

WERNER MANGOLD

COMPARAÇÃO DE EXCITAÇÃO IMPULSIVA E
EXCITAÇÃO ALEATÓRIA NO MÉTODO DE IBRAHIM
(ITD - "IBRAHIM TIME DOMAIN")

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para obtenção do Título
de Mestre em Engenharia .

São Paulo
2003

WERNER MANGOLD

**COMPARAÇÃO DE EXCITAÇÃO IMPULSIVA E
EXCITAÇÃO ALEATÓRIA NO MÉTODO DE IBRAHIM
(ITD - "IBRAHIM TIME DOMAIN")**

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia .

Área de concentração :
Engenharia Mecânica

Orientador:

Prof. Dr. Raul González Lima

São Paulo

2003

COM AMOR
À MINHA FAMÍLIA

AGRADECIMENTOS

- Ao meu orientador, professor Dr. Raul González Lima pela sua acolhida, paciência e colaboração.
- À Faculdade de Engenharia Industrial (FEI) que me incentivou à conclusão deste trabalho.
- Às dependências, professores e funcionários do Departamento de Engenharia Mecânica da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo que facilitaram a realização deste trabalho.
- Ao professor Dr. Walter Ponge Ferreira, pela colaboração nos ensaios efetuados no IPT.
- Ao Instituto de Pesquisas Tecnológicas (IPT) pelo uso de suas dependências.
- A todos aqueles que estiveram ao meu lado e me ajudaram para a boa execução deste trabalho.

Sumário

	página
Lista de Figuras	vi
Lista de Tabelas	viii
Lista de Símbolos e Abreviaturas	x
Resumo	xi
Abstract	xii
1 Introdução	1
2 Objetivo	4
3 Revisão da literatura	
3.1 Técnicas de verificação estrutural	5
3.2 Análise modal	5
3.3 Domínio da frequência	6
3.4 Domínio do tempo	9
3.5 Aplicação do Método do Ibrahim (ITD)	9
3.6 Modificação do ITD	10
3.7 Excitações	10
3.8 Decremento aleatório (Randomdec)	11
3.9 Comparação entre excitação impulsiva e aleatória	13
3.10 Combinação do Randomdec e do ITD	13
4 O Método ITD associado à técnica Randomdec	
4.1 O Método do Ibrahim (ITD - Ibrahim Time Domain)	
4.1.1 Introdução	15
4.1.2 O modelo no domínio do tempo	15
4.1.3 Os parâmetros modais da matriz A	18

4.1.4	Medições das respostas	19
4.1.5	Modificação do Método ITD	22
4.1.6	Pontos de medição	29
4.1.7	Medições com ruído	30
4.2	A técnica do Decremento Aleatório – Randomdec	31

5 Metodologia

5.1 Sistemas analisados

5.1.1	Sistema com parâmetros concentrados e dois graus de liberdade (massa - mola)	34
5.1.2	Sistema distribuído (Viga bi-apoiada)	36

5.2 Tipos de excitação

5.2.1	Excitação impulsiva	38
5.2.2	Excitação aleatória	39

5.3 Análise Modal – Método do Ibrahim (ITD)

41

5.4 Processamento de sinais

5.4.1	Filtro Passa-baixa	42
5.4.2	Aplicação do Randomdec	42

5.5 Aparato Experimental

5.5.1	Introdução	43
5.5.2	Análise modal via Método dos Elementos Finitos	43
5.5.3	Posição e tipo de sensores	50
5.5.4	Geração da excitação impulsiva	50
5.5.5	Excitação aleatória	50
5.5.6	Taxa de amostragem	50
5.5.7	Tempo de amostragem	52
5.5.8	Dispositivos de condicionamento, conversão A/D e armazenamento de sinais	52

6	Resultados das simulações numéricas	
6.1	Sistema concentrado . Massa-mola	54
6.2	Sistema distribuído. Viga bi-apoiada	
6.2.1	Excitação impulsiva	
6.2.1.1	Deslocamentos	59
6.2.1.2	Aplicação do ITD	61
6.2.1.3	Tabela dos parâmetros modais	64
6.2.1.4	Modos identificados	64
6.2.2	Excitação aleatória	
6.2.2.1	Deslocamentos	67
6.2.2.2	Aplicação da técnica Randomdec	70
6.2.2.3	Aplicação do ITD	73
6.2.2.4	Tabela com as estimações dos parâmetros modais	73
6.2.2.5	Modos identificados	74
7	Resultados experimentais	
7.1	Excitação impulsiva	
7.1.1	Acelerações	77
7.1.2	Aplicação do ITD	79
7.1.3	Resultados estimados pelo programa STAR	82
7.1.4	Tabela dos parâmetros modais	84
7.1.5	Modos identificados pelo ITD	85
7.2	Excitação aleatória	
7.2.1	Excitação “aleatória” usando carga móvel	
7.2.1.1	Acelerações	87
7.2.1.2	Aplicação da técnica Randomdec	90
7.2.1.3	Aplicação do ITD	92
7.2.1.4	Tabela dos parâmetros modais	93
7.2.2	Excitação aleatória usando um atuador eletromagnético e ruído branco	
7.2.2.1	Acelerações	94

7.2.2.2	Aplicação da técnica Randomdec	97
7.2.2.3	Aplicação do ITD	99
7.2.2.4	Tabela dos parâmetros modais	100
8	Análise dos resultados	
8.1	Análise dos resultados da simulação numérica	
8.1.1	Gráficos comparativos da simulação numérica	101
8.1.2	Tabela comparativa dos resultados da simulação numérica	104
8.2	Análise dos resultados experimentais	
8.2.1	Gráficos comparativos	105
8.2.2	Tabela comparativa dos resultados experimentais	108
8.2.3	MAC entre os modos da excitação impulsiva e aleatória	109
9	Comentários finais	110
	Referências Bibliográficas	111
A	Algoritmos anexos	
A.1	Sistema concentrado (mola-massa)	
A.1.1	<i>Molamas1</i> . Aplicação do ITD apenas para deslocamentos	I
A.1.2	<i>Molamas2</i> . Aplicação do ITD para deslocamentos e velocidades	II
A.2	Sistema distribuído (viga bi-apoiada)	
A.2.1	<i>Vigbiap</i> . Cálculo das matrizes do sistema dinâmico da viga	V
A.2.2	Excitação impulsiva	
A.2.2.1	<i>Geraimp</i> . Geração da resposta em deslocamento para uma excitação impulsiva	X

A.2.2.2	<i>Filtimp</i> . Filtro para a resposta da excitação impulsiva	XI
A.2.2.3	<i>Rlivreim</i> . Gravação da resposta livre para a aplicação do ITD ...	XII
A.2.2.4	<i>Itl1i</i> . Aplicação do ITD apenas para deslocamentos	XIV
A.2.2.5	<i>Itl2i</i> . Aplicação do ITD para deslocamentos e velocidades	XVI
A.2.3 Excitação aleatória		
A.2.3.1	<i>Gerarand</i> . Geração da resposta em deslocamento para uma excitação ambiente	XVIII
A.2.3.2	<i>Filtran</i> . Filtro para a resposta da excitação ambiente	XVIII
A.2.3.3	<i>Rddmax</i> . Cálculo dos picos para o nó de referência	XX
A.2.3.4	<i>Rddtrigg</i> . Escolha dos trechos e estimação da resposta livre	XXI
A.2.3.5	<i>Itl1r</i> . Aplicação do ITD apenas para deslocamentos	XXIV
A.2.3.6	<i>Itl2r</i> . Aplicação do ITD para deslocamentos e velocidades	XXVI

Lista de figuras	página
Figura 1. Construção de assinatura Randomdec	33
Figura 2. Sistema massa-mola para simulação numérica	35
Figura 3. Discretização de viga bi-apoiada para simulação numérica	36
Figura 4. Diagrama de blocos para determinação das matrizes do sistema dinâmico da viga bi-apoiada	37
Figura 5. Diagrama de blocos para geração do deslocamento para excitação impulsiva	38
Figura 6. Gráfico da excitação impulsiva	38
Figura 7. Diagrama de blocos para a geração do deslocamento para excitação aleatória	39
Figura 8. Gráfico da excitação aleatória	40
Figura 9. Histograma da excitação aleatória	40
Figura 10. Diagrama de blocos do Método ITD	41
Figura 11. Diagrama de blocos da técnica Randomdec	42
Figura 12. Vista geral da viga de concreto armado	44
Figura 13. Vista lateral da viga com os acelerômetros colados	44
Figura 14. Vista parcial da viga com detalhes da armação	45
Figura 15. Dispositivo de fixação da viga de concreto	45
Figura 16. Detalhe do dispositivo de fixação da viga	45
Figura 17. Perspectiva da discretização da viga de concreto armado	46
Figura 18. Discretização da viga vista em planta	46
Figura 19. Discretização da viga em vista lateral	47
Figura 20. Primeiro modo de vibrar da flexão vertical	47
Figura 21. Segundo modo de vibrar da flexão vertical	48
Figura 22. Terceiro modo de vibrar da flexão vertical	48
Figura 23. Primeiro modo de torção	49
Figura 24. Quarto modo de vibrar da flexão vertical	49
Figura 25. Detalhe da localização dos acelerômetros	51

Figura 26. Aplicação da excitação impulsiva	51
Figura 27. Carga móvel sobre a viga	51
Figura 28. Detalhe da roda da carga móvel sobre a viga	51
Figura 29. Vista do excitador aleatório de ruído branco	51
Figuras 30 a 33. Dispositivos de condicionamento e armazenamento de dados.	53
Figuras 34 e 35. Deslocamentos das massas M1 e M2 para o caso 1	54
Figuras 36 e 37. Deslocamentos das massas M1 e M2 para o caso 2	55
Figuras 38 e 39. Deslocamentos das massas M1 e M2 para o caso 3	56
Figuras 40 a 43. Deslocamentos dos nós 2 , 3 , 4 e 5 para a excitação impulsiva do sistema distribuído	59
Figuras 44 a 47. Deslocamentos dos nós 2 , 3 , 4 e 5 para a aplicação do ITD ...	62
Figuras 48 a 51. Modos identificados pelo ITD para a excitação impulsiva	65
Figuras 52 a 55. Deslocamentos dos nós 2 , 3 , 4 e 5 para a excitação aleatória do sistema distribuído	67
Figura 56. Deslocamentos do nó 5 com indicação de trechos para aplicação do Randomdec	70
Figuras 57 a 60. Estimativas de respostas livres dos nós 2 , 3 , 4 e 5 para a excitação aleatória do sistema distribuído	71
Figuras 61 a 64. Modos identificados pelo ITD para a excitação aleatória	74
Figuras 65 a 68. Acelerações da excitação impulsiva experimental ..	77
Figuras 69 a 72. Acelerações filtradas da excitação impulsiva experimental para aplicação do ITD	80
Figuras 73 a 77. Modos identificados pelo programa STAR na viga de concreto armado	82
Figuras 78 a 82. Modos identificados pelo ITD para a viga de concreto armado .	85
Figuras 83 a 86. Acelerações da excitação de carga móvel experimental	88
Figuras 87 a 90. Acelerações filtradas da excitação de carga móvel experimental para aplicação do ITD	90
Figuras 91 a 94. Acelerações da excitação tipo ruído branco experimental	94

Figuras 95 a 98. Acelerações filtradas da excitação tipo ruído branco experimental para aplicação do ITD	97
Figuras 99 a 102. Gráficos comparativos dos resultados das simulações numéricas	101
Figuras 103 a 106. Gráficos comparativos dos resultados experimentais	105

Lista de tabelas	página
Tabela 1. Estimativas das frequências naturais de um sistema mola-massa pela aplicação do ITD	58
Tabela 2. Estimativas das frequências naturais da simulação numérica de uma viga bi-apoiada pela aplicação do ITD a uma resposta à excitação impulsiva	64
Tabela 3. Estimativas das frequências naturais da simulação numérica de uma viga bi-apoiada pela aplicação do ITD a uma resposta à excitação aleatória	73
Tabela 4. Estimativas das frequências naturais do experimento pela aplicação do ITD a uma resposta à excitação impulsiva experimental	84
Tabela 5. Estimativas das frequências naturais do experimento pela aplicação do ITD a uma resposta à excitação de carga móvel experimental ...	93
Tabela 6. Estimativas das frequências naturais do experimento pela aplicação do ITD a uma resposta à excitação ruído branco experimental	100
Tabela 7. Comparação das estimativas dos parâmetros modais obtidos usando a excitação impulsiva e aleatória na simulação numérica	104
Tabela 8. Comparação das estimativas dos parâmetros modais obtidos usando a excitação impulsiva e aleatória dos resultados experimentais	108

SÍMBOLOS E ABREVIATURAS

M matriz de massa

C matriz de amortecimento

K matriz de rigidez

y deslocamento

\dot{y} velocidade

\ddot{y} aceleração

f força de excitação

x, \dot{x} deslocamento, velocidade e aceleração na forma de variáveis de estado

A matriz característica do sistema

B matriz excitação

λ autovalores

ψ autovetores

ω_d frequência natural amortecida

ω_n frequência natural não amortecida

ζ fator de amortecimento

Randomdec técnica do decremento aleatório (**Random decrement**)

ITD método do Ibrahim (**Ibrahim Time Domain**)

MAC critério de verificação para a análise modal (**Modal Assurance Criterion**)

Resumo

Este trabalho compara dois tipos de excitação, a excitação impulsiva e a excitação aleatória na realização de uma análise modal de uma estrutura em concreto armado. Utiliza-se o Método do Ibrahim (ITD), que é um método de análise modal no domínio do tempo e que prescinde do sinal de excitação. Este método combinado à Técnica do Decremento Aleatório (Randomdec) permite a análise modal da estrutura sem a necessidade de conhecer o sinal de excitação aplicada à estrutura e sem interromper o tráfego de veículos sobre a ponte. Na busca de condições para aplicar o Método do Ibrahim foram realizadas simulações numéricas e uma análise experimental de uma viga de concreto armado. A simulação numérica de um sistema mola-massa foi usada para verificar o desempenho do método quando as frequências naturais são próximas e os fatores de amortecimento são elevados. A simulação numérica de uma viga bi-apoiada serviu para calibrar a aparelhagem, para indicar as posições dos acelerômetros na viga de concreto armado e projetar o ensaio quanto à taxa de amostragem, tempo de amostragem e número de repetições do ensaio. Os dados para a análise modal experimental foram obtidos através da aquisição das respostas simultâneas de quatro acelerômetros colados na viga de concreto armado. Foram aplicadas quatro séries de excitação impulsiva provocada por um martelo, oito passagens de uma carga móvel sobre a viga ou seis aplicações da excitação aleatória tipo ruído branco. Essas respostas em aceleração foram armazenadas e depois processadas por algoritmos elaborados em Matlab para a estimação dos parâmetros modais da estrutura. Os resultados mostraram que a excitação aleatória tipo ruído branco fornece uma boa estimação dos parâmetros modais, indicando um bom desempenho do Método do Ibrahim e da Técnica do Decremento Aleatório de uma viga de concreto armado.

Abstract

This work compares an impact excitation and a random excitation used on experimental modal analysis of a reinforced concrete beam. The Ibrahim Time Domain Method (ITD) is used, which is a method that does not require the knowledge of the excitation signal. The ITD combined to the Random Decrement Method (Randomdec) allows the use of ambient excitation and does not require the interruption of the traffic on the civil structure, for instance, a bridge. Looking for conditions to apply the ITD a numerical simulation, and an experimental modal analysis of a reinforced concrete beam were performed. The performance of the method to handle structures with close natural frequencies and high damping factors is addressed through a two masses two springs model. The numerical simulation of the hinged-hinged beam was used to determine sensor position and to define sampling rate, total acquisition interval, and number of repetitions of the experiment. The impact excitation was repeated four times, a moving load was applied eight times, and a white noise random sequence was applied six times. Acceleration signals were recorded and processed through Randomdec and ITD routines written for Matlab. Results of the experimental modal analysis have shown that the random excitation gives satisfactory results, comparable to the results obtained through impact excitation.

1 Introdução

A construção civil comparada com as outras atividades humanas é uma arte jovem e tem o seu início quando os homens e mulheres descobriram a agricultura e os trabalhos manuais, tornando-se então sedentários. As tendas primitivas foram então, sendo substituídas por moradias mais sólidas. Numerosas cabanas foram construídas em áreas férteis formando as vilas e entre as vilas foram construídas redes de caminhos e alguns desses caminhos tinham que cruzar rios ou ravinas necessitando a construção de pontes, inicialmente feitas de troncos de árvores ou suspensas por cordas de fibras vegetais.

No passado as obras civis foram construídas usando o método da tentativa e erro, ou seja, cada construtor procurava ousar um pouco mais que o predecessor até que, limitado pela ruína, ele ficava conhecendo o limite desse sistema estrutural.

Hoje em dia, mesmo com o conhecimento teórico dos modelos matemáticos das estruturas, existem algumas hipóteses simplificadoras nesses modelos e incertezas na constituição e comportamento dos materiais de construção, bem como nas cargas aplicadas. Portanto adotamos nos cálculos estruturais coeficientes de majoração de cargas e coeficientes de minoração da resistência dos materiais.

As pontes são componentes críticos no subsistema de transportes. A ruína de uma ponte produz impacto direto na produtividade e crescimento econômico. Os colapsos podem ser devidos a falhas no projeto, nos materiais, na construção, no uso com cargas excessivas e na falta de manutenção dos elementos estruturais.

Para verificar as condições estruturais de uma ponte além da inspeção visual temos os testes de cargas estáticas. Esses testes necessitam de cargas elevadas normalmente aplicadas por veículos carregados, produzindo na maioria das vezes resultados apenas no plano vertical da estrutura, não permitindo o estudo completo da estrutura.

Para a verificação da resistência dos materiais são extraídos testemunhos e esses ensaiados em laboratório. Esses testes são chamados de destrutivos pois retiram parte da estrutura.

As características estruturais dinâmicas de uma ponte são descritas pelas propriedades modais representadas pelas frequências naturais, coeficientes de amortecimento e modos de vibrar. Se houver qualquer alteração na estrutura haverá modificações nos parâmetros modais da estrutura. Por esse motivo foram largamente usados os testes não destrutivos que empregavam a análise modal da estrutura para a identificação e monitoramento das condições de uma ponte.

Os métodos modais inicialmente empregavam excitações conhecidas, como a produzida por um impacto, ou por um vibrador, ou então com o deslocamento inicial imposto num ponto.

O tamanho das estruturas das pontes é uma restrição significativa para os métodos de aplicação de excitação. A excitação tipo impacto tem uma densidade espectral aproximadamente uniforme sobre a faixa das frequências de interesse, tornando-o, teoricamente, um método ideal para excitar todos os modos do sistema, entretanto, um impacto transmite pequena quantidade de energia ao sistema em teste, sendo portanto recomendável para sistemas pequenos levemente amortecidos. Um vibrador que aplique uma carga num certo intervalo de frequência pode produzir excitação sobre o campo das frequências naturais e podem transmitir significativamente mais energia ao sistema.

Para um sistema de monitoração contínuo de uma ponte o método de vibração aleatória, provocado pelos veículos que transitam sobre a ponte, mostrou ser um método prático e fácil de se usar.

Para a determinação dos parâmetros modais da estrutura as técnicas no domínio da frequência são as mais usadas. Embora a análise no domínio da frequência seja um método prático para identificar as frequências naturais de um sistema, a identificação dos fatores de amortecimento e modos de vibrar não o são, especialmente para sistemas com várias frequências próximas e com elevados fatores de amortecimento.

Para evitar esse problema que ocorre em estruturas de pontes com elevado fator de amortecimento, aplicam-se as técnicas no domínio do tempo, que é um processo simples porque as respostas no domínio do tempo são usadas diretamente sem fazer uso de qualquer transformação do tempo para a frequência.

Uma dessas técnicas é o Método do Ibrahim (ITD - Ibrahim Time Domain) que estima os parâmetros modais da estrutura estudando a resposta livre do sistema . Essa técnica pode ser combinada com a técnica do decaimento aleatório (Randomdec) que é uma técnica para obter a resposta da vibração livre da estrutura a partir da resposta devido à excitação aleatória. É na combinação dessas duas técnicas a Randomdec e a ITD que se desenvolve o presente trabalho.

2 Objetivo

O objetivo deste trabalho é comparar o desempenho do Método ITD na identificação de propriedades modais de estruturas com dois tipos de excitação, excitação impulsiva e excitação aleatória, uma vez que a segunda técnica pode ser empregada para monitorar o estado da estrutura em uso normal.

3 Revisão da literatura

3.1 Técnicas de verificação estrutural

Para verificação estrutural podemos usar a técnica da inspeção visual, o teste com carga estática, a extração de testemunho para ensaio de material, e a análise modal. A qualidade da técnica de inspeção visual depende da experiência do examinador e da facilidade de observação dos elementos críticos da estrutura que às vezes podem estar ocultos ou inacessíveis. O teste com carga estática exige normalmente a aplicação de cargas aplicadas por veículos e produzem resultados apenas no plano vertical, além de serem de custo elevado. A extração de testemunho é uma técnica de ensaio destrutivo agredindo a estrutura e muitas vezes de execução custosa. A análise modal é uma técnica que através do estudo da excitação da estrutura determina os seus parâmetros modais.

3.2 Análise modal

As características estruturais geométricas e físicas estão relacionadas com as propriedades modais, portanto com a determinação dos parâmetros modais é possível verificar a estrutura ou o modelo matemático usado no cálculo. Devido ao avanço da tecnologia dos equipamentos e das técnicas numéricas dos algoritmos e da facilidade do uso dos computadores, a análise modal firmou-se como técnica em inspeção de pontes.

As técnicas usadas na análise modal podem ser no domínio da frequência, onde os parâmetros modais são obtidos da resposta em frequência, e no domínio do tempo onde os parâmetros modais são obtidos diretamente da resposta no tempo.

3.3 Domínio da frequência

Foram feitos vários testes e publicações de trabalhos utilizando a análise modal no domínio da frequência. Nos testes efetuados por Sreenivas Alampalli et al. [4], concluiu-se que as frequências naturais podiam ser usadas para detectar mudanças nas características estruturais, e que com a utilização dos coeficientes MAC (Modal Assurance Criterion) é possível identificar a localização dos danos estruturais, embora a sensibilidade do monitoramento do sistema dinâmico seja limitada.

Os coeficiente MAC correlacionam dois conjuntos de autovetores de dois teste diferentes. Seja $[\phi_A]$ o primeiro conjunto de modos de vibrar (ordem $n * m_A$), e $[\phi_B]$ o segundo conjunto de modos de vibrar ($n * m_B$) onde m_A e m_B são os números de modos dos respectivos conjuntos e n é o número de coordenadas . Os coeficientes MAC definidos abaixo indicam o grau de correlação entre o j-ésimo modo de vibrar do primeiro conjunto e o k-ésimo modo de vibrar do segundo conjunto:

$$MAC(\{\phi_A\}_j, \{\phi_B\}_k) = \frac{|\{\phi_A\}_j^T * \{\phi_B\}_k|^2}{(\{\phi_A\}_j^T * \{\phi_A\}_j * \{\phi_B\}_k^T * \{\phi_B\}_k)}$$

Se os autovetores $[\phi_A]$ e $[\phi_B]$ forem idênticos todos os elementos diagonais da matriz MAC serão unitários

Foram comparados alguns outros métodos para a determinação de danos estruturais utilizando a análise modal, como mostrado por O. S. Salawu e C. Williams [5], onde foram feitas simulações numa barra simplesmente apoiada. Os métodos comparados foram: 1. método dos parâmetros próprios, 2. método direto da matriz erro, 3. o método modificado da matriz erro, e 4. o método da matriz cursor.

O método 1 (**parâmetros próprios**), usa as mudanças nos autovetores para localizar danos na estrutura. A teoria do método é desenvolvido no campo da frequência. Para termos uma base comum de referência para os dados da estrutura sem danos e os dados

da estrutura com danos, os autovalores foram usados como fator de normalização para os autovetores. O parâmetro próprio para o modo r , $\{U^*\}_r$, é definido como o vetor diferença do autovetor ortonormalizado entre o caso da estrutura com danos, $\{\phi_D\}_r$, e o caso da estrutura sem danos, $\{\phi_0\}_r$, divididos pelos correspondentes autovalores λ_{Dr} e λ_{0r} :

$$\{U^*\}_r = \left(\frac{\{\phi_D\}_r}{\lambda_{Dr}} - \frac{\{\phi_0\}_r}{\lambda_{0r}} \right)$$

O gráfico de $\{U^*\}$ em função dos pontos medidos é usado para indicar a posição de danos. Uma mudança na inclinação da curva indica uma posição de dano.

O método 2 (método **direto da matriz erro**), onde a matriz erro (massa ou rigidez ou amortecimento) é a diferença entre a matriz da estrutura sem dano e da matriz da estrutura com dano. Para duas matrizes $[K_0]$ e $[K_D]$ a matriz erro é definida como:

$$[\Delta K] = [K_D] - [K_0]$$

O método 3 (método **modificado da matriz erro**), onde a matriz erro é assumida igual a:

$$[\Delta K] \cong [K_0] \left\{ [K_0]^{-1} - [K_D]^{-1} \right\} [K_0] \quad \text{onde } [K_0] \text{ é obtida por:}$$

$$[K_0] = [\Psi^T] \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & k & \\ & & \backslash \end{bmatrix} [\Psi]^* \quad , \text{ enquanto que as pseudomatrizes de flexibilidade}$$

$[K_0]^{-1}$ e $[K_D]^{-1}$ são obtidas dos autovalores e dos autovetores da estrutura com dano e da estrutura sem dano:

$$[K_0]^{-1} = [\Psi_0] [\lambda_0]^{-1} [\Psi_0]^T$$

$$[K_D]^{-1} = [\Psi_D] [\lambda_D]^{-1} [\Psi_D]^T$$

onde $[\psi_0]$ denota matriz dos autovetores da estrutura sem dano

$[\psi_D]$ denota matriz dos autovetores da estrutura com dano.

$$\begin{bmatrix} \backslash & & \\ & k & \\ & & \backslash \end{bmatrix}$$
 denota matriz modal diagonal de rigidez

O método 4 (método da **matriz cursor**) é baseado na teoria do espaço vetorial e tem pôr objetivo a localização da região de erro pela identificação das linhas e colunas não nulas da matriz cursor definida como:

$$[\Delta] = 0.5(2[M_0][\Psi_D][\lambda_D]^{-1}[\Psi_D]^T[M_0] - [K_0][\Psi_D][\Psi_D]^T[M_0] - [M_0][\Psi_D][\Psi_D]^T[K_0])$$

Na prática as linhas e colunas de $[\Delta]$ associadas com as regiões com danos contém elementos muito maiores que os outros elementos da matriz.

No artigo apresentado por Mark F. Green e David Cebon [6], tem-se os resultados dos testes modais em duas pontes. O teste modal fazia parte de um vasto programa para investigar as respostas dinâmicas em pontes submetidas a veículos pesados. O principal objetivo do teste modal era obter parâmetros modais para validar modelos matemáticos de pontes.

Duas pontes foram selecionadas para o teste. A primeira era uma ponte de quatro vãos contínuos em viga de seção caixão em concreto protendido. A superestrutura da ponte é contínua sobre os três pilares de suporte. Embora os quatro vãos não sejam iguais, a ponte é simétrica em relação ao pilar central. Para o segundo conjunto de testes foi selecionada uma ponte com duas travessas. As barras T invertidas eram protendidas e simplesmente apoiadas, mas a laje de cobertura e diafragmas em concreto armado dão continuidade através dos três vãos.

Para a excitação das pontes foi aplicada uma carga impulsiva através de um martelo instrumentado.

A análise no domínio da frequência é uma técnica prática para identificar as frequências naturais de um sistema, mas, infelizmente para estruturas civis de grande

porte como as pontes, a identificação dos fatores de amortecimento e dos modos de vibrar não é fácil por causa do alto grau de amortecimento e de interferências modais devido à existência de frequências naturais muito próximas.

Então, para essas técnicas é usualmente necessário admitir que a estrutura em teste tenha baixo amortecimento e que as frequências naturais sejam suficientemente separadas.

3.4 Domínio do tempo

Para evitar esses problemas, que ocorrem em estruturas civis, começaram-se a usar os métodos no “domínio do tempo”, como proposto no artigo de S. R. Ibrahim e E. C. Mikulcik [1]. Por esse método os parâmetros modais da estrutura são obtidos diretamente do registro no domínio do tempo do comportamento da estrutura sem recorrer à necessidade de hipóteses a respeito do grau de amortecimento ou da distância entre as frequências naturais. Esse método denominado de Método do Ibrahim (ITD - Ibrahim Time Domain), necessita o conhecimento dos deslocamentos, das velocidades e das acelerações da resposta livre da estrutura.

3.5 Aplicação do ITD

Num artigo posterior [2] especial atenção foi dada à aplicação do Método ITD na prática. A aplicabilidade do Método foi avaliada por duas experiências usando uma barra em balanço e uma placa retangular. O caso da placa envolve duas frequências naturais muito próximas que não podem ser identificadas numa varredura de frequências (amplitude de pico) por causa da interferência entre os modos.

3.6 Modificação do ITD

Uma modificação do Método ITD, mostrada no artigo de S. R. Ibrahim e E. C. Mikulcik [3], foi usada para a determinação dos parâmetros modais de uma barra em balanço e de uma treliça espacial. Nessa modificação, ou a aceleração ou a velocidade ou o deslocamento podiam ser usados, sem a necessidade de fazer integrações ou derivações.

3.7 Excitações

A excitação **impulsiva** tem algumas vantagens e alguns inconvenientes que foram mostrados no trabalho apresentado por Lennart Agard [7]. O impulso é o meio mais simples e efetivo para excitar uma estrutura. A excitação deverá ser tal que, uma parcela relevante de energia, num relevante intervalo de frequência, seja transferida para a estrutura, produzindo sinais aceitáveis em relação ao ruído em todos os transdutores sem causar danos locais. A desvantagem com a excitação impulsiva vem do fato que a energia cinética do batedor não ser distribuída uniformemente no intervalo de frequência de interesse. Normalmente somente os poucos primeiros modos são precisamente excitados. Para concentrar a energia transferida num pequeno intervalo de frequência, o tempo de contato do impacto precisa ser prolongado. A rigidez e o amortecimento do sistema batedor, a velocidade inicial e a massa do batedor são parâmetros que controlam o impacto.

A **vibração forçada**, excitação provocada por um ou mais vibradores, com o controle da energia contida no intervalo da frequência de interesse fornece bons resultados. Entretanto, para grandes estruturas isto requer equipamento pesado e caro. Nos experimentos de Zongfen Zhang [8], observa-se que os parâmetros modais identificados pelos testes de vibrações forçadas são melhores que os obtidos pelos testes de impacto. Entretanto, as vibrações forçadas tem menos modos identificados.

A análise modal da estrutura por **deslocamento inicial** imposto é semelhante ao da excitação impulsiva .

Pontes são suscetíveis a danos devidos aos impactos das cargas móveis, tráfego pesado produzindo fadiga. Danos não detectados e não corrigidos podem levar a deterioração estrutural dos seus membros (superestrutura e infra-estrutura) e consequentemente comprometer a segurança do tráfego da ponte, por isso a análise modal da estrutura pela **excitação aleatória**, produzida pelos veículos que transitam pela ponte é ótima para monitorar estruturas em uso normal.

3.8 Decremento aleatório

Recentes desastres naturais tais como o terremoto de 1994 na Califórnia de 1995 em Kobe no Japão e os furacões Andrew e Iniki em 1989 demonstraram a real necessidade de avaliação de danos em tempo real em estruturas civis. No artigo de Erik G. Straser e Anne S. Kiremidjian [9], é feita uma pesquisa em estruturas submetidas a eventos extremos estudando a resistência residual e a capacidade de elementos estruturais onde as relações não são lineares.

Para os eventos não extremos, mas de caráter aleatório, ou seja, de cargas ditas aleatórias, J. C. Asmussen, S. R. Ibrahim e R. Brincker [10], apresentaram um artigo que trata da análise das respostas da aceleração de uma estrutura civil submetida a forças aleatórias. A princípio as cargas aleatórias incluíam o vento, tráfego e pequenos movimentos do solo, entretanto a maior parte da excitação era causada pelo tráfego, isto é, diferentes tipos de veículos em serviço cruzando a ponte durante o período de medição.

Os dados foram analisados usando a técnica do **decremento aleatório (Randomdec)**. É uma técnica que calcula uma resposta, chamada de **assinatura Randomdec**, proporcional à resposta livre da estrutura. Essa assinatura é determinada pela média de um número grande de trechos de uma resposta da estrutura à excitação aleatória. O principal propósito foi investigar e ilustrar a aplicação da técnica num caso real com uma carga não estacionária e provavelmente não branca.

A maior vantagem da técnica Randomdec são os procedimentos muito simples e uma rápida estimação dos parâmetros modais.

Devido à carga do tráfego os parâmetros modais observados podem ser diferentes dos verdadeiros parâmetros modais da ponte. A massa dos veículos cruzando a ponte altera a massa do sistema, assim, os parâmetros modais são estimados para o sistema total: ponte e tráfego. Para investigar a influência da carga-massa foi assumido que um alto nível de resposta indica uma alta carga-massa e a influência foi analisada estimando a assinatura Randomdec para diferentes níveis de picos. Os resultados indicaram que a influência da carga-massa é menor que as incertezas aleatórias da técnica de estimação.

Os mesmos autores da referência [10], apresentaram outro artigo [11], onde são destacadas as vantagens e desvantagens da técnica Randomdec. A vantagem de tal técnica é muito evidente: A operação normal da estrutura em teste não é interrompida; não há custo para a excitação; não há a medida da excitação; a resposta é contínua e ilimitada; possibilidade de monitorar a integridade da estrutura. Entretanto, a identificação de respostas aleatória possui duas principais desvantagens: primeiro a energia de excitação pode ser pouca para excitar os modos de vibração em interesse; segundo a excitação é assumida ser um ruído branco ou aleatório estacionário.

Respostas aleatórias tratadas com a técnica Randomdec e no domínio do tempo são eficazes e econômicas na identificação modal da estrutura. Esse processo é classicamente baseado na excitação aleatória estacionária. A excitação aleatória não estacionária produz a identificação de parâmetros modais que pertencem ao sistema de

excitação. Entretanto é mostrado que estas funções de excitação não tem efeito na precisão de identificação dos parâmetros estruturais.

3.9 Comparação entre excitação impulsiva e aleatória

Fanlang Kong, Zhong Liang e George C. Lee [12] e [13], apresentaram o estudo de um modelo de uma ponte em escala 1:6 onde são comparados os resultados obtidos de uma excitação por impacto e de cargas aleatórias. A análise modal foi feita no domínio da frequência.

Dos resultados, notou-se que, a frequência natural tem uma boa concordância em ambos os casos enquanto que os fatores de amortecimento não. A excitação aleatória excitou mais modos do que a excitação impulsiva devido à distribuição mais uniforme de energia produzida pela excitação aleatória do que a excitação impulsiva .

3.10 Combinação do Randomdec e do ITD

C. S. Huang et al. [14], apresentaram um processo no domínio do tempo que combina a técnica do decremento aleatório (Randomdec) e a técnica de identificação ITD (Ibrahim Time-Domain), para analisar os dados de um teste com vibração aleatória para uma ponte de múltiplos vãos, onde as condições da excitação podiam não satisfazer os requisitos para a equivalência entre a assinatura do Randomdec e da resposta livre. Com isso em mente, a aplicabilidade do presente processo foi demonstrada comparando-se com os resultados obtidos pelo teste com a resposta livre. Finalmente, as frequências

naturais e modos identificados por esses dois testes foram comparados com os da análise por elementos finitos com o foco na discussão da precisão destes últimos.

4 O Método ITD associado à técnica RANDOMDEC

4.1 O Método do Ibrahim (ITD - Ibrahim Time Domain)

4.1.1 Introdução

O Método do Ibrahim (ITD), no domínio do tempo, é um método que usa a resposta livre de uma estrutura em vibração para determinar propriedades modais da estrutura.

Os parâmetros dinâmicos, frequências naturais, fatores de amortecimento e modos de vibrar são obtidos diretamente com auxílio do modelo matemático no domínio do tempo. O método ITD permite determinar os parâmetros modais de estruturas que tenham frequências naturais próximas e altos fatores de amortecimento.

