

ROBERTO EIKI OSHIRO

LEIS DE SIMILARIDADE APLICADAS A ESTRUTURAS SOB IMPACTO

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de
São Paulo para obtenção do
Título de Mestre em Engenharia

**CONSULTA
FD-3801**

São Paulo
2004

ROBERTO EIKI OSHIRO

LEIS DE SIMILARIDADE APLICADAS A ESTRUTURAS SOB IMPACTO



FD-3807

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de
São Paulo para obtenção do
Título de Mestre em Engenharia

Área de concentração:
Engenharia Mecânica

Orientador:
Prof. Dr. Marcilio Alves

São Paulo

2004

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Marcílio Alves por sua orientação, apoio e amizade durante todo o desenvolvimento do trabalho.

Ao CNPq – Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico por ter financiado a pesquisa através da concessão da bolsa de mestrando segundo o processo 132711/2002-8.

À minha família, que sempre me apoiou e sem a qual, não conseguiria as realizações da minha vida.

A todos que, direta ou indiretamente, colaboraram para a realização deste trabalho.

RESUMO

Nesta dissertação o problema de não escalonamento observado em estruturas sensíveis à taxa de deformação e sujeitas a cargas de impacto é investigado de modo teórico e numérico. Para isso é aplicada uma adaptação do método de similaridade não direta, que permite o uso de uma base diferente da usual para a criação dos adimensionais do sistema. A correção é feita através de um ajuste na velocidade inicial da massa de impacto, que é devidamente alterada de forma a considerar o enrijecimento do material devido à taxa de deformação. Similarmente um procedimento de correção através da massa também é desenvolvido. Demonstra-se que os modelos analíticos escalonados por um fator β conseguem prever com maior precisão o comportamento do protótipo se a solução mostrada nesta dissertação for utilizada. Também aplica-se o método proposto em modelos feitos de material diferente do protótipo de modo a se mostrar sua generalidade. Para as simulações numéricas um tubo cilíndrico sujeito a carregamento dinâmico foi utilizado e, apesar da complexidade do modelo, alguns resultados significativos foram obtidos. Finalmente, o trabalho apresenta uma discussão detalhada sobre as vantagens e limitações do processo de correção do escalonamento.

ABSTRACT

The problem of non scalability of strain rate sensitive structures subject to dynamic loading is investigated theoretically and numerically in this dissertation. For that, an adaptation of non-direct similarity is applied and so, we use a different basis from usual to create the dimensionless numbers. The correction is done by adjusting the initial velocity of impact mass. By doing so, the model takes the strain rate effects into account. In a similar way, a methodology which allows to correct the impact mass is also developed. It is shown that analytical models scaled by a factor β can estimate the behavior of prototype closely when the procedure here is used. In order to demonstrate the generality of this methodology, models made of different material from prototype are solved. Moreover, numerical simulations of a cylindrical tube under axial impact are done. Despite of complexity of this model, some significant results could be obtained. Finally, we introduce a detailed discussion about the advantages and limitations of the correction procedure.

ERRATA

PÁGINA	POSIÇÃO	ONDE SE LÊ	LEIA-SE
-	título	ABSTRACT	ABSTRACT
-	13ª linha da LISTA DE SÍMBOLOS	força de pico ou carga	força axial ou carga
19	equação da 1ª linha	$\ell^{a_1-a_3} T^{-a_1-2a_3} M^{a_2+a_3}$	$\ell^{a_1-a_2} T^{-a_1-2a_2} M^{a_2+a_3}$
44	equação 3.40	1/q	1/p
45	equação da 3ª linha	1/q	1/p
45	equação da 13ª linha	1/q	1/p
45	equação 3.42	1/q	1/p
45	equação 3.43	1/q	1/p
46	2ª coluna da Tabela 6	q = 5	p = 5
69	6ª linha	q = 5	p = 5
73	4ª linha	força de pico	força axial
73	10ª linha	força de pico	força axial
74	legenda da Figura 29	força de pico	força axial
75	legenda da Figura 32	força de pico	força axial
79	legenda da Figura 36	força de pico	força axial
80	8ª linha	forças de pico	forças axiais
80	11ª linha	A força máxima de pico	O pico máximo de força axial
81	legenda da Figura 38	força de pico	força axial
82	legenda da Figura 40	força de pico	força axial
83	legenda da Figura 42	força de pico	força axial
84	6ª linha	a maior beneficiada é a máxima força de pico	o maior beneficiado é o pico máximo de força axial
85	legenda da Figura 44	força de pico	força axial
86	legenda da Figura 46	força de pico	força axial
87	legenda da Figura 48	força de pico	força axial
88	4ª linha	pico de força máximo	pico máximo de força axial
89	legenda da Figura 50	força de pico	força axial
90	legenda da Figura 52	força de pico	força axial
95	26ª linha	força de pico	força axial

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LIST DE SÍMBOLOS

1 – INTRODUÇÃO	1
1.1 – Ondas elasto-plásticas	1
1.2 – Efeitos de inércia	2
1.3 – Efeitos da taxa de deformação	2
1.4 – Absorvedores de energia de impacto	3
1.5 – Modelos em escala	6
1.6 – Fatores de escala para o modelo	7
1.7 – Números adimensionais	10
1.8 – Técnica de similitude não direta	12
1.9 – Não escalonabilidade de estruturas sujeitas a impacto	13
1.10 – Objetivos	15
2 – MÉTODO DE CORREÇÃO	17
3 – CORREÇÃO DE MODELOS ANALÍTICOS	25
3.1 – Modelo de Calladine	27
3.1.1 – Formulação	28
3.1.2 – Correção	36
3.1.3 – Resultados	38
3.2 – Viga engastada sofrendo um impulso de velocidade	43
3.2.1 – Formulação	43
3.2.2 – Correção	45
3.2.3 – Resultados	46
3.3 – Modelo de viga engastada sofrendo impacto	48
3.3.1 – Formulação	48
3.3.2 – Correção	50
3.3.3 – Resultados	51
4 – CORREÇÃO ATRAVÉS DA MASSA	55
4.1 – Correção de modelos analíticos	57
4.1.1 – Modelo de Calladine	57
4.1.2 – Modelo de viga engastada sofrendo impacto	60
5 – MODELOS COM MATERIAIS DISTINTOS	62
5.1 – Modelo de Calladine	62
5.2 – Modelo de viga engastada sofrendo impulso de velocidade	65
5.3 – Modelo de viga engastada sofrendo impacto	65
6 – SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	68
6.1 - Detalhes da simulação	68
6.2 - Validação do modelo numérico	71
6.3 - Modelo sem taxa de deformação	72
6.4 - Modelo com taxa de deformação	75
6.4.1 – Tubo com a base simplesmente apoiada	77
6.4.2 – Tubo com a base engastada	88
7 – DISCUSSÃO	93
8 – CONCLUSÃO	98

ANEXOS.....	100
Correção com fatores propostos por Calladine	100
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	104
APÊNDICE A	i
APÊNDICE B	iii
APÊNDICE C	v

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Curva tensão (σ) deformação (ϵ) para aço doce em várias taxas de deformação uniaxial.....	3
Figura 2 – Tipos de flambagem	5
Figura 3 – Influência da massa de impacto no modo de flambagem de um tubo de alumínio engastado na base e simplesmente apoiado no topo	6
Figura 4 – Esquema da estrutura utilizada por Drazetic et al. (1994).....	12
Figura 5 – Estruturas testadas por Booth; Collier; Miles (1983)	14
Figura 6 – Modelos escalonados testados sob impacto: ensaio de queda livre para espécimes de aço “eggbox” e placas guias	14
Figura 7 – Variação do fator de tensão em função da escala e da taxa de deformação. Valores aplicados na equação constitutiva de Cowper-Symonds com $p=5$ e $D=40$, constantes típicas do aço carbono.	18
Figura 8 – Fator de velocidade calculado através de (2.15) para diversas escalas e taxas de deformação.....	24
Figura 9 – Estruturas do tipo I e II idealizadas	26
Figura 10 – Exemplos de estruturas do tipo I e II.	26
Figura 11 – Modelo de Calladine para a estrutura rígida sob impacto.	28
Figura 12 – Modelo de Calladine para uma estrutura compressível	29
Figura 13 – Equilíbrio de esforços no ponto B no modelo de Calladine.	30
Figura 14 – Modelo de Calladine: ângulo de rotação em função do tempo adimensional, modelos não corrigidos.....	39
Figura 15 – Modelo de Calladine: ângulo de rotação em função do tempo adimensional, modelos corrigidos através da velocidade	41
Figura 16 – Viga engastada sofrendo um impulso de velocidade V_0	43
Figura 17 – Viga engastada sofrendo impacto de uma massa no seu meio comprimento.	48
Figura 18 – Modelo de viga engastada sofrendo impacto no meio comprimento: deslocamento final $w_f \times \lambda$ para velocidade inicial não corrigida.	52
Figura 19 – Modelo de viga engastada sofrendo impacto no meio comprimento: deslocamento final $w_f \times \lambda$ para velocidade inicial corrigida.....	54
Figura 20 – Modelo de Calladine: ângulo de rotação em função do tempo adimensional, correção através da massa de impacto	58
Figura 21 – Modelo de viga sofrendo impacto no meio comprimento: deslocamento final w_f em função do adimensional λ . Correção feita através da massa de impacto.....	60
Figura 22 – Modelo de Calladine: ângulo de rotação em função do tempo adimensional. Modelo constituído de material diferente do protótipo	63
Figura 23 – Modelo de viga engastada sofrendo impacto: deslocamento final em função de λ para modelos com materiais diferentes	66
Figura 24 – Formatos finais obtidos para uma velocidade inicial de 14,5 m/s e material sem o efeito da taxa de deformação	71

Figura 25 – Formatos finais obtidos para uma velocidade inicial de 14,5 m/s e material com o efeito da taxa de deformação.....	72
Figura 26 – Formatos finais obtidos para uma velocidade inicial de 18,0 m/s e material com o efeito da taxa de deformação.....	72
Figura 27 – Formato final para cilindros sem efeito da taxa de deformação que sofreram impacto a uma velocidade inicial de 20 m/s	73
Figura 28 – Comparação entre protótipo e modelo: deslocamento no topo da estrutura em função do tempo adimensional. Taxa de deformação ignorada e velocidade inicial de 20 m/s.....	73
Figura 29 – Comparação entre protótipo e modelo: força de pico em função do tempo adimensional. Taxa de deformação ignorada e velocidade inicial de 20 m/s	74
Figura 30 – Formato final para cilindros sem efeito da taxa de deformação que sofreram impacto a uma velocidade inicial de 30 m/s	74
Figura 31 – Comparação entre protótipo e modelo: deslocamento no topo da estrutura em função do tempo adimensional. Taxa de deformação ignorada e velocidade inicial de 30 m/s.....	74
Figura 32 – Comparação entre protótipo e modelo: força de pico em função do tempo adimensional. Taxa de deformação ignorada e velocidade inicial de 30 m/s. ...	75
Figura 33 – Comparação entre protótipo e modelo: energia cinética em função do tempo adimensional. Taxa de deformação considerada na equação constitutiva e velocidade inicial de 40 m/s na escala unitária.	76
Figura 34 – Geometria final para tubos cilíndricos, considerando efeito da taxa de deformação, cujo protótipo sofreu impacto a uma velocidade inicial de 40 m/s e massa de 4,375 kg. Base simplesmente apoiada	77
Figura 35 – Comparação entre protótipo e modelo 1/10: deslocamento no topo da estrutura em função do tempo adimensional. Taxa de deformação considerada na equação constitutiva e base simplesmente apoiada. Velocidade inicial de 40 m/s e massa de 4,375 kg na escala unitária.	78
Figura 36 – Comparação entre protótipo e modelo 1/10: força de pico em função do tempo adimensional. Taxa de deformação considerada na equação constitutiva e base simplesmente apoiada. Velocidade inicial de 40 m/s e massa de 4,375 kg na escala unitária.	79
Figura 37 – Geometria final para tubos cilíndricos considerando efeito da taxa de deformação, cujo protótipo sofreu impacto a uma velocidade inicial de 30 m/s e massa de 7,7778 kg. Base simplesmente apoiada	81
Figura 38 – Comparação entre protótipo e modelo 1/10 com efeito da taxa de deformação. Velocidade inicial de 30 m/s e massa de 7,7778 kg na escala unitária. Base simplesmente apoiada	81
Figura 39 – Geometria final para tubos cilíndricos considerando efeito da taxa de deformação, cujo protótipo sofreu impacto a uma velocidade inicial de 50 m/s e massa de 2,8 kg. Base simplesmente apoiada	82
Figura 40 – Comparação entre protótipo e modelo 1/10 com taxa de deformação. Velocidade inicial de 50 m/s e massa de 2,8 kg na escala unitária. Base simplesmente apoiada	82

Figura 41 – Geometria final para tubos cilíndricos considerando efeito da taxa de deformação, cujo protótipo sofreu impacto a uma velocidade inicial de 60 m/s e massa de 1,9444 kg. Base simplesmente apoiada	83
Figura 42 - Comparação entre protótipo e modelo 1/10 com taxa de deformação. Velocidade inicial de 60 m/s e massa de 1,9444 kg na escala unitária. Base simplesmente apoiada	83
Figura 43 – Geometria final para tubos cilíndricos considerando efeito da taxa de deformação, cujo protótipo sofreu impacto a uma velocidade inicial de 30 m/s e massa de 7,7778 kg. Base simplesmente apoiada	84
Figura 44 – Comparação entre protótipo e modelo 1/20 com taxa de deformação. Velocidade inicial de 30 m/s e massa de 7,7778 kg na escala unitária. Base simplesmente apoiada	85
Figura 45 – Geometria final para tubos cilíndricos considerando efeito da taxa de deformação, cujo protótipo sofreu impacto a uma velocidade inicial de 40 m/s e massa de 4,375 kg. Base simplesmente apoiada	85
Figura 46 – Comparação entre protótipo e modelo 1/20 com taxa de deformação. Velocidade inicial de 40 m/s e massa de 4,375 kg na escala unitária. Base simplesmente apoiada	86
Figura 47 – Geometria final para tubos cilíndricos considerando efeito da taxa de deformação, cujo protótipo sofreu impacto a uma velocidade inicial de 60 m/s e massa de 1,9444 kg. Base simplesmente apoiada	86
Figura 48 – Comparação entre protótipo e modelo 1/20 com taxa de deformação. Velocidade inicial de 60 m/s e massa de 1,9444 kg na escala unitária. Base simplesmente apoiada	87
Figura 49 – Geometria final para tubos cilíndricos considerando efeito da taxa de deformação, cujo protótipo sofreu impacto a uma velocidade inicial de 30 m/s e massa de 7,7778 kg. Base engastada.....	88
Figura 50 – Comparação entre protótipo e modelo 1/10 com taxa de deformação. Velocidade inicial de 30 m/s e massa de 7,7778 kg na escala unitária. Base engastada	89
Figura 51 – Geometria final para tubos cilíndricos considerando efeito da taxa de deformação, cujo protótipo sofreu impacto a uma velocidade inicial de 40 m/s e massa de 4,375 kg. Base engastada.....	89
Figura 52 – Comparação entre protótipo e modelo 1/10 com taxa de deformação. Velocidade inicial de 40 m/s e massa de 4,375 kg na escala unitária. Base engastada	90
Figura 53 – Comparação entre a taxa de deformação gerada na simulação e taxa obtida através da equação (6.1). Escala 1/10 e base simplesmente apoiada. Velocidade de impacto de 40 m/s e massa de 0,004375 kg.	91
Figura 54 – Comparação entre a taxa de deformação gerada na simulação e taxa obtida através da equação (6.1). Escala 1/20 e base simplesmente apoiada. Velocidade de impacto de 30 m/s e massa de 0,000972 kg.	92
Figura 55 – Taxa de deformação em função da velocidade inicial. Comparação entre curva real e aproximação linear	94

Figura 56 – Ângulo de rotação em função do tempo adimensional. Aplicação dos fatores de escala propostos por Calladine.	101
Figura 57 – Correção da viga engastada sob impacto através da utilização dos fatores propostos por Calladine.....	103
Figura 58 – Esquema para viga após sofrer uma variação na inclinação.....	iii
Figura 59 – Seção transversal de uma viga com dimensões $b \times h$	vi

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Fatores de escala	10
Tabela 2 – Variáveis expressas em função da base $V_0-\sigma_d-G$	19
Tabela 3 – Valores empregados para o modelo de Calladine.	38
Tabela 4 – Modelo de Calladine: comparação entre valores obtidos pelo protótipo e pelos modelos. Velocidade inicial não corrigida (6,17 m/s).	40
Tabela 5 – Modelo de Calladine: comparação entre valores obtidos pelo protótipo e pelos modelos. Velocidade inicial corrigida.	42
Tabela 6 – Valores para o modelo de viga sofrendo impulso de velocidade.	46
Tabela 7 – Resultados do modelo de viga engastada sofrendo um impulso de velocidade sem correção.	47
Tabela 8 – Resultados do modelo de viga engastada sofrendo impulso com a velocidade corrigida.	47
Tabela 9 – Dados numéricos utilizados para o modelo de viga engastada sofrendo impacto no meio comprimento	51
Tabela 10 – Resultados do modelo de viga engastada sofrendo um impacto. Velocidade inicial de 10m/s.	52
Tabela 11 – Resultados do modelo de viga engastada sofrendo um impacto com a velocidade corrigida. Velocidade inicial de 10 m/s para o protótipo.	53
Tabela 12 - Resultados do modelo de viga engastada sofrendo um impacto com a velocidade corrigida. Velocidade inicial de 55 m/s para o protótipo.	53
Tabela 13 – Modelo de Calladine: comparação entre valores obtidos pelo protótipo e pelos modelos. Correção feita através da massa de impacto.	59
Tabela 14 – Resultados do modelo de viga engastada sofrendo impacto com a massa corrigida. Velocidade inicial de 55 m/s.	61
Tabela 15 – Modelo de Calladine: comparação entre valores obtidos pelo protótipo e pelos modelos com material diferente. Velocidade inicial não corrigida de 6,17 m/s.	64
Tabela 16 – Resultados de viga sofrendo impulso com a velocidade corrigida. Materiais diferentes entre modelos e protótipo.	65
Tabela 17 – Valores de massa e velocidade inicial utilizados em cada simulação.	70
Tabela 18 – Resumo dos erros entre modelo 1/10 e protótipo para tubos sensíveis à taxa de deformação e base simplesmente apoiada.	79
Tabela 19 – Resumo dos erros entre modelo 1/20 e protótipo para tubos sensíveis à taxa de deformação e base simplesmente apoiada.	87
Tabela 20 – Resumo dos erros entre modelo 1/10 e protótipo para tubos sensíveis à taxa de deformação e base engastada.	90
Tabela 21 – Modelo de Calladine: comparação dos ângulos de rotação no final da primeira fase para diversos fatores de escala.	95
Tabela 22 – Fatores de escala proposto por Calladine.	100
Tabela 23 – Resultados obtidos com a aplicação dos fatores propostos por Calladine.	101



LISTA DE SÍMBOLOS

A	aceleração
a_i	expoente na análise dimensional
b	largura da viga
c	velocidade de propagação de onda dentro da estrutura
C	$12S\sigma_d / (m\ell)$
C_i	constante linear
D	coeficiente para a equação constitutiva de Cowper-Symonds
D_n	damage number
E_G	energia cinética referente à massa de impacto no modelo de Calladine
E_x	energia cinética referente à translação horizontal das barras no modelo de Calladine
E_{y1}	energia cinética referente à translação vertical das barras inferiores no modelo de Calladine
E_{y2}	energia cinética referente à translação vertical das barras superiores no modelo de Calladine
F	força de pico ou carga (Figura 9)
F_B	força atuante no ponto B da estrutura (Figura 13)
G	massa do corpo de impacto
h	altura da viga
h'	h / L_1
k	coeficiente para o material
K	energia cinética do sistema
ℓ	comprimento total da viga (Figura 12) ou dimensão de comprimento
ℓ_i	dimensão da estrutura
L	meio comprimento da viga (Figura 11)
L_2	distância do ponto de impacto ao engaste direito da viga
L_1	distância do ponto de impacto ao engaste esquerdo da viga
m	massa das barras no modelo de Calladine
\bar{m}	coeficiente para a equação constitutiva de Cowper-Symonds
m'	massa por comprimento da barra
M	momento fletor para escoamento dinâmico na seção ou dimensão de massa
M_0	momento fletor necessário para completo escoamento da seção transversal

M_1	momento fletor nos vínculos superior e inferior do modelo de Calladine (Figura 11)
M_2	momento fletor nos vínculos centrais do modelo de Calladine (Figura 11)
n	razão entre tensão de escoamento dinâmica e estática σ_d / σ_0
\bar{n}	coeficiente para a equação constitutiva de Cowper-Symonds
P	coeficiente para a equação constitutiva de Cowper-Symonds
q	compressão axial das barras (Figura 12)
R_n	response number
Q	força generalizada
r	razão entre lado esquerdo e direito da viga em relação ao ponto de impacto L_1 / L_2
s	variável equivalente ao tempo no subespaço de transformação ou deflexão (Figura 9)
S	área equivalente das seções transversais da viga
t, T	tempo ou dimensão de tempo
t_1	tempo necessário para o distúrbio percorrer uma determinada distância
u	$GV_0^2 / (2M_0)$
U	deslocamento no topo do tubo cilíndrico ou deflexão (Figura 9)
v	posição relativa na barra (Figura 58)
V	velocidade da massa de impacto em determinado instante
V_0	velocidade inicial da massa de impacto
V_x	velocidade horizontal das barras no modelo de Calladine
V_{y1}	velocidade vertical das barras inferiores no modelo de Calladine
V_{y2}	velocidade vertical das barras superiores no modelo de Calladine
w	deslocamento transversal no ponto central da estrutura (Figura 12)
W	trabalho virtual
w_0	deslocamento transversal inicial no ponto central da estrutura (Figura 12)
w_1	deslocamento transversal no final da primeira fase do impacto
w_f	W_f / L
W_f	máximo deslocamento no centro da viga
W_s	transformada de Laplace de w
y	deslocamento do topo no modelo de Calladine (Figura 12)
z	distância em relação à linha neutra (Figura 59)
α_{mi}	i 'ésimo coeficiente na equação constitutiva do material para o modelo

α_{pi}	i 'ésimo coeficiente na equação constitutiva do material para o protótipo
β	fator de escalonamento geométrico
β_i	relação da variável i entre modelo e protótipo
γ	$\gamma = L_1 / h$
$\dot{\gamma}_{xy}$	distorção no plano xy
δ	deslocamento
ε	deformação
$\dot{\varepsilon}$	taxa de deformação
$\bar{\dot{\varepsilon}}$	taxa de deformação média
$\dot{\varepsilon}_{eq}$	taxa de deformação equivalente
$\dot{\varepsilon}_{xx}$	taxa de deformação na direção x
$\dot{\varepsilon}_z$	taxa de deformação axial em uma posição z
θ	ângulo de rotação das vigas no modelo de Calladine (Figura 11)
θ_0	ângulo inicial no modelo de Calladine (Figura 12)
θ_1	ângulo de rotação final da primeira fase do impacto
κ	curvatura
λ	$4\rho V_0^2 L^2 / (\sigma_0 h^2)$
λ'	comprimento plástico equivalente
Π_i	número adimensional
ρ	densidade de mássica
σ	tensão
σ_0	tensão de escoamento quasi-estática
σ_d	tensão de escoamento dinâmica
τ_1	instante do fim da primeira fase no modelo de Calladine
τ_2	instante do fim da segunda fase no modelo de Calladine



1 – INTRODUÇÃO

A resposta de estruturas mecânicas sujeitas a cargas de impacto vem sendo cada vez mais estudada devido à necessidade de se projetar estruturas mais eficientes e seguras. Veículos, navios, aviões, usinas nucleares, entre outros se beneficiam de análises sofisticadas, também impostas pela legislação e normas referentes a sua performance em solicitações extremas de cargas.

Estruturas reagem de forma diferenciada quando solicitadas de modo estático ou dinâmico, sendo que a última é muito mais complexa por envolver uma série de fatores extras. Por exemplo, é sabido que o material responde de modo diferente dependendo da velocidade com que é solicitado. Este efeito não linear da taxa de deformação pode desempenhar um papel fundamental na resposta estrutural. Enumeram-se ainda efeitos transientes de ondas elásticas e plásticas e os efeitos de inércia.

1.1 – Ondas elasto-plásticas

Johnson (1972) detalha a propagação de ondas ou pulsos em uma estrutura simples. Uma onda de tensão é transmitida através do corpo quando diferentes partes dela não estão em equilíbrio. No caso de impacto de corpos sólidos, um tempo finito

é necessário para que o equilíbrio se estabeleça e enquanto isso os pulsos irão se propagar. Uma característica da velocidade de propagação da onda é que ela é, em uma primeira aproximação, uma função apenas do material: no alumínio a 0°C , por exemplo, a velocidade de propagação de uma onda elástica na direção longitudinal é de 5090 m/s, enquanto no ferro fundido é de 3970 m/s (Johnson, 1972). Deve-se ressaltar ainda que, apesar de surgirem tanto ondas elásticas como plásticas, na maioria dos casos de impacto somente a segunda é relevante, pois sua intensidade é muito maior do que o das ondas elásticas. Além disso, o tempo de propagação das ondas elásticas é bastante pequeno (da ordem de μs) quando comparado ao tempo de duração da resposta estrutural global, que é da ordem de ms (Zukas, 1982).

1.2 – Efeitos de inércia

Um exemplo de como os efeitos de inércia afetam o comportamento das estruturas pode ser encontrado em Harrigan; Raid; Peng (1999), Karagiozova; Alves; Jones (2000) e Langseth; Hopperstad; Berstad (1999). As duas primeiras referências realizaram várias simulações de tubos sujeitos a impacto variando-se a velocidade inicial, a massa de impacto e a geometria do tubo. Diferentes configurações finais foram obtidas para a mesma energia de impacto inicial, porém aplicada com diferentes combinações de massa e velocidade.

1.3 – Efeitos da taxa de deformação

A taxa de deformação também influencia o comportamento do material e a esse fenômeno dá-se o nome de viscoplasticidade. A Figura 1 mostra como a curva tensão deformação do aço é alterada conforme a velocidade do teste de tração. Por exemplo, uma taxa de deformação de $208,8 \text{ s}^{-1}$ aplicada ao aço doce chega a alterar a sua tensão de escoamento em um fator de 1,8 em relação a uma carga estática. O aço é reconhecidamente muito sensível a essa taxa, mas nem sempre esse fator chega a ser determinante, como por exemplo, no caso do alumínio (Booth; Collier; Miles, 1983); (Jones, 1997); (Karagiozova; Jones, 2001a).

Uma forma simplificada de considerar a taxa de deformação é através da equação constitutiva de Cowper-Symonds (Jones, 1997), que depende de dados experimentais para ajustar seus coeficientes da melhor forma possível. Essa relação consegue resultados razoáveis para alguns materiais dúcteis e tem sido largamente utilizada.

A obtenção do comportamento do material em casos de valores extremos da taxa de deformação é um problema. Na maioria das equações constitutivas somente uma pequena faixa de taxas pode ser utilizada. Zukas (1982) resume vários testes que podem ser feitos para obter o comportamento material desde baixas taxas (0s^{-1} a 10^{-6}s^{-1}) até valores muito altos (10^4s^{-1} ou mais), onde arranjos especiais são necessários. Um fator observado também por Zukas (1982) é que as forças inerciais começam a ter importância em torno de 1s^{-1} , abaixo disso elas podem ser ignoradas.

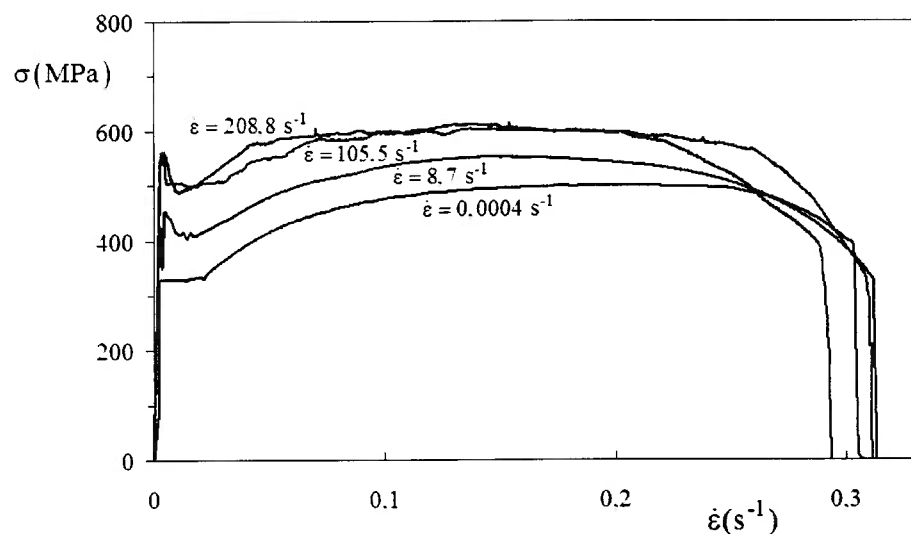


Figura 1 – Curva tensão (σ) deformação (ϵ) para aço doce em várias taxas de deformação uniaxial (Alves; Jones, 2002).

1.4 – Absorvedores de energia de impacto

Idealmente, uma estrutura sujeita a cargas de impacto, como em uma colisão, deve absorver de maneira controlada as energias envolvidas de modo que a mesma

não seja transmitida, por exemplo, aos passageiros, no caso de veículos de transporte. Por isso é necessário estudar o comportamento de estruturas inteiras ou partes dela sob condições de carregamento dinâmico e então definir como elas vão se deformar e quanto de energia cinética podem absorver.

Um exemplo de uma estrutura capaz de absorvedor energia de forma simples e eficiente são tubos. O impacto axial destes componentes tem sido sistematicamente estudado de maneira numérica (Karagiozova; Jones, 2000a); (Karagiozova; Jones, 2000b); (Karagiozova; Jones, 2002); (Langseth; Hopperstad; Berstad, 1999), teórica (Karagiozova; Jones, 1995); (Karagiozova; Jones, 1996); (Li; Jones, 2000); (Wierzbicki; Abramowicz, 1983) e experimental (Abramowicz; Jones, 1997); (Alves; Micheli, 2000); (Alves; Micheli, 2001); (Meng; Al-Hassani, Solden, 1983).

Nestes estudos explora-se o modo de colapso dos tubos, o pico de força, a força média ou a capacidade de absorção de energia. Fica demonstrado que vários são os fatores que podem influenciar estes parâmetros como as condições do impacto, a velocidade e a massa do corpo de impacto, o material da estrutura, a relação de massas entre corpo de impacto e estrutura e a geometria.

Em Jones (1997) um maior detalhamento dos tipos de flambagem em tubos pode ser encontrado, na qual se definem dois tipos principais: a progressiva e a dinâmica plástica, mostrados na Figura 2. O primeiro tipo se caracteriza pela formação de dobras consecutivas e que se iniciam nas extremidades. Esse caso é geralmente observado para velocidades de impacto menores, quando os efeitos inerciais não são tão significativos e o tempo de duração é muito maior que o tempo de transição das ondas elásticas.

O segundo tipo de flambagem, chamada de flambagem dinâmica, se caracteriza pela formação de dobras ao longo de todo o corpo e ocorre para velocidades maiores de impacto. Deve ser ressaltado que, apesar de historicamente a flambagem progressiva estar associada a baixas velocidades, alguns autores já a identificaram em velocidades mais altas (Karagiozova; Jones, 2001b). Esse efeito foi observado somente para materiais insensíveis à taxa de deformação e com a estrutura de parede delgada ou módulo de encruamento baixo. Ainda, é demonstrado em Karagiozova; Alves; Jones (2000), que a estrutura tem uma capacidade maior de

absorção de energia cinética no regime de flambagem plástica dinâmica do que no progressivo, pelo menos para o caso estudado de tubos.

Outros tipos de flambagem também são possíveis como a global (ver Figura 2 c), em que a estrutura deformada apresenta poucas dobras plásticas e colapsa inteiramente em torno de uma rótula plástica. Obviamente, nesse regime a quantidade de energia absorvida é muito pequena em comparação com os modos descritos acima. Por essa razão, geralmente deseja-se evitar esse comportamento.



Figura 2 – Tipos de flambagem. (a) Flambagem dinâmica progressiva (Gallina, 2004). (b) Flambagem dinâmica plástica (Jones, 1997). (c) Flambagem global.

Um exemplo das faixas de transição entre os regimes descrito acima pode ser visto na Figura 3 para o caso de tubos de alumínio sob impacto. As curvas foram obtidas de forma numérica por Karagiozova; Alves; Jones, 2000 e fica evidente que essa estrutura tem maior capacidade de absorção de energia para velocidades maiores de impacto.

Alguns modos de absorção de energia diferentes da flambagem axissimétrica também têm sido obtidos. Entre eles, o processo de inversão interna em tubos (Harrigan; Reid; Peng, 1999); (Reid, 1993), o rasgamento axial (Reid, 1993) e uso de tubos compósitos reforçados com fibras (Hull, 1983). Reid (1993) comparou a eficiência destes três métodos e a de flambagem axissimétrica e verificou que o rasgamento axial não consegue absorver tanta energia quanto os demais.

