

AMADEU ZENJIRO MATSUMURA

Licenciado em Matemática - Universidade Mackenzie, 1956

ESTABILIDADE DE UM SATÉLITE RÍGIDO

MUNIDO DE UM ROTOR

Dissertação apresentada à
Escola Politécnica da USP
para a obtenção do Título
de Mestre em Engenharia

ORIENTADOR: Prof. Dr. Atair Rios Neto
Professor Assistente Doutor do Departamento
de Engenharia Mecânica da EPUSP

SÃO PAULO-1978

A G R A D E C I M E N T O S

Desejo aqui deixar consignado meu mais profundo agradecimento ao Prof. Dr. Bartolomeo Albanese pelo incentivo e apoio recebidos.

Meus agradecimentos ao Prof. Dr. Atair Rios Neto pela orientação e apoio recebidos na elaboração da presente dissertação; ao Prof. Dr. Luiz Novaes F. França pelas críticas e valiosas sugestões recebidas; ao Instituto Mauá de Tecnologia pelo suporte financeiro que tornou possível esta etapa de estudos.

A todos aqueles que me auxiliaram na consecução do presente trabalho, meu muito obrigado.

R E S U M O

É examinada a estabilidade de um satélite simétrico munido de um rotor, cujo eixo de rotação próprio (spin) coincide com o eixo de simetria da carcaça rígida, colocada em órbita circular.

Os pontos de equilíbrio são obtidos da análise das equações de Lagrange desenvolvidas para o problema.

A estabilidade do movimento é analisada pelo método direto de Liapunov, com o emprego da Hamiltoniana como função de Liapunov.

São obtidas 6 posições de equilíbrio, mostrando-se serem 3 delas estaveis segundo Liapunov e que as 3 restantes não apresentam características de estabilidade. Todavia uma delas, por razões de ordem física, deve ser estavel.

A B S T R A C T

This study examines the stability of a symmetric satellite in a circular orbit, which has a spinning rotor with its axis coinciding with the axis of symmetry of the principal rigid body.

The equilibrium points are obtained from the analysis of the Lagrange equations developed for the problem under study.

The stability of motion is examined by the Liapunov direct method, with the Hamiltonian taken as a Liapunov function.

Six equilibrium positions are detected; three are shown to be stable according to Liapunov's criterion, and the remainder ones do not present a stability character. Nevertheless, it is shown that one of them, by physical reasons can be considered stable.

Í N D I C E G E R A L

| | |
|--|----|
| CAPÍTULO I - Introdução | 2 |
| CAPÍTULO II - Cinemática do Sistema | |
| 2.1 - Condições Preliminares | 7 |
| 2.2 - Vetor de Rotação | 10 |
| CAPÍTULO III - Dinâmica do Sistema | |
| 3.1 - A Energia Potencial | 16 |
| 3.2 - A Energia Cinética | 24 |
| 3.3 - A Lagrangeana | 26 |
| 3.4 - Eq.de Lagrange para a Coordenada θ_1 | 28 |
| 3.5 - Eq.de Lagrange para a Coordenada θ_2 | 36 |
| 3.6 - Eq. de Lagrange para a Coordenada θ_3 ... | 42 |
| 3.7 - As Posições de Equilíbrio | 44 |
| CAPÍTULO IV - Estabilidade do Sistema | |
| 4.1 - A Função de Liapunov | 49 |
| 4.2 - A Hamiltoniana | 52 |
| 4.3 - Os Pontos Críticos de \bar{U} | 58 |
| 4.4 - Estabilidade do Sistema | 60 |
| CAPÍTULO V - Considerações Finais | 77 |
| BIBLIOGRAFIA | 80 |

ÍNDICE DAS FIGURAS

| | |
|--|----|
| Figura 2.1 - ilustração do problema | 8 |
| Figura 2.2 - ilustração dos sistemas inercial e orbital | 10 |
| Figura 2.3 - rotação em torno do eixo a_1 | 11 |
| Figura 2.4 - rotação em torno do eixo b_2 | 12 |
| Figura 2.5 - rotação em torno do eixo c_3 | 12 |
| Figura 3.1 - ilustração do sistema inercial | 16 |
| Figura 4.1 - superfície gerada pelo eixo de spin no 1º caso de equilíbrio | 65 |
| Figura 4.2 - superfície gerada pelo eixo de spin no 2º caso de equilíbrio | 67 |
| Figura 4.3 - superfície gerada pelo eixo de spin no 3º caso de equilíbrio | 69 |
| Figura 4.4 - posição de equilíbrio no 4º caso | 71 |
| Figura 4.5 - posição de equilíbrio no 5º caso | 73 |
| Figura 4.6 - posição de equilíbrio no 6º caso | 75 |

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

I N T R O D U Ç Ã O

O movimento de um satélite terrestre pode ser concebido como resultante de dois movimentos básicos, a saber: o movimento do seu centro de massa em torno da Terra e mais o movimento de rotação em torno do centro de massa.

Neste trabalho estudaremos as posições de equilíbrio e sua estabilidade, no caso de um satélite (corpo rígido) munido de um rotor com velocidade de rotação própria constante, colocado em órbita circular em torno de um centro de força do tipo Newtoniano.

O controle da posição do satélite num sistema inercial ou num sistema orbital, pode ser conseguido por processos ativos ou passivos.

Nos processos ativos, sensores são utilizados no comando de correções que permitam manter o satélite numa posição desejada.

Nos processos passivos de estabilização do satélite, dois métodos se destacam, a saber:

- a - estabilização pelo gradiente gravitacional. É sabido que no caso de um corpo rígido sem movimento de "spin", o torque gravitacional tende a alinhar o eixo de menor momento de inércia com o centro de força, conforme se vê em De Bra (D 1) e em Thomsom (T 1);
- b - estabilização por "spin". No caso de um corpo rígido com movimento de "spin", não sujeito a torques

externos, o eixo de spin tende a manter uma posição fixa no espaço inercial.

É desnecessário enfatizar a importância dos satélites nos dias atuais, quer como instrumento de comunicação, quer como instrumento de pesquisa meteorológica, geológica, etc.

Em todas essas aplicações, interessa saber a posição de equilíbrio do satélite e principalmente se essa posição é estável .

Admite-se como sendo uma posição de equilíbrio do satélite, aquela em que o mesmo mantém uma atitude fixa em relação a um sistema orbital.

As equações do movimento são equações diferenciais envolvendo "n" coordenadas generalizadas e "n" velocidades generalizadas

$$x_i \quad (i = 1, 2, \dots, 2n)$$

Diz-se então que $x_i = c_i$ ($i = 1, 2, \dots, 2n$) com c_i constantes, é uma posição de equilíbrio se esses valores satisfazem as equações diferenciais do movimento.

Uma posição de equilíbrio dir-se-á estável segundo Liapunov, se dado um $n^\circ \varepsilon$, existir em correspondência um δ e um instante t_0 tal que

$$\sum_{i=1}^{2n} x_i^2 \leq \varepsilon$$

para todo movimento subsequente a uma perturbação inicial da posição de equilíbrio, onde a perturbação inicial satisfaz a condição:

$$\sum_{i=1}^{2n} x_{i0}^2 \leq \delta \quad \text{para } t = t_0$$

Nemytskii and Stepanov (N 1 , pag.152.)

Um número muito grande de estudiosos já se dedicou ao estudo desse tipo de problema com maior ou menor grau de generalidade.

Assim De Bra and Delp em (D 1) estudaram as posições de equilíbrio no caso de um corpo rígido sem simetria, em órbita circular. O estudo da estabilidade do movimento foi feito através das equações linearizadas.

Tambem Thomsom em (T 1) analisa a estabilidade das posições de equilíbrio de um corpo rígido simétrico, dotado de movimento de spin, colocado em órbita circular.

Kane em (K 2) estuda as posições de equilíbrio e sua estabilidade, no caso de um corpo rígido, não simétrico, em órbita circular e tendo um dos eixos principais de inércia em posição normal ao plano orbital. O estudo da estabilidade é feito através das equações linearizadas do movimento.

Likins em (L 2) também estuda as posições de equilíbrio e sua estabilidade no caso de um satélite (corpo rígido) em órbita circular . Ele estuda a estabilidade local através das equações linearizadas do movimento e em seguida compara os resultados com a análise da estabilidade obtida pelo método de Liapunov.

Meirovitch and Wallace em (M 2) estudam a estabilidade do movimento de um satélite não simétrico, em órbita circular, e dotado de movimento de spin, cujo eixo se mantém normal ao plano da órbita.

Em todos estes estudos, as equações diferenciais do movimento são autônomas, isto é, nelas não figura explicita-

mente o tempo.

Segundo Meirovitch em (M 2), um número muito grande de fatores influenciam poderosamente, tornando não autônomas as equações diferenciais do movimento, e cita como exemplos os seguintes casos:

- i - movimento de um satélite rígido, não simétrico, dotado de movimento de "spin" arbitrário e em órbita circular;
- ii - movimento de um satélite rígido, simétrico, com movimento de "spin" arbitrário e em órbita elíptica ;
- iii - movimento de um satélite rígido simétrico, com movimento de "spin" arbitrário, em órbita circular e com partes elásticas.

O presente estudo constitui o primeiro passo para o desenvolvimento de estudos mais amplos no campo da estabilidade do movimento de satélites. Assim nos restringiremos ao problema descrito inicialmente. Nesse contexto, no capítulo 2 formulamos a cinemática do movimento; no capítulo 3 estabelecemos a dinâmica do movimento e determinamos os pontos críticos do sistema; no capítulo 4 estudamos a estabilidade do movimento nos pontos de equilíbrio, usando para isso a Hamiltoniana do sistema como função de Liapunov e, finalizamos no capítulo 5 com alguns comentários sobre resultados existentes na literatura e possíveis áreas para pesquisas futuras.

CAPÍTULO II

CINEMÁTICA
DO
SISTEMA

2.1 - CONDIÇÕES PRELIMINARES

No presente trabalho procura-se determinar as posições de equilíbrio e sua estabilidade, no caso de um satélite simétrico, munido de um rotor, colocado em órbita circular em torno de um centro de força O.

O satélite é constituído de uma carcaça rígida, simétrica e o rotor tem rotação própria (spin) em torno de um seu eixo principal de inércia, que coincide com um dos eixos principais de inércia da carcaça.

Admitiremos que:

- 1 - a carcaça e o rotor tenham centro de massa coincidentes e que seus eixos principais de inércia também sejam coincidentes;
- 2 - o centro de massa G do satélite (conjunto carcaça rígida e mais o rotor) descreva um movimento circular em torno do centro de força O;
- 3 - as dimensões do satélite quando comparadas com a distância do centro de massa G ao centro de força O, sejam desprezíveis; de modo que os movimentos do satélite em torno do seu centro de massa não interfiram no movimento circular deste;
- 4 - a lei de força que age num ponto qualquer P seja proporcional ao inverso do quadrado da distância do ponto ao centro de força O, isto é:

$$F = \frac{Km}{r^2}$$

onde m é a massa do ponto P
 $r = |P - O|$
 $K = \text{constante}$

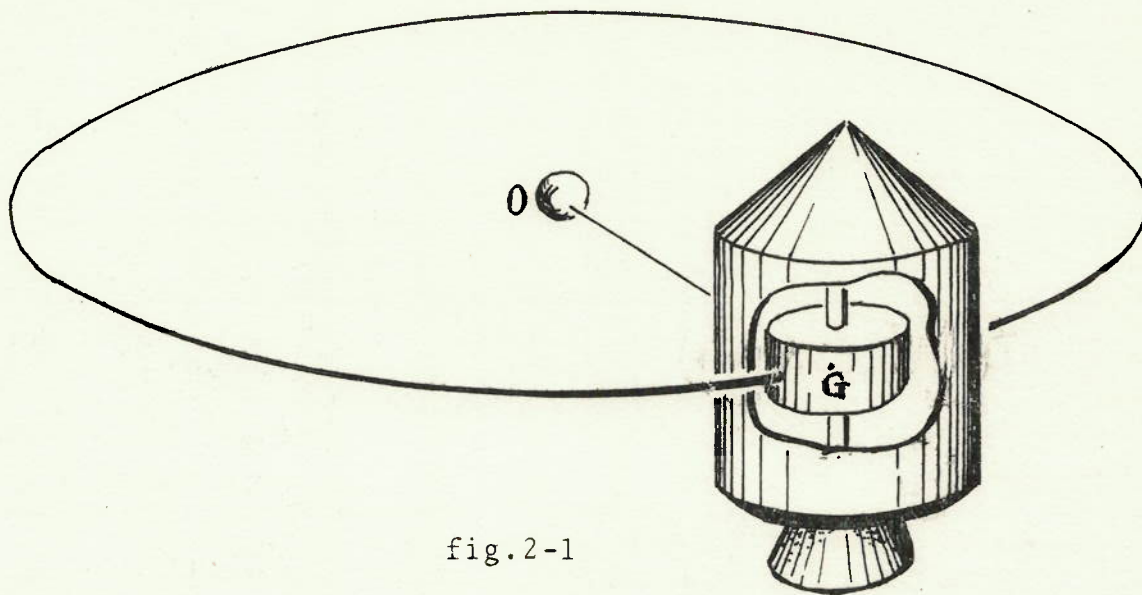


fig.2-1

Determinaremos as equações do movimento usando a Lagrangeana do sistema:

$$L = T - V, \text{ onde}$$

T é a energia cinética

V é a energia potencial

Para o estudo da estabilidade do sistema nos pontos de equilíbrio, usaremos o conceito de estabilidade segundo Liapunov e como função de Liapunov, a Hamiltoniana do sistema.

Em nosso estudo encontramos 6 posições de equilíbrio, das quais 3 são estáveis segundo Liapunov; uma apresenta-se com características indeterminadas quanto à sua estabilidade, mas por razões de ordem física ela se apresenta como sendo nitidamente estável. As outras duas posições não apresentam características que permitam concluir sua estabilidade.

Se no satélite fixarmos o rotor rigidamente na carcaça e considerarmos a rotação desta em torno do seu eixo de simetria, como sendo o spin do satélite, das 6 posições de equilíbrio, 4 delas coincidem integralmente com a totalidade dos resultados apresentados por Likins em (L 2).

As duas outras posições de equilíbrio que não aparecem no trabalho do Prof. Likins, estão em consonância com os resultados de De Bra and Delp em (D 1) e com os resultados de Thomsom em (T 1).

2.2 - O VETOR ROTAÇÃO DO SATÉLITE

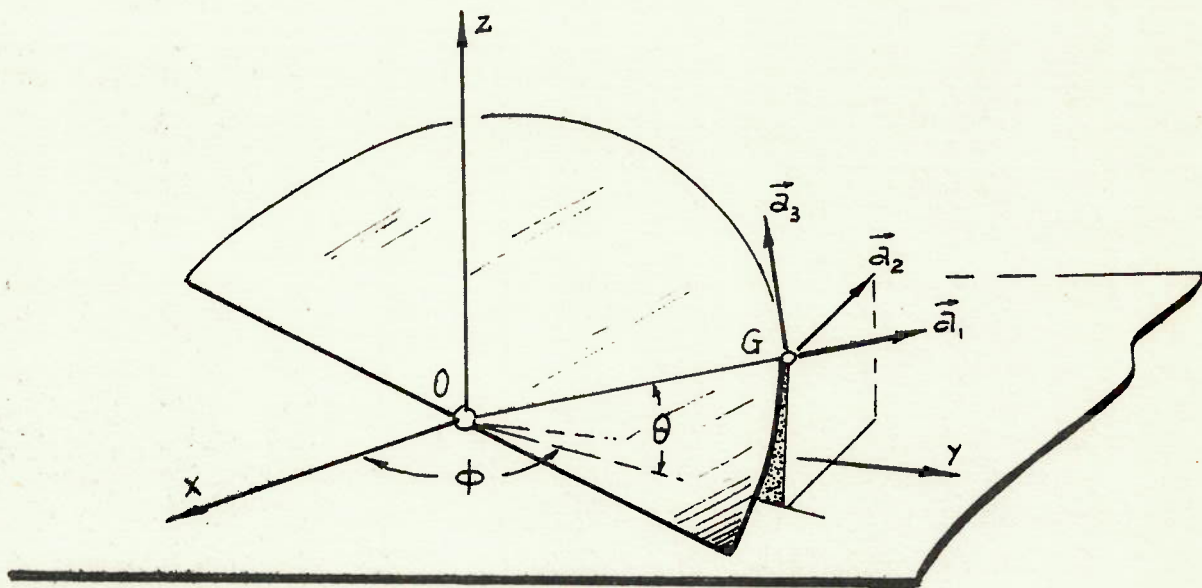


fig. 2-2

Seja $(OXYZ)$ um sistema inercial tri-ortogonal com origem no centro de força O .

