

EDUARDO MAKOTO SUZUKI

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO ESCOAMENTO EM TORNO DE UM
CILINDRO GIRANDO**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de
São Paulo para obtenção do Título
de Mestre em Engenharia

**SÃO PAULO
2005**

OK

EDUARDO MAKOTO SUZUKI

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO ESCOAMENTO EM TORNO DE
UM CILINDRO GIRANDO**

**Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São
Paulo para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia.**

**Área de concentração:
Engenharia Mecânica**

**Orientador:
Fábio Saltara**

**SÃO PAULO
2005**

*Este trabalho é dedicado a
minha mãe e minha noiva, aquelas
quem sempre acreditaram na vitória
deste trabalho, um incentivo
inesgotável para a realização deste
trabalho.*

Agradecimentos

Ao orientador Prof. Dr. Fábio Saltara, pelo incentivo e diretrizes na condução deste trabalho.

À minha mãe que me fez acreditar que tudo isto é possível, à minha noiva Soneli pelo apoio e uma grande ajuda no decorrer de todo esse trabalho e aos amigos Kleiber, Faggioni, Moacir, Carlos Augusto e Fabio Cardoso, pelo incentivo e companheirismo nas horas difíceis.

À CAPES, à EPUSP e principalmente ao NDF de onde vieram os recursos necessários, sem o que não seria possível a realização deste trabalho.

À todos que contribuíram direta ou indiretamente na execução deste trabalho.

RESUMO

O presente trabalho visa o estudo do escoamento incompressível em torno de um cilindro girando, através da simulação numérica pelo método dos vórtices discreto e pelo método dos volumes finitos. Foram simulados escoamentos para Re 100, 160 e 200 no MVF e várias velocidades α , variando entre $0 \leq \alpha \leq 5.45$, onde α é a velocidade tangencial do cilindro normalizada com a velocidade da corrente incidente. Para o método dos vórtices discretos o Re adotado foi 10000 devido a natureza do próprio método em não conseguir obter um resultado satisfatório para Re mais baixo.

ABSTRACT

This report investigates the incompressible flow around a rotating cylinder by means of two numerical methods of simulations: the discrete vortex method and the finite volume method. Simulations were performed for $Re=100, 160$ and 200 through the FVM and for $0 \leq \alpha \leq 5.45$, where α is the rotational speed of the cylinder normalized with the free-stream velocity. The discrete vortex method were used to simulated flow at $Re = 10000$, because the flow at low Re is beyond the nature of this method.

Simulação numérica do escoamento em torno de um cilindro girando

Autor: Eduardo Makoto Suzuki
Orientador – Fábio Saltara

ERRATA

local	Onde se lê	Leia-se
Capítulo 2 – Revisão Bibliográfica – pág. 7	2.2. O método dos vórtices discretos	2.1. O método dos vórtices discretos
Capítulo 2 – Revisão Bibliográfica – pág. 10	2.3. Cilindro rotativo imerso num escoamento uniforme	2.2. Cilindro rotativo imerso num escoamento uniforme
Capítulo 2 – Revisão Bibliográfica Pág. 10 - 2º parágrafo	...e por Newton em 1972 (Mehta, 1985)...	...e por Newton em 1672 (Mehta, 1985)...
Capítulo 3 – Metodologia – pág.40 equação 3.64	ϕ_f : valor de f na célula centrada a jusante	ϕ_f : valor de ϕ na célula centrada a jusante
Capítulo 3 – Metodologia - Pág. 41 - 2º parágrafo	Tomando a figura (3.6) como exemplo, para um escoamento no sentido da direita para esquerda ...	Tomando a figura (3.6) como exemplo, para um escoamento no sentido da esquerda para direita...
Capítulo 4 – Resultados e discussões	“Amplitude média do coeficiente de arrasto”	“Amplitude média da oscilação do coeficiente de arrasto”
Capítulo 5 – Conclusões e sugestões para extensão do trabalho	“Amplitude média do coeficiente de arrasto”	“Amplitude média da oscilação do coeficiente de arrasto”
Bibliografia - Pág. 101	STOJKOVIC, D., BREUER, M. & DURST,F., "Effect of high rotation rates on the laminar flow around a circular cylinder", vol 14, pag 3160-3178, September 2002.	STOJKOVIC, D., BREUER, M. & DURST,F., "Effect of high rotation rates on the laminar flow around a circular cylinder", Physics of Fluids, vol 14, pag 3160-3178, September 2002.

local	Onde se lê	Leia-se
Bibliografia - Pág. 101	STOJKOVIC, D., SHÖN, P., BREUER, M. & DURST,F., "On the New Vortex Shedding Mode past a Rotating Circular Cylinder", vol 15, pag 1257-1260, May 2003.	STOJKOVIC, D., SHÖN, P., BREUER, M. & DURST,F., "On the New Vortex Shedding Mode past a Rotating Circular Cylinder", Physics of Fluids, vol 15, pag 1257-1260, May 2003.

SUMÁRIO

RESUMO	
ABSTRACT	
LISTA DE FIGURAS	
LISTA DE TABELAS	
LISTA DE ABREVIATURAS	
LISTA DE SIMBOLOS	
CAPÍTULO 1.....	1
<i>INTRODUÇÃO</i>	1
1.1. OBJETIVOS E MOTIVAÇÃO DO TRABALHO.....	1
1.2. EMISSÃO DE VÓRTICES.....	1
1.3. O CILINDRO GIRANDO E O EFEITO MAGNUS	5
1.4. ESTRUTURA DO TRABALHO	5
CAPÍTULO 2.....	7
<i>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</i>	7
2.2. O MÉTODO DOS VÓRTICES DISCRETOS.....	7
2.3. CILINDRO ROTATIVO IMERSO NUM ESCOAMENTO UNIFORME	10
CAPÍTULO 3.....	18
<i>METODOLOGIA</i>	18
3.1. INTRODUÇÃO	18
3.2. ANÁLISE INICIAL.....	18
3.3. CONVECÇÃO DOS VÓRTICES.....	19
3.4. INFLUÊNCIA DA ROTAÇÃO DO CILINDRO	25
3.5. DIFUSÃO DOS VÓRTICES.....	26
3.6. AMALGAMAÇÃO	28
3.7. FORÇAS ATUANDO NO CORPO.....	30
<i>O MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS</i>	34
3.8. INTRODUÇÃO	34
3.9. O MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS	35
3.10. EQUAÇÕES APROXIMADAS.....	37
3.11. EQUAÇÕES APROXIMADAS NA FORMA LINEAR.....	41
3.12. ACOPLAMENTO PRESSÃO-VELOCIDADE.....	42
3.13. ALGORITMOS COMPUTACIONAIS.....	45
CAPÍTULO 4.....	49
<i>RESULTADOS E DISCUSSÕES</i>	49
4.1. INTRODUÇÃO	49
4.2. RESULTADOS INICIAIS	49
4.3. FLUENT 6.1	61
CAPÍTULO 5.....	86
<i>CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA EXTENSÃO DO TRABALHO.</i>	86
ANEXO A	88
RE = 100	88
RE = 160.....	93
BIBLIOGRAFIA.....	95

LISTA DE FIGURAS

Figura 1-1 - Esteira de vórtice de von Kármán.	3
Figura 1-2 - Detalhe da região de formação do vórtice segundo Gerrard(1966).....	4
Figura 2-1 - Ilustração do sentido das velocidades no escoamento em torno do cilindro girando.	10
Figura 2-2 - O navio Flettner. Dois cilindros que giram substituem as velas.....	11
Figura 2-3 - Madaras Rotor, uma idéia de uma usina de energia que converteria energia pelo principio de movimento do efeito Magnus.	11
Figura 3-1 - Detalhe do vórtice gerado sobre um painel.	21
Figura 3-2 - Direções da velocidade induzida por um vórtice em um ponto.....	24
Figura 3-3- Distribuição de pressão no painel.....	33
Figura 3-4 – Distribuição de f nas proximidades de uma fonte para diferentes Pe . (VERSTEEG & MALALASEKERA, 1995).....	39
Figura 3-5 – Variação de f entre $x=0$ e $x=L$ (FLUENT 6.1 USER'S GUIDE, 2003).....	40
Figura 3-6 - Controle de volume unidimensional (Fluent 6.1 User's Guide, 2003).....	41
Figura 3-7 – Malha com arranjo desencontrado. (VERSTEEG & MALALASEKERA, 1995)	44
Figura 4-1 – Ilustração dos pontos de estagnação no escoamento ao redor de um cilindro girando. (PANTON, 1996).....	50
Figura 4-2 – Distribuição de velocidade em torno do cilindro no primeiro time-step e $\alpha=0$	50
Figura 4-3 – Distribuição de velocidade em torno do cilindro no primeiro <i>time-step</i> e $\alpha=1$	51
Figura 4-4 – Distribuição de velocidade em torno do cilindro no primeiro time-step e $\alpha=2$	51
Figura 4-5 – Distribuição de velocidade em torno do cilindro no primeiro time-step e $\alpha=3$	52
Figura 4-6 – Coeficiente de arrasto (C_D) e de sustentação (C_L) para $\alpha=0$	53
Figura 4-7 – Coeficiente de arrasto (C_D) e de sustentação (C_L). (YAMAMOTO, 2002).....	53
Figura 4-8 – Coeficiente de arrasto (C_D) e de sustentação (C_L) para $\alpha=0.096$	54
Figura 4-9 – Coeficiente de arrasto (C_D) e de sustentação (C_L) para $\alpha=0.192$	54
Figura 4-10 – Coeficiente de arrasto (C_D) e de sustentação (C_L) para $\alpha=0.384$	55
Figura 4-11 – Coeficiente de arrasto (C_D) e de sustentação (C_L) para $\alpha=0.576$	55
Figura 4-12 – Coeficiente de arrasto (C_D) e de sustentação (C_L) para $\alpha=0.672$	56
Figura 4-13 – Coeficiente de arrasto (C_D) e de sustentação (C_L) para $\alpha=1.606$	56
Figura 4-14 – Coeficiente de arrasto (C_D) e de sustentação (C_L) para $\alpha=1.890$	57
Figura 4-15 – Coeficiente de arrasto (C_D) e de sustentação (C_L) para $\alpha=2.483$	57
Figura 4-16 – Coeficiente de arrasto (C_D) e de sustentação (C_L) para $\alpha=2.629$	58
Figura 4-17 – Coeficiente de arrasto (C_D) e de sustentação (C_L) para $\alpha=2.921$	58
Figura 4-18 – Vários estágios de emissão de vórtices num cilindro estacionado. Cilindro aproximado com 128 painéis.....	60
Figura 4-19 - Malha utilizada no programa FLUENT.	62
Figura 4-20 - Coeficientes de força para $Re=100$, no cilindro girando com $\alpha=4.4$. Comparação entre dois tamanhos de time-step: $1e-2$ e $1e-3$, e comparação com dados da literatura.	62
Figura 4-21 - Coeficiente de arrasto (C_D) e sustentação (C_L) para o cilindro fixo ($\alpha=0$) e $Re=200$... 64	64
Figura 4-22 - Coeficiente de arrasto (C_D) e sustentação (C_L) para o cilindro girando ($\alpha=1.8$) e $Re=200$	65
Figura 4-23 - Coeficiente de arrasto (C_D) e sustentação (C_L) para o cilindro girando ($\alpha=1.9$) e $Re=200$	65
Figura 4-24 - Coeficiente de arrasto (C_D) e sustentação (C_L) para o cilindro girando ($\alpha=2.0$) e $Re=200$	66
Figura 4-25 - Coeficiente de arrasto (C_D) e sustentação (C_L) para o cilindro girando ($\alpha=3.25$) e $Re=200$	66
Figura 4-26 - Coeficiente de arrasto (C_D) e sustentação (C_L) para o cilindro girando ($\alpha=4.2$) e $Re=200$	67
Figura 4-27 - Coeficiente de arrasto (C_D) e sustentação (C_L) para o cilindro girando ($\alpha=4.3$) e $Re=200$	68

Figura 4-28 - Coeficiente de arrasto (CD) e sustentação (CL) para o cilindro girando ($\alpha=4.5$) e $Re=200$	68
Figura 4-29 - Coeficiente de arrasto (CD) e sustentação (CL) para o cilindro girando ($\alpha=4.7$) e $Re=200$	68
Figura 4-30 - Coeficiente de arrasto (CD) e sustentação (CL) para o cilindro girando ($\alpha=4.9$) e $Re=200$	69
Figura 4-31 - Comparação dos resultados dos coeficientes de força obtidos no FLUENT com os resultados de Chen et al (1997) para $Re=200$. Rotação α , respectivamente: a)0.5, b) 1.0 e c) 2.07.....	70
Figura 4-32 - Escoamento em torno de um cilindro girando para $\alpha=6$. (PRANDTL & TIETJENS, 1934).....	71
Figura 4-33 - Esquema de apresentação da comparação dos resultados.....	72
Figura 4-34 - Comparação experimental-computacional – $Re = 200 - t = 2,5$	72
Figura 4-35 - Comparação experimental-computacional – $Re = 200 - t = 5,5$	73
Figura 4-36 - Comparação experimental-computacional - $Re=200 - t = 3,0$	73
Figura 4-37 - Comparação experimental-computacional - $Re=200 - t = 7,0$	74
Figura 4-38 - Comparação experimental-computacional – $Re=200 - t = 1,0$	74
Figura 4-39 - Comparação experimental-computacional – $Re=200 - t = 3,5$	75
Figura 4-40 - Comparação experimental-computacional - $Re=200 - t = 4,0$	75
Figura 4-41 - Coeficiente de arrasto médio para $Re=100$ em relação à velocidade de rotação do cilindro. Resultados do FLUENT em comparação com os autores Stojkovic et al (2002) e Kang et al (1999).....	76
Figura 4-42 - Coeficiente de arrasto médio para $Re=160$ em relação à velocidade de rotação do cilindro. Resultados do FLUENT em comparação com o autor Kang et al (1999).....	77
Figura 4-43 - Coeficiente de arrasto médio para $Re=200$ em relação à velocidade de rotação do cilindro. Resultados do FLUENT em comparação com os autores Stojkovic et al (2003) e Mittal & Kumar (2003).....	77
Figura 4-44 - Amplitude média do coeficiente de arrasto para $Re=100$ em função da rotação α . Comparação entre os resultados obtidos no FLUENT com os resultados de Stojkovic et al (2002).....	78
Figura 4-45 - Amplitude média do coeficiente de arrasto para $Re=160$ em função da rotação α . Os resultados do FLUENT comparado com os autores Stojkovic et al (2003) e Kang et al (1999).....	79
Figura 4-46 - Amplitude média do coeficiente de arrasto para $Re=200$ em função da rotação α . Comparação entre os resultados obtidos no FLUENT com os resultados de Stojkovic et al (2003) e de Mittal & Kumar (2003).....	79
Figura 4-47 - Média dos coeficientes de sustentação para $Re= 100, 160$ e 200 , comparado com o valor do coeficiente de sustentação da teoria do escoamento potencial.....	80
Figura 4-48 - Contorno de vorticidade para $Re=200$ em torno de um cilindro fixo (sem rotação - $\alpha = 0$), em vários instantes de tempo diferentes: a) $t^*= 3.075$, b) $t^*=30.0$, c) $t^*=60.0$ e d) $t^*=90.0$...	83
Figura 4-49 - Contorno de vorticidade para $Re=200$ em torno de um cilindro girando (com rotação - $\alpha = 4.5$), em vários instantes de tempo diferentes: a) $t^*= 184.0$, b) $t^*=192.0$ e c) $t^*=200.0$. Em d) temos uma visão geral do segundo modo de emissão de vórtice.....	84
Figura A - 1 - Série temporal do coeficiente de força para $\alpha= 0.0$	88
Figura A - 2 - Série temporal do coeficiente de força para $\alpha= 1.0$	88
Figura A - 3 - Série temporal do coeficiente de força para $\alpha = 1.5$	89
Figura A - 4 - Série temporal do coeficiente de força para $\alpha = 1.9$	89
Figura A - 5 - Série temporal do coeficiente de força para $\alpha = 2.0$	90
Figura A - 6 - Série temporal do coeficiente de força para $\alpha = 3.0$	90
Figura A - 7 - Série temporal do coeficiente de força para $\alpha = 4.4$	91
Figura A - 8 - Série temporal do coeficiente de força para $\alpha = 4.7$	91
Figura A - 9 - Série temporal do coeficiente de força para $\alpha = 4.9$	92
Figura A - 10 - Série temporal do coeficiente de força para $\alpha = 5.0$	92
Figura A - 11 - Série temporal do coeficiente de força para $\alpha = 5.5$	93
Figura A - 12 - Série temporal do coeficiente de força para $\alpha = 1.0$	93
Figura A - 13 - Série temporal do coeficiente de força para $\alpha = 2.0$	94
Figura A - 14 - Série temporal do coeficiente de força para $\alpha = 2.4$	94

LISTA DE TABELAS

Tabela 3-1 – Valores de ϕ , Γ_d e $S\phi$. (MALISKA, 2004)	35
Tabela 4-1 - Coeficientes de força médio de arrasto e sustentação obtido pelo MVD para $Re=10000$	59
Tabela 4-2 Valores da qualidade da malha utilizada	62
Tabela 4-3 – Coeficientes de arrasto médio e número de Strouhal obtidos na literatura.	64
Tabela 4-4 – Coeficiente de inclinação aproximado do coeficiente de sustentação (C_L) em função de α , para vários valores de Re	81
Tabela 4-5 – Valores médio da frequência adimensional da emissão de vórtices obtida neste trabalho.	82

Lista de abreviaturas

MVD:	Método dos vórtices discretos.
MVF:	Método dos volumes finitos.
FSM:	<i>Fractional Step Method.</i>
MEF:	Método dos elementos finitos.
SIMPLE:	<i>Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations.</i>
SIMPLER:	<i>Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations Revised.</i>
SIMPLEC:	<i>Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations Consistent.</i>
PISO:	<i>Pressure Implicit with Splitting of Operators.</i>
QUICK:	<i>Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics</i>

LISTA DE SIMBOLOS

- \vec{A} : área da face de um volume.
- A_{ij} : matriz de dimensão $i \times j$.
- b_i : vetor de dimensão i .
- C_D : coeficiente de força de arrasto.
- C_L : coeficiente de força de sustentação.
- D : diâmetro do cilindro.
- D_0 : parâmetro de comprimento.
- Dif: condutância difusiva.
- $d_{i,k}, d_{j,k}$: distância dos vórtices i, j ao painel mais próximo k .
- \vec{F} : campo de força atuando numa superfície devido ao escoamento.
- F_{cv} : fluxo de massa convectivo.
- F_x : campo de força atuando numa superfície devido ao escoamento, na direção x .
- F_y : campo de força atuando numa superfície devido ao escoamento, na direção y .
- \vec{n} : direção normal.
- N_{faces} : número de faces de cada célula.
- N_V : número de vórtice na esteira.
- N_W : número de painéis utilizado na discretização da geometria em estudo.
- p : campo de pressão atuando numa superfície devido ao escoamento.
- Pe: número de Peclet.
- r : distância.
- R : raio do cilindro.
- Re : número de Reynolds.
- $r_{i,j}$: distância entre o par de vórtices.
- Str: número de Strouhal.
- t : tempo.
- \vec{u} : campo de velocidade do escoamento.
- u_i : velocidade induzida em um vórtice, na direção x .

u_s : velocidade do escoamento tangencial a uma superfície.
 u_n : velocidade do escoamento normal a uma superfície.
 u_∞ : velocidade da corrente uniforme na direção x .
 U_∞ : velocidade incidente do escoamento.
 V : volume de uma célula.
 V_0 : parâmetro de velocidade.
 v_i : velocidade induzida em um vórtice, na direção y .
 v_∞ : velocidade da corrente uniforme na direção y .
 V_θ : velocidade tangencial à superfície do cilindro.
 x, y : posição dos vórtices discretos.
 x_c, y_c : posição do centro do painel.
 x_0, y_0 : coordenadas da posição do centro do cilindro.

α : relação adimensional entre a velocidade tangencial na periferia do cilindro e a velocidade incidente no escoamento.

α_L : limite da relação adimensional entre a velocidade tangencial na periferia do cilindro e a velocidade incidente no escoamento, a partir do qual cessa o primeiro modo de emissão de vórtice.

α_r : fator de sobre-relaxação.

$\Delta\theta$: movimento angular utilizado no escoamento difusivo no método *random-walk*.

Δr : movimento radial utilizado no escoamento difusivo no método *random-walk*.

Δt : tamanho do *time-step* do cálculo numérico não-permanente.

ΔS : tamanho de um painel da geometria aproximada.

δx : tamanho da face da célula.

ϕ : valor da propriedade em estudo (MVF).

γ : função de regularização ou da forma do núcleo.

Γ : circulação de um vórtice.

$\Gamma_{cilindro}$: intensidade da rotação do cilindro.

- Γ_d : coeficiente de difusividade.
- μ : viscosidade do fluido.
- ρ : massa específica do fluido.
- σ : tamanho do núcleo de um vórtice.
- ν : viscosidade dinâmica ($\frac{\mu}{\rho}$).
- $\vec{\omega}$: campo de vorticidade do escoamento.
- Ω : velocidade angular da rotação do cilindro.
- ψ : função linha de corrente do escoamento.

Operadores:

- $\frac{\partial}{\partial t}$: variação temporal.
- $\frac{\partial}{\partial x}$: variação espacial na direção x .
- $\frac{\partial}{\partial y}$: variação espacial na direção y .
- $\frac{\partial}{\partial s}$: variação espacial na direção tangencial a uma superfície.
- $\frac{\partial}{\partial n}$: variação espacial na direção normal a uma superfície.
- $\frac{D}{Dt}$: derivada total.
- ∇ : operador gradiente.
- $\nabla \cdot$: operador divergente.
- $\nabla \times$: operador rotacional.
- ∇^2 : Laplaciano.
- $\int_{V_c} dV$: Integral num volume de controle.
- $\oint dA$: Integral num volume de controle.

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

1.1. Objetivos e motivação do trabalho

A força de sustentação gerada pelo escoamento ao redor de um cilindro que gira, conhecida por efeito Magnus, tem sido alvo da comunidade científica por quase um século. Prandtl demonstrou que a rotação do cilindro inibe ou previne o descolamento da camada-limite. Atualmente, com uma maior potência computacional, podemos simular processos que são muito difíceis de estudar experimentalmente. Dentre esses processos está o estudo da esteira de vórtices produzida pelo escoamento em torno de um cilindro girando. Esta emissão de vórtices tem algumas particularidades que diferem da esteira de vórtices produzida pelo escoamento em torno de um cilindro fixo. Este trabalho tem como objetivo investigar numericamente o escoamento em torno de um cilindro girando por dois métodos computacionais diferentes, o método dos vórtices discretos e o método dos volumes finitos, e verificar qual a influência da rotação nas forças de sustentação e arrasto.

1.2. Emissão de vórtices

Na antiguidade, devido à carência de uma explicação física, os vórtices eram considerados elementos místicos. Vistos como um buraco em matéria inorgânica, eram considerados como símbolo da vida, crescimento e energia, ou na sua forma espiral, inspiravam a transmigração de almas ou o caminho de Deuses e Demônios. Nesta época, a grande invenção da humanidade foi a roda, que simbolizava a periodicidade. (LUGT, 1983)

O som causado pelo movimento de ar sobre um fio esticado, fazendo este fio vibrar na mesma frequência com que os vórtices eram emitidos foi aplicado em uma harpa na Grécia, mas tal fenômeno era aceito como uma manifestação divina do deus do vento *Aeolus* e era chamado de “*aeolian tones*”. (LUGT, 1983)

Na renascença, *Leonardo da Vinci* descreveu com mais clareza o fenômeno dos turbilhões. *Da Vinci* foi o primeiro a descrever o movimento turbulento, reconhecer a diferença entre vórtice potencial e rotação de corpo rígido e também a estudar o movimento turbilhonar em canais e em esteiras formadas atrás de obstáculos. Utilizou este conhecimento também no estudo de anatomia. (LUGT, 1983) Apesar de possuir tal capacidade de observação, *Da Vinci* descreve erroneamente a esteira de vórtice em formação simétrica. (MENECHINI, 2002)

Os tons harmônicos foram investigados por Strouhal em 1878. Sua conclusão foi a que a frequência do som emitido depende do diâmetro do fio e da velocidade da corrente de fluido incidente. Em 1879, estudando a corda de um violino vibrando devido ao escoamento de ar ao redor dela, Lord Rayleigh concluiu que a oscilação ocorria na direção transversal em relação ao escoamento, e em 1896, Lord Rayleigh definiu um número adimensional conhecido por número de Strouhal, definido como: (RAYLEIGH, 1945)

$$Str = \frac{f_s D}{U_\infty}$$

onde:

- Str: número adimensional de Strouhal.
- f_s : frequência de emissão de vórtices.
- D: diâmetro do corpo.
- U_∞ : velocidade incidente do escoamento.

Em 1908, Benard associou a periodicidade da esteira do cilindro com a formação de vórtices (BLEVINS, 1990)

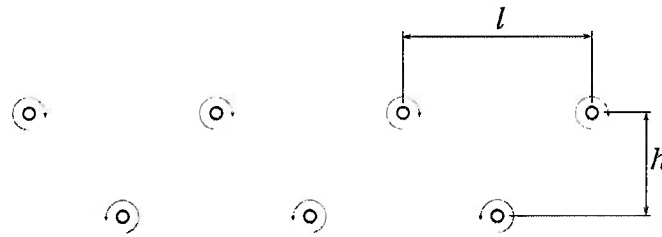


Figura 1-1 - Esteira de vórtice de von Kármán.

Em 1912, von Kármán mostrou que apesar da emissão de vórtices ser um fenômeno instável, existe um arranjo que pode ser considerado estável em relação a maioria das perturbações. Em seus cálculos, von Kármán considerou o escoamento em regime permanente e desconsiderou as oscilações na velocidade devido a turbulência. Quando a proporção entre a distância consecutiva entre dois vórtices de sentido oposto (h) e entre dois vórtices de mesmo sentido (l) for igual a 0,2806, teremos uma esteira estável. Tal fenômeno é chamado de esteira de von Kármán (PRANDTL, 1963)

No estudo da formação e emissão de vórtices através de um corpo rombudo, é essencial citar o mecanismo de desprendimento dos vórtices exposto por Gerrard em 1965.

Segundo o autor, o mecanismo da região de formação dos vórtices atrás de um corpo rombudo serve para introduzir uma relação entre o tamanho da região de formação a intensidade dos vórtices e a frequência de emissão de vórtices. Gerrard postulou que um vórtice cresce ganhando circulação oriunda da camada cisalhante a qual ele está conectado. Em um certo instante, o vórtice que está crescendo torna-se suficientemente intenso para atrair a camada cisalhante oposta. Esta atração se dá devido à velocidade induzida pelo vórtice em crescimento. A aproximação de fluido com vorticidade oposta, em uma concentração suficientemente intensa, interrompe a alimentação de circulação do vórtice em crescimento e então, ele é desconectado da camada cisalhante e a seguir, convectado para jusante formando a esteira.

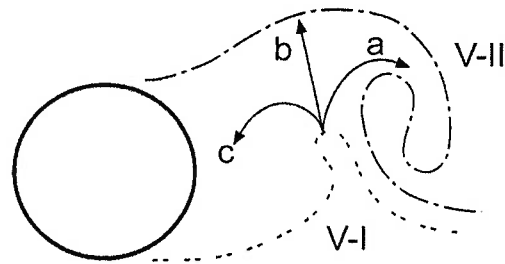


Figura 1-2 - Detalhe da região de formação do vórtice segundo Gerrard(1966).

A Figura 1-2 ilustra a região de formação por meio de linhas de filamento da camada cisalhante. É o instante em que a camada-limite inferior (V-I) se descola do cilindro e a camada cisalhante superior (V-II) já está em formação de vórtice avançada. A camada cisalhante (V-I) é atraída pela velocidade induzida pela camada oposta (V-II), podendo seguir os caminhos ilustrados pelas setas (*a*), (*b*) e (*c*). Em (*a*), parte das partículas da camada oposta (V-I) se misturam com o vórtice com o vórtice formado (V-II), onde se defronta com uma vorticidade oposta, portanto, contribuindo para diminuir a circulação em (V-II). No caminho (*b*) as partículas de (V-I) movem-se em direção da camada cisalhante oposta, com sentido inverso de vorticidade. Esta camada começa a se intensificar e por conseguinte o vórtice também se torna mais intenso. Neste crescimento, uma porção maior de fluido irá se chocar com a camada cisalhante oposta, diminuindo a intensidade do vórtice (V-II), interrompendo a alimentação deste oriundo da camada cisalhante. Finalmente, a seta em (*c*) indicam o caminho da camada cisalhante em direção ao corpo, formando um novo vórtice na parte inferior da esteira, fechando o ciclo de geração e desprendimento de vórtices. (GERRARD,1966 apud MENEGHINI,2002)

Em escoamentos em torno de corpo rombudos, o fenômeno de emissão de vórtices merece atenção especial por desempenhar um papel crucial na estimativa da fadiga sofrida pela estrutura. A emissão alternada de vórtices conduz a flutuações de pressão no sentido transversal do escoamento, causando oscilações. Essa oscilação está relacionada com uma tensão cíclica que causa vibração e a diminuição da vida útil na estrutura. Esse efeito é amplificado quando existe um efeito de sincronização entre a força atuante de deslocamento da estrutura e a frequência de emissão de

vórtice. Tal fato foi ilustrado na história com o famoso caso da ponte oscilante de *Tacoma*.

1.3. O cilindro girando e o efeito Magnus

O estudo do escoamento fluido em torno de um cilindro dotado de rotação adquiriu importância devido à descoberta do efeito Magnus, onde temos uma força de sustentação proeminente em comparação ao caso em que o cilindro está em repouso. O efeito Magnus é importante no estudo da trajetória de projéteis dotado de movimento de rotação, tendo sido aplicado para propulsão de embarcações e mesmo para a sustentação de aeronaves.

No caso do cilindro em movimento rotacional imerso no escoamento, a rotação é um fator que influencia na frequência de emissão de vórtices. O desenvolvimento de uma ferramenta computacional flexível e ágil é de grande ajuda neste campo, pois o estudo experimental é complexo. Como fazer a tomada de distribuição de pressão em torno de um cilindro que está girando e transladando, imerso num fluido?

1.4. Estrutura do trabalho

O escoamento do presente estudo será simulado numericamente com modelos *Lagrangeano* e *Euleriano* para a solução das equações de *Navier-Stokes*. O modelo Lagrangeano é o método dos vórtices discretos, desenvolvido em linguagem *Fortran*. O modelo Euleriano é o método dos volumes finitos, implementado no programa *FLUENT 6.1*. Os casos a serem estudados estarão na faixa do número de *Reynolds* de 100 a 10000, parâmetro esse que mede a relação entre forças viscosas e força de inércia, dada pela seguinte expressão:

$$Re = \frac{\rho U_{\infty} D}{\mu}$$

Um outro parâmetro adimensional utilizado nas comparações é a velocidade adimensional α , dada pela relação entre a velocidade tangencial na periferia do cilindro e a velocidade incidente no escoamento:

$$\alpha = \frac{\Omega R}{U_{\infty}}$$

Nestas duas fórmulas, temos que:

- Re : número de Reynolds
- ρ : massa específica do fluido
- U_{∞} : velocidade incidente do escoamento
- μ : viscosidade do fluido
- α : relação adimensional entre a velocidade tangencial na periferia do cilindro e a velocidade incidente no escoamento
- Ω : velocidade angular da rotação do cilindro
- R: raio do cilindro
- D: diâmetro do cilindro.

A estrutura deste trabalho está composta de cinco capítulos. No capítulo 2 será feita uma revisão bibliográfica sobre os métodos dos vórtices discretos e sobre o cilindro girando.

No capítulo 3 teremos uma descrição dos métodos numéricos para o método dos vórtices discretos e para o método dos volumes finitos.

No capítulo 4 teremos a apresentação dos resultados dos coeficientes de força e visualização de esteiras, bem como seus comentários. O capítulo 5 apresenta a conclusão deste trabalho.

Capítulo 2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.2. O método dos vórtices discretos

O método dos vórtices utilizado neste trabalho é baseado na lei de *Biot-Savart*, utilizando uma descrição puramente Lagrangeana do escoamento.

A contribuição mais importante para os métodos dos vórtices discretos, é a definição encontrada por *Helmholtz*, em 1858, de que as linhas de vórtices em um fluido inviscido permanecem continuamente compostas dos mesmos elementos fluidos. Portanto, escoamentos com vorticidade podem ser modelados com vórtices de apropriada circulação e seção transversal infinita. (SARPKAYA, 1989)

Podemos citar dois casos pioneiros nos métodos dos vórtices. *Kármán* (1911) utiliza-se do conceito de *Helmholtz* para representar uma esteira de vórtices para estudar a estabilidade de vórtices pontuais. *Rosenhead* (1931) estudou o desenvolvimento da instabilidade de uma linha de vórtices, representado por vórtices discretos.