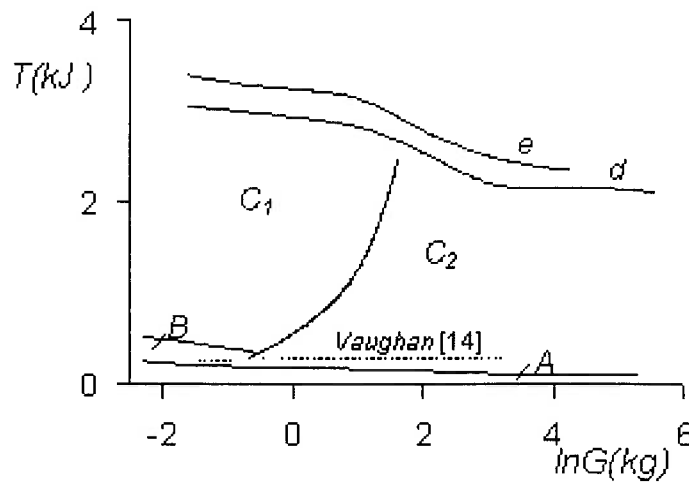


Figura 3 – Influência da massa de impacto no modo de flambagem de um tubo de alumínio engastado na base e simplesmente apoiado no topo. A – compressão axial uniforme. B – flambagem plástica dinâmica. C1 – início da flambagem plástica dinâmica seguida de flambagem progressiva. C2 – flambagem progressiva. d – máxima energia que pode ser absorvida por uma casca feita de material não sensível à taxa de deformação. e – máxima energia que pode ser absorvida por uma casca feita de material sensível à taxa de deformação.

(Karagiozova; Alves; Jones, 2000).

1.5 – Modelos em escala

Chegando a este ponto resumimos as principais características envolvendo o impacto em estruturas. Naturalmente que os testes reais para estudo deste fenômeno são destrutivos. Deste modo, quando estruturas de dimensões extremas como aviões, trens e navios precisam ser testados, a viabilidade econômica e técnica de tais experimentos se tornam proibitivas. Certamente é desejável que ensaios de impacto em componentes de grandes dimensões sejam substituídos por testes em modelos reduzidos. Estruturas dimensionadas adequadamente em escalas diferentes são então empregadas e elas objetivam reproduzir o fenômeno a ser observado em escala real de forma exata; a esta técnica dá-se o nome de similaridade ou similitude. Exemplos de aplicações podem ser encontrados na indústria naval, aeronáutica e em usinas nucleares.

A Similaridade para estes casos torna-se extremamente útil e permite uma economia significativa de tempo e recursos. Ainda, junto ao estudo de similaridade, podem ser identificados os números adimensionais predominantes no fenômeno e que se mostram extremamente úteis no controle e entendimento dos experimentos.

A Similaridade deve gerar um modelo, ou seja, uma estrutura em escala não unitária, com dados que possam, por meio de transposição de escalas, fornecer forças, momentos e cargas dinâmicas que existiriam no protótipo em tamanho real. Para tanto o modelo e o protótipo devem atender aos seguintes requisitos (Fox; McDonald, 1998):

- primeiramente o modelo e o protótipo devem ser geometricamente semelhantes. A semelhança geométrica requer que ambos tenham a mesma forma, e que todas as dimensões lineares do modelo sejam relacionadas com correspondentes dimensões do protótipo por um fator de escala constante;
- outro requisito é a semelhança cinemática, ou seja, as velocidades em pontos correspondentes deverão estar no mesmo sentido e relacionar-se em magnitude por um fator de escala constante.

Quando protótipo e modelo têm distribuições de forças tais que tipos idênticos de forças são paralelas e relacionam-se em magnitude por um fator de escala constante em todos os pontos correspondentes, então os dois sistemas são dinamicamente semelhantes. Os requisitos para semelhança dinâmica são mais restritivos, pois os sistemas devem possuir tanto semelhança cinemática quanto geométrica.

A fim de estabelecer as condições necessárias para a completa semelhança dinâmica, todas as forças que são importantes no fenômeno devem ser consideradas. As condições de teste devem ser estabelecidas de tal forma que todas as forças importantes relacionem-se pelo mesmo fator de escala entre os escoamentos para o modelo e para o protótipo.

1.6 – Fatores de escala para o modelo

O procedimento básico para se determinar o comportamento das variáveis em um modelo escalonado por um fator de escala β consiste na aplicação do chamado

teorema II de Buckingham. Este teorema é explorado neste capítulo de forma a oferecer as noções básicas da teoria de modelos, necessários à compreensão dos capítulos seguintes.

Pelo teorema dos II de Buckingham a condição para semelhança é atendida se os grupos adimensionais que governam o fenômeno forem iguais (Baker; Westine; Dodge, 1991). Porém, em muitos estudos com modelos, a consecução de semelhança dinâmica exige a reprodução de diversos grupos adimensionais. Em alguns casos, a completa semelhança dinâmica entre modelo e protótipo pode não ser atingida, sendo assim uma semelhança incompleta. Para esses casos alguns ajustes serão necessários nos resultados obtidos pelo modelo.

As variáveis envolvidas no fenômeno devem também seguir uma relação de escalonamento que pode ser obtida através de uma simples análise dimensional (Fox; McDonald, 1998); (Skoglund, 1967); (Szirtes, 1998). No caso de estruturas mecânicas esse escalonamento geralmente é feito através da geometria, sendo que cada dimensão do modelo é relacionado por um fator de escala β com a respectiva parte do protótipo. Além disso, o material adotado geralmente é o mesmo para ambos. A partir destas duas considerações, as demais variáveis são obtidas e são bem conhecidas na literatura (Johnson, 1972); (Jones, 1997); (Baker; Westine; Dodge, 1991).

Dessa maneira o fator de escala é definido como

$$\beta = \frac{\ell_{\text{modelo}}}{\ell_{\text{protótipo}}} \quad (1.1)$$

e então as relações entre as variáveis do modelo e do protótipo podem ser estabelecidas quando as propriedades materiais para ambos são idênticas.

A variável massa (m) relaciona-se com a geometria através da densidade mássica ρ , $m = \rho \ell_1 \ell_2 \ell_3$, sendo que ℓ_1 , ℓ_2 e ℓ_3 são as dimensões da estrutura. Portanto a massa no modelo é dada por

$$m_{\text{modelo}} = \rho(\beta \ell_1)(\beta \ell_2)(\beta \ell_3) = \beta^3 m_{\text{protótipo}} \quad (1.2)$$

A deformação uniaxial de engenharia para o protótipo é definida por $\varepsilon = \delta/L$ e como o deslocamento δ e o comprimento ℓ são escalonados por β , a deformação para o modelo torna-se

$$\epsilon_{\text{modelo}} = \frac{\beta\delta}{\beta\ell} = \frac{\delta}{\ell} = \epsilon_{\text{protótipo}}, \quad (1.3)$$

ou seja, a deformação de engenharia para modelo e protótipo é a mesma. Essa conclusão é independente das propriedades materiais.

A tensão de engenharia relaciona-se com a deformação de engenharia através da lei de Hooke

$$\sigma = E\epsilon, \quad (1.4)$$

onde E é o módulo de elasticidade. Logo conclui-se que as tensões são idênticas para modelo e protótipo com as mesmas propriedades materiais, pois segundo a equação (1.3) a deformação independe da escala.

Um distúrbio de tração ou compressão se propaga em uma barra com a velocidade $c = (E/\rho)^{1/2}$ de acordo com a teoria elementar de ondas de tensão (Johnson, 1972). Então

$$c_{\text{modelo}} = c_{\text{protótipo}}, \quad (1.5)$$

ou seja, os distúrbios no interior da barra se propagam com a mesma velocidade para modelo e protótipo que tenham as mesmas propriedades elásticas para o material.

O tempo t_1 necessário para um distúrbio percorrer uma distância ℓ é dado por $t_1 = \ell/c$, logo modelo e protótipo se relacionam por

$$\frac{(t_1)_{\text{modelo}}}{(t_1)_{\text{protótipo}}} = \frac{\beta\ell/c}{\ell/c} = \beta,$$

quando a equação (1.5) é considerada. Então

$$t_{\text{modelo}} = \beta t_{\text{protótipo}}. \quad (1.6)$$

A velocidade média é dada pelo deslocamento dividido pelo tempo. Com auxílio da equação (1.6) obtém-se

$$V_{\text{modelo}} = \frac{\beta\delta}{\beta t} = \frac{\delta}{t} = V_{\text{protótipo}}. \quad (1.7)$$

Portanto a velocidade é uma variável independente do fator de escala, mantendo-se sempre constante.

A taxa de deformação pode ser aproximada como a velocidade dividida pelo comprimento, ou seja, no caso de uma estrutura escalonada por um fator β

$$\dot{\epsilon}_{\text{modelo}} = \frac{V}{\beta L} \rightarrow \dot{\epsilon}_{\text{modelo}} = \frac{1}{\beta} \dot{\epsilon}_{\text{protótipo}} \quad (1.8)$$

Então a taxa de deformação no modelo será sempre maior que a do protótipo para valores de escala menores do que a unidade.

Finalmente, a aceleração é a velocidade dividida pelo tempo, assim a relação entre modelo e protótipo pode ser gerada com auxílio da equação (1.6) e (1.7)

$$A_{\text{modelo}} = \frac{V}{\beta t} \rightarrow A_{\text{modelo}} = \frac{1}{\beta} A_{\text{protótipo}} \quad (1.9)$$

A Tabela 1 resume as principais relações para uma estrutura sob carregamento dinâmico.

Tabela 1 – Fatores de escala

variável	fator entre modelo e protótipo	variável	fator entre modelo e protótipo
comprimento	β	velocidade de onda	1
deslocamento	β	tempo	β
massa	β^3	velocidade	1
deformação	1	taxa de deformação	$1/\beta$
tensão	1	aceleração	$1/\beta$

1.7 – Números adimensionais

Números adimensionais desempenham um papel fundamental no estudo de similaridade. Eles também são importantes quando muitos parâmetros estão envolvidos no fenômeno pois, se cada um desses parâmetros for variado de forma a obter uma gama de resultados para todos, a quantidade de testes a ser feita e o tempo

gasto serão muito grandes. Também, a visualização dos resultados não será adequada.

Imagine, por exemplo, um fenômeno dependente de 4 parâmetros: deve-se testar a dependência do fenômeno em relação a cada variável e mantendo as demais constantes. Se forem necessários 10 ensaios para cada variável, então 10^4 ensaios devem ser realizados. Se cada ensaio tomar meia hora e a jornada de trabalho diária for de 8 horas, a série completa levaria em torno de dois anos e meio para ser realizada, ou seja, custo e tempo excessivamente altos.

Os números adimensionais podem ser obtidos de forma simples como descrito em Baker; Westine; Dodge (1991) e Singer; Arbocz; Weller (1998) através do teorema dos Π de Buckingham, mas este método não fornece as ferramentas necessárias para se identificar os adimensionais predominantes do fenômeno, sendo necessário experimentos. Infelizmente, ao contrário da termodinâmica e da mecânica dos fluidos, a área de impacto não possui muitos estudos sobre modelos de similaridade.

Um dos números adimensionais mais importantes no caso de estruturas de metal sujeitas a cargas dinâmicas é o chamado “damage number”, definido por Johnson (1972) como

$$D_n = \frac{\rho V_0^2}{\sigma_0}, \quad (1.10)$$

sendo V_0 a velocidade inicial de impacto e σ_0 a tensão de escoamento quasi-estática. Este número pode ser interpretado como a ordem de grandeza das tensões na região onde ocorrem grandes deformações. Mais recentemente um outro número foi definido por Zhao (1998), denominado “response number”

$$R_n = \frac{\rho V_0}{\sigma_0} \left(\frac{L}{h} \right)^2 = D_n \left(\frac{L}{h} \right)^2, \quad (1.11)$$

sendo L o meio comprimento de vigas ou placas e h a espessura para vigas ou placas.

Além dos parâmetros considerados no “damage number”, este novo número leva em consideração também a geometria da estrutura. Foi demonstrado também

por Hu (2000) que o “response number” é realmente predominante no caso de estruturas sujeitas a cargas dinâmicas. O mesmo adimensional é generalizado para vários tipos de cascas por Shi; Gao (2001). Ainda, Li; Jones (2000) adicionaram o efeito do encruamento, taxa de deformação, temperatura e força cortante neste número.

1.8 – Técnica de similitude não direta

Drazetic et al. (1994) realizou uma série de testes utilizando uma barra de aço com centro vazado, como mostrado na Figura 4. Em uma das extremidades uma massa é fixada, enquanto na outra, uma articulação permite a rotação da barra. Ela pode então colidir contra um bloco rígido e assim gerar uma dobra localizada. A estrutura foi escalonada em 1:1, 3:4 e 3:8, mas sua modelagem permitiu variações na escala da geometria e material. O propósito deste trabalho foi exatamente o de considerar o efeito dessas imperfeições de geometria e material utilizando para isso um tratamento analítico dos resultados.

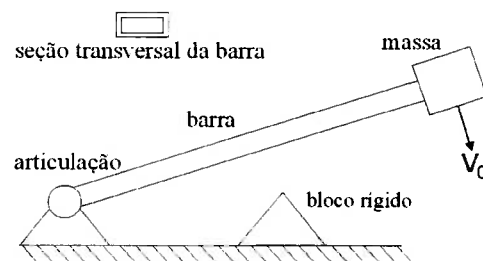


Figura 4 – Esquema da estrutura utilizada por Drazetic et al. (1994).

Muitas vezes as dimensões exatas exigidas para uma perfeita similaridade não podem ser atingidas, principalmente devido às limitações do processo de construção e das diferenças do material. Por esse motivo, Drazetic et al. (1994), em seu estudo, utilizou modelos escalonados de forma aproximada e, aplicando uma técnica de escalonamento não direta, extrapolou os resultados, obtendo assim respostas que se aproximam da similaridade entre modelo e protótipo. Dessa maneira, o ajuste dos valores experimentais permitiu uma melhor semelhança para o fenômeno.

A similitude não direta é baseada no uso da similaridade geométrica imperfeita de Cauchy e do teorema dos Π de Buckingham. Basicamente, esta técnica não utiliza um único fator de escala β como geralmente é feito, mas introduz um fator para cada uma das variáveis em estudo. Dessa forma, é possível corrigir os resultados levando-se em consideração as imperfeições.

Drazetic et al. (1994) também puderam corrigir o efeito da taxa de deformação com o auxílio desse procedimento, diminuindo de maneira significativa os erros do modelo em relação ao protótipo devido a este efeito.

O presente trabalho se baseia neste método e tem a finalidade de corrigir a não escalonabilidade devido à taxa de deformação. A seção seguinte irá expor a dificuldade gerada por esse efeito e como estruturas sensíveis a ele não podem ser escalonadas seguindo as relações convencionais, como exposto na Tabela 1. É mostrado então no capítulo 2 a técnica de similaridade não direta e adaptamo-lo para abordar o nosso problema.

1.9 – Não escalonabilidade de estruturas sujeitas a impacto

Neste trabalho o interesse é a utilização de modelos em escala para o caso de impacto em estruturas. Não existem muitos estudos de similaridade dentro desta área, mas é bem conhecido que materiais sensíveis à taxa de deformação, gravidade e falha por fratura não podem ser escalonadas geometricamente. Jones (1995) mostrou em seu artigo várias tentativas de escalonamento e verificou que alguns deles seguem aproximadamente a lei de similaridade, mesmo com o fator de taxa de deformação não dimensionado adequadamente. Porém, em outros casos também analisados em Jones (1995), uma diferença significativa entre o valor esperado e o obtido foi registrada, mostrando a necessidade de se determinar as variáveis dominantes e suas limitações.

Booth; Collier; Miles (1983) realizaram uma série de 13 testes em dois tipos de estruturas soldadas (ver Figura 5) e verificaram que as peças escalonadas não obedeciam as leis de similaridade linear, como pode ser visto na Figura 6. As peças em escala unitária deformaram-se 2,5 vezes mais que o esperado em relação àquelas

de escala 1/4. Ainda, as peças maiores tiveram deformações e tempo de impacto maiores que o esperado e acelerações menores.

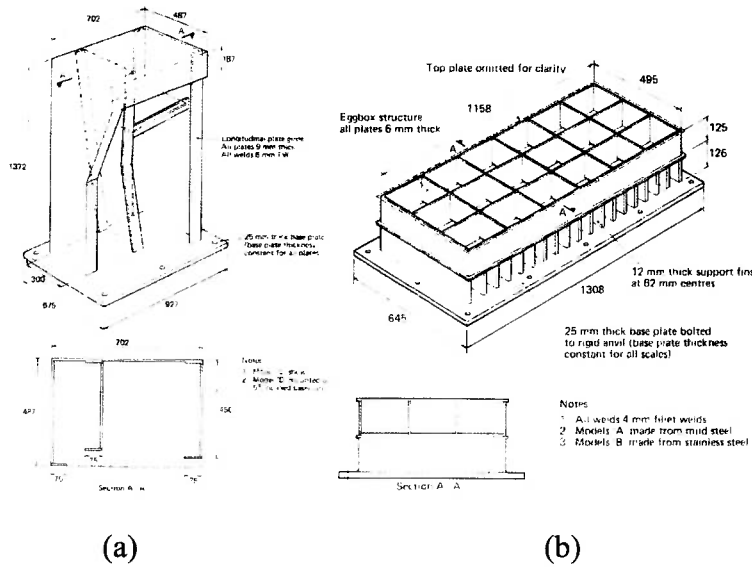


Figura 5 – Estruturas testadas por Booth; Collier; Miles (1983). (a) cabine. (b) “eggbox”.

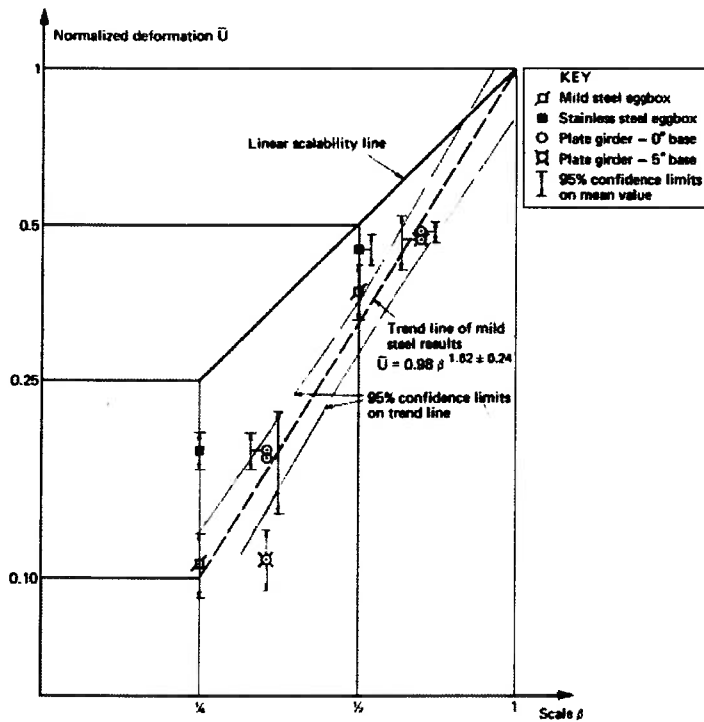


Figura 6 – Modelos escalonados testados sob impacto: ensaio de queda livre para espécimes de aço “eggbox” e placas guias. Booth; Collier; Miles (1983).

Esta não observância das leis de similaridade, constatada nos resultados experimentais de Booth; Collier; Miles (1983), deve-se em parte ao fenômeno anteriormente aludido na Figura 1, da sensibilidade do material à taxa de deformação. O fato do material não poder ser escalonado devido a esta propriedade pode ser facilmente demonstrada considerando a equação constitutiva de Cowper-Symonds, que relaciona a tensão de escoamento dinâmica do material à taxa de deformação através de

$$\sigma_d = \sigma_0 \left[1 + (\dot{\epsilon}/D)^{1/p} \right],$$

sendo D e q constantes materiais, $\dot{\epsilon}$ a taxa de deformação e σ_d a tensão de escoamento dinâmica do material. Conforme visto na Tabela 1, as tensões de modelo e protótipo devem ser idênticas. Entretanto, a taxa de deformação é escalonada de $1/\beta$, que acarreta a seguinte relação

$$\frac{(\sigma_d)_{\text{modelo}}}{(\sigma_d)_{\text{protótipo}}} = \frac{\sigma_0 \left[1 + (\dot{\epsilon}/(\beta D))^{1/p} \right]}{\sigma_0 \left[1 + (\dot{\epsilon}/D)^{1/p} \right]} \neq 1, \text{ para } \beta \neq 1.$$

Esta discrepância levou Jones (1997) a afirmar que “To the author’s knowledge, material strain rate effects have not been modelled sucessfully in small-scale structural models tests”.

É justamente esta a motivação deste trabalho, o de propor um método que corrija adequadamente o comportamento de modelos feitos de materiais sensíveis à taxa de deformação.

1.10 – Objetivos

Conforme apresentado, a área de impacto estrutural é bastante complexa, com peculiaridades que merecem um tratamento de análise sofisticado. Na Figura 1 fica evidente a sensibilidade de muitos materiais à taxa de deformação. Este efeito não linear torna as tensões que atuam no protótipo e no modelo diferentes, o que faz com que as leis de escalonamento não sejam atendidas. Diz-se que o modelo fica distorcido de sorte que sua resposta estrutural não é mais similar ao do protótipo.

Tal constatação impõe severas restrições à análise dimensional e à realização de testes em protótipos. De fato, é aceito na literatura que a distorção no comportamento de modelos quando comparado ao do protótipo é um problema ainda sem solução (Jones, 1997).

Neste trabalho propõe-se uma técnica de correção para o problema de distorção devido à sensibilidade do material à taxa de deformação de modo que estruturas em diversas escalas se comportem de modo similar. O desenvolvimento do método é descrito em detalhes no capítulo 2. No capítulo 3 alguns modelos analíticos são solucionados para vários fatores de escala e os resultados então comparados. No capítulo 4 a correção é feita utilizando um fator de escala para a massa ao invés da velocidade inicial de impacto. No capítulo 5 considera-se a situação em que o modelo possui um material diferente do protótipo. O capítulo 6 mostra a simulação de tubos cilíndricos escalonados e a aplicação do procedimento de correção aqui desenvolvido para modelos numéricos. Finalmente, o capítulo 7 apresenta uma discussão geral da metodologia aqui desenvolvida e dos resultados obtidos.

2 – MÉTODO DE CORREÇÃO

Como descrito anteriormente, estruturas sensíveis à taxa de deformação não podem ser escalonadas pelo método convencional. Se, por exemplo, a equação constitutiva do material é dada por $(\sigma_d)_{\text{protótipo}} = f(\dot{\epsilon})$, então, quando o protótipo for escalonado por β teria-se $(\sigma_d)_{\text{modelo}} = f(\dot{\epsilon}/\beta)$. Logo, por essa simples análise já é possível verificar a não escalonabilidade, dado que a tensão deve ter um fator igual a 1 para uma perfeita Similaridade (ver a Tabela 1). A Figura 7 mostra como varia o fator de tensão $(\sigma_d)_{\text{modelo}} / (\sigma_d)_{\text{protótipo}}$ em função do fator de escala e da taxa de deformação.

Neste trabalho, propomos um método que leva em consideração o efeito da taxa de deformação e corrige o desvio observado. Esse procedimento é baseado na técnica de similaridade não direta proposta por Drazetic et al. (1994) e basicamente o que é alterado é a relação entre as velocidades do modelo e do protótipo. No escalonamento linear esse fator é definido como 1, mas aqui esse valor será alterado apropriadamente de forma a compensar o incremento na tensão de escoamento do material. Os outros fatores de escala serão então reescritos em função desse novo fator de velocidade.

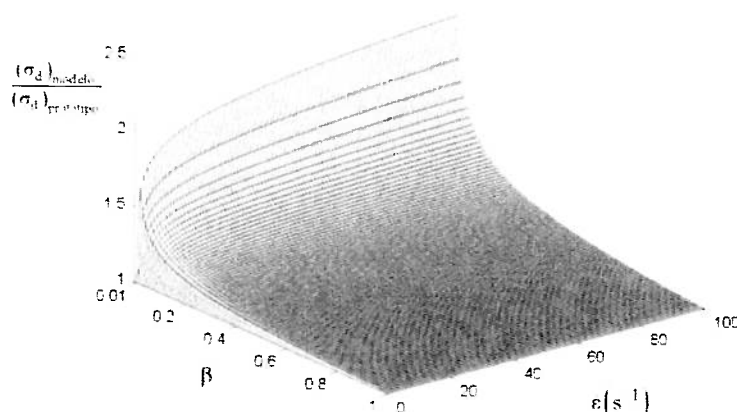


Figura 7 – Variação do fator de tensão em função da escala e da taxa de deformação. Valores aplicados na equação constitutiva de Cowper-Symonds com $p=5$ e $D=40$, constantes típicas do aço carbono.

A primeira providência a ser tomada é calcular novamente os adimensionais para o fenômeno. Porém, não será utilizada a base $M \ell T$ (massa, comprimento, tempo) e sim uma base definida pelas variáveis massa de impacto (G), velocidade inicial (V_0), e tensão de escoamento dinâmica (σ_d) – isso explica a denominação dada a esta técnica de Similaridade não direta. Essa base é adotada pois V_0 é a variável a ser alterada, σ_d é onde o efeito da taxa de deformação influencia de forma direta e G é usado para completar uma base linearmente independente.

Opcionalmente, ao invés de se alterar a velocidade inicial, poderia-se alterar a massa de impacto e, portanto, é conveniente essa variável estar na base escolhida. Utilizaremos também uma matriz reduzida (Tabela 2), ou seja, só serão calculados os adimensionais para os parâmetros que não podem ser inicialmente definidos: aceleração, tempo, deslocamento, taxa de deformação e tensão.

A Tabela 2 apresenta as variáveis da matriz reduzida em função de V_0 - σ_d - G . Os expoentes são obtidos através da simples análise dimensional. Por exemplo, a aceleração tem que ser redefinida utilizando os termos da base e a forma dimensional desta variável é comprimento dividido pelo tempo ao quadrado $[A] = \ell / T^2$. Para obter os expoentes para velocidade inicial, massa e tensão de escoamento, a equação $[A] = [V_0]^{a_1} [\sigma_d]^{a_2} [G]^{a_3}$ tem que ser resolvida

$$\frac{\ell}{T^2} = \left[\frac{\ell}{T} \right]^{a_1} \left[\frac{M}{T^2 \ell} \right]^{a_2} [M]^{a_3} \rightarrow \ell T^{-2} = \ell^{a_1 - a_3} T^{-a_1 - 2a_2} M^{a_2 + a_3} \rightarrow$$

$$a_1 = 4/3, a_2 = 1/3 \text{ e } a_3 = -1/3$$

$$\therefore A = \left[\frac{V_0^4 \sigma_d}{G} \right]^{1/3}.$$

Os expoentes para as variáveis tempo, deslocamento, taxa de deformação e tensão são obtidos de forma similar.

Tabela 2 – Variáveis expressas em função da base V_0 - σ_d - G .

		variáveis				
		aceleração A	tempo T	deslocamento δ	taxa de deformação $\dot{\epsilon}$	tensão σ
base	V_0	4/3	-1/3	2/3	1/3	0
	σ_d	1/3	-1/3	-1/3	1/3	1
	G	-1/3	1/3	1/3	-1/3	0

Os números adimensionais são então obtidos da forma convencional, descrito em Fox; McDonald (1998).

Para a aceleração, o adimensional Π_1 é gerado como segue

$$\Pi_1 = A V_0^{a_1} \sigma_d^{a_2} G^{a_3} = V_0^{a_1 + 4/3} \sigma_d^{a_2 + 1/3} G^{a_3 - 1/3}.$$

Pelo fato de Π_1 não ter nenhuma dimensão, os expoentes para V_0 , σ_d e G devem ser nulos, resultado então $a_1 = -4/3$, $a_2 = -1/3$ e $a_3 = 1/3$. Assim,

$$\Pi_1 = \frac{AG^{1/3}}{V_0^{4/3} \sigma_d^{1/3}}$$

ou sem perder a generalidade,

$$\Pi_1 = \frac{A^3 G}{V_0^4 \sigma_d}. \quad (2.1)$$

De forma análoga, os outros números adimensionais são obtidos por essa simples análise:

$$\Pi_2 = \frac{T^3 \sigma_d V_0}{G}, \quad (2.2)$$

$$\Pi_3 = \frac{\delta^3 \sigma_d}{G V_0^2}, \quad (2.3)$$

$$\Pi_4 = \dot{\epsilon} \left(\frac{G}{\sigma_d V_0} \right)^{1/3} e \quad (2.4)$$

$$\Pi_5 = \frac{\sigma}{\sigma_d}. \quad (2.5)$$

Utilizamos agora os adimensionais (2.1) a (2.5) de modo a obter as relações necessárias. Ainda, a variável deslocamento δ é escalonada de β pois considera-se que haja semelhança completa entre a geometria final do modelo e do protótipo.

Fundamental para o método desenvolvido neste trabalho, a relação entre tensão de escoamento dinâmica σ_d e velocidade inicial V_0 pode ser obtida através da equação (2.3)

$$\frac{(\Pi_3)_m}{(\Pi_3)_p} = 1 \rightarrow \frac{\beta^3 \beta_{\sigma_d}}{\beta_G \beta_{V_0}^2} = 1 \rightarrow$$

$$\beta_{\sigma_d} = \beta_{V_0}^2. \quad (2.6)$$

Dessa maneira, o adimensional $\Pi_1 = A^3 G / (V_0^4 \sigma_d)$ com ajuda da equação (2.6) fornece a relação para a aceleração

$$\frac{(\Pi_1)_m}{(\Pi_1)_p} = 1 \rightarrow \frac{\beta_A^3 \beta_G}{\beta_{V_0}^4 \beta_{\sigma_d}} = 1 \rightarrow \beta_A^3 = \frac{\beta_{V_0}^4 \beta_{\sigma_d}}{\beta^3} \rightarrow$$

$$\beta_A = \beta_{V_0}^2 / \beta. \quad (2.7)$$

De forma Similar, o adimensional $\Pi_2 = T^3 \sigma_d V_0 / G$ produz

$$\frac{(\Pi_2)_m}{(\Pi_2)_p} = 1 \rightarrow \frac{\beta_T^3 \beta_{\sigma_d} \beta_{V_0}}{\beta_G} = 1 \rightarrow$$

$$\beta_T = \beta / \beta_{V_0}. \quad (2.8)$$

Para obter o fator para a taxa de deformação, $\beta_{\dot{\epsilon}}$, $\Pi_4 = \dot{\epsilon}(G/(\sigma_d V_0))^{1/3}$ é usado

$$\frac{(\Pi_4)_m}{(\Pi_4)_p} = 1 \rightarrow \beta_{\dot{\epsilon}} \left(\frac{\beta_G}{\beta_{\sigma_d} \beta_{V_0}} \right)^{1/3} = 1 \rightarrow$$

$$\beta_{\dot{\epsilon}} = \frac{\beta_{V_0}}{\beta} = \frac{1}{\beta_T}. \quad (2.9)$$

Finalmente, a relação para tensão real é obtida diretamente de $\Pi_5 = \sigma / \sigma_d$

$$\frac{(\Pi_5)_m}{(\Pi_5)_p} = 1 \rightarrow \frac{\beta_{\sigma}}{\beta_{\sigma_d}} = 1 \rightarrow$$

$$\beta_{\sigma} = \beta_{\sigma_d}. \quad (2.10)$$

Se não fosse a presença do fator corrigido $\beta_{V_0} \neq 1$ e $\beta_{\sigma_d} \neq 1$, as equações de (2.6) a (2.10) seriam exatamente as mesmas do escalonamento linear, ou seja, $\beta_T = \beta$, $\beta_{\dot{\epsilon}} = 1/\beta$, $\beta_A = 1/\beta$ e $\beta_{\sigma} = 1$.

