

**CONTROLE DE VIBRAÇÕES DE UM BRAÇO
ROTATIVO FLEXÍVEL PELO MOVIMENTO
DE UMA MASSA SOBRE O BRAÇO**

FREDERICO RICARDO FERREIRA DE OLIVEIRA
Engenheiro Mecânico, Universidade Estadual de Campinas, 1995

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo como requisito para
obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

São Paulo
2000

CONTROLE DE VIBRAÇÕES DE UM BRAÇO ROTATIVO FLEXÍVEL PELO MOVIMENTO DE UMA MASSA SOBRE O BRAÇO

FREDERICO RICARDO FERREIRA DE OLIVEIRA
Engenheiro Mecânico, Universidade Estadual de Campinas, 1995

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo como requisito para
obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Área de Concentração:
Engenharia Mecânica / Mecatrônica

Orientador:

Prof. Dr. Agenor de Toledo Fleury

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Departamento de Engenharia Mecânica

São Paulo

2000

Para a minha família

Na teoria, tudo funciona, mas não se sabe porque.
Na prática, nada funciona, mas ao menos se sabe porque.
No laboratório, teoria e prática se juntam: nada funciona e não se sabe porque.

Ao Fleury, pela orientação e pela invejável paciência.
Ao Raul e ao Luciano, pelo auxílio imprescindível.
A todos aqueles que, discreta e silenciosamente, me deram a mais valiosa ajuda.
A vocês, meus mais sinceros agradecimentos.

Errata

- p. 18, Figura 2
A posição x da massa deveria ter sido gravada em itálico, bem como $e(x, t)$
- p. 20, par. 1, lín. 3
onde se lê: "Junkins & Kim (1996)"
leia-se: "Junkins & Kim (1993)"
- p. 21, par. 3, lín. 4:
onde se lê: "as funções admissíveis $\phi_n(x)$ "
leia-se: "as autofunções $\phi_n(x)$ "
- p. 23, par. 1, lín. 8:
onde se lê: "Canavin & Likinis (1977)"
leia-se: "Canavin & Likins (1977)"
- p. 27, par. 2, lín. 1:
onde se lê: "Desconsideram-se os efeitos de deformação por cisalhamento e a inércia de rotação. Trata-se, portanto, de uma viga de Euler-Bernoulli"
leia-se: "Desconsidera-se a energia potencial associada à deformação por cisalhamento"
- p. 27, par. 3, lín. 2:
onde se lê: "e a energia cinética devido à flexão elástica"
leia-se: "e a energia cinética associada à rotação da seção transversal (tratando-se, portanto, de uma viga de Euler-Bernoulli)"
- p. 30, Equação (14):

#D-2759

• p. 67, após a equação (161):
de subestruturas será apresentada na Seção 4.6.”
acrescentar: “Uma comparação entre essa modelagem e a modelagem via síntese

• p. 49, Seção 4.2, após a equação (77):
Essa situação, entretanto, é de pouco ou nenhum interesse para o trabalho”

$$E \cdot I_B \cdot \left. \frac{\partial^3 x}{\partial x^3} \right|_{x=L} = -M \cdot \left. \frac{\partial^2 e}{\partial z^2} \right|_{x=L}$$

é não-nulo, dado por

massa está posicionada na extremidade livre do braço, quando o esforço cortante
leia-se: “A segunda condição expressa em (52) deixa de ser válida quando a
nenhum interesse para o trabalho”

massa está posicionada na extremidade livre do braço, situação de pouco ou
onde se lê: “A segunda condição expressa em (52) deixa de ser válida quando a

• p. 40, par. 2, lin. 5:

contorno do problema.”

movimento da massa acoplada. A equação (48) permite deduzir as condições de
elástica; (46) refere-se à dinâmica de rotação da viga flexível; e (47) descreve o
acrescentar: “A equação (45) descreve o deslocamento do braço devido à flexão

• p. 39, após a Equação (48):

$$T_c(t) = \frac{1}{2} \cdot J_c \cdot \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot M_c \cdot L_c^2 \cdot \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \quad (14)$$

acrescentar: "Devido à rotação do braço, o engastamento no cubo passa a ser

móvel, e $\left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{x=0}$ é diferente de zero."

• p. 92, par. 1, lín. 2:

acrescentar: "As questões da controlabilidade e observabilidade não foram

consideradas mais a fundo, empregando-se apenas o teste do posto da matriz de

controlabilidade na sua avaliação. Parte-se da hipótese de que o sistema é

controlável."

• p. 119, Seção 6.2.1, título:

onde se lê: "Modelo com um número arbitrário de autofunções"

leia-se: "Modelo da viga sem massa com um número arbitrário de funções

admissíveis"

• p. 120, Seção 6.2.2, título:

onde se lê: "Modelo com uma única autofunção"

leia-se: "Modelo da viga sem massa com uma única função admissível"

• p. 141, 3ª referência:

onde se lê: "CANAVIN, J. R., LIKINS, P. W."

leia-se: "CANAVIN, J. R., LIKINS, P. W."

Sumário

INTRODUÇÃO.....	14
CAPÍTULO 1 - APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA.....	17
CAPÍTULO 2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	20
CAPÍTULO 3 - MODELAGEM DINÂMICA.....	25
3.1 ENERGIA POTENCIAL ELÁSTICA.....	27
3.2 ENERGIA CINÉTICA DO BRAÇO.....	27
3.3 ENERGIA CINÉTICA DA MASSA MÓVEL.....	29
3.4 ENERGIA CINÉTICA DO CUBO.....	30
3.5 PRIMEIRO VARIACIONAL DE ENERGIA POTENCIAL ELÁSTICA.....	30
3.6 PRIMEIRO VARIACIONAL DE ENERGIA CINÉTICA DO BRAÇO.....	31
3.7 PRIMEIRO VARIACIONAL DE ENERGIA CINÉTICA DA MASSA MÓVEL.....	34
3.8 PRIMEIRO VARIACIONAL DE ENERGIA CINÉTICA DO CUBO.....	35
3.9 TRABALHO VIRTUAL DAS FORÇAS NÃO-CONSERVATIVAS.....	36
3.10 PRINCÍPIO ESTENDIDO DE HAMILTON APLICADO AO SISTEMA.....	36
3.11 MODELO CONTÍNUO DO SISTEMA.....	38
CAPÍTULO 4 - MODELO POR SUBESTRUTURAÇÃO.....	41
4.1 SÍNTESE DE SUBESTRUTURAS.....	42
4.2 PRIMEIRO SUBSISTEMA: MASSA ACOPLADA.....	44
4.3 INTERAÇÃO BRAÇO-MASSA.....	49
4.4 SEGUNDO SUBSISTEMA: BRAÇO FLEXÍVEL.....	50
4.4.1 Vibração livre.....	52
4.4.2 Autofunções e autovalores do sistema.....	55
4.4.3 Normalização das autofunções.....	60
4.4.4 O problema da resposta $\eta(t)$	63
4.5. MODELO DO SISTEMA POR SÍNTESE DE SUBESTRUTURAS.....	67
4.5.1. Vibração transversal.....	67
4.5.2. Movimento angular do braço.....	70
4.6 COMPARAÇÃO COM O MODELO CONTÍNUO.....	72
CAPÍTULO 5 - MANOBRA PRÉ-ESPECIFICADA DA MASSA MÓVEL: DINÂMICA E CONTROLE.....	75
5.1 MODELO GÊNÉRICO.....	75
5.1.1 Modelo considerando uma autofunção.....	76
5.1.2 Modelo considerando três autofunções.....	78
5.2 CONTROLE QUADRÁTICO SUB-ÓTIMO.....	81
5.3 CONTROLE SUB-ÓTIMO DO SISTEMA EM QUESTÃO.....	83
5.4 SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL.....	85
5.4.1 Parâmetros físicos empregados na simulação.....	85
5.4.2 Autovalores e autofunções.....	86
5.4.3 Caso 0: Resposta em malha aberta.....	88
5.4.4 Resposta para controle quadrático sub-ótimo.....	91
5.4.4.1 Caso 1: Massa deslocando-se de $l_0 = 0$ a $l_f = 0,7$ m com velocidade constante.....	92
5.4.4.2 Caso 2: Massa deslocando-se com movimento senoidal.....	97
5.4.4.3 Caso 3: Massa deslocando-se com movimento periódico atenuado.....	102
5.4.4.4 Caso 4: Efeito do aumento e da redução da massa acoplada.....	108
5.4.4.5 Caso 5: Efeito da posição inicial da massa.....	109

CAPÍTULO 6 - CONTROLE ÓTIMO DO MOVIMENTO DA MASSA SOBRE O BRAÇO.....	114
6.1 CONTROLE ÓTIMO	116
6.2 MODELO DE ESTADO E FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE CONTROLE ÓTIMO	119
6.2.1 Modelo com um número arbitrário de autofunções	119
6.2.2 Modelo com uma única autofunção	120
6.3 SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL NO RIOTS_95	123
6.3.1 Parâmetros físicos e de discretização	123
6.4.2. Controle inicial u_0	123
6.4.3 Caso 6: Ausência de vínculos de restrição de trajetória	127
6.4.4 Caso 7: Controle com vínculos de restrição de trajetória da massa	131
6.4.5 Discussão dos resultados	135
CONCLUSÕES	137
TRABALHOS FUTUROS	139
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	141

Lista de Símbolos

- $e(x, t)$, $e(x)$: deslocamento transversal do braço devido à flexão
- $\tau(t)$, τ : torque aplicado ao cubo
- $l(t)$, l : posição da massa acoplada no referencial móvel $M(Oxyz)$
- $F(t, t)$, $F(l)$: força externa aplicada à massa acoplada, tangencial ao braço em l
- $F^N(l, t)$: componente normal da força aplicada à massa pelo braço
- $F^T(l, t)$: componente tangencial da força aplicada à massa pelo braço
- $\eta_r(t)$, η_r : r -ésima coordenada generalizada
- $\phi_r(x)$, ϕ_r : r -ésima função admissível (ou modo)
- ω_r : r -ésima frequência natural
- $\theta(t)$, θ : posição angular do braço no referencial inercial $I(OXYZ)$
- M : inércia da massa acoplada
- J_C : momento de inércia do cubo
- J_B : momento de inércia do braço
- I_B : momento de inércia de área do braço em relação ao eixo normal ao plano de rotação
- ρ : densidade linear de massa do braço
- E : módulo de elasticidade do braço
- h : espessura do braço
- b : altura do braço
- L : comprimento do braço

Lista de Figuras

17	FIGURA 1 - BRAÇO ROTATIVO FLEXÍVEL SOBRE O QUAL DESLIZA UMA MASSA MÓVEL.....
18	FIGURA 2 - FLEXÃO DO BRAÇO ROTATIVO DURANTE O MOVIMENTO DE ROTAÇÃO.....
26	FIGURA 3 - FLEXÃO DO BRAÇO ROTATIVO DURANTE MANOBRAS DE ROTAÇÃO (VISTA DE TOPO).....
45	FIGURA 4 - DIAGRAMA DE CORPO LIVRE DA MASSA ACOPLADA.....
46	FIGURA 5 - COMPONENTES DE ACELERAÇÃO DA MASSA.....
50	FIGURA 6 - SUBSISTEMA COMPOSTO PELO BRAÇO ROTATIVO PRESO AO CUBO (VISTA DE TOPO).....
87	FIGURA 7 - TRÊS PRIMEIROS MODOS E FREQUÊNCIAS NATURAIS DO BRAÇO SEM MASSA ACOPLADA.....
88	FIGURA 8 - CASO 0. TORQUE DE ENTRADA APLICADA AO BRAÇO.....
89	FIGURA 9 - POSIÇÃO E VELOCIDADE ANGULARES DO BRAÇO.....
89	FIGURA 10 - CASO 0. DESLOCAMENTO DA PONTA DO BRAÇO.....
90	FIGURA 11 - CASO 0. MALHA ABERTA. η_1 E $d\eta_1/dt$
90	FIGURA 12 - CASO 0. MALHA ABERTA. η_2 E $d\eta_2/dt$
91	FIGURA 13 - CASO 0. MALHA ABERTA. η_3 E $d\eta_3/dt$
92	FIGURA 14 - CONTROLABILIDADE DO SISTEMA AO LONGO DO TEMPO.....
93	FIGURA 15 - CASO 1. POSIÇÃO E VELOCIDADE DA MASSA ACOPLADA.....
94	FIGURA 16 - CASO 1. POSIÇÃO E VELOCIDADE ANGULARES DO BRAÇO.....
94	FIGURA 17 - CASO 1. DESLOCAMENTO DA EXTREMIDADE LIVRE DO BRAÇO.....
95	FIGURA 18 - CASO 1. TORQUE APLICADO AO CUBO.....
95	FIGURA 19 - CASO 1. GANHOS REFERENTES A η_1 , $d\eta_1/dt$, θ E $d\theta/dt$
96	FIGURA 20 - CASO 1. GANHOS REFERENTES A η_2 , $d\eta_2/dt$, η_3 E $d\eta_3/dt$
97	FIGURA 21 - CASO 1. TORQUE EXTERNO E MOMENTO CAUSADO PELA MASSA.....
98	FIGURA 22 - CASO 2. POSIÇÃO E VELOCIDADE ANGULARES DO BRAÇO.....
99	FIGURA 23 - CASO 2. POSIÇÃO E VELOCIDADE ANGULARES PARA O SISTEMA CONTROLADO.....
99	FIGURA 24 - CASO 2. DESLOCAMENTO DA EXTREMIDADE LIVRE DO BRAÇO.....
100	FIGURA 25 - CASO 2. COMPONENTES DA FORÇA APLICADA NO BRAÇO PELA MASSA MÓVEL.....
100	FIGURA 26 - CASO 2. TORQUE APLICADO AO CUBO.....
101	FIGURA 27 - CASO 2. MOVIMENTO SENOIDAL COM DESLOCAMENTO DE FASE DE $-\pi/2$ RAD.....
102	FIGURA 28 - CASO 3. POSIÇÃO E VELOCIDADE ANGULARES DO BRAÇO.....
103	FIGURA 29 - CASO 3. POSIÇÃO E VELOCIDADE ANGULARES PARA O SISTEMA CONTROLADO.....
103	FIGURA 30 - CASO 3. DESLOCAMENTO DA EXTREMIDADE LIVRE DO BRAÇO.....
104	FIGURA 31 - CASO 3. COMPONENTES DA FORÇA APLICADA NO BRAÇO PELA MASSA MÓVEL.....
104	FIGURA 32 - CASO 3. TORQUE APLICADO AO CUBO.....
105	FIGURA 33 - CASO 3. η_1 E $d\eta_1/dt$
105	FIGURA 34 - CASO 3. η_2 E $d\eta_2/dt$
106	FIGURA 35 - CASO 3. η_3 E $d\eta_3/dt$
106	FIGURA 36 - CASO 3. GANHOS REFERENTES A η_1 , $d\eta_1/dt$, θ E $d\theta/dt$
107	FIGURA 37 - CASO 3. GANHOS REFERENTES A η_2 , $d\eta_2/dt$, η_3 E $d\eta_3/dt$
108	FIGURA 38 - CASO 4. $M = 0,02$ KG. DESLOCAMENTO DA EXTREMIDADE LIVRE DO BRAÇO.....
109	FIGURA 39 - CASO 4. $M = 0,005$ KG. DESLOCAMENTO DA EXTREMIDADE LIVRE DO BRAÇO.....
110	FIGURA 40 - CASO 5. $L_0 = 0,3556$ M. POSIÇÃO E VELOCIDADE ANGULARES DO BRAÇO.....
110	FIGURA 41 - CASO 5. $L_0 = 0,3556$ M. DESLOCAMENTO DA EXTREMIDADE LIVRE DO BRAÇO.....
111	FIGURA 42 - CASO 5. $L_0 = L_{no} = 0,5044$ M. POSIÇÃO E VELOCIDADE ANGULARES DO BRAÇO.....
111	FIGURA 43 - CASO 5. $L_0 = L_{no} = 0,5044$ M. DESLOCAMENTO DA EXTREMIDADE LIVRE DO BRAÇO.....
112	FIGURA 44 - CASO 5. $L_0 = 0,65$ M. POSIÇÃO E VELOCIDADE ANGULARES DO BRAÇO.....
112	FIGURA 45 - CASO 5. $L_0 = 0,65$ M. DESLOCAMENTO DA EXTREMIDADE LIVRE DO BRAÇO.....
115	FIGURA 46 - MATRIZ $[S]^{3 \times 3}$. MASSA MÓVEL DE 0,01 KG.....
125	FIGURA 47 - ENTRADA INICIAL U_0 GERADA NO SIMULINK.....
126	FIGURA 48 - PLANTA DO SIMULINK PARA GERAÇÃO DE U_0
128	FIGURA 49 - CASO 6. $M = 0,01$ KG. TORQUE ÓTIMO E INICIAL.....
128	FIGURA 50 - CASO 6. $M = 0,01$ KG. FORÇA ÓTIMA E INICIAL APLICADA À MASSA.....
129	FIGURA 51 - CASO 6. $M = 0,01$ KG. POSIÇÃO E VELOCIDADE ANGULARES.....
129	FIGURA 52 - CASO 6. $M = 0,01$ KG. POSIÇÃO E VELOCIDADE DA MASSA.....

FIGURA 53 - CASO 6, $M = 0,01$ KG. DESLOCAMENTO DA EXTREMIDADE LIVRE DO BRAÇO.	130
FIGURA 54 - CASO 6, $M = 0,01$ KG. DESLOCAMENTO DA EXTREMIDADE LIVRE DO BRAÇO (ZOOM).	130
FIGURA 55 - CASO 7, $M = 0,005$ KG. TORQUE ÓTIMO E INICIAL.	132
FIGURA 56 - CASO 7, $M = 0,005$ KG. FORÇA ÓTIMA E INICIAL APLICADA À MASSA.	132
FIGURA 57 - CASO 7, $M = 0,005$ KG. POSIÇÃO E VELOCIDADE ANGULARES.	133
FIGURA 58 - CASO 7, $M = 0,005$ KG. POSIÇÃO E VELOCIDADE DA MASSA.	133
FIGURA 59 - CASO 7, $M = 0,005$ KG. DESLOCAMENTO DA PONTA DO BRAÇO.	134
FIGURA 60 - CASO 6, $M = 0,01$ KG. AUSÊNCIA DE VÍNCULOS DE RESTRIÇÃO DE TRAJETÓRIA.	134
COMPONENTES DA FORÇA $F^E(L)$ APLICADA NO BRAÇO PELA MASSA MÓVEL.	135
FIGURA 61 - CASO 7, $M = 0,005$ KG. CONSIDERAM-SE OS VÍNCULOS DE RESTRIÇÃO DE TRAJETÓRIA.	136
COMPONENTES DA FORÇA $F^E(L)$ APLICADA NO BRAÇO PELA MASSA MÓVEL.	136

Lista de Tabelas

TABELA 1 - PARÂMETROS FÍSICOS DO SISTEMA (SI).....	85
TABELA 2 - VALORES DAS TRÊS PRIMEIRAS FREQUÊNCIAS NATURAIS.....	86
TABELA 3 - CASO 1. MÉDIA E DESVIO PADRÃO DO GANHO K.....	96
TABELA 4 - CASO 3. MÉDIA E DESVIO PADRÃO DO GANHO K.....	107
TABELA 5 - PARÂMETROS FÍSICOS EMPREGADOS NA 2ª ABORDAGEM (SI).....	123
TABELA 6 - CASO 6, $M = 0,01$ KG. VALORES DE PICO, MÉDIA, DESVIO PADRÃO E FUNÇÃO OBJETIVO PARA OS CONTROLES INICIAL E ÓTIMO.....	127
TABELA 7 - CASO 7, $M = 0,005$ KG. VALORES DE PICO, MÉDIA, DESVIO PADRÃO E FUNÇÃO OBJETIVO PARA OS CONTROLES INICIAL E ÓTIMO.....	134

RESUMO

OLIVEIRA, Frederico Ricardo Ferreira de, *Controle de vibrações de um braço rotativo flexível pelo movimento de uma massa sobre o braço*, São Paulo: Departamento de Engenharia Mecânica, Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, 2000.

O modelo dinâmico de um braço rotativo flexível sobre o qual desliza uma massa móvel é deduzido através do Princípio Estendido de Hamilton, resultando num conjunto de equações integro-diferenciais acopladas, não-lineares e variáveis no tempo e no espaço, devido à variação dos termos de inércia. Com o fim de contornar as dificuldades matemáticas decorrentes, foi empregada a modelagem por subestruturação, considerando-se isoladamente o braço flexível e a massa móvel, resultando num modelo suficientemente simples para a síntese do controlador. Esse modelo é genérico, no sentido de abranger um número arbitrário de autofunções. Duas abordagens distintas quanto ao movimento da massa são analisadas. Na primeira, o posicionamento da massa é tratado de um ponto de vista exclusivamente cinemático, admitindo-se pré-especificada sua trajetória sobre o braço durante a manobra de rotação; o torque aplicado à viga é empregado tanto para gerar a manobra quanto para controlar o movimento elástico induzido. Na segunda abordagem, o movimento da massa é usado para fins de controle, empregando-se uma força atuante sobre ela como uma segunda variável de controle, além do torque sobre o braço; o modelo do controlador torna-se então não-linear. Um controlador LQ de ganho variável foi implementado para a primeira abordagem, e formulou-se para a segunda análise um Problema de Controle Ótimo. Ambos os casos foram simulados e analisados, mostrando que a proposta inicial pode gerar excelentes resultados no controle de vibrações de estruturas flexíveis

Palavras-chave: estruturas flexíveis, braços rotativos, controle, controle ótimo

ABSTRACT

OLIVEIRA, Frederico Ricardo Ferreira de, *Vibration control of a rotating flexible arm through the movement of a sliding mass*, São Paulo, Brazil: Departamento de Engenharia Mecânica, Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, 1999.

A dynamical model for a flexible rotating arm carrying a sliding mass is deduced using the Extended Hamilton's Principle. The resulting model is a coupled integro-differential system of equations, non-linear and time and space variant due to changes in the inertia terms. In order to circumvent mathematical difficulties, substructure modeling was employed, considering the flexible beam and the moving mass separately. A simpler model, suitable for control design, has been obtained applying the superposition of autofunctions. This model is generic in the sense that one can include any number of flexible modes. Two distinct approaches have been considered for the mass movement. The first assumes that the mass trajectory over the arm is pre-specified during arm rotation and the external torque on the arm is used both to generate the maneuver and to control the elastic motion. In a second approach, the mass positioning is also used for the control strategy, by considering one external force actuating over the mass as a second control variable, besides the torque. A LQ regulator with variable gain has been implemented for the first approach. An Optimal Control Problem is formulated for the second one. The two cases were simulated, and the results are presented and discussed. The results demonstrate that optimized coupled motions should be employed to very good vibration control of flexible structures.

Keywords: flexible structures, rotating arms, control, optimal control

Introdução

A Dinâmica e o Controle de estruturas flexíveis vêm despertando um crescente interesse nas últimas décadas, devido às amplas perspectivas que abriam em áreas como a Robótica e a Engenharia Espacial. Até o presente, os principais fatores limitantes para o emprego de estruturas flexíveis têm sido: em primeiro lugar, a difícil modelagem de tais estruturas, visando um modelo satisfatório para a implementação do controlador; em segundo, as limitações próprias dos atuadores disponíveis no mercado, não diretamente projetados para atenuar os efeitos de vibração que, em estruturas de amortecimento reduzido, tornam-se críticos.

No campo da Robótica, tais dificuldades têm sido, há muitos anos, contornadas - e não propriamente enfrentadas - com o uso de estruturas de elevada rigidez, o que, via de regra, traduz-se em braços de grandes dimensões, maior peso próprio, motores de maior potência e maior custo, ainda que a aplicação propriamente dita não demande grandes esforços. Exemplos disso são os robôs de solda a ponto empregados na indústria automobilística, com elementos de largas secções transversais e motores de potência elevada, apesar de serem mínimas as forças aplicadas pelo robô à carroceria do automóvel durante a operação de solda. Desse modo, o estudo de métodos de controle de estruturas flexíveis, com níveis de eficiência comparáveis aos dos robôs atuais em termos de velocidade, precisão, repetibilidade, etc., sugere, no futuro, a substituição de braços rígidos - ou partes deles - por sistemas flexíveis leves. Avanços nesse sentido abririam à Robótica novos e amplos horizontes, com a redução de pesos e custos sem perdas comprometedoras de velocidade de trabalho.

A Engenharia Espacial, por sua vez, tem sido o carro-chefe da pesquisa em

Dinâmica e Controle de estruturas flexíveis. O custo proibitivo das operações espaciais tornou necessário encarar de frente o problema de modelagem e controle de vibrações em estruturas leves e de grandes dimensões, como antenas e painéis solares. A execução de manobras no espaço torna-se crítica pela natural ausência de atmosfera, fazendo lenta a atenuação das vibrações ocasionadas pelo movimento. Como solução, diversos métodos de controle têm sido propostos, como o emprego de materiais piezoelétricos na construção de atuadores e o uso de cargas de posicionamento variável.

De um modo geral, pouco ou nenhum proveito é tirado da interação entre as partes distintas de um sistema. Quando se pretende projetar mecanismos de múltiplos corpos reduzindo peso e ganhando velocidade na resposta do sistema global, é quase inevitável deparar-se com problemas de flexibilidade e de vibrações induzidas. É nessa perspectiva que se insere este trabalho, visando a modelagem e o controle de um sistema mecânico composto por um braço rotativo flexível, sobre o qual desliza longitudinalmente um carro ou massa móvel. Empregando como variáveis de controle o torque no motor que aciona o braço rotativo e a força que posiciona o carro ao longo daquele, pretende-se avaliar até que ponto o movimento da massa é efetivo na atenuação das vibrações do braço. Com isso, pretende-se desenvolver uma metodologia de controle ótimo para minimizar as vibrações do braço. O objetivo desse trabalho é o estudo de um controlador ótimo, conhecidos a posição angular final do braço e os estados (posição e velocidade) iniciais do sistema.

Apresentam-se duas abordagens distintas quanto ao movimento do carro. Em uma primeira, admite-se pré-especificada a trajetória da massa sobre o braço durante a manobra de rotação, e o torque aplicado à viga é empregado tanto para gerar a manobra

quanto para controlar o movimento elástico induzido. Isso significa tratar o deslocamento longitudinal da massa de um ponto de vista exclusivamente cinemático, não dinâmico. A posição da massa móvel é um parâmetro conhecido, e não uma variável a ser controlada, como na segunda abordagem. O interesse central desse estudo reside na análise dos efeitos dinâmicos causados pela distribuição variável de inércia em estruturas rotativas flexíveis. O sistema assemelha-se a um guindaste de porto marítimo, em que a carga se move em direção à base enquanto o giro é realizado.

Em uma segunda abordagem, o próprio movimento da massa, além do torque sobre a viga, é determinado visando diretamente a minimização da vibração. Nesse caso, a posição e a velocidade da massa estão entre as variáveis de estado do sistema. Uma força, tangencial ao braço no ponto em que ela se encontra é aplicada ao carro móvel, e constitui uma segunda variável de controle. O modelo de estado torna-se não-linear, implicando na utilização de uma estratégia de controle ótimo adequada.

As aplicações diversas nas áreas espacial e robótica são suficientes para motivar a pesquisa em Dinâmica e Controle de estruturas flexíveis. Espera-se que este trabalho contribua com alguns subsídios no esforço por dominar essa tecnologia.

Capítulo I

Apresentação do Problema

O sistema mecânico que se propõe estudar este trabalho compõe-se de um

braço rotativo flexível e uma massa móvel acoplada a ele, deslocando-se longitudinalmente sobre o braço, conforme ilustra a Figura 1. Atuam sobre o conjunto dois esforços externos: um torque $\tau(t)$, aplicado ao cubo rotativo onde se fixa o braço por uma de suas extremidades; e uma força concentrada $F(l, t)$ aplicada à massa, de direção tangente ao braço no ponto $l(t)$ onde ela se encontra no instante t . Desconsideram-se quaisquer componentes de força de direção longitudinal atuando entre o braço e a massa, entre as quais as forças de atrito. Assim, apenas as componentes normais das forças de interação entre o braço e a massa acoplada são consideradas na modelagem.

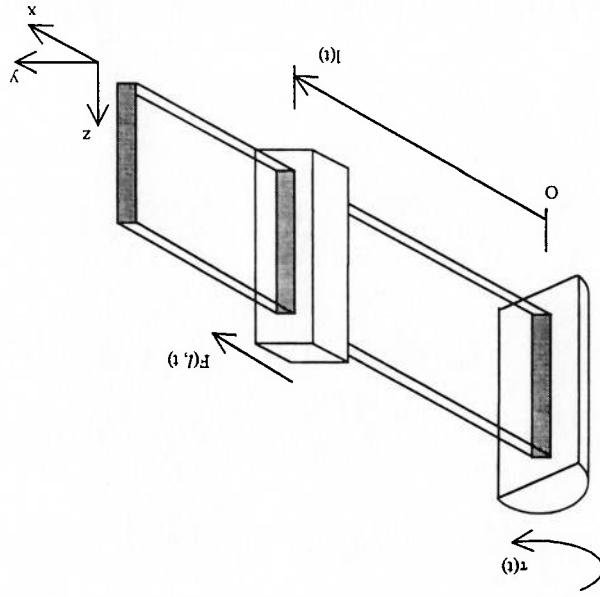


Figura 1 - Braço rotativo flexível sobre o qual desliza uma massa móvel.

Desconsideraram-se os efeitos gravitacionais, supondo apoiado o braço. Numa montagem prática, essa hipótese poderia traduzir-se em um braço delgado, de espessura muito inferior à altura. Assim, são desconsiderados os efeitos de vibração fora do plano definido pelo movimento de rotação (plano xy ilustrado na Figura 1), restringindo-se o estudo à análise da vibração transversal do braço. A Figura 2 ilustra a flexão sofrida pela viga durante uma manobra de rotação.

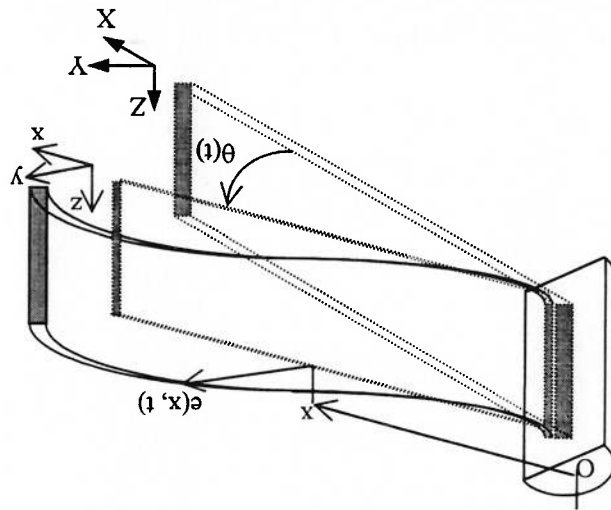


Figura 2 - Flexão do braço rotativo durante o movimento de rotação.

Na Figura 2, $I(OXYZ)$ é um sistema de referência inercial e $M(Oxyz)$, um sistema de referência móvel, preso ao braço em O e girando com ele. O eixo x indica, portanto, a direção tangente ao braço em O a cada instante.

O objetivo deste trabalho é a modelagem e controle ótimo do sistema mecânico descrito, visando a redução das vibrações induzidas durante uma manobra de rotação. Pretende-se controlar a estrutura empregando como variáveis de controle o torque $\tau(t)$ aplicado ao cubo e a força $F(l, t)$ atuante sobre a massa móvel, verificando se a composição de movimentos, que nesse caso se caracteriza pela variação da distribuição

de inércia do conjunto, devido ao movimento da massa sobre o braço, constitui um método eficaz de controle de vibrações em estruturas flexíveis.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

Inúmeros trabalhos têm abordado o problema da modelagem dinâmica e do controle de estruturas flexíveis. Meirovitch (1990) e Book (1990) apresentam estados da arte na área. Junkins & Kim (1996) tratam de diversos aspectos relacionados à Dinâmica e ao Controle de estruturas flexíveis.

Modelos dinâmicos semelhantes ao sistema braço-massa acoplada estudado neste trabalho podem ser deduzidos a partir dos princípios da Teoria Hamiltoniana, descrita por Spiegel (1976). As equações de Lagrange e o Princípio de Hamilton são apresentados por Meirovitch (1990) e Meirovitch (1997). Como a síntese do controlador requer um modelo com pequeno número de entradas e saídas, torna-se necessário deduzir um modelo reduzido a partir do modelo contínuo inicial, pela seleção de modos mais significativos. A esse respeito, Liu e Skelton (1993) comentam que ainda não é evidente como determinar um bom modelo reduzido para o projeto de um controlador de alto desempenho. Os autores apresentam um algoritmo para integrar, num único projeto, a identificação do sistema, a redução do modelo com vista ao projeto do controlador e o projeto do controle da estrutura mecânica genérica. Posteriormente aplicam esse algoritmo a uma estrutura empregada pela NASA no estudo do comportamento de sistemas espaciais. Kajiwara & Nagamatsu (1994) fazem um estudo semelhante, comparando modelos em Elementos Finitos e modelos modais.

ser tratadas matematicamente como uma montagem de subestruturas, cada uma subestruturas, apontando inúmeras referências nessa área. Estruturas complexas podem Meirovitch (1997) descreve detalhadamente o método da síntese de constituem apenas um pequeno subconjunto.

um conjunto muito mais amplo de autofunções, do qual os modos de vibração não representa necessariamente os modos de vibração do sistema mecânico, mas sim – as funções admissíveis $\phi_n(x)$ – e no tempo – as coordenadas generalizadas $\eta_n(t)$. $\phi_n(x)$ autofunções, decompondo-se a solução em uma combinação linear de funções no espaço autofunções. A resposta de um sistema distribuído é descrita por um problema de Meirovitch (1990) estuda detalhadamente o princípio da superposição de um referencial inercial.

Sugerem uma formulação alternativa, em que as equações são deduzidas em relação a resultam equações de movimento não-lineares, acopladas nos termos de inércia. sistema mecânico e girando com a chamada vigia-sombra (*shadow-beam*), de onde os modelos tradicionais empregam invariavelmente referências móveis, presos ao vigas flexíveis submetidas a movimentos amplos e flexões acentuadas. Observam que Simo & Vu-Quoc (1986) apresentam um estudo detalhado da dinâmica de entre o momento de inércia do braço flexível e o momento de inércia do cubo rotativo.

expansão em modos vinculados conduz a bons resultados apenas se for pequena a razão *modes*) na elaboração do modelo. Concluem que, na ausência de um controlador, a compararam os modos vinculados (*constrained modes*) e não vinculados (*unconstrained* possível desacoplar as equações empregando o Método dos Modos Assumidos, e flexível, deduzidas por meio do Princípio Estendido de Hamilton. Demonstram que é Özguner & Barbieri (1988) apresentam as equações de um braço rotativo

modelada separadamente e impondo-se certa compatibilidade geométrica nas fronteiras entre duas subestruturas adjacentes. O autor discute até que ponto a estrutura intermediária (resultante da modelagem por subestruturação) pode representar a estrutura real. Hurty (1965) desenvolve um método de subestruturação a partir dos chamados modos componentes, no qual a conexão das subestruturas é realizada por meio da compatibilização de deslocamentos nos pontos de fronteira. Craig & Bampton (1968) apresentam um método similar de acoplamento de subestruturas, com uma formulação mais simplificada. Shigaki (1993) estuda diversos métodos de síntese de modos componentes.

O modelo matemático de sistemas com distribuição de inércia variável no tempo compõe-se de um conjunto de equações integro-diferenciais com derivadas parciais no tempo e no espaço. Friedland *et al* (1987) e Junkins & Kim (1996) demonstram por meio do Segundo Método de Lyapunov que, para sistemas variantes no tempo (*time-varying systems*), uma solução sub-ótima - conhecida como "aproximação adiabática" por sua semelhança com certos cálculos da Termodinâmica - pode resultar num controlador estável de bom desempenho. Esse controlador sub-ótimo é obtido a partir da resolução da equação algébrica de Riccati para uma discretização no tempo de sistema. Friedland (1987) volta a abordar esse tema, equacionando-o em termos de matrizes de transição de estado.

Um estudo de particular interesse em dinâmica e controle de estruturas flexíveis é o da atenuação de vibrações induzidas durante manobras. Entre as diversas formas de atuação que têm sido propostas, destaca-se o emprego de atuadores piezoelétricos e atuadores por reposicionamento e/ou carga variáveis. Warren *et al* (1995) estudam o projeto de um controlador H_{∞} para uma viga flexível em rotação. As

entradas do controlador são geradas por um motor de torque ligado ao cubo e um atuador piezocerâmico, colocado em um segmento da viga. Trabalho analógico é apresentado por Benain & Ferreira (1995), no estudo de atuadores piezoeletrônicos no controle de vibrações. Lozano & Brogliato (1992) estudam o controle adaptativo de robôs manipuladores com juntas flexíveis, com resultados válidos para juntas de larga flexibilidade. Gilidin (1998) desenvolve o modelo analítico de um braço rotativo flexível com uma massa desconhecida acoplada na extremidade. Empregando na modelagem um referencial flutuante (*tisserand frame*), proposto inicialmente por Canavin & Likinis (1977), o autor verifica que as equações dinâmicas resultantes são desacopladas e que os termos não-lineares são de menor magnitude, em comparação com os tradicionais modelos com referências móveis. Em um passo posterior, o autor sintetiza um controlador adaptativo para a presença de incerteza de cargas afixadas na extremidade livre do braço rotativo flexível, comparando esses resultados com um controlador por

alocação de pólos.

Ogata (1998) apresenta uma introdução simples e didática ao Controle Ótimo aplicado a sistemas lineares, em particular ao controle linear-quadrático. Empregando o MATLAB como ferramenta de cálculo numérico, resolve diversos problemas simples de controle. Friedland (1987) descreve detalhadamente a abordagem de espaço de estados e sua aplicação em Controle. Citron (1969) fornece uma boa fundamentação a respeito do Controle Ótimo de sistemas.

