionária é harmônica com a velocidade de rotação, obtemos:

$$H_n = |\pm k \pm D| \quad (3.54)$$

com:

$$\omega_0 = k\Omega$$

Para uma excitação estacionária constante devemos adotar  $k = 0$  e obteremos as velocidades de rotação críticas de disco. Neste caso o trabalho médio da força constante sobre o modo de vibração fica:

$$\bar{W} = 2\pi D F_0 A_0 \quad (3.55)$$

Para uma excitação provocada pela passagem de  $B$  pás por uma descontinuidade da voluta, devemos considerar  $k = B$ , e obteremos a condição de ressonância pela passagem das pás.

Neste caso o trabalho médio da força oscilante sobre o modo de vibração fica:

$$\bar{W} = \pi |\pm B \pm D| F_0 A_0 \quad (3.56)$$

onde: B = número de pás do impelidor;

D = número de diâmetros nodais do modo de vibração fixo no disco.

### 3.7.3. Influência da forma espacial do pulso de pressão no trabalho exercido sobre o modo de vibração

Até o momento consideramos o impulso de pressão de comprimento angular infinitesimal. Estudemos então a influência da forma espacial do pulso de pressão sobre o trabalho que exerce sobre o modo de vibração.

Se tivermos a força estacionária agindo sobre o disco tal que:

$$F(\alpha, t) = \int_0^{2\pi} f(\alpha) \cos(\omega_0 t) d\alpha \quad (3.57)$$

onde  $f(\alpha)$  é a força por unidade de comprimento.

O trabalho da força sobre um modo de vibração estacionário será:

$$\bar{W} = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 f(\alpha) \cos(\omega_0 t) \cdot \dot{w}(\theta) dt \right) d\alpha \quad (3.58)$$

Logo o trabalho médio de uma força harmônica da velocidade de rotação em uma condição crítica será:

$$\bar{W} = |\pm k \pm D| \Omega A_0 \left( \int_0^{2\pi} f(\alpha) \cos(D\alpha) d\alpha - \int_0^{2\pi} f(\alpha) \sin(D\alpha) d\alpha \right) \quad (3.59)$$

onde:  $k$  = ordem do harmônico da frequência de oscilação da força;  
 $D$  = número de diâmetros nodais do modo de vibração crítico;  
 $\Omega$  = velocidade angular de rotação do disco;  
 $A_0$  = amplitude da onda fixa no disco;  
 $f(\alpha)$  = força por unidade de comprimento angular;  
 $\alpha$  = posição angular medida no referencial estacionário.

Em particular a primeira parcela se anula se  $f(\alpha)$  for ímpar e a segunda quando  $f(\alpha)$  for par.

Verifica-se também que o trabalho médio será máximo quando a porção monotônica da força agir sobre meio comprimento da onda.

No caso da força unipolar:

$$f(\alpha) \geq 0 \quad | \quad \forall \alpha \quad (3.60)$$

o trabalho será máximo se o comprimento do pulso for igual a meio comprimento da onda.

No caso de força bipolar:

$$\begin{cases} f(\alpha) \geq 0 & \text{para } -\alpha_0/2 \leq \alpha \leq 0 \\ f(\alpha) \leq 0 & \text{para } 0 < \alpha \leq \alpha_0/2 \end{cases} \quad (3.61)$$

o trabalho será máximo quando o comprimento do pulso bipolar  $\alpha_0$  for igual ao comprimento da onda.

Como a distribuição de pressão tende a ser monotônica num setor do impelidor temos que o modo de vibração com número

de diâmetros nodais  $D$  igual a metade do número de pás  $B$ , i.e.,

$$D = \frac{B}{2} \quad (3.62)$$

será o modo de vibração mais crítico.

### 3.8. Outros efeitos

Outros aspectos são relevantes na análise das condições de operação críticas dos impelidores. Os principais são apresentados sucintamente em seguida.

#### 3.8.1. Redução do Módulo de Elasticidade com a Temperatura

O aumento de temperatura provoca a redução do Módulo de Elasticidade do material (METALS HANDBOOK, 1983), conseqüentemente provoca a redução das frequências naturais do rotor em operação em temperaturas superiores à temperatura de ensaio. As frequências naturais do rotor medidas em temperatura ambiente  $f_n$  devem ser corrigidas para temperatura de operação pela seguinte relação:

$$f_n(T) = f_n(T_0) \cdot \sqrt{E(T)/E(T_0)} \quad (3.63)$$

onde  $T$  e  $T_0$  são respectivamente as temperaturas de operação e temperatura ambiente na medição e  $E$  o Módulo de Elasticidade do material nessas temperaturas.



### 3.8.2. Largura da Faixa de Amplificação nas Ressonâncias

Na ressonância, a amplitude de vibração de uma estrutura é amplificada de um fator  $Q$  em relação à deformação que esta estrutura teria se estivesse submetida ao mesmo esforço exercido de maneira estática. O fator de amplificação  $Q$  é igual a metade do inverso do fator de amortecimento. Para baixos amortecimentos esta amplificação é em geral intolerável. Desta forma deve-se evitar a sintonia ou proximidade da frequência de excitação com as frequências naturais, de maneira a limitar a amplificação do movimento vibratório. Isto significa que deve ser evitada a ocorrência de excitações em uma faixa em torno das frequências naturais especificada em função da máxima amplificação admissível, que para sistemas pouco amortecidos é dada pela seguinte fórmula:

$$A(r) = \frac{1}{1-r^2} < A_{adm} \quad (3.64)$$

onde  $A$  é a amplificação dinâmica,  $r$  a razão entre a frequência de excitação e a frequência natural e  $A_{adm}$  a máxima amplificação admissível. Assim sendo uma faixa de 10%, 15% e 20% de afastamento das frequências naturais limitaria a amplificação a 5, 3 e 2 vezes, respectivamente. Poderia-se pensar em fazer uma avaliação mais rigorosa da severidade de vibração admissível para o impelidor, ao contrário de somente se limitar uma faixa de frequência em

torno das ressonâncias. HENRY<sup>16</sup> coloca que uma análise completa da confiabilidade estrutural do impelidor implicaria na análise de resistência à fadiga, e.g., pelo Diagrama de Goodman. Entretanto, para que isso possa ser realizado é necessário um modelo muito preciso da estrutura e principalmente dos valores reais que a excitação de pressão irá apresentar. Em geral, uma análise deste porte não se justificaria durante o ciclo de projeto de ventiladores.

### 3.8.3. Outros efeitos

As incertezas de fabricação, a variação de amortecimento devido a forças aerodinâmicas e a variação das características do impelidor ao longo de sua vida, como desgaste, agregação de material e pequenas variações da rotação de operação, são de difícil determinação. Para dar conta destes efeitos pode-se considerar uma faixa de incerteza em torno das frequências consideradas perigosas. Finalmente deve-se ter sempre em mente que a vibração é somente um dos fenômenos que contribui para a ocorrência de falhas estruturais no impelidor. Simultaneamente agem outros esforços, e.g., as tensões estática devido à rotação. Além disso, diferentes problemas de fabricação e projeto podem contribuir para a redução da resistência do

---

<sup>16</sup> Op. cit.

impelidor. Assim, o limite de vibração tolerável, bem como as regiões do impelidor mais propensas à falhas não são determinadas unicamente pelo fenômeno vibratório.

#### 4. METODOLOGIA DE ENSAIO E ANÁLISE DE VIBRAÇÕES EM IMPELIDORES DE VENTILADORES CENTRÍFUGOS

O desenvolvimento de um novo modelo de impelidor de ventilador centrífugo exige que seja feito um estudo das características dinâmicas estruturais do projeto do impelidor. Devem ser verificadas as condições em que o ventilador irá operar para evitar que ocorram ressonâncias do impelidor devido às excitações aerodinâmicas decorrentes do funcionamento. Este estudo é uma etapa inerente do projeto de cada impelidor, e como todo processo de desenvolvimento de produto deve ficar limitado a custo e duração compatíveis.

A metodologia de ensaio e análise que é objeto deste trabalho, visa propor um procedimento de conduta para avaliação da compatibilidade dinâmica do impelidor com as condições de operação do ventilador. A metodologia ora proposta visa atender uma necessidade do desenvolvimento do produto, não se tratando de uma metodologia de pesquisa. A justificativa e validação do procedimento específico adotado para metodologia de ensaio e análise tem caráter pragmático. A razão de ser da metodologia não é *logus* metodológico, mas sim, *ratio* metodológico. Não se trata de comprovar a fundamentação científica da metodologia, mas sim, estabelecer a base do raciocínio que permita decidir e agir durante o processo de desenvolvimento do impelidor. Os fundamentos teóricos e argumentativos apresentados no capítulo anterior, não tiveram como objetivo validar

cientificamente a metodologia, mas sim estabelecer a base lógica de raciocínio empregado na metodologia e definir as hipóteses e pressupostos nas quais ela se baseia.

Definir a metodologia de ensaio e análise, ou seja, o procedimento de conduta, significa em primeiro lugar definir a seqüência de ações para realização do ensaio, i.e., do processo experimental de medição e de determinação das características dinâmicas do impelidor. Em segundo lugar, significa definir o procedimento de análise dos resultados, i.e., processo de organização e redução dos dados de ensaio que dê subsídios para decidir sobre a adequação do projeto do impelidor.

O procedimento proposto para a metodologia baseou-se na experiência prévia acumulada do Laboratório de Ensaaios Dinâmicos e Vibrações do IPT na condução destes ensaios. A motivação para realizar o presente trabalho de pesquisa surgiu da necessidade de definir um procedimento que permitisse a realização do ensaio e análise da dinâmica do impelidor com qualidade, prazo e custo compatíveis com o produto e necessidade da indústria. Também procurou-se definir a base científica que orientasse e justificasse a série de decisões que vinham sendo tomadas pela equipe de IPT e/ou apresentadas nos diversos trabalhos publicados. Definir a base não significa necessariamente demonstrar a validade teórica e científica do procedimento, mas delimitar o conjunto de hipóteses e argumentações imanentes na metodologia.

A metodologia proposta segue em linhas gerais os procedimentos recomendados na norma ANSI/ASHREA 97.1 - 1992 'Method of testing fan vibration - Blade vibrations and critical speeds', que trata da determinação das características dinâmicas de pequenos ventiladores axiais. A norma estabelece o procedimento de medição das propriedades modais do propulsor, determina como deve ser considerado o efeito de enrijecimento centrífugo e define as condições críticas de operação para propulsores axiais. Como resultado do ensaio, a norma determina que se apresente uma tabela contendo os seguintes dados: resumo das principais características físicas e de operação do propulsor ensaiado; as propriedades modais medidas, i.e., frequências naturais, tipo de modo de vibração das pás e número de diâmetros nodais; e as principais velocidades críticas do propulsor. O procedimento adotado para a determinação das características dinâmicas do propulsor em operação é híbrido, i.e., determina-se experimentalmente as propriedades modais do propulsor estacionário em condições padronizadas de ensaio; posteriormente considera-se o efeito da rotação através da Fórmula de Southwell adotando-se o Coeficiente de Southwell calculado pelo método dos elementos finitos. Na norma não é esclarecido qual o procedimento a ser adotado na modelagem por elementos finitos. As condições críticas de operação, i.e., as ordens dos harmônicos da velocidade de rotação onde pode ocorrer ressonância do propulsor, são especificadas para cada tipo de modo de vibração.



A norma especifica como críticas as ordens dos harmônicos da velocidade de rotação dadas pela seguinte expressão:

$$H = kB \pm D \quad (4.1)$$

onde:  $k$  = número inteiro ( $k = 1, 2, 3, \dots$ );  
 $B$  = número de pás do propulsor; e  
 $D$  = número de diâmetros nodais ( $D = 0, 1, 2, \dots B/2$ ).

Os valores apropriados para cada caso são apresentados nas tabelas elaboradas para propulsores com uma a seis pás, onde foi considerado o valor de  $k = 1$ .

Em uma nota comenta que o valor mais importante do inteiro  $k$  para os propulsores de ventiladores típicos de sistemas de ar-condicionado seria  $k = 1$ . Comenta também que o valor de  $k = 0$  seria importante para ventiladores grandes com mais de seis pás.

A formula 4.1 corresponde a expressão (3.?) que representa as excitações estacionárias que oscilam na frequência de múltiplos inteiros da velocidade de rotação deslocados em frequência devido ao efeito de rotação. Os harmônicos calculados com  $k = 1$  correspondem à excitação pela passagem das pás. Os harmônicos calculados com  $k = 0$  correspondem às velocidades críticas de disco.

O objetivo do presente trabalho é pois estabelecer um procedimento análogo para impelidores de ventiladores centrífugos de grande porte.

#### 4.1. Linhas Gerais da Metodologia de Ensaio e Análise

A metodologia de ensaio e análise de vibrações em impelidores de ventiladores centrífugos proposta é composta das seguintes etapas:

- a) análise modal experimental do impelidor estacionário;
- b) estimação do Coeficiente de Southwell;
- c) avaliação de outros fatores que afetam as características dinâmicas dos impelidores;
- d) determinação das condições críticas de operação;
- e) avaliação qualitativa da severidade das condições críticas;
- f) se necessário, estudo de possíveis modificações de projeto e reanálise.

Na seções seguintes são descritas cada uma destas etapas.

#### 4.2. Análise Modal Experimental do impelidor estacionário

O objetivo deste ensaio é determinar experimentalmente as características dinâmicas (modais) do impelidor, i.e., frequências naturais, formas dos modos de vibração, amortecimentos modais e massas generalizadas. Os dois últimos parâmetros não são normalmente estimados. É esperado que o amortecimento estrutural em operação seja mais elevado do que o obtido neste ensaio, devido principalmente à interação com o fluido. Portanto, a medida do amortecimento é apenas utilizada para uma avaliação

superficial conservativa da ordem de grandeza das ampliações esperadas. As massas generalizadas não são utilizadas, primeiramente porque são somente necessárias em uma análise mais refinada e precisa da dinâmica estrutural, e principalmente porque requerem procedimentos experimentais acuradíssimos e instrumentação sofisticada para obter-se estimativas apenas razoáveis destas grandezas. A mesma dificuldade, em menor grau, é encontrada na determinação precisa do amortecimento (NIEDBAL & KLUSOWSKI, 1989).

A norma ISO 7626 'Experimental determination of mechanical mobility' trata dos procedimentos de medição e determinação da mobilidade mecânica, i.e, da função de resposta em frequência dada pelo quociente da velocidade de vibração pela força de excitação em função da frequência. A parte 1 desta norma discute as definições básica e os requerimentos para a instrumentação. A parte 2, de 1990, cobre a medição da mobilidade através de mono-excitação à translação com excitadores de vibração fixos. A parte 5 aborda os procedimentos de medição da mobilidade com excitação por impacto. As demais partes ainda não estão disponíveis.

#### **4.2.1. Montagem Experimental e Instrumentação**

Nos ensaios de análise modal experimental, o impelidor, montado no seu eixo, deve ser apoiado sobre dois pedestais com roletes que permitam sua rotação, ou em suporte

flexível semelhante. Na montagem real de operação, a grande massa do cubo e do eixo do ventilador, associada à baixa rigidez dos mancais, bem como o equilíbrio interno dos esforços dos modos de vibração de interesse, faz com que a dinâmica de vibração do impelidor esteja desacoplada da dinâmica do resto do ventilador, i.e., eixo, mancais e pedestais. Deve-se adotar uma montagem experimental na qual este desacoplamento também ocorra. Em geral esta exigência não é difícil de ser satisfeita, nem exige a construção de suportes especiais. A grande massa do rotor e a rigidez elevada do cubo filtram praticamente toda vibração do impelidor, e as frequências naturais do conjunto estão geralmente bem abaixo da faixa de ensaio.

Nos ensaios, os diversos componentes do ventilador, como tampa, disco e pás, devem ser numerados e identificados. Também é conveniente que se adote um sistema de coordenadas global que organize e facilite a realização das medições. Principalmente a direção e sentido de medição deve referir-se sempre ao sistema global, evitando-se realizar medições fora dessa convenção. Dada a complexidade da medição, freqüentemente ocorrem dúvidas e equívocos sobre os dados medidos.

Os ensaios são executados à temperatura ambiente com o rotor em repouso, i.e., estacionário.

#### 4.2.2. Métodos de Ensaio de Análise Modal Experimental

Basicamente pode-se dividir os procedimentos mais comuns de ensaio para determinação das características dinâmicas do impelidor em duas categorias, a saber, ensaio de ressonância pela fase e análise modal por separação numérica de modos (normalmente, métodos de ajuste de curvas das Funções de Resposta em Freqüência). As linhas gerais desses procedimentos são apresentadas à seguir nesta seção. Todavia, qualquer que seja o método de ensaio adotado convém iniciar os trabalhos com algum conhecimento prévio do comportamento dinâmico dos impelidores. Isto é necessário para poder projetar o ensaio adequado, i.e., tipo e número de excitadores e transdutores; posição e direção de excitação e de medição de resposta; faixa e resolução de freqüência; faixa dinâmica dos sinais, etc. Na realidade, para especificar o procedimento de ensaio para realizar uma boa identificação da dinâmica do impelidor, seria necessário ter o conhecimento à priori das propriedades modais e dinâmicas do sistema. Isto faz com que o procedimento de ensaio seja de alguma maneira iterativo. Infelizmente, nos casos práticos, nem sempre se dispõe de muito tempo para realização e repetição de ensaios, pois reter o espécime para ensaio, significa sempre retardar o fluxo de produção do impelidor. Frequentemente, os resultados do ensaio podem determinar a necessidade de realizar-se modificações de projeto, o que retarda ainda mais a produção.

Desta maneira devem ser procuradas outras fontes de informações para conhecimento prévio das características dinâmicas do impelidor, para que seja possível projetar corretamente o experimento.

O meio mais simples e confiável de obter estas informações é através dos resultados de ensaios anteriores com impelidores semelhantes. Isto deve ser sempre procurado quando se dispõe dessas informações. A discussão e troca de idéias com a equipe de projeto do impelidor e/ou usuários de ventiladores semelhantes também deve ser incentivada. Em particular, nos casos onde se busca identificar as causas de alguma falha estrutural ocorrida anteriormente com o impelidor em estudo, é indispensável que seja feita uma análise e avaliação prévia do histórico de operação e ocorrência da falha. Isto é necessário para que se possa projetar o ensaio de forma a focalizar a atenção nos aspectos que melhor forneçam indícios das razões da ocorrência da falha. Deve-se ter sempre em mente que a dinâmica dos impelidores é por demais complexa. Se não forem tomadas medidas para direcionar o ensaio com um objetivo bem delimitado, corre-se o risco de estender por demais a análise ou executar um ensaio que não revele as características importantes para o fato em questão. De uma maneira geral, o dispêndio de tempo para ensaio e análise cresce em função da faixa e resolução em frequência de interesse, do número e complexidade dos modos de vibração nesta faixa. Qualquer informação que possa orientar uma



definição mais exata destes parâmetros deve ser estudada e aproveitada.

Antes de iniciar os ensaios é de suma importância que se tenha um bom entendimento do provável comportamento dinâmico do impelidor, caso não se disponha de resultados anteriores. Contribui para isso, o conhecimento das teorias e argumentos relacionados ao problema, delineadas no capítulo 3, bem como o estudo de sistemas simples com comportamento semelhante, e.g., dinâmica de disco uniformes e com certas imperfeições (VOGEL & SKINNER, 1965; LEISSA, 1969; GUPTA E PASSERELLO, 1982; KHURASIA & OLUNLOYO, 1985; YAMADA & IRIE, 1987).

Uma maneira eficaz de se iniciar o estudo, seria começar com a modelagem numérica da dinâmica do impelidor, para adquirir alguma experiência com seu comportamento dinâmico. A localização espectral das frequências naturais e o estudo das formas dos modos de vibração facilitam o entendimento do problema. Em particular deve-se procurar captar a essência do movimento vibratório de cada modo. Com isso pode-se classificar e ordenar os modos, o que facilitará em muito a realização do ensaio.

Quando não se dispuser de informações prévias ou tempo para realizar um estudo detalhado anterior ao ensaio, o que é muito comum na prática, deve-se iniciar o experimento com um pré-teste ou ensaio preliminar. Neste ensaio devem ser privilegiados procedimentos simplificados e rápidos.

Para projetar o ensaio de análise modal são necessárias as seguintes informações:

- descrição precisa do objetivo do ensaio;
- descrição das características dimensionais e de operação básicas do impelidor, i.e., dimensões principais, massa total e das partes principais, bem como do eixo-árvore de montagem e de ensaio; desenho de conjunto do impelidor e de montagem no ventilador; velocidade de rotação de operação; demais condições de operação e montagem relevantes (temperatura de operação, tipo de fluido, etc);
- histórico e descrição da falha estrutural, quando for o caso;
- faixa e resolução em frequência de interesse;
- número, distribuição e densidade espectral das frequências naturais;
- entendimento das partes do impelidor que participam mais destacadamente da dinâmica dos modos de vibração de interesse, em particular, se existem componentes com comportamento localizado;
- estimação da impedância mecânica da estrutura para adequação do equipamento de excitação;
- e finalmente, o tempo disponível para o ensaio, e se existe a disponibilidade para reanálise posterior.

Algumas informações sobre as características dos ventiladores são apresentados no item 3.2 do capítulo 3.

Em seguida são descritas algumas técnicas de ensaio para determinação das características dinâmicas dos impelidores.

#### 4.2.3. Pesquisa Preliminar de Ressonâncias

A pesquisa das frequências naturais do impelidor é realizada em primeiro lugar. Trata-se de uma medida mais simples e que normalmente é realizada com menor precisão que as posteriores. O objetivo desta medida é conhecer o comportamento da estrutura, identificar as principais frequências naturais, a densidade espectral e faixa de frequências em que estas ocorrem. Além disso, procura-se identificar os modos que são excitáveis quando se atua nos diversos componentes do impelidor, e localizar locais favoráveis para excitação do maior número de modos de vibração. Estes dados são utilizados para ajustar os ensaios mais precisos que são realizados a posteriori, bem como adequar a montagem e o procedimento experimental.

Deve-se sempre dar preferência à medição da função de resposta em frequência - FRF, em detrimento da medição somente da resposta.

As frequências naturais podem ser identificadas pelos picos de ressonância das FRFs entre alguns pontos de excitação e resposta do impelidor. A localização dos picos da parte imaginária e a frequência onde ocorre a variação de fase das FRFs são estimadores mais precisos das frequências naturais (NATKE, 1988), que devem ser preferidos quando for possível realizar tais medidas.

Neste ensaio, o impelidor pode ser excitado com impacto, varredura senoidal ou ruído aleatório. O primeiro tipo de excitação pode ser executado com um martelo instrumentado

com transdutor de força. Os demais necessitam da utilização de um excitador, em geral eletrodinâmico, também instrumentado para medição da força. A excitação com ruído é em geral mais prática, por permitir um melhor controle da vibração, tanto em amplitude como na faixa de frequência, e pode ser executada com maior facilidade e rapidez que a varredura senoidal. O sinal de resposta pode ser medido através de qualquer transdutor de vibração, por exemplo, acelerômetro piezométrico. As grandes massas das áreas vibrantes dos impelidores de porte não requerem cuidados especiais na escolha dos transdutores. A faixa de frequência do ensaio também é relativamente baixa, não passando de algumas centenas de Hertz, o que também não requer cuidados especiais na fixação dos transdutores.

Tanto a excitação, como a medida da resposta devem ser repetidas para diversos pares de pontos dos principais componentes do impelidor. Isto deve ser feito para assegurar-se que todos os principais modos de vibração sejam observados. No mínimo um ponto da periferia da tampa, um da periferia do disco e um no extremo de uma pá devem ser utilizados. Os sinais de força e aceleração devem ser filtrados analogicamente e então analisados em analisador de espectro, preferencialmente digital, que empregue a FFT - Transformada Rápida de Fourier (BRIGHAM - 1974). Como as medidas são realizadas próximas das ressonâncias, onde os sinais são mais vulneráveis aos ruídos de medição da força de excitação, é recomendado utilizar o estimador  $H_2$  para determinação das FRFs (EWINS, 1984). A qualidade da

estimação das FRFs pode ser monitorada através da Função de Coerência, que para sistemas lineares apresenta o valor próximo de 1 quando os sinais de excitação e resposta tem alta relação causal e baixo ruído. Convém fazer registro das Funções de Resposta em Freqüência e das Funções de Coerência para análise posterior e auxílio nos demais ensaios.

#### 4.2.4. Ensaio de Ressonância pela Fase

Para identificação precisa dos modos de vibração críticos e das respectivas frequências naturais, o impelidor deve ser submetido ao Ensaio de Ressonância pela Fase (NIEDBAL, 1982). Neste ensaio, o impelidor é submetido à excitação senoidal, sintonizada nas frequências naturais de interesse e apropriada para seleção de cada modo. Preferencialmente as frequências naturais devem ser identificadas pelo critério de fase, devendo ser considerada a resposta de diversos pontos simultaneamente. Um modo de vibração real é isolado quando a vibração de resposta de todos os pontos da estrutura estão em quadratura com as forças de excitações, i.e., os sinais estão a  $90^\circ$  de fase um em relação ao outro. Teoricamente, nesta condição, as forças de excitação cancelam as forças de amortecimento da estrutura, fazendo com que a estrutura vibre em um dos modos de vibração não-amortecido (real) (NATKE, 1988). Teoricamente, para uma estrutura com amortecimento distribuído, são necessários infinitos excitadores para sintonizar tal condição, mas na prática um a três excitadores são suficientes para isolar os modos de vibração mais importantes. Quando for possível utilizar um grande número de medições simultâneas da vibração em diversos pontos, pode-se empregar a *Função de Indicação*, também chamada de *Critério de Fase da Ressonância*, para identificação precisa dos modos (BREITBACH, 1988). A incerteza nas frequências naturais estimadas é limitada pela resolução do gerador de sinais,



que deve ser bem preciso e estável devido ao baixíssimo amortecimento da estrutura (fator de amortecimento viscoso abaixo de 1%). Na impossibilidade de se medir a fase entre os sinais, pode-se estimar as frequências naturais pelos máximos da parte imaginária ou do módulo da Função de Resposta em Frequência. O primeiro destes estimadores é mais preciso (NATKE, 1988).

O modo de vibração pode ser obtido diretamente, medindo-se a vibração de resposta em diversos pontos da estrutura quando a excitação se mantém constante e controlada na condição de ressonância em que o modo de vibração foi isolado. Na prática, são necessários sistemas de aquisição de sinais com múltiplos canais (em geral de 64 a 500 canais são requeridos) para realizar tal medição diretamente, pois a interferência provocada pela mudança de posição de transdutores dessintoniza o modo. Uma variante tradicionalmente utilizada, também recomendada na ANSI/ASHRAE 87.1 - 1992, consiste em comparar-se a fase do sinal de vibração de um transdutor, com o qual se varre a superfície do impelidor, com a fase do sinal de um transdutor de referência, montado fixo a um ponto junto da excitação. Toda inversão de fase do sinal ao longo de uma certa região, indica a existência de uma linha nodal neste local. Eventualmente não ocorre a mudança clara da fase por sobre uma curva de amplitude de resposta nula. Em alguns modos ocorrem regiões com amplitude finita e diferença de fase ao redor de  $90^\circ$ , que indicam precariedade do isolamento do modo de vibração.

Como resultado deste ensaio, obtém-se, no caso do sistema mais sofisticado de ensaio, a identificação completa das formas dos modos de vibração e das frequências naturais não amortecidas. No caso do sistema de ensaio mais simples, obtém-se a localização precisa das linhas nodais em cada modo de vibração e as respectivas frequências naturais do impelidor.

#### **4.2.5. Ensaio de Separação Numérica dos Modos**

Esta categoria de ensaios é conhecida na literatura germânica como 'Phasentrennungsverfahren', que significa 'processos de separação de fase' (NATKE, 1988). Englobam-se nesta categoria todos os processos de análise modal experimental onde a separação dos modos de vibração, e conseqüente estimação dos parâmetros modais, é feita através de processamento numérico de sinais de vibração medidos em ensaios. Existe uma vastíssima bibliografia onde são apresentados inúmeros desses processos, tanto no domínio de tempo, como no domínio da frequência. Como resultado desses processos determinam-se as frequências naturais (amortecidas), os modos de vibração (complexos), os amortecimentos (modais) e as massas generalizadas.

Alguns dos métodos mais populares, baseiam-se na análise por ajuste de curvas das Funções de Resposta em Frequência obtidas via FFT (EWINS, 1984). Existem no mercado programas de análise modal experimental para microcomputadores

associados a diversos analisadores de espectro (STAR, 1990 e PCMODAL, 1990).

Nos métodos de separação numérica de modos a estrutura é discretizada em pontos de medição e excitação. São medidos os sinais de vibração de resposta à excitação controlada, bem como o sinal da força de excitação. Pode-se utilizar diferentes tipos de excitação: impacto, varredura senoidal lentas e rápidas, ruído aleatório, pseudo aleatório, ruído periódico, 'bursts', etc. A estrutura pode ser excitada com apenas um ou muitos excitadores simultaneamente. A medição de resposta também pode ser feita por um canal ou por múltiplos canais simultaneamente.

Os processos de ajuste de curvas são divididos basicamente em duas etapas, quais sejam, estimação não paramétrica e estimação paramétrica (NATKE, 1988). Na primeira, são estimadas as funções de resposta em frequência através de técnicas de processamento digital de sinais. Em seguida são extraídos os parâmetros modais através de processos de ajuste de curvas.

Uma descrição exata do procedimento de ensaio depende do tipo específico de metodologia e instrumentação de que se dispõem. Em geral não se dispõe de um critério objetivo, como a *Função Indicadora* do método de ressonância, sendo gasto muito tempo de análise na validação dos resultados.

Um método de separação numérica pode ser utilizado em substituição ao método de ressonância, dependendo da disponibilidade que se tenha de equipamentos, e da qualidade dos resultados pretendida. No caso de não se

dispor de sistemas de múltiplos canais para medição dos modos pelo método de ressonância, pode-se utilizar este método como alternativa para determinação de um modelo matemático utilizando-se um sistema de medição de dois canais apenas. Entretanto, a complexidade dos modos de vibração dos impelidores e a alta densidade espectral obrigam que se utilize uma malha de medição muito refinada e alta resolução em frequência. Desta forma, a identificação completa de todas características modais com sistema de apenas dois canais torna-se por demais demorada. O ideal neste caso é utilizar este método para obter resultados bem específicos, complementares aos obtidos no método de ressonância, e.g., identificação de frequências naturais e amortecimentos em um aglutinado de frequências específico ou levantamento de parte de um modo de vibração em uma região limitada do impelidor. No caso de se ter obtido as formas dos modos de vibração apenas pela localização das linhas nodais no processo anterior, é recomendado que se façam algumas medidas para determinar-se as amplitudes relativas em alguns pontos do impelidor.

#### 4.3. Estimação das Condições Críticas

O efeito das forças de inércia resultantes do movimento de rotação deve ser determinado através da relação de SOUTHWELL (1921):

$$f_n = \sqrt{(f_n|_0)^2 + S \cdot (n/60)^2} \quad (4.2)$$

onde  $f_n$  é a frequência natural do rotor em rotação,  $f_{n0}$  a frequência natural do rotor em repouso,  $n$  a velocidade de rotação do rotor em rpm e  $S$  o Coeficiente de Southwell.

Não se encontra na bibliografia referências sobre os valores do Coeficiente de Southwell dos modos de vibração de impelidores centrífugos. Como primeira aproximação pode-se empregar os valores desse coeficiente para os modos de vibração de discos. SOUTHWELL (1921) obteve os valores reapresentados na tabela 4.1.

**TABELA 4.1: COEFICIENTES DE SOUTHWELL PARA DISCO HOMOGÊNEO UNIFORME COM BORDA LIVRE E CENTRO ENGASTADO**

Circ.\Diam	D0	D1	D2	D3
C0	0	1	2,35	4,05
C1	3,3	5,95	8,95	12,3
C2	9,9	14,2	18,85	23,85
C3	19,81	25,75	32,05	38,7

Para obtenção dos Coeficientes para um impelidor específico, pode-se proceder como recomendado na norma ANSI\ASHRAE 87.1 - 1992. Esta norma recomenda que os valores dos coeficientes sejam obtidos pelo método dos elementos finitos. Deve-se determinar as frequências naturais do impelidor em repouso e posteriormente em uma velocidade de rotação não muito elevada. Substituindo-se estes valores na formula 4.2, pode-se extrair os valores do coeficiente de Southwell. É previsto no desenvolvimento desta pesquisa a determinação do valor do coeficiente para uma caso de análise. Em todo caso, seria recomendável que



se dispusesse de alguns valores de referência para os principais modos de geometrias típicas.

A modelagem dos elementos finitos deve simular o efeito de enrijecimento centrífugo através da adição da matriz de rigidez geométrica à matriz de rigidez.

Os valores dos Coeficientes de Southwell assim obtidos são utilizados para corrigir as frequências naturais para a rotação de operação.

Em primeira análise são consideradas as seguintes condições críticas nas quais excitações aerodinâmicas podem provocar a ressonância do impelidor em operação:

- velocidade de rotação crítica;
- excitação pela passagem de pás.

Esta afirmação se baseia em dois fatos. Em primeiro lugar, são vários os relatos de casos de falhas em impelidores de ventiladores que decorreram especificamente quando o ventilador operava numa destas condições (CAMPBELL, 1924). Em segundo lugar, as suposições apresentadas no capítulo 3 sobre a forma e distribuição das pressões no ventilador, levam a crer que sempre existem excitações dessa natureza e que a operação nestas duas condições leve à ressonância do impelidor.

Estas condições podem ser avaliadas pelas expressões correspondentes discutidas no capítulo 3 e são resumidas a seguir na forma apresentada na norma ANSI/ASHREA 87.1 - 1992:

$$H = |\pm(kB \pm D)| = H_n \quad \left| \quad H_n = \frac{f_n}{n/60} \right. \quad (4.3)$$



onde:  $H$  = a ordem do harmônico crítico onde pode ocorrer ressonância do impelidor (adimensional);

$H_n$  = frequência natural adimensional do  $n$ ésimo modo de vibração;

$B$  = número de pás do impelidor;

$D$  = número de diâmetros nodais do  $n$ ésimo modo de vibração

$k$  = número inteiro que vale 0 ou 1 para velocidade de rotação crítica e para a excitação pela passagem de pás, respectivamente.

Podemos associar esta expressão à Fórmula de Southwell, equação 4.2, e obter diretamente as velocidades críticas

$n_{cr}$ :

$$n_{cr} = 60 f_n |_0 / \sqrt{H^2 - S} \quad (4.4)$$

onde:  $f_n$  = frequência natural obtida no ensaio do impelidor estacionário em Hz;

$H$  = ordem do harmônico crítico dado em 4.3;

$S$  = Coeficiente de Southwell correspondente a este modo de vibração.

Podemos também inverter a fórmula anterior para saber quais as frequências que correspondem às condições críticas:

$$f_{cr} = \frac{n}{60} \sqrt{(H^2 - S)} \quad (4.5)$$

onde:  $f_{cr}$  = frequência crítica onde pode ocorrer ressonância do impelidor em Hz;

- n** = velocidade de rotação de operação em rpm;  
**H** = ordem do harmônico crítica dado em 4.3  
(adimensional);  
**s** = Coeficiente de Southwell (adimensional).

A coincidência ou proximidade de condições críticas pode ser melhor avaliada nos Diagrama de Campbell e no Diagrama  $H \times D$ .

#### 4.4. Avaliação da Severidade das Condições Críticas

Caso a avaliação do perigo de ocorrência de ressonâncias em operação seja feito baseando-se apenas na ocorrência de uma condição crítica apresentada no item anterior, verificar-se-á que existem inúmeras possibilidades de ressonância. Desta forma é necessário avaliar a severidade com que cada ressonância pode ser excitada. TOBIAS e ARNOLD (1957) apresentam as expressões da resposta forçada de discos quasi-axissimétricos quando excitados por uma força concentrada estacionária no referencial absoluto e oscilante no tempo. Entretanto, nos casos reais nem a intensidade e forma das perturbações aerodinâmicas, nem o modelo dinâmico completo e exato do impelidor são conhecidos. Não se pode avaliar quantitativamente a severidade da vibração que deve ser esperada em operação. Principalmente o amortecimento medido em condições diferentes da situação de funcionamento não pode ser considerado correto para avaliar a amplificação da resposta

dinâmica. Para isso, deve-se estudar a apropriação do campo de pressão para excitar determinado modo de vibração.

Assim resta analisar qualitativamente a possibilidade das ressonâncias serem efetivamente excitadas. Para isso utilizaremos a argumentação discutida no capítulo 3. Devemos estudar a potencialidade dos diversos modos de vibração absorverem energia de uma provável perturbação de pressão estacionária. Infelizmente, não se dispõe de dados concretos sobre a distribuição espacial e o comportamento no tempo dessas perturbações no campo de pressões. Assim resta trabalhar qualitativamente com as suposições argumentativas apresentadas no capítulo 3. Embora os resultados dessa metodologia não forneçam a evidência da ocorrência de uma condição intolerável, ela fornece indícios de condições previsivelmente perigosas. Para avaliação definitiva do risco de operar em determinada condição, ou no levantamento das causas de falhas atribuídas a problemas de vibração, devem ser consideradas simultaneamente outros recursos de avaliação e análise.