Clements (1973), estudou o escoamento inviscido bidimensional sobre um corpo rombudo de seção quadrada. A velocidade de qualquer vórtice era obtida pela soma do escoamento potencial irrotacional em torno do corpo e a velocidade induzida na posição do vórtice por todos os outros vórtices

Chorin (1973) estudou o escoamento viscoso bidimensional aplicado a um cilindro. O processo de difusão de vorticidade foi modelado pelo método dos “*random-walks*”.

Sparlat & Leonard (1981) apresentaram uma técnica computacional para simulação de escoamento bidimensional em torno de corpos rombudos. A equação de *Navier-Stokes* é representada em termos da vorticidade. Em conjunto com a lei de *Biot-Savart*, pontos discretos representando os vórtices que atuam na camada-limite e que se desprendem do corpo, simulam a esteira de vórtice que é emitida pelo escoamento ao redor do corpo. A característica desta técnica é a referência *Lagrangeana* e um método livre da malha computacional. Para se evitar a descontinuidade provocada pelo vórtice na lei de *Biot-Savart*, os autores propuseram a existência de um núcleo nos vórtices.

Em 1982, *Nagano et al.* através do modelo de *Sparlat & Leonard* (1981) acrescentaram a modelagem de difusão viscosa através do tamanho do núcleo do vórtice. O núcleo do vórtice cresce de acordo com a sua idade, simulando os efeitos da difusão viscosa. (*PARK & HIGUCHI*, 1989)

Graham (1988) utilizou uma técnica híbrida *Lagrangeana-Euleriana* conhecida como “*vortex-in-cell*”. A convecção dos vórtices é feita de maneira *Lagrangeana*, enquanto a difusão viscosa de forma *Euleriana*. Para se resolver a parte difusiva da equação do transporte de vorticidade, é obtido o campo de velocidade através da função linha de corrente obtida sobre uma malha. Portanto essa técnica depende de uma malha computacional.

Park & Higuchi (1989) através do algoritmo desenvolvido por *Sparlat & Leonard* (1981), estudaram o escoamento bidimensional sobre corpos rombudos de diferentes formatos.

Sarpkaya (1989) publicou uma revisão extensa sobre os métodos dos vórtices, mencionando as vantagens e dificuldades deste método, bem como as várias maneiras de adaptação computacional e de difusão viscosa.

Meneghini (1993) utilizou o método dos vórtices em malhas polares para estudar a emissão de vórtices em cilindros oscilando forçadamente. Foram investigadas a faixa de sincronização da frequência de emissão de vórtice e a frequência da estrutura, bem como os diferentes modos de emissão de vórtices.

Saltara (1999) utilizou o *MVD* e o *FSM* (“*Fractional Step Method*”) para estudar a vibração induzida pelo escoamento bidimensional em cilindros livres para oscilar em alto número de *Reynolds* e as características do escoamento ao redor de pares de cilindros fixos em *tandem* e lado-a-lado em baixo *Re*. O método dos vórtices discretos utilizado foi um método híbrido *euleriano-lagrangeano* proposto por *Graham* (1988), em que a difusão seria modelada sobre uma malha, de forma *euleriana*, e a convecção continuaria sendo lagrangeana (“*vortex-in-cell*”).

Siqueira (1999) utilizou o *MVD* e o *FSM* em conjunto com o Método dos Elementos Finitos para estudar o escoamento bidimensional ao redor de um ou mais cilindros. Também estendeu o *FSM* para o escoamento tridimensional ao redor de um cilindro fixo e forçado a oscilar na direção transversal ao escoamento em baixo número de *Reynolds*.

Yamamoto (2002) utilizando o *MVD* na forma puramente *lagrangeana* (“*Vortex Tracing Method*”) e utilizando o método de crescimento do núcleo do vórtice (“*Core Spread Method*”) para simular a difusão viscosa, estudou o agrupamento de cilindros lado-a-lado, com ambos livres para oscilar

Fregonesi (2002) utiliza a mesma técnica do *MVD* utilizada por *Yamamoto* (2002) para estudar o escoamento ao redor de cilindros em “*tandem*” livres e fixos, e o *MEF* para estudar a parte estrutural do escoamento de um cilindro flexível.

2.3. Cilindro rotativo imerso num escoamento uniforme

Um corpo que viaja através de um fluido, girando, de forma que seu eixo de rotação seja perpendicular a trajetória do movimento, experimentará uma componente da força do efeito *Magnus*, agindo na direção perpendicular ao plano da trajetória do voo e o eixo de rotação. (SWANSON, 1961)

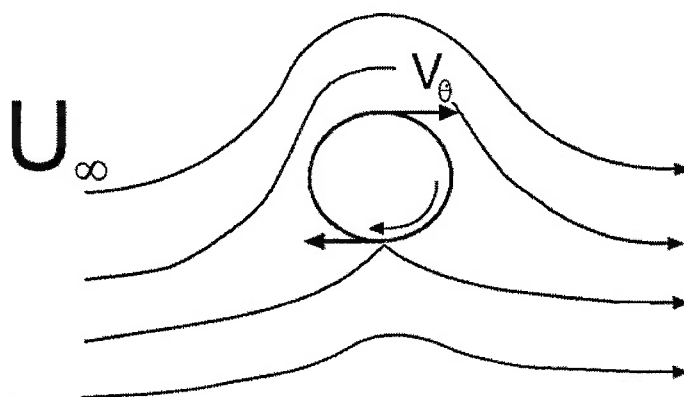


Figura 2-1 - Ilustração do sentido das velocidades no escoamento em torno do cilindro girando.

Os primeiros registros do desvio da trajetória retilínea de um corpo girando foram descritos por *G.T. Walker* em 1671 (SWANSON, 1961) e por Newton em 1722 (MEHTA,1985) e este corpo era uma bola de tênis. *H. G. Magnus*, na tentativa de computar o desvio dos projéteis rotativos realizou alguns experimentos e chegou a conclusão que o desvio devido à força aerodinâmica produzida por uma interação entre a rotação e a velocidade do voo dá origem a uma distribuição assimétrica de pressão pelo efeito *Bernoulli*.

A representação matemática clássica do escoamento potencial em torno de um cilindro com circulação foi apresentado primeiramente por *Lorde Rayleigh*.

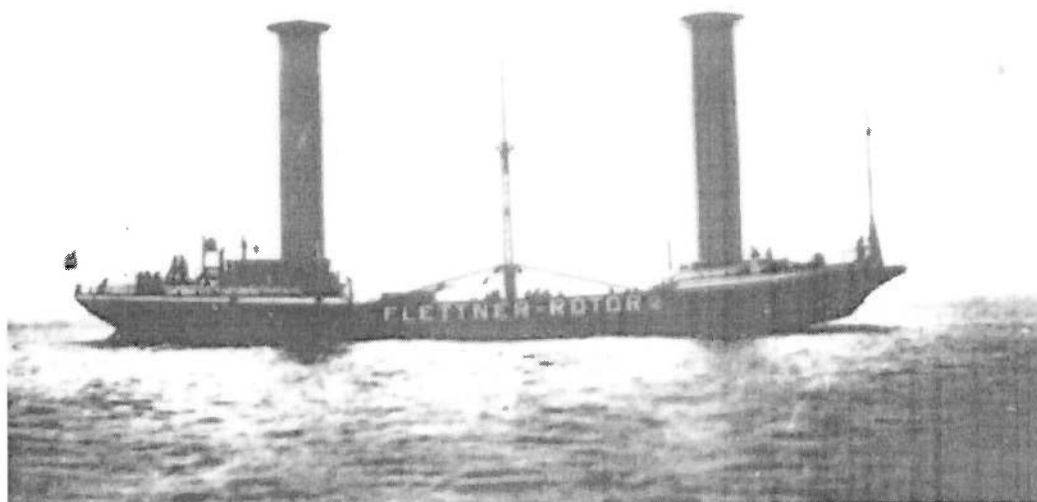


Figura 2-2 - O navio Flettner. Dois cilindros que giram substituem as velas.¹

Depois da 1ª Guerra Mundial, *Anton Flettner* e *Ludwig Prandtl* tiveram a idéia de substituir as velas do navio por cilindros rotativos, que em ventos cruzado produziria uma propulsão muito maior do que a vela equivalente em área. Apesar do método ser relativamente barato, a velocidade e a confiança da propulsão à hélice eram muito mais atraentes.

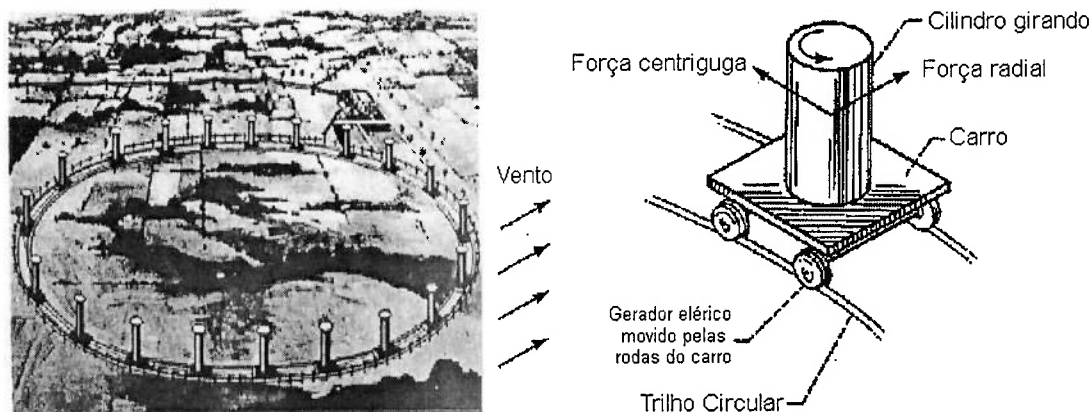


Figura 2-3 - Madaras Rotor, uma idéia de uma usina de energia que converteria energia pelo princípio de movimento do efeito Magnus.²

Em 1926, foi patenteado um projeto um tanto complicado para geração de energia elétrica, baseado no efeito Magnus. Denominado de usina de força *Madaras Rotor*, esse projeto consistia em construir grandes cilindros verticais que giravam em

1 http://www.der-katamaran.com/Konstruktion___Technik/Flettner_Rotor/flettner_rotor.html

2 <http://www.ifb.uni-stuttgart.de/~doerner/windcuriosity.html>

torno do próprio eixo e que ficavam em uma pista oval. Geradores presos nas rodas dos cilindros iriam gerar a energia elétrica de saída quando os mesmos fossem movimentados. (SWANSON, 1961)

Houve a tentativa de se colocar cilindros rotativos como parte de asas, mas devido às complicações na manobrabilidade e o excesso de peso esta aplicação foi abandonada. Um exemplo excelente do modo em que o movimento da superfície pode ser usado para prevenir a separação é dado pelo escoamento em torno de um cilindro girando em uma corrente. Esteja o cilindro girando ou não, o movimento inicial do fluido, quando a corrente é iniciada do repouso, é irrotacional sem circulação.

Um dos lados da superfície do cilindro em rotação está se movendo no mesmo sentido da corrente, e não existe separação e destacamento de vórtices. No outro lado, no entanto, onde a superfície está se movendo contra a corrente, ocorre a separação. E uma vez que existe uma grande produção de vorticidade correspondentemente existe um grande transporte de vorticidade no fluido. Esta vorticidade é praticamente concentrada em um único vórtice, que se move à jusante, deixando uma circulação em torno do cilindro no mesmo sentido da rotação. (SWANSON, 1961)

O primeiro trabalho experimental extensivo sobre o efeito *Magnus* foi feito por *Thom* na Universidade de *Glasgow* em sua tese de doutorado, em *reports* e em *memorandum* da *British Aircraft Research Council*, num total de nove anos de pesquisa, investigando os efeitos do número de *Reynolds*, condições superficial, relação geométrica (*aspect ratio*), etc., para obtenção de dados sobre a pressão, velocidade e circulação. (THOM, 1925, 1926, 1931, 1932 apud SWANSON, 1961)

Prandtl (1925) previu que existiria um coeficiente de sustentação máximo quando a relação adimensional de velocidade fosse de aproximadamente 4. Essa previsão foi feita através da hipótese que o ponto de estagnação coincidiria com a parte inferior do cilindro, onde nenhum vórtice seria emitido. A sustentação então

permaneceria constante a um valor que corresponderia à uma rotação adimensional $\alpha=2$ para um fluido ideal. (PRANDTL,1925 apud SWANSON,1961)

A dificuldade da investigação experimental, principalmente na tomada da distribuição de pressão ao redor do cilindro por causa da rotação, foi contornada por *Swanson* (1961), medindo apenas os coeficientes de arrasto e sustentação diretamente. Não encontrou o valor máximo de sustentação indicado por *Prandtl*, uma vez que a sustentação pelo efeito *Magnus* crescia uniformemente até $\alpha=17$. *Swanson* encontrou que o coeficiente de arrasto e sustentação tem uma forte dependência no número de *Reynolds* numa região em que a taxa de rotação é menor do que 1.

Ludwig (1964) mediu os perfis de velocidades de uma separação permanente em um cilindro girando para vários valores baixos α ($\alpha \leq 0.3$). *Ludwig* verificou que a posição da separação laminar à jusante na parede móvel do cilindro é linearmente proporcional a taxa de velocidade α .

Peller (1986) investigou a separação permanente de um cilindro em rotação e com transmissão de calor em escoamento cruzado em número de *Reynolds* subcrítico. Suas medições bidimensionais da camada-limite são similares às obtidos por *Ludwig* (1964).

Em vista das dificuldades experimentais, as soluções numéricas e analíticas das equações de *Navier-Stokes* são excelentes alternativas na descrição dos movimentos dos fluidos viscosos. Escoamentos permanentes foram estudados por *Wood* (1957), *Moore* (1957) e *Glauert* (1957). Suas pesquisas indicaram que para α suficientemente alto, é possível usar o método das expansões para obter escoamentos permanente sem a emissão de vórtices para número de *Reynolds* alto e baixo.

Diaz et al. (1983, 1985) realizou um programa extensivo experimental em número de *Reynolds* relativamente alto ($Re=9000$) em túnel de vento. Através da análise espectral nos dados sobre a velocidade na esteira na proximidade do cilindro

girando, verificou-se que a esteira de vórtice de *von Kármán* se deteriora rapidamente quando a rotação adimensional do cilindro α excede um certo valor crítico. Para *Diaz et al.*, para velocidades periféricas com valor igual até o da corrente livre, existe uma atividade distinta do vórtice de *von Kármán* na esteira, enquanto que para velocidades periféricas maiores, a esteira de *von Kármán* se deteriora e desaparece para valores maiores do que o dobro da velocidade da corrente uniforme.

Coutanceau & Ménard (1985) realizaram experimentos com o objetivo de estudar a influência da rotação na esteira que se desenvolve atrás de um cilindro que começa a se mover impulsivamente. Este trabalho serve para validar os resultados numéricos de *Badr & Dennis* (1985), que utilizaram um método numérico para resolver a equação de Navier-Stokes decomposta em série de Fourier. Estes trabalhos foram publicados simultaneamente no *Journal of Fluid Mechanics* em 1985. Para *Coutanceau & Ménard*, os efeitos da rotação no cilindro são:

- Indução de uma camada de fluido que gira junto com o cilindro, de modo que o ponto de estagnação posterior e os pontos de separação são transladados junto com a corrente. A espessura desta camada aumenta com α , mas decresce com Re ;
- Destruição da simetria dos vórtices gerados a partir do cilindro, por causa da diferença na distribuição da velocidade relativa entre fluido-parede, de tal modo que os turbilhões iniciais são criados com tamanho e intensidade diferentes;
- Aceleração dos destacamentos dos vórtices.

Além disso, verificou-se também um limite no valor da rotação α , que foi chamado de α_L . Este valor não é dependente do número de *Reynolds* e é próximo de 2. Para $\alpha > \alpha_L$ somente o vórtice inicial foi criado durante a realização do experimento, portanto a esteira de vórtices deve ter sido destruída. O trabalho de *Badr & Dennis*(1985) foi realizado para $Re = 200$ e 500 e $\alpha = 0.5$ e 1 e foi utilizado para comparações com o resultado experimental de *Coutanceau & Ménard*(1985).

Chew (1987) mediu a distribuição de pressão em torno do cilindro girando diretamente pelo uso de um transdutor de pressão simples com anel de mercúrio

escorregadio e uma técnica de ajuste médio. Seus resultados claramente indicaram uma translação na localização da separação média na direção da rotação, uma translação na localização do ponto de estagnação no sentido contra a rotação do cilindro e a assimetria da distribuição média de pressão em torno do cilindro, que resulta em um aumento na força de sustentação com crescimento de α .

Mais recentemente, usando um método de séries de potências, o limite do estado permanente da solução das equações de *Navier-Stokes* em função do tempo, junto com verificações da equação do estado permanente foram obtidos por *Badr, Dennis & Young* (1989) para baixos números de *Reynolds* e α pequeno. Eles descobriram que quando o cilindro começa a se mover impulsivamente a partir do repouso, o escoamento se aproxima do estado permanente depois de um período suficientemente longo para vários valores baixos de *Reynolds*, mas no maior valor deles ($Re=60$) o escoamento não tende ao estado permanente, desenvolvendo uma forma periódica de emissão de vórtices. *Tang & Ingham* (1991) repetiram este estudo para $Re = 100$, mas não observaram essa emissão de vórtices.

Badr e Dennis juntaram-se a *Coutanceau e Ménard* em 1990 para estudar o escoamento não-permanente em torno de um cilindro girando para $Re 10^3$ e 10^4 , pelo método experimental e numérico. (*Badr et al.* 1990) Neste estudo, a rotação adimensional α varia de 0.5 e 3. Com exceção para o caso $\alpha=3$, a estrutura do escoamento estimada pelo cálculo numérico estavam em excelente concordância com os resultados experimentais. Quando $\alpha=3$ e num tempo adimensional $t > 10$, eles descobriram que os efeitos tridimensionais se tornam mais pronunciados nos experimentos e o escoamento laminar é destruído, enquanto que o escoamento calculado se aproxima de um estado permanente.

Chen, Ou & Pearlstein (1993), utilizando um método de diferenças finitas/pseudoespectral, estenderam o tempo de estudo realizado por *Coutanceau & Ménard* (1985) e *Badr & Dennis* (1985) cujo resultado foi a visualização de um segundo vórtice emitido para $\alpha=3.25$ e $Re=200$.

Chew, Cheng & Luo (1995) utilizam se do método dos vórtices *vortex-in-cell* para estudar o fenômeno da esteira atrás de um cilindro girando para $Re=1000$ e taxa de rotação α de 0 a 6. O resultado desse estudo é visualizar a destruição da esteira de vórtice para $\alpha > 2$, visualizar o segundo vórtice emitido quando $\alpha=3$ e um estudo na relação de citado por *Prandtl*, onde o efeito *Magnus* é eficiente até $\alpha \approx 2$.

Zhang & Ko (1995) analisaram o caso do cilindro girando para $Re = 200$ pelo método dos volumes finitos. Foram analisadas as rotações de $0.5 < \alpha < 5.0$. Foi a primeira publicação de uma esteira de vórtice para $\alpha > \alpha_L$, apesar dos autores não darem muita atenção para este fato, pois a única conclusão até o momento era que a emissão de vórtice só ocorria até α_L .

Chew, Luo & Cheng (1997) utilizando a mesma técnica computacional de *Chew et al.* (1995) estudaram a influência de uma corrente incidente num cilindro girando, com um escoamento de perfil. O aumento do gradiente de velocidade faz com que o coeficiente de arrasto decresça, e o coeficiente de sustentação e o número de *Strouhal* cresçam, o ponto de separação se translade em relação a parede do cilindro a esteira se torna mais estreita e as amplitudes de oscilação dos coeficientes de arrasto e sustentação diminuem.

Ling & Shih (1999) usaram a técnica híbrida entre o método dos vórtices e diferenças finitas para obter o estado crítico de rotação. Neste estado crítico eles obtiveram também o maior valor da razão sustentação-arrasto, como foi obtido por *Chew et al.*(1995).

Kang, Choi & Lee(1999), através de um método numérico, verificaram que o estado crítico de rotação α_L cresce de forma logarítmica com o número de *Reynolds*.

Stojkovic et al. (2002) analisaram o caso do cilindro girando para um intervalo do número de *Reynolds* $0.01 \leq Re \leq 100$ e a taxa de rotação entre $0 \leq \alpha \leq 6$. A conclusão foi a de que existe uma segunda emissão de vórtice para $\alpha > \alpha_L$, que aparece num intervalo de $4.35 \leq \alpha \leq 5.45$, para $Re=100$. Essa segunda de emissão é

caracterizado por uma frequência muito menor do que a emissão clássica da esteira de *von Kármán*. Os autores batizaram esse fenômeno de segundo modo de emissão de vórtices. Esta foi a primeira documentação rigorosa sobre o cilindro girando que pude observar.

Mittal & Kumar (2003) estudaram detalhadamente a emissão de vórtice em torno de um cilindro girando em escoamento para $Re=200$ e rotação entre $0 < \alpha < 5.0$. Neste momento surge a primeira explicação sobre o fenômeno do segundo modo de emissão de vórtice.

Stojkovic et al. (2003) novamente apresentou o estudo para o cilindro girando com foco no segundo modo de emissão de vórtices para Re mais elevado entre 100 e 200. É analisado o comportamento da segunda emissão de vórtice em relação aos coeficientes de força e a frequência de emissão neste novo intervalo.

Capítulo 3

METODOLOGIA

3.1. Introdução

O Método dos Vórtices Discretos tem sido aplicado a corpos rombudos de diversas geometrias. O contorno do corpo é dividido em vários segmentos discretos (painéis), e uma distribuição de vórtices é calculada para esses painéis. Nesse método, partículas de vorticidade emulam a camada-limite gerada próximo à parede do corpo para assegurar a impermeabilidade e a condição de não-escorregamento.

3.2. Análise inicial

O problema neste trabalho será abordado da seguinte forma:

- Escoamento incompressível;
- Escoamento bidimensional;
- Fluido Newtoniano.

Da equação de conservação de massa:

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \longrightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{u}) = 0$$

como o fluido é incompressível, ou seja:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

teremos:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0$$

A equação de *Navier-Stokes* bidimensional assume a seguinte forma:

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{\omega} = \nu \nabla^2 \vec{\omega}$$

onde:

$\vec{u} \cdot \nabla \vec{\omega}$: taxa de variação devido à convecção do fluido.

$\nu \nabla^2 \vec{\omega}$: taxa de variação devido a difusão molecular da vorticidade.

Em um fluido homogêneo, a vorticidade ω é dada por:

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}$$

A velocidade pode ser escrita como função da linha de corrente da seguinte forma:

$$\vec{u} = \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}, -\frac{\partial\psi}{\partial x} \right)$$

agrupando as duas equações, resulta:

$$\omega = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial\psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} \right)$$

$$\omega = -\nabla^2 \psi$$

que é a equação de *Poisson*.

3.3. Convecção dos vórtices

O Método dos Vórtices Discretos é uma técnica para resolver a equação do transporte de vorticidade:

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \nu \nabla^2 \vec{\omega} \quad (3.1)$$

Utilizada junto com a equação de Poisson para a linha de corrente para descrever o escoamento:

$$\omega = -\nabla^2 \psi \quad (3.2)$$

O Método dos Vórtices Discretos utilizado neste trabalho foi desenvolvido por Sparlat et al. (1983), chamado de “*vortex tracing method*” por Park & Higuchi

(1989). Este método foi desenvolvido com um objetivo de fornecer uma descrição mais natural e eficiente dos turbilhões e da vorticidade que eles carregam. O método representa o campo de vorticidade através da soma de N_v contribuições:

$$\omega(r) = \sum_{i=1}^{N_v} \Gamma_i \gamma(|r - r_i|) \quad (3.3)$$

onde:

$r_i = (x_i, y_i)$: posição do centro do vórtice

Γ_i : circulação do i -ésimo vórtice

γ : função de regularização ou da forma do núcleo.

A principal vantagem, em se tratando de escoamentos externo, é que as regiões maiores irrotacional não precisam de vórtices. Isto economiza muita memória e permite concentrar os vórtices somente na esteira, onde se quer resolução.

Dinamicamente, estes pontos seguem o fluido como partículas numa descrição Lagrangeana do escoamento. Eles retêm suas circulações no tempo, de modo que a vorticidade total é conservada:

$$\frac{d\Gamma_i}{dt} = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{dr_i}{dt} = u(r_i, t) \quad (3.5)$$

As equações acima representam um problema fechado, envolvendo somente as distâncias r_i 's e as intensidade Γ_i 's, uma vez que a velocidade u pode ser calculada a partir de ω . Podemos obter u somente da localização do vórtice, e isto pode ser realizado a partir da equação de Biot-Savart.

Dessa forma a velocidade induzida por um vórtice pontual de circulação Γ , dada por:

$$U_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (3.6)$$

A velocidade induzida na localização coincidente com o centro do vórtice será infinita, o que não é condizente. Para evitar isto, o vórtice de Rankine tem sido amplamente usado no MVD. A velocidade induzida por um vórtice de Rankine é proporcional à r até o tamanho do núcleo σ e será dada pela equação acima para regiões fora do núcleo. Mas existe uma distribuição descontínua de vorticidade e

uma clausula de decisão será necessário no código, o que impede que o código computacional utilize o processamento paralelo. Por isso, Sparlat & Leonard (1981) usaram uma expressão para velocidade relacionada ao vórtice que gera uma distribuição uniforme de vorticidade e requer menos tempo computacional, comparado com o vórtice de Rankine. Essa expressão da velocidade é dada por:

$$U_{\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \frac{r}{r^2 + \sigma^2} \quad (3.7)$$

A função linha de corrente relacionada com a expressão acima é dada por:

$$\psi = -\frac{\Gamma}{4\pi} \text{Log}(r^2 + \sigma^2) \quad (3.8)$$

que é a função de corrente definida para um vórtice pontual.

No procedimento adotado acima, o vórtice discreto não foi mais considerado uma entidade pontual e sim uma partícula de raio σ (“blob vortex”) sobre o painel de modo que o raio do núcleo seja tangente ao painel.

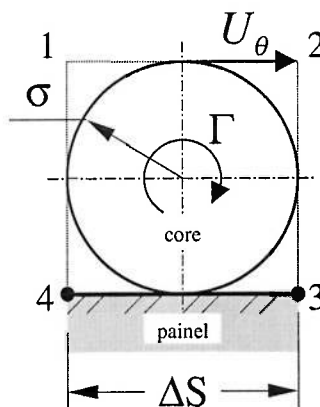


Figura 3-1 - Detalhe do vórtice gerado sobre um painel.

O vórtice sobre o painel induz uma velocidade dada pela seguinte relação:

$$U_{\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi\sigma}$$

$$\Gamma = 2\pi\sigma U_{\theta} \quad (3.9)$$

A circulação no contorno 1-2-3-4 envolto pelo vórtice será:

$$\Gamma = \oint_{1234} U \cdot \vec{n} \, dL$$

$$\Gamma = U_{\theta} \cdot \Delta S \quad (3.10)$$

Igualando (3.9) e (3.10), teremos:

$$\sigma = \frac{\Delta S}{2\pi} \quad (3.11)$$

que é o tamanho do núcleo utilizado por Spalart et al (1983).

Um corpo imerso num escoamento, primeiramente tem seu contorno aproximado em N_w painéis. Cada painel será influenciado pela corrente incidente, pelos vórtices gerados sobre os painéis e pelos vórtices na esteira. Deste modo, podemos escrever a função linha de corrente para cada painel da seguinte forma:

$$\Psi_i = \Psi_{\substack{\text{escoamento} \\ \text{incidente}}} + \Psi_{\substack{\text{vórtices} \\ \text{painéis}}} + \Psi_{\substack{\text{vórtices} \\ \text{esteira}}} \\ \Psi_i = -v_{\infty} x_{ci} + u_{\infty} y_{ci} - \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{N_w} \Gamma_j \text{Log}(r_{j,i}^2 + \sigma_j^2) - \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{N_v} \Gamma_k \text{Log}(r_{k,i}^2 + \sigma_k^2) \quad (3.12)$$

onde:

(u_{∞}, v_{∞}) : componentes da velocidade incidente em relação ao eixo coordenado cartesiano.

(x_{ci}, y_{ci}) : posição do centro do painel i em relação ao eixo coordenado.

Γ : intensidade do vórtice.

r : distância entre um vórtice e o painel i .

σ : tamanho do núcleo do vórtice em estudo.

N_w : número de painéis usado para o contorno discreto.

N_v : número de vórtices na esteira.

e os índices se referem à:

i : painel em estudo.

j : vórtices gerados sobre os painéis.

k : vórtices livres na esteira.

Para satisfazer a condição de impermeabilidade, o contorno do corpo será coincidente com a linha de corrente nula (para corpos fixo no plano de estudo), ou relacionado a linha de corrente relativo ao movimento do corpo. De maneira geral, teremos:

$$\Psi_{i+1} - \Psi_i = u_{\text{corpo}} (y_{ci+1} - y_{ci}) - v_{\text{corpo}} (x_{ci+1} - x_{ci}) \quad (3.13)$$

Substituindo (3.12) em (3.13) teremos:

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{Nw} \Gamma_j \text{Log} \left(\frac{r_{j,i+1}^2 + \sigma_j^2}{r_{j,i}^2 + \sigma_j^2} \right) = -(v_\infty - v_{corpo})(x_{ci+1} - x_{ci}) + (u_\infty - u_{corpo})(y_{ci+1} - y_{ci}) - \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{Nv} \Gamma_k \text{Log} \left(\frac{r_{k,i+1}^2 + \sigma_k^2}{r_{k,i}^2 + \sigma_k^2} \right) \quad (3.14)$$

para o corpo fixo no plano de referência:

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{Nw} \Gamma_j \text{Log} \left(\frac{r_{j,i+1}^2 + \sigma_j^2}{r_{j,i}^2 + \sigma_j^2} \right) = -v_\infty(x_{ci+1} - x_{ci}) + u_\infty(y_{ci+1} - y_{ci}) - \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{Nv} \Gamma_k \text{Log} \left(\frac{r_{k,i+1}^2 + \sigma_k^2}{r_{k,i}^2 + \sigma_k^2} \right) \quad (3.15)$$

Desta forma teremos um sistema linear onde encontraremos a intensidade dos vórtices a serem criados. O sistema tem a seguinte forma:

$$A_{ij} \Gamma_j = b_i \quad (3.16)$$

$$A_{ij} = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{Nw} \text{Log} \left(\frac{r_{j,i+1}^2 + \sigma_j^2}{r_{j,i}^2 + \sigma_j^2} \right) \quad (3.17)$$

$$b_i = -v_\infty(x_{ci+1} - x_{ci}) + u_\infty(y_{ci+1} - y_{ci}) - \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{Nv} \Gamma_k \text{Log} \left(\frac{r_{k,i+1}^2 + \sigma_k^2}{r_{k,i}^2 + \sigma_k^2} \right) \quad (3.18)$$

Apesar do sistema acima estar completo, pelo teorema de Kelvin, teremos de conservar a circulação total do sistema, de modo que:

$$\sum_{j=1}^{Nw} \Gamma_j = - \sum_{k=1}^{Nv} \Gamma_k \quad (3.19)$$

Isto significa que teremos um sistema com n incógnitas e $n+1$ equações. Este sistema pode ser resolvido pelo Método dos Mínimos Quadrados, ou por uma saída mais simples, excluir uma das equações acima.

A convecção dos vórtices é feita levando em conta a influência da velocidade da corrente incidente e a influência de cada vórtice no instante considerado. Assim, a velocidade de cada vórtice pode ser dado por:

$$u_i = u_\infty - \sum_{j=1}^{Nv} \Gamma_j \frac{y_i - y_j}{2\pi(r_{i,j}^2 + \sigma_j^2)} \quad (3.20)$$

$$v_i = v_\infty + \sum_{j=1}^{Nv} \Gamma_j \frac{x_i - x_j}{2\pi(r_{i,j}^2 + \sigma_j^2)} \quad (3.21)$$

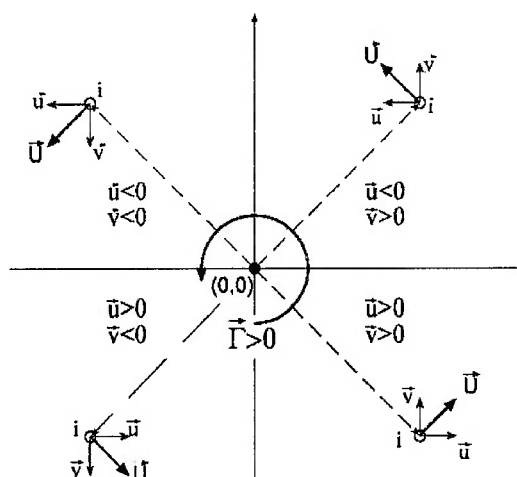


Figura 3-2 - Direções da velocidade induzida por um vórtice em um ponto.