Schwartz (1996) e Schwartz & Polak (1997) desenvolvem o método das aproximações consistentes para a solução numérica do Problema do Controle Ótimo. Dos trabalhos dos autores resulta o RIOTS_95, um pacote computacional fechado para o tratamento numérico de problemas de controle ótimo. Schwartz, Polak & Chen (1997)

descrevem o funcionamento do RIOTS_95. Menegaldo (2000) emprega o método das aproximações consistentes em um controlador ótimo da postura humana.

Entre as referências bibliográficas citadas, mostraram-se especialmente importantes no desenvolvimento deste trabalho as obras de Meirovitch (1980, 1986, 1990, 1997), pelo tratamento rigoroso da Dinâmica de sistemas distribuídos, desde a Teoria Hamiltoniana até a síntese de subestruturas. O trabalho de Ozguner & Barbieri (1988) também foi importante, pois apresenta a modelagem de um braço rotativo flexível e sugere o emprego de modos vinculados para sistemas com certas condições físicas. Friedland *et al* (1987) forneceram a fundamentação matemática para o estudo de controle sub-ótimo, demonstrando, por meio da Teoria de Liapunov, as condições de estabilidade da resposta. Por fim, Schwartz, Polak & Chen (1997) e Menegaldo (2000) deram subsídios para a análise inicial do Problema de Controle Ótimo e a implementação de um controlador ótimo usando o RIOTS_95.

A revisão bibliográfica permite supor que, aparentemente, o problema de controle de vibrações de um braço rotativo flexível empregando o movimento de uma massa acoplada ainda não foi abordado. Nenhuma referência foi encontrada abordando esse tema, e Meirovitch (1990), em seu amplo estado da arte da Dinâmica e Controle de estruturas, não faz nenhuma referência nesse sentido. Supõe-se tratar-se de um campo novo e com grandes perspectivas de trabalho.

Capítulo 3 Modelagem Dinâmica

O movimento de sistemas contínuos (ou sistemas com parâmetros distribuídos) envolve problemas de valores de contorno (*boundary value problems*), que, por sua vez, caracterizam-se pela associação de:

1º) uma ou mais equações diferenciais parciais, válidas para os pontos do sistema;

2º) um conjunto de condições de fronteira, a serem satisfeitas em todos os pontos da fronteira ou contorno do sistema.

Mitrovitch (1997) comenta que a resolução de um problema de valores de contorno traduz-se, na prática, na resolução de um problema de autovalores, a partir do qual se obtém um conjunto de dimensão infinita de autovalores e autofunções. Essas autofunções são ortogonais entre si, formando uma base para o espaço de funções no qual é possível descrever qualquer resposta dinâmica do sistema¹. Desse modo, o problema de valores de contorno se transforma em um conjunto de equações diferenciais ordinárias de segundo grau.

A vibração de sistemas contínuos (não discretos) depende não só do tempo, mas da posição espacial, descrita por uma, duas ou três coordenadas espaciais, razão pela qual há pelo menos duas variáveis independentes e o movimento é descrito necessariamente por equações diferenciais parciais.

Diversas abordagens podem ser empregadas para determinar a dinâmica de um sistema com parâmetros distribuídos. A abordagem vetorial da Mecânica Newtoniana,

¹ A demonstração desse princípio, chamado teorema da expansão, é apresentada por Mitrovitch (1997).

que apresenta inúmeras vantagens na modelagem de sistemas discretos pela simplicidade e clareza do desenvolvimento, torna-se, no caso de sistemas contínuos, algo intrínca. Assim, no estudo e modelagem de sistemas distribuídos, a Mecânica Analítica tem sido preferida, formulando-se a dinâmica do movimento através das equações de Lagrange ou do Princípio de Hamilton.

Neste capítulo são deduzidas as equações dinâmicas do conjunto braço-massa móvel através dos princípios da Dinâmica Hamiltoniana. Spiegel (1976) e Meirovitch (1997), entre outros, estudam detalhadamente o Princípio de Hamilton e os aspectos teóricos relativos à sua fundamentação matemática.

Por um motivo de simplicidade de notação, omite-se, deste ponto em diante, a indicação do tempo t e do espaço x em todas as variáveis, sempre que a clareza do texto não seja prejudicada.

A Figura 3 é um diagrama esquemático da flexão do braço durante uma manobra de rotação.

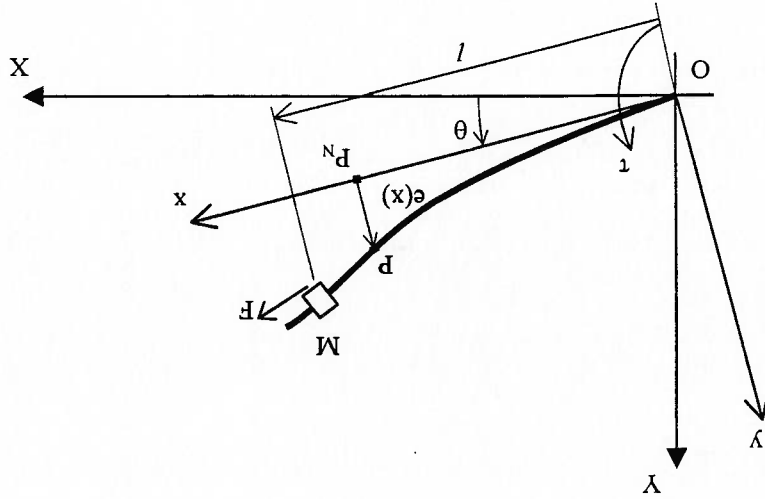


Figura 3 - Flexão do braço rotativo durante manobra de rotação (vista de topo).

3.1 Energia potencial elástica

A energia potencial elástica armazenada no braço flexível em um instante t é

$$U(t) = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L E \cdot I_b \cdot \left(\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (1)$$

onde

$$I_b = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad (2)$$

é o momento de inércia de área do braço em relação ao eixo Z, normal ao plano XY da

rotação.

Desconsideram-se os efeitos de deformação por cisalhamento e a inércia de

rotação. Trata-se, portanto, de uma viga de Euler-Bernoulli.

3.2 Energia cinética do braço

Conforme ilustra a Figura 3, desconsiderando o efeito de encurtamento

geométrico² e a energia cinética devido à flexão elástica, um ponto P do braço pode ser

descrito no referencial móvel M(Oxyz) pelo vetor

$$\underline{p}_m = x \cdot \underline{i} + e \cdot \underline{j} \quad (3)$$

onde o primeiro termo é a projeção de P no eixo x (identificado pelo ponto P_N na Figura

3), e o segundo termo é o deslocamento transversal de P devido à flexão. O índice M

indica que vetor é descrito no sistema móvel M(Oxyz).

A velocidade relativa do ponto é igual à derivada do vetor posição em relação

ao referencial móvel:

² Gilidin (1998) deduz a expressão para o encurtamento geométrico da viga flexível.

$$(4) \quad \underline{v}_m = \frac{d\underline{p}_m}{dx} \cdot \dot{x} + \frac{\partial \underline{p}_m}{\partial t} \cdot \dot{t}$$

A velocidade do referencial móvel M(Oxyz) em relação ao sistema de referência inercial I(OXYZ) é

$$(5) \quad \underline{\omega}_1 = \frac{d\underline{\theta}}{dt} \cdot \underline{k}$$

A velocidade de P em I(OXYZ), portanto, é igual a

$$(6) \quad \underline{v}_1 = \underline{v} + \underline{\omega}_1 \times \underline{d} = \frac{d\underline{p}}{dx} \cdot \dot{x} - \frac{d\underline{\theta}}{dt} \cdot \underline{i} + \left(\frac{\partial \underline{p}}{\partial t} + \underline{\omega}_1 \times \underline{d} \right) \cdot \underline{j}$$

O quadrado do módulo da velocidade do ponto, então, é igual a

$$(7) \quad v^2 = \underline{v}_1 \cdot \underline{v}_1 = \left(\frac{d\underline{p}}{dx} \cdot \dot{x} - \frac{d\underline{\theta}}{dt} \cdot \underline{i} + \left(\frac{\partial \underline{p}}{\partial t} + \underline{\omega}_1 \times \underline{d} \right) \cdot \underline{j} \right) \cdot \left(\frac{d\underline{p}}{dx} \cdot \dot{x} - \frac{d\underline{\theta}}{dt} \cdot \underline{i} + \left(\frac{\partial \underline{p}}{\partial t} + \underline{\omega}_1 \times \underline{d} \right) \cdot \underline{j} \right) =$$

Como o movimento longitudinal do ponto P (na direção do próprio braço) não

é considerado, sua velocidade $\frac{dx}{dt}$ é igual a zero. Em consequência,

$$(8) \quad v^2 = \left(\frac{\partial \underline{p}}{\partial t} \right) \cdot \left(\frac{\partial \underline{p}}{\partial t} \right) + 2 \cdot \frac{\partial \underline{p}}{\partial t} \cdot \underline{x} + \frac{d\underline{\theta}}{dt} \cdot \left(\underline{x} + \underline{e}_z \right) \cdot \left(\frac{d\underline{p}}{d\underline{\theta}} \right)$$

No braço em rotação, um ponto com massa diferencial dm movendo-se com

velocidade v armazena uma energia cinética igual a

$$(9) \quad dT = \frac{1}{2} \cdot dm \cdot v^2$$

A energia cinética da viga é obtida integrando-se a equação (9) para o domínio

$[0, L]$, ou seja,

$$(10) \quad T_b = \int_0^L dT = \int_0^L \frac{1}{2} \cdot v^2 \cdot dm = \int_0^L \frac{1}{2} \cdot v^2 \cdot \rho \cdot dx$$

onde ρ é a densidade linear de massa ao longo do braço.

Considerando (8), deduz-se que a energia cinética total armazenada no braço

em um instante t é igual a

$$(11) \quad T_b(t) = \int_0^L \frac{1}{2} \rho \cdot \left[\left(\frac{\partial e}{\partial t} \right)^2 + 2 \cdot \frac{\partial e}{\partial t} \cdot x \cdot \frac{d\theta}{dt} + (x^2 + e^2) \cdot \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] dx$$

3.3 Energia cinética da massa móvel

Seja $l = l(t)$ a posição da massa acoplada no instante t , descrita no referencial

móvel $M(Oxyz)$. Deduz-se de (7) que o quadrado do módulo da velocidade de um ponto

$P = P(x = l)$ do braço no referencial $I(OXYZ)$ é igual a

$$(12) \quad v^2(l) = \left(\frac{dl}{dt} \right)^2 - 2 \cdot \frac{dl}{dt} \cdot e(l) \cdot \frac{d\theta}{dt} + e^2(l) \cdot \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dl}{dt} \right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{\partial e}{\partial t} \right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{\partial e}{\partial t} \right) \cdot l \cdot \frac{d\theta}{dt} + l^2 \cdot \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

A equação (12) indica também a velocidade da massa móvel em $I(OXYZ)$.

Assim, a energia cinética da massa no instante t é

e considerando que

$$(16) \quad \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} \cdot \delta \left(\frac{\partial x}{\partial e} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} \cdot \delta \left(\frac{\partial x}{\partial e} \right) \right] - \frac{\partial^3 e}{\partial x^3} \cdot \delta \left(\frac{\partial x}{\partial e} \right)$$

Integrando por partes,

$$(15) \quad \delta U = \frac{1}{2} \cdot \int_{L^a}^0 E \cdot I_b \cdot \delta \left(\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} \right) dx = \frac{1}{2} \cdot \int_{L^a}^0 E \cdot I_b \cdot \delta \left(\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} \right) dx$$

armazenada no braço no instante t , calculado a partir de (1), é

Segundo Spiegel (1976), o primeiro variacional de energia potencial elástica

3.5 Primeiro variacional de energia potencial elástica

$$(14) \quad T_c(t) = \frac{1}{2} \cdot M_c \cdot L_c^2 \cdot \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot J_c \cdot \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

se fixa o braço flexível. A energia cinética armazenada no cubo é

Seja L_c o raio; M_c , a massa, e J_c , o momento de inércia do cubo rotativo onde

3.4 Energia cinética do cubo

$$(13) \quad T_m(t) = \frac{1}{2} \cdot M \cdot v^2(t) = \frac{1}{2} \cdot M \cdot \left[\left(\frac{dl}{dt} \right)^2 - 2 \cdot \frac{dl}{dt} \cdot e(t) \cdot \frac{d\theta}{dt} + e^2(t) \right] + \left[\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + 2 \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} \cdot l \cdot \frac{d\theta}{dt} + l^2 \cdot \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right]$$

$$(17) \quad \left(\frac{\partial^3 e}{\partial e^3} \right) \cdot \delta \left(\frac{\partial x}{\partial e} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 e}{\partial x^3} \right) \cdot \delta e - \frac{\partial^4 e}{\partial x^4} \cdot \delta e$$

resulta, da equação (15),

$$(18) \quad \delta U = \int_L^r E \cdot I_B \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial x^2}{\partial^2 e} \right] \cdot \delta \left(\frac{\partial x}{\partial e} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 e}{\partial x^3} \right) \cdot \delta e + \frac{\partial^4 e}{\partial x^4} \cdot \delta e \right\} dx$$

Os dois primeiros termos do integrando envolvem uma integração e uma

diferenciação na variável x . Simplificando (18), obtêm-se

$$(19) \quad \delta U = E \cdot I_B \cdot \left[\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} \cdot \delta \left(\frac{\partial x}{\partial e} \right) \right]_{x=0}^L - E \cdot I_B \cdot \left[\frac{\partial^3 e}{\partial x^3} \cdot \delta e \right]_{x=0}^L + \int_L^r E \cdot I_B \cdot \frac{\partial^4 e}{\partial x^4} \cdot \delta e dx$$

3.6 Primeiro variacional de energia cinética do braço

O primeiro variacional de energia cinética do braço em um instante t , calculado

a partir de (11), é igual a

$$(20) \quad \delta T_B = \int_{t_1}^{t_2} \rho \cdot \left\{ \delta \left[\frac{\partial e}{\partial t} \right] \right\} + 2 \cdot \delta \left(\frac{\partial e}{\partial e} \right) \cdot x \cdot \frac{d\theta}{dt} + \left[\frac{d\theta}{dt} \right] \cdot \delta \left[\frac{d\theta}{dt} \right] \cdot e_z + \left[\frac{d\theta}{dt} \right] \cdot \delta \left[\frac{d\theta}{dt} \right] \cdot x + \left[\frac{d\theta}{dt} \right] \cdot \delta \left[\frac{d\theta}{dt} \right] \cdot x \cdot \frac{d\theta}{dt} + \left[\frac{d\theta}{dt} \right] \cdot \delta \left[\frac{d\theta}{dt} \right] \cdot x \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

As operações básicas com grandezas variacionais estão indicadas no trabalho

de Spiegel (1990), de onde decorre que

3.7 Primeiro variacional de energia cinética da massa móvel

O primeiro variacional de energia cinética da massa móvel, calculado a partir

de (13), é

$$(32) \quad \delta T_m = \frac{1}{2} \cdot M \cdot \left\{ \delta \left[\left(\frac{dl}{dt} \right)_z \right] - 2 \cdot \delta \left[\frac{dl}{dt} \cdot e(l) \cdot \frac{d\theta}{dt} \right] + \delta \left[e^2(l) \cdot \left(\frac{d\theta}{dt} \right)_z \right] + \delta \left[\left(\frac{\partial e}{\partial t} \right)_z \right] + 2 \cdot \delta \left[\left(\frac{\partial e}{\partial t} \right)_{x=l} \right] + \delta \left[\frac{d\theta}{dt} \right] + \delta \left[l^2 \cdot \left(\frac{d\theta}{dt} \right)_z \right] \right\}$$

Por motivo de simplicidade de notação, pode-se expressar $e(l) = e(l, t)$ por

$$(33) \quad e(l) = e(l, t) = \int e(x, t) \cdot \Delta_l dx$$

onde Δ_l é a função delta de Dirac, definida por

$$(34) \quad \Delta_l = \Delta(x-l) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = l \\ 0, & \text{se } x \neq l \end{cases}$$

O variacional de energia, portanto, é igual a

$$(35) \quad \delta T_m = \frac{1}{2} \cdot M \cdot \left\{ \int_x \left[-2 \cdot \delta \left(\frac{dl}{dt} \cdot e \cdot \frac{d\theta}{dt} \right) + \delta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)_z \right] + \delta \left[\left(\frac{\partial e}{\partial t} \right)_z \right] + 2 \cdot \delta \left[\left(\frac{\partial e}{\partial t} \right)_{x=l} \right] + \delta \left[\frac{d\theta}{dt} \right] + \delta \left[l^2 \cdot \left(\frac{d\theta}{dt} \right)_z \right] \right\} + \frac{1}{2} \cdot M \cdot \left\{ \delta \left[\left(\frac{dl}{dt} \right)_z \right] + \delta \left[\left(\frac{d\theta}{dt} \right)_z \right] \right\}$$

Considerando as equações (21)-(24),

3.9 Trabalho virtual das forças não-conservativas

Admite-se que duas forças externas atuam sobre o sistema mecânico: o torque

τ aplicado ao cubo de rotação; e uma força F , aplicada à massa móvel. F permanece sempre no plano xy e tem, a cada instante, direção tangencial ao braço no ponto l em

que se encontra a massa.

Assim, o trabalho virtual das forças não-conservativas é

$$\delta W = \tau \cdot \delta \theta + F \cdot \delta l \quad (39)$$

3.10 Princípio Estendido de Hamilton aplicado ao sistema

O Princípio Estendido de Hamilton (*Extended Hamilton's Principle*), abordado

em detalhes por Spiegel (1976) e Meirovitch (1997), estabelece que, entre dois instantes

arbitrários t_1 e t_2 , é válida a igualdade

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = 0 \quad (40)$$

onde L é o lagrangiano do sistema, expresso por

$$L = T - U = T_b + T_m + T_c - U \quad (41)$$

$$(50) \quad \delta e(0) = \delta \left(\frac{\partial x}{\partial e} \right) \Big|_{x=0} = 0$$

Conseqüentemente,

$$(49) \quad e(0, t) = 0 \quad e \quad \frac{\partial x}{\partial e} \Big|_{x=0} = \frac{\partial x}{\partial e} \Big|_{x=0, t} = 0$$

geométrica do conjunto (condições geométricas):

Das condições de contorno decorrem imediatamente da mera compatibilidade

$$(48) \quad -E \cdot I_b \cdot \left[\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} \cdot \delta \left(\frac{\partial t}{\partial e} \right) \right] \Big|_L + E \cdot I_b \cdot \left[\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} \cdot \delta e \right] \Big|_L = 0$$

$$(47) \quad M \cdot \left[\frac{d^2 l}{d\theta^2} \cdot l - l \cdot \left(\frac{d^2 l}{d\theta^2} \right) \right] - \int_L^0 M \cdot (e \cdot \frac{d^2 l}{d\theta^2} + 2 \cdot \frac{\partial l}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial t}{\partial \theta}) \cdot \Delta' dx = F$$

$$(46) \quad \int_L^0 \rho \cdot \left(e^2 \cdot \frac{d^2 \theta}{d^2 \theta} + 2 \cdot e \cdot \frac{\partial l}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial t}{\partial \theta} + x \cdot \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} + x^2 \cdot \frac{d^2 \theta}{d^2 \theta} \right) + M + \left(\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} \cdot l - e \cdot \frac{d^2 l}{d^2 \theta} + e^2 \cdot \frac{d^2 l}{d^2 \theta} + 2 \cdot e \cdot \frac{\partial l}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial t}{\partial \theta} \right) \cdot \Delta' dx + M + \left(l^2 \cdot \frac{d^2 \theta}{d^2 \theta} + 2 \cdot l \cdot \frac{\partial l}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial t}{\partial \theta} \right) + J^c \cdot \frac{d^2 \theta}{d^2 \theta} = F$$

$$(45) \quad \int_L^0 E \cdot I_b \cdot \left[\frac{\partial^4 e}{\partial t^4} + \rho \cdot \left(\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} + x \cdot \frac{d^2 \theta}{d^2 \theta} - e \cdot \left(\frac{d^2 l}{d\theta^2} \right) \right) \right] + M + \left[\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} \cdot \frac{d^2 l}{d^2 \theta} + 2 \cdot \frac{\partial l}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial t}{\partial \theta} + l \cdot \frac{d^2 l}{d^2 \theta} - e \cdot \left(\frac{d^2 l}{d\theta^2} \right) \right] \cdot \Delta' dx = 0$$

forças do sistema. O modelo contínuo do sistema compõe-se das equações diferenciais parciais (45)-(47), restritas às quatro condições de contorno (49) e (52). As condições de fronteira dadas por (49) indicam que a deflexão transversal e a inclinação do braço flexível são nulas no ponto em que o mesmo se fixa ao cubo rotativo. (52) indica que o momento e o esforço cortante na extremidade livre da viga são iguais a zero. A segunda condição expressa em (52) deixa de ser válida quando a massa está posicionada na extremidade livre do braço, situação de pouco ou nenhum interesse para o trabalho.

Essas condições são chamadas dinâmicas ou naturais, pois decorrem do balanço de constituindo outras condições de fronteira do problema de valores de contorno.

$$\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^3 e}{\partial x^3} \Big|_{x=L} = 0 \quad (52)$$

que livre do braço, para que (51) se verifique em qualquer instante de tempo é necessário

Como $\delta e(L)$ e $\delta \left(\frac{\partial e}{\partial x} \right) \Big|_{x=L}$ são também termos arbitrários, já que L se refere à extremidade

$$-F \cdot I_b \cdot \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} \Big|_{x=L} \cdot \delta \left(\frac{\partial e}{\partial x} \right) \Big|_{x=L} + F \cdot I_b \cdot \frac{\partial^3 e}{\partial x^3} \Big|_{x=L} \cdot \delta e(L) = 0 \quad (51)$$

Substituindo esse resultado em (48),

Capítulo 4

Modelo por Subestruturação

O modelo contínuo deduzido no capítulo anterior é não-linear e acoplado, composto de três equações integro-diferenciais parciais com derivadas no tempo t e no espaço x . Uma solução direta para esse problema envolve grandes dificuldades matemáticas, devido à dependência das variáveis. Meirovitch (1997) observa que poucos problemas de autovalores admitem solução fechada, e que, mesmo nos casos em que uma solução desse tipo é possível, o esforço por obtê-la é desencorajador. Nessas circunstâncias, é necessário conformar-se com uma solução aproximada.

Diversos métodos aproximados para o tratamento de sistemas distribuídos estão disponíveis na literatura. Grosso modo, esses métodos reduzem o sistema distribuído a um discreto, através de uma discretização no espaço. Podem ser divididos em duas classes: métodos de parâmetros concentrados (*lumped parameters methods*) e métodos de discretização por séries (*series discretization methods*). No primeiro grupo estão métodos que admitem concentrada em certos pontos a massa distribuída do sistema. Os métodos de discretização por séries assumem que a solução pode ser aproximada por séries de funções descritas no espaço. São divididos em duas classes: uma primeira, baseada em princípios do Cálculo Variacional, das estratégias que visam a minimização de certos coeficientes, chamados coeficientes de Rayleigh-Ritz; uma segunda, baseada na redução do erro provocado pela aproximação da solução. No

primeiro conjunto se enquadram os métodos de Rayleigh-Ritz e seus derivados. No segundo, o método de Galerkin, dentre outros.

Entre os métodos derivados do princípio de Rayleigh-Ritz encontram-se a síntese de modos componentes (*component mode synthesis*), a síntese de subestruturas ou subestruturação (*substructure synthesis*) e o método dos elementos finitos (*finite element method*). Segundo Meirovitch (1997), esses métodos preservam o princípio geral do método de Rayleigh-Ritz segundo o qual a solução aproximada de um problema de autovalores pode ser construída no espaço das funções admissíveis (funções diferenciáveis p vezes e que atendem às condições de contorno geométricas ou naturais, onde p é o número de autofunções empregadas para descrever a resposta do sistema), muito mais amplo que o espaço dos modos naturais de vibração.

4.1 Síntese de subestruturas

A síntese de subestruturas - proposta inicialmente por Hurty (1965) e Craig & Bampton (1968) - tem sido empregada satisfatoriamente na análise de estruturas mecânicas complexas. Segundo Meirovitch (1990), o método da subestruturação consiste em dividir um sistema complexo em dois ou mais subsistemas, aos quais se aplicam isoladamente as leis da Mecânica. Essas subestruturas (ou componentes) atuam como sistemas isolados, e apenas em uma segunda etapa é modelada a interação entre elas, impondo-se certa compatibilização geométrica nas fronteiras entre duas subestruturas vizinhas.

O movimento da S-ésima subestrutura de um sistema é descrito por

$$[M^s] \frac{d^2 e^s(t)}{dt^2} + [C^s] \frac{d e^s(t)}{dt} + [K^s] e^s(t) = Z^s(t) \quad (53)$$

Meirovitch (1990) observa que o modelo por subestruturação é tanto mais representativo da estrutura real quanto maior o número de funções admissíveis - que descrevem a resposta $e(t)$ - consideradas para cada subestrutura, e maior o número de equações de restrição. Isso significa considerar um maior número de pontos de fronteira

condições de compatibilidade. número de graus de liberdade é finito, só é possível impor um número limitado de compatibilidade geométrica, por meio de restrições relacionando os termos $e(t)$. Como o compatibilização ideal seria conseguida impondo-se a todos os pontos de fronteira a ser impostas nas fronteiras das componentes. Meirovitch (1990) assinala que a conjunto. Para forçá-las a isso, certas condições de compatibilidade geométrica devem Em (54) não existe nenhuma condição que leve as subestruturas a atuarem em

$[M_q]$ são as matrizes de massa das subestruturas 1, 2, ..., q . e as matrizes de amortecimento $[C]$ e rigidez $[K]$ têm forma análoga. $[M_1], [M_2], \dots,$

$$[M] = \begin{bmatrix} [M_1] & 0 & \dots & 0 \\ 0 & [M_2] & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & [M_q] \end{bmatrix} \quad (55)$$

de massa $[M]$ é

Se q é o número de subestruturas em que é dividido o sistema global, a matriz

$$[M] \frac{d^2 e(t)}{dt^2} + [C] \frac{de(t)}{dt} + [K] e(t) = Z(t) \quad (54)$$

conjunto das q subestruturas em que é dividido o sistema global é descrito por rigidez da subestrutura S , e $Z_S(t)$ é o vetor de forças atuantes sobre ela. Assim, o onde $[M_S], [C_S]$ e $[K_S]$ são, respectivamente, as matrizes de massa, amortecimento e

entre as componentes. Obviamente, há um limite no número de funções admissíveis e de equações de restrição, de acordo com as dimensões do modelo desejadas. O modelo subestruturado converge para o real (ou seja, os autovalores e autovetores aproximados convergem para os reais) se o número n de graus de liberdade considerados tende a infinito, sendo a taxa de convergência altamente dependente das autofunções escolhidas

A subestruturação representa uma alternativa para o estudo do conjunto braço-massa acoplada. As dinâmicas de movimento da massa móvel e do braço flexível são analisadas separadamente, construindo-se os diagramas de corpo livre de cada um deles, supostos isolados. Por fim, estuda-se a interação entre os subsistemas.

4.2 Primeiro subsistema: massa acoplada

O diagrama de corpo livre da massa móvel está ilustrado na Figura 4. Apenas o deslocamento transversal da viga é importante, desconsiderando-se as vibrações fora do plano de rotação, bem como as vibrações de sentido longitudinal do braço rotativo flexível.

As componentes normal F_n e tangencial F_t da força resultante têm módulos

$$F_n = M \cdot a_n(t) \quad (56)$$

$$F_t = M \cdot a_t(t) \quad (57)$$

onde $a_n(t)$ e $a_t(t)$ são as componentes da aceleração da massa no referencial inercial I(OXYZ), de direção normal e tangencial ao braço no ponto $x = l$, respectivamente.

$$(62) \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \cdot k$$

aceleração de M(Oxyz) em relação a I(OXYZ) é igual a
 são a posição, a velocidade e a aceleração da massa no referencial M(Oxyz). A

$$(61) \quad \underline{v}^n = \underline{v}^n(l) = \frac{d^2\theta}{dt^2} \cdot \underline{e}_z + \frac{d\theta}{dt} \cdot \underline{e}_z \times \underline{e}_z + \underline{v}^n$$

$$(60) \quad \underline{a}^n = \underline{a}^n(l) = \frac{d^3\theta}{dt^3} \cdot \underline{e}_z + \frac{d^2\theta}{dt^2} \cdot \underline{e}_z \times \underline{e}_z + \underline{a}^n$$

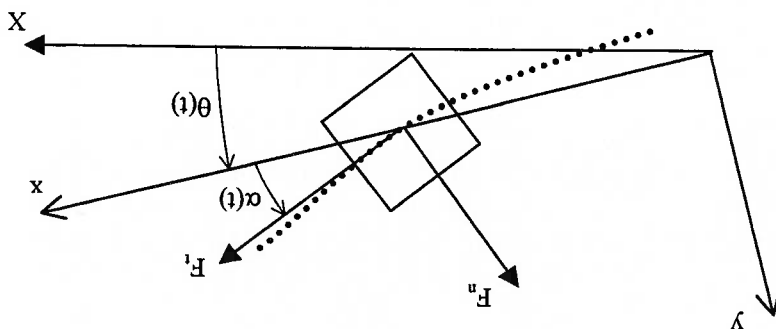
$$(59) \quad \underline{p}^n = \underline{p}^n(l) = l \cdot \underline{e}_z + \underline{p}^n$$

onde

$$(58) \quad \underline{a}_l = \underline{a}^n + \frac{d\omega}{dt} \times \underline{p}^n + 2 \cdot \omega \times \underline{v}^n + \omega \times \omega \times \underline{p}^n$$

A aceleração da massa no referencial I(OXYZ) é

Figura 4 - Diagrama de corpo livre da massa acoplada.



Conseqüentemente, deduz-se de (58) que

$$(63) \quad \underline{a}_i = \frac{\partial^2 l}{\partial z^2} \cdot \underline{i} + \left[\frac{\partial^2 e}{\partial z^2} \right]^{x=i} \cdot \underline{j} + [l \cdot \underline{j} - e(l) \cdot \underline{i}] \cdot \underline{j} + \left[\frac{dl}{dt} \cdot \underline{j} - \frac{\partial e}{\partial t} \right]^{x=i} \cdot \underline{i} + \left[\frac{dl}{dt} \cdot \underline{i} - \frac{\partial e}{\partial t} \right] \cdot [l \cdot \underline{i} + e(l) \cdot \underline{j}] \cdot \underline{j} + 2 \cdot \left(\frac{dl}{dt} \cdot \underline{i} - \frac{\partial e}{\partial t} \right) \cdot \underline{j}$$

ou ainda

$$(64) \quad \underline{a}_i(l) = \left[\frac{\partial^2 l}{\partial z^2} - e(l) \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - 2 \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial z \partial t} \right] \cdot \underline{i} + \left[\frac{\partial^2 e}{\partial z^2} + l \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial z \partial t} - e(l) \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right] \cdot \underline{j} +$$

A Figura 5 ilustra as componentes de aceleração envolvidas.

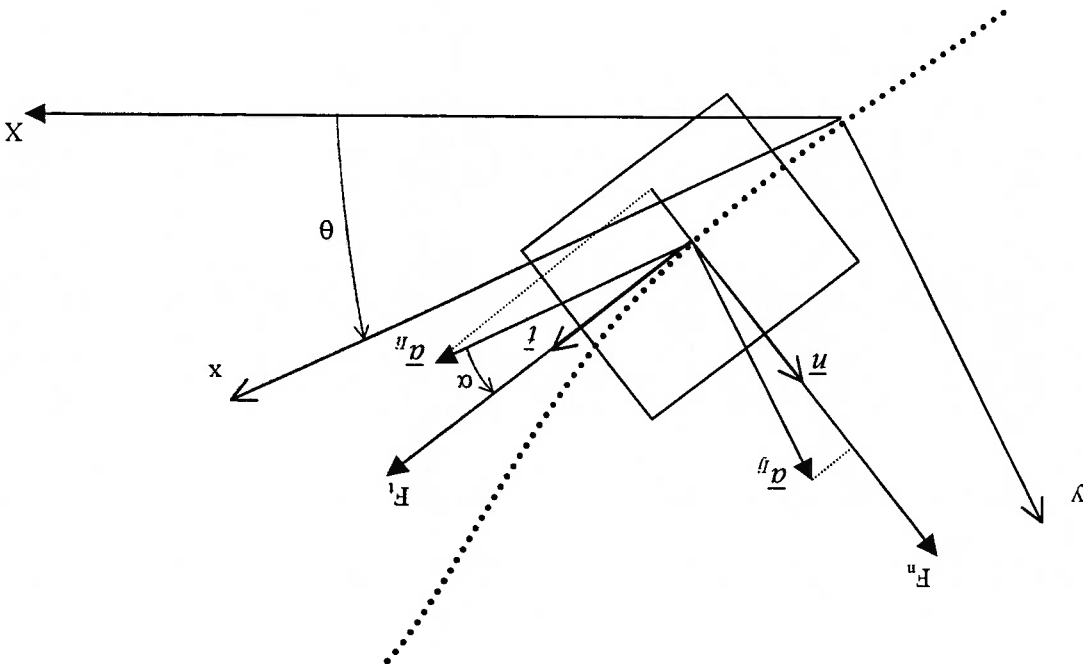


Figura 5 - Componentes de aceleração da massa.

As direções normal e tangencial ao braço em $x = l$ são dadas pelos vetores

unitários

$$\underline{n} = -\text{sen } \alpha \cdot \underline{i} + \text{cos } \alpha \cdot \underline{j} \quad (65)$$

$$\underline{t} = \text{cos } \alpha \cdot \underline{i} + \text{sen } \alpha \cdot \underline{j} \quad (66)$$

onde o ângulo de curvatura α , segundo Meirovitch (1997), é igual a

$$\alpha = \frac{\partial x}{\partial \theta} \Big|_{x=l} \quad (67)$$

Assim, a componente de aceleração $\underline{a}''(l)$, normal ao braço em l , é a projeção

da aceleração $\underline{a}'(l)$ na direção normal. Considerando (64) e (65), seu módulo é igual a

$$\begin{aligned} a''(l) = \underline{a}'(l) \circ \underline{n} = -\text{sen } \alpha \cdot \left[\frac{d^2 l}{dt^2} - e(l) \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} - 2 \cdot \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{x=l} \cdot \frac{dl}{dt} \cdot \left(\frac{d\theta}{dt} \right) \right] + \\ + \text{cos } \alpha \cdot \left[\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} \Big|_{x=l} + l \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \cdot \frac{dl}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} - e(l) \cdot \left(\frac{d^2 \theta}{dt^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (68)$$

Logo, da equação (56) se deduz que o módulo F_N da força normal que o braço

aplica à massa é

$$\begin{aligned} F_N = M \cdot a''(l) = -M \cdot \text{sen } \alpha \cdot \left[\frac{d^2 l}{dt^2} - e(l) \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} - 2 \cdot \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{x=l} \cdot \frac{dl}{dt} \cdot \left(\frac{d\theta}{dt} \right) \right] + \\ + M \cdot \text{cos } \alpha \cdot \left[\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} \Big|_{x=l} + l \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \cdot \frac{dl}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} - e(l) \cdot \left(\frac{d^2 \theta}{dt^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (69)$$

Para flexões não muito acentuadas, pode-se admitir que

(70) $\text{sen } \alpha \equiv \alpha$

e que

(71) $\text{cos } \alpha \equiv 1$

Assim, desconsiderando o termo quadrático $e(l) \cdot \left(\frac{d\theta}{dt} \right)_z$, conclui-se que (69) é

igual a

(72)
$$F^N = M \cdot \left(\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} \right)^{x=l} + l \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

Em (72), o primeiro termo expressa a aceleração devida ao deslocamento

elástico do braço; o segundo, a aceleração de arrastamento ou de transporte da massa; e

o terceiro, a aceleração associada à força de Coriolis. Mantendo a ordem dos termos,

pode-se reescrever (72):

(73)
$$F^N = M \cdot (a^{\text{elást}} + a^{\text{arrast}} + a^{\text{Cor}})$$

A componente de aceleração $\underline{a}^n(l)$, tangencial ao braço em l , é a projeção da

aceleração $\underline{a}'(l)$ na direção tangente. Considerando (64) e (66), seu módulo é igual a

(74)
$$\underline{a}^n(l) = \underline{a}'(l) \circ \underline{t} = \text{cos } \alpha \cdot \left[\frac{d^2 l}{dt^2} - e(l) \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} - 2 \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} \right] + \text{sen } \alpha \cdot \left[\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} \right]^{x=l} + l \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} - e(l) \cdot \left(\frac{d\theta}{dt} \right)_z$$

Pelas hipóteses admitidas (ausência de forças de direção longitudinal entre o braço e a massa, tais como forças de atrito), a resultante de forças de direção tangencial é igual à força externa F aplicada à massa. Logo, pela Segunda Lei de Newton,

$$(75) \quad F = M \cdot a''(l) = M \cdot \cos \alpha \cdot \left[\frac{d^2 l}{dt^2} - e(l) \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} - 2 \cdot \frac{\partial e}{\partial t} \Big|^{x=l} \cdot \frac{dl}{dt} - l \cdot \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] + M \cdot \sin \alpha \cdot \left[\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} \Big|^{x=l} + l \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \cdot \frac{dl}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} - e(l) \cdot \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right]$$

Para os efeitos de interesse, α é muito pequeno e se pode admitir que

$$(76) \quad \sin \alpha \equiv 0$$

As hipóteses (71) e (77) linearizam o modelo e indicam que apenas a componente $\underline{a}''(l)$

da aceleração, de direção y , é considerada.

Desconsiderando a força de arrastamento de braço $e(l)$ e a força de Coriolis

devido à flexão do braço - segundo e terceiro termos da primeira linha da equação (75),

respectivamente -, supostos muito pequenos, e admitindo as hipóteses indicadas em (70)

e (71) para flexões não muito acentuadas, conclui-se que

$$(77) \quad F = M \cdot \left[\frac{d^2 l}{dt^2} - l \cdot \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right]$$

4.3 Interação braço-massa

O segundo subsistema compõem-se do braço rotativo flexível preso ao cubo.

As forças externas a esse subsistema são: o torque $\tau(t)$ aplicado ao cubo e uma força

concentrada $F^E(l)$ aplicada ao braço no ponto $x = l$, conforme ilustra a Figura 6. A força

$F^E(l)$ é normal à viga em $x = l$.