Seria desejável que fossem realizadas mais medições e pesquisas sobre as condições reais de operação dos ventiladores, principalmente no que diz respeito às características das perturbações aerodinâmicas. Atualmente já se dispõe de recursos instrumentais e de análise que tornam tecnicamente viável tal empreendimento.

## 5. ENSAIO DE DISCO UNIFORME ENGASTADO NO CENTRO

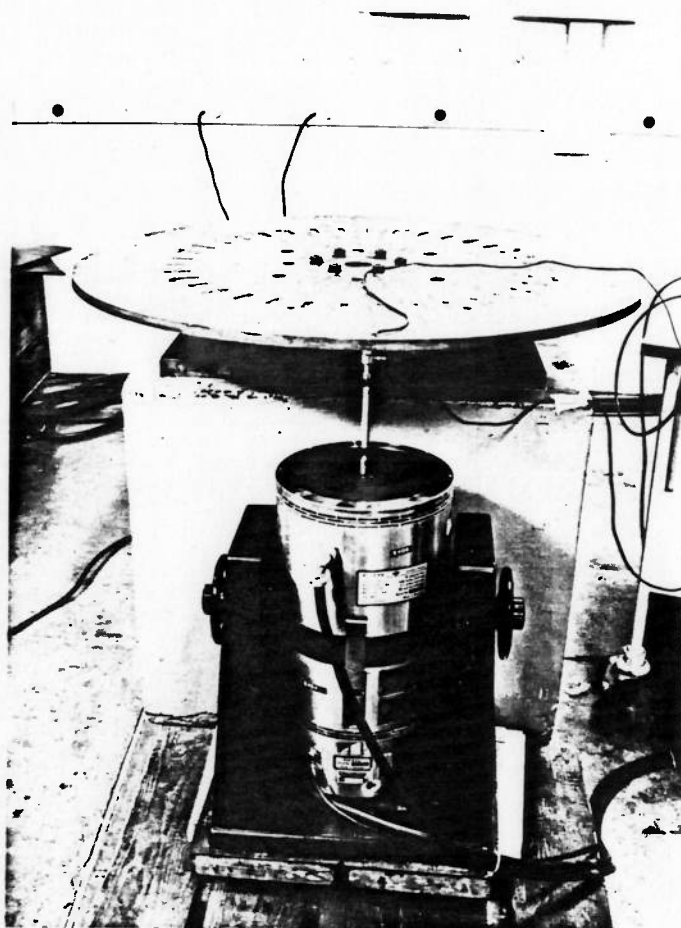
Com o propósito de avaliar o procedimento de ensaio proposto, estudou-se um sistema estrutural de dinâmica simples. Escolheu-se para isso, o estudo da dinâmica de um disco uniforme engastado em um diâmetro central, pois esse problema apresenta características estruturais semelhantes aos impelidores centrífugos.

Neste estudo foi elaborado inicialmente a modelagem do disco pelo método dos elementos finitos, analisando a condição estacionária e em rotação. Em seguida foi realizado o ensaio de análise modal minucioso de um modelo real mostrado na figura 5.1. Também pudemos comparar os resultados obtidos com os resultados analíticos publicados na bibliografia.

O disco real ensaiado tem as características física apresentada na tabela seguinte:

**TABELA 5.1: CARACTERÍSTICAS FÍSICAS DO DISCO AXISSIMÉTRICO ENSAIADO**

Grandeza	Símbolo	Valor
massa total	m	85 Kg
momento de inércia diametral (calculado)	$I_r$	4,8 Kg m <sup>2</sup>
momento de inércia polar (calculado)	$I_p$	9,6 Kg m <sup>2</sup>
raio externo	a	470 mm
raio interno	b	85 mm
espessura	2h	16 mm
densidade	$\rho$	7800 Kg/m <sup>3</sup>
massa por unidade de área	$\gamma$	124,8 Kg/m <sup>2</sup>
módulo de Young	E	2,07 10 <sup>11</sup> Pa
coeficiente de Poisson	$\nu$	0,3



**FIGURA 5.1:** Foto do disco axissimétrico real ensaiado

### 5.1 Resultados analíticos da dinâmica de um disco axissimétrico engastado no centro

VOGEL e SKINNER (1965) e LEISSA (1969) apresentam a solução analítica de dinâmica vibratória de uma placa circular uniforme engastada em um diâmetro central. Neste cálculo não é considerada a inércia à rotação das secções transversais da placa, nem o efeito da força de cisalhamento.

Segundo VOGEL e SKINNER, a solução geral da deflexão de vibração transversal  $W$  de um disco axissimétrico engastado no centro é dada por:

$$w = W(r) \text{sen}(\theta - \theta_0) \text{sen}(\omega_n t + \varphi_0) \quad (5.1)$$

onde  $W(r)$  é a forma do modo de vibração ao longo do raio dada por:

$$W = C_1 J_n(\beta r) + C_2 Y_n(\beta r) + C_3 I_n(\beta r) + C_4 K_n(\beta r) \quad (5.2)$$

onde  $J_n$  e  $Y_n$  são as funções de Bessel e  $I_n$  e  $K_n$  são as funções modificadas de Bessel. O parâmetro  $\beta$  é dado por:

$$\beta^4 = 3(1 - \nu^2) \frac{\gamma \omega_n^2}{E h^3} \quad (5.3)$$

- onde:
- $\gamma$  = densidade do material em  $\text{Kg/m}^3$ ;
  - $\nu$  = coeficiente de Poisson;
  - $\omega_n$  = frequência natural de vibração em  $\text{rad/s}$ ;
  - $E$  = módulo de Young do material em Pa;
  - $h$  = meia espessura da placa do disco em m.



Devemos aplicar as condições de contorno à equação do movimento, que no caso do disco com raio externo  $a$  livre e raio interno  $b$  engastado são:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1-\nu}{r^2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \right) = 0 \quad (5.5)$$

para o diâmetro externo livre e:

$$w = 0 \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad (5.7)$$

para o diâmetro interno engastado.

A aplicação dessas condições de contorno na equação do movimento fornece a equação característica do sistema, cuja solução para o caso em estudo é apresentada na tabela 5.2 reproduzida de VOGEL e SKINNER. Na publicação citada, também é apresentado o gráfico das frequências naturais em função do razão entre os raios externos e o raio do engastamento.

A frequência natural adimensional é dada pela seguinte expressão:

$$\lambda = \omega_n \sqrt{\frac{\gamma a^4}{E h^2}} \quad (5.8)$$

As dimensões do disco real ensaiado não correspondiam a nenhum valor apresentado na tabela. Os valores das frequências naturais foram interpolados pelo gráfico

apresentado na citação. As freqüência naturais calculadas para o disco real são apresentadas na tabela à seguir.

**TABELA 5.2: FREQUÊNCIAS NATURAIS ADIMENSIONAIS DE UM DISCO AXISSIMÉTRICO COM A BORDA EXTERNA LIVRE E ENGASTADO EM UM DIÂMETRO CENTRAL**

N° de Circunfer. Nodais C	N° de Diâmetros Nodais d	b/a				
		0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
0	1	1,90	3,83	8,04	22,7	209,0
0	0	2,56	4,03	7,88	22,4	91,7
0	2	3,40	4,82	8,90	23,8	210,0
0	3	7,53	8,03	11,2	25,8	213,0
1	0	15,3	25,8	51,5	145,0	587,0
1	1	16,5	27,0	52,5	146,0	1325,0
1	2	22,4	30,8	55,5	149,0	1328,0
1	3	32,2	37,6	60,6	153,0	1332,0

Fonte VOGEL & SKINNER (1965)

**TABELA 5.3: FREQUÊNCIAS NATURAIS TEÓRICAS DO DISCO REAL ENSAIADO COM  $b/a = 0,18$**

Número de Circunferências Nodais C	Número de Diâmetros Nodais d	Freqüência. Natural adimensional $\lambda$	Freqüência. Natural Fn (Hz)
0	1	2.68	79.6
0	0	3.15	93.5
0	2	3.97	117.9
0	3	7.53	223.6
1	0	19.6	582.0
1	1	20.8	617.6
1	2	25.8	766.1
1	3	31.5	935.3

Os valores do Coeficiente de Southwell do disco axissimétrica obtidas por Southwell são reproduzidos na tabela seguinte.

**TABELA 5.4: COEFICIENTES DE SOUTHWELL (S) TEÓRICOS DE UM DISCO AXISSIMÉTRICO**

Número de Circunferências Nodais C	Número de Diâmetros Nodais - D			
	0	1	2	3
0	0	1	2.35	4.05
1	3.3	5.95	8.95	12.3
2	9.9	14.2	18.85	23.85
3	19.8	25.75	32.05	38.7

Fonte LAMB & SOUTHWELL (1921)

## 5.2 Modelo de Elementos Finitos do Disco

Construiu-se um modelo de elementos finitos do disco para determinação das frequências naturais do disco estacionário e em rotação. Com estes valores calculou-se os valores dos coeficientes de enrijecimento centrífugo do disco através da formula de Southwell.

O objetivo desta modelagem foi verificar a capacidade do programa de elementos finitos comercial disponível (ALGOR) em estimar a influência de enrijecimento centrífugo. Foram duas as razões para este estudo, primeiro adquirir experiência sobre a utilização do programa de elementos finitos e em segundo lugar esclarecer parcialmente as dúvidas sobre a metodologia empregada pelo programa. Infelizmente a documentação disponível é demasiadamente pobre a este respeito e não esclarece devidamente qual é o procedimento empregado na determinação da influência da rotação sobre os parâmetros modais. Como o calculo do efeito de rotação é executada no módulo de dinâmica linear com elementos de placas enrijecidos por forças, deduz-se

que o programa calcula inicialmente o trabalho virtual das forças centrífugas em relação a posição indeformada do sistema. Posteriormente adiciona os valores da rigidez geométrica assim obtidos à matriz de rigidez do sistema. Para finalmente executar a análise modal do sistema.

Foram feitos diversos modelos com diferentes malhas e em diferentes rotações para verificar o comportamento dos resultados do cálculo. LADKANY et al. (1990) relatam que em cálculo similar com um programa de elementos finitos detectaram a redução das frequências naturais à partir de um determinado valor de velocidade de rotação, fenômeno que atribuíram a instabilidade do algoritmo. Como o funcionamento interno do programa de elementos finitos disponível era desconhecida, pesquisou-se se o mesmo fenômeno poderia ocorrer. Calculou-se as frequências naturais para cinco rotações diferentes além da condição estacionária. Os resultados mostraram que de uma maneira geral o algoritmo não apresentou o fenômeno descrito por LADKANY et al. Estranhamente, num dos modelos testados, houve uma variação significativa no Coeficiente de Southwell de um dos modos de vibração com cinco diâmetros nodais, e somente neste modo.

Modelou-se o disco com elementos de placa triangulares e quadrados com cinco graus de liberdade por nó. O programa modela o sistema com matriz de massa aglutinada. O disco foi considerado engastado na região de contato com o pedestal de fixação no bloco inercial. O modelo utilizado na comparação dos resultados é composto de 1188 elementos

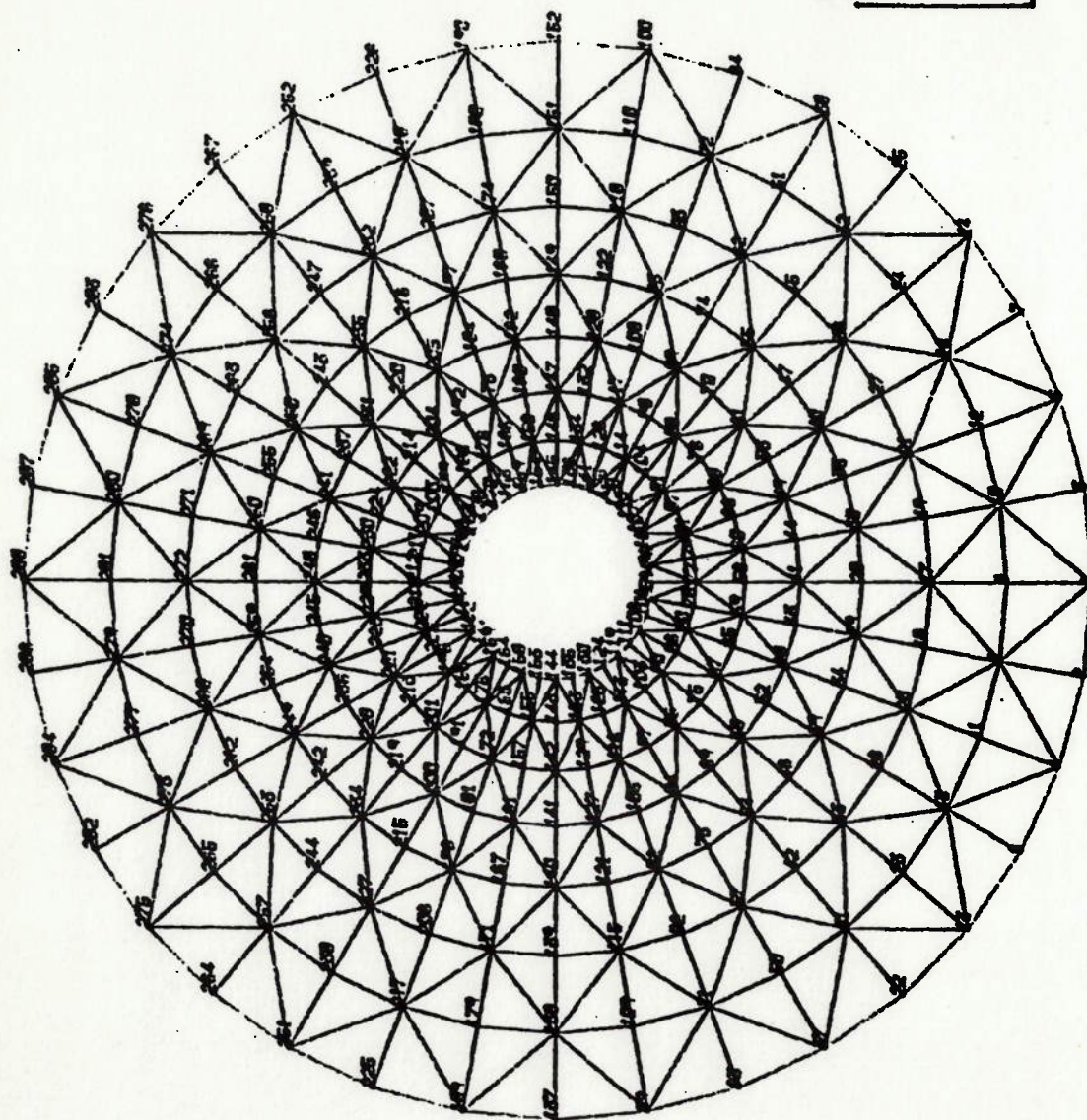
de placa triangulares distribuídos numa malha regular, mostrada na figura 5.2. Foram calculadas as primeiras 25 frequências naturais do sistema, calculados nas seguintes rotações: 0, 200, 500, 1000, 1500 e 2000 rpm. Os resultados do calculo são apresentados na tabela 5.5.

**TABELA 5.5: FREQUÊNCIAS NATURAIS DO DISCO EM DIFERENTES VELOCIDADES DE ROTAÇÃO - RESULTADOS DA MODELAGEM POR ELEMENTOS FINITOS**

Modo de Vibração			Frequência Natural (Hz)					
			Velocidade de Rotação do Disco (rpm)					
Nº	C	D	0	200	500	1000	1500	2000
1	0	1	82,34	82,42	82,86	84,40	86,92	90,32
2	0	1	82,34	82,42	82,86	84,40	86,92	90,32
3	0	0	89,51	89,56	89,85	90,87	92,53	94,81
4	0	2	112,95	113,06	113,65	115,73	119,11	123,70
5	0	2	112,65	113,06	113,65	115,73	119,12	123,70
6	0	3	224,64	224,74	225,24	227,01	229,94	233,69
7	0	3	224,64	224,74	225,24	227,01	229,94	233,97
8	0	4	389,65	389,73	390,16	391,69	394,24	397,77
9	0	4	389,65	389,73	390,16	394,69	394,24	397,77
10	1	0	545,67	545,73	546,07	547,28	549,28	552,08
11*	0	0	581,99	582,00	582,06	582,26	582,60	583,07
12	1	1	586,88	586,95	587,31	588,57	580,67	593,60
13	1	1	586,88	586,95	587,31	588,57	590,67	593,60
14	0	5	597,32	597,40	567,79	599,17	601,47	604,67
15	0	5	597,32	597,40	597,79	599,17	601,47	604,67
16	1	2	723,97	724,04	724,42	725,77	728,02	731,16
17	1	2	723,97	724,04	724,42	725,77	728,02	731,16
18	0	6	846,08	846,16	846,51	847,79	849,91	852,88
19	0	6	846,09	846,15	846,51	847,79	849,92	852,88
20	1	3	968,11	968,18	968,57	969,95	972,24	975,45
21	1	3	968,11	968,18	968,57	969,95	972,24	975,45
22	0	7	1136,15	1136,22	1136,55	1137,75	1139,74	1142,52
23	0	7	1136,15	1136,22	1136,55	1137,75	1139,74	1142,52
24	1	4	1302,21	1302,28	1302,66	1304,00	1306,25	1309,38
25	1	4	1302,21	1302,28	1302,66	1304,01	1306,25	1309,38

\* modo torcional





SVIEV 4.06 F11ed1ec 94/05/25 11:51 LC 1/ 25 Vu- 1 Lo- 0 Lo- 90 R- 0

Figura 5.2: Malha do modelo de elementos finitos do disco axissimétrico estudado



As formas dos modos de vibração do disco não variaram com a rotação. Na figura 5.3 são apresentados os modos de vibração obtidos na simulação em 500 rpm. Nesta figura são apresentados somente um dos modos de vibração nos casos das frequências naturais quasi-coincidentes. Os modos de vibração não apresentados são idênticos aos modos de frequência coincidente apresentados, diferindo somente quanto a orientação angular das linhas nodais, que encontram-se rodadas de meio comprimento de onda. Verifica-se que as formas dos modos de vibração obtidos apresentam padrões bem regular, sendo facilmente reconhecidos o número e localização das circunferências e diâmetros nodais.

À partir dos resultados das frequências naturais calculadas determinou-se os Coeficientes de Southwell à partir da Fórmula de Southwell. Os valores obtidos para os Coeficientes de Southwell do disco axissimétrico estão relacionados na tabela 5.6.

**TABELA 5.6: COEFICIENTES DE SOUTHWELL DO DISCO ENSAIADO CALCULADOS À PARTIR DOS RESULTADOS DA MODELAGEM POR ELEMENTOS FINITOS**

C	D							
	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0.88	1.24	2.29	3.85	5.75	7.95	10.40	13.06
1	6.34	7.14	9.42	12.83	16.87			

C = n° de circunferências nodais      D = n° de diâmetros nodais

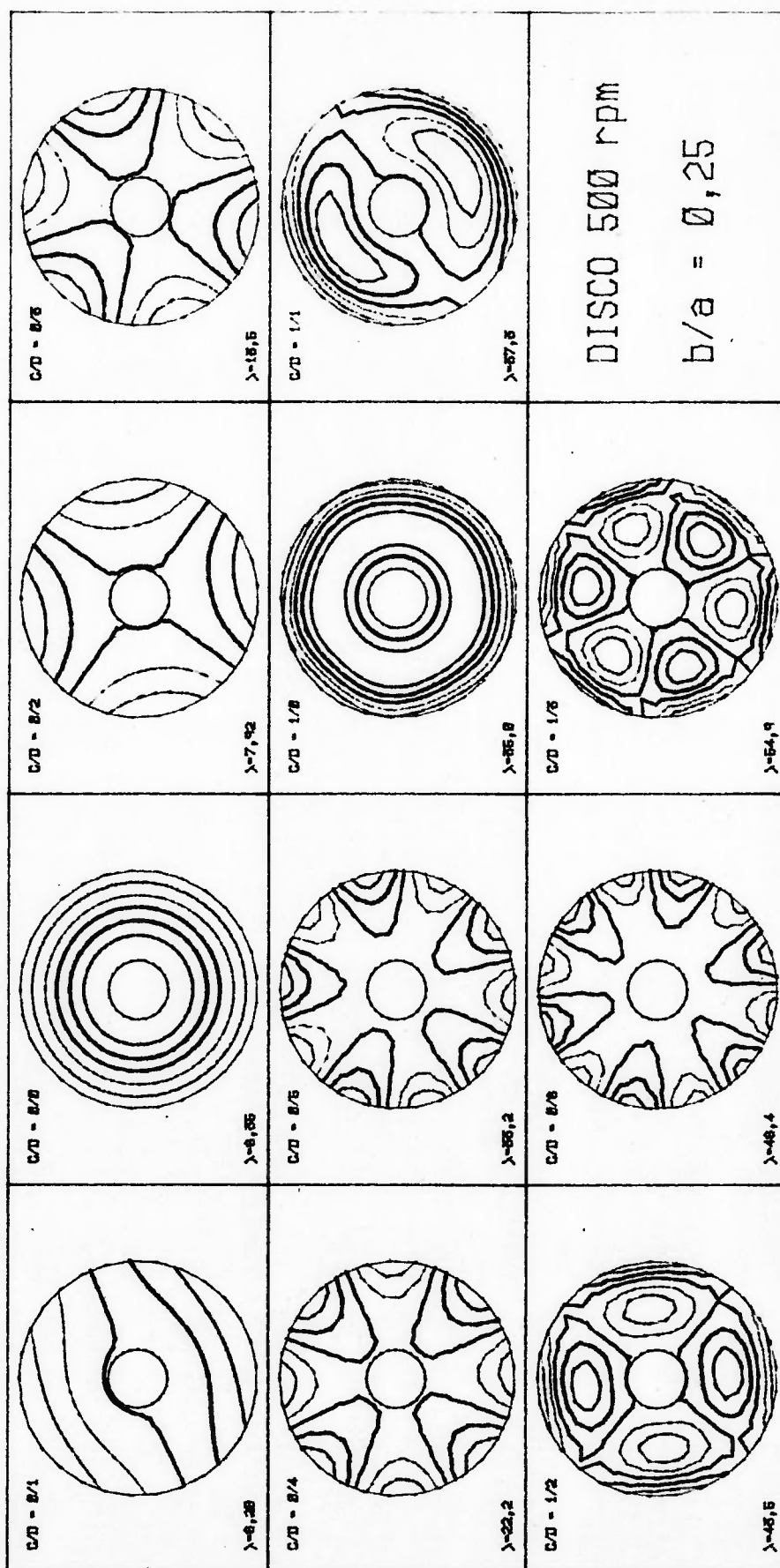
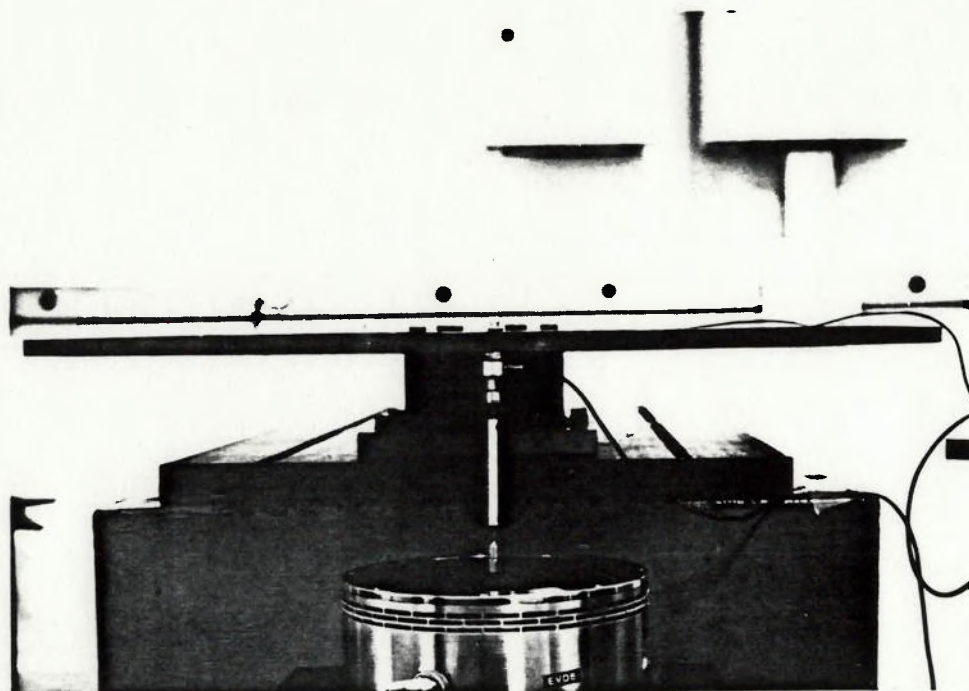


Figura 5.3: Modos de Vibração do Disco em 500 rpm obtidos da modelagem por elementos finitos

### 5.3 Análise Modal Experimental do Disco

O disco foi ensaiado montado através de um pedestal curto e sólido à base inercial. A bloco inercial, que pesa aproximadamente 600 Kg, é montado sobre coxins de borracha flexível. Todas as frequências naturais da base inercial sobre os coxins estão abaixo de 20 Hz. O pedestal de aço é composto por um cilindro sólido, com 170 mm de diâmetro e 120 mm de altura, soldado à uma flange de 1 pol de espessura. O disco é preso ao pedestal por meio de seis parafusos, e este ao bloco através de seis parafusos.

O disco foi excitado através de um excitador eletrodinâmico controlado em amplitude e frequência. Como pode ser observado na figura 5.4, o excitador foi conectado à um ponto do disco por meio de uma haste rígida na direção axial e flexível na direção transversal. O sinal de excitação foi medido através de um transdutor de força montado junto à fixação da haste no disco. Os sinais de resposta foram medidos com mini-acelerômetros piezelétricos.

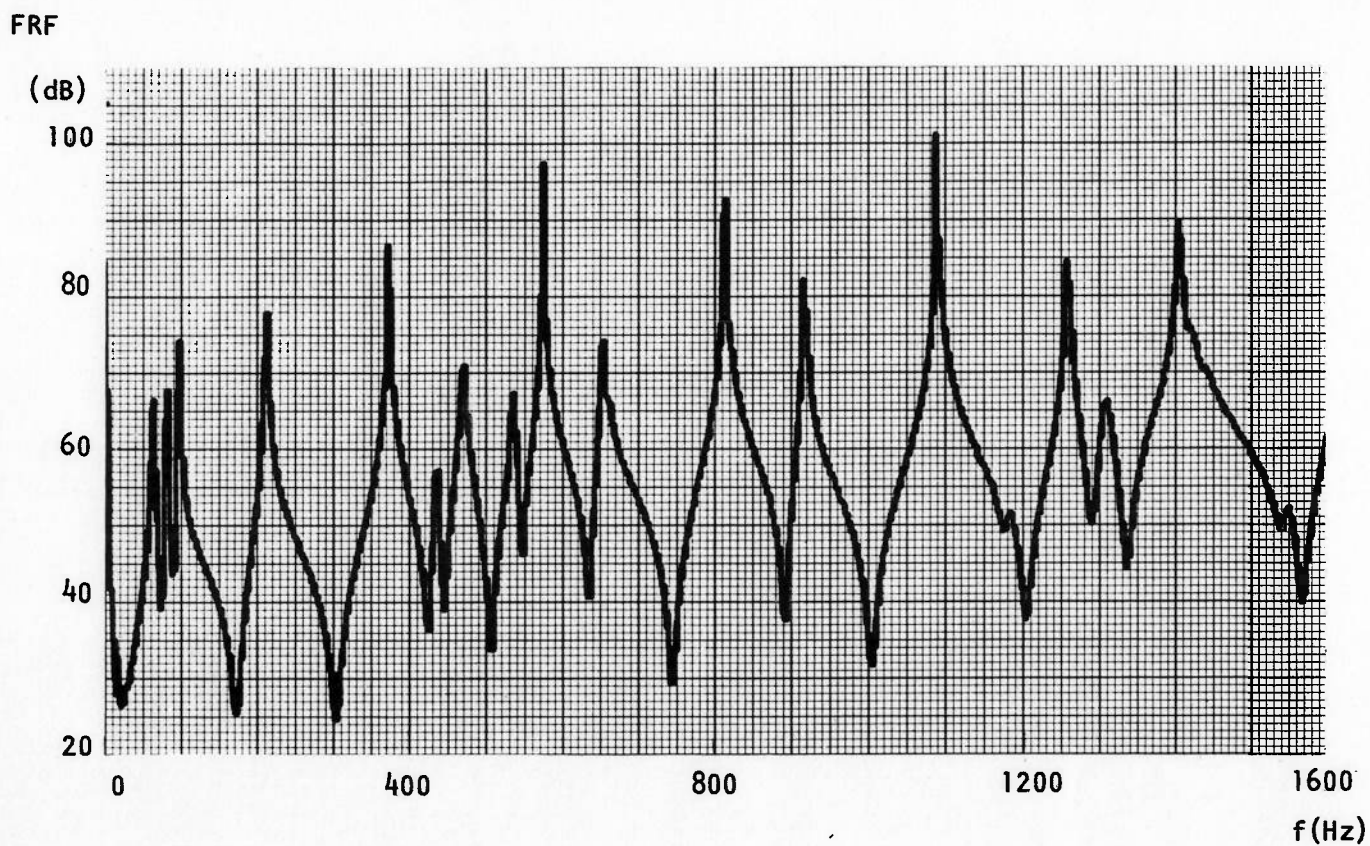


**FIGURA 5.4:** Detalhe da excitação do disco pelo excitador eletrodinâmico mostrando o transdutor de força e o acelerômetro

Inicialmente foi realizado um pesquisa preliminar de ressonâncias. Neste ensaio o disco foi excitado com ruído aleatório branco na faixa de 0 Hz a 1600 Hz e intensidade aproximada de 1 N (eficaz). Os sinais de excitação e resposta, após serem amplificados e filtrados, foram aquisitados por um analisador de espectro de dois canais. Determinou-se a função de resposta em frequência do disco no ponto de excitação, mostrada na figura 5.5. Pode-se verificar na FRF mostrada na figura, que existem cerca de 18 ressonâncias na faixa de 0 Hz a 1600 Hz. As ressonâncias

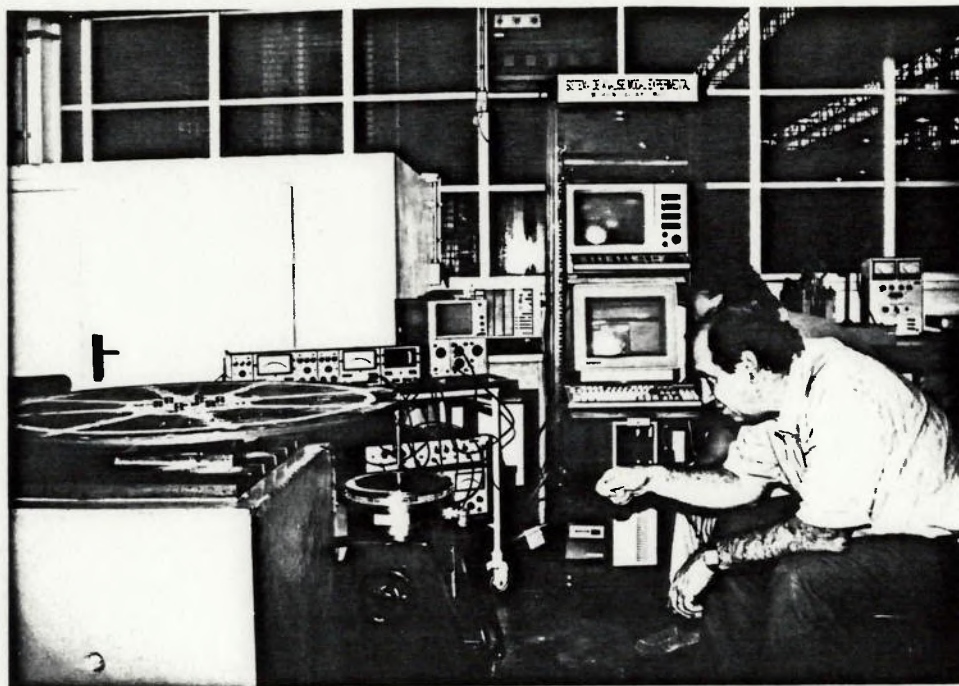
foram identificadas pelo máximo da parte imaginária da FRF. Estes valores serviram para orientar a execução dos ensaios posteriores.





**FIGURA 5.5:** Função de Resposta em Freqüência e Função de Coerência do Ponto de Excitação medida na Pesquisa Preliminar de Ressonâncias





**FIGURA 5.6:** Foto da montagem experimental e da instrumentação utilizada no ensaio de ressonância pela fase

Conhecida a distribuição espectral de frequências passou-se ao segundo ensaio, utilizando a técnica de ressonância pela fase. O disco foi excitado senoidalmente em um ponto da periferia do disco. A força de excitação foi controlada procurando-se mante-la próximo de 1 N. A montagem experimental do ensaio de ressonância pela fase é mostrada na figura 5.6. Neste ensaio o sinal de excitação foi sintonizada em cada umas das frequências naturais até que o sinal de força estivesse com noventa graus de defasagem em relação ao sinal de resposta medidos em dois pontos diametralmente opostos. A sintonia do ajuste, e conseqüente separação dos modos de vibração, foi avaliada pela diferença de fase entre os dois sinais de resposta.

Repetiu-se três vezes para cada frequência natural o mesmo procedimento, a fim de avaliar a incerteza do processo de medição, que foi estimada em 0,7%. Os valores das frequências naturais identificadas no ensaio de ressonância pela fase são apresentados na tabela 5.7. A localização da força de excitação mostrou-se adequada para excitar convenientemente todos os modos de vibração na faixa de 0 Hz a 1300 Hz, com exceção do modo de vibração em torno de 430 Hz.

**TABELA 5.7: FREQUÊNCIAS NATURAIS DO DISCO IDENTIFICADAS NO ENSAIO DE RESSONÂNCIA PELA FASE**

C	D							
	0	1	2	3	4	5	6	7
0	80.6	61.0	97.2	215	378	580	819	1095
1	454	518	643	918	1263			

C = n° de circunferências nodais    D = n° de diâmetros nodais

As formas dos modos de vibração foram identificadas pela comparação da fase de um acelerômetro de referência fixo ao ponto de excitação em relação à fase de um outro acelerômetro que varria a superfície do disco. Quando a amplitude de resposta permitiu, também localizou-se as linhas nodais pela técnica de areia. A forma dos modos de vibração são apresentados na figura 5.7. Nas figuras 5.8 a 5.18 são mostradas as fotos dos modos identificados pela

técnica de areia. Nas fotos pode-se ver a localização das linhas nodais nas regiões onde houve acúmulo de areia<sup>17</sup>.

---

<sup>17</sup> Os retângulos mais claros à esquerda do disco e um risco diametral brilhante que podem ser observado em todas as fotos dos modos de vibração são apenas o reflexo da luz em regiões lixadas.



