

Roberto Ramos Jr.

**MODELOS ANALÍTICOS NO ESTUDO DO
COMPORTAMENTO ESTRUTURAL DE
TUBOS FLEXÍVEIS E CABOS UMBILICAIS**

**Tese apresentada à Escola Politécnica
da Universidade de São Paulo para a
obtenção do título de Doutor em
Engenharia.**

**São Paulo
2001**

À minha esposa Célia
Ao meu filho Guilherme

Agradecimentos

Ao amigo e orientador, Prof. Dr. Celso Pupo Pesce, pelo excelente trabalho de orientação, pelo apoio e estímulo oferecidos em todos os momentos e pela sua grande dedicação ao ensino e à pesquisa.

Ao Prof. Dr. José A. P. Aranha, pelo incentivo e pela inestimável colaboração prestada no esclarecimento de dúvidas.

À Universidade de São Paulo e, em particular, à Escola Politécnica, pela minha formação.

À Pirelli Cabos S.A. e à Petrobrás S.A. pelas parcerias na realização de trabalhos conjuntos com a EPUSP em várias oportunidades.

Aos funcionários da Escola Politécnica e, em particular, às bibliotecárias que sempre se dispuseram a auxiliar na busca de material de pesquisa.

A todos as pessoas que, direta ou indiretamente, colaboraram na execução deste trabalho, tornando-o possível.

Resumo

Tubos flexíveis e cabos umbilicais têm sido bastante utilizados pela indústria petrolífera em aplicações *offshore* nos últimos anos. Os primeiros consistem num tipo de tubulação usada para o transporte de vários tipos de fluidos, geralmente trabalhando a alta pressão. Já os cabos umbilicais são usados para permitir o controle e a comunicação entre equipamentos submersos e de superfície. Quanto à concepção estrutural, os dois tipos de produto são muito semelhantes, apresentando diversas camadas metálicas combinadas com camadas plásticas concêntricas de modo a formar uma estrutura com grande rigidez axial e torsional, porém baixa rigidez flexional.

O escopo deste trabalho é o estudo de modelos analíticos para a previsão do comportamento estrutural de tubos flexíveis e cabos umbilicais. Inicialmente são propostos modelos para a análise local destas estruturas, sob a ação de carregamentos de tração, torção, pressão interna, externa e flexão, agindo isoladamente ou combinados. São propostos modelos analíticos consistentes para cada camada, resultando num sistema de equações algébricas que, ao ser resolvido, fornece os valores de tensões e deformações nas diversas camadas, bem como os valores de rigidez equivalente axial, flexional e torsional do tubo/cabo. São feitas várias comparações entre os resultados obtidos analiticamente e resultados experimentais obtidos na literatura para diversos tubos e cabos. A importância dos modelos desenvolvidos fica evidente numa análise do comportamento global para a previsão de instabilidade de linhas sob carregamento combinado de torção e compressão dinâmica. Através de uma análise consistente, mostra-se que a clássica equação de Greenhill também pode ser utilizada para a determinação das cargas críticas de flambagem em barras curvas de grande comprimento, sendo o comprimento de flambagem da barra estimado a partir da relação de dispersão de onda flexional numa viga reta. Vários exemplos de determinação da carga crítica de flambagem são abordados, envolvendo tanto *risers* rígidos quanto flexíveis. Uma atenção especial ao estabelecimento e discussão de hipóteses é dada em todos os modelos propostos.

Abstract

Flexible pipes and umbilical cables have been largely used by the oil industry in offshore applications in these last years. The former are a kind of pipeline structure used for conducting several fluids, often working at high pressure, while the latter are cables used to provide control and communication links between seafloor and surface equipments. Regarding their structural design, both flexible pipes and umbilicals are quite similar, presenting a number of steel armour layers combined with polymeric layers disposed in such a way to form a structure which is stiff under torsion and traction, but compliant under bending.

The aim of this work is the study of analytical models to predict the structural behaviour of flexible pipes and umbilicals. At first, local analysis of such structures is undertaken, considering combined loadings of traction, torsion, internal and external pressures and bending. Consistent analytical models, proposed for each layer, are then combined to result in a system of algebraic equations that is solved for the stresses and deformations in the layers. Equivalent axial, torsional and flexural stiffness values for the pipe/umbilical are also obtained. Several comparisons between analytical results and experimental results obtained in the literature are also made, involving both flexible pipes and umbilicals. The importance of the developed models is highlighted in an analysis of the global structural behaviour made to predict the instability condition of flexible lines under the action of dynamic compression and twisting moment. Through a consistent analysis, it is shown that the classical Greenhill formula can also be used to determine critical buckling loads for long curved rods. In this case, an estimate for the buckling length is given by the flexural wave dispersion relation of a straight beam. Several examples, involving both *SCR*'s and flexible pipes, illustrate the method of critical buckling load determination. Emphasis is also given in the establishment and discussion of hypotheses for all proposed models.

Roberto Ramos Jr.

**MODELOS ANALÍTICOS NO ESTUDO DO
COMPORTAMENTO ESTRUTURAL DE
TUBOS FLEXÍVEIS E CABOS UMBILICAIS**

**Tese apresentada à Escola Politécnica
da Universidade de São Paulo para a
obtenção do título de Doutor em
Engenharia.**

**Área de Concentração:
Engenharia Mecânica**

**Orientador:
Prof. Dr. Celso Pupo Pesce**

**São Paulo
2001**

FICHA CATALOGRÁFICA

Ramos Júnior, Roberto

Modelos analíticos no estudo do comportamento estrutural de tubos flexíveis e cabos umbilicais. -- São Paulo, 2001. 367p.

Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.

1.Estruturas 2.Tubos flexíveis 3. Cabos umbilicais
4.Risers 5.Modelos analíticos

I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica
Departamento de Engenharia Mecânica II.t.

Sumário

RESUMO

ABSTRACT

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SÍMBOLOS

GLOSSÁRIO

1. INTRODUÇÃO	1
2. TUBOS FLEXÍVEIS E CABOS UMBILICAIS: REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	13
2.1 DESCRIÇÃO DAS CAMADAS DE UM TUBO FLEXÍVEL	13
2.2 DESCRIÇÃO DAS CAMADAS DE UM CABO UMBILICAL.....	18
2.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA SOBRE TUBOS FLEXÍVEIS E UMBILICAIS.....	19
2.3.1 <i>Análise do comportamento global de linhas flexíveis</i>	21
2.3.2 <i>Análise da estabilidade global de linhas flexíveis</i>	25
2.3.3 <i>Análise estrutural local por métodos analíticos</i>	30
2.3.4 <i>Análise estrutural local por métodos numéricos</i>	41
2.3.5 <i>Materiais e fabricação</i>	45
2.3.6 <i>Análise de estruturas afins</i>	49
3. MODELO ANALÍTICO PARA CARREGAMENTOS AXISSIMÉTRICOS	53
3.1 DETERMINAÇÃO DO PROBLEMA E HIPÓTESES GERAIS.....	54
3.2 MODELAGEM ANALÍTICA DAS CAMADAS HELICOIDAIS	60
3.2.1 <i>Equações de equilíbrio</i>	60
3.2.2 <i>Equações de compatibilidade de deformações</i>	68
3.2.3 <i>Equações constitutivas</i>	69
3.3 MODELAGEM ANALÍTICA DAS CAMADAS PLÁSTICAS	70
3.3.1 <i>Equações para as camadas plásticas</i>	70
3.3.2 <i>Confronto entre a solução “exata” e a aproximada</i>	73

3.4	MODELAGEM ANALÍTICA DA CARÇAÇA INTERTRAVADA.....	75
3.4.1	<i>O modelo de "tubo equivalente"</i>	77
3.4.2	<i>Equações utilizadas no modelo de "tubo equivalente"</i>	80
3.5	MODELAGEM DO NÚCLEO ELETRO-HIDRÁULICO.....	83
3.6	OUTRAS EQUAÇÕES NECESSÁRIAS	87
3.6.1	<i>Cálculo das tensões na direção radial</i>	87
3.6.2	<i>Equações de compatibilidade geométrica</i>	88
3.6.3	<i>Equações de equilíbrio globais</i>	89
3.7	SISTEMA FINAL DE EQUAÇÕES	91
4.	CONFRONTO DE RESULTADOS: ANÁLISE DE TUBOS E CABOS SOB	
	CARREGAMENTOS AXISSIMÉTRICOS	101
4.1	DADOS GERAIS DO TUBO A SER ANALISADO.....	102
4.2	RESULTADOS OBTIDOS COM O MODELO ANALÍTICO	104
4.3	MODELO COM ELEMENTOS FINITOS	107
4.3.1	<i>Descrição do modelo com elementos finitos</i>	107
4.3.2	<i>Resultados obtidos com o modelo</i>	115
4.4	CONFRONTO: MODELO ANALÍTICO X MODELO COM ELEMENTOS FINITOS	118
4.5	ANÁLISE DE OUTROS CASOS E CONFRONTO COM RESULTADOS EXPERIMENTAIS	121
4.5.1	<i>Análise de cabos</i>	121
4.5.2	<i>Análise de um tubo flexível</i>	125
5.	MODELO ANALÍTICO PARA CARREGAMENTOS COMBINADOS INCLUINDO A	
	FLEXÃO.....	141
5.1	MODELO NA AUSÊNCIA DE ESCORREGAMENTO ENTRE AS CAMADAS	147
5.1.1	<i>Análise das camadas helicoidais</i>	149
5.1.2	<i>Análise das camadas plásticas</i>	155
5.1.3	<i>Solução do problema para carregamentos quaisquer</i>	157
5.2	MODELO COM A HIPÓTESE DE ESCORREGAMENTO TOTAL ENTRE AS CAMADAS	163
5.2.1	<i>Análise das camadas helicoidais</i>	167
5.2.2	<i>Análise das camadas plásticas</i>	172
5.2.3	<i>Solução do problema para carregamentos quaisquer</i>	172
5.3	CONFRONTO DE RESULTADOS NA DETERMINAÇÃO DA RIGIDEZ FLEXIONAL	173
5.3.1	<i>Confronto entre nosso modelo e outros modelos analíticos</i>	173
5.3.2	<i>Confronto entre nosso modelo e resultados experimentais</i>	187

6. ANÁLISE DE INSTABILIDADE GLOBAL DE LINHAS	193
6.1 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA A SER RESOLVIDO.....	196
6.2 EQUACIONAMENTO GERAL PARA A SOLUÇÃO DO PROBLEMA	198
6.2.1 <i>Equações diferenciais de equilíbrio.....</i>	<i>198</i>
6.2.2 <i>Equações constitutivas</i>	<i>201</i>
6.2.3 <i>Relações entre as componentes de curvatura e torção e os ângulos de Euler.....</i>	<i>201</i>
6.2.4 <i>Relações entre componentes do vetor posição e ângulos de Euler</i>	<i>202</i>
6.3 APLICAÇÃO DAS EQUAÇÕES GERAIS PARA O PROBLEMA PROPOSTO	203
6.4 CÁLCULO DA CARGA CRÍTICA DE COMPRESSÃO DINÂMICA	208
6.5 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO	215
6.5.1 <i>Análise do riser rígido A</i>	<i>215</i>
6.5.2 <i>Análise do riser rígido B</i>	<i>226</i>
6.5.3 <i>Análise de um tubo flexível utilizando resultados experimentais para as constantes elásticas</i>	<i>231</i>
6.5.4 <i>Análise de um tubo flexível utilizando resultados obtidos por métodos analíticos para as constantes elásticas</i>	<i>236</i>
6.6 CONSIDERAÇÕES REFERENTES À ANÁLISE DE ESTABILIDADE.....	246
7. CONCLUSÕES.....	249
ANEXO A: EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE EQUILÍBRIO.....	259
ANEXO B: OBTENÇÃO DE EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS.....	277
ANEXO C: GEOMETRIA DE FEIXES HELICOIDAIS.....	287
ANEXO D: FÓRMULAS PARA CAMADAS CILÍNDRICAS DE PAREDE ESPESSA... ..	351
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	355

Lista de Figuras

Figura 1.1: Exemplo de utilização de linhas flexíveis [22].	1
Figura 1.2: Risers flexíveis em configuração steep-wave [22].	2
Figura 1.3: Estrutura interna de um tubo flexível típico [43].	3
Figura 1.4: Estrutura interna de um cabo umbilical [38].	3
Figura 2.1: Camadas de um tubo flexível típico [43].	14
Figura 2.2: Corte longitudinal de uma carcaça intertravada [29].	15
Figura 2.3: Exemplos de perfis utilizados em camadas zeta [22].	16
Figura 2.4: Camadas de um cabo umbilical típico [38].	19
Figura 3.1: Modelo para o núcleo eletro-hidráulico.	84
Figura 3.2: Campo de pressões sobre a parte periférica do núcleo.	85
Figura 4.1: Armadura de tração interna.	108
Figura 4.2: Armaduras de tração e elementos de contato. Vista de topo.	108
Figura 4.3: Armaduras de tração e elementos de contato. Detalhe.	109
Figura 4.4: Modelo completo do tubo. Vista lateral.	110
Figura 4.5: Modelo completo do tubo. Vista superior.	110
Figura 4.6: Elementos de viga para impedir movimento de corpo rígido.	113
Figura 4.7: Tensões axiais na armadura interna (MPa).	116
Figura 4.8: Tensões axiais na armadura externa (MPa).	116
Figura 4.9: Tensões combinadas na armadura interna (MPa).	117
Figura 4.10: Tensões combinadas na armadura externa (MPa).	117
Figura 4.11: Curva tração x along. axial (extremos com liberdade de giro) [88].	132
Figura 4.12: Curva torque x rotação axial (com força axial aplicada) [88].	137
Figura 5.1: Configuração deformada Σ_3 do riser.	148
Figura 5.2: Esforços solicitantes na seção transversal de um tendão numa camada helicoidal genérica (configuração deformada Σ_3).	151
Figura 5.3: Configuração deformada Σ_4 do riser.	164
Figura 5.4: Indicação dos parâmetros $\beta_4 = \beta + \Delta\beta$ e $\theta_4 = \theta_2 + \Delta\theta$.	164
Figura 5.5: Base formada pelos versores $(\vec{t}_3, \vec{N}_3, \vec{B}_3)$.	165
Figura 5.6: Esforços solicitantes na seção transversal de um tendão numa camada helicoidal genérica (configuração deformada Σ_4).	168
Figura 5.7: Mola helicoidal submetida a flexão pura [19].	175
Figura 5.8: Curva Momento fletor x Curvatura [88] (tubo sem pressão interna).	191

Figura 5.9: Curva Momento fletor x Curvatura [88] (tubo com pressão interna).....	191
Figura 6.1: Tração dinâmica (\tilde{T}) e estática (\bar{T}) locais ao longo do tempo.....	193
Figura 6.2: Configuração estática do riser.....	197
Figura 6.3: Definição dos ângulos de Euler utilizados.....	202
Figura 6.4: Variação da força normal no TDP ao longo do tempo. Riser rígido, (período de excitação = 10s, amplitude da onda= 6 m), [13].....	214
Figura 6.5: Variação da força normal no TDP ao longo do tempo. Riser rígido, (período de excitação = 12s, amplitude da onda= 8 m), [13].....	214
Figura 6.6: Curvas η x $\log(\chi.l)$ para diversos períodos de excitação (riser A, $\tilde{\kappa}_t = 0$).....	216
Figura 6.7: Comportamento da função dada pela equação (6.38) no intervalo $0 < \eta < 6$ (riser A, $\chi.l = 0,00605$; $\tilde{\kappa}_t l = 0$; Período = 8s).....	217
Figura 6.8: Primeiro e segundo modos de flambagem para o riser A ($\chi.l = 0,00605$; $\tilde{\kappa}_t l = 0$; Período=8s).....	218
Figura 6.9: Comportamento da função dada pela equação (6.38) no intervalo $0 < \eta < 8$ (riser A, $\chi.l = 0,605$; $\tilde{\kappa}_t l = 0$; Período = 8s).....	219
Figura 6.10: Primeiro e segundo modos de flambagem para o riser A ($\chi.l = 0,605$; $\tilde{\kappa}_t l = 0$; Período=8s).....	219
Figura 6.11: Curvas η x $\log(\chi.l)$ para diversos valores de $\tilde{\kappa}_t$ (riser A, Período = 8s).....	221
Figura 6.12: Valores de η para diversos valores de $\tilde{\kappa}_t$ (riser A, $\chi.l = 0,1$).....	222
Figura 6.13: Comportamento da função dada pela eq.(6.38) no intervalo $0 < \eta < 4$ (riser A, $\chi.l = 0,00605$; $\tilde{\kappa}_t l = 0,00605$; Período = 8s).....	223
Figura 6.14: Comportamento da função dada pela eq.(6.38) no intervalo $0 < \eta < 4$ (riser A, $\chi.l = 0,605$; $\tilde{\kappa}_t l = 0,00605$; Período = 8s).....	223
Figura 6.15: Modos de flambagem do riser A ($\chi.l = 0,00605$; $\tilde{\kappa}_t l = 0,00605$; Per.=8s).....	224
Figura 6.16: Modos de flambagem do riser A ($\chi.l = 0,605$; $\tilde{\kappa}_t l = 0,00605$; Per.=8s).....	225
Figura 6.17: Curvas η x $\log(\chi.l)$ para diversos períodos de excitação (riser B, $\tilde{\kappa}_t = 0$).....	226
Figura 6.18: Comportamento da função dada pela equação (6.38) no intervalo $0 < \eta < 6$ (riser B, $\chi.l \cong 0,00688$; $\tilde{\kappa}_t l = 0$; Período = 8s).....	227
Figura 6.19: Comportamento da função dada pela equação (6.38) no intervalo $0 < \eta < 8$ (riser B, $\chi.l \cong 0,688$; $\tilde{\kappa}_t l = 0$; Período = 8s).....	228
Figura 6.20: Curvas η x $\log(\chi.l)$ para diversos valores de $\tilde{\kappa}_t$ (riser B, Período = 8s).....	229
Figura 6.21: Comportamento da função dada pela equação (6.38) no intervalo $0 < \eta < 4$ (riser B, $\chi.l \cong 0,00688$; $\tilde{\kappa}_t l \cong 0,00688$; Período = 8s).....	230
Figura 6.22: Comportamento da função dada pela equação (6.38) no intervalo $0 < \eta < 4$ (riser B, $\chi.l \cong 0,688$; $\tilde{\kappa}_t l \cong 0,00688$; Período = 8s).....	230

Figura 6.23: Curvas $\eta \times \log(\chi.l)$ para diversos períodos de excitação (riser flexível 2,5", constantes elásticas obtidas em ensaios, $\tilde{\kappa}_t = 0$).	232
Figura 6.24: Curvas $\eta \times \log(\chi.l)$ para diversos valores de $\tilde{\kappa}_t$ (riser flexível 2,5", constantes elásticas obtidas em ensaios, torção horária, Per.=8s).	233
Figura 6.25: Curvas $\eta \times \log(\chi.l)$ para diversos valores de $\tilde{\kappa}_t$ (riser flexível 2,5", constantes elásticas obtidas em ensaios, torção anti-horária, Per.=8s).	234
Figura 6.26: Curvas $\eta \times \log(\tilde{\kappa}_t.l)$ para $\chi.l = 0,1$ e para diversos valores do adimensional EI/GJ (riser flexível 2,5", Período = 8s).	235
Figura 6.27: Curvas $\eta \times \log(\chi.l)$ para diversos períodos de excitação (riser flexível 2,5", constantes elásticas dadas por modelos analíticos, $\tilde{\kappa}_t = 0$).	237
Figura 6.28: Curvas $\eta \times \log(\chi.l)$ para diversos valores de $\tilde{\kappa}_t$ (riser flexível 2,5", constantes elásticas dadas por modelos analíticos, torção horária, Per.=8s).	238
Figura 6.29: Curvas $\eta \times \log(\chi.l)$ para diversos valores de $\tilde{\kappa}_t$ (riser flexível 2,5", constantes elásticas dadas por modelos analíticos, torção anti-horária, Per.=8s).	240
Figura 6.30: Curvas $\eta \times \log(\tilde{\kappa}_t.l)$ para $\chi.l = 0,1$ e para diversos valores do adimensional EI/GJ (riser flexível 2,5", Período = 8s).	241
Figura a.1: Barra prismática na configuração não-deformada Σ_1 .	260
Figura a.2: Eixo central na configuração deformada Σ_i , eixos principais de flexo-torção $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ e triedro de Frenet $(\vec{n}, \vec{b}, \vec{t})$ numa posição genérica do eixo.	261
Figura a.3: Detalhe do eixo central na configuração deformada, com indicação dos eixos principais de flexo-torção $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ e triedro de Frenet $(\vec{n}, \vec{b}, \vec{t})$ em C_i .	262
Figura a.4: Esforços solicitantes numa seção genérica da barra.	266
Figura a.5: Direções principais de flexo-torção e tensões atuantes na seção.	266
Figura a.6: Esforços externos e internos num elemento infinitesimal da barra.	268
Figura a.7: Esforços externos e internos num elemento infinitesimal da barra.	273
Figura b.1: Barra na configuração inicial (Σ_1) e indicação dos eixos principais de flexo-torção (x,y,z) numa determinada seção.	278
Figura b.2: Seção transversal da barra e localização do ponto P.	279
Figura b.3: Seção transversal retangular (t x b).	285
Figura c.1: Representação do eixo central de um tendão por uma hélice cilíndrica.	289
Figura c.2: Seção transversal genérica de um tendão indicando direções principais de curvatura $(\vec{n}_i$ e $\vec{b}_i)$ e direções principais de flexão da seção $(\vec{i}_i$ e $\vec{j}_i)$.	292
Figura c.3: Sistemas de coordenadas OXYZ (fixo) e Cxyz (eixos principais de flexo-torção da seção transversal do tendão).	292
Figura c.4: Representação do eixo central de um tendão na configuração deformada.	295
Figura c.5: Eixo retificado de um tendão numa configuração intermediária.	301

Figura c.6: Representação 3D do eixo central de um tendão fletido.....	309
Figura c.7: Vista lateral (plano YZ) da hélice deformada.....	310
Figura c.8: Representação 3D do eixo central de um tendão fletido.....	317
Figura c.9: Vista lateral (plano YZ) da hélice deformada.....	318
Figura c.10: Vista lateral (plano YZ) da hélice deformada.....	322
Figura c.11: Relação entre versores $(\vec{n}_3$ e $\vec{b}_3)$ e versores $(\vec{i}_3$ e $\vec{j}_3)$	324
Figura c.12: Indicação dos parâmetros $\beta_4 = \beta + \Delta\beta$ e $\theta_4 = \theta_2 + \Delta\theta$	328
Figura c.13: Base formada pelos versores $(\vec{t}_3, \vec{N}_3, \vec{B}_3)$	329
Figura c.14: Vista lateral (plano YZ) da hélice deformada.....	340
Figura c.15: Relação entre versores $(\vec{n}_4$ e $\vec{b}_4)$ e versores $(\vec{i}_4$ e $\vec{j}_4)$	342
Figura d.1: Tubo de parede espessa sob pressão interna e externa.	351

Lista de Tabelas

Tabela 3.1: Incógnitas para a determinação da distribuição de esforços em tubos.	58
Tabela 3.2: Equações para a determinação da distribuição de esforços em tubos.....	92
Tabela 3.3: Camadas de um tubo flexível típico.	93
Tabela 4.1: Dados geométricos da carcaça intertravada [56].....	102
Tabela 4.2: Dados geométricos da barreira de pressão [59].....	102
Tabela 4.3: Dados geométricos da armadura de tração interna [59].	103
Tabela 4.4: Dados geométricos da armadura de tração externa [59].....	103
Tabela 4.5: Dados geométricos da capa externa [59].....	103
Tabela 4.6: Constantes elásticas dos materiais das camadas [59].	103
Tabela 4.7: Raios médios e espessuras finais de cada camada.	105
Tabela 4.8: Pressões de contato entre camadas (MPa).....	105
Tabela 4.9: Tensões em algumas camadas (MPa).....	106
Tabela 4.10: Variações geométricas em algumas camadas.	106
Tabela 4.11: Esforços nas extremidades do tubo.	106
Tabela 4.12: Rigidez axial dos elementos de contato.....	112
Tabela 4.13: Módulos de elasticidade dos elementos de treliça.....	112
Tabela 4.14: Propriedades dos elementos de viga da figura 4.6.	114
Tabela 4.15: Dados do núcleo do cabo eletromecânico [34].	122
Tabela 4.16: Dados das armaduras do cabo eletromecânico [34].	122
Tabela 4.17: Dados do núcleo do cabo de controle [34].....	123
Tabela 4.18: Dados das armaduras do cabo de controle [34].....	123
Tabela 4.19: Comparação de resultados para o cabo eletromecânico.	124
Tabela 4.20: Comparação de resultados para o cabo de controle.	124
Tabela 4.21: Participantes do estudo de caso [88].	126
Tabela 4.22: Dados para a carcaça intertravada de aço (AISI 304) [88].....	128
Tabela 4.23: Dados para a barreira de nylon (Nylon-12) [88].	128
Tabela 4.24: Dados para a camada zeta (aço FI15) [88].....	129
Tabela 4.25: Dados para a camada anti-atrito (Nylon-11) [88].....	129
Tabela 4.26: Dados para a armadura de tração interna (aço FI41) [88].	129
Tabela 4.27: Dados para a camada anti-atrito (Nylon-11) [88].....	130
Tabela 4.28: Dados para a armadura de tração externa [88].	130
Tabela 4.29: Dados para a capa externa [88].	130
Tabela 4.30: Declividades das curvas para o caso (a).....	131
Tabela 4.31: Declividades das curvas para o caso (b).....	134

Tabela 4.32: Declividades das curvas para o caso (c), torção no sentido horário.....	135
Tabela 4.33: Declividades das curvas para o caso (c), torção no sentido anti-horário.....	136
Tabela 4.34: Declividades das curvas para o caso (d), torção horária.	138
Tabela 4.35: Declividades das curvas para o caso (d), torção anti-horária.	139
Tabela 5.1: Incógnitas do problema.	157
Tabela 5.2: Sistema para determinação das incógnitas.....	158
Tabela 5.3: Declividades das curvas Momento fletor x curvatura.	189
Tabela 6.1: Dados do riser rígido A.....	215
Tabela 6.2: Dados do riser rígido B.....	226
Tabela 6.3: Dados do tubo flexível.....	231
Tabela 6.4: Dados do tubo flexível.....	236
Tabela 6.5: Comparação entre valores do adimensional EI/GJ.....	239
Tabela 6.6: Valores de P_{cr} para EI e GJ obtidos experimentalmente, $Per.=8s$	243
Tabela 6.7: Valores de P_{cr} para EI e GJ obtidos analiticamente, $Per.=8s$	243

Lista de Símbolos

Alfabeto Latino:

a	raio interno de uma camada cilíndrica;
A	área da seção transversal de uma barra;
b	pode denotar: <i>i</i>) largura de um tendão de seção transversal retangular; <i>ii</i>) raio externo de uma camada cilíndrica;
D	diâmetro externo de um tubo/cabo;
E	módulo de elasticidade longitudinal;
EA	rigidez axial (de uma barra, tubo ou cabo);
EI	rigidez flexional (de uma barra, tubo ou cabo);
F	força de tração aplicada a um tubo/cabo;
f_x, f_y, f_z	forças distribuídas por unidade de comprimento de uma barra nas direções dos eixos principais de flexo-torção da seção (x, y, z) , respectivamente;
g	afastamento entre duas camadas adjacentes de um tubo ou cabo;
G	módulo de elasticidade transversal do material;
GI_t	rigidez torsional de uma barra;
GJ	rigidez torsional equivalente de um tubo ou cabo;
h	passo de uma hélice cilíndrica;
I_t	momento de inércia à torção da seção transversal (de uma barra, tubo ou cabo);
I_x, I_y	momentos de inércia da seção transversal (de uma barra, tubo ou cabo) com relação aos eixos principais de flexão x e y ;
l	estimativa para o comprimento de flambagem de uma barra curva e longa;
l^*	comprimento de flambagem de uma barra curva e longa;
L_1	comprimento inicial (não-deformado) de um trecho de tubo/cabo medido ao longo de seu eixo;
M_t	momento de torção (aplicado a uma barra, tubo ou cabo);

m	número de camadas plásticas de um tubo/cabo;
m_x, m_y	momentos fletores distribuídos por unidade de comprimento de uma barra e associados às direções principais de flexão (x e y) da seção, respectivamente;
m_z	momento de torção distribuído por unidade de comprimento de uma barra e associados à direção principal de torção (z) da seção;
M_x, M_y, M_z	momentos fletores (M_x, M_y) e de torção (M_z) aplicados à seção transversal de uma barra prismática e associados, respectivamente, às direções principais de flexão (x, y) e torção (z) da seção;
n	pode designar: <i>i</i>) número de camadas helicoidais presentes num tubo ou cabo; <i>ii</i>) parâmetro ligado à carga crítica de flambagem em barras, tubos ou cabos;
p_c	pressão de contato entre duas camadas adjacentes de um tubo ou cabo;
p_{int}	pressão interna ao tubo;
p_{ext}	pressão externa ao tubo;
p_i, p_e	pressões atuantes sobre a superfície interna e externa (respectivamente) de uma dada camada plástica;
P	força de compressão aplicada a uma barra, tubo ou cabo, resultante da ação da tração estática (\bar{T}) e dinâmica (\tilde{T});
Q_x, Q_y	forças cortantes atuantes na direção dos eixos principais de flexão x e y de uma barra, respectivamente;
R	pode designar: <i>i</i>) raio do cilindro que suporta a hélice formada pelo eixo central de um tendão helicoidal, <i>ii</i>) raio da superfície média de uma camada plástica;
S	comprimento de arco em uma curva parametrizada;
t	espessura de um tendão de seção transversal retangular;
T	força normal de tração (ou compressão) aplicada à seção transversal de uma barra;
\bar{T}	tração estática aplicada a uma barra, tubo ou cabo;
\tilde{T}	tração dinâmica aplicada a uma barra, tubo ou cabo;

u campo de deslocamentos radiais num vaso de pressão cilíndrico;
 x, y, z coordenadas cartesianas de um ponto de uma hélice cilíndrica;

Alfabeto Grego:

α ângulo de assentamento do eixo de uma hélice cilíndrica, medido com relação a uma geratriz do cilindro que a suporta;

Δ denota variação, de um modo geral;

$\Delta\alpha$ variação do ângulo de assentamento de uma dada camada helicoidal;

ΔL variação de comprimento de um dado trecho de um tubo/cabo de comprimento inicial L_1 ;

$\Delta\varphi$ rotação axial de um dado trecho de tubo/cabo de comprimento inicial L_1 ;

ΔR variação do raio médio de uma dada camada;

Δt variação de espessura de uma dada camada;

ε_t deformação axial média de um tendão (medida na direção do versor tangente ao eixo central do tendão);

ε_n deformação média associada à variação de espessura dos tendões;

ε_h deformação axial de uma camada helicoidal;

ε_c deformação circunferencial (associada à variação do raio médio) de uma camada helicoidal;

ε_φ deformação angular de uma camada helicoidal;

$\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z$ deformações (alongamentos) nas “fibras” das camadas plásticas e associadas, respectivamente às direções radial, circunferencial e longitudinal da camada;

η pode designar: *i*) adimensional ligado à curvatura no estudo da flexão de um tubo/cabo; *ii*) número real, correspondente ao inteiro n na determinação da carga crítica de flambagem em barras, tubos ou cabos;

κ_x, κ_y componentes de curvatura associadas aos eixos principais de flexão (x, y) da seção transversal de uma barra;

κ_t	torção (<i>twist</i>) de uma barra;
ν	coeficiente de Poisson do material;
ρ	raio de curvatura;
σ_e	tensão de escoamento do material;
$\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$	campo de tensões normais atuando nas camadas cilíndricas, nas direções radial, circunferencial e longitudinal, respectivamente;
σ_t	tensão normal atuante segundo a direção tangente ao eixo central de um tendão numa camada helicoidal;
σ_n	tensão normal atuante segundo uma direção ortogonal às superfícies de contato de um tendão com as camadas adjacentes;
Σ	denota uma dada configuração do tubo/cabo;
τ	pode designar: <i>i</i>) tensão de cisalhamento; <i>ii</i>) tortuosidade de uma curva;
$\tau_{z\theta}$	tensão de cisalhamento atuando nas camadas plásticas devida à torção;
θ	posição angular, medida com relação ao eixo x , da projeção de um dado ponto de uma hélice cilíndrica sobre o plano Oxy ;
θ_0	posição angular, medida com relação ao eixo x , do ponto de uma hélice cilíndrica que passa pelo plano Oxy ;
χ	curvatura associada a uma dada curva;

Bases de versores utilizadas:

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$	base ortonormal associada às direções principais de flexo-torção (x, y, z) da seção transversal de uma barra;
$(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$	base ortonormal associada aos versores tangente, normal e binormal de uma curva;

Glossário

<i>birdcaging</i> :	flambagem dos tendões que compõem as armaduras helicoidais de tração, presentes em tubos flexíveis e cabos umbilicais, caracterizada por grande deformação radial da camada;
cabo umbilical:	cabo armado, para alimentação ou transmissão de sinais de controle eletro-hidráulicos à cabeça de poço, no fundo do mar;
catenária:	curva correspondente à elástica de um cabo ideal;
cesta:	recipiente usado para o armazenamento e transporte de tubos flexíveis;
linha:	termo usado para designar indistintamente cabos ou tubos;
permeabilidade:	propriedade de um material associada à capacidade de permitir a passagem de líquidos ou gases através dele;
<i>riser</i> :	trecho do tubo ou cabo umbilical que fica suspenso entre a unidade (fixa ou flutuante) de produção e o solo submarino;
<i>riser</i> flexível:	designa tubo flexível composto utilizado como <i>riser</i> na produção ou escoamento de hidrocarbonetos, no mar;
<i>riser</i> rígido:	<i>riser</i> composto por tubo de aço, lançado diretamente ao fundo do oceano e suspenso a uma unidade (fixa ou flutuante) de produção;
<i>SCR</i> :	“ <i>Steel Catenary Riser</i> ”, expressão inglesa usada para designar <i>risers</i> rígidos;
<i>steep-wave</i> :	tipo de configuração de instalação de tubos flexíveis e cabos umbilicais com a utilização de flutuadores intermediários distribuídos;
<i>TDP</i> :	“ <i>Touchdown point</i> ”, expressão inglesa usada para designar o ponto de contato do <i>riser</i> com o solo submarino;
topo:	expressão utilizada para designar a extremidade superior do <i>riser</i> ;
unidade flutuante:	plataforma flutuante ou navio que sirva à produção de petróleo no mar;

1. INTRODUÇÃO

Tubos flexíveis (ou *risers* flexíveis) e cabos umbilicais têm sido largamente utilizados pela indústria petrolífera em aplicações *offshore* nos últimos anos. Os primeiros consistem num tipo de tubulação usada para o transporte de vários tipos de fluidos como petróleo e suas frações, fluido de completação, água de injeção, gases (para *gaslift* ou injeção) e produtos químicos, geralmente trabalhando a alta pressão. Os cabos umbilicais, por sua vez, são usados para permitir o controle e a comunicação entre equipamentos submersos e de superfície (como plataformas marítimas ou navios), possuindo um núcleo formado por cabos elétricos e mangueiras hidráulicas para atender a esta necessidade. As figuras 1.1 e 1.2 ilustram alguns exemplos de sistemas flutuantes de produção que utilizam tubos flexíveis e cabos umbilicais em sua operação.

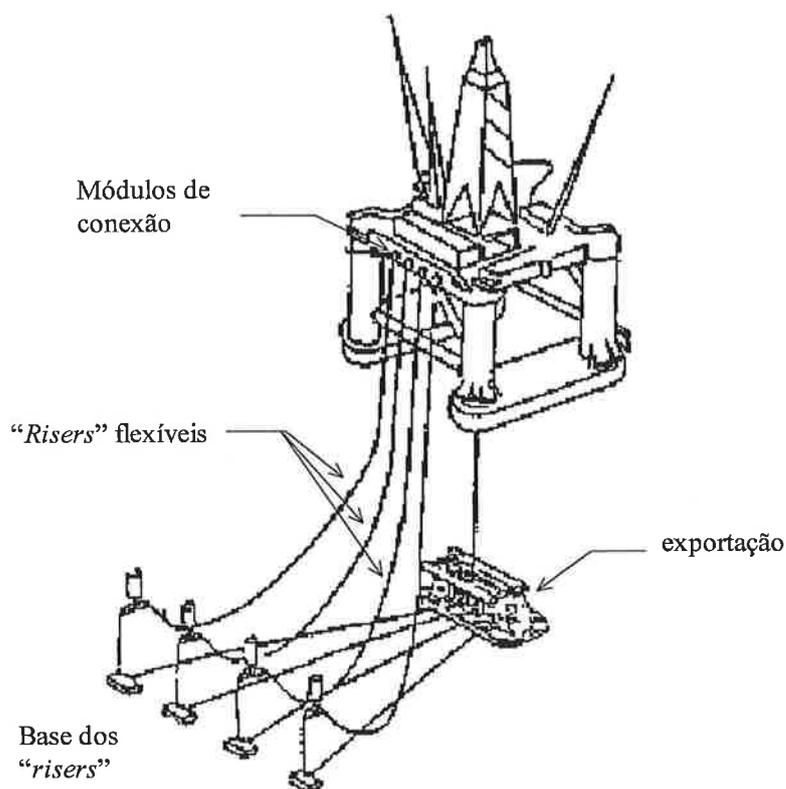


Figura 1.1: Exemplo de utilização de linhas flexíveis [22].

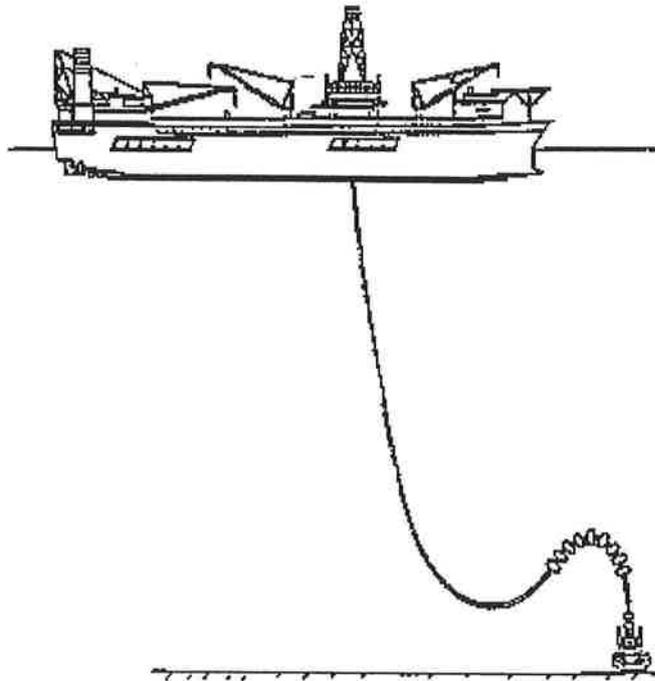


Figura 1.2: *Risers* flexíveis em configuração *steep-wave* [22].

Quanto à concepção estrutural, estes dois tipos de produtos são muito semelhantes, apresentando várias camadas de reforço e de proteção que envolvem a parte central (constituída pela carcaça intertravada, no caso dos tubos flexíveis, e pelo núcleo eletro-hidráulico, no caso dos umbilicais). As camadas de reforço consistem basicamente em conjuntos de fios metálicos dispostos helicoidalmente em torno do núcleo, conferindo resistência mecânica ao tubo/cabo, enquanto as camadas de proteção são geralmente feitas de termoplásticos extrudados sobre as camadas internas, garantindo assim a estanqueidade do conjunto e a proteção contra corrosão das camadas metálicas. A principal característica destas estruturas é o fato de possuírem grande rigidez axial e torsional, porém baixa rigidez flexional. As figuras 1.3 e 1.4 mostram, respectivamente, detalhes da estrutura interna de um tubo flexível e de um cabo umbilical.

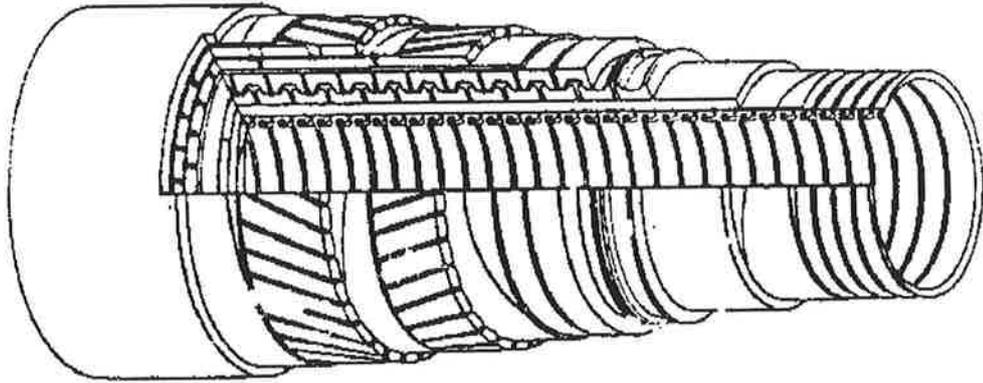


Figura 1.3: Estrutura interna de um tubo flexível típico [43].

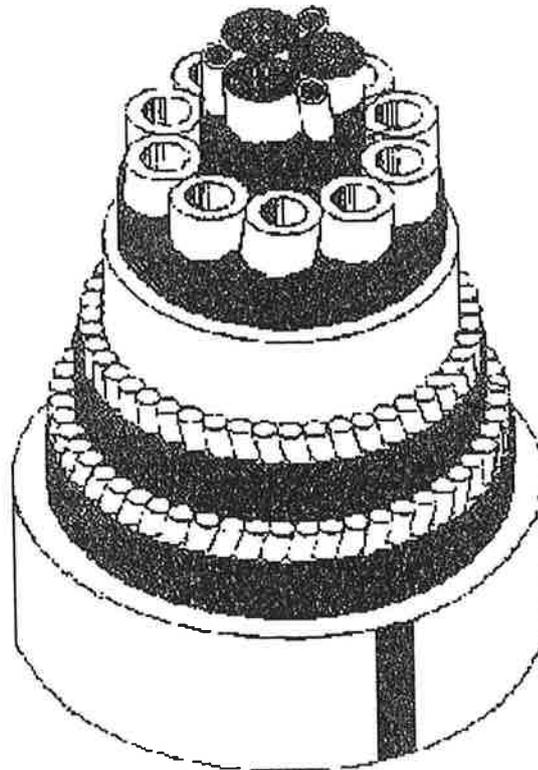


Figura 1.4: Estrutura interna de um cabo umbilical [38].

Historicamente, os primeiros *risers* flexíveis foram empregados pela Petrobrás na Bacia de Campos, litoral brasileiro, no final da década de 70. O campo de Enchova foi um dos pioneiros a utilizar este tipo de estrutura, iniciando sua produção em 1979 (ver, por exemplo, Patel et al. [52]). A partir de então, o uso e a importância destes produtos em aplicações *offshore* cresceram de forma significativa: já no início da década de 90, mais de 50.000 km de cabos umbilicais haviam sido instalados no mundo, conforme assinalam Legallais et al. [38].

Embora o comportamento dinâmico e global destas estruturas tenha sido bastante discutido na literatura nos últimos anos, poucas informações foram publicadas a respeito de seu comportamento estrutural interno, ou seja, acerca da distribuição de tensões nas várias camadas. Os principais estudos resumem-se a modelos analíticos simplificados (como o modelo de Féret; Bournazel [24] ou os de Witz; Tan [86, 87]), algumas vezes amparados por ensaios experimentais. Além desta relativa escassez de informações e de modelos para a análise local, há também grandes divergências nos resultados obtidos (como, por exemplo, na determinação dos valores de rigidez do tubo/cabo), principalmente quando se trata de carregamentos de flexão, conforme mostra estudo conduzido por Witz [88] e publicado em 1996.

Diante da importância que o tema assume, tanto no que toca o aspecto econômico quanto o aspecto ambiental da questão (sobretudo no caso dos tubos flexíveis já que a falha de tais estruturas implicaria em elevados custos decorrentes da paralisação das atividades e limpeza do local para garantir a proteção ambiental, sem falar nos riscos de acidentes devidos ao derramamento de petróleo), é imprescindível que se tenha um melhor entendimento quanto ao comportamento mecânico de tais estruturas. A busca pela compreensão deste comportamento não deve se basear somente em modelagens (sejam elas analíticas ou numéricas) ou somente em ensaios experimentais: é necessário que tanto os resultados obtidos por modelos analíticos quanto aqueles obtidos por análises numéricas (via discretização por elementos finitos, por exemplo) sejam comparados entre si e com resultados experimentais, a fim de validar (ou refutar) as hipóteses consideradas nas respectivas modelagens e

identificar as possíveis fontes de discrepância entre os resultados. Conforme assinala Milton Vargas, professor emérito da Escola Politécnica, "...a descrição dos fenômenos da natureza é feita por expressões matemáticas, mas essas expressões não são necessariamente verdadeiras. Para serem verdadeiras elas devem coincidir com uma (sic) experiência, que deve ser feita de acordo com uma (sic) teoria... A teoria reflete a experiência e vice-versa..." [31].

Além dos poucos modelos para a previsão do comportamento estrutural interno em tubos flexíveis e cabos umbilicais, outro ponto que não tem recebido a atenção devida está ligado à análise de estabilidade global das linhas, ou seja, à determinação da carga crítica de flambagem em *risers* flexíveis. Tal questão é fundamental para o projeto de *risers*, pois, como afirmam Aranha et al. [13], resultados numéricos não são muito precisos quando a força de compressão local atinge valores próximos da carga crítica de flambagem, o que pode ser mostrado através da análise de um cabo ideal (com rigidez flexional nula): apesar de tal elemento não suportar forças de compressão, os resultados numéricos indicam, algumas vezes, valores de compressão relativamente altos atuando no cabo. Por extensão, pode-se esperar também problemas numéricos na análise de *risers* flexíveis (que possuem rigidez flexional não nula) quando a força de compressão se aproxima da "região de saturação" dada pela carga crítica de flambagem (P_{cr}). Da mesma forma, se um valor de referência para P_{cr} não é conhecido, pode haver dificuldades de interpretação na análise dos resultados numéricos: "Afim, qual é a carga máxima de compressão a que o *riser* estará submetido?".

Longe de ser um problema trivial, a determinação da carga crítica de flambagem em *risers* levanta uma série de perguntas, tais como: "Qual o comprimento de flambagem a ser considerado para o *riser*?"; "Como a curvatura local influencia a carga crítica de flambagem e como considerar seu efeito?"; "Em quais condições teremos modos de flambagem no plano e em quais teremos flambagem fora do plano?"; "Quais são os parâmetros que regulam o fenômeno de flambagem em *risers*?", etc.. Algumas destas perguntas já foram parcialmente respondidas por

Aranha et al. [13], que propuseram recentemente uma expressão analítica para a determinação da carga crítica de flambagem em *risers*, considerando o problema plano. Respostas mais completas, considerando uma abordagem tridimensional do problema serão fornecidas neste trabalho.

De uma forma resumida, podemos afirmar que os objetivos deste trabalho preenchem basicamente três necessidades:

- i) obtenção de modelos analíticos que permitam a análise local de tubos flexíveis e cabos umbilicais submetidos a carregamentos combinados de qualquer natureza;
- ii) proposta de uma expressão para a determinação da carga crítica de flambagem em *risers*, considerando a natureza tridimensional do problema;
- iii) fundamentação de todas as hipóteses feitas para o cumprimento dos objetivos (i) e (ii) acima assinalados.

Para fundamentar a pertinência e a importância do primeiro objetivo a ser alcançado, deve-se destacar que a grande maioria dos modelos analíticos atualmente encontrados na literatura não permitem uma análise de carregamentos combinados, ficando divididos em duas categorias principais (conforme o tipo de carregamento):

- a) modelos para análise de carregamentos axissimétricos: neste caso são analisados os carregamentos de tração, torção, pressão externa e pressão interna (este último no caso de tubos apenas) bem como as combinações decorrentes destes carregamentos. Alguns exemplos destes modelos são: o modelo de Féret; Bournazel [24] e o modelo de Witz; Tan [86];
- b) modelos para análise de flexão pura: neste caso apenas o efeito da flexão pura é tratado, desconsiderando-se qualquer outro tipo de carregamento. Alguns exemplos destes modelos podem ser encontrados em Patel et al. [52], Souza [78] e Witz; Tan [87].

Lembramos ainda que, na quase totalidade dos artigos e trabalhos publicados que tratam do comportamento estrutural interno de tubos flexíveis e cabos umbilicais, a análise se limita praticamente à determinação de algumas expressões para a determinação dos valores de rigidez equivalente da estrutura.

É importante ressaltar ainda que a vida útil de *risers* flexíveis e cabos umbilicais só pode ser avaliada com razoável confiabilidade se existirem modelos que forneçam os valores de tensões nas diversas camadas com a esperada precisão. Da mesma forma, os valores calculados de rigidez são necessários para se efetuar uma análise global da linha com maior precisão, sendo também imprescindíveis para a análise de instabilidade da linha sob carregamento combinado de tração e torção (previsão de formação de laços), para a previsão de instabilidade sob condições de compressão dinâmica, e também para a correta determinação dos modos naturais de vibração induzida por vorticidade.

Para preencher as lacunas deixadas pelos modelos atualmente existentes, os modelos analíticos a serem propostos neste trabalho deverão atender aos seguintes pontos:

- a) permitir a análise de carregamentos combinados de qualquer natureza;
- b) ser capazes de fornecer as tensões nas diversas camadas que constituem os tubos flexíveis ou cabos umbilicais para os diversos tipos de solicitação considerados;
- c) fornecer os valores de rigidez axial, torsional e flexional do tubo/cabo a ser analisado com confiabilidade satisfatória.

A determinação precisa da carga crítica de flambagem em *risers* flexíveis (segundo objetivo deste trabalho) não deixa de ser menos importante para o projeto destas estruturas, pois o desconhecimento de um valor limite da carga de compressão, que leva à instabilidade global da linha, pode levar o projetista a superdimensionar as camadas internas para evitar fenômenos de instabilidade local (como *birdcaging* nas camadas helicoidais) que nunca viriam a ocorrer, tendo em vista que, uma vez alcançada a carga crítica global, a linha “procura” uma nova configuração de equilíbrio. Ressalta-se, ainda, que a obtenção da carga crítica de flambagem em

risers requer o conhecimento de suas propriedades mecânicas (como a rigidez flexional e torsional), o que vem aumentar ainda mais a importância dos modelos analíticos a serem propostos no trabalho.