O trabalho virtual das forças externas pode ser aproximado por assumidas. Assim, a força $F^E(l)$ tem direção y , no sistema móvel $M(Oxyz)$. Conforme visto na Seção 4.2, admite-se que, para flexões não muito acentuadas, o ângulo de curvatura α é pequeno e as hipóteses (71) e (76) podem ser dadas por (19), (31) e (38).

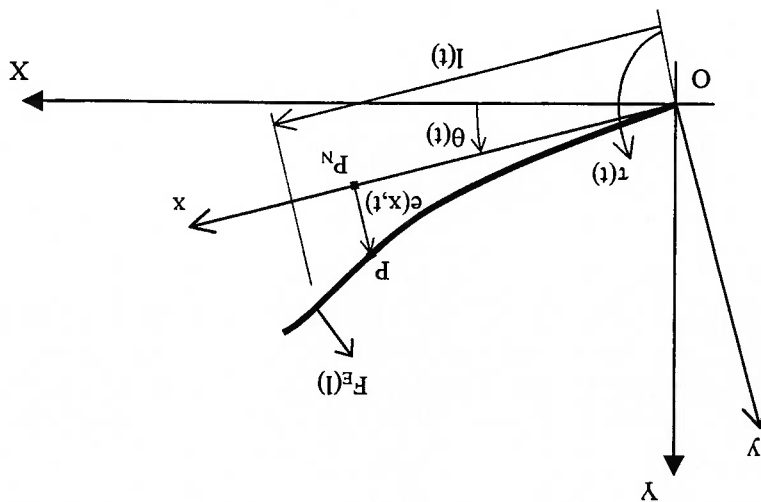
expressas pelas equações (1), (11) e (14). Os variacionais de energia, portanto, são A energia potencial elástica e a energia cinética do braço e do cubo são

4.4 Segundo subsistema: braço flexível

$$F^E(l) = -F^n(l) = -M \cdot \left(\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} \right)_{x=l} + 1 \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \cdot \frac{dl}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} \quad (78)$$

oposto a $F^n(l)$, cuja expressão foi deduzida na Seção 4.2. Portanto, sobre o braço, que, segundo a Primeira Lei de Newton, possui módulo igual e sentido No conjunto braço flexível-massa acoplada, $F^E(l)$ é a força que a massa exerce

Figura 6 - Subsistema composto pelo braço rotativo preso ao cubo (vista de topo).



$$(84) \quad e(0) = \left. \frac{\partial e}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} \right|_{x=l} = \left. \frac{\partial^3 e}{\partial x^3} \right|_{x=l} = 0$$

As condições de contorno, análogas a (49) e (52), são

$$(83) \quad \int_{\tau}^{\rho} \left(e^2 \cdot \frac{d^2 \theta}{d\theta^2} + 2 \cdot e \cdot \frac{d\theta}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{d\theta} + x \cdot \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} + x^2 \cdot \frac{d^2 \theta}{d\theta^2} \right) dx + J^c \cdot \frac{d^2 \theta}{d\theta^2} = \tau$$

$$(82) \quad \int_{\tau}^{\rho} E \cdot I_B \cdot \frac{\partial^4 e}{\partial x^4} + \rho \cdot \left[\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} + x \cdot \frac{d^2 \theta}{d\theta^2} \right] \cdot e - \left(\frac{d\theta}{d\theta} \right) \cdot dx = F^E(l)$$

de onde

$$(81) \quad \left\{ \int_{\tau}^{\rho} E \cdot I_B \cdot \frac{\partial^4 e}{\partial x^4} + \rho \cdot \left[\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} + x \cdot \frac{d^2 \theta}{d\theta^2} \right] \cdot e - \left(\frac{d\theta}{d\theta} \right) \cdot dx + F^E(l) \right\} \cdot \delta e + \left[- \int_{\tau}^{\rho} \left(e^2 \cdot \frac{d^2 \theta}{d\theta^2} + 2 \cdot e \cdot \frac{d\theta}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{d\theta} + x \cdot \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} + x^2 \cdot \frac{d^2 \theta}{d\theta^2} \right) dx + \left(\frac{d\theta}{d\theta} \right) \cdot \frac{d\theta}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{d\theta} + \left(\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} + x \cdot \frac{d^2 \theta}{d\theta^2} \right) \cdot e \right] \cdot \delta e + \left[- \int_{\tau}^{\rho} E \cdot I_B \cdot \frac{\partial^4 e}{\partial x^4} + \rho \cdot \left[\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} + x \cdot \frac{d^2 \theta}{d\theta^2} \right] \cdot e - \left(\frac{d\theta}{d\theta} \right) \cdot dx + F^E(l) \right] \cdot \delta e + \left[- \int_{\tau}^{\rho} E \cdot I_B \cdot \frac{\partial^4 e}{\partial x^4} + \rho \cdot \left[\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} + x \cdot \frac{d^2 \theta}{d\theta^2} \right] \cdot e - \left(\frac{d\theta}{d\theta} \right) \cdot dx + F^E(l) \right] \cdot \delta e = 0$$

Assim, o Princípio Estendido de Hamilton, expresso em (40), reduz-se a

$$(80) \quad L = T - U = T^B + T^C - U$$

Para esse subsistema,

$$(79) \quad \delta W = \tau \cdot \delta \theta + F^E(l) \cdot \delta e$$

$$(89) \quad \int_{\tau} \rho \cdot x \cdot \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} dx + (J^b + J^c) \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} = 0$$

$$(88) \quad F \cdot I^b \cdot \frac{\partial^4 e}{\partial x^4} + \rho \cdot \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} + \rho \cdot x \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} = 0$$

integral em (85) é fazer o integrando igual a zero:

ação de forças externas ao subsistema. Uma condição suficiente para tornar nula a solução homogênea de (85)-(86) representa a vibração livre do braço, sem a

4.4.1 Vibração livre

modelo do braço rotativo sem massa acoplada.

As equações (85) e (86), restritas às condições de contorno (84), constituem o

$$(87) \quad J^b = \int \rho \cdot x^2 dx$$

onde J^b é o momento de inércia da viga, igual a

$$(86) \quad \int_{\tau} \rho \cdot x \cdot \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} dx + (J^b + J^c) \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \tau$$

e (83) a

$$(85) \quad \int_{\tau} F \cdot I^b \cdot \frac{\partial^4 e}{\partial x^4} + \rho \cdot \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} + \rho \cdot x \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} dx = F^e(t)$$

Supondo desprezível o termo quadrático $e \cdot \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$, (82) equivale a

Seja $z(x, t)$ uma variável definida por

$$(90) \quad z(x, t) = e(x, t) + x \cdot \theta(t)$$

Substituindo (90) em (88)-(89) e considerando (87),

$$(91) \quad E \cdot I^B \cdot \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \rho \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0$$

$$(92) \quad \int_a^b \rho \cdot x \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} dx + J^C \cdot \rho \frac{dz}{dt^2} = 0$$

com as condições de contorno

$$(93) \quad z(0) = \left. \frac{\partial z}{\partial z} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial z^2} \right|_{x=l} = \left. \frac{\partial^3 z}{\partial z^3} \right|_{x=l} = 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial x}{\partial z} \right|_{x=0} = \theta$$

Trata-se de um problema de equações diferenciais homogêneas, com condições de contorno não-homogêneas. A equação (92) representa o Teorema do Momento Angular aplicado ao subsistema, e expressa a derivada da quantidade de movimento angular. Observa-se que a derivada da quantidade de movimento angular do cubo transmite-se integralmente ao braço, com igualdade dinâmica. O último termo indicado em (93) expressa essa mesma igualdade em termos geométricos. Trata-se de uma condição de contorno não-homogênea, dependente dos autovalores do sistema.

As equações (91) e (92) compõem um sistema de equações diferenciais acopladas, com derivadas parciais em t e x . Özgüner & Barbieri (1988) destacam que, no caso de um braço preso a um sistema de referência inercial, o conjunto de equações que descreve a estrutura é acoplado. Investigando a possibilidade de movimento

síncrono³, pode-se admitir que, para um sistema livre, a solução pode ser aproximada por uma expansão de funções independentes no tempo e no espaço,

$$z(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x) \cdot \eta_r(t) \tag{94}$$

onde $\phi_r(x)$ são funções admissíveis e $\eta_r(t)$, coordenadas generalizadas ou normais.

Substituindo (94) em nas equações (91) e (92),

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left(E \cdot I_B \cdot \frac{d^4 \phi_r}{dx^4} \cdot \eta_r + \rho \cdot \phi_r \cdot \frac{d^2 \eta_r}{dt^2} \right) = 0 \tag{95}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left(\int_r \rho \cdot x \cdot \phi_r \cdot \frac{d^2 \eta_r}{dt^2} dx + J^c \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right) = 0 \tag{96}$$

Considerando as propriedades de ortogonalidade de funções admissíveis $\phi_r(x)$

para um sistema de autofunções, descritas por Meirovitch (1997), a condição indicada

na somatória de (95) é válida para cada uma das funções. Assim,

$$E \cdot I_B \cdot \frac{d^4 \phi_r}{dx^4} \cdot \eta_r + \rho \cdot \phi_r \cdot \frac{d^2 \eta_r}{dt^2} = 0 \tag{97}$$

equivalente a

$$\frac{E \cdot I_B \cdot \rho}{d^4 \phi_r / dx^4} \cdot \eta_r = - \frac{d^2 \eta_r / dt^2}{\phi_r} \tag{98}$$

³ Denomina-se síncrono (*synchronous motion*) o movimento em que cada ponto da estrutura sofre, em um dado intervalo de tempo, um mesmo deslocamento. Meirovitch (1997) assinala que, do ponto de vista físico, o movimento síncrono caracteriza-se por ser constante a razão entre os deslocamentos de dois pontos do sistema. Do ponto de vista matemático, isso implica que a solução do problema é separável nas

Cada lado da equação é função apenas do espaço ou do tempo e, para que admita solução não nula, deve ser igual a uma constante. Assim,

$$(99) \quad \frac{E \cdot I_B \cdot p}{d^4 \phi_r / dx^4} = - \frac{d^2 \eta_r / dt^2}{\eta_r} = \omega_r^2$$

de onde

$$(100) \quad E \cdot I_B \cdot \frac{d^4 \phi_r}{dx^4} - \omega_r^2 \cdot p \cdot \phi_r = 0$$

$$(101) \quad \frac{d^2 \eta_r}{dt^2} + \eta_r \cdot \omega_r^2 = 0$$

Assim, as equações (100) e (101) constituem um par de equações diferenciais ordinárias e desacopladas, uma no espaço x e outra no tempo t .

4.4.2 Autofunções e autovalores do sistema

Parte do conjunto das funções admissíveis que atendem às equações do problema é o grupo de funções $\phi_r(x)$ da forma

$$(102) \quad \phi_r(x) = a_r \cdot \text{sen}(\beta_r \cdot x) + b_r \cdot \text{cos}(\beta_r \cdot x) + c_r \cdot \text{senh}(\beta_r \cdot x) + d_r \cdot \text{cosh}(\beta_r \cdot x)$$

Substituindo (102) em (100),

$$(103) \quad (E \cdot I_B \cdot \beta_r^4 - \omega_r^2 \cdot p) \cdot \phi_r(x) = 0$$

cujas soluções não triviais é

$$\beta'_a = \frac{E \cdot I_b}{\rho \cdot \omega_z^2} \quad (104)$$

Por outro lado, substituindo (94) nas três primeiras condições de contorno

indicadas em (93), resulta

$$z(0) = z(0, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \phi'_l(0) \cdot \eta'_l(t) = 0 \quad (105)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial z^2} \Big|_{x=L} = \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{d^2 \phi'_l}{d \phi'_l} \Big|_{x=L} \cdot \eta'_l(t) \right] = 0 \quad (106)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial z^2} \Big|_{x=0} = \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{d^2 \phi'_l}{d \phi'_l} \Big|_{x=0} \cdot \eta'_l(t) \right] = 0 \quad (107)$$

$$\frac{\partial z}{\partial z} \Big|_{x=0} = \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{d \phi'_l}{d \phi'_l} \Big|_{x=0} \cdot \eta'_l(t) \right] = \theta(t) \quad (108)$$

Como essas igualdades são válidas em qualquer instante de tempo, as soluções

não triviais de (105)-(107) são

$$\phi'_l(0) = \frac{d^2 \phi'_l}{d \phi'_l} \Big|_{x=L} = \frac{d^2 \phi'_l}{d \phi'_l} \Big|_{x=0} = 0 \quad (109)$$

Substituindo (102) em (109),

$$\phi'_l(0) + d'_l = 0 \quad (110)$$

(116) para a somatória é válida para cada uma delas, separadamente. Logo,

Desde que as funções admissíveis são ortogonais, a condição indicada em

$$(116) \quad \sum_{r=1}^{\infty} \int_{\mathcal{D}} \mathcal{D} \cdot x \cdot \phi_r \cdot \frac{d^2 \eta_r}{dx^2} + J \cdot \underline{\theta}_r \cdot \frac{d^2 \eta_r}{dx^2} = 0$$

De (96) decorre então que

$$(115) \quad \theta(t) = \sum_{r=1}^{\infty} \underline{\theta}_r \cdot \eta_r(t)$$

obtem-se

$$(114) \quad \underline{\theta}_r = (a_r + c_r) \cdot \beta_r$$

funções associadas às coordenadas generalizadas $\eta_r(t)$. Definindo

Assim, no caso de vibração livre, pode-se decompor $\theta(t)$ em uma somatória de

$$(113) \quad \sum_{r=1}^{\infty} [(a_r + c_r) \cdot \beta_r \cdot \eta_r(t)] = \theta(t)$$

Por outro lado, de (108) decorre que

$$(112) \quad \left. \frac{d^3 \phi_r}{dx^3} \right|_{x=L} = \beta_r' \cdot [-a_r \cdot \cos(\beta_r \cdot L) + b_r \cdot \sin(\beta_r \cdot L) + c_r \cdot \cosh(\beta_r \cdot L) + d_r \cdot \sinh(\beta_r \cdot L)] = 0$$

$$(111) \quad \left. \frac{d^2 \phi_r}{dx^2} \right|_{x=L} = \beta_r' \cdot [-a_r \cdot \sin(\beta_r \cdot L) - b_r \cdot \cos(\beta_r \cdot L) + c_r \cdot \sinh(\beta_r \cdot L) + d_r \cdot \cosh(\beta_r \cdot L)] = 0$$

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} p' \\ c' \\ q' \\ v' \end{Bmatrix} \\
 (119) \quad & \begin{bmatrix} 1 + (T \cdot g') \operatorname{cosh}(\beta) - (T \cdot g') \operatorname{senh}(\beta) \cdot g' \cdot T & (T \cdot g') \operatorname{senh}(\beta) - (T \cdot g') \operatorname{cosh}(\beta) \cdot g' \cdot T + \frac{d}{J \cdot g' \cdot c} \\ (T \cdot g') \operatorname{senh}(\beta) \cdot g' & (T \cdot g') \operatorname{cosh}(\beta) \cdot g' \\ (T \cdot g') \operatorname{cosh}(\beta) \cdot g' & (T \cdot g') \operatorname{senh}(\beta) \cdot g' \\ 1 & 0 \\ 1 - (T \cdot g') \operatorname{cos}(\beta) + (T \cdot g') \operatorname{sen}(\beta) \cdot g' \cdot T & (T \cdot g') \operatorname{sen}(\beta) + (T \cdot g') \operatorname{cos}(\beta) \cdot g' \cdot T - \frac{d}{J \cdot g' \cdot c} \\ (T \cdot g') \operatorname{sen}(\beta) \cdot g' & (T \cdot g') \operatorname{cos}(\beta) \cdot g' - \\ (T \cdot g') \operatorname{cos}(\beta) \cdot g' - & (T \cdot g') \operatorname{sen}(\beta) \cdot g' - \\ 1 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

por

com quatro incógnitas a' , b' , c' e d' . Em sua forma matricial, esse sistema é dado por

As equações (110)-(112) e (118) compõem um sistema de quatro equações

$$\begin{aligned}
 0 = & \{ [1 + (T \cdot g') \operatorname{cosh}(\beta) - (T \cdot g') \operatorname{senh}(\beta) \cdot g' \cdot T] \cdot p' + \\
 & + [(T \cdot g') \operatorname{senh}(\beta) - (T \cdot g') \operatorname{cosh}(\beta) \cdot g' \cdot T + \frac{d}{J \cdot g' \cdot c}] \cdot c' + \\
 & + [1 - (T \cdot g') \operatorname{cos}(\beta) + (T \cdot g') \operatorname{sen}(\beta) \cdot g' \cdot T] \cdot q' + \\
 & + [(T \cdot g') \operatorname{sen}(\beta) + (T \cdot g') \operatorname{cos}(\beta) \cdot g' \cdot T - \frac{d}{J \cdot g' \cdot c}] \cdot v' \}
 \end{aligned}
 \tag{118}$$

trivial é dada por

Substituindo (102) em (117) e integrando no domínio $[0, T]$, a solução não

$$\int_0^T \sigma \cdot x \cdot \phi' \cdot \frac{d^2 p}{dx^2} + J \cdot \theta' \cdot \frac{d^2 p}{dx^2} = 0
 \tag{117}$$

A resolução desse sistema de equações requer determinar inicialmente os valores de β_r associados às frequências naturais da estrutura mecânica, como indicado em (104). A solução não trivial é encontrada igualando a zero o determinante da matriz:

$$(120) \quad \begin{aligned} & (s_r \cdot sh_r + c_r \cdot ch_r + 1) \cdot \left(\frac{d}{J_c \cdot \beta_r^3} - L \cdot \beta_r \cdot c_r + s_r \right) + \\ & + (c_r \cdot sh_r - s_r \cdot ch_r) \cdot (L \cdot \beta_r \cdot s_r - L \cdot \beta_r \cdot sh_r + c_r + ch_r - 2) + \\ & + (c_r \cdot ch_r - s_r \cdot sh_r + 1) \cdot \left(\frac{d}{J_c \cdot \beta_r^3} + L \cdot \beta_r \cdot c_r - sh_r \right) = 0 \end{aligned}$$

onde, por motivos de simplificação da notação, define-se

$$(121) \quad \begin{aligned} s_r &= \text{sen}(\beta_r \cdot L) & c_r &= \text{cos}(\beta_r \cdot L) \\ sh_r &= \text{senh}(\beta_r \cdot L) & ch_r &= \text{cosh}(\beta_r \cdot L) \end{aligned}$$

Manipulando algebricamente a equação (120), deduz-se que

$$(122) \quad \begin{aligned} & + \text{sen}(\beta_r \cdot L) \cdot \text{cosh}(\beta_r \cdot L) - \text{cos}(\beta_r \cdot L) \cdot \text{sinh}(\beta_r \cdot L) = 0 \\ & + [\text{cos}(\beta_r \cdot L) \cdot \text{cosh}(\beta_r \cdot L) + 1] \cdot \frac{d}{J_c \cdot \beta_r^3} \end{aligned}$$

que é uma equação transcendental em β_r , cujas raízes podem ser calculadas numericamente. Substituindo essas raízes em (119), obtêm-se um sistema linear de quatro equações e quatro incógnitas, função exclusiva dos parâmetros físicos da estrutura. Sua resolução fornece os parâmetros a_r , b_r , c_r e d_r , que expressam o r -ésimo modo, conforme (102). As frequências naturais da estrutura, por sua vez, podem ser determinadas por (110).

4.4.3 Normalização das autofunções

Multiplicando (91) por x e integrando no intervalo $[0, L]$,

$$(123) \quad \int_0^L E \cdot I_B \cdot x \cdot \frac{\partial^4 x}{\partial z^4} dx + \int_0^L \rho \cdot x \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} dx = 0$$

Integrando por partes o primeiro termo,

$$(124) \quad - \left(\frac{\partial^3 x}{\partial z^3} \right) \cdot E \cdot I_B \cdot x \Big|_0^L + \int_0^L E \cdot I_B \cdot \frac{\partial^3 x}{\partial z^3} dx + \int_0^L \rho \cdot x \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} dx = 0$$

Considerando a condição de contorno (107),

$$(125) \quad - \int_0^L E \cdot I_B \cdot \frac{\partial^3 x}{\partial z^3} dx + \int_0^L \rho \cdot x \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} dx = 0$$

Integrando o primeiro termo,

$$(126) \quad - E \cdot I_B \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \Big|_0^L + E \cdot I_B \cdot \frac{\partial x}{\partial z} \Big|_0^L + \int_0^L \rho \cdot x \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} dx = 0$$

Considerando (106),

$$(127) \quad E \cdot I_B \cdot \frac{\partial x}{\partial z} \Big|_0^L + \int_0^L \rho \cdot x \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} dx = 0$$

Por outro lado, substituindo em (92) na última igualdade indicada em (93),

$$(128) \quad \int_0^L \rho \cdot x \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} dx + J^c \cdot \frac{\partial x}{\partial z} \Big|_0^L = 0$$

De (127)-(128) decorre

$$(129) \quad J^c \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right) \Big|_{x=0} = E \cdot I_B \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial z^2} \Big|_{x=0}$$

Considerando (94),

$$(130) \quad J^c \cdot \frac{d\phi}{dx} \Big|_{x=0} \cdot \frac{dx}{dt} = E \cdot I_B \cdot \frac{d^2 \phi}{dx^2} \Big|_{x=0} \cdot \eta$$

Tendo em conta a ortogonalidade das autofunções e a equação diferencial

(101) que rege as coordenadas generalizadas,

$$(131) \quad -J^c \cdot \frac{d\phi}{dx} \Big|_{x=0} \cdot \omega_z \cdot \eta = E \cdot I_B \cdot \frac{d^2 \phi}{dx^2} \Big|_{x=0} \cdot \eta$$

ou

$$(132) \quad -J^c \cdot \omega_z \cdot \frac{d\phi}{dx} \Big|_{x=0} = E \cdot I_B \cdot \frac{d^2 \phi}{dx^2} \Big|_{x=0}$$

Por outro lado, de (100) decorre que

$$(133) \quad \frac{d^4 \phi}{dx^4} = \frac{E \cdot I_B}{\rho \cdot \omega_z^2} \cdot \phi$$

Multiplicando por ϕ e integrando,

$$(134) \quad \int \phi^2 \cdot \frac{d^4 \phi}{dx^4} dx = \int \phi^2 \cdot \frac{E \cdot I_B}{\rho \cdot \omega_z^2} \cdot \phi dx$$

Substituindo (131) em (140),

$$(140) \quad \frac{d\phi_s}{dx} \Big|_{x=0} \cdot \frac{dx}{d\phi_s} \Big|_{x=0} + \int_r^{x=0} \frac{d^2\phi_s}{d\phi_s^2} \cdot \frac{dx}{d\phi_s} \cdot \frac{d^2\phi_s}{d\phi_s^2} \cdot \frac{dx}{d\phi_s} = \int_r^{x=0} \frac{E \cdot I_b}{\rho \cdot \omega_z^2} \cdot \phi_s \cdot \phi_s' dx$$

(139)

$$-\frac{d\phi_s}{dx} \Big|_{x=L} \cdot \frac{dx}{d\phi_s} \Big|_{x=L} + \frac{d\phi_s}{dx} \Big|_{x=0} \cdot \frac{dx}{d\phi_s} \Big|_{x=0} + \int_r^{x=0} \frac{d^2\phi_s}{d\phi_s^2} \cdot \frac{dx}{d\phi_s} \cdot \frac{d^2\phi_s}{d\phi_s^2} \cdot \frac{dx}{d\phi_s} = \int_r^{x=0} \frac{E \cdot I_b}{\rho \cdot \omega_z^2} \cdot \phi_s \cdot \phi_s' dx$$

no

$$(138) \quad \left(\frac{d\phi_s}{dx} \Big|_{x=0} \cdot \frac{dx}{d\phi_s} \Big|_{x=0} \right) + \int_r^{x=0} \frac{d^2\phi_s}{d\phi_s^2} \cdot \frac{dx}{d\phi_s} \cdot \frac{d^2\phi_s}{d\phi_s^2} \cdot \frac{dx}{d\phi_s} = \int_r^{x=0} \frac{E \cdot I_b}{\rho \cdot \omega_z^2} \cdot \phi_s \cdot \phi_s' dx$$

Integrando por partes o termo à esquerda,

$$(137) \quad - \int_r^{x=0} \frac{d\phi_s}{dx} \cdot \frac{dx}{d\phi_s} \cdot \frac{d^2\phi_s}{d\phi_s^2} \cdot \frac{dx}{d\phi_s} = \int_r^{x=0} \frac{E \cdot I_b}{\rho \cdot \omega_z^2} \cdot \phi_s \cdot \phi_s' dx$$

$$(136) \quad \phi_s(L) \cdot \frac{dx}{d\phi_s} \Big|_{x=L} - \phi_s(0) \cdot \frac{dx}{d\phi_s} \Big|_{x=0} - \int_r^{x=0} \frac{d\phi_s}{dx} \cdot \frac{dx}{d\phi_s} \cdot \frac{d^2\phi_s}{d\phi_s^2} \cdot \frac{dx}{d\phi_s} = \int_r^{x=0} \frac{E \cdot I_b}{\rho \cdot \omega_z^2} \cdot \phi_s \cdot \phi_s' dx$$

$$(135) \quad \left(\phi_s \cdot \frac{dx}{d\phi_s} \Big|_{x=0} \right) - \int_r^{x=0} \frac{d\phi_s}{dx} \cdot \frac{dx}{d\phi_s} \cdot \frac{d^2\phi_s}{d\phi_s^2} \cdot \frac{dx}{d\phi_s} = \int_r^{x=0} \frac{E \cdot I_b}{\rho \cdot \omega_z^2} \cdot \phi_s \cdot \phi_s' dx$$

Integrando por partes e evocando as condições de contorno (110) e (112),

$$(146) \quad \int_r^c \rho \cdot x \cdot \frac{\partial \eta}{\partial z} dx + J_c \cdot \frac{\partial \eta}{\partial z} \bigg|_{x=0} = \tau$$

Substituindo (90) e (108) em (86), obtêm-se

além das funções admissíveis ϕ_r , as coordenadas generalizadas η_r , variáveis no tempo.

A resposta do sistema, descrita pelas equações (85)-(86), requer determinar,

4.4.4 O problema da resposta $\eta(t)$

$$(145) \quad \int_r^c d^2 \phi_s \cdot \frac{dx^2}{\omega_r^2} \cdot d^2 \phi_r \cdot dx = \frac{E \cdot I_b}{\omega_r^2} \cdot \delta_{rs}$$

De (142)-(143) decorre

$$(144) \quad \delta_{rs} = \begin{cases} 1, & \text{se } r = s \\ 0, & \text{se } r \neq s \end{cases}$$

onde δ_{rs} é o delta de Kronecker, definido por

$$(143) \quad \int_r^c \rho \cdot \phi_s \cdot \phi_r \cdot dx + J_c \cdot \frac{d\phi_s}{dx} \bigg|_{x=0} \cdot \frac{d\phi_r}{dx} \bigg|_{x=0} = \delta_{rs}$$

Uma normalização possível para as funções admissíveis, portanto, é

$$(142) \quad \int_r^c d^2 \phi_s \cdot \frac{dx^2}{\omega_r^2} \cdot d^2 \phi_r \cdot dx = \frac{E \cdot I_b}{\omega_r^2} \cdot \left(\int_r^c \rho \cdot \phi_s \cdot \phi_r \cdot dx + J_c \cdot \frac{d\phi_s}{dx} \bigg|_{x=0} \cdot \frac{d\phi_r}{dx} \bigg|_{x=0} \right)$$

de onde

$$(141) \quad - \frac{d\phi_s}{dx} \bigg|_{x=0} \cdot \frac{J_c \cdot I_b}{\omega_r^2} \cdot \frac{d\phi_r}{dx} \bigg|_{x=0} + \int_r^c d^2 \phi_s \cdot \frac{dx^2}{\omega_r^2} \cdot d^2 \phi_r \cdot dx = \int_r^c \rho \cdot \omega_r^2 \cdot \phi_s \cdot \phi_r \cdot dx$$

Considerando (94),

$$(147) \quad \int \rho \cdot x \cdot \sum_{r=1}^{\infty} \left(\phi_r \cdot \frac{d^2 n_r}{dt^2} dx + J^c \cdot \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{d\phi_r}{dx} \right) \right) \Big|_{x=0} = \tau \cdot \frac{d\phi_s}{dx} \Big|_{x=0}$$

Multiplicando por $\frac{d\phi_s}{dx} \Big|_{x=0}$,

$$(148) \quad \int \rho \cdot x \cdot \sum_{r=1}^{\infty} \left(\phi_r \cdot \frac{d\phi_s}{dx} \Big|_{x=0} \cdot \frac{d^2 n_r}{dt^2} dx + J^c \cdot \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{d\phi_r}{dx} \Big|_{x=0} \cdot \frac{d\phi_s}{dx} \Big|_{x=0} \right) \right) = \tau \cdot \frac{d\phi_s}{dx} \Big|_{x=0}$$

Mas de (127) decorre que

$$(149) \quad \int \rho \cdot x \cdot \sum_{r=1}^{\infty} \left(\phi_r \cdot \frac{d^2 n_r}{dt^2} dx = -E \cdot I_B \cdot \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{d^2 \phi_r}{dx} \Big|_{x=0} \cdot \eta_r \right) \right)$$

Substituindo (149) em (148), obtêm-se

$$(150) \quad -E \cdot I_B \cdot \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{d^2 \phi_r}{dx} \Big|_{x=0} \cdot \eta_r \right) + J^c \cdot \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{d\phi_r}{dx} \Big|_{x=0} \cdot \frac{d\phi_s}{dx} \Big|_{x=0} \right) \cdot \frac{d^2 n_r}{dt^2} \Big|_{x=0} = \tau \cdot \frac{d\phi_s}{dx} \Big|_{x=0}$$

ou

$$(151) \quad - \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{d^2 \phi_r}{dx} \Big|_{x=0} \cdot \eta_r \right) \cdot \frac{d\phi_s}{dx} \Big|_{x=0} + \left(\frac{d\phi_r}{dx} \Big|_{x=0} \cdot \frac{d\phi_s}{dx} \Big|_{x=0} \right) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{d\phi_r}{dx} \Big|_{x=0} \cdot \frac{d^2 n_r}{dt^2} \Big|_{x=0} \right) = \tau \cdot \frac{d\phi_s}{dx} \Big|_{x=0}$$

Por outro lado, substituindo (90) e (94) em (85),

$$(152) \quad \int E \cdot I_B \cdot \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{d^4 \phi_r}{dx^4} \cdot \eta_r \right) + \rho \cdot \sum_{r=1}^{\infty} \left(\phi_r \cdot \frac{d^2 n_r}{dt^2} \right) dx = E^2 I^2 \quad (1)$$

$$(156) \quad \begin{aligned} & \left[\int_{F^E} \phi_s \cdot dx + \tau \cdot \left. \frac{dx}{d\phi_s} \right|_{x=0} \right] \cdot \frac{E \cdot I_B}{1} = \\ & \sum_{r=1}^{\infty} \left(\int_{\tau} \phi_s \cdot \frac{d^3 \phi_r}{dx^3} \cdot \left. \frac{dx}{d\phi_s} \right|_{x=0} - \int_{\tau} \frac{dx}{d\phi_s} \cdot \frac{d^3 \phi_r}{dx^3} \cdot \left. \frac{dx}{d\phi_s} \right|_{x=0} \right) \cdot \eta_r + \\ & \sum_{r=1}^{\infty} \left(\int_{\tau} \frac{E \cdot I_B}{\rho} \cdot \phi_s \cdot dx + \frac{J_c}{J_c} \cdot \frac{E \cdot I_B}{\rho} \cdot \left. \frac{dx}{d\phi_s} \right|_{x=0} \cdot \frac{d^2 \eta_r}{dt^2} \right) + \end{aligned}$$

Integrando por partes o 2º termo à esquerda,

(155)

$$\begin{aligned} & \sum_{r=1}^{\infty} \left(\int_{\tau} \phi_s \cdot \frac{d^4 \phi_r}{dx^4} \cdot \left. \frac{dx}{d\phi_s} \right|_{x=0} - \int_{\tau} \frac{dx}{d\phi_s} \cdot \left. \frac{dx}{d\phi_s} \right|_{x=0} \cdot \eta_r \right) \cdot \frac{E \cdot I_B}{1} = \left[\int_{F^E} \phi_s \cdot dx + \tau \cdot \left. \frac{dx}{d\phi_s} \right|_{x=0} \right] \\ & \sum_{r=1}^{\infty} \left(\int_{\tau} \frac{E \cdot I_B}{\rho} \cdot \phi_s \cdot dx + \frac{J_c}{J_c} \cdot \frac{E \cdot I_B}{\rho} \cdot \left. \frac{dx}{d\phi_s} \right|_{x=0} \cdot \frac{d^2 \eta_r}{dt^2} \right) + \end{aligned}$$

Somando (151) e (154),

$$(154) \quad \int_{\tau} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\phi_s \cdot \frac{d^4 \phi_r}{dx^4} \cdot \eta_r \right) dx + \int_{\tau} \frac{E \cdot I_B}{\rho} \cdot \sum_{r=1}^{\infty} \left(\phi_s \cdot \phi_r \cdot \frac{d^2 \eta_r}{dt^2} \right) dx = \int_{\tau} \frac{E \cdot I_B}{\rho} \cdot \phi_s \cdot dx$$

ou

$$(153) \quad \int_{\tau} E \cdot I_B \cdot \sum_{r=1}^{\infty} \left(\phi_s \cdot \frac{d^4 \phi_r}{dx^4} \cdot \eta_r \right) dx + \int_{\tau} \rho \cdot \sum_{r=1}^{\infty} \left(\phi_s \cdot \phi_r \cdot \frac{d^2 \eta_r}{dt^2} \right) dx = \int_{\tau} F^E(l) \cdot \phi_s \cdot dx$$

Multiplicando por $\int_{\tau} \phi_s \cdot dx$,

ou

$$(160) \quad \left[\int_r^E F^E(l) \cdot \phi_s dx + \tau \cdot \left. \frac{dx}{d\phi_s} \right|_{x=0} \right] \cdot \frac{E \cdot I_B}{1} = \eta_r \cdot \frac{E \cdot I_B}{\omega_z^2} + \frac{E \cdot I_B}{1} \cdot d^2 \eta_r \cdot \frac{dx}{d\phi_s} + \tau \cdot \left. \frac{dx}{d\phi_s} \right|_{x=0}$$

Adotando a normalização indicada em (143) e (145), conclui-se que

$$(159) \quad \left[\int_r^E F^E(l) \cdot \phi_s dx + \tau \cdot \left. \frac{dx}{d\phi_s} \right|_{x=0} \right] \cdot \frac{E \cdot I_B}{1} = \eta_r \cdot \left(\int_r^E d^2 \phi_s \cdot d^2 \phi_r \cdot dx \cdot \eta_r \right) + \sum_{s=1}^r \left(\int_r^E \frac{E \cdot I_B}{\rho} \cdot \phi_s \cdot \phi_s dx + \frac{E \cdot I_B}{J_c} \cdot \left. \frac{dx}{d\phi_r} \right|_{x=0} \cdot \left. \frac{dx}{d\phi_s} \right|_{x=0} \right) + \left(\int_r^E \frac{dx}{d\phi_s} \right) \cdot \left. \frac{dx}{d\phi_s} \right|_{x=0} + \tau \cdot \left. \frac{dx}{d\phi_s} \right|_{x=0}$$

ou

$$(158) \quad \left[\int_r^E F^E(l) \cdot \phi_s dx + \tau \cdot \left. \frac{dx}{d\phi_s} \right|_{x=0} \right] \cdot \frac{E \cdot I_B}{1} = \left(\int_r^E \frac{E \cdot I_B}{\rho} \cdot \phi_s \cdot \phi_s dx + \frac{E \cdot I_B}{J_c} \cdot \left. \frac{dx}{d\phi_r} \right|_{x=0} \cdot \left. \frac{dx}{d\phi_s} \right|_{x=0} \right) + \left(\int_r^E \frac{dx}{d\phi_s} \right) \cdot \left. \frac{dx}{d\phi_s} \right|_{x=0} + \tau \cdot \left. \frac{dx}{d\phi_s} \right|_{x=0} + \left(\int_r^E d^2 \phi_s \cdot d^2 \phi_r \cdot dx \cdot \eta_r \right) \cdot \eta_r$$

Considerando (109),

(157)

$$\left[\int_r^E F^E(l) \cdot \phi_s dx + \tau \cdot \left. \frac{dx}{d\phi_s} \right|_{x=0} \right] \cdot \frac{E \cdot I_B}{1} = \left(\int_r^E \frac{E \cdot I_B}{\rho} \cdot \phi_s \cdot \phi_s dx + \frac{E \cdot I_B}{J_c} \cdot \left. \frac{dx}{d\phi_r} \right|_{x=0} \cdot \left. \frac{dx}{d\phi_s} \right|_{x=0} \right) + \left(\int_r^E \frac{dx}{d\phi_s} \right) \cdot \left. \frac{dx}{d\phi_s} \right|_{x=0} + \tau \cdot \left. \frac{dx}{d\phi_s} \right|_{x=0} + \left(\int_r^E d^2 \phi_s \cdot d^2 \phi_r \cdot dx \cdot \eta_r \right) \cdot \eta_r$$

$$F^E(l) = \int_l^x \left[\frac{\partial^2 \eta_r}{\partial z^2} + \omega_z^2 \cdot \eta_r \cdot \phi' \cdot dx + \tau \cdot \frac{d\phi_r}{dx} \right]_{x=0} \quad (161)$$

A equação diferencial (161) descreve o comportamento da coordenada generalizada $\eta_r(t)$, quando atuam sobre o braço o torque τ e a força pontual $F^E(l)$, externas ao subsistema. Conhecidas as funções admissíveis do braço flexível e as correspondentes coordenadas generalizadas, é possível descrever a dinâmica do sistema durante uma manobra de rotação.