Sejam \vec{a}_1, \vec{a}_2 e \vec{a}_3 os versores de uma terna tri-ortogonal ligada ao satélite, com origem no centro de massa G do mesmo, sendo :

\vec{a}_1 , versor radial

\vec{a}_3 , versor perpendicular ao a_1 e situado no plano perpendicular ao plano OXY .

$$\vec{a}_2 = \vec{a}_3 \wedge \vec{a}_1$$

Seja $(Gxyz)$ uma terna tri-ortogonal, rigidamente ligada ao satélite, com os eixos orientados segundo os eixos principais de inércia do mesmo.

Sejam ainda :

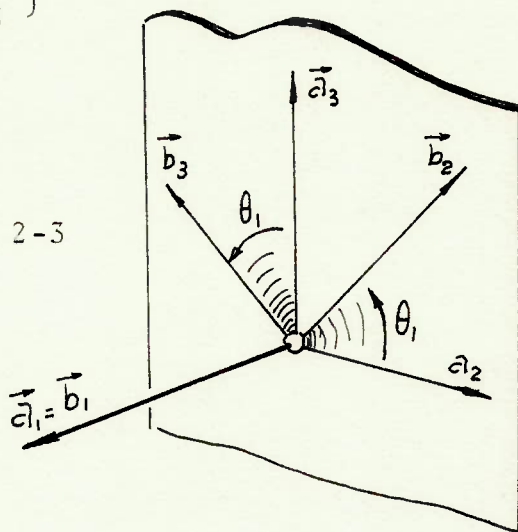
ϕ o ângulo de rotação em torno do eixo Z

θ o ângulo de elevação.

Podemos passar do sistema de eixos (a_1, a_2, a_3) para o sistema de eixos (x, y, z) mediante uma sequencia de 3 rotações, a saber:

i) uma rotação θ_1 em torno do eixo a_1 e teremos o sistema (b_1, b_2, b_3)

fig. 2-3



$$\begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vec{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_1 & -\text{sen}\theta_1 \\ 0 & \text{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \\ \vec{b}_3 \end{pmatrix} \quad (2-1)$$

onde \vec{a}_i é o versor do eixo a_i , $i = 1, 2, 3$

\vec{b}_i é o versor do eixo b_i , $i = 1, 2, 3$;

ii) uma rotação θ_2 em torno do eixo b_2 e teremos o sistema (c_1, c_2, c_3) .

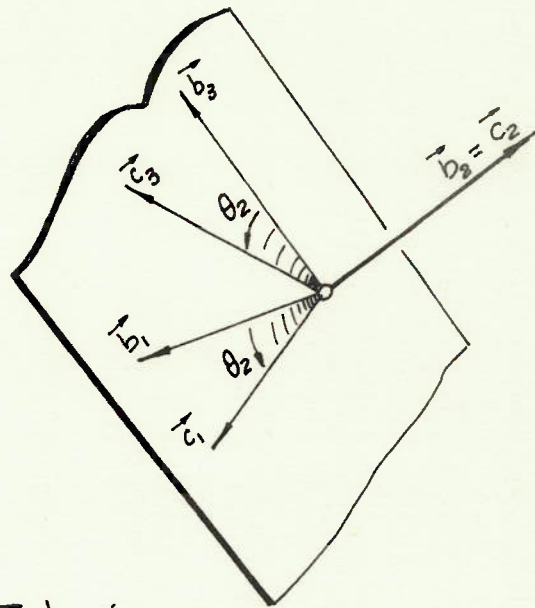


fig. 2-4

$$\begin{pmatrix} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \\ \vec{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & 0 & \text{sen} \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen} \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{c}_1 \\ \vec{c}_2 \\ \vec{c}_3 \end{pmatrix} \quad (2-2)$$

onde \vec{c}_i é o versor do eixo c_i , $i = 1, 2, 3$

iii) uma rotação θ_3 em torno do eixo c_3 e teremos o sistema (x, y, z) .

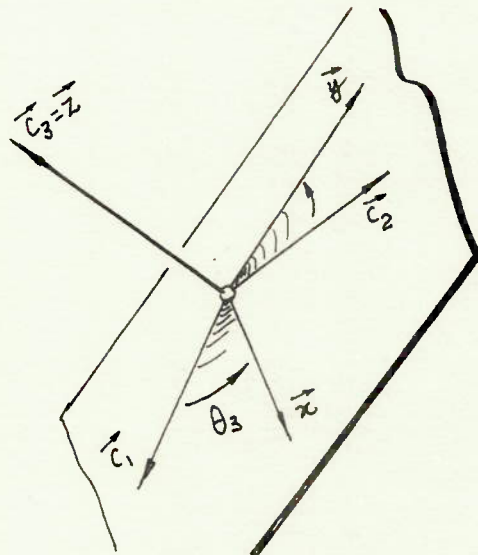


fig. 2-5

$$\begin{pmatrix} \vec{c}_1 \\ \vec{c}_2 \\ \vec{c}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_3 & -\text{sen} \theta_3 & 0 \\ \text{sen} \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{pmatrix} \quad (2-5)$$

onde \vec{x} , \vec{y} , \vec{z} são os versores dos eixos x, y e z .

O vetor rotação será

$$\vec{\omega} = \dot{\phi} \vec{K} + \dot{\theta} \vec{a}_2 + \dot{\theta}_1 \vec{a}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{b}_2 + \dot{\theta}_3 \vec{c}_3 \quad (2-4)$$

como $\vec{K} = \text{sen } \theta \vec{a}_1 + \text{cos } \theta \vec{a}_3$ e tendo em conta (2-1)

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= (\dot{\theta}_1 + \dot{\phi} \text{sen } \theta) \vec{b}_1 + \\ &+ \dot{\theta} (\text{cos } \theta_1 \vec{b}_2 - \text{sen } \theta_1 \vec{b}_3) + \\ &+ \dot{\phi} \text{cos } \theta (\text{sen } \theta_1 \vec{b}_2 + \text{cos } \theta_1 \vec{b}_3) + \\ &+ \dot{\theta}_2 \vec{b}_2 + \\ &+ \dot{\theta}_3 \vec{c}_3 \end{aligned}$$

introduzindo (2-2) vem

$$\begin{aligned} &= (\dot{\theta}_1 + \dot{\phi} \text{sen } \theta) (\text{cos } \theta_2 \vec{c}_1 + \text{sen } \theta_2 \vec{c}_3) + \\ &+ (\dot{\theta} \text{cos } \theta_1 + \dot{\phi} \text{cos } \theta \text{sen } \theta_1 + \dot{\theta}_2) \vec{c}_2 + \\ &+ (-\dot{\theta} \text{sen } \theta_1 + \dot{\phi} \text{cos } \theta \text{cos } \theta_1) (-\text{sen } \theta_2 \vec{c}_1 + \text{cos } \theta_2 \vec{c}_3) + \\ &+ \dot{\theta}_3 \vec{c}_3 \end{aligned}$$

reagrupando

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= [\dot{\phi} (\text{sen } \theta \text{cos } \theta_2 - \text{cos } \theta \text{cos } \theta_1 \text{sen } \theta_2) + \dot{\theta}_1 \text{cos } \theta_2 + \\ &+ \dot{\theta} \text{sen } \theta_1 \text{sen } \theta_2] \vec{c}_1 + \\ &+ [\dot{\phi} \text{cos } \theta \text{sen } \theta_1 + \dot{\theta} \text{cos } \theta_1 + \dot{\theta}_2] \vec{c}_2 + \\ &+ [\dot{\phi} (\text{sen } \theta \text{sen } \theta_2 + \text{cos } \theta \text{cos } \theta_1 \text{cos } \theta_2) + \dot{\theta}_1 \text{sen } \theta_2 + \\ &- \dot{\theta} \text{sen } \theta_1 \text{cos } \theta_2 + \dot{\theta}_3] \vec{c}_3 \end{aligned}$$

No caso de um movimento circular (que é o nosso caso)

podemos impor :

$$\dot{\phi} = -\Omega \quad \text{rotação orbital, com sinal negativo por conveniência}$$

$$\theta = 0 \quad \text{ângulo de elevação nulo}$$

$$\dot{\theta} = 0$$

as componentes do vetor rotação $\vec{\omega}$ no sistema de eixos (c_1, c_2, c_3) serão:

$$\begin{aligned}\omega_{c_1} &= \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 + \Omega \cos \theta_1 \sin \theta_2 \\ \omega_{c_2} &= \dot{\theta}_2 - \Omega \sin \theta_1 \\ \omega_{c_3} &= \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 - \Omega \cos \theta_1 \cos \theta_2\end{aligned}\tag{2-5}$$

e passando para o sistema de eixos (x,y,z) através da (2-3) teremos:

$$\begin{aligned}\vec{\omega} &= (\dot{\theta}_1 \cos \theta_2 + \Omega \cos \theta_1 \sin \theta_2) (\cos \theta_3 \vec{x} - \sin \theta_3 \vec{y}) + \\ &+ (\dot{\theta}_2 - \Omega \sin \theta_1) (\sin \theta_3 \vec{x} + \cos \theta_3 \vec{y}) + \\ &+ (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 - \Omega \cos \theta_1 \cos \theta_2) \vec{z}\end{aligned}$$

reagrupando teremos:

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 + \dot{\theta}_2 \sin \theta_3 + \\ &+ \Omega (\cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 - \sin \theta_1 \sin \theta_3) \\ \omega_y &= -\dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 + \dot{\theta}_2 \cos \theta_3 + \\ &- \Omega (\sin \theta_1 \cos \theta_3 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3) \\ \omega_z &= \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 + \dot{\theta}_3 - \Omega \cos \theta_1 \cos \theta_2\end{aligned}\tag{2-6}$$

CAPÍTULO III

DINÂMICA

DO

SISTEMA

3-1 - A ENERGIA POTENCIAL

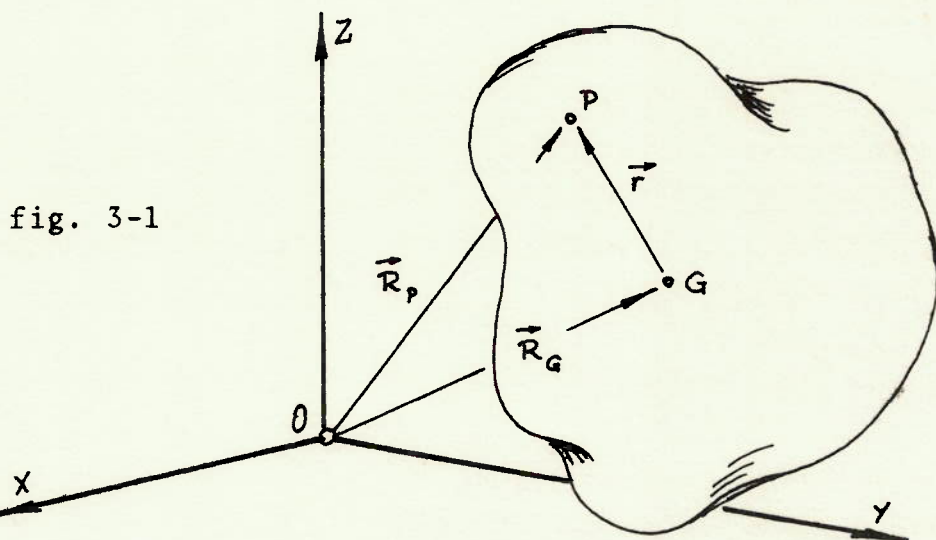


fig. 3-1

Admitiremos a lei de força como sendo do tipo Newtoniano, a saber:

$$F = -\frac{K m}{R_p^2}$$

onde $K = C_o M$, $\left\{ \begin{array}{l} C_o \text{ é a constante universal} \\ M \text{ é a massa da Terra} \end{array} \right.$

m é a massa do ponto P

$R_p = |P - O|$ é a distância do ponto P ao centro de força O, que é o centro da Terra suposta esférica.

Seja G o centro de massa do satélite (corpo rígido)

Seja "dm" a massa associada a um ponto P do mesmo.

A energia potencial do satélite será dado por

$$V = - \int \frac{K}{|R_p|} dm$$

sendo $\vec{R}_p = P - O = P - G + G - O = \vec{R}_G + \vec{r}$

onde $\vec{R}_G = G - O$ e $\vec{r} = P - G$

$$\begin{aligned}
 |\vec{R}_P| &= |\vec{R}_G + \vec{r}| \\
 &= \sqrt{(\vec{R}_G + \vec{r})(\vec{R}_G + \vec{r})} \\
 &= \sqrt{R_G^2 + r^2 + 2 \vec{r} \cdot \vec{R}_G} \\
 |\vec{R}_P|^{-1} &= [R_G^2 + (r^2 + 2 \vec{R}_G \cdot \vec{r})]^{-1/2} \\
 &= (\alpha + \beta)^n \\
 &= \alpha^n + n \alpha^{n-1} \beta + \frac{1}{2} n(n-1) \alpha^{n-2} \beta^2 + \dots \\
 |\vec{R}_P|^{-1} &= (R_G^2)^{-1/2} - \frac{1}{2} (R_G^2)^{-3/2} [r^2 + 2 \vec{R}_G \cdot \vec{r}] + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) (R_G^2)^{-5/2} [r^2 + 2 \vec{R}_G \cdot \vec{r}]^2 + \dots \\
 |\vec{R}_P|^{-1} &= R_G^{-1} - \frac{1}{2} R_G^{-3} [r^2 + 2 \vec{R}_G \cdot \vec{r}] + \\
 &\quad + \frac{3}{8} R_G^{-5} [r^4 + 4 r^2 \vec{R}_G \cdot \vec{r} + 4 (\vec{R}_G \cdot \vec{r})^2] + \dots \\
 |\vec{R}_P|^{-1} &= R_G^{-1} - R_G^{-2} (\vec{i}' \cdot \vec{r}) - R_G^{-3} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{3}{2} (\vec{i}' \cdot \vec{r})^2 \right] + \dots
 \end{aligned}$$

onde \vec{i}' é o versor de G - O

A energia potencial será então

$$\begin{aligned}
 V &= -K \int \frac{1}{|\vec{R}_P|} dm \\
 &= -K \int \left\{ R_G^{-1} - R_G^{-2} (\vec{i}' \cdot \vec{r}) - \frac{1}{2} R_G^{-3} [r^2 - 3(\vec{i}' \cdot \vec{r})^2] + \right. \\
 &\quad \left. + \dots \right\} dm
 \end{aligned}$$

e como $\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$, onde (x,y,z) são agora as coordenadas do ponto P, no sistema de eixos x,y e z, ligados aos eixos principais de inércia do satélite:

$$V = -\frac{K m}{R_G} + \frac{K}{R_G^2} \int (x l_{ax} + y l_{ay} + z l_{az}) dm +$$

$$+ \frac{K}{2R_G^3} \int (x^2 + y^2 + z^2) dm +$$

$$- \frac{3K}{2R_G^2} \int (x l_{ax} + y l_{ay} + z l_{az})^2 dm + \dots$$

onde "m" é a massa do satélite

l_{ax} , l_{ay} e l_{az} são os cossenos diretores do eixo ligado a G - O, cujo versor é \vec{i}' . No sistema de eixos a_1, a_2, a_3 o \vec{i}' coincide com o versor \vec{a}_1 .

Desenvolvendo e reagrupando teremos:

$$V = -\frac{K m}{R_G} + \frac{K}{R_G^2} \left\{ l_{ax} \int x dm + l_{ay} \int y dm + l_{az} \int z dm \right\} +$$

$$+ \frac{K}{4R_G^3} \left\{ \int (x^2 + y^2) dm + \int (x^2 + z^2) dm + \right.$$

$$\left. + \int (y^2 + z^2) dm \right\} +$$

$$- \frac{3K}{2R_G^2} \left\{ \int (x^2 l_{ax}^2 + y^2 l_{ay}^2 + z^2 l_{az}^2 + 2xy l_{ax} l_{ay} + \right.$$

$$\left. + 2xz l_{ax} l_{az} + 2yz l_{ay} l_{az}) dm \right\} + \dots$$

Como o sistema (Gxyz) tem origem no centro de massa G do satélite, então

$$\int x dm = \int y dm = \int z dm = 0$$

e como os eixos x,y,z são orientados segundo os eixos principais de inércia, então são nulos os produtos de inércia.

$$\int xy \, dm = \int xz \, dm = \int yz \, dm = 0$$

$$V = -\frac{\mathbb{K} m}{R_G} + \frac{\mathbb{K}}{4R_G^3} [I_x + I_y + I_z] +$$

$$- \frac{3 \mathbb{K}}{2 R_G^3} \int (x^2 l_{ax}^2 + y^2 l_{ay}^2 + z^2 l_{az}^2) \, dm + \dots$$

$$V = -\frac{\mathbb{K} m}{R_G} + \frac{\mathbb{K}}{4R_G^3} [I_x + I_y + I_z] +$$

$$- \frac{3 \mathbb{K}}{4R_G^3} l_{ax}^2 \int (x^2 + y^2 + x^2 + z^2 - y^2 - z^2) \, dm +$$

$$- \frac{3 \mathbb{K}}{4R_G^3} l_{ay}^2 \int (y^2 + x^2 + y^2 + z^2 - x^2 - z^2) \, dm +$$

$$- \frac{3 \mathbb{K}}{4R_G^3} l_{az}^2 \int (z^2 + x^2 + z^2 + y^2 - x^2 - y^2) \, dm + \dots$$

$$V = -\frac{\mathbb{K} m}{R_G} + \frac{\mathbb{K}}{4R_G^3} (I_x + I_y + I_z) +$$

$$- \frac{3 \mathbb{K}}{4R_G^3} (I_y + I_z - I_x) l_{ax}^2 +$$

$$- \frac{3 \mathbb{K}}{4R_G^3} (I_x + I_z - I_y) l_{ay}^2 +$$

$$- \frac{3 \mathbb{K}}{4R_G^3} (I_x + I_y - I_z) l_{az}^2 + \dots$$

que é a energia potencial do satélite, expresso até termos de 2ª ordem nos cossenos diretores (l_{ax} , l_{ay} , l_{az}) de G - 0.