Assim, atualizando a posição dos vórtices para cada iteração através das velocidades acima:

$$x_i^{n+1} = x_i^n + u_i \cdot \Delta t \quad (3.22)$$

$$y_i^{n+1} = y_i^n + v_i \cdot \Delta t \quad (3.23)$$

onde:

- i: índice referente ao vórtice em análise.
- j: índice referente a influencia dos outros vórtices.
- n: valor no instante considerado.
- n+1: valor no próximo instante.
- u_∞, v_∞ : componentes da velocidade da corrente livre.
- Δt : espaço de tempo entre um intervalo de tempo numérico consecutivo.
- Nv: número de vórtices na esteira.

Na convecção dos vórtices, alguns vórtices irão tocar o contorno do corpo, ou seja, irão tocar a parede do corpo e perderão circulação. Estes vórtices irão ser removidos da computação. A soma da intensidade dos vórtices a esteira será igual ao oposto da soma das circulações perdidas, portanto as vorticidades perdidas são recriadas pelo teorema de Kelvin.

3.4. Influência da rotação do cilindro

A representação matemática de um dipolo e um vórtice no mesmo centro com uma corrente fluindo ao redor, tem como representação física um cilindro girando em uma corrente. A condição de não-escorregamento faria com que o fluido em contato com o cilindro se movimentasse tangencialmente com a velocidade periférica do cilindro dado por:

$$V_{\theta} = \frac{\Gamma_{cilindro}}{2\pi R} \quad (3.24)$$

onde:

V_{θ} : velocidade tangencial na periferia do cilindro.
 $\Gamma_{cilindro}$: intensidade da rotação do cilindro.
 R : raio do cilindro.

Neste estudo, abordamos o cilindro girando com uma rotação fixa. A influência no método computacional será a de que o problema apresentará uma circulação inicial não-nula de modo que:

$$\sum \Gamma_i = \Gamma_{cilindro} \quad (3.25)$$

Com isso manteremos a circulação nula no escoamento.

A análise da influência da rotação será feita a partir do adimensional de rotação α , que é a relação entre a velocidade tangencial no cilindro e a velocidade da corrente incidente uniforme.

$$\alpha = \frac{V_{\theta}}{U_{\infty}}$$

$$\alpha = \frac{\Gamma_{cilindro}}{2\pi U_{\infty} R} \quad (3.26)$$

Como a rotação do cilindro está sendo considerada um vórtice fixo, a influência na convecção dos vórtices será da seguinte forma:

$$u_i = u_{\infty} - \sum_{j=1}^{Nv} \Gamma_j \frac{y_i - y_j}{2\pi(r_{i,j}^2 + \sigma_j^2)} - \Gamma_{cilindro} \frac{y_i - y_0}{2\pi r_{i,0}} \quad (3.27)$$

$$v_i = v_{\infty} + \sum_{j=1}^{Nv} \Gamma_j \frac{x_i - x_j}{2\pi(r_{i,j}^2 + \sigma_j^2)} + \Gamma_{cilindro} \frac{x_i - x_0}{2\pi r_{i,0}} \quad (3.28)$$

onde:
 (x_0, y_0) : coordenadas do centro do cilindro.
 $r_{i,0}$: distância entre um vórtice i e o centro do cilindro.

3.5. Difusão dos vórtices

Para a difusão dos vórtices, uma das técnicas desenvolvida por Chorin (1973) é a “*random walk*”, onde movimentos aleatórios nas partículas de vórtices emulam o fenômeno da difusão molecular. Nesta técnica, a nova posição dos vórtices irá receber uma parcela aleatória no movimento angular e radial, influenciado pela viscosidade do meio. De acordo com Lewis(1991), para cada vórtice i , são gerados dois números aleatórios P_i e Q_i entre 0 e 1, de modo que o movimento angular($\Delta\theta$) e radial(Δr) podem ser calculados por:

$$\Delta\theta = 2\pi Q_i \quad (3.29)$$

$$\Delta r = \sqrt{4\pi\nu\Delta t P_i} \quad (3.30)$$

e as atualizações das posições serão dadas por:

$$x_i^{n+1} = x_i^n + u_i \cdot \Delta t + \Delta r_i \cos(\Delta\theta_i) \quad (3.31)$$

$$y_i^{n+1} = y_i^n + v_i \cdot \Delta t + \Delta r_i \sin(\Delta\theta_i) \quad (3.32)$$

Uma outra técnica para simular os efeitos viscosos é a técnica do crescimento do núcleo (“*growing core size*”), proposta por Nagano et al. (1982). Neste método, o tamanho do núcleo do vórtice cresce com o tempo devido a presença da difusão da vorticidade em um fluido viscoso. Greengard (1984) mostrou que essa técnica converge para uma solução errada das equações de Navier-Stokes. Porém a técnica de “*growing core size*” foi aplicado por Park & Higuchi (1989) com o tamanho inicial do núcleo dos vórtices igual ao tamanho do núcleo fixo utilizado por Spalart & Leonard (1981). Os valores dos coeficientes de arrasto obtido por esse processo numérico ficaram próximos aos obtidos experimentalmente por Bearman & Trueman (1972).

Aplicando a equação de transporte da vorticidade para um vórtice de intensidade Γ , mas somente considerando o termo difusivo da equação, teremos que a variação da vorticidade será:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \nabla^2 \omega \quad (3.33)$$

E podemos considerar como condição de contorno no tempo inicial:

$$\omega(r,0) = \begin{cases} 0 & \longrightarrow r > 0 \\ \Gamma & \longrightarrow r = 0 \end{cases}$$

A vorticidade pode ser formulada da seguinte forma:

$$\omega(r,t) = \frac{\Gamma}{2\pi\nu t} g(\eta) \quad (3.34)$$

Onde η é um adimensional definido pelo espaço, viscosidade e tempo:

$$\eta = \frac{r}{\sqrt{\nu t}} \quad (3.35)$$

Substituindo (3.34) em (3.33), teremos uma equação diferencial ordinária do tipo:

$$g'' + \left(\frac{1}{\eta} + \frac{\eta}{2} \right) g' + g = 0$$

cuja solução é da forma:

$$\omega(r,t) = \kappa \frac{\Gamma}{2\pi\nu t} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} \quad (3.36)$$

onde κ é uma constante.

Para encontrarmos o valor da constante k , iremos considerar o mesmo contorno da figura (3.1):

$$\Gamma = \int \omega \cdot n \, dA$$

$$\Gamma = \int_0^{\infty} \omega(r,t) 2\pi r \, dr$$

e com as condições iniciais, teremos que $k = 1/2$. Portanto a solução é:

$$\omega = \frac{\Gamma}{4\pi\nu t} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}$$

Sabendo que a vorticidade pode ser definida através da velocidade:

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}$$

$$\omega = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rU_{\theta})$$

desse modo teremos a velocidade em função da difusão:

$$U_{\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi\nu t} \left(1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\right) \quad (3.37)$$

Apesar da equação (3.37) levar em conta o movimento do vórtice convectivo e difusivo, computacionalmente este caminho é mais demorada pelo fato de possuir uma função exponencial. Neste método de simulação viscosa, a velocidade induzida é calculada pela equação (3.7), com o núcleo do vórtice crescendo pela difusão da vorticidade, o tamanho do núcleo σ é substituído por um novo tamanho a cada passo de tempo (“*time-step*”).

A taxa de crescimento do núcleo pode ser calculada da seguinte forma. A velocidade induzida pela equação (3.27) e (3.28) terá seu valor máximo quando $r = \sigma$:

$$\sigma = 2.224\sqrt{\nu t} \quad (3.38)$$

Isto mostra que o crescimento do núcleo do vórtice é função da raiz quadrada de t , a idade do vórtice e de ν , viscosidade cinemática do fluido. Reescrevendo, teremos:

$$(\sigma^{n+1})^2 = (\sigma^n)^2 + 5.0266\nu\Delta t \quad (3.39)$$

onde σ^{n+1} é o tamanho do núcleo do vórtice na iteração atual e σ^n é o tamanho do núcleo do vórtice na iteração anterior.

3.6. Amalgamação

Neste processo computacional, a cada iteração são criados N_w vórtices, relativo ao número de painéis. Devido ao uso da lei de *Biot-Savart* implicar em $N\nu^2$ operações para o cálculo das velocidades, é desejável limitar o número de vórtices. Uma solução possível para esse problema seria a amalgamação de vórtices que estão longe do corpo. (SALTARA ET AL,2003)

Apesar do número significativo de vórtices, esse conjunto é numeroso, mas individualmente são fracos. O adotamos neste trabalho o método de Sparlat et al.

(1983) para amalgamação dos vórtices. Dado dois vórtices i e j , eles serão amalgamados quando o parâmetro V_0 dado pela equação (3.40) a seguir, é pequena comparada com a velocidade da corrente incidente U_∞ :

$$\frac{|\Gamma_1 \Gamma_2|}{|\Gamma_1 + \Gamma_2|} \frac{r_{i,j}^2}{(d_0 + d_{i,k})^{1.5} (d_0 + d_{j,k})^{1.5}} = V_0 \quad (3.40)$$

onde:

$r_{i,j}$: distância entre o par de vórtices.

$d_{i,k}, d_{j,k}$: distância dos vórtices i, j ao painel mais próximo k .

d_0 : parâmetro de comprimento.

V_0 : parâmetro de velocidade.

Pela equação (3.40), a primeira parte depende somente das circulações envolvidas. Para que a condição de amalgamação seja satisfeita, é desencorajado a fusão de dois vórtices de circulação alta, ou de vórtices com circulação opostas. Já o segundo fator depende somente de posições. Os vórtices preferenciais para serem amalgamados serão aqueles cuja distância relativa entre seu par é menor e que estejam distantes do corpo. (SPARLAT ET AL. 1983)

Outro detalhe é que o núcleo do vórtice deve ser amalgamado pelo princípio da conservação do momento da quantidade de movimento. Portanto, as equações utilizadas para amalgamar os vórtices, satisfeita a estimativa (3.40) são: (Park & Higuchi, 1989).

$$x = \frac{x_1 \Gamma_1 + x_2 \Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \quad (3.41a)$$

$$y = \frac{y_1 \Gamma_1 + y_2 \Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \quad (3.41b)$$

$$\sigma = \frac{\sigma_1 \Gamma_1 + \sigma_2 \Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \quad (3.41c)$$

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 \quad (3.42)$$

onde:

$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$: posição dos vórtices a serem amalgamados.

σ_1, σ_2 : tamanho do núcleo dos vórtices.

Γ_1, Γ_2 : intensidade dos vórtices a serem amalgamados.

(x, y) : coordenada do novo vórtice.

σ : tamanho do núcleo do novo vórtice.

Γ : intensidade do novo vórtice.

É importante observar que como as equações (3.41 a,b,c) depende de (3.42), ou seja, a soma das circulações deve ser a ultima etapa do processo.

3.7. Forças atuando no corpo

Uma das formas de se detectar a emissão de vórtices é pela forma que as resultantes do campo de forças atua no corpo. A emissão alternada de vórtices na parte superior e inferior do cilindro resulta numa oscilação no valor das forças de sustentação e arrasto. Podemos obter essas forças a partir da equação de Navier-Stokes, que relaciona a variação de velocidade com a distribuição de pressão.

Escrevendo a equação de Navier-Stokes em coordenadas normais e tangenciais à superfície do corpo teremos:

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} + u_s \frac{\partial u_s}{\partial s} + u_n \frac{\partial u_s}{\partial n} = \nu \frac{\partial^2 u_s}{\partial s^2} + \nu \frac{\partial^2 u_s}{\partial n^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \quad (3.43)$$

Mas como o cilindro gira com velocidade constante:

$$\frac{Du_s}{Dt} = \frac{\partial u_s}{\partial t} + u_s \frac{\partial u_s}{\partial s} + u_n \frac{\partial u_s}{\partial n} = a_s = 0$$

teremos que:

$$\nu \frac{\partial^2 u_s}{\partial s^2} + \nu \frac{\partial^2 u_s}{\partial n^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} = 0 \quad (3.44)$$

Isolando o termo de gradiente de pressão:

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \rho \nu \left(\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial u_s}{\partial n} \right) \quad (3.45)$$

Pela equação da continuidade, podemos concluir que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{\partial u_n}{\partial n} &= 0 \\ \frac{\partial u_s}{\partial s} &= -\frac{\partial u_n}{\partial n} \end{aligned} \quad (3.46)$$

onde, substituindo a equação (3.46) em (3.45):

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial s} &= \rho v \left(-\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial u_n}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial u_s}{\partial n} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial s} &= \rho v \left(\frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial u_s}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial u_n}{\partial s} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial s} &= \rho v \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial u_s}{\partial n} - \frac{\partial u_n}{\partial s} \right)\end{aligned}\quad (3.47)$$

Podemos reescrever a equação (3.47) com os seguintes termos:

$$\mu = \rho v \quad \omega = \nabla \times \vec{u} = \frac{\partial u_n}{\partial s} - \frac{\partial u_s}{\partial n}$$

portanto teremos que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial s} &= -\mu \frac{\partial \omega}{\partial n} \\ dp &= -\mu \frac{\partial \omega}{\partial n} ds\end{aligned}\quad (3.48)$$

A equação do transporte de vorticidade em coordenadas normais e tangenciais ao painel, é dado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \omega}{\partial t} + v_s \frac{\partial \omega}{\partial s} + v_n \frac{\partial \omega}{\partial n} &= v \cdot \nabla \cdot (\nabla \omega) \\ v_s \frac{\partial \omega}{\partial s} + v_n \frac{\partial \omega}{\partial n} &\approx 0 \\ \int_V \frac{\partial \omega}{\partial t} dV &= v \int_V \nabla \cdot (\nabla \omega) dV \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} V &= v \int_V \nabla \omega \cdot \vec{n} dS\end{aligned}\quad (3.49)$$

A equação (3.49) escrita de maneira aproximada, teria a seguinte forma:

$$\frac{\Gamma_{criado}}{\Delta t} = -v \frac{\partial \omega}{\partial n_{parede}} \Delta S \quad (3.50)$$

e a equação (3.48):

$$\Delta p = -\mu \frac{\partial \omega}{\partial n} \Delta s$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial n} = -\frac{\Delta p}{\mu \Delta s} \quad (3.51)$$

Substituindo (3.51) em (3.50), teremos:

$$\frac{\Gamma_{criado}}{\Delta t} = \frac{\Delta p}{\rho}$$

$$\Delta p = \rho \frac{\Gamma_{criado}}{\Delta t} \quad (3.52)$$

Para um painel qualquer, teremos os dois extremos cuja pressão em cada ponto será p_0 e p_1 . Pela equação (3.52) teremos a variação de pressão sobre esse painel. Portanto, a partir de uma pressão de referência, teremos a distribuição de pressão ao longo do perímetro aproximado do cilindro:

$$p_1 = p_0 + \rho \frac{\Gamma_{criado}}{\Delta t} \quad (3.53)$$

No processo de convecção dos vórtices, existem vórtices que invadirão o cilindro e portanto serão eliminados. Esses vórtices eliminados atuam como vórtices que perdem sua própria circulação quando encontram com a parede do corpo. Essa vorticidade perdida irá se somar a vorticidade criada no painel que o vórtice encontrou, ou seja:

$$p_1 = p_0 + \rho \frac{\Gamma_{criado} - \Gamma_{perdido}}{\Delta t} \quad (3.54)$$

A força que atua em cada painel é dada pela seguinte forma:

$$\vec{F} = -\int_s p \vec{n} dS \quad (3.55)$$

A configuração de cada painel está esquematizada na figura (3.3):

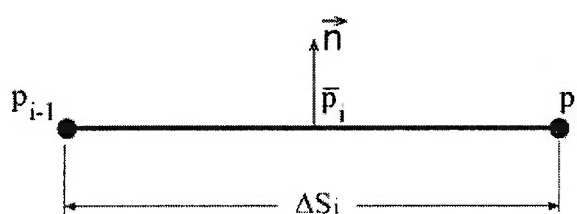


Figura 3-3- Distribuição de pressão no painel.

Então, numericamente, a equação (3.55) é dada da seguinte forma:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N_w} \bar{p}_i \vec{n} \Delta S_i \quad (3.56)$$

onde:

\vec{F} : força atuando no painel.

\bar{p}_i : pressão média.

\vec{n} : direção normal ao painel.

ΔS_i : tamanho do painel.

A pressão média será dada por:

$$\bar{p} = \frac{p_{i-1} + p_i}{2}$$

O MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS

3.8. Introdução

As equações que regem o escoamento de um fluido representam expressões matemáticas das leis da conservação da física:

- A massa do fluido é conservada.
- A taxa de variação da quantidade de movimento é igual a soma das forças atuando na partícula fluida. (segunda lei de Newton)
- A taxa de variação de energia é igual à soma da taxa adicional de calor e a taxa de trabalho realizada na partícula. (Primeira lei da termodinâmica)

A equação de conservação geral do transporte pode ser escrita de duas formas: conservativa ou não-conservativa. Apesar da forma diferente entre elas, elas são as mesmas equações. Isto fez com que muitos autores não dessem tanta importância sobre a forma adotada. A partir de 1980, essa diferença começou a ser discutida. O rótulo das equações como conservativo ou não-conservativo cresceu com a fluido-dinâmica moderna.

Em sua forma geral, a equação de conservação geral do transporte, de forma conservativa, é dada pela seguinte expressão:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \nabla \cdot (\rho\phi\vec{u}) = \nabla \cdot (\Gamma_d \nabla \phi) + S_\phi \quad (3.60)$$

onde:

- ρ : densidade
 \vec{u} : velocidade
 ϕ : propriedade transportada
 Γ_d : coeficiente de difusividade

Essa expressão é interpretada da seguinte forma:

Taxa de variação de ϕ (Termo transiente)	+	Taxa de convecção de ϕ do volume de controle	=	Taxa de variação de ϕ devido a difusão	+	Varição de ϕ devido a presença de fontes
--	---	---	---	--	---	---

Com essa equação conseguimos representar as equações da continuidade, da conservação da quantidade de movimento e a equação de conservação da energia. Isso se torna muito conveniente em termos numéricos e de programação computacional, pois as equações de conservação são expressas através da mesma expressão de forma genérica, dependendo da propriedade ϕ transportada. (ANDERSON, 1995)

Equação de conservação	ϕ	Γ_d	$S\phi$
Massa global	1	0	0
Quantidade de movimento em x	u	μ	$B_x + \frac{\partial}{\partial x}(\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{V}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu \frac{\partial v}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial z}(\mu \frac{\partial w}{\partial x}) - \frac{\partial P}{\partial x}$
Quantidade de movimento em y	v	μ	$B_y + \frac{\partial}{\partial y}(\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{V}) + \frac{\partial}{\partial x}(\mu \frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\mu \frac{\partial w}{\partial y}) - \frac{\partial P}{\partial y}$
Quantidade de movimento em z	w	μ	$B_z + \frac{\partial}{\partial z}(\mu \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{V}) + \frac{\partial}{\partial x}(\mu \frac{\partial u}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu \frac{\partial v}{\partial z}) - \frac{\partial P}{\partial z}$
Energia	T	K/c_p	$\frac{1}{c_p} \frac{DP}{Dt} + \frac{\mu}{c_p} \Phi$
Massa de um componente	C	ρD	0

Φ : termo de dissipação viscosa.

Tabela 3-1 – Valores de ϕ , Γ_d e $S\phi$. (MALISKA, 2004)

3.9. O Método dos Volumes Finitos

O método dos volumes finitos (MVF) é um método tradicional para solução numérica de equações diferenciais. Neste método as equações aproximadas são obtidas através de balanços de conservação no volume elementar. A observação do

caráter físico de cada termo da equação diferencial permitiu que métodos mais robustos fossem desenvolvidos. Em escoamentos de fluidos, é muito importante satisfazer os princípios de conservação em nível discreto, característica dos MVF, pois o que se busca com um método numérico é a solução da equação diferencial, que é a representação da conservação da propriedade em um nível de ponto. Dessa forma, não existe a possibilidade da existência de gerações/sumidouros de quantidades, como massa, quantidade de movimento e energia, no interior do domínio de cálculo. Por outro lado, se a conservação das propriedades é satisfeita apenas via condições de contorno, podem existir gerações/sumidouros das propriedades de origem numérica dentro do domínio, o que modificará o perfil da solução na região.

Como foi dito anteriormente, o método dos volumes finitos satisfaz a conservação da propriedade ϕ em nível de volumes elementares. Existem duas maneiras de se obter as equações aproximadas no método dos volumes finitos. A primeira é a realização de balanços da propriedade em questão nos volumes elementares, ou volumes finitos. A segunda é a integração sobre o volume elementar, no espaço e no tempo, das equações de conservação na forma conservativa. Ambos os processos são equivalentes. Portanto, realizar a integração de forma conservativa da equação diferencial ou fazer balanço são procedimentos equivalentes. Realizando a integração para todos os volumes elementares, obtemos uma equação algébrica para cada volume e , portanto, o sistema de equações algébricas procuradas. A preferência em se obter as equações aproximadas integrando a equação diferencial vem do fato de que nem todos os balanços são fáceis de deduzir. (MALISKA, 2004)

Para se resolver a equação diferencial num certo domínio, o método dos volumes finitos consiste de três etapas fundamentais. Primeiro, devemos dividir o domínio a estudar em volumes de controle ou células (geração de malha). O segundo passo é a integração das equações governantes sobre o volume de controle de forma a se obter uma equação aproximada para cada volume finito do domínio. O conjunto das equações aproximadas distribuídas no domínio resulta num sistema de equações.

Então o último passo é resolver esse sistema de modo a obter a distribuição da propriedade ϕ nos pontos nodais do domínio. (VERSTEEG & MALALASEKERA, 1995)

3.10. Equações Aproximadas

O ponto de partida para os cálculos computacionais do método dos volumes finitos é a equação de conservação da propriedade ϕ na forma conservativa. Vamos considerar um regime permanente, ou seja, sem considerar o termo transiente da equação:

$$\nabla \cdot (\rho \phi \vec{u}) = \nabla \cdot (\Gamma_d \nabla \phi) + S_\phi$$

Integrando no volume de controle:

$$\int_{V_c} \nabla \cdot (\rho \phi \vec{u}) \cdot dV = \int_{V_c} \nabla \cdot (\Gamma_d \nabla \phi) \cdot dV + \int_{V_c} S_\phi dV$$

Utilizando o teorema do divergente teremos:

$$\oint (\rho \phi \vec{u}) \cdot d\vec{A} = \oint (\Gamma_{d\phi} \nabla \phi) \cdot d\vec{A} + \int_{V_c} S_\phi dV \quad (3.61)$$

Em seguida iremos aplicar esta equação para cada volume de controle, ou célula, no domínio computacional. De forma numérica, obtemos:

$$\sum_f^{N_{\text{faces}}} (\rho_f \vec{u}_f \phi_f) \cdot \vec{A}_f = \sum_f^{N_{\text{faces}}} \Gamma_{d\phi} (\nabla \phi)_n \cdot \vec{A}_f + S_\phi V \quad (3.62)$$

onde:

N_{faces} :	é o número de faces de cada célula
ϕ_f :	valor da propriedade ϕ convectada através da face f
$\rho_f \vec{u}_f \cdot \vec{A}_f$:	fluxo de massa através da face f
\vec{A}_f :	área da face f
$(\nabla \phi)_n$:	magnitude de $\nabla \phi$ normal a face f
V :	volume da célula

Esta equação é aplicada na malha. Mas para o cálculo, precisamos interpolar os valores das propriedades nas faces de cada célula. Existem vários esquemas para realizar essa interpolação. O esquema de diferenças centrais é usado na interpolação da difusão de ϕ , pois a difusão ocorre igualmente em todas as direções. Quando utilizado na convecção, este esquema não leva em conta a direção do escoamento. Nessa deficiência, surgiu o esquema “upwind”. Neste esquema, o valor de ϕ_f é

tomado na célula a montante, relativa à direção normal da velocidade do escoamento. A deficiência nesse caso ocorre quando a direção do escoamento não está alinhada as linhas da malha. (VERSTEEG & MALALASEKERA, 1995)

Aqui precisaremos definir um adimensional que indica a relação entre a difusão e a convecção na face de cada célula. Este adimensional é o número de Reynolds da célula, ou se estivermos resolvendo a equação da energia, será o número de Peclet da célula:

$$Pe = \frac{Fcv}{Dif}$$

$$Fcv = \rho u$$

$$Dif = \frac{\Gamma_{d\phi}}{\delta x}$$

$$Pe = \frac{\rho u}{\Gamma_{d\phi} / \delta x}$$

onde:

Fcv: fluxo de massa convectivo

Dif: condutância difusiva

δx : tamanho da face

$\Gamma_{d\phi}$: coeficiente de difusividade da propriedade ϕ

No caso de uma difusão pura ($Pe=0$), o fluido está estagnado e o contorno de ϕ constante serão círculos concêntricos no centro da célula, uma vez que o processo de difusão tende a espalhar ϕ igualmente em todas as direções. A célula é influenciada pelas condições a montante e a jusante. Quando o número de Peclet aumenta, a forma circular do contorno muda para elíptica e alonga na direção do escoamento. As informações caminham mais na direção do escoamento. No caso da convecção pura ($Pe \rightarrow \infty$) o contorno elíptico é completamente alongado na direção do escoamento. Todas as informações emanam da fonte a montante e são imediatamente transportadas para a célula à jusante. (VERSTEEG & MALALASEKERA, 1995)

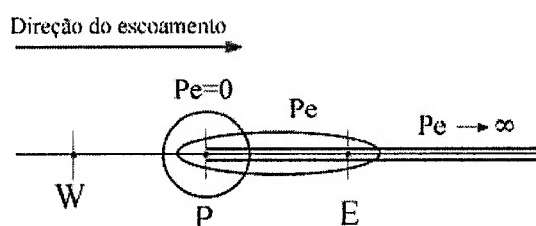


Figura 3-4 – Distribuição de f nas proximidades de uma fonte para diferentes Pe . (VERSTEEG & MALALASEKERA, 1995)

O esquema de interpolação exponencial interpola o valor de ϕ usando a solução exata unidimensional da equação de convecção-difusão:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u \phi) = \frac{\partial}{\partial x} \Gamma_d \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

onde Γ_d e ρu são constantes no intervalo δx . A equação acima pode ser integrada para se obter a seguinte solução de como ϕ varia com x :

$$\frac{\phi(x) - \phi_0}{\phi_L - \phi_0} = \frac{\exp(Pe \frac{x}{L}) - 1}{\exp(Pe) - 1} \quad (3.63)$$

onde:

$$\phi_0: \quad \phi |_{x=0}$$

$$\phi_L: \quad \phi |_{x=L}$$

A variação de $\phi(x)$ é mostrada na figura (3.5) entre $x=0$ e $x=L$ e para alguns valores do número de Peclet. Esta figura nos mostra que para valores alto de Pe , o valor de ϕ em $x=L/2$ é aproximadamente igual ao valor a jusante. Isto implica que quando o escoamento é dominado pela convecção, a interpolação pode ser realizada de forma que os valores da propriedade na face seja igual ao valor do nó a jusante ou “upwind”. Quando $Pe=0$, podemos interpolar ϕ usando uma média aritmética entre os valores em $x=0$ e $x=L$. Quando o número de Pe for intermediário, deveremos utilizar a expressão (3.63). (FLUENT 6.1 USER’S GUIDE, 2003)

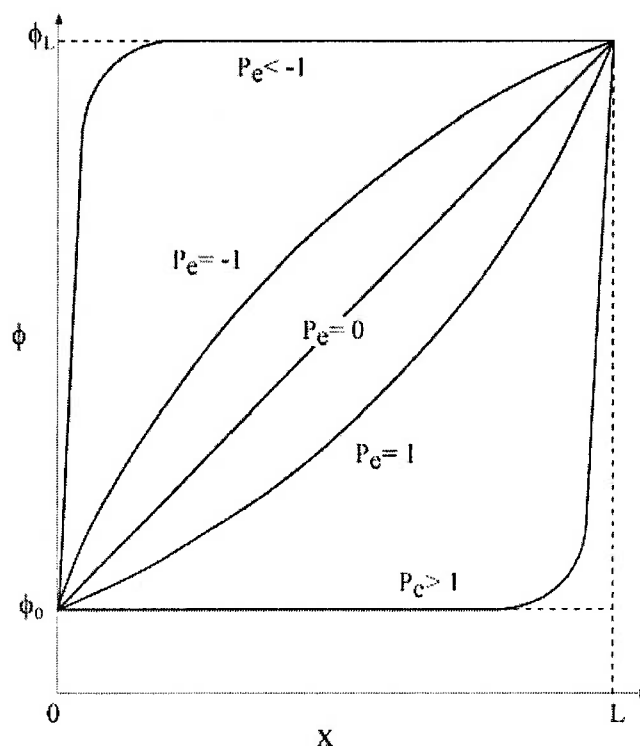


Figura 3-5 – Variação de f entre $x=0$ e $x=L$ (FLUENT 6.1 USER'S GUIDE, 2003)

Quando se deseja uma precisão de segunda ordem nas faces da célula, podemos utilizar uma expansão em série de Taylor ao redor do centróide da célula. Este esquema é o “upwind” de segunda ordem, onde o valor de ϕ_f é calculado da seguinte forma:

$$\phi_f = \phi - \nabla \phi \cdot \Delta \vec{s} \quad (3.64)$$

Onde:

ϕ_f : valor de f na célula centrada a jusante

$\nabla \phi$: gradiente da célula centrada a jusante

$\Delta \vec{s}$: vetor deslocamento do centróide da célula a jusante no centróide da face

Esta fórmula necessita do valor do gradiente de ϕ em cada célula. Este gradiente é calculado utilizando o teorema do divergente, que escrito na forma numérica, resulta em:

$$\nabla \phi = \frac{1}{V} \sum_f^{N_{\text{faces}}} \tilde{\phi}_f \vec{A} \quad (3.65)$$

Aqui, os valores de ϕ são computados pela média de ϕ de duas células adjacentes a face. Esse gradiente é limitado de modo que não produza máximos ou mínimos. (FLUENT 6.1 USER'S GUIDE, 2003)

Um outro esquema de interpolação é o esquema “*QUICK*” (*Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics*) (LEONARD, 1979 apud MALISKA, 2004). Neste esquema são utilizados 3 pontos com ênfase nos pontos a montante para uma interpolação quadrática por face de cada célula. O valor de ϕ_f é obtida por uma função quadrática passando através de 2 nós (um de cada nó ao lado da face) e mais um nó a jusante. (VERSTEEG & MALALASEKERA, 1995)

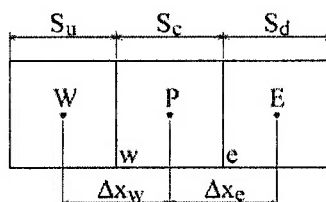


Figura 3-6 - Controle de volume unidimensional (Fluent 6.1 User's Guide, 2003)

Tomando a figura (3.6) como exemplo, para um escoamento no sentido da direita para esquerda, para a face ‘e’ podemos interpolar que:

$$\phi_e = \theta \left(\frac{S_d}{S_c + S_d} \phi_P + \frac{S_c}{S_c + S_d} \phi_E \right) + (1 - \theta) \left(\frac{S_u + 2S_c}{S_u + S_c} \phi_P - \frac{S_c}{S_u + S_c} \phi_W \right) \quad (3.66)$$

Nesta equação, quando $\theta=1$ temos interpolação central de segunda ordem, enquanto que em $\theta=0$ teremos um *upwind* de segunda ordem. Tradicionalmente, o esquema *QUICK* é obtido quando $\theta=1/8$. (FLUENT 6.1 USER'S GUIDE, 2003)

3.11. Equações Aproximadas na Forma Linear

A equação (3.62) contém a variável ϕ incógnita no centro da célula assim como as células vizinhas, portanto, a forma dessa equação é não-linear em relação a essas variáveis. Uma forma linear da equação (3.62) pode ser escrita da seguinte forma:

$$a_p \phi = \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b \quad (3.67)$$

onde os índices 'nb' se referem às células vizinhas e 'a_p' e 'a_{nb}' são os coeficientes lineares de 'φ' e 'φ_{nb}'. Esta equação escrita para cada célula na malha forma um sistema de equações algébricas, cuja matriz dos coeficientes é uma matriz esparsa. Na solução desta matriz, podemos utilizar um método de sobre-relaxação para controlar a variação de φ durante o processo iterativo. De forma simplificada, o novo valor de φ_{new} de uma célula irá depender do seu valor na iteração anterior, φ_{old}, a diferença entre os valores novo e anterior, e de um coeficiente de sobre-relaxação, α, como segue abaixo (FLUENT 6.1 USER'S GUIDE, 2003) :

$$\begin{aligned} \phi_{new} &= (1 - \alpha_r) \phi_{old} + \alpha_r \phi_{new} \\ \phi_{new} &= \phi_{old} + \alpha_r (\phi_{new} - \phi_{old}) \end{aligned} \quad (3.68)$$

3.12. Acoplamento Pressão-Velocidade

Neste tópico, serão apresentados algoritmos para a obtenção da solução o campo de pressão e velocidade. A grande dificuldade aqui acontece na solução da equação de Navier-Stokes. Composta pela equação da continuidade e pelas equações da quantidade de movimento, aparece aqui quantidades não-lineares nas equações da quantidade do movimento e a variável velocidade aparece em todas as equações de forma que as equações estão intrinsecamente ligadas. A pressão irá desempenhar um papel crucial através da equação da continuidade, mesmo que não esteja explícito a sua influencia nesta equação.