4.5. Modelo do sistema por síntese de subestruturas

4.5.1. Vibração transversal

Considerando a mudança de variável introduzida pela equação (90), a força $F^E(l)$ que a massa aplica ao braço flexível, expressa por (78), torna-se igual a

$$F^E(l) = -M \cdot \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + 2 \cdot \frac{dl}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} \right)_{z=l} \quad (162)$$

Substituindo (162) em (161), deduz-se que as coordenadas η_r são dadas por

$$\frac{d^2 \eta_r}{dt^2} + \omega_z^2 \cdot \eta_r = - \int_l^x M \cdot \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + 2 \cdot \frac{dl}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} \right)_{z=l} \cdot \phi' \cdot dx + \tau \cdot \left. \frac{d\phi_r}{dx} \right|_{x=0} \quad (163)$$

Para movimentos síncronos, decorre da substituição de (94) em (163) que

onde

$$(166) \quad \begin{aligned} & \left\{ \begin{matrix} xp \\ \frac{dp}{\phi} \end{matrix} \right\}_{0=x}^{1 \times d} \cdot \tau + \left\{ xp^d \int_{\tau}^{\phi} \right\}_{1 \times d} \cdot \frac{dp}{d\theta} \cdot \frac{dp}{dl} \cdot M \cdot \tau = \\ & = \left\{ \eta \right\}_{1 \times d} \cdot \left[M \right]^{d \times d} + \left\{ \frac{dp}{\eta} \right\}_{1 \times d} \cdot \left[L \right]^{d \times d} \cdot M \end{aligned}$$

ou ainda

(165)

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{matrix} xp \\ \frac{dp}{\phi} \\ \vdots \\ xp \\ \frac{dp}{\phi} \\ \vdots \\ xp \\ \frac{dp}{\phi} \end{matrix} \right\}_{0=x}^{0=x} \cdot \tau + \left\{ \begin{matrix} xp^d \int_{\tau}^{\phi} \\ \vdots \\ xp^d \int_{\tau}^{\phi} \\ xp^d \int_{\tau}^{\phi} \end{matrix} \right\} \cdot \frac{dp}{d\theta} \cdot \frac{dp}{dl} \cdot M \cdot \tau = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_2 \\ \eta_2 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_2^d & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \omega_1 \end{bmatrix} + \\ & + \left\{ \begin{matrix} \frac{dp}{\eta} \\ \frac{dp}{\eta} \\ \vdots \\ \frac{dp}{\eta} \end{matrix} \right\} \cdot \begin{bmatrix} xp^d \int_{\tau}^{\phi} \cdot (l) \cdot \phi + M/l & \dots & xp^d \int_{\tau}^{\phi} \cdot (l) \cdot \phi & xp^d \int_{\tau}^{\phi} \cdot (l) \cdot \phi \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ xp^d \int_{\tau}^{\phi} \cdot (l) \cdot \phi & \dots & xp^d \int_{\tau}^{\phi} \cdot (l) \cdot \phi + M/l & xp^d \int_{\tau}^{\phi} \cdot (l) \cdot \phi \\ xp^d \int_{\tau}^{\phi} \cdot (l) \cdot \phi & \dots & xp^d \int_{\tau}^{\phi} \cdot (l) \cdot \phi & xp^d \int_{\tau}^{\phi} \cdot (l) \cdot \phi + M/l \end{bmatrix} \cdot M \end{aligned}$$

diferenciais ordinárias, expresso na forma matricial por

Para um modelo de dimensão finita p, (164) compõe um sistema de equações

$$(164) \quad \begin{aligned} & -\tau \cdot M \cdot \frac{dp}{d\theta} \cdot \frac{dp}{dl} \cdot \int_{\tau}^{\phi} \phi' dx + \tau \cdot \left\{ \frac{dp}{\phi} \right\}_{x=0}^{1 \times d} \\ & - \left[\frac{dp}{\eta} \cdot \eta_1 + \omega_2 \right] \cdot \sum_{s=1}^{\infty} \left[\phi_s(l) \cdot \frac{dp}{\eta_s} \right] dx = \end{aligned}$$

Os elementos da matriz $[S]^{d \times d}$ são iguais a

170

$$[S]^{d \times d} = [L]^{-1}$$

onde

(169)

$$\left\{ \begin{matrix} 1 \times d \\ 0 \times x \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} xp \\ p \end{matrix} \right\} \cdot z + \left\{ \begin{matrix} 1 \times d \\ 1 \times d \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} xp \\ p \end{matrix} \right\} \cdot \frac{dp}{d\theta} \cdot \frac{dp}{dl} \cdot M \cdot z - \left\{ \begin{matrix} d \times d \\ 1 \times d \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} p \\ \eta \end{matrix} \right\} = \frac{M}{1} \cdot [S]^{d \times d} \cdot (-) \cdot [M]^{d \times d} \cdot \left\{ \begin{matrix} 1 \times d \\ 1 \times d \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} p \\ \eta \end{matrix} \right\}$$

A equação (166) equivale a

(168)

$$[M]^{d \times d} = \begin{bmatrix} \omega_2^d & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & \omega_2^z & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \omega_2^1 \end{bmatrix}$$

(167)

$$[L]^{d \times d} = \begin{bmatrix} xp^d \phi \cdot (l)^d + \frac{M}{1} & \dots & xp^d \phi \cdot (l)^z & xp^d \phi \cdot (l)^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ xp^z \phi \cdot (l)^d & \dots & xp^z \phi \cdot (l)^z + \frac{M}{1} & xp^z \phi \cdot (l)^1 \\ xp^1 \phi \cdot (l)^d & \dots & xp^1 \phi \cdot (l)^z & xp^1 \phi \cdot (l)^1 + \frac{M}{1} \end{bmatrix}$$

$$F_{Ej}(l) = M \cdot \left[\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} \right]_{x=l} + l \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \cdot \frac{d}{dt} \cdot \frac{d}{dt} \cdot e(l) - e(l) \cdot \left(\frac{d}{dt} \right)^2 \quad (174)$$

componente, conforme se deduz de (64), e é igual a
 onde $F_{Ej}(l)$ é a componente da força $F^E(l)$ na direção da flexão transversal $e(l, t)$. Essa

$$\delta W = [\tau + F_{Ej}(l) \cdot l] \cdot \delta \theta + F_{Ej}(l) \cdot \delta e \quad (173)$$

conservativas, expresso pela equação (79), seria melhor aproximado por
 descon siderada na dinâmica de rotação da viga. O trabalho virtual das forças não-
 O momento resultante da força que a massa móvel aplica ao braço rotativo foi

4.5.2. Movimento angular do braço

admissíveis ϕ_r do braço, o movimento de flexão transversal.
 onde $r = 1, 2, \dots, p$. A equação (172) permite determinar, juntamente com as funções

$$\frac{d^2 \eta_r}{dt^2} = \frac{1}{M} \sum_p^{s=1} S_r \cdot \left(-\omega_r^2 \cdot \eta_r - 2 \cdot M \cdot \frac{d}{dt} \cdot \frac{d}{dt} \cdot \int_x^s \phi_s dx + \left. \frac{d \phi_s}{dx} \right|_{x=0} \cdot \tau \right) \quad (172)$$

Outra forma de expressar (169) é

$$S_r = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1 + \sum_p^{l=1} [M \cdot \phi'_l(l) \cdot \int_x^l \phi'_l dx]}{-M_r \cdot \int_x^l \phi'_l dx \cdot \phi_s(l)} \quad \text{para } r \neq s \\ \frac{1 + \sum_p^{l=1} [M \cdot \phi'_l(l) \cdot \int_x^l \phi'_l dx]}{M + M \cdot \sum_p^{l=1} [M \cdot \phi'_l(l) \cdot \int_x^l \phi'_l dx]} \quad \text{para } r = s \end{array} \right. \quad (171)$$

Mesmo no caso de flexões pouco acentuadas, quando se admitem válidas as

condições (71) e (76), o trabalho virtual seria dado por

$$\delta W = [\tau + F^e(l) \cdot l] \cdot \delta \theta + F^e(l) \cdot \delta e \quad (175)$$

sendo a força $F^e(l)$ expressa por (78).

O trabalho virtual do momento $F^e(l) \cdot l$, gerado pela massa no ponto $x = l$,

resultaria em um problema de grande complexidade matemática. Conseqüentemente,

admite-se que o trabalho das forças não-conservativas pode ser aproximado por (39).

Essa hipótese é razoável se o trabalho virtual do momento $F^e(l) \cdot l$ for pequeno em

comparação com o trabalho realizado pelas demais componentes de força, o que se

verifica no caso de vibrações pouco acentuadas, braço l reduzido e valores não muito

elevados de inércia da massa móvel.

Admitindo-se essa hipótese na construção do modelo subestruturado, o efeito

do momento $F^e(l) \cdot l$ pode ser considerado no equacionamento do movimento angular,

a partir deste ponto. A equação diferencial que descreve a dinâmica de rotação é

$$(J^B + J^C + M \cdot l^2) \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} = F^e(l) \cdot l + \tau \quad (176)$$

A força $F^e(l)$ é expressa por (162). Conseqüentemente,

$$(J^B + J^C + M \cdot l^2) \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -M \cdot l \cdot \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right)_{x=l} + 2 \cdot \frac{dl}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} + \tau \quad (177)$$

Considerando movimentos síncronos, $z(x, t)$ é separável em funções no espaço

e no tempo, conforme (94). Conclui-se que, para p modos,

$$(180) \quad \begin{aligned} & \left[\left(\frac{dp}{d\theta} \right)_z \cdot (l) e^{-\frac{pt}{\theta^2}} \cdot l + \frac{dp}{d\theta} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot 2 + \left(\frac{\partial^2 e}{\partial z^2} \right)^{x=l} \right] \cdot M - \\ & = \int_{l^b}^0 E \cdot I^b \cdot \frac{\partial^4 x}{\partial z^4} \cdot d + \left[\frac{\partial^2 e}{\partial z^2} \cdot x + \frac{dp}{d\theta^2} \cdot e - \left(\frac{dp}{d\theta} \right)_z \right] \cdot dx \end{aligned}$$

reescritas na forma

comparação, as equações do modelo contínuo, expressas em (45), (46) e (47) são de subestruturas e o modelo contínuo, deduzido na Seção 3.11. Para facilitar essa

4.6 Comparação com o modelo contínuo

Podem ser úteis traçar uma comparação entre o modelo obtido através de síntese de subestruturas e descrevem, respectivamente, as dinâmicas de translação da massa acoplada, de rotação do braço e de oscilação transversal do braço devido à flexão. Esse modelo é genérico, no sentido de que pode incluir um número p arbitrário de modos.

As equações (77), (172) e (179) constituem o modelo por síntese de

$$(179) \quad \begin{aligned} & \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{(J^b + J^c + M \cdot l^2)}{1} \cdot l \cdot \left[\sum_p \sum_s \phi'_s(l) \cdot S^s \cdot \omega_s^2 \cdot \eta_s \right] + \\ & + 2 \cdot M \cdot l \cdot \frac{dp}{d\theta} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot \left\{ \sum_p \sum_s \phi'_s(l) \cdot S^s \cdot \int \phi_s dx \right\} - 1 \left\{ \sum_p \sum_s \phi'_s(l) \cdot S^s \cdot \left. \frac{dp}{d\theta} \right|_{x=0} \right\} \cdot \tau \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$(178) \quad (J^b + J^c + M \cdot l^2) \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -M \cdot l \cdot \left[\sum_p \phi'_s(l) \cdot \frac{dp}{dt} \cdot \frac{dp}{d\theta} \right] + \tau$$

(52) no caso contínuo e (84) no substituído.

As condições de contorno dos dois problemas são iguais, expressas por (49) e

$$(185) \quad F = M \cdot \left[\frac{d^2 l}{d\theta^2} \cdot l - 1 \right]$$

$$(184) \quad \int_0^l \rho \cdot \left(e^z \cdot \frac{d^2 \theta}{d^2 z} + 2 \cdot e \cdot \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{d l}{d \theta} + x \cdot \frac{\partial^2 e}{\partial z^2} + x^2 \cdot \frac{d^2 \theta}{d^2 \theta} \right) dx + J^c \cdot \frac{d^2 l}{d^2 z} = \tau$$

$$(183) \quad \int_0^l E \cdot I_b \cdot \frac{\partial^4 e}{\partial z^4} + \rho \cdot \left[\frac{\partial^2 e}{\partial z^2} + x \cdot \frac{d^2 \theta}{d^2 \theta} \right] \cdot \left(\frac{d l}{d \theta} \right)^2 dx = \\ = -M \cdot \left[\frac{\partial^2 e}{\partial z^2} \right]_{z=l} + l \cdot \frac{d^2 \theta}{d^2 \theta} + 2 \cdot \frac{d l}{d \theta} \cdot \left(\frac{d l}{d \theta} \right)$$

(82), (83) e (77). Substituindo (78) em (82), resulta

Por sua vez, o modelo por substituição compõem das equações diferenciais

$$(182) \quad M \cdot \left[\frac{d^2 l}{d^2 \theta} \cdot l - 1 \right] \cdot \left(\frac{d l}{d \theta} \right)^2 = F + M \cdot \left[e(l) \cdot \frac{d^2 \theta}{d^2 \theta} + 2 \cdot \left(\frac{\partial l}{\partial t} \right) \cdot \left(\frac{d l}{d \theta} \right) \right]$$

$$(181) \quad \int_0^l \rho \cdot \left(e^z \cdot \frac{d^2 \theta}{d^2 z} + 2 \cdot e \cdot \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{d l}{d \theta} + x \cdot \frac{\partial^2 e}{\partial z^2} + x^2 \cdot \frac{d^2 \theta}{d^2 \theta} \right) dx + J^c \cdot \frac{d^2 l}{d^2 z} = \\ = \tau - M \cdot \left[\left(\frac{\partial^2 e}{\partial z^2} \right)_{z=l} \cdot l - 1 \cdot e(l) \cdot \frac{d^2 \theta}{d^2 \theta} + e^2(l) \cdot \frac{d^2 \theta}{d^2 \theta} + 2 \cdot e(l) \cdot \left(\frac{\partial l}{\partial t} \right) \cdot \left(\frac{d l}{d \theta} \right) \right] - \\ - M \cdot \left(l^2 \cdot \frac{d^2 \theta}{d^2 \theta} + 2 \cdot l \cdot \frac{d l}{d \theta} \cdot \left(\frac{d l}{d \theta} \right) \right)$$

Observa-se imediatamente a semelhança entre os dois modelos. Os termos dissonantes decorrem da simultaneidade dos dois movimentos, rotação e flexão. Em particular, verifica-se que

1º) as equações (180) e (183), que indicam a energia potencial elástica de flexão armazenada pelo braço, são idênticas, exceto pelo último termo de (180). Esse termo está associado à aceleração de arrastamento de braço $e(l)$, pequeno em relação aos demais termos;

2º) na equação (181) há um termo que, não constando em (184), merece uma atenção mais acurada: o momento aplicado ao braço pela massa móvel, igual a

$$(186) \quad -M \cdot \left(l^2 \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \cdot l \cdot \frac{dl}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} \right)$$

A exclusão desse momento constitui uma simplificação, conforme descrito na Seção 4.5.2. Uma estimativa numérica desse termo é apresentada na Seção 5.4.4.1;

3º) as equações (182) e (185), que representam a Segunda Lei de Newton, são também semelhantes, à exceção dos termos de aceleração $e(l) \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2}$ e $2 \cdot \frac{dl}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt}$, reduzidos em comparação com os demais.

Capítulo 5

Manobra Pré-Especificada da Massa Móvel: Dinâmica e Controle

A primeira abordagem possível para o problema de controle ótimo empregando

o movimento da massa sobre o carro consiste em tratar a posição l e a velocidade $\frac{dl}{dt}$ do

carro como parâmetros dados, estabelecidos *a priori*. Nesse caso, o posicionamento da

massa é estudado de um ponto de vista exclusivamente cinemático, não dinâmico.

Todos os coeficientes indicados nas equações (172) e (179) são determinados.

5.1 Modelo genérico

O modelo resultante é linear, composto de $p+1$ equações diferenciais de

segunda ordem. Torna-se desnecessário descrever a dinâmica da massa através da

equação (77).

Assim, para exprimir o modelo de estado do sistema, é necessário definir as

variáveis de estados e de controle

(187)

$$\begin{array}{ll}
 \frac{dx_1}{dt} = x_2 & x_1 = \eta_1 \\
 \frac{dx_2}{dt} = x_3 & x_2 = \eta_2 \\
 \vdots & \vdots \\
 \frac{dx_{p-1}}{dt} = x_p & x_{p-1} = \eta_{p-1} \\
 \frac{dx_p}{dt} = x_{p+1} & x_p = \eta_p \\
 \theta = x_{p+1} &
 \end{array}
 \quad l = n$$

Substituindo (172) em (179), deduz-se o modelo de estado genérico, para p

modos, composto de $(2p + 2)$ equações:

$$(188) \left\{ \begin{aligned} \frac{dx_{2r}}{dt} = x_{2r} & \quad \frac{dx_{2r}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_p^{s=1} S_{rs} \cdot \left(-\omega_z^s \cdot x_{(2s-1)} - 2 \cdot M \cdot \frac{d}{dt} \int_r \phi_s dx_{(2p+2)} \cdot x_{(2p+2)} + \left. \frac{dx_{(2p+1)}}{dt} = x_{(2p+1)} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \frac{dx_{(2p+2)}}{dt} = \frac{J^b + J^c + M \cdot l_z}{1} \cdot \left\{ 1 \cdot \sum_p^{s=1} \sum_r^{s=1} [\phi'_r(l) \cdot S_{rs} \cdot \omega_z^s \cdot x_{(2s-1)}] + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + 2 \cdot M \cdot l \cdot \frac{d}{dt} \sum_p^{s=1} \sum_r^{s=1} [\phi'_r(l) \cdot S_{rs} \cdot \int_r \phi_s dx_{(2p+2)}] - 1 \right\} \cdot x_{(2p+2)} + \right. \\ & \quad \left. + \left\{ 1 - l \cdot \sum_p^{s=1} \sum_r^{s=1} [\phi'_r(l) \cdot S_{rs} \cdot \left. \frac{dx_{(2p+2)}}{dt} \right|_{x=0}] \cdot n \right\} \right. \end{aligned} \right.$$

com $r = 1, 2, \dots, p$. Os termos S_{rs} são dados por (171).

O modelo de estado obtido pode ser empregado na implementação de um

controlador em malha fechada no torque τ . Observa-se em (188) que a posição l da

massa está presente implicitamente na matriz $[S]^{p \times p}$, enquanto sua velocidade $\frac{dl}{dt}$ está

explícita na equação. Em uma manobra pré-especificada da massa móvel, posição e

velocidade da massa são funções conhecidas. Em consequência, também são conhecidos

os termos S_{rs} da matriz $[S]^{p \times p}$, e a solução do problema é direta.

5.1.1 Modelo considerando uma autofunção

Considerando apenas o primeiro modo ($p = 1$) e definindo as variáveis de

estado e controle, deduz-se o modelo do sistema:

$$(192) \quad S_{11} = \frac{1 + M \int_0^1 \phi' dx}{M}$$

O termo S_{11} , expresso em (171), é igual a

(191)

$$n \cdot \begin{bmatrix} \left. \frac{xp}{\phi'} \right|_{x=0}^{x=1} \cdot S_{11} \cdot (l) \cdot \phi' \cdot l - 1 \\ 0 \\ \left. \frac{xp}{\phi'} \right|_{x=0}^{x=1} \cdot \frac{M}{S_{11}} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{J^b + J^c + M \cdot l^2}{1} \cdot S_{11} \cdot \phi' \cdot l - 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{J^b + J^c + M \cdot l^2}{2 \cdot M} \cdot \frac{dp}{dl} \cdot l \cdot S_{11} \cdot \phi' \cdot l - 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 \cdot \frac{dp}{dl} \cdot S_{11} \cdot \phi' \cdot l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dp}{dx_4} \\ \frac{dp}{dx_3} \\ \frac{dp}{dx_2} \\ \frac{dp}{dx_1} \end{bmatrix}$$

Na forma matricial:

(190)

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp}{dx_4} &= \frac{J^b + J^c + M \cdot l^2}{1} \cdot \left[l \cdot \phi' \cdot l - 1 \right] \cdot S_{11} \cdot \phi' \cdot l + \left. \frac{xp}{\phi'} \right|_{x=0}^{x=1} \cdot S_{11} \cdot (l) \cdot \phi' \cdot l - 1 \\ \frac{dp}{dx_3} &= \frac{dp}{dx_4} + 2 \cdot M \cdot l \cdot \frac{dp}{dl} \cdot S_{11} \cdot \phi' \cdot l - 1 \\ \frac{dp}{dx_2} &= \frac{M}{1} \cdot S_{11} \cdot \left(-\omega_2 \cdot x_1 \cdot 2 \cdot M \cdot \frac{dp}{dl} \cdot \int_0^1 \phi' dx + \left. \frac{xp}{\phi'} \right|_{x=0}^{x=1} \right) \\ \frac{dp}{dx_1} &= x_2 \end{aligned} \right\}$$

$$l = n$$

$$\begin{aligned} \frac{dp}{\theta p} &= x_3 = \theta \\ \frac{dp}{\eta_1 p} &= x_2 = \eta_1 \end{aligned}$$

(189)

5.2 Controle quadrático sub-ótimo

O modelo obtido, expresso pela equação (188), é linear e variante no tempo (*time-varying system*). Friedland (1987) observa que, ao menos em um primeiro momento, o fato do sistema ser linear sugere o emprego de métodos de controle moderno, tais como os controladores quadráticos.

Sistemas lineares invariantes no tempo são expressos por

$$\frac{dx}{dt}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \quad (196)$$

onde A e B são matrizes constantes. Esses sistemas podem ser controlados por um

controle

$$u(t) = -K \cdot x(t) \quad (197)$$

Essa ação de controle é ótima no sentido de minimizar um certo índice de desempenho J , definido em função da energia armazenada no sistema mecânico e a energia despendida na ação de controle, ponderadas por pesos Q e R , ou seja,

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (198)$$

Q e R são matrizes reais simétricas e positivo definidas.

Conforme demonstra Ogata (1998), a matriz de ganho ótimo K é igual a

$$K = R^{-1} \cdot B^T \cdot P \quad (199)$$

onde as matrizes R , B e P são determinados pela resolução da equação algébrica de Riccati,

$$A^T \cdot P + P \cdot A - P \cdot B \cdot R^{-1} \cdot B^T \cdot P + \bar{Q} = 0 \quad (200)$$

Ogata (1998) e Friedland *et al* (1987) comentam que, sob certas condições de controlabilidade e observabilidade, a lei de controle linear quadrático produz sempre uma resposta assintoticamente estável, o que pode ser demonstrado pela análise de estabilidade de Liapunov.

No caso de sistemas variantes no tempo, expressos por

$$\frac{dx}{dt}(t) = A(t) \cdot x(t) + B(t) \cdot u(t) \quad (201)$$

a minimização do índice de desempenho J resulta em uma ação de controle da forma

$$u(t) = -K(t) \cdot x(t) \quad (202)$$

onde o ganho $K(t)$ é variável no tempo e igual a

$$K(t) = R^{-1} \cdot B^T(t) \cdot P(t) \quad (203)$$

O problema consiste agora na resolução da equação diferencial ou transiente de Riccati,

apresentada por Meirovitch (1990) e igual a

$$A^T(t) \cdot P(t) + P(t) \cdot A(t) - P(t) \cdot B(t) \cdot R^{-1} \cdot B^T(t) \cdot P(t) + \bar{Q} = -\frac{dP}{dt}(t) \quad (204)$$

Diversas técnicas⁴ podem ser empregadas para a resolução direta de (204).

Uma solução alternativa, em que não se procede à resolução direta da equação diferencial de Riccati, é apresentada por Friedland (1987). Consiste na obtenção de uma solução sub-ótima para o controlador, determinando-se para cada instante de tempo a solução da equação algébrica de Riccati para a lei de controle ótimo. Calcula-se o vetor de ganho $K(t)$ para determinados instantes de tempo, e emprega-se esses valores no controle sub-ótimo. Trata-se, portanto, de uma discretização no tempo. Essa aproximação para o controle ótimo de sistemas variantes no tempo é chamada “adiabática”, por sua semelhança com certos cálculos da Termodinâmica. Através do segundo método de Liapunov, Friedland (1990) demonstra que a resposta desses sistemas é sempre estável, desde que o sistema seja controlável em todos os instantes de discretização. O autor observa que o controle com ganho discretizado, apesar de não ser ótimo, produz sempre sistemas com bom desempenho e - mais importante - garante respostas assintoticamente estáveis.

5.3 Controle sub-ótimo do sistema em questão

As matrizes $A(t)$ e $B(t)$ do sistema braço flexível-massa acoplada podem ser deduzidas de (188), ou de (191) e (195) para sistemas considerando uma e três autofunções, respectivamente.

Sejam considerados n instantes t_1, t_2, \dots, t_n para a discretização no tempo. Escolhidos os pesos Q e R , invariantes, a equação algébrica de Riccati em cada um desses n instantes é igual a

⁴ Essas técnicas estão descritas por Mitrrovitch (1990).

$t_n]$, os valores do ganho discretizado $K(t_1), K(t_2), \dots, K(t_{n-1})$.

A ação de controle é gerada chaveando, em cada intervalo $[t_1, t_2], [t_2, t_3], \dots, [t_{n-1},$

$$K_n = R^{-1} \cdot B_n^T \cdot P_n$$

⋮

$$K_2 = R^{-1} \cdot B_2^T \cdot P_2$$

$$K_1 = R^{-1} \cdot B_1^T \cdot P_1$$

(207)

De (205) resultam os vetores de ganho para cada instante de tempo:

$$B_r = B(t_r)$$

$$A_r = A(t_r)$$

(206)

onde

$$A_n^T \cdot P_n + P_n \cdot A_n - P_n \cdot B_n^T \cdot R^{-1} \cdot B_n \cdot P_n + \bar{Q} = 0$$

⋮

$$A_2^T \cdot P_2 + P_2 \cdot A_2 - P_2 \cdot B_2^T \cdot R^{-1} \cdot B_2 \cdot P_2 + \bar{Q} = 0$$

$$A_1^T \cdot P_1 + P_1 \cdot A_1 - P_1 \cdot B_1^T \cdot R^{-1} \cdot B_1 \cdot P_1 + \bar{Q} = 0$$

(205)

5.4 Simulação computacional

Uma simulação computacional foi implementada no MATLAB, para dois

casos distintos: um considerando três autofunções ($p = 3$), outro apenas uma. As

matrizes $A(t)$ e $B(t)$ do sistema, portanto, são as indicadas por (195) e (191),

respectivamente. Observa-se que termos $\frac{dI}{dt}$ aparecem explicitamente em $A(t)$ e $B(t)$,

enquanto termos em I aparecem tanto explicita quanto implicitamente, embutidos nos

elementos da matriz S .

5.4.1 Parâmetros físicos empregados na simulação

Os parâmetros físicos empregados na simulação estão indicados na Tabela 1.

Comprimento do braço [m]	$L = 0,7$
Espessura do braço [m]	$h = 0,001$
Altura do braço [m]	$b = 0,0254$
Momento de inércia transversal do braço [m ⁴]	$I_B = 2,12 \cdot 10^{-12}$
Densidade volumétrica do braço (alumínio) [kg/m ³]	dens = 2710
Densidade linear de massa do braço (uniforme) [kg/m]	$\rho = 0,069$
Módulo de elasticidade do braço (alumínio) [Pa]	$E = 7,1 \cdot 10^{10}$
Massa acoplada [kg]	$M = 0,01$
Momento de inércia do cubo [kg · m ²]	$J_C = 1,35 \cdot 10^{-4}$

Tabela 1 - Parâmetros físicos do sistema (SI).

Para os valores indicados, a massa do braço flexível é de 0,0482 kg, cerca de 5

vezes a da massa acoplada. O braço é suposto de secção transversal uniforme (ρ

constante ao longo de todo o braço).

5.4.2 Autovalores e autofunções

O r-ésimo "modo" de vibração do braço sem massa acoplada é expresso por (102), sendo determinado pelos parâmetros β_r, a_r, b_r, c_r e d_r . A Tabela 2 indica os valores de β_r resultantes da solução numérica de (122), para um sistema mecânico descrito pelos parâmetros da Tabela 1. Os autovalores ou frequências $f_r = \frac{\omega_r}{2\pi}$ associadas, conforme a equação (104), também estão indicadas. Os valores experimentais foram medidos no laboratório de Departamento de Engenharia Mecânica da USP e são apresentados por Gildin (1998).

Modo (r)	β_r	f_r [Hz]	Valores experimentais [Hz]	Erro percentual
1º	5,37	6,79	6,25	8,64
2º	8,61	17,45	15,75	10,79
3º	11,82	32,86	31,37	4,75

Tabela 2 - Valores das três primeiras frequências naturais.

A Figura 7 ilustra os modos ou funções admissíveis do braço flexível sem massa acoplada. O círculo e o asterisco no gráfico do primeiro modo assinalam, respectivamente, o ponto de máximo deslocamento (com exceção da extremidade livre) e o nó. Essas posições são $l_{max} = 0,2552$ m e $l_{nó} = 0,5044$ m.

O momento de inércia do cubo é cerca de 60 vezes o do braço flexível. Özgüner & Barbieri (1988) observam que o modelo construído a partir modos vinculados (*constrained modes*) aproxima tanto melhor a solução exata quanto maior a relação entre os momentos de inércia J_c e J_b .

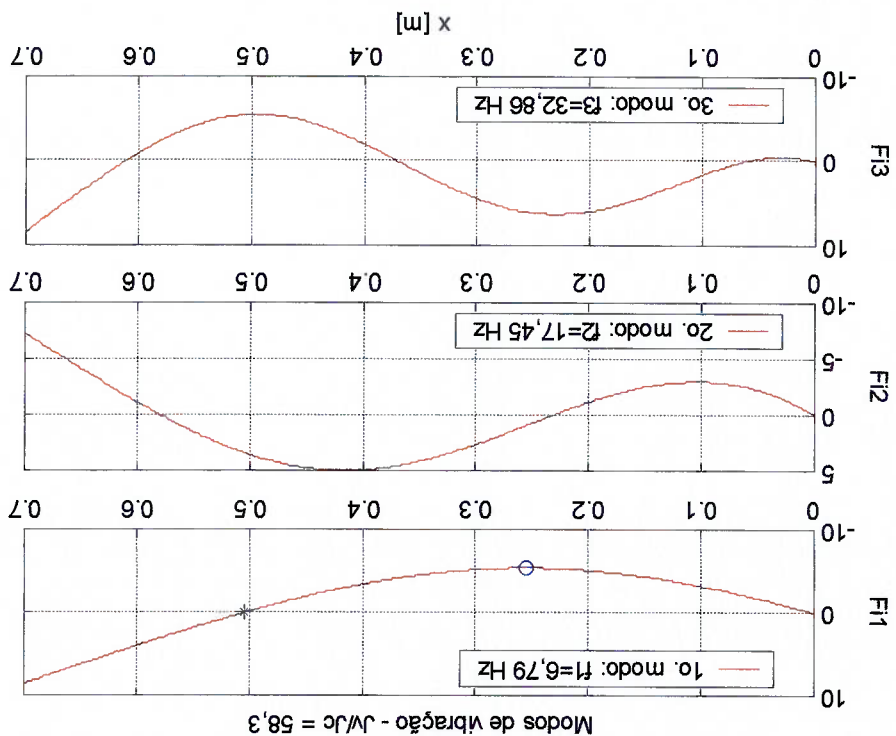


Figura 7 - Três primeiros modos e frequências naturais do braço sem massa acoplada.

Considerando (143), a matriz de ortogonalidade MO_{ij} pode ser definida por

$$MO_{ij} = \left[\int_0^L \rho \cdot \phi_i \cdot \phi_j \cdot dx + J_c \cdot \left. \frac{d\phi_i}{dx} \right|_{x=0} \cdot \left. \frac{d\phi_j}{dx} \right|_{x=0} \right] \quad (208)$$

e deve ser diagonal. Para os modos ilustrados na Figura 7, O_{ij} é igual a

$$MO_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 9,16 \cdot 10^{-6} & 12,95 \cdot 10^{-6} \\ 9,16 \cdot 10^{-6} & 1 & 13,16 \cdot 10^{-6} \\ 12,95 \cdot 10^{-6} & 13,16 \cdot 10^{-6} & 1 \end{bmatrix}$$

5.4.3 Caso 0: Resposta em malha aberta

Para verificar a resposta do conjunto operando em malha aberta, aplicou-se o torque ilustrado na Figura 8. Para efeitos de comparação, são apresentadas as respostas do sistema em dois casos distintos: um primeiro em que a massa se desloca do cubo para a extremidade livre com velocidade constante de 0,175 m/s; um segundo em que a massa permanece parada em $l_{max} = 0,2552$ m, ponto de máximo deslocamento do primeiro modo (excetuando a extremidade livre).

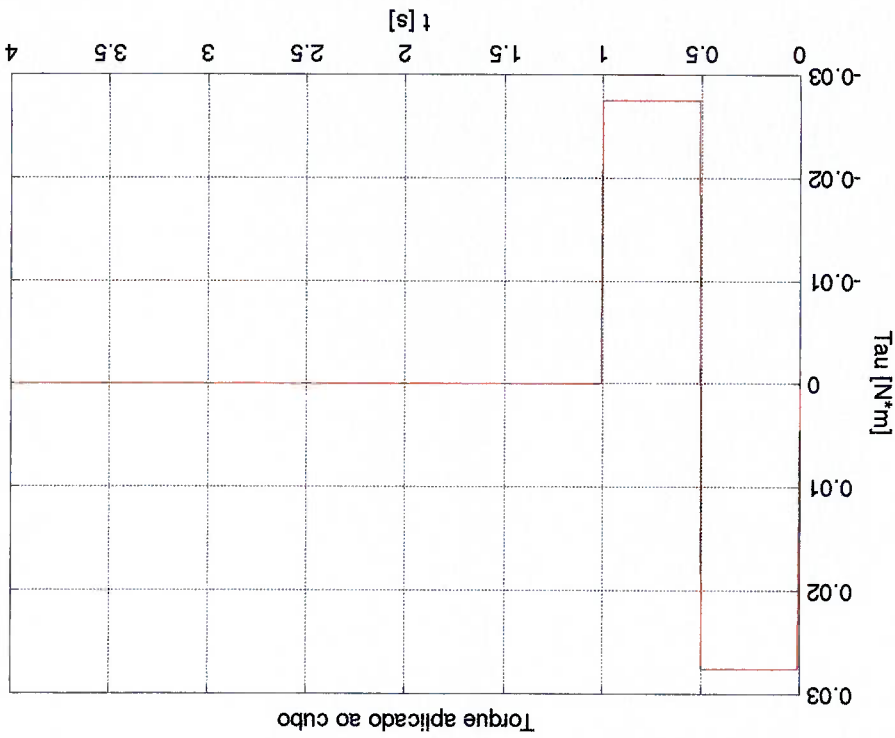


Figura 8 - Caso 0. Torque de entrada aplicado ao braço.

Figura 9 a Figura 13 ilustram a resposta a malha aberta do conjunto. Pode-se observar que as oscilações do braço flexível encontram-se numa faixa de 8 mm em torno do sistema de referência móvel que o acompanha.

Figura 10 - Caso 0. Deslocamento da ponta do braço.

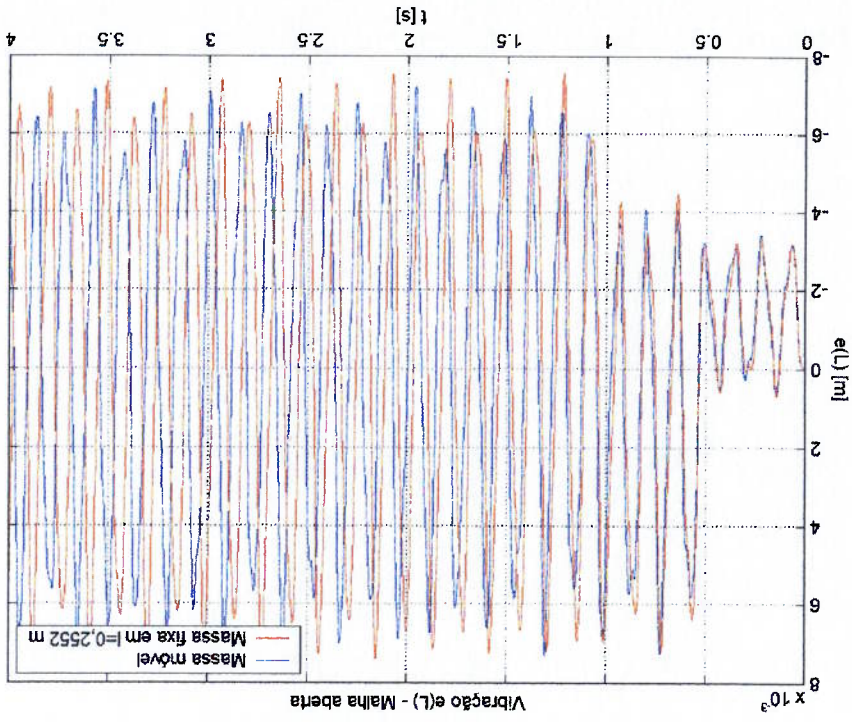


Figura 9 - Posição e velocidade angulares do braço.

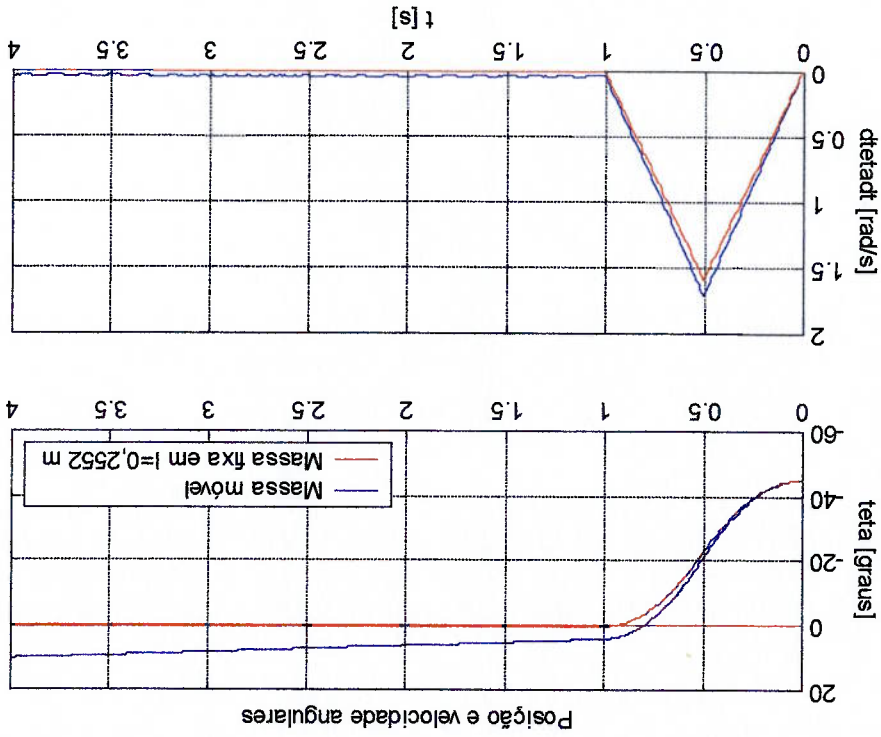


Figura 12 - Caso 0. Malha aberta. η_2 e $d\eta_2/dt$.