4.1.2 O modelo no domínio do tempo

Um modelo linear de parâmetros concentrados é adotado para descrever o sistema a ser testado. A equação geral do movimento do sistema é:

$$M\ddot{y} + C\dot{y} + Ky = f \quad (1)$$

onde M denota matriz de massa,

C denota matriz de amortecimento,

K denota matriz de rigidez,

y denota vetor deslocamento,

\dot{y} denota velocidade,

\ddot{y} denota aceleração e

f denota força de excitação.

Reescrevendo a equação (1) na forma de variáveis de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} \end{bmatrix} f \quad (2)$$

ou

$$\dot{x} = Ax + Bf \quad (3)$$

onde

$$x = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix},$$

e

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} \end{bmatrix}$$

Os autovalores de A são as raízes da equação característica do sistema, portanto os parâmetros modais do sistema são determinados por A .

A matriz B determina a resposta do sistema para uma particular função de excitação f . Isto significa que B não precisa ser conhecido para determinarmos os parâmetros modais do sistema, portanto um método de teste de vibração pode ser baseado somente na resposta livre. Tal método de teste pode ser facilmente implementado uma vez que não é necessário obter e armazenar dados sobre a excitação. O método é baseada na determinação de A usando a resposta livre que é dada por :

$$\dot{x} = Ax \quad (4)$$

Para um sistema com n graus de liberdade, A tem a dimensão $2n \times 2n$. A equação (2) mostra que a metade superior de A é $[0 \ I]$, portanto $n \times 2n$, ou $2n^2$ elementos de A são necessários para caracterizar completamente o sistema.

Os $2n^2$ elementos incógnitas de A são determinados notando que num instante de tempo t_i qualquer, a equação (4) pode ser escrita como:

$$\dot{x}_i = Ax_i \quad (5)$$

Se as acelerações, velocidades e deslocamentos dos graus de liberdade do modelo pudessem ser medidas e portanto conhecidas em t_i , então a equação (5) representa $2n$ equações escalares nos elementos de A . As equações que correspondem à metade superior de A são identidades; as outras n equações são lineares não homogêneas nas $2n^2$ incógnitas de A . Escrevendo a equação (5) para $2n$ instantes diferentes de tempo t_1, t_2, \dots, t_{2n} resulta em $2n^2$ equações lineares não homogêneas nos elementos incógnitas de A , portanto A poderia ser determinada. É conveniente escrever essas $2n^2$ equações na seguinte forma:

$$[\dot{x}_1 \ \dot{x}_2 \ \dots \ \dot{x}_{2n}] = A[x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{2n}] \quad (6)$$

ou

$$\dot{X} = AX \quad , \quad (7)$$

portanto,

$$A = \dot{X}X^{-1}$$

A equação (7) poder ser resolvida para A desde que todos os elementos de \dot{X} e X podem ser obtidos das respostas medidas. As respostas nos n graus de liberdade do sistema precisam ser amostradas e digitalizadas em $2n$ instantes diferentes de tempo, fornecendo $2n$ diferentes vetores deslocamentos, velocidades, e acelerações.

Como a identificação da matriz A representa n graus de liberdade do sistema, n modos precisam contribuir na resposta usada para a identificação.

4.1.3 Os parâmetros modais da matriz A

A solução temporal da equação (4) utilizando os parâmetros modais do sistema, ou seja, autovalores λ e autovetores ψ , obtidos de A , fica na forma

$$x = \psi e^{\lambda t} \quad (8)$$

A substituição da equação (8) e sua derivada $\dot{x} = \lambda \psi e^{\lambda t}$ na equação (4) resulta no seguinte problema de autovalores

$$\lambda \psi = A \psi \quad (9)$$

Portanto conclui-se que os autovalores, ou as raízes características de A fornecem as frequências naturais e os fatores de amortecimento do sistema, e os autovetores são os modos de vibração. Autovalores reais correspondem a modos de vibração super amortecidos, enquanto que os autovetores correspondentes aos modos cujos amortecimentos são menores que o autovalor crítico são complexos em geral na forma: $\lambda_j = a_j + ib_j$. A frequência natural amortecida e não amortecida, e o amortecimento associado ao j -ésimo modo são dados por

$$\alpha d_j = b_j \quad (10)$$

$$\omega n_j = \sqrt{a_j^2 + b_j^2} \quad (11)$$

$$\zeta_j = \frac{a_j}{\sqrt{a_j^2 + b_j^2}} \quad (12)$$

Autovalores complexos ocorrem em pares complexos conjugados, com correspondentes autovetores complexos conjugados. Cada par de autovetores complexos correspondem a uma frequência natural e um fator de amortecimento, e o par associado de autovetores complexos conjugados correspondem a um modo real de vibrar.

4.1.4 Medições das respostas

A aplicação direta dessa teoria requer o completo conhecimento das respostas da aceleração, velocidade e deslocamento nos pontos de medição. Se usarmos acelerômetros para medir as respostas, os valores absolutos da velocidade e do deslocamento só podem ser determinados se os seus valores iniciais forem levados em conta na integração da aceleração.

Como as características dinâmicas de uma estrutura e, portanto, a matriz A , não depende da condição inicial da excitação, assim pode-se modificar a formulação para eliminar o conhecimento dos valores iniciais da velocidade e do deslocamento. Essa modificação é feita assumindo que a aceleração medida em n pontos numa estrutura tem duas componentes:

$$\ddot{y}(t) = \ddot{y}(0) + \hat{\ddot{y}}(t) \quad (13)$$

onde $\ddot{y}(0)$ é a aceleração num instante arbitrário $t = 0$ e $\hat{\ddot{y}}(t)$ é a variação da aceleração do instante $t = 0$ para t .

Integrando a aceleração na expressão (13) resulta a velocidade,

$$\dot{y}(t) = \int_0^t \ddot{y}(t) dt + \dot{y}(0) \quad (14)$$

ou

$$\dot{y}(t) = \hat{\dot{y}}(t) + \dot{y}(0) \quad (15)$$

onde $\dot{y}(0)$ é a velocidade no instante $t = 0$ e $\hat{\dot{y}}$ é a variação da velocidade do instante $t = 0$ para t .

Integrando a velocidade, a equação (14), resulta no deslocamento,

$$y(t) = \int_0^t \int_0^\varepsilon \ddot{y}(t) dt d\varepsilon + t\dot{y}(0) + y(0) \quad (16)$$

ou

$$y(t) = \hat{y}(t) + y(0) \quad (17)$$

onde

$$\hat{y}(t) = \int_0^t \int_0^\varepsilon \ddot{y}(t) dt d\varepsilon + t\dot{y}(0) \quad (18)$$

e $\hat{y}(t)$ é a variação do deslocamento do instante $t = 0$ para t .

A equação de estado precisa ser satisfeita para todos os valores de t , inclusive $t = 0$, portanto substituindo as equações (13), (15), (17) na equação de estado (5) para $t = t_1$ resulta:

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_{t_1} \\ \dot{\hat{y}}_{t_1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \hat{y}_{t_1} \\ \dot{\hat{y}}_{t_1} \end{bmatrix}, \quad (19)$$

e para $t = t_2 = \alpha t_1$

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_{\alpha t_1} \\ \dot{\hat{y}}_{\alpha t_1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \hat{y}_{\alpha t_1} \\ \dot{\hat{y}}_{\alpha t_1} \end{bmatrix} \quad (20)$$

Multiplicando a equação (19) por α e subtraindo a equação (20) resulta:

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} \quad (21)$$

Na equação (21) y , \dot{y} e \ddot{y} tomam a seguinte nova definição:

$$y = \alpha \int_0^{t_1} \int_0^{\varepsilon} \ddot{y}(t) dt d\varepsilon - \int_0^{\alpha t_1} \int_0^{\varepsilon} \ddot{y}(t) dt d\varepsilon \quad (22)$$

$$\dot{y} = \alpha \int_0^{t_1} \dot{y}(t) dt - \int_0^{\alpha t_1} \dot{y}(t) dt \quad (23)$$

e

$$\ddot{y} = \alpha \ddot{y}(t_1) - \ddot{y}(\alpha t_1) - (\alpha - 1) \ddot{y}(0) \quad (24)$$

então y , \dot{y} e portanto a matriz A pode ser obtida dos dados da aceleração experimental por integração sem o conhecimento de $\dot{y}(0)$ ou $y(0)$. Esse procedimento reduz a quantidade de instrumentos necessários por dispensar integradores no instante da medição.

Às vezes pode ser difícil medir a aceleração, como no caso de estruturas extremamente leves, ou por restrição de espaço que não permita a colocação de acelerômetros. Se a resposta em aceleração não é possível, então ou a velocidade ou o deslocamento podem ser usados da mesma maneira que a aceleração com o propósito da identificação da matriz A do sistema. Isto pode ser demonstrado examinando a resposta em deslocamento de um sistema linear de n graus de liberdade, expresso como:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{2n} R_i \psi_i e^{\lambda_i t} \quad (25)$$

Derivando a equação (25) duas vezes resultam a velocidade e aceleração:

$$\dot{y}(t) = \sum \bar{R}_i \psi_i e^{\lambda_i t} \quad , \quad (26)$$

e

$$\ddot{y}(t) = \sum \bar{\bar{R}}_i \psi_i e^{\lambda_i t} \quad , \quad (27)$$

onde R_i é uma constante,

$$\overline{R}_i = \lambda_i R_i \quad ,$$

e

$$\overline{\overline{R}}_i = \lambda_i^2 R_i$$

As equações (25), (26) e (27) são semelhantes, diferindo apenas pelas constantes R_i , \overline{R}_i e $\overline{\overline{R}}_i$. Todas as três equações são combinações lineares do mesmo conjunto de modos. O conjunto das constantes, R_i ($i = 1, 2, \dots, 2n$) é dependente somente das condições iniciais de excitação e, portanto, para a mesma estrutura a resposta pode tomar várias formas possíveis de condições iniciais. Então, as respostas em deslocamento ou velocidade podem ser consideradas como equivalentes à aceleração para um conjunto de condições iniciais diferentes das atualmente existentes.

4.1.5 Modificação do método do Ibrahim

O método do Ibrahim pode ser modificado de modo a usar apenas a aceleração, ou a velocidade ou o deslocamento sem ser necessária a integração ou a derivação. Retomando a equação (1) para a resposta livre temos:

$$M\ddot{y} + C\dot{y} + Ky = 0 \quad (28)$$

Para um sistema de n graus de liberdade M , C , K são matrizes $n \times n$, enquanto y , \dot{y} e \ddot{y} são vetores de dimensão n . A solução dessa equação é assumida como

$$y = pe^{\lambda t} \quad (29)$$

sendo

$$[\lambda^2 M + \lambda C + K] p = 0 \quad (30)$$

A equação (30) define $2n$ valores de λ , que são então as raízes da equação característica do sistema. Para cada raiz há um correspondente vetor p de deslocamentos relativos de coordenadas do sistema. λ e os elementos de p são reais para modos superamortecidos mas para modos subamortecidos eles são complexos e ocorrem em pares conjugados. Cada par conjugado pode ser combinado para produzir um modo real correspondendo a uma frequência natural e um fator de amortecimento. Para um par complexo conjugado de vetores modais, tendo o primeiro elemento normalizado à unidade e tendo o k -ésimo elemento $c + id$ o deslocamento da k -ésima coordenada é $\sqrt{c^2 + d^2}$, e seu movimento é defasado da primeira coordenada por $\tan^{-1}(d/c)$. Para um par conjugado complexo de raízes $a + ib$ a frequência natural amortecida é $\omega d = b$, a frequência natural não amortecida é $\omega n = \sqrt{a^2 + b^2}$ e o fator de amortecimento é $\zeta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

O objetivo do teste de análise modal é determinar a partir dos resultados de resposta livre, os valores de λ e p que satisfazem a equação (30). Os dados do teste podem ser deslocamentos, ou velocidades ou acelerações medidas em n pontos. A resposta em deslocamento, ou velocidade, ou aceleração, consiste numa somatória da contribuição de todos os modos e pode ser escrita como

$$y = \sum_{j=1}^{2n} p_j e^{\lambda_j t} \quad (31)$$

A resposta no instante t_i é

$$y(t_i) = \sum_{j=1}^{2n} p_j e^{\lambda_j t_i} \quad (32)$$

e os vetores resposta medidos em $2n$ instantes podem ser escritos na forma matricial como

$$[y_{t_1} \quad y_{t_2} \quad \dots \quad y_{t_{2n}}] = [p_{t_1} \quad p_{t_2} \quad \dots \quad p_{t_{2n}}] \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t_1} & e^{\lambda_1 t_2} & \dots & e^{\lambda_1 t_{2n}} \\ e^{\lambda_2 t_1} & e^{\lambda_2 t_2} & \dots & e^{\lambda_2 t_{2n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{\lambda_{2n} t_1} & e^{\lambda_{2n} t_2} & \dots & e^{\lambda_{2n} t_{2n}} \end{bmatrix} \quad (33)$$

ou

$$Y = P \Lambda \quad (34)$$

As respostas que ocorrem num instante Δt após o instante da equação (34) são

$$[\tilde{y}_{t_1} \quad \tilde{y}_{t_2} \quad \dots \quad \tilde{y}_{t_{2n}}] = [p_{t_1} \quad p_{t_2} \quad \dots \quad p_{t_{2n}}] \begin{bmatrix} e^{\lambda_1(t_1+\Delta t)} & e^{\lambda_1(t_2+\Delta t)} & \dots & e^{\lambda_1(t_{2n}+\Delta t)} \\ e^{\lambda_2(t_1+\Delta t)} & e^{\lambda_2(t_2+\Delta t)} & \dots & e^{\lambda_2(t_{2n}+\Delta t)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{\lambda_{2n}(t_1+\Delta t)} & e^{\lambda_{2n}(t_2+\Delta t)} & \dots & e^{\lambda_{2n}(t_{2n}+\Delta t)} \end{bmatrix} \quad (35)$$

onde

$$\tilde{y}_{t_i} = y(t_i + \Delta t), \quad i = 1, 2, \dots, 2n$$

A equação (35) pode ser reescrita como

$$[\tilde{y}_{t_1} \quad \tilde{y}_{t_2} \quad \dots \quad \tilde{y}_{t_{2n}}] = [q_{t_1} \quad q_{t_2} \quad \dots \quad q_{t_{2n}}] \Lambda \quad (36)$$

ou

$$\tilde{Y} = Q\Lambda \quad (37)$$

onde

$$q_{ti} = p_{ti} e^{\lambda \Delta t}, \quad i = 1, 2, \dots, 2n \quad (38)$$

analogamente, as respostas que ocorrem num instante Δt após os do \tilde{Y} são

$$\begin{bmatrix} \tilde{y}_{t1} & \tilde{y}_{t2} & \dots & \tilde{y}_{t2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{t1} & r_{t2} & \dots & r_{t2n} \end{bmatrix} \Lambda \quad (39)$$

ou

$$\tilde{\tilde{Y}} = R\Lambda \quad (40)$$

onde

$$\tilde{y}_{ti} = x(t_i + 2\Delta t), \quad i = 1, 2, \dots, 2n \quad (41)$$

e

$$r_{ti} = q_{ti} e^{\lambda \Delta t} = p_{ti} e^{2\lambda \Delta t}, \quad i = 1, 2, \dots, 2n \quad (42)$$

As respostas dadas pelas equações (34), (37) e (40) podem ser manipulados para calcular os autovalores e os autovetores. Primeiro as equações (34) e (37) são agrupadas para escrever como:

$$\begin{bmatrix} Y \\ \tilde{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} \Lambda \quad (43)$$

ou

$$\phi = \psi \Lambda \quad (44)$$

e (37) e (40) são escritas como

$$\begin{bmatrix} \tilde{Y} \\ \tilde{\tilde{Y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q \\ R \end{bmatrix} \Lambda \quad (45)$$

ou

$$\hat{\phi} = \hat{\psi}\Lambda \quad (46)$$

Eliminando-se Λ das equações (44) e (46) temos

$$\hat{\phi}\hat{\phi}^{-1}\psi = \hat{\psi} \quad (47)$$

Esta equação relaciona cada coluna ψ_{ti} de ψ com a correspondente coluna $\hat{\psi}_{ti}$ de $\hat{\psi}$ através de

$$\hat{\phi}\hat{\phi}^{-1}\psi_{ti} = \hat{\psi}_{ti} \quad i = 1, 2, \dots, 2n \quad (48)$$

O vetor coluna ψ_i e $\hat{\psi}_i$ são relacionados com as equações (38) e (42) por

$$\hat{\psi}_{ti} = e^{\lambda\Delta t}\psi_{ti} \quad (49)$$

As equações (48) e (49) podem ser combinadas para dar

$$\hat{\phi}\hat{\phi}^{-1}\psi_{ti} = e^{\lambda\Delta t}\psi_{ti} \quad (50)$$

Esta equação é um problema de autovalores que permite o uso das respostas medidas para o cálculo dos autovetores e autovalores da estrutura. Os autovalores da equação (50) estão relacionados com os autovalores da equação (9) como mostrado a seguir:

seja $\beta_i + j\lambda_i$ um autovalor de $\hat{\phi}\hat{\phi}^{-1}$ e $a_i + jb_i$ uma raiz de $\det(\lambda^2 M + \lambda C + K) = 0$.

O autovalor $\beta_i + j\lambda_i$ é relacionado com $a_i + jb_i$ através de

$$\beta_i + j\lambda_i = e^{(a_i + jb_i)\Delta t} \quad (51)$$

assim,

$$\beta_i = e^{a_i\Delta t} \cos(b_i\Delta t)$$

e

$$\lambda_i = e^{a_i\Delta t} \sin(b_i\Delta t)$$

de onde

$$a_i = \frac{1}{2\Delta t} \ln(\gamma_i^2 + \beta_i^2) \quad (52)$$

e

$$b_i = \frac{1}{\Delta t} \tan^{-1}\left(\frac{\gamma_i}{\beta_i}\right) \quad (53)$$

Por isso, autovalores reais de $\hat{\phi}\phi^{-1}$ correspondem a modos críticos ou super amortecidos porque eles representam raízes características reais. freqüências naturais e fatores de amortecimento são determinados usando as equações (52) e (53).

A equação (53) não permite a determinação única das freqüências naturais porque ela pode ser escrita como

$$b = \frac{1}{\Delta t} \left[\tan^{-1}\left(\frac{\gamma}{\beta}\right) + k\pi \right] \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} 0 < \tan^{-1}\left(\frac{\gamma}{\beta}\right) < \pi \\ k = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right\} \quad (54)$$

Assim para cada freqüência natural amortecida b há uma relação entre Δt e o valor k que pode ser usado na equação (54). Δt é o tempo de atraso usado para gerar as matrizes atrasadas \tilde{Y} e $\tilde{\tilde{Y}}$ de Y , e assim $\frac{1}{\Delta t}$ representa a taxa de amostragem necessária para obter essas respostas atrasadas, embora os vetores amostrados consecutivamente não precisam ser usados como as colunas de Y .

Para evitar a ambigüidade no uso de equação (54) é necessário especificar que todos os modos que contribuem com a resposta correspondem às freqüências que podem ser calculadas da equação usando somente um valor simples de k . É necessário então que para todos os valores de b na faixa de freqüência de interesse que

$$\frac{k\pi}{\Delta t} < b < \frac{(k+1)\pi}{\Delta t} \quad (55)$$

para algum valor de k . Escrevendo os máximos e mínimos valores de frequências naturais amortecidas relativas aos máximos valores das frequências em interesse como

$$b_{\min} > 2\pi f_{\min}$$

$$b_{\max} < 2\pi f_{\max}$$

e a frequência de amostragem f_s como

$$f_s = \frac{1}{\Delta t} \quad ,$$

A equação (55) requer que

$$\left. \begin{array}{l} f_s k < 2f_{\min} \\ f_s (k+1) > 2f_{\max} \end{array} \right\} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

ou

$$\frac{2f_{\max}}{k+1} < f_s < \frac{2f_{\min}}{k} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (56)$$

Esta equação pode ser usada para relacionar o intervalo das frequências de interesse para o valor aceitável de k a ser usado na equação (54) através de

$$\frac{2f_{\max}}{k+1} < \frac{2f_{\min}}{k}$$

ou

$$\frac{f_{\max}}{f_{\min}} < \frac{k+1}{k} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (57)$$

A determinação das frequências no intervalo de f_{\min} igual a zero, para algum limite superior f_{\max} , requer da equação (57), que $k = 0$.

E mais, a equação (56) requer que

$$f_s > 2f_{\max} \quad (58)$$

também conhecido como critério de Nyquist de amostragem.

Essa necessidade para f_s pode apresentar dificuldades práticas se f_{\max} for excessivamente alto.

4.1.6 Pontos de medição

Uma hipótese importante colocada no desenvolvimento dessa teoria é que o número de pontos de medição na estrutura deve ser igual ao número de graus de liberdade do hipotético sistema de parâmetros concentrados que se deseja identificar.

Assim, ao preparar um teste seria necessário conhecer, a priori, o número de graus de liberdade a ser identificado, para que seja empregado o correto número de pontos de medição. Na prática essa informação usualmente não é disponível, e se fosse, poderia não ser possível ou desejável usar o mesmo número de pontos de medição que os equivalentes graus de liberdade.

Se o número de modos a identificar for maior que o número de pontos de medição é necessário aumentar o número aparente de pontos de medição através da geração de vetores resposta de ordem maior com o correspondente aumento no número de instantes considerados. Os vetores de ordem superiores tomam a forma

$$x' = \begin{bmatrix} x \\ x_a \end{bmatrix} \quad (59)$$

$$\text{onde } x_a = x(t + \Delta\tau) \quad (60)$$

no qual $\Delta\tau$ é um valor de tempo conveniente que precisa ser múltiplo de Δt . Esse procedimento pode ser repetido três, quatro, ...vezes usando outros valores de $\Delta\tau$.

4.1.7 Medições com ruído

Outro problema importante é a introdução de erros devidos às medições e ao ruído. Uma maneira de reduzir o problema é usando mais dados (mais instantes de tempo) que o necessário para achar os parâmetros, nesse caso $\hat{\phi}$ e ϕ , obtidos das leituras em mais instantes de tempo, serão matrizes retangulares e aplicando a minimização pelo método dos mínimos quadrados a equação (50) será :

$$\left[\hat{\phi}\hat{\phi}^T \right] \left[\phi\phi^T \right]^{-1} \psi_{t_i} = e^{\lambda\Delta t} \psi_{t_i} \quad (61)$$

resultando então um problema de autovalores para a matriz $\left[\hat{\phi}\hat{\phi}^T \right] \left[\phi\phi^T \right]^{-1}$.

4.2 RANDOMDEC – A técnica do decaimento aleatório

A técnica do decaimento aleatório para a análise de assinaturas de vibrações foi empiricamente desenvolvida nos idos de 1960 por Henry Cole. Desde então essa técnica teve largo uso especialmente na indústria aeroespacial, para a análise de dados de vibrações experimentais. O método é usado com frequência na determinação dos parâmetros modais e detecção de falhas estruturais. A técnica Randomdec estima uma resposta livre da estrutura em vibração devido a uma excitação aleatória.

A assinatura Randomdec é simplesmente a curva formada pela média de um número de determinados trechos de uma série temporal. Cada um dos trechos compartilha de atributos comuns de mesmas condições iniciais. Pode-se especificar um deslocamento inicial e ou uma velocidade para a seleção dos trechos. A escolha mais comum é especificar a amplitude (deslocamento) para a determinação dos trechos.

A técnica Randomdec foi largamente usada por causa da instrumentação simples e os dados poderem ser processados em tempo real. É um método para a estimação de funções de auto correlações e correlações cruzadas de uma série temporal. As assinaturas Randomdec são calculadas como:

$$\hat{D}_{xy}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x(t_i + \tau) \mid C_y \quad (62)$$

onde \hat{D}_{xy} é a estimação cruzada da assinatura Randomdec entre a as séries de tempo x e y , N é o número de trechos, τ é o intervalo de tempo entre as séries e C_y é uma condição de início de um trecho tal como:

$$C_y = [y(t_i) = d \quad \vee \quad \dot{y}(t_i) = v] \quad (63)$$

onde d é um deslocamento e v é uma velocidade.

Para o caso das séries temporais x e y serem estacionárias Gaussianas e de média nula, existe a seguinte relação entre a assinatura Randomdec, equação (62), e a função de correlação cruzada:

$$D_{xy} = \frac{R_{xy}(\tau)}{\sigma_y^2} \cdot d - \frac{R'_{xy}(\tau)}{\sigma_y^2} \cdot v \quad (64)$$

A condição para início de um novo trecho pode ser apenas de deslocamento, por exemplo:

$$C_y = [y(t_i) > d_1 \cdot \sigma_y \vee y(t_i) < d_2 \cdot \sigma_y] \quad (65)$$

como não foi feita nenhuma condição para a velocidade o segundo termo da equação (64) se anula na média. Isto reduz a equação (64) para:

$$D_{xy} = \frac{R_{xy}}{\sigma_y^2} \cdot d \quad (66)$$

R_{xy} será considerada como a resposta livre do sistema para a análise modal com a aplicação por exemplo do ITD (Método do Ibrahim), σ_y é o desvio padrão dos deslocamentos da série x , e d será aproximadamente:

$$d \approx 0.5(d_1 + d_2) \quad (67)$$

onde d_1 e d_2 indicam os limites das faixas de deslocamentos a serem considerados para a determinação dos trechos da série temporal x .

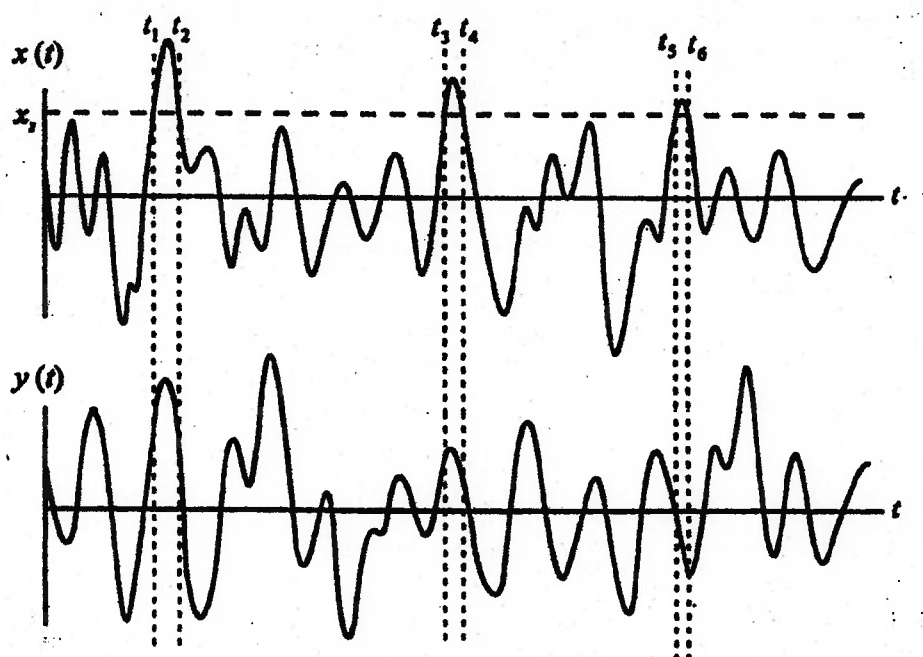


Figura 1. Construção de assinatura Randomdec. Amostra x e y (séries temporais)

Vandiver et al. [15] mostra que a estimação dada pela equação (62) é sem viés estatístico, e as variâncias das estimações são proporcionais às variâncias dos sinais de excitação originais, mas inversamente proporcionais a N , número de trechos. Por isso é preciso uma série longa de medição de vibração aleatória, para ter-se muitos trechos para obtenção de uma assinatura Randomdec equivalente a uma resposta livre de um sistema.

5 Metodologia

Para comparar o desempenho do Método do Ibrahim (ITD) com a aplicação da excitação impulsiva e da excitação aleatória propõe-se utilizar simulações numéricas e análise modal experimental de uma estrutura civil .

Para as simulações numéricas foi escolhido um sistema mola-massa e uma viga bi-apoiada.

Para a análise modal experimental escolheu-se uma viga em concreto armado pré-moldado com 2.40 m de comprimento .

5.1 Sistemas analisados

5.1.1 Sistema com parâmetros concentrados e dois graus de liberdade. Mola – massa.

Para as simulações numéricas do sistema mola-massa elaborou-se o algoritmo *Molamas1* e o algoritmo *Molamas2* , usando o programa Matlab Release 12 MathWorks Products , conforme anexos A.1.1 e A.1.2. O algoritmo *Molamas1* utiliza apenas os deslocamentos para a aplicação do ITD, e o algoritmo *Molamas2* utiliza os deslocamentos e as velocidades para a aplicação do ITD.

Considerou-se três casos de simulações numéricas. No primeiro caso consideraram-se duas molas de coeficiente 1000 N/m e duas massas de 10 Kg onde foram impostos deslocamentos iniciais de 0.3 m para a massa M1 e de -0.2 m para a massa M2 sem considerar o amortecimento , conforme figura 2 . No segundo caso foi acrescentado um fator de amortecimento de 2% , e no terceiro caso foram impostas duas frequências

naturais próximas ($\omega_1 = 6 \text{ rad/s}$ e $\omega_2 = 6.5 \text{ rad/s}$) e um fator de amortecimento de 20%

Nos três casos de simulação numérica utilizou-se o algoritmo *Molamas1* e o algoritmo *Molamas2*.

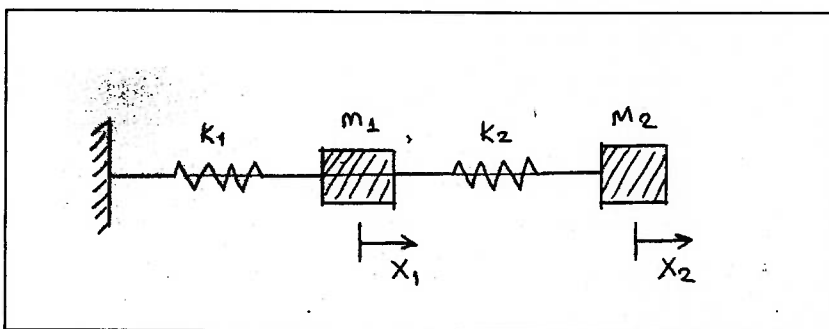


Figura 2. Sistema mola-massa. Duas molas $K_1=K_2=1000 \text{ N/m}$ e duas massas $M_1=M_2=10 \text{ Kg}$ com deslocamentos iniciais $X_1=0.3 \text{ m}$ e $X_2=-0.2 \text{ m}$.

5.1.2 Sistema distribuído . Viga bi-apoiada

Para a simulação numérica do sistema distribuído foi idealizada uma viga bi-apoiada de 2.24 metros a qual foi discretizada em dez elementos e onze nós equiespaçados , cada elemento com um comprimento de 0.224 metros , módulo de elasticidade longitudinal de 30 GPa , densidade específica de 2500 kg/m³ , área de 37.2 cm² e momento de inércia à flexão no plano vertical de 69.07 cm⁴ , conforme a figura 3 .

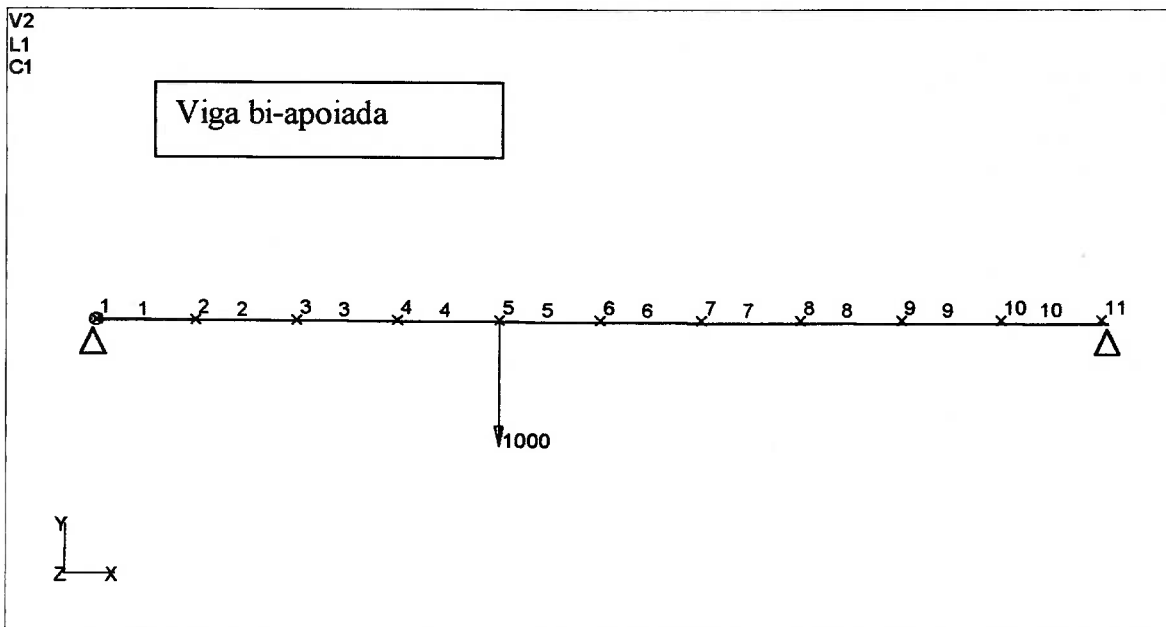


Figura 3. Discretização da viga bi-apoiada em 10 elementos de 0.224m cada

$$E = 30 \text{ GPa}$$

$$\text{Rho} = 2500 \text{ kg/m}^3$$

$$A = 37.2 \text{ cm}^2$$

$$I_z = 69.07 \text{ cm}^4$$

Na figura 4 temos o diagrama de blocos do algoritmo *vigbiap*, listagem no anexo A.2. Com os dados geométricos e físicos da viga são calculadas as matrizes de rigidez, de massa e de amortecimento do sistema dinâmico.

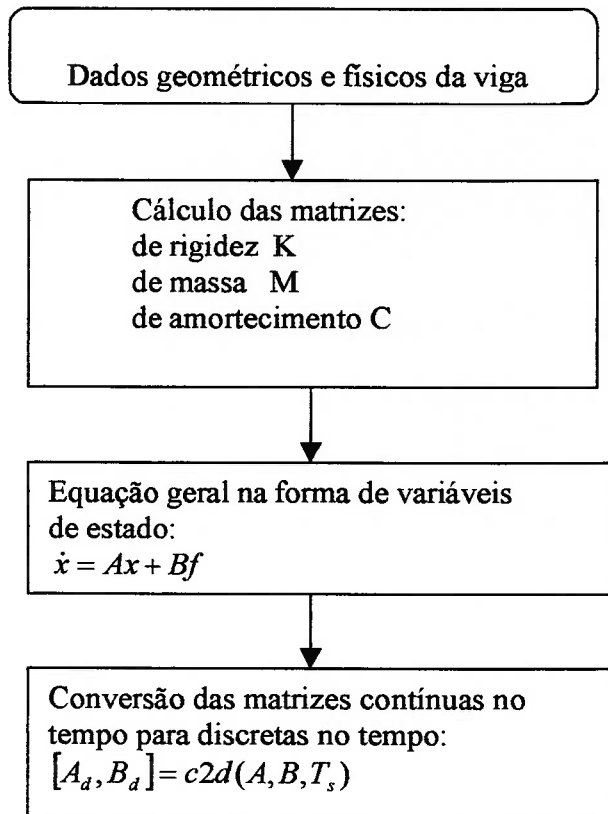


Figura 4. Diagrama de blocos para a determinação das matrizes do sistema dinâmico de uma viga bi-apoiada.

A função $[A_d, B_d] = c2d(A, B, T_s)$ converte o modelo contínuo no tempo para o discreto no tempo. A e B são as matrizes do sistema dinâmico contínuo no tempo e A_d e B_d são as matrizes do sistema dinâmico discreto no tempo, e T_s é a taxa de amostragem. Essa transformação é necessária pois serão usadas as respostas discretas no tempo, segundo a taxa de amostragem $T_s = 1/5000$ s.