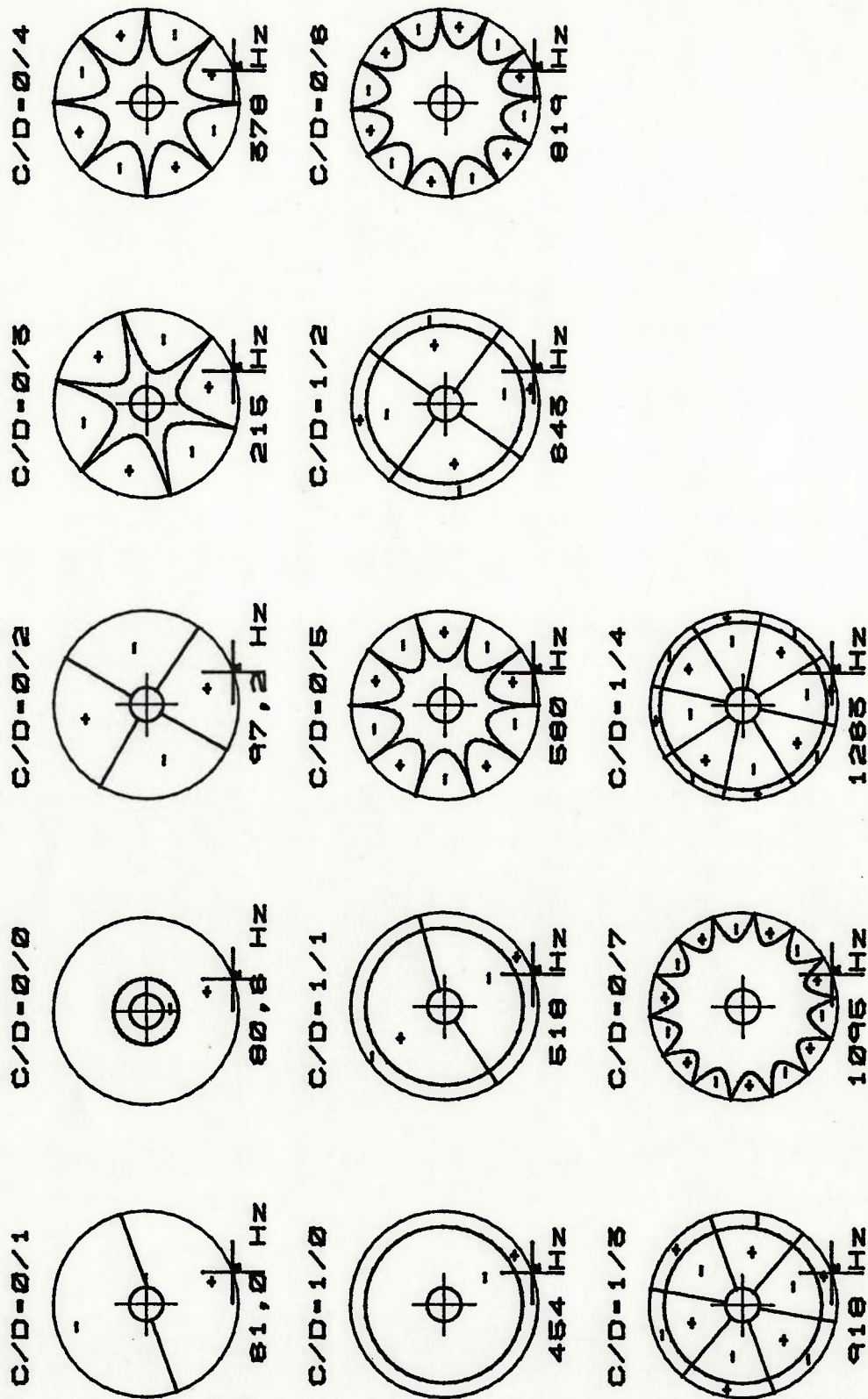
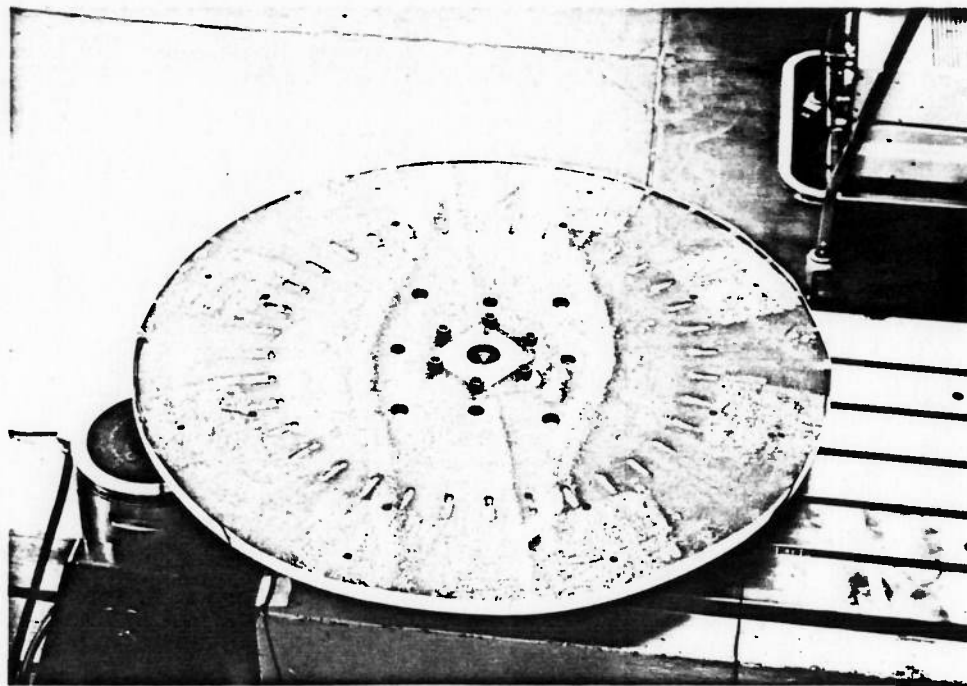
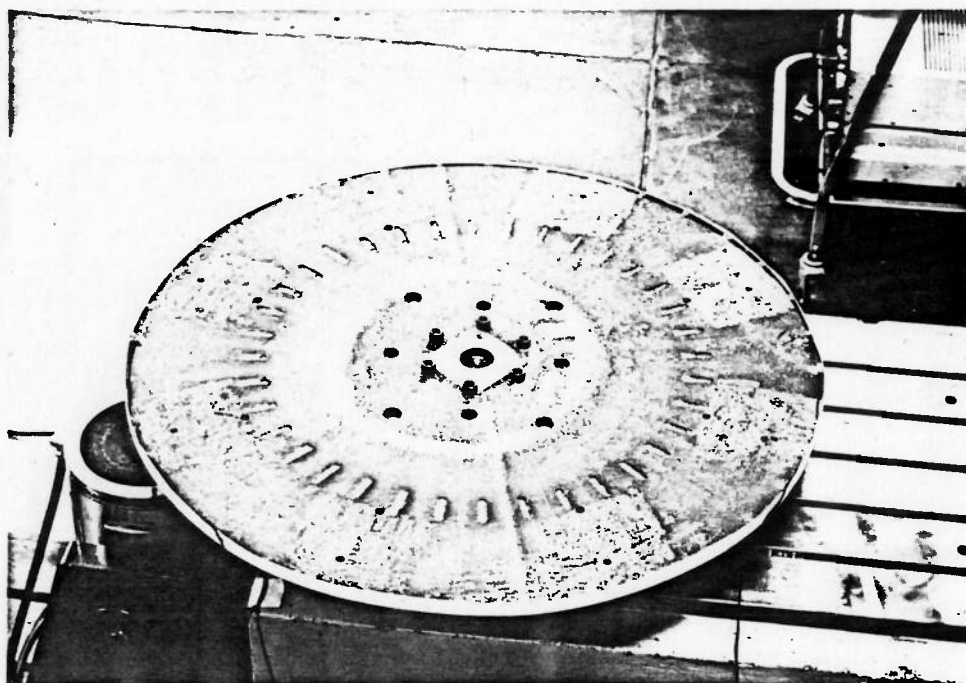


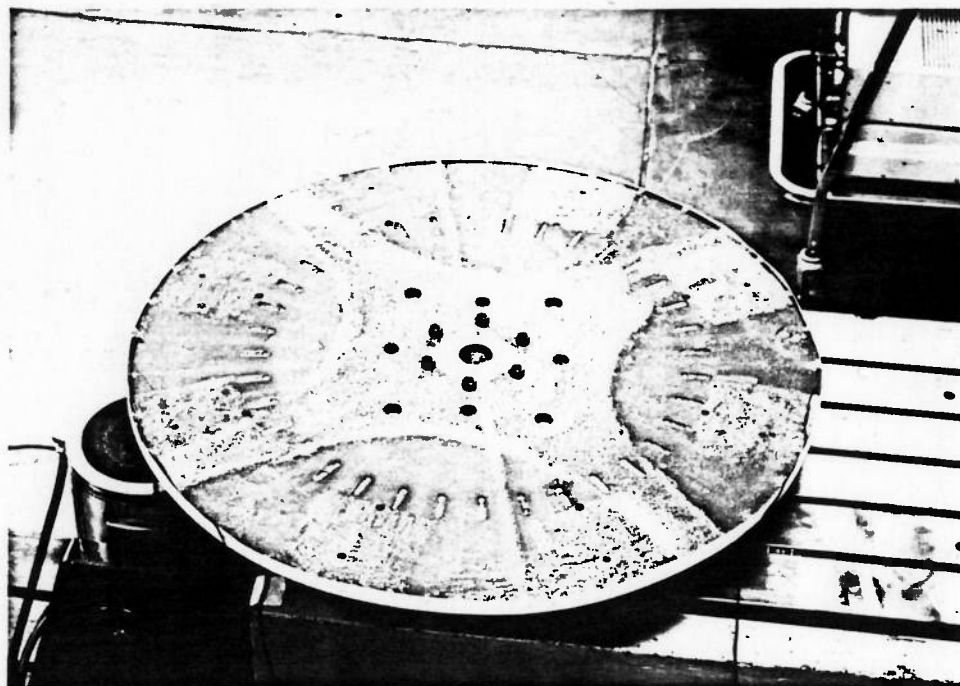
FIGURA 5.7: Forma dos modos de vibração do Disco identificadas no ensaio de ressonância pela fase



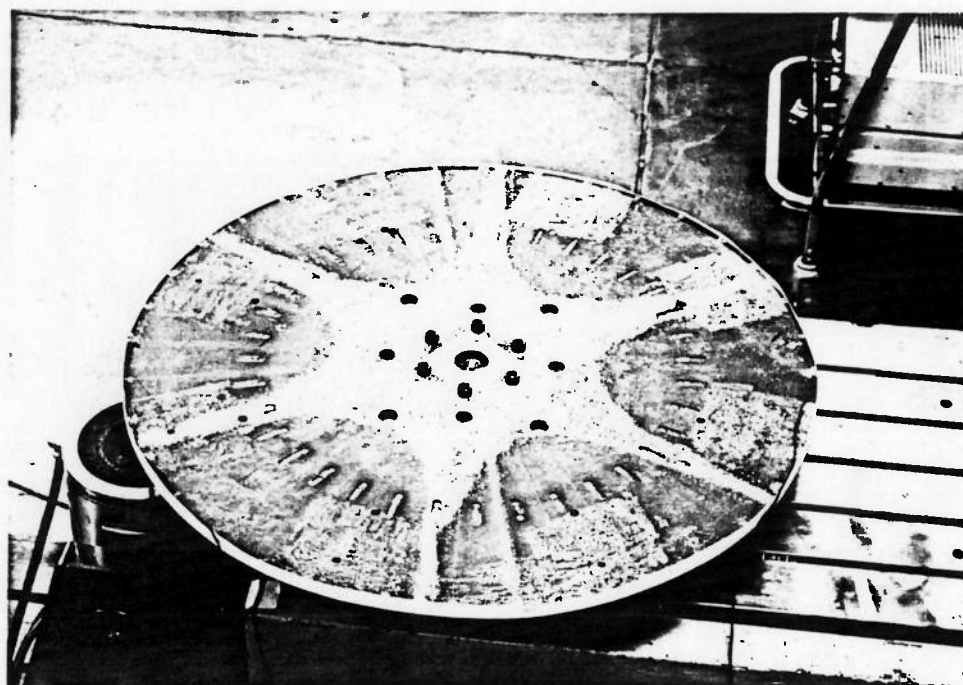
**FIGURA 5.8:** 1° Modo de vibração do Disco  
 $C = 0 - D = 1 - F_n = 61,0 \pm 0,4 \text{ Hz}$   
Identificação pela Técnica da Areia



**FIGURA 5.9:** 2° Modo de vibração do Disco  
 $C = 0 - D = 0 - F_n = 80,6 \pm 0,5 \text{ Hz}$   
Identificação pela Técnica da Areia

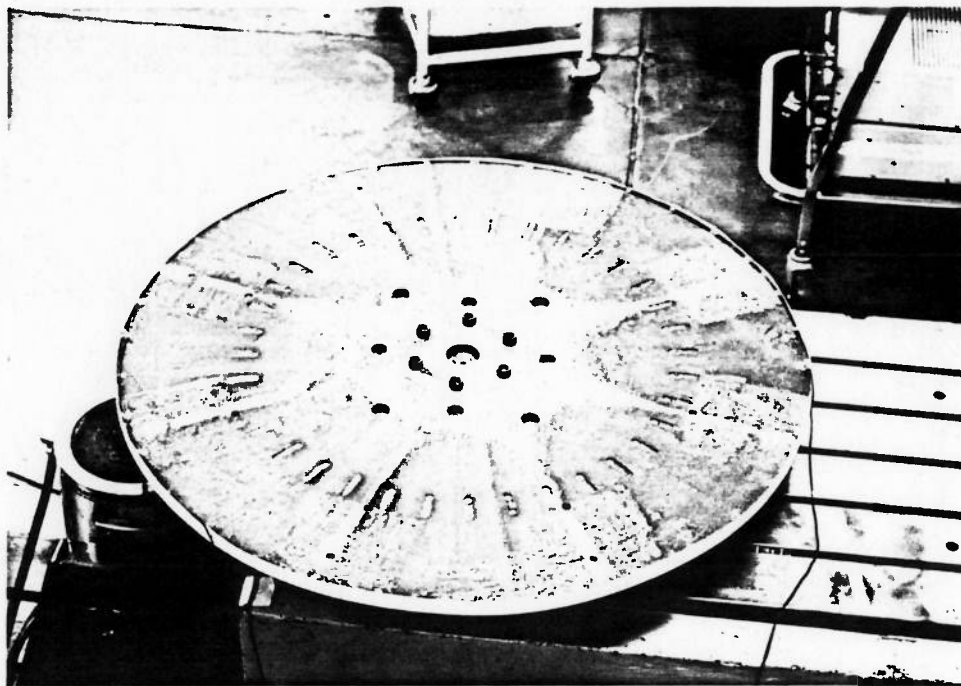


**FIGURA 5.10: 3° Modo de vibração do Disco**  
 **$C = 0 - D = 2 - F_n = 97,2 \pm 0,6 \text{ Hz}$**   
**Identificação pela Técnica da Areia**

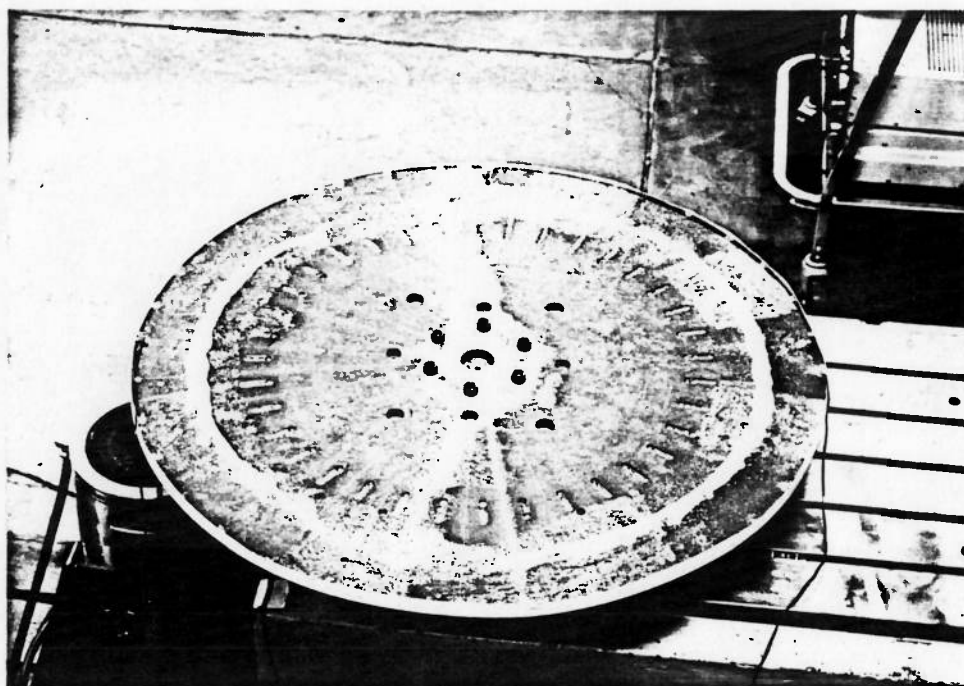


**FIGURA 5.11: 4° Modo de vibração do Disco**  
 **$C = 0 - D = 3 - F_n = 215 \pm 1 \text{ Hz}$**   
**Identificação pela Técnica da Areia**

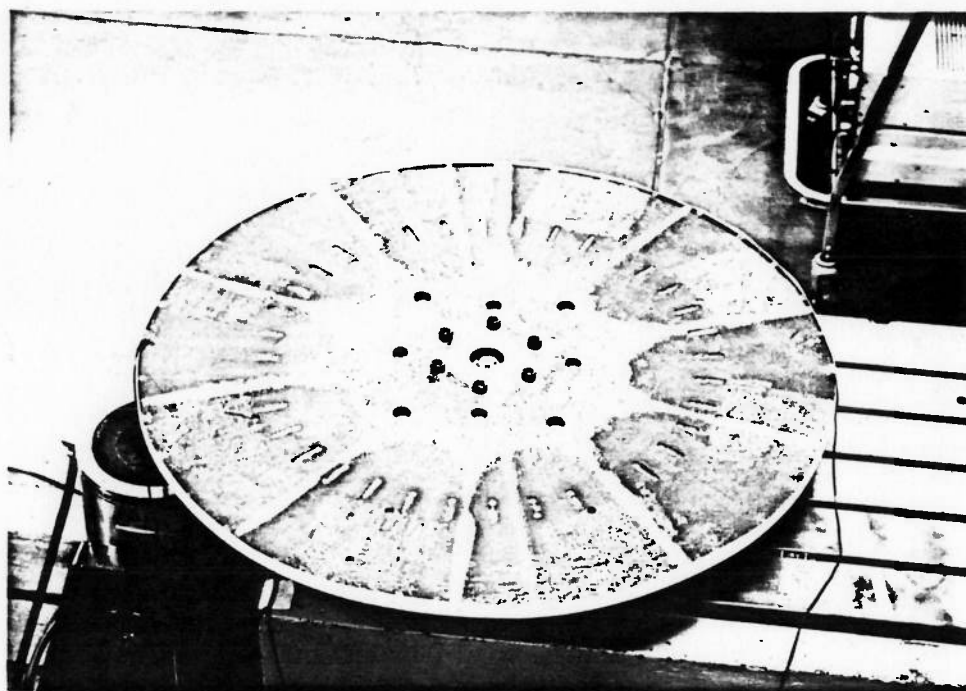




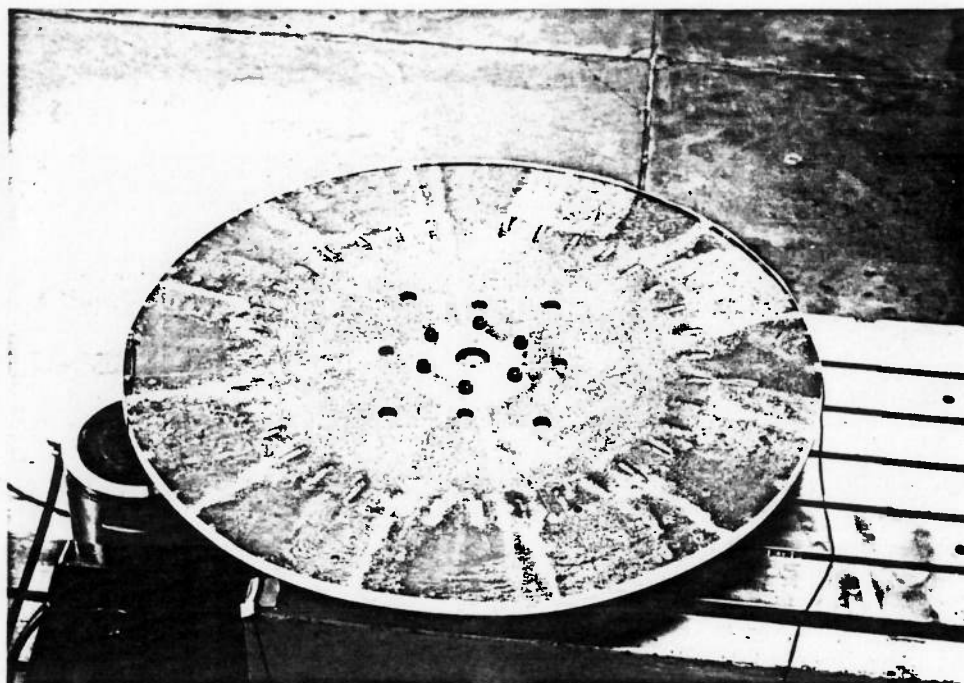
**FIGURA 5.12: 5° Modo de vibração do Disco**  
 **$C = 0 - D = 4 - F_n = 378 \pm 2$  Hz**  
**Identificação pela Técnica da Areia**



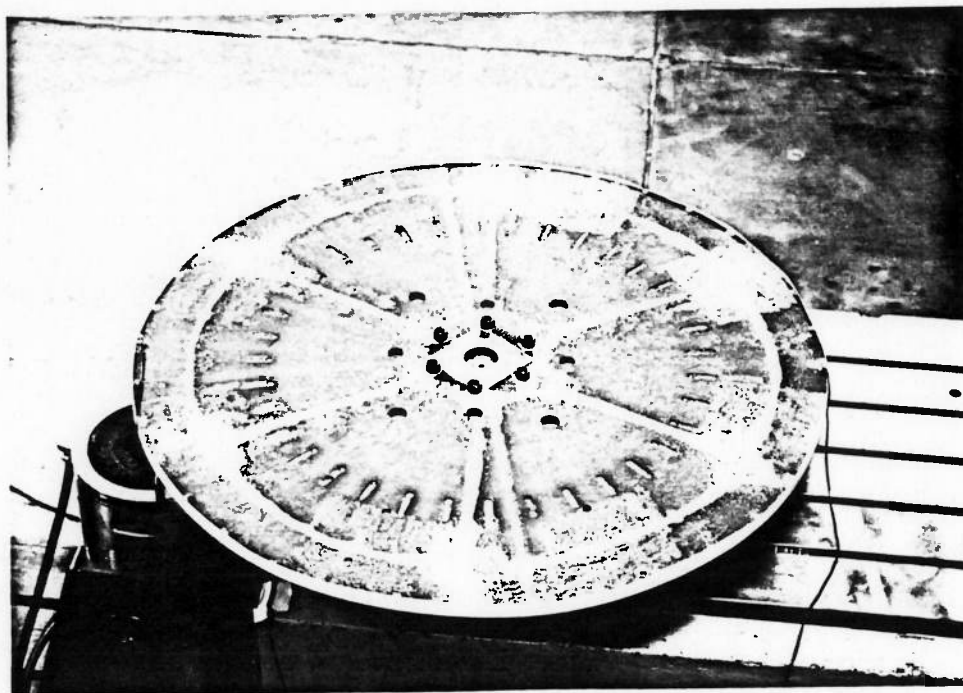
**FIGURA 5.13: 8° Modo de vibração do Disco**  
 **$C = 1 - D = 1 - F_n = 518 \pm 3$  Hz**  
**Identificação pela Técnica da Areia**



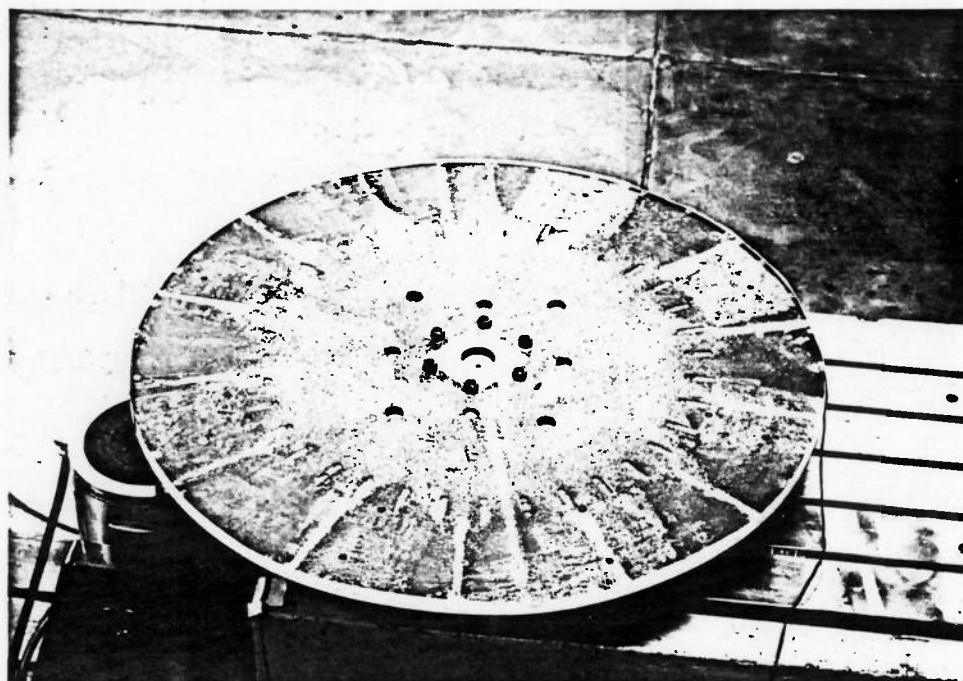
**FIGURA 5.14: 9° Modo de vibração do Disco**  
 **$C = 0 - D = 5 - F_n = 580 \pm 4 \text{ Hz}$**   
**Identificação pela Técnica da Areia**



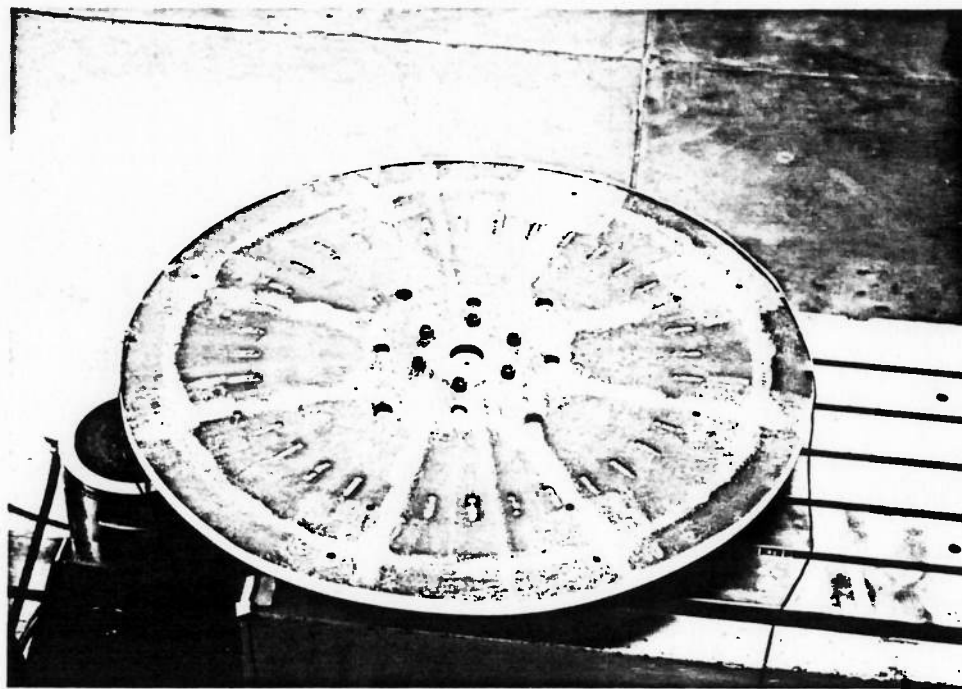
**FIGURA 5.15: 11° Modo de vibração do Disco**  
 **$C = 0 - D = 6 - F_n = 819 \pm 5 \text{ Hz}$**   
**Identificação pela Técnica da Areia**



**FIGURA 5.16: 12° Modo de vibração do Disco**  
 **$C = 1 - D = 3 - F_n = 918 \pm 6 \text{ Hz}$**   
**Identificação pela Técnica da Areia**

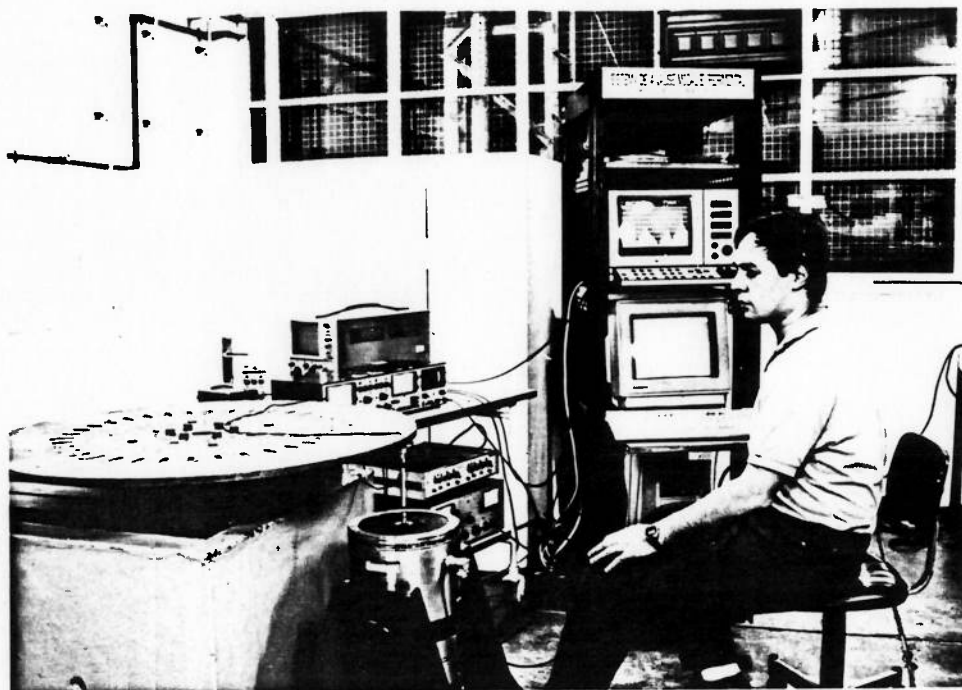


**FIGURA 5.17: 13° Modo de vibração do Disco**  
 **$C = 0 - D = 7 - F_n = 1095 \pm 7 \text{ Hz}$**   
**Identificação pela Técnica da Areia**



**FIGURA 5.18: 14° Modo de vibração do Disco**  
 **$C = 1 - D = 4 - F_n = 1263 \pm 8 \text{ Hz}$**   
**Identificação pela Técnica da Areia**

Verifica-se que a maioria dos modos de vibração identificados apresenta a forma claramente definida em padrões periódicos bem regular. São facilmente caracterizadas as circunferências e diâmetros nodais. Observa-se também que a orientação angular dos diâmetros nodais, como era esperada, foi fortemente determinada pela posição do excitador. Uma análise mais minuciosa revela que a posição das linhas nodais também foi influenciada pelas características assimétricas do bloco inercial, pois nem sempre a posição do excitador se localizava exatamente do centro de um ventre.



**FIGURA 5.19: Montagem experimental e instrumentação empregados no ensaio de análise modal experimental por ajuste de curvas via FFT**

Finalmente foi repetido novamente a análise modal experimental empregando um método de ajuste de curvas das FRFs no domínio da frequência. Neste ensaio o disco foi excitado com ruído aleatório mantido constante em torno de 1 N (eficaz). Na figura 5.19 é apresentada a montagem experimental empregada na análise modal experimental por ajuste de curvas via FFT. A análise foi subdividida em três bandas de frequência de 200 Hz de largura a fim de melhorar a resolução da medição para 250 mHz. A excitação foi mantida fixa enquanto a resposta foi medida sucessivamente em 288 pontos do disco. A malha dos pontos de medição é apresentada na figura 5.20. Os pontos foram dispostos de maneira a concentrarem-se mais na região central do disco,



onde são esperadas as maiores deformações, visando uma melhor definição da forma dos modos de vibração. Infelizmente, nessa região os sinais são mais ruidosos devido as pequenas amplitudes de vibração o que em contrapartida prejudica a qualidade da identificação.

Os sinais de excitação e resposta após serem amplificados e filtrados foram aqusitados por um analisador de espectro via FFT (Transformada Rápida de Fourier). Foi aplicada a janela Hann nos dois sinais para evitar os erros de truncamento. As funções de resposta em frequência foram estimadas com o estimador  $H_2$  a partir da média linear de 5 espectros medidos em cada ponto.



IMPELIDOR ORIGINAL:

612 nos

540 elementos de placa

IMPELIDOR MODIFICADO:

696 nos

612 elementos de placa

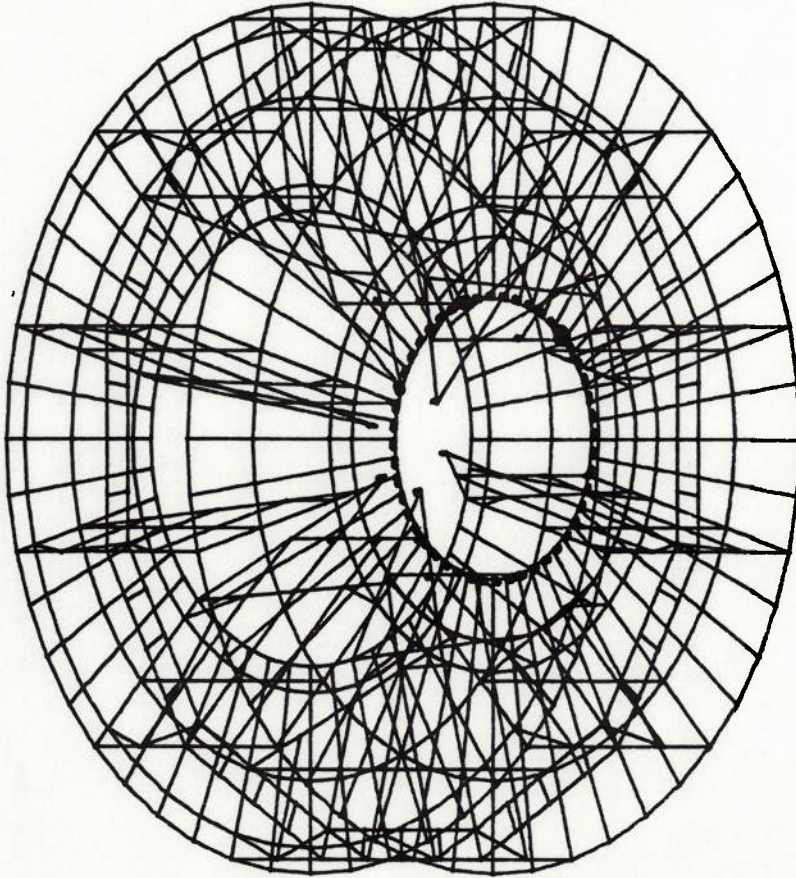
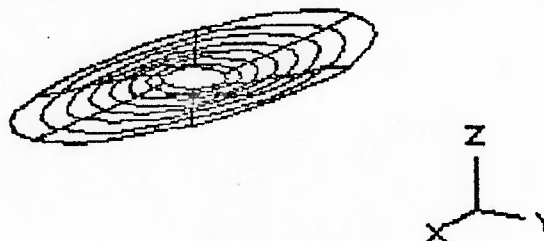


FIGURA 5.20: Malha com pontos de medição do disco no ensaio de análise modal experimental por ajuste de curvas

**TABELA 5.8: FREQUÊNCIAS NATURAIS E AMORTECIMENTOS MODAIS DO DISCO IDENTIFICADOS NA ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL POR AJUSTE DE CURVAS VIA FFT**

Modo de Vibração			Frequências Naturais (Hz)	Fator de Amortecimento (%)
Nº	C	D		
1	0	1	63,46	0,935
2	0	1	66,39	0,735
3	0	0	82,45	0,516
4	0	2	98,68	0,399
5	0	2	100,19	0,255
6	0	3	215,56	0,041
7	0	4	378,16	0,017
8	0	4	378,49	0,028
9	1	1	434,45	0,807
10	1	0	472,17	0,553
11	1	1	538,14	0,478
12	0	5	580,25	0,028
13	0	5	580,52	0,024

Foram identificados 13 frequências naturais e amortecimentos modais apresentados na tabela 5.8. Os modos de vibração identificados no ajuste de curvas são apresentados nas figuras 5.21 a 5.33.