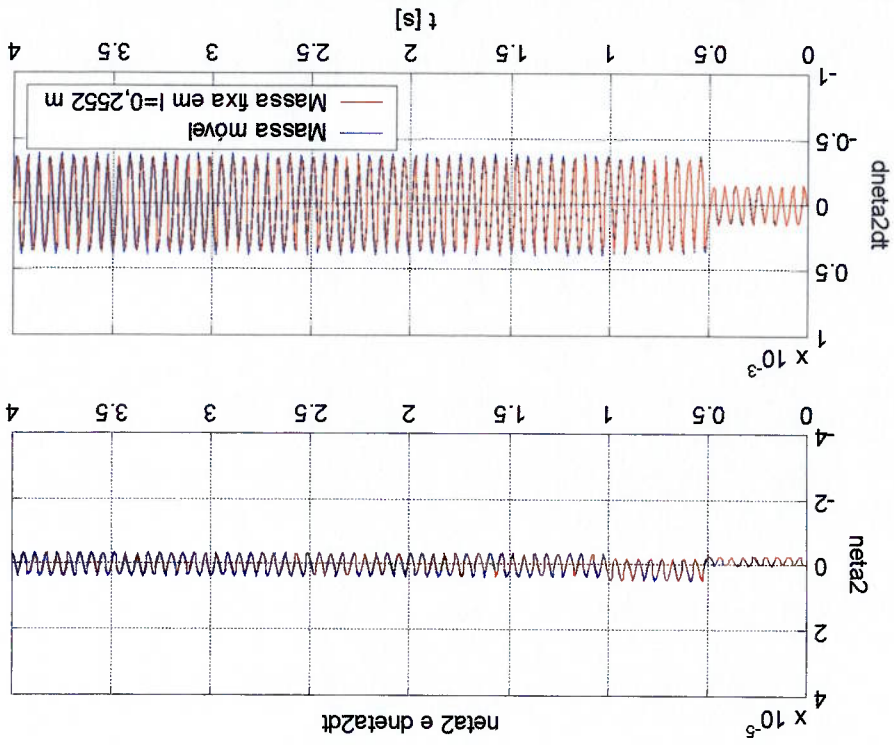
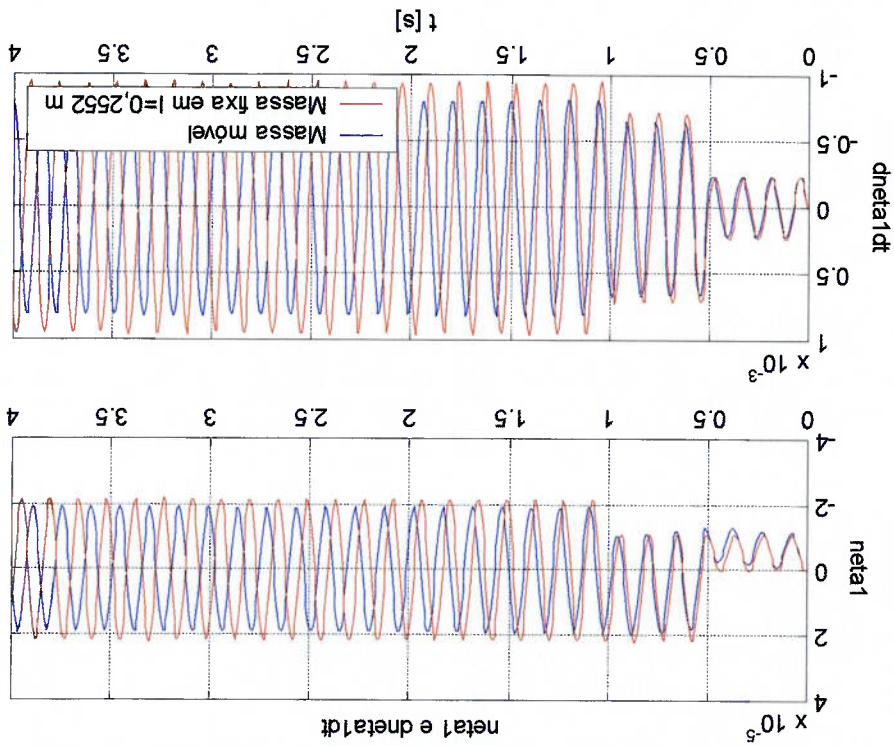


Figura 11 - Caso 0. Malha aberta. η_1 e $d\eta_1/dt$.



Em todos os casos estudados foram empregados 514 pontos de discretização no tempo, para manobras com uma duração de 4 s. O sistema mostrou-se controlável em todos os casos. A Figura 14 ilustra o posto da matriz de controlabilidade do sistema

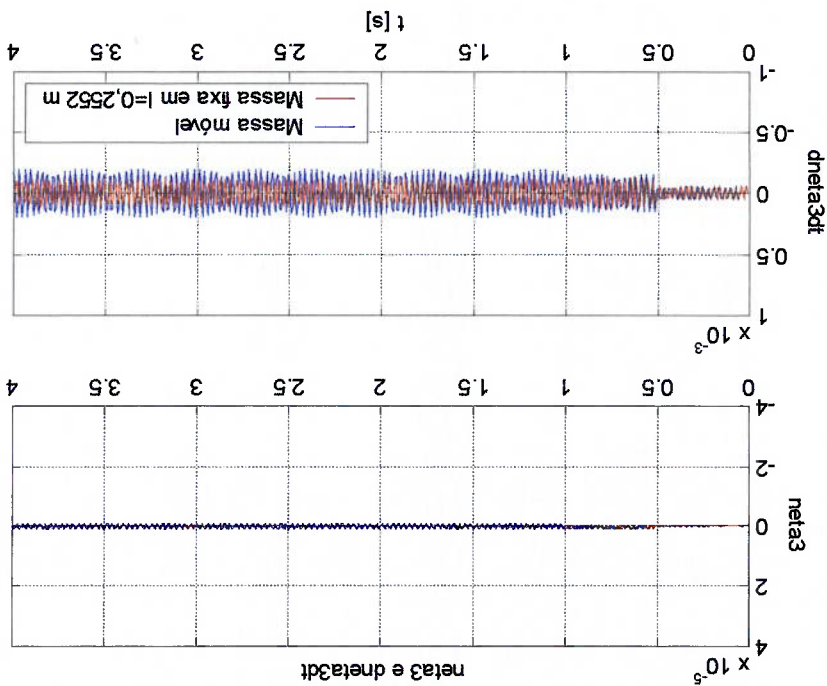
tiver posto igual a $2p+2$ em todos os instantes da discretização.

$$CO(t_i) = [B(t_i) \quad A(t_i) \cdot B(t_i) \quad A^2(t_i) \cdot B(t_i) \quad \dots] \quad (209)$$

controlabilidade, definida em um instante t_i por instantes da discretização. Um sistema variante no tempo será controlável se a matriz de maioria dos fins, desde que garantida a controlabilidade do sistema em todos os resulta sempre em um controle quadrático sub-ótimo, estável e satisfatório para a Conforme visto na Seção 5.2, a discretização de modelos variantes no tempo

5.4.4 Resposta para controle quadrático sub-ótimo

Figura 13 - Caso 0. Malha aberta. η_3 e $d\eta_3/dt$.



quando a massa se desloca para a extremidade livre em 4 s, com velocidade

constante.

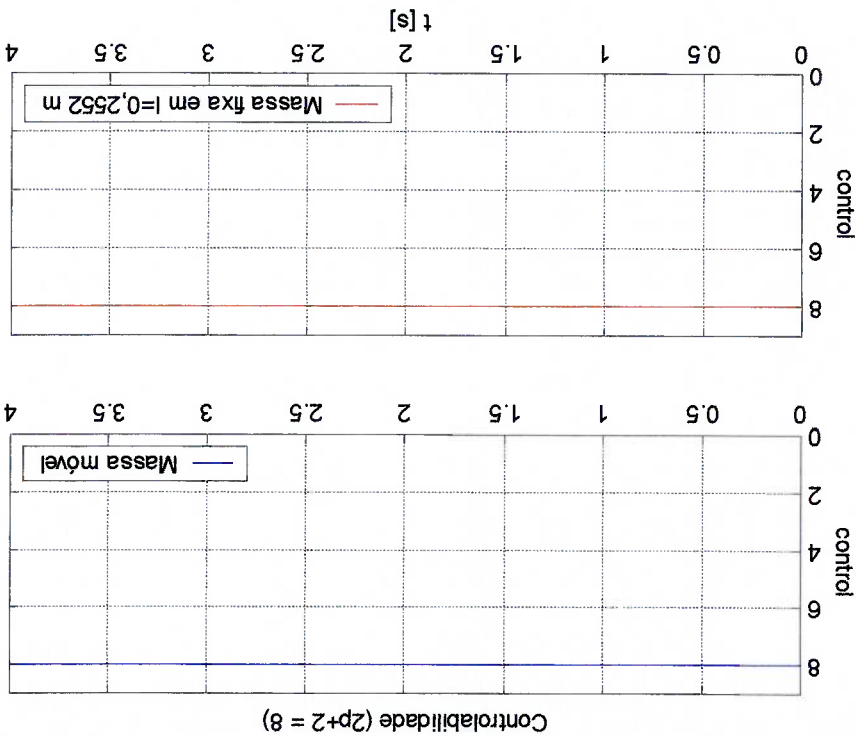


Figura 14 - Controlabilidade do sistema ao longo do tempo.

São conhecidas as matrizes $A(t)$ e $B(t)$ do sistema para os 514 instantes de tempo da simulação. O vetor ótimo K , para cada um desses instantes é determinado pela solução da equação algébrica de Riccati, equação (200). A referência para a manobra é um ângulo final $\theta_f = 0^\circ$, com posição angular inicial de -45° .

5.4.4.1 Caso 1: Massa deslocando-se de $l_0 = 0$ a $l_f = 0,7$ m com velocidade constante

A Figura 15 ilustra l e $\frac{dl}{dt}$ quando a massa se desloca do cubo para a

extremidade livre do braço rotativo com velocidade constante. Admite-se que os pesos Q e R da função objetivo são

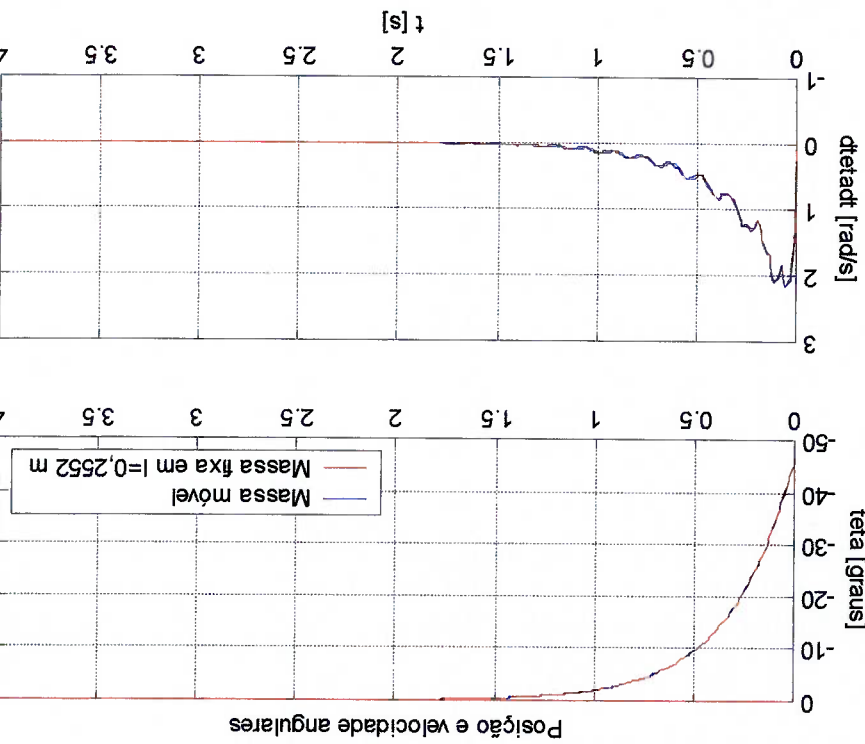
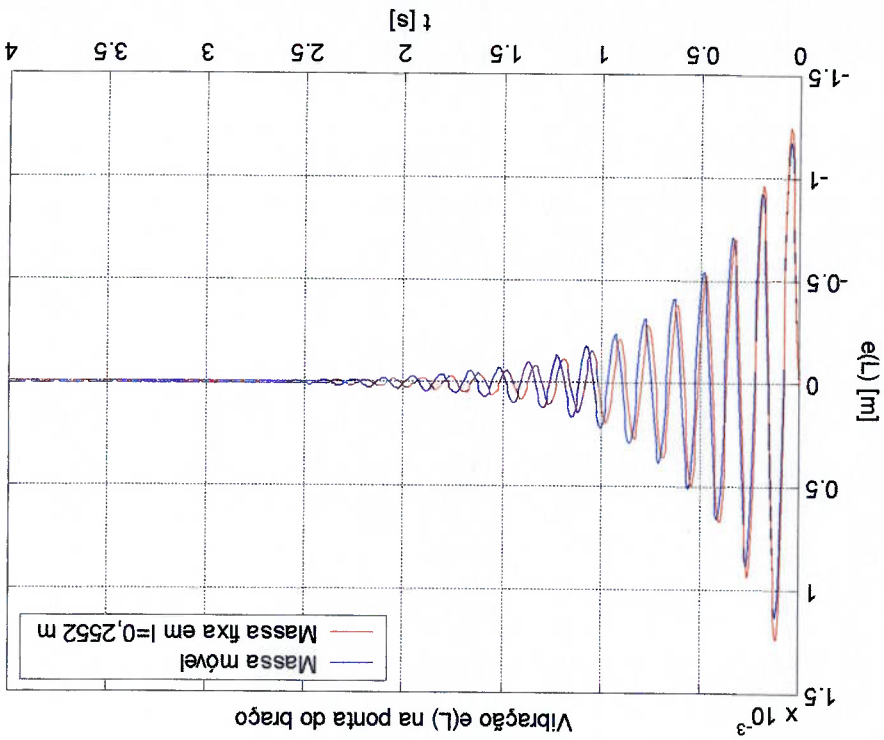


Figura 17 - Caso 1. Deslocamento da extremidade livre do braço.

Figura 16 - Caso 1. Posição e velocidade angulares do braço.

Figura 19 - Caso 1. Ganhos referentes a η_i , $d\eta_i/dt$, θ e $d\theta/dt$.

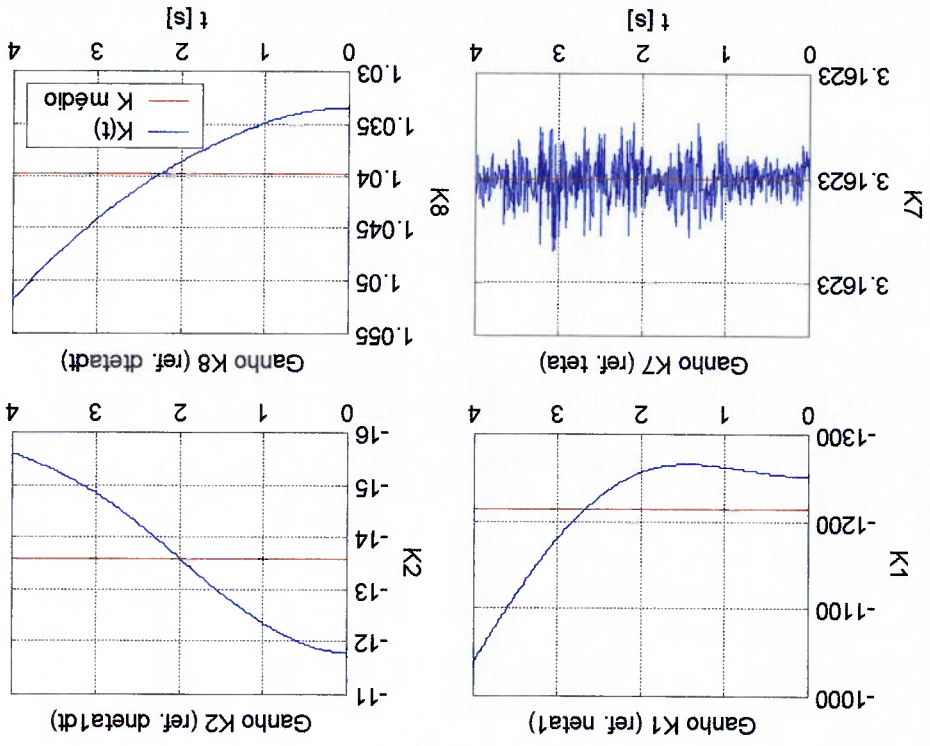


Figura 18 - Caso 1. Torque aplicado ao cubo.

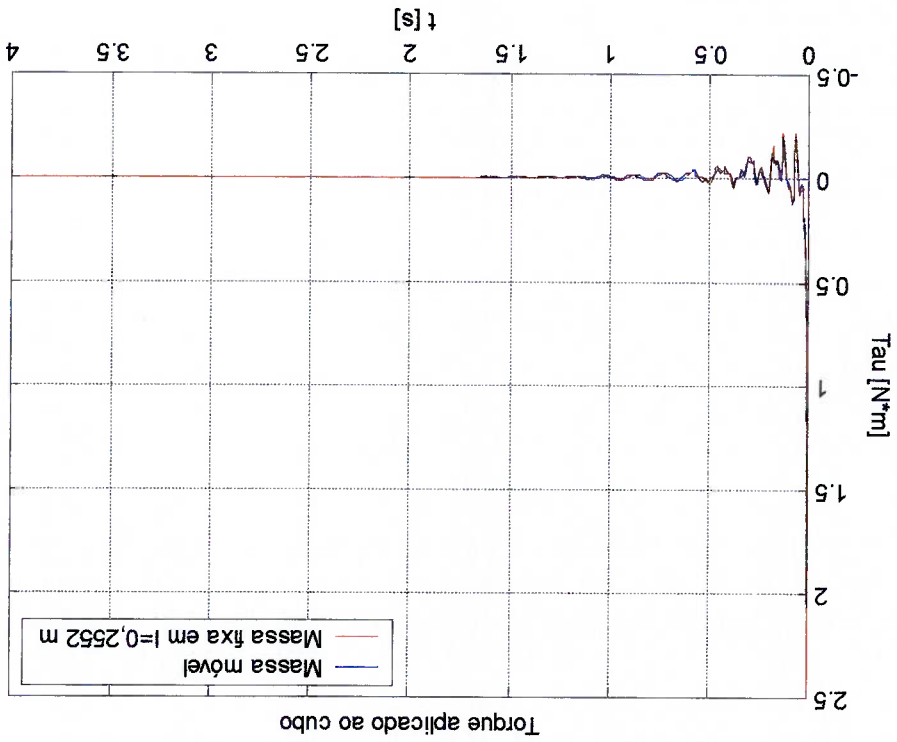
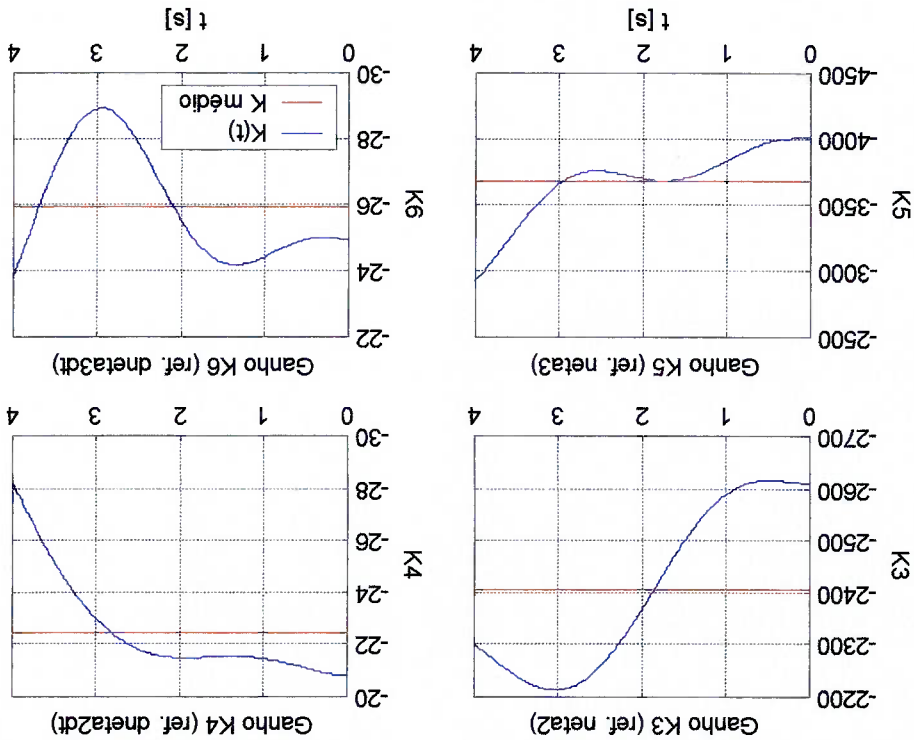


Tabela 3 - Caso 1. Média e desvio padrão do ganho K.

	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅	K ₆	K ₇	K ₈
K médio	-1214,7	-13,6	-2404,6	-22,5	-3684,6	-26,0	3,1	1,0
Desvio padrão	64,7	1,2	159,2	1,9	262,1	1,7	0,0	0,0
DP %	5,3	9,4	6,6	8,3	7,1	6,4	0,0	0,5

O tempo crítico de oscilação é de cerca de 2,5 s, e a amplitude de oscilação da ponta do braço é de cerca de 1,5 mm. Analisando a Figura 17, observa-se que o movimento da massa atenua os picos de vibração da extremidade livre do braço no início da manobra, mas ao mesmo tempo provoca um aumento do tempo crítico. Figura 19 e Figura 20 apontam para uma variação significativa dos ganhos ao longo do tempo para a manobra em questão. A Tabela 3 expressa os valores médios e o desvio padrão absoluto e percentual desses ganhos.

Figura 20 - Caso 1. Ganhos referentes a η_2 , $d\eta_2/dt$, η_3 e $d\eta_3/dt$.

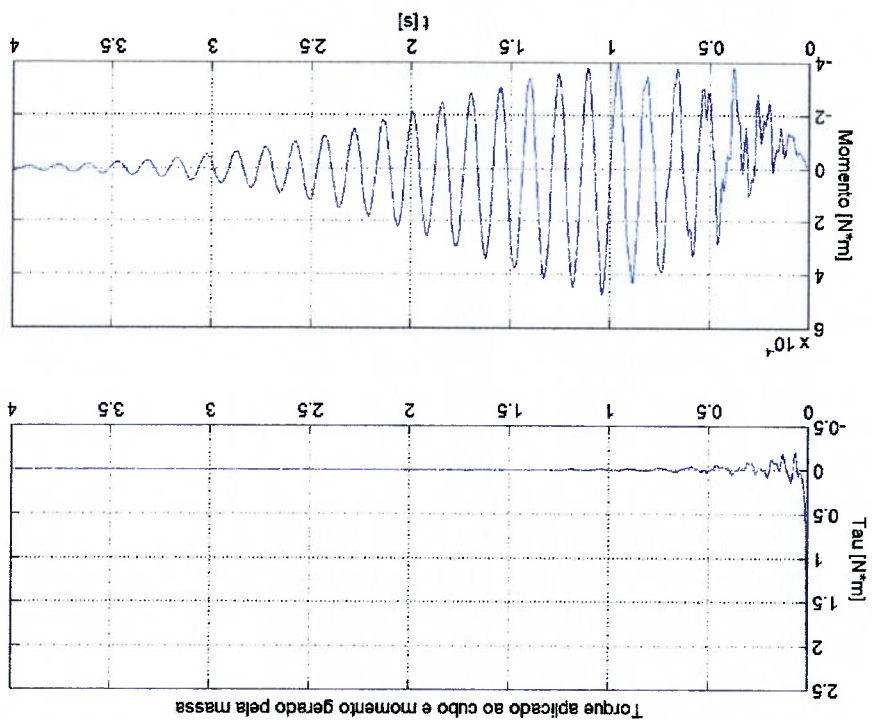


A Figura 22 ilustra l e $\frac{dl}{dt}$ quando a massa se desloca segundo um movimento senoidal com frequência 6,79 Hz, igual à primeira frequência natural do braço sem massa acoplada. A amplitude de oscilação é de 0,1 m em torno do ponto $l_{max} = 0,2552$ m. A posição inicial da massa é $l_0 = 0,3552$ m. Os pesos da função objetivo são os indicados em (210). Pode-se observar que o primeiro pico de oscilação da ponta do

5.4.4.2 Caso 2: Massa deslocando-se com movimento senoidal

A Figura 21 indica o torque externo τ aplicado ao cubo rotativo e o momento que a massa aplicada no braço no ponto l para o Caso 1, expresso pela equação (186), permitindo comparar numericamente esses esforços. Observa-se que, de fato, é muito reduzida a ordem de grandeza do momento.

Figura 21 - Caso 1. Torque externo e momento causado pela massa.



braço é atenuado, mas que os demais são acentuados pelo movimento da massa. O tempo crítico aumenta muito. As três componentes da força $F^E(L)$ aplicada sobre o braço flexível pela massa, expressas pelas equações (73) e (78), estão indicadas na Figura 25. O primeiro pico da força de Coriolis está em oposição de fase com a vibração $e(L, t)$ da ponta do braço, sugerindo atenuar a vibração por meio de um movimento periódico do carro tal que a força de Coriolis esteja sempre em oposição com a vibração da viga.

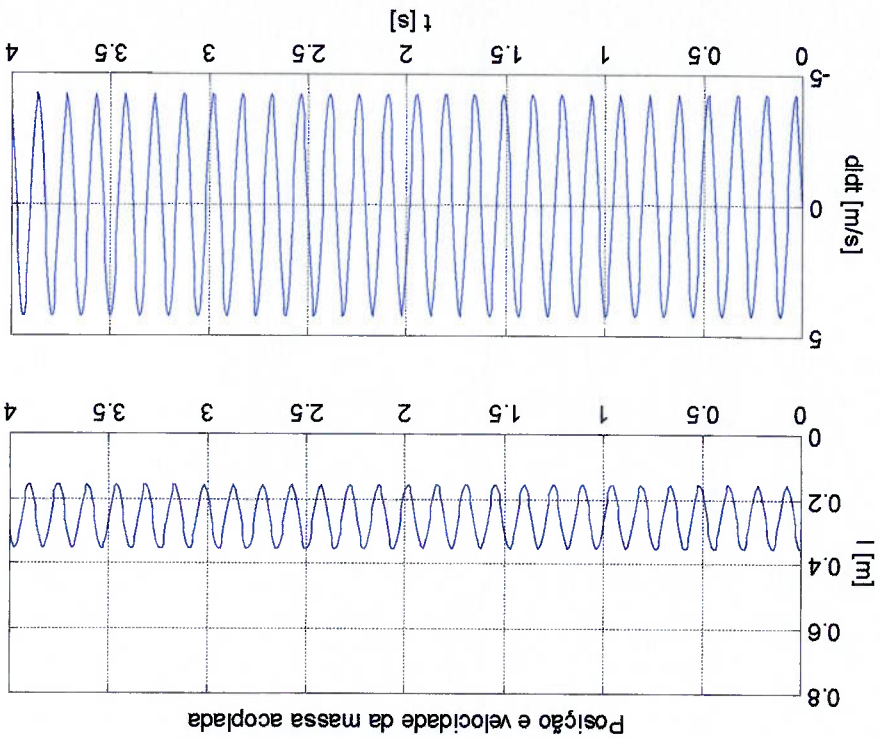


Figura 22 - Caso 2. Posição e velocidade angulares do braço.

Figura 24 - Caso 2. Deslocamento da extremidade livre do braço.

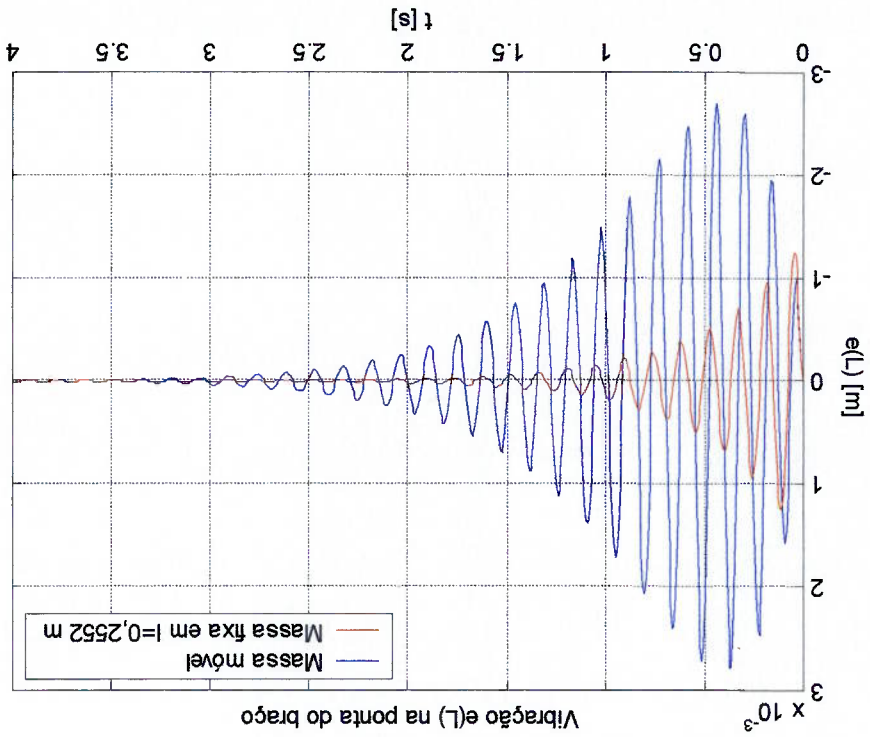


Figura 23 - Caso 2. Posição e velocidade angulares para o sistema controlado.

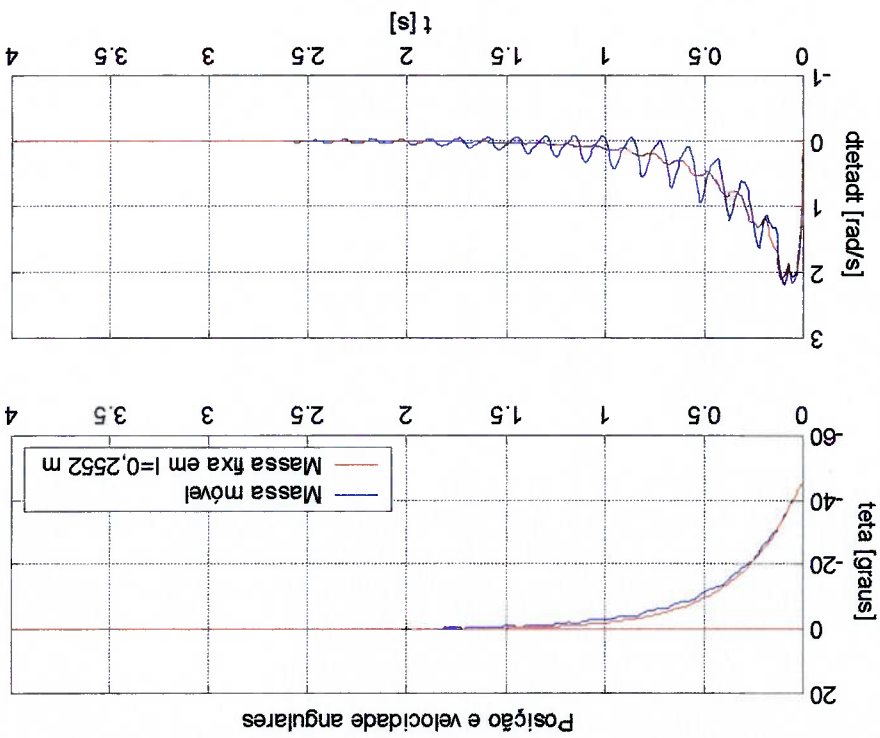


Figura 26 - Caso 2. Torque aplicado ao cubo.

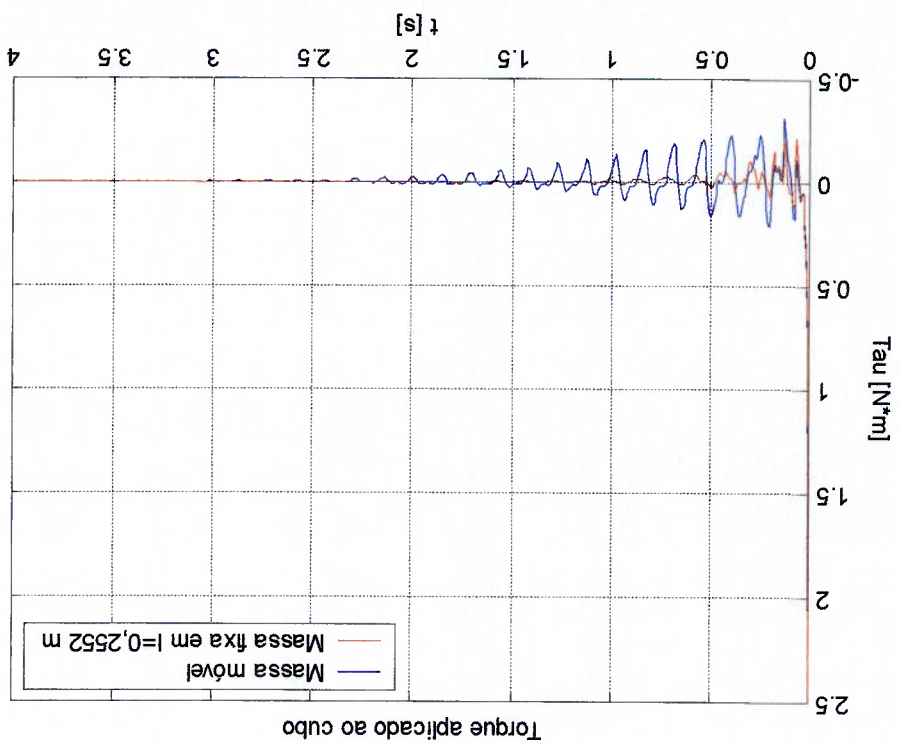
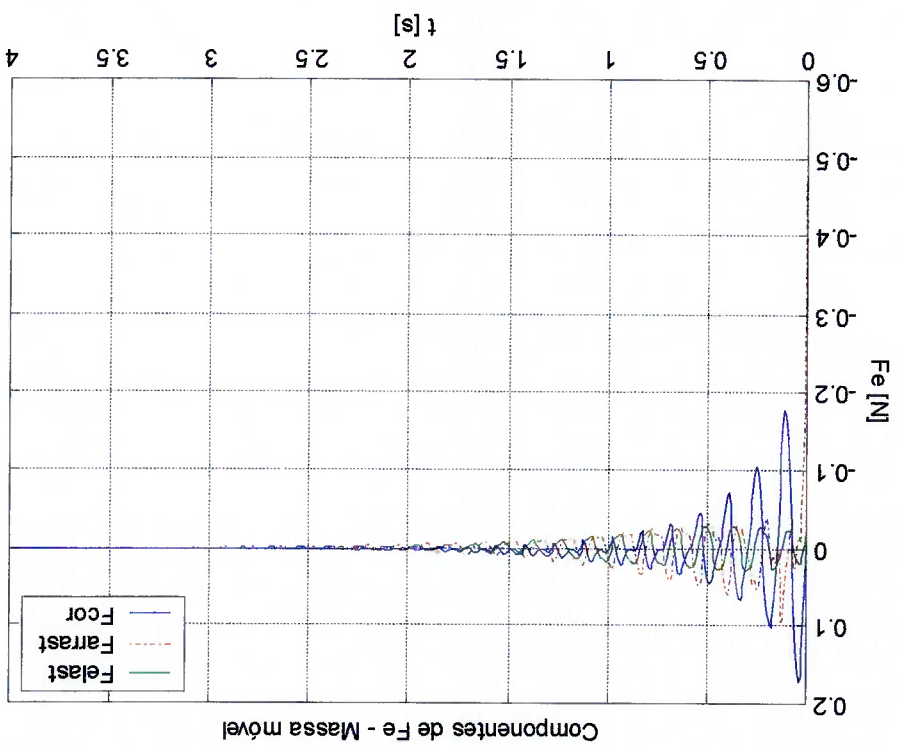


Figura 25 - Caso 2. Componentes da força aplicada no braço pela massa móvel.



Analisando a Figura 24, pode-se concluir que, para o movimento senoidal

descrito pela Figura 22, o período de vibração diminui em relação ao caso em que a massa permanece parada. Assim, o movimento da massa provoca um aumento da frequência de vibração, efeito equivalente a um aumento de rigidez do sistema. A título de comparação, ilustra-se na Figura 27 o efeito oposto: um movimento senoidal com um deslocamento de fase de $-\pi/2$ rad em relação ao caso anterior provoca uma redução da frequência de vibração.

A Figura 27 revela também um aumento da amplitude de oscilação da ponta do braço. A força de Coriolis, nesse caso, encontra-se em fase com a vibração da ponta. Portanto, ainda que $F^E(l)$ seja aplicada em um ponto l , e não na extremidade livre do braço, induz ao longo de toda a viga maiores amplitudes de vibração, devido ao aumento das coordenadas η_1 e $d\eta_1/dt$.