Agora, insere-se o efeito da taxa de deformação através de $\sigma_d = f(\dot{\epsilon})$, que depende da equação constitutiva do material. Primeiramente define-se a relação entre tensões dinâmicas como $\beta_{\sigma_d} = (\sigma_d)_{\text{modelo}} / (\sigma_d)_{\text{protótipo}}$ ou então

$$\beta_{\sigma_d} = \frac{f(\dot{\epsilon}_{\text{modelo}})}{f(\dot{\epsilon}_{\text{protótipo}})}. \quad (2.11)$$

Deve-se destacar que existem dois modelos diferentes para o presente trabalho: não corrigido ($\beta_{V_0} = 1$) e corrigido ($\beta_{V_0} \neq 1$). É interessante então diferenciá-los através dos sobrescritos nc para o primeiro caso e c para o segundo. Aplicando-se então essa notação, a equação (2.11) torna-se

$$\beta_{\sigma_d} = \frac{f(\dot{\epsilon}_{\text{modelo}}^c)}{f(\dot{\epsilon}_{\text{protótipo}})}. \quad (2.12)$$

Se a aproximação $\dot{\epsilon} \propto V_0 / L$ for aplicada,

$$\frac{\dot{\epsilon}_{\text{modelo}}^c}{\dot{\epsilon}_{\text{modelo}}^{\text{nc}}} = \frac{\beta_{V_0} V_0}{V_0} \rightarrow \dot{\epsilon}_{\text{modelo}}^c = \beta_{V_0} \dot{\epsilon}_{\text{modelo}}^{\text{nc}}. \quad (2.13)$$

Da equação (2.9), o fator para a taxa de deformação é dada por $\beta_{\dot{\epsilon}} = \beta_{V_0} / \beta$, então

$$\beta_{\dot{\epsilon}} = \frac{\dot{\epsilon}_{\text{modelo}}^c}{\dot{\epsilon}_{\text{protótipo}}} = \frac{\beta_{V_0}}{\beta} \rightarrow \dot{\epsilon}_{\text{protótipo}} = \frac{\beta}{\beta_{V_0}} \dot{\epsilon}_{\text{modelo}}^c$$

e usando (2.13),

$$\dot{\epsilon}_{\text{protótipo}} = \frac{\beta}{\beta_{V_0}} \beta_{V_0} \dot{\epsilon}_{\text{modelo}}^{\text{nc}} \rightarrow \dot{\epsilon}_{\text{protótipo}} = \beta \dot{\epsilon}_{\text{modelo}}^{\text{nc}}. \quad (2.14)$$

Substituindo as equações (2.13), (2.14) e (2.12) em (2.6) finalmente obtém-se

$$\beta_{V_0} = \sqrt{\frac{f(\beta_{V_0} \dot{\epsilon}_{\text{modelo}}^{\text{nc}})}{f(\beta \dot{\epsilon}_{\text{modelo}}^{\text{nc}})}}. \quad (2.15)$$

A equação (2.15) fornece então a nova velocidade para o modelo corrigido.

O procedimento pode então ser resumido em três estágios:

- Solução com o modelo escalonado de β e nenhuma correção para a velocidade inicial. Os resultados estarão distorcidos em relação ao protótipo, ou seja, não seguirão nenhuma relação prevista pela Similaridade. No entanto, essa etapa é necessária para que os dados do cálculo do novo β_{V_0} possam ser obtidos;
- Obtenção de β_{V_0} através da equação (2.15). $\dot{\epsilon}_{\text{modelo}}^{\text{nc}}$, necessário para o cálculo, é o valor da taxa de deformação gerado através da simulação do passo

anterior. Esse novo β_{V_0} leva em consideração o efeito da taxa de deformação e é maior que 1 caso $\beta < 1$;

- Solução do mesmo modelo escalonado de β , mas com a velocidade inicial corrigida pelo fator calculado na etapa anterior. A resposta final desse modelo estará escalonado de β em relação ao protótipo.

Descrito dessa maneira, o método permite que se faça uma previsão do comportamento do protótipo através da solução do modelo escalonado de β e nenhuma outra informação da estrutura em tamanho real é necessária. Essa manipulação é importante pois a descrição do protótipo feita somente através de dados do modelo é um dos principais objetivos da Similaridade.

Apesar do procedimento descrito acima escalonar somente o formato final através de δ , as variáveis resultantes do fenômeno: aceleração, tempo, taxa de deformação e tensão podem ser previstas para o protótipo através do conjunto de equações (2.6) a (2.10) e os dados do modelo corrigido. O cálculo das demais variáveis e comparação com os resultados da estrutura em escala unitária serão demonstrados posteriormente.

Outra característica que também deve ser ressaltada é o fato do impacto ser um fenômeno dinâmico, ou seja, a taxa de deformação varia com o tempo. No entanto, para que a equação (2.15) seja funcional, um único valor para ela terá que ser adotado. Devido a essa limitação, erros podem ser gerados quando forem comparados os dados no final do movimento.

Contudo, para valores razoáveis dessa taxa, uma variação não chega a ser relevante no cálculo do fator para velocidade como mostrado na Figura 8. Nesta figura a equação constitutiva de Cowper-Symonds com coeficientes $D = 40 \text{ s}^{-1}$ e $p = 5$ foi utilizada para gerar as curvas. Pode ser observado que quanto menor for a escala, maior é a faixa para o qual $L\dot{\epsilon}/V_0$ tem um efeito razoável no valor do fator de velocidade. Por exemplo, na escala 1:100 ainda é possível observar um aumento no fator de correção quando $L\dot{\epsilon}/V_0 = 0,03$, mas para a escala 1:2 a curva é praticamente constante a partir de 0,001.

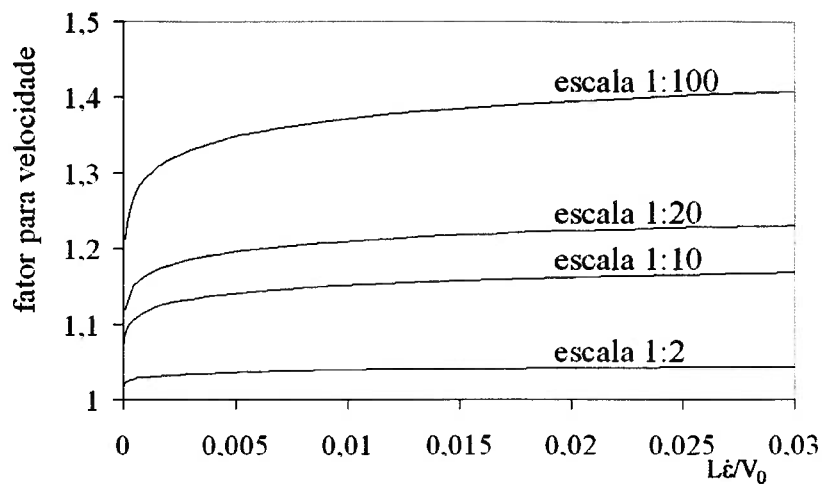


Figura 8 – Fator de velocidade calculado através de (2.15) para diversas escalas e taxas de deformação.

O modelo analítico de Calladine (Tam; Calladine, 1991), que será visto adiante, é um exemplo em que a taxa varia com o tempo. Neste caso, a taxa de deformação considerada é a do instante final, mas todo o movimento acaba sendo beneficiado devido à mudança da velocidade inicial e bons resultados foram obtidos. Em todas as situações aqui estudadas, sejam eles modelos analíticos ou numéricos, foram empregados valores determinados que tentam de alguma forma estimar o valor real ou médio da taxa de deformação, podendo assim aplicá-la na equação (2.15).

Para avaliar a eficiência do procedimento, o próximo capítulo mostra o comportamento de três modelos analíticos: modelo de Calladine, viga sofrendo impulso de velocidade e viga sofrendo impacto transversal de uma massa. Os mesmos modelos também são resolvidos com duas variações da técnica desenvolvida neste capítulo: correção através do fator da massa de impacto, descrito no capítulo 4, e uso de material distinto para modelo e protótipo, capítulo 5. Por fim, o capítulo 6 trata do uso de um modelo numérico de um tubo cilíndrico sob impacto axial, cuja análise utiliza o método dos elementos finitos.

3 – CORREÇÃO DE MODELOS ANALÍTICOS

Aplicando o procedimento descrito anteriormente, três modelos analíticos são estudados: modelo de Calladine, viga engastada sofrendo impulso de velocidade e viga engastada sofrendo impacto transversal de uma massa. É demonstrado através do equacionamento que os erros gerados no escalonamento são exclusivamente devido ao efeito da taxa de deformação na resposta do material, tornando-os portanto bastante apropriados para o presente trabalho. Para comparação dos resultados, primeiramente a velocidade é mantida constante e depois, corrigida para cada fator β . As estruturas escolhidas apresentam resposta estrutural bem distinta entre si e, de fato, atendem a uma classificação geral a seguir descrita.

Para melhor entender o comportamento de diversas estruturas, foi proposta uma classificação composta de dois tipos (Calladine; English, 1984): o primeiro grupo – denominado tipo I – é constituído por estruturas cuja curva estática de carga-deflexão é mais ou menos constante; o segundo grupo – tipo II – apresenta um pico seguido de uma curva decrescente acentuada. As Figuras 9 e 10 ilustram melhor esse comportamento.

É mostrado por Calladine; English (1984) que estruturas tipo II são mais sensíveis aos efeitos de inércia. Mais tarde, o mesmo estudo foi feito com maiores detalhes por Tam; Calladine (1991), em que foram utilizados câmeras de alta

velocidade, transdutores piezoelétricos e strain gages em diversos locais da estrutura. Os autores puderam identificar duas fases principais do movimento: na primeira ocorre uma compressão axial e na segunda fase a energia é dissipada através de rótulas plásticas centrais. A explicação encontrada para a maior sensibilidade desta típica estrutura tipo II à taxa de deformação é relacionada à aceleração transversal e a rápida movimentação do material nas rótulas plásticas.

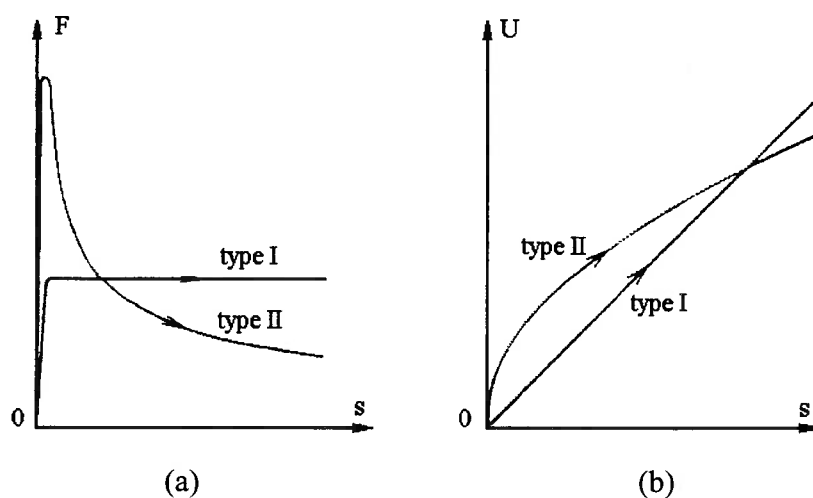


Figura 9 – Estruturas do tipo I e II idealizadas. (a) curva de carga (F) x deflexão (s).
(b) curva de energia (U) x deflexão (s). (Calladine; English, 1984).

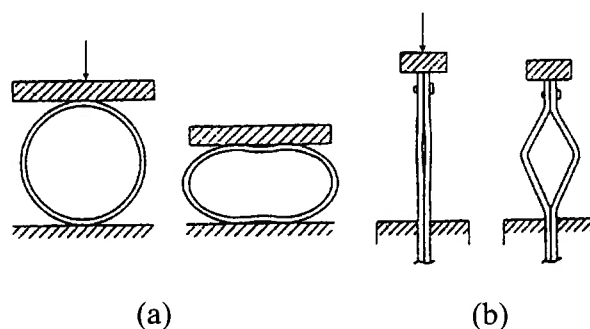


Figura 10 – Exemplos de estruturas do tipo I (a) e II (b). (Calladine; English, 1984).

Nessa mesma época, Zhang; Yu (1989) também desenvolveram um modelo teórico para representar o comportamento dessa mesma estrutura sob impacto, mas o modelo desenvolvido englobava somente a segunda fase. Baseados em suas observações Tam; Calladine (1991) desenvolveram então um modelo mais apropriado para a primeira fase para complementar a formulação teórica de Zhang;

Yu (1989). Karagiozova; Jones (1995) também formularam o problema, mas com a inserção de efeitos elásticos. Com isso, o efeito de recuperação elástica do material pode ser observado e os resultados mostraram coerência com os dados obtidos por Zhang; Yu (1989).

Mais tarde, Webb; Kormi; Al-Hassani (2001) desenvolveram um estudo no mesmo tipo de estrutura empregada por Tam; Calladine (1991) através do método dos elementos finitos. As características materiais adotadas foram as mesmas que em Calladine; English (1984), mas com a inclusão do efeito elástico e não linearidades geométricas. Foram então identificadas quatro fases distintas no fenômeno: (i) uma fase de pré compressão; (ii) compressão, que é a mesma identificada como fase 1 por Tam; Calladine (1991); (iii) rotação das rótulas plásticas, identificada como fase 2 por Tam; Calladine (1991); (iv) recuperação elástica do material. Os resultados obtidos foram então comparados com os de Tam; Calladine (1991) e mostraram-se compatíveis.

Uma análise teórica geral sobre a maior sensibilidade das estruturas do tipo II aos efeitos de inércia é exibida em Calladine (1983). O equacionamento mostra que o formato da curva carga-deflexão, com um pico seguido de uma curva decrescente, como mostrado na Figura 9, altera a forma como a energia é absorvida ao longo do tempo em relação ao tipo I.

Dada a alta sensibilidade desta estrutura tipo II estudada por vários autores como indicado acima, este será o primeiro modelo a ser escalonado e corrigido conforme a técnica de correção descrita no capítulo 2.

3.1 – Modelo de Calladine

O modelo estudado por Tam; Calladine (1991) é constituído por duas barras idênticas, presas entre si pelas extremidades, Figura 11. Essas placas são montadas com uma deformação inicial θ_0 e são submetidas ao impacto de uma massa G viajando a uma velocidade inicial V_0 . Como já mencionado, essa estrutura é classificada como Tipo II e portanto, sensível à taxa de deformação. Essa sensibilidade faz com que ela seja de interesse para o presente trabalho. Além do mais, ela é simples e já possui um modelo analítico bem desenvolvido.

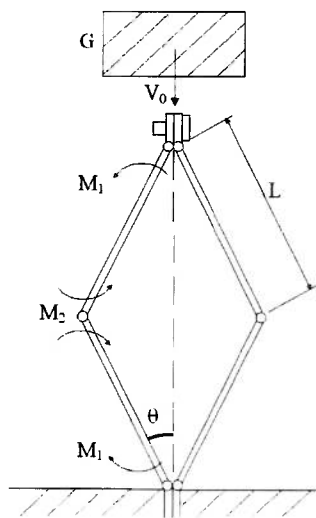


Figura 11 – Modelo de Calladine para a estrutura rígida sob impacto.

Durante os experimentos feitos por Tam; Calladine (1991) verificou-se que a peça sujeita a impacto apresentava duas fases distintas durante o fenômeno: na primeira fase ela sofre compressão na direção do seu eixo principal; na segunda, o efeito predominante é a rotação das rótulas plásticas. Descreve-se abaixo a formulação e hipóteses adotadas para ambas as fases.

3.1.1 – Formulação

a) Primeira fase

Como observado acima, um modelo teórico para esta fase é obtido por Tam; Calladine (1991) e diferentemente da Figura 11, considera que a estrutura é composta por barras deformáveis na direção axial. Este efeito é predominante até que o deslocamento lateral se torne suficientemente grande e então a segunda fase começa a atuar.

Considerou-se a meia estrutura equivalente à forma completa, como mostrada na Figura 12, sendo (a) a configuração inicial e (b) a deformada. Para simplificação, foi assumido que a estrutura é rígida até que σ_d seja atingido e que está sujeita a uma força constante $S\sigma_d$, sendo S a área transversal das duas vigas. As partes

superior e inferior foram consideradas simétricas durante o carregamento, ou seja, sofrerão os mesmos carregamentos e deformações.

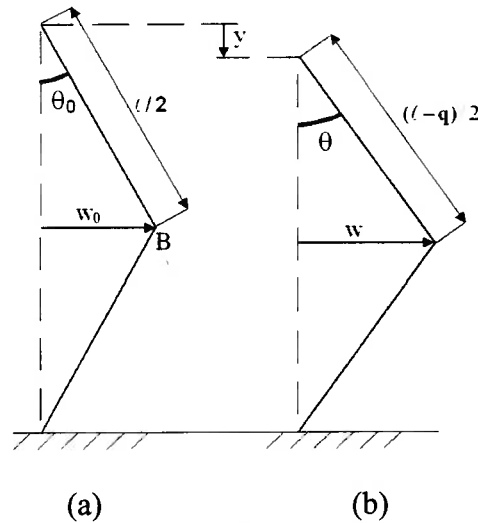


Figura 12 – Modelo de Calladine para uma estrutura compressível. (a) configuração inicial. (b) configuração deformada.

Assim, obtém-se pela geometria

$$y = \ell \cos \theta_0 - (\ell - q) \cos \theta \rightarrow y = \ell(\cos \theta_0 - \cos \theta) + q \cos \theta, \quad (3.1)$$

sendo q o encurtamento da barra devido à compressão, y o deslocamento no topo em relação à configuração inicial, θ o ângulo de rotação e ℓ o comprimento total da barra. Assumindo que na primeira fase θ permanece pequeno, aplicou-se a série de Taylor para o qual os valores de ordem maior são descartados ($\cos \theta = 1 - \theta^2 / 2! + \dots$), dessa maneira

$$y = (\ell / 2)(\theta^2 - \theta_0^2) + q. \quad (3.2)$$

Substituindo a relação $w = \theta \ell / 2$ obtida através da geometria na equação (3.2) obtém-se

$$y = (2 / \ell)(w^2 - w_0^2) + q, \quad (3.3)$$

sendo w_0 e w o deslocamento horizontal no centro da barra na configuração inicial e atual, respectivamente.

Adotando a hipótese de que não há descolamento entre a massa de impacto e as barras, o topo da estrutura terá a mesma velocidade V da massa, assim

$$V = dy/dt \rightarrow$$

$$V = (4/\ell)w\dot{w} + \dot{q}, \quad (3.4)$$

sendo que o primeiro termo do lado direito da equação (3.4) refere-se ao comportamento da estrutura como corpo rígido, enquanto o segundo termo é devido à compressão axial das barras.

Ainda, em cada barra uma força axial $S\sigma_d$ permanece atuando e gera uma aceleração lateral nas massas concentradas. O equilíbrio no ponto B é dado então por

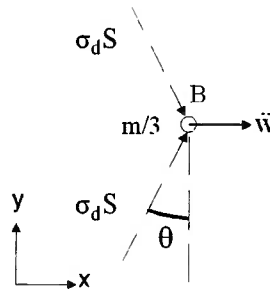


Figura 13 – Equilíbrio de esforços no ponto B no modelo de Calladine.

$$F_B = 4S\sigma_d \text{sen}\theta = 4S\sigma_d w / \ell \rightarrow$$

$$(m/3)\ddot{w} = 4S\sigma_d w / \ell, \quad (3.5)$$

com m sendo a massa das duas barras. Resolvendo a equação (3.5) com a condição inicial $w(0) = w_0$ obtém-se

$$w = w_0 \cosh(12\sigma_d S / (\ell m))^{1/2} t, \quad (3.6)$$

onde a inércia na direção vertical foi ignorada.

Maiores detalhes da solução da equação diferencial de 2ª ordem (3.5) são descritos no Apêndice A. Quando substitui-se então (3.6) em (3.4) resulta em

$$V = 2 \left(\frac{12\sigma_d S}{\ell m} \right)^{1/2} \frac{w_0^2}{\ell} \sinh \left[2 \left(\frac{12\sigma_d S}{\ell m} \right)^{1/2} t \right] + \dot{q}. \quad (3.7)$$

Deve ser observado que a tensão σ_d varia em função da taxa de deformação segundo a equação constitutiva de Cowper-Symonds

$$\sigma_d = \sigma_0 \left(1 + \frac{\dot{\epsilon}}{D} \right)^{1/p}, \quad (3.8)$$

sendo D e q constantes materiais. Com a taxa de deformação constante durante esta fase $\dot{\epsilon} = V_0 / \ell$ tem-se

$$\sigma_d = \sigma_0 \left(1 + \frac{V_0}{D\ell} \right)^{1/p}. \quad (3.9)$$

Ainda, foi considerado que a força constante $S\sigma_d$ atua sobre a massa de impacto desacelerando-a, logo

$$G\dot{V} = -S\sigma_d \rightarrow \dot{V} = -S\sigma_d / G, \quad (3.10)$$

que solucionada com a condição inicial $V(0) = V_0$ fornece

$$V = V_0 - (S\sigma_d / G)t. \quad (3.11)$$

Igualando (3.7) a (3.11) obtém-se a equação de movimento para a primeira fase

$$V_0 - (S\sigma_d / G)t = 2 \left(\frac{12\sigma_d S}{\ell m} \right)^{1/2} \frac{w_0^2}{\ell} \sinh \left[2 \left(\frac{12\sigma_d S}{\ell m} \right)^{1/2} t \right] + \dot{q}. \quad (3.12)$$

Quando $\dot{q} = 0$ não ocorre mais compressão das barras e então inicia-se a segunda fase do fenômeno. Resolvendo-se então a equação (3.12) para esta condição, τ_1 (instante do final da primeira fase) pode ser obtido

$$V_0 - (S\sigma_d / G)\tau_1 = 2 \left(\frac{12\sigma_d S}{\ell m} \right)^{1/2} \frac{w_0^2}{\ell} \sinh \left[2 \left(\frac{12\sigma_d S}{\ell m} \right)^{1/2} \tau_1 \right], \quad (3.13)$$

lembrando que σ_d é dado pela equação (3.9).

No final da primeira fase, o deslocamento e a velocidade horizontal no vínculo das barras (ponto B, Figura 12) são dados respectivamente pela equação (3.6) e sua derivada, ambos em $t = \tau_1$

$$w_1 = w_0 \cosh \left[\left(\frac{12\sigma_d S}{\ell m} \right)^{1/2} \tau_1 \right] \quad (3.14)$$

e

$$\dot{w}_1 = w_0 \left(\frac{12\sigma_d S}{\ell m} \right)^{1/2} \sinh \left[\left(\frac{12\sigma_d S}{\ell m} \right)^{1/2} \tau_1 \right]. \quad (3.15)$$

Como os ângulos ainda são pequenos e desprezando-se o encurtamento sofrido pelas barras devido à compressão, o deslocamento angular pode ser aproximado por

$$\text{sen}\theta = \frac{w}{\ell/2} \Rightarrow \theta \approx \frac{2w}{\ell},$$

que substituído em (3.14) e (3.15), geram respectivamente θ e $\dot{\theta}$ no final desta fase

$$\theta_1 = \frac{2}{\ell} w_1 = \frac{2}{\ell} w_0 \cosh \left[\left(\frac{12\sigma_d S}{\ell m} \right)^{1/2} \tau_1 \right] \quad (3.16)$$

e

$$\dot{\theta}_1 = \frac{2}{\ell} \dot{w}_1 = \frac{2}{\ell} w_0 \left(\frac{12\sigma_d S}{\ell m} \right)^{1/2} \sinh \left[\left(\frac{12\sigma_d S}{\ell m} \right)^{1/2} \tau_1 \right]. \quad (3.17)$$

b) Segunda fase

Essa fase foi formulada por Zhang; Yu (1989) e considera que a estrutura é composta de barras rígidas ligadas através de pinos como mostrado na Figura 11. A energia cinética do sistema para uma coordenada generalizada θ é dada por (3.18), cujo desenvolvimento é mostrado no Apêndice B

$$K = \frac{1}{24} m \ell^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{8} m \ell^2 \text{sen}^2 \theta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} G \ell^2 \text{sen}^2 \theta \dot{\theta}^2. \quad (3.18)$$

Assim tem-se

$$\frac{\partial K}{\partial \theta} = \left(\frac{m}{4} + G \right) \ell^2 \text{sen} \theta \cos \theta \dot{\theta}^2 \quad (3.19)$$

e

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{1}{3} m \ell^2 \ddot{\theta} + \left(\frac{m}{4} + G \right) \ell^2 \left(\text{sen}^2 \theta \ddot{\theta} + 2 \text{sen} \theta \cos \theta \dot{\theta}^2 \right). \quad (3.20)$$

Ainda, se um deslocamento virtual $\delta\theta$ for dado ao sistema, então a soma do trabalho virtual feito pelas forças ativas será

$$\delta W = -4M_1 \delta\theta - 4M_2 \delta\theta,$$

sendo M_1 o momento fletor nos vínculos superior e inferior e M_2 o momento fletor no vínculo central. A força generalizada correspondente à coordenada θ é então dada por

$$Q = -4M_1 - 4M_2. \quad (3.21)$$

Substituindo então as equações (3.19), (3.20) e (3.21) na equação de Lagrange para o sistema com um grau de liberdade e conservativo

$$Q = \frac{\partial(\partial K / \partial \dot{\theta})}{\partial t} - \frac{\partial K}{\partial \theta},$$

obtém-se

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} m \ell^2 \ddot{\theta} + \ell^2 \left(\frac{m}{4} + G \right) \text{sen}^2 \theta \ddot{\theta} + 2 \ell^2 \left(\frac{m}{4} + G \right) \text{sen} \theta \cos \theta \dot{\theta}^2 - \ell^2 \left(\frac{m}{4} + G \right) \text{sen} \theta \cos \theta \dot{\theta}^2 \\ & = -4M_1 - 4M_2 \rightarrow \\ & \ddot{\theta} + \frac{\ell^2 (m/4 + G) \text{sen} \theta \cos \theta \dot{\theta}^2 + 4(M_1 + M_2)}{\ell^2 [m/3 + (m/4 + G) \text{sen}^2 \theta]} = 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

e os momentos M_1 e M_2 são dados por (3.23)

$$\begin{aligned} M_1 &= \left[\left(\frac{\dot{\theta}}{8D} \right)^{1/p} \frac{2p}{2p+1} + 1 \right] M_0 \\ M_2 &= \left[\left(\frac{\dot{\theta}}{4D} \right)^{1/p} \frac{2p}{2p+1} + 1 \right] M_0 \end{aligned}, \quad (3.23)$$

sendo b a largura da viga e M_0 o momento necessário para completo escoamento da seção transversal sob carregamento quasi-estático, ou seja, $M_0 = \sigma_0 b h^2 / 4$ (Jones, 1997). A forma como a equação (3.23) foi obtida é detalhada no Apêndice C.

A taxa de deformação no meio comprimento é duas vezes maior do que nas extremidades, por isso os momentos são distintos. Portanto, pode-se obter θ em função do tempo solucionando-se a equação (3.22) com M_1 e M_2 sendo dados por (3.23). Além disso, as condições iniciais necessárias já foram obtidas no item anterior através de (3.16) e (3.17).

Para obter o instante do final do fenômeno, faz-se $V = 0$ na equação (3.11)

$$0 = V_0 - (S\sigma_d / G)\tau_2 \rightarrow$$

$$\tau_2 = \frac{GV_0}{S\sigma_d}, \quad (3.24)$$

com $\sigma_d = 4M_2 / (bh^2)$.

c) Aplicação do fator de escala

Introduzindo os fatores de escala mostrados na Tabela 1 nas equações de movimento do modelo de Calladine, pode-se comparar o efeito do escalonamento. Assim, utilizando a equação (3.13)

$$V_0 - [\beta^2 S \sigma_d / (\beta^3 G)] \tau_1 = 2 \left(\frac{12 \sigma_d \beta^2 S}{\beta \ell \beta^3 m} \right)^{1/2} \frac{(\beta w_0)^2}{\beta \ell} \sinh \left[2 \left(\frac{12 \sigma_d \beta^2 S}{\beta \ell \beta^3 m} \right)^{1/2} \tau_1 \right] \rightarrow$$

$$V_0 - [A \sigma_d / (G)] \frac{\tau_1}{\beta} = 2 \left(\frac{12 \sigma_d S}{\ell m} \right)^{1/2} \frac{w_0^2}{\ell} \sinh \left[2 \left(\frac{12 \sigma_d S}{\ell m} \right)^{1/2} \frac{\tau_1}{\beta} \right], \quad (3.25)$$

com σ_d sendo dada pela equação (3.9) modificada

$$\sigma_d = \sigma_0 \left(1 + \frac{V_0}{D\beta\ell} \right)^{1/p}. \quad (3.26)$$

A equação (3.26) mostra uma taxa de deformação tanto maior quanto menor for o valor de β . Resolvendo-se então (3.25) e (3.26) e substituindo o valor de σ_d e τ_1 em (3.16) e (3.17) pode-se obter as condições finais da primeira fase do fenômeno para um determinado valor de β . Note que a equação (3.25) forneceria a mesma solução de (3.13) para τ_1 escalonado por um fator β , não fosse o efeito da taxa de deformação presente através de (3.26).

Da mesma forma, se o fator de escala for inserido nas equações (3.16) e (3.17), os resultados para ângulo de rotação e taxa de rotação estariam escalonados conforme a Tabela 1, não fosse a taxa de deformação presente através de σ_d como mostrado em (3.27)

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \frac{2}{\beta\ell} \beta w_0 \cosh \left[\left(\frac{12\sigma_d \beta^2 S}{\beta\ell\beta^3 m} \right)^{1/2} \beta \tau_1 \right] \rightarrow \\ \theta_1 &= \frac{2}{\ell} w_0 \cosh \left[\left(\frac{12\sigma_d S}{\ell m} \right)^{1/2} \tau_1 \right]\end{aligned}\quad (3.27)$$

e (3.28)

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 &= \frac{2}{\beta\ell} \beta w_0 \left(\frac{12\sigma_d \beta^2 S}{\beta\ell\beta^3 m} \right)^{1/2} \sinh \left[\left(\frac{12\sigma_d \beta^2 S}{\beta\ell\beta^3 m} \right)^{1/2} \beta \tau_1 \right] \rightarrow \\ \dot{\theta}_1 &= \frac{1}{\beta} \left[\frac{2}{\ell} w_0 \left(\frac{12\sigma_d S}{\ell m} \right)^{1/2} \sinh \left[\left(\frac{12\sigma_d S}{\ell m} \right)^{1/2} \tau_1 \right] \right].\end{aligned}\quad (3.28)$$

Na segunda fase, a equação de movimento a ser resolvida é dada por (3.22), que escalonada fica

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}/\beta^2 + \frac{(\beta\ell/2)^2 (\beta^3 m/4 + \beta^3 G) \sin\theta \cos\theta (\dot{\theta}/\beta)^2 + 4(\beta^3 M_1 + \beta^3 M_2)}{(\beta\ell/2)^2 [\beta^3 m/3 + (\beta^3 m/4 + \beta^3 G) \sin^2\theta]} &= 0 \rightarrow \\ \ddot{\theta} + \frac{(\ell/2)^2 (m + G) \sin\theta \cos\theta \dot{\theta}^2 + 4(M_1 + M_2)}{(\ell/2)^2 [m/3 + (m/4 + G) \sin^2\theta]} &= 0.\end{aligned}\quad (3.29)$$

Observe que a equação (3.29) é idêntica à (3.22), mas com os momentos M_1 e M_2 sendo dados por

$$\begin{aligned} M_1 &= \left[\left(\frac{\dot{\theta}}{8\beta D} \right)^{1/p} \frac{2p}{2p+1} + 1 \right] \beta^3 M_0 \\ M_2 &= \left[\left(\frac{\dot{\theta}}{4\beta D} \right)^{1/p} \frac{2p}{2p+1} + 1 \right] \beta^3 M_0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

que é (3.23) modificado pelo fator de escala.

O final do movimento se dá em

$$\tau_2 = \frac{\beta^3 G V_0}{\beta^2 S \sigma_d} \rightarrow \tau_2 = \beta \frac{G V_0}{S \sigma_d}, \quad (3.31)$$

que seria o mesmo resultado de (3.24) escalonado pelo fator β , não fosse o efeito que é introduzido através da equação de σ_d

$$\begin{aligned} \sigma_d &= \frac{4M_2}{bh^2} \rightarrow \\ \sigma_d &= \frac{4M_0}{bh^2} \left[\left(\frac{\dot{\theta}}{4\beta D} \right)^{1/p} \frac{2p}{2p+1} + 1 \right] \end{aligned} \quad (3.32)$$

O ângulo de rotação em função do tempo pode ser então obtido para a segunda fase do movimento para qualquer fator β . As relações mostram claramente que o escalonamento descrito na Tabela 1 seria perfeitamente obedecido caso o efeito viscoplástico não fosse considerado. Na seção subsequente, o modelo de Calladine será corrigido segundo a técnica aqui desenvolvida, eliminando assim a distorção observada devido à taxa de deformação.