**FIGURA 5.21: Modo de Vibração do Disco**  
 $C = 0 - D = 1 - F_n = 63,46$  Hz  
 Método de Ajuste de Curvas via FFT

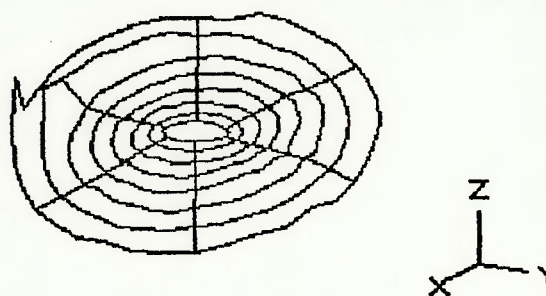


FIGURA 5.22: Modo de Vibração do Disco  
 $C = 0 - D = 1 - F_n = 66,39 \text{ Hz}$   
Método de Ajuste de Curvas via FFT



FIGURA 5.23: Modo de Vibração do Disco  
 $C = 0 - D = 0 - F_n = 82,45 \text{ Hz}$   
Método de Ajuste de Curvas via FFT

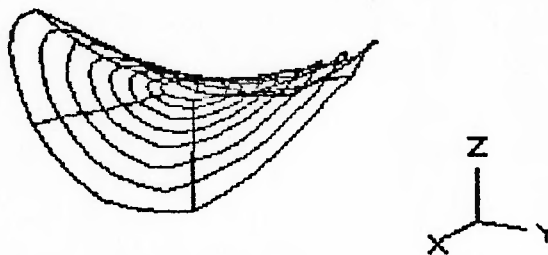


FIGURA 5.24: Modo de Vibração do Disco  
 $C = 0 - D = 2 - F_n = 98,68 \text{ Hz}$   
Método de Ajuste de Curvas via FFT

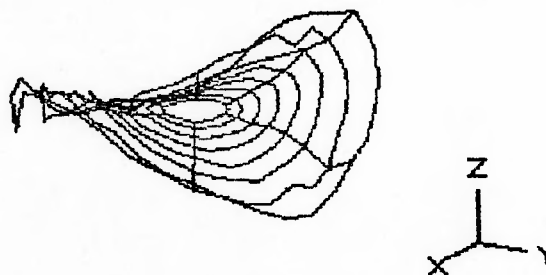
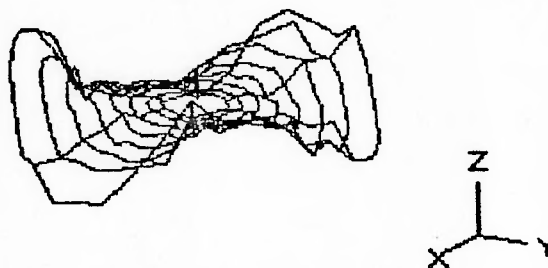
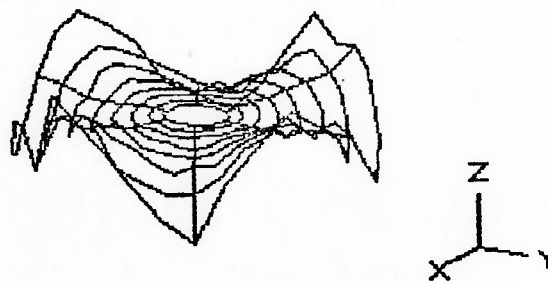


FIGURA 5.25: Modo de Vibração do Disco  
 $C = 0 - D = 2 - F_n = 100,19 \text{ Hz}$   
Método de Ajuste de Curvas via FFT



**FIGURA 5.26: Modo de Vibração do Disco**  
 **$C = 0 - D = 3 - F_n = 215,56$  Hz**  
**Método de Ajuste de Curvas via FFT**



**FIGURA 5.27: Modo de Vibração do Disco**  
 **$C = 0 - D = 4 - F_n = 378$ , Hz**  
**Método de Ajuste de Curvas via FFT**

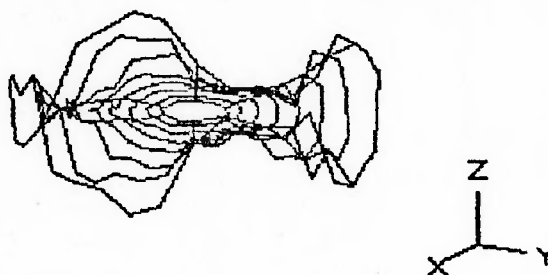


FIGURA 5.28: Modo de Vibração do Disco  
 $C = 0 - D = 4 - F_n = 378,49 \text{ Hz}$   
Método de Ajuste de Curvas via FFT

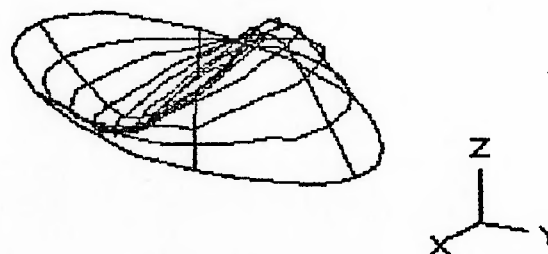


FIGURA 5.29: Modo de Vibração do Disco  
 $C = 1 - D = 1 - F_n = 434,45 \text{ Hz}$   
Método de Ajuste de Curvas via FFT



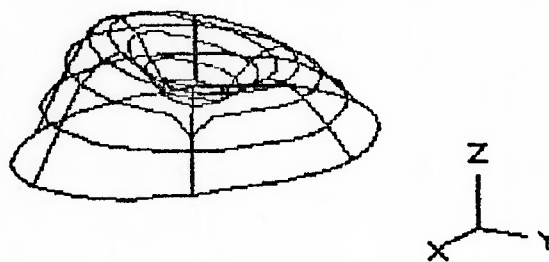


FIGURA 5.30: Modo de Vibração do Disco  
 $C = 1 - D = 0 - F_n = 472,17 \text{ Hz}$   
Método de Ajuste de Curvas via FFT

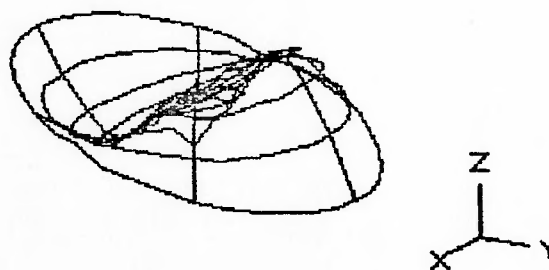


FIGURA 5.31: Modo de Vibração do Disco  
 $C = 1 - D = 0 - F_n = 538,14 \text{ Hz}$   
Método de Ajuste de Curvas via FFT

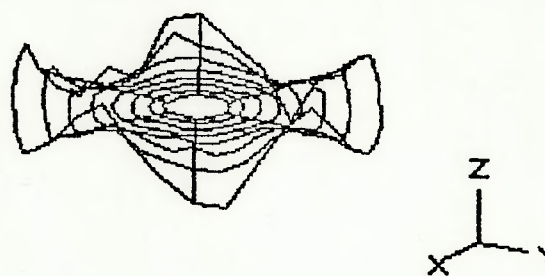


FIGURA 5.32: Modo de Vibração do Disco  
 $C = 0 - D = 5 - F_n = 580,25 \text{ Hz}$   
 Método de Ajuste de Curvas via FFT

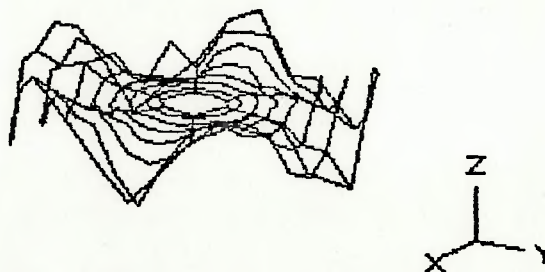


FIGURA 5.33: Modo de Vibração do Disco  
 $C = 0 - D = 5 - F_n = 580,52 \text{ Hz}$   
 Método de Ajuste de Curvas via FFT

Os resultados da análise por ajuste de curva estão em boa concordância com os resultados do método de ressonância pela fase. Observa-se que diversos modos de vibração com frequências naturais quasi-coincidentes foram isolados pelo

programa. Observa-se também a grande influência da dinâmica do bloco inercial sobre o modo com um diâmetro e uma circunferência nodal. A interferência do bloco desintonizou os dois modos semelhantes em 104 Hz. Por fim o amortecimento estimado inferior a 1% é realmente muito baixo como esperado.

Os resultados das análises e da indentificação são resumidos na tabela 5.9. Nesta tabela são apresentados os valores das frequências naturais obtidos da dedução teórica, do método dos elementos finitos, do ensaio de ressonância pela fase e do ensaio de análise modal experimental por ajuste de curvas. Ao lado de cada valor calculado ou medido é apresentado o desvio relativo em relação ao valor de referência. Foi tomado como referência os resultados obtidos na identificação pelo método da ressonância pela fase. Com estes resultados construiu-se o Diagrama de Campbell e Diagrama  $F_n \times D$ , mostrados nas figuras 5.34 e 5.35.

**TABELA 5.9: FREQUÊNCIAS NATURAIS DO DISCO AXISSIMÉTRICO  
COMPARAÇÃO DE RESULTADOS DA ANÁLISE E ENSAIOS**

Modo de Vibração			Teoria de Placas		Elementos Finitos		Ressonância pela Fase		Ajuste de Curvas	
Nº	C	D	Fn (Hz)	d (%)	Fn (Hz)	d (%)	Fn (Hz)	d (%)	Fn (Hz)	d (%)
1	0	1	79,6	30	82 ± 1	34	61,0 ± 0,4	ref.	63,5 ± 0,5 66,4 ± 0,5	4 9
2	0	0	93,5	16	89 ± 1	10	80,6 ± 0,5	ref.	82,5 ± 0,5	2
3	0	2	116,9	21	112 ± 1	15	97,2 ± 0,6	ref.	98,7 ± 0,5 100,2 ± 0,5	2 3
4	0	3	223,6	4	223 ± 1	4	215 ± 1	ref.	215,6 ± 0,5	0
5	0	4			385 ± 5	2	378 ± 2	ref.	378,2 ± 0,5 378,5 ± 0,5	0 0
6	1	0	582,0	28	540 ± 20	19	454 ± 3	ref.	472,2 ± 0,5	4
7	1	1							434,4 ± 0,5 538,2 ± 0,5	- 4
			617,6	19	570 ± 10	10	518 ± 3	ref.		
8	0	5			590 ± 10	2	580 ± 4	ref.	580,3 ± 0,5 580,5 ± 0,5	0 0
9	1	2	766,1	19	700 ± 20	9	643 ± 4	ref.		
10	0	6			830 ± 20	1	819 ± 5	ref.		
11	1	3	935,3	2	940 ± 30	2	918 ± 6	ref.		
12	0	7			1110 ± 30	1	1095 ± 7	ref.		
13	1	4			1260 ± 40	0	1263 ± 8	ref.		

Obs.: Fn = Freqüência Natural; d = desvio; ref.= referência

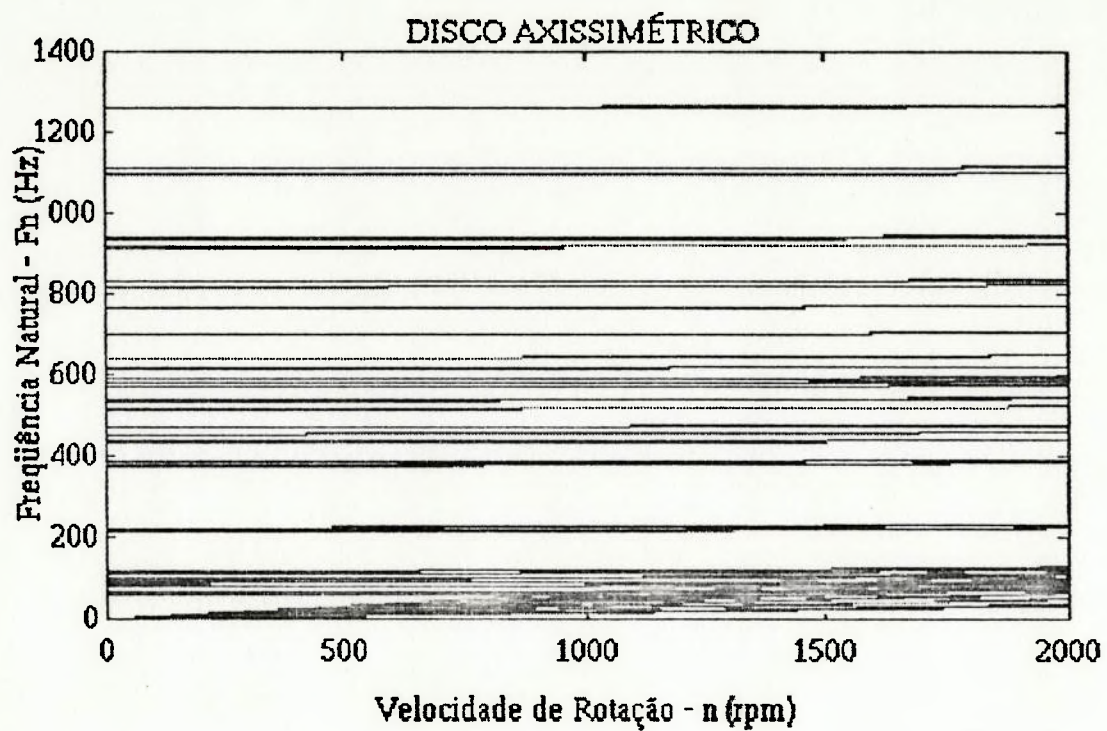


FIGURA 5.34: Diagrama de Campbell do Disco Axissimétrico

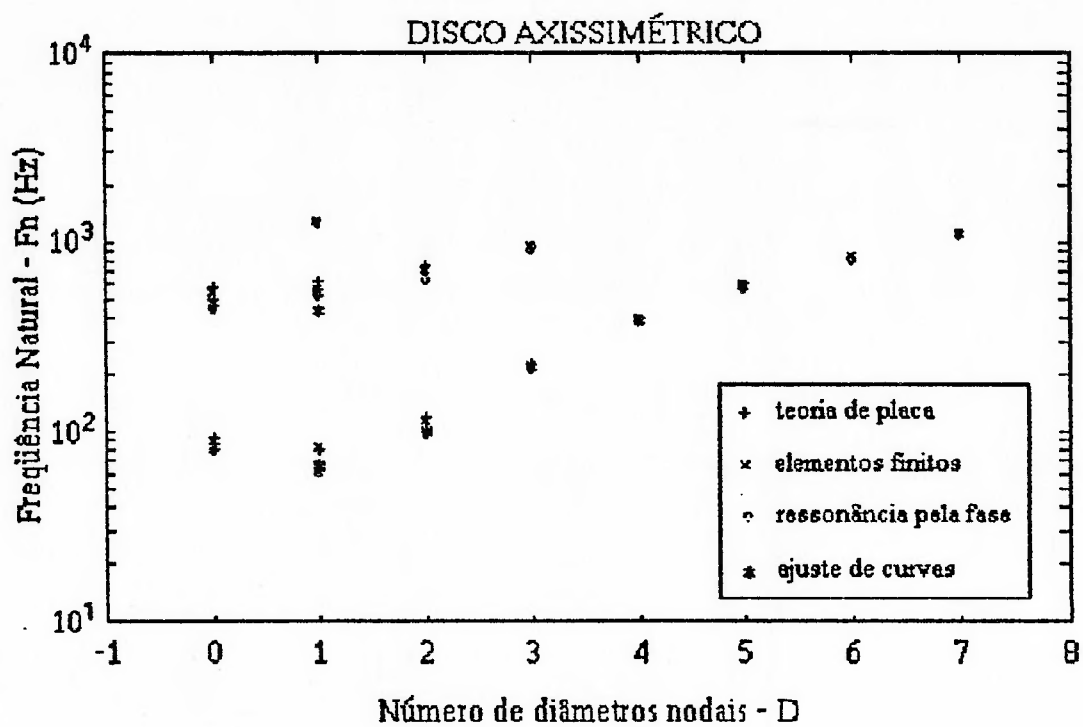
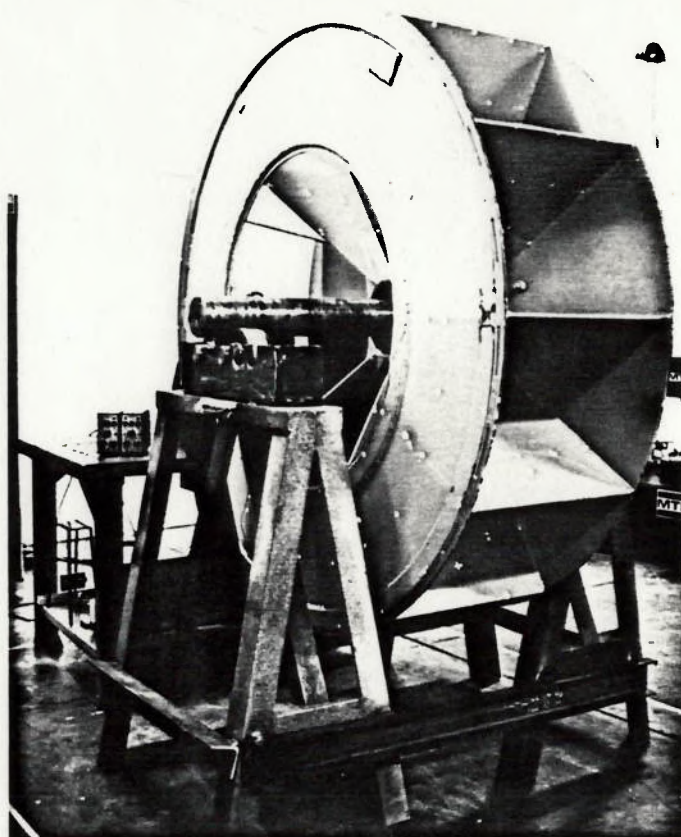


FIGURA 5.35: Diagrama  $F_n \times D$  - Freqüência Natural versus Número de Diâmetros Nodais

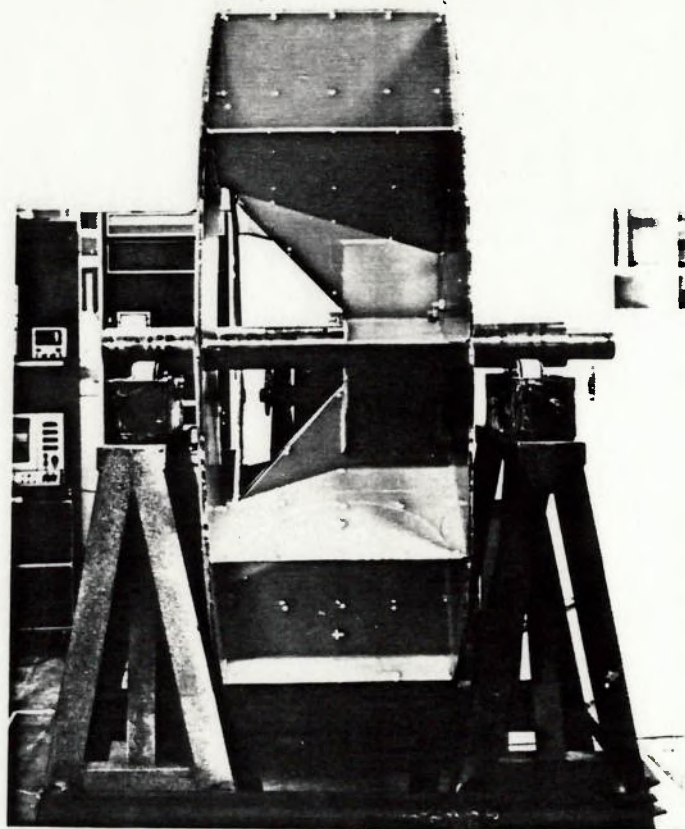


## 6. ESTUDO DA DINÂMICA DE IMPELIDOR CENTRÍFUGO

Como aplicação da metodologia de ensaio e análise desenvolvida, estudou-se o caso de um impelidor centrífugo de pás radiais retas e largas. O impelidor foi ensaiado em duas configurações. Foram empregadas duas técnicas de análise modal experimental, quais sejam, Ajuste de Curvas via FFT e Ensaio de Ressonância pela Fase. Os resultados do ensaio indicaram que o impelidor original apresentava problema estruturais causados por um modo de vibração concordante com uma Velocidade de Rotação Crítica de Disco. Foi proposta uma modificação estrutural que solucionou o problema. O impelidor modificado foi novamente ensaiado para verificação de outros possíveis problemas estruturais. Os resultados dessa análise não indicaram a presença de nenhum outro problema dinâmico.

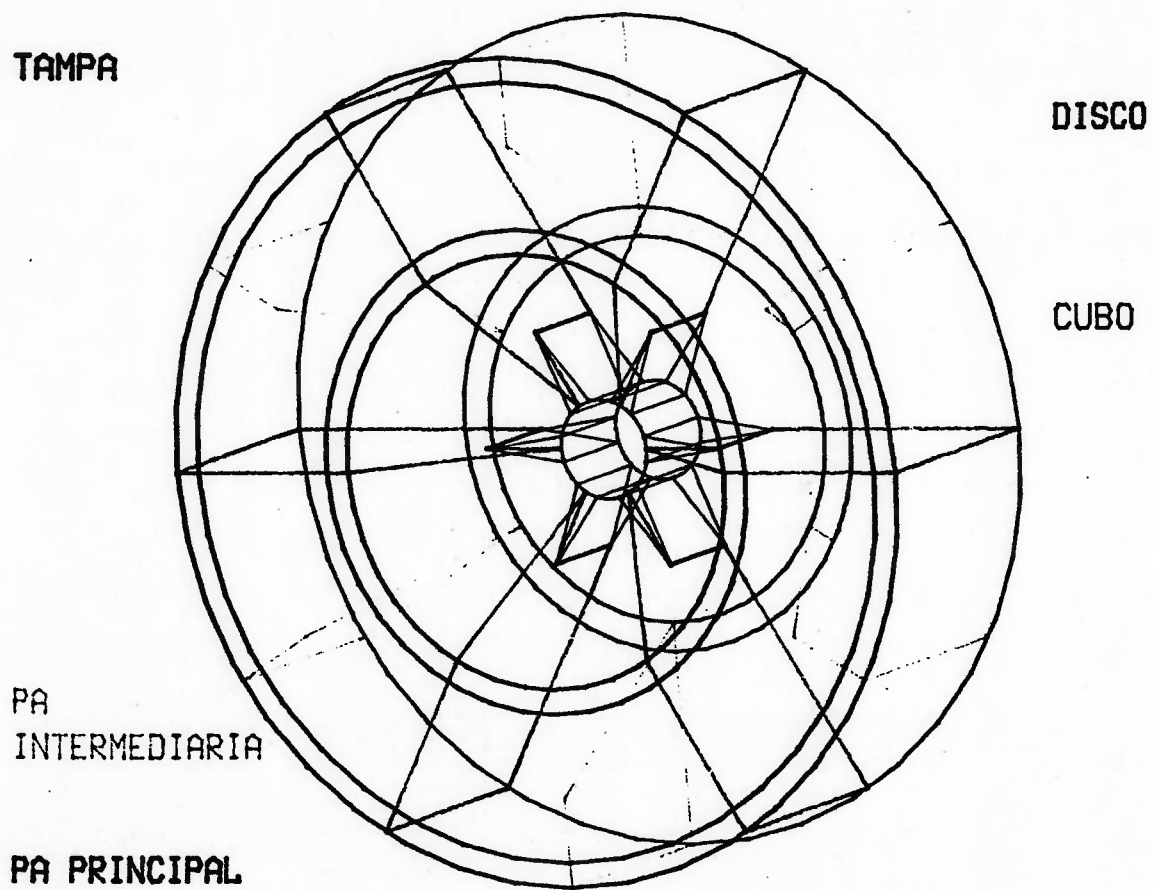


**FIGURA 6.1:** Foto em perspectiva do impelidor centrífugo estudado



**FIGURA 6.2:** Foto lateral do impelidor centrífugo estudado

O impelidor de ventilador centrífugo ensaiado, com aproximadamente 600 Kg (sem eixo) é composto de um disco, uma tampa, 6 pás principais e 6 pás intermediárias. O ventilador ensaiado é apresentado nas fotos das figuras 6.1 e 6.2. Em operação o impelidor é sustentado por mancais de rolamentos de rolos. O impelidor destina-se ao transporte de uma suspensão de pó de alimentos em ar quente (80 C) e opera a 1180 rpm, podendo em uma segunda montagem operar a 1230 rpm. As características físicas e de operação do impelidor são apresentadas na ilustração da figura 6.3.



**FIGURA 6.3** Características Físicas e de Operação do Impelidor Centrífugo Estudado



## 6.1. Estudo do Impelidor Original

Foi elaborado um modelo de elementos finitos do impelidor original, simulando a condição estacionária e em rotação. Das frequências naturais obtidas nesta análise calcularam-se os Coeficientes de Southwell do impelidor nas duas configurações. Em seguida o impelidor foi ensaiado com as duas técnicas de análise modal experimental mencionadas. Em seguida são descritos os ensaios e a análise, bem como, apresentados e discutidos os resultados do estudo realizados com o impelidor original.

### 6.1.1. Modelo de Elementos Finitos do Impelidor Original

Modelou-se o impelidor com elementos de placa triangulares e quadrados com cinco graus de liberdade por nó. A massa foi considerada aglutinada por limitação do programa. O disco do impelidor foi considerado engastado na região de contato com o cubo. O modelo é composto de 540 elementos de placa conforme a malha mostrada na figura 6.4. Foram calculadas as primeiras 10 frequências naturais do sistema, calculados na condição do impelidor estacionário e na rotação de 600 rpm. Os resultados do calculo são apresentados na tabela 6.4.

**TABELA 6.1: FREQUÊNCIAS NATURAIS E COEFICIENTES DE SOUTHWELL DO IMPELIDOR ORIGINAL - RESULTADOS DA MODELAGEM POR ELEMENTOS FINITOS**

Modo de Vibração			Frequência Natural Fn (Hz)		Coefic. Southwell
Nº	$\epsilon$ (rad)	Descrição	0 rpm	600 rpm	S (-)
1	0	torcional	20.80	23.27	1.09
2	0	transversal em fase	101.60	104.68	6.35
3	$\pi/3$	transversal em fase	104.94	107.55	5.55
4	$\pi/3$	transversal em fase	104.94	107.55	5.55
5	$2\pi/3$	transversal em fase	111.85	113.47	3.67
6	$2\pi/3$	transversal em fase	111.85	113.47	3.67
7	$\pi$	transversal em fase	116.29	117.15	2.00
8	$\pi$	transversal em fase	120.54	121.63	2.64
9	$4\pi/3$	transversal em fase	122.52	123.18	1.62
10	$4\pi/3$	transversal em fase	122.52	123.18	1.62

$\epsilon$  = constante de fase

As formas dos modos de vibração do impelidor não variaram com a rotação. Nas figura 6.5 a 6.24 são apresentados os modos de vibração obtidos na simulação em condição estacionário e em rotação.

À partir dos resultados das frequências naturais calculadas, determinou-se os Coeficientes de Southwell à partir da Fórmula de Southwell. Os valores obtidos para os Coeficientes de Southwell do impelidor original estão relacionados na tabela 6.4.



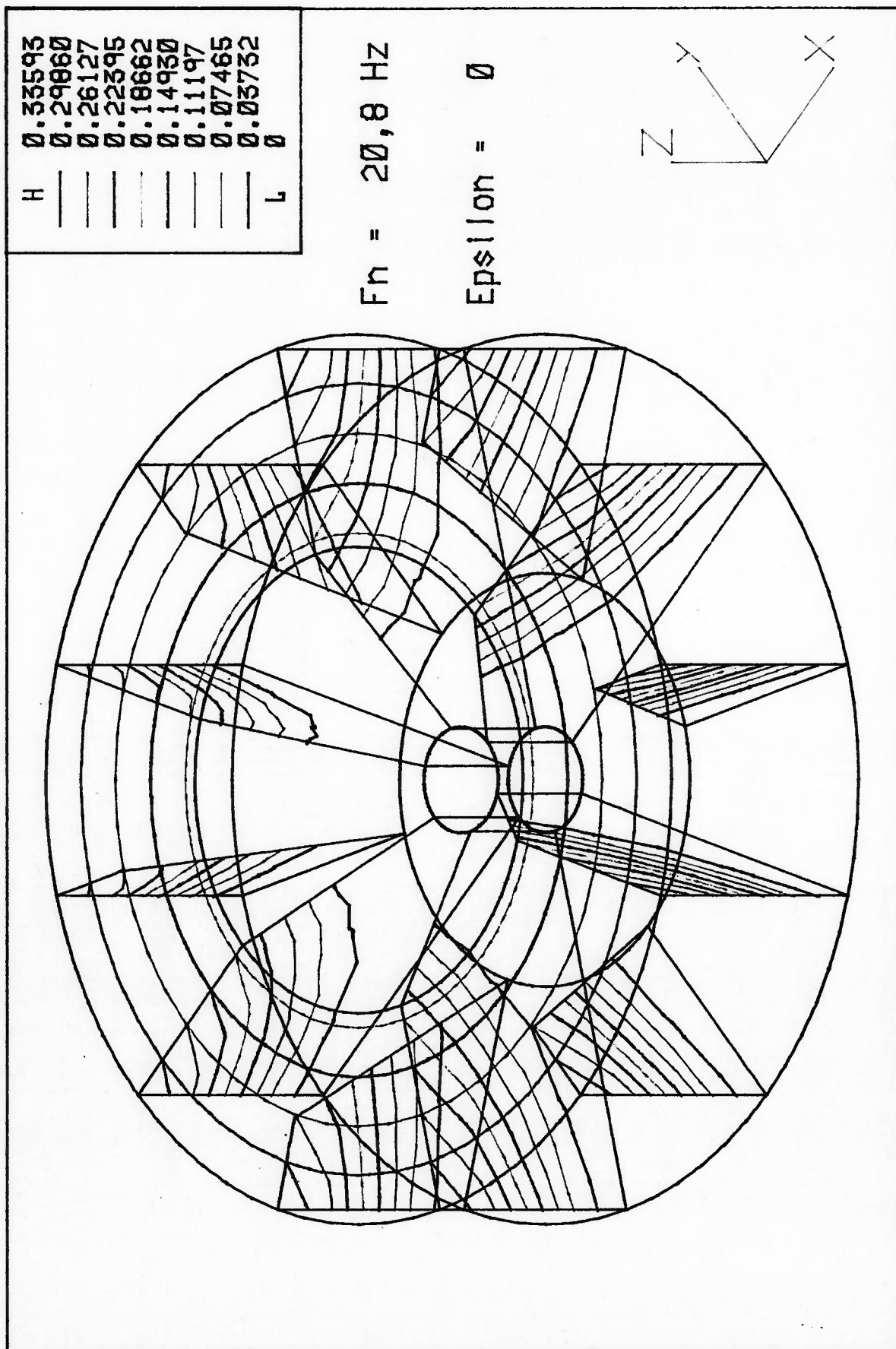
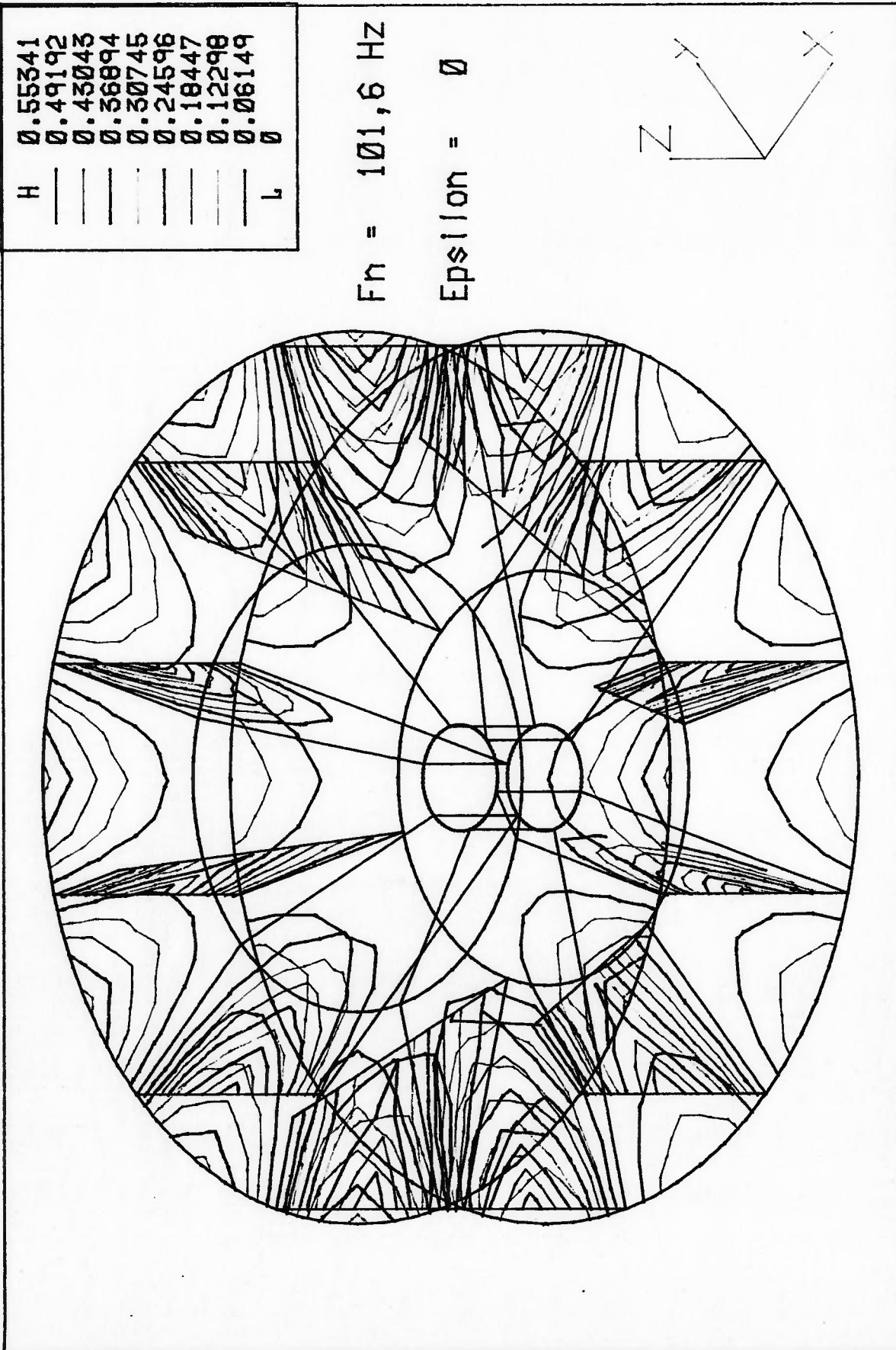


Figura 6.4: Malha do modelo de elementos finitos do impelidor estudado



**Figura 6.5: Modos de Vibração do Impelidor Original estacionário obtido da modelagem por elementos finitos**

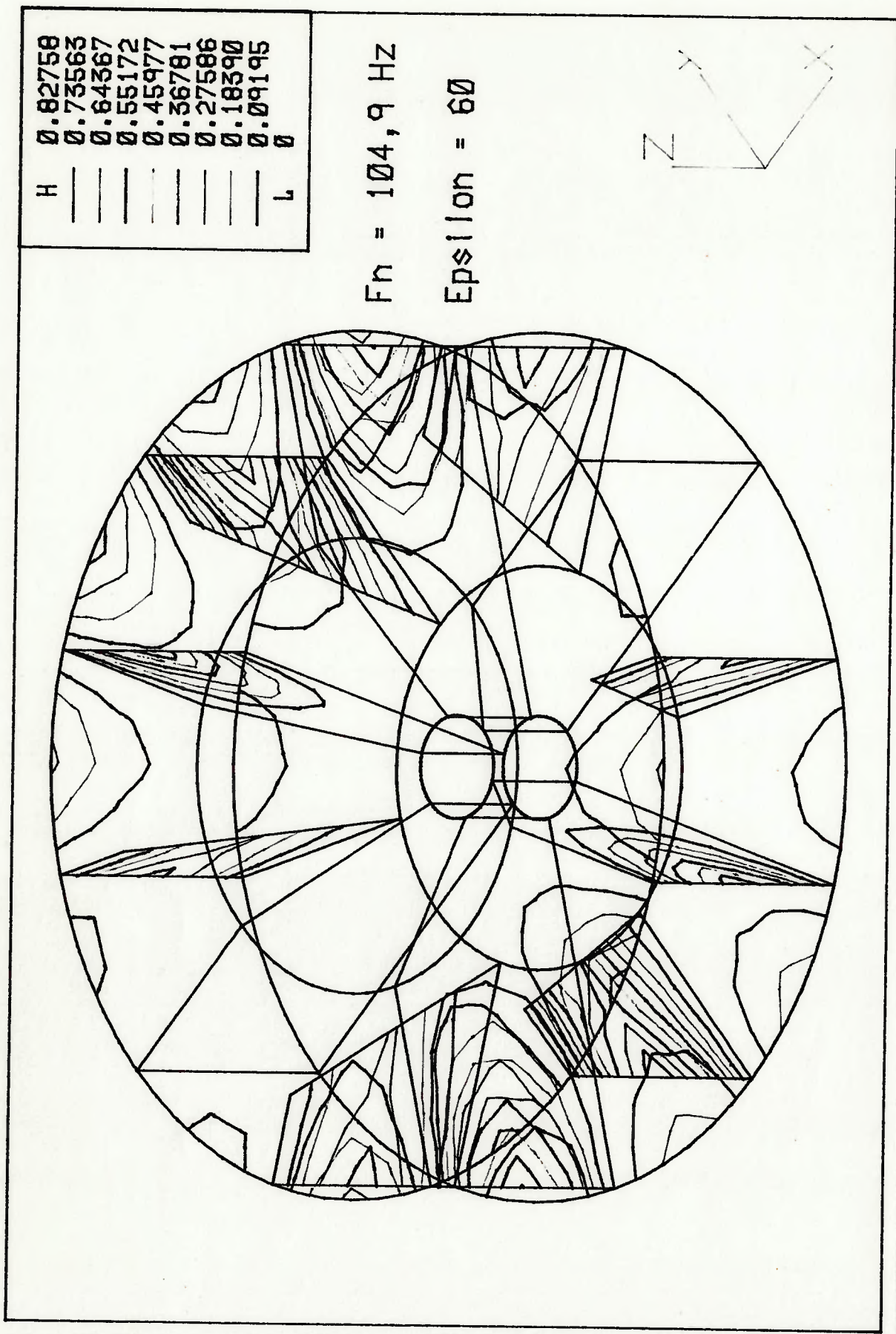


Figura 6.6: Modos de Vibração do Impelidor Original estacionário obtido da modelagem por elementos finitos