I_x , I_y e I_z são os momentos de inércia do satélite. em relação ao eixos x, y e z respectivamente.

Nosso satélite se compõe de duas partes rígidas, a saber: sua carcaça e seu rotor.

Sua energia potencial será, segundo as hipóteses adotadas: $V = V_{\text{carcaça}} + V_{\text{rotor}}$

$$\begin{aligned} V = & \left\{ -\frac{\mathbb{K} m_c}{R_G} + \frac{\mathbb{K}}{4R_G^3} (I_x + I_y + I_z) + \right. \\ & - \frac{3\mathbb{K}}{4R_G^3} (I_y + I_z - I_x) l_{ax}^2 + \\ & - \frac{3\mathbb{K}}{4R_G^3} (I_z + I_x - I_y) l_{ay}^2 + \\ & \left. - \frac{3\mathbb{K}}{4R_G^3} (I_x + I_y - I_z) l_{az}^2 \right\} + \dots\dots \\ & + \left\{ -\frac{\mathbb{K} m_r}{R_G} + \frac{\mathbb{K}}{4R_G^3} (J_x + J_y + J_z) + \right. \\ & - \frac{3\mathbb{K}}{4R_G^3} (J_y + J_z - J_x) l_{ax}^2 + \\ & - \frac{3\mathbb{K}}{4R_G^3} (J_z + J_x - J_y) l_{ay}^2 + \\ & \left. - \frac{3\mathbb{K}}{4R_G^3} (J_x + J_y - J_z) l_{az}^2 \right\} + \dots\dots \end{aligned}$$

onde m_c é a massa da carcaça,

I_x , I_y e I_z são seus momentos principais de inércia,

m_r é a massa do rotor,

J_x , J_y e J_z são seus momentos principais de inércia.

A carcaça e o rotor devem ser ajustados de modo que

seus centros de massa e eixos principais de inércia coincidem.

Fazendo $m_c + m_r = m$ massa total do satélite

$$A_i = I_i + J_i \quad i = x, y, z$$

$$C = -\frac{\mathbb{K} m}{R_G} + \frac{\mathbb{K}}{4R_G^3} (A_x + A_y + A_z), \text{ constante,}$$

teremos:

$$\begin{aligned}
V = & C - \frac{3 \mathbb{K}}{4R_G^3} (-A_x + A_y + A_z) l_{ax}^2 + \\
& - \frac{3 \mathbb{K}}{4R_G^3} (A_x - A_y + A_z) l_{ay}^2 + \\
& - \frac{3 \mathbb{K}}{4R_G^3} (A_x + A_y - A_z) l_{az}^2 + \dots
\end{aligned}$$

como l_{ax} , l_{ay} e l_{az} são as componentes do versor radial \vec{a}_1 , teremos de (2.1), (2.2) e (2.3)

$$\begin{aligned}
\vec{a}_1 &= \vec{b}_1 \\
&= \cos \theta_2 \vec{c}_1 + \sin \theta_2 \vec{c}_3 \\
&= \cos \theta_2 \cos \theta_3 \vec{x} + (\sin \theta_2 - \cos \theta_2 \sin \theta_3) \vec{z}
\end{aligned}$$

logo $l_{ax} = \cos \theta_2 \cos \theta_3$

$l_{ay} = 0$

$l_{az} = \sin \theta_2 - \cos \theta_2 \sin \theta_3$

$$\begin{aligned}
V = & C - \frac{3 \mathbb{K}}{4R_G^3} (-A_x + A_y + A_z) \cos^2 \theta_2 \cos^2 \theta_3 + \\
& - \frac{3 \mathbb{K}}{4R_G^3} (A_x + A_y - A_z) (\sin \theta_2 - \cos \theta_2 \sin \theta_3)^2 + \\
& + \dots
\end{aligned}$$

$$V = C - \frac{3K}{4R_G^3} \left\{ (-A_x + A_y + A_z)(1 - \text{sen}^2\theta_2)(1 - \text{sen}^2\theta_3) + \right. \\ \left. + (A_x + A_y - A_z) [\text{sen}^2\theta_2 + (1 - \text{sen}^2\theta_2)\text{sen}^2\theta_3 + \right. \\ \left. - 2 \text{sen}\theta_2 \cos\theta_2 \text{sen}\theta_3] \right\} + \dots$$

$$V = C - \frac{3K}{4R_g^3} (-A_x + A_y + A_z) + \\ - \frac{3K}{4R_g^3} \left\{ -(-A_x + A_y + A_z) + (A_x + A_y - A_z) \right\} \text{sen}^2\theta_2 + \\ + \left\{ -(-A_x + A_y + A_z) + (A_x + A_y - A_z) \right\} \text{sen}^2\theta_3 + \\ + \left\{ (-A_x + A_y + A_z) - (A_x + A_y - A_z) \right\} \text{sen}^2\theta_2 \text{sen}^2\theta_3 + \\ - 2(A_x + A_y - A_z) \text{sen}\theta_2 \cos\theta_2 \text{sen}\theta_3 \left. \right\} + \dots$$

$$V = C - \frac{3K}{4R_g^3} (-A_x + A_y + A_z) + \\ - \frac{3K}{4R_G} \left\{ 2(A_x - A_z) \text{sen}^2\theta_2 + 2(A_x - A_z) \text{sen}^2\theta_3 + \right. \\ \left. + 2(A_z - A_x) \text{sen}^2\theta_2 \text{sen}^2\theta_3 + \right. \\ \left. - 2(A_x + A_y - A_z) \text{sen}\theta_2 \cos\theta_2 \text{sen}\theta_3 \right\} + \dots$$

$$V = C - \frac{3K}{4R_G^3} (-A_x + A_y + A_z) + \\ + \frac{3K}{2R_G^3} \left\{ (A_z - A_x) [\text{sen}^2\theta_2 + \text{sen}^2\theta_3 - \text{sen}^2\theta_2 \text{sen}^2\theta_3] + \right. \\ \left. + (A_x + A_y - A_z) \text{sen}\theta_2 \cos\theta_2 \text{sen}\theta_3 \right\} + \dots$$

fazendo $C - \frac{3 \mathbb{K}}{4R_G^3} (-A_x + A_y + A_z) = C_1$ teremos

$$V = C_1 + \frac{3 \mathbb{K}}{2R_G^3} (A_z - A_x) (\sin^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_3 - \sin^2 \theta_2 \sin^2 \theta_3) + \\ + \frac{3 \mathbb{K}}{2R_G^3} (A_x + A_y - A_z) \sin \theta_2 \cos \theta_2 \sin \theta_3 + \dots$$

No caso de uma força central Newtoniana temos:

$$F = \frac{\mathbb{K} m}{R^2} = \frac{C_o M m}{R^2}$$

onde R é o raio da trajetória, que no caso presente, por ser circular, $R = R_G$

C_o constante universal

Ω velocidade angular orbital

é sabido da mecânica que :

$$\mathbb{K} = C_o M = R^3 \Omega^2$$

$$\frac{3 \mathbb{K}}{2R^3} = \frac{3}{2R^3} (R^3 \Omega^2) = \frac{3}{2} \Omega^2$$

a energia potencial assume então a forma

$$V = C_1 + \frac{3}{2} \Omega^2 (A_z - A_x) (\sin^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_3 - \sin^2 \theta_2 \sin^2 \theta_3) + \\ + \frac{3}{2} \Omega^2 (A_x + A_y - A_z) \sin \theta_2 \cos \theta_2 \sin \theta_3 + \dots \quad (3.1.1)$$

3-2 - A ENERGIA CINÉTICA

Se o rotor tiver rotação própria "s" em torno do eixo z, seu vetor rotação será

$$\vec{\omega}_{\text{rotor}} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z + s)$$

onde $\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ é dado (2-6)

A energia cinética do satélite (carcaça + rotor) será então

$$T = T_{\text{carcaça}} + T_{\text{rotor}}$$

$$T = \frac{1}{2} m_c v_G^2 + \frac{1}{2} (I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2) + \\ + \frac{1}{2} m_r v_G^2 + \frac{1}{2} J_x \omega_x^2 + \frac{1}{2} J_y \omega_y^2 + \frac{1}{2} J_z (\omega_z + s)^2$$

mas $m_c + m_r = m$ (massa total do satélite)

$$I_x + J_x = A_x$$

$$I_y + J_y = A_y$$

$$I_z + J_z = A_z, \text{ substituindo teremos}$$

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} (A_x \omega_x^2 + A_y \omega_y^2 + A_z \omega_z^2) + \\ + J_z s \omega_z + \frac{1}{2} J_z s^2$$

Notemos que no movimento circular, o centro de massa G do satélite tem velocidade

$$v_G = R \Omega$$

onde R é o raio da circunferência e

Ω é a velocidade angular orbital.

A energia cinética assume então a forma

$$\begin{aligned}
 T = & \frac{1}{2} A_x \left[\dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 + \dot{\theta}_2 \sin \theta_3 + \right. \\
 & \left. + \Omega (\cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 - \sin \theta_1 \sin \theta_3) \right]^2 + \\
 & + \frac{1}{2} A_y \left[-\dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 + \dot{\theta}_2 \cos \theta_3 + \right. \\
 & \left. - \Omega (\cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 + \sin \theta_1 \cos \theta_3) \right]^2 + \\
 & + \frac{1}{2} A_z \left[\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 - \Omega \cos \theta_1 \cos \theta_2 \right]^2 + \\
 & + J_s \left[\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 - \Omega \cos \theta_1 \cos \theta_2 \right]^2 + \\
 & + \frac{1}{2} J s^2 + \frac{1}{2} m v_G^2 .
 \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

(por comodidade estamos escrevendo $J_z = J$)

3-3 - A L A G R A N G E A N A

$$L = T - V$$

De (3.1.1) e (3.2.1) resulta

$$\begin{aligned}
 L = & \frac{1}{2} A_x [\dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 + \dot{\theta}_2 \sin \theta_3 + \\
 & + \Omega (\cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 - \sin \theta_1 \sin \theta_3)]^2 + \\
 & + \frac{1}{2} A_y [-\dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 + \dot{\theta}_2 \cos \theta_3 + \\
 & - \Omega (\cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 + \sin \theta_1 \cos \theta_3)]^2 + \\
 & + \frac{1}{2} A_z [\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 - \Omega \cos \theta_1 \cos \theta_2]^2 + \\
 & + J_s [\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 - \Omega \cos \theta_1 \cos \theta_2] + \\
 & + \frac{1}{2} J s^2 + \frac{1}{2} m v_G^2 + \\
 & + \frac{3}{2} \Omega^2 (A_x - A_z) (\sin^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_3 - \sin^2 \theta_2 \sin^2 \theta_3) + \\
 & + \frac{3}{2} \Omega^2 (A_z + A_x - A_y) \sin \theta_2 \cos \theta_2 \sin \theta_3 + \\
 & + C_1 + \dots
 \end{aligned}$$

como $v_G = R \Omega = \text{constante}$ (movimento circular), podemos escrever:

$$C_1 + \frac{1}{2} m v_G^2 = C_2 \text{ (constante)}$$

A Lagrangeana assume então a forma:

$$\begin{aligned}
 L = & \frac{1}{2} A_x [\dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 + \dot{\theta}_3 \operatorname{sen} \theta_3 + \\
 & + \Omega (\cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_3 - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_3)]^2 + \\
 & + \frac{1}{2} A_y [-\dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \operatorname{sen} \theta_3 + \dot{\theta}_2 \cos \theta_3 + \\
 & - \Omega (\cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \operatorname{sen} \theta_3 + \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_3)]^2 + \\
 & + \frac{1}{2} A_z [\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 \operatorname{sen} \theta_2 - \Omega \cos \theta_1 \cos \theta_2]^2 + \\
 & + J s [\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 \operatorname{sen} \theta_2 - \Omega \cos \theta_1 \cos \theta_2] + \\
 & + \frac{1}{2} J s^2 + \\
 & + \frac{3}{2} \Omega^2 (A_x - A_z) (\operatorname{sen}^2 \theta_2 + \operatorname{sen}^2 \theta_3 - \operatorname{sen}^2 \theta_2 \operatorname{sen}^2 \theta_3) + \\
 & + \frac{3}{2} \Omega^2 (A_z + A_x - A_y) \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_2 \operatorname{sen} \theta_3 + \\
 & + C_2 + \dots \dots \dots \tag{3.3.1}
 \end{aligned}$$

3-4 - EQUAÇÃO DE LAGRANGE PARA A
COORDENADA θ_1

Derivando a Lagrangeana (3.3.1) teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = & A_x [\dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 + \dot{\theta}_2 \sin \theta_3 + \Omega (\cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 + \\ & - \sin \theta_1 \sin \theta_3) \cdot (\cos \theta_2 \cos \theta_3) + \\ & + A_y [-\dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 + \dot{\theta}_2 \cos \theta_3 - \Omega (\cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 + \\ & + \sin \theta_1 \cos \theta_3)] \cdot (- \cos \theta_2 \sin \theta_3) + \\ & + A_z (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 - \Omega \cos \theta_1 \cos \theta_2) \sin \theta_2 + \\ & + J s \sin \theta_2 \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = & \dot{\theta}_1 [A_x \cos^2 \theta_2 \cos^2 \theta_3 + A_y \cos^2 \theta_2 \sin^2 \theta_3 + A_z \sin^2 \theta_2 + \\ & + \dot{\theta}_2 [A_x \cos \theta_2 \cos \theta_3 \sin \theta_3 - A_y \cos \theta_2 \cos \theta_3 \sin \theta_3] + \\ & + \dot{\theta}_3 A_z \sin \theta_2 + \\ & + \Omega [A_x \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_2 \cos^2 \theta_3 + \\ & - A_x \sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 \cos \theta_3 + \\ & + A_y \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_2 \sin^2 \theta_3 + \\ & + A_y \sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 \cos \theta_3 + \\ & - A_z \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_2] + \\ & + J s \sin \theta_2 \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= \dot{\theta}_1 [(A_x - A_y) \cos^2 \theta_2 \cos^2 \theta_3 + (A_y - A_z) \cos^2 \theta_2 + A_z] + \\
 &+ \dot{\theta}_2 (A_x - A_y) \cos \theta_2 \cos \theta_3 \sin \theta_3 + \\
 &+ \dot{\theta}_3 A_z \sin \theta_2 + \\
 &+ \Omega [(A_x - A_y) \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_2 \cos^2 \theta_3 + \\
 &\quad + (A_y - A_z) \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_2 + \\
 &\quad + (A_y - A_x) \sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 \cos \theta_3] + \\
 &+ J_s \sin \theta_2
 \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