3.1.2 – Correção

Como é desejado conhecer o estado da estrutura após o impacto, o instante final do movimento é adotado para aplicar a correção. No modelo de Calladine, a

equação que descreve o comportamento do material na segunda fase do movimento $\sigma_d = 4M_2 / (bh^2)$ é utilizada, com M_2 sendo dado por (3.23). Assim

$$\sigma_d = \frac{4M_2}{bh^2} \rightarrow \sigma_d = \frac{4M_0}{bh^2} \left[\left(\frac{\dot{\theta}}{4D} \right)^{1/p} \frac{2p}{2p+1} + 1 \right],$$

Então a função $f(\dot{\epsilon})$ neste caso é substituída por $f(\dot{\theta})$

$$f(\dot{\theta}) = \sigma_d = \sigma_0 \left[\left(\frac{\dot{\theta}}{4D} \right)^{1/p} \frac{2p}{2p+1} + 1 \right]. \quad (3.33)$$

A equação a ser resolvida para geração do fator de velocidade corrigido β_{V_0} é dado pela substituição de (3.33) em (2.15)

$$\beta_{V_0} = \left[\frac{(\beta_{V_0} \dot{\theta} / (4D))^{1/p} \frac{2p}{2p+1} + 1}{(\beta \dot{\theta} / (4D))^{1/p} \frac{2p}{2p+1} + 1} \right]^{1/2}. \quad (3.34)$$

Para obter a correção do modelo, primeiramente resolve-se o problema utilizando a formulação em 3.1.1-c, ou seja, o fator para velocidade inicial é igual a 1. O valor da taxa de rotação $\dot{\theta}$ no instante final é então utilizado na equação (3.34) e assim, β_{V_0} é obtido. Novamente as equações de 3.1.1-c são utilizadas, mas (3.25) e (3.26) são alteradas para considerar o novo fator para velocidade, de sorte que

$$\beta_{V_0} V_0 - [S\sigma_d / (G)] \frac{\tau_1}{\beta} = 2 \left(\frac{12\sigma_d S}{\ell m} \right)^{1/2} \frac{w_0^2}{\ell} \sinh \left[2 \left(\frac{12\sigma_d S}{\ell m} \right)^{1/2} \frac{\tau_1}{\beta} \right] \quad (3.35)$$

e

$$\sigma_d = \sigma_0 \left(1 + \frac{\beta_{V_0} V_0}{D\beta\ell} \right)^{1/p}. \quad (3.36)$$

Essa segunda solução vai fornecer dados que podem ser relacionados com o protótipo de acordo com as equações (2.6) a (2.10), ou seja, $\beta_\delta = \beta$, $\beta_{\sigma_d} = \beta_{V_0}^2$, $\beta_T = \beta / \beta_v$, $\beta_\epsilon = \beta_v / \beta$, $\beta_\sigma = \beta_{\sigma_d}$ e $\beta_A = \beta_{V_0}^2 / \beta$.

3.1.3 – Resultados

Definindo valores numéricos no modelo de Calladine, foram resolvidas as equações e aplicada a correção conforme descrito na seção anterior. Três fatores de escala foram utilizados: 1/2, 1/4 e 1/10, além do protótipo de escala unitária, para que os resultados possam ser comparados. Primeiro, são mostrados os dados para os modelos não corrigidos e depois, os resultados para os modelos onde a correção foi aplicada. Em ambos os casos, os valores empregados foram obviamente os mesmos, como mostrados na Tabela 3 a seguir.

Tabela 3 – Valores empregados para o modelo de Calladine.

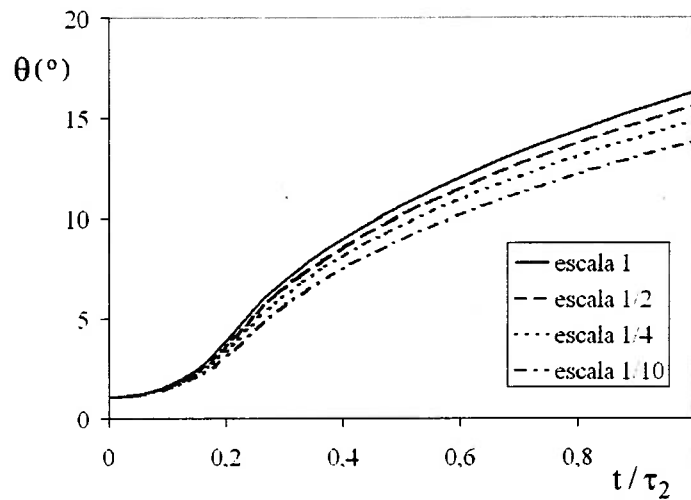
geometria	
comprimento da barra	$\ell = 50 \text{ mm}$
espessura da barra	$h = 1,6 \text{ mm}$
largura da barra	$b = 5,0 \text{ mm}$
rotação inicial	$\theta_0 = 1,07^\circ$

material		
variável	aço doce	liga de alumínio
densidade mássica	$\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$	$\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$
tensão de escoamento estática	$\sigma_0 = 235\text{E}6 \text{ Pa}$	$\sigma_0 = 100\text{E}6 \text{ Pa}$
coeficientes de Cowper-Symonds	$p = 5$	$p = 4$
	$D = 40$	$D = 6500$

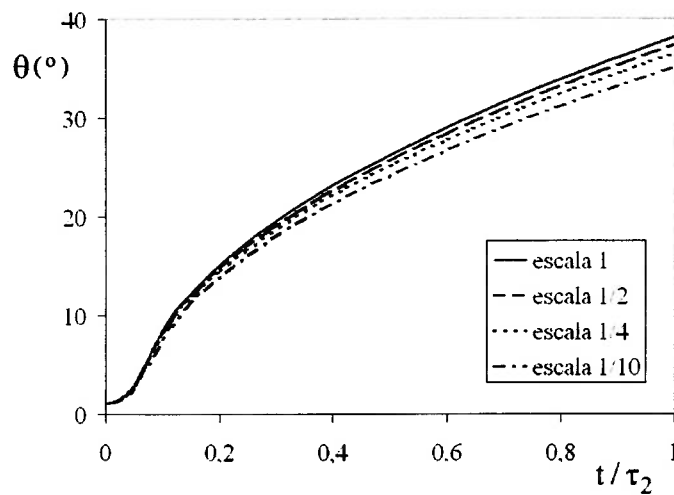
a) Modelo sem correção

A Figura 14 a seguir mostra a evolução do ângulo de rotação em função do tempo adimensional. Os valores são dados na Tabela 3 e a velocidade inicial é de 6,17 m/s. As escalas de 1, 1/2, 1/4 e 1/10 são construídas no mesmo gráfico para que os resultados possam ser comparados. Como esperado, à medida que o fator de

escala diminui, as deformações também diminuem. Isso é explicado pelo fato da taxa de deformação ser inversamente proporcional a β e portanto, há um enrijecimento do material.



(a)



(b)

Figura 14 – Modelo de Calladine: ângulo de rotação em função do tempo adimensional, modelos não corrigidos. (a) aço doce; (b) alumínio.

Seguindo as relações da Tabela 1, ou seja, sem correção, monta-se a Tabela 4 a seguir com as variáveis no instante final do movimento.

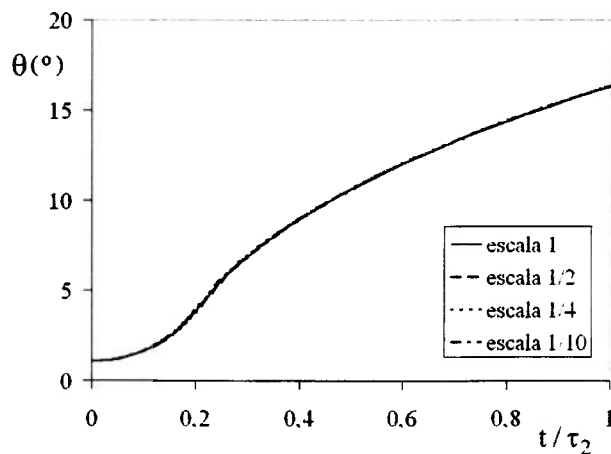
		valores estimados através dos modelos					
		$\beta = 1/2$		$\beta = 1/4$		$\beta = 1/10$	
		valor	erro (%)	valor	erro (%)	valor	erro (%)
aço doce	variáveis	protótipo					
	fator de velocidade	1	-	1	-	1	-
	ângulo (°)	16,31	4,5	14,82	9,1	13,81	15,3
	tempo (s)	5,18E-4	7,3	4,42E-4	14,6	3,94E-4	23,9
	aceleração (m/s ²)	11915	7,9	13947	17,1	15659	31,4
	taxa de deformação (s ⁻¹)	300	3,0	319	6,3	334	11,2
	tensão (MPa)	477	7,9	559	17,1	627	31,4
alumínio	fator de velocidade	1	-	1	-	1	-
	ângulo (°)	38,16	2,1	36,43	4,5	35,06	8,1
	tempo (s)	1,97E-3	3,8	1,81E-3	8,0	1,69E-3	14,0
	aceleração (m/s ²)	3132	3,9	3402	8,6	3643	16,3
	taxa de deformação (s ⁻¹)	175	1,5	181	3,3	185	6,0
	tensão (MPa)	125	3,9	136	8,6	146	16,3

Tabela 4 – Modelo de Calladine: comparação entre valores obtidos pelo protótipo e pelos modelos. Velocidade inicial não corrigida (6,17 m/s).

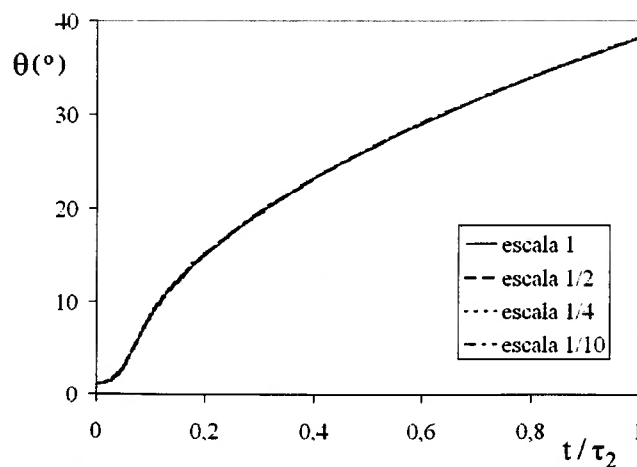
Os maiores erros são registrados para o aço doce na escala 1/10: 15% para ângulo de rotação, 24% para tempo, 31% para aceleração, 11% para taxa de deformação e 31% para tensão.

b) Modelo corrigido

Similarmente ao item anterior, os dados da Tabela 3 são aplicados para o modelo de Calladine e a velocidade inicial no protótipo é de 6,17 m/s. No entanto, agora corrigimos essa velocidade para os modelos e a Figura 15 foi obtida. Ela mostra uma melhor convergência, sendo que para os modelos de alumínio as curvas quase chegam a coincidir. A Tabela 5 também mostra uma diminuição considerável do erro. Para o aço doce em escala 1/10 foi obtido 0,21% para rotação, 0,24% para tempo, 0,24% para aceleração, 0,09% para taxa de deformação e 0,24% para tensão.



(a)



(b)

Figura 15 – Modelo de Calladine: ângulo de rotação em função do tempo adimensional, modelos corrigidos através da velocidade. (a) aço doce; (b) alumínio.

	variáveis	protótipo	valores estimados através dos modelos					
			$\beta = 1/2$		$\beta = 1/4$		$\beta = 1/10$	
			valor	erro (%)	valor	erro (%)	valor	erro (%)
aço doce	fator de velocidade	1	1,039	-	1,084	-	1,150	-
	ângulo (°)	16,31	16,35	0,03	16,36	0,08	16,38	0,21
	tempo (s)	5,18E-4	5,18E-4	0,02	5,18E-4	0,06	5,19E-4	0,24
	aceleração (m/s ²)	11915	11918	0,02	11908	0,06	11887	0,24
	taxa de deformação (s ⁻¹)	300	302	0,38	301	0,27	301	0,09
	tensão (MPa)	477	477	0,02	477	0,06	476	0,24
alumínio	fator de velocidade	1	1,020	-	1,043	-	1,080	-
	ângulo (°)	38,16	38,20	0,01	38,21	0,04	38,23	0,11
	tempo (s)	1,97E-3	1,97E-3	0,01	1,97E-3	0,05	1,97E-3	0,17
	aceleração (m/s ²)	3132	3131	0,01	3130	0,05	3126	0,18
	taxa de deformação (s ⁻¹)	175	175	0,07	175	0,03	175	0,12
	tensão (MPa)	125	125	0,01	125	0,05	125	0,18

Tabela 5 – Modelo de Calladine: comparação entre valores obtidos pelo protótipo e pelos modelos. Velocidade inicial corrigida.

3.2 – Viga engastada sofrendo um impulso de velocidade

O segundo modelo estudado é uma viga engastada nas extremidades sofrendo um impulso de velocidade ao longo de todo o comprimento, como mostrado na Figura 16. Esse caso também não é escalonável se a taxa de deformação for inserida no equacionamento, como visto posteriormente.

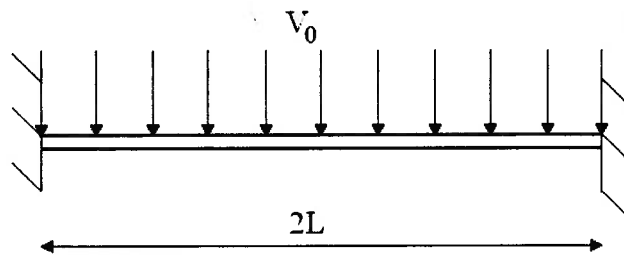


Figura 16 – Viga engastada sofrendo um impulso de velocidade V_0 .

O centro da viga, onde ocorre a maior deformação plástica, será o local considerado e a correção será feita através dos dados derivados deste ponto.

3.2.1 – Formulação

a) Deslocamento do centro da viga

O modelo descrito foi retirado de Jones (1997). Inicialmente é equacionado o caso de uma placa feita de material perfeitamente plástico sofrendo um impulso de pressão uniforme por toda a área. A viga é então considerada um caso particular, ou seja, uma das laterais da placa sendo muito maior que a outra. A deformação final no centro é dada pela seguinte relação

$$\frac{W_f}{h} = \frac{1}{2} \left\{ (1 + 3\lambda/4)^{1/2} - 1 \right\}, \quad (3.37)$$

com λ sendo dado por

$$\lambda = \frac{4\rho V_0^2 L^2}{\sigma_0 h^2}, \quad (3.38)$$

sendo L o meio comprimento da viga e W_f o deslocamento na posição central no final do movimento.

A equação (3.37) já leva em consideração o efeito de deformações plásticas finitas, mas para inserir o efeito da taxa de deformação troca-se σ_0 pela equação constitutiva de Cowper Symonds (3.8). Para o cálculo da taxa de deformação, a relação aproximada de Badra e Perrone é aplicada como proposto por Jones (1997). Ela considera a tensão associada com a taxa de deformação em um deslocamento vertical de $2W_f/3$ e velocidade de $V_0/\sqrt{2}$, quando metade da energia cinética inicial foi absorvida. É mostrado que em muitos casos esse valor de tensão gera bons resultados se comparado com soluções teóricas exatas, assim

$$\dot{\epsilon} = \frac{V_0 W_f}{3\sqrt{2}L^2}. \quad (3.39)$$

Inserindo então (3.39) na equação constitutiva de Cowper Symonds

$$n = \frac{\sigma_d}{\sigma_0} = 1 + \left(\frac{V_0 W_f}{3\sqrt{2}DL^2} \right)^{1/q}. \quad (3.40)$$

Trocando σ_0 por $n\sigma_0$ na equação (3.38) e inserindo-a em (3.37) obtém-se o deslocamento transversal final no centro da viga

$$\frac{W_f}{h} = \frac{1}{2} \left[\left(1 + 3 \frac{\rho V_0 L^2}{n\sigma_0 h^2} \right)^{1/2} - 1 \right], \quad (3.41)$$

com n sendo dado por (3.40).

b) Aplicação do fator de escala

Se for inserido o fator de escala β na equação (3.41) parece não haver alteração alguma em relação à equação do protótipo

$$\frac{W_f}{h} = \frac{1}{2} \left[\left(1 + 3 \frac{\rho V_0 \beta^2 L^2}{n\sigma_0 \beta^2 h^2} \right)^{1/2} - 1 \right] = \frac{1}{2} \left[\left(1 + 3 \frac{\rho V_0 L^2}{n\sigma_0 h^2} \right)^{1/2} - 1 \right].$$

No entanto, a diferença entre modelo e protótipo está implicitamente presente através da variável n , com a inserção de β em (3.40)

$$n = 1 + \left(\frac{V_0 \beta W_f}{3\sqrt{2} D \beta^2 L^2} \right)^{1/q} = 1 + \left(\frac{V_0 W_f}{3\sqrt{2} D \beta L^2} \right)^{1/q}.$$

Mais uma vez, o não escalonamento se dá exclusivamente pelo efeito da taxa de deformação, pois se em lugar da tensão de escoamento dinâmica σ_d fosse aplicada a tensão de escoamento estática σ_0 , não existiria nenhuma diferença entre os modelos escalonados.

3.2.2 – Correção

Como descrito anteriormente, as relações (2.6) a (2.10) podem ser reutilizadas, mas a equação que define β_{σ_d} deve ser reescrita de forma a representar de forma conveniente o material. Neste caso estudado, ela é obtida através da equação constitutiva de Cowper Symonds $\sigma_d = \sigma_0 (1 + \dot{\epsilon}/D)^{1/p}$. Assim

$$\beta_{\sigma_d} = \frac{(\sigma_d)_{\text{modelo}}}{(\sigma_d)_{\text{protótipo}}} = \frac{\sigma_0 \left[1 + (\dot{\epsilon}_{\text{modelo}}^c / D)^{1/q} \right]}{\sigma_0 \left[1 + (\dot{\epsilon}_{\text{protótipo}} / D)^{1/q} \right]},$$

que é reformulada com a ajuda de (2.13) e (2.14)

$$\beta_{\sigma_d} = \frac{1 + (\beta_{V_0} \dot{\epsilon}_{\text{modelo}}^{\text{nc}} / D)^{1/q}}{1 + (\beta \dot{\epsilon}_{\text{modelo}}^{\text{nc}} / D)^{1/q}} \quad (3.42)$$

e β_{V_0} pode ser obtido através da inserção de (3.42) em (2.6)

$$\beta_{V_0} = \left[\frac{1 + (\beta_{V_0} \dot{\epsilon}_{\text{modelo}}^{\text{nc}} / D)^{1/q}}{1 + (\beta \dot{\epsilon}_{\text{modelo}}^{\text{nc}} / D)^{1/q}} \right]^{1/2}. \quad (3.43)$$

Ainda, $\dot{\epsilon}_{\text{modelo}}$ é calculado pela relação (3.39)

$$\dot{\epsilon}_{\text{modelo}}^{\text{nc}} = \frac{(V_0)_{\text{modelo}} (W_f)_{\text{modelo}}}{3\sqrt{2}(L_{\text{modelo}})^2} \rightarrow \dot{\epsilon}_{\text{modelo}}^{\text{nc}} = \frac{V_0 (W_f)_{\text{modelo}}}{3\sqrt{2}\beta^2 L^2}. \quad (3.44)$$

Dessa forma, o deslocamento final escalonado é obtido com o procedimento descrito e as equações (3.43) e (3.44).

3.2.3 – Resultados

Quatro fatores de escala foram aplicados na solução do problema: 1/2, 1/4, 1/10 e 1/20 e a Tabela 6 resume os valores adotados no protótipo. O material é aço doce, significativamente sensível à taxa de deformação. O protótipo também foi resolvido para que os dados pudessem ser comparados e a eficiência do método testada.

Tabela 6 – Valores para o modelo de viga sofrendo impulso de velocidade.

geometria e condições iniciais	
meio comprimento da viga	L = 63,333 mm
altura da viga	h = 2,342 mm
velocidade inicial	V ₀ = 50 m/s

material	
tensão de escoamento quasi-estática	$\sigma_0 = 210\text{E}6$ Pa
densidade mássica	$\rho = 7829$ kg/m ³
	q = 5
coeficientes de Cowper Symonds	D = 40,4 s ⁻¹

a) Modelo sem correção

Primeiramente, calculou-se a deformação transversal final no centro da viga para vários valores de β , mas não foi utilizada a correção da velocidade. Dessa forma, poderá ser verificado o efeito da taxa de deformação presente neste modelo. A

Tabela 7 resume os resultados e o erro que os modelos apresentaram em relação ao protótipo.

Tabela 7 – Resultados do modelo de viga engastada sofrendo um impulso de velocidade sem correção.

fator de escala β	deslocamento adimensional W_f / h	erro (%)
1	4,6636	0
1/2	4,4969	3,5732
1/4	4,3261	7,2361
1/10	4,0956	12,1782
1/20	3,9191	15,9631

b) Modelo corrigido

Para os modelos corrigidos, foram utilizados os mesmos valores do item anterior, com a única diferença da velocidade inicial não ser mais a mesma para todos, mas sendo multiplicada pelo fator de correção β_{v_0} . São resumidos os resultados e os erros dos modelos em relação ao protótipo na Tabela 8.

Tabela 8 – Resultados do modelo de viga engastada sofrendo impulso com a velocidade corrigida.

fator de escala β	fator de velocidade β_{v_0}	Deslocamento adimensional W_f / h	erro (%)
1	1,0000	4,6636	0
1/2	1,0375	4,6629	0,0138
1/4	1,0791	4,6609	0,0565
1/10	1,1411	4,6561	0,1603
1/20	1,1936	4,6507	0,2757

Comparando os erros da Tabela 7 ($\beta_{v_0} = 1$) com os da Tabela 8 (velocidade corrigida) verifica-se que estes são bem menores no último caso, ou seja, o modelo corrigido consegue prever com maior precisão o deslocamento final W_f do protótipo, sendo o erro sempre inferior a 1%.

3.3 – Modelo de viga engastada sofrendo impacto

Uma viga engastada sofrendo o impacto de uma massa G viajando com velocidade inicial V_0 é estudada agora. O contato se dá no meio comprimento, como ilustrado esquematicamente na Figura 17.

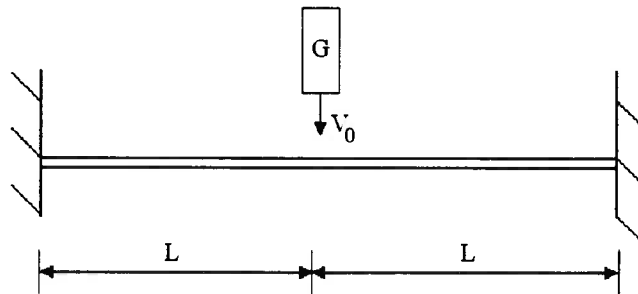


Figura 17 – Viga engastada sofrendo impacto de uma massa no seu meio comprimento.

Assim como no caso de viga sofrendo impulso de velocidade, neste modelo o centro também é o local onde ocorre a maior deformação e portanto, a correção será feita através dos dados derivados deste ponto.

3.3.1 – Formulação

a) Deslocamento do centro da viga

O modelo analítico descrito para a viga foi retirado de Liu; Jones (1988). O equacionamento considera deformações finitas e plasticidade. Para grandes massas de impacto o máximo deslocamento vale

$$w_f = \frac{-1 + \sqrt{1 + 2u\gamma/(1+r)}}{2\gamma}, \quad (3.45)$$

para $w_f = W_f / L$, $u = GV_0^2 / (2M)$, $\gamma = L_1 / h$, $r = L_1 / L_2$ e $M = \sigma_d bh^2 / 4$.

Para o caso estudado em que o impacto se dá no meio comprimento da viga, $L = L_1 = L_2$ e então $r = 1$. Substituindo estas definições em (3.45) leva a

$$w_f = \frac{\sqrt{1 + \frac{2GV_0^2 L}{\sigma_d b h^3}} - 1}{2L/h}. \quad (3.46)$$

Em Liu; Jones (1988), σ_d é a tensão de escoamento estática, mas aqui ela foi substituída pela tensão de escoamento dinâmica para incluir o efeito da taxa de deformação. Para isso, a equação constitutiva de Cowper-Symonds será utilizada com as constantes definidas em Alves; Jones (2002)

$$\sigma_d = \sigma_0 + \bar{m} \dot{\epsilon}^{\bar{n}}. \quad (3.47)$$

A taxa de deformação utilizada é uma relação aperfeiçoada de (3.39), extraída de Alves; Jones (2002). Assim, a forma equivalente da taxa é dada por

$$\dot{\epsilon}_{eq} = \sqrt{\dot{\epsilon}_{xx}^2 + \dot{\gamma}_{xy}^2 / 3}, \quad (3.48)$$

sendo que $\dot{\epsilon}_{xx}$ e $\dot{\gamma}_{xy}$ são calculados por

$$\epsilon_{xx} = \frac{3}{2}(1+r^2)h^2 w_f \quad \text{para } w_f \leq 1, \quad (3.49)$$

$$\epsilon_{xx} = (1+r^2)h^2 (w_f^2 + 5)/4 \quad \text{para } w_f > 1 \quad (3.50)$$

e

$$\gamma_{xy} = 4khw_f, \quad (3.51)$$

para o qual $h' = h/L_1$, $r = 1$ para impacto no meio comprimento da viga e $k = 0,26$ para o aço.

Derivando-se os termos (3.49) e (3.50) e utilizando a observação de que a máxima taxa de deformação ocorre quando $\dot{W} = V_0/\sqrt{2}$ (Jones, 1997) obtém-se (Alves; Jones, 2002)

$$\dot{\epsilon}_{eq} = \frac{V_0}{L} \sqrt{\frac{9}{8}(1+r^2)^2 h'^2 + \frac{8}{3}k^2} \quad \text{para } w_f \leq 1 \quad (3.52)$$

e

$$\dot{\epsilon}_{\text{eq}} = \frac{V_0}{L} \sqrt{\frac{1}{8}(1+r^2)^2 h'^2 w_f + \frac{8}{3} k^2} \quad \text{para } w_f > 1. \quad (3.53)$$

O máximo deslocamento na viga pode então ser obtido através das equações (3.46) e (3.47). Atenta-se para o fato da taxa de deformação ter duas definições distintas, dependentes do valor do valor de w_f , como mostrado em (3.52) e (3.53).

b) Aplicação do fator de escala

Agora insere-se um fator de escala β nas equações de movimento da viga com o objetivo de se provar o não escalonamento devido à taxa de deformação. Dessa maneira, (3.46) fornece

$$w_f = \frac{\sqrt{1 + \frac{2(\beta^3 G) V_0^2 (\beta L)}{\sigma_d (\beta b) (\beta h)^3} - 1}}{2(\beta L) / (\beta h)} \rightarrow w_f = \frac{\sqrt{1 + \frac{2G V_0^2 L}{\sigma_d b h^3} - 1}}{2L / h},$$

ou seja, não haveria alteração alguma em relação à equação do protótipo não fosse as equações para a taxa de deformação

$$\dot{\epsilon}_{\text{eq}} = \frac{V_0}{\beta L} \sqrt{\frac{9}{8}(1+r^2)^2 h'^2 + \frac{8}{3} k^2} \quad \text{para } w_f \leq 1 \quad (3.54)$$

e

$$\dot{\epsilon}_{\text{eq}} = \frac{V_0}{\beta L} \sqrt{\frac{1}{8}(1+r^2)^2 h'^2 w_f + \frac{8}{3} k^2} \quad \text{para } w_f > 1 \quad (3.55)$$

a serem usadas para o cálculo de σ_d .

Se a taxa de deformação fosse nula, os resultados de w_f para protótipo e modelo não sofreriam alteração.

3.3.2 – Correção

Similarmente às correções feitas nos dois modelos anteriores a equação constitutiva do material deve ser definida e vem de (3.47)

$$\sigma_d = \sigma_0 + \bar{m}\dot{\epsilon}^{\bar{n}}.$$

A equação (2.15) é reaplicada

$$\beta_{V_0} = \left[\frac{f(\beta_{V_0} \dot{\epsilon}_{\text{modelo}}^{\text{nc}})}{f(\beta \dot{\epsilon}_{\text{modelo}}^{\text{nc}})} \right]^{1/2} \rightarrow \beta_{V_0} = \left[\frac{\sigma_0 + \bar{m}(\beta_{V_0} \dot{\epsilon}_{\text{modelo}}^{\text{nc}})^{\bar{n}}}{\sigma_0 + \bar{m}(\beta \dot{\epsilon}_{\text{modelo}}^{\text{nc}})^{\bar{n}}} \right]^{1/2}, \quad (3.56)$$

e o cálculo do fator de correção é feito então através de (3.56), com a taxa de deformação dada por (3.54) e (3.55).

3.3.3 – Resultados

Quatro fatores de escala foram utilizados: 1/2, 1/4, 1/10 e 1/20, sendo que os valores do protótipo são exibidos na Tabela 9. As características materiais utilizadas para a viga são do aço utilizado por Alves; Jones (2002). O protótipo também é solucionado para que pudessem ser comparados os deslocamentos finais e calculados os respectivos erros.

Tabela 9 – Dados numéricos utilizados para o modelo de viga engastada sofrendo impacto no meio comprimento. (Alves; Jones, 2002)

geometria e condições iniciais	
meio comprimento da viga	L = 50 mm
altura da viga	h = 8,84 mm
largura da viga	b = 7,94 mm
altura adimensional	h' = 0,1768
coeficiente geométrico	r = 1
massa de impacto	G = 6,5 kg

material	
tensão de escoamento estática	$\sigma_0 = 235E6$ Pa
coeficiente do material	k = 0,26
coeficientes de Cowper-Symonds	$\bar{m} = 38,4Ns^{1/q} / m^2$
	$\bar{n} = 0,328$

Ainda, para que a equação (3.45) seja válida, o valor da razão de massa $g = \rho h b L / G$ deve ser suficientemente pequena $g \ll 1$. Logo, a massa de impacto G deve ser grande o bastante para viabilizar essa condição. Com os valores adotados, verifica-se que ela é plenamente atendida: $g = \rho h b L / G = 0,004$.

a) *Modelo sem correção*

A Tabela 10 resume os resultados para uma velocidade inicial V_0 de 10 m/s e os dados da tabela acima. A Figura 18 mostra a curva para vários β e V_0 variando de 10 até 55 m/s.

Tabela 10 – Resultados do modelo de viga engastada sofrendo um impacto. Velocidade inicial de 10m/s.

fator de escala β	deslocamento no centro da viga w_f	erro (%)
1	0,3783	0
1/2	0,3533	6,6155
1/4	0,3271	13,5472
1/10	0,2914	22,9720
1/20	0,2644	30,1226

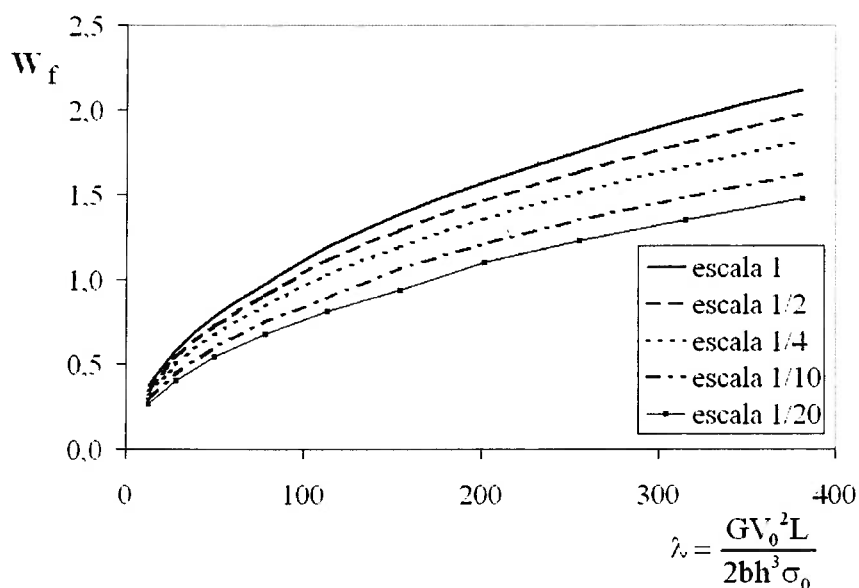


Figura 18 – Modelo de viga engastada sofrendo impacto no meio comprimento: deslocamento final $w_f \times \lambda$ para velocidade inicial não corrigida.

b) Modelo corrigido

As equações (3.54) a (3.56) são utilizadas para calcular a correção juntamente com o procedimento descrito. A Tabela 11 resume os dados obtidos para uma velocidade inicial de 10 m/s para o protótipo e corrigida pelo fator β_{V_0} para os modelos. Neste valor de velocidade os erros são nulos, pois a relação $\dot{\epsilon} \propto V_0/L$ é exata e não aproximada quando $w_f \leq 1$. Isso pode ser facilmente concluído através da equação (3.54), onde observa-se que a taxa de deformação é linearmente proporcional à velocidade dividido pelo comprimento.

Para uma velocidade inicial de 55 m/s, (3.55) tem que ser utilizada, pois $w_f > 1$ é verdadeira nesta condição. No entanto, para esta equação, a relação $\dot{\epsilon} \propto V_0/L$ não é verdadeira. Portanto, erros mínimos são observados conforme a Tabela 12.

Tabela 11 – Resultados do modelo de viga engastada sofrendo um impacto com a velocidade corrigida. Velocidade inicial de 10 m/s para o protótipo.

fator de escala β	fator de correção da velocidade β_{V_0}	deslocamento no centro da viga w_f	erro (%)
1	1	0,3783	-
1/2	1,0648	0,3783	0,00
1/4	1,1438	0,3783	0,00
1/10	1,2743	0,3783	0,00
1/20	1,3964	0,3783	0,00

Tabela 12 - Resultados do modelo de viga engastada sofrendo um impacto com a velocidade corrigida. Velocidade inicial de 55 m/s para o protótipo.

fator de escala β	fator de correção da velocidade β_{V_0}	deslocamento no centro da viga w_f	erro (%)
1	1	2,1213	-
1/2	1,0833	2,1212	0,006
1/4	1,1835	2,1208	0,023
1/10	1,3465	2,1200	0,059
1/20	1,4967	2,1192	0,094

A Figura 19 mostra os resultados em função do adimensional λ , com curvas para todas as escalas: 1 a 1/20. Nesta última figura, a diferença entre as escalas é imperceptível, constatando a melhora através da correção. O maior erro encontrado para o deslocamento final no centro da viga não passa de 0,1 %.