5.2 Tipo de excitação

5.2.1 Excitação impulsiva

Na figura 5 temos o diagrama de blocos do algoritmo *Geraimp*, listagem no anexo A.2.2.1, para a geração da resposta em deslocamento decorrente de excitação impulsiva. O impulso foi modelado como um pulso retangular de intensidade de 1000 N e largura de 1/5000 segundo, conforme figura 6, aplicado verticalmente no nó 5 da viga bi-apoiada.

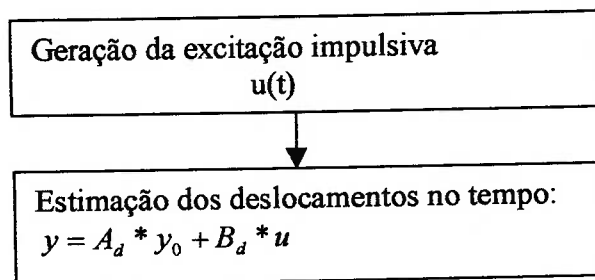


Figura 5. Diagrama de blocos para a geração da resposta em deslocamento da excitação impulsiva.

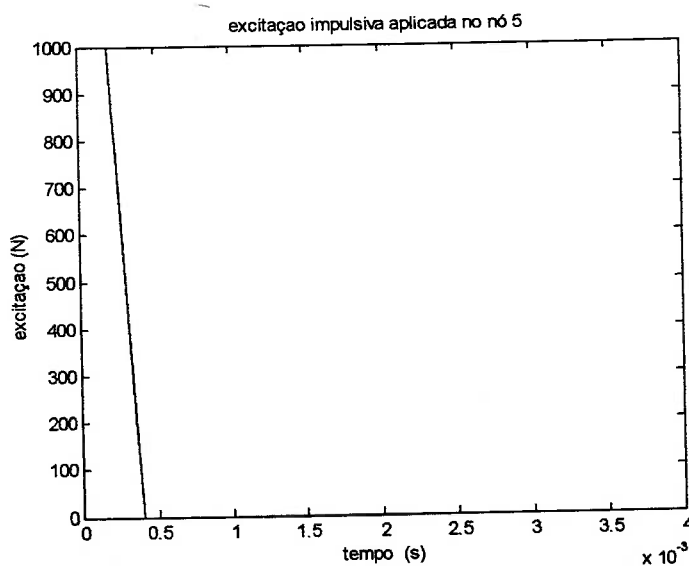


Figura 6. Excitação impulsiva

5.2.2 Excitação aleatória

Aplicou-se no nó 5 da viga bi-apoiada uma carga vertical aleatória. Na figura 7 temos o diagrama de blocos do algoritmo *Gerarand*, listagem no anexo A.2.3.1, para a geração da resposta em deslocamento decorrente de excitação aleatória. Com a equação geral do sistema na forma de variáveis de estado estimam-se os deslocamentos respostas à excitação aleatória.

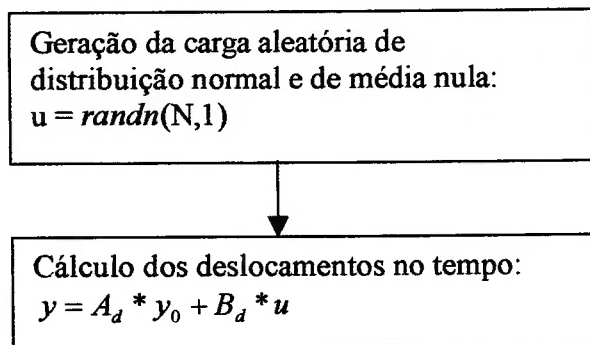


Figura 7. Diagrama de blocos para a geração da resposta em deslocamento da excitação aleatória.

A seqüência branca gaussiana foi determinada através da rotina *randn* do Matlab, figura 8, e cujo histograma da seqüência encontra-se na figura 9.

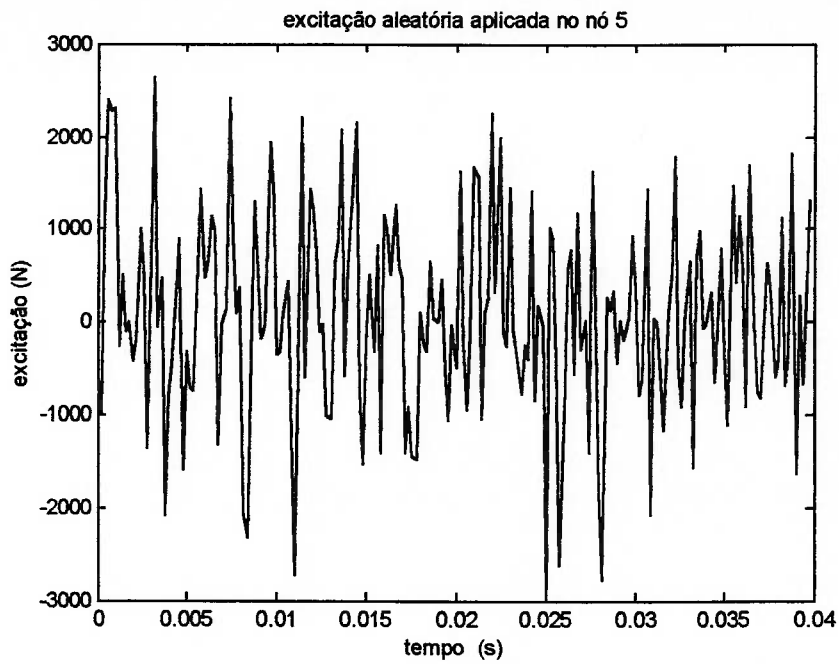


Figura 8. Excitação aleatória (detalhe)

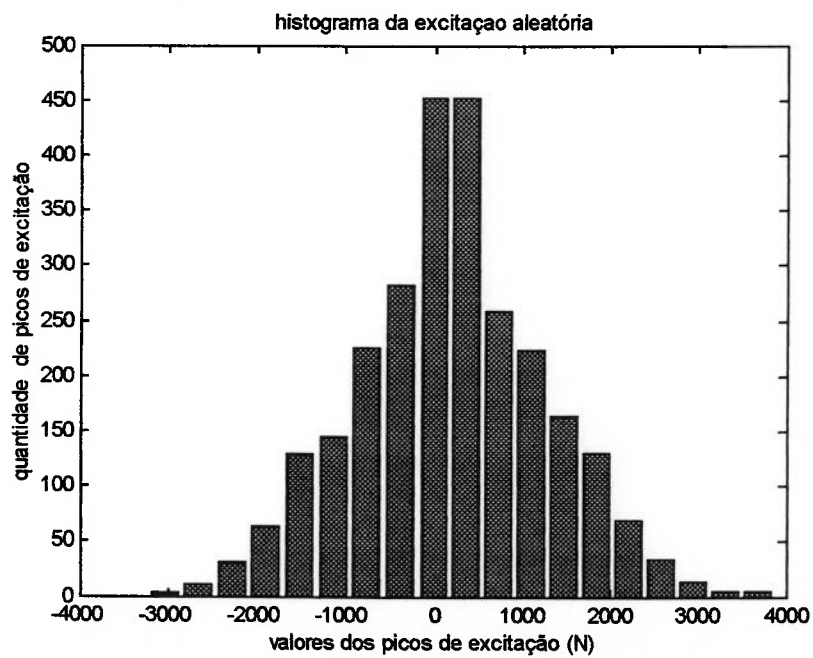


Figura 9. Histograma da seqüência branca gaussiana da excitação aleatória.

5.3 Análise modal – Método do Ibrahim

Com a resposta livre do sistema é feita a montagem da matriz dos deslocamentos X_1 a partir do tempo $t_0 = 0$ e a montagem da matriz X_2 a partir do tempo $t = 2 * T_s$, sendo T_s a taxa de amostragem igual a $1/5000$ s, e a seguir é feita a montagem da matriz A do sistema conforme 4.1.5 e o diagrama de blocos do algoritmo *ITD* mostrado na figura 10, cuja listagem pode ser vista nos anexos A.2.2.4, A.2.2.5, A.2.3.5 e A.2.3.6.

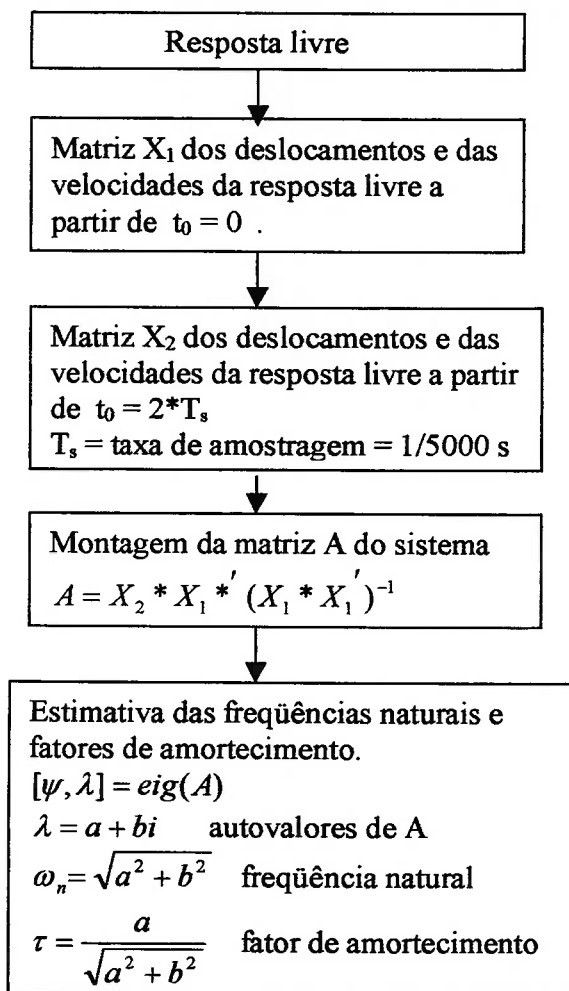


Figura 10. Diagrama de blocos do Método ITD para a estimação dos parâmetros modais de uma resposta livre

5.4 Processamento de sinais

5.4.1 Filtro passa-baixa

O algoritmo *Filtsin* utiliza um filtro passa-baixa para uma frequência de corte acima de 1500 rad/s conforme anexos A.2.2.2e A.2.3.2.

5.4.2 Aplicação do Randomdec

O Método ITD utiliza a resposta livre da estrutura. A resposta livre pode ser estimada através da técnica Randomdec, a qual calcula uma média de vários trechos extraídos da série temporal, e essa média é considerada proporcional à resposta livre do sistema conforme 4.2 e mostrado no diagrama de blocos da figura 11 e a listagem do algoritmo *Randdec* nos anexos A.2.3.3 e A.2.3.4.

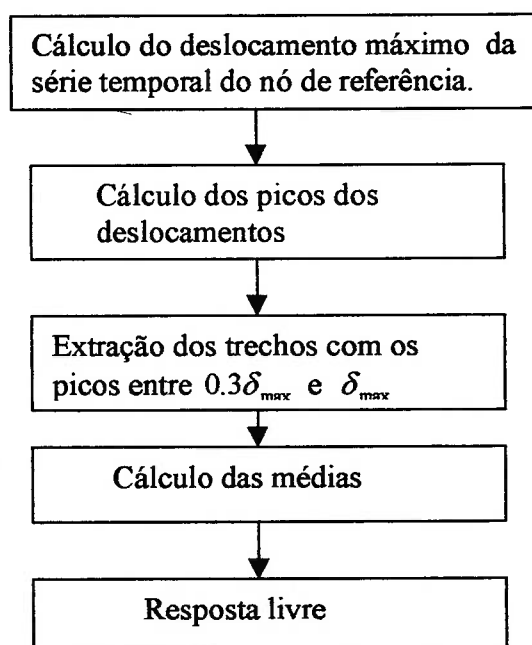


Figura 11. Diagrama de blocos do Método Randomdec para a estimação da resposta livre de uma excitação aleatória.

5.5 Aparato Experimental

5.5.1 Introdução

O projeto da coleta de dados experimentais da análise de uma viga em concreto armado utilizou uma análise de um modelo matemático em elementos finitos para a determinação das frequências naturais e dos modos de vibrar. Dessa análise escolheu-se as posições dos sensores procurando evitar os pontos de deslocamentos nulos, a taxa de amostragem, o tempo de amostragem e a calibração dos dispositivos de condicionamento, conversão A/D e armazenamento de dados.

Na análise experimental será aplicada uma excitação impulsiva através de um martelo, uma excitação de carga móvel através de um carrinho e uma excitação aleatória ruído branco usando um excitador.

5.5.2 Análise modal via método dos elementos finitos

A estrutura a ser instrumentada, ver figuras 12 a 14, é uma viga pré-moldada em concreto armado para a construção de pisos de construção civil. A viga tem 2.40 m de comprimento, a parte em concreto tem uma espessura média de 3 cm e largura de 12 cm, e a armação é um aço CA50 com uma barra de 6.3 mm de diâmetro na parte superior (parte exposta), e com duas barras de 6.3 mm de diâmetro na parte inferior (dentro da massa de concreto). Para o apoio da viga foram construídos dois dispositivos para a fixação das extremidades da viga, ver figuras 15 e 16, resultando um vão de 2.24 m. A viga foi discretizada em 96 elementos placa de concreto com 3 centímetros de espessura perfazendo uma largura de 12 centímetros e um comprimento de 0.224 metros, e 107 elementos de barra de aço de 6.3 e 4.5 milímetros de diâmetro formando a uma treliça espacial, conforme as figuras 17 a 19. A estrutura foi discretizada pelo programa Nastran (MSC.Nastran for Windows 4.5, Versão licenciada do FEMAP 7.0 Copyright 1999, Structural Dynamics Research Corp.) e calculada pelo método dos elementos

finitos . Esse modelo matemático servirá para projetar o teste da estrutura. Os resultados dos parâmetros modais obtidos no teste desse modelo de elementos finitos são de valiosa ajuda na escolha dos pontos de excitação e nas posições dos sensores para conservar os modos de vibrar de interesse identificáveis . A colocação dos sensores para leitura das respostas terá como critério evitar os nós de deslocamentos nulos dos quatro primeiros modos. Nas figuras 20 a 24 temos os modos de vibrar das primeiras frequências naturais desse modelo matemático.

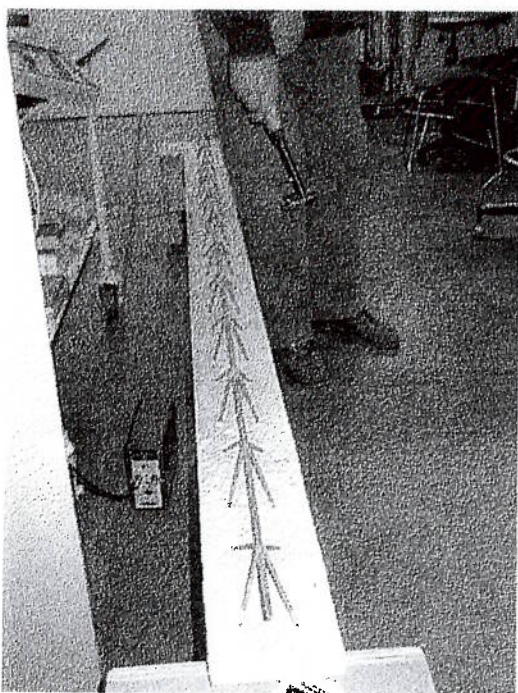


Figura 12. Vista geral da viga de concreto armado .

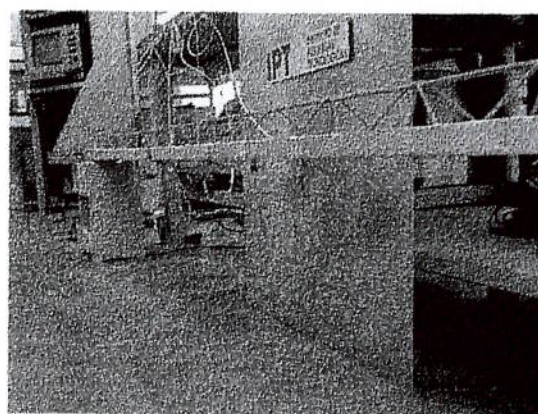


Figura 13. Vista lateral da viga com os acelerômetros colados .

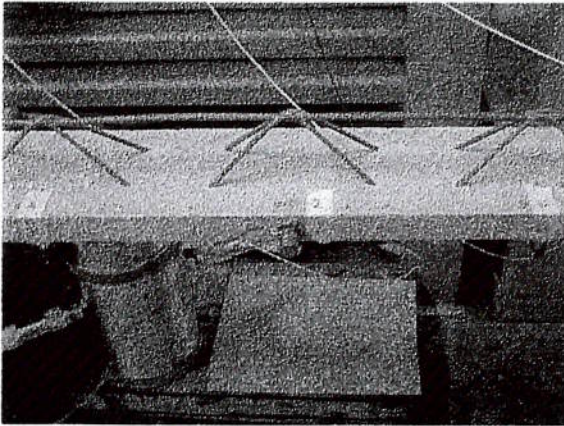


Figura 14. Vista parcial da viga com detalhes da armação da viga e dos acelerômetros .

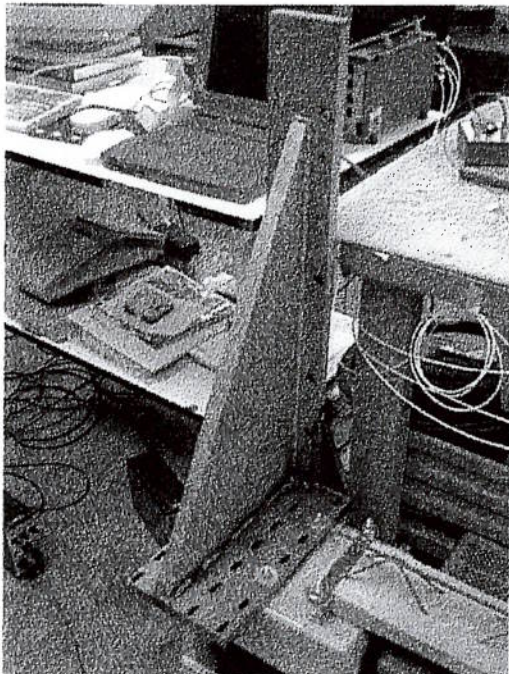


Figura 15. Dispositivo de fixação da viga.

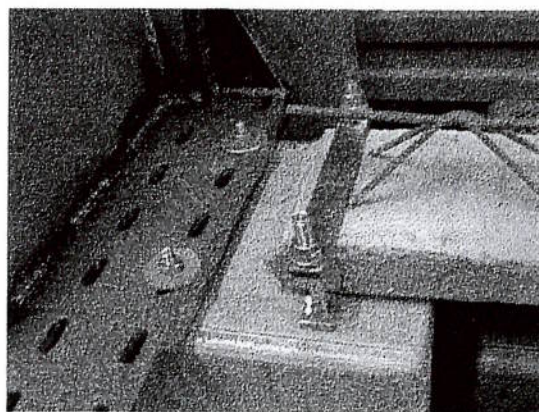


Figura 16. Detalhe do dispositivo de fixação

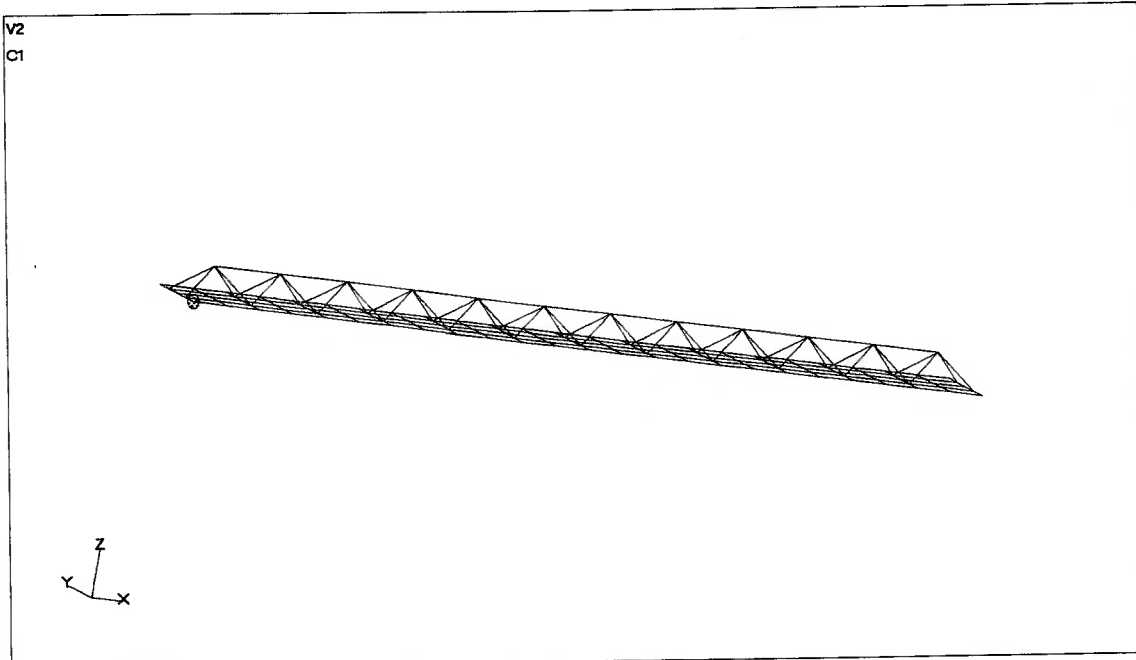


Figura 17. Perspectiva da discretização da viga de concreto armado.

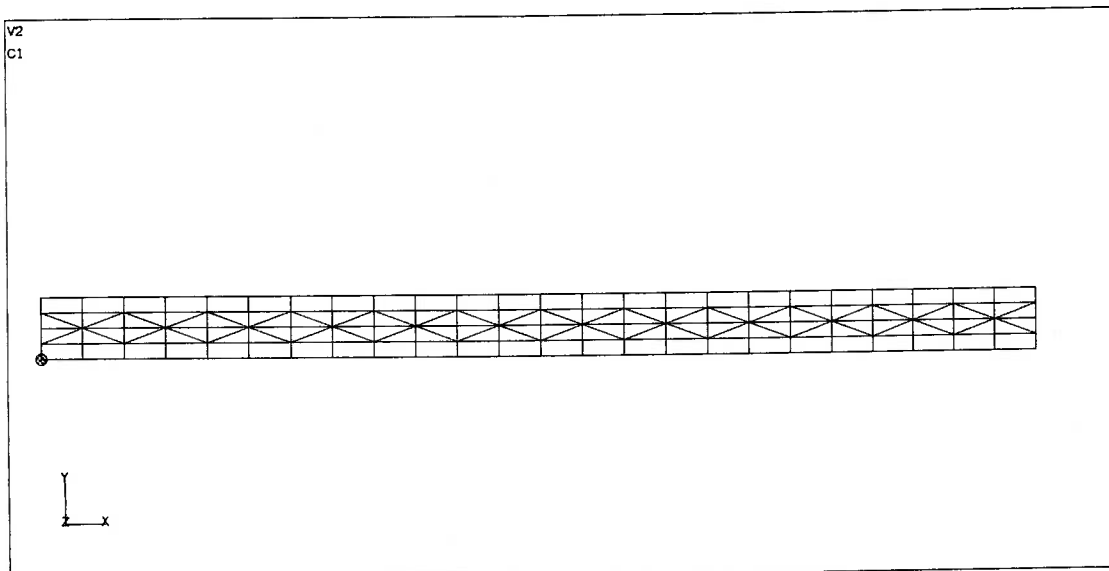


Figura 18. Discretização da viga em concreto armado vista em planta.

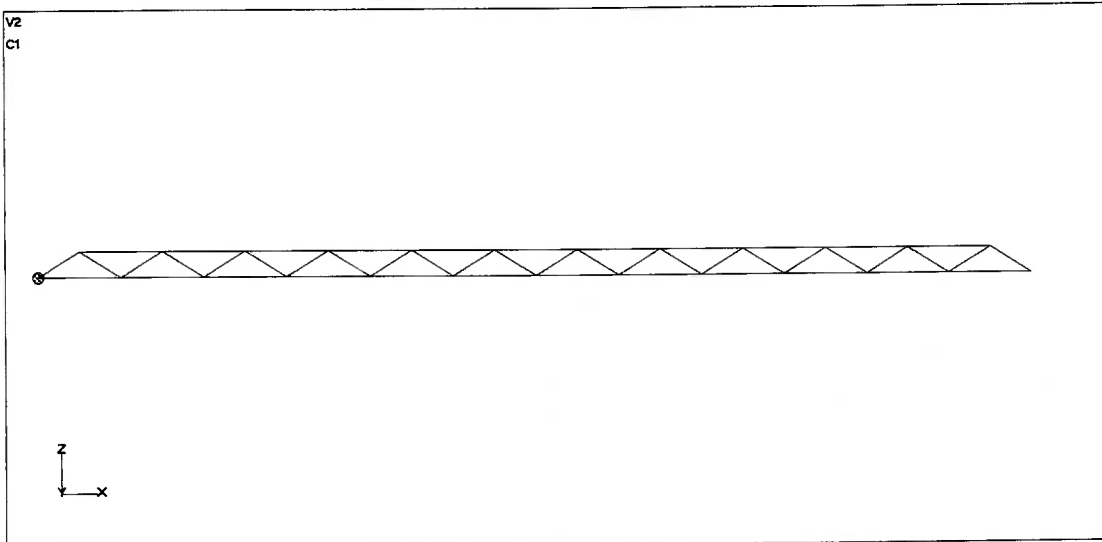


Figura 19. Discretização da viga em concreto armado em vista lateral.

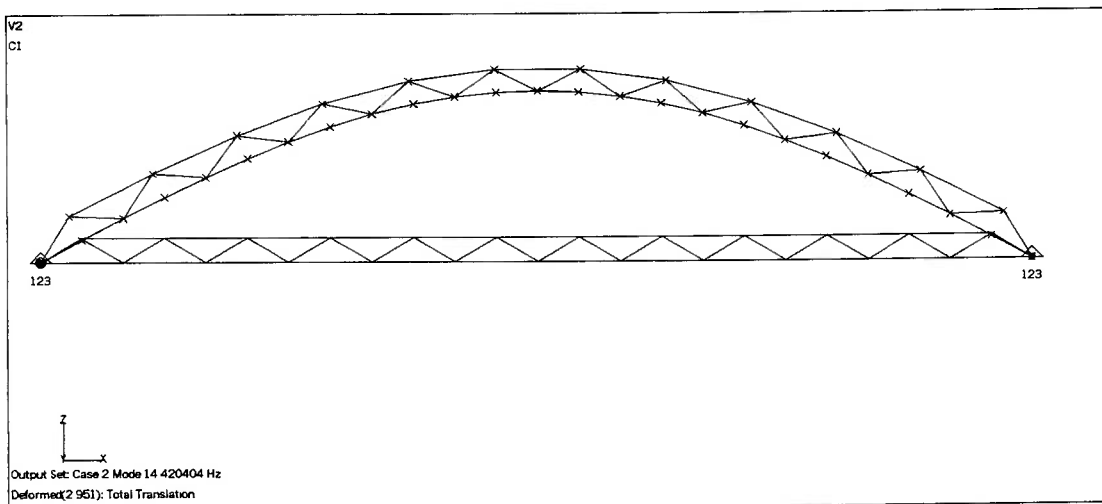


Figura 20. Primeiro modo de flexão vertical (91 rad/s)

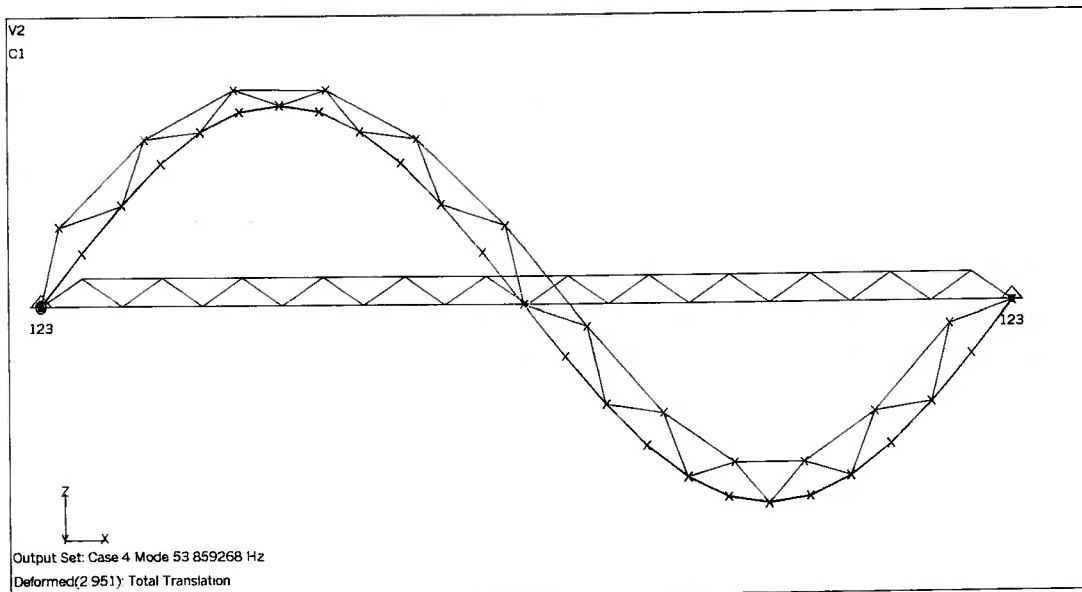


Figura 21. Segundo modo de flexão vertical (338 rad/s)

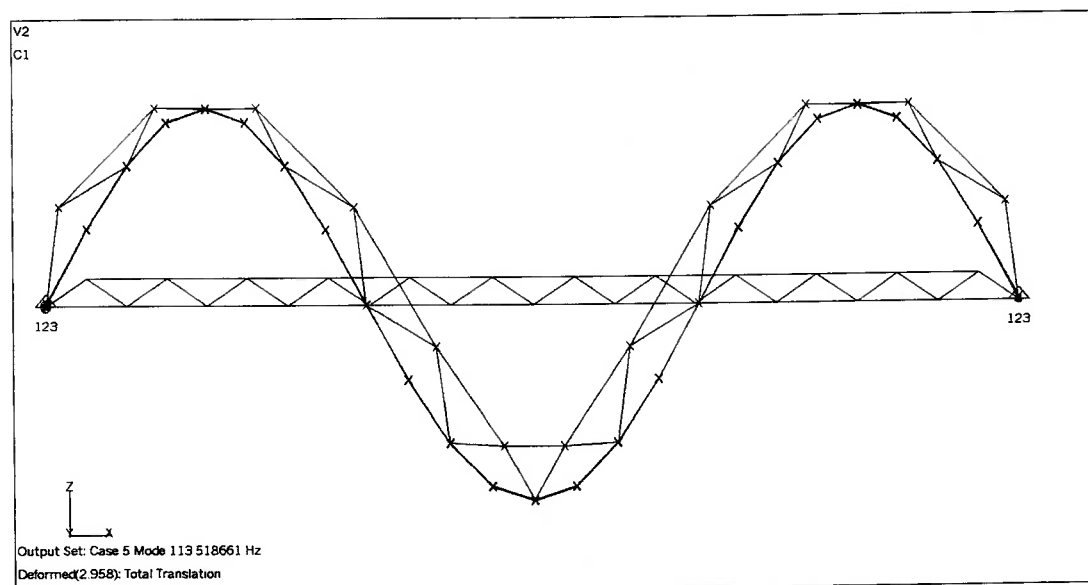


Figura 22. Terceiro modo de flexão vertical (713 rad/s)

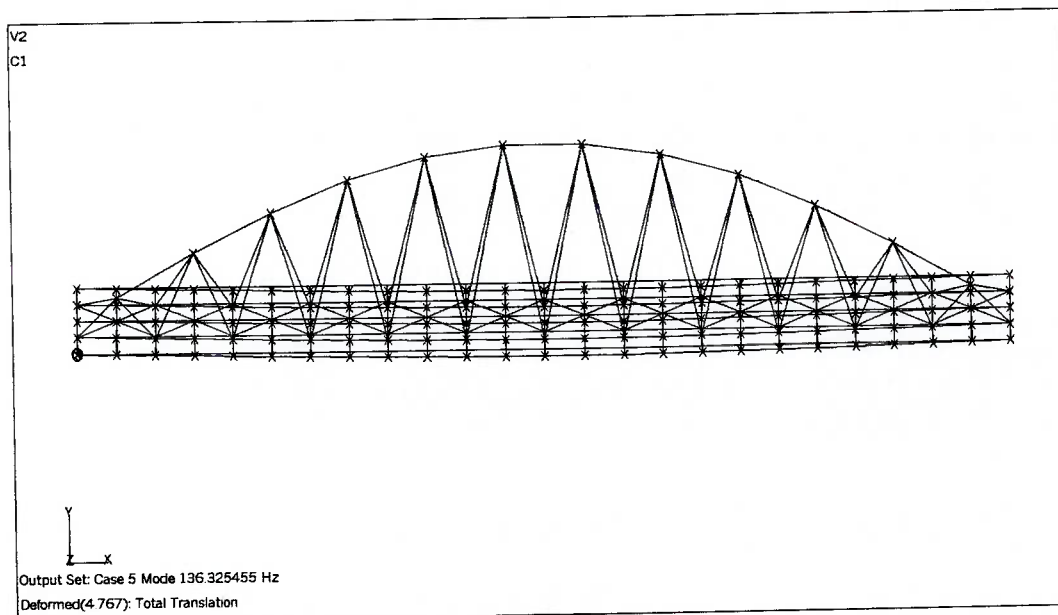


Figura 23. Primeiro modo de torção (856 rad/s).

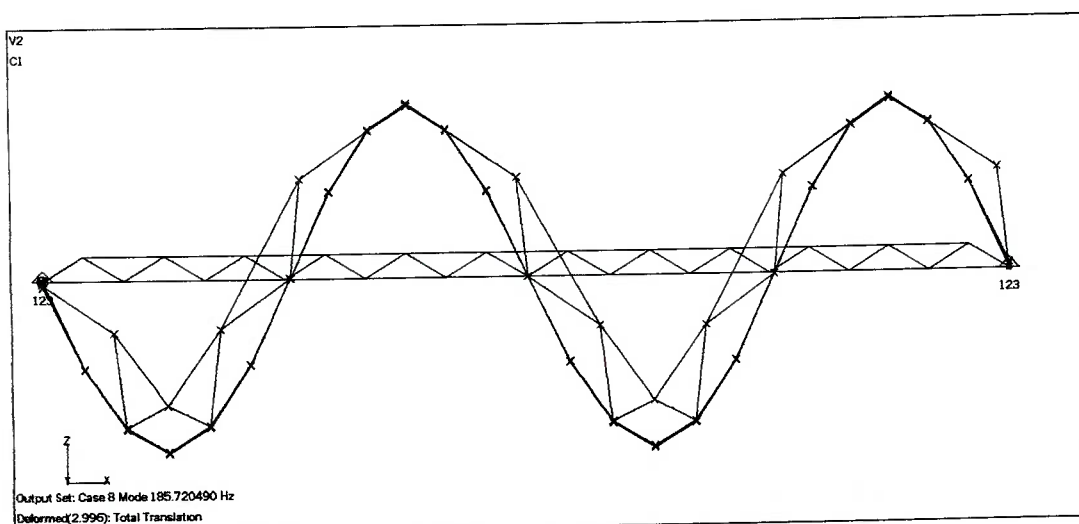


Figura 24. Quarto modo de flexão vertical (1166 rad/s)

5.5.3 Posição e tipos de sensores

Foram utilizados quatro acelerômetros piezelétricos PCB, colados na parte inferior da viga nas posições 1, 2, 3 e 4, cujas abscissas são 0.46 m – 0.88 m – 1.28 m e 1.67 m a partir do apoio esquerdo, ver figuras 13, 14 e 25. A escolha dessas posições foi feita evitando-se os nós de deslocamentos nulos dos primeiros modos de vibrar, ver figuras 20 a 24.

5.5.4 Geração da excitação impulsiva

A excitação impulsiva será gerada por um martelo Bruel & Kjaer modelo 8202 com uma célula de carga B&K modelo 8200 na ponta, ver figura 26. O martelo aplica um pulso de intensidade de aproximadamente 70 N e excita até 560 Hz.