Para um escoamento laminar bidimensional, as equações governantes são:

Quantidade de movimento em x:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho u v) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + S_u \quad (3.69)$$

Quantidade de movimento em y:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v v) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{\partial p}{\partial y} + S_v \quad (3.70)$$

Equação da continuidade:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (3.71)$$

Se o gradiente de pressão fosse conhecido, então o passo seguinte seria obter as equações aproximadas das velocidades e resolver o sistema de equações. Geralmente não é isso que ocorre. Se estivermos calculando um escoamento compressível, a equação da continuidade será usada como equação do transporte da densidade e em adição às equações apresentadas, teríamos a equação do transporte de energia para a temperatura e a pressão seria obtida através da equação do estado onde a pressão é função da densidade e temperatura: $p=p(\rho, T)$. Contudo, se o escoamento for incompressível, a densidade é constante e não estará ligada a pressão. Neste caso, a ligação entre velocidade e pressão é um obstáculo no processo de obtenção da solução do escoamento. Se o campo de pressão correto for aplicado as equações da quantidade do movimento, o campo de velocidade resultante deve satisfazer a equação da continuidade.

A estratégia aplicada neste tópico é um algoritmo desenvolvido por Patankar & Spalding (1972). Neste algoritmo, o fluxo convectivo por unidade de massa que atravessa as faces de uma célula é calculada a partir de uma tentativa inicial dos componentes de velocidade. O campo de pressão também parte de uma tentativa e é usado para resolver as equações da quantidade de movimento. A partir da equação da continuidade é desenvolvida uma equação para a correção do campo de pressão, que por sua vez é usado para corrigir o campo de velocidade e de pressão. O processo é iterado até a convergência do campo de pressão e velocidade.

Um outro papel importante é o arranjo das variáveis na malha. Os variáveis escalares são calculados nos pontos nodais como visto até agora, mas as componentes da velocidade estarão em células com arranjo desencontrado com a face das células centrada no ponto nodal. Portanto, o nó onde se encontra a pressão

irá coincidir com a face dos volumes de controle das velocidades. A grande vantagem deste arranjo desencontrado é que isto evita o resultado não físico da aproximação da equação da quantidade de movimento para oscilações espacial de pressão. Uma outra vantagem deste método, é que a velocidade encontrada estará na localização exata requerida para o calculo do transporte escalar (convecção-difusão), portanto não iremos precisar interpolar o campo de velocidade para obter a velocidade nas faces das células.

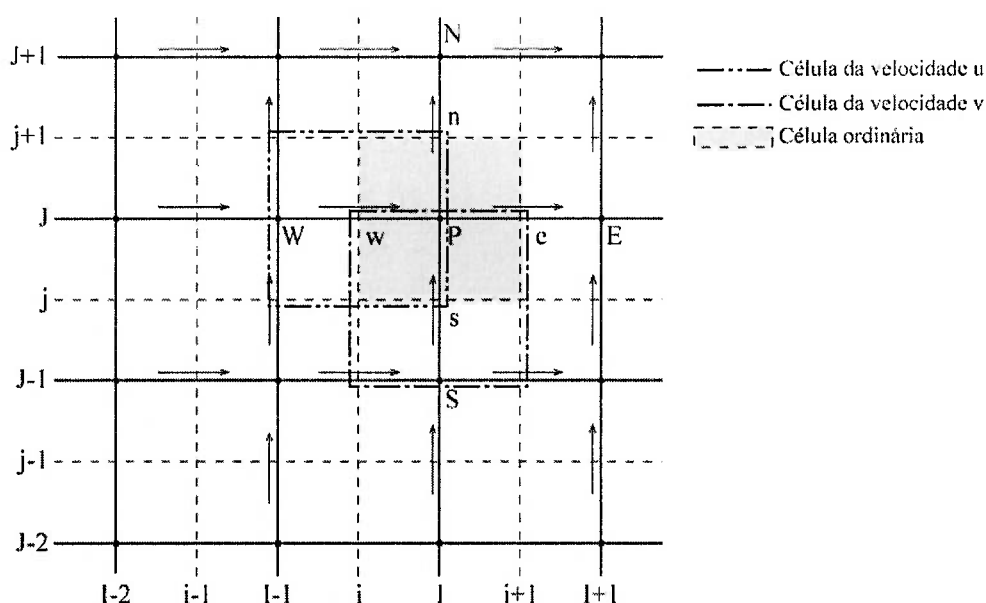


Figura 3-7 – Malha com arranjo desencontrado. (VERSTEEG & MALALASEKERA, 1995)

Utilizando a notação da figura (3.7) podemos escrever as equações da quantidade de movimento na direção x da seguinte forma:

$$a_{i,j}u_{i,j} = \sum a_{nb}u_{nb} - \frac{p_{I,J} - p_{I-1,J}}{\delta x_u} \Delta V_u + \bar{S} \Delta V_u$$

$$a_{i,j}u_{i,j} = \sum a_{nb}u_{nb} - (p_{I,J} - p_{I-1,J})A_{i,j} + b_{i,j} \quad (3.72)$$

Onde ΔV_u é o volume da célula da velocidade u , $b_{i,j} = \bar{S} \Delta V_u$ é o termo fonte da quantidade de movimento e $A_{i,j}$ é a área da face da célula da velocidade u . O termo fonte gradiente de pressão foi aproximado por meio de uma interpolação linear dos nós no contorno da célula u . Os coeficientes $a_{i,j}$ e a_{nb} são funções dos coeficientes convectivos (Fcv) e difusivos (Dif). Aplicado as faces w, e, n, s do volume de controle

das velocidades, esses coeficientes terão componentes da velocidade. Essas velocidades escalares serão resultados da iteração anterior, mas caso seja a primeira iteração serão os valores da tentativa inicial. Deve estar claro que as velocidades explícitas nas equações (3.72) são diferentes das velocidades introduzidas nos coeficientes $a_{i,j}$ e a_{nb} , pois as velocidades explícitas serão as velocidade que iremos calcular numa presente iteração. Mas para se obter o campo de velocidades, precisaremos do campo de pressão.

3.13. Algoritmos Computacionais

O algoritmo *SIMPLE* (*Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations*) originalmente desenvolvido por Patankar & Spalding(1972) é essencialmente um algoritmo de tentativa e correção para o cálculo da pressão na malha de arranjo desencontrado. Para iniciar este algoritmo, entramos com um campo de pressão p^* , e outras variáveis, que serão a primeira tentativa de se aproximar na solução do escoamento. As equações aproximadas da quantidade de movimento será resolvida com os valores de p^* , resultando num campo de velocidade:

$$a_{i,j}u_{i,j}^* = \sum a_{nb}u_{nb}^* - (p_{i,j}^* - p_{i-1,j}^*)A_{i,j} + b_{i,j} \quad (3.73)$$

Entre os valores da tentativa u^* ou p^* e o valor correto desta mesma variável, existe um valor de correção, tal que:

$$u = u^* + u' \quad (3.74)$$

$$p = p^* + p' \quad (3.75)$$

E a equação aproximada da quantidade de movimento escrita em termos da correção das variáveis, será:

$$a_{i,j}u'_{i,j} = \sum a_{nb}u'_{nb} - (p'_{i,j} - p'_{i-1,j})A_{i,j} \quad (3.76)$$

Este ponto é a essência do algoritmo *SIMPLE*. Aqui será feita uma simplificação, desprezando $\sum a_{nb}u'_{nb}$, de modo que:

$$u'_{i,j} = d_{i,j}(p'_{i-1,j} - p'_{i,j}) \quad (3.77)$$

$$d_{i,j} = \frac{A_{i,j}}{a_{i,j}}$$

Esta manipulação é feita em todas as faces da célula ordinária. Até o momento, utilizamos somente a equação da quantidade de movimento. A partir de agora podemos usar a equação da continuidade. A expressão para a aproximação da equação da continuidade aplicada nas faces da célula ordinária é:

$$((\rho u A)_{i+1,j} - (\rho u A)_{i,j}) + ((\rho v A)_{i,j+1} - (\rho v A)_{i,j}) = 0 \quad (3.78)$$

Substituindo os termos das velocidades correspondentes na equação (3.78), teremos:

$$a_{i,j} p'_{i,j} = a_{i+1,j} p'_{i+1,j} + a_{i-1,j} p'_{i-1,j} + a_{i,j+1} p'_{i,j+1} + a_{i,j-1} p'_{i,j-1} + b'_{i,j} \quad (3.79)$$

onde:

$$a_{i,j} = a_{i+1,j} + a_{i-1,j} + a_{i,j+1} + a_{i,j-1}$$

$$a_{i+1,j} = (\rho dA)_{i+1,j}$$

$$a_{i-1,j} = (\rho dA)_{i,j}$$

$$a_{i,j+1} = (\rho dA)_{i,j+1}$$

$$a_{i,j-1} = (\rho dA)_{i,j}$$

$$b'_{i,j} = (\rho u^* A)_{i,j} - (\rho u^* A)_{i+1,j} + (\rho v^* A)_{i,j} - (\rho v^* A)_{i,j+1}$$

A equação (3.79) representa a aproximação da equação para correção da pressão p' . Obtendo o valor de correção de pressão, podemos corrigir os valores de pressão através da equação (3.75) e os valores de velocidades pela equação (3.77) até que atinjam a convergência. Neste processo computacional, a equação de correção de pressão está sujeito a divergir do resultado, portanto, é utilizado um processo de sobre-relaxação nas correções dos valores das pressões e das velocidades. A correção é feita da seguinte forma:

$$p^{novo} = p^* + \alpha_{r,p} p' \quad (3.80)$$

$$u^{novo} = \alpha_{r,u} u + (1 - \alpha_{r,u}) u^{(n-1)} \quad (3.81)$$

onde:

α_r : fatores de sobre-relaxação

p^{novo} : valor da pressão corrigida com o fator de sobre-relaxação

u^{novo} : valor da velocidade corrigida

$u^{(n-1)}$: valor da velocidade na iteração anterior

Lembrando que aqui foi ilustrado o valor da velocidade somente na direção x . O mesmo procedimento deve ser tomado nas outras direções do problema. (VERSTEEG & MALALASEKERA, 1995)

O algoritmo *SIMPLER* (*SIMPLE Revised*) de Patankar (1980) é uma versão melhorada do *SIMPLE*. Neste algoritmo, a equação aproximada da continuidade é utilizada para obter uma equação aproximada para a pressão, e não uma equação de correção. A equação da quantidade de movimento é arranjado da seguinte forma:

$$u_{i,j} = \frac{\sum a_{nb} u_{nb} + b_{i,j}}{a_{i,j}} + \frac{A_{i,j}}{a_{i,j}} (p_{I-1,j} - p_{I,j}) \quad (3.82)$$

Neste ponto, denominamos pseudo-velocidades a seguinte expressão:

$$\hat{u}_{i,j} = \frac{\sum a_{nb} u_{nb} + b_{i,j}}{a_{i,j}} \quad (3.83)$$

Utilizando o mesmo artifício para as velocidades nas outras faces da célula e substituindo esses termos na equação aproximada da continuidade:

$$a_{I,j} p_{I,j} = a_{I+1,j} p_{I+1,j} + a_{I-1,j} p_{I-1,j} + a_{I,j+1} p_{I,j+1} + a_{I,j-1} p_{I,j-1} + b_{I,j} \quad (3.84)$$

onde:

$$a_{I,j} = a_{I+1,j} + a_{I-1,j} + a_{I,j+1} + a_{I,j-1}$$

$$a_{I+1,j} = (\rho dA)_{i+1,j}$$

$$a_{I-1,j} = (\rho dA)_{i,j}$$

$$a_{I,j+1} = (\rho dA)_{I,j+1}$$

$$a_{I,j-1} = (\rho dA)_{I,j}$$

$$b_{I,j} = (\rho \hat{u}A)_{i,j} - (\rho \hat{u}A)_{i+1,j} + (\rho \hat{v}A)_{I,j} - (\rho \hat{v}A)_{I,j+1}$$

Aqui neste algoritmo, o termo fonte é calculado em função das pseudo-velocidades. A seguir, usaremos a equação aproximada da quantidade de movimento para calcular as velocidades u^* e v^* e para se encontrar os valores de pressões corrigidas e velocidades corrigidas. (VERSTEEG & MALALASEKERA, 1995)

O algoritmo *SIMPLEC* (*SIMPLE Consistent*) segue os mesmos passos do *SIMPLE*, distinguindo deste na maneira que é manipulada a equação da quantidade de movimento para obter as equações para correção das velocidades.

$$u'_{i,j} = d_{i,j} (p'_{l-1,j} - p'_{l,j}) \quad (3.85)$$

onde:

$$d_{i,j} = \frac{A_{i,j}}{a_{i,j} - \sum a_{nb}}$$

Feito isso para as outras direções, a seqüência de operações é a mesma do algoritmo *SIMPLE*. (VERSTEEG & MALALASEKERA, 1995)

Um outro algoritmo também conhecido é o *PISO* (*Pressure Implicit with Splitting of Operators*). Neste algoritmo, as etapas essenciais são uma tentativa e duas correções por iteração, se assemelhando ao *SIMPLE*, mas com um passo a mais de correção. (VERSTEEG & MALALASEKERA, 1995)

Capítulo 4

RESULTADOS E DISCUSSÕES

MÉTODO DOS VÓRTICES DISCRETOS

4.1. Introdução

Na primeira parte desta exposição, será mostrada a distribuição de velocidade em torno do cilindro, inicialmente com o cilindro parado e em seguida o cilindro girando cuja velocidade tangencial adimensional será α , onde α é dado por:

$$\alpha = \frac{V_{\theta}}{U_{\infty}}$$

onde:

- α : relação adimensional de velocidade.
- V_{θ} : velocidade tangencial na parede do cilindro
- U_{∞} : velocidade da corrente incidente.

Em seguida serão expostos séries temporais dos coeficientes de arrasto e de sustentação. Essas séries tem como objetivo captar informações sobre a emissão de vórtices.

4.2. Resultados iniciais

As simulações a seguir se referem ao escoamento em torno de um cilindro, cujas fronteiras externas estão localizados no infinito. As grandezas foram tomadas adimensionalmente. A velocidade do escoamento incidente é 1. O raio do cilindro é 1 e o número de Reynolds é de 600. O cilindro é fixo.

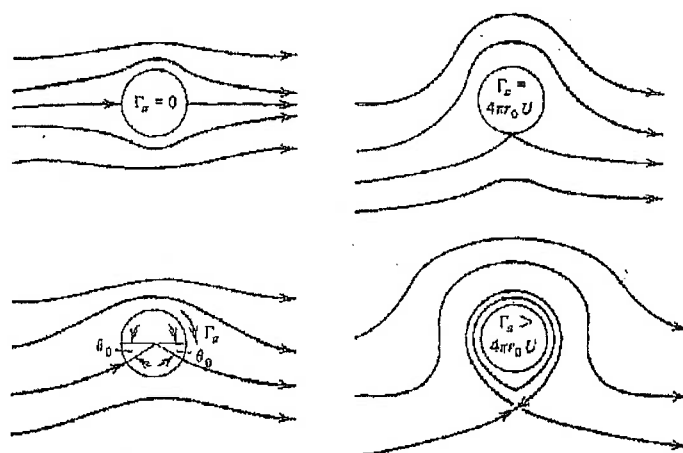


Figura 4-1 – Ilustração dos pontos de estagnação no escoamento ao redor de um cilindro girando. (PANTON, 1996)

A seguir será mostrada a distribuição de velocidade em torno do cilindro no primeiro *time-step*. O objetivo é comparar a distribuição de velocidade em torno do cilindro obtida pelo processo numérico e analítico.

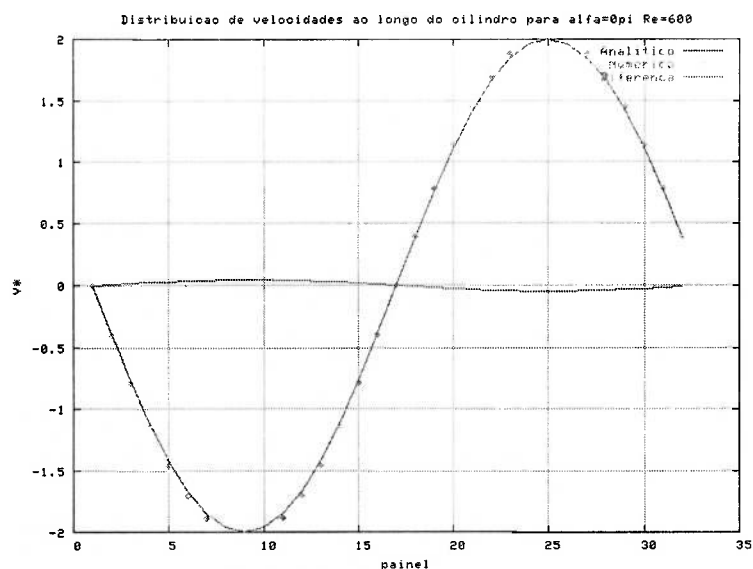


Figura 4-2 – Distribuição de velocidade em torno do cilindro no primeiro *time-step* e $\alpha=0$.

Nesta primeira comparação observamos que os 2 pontos de estagnação do escoamento estão localizados na parte posterior e traseira do cilindro de acordo com a literatura.

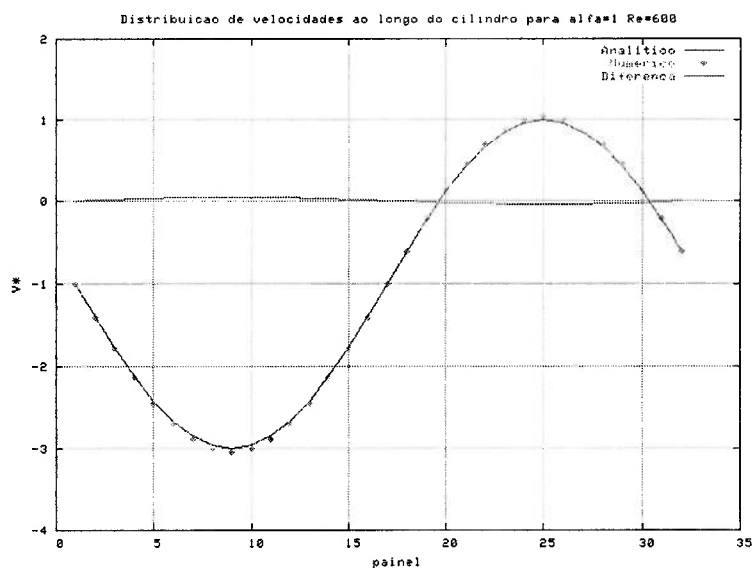


Figura 4-3 – Distribuição de velocidade em torno do cilindro no primeiro *time-step* e $\alpha=1$.

Neste segundo gráfico, o cilindro adquiriu uma rotação de modo que a velocidade tangencial adimensional é de $\alpha=1$. Os 2 pontos de estagnação agora estão localizados na parte inferior do cilindro em quadrantes separados.

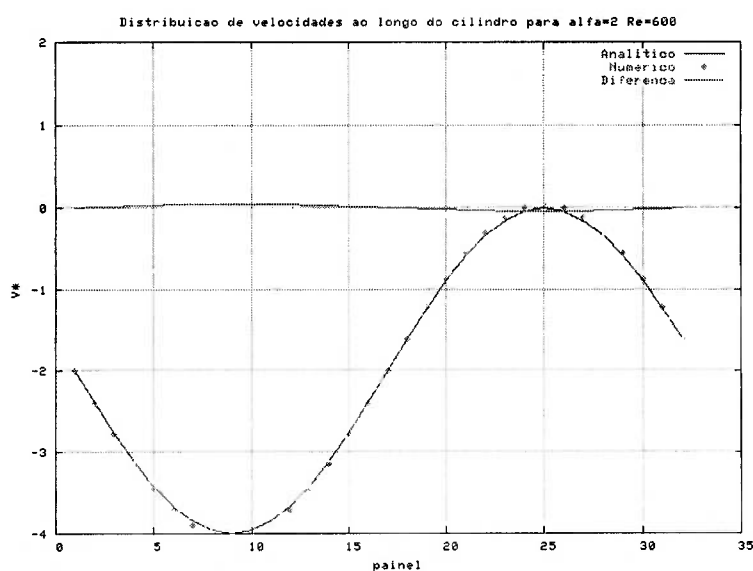


Figura 4-4 – Distribuição de velocidade em torno do cilindro no primeiro *time-step* e $\alpha=2$.

Na Figura 4-4 os dois pontos de estagnação coincidem num mesmo ponto na parte inferior do cilindro.

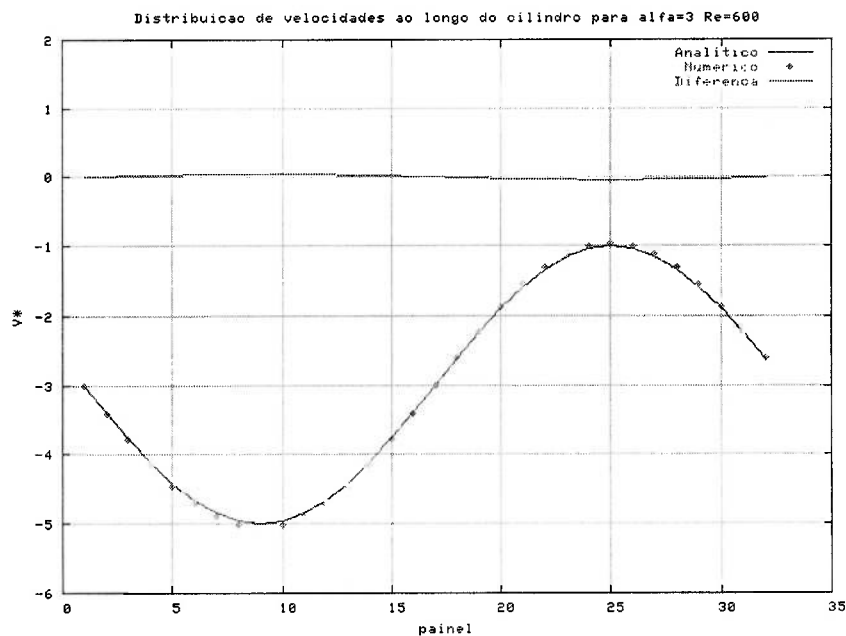


Figura 4-5 – Distribuição de velocidade em torno do cilindro no primeiro time-step e $\alpha=3$.

Nesta ultima comparação, obtivemos o ponto de estagnação localizado fora do cilindro como esperado.

Ilustraremos agora o comportamento dos coeficientes de arrasto e sustentação.

Este mecanismo também define melhor a esteira de von Kármán, onde os vórtices tomam forma a uma distância do corpo e é destruído ao longo do escoamento. O parâmetro de comprimento adotado na presente simulação foi: $D_0=5\%D$ e o de velocidade foi: $V_0=10^{-4} U_\infty$, onde D é o diâmetro do cilindro.

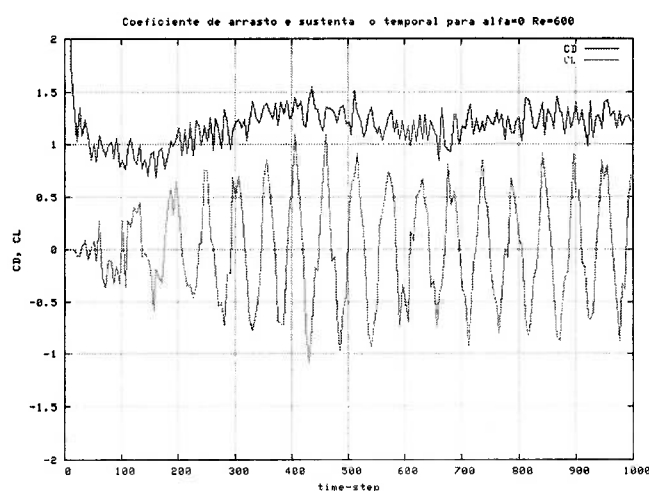


Figura 4-6 – Coeficiente de arrasto (CD) e de sustentação (CL) para $\alpha=0$.

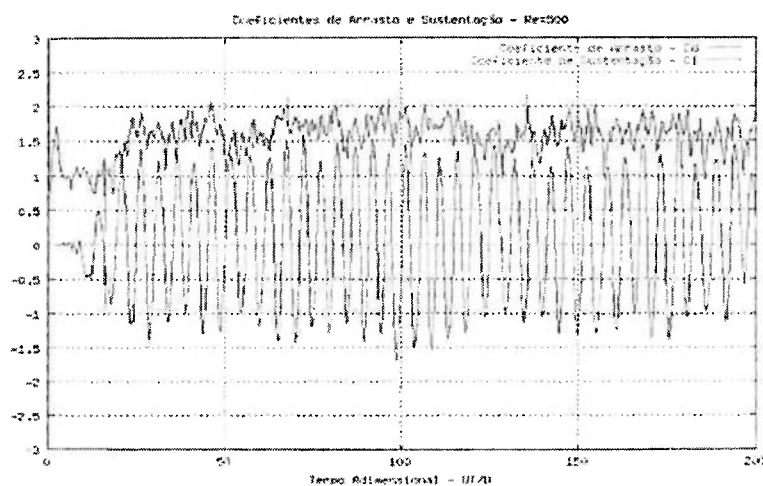


Figura 4-8 – Coeficientes de Arrasto e de Sustentação – $Re=500$.

Figura 4-7 – Coeficiente de arrasto (CD) e de sustentação (CL). (YAMAMOTO, 2002)

Neste primeiro gráfico do coeficiente de arrasto (C_D) e sustentação (C_L), podemos observar o comportamento oscilatório das forças atuantes no cilindro. O coeficiente de arrasto médio é 1,2 e o de sustentação é 0, oscilando com amplitude entre 1 e -1 . Foi comparado com o gráfico de Yamamoto (2002).

Agora será ilustrado o histórico de C_D e C_L quando influenciado pela rotação do cilindro. O número de Reynolds utilizado foi de 10^4 .

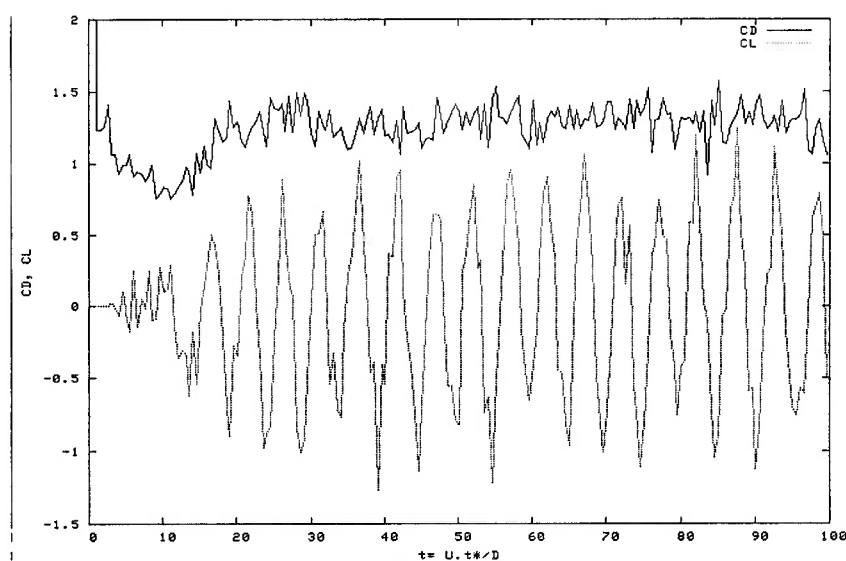


Figura 4-8 – Coeficiente de arrasto (C_D) e de sustentação (C_L) para $\alpha=0.0$.

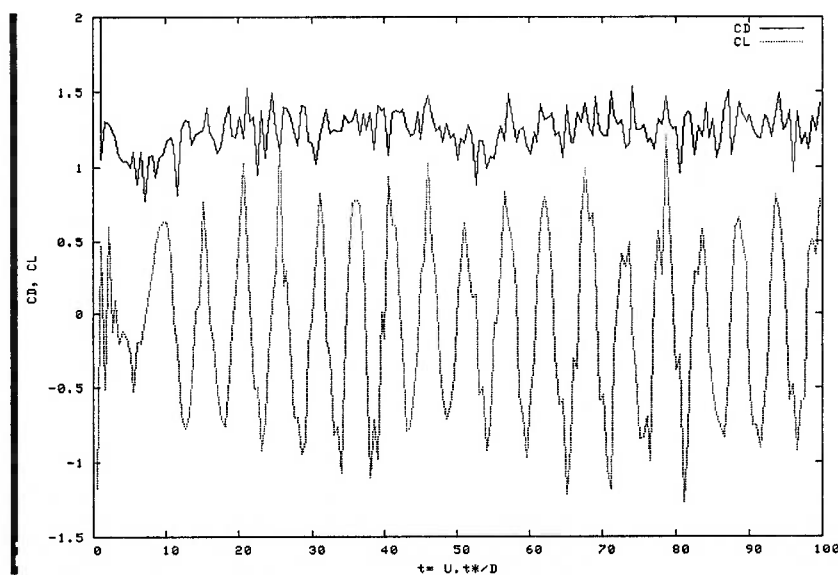


Figura 4-9 – Coeficiente de arrasto (C_D) e de sustentação (C_L) para $\alpha=0.192$.

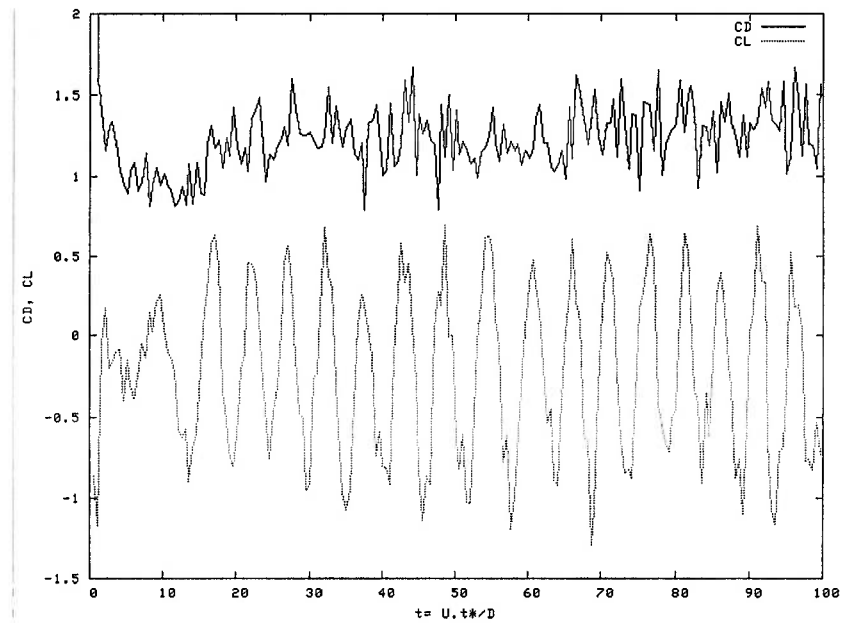


Figura 4-10 – Coeficiente de arrasto (C_D) e de sustentação (C_L) para $\alpha=0.384$.