O terceiro objetivo deste trabalho está relacionado à fundamentação de todas as hipóteses feitas para a obtenção dos modelos analíticos a serem propostos no trabalho. À primeira vista, pode até parecer estranho colocar tal item como um dos objetivos do trabalho, porém deve-se ressaltar que tal objetivo é igualmente importante para o entendimento completo dos modelos propostos e de suas capacidades/limitações na solução dos problemas associados. Infelizmente, é muito fácil verificar que a grande maioria dos modelos analíticos disponíveis na literatura dá pouca importância à discussão das hipóteses adotadas em sua obtenção. As consequências devidas a esta falta de informação podem ser resumidas nos seguintes pontos:

- a) uso inadequado das expressões propostas, gerando:
- b) erros fundamentais nos projetos de *risers* e cabos que, por sua vez, levam a:
- c) desconfiança generalizada no uso de modelos analíticos para a determinação das propriedades mecânicas e dos níveis de tensão em tubos e cabos.

Desta forma, o terceiro objetivo deste trabalho não se encontra isolado dos dois primeiros: ao contrário, ele os complementa. O que queremos destacar com isto é que o conhecimento das limitações de uma dada formulação (ou modelo) chega a ser tão importante quanto a própria formulação (ou modelo).

Para atingir estes três objetivos, dividiremos o trabalho em mais seis capítulos. O capítulo 2 traz inicialmente uma descrição dos tubos flexíveis e cabos umbilicais, para facilitar o entendimento do texto por pesquisadores que não atuam diretamente nesta área. Em seguida, ainda no capítulo 2, será feita uma revisão bibliográfica e uma discussão mais aprofundada do estado-da-arte referente ao estudo e à análise de tubos flexíveis e cabos umbilicais. Contudo, em decorrência das várias facetas que envolvem o projeto e a análise destas estruturas, achamos conveniente subdividir tal

revisão em diversas áreas, a saber: (i) Análise do comportamento global de linhas flexíveis; (ii) Análise da estabilidade global de linhas flexíveis; (iii) Análise estrutural local por métodos analíticos; (iv) Análise estrutural local por métodos numéricos; (v) Materiais e fabricação e (vi) Análise de estruturas afins.

O capítulo 3 apresentará um primeiro modelo analítico para a análise de tubos e cabos submetidos a esforços axissimétricos apenas. A razão deste primeiro modelo se justifica pelo fato de que a simplicidade decorrente deste tipo de carregamento possibilita um primeiro contato com o problema, além de servir como um modelo de partida para carregamentos mais complexos que envolvam a flexão. Os esforços de natureza axissimétrica considerados¹ serão tração, torção, pressão externa ou pressão interna (sendo estes últimos considerados apenas na análise dos tubos flexíveis). A análise para tais carregamentos será feita através do uso de modelos analíticos consistentes para cada camada, resultando num sistema de equações que ao ser resolvido fornece os valores de tensões e deformações nas diversas camadas. As diversas expressões analíticas desenvolvidas neste capítulo serão comparadas com expressões equivalentes obtidas na literatura, comentando-se as eventuais diferenças. As hipóteses admitidas para a obtenção destas expressões também serão devidamente comentadas e registradas.

O capítulo 4 fará um confronto de resultados obtidos por diversas formas na análise de tubos e cabos submetidos a carregamentos axissimétricos. Inicialmente serão comparados os resultados analíticos obtidos através do modelo desenvolvido no capítulo 3 com os resultados numéricos obtidos a partir de um modelo simples com elementos finitos para um dado tubo flexível. Com isto verifica-se a validade de algumas das hipóteses admitidas no modelo analítico, e apontam-se as vantagens e desvantagens da utilização dos dois modelos considerados. A seguir, serão feitas várias comparações entre os resultados obtidos analiticamente e resultados

¹ Deve-se registrar que o modelo também permite a possibilidade de carregamentos provenientes de deslocamentos axissimétricos impostos ao tubo/cabo.

experimentais extraídos da literatura para diversos tubos e cabos. Serão discutidas, então, as eventuais diferenças encontradas, procurando-se explicar suas razões.

O capítulo 5 introduz os carregamentos de flexão ao estudo do comportamento estrutural interno de tubos e cabos, sendo então apresentados dois modelos para a análise de carregamentos combinados de qualquer natureza. Tais modelos serão baseados em duas abordagens clássicas encontradas na literatura, a saber:

- a) modelo na ausência de escorregamento entre as camadas e
- b) modelo de escorregamento total entre as camadas.

É importante ressaltar que, embora as abordagens utilizadas sejam as mesmas encontradas na literatura, os únicos dados disponíveis encontrados nos vários artigos e trabalhos pesquisados se resumem a algumas expressões finais, com poucas explicações sobre a forma de obtenção destas expressões. Nossa proposta promete ir muito além do fornecimento puro e simples de “expressões prontas”: haverá também um trabalho intenso de formulação e discussão de hipóteses, além de várias verificações internas de consistência dos modelos, feitos paralelamente à obtenção das diversas expressões necessárias à solução do problema. Contudo, em virtude da falta de informações disponíveis para o confronto de resultados que envolvem a determinação dos níveis de tensões nas diversas camadas de tubos e cabos, serão comparados apenas os valores de rigidez flexional para um dado tubo flexível. Neste caso, as expressões analíticas desenvolvidas serão utilizadas para a estimativa da rigidez flexional do tubo fornecido, sendo tais valores comparados posteriormente com valores experimentais extraídos da literatura.

O capítulo 6 irá tratar da análise de estabilidade global de linhas flexíveis submetidas simultaneamente a compressão dinâmica e torção. Partindo-se das equações gerais de equilíbrio de uma barra, e utilizando-se as equações constitutivas e várias relações geométricas, será deduzida uma expressão para a determinação da carga crítica de flambagem em barras curvas (valendo também para o caso de *risers*, em particular). Em seguida mostraremos a consistência da equação obtida, verificando que a mesma consegue recuperar resultados extraídos de modelos mais simples. Serão feitas várias

análises de estabilidade, considerando-se tanto *risers* rígidos quanto *risers* flexíveis (ressaltamos que a equação proposta é geral, valendo para qualquer tipo de barra curva, em particular, para *risers*). De posse destes resultados, várias considerações interessantes serão feitas ao final do capítulo.

O capítulo 7 traz as conclusões do trabalho e algumas propostas para o encaminhamento de trabalhos futuros que servirão para dar continuidade às pesquisas nesta área e melhorar, cada vez mais, os modelos aqui apresentados.

2. TUBOS FLEXÍVEIS E CABOS UMBILICAIS: REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo tem como objetivo principal apresentar uma revisão da literatura técnica e científica sobre o projeto e/ou análise de cabos umbilicais e tubos flexíveis, de modo a propiciar ao leitor uma melhor compreensão a respeito dos problemas que envolvem o dimensionamento mecânico destas estruturas e, assim, situar com mais propriedade o tema específico de que trata este trabalho. Porém, antes de iniciarmos a revisão bibliográfica, faremos uma breve descrição das camadas que constituem tubos flexíveis e cabos umbilicais típicos, de forma a permitir ao leitor não familiarizado com o tema um melhor entendimento das características construtivas e funcionais destas estruturas.

2.1 Descrição das camadas de um tubo flexível

Os tubos flexíveis são estruturas formadas por várias camadas que, em seu conjunto, proporcionam grande rigidez axial e torsional, mas baixa rigidez flexional. Dependendo da forma como são fabricados, os tubos flexíveis podem ser classificados em dois tipos: aderentes (“*bonded*”) ou não-aderentes (“*unbonded*”). A diferença fundamental entre estes dois tipos é que, nos primeiros, as diversas camadas que os constituem são unidas (“coladas”) através de adesivos ou pela aplicação simultânea de calor e pressão, formando um bloco único, enquanto os últimos possuem camadas independentes (não “coladas”), e que, portanto, podem apresentar deslizamento entre si. Segundo Moore [46], a grande maioria dos tubos flexíveis em utilização são do tipo “*unbonded*” e, por este motivo, serão o objeto de estudo deste trabalho. Pode-se dizer que as características principais destas estruturas são (ver, por exemplo, Féret; Bournazel [24]):

- i) o fato de cada camada ter uma função específica;
- ii) a inexistência de ligações físicas entre as camadas.

A figura 2.1 ilustra um tubo flexível típico com suas principais camadas, a saber: 1) carcaça intertravada de aço; 2) camada plástica interna; 3) camada circunferencial de pressão; 4) armadura de tração interna; 5) armadura de tração externa; 6) camada plástica externa.

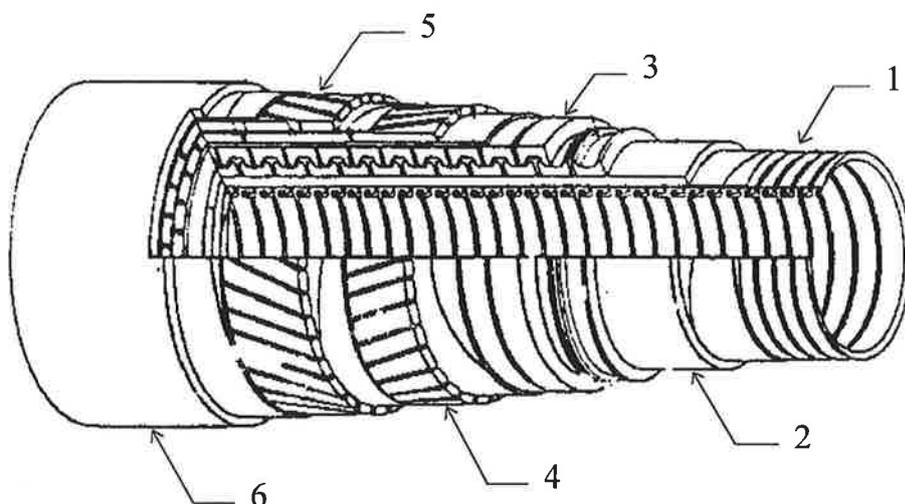


Figura 2.1: Camadas de um tubo flexível típico [43].

A função específica de cada uma destas camadas, e algumas informações adicionais sobre as mesmas são dadas a seguir:

Carcaça Intertravada de Aço:

A carcaça intertravada é geralmente a camada mais interna do tubo. Seu objetivo principal é prevenir o colapso do tubo flexível, que pode ocorrer devido à pressão hidrostática externa ou à pressão de estrangulamento (*squeezing*) provocada pelas armaduras helicoidais (camadas 4 e 5 da figura 2.1) quando o tubo é submetido à esforços de tração. Para ambientes agressivos, os materiais especificados para a carcaça são geralmente os aços inoxidáveis AISI 304L ou AISI 316L, entre outros. Contudo, conforme assinalam Hill; Measamer [29], testes desenvolvidos no Instituto

Force (Copenhague) mostraram que aços-carbono podem também ser utilizados para o transporte de uma classe bem mais ampla de fluidos do que a admitida originalmente.

A carcaça consiste numa fita de aço, pré-formada numa seção S, e enrolada na forma de uma hélice de pequeno passo com intertravamento. A figura 2.2 mostra um corte longitudinal de uma carcaça (note que a espessura da camada não é a espessura da fita de aço usada na sua fabricação).



Figura 2.2: Corte longitudinal de uma carcaça intertravada [29].

Camada Plástica Interna:

A camada plástica interna é uma camada termoplástica extrudada sobre a carcaça intertravada. Seu propósito é conter os fluidos a serem transportados pelo tubo, garantindo a estanqueidade¹, e permitindo também uma distribuição de pressão mais uniforme sobre a carcaça intertravada. Os materiais mais comumente utilizados nesta camada são: polietileno de alta densidade (PEAD), nylon 11, nylon 6/12, e fluoreto de polivinilideno (PVDF), sendo a escolha feita pelas condições de serviço do tubo (temperatura, tipo de fluido, etc).

Outros nomes comumente utilizados para a designação desta camada são: “barreira de pressão” e “barreira de nylon”.

Camada Circunferencial de Pressão:

O objetivo das camadas circunferenciais de pressão é dar suporte à camada plástica interna em condições de grande pressão interna (pressão de explosão). Para aplicações em que se garantem baixas pressões internas, esta função pode ser bem desempenhada pelas duas armaduras de tração; porém, em aplicações onde a pressão

¹ Deve-se observar que a carcaça intertravada não é estanque.

interna pode chegar a valores muito altos, a necessidade de garantir que o vão livre da camada plástica interna seja o menor possível impõe o uso de camadas de pressão circunferenciais intertravadas. Para facilidade de fabricação, tal camada é feita em aço de baixo carbono, tendo uma tensão de escoamento por volta de 758 MPa. A figura 2.3 mostra alguns perfis utilizados nas camadas de pressão circunferenciais. Tais camadas também são frequentemente denominadas “camadas zeta”.

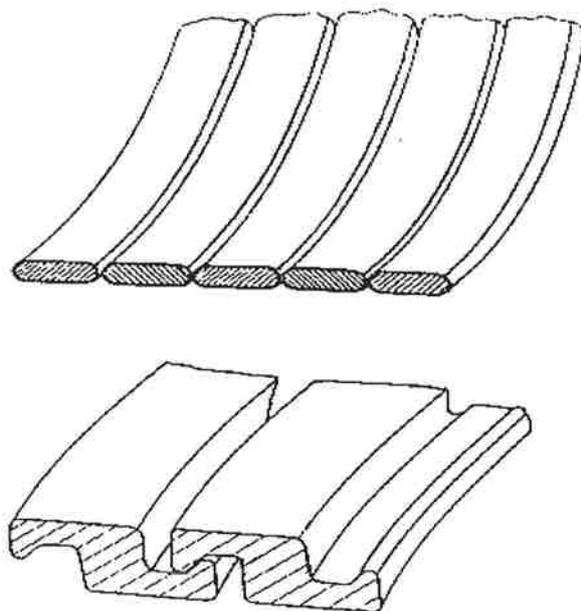


Figura 2.3: Exemplos de perfis utilizados em camadas zeta [22].

Armaduras de Tração:

As armaduras helicoidais de tração tem basicamente duas funções: a primeira é dar suporte à camada plástica interna contra a pressão de explosão quando inexistem no tubo as camadas de pressão circunferenciais (camadas zeta). A segunda, e mais importante, função é proporcionar resistência axial ao tubo, a fim de que o mesmo possa suportar as forças de tração decorrentes do carregamento (peso próprio, pressão interna, etc).

Geralmente os tubos flexíveis possuem duas armaduras de tração, as quais são enroladas formando helicóides com sentidos de enrolamento opostos. Para compensar a torção, os ângulos de assentamento destas duas camadas são ajustados considerando a diferença entre seus raios médios. Durante o processo de fabricação das camadas, cada tendão é pré-formado sob flexo-torção de forma a minimizar as tensões elásticas e, assim, prevenir que eles se desenrolem quando o tubo é cortado. O material dos tendões, de forma geral, é o aço de baixo-carbono ($\sigma_e \cong 758$ MPa) ou de alto-carbono ($\sigma_e \cong 1550$ MPa), dependendo do fluido a ser transportado.

Camada Plástica Externa:

De forma análoga à camada plástica interna, esta camada também é feita a partir de um material termoplástico extrudado, porém sobre a armadura de tração externa. Sua função é ajudar a manter os tendões das armaduras em suas posições corretas, impedindo sobreposições, além de proteger as camadas internas contra danos, abrasão e, principalmente, contra a corrosão. Os materiais utilizados nesta camada são geralmente o polietileno de alta densidade (PEAD), o nylon 11 e o nylon 12.

Camadas Anti-fricção:

Além das camadas já mencionadas, também é bastante comum a utilização de camadas anti-fricção dispostas entre duas camadas helicoidais adjacentes. Estas camadas são geralmente formadas por fitas de pequena espessura, cuja resistência aos esforços aplicados ao tubo pode ser frequentemente desprezada. Como o próprio nome diz, a função destas camadas é reduzir o atrito entre duas camadas metálicas adjacentes. Embora não tenha sido dado destaque a estas camadas na figura 2.1 (pelo fato de as mesmas não serem consideradas estruturais), pode-se claramente perceber sua presença entre as camadas 3 e 4 (camada circunferencial de pressão e armadura de tração interna) e entre as camadas 4 e 5 (armaduras de tração interna e externa). Além de reduzir o atrito, pode-se atribuir a estas camadas uma segunda função que é a de manter os tendões devidamente posicionados (sem sobreposições) enquanto as camadas mais externas são “aplicadas”.

2.2 Descrição das camadas de um cabo umbilical

A constituição dos cabos umbilicais é muito semelhante à dos tubos flexíveis, sendo também formados por várias camadas que proporcionam ao conjunto grande rigidez axial e torsional, porém baixa rigidez flexional. Como nos tubos flexíveis não-aderentes (“*unbonded*”), as diversas camadas que constituem os cabos umbilicais também não estão unidas entre si, podendo deslizar umas em relação às outras. E, da mesma forma, cada camada possui uma função específica dentro do conjunto. A figura 2.4 ilustra um típico cabo umbilical eletro-hidráulico com suas principais camadas (núcleo eletro-hidráulico, camada plástica interna, armaduras de tração interna e externa e camada plástica externa).

Comparando-se a estrutura dos cabos umbilicais à dos tubos flexíveis, podemos observar que as únicas diferenças fundamentais entre as duas são:

- i) a existência, no caso dos umbilicais, do núcleo eletro-hidráulico e
- ii) a inexistência, também no caso dos umbilicais, de camadas de reforço como a carcaça intertravada de aço e as camadas de pressão zeta.

A primeira diferença é intrínseca ao objetivo dos cabos umbilicais, que é o de prover sinais de controle e alimentação aos sistemas de válvulas instalados no fundo do oceano, junto às cabeças dos poços, sendo tal função cumprida pelo núcleo eletro-hidráulico. A inexistência da carcaça intertravada, por sua vez, se explica pela não necessidade desta camada de reforço para os cabos umbilicais, já que neste caso o colapso dos umbilicais fica impedido pela existência do núcleo eletro-hidráulico, que resiste às pressões externas aplicadas ao cabo. A inexistência das camadas de pressão circunferenciais (camadas zeta) também é óbvia, uma vez que para os cabos umbilicais não há solicitação devido à pressão interna.

As funções das demais camadas (camada plástica interna; armaduras de tração interna e externa e camada plástica externa) já foram explicadas para o caso dos tubos flexíveis, não havendo necessidade de repetir as mesmas informações.

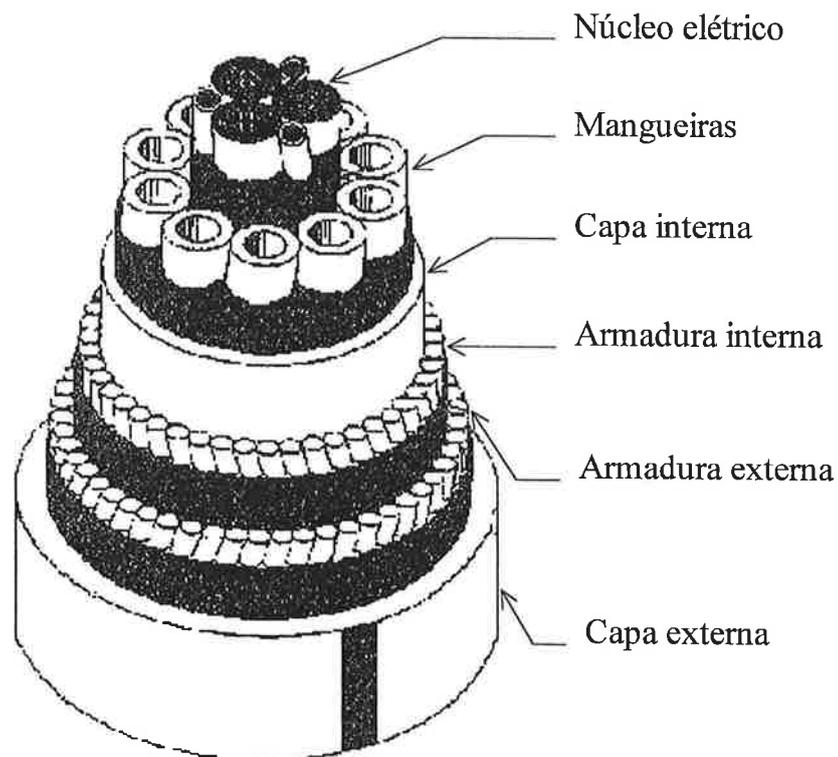


Figura 2.4: Camadas de um cabo umbilical típico [38].

2.3 Revisão bibliográfica sobre tubos flexíveis e umbilicais

A literatura especializada que trata do projeto e da análise de tubos flexíveis e cabos umbilicais é relativamente recente, conforme poderemos constatar nos sub-itens seguintes. De fato, o uso de tubos flexíveis em campos de produção *offshore* só teve início a partir do final da década de 70, conforme relatam Patel et al. [52], Féret; Bournazel [24] e Cruz [22]. Os cabos umbilicais foram introduzidos no mercado praticamente nesta mesma época, segundo Legallais et al. [38].

O objetivo desta revisão bibliográfica é apresentar os principais temas relacionados ao projeto e/ou à análise de tubos flexíveis e cabos umbilicais (ou de outras estruturas afins), as pesquisas realizadas até então, e mostrar como se posiciona nossa pesquisa, em particular, dentro deste panorama. Como as publicações e artigos que abordam o

tema são bastante variados quanto ao enfoque a ser estudado, procuramos dividir a revisão bibliográfica em seis principais temas, a saber:

- Análise do comportamento global de linhas flexíveis: serão relatados alguns artigos que tratam do estudo da resposta estrutural global de linhas flexíveis (formadas por tubos flexíveis ou cabos) sujeitas a carregamentos estáticos e/ou dinâmicos;
- Análise da estabilidade global de linhas flexíveis: embora este tema pudesse ser considerado como parte do estudo do comportamento global, optamos por discutir temas relacionados à estabilidade global de linhas como um item a parte, dada a importância e a especificidade do tema;
- Análise estrutural por métodos analíticos: serão revistos os principais artigos que tratam da modelagem analítica para o cálculo da distribuição de esforços na seção transversal de tubos e cabos sob carregamentos específicos. As hipóteses simplificadoras dos modelos tratados serão discutidas, porém, nesta oportunidade, apenas superficialmente. A discussão de hipóteses será retomada nos capítulos 3 e 5 deste trabalho, quando serão propostos modelos para a análise local de tubos e cabos;
- Análise estrutural por métodos numéricos: serão apresentados alguns artigos que tratam da distribuição de esforços nas camadas de tubos/cabos por métodos numéricos. Devido à grande complexidade geométrica destas estruturas, aliada às condições de contato inerentes à modelagem, nota-se a pequena quantidade de artigos que procuram tratar o problema via discretização por elementos finitos;
- Materiais e fabricação: serão relatados alguns artigos voltados basicamente à busca e utilização de novos materiais em tubos flexíveis e cabos umbilicais, com a finalidade de aumentar sua resistência e/ou diminuir seu peso, garantindo, com isso, a possibilidade de operação em lâminas d'água cada vez mais profundas;
- Análise de estruturas afins: serão indicados e discutidos alguns artigos que tratam da análise de estruturas cuja concepção é bastante similar à empregada em tubos flexíveis e cabos umbilicais, como, por exemplo, os cabos de aço (*wire ropes*).

Os artigos a serem discutidos em cada um destes seis grupos serão apresentados em ordem cronológica, de forma a melhor observarmos a evolução das pesquisas relacionadas ao tema no decorrer do tempo. É importante ressaltar que vários dos artigos citados trazem também resultados experimentais que são comparados com resultados obtidos por expressões analíticas desenvolvidas ou outros métodos. Desta forma, optamos por não introduzir um novo grupo relativo a estes resultados experimentais, preferindo comentá-los nos artigos a eles relacionados.

2.3.1 Análise do comportamento global de linhas flexíveis

A análise do comportamento global de linhas flexíveis tem como objetivo principal a determinação da distribuição de esforços solicitantes ao longo das mesmas, frente as mais variadas condições de carregamento (estático ou dinâmico). A importância deste tema é, portanto, indiscutível para os objetivos propostos por este trabalho, já que a determinação da distribuição de tensões nas diversas camadas que constituem os tubos flexíveis e cabos umbilicais depende, naturalmente, do conhecimento dos esforços solicitantes seccionais no trecho a ser analisado.

Lembrando que não é nosso objetivo descrever com profundidade os métodos e técnicas de análise empregados na análise global de linhas, mas somente estabelecer a ligação entre o tema tratado no presente trabalho e outros temas relacionados, vamos agora comentar alguns artigos obtidos durante a pesquisa realizada e que tratam da análise global de linhas.

Uma análise do comportamento dinâmico global de linhas flexíveis foi muito bem apresentada por O'Brien; McNamara [49] que utilizaram uma formulação híbrida (deslocamentos-forças) com elementos finitos de cabo e viga para prever o campo de deslocamentos e os esforços solicitantes ao longo de linhas com diversas configurações. Foi dada ênfase a certas características do problema que são relevantes a sistemas flutuantes de produção baseados em tubos flexíveis, tais como: uso de um pré-processador baseado em equações simples para a determinação da

configuração inicial da linha; uso de esquemas de solução estática e dinâmica com passo variável; uso de algoritmos de contato com o fundo do oceano e modelagem de rotações de corpo rígido finitas no espaço 3D. Os autores incorporaram as formulações matemáticas desenvolvidas em um programa denominado “*Flexcom-3D*” e apresentaram os resultados obtidos pelo programa para três configurações distintas de *risers*: *lazy-S*, *steep-S* e catenária livre. Todos os dados referentes às propriedades das linhas e aos carregamentos, bem como as hipóteses admitidas na modelagem, são esclarecidos no texto, o que o torna uma interessante base de comparação para outros programas similares.

Ainda na área de comportamento global de linhas flexíveis, Brown et al. [16] publicaram os resultados de várias análises de sistemas de linhas flexíveis com o auxílio de um programa denominado “*Flexriser*”, baseado no método das diferenças finitas. Apesar de os temas abordados serem de real interesse, pode-se dizer que os resultados apresentados são basicamente qualitativos, já que praticamente nenhum dado foi fornecido. Neste artigo os autores enfatizam a importância da modelagem detalhada de todo o sistema de *risers* (incluindo aí o tipo de sistema, as características geométricas, as condições do ambiente e as propriedades mecânicas dos *risers*) para a identificação das regiões críticas do sistema e das piores condições de carregamento, sendo esta a principal conclusão do artigo.

Uma grande contribuição ao estudo do comportamento global de *risers* flexíveis tem sido dada nos últimos anos por Patel e por Patel; Seyed [50, 51, 52, 75]. Em seu artigo [50], de 1989, estes autores tratam do estudo dos efeitos do escoamento interno em tubos flexíveis (bem como dos efeitos do campo de pressões interno e externo ao tubo) na equação diferencial de equilíbrio que descreve o comportamento estático da linha, demonstrando que ambos efeitos são importantes na resposta do *riser*. Os autores utilizam o conceito de “tração efetiva” para dar um tratamento matemático mais simples à equação diferencial obtida, agrupando termos que possuem um efeito “semelhante” sobre o comportamento estático/dinâmico do *riser*. Retomando este estudo num artigo mais recente (1992), Seyed; Patel [75] apresentam

novamente expressões para o cálculo das forças provenientes do campo de pressões e do escoamento (em regime permanente) de fluidos internos ao tubo. Com estas expressões, os autores estabelecem o equilíbrio de um elemento de tubo para o caso bidimensional, obtendo as equações diferenciais que regem o comportamento da linha. As equações obtidas são então aplicadas a diversos casos específicos, explicando-se as eventuais modificações necessárias às equações para permitir a análise de *risers* em várias configurações, como, por exemplo, *catenária simples*, *steep-S*, *lazy-S*, *steep-wave* e *lazy-wave*.

O excelente artigo de revisão publicado por Patel; Seyed [51], em 1995, demonstra claramente como este tema tem sido objeto de intensas investigações nos últimos vinte anos. Neste artigo, um total de 74 referências são citadas e comentadas pelos autores numa retrospectiva histórica sobre o desenvolvimento de técnicas de análise hidrodinâmica em linhas flexíveis. O artigo abrange seis tópicos relacionados ao tema, a saber: i) métodos de análise estática; ii) análise dinâmica no domínio da frequência; iii) análise dinâmica no domínio do tempo; iv) efeitos da pressão interna e externa; v) efeitos do escoamento interno, e vi) validação de análises numéricas. Os autores concluem o artigo ressaltando que, apesar do fato de a comunidade científica ter se aprofundado em vários aspectos referentes ao comportamento global de *risers* (como o próprio artigo demonstra), várias outras áreas ainda carecem de um maior estudo, como, por exemplo, os efeitos de amortecimento estrutural, a avaliação das forças de arrasto hidrodinâmicas tangenciais e os efeitos de contato entre a linha e o leito do mar.

Uma outra referência que deve ser citada é a tese “*Mecânica de cabos e tubos submersos lançados em “catenária”: uma abordagem analítica e experimental*”, defendida por Pesce [60], em 1997. Neste trabalho, o autor aborda vários problemas relacionados à mecânica de linhas elásticas submersas (tubos ou cabos), tanto do ponto de vista estático quanto dinâmico, analisando o comportamento de “*risers*” lançados na configuração de “*catenária direta*”, e tendo como objetivo a determinação dos esforços solicitantes ao longo do comprimento suspenso, com

ênfase à caracterização da curvatura (e, conseqüentemente, do momento fletor) em duas regiões críticas: no entorno do ponto de contato com o fundo e junto à extremidade suspensa. A abordagem utilizada é analítica, desenvolvida dentro de técnicas usuais de matemática aplicada, no âmbito da teoria de perturbações, com verificações experimentais. Deve-se ressaltar que esta última referência citada sistematiza uma parte do extenso trabalho que vem sendo desenvolvido nos Departamentos de Engenharia Mecânica e Naval da Escola Politécnica da USP, na área de mecânica de cabos e tubos flexíveis, com vários resultados importantes já obtidos (ver, por exemplo, referências [7] a [13], [53] a [62], e [66] a [71]). Na realidade, o presente trabalho complementa as atividades de pesquisa que vêm sendo realizadas pelo grupo, pois utiliza os resultados obtidos através da análise global das linhas para possibilitar a análise local, com a verificação dos níveis de tensões em cada camada.

Vale mencionar, também, as importantes e continuadas contribuições ao tema advindas de estudos realizados na UFRJ e no Centro de Pesquisas da Petrobrás, consubstanciadas no programa ANFLEX que, através de formulação do método dos elementos finitos, permite abordar um grande número de problemas dinâmicos não-lineares globais (ver, por exemplo, Mourelle [47, 48] e Jacob [32]).

Em contrapartida, a análise local também é essencial para se proceder a uma correta análise do comportamento global da linha, já que esta última depende dos valores corretos de rigidez axial, torsional e flexional do tubo/cabo para a obtenção de sua resposta (estática ou dinâmica) a uma dada condição de carregamento. Tais valores de rigidez, por sua vez, somente podem ser determinados através da análise local, com modelos que possibilitem prever a distribuição dos esforços nas diversas camadas que compõem estas estruturas. No capítulo 6 mostraremos um exemplo de análise de comportamento global de um trecho de linha para a previsão de instabilidade sob carregamento combinado de torção e compressão dinâmica, onde os valores de rigidez utilizados serão obtidos através dos modelos analíticos desenvolvidos nos capítulos 3 e 5.

2.3.2 Análise da estabilidade global de linhas flexíveis

Como já mencionamos anteriormente, a análise de estabilidade global de linhas flexíveis pode ser interpretada como uma forma de análise do comportamento global, porém para condições específicas de carregamento. A análise de estabilidade de barras, de uma forma geral, é um tema clássico em Mecânica Aplicada, formando um núcleo de problemas bastante interessantes e, algumas vezes, extremamente complexos (ver, por exemplo, Atanackovic [14]). Mesmo sendo um tema muito estudado, o assunto ainda permanece relevante e atual, com aplicações que abrangem campos de pesquisa de naturezas significativamente diferentes, desde cabos submarinos até moléculas de DNA, como mostram estudos realizados por Stump; Fraser [79, 80].

Em aplicações *offshore*, a análise de estabilidade de *risers* e cabos é de grande importância para assegurar que tais estruturas possam suportar os carregamentos aplicados (durante a operação de lançamento ou em condições de operação) sem apresentar danos, como, por exemplo, os decorrentes de curvatura excessiva imposta ao *riser*/cabo quando há perda de estabilidade. Uma condição particular que deve ser verificada ocorre quando a amplitude da tração dinâmica na linha (associada ao movimento do sistema flutuante) excede localmente a amplitude da tração estática (tal condição pode ser freqüente em regiões de baixo tensionamento estático como, por exemplo, no *TDP*). Uma vez que a tração dinâmica muda ciclicamente no tempo, o *riser*/cabo fica sob compressão dinâmica durante parte do ciclo da onda, nestas condições. Além do carregamento de compressão dinâmica, pode haver também alguma torção na linha, a qual pode estar associada ao próprio movimento do sistema flutuante, a uma mudança de direção na correnteza, ou até mesmo a uma torção residual interna, sempre presente em *risers* flexíveis e cabos umbilicais. A ação simultânea destes carregamentos (compressão dinâmica e torção) pode acarretar sérios problemas na linha, como, por exemplo, a formação de laços (*loops* ou *hockles*) ou dobras (*kinks*) na linha, comprometendo sua integridade estrutural.

O problema de estabilidade de uma barra com seu eixo central inicialmente reto e submetida a ação simultânea de um momento de torção (M_t) e de uma força axial de tração ou de compressão (P) foi investigado primeiramente por Greenhill, em 1883, que obteve uma expressão relacionando os carregamentos aplicados à barra com sua rigidez flexional (EI) e seu comprimento (l). A expressão obtida por Greenhill é dada por (ver, por exemplo, Love [40]):

$$\frac{P}{EI} + \left(\frac{M_t}{2EI} \right)^2 = \left(\frac{n \cdot \pi}{l} \right)^2$$

No capítulo 6 deste trabalho mostraremos que a expressão de Greenhill também pode ser aplicada ao estudo de estabilidade de *risers* e cabos, desde que o comprimento de flambagem seja corretamente estimado. Mostraremos também que o valor do parâmetro n não se limita apenas a $n = 1$ (valor determinado por Greenhill para obtenção da menor carga crítica de flambagem), sendo tal resultado válido apenas para barras com curvatura inicial nula. Dependendo de fatores como a curvatura inicial da barra e a relação entre sua rigidez flexional e torsional (EI/GJ) podemos ter outros valores possíveis para n , como $n = 2$ ou $n = 3$.

Deve-se ressaltar que a determinação da carga crítica de flambagem em *risers* e cabos é fundamental para o projeto destas estruturas: se a carga crítica de flambagem para uma dada condição for, por exemplo, P_{cr} (conhecido), não será necessário impor que as camadas internas suportem (em seu conjunto) valores de compressão superiores a P_{cr} (pois quando $P > P_{cr}$ haverá flambagem do *riser*/cabo), evitando-se, deste modo, um super-dimensionamento desnecessário da seção. Por outro lado, a atenção deve se voltar para a condição pós-flambagem da linha, verificando-se se a curvatura máxima nesta condição não ultrapassa os valores permitidos pelo projeto ou pelo fabricante.

Outro estudo bastante importante acerca da condição de estabilidade em barras elásticas inicialmente retas foi publicado em 1976 por Rosenthal [73]. Segundo o artigo publicado, Rosenthal resolveu numericamente as equações diferenciais para a

determinação da *elastica* de uma barra articulada em suas extremidades e submetida a ação de forças axiais², iguais e opostas (T) e momentos axiais², iguais e opostos (M) aplicados nas extremidades da barra. Os resultados foram dados na forma de um gráfico relacionando os valores do momento adimensionalizado ($\mu = Ml / EI$) e da força adimensionalizada ($\tau = T.l^2 / EI$) para uma grande gama de valores possíveis tomados por estes adimensionais. Rosenthal mostra, então, que o plano $\tau \times \mu$ pode ser dividido em três regiões distintas relacionadas à condição de estabilidade da barra, sendo os limites destas regiões dados pelos dois “ramos” (associados às condições de tração ou compressão) da curva de Greenhill. Ensaio realizado por Rosenthal em campo e em laboratório, para investigar as condições de formação de laços em cabos, confirmaram que cabos longos e com eixo central inicialmente reto, sob condições de força axial e torção, tornam-se instáveis assim que a relação de Greenhill é ultrapassada, ou seja, ocorre instabilidade quando:

$$\frac{P}{EI} + \left(\frac{M_t}{2EI} \right)^2 > \left(\frac{n.\pi}{l} \right)^2.$$

Em suas conclusões, Rosenthal observa que, para aplicações em que um cabo permanece com seu eixo central praticamente reto, a fórmula de Greenhill fornece um critério válido para a estimativa do início da instabilidade (formação do laço), mas ao mesmo tempo adverte que, para aplicações envolvendo cabos com curvatura inicial, a situação não é tão clara, e requer estudos adicionais.

Em um artigo mais recente (1990), Coyne [21] também determinou a *elastica* para analisar as condições de formação e eliminação de laços em cabos torcidos sob tensão. A análise feita também envolvia apenas cabos com eixo central inicialmente reto. A relação entre a força aplicada e o deslocamento relativo entre as extremidades de um cabo torcido, bem como o ponto em que o cabo forma o laço, foram obtidos de forma fechada a partir das equações diferenciais da *elastica*. Para um cabo na configuração deformada (laço já formado), a solução da *elastica* foi então utilizada

² Rosenthal [73] usa o termo axial para designar a direção da linha reta que une as duas extremidades da barra.

para determinar: i) o valor da tensão para o qual o laço pode ser eliminado e ii) a máxima curvatura no laço no instante da eliminação. Comparações entre resultados obtidos analiticamente e resultados experimentais mostraram uma boa concordância entre ambos no caso da previsão da formação de laços. Contudo, para a condição de eliminação do laço, os resultados analíticos e experimentais já não se apresentaram tão próximos. Segundo o autor, uma possível explicação para a diferença encontrada neste último caso estaria ligada às deformações plásticas sofridas pelo cabo durante o processo de eliminação do laço.

As condições de estabilidade em cabos pouco tensionados sujeitos a torque e forças gravitacionais também foram analisadas por Lu; Perkins [41, 42] que apresentaram um modelo teórico, usando a teoria clássica de barras (e admitindo, portanto, as hipóteses de Kirchhoff), para analisar tanto os estados de equilíbrio global, considerando grandes deslocamentos da barra, quanto as condições de equilíbrio local da barra. No artigo publicado em 1994, Lu; Perkins [41] deram particular atenção ao problema de um cabo sujeito a forças gravitacionais e a força e torque axiais aplicados em suas extremidades. Os autores mostram, então, que as soluções de equilíbrio obtidas em forma fechada levam aos complexos estados de equilíbrio tri-dimensionais determinados numericamente por Rosenthal [73]. No artigo publicado em 1995, Lu; Perkins [42] retomam o mesmo conjunto de equações diferenciais para analisar as condições de equilíbrio e estabilidade num cabo sujeito a ação de forças gravitacionais e a forças e momentos aplicados em suas extremidades através de juntas universais.

Também é digno de nota o livro “*Stability Theory of Elastic Rods*”, de autoria de Atanackovic [14], publicado em 1997. Como o próprio título indica, o livro trata de duas partes específicas da teoria da estabilidade de corpos elásticos: em primeiro lugar são considerados apenas os problemas de estabilidade dos estados de equilíbrio e, em segundo lugar, são tratados problemas que envolvem apenas barras elásticas. O livro está organizado em cinco capítulos que abordam: conceitos gerais e idéias básicas de estabilidade (cap.1); equações básicas da teoria de barras (cap.2); análise

de estabilidade pelo método do equilíbrio ou método de Euler (cap.3); análise de estabilidade por métodos de energia (cap.4) e análise de estabilidade pelo método dinâmico ou método de Liapunov (cap.5). Vários exemplos de aplicação são resolvidos ao longo do texto, auxiliando o leitor a fixar conceitos.

Recentemente, Aranha et al. [13] propuseram uma expressão analítica para a determinação da carga crítica de flambagem em *risers* submetidos à compressão dinâmica, incluindo o efeito da curvatura inicial (i.é, em sua configuração estática) e local do *riser*. Os autores destacam a importância de se obter uma estimativa (baseada num modelo analítico) para a carga crítica de flambagem argumentando que os resultados obtidos a partir de análises numéricas parecem ser, em geral, pouco precisos quando a força de compressão no *riser* se aproxima do valor da carga crítica, de tal forma que, em algumas vezes, forças de compressão relativamente altas são numericamente obtidas na análise de cabos ideais ($EI = 0$), apesar do fato de tais elementos estruturais serem incapazes de suportar qualquer compressão. Além disto, eles também ressaltam a dificuldade de interpretação dos resultados numéricos nas proximidades da “região de saturação”, caso um valor de referência não seja conhecido. Com relação ao efeito da curvatura inicial do *riser* sobre a carga crítica de flambagem, os autores mostram que a expressão analítica proposta recupera a carga crítica de Euler no limite em que a curvatura inicial tende a zero (cabo reto). Em outro extremo, mostram também que, para curvaturas moderadamente altas, a expressão fornece uma carga crítica de flambagem nove vezes maior que a carga crítica de Euler. Várias comparações com resultados obtidos numericamente (a partir de *softwares* de simulação não-linear no domínio do tempo) foram realizadas, indicando uma boa concordância em todos os casos (no sentido de que as forças de compressão máximas obtidas numericamente tendem, de fato, a “saturar” nas vizinhanças da carga crítica de flambagem estimada analiticamente).

Deve-se ressaltar, contudo, que o modelo proposto por Aranha et al. [13] está restrito apenas ao problema plano, pois admite-se implicitamente que o *riser* apresenta apenas deslocamentos em seu plano vertical (ou seja, o *riser* fica impedido de

apresentar deslocamentos para fora de seu plano inicial), o que significa dizer que não existe nenhuma possibilidade de torção na linha. Uma extensão do modelo proposto por Aranha et al. [13] foi recentemente apresentada por Ramos; Pesce [70], em 2001, os quais mostraram que a clássica fórmula de Greenhill pode ser utilizada para a determinação da carga crítica de flambagem em *risers* submetidos simultaneamente a compressão dinâmica e torção, considerando ainda o efeito da curvatura inicial da linha. A obtenção da equação, incluindo todas as hipóteses admitidas, e vários exemplos de determinação da carga crítica constituem o capítulo 6 deste trabalho.

2.3.3 *Análise estrutural local por métodos analíticos*

Por análise estrutural de linhas flexíveis podemos entender que se trata ou da determinação dos esforços solicitantes ao longo da linha (com características pré-definidas), caracterizando a chamada análise global, ou da determinação da distribuição de esforços nas diversas camadas (dados os esforços solicitantes que atuam no trecho a ser analisado), o que caracteriza a análise local. Alguns artigos que tratam da primeira possibilidade já foram comentados no item 2.3.1, que abordou o comportamento global de linhas flexíveis de uma forma geral, tendo sido considerados tanto os artigos e trabalhos que propõem a solução do problema por métodos analíticos, quanto os que propõem soluções baseadas em métodos numéricos. Desta forma, o presente item irá se ater apenas à apresentação e discussão de trabalhos que tratam da distribuição de esforços nas camadas que constituem os tubos flexíveis ou cabos umbilicais, considerando somente o caso em que tal análise é feita através de métodos analíticos (a análise da distribuição de esforços nas camadas por métodos numéricos será considerada no item seguinte).

Um dos trabalhos mais citados na literatura que trata deste tema é o de Love [40], que, em sua obra “*A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*”, retoma as

equações diferenciais de equilíbrio³ de uma barra delgada, sob carregamento genérico, cujo eixo em sua configuração deformada é descrito por uma curva qualquer no espaço. A teoria contempla a possibilidade de grandes deslocamentos e grandes rotações da barra, mas as deformações devem ser pequenas, sendo esta a única ressalva feita para sua aplicação. No tocante à análise estrutural de tubos flexíveis e cabos umbilicais, a generalidade destas equações presta-se tanto à análise global de linhas⁴, quanto à análise local, permitindo, neste último caso, a análise dos tendões que formam as armaduras helicoidais de tração presentes em tubos e cabos. Entre alguns dos trabalhos que utilizaram as equações de Clebsch com objetivos bastante próximos a este último citamos os de Costello [19], Phillips; Costello [63, 64] e o de Witz; Tan [86]. No capítulo 3 deste trabalho mostraremos que, partindo-se das equações gerais de Clebsch, chega-se de forma consistente a uma relação bastante utilizada na análise da distribuição de esforços nos tendões helicoidais das armaduras de tração, a qual estabelece que o diferencial de pressão entre as camadas adjacentes à armadura de tração é proporcional ao esforço de tração que solicita os tendões. Já no capítulo 6, as equações diferenciais de equilíbrio serão novamente retomadas para a análise da estabilidade global da linha (determinação da carga crítica de flambagem em *risers* e cabos).

Outro trabalho bastante citado é o de Knapp [34], publicado em 1979, onde o autor apresenta um método para a obtenção da matriz de rigidez de cabos com armaduras helicoidais submetidos a carregamentos de tração e torção. O método proposto permite a análise de cabos com qualquer número de camadas helicoidais, incluindo também a existência de um núcleo que tem sua porção periférica deformável e sua porção central rígida. As equações de equilíbrio do cabo, tratado como um sistema estrutural estático e conservativo, são obtidas através do princípio da energia

³ Conforme relata Love, as equações foram obtidas por Clebsch, mas também podem ser encontradas nos trabalhos de Kirchhoff. A dedução destas equações é apresentada no Anexo A.

⁴ Ver, por exemplo, o trabalho de Pesce [60], em que o autor parte das equações de Clebsch e analisa diversas situações particulares, chegando, de forma consistente, até os casos mais simples, no plano, de linha inextensível e infinitamente flexível.

potencial estacionária, enquanto as relações deslocamentos-deformações são obtidas através de considerações geométricas aplicadas às camadas helicoidais nas configurações inicial e deformada, sendo consideradas, a princípio, as não-linearidades geométricas decorrentes de grandes deslocamentos e grandes rotações. As equações constitutivas utilizadas são as usuais para materiais homogêneos, isotrópicos e com comportamento elástico-linear. O autor mostra então que, considerando o conjunto de todas estas equações, é possível obter um sistema não-linear de $(n+2)$ equações, onde as incógnitas a serem determinadas são o deslocamento axial e a rotação axial, ambos por unidade de comprimento do cabo, e o ângulo de assentamento final de cada uma das n camadas helicoidais consideradas. A seguir, as equações são simplificadas, através de uma “quase-linearização”, de tal modo que os coeficientes de rigidez possam ser obtidos por expressões analíticas. Além das expressões analíticas gerais⁵ para a determinação dos coeficientes de rigidez, Knapp fornece ainda expressões mais simples, considerando os casos de núcleo incompressível ($\nu_c = 0,5$) ou rígido ($\nu_c = 0$). Porém, curiosamente, os valores obtidos através do uso das expressões gerais não coincidem com os obtidos através das expressões particulares em qualquer um dos dois casos, indicando que possivelmente há alguma inconsistência na formulação. Resultados experimentais obtidos para dois tipos de cabos são então comparados com resultados analíticos dados pelas expressões “linearizadas”, mostrando uma boa concordância. Além das hipóteses já citadas sobre o comportamento dos materiais, outras hipóteses admitidas no trabalho de Knapp são: i) as seções planas antes da deformação continuam planas após a deformação; ii) há linearidade geométrica e iii) as seções transversais dos tendões são circulares. Outras hipóteses bastante importantes, que deveriam estar explícitas no trabalho de Knapp, são as que admitem que: a) não há afastamento entre quaisquer camadas adjacentes e b) que a pressão de contato sobre o núcleo deve ser sempre positiva. Conclui-se daí que as expressões dadas por Knapp não são válidas para quaisquer carregamentos de tração e torção impostos ao cabo, mas apenas para

⁵ Considerando núcleo compressível, com constantes elásticas E_c e ν_c ($0 < \nu_c < 0,5$).

os quais as hipóteses (a) e (b) são satisfeitas. Deve-se ressaltar ainda que o autor não considera a existência de camadas plásticas em sua formulação.

Com um procedimento análogo ao seguido por Knapp, Lanteigne [36] apresentou em 1985 um modelo para a avaliação da matriz de rigidez de condutores de alumínio reforçados com aço ou, de forma abreviada, ACSR⁶. Além dos carregamentos de tração e torção, já previstos pelo modelo de Knapp, o modelo proposto por Lanteigne considerava também carregamentos de flexão e combinações destes carregamentos. A geometria dos condutores estudados por Lanteigne é totalmente análoga à dos cabos considerados por Knapp, ou seja, há apenas um número determinado de camadas helicoidais e um núcleo central, admitindo-se, também, que os tendões que formam as camadas helicoidais têm seção transversal circular. A determinação dos coeficientes da matriz de rigidez é feita da mesma forma, ou seja, através da aplicação do princípio da energia potencial estacionária⁷. Lanteigne considera, porém, que o núcleo central (neste caso constituído por uma barra de aço), bem como todos os tendões helicoidais, não apresentam variação de raio, de tal forma que o raio médio de cada uma das camadas permanece inalterado, simplificando as expressões analíticas obtidas. Comparando-se as expressões de Lanteigne com as de Knapp (considerando núcleo rígido), para a determinação dos coeficientes de rigidez relacionados à tração e torção, verifica-se facilmente que elas coincidem (como deveriam, de fato, coincidir). Deve-se ressaltar, contudo, que a hipótese referente à não-constricção das camadas não se aplica ao caso de tubos flexíveis e cabos umbilicais, já que, nestas estruturas, a existência de camadas plásticas (com baixos módulos de elasticidade) e a variação de espessura destas camadas, decorrente dos carregamentos aplicados, proporcionam uma variação do raio das camadas helicoidais, tornando a estrutura menos rígida. Uma outra ressalva a ser feita quanto à

⁶ Sigla para *Aluminum Conductor Steel-Reinforced*.

⁷ O princípio da energia potencial estacionária é usado com frequência em Mecânica Aplicada, sendo também conhecido como Princípio de Kirchhoff, por ter sido usado primeiramente por G. R. Kirchhoff (ver, por exemplo, Timoshenko; Gere [85]).

formulação proposta por Lanteigne é que ela não pode ser aplicada para carregamentos que provoquem afastamento entre quaisquer duas camadas adjacentes, uma vez que o autor considera de imediato que não há variação do raio em qualquer camada. De qualquer forma, o trabalho de Lanteigne constitui-se num excelente ponto de partida para a investigação da distribuição de esforços em tubos flexíveis e cabos umbilicais submetidos a carregamentos combinados de tração, torção e flexão. Mais considerações a respeito do modelo proposto por Lanteigne serão feitas no capítulo 5 deste trabalho, quando serão propostos modelos analíticos para carregamentos combinados (envolvendo esforços de tração, torção, flexão e aplicação de pressão interna e externa ao *riser*).

