

CONSULTA
FD-3380

São Paulo
Dezembro 2002

Prof. Dr. Raúl González Lima
Orientador:
Engenharia Mecânica
Área de concentração:

em Engenharia.
dade de São Paulo para obtenção do título de Mestre-
Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Univesi-

ALGORITMO DE TOMOGRAFIA
POR IMPEDÂNCIA ELÉTRICA
BASEADO EM NEWTON-RAPHSON

DANIEL ALEXIS ARUCA MIRANDA

Miranda, Daniel Alexis Arruca
Algoritmo de Tomografia por Impedância Elétrica Baseado em Newton-Raphson. São Paulo, 2000.
89p.

Tese (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.
Departamento de Engenharia Mecânica.

1. Tomografia por Impedância Elétrica 2. Método Newton-Raphson
3. Minimização de funcional 4. Regularização 5. Método de elementos finitos I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica II. t

*a meus pais
Jorge e Consuelo,
meu irmão Jorge,
e minha esposa Lucila*

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Raul González Lima, pela excelente orientação, apoio constante, e a ligação de confiança e coragem.

Aos Profs. Dr. Agenor T. Fleury e Dr. Emilio Silva, pelas sugestões e críticas que certamente enriqueceram o conteúdo deste trabalho.

A minha esposa Lucila, que sempre me incentivou durante a realização do trabalho, pelo amor com que se dedicou e me apoiou.

Aos Colegas do grupo de Tomografia por Impedância Elétrica, pelas discussões, críticas e sugestões, em especial a Flavio Celso Trigo pelo companheirismo e apoio constante.

A meus colegas de trabalho Fabiano, Ericsson, e Marcelo pela força e compreenção em todos momentos.

E a meus grandes amigos conterrâneos Daniel Benitez e Francisco Zaragoza, que sempre estiveram presentes.

Este projeto foi desenvolvido entre 1998 e 2002 no Departamento de Engenharia Mecânica da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo e contou com apoio financeiro da CNPQ.

Sumário

Resumo	vi
Abstract	vii
1 Introdução	1
2 Objetivos	4
3 Revisão da Literatura	5
3.1 Método Newton-Raphson	5
3.2 Variantes do Método Newton-Raphson	7
3.3 Modelos de Eletrodos e Padrões de Corrente	9
3.4 Estudos e Aplicações Clínicas	13
3.5 Respiração e Fisiologia do Tecido Pulmonar	14
4 Modelo do Tórax	32
4.1 Introdução	32
4.2 Conceitos de Elementos Finitos	33
4.3 Matriz Local	34
4.4 Matriz Global	37
4.5 Solução das Equações Resultantes	38
4.6 Condições de Contorno	39
4.7 Modelo de Eletrodos	39
5 Métodos Numéricos	43
5.1 Decomposição de Valores Singulares	43
5.2 Projeção em Espaços Convexos	44

6	Metodologia de Simulações Numéricas e com Dados Experimentais	47
7	Resultados	54
	7.1 Resultados com Dados de Simulação numérica	55
	7.2 Resultados com Dados de Bancada Experimental	61
	7.2.1 Bancada Experimental	61
	7.2.2 Resultados de Bancada	63
	7.3 Resultados com Dados de Tecido Humano	68
8	Discussão	81
9	Comentários Finais	83
	Referências Bibliográficas	85
A	Abordagem Clássica do Método Newton-Raphson	I
B	Regularização	IV

Lista de Tabelas

7.1 Padrões adjacentes de injeção de corrente 62

3.1	Expansão e retração da caixa torácica (Guyton, 1992).	29
3.2	As vias respiratórias (Guyton, 1992).	29
3.3	O lóbulo respiratório (Guyton, 1992).	29
3.4	Excursões respiratórias durante a respiração normal e durante a inspiração e expiração máximas (Guyton, 1992).	29
3.5	Vista da seção transversal das paredes alveolares e de seu supri- mento vascular (Guyton, 1992).	30
3.6	Vista da superfície dos capilares numa parede alveolar (Guyton, 1992).	30
3.7	Ultra-estrutura de membrana respiratória mostrada em corte transver- sal (Guyton, 1992).	30
3.8	Comparação do pulmão enfisematoso (esquerda) com o pulmão normal (direita), mostrando a extensa distribuição alveolar (Guy- ton, 1992).	30
3.9	Alterações pulmonares na pneumonia e no enfisema (Guyton, 1992).	31
3.10	Efeito da atelectasia sobre a saturação do sangue arterial com oxí- gênio (Guyton, 1992).	31
4.1	Discretização do meio contínuo em subdomínios ou elementos finitos	33
4.2	Elemento triangular	34
4.3	Modelo simplificado da interface de contato eletrodo-pele	40
6.1	Malha de elementos finitos composta por 182 elementos e 156 nós, considerando 32 eletrodos na fronteira.	48
6.2	Malha de elementos finitos composta por 96 elementos e 56 nós.	48
6.3	Distribuição de voltagem nos eletrodos para o padrão de corrente diametral.	51
6.4	Diagrama geral da metodologia de simulação	53

Lista de Figuras

56	7.1	Convergência com dados teóricos (Abordagem clássica)	56
57	7.2	Iteração 1	57
57	7.3	Iteração 2	57
57	7.4	Iteração 3	57
57	7.5	Iteração 4	57
57	7.6	Iteração 5	57
57	7.7	Iteração 6	57
58	7.8	Convergência com dados teóricos (Funcional $\Phi 1$)	58
59	7.9	Iteração 1	59
59	7.10	Iteração 2	59
59	7.11	Iteração 3	59
59	7.12	Iteração 4	59
59	7.13	Iteração 5	59
59	7.14	Iteração 6	59
60	7.15	Distribuições de condutividade elétrica estimada (iter. 7) e esperada, respectivamente.	60
62	7.16	Esquema da bancada experimental	62
64	7.17	Convergência com dados de bancada experimental	64
65	7.18	Iteração 1	65
65	7.19	Iteração 2	65
65	7.20	Iteração 3	65
65	7.21	Iteração 4	65
65	7.22	Iteração 7	65
65	7.23	Iteração 20	65
66	7.24	Iteração 1	66
66	7.25	Iteração 2	66
66	7.26	Iteração 3	66
66	7.27	Iteração 4	66
66	7.28	Iteração 7	66
66	7.29	Iteração 20	66
67	7.30	Condutividade e resistividade elétrica - Iteração 40	67
68	7.31	Circuito <i>Current Mirror</i>	68
70	7.32	Convergência com dados de tecido humano	70
71	7.33	Iteração 1	71
71	7.34	Iteração 2	71

71	7.35 Iteração 3
71	7.36 Iteração 4
71	7.37 Iteração 10
71	7.38 Iteração 15
72	7.39 Iteração 1
72	7.40 Iteração 2
72	7.41 Iteração 3
72	7.42 Iteração 4
72	7.43 Iteração 10
72	7.44 Iteração 15
73	7.45 Condutividade e resistividade elétrica - Iteração 25
74	7.46 Condutividade elétrica - Iteração 25
75	7.47 Resistividade elétrica - Iteração 25
76	7.48 Valores de condutividade e resistividade elétrica dos elementos da malha para as iterações 1,5,10,15,20 e 25
77	7.49 Número de valores singulares anulados durante o processo iterativo em cada caso de estudo
78	7.50 Convergência com dados de tecido humano (Regularizado)
79	7.51 Condutividade e resistividade elétrica - Iteração 25 (Regularizado)
80	7.52 Valores de condutividade e resistividade elétrica dos elementos para os casos: apenas minimizado e minimizado com filtro passa alta - Iteração 25
84	9.1 Malha proposta (272 elementos e 201 nós)

Lista de Símbolos

J :	densidade de corrente elétrica
σ :	distribuição de condutividade elétrica
ϵ :	permissividade elétrica
E :	campo elétrico
V, ϕ :	potencial elétrico
x, y :	coordenadas cartesianas de um ponto do domínio discretizado
$V(x, y)$:	voltagem num ponto do domínio
$V_e(x, y)$:	voltagem num ponto do elemento e do domínio
a, b, c :	funções dos potenciais nos vértices do elemento e
A :	área dos elementos triangulares
W^e :	funcional correspondente à equação de Laplace para o elemento e
∂S :	diferencial de área
Y^e :	matriz de rigidez local do elemento e
$Y^{(e)}$:	elemento da matriz de rigidez local do elemento e
Y :	matriz de rigidez global
i, j, k :	nós do elemento e
C :	padrões de corrente elétrica
ρ :	distribuição de resistividade elétrica
a :	metade da largura dos eletrodos
t :	espessura da interface de contato
ρ' :	impedância de contato
Φ :	funcional de voltagens a ser minimizado
V_m :	voltagens medidas na fronteira do meio
V_2 :	voltagens calculadas na formulação direta
α, β :	parâmetros de regularização
H :	matriz filtro passa alta
I :	matriz identidade
$\delta\sigma$:	incremento nas condutividades elétricas
J :	matriz jacobiana

Resumo

A tomografia de impedância elétrica (TIE) é um método de obtenção de imagens que visa estimar propriedades elétricas, como resistividade ou condutividade no interior de um meio, a partir do conhecimento de medidas elétricas na fronteira. A TIE é encarada pela maioria dos autores como um problema de estimação de parâmetros de um modelo não linear. Supõem-se conhecidas a excitação do sistema e a estrutura do modelo; e são medidos os potenciais elétricos no contorno do meio, a resposta do sistema. Os parâmetros desconhecidos representam a distribuição de condutividade do meio. Para estimar os parâmetros implementou-se um algoritmo que minimiza um índice de erro.

O modelo baseia-se na formulação do Método dos Elementos Finitos (MEF) para problemas de campo elétrico. A minimização do índice de erro utiliza o Método de Newton-Raphson, inclusive empregando uma regularização Tikhonov. Imagens experimentais de uma cuba com um objeto em solução salina, e de um tórax humano são apresentadas.

Este trabalho aborda a história dos algoritmos de TIE baseados no método Newton-Raphson.

Abstract

The Electrical Impedance Tomography (EIT) is a method of obtaining images to estimate electrical properties, like resistivity or conductivity within a medium, by means of electrical measurements done on the medium boundary.

The EIT is seen by most authors as a non-linear model parameter estimation problem. The system excitation is the current pattern, while electrical potentials on the boundary contribute the system's response. The unknown parameters represent the medium conductivity distribution. In order to estimate the parameters, an algorithm was implemented that minimizes an error index.

The model is based on the Finite Element Method (FEM) formulation for electrical field problems. To minimize the error index a Newton-Raphson Method is used, including a Tikhonov regularization term. Experimental images of a vessel containing an object in saline solution, and of human torax are presented. This work addresses the history of EIT algorithms based on the Newton-Raphson method.

Capítulo 1

Introdução

Nas duas últimas décadas têm havido um especial interesse na obtenção de imagens médicas através da Tomografia por Impedância Elétrica (TIE) com a finalidade de auxiliar o médico intensivista no diagnóstico de pacientes graves.

Esta técnica consiste num algoritmo numérico capaz de estimar as propriedades elétricas no interior de um meio a partir de voltagens medidas na fronteira, cujos resultados terão uma interpretação desde o ponto de vista clínico. Neste trabalho em particular, estamos interessados em estimar os níveis de impedância elétrica no interior do tórax, decorrentes de alterações pulmonares específicas, e das variações do volume de ar nos pulmões durante a fase respiratória.

Atualmente, o médico não dispõe de ferramentas precisas para lidar com uma das principais causas de mortalidade em pacientes submetidos à ventilação artificial (Amato, 2001), que são as alterações pulmonares derivadas dessa ventilação e do colapso pulmonar frequentemente associado.

A partir de fortes evidências clínicas e experimentais (Amato, 2001), a ventilação artificial passou a ser vista não só como uma simples medida de suporte para a total recuperação do pulmão afetado, mas também como um dos principais fatores determinantes na evolução do quadro pulmonar e, consequentemente, na evolução global do paciente.

Amato demonstra como é possível reduzir estes índices de mortalidade através de duas estratégias: a diminuição do volume corrente, pagando-se o preço de um aumento da frequência respiratória e da concentração do gás carbônico no sangue arterial; e a diminuição do volume corrente associada ao aumento da pressão respiratória residual no final da expiração.

Porém, a dificuldade está na impossibilidade de monitorar a beira do leito

a função pulmonar mediante a obtenção de imagens em tempo real, capazes de detectar a presença de colapso, hiperdistensão alveolar ou ruptura pulmonar. Os exames radiológicos comuns, até mesmo a tomografia computadorizada e a ressonância nuclear magnética, além de não possuírem sensibilidade suficiente, obrigam o paciente a um perigoso deslocamento da Unidade de Terapia Intensiva (UTI) para a sala de radiologia.

Com a implementação destas estratégias estima-se que poderiam ser evitadas 15.000 mortes/ano no país, porém, ainda está faltando uma ferramenta que permita um ajuste mais fino dos parâmetros ventilatórios que, consequentemente, contribuirá para uma redução ainda maior deste número. É justamente neste ponto que a TIE apresenta-se como uma técnica promissora para o monitoramento da função pulmonar.

O tecido pulmonar é um meio privilegiado para a implementação desta técnica, já que sua estrutura permite que, para qualquer variação na quantidade de ar e do fluxo sanguíneo pulmonar, ou no caso de alterações pulmonares específicas, se tenha uma resposta caracterizada por variações na impedância elétrica em diferentes regiões do pulmão. Por exemplo, a existência de uma porção destruída do parênquima pulmonar requer níveis de ventilação diferentes aos necessários no caso de obstruções crônicas das vias aéreas. Nessas situações, a TIE poderia detectar tais alterações, permitindo a definição de novos protocolos de tratamento e ajustes dos parâmetros ventilatórios em função dos limites individuais de cada paciente.

Em termos práticos a TIE consiste na injeção de correntes na epiderme, através de um certo número de eletrodos distribuídos uniformemente ao redor do tórax e alinhados aproximadamente num mesmo plano. Posteriormente, coleta-se o número de medidas de voltagens necessárias na fronteira, que servirão como dados de entrada do algoritmo de estimação da distribuição de impedância elétrica no interior do tórax. Esta estimação é realizada minimizando uma função da diferença entre voltagens medidas e calculadas.

Os métodos de estimação na TIE diferem segundo:

- a discretização da equação diferencial parcial e as condições de contorno;
- o modo em que o sistema é excitado;
- a função erro a ser minimizada;

- o algoritmo de busca do mínimo da função erro;

- o método de regularização;

- o modelo de eletrodos a ser considerado.

Por último, dizer que a estimação da impedância elétrica é um problema inverso, não linear e mal posto, sendo necessário condicionar o problema através de técnicas de regularização.

A distribuição de impedância pode ser obtida de maneira estática ou dinâmica. No primeiro caso se estimam valores estáticos e no segundo, se estimam valores relativos ou variações entre dois instantes de tempo.

A técnica, além de ser não invasiva, é portátil e de baixo custo. Apenas tem o inconveniente da resolução espacial que compromete o tempo de execução dos cálculos.

Capítulo 2

Objetivos

Um dos objetivos deste trabalho é desenvolver um algoritmo numérico baseado no método Newton-Raphson que permita estimar a impedância elétrica no interior de um meio a partir do conhecimento da distribuição de voltagem medida na fronteira, resultante de correntes impostas no contorno do meio.

Outro objetivo é descrever do ponto de vista teórico alguns dos algoritmos baseados no Método de Newton-Raphson.

Uma vez implementado este método, será comparado a outros métodos que vêm sendo implementados no Projeto Temático Nº 01/05303-4, da FAPESP. Entre os métodos sob análise destacam-se: o filtro de Kalman, backprojection, otimização topológica, o algoritmo genético e redes neurais, além de outros métodos dos ditos relativos.

Capítulo 3

Revisão da Literatura

Os métodos numéricos para estimar impedância elétrica propõem soluções tanto *iterativas* quanto *não iterativas*.

Nos métodos não iterativos considera-se que a distribuição de potencial é uma função linear da distribuição de condutividade elétrica, e portanto podem ser resolvidos através de métodos lineares. Exemplos destes são *Backprojection* (Barber and Brown, 1984) e métodos relacionados (Santosa and Vogelius, 1990; Berenstein and Tarabusi, 1991); *Aproximação de Calderon* (Calderon, 1980; Isaacson and Isaacson, 1989; Cheney *et al.*, 1990a; Isaacson and Cheney, 1990); *Métodos de Momentos* (Bertsen *et al.*, 1991; Connolly and Wall, 1988; Allers and Santosa, 1991); *Métodos de Newton de uma iteração* (Cheney *et al.*, 1990b; Eggleston *et al.*, 1989; Fuchs *et al.*, 1991; Globe, 1990; Simske, 1987).

No caso dos métodos iterativos, considera-se que realmente existe uma relação não linear entre os potenciais e a condutividade elétrica e, basicamente, aplicam-se a forma dos mínimos quadrados para vários funcionais. Exemplos destes são (Eggleston *et al.*, 1989; Kohn and McKenney, 1991; Wexler *et al.*, 1985; Yorkey *et al.*, 1987; Hua, 1991; Woo *et al.*, 1993; Dobson, 1992). Em particular, o paper de Dobson apresenta rigorosas provas de convergência dos métodos de Newton para várias condições.

Neste trabalho, optou-se pela resolução do sistema não linear nas condutividades, portanto a revisão a seguir será direcionada levando-se em conta propostas baseadas no método de Newton-Raphson.

3.1 Método Newton-Raphson

Newton-Raphson (Press *et al.*, 1989) é um método numérico utilizado na resolução de sistemas não lineares que apresentam a forma $f_i = 0$ para $i = 1, \dots, N$, que se destaca pela sua robustez e eficiência. Considere uma única função $f(x)$ com uma única variável x , geometricamente o método consiste em entender a reta tangente ao ponto x_k atual, até cruzar o eixo das abscissas, onde um novo ponto x_{k+1} é determinado. Algebricamente, o método deriva-se da expansão da série de Taylor nas proximidades de um ponto, e avalia tanto a função $f(x)$ quanto a derivada $f'(x)$, num ponto arbitrário x .

Considere-se um problema típico em que N funções são igualadas a zero, sendo envolvidas as variáveis $x_i, i = 1, 2, \dots, N$:

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.1)$$

Nas proximidades da solução cada função pode ser expandida em séries de Taylor,

$$f_i(\bar{x} + \delta\bar{x}) = f_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^J \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \delta x_j + O(\delta\bar{x}^2) \quad (3.2)$$

sendo \bar{x} o vetor das variáveis x_i .

Descartando os termos de ordem superiores a um, e fazendo as $f_i(\bar{x} + \delta\bar{x}) = 0$, se obtém um sistema de equações lineares em $\delta\bar{x}$, que direciona cada função para a solução zero simultaneamente,

$$\sum_{j=1}^J \alpha_{ij} \delta x_j = \beta_i \quad (3.3)$$

onde

$$\alpha_{ij} \equiv \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad e \quad \beta_i \equiv -f_i \quad (3.4)$$

A equação 3.3 define um processo iterativo para calcular o zero \bar{x}^* do sistema 3.1, no qual para cada iteração k , e com a estimativa atual x_k , se resolve a equação 3.3 e se atualiza a estimativa de x^* ,

$$x_{k+1}^i = x_k^i + \delta x_i \quad i = 1, \dots, N \quad (3.5)$$

Desta maneira, o processo iterativo continua até que os valores absolutos de f_i ou δx_i se tornarem inferiores às tolerâncias predeterminadas.

Este método têm sido trabalhado por vários autores, tendo apresentado resultados satisfatórios. Em particular, no paper *Comparison of Impedance Topographic Reconstruction Algorithms* (Yorkey and Webster, 1987) realiza-se uma análise comparativa entre vários métodos de estimação de impedância, concluindo-se que o método Newton-Raphson apresenta um desempenho muito melhor em relação aos outros. Os métodos usados para esta verificação foram: *Sensitivity Method, Perturbation Method, Equipotencial Lines, Iterative Equipotencial Lines* e *Double Constraint*.

Esta comparação mostrou que Newton-Raphson sempre converge, e com um erro menor. Entre os outros métodos, alguns divergiam e outros, apesar de serem mais rápidos no tempo de uma iteração, precisavam de um número maior de iterações além de apresentar sinais de instabilidade.

Yorkey sugere que para fazer o método Newton-Raphson mais eficiente computacionalmente, deve-se realizar apenas uma correção e fazer todos os cálculos prévios possíveis. Deste modo, o método poderia ser tão ou mais rápido quanto os outros métodos comparados.

3.2 Variantes do Método Newton-Raphson

Um dos primeiros algoritmos de estimação de impedância elétrica, com base no método Newton-Raphson denomina-se *Modified Newton-Raphson* (Yorkey et al., 1987). Nele implementam-se duas formas para se obter o Jacobiano, a forma usual, e através do teorema da compensação (Murai and Kagawa, 1985; Nakayama et al., 1981), mostrando-se esta última mais eficiente em relação ao método padrão sem perder precisão e velocidade na convergência.

Como técnica de regularização para eliminar o número de condição desta- vorável da matriz Hessiana aproximada, utilizou o método de *Marquardt* (Marquardt, 1963; Marquard, 1983). A implementação destas propostas mostrou resultados

significativamente melhores em relação aos métodos anteriores, tais como, *Perturbation Method*, *Equipotential Lines Method*, *Iterative Equipotential Lines Method* e *Double Constraint Method*.

O método estima a impedância elétrica minimizando o erro quadrático entre as voltagens calculadas através do método dos elementos finitos, e as voltagens medidas em quatro eletrodos na fronteira.

Em relação aos resultados, o método apresentou boa convergência, mas mostrou-se muito sensível aos erros de medição e ao aumento da resolução espacial, produzindo imagens estáticas distorcidas.

Posteriormente, apresenta-se a proposta denominada *NOSEF: Newton's one step Error Reconstructor* (Cheney et al., 1990b). Também baseada no método Newton-Raphson, esta proposta tem como grande vantagem a determinação de uma estimativa inicial equivalente a uma distribuição de condutividade média, sendo suficiente apenas uma iteração para se obter resultados razoáveis.

Para obter a estimativa inicial considera-se que o meio é homogêneo, com distribuição de condutividade $\sigma = C \times \{1\}$. Deriva-se o índice de erro com respeito à constante C , e resolve-se a equação resultante. Depois, procede-se a calcular a nova distribuição de condutividade σ_k via Newton, tendo como valor anterior $\sigma_{k-1} = C$. Desta maneira tanto a função quanto o jacobiano são calculados apenas uma vez.

Esta aproximação permite que, independentemente dos valores das grandezas nas condições de contorno e no interior do meio, Newton-Raphson convirja na direção e valores desejados em poucas iterações ou em apenas uma só. Além disso, o método permite que a matriz jacobiana possa ser calculada explicitamente com antecedência, o que faz a reconstrução mais rápida.

Neste caso também foi utilizado um modelo de elementos finitos, mas considerando 32 eletrodos na fronteira a fim de se obter maior resolução espacial.

Outra proposta interessante é a denominada *Improved Newton-Raphson* (Woo et al., 1993), que é baseada no algoritmo *Modified Newton-Raphson*, em combinação com o método de injeção de padrões de corrente (Gisser et al., 1987; Isaacson, 1986). Neste artigo o autor propõe implementar o método da *Matriz Aumentada de Hachtel* para tratar o número de condições desfavorável da matriz Hessiana, fazendo o algoritmo mais rápido, robusto e eficiente computacionalmente em relação ao proposto por Yorkey (Yorkey et al., 1987).

Para viabilizar a obtenção de imagens estáticas, o autor propõe o uso da

computação paralela, e mostra que com apenas dois processadores, o tempo de cálculo é reduzido aproximadamente pela metade.

Em relação à discretização do domínio, utiliza-se um modelo de elementos finitos, excitado pela injeção de correntes em 32 eletrodos localizados na fronteira. Baseada no algoritmo *NOSEF*, surge a proposta denominada *FNOSER: Fast Newton's one step Error Reconstructor* (Edic et al., 1995), que minimiza o tempo de execução através de computações previamente realizadas. Esta proposta divide o problema da impedância elétrica, estimando as distribuições estáticas de per-

mitividade e condutividade elétrica. As voltagens medidas são recebidas como sendo uma grandeza complexa, que são usadas pelo algoritmo de reconstrução para calcular as partes reais e imaginárias da admitividade elétrica.

Esta versão acelerada do algoritmo *NOSEF* implementa uma aproximação circular da seção transversal do corpo, que consiste numa malha denominada *Joshua Tree*, com a qual muitas operações podem ser pré-calculadas graças à sua topologia. Esta malha é útil para aproximar geometrias que são quase circulares, tais como o tórax, o braço, a perna etc. Outro aspecto importante é que durante a reconstrução da imagem somente é atualizado o pixel que tenha mudado, resultando assim num tempo de visualização menor.

Similarmente, a função de erro a ser minimizada consiste na diferença quadrática entre as voltagens calculadas e as medidas em 32 eletrodos, dada a injeção de 31 padrões de correntes. Nesse estágio da pesquisa, o *Rensselaer polytechnic institute* disponibilizou comercialmente o aparelho de tomografia por impedância elétrica denominado ACT3, que permite a obtenção de 18 imagens estáticas por segundo.

Finalmente, pode-se citar o algoritmo *CNRSER: Complex Newton's Recursive Step Error Reconstructor* (Edic et al., 1998), que resolve completamente o problema complexo da admitividade, uma limitante do algoritmo *FNOSER*, no qual a condutividade e a permissividade eram resolvidas separadamente. Esta nova aproximação resolve o problema inverso da admitividade em conjunto com uma formulação direta do método dos elementos finitos, na qual se calculam as voltagens de fronteira do meio para os diferentes vetores de corrente elétrica aplicada e uma dada distribuição de admitividade.

3.3 Modelos de Eletrodos e Padrões de Corrente

Além do método escolhido para estimar a distribuição de impedância elétrica e das técnicas de regularização para melhorar a performance dos algoritmos, demonstrou-se que não era suficiente modelar apenas o interior do meio do qual se pretende estimar seus parâmetros. O que acontece na fronteira tornou-se mais um elemento importante a fim de se obter maior precisão nos resultados.

Neste sentido, diversos autores pesquisaram de maneira experimental e teórica efeitos relacionados à configuração do sistema de eletrodos e aos padrões de correntes aplicadas. Isto é, há necessidade de considerar um modelo de eletrodos, quantos eletrodos devem ser utilizados?, que tamanho devem ter?, a impedância de contato e a condutividade do eletrodo devem ser modeladas? as formas de injetar corrente tem suas particularidades? etc.

A seguir será realizada uma breve descrição dos principais modelos de eletrodos (Cheney *et al.*, 1999):

Considere-se um domínio Ω submetido à presença de um campo elétrico, gerando assim uma distribuição de potencial elétrico no interior, que é regida pela equação (derivada das equações de Maxwell),

$$\Delta \cdot \gamma(x, \omega) \nabla u = 0 \quad (3.6)$$

onde x é um ponto que pertence ao meio Ω , u é o potencial elétrico ou voltagem, e γ a admitividade que é dada por $\gamma(x, \omega) = \sigma(x, \omega) + i\omega\epsilon(x, \omega)$, sendo σ a condutividade elétrica, ϵ a permissividade elétrica e ω a frequência angular da corrente aplicada. Salienta-se que a admitividade é o recíproco da impedância. Na prática, as correntes elétricas injetadas na fronteira de uma superfície $\partial\Omega$ geram uma densidade de corrente J que pode ser expressa por,

$$\frac{\partial u}{\partial n} = J \quad \text{em } \partial\Omega \quad (3.7)$$

As equações 3.6 e 3.7 junto com a condição de conservação da carga $\int_{\partial\Omega} J = 0$ e a condição $\int_{\partial\Omega} u = 0$, devido ao aterramento (voltagem de referência), constituem um possível modelo de eletrodos que se denomina *Continuum Model*.

Porém, este modelo é inadequado para implementar-se num experimento real (Cheng *et al.*, 1989), já que a densidade de corrente J é desconhecida. Na prática somente se conhece a corrente que é injetada nos eletrodos fixados discretamente

no contorno do meio. Esta densidade de corrente poderia ser considerada constante em cada eletrodo (*Gap Model*), mas continuaria sendo um modelo inadequado (Cheng *et al.*, 1989).

Existem dois efeitos importantes que devem ser considerados no modelo, que são a discretização dos eletrodos e a sua própria condutividade. Isto pode ser realizado da maneira seguinte (Cheng *et al.*, 1989; E.Somersalo *et al.*, 1992): a corrente total que passa pelo eletrodo é igual à integral da densidade de corrente através dele, ou seja

$$\int_{e_l} \gamma \frac{\partial v}{\partial n} ds = C_l, \quad l = 1, 2, 3, \dots, L \quad (3.8)$$

sendo C_l a corrente injetada no l -ésimo eletrodo, e e_l denota a parte de $\delta\Omega$ correspondente a o l -ésimo eletrodo. Neste modelo é também considerada a distância que separa os eletrodos, ou seja

$$\gamma \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad (3.9)$$

A forma convencional de modelar a alta condutividade dos eletrodos é impondo a restrição de que a voltagem é constante neles. Estas constantes V_l são as medições que fazem parte da solução do problema direto. Isto é,

$$n = V_l \quad \text{em } e_l, \quad l = 1, 2, \dots, L \quad (3.10)$$

Este modelo é conhecido como *Shunt Model*.