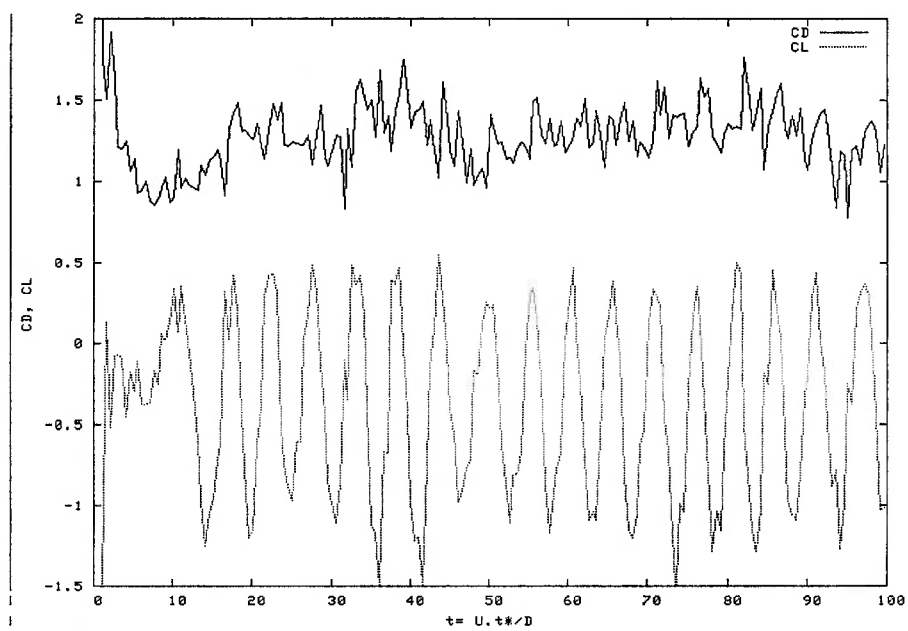


Figura 4-11 – Coeficiente de arrasto (C_D) e de sustentação (C_L) para $\alpha=0.576$.

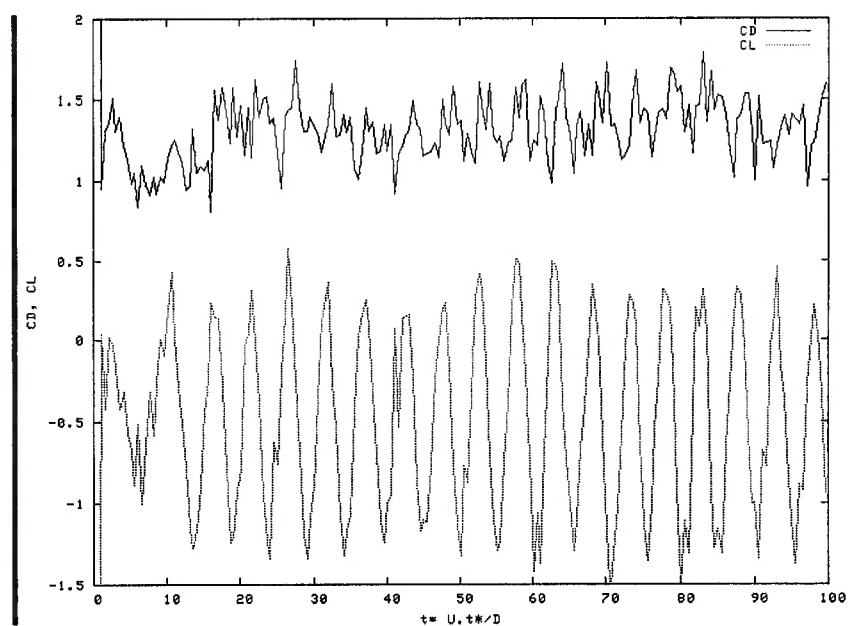


Figura 4-12 – Coeficiente de arrasto (C_D) e de sustentação (C_L) para $\alpha=0.672$.

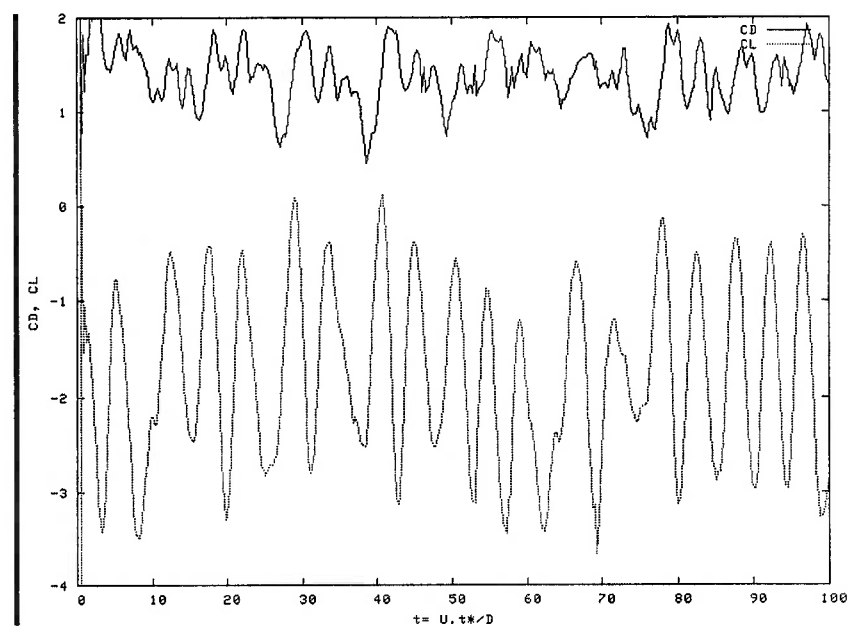


Figura 4-13 – Coeficiente de arrasto (C_D) e de sustentação (C_L) para $\alpha=1.606$.

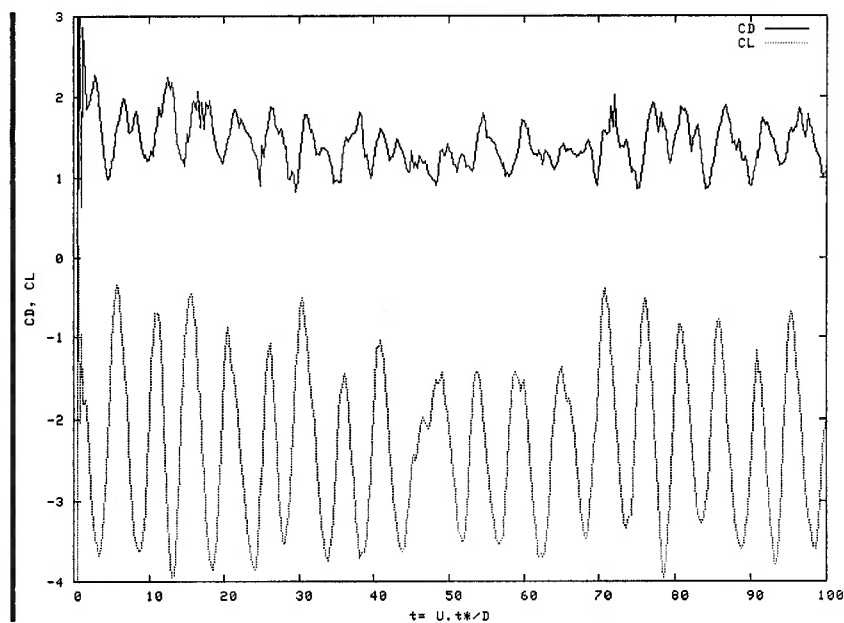


Figura 4-14 – Coeficiente de arrasto (C_D) e de sustentação (C_L) para $\alpha=1.890$.

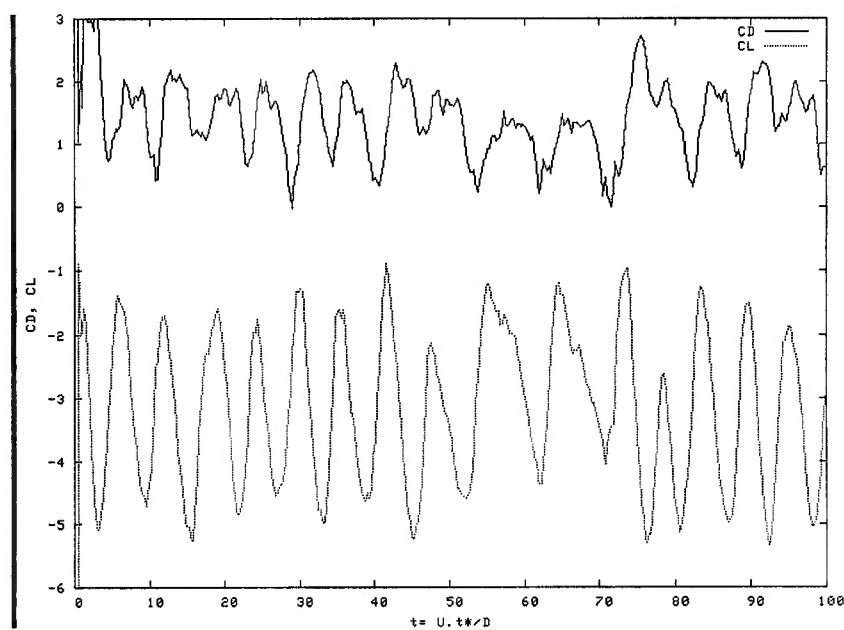


Figura 4-15 – Coeficiente de arrasto (C_D) e de sustentação (C_L) para $\alpha=2.336$.

Aqui temos que $\alpha > 2,0$ para $Re = 10000$. Neste ponto o comportamento oscilatório desaparece e não temos mais a esteira de von Kármán.

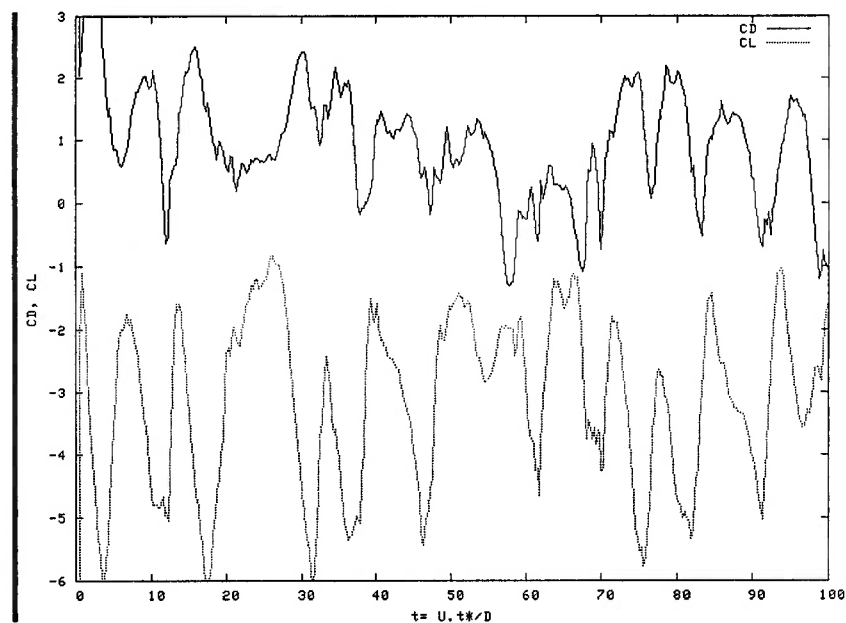


Figura 4-16 – Coeficiente de arrasto (C_D) e de sustentação (C_L) para $\alpha = 2.629$.

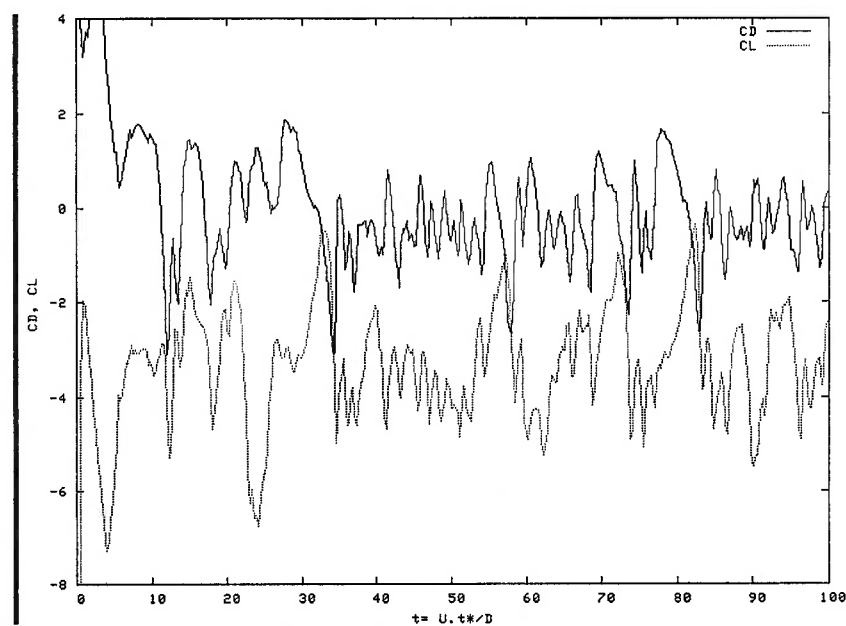


Figura 4-17 – Coeficiente de arrasto (C_D) e de sustentação (C_L) para $\alpha = 2.921$.

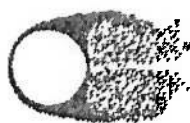
A partir deste gráficos acompanhamos o comportamento oscilatório do cilindro para $0 \leq \alpha < 2$ quando após isso as forças atuantes no cilindro começam a se desordenar, indicando que a esteira de von Kármán poderá estar deixando de existir.

Re = 10000		
α	C_D médio	C_L médio
0.000	1.2833	0.0035
0.192	1.2585	-0.0724
0.384	1.2665	-0.2433
0.576	1.3051	-0.4232
0.672	1.3361	-0.4702
1.606	1.3753	-1.7510
1.890	1.3755	-2.3722
2.336	1.3601	-3.1494
2.629	0.7780	-3.0059
2.921	-0.2334	-3.2553

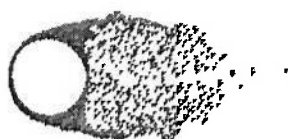
Tabela 4-1 - Coeficientes de força médio de arrasto e sustentação obtido pelo MVD para $Re=10000$.

Pelo método dos vórtices não foi possível capturar um segundo modo de emissão de vórtice quando a rotação do cilindro está no intervalo $4.0 < \alpha < 5.0$. O método dos vórtices é uma ferramenta computacional muito simples e que fornece bons resultados, mas cuja precisão é prejudicada pelo processo de amalgamação de vórtices. Melhorias na precisão são possíveis quando métodos de soma rápida para a lei de Biot-Savart são utilizados (“Fast Multipole Methods”, por exemplo). No entanto, tais métodos são muito complicados, eliminando as vantagens naturais de simplicidade e fácil programação do método dos vórtices discretos. Foi por isso que, com intuito de melhorar a qualidade das simulações e tentar capturar o segundo modo de emissão de vórtices, optamos por prosseguir as simulações com um método Euleriano como o método dos volumes finitos.

Numero de Vortices : 2283



Numero de Vortices : 2475



Numero de Vortices : 2506



Numero de Vortices : 2750

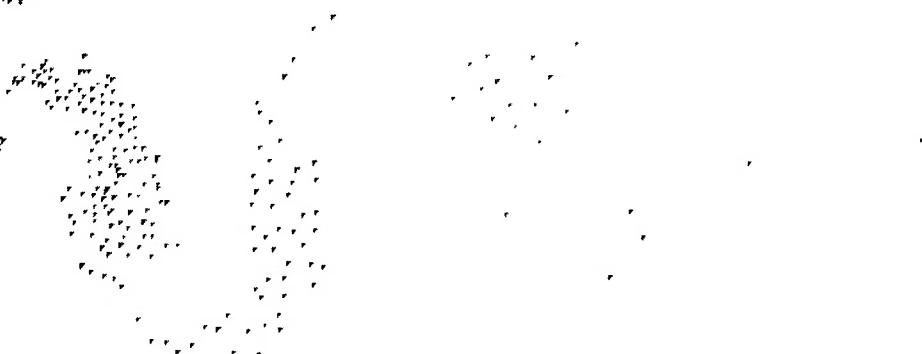


Figura 4-18 – Vários estágios de emissão de vórtices num cilindro estacionado. Cilindro aproximado com 128 painéis.

MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS

4.3. Fluent 6.1

Apresentaremos agora os resultados das simulações ao redor de um cilindro girando, gerados pelo software Fluent 6.1. Os números de Reynolds adotado foram 100, 160 e 200, para posterior comparação com dados da literatura. A velocidade de rotação do cilindro varia de $0 < \alpha < 5.5$.

Os principais fatores característicos dessas simulações são: malha, tamanho do time-step, método de interpolação, acoplamento velocidade-pressão e o tamanho do resíduo. A malha tem a dimensão de 100x100, ao redor de um cilindro de diâmetro 1. Volumes quadrilaterais ao adjacente ao cilindro formando um domínio circular de diâmetro 100, e volumes triangulares para completar a região circunscrita num quadrado. Numero total de volumes: 56516 volumes. Um aspecto muito importante na criação da malha é a qualidade da malha. Podemos ter malhas bem refinadas, mas isso não significa que teremos um resultado preciso. Se os volumes não tiverem uma qualidade boa, podemos ter um erro nos resultados devido a falsa difusão viscosa. A melhor malha obtida para essa simulação tem as seguintes características:

Valor da Qualidade	Porcentagem de elementos inclusos
Aspect-ratio (Q_{AR})	
$1.00 < Q_{AR} < 1.08$	100 %
$1.00 < Q_{AR} < 1.05$	84.34%
Razão de arestas(Q_{ER})	
$1.00 < Q_{ER} < 1.10$	100%
$1.00 < Q_{ER} < 1.05$	53.54%
Distorção do elemento(Q_{EAS})	
$0.00 < Q_{EAS} < 0.077$	100.00%
$0.00 < Q_{EAS} < 0.076$	0.00%

Equisize skew	
$0.00 < Q_{EVS} < 0.077$	100.00%
$0.00 < Q_{EVS} < 0.076$	0.00%

Tabela 4-2 Valores da qualidade da malha utilizada.

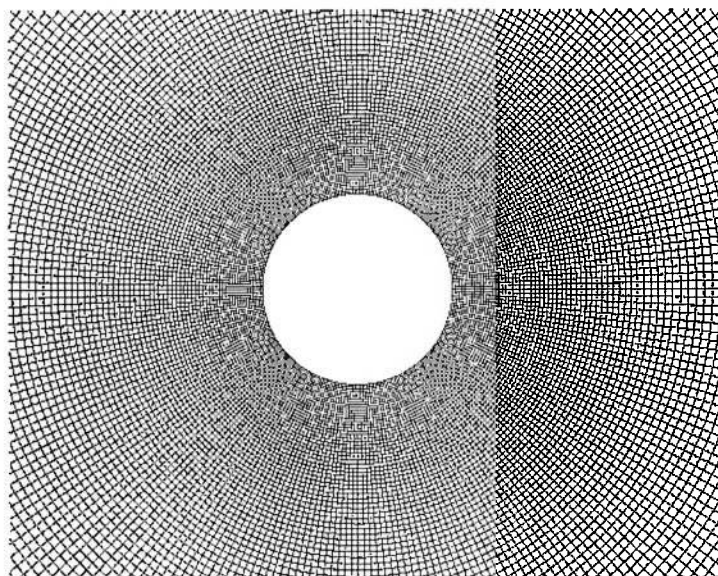


Figura 4-19 - Malha utilizada no programa FLUENT.

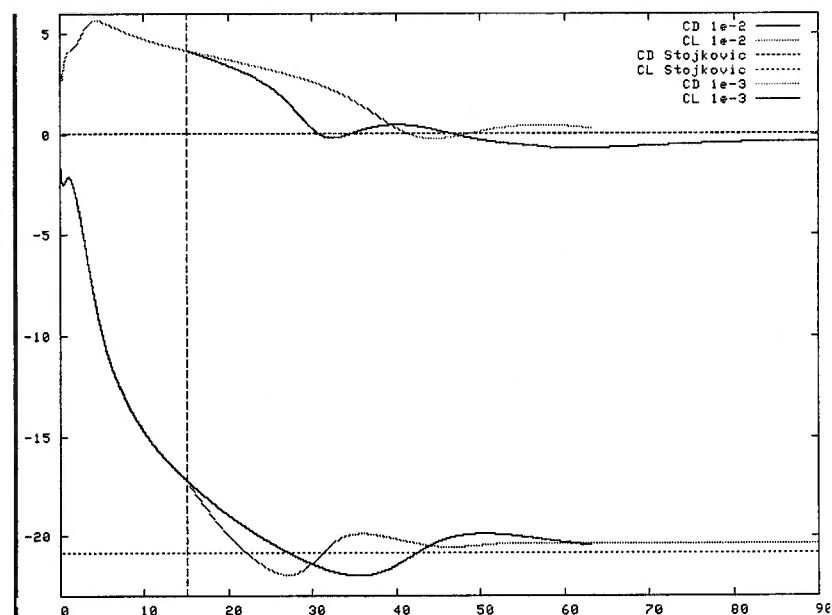


Figura 4-20 - Coeficientes de força para $Re=100$, no cilindro girando com $\alpha=4.4$. Comparação entre dois tamanhos de time-step: $1e-2$ e $1e-3$, e comparação com dados da literatura.

Na escolha do tamanho do time-step, apresentamos dois resultados sobrepostos da série temporal para a simulação ao redor do cilindro com $Re=100$ e valor de rotação adimensional de $\alpha = 4.4$. Comparamos dois resultados de simulação para dois tamanhos de time-step diferentes: $10^{-2}s$ e $10^{-3}s$. Colocamos também o valor médio dos coeficientes de força que foram obtidos por Stojkovic et al. (2002 e 2003) . Apesar do intervalo de $10^{-3}s$ ser escolhido para a simulação de $Re=100$, esse tamanho foi abandonado para $Re=200$, onde foi adotado o intervalo de tempo proposto por Mittal & Kumar (2003) de 0.025s. A justificativa está no fato de que para um bom resultado, o resíduo da solução do sistema das equações de Navier-Stokes foi de 10^{-5} , o que aumenta o número de interações necessárias para se resolver o sistema e sabendo que o segundo modo de emissão de vórtice tem um número de Strouhal muito baixo, o que é inversamente proporcional ao tempo computacional necessário, chegamos a conclusão de que precisaríamos de um tempo muito longo pra poder realizar essas simulações.

Como foram utilizados elementos quadrilaterais, o método de interpolação QUICK é o mais recomendado. Para a solução das equações de Navier-Stokes, adotamos o método SIMPLEC para acoplar as variáveis de pressão e velocidade.

Iremos começar a exposição dos resultados pela ilustração do comportamento da série temporal da força de arrasto (CD) e sustentação (CL) atuando no cilindro fixo, num escoamento de $Re = 100$.

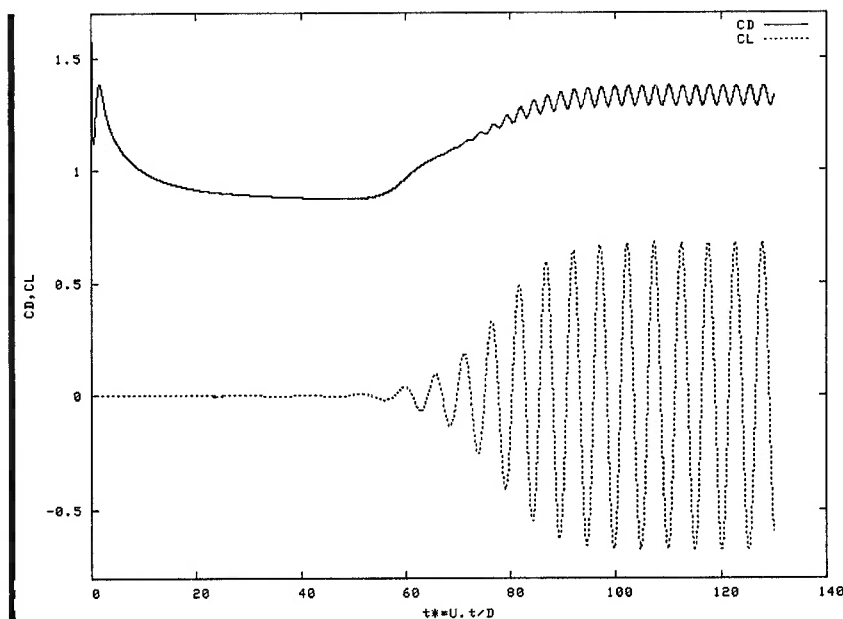


Figura 4-21 - Coeficiente de arrasto (C_D) e sustentação (C_L) para o cilindro fixo ($\alpha=0$) e $Re=200$.

Na Figura 4-21, temos a série temporal dos coeficientes de força para o caso do cilindro fixo sem rotação. Neste caso a média da força de sustentação é aproximadamente 0. Existe vários autores que publicaram trabalhos para o cilindro fixo, que podemos utilizar para comparar os resultados, como mostra a Tabela 4-3:

Re = 100			Re = 200		
Autor	$\overline{C_D}$	Str	Autor	$\overline{C_D}$	Str
Presente trabalho	1,38	0,169	Presente trabalho	1,33	0,195
Stojkovic et al.(2002)	1,34	0,165	Mittal & Kumar	1,316	0,193
Jabardo (2003)	1,36	0,167	Jabardo (2003)	1,36	0,198
Meneghini et al. (2001)	1,37	0,165	Meneghini et al. (2001)	1,30	0,196
Flaschart (2001)	1,39	0,162	Saltara (1999)	1,25	0,190
Saltara (1999)	1,33	0,160	Meneghini (1993)	1,25	0,196
Meneghini (1993)	1,33	0,160	Williamson (1991)		0,196
Williamson (1991)		0,16	Roshko (1954)		0,17-0,19
Roshko (1954)		0,16-0,17			

Tabela 4-3 – Coeficientes de arrasto médio e número de Strouhal obtidos na literatura.

A seguir iremos aumentar a velocidade de rotação do cilindro. Ilustraremos os resultados para α igual à 1,8, 1,9, 2,0 e 2,2. Podemos notar as seguintes mudanças:

de acordo com o aumento na velocidade de rotação do cilindro, a força de sustentação também vai aumentando, como previsto devido ao efeito Magnus. Isso decorre da distribuição assimétrica de velocidade em torno do cilindro causado pela rotação. Um outro detalhe importante é quando a rotação α se aproxima de 2.0. Iremos verificar que a oscilação diminui gradativamente até que se torna desprezível. Este é o ponto onde não ocorre mais a emissão de vórtices, onde temos o que Countanceau & Ménéard (1985) denominaram de rotação limite (α_L).

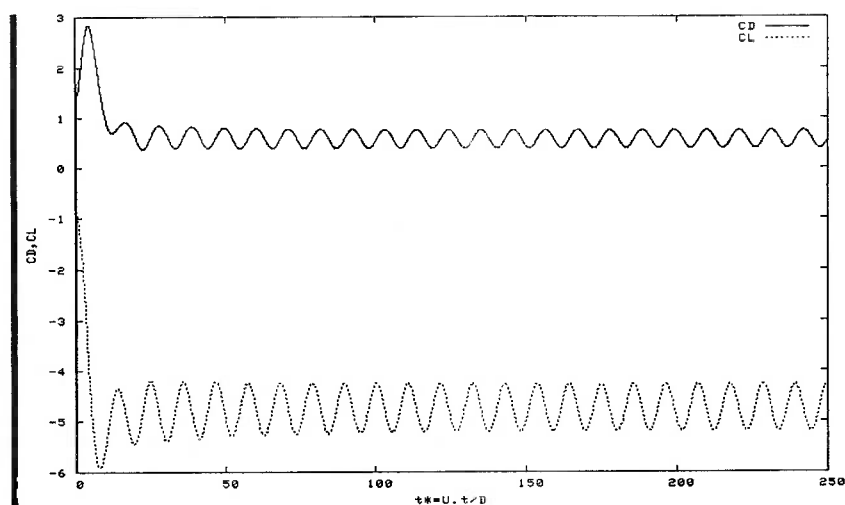


Figura 4-22 - Coeficiente de arrasto (CD) e sustentação (CL) para o cilindro girando ($\alpha=1.8$) e $Re=200$.

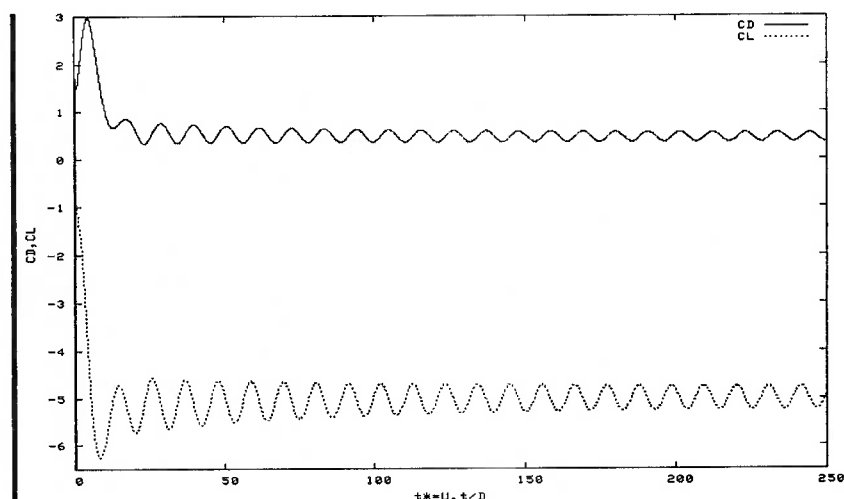


Figura 4-23 - Coeficiente de arrasto (CD) e sustentação (CL) para o cilindro girando ($\alpha=1.9$) e $Re=200$.

Das Figura 4-22 e Figura 4-23, temos a emissão de vórtices vista através da oscilação da série temporal dos coeficientes de força.

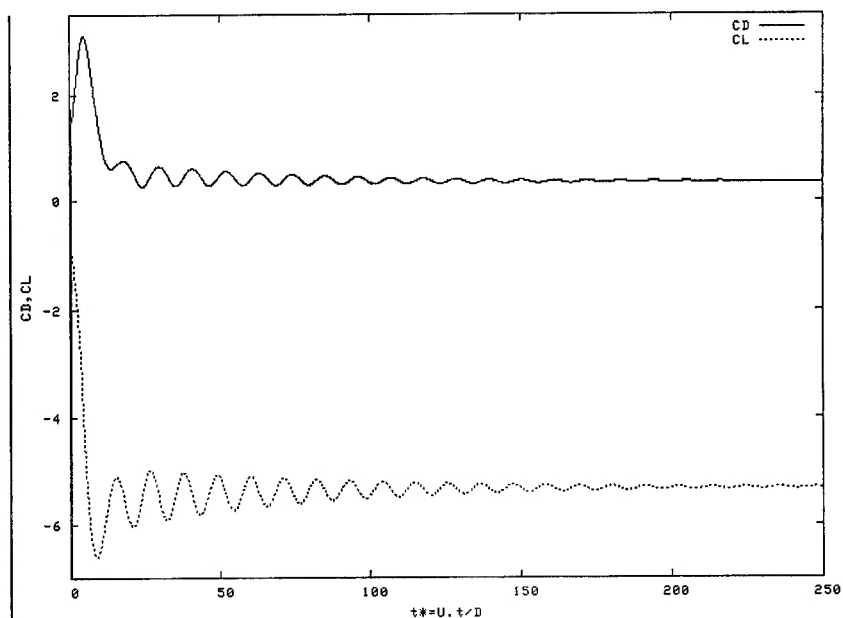


Figura 4-24 - Coeficiente de arrasto (CD) e sustentação (CL) para o cilindro girando ($\alpha=2.0$) e $Re=200$.

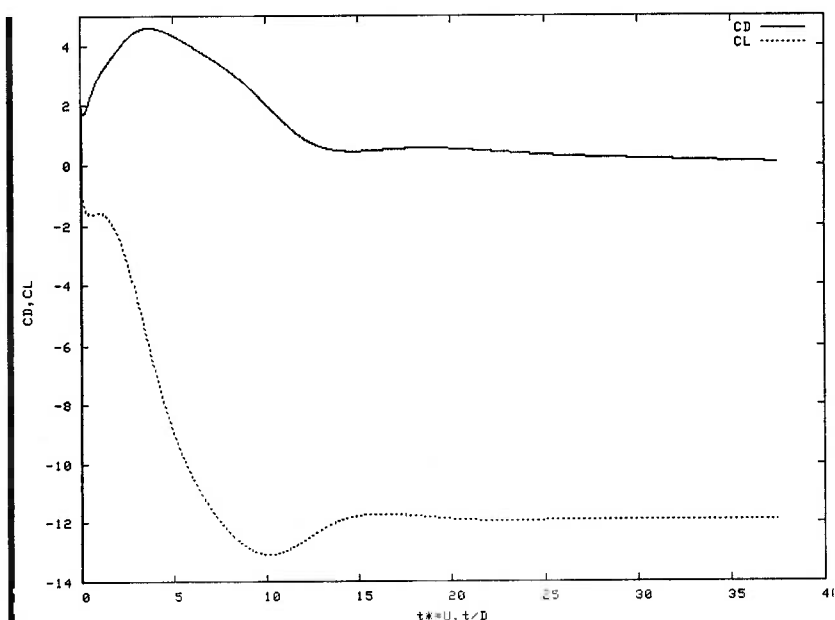


Figura 4-25 - Coeficiente de arrasto (CD) e sustentação (CL) para o cilindro girando ($\alpha=3.25$) e $Re=200$.