5.5.5 Excitação aleatória

Para a excitação aleatória de uma carga móvel utilizou-se um carrinho composto de uma haste uma roda e uma massa de 2.0 kg, ver figuras 27 e 28.

Para a excitação aleatória de uma carga do tipo ruído branco usou-se o equipamento Amplificador de Excitação da Philips modelo GM5535, ver figura 29.

5.5.6 Taxa de amostragem

Da análise modal por elementos finitos obteve-se a frequência do quarto modo de flexão igual a 186 Hz e portanto o sinal analógico será convertido para sinal digital com uma taxa de amostragem de 5000 S/s.

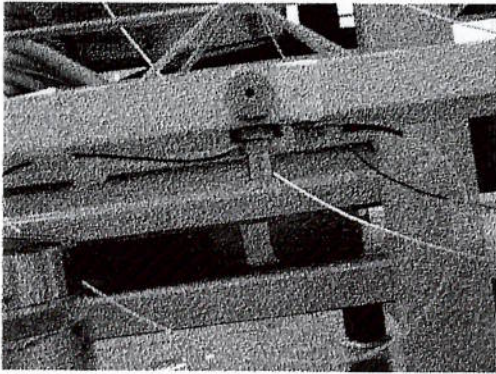


Figura 25. Detalhe da localização dos acelerômetros.

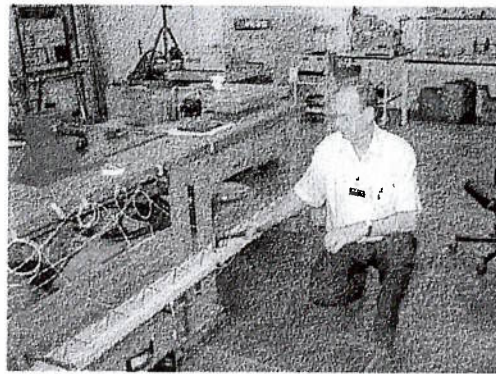


Figura 26. Aplicação da excitação impulsiva

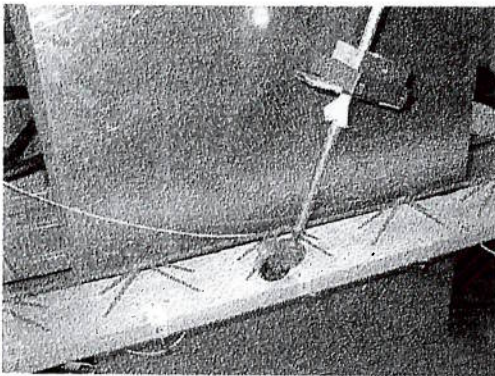


Figura 27. Carga móvel sobre a viga.

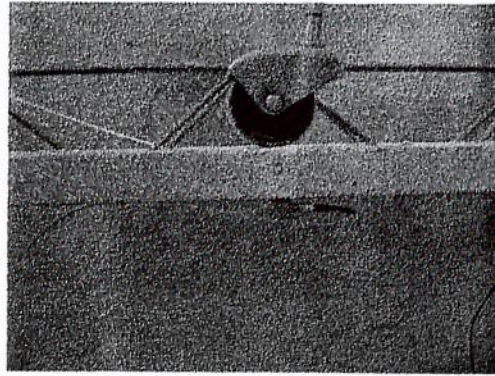


Figura 28. Detalhe da roda da carga móvel.

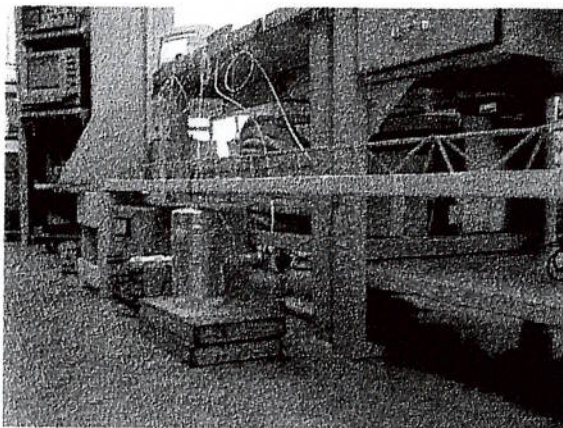


Figura 29. Vista do excitador aleatório tipo ruído branco .

5.5.7 Tempo de amostragem

O tempo de amostragem foi determinado através das simulações numéricas onde se verificou que a técnica Randomdec requer longos períodos de amostragem, da ordem de 10 segundos, ver seção 6.2.2.2.

Para a excitação impulsiva foi aplicado o martelo quatro vezes, e para cada aplicação foram registrados 5.000 instantes de tempo, o equivalente a 1 segundo de gravação para cada aplicação.

Para a excitação de carga móvel, passou-se o carrinho (haste + roda + massa), oito vezes, e para cada passagem foram registrados 25.000 instantes de tempo, o equivalente a 5 segundos de gravação para cada passagem.

Para a excitação aleatória do tipo ruído branco, utilizou-se o Atuador Eletromagnético seis vezes, e para cada utilização foram registrados 50.000 instantes de tempo, o equivalente a 10 segundos de gravação para cada utilização.

5.5.8 Dispositivos de condicionamento, conversão A/D e armazenamento de sinais

Para a aquisição dos dados utilizou-se um Lap-Top Toshiba Satellite 2060 CDS com uma placa PMCIA para oito canais simultâneos. O software utilizado foi o LABVIEW 4 Version 4.0.1 Graphical Programming for Instrumentation National Instruments.

Os sinais dos acelerômetros piezelétricos PCB modelos 333A32 e 333A31 foram amplificados pelo Alimentador Amplificador PCB modelo 482A16 com um ganho de 10x, ver os equipamentos nas figuras 30 a 33.

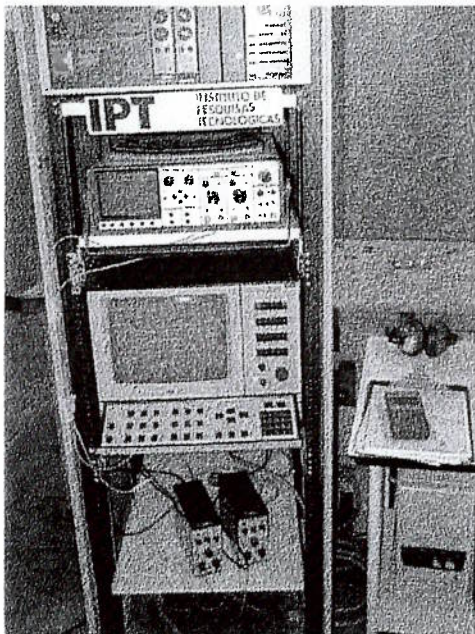


Figura 30. Aparelho analisador das frequências

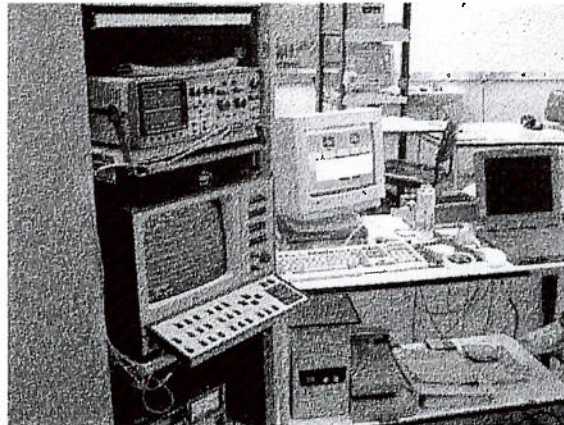


Figura 31. Aparelhos acoplados ao programa STAR

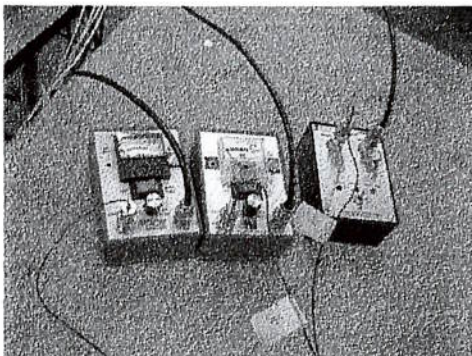


Figura 32. Alimentadores e amplificadores

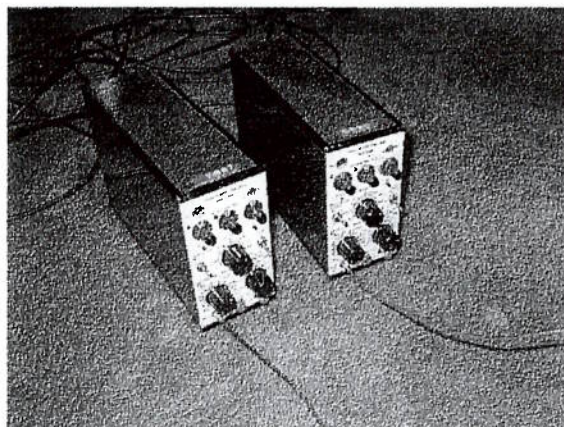


Figura 33. Alimentadores e amplificadores

6 Resultados das simulações numéricas

6.1 Sistema mola-massa (parâmetros concentrados)

Foram gerados por simulação numérica, para um sistema com parâmetros concentrados e dois graus de liberdade, três casos de frequências naturais e fatores de amortecimento. Cada caso tem uma série temporal de 2000 valores de deslocamentos e velocidades com uma taxa de amostragem igual a 1/500 s. Os deslocamentos são mostrados nas figuras 34 a 39. Para cada caso foi aplicado o algoritmo *Molamas1* e o algoritmo *Molamas2*.

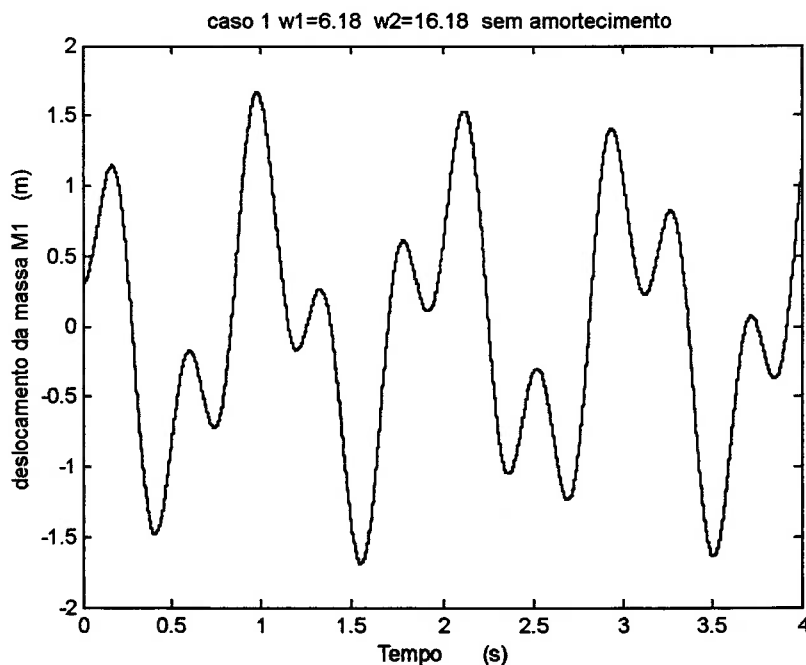


Figura 34. Deslocamentos da massa M1 para o caso 1 (sem amortecimento).

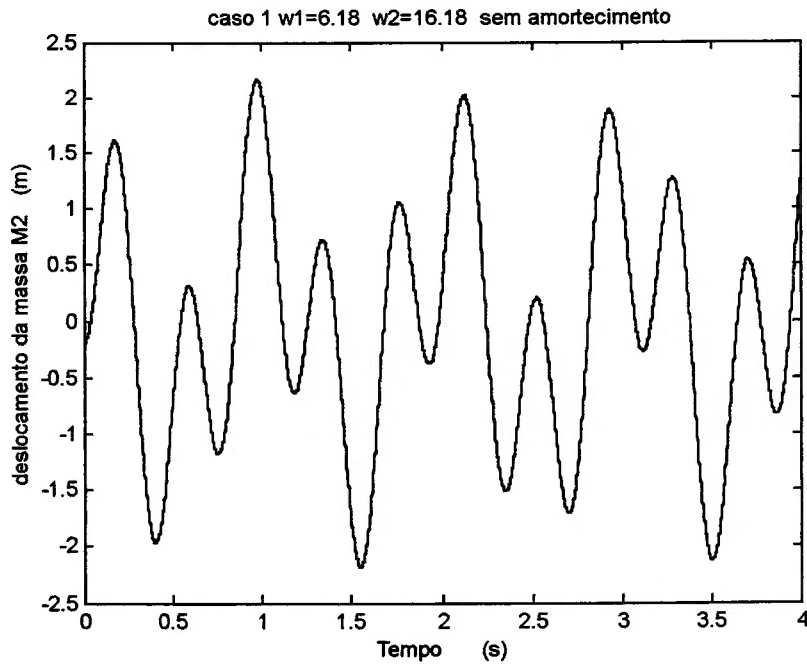


Figura 35. Deslocamentos da massa M2 para o caso 1 (sem amortecimento).

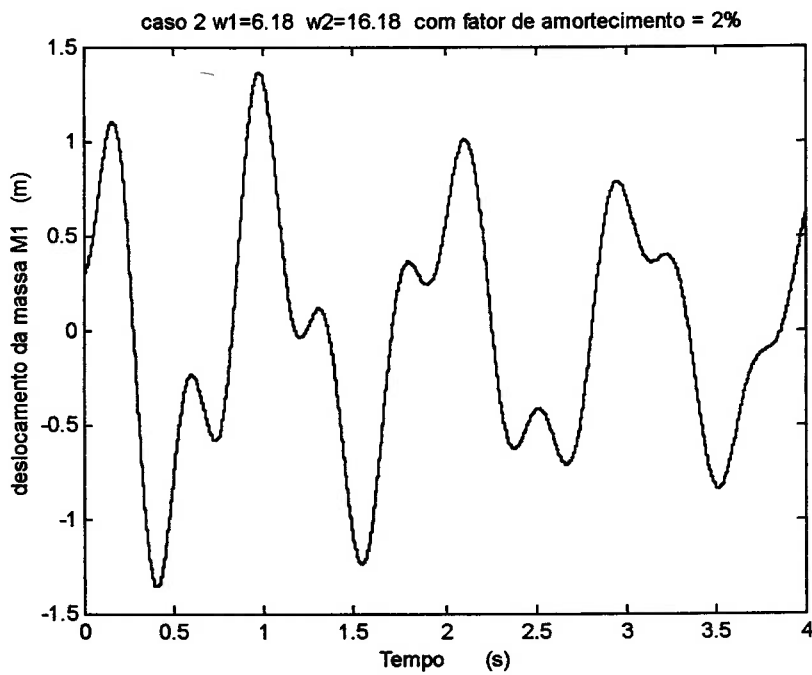


Figura 36. Deslocamentos da massa M1 para o caso 2 (amortecimento 2%).

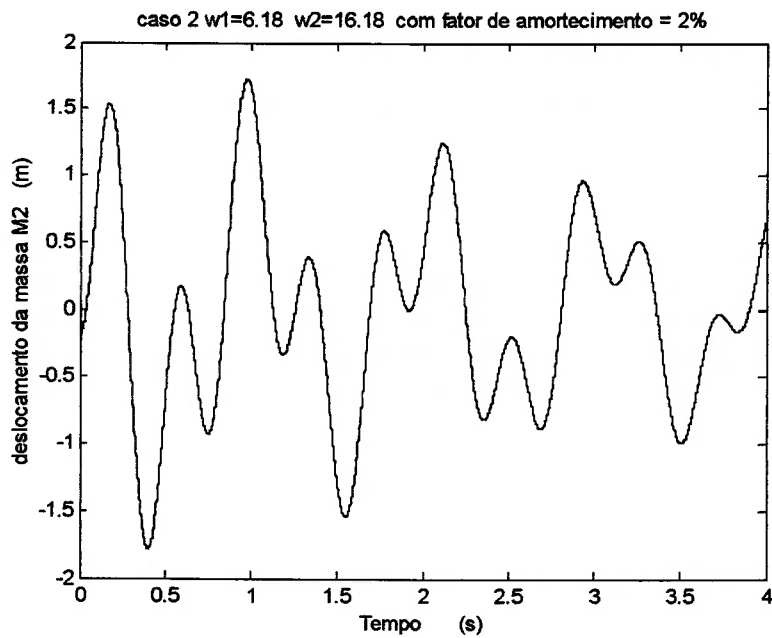


Figura 37. Deslocamentos da massa M2 para o caso 2 (amortecimento 2%).

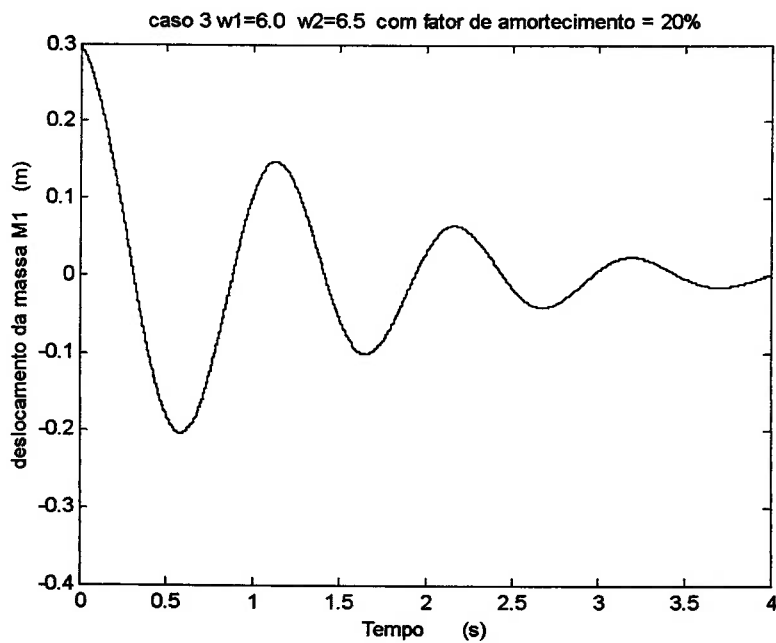


Figura 38. Deslocamentos da massa M1 para o caso 3 (amortecimento 20%).

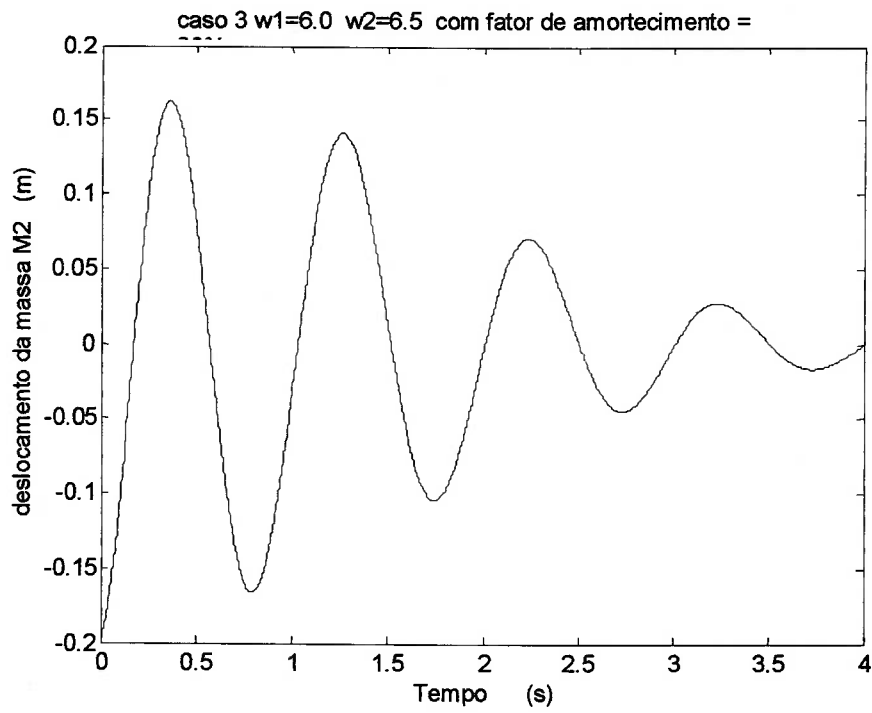


Figura 39. Deslocamentos da massa M2 para o caso 3 (amortecimento 20%).

Tabela 1. Análise modal do sistema mola – massa. Estimação das frequências naturais pela aplicação do ITD.

Caso	Frequência / Fator de amortecimento	Estimação pelo ITD (1)	Estimação pelo ITD (2)	Valor Teórico
1	ω_1	6.18 (50)	6.18 (4)	6.18
1	ω_2	16.18	16.18	16.18
1	ζ_1	0.00	0.00	0.00
1	ζ_2	0.00	0.00	0.00
2	ω_1	6.18 (50)	6.18 (10)	6.18
2	ω_2	16.18	16.18	16.18
2	ζ_1	0.02	0.02	0.02
2	ζ_2	0.02	0.02	0.02
3	ω_1	6.11 (50)	6.11 (10)	6.00
3	ω_2	6.63	6.63	6.50
3	ζ_1	0.20	0.20	0.20
3	ζ_2	0.20	0.20	0.20

Para a estimação dos valores das frequências naturais e dos fatores de amortecimento o algoritmo *Molamas1*, ITD(1), usando apenas os deslocamentos, necessita de 50 instantes de tempo, e o algoritmo *Molamas2*, ITD(2), usando os deslocamentos e as velocidades, necessita de 4 instantes de tempo para o caso 1 e de 10 instantes de tempo para os casos 2 e 3.

Em simulação numérica o método ITD sem Randomdec identificou satisfatoriamente frequências muito próximas.

6.2 Sistema distribuído. Viga bi-apoiada

6.2.1 Excitação impulsiva

6.2.1.1 Deslocamentos

Foram gerados, por simulação numérica, gráficos de deslocamento no tempo de uma viga bi-apoiada resultante de excitação impulsiva num intervalo de tempo de 1.8 segundos. Foi admitido um fator de amortecimento de 3% nos dois primeiros modos. Os deslocamentos são apresentados nas figuras 40 a 43. A malha de elementos finitos, contendo os nós relevantes nas figuras 40 a 43, está representada na figura 3.

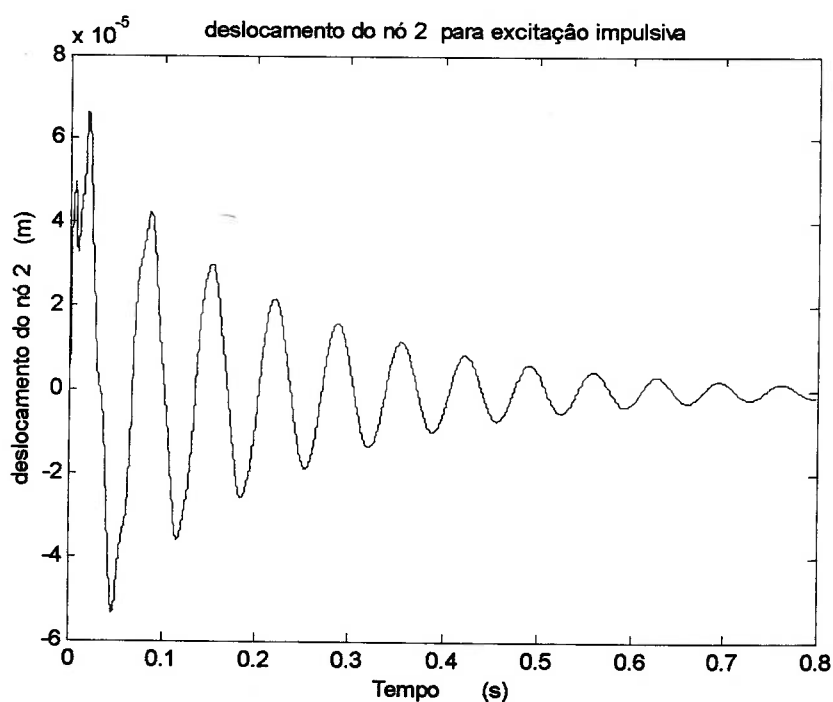


Figura 40. Deslocamento do nó 2 decorrente de excitação impulsiva

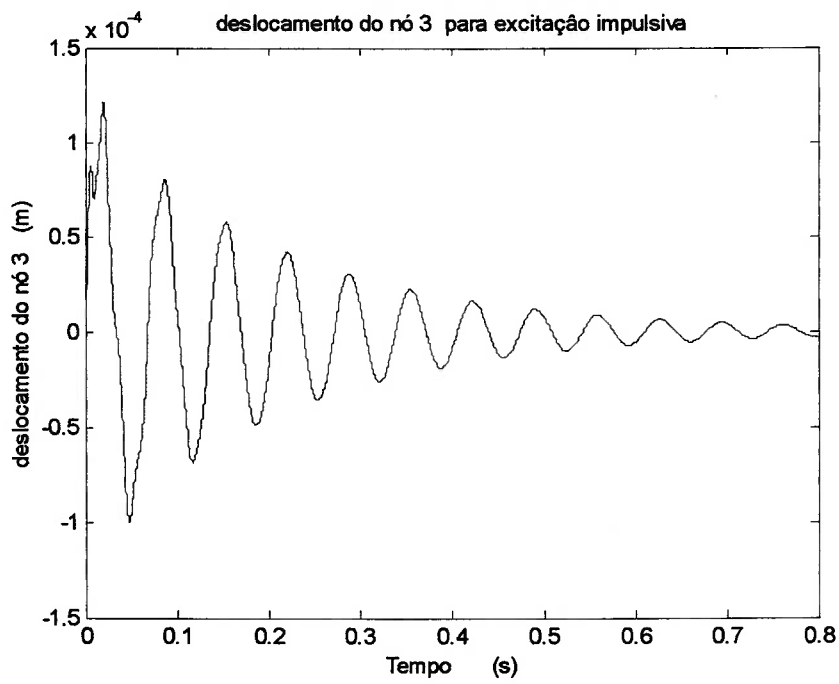


Figura 41. Deslocamento do nó 3 decorrente de excitação impulsiva

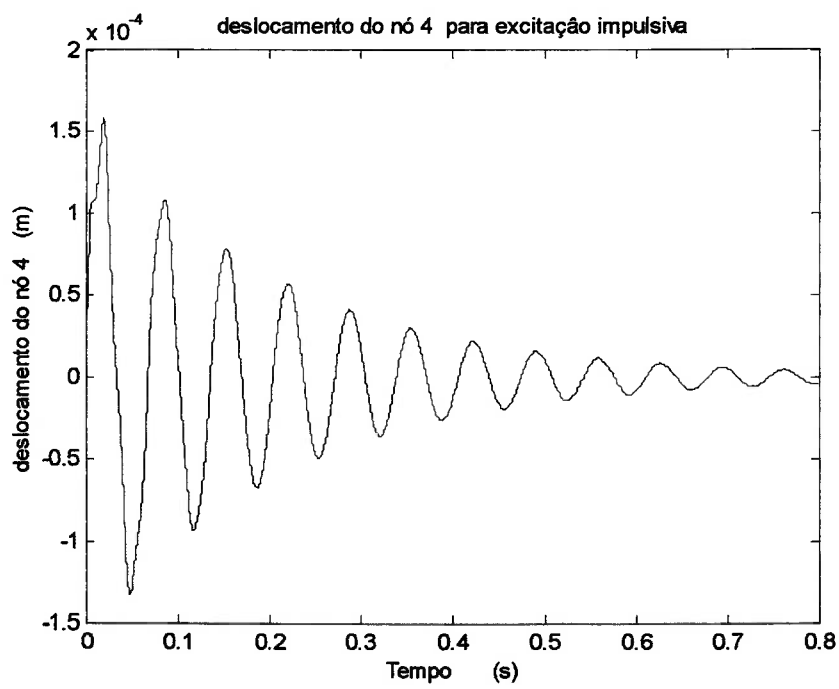


Figura 42. Deslocamento do nó 4 decorrente de excitação impulsiva

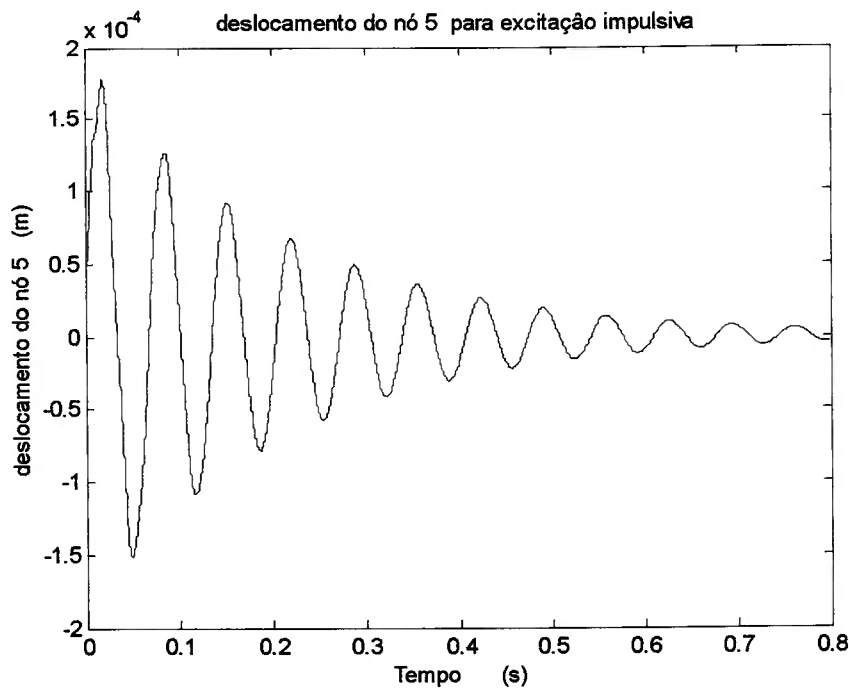


Figura 43. Deslocamento do nó 5 decorrente de excitação impulsiva

6.2.1.2 Aplicação do ITD

Antes de utilizar os deslocamentos das figuras 40 a 43 no ITD convém filtrar nos sinais de deslocamento as componentes de deslocamento relativos a modos de vibrar acima do quarto modo. Foi aplicado um filtro passa-baixa com frequência de corte acima de 1500 rad/s, ou seja, um pouco acima da quarta frequência natural de vibração da estrutura. Nas figuras 44 a 47 apresentam-se os deslocamentos, já filtrados, decorrentes de excitação impulsiva.

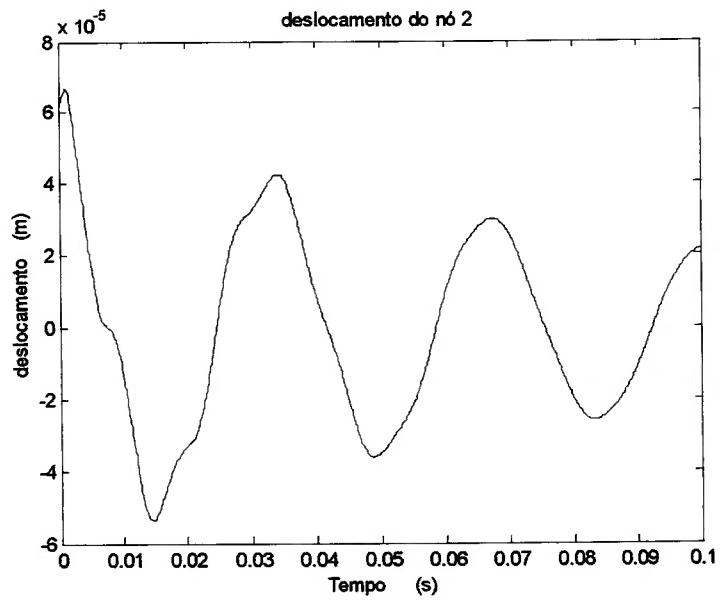


Figura 44. Deslocamento filtrado do nó 2 decorrente de excitação impulsiva.

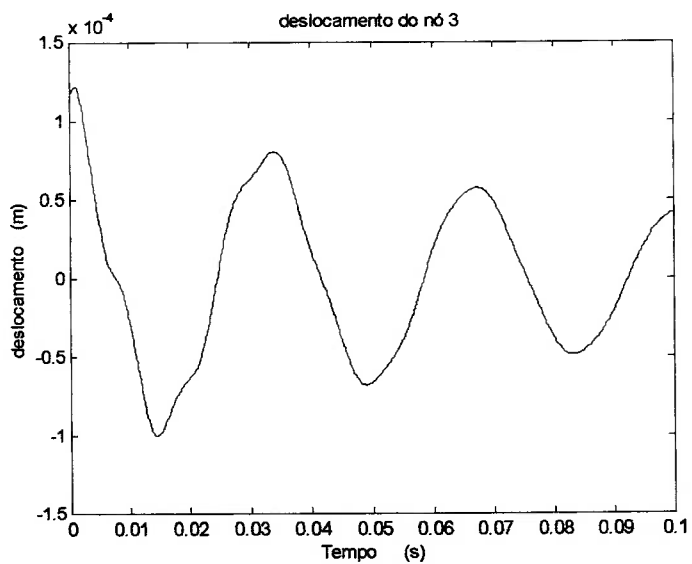


Figura 45. Deslocamento filtrado do nó 3 decorrente de excitação impulsiva.

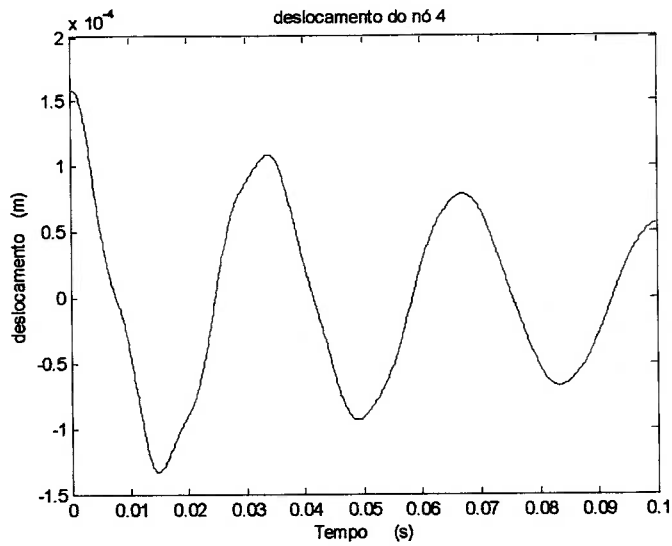


Figura 46. Deslocamento filtrado do nó 4 decorrente de excitação impulsiva.

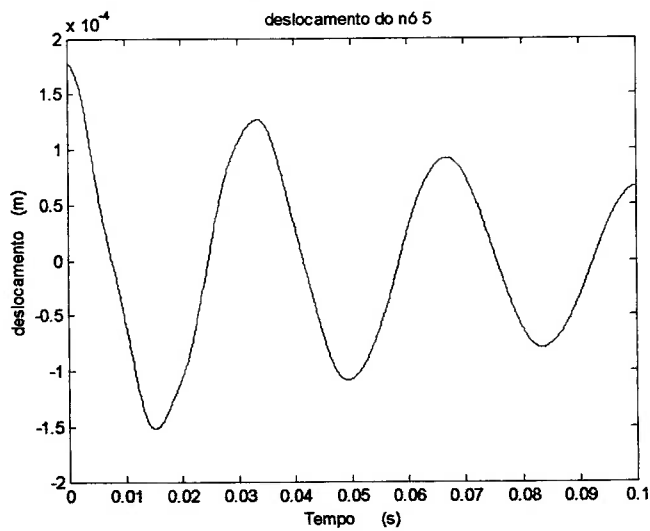


Figura 47. Deslocamento filtrado do nó 5 decorrente de excitação impulsiva.

6.2.1.3 Tabela dos parâmetros modais

Na tabela 2 apresentam-se as freqüências naturais e os fatores de amortecimento estimados através do ITD quando a excitação é impulsiva.

Tabela 2. Estimativas das freqüências naturais e fatores de amortecimento de uma viga bi-apoiada pelo método do ITD utilizando excitação impulsiva.