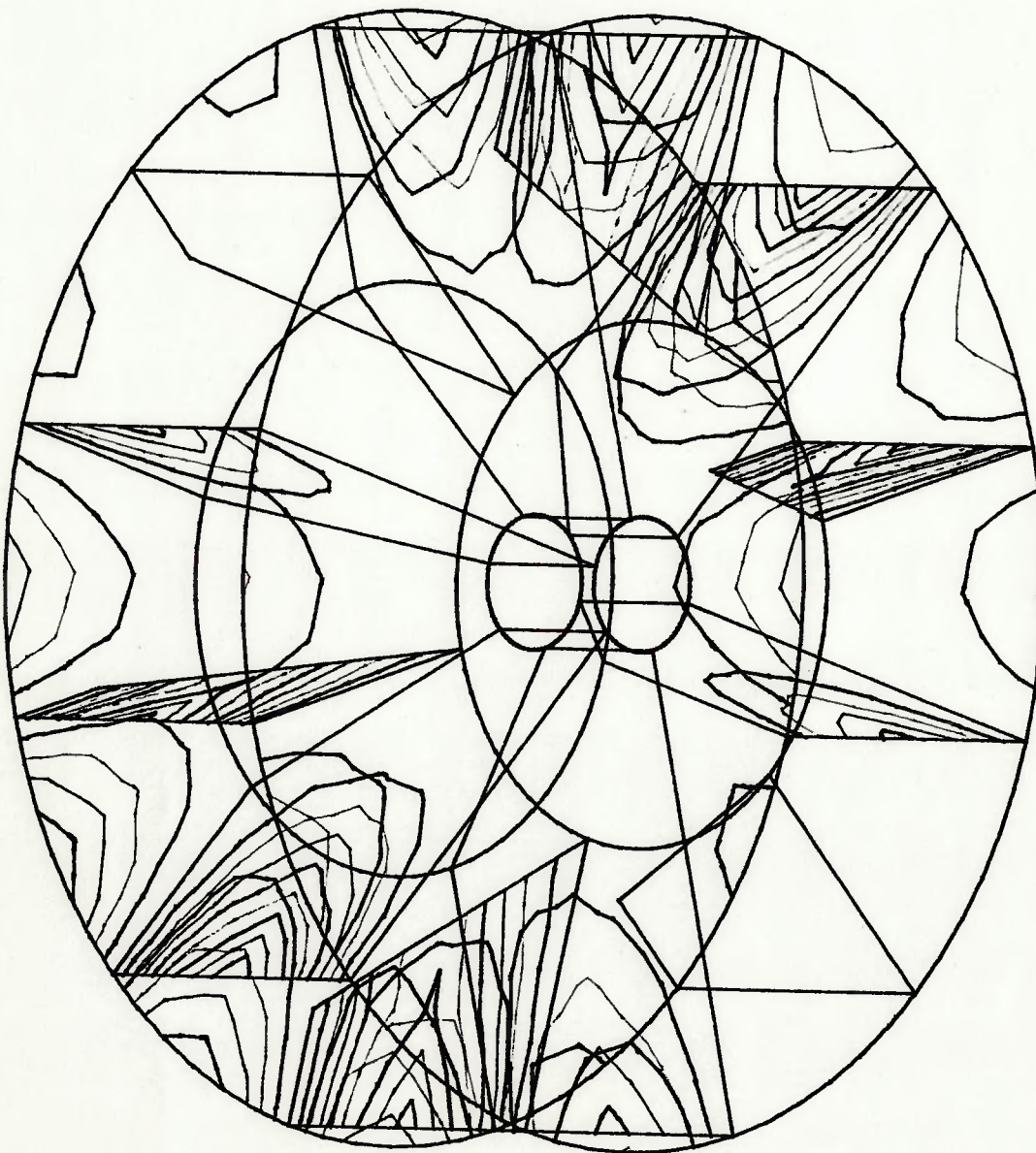


0.75092
0.66749
0.58405
0.50061
0.41718
0.33374
0.25030
0.16687
0.08343
0

H
—
—
—
—
—
—
—
—
L

$F_n = 104,9 \text{ Hz}$

$\text{Epsilon} = 60$



**Figura 6.7: Modos de Vibração do Impelidor Original estacionário obtido da modelagem por elementos finitos**

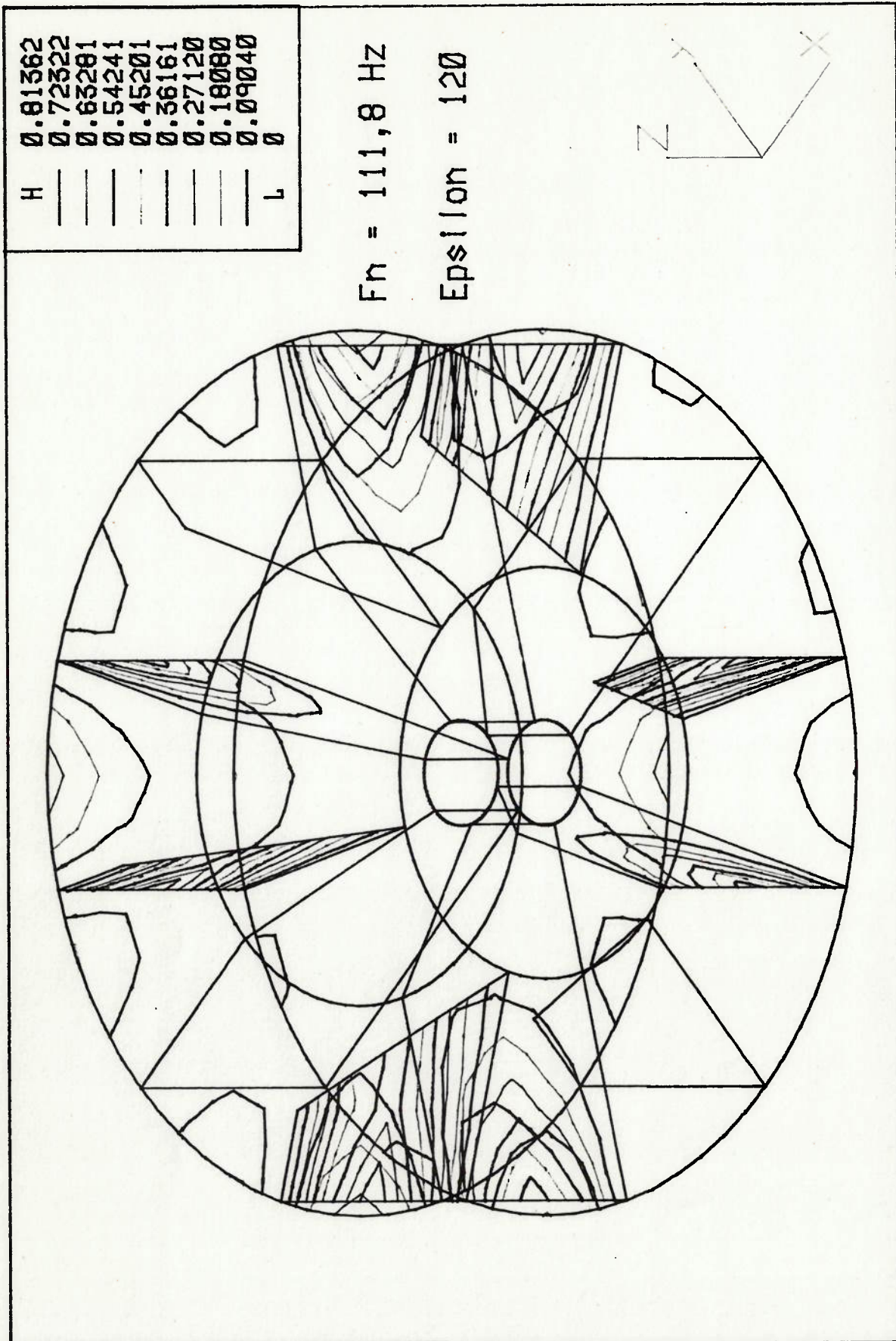


Figura 6.8: Modos de Vibração do Impelidor Original estacionário obtido da modelagem por elementos finitos



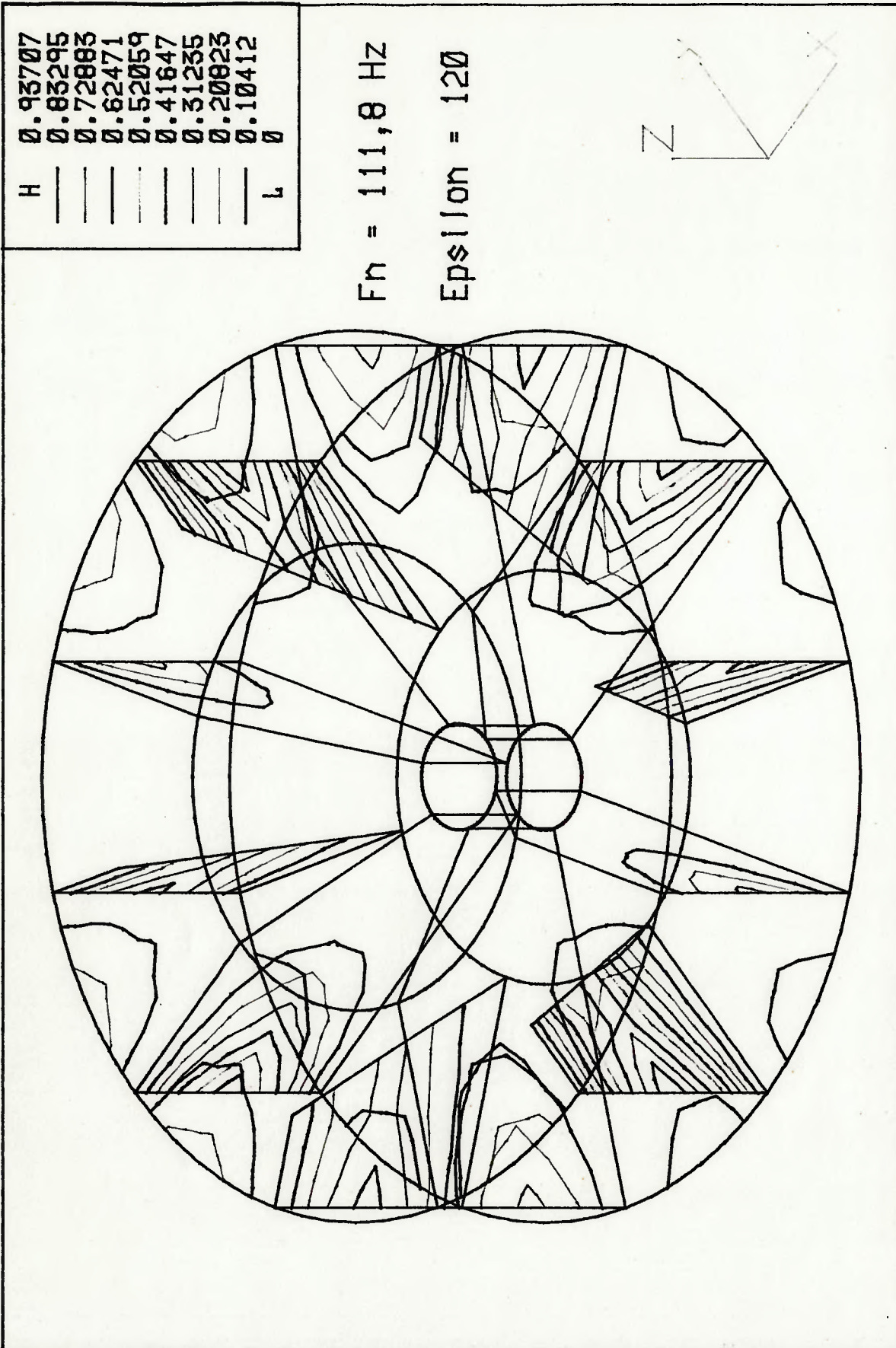
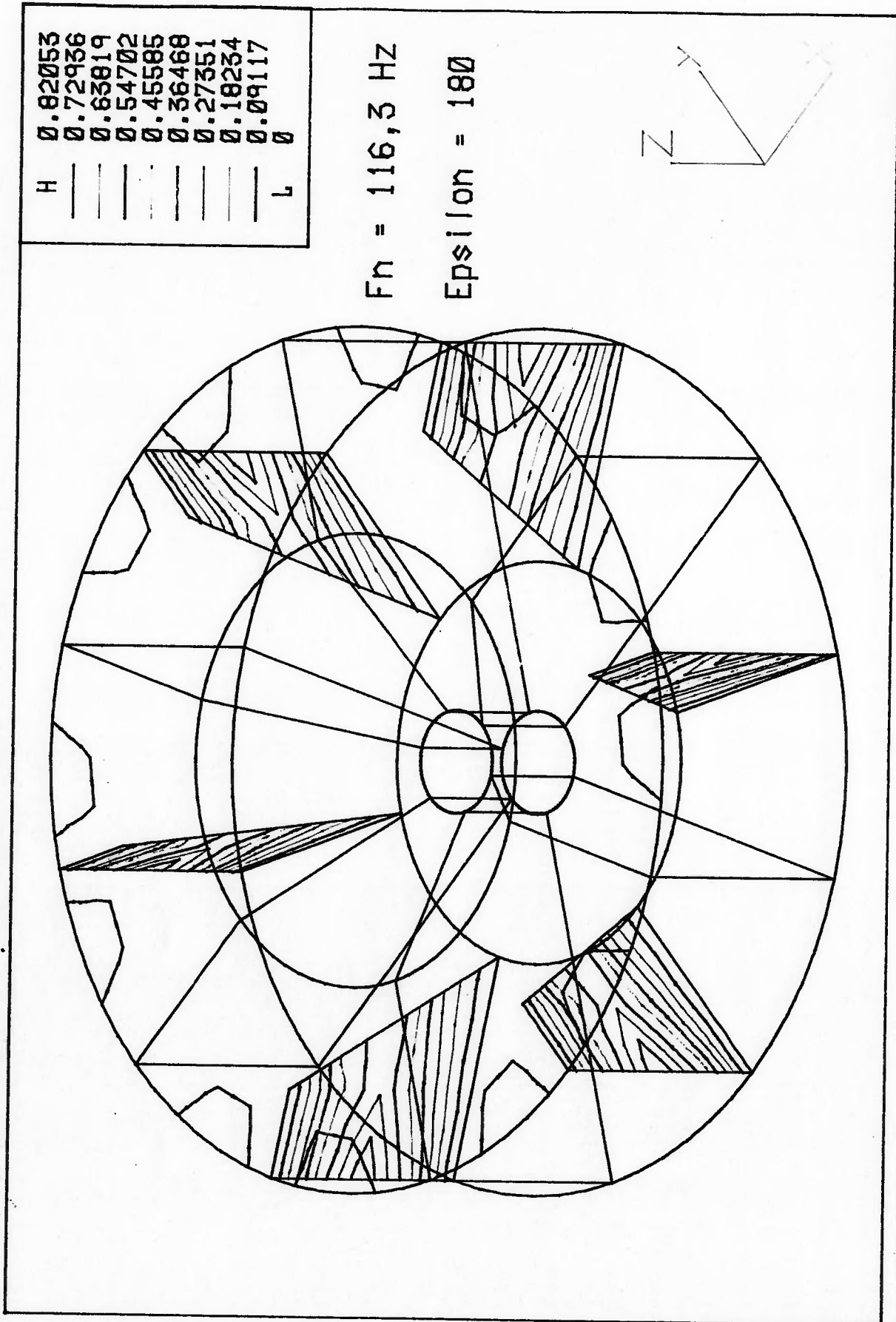


Figura 6.9: Modos de Vibração do Impelidor Original estacionário obtido da modelagem por elementos finitos





**Figura 6.10: Modos de Vibração do Impelidor Original estacionário obtido da modelagem por elementos finitos**

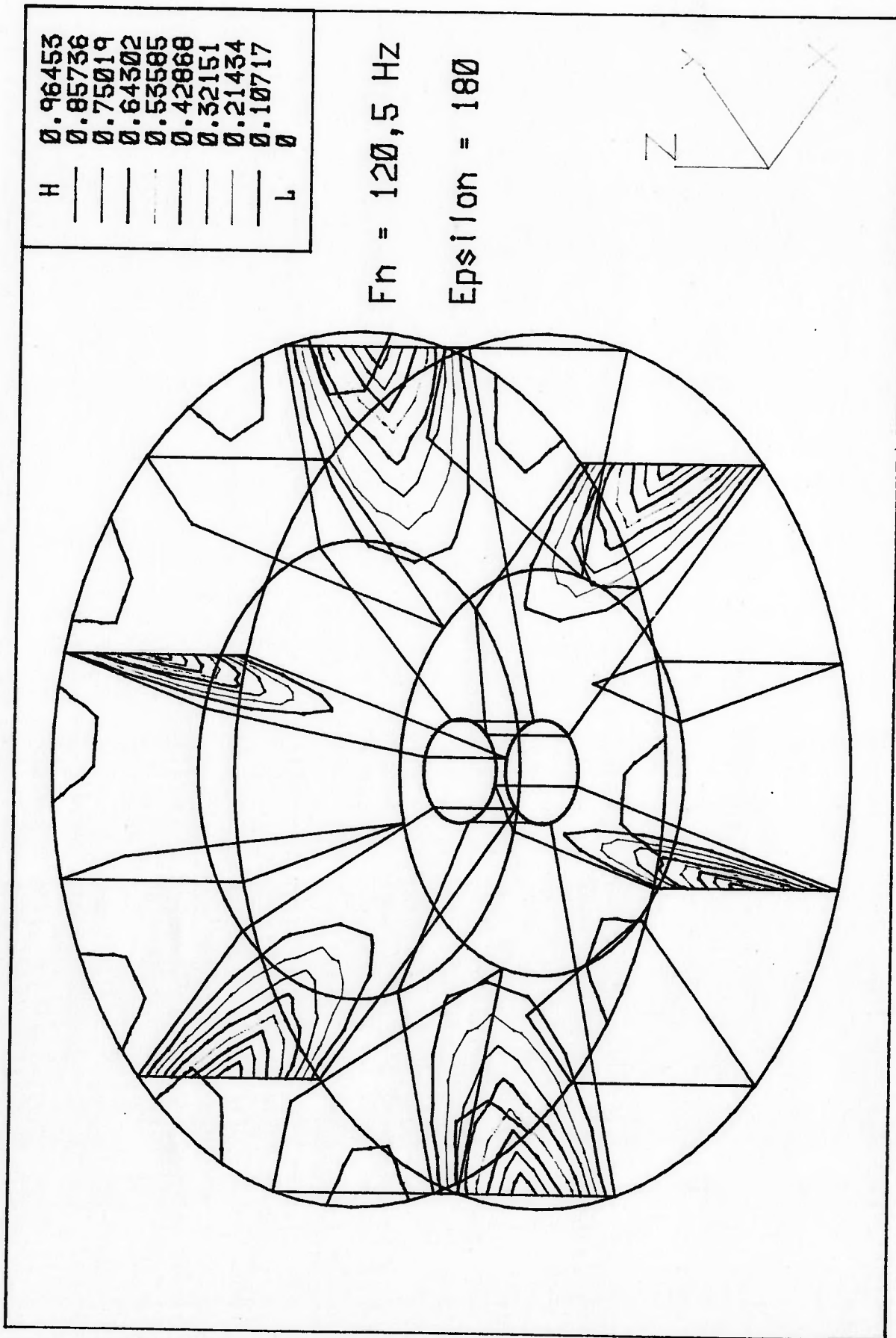


Figura 6.11: Modos de Vibração do Impelidor Original estacionário obtido da modelagem por elementos finitos

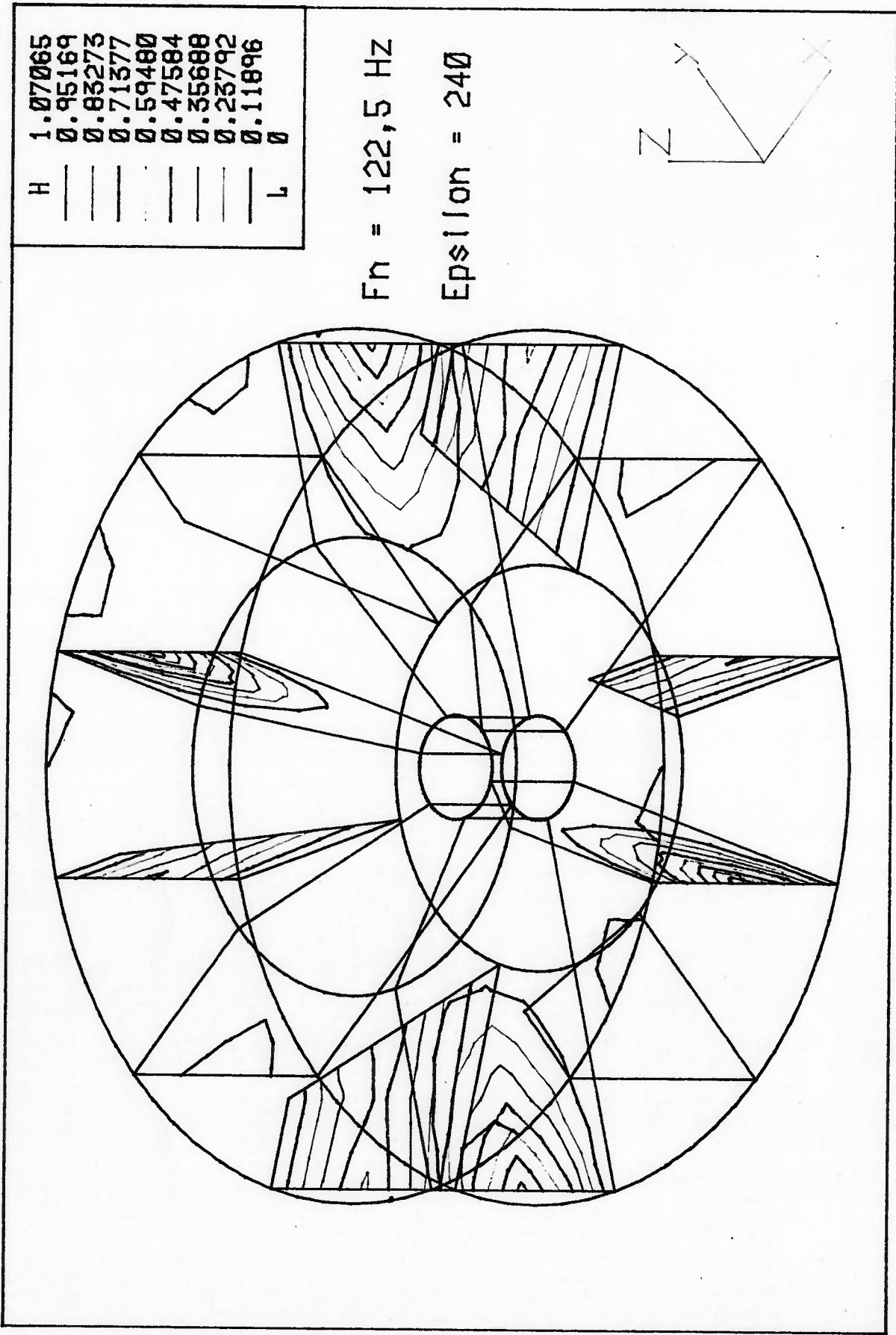
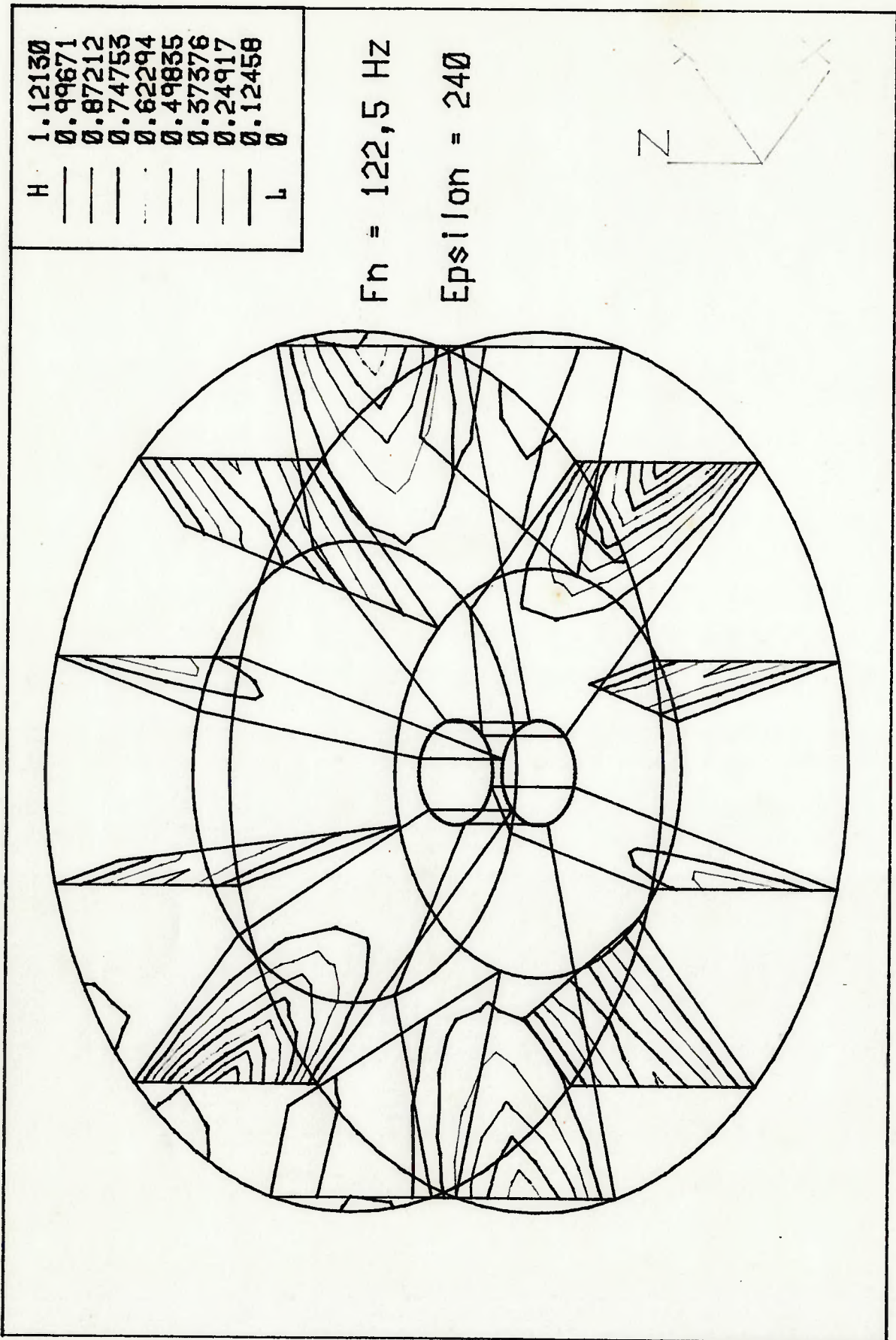


Figura 6.12: Modos de Vibração do Impelidor Original estacionário obtido da modelagem por elementos finitos



**Figura 6.13: Modos de Vibração do Impelidor Original estacionário obtido da modelagem por elementos finitos**







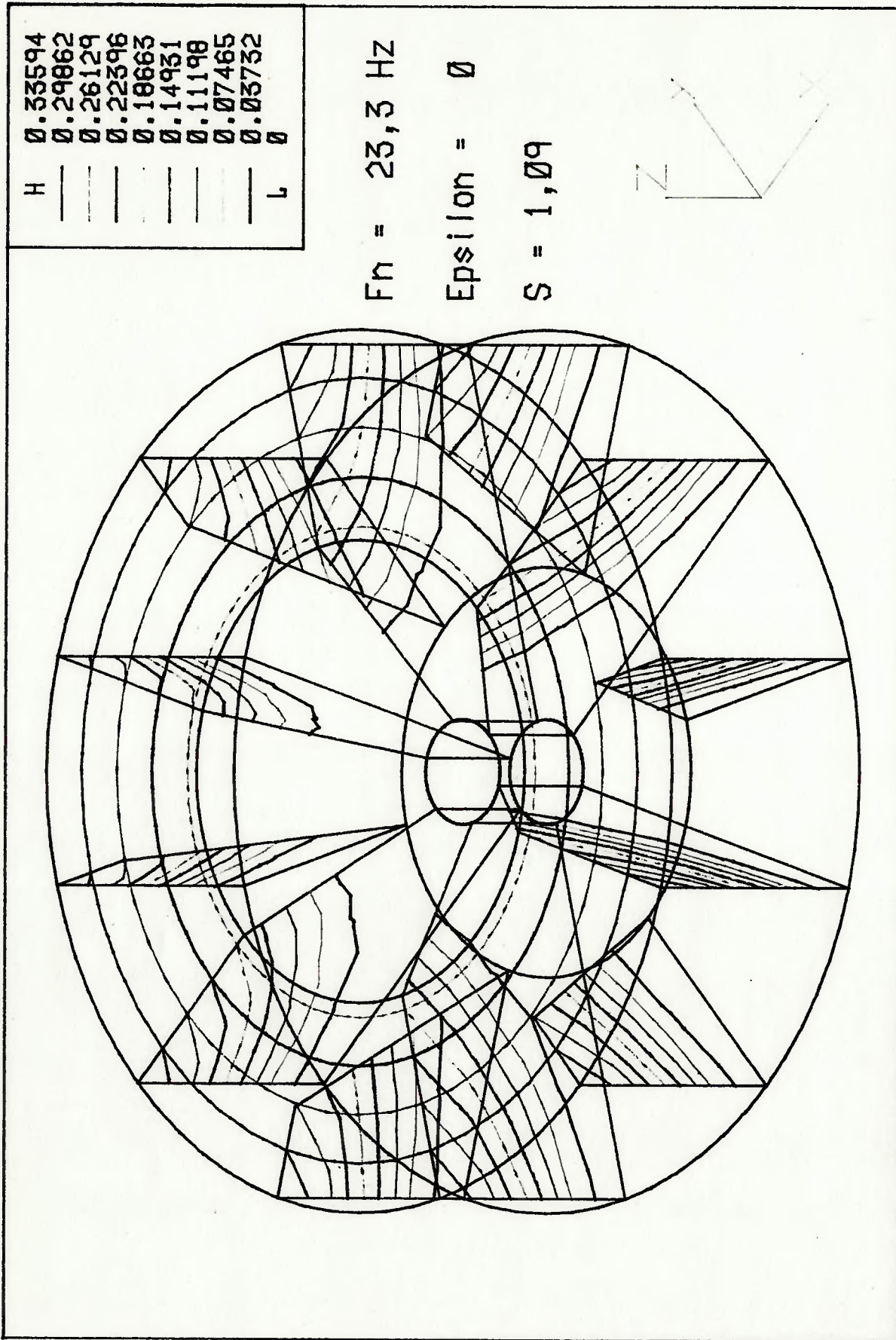


Figura 6.15: Modos de Vibração do Impelidor Original em 600 rpm obtido da modelagem por elementos finitos

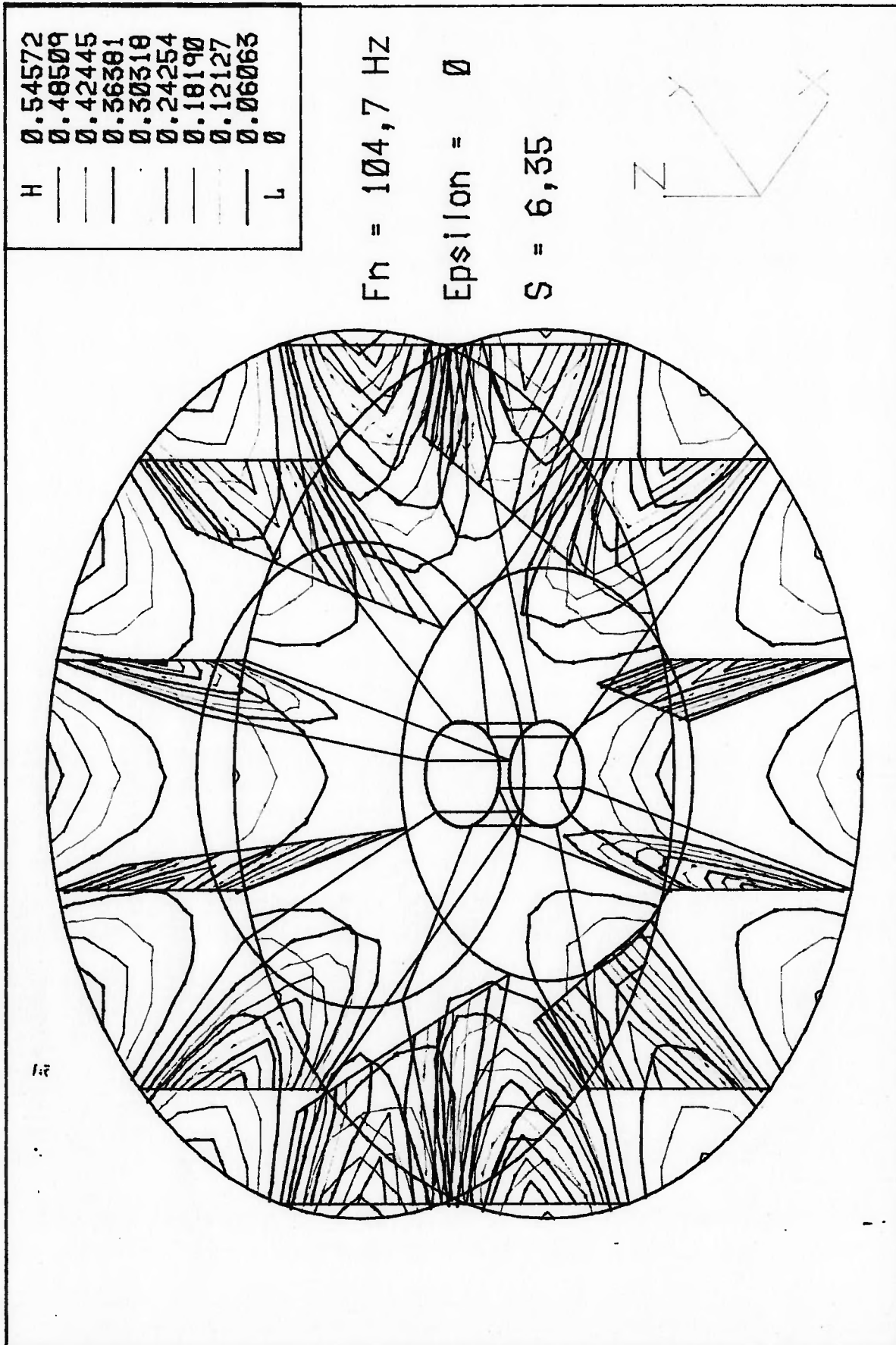


Figura 6.16: Modos de Vibração do Impelidor Original em 600 rpm obtido da modelagem por elementos finitos

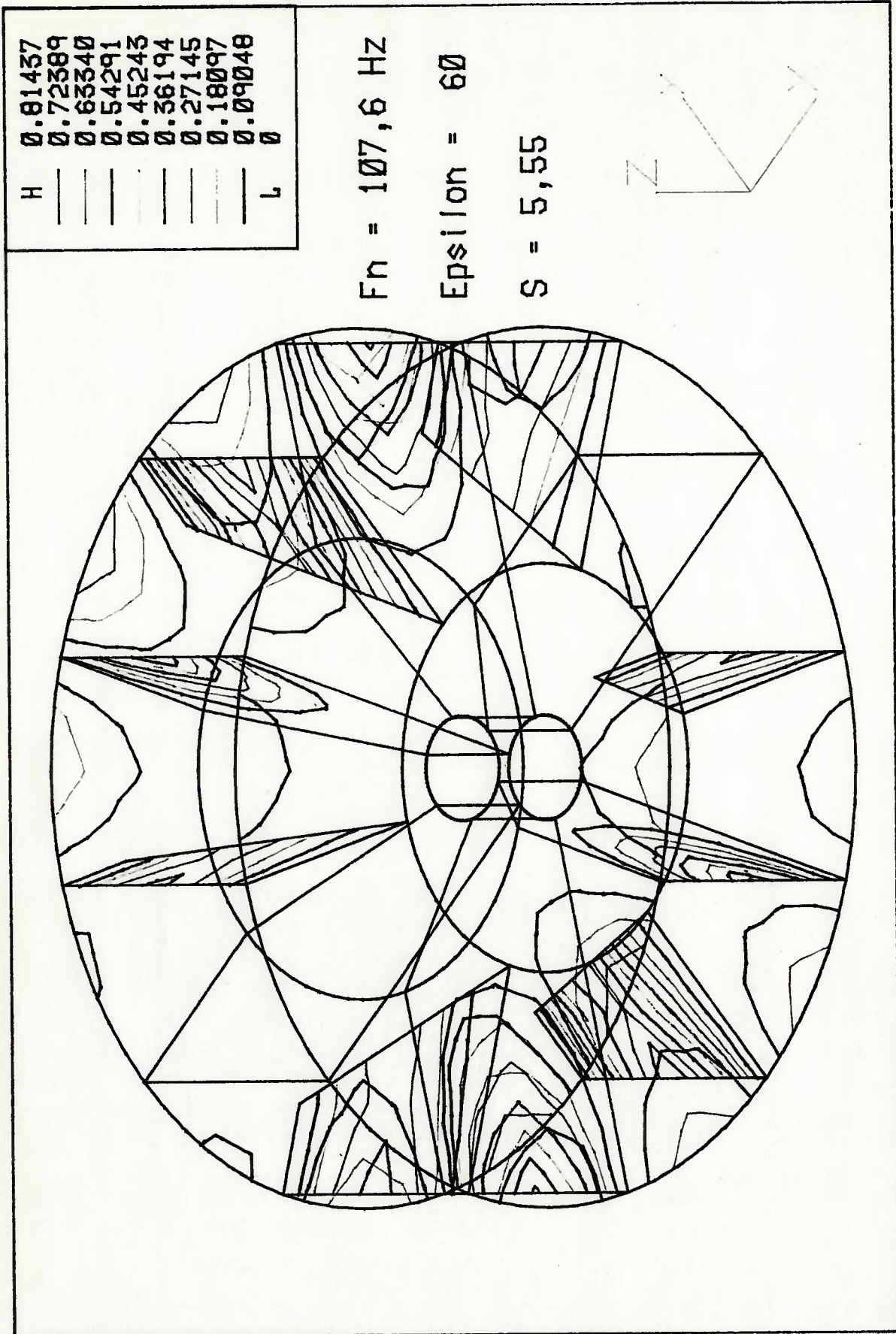


Figura 6.17: Modos de Vibração do Impelidor Original em 600 rpm obtido da modelagem por elementos finitos