Derivando a Lagrangeana (3.3.1) em θ_1 , vem

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= A_x [\dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 + \dot{\theta}_2 \sin \theta_3 + \\
 &\quad + \Omega (\cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 - \sin \theta_1 \sin \theta_3)] \cdot [\Omega (-\sin \theta_1 \cdot \\
 &\quad \cdot \sin \theta_2 \cos \theta_3 - \cos \theta_1 \sin \theta_3)] + \\
 &+ A_y [-\dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 + \dot{\theta}_2 \cos \theta_3 + \\
 &\quad - \Omega (\cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 + \sin \theta_1 \cos \theta_3)] \cdot \\
 &\quad \cdot [-\Omega (-\sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 + \cos \theta_1 \cos \theta_3)] + \\
 &+ A_z [\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 - \Omega \cos \theta_1 \cos \theta_2] (\Omega \sin \theta_1 \cos \theta_2) + \\
 &+ J_s \Omega \sin \theta_1 \cos \theta_2
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = \Omega \dot{\theta}_1 [- A_x \text{sen } \theta_1 \text{ sen } \theta_2 \cos \theta_2 \cos^2 \theta_3 +$$

$$- A_x \cos \theta_1 \cos \theta_2 \text{sen } \theta_3 \cos \theta_3 +$$

$$- A_y \text{sen } \theta_1 \text{ sen } \theta_2 \cos \theta_2 \text{sen}^2 \theta_3 +$$

$$+ A_y \cos \theta_1 \cos \theta_2 \text{sen } \theta_3 \cos \theta_3 +$$

$$+ A_z \text{sen } \theta_1 \text{ sen } \theta_2 \cos \theta_2] +$$

$$+ \Omega \dot{\theta}_2 [- A_x \text{sen } \theta_1 \text{ sen } \theta_2 \text{sen } \theta_3 \cos \theta_3 +$$

$$- A_x \cos \theta_1 \text{sen}^2 \theta_3 +$$

$$+ A_y \text{sen } \theta_1 \text{ sen } \theta_2 \text{sen } \theta_3 \cos \theta_3 +$$

$$- A_y \cos \theta_1 \cos^2 \theta_3] +$$

$$+ \Omega \dot{\theta}_3 A_z \text{sen } \theta_1 \cos \theta_2 +$$

$$+ \Omega^2 \left\{ A_x [- \text{sen } \theta_1 \cos \theta_1 \text{sen}^2 \theta_2 \cos^2 \theta_3 +$$

$$- \cos^2 \theta_1 \text{sen } \theta_2 \text{sen } \theta_3 \cos \theta_3 +$$

$$+ \text{sen}^2 \theta_1 \text{sen } \theta_2 \text{sen } \theta_3 \cos \theta_3 +$$

$$+ \text{sen } \theta_1 \cos \theta_1 \text{sen}^2 \theta_3] +$$

$$+ A_y [- \text{sen } \theta_1 \cos \theta_1 \text{sen}^2 \theta_2 \text{sen}^2 \theta_3 +$$

$$+ \cos^2 \theta_1 \text{sen } \theta_2 \text{sen } \theta_3 \cos \theta_3 +$$

$$- \text{sen}^2 \theta_1 \text{sen } \theta_2 \text{sen } \theta_3 \cos \theta_3 +$$

$$+ \text{sen } \theta_1 \cos \theta_1 \cos^2 \theta_3] +$$

$$- A_z \text{sen } \theta_1 \cos \theta_1 \cos^2 \theta_2 +$$

$$+ J s \Omega \text{sen } \theta_1 \cos \theta_2$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = & \Omega \dot{\theta}_1 [-(A_x \cos^2 \theta_3 + A_y \sin^2 \theta_3) \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_2 + \\
 & + (A_y - A_x) \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 \cos \theta_3 + \\
 & + A_z \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_2] + \\
 & + \Omega \dot{\theta}_2 [-(A_x \sin^2 \theta_3 + A_y \cos^2 \theta_3) \cos \theta_1 + \\
 & + (A_y - A_x) \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos \theta_3] + \\
 & + \Omega \dot{\theta}_3 A_z \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \\
 & + \Omega^2 [-(A_x \cos^2 \theta_3 + A_y \sin^2 \theta_3) \sin \theta_1 \cos \theta_1 \sin^2 \theta_2 + \\
 & + (A_x - A_y) \sin^2 \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos \theta_3 + \\
 & + (A_y - A_x) \cos^2 \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos \theta_3 + \\
 & + (A_x \sin^2 \theta_3 + A_y \cos^2 \theta_3) \sin \theta_1 \cos \theta_1 + \\
 & - A_z \sin \theta_1 \cos \theta_1 \cos^2 \theta_2] + \\
 & + J_s \Omega \sin \theta_1 \cos \theta_2
 \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

Derivando (3.4.3) em relação ao tempo, vem

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) &= \ddot{\theta}_1 (A_x - A_y) \cos^2 \theta_2 \cos^2 \theta_3 + (A_y - A_z) \cos^2 \theta_2 + A_z] + \\
 &+ \dot{\theta}_1 [-2(A_x - A_y) \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \sin \theta_2 \cos^2 \theta_3 + \\
 &\quad -2(A_x - A_y) \dot{\theta}_3 \cos^2 \theta_2 \cos \theta_3 \sin \theta_3 + \\
 &\quad -2(A_y - A_z) \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \sin \theta_2] + \\
 &+ \ddot{\theta}_2 (A_x - A_y) \cos \theta_2 \cos \theta_3 \sin \theta_3 + \\
 &+ \dot{\theta}_2 [-(A_x - A_y) \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \cos \theta_3 \sin \theta_3 + \\
 &\quad -(A_x - A_y) \dot{\theta}_3 \sin^2 \theta_3 \cos \theta_2 + \\
 &\quad +(A_x - A_y) \dot{\theta}_3 \cos \theta_2 \cos^2 \theta_3] + \\
 &+ \ddot{\theta}_3 A_z \sin \theta_2 + \\
 &+ \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 A_z \cos \theta_2 + \\
 &+ \Omega \{ -(A_x - A_y) \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_2 \cos^2 \theta_3 + \\
 &\quad +(A_x - A_y) \dot{\theta}_2 \cos \theta_1 \cos^2 \theta_2 \cos^2 \theta_3 + \\
 &\quad -(A_x - A_y) \dot{\theta}_2 \cos \theta_1 \sin^2 \theta_2 \cos^2 \theta_3 + \\
 &\quad -2(A_x - A_y) \dot{\theta}_3 \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_2 \cos \theta_3 \sin \theta_3 + \\
 &\quad -(A_y - A_z) \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_2 + \\
 &\quad +(A_y - A_z) \dot{\theta}_2 \cos \theta_1 \cos^2 \theta_2 + \\
 &\quad -(A_y - A_z) \dot{\theta}_2 \cos \theta_1 \sin^2 \theta_2 + \\
 &\quad +(A_y - A_x) \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 \cos \theta_3 + \\
 &\quad -(A_y - A_x) \dot{\theta}_2 \sin \theta_1 \sin^2 \theta_3 \cos \theta_3 + \\
 &\quad +(A_y - A_x) \dot{\theta}_3 \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos^2 \theta_3 +
 \end{aligned}$$

$$- (A_y - A_x) \dot{\theta}_3 \text{ sen } \theta_1 \text{ cos } \theta_2 \text{ sen}^2 \theta_3 \} +$$

$$+ J_s \dot{\theta}_2 \text{ cos } \theta_2$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) &= \ddot{\theta}_1 [(A_x - A_y) \text{ cos}^2 \theta_2 \text{ cos}^2 \theta_3 + (A_y - A_z) \text{ cos}^2 \theta_2 + A_z] + \\ &+ \ddot{\theta}_2 (A_x - A_y) \text{ cos } \theta_2 \text{ cos } \theta_3 \text{ sen } \theta_3 + \\ &+ \ddot{\theta}_3 A_z \text{ sen } \theta_2 + \\ &+ \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 [2(A_y - A_x) \text{ cos } \theta_2 \text{ sen } \theta_2 \text{ cos}^2 \theta_3 + \\ &\quad + 2(A_z - A_y) \text{ cos } \theta_2 \text{ sen } \theta_2] + \\ &+ \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 [2(A_y - A_x) \text{ cos}^2 \theta_2 \text{ cos } \theta_3 \text{ sen } \theta_3] + \\ &+ \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 [(A_y - A_x) \text{ sen}^2 \theta_3 \text{ cos } \theta_2 + \\ &\quad + (A_x - A_y) \text{ cos } \theta_2 \text{ cos}^2 \theta_3 + A_z \text{ cos } \theta_2] + \\ &+ \dot{\theta}_2^2 (A_y - A_x) \text{ sen } \theta_2 \text{ cos } \theta_3 \text{ sen } \theta_3 + \\ &+ \Omega \{ \dot{\theta}_1 [(A_y - A_z) \text{ sen } \theta_1 \text{ sen } \theta_2 \text{ cos } \theta_2 \text{ cos}^2 \theta_3 + \\ &\quad + (A_z - A_y) \text{ sen } \theta_1 \text{ sen } \theta_2 \text{ cos } \theta_2 + \\ &\quad + (A_y - A_x) \text{ cos } \theta_1 \text{ cos } \theta_2 \text{ sen } \theta_3 \text{ cos } \theta_3 + \\ &+ \dot{\theta}_2 [(A_x - A_y) \text{ cos } \theta_1 \text{ cos}^2 \theta_2 \text{ cos}^2 \theta_3 + \\ &\quad + (A_y - A_x) \text{ cos } \theta_1 \text{ sen}^2 \theta_2 \text{ cos}^2 \theta_3 + \\ &\quad + (A_y - A_z) \text{ cos } \theta_1 \text{ cos}^2 \theta_2 + \\ &\quad + (A_z - A_y) \text{ cos } \theta_1 \text{ sen}^2 \theta_2 + \\ &\quad + (A_x - A_y) \text{ sen } \theta_1 \text{ sen}^2 \theta_3 \text{ cos } \theta_3 + \\ &\quad + J_s \text{ cos } \theta_2] + \\ &+ \dot{\theta}_3 [2(A_y - A_x) \text{ cos } \theta_1 \text{ sen } \theta_2 \text{ cos } \theta_2 \text{ cos } \theta_3 \text{ sen } \theta_3 + \\ &\quad + (A_y - A_x) \text{ sen } \theta_1 \text{ cos } \theta_1 \text{ cos}^2 \theta_3 + \\ &\quad + (A_x - A_y) \text{ sen } \theta_1 \text{ cos } \theta_2 \text{ sen}^2 \theta_3] \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

De (3.4.4) e (3.4.5) resulta a equação de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = 0$$

$$\begin{aligned} & \ddot{\theta}_1 [(A_x - A_y) \cos^2 \theta_2 \cos^2 \theta_3 + (A_y - A_z) \cos^2 \theta_2 + A_z] + \\ & + \ddot{\theta}_2 (A_x - A_y) \cos \theta_2 \cos \theta_3 \sin \theta_3 + \\ & + \ddot{\theta}_3 A_z \sin \theta_2 + \\ & + 2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 [(A_y - A_x) \cos \theta_2 \sin \theta_2 \cos^2 \theta_3 + \\ & \quad + (A_z - A_y) \sin \theta_2 \cos \theta_2] + \\ & + 2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 (A_y - A_x) \cos^2 \theta_2 \cos \theta_3 \sin \theta_3 + \\ & + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 [(A_y - A_x) \sin^2 \theta_3 \cos \theta_2 + \\ & \quad + (A_x - A_y) \cos \theta_2 \cos^2 \theta_3 + A_z \cos \theta_2] + \\ & + \dot{\theta}_2^2 (A_y - A_x) \sin \theta_2 \cos \theta_3 \sin \theta_3 + \\ & + \Omega \{ \dot{\theta}_1 [(A_y - A_x) \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_2 \cos^2 \theta_3 + \\ & \quad + (A_z - A_y) \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_2 + \\ & \quad + (A_y - A_x) \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 \cos \theta_3 + \\ & \quad + (A_x \cos^2 \theta_3 + A_y \sin^2 \theta_3) \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_2 + \\ & \quad + (A_x - A_y) \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 \cos \theta_3 + \\ & \quad - A_z \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_2] + \\ & + \dot{\theta}_2 [(A_x - A_y) \cos \theta_1 \cos^2 \theta_2 \cos^2 \theta_3 + \\ & \quad + (A_y - A_x) \cos \theta_1 \sin^2 \theta_2 \cos^2 \theta_3 + \\ & \quad + (A_y - A_z) \cos \theta_1 \cos^2 \theta_2 + \\ & \quad + (A_z - A_y) \cos \theta_1 \sin^2 \theta_2 + \\ & \quad + (A_x - A_y) \sin \theta_1 \sin^2 \theta_3 \cos \theta_3 + \\ & \quad + J s \cos \theta_2 + \\ & \quad + (A_x \sin^2 \theta_3 + A_y \cos^2 \theta_3) \cos \theta_1 + \\ & \quad + (A_x - A_y) \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos \theta_3] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \dot{\theta}_3 [2(A_y - A_x) \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_2 \cos \theta_3 \operatorname{sen} \theta_3 + \\
 & \quad + (A_y - A_x) \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_1 \cos^2 \theta_3 + \\
 & \quad + (A_x - A_y) \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 \operatorname{sen}^2 \theta_3 + \\
 & \quad - A_z \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2] + \\
 & = \Omega^2 [- (A_x \cos^2 \theta_3 + A_y \operatorname{sen}^2 \theta_3) \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_1 \operatorname{sen}^2 \theta_2 + \\
 & \quad + (A_x - A_y) \operatorname{sen}^2 \theta_1 \operatorname{sen}^2 \theta_2 \cos \theta_3 \operatorname{sen} \theta_3 + \\
 & \quad + (A_y - A_x) \cos^2 \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \operatorname{sen} \theta_3 \cos \theta_3 + \\
 & \quad + (A_x \operatorname{sen}^2 \theta_3 + A_y \cos^2 \theta_3) \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_1 + \\
 & \quad - A_z \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_1 \cos^2 \theta_2] + \\
 & + J_s \Omega \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 \tag{3.4.6}
 \end{aligned}$$

3-5 - EQUAÇÃO DE LAGRANGE PARA A
COORDENADA θ_2

Derivando a Lagrangeana (3.3.1) em $\dot{\theta}_2$ vem

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = & A_x [\dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 + \dot{\theta}_2 \sin \theta_3 + \\ & + \Omega (\cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 - \sin \theta_1 \sin \theta_3)] \sin \theta_3 + \\ & + A_y [-\dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 + \dot{\theta}_2 \cos \theta_3 + \\ & - \Omega (\cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 + \sin \theta_1 \cos \theta_3)] \cos \theta_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = & \dot{\theta}_1 (A_x - A_y) \cos \theta_2 \sin \theta_3 \cos \theta_3 + \\ & + \dot{\theta}_2 (A_x \sin^2 \theta_3 + A_y \cos^2 \theta_3) + \\ & + \Omega [(A_x - A_y) \cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos \theta_3 + \\ & - (A_x \sin^2 \theta_3 + A_y \cos^2 \theta_3) \sin \theta_1] \end{aligned} \quad (3.5.1)$$

Derivando a Lagrangeana em θ_2 vem

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = & A_x [\dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 + \dot{\theta}_2 \sin \theta_3 + \\ & + \Omega (\cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 - \sin \theta_1 \sin \theta_3)] \cdot \\ & \cdot [-\dot{\theta}_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 + \Omega \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3] + \\ & + A_y [-\dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 + \dot{\theta}_2 \cos \theta_3 + \\ & - \Omega (\cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 + \sin \theta_1 \cos \theta_3)] \cdot \\ & \cdot [\dot{\theta}_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 - \Omega \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3] + \\ & + A_z [\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 - \Omega \cos \theta_1 \cos \theta_2] \cdot \\ & \cdot (\dot{\theta}_1 \cos \theta_2 + \Omega \cos \theta_1 \sin \theta_2) + \\ & + J_s (\dot{\theta}_1 \cos \theta_2 + \Omega \cos \theta_1 \sin \theta_2) + \end{aligned}$$

$$+ 3\Omega^2 (A_x - A_z) (\sin \theta_2 \cos \theta_2 - \sin \theta_2 \cos \theta_2 \sin^2 \theta_3) +$$

$$+ \frac{3}{2}\Omega^2 (A_z + A_x - A_y) (\cos^2 \theta_2 \sin \theta_3 - \sin^2 \theta_2 \sin \theta_3)$$

reagrupando

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = \dot{\theta}_1^2 [-(A_x \cos^2 \theta_3 + A_y \sin^2 \theta_3) \sin \theta_2 \cos \theta_2 +$$

$$+ A_z \sin \theta_2 \cos \theta_2] +$$

$$+ \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (A_y - A_x) \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos \theta_3 +$$

$$+ \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 A_z \cos \theta_2 +$$

$$+ \Omega \dot{\theta}_1 [-A_x \cos \theta_1 \sin^2 \theta_2 \cos^2 \theta_3 +$$

$$+ A_x \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos \theta_3 +$$

$$+ A_y \cos \theta_1 \cos^2 \theta_2 \sin^2 \theta_3 +$$

$$+ A_z \cos \theta_1 \sin^2 \theta_2 +$$

$$- A_z \cos \theta_1 \cos^2 \theta_2 +$$

$$- A_y \cos \theta_1 \sin^2 \theta_2 \sin^2 \theta_3 +$$

$$- A_y \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos \theta_3] +$$

$$+ J_s \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 +$$

$$+ \Omega \dot{\theta}_2 [A_x \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 \cos \theta_3 +$$

$$- A_y \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 \cos \theta_3] +$$

$$+ \Omega^2 [A_x \cos^2 \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_2 \cos^2 \theta_3 +$$

$$- A_x \sin \theta_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 \cos \theta_3 +$$

$$+ A_y \cos^2 \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_2 \sin^2 \theta_3 +$$

$$+ A_y \sin \theta_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 \cos \theta_3 +$$

$$- A_z \cos^2 \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_2 +$$

$$+ 3(A_x - A_z) \sin \theta_2 \cos \theta_2 \cos^2 \theta_3 +$$

$$+ \frac{3}{2}(A_z + A_x - A_y) (\cos^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_2) \sin \theta_3 +$$

$$+ \Omega J_s \cos \theta_1 \sin \theta_2$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = & \dot{\theta}_1^2 [A_z - (A_x \cos^2 \theta_3 + A_y \sin^2 \theta_3)] \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_2 + \\
 & + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (A_y - A_x) \operatorname{sen} \theta_2 \operatorname{sen} \theta_3 \cos \theta_3 + \\
 & + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 A_z \cos \theta_2 + \\
 & + \Omega \dot{\theta}_1 [-(A_x \cos^2 \theta_3 + A_y \sin^2 \theta_3) \cos \theta_1 \operatorname{sen}^2 \theta_2 + \\
 & \quad + (A_x - A_y) \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \operatorname{sen} \theta_3 \cos \theta_3 + \\
 & \quad + (A_y \sin^2 \theta_3 - A_z) \cos \theta_1 \cos^2 \theta_2 + \\
 & \quad + A_z \cos \theta_1 \operatorname{sen}^2 \theta_2 + \\
 & + J_s \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 + \\
 & + \Omega \dot{\theta}_2 (A_x - A_y) \cos \theta_1 \cos \theta_2 \operatorname{sen} \theta_3 \cos \theta_3 + \\
 & + \Omega^2 [(A_x \cos^2 \theta_3 + A_y \sin^2 \theta_3) \cos^2 \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_2 + \\
 & \quad + (A_y - A_x) \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \operatorname{sen} \theta_3 \cos \theta_3 + \\
 & \quad - A_z \cos^2 \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_2 + \\
 & \quad + 3(A_x - A_z) \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_2 \cos^2 \theta_3 + \\
 & \quad + \frac{3}{2} (A_z + A_x - A_y) (\cos^2 \theta_2 - \operatorname{sen}^2 \theta_2) \operatorname{sen} \theta_3] + \\
 & + \Omega J_s \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2
 \end{aligned}
 \tag{3.5.2}$$