Parâmetros modais	Estimação pelo ITD1	Estimação pelo ITD2	Valores do modelo
freqüência ω_1	93 (150)	93 (150)	93
freqüência ω_2	374	374	371
freqüência ω_3	845	845	835
freqüência ω_4	1450	1451	1481
Fator amort. ζ_1	0.036	0.031	0.030
Fator amort. ζ_2	0.031	0.029	0.030
Fator amort. ζ_3	0.065	0.065	-
Fator amort. ζ_4	0.032	0.032	-

Utilizaram-se 0.03 segundos da resposta livre para estimar os parâmetros modais da viga. O método ITD foi utilizado em duas implementações distintas. O algoritmo ITD1 utiliza apenas sinais de deslocamento. O algoritmo ITD2 utiliza sinais de deslocamento e velocidade.

6.2.1.4 Modos identificados

Nas figuras 48 a 51 apresentam-se os quatro primeiros modos estimados pelo método do ITD na simulação numérica da viga bi-apoiada sujeita à excitação impulsiva.

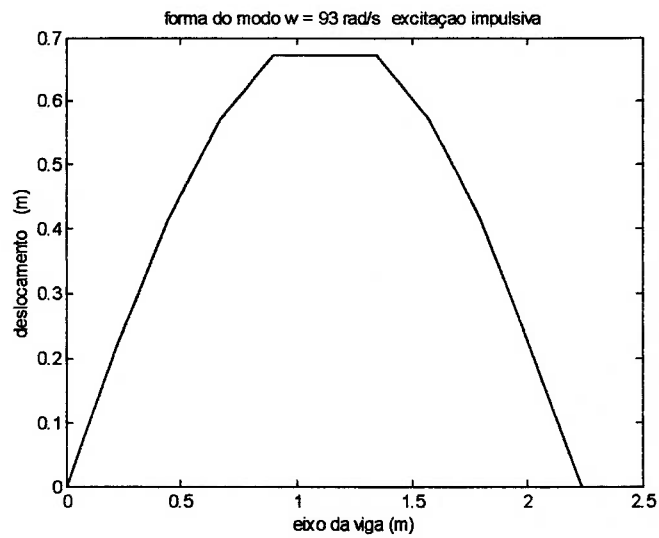


Figura 48. Primeiro modo decorrente de excitação impulsiva.

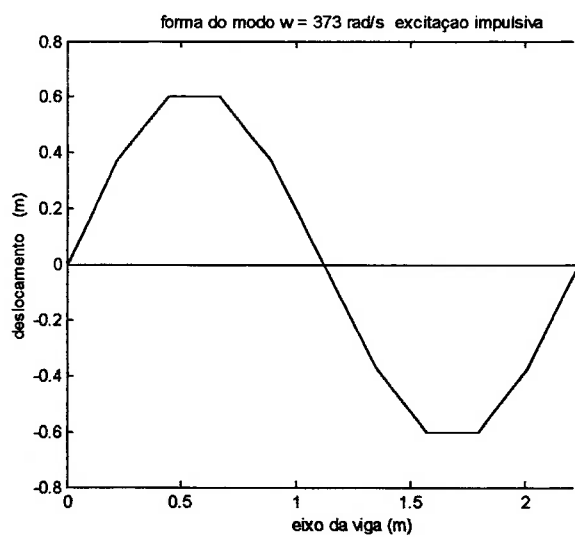


Figura 49. Segundo modo decorrente de excitação impulsiva

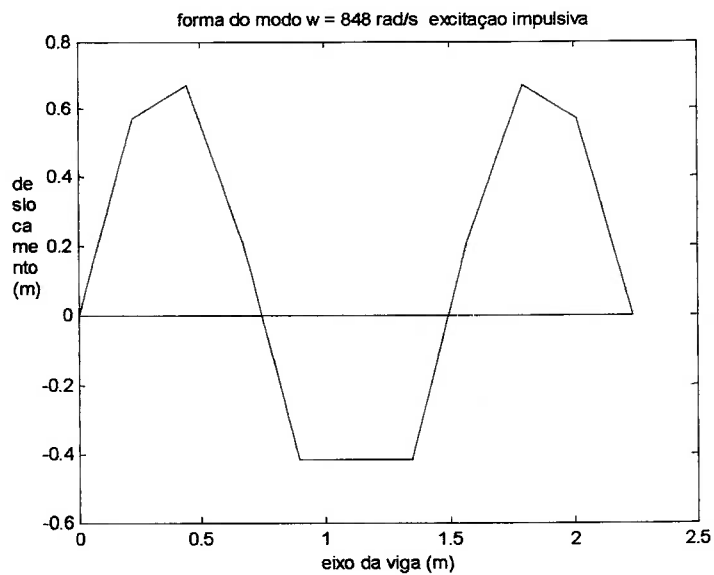


Figura 50. Terceiro modo decorrente de excitação impulsiva

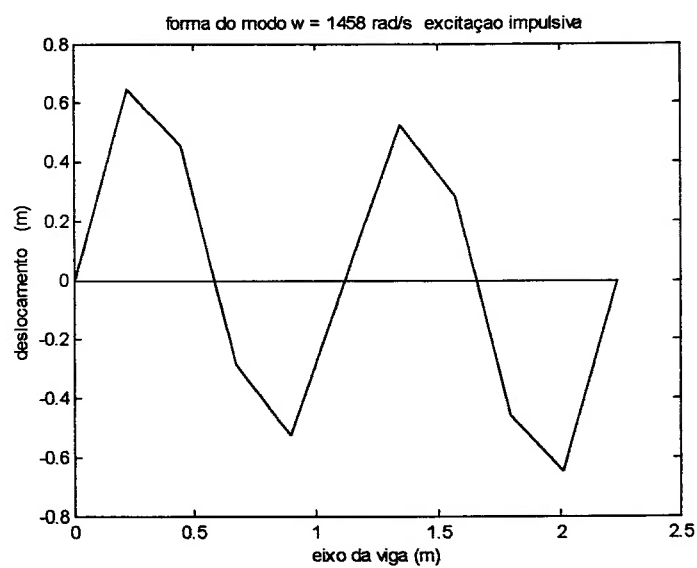


Figura 51. Quarto modo decorrente de excitação impulsiva

6.2.2 Excitação aleatória

6.2.2.1 Deslocamentos

Uma série temporal aleatória com distribuição normal média nula e desvio padrão unitário, gerada pela rotina *RANDN* do Matlab, foi utilizada como carregamento vertical no nó 5 do modelo de elementos finitos representado na figura 3. A série calculada compreende 28s e o intervalo de tempo foi de 2×10^{-4} s. O deslocamento de alguns nós são apresentados nas figuras 52 a 55.

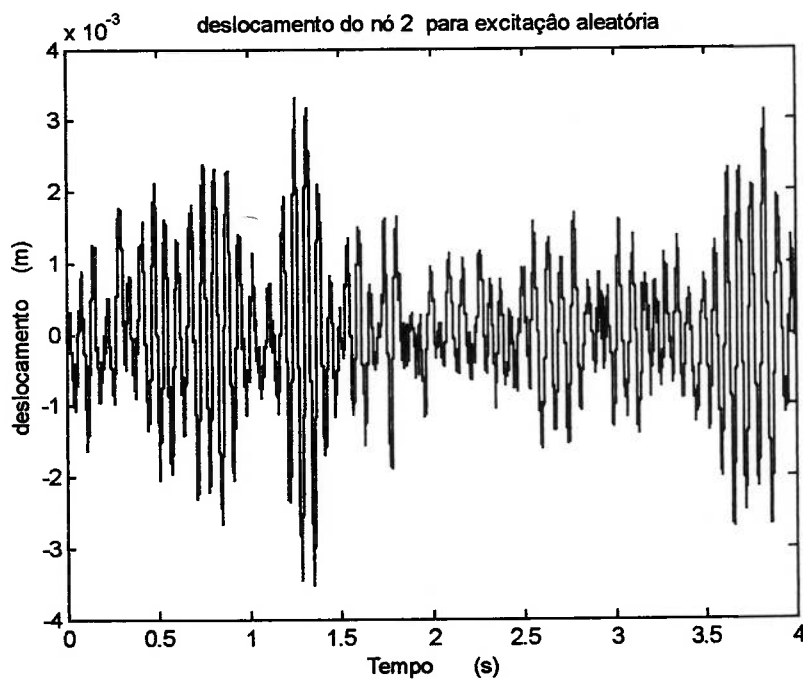


Figura 52. Deslocamento do nó 2 decorrente de excitação aleatória (parcial).

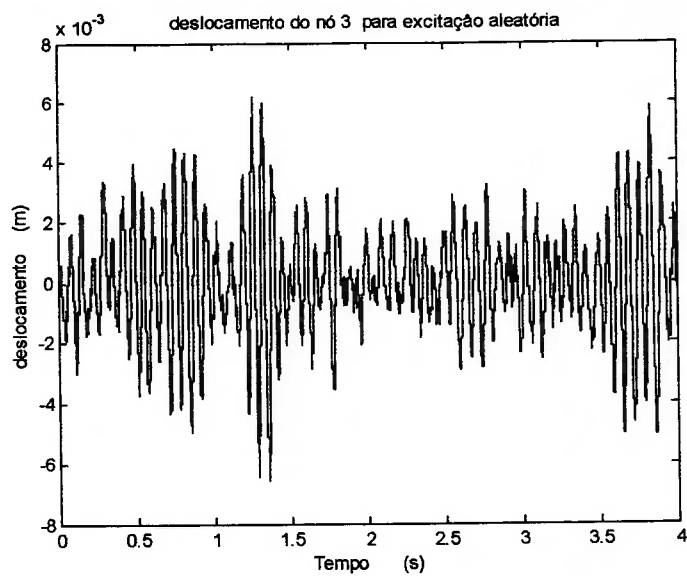


Figura 53. Deslocamento do nó 3 decorrente de excitação aleatória (parcial).

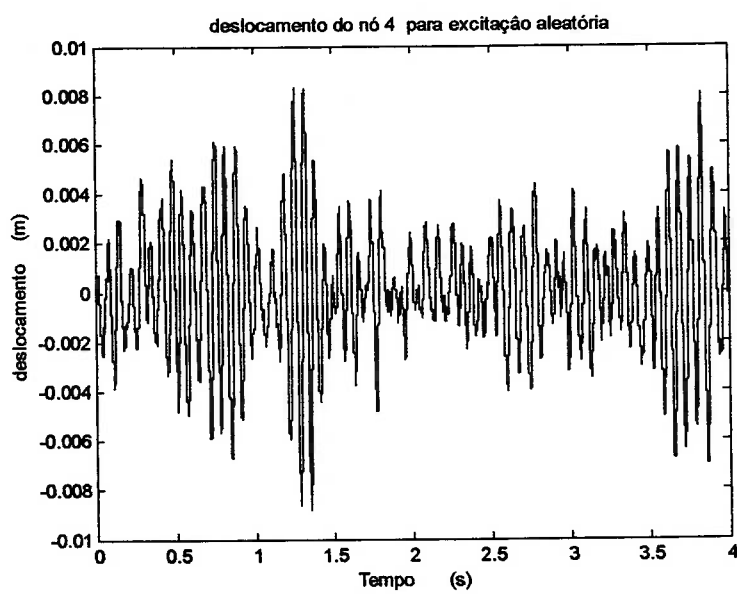


Figura 54. Deslocamento do nó 4 decorrente de excitação aleatória (parcial).

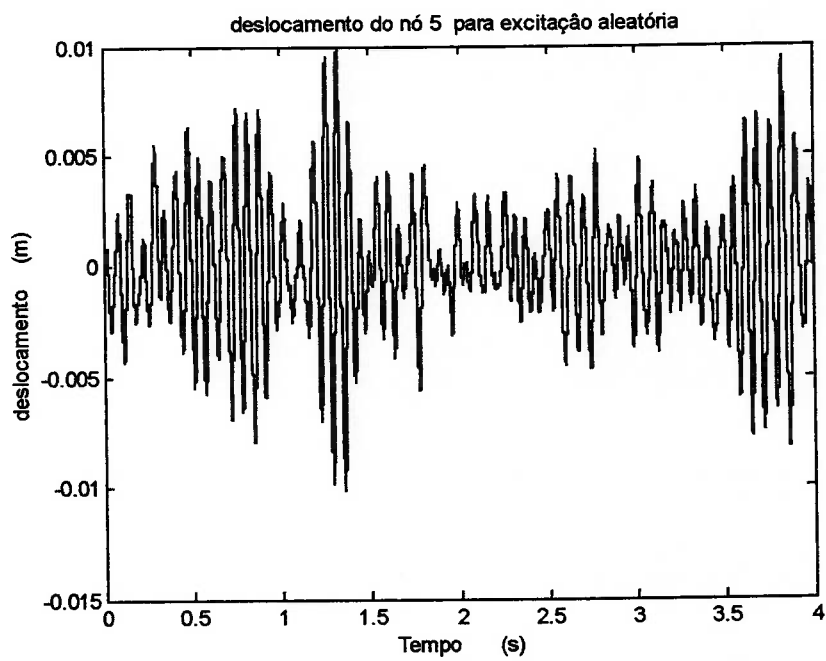


Figura 55. Deslocamento do nó 5 decorrente de excitação aleatória (parcial).

6.2.2.2 Aplicação da técnica Randomdec

Os deslocamentos do nó 5 são usados para definir os trechos para a aplicação da técnica Randomdec. Cada trecho tem início num pico de deslocamento do nó 5 dentro do intervalo do deslocamento máximo e 30% desse valor. Para cada trecho foram tomados 300 intervalos de tempo. Na figura 56 temos um detalhe parcial dos inícios desses trechos. A média dos 128 trechos assim obtidos é uma estimativa da resposta livre da estrutura, conforme nos mostram as figuras 57 a 60.

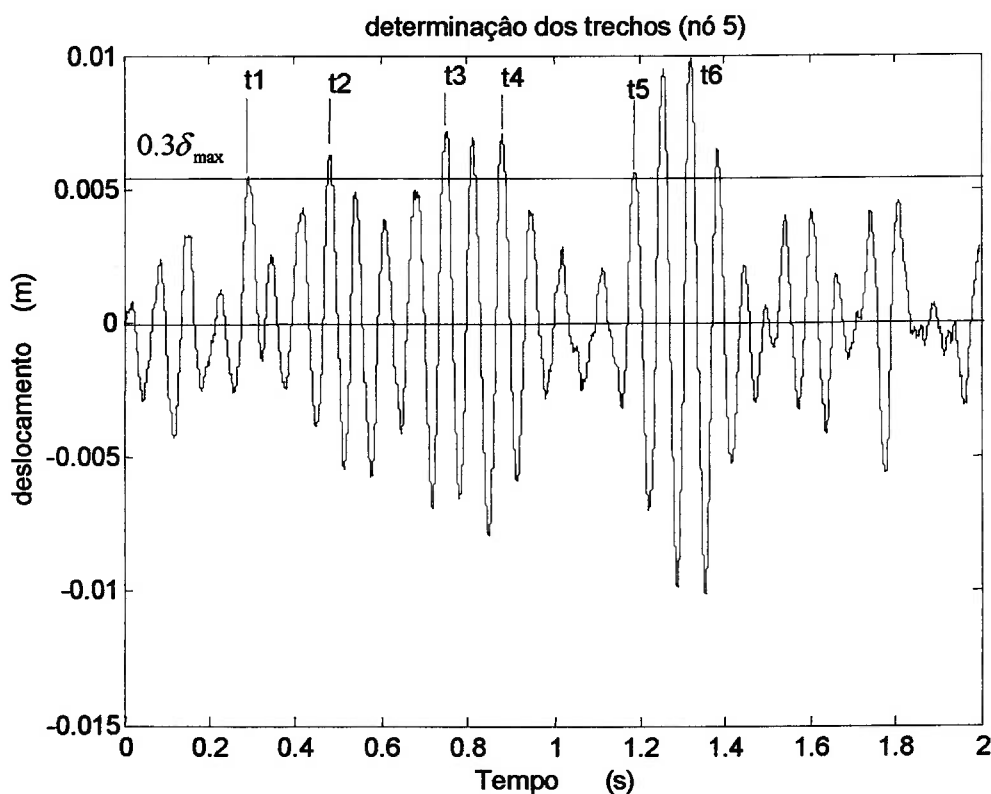


Figura 56. Deslocamento do nó de referência (nó 5), com a indicação do início de cada trecho (t1 a t6) para os picos de deslocamento entre os valores δ_{\max} e $0.3\delta_{\max}$ (intervalo parcial 0 - 2 segundos).

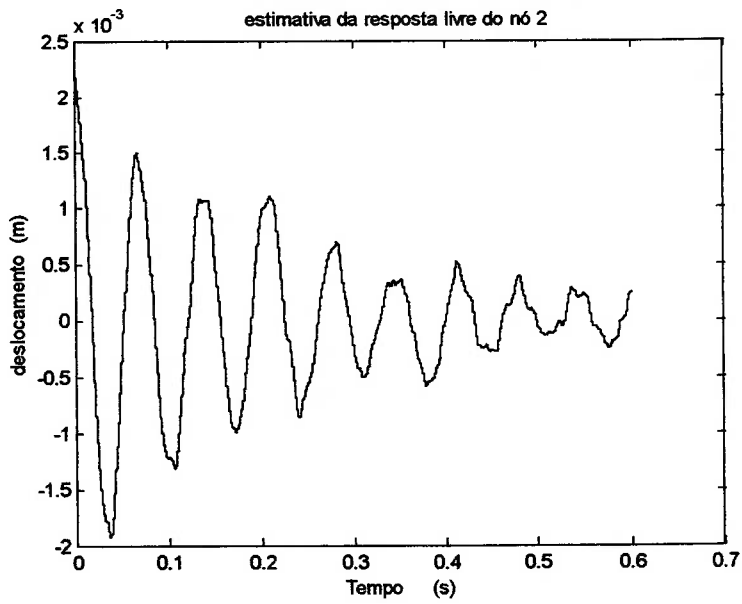


Figura 57. Estimativa de resposta livre do nó 2 decorrente de excitação aleatória (deslocamento).

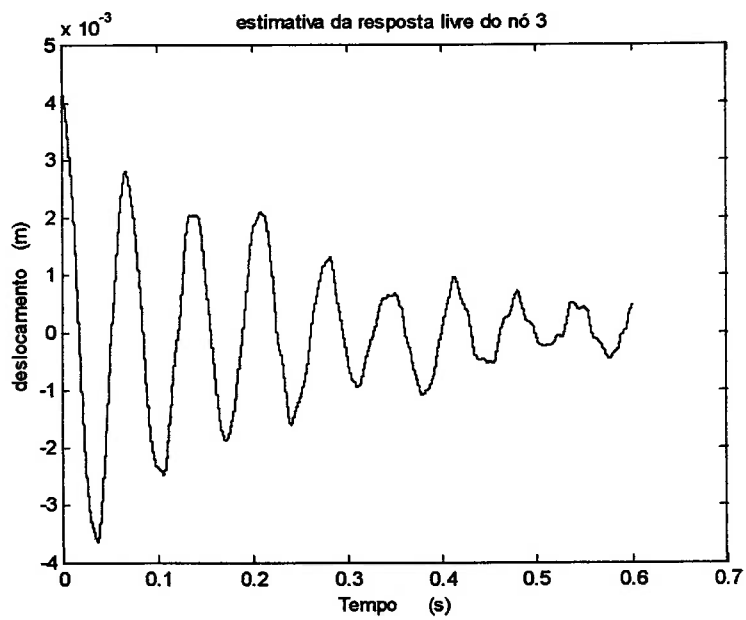


Figura 58. Estimativa de resposta livre do nó 3 decorrente de excitação aleatória (deslocamento).

6.2.2.3 Aplicação do ITD

O Método ITD utiliza a resposta livre da estrutura. A resposta livre pode ser estimada através da técnica Randomdec. Os deslocamentos proporcionais à resposta livre obtidos estão nas figuras 56 a 60. A velocidade foi obtida por derivação numérica do sinal de deslocamento. O algoritmo de derivação utilizado foi $v(t_i) = \frac{d(t_{i+1}) - d(t_i)}{\Delta t}$ onde d denota deslocamento e v velocidade.

6.2.2.4 Tabela dos parâmetros modais

Na tabela 3 apresentam-se as freqüências naturais e os fatores de amortecimento estimados através do ITD quando a excitação é aleatória.

Tabela 3. Estimativas das freqüências naturais e fatores de amortecimento de uma viga bi-apoiada pelo ITD utilizando excitação aleatória.

Parâmetros modais	Estimação pelo ITD1	Estimação pelo ITD2	Valores do Modelo
freqüência ω_1	91 (300)	92 (300)	93
freqüência ω_2	385	386	371
freqüência ω_3	722	675	835
freqüência ω_4	1445	1414	1481
Fator amort. ζ_1	0.034	0.031	0.030
Fator amort. ζ_2	0.017	0.029	0.030
Fator amort. ζ_3	0.060	0.069	-
Fator amort. ζ_4	0.014	0.013	-

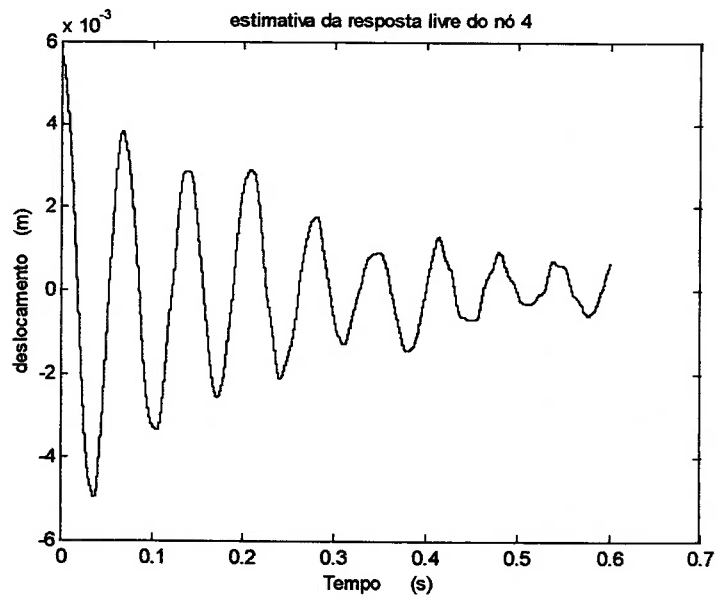


Figura 59. Estimativa de resposta livre do nó 4 decorrente de excitação aleatória (deslocamento).

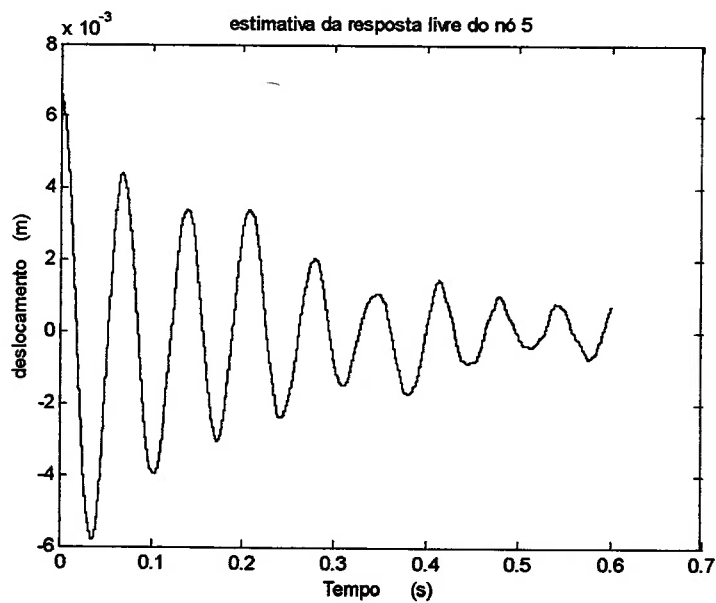


Figura 60. Estimativa de resposta livre do nó 5 decorrente de excitação aleatória (deslocamento).

Utilizaram-se 0.06 segundos da resposta livre, obtida via Randomdec, para estimar os parâmetros modais da viga. O método ITD foi utilizado em duas implementações distintas. O algoritmo ITD1 utiliza apenas sinais de deslocamento. O algoritmo ITD2 utiliza sinais de deslocamento e velocidade. A técnica Randomdec requer um volume de dados grande para estimar a resposta livre quando a excitação é aleatória. Foram necessários 108 trechos de 300 intervalos de tempo.

6.2.2.5 Modos identificados

Nas figuras 61 a 64 apresentam-se os quatro primeiros modos da viga bi-apoiada sujeita à excitação aleatória, com dados obtidos por simulação numérica.

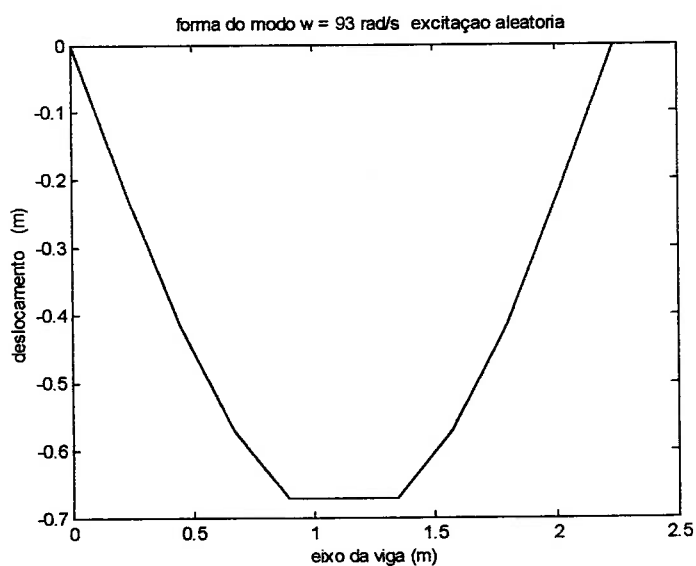


Figura 61. Primeiro modo decorrente de excitação aleatória.

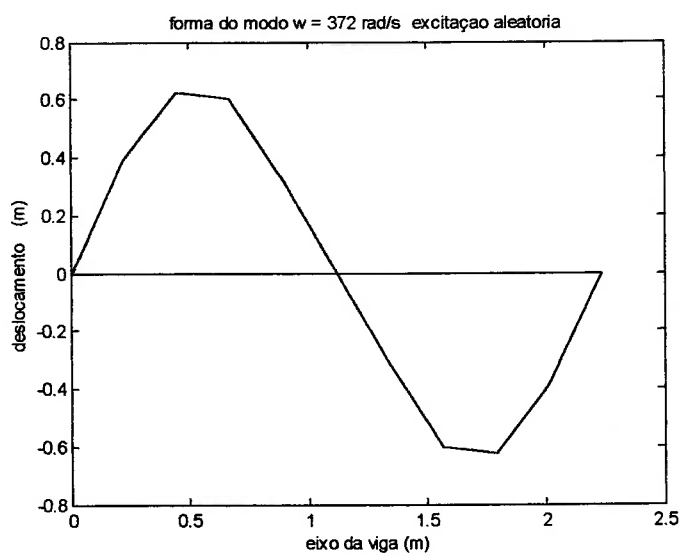


Figura 62. Segundo modo decorrente de excitação aleatória.

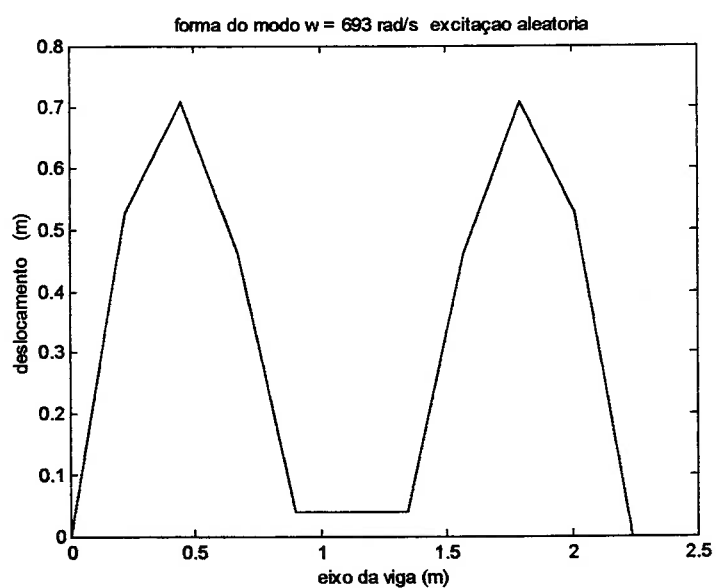


Figura 63. Terceiro modo decorrente de excitação aleatória.

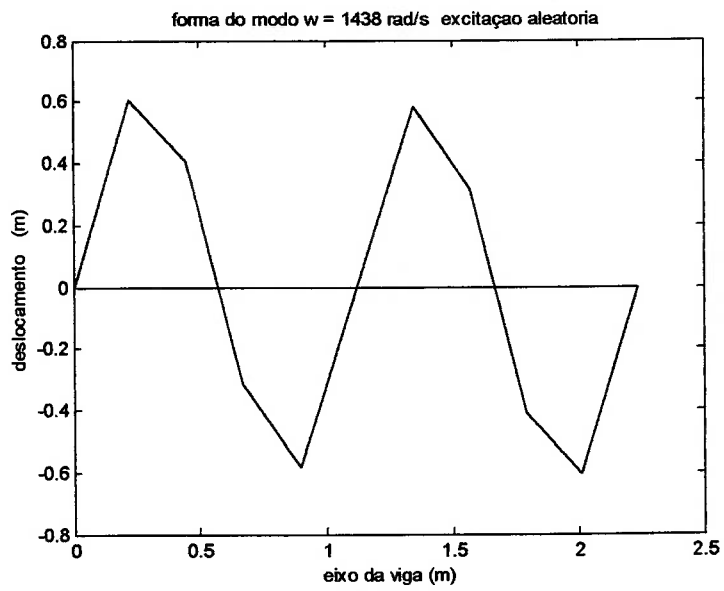


Figura 64. Quarto modo decorrente de excitação aleatória.

7 Resultados experimentais

7.1 Excitação impulsiva

7.1.1 Acelerações

Foram gravados, simultaneamente, os sinais de quatro acelerômetros. Cinco mil amostras de cada acelerômetro foram gravadas, o que equivale a 1 segundo de gravação por ensaio. O ensaio com excitação impulsiva foi repetido quatro vezes. Os sinais de aceleração estão apresentados nas figuras 65 a 68.

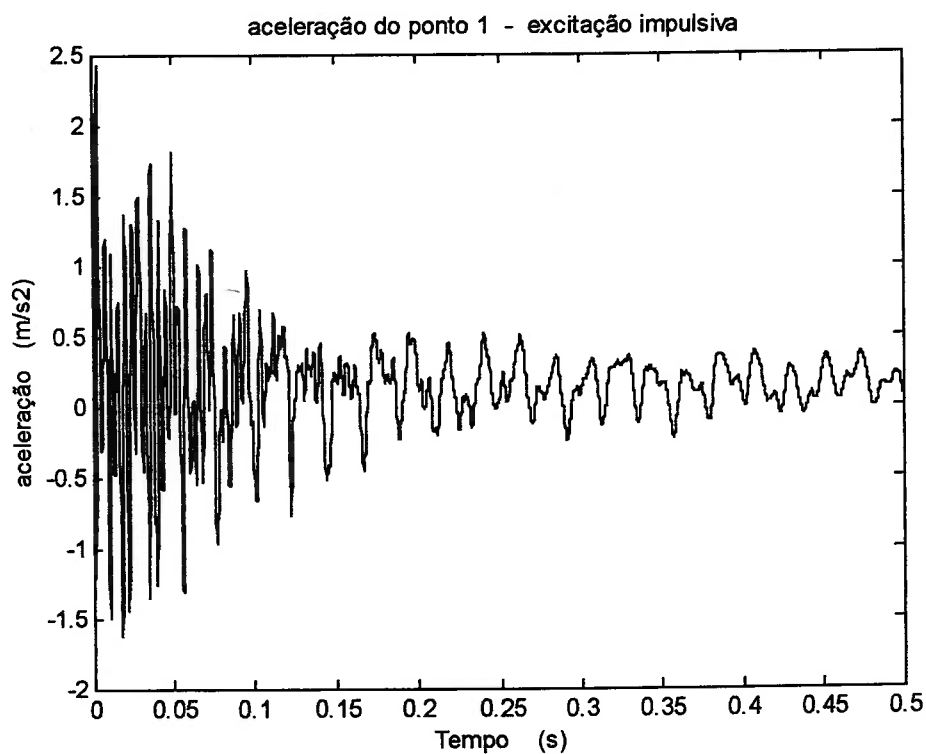


Figura 65. Aceleração do ponto 1 decorrente de excitação impulsiva

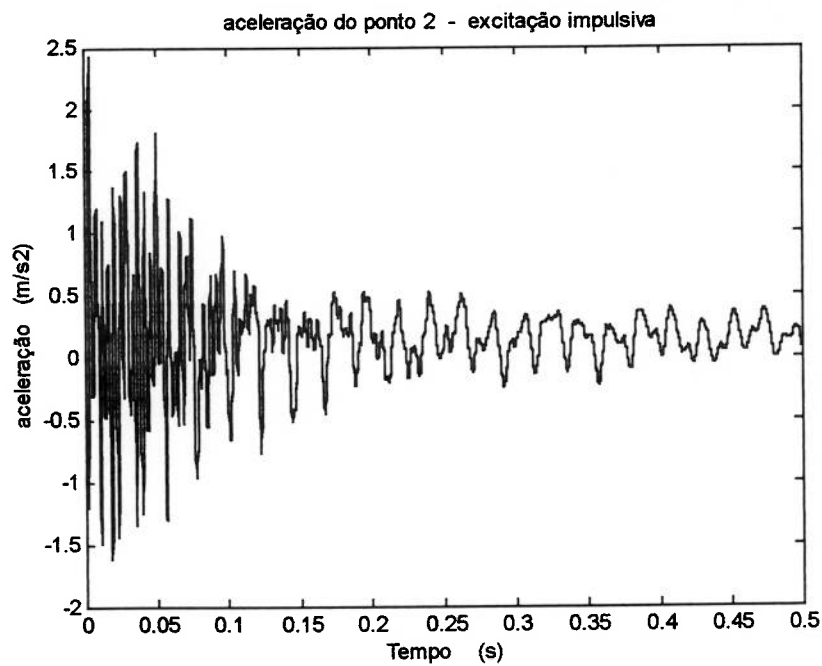


Figura 66. Aceleração do ponto 2 decorrente de excitação impulsiva

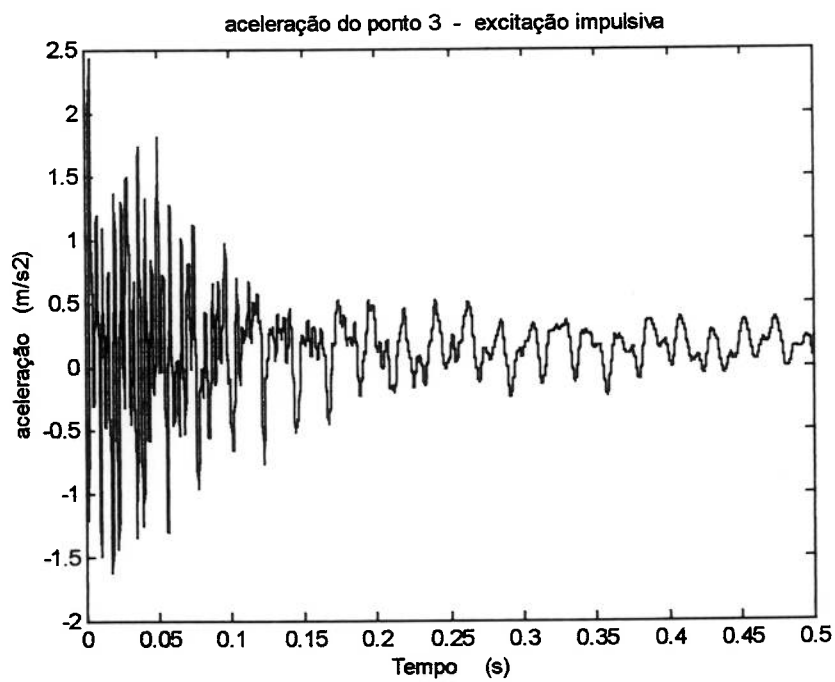


Figura 67. Aceleração do ponto 3 decorrente de excitação impulsiva

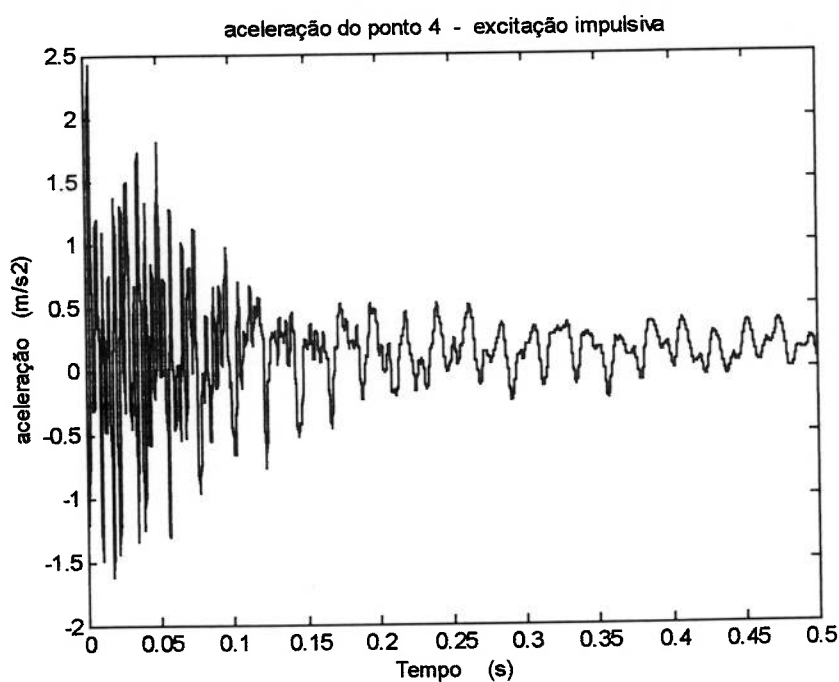


Figura 68. Aceleração do ponto 4 decorrente de excitação impulsiva

7.1.2 Aplicação do ITD

Antes de utilizar as acelerações das figuras 65 a 68 no ITD convém filtrar nos sinais de aceleração as componentes de aceleração relativas a modos de vibrar acima do sexto modo. Foi aplicado um filtro passa-baixa com frequência de corte acima de 1500 rad/s, ou seja, um pouco acima da sexta frequência natural de vibração da estrutura. Nas figuras 69 a 72 apresentam-se as acelerações, já filtradas, decorrentes de excitação impulsiva.