O artigo apresentado por Féret; Bournazel [24], em 1987, foi um dos primeiros a tratar especificamente do problema da distribuição de esforços nas camadas estruturais de tubos flexíveis. Neste trabalho os autores discutem, inicialmente, o comportamento de tubos flexíveis sob carregamentos de natureza axissimétrica, considerando os efeitos de força axial, torção e pressões interna e externa. Como forma de determinar as tensões e deformações, decorrentes destes carregamentos, nas diversas camadas, os autores propõem a montagem de um sistema de equações, onde, naturalmente, o número de equações iguala o número de incógnitas. Deve-se ressaltar que tanto as incógnitas quanto as equações propostas para a resolução do problema são apenas descritas no artigo, de forma bastante superficial. Sob este aspecto, o artigo não permite uma discussão mais ampla sobre as hipóteses feitas para a aplicação da formulação, já que é meramente descritivo. A seguir, os autores apresentam algumas equações para uma solução “simplificada” do problema, a qual admite a validade das seguintes hipóteses: i) as deformações são pequenas; ii) a participação das camadas plásticas na resistência do tubo, como um todo, é desprezível; iii) as camadas plásticas transmitem integralmente a pressão e iv) todas as camadas permanecem em contato. Com relação a esta última hipótese vale a mesma crítica já feita anteriormente a respeito dos modelos de Knapp e Lanteigne: a formulação não é válida para qualquer carregamento. Da mesma forma, a validade da hipótese (iii) pode ser questionável, principalmente se a espessura das camadas

plásticas for significativa. Os autores apresentam ainda algumas discussões interessantes acerca do comportamento de tubos flexíveis sob flexão, fornecendo expressões analíticas para o cálculo do escorregamento relativo (devido à flexão pura) entre tendões de armaduras de tração adjacentes, o que vem a ser bastante importante na avaliação do desgaste dos tendões e, conseqüentemente, na estimativa da vida útil de tubos flexíveis. As formulações desenvolvidas no capítulo 6 e no Anexo C do presente trabalho conseguem recuperar as mesmas expressões fornecidas por Féret; Bournazel [24] para o cálculo do escorregamento relativo entre tendões.

Em outro artigo de 1987, Goto et al. [26] propõem o uso de expressões analíticas para caracterizar a resistência mecânica de tubos flexíveis, sendo esta avaliada em termos da determinação das resistências axial e torsional, além da resistência ao *crushing*⁸. As hipóteses admitidas para o emprego das expressões propostas não estão explícitas no texto, porém, analisando as expressões, é fácil verificar que pelo menos as seguintes hipóteses devem ter sido feitas: i) para a determinação da resistência à tração do tubo, admite-se que não há acoplamento tração-torção, ou seja, o tubo não apresenta torção quando é tracionado; ii) admite-se que todas as camadas helicoidais são submetidas à mesma deformação circunferencial (dada pela razão entre a variação do raio médio da camada e o raio inicial); iii) a contribuição das camadas plásticas na resistência axial do tubo pode ser desprezada e iv) as camadas plásticas transmitem integralmente a pressão. Conclui-se, portanto, que as expressões analíticas propostas pelos autores não são de uso geral, servindo apenas para uma rápida (e nem sempre correta) avaliação das características mecânicas de tubos flexíveis. Neste artigo são apresentados também alguns resultados experimentais relativos à determinação das resistências axial, torsional e ao “*crushing*” para um dado tubo flexível, os quais são comparados com os valores obtidos analiticamente. O confronto de resultados mostrou que as fórmulas analíticas permitem prever com

⁸ Denomina-se *crushing* ao modo de falha caracterizado pelo colapso ou deformação excessiva da carcaça intertravada, decorrente do carregamento de compressão radial aplicado pelas sapatas durante a operação de lançamento de tubos flexíveis.

boa precisão as características de resistência mecânica, pelo menos para o tubo ensaiado e nas condições em que o mesmo foi ensaiado.

Utilizando boa parte da formulação proposta em trabalhos anteriores, Knapp [35] descreve, em 1989, um modelo estrutural para a determinação de deformações e tensões em cabos marítimos submetidos à tração, torção, pressões interna e externa. O artigo apresenta interesse pela geometria bastante complexa do cabo estudado, além da modelagem de materiais com comportamento elástico não-linear, como condutores de cobre, papelão reforçado (“*kraft paper*”), chumbo e juta. Vários resultados de ensaios experimentais mostram uma boa concordância com os resultados obtidos analiticamente pelo autor. São também dignas de nota a clareza com que o autor enumera as diversas hipóteses admitidas em sua modelagem e a preocupação em reproduzir todos os dados referentes à geometria do cabo e aos materiais empregados em sua fabricação.

Outros modelos analíticos para a modelagem de tubos flexíveis e cabos umbilicais foram apresentados por Witz; Tan [86, 87], em 1992. Num dos artigos, os autores tratam apenas do comportamento estrutural de tubos e umbilicais sob carregamentos combinados de tração e torção [86], deixando a discussão sobre os carregamentos de flexão para o outro artigo [87]. As características comuns existentes nos dois modelos analíticos podem ser resumidas como segue: i) admite-se que a estrutura, tubo ou cabo, seja composta por um número qualquer de camadas, cuja disposição relativa pode ser totalmente arbitrária; ii) as camadas que compõem a estrutura podem ser constituídas por núcleos sólidos, tendões helicoidais, camadas plásticas ou carcaças intertravadas; iii) as camadas são subdivididas em duas categorias (elementos cilíndricos ou helicoidais), que são estudadas separadamente; iv) todos os materiais são homogêneos, isotropos e com comportamento elástico linear e v) admitem-se apenas pequenas deformações. Em particular, sobre o modelo analítico utilizado para a previsão do comportamento estrutural sob carregamentos de tração e torção, deve-se ressaltar que: i) os autores utilizam as equações de equilíbrio de Clebsch para os elementos helicoidais; ii) para os elementos cilíndricos, é utilizada

uma fórmula aproximada para a determinação da tensão circunferencial (em função das pressões interna e externa à camada), considerando a hipótese de tubos de parede fina; iii) o modelo permite o cálculo das pressões de contato entre as camadas, ou ainda das folgas (no caso de afastamento entre camadas) e iv) admite-se a hipótese de que seções planas antes da deformação permanecem planas após a deformação, e de que todas as camadas são submetidas à mesma rotação axial por unidade de comprimento do tubo/cabo.

Quanto ao modelo analítico apresentado por Witz; Tan [87] para a previsão do comportamento de tubos e cabos sob carregamentos de flexão pura, as seguintes observações devem ainda ser feitas: i) a contribuição das camadas helicoidais e cilíndricas ao momento fletor é estudada separadamente; ii) admite-se que o comportamento de cada tendão (de uma mesma camada helicoidal) seja o mesmo para o carregamento de flexão pura considerado; iii) a análise da contribuição das camadas helicoidais ao momento fletor é feita com base em dois modelos distintos: o de não-escorregamento dos tendões (*no-slip model*) e o de escorregamento total dos tendões (*full-slip model*); iv) admite-se que o atrito interno seja o único mecanismo físico capaz de impedir o escorregamento entre as camadas até que a curvatura imposta à estrutura atinja um valor crítico; v) o momento fletor resultante para uma dada curvatura constante imposta ao tubo/cabo é obtido pela superposição das contribuições referentes às camadas helicoidais e cilíndricas. Os autores apresentam ainda uma comparação entre resultados experimentais e analíticos obtidos para diferentes produtos (tubo flexível, cabo umbilical e cabo marítimo), mostrando que há uma boa concordância entre eles na região onde ocorre escorregamento total entre as camadas. Uma discussão mais completa sobre os modelos propostos por Witz; Tan [87] será retomada no capítulo 6 deste trabalho.

Num artigo publicado em 1995, Féret; Leroy; Estrier [25] aprofundaram os estudos iniciados por Féret; Bournazel [24] para a análise local de tubos flexíveis submetidos à carregamentos dinâmicos de flexão. Neste artigo os autores apresentam um método para a determinação das tensões e dos deslocamentos relativos entre duas armaduras

de tração, sendo tal método descrito em duas etapas: a primeira consiste numa análise puramente geométrica dos tendões helicoidais deformados sobre um toro (com raio de curvatura constante), onde equações básicas relacionando curvaturas e deslocamentos são obtidas; na segunda etapa são apresentadas as equações de equilíbrio dos tendões, considerando também o efeito do atrito entre as camadas. Mostra-se, então, que um sistema de equações diferenciais não-lineares relacionando os deslocamentos e as forças nas duas armaduras de tração pode ser obtido. Os autores apresentam ainda alguns exemplos numéricos e uma comparação entre resultados teóricos e experimentais para as tensões axiais nos tendões da armadura externa, observando que o erro relativo entre os resultados não ultrapassa a faixa de 10% a 15%.

De particular interesse para a análise do comportamento local de tubos flexíveis é o artigo publicado por Witz [88], em 1996, no qual o autor apresenta os resultados de um estudo de caso de um dado tubo flexível, que contou com a participação de diversas instituições como companhias de petróleo, fornecedores de tubos, instituições de ensino e pesquisa e empresas de consultoria. O estudo em questão limitava-se à determinação (por parte das várias instituições que concordaram em participar do trabalho) da resposta estrutural de um tubo flexível sob a ação de carregamentos de tração-torção e flexão pura. Entre os objetivos deste estudo de caso estavam: i) informar o ISSC⁹ sobre o atual estado-da-arte na análise estrutural local de tubos flexíveis e ii) verificar o grau de incerteza na previsão dos valores de rigidez axial, torsional e flexional necessários à análise global e, com a quantificação deste grau de incerteza, “alimentar” modelos de confiabilidade. O tubo escolhido para a análise foi um tubo flexível de 2,5” de diâmetro interno, fabricado pela Coflexip (o artigo traz diversas informações sobre o tubo, incluindo sua composição, geometria das camadas e dados dos materiais). Foi solicitado aos participantes que obtivessem as seguintes curvas, admitindo que as deformações permanecessem dentro do regime elástico:

⁹ Sigla para *International Ship and Offshore Structures Congress*.

- a) curvas tração x alongamento axial e rotação axial¹⁰ x alongamento axial, tendo as extremidades do tubo liberdade para girar;
- b) curvas tração x alongamento axial e momento de torção x alongamento axial, estando as extremidades do tubo impedidas de girar;
- c) curvas momento de torção (horário e anti-horário) x rotação axial¹⁰ e alongamento axial x rotação axial¹⁰, tendo as extremidades do tubo liberdade de distensão;
- d) curvas momento de torção (horário e anti-horário) x rotação axial¹⁰ e força axial x rotação axial¹⁰, estando as extremidades do tubo impedidas de se movimentarem axialmente;
- e) curvas momento fletor x curvatura para valores de pressão interna de 0 e 300 bar.

Deve-se ressaltar que mais de 70 organizações foram contatadas para participar deste estudo de caso, das quais apenas 10 concordaram em participar. Outro dado interessante é que apenas 6 instituições foram capazes de apresentar resultados para o carregamento de flexão. Os resultados fornecidos por este pequeno número de participantes permitem concluir que, embora existam modelos analíticos para a análise estrutural local de *risers* flexíveis, estes ainda não estão bem consolidados, principalmente no que se refere aos carregamentos de flexão, pois, como se pôde observar, o valor do desvio-padrão para cada uma das curvas obtidas em (e) superou o valor obtido para a respectiva média. Nos capítulos 4 e 5 do presente trabalho voltaremos a comentar este estudo, comparando os resultados trazidos no artigo com aqueles obtidos pelos modelos a serem propostos.

Os modelos analíticos propostos por Pesce et al. [58], em 1996, para a análise da distribuição de esforços em tubos ou cabos, estão baseados nos trabalhos de Witz; Tan [86, 87] e de Féret; Bournazel [24] para a modelagem das camadas helicoidais. Neste trabalho são considerados especificamente os carregamentos de tração e flexão aplicados ao tubo/cabo, sendo apresentadas expressões para o cálculo da rigidez axial e flexional destas estruturas. A validade das expressões obtidas está, contudo, restrita

¹⁰ Por unidade de comprimento do tubo.

a algumas condições, entre as quais se destacam: i) admite-se a hipótese de que seções planas antes da deformação permanecem planas após a deformação; ii) as variações de espessura das armaduras helicoidais são desprezíveis; iii) as camadas plásticas agem apenas como transmissoras de pressão e podem ser modeladas como tubos de parede fina e iv) há balanceamento de torque. As hipóteses (i) e (ii) são bastante plausíveis, sendo inclusive frequentemente admitidas nos modelos encontrados na literatura. A validade da hipótese (iii) é contestável quanto ao fato de considerar que as camadas plásticas transmitem integralmente a pressão às camadas adjacentes e, portanto, preferimos não utilizá-la no presente trabalho¹¹. O mesmo pode ser dito quanto à hipótese (iv)¹², sendo por este motivo que optamos por apresentar uma formulação mais geral, válida para qualquer construção (inclusive sem balanço de torque).

Mais recentemente (1998), Custódio; Vaz; Estefen [23] propuseram um modelo analítico para a análise local do comportamento de cabos umbilicais sob carregamentos axissimétricos (tração, torção, pressão interna e externa). Em geral, o modelo dá maior ênfase às contribuições das camadas helicoidais nas equações de equilíbrio de forças e momentos do cabo. As formulações apresentadas para estas camadas são usuais na literatura específica que trata do tema, consistindo numa equação de compatibilidade de deformações e três equações de equilíbrio de forças ou momentos. A equação de compatibilidade de deformações é praticamente idêntica à proposta por Knapp [34], devendo, contudo, o termo ΔR_i , que se encontra na expressão dada pelos autores, ser substituído por R'_i (raio médio da armadura na configuração deformada) para que as duas expressões coincidam de fato. Quanto ao tratamento dado às camadas plásticas, os autores consideram que tais camadas devem

¹¹ As camadas plásticas serão modeladas como tubos de parede espessa, conforme mostra o capítulo 3. O capítulo traz também as equações para tubos de parede fina e uma comparação entre estas duas formulações.

¹² Conforme relatam Custódio; Vaz; Estefen [23], o balanço de torque não pode ser feito para todas as condições de carregamento.

ser consideradas espessas, reproduzindo, então, relações que fornecem a variação dos raios externo e interno de um cilindro de parede espessa submetido a pressões interna e externa, as quais só valem se for considerado estado plano de tensões. Desta forma, fica a dúvida de estarem os autores considerando, ou não, a contribuição das camadas plásticas na resistência à tração do cabo. Com relação ao núcleo elétrico, o artigo não descreve se o mesmo foi modelado como uma camada cilíndrica única, conforme proposto por Knapp [34], ou de alguma outra forma. Aparentemente, o modelo foi implementado para a análise de umbilicais com apenas duas armaduras de tração, sem considerar ainda a possibilidade de afastamento entre as camadas, o que impede sua utilização para determinados tipos de carregamento (como, por exemplo, torção com tendência a provocar o afastamento entre as camadas helicoidais).

Observamos finalmente que o modelo a ser desenvolvido no presente trabalho para análise de tubos e cabos sob carregamentos axissimétricos (capítulo 3) será, em vários aspectos, semelhante aos já propostos por Féret; Bournazel [24] e Witz; Tan [86]. Um modelo completo, considerando carregamentos axissimétricos e de flexão, será apresentado no capítulo 5, quando a discussão de outros modelos já citados nesta revisão será retomada de forma mais detalhada.

2.3.4 Análise estrutural local por métodos numéricos

Complementando o item 2.3.3, que tratou de apresentar e discutir as publicações sobre a análise da distribuição de esforços nas camadas por métodos analíticos, este item irá agora se ater apenas à apresentação e discussão de trabalhos que versam sobre a distribuição de esforços nas camadas através de métodos numéricos. Devido à grande complexidade geométrica trazida pelas camadas helicoidais e considerando também os efeitos de não-linearidade decorrentes das condições de contato (ou ausência de contato) entre as diversas camadas, nota-se como resultado a pequena quantidade de artigos que procuram resolver o problema através de métodos numéricos como, por exemplo, através da discretização de parte do tubo/cabo por

elementos finitos. Entre os trabalhos que encontramos nesta área citamos os de Saevik [74], Le; Knapp [37], Cruz [22], Pesce et al. [59] e os de Ramos et al. [66,67].

Saevik [74], em seu artigo de 1993, propõe a utilização de elementos de viga curvos com oito graus de liberdade para a determinação dos deslocamentos e tensões nos tendões das armaduras helicoidais de *risers* flexíveis, quando estes estão submetidos a grandes gradientes de curvatura. O autor utiliza o fato de que os tendões são forçados a escorregar sobre uma superfície suporte para diminuir o número total de graus de liberdade do modelo. A formulação empregada utiliza vários conceitos de geometria diferencial para a descrição do carregamento e dos sistemas de referência locais durante a deformação, permitindo ainda grandes deslocamentos, mas pequenas deformações. Como principais vantagens do método proposto, citamos: i) a discretização de um único tendão é suficiente para a obtenção dos deslocamentos, deformações e tensões e ii) a possibilidade de análise para grandes deslocamentos e grandes gradientes de curvatura impostos à linha, como os que ocorrem em regiões críticas, como no topo e nas proximidades do TDP (*touchdown-point*). Já as principais limitações do método são: i) o fato de a modelagem restringir-se apenas aos tendões de uma dada armadura e ii) a possibilidade de separação entre os tendões e a camada interna que o suporta parece não ter sido prevista pelo autor. Algumas ressalvas quanto à clareza do artigo também merecem destaque, entre elas: i) o autor não explicita quais formulações analíticas são empregadas como base de comparação com o método proposto; ii) o autor não fornece todos os dados relativos aos casos estudados, impossibilitando que outros pesquisadores confrontem os resultados do artigo com resultados provenientes de modelos próprios e iii) o autor não explica como foram obtidas as propriedades dos elementos de mola que proporcionam a interação entre o tendão e as camadas adjacentes.

Le; Knapp [37] também propuseram o uso do método dos elementos finitos para a análise de deformações em cabos umbilicais, através de uma modelagem bidimensional da seção transversal do cabo. Pela formulação empregada cada componente do cabo (como mangueiras, condutores, capas, etc) era modelado como

um macro-elemento com graus de liberdade em todos os pontos de contato com os componentes adjacentes. Entre os pontos positivos do modelo proposto, destacamos: i) a grande simplicidade do modelo, por ser bidimensional; ii) a possibilidade de análise para qualquer número de componentes do cabo, sem a necessidade de haver simetria geométrica; iii) a possibilidade de se ter materiais ortotrópicos; e iv) a possibilidade, embora não evidenciada, de aplicação de diversos tipos de carregamento como, por exemplo, pressões radiais, deformações axiais, deformações por variação de temperatura, etc. Contudo, o modelo também apresenta algumas limitações, sendo estas as principais: i) todos os componentes do cabo devem ter, obrigatoriamente, seção transversal circular; ii) por se tratar de um modelo bidimensional, apenas deformações radiais e circunferenciais da seção transversal do cabo são consideradas; iii) admite-se que todos os componentes do cabo permanecem em contato com os componentes adjacentes (em outras palavras, não é permitida a separação entre componentes); iv) o modelo é apropriado apenas para a modelagem das camadas internas às armaduras de tração e v) o modelo não permite a existência de um material de enchimento entre os componentes. O artigo também não deixa claro o procedimento utilizado para converter os carregamentos provenientes de pressões distribuídas, deformações axiais impostas, etc, em forças nodais concentradas, mencionando apenas a referência em que o assunto é tratado.

A dificuldade de modelagem geométrica das diversas camadas que constituem os tubos flexíveis e cabos umbilicais, sobretudo de suas camadas helicoidais, e a não-linearidade intrínseca do problema (causada pelas condições de contato entre as várias camadas) são os principais empecilhos para uma modelagem tridimensional destas estruturas, o que justifica, de certa forma, os modelos “simplificados” propostos por Saevik [74] e por Le; Knapp [37], mesmo considerando suas imperfeições. Tentando romper com estes modelos mais simples, Cruz [22] apresentou em 1996 um modelo tridimensional com elementos finitos para a análise estrutural de um trecho de tubo flexível. A geração do modelo foi feita através do uso de um pré-processador criado especificamente para este propósito, permitindo a aplicação dos seguintes carregamentos: pressão interna e externa, tração axial, flexão,

torção e cargas mecânicas localizadas devidas aos equipamentos de lançamento. Foram realizados alguns testes (simulações numéricas), envolvendo diferentes tubos, para a verificação do modelo proposto. Porém, apesar da aparente originalidade do trabalho e do provável esforço empenhado pelo autor na tentativa de apresentar um modelo confiável, deve-se destacar que os resultados obtidos foram pouco conclusivos, conforme o próprio autor assinala em suas considerações finais: “... era nossa expectativa que o modelo por nós desenvolvido apresentasse resultados satisfatórios para carregamentos axissimétricos, mas testes preliminares para análise do tubo submetido a carregamentos de pressão interna não forneceram os resultados esperados...Do mesmo modo, para carregamentos de flexão do tubo, foi verificada certa inadequação do modelo proposto”.

Pesce; Ramos; Aranha [59] também realizaram estudos para a modelagem de tubos flexíveis visando a determinação da distribuição de esforços e tensões nas diversas camadas. Os elementos utilizados na modelagem foram: elementos de placa para a carcaça intertravada e para as camadas plásticas; elementos de viga para as armaduras de tração e elementos de treliça para simular o contato entre camadas. O carregamento considerado consistiu na aplicação de deslocamentos impostos às extremidades do tubo, de forma a causar um alongamento de 0,1% e rotação nula. O principal ponto a ser destacado neste trabalho é que ele permite verificar que a deformação axial dos tendões (medida na direção tangente ao eixo central dos mesmos) está, de fato, associada às componentes de deformação da camada¹³.

¹³ As componentes de deformação das camadas helicoidais de tração são três: a deformação axial ϵ_h , medida na direção axial do tubo; a deformação circunferencial ϵ_c , devida à variação do raio médio da camada, e a deformação angular ϵ_ϕ , devida à variação do número de voltas da camada helicoidal. A relação entre estas três componentes e a deformação axial do tendão, ϵ_t , é dada no Anexo C.

Os mesmos autores também propuseram modelagens bidimensionais da seção transversal de cabos umbilicais para avaliação de problemas específicos, como a determinação da distribuição das pressões de contato ao redor de uma mangueira reforçada por carcaça intertravada para o estudo de instabilidade estrutural (ver Ramos et al. [66]), e a determinação do campo de deformações axiais nas veias do núcleo elétrico por elementos finitos para uma avaliação da condição de instabilidade estrutural destas veias [67]. Embora o propósito destes estudos fosse bastante específico, os trabalhos realizados certamente ajudaram a consolidar o entendimento do comportamento estrutural destes equipamentos, bem como a investigar e possibilitar formas de modelagem mais simples para a análise de problemas localizados.

Cabe enfatizar, novamente, a grande complexidade do tratamento puramente numérico na análise do comportamento estrutural interno de tubos flexíveis e cabos umbilicais. As diversas dificuldades enfrentadas pelos diversos autores são inerentes ao problema de modelagem das diversas camadas que constituem estas estruturas, o que evidencia a importância de tratamentos analíticos consistentes na determinação da distribuição de esforços nas camadas.

2.3.5 *Materiais e fabricação*

A importância do projeto e da pesquisa na área de tubos flexíveis e cabos umbilicais se faz sentir também pela busca incessante de novos materiais que resultem em melhorias no desempenho das linhas (maior durabilidade, maior resistência mecânica, menores perdas de fluidos, etc.) ou na possibilidade de sua utilização em lâminas d'água cada vez mais profundas. Esta preocupação fica bem evidenciada nos seis artigos discutidos abaixo, sendo os dois primeiros publicados em outubro de 1989 no número especial da revista *Engineering Structures* sobre *risers* flexíveis, e os outros quatro apresentados em 1993 nas conferências da OTC (*Offshore Technology Conference*) ou da ISOPE (*International Society of Offshore and Polar Engineers*).

Dos artigos publicados em 1989 pela revista *Engineering Structures*, dois deles tratam mais especificamente de materiais. No primeiro artigo, Moore [46] descreve inicialmente os tipos de *risers* flexíveis quanto a sua construção (“*bonded*” ou “*unbonded*”), ressaltando que a grande maioria dos *risers* em uso são do segundo tipo. A seguir, discorre sobre alguns critérios de projeto que devem ser satisfeitos para a seleção de materiais de tubos flexíveis, tratando enfim da adequabilidade de três tipos principais de termoplásticos (PEAD, poliamidas e PVDF) e dois tipos de aços (aços inoxidáveis e aços-carbono) aos requisitos de projeto. O artigo prima pela clareza com que o autor descreve as diversas camadas dos tubos flexíveis, suas respectivas funções, os diferentes tipos de materiais usados na fabricação de tubos e as condições que devem ser satisfeitas pelo projetista e fabricante.

Em outro artigo, Cocks [18] resalta a importância da correta seleção de materiais no projeto de tubos flexíveis, descrevendo, em seguida, vários testes desenvolvidos para determinar as propriedades de tubos flexíveis e demonstrar sua integridade estrutural. Alguns dos testes descritos são: hidrostático, tração, rigidez à flexão, fadiga e envelhecimento. O autor traz ainda alguns resultados obtidos através de vários tipos de ensaios realizados em tubos flexíveis, comparando-os, às vezes, com valores calculados. Contudo, não há informações suficientes sobre os tubos ensaiados (além do diâmetro nominal), nem referências às expressões analíticas utilizadas para a avaliação das grandezas cujos valores foram obtidos nos ensaios.

Algumas vezes os problemas relativos à seleção de materiais podem ser bastante peculiares, como o discutido em 1993 por Legallais; Stratfold; Hardy [38] que trataram de um problema específico que surge nas mangueiras de cabos umbilicais: a capacidade que certos fluidos e gases possuem de atravessar a parede da mangueira. Um destes fluidos, usado com frequência nos poços como fluido de injeção, é o metanol, que, sendo retido pelas camadas mais externas do cabo (devido à maior espessura destas camadas e/ou pelas características dos materiais nelas empregados), acaba se acumulando ao longo do cabo e é expelido em suas terminações. Apesar do

fato de as taxas de permeabilidade do metanol serem relativamente baixas para os materiais convencionais utilizados nas mangueiras, o volume total de metanol que chega às terminações pode ser significativo, acarretando sérios problemas. Após mais de três anos de estudos e testes, um novo material para as mangueiras foi desenvolvido pela Dunlop, o que possibilitou uma redução significativa das perdas de fluido devido a baixa permeabilidade proporcionada pelo novo material, um tipo de polietileno de alta densidade com ligações cruzadas, denominado XLPe (*cross linked polyethylene*).

A utilização de novos materiais para diminuir o peso de tubos flexíveis, permitindo com isso a exploração de petróleo em águas mais profundas, também tem sido uma preocupação dos pesquisadores. Makino et al. [43] discutiram algumas possibilidades acerca de materiais que pudessem substituir as camadas de reforço estrutural em tubos (sobretudo as camadas de pressão e as armaduras de tração, responsáveis por cerca de 80-90% do peso total), descartando, sem muito fundamento, materiais como alumínio e titânio, e fixando-se no estudo de plásticos reforçados com fibras (FRP). Um protótipo de 4", em que apenas as armaduras de tração foram substituídas por FRP, foi feito e ensaiado, fornecendo uns poucos resultados acerca das propriedades do tubo. Apesar de a redução em peso para este protótipo ter sido da ordem de 30% (quando comparado ao peso de um tubo convencional), os autores concluíram pela necessidade de avaliações mais adequadas que pudessem assegurar a aplicabilidade deste produto, haja visto que o material empregado (FRP) não apresenta muita confiabilidade em aplicações estruturais de grande responsabilidade.

Com esta mesma intenção de reduzir o peso de tubos flexíveis, Sugier et al. [81], com suporte do IFP (Instituto Francês de Petróleo) e da Coflexip, realizaram extensas pesquisas para investigar o comportamento de ligas de alumínio como substitutos do aço-carbono (usado nas armaduras de tração) e do aço inoxidável (usado na carcaça interna). Contrariamente ao que foi afirmado por Makino et al. [43], verificou-se que o uso das ligas de alumínio permitiu uma redução de até 40% no peso dos tubos. Com a redução de peso possibilitada pela substituição de material, a profundidade de

lançamento (teórica) que poderia ser alcançada pelos novos tubos poderia chegar a 1500 metros. Ensaio de corrosão feitos nos tubos mostraram ainda que o uso das ligas de alumínio não traz maiores problemas, mesmo considerando o caso em que um par galvânico entre camadas de alumínio e de aço possa existir.

Ainda na linha de materiais, Hill; Measamer [29] apresentaram uma discussão sobre a seleção de materiais utilizados nas diversas camadas que compõem os tubos flexíveis, em condições ambientais agressivas, incluindo, por exemplo, altas concentrações de gases como H_2S e CO_2 , bem como temperaturas de operação superiores a $135\text{ }^\circ\text{C}$. O artigo também descreve bem as diversas camadas que constituem um tubo flexível típico, explicando suas funções e indicando os materiais mais comumente empregados em cada circunstância. Juntamente com o artigo publicado por Moore [46], estes dois artigos fornecem um bom panorama para aqueles que desejam ter uma visão geral a respeito da constituição e dos materiais empregados em tubos flexíveis.

Para finalizar este item, queremos ressaltar a importância que este tema assume na análise local de linhas flexíveis, sendo particularmente importante a caracterização das propriedades mecânicas dos materiais empregados na fabricação de tubos e cabos pois, sem o conhecimento adequado destas propriedades, a determinação da distribuição dos esforços nas diversas camadas pode levar a resultados bastante diferentes, conforme mostram Custódio; Vaz; Estefen [23]. Neste aspecto, uma atenção especial deve ser dada à obtenção das características elásticas de materiais poliméricos utilizados em tais estruturas, tendo em vista que tais características podem ser bastante alteradas em função de diversos fatores relevantes ao comportamento reológico do material (como, por exemplo, a temperatura de serviço, a umidade, o nível de tensões, etc). Nota-se que nos poucos artigos que fazem menção às propriedades elásticas dos materiais poliméricos, visando à análise local de tubos/cabos, existem sempre incertezas quanto aos valores a serem utilizados (ver, por exemplo, referências [23], [78] e [88]).

2.3.6 *Análise de estruturas afins*

A análise da distribuição de esforços nas camadas de tubos flexíveis e cabos umbilicais está intimamente relacionada à análise de cabos de aço e afins, devido à grande semelhança geométrica existente entre tais estruturas. Conforme assinala Witz [88], o comportamento mecânico de cabos de aço tem recebido uma atenção considerável na literatura nos últimos anos, e ainda representa uma área de pesquisa bastante ativa, o que tem contribuído diretamente para a análise de tubos flexíveis e cabos umbilicais.

Ao falarmos da análise de cabos de aço, não podemos deixar de mencionar o nome de G.A. Costello, um dos mais renomados pesquisadores desta área, e que aparece como autor ou co-autor em grande parte das publicações que tratam do tema, conforme poderemos constatar nos parágrafos seguintes. Outro pesquisador bastante citado na literatura específica deste tema é Hruska, um dos “pioneiros” na análise estrutural de cabos de aço, que no início dos anos 50 desenvolveu alguns dos primeiros modelos teóricos para a obtenção de tensões nos fios componentes das pernas (“*strands*”), conforme relatam Phillips; Costello [64]. Apesar das importantes contribuições dadas por estes e outros pesquisadores, não é nossa intenção apresentar um histórico completo sobre o desenvolvimento das pesquisas nesta área, mas indicar aos leitores outras possibilidades de consulta que podem fornecer importantes informações relacionadas à análise estrutural de tubos e cabos.

No que parece ser um de seus primeiros artigos sobre o comportamento estrutural de cabos de aço, Phillips; Costello [63] utilizaram as equações de Clebsch¹⁴ para estabelecer o equilíbrio de um dos fios de um cabo submetido à ação de uma força axial e de um momento de torção. Com o uso de algumas equações constitutivas

¹⁴ As equações de Clebsch são as seis equações de equilíbrio de forças e de momentos aplicadas ao caso de um fio sob carregamento genérico, cujo eixo, em sua configuração deformada, é descrito por uma curva qualquer no espaço. Estas equações podem ser encontradas no Anexo A.

clássicas da Resistência dos Materiais e de algumas relações geométricas, os autores obtiveram um sistema de equações que pôde ser resolvido com o algoritmo de Newton-Raphson para a determinação da força de tração no fio e do ângulo de assentamento final da hélice formada pelo eixo do fio em sua configuração deformada. A partir daí, por simples substituição de valores, consegue-se determinar as tensões normais nos fios, bem como as máximas tensões de flexão, de cisalhamento, e as devidas ao contato entre fios. Várias hipóteses simplificadoras foram admitidas, entre as quais citamos: i) a inexistência de forças de atrito entre os fios; ii) na configuração inicial (não-deformada) do cabo, os fios apenas se tocam, sem a transmissão de esforços; iii) o cabo consiste em uma única camada helicoidal de fios (o núcleo central, se existente, é considerado muito mais flexível que os fios). Deve-se ressaltar que o método de solução empregado no presente trabalho para a determinação analítica da distribuição de esforços em tubos flexíveis e cabos umbilicais¹⁵ segue a mesma metodologia empregada por Phillips; Costello [63], com a utilização das equações de equilíbrio, de equações constitutivas clássicas e de relações geométricas para a solução do problema. As diferenças fundamentais devem-se ao fato de: i) considerarmos uma geometria mais complexa (com a existência de várias camadas, ao invés de uma única); ii) utilizarmos relações geométricas diferentes das utilizadas por estes autores; iii) considerarmos, além da força axial e do momento de torção, a pressão externa e a pressão interna (no caso de tubos) aplicadas como esforços externos, e iv) termos linearizado o sistema de equações resultante, de modo que o mesmo pode ser facilmente resolvido através de qualquer algoritmo de solução de sistemas de equações lineares.

Huang [30] também utilizou as equações de equilíbrio de Clebsch ao estudar o comportamento de um cabo de aço submetido a uma força axial, reforçando nossa convicção de que este caminho, por seu rigor analítico, é o que deve ser seguido para se obter a solução do problema de tubos flexíveis e cabos umbilicais. O modelo

¹⁵ A determinação analítica da distribuição de esforços em tubos e cabos submetidos a carregamentos axissimétricos encontra-se no capítulo 3.

proposto por Huang já apresenta alguns avanços com relação ao de Phillips; Costello [63] pois considera, além da camada de fios helicoidais, a existência de um núcleo deformável, porém de mesmo material que o dos fios. Um outro ponto positivo do modelo é a consideração de forças de atrito entre os fios da camada helicoidal (o autor não considera atrito entre os fios helicoidais e o núcleo). Duas condições de contorno são investigadas na análise: no primeiro caso, as extremidades do cabo são consideradas fixas, apresentando, portanto, rotações nulas (neste caso, momentos de torção surgem durante a aplicação da força axial); no segundo caso, as extremidades do cabo estão livres, apresentando rotações finitas e momentos de torção nulos. O autor conclui que, para as condições analisadas, o alongamento do cabo causa sempre uma separação entre os fios das camadas helicoidais, o que acaba simplificando o equacionamento do problema, já que neste caso as forças de atrito desaparecem. Deve-se ressaltar, contudo, que o autor não considerou, de fato, a existência de forças axiais e momentos de torção aplicados ao cabo e independentes um do outro (o momento de torção considerado no equacionamento está associado à força axial aplicada). Desta forma, as conclusões apresentadas não devem ser generalizadas, valendo apenas para o caso particular estudado pelo autor.

Em seu livro “*Theory of wire rope*”, publicado em 1990, Costello [20] trata de vários aspectos da teoria atinente a cabos de aço. O livro possui oito capítulos e se baseia em grande parte nos resultados da pesquisa desenvolvida durante 16 anos pelo autor e sua equipe na Universidade de Illinois. Os tópicos estudados no livro incluem: estudo da cinemática, das equações de equilíbrio e das relações entre esforços e deformações nos fios que constituem as pernas (*strands*) do cabo (capítulo 2); análise da resposta estática de uma perna, incluindo aí as respostas a carregamentos axiais e de flexão pura (capítulo 3); estudo das tensões em um cabo de aço devido a carregamentos axiais e de flexão (capítulo 4); estudo do atrito entre os fios e pernas do cabo (capítulo 5); testes em cabos de aço (capítulo 6); estudo de instabilidade provocada por cargas de impacto (capítulo 7) e estudo dos efeitos de rotações na capacidade dos cabos em suportar cargas (capítulo 8). São ainda dignas de nota as mais de 130 referências que o autor traz no final da obra.

Concluindo nossa revisão bibliográfica, queremos ressaltar que as intensas atividades de pesquisa ligadas aos tubos flexíveis e/ou cabos umbilicais, seja na área de análise estrutural seja no desenvolvimento ou na utilização de novos materiais para sua fabricação, não deixam dúvidas quanto a importância destes produtos na economia mundial e, em particular, na economia de nosso país, que praticamente lidera a exploração de petróleo em águas profundas. Certamente, um dos pontos principais que deve ser estudado à exaustão diz respeito à obtenção da distribuição de esforços nas diversas camadas que compõem tais estruturas, pois só assim pode-se garantir que os níveis de tensão em cada camada estarão dentro dos limites aceitáveis, assegurando, assim, a utilização do produto durante a vida útil estimada. Os objetivos propostos neste trabalho vão, portanto, ao encontro desta necessidade, através do estabelecimento de modelos analíticos consistentes amparados por resultados numéricos e/ou experimentais.

3. MODELO ANALÍTICO PARA CARREGAMENTOS AXISSIMÉTRICOS

O objetivo deste capítulo é apresentar um modelo analítico para o cálculo de tensões e deformações nas diversas camadas que constituem os tubos flexíveis e cabos umbilicais quando submetidos a esforços axissimétricos. Os carregamentos axissimétricos a serem considerados incluirão os efeitos de tração, torção, pressão externa e ainda, no caso de tubos, pressão interna. Serão também considerados carregamentos axissimétricos originados de deslocamentos impostos (deslocamento axial e rotação em torno do eixo).

O capítulo está subdividido em sete itens: no primeiro item determinaremos o número de incógnitas existentes para a análise de um tubo flexível ou cabo umbilical, levando em conta algumas hipóteses gerais, e mostrando a seguir como obter um sistema de equações que permita resolver o problema de forma geral. Os cinco itens seguintes mostram de forma mais detalhada as equações utilizadas e a modelagem de cada camada do tubo/cabo. Será dada ênfase à modelagem das camadas helicoidais (armaduras de tração), uma vez que a geometria destes elementos impõe dificuldades de modelagem muito maiores que as devidas às camadas plásticas. O último item retoma o sistema final de equações, exemplificando sua utilização para um caso prático.

Mostraremos por fim que os valores de rigidez axial e torsional para a estrutura em consideração podem ser obtidos como “sub-produtos” da análise efetuada. Devido à não-linearidade geométrica decorrente da própria construção destas estruturas, mostra-se que a rigidez axial e torsional são dependentes do carregamento aplicado. Verificaremos também que, apesar de ser possível a obtenção de formas analíticas para se expressar tais valores de rigidez, estas expressões dependerão do número, do tipo e da disposição das camadas que constituem a estrutura analisada.

3.1 Determinação do problema e hipóteses gerais

Neste item estaremos interessados na quantificação e especificação das incógnitas existentes na análise de um tubo flexível (ou cabo umbilical) submetido à ação de carregamentos axissimétricos, bem como no estabelecimento de um sistema de equações que permita resolver o problema de determinação destas incógnitas de forma geral. Tal sistema de equações seguirá de perto a proposta de solução do problema indicada por Féret; Bournazel [24], que identificaram as incógnitas e listaram as equações necessárias para obter sua solução, sem contudo explicitá-las (o artigo traz, na verdade, somente algumas poucas equações para uma solução “simplificada” do problema).

Deve-se ressaltar que a proposta deste capítulo está ligada à análise local de *risers*, i.  ,    determinação da distribuição de esforços nas diversas camadas, uma vez conhecidos os esforços solicitantes que atuam em duas se  oes transversais do *riser* distantes L_1 entre si. A escala de comprimento (L_1) que estaremos considerando aqui é tal que L_1 é bem pequeno se comparado ao comprimento suspenso da linha, mas suficientemente grande se comparado ao seu diâmetro. Designando D o diâmetro externo da linha, poderíamos então admitir que $10 < L_1/D < 100$ seria um intervalo aceitável para a relação L_1/D .

Denotaremos por Σ_1 a configuração inicial, não-deformada, do *riser* (tubo ou cabo). Nesta configuração, também chamada configuração de referência, admite-se que a estrutura esteja totalmente descarregada e tenha seu eixo central perfeitamente reto. Após a aplicação dos esforços, a estrutura irá adquirir uma nova configuração, a qual será denotada por Σ_2 (configuração deformada devida aos carregamentos axissimétricos).

Antes de iniciarmos a discussão acerca das incógnitas do problema, devemos ressaltar algumas das hipóteses utilizadas em sua solução. São elas:

- i) os carregamentos axissimétricos serão aplicados de tal forma que o eixo central do tubo/cabo permaneça reto;
- ii) admite-se que o atrito interno entre as camadas possa ser desprezado;
- iii) as seções que eram inicialmente planas antes da deformação continuarão planas após a deformação, o que significa que o alongamento $\Delta L / L_1$ (medido na direção do eixo central do *riser*) será o mesmo para todas as camadas, independentemente de haver separação entre elas;
- iv) a rotação (*twist*) por unidade de comprimento do *riser*, $\Delta\varphi / L_1$, será considerada a mesma para todas as camadas que constituem a estrutura, mesmo havendo descolamento entre elas;
- v) os materiais de todas as camadas que compõem o tubo (ou cabo) constituem meios contínuos, homogêneos e isotrópicos e apresentam comportamento elástico linear;
- vi) admite-se linearidade geométrica, ou seja, os deslocamentos são muito pequenos se comparados ao comprimento (L_1) do trecho de *riser* que está sendo analisado, e as deformações e distorções são bastante pequenas se comparadas à unidade.

Como se pode observar, estas seis hipóteses são gerais, i.é, aplicam-se a todas as camadas do *riser*, sejam elas helicoidais ou plásticas. Outras hipóteses que forem específicas para cada camada a ser tratada serão consideradas oportunamente. Deve-se ainda ressaltar que as hipóteses dadas acima são encontradas (muitas vezes implicitamente) em várias referências que tratam do problema (ver, por exemplo, Claydon et al. [17], Féret; Bournazel [24], Goto et al. [26], Pesce et al. [58] e Witz; Tan [86], entre outros).

Observa-se ainda que tal conjunto de hipóteses simplifica consideravelmente a análise local de *risers* submetidos a carregamentos axissimétricos e, embora algumas delas possam ser consideradas triviais, é importante discutirmos alguns pontos relacionados a elas. A primeira hipótese, por exemplo, é essencial para assegurar a validade dos resultados a serem obtidos adiante. Contudo, é importante ressaltar que o fato de serem aplicados (ao trecho considerado do *riser*) apenas esforços axissimétricos, como tração e torção, não impede que o *riser* apresente

deslocamentos transversais. De fato, mesmo que o trecho de *riser* considerado seja inicialmente reto, pode haver uma combinação de esforços (torção + compressão) que causem à linha problemas de instabilidade global, de tal forma que deslocamentos transversais acabem surgindo. Este problema será discutido com maior detalhe no capítulo 6 que irá tratar da análise de instabilidade global de linhas.

A segunda hipótese, que desconsidera as forças de atrito interno entre as camadas, introduz uma forte simplificação ao problema, o que pode ser bastante desejável numa primeira modelagem. Por outro lado, tal hipótese encontra um certo “respaldo” na existência de camadas têxteis anti-fricção que são colocadas entre as camadas adjacentes às camadas helicoidais, e cujo objetivo é realmente o de reduzir as forças de atrito entre as camadas, facilitando o deslizamento entre as mesmas e aumentando a flexibilidade do tubo/cabo. Uma outra razão que nos levou a não considerar as forças de atrito diz respeito ao modelo a ser considerado: mesmo utilizando o modelo de atrito de Coulomb (o mais simples possível), restaria determinar o coeficiente de atrito entre as camadas envolvidas. Como a determinação deste coeficiente envolve vários outros fatores, acreditamos que a incerteza trazida com a sua utilização não seria, neste momento, menor que aquela com a qual estamos trabalhando. A questão do atrito interno será discutida novamente nos capítulos 4 e 5, quando serão comparados diversos valores de rigidez de um tubo flexível obtidos de forma analítica e experimental.

Segundo as hipóteses (iii) e (iv), os mesmos valores de deformação axial ($\Delta L / L_1$) e de rotação por unidade de comprimento ($\Delta \varphi / L_1$) são atribuídos a todas as camadas do *riser*. Tais hipóteses simplificam bastante a análise e seu emprego é justificável, se considerarmos que nas aplicações práticas não deve haver grandes gradientes de deformações nas diversas camadas que constituem o *riser*, nas condições em estudo (ou seja, para os carregamentos e o comprimento considerados para o trecho).

Pela quinta hipótese admite-se que todos os materiais empregados constituem meios contínuos, homogêneos e isotrópicos, com comportamento elástico linear. Tais hipóteses são clássicas na Teoria da Elasticidade Linear e podem ser utilizadas para materiais metálicos e/ou plásticos, desde que o nível de deformações não alcance valores excessivos de modo a provocar o escoamento do material. O estudo de fenômenos como fluência e envelhecimento dos materiais fogem ao escopo deste trabalho e não serão considerados aqui.

A sexta e última hipótese visa justamente garantir que as deformações produzidas pelos esforços aplicados sejam bem pequenas quando comparadas à unidade, e que os deslocamentos provocados pelos mesmos esforços sejam pequenos quando comparados às dimensões características do tubo ou cabo (como o diâmetro). Tal hipótese dá, portanto, consistência à hipótese (v), que requer pequenas deformações.

Voltando, agora, ao problema de determinação da distribuição de tensões em um *riser* flexível¹, nas condições em estudo, consideremos que o mesmo seja composto por n camadas helicoidais e m camadas plásticas. As incógnitas do problema podem, então, ser resumidas e identificadas conforme indicado na tabela 3.1 a seguir.

¹ Consideraremos, inicialmente, o estudo de um tubo flexível e, a seguir veremos as modificações necessárias para o tratamento de cabos umbilicais.

Tabela 3.1: Incógnitas para a determinação da distribuição de esforços em tubos.

Identificação da Incógnita	Símbolo	Número de incógnitas
Pressão de contato ou afastamento entre a i -ésima e $(i+1)$ -ésima camadas.	$p_{c,i} , g_i$	$n + m - 1$
Tensões nos tendões das armaduras, nas direções tangencial e normal ² .	$\sigma_{t,i} , \sigma_{n,i}$	$2n$
Tensões nas camadas plásticas, nas direções longitudinal, radial e circunferencial.	$\sigma_{z,i} , \sigma_{r,i} , \sigma_{\theta,i}$	$3m$
Variação de espessura das camadas	Δt_i	$n + m$
Variação do raio médio das camadas	ΔR_i	$n + m$
Variação do ângulo de assentamento nas camadas helicoidais	$\Delta \alpha_i$	n
Deformação axial do tubo	$\Delta L/L_1$	1
Rotação do tubo por unidade de comprimento	$\Delta \varphi/L_1$	1

Total de incógnitas:

$$6(n + m) + 1$$

Como temos um total de $6(n+m) + 1$ incógnitas, precisamos obter um número equivalente de equações independentes para a resolução do problema. Como em qualquer problema da mecânica dos sólidos deformáveis, as equações necessárias à solução podem ser obtidas considerando-se:

- i) as equações constitutivas dos materiais,
- ii) as equações de equilíbrio e
- iii) as relações entre deslocamentos e deformações.

Deve-se ressaltar que as tensões de cisalhamento (τ) nas camadas plásticas, devidas à torção aplicada ao tubo, também serão consideradas na análise. Porém, como a determinação destas tensões é bastante simples, uma vez conhecida a rotação do tubo por unidade de comprimento ($\Delta\varphi/L_1$), preferimos não introduzir mais incógnitas ao

² A tensão tangencial no tendão é aquela que atua segundo a direção tangente ao seu eixo central, enquanto a tensão normal é a que atua numa direção ortogonal às superfícies de contato do tendão com as camadas adjacentes.

conjunto indicado na tabela 3.1. A principal razão para isto é facilitar a resolução numérica do sistema de equações a ser proposto a seguir, pois, com a determinação das tensões de cisalhamento sendo feita à parte, cada camada do tubo, seja helicoidal ou não, estará associada a apenas seis incógnitas³, a saber:

- Para as camadas não-helicoidais: $\Delta R_i, \Delta t_i, \sigma_{z,i}, \sigma_{r,i}, \sigma_{\theta,i}$ e $p_{c,i}$ (ou g_i);
- Para as camadas helicoidais: $\Delta R_i, \Delta t_i, \sigma_{t,i}, \sigma_{n,i}, \Delta \alpha_i$ e $p_{c,i}$ (ou g_i);

Se, ao invés do tubo flexível, tratássemos de um cabo umbilical, também composto por n camadas helicoidais e m camadas não-helicoidais (incluindo, entre estas, o núcleo elétrico), teríamos como incógnitas as mesmas indicadas na tabela 3.1, exceto que, para o núcleo elétrico, a incógnita referente à variação do raio médio seria substituída pela variação do raio externo e a incógnita referente à variação de espessura seria eliminada para esta camada, resultando, assim, um total de $6(n+m)$ incógnitas. Contudo, nada impede que utilizemos, também para os cabos umbilicais, o mesmo número de equações que o necessário para os tubos flexíveis, mantendo para o núcleo elétrico a variação de espessura e a variação do raio médio desta camada como incógnitas. Portanto, visando a uniformização do tratamento, este será o procedimento adotado. Os itens seguintes (3.2 a 3.6) mostrarão com detalhe as equações necessárias para a determinação das incógnitas, considerando os diversos tipos de camadas existentes.

³ A única exceção ocorre para a última camada, pois, não havendo camada externa a ela, não há pressão de contato nem folga.

3.2 Modelagem analítica das camadas helicoidais

Este item encerra a obtenção de equações referentes à modelagem analítica das camadas helicoidais de tubos e cabos, estando dividido em três partes. Na primeira parte serão determinadas as equações de equilíbrio dos tendões das armaduras, considerando o carregamento em questão. A segunda parte traz duas importantes relações geométricas: a primeira entre a deformação axial do tendão (medida na direção tangente ao seu eixo central) e as componentes de deformação da camada ($\Delta L/L_1$, $\Delta\varphi/L_1$ e $\Delta R/R_1$), e a segunda entre a variação do ângulo de assentamento dos tendões e as mesmas componentes de deformação $\Delta L/L_1$, $\Delta\varphi/L_1$ e $\Delta R/R_1$. A terceira parte conclui a modelagem das camadas helicoidais, apresentando as equações constitutivas utilizadas para relacionar o campo de tensões ao campo de deformações nos tendões das armaduras de tração.