Para se obter uma modelagem bem representativa deve-se considerar o efeito eletroquímico que ocorre na região de contato entre os eletrodos e o objeto (a pele, por exemplo), que consiste na formação de uma camada fina e com elevada resistência. A impedância z_l desta camada é chamada de impedância efetiva de contato ou impedância da superfície. Este efeito, logicamente, adiciona uma variação de potencial, podendo ser a restrição 3.10 substituída por

$$n + z_l \gamma \frac{\partial v}{\partial n} = V_l \quad \text{em } e_l, \quad l = 1, 2, 3, \dots, L \quad (3.11)$$

resultando no denominado *Complete Model*, cuja solução única têm sido demonstrada (E.Somersalo *et al.*, 1992) e é capaz de estimar resultados experimentalmente com até 0.1% de precisão.

de contato denominado *Compound Electrodes* (Hua et al., 1993b). Neste modelo foram utilizados diferentes valores de impedância de contato na solução do problema direto e concluiu-se que ela deve ser modelada com precisão para obter bons resultados.

Por último, cabe salientar que a impedância de contato pode ser separada em dois termos. O primeiro refere-se a impedância eletroquímica que existe entre o eletrodo e a pele. O segundo termo refere-se à impedância da pele, que usualmente é desconhecida podendo causar maiores problemas no caso de medições *in vivo*. Uma grande queda de voltagem devida à impedância da pele pode mascarar pequenas quedas de voltagem causadas por variações na estrutura interna do meio. A impedância de contato da pele apresenta variações devido às camadas que a conformam, além das variações temporais decorrentes da transpiração do indivíduo e do movimento dos eletrodos (Woo et al., 1992).

3.4 Estudos e Aplicações Clínicas

Diversos trabalhos na literatura apresentam provas que evidenciam as possibilidades da Tomografia por Impedância Elétrica se tornar uma importante ferramenta para a medicina respiratória, desde a detecção e acompanhamento de complicações pulmonares severas, até o monitoramento da função pulmonar em pacientes submetidos a ventilação artificial.

Em particular, pode-se citar o paper *Applications of Applied Potential Tomography (APT) in Respiratory Medicine* (Barber et al., 1987), que mostra um estudo relacionado ao monitoramento das variações de volume do pulmão, assim como da quantidade de líquido contido em seu interior, através da TIE.

Nesse estudo, Barber e Brown demonstram através de testes experimentais realizados em pacientes, que existe uma correlação altamente consistente entre o volume de ar expirado e inspirado com os valores obtidos de impedância elétrica, podendo ser estimada a contribuição de cada pulmão no aumento do volume de ar.

Em pacientes com enfisema pulmonar observou-se que as áreas afetadas se caracterizavam por variações não uniformes na impedância, apresentando contribuições menores para mudanças de impedância.

Demonstraram também através de experimentos *in vivo*, que existe uma correlação entre a quantidade de líquido dentro do pulmão e a impedância elétrica.

O modelo completo de eletrodos - *Complete Model* -, consiste no conjunto de equações 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, e 3.11, juntamente com as condições

$$\sum_T C_l = 0 \tag{3.12}$$

e

$$\sum_T V_l = 0 \tag{3.13}$$

de conservação da carga e a definição do potencial de referência, respectivamente. A partir da introdução das primeiras noções de visibilidade e sensibilidade (Seager *et al.*, 1984; Bates and Seager, 1985), definiu-se um índice de *distinguidade* (Gisser *et al.*, 1987) que permitia medir quantitativamente a habilidade de um padrão de corrente distinguir entre dois valores de condutividade. Gisser implementa um conjunto de correntes que maximiza a distinguibilidade - *Best Pattern* (Isaacson, 1986) -, e demonstra a influência que tem o tamanho e o número dos eletrodos para distinguir entre dois valores de condutividade.

Em outros trabalhos direcionados na avaliação da sensibilidade dos padrões de corrente, foram simuladas possíveis fontes de erros (Vauhkonen *et al.*, 1997) que poderiam afetar a estimação da impedância elétrica, tais como a impedância de contato entre os eletrodos e a pele, o tamanho e localização dos eletrodos, e a forma geométrica do contorno do meio. Vauhkonen avalia a sensibilidade dos padrões de injeção *adjacentes e trigonométricos* quando simuladas as fontes de erros, e conclui que o método adjacente é mais tolerante aos erros que o método trigonométrico.

As imagens obtidas apresentaram certo grau de distorção devido à introdução de ruído ou simulação de falhas (no problema direto), e foram melhoradas através de fortes regularizações (no problema inverso), ao custo dos valores absolutos de resistividade serem deteriorados. Vale dizer que estes valores são a informação mais importante em algumas das possíveis aplicações da TIE estática. Portanto, deve-se tomar cuidados durante o ajuste dos parâmetros da regularização quando se desejarem obter resultados precisos de distribuição absoluta de resistividade. Nesse trabalho utiliza-se o modelo completo de eletrodos.

A influência da modelagem dos erros de impedância de contato na TIE absoluta foi também examinada por Hua, que implementou um modelo de impedância

No experimento realizado, vários indivíduos foram submetidos a uma transfusão intravenosa de 1.5 l de salina isotônica, com a finalidade de aumentar o volume de sangue no pulmão decorrente do aumento no volume total de sangue no sistema circulatório. Como resultado, durante o monitoramento constatou-se a presença de regiões de baixa resistividade nas áreas correspondentes aos pulmões.

Com este resultado, Barber e Brown evidenciaram que um edema pulmonar poderia ser diagnosticado ainda em fase inicial. Visto que a circulação sanguínea no pulmão representa aproximadamente um 9% da circulação de todo o sistema, a transfusão de 1.5 l de salina deve representar um aumento da circulação pulmonar de aproximadamente 0.12 l. No caso de um edema pulmonar severo, o volume de líquido na região afetada pode aumentar em 0.12-1.2 l e os alvéolos podem conter até 1.0 l ou mais de líquido, em estado terminal (Staub, 1972).

Também demonstram que a distribuição de impedância é sensível às mudanças de postura. Quando a postura é alterada a distribuição de impedância não é uniforme, mas a contribuição às variações de impedância é.

O experimento também foi realizado colocando os eletrodos à altura dos lóbulos inferiores dos pulmões, resultando em áreas menores para as variações de impedância, o que é consistente com a redução anatômica do tamanho do pulmão. Deste modo, uma reconstrução tridimensional da distribuição de impedância poderia oferecer uma informação espacialmente mais completa.

Outros trabalhos relacionados podem ser encontrados no paper *Applied Potential Tomography: Clinical Applications* (Brown et al., 1985).

3.5 Respiração e Fisiologia do Tecido Pulmonar

Nesta seção serão introduzidos aspectos fisiológicos do sistema respiratório com a finalidade de evidenciar e questionar (parágrafos em «italico») as vantagens da TIE como instrumento de estudo da função pulmonar e monitoramento da ventilação artificial.

Mecanismos Básicos da Expansão e Retração Pulmonar

Os pulmões podem se retrair e expandir de duas maneiras: pelos movimentos do diafragma para cima e para baixo, para aumentar ou diminuir a cavidade torácica; e pela elevação e abaixamento das costelas para aumentar ou

diminuir o diâmetro ântero-posterior da cavidade torácica (Guyton, 1992), conforme mostrado na figura 3.1.

Na respiração normal e tranqüila, durante a inspiração, a contração do diafragma traciona para baixo as superfícies inferiores dos pulmões e, durante a expiração, o diafragma apenas se relaxa, e a retração elástica dos pulmões, da parede torácica e das estruturas abdominais comprime os pulmões. Porém, durante a respiração forçada, as forças elásticas não são suficientemente poderosas para causar a expiração rápida necessária, que passa a ser realizada pela contração dos músculos abdominais, forçando para cima o conteúdo abdominal contra a parte inferior do diafragma.

A expansão dos pulmões através da elevação da caixa torácica ocorre porque na posição natural de repouso, as costelas estão dirigidas para baixo, posicionando também o esterno para trás em direção à coluna vertebral, fazendo com que o diâmetro ântero-posterior do tórax fique cerca de 20% maior durante a inspiração máxima que na expiração.

«Portanto, as variações geométricas que estes movimentos impõem à caixa torácica devem ser considerados futuramente a fim de melhorar a representação da geometria do modelo geométrico nas diferentes fases do ciclo respiratório, e consequentemente a precisão dos resultados de cálculo.»

Vias Respiratórias

Após passar pelo nariz e faringe, o ar é distribuído até os pulmões por meio da traquéia, dos brônquios e dos bronquíolos. A traquéia é denominada via respiratória de primeira geração, e os dois brônquios principais direito e esquerdo constituem a segunda geração; cada divisão subsequente constitui uma geração adicional. Existem entre 20 e 25 gerações antes de o ar alcançar os alvéolos. As poucas gerações finais de vias aéreas, depois que elas se tornam menores que 1 a 1,5 mm de diâmetro, são denominadas bronquíolos; todas as gerações intermediárias entre a traquéia e os bronquíolos constituem os brônquios. Na figura 3.2 mostra-se a estrutura global das vias respiratórias.

A importância final do sistema ventilatório consiste em renovar continuamente o ar nas áreas de troca gasosa dos pulmões, onde fica em íntima proximidade com o sangue pulmonar. Essas áreas incluem os alvéolos, os sacos alveolares, os ductos alveolares e os bronquíolos respiratórios, conforme mostrado na figura 3.3. A intensidade com que o ar novo alcança essas áreas é denominada de ventilação

alveolar.

Um dos problemas mais importantes em todas as vias respiratórias consiste em mantê-las abertas para permitir a fácil passagem do ar para dentro e para fora dos alvéolos. Para impedir o colapso da traquéia, múltiplos anéis cartiláginosos estendem-se por cerca de cinco sextos do diâmetro ao redor da traquéia. Nas paredes dos brônquios existem lamínas cartiláginosas menos extensas que também conferem um grau razoável de rigidez, ao mesmo tempo em que permitem um movimento suficiente para que os pulmões possam expandir-se e contrair-se. Essas lamínas tornam-se progressivamente menos extensas nas últimas gerações de brônquios e desaparecem completamente nos brônquiolos. Por outro lado, o colapso dos brônquiolos não é impedido por qualquer rigidez de suas paredes. Pelo contrário, eles são expandidos pelas mesmas pressões transpulmonares que expandem os alvéolos. Isto é, os brônquiolos aumentam de tamanho da mesma forma que o fazem os alvéolos.

Em todas as áreas da traquéia e dos brônquios não ocupadas por lamínas cartiláginosas, as paredes são formadas por músculo liso. As paredes dos brônquiolos são formadas quase que inteiramente por músculo liso, com exceção do brônquilo mais terminal, denominado brônquilo respiratório, que possui apenas umas poucas fibras musculares lisas. Muitas doenças obstrutivas dos pulmões causam estreitamento dos brônquiolos musculares, na maioria das vezes em virtude da contração excessiva do próprio músculo liso. Portanto, tornou-se extremamente importante compreender os fatores que controlam a contração brônquial.

Em condições respiratórias normais, os brônquiolos ficam principalmente na posição relaxada, e o ar flui facilmente através deles, sendo suficiente menos de 1 mmHg de gradiente de pressão do ar entre os alvéolos e a traquéia para produzir todo o fluxo aéreo necessário para uma respiração calma. Porém, isso não é verdadeiro no caso de uma doença. Por exemplo, na asma, o grau de contração às vezes é tão grande que poderá ser necessária uma pressão 20 vezes maior para proporcionar um bom fluxo aéreo (durante a expiração).

Tendências dos Pulmões ao Colapso

Os pulmões exibem tendência elástica permanente ao colapso e, portanto, tendem a se afastar da parede torácica. Esta tendência dos pulmões à retração é causada por dois fatores. Primeiro, dentro dos pulmões existem muitas fibras elásticas que

são distendidas pela insuflação pulmonar e, portanto, que tendem a contrair-se. Segundo, e ainda mais importante, a tensão superficial do líquido que reveste os alvéolos produz tendência elástica constante para o colapso alveolar. Esse efeito é causado pela atração entre as moléculas superficiais do líquido alveolar; de forma que toda a camada líquida que reveste as superfícies alveolares age como pequenos balões elásticos que tentam continuamente colapsar o pulmão.

Em geral, as fibras elásticas nos pulmões são responsáveis por cerca de um terço da tendência à retração, sendo a tensão superficial responsável pelos outros dois terços.

A tendência total à retração pode ser medida pela quantidade de pressão negativa no espaço pleural necessária para impedir o colapso dos pulmões (pressão pleural¹ ou pressão de retração pulmonar). Em condições normais, ela é de aproximadamente -4 mmHg. Isso é, torna-se necessária uma pressão negativa de -4 mmHg nas superfícies externas dos pulmões para mantê-los expandidos no tamanho normal. Quando os pulmões são distendidos e alcançam tamanho muito grande, como ocorre no final da inspiração profunda, a pressão pleural então necessária poderá ser de até -12 a -18 mmHg.

A tensão superficial do líquido que reveste os alvéolos se vê comprometida na ausência de surfactante², a expansão pulmonar fica extremamente difícil, exigindo com frequência pressões pleurais negativas de até -20 a -30 mmHg para neutralizar a tendência dos alvéolos ao colapso, o que mostra como o surfactante é extremamente importante para minimizar o efeito da tensão superficial como causa do colapso pulmonar.

Alguns bebês recém-nascidos, principalmente os prematuros, não secretam quantidades adequadas de surfactante, o que torna muito difícil a expansão pulmonar. Sem tratamento imediato e adequado, a maioria destes bebês morre logo após o nascimento, devido à ventilação inadequada. Esta condição denomina-se doença da membrana hialina ou síndrome da perturbação respiratória.

O surfactante age reduzindo as forças entre as moléculas superficiais do líquido pleural e a pressão existente no espaço entre a pleura pulmonar e a pleura da parede torácica (espaço pleural) onde não existe qualquer inserção entre o pulmão e a parede da caixa torácica, exceto no local em que é suspenso no hilo, do mediastino. Nesse espaço existe apenas líquido pleural que circunda o pulmão fazendo com que este literalmente flutue no interior do tórax. Este líquido lubrifica os movimentos do pulmão no interior da cavidade. O surfactante é uma mistura de lipoproteínas secretada por células especiais que formam parte do epitélio alveolar, cuja função é reduzir a tensão superficial líquido que reveste os alvéolos.

alveolar. Na ausência de surfactante, essa interface apresenta tensão superficial de aproximadamente 50 dinas/cm ($1 \text{ dina/cm} = 10^{-3} \text{ N/m}$). Em compensação, se houver surfactante, a tensão superficial varia entre 5 e 30 dinas/cm, com média aproximada quatro vezes menor do que na ausência de surfactante.

O papel do surfactante torna-se ainda mais importante à medida que o tamanho do alvéolo diminui. Pela lei de Laplace, em relação aos vasos sanguíneos, a pressão transalveolar necessária para manter os alvéolos expandidos é diretamente proporcional à tensão na parede do alvéolo (nesse caso, a tensão superficial do líquido) dividida pelo diâmetro. Assim sendo, à medida que o diâmetro se torna menor, a pressão necessária passa a ser proporcionalmente maior.

Por exemplo, no caso em que dois alvéolos ocluídos forem conectados e um deles for menor que outro, a pressão gerada no alvéolo menor devido à sua maior tendência ao colapso, será consideravelmente superior à pressão do alvéolo maior. Consequentemente, o ar contido no alvéolo menor será deslocado para o maior, tornando-se o tamanho do alvéolo menor ainda menor, e sua pressão ainda maior. E vice-versa para o alvéolo maior. Este processo, conhecido como instabilidade dos alvéolos, continua até o colapso total do alvéolo menor.

A ausência de surfactante, além de causar a tendência ao colapso alveolar, pode também ocasionar acúmulo de líquido de edema no interior do alvéolo trazido da parede alveolar. No pulmão normal, quando existem quantidades suficientes de surfactante, a tensão superficial ainda é capaz de retirar líquido da parede, com pressão média de -3 mmHg. No entanto, existe normalmente uma pressão ainda mais negativa no interstício pulmonar, com média de -9 mmHg, que tende a absorver o líquido dos alvéolos, mantendo-os secos. Na ausência de surfactante, a força média da tensão superficial que tende a trazer líquido para dentro dos alvéolos pode alcançar valor de até -10 a -20 mmHg, sendo esta força suficiente para causar a filtração maciça de líquido dos capilares da parede alveolar para o interior dos alvéolos, que se enchem, então, de líquido. Portanto, a ausência de surfactante poderia ocasionar também um edema pulmonar. Este é um dos fatores que causam a angústia respiratória grave em recém-nascidos com quantidades de surfactante insuficientes, situação em que um grande número de alvéolos fica cheio de líquido.

«Seria interessante avaliar experimentalmente o valor de impedância elétrica do líquido que reveste os alvéolos para várias concentrações de surfactante a fim de obter uma medida que permita identificar um colapso alveolar iminente.

Desta maneira, uma região com baixa concentração de surfactante teria uma distribuição particular de campo elétrico que poderia influenciar nas medidas na fronteira, permitindo detectar a presença de tal anomalia e sua localização, ainda nos inícios de tal alteração.»

Por outro lado, a expansibilidade dos pulmões (ou complacência³) pode ser afetada por qualquer condição que destrua o tecido pulmonar, que o torne fibrotico ou edemaciado, que bloqueie os brônquios ou que de qualquer outro modo, impeça a expansão e retração pulmonar. Quando se considera a complacência do pulmão e do tórax em conjunto, deve-se incluir qualquer anormalidade que diminua a expansibilidade da caixa torácica, inclusive deformações da caixa torácica tais como a cifose e a escoliose grave; e outras condições restritivas, como paralisia e fibrose muscular.

«A complacência, seja normal ou anormal, poderia ser considerada no algum ritmo de estimulação como casos particulares a fim de implementar uma geometria de tórax ainda mais representativa.»

«Estes aspectos evidenciam como os fatores que afetam tanto a retração elas-tica do pulmão quanto a tensão superficial do líquido que reveste os alvéolos são importantes para fornecimento de níveis de ventilação adequados em situações de alterações pulmonares severas.»

Volumes e Capacidades Pulmonares

A prática clínica da medicina respiratória apóia-se maciçamente nos princípios fisiológicos básicos, nos quais muitos dos processos de mensuração dependem essencialmente de computações matemáticas, sendo a espirometria um dos procedimentos de mensuração que o especialista diariamente usa para estudar a ventilação pulmonar.

Assim, para estudar a função pulmonar foram definidas diferentes medidas de volumes e capacidades pulmonares, sendo estas últimas combinações de diferentes medidas de volumes. Estas medidas são:

- volume corrente (500 ml), volume da reserva inspiratória (3000 ml), volume da reserva expiratória (1100 ml) e volume residual (1200 ml);
- capacidade inspiratória (3500 ml), capacidade residual funcional (2300 ml),

³ A complacência é uma medida da expansibilidade dos pulmões e se expressa como o aumento de volume nos pulmões para cada aumento na pressão intra-alveolar.

capacidade vital (4600 ml) e capacidade pulmonar vital (5800 ml).

Os números entre parênteses indicam valores em condições normais e serão descritos apenas conforme a necessidade. Na figura 3.4 apresenta-se um gráfico ilustrativo destas medidas.

Nas pessoas normais, o volume de ar nos pulmões depende essencialmente do tamanho e da estrutura corporal. Além disso, os diferentes volumes e capacidades pulmonares se alteram com a posição do corpo; a maior parte deles diminui quando a pessoa se deita e aumenta quando ela se levanta. Isto se deve a dois fatores principais: primeiro, a tendência do conteúdo abdominal a fazer pressão para cima, contra o diafragma, quando a pessoa está deitada e, segundo, o aumento do volume sanguíneo pulmonar na posição deitada, que diminui correspondentemente o espaço disponível para o ar pulmonar.

«Isto também deve ser considerado na hora de interpretar as imagens obtidas pelo algoritmo de estimação.»

O volume residual representa o ar que não pode ser removido dos pulmões, mesmo através de uma expiração forçada. Ele é importante porque mantém o ar dentro dos alvéolos que, por sua vez, fazem a aeração do sangue nos intervalos das respirações. Não fosse o ar residual, a concentração de dióxido de carbono no sangue aumentaria, o que seria desvantajoso para o processo respiratório.

«Uma queda global dos valores de impedância absolutos no final do ciclo respiratório poderia ser uma evidência de que está diminuindo o volume residual.»

A capacidade vital é a quantidade máxima de ar que a pessoa pode expelir dos pulmões após enchê-los inicialmente ao máximo, constituindo outra medida importante para acompanhar a evolução de pacientes com paralisia nos músculos respiratórios, que ocorre com frequência após lesões medulares ou poliomielite, situação em que a capacidade vital se vê grandemente reduzida para 500 a 1000 ml, apenas o suficiente para manter a vida (em condições normais a capacidade vital é da ordem de 4600 ml). Esta redução pode ser ainda maior em pacientes com respiradores artificiais. As alterações da capacidade vital também são decorrentes de congestões pulmonares, como no caso da cardiopatia esquerda ou qualquer outra doença que cause congestão vascular pulmonar e edema, em que a capacidade vital fica diminuída porque o excesso de líquido nos pulmões reduz a complacência pulmonar.

Por último, qualquer fator que diminua a capacidade de expansão pulmonar, assim como a tuberculose, a asma crônica, o câncer pulmonar, a bronquite crônica

e a pleurisia fibrótica, também reduz a capacidade vital. Por essa razão, a determinação da capacidade vital está entre as medidas mais importantes e ainda das mais simples de todas as determinações clínicas da respiração, para avaliar a evolução dos diversos tipos de doenças fibróticas pulmonares.

«Apesar de hoje existirem instrumentos que permitam medir a capacidade vital, a TIE poderia oferecer um índice desta capacidade em função da distribuição de impedância elétrica absoluta, além de poder identificar e acompanhar a evolução em tempo real e a beira do leito, a presença, a localização e o tamanho de uma nova anomalia.»

Cabe salientar também que todos os volumes e capacidades pulmonares são cerca de 20% a 25% menores na mulher do que no homem e, evidentemente apresentam valores maiores em pessoas grandes e atléticas do que nas pessoas astênicas e pequenas.

«Portanto, além de se considerar o processo da complacência, devem se considerar diferentes modelos geométricos do tórax em função do tamanho da pessoa, assim como as diferenças nos volumes pulmonares entre homens e mulheres durante a interpretação dos resultados, sendo que as diferenças nos valores de distribuição de impedância elétrica também estão relacionadas às diferenças de volumes pulmonares, para tamanhos de tórax similares.»

A capacidade residual funcional é a quantidade de ar que permanece nos pulmões ao fim de uma expiração normal e representa a quantidade de ar que lá permanece entre as respirações. Portanto, constitui um importante fator na função pulmonar. Seu valor se altera de forma nítida em alguns tipos de pneumopatias, razão pela qual é muitas vezes desejável medir a capacidade residual funcional.

Todavia, o espirômetro não pode medir o volume residual dos pulmões (o volume que permanece após uma expiração máxima), e este volume representa aproximadamente a metade da capacidade residual funcional. Para tanto, deve ser usado um método indireto, que geralmente é o da diluição do hélio, no qual se parte do conhecimento das concentrações iniciais e finais de hélio no espirômetro e o volume inicial do espirômetro, podendo-se obter a capacidade residual funcional. O volume residual pode ser obtido subtraindo-se o volume da reserva expiratória⁴ da capacidade residual funcional.

⁴ O volume da reserva expiratória é a quantidade de ar que ainda pode ser expirada, pela expiração forçada, após o término da expiração corrente normal.

«Porém, é um método invasivo já que o paciente deve respirar uma mistura de ar e hélio, até que o hélio comece a ser diluído pelos gases da capacidade residual funcional.»

Troca gasosa - Membrana Respiratória

A unidade respiratória é formada por um bronquíolo respiratório, ductos alveolares, átrios e alvéolos (dos quais existem cerca de 300 milhões nos dois pulmões, com cada alvéolo tendo diâmetro médio de aproximadamente 0,2 mm). Todo este conjunto é denominado lóbulo respiratório e é ilustrado na figura 3.3.

«Visto que o diâmetro do alvéolo é de 0,2 mm, a região dos pulmões poderia ser modelada com um grau de refinamento maior, a fim de detectar regiões com algum tipo de anomalia.»

As paredes alveolares são extremamente finas e, dentro delas, existe uma rede quase ininterrupta de capilares entrelaçados, conforme ilustrado nas figuras 3.5 e 3.6, de modo que os gases alveolares estão em íntima proximidade com o sangue dos capilares, sendo realizada a troca gasosa através das membranas de todas as porções terminais dos pulmões. Essas membranas são formadas por diferentes camadas conforme mostrado na figura 3.7, e são conhecidas como membrana respiratória ou membrana pulmonar, podendo chegar a ter uma área superficial total de aproximadamente 160 m² num adulto normal.

A função pulmonar se vê seriamente comprometida na presença de fatores que afetam a velocidade de difusão dos gases através da membrana respiratória, os quais são: a espessura da membrana, a área da superfície da membrana, o coeficiente de difusão do gás na substância da membrana e a diferença de pressão entre os dois lados da membrana.

- A espessura da membrana respiratória ocasionalmente aumenta, muitas vezes devido ao acúmulo de líquido de edema num espaço intersticial da membrana e nos alvéolos, de forma que os gases respiratórios devem se difundir não só pela membrana, mas também através desse líquido. Também algumas doenças pulmonares causam fibrose dos pulmões, o que pode aumentar a espessura de algumas partes da membrana respiratória. Como a velocidade de difusão é inversamente proporcional à espessura da membrana, qualquer fator que aumente a espessura por mais de duas a três vezes seu valor normal, pode interferir de maneira significativa com a troca respiratória dos gases.

«Quando aumenta a espessura da membrana como no caso do edema, devido

ao acúmulo de líquido no espaço intersticial da membrana e nos alvéolos, o meio torna-se mais condutivo, podendo ser detectada tal anomalia.»

- A área de superfície da membrana respiratória pode ser grandemente diminuída por muitas condições diferentes. Por exemplo, a remoção de todo um pulmão reduz a área de superfície à metade do normal. No enfisema, também, muitos alvéolos coalescem, com dissolução de muitas de suas paredes. Por isso, as novas câmaras são muito maiores que os alvéolos originais, mas a área total de superfície da membrana respiratória é consideravelmente diminuída, devido à perda das paredes alveolares. Quando a área total de superfície é reduzida em aproximadamente de um terço a um quarto da normal, a troca de gases através da membrana fica bastante prejudicada, mesmo em condições de repouso.

«Isto pode resultar distribuições de impedância elétrica diferentes, oferecendo maiores resistências à passagem da corrente elétrica devido à perda da membrana respiratória, que é um meio condutivo ao final da inspração. E igualmente, ao final da expiração será uma região menos condutiva em relação às demais áreas do pulmão.»

Insuficiência Respiratória

O diagnóstico e o tratamento de muitos distúrbios respiratórios acabaram por depender muito do conhecimento dos princípios fisiológicos básicos da respiração e da troca de gases. Algumas doenças da respiração resultam da ventilação inadequada, ao passo que outras resultam de alterações da difusão através da membrana pulmonar ou do transporte desde os pulmões até os tecidos. Em cada um desses casos, a terapêutica é, em geral, totalmente diferente, de modo que não é mais satisfatório simplesmente fazer o diagnóstico de "insuficiência respiratória". Atualmente, existem inúmeros métodos para estudar as alterações respiratórias, incluindo a medida de capacidade vital, volume corrente, capacidade residual funcional, espaço morto, derivação fisiológica, espaço morto fisiológico, fluxo expiratório máximo, volume expiratório forçado e sensibilidade do centro respiratório. Esse conjunto de medidas é apenas uma parte do armamentário do fisiologista clínico pulmonar.

Outra ferramenta interessante é o pletismógrafo de corpo, que permite estudar muitos aspectos da função pulmonar, tornando-se um instrumento extremamente versátil para o fisiologista da clínica respiratória. Ele consiste num tanque hermetico no qual se coloca a pessoa, podendo ser usado como um espirômetro, para

medir volumes pulmonares, a resistência das vias e o fluxo sanguíneo pulmonar.

«O uso deste instrumento se faz inviável para os casos de pacientes em salas de UTI, sendo necessário o deslocamento deles. Portanto, torna-se mais um desafio para TIE tentar acompanhar as funções do pletismógrafo de corpo à beira do leito.»

As alterações causadas pela insuficiência respiratória consistem basicamente em: as que causam ventilação inadequada dos alvéolos, as que reduzem a difusão gasosa através da membrana respiratória e as que diminuem o transporte de oxigênio dos pulmões para os tecidos.