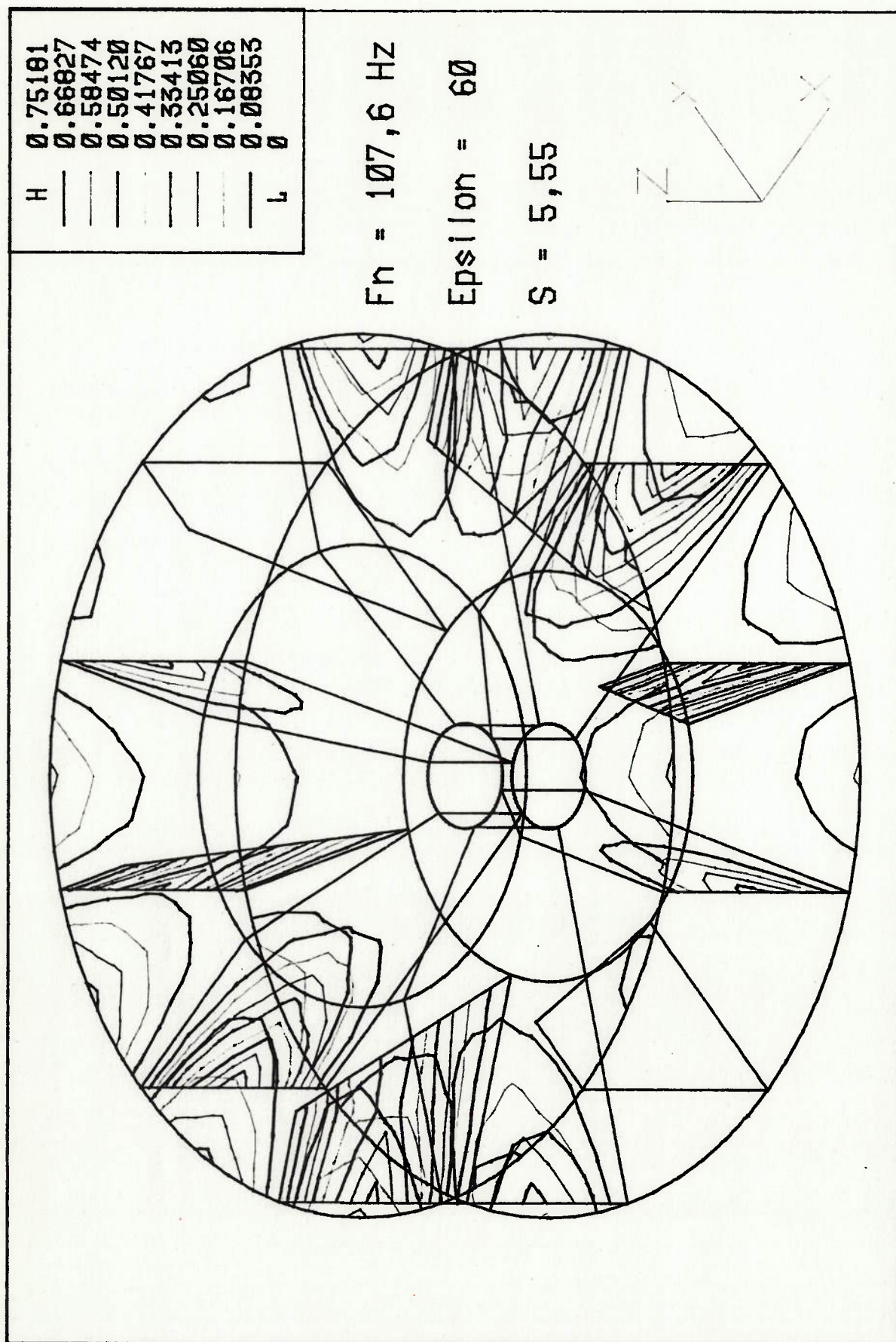
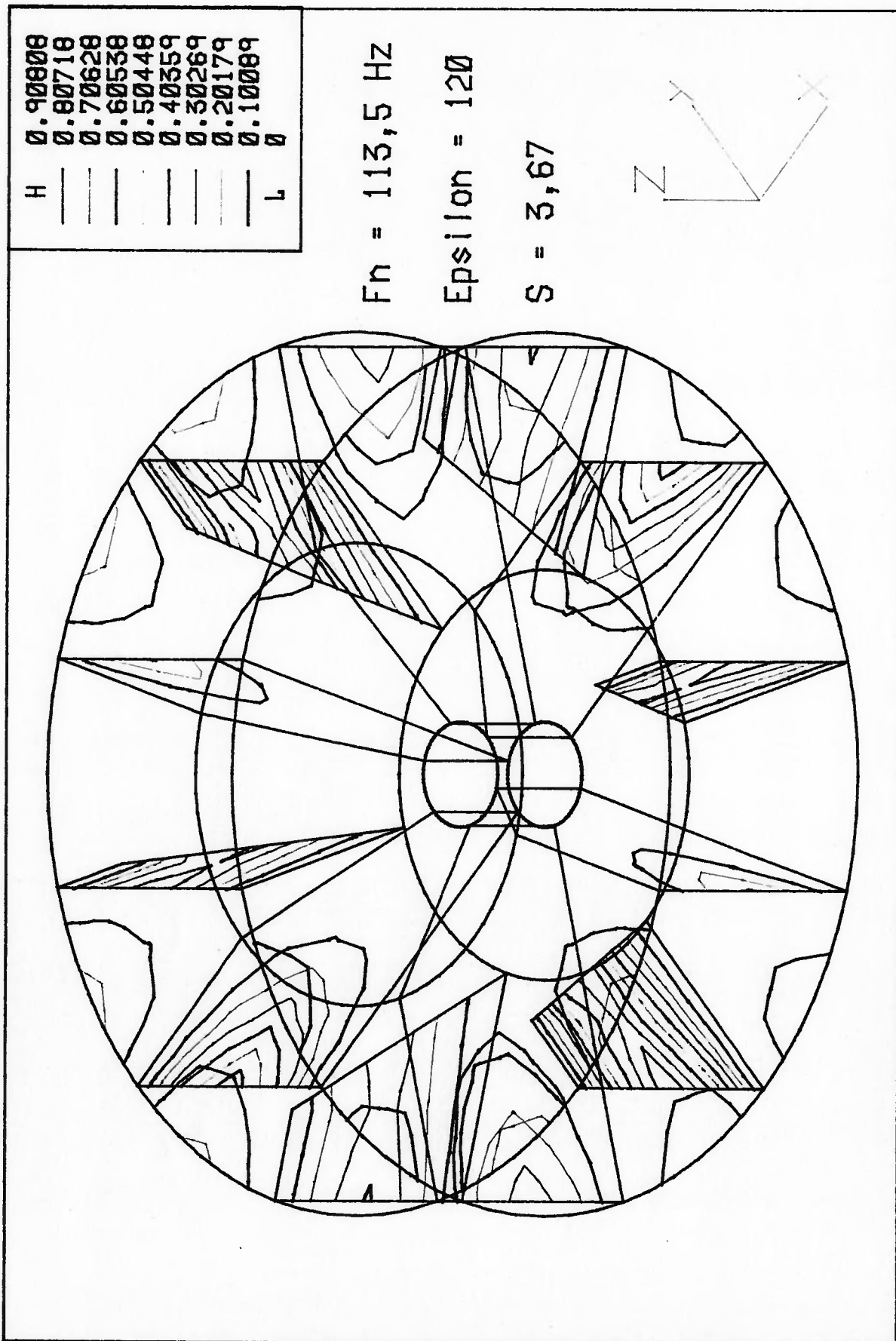


Figura 6.18: Modos de Vibração do Impelidor Original em 600 rpm obtido da modelagem por elementos finitos



**Figura 6.19: Modos de Vibração do Impelidor Original em 600 rpm obtido da modelagem por elementos finitos**



H	0.80776
—	0.71801
—	0.62826
—	0.53851
—	0.44876
—	0.35900
—	0.26925
—	0.17950
L	0.08975

$F_n = 113,5 \text{ Hz}$

$\text{Epsilon} = 120$

$S = 3,67$

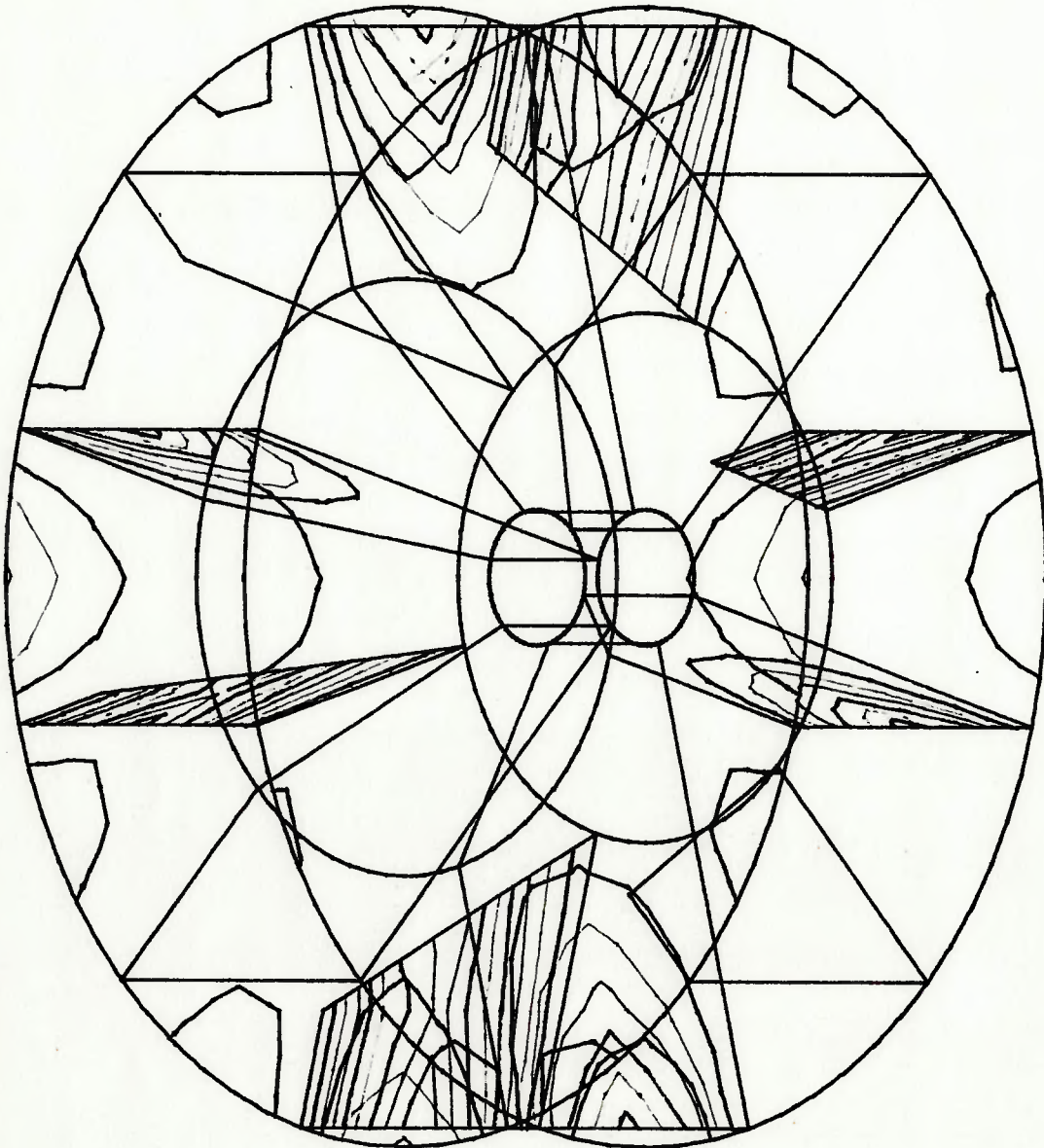
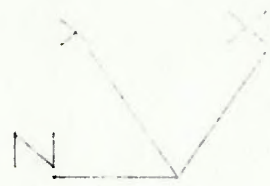


Figura 6.20: Modos de Vibração do Impelidor Original em 600 rpm obtido da modelagem por elementos finitos

H	0.76654
—	0.68137
—	0.59620
—	0.51103
—	0.42585
—	0.34068
—	0.25551
—	0.17034
L	0.08517
—	0

$F_n = 117,1 \text{ Hz}$

$\text{Epsilon} = 180$

$S = 2,00$

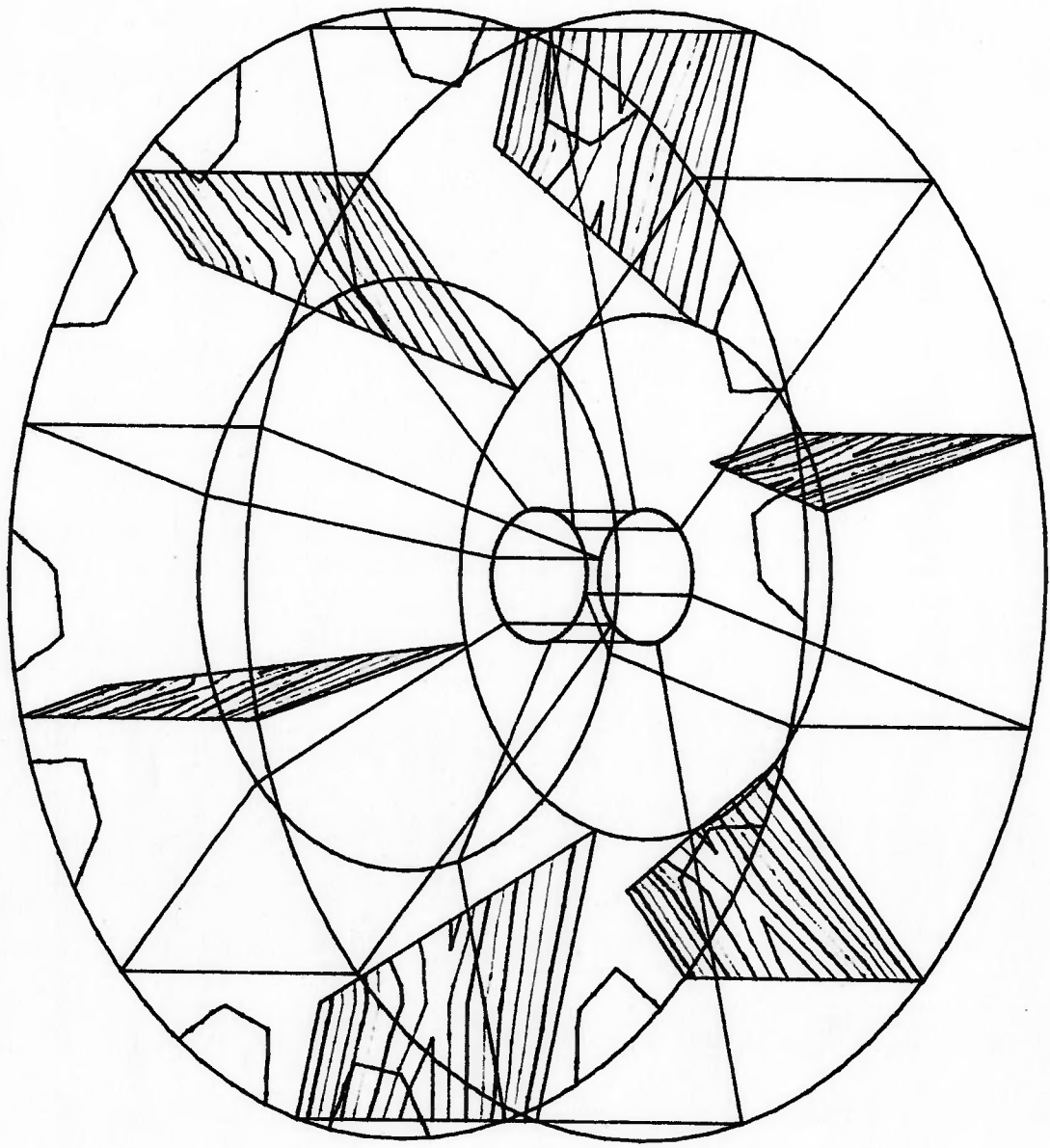
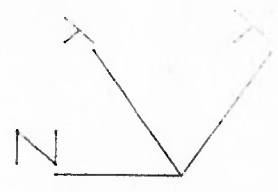


Figura 6.21: Modos de Vibração do Impelidor Original em 600 rpm obtido da modelagem por elementos finitos

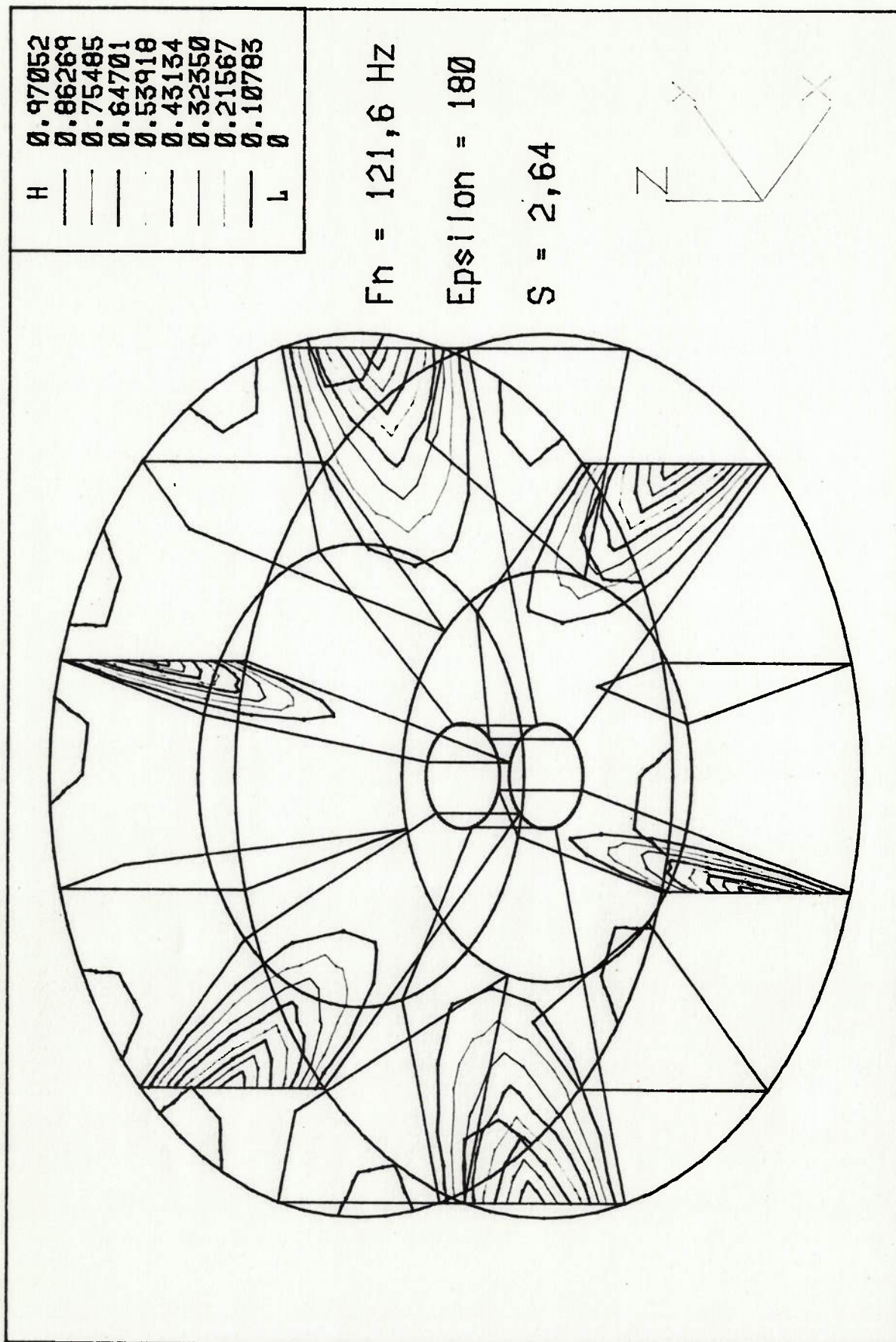
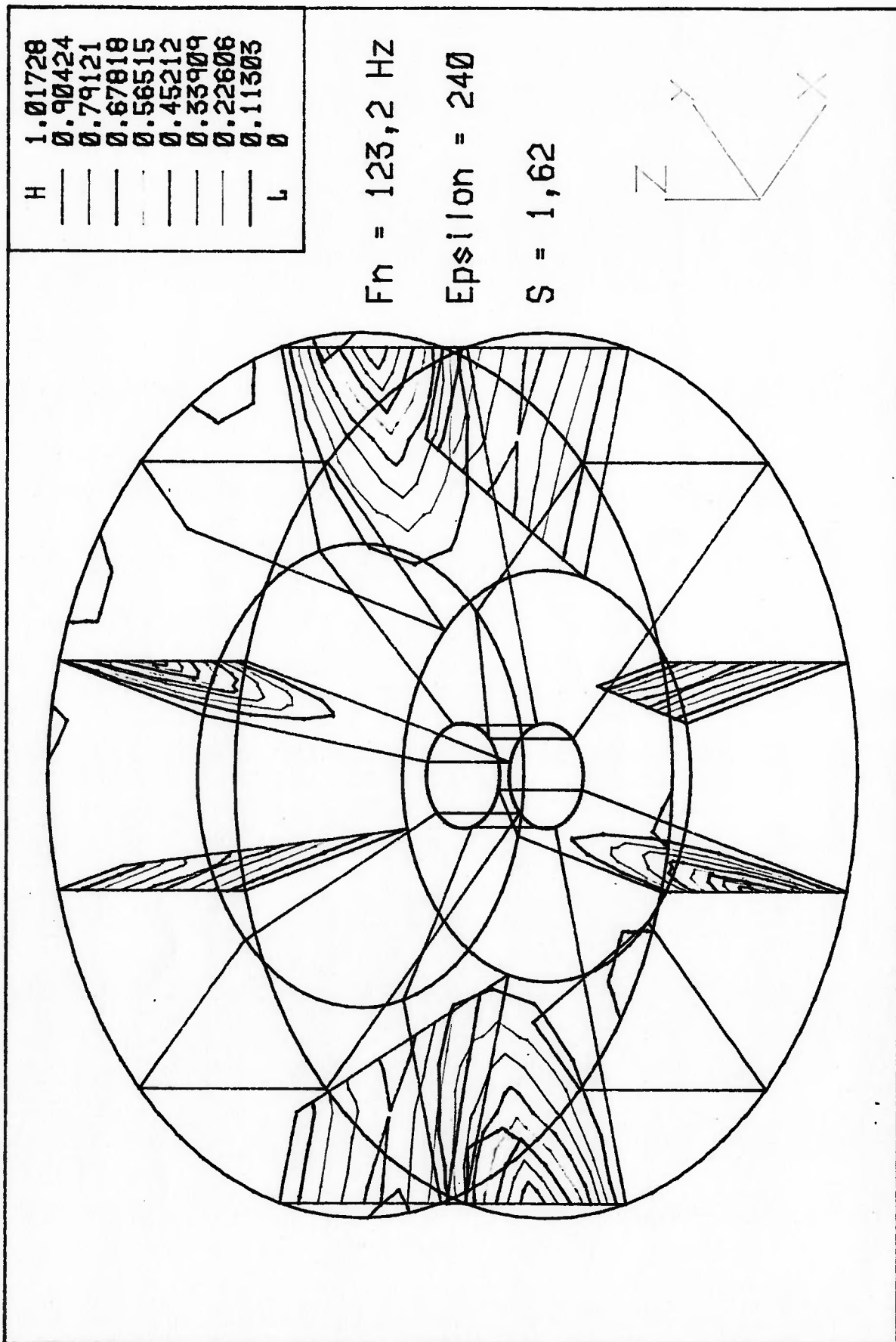


Figura 6.22: Modos de Vibração do Impelidor Original em 600 rpm obtido da modelagem por elementos finitos





**Figura 6.23: Modos de Vibração do Impelidor Original em 600 rpm obtido da modelagem por elementos finitos**

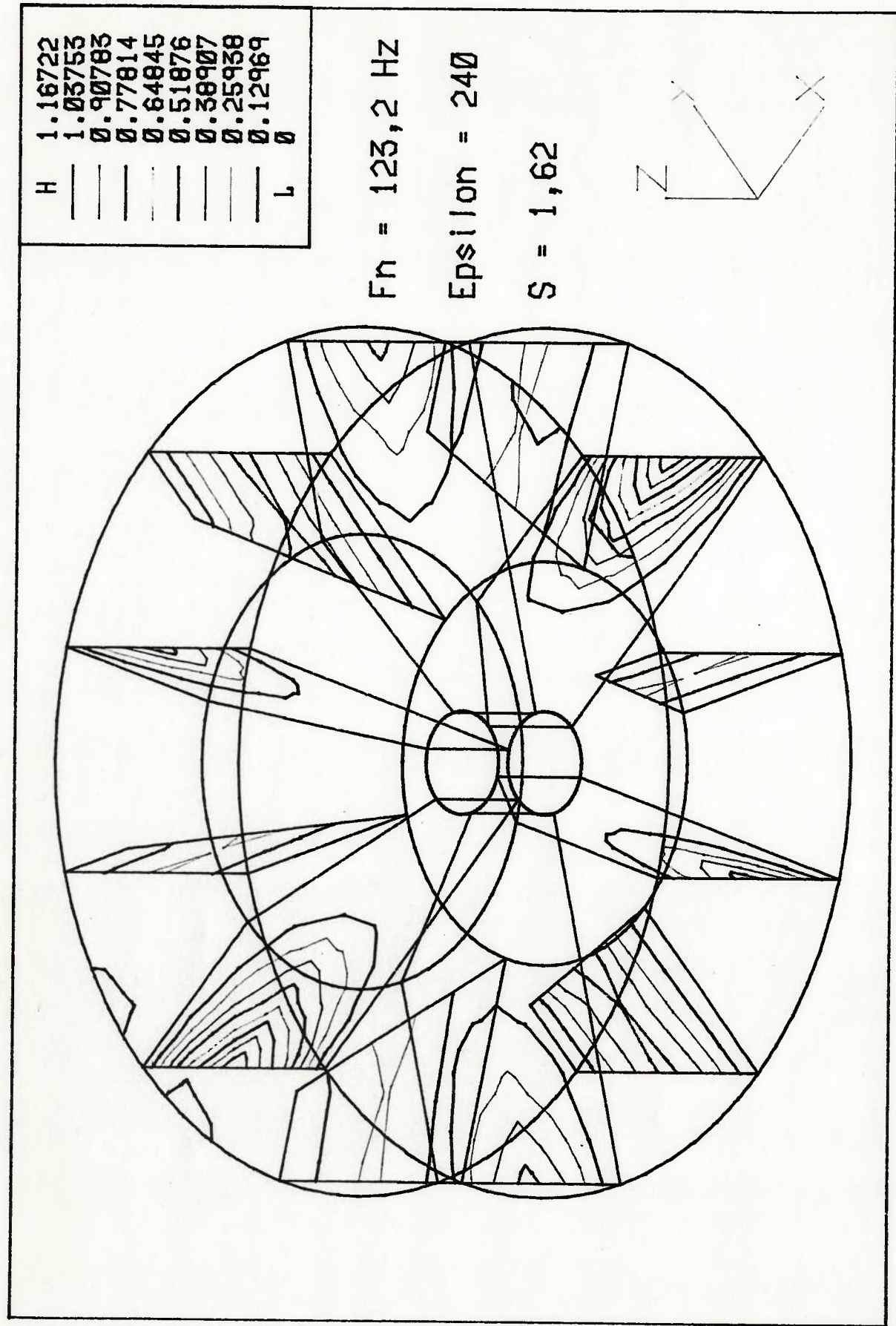


Figura 6.24: Modos de Vibração do Impelidor Original em 600 rpm obtido da modelagem por elementos finitos



### 6.1.2. Ensaio de Análise Modal Experimental do Impelidor Original

Para a realização dos ensaios o impelidor foi montado em um eixo de teste, pesando aproximadamente 90 Kg, originalmente destinado ao balanceamento do impelidor. Este foi apoiado sobre dois pedestais de aço com roletes que permitiam sua rotação. Na figura 6.1 é mostrado uma foto do impelidor original na montagem de ensaio. Os ensaios foram executados à temperatura ambiente ( $20^{\circ}\text{C}$ ), com o impelidor estacionário.

Os resultados de ensaio pelo método de ajuste de curvas são apresentados na tabela 6. Erro! Indicador não definido.. Pode-se observar nas FRFs do impelidor original, apresentada na figura 6.37, a existência de um número grande de ressonâncias ( $\cong 20$  modos de vibração) na faixa de 100 Hz a 300 Hz com frequências naturais muito próximas uma das outras.

TABELA 6.2: FREQUÊNCIAS NATURAIS E AMORTECIMENTOS MODAIS  
 IMPELIDOR DE VENTILADOR ORIGINAL

Modo:	Frequência Natural: (Hz)	Amortecimento: (%)
1	122,69	0,05
2	125,03	0,03
3	128,43	0,03
4	128,53	0,03
5	142,75	0,08
6	148,39	0,14
7	157,26	0,03
8	193,28	0,06
9	193,51	0,06
10	198,08	0,04
11	203,18	0,08
12	219,80	0,24
13	225,69	0,06
14	233,25	0,05
15	242,05	0,05
16	248,36	0,08
17	248,40	0,07
18	260,59	0,00
19	264,72	0,12
20	271,84	0,07

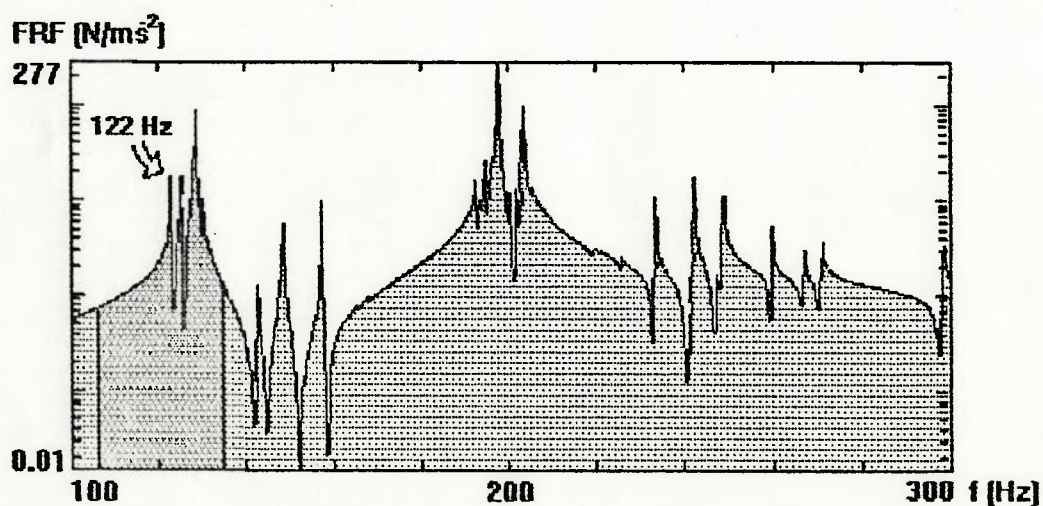
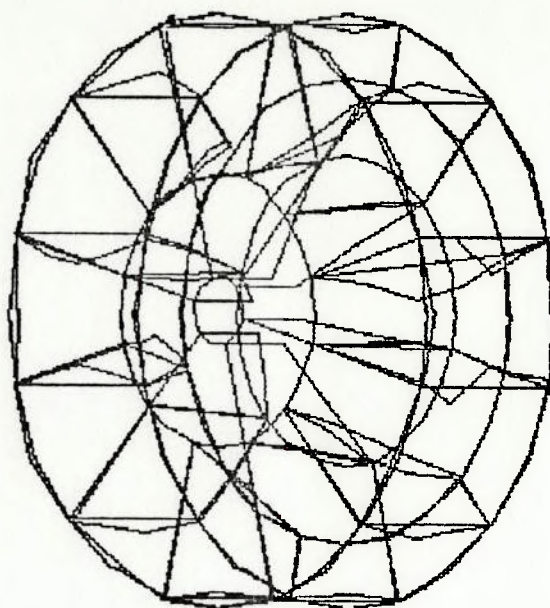


FIGURA 6.25: Função de Resposta em Frequência Típica do Impelidor Original

As ressonâncias predominantes nas FRFs representativas da estrutura tem as seguintes frequências: 122,75 Hz, 128,50 Hz, 157,25 Hz , 197,75 Hz, 203,50 Hz e 242,00 Hz. Com exceção do modo em 128,50 Hz, os demais apresentam forma dos modos de vibração bem formados e de padrão periódico.

O modo de vibração identificado em 122,69 Hz, apresentado na figura 6.26, exhibe movimento de "fole" de cada setor do impelidor. Representa o modo crítico para operação do impelidor, dado que o padrão formado é repetitivo com 6 diâmetros nodais, igualando assim a metade do número de pás. Portanto, trata-se do caso mais severo de velocidade de rotação crítica de disco. Analisando o movimento vibratório neste modo pode-se verificar que todas as placas de um setor apresentam deformação sincronizada para fora num dado instante, o que favorece a absorção de energia do pulso estático de pressão. Este modo de vibração foi considerado como intolerável para o funcionamento do impelidor.





**FIGURA 6.26:** Modo de Vibração problemático do Impelidor Original com Freqüência Natural de 123 Hz.

## 6.2. Modificação Estrutural do Impelidor

Na análise do impelidor original identificou-se o modo em 122,69 Hz como sendo problemático para o funcionamento do ventilador. Não há indício de que os demais modos de vibração possam ser efetivamente excitados quando o impelidor esta em operação. Assim foram estudas possíveis modificações estruturais do impelidor, capazes de eliminar este modo desta faixa de freqüência.

Observando o modo de vibração em 122,69 Hz, verifica-se que o movimento de pás adjacentes é em oposição de fase e com

grandes amplitudes. Assim obteve-se pela introdução de barras de reforço interligando pás adjacentes de forma a bloquear o movimento relativo destas.

### **6.3. Estudo do Impelidor Modificado**

Após a modificação, o impelidor foi novamente ensaio pelos dois métodos de análise modal experimental. Infelizmente, na época da realização dos ensaios, não foi possível realizar-se a modelagem por elementos finitos, que somente foi realizada posteriormente. O modelo de elementos finitos do impelidor modificado simulou a condição estacionária e em rotação. Das frequências naturais obtidas nesta análise calcularam-se os Coeficientes de Southwell do impelidor modificado.

#### **6.3.1. Modelo de Elementos Finitos do Impelidor Modificado**

Introduziu-se a modificação estrutural no model do impeldidor que foi então novamente analisado. O novo modelo é composto de 612 elementos de placa conforme a malha mostrada na figura 6.4. Foram calculadas as primeiras 10 frequências naturais do sistema, calculados em repouso e na rotação de 600 rpm. Os resultados do calculo são apresentados na tabela 6.3.



**TABELA 6.3: FREQUÊNCIAS NATURAIS E COEFICIENTES DE SOUTHWELL DO IMPELIDOR MODIFICADO**  
**RESULTADOS DA MODELAGEM POR ELEMENTOS FINITOS**

Modo de Vibração			Frequência Natural (Hz)		Coefic. de Southwell
Nº	$\epsilon$ (rad)	Descrição	0 rpm	600 rpm	S (-)
1	0	torcional	23.19	25.56	1.08
2	0	torcional	107.29	108.15	1.37
3	0	transversal em contra-fase	134.09	138.42	3.43
4	$\pi/3$	transversal em contra-fase	136.64	140.57	3.30
5	$\pi/3$	transversal em contra-fase	136.64	140.57	3.30
6	0	transversal em fase	140.74	146.78	4.16
7	$2\pi/3$	transversal em contra-fase	142.74	145.93	3.03
8	$2\pi/3$	transversal em contra-fase	142.73	145.93	3.03
9	$\pi/3$	transversal em fase	144.20	148.66	3.61
10	$\pi/3$	transversal em fase	144.20	148.66	3.61

$\epsilon$  = constante de fase

Nas figura 6.27 a 6.36 são apresentados os modos de vibração obtidos na simulação em condição estacionário.