3.2.1 Equações de equilíbrio

Neste item mostraremos que, para tubos e cabos submetidos a carregamentos axissimétricos, podemos chegar de forma consistente a uma importante equação que rege o comportamento dos elementos helicoidais (armaduras de tração) presentes nestas estruturas. Tal equação relaciona o diferencial de pressão entre as camadas vizinhas a uma armadura de tração aos esforços de tração que solicitam os tendões, sendo encontrada e utilizada com frequência em vários artigos que tratam do tema, porém sem nenhuma dedução rigorosa, que explicita as diversas hipóteses envolvidas em sua obtenção. As equações deduzidas a seguir também serão utilizadas para as camadas circunferenciais de pressão, quando houver.

No anexo A, foram obtidas as equações gerais de equilíbrio de uma barra, sob ação de um carregamento genérico, e cujo eixo na configuração deformada é descrito por uma curva qualquer no espaço. Considerando que na configuração inicial Σ_1 os tendões constituam barras naturalmente curvas, podemos então utilizar diretamente

as equações (a.21) e (a.22), que fornecem as equações diferenciais de equilíbrio de forças e de momentos para a barra (leia-se: tendão). Temos então:

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q_x}{\partial S_2} - Q_y \cdot \kappa_{t2} + T \cdot \kappa_{y2} + f_x &= 0 \\ \frac{\partial Q_y}{\partial S_2} - T \cdot \kappa_{x2} + Q_x \cdot \kappa_{t2} + f_y &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial S_2} - Q_x \cdot \kappa_{y2} + Q_y \cdot \kappa_{x2} + f_z &= 0\end{aligned}\quad (3.1)$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial M_x}{\partial S_2} - M_y \cdot \kappa_{t2} + M_z \cdot \kappa_{y2} - Q_y + m_x &= 0 \\ \frac{\partial M_y}{\partial S_2} - M_z \cdot \kappa_{x2} + M_x \cdot \kappa_{t2} + Q_x + m_y &= 0 \\ \frac{\partial M_z}{\partial S_2} - M_x \cdot \kappa_{y2} + M_y \cdot \kappa_{x2} + m_z &= 0\end{aligned}\quad (3.2)$$

onde o subscrito “2” indica que os valores das variáveis estão associados à configuração Σ_2 (configuração deformada devida aos carregamentos axissimétricos).

Lançando mão das hipóteses levantadas no item 3.1, podemos admitir que, na configuração deformada Σ_2 , as variações dos esforços solicitantes no tendão com relação ao comprimento de arco S_2 (medido ao longo do eixo central do tendão) são todas nulas. Assim, as equações de equilíbrio (3.1) e (3.2) ficam simplificadas para:

$$\begin{aligned}- Q_y \cdot \kappa_{t2} + T \cdot \kappa_{y2} + f_x &= 0 \\ - T \cdot \kappa_{x2} + Q_x \cdot \kappa_{t2} + f_y &= 0 \\ - Q_x \cdot \kappa_{y2} + Q_y \cdot \kappa_{x2} + f_z &= 0\end{aligned}\quad (3.3)$$

e

$$\begin{aligned}- M_y \cdot \kappa_{t2} + M_z \cdot \kappa_{y2} - Q_y + m_x &= 0 \\ - M_z \cdot \kappa_{x2} + M_x \cdot \kappa_{t2} + Q_x + m_y &= 0 \\ - M_x \cdot \kappa_{y2} + M_y \cdot \kappa_{x2} + m_z &= 0\end{aligned}\quad (3.4)$$

As componentes de curvatura e de torção, segundo as direções principais de flexo-torção da seção transversal do tendão, associadas às configurações inicial (Σ_1) e deformada (Σ_2) são dadas por (ver equações (c.16) e (c.61) do Anexo C):

$$\begin{aligned}\kappa_{x1} &= 0 \\ \kappa_{y1} &= \chi_1 = \frac{\text{sen}^2 \alpha_1}{R_1} \\ \kappa_{t1} &= \tau_1 = \frac{\text{sen} \alpha_1 \cdot \cos \alpha_1}{R_1}\end{aligned}\quad (3.5)$$

e

$$\begin{aligned}\kappa_{x2} &= 0 \\ \kappa_{y2} &= \chi_2 = \frac{\text{sen}^2 \alpha_2}{R_2} \\ \kappa_{t2} &= \tau_2 = \frac{\text{sen} \alpha_2 \cdot \cos \alpha_2}{R_2}\end{aligned}\quad (3.6)$$

Devemos ressaltar, contudo, que as equações (3.5) e (3.6) são válidas desde que seja admitida a hipótese (feita no Anexo C) de que as direções principais de flexo-torção da seção ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) coincidam respectivamente com as direções principais de curvatura ($\vec{n}, \vec{b}, \vec{t}$) da curva formada pelo eixo central do tendão em todos os pontos do eixo (i.é, para qualquer valor do comprimento de arco S_2) e para cada uma das configurações consideradas.

Se lembrarmos ainda que as relações entre os esforços solicitantes T , M_x e M_y e suas respectivas componentes de deformação são dadas pelas seguintes equações constitutivas (ver equação (b.27), Anexo B):

$$\begin{aligned}T &= EA \cdot \varepsilon_{t,2} \\ M_y &= EI_y \cdot (\kappa_{y2} - \kappa_{y1}) = EI_y \cdot (\chi_2 - \chi_1) \\ M_x &= EI_x \cdot (\kappa_{x2} - \kappa_{x1}) = 0\end{aligned}\quad (3.7)$$

então, usando as equações (3.5) e (3.6) e a terceira equação de (3.7), as equações (3.3) e (3.4) ficam reduzidas a:

$$\begin{aligned}
-Q_y \cdot \tau_2 + T \cdot \chi_2 + f_x &= 0 \\
Q_x \cdot \tau_2 + f_y &= 0 \\
-Q_x \cdot \chi_2 + f_z &= 0
\end{aligned} \tag{3.8}$$

e

$$\begin{aligned}
-M_y \cdot \tau_2 + M_z \cdot \chi_2 - Q_y + m_x &= 0 \\
Q_x + m_y &= 0 \\
m_z &= 0
\end{aligned} \tag{3.9}$$

A terceira equação de (3.9) mostra então que, nestas condições, a componente dos momentos distribuídos (por unidade de comprimento do tendão) segundo a direção tangente ao eixo central do tendão é nula (não há portanto uma distribuição de torque ao longo do tendão).

Considerando que não haja contato entre tendões de uma mesma camada helicoidal e lembrando que as forças de atrito estão sendo desprezadas (segundo hipótese (ii) do item 3.1), podemos admitir que:

$$f_y = 0 \quad ; \quad f_z = 0 \quad ; \quad m_x = 0$$

pois são as forças de contato (entre tendões de uma mesma camada) e as forças de atrito as principais responsáveis pelas forças distribuídas nas direções y e z e pela componente de momentos distribuídos segundo a direção principal x .

Logo, da segunda ou da terceira equação de (3.8), segue que a força cortante Q_x (atuante segundo a direção da normal) é nula nestas condições. E, portanto, da segunda equação de (3.9), conclui-se que a componente dos momentos distribuídos (por unidade de comprimento do tendão) segundo a direção principal y também deve ser nula.

Restam, assim, somente as equações:

$$\begin{aligned}
-Q_y \cdot \tau_2 + T \cdot \chi_2 + f_x &= 0 \\
-M_y \cdot \tau_2 + M_z \cdot \chi_2 - Q_y &= 0
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Consideremos que o momento de torção na seção transversal do tendão seja dado por (ver, por exemplo, Witz; Tan [86]):

$$M_z = GI_t \cdot (\kappa_{t2} - \kappa_{t1}) \quad (3.11)$$

Substituindo a segunda equação de (3.7) e a equação (3.11) na segunda equação de (3.10), podemos então determinar a força cortante Q_y , obtendo o seguinte resultado:

$$Q_y = -EI_y \cdot (\chi_2 - \chi_1) \cdot \tau_2 + GI_t \cdot (\tau_2 - \tau_1) \cdot \chi_2 \quad (3.12)$$

Admitindo que as forças distribuídas f_x possam ser expressas em função da diferença das pressões de contato externa ($p_{c,e}$) e interna ($p_{c,i}$) à camada, teremos:

$$f_x = b \cdot \Delta p_c = b \cdot (p_{c,e} - p_{c,i}) \quad (3.13)$$

onde b é a largura do tendão.

Substituindo agora (3.12) e (3.13) na primeira equação de (3.10), virá:

$$b \cdot (p_{c,i} - p_{c,e}) = T \cdot \chi_2 + EI_y \cdot (\chi_2 - \chi_1) \cdot \tau_2^2 - GI_t \cdot (\tau_2 - \tau_1) \cdot \chi_2 \cdot \tau_2 \quad (3.14)$$

Utilizando, enfim, as relações (3.5) e (3.6) em (3.14), e lembrando que:

$$R_2 = R_1 + \Delta R$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \Delta \alpha$$

teremos, após linearizarmos a expressão (3.14) em torno de $\Delta R = 0$ e $\Delta \alpha = 0$, a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} b \cdot (p_{c,i} - p_{c,e}) = T \cdot \chi_1 + \left[2T \cdot \tau_1 + \frac{\chi_1 \cdot \tau_1}{R_1} \cdot (2EI_y \cos^2 \alpha_1 - GI_t \cdot \cos(2\alpha_1)) \right] \cdot \Delta \alpha + \\ + \left[\chi_1^2 \cdot \tau_1 (GI_t - EI_y) - T \chi_1 \right] \frac{\Delta R}{R_1} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Pode-se mostrar que, das três parcelas que comparecem no lado direito da equação (3.15), o termo dominante corresponde ao produto $T \cdot \chi_1$. Desta forma, uma fórmula aproximada que pode substituir (3.15) é dada por:

$$p_{c,i} - p_{c,e} \cong \frac{T \cdot \chi_1}{b} \quad (3.16)$$

Para tendões com seção transversal retangular ($b \times t$), por exemplo, pode-se mostrar que o erro cometido ao utilizarmos (3.16) ao invés de (3.15) é da ordem de $(t/R_1)^2$. Assim, para uma camada helicoidal com tendões de seção transversal retangular tendo $t = 5$ mm, e sendo $R_1 = 50$ mm, teremos um erro da ordem de 1% apenas.

É interessante notar que a fórmula (3.16) pode ser relacionada diretamente à clássica fórmula de tensão circunferencial em vasos de pressão de parede fina submetidos apenas à pressão interna, desde que se tome o raio do vaso como o raio de curvatura do tendão (ver, por exemplo, Hibbeler [28] ou Timoshenko; Goodier [84]). De fato, tomando:

$$\begin{aligned} p_{c,e} &= 0 && \text{(não há pressão externa)} \\ T &= \sigma_t \cdot b \cdot t && \text{(seção transversal retangular, } b \times t) \\ \chi_1 &= 1/\rho_1 && (\rho_1 = \text{raio de curvatura}) \end{aligned}$$

resulta de (3.16):

$$\sigma_t = \frac{p_{c,i} \cdot \rho_1}{t} = \frac{p_{c,i} \cdot R_1}{t \cdot \text{sen}^2 \alpha_1}$$

A equação (3.16) pode ser encontrada também em diversas referências que tratam da análise local de *risers* flexíveis (ver, por exemplo, Féret; Bournazel [24], Pesce et al. [58] e Witz; Tan [86]). Contudo, devemos ressaltar que tal equação só pode ser utilizada desde que todas as hipóteses feitas até o momento para sua obtenção sejam consideradas aceitáveis. Além das hipóteses gerais (admitidas para todas as camadas) levantadas no item 3.1, lembramos que as seguintes hipóteses foram admitidas na obtenção da equação (3.16):

1. as variações dos diversos esforços solicitantes no tendão com relação ao comprimento de arco S_2 (medido ao longo de seu eixo central) são todas nulas;

2. as direções principais de flexo-torção da seção transversal do tendão $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ coincidem respectivamente com as direções principais de curvatura $(\vec{n}, \vec{b}, \vec{t})$ da curva formada pelo eixo central do tendão em todos os pontos do eixo (i.é, para qualquer valor do comprimento de arco S_2) e para cada uma das configurações consideradas;
3. não há contato entre tendões de uma mesma camada helicoidal;
4. as forças distribuídas f_x podem ser expressas em função da diferença das pressões de contato externa e interna à camada;
5. admite-se que $a/R_1 \ll 1$, onde a representa uma dimensão característica da seção transversal do tendão (como a espessura, no caso de tendões de seção retangular) e R_1 representa o raio médio da camada na configuração inicial Σ_1 .

A primeira hipótese parece ser bastante aceitável para carregamentos de natureza axissimétrica como os que estamos considerando, desde que aceitas as hipóteses gerais já discutidas no item 3.1 (deve-se observar que a hipótese (1) decorre das hipóteses gerais). Devemos ainda lembrar que, embora os carregamentos distribuídos ao longo do *riser* (como o peso próprio e o empuxo) provoquem uma variação dos esforços solicitantes em suas seções transversais e, conseqüentemente, nas seções transversais dos tendões, podemos considerar tais variações desprezíveis na escala de comprimento (L_1) considerada, posto que as mesmas ocorrem numa escala de comprimento superior a L_1 .

A hipótese (2) é uma das mais fortes dentre as admitidas, já que os eixos principais de flexo-torção da seção transversal não são necessariamente coincidentes com as direções principais de curvatura do eixo central do tendão. Porém, se a seção transversal do tendão for circular, isto realmente ocorre, deixando de ser uma simplificação (deve-se, contudo, tratar a torção de forma cuidadosa). Para seções transversais retangulares admitiremos que esta hipótese também é aceitável, tendo em vista que a constrição imposta pelas camadas adjacentes praticamente impõe a coincidência entre as direções $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ e $(\vec{n}, \vec{b}, \vec{t})$. Para outros tipos de seção

transversal, como as presentes nas camadas de reforço de pressão e nas carcaças intertravadas, admitiremos que a hipótese (2) também seja válida, embora devamos reconhecer que um estudo mais aprofundado com relação a estas camadas seja necessário.

A terceira hipótese, segundo a qual não há contato entre tendões de uma mesma camada, também é justificável pois geralmente existe uma pequena folga entre tendões adjacentes de uma mesma camada. Naturalmente, admite-se também, de forma implícita, que a folga entre dois tendões vizinhos de uma mesma camada seja a mesma, quaisquer que sejam os tendões tomados, de forma a garantir uma simetria na distribuição dos tendões ao longo do perímetro circunferencial. Problemas como o de uma eventual superposição dos tendões não serão considerados neste trabalho.

A hipótese (4) também parece ser bastante aceitável, tendo em vista todas as condições e hipóteses já assinaladas, não necessitando de maiores discussões. Admite-se também que as pressões de contato entre os tendões e as camadas adjacentes estão uniformemente distribuídas nas respectivas superfícies de contato. Tal distribuição uniforme decorre das hipóteses gerais apontadas em 3.1 e da distribuição simétrica dos tendões ao longo do perímetro circunferencial.

A condição de que o raio médio da camada helicoidal seja suficientemente maior que as dimensões características da seção transversal dos tendões (hipótese (5)) geralmente é observada em grande parte das camadas helicoidais presentes em *risers* flexíveis, de tal forma que esta hipótese é seguramente plausível. De qualquer forma, é importante assinalar que, caso a hipótese não se confirme, não apenas a equação (3.16) deixa de ser uma aproximação válida da equação (3.15), como também as equações constitutivas dadas por (3.7) deixam de ser corretas (ver Anexo B).

Para concluir este item, queremos apenas ressaltar que, uma vez garantida a validade das hipóteses feitas até aqui (cuja fundamentação foi detalhada nos parágrafos

anteriores), as duas únicas equações de equilíbrio que restam são as equivalentes às equações (3.10), abaixo rescritas:

$$\begin{aligned} -Q_y \cdot \tau_2 + T \cdot \chi_2 + f_x &= 0 \\ -M_y \cdot \tau_2 + M_z \cdot \chi_2 - Q_y &= 0 \end{aligned}$$

Estas duas equações ficam “resumidas” na forma da equação (3.16) – ou, de forma mais completa, da equação (3.15) – que diz respeito ao equilíbrio do tendão como “membrana”. As demais equações de equilíbrio ficam automaticamente satisfeitas.

3.2.2 Equações de compatibilidade de deformações

No anexo C foram deduzidas duas equações largamente empregadas na análise estrutural dos tendões das armaduras helicoidais: a primeira relaciona a deformação axial do tendão com as chamadas “componentes de deformação” da camada (dadas por $\Delta L/L_1$, $\Delta\varphi/L_1$ e $\Delta R/R_1$), enquanto a segunda fornece a variação do ângulo de assentamento dos tendões com as mesmas “componentes de deformação” da camada. As equações são dadas respectivamente por (ver equações (c.43) e (c.49), Anexo C):

$$\varepsilon_{t,12} = (\sin^2 \alpha_1) \cdot \frac{\Delta R}{R_1} + (\sin \alpha_1 \cdot \cos \alpha_1) \cdot R_1 \cdot \frac{\Delta \varphi}{L_1} + (\cos^2 \alpha_1) \cdot \frac{\Delta L}{L_1} \quad (3.17)$$

e

$$\Delta \alpha = \cos^2 \alpha_1 \cdot R_1 \frac{\Delta \varphi}{L_1} + \sin \alpha_1 \cdot \cos \alpha_1 \cdot \left(\frac{\Delta R}{R_1} - \frac{\Delta L}{L_1} \right) \quad (3.18)$$

Tais equações são obtidas a partir de simples relações envolvendo parâmetros geométricos da camada e mostram que as medidas de deformação envolvidas não podem ser, de fato, independentes umas das outras. Deve-se observar, porém, que as equações (3.17) e (3.18) são válidas somente para o caso em que as chamadas “componentes de deformação” da camada assumem valores constantes na escala de comprimento considerada ao longo do *riser* (L_1). Os resultados previstos por estas equações são, portanto, consistentes com as hipóteses adotadas neste capítulo.

3.2.3 Equações constitutivas

Como admitimos que o material das camadas helicoidais é homogêneo, isótropo e com comportamento elástico linear, as equações constitutivas para tais camadas resultam diretamente da aplicação da lei de Hooke. Assim, considerando que o estado de tensões associado aos pontos dos tendões possa ser aproximado pelas tensões normais σ_t (tensão que atua na direção do versor tangente à curva formada pelo eixo central do tendão) e σ_n (tensão devida às pressões de contato que atuam na direção do versor normal à curva formada pelo eixo central do tendão), e que o estado de deformações nos pontos do tendão possa, da mesma forma, ser aproximado pelas componentes de deformação dadas por:

$$\varepsilon_t = \frac{\Delta S}{S_1} \quad (\text{deformação axial média conforme equação (c.40), Anexo C) e}$$

$$\varepsilon_n = \frac{\Delta t}{t} \quad (\text{deformação devida à variação de espessura dos tendões})$$

então as equações que relacionam o campo de tensões ao campo de deformações são dadas por (ver, por exemplo, Timoshenko; Goodier [84]):

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \frac{\Delta S}{S_1} = \frac{1}{E} [\sigma_t - \nu \cdot \sigma_n] \\ \varepsilon_n &= \frac{\Delta t}{t} = \frac{1}{E} [\sigma_n - \nu \cdot \sigma_t] \end{aligned} \quad (3.19)$$

Utilizando agora a equação (3.17) na primeira das equações (3.19), teremos então as seguintes equações relacionando as incógnitas associadas às camadas helicoidais (conforme indicado na tabela 3.1):

$$\begin{aligned} \frac{1}{E} [\sigma_t - \nu \cdot \sigma_n] &= \left(\frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta \varphi}{L} \cdot \frac{R}{\tan \alpha} \right) \cdot \text{sen}^2 \alpha + \left(\frac{\Delta L}{L} \right) \cdot \text{cos}^2 \alpha \\ \frac{1}{E} [\sigma_n - \nu \cdot \sigma_t] &= \frac{\Delta t}{t} \end{aligned} \quad (3.20)$$

3.3 Modelagem analítica das camadas plásticas

Este item traz as equações referentes à modelagem analítica das camadas plásticas presentes em tubos e cabos, como a barreira de pressão e a capa externa, e está dividido em duas partes. Na primeira parte serão apresentadas expressões que fornecem a variação da espessura, a variação do raio médio e a tensão axial numa dada camada plástica submetida a pressões interna e externa e a uma deformação axial imposta. Ainda nesta primeira parte, mostraremos como ficam expressas as tensões de cisalhamento nas camadas plásticas em função do ângulo de giro imposto às mesmas. Na segunda parte faremos um confronto entre as equações “exatas”, obtidas pela Teoria da Elasticidade, e equações simplificadas utilizadas na literatura, mostrando que as últimas podem fornecer bons resultados, admitindo-se válida a hipótese de tubo de parede fina.

3.3.1 Equações para as camadas plásticas

Os carregamentos axissimétricos impostos às camadas plásticas podem consistir em: pressões interna e externa à camada, uma força normal de tração ou compressão (ou, de forma equivalente, um deslocamento axial imposto à camada) e um momento de torção (ou uma rotação axial imposta à camada). Admitiremos que para estes carregamentos o estado de tensões nos pontos destas camadas possa ser aproximado pelas tensões normais σ_r , σ_θ e σ_z (que atuam respectivamente nas direções radial, circunferencial e longitudinal da camada) e pelas tensões de cisalhamento $\tau_{z\theta}$. Considerando as hipóteses feitas anteriormente (item 3.1), notamos que é válido o princípio da superposição e, portanto, podemos obter o campo de tensões normais em função dos carregamentos de tração (ou deslocamento axial) e de pressão interna e externa aplicados à camada, enquanto as tensões de cisalhamento ficam expressas em função da torção ou da rotação axial imposta à camada.

- *Varição de espessura da camada:*

O anexo D traz o equacionamento para camadas cilíndricas de parede espessa submetidas a carregamentos axissimétricos como pressão interna e externa e tração axial. As expressões foram obtidas a partir da formulação geral dada pela Teoria da Elasticidade Linear, admitindo válidas as hipóteses da Teoria. A variação da espessura da camada pode então ser facilmente calculada através de:

$$\Delta t = u(b) - u(a)$$

onde $u(r)$ é o campo de deslocamentos radiais da camada, dado pela equação (d.7), e a e b são, respectivamente, o raio interno e externo à camada. Resulta, assim:

$$\Delta t = -\nu \varepsilon_z (b - a) + \frac{(a^2(1 - 2\nu) - ab)p_i - (b^2(1 - 2\nu) - ab)p_e}{2G.(b + a)} \quad (3.21)$$

Reescrevendo a expressão (3.21) em função da espessura t e do raio médio R da camada, e lembrando ainda que a deformação axial das camadas plásticas pode ser expressa como a deformação axial do *riser* (conforme hipótese (iii) feita no item 3.1), teremos:

$$\Delta t = -\nu \cdot t \cdot \frac{\Delta L}{L_1} - \left(1 - \frac{t}{2R}\right) \left[\frac{(1 - \nu^2)t}{2E} + \frac{\nu(1 + \nu)R}{E} \right] p_i - \left(1 + \frac{t}{2R}\right) \left[\frac{(1 - \nu^2)t}{2E} - \frac{\nu(1 + \nu)R}{E} \right] p_e \quad (3.22)$$

- *Varição do raio médio da camada:*

A variação do raio médio da camada é dada através da expressão:

$$\Delta R = \frac{\Delta R_{ext} + \Delta R_{int}}{2} = \frac{u(b) + u(a)}{2}$$

a qual, usando as fórmulas do anexo C, fica:

$$\Delta R = -\nu \cdot \varepsilon_z \frac{(a + b)}{2} + \frac{(1 + \nu)}{2E.(b - a)} (p_i \cdot a[b + a(1 - 2\nu)] - p_e \cdot b[a + b(1 - 2\nu)]) \quad (3.23)$$

Procedendo de forma análoga ao que foi feito acima, teremos a seguinte expressão equivalente a (3.23) para a variação do raio médio (escrita em função da espessura e do raio médio da camada):

$$\Delta R = -\nu \cdot R \cdot \frac{\Delta L}{L} + \left(1 - \frac{t}{2R}\right) \left[\frac{(1-\nu^2)R^2}{tE} + \frac{\nu(1+\nu)R}{2E} \right] p_i - \left(1 + \frac{t}{2R}\right) \left[\frac{(1-\nu^2)R^2}{tE} - \frac{\nu(1+\nu)R}{2E} \right] p_e \quad (3.24)$$

- *Tensão axial atuante na camada:*

No anexo C mostra-se que a tensão axial nas camadas plásticas é dada pela seguinte expressão:

$$\sigma_z = \frac{2\nu \cdot (p_i \cdot a^2 - p_e \cdot b^2)}{(b^2 - a^2)} + E \cdot \varepsilon_z \quad (3.25)$$

Reescrevendo a expressão (3.25) em função da espessura t e do raio médio R da camada, teremos:

$$\sigma_z = E \cdot \frac{\Delta L}{L} + \left(1 - \frac{t}{2R}\right) \cdot \frac{\nu(2R-t) \cdot p_i}{2t} - \left(1 + \frac{t}{2R}\right) \cdot \frac{\nu(2R+t) \cdot p_e}{2t} \quad (3.26)$$

- *Contribuição das camadas plásticas na resistência a torção:*

Admitiremos que as camadas plásticas ofereçam uma certa resistência aos momentos de torção aplicados aos tubos flexíveis ou cabos umbilicais. Considerando as hipóteses feitas no item 3.1, a relação entre o momento de torção resistido pela camada e o ângulo de giro imposto à ela é (ver, por exemplo, Hibbeler [28]):

$$M_t = (GJ_p) \cdot \frac{\Delta\varphi}{L} \quad (3.27)$$

e a máxima tensão de cisalhamento atuando na camada será:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{J_p} b = G \cdot b \cdot \frac{\Delta\varphi}{L} \quad (3.28)$$

onde G é o módulo de elasticidade transversal do material da camada e J_p é o momento polar de inércia da seção transversal.

3.3.2 Confronto entre a solução “exata” e a aproximada

O anexo D e o item anterior trazem a solução “exata”, dada pela Teoria da Elasticidade, para o problema da distribuição de tensões e deformações numa camada cilíndrica de parede espessa submetida a uma tração axial e a pressões interna e externa distribuídas uniformemente sobre a superfície. Uma solução aproximada para este problema pode ser encontrada com frequência na literatura⁴, admitindo-se válida a hipótese de tubo de parede fina. Neste caso, fazendo-se o equilíbrio de forças na direção radial, pode-se mostrar que a tensão circunferencial “média” σ_θ é dada aproximadamente por:

$$\sigma_\theta = \frac{(p_i - p_e) \cdot R}{t} \quad (3.29)$$

onde p_i e p_e são, respectivamente, os valores absolutos das pressões interna e externa à camada considerada, R é o raio médio, e t é a espessura da camada.

Já a tensão radial é estimada através da “média” entre as pressões interna e externa à camada, ou seja:

$$\sigma_r = -\frac{(p_i + p_e)}{2} \quad (3.30)$$

Considerando, agora, que as componentes de deformação ε_r , ε_θ e ε_z medidas nas direções radial, circunferencial e longitudinal da camada, são dadas por:

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta t}{t} \quad (\text{deformação radial, devida à variação de espessura da camada}) \text{ e}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{\Delta R}{R} \quad (\text{deformação circunferencial, devida à variação do raio médio da camada}).$$

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta L}{L} \quad (\text{deformação longitudinal, ou axial, da camada plástica});$$

teremos as seguintes equações constitutivas (admitem-se, novamente, as hipóteses clássicas da teoria da elasticidade linear):

⁴ Ver, por exemplo, Witz; Tan [86] e Pesce et al. [58].

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta t}{t} &= \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)] \\
\frac{\Delta R}{R} &= \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \nu(\sigma_z + \sigma_r)] \\
\frac{\Delta L}{L} &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)]
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Substituindo as equações (3.29) e (3.30) nas equações (3.31), teremos então as seguintes expressões simplificadas para a determinação da tensão axial e das variações de espessura e de raio médio na camada:

$$\Delta t = -\nu.t.\frac{\Delta L}{L} - \left[\frac{(1-\nu^2)t}{2E} + \frac{\nu(1+\nu)R}{E} \right] p_i - \left[\frac{(1-\nu^2)t}{2E} - \frac{\nu(1+\nu)R}{E} \right] p_e \tag{3.32}$$

$$\Delta R = -\nu.R.\frac{\Delta L}{L} + \left[\frac{(1-\nu^2)R^2}{tE} + \frac{\nu(1+\nu)R}{2E} \right] p_i - \left[\frac{(1-\nu^2)R^2}{tE} - \frac{\nu(1+\nu)R}{2E} \right] p_e \tag{3.33}$$

$$\sigma_z = E.\frac{\Delta L}{L} + \frac{\nu(2R-t).p_i}{2.t} - \frac{\nu(2R+t).p_e}{2.t} \tag{3.34}$$

Comparando, agora, as expressões simplificadas (3.32), (3.33) e (3.34) com suas análogas (3.22), (3.24) e (3.26), obtidas a partir da solução “exata”, é fácil observar que os dois conjuntos de expressões são muito parecidos, a não ser pelos fatores $(1-t/2R)$ e $(1+t/2R)$ que multiplicam os termos de p_i e p_e , respectivamente, nas expressões “exatas”. Conclui-se, portanto, que a solução simplificada pode fornecer bons resultados, desde que a hipótese de tubo de parede fina seja válida. Neste caso, o erro cometido ao utilizarmos as equações (3.32), (3.33) e (3.34), ao invés das equações (3.22), (3.24) e (3.26), será da ordem⁵ de t/R .

⁵ Naturalmente há valores de p_i , p_e e $\Delta L/L$ para os quais as expressões “exatas” (3.22), (3.24) e (3.26) se anulam, o que levaria a diferença percentual entre os valores exatos e aproximados atingir valores muito altos. Contudo, não há variação significativa entre os valores calculados.

3.4 Modelagem analítica da carcaça intertravada

Pela sua construção intrínseca, a carcaça intertravada merece um item à parte que explique com maior detalhe sua modelagem. Fabricada a partir de um perfil em chapa dobrada, a carcaça é formada pelo intertravamento do perfil, que se enrola formando uma hélice com grande ângulo de enrolamento⁶. Para se modelar esta camada, existem na literatura dois tipos diferentes de abordagem: o primeiro trata a carcaça como uma camada helicoidal, utilizando, assim, formulações semelhantes à vista no item 3.2. Tal metodologia parece ser a predominante na literatura, sendo seguida, por exemplo, por Claydon et al. [17], Féret; Bournazel [24], Goto et al. [26] e Witz; Tan [86]. O segundo tipo de abordagem procura modelar esta camada como um “tubo equivalente”, com espessura e propriedades elásticas tais que representem de forma adequada o comportamento da carcaça intertravada para os carregamentos aplicados sobre ela. Entre os autores que utilizaram esta modelagem encontram-se Cruz [22], Pesce et al. [56, 57] e Souza et al. [77].

No presente trabalho, as duas formas de modelagem serão consideradas, conforme a conveniência⁷. Relativamente à modelagem como camada helicoidal, serão utilizadas as mesmas equações já vistas no item 3.2, não havendo necessidade de repeti-las aqui. Porém, deve-se ressaltar que todas as hipóteses feitas na obtenção destas equações devem ser consideradas em sua aplicação. Entre as diversas hipóteses levantadas naquela ocasião (item 3.2.1), merecem especial destaque as duas hipóteses seguintes:

1. que as direções principais de flexo-torção da seção transversal do tendão $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ coincidem respectivamente com as direções principais de curvatura $(\vec{n}, \vec{b}, \vec{t})$ da curva formada pelo eixo central do tendão em todos os pontos do eixo e para cada uma das configurações consideradas;

⁶ O ângulo de enrolamento da carcaça, medido com relação ao eixo do tubo, está geralmente situado por volta de 85°.

⁷ Para a modelagem da carcaça intertravada com elementos finitos, por exemplo, a modelagem como tubo “equivalente” é, naturalmente, mais simples que a modelagem como helicóide.

2. que não há contato entre tendões de uma mesma camada helicoidal;

Pelo formato da seção transversal do perfil que forma a carcaça, nota-se que a primeira hipótese não é necessariamente verdadeira. Contudo, examinando-se os perfis utilizados na fabricação da carcaça, pode-se notar que a hipótese é ainda razoável. Verifica-se também que, devido à extrusão de uma camada plástica sobre a carcaça intertravada, são criadas “guias” que, de certa forma, impedem a carcaça de se deformar por torção ou por flexão em torno do versor normal (admitindo que tal flexão fosse possível). Assim, os únicos meios que restam à carcaça para se deformar ficam restritos a tração e a flexão em torno do versor binormal. Como as tensões de membrana são certamente maiores que as tensões de flexão (ambas causadas, sobretudo, pela constrição radial imposta à carcaça), conclui-se que as equações obtidas no item 3.2.1 devem fornecer bons resultados para a carcaça. Já a segunda hipótese é bastante discutível, pela própria geometria do intertravamento e também pela existência das “guias” na jaqueta plástica, que acabam gerando forças de contato distribuídas. Porém, vamos considerar a hipótese aceitável, com a limitação de que a deformação axial imposta ao *riser* não alcance valores excessivos⁸, ficando claro, contudo, que uma melhor investigação a respeito do comportamento estrutural desta camada deve ser realizada em trabalhos futuros.

Quanto à modelagem da carcaça como “tubo equivalente”, mostraremos a seguir como calcular a espessura e as constantes elásticas deste “tubo” de forma a assegurar que seu comportamento seja próximo ao da carcaça propriamente dita, para carregamentos axissimétricos. Deve-se ressaltar ainda que esta forma de modelagem também proporciona resultados satisfatórios, conforme mostram os trabalhos realizados por Pesce et al. [56,57], cujos resultados analíticos foram confirmados por resultados experimentais. Nestes trabalhos, os autores utilizam o conceito de “tubo equivalente” para o estudo do comportamento estrutural da carcaça sob carregamento radial (geral no que tange à sua distribuição perimetral), concluindo que “...o modelo

⁸ Isto é consistente com a hipótese de linearidade geométrica admitida no item 3.1.

de tubo e o critério adotado para predizer o limite de comportamento linear da estrutura são satisfatórios”.

Como última observação, antes de procedermos à modelagem da carcaça como “tubo equivalente”, queremos lembrar, como muito bem destacou Claydon et al. [17], que a carcaça é, de fato, uma camada não-estanque, de tal forma que se pode admitir que a pressão interna em um tubo flexível atue diretamente sobre a camada estanque adjacente à carcaça (geralmente uma jaqueta plástica). Neste caso, se, para um dado carregamento, o deslocamento radial desta camada plástica adjacente for positivo (portanto, no sentido de se afastar do centro), então a carcaça praticamente não atuará, podendo ser ignorada no cálculo da rigidez axial do tubo. Se, por outro lado, o deslocamento radial for negativo (em direção ao centro), então a contribuição da carcaça na rigidez axial do tubo é fundamental. Assim, independentemente da forma de modelagem da carcaça, tais fatos devem ser sempre levados em conta.

3.4.1 O modelo de “tubo equivalente”

Neste item descreveremos o modelo da carcaça como um “tubo equivalente” ortotrópico, mostrando como calcular a espessura equivalente e as constantes elásticas do material fictício do “tubo”. As seguintes hipóteses serão adotadas para o modelo:

- i) As resistências axial e torsional da carcaça são desprezíveis quando comparadas às mesmas resistências devidas às demais camadas. Desta forma, o único carregamento a ser considerado consistirá em um campo de pressões uniformemente distribuído sobre a superfície externa da carcaça (pressão externa);
- ii) admite-se que os eixos de simetria elástica do material fictício do “tubo” coincidam com as direções circunferencial, radial e longitudinal do “tubo”;
- iii) os coeficientes de Poisson, relativos aos eixos de simetria elástica do material, são todos nulos, ou seja, se for aplicada uma tensão segundo um dos eixos de simetria elástica do material, as deformações medidas nas duas outras direções serão nulas;

iv) outras hipóteses clássicas serão admitidas como: continuidade, homogeneidade, elasticidade linear e linearidade geométrica.

Consideremos, então, conhecidas as propriedades geométricas da carcaça a ser modelada, bem como o módulo de elasticidade do material da carcaça. Seja t_{eq} a espessura equivalente do “tubo” e sejam E_r , E_θ e E_z os módulos de elasticidade do material do “tubo”, medidos com relação às direções radial, circunferencial e longitudinal, respectivamente. Como, por hipótese, a carcaça não resiste aos esforços axiais aplicados ao tubo, podemos atribuir à constante E_z um valor qualquer, porém bastante pequeno quando comparado aos dos demais módulos de elasticidade⁹, digamos:

$$E_z = 1 \text{ MPa}$$

Com relação aos módulos de elasticidade E_r e E_θ , arbitraremos que ambos tenham o mesmo valor de tal forma que as deformações medidas na direção radial e circunferencial tenham a mesma ordem de grandeza. Resta, portanto, calcular os valores de E_θ e t_{eq} . Para um tubo submetido a uma pressão externa p_e distribuída uniformemente sobre sua superfície, podemos calcular a força de membrana (por unidade de comprimento na direção longitudinal) que atua na direção circunferencial por¹⁰:

$$N_\theta = \frac{E_\theta \cdot t_{eq} \cdot u}{R_1} \quad (3.35)$$

onde u representa o deslocamento radial da superfície média do “tubo”, e R_1 , o raio desta superfície (note que a relação u/R_1 representa a deformação circunferencial média do “tubo”).

⁹ Na realidade as tensões axiais calculadas para a carcaça intertravada, se modelada como tubo equivalente, não serão consideradas no equilíbrio de forças axiais do tubo flexível. Além disso, como estamos admitindo que todos os coeficientes de Poisson são nulos, a existência destas tensões não irá interferir na constrição radial da carcaça. Desta forma, os resultados obtidos para as demais camadas independem do valor arbitrado para o módulo de elasticidade E_z .

¹⁰ Ver, por exemplo, Timoshenko; Krieger [83], pg. 468.

Esta mesma força de membrana pode ser estimada para a carcaça através de:

$$N_{\theta} = \frac{(EA)f_c}{L_1} \cdot \frac{u}{R_1} \quad (3.36)$$

onde EA representa a rigidez axial da seção transversal do perfil, e f_c representa um fator de correção da área que considera o intertravamento do perfil (em outras palavras, é um indicador do número de voltas, ou do número de seções transversais, correspondente a um dado comprimento L_1 medido na direção axial da carcaça). Tal fator de correção pode ser calculado por:

$$f_c = \frac{L_1}{h_1} = \frac{L_1 \cdot \tan \alpha_1}{2\pi \cdot R_1} \quad (3.37)$$

onde h_1 representa o passo de enrolamento da carcaça.

Igualando as expressões (3.35) e (3.36), teremos a seguinte relação entre os valores de rigidez axial do “tubo” e da carcaça:

$$E_{\theta} t_{eq} = \frac{(EA)f_c}{L_1} \quad (3.38)$$

Tendo levado em conta as forças de tração que solicitam o perfil da carcaça, consideraremos, agora, os momentos fletores em torno do versor binormal, que, conforme vimos, constituem o segundo meio de a carcaça se deformar. Para o “tubo equivalente” ortotrópico, a relação entre o momento fletor (por unidade de comprimento longitudinal) e a variação de curvatura é dada por:

$$M_{\theta} = \frac{E_{\theta} \cdot t_{eq}^3}{12} \cdot \Delta\kappa = \frac{E_{\theta} \cdot t_{eq}^3}{12} \cdot \frac{u}{R_1^2} \quad (3.39)$$

Para a carcaça temos, analogamente:

$$M_{\theta} = \frac{(EI_{\min})f_c}{L_1} \cdot \frac{u}{R_1^2} \quad (3.40)$$

onde (EI_{min}) representa a rigidez flexional do perfil (sendo I_{min} o momento de inércia central mínimo da seção) e f_c é o mesmo fator de correção dado anteriormente.

Igualando as expressões (3.39) e (3.40), teremos a seguinte relação:

$$E_{\theta} t_{eq}^3 = \frac{12(EI_{min})f_c}{L_1} \quad (3.41)$$

Assim, das expressões (3.37), (3.38) e (3.41), resultam finalmente:

$$t_{eq} = \left(\frac{12 \cdot I_{min}}{A} \right)^{1/2} \quad (3.42)$$

$$E_{\theta} = \frac{(EA) \tan \alpha}{2\pi R} \cdot \left(\frac{A}{12 \cdot I_{min}} \right)^{1/2} \quad (3.43)$$

Desta forma, com o modelo aqui proposto, garante-se que a carcaça praticamente não trabalhe quando submetida a esforços axiais, mas seja resistente aos esforços radiais que provocam a constrição da camada (como a pressão de contato).

3.4.2 Equações utilizadas no modelo de “tubo equivalente”

Considerando que a carcaça seja modelada como um “tubo equivalente” com espessura e constantes elásticas já determinadas, algumas equações acerca do comportamento estrutural da camada devem ser fornecidas para possibilitar a resolução do sistema de equações visto no item 3.1. Estas equações serão: i) as equações de equilíbrio a serem usadas para a carcaça e ii) as equações constitutivas do material. Deve-se ressaltar que a discussão das equações constitutivas serve para fundamentar algumas hipóteses já consideradas no item anterior.

3.4.2.1 Equações de equilíbrio

Por hipótese, estamos admitindo que o estado de tensões para a carcaça intertravada, modelada como “tubo”, é representado pelas tensões normais σ_r , σ_θ e σ_z , que atuam nas direções radial, circunferencial e longitudinal do tubo, à semelhança do estado de tensões existente nas camadas plásticas. Desta forma, recuperando o resultado obtido pela equação (3.29), podemos expressar a tensão circunferencial no tubo através de:

$$\sigma_\theta = \frac{(p_i - p_e) \cdot R_1}{t_{eq}} \quad (3.44)$$

Apesar da semelhança entre as equações (3.29) e (3.44), existem diferenças conceituais que dizem respeito à utilização destas duas equações. São elas:

- admite-se que a carcaça intertravada, pela sua própria construção, não seja estanque, de tal modo que esta camada não é solicitada pela pressão interna decorrente da ação do fluido, mas somente pela pressão interna decorrente do contato com alguma camada mais interna (se houver);
- a espessura utilizada na equação (3.44) não é a espessura da fita que forma a carcaça, tampouco a espessura da própria carcaça. O valor utilizado refere-se à espessura de um tubo “imaginário”, cujo comportamento, em termos de constrição radial, aproxima-se ao da carcaça (conforme item 3.4.1)
- os valores das tensões σ_r , σ_θ e σ_z , calculadas para a carcaça através do modelo de “tubo equivalente”, não são as tensões verdadeiras que atuam na camada.

O cálculo das tensões na direção radial será visto mais adiante (item 3.6), já que todas as camadas, independentemente de sua modelagem, estão submetidas a tensões radiais. Quanto às tensões axiais calculadas para a carcaça intertravada, lembramos que elas não serão consideradas no equilíbrio de forças axiais do tubo flexível (se for

modelada como “tubo equivalente”), servindo apenas para conferir “simetria”¹¹ ao sistema de equações a ser resolvido.

3.4.2.2 Equações constitutivas

Para materiais ortotrópicos com comportamento elástico linear, são necessárias nove constantes elásticas independentes para se estabelecer de forma completa as relações entre o campo de tensões e o campo de deformações nos pontos do sólido (ver, por exemplo, Lekhnitskii [39]). Tais constantes elásticas não são medidas com relação a direções quaisquer passando pelos pontos do sólido, mas com relação às direções de simetria elástica do material. Desta forma, ao modelarmos a carcaça intertravada como um “tubo” ortotrópico, uma das premissas básicas adotadas para simplificar o modelo é a de que as direções de simetria elástica do material hipotético que constitui este “tubo” coincidam com as direções axial, circunferencial e radial do próprio tubo flexível. Tal hipótese pode ser justificada pelo fato de que o ângulo de assentamento da hélice da carcaça é bastante próximo de 90° (geralmente em torno de 85°), de forma que o erro que se comete ao considerarmos tal aproximação deve ser desprezível. Assim, designando as direções radial, circunferencial e axial do tubo pelos índices “r”, “ θ ” e “z”, as equações constitutivas ligando as tensões às deformações em um ponto da carcaça ficam dadas por:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E_r} (+\sigma_r - \nu_{\theta r} \cdot \sigma_\theta - \nu_{zr} \cdot \sigma_z) & \gamma_{\theta r} &= \tau_{\theta r} / G_{\theta r} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E_\theta} (-\nu_{r\theta} \cdot \sigma_r + \sigma_\theta - \nu_{z\theta} \cdot \sigma_z) & \gamma_{\theta z} &= \tau_{\theta z} / G_{\theta z} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E_z} (-\nu_{rz} \cdot \sigma_r - \nu_{\theta z} \cdot \sigma_\theta + \sigma_z) & \gamma_{rz} &= \tau_{rz} / G_{rz} \end{aligned} \quad (3.45)$$

Considerando a forma construtiva da carcaça intertravada, é razoável admitirmos que todos os coeficientes de Poisson tenham valores iguais a zero, já que a influência das

¹¹ Simetria do ponto de vista “numérico”, pois, desta forma, todas as camadas modeladas como vaso de pressão cilíndrico terão o mesmo número e o mesmo tipo de incógnitas a serem determinadas: três tensões normais, variação de raio médio e variação de espessura.

tensões nas deformações medidas em direções diferentes daquela de aplicação da tensão é praticamente desprezível, dentro da hipótese de linearidade geométrica. Lembrando ainda que o estado de tensões para a carcaça intertravada é representado somente pelas tensões normais σ_r , σ_θ e σ_z (ou seja, admite-se que não há tensões de cisalhamento), teremos:

$$\varepsilon_r = \frac{\sigma_r}{E_r} \quad \varepsilon_\theta = \frac{\sigma_\theta}{E_\theta} \quad \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E_z} \quad (3.46)$$

Com as equações (3.46) e as relações deslocamentos-deformações, podemos agora estabelecer a ligação entre as tensões na carcaça e os deslocamentos (variação da espessura, do raio médio e da altura da camada). As relações ficam:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\sigma_r}{E_r} = \frac{\Delta t_{eq}}{t_{eq}} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{\sigma_\theta}{E_\theta} = \frac{\Delta R}{R_1} \\ \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E_z} = \frac{\Delta L}{L_1} \end{aligned} \quad (3.47)$$

3.5 Modelagem do núcleo eletro-hidráulico

O núcleo eletro-hidráulico, presente apenas nos cabos umbilicais, contém geralmente várias mangueiras, além de condutores elétricos e cabos ópticos, os quais são empregados na transmissão de sinal e força para o controle de válvulas e outros tipos de equipamentos usados em sistemas submarinos. As mangueiras e condutores são usualmente enrolados em torno do eixo central do cabo formando hélices de grande passo, estando imersos em uma espécie de “enchimento”¹² que preenche todos os “vazios” do núcleo, formando assim, uma espécie de “cama elástica” que proporciona suporte para as camadas helicoidais externas.

¹² O material empregado para o “enchimento” é, geralmente, o EPR.

Nota-se que, devido à grande complexidade geométrica do núcleo, fica praticamente impossível modelar todos seus componentes na forma como se apresentam, ou seja, considerando o número de mangueiras e sua disposição no núcleo, o passo e a formação das mangueiras, a existência de camadas plásticas internas ao núcleo (para separar os condutores elétricos, situados na parte central do núcleo, das mangueiras), a existência de armações de fios para reforço adicional, etc. Desta forma, tentando modelar o comportamento estrutural de todo este conjunto a “grosso modo”, iremos considerar o núcleo como constituído por apenas duas camadas cilíndricas, conforme proposto por Knapp [34]: a primeira, periférica e deformável, com raio externo b e raio interno a ; e a segunda, central e indeformável, com raio externo a (veja figura 3.1).

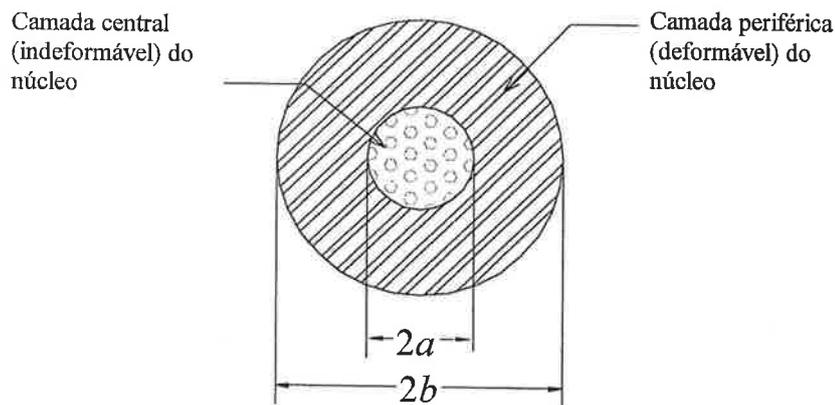


Figura 3.1: Modelo para o núcleo eletro-hidráulico.

O material da parte periférica do núcleo será admitido homogêneo, isótropo e com comportamento elástico linear. Quanto ao carregamento aplicado sobre o núcleo, consideraremos que possa haver uma pressão p_e uniformemente distribuída sobre a superfície externa da parte periférica, e uma força axial, agindo somente sobre a parte deformável, que provoca uma deformação $\varepsilon_z = \Delta L / L_1$ (i.é, igual àquela imposta ao cabo). A combinação destes dois carregamentos faz surgir uma pressão de contato p_c entre a parte central e a periférica do núcleo, de tal forma que o carregamento resultante sobre esta última consistirá, além da força axial, nos campos de pressão p_e e p_c conforme ilustra a figura 3.2.

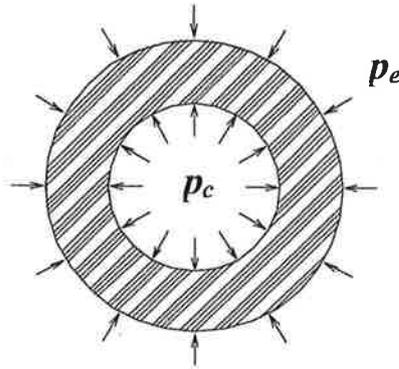


Figura 3.2: Campo de pressões sobre a parte periférica do núcleo.