Derivando a (3.5.1) em relação ao tempo, teremos

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) &= \ddot{\theta}_1 (A_x - A_y) \cos \theta_2 \sin \theta_3 \cos \theta_3 + \\
 &+ \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (A_y - A_x) \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos \theta_3 + \\
 &+ \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 [(A_x - A_y) \cos \theta_2 \cos^2 \theta_3 + (A_y - A_x) \cos \theta_2 \sin^2 \theta_3] + \\
 &+ 2 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 (A_x - A_y) \sin \theta_3 \cos \theta_3 + \\
 &+ \ddot{\theta}_2 (A_x \sin^2 \theta_3 + A_y \cos^2 \theta_3) + \\
 &+ \Omega \left\{ \dot{\theta}_1 [(A_y - A_x) \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos \theta_3 + \right. \\
 &\quad \left. + (A_x \sin^2 \theta_3 + A_y \cos^2 \theta_3) \cos \theta_1] + \right. \\
 &+ \dot{\theta}_2 (A_x - A_y) \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 \cos \theta_3 + \\
 &+ \dot{\theta}_3 [(A_x - A_y) \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos^2 \theta_3 + \\
 &\quad \left. + (A_y - A_x) \cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin^2 \theta_3 + \right. \\
 &\quad \left. + 2(A_y - A_x) \sin \theta_1 \sin \theta_3 \cos \theta_3 \right\} \quad (3.5.3)
 \end{aligned}$$

Das relações (3.5.2) e (3.5.3) temos a Equação de Lagrange na coordenada θ_2

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \\ & \ddot{\theta}_1 (A_x - A_y) \cos \theta_2 \operatorname{sen} \theta_3 \cos \theta_3 + \\ & + \ddot{\theta}_2 (A_x \operatorname{sen}^2 \theta_3 + A_y \cos^2 \theta_3) + \\ & + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 [(A_x - A_y) \cos \theta_2 \cos^2 \theta_3 + \\ & \quad + (A_y - A_x) \cos^2 \theta_2 \operatorname{sen}^2 \theta_3 + \\ & \quad - A_z \cos \theta_2] + \\ & + 2 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 (A_x - A_y) \operatorname{sen} \theta_3 \cos \theta_3 + \\ & - \dot{\theta}_1^2 [A_z - (A_x \cos^2 \theta_3 + A_y \operatorname{sen}^2 \theta_3)] \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_2 + \\ & + \Omega \left\{ \dot{\theta}_1 [(A_y - A_x) \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \operatorname{sen} \theta_3 \cos \theta_3 + \right. \\ & \quad + (A_x \operatorname{sen}^2 \theta_3 + A_y \cos^2 \theta_3) \cos \theta_1 + \\ & \quad + (A_x \cos^2 \theta_3 + A_y \operatorname{sen}^2 \theta_3) \cos \theta_1 \operatorname{sen}^2 \theta_2 + \\ & \quad + (A_y - A_x) \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \operatorname{sen} \theta_3 \cos \theta_3 + \\ & \quad + (A_z - A_y \operatorname{sen}^2 \theta_3) \cos \theta_1 \cos^2 \theta_2 + \\ & \quad \left. - A_z \cos \theta_1 \operatorname{sen}^2 \theta_2 \right\} + \\ & + \dot{\theta}_2 [(A_x - A_y) \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 + \\ & \quad + (A_y - A_x) \cos \theta_1 \cos \theta_2 \operatorname{sen} \theta_3 \cos \theta_3] + \\ & + \dot{\theta}_3 [(A_x - A_y) \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \cos^2 \theta_3 + \\ & \quad + (A_y - A_x) \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \operatorname{sen}^2 \theta_3 + \\ & \quad + 2(A_y - A_x) \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_3 \cos \theta_3 + \\ & \quad + J \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2] \\ & = \Omega^2 [(A_x \cos^2 \theta_3 + A_y \operatorname{sen}^2 \theta_3) \cos^2 \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_2 + \\ & \quad + (A_y - A_x) \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \operatorname{sen} \theta_3 \cos \theta_3 + \\ & \quad - A_z \cos^2 \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ 3 (A_x - A_z) \text{sen} \theta_2 \cos \theta_2 \cos^2 \theta_3 + \\ &+ \frac{3}{2} (A_z + A_x - A_y) (\cos^2 \theta_2 - \text{sen}^2 \theta_2) \text{sen} \theta_3 + \\ &+ \Omega J_s \cos \theta_1 \text{sen} \theta_2 . \end{aligned} \tag{3.5.4}$$

3-6 - EQUAÇÃO DE LAGRANGE PARA A
COORDENADA θ_3

Na passagem do sistema orbital (G, a₁, a₂, a₃) para o sistema (G, x, y, z) ligado aos eixos principais de inércia do satélite, a ultima rotação θ_3 se da em torno do eixo c₃ que é coincidente com o eixo z.

Levando em conta a hipótese de simetria do satélite em torno do eixo de spin (A_x = A_y) podemos identificar o sistema (G, c₁, c₂, c₃) com o sistema (G x, y, z).

Fazendo então $\theta_3 = 0$, a Lagrangeana (3.3.1) assume a forma :

$$\begin{aligned}
 L = & \frac{1}{2} A_x [\dot{\theta}_1 \cos \theta_2 + \Omega \cos \theta_1 \cos \theta_2]^2 + \\
 & + \frac{1}{2} A_y [\dot{\theta}_2 - \Omega \sin \theta_1]^2 + \\
 & + \frac{1}{2} A_z [\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 - \Omega \cos \theta_1 \cos \theta_2]^2 + \\
 & + J_s [\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 - \Omega \cos \theta_1 \cos \theta_2] + \\
 & + \frac{3}{2} \Omega (A_x - A_z) \sin^2 \theta_2 + \\
 & + \frac{1}{2} J s^2 + C_2 + \dots \dots \dots \quad (3.6.1)
 \end{aligned}$$

Derivando (3.6.1) em relação a $\dot{\theta}_3$ teremos

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3} = A_z [\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 \text{sen } \theta_2 - \Omega \cos \theta_1 \cos \theta_2] + J s \quad ((3.6.2))$$

Derivando (3.6.1) em relação a θ_3 teremos

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_3} = 0 \quad (3.6.3)$$

(como se vê θ_3 é uma coordenada cíclica; isto faz sentido em virtude da simetria do satélite em relação ao eixo z)

De (3.6.2) e (3.6.3) temos a equação de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_3} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3} \right) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3} = K_1 = \text{constante}$$

$$A_z [\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 \text{sen } \theta_2 - \Omega \cos \theta_1 \cos \theta_2] + J s = K_1$$

fazendo $\frac{K_1 - J s}{A_z} = K_0 = \text{constante}$, teremos

$$\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 \text{sen } \theta_2 - \Omega \cos \theta_1 \cos \theta_2 = K_0 \quad (3.6.4)$$

Se fizermos $\tau = \Omega t$ teremos

$$\dot{\theta}_3' + \dot{\theta}_1' \text{sen } \theta_2 - \cos \theta_1 \cos \theta_2 = \frac{K_0}{\Omega} = \bar{K}_0 \quad (3.6.5)$$

na expressão acima. (') indica derivação em τ .

3-7 - POSIÇÕES DE EQUILÍBRIO

Podemos considerar como sendo uma posição de equilíbrio do satélite, aquela em que o sistema (G, x, y, z) rigidamente ligado ao mesmo, mantém uma atitude fixa em relação ao sistema orbital a_1, a_2, a_3 .

Nessas condições, nos pontos de equilíbrio deveremos ter:

$$\theta_1, \theta_2, \theta_3 \text{ constantes} =$$

portanto $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_3 = 0$

Impondo essas condições nas equações de Lagrange (3.4.6) e (3.5.4) teremos um sistema de equações envolvendo $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ e o spin "s" do rotor.

De (3.4.6) resulta

$$\begin{aligned} \Omega^2 [& (A_X \cos^2 \theta_3 - A_Y \sin^2 \theta_3) \sin \theta_1 \cos \theta_1 \sin^2 \theta_2 + \\ & + (A_X - A_Y) \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \cos \theta_3 \sin \theta_3 + \\ & + (A_Y - A_X) \cos^2 \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos \theta_3 + \\ & + (A_X \sin^2 \theta_3 - A_Y \cos^2 \theta_3) \sin \theta_1 \cos \theta_1 + \\ & - A_2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 \cos^2 \theta_2] + \\ & + \Omega J_s \sin \theta_1 \cos \theta_2 = 0 \end{aligned}$$

De (3.5.4) resulta

$$\begin{aligned} \Omega^2 [& (A_X \cos^2 \theta_3 + A_Y \sin^2 \theta_3) \cos^2 \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_2 + \\ & + (A_Y - A_X) \sin \theta_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 \cos \theta_3 + \\ & - A_2 \cos^2 \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_2 - \\ & + 3(A_X - A_Y) \sin \theta_2 \cos \theta_2 \cos^2 \theta_3 - \end{aligned}$$

$$+ \frac{3}{2}(A_z + A_x - A_y)(\cos^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_2) \sin \theta_3 + \\ + \Omega J_s \cos \theta_1 \sin \theta_2 = 0$$

Fazendo $\bar{s} = \Omega s$ e cancelando Ω^2 vem

$$- (A_x \cos^2 \theta_3 + A_y \sin^2 \theta_3) \sin \theta_1 \cos \theta_1 \sin^2 \theta_2 + \\ + (A_x - A_y) \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \cos \theta_3 \sin \theta_3 + \\ + (A_y - A_x) \cos^2 \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos \theta_3 + \\ + (A_x \sin^2 \theta_3 + A_y \cos^2 \theta_3) \sin \theta_1 \cos \theta_1 + \\ - A_z \sin \theta_1 \cos \theta_1 \cos^2 \theta_2 + \\ + J \bar{s} \sin \theta_1 \cos \theta_2 = 0$$

$$(A_x \cos^2 \theta_3 + A_y \sin^2 \theta_3) \cos^2 \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_2 + \\ + (A_y - A_x) \sin \theta_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 \cos \theta_3 + \\ - A_z \cos^2 \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_2 + \\ + 3(A_x - A_z) \sin \theta_2 \cos \theta_2 \cos^2 \theta_3 + \\ + \frac{3}{2}(A_z + A_x - A_y)(\cos^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_2) \sin \theta_3 + \\ + J \bar{s} \cos \theta_1 \sin \theta_2 = 0$$

No caso do satélite simétrico ($A_x = A_y$) podemos referir as equações acima aos eixos (c_1, c_2, c_3), bastando para isso impormos $\theta_3 = 0$ e teremos:

$$- A_x \sin \theta_1 \cos \theta_1 \sin^2 \theta_2 + A_x \sin \theta_1 \cos \theta_1 + \\ - A_z \sin \theta_1 \cos \theta_1 \cos^2 \theta_2 + J \bar{s} \sin \theta_1 \cos \theta_2 = 0$$

$$A_x \cos^2 \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_2 - A_z \cos^2 \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_2 + \\ + 3(A_x - A_z) \sin \theta_2 \cos \theta_2 + \\ + J \bar{s} \cos \theta_1 \sin \theta_2 = 0$$

e finalmente o sistema de equações:

$$\begin{cases} \text{sen } \theta_1 \cos \theta_2 [(A_Z - A_X) \cos \theta_1 \cos \theta_2 - J \bar{s}] = 0 \\ \text{sen } \theta_2 [(A_Z - A_X) (3 + \cos^2 \theta_1) \cos \theta_2 - J \bar{s} \cos \theta_1] = 0 \end{cases} \quad (3.7.1)$$

1a. solução:

$$\begin{cases} \text{sen } \theta_1 = 0 \quad \therefore \quad \theta_1 = 0 \\ \text{sen } \theta_2 = 0 \quad \therefore \quad \theta_2 = 0 \end{cases} \quad (3.7.2)$$

2a. solução:

$$\begin{aligned} \text{sen } \theta_1 &= 0 \quad \therefore \quad \theta_1 = 0 \\ \text{sen } \theta_2 [(A_Z - A_X) 4 \cos \theta_2 - J \bar{s}] &= 0 \\ \text{sen } \theta_2 &\neq 0 \text{ e} \\ \cos \theta_2 &= \frac{J \bar{s}}{4(A_Z - A_X)} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \theta_1 = 0 \\ \cos \theta_2 = \frac{J \bar{s}}{4(A_Z - A_X)} \end{cases} \quad (3.7.3)$$

3a. solução:

$$\begin{aligned} \text{sen } \theta_2 &= 0 \quad \therefore \quad \theta_2 = 0 \\ \text{sen } \theta_1 [(A_Z - A_X) \cos \theta_1 - J \bar{s}] &= 0 \\ \text{sen } \theta_1 &\neq 0 \text{ e} \\ \cos \theta_1 &= \frac{J \bar{s}}{A_Z - A_X} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{J \bar{s}}{A_Z - A_X} \\ \theta_2 = 0 \end{cases} \quad ((3.7.4)$$

4a. solução:

$$\cos \theta_2 = 0 \quad \therefore \quad \theta_2 = \pi/2$$

$$\text{sen } \theta_2 [(A_z - A_x) (3 + \cos^2 \theta_1) \cos \theta_2 + \\ - J \bar{s} \cos \theta_1] = 0$$

$$J \bar{s} \cos \theta_1 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta_1 = \pi/2 \\ \bar{s} = 0 \end{array} \right.$$

$$(4.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta_1 = \pi/2 \\ \theta_2 = \pi/2 \end{array} \right. \quad (3.7.5)$$

$$(4.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta_2 = \pi/2 \\ \bar{s} = 0 \end{array} \right. \quad (3.7.6)$$

5a. solução:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_x = A_z = s = 0 \\ A_x = A_y \text{ (simetria)} \end{array} \right. \quad (3.7.7)$$

Assim temos ao todo 6 posições de equilíbrio.

CAPÍTULO IV

ESTABILIDADE

DO

SISTEMA

4.1 - A FUNÇÃO DE LIAPUNOV

No caso de sistemas conservativos e autônomos, a Hamiltoniana não depende explicitamente do tempo, e nesse caso sabemos da Mecânica Analítica que :

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

portanto a Hamiltoniana H é cte. ao longo de uma solução.

Isto sugere a Hamiltoniana como uma possível função de Liapunov, o que será viável desde que ela seja positiva.

Isto é bastante possível, principalmente se levarmos em conta o que ocorre nos sistemas em que a energia cinética é uma função quadrática das velocidades generalizadas

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

De fato, a Lagrangeana do sistema é

$$L = T - V$$

onde V é a energia potencial.

$$H = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = T + V$$

o sistema sendo conservativo, então $T + V$ é a energia mecânica total, e portanto constante.

Mas por definição a energia cinética é uma função definida positiva das quantidades de movimento generalizadas " p_i "

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Portanto a Hamiltoniana H será definida positiva sempre que pudermos tomar a energia potencial positiva nas vizinhanças de um ponto de equilíbrio do sistema.

Lembrando os teoremas fundamentais de estabilidade:

1º TEOREMA

Se para o sistema $\dot{\vec{x}} = \vec{X}(\vec{x})$ existir uma função positiva definida $V(\vec{x})$, cuja derivada total $\dot{V}(\vec{x})$ é negativa semi-definida ao longo de toda trajetória de $\dot{\vec{x}} = \vec{X}(\vec{x})$, então a solução $\vec{x} = \vec{0}$ é estável.