Em relação às alterações que causam ventilação alveolar inadequada podem-se citar:

- A hipoventilação alveolar grave, que resulta frequentemente da paralisia dos músculos respiratórios, resultante de fatores tais como a poliomielite bulbar, que geralmente deprime o centro respiratório; a seqüela cervical da medula, que impede a transmissão de impulsos do centro respiratório para os músculos respiratórios; ou a depressão do centro respiratório por anestésicos, medicamentos e assim por diante.

- A resistência aumentada das vias aéreas, característica de alterações como asma e enfisema.

- O aumento da resistência tecidual, que também dificulta muito a ventilação dos pulmões, devido ao aumento na viscosidade dos tecidos pulmonares resultantes de fatores como enfisema, fibrose pulmonar, tuberculose, várias infecções ou edema pulmonar.

Outra causa muito comum da hipoventilação alveolar é a diminuição da complacência dos pulmões e da parede torácica, sendo que qualquer fator que dificulte a expansão dos pulmões aumentará o "trabalho" da ventilação e, portanto, diminuirá, frequentemente, a ventilação pulmonar. Algumas das doenças dos pulmões que determinam isso são: silicose, abestose, sarcoideose, tuberculose, câncer e pneumonia. Além das alterações pulmonares que diminuem a complacência, as doenças restritivas da caixa torácica também podem reduzir bastante a complacência. Essas incluem especialmente a escoliose e a cifose.

Em relação às alterações que diminuem a capacidade de difusão dos pulmões estão:

- A redução da área da membrana respiratória, na qual incluem-se a retritada

de parte ou de todo um pulmão, a destruição tuberculosa do pulmão, a destruição cancerosa e o enfisema, que determina uma destruição gradativa dos septos alveolares. Qualquer condição que contribua para encher os alvéolos de líquido ou que impeça que o ar entre em contato com a membrana alveolar, tal como pneumonia, edema pulmonar e atelectasia, pode reduzir temporariamente a área da superfície da membrana respiratória.

- O aumento da espessura da membrana respiratória (bloqueio alveolocapilar) tem como causa mais comum o edema pulmonar resultante da insuficiência cardíaca esquerda ou da pneumonia. Entretanto, a silicose, a tuberculose e muitas outras condições fibróticas podem causar uma deposição progressiva do tecido fibroso nos espaços intersticiais entre a membrana alveolar e a membrana capilar pulmonar, aumentando assim a espessura da membrana respiratória. Isso é geralmente chamado de bloqueio alveolocapilar ou, ocasionalmente, fibrose intersticial. A velocidade de difusão gasosa através da membrana respiratória é inversamente proporcional à distância que o gás deve se difundir.

- A relação ventilação-perfusão anormal⁵, é a causa mais comum de diminuição da capacidade de difusão do pulmão. Isto é, em alguns alvéolos há muito pouca ventilação para a quantidade de fluxo sanguíneo, de modo que o sangue não consegue ficar totalmente oxigenado (*desvio fisiológico*). Por outro lado, em outros alvéolos a ventilação é adequada, mas existe um fluxo sanguíneo muito pequeno para aceitar o oxigênio (*espaço morto fisiológico*). Assim, em ambos os casos a transferência de oxigênio para o sangue fica bastante comprometida. A relação de ventilação-perfusão anormal tem uma prevalência muito alta na doença respiratória, especialmente na mais comum de todas as doenças pulmonares graves, o enfisema pulmonar causado pelo tabagismo. Entre outras doenças que causam esta alteração incluem-se a trombose de uma artéria pulmonar, a resistência excessiva das vias aéreas para alguns alvéolos (enfisema), a complacência reduzida de um pulmão sem alteração do outro pulmão e muitas outras patologias que causam lesão difusa nos pulmões.

«Tanto as regiões pouco ventiladas quanto as que apresentam um fluxo sanguíneo muito baixo devem apresentar níveis de impedância elétrica diferentes das demais regiões com relação ventilação-perfusão adequada.»

⁵ A relação ventilação-perfusão é uma relação entre a ventilação alveolar e o fluxo sanguíneo pulmonar.

Peculiaridades de Alterações Pulmonares Específicas

Enfiseema Pulmonar Crônico

O termo enfiseema pulmonar significa literalmente excesso de ar nos pulmões. Entretanto, ao se falar de enfiseema pulmonar crônico, em geral refere-se a um dos complexos processos destrutivos dos pulmões que, com exceção de uns poucos pacientes, em todos os demais é causado pelo fumo.

Os principais eventos fisiopatológicos desta doença consistem na infecção e obstrução crônicas do tecido pulmonar. A infecção é causada pela inalação de substâncias irritantes como a fumaça, alterando profundamente os mecanismos protetores normais das vias aéreas, incluindo: a paralisia parcial dos cílios do epitélio respiratório, que por sua vez dificulta o deslocamento do muco para fora das vias aéreas; a secreção excessiva de muco que agrava ainda mais a condição anterior; e a inibição dos macrófagos alveolares, que se tornam menos eficazes no combate à infecção.

O excesso de muco e o edema inflamatório do epitélio bronquiolar causam a obstrução crônica de muitas vias aéreas menores, provocando um aprisionamento de ar no alvéolos, que ficam excessivamente distendidos. Isto, combinado com a infecção pulmonar, causa uma acentuada destruição de muitas paredes alveolares. O quadro final do pulmão enfisematoso é ilustrado nas figuras 3.8 e 3.9.

Entre os variados efeitos fisiológicos do enfiseema crônico pode-se citar o excessivo aumento da resistências das vias aéreas, ficando particularmente difícil para a pessoa movimentar o ar ao longo dos bronquíolos durante a expiração, pois a força compressiva por fora do pulmão não comprime apenas os alvéolos, mas também os bronquíolos, o que aumenta ainda mais a resistência durante a expiração.

«*Em termos de TIE tal alteração poderia ser detectada, sendo que durante a expiração apareceria regiões com diferentes taxas de variação de impedância elétrica absoluta por intervalos de tempo.*»

Outros efeitos fisiológicos são: a redução acentuada da capacidade difusora do pulmão devido à perda do parênquima pulmonar, diminuindo assim a capacidade dos pulmões de oxigenar o sangue e remover dióxido de carbono; as relações de ventilação perfusão extremamente amorais apresentam um processo obstrutivo, no qual algumas porções dos pulmões são bem ventiladas, enquanto outras são precariamente ventiladas, resultando em ventilação perdida, com ambos os efeitos

ocorrendo nos mesmos pulmões; a redução do número de capilares pulmonares pelos quais o sangue deve passar, provocando hipertensão pulmonar devido ao aumento acentuado da resistência vascular pulmonar, sobrecarregando assim o coração direito e, conseqüentemente, causando insuficiência cardíaca. Por último, esta doença costuma evoluir lentamente, sendo o resultado global uma acentuada falta de ar que pode durar por anos, até que a diminuição de oxigênio e o excesso de dióxido de carbono no sangue causam a morte.

Pneumonia

A pneumonia está associada a qualquer patologia inflamatória do pulmão na qual os alvéolos ficam cheios de líquido e hemácias, conforme mostrado na figura 3.9. A pneumonia bacteriana é um tipo comum que começa com a infecção dos alvéolos, fazendo com que a membrana pulmonar fique inflamada e altamente porosa, de modo que o líquido e até mesmo hemácias e leucócitos, passem do sangue para os alvéolos. Desta forma, a infecção se dissemina por propagação das bactérias de alvéolos para alvéolos, até que grandes áreas, às vezes lóbulos inteiros ou até mesmo todo um pulmão, ficam cheias de líquido e restos celulares.

«Logicamente esta condição gera um quadro em que as regiões afetadas poderão ser detectadas através da TIF por serem regiões muito mais condutivas mesmo no final da inspiração.»

Esta doença altera a função pulmonar reduzindo a área de superfície total da membrana respiratória, e diminuindo a relação ventilação-perfusão. Ambos efeitos causam uma diminuição da capacidade de difusão, que resulta em hipoxe-
mia.

Atelectasia

A atelectasia está associada ao colapso dos alvéolos e pode ocorrer em uma região localizada ou em todo um pulmão, sendo as causas mais comuns a obstrução das vias aéreas e a ausência de surfactante nos líquidos que revestem os alvéolos. O primeiro resulta do bloqueio de muitos brônquios pequenos com muco, ou da obstrução de um brônquio principal por um grande tampão mucoso ou por algum objeto sólido, tal como um câncer. O ar retido além do bloqueio é absorvido pelo sangue que flui dos capilares pulmonares, levando os alvéolos ao colapso se o parênquima pulmonar for elástico o bastante. Entretanto, se o parênquima pulmonar não conseguir colapsar, surgirão pressões negativas muito elevadas dentro

dos alvéolos, fazendo com que se encham de líquido de edema provenientes do interstício pulmonar, até ocorrer o denominado colapso maciço do pulmão. Neste caso, se diz que o pulmão fica atelectasiado podendo diminuir seu tamanho em até 50% sem colapsar totalmente graças à solidez da caixa torácica e do mediastino, conforme mostrado na figura 3.10. O restante precisa então se encher de líquido. «Neste caso, o meio vai estar caracterizado por regiões condutivas devido ao fato de estarem colapsadas ou cheias de líquido de edema, além de ter sua área reduzida por causa da diminuição do tamanho do pulmão.»

Respiração Artificial

Existem diferentes métodos mecânicos de respiração artificial, entre os quais pode-se citar o ressuscitador e o pulmão de ago.

Os ressuscitadores apresentam características próprias de funcionamento, e consistem basicamente de: um suprimento de ar ou de oxigênio; um mecanismo para aplicar pressão positiva intermitente e, em alguns aparelhos, também pressão negativa; além de uma máscara para ser adaptada à face do paciente.

Os primeiros ressuscitadores produziam, muitas vezes, graves lesões pulmonares devido ao excesso de pressão positiva, razão pela qual seu uso foi muito criticado. Todavia, atualmente a maioria dos ressuscitadores tem válvulas de segurança que previnem a elevação da pressão acima de +14 mmHg e a redução da pressão negativa abaixo de -9 mmHg. Esses limites de pressão são adequados para propiciar uma excelente respiração artificial para os pulmões normais e, ainda, são bastante brandos para prevenir lesões.

«Porém, no caso de alterações pulmonares específicas, quais seriam os níveis ótimos de pressão a ser injetada?»

Quando o ar é forçado para dentro e para fora dos pulmões sob pressão positiva, ou quando a pressão em torno do paciente diminui muito, como no caso do pulmão de ago, a pressão dentro da cavidade torácica torna-se maior do que a pressão em qualquer outro lugar do corpo. Portanto, o fluxo sanguíneo para o tórax, a partir das veias periféricas, fica prejudicado. Em consequência, o uso de pressões positivas excessivas com o ressuscitador ou com o pulmão de ago pode reduzir o débito cardíaco, às vezes a níveis letais. Habitualmente, uma pessoa pode sobreviver com uma pressão pulmonar positiva contínua de 20 mmHg, mas a exposição por mais de alguns minutos a uma pressão maior do que 30 mmHg, em geral causa a morte.

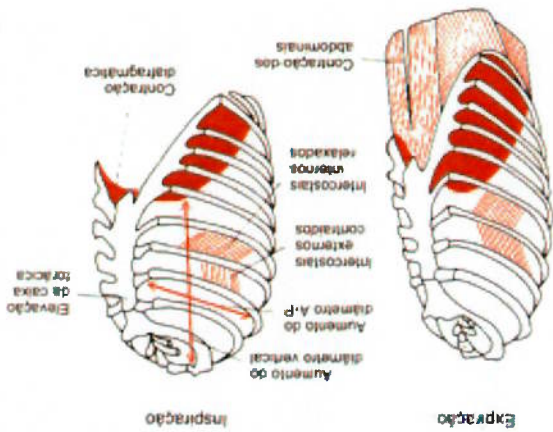


Figura 3.1: Expansão e retração da caixa torácica (Guyton, 1992).

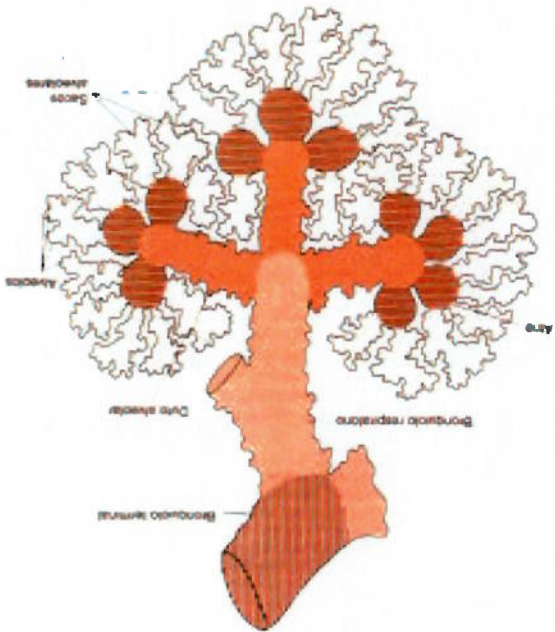


Figura 3.3: O lóbulo respiratório (Guyton, 1992).

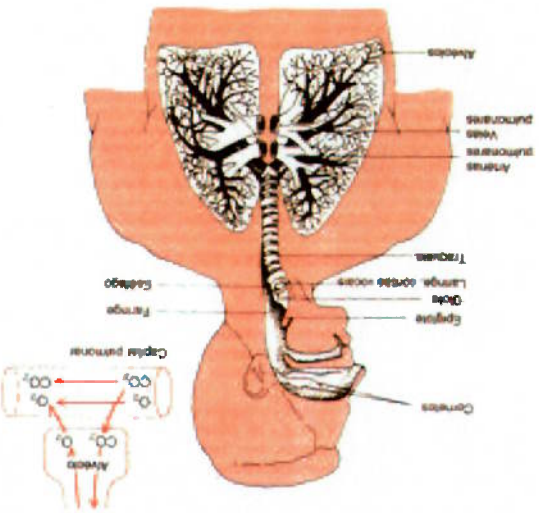


Figura 3.2: As vias respiratórias (Guyton, 1992).

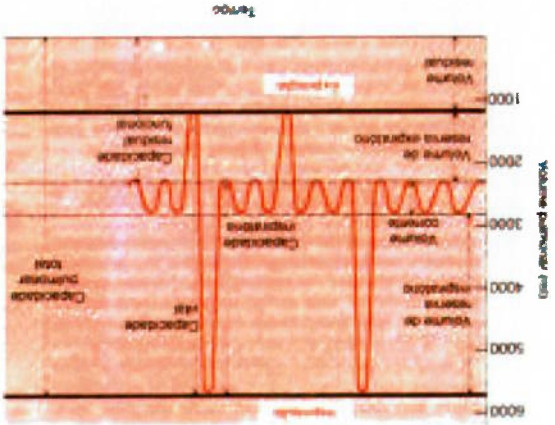


Figura 3.4: Excursões respiratórias durante a respiração normal e durante a inspiração e expiração máximas (Guyton, 1992).

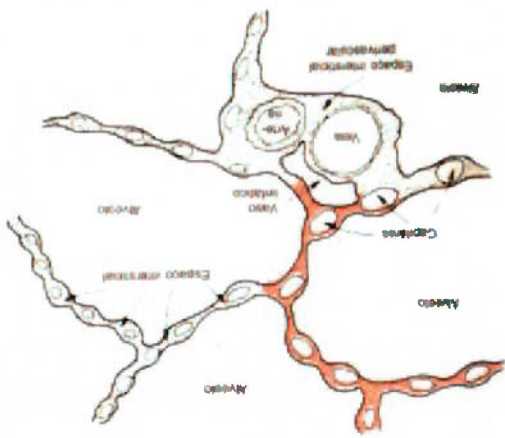


Figura 3.5: Vista da seção transversal das paredes alveolares e de seu suprimento vascular (Guyton, 1992).

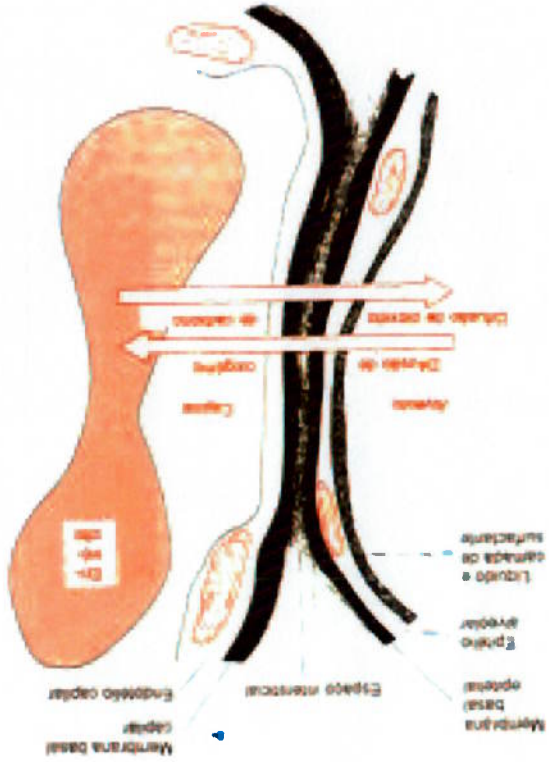


Figura 3.7: Ultra-estrutura de membrana respiratória mostrada em corte transversal (Guyton, 1992).

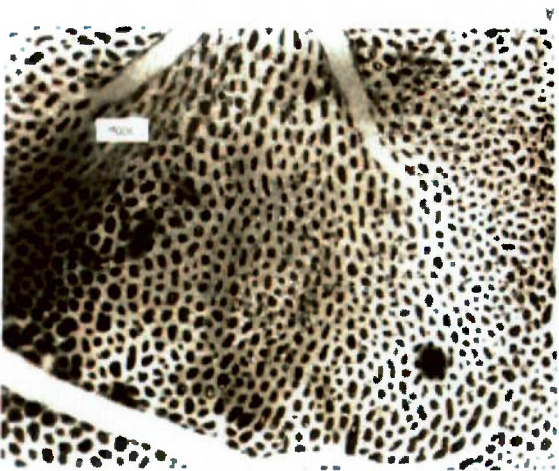


Figura 3.6: Vista da superfície dos capilares numa parede alveolar (Guyton, 1992).

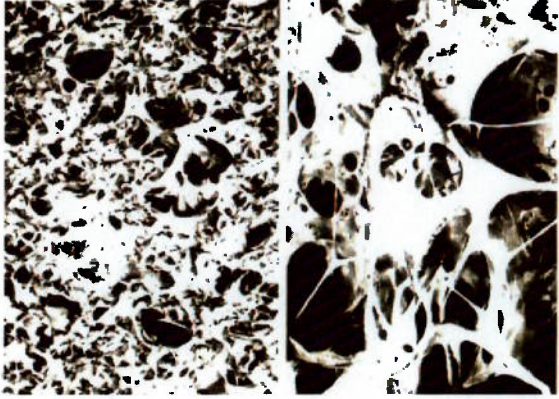


Figura 3.8: Comparação do pulmão enfisematoso (esquerda), com o pulmão normal (direita), mostrando a extensa distribuição alveolar (Guyton, 1992).

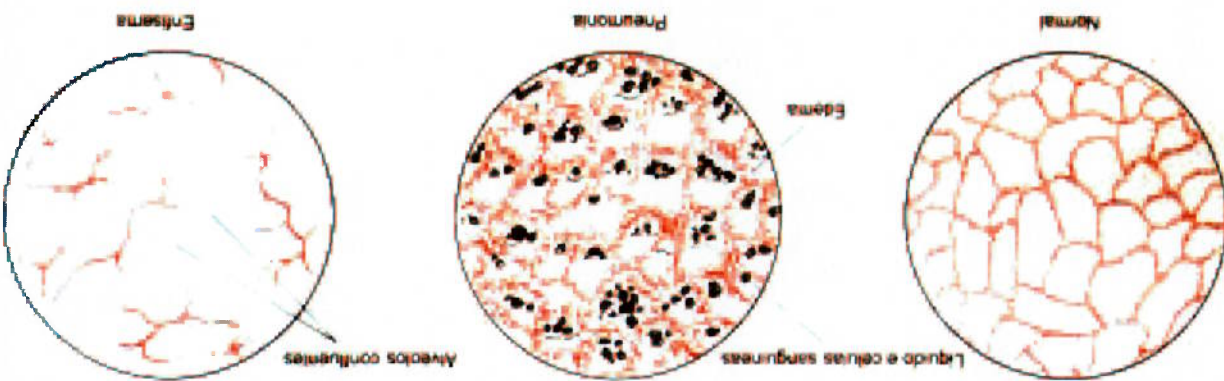


Figura 3.9: Alterações pulmonares na pneumonia e no edema (Guyton, 1992).

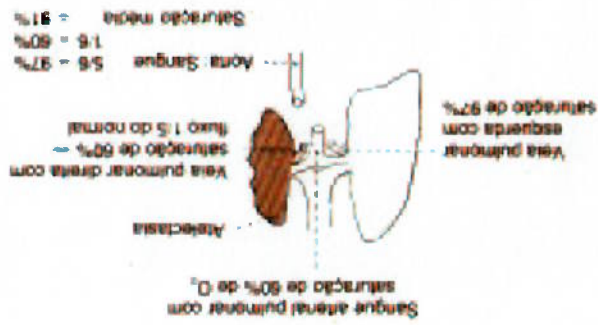


Figura 3.10: Efeito da atelectasia sobre a saturação do sangue arterial com oxigênio (Guyton, 1992).

Capítulo 4

Modelo do Tórax

4.1 Introdução

O modelo matemático do tórax consiste num meio isotrópico cujas propriedades elétricas estão representadas pela condutividade σ e a permissividade relativa ϵ . Na fronteira do meio injeta-se uma corrente elétrica, que gera em seu interior, uma distribuição de potencial e um fluxo de corrente, sendo este último mais conhecido como densidade de corrente, que se escreve da forma:

$$J = \sigma E + \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

que é a corrente induzida no interior do campo elétrico E .

A constante ϵ_0 representa a permissividade do espaço livre que será desconsi-
derada para simplificar o modelo. O fato de estar reduzindo o tórax a um modelo
bidimensional conduz a uma série de simplificações que não influenciarão de
maneira significativa nos resultados (Guarido *et al.*, 1996).
Com base na simplificação anterior e considerando que $E = -\nabla V$ e $\nabla \cdot J = 0$
obtemos a equação,

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla V) = 0$$

denominada equação de Poisson.

Considerando a condutividade uniforme e isotrópica (Barber and Brown, 1984)
esta equação se reduz à equação de Laplace,

$$\Delta^2 V = 0$$

Como toda equação diferencial de segunda ordem, as equações de Poisson e Laplace apresentam infinitas soluções. De modo que, para termos uma única solução, para um certo problema físico, devemos impor determinadas condições de contorno.

Neste caso, as condições de contorno são determinadas através de uma distribuição de correntes injetadas na fronteira do modelo e fixando a voltagem em alguns pontos de referência.

Para solucionar a equação de Laplace será utilizado o Método dos Elementos Finitos cuja implementação consta basicamente de quatro etapas (Sadiku, 1992):

- 1- Discretização da região num número finito de sub-regiões ou elementos,
- 2- Obtenção das equações para um elemento típico,
- 3- Montagem da matriz global para toda a região,
- 4- Solução do sistema de equações obtido.

4.2 Conceitos de Elementos Finitos

Para calcular a distribuição de potencial elétrico $V(x, y)$ numa região bidimensional, ela é subdividida num número finito de elementos, conforme mostrado na figura 4.1

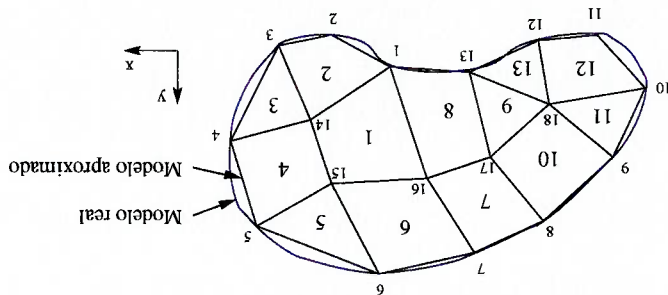


Figura 4.1: Discretização do meio contínuo em subdomínios ou elementos finitos. Considerando que a distribuição de potencial é contínua na fronteira dos elementos, a solução aproximada para toda a região é

$$(4.1) \quad V(x, y) \approx \sum_{e=1}^N V^e(x, y),$$

onde N é o número de elementos triangulares em que a região é subdividida. Para

os elementos triangulares, a forma mais comum de aproximar o potencial V_e em qualquer ponto no interior do elemento é através da interpolação linear

$$V_e(x, y) = a + bx + cy \quad (4.2)$$

onde os coeficientes a, b, c são funções dos potenciais nos vértices. O potencial V_e em geral é diferente de zero no interior do elemento e , e zero no exterior dele.

4.3 Matriz Local

Para a obtenção das equações dos elementos levemos em consideração o seguinte elemento triangular,

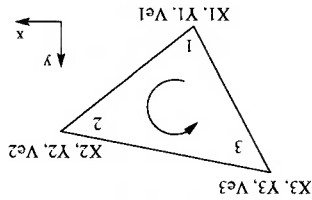


Figura 4.2: Elemento triangular

Os potenciais $V_{e1}, V_{e2},$ e V_{e3} nos nós 1, 2, e 3 respectivamente podem ser obtidos usando a equação (4.2), que resulta em

$$\begin{bmatrix} V_{e1} \\ V_{e2} \\ V_{e3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Os coeficientes $a, b,$ e c são determinados a partir da equação (4.3) como

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_{e1} \\ V_{e2} \\ V_{e3} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

e substituindo esta em (4.2) obtemos

$$V^e = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ (x_2y_3 - x_3y_2) & (y_2 - y_3) & (x_3 - x_2) \\ (x_3y_1 - x_1y_3) & (y_3 - y_1) & (x_1 - x_3) \\ (x_1y_2 - x_2y_1) & (y_1 - y_2) & (x_2 - x_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{e1} \\ V_{e2} \\ V_{e3} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

ou

$$V^e = \sum_3^{i=1} \alpha_i(x, y) V_{ei}, \quad (4.6)$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2A} [(x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2A} [(x_3y_1 - x_1y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y] \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2A} [(x_1y_2 - x_2y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y] \end{aligned} \quad (4.7)$$

sendo A , a área do elemento e , isto é

$$2A = \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} = (x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3)$$

ou

$$A = \frac{1}{2} [(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)] \quad (4.8)$$

$\alpha_1, \alpha_2, \text{ e } \alpha_3$ são as chamadas funções de forma dos elementos.

O funcional correspondente à equação de Laplace, $\Delta_2 V = 0$ está dado por

$$W^e = \frac{1}{2} \int \sigma |E|^2 dS = \frac{1}{2} \int \sigma |\Delta V^e|^2 dS \quad (4.9)$$

e representa a energia por unidade de longitude associada com o elemento e .

Da equação 4.6,

$$\Delta V^e = \sum_3^{i=1} V_{ei} \Delta \alpha_i, \quad (4.10)$$

Substituindo equação 4.10 na 4.9 obtemos

$$(4.11) \quad W^e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma V_{ei} \left[\int \Delta \alpha_i \cdot \Delta \alpha_j dS \right] V_{ej}$$

Se definimos os termos entre colchetes como

$$(4.12) \quad Y_{ij}^{(e)} = \int \Delta \alpha_i \cdot \Delta \alpha_j dS,$$

Podemos escrever a equação 4.11 em forma matricial como

$$(4.13) \quad W^e = \frac{1}{2} \sigma [V_e]^t [Y^{(e)}] [V_e]$$

onde o supraíndice t denota a matriz transposta,

$$(4.14) \quad [V_e] = \begin{bmatrix} V_{e1} \\ V_{e2} \\ V_{e3} \end{bmatrix}$$

e

$$(4.15) \quad [Y^{(e)}] = \begin{bmatrix} Y_{11}^{(e)} & Y_{12}^{(e)} & Y_{13}^{(e)} \\ Y_{21}^{(e)} & Y_{22}^{(e)} & Y_{23}^{(e)} \\ Y_{31}^{(e)} & Y_{32}^{(e)} & Y_{33}^{(e)} \end{bmatrix}$$

A matriz $[Y^e]$ é usualmente chamada de *matriz dos coeficientes dos elementos* (ou *matriz de rigidez* em análise estrutural), na qual cada elemento dela pode ser entendido como a conexão entre os nós i e j do elemento e . Os valores desses coeficientes são obtidos a partir das equações 4.7 e 4.12. Por exemplo,

$$(4.16) \quad Y_{12}^{(e)} = \int \Delta \alpha_1 \cdot \Delta \alpha_2 dS = \frac{1}{4V^2} [(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_2)(x_1 - x_3)] \int dS = \frac{1}{4V} [(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_2)(x_1 - x_3)]$$

e igualmente,

4.4 Matriz Global

Posteriormente se monta uma matriz de ordem superior a partir das matrizes dos elementos triangulares da região discretizada usando o método de superposição. Então definimos a energia associada à superposição matricial como

$$W = \sum_{e=1}^e W_e = \frac{1}{2} \sigma [V]^t [Y] [V] \quad (4.23)$$

onde

$$[V] = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix}, \quad e \quad [Y] = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \dots & Y_{nn} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

sendo n o número de nós e N o número de elementos que conformam a região discretizada; e $[Y]$ a *matriz global* montada a partir das matrizes de coeficientes individuais.