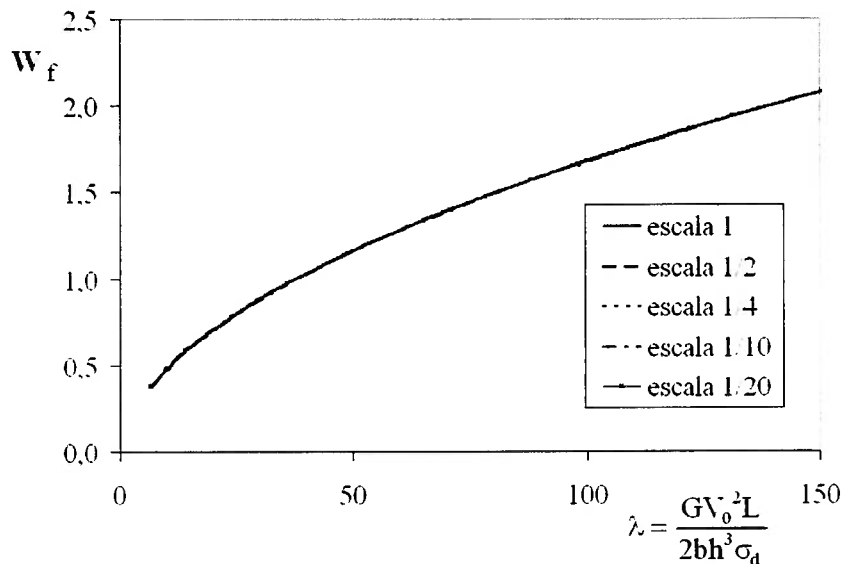


Figura 19 – Modelo de viga engastada sofrendo impacto no meio comprimento: deslocamento final $w_f \times \lambda$ para velocidade inicial corrigida.

Observe que a viga engastada sofrendo impulso de velocidade e a viga sofrendo impacto no meio comprimento apresentaram resultados com erros muito pequenos após a correção. No modelo de Calladine, o método gerou um erro sensivelmente maior, embora inferiores a 1% na escala 1:10. A razão para uma maior eficiência nos dois últimos casos estudados é que ambos utilizam um valor constante para a taxa de deformação, enquanto o modelo de Calladine tem uma taxa que varia com o tempo na 2ª fase do movimento. Além disso, a aproximação $\dot{\epsilon} \propto V_0 / L$ é mais próxima da relação real no caso das vigas. Estes resultados serão discutidos posteriormente com maiores detalhes.

4 – CORREÇÃO ATRAVÉS DA MASSA

Foi discutida a correção feita através da velocidade inicial, alterando-a de forma a compensar o efeito da taxa de deformação. Essa variável foi escolhida devido à facilidade de ajustá-la experimentalmente, sendo necessário somente alterar a altura de queda. No entanto, pode ser desejável em alguns casos que o parâmetro a ser ajustado seja a massa de impacto. De forma breve, mostramos então a diferença no equacionamento para essa situação.

Similarmente à correção através da velocidade inicial, a correção através da massa insere uma escala β_G que leva em consideração o efeito da taxa de deformação. O procedimento não sofre grandes alterações, sendo necessário somente substituir a equação para obtenção do fator de velocidade (2.15) por uma relação que calcule o fator para massa. Ainda, os adimensionais (2.1) a (2.5) continuam válidos para a extração das relações necessárias.

Diferentemente do primeiro método, o fator para velocidade inicial β_{V_0} é igual a unidade. O fator de massa não é mais $\beta_G = \beta^3$ e tem de ser redefinido, assim como as variáveis tempo, aceleração, taxa de deformação e tensão, que são reescritas em função de β e β_G .

Da equação (2.3), $\Pi_3 = \delta^3 \sigma_d / (GV_0^2)$, gera-se a relação básica entre fator de massa e a tensão de escoamento dinâmica

$$\frac{(\Pi_3)_m}{(\Pi_3)_p} = 1 \rightarrow \frac{\beta^3 \beta_{\sigma_d}}{\beta_G \beta_{V_0}^2} = 1 \rightarrow$$

$$\beta_G = \beta^3 \beta_{\sigma_d}. \quad (4.1)$$

Dessa maneira, o efeito da taxa de deformação está presente através da massa. As demais relações são facilmente obtidas de forma similar ao que foi feito com a correção através da velocidade.

De (2.1) $\Pi_1 = A^3 G / (V_0^4 \sigma_d)$ e (4.1) obtém-se a relação para aceleração

$$\frac{(\Pi_1)_m}{(\Pi_1)_p} = 1 \rightarrow \frac{\beta_A^3 \beta_G}{\beta_{V_0}^4 \beta_{\sigma_d}} = 1 \rightarrow \beta_A^3 = \frac{\beta_{\sigma_d}}{\beta_G} \rightarrow$$

$$\beta_A = 1/\beta. \quad (4.2)$$

O fator para tempo pode ser gerado através de (2.2) $\Pi_2 = T^3 \sigma_d V_0 / G$

$$\frac{(\Pi_2)_m}{(\Pi_2)_p} = 1 \rightarrow \frac{\beta_T^3 \beta_{\sigma_d} \beta_{V_0}}{\beta_G} = 1 \rightarrow$$

$$\beta_T = \beta. \quad (4.3)$$

De (2.4) $\Pi_4 = \dot{\epsilon} (G / (\sigma_d V_0))^{1/3}$ a relação para taxa de deformação é produzida

$$\frac{(\Pi_4)_m}{(\Pi_4)_p} = 1 \rightarrow \beta_{\dot{\epsilon}} \left(\frac{\beta_G}{\beta_{\sigma_d} \beta_{V_0}} \right)^{1/3} = 1 \rightarrow$$

$$\beta_{\dot{\epsilon}} = \frac{1}{\beta}. \quad (4.4)$$

O fator para tensão é obtida de (2.5) $\Pi_5 = \sigma / \sigma_d$

$$\frac{(\Pi_5)_m}{(\Pi_5)_p} = 1 \rightarrow \frac{\beta_{\sigma}}{\beta_{\sigma_d}} = 1 \rightarrow$$

$$\beta_{\sigma} = \beta_{\sigma_d}. \quad (4.5)$$

Novamente, aplicando a aproximação $\dot{\epsilon} \propto V_0/L$,

$$\frac{\dot{\epsilon}_{\text{modelo}}^c}{\dot{\epsilon}_{\text{modelo}}^{\text{nc}}} = \frac{V_0}{V_0} \Leftrightarrow \dot{\epsilon}_{\text{modelo}}^c = \dot{\epsilon}_{\text{modelo}}^{\text{nc}} \quad (4.6)$$

Da relação (4.4) $\beta_{\dot{\epsilon}} = 1/\beta$ e então

$$\begin{aligned} \beta_{\dot{\epsilon}} &= \dot{\epsilon}_{\text{modelo}}^c / \dot{\epsilon}_{\text{protótipo}} = 1/\beta \rightarrow \\ \dot{\epsilon}_{\text{protótipo}} &= \beta \dot{\epsilon}_{\text{modelo}}^c \rightarrow \dot{\epsilon}_{\text{protótipo}} = \beta \dot{\epsilon}_{\text{modelo}}^{\text{nc}} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Através da inserção de (4.6), (4.7) e (4.1) em (2.11) gera-se então

$$\beta_G = \beta^3 \frac{f(\dot{\epsilon}_{\text{modelo}}^{\text{nc}})}{f(\beta \dot{\epsilon}_{\text{modelo}}^{\text{nc}})} \quad (4.8)$$

O procedimento para correção através da massa segue os mesmos passos descritos na correção pela velocidade inicial (feita no capítulo 2). A diferença é que ao invés de se usar a equação (2.15) para obter β_{V_0} , aplica-se (4.8) para gerar β_G . As relações para as demais variáveis são obtidas através de (4.2) a (4.5).

Os modelos que foram corrigidos através da velocidade são agora corrigidos pela massa de impacto. Como será mostrado a seguir, houve melhora significativa nos resultados, porém os erros foram pouco maiores se comparados com os correspondentes valores da correção por velocidade.

4.1 – Correção de modelos analíticos

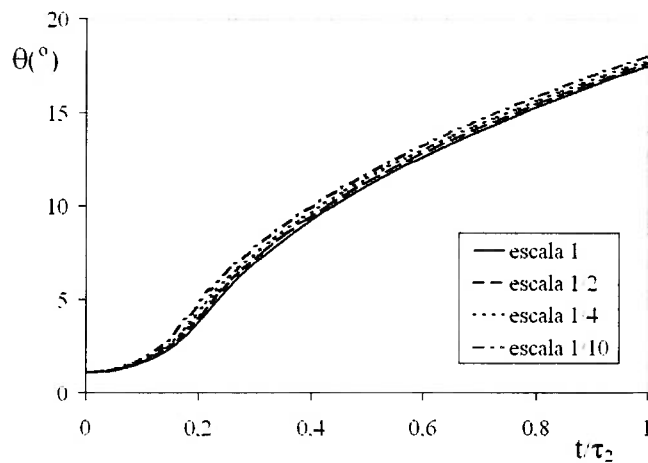
4.1.1 – Modelo de Calladine

O modelo já foi descrito em detalhes na seção 4.1 e a relação que define o comportamento material é dado por (3.33). O cálculo do fator de massa é obtido com a ajuda da equação (4.8)

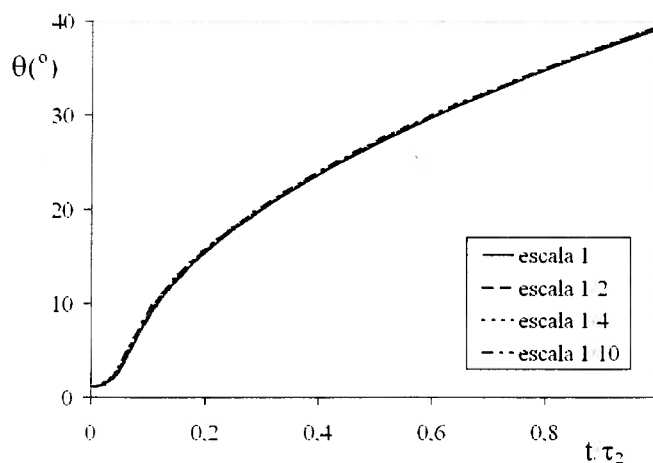
$$\beta_G = \beta^3 \left\{ \sigma_0 \left[\left(\frac{\dot{\theta}}{4D} \right)^{1/p} \frac{2p}{2p+1} + 1 \right] \right\} \left\{ \sigma_0 \left[\left(\frac{\beta \dot{\theta}}{4D} \right)^{1/p} \frac{2p}{2p+1} + 1 \right] \right\}^{-1} \rightarrow$$

$$\beta_G = \beta^3 \left[\left(\frac{\dot{\theta}}{4D} \right)^{1/p} \frac{2p}{2p+1} + 1 \right] \left[\left(\frac{\beta \dot{\theta}}{4D} \right)^{1/p} \frac{2p}{2p+1} + 1 \right]^{-1}. \quad (4.9)$$

Nada é alterado em relação ao equacionamento anterior e portanto, o movimento da viga durante o impacto é dado pela equação (3.12) na primeira fase e por (3.22) e (3.23) na segunda fase. Aplicando então os valores da Tabela 3 e uma velocidade inicial não corrigida de 6,17 m/s, a correção gerou os resultados mostrados na Figura 20 e Tabela 13. Como pode ser visto, houve uma melhora significativa dos resultados se comparados com os modelos sem correção.



(a)



(b)

Figura 20 – Modelo de Calladine: ângulo de rotação em função do tempo adimensional, correção através da massa de impacto. (a) aço doce; (b) alumínio.

	variáveis	protótipo	valores estimados através dos modelos					
			$\beta = 1/2$		$\beta = 1/4$		$\beta = 1/10$	
			valor	erro (%)	valor	erro (%)	valor	erro (%)
aço doce	fator de massa	1	0,1346	-	0,0182	-	0,0013	-
	ângulo (°)	17,45	17,60	0,86	17,76	1,8	17,98	3,0
	tempo (s)	5,10E-4	5,11E-4	0,20	5,12E-4	0,4	5,13E-4	0,6
	aceleração (m/s ²)	12086	13004	7,6	14057	16,3	15690	29,8
	taxa de deformação (s ⁻¹)	345,21	343,61	0,5	341,83	1,0	339,25	1,7
alumínio	tensão (MPa)	484,15	483,79	0,1	483,11	0,2	481,69	0,5
	fator de massa	1	0,1298	-	0,01695	-	0,00116	-
	ângulo (°)	39,18	39,23	0,1	39,30	0,3	39,40	0,6
	tempo (s)	1,97E-3	1,97E-3	0	1,97E-3	0	1,97E-3	0
	aceleração (m/s ²)	3138	3529	12,5	3403	8,4	3636	15,9
tensão (MPa)	181,43	181,29	0,1	181,11	0,2	180,78	0,4	
		125,69	125,67	0	125,61	0,1	125,44	0,2

Tabela 13 – Modelo de Calladine: comparação entre valores obtidos pelo protótipo e pelos modelos. Correção feita através da massa de impacto.

4.1.2 – Modelo de viga engastada sofrendo impacto

Este modelo foi descrito na seção 4.3 e ficou evidente que com a velocidade corrigida houve grande melhora nos resultados, com o erro máximo diminuindo de 30% para menos de 0,1%. A relação constitutiva do material é dada pela relação (3.47), que inserida em (4.8) produz

$$\beta_G = \beta^3 \frac{\sigma_0 + \bar{m}\dot{\epsilon}^{\bar{n}}}{\sigma_0 + \bar{m}(\beta\dot{\epsilon})^{\bar{n}}}, \quad (4.10)$$

com $\dot{\epsilon}$ sendo dado pelas relações (3.52) e (3.53)

Aplicando-se os mesmos valores da Tabela 9 e velocidade inicial variando de 10 a 55 m/s, obtém-se a Figura 21. Como pode ser verificado, os erros gerados neste modelo são mínimos também para correção através da massa de impacto, pois as curvas para as 5 escalas coincidem.

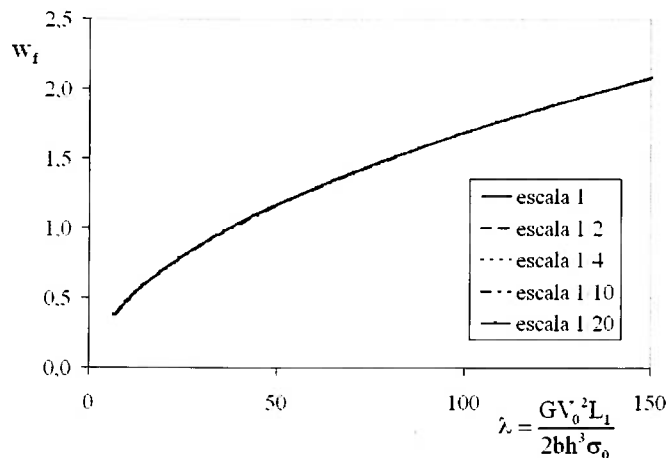


Figura 21 – Modelo de viga sofrendo impacto no meio comprimento: deslocamento final w_f em função do adimensional λ . Correção feita através da massa de impacto.

A Tabela 14 resume os valores para o fator de correção de massa obtidos para uma velocidade inicial de 55 m/s, onde os maiores erros são registrados.

Apesar de ambos os modelos apresentarem melhora nos dados, o método de correção através da velocidade de impacto gerou resultados ligeiramente melhores.

Porém, o cálculo do fator de massa é mais simples de ser obtido pois não é iterativo, diferentemente da equação que calcula o fator de velocidade (2.15) que não tem uma relação explícita. Ainda, deve ser observado que experimentalmente é muito mais simples ajustar a velocidade inicial do que a massa de impacto, pois no caso de um impacto de massa em queda livre, por exemplo, somente é necessário alterar a altura da queda.

Tabela 14 – Resultados do modelo de viga engastada sofrendo impacto com a massa corrigida. Velocidade inicial de 55 m/s.

fator de escala β	fator de correção da velocidade β_G	deslocamento no centro da viga w_f	erro (%)
1	1	2,1213	-
1/2	0,14419	2,1212	0,005
1/4	0,02104	2,1208	0,020
1/10	0,00168	2,1201	0,053
1/20	0,00025	2,1195	0,086

5 – MODELOS COM MATERIAIS DISTINTOS

Em certas situações experimentais é comum que o material da peça de teste não tenha exatamente as características desejadas. No estudo da Similaridade é possível que o material do protótipo e do modelo venham de amostras diferentes e por isso não vão gozar exatamente das mesmas propriedades, como seria desejável. Por esse motivo, vamos desenvolver neste capítulo a correção da velocidade inicial de impacto, mas que considera também o efeito de materiais dissimilares.

Para descrever esta situação foram utilizados valores diferentes na equação constitutiva de Cowper-Symonds, com $\sigma_0 = 235$ MPa , $D = 40$ s⁻¹ e $p = 5$ para o protótipo e $\sigma_0 = 135$ MPa , $D = 1288000$ s⁻¹ e $p = 4$ para o modelo. A equação (2.15) para o cálculo do fator de velocidade continua sendo válida, mas agora deve-se distinguir os coeficientes do modelo e do protótipo. Na seqüência deste capítulo, iremos abordar os três modelos analíticos estudados, mantendo os mesmos parâmetros utilizados até o momento para a solução dos problemas, com exceção da tensão de escoamento e dos coeficientes de Cowper-Symonds, redefinidos acima.

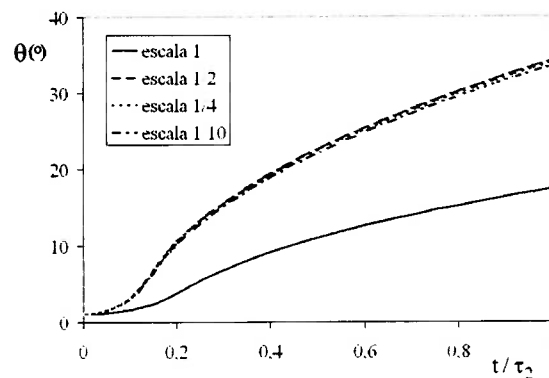
5.1 – Modelo de Calladine

O fator de velocidade para o modelo de Calladine é obtido através da equação (3.34) modificada com a identificação dos coeficientes do modelo e do protótipo

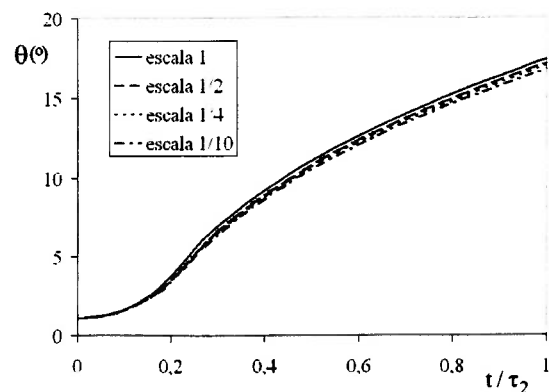
$$\beta_{V_0} = \frac{\left[(\sigma_0)_m \left[\left(\beta_{V_0} \frac{\dot{\theta}}{4D_m} \right)^{1/p_m} \frac{2p_m}{2p_m+1} + 1 \right] \right]^{1/2}}{\left[(\sigma_0)_p \left[\left(\beta \frac{\dot{\theta}}{4D_p} \right)^{1/p_p} \frac{2p_p}{2p_p+1} + 1 \right] \right]^{1/2}}, \quad (5.1)$$

sendo que os subscritos m e p denotam modelo e protótipo respectivamente.

Com a aplicação dos coeficientes descritos na seção anterior, os resultados são mostrados a seguir, na Figura 22 e Tabela 15. Devido ao fato do modelo ser constituído de um material menos resistente que o do protótipo, os fatores de velocidade são menores que a unidade.



(a)



(b)

Figura 22 – Modelo de Calladine: ângulo de rotação em função do tempo adimensional. Modelo constituído de material diferente do protótipo. (a) velocidade não corrigida. (b) velocidade corrigida.

	variáveis	protótipo	valores estimados através dos modelos					
			$\beta = 1/2$		$\beta = 1/4$		$\beta = 1/10$	
			valor	erro (%)	valor	erro (%)	valor	erro (%)
não corrigido	fator de velocidade	1	1	-	1	-	1	-
	ângulo (°)	17,4	34,3	97,0	34,0	95,4	33,6	92,9
	tempo (s)	5,10E-4	1,76E-3	245,2	1,74E-3	240,2	1,70E-3	232,4
	aceleração (m/s ²)	12086	3650	69,8	3704	69,4	3791	68,6
	taxa de deformação (s ⁻¹)	345	198	42,7	199	42,4	201	41,8
	tensão (MPa)	484	146	69,8	148	69,4	152	68,6
corrigido	fator de velocidade	1	0,5430	-	0,5428	-	0,5426	-
	ângulo (°)	17,4	17,1	1,6	17,0	2,5	16,8	3,8
	tempo (s)	5.10E-4	5,99E-4	2,3	4,91E-4	3,8	4,80E-4	6,1
	aceleração (m/s ²)	12086	12372	2,4	12559	3,9	12865	6,4
	taxa de deformação (s ⁻¹)	345	351	1,6	353	2,3	357	3,5
	tensão (MPa)	484	496	2,4	503	3,9	515	6,4

Tabela 15 – Modelo de Calladine: comparação entre valores obtidos pelo protótipo e pelos modelos com material diferente.
Velocidade inicial não corrigida de 6,17 m/s.

5.2 – Modelo de viga engastada sofrendo impulso de velocidade

A técnica de correção para a viga sofrendo impulso de velocidade por todo o comprimento também gera bons resultados, com erros menores que 3% após a correção. Os dados são resumidos na Tabela 16, sendo que o comportamento do material é dado pela relação de Cowper-Symonds e portanto o cálculo do fator de velocidade é obtido através da equação

$$\beta_{V_0} = \left[\frac{(\sigma_0)_m \left(1 + (\dot{\epsilon}/D_m)^{1/p_m}\right)}{(\sigma_0)_p \left(1 + (\dot{\epsilon}/D_p)^{1/p_p}\right)} \right]^{1/2} \quad (5.2)$$

e a taxa de deformação no caso de viga sofrendo impulso de velocidade é dada pela equação (3.39).

Tabela 16 – Resultados de viga sofrendo impulso com a velocidade corrigida. Materiais diferentes entre modelos e protótipo.

β	β_{V_0}	W_f / h	erro (%)
1	-	4,3873	-
1/2	0,5491	4,2691	2,7
1/4	0,5533	4,2753	2,6
1/10	0,5600	4,2848	2,3
1/20	0,5661	4,2930	2,2

5.3 – Modelo de viga engastada sofrendo impacto

A correção aplicada ao modelo de viga sofrendo impacto também gerou dados para os modelos com erros muito pequenos em relação ao protótipo, mesmo com materiais com características distintas sendo utilizados. O fator para a velocidade é calculado utilizando-se (5.2) e a taxa de deformação é dada por (3.52) e (3.53). A comparação entre o protótipo e os modelos é mostrada na Figura 23.

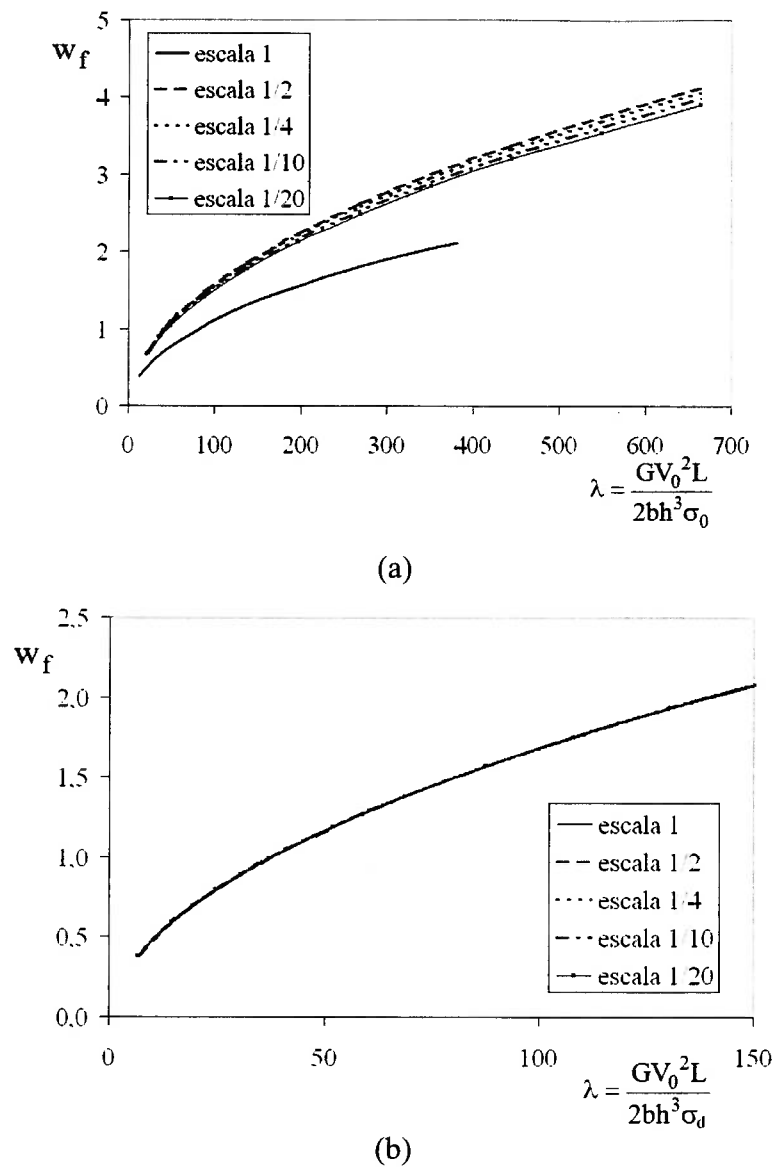


Figura 23 – Modelo de viga engastada sofrendo impacto: deslocamento final em função de λ para modelos com materiais diferentes. (a) modelos não corrigidos. (b) modelos corrigidos.

Como pode ser visto claramente nos três casos exibidos acima, a correção com coeficientes de Cowper-Symonds distintos pode ser utilizada sem problemas, mesmo que estes sejam bastante diferentes, como os exibidos neste capítulo.

No entanto, nada foi dito a respeito de outras características materiais, como a densidade mássica e o módulo de elasticidade, permanecendo estas com os mesmos

valores no protótipo e modelo. Caso a relação material não seja a de Cowper-Symonds, mas dada por

$$(\sigma_d)_m = f(\alpha_{m1}, \alpha_{m2}, \dots, \alpha_{mn})$$

e

$$(\sigma_d)_p = f(\alpha_{p1}, \alpha_{p2}, \dots, \alpha_{pn}),$$

sendo α_{mi} e α_{pi} os coeficientes para modelo e protótipo respectivamente. Então qualquer um dos parâmetros α_{mi} e α_{pi} pode ser ajustado.

6 – SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

No capítulo anterior, o método de correção desenvolvido neste trabalho foi aplicado a 3 modelos analíticos unidimensionais e ficou demonstrada uma melhora significativa nos resultados. Nesta seção, objetiva-se avaliar a eficiência do procedimento em uma estrutura mais complexa, um cilindro sofrendo impacto na direção axial. Para isso, ele vai ser simulado através do método dos elementos finitos, programa Abaqus 6.2.

A simulação é descrita na próxima seção, com o detalhamento da malha, as condições do impacto e os valores numéricos empregados. A seguir, realizamos alguns testes e os comparamos com os resultados de Karagiozova; Alves (2003) com o intuito de validar a malha utilizada. Depois são mostrados os resultados dos modelos sem a taxa de deformação para duas escalas e será comprovada que a Similaridade perfeita é atingida nesta situação. Finalmente, na última seção, o efeito da taxa é inserido e os modelos escalonados com correção e sem ela são comparados com o protótipo.

6.1 - Detalhes da simulação

Todos os cilindros utilizados nas simulações têm 20 mm de diâmetro, 300 mm de altura e 1 mm de espessura quando não escalonados. O material usado tem módulo de elasticidade de 210E9 Pa, módulo de encruamento nulo, tensão de escoamento estática de 235E6 Pa, densidade mássica de 7800 kg/m³ e coeficiente de Poisson de 0,33. Para os modelos em que a taxa de deformação foi considerada, a equação constitutiva de Cowper-Symonds foi aplicada com os coeficientes $q = 5$ e $D = 40 \text{ s}^{-1}$, os mesmos do aço doce.

O cilindro sofre o impacto na direção axial de uma massa rígida com velocidade inicial, sendo que o topo está sempre livre e sua base pode estar simplesmente apoiada ou engastada. Para os modelos sem taxa de deformação e escala unitária, a energia cinética no começo do fenômeno é sempre igual a 2000 J. Nos casos em que a taxa de deformação é considerada na resposta do material, a energia cinética total é de 3500 J quando não há escalonamento. Nos modelos em escala sem correção a energia segue a relação $K_{\text{modelo}} = \beta^3 K_{\text{protótipo}}$, mas quando aplica-se o método aqui proposto essa relação não é obedecida, pois o fator para velocidade é diferente de 1. A Tabela 17 resume os valores para massa, velocidade inicial e energia para cada caso.

A malha do cilindro é constituída por elementos do tipo casca RS4 do Abaqus, sendo 140 elementos na direção axial e 40 na circunferência. O corpo de impacto e a base são constituídos por 121 e 100 elementos respectivamente, ambos utilizando o elemento rígido R3D4. O contato entre a peça e o apoio tem o atrito definido como 0,25 e o mesmo valor é definido no contato com a massa de impacto e a parte superior da peça. O contato próprio da superfície da casca é definido como 0,1.

As imperfeições geométricas foram inseridas no modelo através dos 8 primeiros modos de flambagem da estrutura, sendo que as duas primeiras tem magnitude máxima de 0,0005L e as demais utilizaram um fator de apenas 0,000025L, onde L é o comprimento do tubo.

A gravidade também foi inserida no modelo numérico com valor de 9,81 m/s² para que o peso da massa de impacto fosse levado em consideração. No entanto, é bem conhecido que ela é um fator não escalonável (Baker; Westine; Dodge; 1991) e poderia portanto afetar os resultados de comparação. Como no presente trabalho não objetivamos abordar esse problema, também a escalonamos pelo fator $1/\beta$.

Tabela 17 – Valores de massa e velocidade inicial utilizados em cada simulação.

fator de escala	taxa de deformação	correção	velocidade inicial (m/s)	massa de impacto (kg)	energia cinética (J)		
1	não	-	20	10	2000		
			30	4,4444	2000		
1:10		não	20	0,01	2		
			30	0,00444	2		
1			sim	-	30	7,7778	3500
					40	4,375	3500
	50	2,8			3500		
	60	1,9444			3500		
1:10	não	30		0,00778	3,5		
		40		0,004375	3,5		
		50		0,0028	3,5		
		60		0,001944	3,5		
	sim			35,6420	0,00778	4,9404	
				47,6753	0,004375	4,9721	
				59,7398	0,0028	4,9964	
				71,8286	0,001944	5,0149	
1:20	sim	não	30	0,000972	0,4375		
			40	0,000547	0,4375		
			60	0,000243	0,4375		
		sim	37,7348	0,000972	0,6920		
			50,5176	0,000547	0,6980		
			76,1987	0,0002431	0,7057		

6.2 - Validação do modelo numérico

Antes de efetuarmos as simulações em escala, os resultados com a malha criada através do programa Abaqus foram comparadas com os obtidos por Karagiozova; Alves (2003). Neste trabalho foi feito um estudo da influência da velocidade de impacto e características materiais nos modos de colapso de tubos cilíndricos. Os autores utilizaram um tubo cilíndrico de 630 mm de comprimento e inicialmente desconsideraram o efeito da taxa de deformação. Nestas condições encontraram uma velocidade de transição entre a flambagem global e progressiva de 14,5 m/s. Para esta mesma velocidade, a flambagem é global caso a taxa de deformação seja considerada na resposta do material, de modo que a flambagem progressiva só ocorre quando $V_0 = 18$ m/s.

As Figura 24 a 27 mostram as comparações diretas feitas para cada caso. Apesar dos formatos não serem estritamente idênticos, o modo de colapso dos tubos coincidiu para as três situações. Como o objetivo do atual estudo não é a reprodução exata do trabalho feito por Karagiozova; Alves (2003), consideramos que a malha atende de forma satisfatória as nossas necessidades.

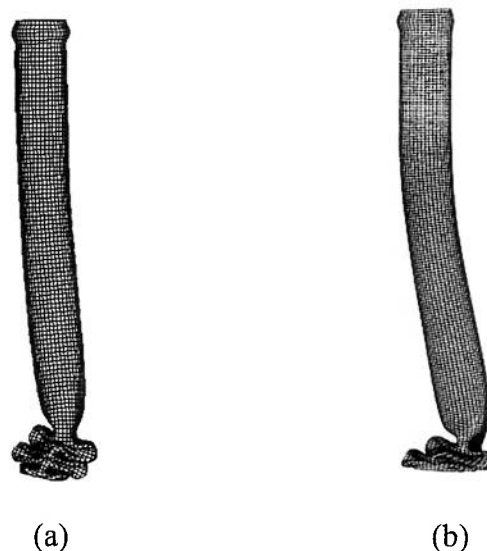


Figura 24 – Formatos finais obtidos para uma velocidade inicial de 14,5 m/s e material sem o efeito da taxa de deformação. (a) malha utilizada no trabalho. (b) resultado obtido por Karagiozova; Alves (2003).