2º TEOREMA

Se a energia potencial tiver um mínimo isolado num ponto de equilíbrio, então esse será um ponto de equilíbrio estável.

3º TEOREMA

Se para o sistema $\dot{\vec{x}} = \vec{X}(\vec{x})$ existir uma função definida positiva $V = V(\vec{x})$, tal que sua derivada total $\dot{V}(\vec{x})$ é definida negativa, então a solução trivial $\vec{x} = \vec{0}$ é assintoticamente estável.

Já vimos que no caso de sistemas mecânicos autônomos e conservativos, a Hamiltoniana é uma constante do movimento.

$$H = \text{constante} \implies \dot{H} = 0$$

de modo que no caso do satélite em estudo, poderemos esperar assegurar a estabilidade nos pontos de equilíbrio, mas não a estabilidade assintótica.

4.2 = A HAMILTONIANA

Como estamos considerando um satélite simétrico ($A_x = A_y$) podemos considerar as equações do movimento referidas ao sistema de eixos (c_1, c_2, c_3) e teremos de (3.6.1) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= \dot{\theta}_1 [(A_x - A_z) \cos^2 \theta_2 + A_z] + \\ &+ \dot{\theta}_3 A_z \sin \theta_2 + J s \sin \theta_2 + \\ &+ \Omega (A_x - A_z) \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = \dot{\theta}_2 A_y - \Omega A_y \sin \theta_1 \quad (4.2.2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3} = A_z (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 - \Omega \cos \theta_1 \cos \theta_2) + J s \quad (4.2.3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial s} = J (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 - \Omega \cos \theta_1 \cos \theta_2) + J s \quad (4.2.4)$$

De (3.6.1), (4.2.1), (4.2.2), (4.2.3) e (4.2.4) vem

$$\begin{aligned} H &= \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \\ &= \dot{\theta}_1^2 [(A_x - A_z) \cos^2 \theta_2 + A_z] + \\ &+ \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 A_z \sin \theta_2 + J s \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 + \\ &+ \Omega \dot{\theta}_1 (A_x - A_z) \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_2 + \\ &+ \dot{\theta}_2^2 A_y - \Omega \dot{\theta}_2 A_y \sin \theta_1 + \\ &+ \dot{\theta}_3^2 A_z + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 A_z \sin \theta_2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \Omega \dot{\theta}_3 A_z \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \dot{\theta}_3 J_s + \\
 & + J_s \dot{\theta}_3 + J_s \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 - J_s \Omega \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \\
 & + J_s^2 - \frac{1}{2} A_x [\dot{\theta}_1^2 \cos^2 \theta_2 + \Omega \cos \theta_1 \sin \theta_2]^2 + \\
 & - \frac{1}{2} A_y [\dot{\theta}_2 - \Omega \sin \theta_1]^2 + \\
 & - \frac{1}{2} A_z [\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 - \Omega \cos \theta_1 \cos \theta_2]^2 + \\
 & - J_s [\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 - \Omega \cos \theta_1 \cos \theta_2] + \\
 & - \frac{3}{2} \Omega^2 (A_x - A_z) \sin^2 \theta_2 + \\
 & - \frac{1}{2} J s^2 + C_2
 \end{aligned}$$

simplificando e reagrupando

$$\begin{aligned}
 H & = \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 [(A_x - A_z) \cos^2 \theta_2 + A_z] + \\
 & + \frac{1}{2} \dot{\theta}_2^2 A_y + \frac{1}{2} \dot{\theta}_3^2 A_z + \\
 & + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 A_z \sin \theta_2 + \\
 & + J_s \dot{\theta}_3 + J_s \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 + \\
 & - \frac{1}{2} \Omega^2 [A_x \cos^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 + A_y \sin^2 \theta_1 + \\
 & \quad + A_z \cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2] + \\
 & - \frac{3}{2} \Omega^2 (A_x - A_z) \sin^2 \theta_2 + \\
 & + \frac{1}{2} J s^2 + C_2
 \end{aligned}$$

mas de (3.6.4) tiramos

$$\dot{\theta}_3 = K_0 + \Omega \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \dot{\theta}_1 \sin \theta_2$$

e substituindo na Hamiltoniana teremos:

$$\begin{aligned}
 H = & \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 [(A_x - A_z) \cos^2 \theta_2 + A_z] + \\
 & + \frac{1}{2} \dot{\theta}_2^2 A_y + \\
 & + \frac{1}{2} A_z (K_0 + \Omega \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \dot{\theta}_1 \sin \theta_2)^2 + \\
 & + \dot{\theta}_1 A_z \sin \theta_2 (K_0 + \Omega \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \dot{\theta}_1 \sin \theta_2) + \\
 & + J s \sin \theta_2 + J s (K_0 + \Omega \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \dot{\theta}_1 \sin \theta_2) + \\
 & - \frac{1}{2} \Omega^2 [A_x \cos^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 + A_y \sin^2 \theta_2 + A_z \cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2] + \\
 & - \frac{3}{2} \Omega^2 (A_x - A_z) \sin^2 \theta_2 + \\
 & + \frac{1}{2} J s^2 + C_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H = & \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 A_x \cos^2 \theta_2 + \frac{1}{2} \dot{\theta}_2^2 A_y + \\
 & + K_0 A_z \Omega \cos \theta_1 \cos \theta_2 + J s \Omega \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \\
 & + \frac{3}{2} \Omega^2 (A_z - A_x) \sin^2 \theta_2 + \\
 & - \frac{1}{2} A_x \Omega^2 \cos^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 + \\
 & - \frac{1}{2} A_y \Omega^2 \sin^2 \theta_1 + C_0
 \end{aligned}$$

onde $C_0 = C_2 + \frac{1}{2} J s^2 + \frac{1}{2} K_0^2 A_z + K_0 J s$

Reagrupando, podemos escrever:

$$H = \frac{1}{2} A_x \dot{\theta}_1^2 \cos^2 \theta_2 + \frac{1}{2} A_y \dot{\theta}_2^2 + U \quad (4.2.5)$$

onde

$$U = K_0 \Omega A_z \cos \theta_1 \cos \theta_2 + J_s \Omega \cos \theta_1 \cos \theta_2 +$$

$$+ \frac{3}{2} \Omega^2 (A_z - A_x) \sin^2 \theta_2 +$$

$$- \frac{1}{2} \Omega^2 A_x \cos^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 +$$

$$- \frac{1}{2} \Omega^2 A_y \sin^2 \theta_1 + C_0$$

fazendo uma mudança de variável $\begin{cases} \bar{t} = \Omega t \\ \bar{s} = \Omega s \end{cases}$

$$H = \frac{1}{2} \Omega^2 (A_x \dot{\theta}_1^2 \cos^2 \theta_2 + A_y \dot{\theta}_2^2) + \Omega^2 \bar{U} \quad (4.2.6)$$

onde (') indica derivação em \bar{t} e

$$\bar{U} = \bar{K}_0 A_z \cos \theta_1 \cos \theta_2 + J \bar{s} \cos \theta_1 \cos \theta_2 +$$

$$+ \frac{3}{2} (A_z - A_x) \sin^2 \theta_2 +$$

$$- \frac{1}{2} (A_x \cos^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 + A_y \sin^2 \theta_1) +$$

$$+ \bar{C}_0 \quad (4.2.7)$$

Como se vê a Hamiltoniana não depende explicitamente do tempo e nessas condições ela é uma constante do movimento.

$$H = \text{constante}$$

$$H = T_2 - T_0 + V$$

onde $T = T_2 + T_1 + T_0$, a saber

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \alpha_{rs} \dot{q}_r \dot{q}_s$$

$$T_1 = \sum_{r=1}^n \beta_r \dot{q}_r$$

$$T_0 = \gamma \text{ (termos independente das velocidades generalizadas)}$$

"V" é a energia potencial

Isto sugere o emprego da Hamiltoniana como uma função de Liapunov, tal como o fazem

Meirovitch em (M 2),

Likins em (L 2),

Lohmeier em (L 5),

e outros.

Nos pontos de equilíbrio, o sistema de eixos (x,y,z) rigidamente ligado ao satélite, deverá manter uma posição fixa em relação ao sistema orbital de eixos (a₁, a₂, a₃).

Notemos que em virtude da hipótese de simetria do satélite, os eixos (x,y,z) e (c₁, c₂, c₃) são coincidentes.

Nos pontos de equilíbrio devemos ter:

$$\theta_1 = \text{constante}$$

$$\theta_2 = \text{constante}$$

$$\theta_3 = \text{constante}$$

tais pontos serão obtidos das equações

$$\frac{\partial H}{\partial \theta_i} = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

Todavia notemos que

$$H = T_2 - T_0 + V$$

$$H = T_2 + U \quad \text{onde } U = V - T_0$$

e observando que

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum \sum \alpha_{rs} \dot{q}_r \dot{q}_s$$

é uma função quadrática das velocidades generalizadas, que nos pontos de equilíbrio são nulos, podemos ver que os pontos de equilíbrio serão dados pelas equações:

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_i} = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

Vale ainda notar que sendo

$$H = T_2 - T_0 + V = \text{constante}$$

$$T_2 + U = \text{constante}$$

e como nos pontos de equilíbrio $T_2 = 0$, então teremos

$$U = \text{constante} \quad \text{ou} \quad \bar{U} = \text{constante}$$

que representa no espaço das coordenadas generalizadas

θ_i ($i = 1, 2, 3$), uma família de superfícies de velocidade relativa nula.

4.3 - OS PONTOS CRÍTICOS DE \bar{U}

Derivando a (4.2.7) vem:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial \theta_1} = 0$$

$$- \bar{K}_0 A_z \sin \theta_1 \cos \theta_2 - J \bar{s} \sin \theta_1 \cos \theta_2 + A_z \cos \theta_1 \sin \theta_1 \sin^2 \theta_2 - A_y \sin \theta_1 \cos \theta_1 = 0$$

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial \theta_2} = 0$$

$$- \bar{K}_0 A_z \cos \theta_1 \sin \theta_2 - J \bar{s} \cos \theta_1 \sin \theta_2 + 3(A_z - A_x) \sin \theta_2 \cos \theta_2 - A_x \cos^2 \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_2 = 0$$

o que dá o sistema

$$\begin{cases} \sin \theta_1 [(\bar{K}_0 A_z + J \bar{s}) \cos \theta_2 + (A_y - A_x \sin^2 \theta_2) \cos \theta_1] = 0 \\ \sin \theta_2 [(\bar{K}_0 A_z + J \bar{s}) \cos \theta_1 + 3(A_x - A_z) \cos \theta_2 + A_x \cos^2 \theta_1 \cos \theta_2] = 0 \end{cases}$$

De (3.6.4) temos:

$$\bar{K}_0 = \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 - \cos \theta_1 \cos \theta_2$$

e como nos pontos críticos devemos ter $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_3 = 0$, resulta

$$\bar{K}_0 = -\cos \theta_1 \cos \theta_2 \quad (4.3.1)$$

substituindo nas equações acima, teremos

$$\begin{cases} \sin \theta_1 [(A_x - A_z) \cos^2 \theta_2 \cos \theta_1 + J \bar{s} \cos \theta_2 + (A_y - A_x) \cos \theta_1] = 0 \\ \sin \theta_2 [(A_x - A_z) (3 + \cos^2 \theta_1) \cos \theta_2 + J \bar{s} \cos \theta_1] = 0 \end{cases}$$

Levando em conta a simetria ($A_x = A_y$) teremos

$$\begin{cases} \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 [(A_z - A_x) \cos \theta_1 \cos \theta_2 - J \bar{s}] = 0 \\ \operatorname{sen} \theta_2 [(A_x - A_z) (3 + \cos^2 \theta_1) \cos \theta_2 + J \bar{s} \cos \theta_1] = 0 \end{cases}$$

Este sistema coincide integralmente com (3.7.1) e suas soluções, como já vimos são:

1ª solução: $\theta_1 = \theta_2 = 0$

2ª solução: $\theta_1 = 0$ e $\cos \theta_2 = \frac{J \bar{s}}{4(A_z - A_x)}$

3ª solução: $\theta_2 = 0$, $\cos \theta_1 = \frac{J \bar{s}}{A_z - A_x}$

4ª solução: $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$

5ª solução: $\theta_2 = \pi/2$, $\bar{s} = 0$

6ª solução: $\begin{cases} A_x = A_z = \bar{s} = 0 \\ A_x = A_y \text{ (simetria)} \end{cases}$

4.4 - ESTABILIDADE DO SISTEMA

Uma função real $U = U(\vec{x})$, $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ possuindo derivadas parciais contínuas nas variáveis x_i ($i = 1, 2, \dots, n$), num domínio D_h (esfera de raio h e centro 0) e tal que $U(\vec{0}) = 0$, e satisfazendo as condições de Lipchitz, dir-se-á:

- 1 - definida positiva em D_h se $U(\vec{x}) > 0$ para todo $\vec{x} \in D_h$, com $\vec{x} \neq \vec{0}$
- 2 - semi-definida positiva em D_h se $U(\vec{x}) \geq 0$ para $\vec{x} \in D_h$ com $\vec{x} \neq \vec{0}$
- 3 - indefinida, se em D_h pudermos ter $U(\vec{x}) \geq 0$ e $U(\vec{y}) \leq 0$ para $\vec{x}, \vec{y} \in D_h$, qualquer que seja h o raio da esfera.

Seja

$$U = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_i x_j = \{x\}^T [\alpha] \{x\}; (*)$$

uma forma quadrática.

Teorema de Sylvester

Uma condição necessária e suficiente para que a forma quadrática (*) seja definida positiva é que a matriz simétrica $[\alpha]$ seja definida positiva.

(The Stability of Motion - N.G. Chetayev

Pergamon Press, pg.40 - 1961)

Uma matriz $[\alpha]$ dir-se-á definida positiva se todos os menores do seu determinante $|\alpha_{ij}|$ forem positivos.

$$|\alpha_{qr}| > 0 \quad \begin{matrix} q,r = 1,2,\dots,k \\ k = 1,2,\dots,n \end{matrix}$$

Ja vimos que a Hamiltoniana, dada por (4.2.6) e (4.2.7) é

$$H = \frac{1}{2} \Omega^2 A_x \dot{\theta}_1^2 \cos^2 \theta_2 + \frac{1}{2} A_y \dot{\theta}_2^2 + \Omega^2 \bar{U}$$

$$\begin{aligned} \text{onde } \bar{U} &= \bar{K}_0 A_z \cos \theta_1 \cos \theta_2 + J \bar{s} \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \\ &+ \frac{3}{2} (A_z - A_x) \sin^2 \theta_2 + \\ &- \frac{1}{2} (A_x \cos^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 + A_y \sin^2 \theta_1) + \bar{C}_0 \end{aligned}$$

Para que o sistema seja estavel, é preciso que nos pontos de equilíbrio, a Hamiltoniana seja definida positiva.

Como nos pontos de equilíbrio devemos ter:

$$\theta_1' = \theta_2' = 0$$

concluimos que nos pontos de equilíbrio, a \bar{U} deve ser definida positiva.

Se $\bar{\theta}_1$ e $\bar{\theta}_2$ forem uma posição de equilíbrio, teremos:

$$\begin{aligned} \bar{U}(\bar{\theta}_1 + \xi, \bar{\theta}_2 + \eta) - \bar{U}(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2) &= \left[\frac{\partial \bar{U}}{\partial \theta_1}, \frac{\partial \bar{U}}{\partial \theta_2} \right] \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} + \\ &+ \frac{1}{2} [\xi \ \eta] \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \theta_1^2} & \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \\ \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \theta_2^2} \end{vmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} + \dots \end{aligned}$$

mas nos pontos de equilíbrio teremos:

$$\left. \frac{\partial \bar{U}}{\partial \theta_1} \right|_{\theta_1 = \bar{\theta}_1} = 0 \quad \left. \frac{\partial \bar{U}}{\partial \theta_2} \right|_{\theta_2 = \bar{\theta}_2} = 0$$

portanto se queremos que \bar{U} seja definida positiva, devemos impor que a matriz Hessiana seja definida positiva.