Já no caso da Figura 4-24 a oscilação diminui, onde temos a rotação próxima de $\alpha=2$ e na Figura 4-25 a oscilação desaparece pois temos que $\alpha=3.25$ que é maior do que α_L . As pesquisas neste tema até 1995 eram realizadas tendo como referência o desaparecimento da esteira de vórtices para rotações acima de α_L . No artigo publicado por Zhang & Ko (1995) existe a evidência da emissão de vórtices para um valor de $\alpha=5.0$ e $Re=200$. Os autores concluem que existe uma emissão de vórtices, mas é diferente da esteira de von Kármán, com intensidade muito baixa e que não influência nos valores dos coeficientes de força.

A seguir na Figura 4-26, temos $\alpha=4.2$, maior do que α_L , não há emissão de vórtices, mas a oscilação dos coeficientes de força começam a aumentar. Quando a rotação aumenta para $\alpha=4.3$ (Figura 4-27), temos a presença da oscilação na série temporal dos coeficientes de força e também uma emissão de vórtice para $\alpha > \alpha_L$.

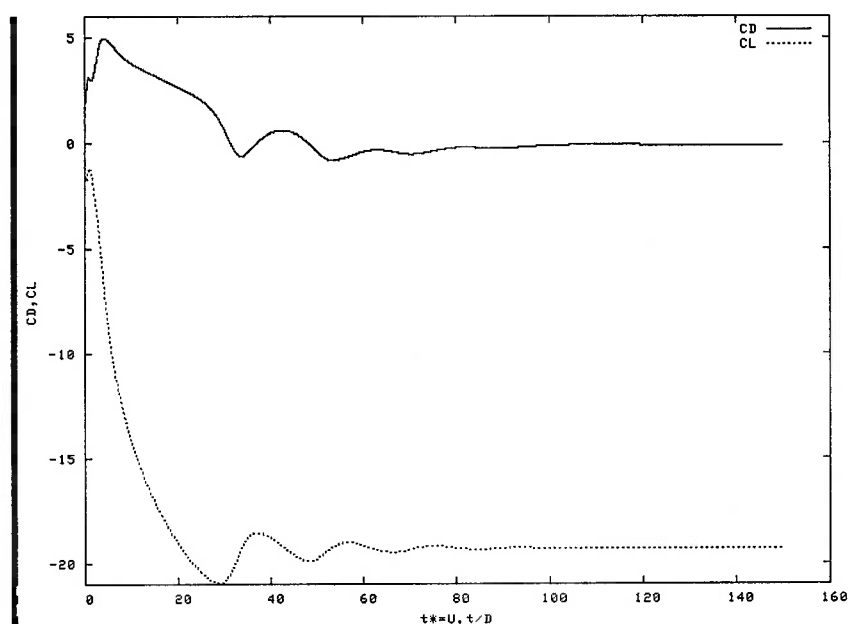


Figura 4-26 - Coeficiente de arrasto (CD) e sustentação (CL) para o cilindro girando ($\alpha=4.2$) e $Re=200$.

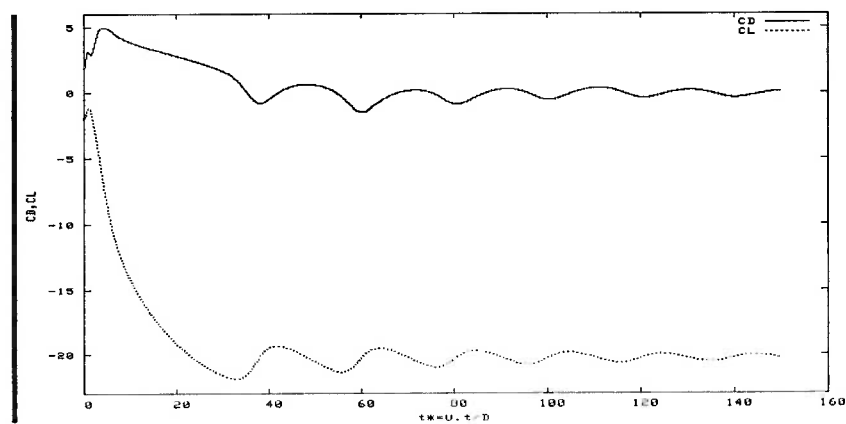


Figura 4-27 - Coeficiente de arrasto (C_D) e sustentação (C_L) para o cilindro girando ($\alpha=4.3$) e $Re=200$.

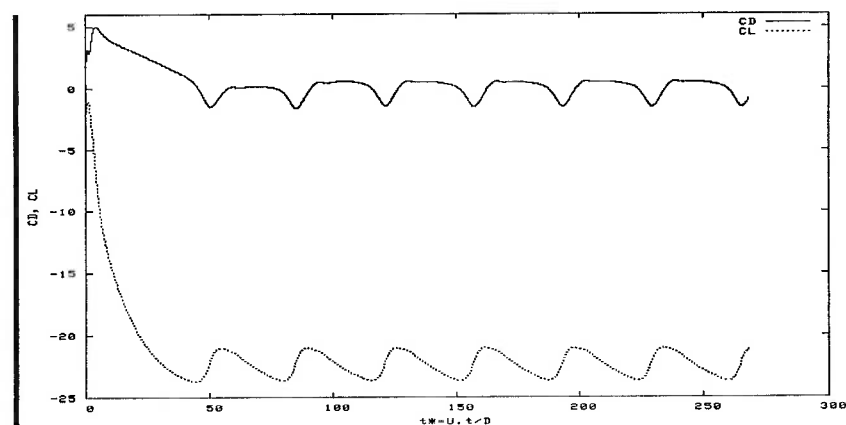


Figura 4-28 - Coeficiente de arrasto (C_D) e sustentação (C_L) para o cilindro girando ($\alpha=4.5$) e $Re=200$.

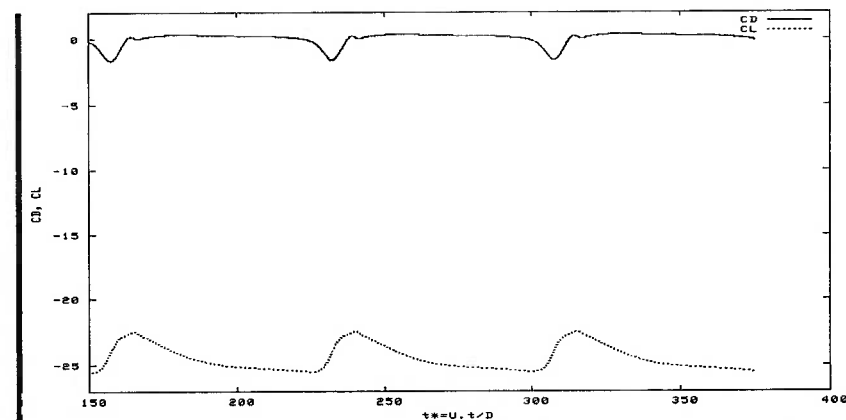


Figura 4-29 - Coeficiente de arrasto (C_D) e sustentação (C_L) para o cilindro girando ($\alpha=4.7$) e $Re=200$.

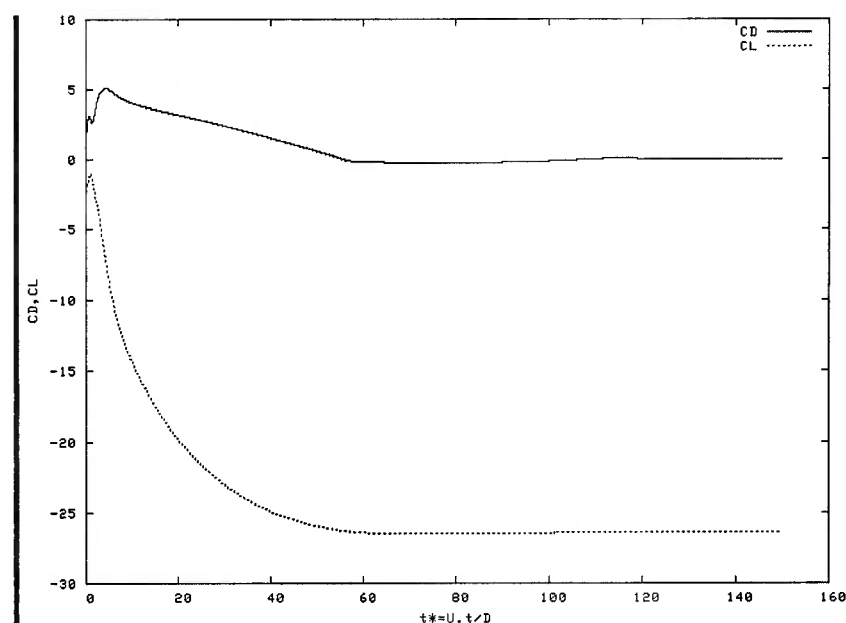


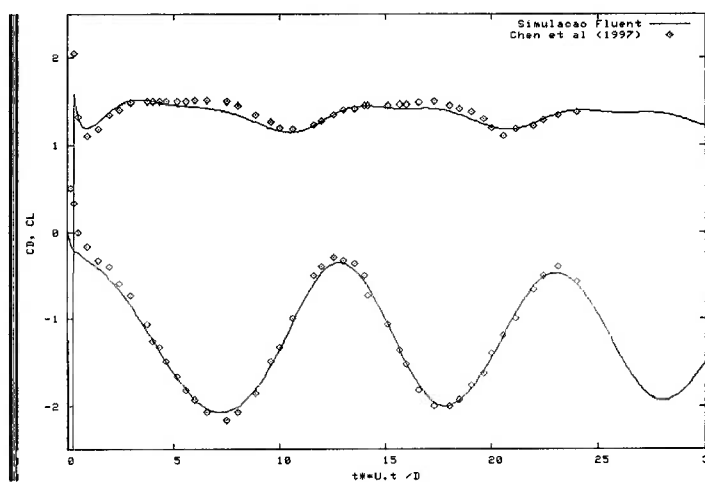
Figura 4-30 - Coeficiente de arrasto (CD) e sustentação (CL) para o cilindro girando ($\alpha=4.9$) e $Re=200$.

Apesar de ter ocorrido uma emissão de vórtice em $\alpha \sim 4.3$, esse mesmo fenômeno desaparece em $\alpha=4.9$ como ilustra a Figura 4-30. A primeira referência importante foi feita em 1999 como o trabalho de Stojkovic et al (1999).

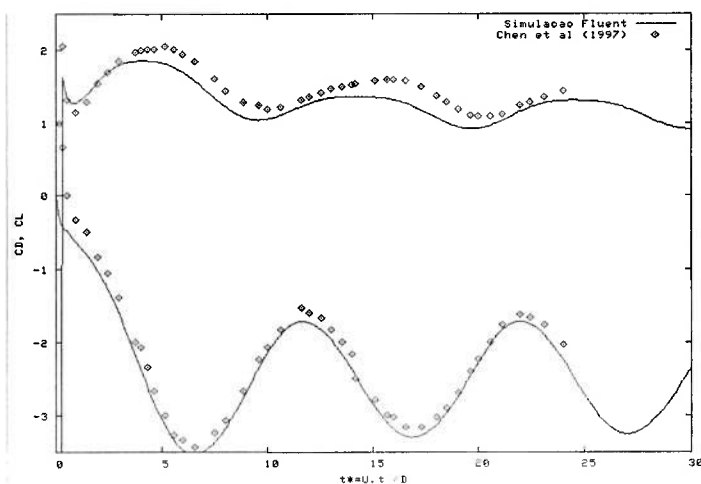
Duas observações a serem feitas neste ponto no trabalho de Zhang & Ko (1995). A primeira em relação ao domínio espacial, a malha utilizada tem as fronteiras distante do cilindro de aproximadamente de dez vezes o diâmetro do cilindro. O domínio é muito pequeno para simular o escoamento devido ao gradiente de velocidade entre a velocidade na periferia do cilindro e o escoamento ao longe. O segundo fato é a tempo de simulação. Como o número de Strouhal é menor, o tempo de simulação deveria ser maior para se captar a influência da rotação nos coeficientes de força.

Essa série temporal será comparada com os resultados de Chen et al. (1997), para o mesmo número de Reynolds, nas rotações α : 0.5, 1.0 e 2.07.

a)



b)



c)

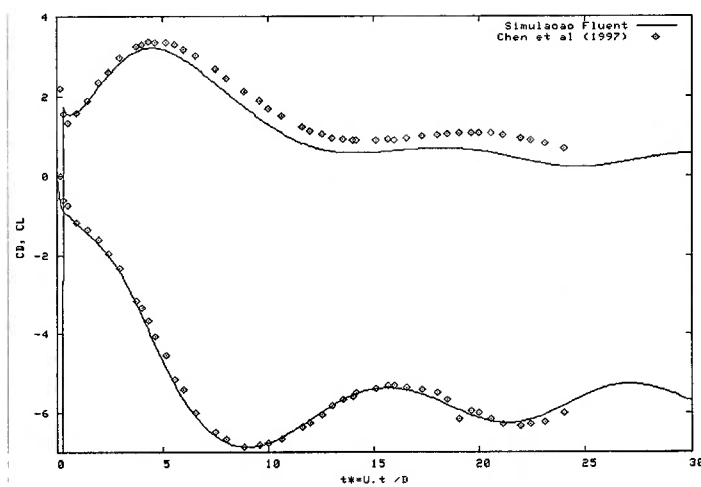


Figura 4-31 - Comparação dos resultados dos coeficientes de força obtidos no FLUENT com os resultados de Chen et al (1997) para $Re=200$. Rotação α , respectivamente: a) 0.5, b) 1.0 e c) 2.07.

Apesar da pequena diferença, percebemos da Figura 4-31 uma boa concordância entre o resultado obtido neste trabalho com o resultado obtido por Chen et al (1997).

Coutanceau & Ménard (1985), realizaram um trabalho experimental sobre o escoamento em torno do cilindro girando, expondo em seu trabalho uma série de fotos que são um marco neste tema. Apesar de Prandtl ser o pioneiro na área experimental, seu objetivo era estudar o ponto de estagnação nas adjacências do cilindro bem como a força de sustentação máxima que poderia ser obtida no cilindro girando. As fotos publicadas por Prandtl ilustram o comportamento na esteira, mas não é informado em que número de Re foram realizadas as seqüências de fotos.

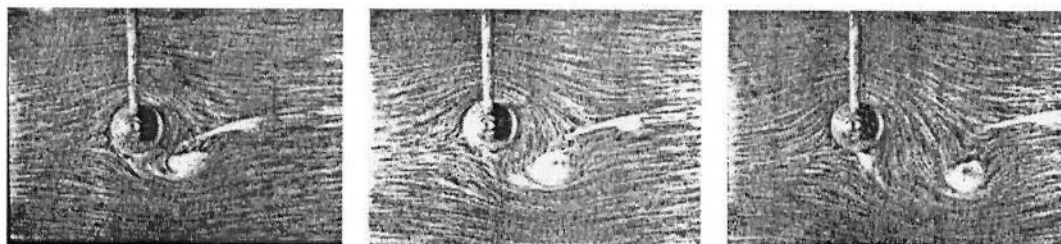


Figura 4-32 - Escoamento em torno de um cilindro girando para $\alpha=6$. (PRANDTL & TIETJENS, 1934)

O trabalho de Coutanceau & Ménard(1985), ilustra o comportamento do escoamento em torno do cilindro girando para $Re = 200$ e com a rotação adimensional α no intervalo de 0 à 3,25. Os resultados publicados por esses autores são fotos do escoamento ao redor do cilindro girando com traçadores sólidos e um diagrama ilustrando as linhas de corrente dos escoamentos ensaiados.

As esteiras obtidas no FLUENT para $Re=200$ foram comparadas aos resultados de Coutanceau & Ménard (1985). As seqüências das ilustrações, comparando os resultados dos trabalhos mencionados, seguem o seguinte esquema:

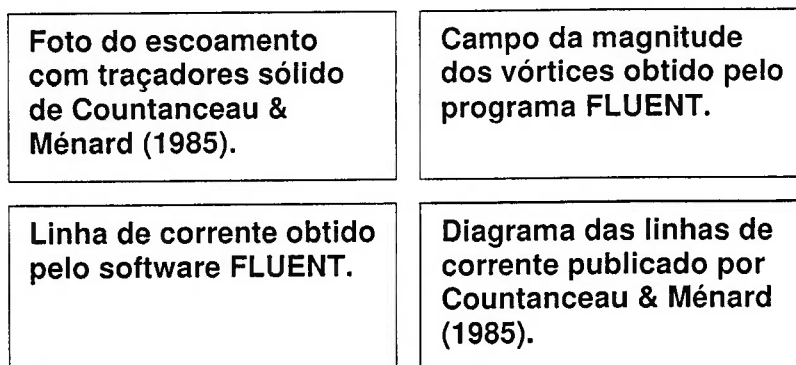


Figura 4-33 - Esquema de apresentação da comparação dos resultados.

As rotações α escolhidas foram: 0.5, 1.0 e 2.07 em diferentes instantes de tempo. Que iremos fazer é uma comparação das visualizações de Countanceau & Ménard (1985) com os resultados obtidos com o programa FLUENT.

Rotação $\alpha = 0,5$

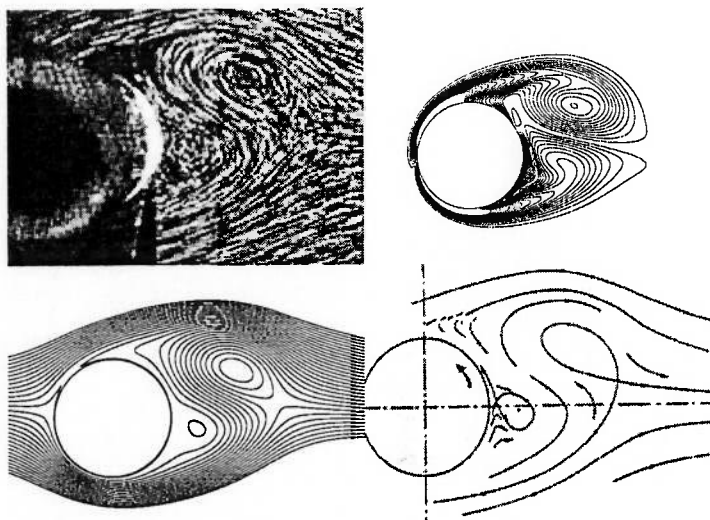


Figura 4-34 - Comparação experimental-computacional – $Re = 200 - t = 2,5$.

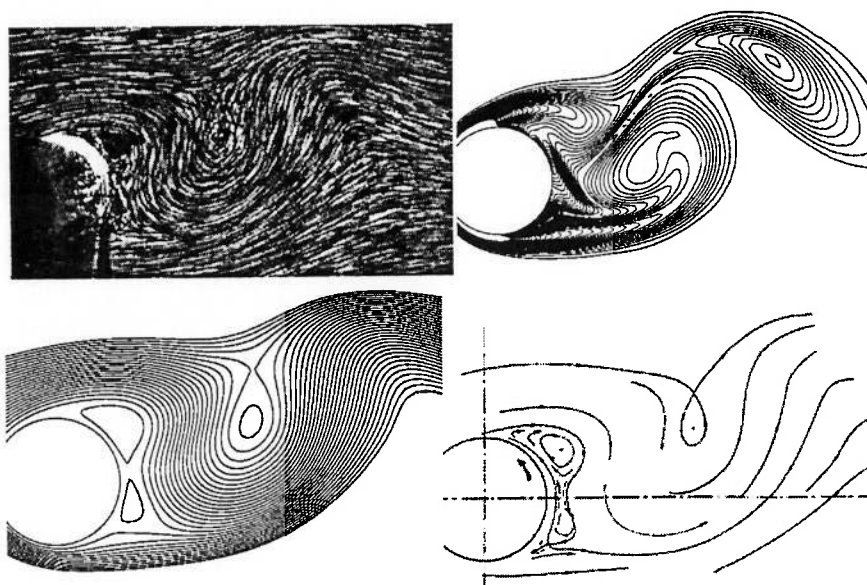


Figura 4-35 - Comparação experimental-computacional - $Re = 200 - t = 5,5$.

Rotação $\alpha = 1,0$.

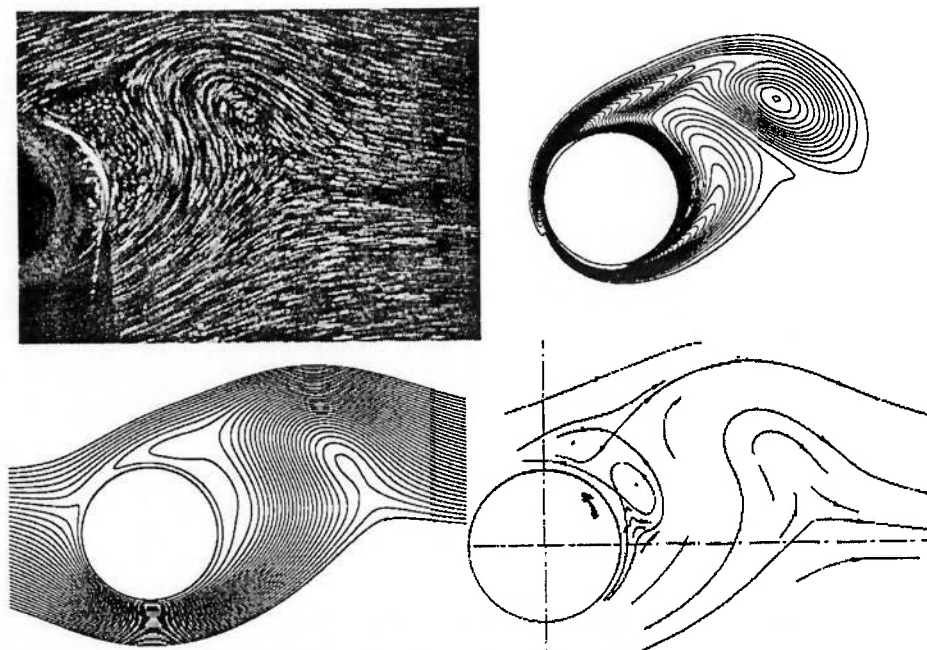


Figura 4-36 - Comparação experimental-computacional - $Re=200 - t = 3,0$.

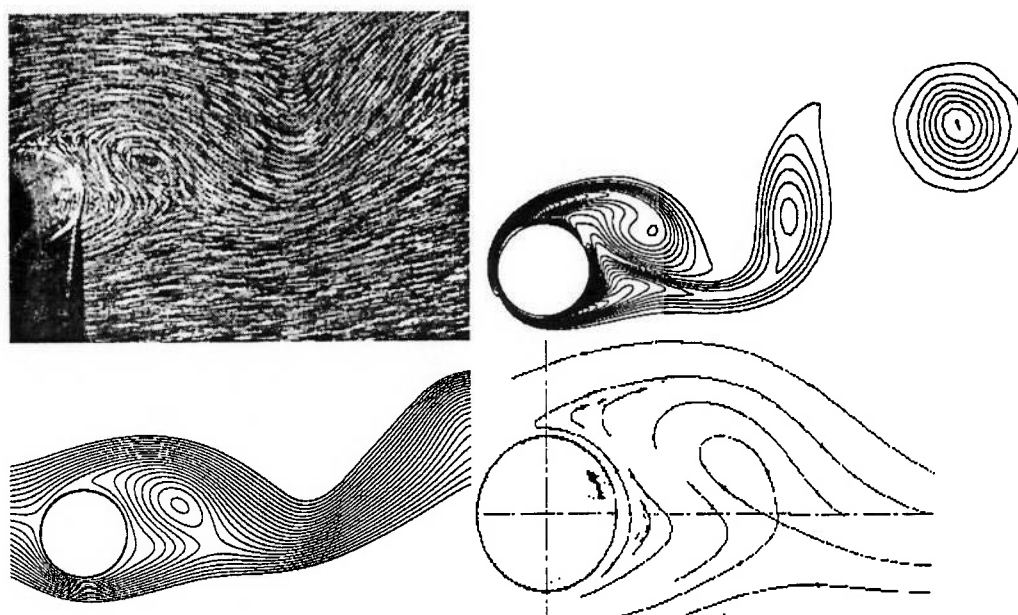


Figura 4-37 - Comparação experimental-computacional - $Re=200 - t = 7,0$.

Rotação $\alpha = 2,07$.

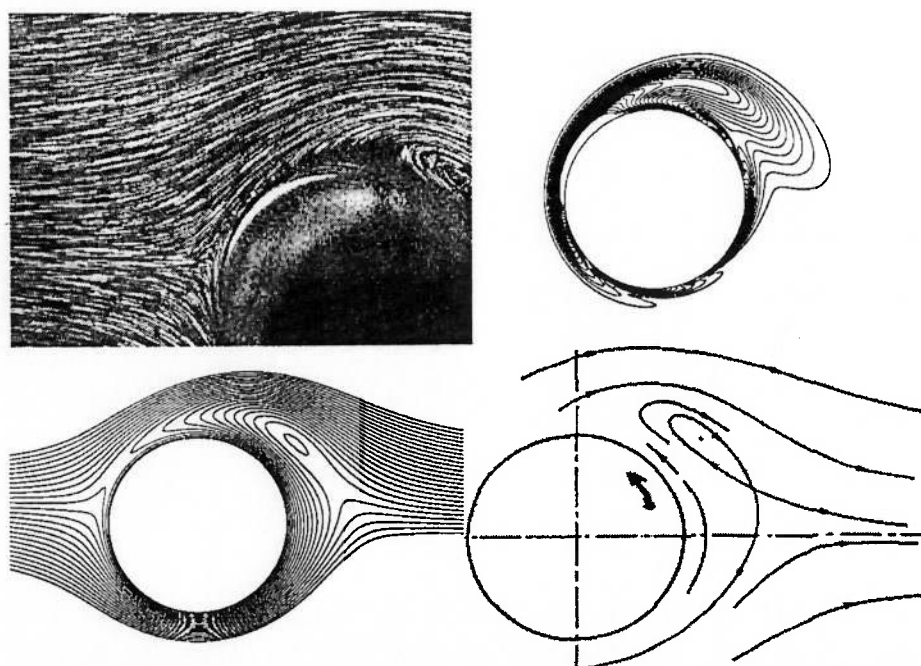


Figura 4-38 - Comparação experimental-computacional - $Re=200 - t = 1,0$.

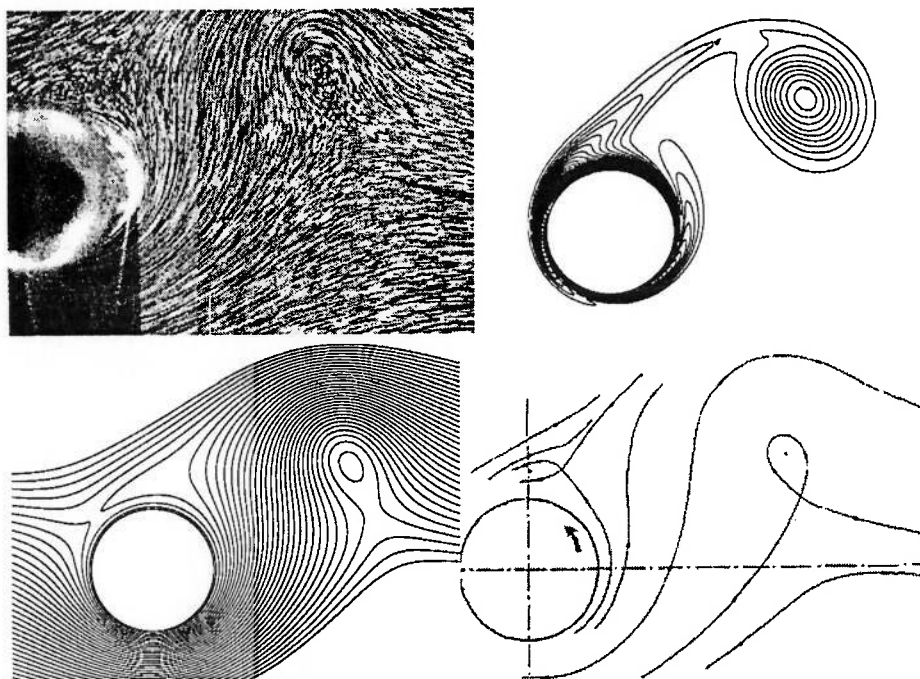


Figura 4-39 - Comparação experimental-computacional - $Re=200$ - $t = 3,5$.

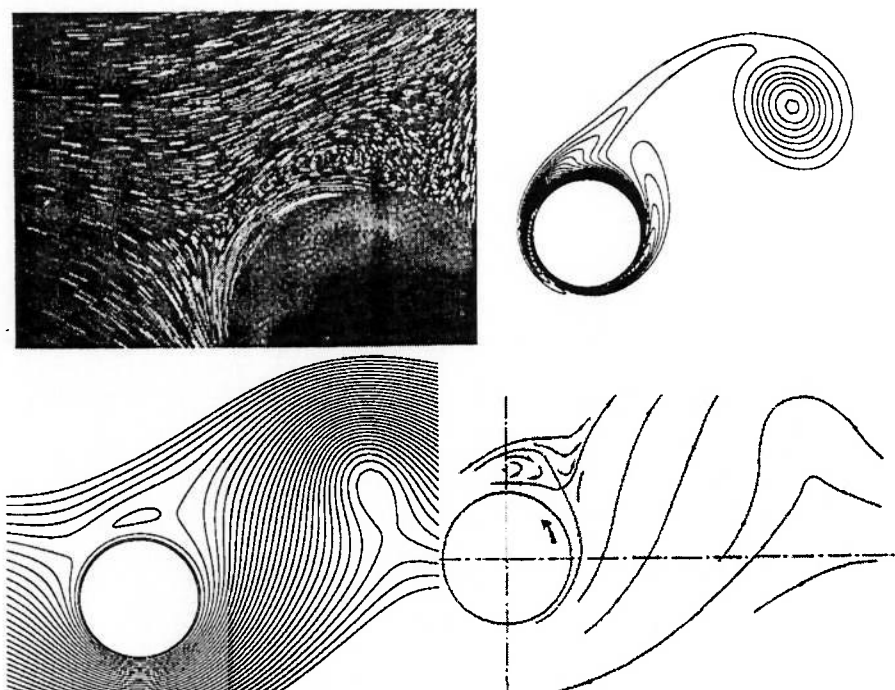


Figura 4-40 - Comparação experimental-computacional - $Re=200$ - $t = 4,0$.

O que podemos perceber dos resultados acima é um comportamento equivalente entre os resultados experimentais e numéricos. Como neste caso a rotação α é aproximadamente abaixo de 2.0, a influência da rotação não domina totalmente o escoamento, ou seja o gradiente de velocidade maior fica ao próximo do cilindro. A emissão de vórtice aqui neste caso tem uma intensidade muito pequena em relação à rotação do cilindro e em relação à velocidade do escoamento incidente U_∞ , o que ocasiona pouca influência nas linhas de corrente.

A seguir apresentaremos comparação entre os resultados dos coeficientes de força de arrasto (C_D) médio em relação à velocidade de rotação (α) do cilindro. É um resumo dos vários resultados das simulações comparados com vários autores.

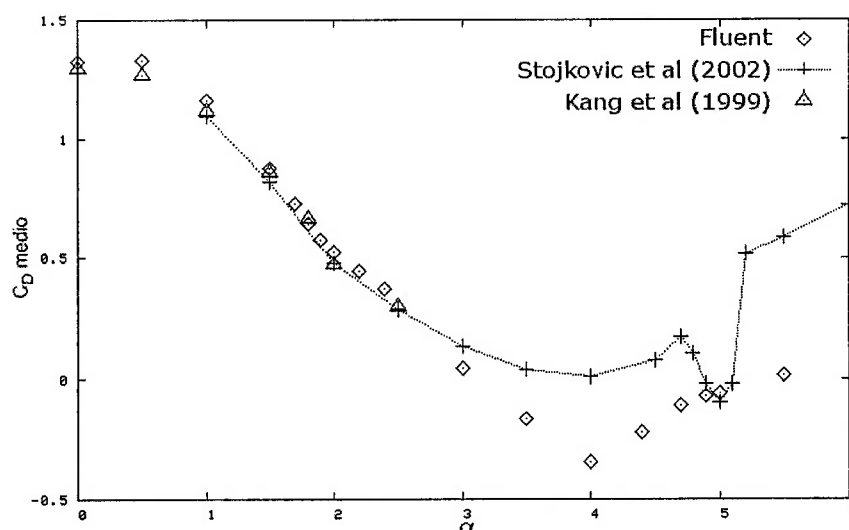


Figura 4-41 - Coeficiente de arrasto médio para $Re=100$ em relação à velocidade de rotação do cilindro. Resultados do FLUENT em comparação com os autores Stojkovic et al (2002) e Kang et al (1999).