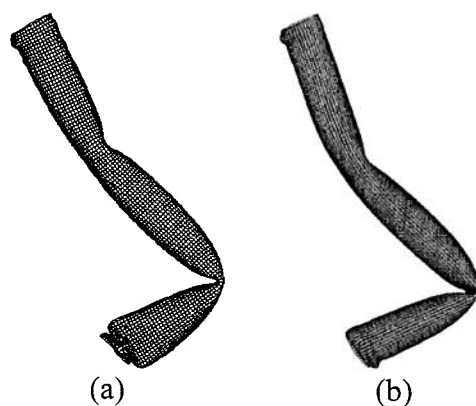


Figura 25 – Formatos finais obtidos para uma velocidade inicial de 14,5 m/s e material com o efeito da taxa de deformação. (a) malha utilizada no trabalho. (b) resultado obtido por Karagiozova; Alves (2003).

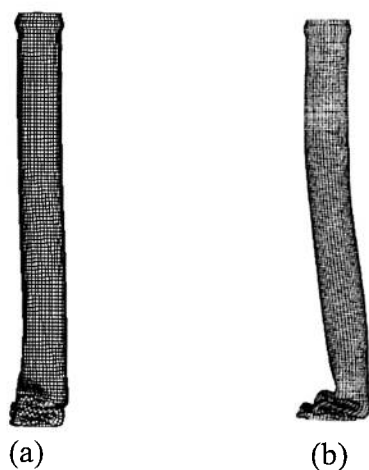


Figura 26 – Formatos finais obtidos para uma velocidade inicial de 18,0 m/s e material com o efeito da taxa de deformação. (a) malha utilizada no trabalho. (b) resultado obtido por Karagiozova; Alves (2003).

6.3 - Modelo sem taxa de deformação

Inicialmente foi considerado um modelo sem consideração dos efeitos da taxa de deformação na resposta material, assim foi possível verificar se sem esse efeito uma perfeita similaridade é atingida. O protótipo foi simulado e comparado com o modelo de razão 1:10 e duas velocidades iniciais: 20 e 30 m/s. Todos os parâmetros foram escalonados conforme as relações da Tabela 1.

Neste ponto é necessário estabelecer critérios para comparar as diferentes escalas, além do formato final da peça e o modo de colapso. Para isso foram utilizados dois parâmetros que pudessem ser confrontados de forma quantitativa: deslocamento do topo da estrutura e a força de pico.

Os resultados são mostrados nas Figuras 27 a 29, de onde se conclui que a geometria gerada no cilindro devido ao impacto é completamente semelhante, ambos flambando de forma progressiva e com dobras idênticas (Figura 27). Esse resultado é confirmado pelas Figuras 28 e 29, que apresentam os adimensionais U/L e $FL/(V_0^2G)$ em função do tempo adimensional tV_0/L , onde U é o deslocamento no topo da estrutura e F é a força de pico. As curvas em escala 1 e 1/10 praticamente coincidem como é o esperado para o caso sem taxa de deformação.

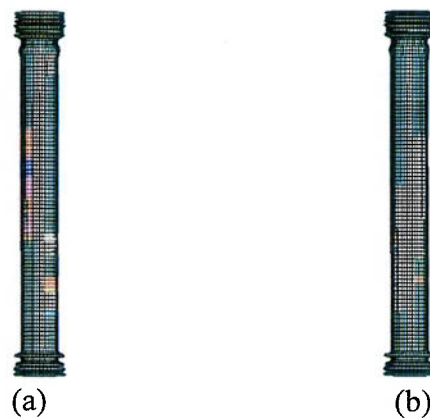


Figura 27 – Formato final para cilindros sem efeito da taxa de deformação que sofreram impacto a uma velocidade inicial de 20 m/s. (a) escala 1:1. (b) escala 1:10.

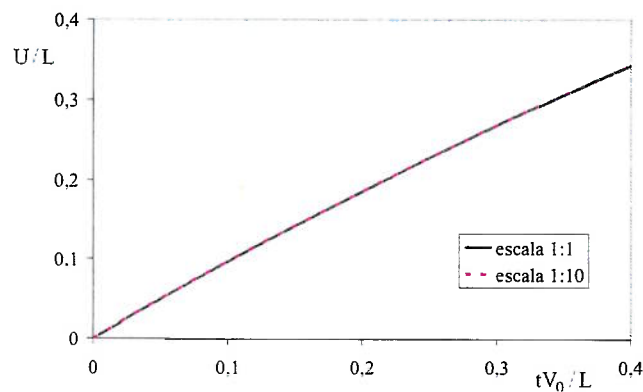


Figura 28 – Comparação entre protótipo e modelo: deslocamento no topo da estrutura em função do tempo adimensional. Taxa de deformação ignorada e velocidade inicial de 20 m/s.

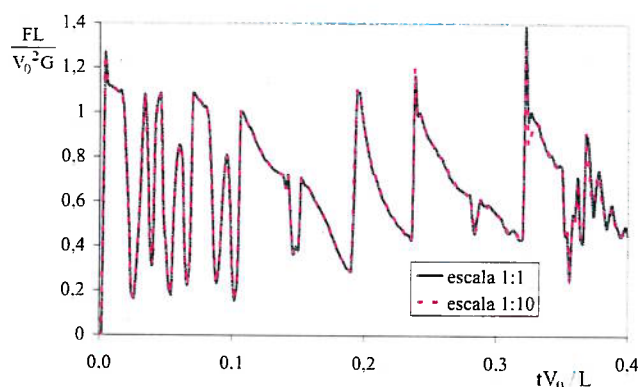


Figura 29 – Comparação entre protótipo e modelo: força de pico em função do tempo adimensional. Taxa de deformação ignorada e velocidade inicial de 20 m/s

As Figuras 30 a 32 apresentam os mesmos dados de comparação para uma velocidade inicial de 30 m/s.

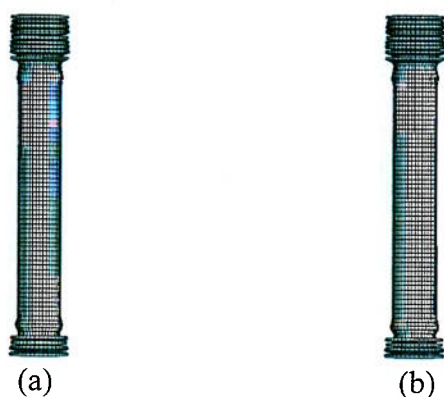


Figura 30 – Formato final para cilindros sem efeito da taxa de deformação que sofreram impacto a uma velocidade inicial de 30 m/s. (a) escala 1:1. (b) escala 1:10.

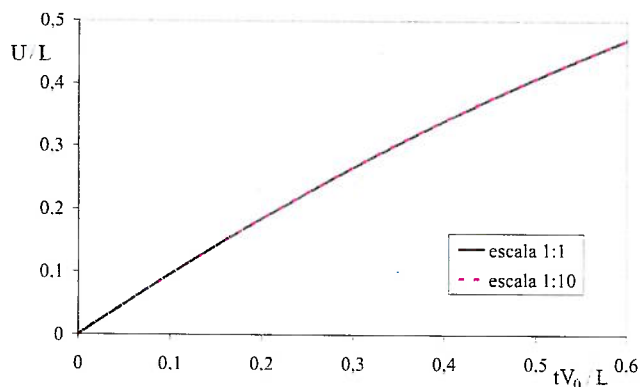


Figura 31 – Comparação entre protótipo e modelo: deslocamento no topo da estrutura em função do tempo adimensional. Taxa de deformação ignorada e velocidade inicial de 30 m/s.

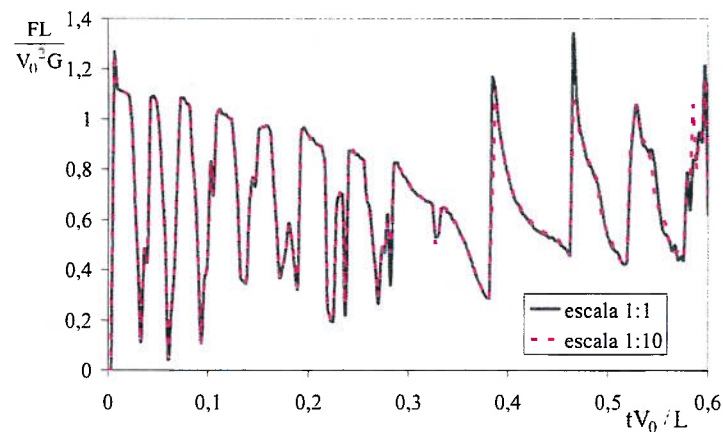


Figura 32 – Comparação entre protótipo e modelo: força de pico em função do tempo adimensional. Taxa de deformação ignorada e velocidade inicial de 30 m/s.

6.4 - Modelo com taxa de deformação

O próximo passo é avaliar o comportamento da estrutura com a taxa de deformação como feito nos modelos analíticos de viga. Como anteriormente, esse efeito foi inserido através da equação constitutiva de Cowper-Symonds com os coeficientes do aço doce já indicados, que é reconhecidamente bastante sensível à essa taxa.

A taxa de deformação média, necessária para o cálculo do fator de velocidade, foi considerada conforme proposto por Jones (1997) para tubos cilíndricos, ou seja,

$$\dot{\epsilon} = \frac{V_0}{4R}, \quad (6.1)$$

sendo R o raio médio do tubo. Apesar de parecer grosseira, essa estimativa é bastante simples e eficiente. Além disso, a falta de acurácia neste caso é minimizada, pois o termo que representa o acréscimo na tensão de escoamento devido à taxa de deformação na equação de Cowper-Symonds $[V_0/(4RD)]^{1,q}$ é bastante não linear para valores altos de q . Por exemplo, se a taxa de deformação média real em um tubo de aço doce com $q = 5$ fosse duas vezes maior que o valor estimado pela equação (6.1), então teria-se $[2V_0/(4RD)]^{1,5}$ ou $1,15[V_0/(4RD)]^{1,5}$, ou seja, somente 15% de diferença. Dessa maneira o fator de velocidade no método de correção também

não sofrerá grandes alterações. Por outro lado, a transição entre modos de colapso do tubo é bastante sensível aos valores da tensão de escoamento, podendo portanto, ser afetada por pequenas diferenças entre o valor real e estimado.

O fator de correção para velocidade é calculado inserindo-se (6.1) e (3.8) na equação (2.15) obtendo-se dessa maneira,

$$\beta_{V_0} = \sqrt{\frac{1 + (\beta_{V_0} V_0 / (4RD))^{1/q}}{1 + (\beta V_0 / (4RD))^{1/q}}} \quad (6.2)$$

Os valores de velocidade inicial com a aplicação dos fatores de correção obtidos são resumidos na Tabela 17 para escalas 1/10 e 1/20.

Dados como deslocamento e força média, entre outros, são funções do tempo e se é desejável uma comparação quantitativa destes valores no final do movimento, torna-se necessário determinar qual será esse instante na simulação. Neste ponto, um critério único baseado na variação de energia cinética será utilizado para estimar o momento do final do fenômeno. Independente do modo de colapso dos tubos e das condições do impacto estimou-se o erro em relação ao protótipo sempre usando este ponto no tempo. De forma ilustrativa esse instante é mostrado na Figura 33 para o tubo sofrendo impacto a uma velocidade de 40 m/s.

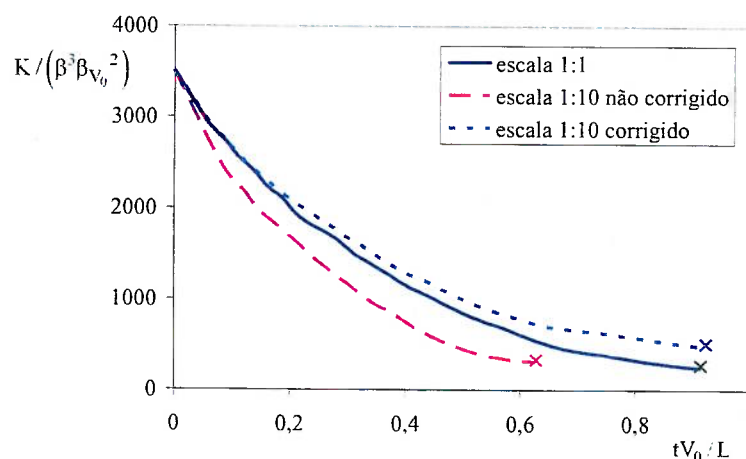


Figura 33 – Comparação entre protótipo e modelo: energia cinética em função do tempo adimensional. Taxa de deformação considerada na equação constitutiva e velocidade inicial de 40 m/s na escala unitária.

6.4.1 – Tubo com a base simplesmente apoiada

a) escala 1/10

Primeiro foram utilizadas simulações com a base do tubo simplesmente apoiada e o topo livre. Comparou-se então os modelos em escala 1/10 corrigido e não corrigido com a referência, o protótipo. Os valores para velocidade inicial, corrigida segundo a presente metodologia, e massa de impacto, escalonada em β^3 , para cada situação, estão expostos na Tabela 17. A Figura 34 mostra as geometrias finais obtidas para o protótipo e os modelos reescalados em 10 vezes.

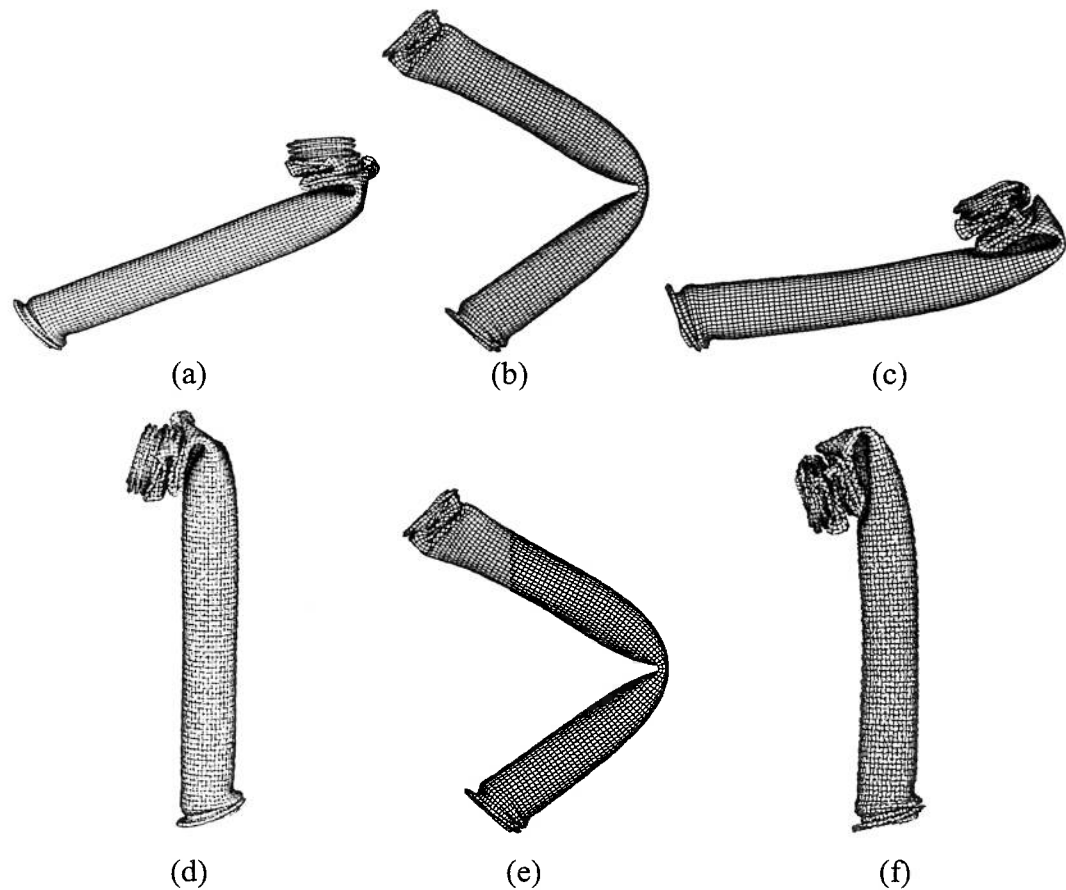


Figura 34 – Geometria final para tubos cilíndricos, considerando efeito da taxa de deformação, cujo protótipo sofreu impacto a uma velocidade inicial de 40 m/s e massa de 4,375 kg. Base simplesmente apoiada. (a) escala 1:1. (b) escala 1:10 não corrigido. (c) escala 1:10 corrigido. (d) escala 1:1 rotacionado. (e) escala 1:10 não corrigido. (f) escala 1:10 corrigido e rotacionado.

Para a velocidade inicial de 40 m/s, o modo de colapso para a escala unitária é uma transição entre a progressiva e global, mas o mesmo não ocorre para o modelo não corrigido, onde fica evidente uma flambagem global. Com a velocidade corrigida, a escala 1/10 apresenta novamente o mesmo modo de flambagem do protótipo. No entanto, o formato e a quantidade de dobras entre protótipo e modelo corrigido são ligeiramente diferentes, como pode ser visto nas Figuras 34 (a) e (c). Ainda, as Figuras 34 (d) e (f) mostram o tubo rotacionado para uma melhor comparação entre o protótipo e o modelo corrigido.

Comparou-se também o deslocamento e a força de pico adimensionalizados para o protótipo e os modelos em escala 1/10, conforme indicado nas Figuras 35 e 36.

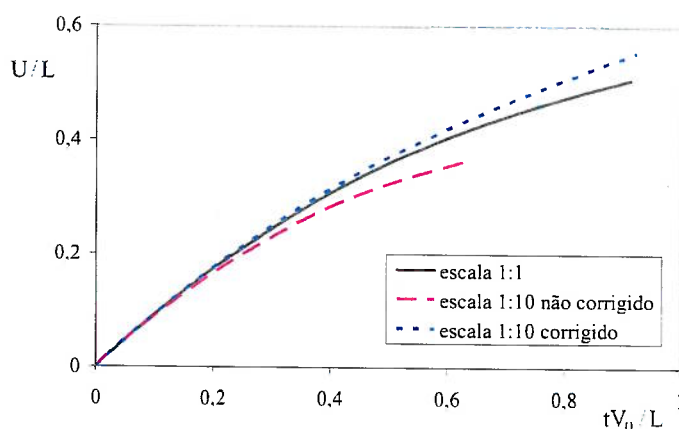


Figura 35 – Comparação entre protótipo e modelo 1/10: deslocamento no topo da estrutura em função do tempo adimensional. Taxa de deformação considerada na equação constitutiva e base simplesmente apoiada. Velocidade inicial de 40 m/s e massa de 4,375 kg na escala unitária.

O deslocamento mostrado na Figura 35 mostra que os erros em relação ao protótipo no final do fenômeno são de 29% e 9% para o modelo não corrigido e corrigido respectivamente. Na Figura 36, os vários picos de força adimensional entre a escala unitária e 1/10 não estão em fase; isto era esperado pois as dobras apresentadas são diferentes. Porém, é notável a melhora no pico máximo para o modelo corrigido, pois o erro diminuiu de 34% para menos de 2%. A diferença no tempo de impacto também diminuiu de 31% para menos de 1%, assim como a força média de 36% para 16%.

A Tabela 18 resume os erros observados dos modelos em relação ao protótipo para velocidade inicial de 40 m/s. Lista-se também os resultados obtidos para as velocidades de 30, 50 e 60 m/s.

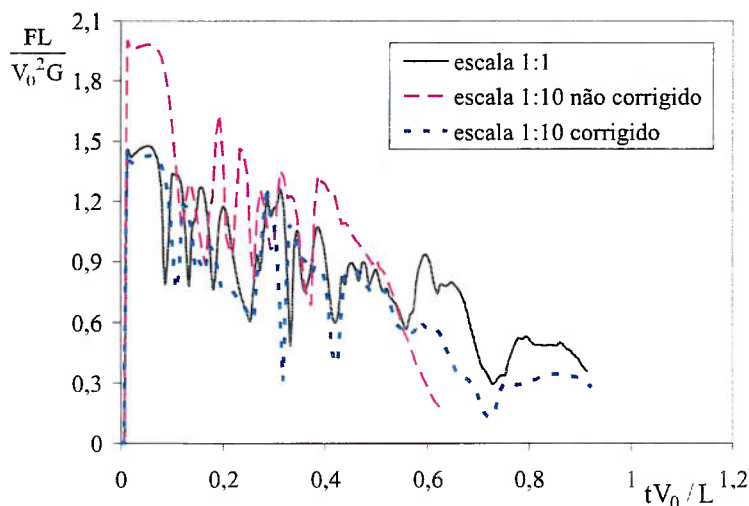


Figura 36 – Comparação entre protótipo e modelo 1/10: força de pico em função do tempo adimensional. Taxa de deformação considerada na equação constitutiva e base simplesmente apoiada. Velocidade inicial de 40 m/s e massa de 4,375 kg na escala unitária.

Tabela 18 – Resumo dos erros entre modelo 1/10 e protótipo para tubos sensíveis à taxa de deformação e base simplesmente apoiada.

velocidade inicial	simulação	modo de colapso	deslocamento adimensional	pico máximo de força adimensional	tempo adimensional de impacto	força adimensional média
30	protótipo	global	-	-	-	-
	não corrigido	global	21%	39%	18%	29%
	corrigido	global	4%	1%	3%	7%
40	protótipo	transição	-	-	-	-
	não corrigido	global	29%	34%	31%	36%
	corrigido	transição	9%	1%	1%	16%
50	protótipo	global	-	-	-	-
	não corrigido	global	24%	38%	18%	31%
	corrigido	global	13%	1%	11%	19%
60	protótipo	progressivo	-	-	-	-
	não corrigido	progressivo	24%	40%	21%	29%
	corrigido	progressivo	11%	3%	12%	12%

Deve ser ressaltado que no caso de tubos com o efeito da taxa de deformação, a comparação numérica direta, como feito na Tabela 18, é bastante útil para se confrontar os resultados entre as escalas. No entanto, somente essa análise não é suficiente para determinar a precisão dos modelos em relação ao protótipo. Isso se deve a uma série de fatores originários da não similaridade perfeita entre eles. Por exemplo, o tubo pode escorregar na base de apoio e se movimentar como um corpo rígido, logo o deslocamento no topo será devido à deformação somado à queda do cilindro. Devido a isso, a medida das forças de pico também não coincidirão como exibido na Figura 36.

Mesmo com os problemas citados acima, os resultados são sensivelmente melhores para a velocidade corrigida. A força máxima de pico, que ocorre logo no começo do fenômeno mostra uma aproximação boa entre modelo corrigido e protótipo.

Além disso, deve-se destacar que o modo de colapso na correção voltou a apresentar o mesmo comportamento do protótipo, fato que não ocorreu para a velocidade não corrigida. Essa mudança no modo de flambagem também é observada na simulação com velocidade inicial de 50 m/s. Com o intuito de analisar todos os modos de colapso, global, progressivo e transição, a seguir são exibidos os resultados para as demais velocidades.

Na velocidade de 30 m/s todos os casos apresentam flambagem global, mas o protótipo tem uma quantidade maior de dobras nas extremidades, como mostrado na Figura 37 (a). O modelo corrigido tem um deslocamento maior pois a dobra central é mais acentuada do que nos demais, como pode ser visto na Figura 37 (c). Com a correção não há melhora visível na geometria deformada final, mas os benefícios se tornam mais visíveis nos dados numéricos da Tabela 18 e nas curvas comparativas da Figura 38.

Para uma velocidade inicial de 50 m/s há uma maior semelhança na geometria deformada do modelo corrigido em relação ao protótipo, apesar do maior deslizamento na base de apoio, o que prejudica a comparação direta dos resultados numéricos (Figura 39). Devido ao movimento como corpo rígido, a velocidade de impacto de 50m/s registrou o maior erro do deslocamento dentre todos os modelos corrigidos, ou seja, 13%, conforme Tabela 18. Mesmo assim, todas as variáveis

medidas exibem melhor comportamento na velocidade corrigida. Para a velocidade sem correção, é provável que surgisse uma dobra central no tubo, como o apresentado pelas Figura 39 (a) e (c), caso houvesse mais energia cinética disponível, o que caracterizaria uma flambagem global. Novamente, o protótipo e o modelo corrigido são rotacionados para uma melhor comparação das geometrias deformadas entre ambos, eliminando qualquer movimento como corpo rígido (Figuras 39 (d) e (e))

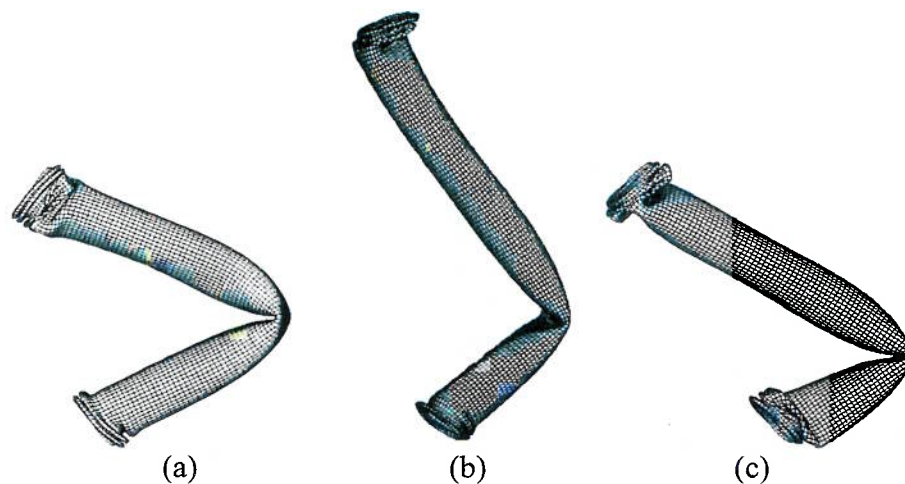


Figura 37 – Geometria final para tubos cilíndricos considerando efeito da taxa de deformação, cujo protótipo sofreu impacto a uma velocidade inicial de 30 m/s e massa de 7,7778 kg. Base simplesmente apoiada. (a) escala 1:1. (b) escala 1:10 não corrigido. (c) escala 1:10 corrigido.

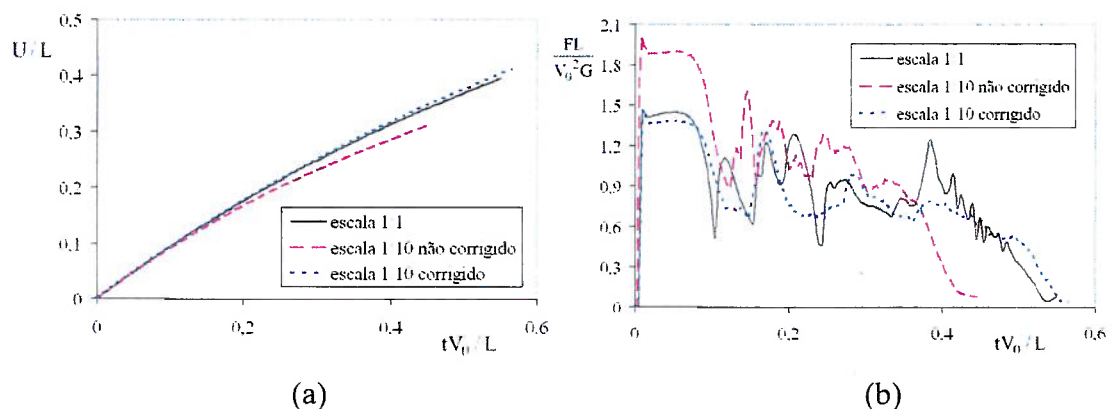


Figura 38 – Comparação entre protótipo e modelo 1/10 com efeito da taxa de deformação. Velocidade inicial de 30 m/s e massa de 7,7778 kg na escala unitária. Base simplesmente apoiada. (a) deslocamento no topo da estrutura em função do tempo adimensional. (b) força de pico em função do tempo adimensional.

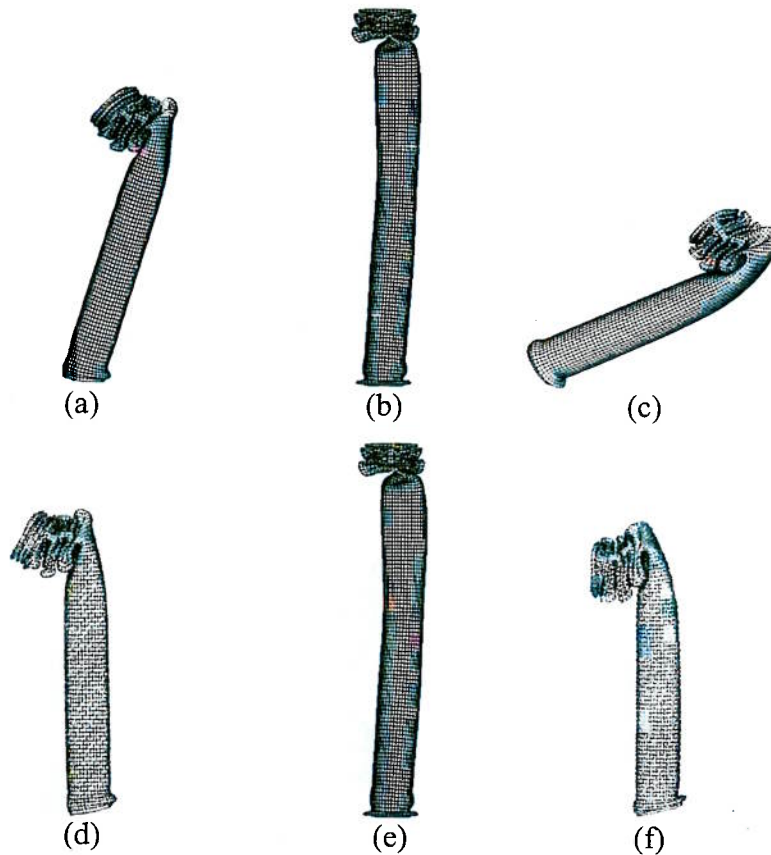


Figura 39 – Geometria final para tubos cilíndricos considerando efeito da taxa de deformação, cujo protótipo sofreu impacto a uma velocidade inicial de 50 m/s e massa de 2,8 kg. Base simplesmente apoiada. (a) escala 1:1. (b) escala 1:10 não corrigido. (c) escala 1:10 corrigido. (d) escala 1:1 rotacionado. (e) escala 1:10 não corrigido. (f) escala 1:10 corrigido e rotacionado.

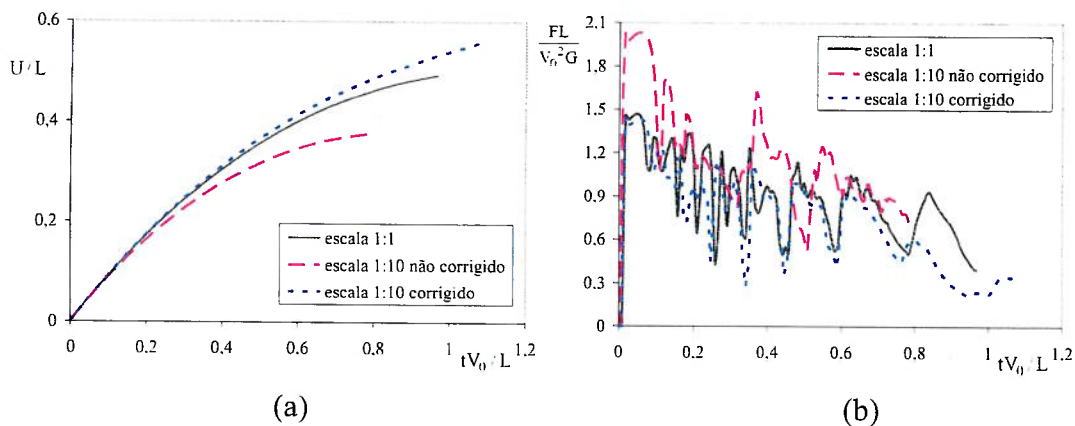


Figura 40 – Comparação entre protótipo e modelo 1/10 com taxa de deformação. Velocidade inicial de 50 m/s e massa de 2,8 kg na escala unitária. Base simplesmente apoiada. (a) deslocamento no topo da estrutura em função do tempo adimensional. (b) força de pico em função do tempo adimensional.

A velocidade de 60 m/s engloba o último caso em que todos apresentam flambagem progressiva (Figura 41). Assim como ocorreu para as demais velocidades, o modelo é mais rígido devido ao efeito da taxa de deformação e sem a correção, ele se deforma menos que o protótipo. Da mesma forma, todas as variáveis medidas exibem menores erros para o modelo corrigido (Tabela 15).