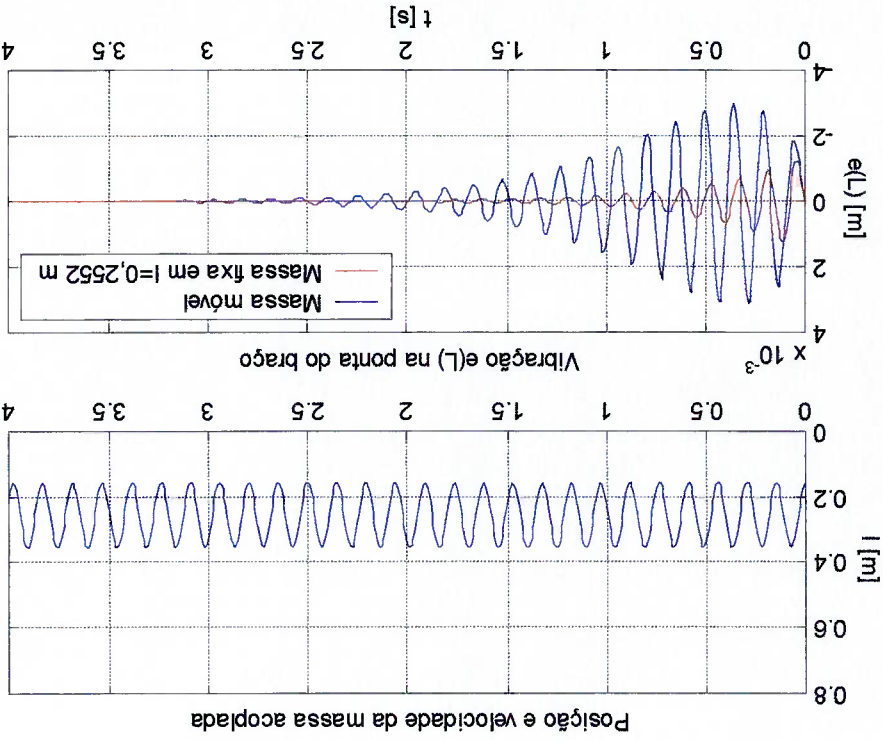


Figura 27 - Caso 2. Movimento senoidal com deslocamento de fase de $-\pi/2$ rad.

A Figura 28 ilustra l e $\frac{dl}{dt}$ quando a massa se desloca com um movimento

periódico atenuado em torno de $l_{max} = 0,2552$ m. A frequência e as amplitudes do movimento da massa foram ajustadas sem outro requisito que não o de gerar uma força de Coriolis em oposição de fase com as oscilações de η_1 , indicada na Figura 33.

Figura 29 e Figura 30 ilustram a resposta do sistema. A Figura 31 indica as

componentes da força $F^E(t)$ aplicada pela massa no braço flexível. Pode-se verificar a

oposição de fase da força de Coriolis com o deslocamento $e(L, t)$ da ponta da viga. A

Figura 32 indica o torque aplicado ao cubo.

Figura 33, Figura 34 e Figura 35 permitem observar a atenuação de η_1 e $d\eta_1/dt$

devido ao movimento da massa, sem aumento significativo das demais variáveis de

estado.

5.4.4.3 Caso 3: Massa deslocando-se com movimento periódico atenuado

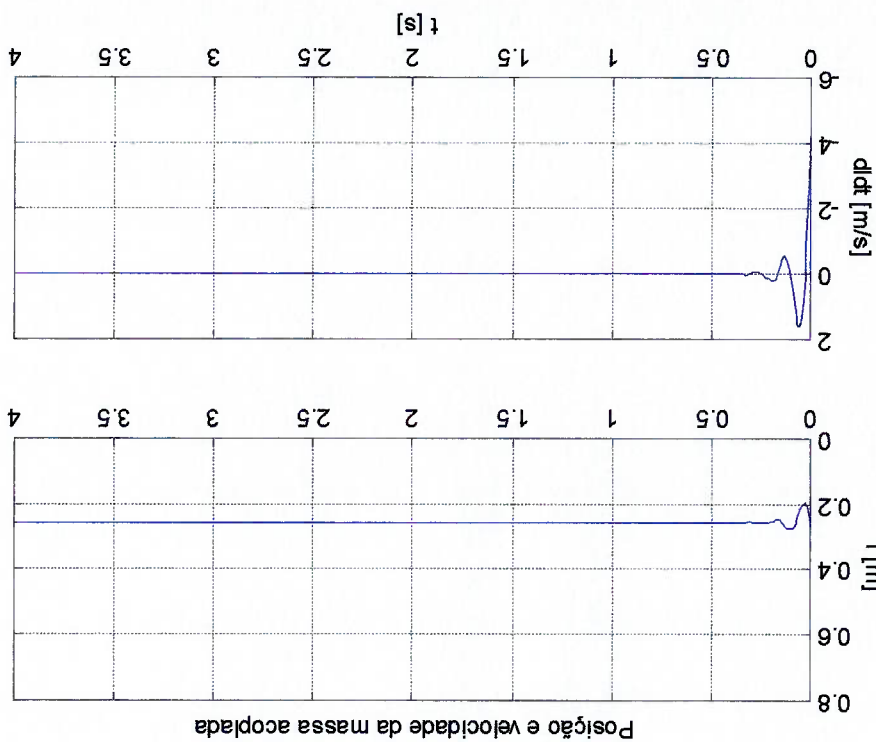


Figura 28 - Caso 3. Posição e velocidade angulares do braço.

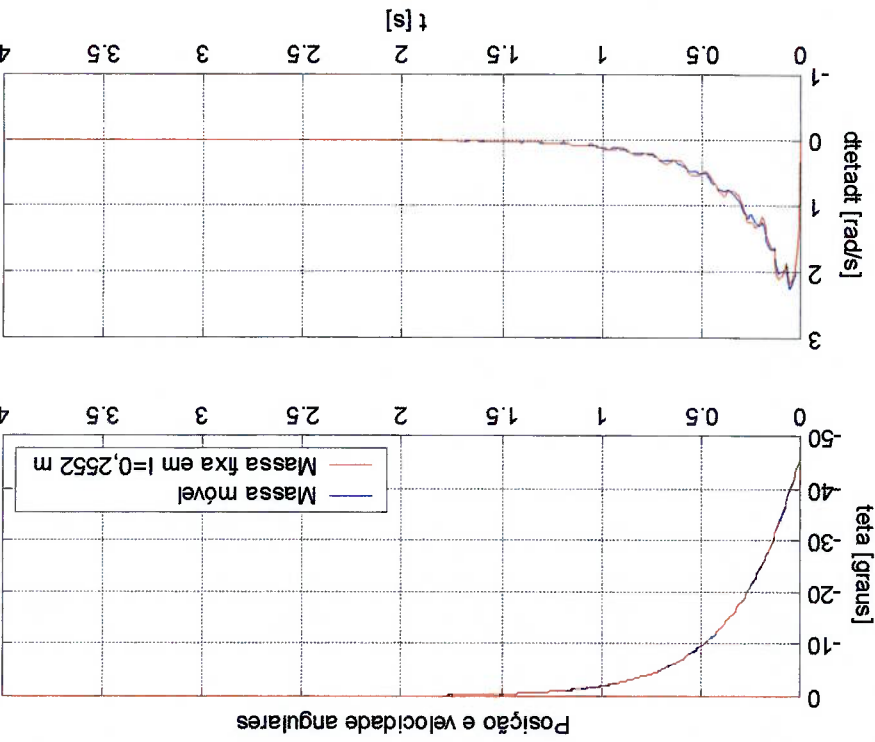
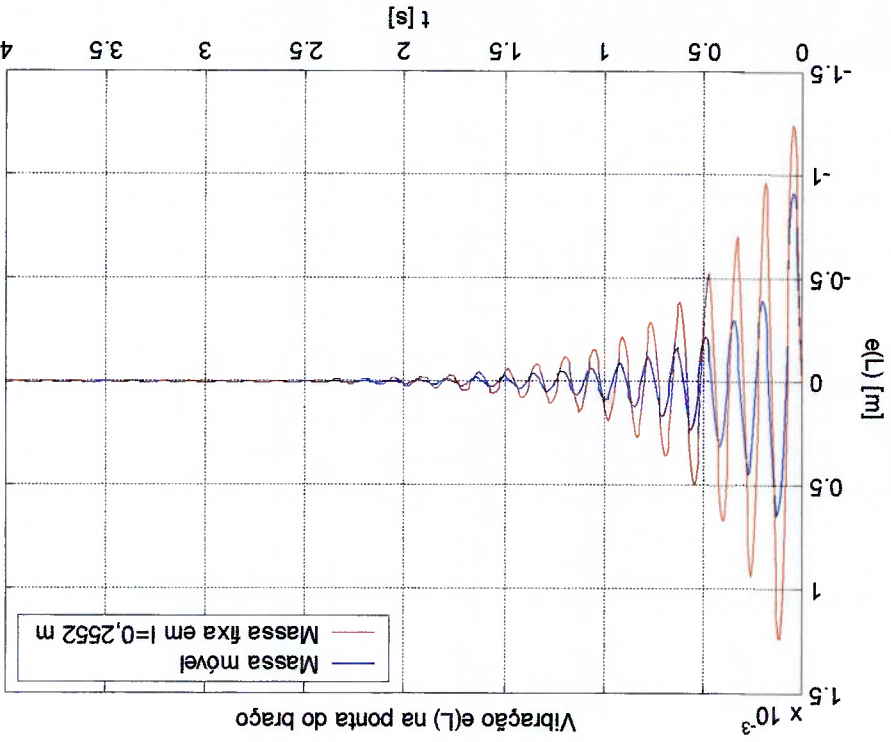


Figura 29 - Caso 3. Posição e velocidade angulares para o sistema controlado.

Figura 30 - Caso 3. Deslocamento da extremidade livre do braço.

Figura 32 - Caso 3. Torque aplicado ao cubo.

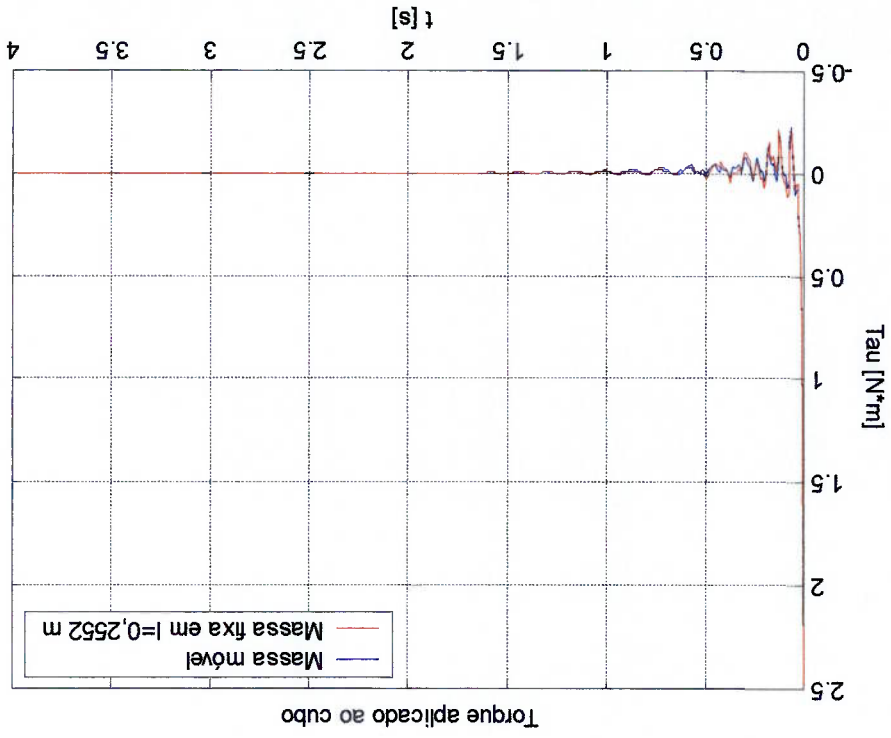


Figura 31 - Caso 3. Componentes da força aplicada no braço pela massa móvel.

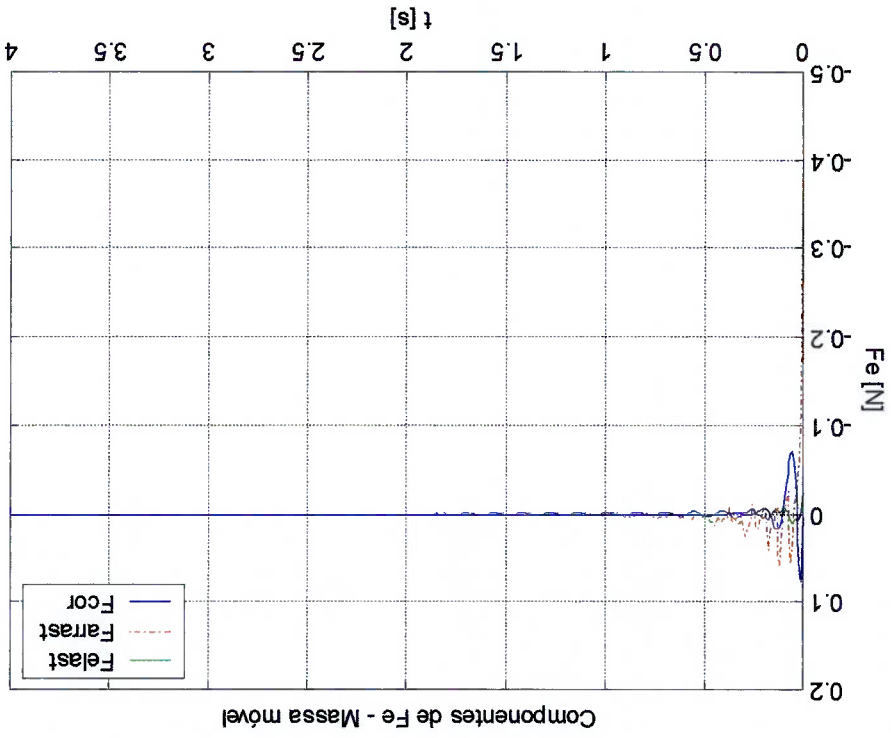


Figura 34 - Caso 3. η_2 e $d\eta_2/dt$.

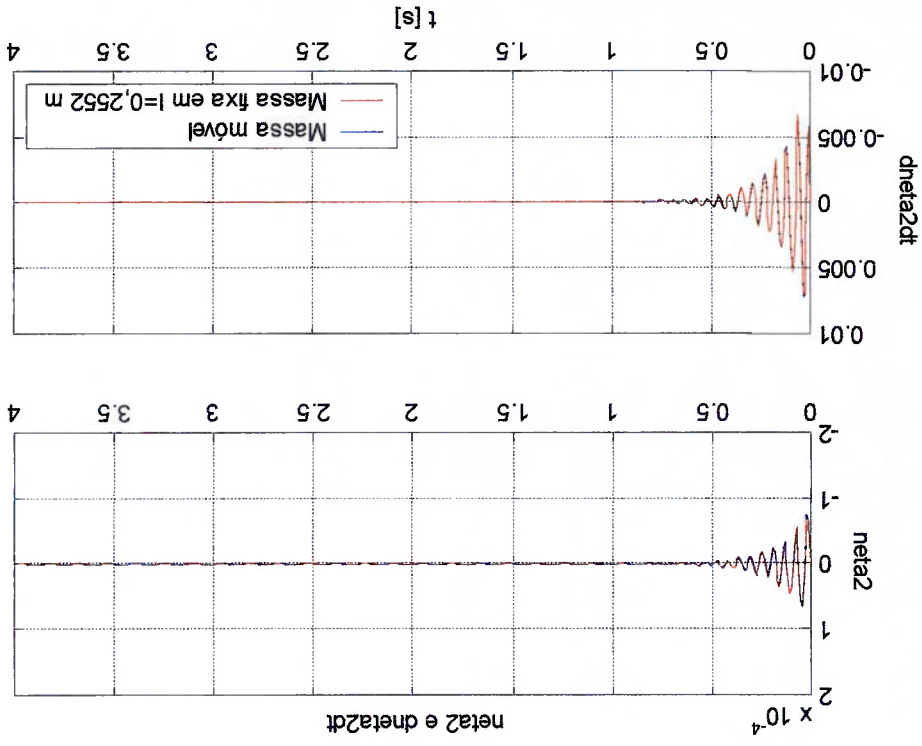
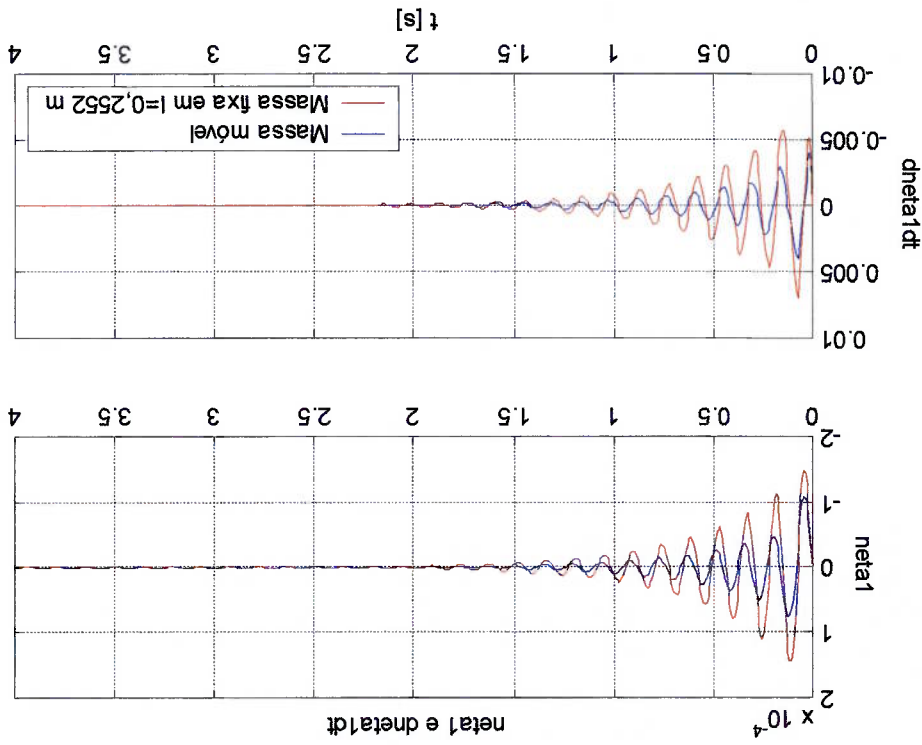


Figura 33 - Caso 3. η_1 e $d\eta_1/dt$.



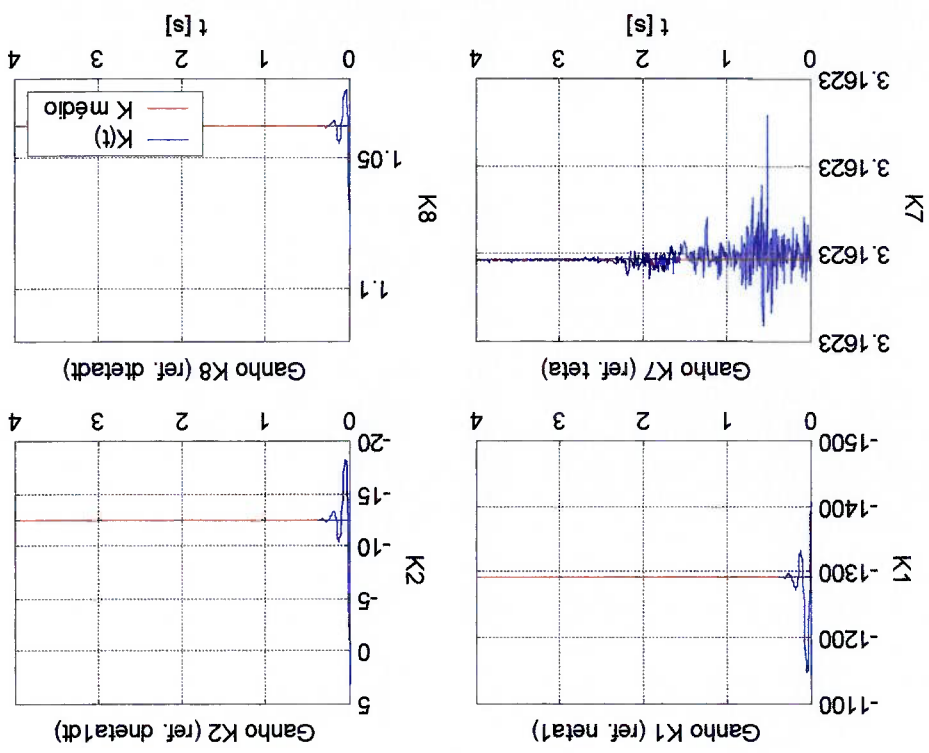


Figura 36 - Caso 3. Ganhos referentes a η_1 , $d\eta_1/dt$, θ e $d\theta/dt$.

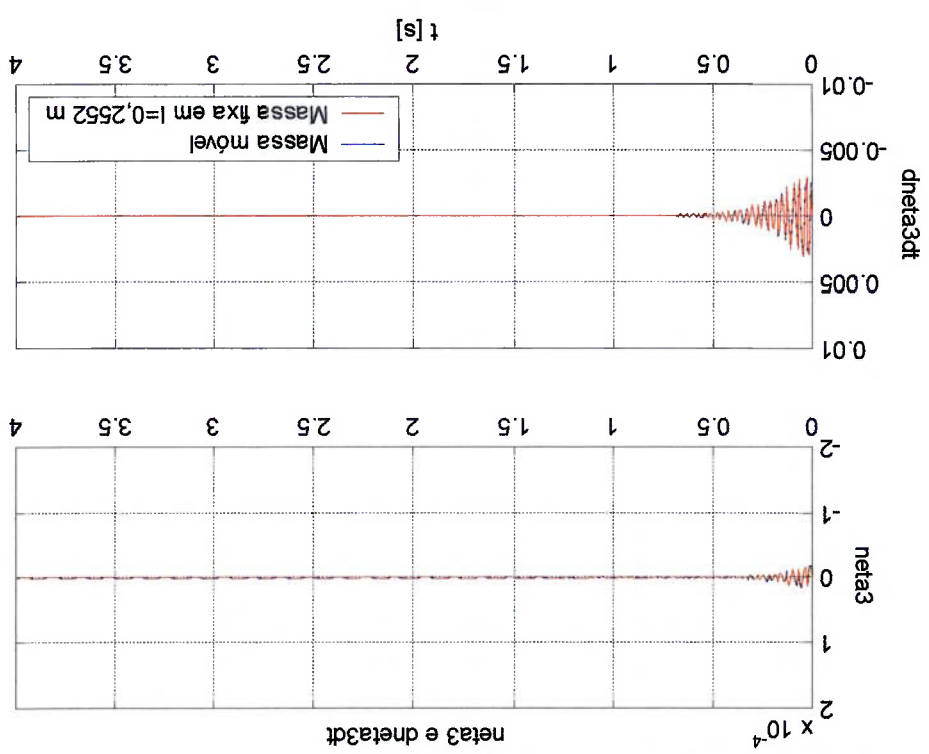


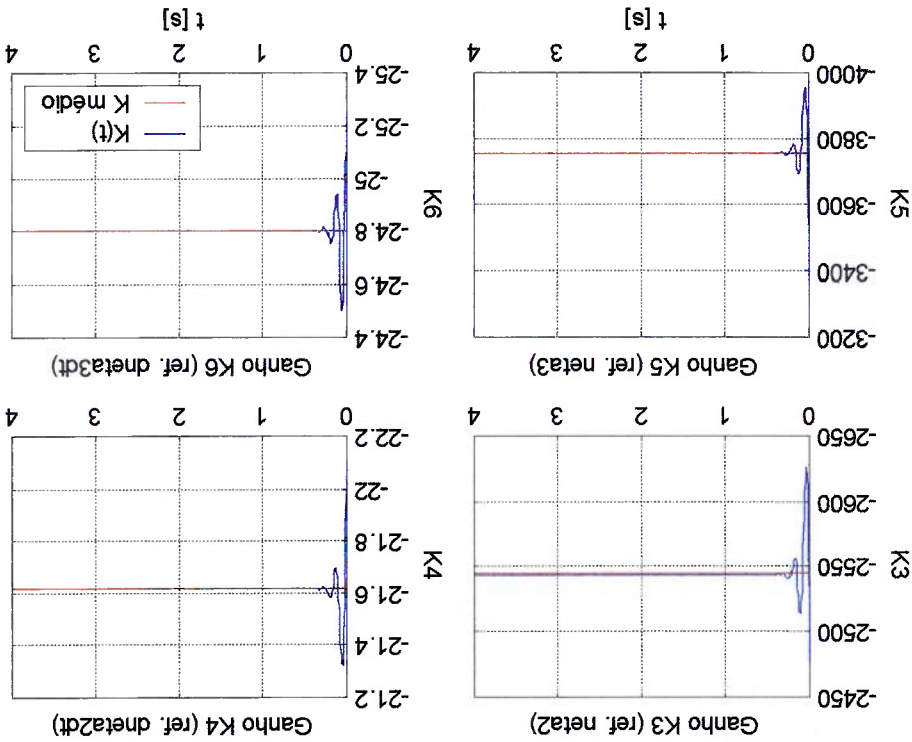
Figura 35 - Caso 3. η_3 e $d\eta_3/dt$.

Tabela 4 - Caso 3. Média e desvio padrão do ganho K.

	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅	K ₆	K ₇	K ₈
K médio	-1293,0	-12,5	-2544,8	-21,6	-3756,0	-24,8	3,2	1,0
Desvio padrão	16,5	1,1	9,0	0,0	29,1	0,0	0,0	0,0
DP %	1,3	9,1	0,4	0,2	0,8	0,2	0,0	0,3

Figura 36 e Figura 37 indicam a variação dos ganhos ao longo do. A Tabela 4 expressa os valores médios e o desvio padrão absoluto e percentual para o caso em questão. Como a massa rapidamente atinge uma posição de repouso, as matrizes de estado e de controle tornam-se constantes. Conseqüentemente, também os ganhos deixam de variar, convergindo para um valor médio. Esse resultado sugere o emprego de um controlador com ganho médio constante, igual ao indicado na Tabela 4.

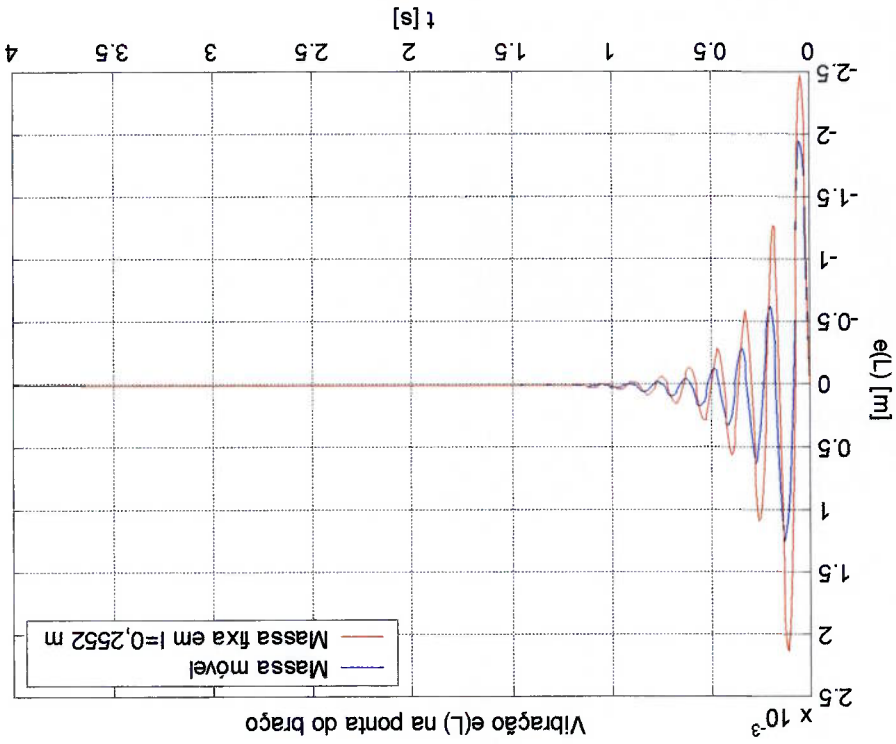
Figura 37 - Caso 3. Ganhos referentes a η_2 , $d\eta_2/dt$, η_3 e $d\eta_3/dt$.



5.4.4.4 Caso 4: Efeito do aumento e da redução da massa acoplada

No intuito de estabelecer quais parâmetros físicos poderiam resultar em melhores resultados, em termos de redução dos picos de vibração e de tempo crítico, simularam-se casos com massas acopladas maiores e menores que a indicada na Tabela 1, empregada nas simulações anteriores.

A Figura 38 ilustra a vibração na extremidade livre do braço quando a massa acoplada é de 0,02 kg. A massa descreve o mesmo movimento periódico atenuado do Caso 3, indicado na Figura 28. Comparando o resultado com o indicado na Figura 30, observa-se o aumento dos picos de vibração e uma diminuição do tempo crítico, de 2 para 1 s.



A Figura 39 ilustra a vibração na extremidade livre do braço para uma massa acoplada de 0,005 kg. Pode-se notar a redução das amplitudes de vibração e o aumento do tempo crítico, de 2 para cerca de 4 s.

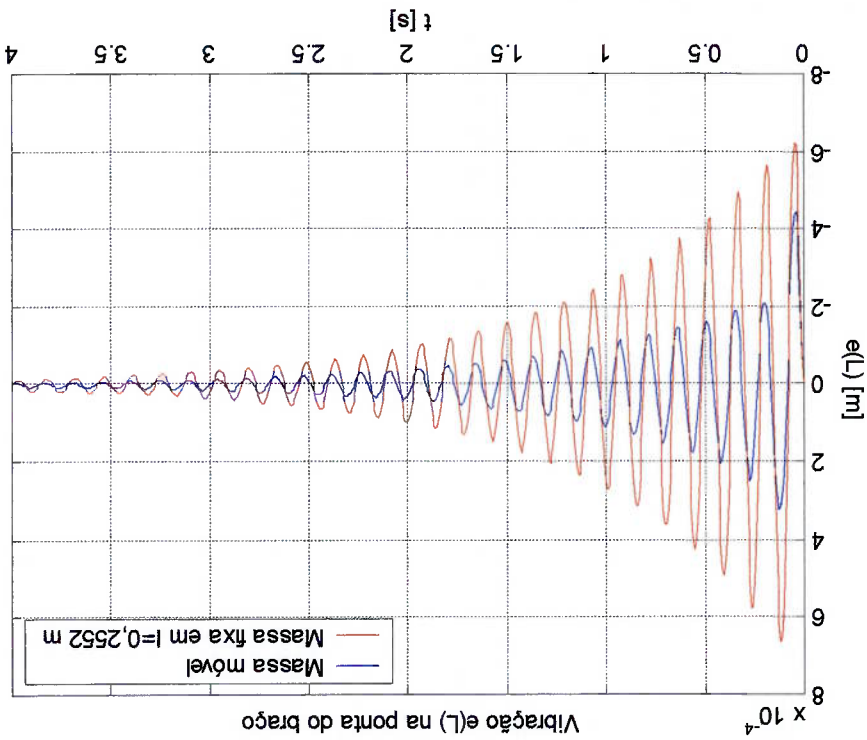


Figura 39 - Caso 4, $M = 0,005$ kg. Deslocamento da extremidade livre do braço.

5.4.4.5 Caso 5: Efeito da posição inicial da massa

O ponto de partida e a posição em torno da qual a massa oscila são outros parâmetros a serem verificados na estratégia de controle de vibrações. Outros três casos foram simulados: no primeiro, a massa oscila em torno do nó do primeiro, $l_{no} = 0,5044$ m; no segundo, em torno de um ponto $x = 0,3556$ m, escolhido arbitrariamente entre l_{no} e l_{no} , por fim, nas proximidades da extremidade livre do braço.

Figura 40 a Figura 45 ilustram a vibração da extremidade livre do braço para posições iniciais distintas da massa. A massa móvel é de 0,01 kg.

Figura 41 - Caso 5, $l_0 = 0,3556$ m. Deslocamento da extremidade livre do braço.

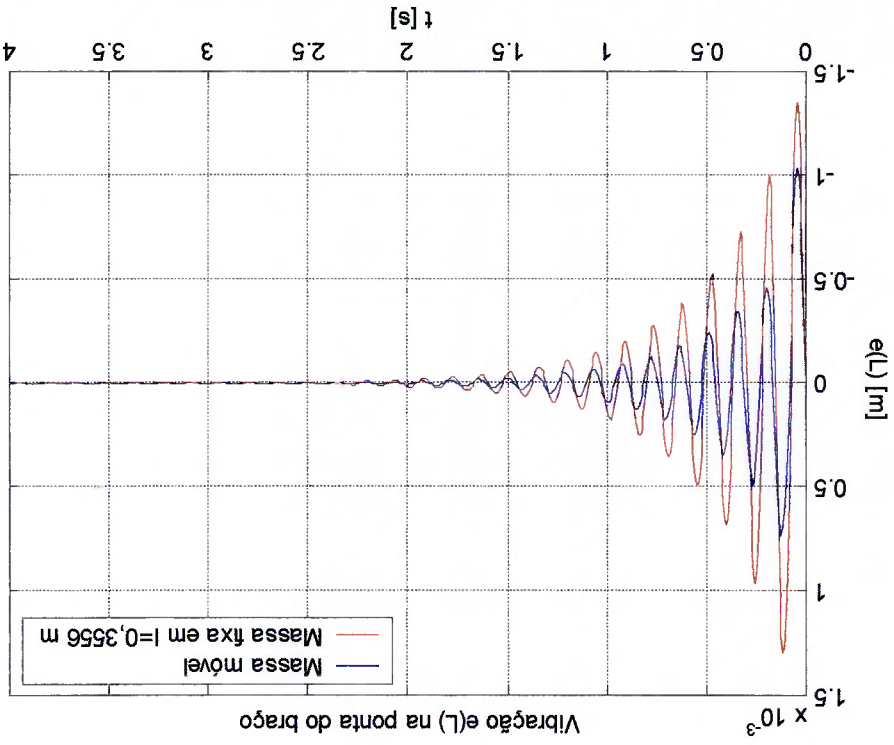


Figura 40 - Caso 5, $l_0 = 0,3556$ m. Posição e velocidade angulares do braço.

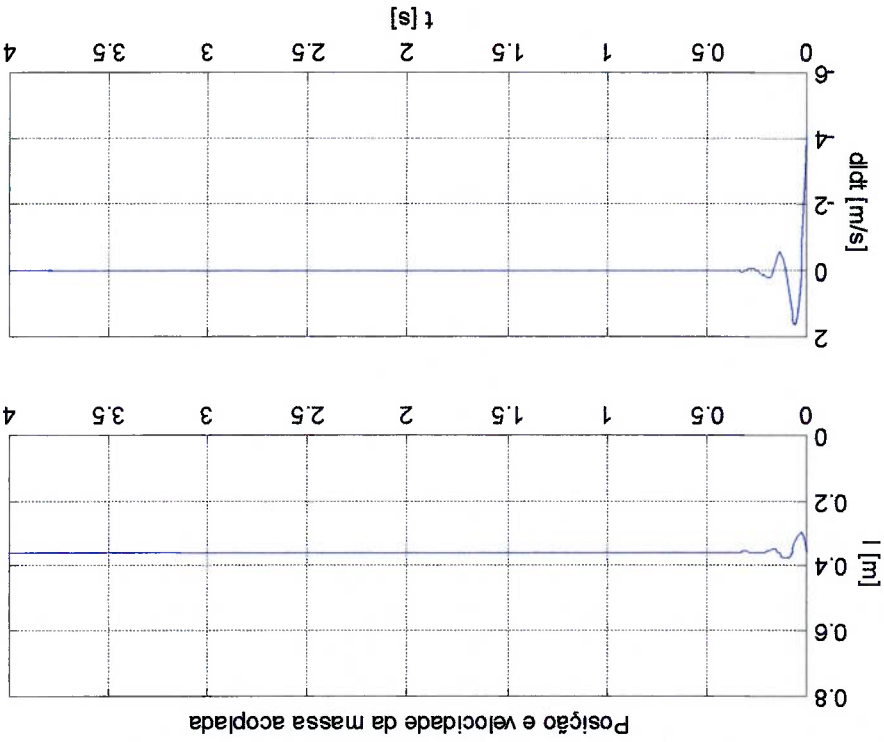


Figura 43 - Caso 5, $l_0 = l_{n0} = 0,5044$ m. Deslocamento da extremidade livre do braço.