A equação 4.23 foi obtida considerando que toda a região é homogênea, de modo que a condutividade elétrica σ é contínua. Para o caso de uma região não homogênea, esta equação não é aplicável, porque a condutividade varia de um elemento para outro (mais não no interior dos mesmos).

Neste caso a equação 4.9 continua sendo válida. E para que a equação 4.23

caracterize um meio não homogêneo, ela deve ser obtida desde que o integrando da equação 4.12 seja afetado pela condutividade $\sigma^{(e)}$ do elemento triangular e .

4.5 Solução das Equações Resultantes

De acordo com os conceitos do cálculo variacional, a equação de Laplace é satisfeita quando a energia total da região for mínima. Portanto, as derivadas parciais de W com respeito a cada variável nodal (os potenciais) têm que ser iguais a zero,

$$\frac{\partial W}{\partial V_1} = \frac{\partial W}{\partial V_2} = \dots = \frac{\partial W}{\partial V_n} = 0$$

ou

$$\frac{\partial W}{\partial V_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (4.25)$$

Por exemplo, para obter $\frac{\partial W}{\partial V_1} = 0$ na região discretizada na figura 4.1, substituímos a equação 4.24 na equação 4.23, e derivando W parcialmente com respeito a V_1 temos

$$0 = \frac{\partial W}{\partial V_1} = 2V_1Y_{11} + V_2Y_{12} + V_3Y_{13} + \dots + V_nY_{1n}$$

$$+ V_2Y_{21} + V_3Y_{31} + \dots + V_nY_{n1}$$

ou

$$0 = V_1Y_{11} + V_2Y_{12} + V_3Y_{13} + \dots + V_nY_{1n} \quad (4.26)$$

em geral, $\frac{\partial W}{\partial V_k} = 0$ tem a forma

$$0 = \sum_{z=1}^n V_z Y_{zk} \quad (4.27)$$

onde n é o número de nós da malha de elementos finitos.

Escrevendo 4.27 para todos os nós $k = 1, 2, \dots, n$, obtemos um conjunto de equações simultâneas a partir do qual a solução $[V]^t = [V_1, V_2, \dots, V_n]$ pode ser obtida.

4.6 Condições de Contorno

Para eliminar a indeterminação do sistema na equação 4.27 é necessário introduzir condições de contorno em alguns pontos do domínio. Normalmente aplica-se uma diferença de potencial entre dois nós da fronteira que representam os eletrodos, fixando-se uma voltagem de referência zero ou aplicado-se uma corrente elétrica. Em nosso caso optou-se pela aplicação da seguinte condição,

$$j = \begin{cases} 0 & \text{nos outros pontos da fronteira} \\ \frac{\partial E(\sigma)}{\partial n} & \text{no } l\text{-ésimo eletrodo} \end{cases} \quad (4.28)$$

onde j representa a densidade de corrente através do l -ésimo eletrodo. Sendo assim, pode-se escrever o sistema 4.27 como,

$$[Y]^{n \times n} \{V\}^{n \times 1} = \{C\}^{n \times 1} \quad (4.29)$$

onde C é o vetor de corrente aplicado.

Numericamente esta condição consiste em: (i) fazer o elemento $C_i = C_0$, onde C_0 é o valor da corrente aplicada no i -ésimo nó e, (ii) $C_j = 0$ para $j \neq i$ sendo zerada a j -ésima fila e coluna da matriz global Y e fazendo o elemento $Y_{jj} = 1$, impondo-se assim a voltagem de referência $V_j = 0$.

4.7 Modelo de Eletrodos

A modelagem da impedância de contato da interface eletrodo-pele ou eletrodo-eletrolito têm sido trabalhada por vários autores com a finalidade de simular de uma maneira mais representativa o comportamento elétrico no fronteira do meio e, por conseguinte, obter uma estimativa mais precisa da distribuição de resistividade elétrica interna.

A voltagem medida não depende só da resistividade no interior do meio, mas também da resistividade na fronteira. Portanto, como a impedância de contato eletrodo-pele e a densidade de corrente através da superfície de contato são altas, haverá uma contribuição significativa destas grandezas nas voltagens medidas.

Em humanos, os valores de impedância de contato são da ordem de $800 \Omega \text{cm}^2$ (Rosell *et al.*, 1988), variando com a posição, sendo significativa a queda de voltagem na região de contato, se comparada com a queda de voltagem nos tecidos

internos.

A impedância de contato possui componentes resistivos e capacitivos a 50kHz, sendo estes últimos desconsiderados para efeitos de simplificação do modelo matemático.

Neste sentido, implementou-se o modelo de eletrodos proposto por Hua no artigo *Finite Element Modeling of Electrode-Skin Contact Impedance in Electrical Impedance Tomography* (Hua et al., 1993a), que além de representar a distribuição do campo elétrico na interface de contato, considera os efeitos dominantes da impedância de contato no eletrodo, tais como: discretização, impedância de contato e os efeitos *shunt* e *edge*.

O modelo consiste numa malha de elementos finitos conforme mostrado na figura abaixo,

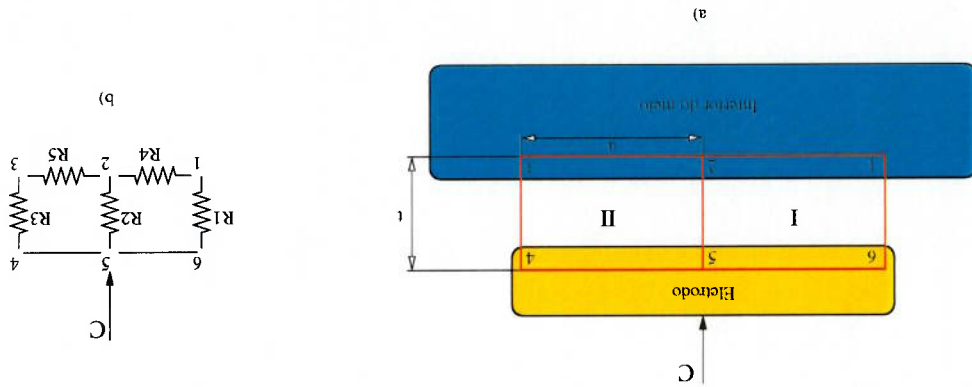


Figura 4.3: Modelo simplificado da interface de contato eletrodo-pele

sendo I e II, elementos finitos retangulares submetidos à seguinte condição de

contorno,

$$\int_{s_4-s_6}^{s_4-s_6} p^{-1}(\partial\phi/\partial n)ds = \int_{s_4-s_6}^{s_4-s_6} Jds = C_i \quad (4.30)$$

Assume-se que o potencial em todo o eletrodo é igual, ou seja $\phi_4 = \phi_5 = \phi_6$.

Para a obtenção das equações resultantes, monta-se a matriz global de impedâncias do referido modelo a partir da superposição (Logan, 1986) das matrizes locais dos elementos retangulares I e II, resultando em

$$\begin{bmatrix} 3atp \\ 1 \\ \text{sim} \\ a_2 + t^2 \\ 2(a_2 + t^2) \\ \frac{a_2}{2} - t^2 \\ 0 \\ a_2 + t^2 \\ -a_2 + \frac{a_2}{2} + \frac{2}{t^2} \\ -2a_2 + t^2 \\ -\frac{2}{(a_2 + t^2)} \\ -a_2 + \frac{a_2}{2} + \frac{2}{t^2} \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 + t^2 \\ 2(a_2 + t^2) \\ \frac{a_2}{2} - t^2 \\ 0 \\ a_2 + t^2 \\ -a_2 + \frac{a_2}{2} + \frac{2}{t^2} \\ -2a_2 + t^2 \\ -\frac{2}{(a_2 + t^2)} \\ -a_2 + \frac{a_2}{2} + \frac{2}{t^2} \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \int_5^4 J f_4 ds \\ \int_5^4 J f_5 ds + \int_6^5 J f_5 ds \\ \int_6^5 J f_6 ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_5^4 J f_4 ds \\ \int_5^4 J f_5 ds + \int_6^5 J f_5 ds \\ \int_6^5 J f_6 ds \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

onde a é a largura do elemento, t é a espessura da interface, l a altura unitária na direção z (espessura do elemento de casca), p a resistividade da interface, e f_i as funções de interpolação ou de forma dos elementos, que contêm informações geométricas.

Com as considerações anteriores e a condição de contorno 4.30, o sistema se reduz na forma

$$\begin{bmatrix} 3atp \\ 1 \\ \text{sim} \\ a_2 + t^2 \\ 2(a_2 + t^2) \\ \frac{a_2}{2} - t^2 \\ 0 \\ a_2 + t^2 \\ -\frac{3a_2}{2} \\ -3a_2 \\ -\frac{3a_2}{2} \\ 6a_2 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ L \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

onde

$$L = \int_5^4 J f_4 ds + \int_5^6 J f_5 ds + \int_6^5 J f_5 ds + \int_6^5 J f_6 ds + \int_5^4 J(f_4 + f_5) ds + \int_5^6 J(f_5 + f_6) ds = C$$

pois $f_4 + f_5 = 1$ e $f_5 + f_6 = 1$.

Outra simplificação a considerar é que a espessura t da interface é muito pequena em relação à metade da largura do eletrodo (a). Portanto a equação

4.32 pode ser aproximada na forma,

$$(4.33) \quad \begin{bmatrix} a & \frac{2}{a} & 0 & -\frac{3a}{2} \\ a & \frac{2}{a} & 2a & -3a \\ a & -\frac{3a}{2} & -3a & -\frac{3a}{2} \\ sim & 2a & -\frac{3a}{2} & 6a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ C_i \end{bmatrix}$$

Como t e ρ são parâmetros desconhecidos, define-se uma nova variável $\rho' = tp$ denominada impedância de contato com dimensão Ωcm^2 . Portanto dividindo ρ' pela área se obtém Ω . Enquanto o valor de t é da ordem de $40\mu m$, o valor da resistividade da interface é elevado, portanto ρ' encontra-se numa faixa moderada. No modelo assume-se que cada interface de contato é diferente, sendo utilizada dos 32 parâmetros para modelar um sistema de 32 eletrodos.

Neste ponto, Hua identifica a similaridade da matriz 4.33 com a que caracteriza uma rede de 3 resistores em paralelo unidos por dois resistores em série conforme ilustrado na figura 4.3b e, a partir de várias considerações, chega na seguinte expressão matricial,

$$(4.34) \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{tp} & \frac{2}{a} & 0 & 0 \\ a & 0 & -a & -\frac{2}{a} \\ \frac{2}{a} & 0 & -\frac{2}{a} & 2a \\ sim & 2a & -\frac{2}{a} & 2a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ C_i \end{bmatrix}$$

O modelo resultante é incorporado à matriz global do modelo de elementos finitos do tórax, e considerado na resolução do problema inverso para estimar os parâmetros desconhecidos, que são as impedâncias das interfaces.

Capítulo 5

Métodos Numéricos

5.1 Decomposição de Valores Singulares

A decomposição de valores singulares é uma técnica numérica para tratar sistemas de equações singulares ou quase-singulares (Press *et al.*, 1989) e consiste em decompor uma matriz num produto de três matrizes,

$$A_{mn} = U_{mn} W_{mn} V_{mn}^T \quad (5.1)$$

onde A é uma matriz de m filas e n colunas com $m \geq n$, U é uma matriz ortogonal de ordem mn , W é uma matriz quadrada de ordem mn com elementos positivos ou iguais a zero que são chamados de *valores singulares*, e V^T é a matriz transposta da matriz ortogonal V .
As matrizes U e V são ortogonais no sentido em que suas colunas são ortogonais, mais,

$$U^T U = V^T V = I \quad (5.2)$$

Como V é uma matriz quadrada, então suas filas também são ortogonais, $V \cdot V^T = I$.

Esta decomposição também pode ser implementada quando $m \leq n$. Neste caso os valores singulares W_j para $j = m + 1, \dots, n$ são zero e a correspondente coluna de U também é igual a zero.
No caso de uma matriz quadrada m , como a matriz global de impedância elétrica, as matrizes resultantes U , V , W serão matrizes quadradas da mesma ordem.

Como U e V são ortogonais, suas inversas são iguais às suas respectivas matrizes transpostas.

No caso da matriz diagonal W , sua inversa é uma matriz diagonal cujos elementos são iguais ao recíproco dos elementos w_j .

Portanto, considerando a equação 5.1 pode-se escrever a inversa de A como,

$$A^{-1} = V \cdot [diag(1/w_j)] \cdot U^T \quad (5.3)$$

O número de condições de uma matriz define-se como a relação entre o maior dos valores singulares w_j e o menor.

Uma matriz é singular se o número de condições é infinito, e mal condicionada se o número de condições é muito grande. Isto é, se seu recíproco está próximo da precisão do ponto flutuante da máquina (10^{-6} precisão *single* e 10^{-12} precisão *double*).

Para eliminar a singularidade da matriz A basta substituir os elementos $1/w_j$ da matriz diagonal por *zero* se $w_j = 0$, e posteriormente resolver o sistema de equações,

$$x = V \cdot [diag(1/w_j)] \cdot (U^T \cdot b) \quad (5.4)$$

Esta solução não resolve exatamente o sistema $Ax = b$, mas é das possíveis soluções a mais próxima no sentido de mínimos quadrados. Em outras palavras, procura-se uma solução x que minimize $r \equiv Ax - b$, sendo r o residual da solução.

5.2 Projção em Espaços Convexos

Diversos métodos de regularização têm sido implementados na solução de equações extremamente mal condicionadas com a finalidade de melhorar a convergência e estabilidade da solução.

Neste sentido, para regularizar a solução do problema inverso que caracteriza a TIE implementou-se o método *Projção em Espaços Convexos* (Press et al., 1989) visto que a solução, que depende da inversa da matriz global de impedância, é extremamente sensível a pequenos erros de entrada.

Da teoria de conjuntos (Bazarra et al., 1993) define-se um conjunto C em E^n convexo, se o segmento de linha que une qualquer ponto do conjunto também pertence ao conjunto. Ou seja, se u_1 e u_2 encontram-se em C , então a combinação linear $\lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2$ também tem de pertencer a C para toda $\lambda \in [0, 1]$, e é

- se $\sigma_i > \sigma_{max}$ então $\sigma_i = \sigma_{max}$

- se $\sigma_i > \sigma_{min}$ então $\sigma_i = \sigma_{min}$

seja

da solução em cada iteração no conjunto $\hat{\sigma}$ com restrição $\sigma_{min} \leq \hat{\sigma} \leq \sigma_{max}$, ou distribuição de impedância elétrica, consiste em fazer uma projeção não expansiva

A aplicação desta definição no algoritmo desenvolvido para estimar a direção da interseção C .

sendo que uma escolha certa dos elementos β_i pode acelerar a convergência na

$$T_i \equiv 1 + \beta_i(P_i - 1) \quad 0 < \beta_i < 2$$

A generalização deste teorema substitui o operador P_i pelo conjunto T_i

aplicação deste teorema é chamada *projeção em espaços convexos*.

converge para C para todos os pontos iniciais, na medida em que $k \rightarrow \infty$. A

$$u^{k+1} = (P_1 P_2 \dots P_m) u^k$$

conjuntos convexos C_1, C_2, \dots, C_m . Então a iteração

A utilidade desta definição é o teorema seguinte: Seja C a interseção de m

inferior iguais a $u^{min}(x)$, e os valores acima do limite superior iguais a $u^{max}(x)$.

restrição $u^{min}(x) \leq \hat{u}(x) \leq u^{max}(x)$ é fazer todos os valores abaixo do limite

mentes de \hat{u} igual a zero; e uma projeção não expansiva no conjunto $\hat{u}(x)$ com

não expansiva no conjunto dos números positivos de \hat{u} é fazer todos os compo-

Como exemplo da implementação desta definição tem-se que, uma projeção

$$|P_i \hat{u} - \hat{u}| \leq |u_a - \hat{u}| \quad \text{para toda } u_a \text{ em } C_i$$

projeta qualquer \hat{u} que se encontre fora de C_i até o elemento mais próximo de C_i

seja no conjunto se (i) P_i mantém invariável qualquer \hat{u} dentro de C_i e (ii) P_i

Se C_i é um conjunto convexo, P_i é chamado *operador de projeção não expan-*

como $u^{min}(x) \leq \hat{u}(x) \leq u^{max}(x)$ para funções específicas de u^{min} e u^{max} .

tivos, valor zero fora de uma determinada região, ou a definição de limites tais

blema inverso definem um conjunto convexo. Exemplo destas são: valores posi-

De fato, muitas das restrições determinísticas impostas à solução $\{\hat{u}\}$ do pro-

denominada também combinação convexa de u_1 e u_2 .

A implementação destes limites de confiança fazem sentido também pelo fato de que as medidas contêm uma componente aleatória, podendo existir infinitas soluções. Portanto, a solução obtida em cada iteração num $\Delta\sigma$ sempre que sair da região clinicamente provável.

A teoria do método *projeção em espaços convexos* deriva-se das equações de *Fredholm* (Press *et al.*, 1989).

Capítulo 6

Metodologia de Simulações Numéricas e com Dados Experimentais

Tres tipos de testes foram realizados: com dados simulados numéricas, com dados de bancada experimental (cuba de vidro com solução salina) e, com dados coletados do tórax de um indivíduo.

O modelo de elementos finitos referente à bancada experimental contém 156 nós e 182 elementos, conforme mostrado na figura 6.1. Esta malha, além de representar o meio em questão, considera o efeito dos eletrodos (localizados na fronteira) na distribuição interna de campo elétrico.

O modelo de elementos finitos referente às simulações numéricas contém 56 nós e 96 elementos, conforme mostrado na figura 6.2.

O problema de impedância consiste em encontrar uma distribuição de condutividade σ^* que minimize a diferença entre as voltagens calculadas através do método de elementos finitos e as voltagens medidas na fronteira, podendo ser formulado das seguintes maneiras,

$$\{e\} = -\{V^c\} - \{V_m\} \quad (6.1)$$

$$\min \Phi_1(\sigma) = \frac{1}{2}(V_m - V^c(\sigma))^t(V_m - V^c(\sigma)) \quad (6.2)$$

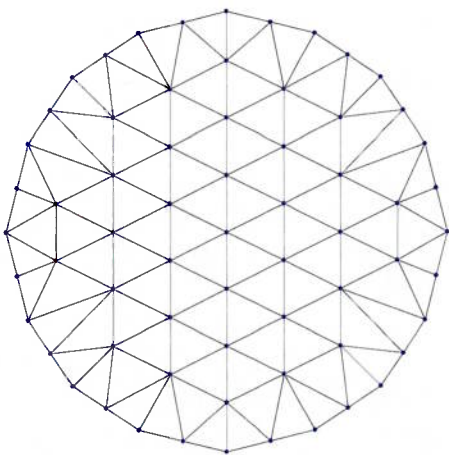


Figura 6.2: Malha de elementos finitos composta por 96 elementos e 56 nós.

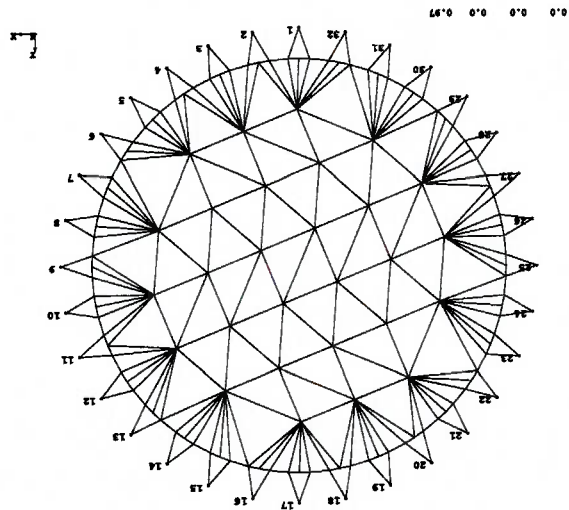


Figura 6.1: Malha de elementos finitos composta por 182 elementos e 156 nós, considerando 32 eletrodos na fronteira.

$$\min \Phi_2(\sigma) = \frac{1}{2}(V_m - V_c(\sigma))^t(V_m - V_c(\sigma)) + \frac{\alpha}{2}(\sigma^t H^t H \sigma) \quad (6.3)$$

V_c e V_m são as voltagens calculadas e medidas, respectivamente. O índice de erro $\{e\}$ se obtém resolvendo o sistema não linear na condutividade elétrica através da formulação clássica de Newton-Raphson, conforme descrita no apêndice A.

Φ_1 e Φ_2 são funcionais que permitem obter uma solução de condutividade que minimize a erro quadrático entre as voltagens medidas e calculadas. A matriz H é um filtro passa alta na distribuição de condutividade (vide apêndice B), necessário para regularizar o problema de estimação.

Considerando o funcional Φ_2 , e derivando em relação a σ temos,

$$\frac{\partial \Phi(\sigma)}{\partial \sigma} = -\frac{\partial V_c(\sigma)^t}{\partial \sigma}(V_m - V_c(\sigma)) + \alpha(H^t H \sigma) = 0 \quad (6.4)$$

Aplicando a expansão em série de Taylor à derivada do funcional temos,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \approx \frac{\partial \Phi(\sigma)}{\partial \sigma} + \frac{\partial^2 \Phi(\sigma)}{\partial \sigma^2} \delta \sigma = 0 \quad (6.5)$$

onde $\{V\}^N$ são as voltagens calculadas no problema direto do modelo de N elementos finitos, e L a quantidade de eletrodos.

$$(6.11) \quad \{V\}^L \stackrel{\leftarrow}{=} \{V\}^N$$

aos pontos de medição, que são os eletrodos do modelo real, serão consideradas apenas as voltagens calculadas nas posições correspondentes do modelo de elementos finitos na formulação direta (quantidade de nós). Porém, fronteira, enquanto a dimensão de $\{V^c\}$ é igual ao número de graus de liberdade altamente compatível. Isto é, a dimensão de $\{V^m\}$ é igual ao número de eletrodos na onde T uma matriz de transformação para fazer o sistema de equações dimension-

$$(6.10) \quad \{V(\sigma)\} = [T] \times [Y(\sigma)]^{-1} \times \{C\}$$

o número de elementos do modelo discretizado, ou seja, função não linear da distribuição de resistividades $\{\sigma\}$, de ordem $E \times 1$, sendo E ordem $N \times 1$, pode-se escrever as variáveis nodais (vetor de voltagem) como uma onde Y é a matriz de impedância de ordem $N \times N$ e, $\{C\}$ o vetor de correntes de

$$(6.9) \quad [Y(\sigma)] \times \{V^c\} = \{C\}$$

A partir da formulação global do modelo de elementos finitos,

$$(6.8) \quad [a(H^t H)] + \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\partial V^c(\sigma)}{\partial V^c(\sigma)} \frac{\partial}{\partial \sigma} = - \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\partial V^c(\sigma)}{\partial V^c(\sigma)} (V^m) + a(H^t H \sigma)$$

ou,

$$(6.7) \quad \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\partial V^c(\sigma)}{\partial V^c(\sigma)} (V^m) - a(H^t H \sigma) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\partial V^c(\sigma)}{\partial V^c(\sigma)} \frac{\partial}{\partial \sigma} + a(H^t H \sigma) = 0$$

a seguinte expressão, Desprezando o segundo termo do lado direito da equação 6.6, por ser pequeno em relação ao primeiro termo do lado direito e, substituindo 6.4 em 6.5 se obtém

$$(6.6) \quad \frac{\partial^2 \Phi(\sigma)}{\partial \sigma^2} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\partial V^c(\sigma)}{\partial V^c(\sigma)} \frac{\partial}{\partial \sigma} + \frac{\partial}{\partial \sigma^2} \frac{\partial V^c(\sigma)}{\partial V^c(\sigma)} (I \otimes (V^c(\sigma) - V^m)) + a(H^t H)$$

onde,

É necessário também, introduzir um número de condições de contorno suficientes, de modo que o sistema de equações resultantes tenha no mínimo tantas equações linearmente independentes quanto elementos no modelo de elementos finitos. Para tanto, aplicam-se P padrões de correntes na fronteira do modelo, de modo que a transformação 6.11 resulta em,

$$[V]^{N \times P} = [Y(\sigma)]^{-1}_{N \times N} \times [C]^{N \times P} \xleftrightarrow{X} [V^c]^{L \times P} \quad (6.12)$$

A matriz $[C]^{N \times P}$ representa os diferentes modos em que o modelo é excitado,

$$[C]^{N \times P} = \begin{bmatrix} -C_{(1,1)} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -C_{(1,2)} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ +C_{(17,1)} & 0 & \dots & -C_{(16,16)} & +C_{(32,16)} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & +C_{(18,2)} & \dots & \vdots & \vdots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & \dots & -C_{(17,17)} & -C_{(32,32)} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

Estas correntes por sua vez geram uma distribuição de voltagem $[V^m]^{L \times P}$ nos eletrodos da fronteira, conforme mostrado na figura 6.3. Sendo assim, pode-se expressar a equação 6.7 para cada modo de injeção de corrente, resultando no conjunto de funções (comparar com a equação 3.1),

$$f_i^i(\sigma) = \frac{\partial V_i^c(\sigma)}{\partial \sigma} - (V_i^c(\sigma) - V_i^m) + \alpha(H^t H \sigma) + \left[\frac{\partial V_i^c(\sigma)}{\partial \sigma} \frac{\partial V_i^c(\sigma)}{\partial \sigma} + \alpha(H^t H \sigma) \right] \delta \sigma = 0, \quad (6.14)$$

$$i = 1, \dots, P$$

Para resolver este conjunto de funções relacionadas, utilizou-se o método de Newton-Raphson, onde se resolve o sistema de equações lineares em $\delta \sigma$, sendo

Quando o passo da iteração produz variações na estimativa de σ^* menores que a tolerância predeterminada, dizemos que o procedimento convergiu.

sendo E o número de elementos da malha de elementos finitos.

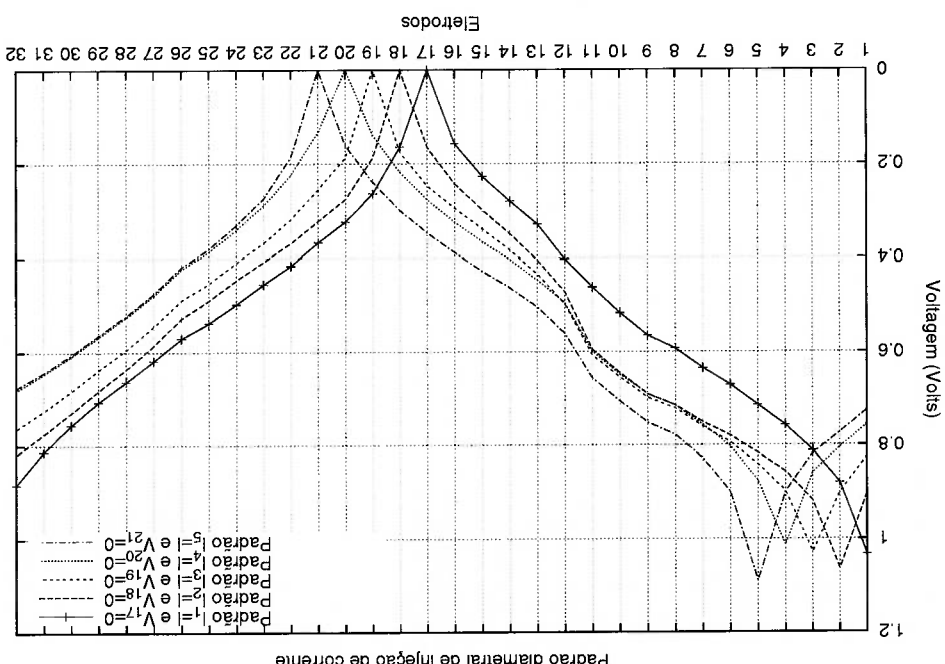
$$\sigma_i^{k+1} = \sigma_i^k + \delta\sigma_i \quad i = 1, \dots, E \quad (6.16)$$

A equação (6.15) define um processo iterativo para calcular σ^* , onde para cada iteração k , e com a estimativa atual σ^k , se resolve a equação (6.15) e se atualiza nossa estimativa de σ^* para,

$$[\mathbf{J}_E^t \mathbf{J}_E \times (L \times P)^t + \alpha (H^t H)_{(E \times E)}] \delta \sigma_{E \times 1} = -\mathbf{J}_E^t \mathbf{V}_E \times (L \times P)^t (\mathbf{V}_E^c(\sigma) - \mathbf{V}_E^m(L \times P)^t \times 1 - \alpha (H^t H \sigma)_{E \times 1}) \quad (6.15)$$

cada função direcionada para a solução zero simultaneamente,

Figura 6.3: Distribuição de voltagem nos eletrodos para o padrão de corrente diametral.



simulação descrita anteriormente.