Temos de (4.2.7)

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \bar{K}_0 A_z \cos \theta_1 \cos \theta_2 + J \bar{s} \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \\ &+ \frac{3}{2} (A_z - A_x) \sin^2 \theta_2 + \\ &- \frac{1}{2} A_x \cos^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 - \frac{1}{2} A_y \sin^2 \theta_1 + \bar{C}_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \theta_1} &= - (\bar{K}_0 A_z + J \bar{s}) \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \\ &+ A_x \cos \theta_1 \sin \theta_1 \sin^2 \theta_2 - A_y \sin \theta_1 \cos \theta_1 \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \theta_1^2} &= - (\bar{K}_0 A_z + J \bar{s}) \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \\ &+ A_x \sin^2 \theta_2 (\cos^2 \theta_1 - \sin^2 \theta_1) + \\ &- A_y (\cos^2 \theta_1 - \sin^2 \theta_1) \end{aligned}$$

e como $\bar{K}_0 = -\cos \theta_1 \cos \theta_2$ pela (4.3.1), vem

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \theta_1^2} &= A_z \cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2 - J \bar{s} \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \\ &- A_x \cos^2 \theta_2 (2 \cos^2 \theta_1 - 1) \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \theta_2} &= - (\bar{K}_0 A_z + J \bar{s}) \cos \theta_1 \sin \theta_2 + \\ &+ 3(A_z - A_x) \sin \theta_2 \cos \theta_2 + \\ &- A_x \cos^2 \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \theta_2^2} = & - (\bar{K}_0 A_z + J \bar{s}) \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \\ & + 3 (A_z - A_x) (\cos^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_2) + \\ & - A_x \cos^2 \theta_1 (\cos^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_2) \end{aligned}$$

e como $K_0 = - \cos \theta_1 \cos \theta_2$ pela (4.3.1), teremos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \theta_2^2} = & A_z \cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2 - J \bar{s} \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \\ & + [3 (A_z - A_x) - A_x \cos^2 \theta_1] (2 \cos^2 \theta_2 - 1) \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

Derivando a (4.4.1) teremos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} = & (\bar{K}_0 A_z + J \bar{s}) \sin \theta_1 \sin \theta_2 + \\ & + 2 A_x \cos \theta_1 \sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_2 \end{aligned}$$

e como $K_0 = - \cos \theta_1 \cos \theta_2$ teremos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} = & (2 A_x - A_z) \sin \theta_1 \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_2 + \\ & + J \bar{s} \sin \theta_1 \sin \theta_2 \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

- I -

No ponto crítico $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 0$ dado por (3.7.2)
teremos:

$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \theta_1^2} = A_z - J \bar{s} - A_x$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \theta_2^2} &= A_z - J \bar{s} + 3 (A_z - A_x) - A_x \\ &= 4 (A_z - A_x) - J \bar{s} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} = 0$$

O Hessiano será

$$[\mathcal{H}_0] = \begin{bmatrix} A_z - A_x - J \bar{s} & 0 \\ 0 & 4 (A_z - A_x) - J \bar{s} \end{bmatrix}$$

Aplicando as condições de Sylvester, teremos

$$\begin{cases} A_z - A_x > J \bar{s} \\ 4 (A_z - A_x) > J \bar{s} \end{cases}$$

e para que a \bar{U} seja definida positiva é suficiente que tenhamos

$$A_z - A_x > J \bar{s}$$

portanto o sistema será estável se:

$$A_z > A_x + J \bar{s}$$

Neste caso o eixo z (eixo de simetria) do satélite
descreverá uma superfície cilíndrica circular.

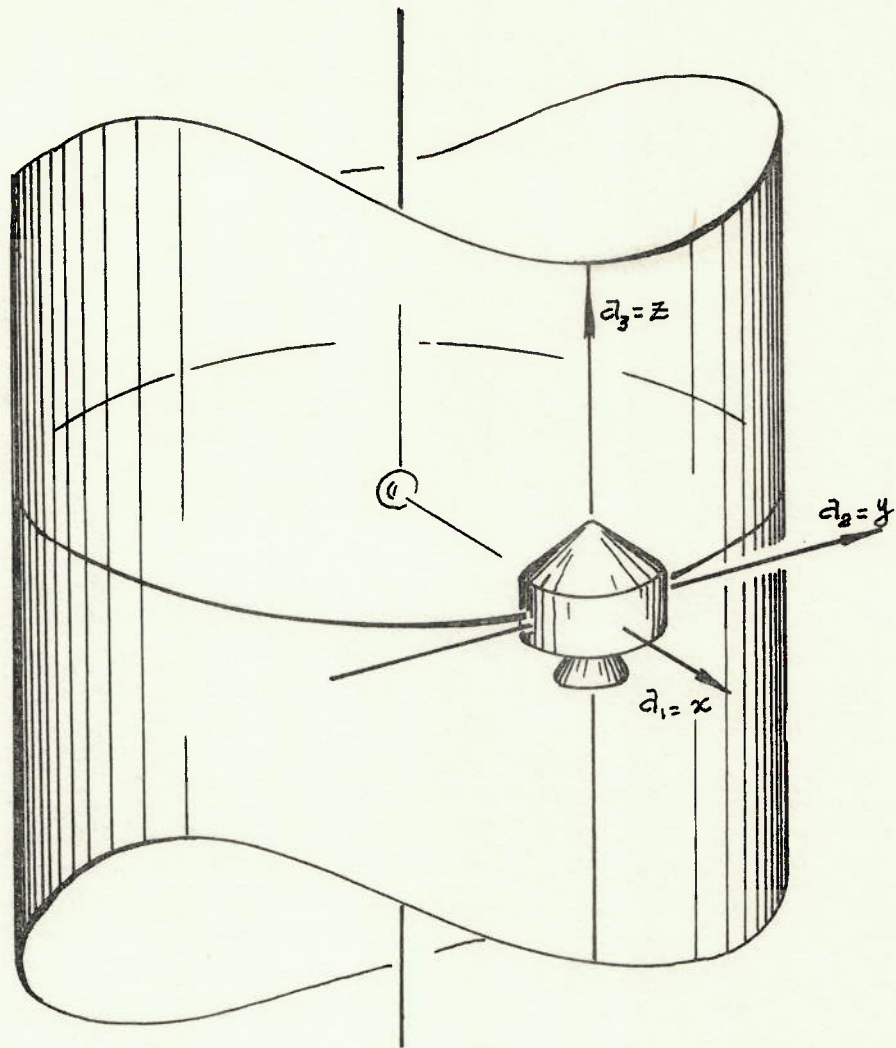


fig. 4-1

- II -

$$\text{No ponto crítico } \begin{cases} \theta_1 = 0 \\ \cos \theta_2 = \frac{J\bar{s}}{4(A_z - A_x)} \end{cases}$$

dado por (3.7.3), teremos em (4.4.2)

$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \theta_1^2} = \frac{J^2 \bar{s}^2}{16(A_z - A_x)^2} 3(A_x - A_z)$$

e em (XII-2) teremos:

$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \theta_2^2} = [3A_z - 4A_x] \left[\frac{J^2 \bar{s}^2}{16(A_z - A_x)^2} - 1 \right]$$

e em (4.4.4) teremos:

$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} = 0$$

o Hessiano toma a forma

$$[\mathcal{H}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \theta_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \theta_2^2} \end{bmatrix}$$

e pelas condições de Sylvester teremos:

$$\frac{3 J^2 \bar{s}^2 (A_x - A_z)}{16(A_z - A_x)^2} > 0$$

$$(3A_z - 4A_x) \left[\frac{J^2 \bar{s}^2}{16(A_z - A_x)^2} - 1 \right] > 0$$

$$\begin{cases} A_x - A_z > 0 \\ (3A_z - 4A_x)(\cos^2 \theta_2 - 1) > 0 \end{cases}$$

portanto

$$\begin{cases} A_x - A_z > 0 \\ 4A_x - 3A_z > 0 \end{cases}$$

então \bar{U} será definida positiva se $A_x > A_z$

que é a condição de estabilidade no ponto crítico.

Neste caso, o eixo z (eixo de simetria) deverá manter uma inclinação constante em relação ao plano orbital. Ele descreverá uma superfície cônica de revolução.

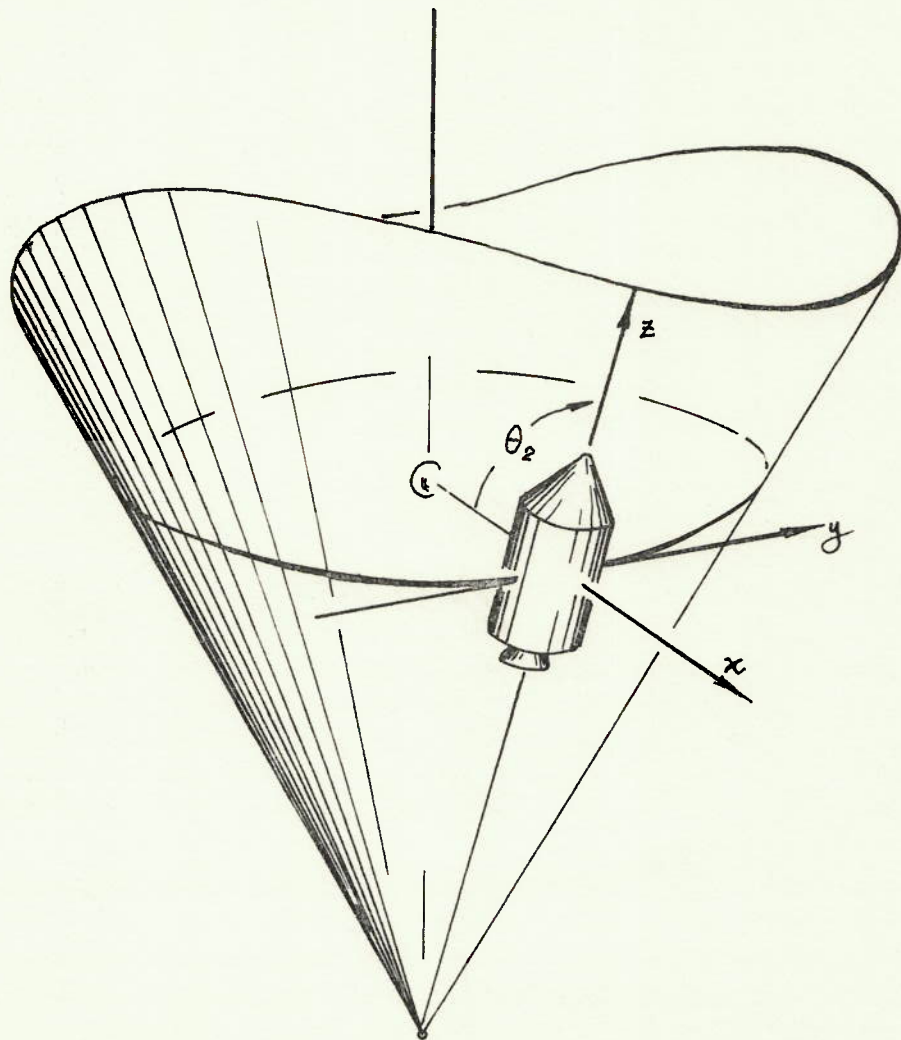


fig. 4-2

- III -

$$\text{No ponto crítico} \quad \begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{J \bar{s}}{A_z - A_x} \\ \theta_2 = 0 \end{cases}$$

que é dado pela (3.7.4)) teremos em (4.4.2)

$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \theta_1^2} = \frac{A_x}{(A_z - A_x)^2} [(A_z - A_x)^2 - J^2 \bar{s}^2]$$

e em (4.4.3) teremos

$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \theta_2^2} = 3(A_z - A_x)$$

e em (4.4.4) teremos

$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} = 0$$

o Hessiano assume a forma

$$[\mathcal{H}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 U}{\partial \theta_2^2} \end{pmatrix}$$

e as condições de Sylvester dão

$$\begin{cases} \frac{A_x [(A_z - A_x)^2 - J^2 \bar{s}^2]}{(A_z - A_x)^2} > 0 \\ 3(A_z - A_x) > 0 \end{cases}$$

e como $\cos \theta_1 = \frac{J \bar{s}}{A_z - A_x}$ teremos

$$A_x (1 - \cos^2 \theta_1) > 0$$

$$A_z - A_x > 0$$

e portanto \bar{U} será definida positiva se $\begin{cases} \theta_1 \neq 0 \\ \theta_1 \neq \pi \end{cases}$

e $A_z > A_x$, que é a condição de estabilidade no ponto crítico. Neste caso o eixo z (eixo de simetria) descreverá uma superfície hiperbólica de revolução.

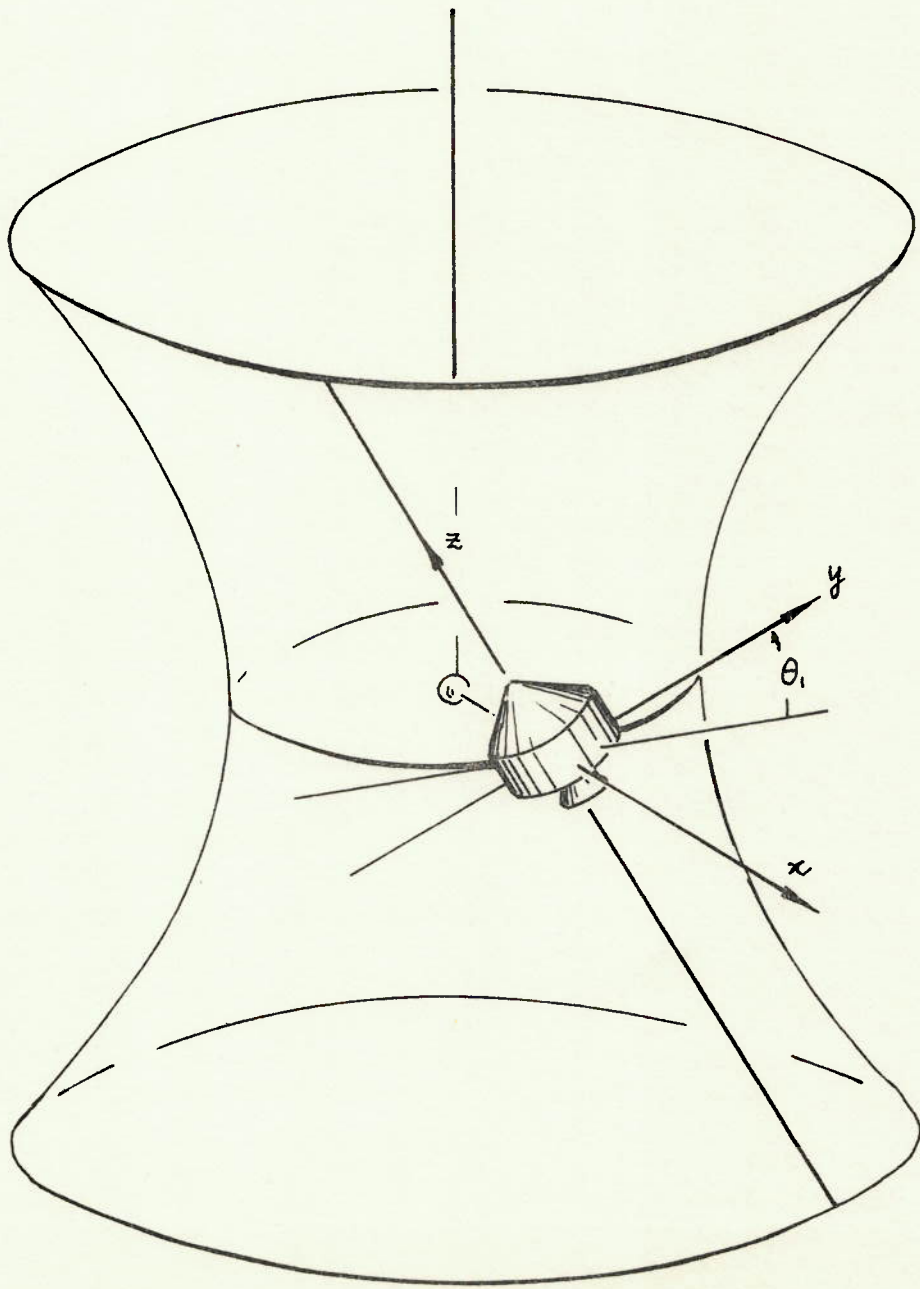


fig. 4-5

- IV -

No ponto crítico $\theta_1 = \theta_2 = \bar{\pi}/2$ dado por (3.7.5) teremos em (4.4.2)

$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \theta_1^2} = 0$$

e em (4.4.3) teremos

$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \theta_2^2} = 3(A_x - A_z)$$

e em (4.4.3) teremos

$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} = J \bar{s}$$

o Hessiano assume a forma

$$[\mathcal{H}] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \\ \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} & \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \theta_2^2} \end{pmatrix}$$

As condições de Sylvester nos levam a

$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \theta_1^2} = 0 \quad (\text{deveríamos ter } \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \theta_1^2} > 0$$

$$- J^2 \bar{s}^2 > 0 \quad (\text{incompatível})$$

portanto o sistema não apresenta características de estabilidade neste ponto crítico.