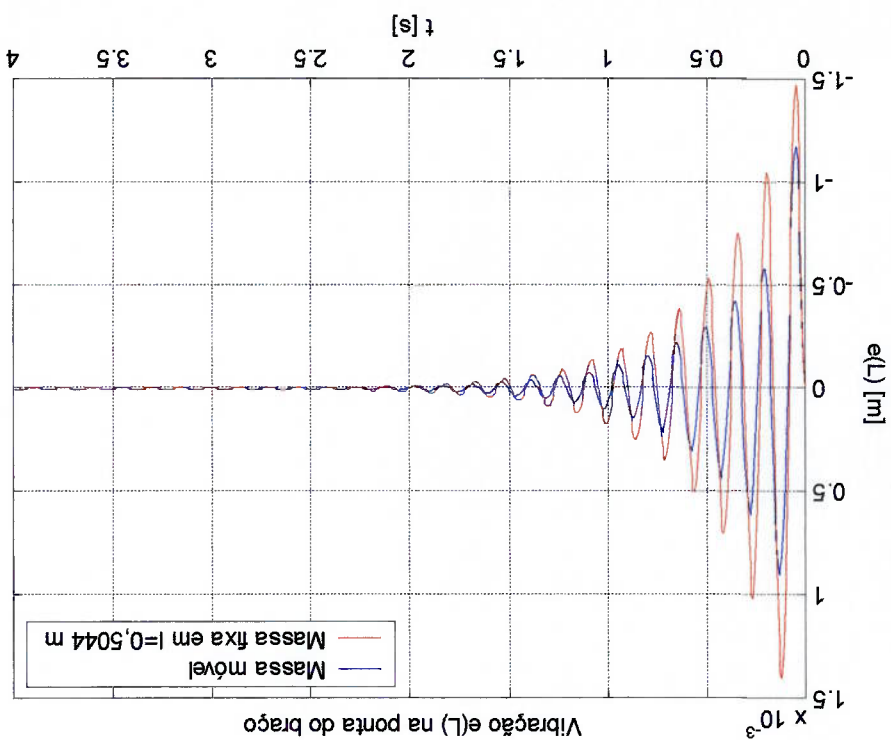
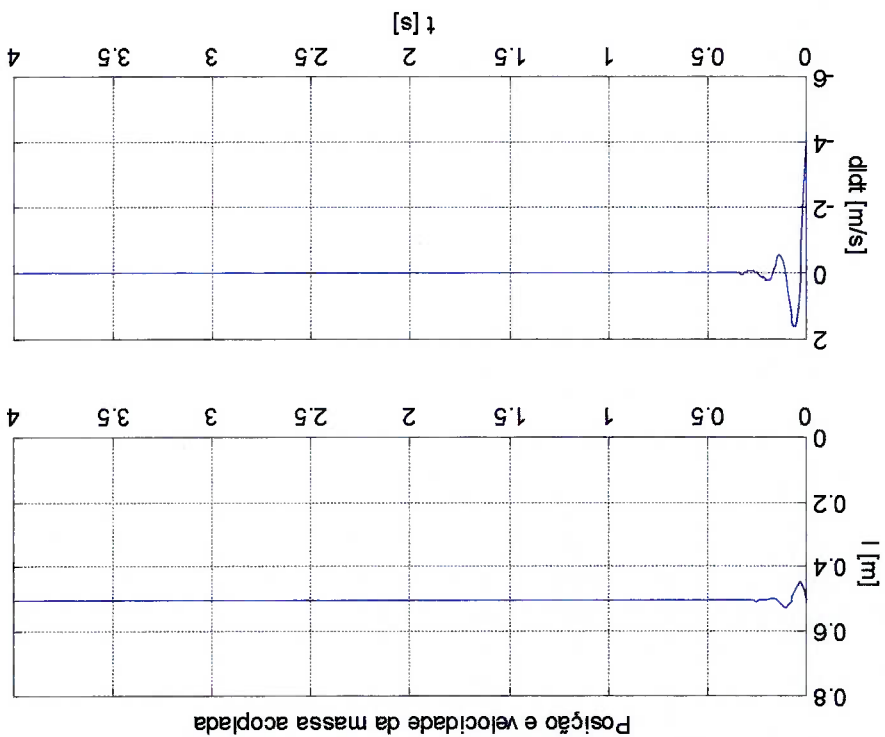


Figura 42 - Caso 5, $l_0 = l_{n0} = 0,5044$ m. Posição e velocidade angulares do braço.



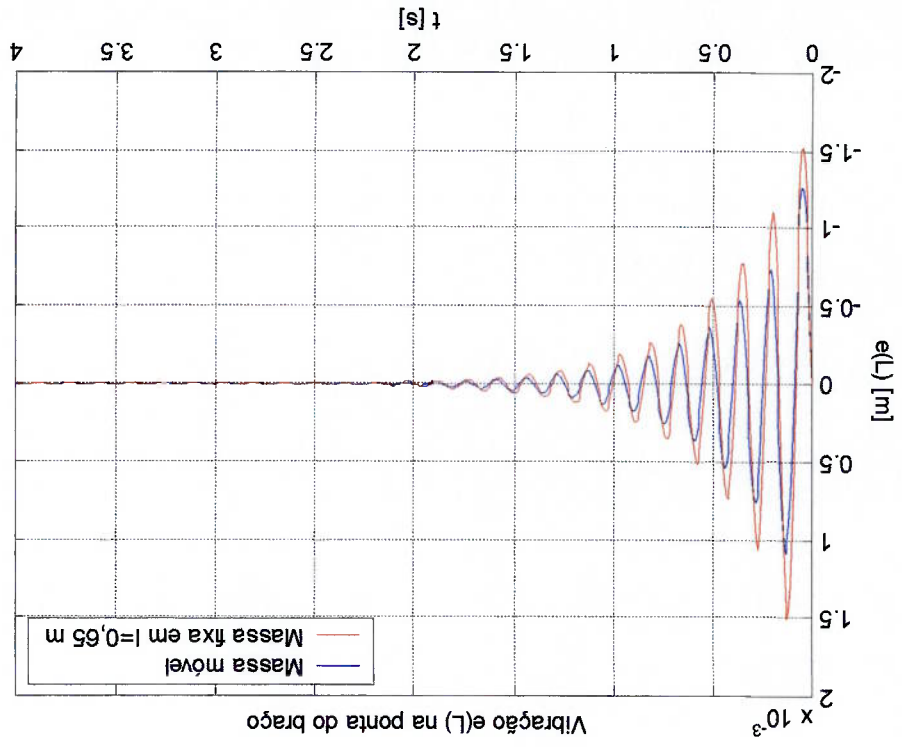


Figura 45 - Caso 5, $l_0 = 0,65$ m. Deslocamento da extremidade livre do braço.

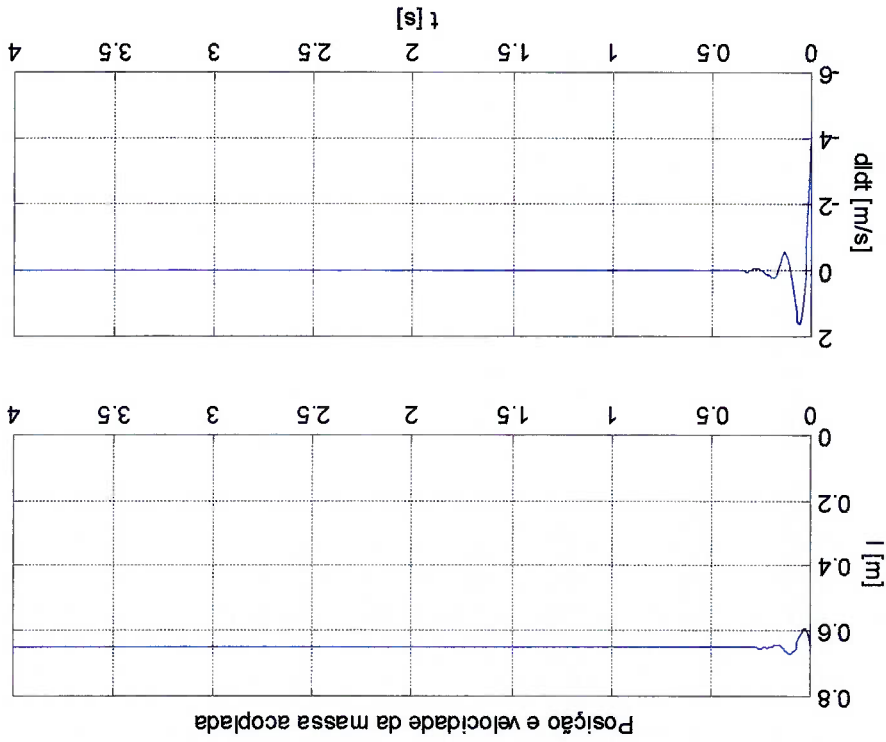


Figura 44 - Caso 5, $l_0 = 0,65$ m. Posição e velocidade angulares do braço.

Pode-se inferir, pela análise das simulações apresentadas, que:

1º) de um modo geral, o ponto central em torno do qual a massa oscila influi pouco no tempo de amortecimento. E o que permitem concluir os Casos 3 e 5. Em todos eles o tempo crítico é de cerca de 2 s;

2º) observa-se também que, quanto mais próxima da extremidade livre se dá a oscilação da massa, maiores são as amplitudes de vibração induzidas. Esse resultado sugere empregar, com vistas ao controle de vibração, um movimento oscilatório atenuado da massa móvel, com posição central em $l^{max} = 0,2552$ m, ponto de máxima oscilação do primeiro modo, de tal modo que a força de Coriolis aplicada ao braço atue na região intermediária do mesmo e em oposição de fase com a primeira variável generalizada η_1 .

Capítulo 6

Controle Ótimo do Movimento da Massa sobre o Braço

Conforme se observa na equação (188), o modelo dinâmico do sistema, no caso de uma manobra pré-especificada da massa móvel, é linear, já que os termos das matrizes $A(t)$ e $B(t)$ são conhecidos. Nesse caso é possível estabelecer uma estratégia de controle sub-ótimo, utilizando como variável de controle o torque τ aplicado ao cubo. O modelo de estado resultante possui $2p+2$ equações, $2p+2$ variáveis de estado e uma variável de controle, sendo p o número de modos considerados. Essa primeira abordagem foi tratada no Capítulo 5.

Uma segunda abordagem para o problema de controle consiste em empregar o movimento da massa no controlador. Uma força F aplicada à massa, conforme ilustrado na Figura 3, é usada como uma segunda variável de controle. Pela segunda lei de Newton, essa força, tangencial ao braço no ponto l , é igual

$$F = M \cdot a_n(l) \quad (211)$$

onde $a_n(l)$ é a componente tangencial da aceleração da massa no referencial inercial (OXYZ), deduzida na Seção 4.2. Nesse caso, o modelo descrito por (77), (172) e (179) torna-se não-linear. Observam-se nessas equações duas fontes de não-linearidade:

1ª) alguns termos, tais como os produtos do tipo $l \cdot \frac{dl}{dt} \cdot \phi'(l)$, tornam não-linear o

sistema, já que l e $\frac{dl}{dt}$ deixam de ser parâmetros e passam a ser variáveis de estado;

2°) $\phi_r(x)$ é por definição uma função não-injetora de x , como se observa em (102).

Conseqüentemente, a matriz $[S]^{p \times p}$, definida em (170), é não-injetora de l , o que aumenta a não-linearidade do sistema.

A Figura 46 ilustra o valor dos elementos da matriz $[S]^{3 \times 3}$ para cada ponto x ao

longo do braço, conforme as equações (170) e (171), para o sistema descrito na Seção 5.4. Observa-se que $[S]^{p \times p}$ é uma função não-injetora da posição da massa móvel l .

Assim, para um movimento pré-especificado da massa acoplada, a matriz $[S]^{p \times p}$ é

conhecida em qualquer instante de tempo, já que a posição l é conhecida. O problema inverso - determinar uma posição ótima ou sub-ótima que atenda algum requisito de

otimização para o controlador - não é imediato, já que a cada valor de $[S]^{p \times p}$

corresponde mais de uma posição l .

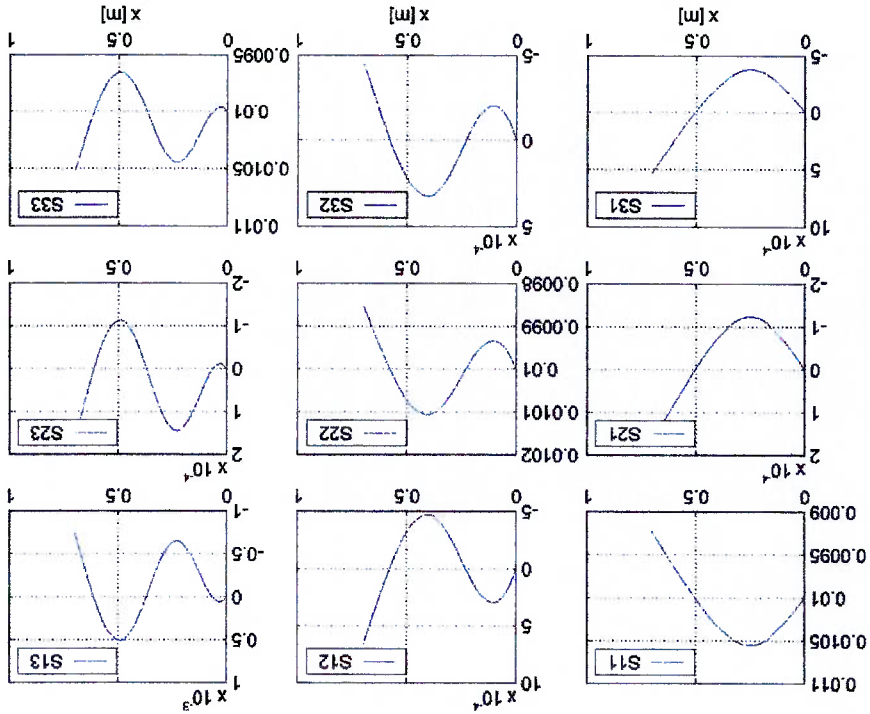


Figura 46 - Matriz $[S]^{3 \times 3}$. Massa móvel de 0,01 kg.

Assim, se o movimento da massa é empregado no controle das vibrações geradas durante uma manobra, visando a redução do tempo crítico e atenuação das amplitudes, o modelo torna-se não-linear. Essa segunda abordagem requer, portanto, um estudo de natureza bem diversa do tratado no capítulo anterior.

6.1 Controle Ótimo

A otimização de um dado critério de desempenho de um sistema corresponde, na maioria dos casos, a um problema de minimização da energia do sistema, o que envolve a minimização de uma integral no tempo. A parte da Matemática que estuda mínimo de integrais no tempo chama-se Cálculo Variacional. A essa área está ligado o Problema do Controle Ótimo (PCO), como um de seus ramos. Citron (1969), por exemplo, trata detalhadamente de Problemas de Controle Ótimo (*Optimal Control Problem*) em seu texto.

O Problema do Controle Ótimo de um sistema descrito por n variáveis de

estado e m variáveis de controle

$$(212) \quad \begin{matrix} \left. \begin{matrix} x_n \\ \vdots \\ x_2 \\ x_1 \end{matrix} \right\} = x(t) \\ e \quad \left. \begin{matrix} u_m \\ \vdots \\ u_2 \\ u_1 \end{matrix} \right\} = u(t) \end{matrix}$$

consiste na minimização de uma função objetivo

$$(213) \quad J = g[t_f, x(t_f)] + \int_{t_0}^{t_f} L(t, x, u) dt$$

sujeita a n vínculos dinâmicos

sistema

estabelece que o controle ótimo u^* , dado por (217), maximiza o hamiltoniano do O Princípio do Máximo de Pontryagin, apresentado por Citron (1969), que minimiza a função objetivo (213).

$$\frac{dx^*}{dt} = f(x^*, u^*, t) \quad (218)$$

gera uma solução ótima do problema de valor inicial

$$u^* = u^*(t) \quad (217)$$

A solução do PCO,

$$C[x, u, t] \leq 0 \quad e \quad S[x, t] \leq 0 \quad (216)$$

deve estar presentes, sendo descritos por nas variáveis de controle e de estado, ou vínculos de restrição de trajetória, também onde t_i e t_f indicam os instantes inicial e final do problema. Vínculos de desigualdade

$$\psi [t_i, t_f, x(t_i), x(t_f)] = 0 \quad \psi = \begin{cases} \psi^1 \\ \psi^2 \\ \vdots \\ \psi^b \end{cases} \quad (215)$$

e a q (q > 2n+2) vínculos de contorno

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t) \quad (214)$$

$$H(t, x, n) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f_j - L(t, x, n) \quad (219)$$

A abordagem de Pontryagin ao problema de Controle Ótimo é desenvolvido através de Geometria Diferencial e gera os mesmos resultados do Cálculo Variacional.

Diversos métodos numéricos para a resolução de problemas de controle ótimo

têm sido estudados. Entre eles destaca-se a Teoria das Aproximações Consistentes, que vem sendo desenvolvida por Polak e seus colaboradores⁵. Consiste em discretizar o

Problema do Controle Ótimo através de uma representação da dinâmica do sistema em um espaço discreto, integrando-se numericamente as equações diferenciais com algum

método de Runge-Kutta de passo fixo (a integração de passo variável também é possível). As variáveis de controle são representadas em termos dos coeficientes de

funções *splines*. Uma versão discretizada da função objetivo é minimizada empregando

rotinas de programação não-linear, entre elas o SQP (*sequential quadratic programming*). Uma vez obtida a solução do problema de otimização, os controles

encontrados são introduzidos no sistema dinâmico, que é novamente integrado pelo método de Runge-Kutta, obtendo um novo problema de otimização. O processo

iterativo prossegue até que as condições otimalidade sejam satisfeitas dentro de uma tolerância especificada.

Uma das variantes do método é estudada e implementada por Schwartz (1996), e encontra-se disponível na forma de um *toolbox* para o Matlab, chamado RIOTS_95 (*Recursive Integration Optimal Trajectory Solver*). O funcionamento do RIOTS_95 é descrito por Schwartz, Polak & Chen (1997). O pacote permite a resolução de uma ampla gama de problemas de controle ótimo, inclusive com vínculos terminais, de

trajetória e de desigualdade nas variáveis de estado e de controle. Maiores detalhes podem ser encontrados no trabalho de Meneqaldo (2000).

6.2 Modelo de estado e formulação do Problema de Controle Ótimo

6.2.1 Modelo com um número arbitrário de autofunções

No caso de um modelo com número p arbitrário de autofunções, definem-se as

variáveis de estados e de controle

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \eta_1 & \dot{x}_1 &= \eta_1 \\
 x_2 &= \eta_2 & \dot{x}_2 &= \eta_2 \\
 & \vdots & & \vdots \\
 x_4 &= \eta_4 & \dot{x}_4 &= \eta_4 \\
 & \vdots & & \vdots \\
 x_{2p+2} &= \theta & \dot{x}_{2p+2} &= \theta \\
 x_{2p+4} &= l & \dot{x}_{2p+4} &= l \\
 x_{2p+6} &= n & \dot{x}_{2p+6} &= n
 \end{aligned}
 \tag{220}$$

Então, de (177), (172) e (179) decorre que, para p modos,

⁵ Vide Polak (1993) e Schwartz & Polak (1996).

Para essa abordagem inicial, optou-se pela redução do sistema ao seu primeiro modo, que é, logicamente, o mais importante no comportamento elástico do conjunto. Soluções numéricas de problemas de Controle Ótimo são suficientemente complicadas para intentar incluir todos os modos no primeiro estudo.

6.2.2 Modelo com uma única autofunção

$$S^r = \left. \begin{array}{l} \text{para } r \neq s \\ \text{para } r = s \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{1 + \sum_p^{l=1} \left[M \cdot \phi'_l(x^{(2p+3)}) \cdot \int_r \phi'_l dx \right]}{-M^2 \cdot \int_r \phi'_l dx \cdot \phi'_s(x^{(2p+3)})} \\ \frac{1 + \sum_p^{l=1} \left[M \cdot \phi'_l(x^{(2p+3)}) \cdot \int_r \phi'_l dx \right]}{M + M \cdot \sum_p^{l=1, l \neq r} \left[M \cdot \phi'_l(x^{(2p+3)}) \cdot \int_r \phi'_l dx \right]} \end{array} \quad (222)$$

com $r = 1, 2, \dots, p$. Os termos S^r , dados por (171), podem ser reescritos como

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx^{(2p+4)}}{dt} = \frac{M}{n_2} + x_2^{(2p+2)} \cdot x^{(2p+3)} \\ \frac{dx^{(2p+3)}}{dt} = x^{(2p+4)} \\ \frac{dx^{(2p+2)}}{dt} = \frac{J^B + J^C + M \cdot x_2^{(2p+3)}}{1} \cdot \left\{ \sum_p^{r=1} \sum_p^{s=1} \left[\phi'_r(x^{(2p+3)}) \cdot S^r \cdot \left. \frac{dx}{d\phi'_s} \right|_{x=0} \cdot x^{(2p+3)} \cdot n_1 \right] + \right. \\ \left. + 2 \cdot M \cdot \left\{ \sum_p^{r=1} \sum_p^{s=1} \left[\phi'_r(x^{(2p+3)}) \cdot S^r \cdot \int_r \phi'_s dx \right] - 1 \right\} \cdot x^{(2p+2)} \cdot x^{(2p+3)} \cdot x^{(2p+4)} + \right. \\ \left. \frac{dx^{(2p+1)}}{dt} = x^{(2p+2)} \cdot \left[S^{(2r-1)r} \cdot \sum_p^{s=1} \frac{M}{1} \cdot \left(-\omega_2^s \cdot x^{(2s-1)} - 2 \cdot M \cdot \int_r \phi'_s dx \cdot x^{(2p+2)} \cdot x^{(2p+4)} \right) \cdot \left. \frac{d\phi'_s}{dx} \right|_{x=0} \cdot n_1 \right] \end{array} \right\} \quad (221)$$

Dessa forma, definindo as variáveis de estado e de controle através de

$$(223) \quad \begin{aligned} x_1 &= \eta_1 & \dot{x}_1 &= \eta_2 \\ x_2 &= \frac{d\eta_1}{dt} & \dot{x}_2 &= \eta_3 \\ x_3 &= \theta & \dot{x}_3 &= \eta_4 \\ x_4 &= \frac{d\theta}{dt} & \dot{x}_4 &= \eta_5 \\ x_5 &= \frac{d\theta}{dt} & \dot{x}_5 &= \eta_6 \\ x_6 &= \frac{d\theta}{dt} & \dot{x}_6 &= \eta_7 \\ x_7 &= F & \dot{x}_7 &= \eta_8 \end{aligned}$$

recai-se num problema com seis variáveis de estado e duas variáveis de controle. Para manter a consistência com os casos estudados anteriormente, a função objetivo a ser minimizada é definida, na sua forma geral, pelos termos quadráticos

$$(224) \quad J = \int_0^T \left(\sum_{i=1}^6 Q_i \cdot x_i^2 + \sum_{j=1}^2 R_j \cdot u_j^2 \right) dt$$

que deve se minimizada sujeita aos vínculos dinâmicos

$$(225) \quad \left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= S_{11} \cdot \left(-\omega_2 \cdot x_1 - 2 \cdot M \cdot \int_0^t \phi_1 dx_4 \cdot x_4 \cdot x_5 + \left. \frac{dx_6}{dt} \right|_{x=0} \cdot n_1 \right) \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_4 \\ \frac{dx_4}{dt} &= \frac{J^a + J^b + J^c + M \cdot x_2 \cdot \phi_1(x_5) \cdot S_{11} \cdot \omega_2 \cdot x_1 \cdot x_5 + \left. \frac{dx_6}{dt} \right|_{x=0} \cdot n_1 \cdot \left[1 - \phi_1(x_5) \cdot S_{11} \cdot \int_0^t \phi_1 dx_4 \cdot x_4 \cdot x_5 + \left. \frac{dx_6}{dt} \right|_{x=0} \cdot n_1 \cdot \left[1 - \phi_1(x_5) \cdot S_{11} \cdot \int_0^t \phi_1 dx_4 \cdot x_4 \cdot x_5 + \left. \frac{dx_6}{dt} \right|_{x=0} \cdot n_1 \right] \right]}{1} \\ \frac{dx_5}{dt} &= x_6 \\ \frac{dx_6}{dt} &= \frac{M}{n_2} + x_7 \end{aligned} \right\}$$

$$J = \int_0^L \tilde{O}^{11} \cdot x_2^1(L) dt \quad (229)$$

Finalmente, a figura de mérito utilizada para geração do controle ótimo tem a ver com o deslocamento na extremidade livre do braço. A inclusão de outros termos pouco significativo. Com isso, pode-se definir a índice de desempenho como

$$0 \leq l \leq L \quad (228)$$

Um único vínculo de trajetória será considerado: o espaço físico de movimentação da massa, restrito pelo cubo em $l = 0$ e pelo comprimento do braço, $l = L$. Daí,

$$\begin{aligned} x_1(0) &= \eta_1(0) = 0 & x_2(0) &= \frac{d\eta_1}{dt}(0) = 0 \\ x_3(0) &= \theta(0) = 0 & x_4(0) &= \frac{d\theta}{dt}(0) = 0 \\ x_5(0) &= l(0) = l_0 & x_6(0) &= \frac{dl}{dt}(0) = 0 \\ x_7(0) &= \theta(0) = 0 & x_8(0) &= \frac{d\theta}{dt}(0) = 0 \\ x_9(0) &= \theta(0) = 0 & x_{10}(0) &= \frac{d\theta}{dt}(0) = 0 \end{aligned} \quad (227)$$

Os vínculos de contorno são

$$S_{11} = \frac{1 + M \cdot \phi_1(x_5) \cdot \int_0^L \phi_1 dx}{M} \quad (226)$$

O parâmetro S_{11} também é função de x_5 :

6.3 Simulação computacional no RIOTS_95

6.3.1 Parâmetros físicos e de discretização

Dois valores de massa foram examinados: 0,01 kg e 0,005 kg. Os demais parâmetros são os mesmos usados na simulação do caso linear, indicados na Tabela 1. Os parâmetros físicos considerados, portanto, são os indicados na Tabela 5.

Comprimento do braço [m]	$L = 0,7$
Espessura do braço [m]	$h = 0,001$
Altura do braço [m]	$b = 0,0254$
Momento de inércia transversal do braço [m ⁴]	$I_B = 2,12 \cdot 10^{-12}$
Densidade volumétrica do braço (alumínio) [kg/m ³]	$\text{dens} = 2710$
Densidade linear de massa do braço (uniforme) [kg/m]	$\rho = 0,069$
Módulo de elasticidade do braço (alumínio) [Pa]	$E = 7,1 \cdot 10^{10}$
Massa acoplada [kg]	$M = 0,01$ ou $M = 0,005$
Momento de inércia do cubo [kg · m ²]	$J_C = 1,35 \cdot 10^{-4}$

Tabela 5 - Parâmetros físicos empregados na 2ª abordagem (SI).

A simulação realizada considera um vetor de tempo discretizado de 514 pontos. Admite-se em todos os casos testados que o tempo final t_f é fixo, igual a 4 s. Problemas de tempo final livre não foram examinados. Nenhum vínculo de restrição de controle foi considerado. Estudos sobre o valor ótimo da massa e de sua posição inicial ótima serão desenvolvidos *a posteriori*.

6.4.2. Controle inicial u_0

O RIOTS_95 parte de um controle inicial $u_0 = [t_0 F_0]$, representando-o em um espaço finito de *splines*. As rotinas de otimização empregam o método SQP de

programação não-linear para procurar o controle ótimo u^* que minimiza uma versão

discretizada da função objetivo.

O controle inicial u_0 é gerado no Simulink, considerando o sistema não-linear

indicado em (225). Compõem a entrada o torque τ_0 e a força F_0 dados por

$$(230) \quad \tau_0 = -K_{1 \times 4} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \eta \\ \frac{d\eta}{dt} \\ \theta \\ \frac{d\theta}{dt} \end{array} \right.$$

$$(231) \quad F_0 = M \cdot \left(\frac{d^2 l}{dt^2} - l \cdot \theta^2 \right)$$

$K_{1 \times 4}$ é o vetor de ganhos médios de um controlador LQ para planta linear variável no tempo, semelhante ao Caso 3, Seção 5.4.4.3, mas considerando apenas um modo.

O braço parte do repouso de uma posição inicial - 45°, e a massa, de $l = 0,3556$ m. As condições iniciais, portanto, são

$$(232) \quad \begin{aligned} \eta_1(0) &= \frac{d\eta}{dt}(0) = 0 & \theta(0) &= \theta_0 = -\frac{\pi}{4} \\ \eta_2(0) &= \frac{d\theta}{dt}(0) = 0 & l(0) &= l_0 = 0,3556 \\ \eta_3(0) &= \frac{d^2 l}{dt^2}(0) = 0 & \end{aligned}$$

A Figura 47 ilustra os vetores de torque e a força resultantes para uma massa $M = 0,01$ kg. A Figura 48 ilustra a planta do Simulink usada para gerar u_0 .

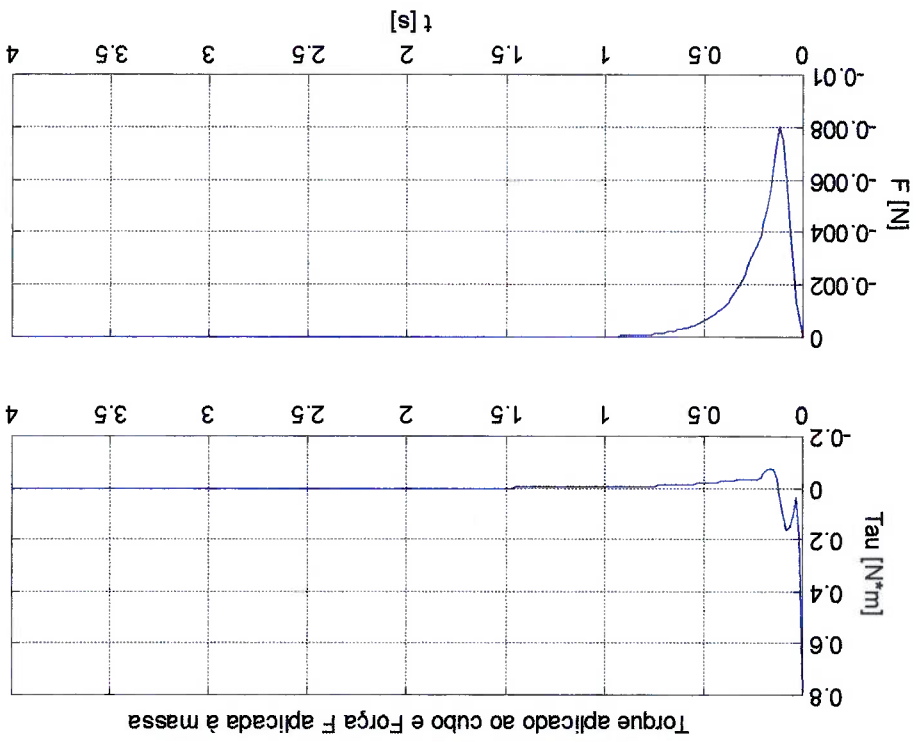


Figura 47 - Entrada inicial u_0 gerada no Simulink.

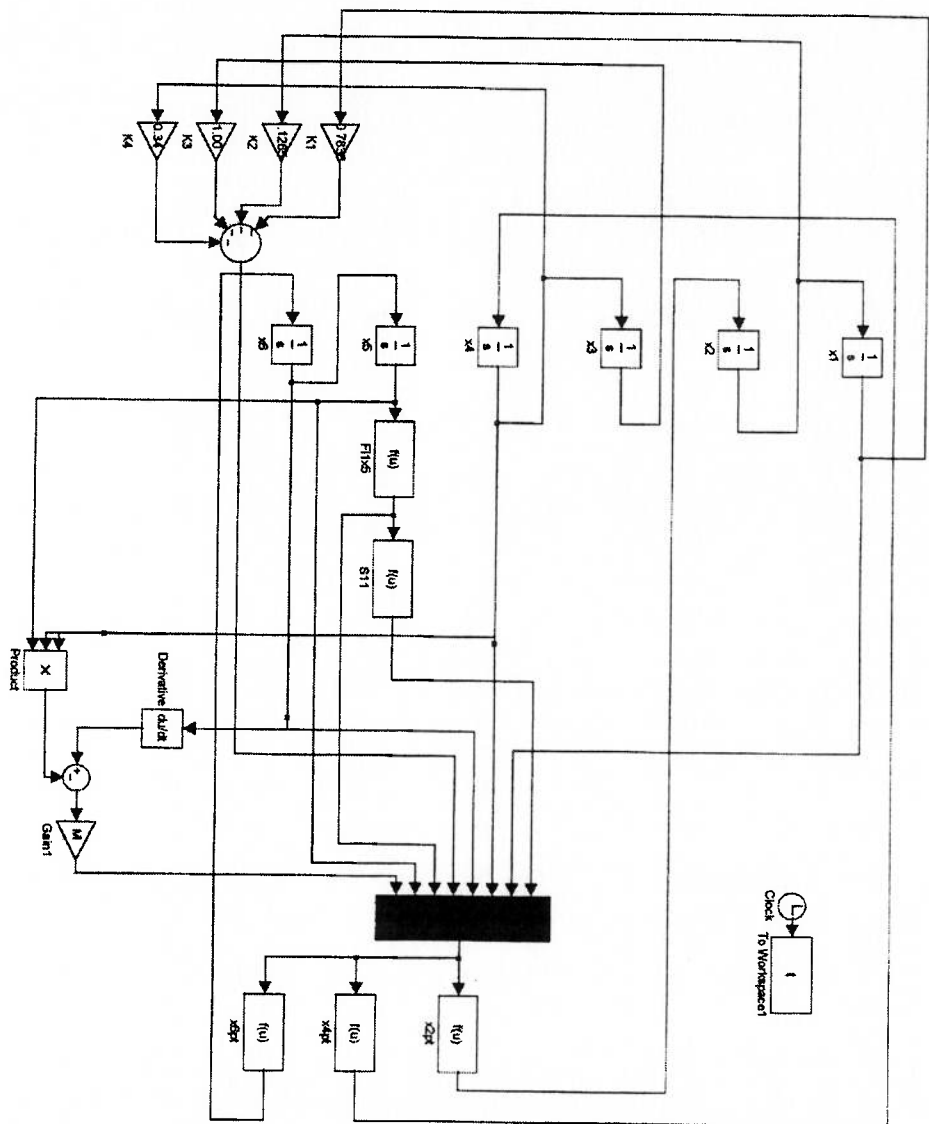


Figura 48 - Planta do Simulink para geração de u_0 .

Figura 50 - Caso 6, $M = 0,01$ kg. Força ótima e inicial aplicada à massa.

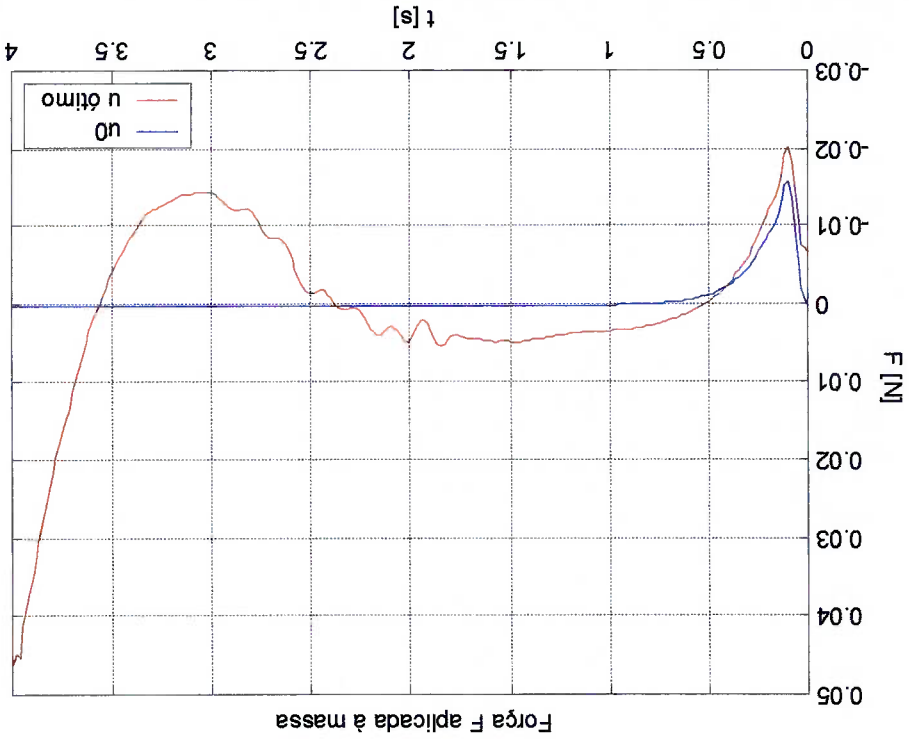
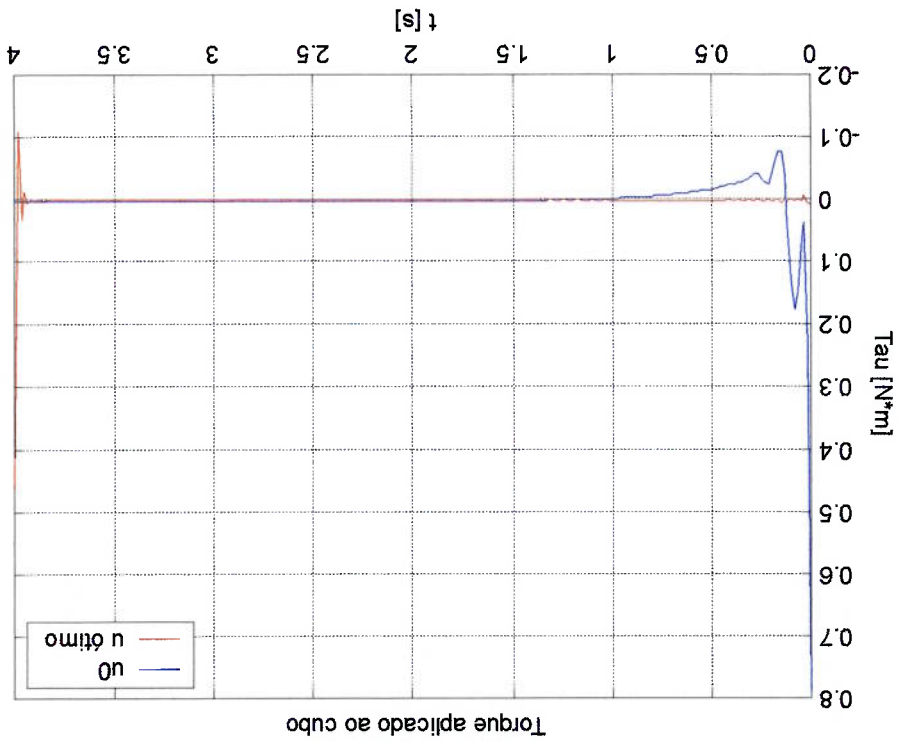


Figura 49 - Caso 6, $M = 0,01$ kg. Torque ótimo e inicial.