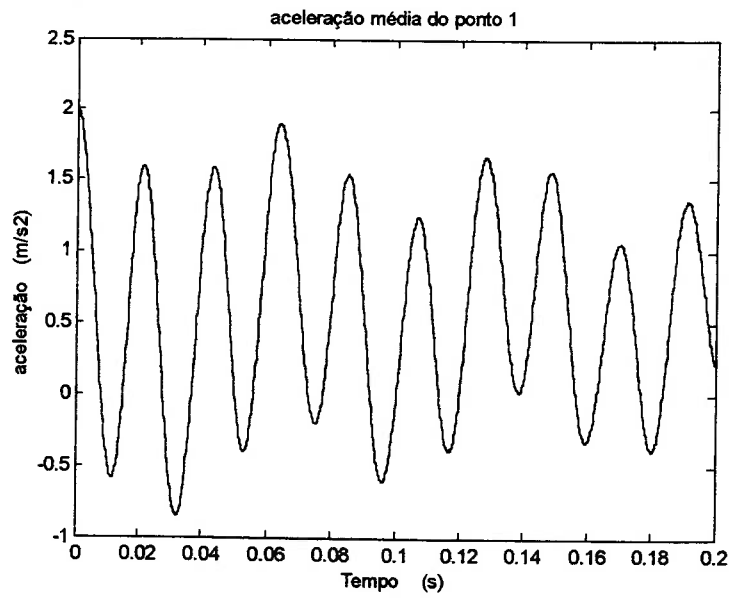


Figura 69. Aceleração média do ponto 1 decorrente de excitação impulsiva.

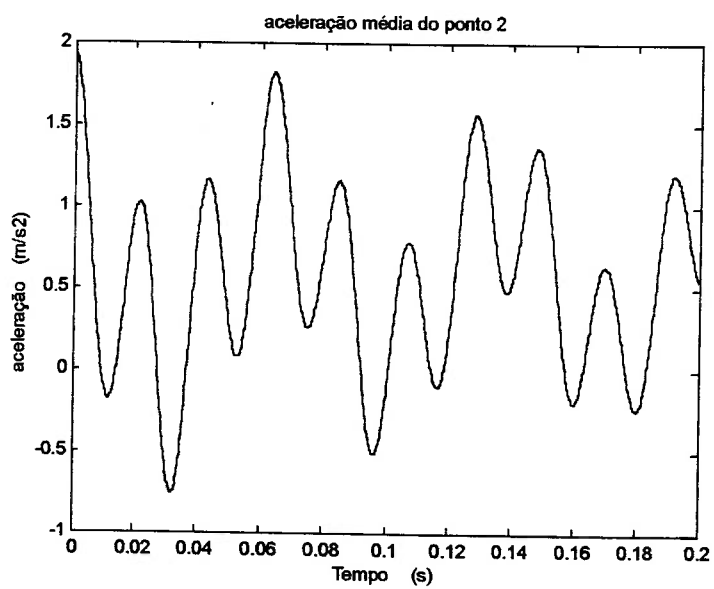


Figura 70. Aceleração média do ponto 2 decorrente de excitação impulsiva.

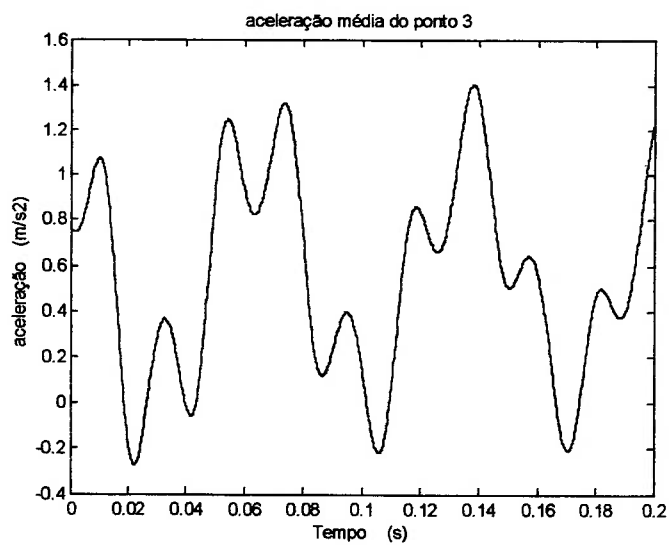


Figura 71. Aceleração média do ponto 3 decorrente de excitação impulsiva.

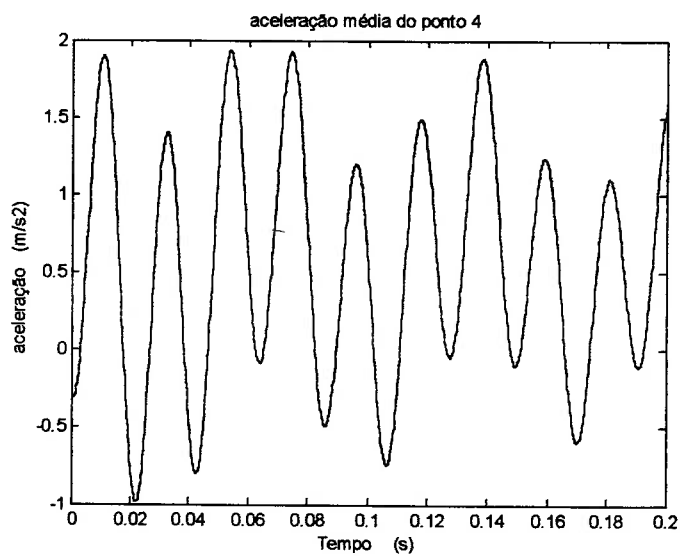


Figura 72. Aceleração média do ponto 4 decorrente de excitação impulsiva.

7.1.3 Resultados estimados pelo programa STAR

A análise modal experimental no domínio da frequência foi realizada através do programa STAR da Structural Measurement System de 1990, repetindo quatro vezes cada ensaio de excitação impulsiva em 24 posições ao longo da viga de concreto armado. Os parâmetros modais de vibrar estimados pelo programa STAR são apresentados nas figuras 73 a 77 e na tabela 4.



Figura 73. Primeiro modo de flexão vertical estimado pelo STAR (91 rad/s)



Figura 74. Segundo modo de flexão vertical estimado pelo STAR (299 rad/s)

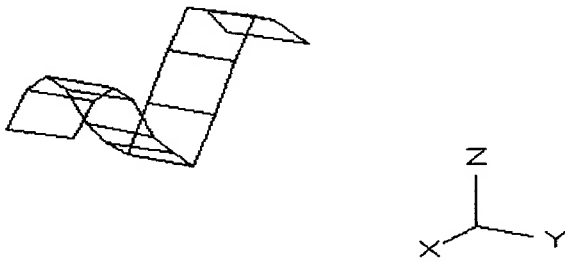


Figura 75. Terceiro modo de flexão vertical estimado pelo STAR (565 rad/s)

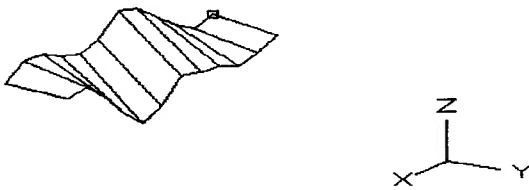


Figura 76. Primeiro modo de torção estimado pelo STAR (829 rad/s)

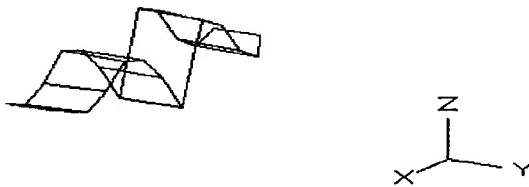


Figura 77. Quarto modo de flexão vertical estimado pelo STAR (1124 rad/s)

7.1.4 Tabela dos parâmetros modais

A tabela 4 mostra as frequências naturais e os fatores de amortecimento estimados através do algoritmo ITD1, do programa STAR decorrentes de excitação impulsiva experimental, e os valores obtidos por elementos finitos (Nastran).

Tabela 4. Estimação das frequências naturais do experimento pela aplicação do ITD1, do programa STAR e do Nastran para excitação impulsiva experimental.

Parâmetros modais	Estimação pelo ITD1	Estimação pelo STAR (IPT)	Valores pelo Nastran
frequência ω_1	96	91	91
frequência ω_2	296	299	338
frequência ω_3	568	565	713
frequência ω_4	786	829	856
frequência ω_5	1062	1124	1166
Fator amort. ζ_1	2.2%	1.2%	-
Fator amort. ζ_2	0.9%	1.5%	-
Fator amort. ζ_3	0.3%	0.6%	-
Fator amort. ζ_4	1.5%	1.3%	-
Fator amort. ζ_5	5.1%	4.4%	-

O algoritmo ITD1, usando apenas sinais de aceleração, passou a fornecer resultados satisfatórios quando foram utilizados 1000 intervalos de amostragem nos sinais de aceleração.

7.1.5 Modos identificados pelo ITD

As figuras 78 a 82 apresentam os primeiros modos identificados pelo algoritmo ITD1, conforme descrito na seção 7.1.4..

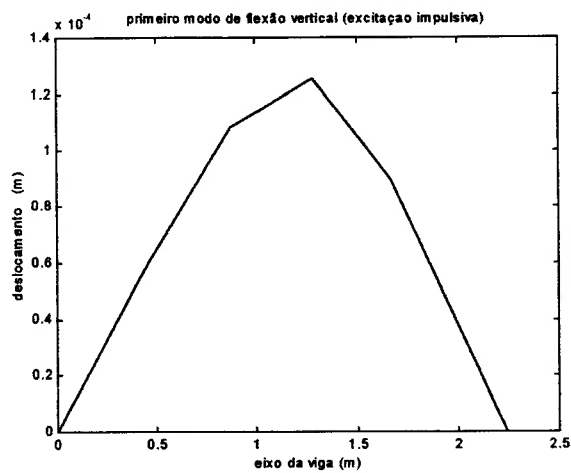


Figura 78. Primeiro modo de flexão identificado pelo ITD1 (96 rad/s)

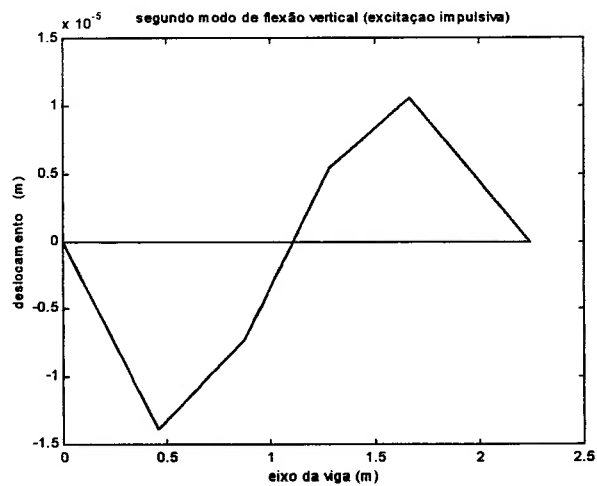


Figura 79. Segundo modo de flexão identificado pelo ITD1 (296 rad/s)

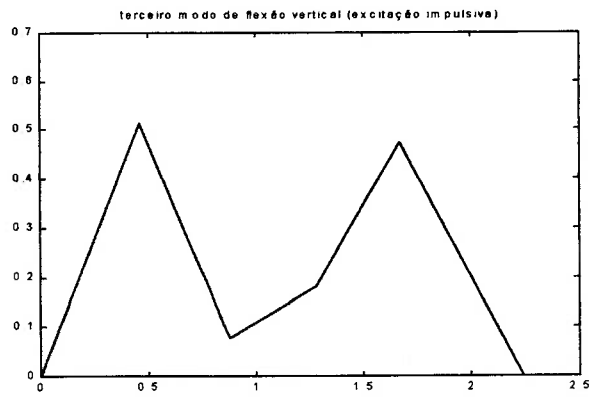


Figura 80. Terceiro modo de flexão identificado pelo ITD1 (427 rad/s)

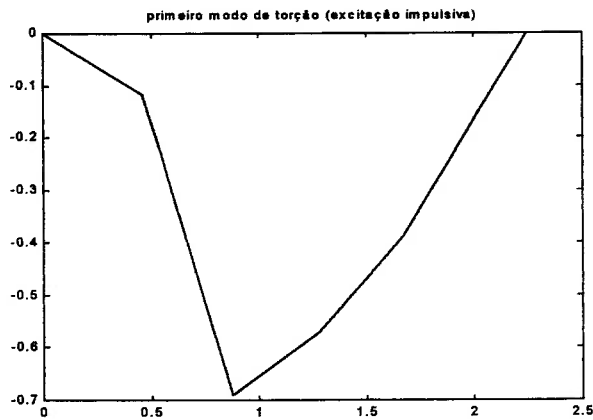


Figura 81. Primeiro modo de torção identificado pelo ITD1 (785 rad/s)

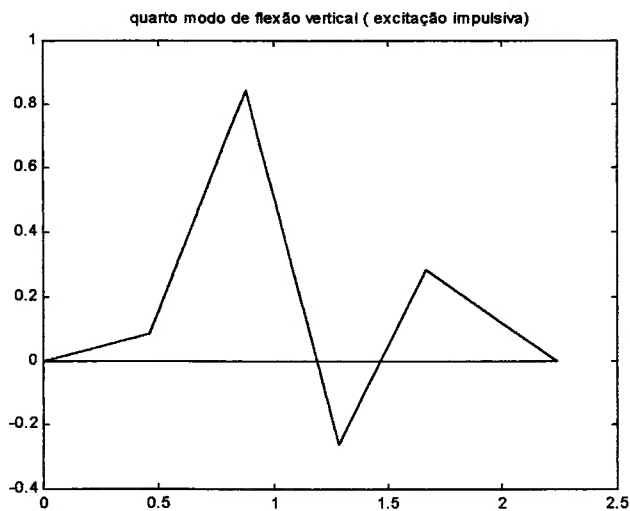


Figura 82. Quarto modo de flexão vertical identificado pelo ITD1 (1062 rad/s)

7.2 Excitação aleatória

7.2.1 Excitação “aleatória” usando carga móvel

7.2.1.1 Acelerações

A excitação de carga móvel foi efetuada carregando a estrutura com o auxílio de um carrinho que se deslocou ao longo da viga. O carrinho percorreu a viga oito vezes e cada percurso foi efetuado em 5 segundos. Foram gravados simultaneamente os sinais de quatro acelerômetros, com intervalo de amostragem de 2×10^{-4} segundos. Os sinais de aceleração são apresentados nas figuras 83 a 86.

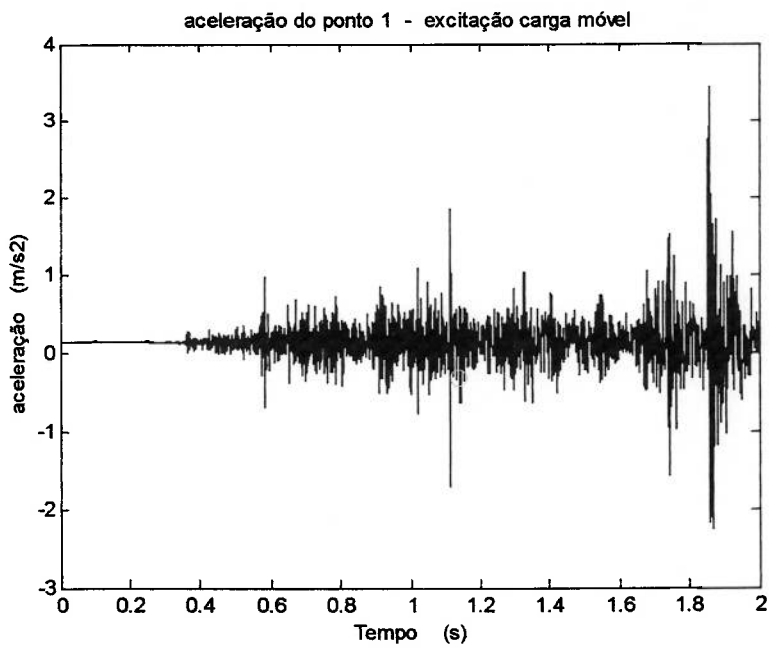


Figura 83. Aceleração do ponto 1 decorrente de excitação de carga móvel (gráfico parcial).

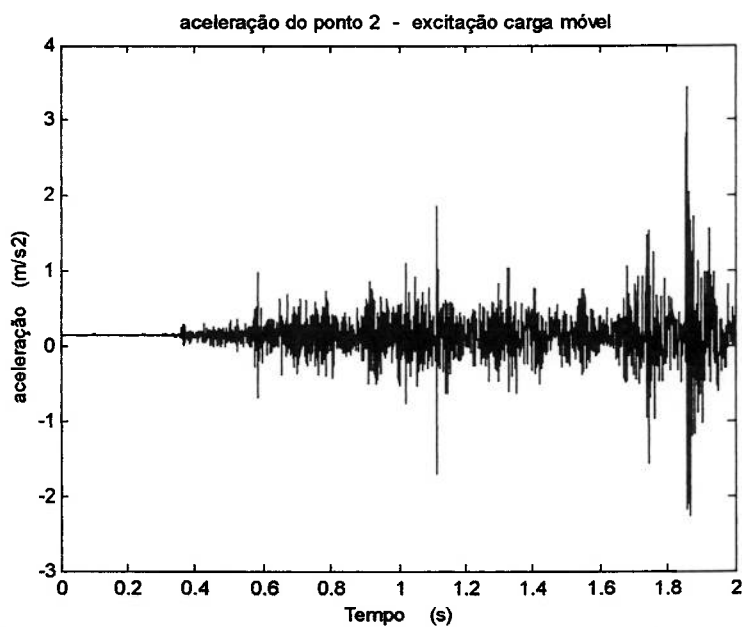


Figura 84. Aceleração do ponto 2 decorrente de excitação de carga móvel (gráfico parcial).

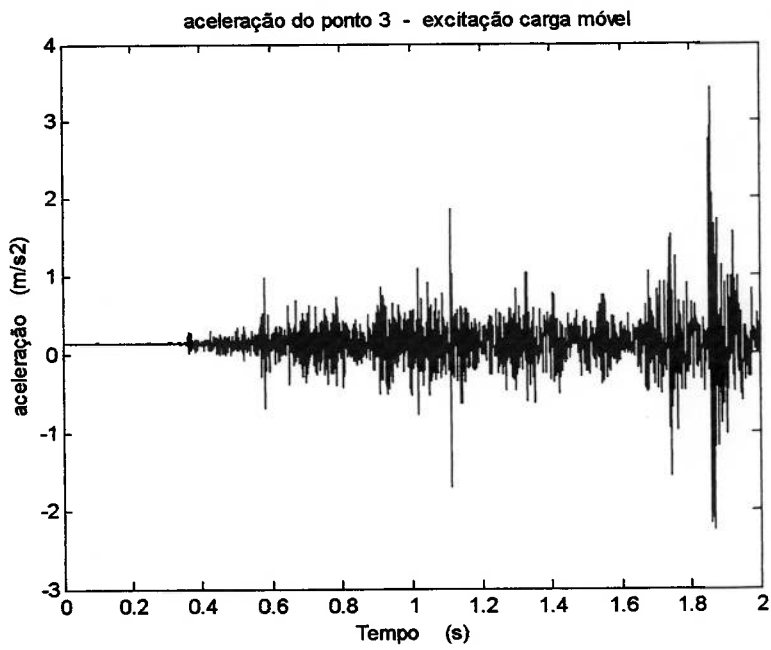


Figura 85. Aceleração do ponto 3 decorrente de excitação de carga móvel (gráfico parcial).

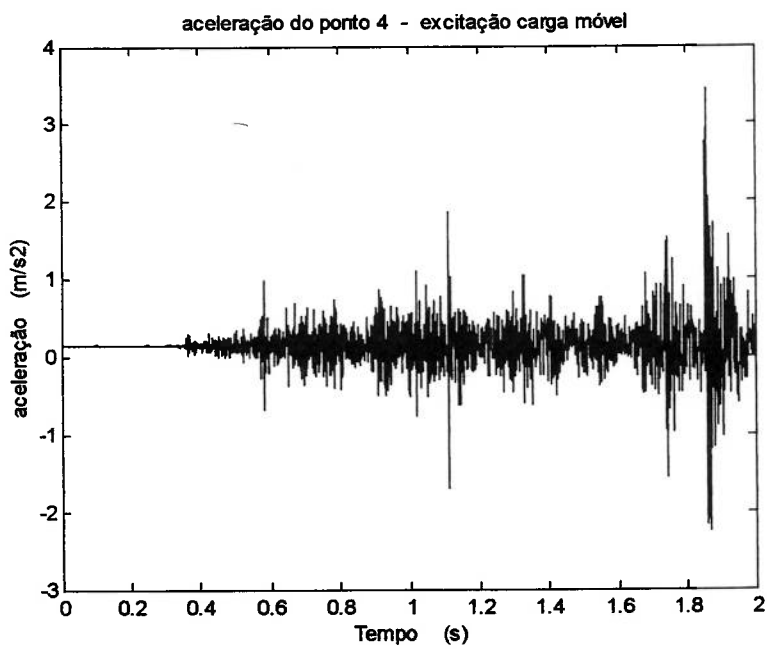


Figura 86. Aceleração do ponto 4 decorrente de excitação de carga móvel (gráfico parcial).

7.2.1.2 Aplicação da técnica Randomdec

Antes de utilizar as acelerações das figuras 83 a 86 no Randomdec convém filtrar nos sinais de aceleração as componentes de aceleração relativas a modos de vibrar acima do sexto modo. Foi aplicado um filtro passa-baixa com frequência de corte acima de 1500 rad/s, ou seja, um pouco acima da sexta frequência natural de vibração da estrutura.

A aceleração do ponto 2 é usada para definir os trechos para a aplicação da técnica Randomdec, por apresentar as maiores amplitudes no sinal de aceleração. Cada trecho tem início num pico de aceleração do ponto 2 dentro do intervalo de aceleração máxima e 30% desse valor. Para cada trecho foram tomados 1000 intervalos de tempo. A média dos 128 trechos assim obtidos é uma estimativa da resposta livre da estrutura, conforme nos mostram as figuras 87 a 90.

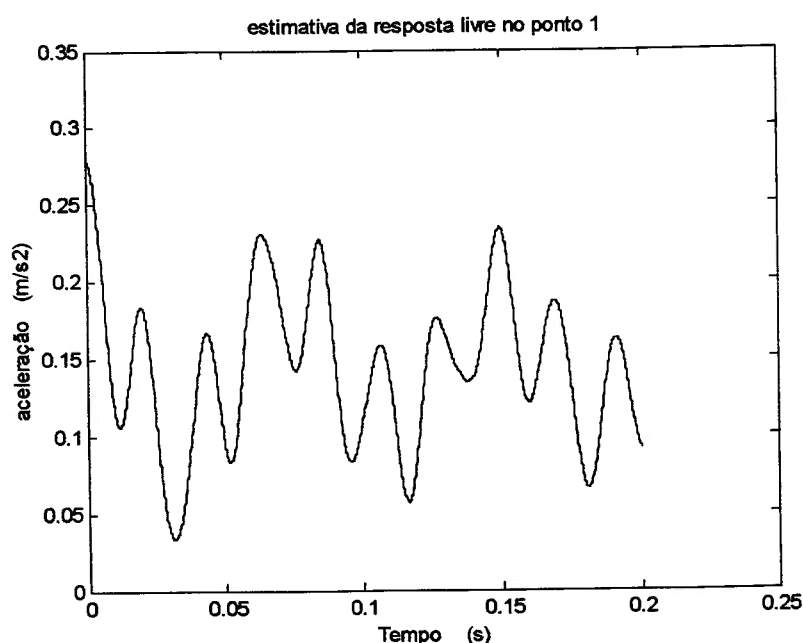


Figura 87. Estimativa de resposta livre em aceleração do ponto 1 decorrente de excitação de carga móvel.

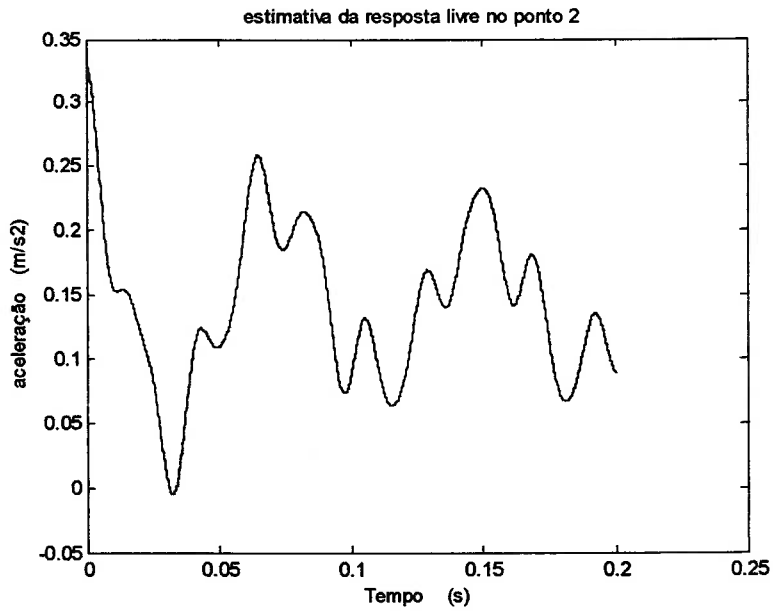


Figura 88. Estimativa de resposta livre em aceleração do ponto 2 decorrente de excitação de carga móvel.

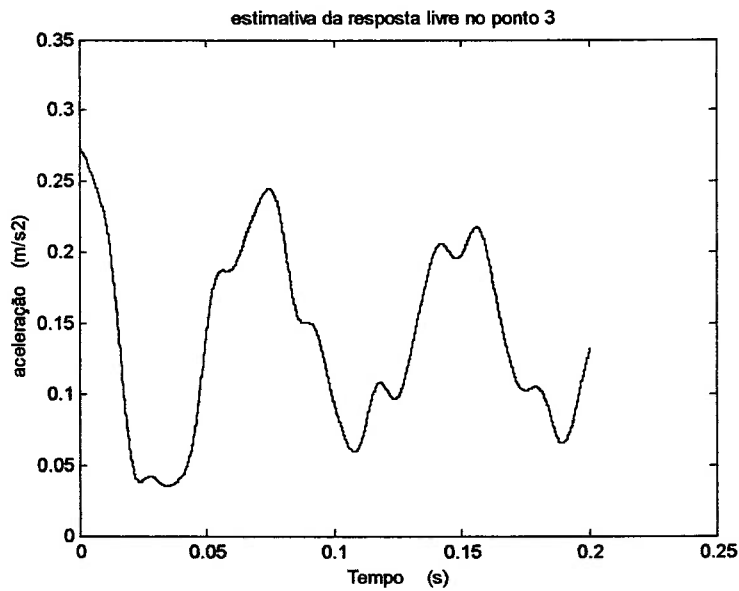


Figura 89. Estimativa de resposta livre em aceleração do ponto 3 decorrente de excitação de carga móvel.

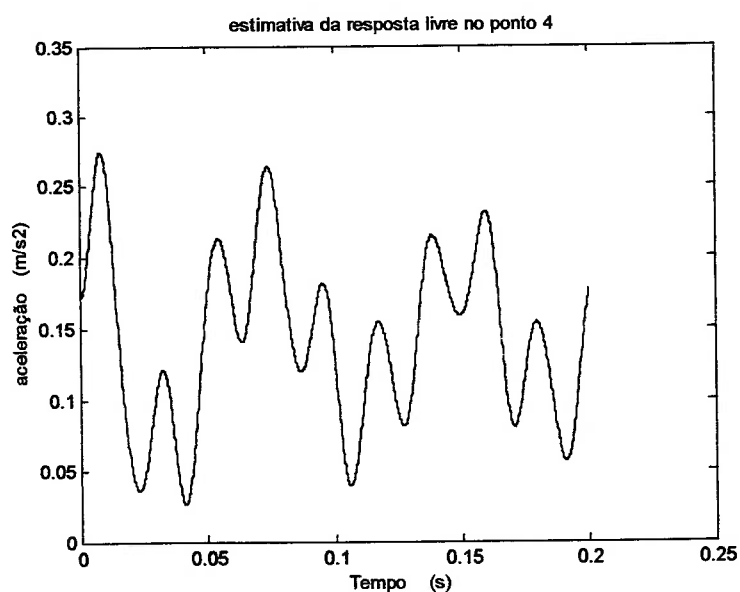


Figura 90. Estimativa de resposta livre em aceleração do ponto 4 decorrente de excitação de carga móvel.

7.2.1.3 Aplicação do ITD

O Método ITD utiliza a resposta livre da estrutura para estimar os parâmetros modais. A resposta livre da estrutura pode ser estimada a partir da resposta decorrente de excitação aleatória. Embora a excitação de carga móvel não possa ser considerada aleatória no nosso ensaio, aplica-se a técnica Randomdec para estimar a resposta livre e avaliar a qualidade da resposta livre assim obtida. A resposta livre da estrutura a ser usada pelo Método ITD são as apresentadas nas figuras 87 a 90.

7.2.1.4 Tabela dos parâmetros modais

A tabela 5 mostra as frequências naturais e os fatores de amortecimento estimados através do algoritmo ITD1, do programa STAR decorrente de a excitação de carga móvel experimental, e os valores obtidos por elementos finitos (Nastran).

Tabela 5. Estimação das frequências naturais do experimento pela aplicação do algoritmo ITD1, do programa STAR e do Nastran decorrente de excitação de carga móvel experimental.

Parâmetros modais	Estimação pelo ITD1	Estimação pelo STAR (IPT)	Valores pelo Nastran
frequência ω_1	100	91	91
frequência ω_2	297	299	338
frequência ω_3	591	565	713
frequência ω_4	795	829	856
frequência ω_5	1090	1124	1166
Fator amort. ζ_1	0.9%	1.2%	-
Fator amort. ζ_2	1.6%	1.5%	-
Fator amort. ζ_3	2.0%	0.6%	-
Fator amort. ζ_4	3.9%	1.3%	-
Fator amort. ζ_5	1.0%	4.4%	-

O algoritmo ITD1, usando apenas sinais de aceleração, passou a fornecer resultados satisfatórios quando foram utilizados 1000 intervalos de amostragem nos sinais de aceleração.

7.2.2 Excitação aleatória usando um atuador eletromagnético e ruído branco

7.2.2.1 Acelerações

A excitação aleatória do tipo ruído branco foi efetuada através de atuador eletromagnético e um gerador de sinais no ponto 2. Os ensaios foram repetidos seis vezes e a taxa de amostragem foi de 2×10^{-4} segundos. Os sinais de aceleração são apresentados nas figuras 91 a 94.

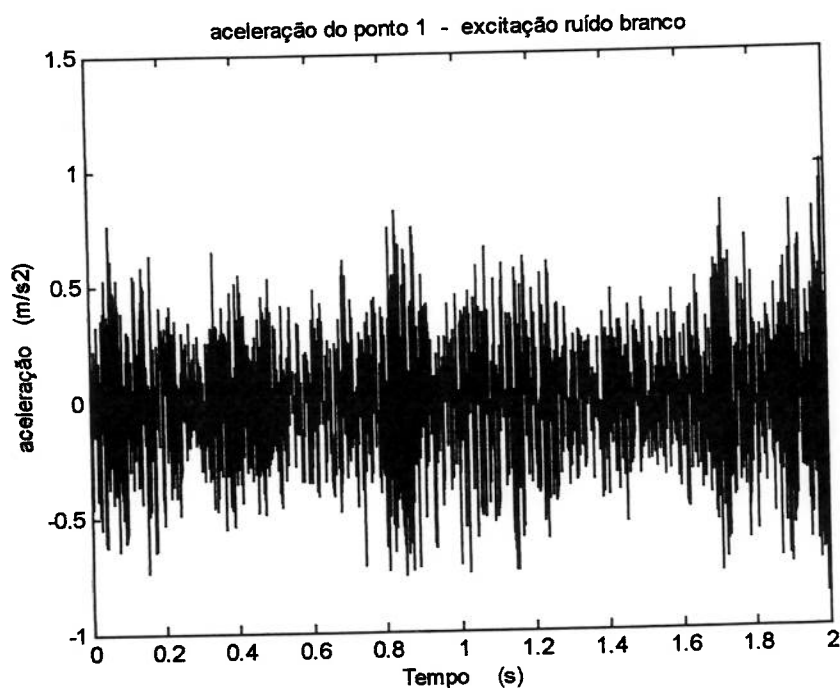


Figura 91. Aceleração do ponto 1 decorrente de excitação aleatória ruído branco (gráfico parcial).

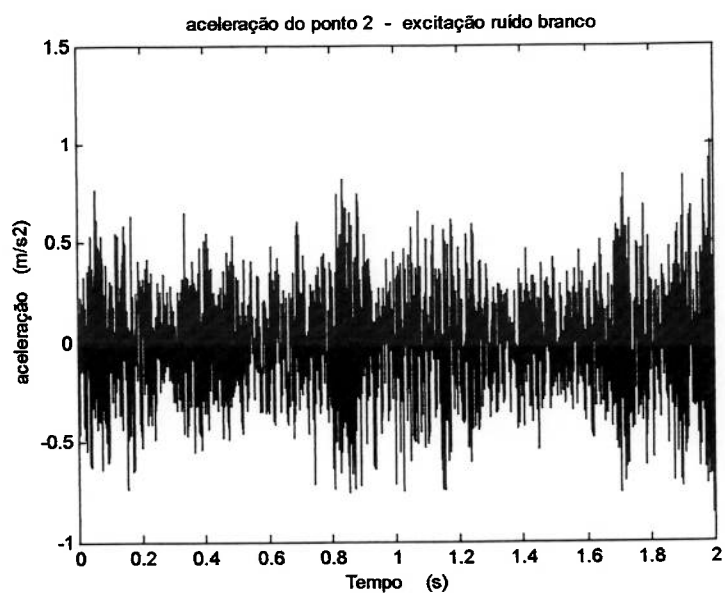


Figura 92. Aceleração do ponto 2 decorrente de excitação aleatória ruído branco (gráfico parcial).