Utilizando os resultados do anexo D, temos que o campo de deslocamentos radiais $u(r)$ para os pontos da parte periférica do núcleo ($a \leq r \leq b$) é dado por:

$$u(r) = \left[\frac{(p_c \cdot a^2 - p_e \cdot b^2)}{(b^2 - a^2)} \cdot \frac{\nu}{\lambda} - \nu \cdot \varepsilon_z \right] r + \left[\frac{(p_c - p_e) \cdot a^2 b^2}{2G \cdot (b^2 - a^2)} \right] \frac{1}{r}$$

Sendo a parte central indeformável, a pressão de contato p_c pode, então, ser facilmente determinada a partir da seguinte condição de contorno:

$$u(a) = 0$$

resultando:

$$p_c = \frac{\nu \cdot E \cdot (b^2 - a^2) \cdot \varepsilon_z}{(1 + \nu) \cdot [a^2(1 - 2\nu) + b^2]} + \frac{2b^2(1 - \nu) \cdot p_e}{[a^2(1 - 2\nu) + b^2]} \quad (3.48)$$

Utilizando, agora, as fórmulas (3.21), (3.23) e (3.25), deduzidas no item 3.3 para as camadas plásticas, e fazendo $p_i = p_c$, encontraremos as seguintes expressões para a variação da espessura, a variação do raio médio e para as tensões axiais na parte deformável do núcleo:

$$\Delta t = - \frac{b \cdot (b^2 - a^2)}{[a^2(1 - 2\nu) + b^2]} \left(\nu \cdot \varepsilon_z + \frac{(1 + \nu) \cdot (1 - 2\nu) \cdot p_e}{E} \right) \quad (3.49)$$

$$\Delta R = - \frac{b \cdot (b^2 - a^2)}{2 \cdot [a^2(1 - 2\nu) + b^2]} \left(\nu \cdot \varepsilon_z + \frac{(1 + \nu) \cdot (1 - 2\nu) \cdot p_e}{E} \right) \quad (3.50)$$

$$\sigma_z = E.\varepsilon_z \left[\frac{a^2(1-\nu) + b^2(1+\nu)}{(1+\nu).[a^2(1-2\nu) + b^2]} \right] - \frac{2\nu.b^2.p_e}{[a^2(1-2\nu) + b^2]} \quad (3.51)$$

Deve-se ressaltar que as expressões dadas acima foram obtidas a partir da geometria indicada na figura 3.1, com $b > a > 0$. Para o caso particular em que se deseje modelar o núcleo eletro-hidráulico como uma única camada deformável, com constantes elásticas E e ν , submetida a uma pressão externa p_e e a uma deformação axial ε_z , devemos observar que o campo de deslocamentos radiais não é mais o fornecido pela equação (d.7) do Anexo D. Neste caso, a equação diferencial (d.5) que rege o campo de deslocamentos radiais, bem como sua solução (d.6), continuam válidas. Contudo, muda uma das condições de contorno, que passa a ser:

$$u(0) = 0$$

impondo, assim, que a constante de integração C_2 seja obrigatoriamente nula. Obtemos, assim, o novo campo de deslocamentos radiais:

$$u(r) = C_1.r$$

onde C_1 é obtido a partir da segunda condição de contorno: $r = b \Rightarrow \sigma_r = -p_e$

resultando:

$$u(r) = - \left(\nu.\varepsilon_z + \frac{(1+\nu).(1-2\nu)}{E} p_e \right) r \quad (3.52)$$

As variações de espessura e do raio médio da camada, bem como a tensão axial atuando na mesma, ficam, então, sendo:

$$\Delta t = u(b) = -\nu.b.\varepsilon_z - \frac{b.(1+\nu).(1-2\nu)}{E} p_e \quad (3.53)$$

$$\Delta R = \frac{u(b)}{2} = -\frac{\nu.b.\varepsilon_z}{2} - \frac{b.(1+\nu).(1-2\nu)}{2.E} p_e \quad (3.54)$$

$$\sigma_z = E.\varepsilon_z - 2\nu.p_e \quad (3.55)$$

Observamos, finalmente, que os resultados obtidos através das expressões (3.53), (3.54) e (3.55) coincidem, respectivamente, com os obtidos pelas expressões (3.49), (3.50) e (3.51), quando fazemos $a = 0$. Conclui-se, assim, que as fórmulas (3.49), (3.50) e (3.51) também são válidas para o caso em que todo o núcleo é considerado como uma camada homogênea e deformável. Resta apenas analisar a possibilidade de se querer modelar todo o núcleo como uma única camada indeformável. Neste caso, é fácil notar que, fazendo $a = b$ nas expressões (3.49) e (3.50), obtemos de imediato $\Delta t = 0$ e $\Delta R = 0$, mostrando que estas equações continuam válidas para este caso. Quanto ao campo de tensões axiais σ_z previsto pela equação (3.51), devemos lembrar que, mesmo tendo perdido seu significado para este último caso, o resultado obtido não irá interferir na equação de equilíbrio de forças do cabo, já que a área da seção transversal da parte deformável é igual a zero para este caso.

3.6 Outras equações necessárias

Este item encerra a obtenção das demais equações necessárias à solução do sistema proposto no item 3.1, e está dividido em três partes, que compreendem:

- i) o cálculo das tensões na direção radial;
- ii) as equações de compatibilidade geométrica, e
- iii) as equações de equilíbrio globais.

3.6.1 Cálculo das tensões na direção radial

Como se pode depreender dos itens anteriores, todas as camadas estão submetidas a tensões radiais, designadas por σ_n (no caso das camadas helicoidais) ou σ_r (no caso das camadas plásticas). Em qualquer um dos casos os valores destas tensões podem ser calculados, aproximadamente, através da média aritmética das pressões que atuam entre as camadas adjacentes. Desta forma, as tensões radiais serão calculadas por:

$$\sigma_{n,r} = -\frac{(p_i + p_e)}{2} \quad (3.56)$$

onde p_i e p_e referem-se, respectivamente, às pressões interna e externa à camada em questão, considerando, além das pressões de contato, as pressões devidas à ação de fluidos (no caso de a camada considerada ser estanque e de não existirem outras camadas estanques dispostas interna ou externamente à camada em questão).

A equação (3.56) será usada apenas para as camadas helicoidais, como as armaduras de tração e as camadas zeta, ou para a carcaça intertravada (considerada como uma camada helicoidal ou como tubo equivalente). A razão disto é que, para as demais camadas, as equações dadas nos itens 3.3 (para as camadas plásticas) ou 3.5 (para o núcleo elétrico) são suficientes para a determinação do campo de tensões normais nestas camadas, incluindo a tensão radial. Além disto, devemos lembrar que estas equações, obtidas a partir da Teoria da Elasticidade, são exatas, dentro das hipóteses admitidas, não havendo necessidade de substituir uma delas pela equação aproximada (3.56).

3.6.2 Equações de compatibilidade geométrica

Outro conjunto de equações que deve ser considerado é o que diz respeito às equações de compatibilidade geométrica entre as camadas consideradas. Para a obtenção destas equações, admitiremos que na configuração inicial (Σ_1) do *riser* todas as camadas estejam em contato, ou seja, as folgas iniciais entre todas as camadas serão admitidas iguais a zero. Para a configuração final não será imposta qualquer restrição deste tipo, de tal forma que, após a aplicação dos esforços, poderemos ter duas situações distintas entre duas camadas adjacentes, a saber:

1. As duas camadas permanecem em contato, significando que a folga entre elas é conhecida (e igual a zero). Neste caso, a incógnita fica sendo a pressão de contato entre as duas camadas;
2. As duas camadas se afastam, de forma que a pressão de contato entre elas é conhecida (nula), sendo o afastamento entre as duas camadas uma das incógnitas do problema.

Para o equacionamento destas situações, utilizaremos a seguinte expressão que relaciona as variações dos raios médios, as variações de espessuras e a folga (g_i) entre duas camadas adjacentes:

$$\Delta R_{i+1} = \Delta R_i + (\Delta t_{i+1} + \Delta t_i) / 2 + g_i \quad (3.57)$$

3.6.3 Equações de equilíbrio globais

Para finalizar o sistema de equações necessário à solução do problema temos, finalmente, duas equações de equilíbrio globais relacionando as tensões nas diversas camadas. A primeira equação fornece o equilíbrio das forças axiais aplicadas ao tubo (cabo) e é escrita na forma:

$$\sum_{i=1}^n (\sigma_{t,i}) \cdot n_i \cdot A_i \cdot \cos \alpha_i + \sum_{j=1}^m (\sigma_{z,j}) \cdot A_j = F \quad (3.58)$$

enquanto a segunda equação consiste numa equação de equilíbrio de momentos, sendo dada por:

$$\sum_{i=1}^n (\sigma_{t,i}) \cdot n_i \cdot A_i \cdot R_i \cdot \sin \alpha_i + \sum_{j=1}^m (G_j J_{p,j}) \frac{\Delta \varphi}{L} = M_t \quad (3.59)$$

onde n é o número de camadas helicoidais do tubo (cabo) e m é o número de camadas não-helicoidais. Os esforços F e M_t denotam, respectivamente, a força axial e o momento de torção aplicados ao *riser*.

Apesar de as equações (3.58) e (3.59) serem clássicas no estudo da distribuição de esforços em tubos flexíveis, cabos umbilicais e estruturas afins, cabem aqui várias observações que geralmente não constam na literatura específica que trata do tema:

- A hipótese de linearidade geométrica está sendo explicitamente utilizada em ambas as equações, de modo que sua utilização só é válida quando as variações de grandezas geométricas (como os ângulos de assentamento das armaduras, os raios médios das camadas e as áreas de suas seções transversais) forem muito pequenas quando comparadas aos valores iniciais destas grandezas;
- Os efeitos das forças cortantes Q_y (atuantes na seção transversal dos tendões nas armaduras helicoidais) na equação de equilíbrio (3.58) correspondem a efeitos de

segunda ordem que podem ser desprezados na maioria dos casos. Note que a equação (3.58), que estabelece o equilíbrio de forças axiais para a seção do *riser* como um todo, considera, no que tange à contribuição das camadas helicoidais, apenas a contribuição dos esforços de tração T atuantes nas seções transversais dos tendões. Na verdade, a contribuição ΔF_i ao esforço axial proporcionado pela i -ésima camada helicoidal é, de forma mais rigorosa, dada por (ver, por exemplo, Phillips; Costello [63]):

$$\Delta F_i = n_i \cdot (T_i \cdot \cos \alpha_i + Q_{y,i} \cdot \sin \alpha_i)$$

porém, utilizando as fórmulas obtidas no item 3.1, pode-se demonstrar que o termo dominante em ΔF_i é o associado aos esforços de tração T desde que a rigidez axial do tendão (EA/R) seja bem maior que sua rigidez flexional (EI_b / R^3) e torsional (GI_t / R^3), podendo-se desprezar a contribuição dos esforços cortantes Q_y neste caso;

- Os mesmos comentários feitos com relação à equação (3.58) valem também para a equação (3.59). Neste caso, a expressão completa que considera a contribuição $\Delta M_{t,i}$ (ao momento de torção) dos diversos esforços solicitantes que atuam na seção transversal dos n_i tendões da i -ésima camada helicoidal é dada por (ver, por exemplo, Phillips; Costello [63]):

$$\Delta M_{t,i} = n_i \cdot \left((T_i \cdot R_i + M_{y,i}) \sin \alpha_i + (M_{z,i} - Q_{y,i} \cdot R_i) \cos \alpha_i \right)$$

- A força de tração que surge na equação (3.58) não é a força de tração efetiva, mas a força de tração solicitante, dada por¹³:

$$F = F_{ef} + p_i A_i - p_e A_e \quad (3.60)$$

onde F_{ef} é a força de tração efetiva atuando na seção, obtida a partir da análise do comportamento global da linha; p_i e p_e correspondem, respectivamente, às pressões interna e externa ao *riser*, e A_i e A_e correspondem às áreas das seções transversais interna e externa ao *riser*.

¹³ Para uma discussão mais aprofundada sobre a obtenção da equação (3.60), ver Seyed; Patel [75].

Deve-se finalmente ressaltar que, no caso de tubos flexíveis, a contribuição da carcaça intertravada não será considerada nas equações de equilíbrio (3.58) e (3.59), caso tal camada seja modelada como tubo equivalente.

3.7 Sistema final de equações

Nos itens anteriores estudamos as equações de equilíbrio, as equações constitutivas e as relações deslocamentos-deformações em cada uma das camadas que constituem os tubos flexíveis e cabos umbilicais, visando a análise do comportamento local destas estruturas sob condições de carregamento axissimétrico. Neste item, com o emprego das equações obtidas, será retomado o sistema final de equações, exemplificando sua utilização para um caso prático. Mostraremos, ainda, que os valores de rigidez axial e torsional para as estruturas em consideração podem ser obtidos como “sub-produtos” da análise efetuada. Porém, devido à não-linearidade geométrica decorrente da própria construção destas estruturas, tais valores ficam dependentes do carregamento aplicado. Finalmente, verificaremos que, apesar de ser possível a obtenção de formas analíticas para expressar estes mesmos valores de rigidez, estas expressões irão depender do número, do tipo e da disposição das camadas que constituem a estrutura analisada, sendo específicas para cada construção.

Como havíamos visto no item 3.1, a determinação da distribuição de esforços em um *riser* flexível, composto por n camadas helicoidais e m camadas não-helicoidais, requer a obtenção de $6(n+m)+1$ incógnitas, de tal forma que um número equivalente de equações independentes é necessário para a resolução do problema. A tabela 3.2 resume o sistema de equações utilizado para tal fim, admitindo que a carcaça intertravada esteja sendo modelada como uma camada helicoidal.

Tabela 3.2: Equações para a determinação da distribuição de esforços em tubos.

Relação entre	Número de equações
1) Variação do raio médio com variação de espessura e de folga para cada camada	$n + m - 1$
2) Tensões nos tendões e “componentes de deformação” da camada	n
3) Diferença de pressões de contato e tensões nos tendões	n
4) Variação do ângulo de assentamento com “componentes de deformação” da camada helicoidal	n
5) Tensão média nos tendões, na dir. normal, e pressões de contato entre camadas adjacentes	n
6) Variação de espessura das camadas helicoidais com tensões nos tendões	n
7) Variação do raio médio das camadas não-helicoidais com tensões nas direções circunferencial radial e longitudinal	m
8) Deformação axial com tensões nas camadas não-helicoidais	m
9) Tensão axial nas camadas não-helicoidais com pressões de contato e deformação axial	m
10) Variação de espessura e de raio médio nas camadas não-helicoidais com pressões de contato e deformação axial	$2m$
11) Tensões nas camadas e força de tração no tubo (equilíbrio de forças axiais)	1
12) Tensões nas camadas e momento de torção no tubo (equilíbrio de momentos)	1
Total de equações:	$6(n + m) + 1$

Para um melhor entendimento das relações indicadas na tabela 3.2, vamos explicitar, através de um exemplo, como ficaria o conjunto dos 12 grupos de equações descritos nesta tabela. Consideremos, para tanto, um tubo flexível típico composto por cinco camadas, enumeradas em ordem crescente da mais interna à mais externa e descritas conforme indicado na tabela 3.3. O carregamento axissimétrico aplicado ao tubo poderá constar de:

- pressão interna, de valor absoluto p_{int} ;
- pressão externa, de valor absoluto p_{ext} ;
- força axial de tração, de intensidade F ;
- momento de torção, de intensidade M_t .

Tabela 3.3: Camadas de um tubo flexível típico.

Nº da Camada	Descrição da Camada	Parâmetros Geométricos da Camada	Incógnitas a serem determinadas
1	Carcaça intertravada	$b_1, t_1, R_1, \alpha_1, L$	$\Delta R_1, \Delta t_1, \sigma_{t1}, \sigma_{n1}, \Delta \alpha_1$
2	Barreira de nylon	t_2, R_2, L	$\Delta R_2, \Delta t_2, \sigma_{r2}, \sigma_{\theta 2}, \sigma_{z2}$
3	Armadura int. de tração	$n_3, b_3, t_3, R_3, \alpha_3, L$	$\Delta R_3, \Delta t_3, \sigma_{t3}, \sigma_{n3}, \Delta \alpha_3$
4	Armadura ext. de tração	$n_4, b_4, t_4, R_4, \alpha_4, L$	$\Delta R_4, \Delta t_4, \sigma_{t4}, \sigma_{n4}, \Delta \alpha_4$
5	Capa externa	t_5, R_5, L	$\Delta R_5, \Delta t_5, \sigma_{r5}, \sigma_{\theta 5}, \sigma_{z5}$

Como neste caso temos três camadas helicoidais (correspondentes à carcaça intertravada e às duas armaduras de tração) e duas camadas não-helicoidais (correspondentes às duas camadas plásticas), então $n = 3$ e $m = 2$, resultando num total de 31 incógnitas. Além das 25 incógnitas já indicadas na tabela 3.3, as demais 6 incógnitas que restam são:

- a deformação axial do tubo ($\Delta L/L$);
- a rotação por unidade de comprimento do tubo ($\Delta \varphi/L$);
- as pressões de contato $p_{c,i}$ entre a i -ésima e a $(i+1)$ -ésima camadas ($i = 1, 2, 3, 4$)¹⁴.

Seguindo a ordem dada na tabela 3.2, as 31 equações necessárias para a solução do problema são dadas por:

1) Quatro equações ligando as variações de raio médio, de espessura e de afastamento das camadas na forma da equação (3.57):

$$\Delta R_{i+1} = \Delta R_i + (\Delta t_{i+1} + \Delta t_i)/2 + g_i$$

onde i , no caso, assume os valores de 1 a 4. Deve-se ressaltar que todo o processo é iterativo, sendo que na primeira iteração as folgas entre camadas são admitidas nulas

¹⁴ Ou, em caso de afastamento das camadas, a folga g_i correspondente a tal afastamento.

(não há afastamento entre as camadas), procurando-se, assim, os valores das pressões de contato entre as camadas. O processo continua até que os valores de todas as pressões de contato (entre as camadas que não se afastaram) sejam positivas.

2) Três equações ligando as tensões nos tendões às “componentes de deformação” para cada camada helicoidal, na forma da primeira das equações (3.20):

$$\frac{1}{E_i} \cdot (\sigma_{ii} - \nu_i \cdot \sigma_{ni}) = \left(\frac{\Delta R_i}{R_i} + \frac{\Delta \varphi}{L} \cdot \frac{R_i}{\tan \alpha_i} \right) \cdot \text{sen}^2 \alpha_i + \left(\frac{\Delta L}{L} \right) \cdot \text{cos}^2 \alpha_i$$

onde i , no caso, assume os valores 1 (carcaça intertravada), 3 (armadura interna) ou 4 (armadura externa).

3) Três equações ligando a diferença entre as pressões de contato externa e interna, aplicadas às camadas helicoidais, às respectivas tensões nos tendões, na forma:

$$p_{c,i} - p_{c,i-1} = - \frac{\text{sen}^2 \alpha_i \cdot \sigma_{ii} \cdot A_i}{R_i \cdot b_i}$$

onde i assume os valores 1 (carcaça intertravada), 3 (armadura interna) ou 4 (armadura externa). Note que a equação acima foi obtida diretamente da equação (3.16), utilizando a relação $T_i = \sigma_{i,i} \cdot A_i$ e a relação (3.5) que fornece a curvatura χ_1 .

4) Três equações relacionando a variação do ângulo de assentamento e as “componentes de deformação” de cada camada helicoidal na forma da equação (3.18):

$$\Delta \alpha_i = \text{cos}^2 \alpha_i \cdot R_i \frac{\Delta \varphi}{L} + \text{sen} \alpha_i \cdot \text{cos} \alpha_i \cdot \left(\frac{\Delta R}{R_i} - \frac{\Delta L}{L} \right)$$

onde i assume os valores 1, 3 ou 4.

5) Três equações ligando a tensão média nos tendões, na direção normal, às pressões de contato entre camadas adjacentes, na forma da equação (3.56):

$$\sigma_{ni} = -\frac{(p_{c,i} + p_{c,i-1})}{2}$$

onde i assume os valores 1 (carcaça), 3 (armadura interna) ou 4 (armadura externa). Note que, no caso da carcaça intertravada, não há pressão interna e a pressão externa é a pressão de contato entre a carcaça e a barreira de nylon.

6) Três equações ligando a variação de espessura das camadas helicoidais às tensões nos tendões, na forma da segunda das equações (3.20):

$$\frac{\Delta t_i}{t_i} = \frac{1}{E_i} (\sigma_{ni} - \nu_i \cdot \sigma_{ti})$$

onde i assume os valores 1 (para a carcaça), 3 (para a armadura interna) ou 4 (para a armadura externa). Observe que poderíamos, de início, admitir que a variação de espessura dos tendões é nula, tendo em vista o alto módulo de elasticidade do material; porém, para manter a simetria do sistema de equações, preferimos manter estas incógnitas.

7) Duas equações ligando as variações do raio médio das camadas não-helicoidais às tensões nas direções circunferencial, radial e longitudinal, na forma da segunda das equações (3.31):

$$\frac{\Delta R_i}{R_i} = \frac{1}{E_i} [\sigma_{\theta i} - \nu_i (\sigma_{zi} + \sigma_{ri})]$$

onde i assume os valores 2 (para a barreira de nylon) ou 5 (para a capa externa).

8) Duas equações ligando a deformação axial às tensões nas camadas não-helicoidais nas direções circunferencial, radial e longitudinal, na forma da terceira das equações (3.31):

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{E_i} [\sigma_{zi} - \nu_i (\sigma_{ri} + \sigma_{\theta i})]$$

onde i assume os valores 2 (barreira de nylon) ou 5 (capa externa).

9) Duas equações relacionando as tensões axiais nas camadas não helicoidais às pressões de contato entre camadas adjacentes e à deformação axial, na forma da equação (3.26):

$$\sigma_{z,i} = E_i \cdot \frac{\Delta L}{L} + \left(1 - \frac{t_i}{2R_i}\right) \frac{\nu_i (2R_i - t_i) \cdot (p_{c,i-1} + \mu_{\text{int}} p_{\text{int}})}{2t_i} - \left(1 + \frac{t_i}{2R_i}\right) \frac{\nu_i (2R_i + t_i) \cdot (p_{c,i} + \mu_{\text{ext}} p_{\text{ext}})}{2t_i}$$

onde i , no caso, assume os valores 2 (barreira de pressão) ou 5 (capa externa). A variável μ_{int} (μ_{ext}) é, na verdade, um “flag” que devolve o valor ‘1’ quando a camada em questão é a primeira (última para μ_{ext}) camada estanque da estrutura, e ‘0’ em caso contrário. Neste exemplo, para $i = 2$, a pressão interna que atua sobre a camada é a soma da pressão de contato p_{c1} com a pressão interna p_{int} aplicada ao tubo (pois a barreira de nylon é, efetivamente, a primeira camada estanque da estrutura). Já para $i = 5$, teremos apenas a pressão externa p_{ext} atuando sobre a superfície externa (pois não há camadas externas).

10) Quatro equações relacionando a variação de espessura e de raio médio das camadas não-helicoidais às pressões de contato entre camadas adjacentes e à deformação axial, na forma das equações (3.22) e (3.24), respectivamente:

$$\Delta t = -\nu \cdot t \cdot \frac{\Delta L}{L} - \left(1 - \frac{t}{2R}\right) \left[\frac{(1-\nu^2)t}{2E} + \frac{\nu(1+\nu)R}{E} \right] (p_{c,i-1} + \mu_{\text{int}} p_{\text{int}}) - \left(1 + \frac{t}{2R}\right) \left[\frac{(1-\nu^2)t}{2E} - \frac{\nu(1+\nu)R}{E} \right] (p_{c,i} + \mu_{\text{ext}} p_{\text{ext}})$$

$$\Delta R = -\nu \cdot R \cdot \frac{\Delta L}{L} + \left(1 - \frac{t}{2R}\right) \left[\frac{(1-\nu^2)R^2}{tE} + \frac{\nu(1+\nu)R}{2E} \right] (p_{c,i-1} + \mu_{\text{int}} p_{\text{int}}) - \left(1 + \frac{t}{2R}\right) \left[\frac{(1-\nu^2)R^2}{tE} - \frac{\nu(1+\nu)R}{2E} \right] (p_{c,i} + \mu_{\text{ext}} p_{\text{ext}})$$

onde i assume os valores 2 (barreira de pressão) ou 5 (capa externa). Os mesmos comentários feitos acima, para as variáveis μ_{int} e μ_{ext} , valem aqui.

11) Uma equação de equilíbrio de forças axiais, na forma da equação (3.58):

$$\sigma_{i1}A_1 \cos \alpha_1 + \sigma_{z2}A_2 + \sigma_{i3}n_3A_3 \cos \alpha_3 + \sigma_{i4}n_4A_4 \cos \alpha_4 + \sigma_{z5}A_5 = F$$

12) Uma equação de equilíbrio de momentos, na forma da equação (3.59):

$$\begin{aligned} &\sigma_{i1}A_1R_1 \sin \alpha_1 + \sigma_{i3}n_3A_3R_3 \sin \alpha_3 + \\ &+ \sigma_{i4}n_4A_4R_4 \sin \alpha_4 + (G_2J_{p2} + G_5J_{p5}) \frac{\Delta\varphi}{L} = M_t \end{aligned}$$

Obtemos, assim, um sistema linear de 31 equações a 31 incógnitas, que pode ser facilmente resolvido, fornecendo as tensões, pressões de contato e deslocamentos da estrutura. De acordo com as hipóteses feitas para a solução do problema (ver item 3.1), nota-se que a única não-linearidade do problema decorre da possibilidade de haver afastamento entre quaisquer duas camadas adjacentes para uma dada condição de carregamento. Em virtude desta não-linearidade, verifica-se que a rigidez estrutural fica, portanto, condicionada¹⁵ ao carregamento aplicado ao *riser*.

Fixando-nos à determinação dos valores de rigidez para um dado tubo flexível submetido apenas a carregamentos axissimétricos, temos que, para uma dada condição¹⁶ de pressão interna e externa atuando sobre o trecho do tubo cujos valores de rigidez queremos determinar, as relações entre os esforços de tração (F) e torção (M_t), aplicados à seção, e as deformações $\Delta L/L$ e $\Delta\varphi/L$ podem ser expressas através de funções do tipo:

¹⁵ É fácil perceber, por exemplo, que a rigidez axial de um tubo flexível aumenta se houver pressão interna, pois, para provocarmos uma certa distensão, a força axial que deve ser aplicada será certamente maior que aquela necessária quando não há pressão interna aplicada. O capítulo 4 trará vários exemplos que ilustram esta “dependência” dos valores de rigidez com o carregamento.

¹⁶ Os valores de pressão interna e externa, que são funções do tempo e do espaço, podem ser admitidos constantes já que estamos considerando a análise de um pequeno trecho do tubo, sob condições de carregamento quase-estático.

$$F = F(\Delta L/L, \Delta \varphi/L)$$

$$M_t = M_t(\Delta L/L, \Delta \varphi/L)$$

ou, de forma equivalente,

$$F = F(\varepsilon_h, \varepsilon_\varphi)$$

$$M_t = M_t(\varepsilon_h, \varepsilon_\varphi)$$

Desta forma, as dependências de F e M_t com as deformações ε_h e ε_φ ficam expressas matematicamente por superfícies que dependerão, naturalmente, das propriedades¹⁷ do tubo considerado e dos valores de pressão interna e externa aplicados ao trecho em estudo. Pela natureza do problema, é razoável admitirmos tais funções como contínuas, porém com derivadas não necessariamente contínuas em todos os pontos. Se para um dado ponto (referente a uma dada condição de carregamento), as funções F e M_t tiverem derivadas também contínuas, então são verdadeiras as relações:

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_h} \right) d\varepsilon_h + \left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_\varphi} \right) d\varepsilon_\varphi$$

$$dM_t = \left(\frac{\partial M_t}{\partial \varepsilon_h} \right) d\varepsilon_h + \left(\frac{\partial M_t}{\partial \varepsilon_\varphi} \right) d\varepsilon_\varphi$$

onde os valores correspondentes às derivadas direcionais representam fisicamente os valores de rigidez “aparente” associados àquela condição de carregamento e segundo as “condições de contorno” específicas. A derivada direcional $\partial F / \partial \varepsilon_h$, por exemplo, representa a rigidez axial de um tubo que tem suas extremidades impedidas de girar ($\varepsilon_\varphi = 0$), para uma dada condição de carregamento. A designação de rigidez “aparente” é utilizada para lembrar o já referido caráter de “dependência” dos valores de rigidez do tubo com respeito ao carregamento.

¹⁷ Propriedades relativas à geometria (número de camadas, disposição das camadas, espessuras, etc) e aos materiais empregados na fabricação (constantes elásticas ou outras que caracterizem o comportamento do material).

É interessante notar que, para uma dada condição em que ocorra afastamento entre duas camadas do tubo, a hipótese de continuidade das derivadas naquele “ponto” não é mais verdadeira. Este caso corresponde à existência de duas superfícies (correspondentes às situações de afastamento e de não-afastamento das camadas), em cuja intersecção (representada por uma curva) situa-se o “ponto” em estudo. Assim, dependendo da forma como a condição de carregamento é alterada (o que corresponde a uma dada direção), podemos ter, ou não, afastamento das camadas e, conseqüentemente, diferentes valores de rigidez “aparente” associados.

No nosso caso, em que as várias hipóteses admitidas resultaram na obtenção de um sistema linear de equações, as funções $F = F(\varepsilon_h, \varepsilon_\varphi)$ e $M_t = M_t(\varepsilon_h, \varepsilon_\varphi)$ são representadas por planos¹⁸ passando pela “origem”, de tal forma que, admitindo-se que não haja separação de camadas (de forma a garantir a continuidade das derivadas da função em qualquer “ponto”), as derivadas direcionais são as mesmas para qualquer “ponto” considerado. Desta forma, as relações $F = F(\varepsilon_h, \varepsilon_\varphi)$ e $M_t = M_t(\varepsilon_h, \varepsilon_\varphi)$ ficam escritas simplesmente na forma:

$$\begin{aligned} F &= k_{11}\varepsilon_h + k_{12}\varepsilon_\varphi \\ M_t &= k_{21}\varepsilon_h + k_{22}\varepsilon_\varphi \end{aligned}$$

sendo os valores de rigidez aparente k_{ij} automaticamente determinados através da solução do sistema de equações proposto nos itens anteriores. A rigidez axial aparente k_{11} , por exemplo, seria obtida pela razão entre o esforço de tração F e o alongamento axial ε_h , para uma dada condição de pressão interna e externa conhecidas, impondo-se ainda uma condição de ângulo de rotação axial por unidade de comprimento do *riser* igual a zero. Os outros valores de rigidez seriam obtidos analogamente, determinado-se, assim, a matriz de rigidez aparente K , dada por:

¹⁸ Tais planos correspondem aos planos tangentes às superfícies genéricas $F = F(\varepsilon_h, \varepsilon_\varphi)$ e $M_t = M_t(\varepsilon_h, \varepsilon_\varphi)$ no ponto considerado.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

Deve-se ressaltar, finalmente, que a matriz de rigidez aparente não é, necessariamente, uma matriz simétrica. O capítulo 4 explicitará estes coeficientes de rigidez para casos ilustrativos.

4. CONFRONTO DE RESULTADOS: ANÁLISE DE TUBOS E CABOS SOB CARREGAMENTOS AXISSIMÉTRICOS

Neste capítulo procederemos a várias investigações para verificarmos a validade do modelo analítico proposto e desenvolvido no capítulo anterior. Para isto vamos analisar inicialmente a distribuição de tensões em um tubo flexível submetido a um carregamento axissimétrico bastante simples, consistindo apenas na aplicação de um deslocamento imposto a uma de suas extremidades, de forma a causar uma deformação axial, e impedindo as rotações axiais das duas terminações. Os resultados obtidos através do modelo analítico serão então confrontados com resultados obtidos a partir de uma modelagem simplificada com elementos finitos, que será descrita no item 4.3.

Continuando nossas investigações, faremos em seguida várias comparações entre os resultados obtidos pelo modelo analítico e resultados experimentais extraídos da literatura, envolvendo tanto ensaios de cabos umbilicais, quanto de tubos flexíveis. Sempre que possível, serão fornecidas informações completas acerca da geometria e dos materiais utilizados na fabricação das estruturas analisadas. Acreditamos que o confronto de resultados oriundos de modelos distintos (modelo analítico x modelo com elementos finitos), juntamente com a comparação de resultados analíticos com resultados experimentais para um número razoável de casos, seja suficiente para concluirmos sobre a validade do modelo analítico proposto e identificarmos as possíveis fontes de divergência entre os resultados.

4.1 Dados gerais do tubo a ser analisado

Este item traz a descrição completa do tubo flexível que será analisado a seguir, no item 4.2. O tubo é composto por cinco camadas, a saber:

- 1) carcaça intertravada de aço;
- 2) barreira de nylon;
- 3) armadura interna de tração;
- 4) armadura externa de tração e
- 5) capa externa.

Os dados referentes à geometria e aos materiais destas cinco camadas estão tabelados a seguir:

Tabela 4.1: Dados geométricos da carcaça intertravada [56].

Grandeza geométrica	Nomenclatura	Valor
Diâmetro interno (mm)	d_1	63,5
Diâmetro externo (mm)	D_1	71,1
Largura do perfil (mm)	b_1	21,4
Altura do perfil (mm)	h_1	3,8
Espessura da fita (mm)	e_1	0,6
Área seccional do perfil (mm ²)	A_1	22,1
Mom. de inércia (horizontal) do perfil (mm ⁴)	$I_{G,xx}$	33,94
Mom. de inércia (vertical) do perfil (mm ⁴)	$I_{G,yy}$	1075,86
Produto de inércia do perfil (mm ⁴)	$I_{G,xy}$	-171,97
Mom. de inércia central (mínimo) do perfil (mm ⁴)	$I_{G,uu}$	6,29
Mom. de inércia central (máximo) do perfil (mm ⁴)	$I_{G,vv}$	1103,51
Ângulo de enrolamento (graus)	α_1	86,21

Tabela 4.2: Dados geométricos da barreira de pressão [59].

Grandeza geométrica	Nomenclatura	Valor
Diâmetro interno (mm)	d_2	71,1
Diâmetro externo (mm)	D_2	81,1
Espessura da camada (mm)	t_2	5,0

Tabela 4.3: Dados geométricos da armadura de tração interna [59].

Grandeza geométrica	Nomenclatura	Valor
Diâmetro interno (mm)	d_3	81,1
Diâmetro externo (mm)	D_3	86,1
Espessura dos tendões (mm)	t_3	2,5
Largura dos tendões (mm)	b_3	12,0
Ângulo de assentamento dos tendões (graus)	α_3	+52,71
Número de tendões	n_3	13

Tabela 4.4: Dados geométricos da armadura de tração externa [59].

Grandeza geométrica	Nomenclatura	Valor
Diâmetro interno (mm)	d_4	86,1
Diâmetro externo (mm)	D_4	91,1
Espessura dos tendões (mm)	t_4	2,5
Largura dos tendões (mm)	b_4	12,0
Ângulo de assentamento dos tendões (graus)	α_4	-54,30
Número de tendões	n_4	13

Tabela 4.5: Dados geométricos da capa externa [59].

Grandeza geométrica	Nomenclatura	Valor
Diâmetro interno (mm)	d_5	91,1
Diâmetro externo (mm)	D_5	103,1
Espessura da camada (mm)	t_5	6,0

Tabela 4.6: Constantes elásticas dos materiais das camadas [59].

Camada	Material	E (MPa)	ν
Carcaça Intertravada	AISI 304L	$2,07 \cdot 10^5$	0,30
Barreira de Pressão	Rilsan Besno P40TL(R) (nylon 11)	350	0,46
Armaduras Helicoidais	Aço carbono	$2,07 \cdot 10^5$	0,30
Capa Externa	Hostallen (R) - HDPE	800	0,46

Observações:

- i) O ângulo de enrolamento (ou de assentamento) informado nas tabelas 4.1, 4.3 e 4.4 é considerado positivo se o enrolamento for direito (*right-hand*), e negativo se for esquerdo (*left-hand*);
- ii) Todos os materiais serão considerados homogêneos, isotrópicos e com comportamento elástico linear. Desta forma, bastam duas constantes elásticas (E e ν) para caracterizar seu comportamento, sendo tais constantes dadas pelo fabricante ou obtidas na literatura [65].

4.2 Resultados obtidos com o modelo analítico

Neste item utilizaremos o modelo desenvolvido no capítulo 3 para a determinação da distribuição de esforços no tubo flexível descrito em 4.1. Conforme explicamos em 3.4, existe a possibilidade de modelarmos a carcaça como uma camada helicoidal ou como “tubo equivalente”. Nesta segunda hipótese, com os dados fornecidos nas tabelas 4.1 e 4.6, é possível calcularmos a espessura equivalente e os módulos de elasticidade fictícios da carcaça intertravada, para que a mesma seja modelada como “tubo”. A espessura equivalente é determinada através da equação (3.42):

$$t_{eq} = \left(\frac{12 \cdot I_{\min}}{A} \right)^{1/2}$$

e o módulo de elasticidade na direção tangencial é dado pela expressão (3.43):

$$E_{\theta} = \frac{(EA) \tan \alpha}{2\pi R} \cdot \left(\frac{A}{12 \cdot I_{\min}} \right)^{1/2}$$

Substituindo-se os valores, encontra-se para a espessura equivalente:

$$t_{eq} = t_1 = 1,85 \text{ mm}$$

Calculando, agora, os raios médios de cada uma das camadas¹ com os valores fornecidos nas tabelas 4.1 a 4.5, obtemos:

¹ Para a carcaça intertravada modelada como “tubo equivalente”, calculamos seu raio médio a partir de sua espessura equivalente.

Tabela 4.7: Raios médios e espessuras finais de cada camada.

Camada	R_i (mm)	t_i (mm)
1) Carcaça intertravada	34,625	1,85
2) Barreira de pressão	38,05	5,0
3) Armadura interna	41,80	2,5
4) Armadura externa	44,30	2,5
5) Capa externa	48,55	6,0

Temos, então, para o módulo de elasticidade tangencial (fictício) da carcaça intertravada:

$$E_{\theta} = 171760 \text{ MPa}$$

O carregamento a ser aplicado ao tubo consistirá apenas num deslocamento axial imposto a uma das extremidades do tubo, de forma a causar um alongamento $\Delta L/L_1 = 0,1\%$, estando ambas as extremidades impedidas de girar ($\Delta\varphi/L_1 = 0$).

Apresentaremos, agora, os resultados obtidos com a aplicação do modelo analítico, sendo que os valores das incógnitas indicados na penúltima coluna referem-se àqueles obtidos para a carcaça intertravada modelada como camada helicoidal (CCH), enquanto os indicados na última coluna, para a carcaça modelada como “tubo equivalente” (CTE).

Tabela 4.8: Pressões de contato entre camadas (MPa).

Pressão de contato	CCH	CTE
Entre carcaça e barreira de pressão (p_{c1})	1,641	1,858
Entre barreira de pressão e armadura int. (p_{c2})	1,602	1,812
Entre armadura interna e armadura externa (p_{c3})	0,712	0,817
Entre armadura externa e capa externa (p_{c4})	0,010	0,013

Tabela 4.9: Tensões em algumas camadas (MPa).

Tensão	CCH	CTE
longitudinal na barreira de pressão (σ_{z2})	-1,00	-1,18
circunferencial na barreira de pressão ($\sigma_{\theta2}$)	-1,32	-1,49
axial nos tendões da armadura interna (σ_{t3})	23,50	26,30
axial nos tendões da armadura externa (σ_{t4})	18,86	21,61
longitudinal na capa externa (σ_{z5})	0,83	0,84
circunferencial na capa externa ($\sigma_{\theta5}$)	0,08	0,10

Tabela 4.10: Variações geométricas em algumas camadas.

Variação	CCH	CTE
do raio da carcaça intertravada (ΔR_1)	-0,00888 mm	-0,00701 mm
do raio da barreira de pressão (ΔR_2)	-0,01266 mm	-0,01134 mm
do raio da armadura interna (ΔR_3)	-0,01663 mm	-0,01572 mm
do raio da armadura externa (ΔR_4)	-0,01672 mm	-0,01582 mm
do raio da capa externa (ΔR_5)	-0,01835	-0,01750 mm
do ângulo de enrolamento da arm. int. ($\Delta \alpha_3$)	-0,03861°	-0,03801°
do ângulo de enrolamento da arm. ext. ($\Delta \alpha_4$)	+0,03740°	+0,03685°

Tabela 4.11: Esforços nas extremidades do tubo.

Esforços	CCH	CTE
Força axial (F) ²	10170 N	11262 N
Momento de torção (M_t) ²	40,15 N.m	37,9 N.m

² Os valores da força axial (F) e do momento de torção (M_t) indicados na tabela consideram que a contribuição da carcaça intertravada no cálculo destes esforços é nula (para os dois tipos de modelagem da carcaça).

4.3 Modelo com elementos finitos

Neste item descreveremos um modelo simples com elementos finitos para a análise do tubo flexível cujas características foram fornecidas no item 4.1. Como veremos adiante, o modelo simplificado proposto não é totalmente independente dos resultados obtidos analiticamente, pois requer o conhecimento prévio destes resultados para a obtenção de alguns valores de rigidez. Apesar disto, a análise por elementos finitos permite a verificação de algumas das hipóteses feitas para a obtenção das fórmulas analíticas deduzidas no capítulo 3.

4.3.1 Descrição do modelo com elementos finitos³

O modelo proposto consiste basicamente na modelagem das camadas helicoidais através de elementos de viga e na modelagem das demais camadas com elementos de placa. O contato entre duas camadas adjacentes é feito através do uso de elementos de treliça unindo pontos correspondentes entre as duas camadas, de tal forma que cada segmento de reta (representando um elemento de contato entre as camadas) seja perpendicular às camadas em consideração. Os elementos de viga, usados na representação das armaduras de tração interna e externa, são obtidos através da união sucessiva de pontos pertencentes aos eixos centrais das hélices de cada tendão. As coordenadas nodais destes pontos não são escolhidas arbitrariamente, mas de forma a garantir a ortogonalidade dos elementos de contato, mencionados acima, aos elementos de viga das duas armaduras de tração. Fica claro portanto, que, para o modelo proposto, o contato entre camadas está condicionado ao número de tendões de cada armadura de tração e ao passo da hélice destas camadas. As figuras 4.1 a 4.3 ilustram a disposição dos elementos de viga das duas camadas helicoidais e os elementos de treliça (representando o contato) entre elas para o caso estudado.

³ Para a modelagem com elementos finitos proposta neste item foi utilizado o código de elementos finitos ALGOR [5].

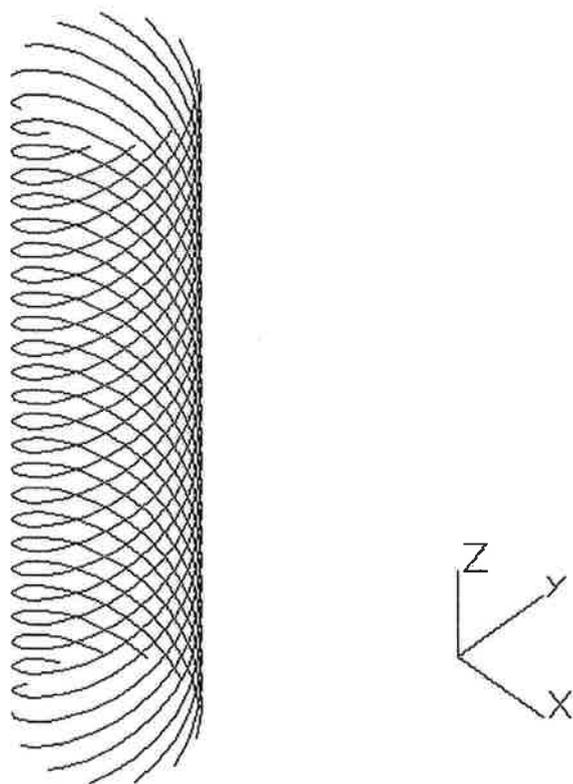


Figura 4.1: Armadura de tração interna.

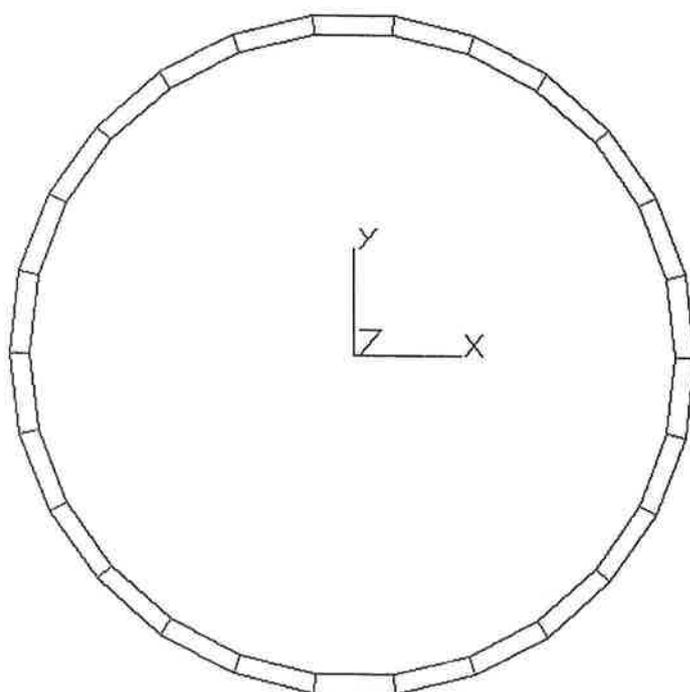


Figura 4.2: Armaduras de tração e elementos de contato. Vista de topo.

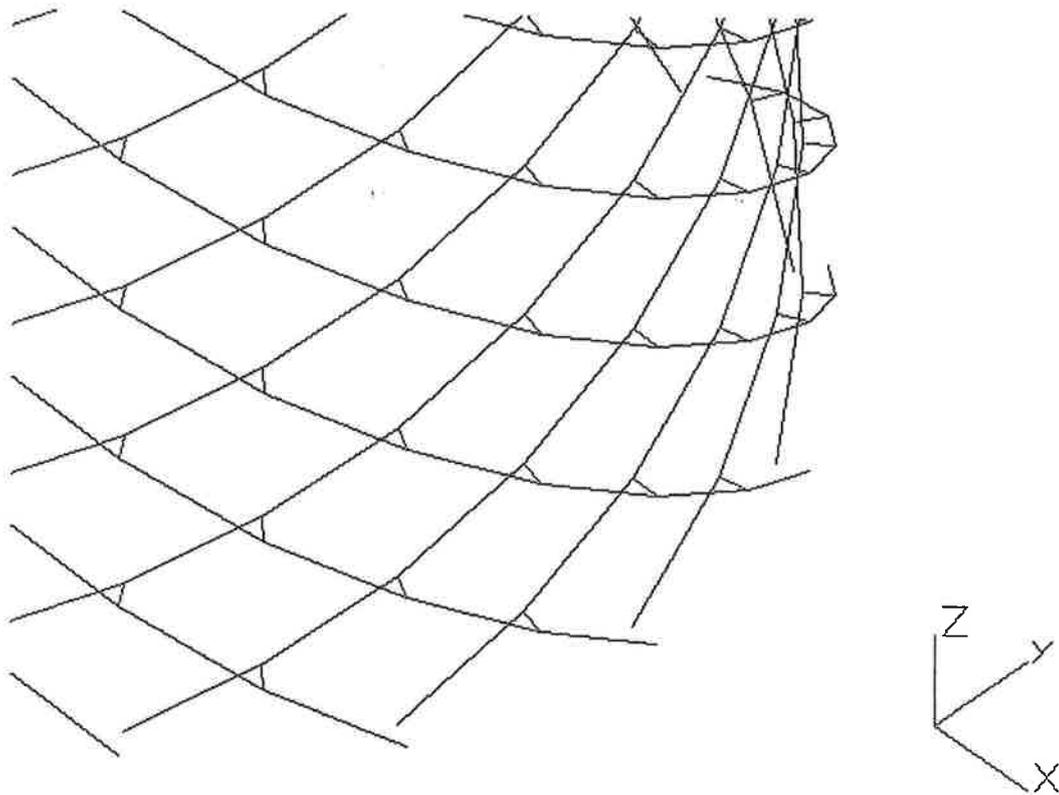


Figura 4.3: Armaduras de tração e elementos de contato. Detalhe.

As demais camadas (carcaça intertravada, barreira de pressão e capa externa) foram todas modeladas com elementos de placa, admitindo-se isotropia. No caso da carcaça intertravada, a espessura de placa e o módulo de elasticidade do material fornecidos ao programa são os mesmos calculados no item 4.2 para o modelo de “tubo equivalente”. Deve-se observar, contudo, que a carcaça não está sendo submetida ao carregamento axial, uma vez que sua resistência a este tipo de carregamento é muito baixa (a carcaça resiste, praticamente, apenas a esforços radiais de compressão). As figuras 4.4 e 4.5 mostram algumas perspectivas do modelo completo com todas as camadas. Note que foram utilizados elementos de treliça, simulando contato, entre todas as camadas do tubo.

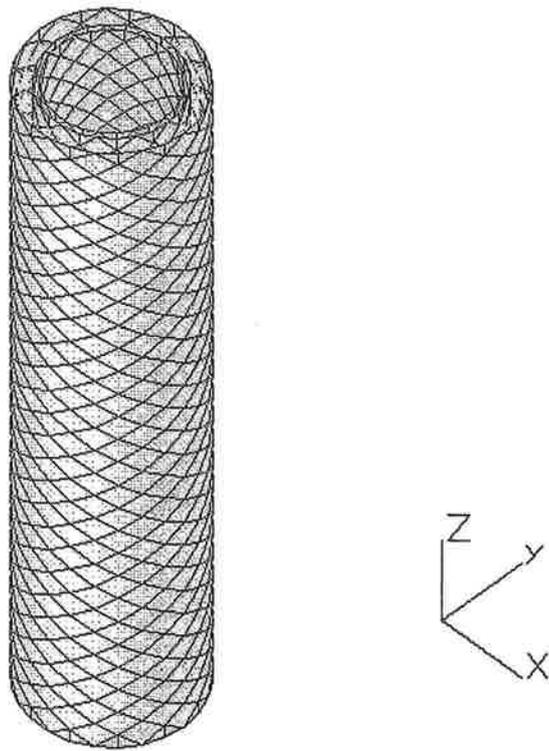


Figura 4.4: Modelo completo do tubo. Vista lateral.

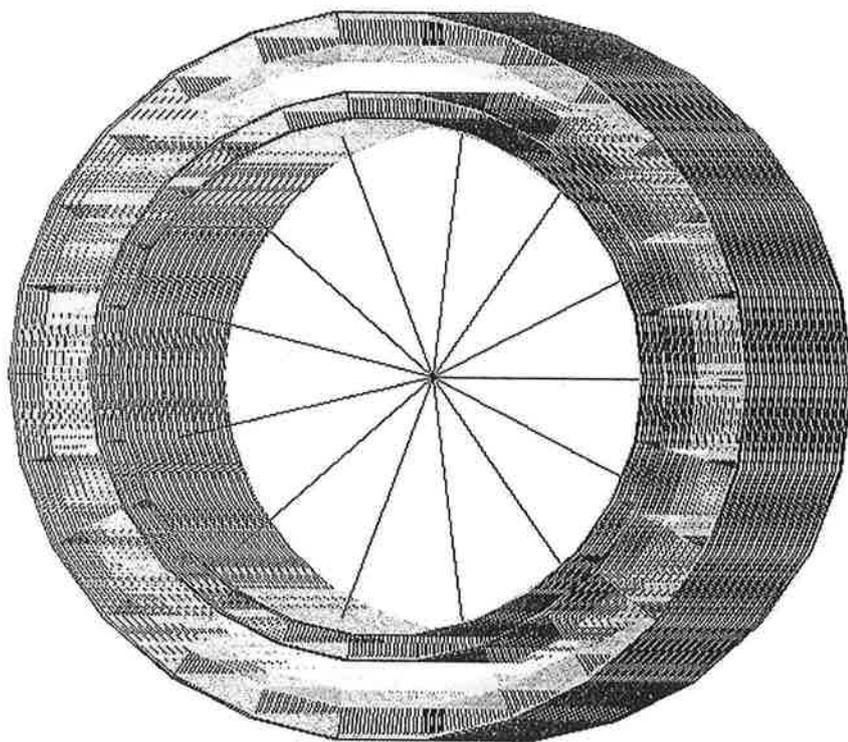


Figura 4.5: Modelo completo do tubo. Vista superior.