A seguir mostra-se de maneira resumida um diagrama da metodologia de *et al.*, 1989).

As rotinas elementares para o tratamento matricial foram extraídas do *Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing (FORTRAN Version)* (Press *et al.*, 1989).

Os algoritmos foram escritos em linguagem FORTRAN 77 e compilados com o g77 do projecto GNU, na plataforma Linux.

quadrangulares para modelar os eletrodos.

Foram utilizados elementos triangulares para modelar o interior do meio e teste com dados teóricos e adjacente para os testes com dados experimentais.

Os padrões de injeção de correntes aplicados foram: diametral no caso do teste com dados de teóricos e de forma simbólica nos testes com dados experimentais.

As derivadas do jacobiano foram obtidas através do método estandar no teste real.

Desta forma, é estimada a distribuição de condutividade absoluta do modelo regularizado através de um filtro passa alta conforme apêndice B.

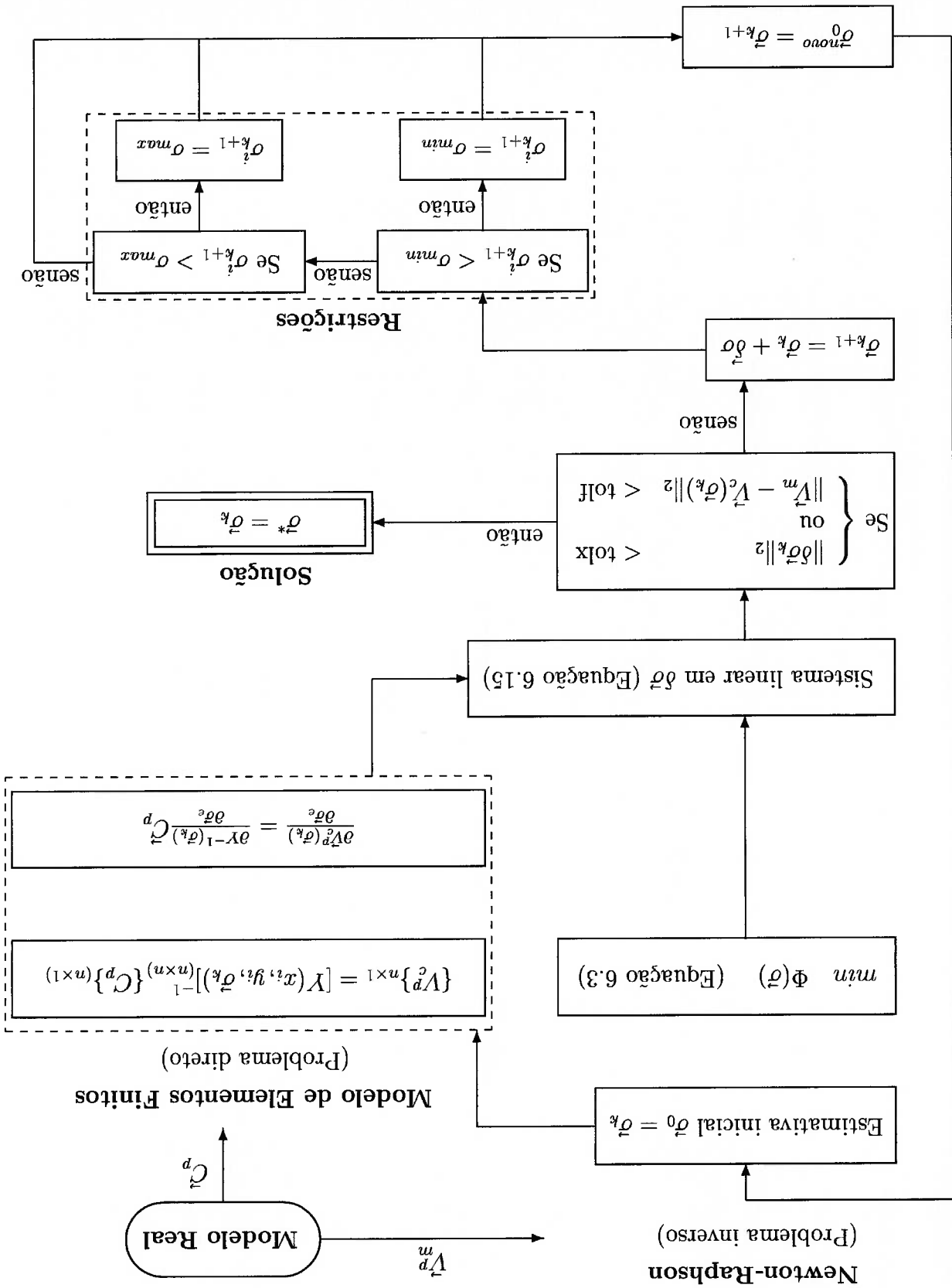
singulares e Projção em espaços convexos, conforme descrito no capítulo 5, e sendo condicionado o problema mediante as técnicas *Decomposição de valores* Para resolver o sistema 6.15 foi implementada técnica *LU Decomposition*,

$$(6.17) \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial V_1(\sigma)}{\partial \sigma} C_1 & \dots & \frac{\partial V_1(\sigma)}{\partial \sigma} C_2 & \dots & \frac{\partial V_1(\sigma)}{\partial \sigma} C_p \\ \frac{\partial V_2(\sigma)}{\partial \sigma} C_1 & \dots & \frac{\partial V_2(\sigma)}{\partial \sigma} C_2 & \dots & \frac{\partial V_2(\sigma)}{\partial \sigma} C_p \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial V_{l-1}(\sigma)}{\partial \sigma} C_1 & \dots & \frac{\partial V_{l-1}(\sigma)}{\partial \sigma} C_2 & \dots & \frac{\partial V_{l-1}(\sigma)}{\partial \sigma} C_p \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J} = \frac{\partial V(\sigma)}{\partial \sigma} = \frac{\partial V(\sigma)}{\partial \sigma} C^{-1} Y^{-1} Y^{-1} C^{-1} \Leftrightarrow$$

O termo \mathbf{J} é conhecido como matriz Jacobiana,

Figura 6.4: Diagrama geral da metodologia de simulação



Capítulo 7

Resultados

Os resultados a serem apresentados consideram tres tipos de testes: (I) testes com dados de simulação numerica, (II) testes com dados de bancada experimental e, (III) testes com dados do torax de um individuo.

Em cada caso, mostra-se a distribuicao de condutividade e resistividade elétrica em determinados instantes do processo iterativo, assim como as respectivas curvas de convergências.

Os resultados foram visualizados com auxilio do software GNUplot, sendo os valores de condutividade e resistividade elétrica posicionados no baricentro dos elementos da malha. A superficie foi gerada a partir da interpolação dos referidos valores utilizado um polinômio de quarta ordem.

Nas curvas de convergência apresentadas para cada teste, utilizou-se como parâmetro a norma Euclidiana da diferença entre as voltagens medidas e as calculadas, e do incremento nas condutividades a cada iteração, ou seja,

- $\|V_m^c - V_c^c\|_2 = [(V_m^c)^t (V_c^c - V_m^c)^t]^{1/2},$
- $\|\delta\vec{\sigma}\|_2 = [\delta\vec{\sigma}^t \cdot \delta\vec{\sigma}]^{1/2}$

No método implementado nos testes com dados teóricos e com dados de bancada experimental não foi considerado o termo de regularização no funcional a ser minimizado, ou seja, conforme equação 6.2. No caso do teste com dados do torax foram realizadas dois tipos de avaliações: (I) minimizando o funcional Φ_1 , equação 6.2 e, (II) minimizando funcional Φ_2 , equação 6.3, que inclui um termo de regularização.

A seguir apresentam-se os resultados de cada caso de estudo.

7.1 Resultados com Dados de Simulação numérica

Para a obtenção dos resultados com dados teóricos foi utilizada uma malha de elementos finitos que contém 96 elementos e 56 nós, conforme figura 6.2. A distribuição de condutividade nos elementos centrais foi adotada $2,5 (\Omega m)^{-1}$, e nas demais regiões foi adotada $8,78 (\Omega m)^{-1}$. A espessura dos elementos é de $0,1 \cdot 10^{-3} m$.

Na solução do problema inverso utilizou-se uma estimativa inicial de condutividade homogênea de $1 (\Omega m)^{-1}$.

O modelo foi excitado através de padrões diamétrais de injeção de corrente conforme figura 6.3, sendo o valor da corrente aplicada em 16 pontos da fronteira igual a 4,25 mA.

No cálculo da matriz pseudoinvertida ao sistema linear resultante da minimização do funcional $\Phi 1$ da equação 6.2, truncaram-se os valores singulares menores que $wmax * 10^{-11}$, sendo $wmax$ o maior valor singular.

Dois tipos de resultados com dados numéricos são apresentados: (I) conforme abordagem clássica da equação 6.1 e, (II) conforme funcional $\Phi 1$ equação 6.2.

As curvas de convergências referentes à abordagem clássica são apresentadas na figura 7.1. Salienta-se que, apenas neste caso foi adotada a Norma 1, ou seja $\|V_m - V_c\|_1 = \sum_{i=1}^N abs(V_m - V_c)$

Das figuras 7.2 à 7.7 são apresentadas as distribuições de condutividade elétrica das iterações 1 até a 6, respectivamente, da abordagem clássica.

As curvas de convergências referentes à minimização do funcional $\Phi 1$ são apresentadas na figura 7.8.

Das figuras 7.9 à 7.14 são apresentadas as distribuições de condutividade elétrica das iterações 1 até a 6, respectivamente, considerando o funcional $\Phi 1$.

Na figura 7.15 mostra-se o resultado estimado na iteração 7 juntamente com o resultado esperado, considerando o funcional $\Phi 1$.

Figura 7.1: Convergência com dados teóricos (Abordagem clássica)

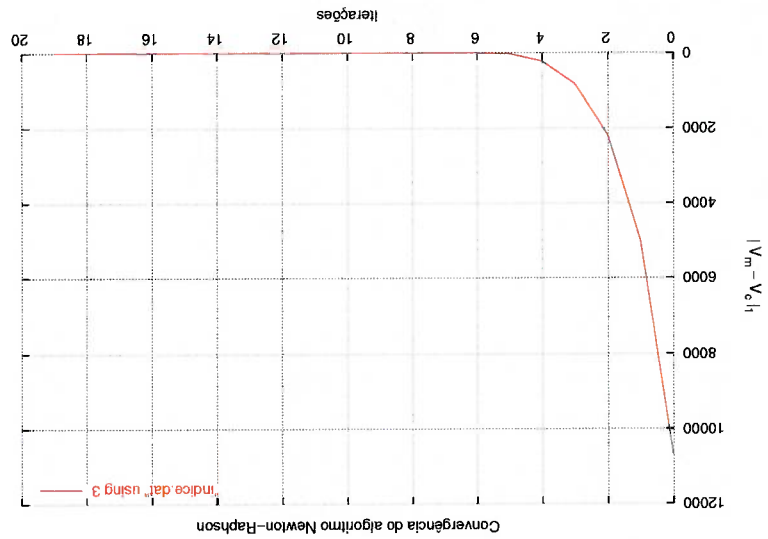
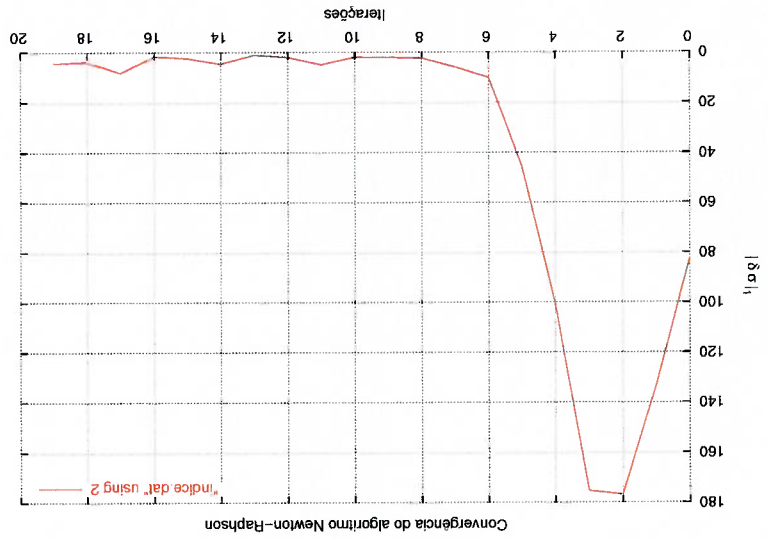


Figura 7.6: Iteração 5

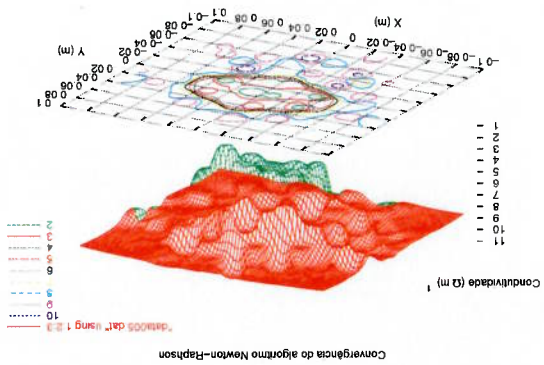


Figura 7.4: Iteração 3

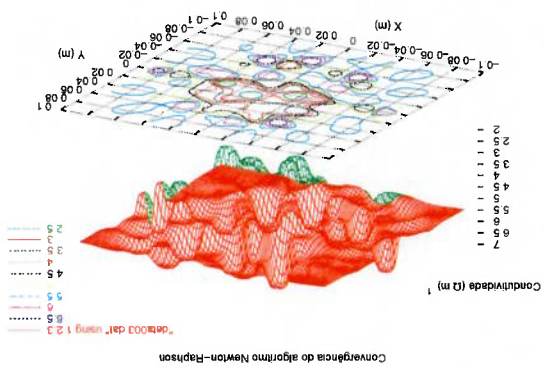


Figura 7.2: Iteração 1

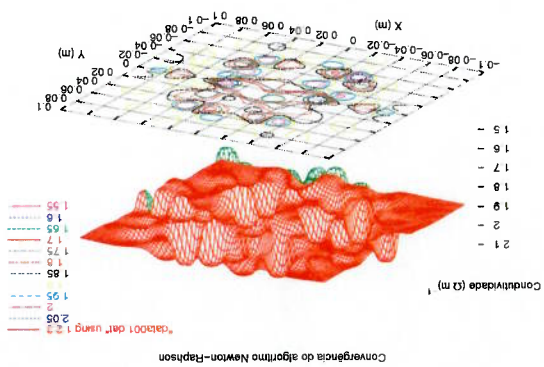


Figura 7.7: Iteração 6

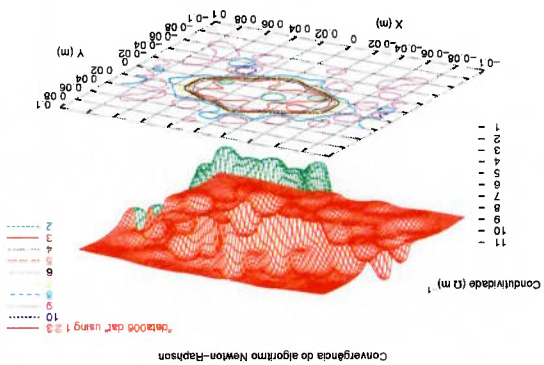


Figura 7.5: Iteração 4

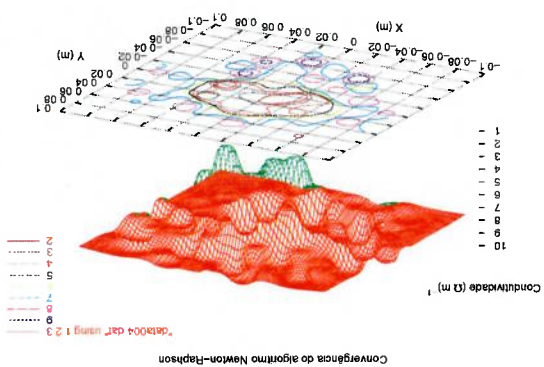


Figura 7.3: Iteração 2

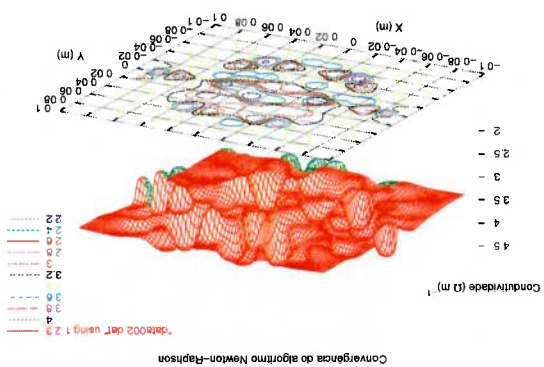


Figura 7.8: Convergência com dados teóricos (Funcional $\Phi 1$)

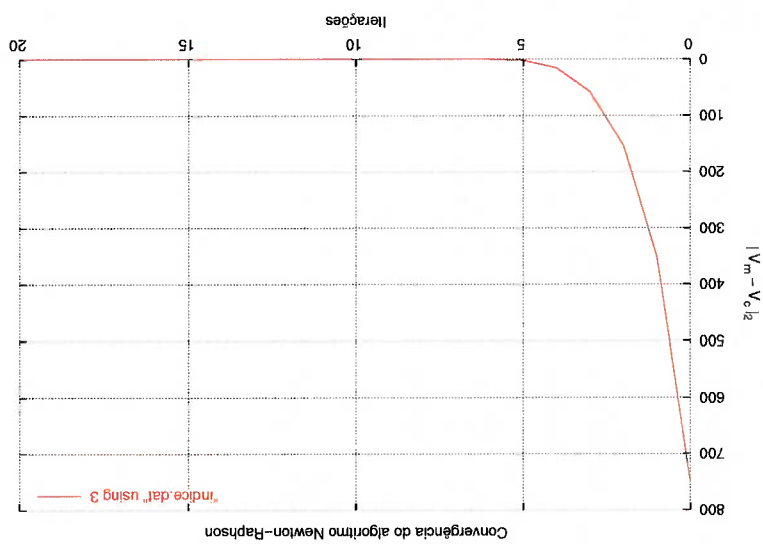
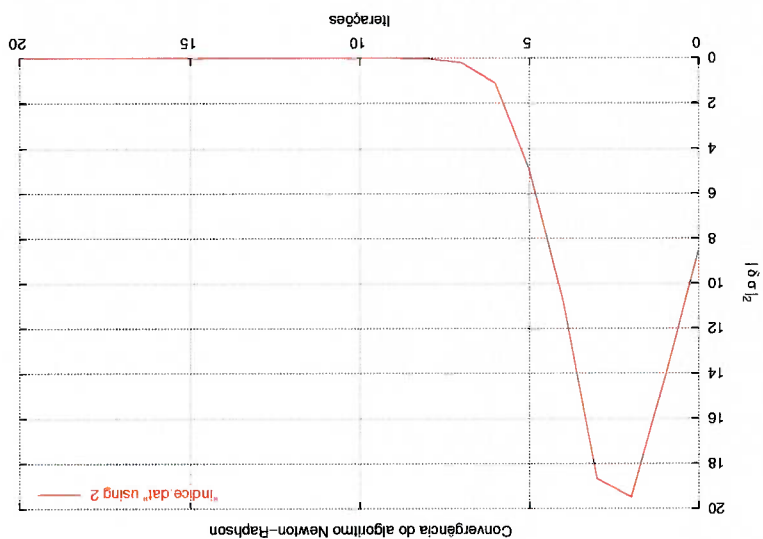


Figura 7.13: Iteração 5

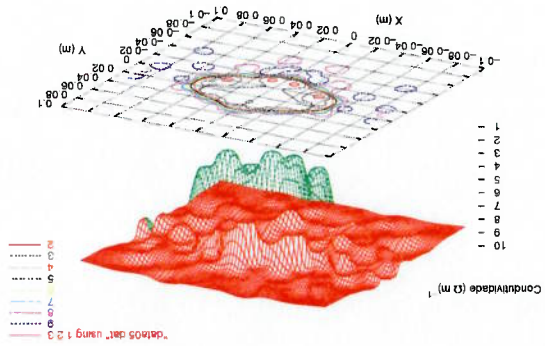


Figura 7.14: Iteração 6

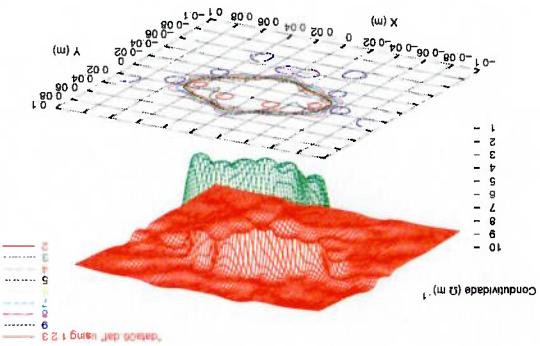


Figura 7.11: Iteração 3

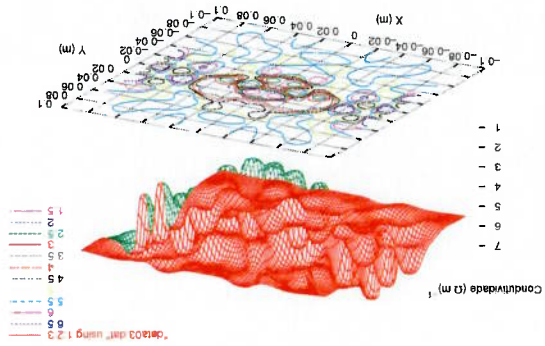


Figura 7.12: Iteração 4

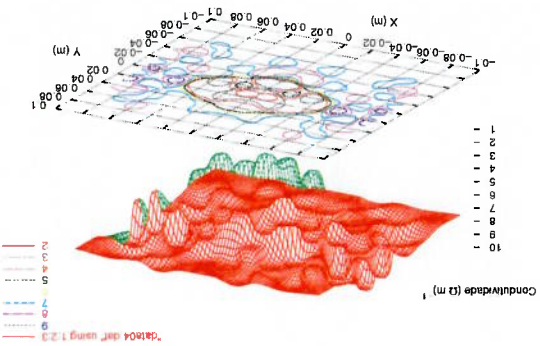


Figura 7.9: Iteração 1

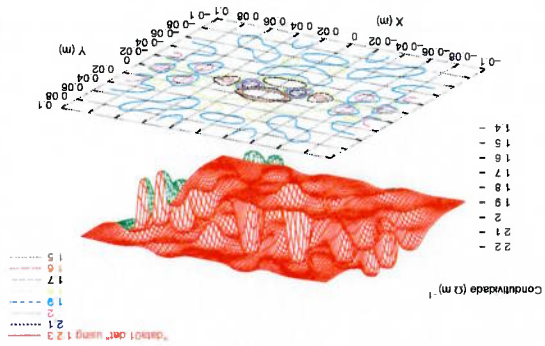
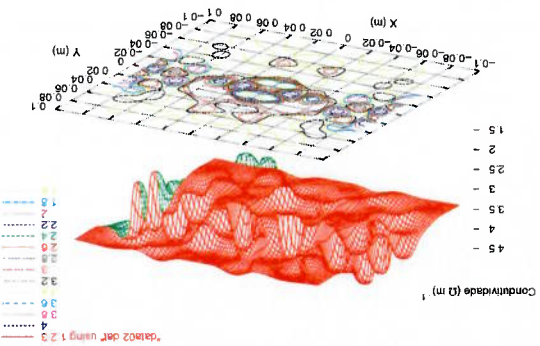


Figura 7.10: Iteração 2



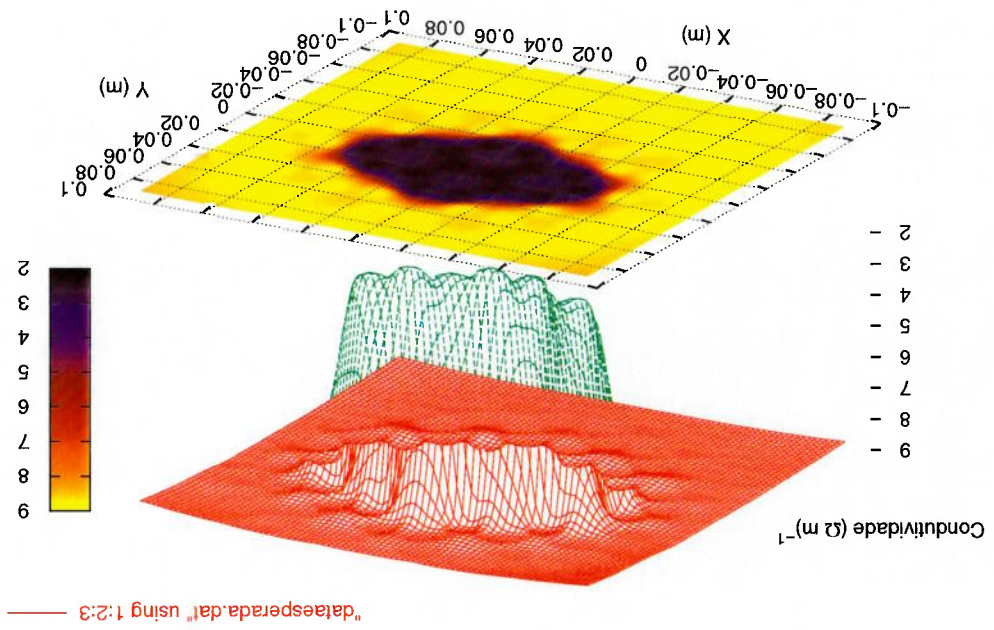
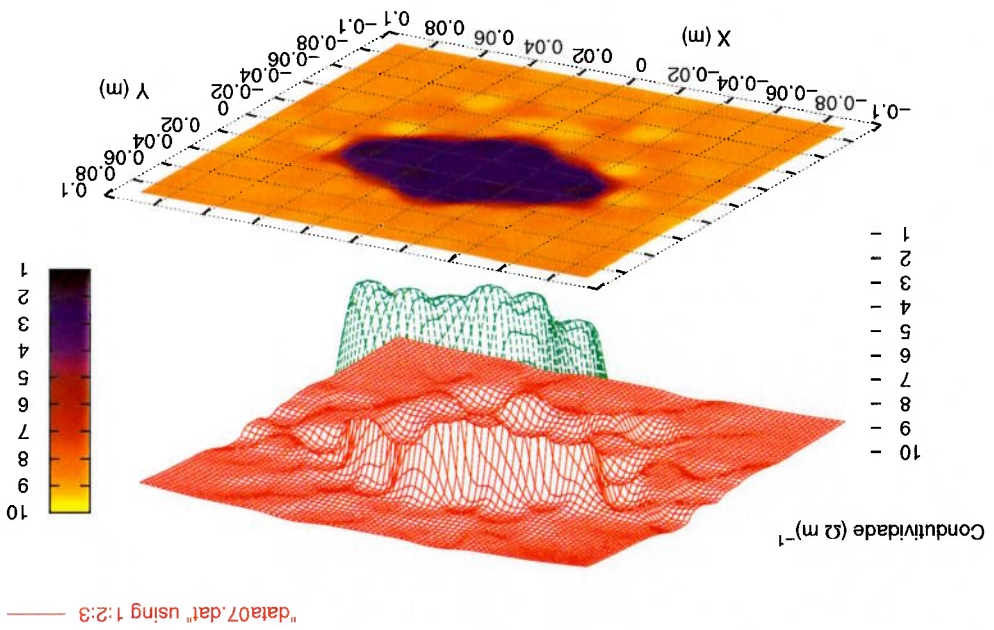


Figura 7.15: Distribuições de condutividade elétrica estimada (iter. 7) e esperada, respectivamente.

7.2 Resultados com Dados de Bancada Experimental

7.2.1 Bancada Experimental

A bancada experimental desenvolvida consiste numa fonte de alimentação que proporciona um sinal senoidal de $67kHz$ de baixa amplitude. Este sinal é enviado para um gerador de corrente de $40W$ de potência, que é capaz de impôr uma corrente elétrica de $1mA$ através de dois eletrodos imersos num meio salino que representa uma fatia do tórax, conforme mostrado na figura 7.16.

A corrente elétrica é imposta a um dos trinta e dois eletrodos posicionados na fronteira de maneira equidistante, mantendo ligado ao terra um dos eletrodos adjacentes (Padrão de injeção adjacente). Posteriormente, é realizada uma leitura manual das medidas de voltagem que serão processadas no microcomputador pelo método numérico de estimação. As medidas de voltagem nos eletrodos foram realizadas com o multímetro de precisão *HP 34401 A*.