Na Figura 4-41, temos a comparação dos resultados obtidos para $Re=100$ comparados com Stojkovic et al (2002) e com Kang et al (1999). O resultado apresenta uma ótima semelhança com os resultados de Kang et al (1999). Para a comparação com Stojkovic et al (2002) o resultado apresenta uma pequena diferença nas rotações acima de 3. O resultado apresentado por Stojkovic et al (2002) mostra um pico negativo próximo de $\alpha=5.0$. O autor explica que isso ocorre devido ao

segundo modo de emissão de vórtice. Apesar de várias tentativas com diferentes parâmetros de simulação, não conseguimos encontrar algo parecido.

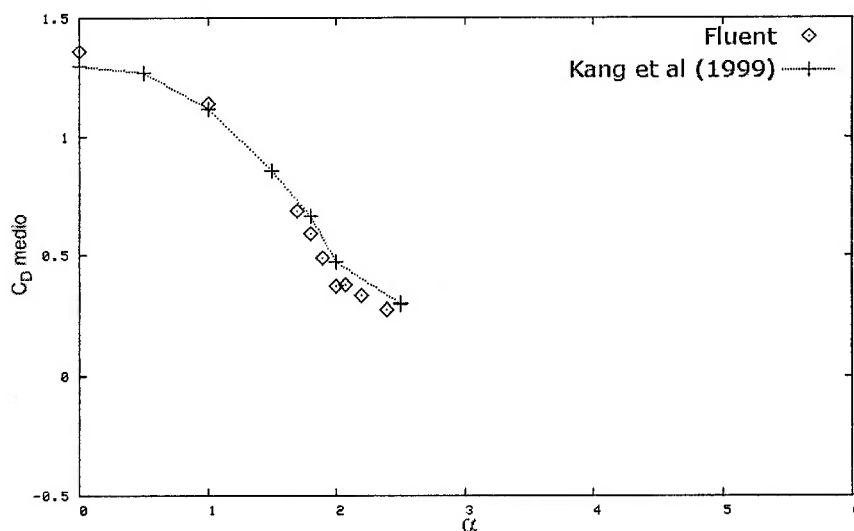


Figura 4-42 - Coeficiente de arrasto médio para $Re=160$ em relação à velocidade de rotação do cilindro. Resultados do FLUENT em comparação com o autor Kang et al (1999).

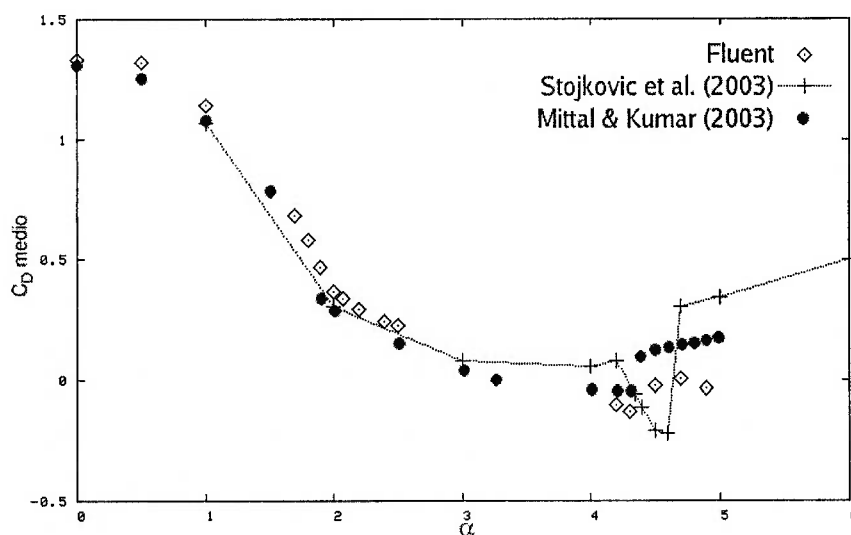


Figura 4-43 - Coeficiente de arrasto médio para $Re=200$ em relação à velocidade de rotação do cilindro. Resultados do FLUENT em comparação com os autores Stojkovic et al (2003) e Mittal & Kumar (2003).

A Figura 4-42 compara os resultados com Kang et al (1999) para $Re=160$. A Figura 4-43 é a comparação dos resultados obtidos com Stojkovic et al (2003) e Mittal & Kumar (2003). Novamente o resultado de Stojkovic et al (2003) apresenta o

pico invertido, mas o mesmo não foi captado por Mittal & Kumar (2003) e nem pelas simulações deste trabalho.

Mas um bom resumo ilustrativo da emissão dos vórtices pode ser feito através dos gráficos que mostram a amplitude média de oscilação dos coeficientes de arrasto em relação à velocidade de rotação do cilindro, para os diversos números de Reynolds analisados.

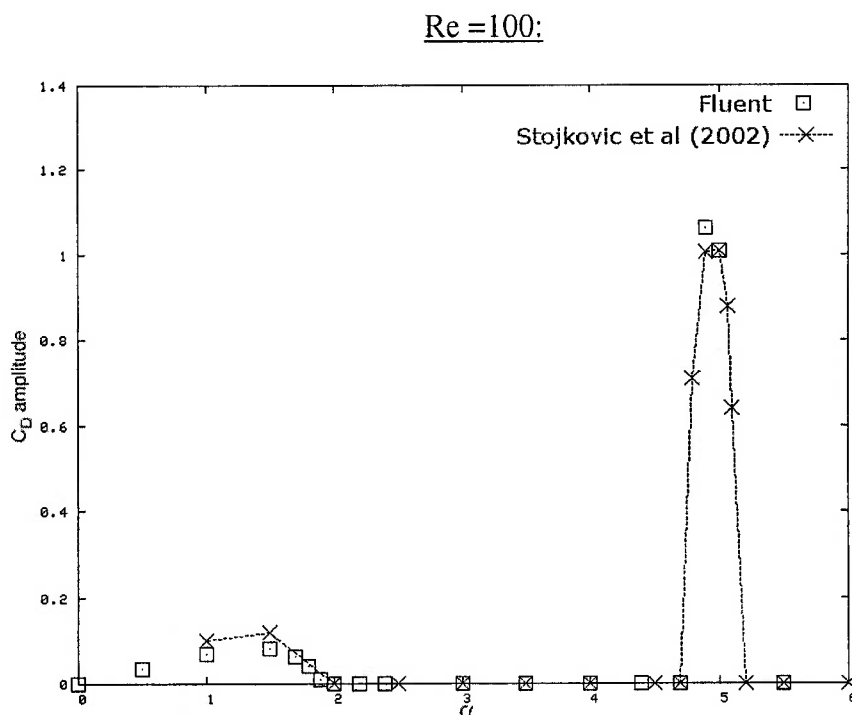


Figura 4-44 - Amplitude média do coeficiente de arrasto para $Re=100$ em função da rotação α . Comparação entre os resultados obtidos no FLUENT com os resultados de Stojkovic et al (2002).

A Figura 4-44 ilustra a amplitude média do coeficiente de arrasto em relação a velocidade de rotação do cilindro para $Re=100$. A amplitude da flutuação das forças induzidas no cilindro é moderada até $\alpha \sim 2$. Após esse valor, a emissão de vórtices cessa até aproximadamente $\alpha=4$, onde temos a segunda emissão de vórtice até $\alpha \sim 5$. A amplitude da flutuação é maior no segundo modo de emissão do que o primeiro modo de emissão.

Re=160:

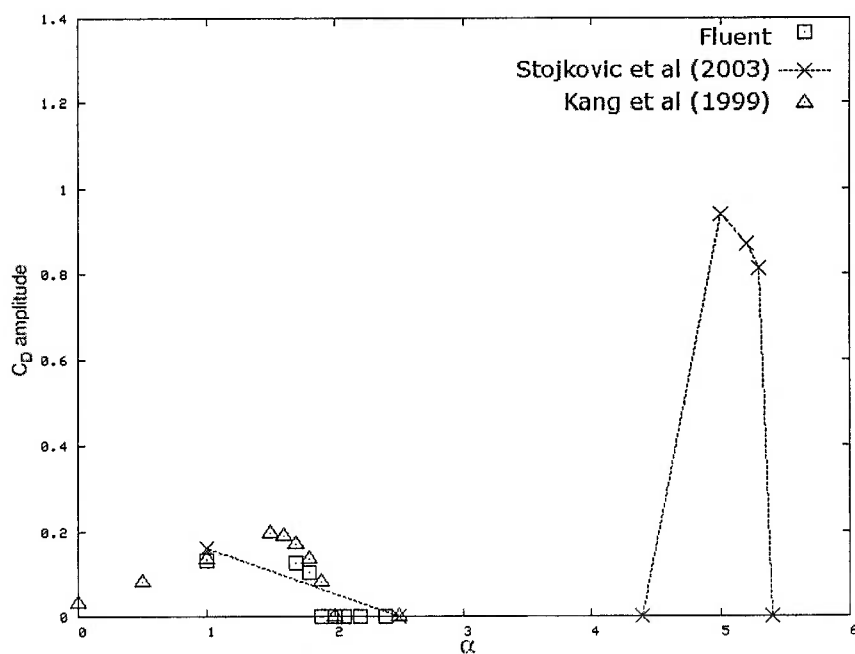


Figura 4-45 - Amplitude média do coeficiente de arrasto para $Re=160$ em função da rotação α . Os resultados do FLUENT comparado com os autores Stojkovic et al (2003) e Kang et al (1999).

Re=200:

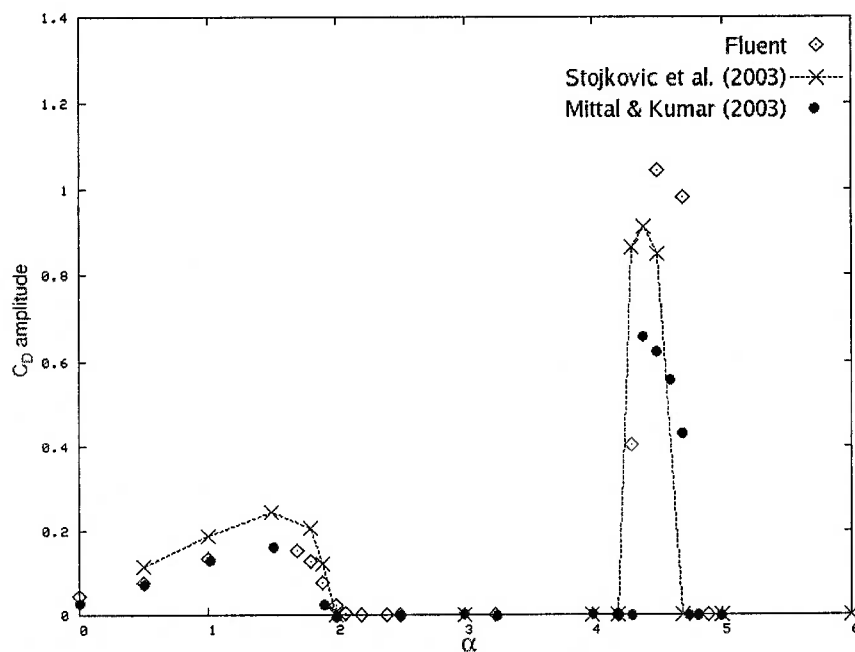


Figura 4-46 - Amplitude média do coeficiente de arrasto para $Re=200$ em função da rotação α . Comparação entre os resultados obtidos no FLUENT com os resultados de Stojkovic et al (2003) e de Mittal & Kumar (2003).

Podemos distinguir duas características da estrutura do escoamento. A primeira é que os efeitos viscosos são dominantes no escoamento até $\alpha \sim 2$, que corresponde a primeira emissão de vórtices. Quando $\alpha > 4$, os efeitos viscosos se restringem à vizinhança do cilindro e a rotação domina o resto do escoamento. Isto explica por que aumentando o Re , a segunda emissão ocorre para intervalos menores de α .

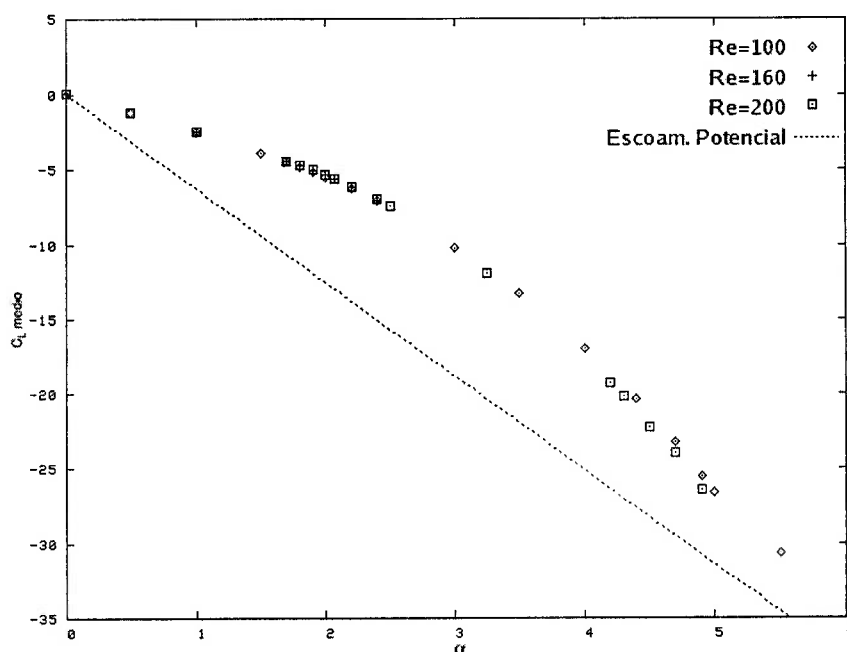


Figura 4-47 - Média dos coeficientes de sustentação para $Re = 100, 160$ e 200 , comparado com o valor do coeficiente de sustentação da teoria do escoamento potencial.

Na Figura 4-47, podemos ver que o comportamento do coeficiente de sustentação (C_L) não possui um máximo quando $\alpha = 4$, como previsto por Prandtl (1925). Essa mesma figura compara os valores obtidos com os valores da teoria do escoamento potencial, com o objetivo de ilustrar a diferença entre o escoamento real e o potencial. Kang & Choi (1999) mostraram que para uma velocidade de rotação do cilindro elevada, os valores para o escoamento real se aproximam do valor do escoamento potencial. No escoamento potencial, a circulação é dada por:

$$\Gamma = \pi D U_{\infty} \alpha \quad (4.2)$$

onde:

- Γ : circulação devido a rotação do cilindro.
- D : diâmetro do cilindro.
- U_{∞} : velocidade do escoamento incidente.

α : velocidade de rotação adimensional do cilindro.

O coeficiente de sustentação teórico é expresso da seguinte maneira:

$$C_{L\ POT} = \frac{2\Gamma}{U_{\infty}D} \quad (4.3)$$

Portanto, em função da rotação adimensional do cilindro (α) podemos dizer que o coeficiente de sustentação teórico é:

$$C_{L\ POT} = 2\pi\alpha \quad (4.4)$$

Uma conclusão importante da Figura 4-47 é que o número de Reynolds tem pouca influência neste caso, e predomina a rotação do cilindro, ou o efeito Magnus. Para valores de α até 2, Badr et al. (1989) menciona um coeficiente médio de inclinação da reta do coeficiente de sustentação de $\sim -2.55\alpha$. Para Tang & Ingham (1991) esse valor ficaria em -2.17α e -1.86α para $Re=60$ e 100 respectivamente. Essa discrepância se deve ao fato de que o estudo feito por Badr et al. (1989) foi para o escoamento não-permanente, resolvendo as equações dependentes do tempo, como neste presente estudo. Para Tang & Ingham (1991) as equações resolvidas eram independentes do tempo.

Autores	Re				
	40	60	100	160	200
Presente			$-2,625 \alpha$	$-2,622 \alpha$	$-2,585 \alpha$
Badr et al.(1989)		$-2,55 \alpha$			
Tang & Ingham (1991)		$-2,17 \alpha$	$-1,86 \alpha$		
Kang et al. (1999)	$-2,57 \alpha$	$-2,50 \alpha$	$-2,48 \alpha$	$-2,46 \alpha$	
Escoamento Potencial		$-2.\pi.\alpha (\sim 6,2832\alpha)$			

Tabela 4-4 – Coeficiente de inclinação aproximado do coeficiente de sustentação (C_L) em função de α , para vários valores de Re .

Número de Strouhal (Str)			
α	Re=100	Re=160	Re=200
0,00	0,1640	0,19858	0,19512
0,50	0,17007	0,19761	0,19811
1,00	0,16990		0,19743
1,50	0,16774		
1,70	0,16506	0,18260	0,18882
1,80	0,16293	0,18056	0,18715
4,30			0,04857
4,50			0,02784
4,70			0,01332
4,90	0,0287		
5,00	0,0132		

Tabela 4-5 – Valores médio da frequência adimensional da emissão de vórtices obtida neste trabalho.

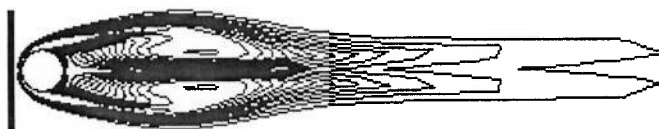
Na Tabela 4-5, verificamos que conseguimos medir o Str somente para algumas rotações. Em $Re = 100$, temos emissão de vórtices no tempo simulado até $\alpha = 1.8$ e a partir de $\alpha = 4.9$ até 5.0. Para rotações acima de 1.9 e até 2.5, a emissão de vórtices ocorre de forma não periódica, aumentando esse período com o passar do tempo até cessar. O número de vórtices emitidos nesse caso depende da rotação do cilindro. Autores como Chen et al (1993) e Chew et al. (1995) mencionam o número de dois vórtices para $\alpha \sim 3$. Para $\alpha = 4.35$ e 4.5, ocorre o desprendimento de um vórtice, mas aumentando essa rotação, começa a aparecer emissões de vórtices irregulares, até que em $\alpha = 4.9$, a emissão adquire novamente a característica de período constante onde foi possível medir o Str, caracterizando o segundo modo de emissão de vórtice. Essa emissão continua até $\alpha = 5.0$, onde volta a cessar novamente.

Para $Re = 200$, o segundo modo de emissão de vórtice ocorre em uma rotação menor que $Re = 100$. Para $\alpha = 4.3$, existe a emissão periódica de vórtice, desaparecendo completamente para $\alpha = 4.9$.

a)



b)



c)



d)



Figura 4-48 - Contorno de vorticidade para $Re=200$ em torno de um cilindro fixo (sem rotação - $\alpha = 0$), em vários instantes de tempo diferentes: a) $t^* = 3.075$, b) $t^* = 30.0$, c) $t^* = 60.0$ e d) $t^* = 90.0$.

A Figura 4-48 mostra o contorno de vorticidade para a simulação no escoamento com $Re=200$, para um cilindro sem rotação ($\alpha=0$), para diferentes instantes de tempo progressivo. Com isso podemos observar a região de formação do vórtice atrás do cilindro. Nas figuras a) e b) temos os vórtices simétricos e em c) a instabilidade dos vórtices, que aumenta até que temos o desprendimento e emissão de vórtices em d).

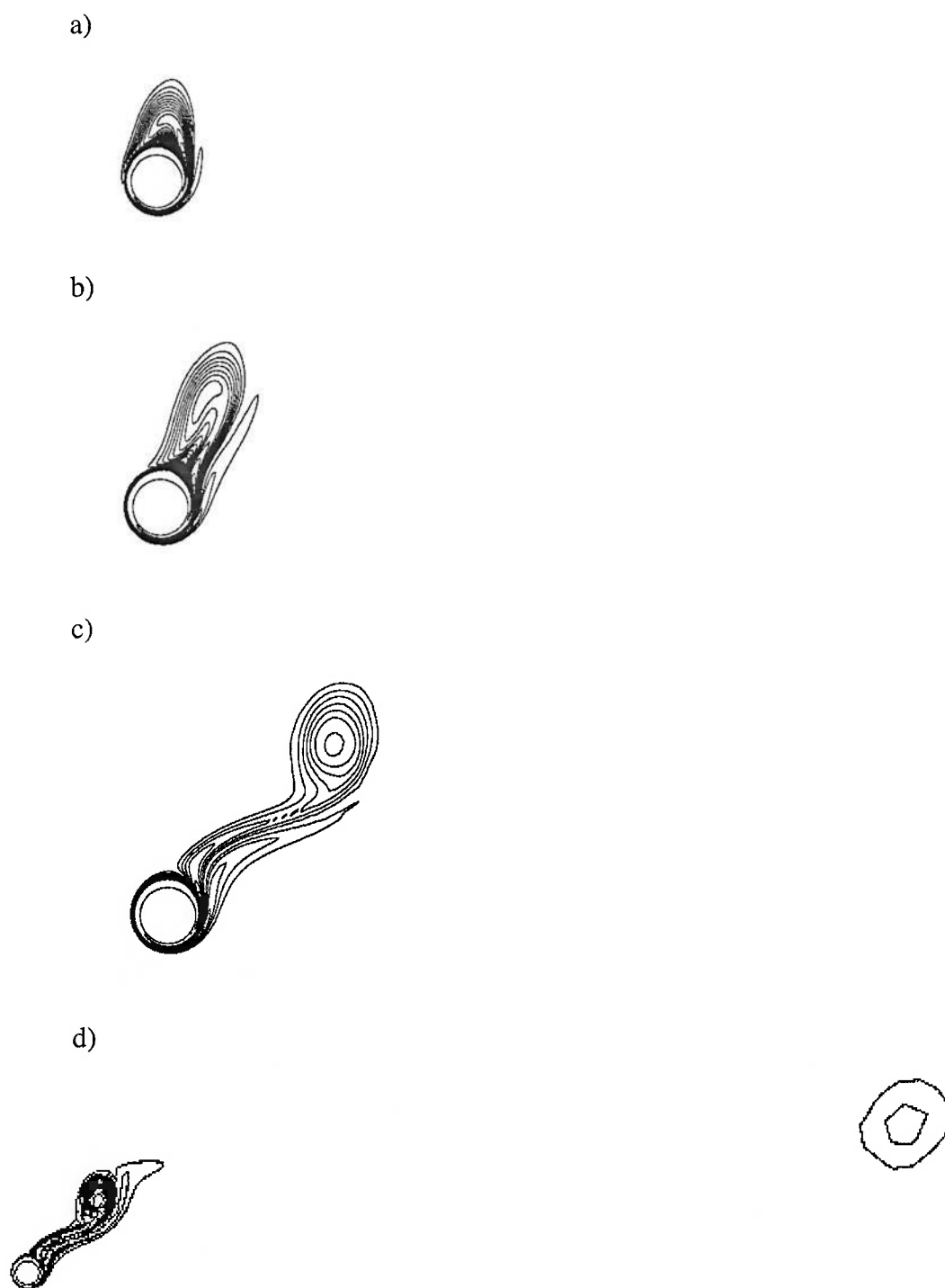


Figura 4-49 - Contorno de vorticidade para $Re=200$ em torno de um cilindro girando (com rotação - $\alpha = 4.5$), em vários instantes de tempo diferentes: a) $t^*=184.0$, b) $t^*=192.0$ e c) $t^*=200.0$. Em d) temos uma visão geral do segundo modo de emissão de vórtice.

Na Figura 4-49, temos a série temporal da segunda emissão de vórtice com detalhe no contorno de vorticidade. Temos na figura a) o instante em que o vórtice está se formando. Em b) o vórtice começa a se desprender do cilindro e em c) o vórtice desprendido. Se observarmos com atenção, podemos ver que a camada cisalhante circula em torno do cilindro girando. Após um dado momento, uma das camadas começa a se descolar do cilindro e então se desprende formando um vórtice. Mittal & Kumar (2003) apresenta uma ótima explicação sobre esse segundo modo de emissão de vórtice. Segundo os autores, existe apenas a emissão de vórtices em apenas um dos lados do cilindro. Essa emissão ocorre quando o ponto de estagnação do escoamento está a uma distância da camada cisalhante, de modo que a instabilidade ocorre com a alimentação de circulação da camada cisalhante através do ponto de estagnação. Isso explica por que somente nesse curto intervalo ($4.0 < a < 5.5$) ocorre a emissão de vórtice, uma vez que a característica mais forte em vários casos do cilindro girando é o ponto de estagnação que se move em função da rotação do cilindro.

Capítulo 5

CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA EXTENSÃO DO TRABALHO.

A primeira conclusão deste trabalho é o fato da esteira de vórtice se deteriorar a partir de $\alpha \sim 2$, que chamamos de α_L . O α_L não é um valor fixo, mas um valor que depende do Re. O outro ponto importante foi o fato de termos uma nova emissão de vórtice após $\alpha \sim 4$, que é chamada de segundo modo de emissão de vórtice.

A força de sustentação não atinge um limite para $\alpha = 4$, mas vai além desse valor. Prandtl(1925) previa um coeficiente máximo de sustentação para $\alpha = 4$, mas nas nossas simulações, o coeficiente de arrasto continuou a crescer, mesmo para $4.8 \leq \alpha \leq 5.45$. Foram simulados escoamentos em torno do cilindro girando para $\alpha \leq 5.45$.

O segundo modo de emissão de vórtice possui uma amplitude de oscilação de forças maior do que o primeiro modo emissão de vórtice, bem como frequências de emissão menores, conforme ilustrado pela Tabela 4-5. O comportamento dos gráficos de C_D e C_L nessas rotações tem uma forma assimétrica, diferente da característica senoidal do primeiro modo de emissão. Segundo Stojkovic et al. (2003) o coeficiente de arrasto médio poderia indicar o segundo modo de emissão de vórtice, mas neste presente trabalho isso não foi observado. O segundo modo de emissão foi claramente indicado pelos gráficos de amplitude média dos coeficientes de arrasto em função da velocidade adimensional α – Figura 4-21 à Figura 4-23.

Devido ao fato do método dos vórtices discretos não capturar o segundo modo de emissão de vórtices, optamos por continuar o estudo com o método dos volumes finitos através do programa FLUENT 6.1. No MVD, a realização da

amalgamação como um mecanismo para prevenir o aumento contínuo do uso da memória de um computador, sacrifica os vórtices de baixa intensidade, poderíamos empregar algoritmos de MVD mais robustos com processo de soma rápida. Mas devido ao custo computacional alto, optamos pelo método dos volumes finitos.

Uma continuação deste trabalho seria a simulação de um cilindro girando com velocidade angular oscilante. Neste caso a rotação do cilindro seria dependente de duas variáveis: o ângulo máximo que o cilindro poderia executar em seu giro e a frequência em que estaria oscilando:

$$\Omega = \alpha \cdot \sin(2\pi \cdot S_f \cdot t)$$

onde:

- Ω : velocidade angular adimensional do cilindro;
- α : velocidade de rotação angular adimensional máxima do cilindro;
- S_f : frequência adimensional de rotação forçada;
- t : tempo adimensional.

O ângulo máximo de giro pode ser adimensionalizado da seguinte forma:

$$\alpha = \frac{\theta_{\max} \cdot R}{U_{\infty}}$$

E a relação entre α e θ_{\max} é:

$$\theta_{\max} = \frac{180^\circ \cdot \alpha}{\pi^2 \cdot S_f}$$

onde:

- θ_{\max} : velocidade angular máxima dimensional ($^\circ$).

Um estudo deste tipo teria como possíveis objetivos o controle de emissão de vórtices em processos que visam um aumento de troca de calor e massa, aumento de mistura e processos de redução de arrasto. Um dos parâmetros fundamentais para esses casos seria o sincronismo, ou não, da frequência de oscilação da rotação do cilindro com a frequência de emissão de vórtices, tecnicamente chamada de *lock-on* (ou no caso negativo de *unlock-on*). (LEONARD, SHIELS & STAGG, 1996; MAHFOUZ & BADR, 2000; BAEK & SUNG, 1998; CHOI, CHOI & KANG, 2002)

ANEXO A

Segue anexo, os resultados das simulações para $Re = 100$ e 160 , ilustrando a série temporal dos coeficientes de força.

$Re = 100$

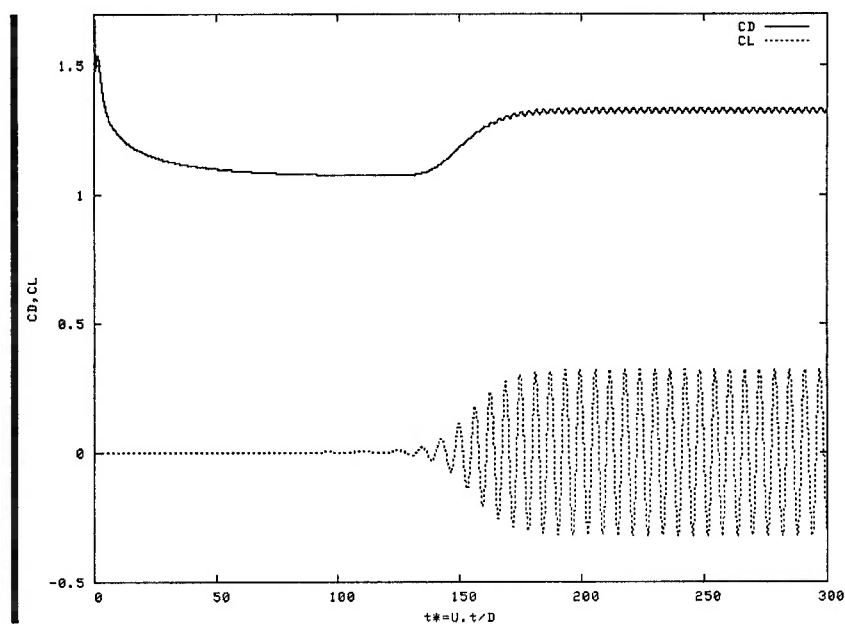


Figura A - 1 - Série temporal do coeficiente de força para $\alpha = 0.0$.

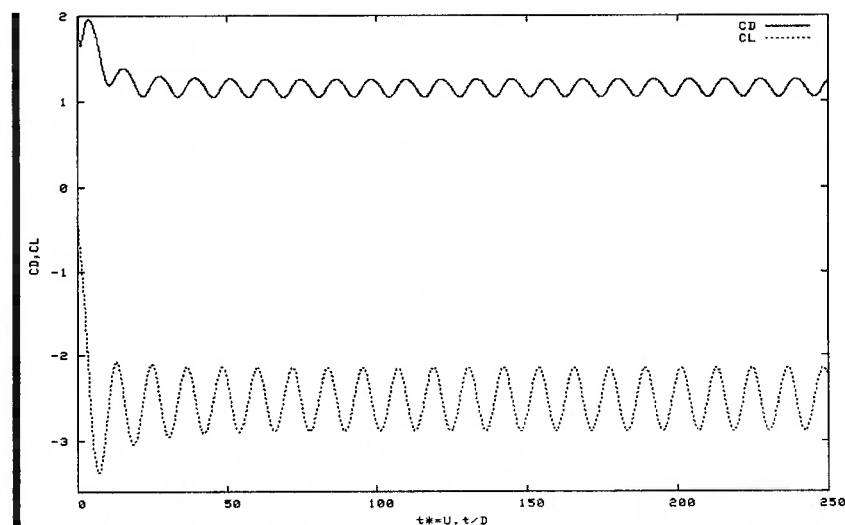


Figura A - 2 - Série temporal do coeficiente de força para $\alpha = 1.0$.

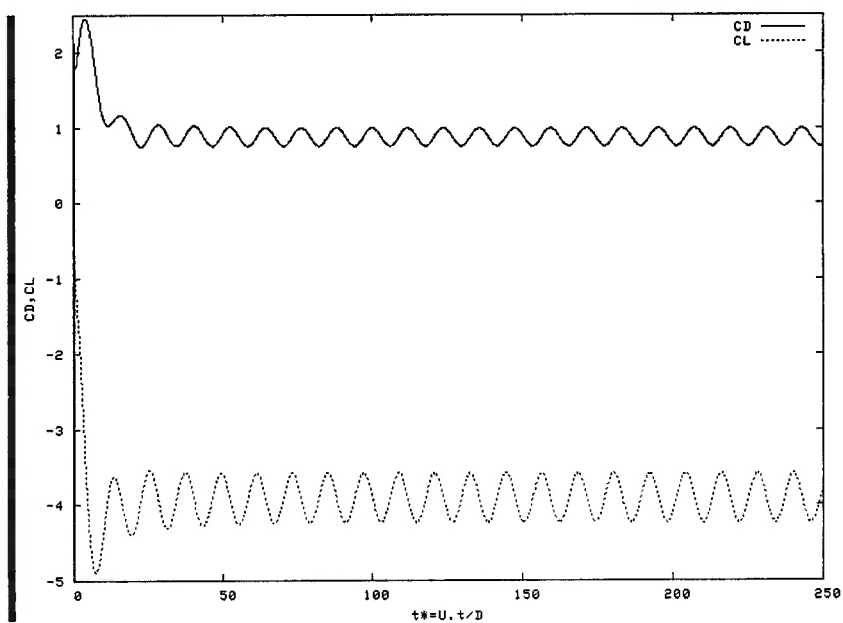


Figura A - 3 - Série temporal do coeficiente de força para $\alpha = 1.5$.