O cálculo da rigidez axial dos elementos de treliça que simulam o contato entre camadas adjacentes é fundamental para uma correta modelagem da estrutura, podendo-se constatar que a arbitragem pura e simples de valores para a rigidez destes elementos conduz a resultados significativamente diferentes para as mesmas condições de carregamento. O único inconveniente é que, para se obter uma estimativa para os valores de rigidez destes elementos, precisamos recorrer aos resultados obtidos pelo modelo analítico, o que, sem dúvida, acaba tirando parte do mérito deste modelo com elementos finitos. Contudo, para o modelo proposto, esta parece ser a única forma de obtermos os valores de rigidez procurados. Considerando duas camadas adjacentes, genericamente designadas por i e $i+1$, podemos calcular a força média que um elemento de treliça transfere de uma camada para a outra através de:

$$\bar{F}_i = k_i \cdot (\Delta R_{i+1} - \Delta R_i) \quad (4.1)$$

onde k_i é a rigidez axial do elemento de treliça existente entre as camadas i e $i+1$, e ΔR_i e ΔR_{i+1} são, respectivamente, as variações do raio médio destas camadas.

Por outro lado, podemos ainda expressar \bar{F}_i através de:

$$\bar{F}_i = -\frac{p_{c,i} \cdot \bar{A}_{c,i}}{n_i} \quad (4.2)$$

onde: $p_{c,i}$ = pressão de contato entre as camadas i e $i+1$;

$\bar{A}_{c,i} = 2\pi \cdot (R_i + 0,5 \cdot t_i) \cdot L$ = área de contato entre as camadas i e $i+1$;

n_i = número de elementos de treliça existentes entre as camadas.

Resultando:

$$k_i = -\frac{p_{c,i} \cdot 2\pi \cdot (R_i + 0,5 \cdot t_i) \cdot L}{n_i \cdot (\Delta R_{i+1} - \Delta R_i)} \quad (4.3)$$

Utilizando os dados e/ou resultados das tabelas 4.7, 4.8 e 4.10, teremos os seguintes valores de rigidez axial⁴:

Tabela 4.12: Rigidez axial dos elementos de contato.

Localização do elemento de contato	Nomenclatura	Valor (N/mm)
Entre carcaça e barreira de pressão	k_1	57826
Entre barreira de pressão e armadura interna	k_2	63592
Entre armadura interna e armadura externa	k_3	1333280
Entre armadura externa e capa externa	k_4	1336

Lembrando que a rigidez axial dos elementos de treliça é dada por:

$$k_i = \frac{E_i \cdot A_i}{l_i}$$

onde E , A e l são os valores do módulo de elasticidade, da área da seção transversal e do comprimento do elemento de treliça considerado, podemos, agora, calcular valores para os módulos de elasticidade dos elementos de treliça. Como os comprimentos são dados por $l_i = R_{i+1} - R_i$, teremos os seguintes resultados (adotando-se $A_i = 1,0 \text{ mm}^2$):

Tabela 4.13: Módulos de elasticidade dos elementos de treliça.

Elemento de contato	Nomenclatura	Valor (MPa)
Entre carcaça e barreira de pressão	E_1	198054
Entre barreira de pressão e armadura interna	E_2	238470
Entre armadura interna e armadura externa	E_3	3333200
Entre armadura externa e capa externa	E_4	5678

Resta considerar agora apenas as condições de contorno impostas ao modelo. Como o carregamento consiste na aplicação de deslocamentos impostos às extremidades do tubo de forma a causar um alongamento axial $\varepsilon_h = 0,1\%$ (impedindo-se que as

⁴ O número de elementos de contato (treliça) entre camadas é $n_i = 663$ elementos, e a altura de modelagem considerada é $L = 400 \text{ mm}$.

extremidades tenham liberdade para girar), então basta aplicar aos nós das extremidades de cada camada deslocamentos δ_z dados por:

$$\delta_z = \frac{\varepsilon \cdot L}{2} \text{ (para os nós da extremidade superior de todas as camadas}^5 \text{ do tubo)}$$

$$\delta_z = -\frac{\varepsilon \cdot L}{2} \text{ (para os nós da extremidade inferior de todas as camadas}^5 \text{ do tubo)}$$

Para os nós das extremidades correspondentes às duas armaduras de tração (interna e externa) foram aplicados, além dos deslocamentos axiais δ_z previstos, deslocamentos δ_x e δ_y cuja resultante radial provoca uma constrição uniforme às camadas.

Para impedir o movimento do tubo como corpo rígido foram utilizados treze grupos de elementos de viga, com cinco elementos em cada grupo, ligando os nós das seções intermediárias (situadas a $L/2$ das extremidades) de cada camada, conforme mostram as figuras 4.5 e 4.6. Nenhum grau de liberdade foi atribuído ao nó central.

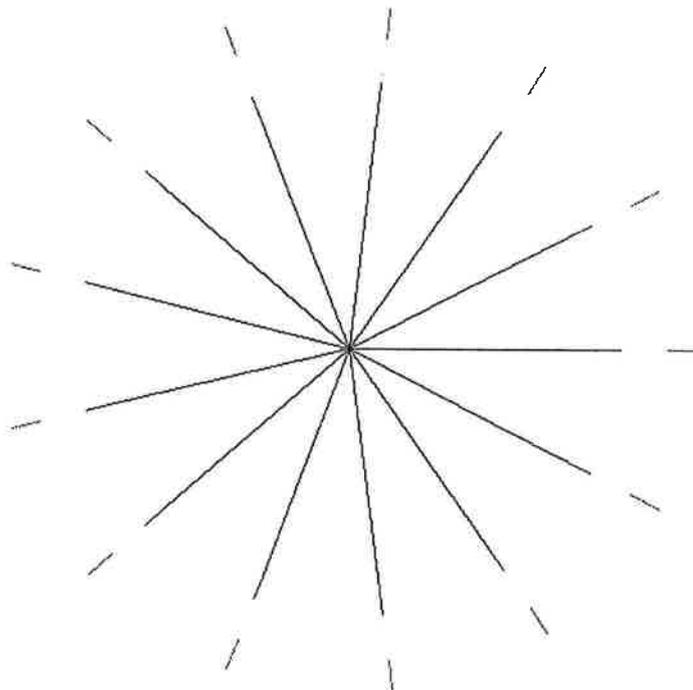


Figura 4.6: Elementos de viga para impedir movimento de corpo rígido.

⁵ Excetuando-se os nós da carcaça intertravada, que só receberá os esforços radiais de compressão.

Os valores das constantes elásticas dadas a estes elementos de viga são os mesmos atribuídos aos elementos de treliça (conforme tabela 4.13). Para os elementos de viga internos à carcaça intertravada foi atribuído um baixo módulo de elasticidade ($E = 1,0 \text{ MPa}$) para que a constrição da carcaça não ficasse impedida.

Os valores das áreas das seções transversais (A) e dos momentos de inércia a flexão (I) e a torção (I_t) dados a estes elementos constam na tabela 4.14. Deve-se ressaltar que os valores de rigidez torsional atribuídos aos elementos de viga da figura 4.6 devem ser bastante baixos, sobretudo para aqueles situados entre as duas armaduras de tração.

Tabela 4.14: Propriedades dos elementos de viga da figura 4.6.

Localização dos elementos de viga	A (mm²)	I (mm⁴)	I_t (mm⁴)
Internos à carcaça intertravada	1,0	1,0e+10	0,01
Entre carcaça e barreira de pressão	1,0	1,0e+10	0,01
Entre barreira de pressão e armad. interna	1,0	1,0e+10	0,01
Entre armadura interna e armadura externa	1,0	1,0e+10	0,01
Entre armadura externa e capa externa	1,0	1,0e+10	0,01

4.3.2 Resultados obtidos com o modelo

Neste item mostraremos alguns resultados obtidos através da modelagem do tubo com elementos finitos discutida no item 4.3.1. Dada a complexidade e o grande número de hipóteses feitas para o tratamento analítico das camadas helicoidais, uma maior ênfase será dada aos resultados obtidos por elementos finitos para estas camadas. Assim, considerando inicialmente a distribuição de tensões nos elementos de viga que compõem as armaduras interna e externa, podemos concluir que:

- 1) as tensões axiais⁶ são praticamente constantes ao longo de todos os tendões, indicando que as condições de contorno utilizadas são adequadas à análise de tubos flexíveis sob ação de carregamentos axissimétricos (ver figuras 4.7 e 4.8);
- 2) as tensões combinadas⁷ nos elementos de viga não diferem significativamente das tensões devidas apenas à ação das forças normais, mostrando que o tendão realmente trabalha como “membrana” (ver figuras 4.9 e 4.10).

⁶ Devidas apenas às forças axiais atuando na seção transversal dos tendões.

⁷ As tensões combinadas consideram a pior combinação de tensões axiais devidas à ação das forças normais e dos momentos fletores em cada seção.

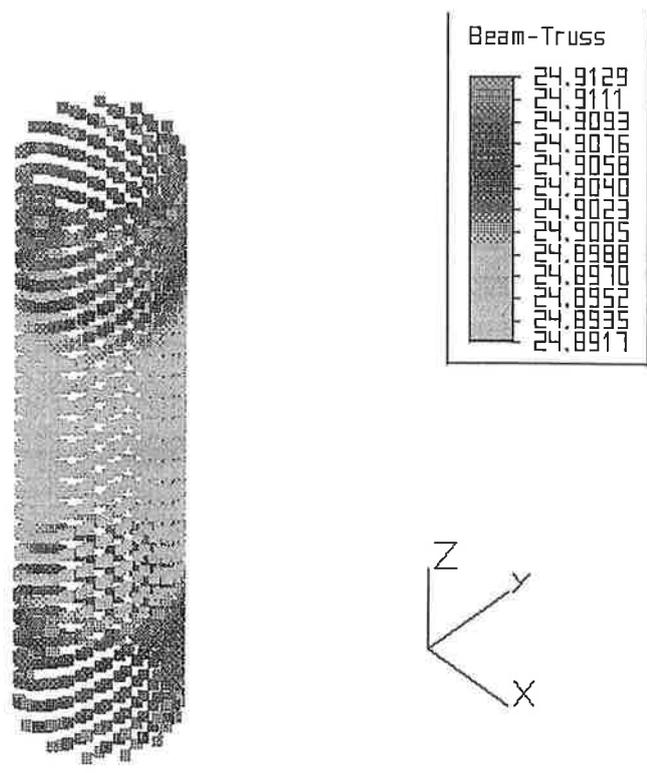


Figura 4.7: Tensões axiais na armadura interna (MPa).

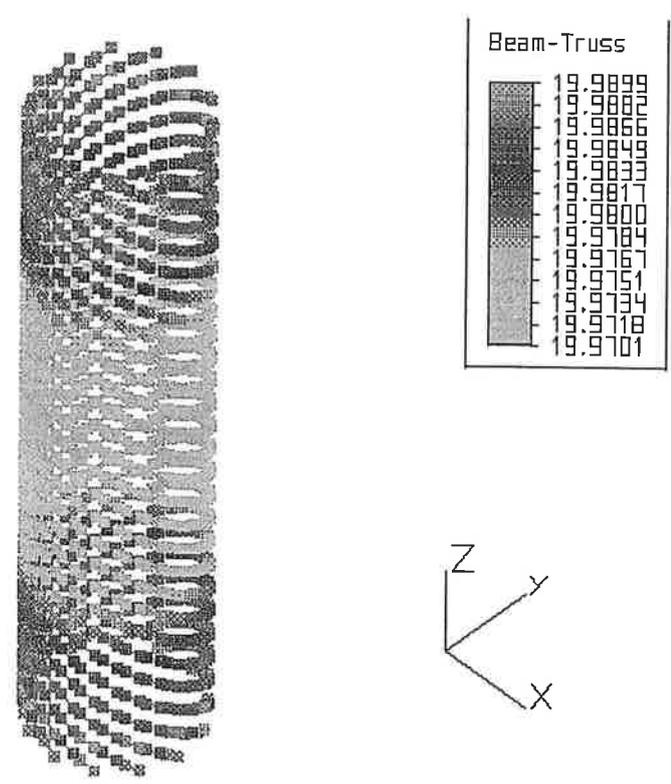


Figura 4.8: Tensões axiais na armadura externa (MPa).

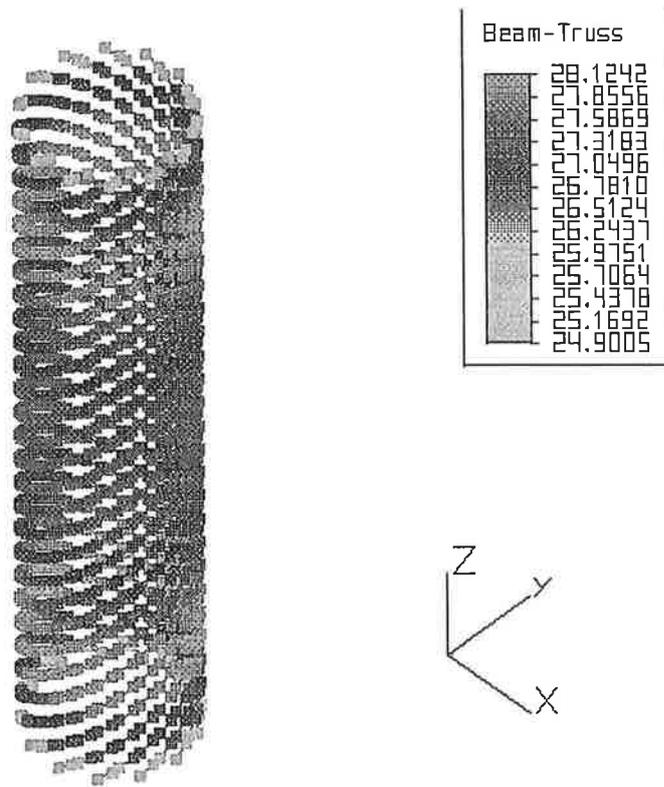


Figura 4.9: Tensões combinadas na armadura interna (MPa).

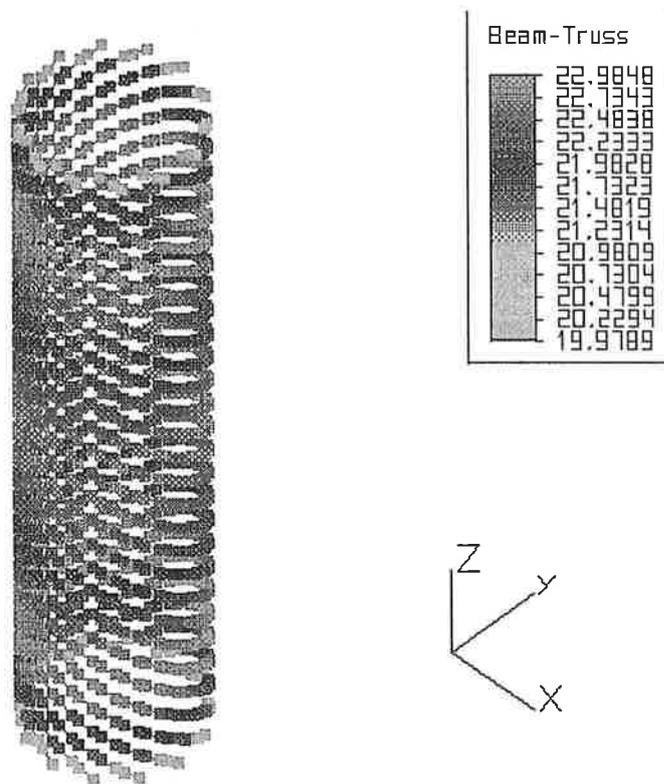


Figura 4.10: Tensões combinadas na armadura externa (MPa).

4.4 Confronto: modelo analítico x modelo com elementos finitos

Pelos resultados indicados na tabela 4.9 (item 4.2), as tensões axiais na armadura de tração interna estão por volta de 23,50 MPa a 26,30 MPa, enquanto na armadura de tração externa estes valores ficam entre 18,86 MPa a 21,61 MPa (dependendo de como a carcaça intertravada está sendo modelada). Já os resultados obtidos pelo modelo com elementos finitos mostram que as tensões axiais são da ordem de 24,9 MPa para a armadura interna e 20,0 MPa para a externa. Assim, embora o modelo com elementos finitos não seja totalmente independente dos modelos analíticos (conforme dito anteriormente), a proximidade entre os valores calculados para as tensões axiais, seja para a armadura interna ou externa, indica que existe pelo menos uma forte consistência interna nas duas modelagens propostas. Os principais pontos que o modelo com elementos finitos permite comprovar são:

- i) a hipótese de que os tendões das armaduras helicoidais trabalham basicamente como membrana, sendo, portanto, válida a relação (3.16) segundo a qual a diferença de pressões interna e externa à uma camada helicoidal é proporcional ao esforço de tração atuante nos tendões. Tal fato pode ser constatado pela pequena diferença entre as tensões axiais nos tendões devidas apenas às forças normais atuantes em suas seções transversais (figuras 4.7 e 4.8) e as tensões “combinadas” (figuras 4.9 e 4.10);
- ii) a validade das equações de compatibilidade de deformações (3.17) e (3.18), dadas no item 3.2.2. Isto fica evidente se lembrarmos que, se os resultados previstos pelos dois modelos para as tensões axiais nos tendões são próximos, o mesmo vale para as deformações axiais. Como as deformações são calculadas, para o modelo analítico, através da solução de um sistema de equações do qual as relações (3.17) e (3.18) fazem parte, conclui-se que tais relações são consistentes.

Quanto aos resultados obtidos para as camadas não-helicoidais, pudemos constatar que, à primeira vista, parece haver uma diferença razoável entre os resultados previstos pelos modelos analíticos e aqueles dados pelo modelo com elementos finitos. Consideremos, como ilustração, os resultados referentes à barreira de nylon: segundo os modelos analíticos, a tensão longitudinal (σ_{22}) nesta camada estaria entre

-1,00 e -1,18 MPa (respectivamente para os modelos que tratam a carcaça como camada helicoidal e “tubo equivalente”), enquanto o valor da tensão de membrana longitudinal para esta mesma camada, pelo modelo com elementos finitos, estaria por volta de 0,38 MPa. Verifica-se, contudo, que os dois resultados são consistentes com os respectivos modelos matemáticos utilizados para o cálculo das tensões, de tal forma que a diferença entre os valores encontrados deve-se unicamente aos diferentes modelos utilizados: os modelos analíticos consideram o efeito das tensões radiais no cálculo das deformações (conforme mostram as equações do item 3.3), ao passo que no modelo com elementos finitos as tensões radiais já não são consideradas para elementos de placa. Como neste caso o valor das tensões radiais é comparável⁸ aos valores das tensões circunferenciais e longitudinais, a utilização de um ou outro modelo traz diferenças aparentemente significativas, porém sem prejuízo para a análise das demais camadas, já que os valores envolvidos são pequenos.

Comparando-se o desempenho destes dois tipos de modelos, concluímos que os modelos analíticos são, a princípio, melhores que o modelo com elementos finitos proposto, pelas seguintes razões:

- i) o modelo com elementos finitos não é totalmente independente dos modelos analíticos, pois depende de seus resultados para a determinação dos valores de rigidez para os elementos de treliça que simulam o contato entre as várias camadas;
- ii) os modelos analíticos podem ser utilizados para qualquer tipo de carregamento axissimétrico, incluindo a aplicação de forças e momentos de torção. Para o modelo com elementos finitos, a aplicação de forças e momentos às extremidades do tubo/cabo fica mais difícil de ser conseguida, pois não se sabe, a priori, que parcela de força e de momento cada camada irá “absorver”. Desta forma, para o modelo com elementos finitos, é preferível a aplicação de deslocamentos impostos às extremidades;

⁸ Note que, pela tabela 4.8 (item 4.2), as tensões radiais médias para a barreira de nylon estão por volta de -1,62 MPa (para a carcaça modelada como camada helicoidal) a -1,84 MPa (para a carcaça modelada como “tubo equivalente”).

- iii) o modelo com elementos finitos proposto não é adequado para situações em que ocorra afastamento entre as camadas (como no caso da aplicação de um momento de torção que separe as duas armaduras de tração);
- iv) os resultados obtidos pelos modelos analíticos e pelo modelo com elementos finitos são muito próximos, o que aponta para a maior viabilidade dos modelos analíticos, já que a modelagem com elementos finitos de um tubo flexível ou um cabo umbilical é bastante trabalhosa.

É importante observar que as razões apontadas acima, que justificam nossa escolha pelos modelos analíticos, não pretendem desqualificar totalmente o uso de modelos com elementos finitos na análise local de *risers* flexíveis. Deve-se ressaltar contudo que tais modelos apresentam um custo extremamente elevado pelo tempo necessário à modelagem e à obtenção de resultados qualitativamente aceitáveis, embora possam ser considerados importantes na medida em que se constituem em novas ferramentas para a análise local destas estruturas. A análise de instabilidade local das armaduras de tração em condições de compressão dinâmica, provocando o fenômeno de “*bird-caging*”, ou a análise da influência das forças de atrito interno no comportamento estrutural de *risers* flexíveis são alguns exemplos de problemas ainda pouco estudados, para os quais a comparação de resultados obtidos a partir de modelos analíticos, ou baseados em elementos finitos, com resultados experimentais tem grande interesse prático.

4.5 Análise de outros casos e confronto com resultados experimentais

Os itens anteriores trataram da análise de um tubo flexível a partir dos modelos analíticos descritos no capítulo 3 e de um modelo com elementos finitos, mostrando que, para os objetivos propostos, os modelos analíticos apresentam mais vantagens que o modelo com elementos finitos. Para verificar a validade dos modelos analíticos em outras situações, faremos neste item várias comparações entre os resultados obtidos analiticamente e resultados experimentais extraídos da literatura para outras configurações de tubos e cabos.

4.5.1 Análise de cabos

Estudaremos inicialmente a distribuição de esforços em dois tipos de cabos submetidos a carregamentos axissimétricos, cujos resultados experimentais são dados por Knapp [34]. O primeiro cabo a ser analisado é um cabo eletromecânico constituído por um núcleo deformável⁹ e duas armaduras helicoidais. Conforme relata Knapp [34], durante os primeiros ciclos de carregamento, os cabos (recém-fabricados) exibem ciclos de histerese, o que requer um certo “pré-condicionamento” da estrutura. Para ciclos de carregamento seguintes, esta histerese é minimizada e o cabo apresenta uma resposta quase linear. Os dados experimentais fornecidos por Knapp referem-se a esta última condição.

O segundo cabo a ser analisado é um cabo de controle para poços de petróleo, também constituído por um núcleo central e duas armaduras helicoidais. Para cada um destes cabos, duas condições de carregamento foram consideradas, para as quais apenas forças de tração foram aplicadas ao cabo: na primeira condição, as terminações dos cabos foram impedidas de girar (rotação axial nula), enquanto na

⁹ O núcleo deste cabo consiste em condutores de cobre envoltos por uma jaqueta plástica feita de polietileno de baixa densidade (LDPE). O artigo não traz detalhes sobre a disposição e a geometria do núcleo, fornecendo apenas algumas informações sobre sua modelagem, que será, portanto, considerada como ponto de partida para a análise.

segunda condição, uma das terminações teve este grau de liberdade permitido (correspondendo, portanto, a um momento de torção nulo).

4.5.1.1 Dados gerais dos cabos

Os dados referentes à geometria e aos materiais das três camadas (núcleo central, armadura interna e armadura externa) que constituem cada um dos cabos a serem analisados estão tabelados a seguir¹⁰:

Tabela 4.15: Dados do núcleo do cabo eletromecânico [34].

Dados	Valor
Raio da parte indeformável do núcleo (mm)	1,4732
Raio externo da parte deformável do núcleo (mm)	5,588
Área do núcleo ¹¹ (mm ²)	91,28
Momento de inércia a torção do núcleo (mm ⁴)	1524,20
Módulo de elasticidade da parte deformável (MPa)	158,58
Coefficiente de Poisson da parte deformável	0,49

Tabela 4.16: Dados das armaduras do cabo eletromecânico [34].

Dados	Armad. interna	Armad. externa
Raio médio da camada (mm)	6,3119	7,9375
Raio do tendão (mm)	0,7239	0,9017
Área da seção transversal do tendão (mm ²)	1,6463	2,5543
Ângulo de assentamento do tendão (graus)	+20,6	-19,0
Número de tendões	24	24
Módulo de elasticidade do material (GPa)	200	200

¹⁰ O excessivo número de algarismos significativos decorre do fato de estarem as grandezas expressas em unidades inglesas, no artigo de Knapp. Para não incorrerem em erros de precisão numérica quando da transformação de unidades para o Sistema Internacional de Unidades, optamos por manter um número suficientemente grande de algarismos significativos.

¹¹ Knapp fornece um valor de área “efetiva” igual a 3977,4 mm². Como não há explicações sobre como se chegou a tal valor, optamos por utilizar a área da seção transversal da parte deformável do núcleo.

Tabela 4.17: Dados do núcleo do cabo de controle [34].

Dados	Valor
Raio da parte indeformável do núcleo (mm)	$\cong 0,0$
Raio externo da parte deformável do núcleo (mm)	3,6576
Área do núcleo ¹² (mm ²)	42,03
Momento de inércia a torção do núcleo (mm ⁴)	281,13
Módulo de elasticidade da parte deformável (MPa)	158,58
Coefficiente de Poisson da parte deformável	0,49

Tabela 4.18: Dados das armaduras do cabo de controle [34].

Dados	Armad. interna	Armad. externa
Raio médio da camada (mm)	4,1529	5,2705
Raio do tendão (mm)	0,4953	0,6223
Área da seção transversal do tendão (mm ²)	0,7707	1,2166
Ângulo de assentamento do tendão (graus)	+21,6	-21,0
Número de tendões	24	24
Módulo de elasticidade do material (GPa)	179,26	179,26

4.5.1.2 Confronto: modelo analítico x resultados experimentais

As tabelas seguintes comparam os resultados obtidos a partir dos modelos analíticos do capítulo 3 com os resultados experimentais reproduzidos por Knapp [34]. Para o cabo eletromecânico, a força de tração aplicada, em cada condição de ensaio, foi $F = 93412,65$ N (equivalente a 21000 lbf); enquanto que, para o cabo de controle, a força aplicada, em cada condição de ensaio, foi $F = 44482,22$ N (equivalente a 10000 lbf).

¹² Knapp fornece um valor de área “efetiva” igual a 1187,74 mm². Como não há explicações sobre como se chegou a tal valor, optamos por utilizar a área da seção transversal da parte deformável do núcleo.

Tabela 4.19: Comparação de resultados para o cabo eletromecânico.

Condição de ensaio	Grandeza medida	Resultado analítico	Resultado experimental	Erro ¹³ (%)
Rotação axial nula	Torção (N.m)	-83,47	-73,44	13,66
Torção nula	Rotação axial nula (rad/m)	0,8162	0,8732	-6,53

Tabela 4.20: Comparação de resultados para o cabo de controle.

Condição de ensaio	Grandeza medida	Resultado analítico	Resultado experimental	Erro ¹³ (%)
Rotação axial nula	Torção (N.m)	-31,40	-29,83	5,26
Torção nula	Deformação axial	0,009525	0,00833	14,35
Torção nula	Rotação axial (rad/m)	1,4464	1,4831	-2,47

Como podemos notar, os resultados obtidos analiticamente estão próximos dos resultados experimentais, sendo que a maior diferença percentual não ultrapassa 15%. Os resultados analíticos obtidos pelo modelo de Knapp diferem um pouco daqueles obtidos pelo nosso modelo: para o cabo eletromecânico, por exemplo, o momento de torção calculado por Knapp na condição de rotação axial nula foi $M = -77,62$ N.m, com uma diferença percentual de 5,7% com relação ao valor medido no ensaio (contra uma diferença de 13,66% do nosso modelo com relação ao ensaio). Já para a condição de torção nula, o valor da rotação axial por unidade de comprimento calculado por Knapp foi de 0,7329 rad/m, com uma diferença de -16,1% com relação ao valor medido no ensaio (contra uma diferença de -6,5% do nosso modelo com relação ao ensaio). Para o cabo de controle a situação se repete, sendo as diferenças percentuais entre os valores calculados por Knapp e os experimentais de -1,5%, 6,0% e -11,6% (respectivamente para a torção, a deformação axial e a rotação axial por unidade de comprimento), contra diferenças de 5,26%, 14,35% e -2,47% do nosso modelo com relação aos valores experimentais.

¹³ O erro foi definido como: $\text{erro} = (RA - RE)/RE$, onde RA = resultado analítico e RE = resultado experimental.

As diferenças observadas entre os resultados obtidos pelo nosso modelo e o de Knapp devem-se provavelmente à forma de modelagem do núcleo elétrico. Como comentamos anteriormente, Knapp utiliza para o núcleo um valor de área “efetiva” bastante diferente da área da seção transversal desta camada, que foi o valor utilizado em nossa análise. Se fossem fornecidas mais informações sobre a composição, a geometria e os materiais utilizados no núcleo, teríamos mais certeza a respeito dos valores utilizados por Knapp para a modelagem do núcleo (como, por exemplo, o raio da parte “indeformável” do núcleo e o módulo de elasticidade atribuído ao material). Quanto às diferenças observadas entre os resultados do nosso modelo e os obtidos nos ensaios, lembramos que mesmo Knapp assinala que as diferenças entre seus resultados e os experimentais estão dentro da precisão das grandezas medidas.

4.5.2 *Análise de um tubo flexível*

Neste item será analisado um tubo flexível fabricado e ensaiado pela Coflexip, cujos resultados experimentais foram publicados por Witz [88], juntamente com resultados analíticos calculados por várias instituições. Às instituições que participaram deste estudo foi solicitada a obtenção das seguintes curvas, admitindo que as deformações permanecessem dentro do regime elástico:

- a) curvas *tração x alongamento axial* e *rotação axial*¹⁴ *x alongamento axial*, tendo as extremidades do tubo liberdade para girar;
- b) curvas *tração x alongamento axial* e *momento de torção x alongamento axial*, estando as extremidades do tubo impedidas de girar;
- c) curvas *momento de torção (horário e anti-horário) x rotação axial*¹⁴ e *alongamento axial x rotação axial*¹⁴, tendo as extremidades do tubo liberdade de distensão;
- d) curvas *momento de torção (horário e anti-horário) x rotação axial*¹⁴ e *força axial x rotação axial*¹⁴, estando as extremidades do tubo impedidas de se movimentarem axialmente;
- e) curvas *momento fletor x curvatura* para valores de pressão interna de 0 e 300 bar.

¹⁴ Por unidade de comprimento do tubo.

Os resultados fornecidos pelos participantes foram apresentados por Witz em termos das declividades médias de cada curva, devendo-se ressaltar que a maioria dos resultados submetidos apresentava, de fato, um comportamento linear. A tabela 4.21 fornece a identificação destes participantes, o *software* utilizado para a obtenção dos resultados e as referências que descrevem a base de seus modelos.

Tabela 4.21: Participantes do estudo de caso [88].

Participante	Software	Referências
1) Maritime Seanor	Flexpipe	Often ¹⁵ Lotveit & Often ¹⁶
2) Taurus Hungarian Rubber Works	(não informado)	Nagy et alli ¹⁷
3) Lloyd's Register of Shipping	Comp-Wall	Richards & Andronicou ¹⁸
4) MAI Consultants	Flex-Able	McIver ¹⁹
5) Statoil	Caflex	Féret; Bournazel [24] Hoyte et alli ²⁰
6) Seaflex	Flexpipe	Lotveit & Often ¹⁶
7) SINTEF Marine Technology, NTH ²¹	Caflex	Féret; Bournazel [24]
8) Wellstream	(não informado)	Chen et alli ²²
9) Coflexip	Eflex	Féret; Bournazel [24] Estrier & Rigaud ²³
10) Mechanical Engineering – UCL	FlexCAD	Witz; Tan [86,87]

¹⁵ Often, O. *Flexpipe theory manual*, Seanor Engineering, Norway, 1989.

¹⁶ Lotveit, S.A. & Often, O. Increased reliability through a unified analysis tool for bonded and non-bonded pipes. In *Advances in Subsea Pipeline Engineering & Technology, Society for Underwater Technology Conference Aspect 90*, Kluwer Academic Publishers, Utrecht, 24, (1990), 79-110.

¹⁷ Nagy, T.T.; Kovacs, F.; Lengyel, K. & Edelenyi, A. Modified model for the description of the behaviour of reinforced rubber hoses. *Int. Rubber Conf.*, Stuttgart, Germany, June, 1985.

¹⁸ Richards, D.M. & Andronicou, A. *Flexible risers for floating production systems: design appraisal*. Pipelines Group, Offshore Division, Lloyd's Register of Shipping, 1994.

¹⁹ McIver, D. A method of modelling the detailed component and overall structural behaviour of flexible pipe sections. In *Marinflex 92, Proc. 1st European Conference on Flexible Pipes, Umbilicals & Marine Cables*, November, London, 1992.

²⁰ Hoyte, J.; Enseth, A. & Bech, A., Caflex - a program for the analysis of flexible pipe wall sections, user's manual. *Report STF70 F92011 (FPS2000 Report 2.1-27)*, SINTEF Structural Engineering, Trondheim, April, 1992.

²¹ *Norwegian Institute of Technology*.

²² Chen, B.; Kalman, M.; Lewicki, P. & Zhang, Y., Analytical and finite element modelling of nonbonded flexible pipe structures. In *Marinflex 95, Proc. 2nd European Conference on Flexible Pipes, Umbilicals & Marine Cables*, London, 1995.

²³ Estrier, P. & Rigaud, J., Eflex Program - version 4. Technical note *DTF No 56*, Coflexip, Le Trait, France, 1990.

Deve-se ressaltar que, apesar de mais de 70 instituições terem sido convidadas a participar deste estudo, apenas as 10 instituições listadas na tabela 4.21 participaram efetivamente, enviando as curvas solicitadas. Como se pode observar, tais instituições cobrem um largo espectro de atividades, porém com interesses comuns na análise de *risers* flexíveis, como por exemplo: companhias de petróleo, fabricantes de tubos, universidades, institutos de pesquisa e empresas de consultoria, entre outras.

Utilizando os modelos analíticos descritos no capítulo 3, vamos então calcular as declividades das curvas (a) a (d) descritas anteriormente, e compará-las com:

- i) as declividades obtidas pelos participantes deste estudo de caso;
- ii) os resultados experimentais fornecidos por Witz [88].

O item seguinte fornecerá os dados do tubo flexível a ser analisado.

4.5.2.1 Dados gerais do tubo flexível

O tubo flexível escolhido para o estudo de caso é um tubo de 2,5” de diâmetro interno, com um total de oito camadas, a saber:

- 1) carcaça intertravada de aço;
- 2) barreira de nylon;
- 3) reforço de pressão (camada zeta);
- 4) camada anti-atrito;
- 5) armadura de tração interna;
- 6) camada anti-atrito;
- 7) armadura de tração externa;
- 8) capa externa.

As características geométricas e os dados dos materiais de cada uma destas camadas são fornecidos nas tabelas 4.22 a 4.29 a seguir.

Tabela 4.22: Dados para a carcaça intertravada de aço (AISI 304) [88].

Grandeza	Valor
Diâmetro interno (mm)	63,2
Diâmetro externo (mm)	70,2
Dimensões da fita (mm x mm)	28 x 0,7
Área seccional do perfil (mm ²)	19,6
Altura do perfil (mm)	3,5
Largura do perfil (mm) ²⁴	15
Mom. de inércia (tangencial) do perfil (mm ⁴)	20
Mom. de inércia (radial) do perfil (mm ⁴)	556
Mom. de inércia (à torção) do perfil (mm ⁴)	6,5
Massa por unidade de comprimento (kg/m)	3,49
Ângulo de enrolamento (graus) ²⁵	-87,5
Módulo de elasticidade do material (GPa) ²⁶	190

Tabela 4.23: Dados para a barreira de nylon (Nylon-12) [88].

Grandeza	Valor
Diâmetro interno (mm)	70,2
Diâmetro externo (mm)	80,1
Espessura da camada (mm) ²⁷	4,95
Massa por unidade de comprimento (kg/m)	1,25
Módulo de elasticidade do material (MPa)	284

²⁴ Conforme desenho esquemático da seção transversal da camada indicado no artigo.

²⁵ Obtido a partir da relação: $\cos \alpha = \rho \cdot A / m$, onde $\rho = 7700 \text{ kg/m}^3$ é a massa específica do aço cf. Juvinal [33], A é a área da seção transversal do perfil e m é a massa por unidade de comprimento do tubo.

²⁶ Conforme Juvinal [33], apêndice C.

²⁷ A espessura da camada foi acrescida de 0,05 mm (com relação ao valor fornecido no artigo), para que não houvesse folga inicial entre as camadas.

Tabela 4.24: Dados para a camada zeta (aço FI15) [88].

Grandeza	Valor
Diâmetro interno (mm)	80,1
Diâmetro externo (mm)	92,5
Área seccional do perfil (mm ²)	51,5
Altura do perfil (mm)	6,2
Largura do perfil ²⁸ (mm)	9,25
Mom. de inércia (tangencial) do perfil (mm ⁴)	100
Mom. de inércia (radial) do perfil (mm ⁴)	771
Mom. de inércia (à torção) do perfil (mm ⁴)	204,6
Ângulo de enrolamento (graus)	-85,5
Módulo de elasticidade do material ²⁹ (GPa)	207

Tabela 4.25: Dados para a camada anti-atrito (Nylon-11) [88].

Grandeza	Valor
Diâmetro interno (mm)	92,5
Diâmetro externo (mm)	95,5
Espessura da camada (mm)	1,5
Módulo de elasticidade do material (MPa)	301

Tabela 4.26: Dados para a armadura de tração interna (aço FI41) [88].

Grandeza	Valor
Diâmetro interno (mm)	95,5
Diâmetro externo (mm)	101,5
Área seccional do perfil (mm ²)	18,0
Altura do perfil (mm)	3,0
Largura do perfil (mm)	6,0
Número de tendões	40
Ângulo de enrolamento (graus)	-35
Módulo de elasticidade do material (GPa) ²⁹	207

²⁸ Conforme desenho esquemático da seção transversal da camada indicado no artigo.

²⁹ Conforme Juvinal [33], apêndice C, (dados para aço carbono ou aço liga).

Tabela 4.27: Dados para a camada anti-atrito (Nylon-11) [88].

Grandeza	Valor
Diâmetro interno (mm)	101,5
Diâmetro externo (mm)	104,5
Espessura da camada (mm)	1,5
Módulo de elasticidade do material (MPa)	301

Tabela 4.28: Dados para a armadura de tração externa [88].

Grandeza	Valor
Diâmetro interno (mm)	104,5
Diâmetro externo (mm)	110,5
Área seccional do perfil (mm ²)	18,0
Altura do perfil (mm)	3,0
Largura do perfil (mm)	6,0
Número de tendões	44
Ângulo de enrolamento (graus)	+35
Módulo de elasticidade do material (GPa) ²⁹	207

Tabela 4.29: Dados para a capa externa [88].

Grandeza	Valor
Diâmetro interno (mm)	110,5
Diâmetro externo (mm)	111,5
Espessura da camada (mm)	0,5
Módulo de elasticidade do material (MPa) ³⁰	300

Como última ressalva, lembramos que o valor do coeficiente de Poisson para todos os materiais das camadas foi considerado igual a 0,3, por falta de maiores informações quanto às propriedades dos materiais. Tal valor também parece ter sido utilizado pelos participantes do estudo de caso, conforme relata Witz [88].

³⁰ O artigo fornece dois valores de rigidez para a fita que compõe a capa externa: uma rigidez axial de 600 MPa, e uma transversal de 300 MPa. Como admitimos a hipótese de isotropia do material, optamos pelo menor valor de rigidez fornecido, o que não deve interferir significativamente nos resultados, devido à pequena espessura da camada (0,5 mm).

4.5.2.2 Confronto: modelo analítico x resultados experimentais

Neste item iremos comparar os resultados obtidos a partir de nossos modelos analíticos com os resultados obtidos pelas demais instituições. Os valores das declividades de cada curva, calculados pelos participantes, estão reproduzidos nas tabelas 4.30 a 4.35 a seguir, onde também estão incluídas as médias e os desvios-padrão destes valores. Na última linha de cada tabela são fornecidos os valores das declividades obtidos a partir de nosso modelo. Como não foram fornecidas informações suficientes sobre os perfis da carcaça intertravada e da camada zeta no artigo de Witz, tais camadas serão modeladas apenas como camadas helicoidais, e não como “tubo equivalente”.

Tabela 4.30: Declividades das curvas para o caso (a)³¹.

Participante	F/ε_h (MN)	$\Delta\varphi/L.\varepsilon_h$ (rad/m)
1) Seanor	122	-2,21
2) Taurus	129	-2,09
3) Lloyd's Register	110	-1,31
4) MAI (“Tape version”)	129	-1,26
MAI	128	-0,84
5) Statoil	147	-1,60
6) Seaflex	122	-2,16
7) NTH/SINTEF	115	-2,16
8) Wellstream	151	-2,55
9) Coflexip	89	-1,56
10) UCL	165	-2,77
Média	128	-1,86
Desvio Padrão	21	0,59
Nosso modelo	127	-1,62

A tabela 4.30 mostra uma certa uniformidade nos resultados obtidos pelos diversos participantes, no sentido de que todos os valores têm a mesma ordem de grandeza (veremos adiante que isso não ocorre sempre). A figura 4.11 mostra a curva *tração x*

³¹ Caso (a): curvas de (*tração x alongamento axial*) e (*rotação axial por unidade de comprimento x alongamento axial*), tendo as extremidades do tubo liberdade para girar.

alongamento axial obtida através de ensaio para os três primeiros ciclos de carregamento, juntamente com as curvas associadas aos valores da declividade média e das declividades obtidas somando-se, e subtraindo-se, à média o valor do desvio-padrão. Pode-se notar claramente pela curva obtida no ensaio a histerese associada aos ciclos de carregamento, bem como a diferença nos valores de rigidez aparente entre o primeiro ciclo e os seguintes. Como observa Witz, este comportamento é observado com frequência em tubos flexíveis, sendo geralmente atribuído à acomodação de suas camadas. A curva obtida no ensaio mostra que no primeiro ciclo a rigidez aparente é menor, estando por volta de 83 MN; enquanto ao final do terceiro ciclo este valor se eleva para algo em torno de 96 MN. Na opinião de Witz, com a qual concordamos, isto já poderia ser esperado se lembrarmos da hipótese (utilizada por quase todos os modelos) de uniformidade de deformações e de rotações ao longo do comprimento do cabo (e para todas as camadas), o que pode não ter se verificado nas condições do ensaio.

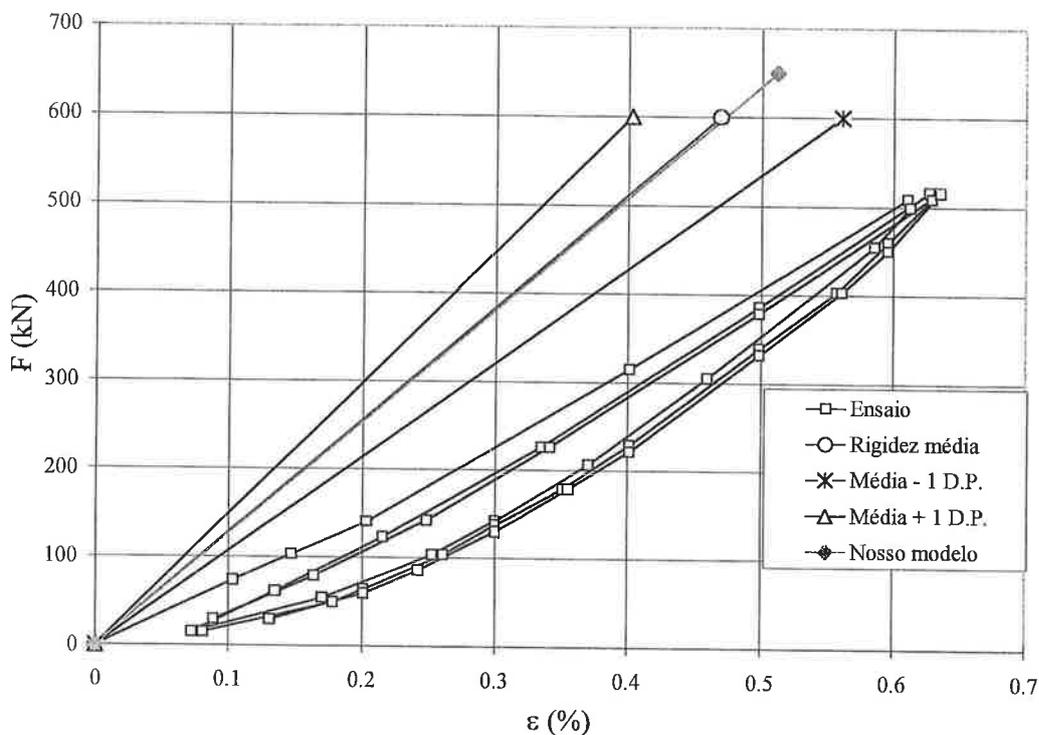


Figura 4.11: Curva *tração x along. axial* (extremos com liberdade de giro) [88].

Além disto, Witz ainda observa que os valores de alongamento e de rotação medidos³² no ensaio são muito pequenos para o corpo de prova utilizado (com aproximadamente 15 m de comprimento), de tal forma que qualquer erro na medida do alongamento axial pode ter uma grande influência no valor da rigidez axial do tubo. Vale ainda lembrar que, pela própria natureza dos tubos flexíveis, é muito comum haver “folgas” iniciais entre as camadas constituintes. Estas folgas têm uma grande influência na interação entre as camadas, introduzindo um comportamento não-linear na curva *força x deslocamento* a medida em que são vencidas (note que a curva obtida no ensaio aponta para valores maiores de rigidez com o aumento da deformação). Embora seja possível elaborar um modelo estrutural que considere a existência destas “folgas”, deve-se lembrar que as magnitudes destas “folgas” são, na maioria das vezes, parâmetros desconhecidos. Pode-se observar, finalmente, que todos os modelos utilizados, com exceção feita ao da Coflexip, previram valores de rigidez axial maiores que os valores medidos em ensaio. O valor calculado pelo nosso modelo para a declividade da curva *tração x alongamento axial* resultou numa rigidez de 127 MN, o que praticamente coincide com a média dos valores calculados pelos participantes.

A tabela 4.31 mostra os resultados das declividades médias obtidas para o caso (b): curvas de *tração x alongamento axial* e de *momento de torção x alongamento axial*, estando as extremidades do tubo impedidas de girar. À semelhança da tabela 4.30, a tabela 4.31 também mostra uma razoável uniformidade nos resultados obtidos pelos vários participantes (principalmente no que se refere aos valores da rigidez axial “ F/ϵ_h ”). A tabela 4.31 mostra ainda que os valores de rigidez axial do tubo com extremidades impedidas de girar são bastante próximos dos valores de rigidez com extremidades livres para girar, indicando que o tubo em questão apresenta um bom balanço à torção. Como se pode observar, os valores obtidos pelo nosso modelo mantiveram-se, como no caso anterior, próximos aos valores médios.

³² O alongamento axial foi medido através de transdutores indutivos localizados nas extremidades do tubo, e a rotação axial foi medida pela diferença de leituras entre dois inclinômetros indutivos.

Tabela 4.31: Declividades das curvas para o caso (b)³³.

Participante	F/ε_h (MN)	M/ε_h (kN.m)
1) Seanor	123	456
2) Taurus	130	491
3) Lloyd's Register	110	233
4) MAI ("Tape version")	129	166
MAI	128	184
5) Statoil	147	349
6) Seaflex	123	437
7) NTH/SINTEF	116	419
8) Wellstream	152	568
9) Coflexip	89	313
10) UCL	167	635
Média	129	386
Desvio Padrão	21	153
Nosso modelo	128	348

Nos casos de carregamento à torção, a direção em que é aplicado o torque tem uma influência marcante no valor da rigidez torsional aparente (" $M.L/\Delta\varphi$ ") como mostram as tabelas 4.32 e 4.33. Para torção no sentido horário (tabela 4.32), a armadura de tração externa do tubo flexível em estudo tende a se "desenrolar" (pois tem ângulo de enrolamento positivo), ocorrendo, assim, um afastamento entre esta armadura e a camada adjacente interna. Neste caso, uma baixa rigidez torsional é obtida. Já no caso de torção no sentido anti-horário, a armadura de tração externa tende a "estrangular" as camadas internas, aumentando o valor da rigidez torsional aparente.

³³ Caso (b): curvas de (tração x alongamento axial) e (momento de torção x alongamento axial), estando as extremidades do tubo impedidas de girar.

Tabela 4.32: Declividades das curvas para o caso (c)³⁴, torção no sentido horário.

Participante	$M.L/\Delta\varphi$ (kN.m ² /rad)	$\varepsilon_h L/\Delta\varphi$ (mm/rad)
1) Seanor	5,75	32,6
2) Taurus	235,16	-5,0
3) Lloyd's Register	5,81	33,7
4) MAI ("Tape version")	5,55	34,7
MAI	2,92	35,4
5) Statoil	2,58	35,7
6) Seaflex	5,27	32,7
7) NTH/SINTEF	3,69	32,6
8) Wellstream	2,20	33,2
9) Coflexip	31,59	-7,6
10) UCL	3,26	33,1
Média ³⁵	27,62	26,5
	[6,86]	[29,6]
Desvio Padrão ³⁵	69,34	16,2
	[8,80]	[13,1]
Nosso modelo	2,37	32,9

Como podemos ver pelas tabelas 4.32 e 4.33, as declividades determinadas pelos diversos participantes resultou num valor médio para a rigidez torsional igual a 27,62 kN.m²/rad para torção no sentido horário, contra um valor médio igual a 174 kN.m²/rad para torção no sentido anti-horário. Segundo Witz, as diferenças entre os valores calculados de rigidez torsional e os valores medidos em ensaio (ver figura 4.12) são mais acentuadas para os modelos que não conseguiram prever o comportamento estrutural correto do tubo, para alguns tipos de carregamento e condições de contorno. Isto fica evidente, por exemplo, para o modelo utilizado pela Taurus, cujos resultados de rigidez torsional são os mesmos (235 kN.m²/rad), quer se

³⁴ Caso (c): curvas de (*momento de torção x rotação axial por unidade de comprimento*) e (*alongamento axial x rotação axial por unidade de comprimento*), tendo as extremidades do tubo liberdade de distensão.