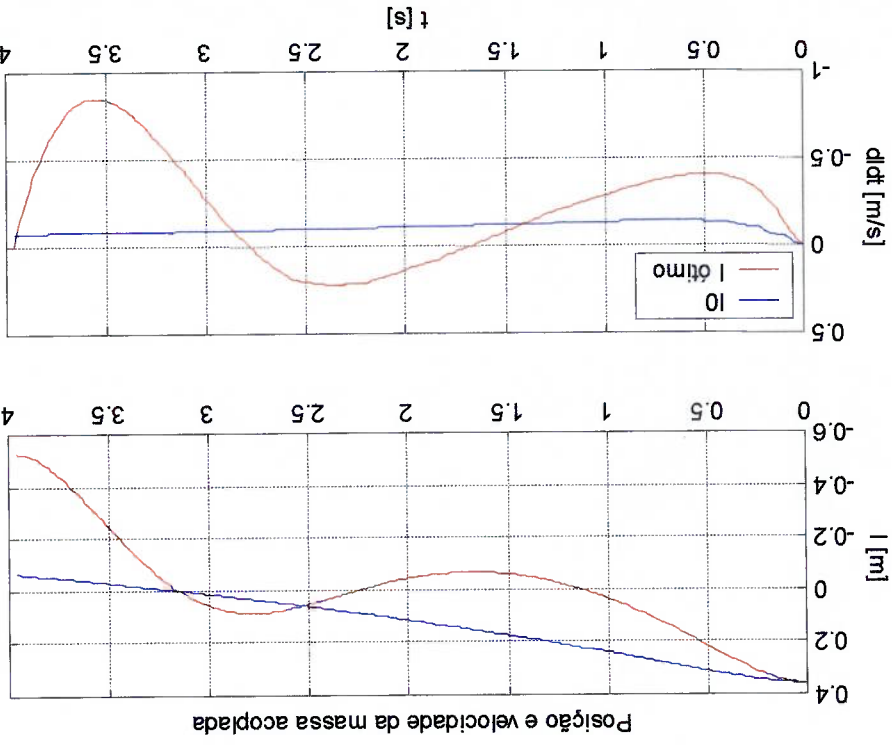


Figura 52 - Caso 6, $M = 0,01$ kg. Posição e velocidade da massa.

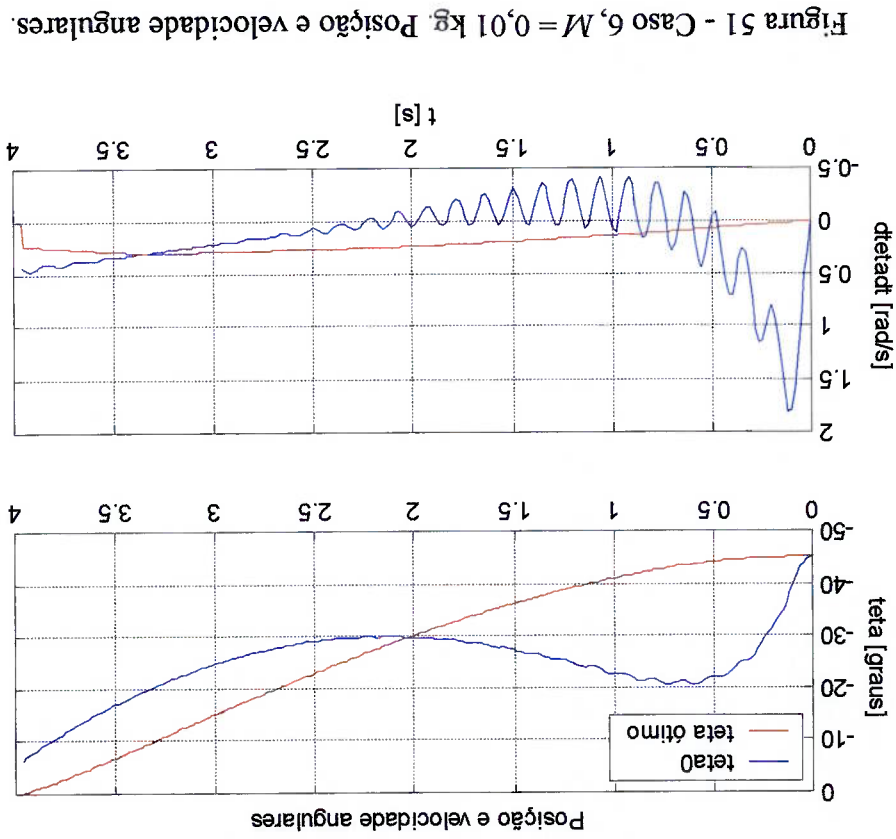


Figura 51 - Caso 6, $M = 0,01$ kg. Posição e velocidade angulares.

Figura 54 - Caso 6, $M = 0,01$ kg. Deslocamento da extremidade livre do braço (zoom).

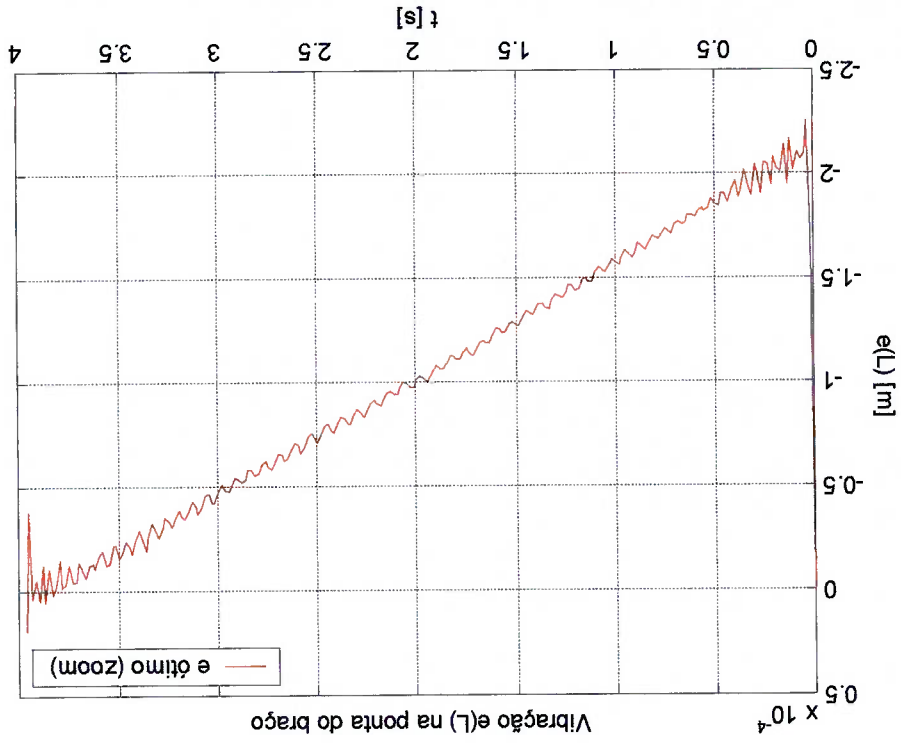
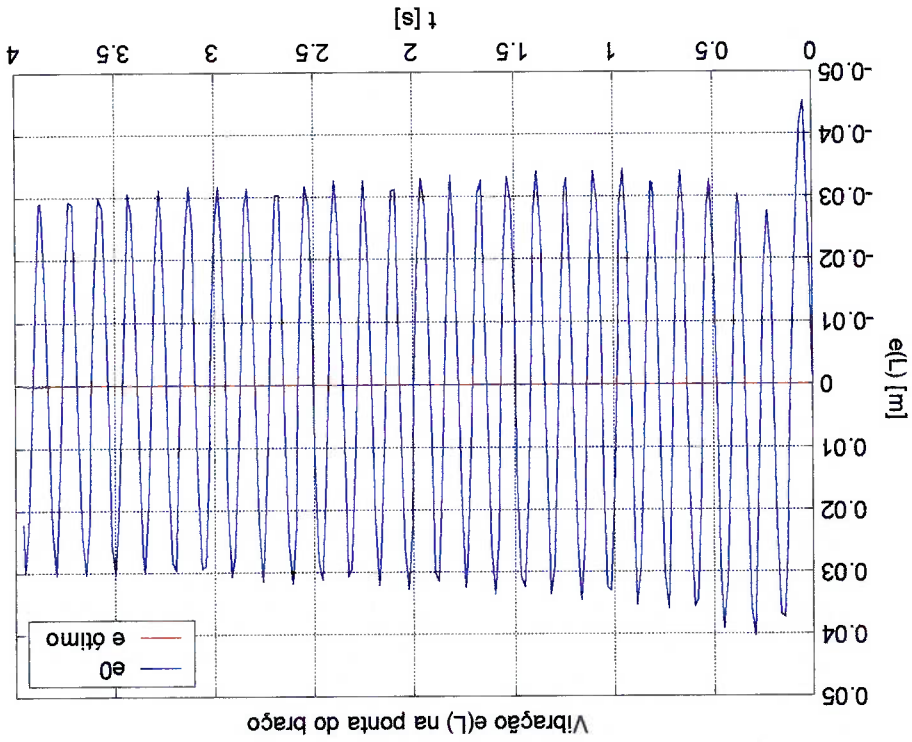


Figura 53 - Caso 6, $M = 0,01$ kg. Deslocamento da extremidade livre do braço.



Verifica-se na Figura 52 que o movimento da massa é bastante suave e que

ultrapassa o ponto $x = 0$, violando a restrição física $l \geq 0$, não considerada no problema. A oscilação da extremidade livre do braço é fortemente atenuada pelo controlador ótimo, para valores de torque e força relativamente pequenos. O movimento angular do braço é suave, pois o controlador emprega os 4 s de tempo de simulação para atingir a posição angular final.

O fato do movimento da massa praticamente anular as vibrações durante toda a manobra induz à questão de como devem ser projetados contrapesos em estruturas flexíveis, item que deverá ser tema de investigações futuras.

6.4.4 Caso 7: Controle com vínculos de restrição da trajetória da massa

Nesse caso os vínculos de restrição de trajetória expressos em (228) são considerados. Para uma massa $M = 0,01$ kg, o RIOTS_95 diverge após 93 iterações. Optou-se por empregar então uma massa menor, $M = 0,005$ kg, sendo gerada uma nova entrada u_0 no Simulink.

A tolerância de otimização considerada é de $5 \cdot 10^{-4}$ e a tolerância de violação de vínculos, 10^{-1} . As Figura 55 e Figura 56 ilustram as variáveis de controle para o Caso 7, com uma massa móvel $M = 0,005$ kg, tolerância de otimização $5 \cdot 10^{-4}$ e tolerância de violação de vínculos de 10^{-1} . As Figura 57 e Figura 58 indicam a posição e a velocidade angulares do braço e o comportamento da massa acoplada. A Figura 59 permite verificar uma progressiva atenuação das oscilações na extremidade livre da viga flexível.

Figura 56 - Caso 7, $M = 0,005$ kg. Força ótima e inicial aplicada à massa.

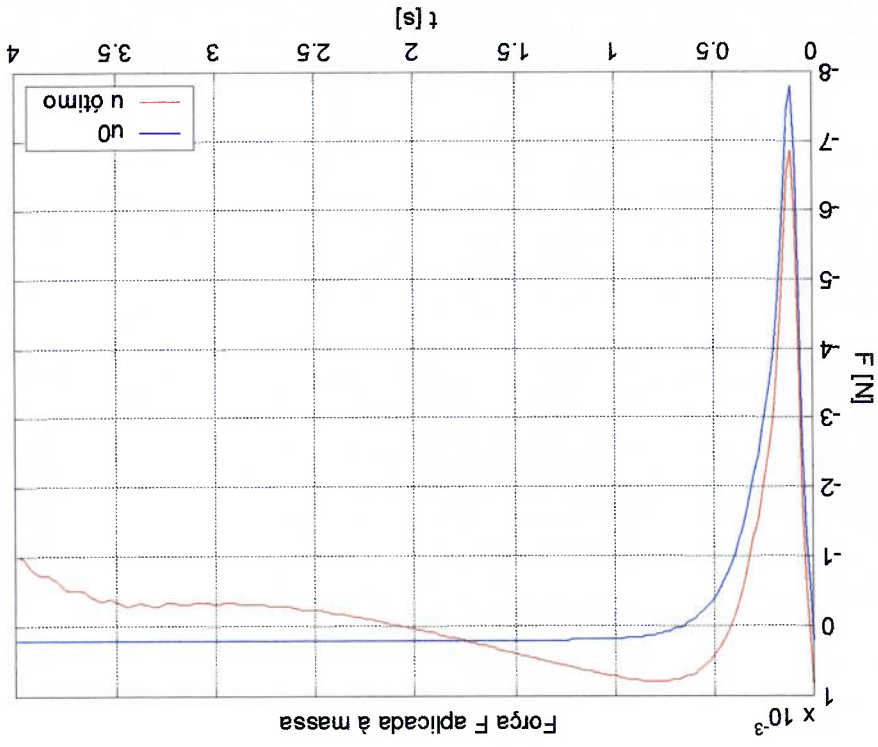


Figura 55 - Caso 7, $M = 0,005$ kg. Torque ótimo e inicial.

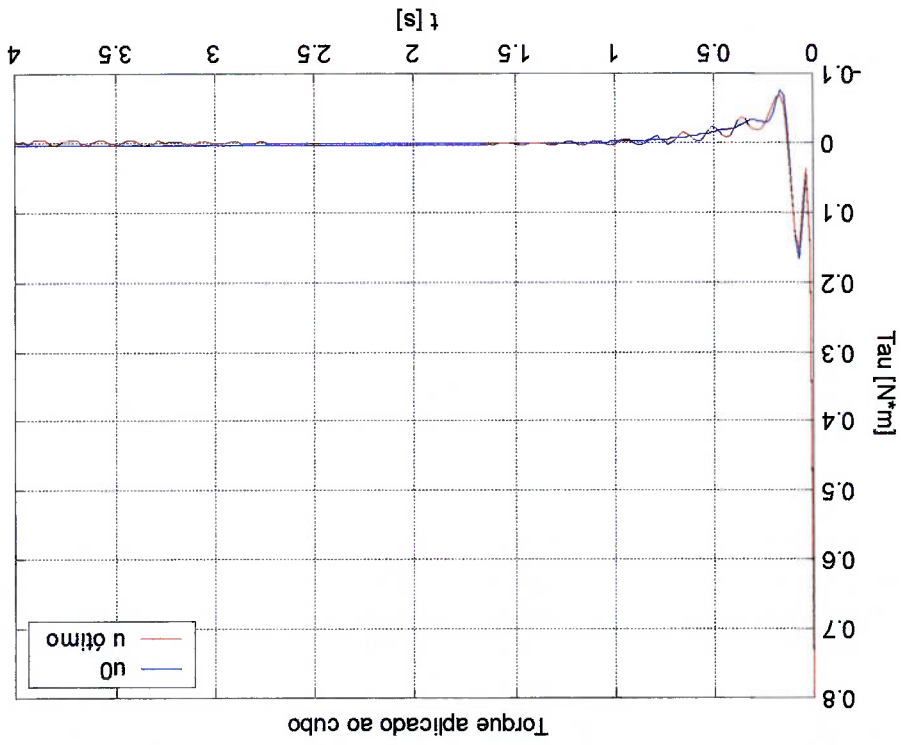


Figura 58 - Caso 7, $M = 0,005$ kg. Posição e velocidade da massa.

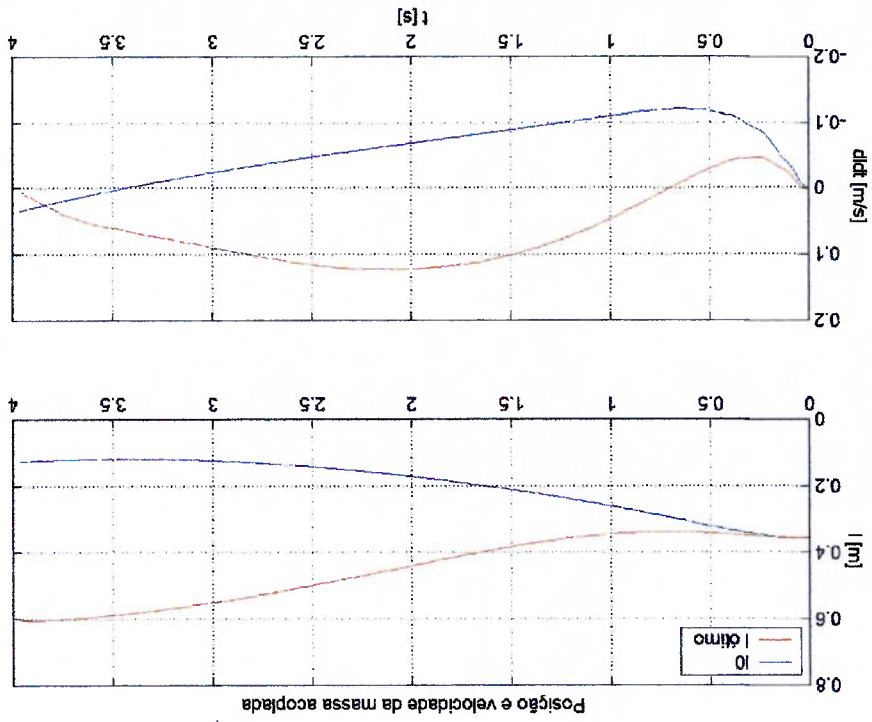


Figura 57 - Caso 7, $M = 0,005$ kg. Posição e velocidade angulares.

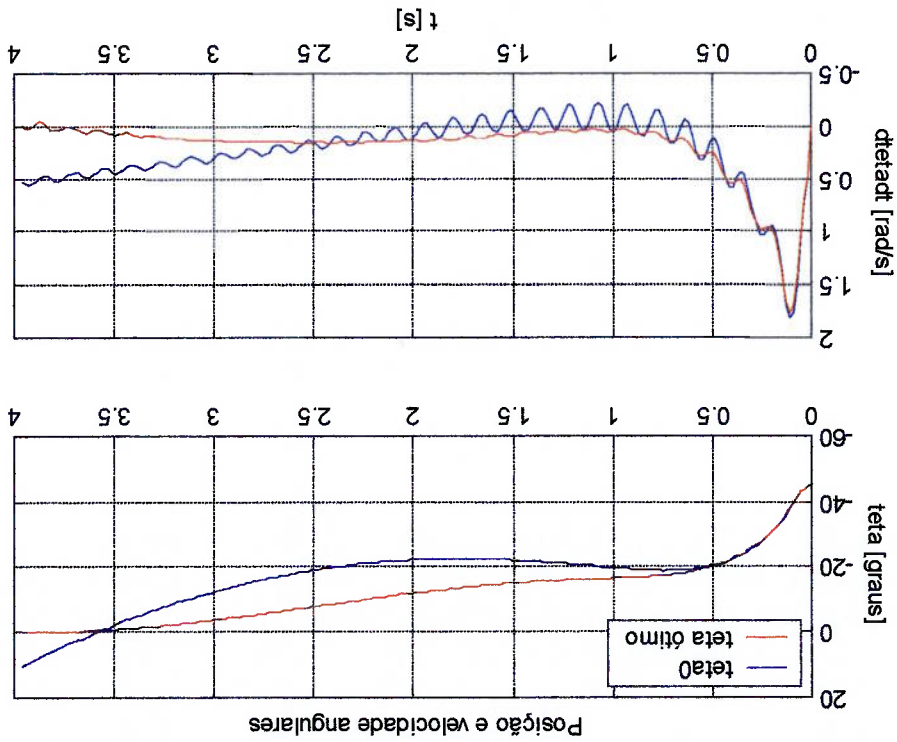


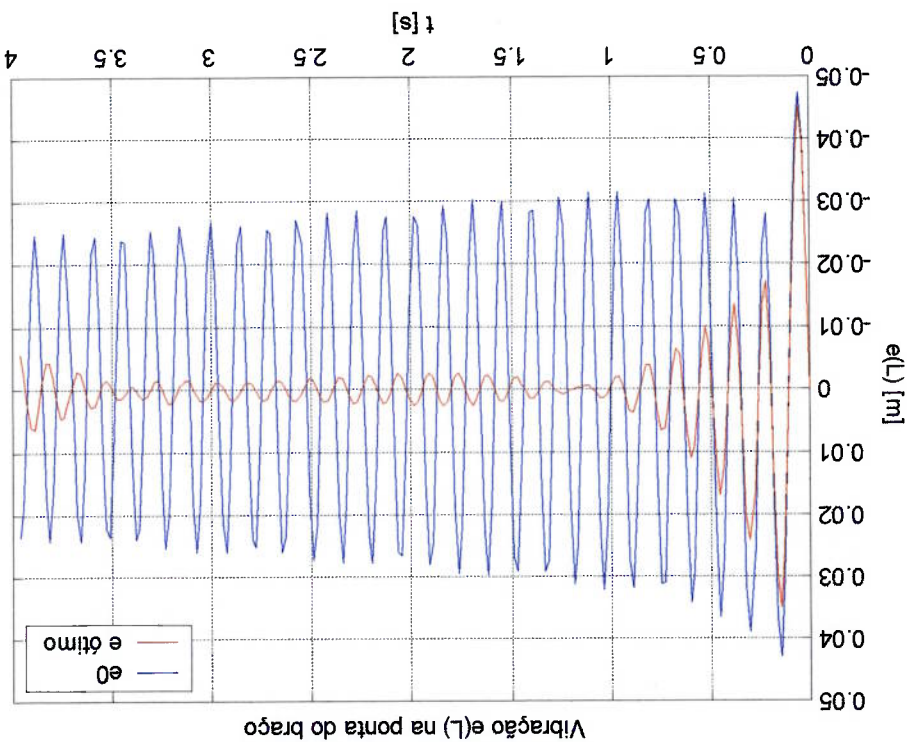
Tabela 7 - Caso 7, $M = 0,005$ kg. Valores de pico, média, desvio padrão e função objetivo para os controles inicial e ótimo.

	torque τ [N.m]		força F [N]		J		
	pico	média	DP	pico	média		
controle inicial	$7,85 \cdot 10^{-1}$	$1,95 \cdot 10^{-3}$	$5,61 \cdot 10^{-2}$	$8,00 \cdot 10^{-3}$	$-4,03 \cdot 10^{-4}$	$1,28 \cdot 10^{-3}$	$2,5 \cdot 10^{-3}$
controle ótimo	$7,96 \cdot 10^{-1}$	$3,12 \cdot 10^{-3}$	$5,88 \cdot 10^{-2}$	$6,86 \cdot 10^{-3}$	$-2,30 \cdot 10^{-4}$	$1,12 \cdot 10^{-3}$	$3,3 \cdot 10^{-6}$

restrição de trajetória.

A Tabela 7 indica os valores de pico, as médias e o desvio padrão para o controle ótimo e o inicial. O RIOTS₉₅ converge após 7 iterações. O valor da função objetivo é cerca de 10^4 vezes maior que o correspondente do caso sem vínculos de

Figura 59 - Caso 7, $M = 0,005$ kg. Deslocamento da ponta do braço.



6.4.5 Discussão dos resultados

A simulação demonstram que um movimento suave da massa é suficiente para que o controle ótimo resulte numa ação extremamente eficaz de atenuação de vibrações. Isso sugere que o efeito da atenuação das oscilações induzidas deve-se não apenas às forças de Coriolis exercidas pela massa móvel sobre o braço, como se supunha de início, ao estudar o caso de manobras pré-especificadas da massa móvel. As Figura 60 e Figura 61 ilustram as componentes da força exercida pelo carro sobre a viga flexível, nos Casos 6 (ausência de vínculos de restrição da trajetória da massa) e 7 (na presença desses vínculos). As forças de Coriolis não estão necessariamente em oposição de fase com as oscilações da viga, de onde se pode concluir que outros fatores dinâmicos estão envolvidos no efeito de atenuação das vibrações.

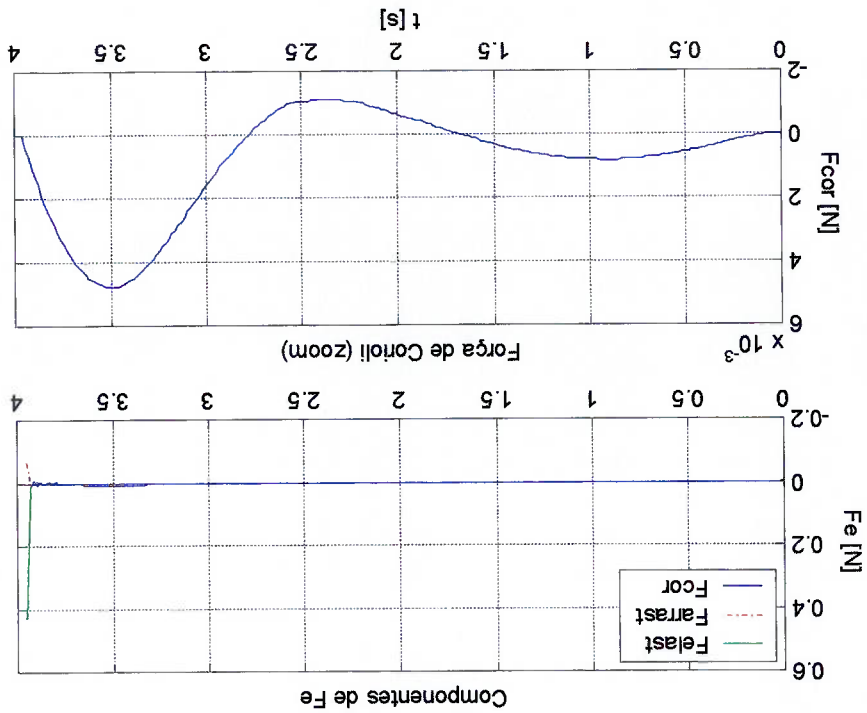
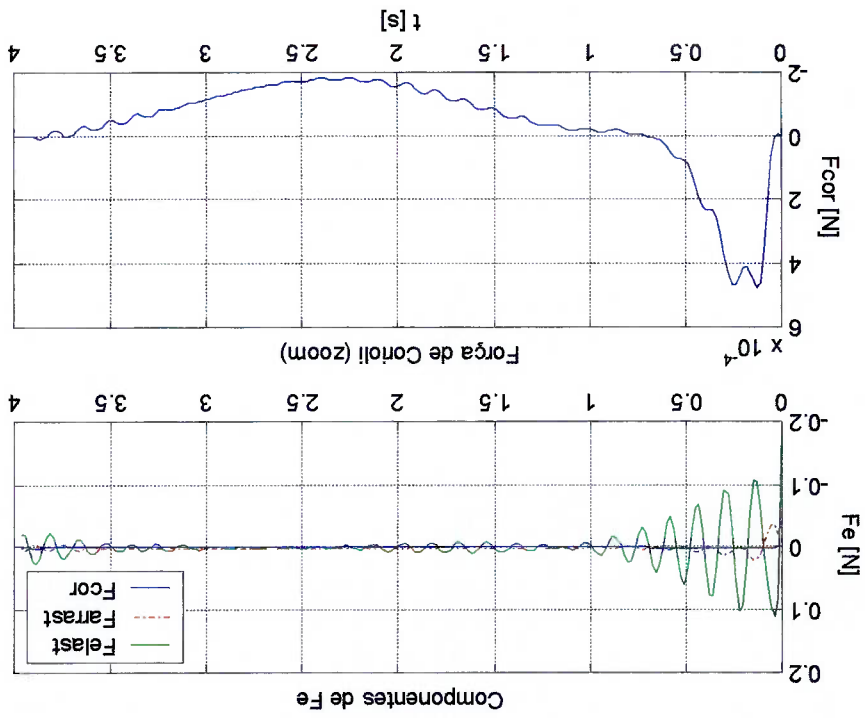


Figura 60 - Caso 6, $M = 0,01$ kg. Ausência de vínculos de restrição de trajetória. Componentes da força $F_B(t)$ aplicada no braço pela massa móvel.

Figura 61 - Caso 7, $M = 0,005$ kg. Consideraram-se os vínculos de restrição de trajetória. Componentes da força $F_E(t)$ aplicada no braço pela massa móvel.



O modelo resultante da síntese de subestruturas é muito semelhante ao contínuo, ambos deduzidos ao longo do trabalho. Acerca da subestruturação, Meirovitch (1997) considera que, por tratar-se de um método derivado da teoria de Rayleigh-Ritz, a convergência é garantida à medida que o número de graus de liberdade (ou de autofunções) incluídos na modelagem aproxima-se de infinito, condição para a qual os autovalores computados convergem para os autovalores reais da estrutura. O modelo deduzido neste trabalho é genérico, no sentido de incluir um número arbitrário de

subestruturas, suficientemente simples para a construção de um controlador. Este trabalho propôs a modelagem e o controle de um sistema mecânico composto por um braço rotativo flexível, sobre o qual desliza uma massa móvel. Empregando o torque aplicado ao braço rotativo e a força que posiciona o carro ao longo do braço, pretendeu-se avaliar até que ponto o movimento da massa é efetivo na atenuação das vibrações do braço. Um modelo contínuo foi obtido por síntese de subestruturas, suficientemente simples para a construção de um controlador.

Diversos métodos de controle têm sido propostos e estudados com a finalidade de atenuar vibrações induzidas durante manobras de Estruturas Flexíveis, destacando-se a pesquisa de novos atuadores e novas técnicas de atuação. Nesses casos, raramente as interações entre as partes é empregada com alguma finalidade prática, já que é quase inevitável deparar-se com inúmeros problemas de flexibilidade e vibração aumentados pelas interações entre os subsistemas.

Conclusões

autofunções. Assim, estão colocadas as condições para que resulte uma boa

aproximação do modelo contínuo.

Duas abordagens distintas para a análise do posicionamento do carro móvel foram propostas: uma primeira, em que se admite pré-especificada a trajetória da massa, tratando como parâmetros conhecidos sua posição e velocidade e analisando o posicionamento da massa sobre o braço de um ponto vista exclusivamente cinemático; uma segunda, em que o próprio movimento do carro é empregado como ação de controle. Nesse caso, posição e velocidade da massa representam estados do sistema, e uma força externa, tangencial ao braço na posição da massa, é responsável pelo movimento.

Comprova-se que, no caso de um movimento pré-especificado da massa acoplada, o modelo de estado resultante é linear com parâmetros variantes no tempo. De fato, os termos relativos à posição l aparecem tanto explícita quanto implicitamente na dinâmica do sistema, enquanto termos em dl/dt aparecem apenas explicitamente. Como nesse caso tais grandezas são consideradas parâmetros do sistema (variáveis no tempo), não resulta daí nenhuma causa de não-linearidade. Entretanto, na segunda abordagem, desde que posição e velocidade da massa são variáveis de estado, o modelo é não-linear com parcelas do tipo

$$(234) \quad \frac{1}{dl/dt} \cdot \frac{d}{dt} \left[\int \phi'(l) \cdot dx \right]$$

onde se observa os termos em l implícitos nas autofunções $\phi'(l)$.

O estudo realizado permite concluir que o movimento da massa sobre o braço

rotativo flexível pode ser empregado efetivamente no controle de vibrações. Nas duas

abordagens do problema foram obtidos bons resultados, no sentido de atenuar a vibração induzida.

Supôs-se inicialmente, ao analisar o caso em que a trajetória da massa é conhecida *a priori*, que a atenuação das oscilações com o deslocamento do carro fosse devida a uma oposição de fase entre a oscilação do braço devido à flexão e a força de Coriolis, resultante da combinação de movimentos de translação da massa e rotação de um sistema de referência móvel, atrelado ao braço. Essa hipótese pareceu confirmar-se com as simulações realizadas na primeira etapa.

Os casos simulados para a segunda abordagem, entretanto, parecem sugerir que a atenuação da vibração pode dever-se mais a outros fatores que às forças de Coriolis exercidas pela massa móvel sobre o braço. De fato, no estudo do controlador ótimo observou-se que o movimento da massa é suave e a força de Coriolis não está necessariamente em oposição de fase com as oscilações da viga. Para tirar mais conclusões, porém, faz-se necessária uma análise mais aprofundada e sistemática do problema de Controle Ótimo e da dinâmica do sistema. Os resultados obtidos, entretanto, são suficientes para destacar a viabilidade e despertar o interesse para estudos da Dinâmica e Controle de sistemas flexíveis, onde se pode explorar o acoplamento de movimentos.

Trabalhos Futuros

O trabalho que se encerra é um ponto de partida para outros. Várias questões ficaram em suspenso. Entre as perspectivas de trabalhos que se podem sugerir, estão, de imediato,

1. A validação experimental do modelo, com a montagem de um protótipo em laboratório.

2. A avaliação numérica dos termos do modelo contínuo que não constam no modelo subestruturado obtido.

3. O estudo sistemático e exaustivo dos diversos aspectos envolvidos no controle ótimo do sistema, tais como:

- manobras de tempo mínimo;

- otimização dos parâmetros físicos do sistema que influem diretamente no controlador, tais como o valor da massa acoplada e sua posição inicial;

- uso de outras funções objetivo J , visando, por exemplo, uma solução de compromisso entre o tempo de manobra da rotação e a atenuação das vibrações induzidas;

- controle ótimo de modelos de maiores dimensões, incluindo três ou mais autofunções.

4. A modelagem e o controle de sistemas análogos ao estudado nesse trabalho, com duas ou mais massas acopladas.

Referências Bibliográficas

- BENAIN, J.; FERREIRA, P. Análise Dinâmica de uma Barra Flexível Inteligente. São Paulo, Universidade de São Paulo, Trabalho de Formatura.
- BOOK, W. J. Modeling, Design, and Control of Flexible Manipulator Arms: a Tutorial Review. In: Conference on Decision and Control, 29th, Honolulu, 1990. Proceedings, Honolulu, s. ed., 1990. P. 500-506.
- CANAVIN, J. R., LIKINIS, P. W. Floating Reference Frames for Flexible Spacecraft. Journal of Spacecraft, Vol. 14, No. 12, December 1977, pp. 724-732.
- CITRON, S. J. Elements of Optimal Control. Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1969.
- CRAIG, R. R., JR., BAMPON, M. C. C. Coupling of Substructures for Dynamic Analyses. AIAA Journal, Vol. 6, No. 7, April 1968, pp. 1313-1319.
- FRANKLIN, G. F., POWELL, J. D., EMAMI-NAEINI, A. Feedback Control of Dynamic Systems. Addison-Wesley, 1994.
- FRIEDLAND, B. Control System Design – An Introduction to State-Space Methods. McGraw-Hill, 1987.
- FRIEDLAND, B., RICHMAN, J., WILLIAMS, D. E. On the “Adiabatic Approximation” for Design of Control Laws for Linear, Time-Varying Systems. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-32, No. 1, January 1987, pp. 62-63.
- GILDIN, E. Desenvolvimento de um Controlador Adaptativo para Manipuladores Flexíveis com Incerteza de Cargas. São Paulo, Universidade de São Paulo, 1998. Dissertação (Mestrado).
- HURTY, W. C. Dynamic Analysis of Structural Systems Using Component Modes. AIAA Journal, Vol. 3, No. 4, April 1965, pp. 678-685.
- JUNKINS, J. L., KIM, Y. Introduction to Dynamics and Control of Flexible Structures. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Washington, D.C., 1993.
- KAJIWARA, I.; NAGAMATSU, A. Approach for Simultaneous Optimization of a Structure and Control System. AIAA Journal, Vol. 32, No. 4, 1994.
- LIU, K.; SKELTON, R. Integrated Modeling and Controller Design with Application to Flexible Structure Control. Automatica, Vol. 29, No. 5, pp. 1291-1314, 1993.

- LOZANO, R.; BROGLIATO, B. Adaptive Control of Robot Manipulators with Flexible Joints. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 37, No. 2, pp. 174-181, 1992.
- MEIROVITCH, L. Computational Methods in Structural Dynamics. Sythoff & Noordhoff, 1980.
- MEIROVITCH, L. Elements of Vibration Analysis. McGraw-Hill, 1986.
- MEIROVITCH, L. Dynamics and Control of Structures. John Wiley & Sons, 1990.
- MEIROVITCH, L. Principles and Techniques of Vibrations. Prentice-Hall, 1997.
- MENEGALDO, L. Modelagem Biomecânica e Controle Ótimo da Postura Humana Através de Algoritmos Baseados na Teoria das Aproximações Consistentes. São Paulo, Universidade de São Paulo, 2000, Tese (Doutorado). Em fase de conclusão.
- OGATA, K. Engenharia de Controle Moderno. Prentice-Hall do Brasil, 1998.
- OLIVEIRA, F.; FLEURY, A. Controle de Vibrações de um Braço Rotativo Flexível pelo Movimento de uma Massa sobre o Braço. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECÂNICA, XV, Águas de Lindóia, 1999. COBEM99, São Paulo, ABCM, 1999.
- ÖZGÜNER, E.; BARBIERI, U. Unconstrained and Constrained Mode Expansions for a Flexible Slewing Link. Transactions of the ASME, Vol. 110, pp. 416-421, 1986.
- PHILLIPS, C. L., HARBOR, R. D. Feedback Control Systems. Prentice Hall, 1996.
- POLAK, E. One the use of consistent approximations in the solutions of semi-infinite optimization and optimal control problems. Mathematical Programming, Vol. 62, pp. 385-415, 1993.
- SCHWARTZ, A. Theory and Implementation of Numerical Methods Based on Runge-Kutta Integration for Solving Optimal Control Problems. Phd Dissertation, Dept. of Electrical Engineering, University of California, Berkeley, 1996.
- SCHWARTZ, A.; POLAK, E. Consistent approximations for optimal control problems based on Runge-Kutta integration. SIAM Journal of Control Optimization, Vol. 34, 4, 1996.
- SCHWARTZ, A.; POLAK, E.; CHEN, Y. RIOTS_95: A Matlab Toolbox for Solving Optimal Control Problems, Version 1.0. Stanford University, 1997.
- SHIGAKI, Y. Um estudo sobre Métodos de Síntese dos Modos Componentes. São Paulo, Universidade de São Paulo, 1993, Dissertação (Mestrado).

- SIMO, J. C.; VU-QUOC, L. On the Dynamics of Flexible Beams under Large Overall Motions – The Plane Case, Parts I & II. Journal of Applied Mechanics, Vol. 53, pp. 849-863, 1986.
- SPIEGEL, M. Mecânica Racional. Recife, McGraw-Hill do Brasil, 1976.
- SPIEGEL, M. Theory and Problems of Theoretical Mechanics – With an Introduction to Lagrange's Equations and Hamiltonian Theory. Schaum's Outline Series. McGraw-Hill, 1990.
- WARREN, S.; VOULGARIS, P.; BERGMAN, L. Robust Control of a Slewng Beam System. Journal of Vibrations and Control, Vol.1, pp. 251-271, 1995.