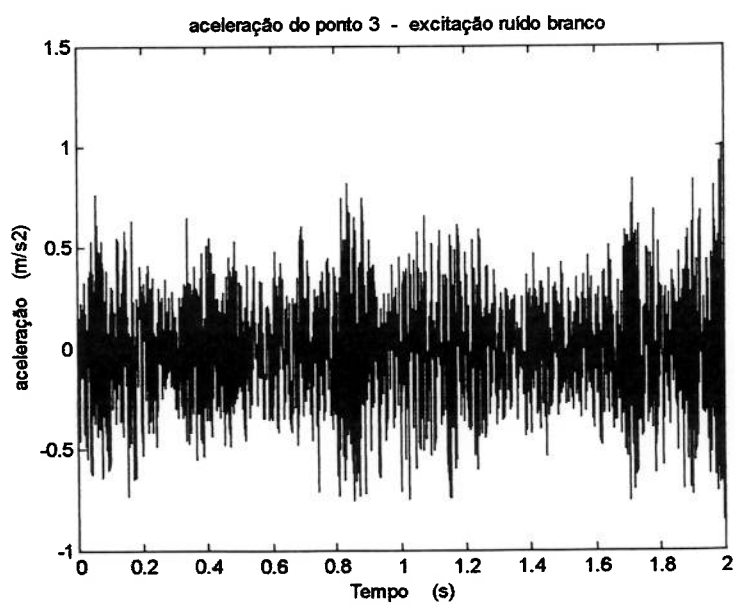


Figura 93. Aceleração do ponto 3 decorrente de excitação aleatória ruído branco (gráfico parcial).

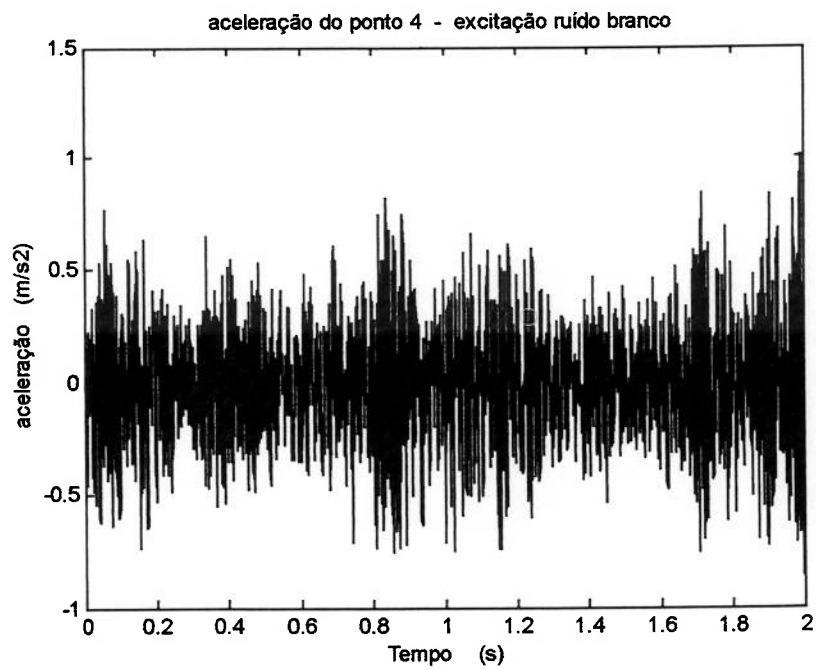


Figura 94. Aceleração do ponto 4 decorrente de excitação aleatória ruído branco (gráfico parcial).

7.2.2.2 Aplicação da técnica Randomdec

Antes de utilizar as acelerações das figuras 91 a 94 no Randomdec convém filtrar nos sinais de aceleração as componentes de aceleração relativas a modos de vibrar acima do sexto modo. Foi aplicado um filtro passa-baixa com frequência de corte acima de 1500 rad/s, ou seja, um pouco acima da sexta frequência natural de vibração da estrutura.

As acelerações do ponto 2 são usadas para definir os trechos para a aplicação da técnica Randomdec, por apresentar as maiores amplitudes no sinal de aceleração. Cada trecho tem início num pico de aceleração do ponto 2 dentro do intervalo de aceleração máxima e 30% desse valor. Para cada trecho foram tomados 1000 intervalos de tempo. A média dos 151 trechos assim obtidos é uma estimativa da resposta livre da estrutura, conforme nos mostram as figuras 95 a 98.

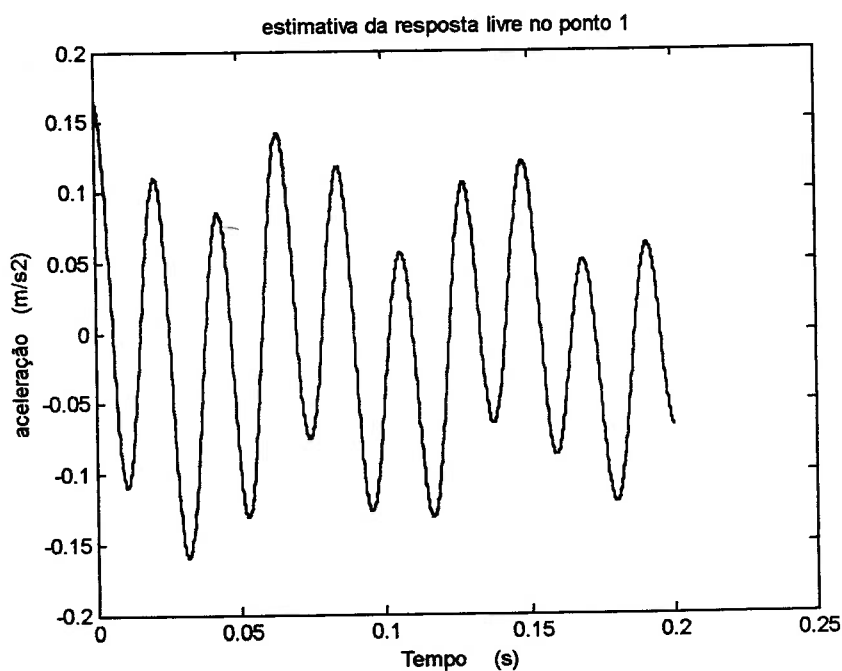


Figura 95. Estimativa de resposta livre em aceleração do ponto 1 para excitação aleatória ruído branco.

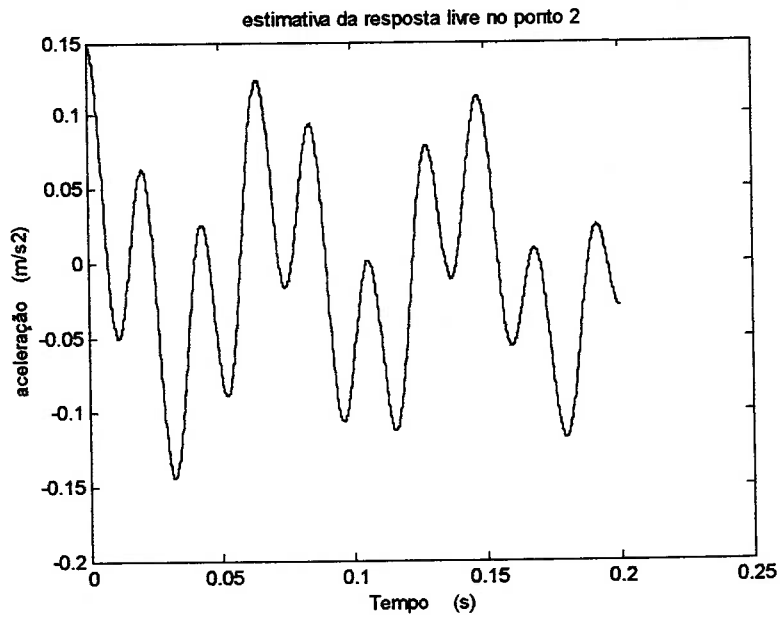


Figura 96. Estimativa de resposta livre em aceleração do ponto 2 para excitação aleatória ruído branco.

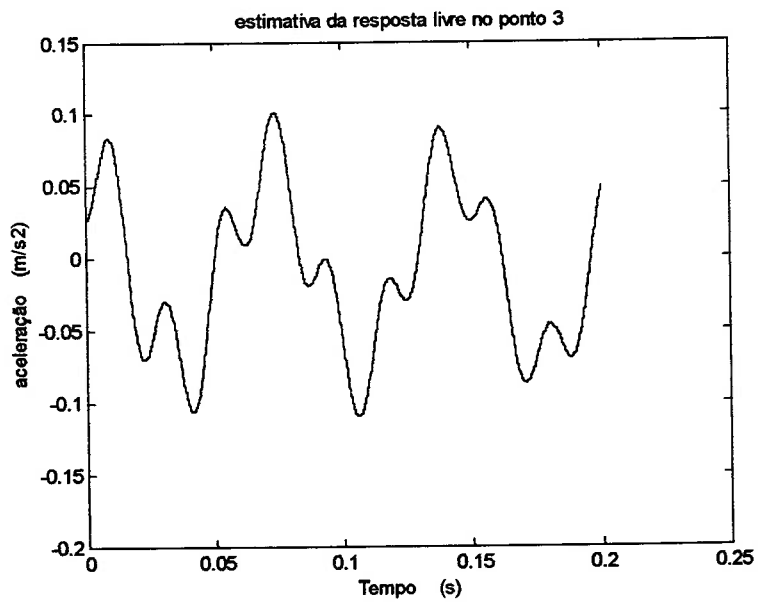


Figura 97. Estimativa de resposta livre deslocamento do ponto 3 para excitação aleatória ruído branco.

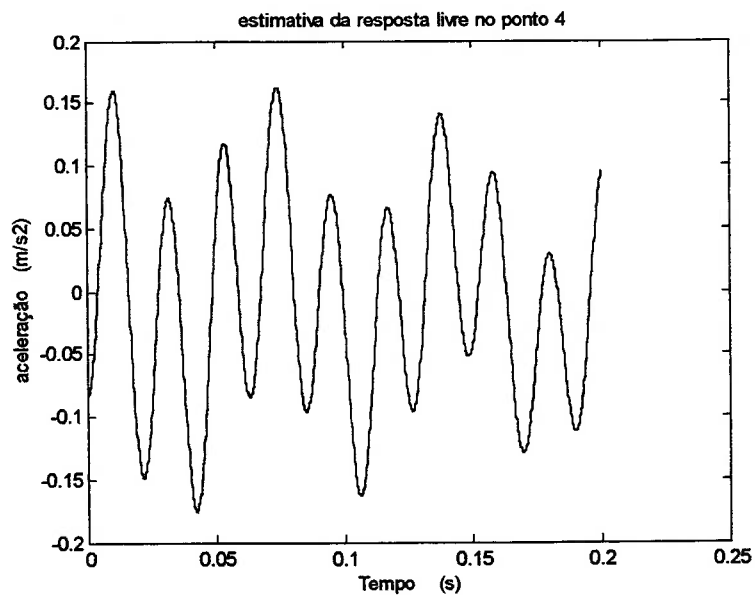


Figura 98. Estimativa de resposta livre aceleração do ponto 4 para excitação aleatória ruído branco.

7.2.2.3 Aplicação do ITD

O Método ITD utiliza a resposta livre da estrutura para estimar os parâmetros modais. A resposta livre da estrutura a ser usada pelo Método ITD são as apresentadas nas figuras 95 a 98.

7.2.2.4 Tabela dos parâmetros modais

A tabela 6 mostra as frequências naturais e os fatores de amortecimento estimados através do algoritmo ITD1, do programa STAR decorrentes de excitação aleatória ruído branco experimental, e os valores obtidos por elementos finitos (Nastran).

Tabela 6. Estimativas das frequências naturais e dos fatores de amortecimento do experimento pela aplicação do algoritmo ITD1, do programa STAR e do Nastran decorrentes de excitação aleatória ruído branco experimental.

Parâmetros modais	Estimação pelo ITD1	Estimação pelo STAR (IPT)	Valores pelo Nastran
frequência ω_1	90	91	91
frequência ω_2	295	299	338
frequência ω_3	610	565	713
frequência ω_4	815	829	856
frequência ω_5	1130	1124	1166
Fator amort. ζ_1	1.1%	1.2%	-
Fator amort. ζ_2	0.7%	1.5%	-
Fator amort. ζ_3	1.2%	0.6%	-
Fator amort. ζ_4	1.0%	1.3%	-
Fator amort. ζ_5	1.0%	4.4%	-

O algoritmo ITD1, usando apenas sinais de aceleração, passou a fornecer resultados satisfatórios quando foram utilizados 1000 intervalos de amostragem nos sinais de aceleração.

8 Análise dos resultados

Neste capítulo comparam-se os resultados quanto ao tipo de excitação. Inicialmente abordam-se os resultados numéricos e posteriormente abordam-se os resultados experimentais.

8.1 Análise dos resultados da simulação numérica

8.1.1 Gráficos comparativos da simulação numérica

As figuras 99 a 102 mostram os gráficos comparativos entre os deslocamentos decorrentes da excitação impulsiva com os deslocamentos da resposta livre decorrentes da excitação aleatória estimados pela técnica Randomdec.

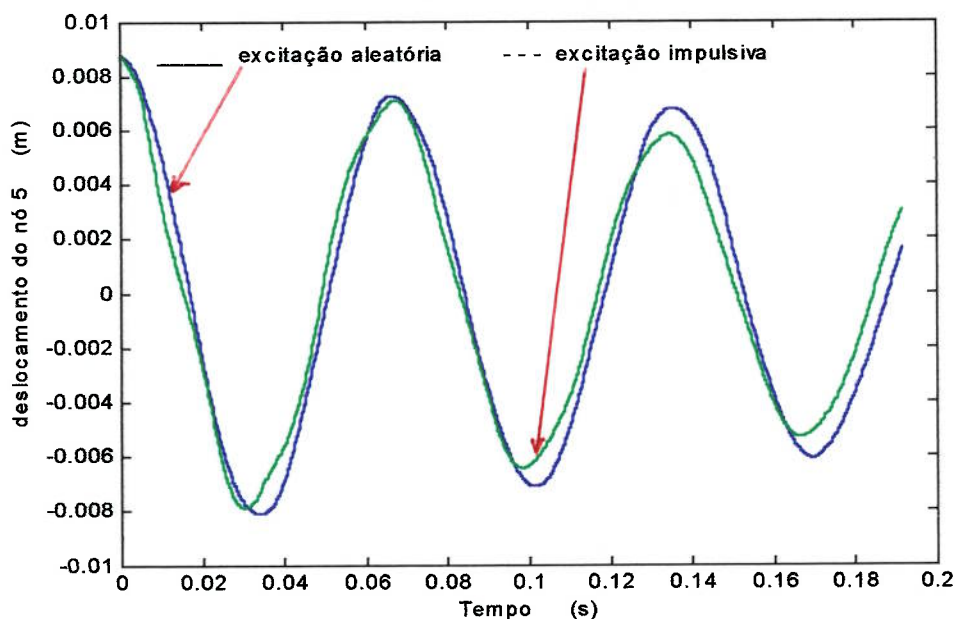


Figura 99. Gráfico comparativo entre o deslocamento no nó 5 decorrente da excitação impulsiva (linha tracejada) e decorrente da excitação aleatória (linha cheia), tomado como nó de referência.

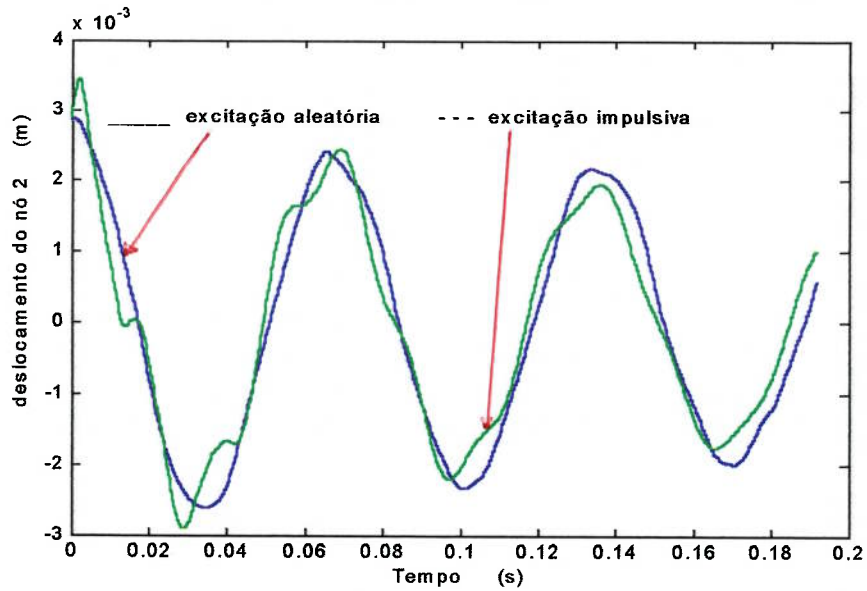


Figura 100. Deslocamento do nó 2 decorrente da excitação impulsiva e da excitação aleatória.

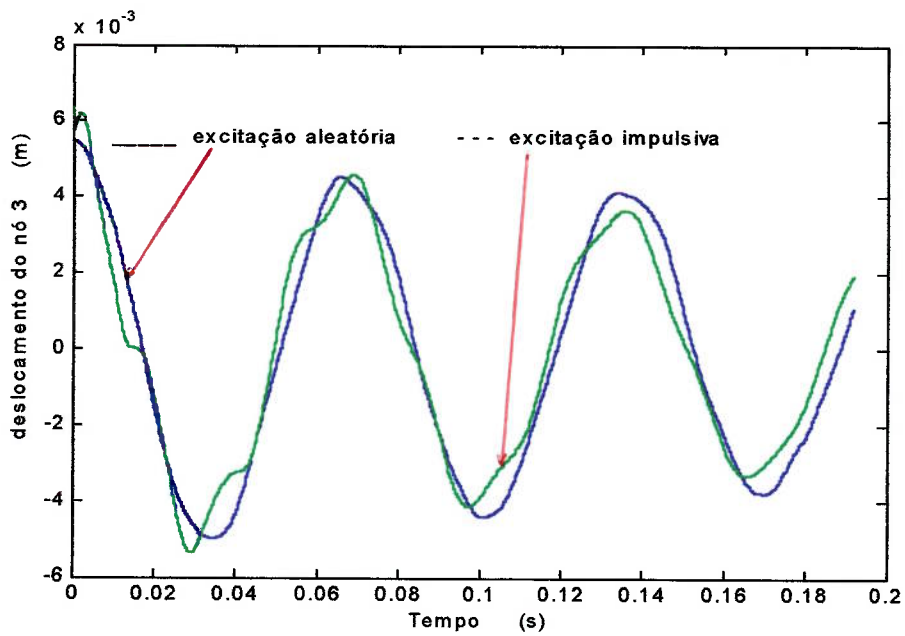


Figura 101. Deslocamento do nó 3 decorrente da excitação impulsiva e da excitação aleatória.

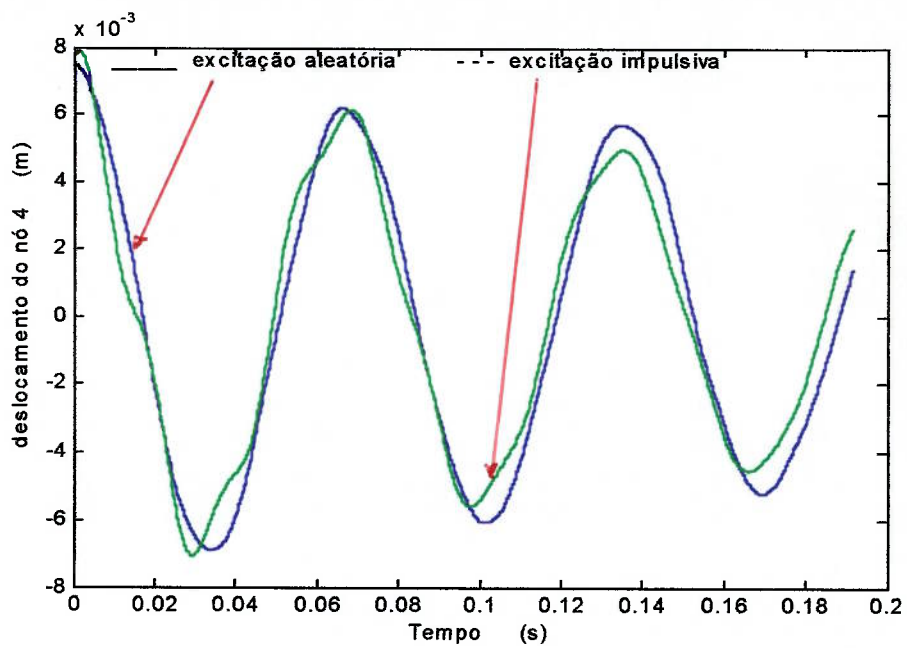


Figura 102. Deslocamento do nó 4 decorrente da excitação impulsiva e da excitação aleatória.

8.1.2 Tabela comparativa dos resultados da simulação numérica

Na tabela 7 apresentam-se as frequências naturais, em radianos por segundo, e os fatores de amortecimento decorrentes da excitação impulsiva e da excitação aleatória, aplicando o algoritmo ITD1, utilizando apenas os sinais de deslocamento, bem como os valores teóricos para a simulação da viga bi-apoiada.

Tabela 7. Frequências naturais e fatores de amortecimento, da simulação numérica da viga bi-apoiada.

Parâmetros modais	Excitação Impulsiva	Excitação Aleatória	Valores do Modelo
Frequência ω_1	93 (150)	91 (300)	93
freqüência ω_2	374	385	371
freqüência ω_3	845	722	835
freqüência ω_4	1450	1445	1481
Fator amort. ζ_1	3.6%	3.4%	3.0%
Fator amort. ζ_2	3.1%	1.7%	3.0%
Fator amort. ζ_3	6.5%	6.0%	-
Fator amort. ζ_4	3.2%	3.2%	-

Os parâmetros modais obtidos nas simulações numéricas quando a excitação é impulsiva são mais precisos (da ordem de 2% na frequência natural)! Entretanto, os parâmetros modais obtidos a partir de dados decorrentes de excitação aleatória e processados pelo Randomdec, embora menos precisos (da ordem de 14%), são aceitáveis e sugerem que com maior cuidado estatístico e volume de dados é possível estimar os parâmetros modais com precisão suficiente para algumas aplicações sem conhecer a força de excitação.

8.2 Análise dos resultados experimentais

8.2.1 Gráficos comparativos

As figuras 103 a 106 mostram os gráficos comparativos da aceleração da resposta livre decorrente da excitação impulsiva, de excitação de carga móvel e de excitação aleatória ruído branco.

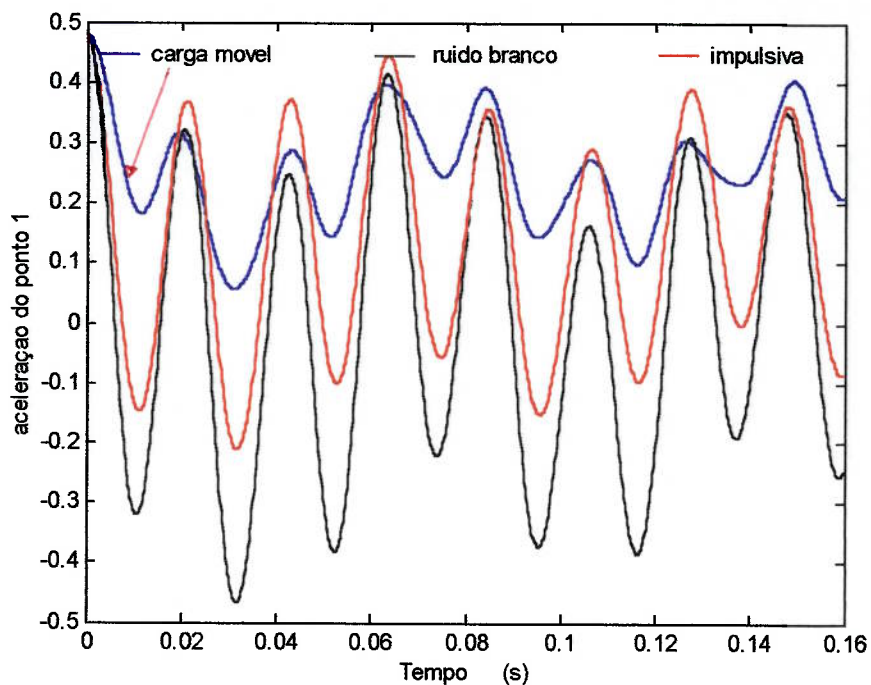


Figura 103. Sinal de aceleração da resposta livre do ponto 1 decorrente de excitação impulsiva, de excitação de carga móvel e de excitação aleatória ruído branco.

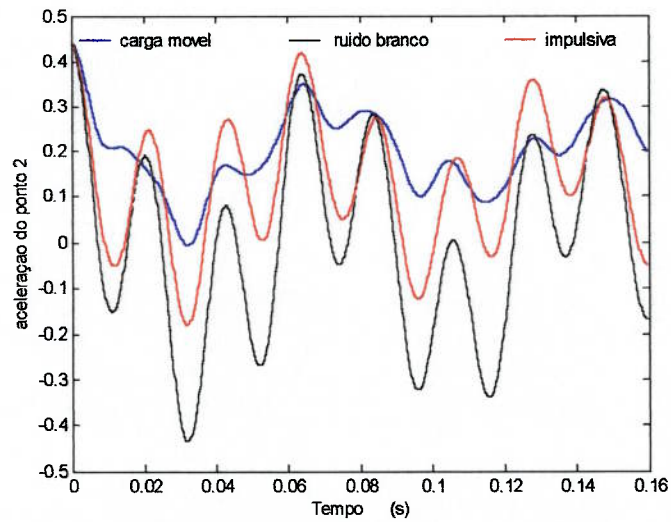


Figura 104. Sinal de aceleração da resposta livre do ponto 2 decorrente de excitação impulsiva, de excitação de carga móvel e de excitação aleatória ruído branco.

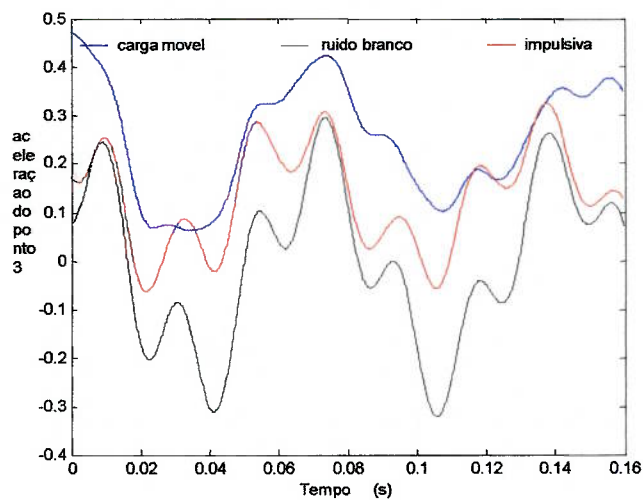


Figura 105. Sinal de aceleração da resposta livre do ponto 3 decorrente de excitação impulsiva, de excitação de carga móvel e de excitação aleatória ruído branco.

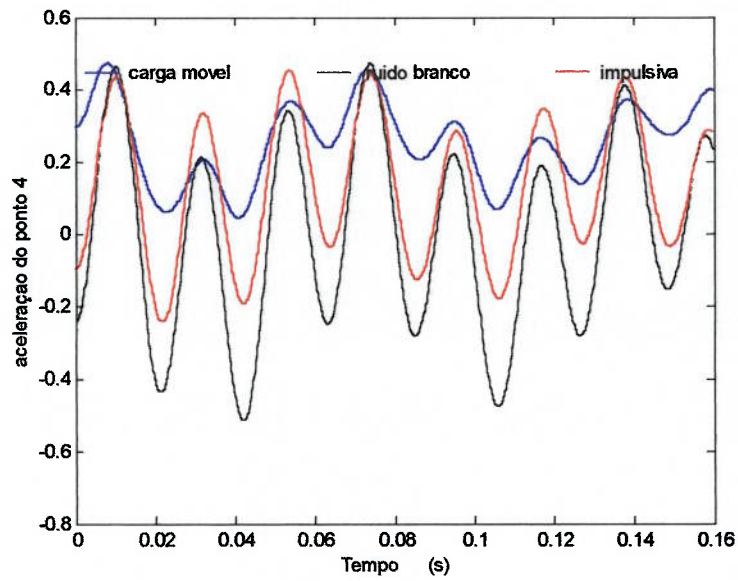


Figura 106. Sinal de aceleração da resposta livre do ponto 4 decorrente de excitação impulsiva, de excitação de carga móvel e de excitação aleatória ruído branco.

8.2.2 Tabela comparativa dos resultados experimentais

Na tabela 8 apresentam-se as frequências naturais, em radianos por segundo, e os fatores de amortecimento estimados a partir da resposta experimental decorrente de excitação impulsiva, de carga móvel e aleatória tipo ruído branco, para o experimento da viga de concreto armado.

Tabela 8. Frequências naturais e fatores de amortecimento, do experimento da viga de concreto armado, utilizando excitação impulsiva, de carga móvel e aleatória tipo ruído branco.

Parâmetros modais	Excitação Impulsiva	Excitação Aleatória carga móvel	Excitação Aleatória ruído branco	Programa STAR
frequência ω_1	96	100	90	91
frequência ω_2	296	297	295	299
frequência ω_3	568	591	610	565
frequência ω_4	786	795	815	829
frequência ω_5	1062	1090	1130	1124
Fator amort. ζ_1	2.2%	0.9%	1.1%	1.2%
Fator amort. ζ_2	1.0%	1.6%	0.7%	1.5%
Fator amort. ζ_3	0.3%	2.0%	1.2%	0.6%
Fator amort. ζ_4	1.5%	3.9%	1.0%	1.3%
Fator amort. ζ_5	5.1%	1.0%	1.0%	4.4%

A discrepância nas frequências naturais da análise modal utilizando excitação impulsiva e da análise modal utilizando excitação aleatória é da ordem de 7%. Este é um valor satisfatório tendo em vista que a estrutura apresenta não linearidades nos apoios e a energia da excitação impulsiva é menor que a energia da excitação aleatória.

8.2.3 MAC entre os modos da excitação impulsiva e aleatória

Nesta seção utiliza-se o Modal Assurance Criterion (MAC) para comparar os modos de vibrar estimados a partir da resposta experimental da estrutura decorrente de excitação impulsiva e de excitação aleatória.

O MAC é definido pela equação:

$$MAC(\{\phi_A\}_j, \{\phi_B\}_k) = \frac{|\{\phi_A\}_j^T * \{\phi_B\}_k|^2}{(\{\phi_A\}_j^T * \{\phi_A\}_j * \{\phi_B\}_k^T * \{\phi_B\}_k)}$$

definida na seção 3.3. Valores próximos de 1 indicam semelhança de modo de vibrar.

Valores baixos indicam que os modos não se assemelham.

Foram comparados apenas os três primeiros modos de flexão uma vez que os modos de torção estão pobremente representados nos dados experimentais.

Com exceção do terceiro modo que obteve $MAC = 0.84$, os modos de flexão tem uma correlação elevada, 0.9999 e 0.9992. A discrepância no terceiro modo pode ser explicada por uma perturbação da estrutura provocada pela fixação do atuador eletromagnético, ou por não linearidade nos apoios da viga.

Valores de MAC:

Modo =	1 (89/89)	2 (299/299)	3 (393/314)
	0.9999	0.0739	0.2599
	0.0648	0.9992	0.8662
	0.1508	0.8188	0.8428

9 Comentários finais

- 1) Excitação aleatória requer algumas centenas (100 a 200) de vezes mais dados experimentais do que a excitação impulsiva. A necessidade de maior informação decorre do emprego da técnica Randomdec.
- 2) A discrepância nas frequências naturais estimadas utilizando excitação impulsiva e excitação aleatória é da ordem de 7%. Que é um valor um pouco elevado, mas que deve ser minimizado com um valor maior de dados experimentais.
- 3) A comparação entre os 3 primeiros modos de vibrar em flexão é satisfatória embora o número de pontos para descrever um modo poderia ser maior.
- 4) A comparação entre excitação impulsiva e excitação aleatória realizada neste trabalho visa determinar condições favoráveis para o emprego de excitação ambiental no futuro. Os resultados obtidos neste trabalho abonam a continuidade desta busca de condições, que trarão vantagens no monitoramento de estruturas de engenharia civil sem ter que interromper o tráfego e sem a necessidade de empregar um atuador de grandes proporções.

Referências bibliográficas

- [1] Ibrahim, S. R. Mikulcik, E. C. (1973). A time domain modal vibration test technique. Shock and vibration, bulletin 43, part 4, pg. 21-37.
- [2] Ibrahim, S. R. Mikulcik, E. C. (1976). The experimental determination parameters from time responses. Shock and vibration, bulletin 45, part 5, pg. 187-196.
- [3] Ibrahim, S. R. Mikulcik, E. C. (1977). A method for the direct identification of vibrations parameters from the free response. Shock and vibration, bulletin 47, part 4, pg. 183-198.
- [4] Alampalli, Sreenivas Fu, Gongkang Aziz, Idris Abdul (1992). Modal analysis as a bridge inspection tool. International modal analysis conference, pg. 1359-1366.
- [5] Salawu, O. S. Williams, C. (1993). Structural damage detection using experimental modal analysis - A comparison of some methods. International modal analysis conference, pg. 254-260.
- [6] Green, Mark F. Cebon, David (1993). Modal testing of two highway bridges. International modal analysis conference, pg. 838-844.
- [7] Agardh, Lennart (1994). Impact excitation of concrete highway bridges. International modal analysis conference, pg. 1329-1334.
- [8] Zhang, Zongfen (1994). Error study of bridge test for the purpose of structure identification. International modal analysis conference, pg. 433-441.

- [9] Straser, Erik G. Kiremidjian, Anne S. (1996). Monitoring and evaluating civil structures using measured vibration. International modal analysis conference, pg. 84-90.
- [10] Asmussen, J. C. Ibrahim, S. R. Brincker, R. (1996). Random decrement and regression analysis of traffic response of bridges. International modal analysis conference, pg. 453-458.
- [11] Asmussen, J. C. Ibrahim, S. R. Brincker, R. (1996). Modal parameter identification from responses of general unknown random inputs. International modal analysis conference, pg. 446-452.
- [12] Kong, Fanlang Liang, Zhong Lee, George C. (1996). Responses of a model bridge under impact and ambient excitation. International modal analysis conference, pg. 709-715.
- [13] Kong, Fanlang Liang, Zhong Lee, George C. (1996). Bridge damage identification through ambient vibration signature. International modal analysis conference, pg. 717-724.
- [14] Huang, C. S. Yang, Y. B. Lu, L. Y. Chen, C. H. (1999). Dynamic testing and system identification of a multi-span highway bridge. Earthquake engineering and Structural dynamics, vol. 28, num. 8, August, pg. 857-878. John Wiley & Sons Ltd.
- [15] Vandiver, J. K. Dunwoody, A. B. Campbell, R. B. Cook, M. F. (1982). A mathematical basis for the Random Decrement vibration signature analysis technique. Journal of mechanical design, vol. 104, April, pg. 307-313.

ANEXOS

Seqüência de algoritmos elaborados em Matlab

Anexo A.1

Algoritmos *Molamas1* e *Molamas2*, programas para simulação numérica de um sistema concentrado mola-massa com dois graus de liberdade.