³⁵ Os valores entre colchetes não levam em conta o valor obtido pelo 2º participante (Taurus).

aplique torção no sentido horário, quer no sentido anti-horário. Por este motivo é que as tabelas 4.32 e 4.35 apresentam dois valores de média e de desvio padrão: os valores entre colchetes desconsideram os resultados obtidos pela Taurus.

Tabela 4.33: Declividades das curvas para o caso (c)³⁶, torção no sentido anti-horário.

Participante	$M.L/\Delta\varphi$ (kN.m²/rad)	$\varepsilon_h L/\Delta\varphi$ (mm/rad)
1) Seanor	167	-112
2) Taurus	235	-5
3) Lloyd's Register	175	-116
4) MAI ("Tape version")	176	-131
MAI	177	-146
5) Statoil	197	-83
6) Seaflex	167	-113
7) NTH/SINTEF	159	-136
8) Wellstream	185	-117
9) Coflexip	104	-35
10) UCL	180	-31
Média	174	-93
Desvio Padrão	31	48
Nosso modelo	146	-246

A figura 4.12 mostra as curvas *torque x rotação axial* obtidas a partir de ensaios de torção (nos sentidos horário e anti-horário), com aplicação simultânea de forças axiais (para impedir o alongamento do tubo). A figura traz também as médias das declividades calculadas pelos participantes (ver colunas relativas à " $ML/\Delta\varphi$ " nas tabelas 4.34 e 4.35), cujos valores são de 106 kN.m²/rad (para torção no sentido horário) e 203 kN.m²/rad (para torção no sentido anti-horário).

³⁶ Caso (c): curvas de (*momento de torção x rotação axial por unidade de comprimento*) e (*alongamento axial x rotação axial por unidade de comprimento*), tendo as extremidades do tubo liberdade de distensão.

Nota-se que tanto os resultados analíticos quanto os experimentais apontam para uma mudança significativa na rigidez torsional do tubo conforme o sentido do torque é alterado. Podemos verificar ainda que os resultados obtidos nos ensaios apontam para valores de rigidez por volta de $36 \text{ kN.m}^2/\text{rad}$ (para torção no sentido horário) e $100 \text{ kN.m}^2/\text{rad}$ (para torção no sentido anti-horário), indicando que os resultados analíticos prevêem valores de rigidez torsional duas a três vezes maiores do que aqueles obtidos experimentalmente. Como nos casos anteriores, tais diferenças podem ser devidas ao fato de que a hipótese ligada à uniformidade de deformações pode não ser razoável nas condições do ensaio (em que o comprimento do corpo de prova chega, no máximo, a 20 m de comprimento).

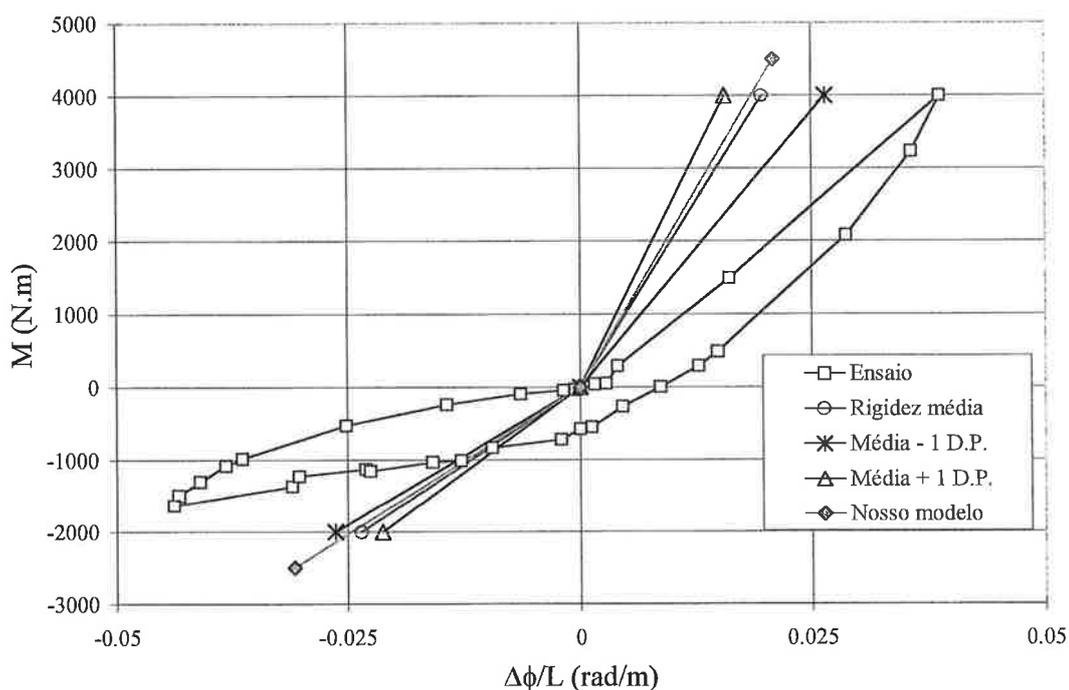


Figura 4.12: Curva torque x rotação axial (com força axial aplicada) [88].

Tabela 4.34: Declividades das curvas para o caso (d)³⁷, torção horária.

Participante	$M.L/\Delta\varphi$ (kN.m ² /rad)	$F.L/\Delta\varphi$ (MN.m/rad)
1) Seanor	78	-2,23
2) Taurus	288	0,55
3) Lloyd's Register	82	-0,23
4) MAI ("Tape version")	90	-2,44
MAI	91	-2,50
5) Statoil	97	-2,63
6) Seaflex	77	-2,20
7) NTH/SINTEF	72	-2,10
8) Wellstream	87	-2,55
9) Coflexip	não fornecido	-0,48
10) UCL	94	-2,68
Média	106 [85]	-1,77 [-2,00]
Desvio Padrão	65 [9]	1,14 [0.89]
Nosso modelo	81	-2,33

Com relação aos modelos utilizados pelos participantes, Witz observa que, com exceção feita ao modelo da Taurus, todos os demais modelos (e aí pode-se também incluir o nosso) levam em consideração a interação entre as camadas do tubo. Conseqüentemente, todos eles prevêm resultados qualitativamente similares para a resposta do tubo à torção. Pode-se notar, por exemplo, que todos³⁸ eles prevêm um encurtamento do tubo ($\varepsilon_h < 0$), independentemente do sentido de aplicação da torção, quando as extremidades do tubo têm liberdade de distensão (ver colunas de

³⁷ Caso (d): curvas de (momento de torção x rotação axial por unidade de comprimento) e (força axial x rotação axial por unidade de comprimento), estando as extremidades do tubo impedidas de se movimentarem axialmente.

³⁸ Neste caso o modelo da Coflexip também não forneceu resultados qualitativamente idênticos aos dos demais participantes.

“ $\varepsilon_h L / \Delta\varphi$ ” nas tabelas 4.32 e 4.33). Da mesma forma, todos prevêem que o tubo será submetido a esforços de tração (qualquer que seja o sentido de aplicação do torque) quando suas extremidades estiverem impedidas de se distender (ver colunas de “ $F.L / \Delta\varphi$ ” nas tabelas 4.34 e 4.35).

Tabela 4.35: Declividades das curvas para o caso (d)³⁹, torção anti-horária.

Participante	$M.L / \Delta\varphi$ (kN.m²/rad)	$F.L / \Delta\varphi$ (kN.m/rad)
1) Seanor	202	468
2) Taurus	288	500
3) Lloyd's Register	177	228
4) MAI (“Tape version”)	213	286
MAI	218	280
5) Statoil	219	353
6) Seaflex	202	451
7) NTH/SINTEF	194	430
8) Wellstream	222	708
9) Coflexip	73	2077
10) UCL	230	795
Média	203	597
Desvio Padrão	52	521
Nosso modelo	215	495

Das tabelas 4.32 a 4.35 podemos verificar ainda que o modelo da Coflexip geralmente prevê resultados bastante diferentes daqueles dos demais participantes (algumas vezes até qualitativamente diferentes, como no caso da tabela 4.32, em que o modelo da Coflexip prevê um alongamento do tubo, enquanto todos os demais, com exceção feita ao modelo da Taurus, prevêem um encurtamento). Segundo Witz, não fica claro, pelas referências utilizadas pelo modelo da Coflexip, por que isto

³⁹ Caso (d): curvas de (*momento de torção x rotação axial por unidade de comprimento*) e (*força axial x rotação axial por unidade de comprimento*), estando as extremidades do tubo impedidas de se movimentarem axialmente.

ocorre, podendo tais diferenças serem atribuídas, talvez, a fatores empíricos incorporados ao modelo.

Quanto aos resultados obtidos pelo nosso modelo, para o caso de resposta a carregamentos de torção, é fácil notar pelas tabelas 4.32 a 4.35 que os valores calculados estiveram quase sempre próximos às médias dos demais participantes.

5. MODELO ANALÍTICO PARA CARREGAMENTOS COMBINADOS INCLUINDO A FLEXÃO

Este capítulo trata da análise local de *risers* flexíveis quando submetidos a carregamentos combinados. Isto significa que, aos carregamentos de natureza axissimétrica já considerados no capítulo 3, adicionaremos carregamentos de flexão ao *riser*. Os objetivos principais desta análise podem ser resumidos nos seguintes pontos:

- obtenção da rigidez flexional do *riser*: como veremos no próximo capítulo, a determinação da rigidez flexional de um *riser* é fundamental na análise de estabilidade da linha (estimativa da carga crítica de flambagem). Uma boa estimativa da rigidez flexional também é igualmente importante na análise do comportamento local da linha nas proximidades do TDP ou no topo (junto à unidade flutuante), que se constituem em regiões críticas no que diz respeito ao projeto de *risers* (ver, por exemplo, Pesce [60]);
- determinação dos níveis de tensão em cada camada do *riser*: uma estimativa dos níveis de tensão alcançados pelas diversas camadas que compõem o *riser* quando submetido a diversos esforços combinados é essencial para uma avaliação mais confiável da sua vida útil.

Deve-se ressaltar que o modelo analítico proposto no capítulo 3, que trata de carregamentos axissimétricos, embora seja incompleto (no sentido de que os esforços de flexão não foram considerados naquela ocasião), não tem sua importância diminuída já que as diversas comparações feitas no capítulo 4 (utilizando modelos com elementos finitos e diversos resultados experimentais) mostraram que o modelo proposto apresenta bons resultados, apesar de suas limitações. A idéia neste capítulo é ampliar o modelo já desenvolvido para possibilitar a análise de *risers* submetidos a carregamentos genéricos incluindo, naturalmente, a flexão. O modelo completo será baseado em modelos analíticos propostos por diversos autores (como Witz; Tan [87],

Lanteigne [36], Féret; Bournazel [24] e Féret; Leroy; Estrier [25]) que os desenvolveram para a análise de *risers* (ou outras estruturas similares) submetidos à flexão. É natural, portanto, que o modelo a ser apresentado tenha algumas características comuns aos demais modelos já encontrados na literatura. Devemos, contudo, ressaltar alguns dos problemas encontrados nestes modelos e as principais mudanças implementadas no nosso modelo a fim de torná-lo uma ferramenta de projeto adequada à análise de *risers* flexíveis.

O modelo proposto por Lanteigne [36] foi apresentado em 1985 e consiste num modelo analítico para a determinação dos valores de rigidez axial, torsional e flexional de condutores do tipo ACSR¹. Embora tais condutores apresentem uma geometria algo semelhante à encontrada em tubos flexíveis e cabos umbilicais (sobretudo devido à presença de camadas helicoidais), existem diferenças fundamentais que tornam o modelo de Lanteigne inadequado para a análise de *risers*. Os principais pontos de discordância dizem respeito a:

- i) inexistência de camadas plásticas nos condutores estudados por Lanteigne;
- ii) hipótese de invariância do raio médio das camadas helicoidais com o carregamento;
- iii) inexistência de carregamentos devidos à pressão interna e/ou externa;
- iv) seção transversal dos fios que formam as camadas helicoidais é sempre circular.

Passemos a analisar cada um destes pontos. Com relação ao primeiro ponto de discordância já fica evidente a diferença na análise dos dois tipos de estrutura: a simples presença das camadas plásticas nos *risers* flexíveis já torna a análise muito mais complexa do que a conduzida por Lanteigne, pelo fato de tais camadas apresentarem um comportamento totalmente diverso daquele exibido pelas camadas helicoidais.

¹ Sigla para *Aluminum Conductor Steel Reinforced*: estruturas formadas por diversas camadas de fios de alumínio enroladas na forma de hélices em torno de um núcleo central feito de aço.

A esta diferença deve-se somar ainda as dificuldades existentes com relação ao número de camadas plásticas e de camadas helicoidais presentes num *riser* e à ordem em que estas camadas estão dispostas na estrutura: todos estes fatores são relevantes na determinação da resposta da estrutura frente a carregamentos de tração, torção, flexão, etc (combinados ou não) e precisam ser levados em conta no modelo.

Talvez a própria ausência de camadas plásticas nos condutores analisados por Lanteigne tenha levado o autor a desconsiderar a variação do raio médio das camadas helicoidais com o carregamento (segundo ponto a ser observado). De fato, a hipótese parece plausível para o tipo de estrutura analisada por Lanteigne, *desde que não haja possibilidade de afastamento entre as camadas*, fato este que parece ter sido ignorado pelo autor. Apenas para deixar mais evidente o problema, imaginemos como seria o comportamento da estrutura (condutor ou *riser*) para uma torção aplicada no sentido horário e para uma torção aplicada no sentido anti-horário: a resposta da estrutura seria obrigatoriamente a mesma, independente do sentido de rotação? As camadas adjacentes ficariam, de fato, sempre unidas, conforme admitido por Lanteigne? Os estudos realizados nos capítulos anteriores do presente trabalho já nos permitem concluir que tal hipótese simplificadora não é correta e não pode ser considerada na análise de *risers* ou estruturas similares: a possibilidade de variação do raio médio das camadas, sejam elas plásticas ou metálicas, deve sempre ser considerada.

O terceiro ponto de discordância entre o modelo desenvolvido por Lanteigne e o nosso modelo não requer maiores explicações: é óbvio que um modelo genérico desenvolvido para a análise de *risers* flexíveis deve levar em conta os carregamentos distribuídos devidos à pressão interna (se tubo flexível) e/ou externa (em qualquer caso). No caso dos condutores analisados por Lanteigne tais carregamentos inexistem (não há pressão interna) ou podem ser desprezados (no caso da pressão externa).

A última ressalva com relação ao modelo apresentado por Lanteigne diz respeito à forma dos fios empregados nas camadas helicoidais: todos têm seção transversal

circular. Já nas camadas helicoidais encontradas em *risers* flexíveis há uma grande variedade nas seções transversais dos tendões, que podem assumir formas bastante complexas (como no caso dos perfis encontrados nas carcaças intertravadas e nos reforços de pressão) até formas mais simples (como no caso das armaduras de tração, que geralmente possuem seções transversais retangulares).

É importante destacar ainda que, no modelo apresentado por Lanteigne, foram desprezadas as variações (devidas aos carregamentos impostos) dos ângulos de assentamento das camadas helicoidais, bem como as variações de curvatura e de torção do eixo central dos fios que constituem tais camadas: a única deformação considerada nos fios refere-se à deformação axial medida na direção tangente ao eixo central dos fios. O autor alega que os resultados obtidos, quer tais variações fossem ou não consideradas, seriam praticamente os mesmos, justificando esta simplificação através da comparação entre resultados analíticos de modelos apresentados por outros autores (Knapp [34] e McConnel & Zemke). No nosso modelo, foram consideradas tanto as variações dos ângulos de assentamento das camadas helicoidais quanto as variações de curvatura e torção associadas aos eixos centrais destas camadas, conforme podemos ver no Anexo C do presente trabalho. As justificativas para este trabalho adicional são, basicamente:

- i) completude do modelo: principalmente no que tange ao carregamento de flexão, levantamos dúvidas quanto ao caráter simplificador desta última hipótese adotada por Lanteigne, a qual foi justificada através de comparações entre resultados analíticos e experimentais, desenvolvidos por outros autores *e que não levavam em conta a flexão*. Consideramos bastante provável que, para carregamentos envolvendo a flexão de *risers*, o efeito das variações nos ângulos de assentamento, nas curvaturas e na torção possa ser significativo na resposta da estrutura, de tal forma que tais variações devam ser consideradas;
- ii) importância na análise da vida útil do *riser*: as variações consideradas são particularmente importantes na determinação dos deslocamentos relativos entre tendões pertencentes a camadas adjacentes, quando o *riser* está submetido a carregamentos cíclicos de flexão. A amplitude destes deslocamentos está

associada, por sua vez, ao desgaste dos tendões e, portanto, diretamente ligada à estimativa de vida útil da estrutura, que é parâmetro muito importante no projeto.

Os modelos propostos por Witz; Tan [86, 87] foram apresentados em 1992 e se constituem, na verdade, em dois modelos analíticos “independentes” um do outro: o primeiro modelo sendo utilizado para prever a resposta de *risers* flexíveis sob carregamentos axissimétricos (tração, torção e pressões interna e externa), enquanto o segundo é utilizado para prever a resposta de *risers* flexíveis sob carregamento de flexão pura. Os principais problemas que encontramos nestes modelos são:

- i) os modelos não consideram a ação combinada de flexão e outros carregamentos (ex: flexo-tração, flexo-torção, etc);
- ii) no modelo de flexão pura apresentado pelos autores (ver Witz; Tan [87]) há um equívoco de interpretação referente aos comprimentos de arco², que leva a uma relação incorreta entre o momento fletor suportado por uma camada helicoidal e a curvatura imposta ao *riser*;
- iii) ainda com relação ao modelo de flexão pura, a determinação das variações de curvatura e torção associadas ao eixo central dos tendões não é feita de forma rigorosa, restando dúvidas sobre a validade das relações obtidas. Além disto, as direções principais de flexo-torção da seção transversal do tendão são confundidas com as direções principais de curvatura do eixo central do tendão, o que merece uma análise mais aprofundada.

Cumpramos ressaltar que o nosso modelo considera a ação combinada entre carregamentos axissimétricos e de flexão, sendo, porém, um modelo inicial que deverá ser melhorado em suas futuras versões. Problemas como os encontrados no modelo de Witz; Tan [87] (particularmente os dois últimos citados) não são encontrados em nosso modelo, fundamentado que é em uma análise bastante

² Os autores confundem o comprimento de arco associado ao eixo central do tendão com o comprimento de arco associado ao eixo central do *riser*, levando a uma incorreção na fórmula (8) apresentada por eles (ver Witz; Tan [87], pg. 235-236).

rigorosa, envolvendo a geometria das camadas helicoidais, apresentada no Anexo C do presente trabalho.

Por seu turno, no modelo apresentado por Féret; Bournazel [24], em 1987, os autores apresentam uma proposta para a determinação das tensões e das deformações nas diversas camadas de um tubo flexível submetido a carregamentos axissimétricos (tração, torção pressões interna e externa), sendo contudo tal proposta basicamente descritiva (as equações gerais não são deduzidas). Um modelo simplificado, baseado em diversas hipóteses mais restritivas, também é apresentado, incluindo algumas fórmulas aproximadas para uma “verificação rápida” do comportamento do tubo sob carregamentos axissimétricos. Os autores apresentam ainda um estudo acerca do comportamento de um tubo flexível submetido a flexão pura. Especificamente, com relação a este modelo de flexão pura, podemos dizer que os resultados obtidos pelos autores são os mesmos apresentados por Féret; Leroy; Estrier [25] em 1995. Na verdade, as informações apresentadas nos dois artigos se complementam, sendo possível verificar que várias das expressões apresentadas num artigo também são encontradas no outro. Contudo, apenas através da leitura atenta dos dois artigos pode-se chegar a conclusões que permitem recuperar a provável linha de raciocínio dos autores. As principais críticas que devem ser feitas com relação aos modelos apresentados nestes dois artigos são as seguintes:

- i) os artigos omitem diversas informações acerca da obtenção das expressões apresentadas e das hipóteses que estão por trás das mesmas (principalmente com relação às hipóteses admitidas nos modelos de flexão pura);
- ii) os modelos de flexão pura tratam basicamente do estudo do comportamento das camadas helicoidais, não apresentando um modelo para o *riser* como um todo (não há, por exemplo, uma proposta para a determinação da rigidez flexional do tubo);
- iii) os modelos apresentados também não consideram a ação combinada de flexão com outros carregamentos (como flexo-tração, flexo-torção, etc).

Nos itens seguintes serão apresentados dois modelos analíticos para a análise de *risers* flexíveis submetidos a carregamentos combinados (incluindo a flexão). Estes modelos serão baseados em duas abordagens clássicas encontradas na literatura e associadas às seguintes hipóteses (mutuamente exclusivas):

- i) Hipótese de não escorregamento³ entre as camadas que constituem o *riser* e
- ii) Hipótese de escorregamento³ total entre as camadas que constituem o *riser*.

Obviamente, poderíamos propor um caso intermediário no qual o escorregamento³ entre camadas ocorre de forma parcial. Contudo, um modelo com tal característica precisaria incorporar o efeito do atrito interno entre as superfícies de contato das camadas adjacentes, aumentando de forma considerável o escopo deste trabalho. Restringiremos nosso estudo, portanto, apenas aos dois modelos acima citados. Os resultados analíticos obtidos através destes dois modelos serão posteriormente comparados com resultados experimentais obtidos na literatura e as eventuais diferenças encontradas serão discutidas.

5.1 Modelo na ausência de escorregamento entre as camadas

A análise do *riser* submetido a carregamentos combinados de qualquer natureza será feita através de uma superposição de efeitos: consideraremos que, inicialmente, o *riser* seja submetido somente a carregamentos de natureza axissimétrica (tração, torção, pressões externa e interna), dando origem a uma configuração deformada intermediária, a qual é designada configuração deformada Σ_2 ⁴. Sobre tal configuração intermediária serão considerados os esforços adicionais de flexão, levando a uma nova configuração deformada do *riser*, a que chamaremos Σ_3 . Admitiremos que o raio de curvatura $\rho = 1/K$ imposto ao eixo central do *riser* seja constante. Sem perda de generalidade, podemos considerar também que a flexão ocorre em torno do eixo fixo *OX*, como ilustrado na figura 5.1.

³ Escorregamento decorrente da flexão imposta ao *riser*.

⁴ A configuração inicial (não-deformada) do *riser* é designada Σ_1 e compreende um trecho reto do *riser*, sem qualquer carregamento aplicado a ele.

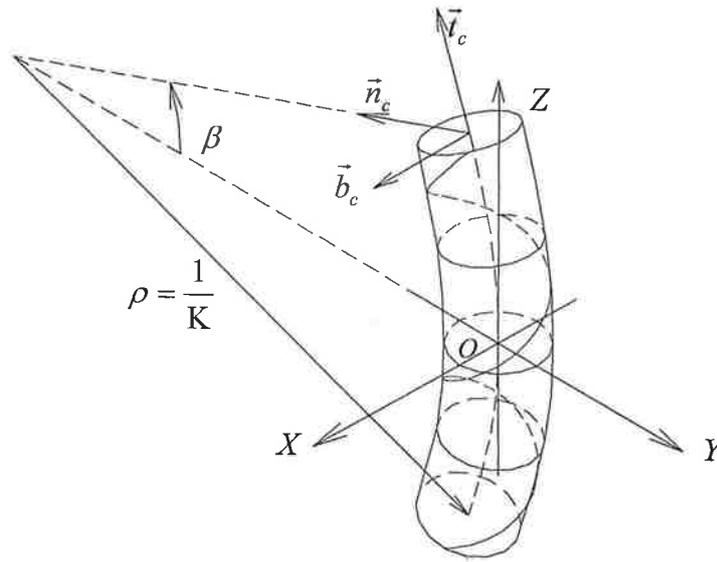


Figura 5.1: Configuração deformada Σ_3 do riser.

A figura 5.1 mostra ainda o triedro de Frenet $(\vec{t}_c, \vec{n}_c, \vec{b}_c)$ ⁵ associado à curva formada pelos pontos do eixo central do *riser* (representado pela linha pontilhada passando pela origem do sistema de referência $OXYZ$). Pela figura é fácil observar que as componentes dos versores \vec{t}_c , \vec{n}_c e \vec{b}_c são dadas por (segundo a base de versores $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ associada ao sistema de coordenadas $OXYZ$):

$$\begin{aligned}\vec{t}_c &= (0, -\text{sen } \beta, \text{cos } \beta) \\ \vec{n}_c &= (0, -\text{cos } \beta, -\text{sen } \beta) \\ \vec{b}_c &= (1, 0, 0)\end{aligned}\quad (5.1)$$

onde: $\beta = \frac{K \cdot R_2 \cdot (\theta_2 - \theta_o)}{\tan \alpha_2}$ (conforme equação (c.63), Anexo C)

Antes de prosseguirmos, é preciso explicar com maior detalhe o que se quer dizer com o termo “ausência de escorregamento”: na primeira etapa, quando apenas os esforços axissimétricos são considerados, admitimos a possibilidade de um

⁵ Utilizaremos o subscrito “c” quando nos referirmos aos versores associados ao triedro de Frenet do eixo central do tubo/cabo, para diferenciar da notação empregada para os versores associados ao triedro de Frenet do eixo central do tendão (sem o subscrito “c”).

escorregamento “parcial” de tal forma que, por exemplo, os ângulos de assentamento dos tendões nas camadas helicoidais têm seus valores alterados; contudo, conforme já explicado no cap. 3, admitimos que todas as camadas estão submetidas às mesmas componentes de deformação do *riser* (um alongamento ΔL e uma rotação $\Delta\varphi$). Na segunda etapa, ao submetermos o *riser* à flexão, admitiremos que todas as camadas estejam como que unidas umas às outras, de tal forma que qualquer escorregamento entre as mesmas não seja possível. Dentro desta hipótese, os ângulos de assentamento dos tendões ficam preservados e, o que é mais importante, a deformação axial média em um dado tendão deixa de ser uniforme ao longo do comprimento de arco associado ao eixo central do tendão.

Tendo em vista as particularidades na concepção estrutural de cada uma das camadas que compõem um *riser* flexível típico, as análises para as camadas helicoidais e para as camadas poliméricas serão feitas separadamente. Os itens a seguir tratam destas análises.

5.1.1 Análise das camadas helicoidais

Neste sub-item serão apresentadas relações entre os esforços suportados por uma camada helicoidal genérica e as componentes de deformação impostas à camada. As componentes de deformação a serem consideradas são:

- alongamento da camada ($\Delta L / L_1$);
- rotação da camada por unidade de comprimento do *riser* ($\Delta\varphi / L_1$);
- variação do raio médio da camada ($\Delta R / R_1$);
- variação do ângulo de assentamento dos tendões da camada considerada ($\Delta\alpha_i$)⁶;
- curvatura importa ao *riser* (K).

⁶ Deve-se observar que a variação do ângulo de assentamento pode ser escrita como função das outras componentes de deformação, conforme mostrado no anexo C do presente trabalho (equação (c.49)).

Já os esforços suportados pela camada serão:

- força de tração (F_i);
- momento de torção ($M_{t,i}$);
- momento fletor ($M_{f,i}$).

onde o subscrito “ i ” diz respeito à posição da camada helicoidal com relação às demais camadas (helicoidais ou plásticas).

Naturalmente, os esforços F_i , $M_{t,i}$ e $M_{f,i}$ devem ser entendidos como as respectivas contribuições da camada helicoidal considerada aos esforços solicitantes resistidos pelo *riser* como um todo. Assim, considerando um *riser* com n camadas helicoidais e m camadas plásticas, teremos:

$$F = \sum_{i=1}^{n+m} F_i = \text{força total de tração aplicada ao riser};$$

$$M_t = \sum_{i=1}^{n+m} M_{t,i} = \text{momento de torção aplicado ao riser};$$

$$M_f = \sum_{i=1}^{n+m} M_{f,i} = \text{momento fletor aplicado ao riser}.$$

Para a determinação dos esforços F_i , $M_{t,i}$ e $M_{f,i}$ suportados pela camada precisamos conhecer os esforços atuantes na seção transversal de cada tendão pertencente à camada. Sejam, assim, os esforços T_{ij} , $M_{x,ij}$, $M_{y,ij}$ e $M_{t,ij}$ definidos como (ver figura 5.2):

T_{ij} : força normal atuante no j -ésimo tendão da i -ésima camada helicoidal;

$M_{x,ij}$: momento fletor (segundo eixo principal de flexão x) atuante no j -ésimo tendão da i -ésima camada helicoidal;

$M_{y,ij}$: momento fletor (segundo eixo principal de flexão y) atuante no j -ésimo tendão da i -ésima camada helicoidal;

$M_{t,ij}$: momento de torção atuante no j -ésimo tendão da i -ésima camada helicoidal.

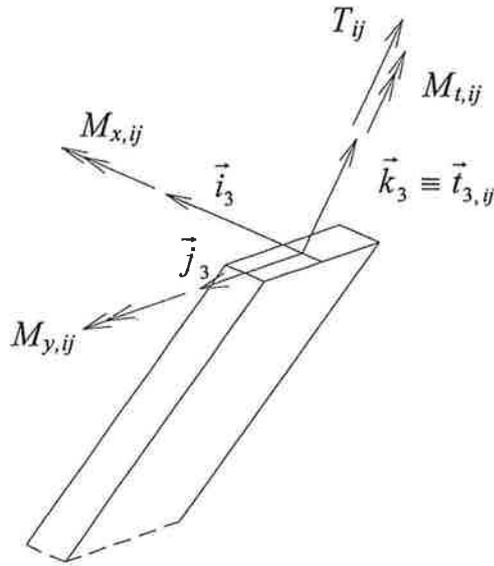


Figura 5.2: Esforços solicitantes na seção transversal de um tendão numa camada helicoidal genérica (configuração deformada Σ_3).

Cálculo da força de tração F_i suportada por uma camada helicoidal:

A força de tração suportada pela camada helicoidal é dada por (ver figuras 5.1 e 5.2):

$$F_i = \sum_{j=1}^{n_i} (T_{ij} \cdot \vec{t}_{ij}) \cdot \vec{t}_c \quad (5.2)$$

onde:

n_i = número de tendões da camada helicoidal considerada (“ i -ésima camada”);

\vec{t}_{ij} =versor tangente ao eixo central do tendão na configuração deformada Σ_3 ;

\vec{t}_c =versor tangente ao eixo central do *riser* na configuração deformada Σ_3 ;

A força normal atuante na seção transversal do tendão será calculada a partir da relação (ver equações (b.27), Anexo B):

$$T_{ij} \cong (EA)_i \cdot \bar{\varepsilon}_{ij} \quad (5.3)$$

onde $(EA)_i$ representa a rigidez axial do tendão e $\bar{\varepsilon}_{ij}$ é o alongamento médio medido na direção do eixo central do tendão na condição deformada Σ_3 .

Deve-se observar que a equação (5.3) considera que o estado de tensão nos pontos do tendão pode ser aproximado por um estado uniaxial de tensão, sendo o alongamento $\bar{\varepsilon}_{ij}$ decorrente apenas das tensões atuantes segundo a direção tangente ao eixo central do tendão. Despreza-se, assim, o efeito das pressões de contato (exercidas pelas camadas adjacentes) no alongamento $\bar{\varepsilon}_{ij}$.

O alongamento $\bar{\varepsilon}_{ij}$, na condição deformada Σ_3 , é dado por (ver eq. (c.83), Anexo C):

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = (\sin^2 \alpha_1) \frac{\Delta R}{R_1} + (\sin \alpha_1 \cdot \cos \alpha_1) R_1 \frac{\Delta \varphi}{L_1} + (\cos^2 \alpha_1) \frac{\Delta L}{L_1} + K R_1 \cos^2 \alpha_1 \cdot \sin \theta_1$$

As componentes do versor tangente ao eixo central do *riser* (\vec{t}_c), na configuração Σ_3 , são dadas pela primeira das equações (5.1). Já as componentes do versor tangente ao eixo central do tendão (\vec{t}_{ij}), na mesma condição deformada Σ_3 , são dadas por (ver equação (c.71), Anexo C):

$$\vec{t}_{ij} = t_{ij,x} \cdot \vec{e}_x + t_{ij,y} \cdot \vec{e}_y + t_{ij,z} \cdot \vec{e}_z \quad (5.4)$$

sendo:

$$t_{ij,x} = -[\sin \theta_2 \cdot \sin \alpha_2] \cdot \frac{1}{\xi}$$

$$t_{ij,y} = [\cos \theta_2 \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha_2 - (1 + \eta \cdot \sin \theta_2) \cdot \sin \beta \cdot \cos \alpha_2] \cdot \frac{1}{\xi}$$

$$t_{ij,z} = [\cos \theta_2 \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha_2 + (1 + \eta \cdot \sin \theta_2) \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha_2] \cdot \frac{1}{\xi}$$

e

$$\beta = \frac{K \cdot R_2 \cdot (\theta_2 - \theta_o)}{\tan \alpha_2} \quad (\text{conforme eq. (c.63), Anexo C}),$$

$$\eta = K \cdot R_2 \quad (\text{conforme eq. (c.67), Anexo C}) \text{ e}$$

$$\xi = [\sin^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_2 \cdot (1 + \eta \cdot \sin \theta_2)^2]^{1/2} \quad (\text{conforme eq. (c.68), anexo C})$$

Calculando o produto escalar entre os versores \vec{t}_{ij} e \vec{t}_c , mostra-se que a relação (5.2) fica:

$$F_i = \sum_{j=1}^{n_i} \frac{T_{ij} \cdot \cos \alpha_2 \cdot (1 + \eta \cdot \sin \theta_2)}{\xi}$$

Substituindo as expressões de T_{ij} , η e ξ em F_i e lembrando ainda que:

$$\theta_2 = \theta_1 + \frac{\Delta\varphi \cdot R_1 \cdot (\theta_1 - \theta_0)}{L_1 \cdot \tan \alpha_1} \quad (\text{conforme eq. (c.39), Anexo C})$$

$$\theta_1 - \theta_0 = \frac{z_1 \cdot \tan \alpha_1}{R_1} \quad (\text{conforme eq. (c.1), Anexo C})$$

$$\theta_0 = \frac{2\pi \cdot j}{n_i} \quad (1 \leq j \leq n_i)$$

$$R_2 = R_1 + \Delta R \quad \text{e} \quad \alpha_2 = \alpha_1 + \Delta \alpha$$

teremos, linearizando as parcelas de F_i (em torno de $K=0$, $\Delta\alpha=0$, $\Delta R=0$, $\Delta L=0$ e $\Delta\varphi=0$) antes de procedermos ao somatório, o seguinte resultado final⁷:

$$F_i = n_i \cdot (EA)_i \cdot \left[(\cos^3 \alpha_i) \cdot \frac{\Delta L}{L_1} + (R_i \cdot \sin \alpha_i \cdot \cos^2 \alpha_i) \cdot \frac{\Delta\varphi}{L_1} + (\sin^2 \alpha_i \cdot \cos \alpha_i) \cdot \frac{\Delta R_i}{R_i} \right] \quad (5.5)$$

Cálculo do momento de torção $M_{t,i}$ suportado por uma camada helicoidal:

O momento de torção suportado pela camada helicoidal é (ver figuras 5.1 e 5.2):

$$M_{t,i} = \sum_{j=1}^{n_i} \left(M_{x,ij} \cdot \vec{i}_3 + M_{y,ij} \cdot \vec{j}_3 + M_{t,ij} \cdot \vec{k}_3 + T_{ij} \cdot R_{2,i} \cdot \vec{j}_3 \right) \cdot \vec{t}_c \quad (5.6)$$

As componentes dos versores \vec{i}_3 , \vec{j}_3 e $\vec{k}_3 \equiv \vec{t}_{3,ij}$ estão dadas no Anexo C (equações (c.87), (c.89) e (c.88), respectivamente), sendo desnecessária sua repetição neste item. As componentes do versor \vec{t}_c também já foram fornecidas (ver equações (5.1)) e o cálculo de T_{ij} já foi feito (ver equação (5.3)). Falta, portanto, apenas calcularmos os momentos $M_{x,ij}$, $M_{y,ij}$ e $M_{t,ij}$. Tais conjugados podem ser estimados através das seguintes relações⁸:

⁷ Os valores dos parâmetros R_i e α_i presentes na equação correspondem àqueles associados à condição inicial (não-deformada) da camada (Σ_1).

⁸ A dedução das duas primeiras relações podem ser encontradas no Anexo B (equações (b.27)).

$$M_{x,ij} \cong EI_x \cdot (\Delta\kappa_x)_{ij}$$

$$M_{y,ij} \cong EI_y \cdot (\Delta\kappa_y)_{ij}$$

$$M_{t,ij} \cong GI_t \cdot (\Delta\kappa_t)_{ij}$$

onde as variações $(\Delta\kappa_x)_{ij}$, $(\Delta\kappa_y)_{ij}$ e $(\Delta\kappa_t)_{ij}$ podem ser obtidas a partir das equações (c.16), (c.92) e (c.95) do Anexo C.

Calculando o produto escalar entre os versores presentes na equação (5.6) mostra-se que a relação fica:

$$M_{t,i} = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} (M_{y,ij} \cdot \text{sen } \alpha_2 + M_{t,ij} \cdot \cos \alpha_2 (1 + \eta \cdot \text{sen } \theta_2) + T_{ij} \cdot R_{2,j} \cdot \text{sen } \alpha_2)}{\xi}$$

Utilizando, enfim, as equações constitutivas pertinentes, bem como as expressões de η , ξ e outras variáveis (conforme procedimento descrito no cálculo de F_i) e linearizando as parcelas de $M_{t,i}$ (em torno de $K=0$, $\Delta\alpha=0$, $\Delta R=0$, $\Delta L=0$ e $\Delta\varphi=0$) antes de procedermos ao somatório, encontraremos o seguinte resultado final⁹:

$$\begin{aligned} M_{t,i} = & \frac{n_i}{R_i} \cdot [(GI_t)_i \cdot \cos \alpha_i \cdot \cos(2\alpha_i) + (EI_y)_i \cdot \text{sen } \alpha_i \cdot \text{sen}(2\alpha_i)] \Delta\alpha_i + \\ & + [n_i (EA)_i R_i \text{sen } \alpha_i \cos^2 \alpha_i] \frac{\Delta L}{L} + [n_i (EA)_i R_i^2 \cdot \cos \alpha_i \cdot \text{sen}^2 \alpha_i] \frac{\Delta\varphi}{L} + \\ & + n_i \text{sen } \alpha_i \left[(EA)_i \text{sen}^2 \alpha_i - \frac{(GI_t)_i \cos^2 \alpha_i}{R_i^2} - \frac{(EI_y)_i \text{sen}^2 \alpha_i}{R_i^2} \right] \cdot \Delta R_i \end{aligned} \quad (5.7)$$

Cálculo do momento fletor $M_{f,i}$ suportado por uma camada helicoidal:

O momento fletor suportado pela camada helicoidal é dado por (ver figuras 5.1 e 5.2):

$$M_{f,i} = \sum_{j=1}^{n_i} (M_{x,ij} \cdot \vec{j}_3 + M_{y,ij} \cdot \vec{j}_3 + M_{t,ij} \cdot \vec{k}_3 + T_{ij} \cdot R_{2,i} \cdot \vec{j}_3) \cdot \vec{b}_c \quad (5.8)$$

Calculando o produto escalar entre os versores presentes na equação (5.6) mostra-se que a relação fica:

⁹ Os valores dos parâmetros R_i e α_i presentes na equação correspondem àqueles associados à condição inicial (não-deformada) da camada (Σ_1).

$$M_{f,i} = \sum_{j=1}^{n_i} \left(-M_{x,ij} \cdot \cos \theta_2 + \frac{(M_{y,ij} + T_{ij} \cdot R_{2,i}) \cos \alpha_2 \sin \theta_2 (1 + \eta \cdot \sin \theta_2)}{\xi} - \frac{M_{t,ij} \cdot \sin \theta_2 \sin \alpha_2}{\xi} \right)$$

Procedendo agora da mesma forma como descrito no cálculo de $M_{t,i}$, encontraremos o seguinte resultado final¹⁰:

$$M_{f,i} = \frac{K \cdot n_i \cdot \cos \alpha_i}{2} \cdot \left[2(GI_t)_i \cdot \cos^2 \alpha_i \sin^2 \alpha_i + (EI_x)_i \cdot (2 - \cos^2 \alpha_i) + (EI_y)_i \cdot \cos^2 \alpha_i \cdot (2 \cos^2 \alpha_i - 1) + (EA)_i \cdot \cos^2 \alpha_i \cdot R_i^2 \right] \quad (5.9)$$

Deve-se observar que, devido tanto às hipóteses quanto às aproximações feitas, o momento fletor resistido pela camada irá depender apenas da curvatura K imposta ao *riser*.

5.1.2 Análise das camadas plásticas

Neste sub-item serão apresentadas relações entre os esforços suportados por uma camada plástica genérica e as componentes de deformação impostas à camada. Em se tratando de camadas plásticas, as componentes de deformação a serem consideradas são:

- alongamento da camada ($\Delta L / L_1$);
- rotação da camada por unidade de comprimento do *riser* ($\Delta \varphi / L_1$);
- variação do raio médio da camada ($\Delta R_i / R_i$);
- variação da espessura da camada (Δt_i);
- curvatura imposta ao *riser* (K).

Já os esforços suportados pela camada serão:

- força normal (F_i);
- momento de torção ($M_{t,i}$);
- momento fletor ($M_{f,i}$);

¹⁰ Os valores dos parâmetros R_i e α_i presentes na equação correspondem àqueles associados à condição inicial (não-deformada) da camada (Σ_1).

- pressão interna aplicada à camada;
- pressão externa aplicada à camada.

Deve-se ressaltar que a pressão interna aplicada à camada pode ser devida tanto ao contato com a camada interna adjacente à camada plástica considerada (pressão de contato) quanto à ação de fluidos internos ao *riser*, caso as camadas internas não sejam estanques. Um raciocínio análogo deve ser considerado para o cálculo da pressão externa aplicada à camada plástica. Admitiremos que a distribuição destas pressões ao longo das superfícies interna e externa da camada seja uniforme e que não haja ovalização da seção transversal em decorrência dos carregamentos impostos. Conseqüentemente, as variações de espessura e de raio médio das camadas podem ser consideradas uniformes em toda a seção transversal.

Se considerarmos pequenas deformações, podemos admitir ainda que as equações empregadas no capítulo 3 para as camadas plásticas continuam válidas. Tais equações relacionam:

- a) a variação de espessura da camada (Δt_i) com o alongamento do *riser* ($\Delta L / L_1$) e as pressões interna e externa atuantes na camada;
- b) a variação do raio médio da camada (ΔR_i) com o alongamento do *riser* ($\Delta L / L_1$) e as pressões interna e externa atuantes na camada;
- c) a força normal atuante na camada (F_i) com o alongamento do *riser* ($\Delta L / L_1$) e as pressões interna e externa atuantes na camada;
- d) o momento de torção suportado pela camada ($M_{t,i}$) com a rotação por unidade de comprimento do *riser* ($\Delta \varphi / L_1$).

Considerando agora a flexão do *riser*, admitiremos a seguinte relação (clássica) entre o momento fletor suportado por uma camada plástica ($M_{f,i}$) e a curvatura imposta ao eixo central (K):

$$M_{f,i} = (EI)_i \cdot K \quad (5.10)$$

onde $(EI)_i$ representa a rigidez flexional da camada plástica.

5.1.3 Solução do problema para carregamentos quaisquer

Consideremos um *riser* flexível genérico possuindo n camadas helicoidais e m camadas plásticas. A identificação e o número de incógnitas do problema estão dados na tabela 5.1. Nesta tabela, o subscrito i está relacionado ao número da camada, assumindo valores que vão de $i = 1$ (camada mais interna) até $i = n + m$ (camada mais externa). As incógnitas $p_{c,i}$ e g_i estão relacionadas, respectivamente, à pressão de contato e à folga (afastamento) entre a i -ésima e $(i + 1)$ -ésima camadas adjacentes e, nestes casos, i assume valores que vão de 1 até $n + m - 1$.

Tabela 5.1: Incógnitas do problema.

Identificação da incógnita	Símbolo	Número de incógnitas
Pressão de contato (ou folga) entre a i -ésima e $(i + 1)$ -ésima camadas	$p_{c,i}$ (g_i)	$n + m - 1$
Força axial suportada pela camada	F_i	$n + m$
Momento de torção suportado pela camada	$M_{t,i}$	$n + m$
Momento fletor suportado pela camada	$M_{f,i}$	$n + m$
Varição do raio médio da i -ésima camada	ΔR_i	$n + m$
Varição da espessura da i -ésima camada	Δt_i	$n + m$
Varição do ângulo de assentamento, se a camada for helicoidal	$\Delta \alpha_i$	1
Deformação axial do <i>riser</i>	$\Delta L/L$	1
Rotação do <i>riser</i> por unidade de comprimento	$\Delta \varphi/L$	1
Curvatura do eixo central do <i>riser</i>	K	1

Total de incógnitas:

$$7n + 6m + 2$$

Com relação ao carregamento aplicado ao *riser*, admitiremos que ele consista em:

- i) uma força axial (F),
- ii) um momento de torção (M_t),
- iii) um momento fletor (M_f) e
- iv) pressões interna (p_{in}) e externa (p_o).

Alternativamente, poderíamos considerar deslocamentos (e/ou rotações) aplicados às extremidades do *riser* como outras formas de carregamento (como ocorre nos ensaios realizados em *risers* para avaliação de suas propriedades mecânicas). Ou, ainda, uma combinação destas possibilidades pode ser considerada se, por exemplo, quisermos analisar o comportamento da estrutura sob a ação de um força axial, tendo suas extremidades impedidas de girarem (o tratamento de casos como estes requer apenas uma mudança de incógnitas, o que pode ser feito sem grandes dificuldades).

Para calcularmos as incógnitas do problema é necessário obtermos um sistema de equações com $7n + 6m + 2$ equações independentes. Como já visto no capítulo 3, tal sistema pode ser obtido através de equações de equilíbrio, equações constitutivas e relações geométricas. A tabela 5.2 e os parágrafos subseqüentes mostram um sistema possível de equações que pode ser utilizado para a determinação das incógnitas assinaladas.

Tabela 5.2: Sistema para determinação das incógnitas.

Relação entre	Aplicável à:	Número de equações
$\Delta R_i, \Delta R_{i+1}, \Delta t_i, \Delta t_{i+1}, g_i$	todas as camadas, exceto a última	$n + m - 1$
$F_i, \Delta L/L, p_{c,i-1}, p_{c,i}$	camadas plásticas	m
$M_{t,i}, \Delta \phi/L$	camadas plásticas	m
$M_{b,i}, K$	camadas plásticas	m
$\Delta R_i, \Delta L/L, p_{c,i-1}, p_{c,i}$	camadas plásticas	m
$\Delta t_i, \Delta L/L, p_{c,i-1}, p_{c,i}$	camadas plásticas	m
$F_i, \Delta L/L, \Delta \phi/L, \Delta R_i$	camadas helicoidais	n
$M_{t,i}, \Delta \alpha, \Delta R_i, \Delta L/L, \Delta \phi/L$	camadas helicoidais	n
$M_{b,i}, K$	camadas helicoidais	n
$p_{c,i-1}, p_{c,i}, \Delta L/L, \Delta \phi/L, \Delta R_i$	camadas helicoidais	n
$\Delta t_i, \Delta L/L, \Delta \phi/L, \Delta R_i, p_{c,i-1}, p_{c,i}$	camadas helicoidais	n
$\Delta \alpha, \Delta L/L, \Delta \phi/L, \Delta R_i$	camadas helicoidais	n
$F_i, M_{t,i}, M_{b,i}$	equilíbrio global	3

Total de equações:

$$7n + 6m + 2$$

Antes de explicitarmos as equações propostas para a solução do problema, vamos fazer um breve resumo de todas as hipóteses admitidas até o momento. São elas:

- (a) todas as seções transversais e todas as camadas possuem a mesma torção por unidade de comprimento do *riser* ($\Delta\varphi/L$) e o mesmo alongamento ($\Delta L/L$);
- (b) na configuração inicial Σ_1 (não-deformada) do *riser* não há folgas iniciais entre quaisquer camadas adjacentes;
- (c) não há contato entre tendões adjacentes de uma mesma camada helicoidal;
- (d) todos os materiais são homogêneos, isotrópicos e têm comportamento elástico linear;
- (e) todas as deformações são bastante pequenas, se comparadas à unidade (há linearidade geométrica);
- (f) a ovalização do *riser* devida às cargas aplicadas pode ser desprezada;
- (g) admite-se que as variações de espessura e de raio médio das camadas sejam uniformes para cada camada considerada;
- (h) para os tendões das camadas helicoidais, admite-se que uma das direções principais de flexão da seção transversal seja sempre ortogonal à superfície sobre a qual o tendão se assenta (que é a superfície de contato formada pelas camadas adjacentes);
- (i) não há escorregamento¹¹ relativo entre as camadas adjacentes devido a aplicação de esforços de flexão aplicados ao *riser*.

A seguir serão apresentadas as equações propostas para a solução do problema e indicadas na tabela 5.2. O primeiro conjunto de equações diz respeito a equações de compatibilidade de deslocamentos relacionando as variações de raio médio e de espessura com o afastamento (g_i) entre camadas adjacentes. Considerando as hipóteses (b), (f) e (g), podemos expressar estas equações de compatibilidade na forma:

$$\Delta R_{i+1} = \Delta R_i + \frac{1}{2}(\Delta t_{i+1} + \Delta t_i) + g_i \quad (5.11)$$

¹¹ A hipótese de escorregamento (total) será admitida no item 5.2.

O segundo conjunto de equações é aplicável para as camadas plásticas e relaciona a força axial suportada pela camada com a deformação axial do *riser* e com as pressões interna e externa aplicadas à camada. Utilizando as hipóteses (a), (b), (d), (e) e (f), e admitindo que a força axial suportada pela camada deve-se sobretudo aos carregamentos axissimétricos, mostra-se que (ver equação (3.26)):

$$\frac{F_i}{A_i} = E_i \left(\frac{\Delta L}{L} \right) + \left(1 - \frac{t_i}{2R_i} \right) \frac{\nu_i \cdot (2R_i - t_i) \cdot (p_{c,i-1} + \mu_{in} \cdot p_{in})}{2 \cdot t_i} - \left(1 + \frac{t_i}{2R_i} \right) \frac{\nu_i \cdot (2R_i + t_i) \cdot (p_{c,i} + \mu_o \cdot p_o)}{2 \cdot t_i} \quad (5.12)$$

As variáveis μ_{in} e μ_o , presentes na equação (5.12), são na verdade *flags* que retornam o valor “1” quando a camada plástica considerada é a primeira (última no caso de μ_o) camada estanque do *riser*. Nestes casos, deve-se acrescer à pressão de contato aplicada na superfície interna (ou externa) da camada a pressão interna (ou externa) aplicada ao *riser*. A equação (5.12) é obtida diretamente a partir das equações da Teoria da Elasticidade para vasos cilíndricos de parede espessa (ver anexo D).