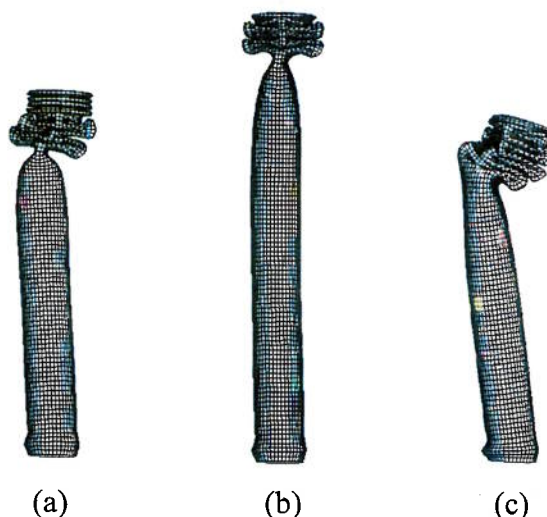


Figura 41 – Geometria final para tubos cilíndricos considerando efeito da taxa de deformação, cujo protótipo sofreu impacto a uma velocidade inicial de 60 m/s e massa de 1,9444 kg. Base simplesmente apoiada. (a) escala 1:1. (b) escala 1:10 não corrigido. (c) escala 1:10 corrigido.

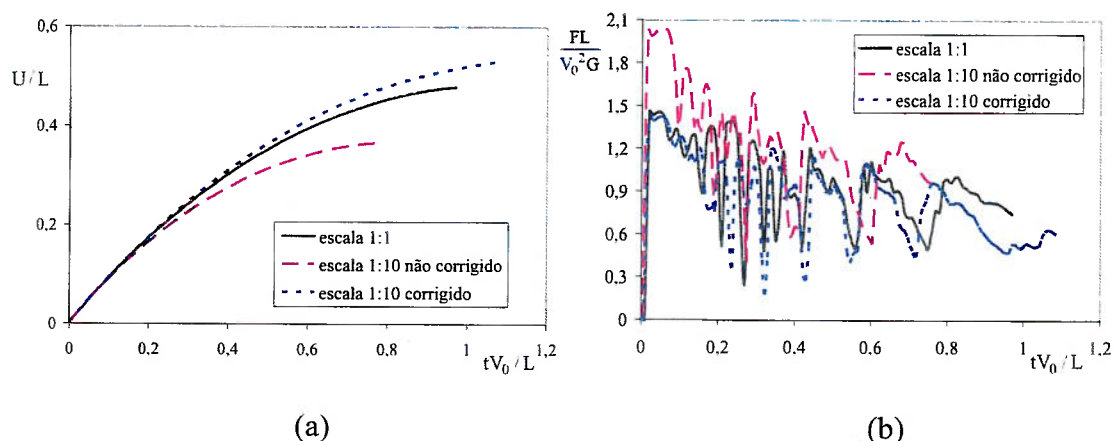


Figura 42 - Comparação entre protótipo e modelo 1/10 com taxa de deformação.

Velocidade inicial de 60 m/s e massa de 1,9444 kg na escala unitária. Base simplesmente apoiada. (a) deslocamento no topo da estrutura em função do tempo adimensional. (b) força de pico em função do tempo adimensional.

Observando os resultados de tubos simplesmente apoiados na base sujeitos a impacto na direção axial, fica clara a dificuldade na comparação direta dos dados. Confrontando-os de forma isolada é difícil se chegar a uma conclusão definitiva do efeito que a correção produz. De qualquer forma, é visível a melhora de muitas variáveis em relação ao modelo não corrigido pois os erros observados são sempre menores. Neste caso a maior beneficiada é a máxima força de pico, onde os erros caíram de 34% a 40% para menos de 3%, conforme Tabela 17.

b) escala 1/20

Além da escala 1/10, utilizamos também um fator de 1/20 para a geometria. Um valor de escala distinto vai permitir avaliar melhor a abrangência do método de correção descrito neste trabalho. Como será visto adiante, uma limitação em relação à taxa de deformação faz com que não haja melhora dos dados das simulações numéricas neste valor de escala. As Figuras 43 a 48 mostram os resultados para velocidades iniciais de impacto de 30, 40 e 60 m/s. Os valores aplicados em cada situação estão resumidos na Tabela 17.

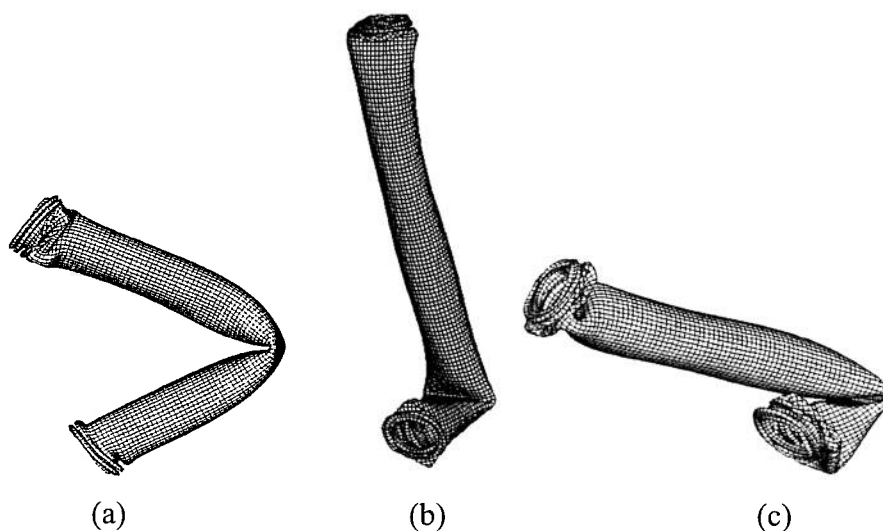


Figura 43 – Geometria final para tubos cilíndricos considerando efeito da taxa de deformação, cujo protótipo sofreu impacto a uma velocidade inicial de 30 m/s e massa de 7,7778 kg. Base simplesmente apoiada. (a) escala 1:1. (b) escala 1:20 não corrigido. (c) escala 1:20 corrigido.

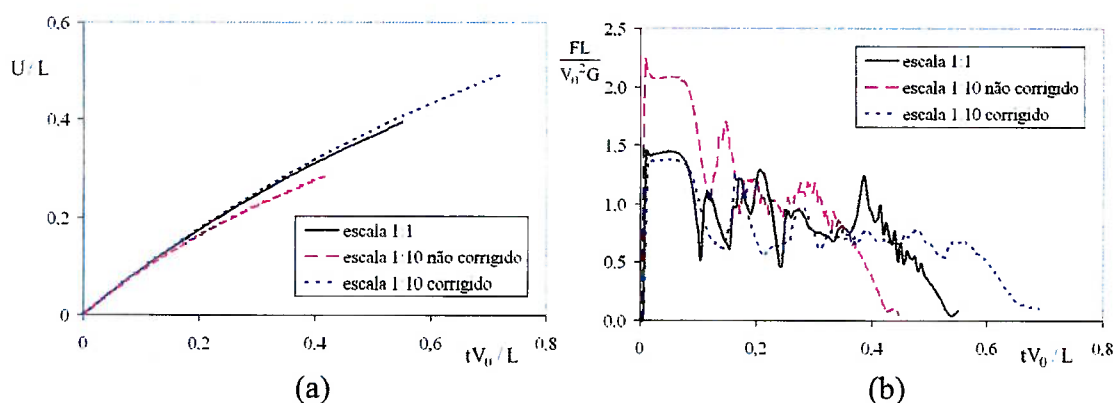


Figura 44 – Comparação entre protótipo e modelo 1/20 com taxa de deformação.

Velocidade inicial de 30 m/s e massa de 7,7778 kg na escala unitária. Base simplesmente apoiada. (a) deslocamento no topo da estrutura em função do tempo adimensional. (b) força de pico em função do tempo adimensional.

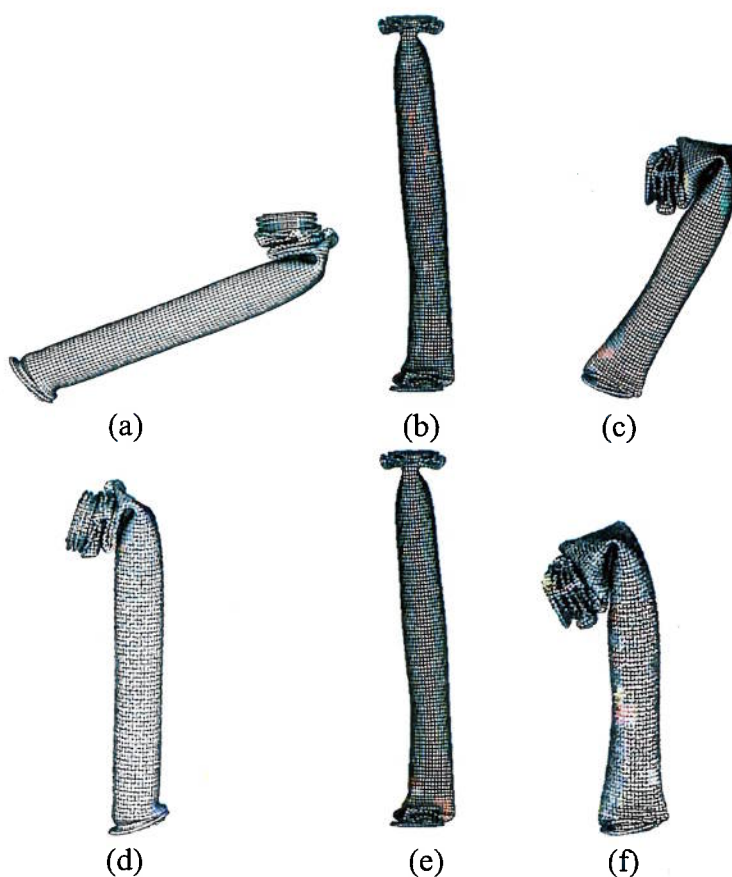


Figura 45 – Geometria final para tubos cilíndricos considerando efeito da taxa de deformação, cujo protótipo sofreu impacto a uma velocidade inicial de 40 m/s e massa de 4,375 kg. Base simplesmente apoiada. (a) escala 1:1. (b) escala 1:20 não corrigido. (c) escala 1:20 corrigido. (d) escala 1:1 rotacionado. (e) escala 1:10 não corrigido. (f) escala 1:10 corrigido e rotacionado.

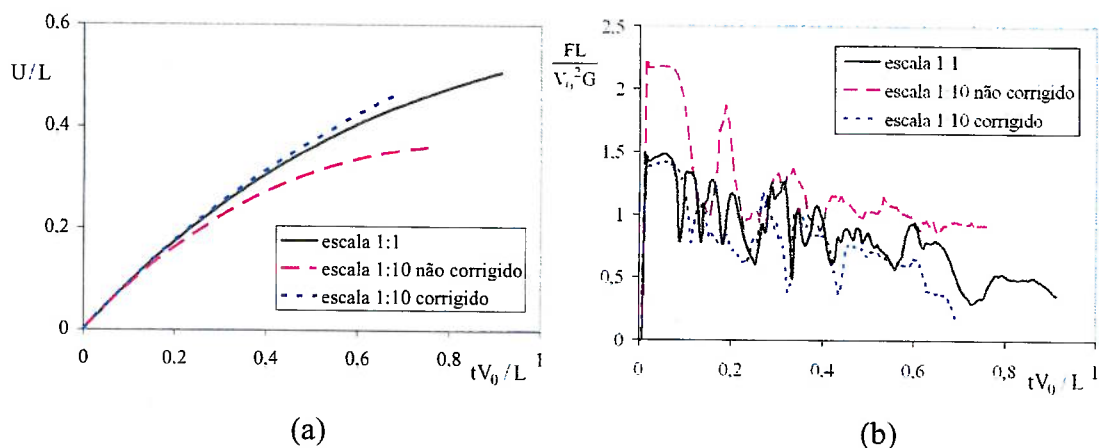


Figura 46 – Comparação entre protótipo e modelo 1/20 com taxa de deformação.

Velocidade inicial de 40 m/s e massa de 4,375 kg na escala unitária. Base simplesmente apoiada. (a) deslocamento no topo da estrutura em função do tempo adimensional. (b) força de pico em função do tempo adimensional.

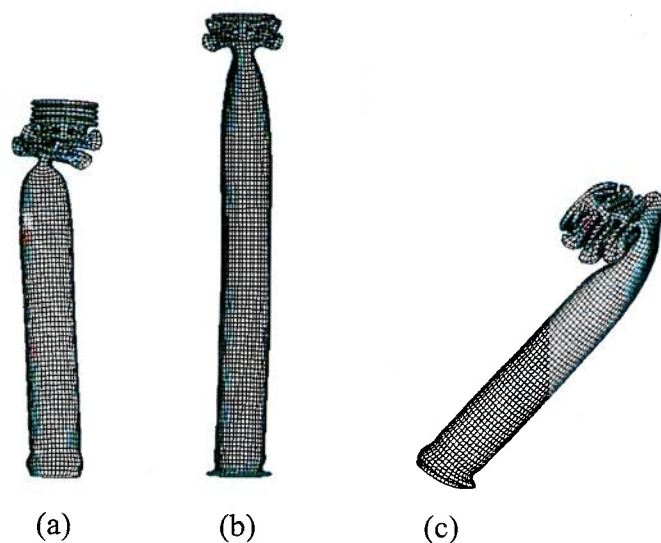


Figura 47 – Geometria final para tubos cilíndricos considerando efeito da taxa de deformação, cujo protótipo sofreu impacto a uma velocidade inicial de 60 m/s e massa de 1,9444 kg. Base simplesmente apoiada. (a) escala 1:1. (b) escala 1:20 não corrigido. (c) escala 1:20 corrigido.

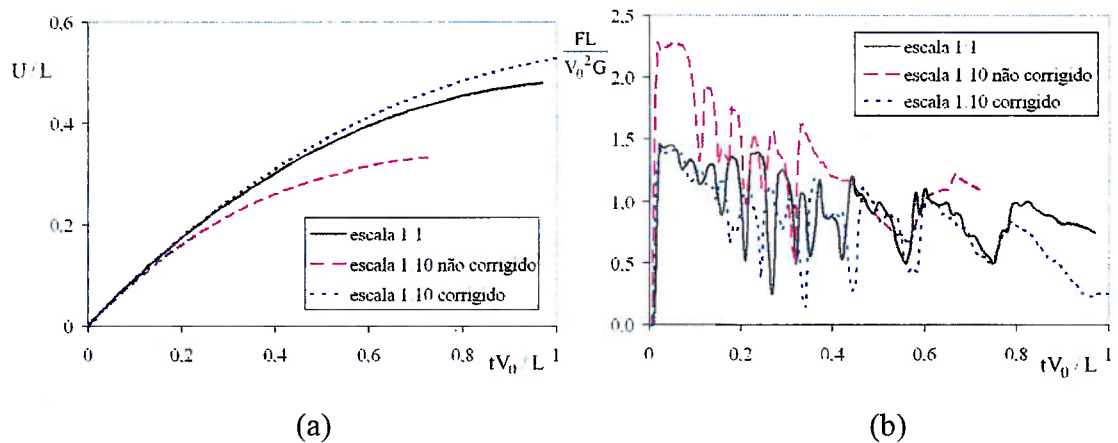


Figura 48 – Comparação entre protótipo e modelo 1/20 com taxa de deformação. Velocidade inicial de 60 m/s e massa de 1,9444 kg na escala unitária. Base simplesmente apoiada. (a) deslocamento no topo da estrutura em função do tempo adimensional. (b) força de pico em função do tempo adimensional.

A Tabela 19 resume os erros obtidos para cada condição de impacto e os respectivos erros em relação ao protótipo.

Tabela 19 – Resumo dos erros entre modelo 1/20 e protótipo para tubos sensíveis à taxa de deformação e base simplesmente apoiada.

velocidade inicial	simulação	modo de colapso	deslocamento adimensional no topo	pico máximo de força adimensional	tempo adimensional de impacto	força adimensional média
30	protótipo	global	-	-	-	-
	não corrigido	global	24%	54%	19%	35%
	corrigido	global	21%	3%	25%	13%
40	protótipo	transição	-	-	-	-
	não corrigido	global	29%	51%	15%	47%
	corrigido	transição	8%	4%	24%	2%
60	protótipo	progressivo	-	-	-	-
	não corrigido	progressivo	30%	56%	25%	38%
	corrigido	progressivo	10%	3%	3%	15%

Como pode ser observado através das Figura 44 e 46, para as velocidades de 30 m/s e 40 m/s respectivamente, existe uma discrepância entre o protótipo e o

modelo corrigido. O erro chega a até 25% para o tempo conforme a Tabela 19, mesmo após a correção. Na velocidade de 60 m/s, essa diferença é bem menor, havendo uma melhor semelhança entre as curvas das duas escalas. Apesar das demais variáveis não apresentarem bons resultados, o pico de força máximo foi o grande beneficiado com a correção, pois o maior erro não passa de 4%.

6.4.2 – Tubo com a base engastada

Para que fosse possível avaliar as condições de contorno do tubo na escalonabilidade, foram realizadas simulações com a base engastada e o topo livre nas velocidades iniciais de 30 e 40 m/s. A escala utilizada é de 1/10 com a correção feita através da velocidade inicial de impacto. As características geométricas e de material foram mantidas, assim como a forma como a taxa de deformação é calculada. Dessa maneira as condições iniciais de impacto mostradas na Tabela 17 para tubo simplesmente apoiado continuam sendo válidas. Os resultados obtidos são mostrados nas Figuras 49 a 53.

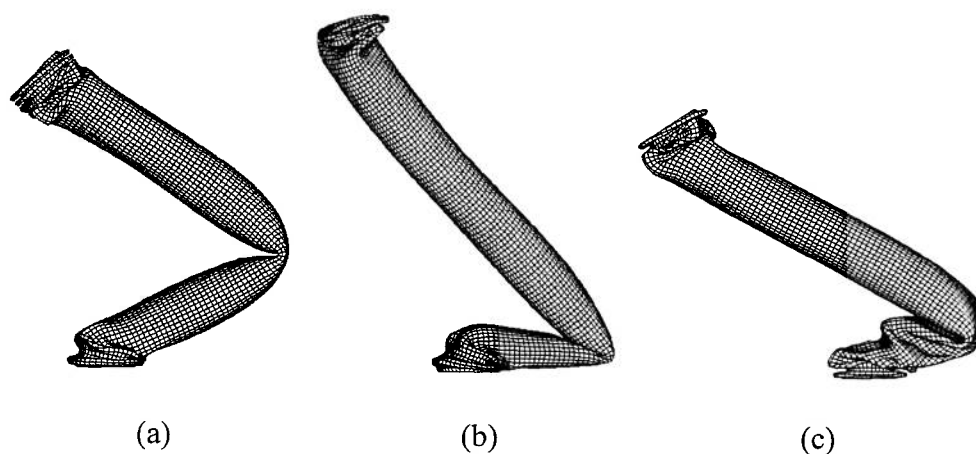


Figura 49 – Geometria final para tubos cilíndricos considerando efeito da taxa de deformação, cujo protótipo sofreu impacto a uma velocidade inicial de 30 m/s e massa de 7,7778 kg. Base engastada. (a) escala 1:1. (b) escala 1:10 não corrigido. (c) escala 1:10 corrigido.

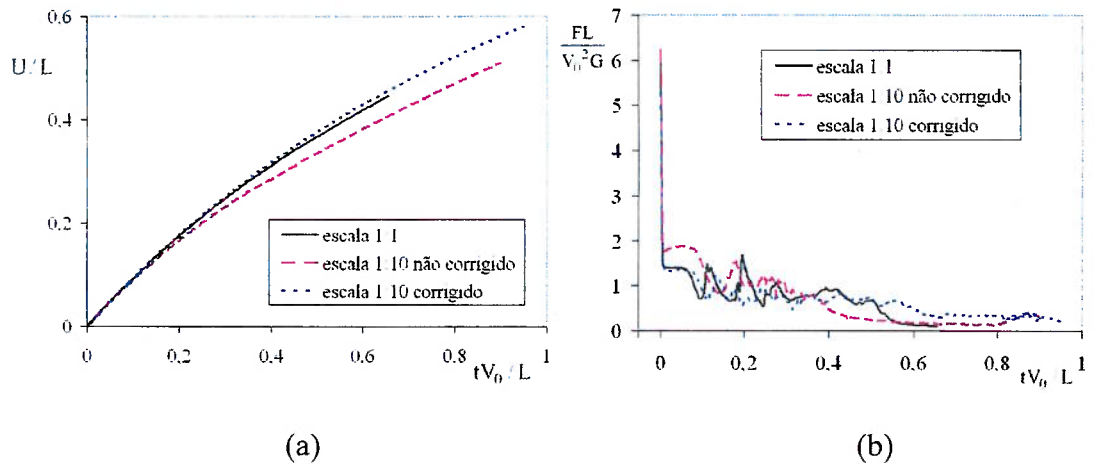


Figura 50 – Comparação entre protótipo e modelo 1/10 com taxa de deformação. Velocidade inicial de 30 m/s e massa de 7,7778 kg na escala unitária. Base engastada. (a) deslocamento no topo da estrutura em função do tempo adimensional. (b) força de pico em função do tempo adimensional.

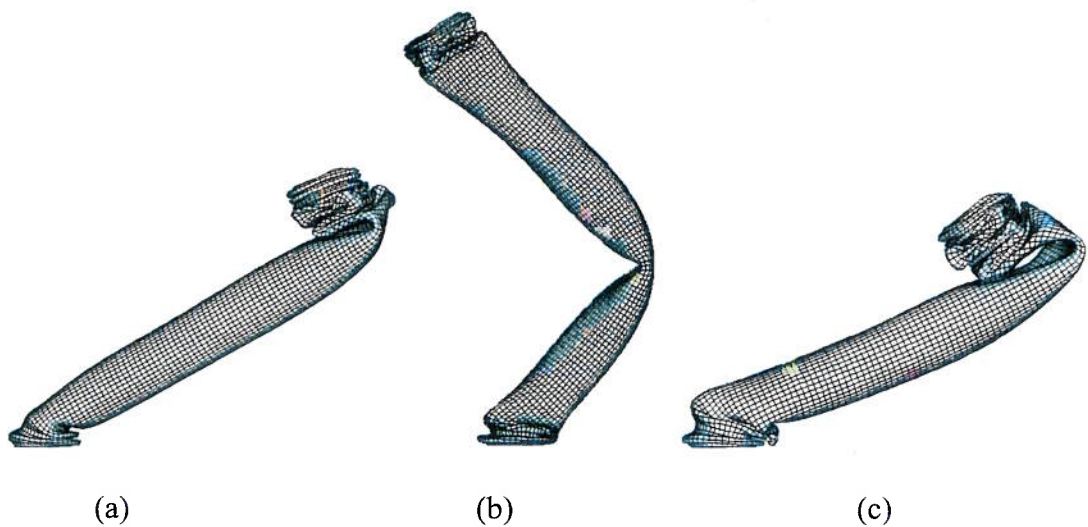


Figura 51 – Geometria final para tubos cilíndricos considerando efeito da taxa de deformação, cujo protótipo sofreu impacto a uma velocidade inicial de 40 m/s e massa de 4,375 kg. Base engastada. (a) escala 1:1. (b) escala 1:10 não corrigido. (c) escala 1:10 corrigido.

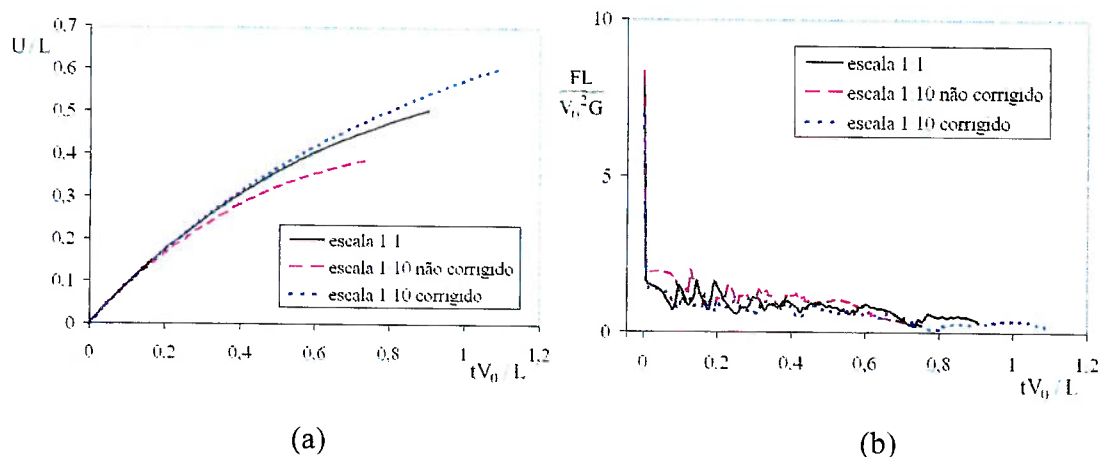


Figura 52 – Comparação entre protótipo e modelo 1/10 com taxa de deformação. Velocidade inicial de 40 m/s e massa de 4,375 kg na escala unitária. Base engastada. (a) deslocamento no topo da estrutura em função do tempo adimensional. (b) força de pico em função do tempo adimensional.

Os erros para o tubo engastado ainda são relativamente grandes após a correção da velocidade inicial de impacto, não há ganho em relação ao modelo não corrigido. O tempo de impacto é a variável em que se observa a maior diferença, chegando a 45% na velocidade de 30 m/s.

Tabela 20 – Resumo dos erros entre modelo 1/10 e protótipo para tubos sensíveis à taxa de deformação e base engastada.

velocidade inicial	simulação	modo de colapso	deslocamento adimensional no topo	pico máximo de força adimensional	tempo adimensional de impacto	força adimensional média
30	protótipo	global	-	-	-	-
	não corrigido	global	15%	0%	37%	15%
	corrigido	global	30%	16%	45%	18%
40	protótipo	transição	-	-	-	-
	não corrigido	global	23%	0%	17%	27%
	corrigido	transição	19%	16%	21%	21%

O fato da correção não ter obtido bons resultados para o caso descrito nesta seção se deve em parte ao fato da equação (6.1) ter sido desenvolvida para tubos

cilíndricos com a base simplesmente apoiada. No entanto, a utilizamos para calcular a taxa de deformação para tubos de base engastada, o que acarreta que em ambas as condições de contorno o mesmo valor para $\dot{\epsilon}$ foi utilizado para calcular o fator de velocidade. Naturalmente, isso pode ter afetado a correção

Os erros observados nas simulações numéricas de tubos cilíndricos podem ser atribuídos ao valor de taxa de deformação adotado para o cálculo do fator de velocidade. Apesar da equação para o cálculo de tal fator não ser muito sensível a variações razoáveis, diferenças muito grandes podem distorcer os resultados.

Para comparar as diferenças entre os valores de taxa de deformação gerados na simulação e os obtidos através da equação (6.1), as Figuras 53 e 54 são exibidas. Nestas figuras, o valor em função do tempo da média da taxa de deformação dos elementos de uma dobra axissimétrica é mostrado em linha contínua. A média da simulação, em linha tracejada, é a integral da curva contínua dividida pelo intervalo de tempo. A segunda linha tracejada é o valor obtido através da equação (6.1).

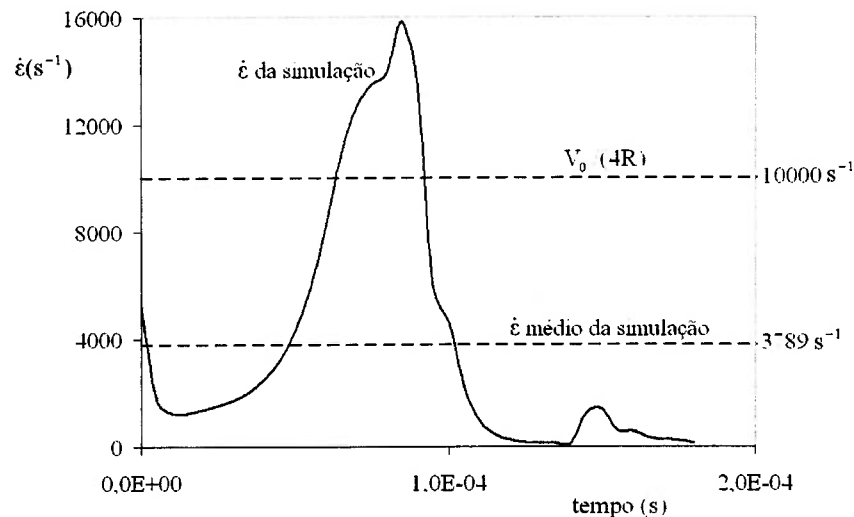


Figura 53 – Comparação entre a taxa de deformação gerada na simulação e taxa obtida através da equação (6.1). Escala 1/10 e base simplesmente apoiada.

Velocidade de impacto de 40 m/s e massa de 0,004375 kg.

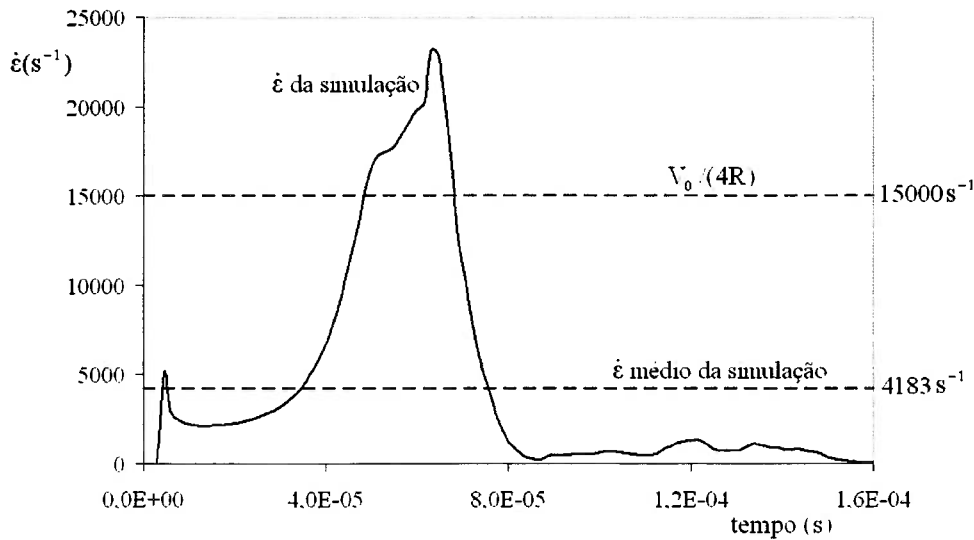


Figura 54 – Comparação entre a taxa de deformação gerada na simulação e taxa obtida através da equação (6.1). Escala 1/20 e base simplesmente apoiada.

Velocidade de impacto de 30 m/s e massa de 0,000972 kg.

Nos dois casos pode ser observada uma diferença significativa entre a taxa de deformação média da simulação e o valor obtido de (6.1). Porém, o erro para o tubo simplesmente apoiado e escalado em 1/20 é de 259%, maior do que o caso de tubo escalonado em 1/10, onde o erro é de 164%. Essa menor diferença pode explicar em parte os melhores resultados obtidos para essa última condição.

No entanto, essa comparação não é precisa, servindo apenas de estimativa para os erros que são gerados ao utilizar-se a equação (6.1). Fica evidente a dificuldade em determinar-se a taxa de deformação a ser utilizada em estruturas complexas, como o caso de tubos, que são função do tempo e do espaço.

7 – DISCUSSÃO

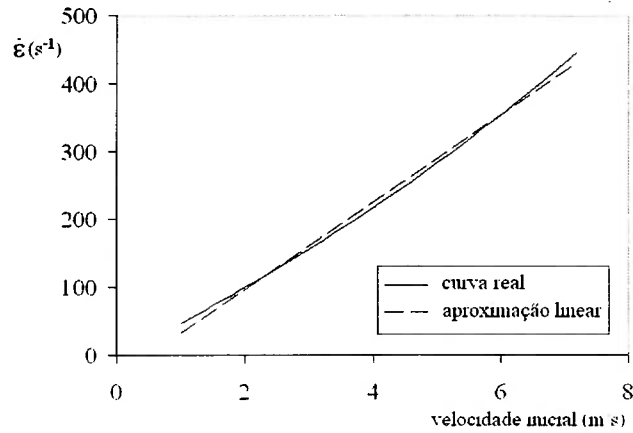
O procedimento apresentado neste trabalho é simples e pode ser aplicado a vários tipos de estrutura sujeitas a impacto, como mostrado na solução dos três modelos analíticos e do tubo cilíndrico. A variável utilizada para o escalonamento foi o deslocamento, para que a geometria final pudesse ser comparada de forma direta.

Quando o modelo é constituído de duas ou mais fases de movimento não há como se corrigir todas as fases. O modelo de Calladine apresenta esse comportamento e apesar se de ter aplicado o método para a segunda fase, nada foi feito a respeito da primeira, o que gera maiores erros. No entanto, os resultados mostram que mesmo assim há uma melhora significativa através da correção.