A.1.1

```
%  
% Molamas1.m  
%  
x01= .3  
x02= -.2  
w1=6.18; % frequencia natural 1  
w2=16.18; % frequencia natural 2  
fa1=0.02; % fator de amortecimento 1  
fa2=0.02; % fator de amortecimento 2  
tau1=fa1*w1;  
tau2=fa2*w2;  
c1=1;  
c2=-.7;  
c3=1;  
c4=-1.2;  
Ts=1/500;  
t=-Ts;  
for l=1:2048  
    t=t+Ts;  
    T(l)=t;  
    x1(l)=c1*cos(w1*t)*exp(-tau1*t)+c2*cos(w2*t)*exp(-tau2*t);  
    v11=-c1*w1*sin(w1*t)*exp(-tau1*t)-c1*tau1*cos(w1*t)*exp(-tau1*t);  
    v1(l)=v11-c2*w2*sin(w2*t)*exp(-tau2*t)-c2*tau2*cos(w2*t)*exp(-tau2*t);  
    x2(l)=c3*cos(w1*t)*exp(-tau1*t)+c4*cos(w2*t)*exp(-tau2*t);  
    v22=-c3*w1*sin(w1*t)*exp(-tau1*t)-c3*tau1*cos(w1*t)*exp(-tau1*t);  
    v2(l)=v22-c4*w2*sin(w2*t)*exp(-tau2*t)-c4*tau2*cos(w2*t)*exp(-tau2*t);  
end  
%  
ni=1;  
nf=ni+49;  
nit=nf;  
dt=Ts ;  
dn=dt/Ts ;  
dn3=3;  
L1=x1(:,ni:nf);  
L2=x2(:,ni:nf);
```

```

L3=x1(:,ni+dn3:nf+dn3);
L4=x2(:,ni+dn3:nf+dn3);
%
X1= [ L1
      L2
      L3
      L4 ];
%
ni=ni+dn;
nf=nf+dn;
L1=x1(:,ni:nf);
L2=x2(:,ni:nf);
L3=x1(:,ni+dn3:nf+dn3);
L4=x2(:,ni+dn3:nf+dn3);
%
X2= [ L1
      L2
      L3
      L4];
%
A1=X2*X1';
B1=X1*X1';
A2=A1*inv(B1);
[psi,lambda]=eig(A2);
pause
%
for i=1:4;
    ar=real(lambda(i,i));
    br=imag(lambda(i,i));
    A=-log(ar*ar+br*br)/(2*dt);
    B=atan(-br/ar)/dt;
    if B==0
        t1=1;
        w1=0;
    else
        t1=sqrt(A*A/(A*A+B*B));
        w1=sqrt(A*A+B*B);
    end
    taur(i)=t1;
    wr(i)=w1;
end

```

A.1.2

```

%
%
% Molamas2.m
%
x01= .3
x02= -.2
w1=6.18; % frecuencia natural 1

```

```

w2=16.18;    % frequencia natural 2
fa1=0.02;    % fator de amortecimento 1
fa2=0.02;    % fator de amortecimento 2
tau1=fa1*w1;
tau2=fa2*w2;
c1=1;
c2=-.7;
c3=1;
c4=-1.2;
Ts=1/500;
t=-Ts;
for l=1:2048
    t=t+Ts;
    T(l)=t;
    x1(l)=c1*cos(w1*t)*exp(-tau1*t)+c2*cos(w2*t)*exp(-tau2*t);
    v1l=-c1*w1*sin(w1*t)*exp(-tau1*t)-c1*tau1*cos(w1*t)*exp(-tau1*t);
    v1(l)=v1l-c2*w2*sin(w2*t)*exp(-tau2*t)-c2*tau2*cos(w2*t)*exp(-tau2*t);
    x2(l)=c3*cos(w1*t)*exp(-tau1*t)+c4*cos(w2*t)*exp(-tau2*t);
    v22=-c3*w1*sin(w1*t)*exp(-tau1*t)-c3*tau1*cos(w1*t)*exp(-tau1*t);
    v2(l)=v22-c4*w2*sin(w2*t)*exp(-tau2*t)-c4*tau2*cos(w2*t)*exp(-tau2*t);
end
ni=1;
nf=ni+9;
nit=nf;
dt=Ts ;
dn=dt/Ts ;
L1=x1(:,ni:nf);
L2=v1(:,ni:nf);
L3=x2(:,ni:nf);
L4=v2(:,ni:nf);
%
X1= [ L1
      L2
      L3
      L4 ];
%
%
ni=ni+dn;
nf=nf+dn;
L1=x1(:,ni:nf);
L2=v1(:,ni:nf);
L3=x2(:,ni:nf);
L4=v2(:,ni:nf);
%
X2= [ L1
      L2
      L3
      L4];
%
A1=X2*X1';
B1=X1*X1';
A2=A1*inv(B1);
[psi,lambda]=eig(A2);
pause

```

```
%  
for i=1:4;  
    ar=real(lambda(i,i));  
    br=imag(lambda(i,i));  
    A=-log(ar*ar+br*br)/(2*dt);  
    B=atan(-br/ar)/dt;  
    if B==0  
        t1=1;  
        w1=0;  
    else  
        t1=sqrt(A*A/(A*A+B*B));  
        w1=sqrt(A*A+B*B);  
    end  
    taur(i)=t1;  
    wr(i)=w1;  
end
```

Anexo A.2

Algoritmo *Vigbiap*, programa que determina as matrizes do sistema dinâmico de uma viga bi-apoiada com onze nós equiespaçados. O vão total é de 2.24 metros.

A.2.1

```
%  
% Vigbiap.m  
%  
  
L=0.224;  
E=3e10;  
rho=2500;  
A=0.00372;  
Ix=0.6907e-6;  
w1=93;  
w2=372;  
tau1=.03;  
tau2=.03;  
W=[1/w1 w1  
    1/w2 w2];  
T=[ 2*tau1  
    2*tau2];  
R=inv(W)*T;  
Rm=R(1,1)  
Rk=R(2,1)  
pause  
%  
k(1,1)=12;  
k(1,2)=6*L;  
k(1,3)=-12;  
k(1,4)=6*L;  
k(2,2)=4*L*L;  
k(2,3)=-6*L;  
k(2,4)=2*L*L;  
k(3,3)=12;  
k(3,4)=-6*L;  
k(4,4)=4*L*L;  
%  
m(1,1)=156;  
m(1,2)=22*L;  
m(1,3)=54;  
m(1,4)=-13*L;  
m(2,2)=4*L*L;  
m(2,3)=13*L;  
m(2,4)=-3*L*L;  
m(3,3)=156;  
m(3,4)=-22*L;  
m(4,4)=4*L*L;
```

```

K(1,1)=k(2,2);
K(1,2)=k(2,3);
K(1,3)=k(2,4);
%-----
K(2,2)=k(1,1)+k(3,3);
K(2,3)=k(1,2)+k(3,4);
K(2,4)=k(1,3);
K(2,5)=k(1,4);
%
K(3,3)=k(2,2)+k(4,4);
K(3,4)=k(2,3);
K(3,5)=k(2,4);
%-----
K(4,4)=k(1,1)+k(3,3);
K(4,5)=k(1,2)+k(3,4);
K(4,6)=k(1,3);
K(4,7)=k(1,4);
%
K(5,5)=k(2,2)+k(4,4);
K(5,6)=k(2,3);
K(5,7)=k(2,4);
%-----
K(6,6)=k(1,1)+k(3,3);
K(6,7)=k(1,2)+k(3,4);
K(6,8)=k(1,3);
K(6,9)=k(1,4);
%
K(7,7)=k(2,2)+k(4,4);
K(7,8)=k(2,3);
K(7,9)=k(2,4);
%-----
K(8,8)=k(1,1)+k(3,3);
K(8,9)=k(1,2)+k(3,4);
K(8,10)=k(1,3);
K(8,11)=k(1,4);
%
K(9,9)=k(2,2)+k(4,4);
K(9,10)=k(2,3);
K(9,11)=k(2,4);
%-----
K(10,10)=k(1,1)+k(3,3);
K(10,11)=k(1,2)+k(3,4);
K(10,12)=k(1,3);
K(10,13)=k(1,4);
%
K(11,11)=k(2,2)+k(4,4);
K(11,12)=k(2,3);
K(11,13)=k(2,4);
%-----
K(12,12)=k(1,1)+k(3,3);
K(12,13)=k(1,2)+k(3,4);
K(12,14)=k(1,3);
K(12,15)=k(1,4);
%

```

```

K(13,13)=k(2,2)+k(4,4);
K(13,14)=k(2,3);
K(13,15)=k(2,4);
%-----
K(14,14)=k(1,1)+k(3,3);
K(14,15)=k(1,2)+k(3,4);
K(14,16)=k(1,3);
K(14,17)=k(1,4);
%
K(15,15)=k(2,2)+k(4,4);
K(15,16)=k(2,3);
K(15,17)=k(2,4);
%-----
K(16,16)=k(1,1)+k(3,3);
K(16,17)=k(1,2)+k(3,4);
K(16,18)=k(1,3);
K(16,19)=k(1,4);
%
K(17,17)=k(2,2)+k(4,4);
K(17,18)=k(2,3);
K(17,19)=k(2,4);
%
K(18,18)=k(1,1)+k(3,3);
K(18,19)=k(1,2)+k(3,4);
K(18,20)=k(1,4);
%
K(19,19)=k(2,2)+k(4,4);
K(19,20)=k(2,4);
%
K(20,20)=k(4,4);
for i=1:19;
    for j=i+1:20;
        K(j,i)=K(i,j);
    end
end
%
K=K*E*Ix/(L*L*L);
M(1,1)=m(2,2);
M(1,2)=m(2,3);
M(1,3)=m(2,4);
%-----
M(2,2)=m(1,1)+m(3,3);
M(2,3)=m(1,2)+m(3,4);
M(2,4)=m(1,3);
M(2,5)=m(1,4);
%
M(3,3)=m(2,2)+m(4,4);
M(3,4)=m(2,3);
M(3,5)=m(2,4);
%-----
M(4,4)=m(1,1)+m(3,3);
M(4,5)=m(1,2)+m(3,4);
M(4,6)=m(1,3);
M(4,7)=m(1,4);

```

```

%
M(5,5)=m(2,2)+m(4,4);
M(5,6)=m(2,3);
M(5,7)=m(2,4);
%-----
M(6,6)=m(1,1)+m(3,3);
M(6,7)=m(1,2)+m(3,4);
M(6,8)=m(1,3);
M(6,9)=m(1,4);
%
M(7,7)=m(2,2)+m(4,4);
M(7,8)=m(2,3);
M(7,9)=m(2,4);
%-----
M(8,8)=m(1,1)+m(3,3);
M(8,9)=m(1,2)+m(3,4);
M(8,10)=m(1,3);
M(8,11)=m(1,4);
%
M(9,9)=m(2,2)+m(4,4);
M(9,10)=m(2,3);
M(9,11)=m(2,4);
%-----
M(10,10)=m(1,1)+m(3,3);
M(10,11)=m(1,2)+m(3,4);
M(10,12)=m(1,3);
M(10,13)=m(1,4);
%
M(11,11)=m(2,2)+m(4,4);
M(11,12)=m(2,3);
M(11,13)=m(2,4);
%-----
M(12,12)=m(1,1)+m(3,3);
M(12,13)=m(1,2)+m(3,4);
M(12,14)=m(1,3);
M(12,15)=m(1,4);
%
M(13,13)=m(2,2)+m(4,4);
M(13,14)=m(2,3);
M(13,15)=m(2,4);
%-----
M(14,14)=m(1,1)+m(3,3);
M(14,15)=m(1,2)+m(3,4);
M(14,16)=m(1,3);
M(14,17)=m(1,4);
%
M(15,15)=m(2,2)+m(4,4);
M(15,16)=m(2,3);
M(15,17)=m(2,4);
%-----
M(16,16)=m(1,1)+m(3,3);
M(16,17)=m(1,2)+m(3,4);
M(16,18)=m(1,3);
M(16,19)=m(1,4);

```



```

%
M(17,17)=m(2,2)+m(4,4);
M(17,18)=m(2,3);
M(17,19)=m(2,4);
%
M(18,18)=m(1,1)+m(3,3);
M(18,19)=m(1,2)+m(3,4);
M(18,20)=m(1,4);
%
M(19,19)=m(2,2)+m(4,4);
M(19,20)=m(2,4);
%
M(20,20)=m(4,4);
for i=1:19;
    for j=i+1:20;
        M(j,i)=M(i,j);
    end
end
%
M=M*rho*A*L/420;
C=Rm*M+Rk*K;
%
%
Z=zeros(20,20);
I=eye(20,20);
b=[0;0;0;0;0;0;0;1;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0];
%
%
A=[Z I ; -inv(M)*K -inv(M)*C];
B=[0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0 ; inv(M)*b];
Ts=1/2500;
%
[Ad,Bd]=c2d(A,B,Ts);
%
%
save f:\matlab\casoipt\matAd Ad % arquivo das matrizes do sistema dinâmico
save f:\matlab\casoipt\matBd Bd

```


Anexo A.2.2.2

Algoritmo *Filtimp*, programa que filtra a resposta em deslocamento para uma excitação impulsiva.

```
%
% filtimp.m - filtro do sinal da carga impulsiva
%
load f:\matlab\casoip\arqid2i dno2 % arquivo dos deslocamentos do no 2
%
[col,np]=size(dno2);
npfft=4096;
Ts=1/5000;
%
wc=1500; % frequencia de corte em rad/s
%
wc=wc/(2*pi); % frequencia de corte em Hz
tamostr=Ts*npfft; % tempo de amostragem
f=1/tamostr;
N=fix(wc/f)
pause
for i=1:np;
    dno2a(i)=dno2(i);
end
rf=fft(dno2a(1:npfft));
%
%
rf0=rf;
for n=N+1:npfft-N+1;
    rf0(n)=0;
end
%
dno2f=real(ifft(rf0));
%
%
save f:\matlab\casoip\arqd2if dno2f
load f:\matlab\casoip\arqid3i dno3 % arquivo dos deslocamentos do no 3
%
for i=1:np;
    dno3a(i)=dno3(i);
end
rf=fft(dno3a(1:npfft));
%
%
rf0=rf;
for n=N+1:npfft-N+1;
    rf0(n)=0;
end
%
dno3f=real(ifft(rf0));
%
%
```

```

save f:\matlab\casoipt\arqd3if dno3f
load f:\matlab\casoipt\arqid4i dno4      % arquivo dos deslocamentos do no 4
%
for i=1:np;
    dno4a(i)=dno4(i);
end
rf=fft(dno4a(1:npfft));
%
rf0=rf;
for n=N+1:npfft-N+1;
    rf0(n)=0;
end
%
dno4f=real(iff(rf0));
%
save f:\matlab\casoipt\arqd4if dno4f
load f:\matlab\casoipt\arqid5i dno5      % arquivo dos deslocamentos do no 5
%
for i=1:np;
    dno5a(i)=dno5(i);
end
rf=fft(dno5a(1:npfft));
rf0=rf;
for n=N+1:npfft-N+1;
    rf0(n)=0;
end
dno5f=real(iff(rf0));
save f:\matlab\casoipt\arqd5if dno5f
N

```

Anexo A.2.2.3

Algoritmo *Rlivreim* grava a resposta livre para a aplicação do ITD.

```

%
% rlivreim.m - programa que grava a resposta livre para a excitação carga impulsiva
%               - caso para o sinal já filtrado
%
np=300;
%
%
load f:\matlab\casoipt\arqd5if dno5f
%
[col,npt]=size(dno5f);
%
PRECI = 1e-8;
P = 0;
DYI = abs(dno5f(2)) - abs(dno5f(1));

```

```

for I = 2:npt-1;
    YI = dno5f(I);
    YII = dno5f(I + 1);
    DY = abs(YII) - abs(YI);
    if DYI > 0
        if DY < 0
            if abs(YI) > PRECI
                if YI > 0
                    ni = I-1;
                    DYI = DY;
                    break
                %
            end
        end
    end
    else
        if DY > 0
            DYI = DY;
        end
    end
end
%
Ts = 1/2500 ; % taxa de amostragem
load f:\matlab\casoip\arqd2if dno2f % arquivo dos deslocamentos do no 2
%
for i=1:np;
    dm2(i)=dno2f(i+ni);
end
for i=1:np-1;
    vm2(i)=(dm2(i+1)-dm2(i))/Ts;
end
vm2(np)=vm2(np-1);
%
load f:\matlab\casoip\arqd3if dno3f % arquivo dos deslocamentos do no 3
%
for i=1:np;
    dm3(i)=dno3f(i+ni);
end
for i=1:np-1;
    vm3(i)=(dm3(i+1)-dm3(i))/Ts;
end
vm3(np)=vm3(np-1);
%
load f:\matlab\casoip\arqd4if dno4f % arquivo dos deslocamentos do no 4
%
for i=1:np;
    dm4(i)=dno4f(i+ni);
end
%
for i=1:np-1;
    vm4(i)=(dm4(i+1)-dm4(i))/Ts;
end
vm4(np)=vm4(np-1);
%

```

```

load f:\matlab\casoipt\arqd5if dno5f % arquivo dos deslocamentos do no 5
for i=1:np;
    dm5(i)=dno5f(i+ni);
end
for i=1:np-1;
    vm5(i)=(dm5(i+1)-dm5(i))/Ts;
end
vm5(np)=vm5(np-1);
%
save f:\matlab\casoipt\arqdim2 dm2 % arquivo dos deslocamentos médios do nó 2
save f:\matlab\casoipt\arqdim3 dm3 % arquivo dos deslocamentos médios do nó 3
save f:\matlab\casoipt\arqdim4 dm4 % arquivo dos deslocamentos médios do nó 4
save f:\matlab\casoipt\arqdim5 dm5 % arquivo dos deslocamentos médios do nó 5
%
save f:\matlab\casoipt\arqvim2 vm2 % arquivo das velocidades médias do nó 2
save f:\matlab\casoipt\arqvim3 vm3 % arquivo das velocidades médias do nó 3
save f:\matlab\casoipt\arqvim4 vm4 % arquivo das velocidades médias do nó 4
save f:\matlab\casoipt\arqvim5 vm5 % arquivo das velocidades médias do nó 5

```

Anexo A.2.2.4

Algoritmo *Itkli* aplica o ITD apenas para deslocamentos.

```

%
% itkli.m - método do Ibrahim para excitação impulsiva
%
Ts = 1/5000 ;
dta=1/5000 ;
dn =dta/Ts ;
dn3=1;
%
load f:\matlab\casoipt\arqdim2 dm2 % arquivos da excitação impulsiva
load f:\matlab\casoipt\arqdim3 dm3
load f:\matlab\casoipt\arqdim4 dm4
load f:\matlab\casoipt\arqdim5 dm5
%
[col,lin]=size(dm2);
ni=1;
nf=lin-dn-dn3;
%
for i=1:lin;
    tempo(i)=(i-1)/2500;
end
%
L1=dm2(:,ni:nf);
L2=dm3(:,ni:nf);
L3=dm4(:,ni:nf);

```

```

L4=dm5(:,ni:nf);
%
L5=dm2(:,ni+dn3:nf+dn3);
L6=dm3(:,ni+dn3:nf+dn3);
L7=dm4(:,ni+dn3:nf+dn3);
L8=dm5(:,ni+dn3:nf+dn3);
%
%
X1= [ L1
      L2
      L3
      L4
      L5
      L6
      L7
      L8 ];
%
ni=ni+dn;
nf=nf+dn;
%
%
L1=dm2(:,ni:nf);
L2=dm3(:,ni:nf);
L3=dm4(:,ni:nf);
L4=dm5(:,ni:nf);
%
L5=dm2(:,ni+dn3:nf+dn3);
L6=dm3(:,ni+dn3:nf+dn3);
L7=dm4(:,ni+dn3:nf+dn3);
L8=dm5(:,ni+dn3:nf+dn3);
%
%
X2= [ L1
      L2
      L3
      L4
      L5
      L6
      L7
      L8 ];
%
%
A1=X2*X1';
B1=X1*X1';
A2=A1*inv(B1);
[psi,lambda]=eig(A2) ;
A3=psi*lambd*inv(psi);
%
for i=1:8;
    ar=real(lambda(i,i));
    br=imag(lambda(i,i));
    A=-log(ar*ar+br*br)/(2*dta) ;
    B=atan(-br/ar)/dta;
    if br==0

```

```

    t1=1;
    w1=0;
else
    t1=sqrt(A*A/(A*A+B*B));
    w1=sqrt(A*A+B*B);
end
    taur(i)=t1;
    wr(i)=w1;
end
end

```

Anexo A.2.2.5

Algoritmo *It2i* aplica o ITD para deslocamentos e velocidades.

```

%
% it2i.m - método do Ibrahim para excitação impulsiva
%
Ts = 1/5000 ;
dta=1/5000 ;
dn =1 ;
%
load f:\matlab\casoipt\arqdim2 dm2      % arquivos da excitação impulsiva
load f:\matlab\casoipt\arqdim3 dm3
load f:\matlab\casoipt\arqdim4 dm4
load f:\matlab\casoipt\arqdim5 dm5
%
load f:\matlab\casoipt\arqvim2 vm2
load f:\matlab\casoipt\arqvim3 vm3
load f:\matlab\casoipt\arqvim4 vm4
load f:\matlab\casoipt\arqvim5 vm5
%
%
[col,lin]=size(dm2);
ni=1;
nf=lin-dn-3;
%
%
for i=1:lin;
    tempo(i)=(i-1)/5000;
end
%
L1=dm2(:,ni:nf);
L2=vm2(:,ni:nf);
L3=dm3(:,ni:nf);
L4=vm3(:,ni:nf);
L5=dm4(:,ni:nf);
L6=vm4(:,ni:nf);
L7=dm5(:,ni:nf);
L8=vm5(:,ni:nf);
%

```



```

%
X1= [ L1
      L2
      L3
      L4
      L5
      L6
      L7
      L8 ];
%
ni=ni+dn;
nf=nf+dn;
%
L1=dm2(:,ni:nf);
L2=vm2(:,ni:nf);
L3=dm3(:,ni:nf);
L4=vm3(:,ni:nf);
L5=dm4(:,ni:nf);
L6=vm4(:,ni:nf);
L7=dm5(:,ni:nf);
L8=vm5(:,ni:nf);
%
%
X2= [ L1
      L2
      L3
      L4
      L5
      L6
      L7
      L8 ];
%
%
A1=X2*X1';
B1=X1*X1';
A2=A1*inv(B1);
[psi,lambda]=eig(A2) ;
A3=psi*lambda*inv(psi);
%
for i=1:8;
    ar=real(lambda(i,i));
    br=imag(lambda(i,i));
    A=-log(ar*ar+br*br)/(2*dta) ;
    B=atan(-br/ar)/dta;
    if br==0
        t1=1;
        w1=0;
    else
        t1=sqrt(A*A/(A*A+B*B));
        w1=sqrt(A*A+B*B);
    end
    taur(i)=t1;
    wr(i)=w1;
end

```

Anexos A.2.3 Excitação aleatória

Anexo A.2.3.1

Algoritmo *Gerarand*, programa que gera a resposta em deslocamento de uma viga bi-apoiada para uma excitação randômica. A excitação é uma carga vertical aplicada no nó 5, e os deslocamentos são medidos nos nós 2, 3, 4 e 5.

```
%
% gerarand.m   geração de sinal para carga randomica
%
load f:\matlab\matAd Ad
load f:\matlab\matBd Bd
NP=140000;
u=randn(NP+1,1)*1000;
%
y0=zeros(1,16);
dno2(1)=0;
dno3(1)=0;
dno5(1)=0;
dno6(1)=0;
%
for i=1:NP;
    y1=Ad*y0+Bd*u(i);
    dno2(i+1)=y1(2,1);
    dno3(i+1)=y1(4,1);
    dno5(i+1)=y1(8,1);
    dno6(i+1)=y1(10,1);
    y0=y1;
end
%
save f:\matlab\arquid2r dno2   % arquivo de deslocamentos de carga randomica
save f:\matlab\arquid3r dno3
save f:\matlab\arquid5r dno5
save f:\matlab\arquid6r dno6
```

Anexo A.2.3.2

```
%
% filtran.m   filtro da resposta randomica
%
npfft=32768;
Ts=1/5000;
wc=1500;      % frequencia de corte em rad/s
wc=wc/(2*pi); % frequencia de corte em Hz
```

```

tamostr=Ts*npfft; % tempo de amostragem
f=1/tamostr;
N=fix(wc/f)
pause
load f:\matlab\casoipt\arquid2r dno2 % arquivo dos deslocamentos do no 2
rf=fft(dno2(1:npfft));
rf0=rf;
for n=N+1:npfft-N+1;
    rf0(n)=0;
end
dno2f=real(iff(rf0));
save f:\matlab\casoipt\arqd2rf dno2f
load f:\matlab\casoipt\arquid3r dno3 % arquivo dos deslocamentos do no 3
rf=fft(dno3(1:npfft));
rf0=rf;
for n=N+1:npfft-N+1;
    rf0(n)=0;
end
%
dno3f=real(iff(rf0));
%
save f:\matlab\casoipt\arqd3rf dno3f
%
load f:\matlab\casoipt\arquid4r dno4 % arquivo dos deslocamentos do no 4
%
rf=fft(dno4(1:npfft));
%
rf0=rf;
%
for n=N+1:npfft-N+1;
    rf0(n)=0;
end
%
dno4f=real(iff(rf0));
%
save f:\matlab\casoipt\arqd4rf dno4f
%
load f:\matlab\casoipt\arquid5r dno5 % arquivo dos deslocamentos do no 5
%
rf=fft(dno5(1:npfft));
%
rf0=rf;
%
for n=N+1:npfft-N+1;
    rf0(n)=0;
end
%
dno5f=real(iff(rf0));
%
save f:\matlab\casoipt\arqd5rf dno5f

```

Anexos A.2.3.3 e A2.3.4 Randomdec (*rddmax* e *rddtrigg*)

O algoritmo *Randomdec*, que gera a resposta livre para uma série temporal aleatória usando a técnica do decremento aleatório (**Random Decrement**), foi dividido em duas partes:

- parte 1, algoritmo *rddmax* que calcula os pontos de máximos da resposta à excitação aleatória
- parte 2, algoritmo *rddtrigg* que calcula a resposta livre da resposta a partir da média dos vários trechos da resposta aleatória

A.2.3.3

```
%  
% rddmax.m - calculo dos picos do sinal aleatório  
%  
load f:\matlab\arqd5rf dno5f  
%  
[col,npt]=size(dno5f);  
PRECI = 1e-8;  
deslmax=dno5f(1);  
deslmin=dno5f(1);  
P = 0;  
SOMA = dno5f(1);  
SOMAQ = dno5f(1) * dno5f(1);  
DYI = abs(dno5f(2)) - abs(dno5f(1));  
for I = 2: npt-1;  
%  
if dno5f(I)>deslmax  
deslmax=dno5f(I);  
end  
if dno5f(I)<deslmin  
deslmin=dno5f(I);  
end  
YI = dno5f(I);  
YII = dno5f(I + 1);  
SOMA = SOMA + YI;  
SOMAQ = SOMAQ + YI * YI;  
DY = abs(YII) - abs(YI);  
if DYI > 0  
if DY < 0
```

```

if abs(YI) > PRECI
    if YI > 0
        P = P + 1;
        YMAX(P) = abs(YI);
        PMAX(P) = I-1;
        DYI = DY;
        %
    end
end
end
else
    if DY > 0
        DYI = DY;
    end
end
end
MAXP=P;
SOMA = SOMA + dno5f(npt);
SOMAQ = SOMAQ + dno5f(npt)*dno5f(npt);
save f:\matlab\maxp MAXP PMAX YMAX
save f:\matlab\deslmm SOMA SOMAQ deslmax deslmin

```

A.2.3.4

```

%
% rddtrig.m - decremento randomico calculo da resposta livre a partir
% da média dos trechos da resposta aleatória
np=1000;
load f:\matlab\arqd2rf dno2f % arquivo dos deslocamentos do no 2
[col,npt]=size(dno2f);
load f:\matlab\maxp MAXP PMAX YMAX
load f:\matlab\deslmm SOMA SOMAQ deslmax deslmin
LIMI=deslmax*.3;
LIMS=deslmax*.95;
N = 0;
pant=-1;
for I = 1: MAXP;
    if PMAX(I)>pant
        if YMAX(I) > LIMI
            if YMAX(I)<LIMS
                N = N + 1;
                PI(N) = PMAX(I);
                VMAX(N) = YMAX(I);
            end
        end
    end
end

```

```

        pant=PMAX(I)+np;
    end
end
end
end
ntrigpp=0;
for i=1:N-1;
    ntrigpp=ntrigpp+1;
    pitrigpp(ntrigpp)=PI(i);
end
for i=1:ntrigpp;
    if pitrigpp(i)+np+2<npt
        ntrechos=i;
    end
end
ntrigpp=ntrechos;
ni=1;
nf=np+2;
load f:\matlab\arqv2rf vno2f      % arquivo das velocidades do no 2
for i=ni:nf+1;
    dm2(i)=0;
    for j=1:ntrigpp;
        k=pitrigpp(j);
        dm2(i)=dm2(i)+dno2f(i+k);
    end
    dm2(i)=dm2(i)/ntrigpp;
end
for i=ni:nf;
    vm2(i)=(dm2(i+1)-dm2(i))/dts;
end
vm2(nf+1)=vm2(nf);
[cc,kk]=size(dm2);
for i=1:kk;
    tempo(i)=(i-1)/100;
end
load f:\matlab\arqd3rf dno3f      % arquivo dos deslocamentos do no 3
for i=ni:nf+1;
    dm3(i)=0;
    for j=1:ntrigpp;
        k=pitrigpp(j);
        dm3(i)=dm3(i)+dno3f(i+k);
    end
    dm3(i)=dm3(i)/ntrigpp;
end
for i=ni:nf;
    vm3(i)=(dm3(i+1)-dm3(i))/dts;
end
vm3(nf+1)=vm3(nf);
load f:\matlab\arqd5rf dno5f      % arquivo dos deslocamentos do no 5
for i=ni:nf+1;
    dm5(i)=0;
    for j=1:ntrigpp;
        k=pitrigpp(j);
        dm5(i)=dm5(i)+dno5f(i+k);
    end
end

```

```

end
dm5(i)=dm5(i)/ntrigpp;
end
for i=ni:nf;
    vm5(i)=(dm5(i+1)-dm5(i))/dts;
end
vm5(nf+1)=vm5(nf);
load f:\matlab\arqd6rf dno6f      % arquivo dos deslocamentos do nó 6
for i=ni:nf+1;
    dm6(i)=0;
    for j=1:ntrigpp;
        k=ptrigpp(j);
        dm6(i)=dm6(i)+dno6f(i+k);
    end
    dm6(i)=dm6(i)/ntrigpp;
end
for i=ni:nf;
    vm6(i)=(dm6(i+1)-dm6(i))/dts;
end
vm6(nf+1)=vm6(nf);
%
save f:\matlab\arqdrm2 dm2      % arquivo dos deslocamentos médios do nó 2
save f:\matlab\arqdrm3 dm3      % arquivo dos deslocamentos médios do nó 3
save f:\matlab\arqdrm5 dm5      % arquivo dos deslocamentos médios do nó 5
save f:\matlab\arqdrm6 dm6      % arquivo dos deslocamentos médios do nó 6
%
save f:\matlab\arqvr2 vm2        % arquivo das velocidades médias do nó 2
save f:\matlab\arqvr3 vm3        % arquivo das velocidades médias do nó 3
save f:\matlab\arqvr5 vm5        % arquivo das velocidades médias do nó 5
save f:\matlab\arqvr6 vm6        % arquivo das velocidades médias do nó 6

```

Anexos A.2.3.5 e A.2.3.6 (Método do Ibrahim)

O algoritmo *Itid*, que usa o método do Ibrahim (Ibrahim Time Domain) para estimação dos parâmetros modais a partir da resposta livre, foi dividido em duas partes:

- parte 1, algoritmo *Itid1r* que estima os parâmetros modais usando os deslocamentos e as velocidades da resposta livre da estrutura
- parte 2, algoritmo *Itid2r* que estima os parâmetros modais usando apenas os deslocamentos da resposta livre da estrutura.

A.2.3.5

```
%  
% itid1r.m - método do Ibrahim para excitação aleatória  
%  
Ts = 1/5000 ;  
dta=1/5000 ;  
dn =1 ;  
%  
load f:\matlab\casoipt\arqdrm2 dm2 % arquivos da excitação aleatória  
load f:\matlab\casoipt\arqdrm3 dm3  
load f:\matlab\casoipt\arqdrm4 dm4  
load f:\matlab\casoipt\arqdrm5 dm5  
%  
load f:\matlab\casoipt\arqvr2 vm2  
load f:\matlab\casoipt\arqvr3 vm3  
load f:\matlab\casoipt\arqvr4 vm4  
load f:\matlab\casoipt\arqvr5 vm5  
%  
[col,lin]=size(dm2);  
ni=1;  
nf=lin-dn-3;  
%  
%  
L1=dm2(:,ni:nf);  
L2=vm2(:,ni:nf);  
L3=dm3(:,ni:nf);  
L4=vm3(:,ni:nf);  
L5=dm4(:,ni:nf);  
L6=vm4(:,ni:nf);  
L7=dm5(:,ni:nf);  
L8=vm5(:,ni:nf);  
%  
%  
X1= [ L1  
      L2  
      L3
```



```

L4
L5
L6
L7
L8 ];
%
ni=ni+dn;
nf=nf+dn;
%
L1=dm2(:,ni:nf);
L2=vm2(:,ni:nf);
L3=dm3(:,ni:nf);
L4=vm3(:,ni:nf);
L5=dm4(:,ni:nf);
L6=vm4(:,ni:nf);
L7=dm5(:,ni:nf);
L8=vm5(:,ni:nf);
%
%
X2= [ L1
      L2
      L3
      L4
      L5
      L6
      L7
      L8 ];
%
%
%
A1=X2*X1'
B1=X1*X1'
A2=A1*inv(B1);
[psi,lambda]=eig(A2) ;
A3=psi*lambda*inv(psi);
%
for i=1:8;
    ar=real(lambda(i,i));
    br=imag(lambda(i,i));
    A=-log(ar*ar+br*br)/(2*dta) ;
    B=atan(-br/ar)/dta;
    if br==0
        t1=1;
        w1=0;
    else
        t1=sqrt(A*A/(A*A+B*B));
        w1=sqrt(A*A+B*B);
    end
    taur(i)=t1;
    wr(i)=w1;
end
end

```

A.2.3.6

```
%  
% üd2r.m - método do Ibrahim para excitação aleatória  
%  
Ts = 1/5000 ;  
dta=1/5000 ;  
dn =dta/Ts ;  
dn3=2;  
%  
load f:\matlab\casoipt\arqdrm2 dm2  
load f:\matlab\casoipt\arqdrm3 dm3  
load f:\matlab\casoipt\arqdrm4 dm4  
load f:\matlab\casoipt\arqdrm5 dm5  
%  
[col,lin]=size(dm2);  
ni=1;  
nf=lin-dn-dn3;  
%  
%  
%  
L1=dm2(:,ni:nf);  
L2=dm3(:,ni:nf);  
L3=dm4(:,ni:nf);  
L4=dm5(:,ni:nf);  
%  
L5=dm2(:,ni+dn3:nf+dn3);  
L6=dm3(:,ni+dn3:nf+dn3);  
L7=dm4(:,ni+dn3:nf+dn3);  
L8=dm5(:,ni+dn3:nf+dn3);  
%  
%  
X1 = [ L1  
      L2  
      L3  
      L4  
      L5  
      L6  
      L7  
      L8 ];  
%  
ni=ni+dn;  
nf=nf+dn;  
%  
%  
L1=dm2(:,ni:nf);  
L2=dm3(:,ni:nf);  
L3=dm4(:,ni:nf);  
L4=dm5(:,ni:nf);  
%  
L5=dm2(:,ni+dn3:nf+dn3);  
L6=dm3(:,ni+dn3:nf+dn3);  
L7=dm4(:,ni+dn3:nf+dn3);
```

```

L8=dm5(:,ni+dn3:nf+dn3);
%
%
X2= [ L1
      L2
      L3
      L4
      L5
      L6
      L7
      L8 ];
%
%
A1=X2*X1';
B1=X1*X1';
A2=A1*inv(B1);
[psi,lambda]=eig(A2) ;
A3=psi*lambd*inv(psi);
%
for i=1:8;
    ar=real(lambda(i,i));
    br=imag(lambda(i,i));
    A=-log(ar*ar+br*br)/(2*dta) ;
    B=atan(-br/ar)/dta;
    if br==0
        t1=1;
        w1=0;
    else
        t1=sqrt(A*A/(A*A+B*B));
        w1=sqrt(A*A+B*B);
    end
    taur(i)=t1;
    wr(i)=w1;
end

```