À partir dos resultados das frequências naturais calculadas, determinou-se os Coeficientes de Southwell à partir da Fórmula de Southwell. Os valores obtidos para os Coeficientes de Southwell do impelidor original estão relacionados na tabela 6.3.

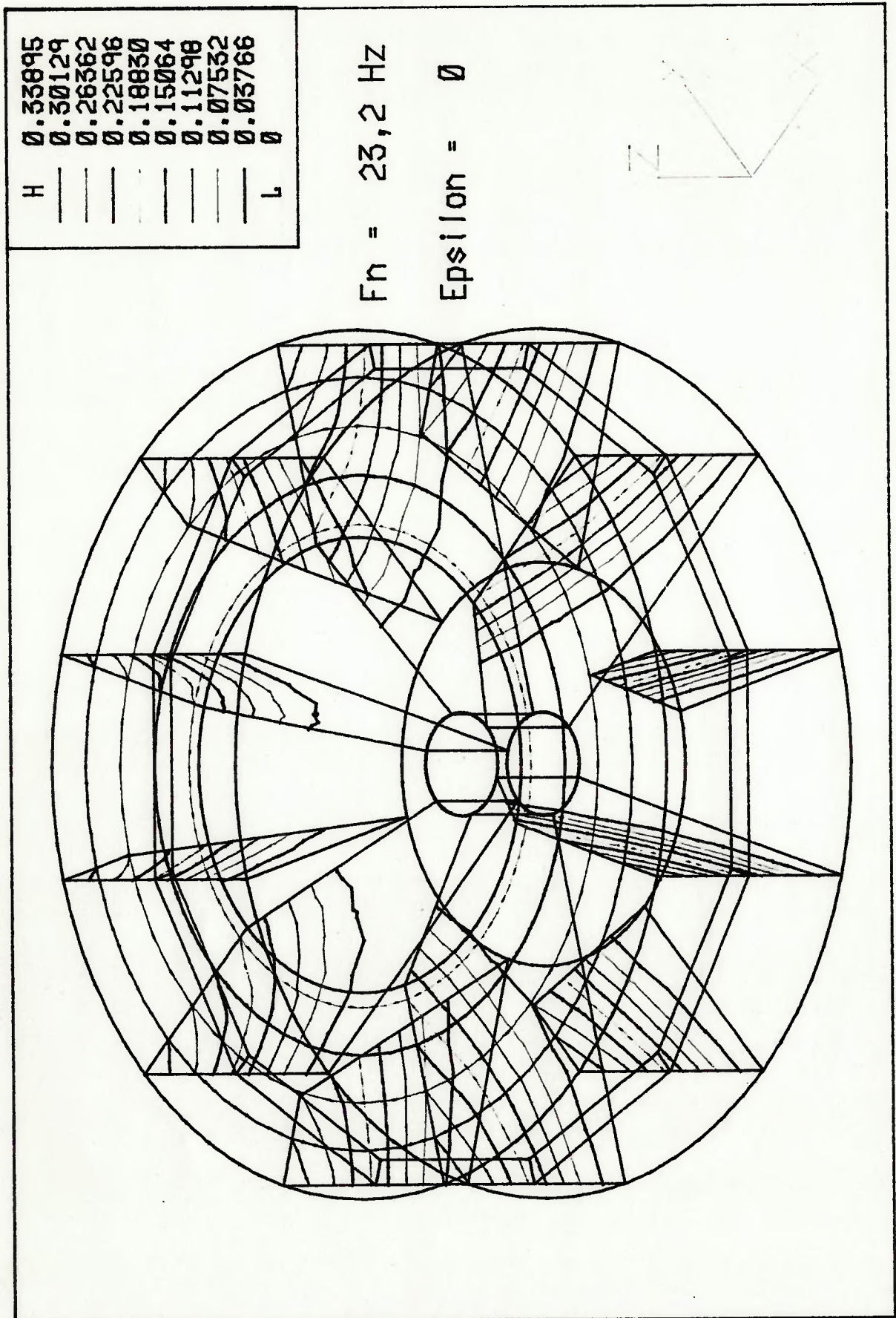


Figura 6.27: Modos de Vibração do Impelidor Modificado estacionário obtido da modelagem por elementos finitos



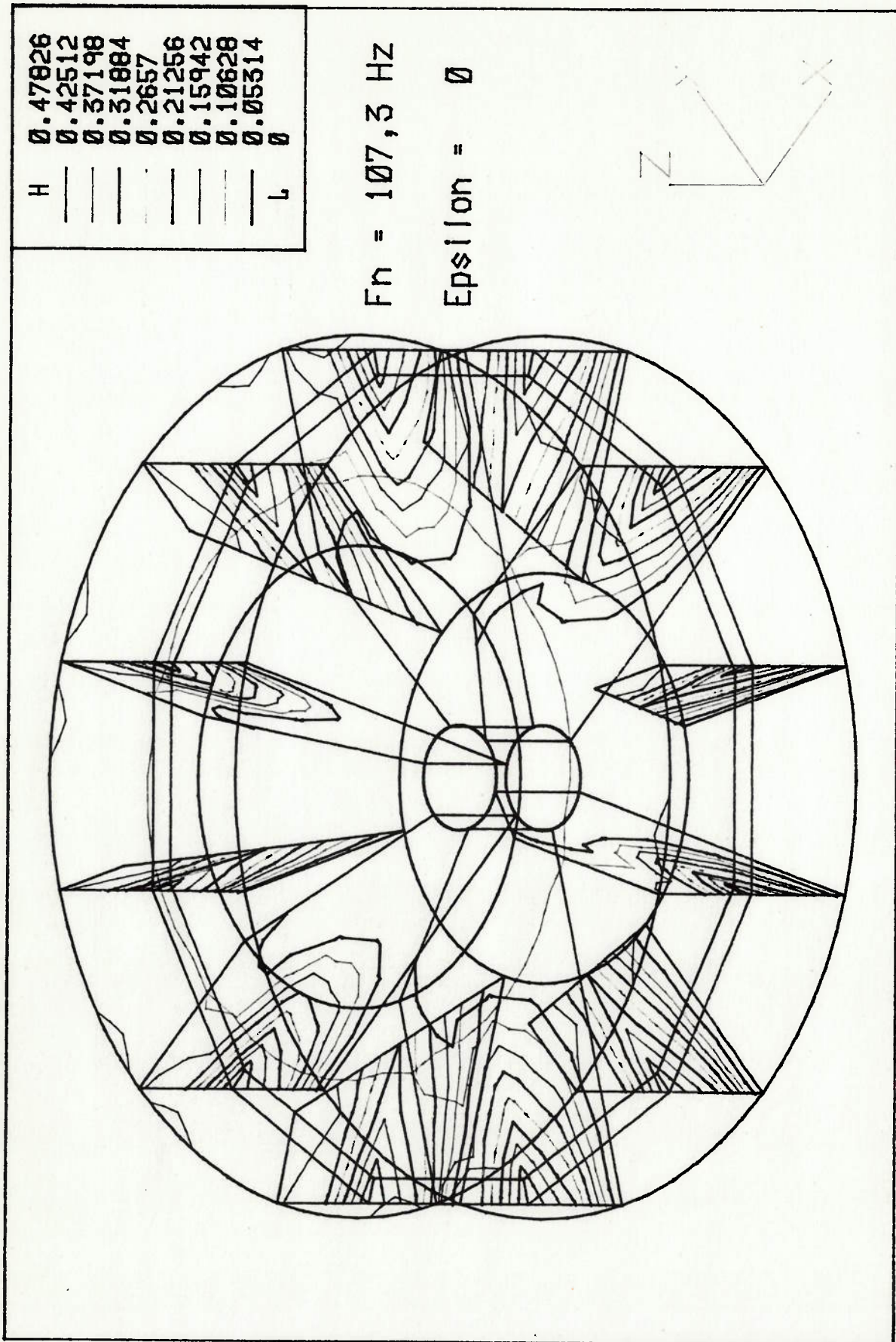
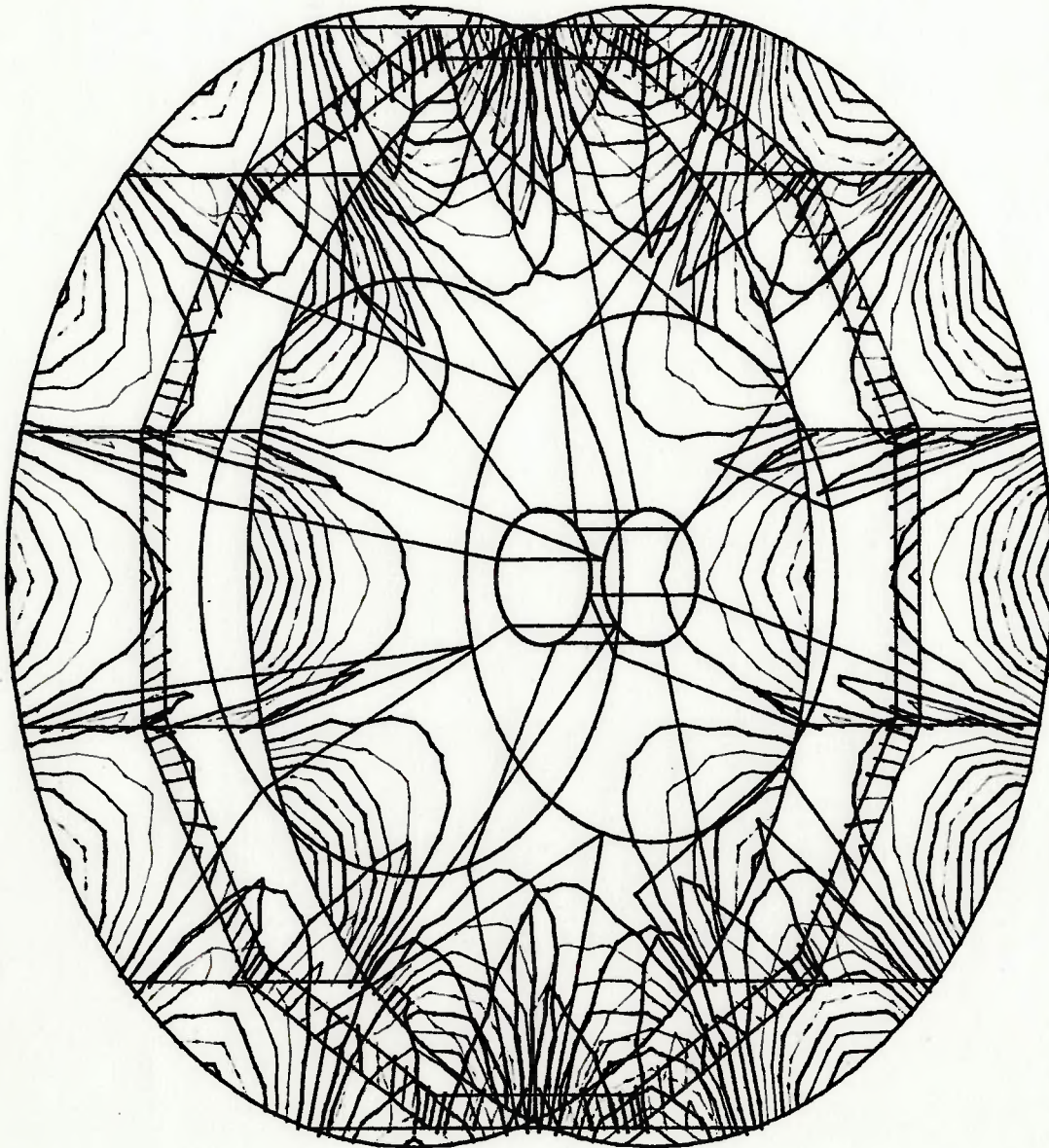


Figura 6.28: Modos de Vibração do Impelidor Modificado estacionário obtido da modelagem por elementos finitos

H	0.54418
—	0.48371
—	0.42325
—	0.36278
—	0.30232
—	0.24185
—	0.18139
—	0.12092
L	0.06046
	0

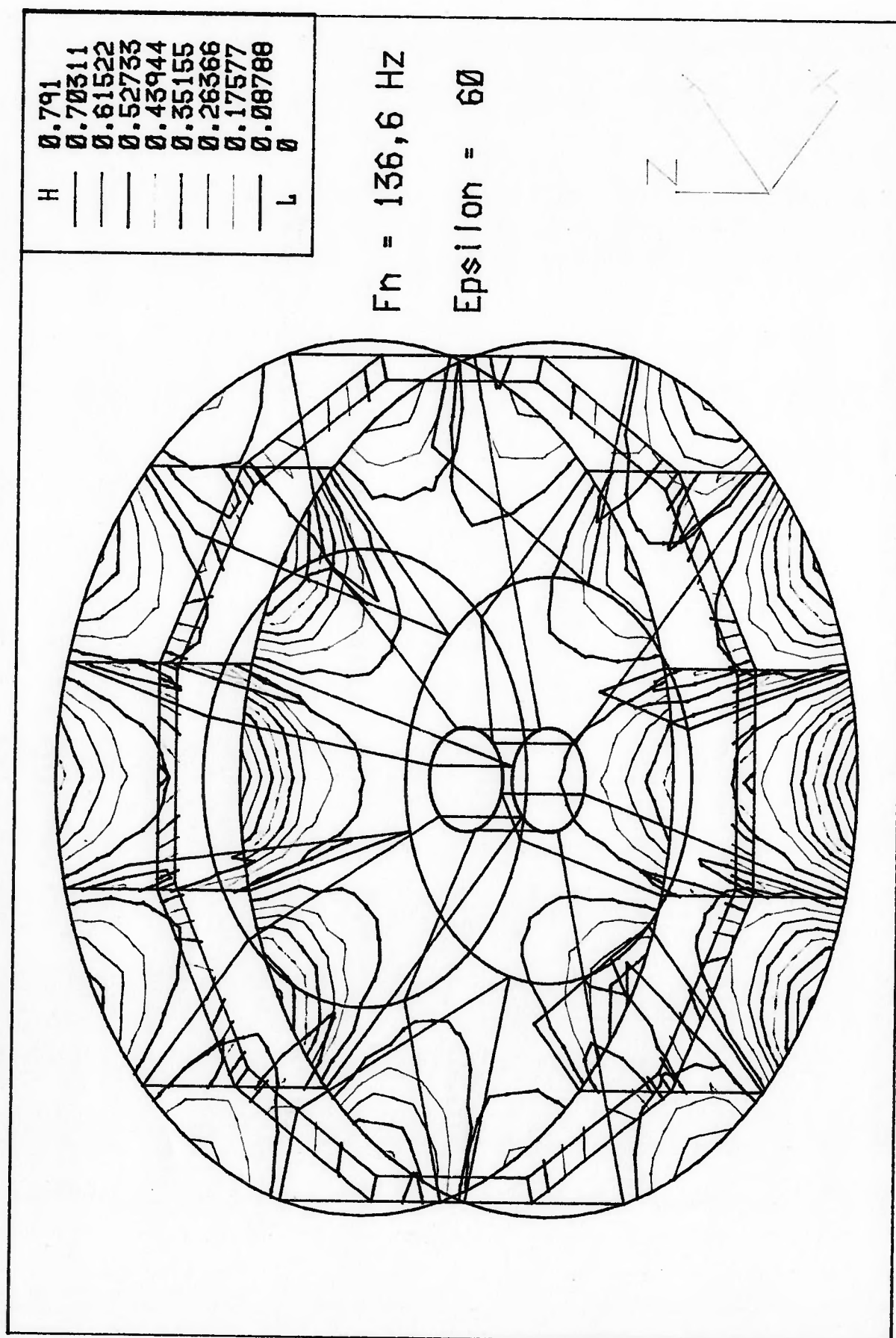
$F_n = 134,1 \text{ Hz}$

$\text{Epsilon} = 0$



**Figura 6.29: Modos de Vibração do Impelidor Modificado estacionário obtido da modelagem por elementos finitos**





**Figura 6.30: Modos de Vibração do Impelidor Modificado estacionário obtido da modelagem por elementos finitos**



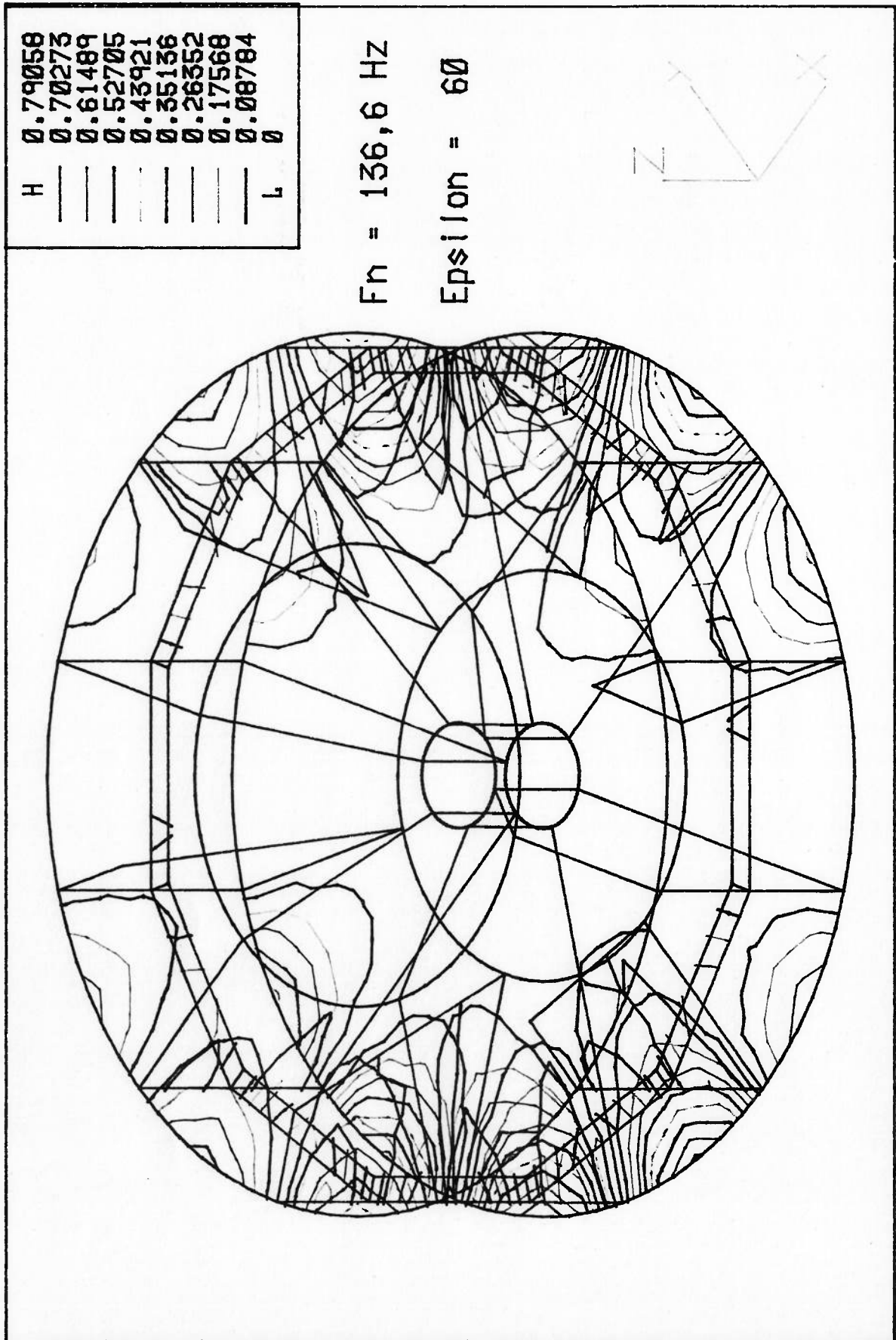


Figura 6.31: Modos de Vibração do Impelidor Modificado estacionário obtido da modelagem por elementos finitos

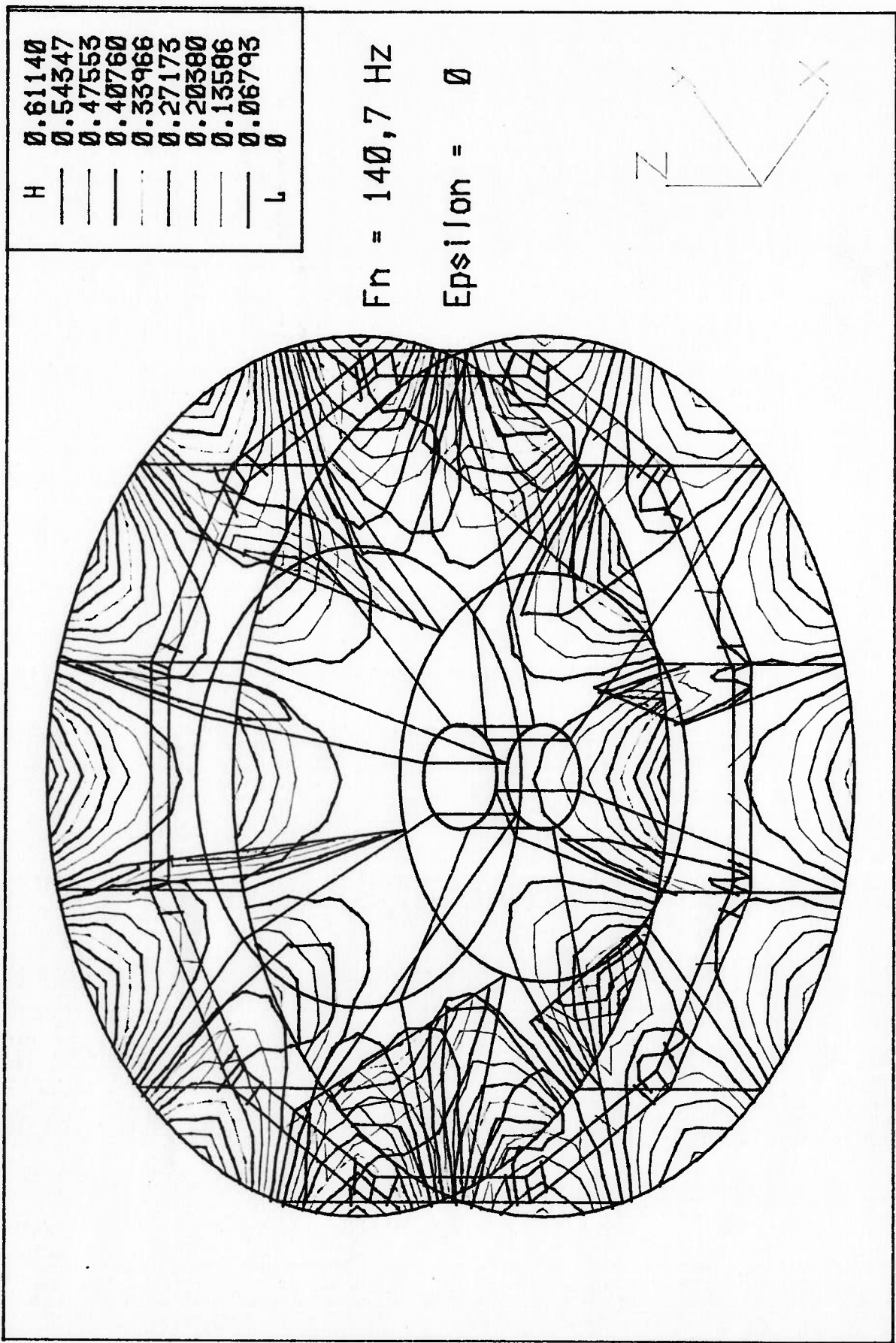
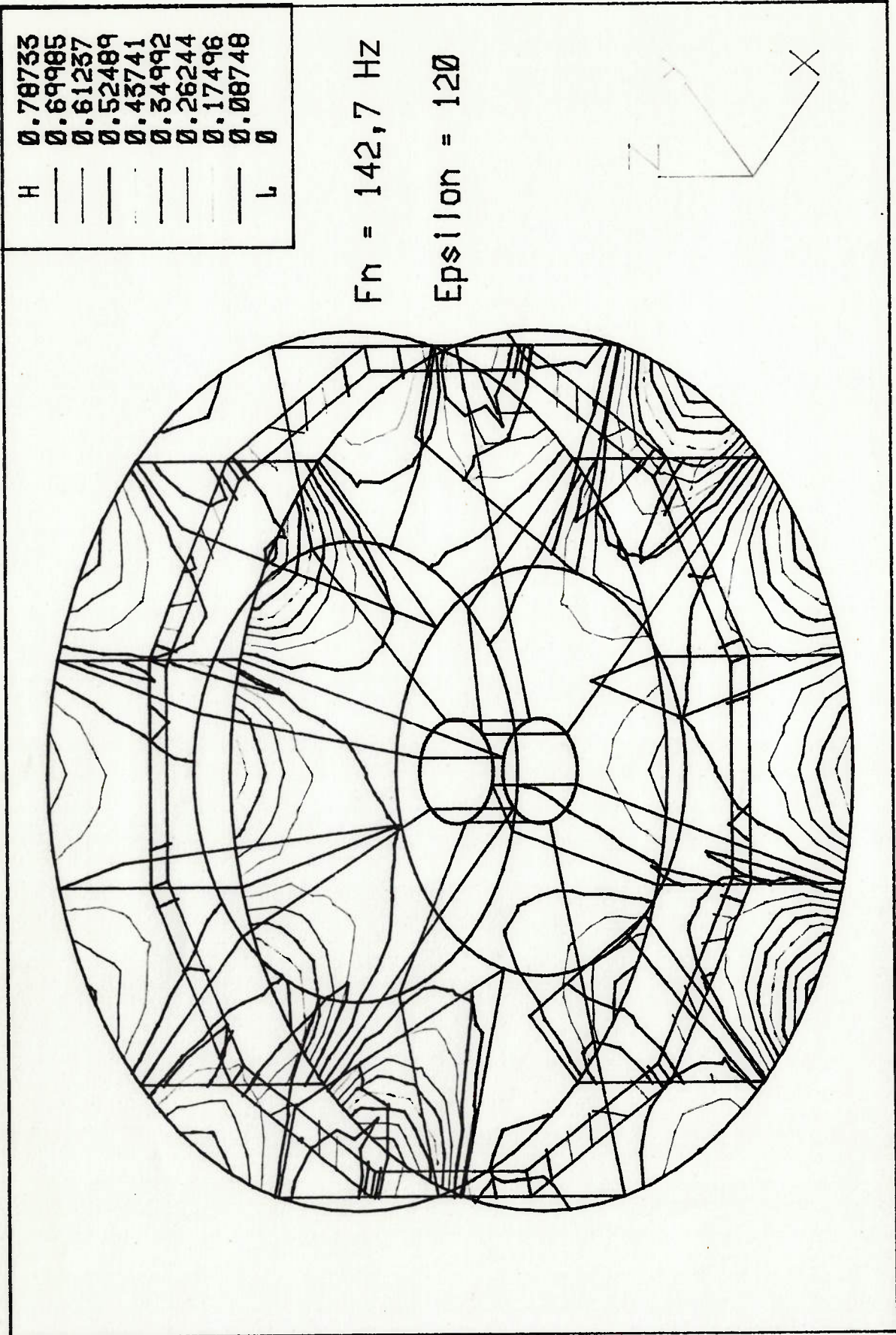


Figura 6.32: Modos de Vibração do Impelidor Modificado estacionário obtido da modelagem por elementos finitos



**Figura 6.33: Modos de Vibração do Impelidor Modificado estacionário obtido da modelagem por elementos finitos**

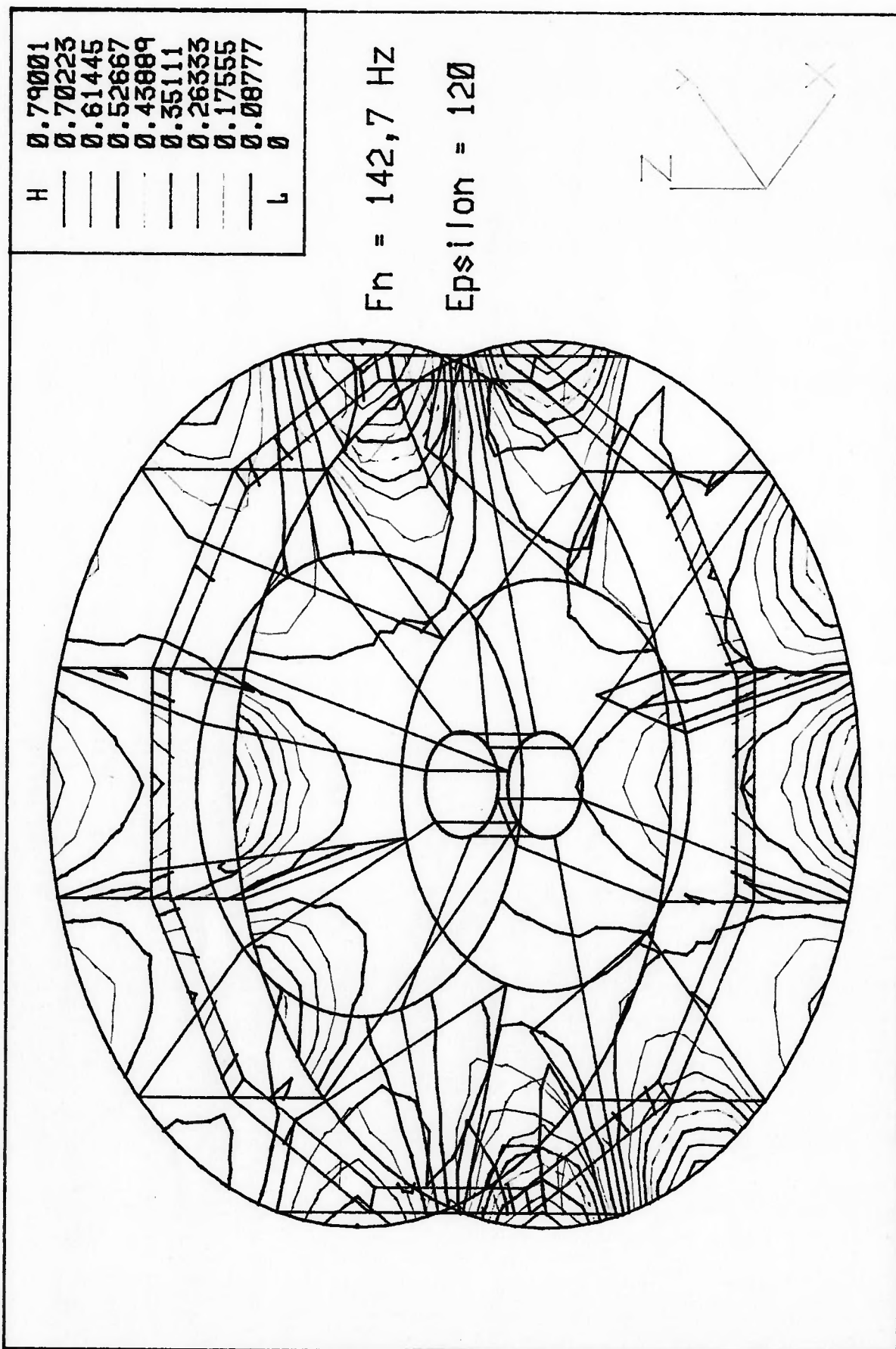


Figura 6.34: Modos de Vibração do Impelidor Modificado estacionário obtido da modelagem por elementos finitos



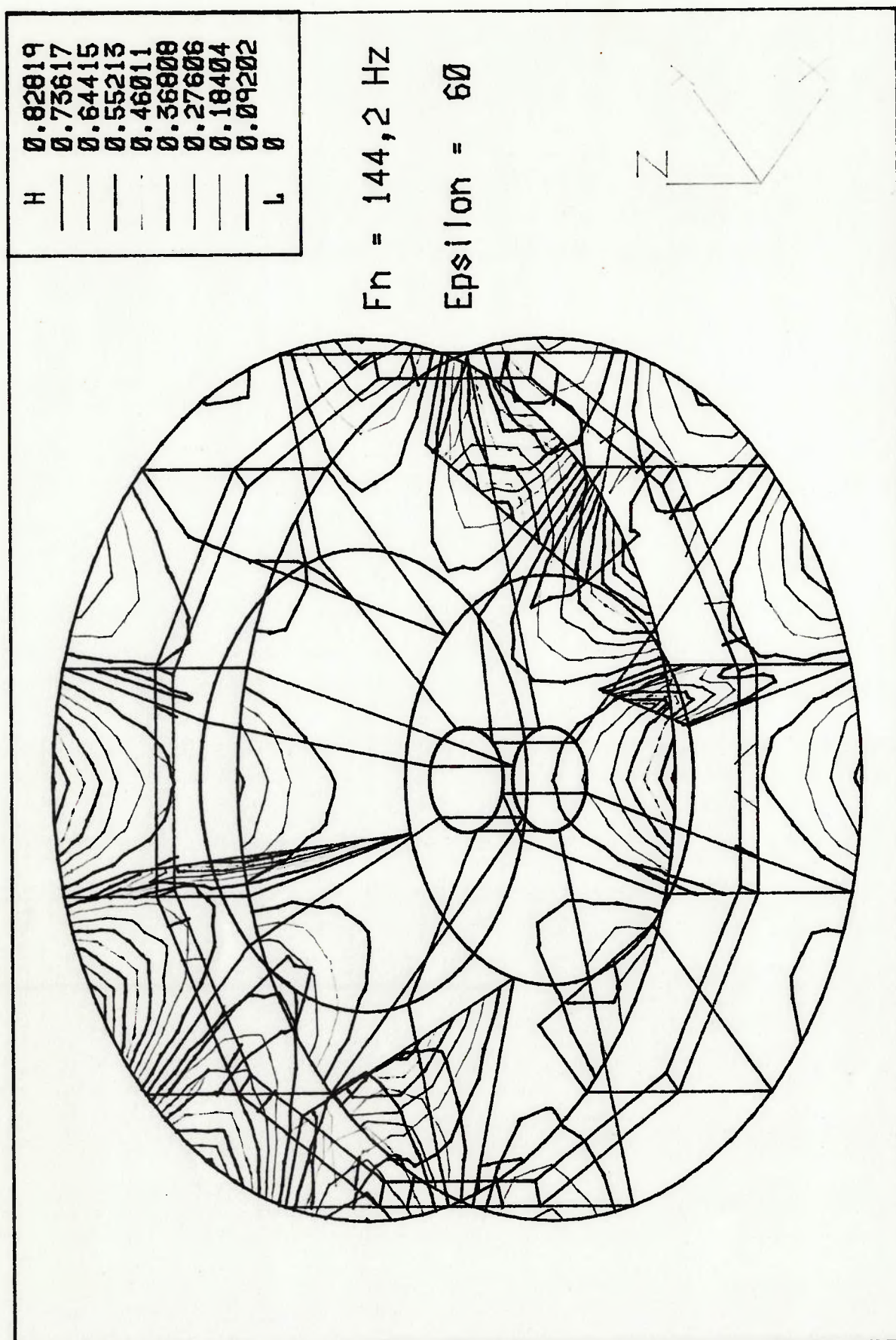


Figura 6.35: Modos de Vibração do Impelidor Modificado estacionário obtido da modelagem por elementos finitos



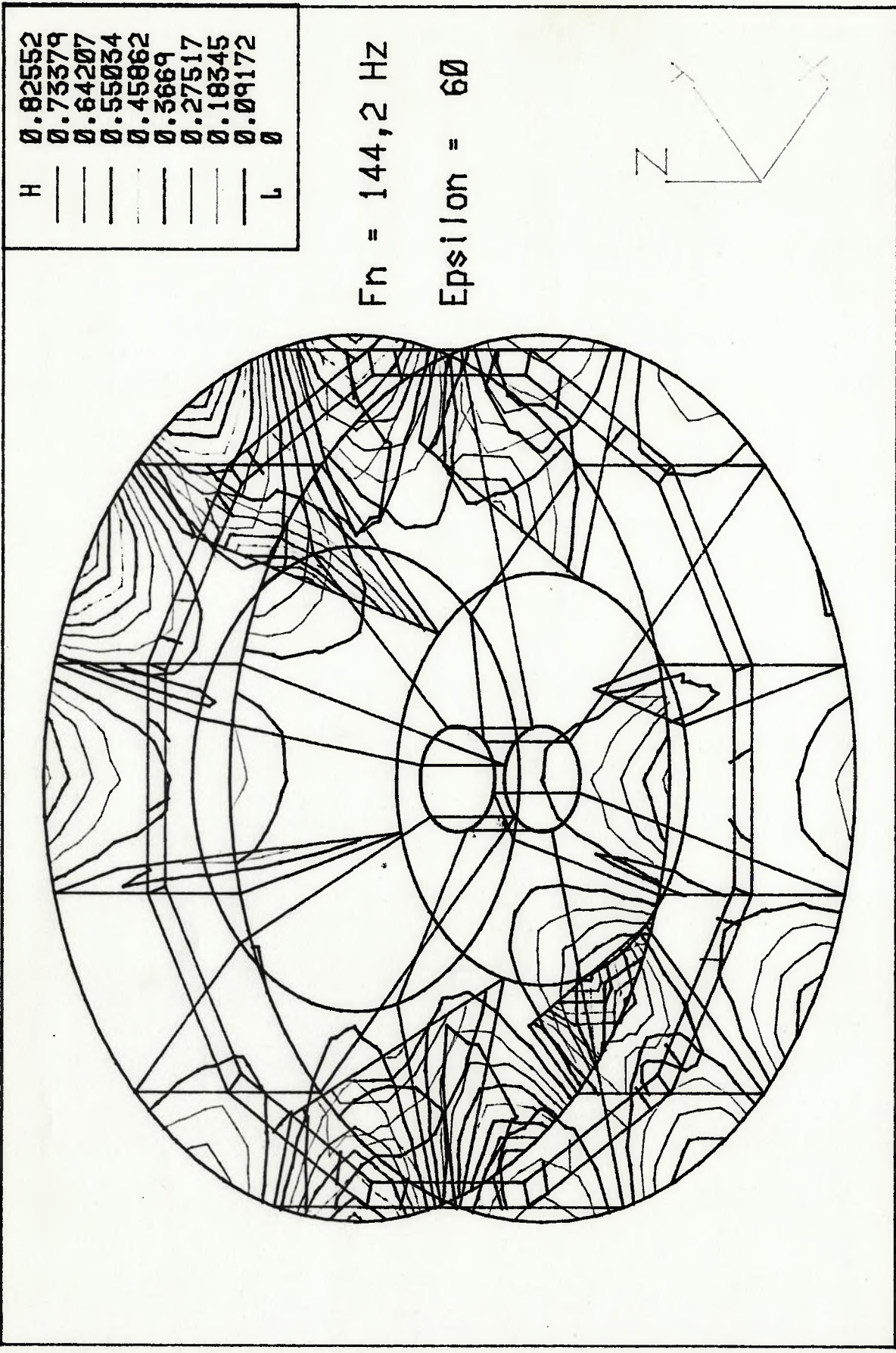


Figura 6.36: Modos de Vibração do Impelidor Modificado estacionário obtido da modelagem por elementos finitos

### 6.3.2. Ensaio de Análise Modal Experimental do Impelidor Modificado

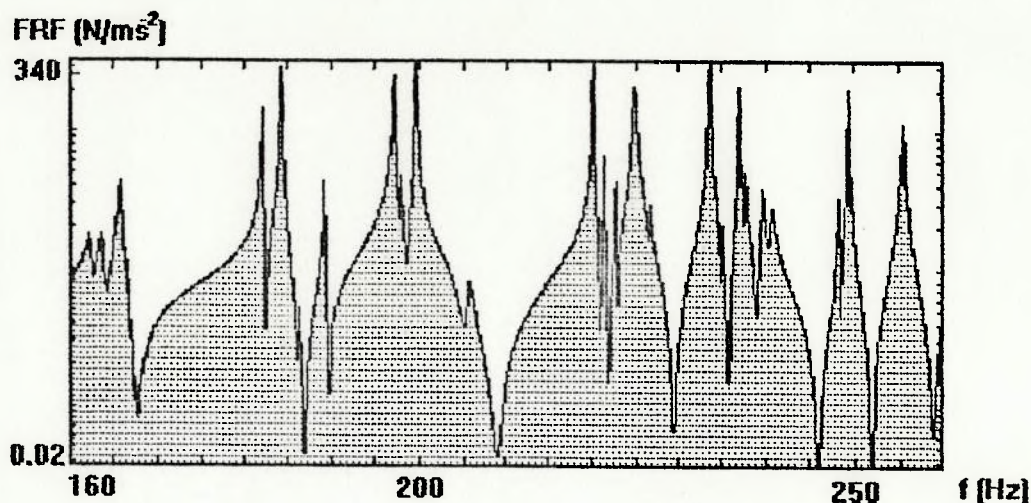
O impelidor foi novamente ensaiado nas mesmas condições do ensaio do impelidor original.