A ideia de utilizar um meio salino vem da necessidade de simular um meio condutivo, tal como acontece no tecido pulmonar. Para tanto, foi preparada uma solução com concentração igual a $0,3g$ de sal $NaCl$ para 1300 ml de água destilada.

O recipiente utilizado possui um diâmetro de 220 mm e, para representar regiões de alta resistividade foi utilizado um copo de vidro com diâmetro de 61 mm posicionado numa região, que desde o ponto de vista anatómico, seria ocupada por um pulmão. A altura da solução salina é de 35 mm.

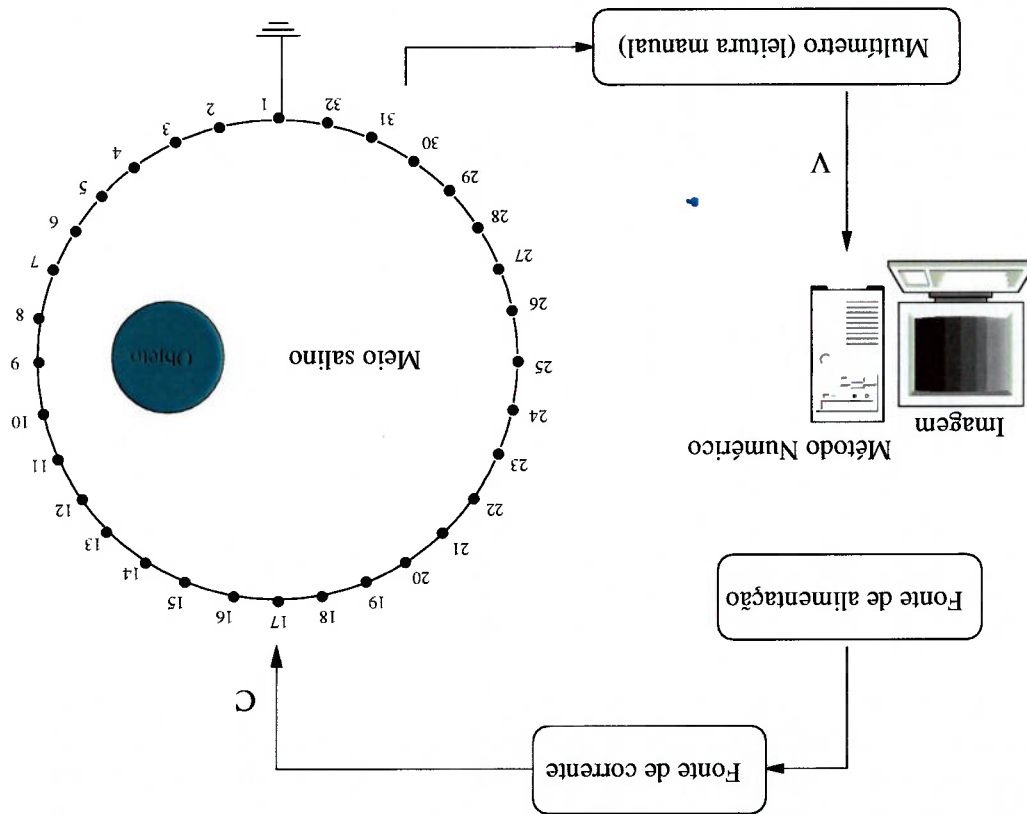
Na tabela 7.1 apresenta-se o conjunto de modos de injeção de correntes que são aplicados ao modelo com o objetivo de fornecer ao algoritmo condições de contorno suficientes para estimar a distribuição de impedância e, em particular, detectar a presença do objeto (copo de vidro).

Outros dados referentes à bancada são: dimensões dos eletrodos igual a $60,0 \times 9,0 \times 1,0$ mm; fonte de alimentação *Power Supply MPC-3003D*; gerador de sinal de $67kHz$; e multímetro de precisão *HP 34401 A*.

Tabela 7.1: Padrões adjacentes de injeção de corrente

Eletrodo	C_1	C_2	C_3	...	C_{31}	C_{32}
1	+C	0	0	...	0	-C
2	-C	+C	0	...	0	0
3	0	-C	+C	...	0	0
4	0	0	0	...	0	0
...
31	0	0	0	...	+C	0
32	0	0	0	...	-C	+C

Figura 7.16: Esquema da bancada experimental



7.2.2 Resultados de Bancada

Os resultados com dados de bancada experimental foram obtidos conforme fun-
cional Phi da equação 6.2 considerando uma malha de elementos finitos com 182
elementos e 156 nós, conforme figura 6.1.

Na solução do problema inverso utilizou-se uma estimativa inicial de condu-
tividade homogênea de $0,057 \text{ (}\Omega\text{m)}^{-1}$ para os elementos internos e de $20 \text{ (}\Omega\text{m)}^{-1}$
para os elementos que representam os eletrodos posicionados na fronteira.

A excitação do modelo matemático, assim como da bancada experimental
realizou-se através de padrões adjacentes de injeção de corrente, conforme tabela
7.1, sendo o valor da corrente aplicada em 32 pontos da fronteira igual a 1 mA.
No cálculo da matriz pseudoinvertida associada ao sistema linear resultante da
minimização do funcional Φ da equação 6.3, truncaram-se os valores singulares
menores que $wmax * 1,1 * 10^{-3}$, sendo $wmax$ o maior valor singular.
As curvas de convergência são apresentadas na figura 7.17.

Nas figuras 7.18 à 7.23 são apresentadas as distribuições de condutividade
elétrica nas iterações 1, 2, 3, 4, 7, e 20, respectivamente.
Nas figuras 7.24 à 7.29 são apresentadas as distribuições de resistividade
elétrica nas iterações 1, 2, 3, 4, 7, e 20, respectivamente.
Na figura 7.30 mostra-se o resultado estimado na iteração 40 da distribuição
de condutividade e resistividade elétrica.

Figura 7.17: Convergência com dados de bancada experimental

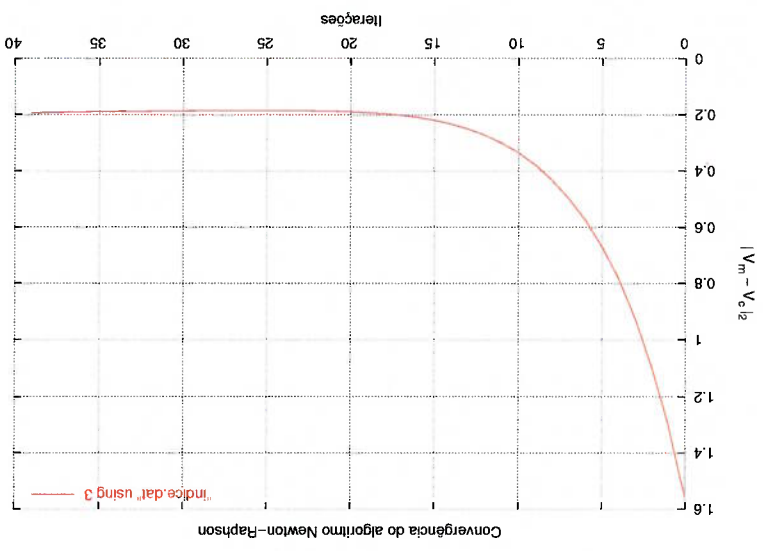
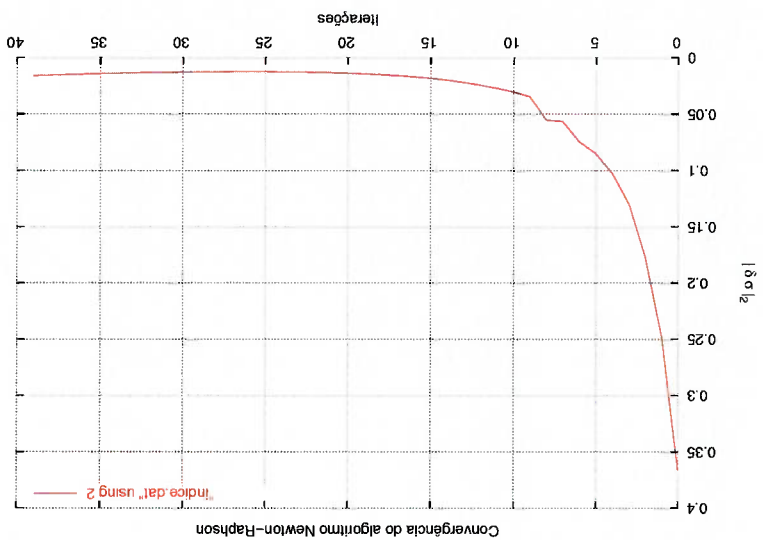


Figura 7.22: Iteração 7

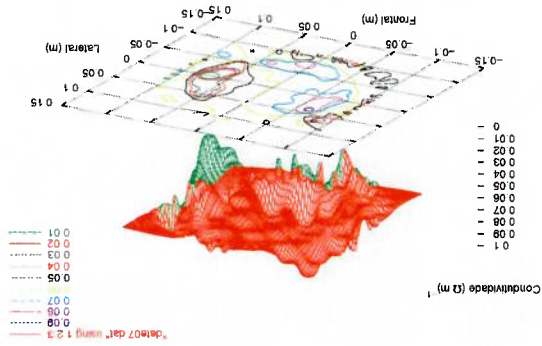


Figura 7.23: Iteração 20

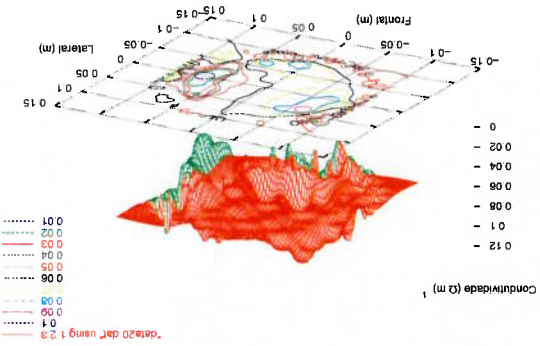


Figura 7.20: Iteração 3

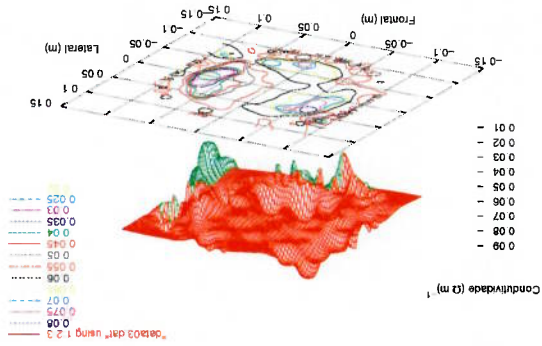


Figura 7.21: Iteração 4

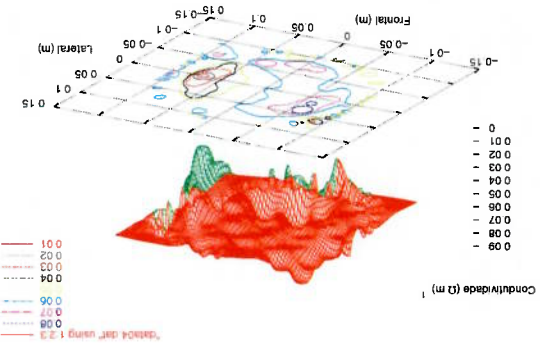


Figura 7.18: Iteração 1

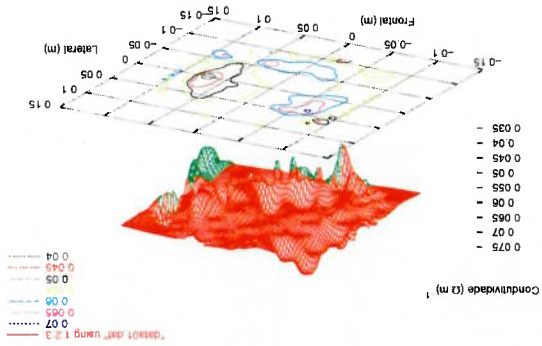


Figura 7.19: Iteração 2

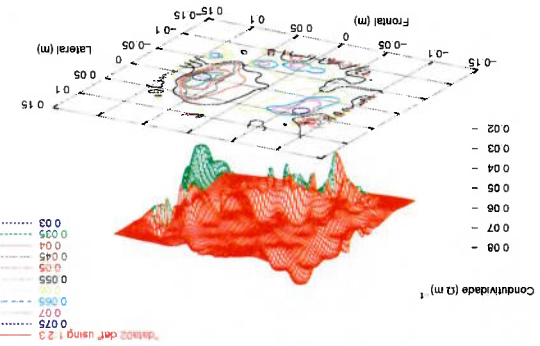


Figura 7.28: Iteração 7

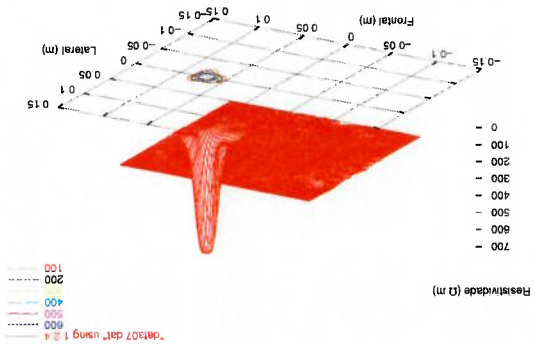


Figura 7.29: Iteração 20

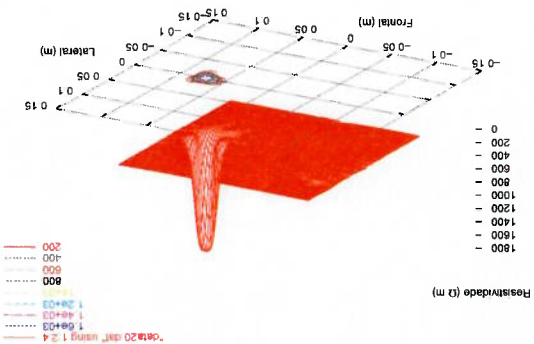


Figura 7.26: Iteração 3

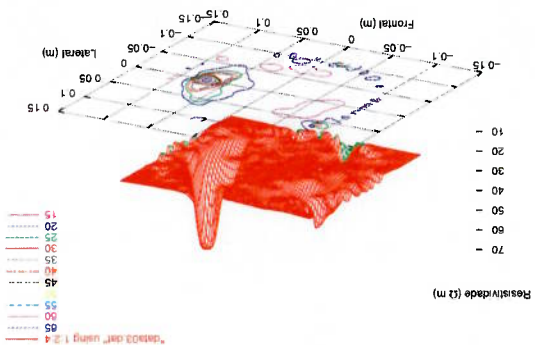


Figura 7.27: Iteração 4

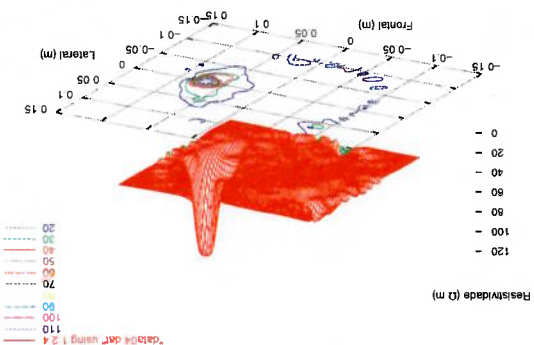


Figura 7.24: Iteração 1

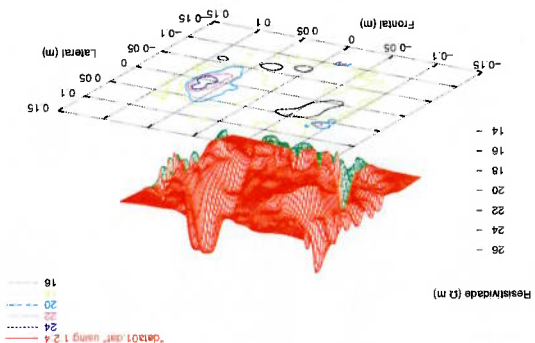
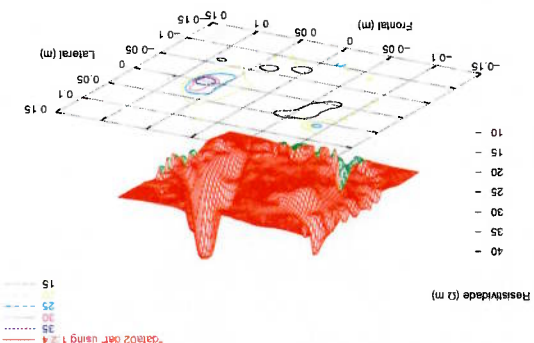


Figura 7.25: Iteração 2



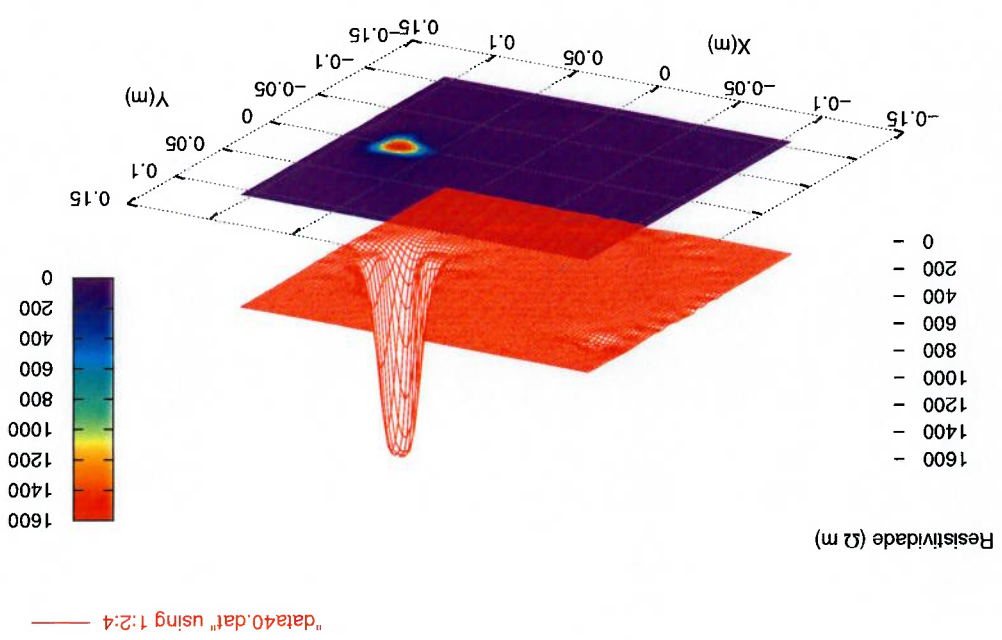
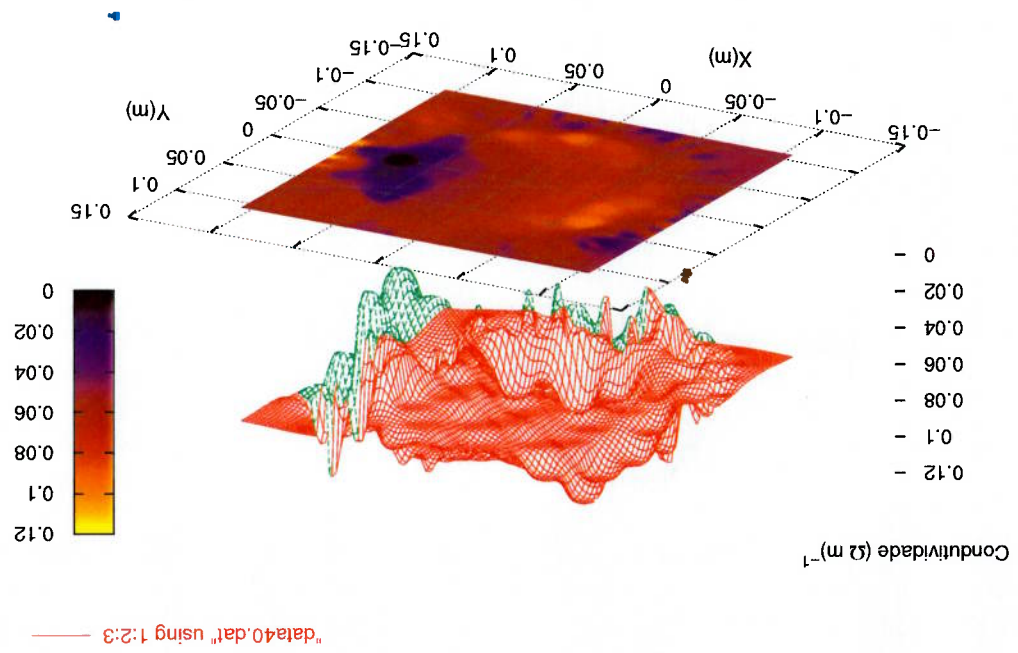


Figura 7.30: Condutividade e resistividade elétrica - Iteração 40

Os dados experimentais de tecido humano foram coletados a partir da injeção de padrões adjacentes de injeção de corrente, conforme tabela 7.1, em 32 eletrodos equidistantes ao redor do tórax de um indivíduo.

Para tanto, foram utilizados 32 conversores de tensão para corrente, sendo efetuado o aterramento através de relés eletromecânicos.

Cada conversor de tensão para corrente foi implementado de acordo com o circuito *Current Mirror* (Bertemes-Filho *et al.*, 1999), conforme figura 7.31.

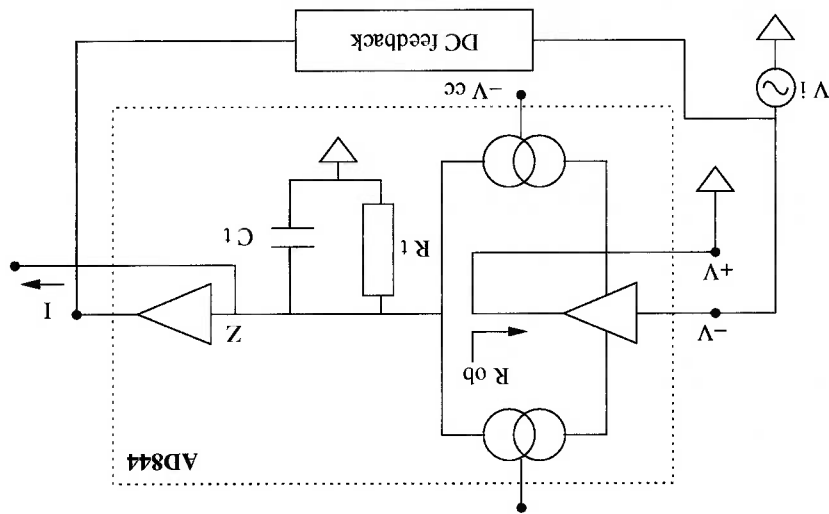


Figura 7.31: Circuito *Current Mirror*

Em relação ao modelo matemático, utilizou-se a mesma malha de elementos finitos utilizada no teste com dados de bancada, conforme figura 6.1, e igualmente, na solução do problema inverso utilizou-se uma estimativa inicial de condutividade homogênea de $0,057 (\Omega m)^{-1}$ para os elementos internos e de $20 (\Omega m)^{-1}$ para os elementos que representam os eletrodos.

O valor da corrente aplicada aos eletrodos no tórax do indivíduo foi de 1 mA. No cálculo da matriz pseudoinversa associada ao sistema linear resultante da minimização dos funcionais $\Phi 1$ e $\Phi 2$ (equações 6.2 e 6.3), truncaram-se os valores singulares menores que $w_{max} * 1,5 * 10^{-3}$, sendo w_{max} o maior valor singular. Neste teste foram realizadas duas avaliações:

- A) Minimização sem regularização, $\Phi 1$ conforme equação 6.2
- B) Minimização com regularização, $\Phi 2$ conforme equação 6.3

As curvas de convergência da avaliação A são apresentadas na figura 7.32.

Nas figuras 7.33 à 7.38 são apresentadas as distribuições de condutividade elétrica nas iterações 1, 2, 3, 4, 10, e 15, respectivamente.

Nas figuras 7.39 à 7.44 são apresentadas as distribuições de resistividade elétrica nas iterações 1, 2, 3, 4, 10, e 15, respectivamente.

Na figura 7.45 mostra-se o resultado estimado na iteração 25 da distribuição de condutividade e resistividade elétrica. Outra maneira de visualizar o resultado da iteração 25 é mostrado nas figuras 7.46 e 7.47

Na figura 7.48 apresenta-se um acompanhamento do processo iterativo, ilustrando os valores de condutividade e resistividade elétrica nas iterações 1, 5, 10, 15, 20, e 25.

O número de valores singulares anulados durante o processo iterativo, nos três casos de estudo, é mostrado na figura 7.49

Os resultados referentes à avaliação B, ou seja, incluindo o termo de regularização no problema de minimização, são apresentados nas figuras 7.50 e 7.51, sendo os valores dos parâmetros de regularização utilizados iguais a: $\alpha = 10^{-3}$ e $\beta = 10^{+3}$ (introduzidos na equação 6.3 e no apêndice B).

Finalmente, para fins de comparação é mostrado na figura 7.52 os valores de condutividade e resistividade elétrica das duas avaliações realizadas no teste com dados do tórax para a iteração 25.