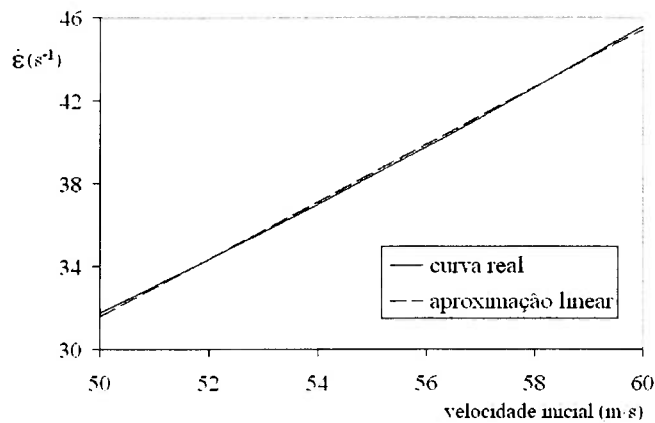
A aproximação de que a taxa de deformação é linearmente proporcional à velocidade inicial $\dot{\epsilon} \propto V_0 / L$ pode ser muito simples para descrever outros materiais. Os três modelos analíticos estudados obtiveram bons resultados, pois as curvas reais podem ser aproximadas como lineares sem muita perda na precisão, como mostrado na Figura 55.

Com exceção do modelo de Calladine, onde múltiplas fases estão presentes, os erros observados nos modelos analíticos corrigidos devem-se unicamente a essas pequenas diferenças entre a curva real e a aproximação linear. Se a função real

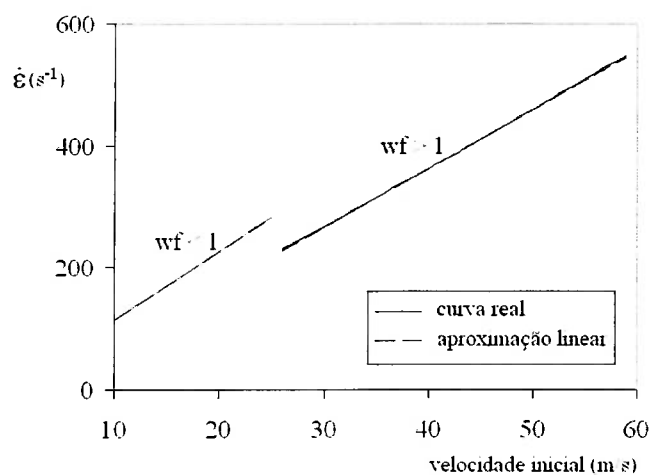
$\sigma_d = f(\dot{\epsilon})$ fosse empregada os erros seriam nulos, mas tornaria-se mais complicada a solução do problema.



(a)



(b)



(c)

Figura 55 – Taxa de deformação em função da velocidade inicial. Comparação entre curva real e aproximação linear. (a) modelo de Calladine; (b) viga sofrendo impulso de velocidade; (c) viga sofrendo impacto no centro.

Para ilustrar a origem do erro, escalonamos o instante final da primeira fase do modelo de Calladine, quando a relação $\dot{\epsilon} \propto V_0/L$ é verdadeira. Os valores utilizados para o problema são os mesmo da Tabela 3 e como pode ser visto na Tabela 21 a seguir, os erros são nulos independentemente do fator β .

Tabela 21 – Modelo de Calladine: comparação dos ângulos de rotação no final da primeira fase para diversos fatores de escala.

sem correção				
escala	1	1/2	1/4	1/10
$\theta(\text{rad})$	0,07326	0,07155	0,06978	0,06736
erro (%)	-	2,3	4,8	8,1
corrigido				
escala	1	1/2	1/4	1/10
$\theta(\text{rad})$	0,07326	0,07326	0,07326	0,07326
erro (%)	-	0	0	0

No caso de estruturas mais complexas, como os tubos cilíndricos sob impacto, a questão da taxa de deformação é bem mais complexa. Além de variar com o tempo, ela experimenta valores diferentes para os diversos pontos da estrutura, ou seja, a taxa é função do tempo e do espaço. Neste caso, a grande dificuldade é avaliar qual taxa utilizar. Isso acaba por se tornar uma limitação do método, pois é difícil determinar de forma razoável este valor. As Figuras 54 e 55 ilustram bem o tipo de dificuldade encontrada.

A análise dos resultados nesta situação também é bastante complexa, pois no caso do tubo sob impacto, os diversos pontos da estrutura estarão sujeitos a diferentes condições de tensão, taxa de deformação, aceleração, entre outros. A comparação quantitativa torna-se muito difícil. As variáveis escolhidas neste trabalho para estudo: tempo, deslocamento no topo e força de pico, tentam representar o comportamento da estrutura inteira mas, isoladamente, estes fatores não podem dizer com precisão se o modelo foi eficaz. Por exemplo, para tubos com a base

simplesmente apoiada, houve escorregamento, o que gerou uma distorção na comparação do deslocamento do topo entre modelo e protótipo.

Futuros trabalhos poderiam estudar com mais detalhes os problemas descritos e dessa forma o procedimento de correção poderia abranger qualquer tipo de estrutura sujeita a carregamento dinâmico.

Apesar de se basear no método de Similaridade não direta, discutida em Drazetic et al. (1994), o trabalho aqui proposto é diferente do mesmo. Naquele, o objetivo principal era corrigir as falhas de escalonamento devido às imperfeições na construção de modelos reais, ou seja, diferença nas propriedades materiais, desvios nas dimensões geométricas, etc. A correção devido à taxa de deformação também é feita no trabalho citado, mas uma diferença fundamental é presente: na similaridade não direta os testes são feitos tanto para o modelo quanto para o protótipo. Obtidos os dados, eles são corrigidos e então comparados. No nosso trabalho, pode-se prever o comportamento do protótipo sem que seja necessário solucionar ou testar o mesmo; sua resposta pode prevista apenas através dos resultados do modelo.

É possível a utilização de material diferente no modelo durante a correção e para estudos que envolvam ensaios experimentais isto pode ser bastante útil. Neste caso, o modelo e o protótipo geralmente são construídos de materiais base diferentes e dificilmente terão as mesmas propriedades. A correção feita no capítulo 6 restringiu-se apenas aos coeficientes de Cowper-Symonds e nada foi dito a respeito da densidade mássica ou do módulo de elasticidade. Porém, em muitas situações envolvendo impacto, diferenças não muito significativas destes dois parâmetros podem ser ignorados.

Várias alternativas de correção também estão disponíveis na literatura, tentando eliminar efeitos não lineares do escalonamento. Skoglund (1967) e Szirtes (1998) são duas referências em que a Similaridade imperfeita é detalhada. Essa técnica utiliza multiplicadores apropriados para as variáveis, visando dessa maneira corrigir as imperfeições geométricas devido à não escalonabilidade da estrutura. Porém, como em Drazetic et al. (1994), são necessários dados do protótipo e do modelo para ajustar tais fatores.

Alguns números adimensionais também estão bem desenvolvidos, como feito em Li; Jones (2000), onde é considerado o efeito do encruamento, taxa de

deformação, temperatura e força cortante. O problema neste caso é o fato dos números adimensionais apenas servirem para comparar dados entre diferentes escalas, mas sozinhos eles não podem gerar a previsão da escala unitária a partir somente do modelo.

Calladine (1983) fez em seu trabalho uma breve análise da influência da taxa de deformação nas estruturas, principalmente as do tipo II. Ele demonstrou como esse efeito distorce o modelo em relação ao protótipo. Para corrigir os resultados, ele sugeriu que o fator para velocidade inicial não fosse constante, mas proporcional a β . Seria interessante comparar o comportamento dos modelos analíticos aqui estudados corrigidos dessa maneira, por isso a seção Anexos mostra em detalhes o modelo de Calladine e a viga engastada sob impacto utilizando esses fatores. O método é muito simples mas, como pode ser verificado, encontra problemas devido à necessidade de se alterar também a escala para massa.

8 – CONCLUSÃO

O procedimento descrito neste trabalho permite que modelos sensíveis à taxa de deformação $\dot{\epsilon}$, portanto, não escalonáveis, possam ser corrigidos através de uma alteração apropriada no valor da velocidade inicial ou da massa de impacto. Dessa maneira, o modelo pode prever com maior precisão o comportamento do protótipo em um determinado instante do tempo. Se para os modelos analíticos não corrigidos o erro ultrapassou 30%, a mesma diferença não chegou a 1% após a aplicação do método aqui proposto.

Pode-se dizer também que o procedimento é simples e abrangente. O problema em uma determinada escala β precisa ser resolvido somente duas vezes e então os dados podem ser utilizados para determinar o comportamento do protótipo. A função que relaciona tensão de escoamento dinâmica e taxa de deformação $\sigma_d = f(\dot{\epsilon})$ precisa ser conhecida. Diferenças entre os materiais do protótipo e do modelo também são aceitas pelo método, desde que os coeficientes envolvidos estejam identificados na equação que determina o comportamento material.

Para as simulações numéricas com tubos cilíndricos sob impacto, alguns casos não apresentaram o resultado esperado, às vezes gerando erros significativos. Essas diferenças se devem a uma série de fatores e limitações, sendo a principal delas a determinação incorreta da taxa de deformação a ser utilizada na equação que

calcula o fator de velocidade corrigida. Na maioria dos casos porém, houve uma melhora significativa dos dados, conseguindo-se inclusive prever o modo de colapso da estrutura.

ANEXOS

Correção com fatores propostos por Calladine

Uma outra forma para se corrigir os efeitos da taxa de deformação foi exposta por Calladine (1983). A base para essa proposta é de que a seguinte aproximação é válida $\dot{\epsilon} = C_1 V_0 / \delta$, sendo C_1 um coeficiente linear. Então, se a velocidade inicial for escalonada como proporcional a β , teria-se uma taxa de deformação idêntica para modelo e protótipo, pois

$$\dot{\epsilon}_{\text{modelo}} = C_1 \frac{\beta V_0}{\beta \delta} = C_1 \frac{V_0}{\delta} = \dot{\epsilon}_{\text{protótipo}}.$$

Dessa maneira, se a tensão de escoamento dinâmica fosse dada por $\sigma_d = f(\dot{\epsilon})$, ela seria a mesma para protótipo e modelo $(\sigma_d)_{\text{modelo}} = (\sigma_d)_{\text{protótipo}}$. Logo não haveria diferença de tensão e os modelos estariam perfeitamente escalonados. Obviamente a energia total disponível para o sistema deve ser mantida e por isso a massa deve ser proporcional a β e não a β^3 , como na Tabela 1. As relações propostas para o escalonamento são então definidas conforme a Tabela 22.

Tabela 22 – Fatores de escala proposto por Calladine.

	esquema proposto por Calladine	esquema com velocidade constante
altura de queda	$\propto \beta^2$	constante
massa de impacto	$\propto \beta$	$\propto \beta^3$
velocidade inicial	$\propto \beta$	constante
energia de impacto	$\propto \beta^3$	$\propto \beta^3$

a) Correção do modelo de Calladine

Aplicando esses fatores no modelo de Calladine e os valores da Tabela 3 para aço doce, os dados obtidos são resumidos a seguir, na Tabela 23 e Figura 56. Como

pode ser observado, o erro ainda é significativo e, pelo menos para este caso, não gera bons resultados.

Tabela 23 – Resultados obtidos com a aplicação dos fatores propostos por Calladine.

fator de escala	velocidade inicial (m/s)	massa de impacto (kg)	ângulo final (°)	erro (%)
1	6,17	6,4094	0,3040	-
1/2	3,085	3,2047	0,3340	9,86
1/4	1,5425	1,6024	0,3434	12,93
1/10	0,617	0,6409	0,3454	13,60

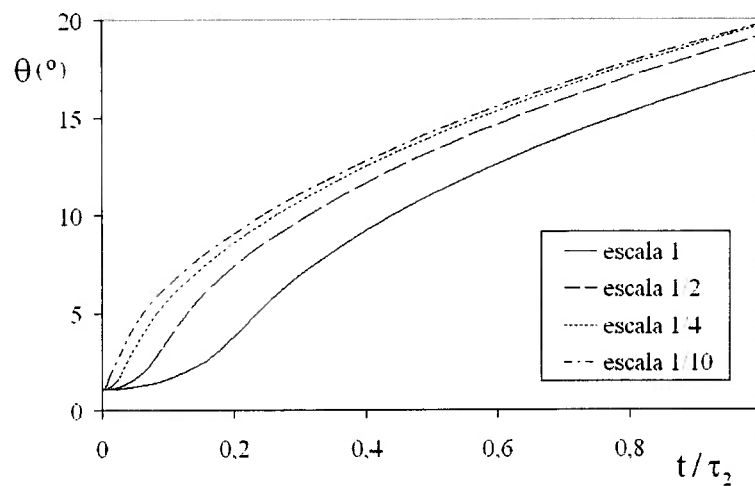


Figura 56 – Ângulo de rotação em função do tempo adimensional. Aplicação dos fatores de escala propostos por Calladine.

O efeito do escalonamento proposto por Calladine neste modelo é verificado na primeira fase do movimento. Apesar da inserção de uma velocidade proporcional ao fator de escala resolver o problema da taxa de deformação, como pode ser verificado em (3.9)

$$\sigma_d = \sigma_0 \left[1 + \frac{\beta V_0}{D\beta\ell} \right]^{1/p} = \sigma_0 \left[1 + \frac{V_0}{D\ell} \right]^{1/p},$$

a massa escalonada dessa forma acaba gerando uma distorção na equação do movimento (3.13)

$$\beta V_0 - [\beta^2 S \sigma_d / (\beta G)] \beta \tau_1 = 2 \left(\frac{12 \sigma_d \beta^2 S}{\beta \ell \beta^3 m} \right)^{1/2} \frac{(\beta w_0)^2}{\beta \ell} \sinh \left[2 \left(\frac{12 \sigma_d \beta^2 S}{\beta \ell \beta^3 m} \right)^{1/2} \beta \tau_1 \right] \rightarrow$$

$$\beta V_0 - [S \sigma_d / G] \beta^2 \tau_1 = 2 \left(\frac{12 \sigma_d S}{\ell m} \right)^{1/2} \frac{w_0^2}{\ell} \sinh \left[2 \left(\frac{12 \sigma_d S}{\ell m} \right)^{1/2} \tau_1 \right].$$

Dessa maneira, o tempo do final da primeira fase τ_1 não está escalonado de β , como seria esperado. Por conseqüência, as equações (3.16) e (3.17) que dependem do valor de τ_1 não estarão devidamente escalonados e então a segunda fase estará deturpada.

b) Correção do modelo de viga engastada sofrendo impacto

Diferentemente do modelo anterior, este caso é beneficiado pela correção proposta por Calladine com os novos fatores para velocidade inicial e massa. Isso ocorre porque a taxa de deformação é a mesma para modelo e protótipo com a inserção de β , como pode ser visto em (3.52) e (3.53)

$$\dot{\epsilon}_{eq} = \frac{\beta V_0}{\beta L} \sqrt{\frac{9}{8} (1+r^2)^2 h'^2 + \frac{8}{3} k^2} \rightarrow \text{para } w_f \leq 1$$

$$\dot{\epsilon}_{eq} = \frac{V_0}{L} \sqrt{\frac{9}{8} (1+r^2)^2 h'^2 + \frac{8}{3} k^2}$$

e

$$\dot{\epsilon}_{eq} = \frac{\beta V_0}{\beta L} \sqrt{\frac{1}{8} (1+r^2)^2 h'^2 w_f + \frac{8}{3} k^2} \rightarrow \text{para } w_f > 1.$$

$$\dot{\epsilon}_{eq} = \frac{V_0}{L} \sqrt{\frac{1}{8} (1+r^2)^2 h'^2 w_f + \frac{8}{3} k^2}$$

Ainda, a equação do movimento (3.46) não é distorcida pela inserção dos fatores propostos

$$w_f = \frac{\sqrt{1 + \frac{2\beta G (\beta V_0)^2 \beta L}{\sigma_d \beta b (\beta h)^3} - 1}}{2\beta L / \beta h} \rightarrow w_f = \frac{\sqrt{1 + \frac{2G (V_0)^2 L}{\sigma_d b (h)^3} - 1}}{2L / h}$$

e então o deslocamento adimensional w_f é o mesmo, independente de β .

A Figura 57 abaixo mostra claramente o perfeito escalonamento deste modelo. As curvas coincidem independentemente do fator de escala utilizado.

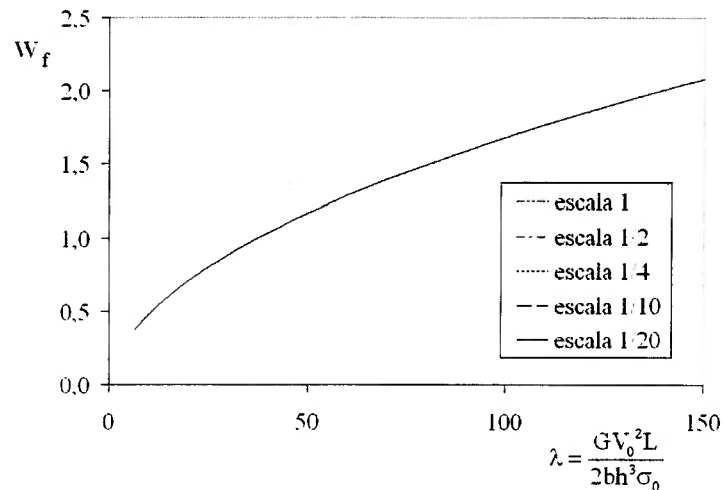


Figura 57 – Correção da viga engastada sob impacto através da utilização dos fatores propostos por Calladine.

Por estes dois casos estudados pode-se observar que a forma proposta por Calladine é interessante para alguns modelos, principalmente devido a sua simplicidade e bons resultados. No entanto, apesar de $\dot{\epsilon} = C_1 V_0 / \delta$ ou $\dot{\epsilon} = C_1 V_0 / \ell$ ser uma hipótese razoável para muitas situações, o escalonamento da massa proporcional a β pode distorcer as equações do movimento.

De uma forma geral pode-se dizer que o modelo de viga sofrendo impacto é um caso particular em que o fator de massa não distorce a equação do movimento.

Isso porque o termo GV_0^2 , presente na equação (3.46)

$$w_f = \frac{\sqrt{1 + \frac{2(GV_0^2)L}{\sigma_d bh^3}} - 1}{2L/h},$$

elimina qualquer deturpação que seria inserida pelo fator de massa proposto por Calladine.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abramowicz W., Jones N. Transition from initial global bending to progressive buckling of tubes loaded statically and dynamically. *Int. J. Impact Engng.*, 19:415-437, 1997.
- Alves M., Jones N. Failure of beams using damage mechanics: Part II – application. *Int. J. Impact Engng.*, 27:863-890, 2002.
- Alves M., Jones N. Impact failure of beams using damage mechanics: Part I – Analytical model. *Int. J. Impact Engng.*, 27:837-861, 2002.
- Alves M., Jones N. Impact failure of beams using damage mechanics: Part II – Application. *Int. J. Impact Engng.*, 27:863-890, 2002.
- Alves M., Micheli G.B. Flambagem visco-plástica de tubos sob impacto. In *Associação Brasileira de Engenharia Automotiva, São Paulo, Novembro 2000*, 2000.
- Alves M., Micheli G.B. Some experimental findings on the plastic buckling of shells under axial impact loads. In *Congresso Brasileiro e Engenharia Mecânica, Uberlândia, MG*, 2001.
- Baker W.E., Westine P.S., Dodge F.T. *Similarity methods in engineering dynamics – Theory and practice of scale modeling*, 1991.
- Booth E., Collier D., Miles J. Impact scalability of plated steel structures. In Jones N., Wierzbicki T., editors, *Structural Crashworthiness*, pages 136-174. Butterworths, London, 1983.
- Calladine C.R. An investigation of impact scaling theory (Appendix 6.III). In Jones N., Wierzbicki T. *Structural Crashworthiness*, pages 169-174. Butterworths, London, 1983.
- Calladine C.R., English R.W. Strain-rate and inertia effects in the collapse of two types of energy-absorbing structure. *Int. J. Mech. Sci.*, 26:689-701, 1984.
- Drazetic P., Ravalard Y., Dacheux F., Marguet B. Applying non-direct similitude technique to the dynamic bending collapse of rectangular section tubes. *Int. J. Impact Engng.*, 15:797-817, 1994.
- Fox R.W., McDonald A.T. *Introduction to fluids mechanics*, Wiley, New York, 1998.

- Gallina F. Flambagem progressiva e global de cascas cilíndricas de aço sob impacto axial. 2004. 195p. Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo. São Paulo, 2004.
- Harrigan J.J., Reid S.R., Peng C. Inertia effects in impact energy absorbing materials and structures. *International Journal of Impact Engineering*, 22:955-979, 1999.
- Hu Y.Q. Application of response number for dynamic plastic response of plates subjected to impulsive loading. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 77:711-714, 2000.
- Hull D. Axial crushing of fiber reinforced composite tubes. In Jones N., Wierzbicki T., editors, *Structural Crashworthiness*, pages 118-135, Butterworths, London, 1983.
- Johnson W. *Impact strength of materials*. Edward Arnold, London, 1972.
- Jones N. Some comments on the scaling of inelastic structures loaded dynamically. In Batra R.C., Mal A.K., MacSithigh G.P., editors, *Impact, Waves and Fracture*, pages 153-167. AMD-Vol.205, ASME, 1995.
- Jones.N. *Structural impact*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- Karagiozova D., Alves M., Jones N. Inertia effects in axisymmetrically deformed cylindrical shells under axial impact. *Int J Impact Engng*, 24:1083-1115, 2000.
- Karagiozova D., Alves M., Jones N. Transition from progressive buckling to global bending of circular shells under axial impact: Part I – Experimental and numerical observations. *International Journal of Solids and Structures*, 41: 1565-1580, 2004.
- Karagiozova D., Jones N (A). Dynamic effects on buckling and energy absorption of cylindrical shells under axial impact. *Thin walled structures*, 39:583-610, 2001.
- Karagiozova D., Jones N. Dynamic elastic-plastic buckling of circular cylindrical shells under axial impact. *International Journal of Solids and Structures*, 37:2005-2034, 2000.
- Karagiozova D., Jones N. Dynamic elastic-plastic buckling phenomena in a rod due to axial impact. *Int. J. Impact Engng*, 18:919-947, 1996.

- Karagiozova D., Jones N (B). Influence of stress waves on the dynamic progressive and dynamic plastic buckling of cylindrical shells *International Journal of Solids and Structures*, 38:6723-6749, 2001.
- Karagiozova D., Jones N. On dynamic buckling phenomena in axially loaded elastic-plastic cylindrical shells. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 37:1223-1238, 2002.
- Karagiozova D., Jones N. Some observations on the dynamic elastic-plastic buckling of a structural model. *Int. J. Impact Engng*, 16:621-635, 1995.
- Karagiozova D., Jones, N. A note on the inertia and strain-rate effects in the Tam and Calladine model. *Int J Impact Engng*, 16:637-649, 1995.
- Langseth M., Hopperstad O.S., Berstad T. Crashworthiness of aluminium extrusions: validation of numerical simulation, effect of mass ratio and impact velocity. *Int J Impact Engng*, 22: 829-854, 1999.
- Li Q.M., Jones N. On dimensionless number for dynamic plastic response of structural members. *Archive of Applied Mechanics*, 70:245-254, 2000.
- Liu J.H., Jones N. Dynamic response of a rigid plastic clamped beam struck by a mass at any point on the span. *Int. J. Solids Structures*, 24:251-270, 1988.
- Meng Q., Al-Hassani S.T.S, Soden P.D. Axial crushing of square tubes. *Int. J. Mech. Sci.*, 25:747-773, 1983.
- Reid S.R. Plastic deformation mechanisms in axially compressed metal tubes used as impact energy absorbers. *Int. J. Mech. Sci.*, 35:1035-1052, 1993.
- Scoglund Victor J. *Similitude – Theory and Applications*, International Textbook Company, Pennsylvania, 1967.
- Shi X.H., Gao Y.G. Generalization of response number for dynamic plastic response of shells subjected to impulsive loading. *Internatinal Journal of Pressure Vessels and Piping*, 78:453-459, 2001.
- Singer J., Arbocz J., Weller T. Buckling experiments: *Experimental methods in buckling of thin-walled structures*, vol.1. Wiley, 1998.
- Szirtes. *Applied Dimensional Analysis and Modeling*, McGraw-Hill, 1997.
- Tam L.L., Calladine C.R. Inertia and strain-rate effects in a simple plate-structure under impact loading. *Intern J Impact Engng*, 11:349-377, 1991.

- Webb D.C., Kormi K., Al-Hassani S.T.S. The influence of inertia and strain-rate on large deformation of plate-structures under impact loading. *Computer & structures*, 79:1781-1797, 2001.
- Wierzbicki T., Abramowicz W. On the crushing mechanics of thin-walled structures. pages 727-734, *Transactions of the ASME*, 1983.
- Zhang T.G., Yu T.X. A note on a 'velocity sensitive' energy-absorbing structure. *Int J Impact engng*, 8:43-51, 1989.
- Zhao Y.P. Suggestion of a new dimensionless number for dynamic plastic response of beams and plates. *Archive of Applied Mechanics*, 68:524-38, 1998.
- Zukas J.A. *Impact dynamics*. Wiley, New York, 1982.



APÊNDICE A

Solução da equação diferencial de 2ª ordem

Para solução da equação diferencial $(m/3)\ddot{w} = 4S\sigma_d w / \ell$ (3.5) aplica-se a transformada de Laplace

$$L[w](s) = \int_0^{\infty} e^{-st} w(t) dt$$

sendo s a variável equivalente ao tempo no subespaço de transformação e assim (3.5) gera

$$\begin{aligned} L(\ddot{w} - Cw) &= L(0) \rightarrow \\ s^2 W_s - \dot{w}(0) - sw(0) - CW_s &= 0, \end{aligned} \quad (9.1)$$

sendo C definido como $12S\sigma_d / (m\ell)$ e W_s é a transformada de Laplace de w . As condições iniciais para a solução de (9.1) são $w(0) = w_0$ e $\dot{w}(0) = 0$ que produz

$$\begin{aligned} s^2 W_s - sw_0 - CW_s &= 0 \rightarrow \\ W_s &= \frac{sw_0}{s^2 - C}. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Fazendo a transformada inversa de Laplace em (9.2) obtém-se

$$\begin{aligned} L\left[\frac{sw_0}{s^2 - C}\right] &= w_0 \cosh(\sqrt{C}t) \rightarrow \\ w &= w_0 \cosh\left(\sqrt{12S\sigma_d w / (m\ell)}t\right). \end{aligned} \quad (9.3)$$

Portanto (9.3) é a solução para a equação diferencial (3.5).

APÊNDICE B

Energia cinética na segunda fase do modelo de Calladine

Na segunda fase do modelo de Calladine, a estrutura pode ser simplificada como 4 barras rígidas ligadas por pinos, como mostrado na Figura 11. A energia cinética do sistema para um determinado valor de θ é dado pela soma das energias de translação vertical e horizontal de cada uma das barras e da massa de impacto. O total é dado então por

$$K = E_G + 4E_x + 2E_{y1} + 2E_{y2}, \quad (9.4)$$

sendo E_G a energia da massa de impacto, E_x a energia na direção horizontal nas barras, E_{y1} a energia na direção vertical nas duas barras inferiores e E_{y2} a energia na direção vertical nas duas barras superiores. Na direção horizontal tem-se

$$E_x = \int_0^L \frac{1}{2} m' (V_x)^2 dv, \quad (9.5)$$

sendo V_x a velocidade na direção horizontal, m' a massa por comprimento da barra e v a posição na barra em relação ao pólo de rotação, como mostrado na Figura 58.

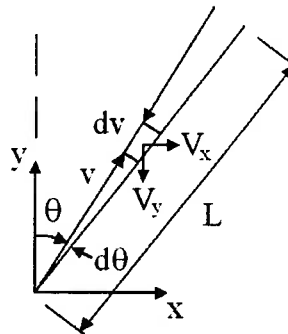


Figura 58 – Esquema para viga após sofrer uma variação na inclinação.

Ainda, a velocidade horizontal em um ponto da barra é dada por

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(v \sin \theta) \rightarrow V_x = v \dot{\theta} \cos \theta, \quad (9.6)$$

que substituída em (9.5) produz

$$E_x = \frac{1}{2} m' \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta \int_0^L v^2 dv \rightarrow E_x = \frac{m'}{6} L^3 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta. \quad (9.7)$$

A velocidade vertical nas duas barras inferiores é dada por $V_{y1} = v \dot{\theta} \sin \theta$ e portanto a energia é calculada como se segue

$$E_{y1} = \int_0^L \frac{1}{2} m' (V_{y1})^2 dv = \frac{1}{2} m' \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta \int_0^L v^2 dv$$

$$E_{y1} = \frac{m'}{6} L^3 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta. \quad (9.8)$$

Nas barras superiores a velocidade vertical é diferente e dada por $V_{y2} = (2L - v) \dot{\theta} \sin \theta$ e portanto

$$E_{y2} = \int_0^L \frac{1}{2} m' (V_{y2})^2 dv \rightarrow E_{y2} = \frac{7}{6} m' L^3 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta \quad (9.9)$$

A energia correspondente à massa de impacto é dada por

$$E_G = \frac{G (V_{y2}|_{v=0})^2}{2} \rightarrow E_G = 2GL^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta. \quad (9.10)$$

Finalmente a energia total pode então ser obtida substituindo-se as equações (9.7), (9.8), (9.9) e (9.10) em (9.4) e ainda, lembrando que $m' = m/(4L)$ e $L = \ell/2$ têm-se a relação desejada

$$K = \frac{1}{24} m \ell^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{8} m \ell^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} G \ell^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 \quad (9.11)$$

APÊNDICE C

Momentos nos vínculos para o modelo de Calladine

Mostra-se nesta seção como os momentos M_1 e M_2 do modelo de Calladine (ver na Figura 11) são obtidos. Adotaram-se como hipóteses: material visco-plástico, efeito elástico inexistente, forças axial e cortante inexistentes e comportamento do material independente do histórico da taxa de deformação. Dessa maneira, a relação $M - \dot{\kappa}$ utilizada por Zhang; Yu (1989) pode ser obtida integrando-se a tensão de escoamento dinâmica por toda a seção transversal da barra

$$M = \int_{\text{área}} \sigma_d dS = 2 \int_0^{h/2} \sigma_0 \left(1 + (\dot{\epsilon}_z / D)^{1/p}\right) b z dz, \quad (9.12)$$

sendo z a distância em relação à linha neutra e $\dot{\epsilon}_z$ a taxa de deformação axial em uma posição z (ver Figura 59). Ainda, se a seção transversal permanecer plana então vale a relação $\epsilon_z = z\kappa$, sendo κ a curvatura. Logo, $\dot{\epsilon}_z = z\dot{\kappa}$ e a equação (9.12) pode ser reescrita

$$M = 2b\sigma_0 \int_0^{h/2} \left(1 + (\dot{\kappa}z / D)^{1/p}\right) z dz \quad (9.13)$$

e então

$$\begin{aligned} M &= 2b\sigma_0 \int_0^{h/2} z + z^{1+1/p} (\dot{\kappa}/D)^{1/p} dz \rightarrow \\ M &= 2b\sigma_0 \left[\frac{z^2}{2} + \left(\frac{\dot{\kappa}}{D}\right) \frac{1}{2+1/p} z^{2+1/p} \right]_0^{h/2} \rightarrow \\ M &= M_0 \left[1 + \frac{2p}{1+2p} \left(\frac{\dot{\kappa}h}{2D}\right)^{1/p} \right], \end{aligned} \quad (9.14)$$

com $M_0 = \sigma_0 b h^2 / 4$. Manipulando a equação (9.14) para isolar $\dot{\kappa}$ obtém-se finalmente

$$\dot{\kappa} = \left(\frac{2D}{h} \right) \left(\frac{2p+1}{2p} \right)^p \left(\frac{M}{M_0} - 1 \right)^p. \quad (9.15)$$

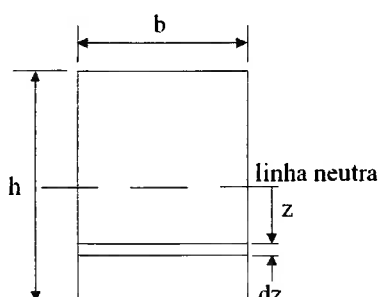


Figura 59 – Seção transversal de uma viga com dimensões $b \times h$.

Zhang; Yu (1989) utilizaram também o mesmo valor para o comprimento plástico equivalente λ' que Calladine; English (1984), ou seja,

$$\lambda' = 4h. \quad (9.16)$$

Dessa forma $\dot{\theta} = \lambda' \dot{\kappa} = 4h \dot{\kappa}$, que com ajuda de (9.15) produz

$$\dot{\theta} = 8D \left(\frac{2p+1}{2p} \right)^p \left(\frac{M}{M_0} - 1 \right)^p. \quad (9.17)$$

Rearranjando então (9.17) e distinguindo o momento nas extremidades do momento no meio comprimento por M_1 e M_2 , respectivamente (Figura 11), obtém-se

$$\begin{aligned} M_1 &= \left[\left(\frac{\dot{\theta}}{8D} \right)^{1/p} \frac{2p}{2p+1} + 1 \right] M_0 \\ M_2 &= \left[\left(\frac{\dot{\theta}}{4D} \right)^{1/p} \frac{2p}{2p+1} + 1 \right] M_0 \end{aligned} \quad (9.18)$$

Lembrando que os momentos M_1 e M_2 são distintos porque, no meio comprimento da viga a taxa de deformação é duas vezes maior do que nas extremidades.