Os resultados de ensaio pelo método de ajuste de curvas são apresentados na tabela 6.4.

**TABELA 6.4: FREQUÊNCIAS NATURAIS E AMORTECIMENTOS DO  
IMPELIDOR MODIFICADO . - RESULTADOS DO ENSAIO  
POR AJUSTE DE CURVAS**

Modo:	Frequência Natural: (Hz)	Amortecimento: (%)
1	134,000	-
2	162,57	0,10
3	164,05	0,14
4	165,95	0,14
5	182,16	0,01
6	183,97	0,05
7	186,37	0,05
8	189,25	0,04
9	190,05	0,05
10	197,51	0,06
11	197,53	0,06
12	199,64	0,03
13	205,68	0,13
14	208,57	0,20
15	215,00	0,04
16	219,89	0,02
17	221,18	0,03
18	222,69	0,01
19	224,92	0,07
20	226,63	0,02
21	234,00	0,05
22	234,35	0,02
23	236,92	0,02
24	237,44	0,04
25	237,44	0,04
26	240,18	0,08
27	240,20	0,08
28	248,91	0,02
29	248,93	0,02
30	256,09	0,05
31	256,11	0,05





**FIGURA 6.37: Função de Resposta em Frequência Típica do Impelidor Modificado**

Pode-se observar na FRF do impelidor modificado que houve uma elevação significativa das frequências naturais quando comparadas ao impelidor original. Agora existe somente uma ressonância abaixo de 160 Hz, enquanto na configuração original existiam cerca de 10 ressonâncias. As FRFs ainda continuam densamente povoadas com ressonâncias, contendo cerca de 30 picos no espectro na faixa de 160 Hz a 260 Hz. Como a ressonância em 134,00 Hz encontra-se bem distante das demais, esta foi apenas identificada no ensaio de ressonância de fase.

As ressonâncias predominantes nas FRFs representativas da estrutura tem as seguintes frequências: 134,0 Hz, 182,0 Hz, 184,0 Hz, 197,0 Hz, 199,5 Hz, 219,8 Hz, 224,8 Hz, 233,5 Hz, 236,8 Hz, 249,4 Hz, 255,6 Hz e 271,0 Hz.

A frequência natural de 134,00 Hz corresponde ao primeiro modo de vibração torcional semelhante ao modo do impelidor

original com 157,26 Hz. A redução da frequência natural ocorreu devido ao efeito essencialmente de massa que as barras de reforço tem neste modo. Embora esta frequência encontre-se dentro da faixa de incerteza de 10 % em relação à Velocidade Crítica de Disco com 6 diâmetros nodais, como no caso anterior, este modo não é passível de ser excitado pelo pulso estático de pressão.

Em 182,16 Hz encontra-se o modo de vibração que exhibe movimento de "fole" de cada setor do impelidor, semelhante ao modo crítico do impelidor original (122,69 Hz). Entretanto, a Velocidade Crítica de Disco correspondente a este modo é de 1820 rpm (30,3 Hz), também superior à rotação do impelidor.

Em 197,51 Hz encontra-se o modo de vibração com 6 diâmetros nodais com disco e tampa com movimento em fase. Isto corresponde a Velocidade Crítica de Disco de 1975 rpm (33,9 Hz).

Todas as Velocidades Críticas de Disco encontradas para o impelidor modificado são superiores a rotação do impelidor, portanto não ocorre nenhuma situação de risco para a operação do impelidor modificado.

#### **6.4. Conclusões do Estudo do Impelidor Centrífugo**

Com base nos resultados de ensaio e na análise precedente pode-se concluir o seguinte:



- a) os resultados da modelagem por elementos finitos estão em boa concordância com os resultados experintais;
- b) a variação significativa nos valores dos coeficientes de Southwell, calculados para as duas configurações do impelidor, indicam valores aproximados de estruturas semelhantes, e.g., discos axissimétricos, não podem ser utilizados na análise de impelidores reais;
- c) o modo de vibração com frequência natural de 122,69 Hz foi considerado perigoso para operação do impelidor;
- d) a modificação estrutural introduzida elevou as frequências naturais de todos os modos de vibração axial para cima de 150 Hz; a frequência natural mais baixa do impelidor modificado encontra-se em 134,00 Hz e corresponde ao primeiro modo de vibração torcional;
- e) o impelidor de ventilador modificado não exhibe nenhum modo de vibração crítico para as condições de operação especificadas.

## 7. CONCLUSÕES

O estudo da teoria envolvida na análise da dinâmica estrutural de impelidores centrífugos mostrou-se muito valiosa para interpretar e analisar o comportamento complexo que estas estruturas apresentam. A identificação dos pressupostos e princípios que podem orientar a avaliação da periculosidade das condições críticas de operação de impelidores, embora realizada parcialmente com base na lógica e no bom senso, sem comprovação experimental, permitiu identificar os fundamentos e hipóteses científicas que devem ser estudadas em futuros trabalhos.

O trabalho realizado cumpriu o objetivo proposto de formalizar uma metodologia de ensaio e análise de impelidores de ventiladores centrífugos que servisse de instrumento de engenharia no projeto e fabricação de ventiladores centrífugos.

Como resultados específicos do trabalho podemos concluir que:

- a) o processo misto de análise, que combina a análise modal experimental com recursos de análise teórica e numérica, mostrou-se adequado para o estudo do comportamento dinâmico de grandes impelidores centrífugos em condições reais de operação; esta abordagem permite avaliar e identificar problemas e condições de risco de operação;
- b) o conhecimento dos princípios que orientam a identificação das condições de risco, formulados no

trabalho, permitiu agilizar o processo de medição e análise da dinâmica de impelidores, fornecendo resultados mais rápidos e confiáveis, de forma a melhor atender as necessidades de custo e prazo exigidos na produção dos ventiladores;

- c) a determinação dos Coeficientes de Southwell através do método dos elementos finitos mostrou-se importante dada a variação que estes apresentaram com modificações da configuração dos impelidores;
- d) a metodologia qualitativa de avaliação da periculosidade das condições críticas pode ser desenvolvida em futuros trabalhos de forma a permitir um avaliação concreta e quantitativa da periculosidade de impelidores reais em condições reais de operação.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABNT. **Vibrações mecânicas e choques: terminologia.** São Paulo, ago., 1982. (NBR 7497:AGO/1982)
- ALGOR **Finite element analysis system: processor reference manual.** Algor Interative Systems, Inc, 260 Alpha Drive, Pittsburgh, PA 15238, aug., 1989.
- ALGOR **Finite element analysis system: software companion with verification examples.** Algor Interative Systems, Inc, 260 Alpha Drive, Pittsburgh, PA 15238, 1989.
- ALGOR **Getting to know the Algor design and finite element analysis system: an introduction to finite element analysis and FEA-related CAD.** 4.ed., Algor Interative Systems, Inc, 260 Alpha Drive, Pittsburgh, PA 15238, dec., 1989.
- ALGOR **Linear mode shape analysis release notes.** Revision 2.02, Algor Interative Systems, Inc, 260 Alpha Drive, Pittsburgh, PA 15238, july, 1992.
- ALGOR **Linear mode shape analysis with load stiffening release notes.** Revision 2.02, Algor Interative Systems, Inc, 260 Alpha Drive, Pittsburgh, PA 15238, july, 1992.
- ALGOR **Script file release notes.** Revision 1.02, Algor Interative Systems, Inc, 260 Alpha Drive, Pittsburgh, PA 15238, apr., 1992.
- ALGOR **Superdraw II release notes.** Revision 1.05, Algor Interative Systems, Inc, 260 Alpha Drive, Pittsburgh, PA 15238, july, 1992.
- ALGOR **Supergen.** Algor Interative Systems, Inc, 260 Alpha Drive, Pittsburgh, PA 15238. sep., 1991.
- ALGOR **Supersurf reference manual.** Revision 2, Algor Interative Systems, Inc, 260 Alpha Drive, Pittsburgh, PA 15238, apr., 1992.
- ALGOR **Supersurf release notes.** Algor Interative Systems, Inc, 260 Alpha Drive, Pittsburgh, PA 15238, may, 1993.
- ALGOR **Vizicad plus.** Algor Interative Systems, Inc, 260 Alpha Drive, Pittsburgh, PA 15238, aug., 1990.  
v.1: Geometric modeling and visualization.
- ALGOR **Vizicad plus.** Algor Interative Systems, Inc, 260 Alpha Drive, Pittsburgh, PA 15238, june, 1990.  
v.2: Modeling for finite element analysis.
- AMEIDA, M. T. de; NEVES, M. T. **Efeito da Flexibilidade de Discos nas Frequências Naturais de Rotores de Grandes Ventiladores.** *Revista Brasileira e Ciências Mecânicas*, v.11, n.1, 1989. p.49-65.
- ANSI/ASHRAE. **Method of testing - Dynamic characteristics of propeller fans - Aerodynamically excited fan vibrations and critical speeds.** Atlanta, GA, USA, 1983. (ANSI/ASHRAE 87.1-1983)
- ANSI/ASHRAE. **Method of testing fan vibration - Blade vibrations and critical speeds.** Atlanta, GA, USA, 1992. (ANSI/ASHRAE 87.1-1992)
- BANYAY, D.; GUTZWILLER, L. **Measuring the natural frequency of component parts of industrial fan impellers.** In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON FAN DESIGN AND APPLICATIONS, Guildford, England, sep., 1982. *Proceedings.* p.331-354. (Paper H2)

- BERLIOZ, A.; HENRY, R.; PUGNET, J. M.; FERRARIS, G. Experimental and Theoretical Dynamic Analysis of a Rotating Shrouded Impeller. *Revista Brasileira de Ciências Mecânicas*. v.13, n.1, 1991. p.55-71.
- BISHOP, R. E. D.; JOHNSON, D. C. *The Mechanics of Vibration*. Cambridge, GB, University Press, 1979.
- BREITBACH, E. J. Recent developments in multiple input modal analysis. *Journal of Vibrations, Stress, and Reliability in Design*. Transaction of the ASME, v.110, October, 1988. p.478-484.
- BRIGHAM, E. O. *The Fast Fourier Transform*. New Jersey, Prentice-Hall, Inc., 1974.
- BRITISH STANDARDS INSTITUTION. *Fans for general purpose Part 6. Method of measurement of fan vibration*. London, 1989. (BS 848:Part 6:1989).
- BUTKOV, E. *Física matemática*. Rio de Janeiro, Ed. Guanabara Dois S.A., 1978. p.303-308, 358-374.
- CAMPBELL, W. The protection of steam-turbine disk wheels from axial vibration. *Transactions of the ASME*, v.46, p.31-160, 1924.
- COMMITTEE ON INDUSTRIAL VENTILATION. *Industrial Ventilation - Metric Supplement: 4<sup>th</sup> Manual of Recommended Practice*. 18.ed. Lansing, Michigan, USA, 1984. Seção 10, p.10.1-10.8.
- CSI COMPUTATIONAL SYSTEMS INCORPORATED. *Vibration monitoring of common centrifugal fans in fossil fired power generation*. CSI - Application Paper, 1989. 11p.
- DEN HARTOG, J. P. *Mechanical Vibrations*. 4.ed., 1956 New York, Dover Publications, Inc., 1985 p.277-281.
- DIEHL, G. M. Vibration of rotating disks. *Compressed Air Magazine*. June, 1983. p.22-25.
- DIN. *Zeitabhängige Grössen: Benennungen der Zeitabhängigkeit. Parte 1*. Berlin, 1983. (DIN 5483/01 - 83).
- EBERSBACH, P.; HOHLRIEDER, M.; IRRETIER, H. Rechnerische und experimentelle Untersuchungen des dynamischen Verhaltens eines rotierenden radialen Laufrades. In: *DYNAMISCHE PROBLEME - MODELLIERUNG UND WIRKLICHKEIT*, Curt-Risch-Institut, Universität Hannover, Hannover, 1987. *Anal.* Universität Hannover, Hannover, 1987. p.293-312. (CRI-K 1/87)
- EBERSBACH, P.; IRRETIER, H. On the application of modal parameter estimation using frequency domain algorithms. In: *6<sup>th</sup> INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONFERENCE*, Kissimmee, Florida, feb., 1988. *Proceedings*. Union College, Shenectady, NY., Society of Experimental Mechanics, Inc., Bethel, CT, 1988. v.1, p.113-120.
- EBERSBACH, P.; IRRETIER, H. On measuring frequency response functions and modal parameter identification on rotating discs. In: *8<sup>th</sup> INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONFERENCE*, Kissimmee, Florida, jan., 1990. *Proceedings*. Union College, Shenectady, NY, Society of Experimental Mechanics, Inc., Bethel, CT, 1990. v.1, p.435-444.
- ECK, B. *Fans: Design and Operation of Centrifugal, Axial-Flow and Cross-Flow Fans*. 1.ed., Braunschweig, Alemanha, Pergamon Press, 1973. p.457-478.
- ECO, U. *Como se faz uma tese*. 9.ed., São Paulo, Editora Perspectiva, 1992. (Série Estudos: Metodologia)
- ERRETT, A. J.; SOLECKI, J. S.; TUTTLE, D. G. Modal analysis of airfoil fan wheels. In: *3<sup>rd</sup> INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONFERENCE*, Orlando, Florida, jan., 1985. *Proceedings*. Union College, Shenectady, NY., 1985. v.1, p.198-204.



- EWINS, D. J. **Modal testing: theory and practice.** Research Studies Press Ltd., England, 1984. p.114-140.
- FIGUEIROA, J. G. S; RODRIGUES DA CUNHA, P. M. **Medida de freqüência naturais e decremento logarítmico em pá de ventilador modelo NR13.** São Paulo, AEDV / DEM / IPT, 1981. 4p. (Relatório Técnico N°15.561)
- FIORI, J. L. **Globalização, estados nacionais e políticas públicas.** *Ciência Hoje*. Rio de Janeiro, v.16, n.96, dez. 1993. p.24-31.
- GHOSH, M.; RAJAMANI, A. **Vibration analysis of a rotating cooling fan.** In: 3<sup>rd</sup> INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONFERENCE, Orlando, Florida, jan., 1985. **Proceedings.** Union College, Shenectady, NY., 1985. p.459-464.
- GONZALEZ, R. C.; WINTZ, D. **Digital Image Processing.** 2.ed., USA, Addison-Weley Publishing Company, 1987. Cap.3, p.61-137: Image Transforms.
- GUPTA, A.; PASSERELLO, C. E. **A study of the mode shapes and natural frequencies of two plates coupled together with radial stiffeners.** In: 1<sup>st</sup> INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONFERENCE & EXHIBIT, Orlando, Florida, nov., 1982. **Proceedings** Union College, Shenectady, NY., 1982. v.1, p.310-18.
- HENRY, R.; FERRARIS, G. **Substructuring and Wave Propagation: An Efficient Technique for Impeller Dynamic Analysis.** *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power.* ASME, v.106, n.1, jan., 1984. p.2-10.
- IRRETIER, H. **Experiments and calculations on the vibrations of rotating radial impellers.** *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design.* Transactions of the ASME, v.110, apr., 1988. p.137-42.
- ISO. **Method for experimental determination of mechanical mobility Part 2. Measurements using single-point translation excitation with an attached vibration exciter.** 28p., 1990 (ISO 7626.2 - 1990)
- ISO. **Method for the calibration of vibration and shock pick-ups - Part 3: Secondary vibration calibration.** 6p., 1987. (ISO/DIS 5347.3 - 1987)
- ISO. **Vibration and shock - Experimental determination of mechanical mobility - Part 1: Basic definitions and transducers.** 23p., 1984. (ISO/DIS 7626.1 - 1984)
- ISO. **Vibration and shock - Experimental determination of mechanical mobility - Part 5: Measurements using impact excitation with an exciter which is not attached to the structure.** 21p., 1990. (ISO/DIS 7626.5 - 1990)
- ISO. **Vibration and Shock - Vocabulary.** 59p., 1990. (ISO 2041-1990)
- JORGENSEN, R. **Fan Engineering.** 8.ed, Buffalo, NY, Buffalo Forge Company, 1983. Cap.9.
- JORGENSEN, R. **Fans.** In: Baumeister, T; et al., ed. **Marks' Standard Handbook for Mechanical Engineers.** 8.ed. New York, McGraw-Hill Book Co., 1978. Cap.14, p.49-57.
- KHURASIA, H. B.; OLUNLOYO, V. O. S. **Natural frequencies and mode shapes of eccentrically clamped circular discs.** In: 3<sup>rd</sup> INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONFERENCE, Orlando, Florida, jan., 1985. **Proceedings.** Union College, Shenectady, NY., 1985. v.1, p.264-271.
- KUAE, L. K. N.; BONESIO, M. C. M.; VILLELA, M. C. O. **Diretrizes para apresentação de dissertações e teses.** São Paulo, Escola Politécnica da USP, Serviço de Bibliotecas, 1991.

- KUSHNER, F. Disc vibration - Rotating blade and stationary vane interaction. *Journal of Mechanical Design*. Transaction of the ASME, v.102, July, 1980. p.579-584.
- LADKANY, S. G.; REYNOLDS, D. D.; ROUAS, M. S. Vibration response of propeller fans under actual operating conditions - III: Finite element studies of the influence of welded and riveted connections on the vibration response of propeller fans. *ASHRAE Transactions*, v.95, Part 2, p.82-7, 1989. (3261 RP-477)
- LADKANY, S. G.; ROUAS, M. S.; REYNOLDS, D. D. Vibration response of propeller fans under actual operating conditions - III: Automatic generation of curved and twisted propeller fan surfaces for a dynamic analysis by finite elements. *ASHRAE Transactions*, v.95, Part 2, p.88-91, 1989. (3262 RP-477)
- LADKANY, S. G., REYNOLDS, D. D.; BAADE, P. K.; RAUAS; M. S. Vibration response of propeller fans under actual operating conditions - II: finite element studies of the vibration response of propeller fans under centrifugal stiffening. *ASHRAE Transactions*, v.96, part 1, p.361-372, 1990. (3343 RP-477)
- LALANNE, M. Vibration in Jet Engines. *The Shock and Vibration Digest*. v.12, n.9, Set. 1980. p.3-8
- LAMB, H.; SOUTHWELL, R. V. The vibration of a spinning disk. *Proceedings of the Royal Society of London*, Series A, v.99, London, 1921. p.272-280.
- LAURENSEN, R. M. Modal Analysis of Rotating Flexible Structures. *AIAA Journal*, v.14, n.10, p.1444-1450, 1976
- LEISSA, A. W. *Vibration of Plates*. Washington, D.C., Office of Technology Utilization National Aeronautics and Space Administration, 1969. Cap. 2, p.7-35: Circular Plates.
- LJKINS, P. W.; BARBERA, F. J.; BADDELEY, V. Mathematical Modeling of Spinning Elastic Bodies for Modal Analysis. *AIAA Journal*, v.11, n.9, p.1251-1258, set., 1973.
- LJUNG, L. *System Identification: Theory for the User*. New Jersey, USA, Prentice-Hall, Inc., 1987. p.99.
- LOPEZ, A. N.; RODRIGUES DA CUNHA, P. M. Levantamento das frequências naturais e respectivos modos de vibrar de um rotor de ventilador. São Paulo, AEDV / DEM / IPT, 1985. 4p. (Relatório Técnico N°23.223)
- MARONE, A.; RODRIGUES DA CUNHA, P. M. Levantamento das principais frequências naturais e respectivos modos de vibrar de um rotor de ventilador. São Paulo, AEDV / DEM / IPT, 1985. 10p. (Relatório Técnico N°21.718)
- MARONE, A.; RODRIGUES DA CUNHA, P. M. Medidas de frequências naturais de três conjuntos pá-cubo de ventilador. São Paulo, AEDV / DEM / IPT, 1982. 4p. (Relatório Técnico N°17.611)
- MEAD, D. J. Response of periodic structures to noise fields. In: White, R.G.; Walker, J.G., ed. *Noise and Vibration*. England, Ellis Horwood Limited, 1982. Cap. 13.
- METALS HANDBOOK: Vol.1 Properties And Selection Of Metals. American Society for Metals; 9th Edition; 1983. p.641.
- MITCHELL, J. S. An introduction to machinery analysis and monitoring. Tulsa, Oklahoma, USA, Pen Well Publishing Company, 1981. p.321-326.
- MOFFA, A. L. & LEON, R. L. Modal analysis as a tool in the evaluation of a turbine wheel failure. *The Shock and Vibration Bulletin*. v.52, Parte 1, maio, 1982. p.101-123.



- NATKE, H. G. *Einführung in Theorie und Praxis der Zeilreihen- und Modalanalyse*. 2.ed. B. R. Deutschland, Vieweg Verlag, 1988. p.312-335.
- NIEDBAL, H. Survey of the state of the art in modern ground vibration testing. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON AEROELASTICITY, Nuremberg, W. Germany, oct., 1981. *Proceedings*. Cologne, DGLR, 1982. p.143-150. (DGLR - Bericht 82-01).
- NIEDBAL, N.; KLUSOWSKI, E. Die Ermittlung der generalisierten Masse und des globalen Dämpfungsbeiwertes im Standschwingungsversuch. *Z. Flugwiss. Weltraumforsch.* v.13, 1989. p.91-100.
- PCMODAL Vibration Engineering Consultants, Inc., 10 State St., Woburn, MA 01801, 1990.
- PEREIRA DE CASTRO, A. A capacitação tecnológica nacional e a globalização da economia - parte I. *IPT Indústria & Tecnologia*, Ano I, n.2, Mar. 1993. p.1-7.
- PEREIRA DE CASTRO, A. A capacitação tecnológica nacional e a globalização da economia - parte II. *IPT Indústria & Tecnologia*, Ano I, n.3, Jul. 1993. p.1-5.
- PETYT, M. Finite element techniques for structural vibration. In: White, R.G.; Walker, J.G., ed. *Noise and Vibration*. England, Ellis Horwood Limited, 1982. Cap. 15.
- PONGE-FERREIRA, W. J. A.; RODRIGUES DA CUNHA, P. M. Levantamento das frequências naturais e respectivos modos de vibrar de um rotor de ventilador. São Paulo, AEDV / DEM / IPT, 1987. 13p. (Relatório Técnico N°25.615)
- PONGE-FERREIRA, W. J. A.; VIEIRA DO AMARAL, R.; NIGRO, F. E. B. Análise modal experimental de um rotor de ventilador centrífugo sem e com modificações. São Paulo, AEDV / DEM / IPT, 1992. 115p. (Relatório Técnico N°30.451)
- PONGE-FERREIRA, W. J. A.; VIEIRA DO AMARAL, R.; NIGRO, F. E. B. Análise modal experimental de um rotor de ventilador centrífugo. São Paulo, AEDV / DEM / IPT, 1992. 26p. (Relatório Técnico N°30.914)
- PONGE-FERREIRA, W. J. A.; VIEIRA DO AMARAL, R.; NIGRO, F. E. B. Análise modal experimental de um rotor de ventilador centrífugo modificado. São Paulo, AEDV / DEM / IPT, 1992. 29p. (Relatório Técnico N°30.915)
- PONGE-FERREIRA, W. J. A.; NIGRO, F. E. B. Experimental modal analysis of a large centrifugal fan impeller: a case study. In: 5° SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE DINÂMICA DE MÁQUINAS - DINAME, 5<sup>ta</sup> Catarina, 1993. Resumos. Florianópolis, UFSC, 1993. P.133-136..
- PONGE-FERREIRA, W. J. A.; NIGRO, F. E. B. Determinação das características dinâmicas e velocidades críticas de impelidor de ventilador centrífugo. São Paulo, AEDV / DEM / IPT, 1994. (Relatório Técnico N°31.984)
- PONGE-FERREIRA, W. J. A.; RODRIGUES DA CUNHA, P. M. Levantamento das principais frequências naturais das pás de um rotor axial. São Paulo, AEDV / DEM / IPT, 1986. 4p. (Relatório Técnico N°24.533)
- PONGE-FERREIRA, W. J. A.; RODRIGUES DA CUNHA, P. M. Levantamento das principais frequências naturais das pás de rotores axiais. São Paulo, AEDV / DEM / IPT, 1987. 6p. (Relatório Técnico N°24.447)
- PONGE-FERREIRA, W. J. A.; VIEIRA DO AMARAL, R. Levantamento das frequências naturais das pás de rotor axial. São Paulo, AEDV / DEM / IPT, 1989. 3p. (Relatório Técnico N°27.178)

- PONGE-FERREIRA, W. J. A.; VIEIRA DO AMARAL, R.; NIGRO, F. E. B. **Análise modal experimental de duas pás de ventilador axial.** São Paulo, AEDV / DEM / IPT, 1992. 60p. (Relatório Técnico N°30.652)
- PONGE-FERREIRA, W. J. A.; VIEIRA DO AMARAL, R.; NIGRO, F. E. B. **Análise modal experimental de propulsor de ventilador axial.** São Paulo, AEDV / DEM / IPT, 1994. (Relatório Técnico N°31.985)
- PONGE-FERREIRA, W. J. A.; TU, C. C. C.. **Projeto preliminar de um torquímetro óptico digital em frequência modulada.** São Paulo, 1985. 94p. Trabalho de formatura - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.
- RAYLEIGH. *Theory of Sound.* 1894. Par.88.
- REYNOLDS, D. D.; BLEDSOE, J. M.; CULBREDTH, W.; LADKANY, S. G. Vibration response of propeller fans under actual operating conditions - I: operational tests of four-blade propeller fans. *ASHRAE Transactions*, v.95, part 2, p.77-81, 1989. (3260 RP-477)
- RODRIGUES DA CUNHA, P. M. **Ensaio e estudos analíticos sobre o comportamento dinâmico de ventiladores.** São Paulo, AEDV / DEM / IPT, 1987. 19p. (Relatório Técnico N°23.923)
- RODRIGUES DA CUNHA, P. M. **Ensaio de vibração em ventilador de tiragem (2ª série).** São Paulo, AEDV / DEM / IPT, 1987. 8p. (Relatório Técnico N°25.077)
- SENDOV, B. Entering the information era. In: *THE ROLE OF APPLIED SCIENCE AND TECHNOLOGY FOR A SUSTAINABLE SOCIETY*, São Paulo, out., 1993. *Resumos.* São Paulo, USP, 1993. p.15-20.
- SIMTH, D. R. & SIMMONS, H. R. Unique fan vibration problems: their causes and solutions. *Proceedings of the 9th Turbomachinery Symposium.* Texas A&M University, College Station, Texas, Dec. 9-11, 1980.
- SMITH, D. R.; SIMMONS, H. R. Unique Fan Vibration Problems: Their Causes and Solutions. In: *9th Turbomachinery Symposium, Gas Turbine Laboratories, Texas, Texas A&M University, dez., 1980. Proceedings.* San Antonio, Texas, Southwest Research Institute, s.d.
- SOEDEL, W. Propeller Fan Stresses and Vibrations. *ASHRAE Transactions.* v.80, parte 1, p.166-180, 1974.
- SOUTHWELL, R. V. On the free transverse vibrations of a uniform circular disc clamped at its centre; and on the effects of rotation. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, v.101, London, 1922. p.133-153.
- SOUZA, M. G. A empresa na nova configuração do poder mundial. *Ciência Hoje*, v.15, n.89, p.72, abr. 1993.
- SPIEGEL, M. R. **Manual de fórmulas e tabelas matemáticas.** Ed. McGraw-Hill do Brasil, 1981. (Coleção Schaum) p.136-145, 244-247.
- STAR **Reference manual.** Structural Measurement Systems, 510 Cottonwood Drive, Milipitas, CA 95035, 1990.
- STODOLA, A. **Stream and Gas Turbines.** Trad. L. C. Loewenstein. New York, Peter Smith, 1945. v.2, p.1090-1108.
- STOECKER, W. F.; JONES, J. W. **Refrigeração e ar condicionado.** São Paulo, McGraw-Hill, 1985. p.133-137.



- THOMSON, W. *Theory of vibration with application*. 2.ed. London, George Allen & Unwin Ltd., 1984. p.313-328.
- TIMOSHENKO, S. *Vibration problems in engineering*. 2.ed. New York, D. van Nostrand Company, Inc., 1937. Cap.6, p.421-441: Vibrations of elastic bodies.
- TOBIAS, S. A.; ARNOLD, R. N. The Influence of Dynamical Imperfection on the Vibration of Rotating Disks. *Proceedings of the Institution of Mech. Eng.*, London, v.171, 1957. p.669-690.
- TOBIAS, S. A. Free Undamped Non-Linear Vibrations of Imperfect Circular Disks. *Proceedings of the Institution of Mech. Eng.*, London, v.171, 1957. p.691-716.
- TOFFLER, A.; TOFFLER, H. Economia do Pacífico anuncia uma nova era de instabilidade. *Folha de São Paulo*, São Paulo, 23 jan. 1994. Caderno 6, p.12-13.
- TRAEGLER, J. F. Turbomachinery vibration. *The Shock and Vibration Digest*, v.9, n.8, Ago., 1977. p.3-10.
- TRIELLI, M. A. *Terceiro relatório de andamento do projeto: Sistema de Análise Modal Experimental*. São Paulo, DEM / IPT, janeiro, 1992. (Relatório Técnico N°29.886/92, Código de Convênio FINEP 7.03.90.0362.00)
- VIEIRA DO AMARAL, R.; MARONE, A.; RODRIGUES DA CUNHA, P. M. *Levantamento das frequências naturais e respectivos modos de vibrar de um rotor de ventilador*. São Paulo, AEDV / DEM / IPT, 1982. 7p. (Relatório Técnico N°16.614)
- VIEIRA DO AMARAL, R.; RODRIGUES DA CUNHA, P. M. *Levantamento das frequências naturais e modos de vibrar de um rotor*. São Paulo, AEDV / DEM / IPT, 1983. 9p. (Relatório Técnico N°18.428)
- VIEIRA DO AMARAL, R.; RODRIGUES DA CUNHA, P. M. *Levantamento das principais frequências naturais e modos de vibrar de um rotor*. São Paulo, AEDV / DEM / IPT, 1986. 5p. (Relatório Técnico N°24.042)
- VIEIRA DO AMARAL, R.; RODRIGUES DA CUNHA, P. M. *Levantamento das principais frequências naturais e modos de vibrar de um rotor centrífugo*. São Paulo, AEDV / DEM / IPT, 1986. 6p. (Relatório Técnico N°24.192)
- VIEIRA DO AMARAL, R.; FIGUEIROA, J. G. S.; RODRIGUES DA CUNHA, P. M. *Medidas de frequências naturais em um rotor de ventilador constituído por 12 pás, modelo PUR n° 3 e um cubo metálico*. São Paulo, AEDV / DEM / IPT, 1981. 3p. (Relatório Técnico N°16.264)
- VIEIRA DO AMARAL, R.; FIGUEIROA, J. G. S.; RODRIGUES DA CUNHA, P. M. *Medidas de frequências natural e decremento logarítmico em pá de ventilador modelo NR11*. São Paulo, AEDV / DEM / IPT, 1982. 3p. (Relatório Técnico N°16.834)
- VIEIRA DO AMARAL, R.; FIGUEIROA, J. G. S.; RODRIGUES DA CUNHA, P. M. *Medidas das principais frequências naturais e dos decrementos logarítmicos, em 6 modelos de pás de ventilador*. São Paulo, AEDV / DEM / IPT, 1982. 5p. (Relatório Técnico N°17.308)
- VIEIRA DO AMARAL, R.; RODRIGUES DA CUNHA, P. M. *Levantamento das principais frequências naturais das pás de um rotor axial*. São Paulo, AEDV / DEM / IPT, 1986. 4p. (Relatório Técnico N°24.092)
- VIEIRA DO AMARAL, R.; RODRIGUES DA CUNHA, P. M. *Levantamento das principais frequências naturais das pás de um rotor axial*. São Paulo, AEDV / DEM / IPT, 1986. 4p. (Relatório Técnico N°24.155)



- VIEIRA, S. *Como escrever uma tese*. São Paulo, Livraria Pioneira Ed., 1991. (Série de Manuais de Estudo)
- VOGEL, S. M.; SKINNER, D. W. Natural frequencies of transversely vibrating uniform annular plates. *Journal of Applied Mechanics*, ASME, v.32(4), p.926-931, dec. 1965.
- WACHTER, J.; PFEIFFER, R, JAROSCH, J. Some practical aspects of the interpretation of coupled LP-stage vibration. In: 3<sup>rd</sup> INTERNATIONAL CONFERENCE IN ROTATING MACHINERY, University of York, England, Sep., 1984. *Proceedings*. p.311-318. (C316/18)
- WEISENSEL, G. N.; SCHLANCK, A. L. Jr. Forced response of a rotating thin annular plate to a moving concentrated transverse load. In: 6<sup>th</sup> INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONFERENCE, Kissimmee, Florida, feb., 1988. *Proceedings*. Union College, Shenectady, NY, Society of Experimental Mechanics, Inc., Bethel, CT, 1988. v.2, p.1643-1647.
- WESTPHAL, G. Determination of resonance frequencies of blades and disc of a compressor impeller. *Bruel & Kjaer Technical Review*. n.3, 1973. p.26-31.