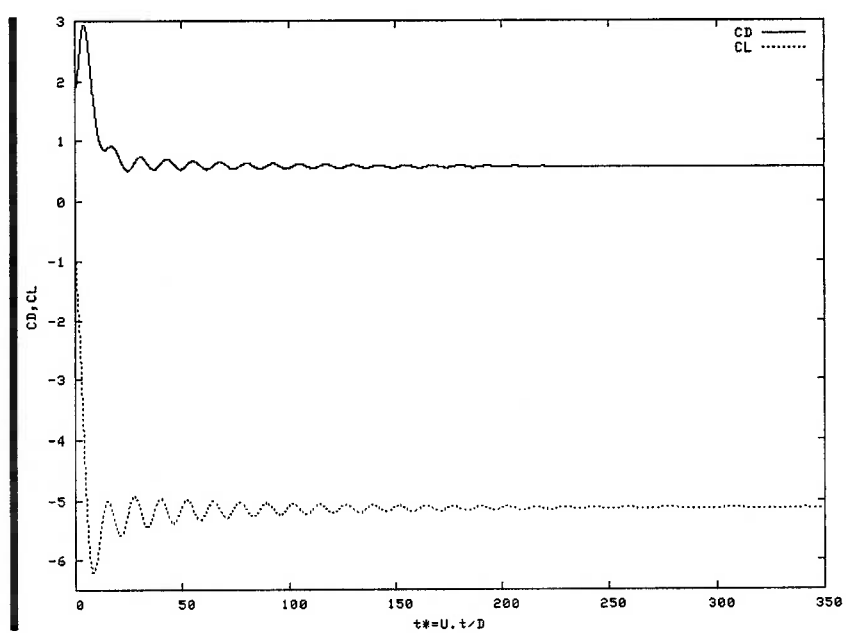
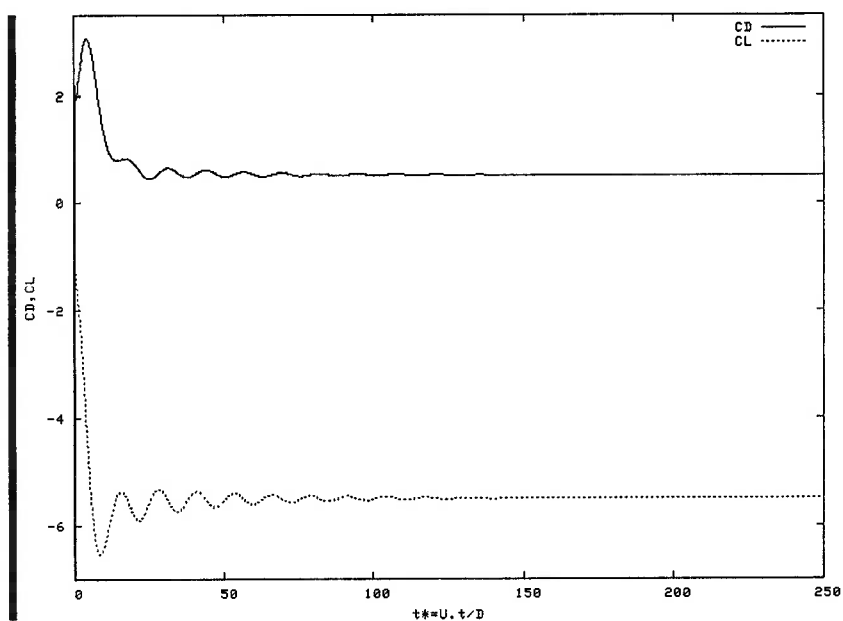
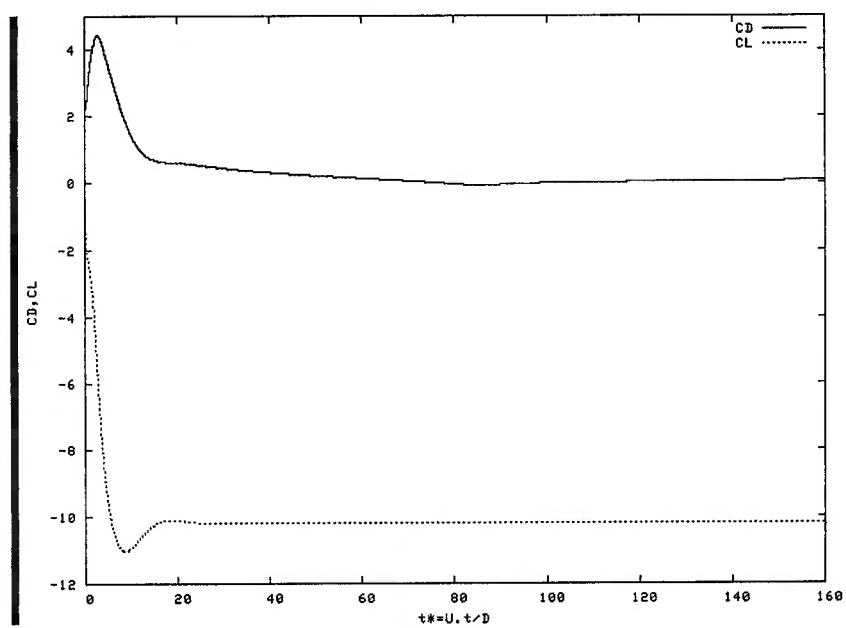
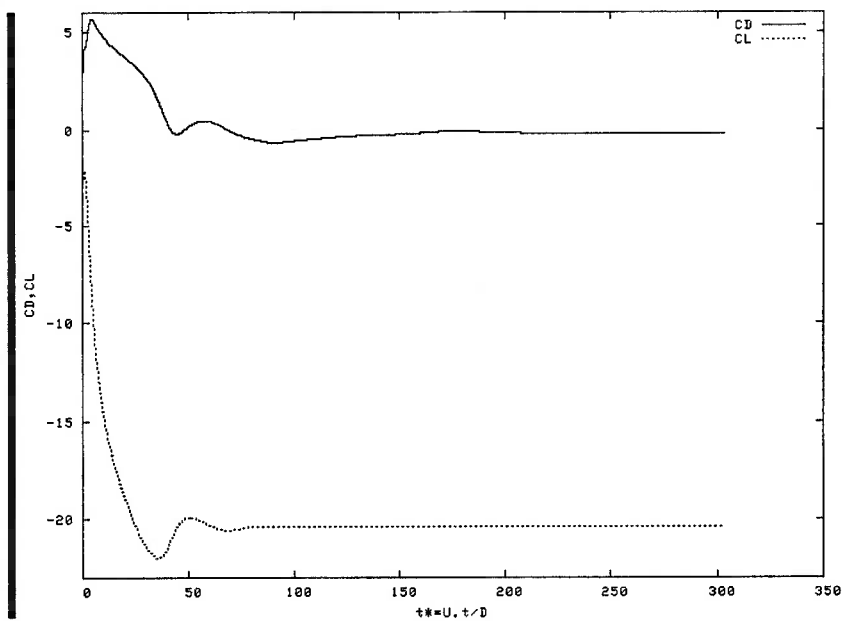
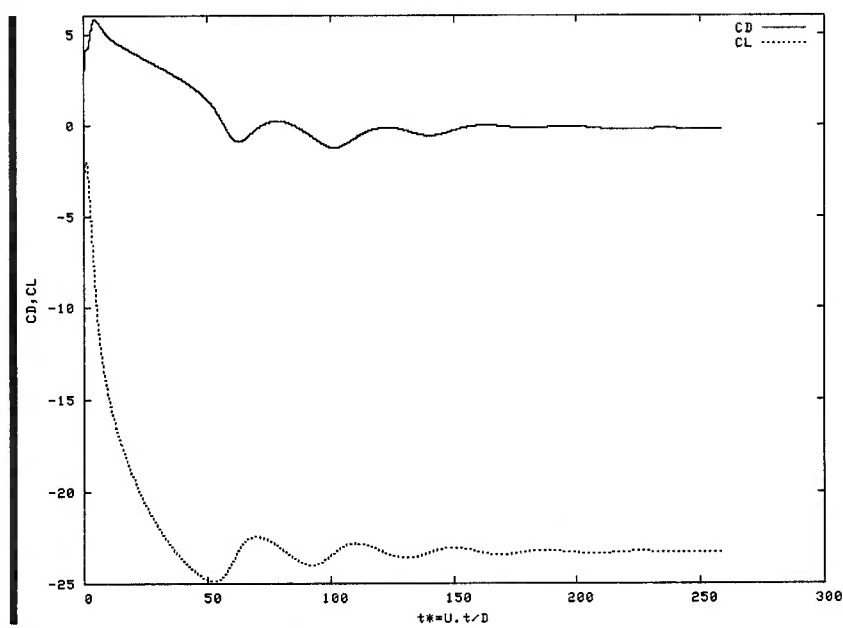


Figura A - 4 - Série temporal do coeficiente de força para $\alpha = 1.9$.

Figura A - 5 - Série temporal do coeficiente de força para $\alpha = 2.0$.Figura A - 6 - Série temporal do coeficiente de força para $\alpha = 3.0$.

Figura A - 7 - Série temporal do coeficiente de força para $\alpha = 4.4$.Figura A - 8 - Série temporal do coeficiente de força para $\alpha = 4.7$.

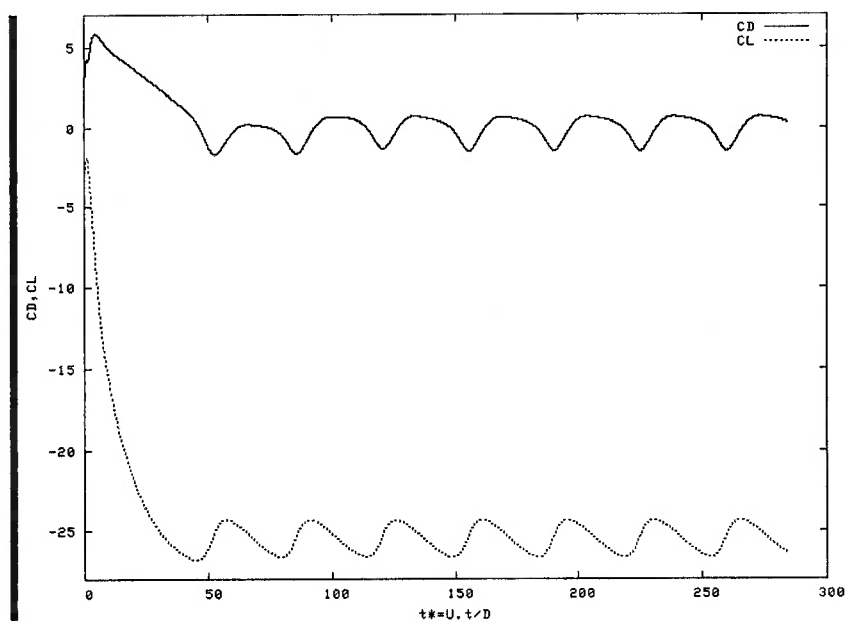


Figura A - 9 - Série temporal do coeficiente de força para $\alpha = 4.9$.

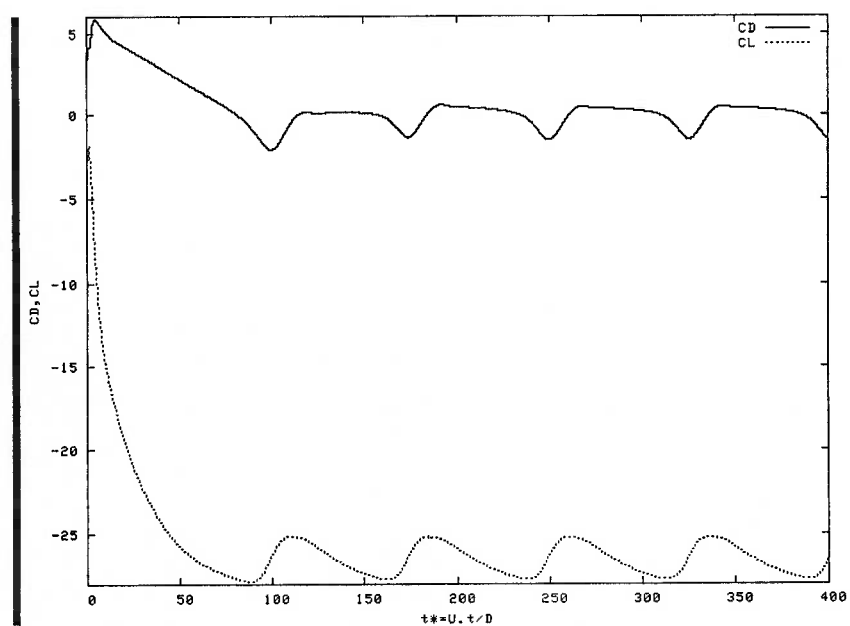


Figura A - 10 - Série temporal do coeficiente de força para $\alpha = 5.0$.

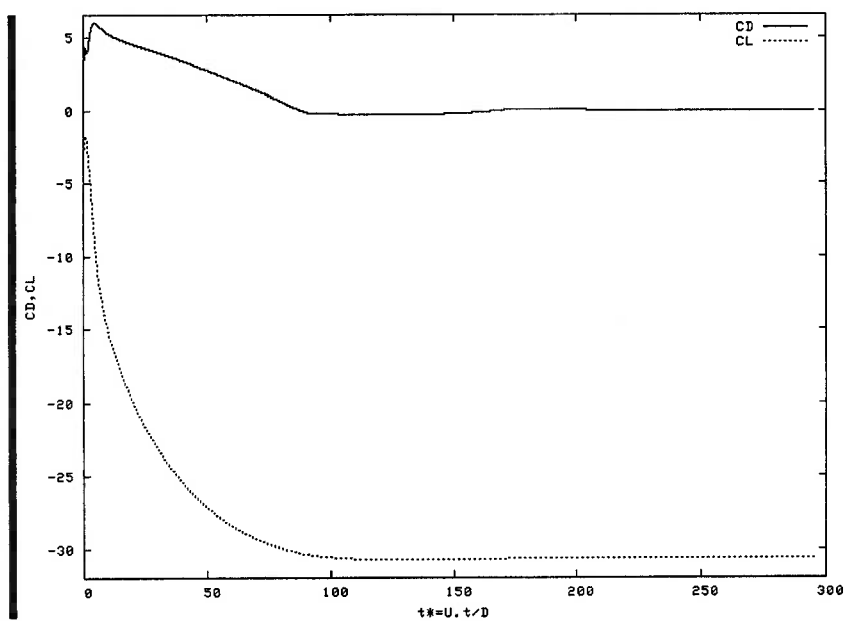


Figura A - 11 - Série temporal do coeficiente de força para $\alpha = 5.5$.

Re = 160

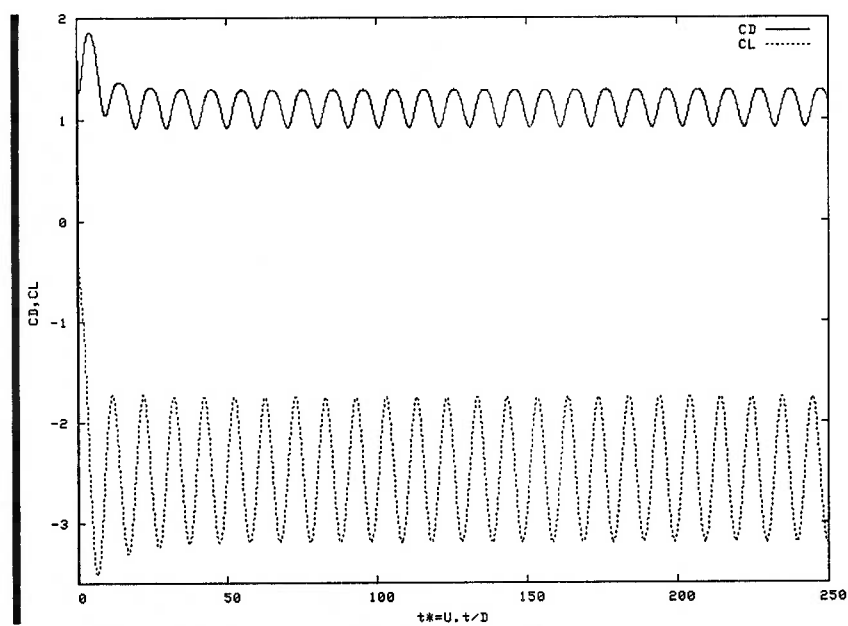
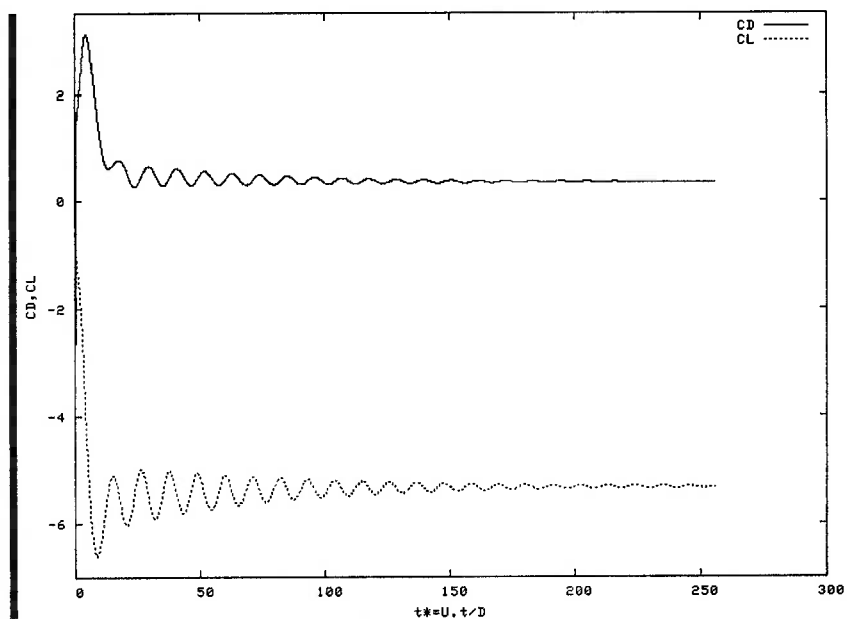
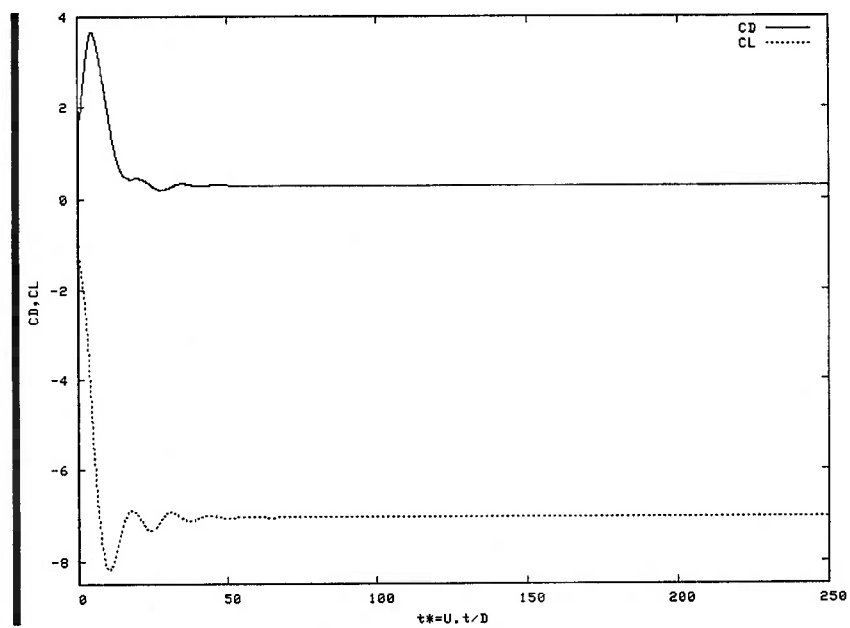


Figura A - 12 - Série temporal do coeficiente de força para $\alpha = 1.0$.

Figura A - 13 - Série temporal do coeficiente de força para $\alpha = 2.0$.Figura A - 14 - Série temporal do coeficiente de força para $\alpha = 2.4$.

BIBLIOGRAFIA

ANDERSON, J. D., "Computational fluid dynamics: the basics with applications", New York: McGraw-Hill, 1995

BADR,H.M., COUTANCEAU, M., DENNIS, S.C.R. & MÉNARD, C., "Unsteady Flow Past a Rotating Circular Cylinder at Reynolds Numbers 10^3 and 10^4 ", Journal of Fluid Mechanics, vol 220, pag. 459-484,1990.

BADR,H.M., DENNIS, S.C.R. & YOUNG, P.J.S. "Steady and Unsteady Flow Past a Rotating Circular Cylinder at low Reynolds numbers", Journal of Computational Fluid, vol 17, pag 579-609,1989.

BADR,H.M., DENNIS, S.C.R., "Time-dependent Viscous Flow past an Impulsively Started Rotating and Translating Circular Cylinder", Journal of Fluid Mechanics, vol 158, pag 447-488,1985.

BAEK, S., HYUNG, J.S., "Numerical simulation of the flow behind a rotary oscillating circular cylinder", Physics of Fluids, vol. 10, N. 4, April, 1998.

BLEVINS, ROBERT D., "Flow-induced vibration", 2ª edição, New York : Van Nostrand Reinhold, 1990.

CHEN, Y.M., OU, Y.R., PEARLSTEIN, A.J., "Development of the Wake Behind a Circular Cylinder Impulsively Started into Rotatory and Rectilinear motion", Journal of Fluid Mechanics, vol. 253, pag 449-484, 1993.

CHEW,Y.T, LUO, S.C., CHENG, M., "Numerical Study of Linear Shear Flow Past a Rotating Cylinder", Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, vol 66, pag. 107-125, 1997.

CHEW,Y.T., "Flow Past a Rotating Cylinder", In Proc. Intl. Conf. On Fluid Mechanics, Beijing, China, pag. 556-560, 1987.

CHEW, Y.T., CHENG, M. & LUO, S.C., "A Numerical Study of Flow Past a Rotating Circular Cylinder using Hybrid Vortex Scheme", *Journal of Fluid Mechanics*, vol 299, pag. 35-71, 1995.

CHOI, S., CHOI, H. & KANG, S., "Characteristics of flow over a rotationally oscillating cylinder at low Reynolds number", *Physics of Fluids*, Vol. 14, N. 8, August, 2002.

CHORIN, A.J., "Numerical Study of Slightly Viscous Flow", *Journal of Fluid Mechanics*, vol 57, pag 785-769, 1973.

CLEMENTS, R.R., "An inviscid Model of Two-dimensional Vortex Shedding", *Journal of Fluid Mechanics*, vol 57, pag 321-336, 1973.

COUTANCEAU, M., MÉNARD, C., "Influence of Rotation on Near-wake Development Behind an Impulsively Started Circular Cylinder", *Journal of Fluid Mechanics*, vol 158, pag. 399-446, 1985.

DÍAZ, F., GAVALDÁ, J., KAWALL, J.G., KEFFER, J.F. & GIRALT, F., "Asymmetrical Wake Generated by a Spinning Cylinder", *AIAA Journal*, vol. 23, pag. 49-54, 1985.

DÍAZ, F., GAVALDÁ, J., KAWALL, J.G., KEFFER, J.F. & GIRALT, F., "Vortex Shedding from a Spinning Cylinder", *Phys. Fluids*, Vol 26, pag 3454-3460, 1983.

FLATSCHART, R., "Estudo do escoamento ao redor de um agrupamento de cilindros", *Dissertação de mestrado*, EPUSP, Brasil, 2001.

FLUENT 6.1 User's Guide, Fluent Inc., February 2003.

FREGONESI, R.A., "Estudo do escoamento tridimensional ao redor de um agrupamento de cilindros em 'tandem' ",Dissertação de mestrado, EPUSP, Brasil, 2002.

GERRARD, J.H., "The Mechanics of the formation Region of Vortices Behind Bluff Bodies", Journal of Fluids Mechanics, vol 25, pag. 401-413, 1966.

GLAUERT,M.B., "The Flow Past a Rapidly Rotating Circular Cylinder", Proc. R. Soc. Lond.. A 230, pag 108-115, 1957.

GRAHAM, J.M.R., "Computation of Viscous Separated Flow Using a Particle Method", Numerical Methods in Fluid Mechanics, vol 3, pag 310-317, 1988.

GUSTAFSON, K.E., " Four principles of Vortex Motion", Vortex Methods and Vortex Motion, Society for Industrial and Applied Mathematics, pag 95-142, 1991.

JABARDO, P.J.S., "Estudo Numérico e experimental do escoamento ao redor de cilindros", Dissertação de mestrado, EPUSP, 2003.

KANG, S., CHOI, H. & LEE, S., "Laminar Flow past a Rotating Circular Cylinder", Physics of Fluids, vol 11, pag 3312-3321, Nov. 1999.

LEONARD, B. P. "A Stable and Accurate Convective Modeling Procedure Based on Quadratic Upstream Interpolation", Comput. Methods Appl. Mech. Eng., Vol. 19, 1979.

LING, G., SHIH, T., "Numerical Study on the Vortex motion patterns around a Rotating Circular Cylinder and their Critical Characters", International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol 29, pag. 229-248, 1999.

LUDWIG, G. R. "Na Experimental Investigations of Laminar Separation point from a Moving Wall", AIAA Paper, 64-6, 1964

LUGT, H.J., "Vortex flow in nature and technology ", Wiley-Interscience publication, 1983.

MAHFOUZ, F.M. & BADR, H.M., "Forced convection from a rotationally oscillating cylinder placed in a uniform stream", International Journal of Heat and Mass Transfer, 43, pag. 3093-3104, 2000.

MAGNUS, G., "On the Deflection of a Projectile", Berlim, Alemanha, 1852

MALISKA, C. R., "Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional", 2ª Edição, LTC Editora, 2004.

MENEGHINI, J.R., "Numerical Simulation of Bluff Body Flow Control using a Discrete Vortex Method", Ph.D. thesis, Imperial College of Science, Technology and Medicine, London, 1993.

MENEGHINI, J.R., SALTARA, F., SIQUEIRA, C.L.R. & FERRARI, J.A, "Numerical Simulation of flow Interference Between Two Circular Cylinders in Tandem and Side-by-side Arrangements", Journal of Fluids and Structures, 15, 2001.

MENEGHINI, J.R., "Projeto de Pesquisa no Tópico Geração e Desprendimento de Vórtices no escoamento ao redor de Cilindros", Livre-docência, EPUSP, Brasil, 2002.

MEHTA, R. D., "Aerodynamics of Sport balls", Annual Review of Fluid Mechanics, Volume 17, 1985.

MITTAL, S. and KUMAR, B., "Flow past a rotating cylinder", Journal of Fluid Mechanics, 476, February 2003.

MOORE, D.W., "The Flow past a Rotating Circular Cylinder in an Infinite Stream", Journal of Fluid Mechanics, vol 2, pag. 541-550, 1957.

NAGANO, S., NAITO, M. & TAKATA, H., "A numerical analysis of two-dimensional flow past a rectangular prism by a discrete vortex model", Computers and Fluids, vol.10, N.4, 1982.

PARK,W. & HIGUCHI, H., "Computation of Flow past a Single and Multiple Bluff Bodies by a Vortex Tracing Method", University of Minesota, 1989.

PATANKAR, S. V., "Numerical heat transfer and fluid flow", New York : Hemisphere Pub. Corp.: McGraw-Hill, 1980

PATANKAR, S. V. AND SPALDING, D. B., "A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three-dimensional Parabolic Flows", Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 15, p. 1787, 1972.

PELLER, H., "Thermofluidynamics Experiments with a Heated and Rotating Circular Cylinder in Crossflow, Part 2.1: Boundary Layer Profiles and Locations of Separations Points", Experiments Fluids, 4, pag 223-231, 1986

PRANDTL, L., "The Magnus effect and windpowered ships" , Naturwissenschaften, 13, 1925.

PRANDTL, L., & TIETJENS,O.G., "Applied Hydro- and Aeromechanics", Dover, McGraw-Hill Book Company, New York, 1934.

PRANDTL, L., "The Mechanics of Viscous Fluids", DURAND, W. F. editor, "Aerodynamic Theory, a General review of Progress", volume III, Dover Publications, 1963.

RAYLEIGH, J. W. S., BARON, "The theory of sound / by John William Strutt, baron Rayleigh, with a historical introduction by Robert Bruce Lindsay", 2nd ed. rev. and enl,New York : Dover, 1945.

ROSHKO, A., "On the drag and shedding frequency of two dimensional bluff bodies", Technical Report 3169, NACA, 1954.

SALTARA, F., MENEGHINI, J. R., FREGONESI, R. A., "Numerical simulation of the flow around an elastically mounted cylinder", International Journal Of Offshore And Polar Engineering. , v.13, n.2, p.99 - 104, 2003.

SALTARA, F., "Simulação Numérica do escoamento ao Redor de Cilindros", Tese de doutoramento, EPUSP, Brasil, 1999.

SALTARA, F., "Numerical simulation of flow around elastically mounted cylinder", International Journal of Offshore and Polar Engineers v. 13, n. 2, p. 99-104, jun. 2003.

SALTARA, F. - Comunicação Pessoal.

SARPKAYA,T., "Computational Methods with Vortices - The 1988 Freeman Scholar lecture", Journal of Fluids Engineering, vol 111, pag 5-52, 1989.

SHIELS, D., LEONARD, A. & STAGG, A., "Computational investigation of drag reduction on a rotationally oscilating cylinder", ESAIM: Proceedings, Vol. 1, pag. 307-323, 1996.

SIQUEIRA, C.R., "Simulação Numérica do escoamento ao redor de Cilindros: Aplicação a problemas bi e tridimensionais", Tese de doutoramento, EPUSP, Brasil, 1999.

SPALART, P.R., LEONARD, A.& BAGANOFF, D., "Numerical Simulation of Separated Flows", Ph.D. Thesis, Stanford, 1983.

SPALART, P.R., LEONARD, A., "Computation of Separated flow by Vortex Algorithm", AIAA Paper, 81-1246, 1981.

STOJKOVIC, D., BREUER, M. & DURST, F., "Effect of high rotation rates on the laminar flow around a circular cylinder", vol 14, pag 3160-3178, September 2002.

STOJKOVIC, D., SHÖN, P., BREUER, M. & DURST, F., "On the New Vortex Shedding Mode past a Rotating Circular Cylinder", vol 15, pag 1257-1260, May 2003.

SWANSON, W.M., "The Magnus effect: A summary of investigations to date", Journal of Basic Engineering, Vol.83, pag. 461 470, Set.1961

TANG, T. & INGHAM, D.B., "On Steady Flow Past a Rotating Circular Cylinder at Reynolds numbers 60 and 100", Computational Fluids, vol 9, pag. 217-230, 1991.

THOM, A., "Experiments on the Air Forces on Rotating Cylinders", ARC R and M 1018, 1925

THOM, A., "Experiments on the Flow Past a Rotating Cylinder", ARC R and M 1410, 1931

THOM, A., "The Aerodynamics of a rotating Cylinder", Thesis University of Glasgow, 1926

THOM, A., "The Pressures Round a Cylinder Rotating in an Air Current", ARC R and M 1082, 1926

VERSTEEG, H.K., MALALASEKERA, W., "An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method", Prentice Hall, 1995.

WILLIAMSON, C.H.K., "2-D and 3-D aspects of the wake of a cylinder, and their relation to wake computations." In Anderson, C.R. and Greengard, C., editors, Lectures in applied Mathematics, volume 28, American Mathematical Society, 1991.

WOOD, W.W., "Boundary Layer whose Streamlines are closed", Journal of Fluid Mechanics, 2, pag 77-87, 1957.

YAMAMOTO, C.T., "Estudo do escoamento Tridimensional ao redor de um agrupamento de cilindro lado-a-lado", Dissertação de mestrado, EPUSP, Brasil, 2002.

ZHANG, H. & KO,N.W.M, "Incompressible unsteady flow around a rotating circular cylinder", First Asian CFD Conference, Hong Kong, 1995.