Figura 7.32: Convergência com dados de tecido humano

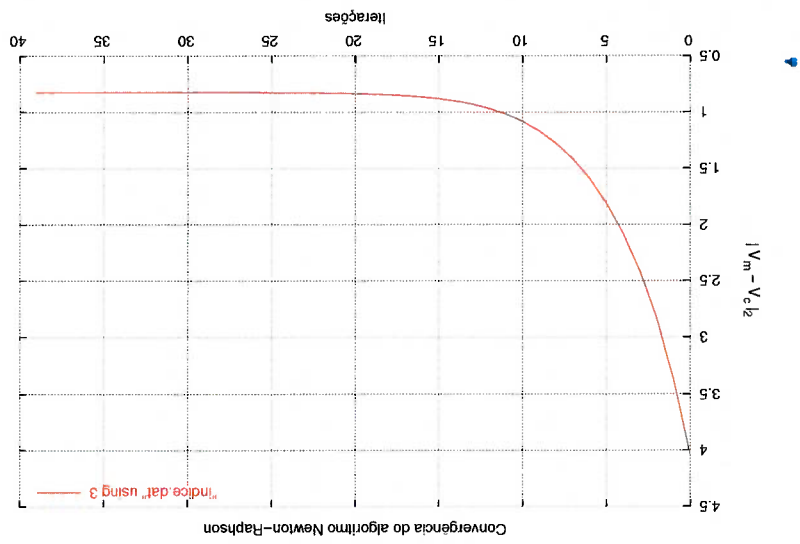
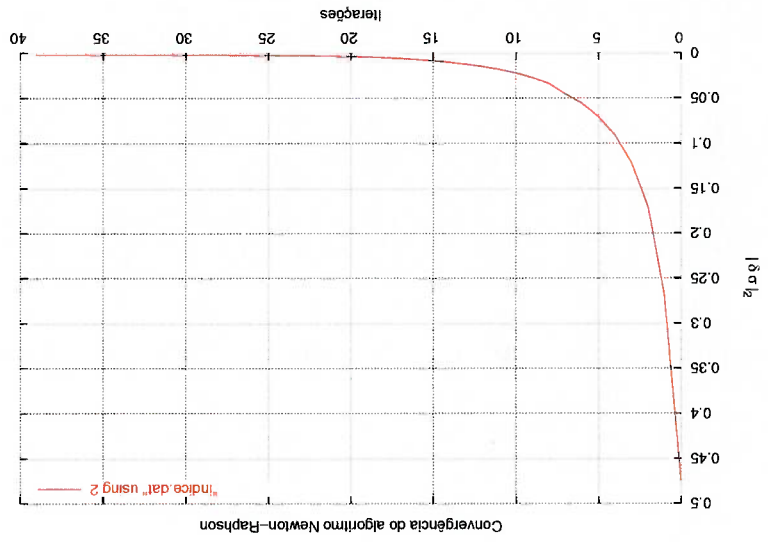


Figura 7.37: Iteração 10

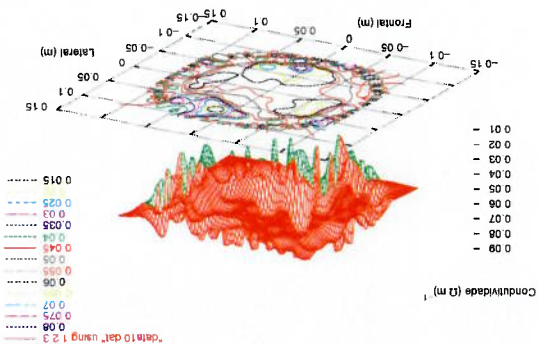


Figura 7.38: Iteração 15

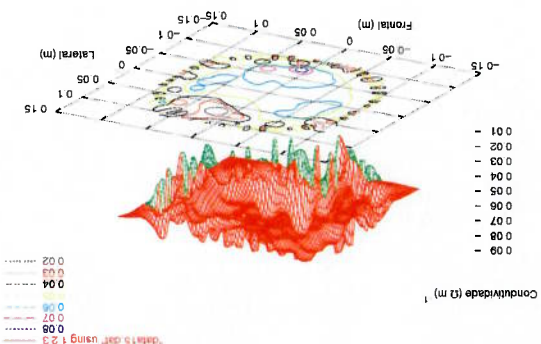


Figura 7.35: Iteração 3

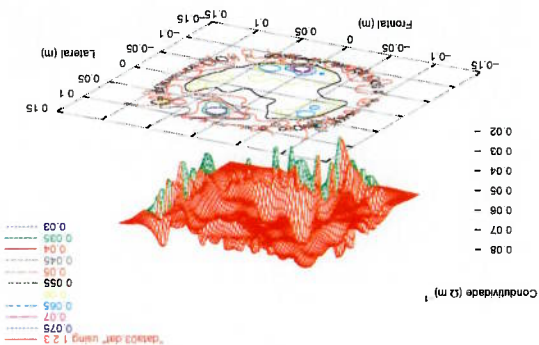


Figura 7.36: Iteração 4

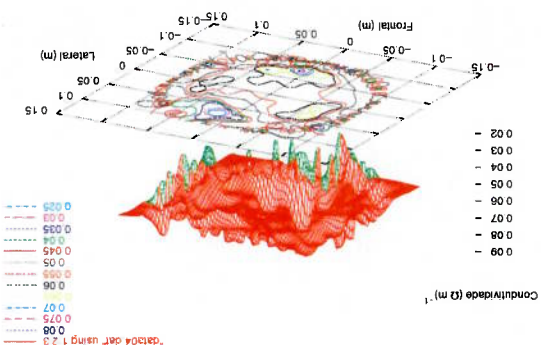


Figura 7.33: Iteração 1

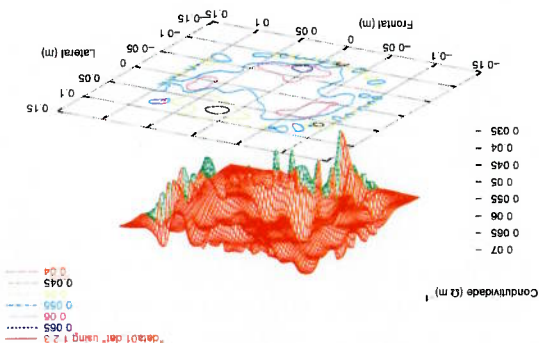


Figura 7.34: Iteração 2

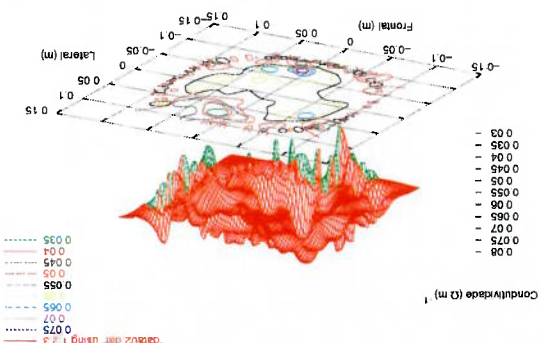


Figura 7.43: Iteração 10

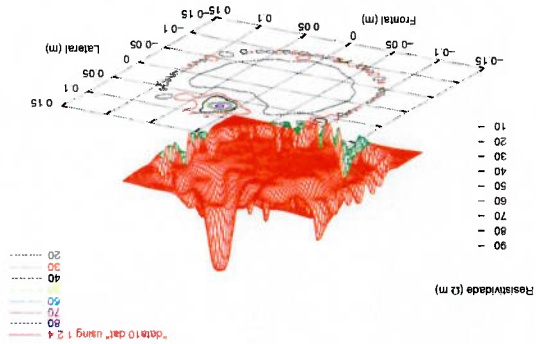


Figura 7.44: Iteração 15

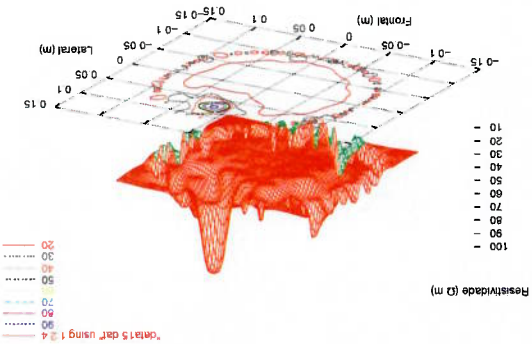


Figura 7.41: Iteração 3

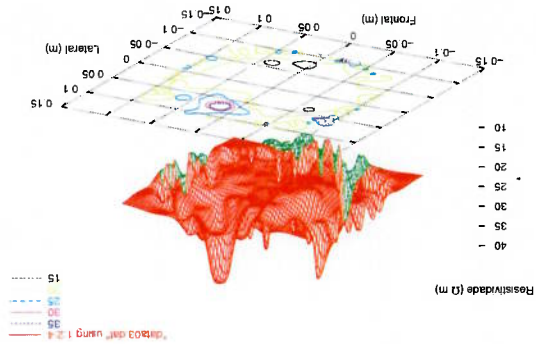


Figura 7.42: Iteração 4

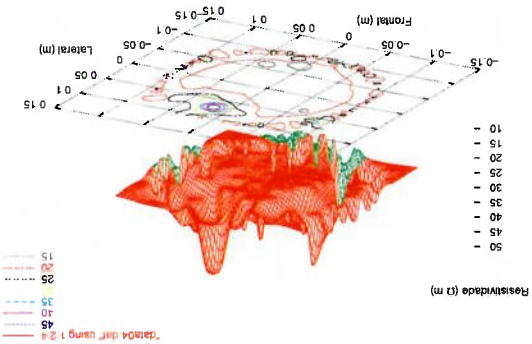


Figura 7.39: Iteração 1

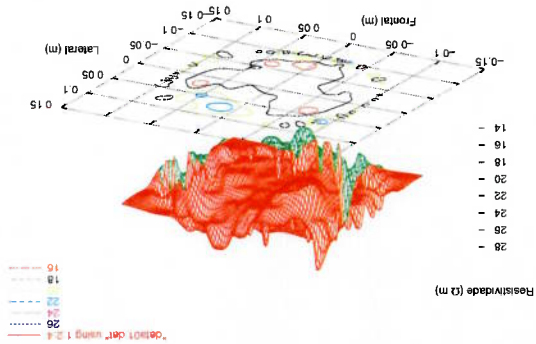
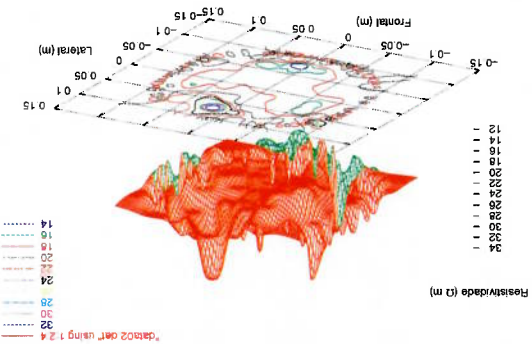


Figura 7.40: Iteração 2



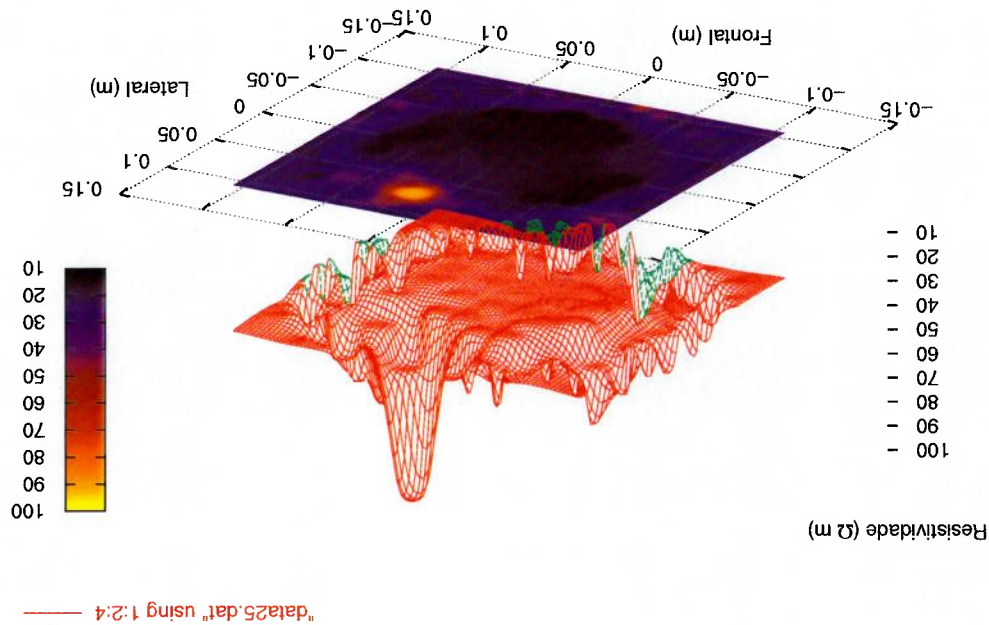
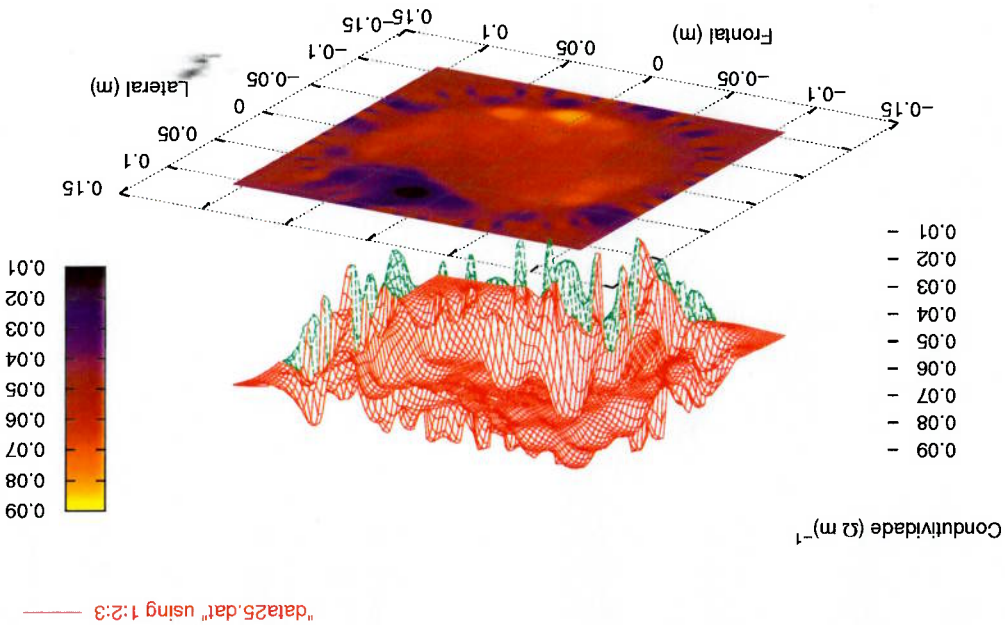


Figura 7.45: Condutividade e resistividade elétrica - Iteração 25

Distribuição de condutividade elétrica ($\Omega \text{ m}^{-1}$)

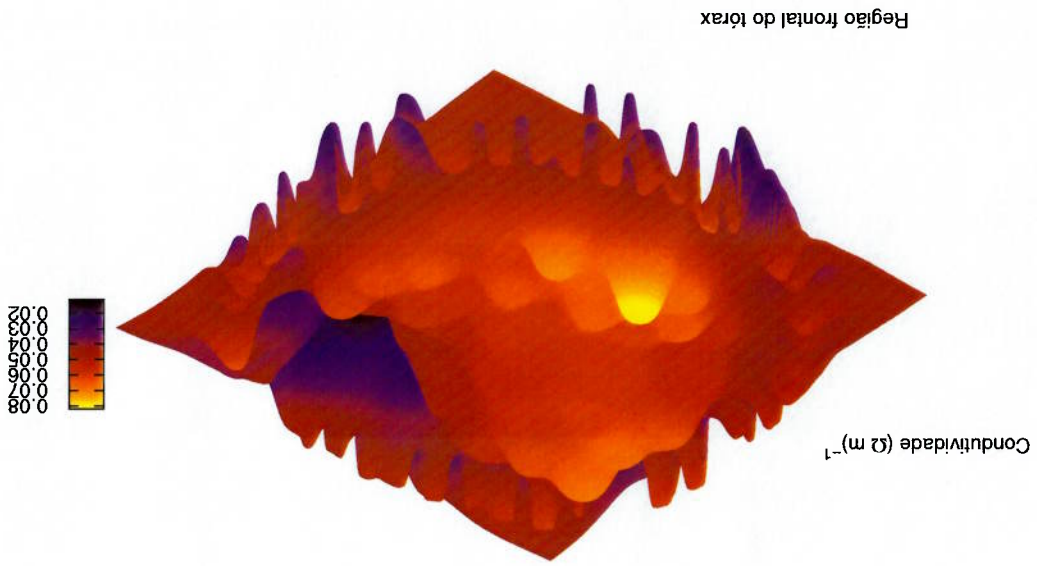
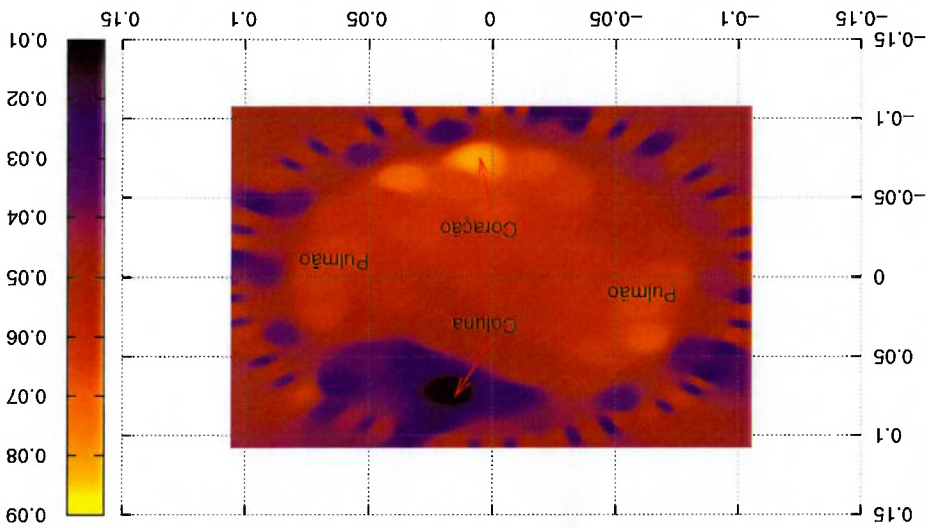
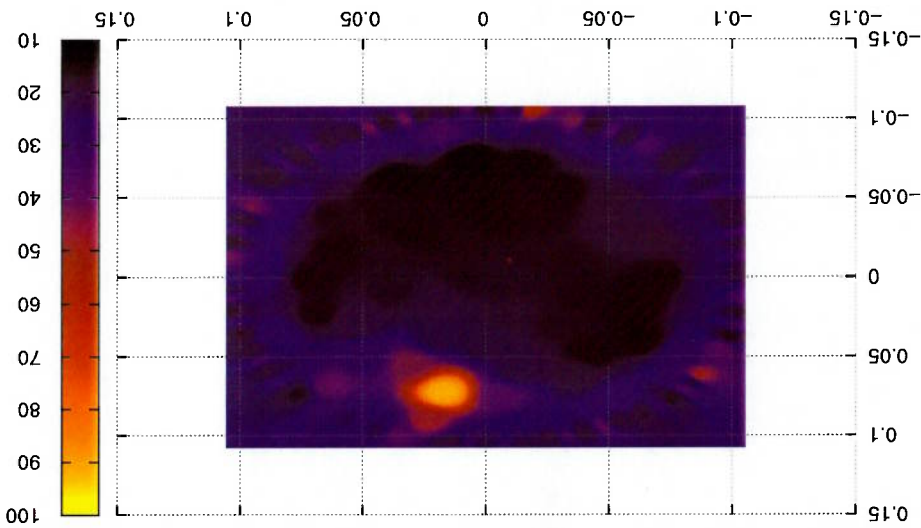


Figura 7.46: Condutividade elétrica - Iteração 25

Distribuição de resistividade elétrica (Ω m)



Região frontal do tórax

Resistividade (Ω m)

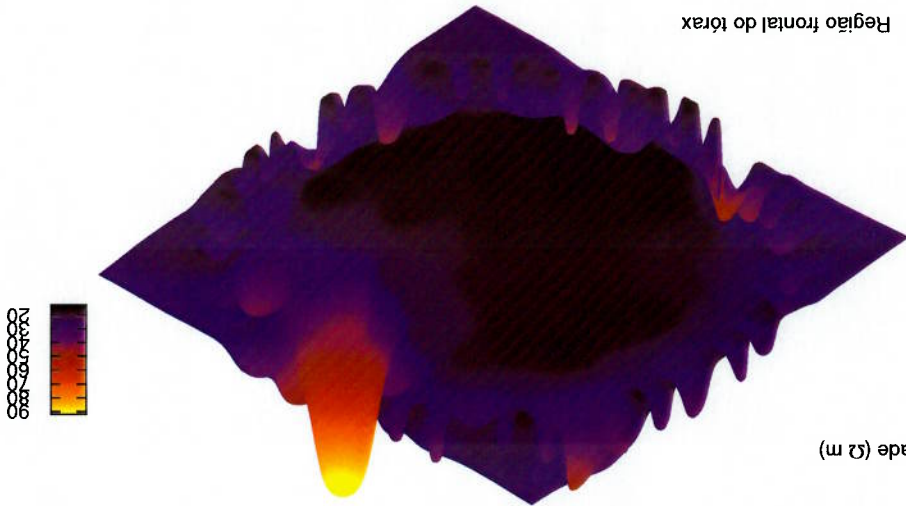


Figura 7.47: Resistividade elétrica - Iteração 25

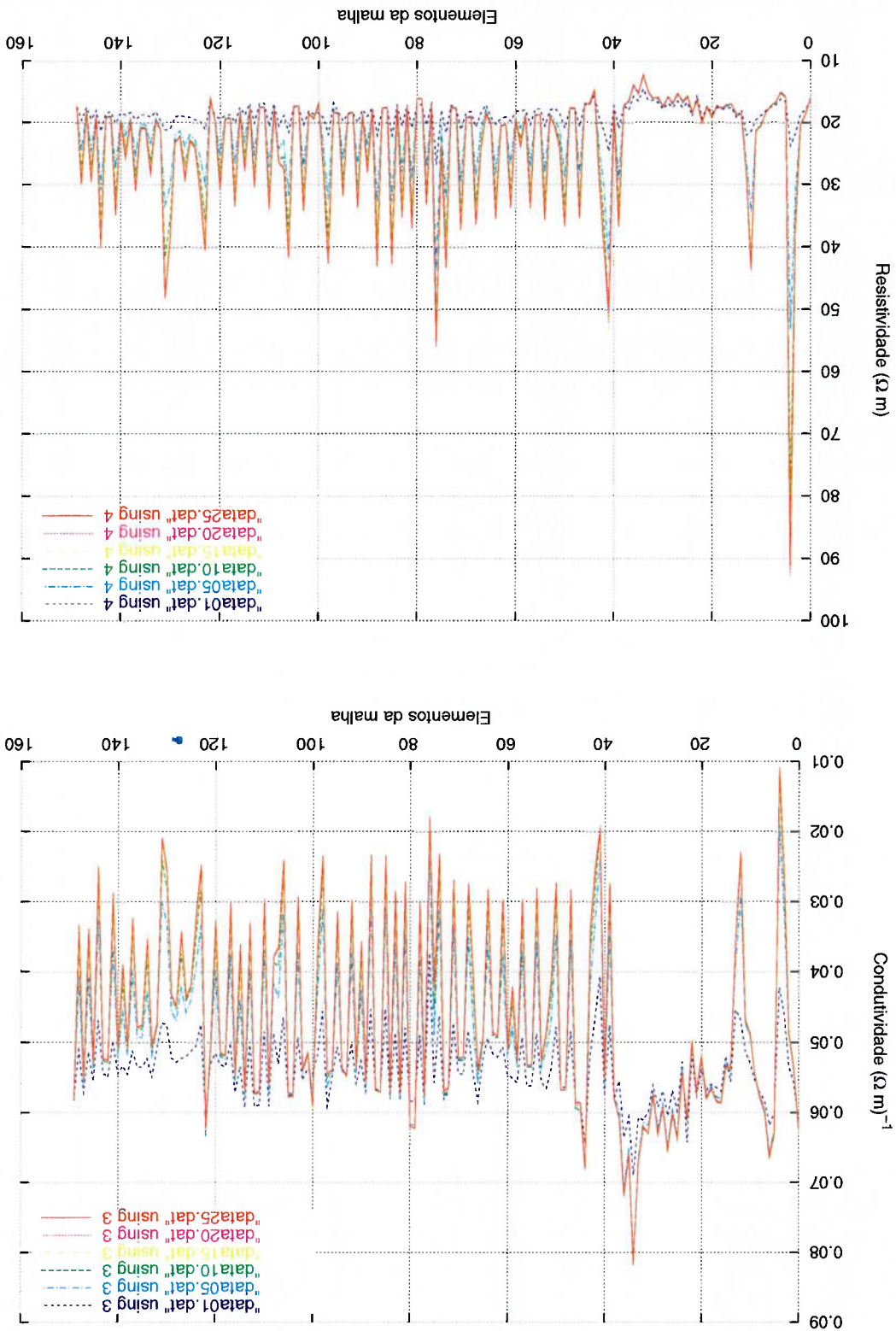


Figura 7.48: Valores de condutividade e resistividade elétrica dos elementos da malha para as iterações 1,5,10,15,20 e 25

Figura 7.49: Número de valores singulares anulados durante o processo iterativo em cada caso de estudo

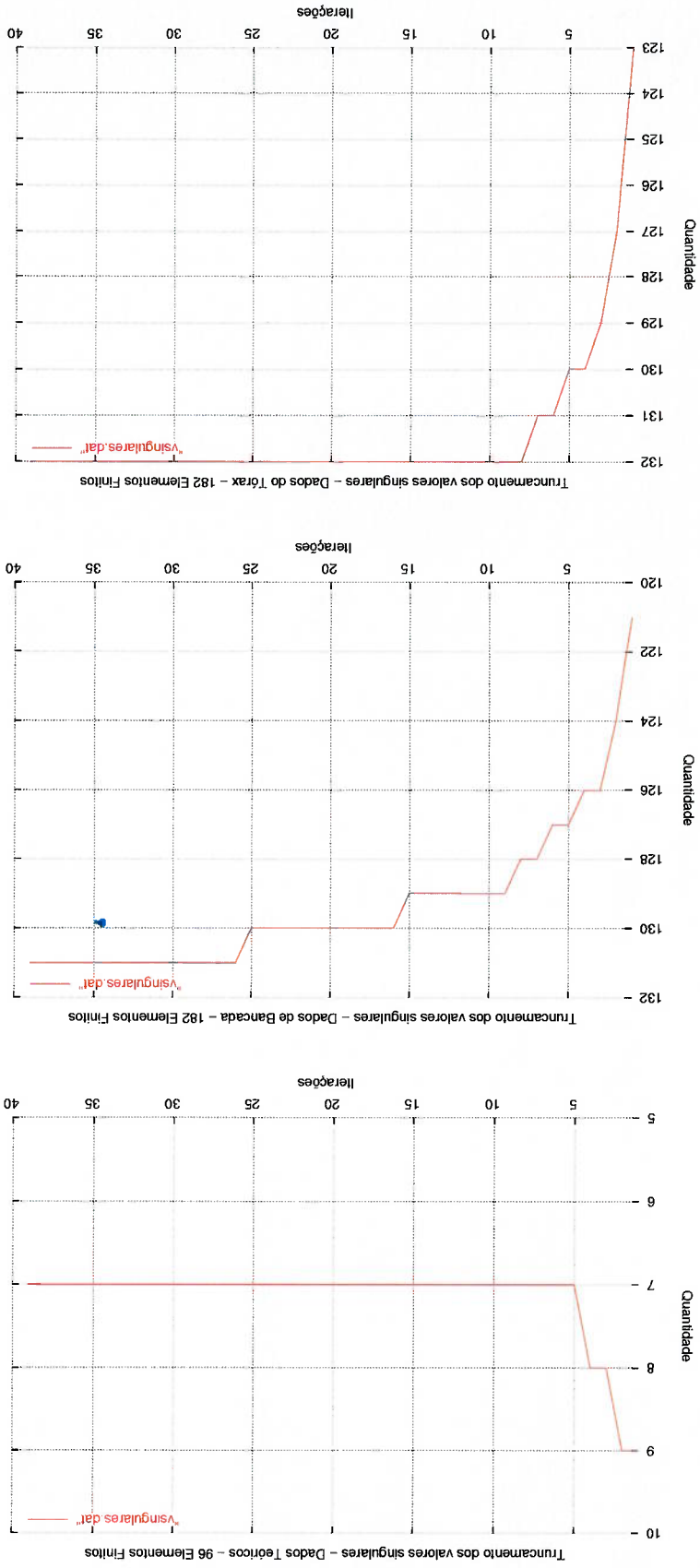


Figura 7.50: Convergência com dados de tecido humano (Regularizado)

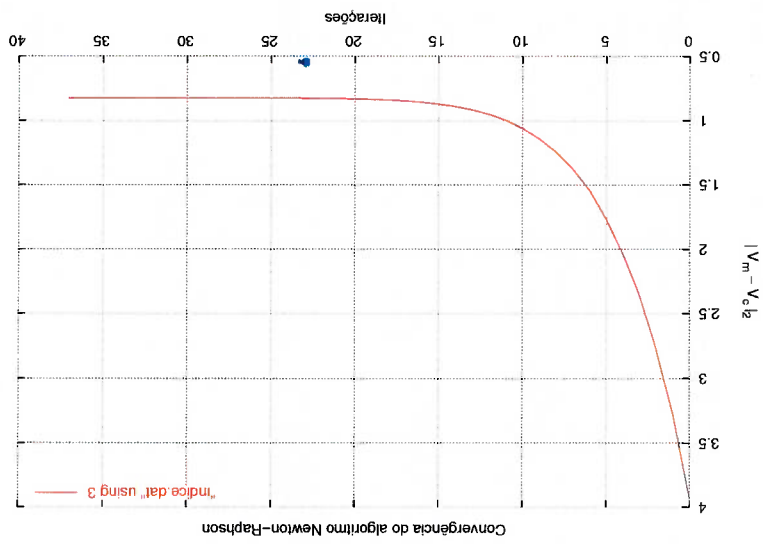
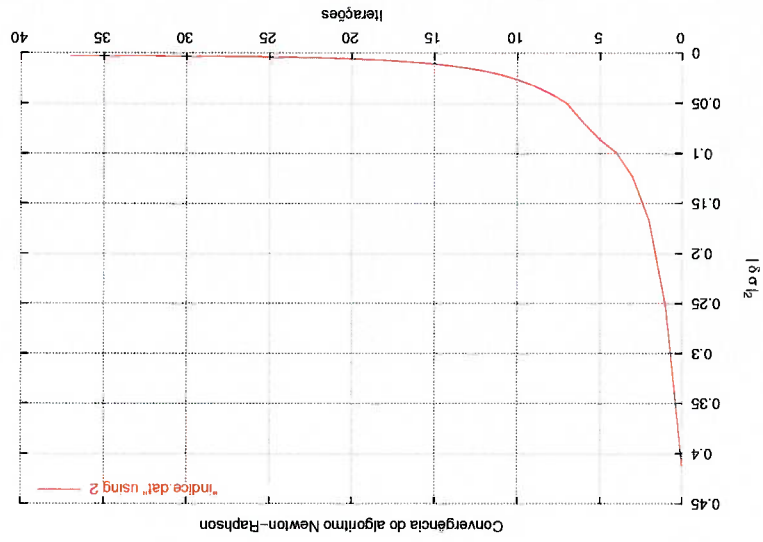
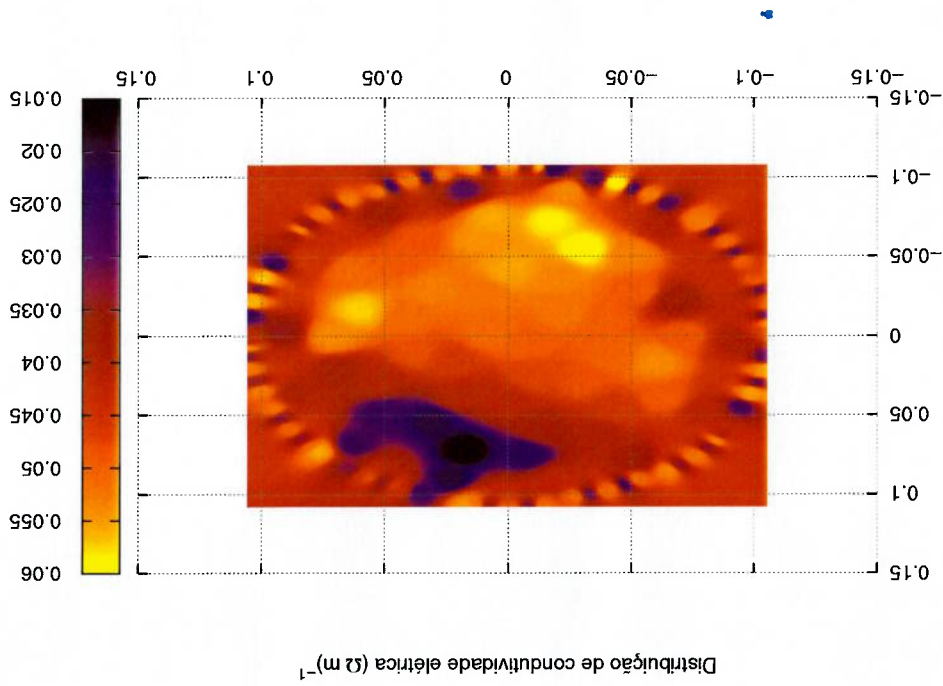
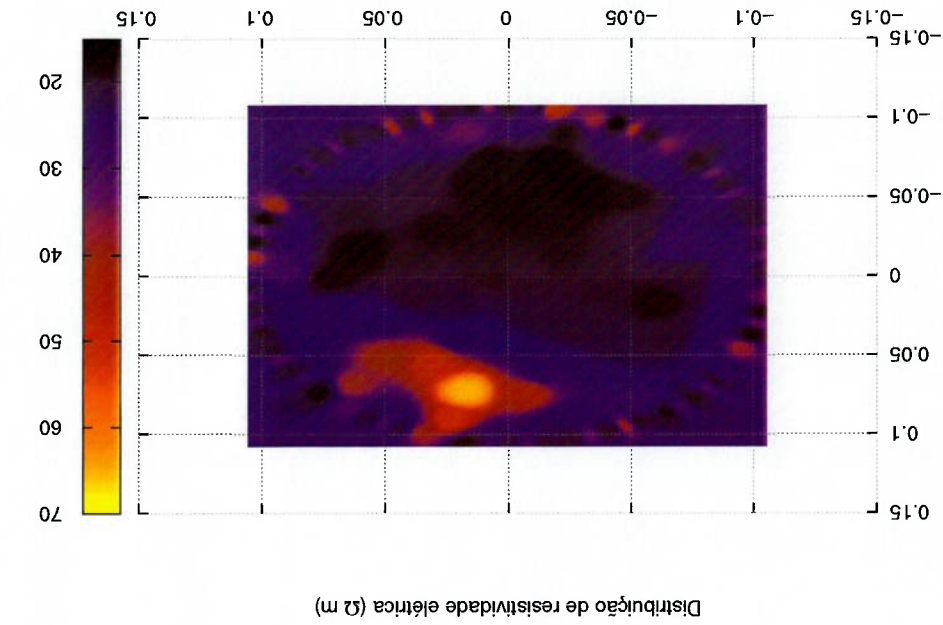