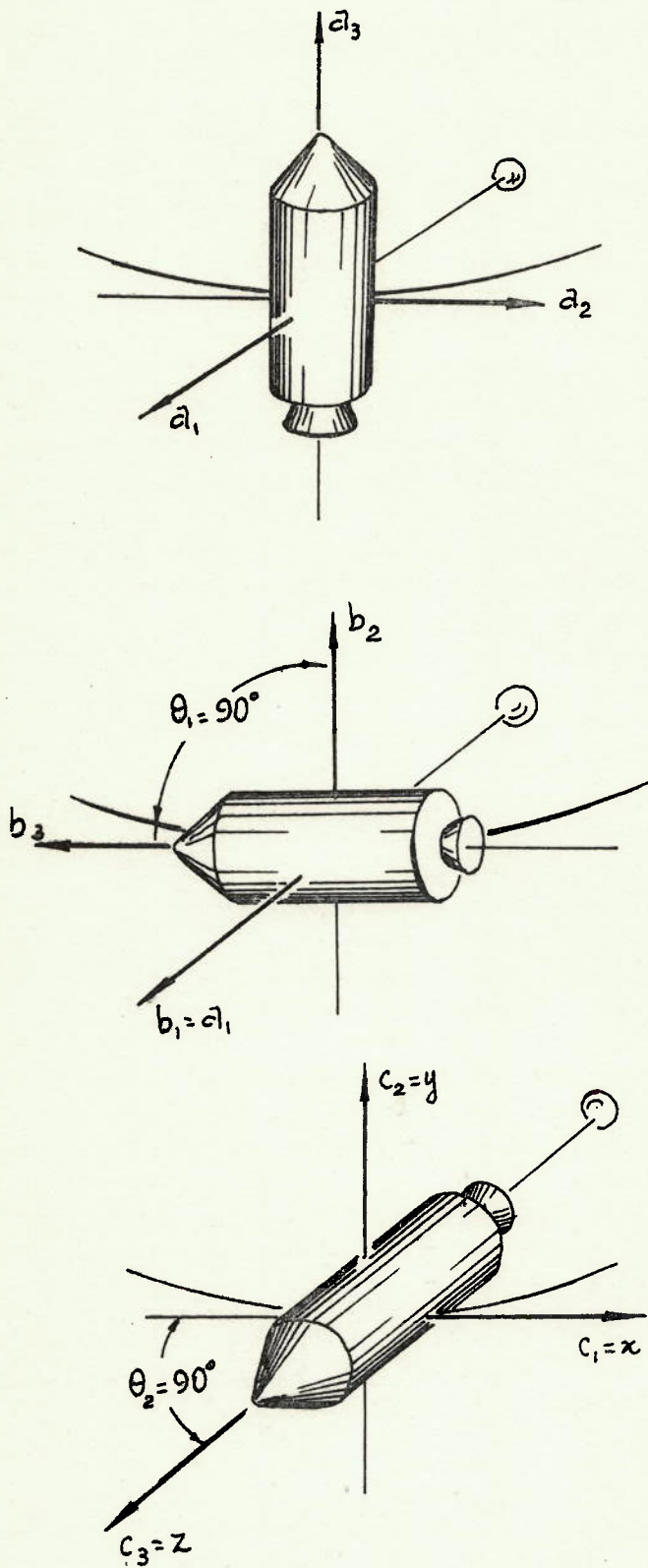


fig. 4-4

É conhecido o fato de que nos corpos rígidos destituídos de movimento de spin, o torque gravitacional tende a alinhar o eixo de menor momento de inércia, com o centro de força, conforme se vê em Thomsom ((T 1)). Isto seria uma razão para provocar a não estabilidade do satélite nessa posição crítica, pois em ausência de torques, o eixo de spin tende a manter uma posição fixa no espaço, o que se deduz facilmente das equações do momento angular da mecânica. A combinação dos dois, produziria um movimento de precessão.

- V -

No caso $\left\{ \begin{array}{l} \theta_2 = \pi/2 \\ s = 0 \end{array} \right.$ que é a solução dada por (3.7.6))

teremos em (4.4.2)

$$\frac{\partial^3 \bar{U}}{\partial \theta_1^3} = 0$$

e em (4.4.3) teremos

$$\frac{\partial^3 \bar{U}}{\partial \theta_2^3} = 3 (A_x - A_z) + A_x \cos^2 \theta_1$$

e em (4.4.4) teremos

$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} = \text{sen } \theta_1$$

o Hessiano toma a forma

$$[\mathcal{H}] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \\ \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} & \frac{\partial^3 \bar{U}}{\partial \theta_2^3} \end{pmatrix}$$

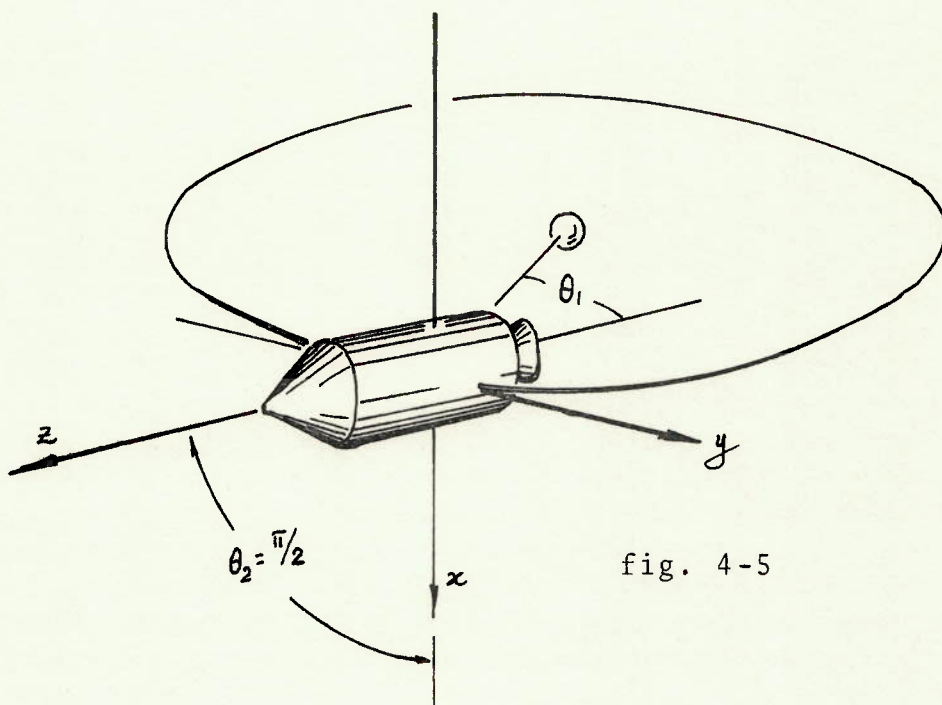
e as condições de Sylvester nos levariam a

$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \theta_1^2} > 0 \quad (\text{não se verifica})$$

$$-\text{sen}^2 \theta_1 > 0 \quad (\text{incompatível})$$

Neste caso o sistema não apresenta características de estabilidade.

Se $\theta_2 = \pi/2$ então o eixo z (eixo de simetria)
pertenceria ao plano orbital.



Neste caso o satélite se comportaria como um corpo
rígido simétrico ($A_x = A_y$) em virtude da ausência de rota -
ção própria ($\bar{s} = 0$) no rotor.

Como neste caso θ_1 é arbitrário, então se a carca -
ça não tiver rotação própria, o torque gravitacional ten -
derá a alinhar o eixo de menor momento de inércia com o cen -
tro de força, conforme se vê em ((T 1)): "Spin Stabili -
zation of Attitude Against Gravity Torque " - William T.
Thomsom; The Journal of the Astronautical Sciences - 1961.

É de se esperar portanto que o sistema não seja esta -
vel.

No caso de $A_x = A_y = A_z = \bar{s} = 0$ dado por (3.7.7), em (4.4.2) teremos

$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \theta_1^2} = A_x \cos^2 \theta_2 \sin^2 \theta_1$$

e em (4.4.3) teremos

$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \theta_2^2} = A_x \cos^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2$$

e em (4.4.4) teremos

$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} = A_x \sin \theta_1 \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_2$$

o Hessiano assume a forma

$$[H] = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \theta_1^2} & \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \\ \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} & \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \theta_2^2} \end{pmatrix}$$

e as condições de Sylvester nos levam a

$$\begin{cases} A_x \cos^2 \theta_2 \sin^2 \theta_1 > 0 \\ A_x^2 \cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2 \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 + \\ - A_x^2 \cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2 \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 = 0 \end{cases}$$

Em virtude do anulamento do segundo determinante, o sistema apresenta-se com característica indeterminada quanto à sua estabilidade.

Todavia, por razões de ordem física, podemos considerar o satélite estavel, já que inercialmente ele seria equivalente a uma esfera.

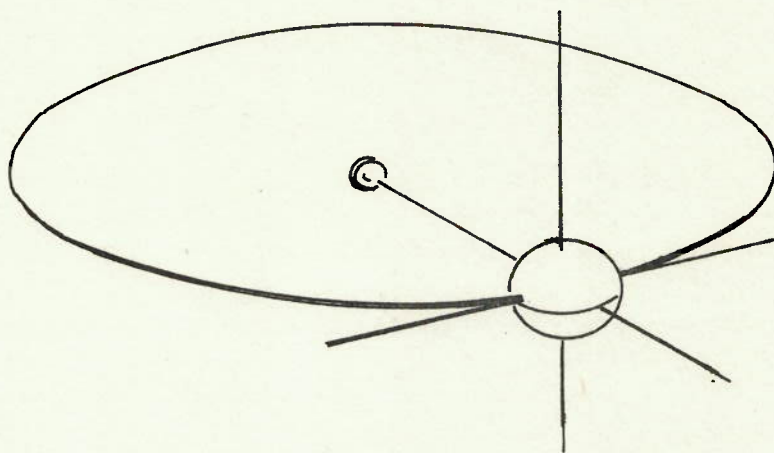


fig. 4-6

CAPÍTULO V

CONSIDERAÇÕES FINAIS

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O emprego da Lagrangeana com a energia potencial limitada até termos de segunda ordem, permitiu-nos vislumbrar 6 posições de equilíbrio, das quais 3 são estaveis segundo Liapunov. As outras 3 não apresentam características de estabilidade, mas uma delas, por razões de ordem física, praticamente pode ser considerada estável.

A determinação das posições de equilíbrio estavel do satélite é de importância quando se deseja manter sua estabilidade, mesmo na hipótese de uma alteração na sua energia, em virtude de causas externas como o impacto de um meteorito.

É o que ocorre no trabalho de WEBER (W 1 , tese de doutoramento apresentada à Universidade de Munique), na qual o autor desenvolve uma teoria de controle ótimo do mesmo, com o emprego de rotores dispostos ao longo dos eixos principais de inércia do satélite, e controlados da Terra por meio de sensores que medem os desvios do satélite da sua posição teórica de equilíbrio.

Estudos existentes na literatura consultada, mostram um grande interesse dos pesquisadores para o campo dos satélites com apêndices flexíveis.

É o que se nota por exemplo em :

Meirovitch (M 3) - Stability of Spinning Body Containing Elastic Parts via Liapunov Direct Method, on-

de o autor apresenta um método para o estudo analítico da estabilidade do movimento de um satélite com "spin", possuindo uma parte rígida e outra elástica;

Tsuchiya e Saito (T 5) - Dynamics of a Spin-Stabilized Satellite Having Flexible Appendages. Também aqui, os autores, via Liapunov, estudam a estabilidade do movimento de um satélite com um corpo central rígido, munido de apêndices flexíveis coplanares com o eixo de "spin", quando não deformados ;

Lohmeier (L 5) - On the Stability of Spinning Flexible Satellite, via Liapunov, o autor estuda a estabilidade do movimento de um satélite com um corpo central rígido, munido de duas antenas flexíveis, radialmente opostas, em relação ao centro de massa do corpo principal do satélite;

Sellappan e Bainum (B 2) - Motion of Spinning Spacecraft with Hinged Appendages, os autores estudam a estabilidade do movimento de um satélite que é um corpo rígido dotado de movimento de "spin", e no qual estão articuladas duas varetas com massas em suas extremidades. No estudo da estabilidade, os autores empregam métodos analíticos e numéricos.

O presente trabalho constitue um primeiro passo para estudos posteriores do problema do controle de atitude de satélites artificiais.

Nesse particular, constitue área de interesse para o desenvolvimento de estudos futuros, a estabilidade e seu controle, no caso de satélites dotados de partes moveis e flexiveis.

B I B L I O G R A F I A

- B 1 - BHATIA, N.P. - Stability Theory of Dynamical Systems,
Springer-Verlag , 1970
- B 2 - BAINUM, P.M. and Sllappan ,R - The Dynamics of Spin
Stabilized Spacecraft with Movable Appendages - NASA
Grant NSG 1181 , 1977
- C 1 - CHETAYEV, N .G. - The Stability of Motion
Pergamon Press , 1961
- C 2 - CRENSHAW, J.W. and Fitzpatrick, P.M. - Gravity Effects
on the Rotational Motion of a Uniaxial Artificial
Satellite - AIAA Journal, volu 6, n.11 , 1968
- D 1 - DE BRA, D.B and Delp, R.H. - Rigid Body Attitude Stabi-
lity and Natural Frequencies in a Circular Orbit
The Journal of the Astronautical Sciences, vol.XII,
pp.14-17 , 1961
- G 1 - GOLDSTEIN, H. - Classical Mechanics -
Addison Wesley - 1972
- G 2 - GEBMAN, J.R. and Mingori, D.L. - Perturbation Solution
for the Flat Spin Recovery of a Dual Spin Spacecraft,
AIAA Journal, vol.14, n. 7 , 1976

- H 1 - HAGEDORN,P. - The Inversion of the Stability Theorems of Lagrange and Routh
Universitat Karlsruhe - 1971
- K 1 - KANE,T.R. and Sobala,D - A New Method for Attitude Stabilization - AIAA Journal, vol.1 , n.6 - 1963
- K 2 - KANE,T.R. - Attitude Stability of Earth-Pointing Satellites - AIAA Journal, vol. 3, n.4 - 1965
- L 1 - LANCZOS ,C - The Variational Principles of Mechanics, University of Toronto Press - 1974
- L 2 - LIKINS, Peter W.- Stability of a Symmetrical Satellite in Attitude Fixed in a Orbiting Reference Frame - The Journal of Astronautical Sciences - vol.XII, pp.18 - 25 , 1965
- L 3 - LIKINS,Peter W. - Effects of Energy Dissipation on the Free Body Motion of Spacecraft.
Jet Propulsion Laboratory , TR 32-860 - 1966
- L 4 - LIKINS,Peter W. - Attitude Stability Criteria for Dual Spin Spacecraft - Journal of Spacecraft and Rockets - vol.4 , pp.1638 - 1643 - 1967
- L 5 - LOHMEIER,P.- On the Stability of Spinning Flexible Satellites - Universitat Munchen - 1974

- M 1 - MEIROVITCH, L. - Methods of Analytical Dynamics,
Mc Graw Hill - 1970
- M 2 - MEIROVITCH, L. and Wallace Jr, Frank B. - Attitude
Stability of a Spinning Passive Orbiting Satellite
NASA - CR.665 - 1967
- M 3 - MEIROVITCH, L. - Stability of a Spinning Body Con-
taining Elastic Parts via Liapunov's Direct Method,
AIAA Journal, vol. 18 , n.7 - 1970
- M 4 - MEIROVITCH, L. - The Stability of Motion of Satelli-
tes with Flexible Appendages, NASA - CR 1978 , 1972
- M 5 - MINGORI, D.L. - Effects of Energy Dissipation on the
Attitude Stability of Dual-Spin Satellites
AIAA Journal, vol.7, pp.20-27 , 1969
- N 1 - NEMYTSKII, V.V. and Stepanov, V.V. - Qualitative Theo-
ry of Differential Equations - Princeton University
Press - 1972
- P 1 - PONTRIAGUINE, L. - Equations Diferentielles Ordinaires,
Ed. Mir - Moscou - 1969
- P 2 - PRINGLE JR, R. - Bounds on the Librations of a Sym -
metrical Satellite - AIAA Journal, vol. 12 , n.5
1964

- S 1 - SELLAPPAN,R. and Bainum,P.M. - Motion os Spinning
Spacecraft with Hinged Appendages - AIAA Journal ,
vol. 15 , n.6 - 1977
- S 2 - SYMON,K.R. - Mechanics - Addison Wesley - 1972
- T 1 - THOMSOM,William T. - Spin Stabilization of Attitude
Against Gravity Torque - The Journal of Astronautical
Sciences, vol. IX , pp. 31-33 - 1962
- T 2 - TODOSIEV, Ernest P. - Periodic Attitude Control of a
Slowly Spinning Spacecraft - Journal of Spacecraft
and Rockets - pag.716 - 1973
- T 3 - TEIXEIRA Fº, Djalma R. - Spin Stability of Torque
Free Systems - AIAA Journal , vol. 11, n.6 - 1972
- T 4 - TEIXEIRA Fº, Djalma R. and Kane, T. R. - Instability
of Rotation About a Centroidal Axis of Maximum Moment
of Inercia - AIAA Journal , vol. 10 , n. 10 - 1972
- T 5 - TSUCHIYA, Kazuo and Saito, Haruo - Dynamics of Spin
Stabilized Satellite Having Flexible Appendages.
AIAA Journal , vol. 12 , n.4 - 1973
- W 1 - WEBER, H. Ingo - Optimale Lageregelund von Satelliten
Mit Simultan Entdrallten Rotorem - Universitat Munchen
1 971