Figura 7.51: Condutividade e resistividade elétrica - Iteração 25 (Regularizado)



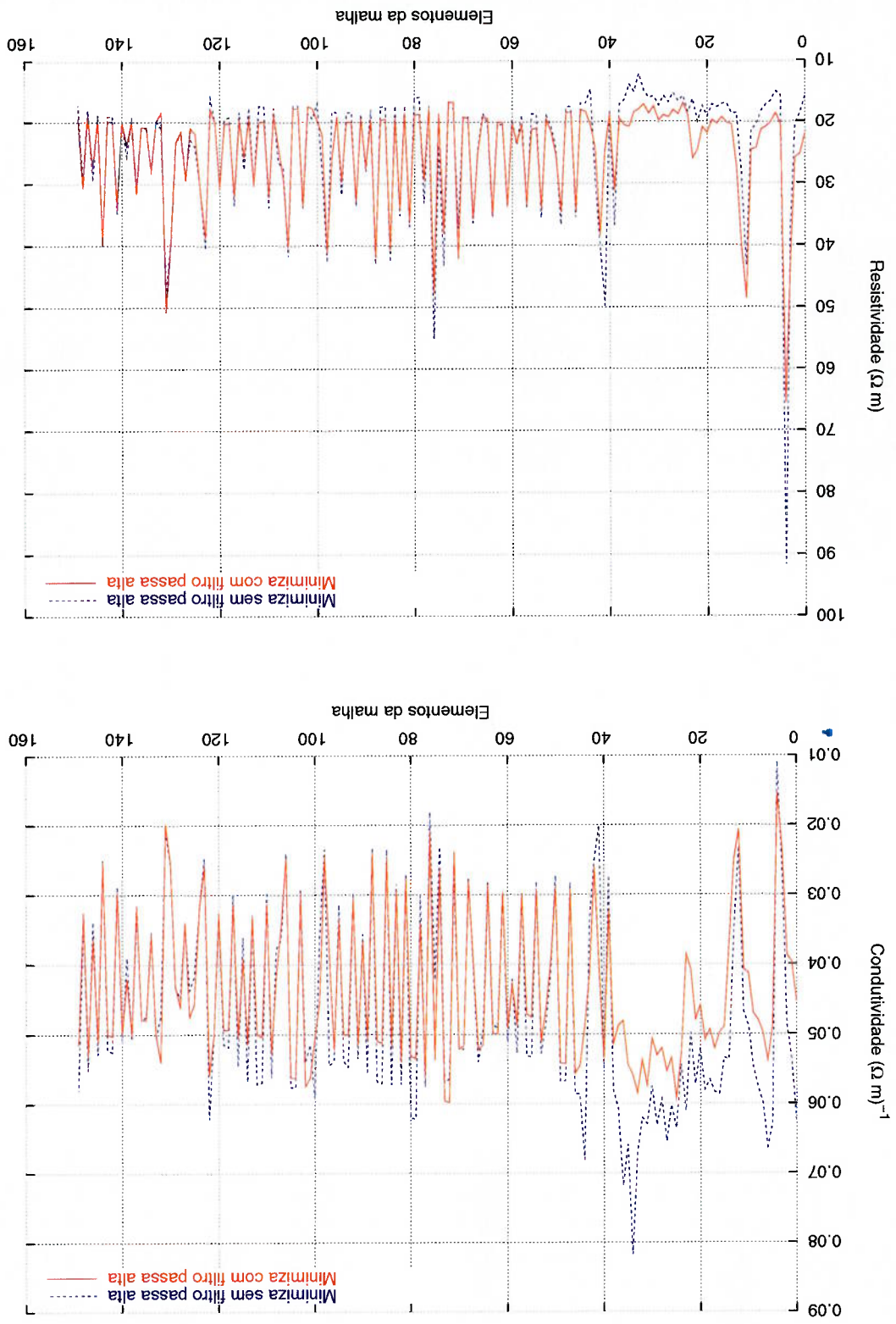


Figura 7.52: Valores de condutividade e resistividade elétrica dos elementos para os casos: apenas minimizado e minimizado com filtro passa alta - Iteração 25

Capítulo 8

Discussão

Neste trabalho foi implementado o método Newton-Raphson para resolver o sistema não linear associado à minimização de um funcional de erro quadrático, dado pela diferença entre as voltagens medidas e calculadas. Como técnica de regularização, foi incluído um filtro passa alta na formulação do funcional.

Com base em experiências realizadas nos testes com dados de simulação numérica, sem ruído, constatou-se que o método Newton-Raphson, na sua formulação clássica, apresenta um bom desempenho, convergindo sempre em poucas iterações. Abordar o problema apenas resolvendo o sistema não linear associado à diferença entre as voltagens medidas e calculadas, faz com que a solução oscile em torno da solução correta, conforme figura 7.1.

Com a finalidade de melhorar o desempenho do método em estudo, o problema foi formulado via minimização de um índice de erro quadrático das diferenças de voltagens, conforme equação 6.2. Desta forma, a convergência com dados numéricos, sem ruído, foi melhorada, sendo eliminados os sinais de oscilação citados acima.

Quando utilizados dados experimentais, resultou inviável implementar a formulação clássica de Newton-Raphson, sendo necessário resolver o problema de estimação de condutividades através da minimização do funcional Φ_1 , conforme equação 6.2.

Neste caso, o método apresentou um bom desempenho, apresentando imagens com elevados gradientes de condutividade conforme figura 7.46.

Com dados experimentais, provenientes do meio salino e do tórax, tornou-se obrigatório tratar o número de condigão desfavorável da matriz de sensibilidade através do truncamento de valores singulares.

Em relação às restrições impostas às variáveis, limite inferior e limite superior de condutividade, constatou-se que na formulação $\Phi 1$ e $\Phi 2$, as restrições não eram mais necessárias. Na formulação clássica (equação 6.1) sua implementação tornou-se obrigatória.

A ideia de regularizar o problema deve-se à necessidade de obtenção de imagens com gradiente de condutividade limitado. Devem ser tomados cuidados no ajuste dos parâmetros de regularização para não falsar os valores absolutos de condutividade. Como resultado da regularização obtêm-se imagens mais suaves e com maior resolução em condutividade, conforme figura 7.51.

Capítulo 9

Comentários Finais

Neste trabalho foram implementadas os principais algoritmos da TFE baseados no método de Newton-Raphson.

Os resultados tornam evidente a vantagem de minimizar um funcional para processar dados experimentais e tornam evidente a vantagem do emprego de uma regularização de Tikhonov que penaliza soluções que contêm elevadas variações de condutividade em elementos vizinhos da malha.

A solução obtida através da regularização pertence a um espaço de soluções mais provável do ponto de vista clínico e com melhor resolução espacial. Propõem-se como sugestões para futuros trabalhos:

- Resolução do problema em termos de resistividade ao invés de condutividade;
- Normalizar as incógnitas de modo que todas tenham valores próximos à unidade;
- Obter uma estimativa de condutividade inicial conforme implementado no algoritmo NOSEB (Cheney *et al.*, 1990b);
- Separar o problema de estimação de parâmetros dos eletrodos do problema de estimação da imagem;
- Utilizar algoritmos de solução de sistemas lineares apropriados para matrizes esparsas;
- Implementar o método de condensação estática para reduzir o tamanho da matriz de condutividade. Desta maneira, trabalha-se com matriz de

condutividade de dimensão 32×32 (número de eletrodos) e não com matriz de condutividade de dimensão 182×182 (número de nós), sem perder informações do modelo teórico.

- Melhorar a malha de elementos finitos utilizada para dados experimentais, em termos de qualidade da topologia e transição dos elementos; principalmente naqueles elementos próximos à fronteira, o que certamente terá influência na solução do sistema não linear, na precisão dos resultados e, consequentemente, na qualidade da imagem. Neste sentido sugere-se implementar a malha da figura 9.1

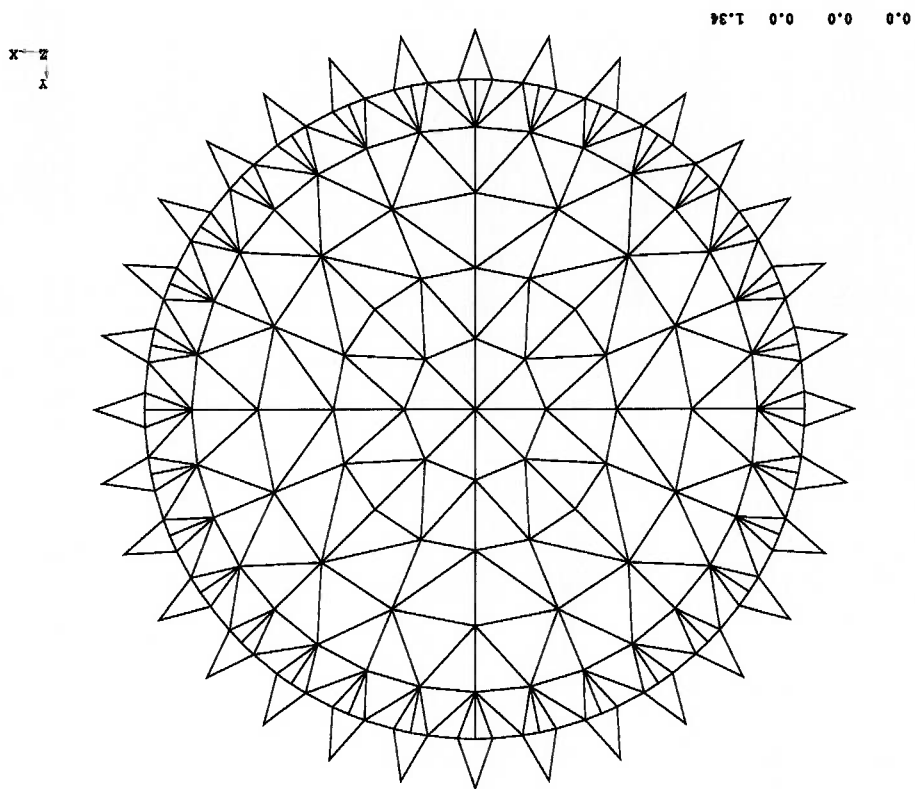


Figura 9.1: Malha proposta (272 elementos e 201 nós)

Referências Bibliográficas

- Allers, A. and F. Santosa (1991). Stability and resolution analysis of a linearised problem in electrical impedance tomography. *Technical Report no 90-13*.
- Amato, M. B. P. (2001). Projeto temático no. 01/05303-4. *FAPESP*.
- Barber, D. C. and B. H. Brown (1984). Applied potential tomography. *J. Phys. E. Sci. Instrum.* **17**, 723-733.
- Barber, D. C., B. H. Brown, N. D. Harris and A. J. Suggestt (1987). Applications of applied potential tomography (apt) in respiratory medicine. *Clin. Phys. Physiol. Meas.* **8**(Suppl. A), 155-165.
- Bates, R. H. T. and A. D. Seager (1985). Full wave computed tomography, part 4: Low frequency electric current ct. *Proc. IEEE A* **132**(7), 455-466.
- Bazarrá, Mokhtar S., Hanif D. Sherah and C. M. Shetty (1993). *Nonlinear Programming Theory and Algorithms*. 2 ed.. John Wiley and Sons, Inc.
- Berenstein, C. and E. C. Tarabusi (1991). Inversion formulas for the k-dimensional random transform in real hiperbolic space. *Duke Math. J.* **62**, 1-19.
- Berntsen, S., J. B. Andersen and E. Gross (1991). A general formulation of applied potential tomography. *Preprint*.
- Bertemes-Filho, P., B. H. Brown and A. J. Wilson (1999). A comparison of modified howland circuits as current generators with current mirror types circuits. *Physiol. Meas.* **21**, 1-6.
- Brown, B. H., D. C. Barber and A. D. Seagar (1985). Applied potential tomography: Clinical applications. *IEE Int. Conf. on Electric and Magnetic Field in Medicine and Biology IEE Conf. Publication* **257**, 74-78.

- Calderón (1980). On an inverse boundary value problem. *Seminar on Numerical Analysis and its Applications to Continuum Physics, Soc. Brasileira de Matemática (Rio de Janeiro)* pp. 65-73.
- Cheney, M., D. Isaacson and E. L. Isaacson (1990a). Exact solutions to a linearised inverse boundary value problem. *Inverse Prob.* **6**, 923-924.
- Cheney, M., D. Isaacson, J. C. Newell, S. Simske and J. Globe (1990b). Noser: An algorithm for solving the inverse conductivity problem. *Int. J. Imaging Systems and Technology* **2**, 66-75.
- Cheney, Margaret, David Isaacson and Jonathan C. Newell (1999). Electrical impedance tomography. *SIAM Review* **41**(1), 85-101.
- Cheng, K. S., D. Isaacson, J. C. Newell and D. G. Gisser (1989). Electrode models for electric current computed tomography. *IEEE Trans. Biomed. Eng.* **36**, 918-924.
- Connolly, T. J. and D. J. N. Wall (1988). On an inverse problem, with boundary measurements for the steady state diffusion equation. *Inverse Prob.* **4**, 995-1012.
- Dobson, D. (1992). Convergence of a reconstruction method for the inverse conductivity problem. *SIAM J. Appl. Math.* **52**(2), 442-458.
- Edic, P.M., D. Isaacson, G.J. Saulnier, H. Jain and J.C. Newell (1998). An iterative newton-raphson method to solve the inverse admittivity problem. *IEEE Trans. Biomed. Eng.* **45**(7), 899-908.
- Edic, P.M., G.J. Saulnier, J.C. Newell and D. Isaacson (1995). A real-time electrical impedance tomograph. *IEEE Trans. Biomed. Eng.* **42**(9), 849-859.
- Eggleston, M. R., R. J. Schwabe, D. Isaacson and L. F. Coffin (1989). The application of electric current computed tomography to defect imaging in metals. *Review of Progress in Quantitative Non-linear Differential Equations.*
- E. Somersalo, M. Cheney and D. Isaacson (1992). Existence and uniqueness for electrode models for electric current computed tomography. *SIAM J. Appl. Math.* **52**, 1023-1040.

- Fuks, L. F., M. Cheney, D. Isaacson, J. C. Newell and D. G. Gisser (1991). Detection and imaging of electric conductivity and permittivity at low frequency. *IEEE Trans. Biomed. Eng.* **38**, 1106-1110.
- Gisser, D. G., D. Isaacson and J. C. Newell (1987). Current topics in impedance imaging. *Clin. Phys. Physiol. Meas.* **8**(Suppl. A), 39-46.
- Globe, J. C. (1990). The three-dimensional inverse problem in electric current computed tomography. PhD thesis. Rensselaer Polytechnic Institute.
- Guardo, R., A. Adler and Yves Berthiaume (1996). Impedance imaging of lung ventilation: Do we need to account for chest expansion?. *IEEE Trans. Biomed. Eng.* **43**(4), 414-420.
- Guardo, R. and A. Adler (1996). Electrical impedance tomography: Regularized imaging and contrast detection. *IEEE Trans. Medical Imaging* **15**(2), 170-179.
- Guyton, Arthur C. (1992). *Tratado de Fisiologia Médica*. 8 ed. Editora Guanabara Koogan S.A.
- Hua, P. (1991). PhD thesis. University of Wisconsin.
- Hua, P., J. Woo, J. G. Webster and W. Tompkins (1993a). Finite element modeling of electrode-skin contact impedance in electrical impedance tomography. *IEEE Trans. Biomed. Eng.* **40**(4), 335-343.
- Hua, P., J. Woo, J. G. Webster and W. Tompkins (1993b). Using compound electrodes in electrical impedance tomography. *IEEE Trans. Biomed. Eng.* **40**(1), 29-34.
- Isaacson, D. (1986). Distinguishability of conductivities by electric current computed tomography. *IEEE Trans. Med. Imaging*. **MI-5**(2), 91-95.
- Isaacson, D. and E. Isaacson (1989). Comment's on Calderón paper's: On an inverse boundary value problem. *Math. Comput.* **52**, 553-559.
- Isaacson, D. and M. Cheney (1990). Currents problems on impedance imaging. *Inverse Problems in Partial Differential Equations*.

- Kohn, R. V. and A. McKeeney (1991). Numerical implementation of variational method for impedance imaging. *Preprint*.
- Logan, D. L. (1986). *A First Course in the Finite Element Method*. Boston, USA: PWS-KENT Publishing Company.
- Marguard, B. W. (1963). An algorithm for least-squares estimation of non-linear parameters. *SIAM J. Appl. Math.* **11**, 431-441.
- Marguard, B. W. (1983). An algorithm for least-squares estimation for non-linear parameters. *SIAM J. Appl. Math.* **18**, 254-257.
- Murai, T. and Y. Kagawa (1985). Electrical impedance computed tomography based on finite element model. *IEEE Trans. Biomed. Eng.* **32**(3), 177-184.
- Nakayama, K., W. Yagi and S. Yagi (1981). Fundamental study on electrical impedance plethysmography. In: *in proc. Vth Conf. Elect. Bio-Impedance*. pp. 99-102.
- Press, William H., Brian P. Flannery, Saul A. Teukolsky and William T. Vetterling (1989). *Numerical Recipes. The art of Scientific Computing (FORTRAN Version)*. Cambridge University Press.
- Rosell, J., J. Colominas, P. Rio, R. Pallas-Areny and J. G. Webster (1988). Skin impedance from 1 hz to 1 mhz. *IEEE Trans. Biomed. Eng.* **BME-35**, 649-651.
- Sadiku, Matthew N. O. (1992). *Numerical Techniques in Electromagnetics*. Boca Raton: CRC Press.
- Santosa, F. and M. Vogelius (1990). A back-projection algorithm for electrical impedance imaging. *SIAM J. Appl. Math.* **50**(1), 216-243.
- Seager, A. D., T. S. Yeo and R. H. T. Bates (1984). Full wave computed tomography, part 2: Resolution limits. *Proc. IEE A* **131**(8), 616-622.
- Simske, S. (1987). An adaptative current determination and a one-step reconstruction technique for a current tomography. Master's thesis. Rensselaer Polytechnic Institute.
- Staub, N. G. (1972). Pulmonary edema. *Physiol. Rev.* **54**, 678.

- Vauhkonen, M., V. Kolehmainen, P. A. Karjalainen and J. P. Kaipio (1997). Assessment of errors in static electrical impedance tomography with adjacent and trigonometric current patterns. *Physiol. Meas.* **18**, 289-303.
- Wexler, A., B. Fry and M. R. Nieman (1985). Impedance-computed tomography algorithm and system. *Appl. Opt* **24**, 3985-3992.
- Woo, E. J., P. Hua, J. G. Webster and W. Tompkins (1993). A robust image reconstruction algorithm and its parallel implementation in electrical impedance tomography. *IEEE Trans. Biomed. Imagng.* **12**(2), 137-146.
- Woo, E., P. Hua, J. Webster, W. Tompkins and R. Pallas-Areny (1992). Skin impedance measurements using simple and compound electrodes. *Med. Biol. Eng. Comput.* **30**, 97-102.
- Yorke, T. J. and J. G. Webster (1987). Comparison of impedance tomographic reconstruction algorithms. *Clin. Phys. Physiol. Meas.* **8**(Suppl. A), 55-62.
- Yorke, T. J., J. G. Webster and W. J. Tompkins (1987). Comparing reconstruction algorithm for electrical impedance tomography. *IEEE Trans. Biomed. Eng.* **34**(11), 843-852.

Apêndice A

Abordagem Clássica do Método Newton-Raphson

A formulação clássica do método Newton-Raphson na TIE, consiste em encontrar uma distribuição de condutividade σ^* que minimize a diferença entre as voltagens calculadas através do método de elementos finitos e as voltagens medidas na fronteira. Para tanto, define-se o vetor erro da seguinte forma,

$$(A.1) \quad \{e\} = \{V_c\} - \{V_m\}$$

onde $\{V_c\}$ e $\{V_m\}$ são as voltagens calculadas e medidas, respectivamente. A partir da formulação global do modelo de elementos finitos,

$$(A.2) \quad [Y] \times \{V_c\} = \{C\}$$

onde Y é a matriz de impedância de ordem $N \times N$, $\{C\}$ o vetor de correntes de ordem $N \times 1$, pode-se escrever as variáveis nodais (vetor de voltagem) como uma função não linear da distribuição de resistividades $\{\sigma\}$, de ordem $E \times 1$, sendo E o número de elementos do modelo discretizado, ou seja,

$$(A.3) \quad \{V_c(\sigma)\} = [Y(\sigma)]^{-1} \times \{C\}$$

Portanto, substituindo A.3 em A.1,

$$(A.4) \quad \{e\} = [T] \times [Y(\sigma)]^{-1} \times \{C\} - \{V_m\}$$

Utilizando Newton-Raphson para resolver este conjunto de funções relacionadas,

$$(A.8) \quad \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T Y_{-1}^{(d)} C^{(d)}(\rho) - V_{(d)}^m \\ \vdots \\ T Y_{-1}^{(z)} C^{(z)}(\rho) - V_{(z)}^m \\ T Y_{-1}^{(1)} C^{(1)}(\rho) - V_{(1)}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^{(d)}(\rho) \\ \vdots \\ f^{(z)}(\rho) \\ f^{(1)}(\rho) \end{bmatrix}$$

ou,

$$(A.7) \quad f_i(\rho) = [T] \times [Y_{-1}^i(\rho)] \times [C^i] - \{V_i^m\} = 0, \quad i = 1, \dots, P$$

de corrente, resultando no conjunto de funções (comparar com a equação 3.1). Sendo assim, pode-se expressar a equação $\{e\} = 0$ para cada modo de injeção eletrodos da fronteira.

É excitado, que por sua vez geram uma distribuição de voltagem $[V^m]^{L \times P}$ nos A matriz de correntes $[C]^{N \times P}$ representa os diferentes modos em que o modelo

$$(A.6) \quad [V]^{N \times P} = [Y(\rho)]_{-1}^{N \times N} \times [C]^{N \times P} \Leftrightarrow [V^c]^{L \times P}$$

do modelo, de modo que a transformação A.5 resulta em, de elementos finitos. Para tanto, aplicam-se P padrões de correntes na fronteira de elementos finitos independentes quanto elementos no modelo de contorno suficiente, de modo que o sistema de equações resultantes tenha no Para resolver o problema $\{e\} = 0$, precisa-se introduzir um número de condições elementos finitos, e L a quantidade de eletrodos.

onde $\{V\}^N$ são as voltagens calculadas no problema direto do modelo de N

$$(A.5) \quad \{V\}^N \Leftrightarrow [V^c]^{L \times P}$$

aos pontos de medição, que são os eletrodos do modelo real, serão consideradas apenas as voltagens calculadas nas posições correspondentes do modelo de elementos finitos na formulação direta (quantidade de nós). Porém, fronteira, enquanto a dimensão de $\{V^c\}$ é igual ao número de graus de liberdade sendo T uma matriz de transformação para fazer o sistema de equações dimension-almente compatível. Isto é, a dimensão de $\{V^m\}$ é igual ao número de eletrodos na

expande-se cada função em séries de Taylor, ou seja

$$(A.9) \quad f^{(i)}(\sigma + \delta\sigma) = f^{(i)}(\sigma) + \sum_N^{j=1} \frac{\partial f^{(i)}(\sigma)}{\partial \sigma_j} \delta\sigma_j + O(\delta\sigma^2)$$

Desconsiderando o termo $\delta\sigma^2$ e os de ordem maior, e fazendo as $f^{(i)}(\sigma + \delta\sigma) = 0$, se obtém um sistema de equações lineares em $\delta\sigma$, que direciona cada função para a solução zero simultaneamente,

$$(A.10) \quad \sum_N^{j=1} \mathbf{J}^{ij} \delta\sigma_j = -f^{(i)}(\sigma),$$

onde,

$$(A.11) \quad \mathbf{J}^{ij} \equiv \frac{\partial f^{(i)}(\sigma)}{\partial \sigma_j}$$

A equação (A.10) define um processo iterativo para calcular σ^* , onde para cada iteração k , e com a estimativa atual σ^k , se resolve a equação (A.10) e se atualiza nossa estimativa de σ^* para,

$$(A.12) \quad \sigma_{k+1}^i = \sigma_k^i + \delta\sigma^i \quad i = 1, \dots, E$$

sendo E o número de elementos da malha de elementos finitos.

Quando o passo da iteração produz variações na estimativa de σ^* menores que a tolerância predeterminada, dizemos que o procedimento convergiu. O termo \mathbf{J}^{ij} é conhecido como matriz Jacobiana.

Apêndice B

Regularização

Com a finalidade de regularizar o problema de estimação de imagem utilizada no artigo *Electrical Impedance Tomography: Regularized Imaging and Contrast Detection* (Guardo and Adler, 1996), que consiste em incluir um filtro passa alta no problema de minimização.

Paratanto define-se o vetor de condutividades σ^T como

$$(B.1) \quad \{\sigma^T\}_{E \times 1} = [L]_{E \times E} \times \{\sigma\}_{E \times 1}$$

onde L é uma matriz passa baixa, σ a condutividade estimada, e E o número de elementos finitos; de modo que cada

$$(B.2) \quad \sigma_i^T = \frac{\beta + 3}{\beta \sigma_i + \sigma_a + \sigma_b + \sigma_c}$$

sendo $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$ as condutividades dos elementos a, b, c adjacentes ao elemento i , e β um parâmetro de regularização.

Da mesma maneira pode-se definir o vetor σ^H ,

$$(B.3) \quad \{\sigma^H\}_{E \times 1} = [H]_{E \times E} \times \{\sigma\}_{E \times 1}$$

onde $H = (I - L)$ é uma matriz passa alta e I a matriz identidade.

Finalmente, formula-se o termo de regularização,

$$(B.4) \quad R = \alpha (\sigma^T H^T H \sigma)$$

sendo α outro parâmetro de regularização.