Os dois conjuntos de equações seguintes relacionam, respectivamente, o momento de torção suportado pela camada plástica com a torção por unidade de comprimento do *riser* (eq. (5.13)), e o momento fletor suportado pela camada com a curvatura do *riser* (eq. (5.14)). Admitindo as hipóteses (d) e (e), podemos exprimir estas equações na seguinte forma:

$$M_{t,i} = (GI_t)_i \cdot \frac{\Delta \varphi}{L_i} \quad (5.13)$$

$$M_{f,i} = (EI)_i \cdot K \quad (5.14)$$

onde $(GI_t)_i$ e $(EI)_i$ representam, respectivamente, a rigidez torsional e flexional da camada.

As equações (5.15) e (5.16), a seguir, fornecem a variação de raio médio e de espessura das camadas plásticas em função da deformação axial do *riser* e das pressões interna e externa à camada plástica considerada. Utilizando as hipóteses (a),

(b), (d), (e) e (f), e admitindo que as variações de raio médio e de espessura das camadas plásticas devem-se principalmente aos carregamentos axissimétricos, podemos mostrar (através da Teoria da Elasticidade) que as seguintes relações são obtidas (ver equações (3.24) e (3.22)):

$$\Delta R_i = -\nu_i \cdot R_i \left(\frac{\Delta L}{L_1} \right) + \left(1 - \frac{t_i}{2R_i} \right) \left[\frac{(1-\nu_i^2) \cdot R_i^2}{t_i \cdot E_i} + \frac{\nu_i \cdot (1+\nu_i) \cdot R_i}{2 \cdot E_i} \right] (p_{c,i-1} + \mu_m \cdot p_m) - \left(1 + \frac{t_i}{2R_i} \right) \left[\frac{(1-\nu_i^2) \cdot R_i^2}{t_i \cdot E_i} - \frac{\nu_i \cdot (1+\nu_i) \cdot R_i}{2 \cdot E_i} \right] (p_{c,i} + \mu_o \cdot p_o) \quad (5.15)$$

$$\Delta t_i = -\nu_i \cdot t_i \left(\frac{\Delta L}{L_1} \right) - \left(1 - \frac{t_i}{2R_i} \right) \left[\frac{(1-\nu_i^2) \cdot t_i}{2E_i} + \frac{\nu_i \cdot (1+\nu_i) \cdot R_i}{E_i} \right] (p_{c,i-1} + \mu_m \cdot p_m) - \left(1 + \frac{t_i}{2R_i} \right) \left[\frac{(1-\nu_i^2) \cdot t_i}{2E_i} - \frac{\nu_i \cdot (1+\nu_i) \cdot R_i}{E_i} \right] (p_{c,i} + \mu_o \cdot p_o) \quad (5.16)$$

Consideremos, agora, as camadas helicoidais: os conjuntos de equações (5.17), (5.18) e (5.19), dados a seguir, fornecem respectivamente a força axial, o momento de torção e o momento fletor suportados por uma dada camada helicoidal em função das deformações impostas ao *riser* ($\Delta L/L_1, \Delta\varphi/L_1, K$), da variação do raio médio da camada (ΔR_i) e da variação do ângulo de assentamento ($\Delta\alpha_i$):

$$F_i = n_i \cdot (EA)_i \cdot \left[(\cos^3 \alpha_i) \cdot \frac{\Delta L}{L_1} + (R_i \cdot \sin \alpha_i \cdot \cos^2 \alpha_i) \cdot \frac{\Delta\varphi}{L_1} + (\sin^2 \alpha_i \cdot \cos \alpha_i) \cdot \frac{\Delta R_i}{R_i} \right] \quad (5.17)$$

$$M_{t,i} = \frac{n_i}{R_i} \cdot \left[(GI_t)_i \cdot \cos \alpha_i \cdot \cos(2\alpha_i) + (EI_y)_i \cdot \sin \alpha_i \cdot \sin(2\alpha_i) \right] \Delta\alpha_i + \left[n_i (EA)_i R_i \sin \alpha_i \cos^2 \alpha_i \right] \frac{\Delta L}{L_1} + \left[n_i (EA)_i R_i^2 \cdot \cos \alpha_i \cdot \sin^2 \alpha_i \right] \frac{\Delta\varphi}{L_1} + n_i \sin \alpha_i \left[(EA)_i \sin^2 \alpha_i - \frac{(GI_t)_i \cos^2 \alpha_i}{R_i^2} - \frac{(EI_y)_i \sin^2 \alpha_i}{R_i^2} \right] \Delta R_i \quad (5.18)$$

$$M_{f,i} = \frac{K \cdot n_i \cdot \cos \alpha_i}{2} \cdot \left[2(GI_t)_i \cdot \cos^2 \alpha_i \sin^2 \alpha_i + (EI_x)_i \cdot (2 - \cos^2 \alpha_i) + (EI_y)_i \cdot \cos^2 \alpha_i \cdot (2\cos^2 \alpha_i - 1) + (EA)_i \cdot \cos^2 \alpha_i \cdot R_i^2 \right] \quad (5.19)$$

A equação seguinte resulta das equações de equilíbrio para as camadas helicoidais e relaciona a diferença entre as pressões de contato aplicadas à camada com as deformações impostas ao *riser* ($\Delta L/L_1, \Delta\phi/L_1$) e com a variação de raio médio da camada (ΔR_i):

$$(p_{c,i} - p_{c,i-1}) \cdot b_i = - \left[\frac{E_i A_i \sin^2 \alpha_i \cos^2 \alpha_i}{R_i} \right] \frac{\Delta L}{L_1} - \left[E_i A_i \sin^3 \alpha_i \cos \alpha_i \right] \frac{\Delta \phi}{L_1} - \left[\frac{E_i A_i \sin^4 \alpha_i}{R_i^2} \right] \Delta R_i \quad (5.20)$$

onde b_i representa a largura do tendão. A equação (5.20) desconsidera o efeito da flexão imposta ao *riser*/cabo na diferença de pressões, admitindo que a principal contribuição ao equilíbrio provém dos carregamentos axissimétricos. É, portanto, uma equação aproximada.

A equação (5.21) fornece uma relação aproximada para avaliar a variação de espessura das camadas helicoidais em função das pressões de contato exercidas pelas camadas adjacentes, das deformações impostas ao *riser* ($\Delta L/L_1, \Delta\phi/L_1$) e da variação de raio médio da camada (ΔR_i):

$$\Delta t_i = - \frac{t_i}{2E_i} \cdot (p_{c,i} + p_{c,i-1}) - (v_i t_i \cos^2 \alpha_i) \frac{\Delta L}{L_1} - (v_i t_i R_i \sin \alpha_i \cos \alpha_i) \frac{\Delta \phi}{L_1} - \left(\frac{v_i t_i \sin^2 \alpha_i}{R_i} \right) \Delta R_i \quad (5.21)$$

O último conjunto de equações para as camadas helicoidais relaciona a variação do ângulo de assentamento da camada ($\Delta \alpha_i$) com as deformações impostas ao *riser* ($\Delta L/L_1, \Delta\phi/L_1$) e com a variação do raio médio da camada (ΔR_i):

$$\Delta \alpha_i = - (\sin \alpha_i \cdot \cos \alpha_i) \frac{\Delta L}{L_1} + (\cos^2 \alpha_i \cdot R_i) \frac{\Delta \phi}{L_1} + \left(\frac{\sin \alpha_i \cdot \cos \alpha_i}{R_i} \right) \Delta R_i \quad (5.22)$$

Deve-se ressaltar que a variação do ângulo de assentamento dada pela equação (5.22) deve-se somente ao carregamento axissimétrico aplicado ao *riser*, uma vez que este modelo admite a hipótese de não-escorregamento dos tendões devido à flexão. Assim, a variação do ângulo de assentamento é admitida uniforme ao longo do comprimento de arco do tendão.

As últimas três equações representam equações de equilíbrio global garantindo equilíbrio de forças axiais, momento de torção e momento fletor para o *riser* como um todo (i.é, considerando todas suas camadas). Tais equações são dadas por:

$$\sum_{i=1}^{n+m} F_i = F \quad (5.23)$$

$$\sum_{i=1}^{n+m} M_{t,i} = M_t \quad (5.24)$$

$$\sum_{i=1}^{n+m} M_{f,i} = M_f \quad (5.25)$$

É fácil observar que estes treze grupos de equações constituem um sistema linear de $7n + 6m + 2$ equações que pode ser resolvido para todas as incógnitas apontadas na tabela 5.1. Contudo, deve-se ressaltar que os resultados obtidos através da solução deste sistema serão válidos apenas no caso de as hipóteses (a) a (i) adotadas não estiverem sendo violadas.

5.2 Modelo com a hipótese de escorregamento total entre as camadas

Como o próprio nome diz, este modelo admite a hipótese de escorregamento total entre as camadas que constituem o *riser/cabo*, incluindo-se neste processo o escorregamento dos tendões das armaduras helicoidais, que ficam submetidos, desta forma, a uma deformação axial (medida na direção tangente ao eixo central dos tendões) praticamente constante, i.é, independente do comprimento de arco medido ao longo do eixo central. A configuração deformada do *riser* após o escorregamento dos tendões será denominada Σ_4 . Um extenso estudo geométrico das camadas helicoidais nesta configuração está apresentado no Anexo C (item C.4). Neste item,

utilizaremos diretamente os resultados obtidos a partir de tal estudo. Como no item 5.1, admitiremos aqui também que o raio de curvatura $\rho = 1/K$ imposto ao eixo central do *riser* seja constante e que a flexão ocorra em torno do eixo fixo OX , como ilustrado nas figuras 5.3 e 5.4.

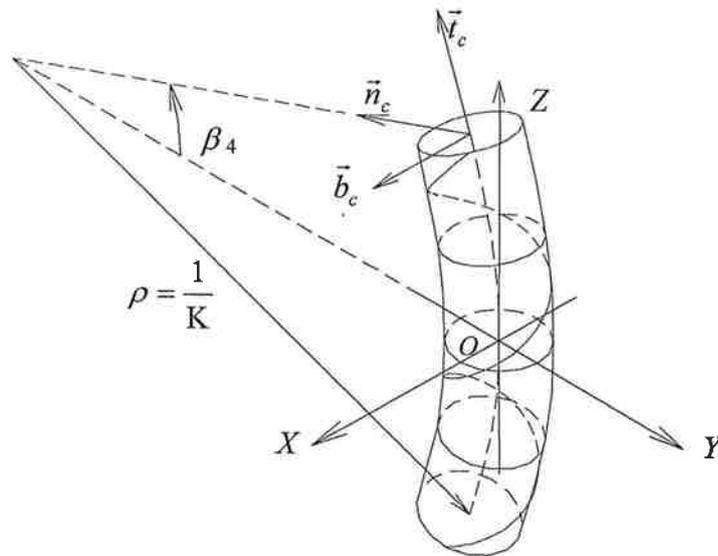


Figura 5.3: Configuração deformada Σ_4 do riser.

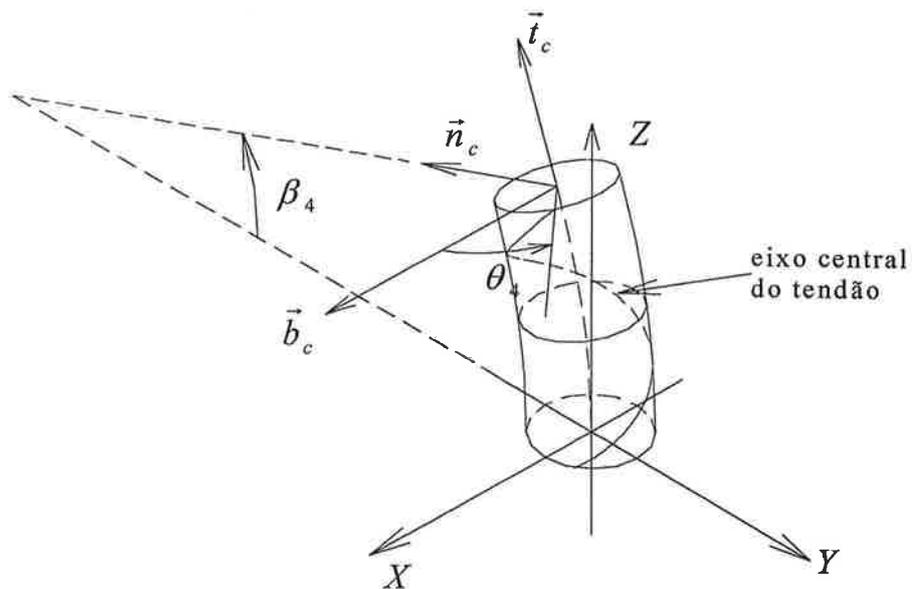


Figura 5.4: Indicação dos parâmetros $\beta_4 = \beta + \Delta\beta$ e $\theta_4 = \theta_2 + \Delta\theta$.

Nota-se que, devido ao escorregamento do tendão, o ponto (pertencente ao eixo central do tendão) que na configuração deformada Σ_3 tinha sua posição definida pelos parâmetros β e θ_2 , tem agora (ou seja, após o escorregamento) sua posição definida pelos parâmetros $\beta_4 = \beta + \Delta\beta$ e $\theta_4 = \theta_2 + \Delta\theta$, onde $\Delta\beta$ representa o avanço angular da seção transversal com relação a uma seção transversal tomada como referência (seção contida no plano OXY) e $\Delta\theta$ representa o avanço angular medido no plano da seção transversal com relação a um eixo paralelo ao eixo fixo OX (ver figura 5.4).

Admitindo que os deslocamentos devidos ao escorregamento dos tendões sejam pequenos (se comparados, por exemplo, ao raio da camada helicoidal), pode-se mostrar que os incrementos $\Delta\beta$ e $\Delta\theta$ podem ser expressos em função das componentes de deslocamento nas direções \vec{t}_3 e \vec{B}_3 , onde \vec{t}_3 é o versor tangente ao eixo central do tendão na configuração deformada Σ_3 (anterior ao escorregamento) e \vec{B}_3 é o versor transversal (i.é, ortogonal a \vec{t}_3 e tangente à superfície de suporte do eixo central do tendão) na configuração Σ_3 (ver figura 5.5).

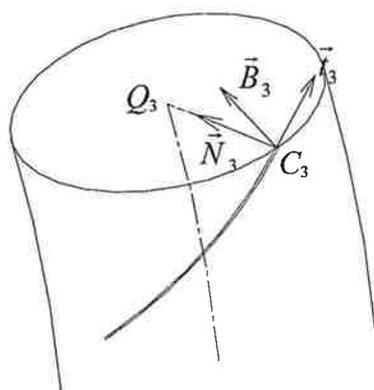


Figura 5.5: Base formada pelos versores $(\vec{t}_3, \vec{N}_3, \vec{B}_3)$.

No Anexo C, mostra-se que as componentes de deslocamento do tendão (devidas ao escorregamento), segundo as direções \vec{t}_3 e \vec{B}_3 , são dadas por (ver equações (c.147)):

$$\begin{aligned}\Delta_t(\theta_2) &= \frac{K.R_1^2 \cdot \cos^2 \alpha_1}{\text{sen } \alpha_1} \cdot \cos \theta_2 \\ \Delta_b(\theta_2) &= K.R_1^2 \cdot \cos \alpha_1 \cdot \left(1 + \frac{1}{\text{sen}^2 \alpha_1}\right) \cdot \cos \theta_2\end{aligned}\tag{5.26}$$

e que os incrementos $\Delta\beta$ e $\Delta\theta$ são dados por (ver equações (c.105)):

$$\begin{aligned}\Delta\theta &\cong \left(\frac{\text{sen } \alpha_2}{R_2 \cdot \xi}\right) \cdot \Delta_t - \left(\frac{\cos \alpha_2 \cdot (1 + \eta \cdot \text{sen } \theta_2)}{R_2 \cdot \xi}\right) \cdot \Delta_b \\ \Delta\beta &\cong \frac{K \cdot \Delta_t \cdot \cos \alpha_2}{\xi} + \frac{K \cdot \Delta_b \cdot \text{sen } \alpha_2}{\xi \cdot (1 + \eta \cdot \text{sen } \theta_2)}\end{aligned}\tag{5.27}$$

Se lembrarmos que as variáveis R_2, α_2 e θ_2 são dadas por (ver Anexo C, itens C.2.1 e C.2.3):

$$\begin{aligned}R_2 &= R_1 + \Delta R \\ \alpha_2 &= \alpha_1 + \Delta\alpha \\ \theta_2 &= \theta_1 + \frac{R_1 \cdot (\theta_1 - \theta_0)}{L_1 \cdot \tan \alpha_1} \cdot \Delta\varphi\end{aligned}$$

teremos, após substituírmos as equações (5.26) em (5.27) e utilizarmos as relações (c.63), (c.67) e (c.68), as seguintes expressões simplificadas (expandidas em série de Taylor¹² em torno de $K = 0$, $\Delta R = 0$, $\Delta\alpha = 0$ e $\Delta\varphi = 0$):

$$\begin{aligned}\Delta\theta &\cong -\frac{K \cdot R_1 \cdot \cos \theta_1}{\tan^2 \alpha_1} \\ \Delta\beta &\cong \frac{2 \cdot (K \cdot R_1)^2 \cdot \cos \theta_1}{\tan \alpha_1}\end{aligned}\tag{5.28}$$

A partir das relações (5.28) vemos que $\Delta\beta$ varia conforme a posição angular (θ_1) de um determinado ponto sobre o eixo central do tendão que está sendo analisado. Esta

¹² Na expressão de $\Delta\theta$ foram desprezados os termos de ordem igual ou superior a 2 (i.é., foram retidos apenas os termos lineares), e na expressão de $\Delta\beta$ foram desprezados os termos de ordem igual ou superior a 3 (i.é., foram retidos os termos lineares e quadráticos). Em todas as linearizações feitas no decorrer deste trabalho foi utilizado o *software* Maple V, release 4 [44].

variação corresponde a uma espécie de “empenamento” da seção transversal do *riser* (a qual era suposta plana até a configuração deformada Σ_3), conforme discutido no Anexo C (ver itens C.3 e C.4). Contudo, é fácil verificar que tal variação é muito pequena (pois é proporcional a $(K.R_1)^2$), podendo ser desprezada para o fim de determinação dos esforços suportados pela camada helicoidal. Assim, para tal efeito, admite-se que a seção transversal do *riser* continua plana, sendo definida pelo parâmetro $\beta_4 \cong \beta$.

As figuras 5.3 e 5.4 mostram também o triedro de Frenet $(\vec{t}_c, \vec{n}_c, \vec{b}_c)$ associado à curva formada pelos pontos do eixo central do *riser* (representado pela linha pontilhada passando pela origem do sistema de referência $OXYZ$). As componentes dos versores \vec{t}_c , \vec{n}_c e \vec{b}_c , segundo a base de versores $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ associada ao sistema de coordenadas $OXYZ$, são dadas por:

$$\begin{aligned}\vec{t}_c &= (0, -\text{sen } \beta_4, \text{cos } \beta_4) \cong (0, -\text{sen } \beta, \text{cos } \beta) \\ \vec{n}_c &= (0, -\text{cos } \beta_4, -\text{sen } \beta_4) \cong (0, -\text{cos } \beta, -\text{sen } \beta) \\ \vec{b}_c &= (1, 0, 0)\end{aligned}\tag{5.29}$$

5.2.1 Análise das camadas helicoidais

Analogamente ao sub-item 5.1.1, apresentaremos aqui as relações entre os esforços suportados por uma camada helicoidal genérica e as componentes de deformação impostas à camada, porém considerando agora a configuração deformada Σ_4 . As componentes de deformação consideradas são:

- alongamento da camada ($\Delta L / L_1$);
- rotação da camada por unidade de comprimento do *riser* ($\Delta \varphi / L_1$);
- variação do raio médio da camada ($\Delta R / R_1$);
- variação do ângulo de assentamento dos tendões da camada considerada ($\Delta \alpha_i$)¹³;
- curvatura imposta ao *riser* (K).

¹³ Deve-se observar que a variação do ângulo de assentamento pode ser escrita como função das outras componentes de deformação, conforme mostrado no anexo C do presente trabalho (eq.(c.49)).

E os esforços suportados pela camada são:

- força de tração (F_i);
- momento de torção ($M_{t,i}$);
- momento fletor ($M_{f,i}$).

Lembramos, uma vez mais, que o subscrito “ i ” diz respeito à posição da camada helicoidal com relação às demais camadas (helicoidais ou plásticas).

Para a determinação dos esforços F_i , $M_{t,i}$ e $M_{f,i}$ precisamos conhecer os esforços atuantes na seção transversal de cada tendão pertencente à camada, na configuração Σ_4 . Estes esforços são designados por T_{ij} , $M_{x,ij}$, $M_{y,ij}$ e $M_{t,ij}$ e já foram definidos anteriormente, no item 5.1.1. A única diferença é que, agora, eles estão referidos à configuração deformada Σ_4 (ver figura 5.6).

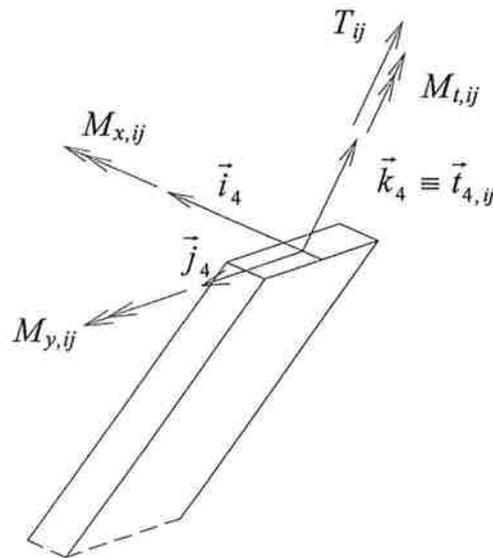


Figura 5.6: Esforços solicitantes na seção transversal de um tendão numa camada helicoidal genérica (configuração deformada Σ_4).

Cálculo da força de tração F_i suportada por uma camada helicoidal:

A força de tração suportada pela camada helicoidal é dada por (ver figuras 5.4 e 5.6):

$$F_i = \sum_{j=1}^{n_i} (T_{ij} \cdot \vec{t}_{ij}) \cdot \vec{t}_c \quad (5.30)$$

onde:

n_i = número de tendões da camada helicoidal considerada (“ i -ésima camada”);

\vec{t}_{ij} =versor tangente ao eixo central do tendão na configuração deformada Σ_4 ;

\vec{t}_c =versor tangente ao eixo central do *riser* na configuração deformada Σ_4 ;

A força normal atuante na seção transversal do tendão será estimada a partir da seguinte relação (ver equações (b.27), Anexo B):

$$T_{ij} \cong (EA)_i \cdot \bar{\varepsilon}_{ij} \quad (5.31)$$

onde $(EA)_i$ representa a rigidez axial do tendão e $\bar{\varepsilon}_{ij}$ é o alongamento médio medido na direção do eixo central do tendão na condição deformada Σ_4 .

Lembramos que, ao utilizarmos a equação (5.31), fica implícita a hipótese de que o estado de tensão nos pontos do tendão pode ser aproximado por um estado uniaxial de tensão, sendo o alongamento $\bar{\varepsilon}_{ij}$ decorrente apenas das tensões atuantes segundo a direção tangente ao eixo central do tendão. Despreza-se, assim, o efeito das pressões de contato (exercidas pelas camadas adjacentes) no alongamento $\bar{\varepsilon}_{ij}$.

O alongamento $\bar{\varepsilon}_{ij}$, na condição deformada Σ_4 , é dado por (ver equações (c.113) e (c.143), Anexo C):

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = (\sin^2 \alpha_1) \frac{\Delta R}{R_1} + (\sin \alpha_1 \cdot \cos \alpha_1) R_1 \frac{\Delta \varphi}{L_1} + (\cos^2 \alpha_1) \frac{\Delta L}{L_1}$$

As componentes do versor tangente ao eixo central do *riser* (\vec{t}_c), na configuração Σ_4 , são dadas pela primeira das equações (5.29). Já as componentes do versor tangente

ao eixo central do tendão (\vec{t}_{ij}), na mesma condição deformada Σ_4 , podem ser obtidas a partir dos resultados do Anexo C (ver itens C.4.5 e C.4.8).

Fazendo as mesmas substituições já apontadas anteriormente (item 5.1.1) e linearizando as parcelas de F_i (em torno de $K=0$, $\Delta\alpha=0$, $\Delta R=0$, $\Delta L=0$ e $\Delta\varphi=0$) antes de procedermos ao somatório, o seguinte resultado é obtido¹⁴:

$$F_i = n_i \cdot (EA)_i \cdot \left[(\cos^3 \alpha_i) \cdot \frac{\Delta L}{L_1} + (R_i \cdot \sin \alpha_i \cdot \cos^2 \alpha_i) \cdot \frac{\Delta \varphi}{L_1} + (\sin^2 \alpha_i \cdot \cos \alpha_i) \cdot \frac{\Delta R_i}{R_i} \right] \quad (5.32)$$

Cálculo do momento de torção $M_{t,ij}$ suportado por uma camada helicoidal:

O momento de torção suportado pela camada helicoidal é (ver figuras 5.4 e 5.6):

$$M_{t,i} = \sum_{j=1}^{n_i} \left(M_{x,ij} \cdot \vec{i}_4 + M_{y,ij} \cdot \vec{j}_4 + M_{t,ij} \cdot \vec{k}_4 + T_{ij} \cdot R_{2,i} \cdot \vec{j}_4 \right) \cdot \vec{t}_c \quad (5.33)$$

As componentes dos versores \vec{i}_4 , \vec{j}_4 e $\vec{k}_4 \equiv \vec{t}_{4,ij}$ podem ser obtidas conforme indicado no Anexo C (ver item C.4.6). As componentes do versor \vec{t}_c também já foram fornecidas (ver equações (5.29)) e T_{ij} é dado pela equação (5.31). Já os momentos

$M_{x,ij}$, $M_{y,ij}$ e $M_{t,ij}$ são estimados através das relações¹⁵:

$$M_{x,ij} \cong EI_x \cdot (\Delta\kappa_x)_{ij}$$

$$M_{y,ij} \cong EI_y \cdot (\Delta\kappa_y)_{ij}$$

$$M_{t,ij} \cong GI_t \cdot (\Delta\kappa_t)_{ij}$$

onde as variações $(\Delta\kappa_x)_{ij}$, $(\Delta\kappa_y)_{ij}$ e $(\Delta\kappa_t)_{ij}$ podem ser obtidas a partir das equações (c.16), (c.130), (c.131), (c.134), (c.142) e (c.143) do Anexo C.

¹⁴ Os valores dos parâmetros R_i e α_i presentes na equação correspondem àqueles associados à condição inicial (não-deformada) da camada (Σ_1).

¹⁵ A dedução das duas primeiras relações podem ser encontradas no Anexo B (equações (b.27)).

Utilizando o mesmo procedimento descrito anteriormente (para o cálculo de F_i) e linearizando as parcelas de $M_{t,i}$ (em torno de $K=0$, $\Delta\alpha=0$, $\Delta R=0$, $\Delta L=0$ e $\Delta\varphi=0$) antes de procedermos ao somatório, encontraremos o seguinte resultado final¹⁶:

$$\begin{aligned}
 M_{t,i} = & \frac{n_i}{R_i} \cdot [(GI_t)_i \cdot \cos\alpha_i \cdot \cos(2\alpha_i) + (EI_y)_i \cdot \sin\alpha_i \cdot \sin(2\alpha_i)] \Delta\alpha_i + \\
 & + \left[n_i (EA)_i R_i \sin\alpha_i \cos^2\alpha_i \right] \frac{\Delta L}{L} + \left[n_i (EA)_i R_i^2 \cdot \cos\alpha_i \cdot \sin^2\alpha_i \right] \frac{\Delta\varphi}{L} + \\
 & + n_i \sin\alpha_i \left[(EA)_i \sin^2\alpha_i - \frac{(GI_t)_i \cos^2\alpha_i}{R_i^2} - \frac{(EI_y)_i \sin^2\alpha_i}{R_i^2} \right] \cdot \Delta R_i
 \end{aligned} \quad (5.34)$$

Cálculo do momento fletor $M_{f,i}$ suportado por uma camada helicoidal:

O momento fletor suportado pela camada helicoidal é dado por (ver figuras 5.4e 5.6):

$$M_{f,i} = \sum_{j=1}^{n_i} \left(M_{x,ij} \cdot \vec{j}_4 + M_{y,ij} \cdot \vec{j}_4 + M_{t,ij} \cdot \vec{k}_4 + T_{ij} \cdot R_{2,i} \cdot \vec{j}_4 \right) \cdot \vec{b}_c \quad (5.35)$$

Procedendo agora da mesma forma como descrito para o cálculo de $M_{t,i}$, encontraremos o seguinte resultado final¹⁷:

$$M_{f,i} = K \cdot n_i \cdot \cos\alpha_i \cdot \left[(GI_t)_i + \frac{3}{2} \left((EI_y)_i - (GI_t)_i \right) \cos^2\alpha_i \right] \quad (5.36)$$

Observamos que, devido tanto às hipóteses quanto às aproximações feitas, o momento fletor resistido pela camada irá depender apenas da curvatura K imposta ao riser. Em virtude disto (e das simplificações a serem feitas para as camadas plásticas), pode-se mostrar que há um desacoplamento entre os esforços de tração-flexão e torção-flexão aplicados ao riser, da mesma forma como já visto na equação (5.9).

¹⁶ Os valores dos parâmetros R_i e α_i presentes na equação correspondem àqueles associados à condição inicial (não-deformada) da camada (Σ_1).

¹⁷ Os valores dos parâmetros R_i e α_i presentes na equação correspondem àqueles associados à condição inicial (não-deformada) da camada (Σ_1).

5.2.2 *Análise das camadas plásticas*

Admitiremos que as mesmas equações vistas no item 5.1.2 (para a análise das camadas plásticas incluindo flexão sem escorregamento) sejam válidas para o caso de flexão com escorregamento total. As hipóteses feitas para a validade destas equações também estão enunciadas no item 5.1.2. Para evitar repetição desnecessária omitiremos a representação destas equações.

5.2.3 *Solução do problema para carregamentos quaisquer*

O método de solução para carregamentos combinados, com a hipótese de flexão com escorregamento total, segue o mesmos passos já discutidos no item 5.1.3. Ressaltamos que as mesmas equações vistas naquele item (5.1.3) também são utilizadas no modelo de flexão com escorregamento total, com exceção da equação (5.19) que deve ser substituída pela equação (5.36). As demais equações não sofrem alterações, podendo ser utilizadas em qualquer um dos dois modelos propostos.

Naturalmente, as hipóteses levantadas em 5.1.3 também devem ser feitas para o modelo de escorregamento total, excetuando-se a hipótese (i) que passa a ser:

(i) há escorregamento total entre as camadas adjacentes quando da aplicação de esforços de flexão aplicados ao *riser*.

Tendo sido feitas as ressalvas referentes às modificações necessárias ao método de solução do problema (descrito no item 5.1.3) para o caso de escorregamento total, consideramos desnecessária a repetição de todas as equações propostas para a solução, as quais serão omitidas.

5.3 Confronto de resultados na determinação da rigidez flexional

Devido à escassez de resultados experimentais publicados na literatura envolvendo a análise estrutural de *risers* flexíveis, sobretudo no que diz respeito ao nível de tensão alcançado nas diversas camadas de um *riser* quando submetido a carregamentos combinados envolvendo flexão, e considerando ainda que, na maioria dos trabalhos encontrados¹⁸, a ênfase se restringe à determinação dos valores de rigidez (axial, torsional e/ou flexional) destas estruturas, iremos limitar o escopo de comparação à determinação da rigidez flexional de *risers*. Este item será subdividido em duas partes: na primeira forneceremos algumas expressões encontradas na literatura para a determinação da rigidez flexional destas estruturas, discutindo as principais hipóteses e problemas encontrados em sua obtenção. Na segunda parte deste item iremos comparar o valor da rigidez flexional de um *riser* típico (obtida a partir das expressões aqui desenvolvidas) com os valores obtidos a partir de ensaios de flexão.

5.3.1 Confronto entre nosso modelo e outros modelos analíticos

Apesar da existência de modelos analíticos para a determinação da rigidez flexional de tubos flexíveis e estruturas afins, podemos afirmar que: i) há um número bem pequeno de modelos atualmente disponíveis na literatura técnica e científica para este fim e ii) o confronto entre resultados analíticos e experimentais coloca grandes dúvidas sobre a qualidade dos resultados analíticos obtidos a partir dos modelos disponíveis.

Corroborando a afirmação de que o número de modelos analíticos propostos para a determinação da rigidez flexional de cabos é extremamente reduzido, lembramos que um estudo relativamente recente (final de 1998) sobre a rigidez à flexão de cabos umbilicais submarinos foi elaborado por Souza [78], que comparou os valores de rigidez flexional (de diversos cabos) determinados experimentalmente com os respectivos valores de rigidez obtidos a partir de modelos analíticos encontrados na

¹⁸ Ver, por exemplo, Lanteigne [36], Souza [78], Witz & Tan [87] e Witz [88].

literatura. As formulações encontradas pelo autor se resumem apenas às cinco seguintes:

- i) “Método das camadas plásticas”;
- ii) Formulação de Costello [19];
- iii) Formulação de Witz; Tan [87];
- iv) Formulação de Batista & Ebecken;
- v) Formulação de Stewart.

Não bastasse este exemplo, citamos ainda o fato de que no manual publicado por Patel et al. [52], em 1994, as únicas expressões propostas para a determinação da rigidez flexional de *risers* flexíveis são aquelas correspondentes ao modelo atribuído a Costello [19] e ao chamado “método das camadas plásticas”, ambos citados no trabalho de Souza [78].

A afirmação de que os resultados obtidos através dos atuais modelos são, em sua maioria, qualitativamente ruins pode ser comprovada através do artigo apresentado por Witz [88], em 1996, no qual valores de rigidez flexional de um *riser* flexível típico obtidos através de ensaios foram comparados com valores de rigidez calculados por diversas instituições, utilizando diversos modelos analíticos. Baseando-se nos resultados colhidos¹⁹, o autor conclui que trabalhos futuros são ainda necessários no que se refere ao carregamento de flexão.

No estudo elaborado por Souza [78], os modelos analíticos que forneceram resultados com as menores margens de erro (quando comparados com os valores de rigidez determinados experimentalmente) foram os modelos analíticos atribuídos a Costello [19] e ao chamado “método das camadas plásticas”. Deve-se ressaltar, contudo, que causam estranheza os resultados apresentados por Souza [78], posto

¹⁹ Os resultados publicados no artigo de Witz [88] serão apresentados e comparados com os resultados obtidos pelos modelos aqui apresentados, mais a frente.

que os valores de rigidez flexional calculados por estes dois modelos foram exatamente os mesmos para sete dentre um total de oito cabos analisados²⁰.

O modelo proposto por Costello [19] é, na verdade, um modelo para a determinação da resposta de uma mola helicoidal (com seção transversal circular) submetida a flexão pura. Partindo das equações diferenciais de equilíbrio apresentadas por Love [40], o autor obtém, após algumas simplificações, uma relação entre o momento fletor aplicado à mola e o raio de curvatura correspondente ao eixo central da mola (vista como uma viga, conforme indicado na figura 5.7).

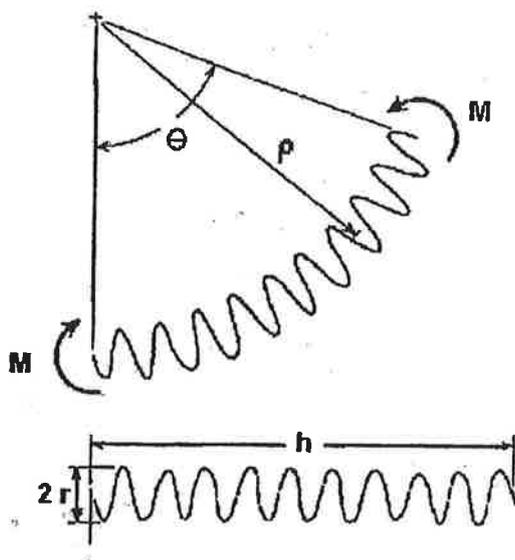


Figura 5.7: Mola helicoidal submetida a flexão pura [19].

A expressão obtida por Costello é²¹:

$$K = \frac{1}{\rho} = \frac{\nu^2 r^2}{6 \cdot \cos \alpha} \left[\frac{3}{8} + \left(\frac{(2\pi n)^2}{3} + \frac{5}{8} \right) \cdot \cos^2 \alpha \right] \cdot \left(\frac{M}{EI} \right)^3 + \frac{(2 + \nu \cdot \sin^2 \alpha)}{2 \cdot \cos \alpha} \cdot \frac{M}{EI} \quad (5.37)$$

onde:

²⁰ Ver Souza [78], tabela 4.3.1., pg.55.

²¹ A equação (5.37) foi adaptada da expressão apresentada por Costello [19] para seguir nossa convenção quanto a medida do ângulo de enrolamento da hélice (α medido a partir do eixo da hélice). A expressão apresentada por Costello também deixa de apresentar alguns parênteses, o que a torna dimensionalmente incorreta. A equação (5.37) já traz as devidas correções.

$K = 1/\rho =$ curvatura correspondente ao eixo central da mola (vista como viga);

$\nu =$ coeficiente de Poisson do material da mola;

$r =$ raio da hélice;

$\alpha =$ ângulo de assentamento da hélice, medido a partir de seu eixo central;

$n =$ número de espiras da mola;

$E =$ módulo de elasticidade do material da mola;

$I = \frac{\pi \cdot R^4}{4}$ momento de inércia da seção transversal do fio (suposta circular de raio R)

$M =$ momento aplicado às extremidades da mola.

Conforme explica Costello, o termo não linear envolvendo $(M/EI)^3$ pode ser desprezado face ao termo linear na maioria dos casos de interesse prático, de tal forma que a expressão (5.37) assume a forma simplificada:

$$K = \frac{1}{\rho} = \frac{(2 + \nu \cdot \text{sen}^2 \alpha)}{2 \cdot \cos \alpha} \cdot \frac{M}{EI} \quad (5.38)$$

Utilizando este modelo como ponto de partida, alguns autores (como os já citados Patel et al. [52] e Souza [78]) propõem, então, a seguinte fórmula para a determinação da rigidez flexional de *risers* flexíveis²²:

$$(EI)_{eq} = \sum_{i=1}^m (EI)_i + \sum_{j=1}^n \frac{2n_j \cdot \cos \alpha_j \cdot (EI)_j}{(2 + \nu_j \cdot \text{sen}^2 \alpha_j)} \quad (5.39)$$

onde m corresponde ao número de camadas plásticas do *riser*, e n , ao número de camadas helicoidais do *riser*, enquanto n_j corresponde ao número de fios (tendões) presentes na j -ésima camada helicoidal²³.

²² Deve-se ressaltar que a proposta não parte, de fato, do artigo de Costello [19].

²³ Observamos que no trabalho de Souza [78], não aparece o termo correspondente ao número de tendões no segundo somatório. Talvez venha daí a quase total coincidência entre os valores de rigidez flexional calculados pelo autor usando o modelo atribuído a Costello e o “método das camadas plásticas”.

Aproveitando a ocasião, observamos os seguintes problemas quanto à utilização da equação (5.39) na determinação da rigidez flexional de um *riser*:

- i) a expressão foi desenvolvida para fios de seção transversal circular somente (note que aparece um único momento de inércia na expressão), não garantindo resultados confiáveis para fios de seção transversal retangular ou de outros formatos;
- ii) a expressão foi desenvolvida para uma mola “livre”, i.é, sem a presença de camadas adjacentes que possam exercer forças de contato quando a flexão é imposta. Desta forma, a rigidez flexional prevista pela fórmula deve resultar num limite inferior (“*lower bound*”) para tal rigidez, desde que a seção transversal dos tendões seja circular;
- iii) não se pode garantir que outros tipos de esforços não tenham alguma influência no cálculo da rigidez flexional do *riser*, já que a fórmula (5.38) foi obtida para o caso de flexão pura aplicada à mola. Diga-se, de passagem, que a análise da influência da tração, da torção e de outros carregamentos combinados na rigidez à flexão de *risers* é justamente uma das sugestões para trabalhos futuros recomendada por Souza [78].

No chamado “método das camadas plásticas” admite-se que a rigidez flexional do *riser* deve-se sobretudo à rigidez flexional das camadas plásticas somadas, desprezando-se a contribuição das camadas helicoidais no cálculo desta rigidez. Assim, utilizando a equação (5.39) e desprezando o termo referente às camadas helicoidais, obtém-se:

$$(EI)_{eq} = \sum_{i=1}^m (EI)_i \quad (5.40)$$

Segundo o estudo realizado por Souza [78] a contribuição das camadas plásticas na rigidez flexional de cabos umbilicais é realmente expressiva, haja vista que a média das contribuições percentuais destas camadas na rigidez flexional, considerando todos os umbilicais ensaiados e todas as formulações analíticas utilizadas, resultou igual a 90%. Com base nestes resultados, o autor conclui que, para uma melhor estimativa da rigidez flexional destas estruturas, é necessária uma melhor avaliação

do módulo de elasticidade das camadas plásticas e de suas características dimensionais.

Com relação ao “método das camadas plásticas”, pouco há para se comentar, a não ser que o método prima pela extrema simplicidade. Deve-se ressaltar, naturalmente, a pertinência das observações levantadas por Souza [78], com relação à avaliação correta dos parâmetros necessários ao cálculo da rigidez flexional das camadas plásticas. Porém, deve-se ter em mente que tal método deve ser utilizado com cautela, uma vez que a contribuição das camadas helicoidais na rigidez flexional pode ser algo relevante, dependendo das características do *riser* que estiver sendo utilizado (isto deve ser observado principalmente para *risers* com várias camadas helicoidais).

Além do “método das camadas plásticas” e da formulação de Costello [19], Souza [78] utiliza também a formulação proposta por Witz; Tan [87] para a determinação da rigidez flexional de cabos. Estes autores propõem duas formulações para a estimativa da rigidez flexional de *risers* flexíveis: uma fornece a rigidez antes do escorregamento dos tendões, e a outra, após o escorregamento total dos tendões (“*full-slip*”). No primeiro caso (ausência de escorregamento), a expressão que relaciona a parcela do momento fletor resistido por uma camada helicoidal com a curvatura imposta ao cabo é dada por:

$$M_1 = \frac{1}{2}n.EA.R^2 \cos^4 \alpha.K + \frac{1}{2}n.(EI_n + EI_b \cos^2 \alpha + GJ \sin^2 \alpha)K \quad (5.41)$$

onde:

n = número de tendões da camada;

EA = rigidez axial do tendão;

EI_n = rigidez flexional do tendão na direção da normal ao eixo central do tendão;

EI_b = rigidez flexional do tendão na direção da binormal ao eixo central do tendão;

GJ = rigidez torsional do tendão;

α = ângulo de assentamento da hélice com relação ao eixo central do cabo;

K = curvatura imposta ao cabo.

Já no caso de escorregamento total, Witz; Tan [87] fornecem as seguintes expressões relacionando o momento fletor resistido por uma camada helicoidal com a curvatura:

$$M_2 = \frac{1}{2}n.(EI_n + EI_b \cos^2 \alpha + GJ \sin^2 \alpha)K \quad (5.42)$$

ou

$$M_2 = \frac{1}{2}n.(EI_n + EI_b \cos^2 \alpha)K \quad (5.43)$$

onde a equação (5.42) é aplicável para tendões com seção transversal retangular, e a equação (5.43) para tendões com seção transversal circular.

Considerando a contribuição das camadas plásticas, a rigidez flexional para o *riser* como um todo fica então dada pelas seguintes expressões finais:

$$(EI)_{eq} = \sum_{i=1}^m (EI)_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n n_j (EA.R^2 \cos^4 \alpha + EI_n + EI_b \cos^2 \alpha + GJ \sin^2 \alpha)_j \quad (5.44)$$

ou

$$(EI)_{eq} = \sum_{i=1}^m (EI)_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n n_j (EI_n + EI_b \cos^2 \alpha + GJ \sin^2 \alpha)_j \quad (5.45)$$

ou

$$(EI)_{eq} = \sum_{i=1}^m (EI)_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n n_j (EI_n + EI_b \cos^2 \alpha)_j \quad (5.46)$$

onde a expressão (5.44) fornece o valor da rigidez flexional inicial (antes do escorregamento), enquanto as expressões (5.45) e (5.46) fornecem a rigidez flexional final (após o escorregamento), sendo a primeira válida para tendões com seção transversal retangular, e a segunda para tendões com seção transversal circular.

Lembramos que as ressalvas referentes aos modelos propostos por Witz; Tan [87] já foram feitas anteriormente, no início deste capítulo. É importante observar, porém, que a ocorrência de erros, já comentados antes, na dedução da relação (5.41) acaba se propagando nas demais equações apresentadas pelos autores, comprometendo sua aplicação.

Passemos agora às formulações atribuídas a Batista & Ebecken: segundo Souza [78], estes autores fornecem as seguintes expressões para o cálculo da rigidez flexional:

$$(EI)_{eq} = \sum_{i=1}^m (EI)_i + \sum_{j=1}^n E_j n_j \frac{\pi \cdot d_j^4}{32} \frac{\cos \alpha_j}{(2 + \nu_j \cdot \text{sen}^2 \alpha_j)} \quad (5.46)$$

e

$$(EI)_{eq} = \sum_{i=1}^m (EI)_i + \sum_{j=1}^n E_j n_j \cdot \frac{b_j t_j (b_j^2 + t_j^2) \cdot \cos \alpha_j}{12 \cdot (2 + \nu_j \cdot \text{sen}^2 \alpha_j)} \quad (5.47)$$

sendo a expressão (5.46) aplicável para *risers* cujas camadas helicoidais são constituídas por tendões de seção transversal circular de diâmetro d , ao passo que a expressão (5.47) se aplica para *risers* cujas camadas helicoidais são constituídas por tendões de seção transversal retangular ($b \times t$).

É imediato observar, contudo, que a equação (5.46) atribuída a Batista & Ebecken é exatamente igual a equação (5.39), obtida a partir da formulação de Costello. Fica comprovado, portanto, o equívoco cometido por Souza [78] na utilização da formulação atribuída a Costello [19], uma vez que os valores de rigidez flexional calculados pelas fórmulas (5.39) e (5.46) deveriam fornecer exatamente os mesmos resultados, já que advêm da mesma equação. Neste sentido, reduz-se ainda mais o número de formulações existentes para a determinação da rigidez flexional de *risers*.

Os problemas relativos ao emprego da equação (5.46) no cálculo da rigidez flexional já foram comentados antes, quando da apresentação da equação (5.39), não sendo necessária sua repetição. Fica difícil, contudo, opinarmos sobre os problemas relativos ao emprego da equação (5.47), já que não dispomos da referência de onde esta equação foi obtida. Porém, pela sua similaridade com a equação (5.39), parecemos que a equação (5.47) teria sido obtida a partir da solução (linearizada) do problema de flexão pura de uma mola cujo fio tem seção transversal retangular ($b \times t$). Se for este o caso, continuam valendo as ressalvas (ii) e (iii) apontadas anteriormente, quando discutimos a validade da equação (5.39).

A fórmula apresentada por Stewart para o cálculo da rigidez flexional é, segundo o estudo feito por Souza [78]:

$$(EI)_{eq} = \sum_{i=1}^m (EI)_i + \sum_{j=1}^n n_j (EI)_j \cos^2 \alpha_j \quad (5.48)$$

onde o primeiro somatório diz respeito à contribuição das camadas plásticas, e o segundo somatório, à contribuição das camadas helicoidais. Também aqui, por não dispormos da referência de onde esta equação foi extraída, optamos por não discutir os problemas decorrentes de sua aplicação.

Além das formulações já apresentadas, pensamos ser interessante incluir também uma discussão acerca da proposta de Lanteigne [36] para a determinação da resposta estrutural de cabos do tipo ACSR (que são estruturalmente semelhantes aos *risers* flexíveis) quando submetidos a carregamentos combinados envolvendo tração, torção e flexão. O autor mostra que, admitidas certas hipóteses e considerando ausência de escorregamento entre camadas, a matriz de rigidez de um cabo, composto somente por armaduras helicoidais com tendões de seção transversal circular, é tal que:

$$\begin{bmatrix} F \\ T \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (EA)_{eq} & k_{FT} & k_{FM} \\ k_{FT} & (GI_t)_{eq} & k_{TM} \\ k_{FM} & k_{TM} & (EI)_{eq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta L / L \\ \Delta \varphi / L \\ K \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

onde F , T e M são os esforços aplicados ao cabo (respectivamente: tração, torção e momento fletor), enquanto $\Delta L/L$, $\Delta \varphi/L$ e K são as deformações correspondentes a tais esforços (respectivamente: deformação axial do cabo, ângulo de torção por unidade de comprimento do cabo e curvatura do eixo central do cabo).

Os valores dos coeficientes de rigidez dados na matriz são:

$$(EA)_{eq} = \sum_{i=1}^N n_i (EA)_i \cdot \cos^3 \alpha_i + (EA)_c$$

$$(GI_t)_{eq} = \sum_{i=1}^N n_i (EA)_i \cdot R_i^2 \cdot \sin^2 \alpha_i \cdot \cos \alpha_i + (GJ)_c$$

$$(EI)_{eq} = \sum_{i=1}^N n_i (EA)_i \left(\frac{r_i^2 + 2R_i^2}{4} \right) \cos^3 \alpha_i + (EI)_c + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} (EA)_i \cdot B_{ji}$$

$$k_{FT} = \sum_{i=1}^N n_i (EA)_i \cdot R_i \cdot \sin \alpha_i \cdot \cos^2 \alpha_i$$

$$k_{FM} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} (EA)_i \cdot A_{ji}$$

$$k_{TM} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} (EA)_i \cdot A_{ji} \cdot R_i \cdot \tan \alpha_i$$

onde: N = número de camadas helicoidais; n = número de tendões (fios) de uma dada camada; (EA) = rigidez axial do tendão (fio); R = raio da camada; r = raio da seção transversal do tendão (fio); L = comprimento considerado para o cabo; α = ângulo de assentamento de uma dada hélice com relação ao eixo central do cabo; $(EA)_c$, $(GJ)_c$ e $(EI)_c$ = valores de rigidez axial, torsional e flexional do núcleo central do cabo (respectivamente).

e onde os coeficientes A_{ji} e B_{ji} são dados por:

$$A_{ji} = \frac{R_i^2 \cdot \cos^3 \alpha_i}{L \cdot \tan \alpha_i} \left[\cos \left(\frac{2\pi j}{n_i} \right) - \cos \left(\frac{2\pi j}{n_i} + \frac{L \cdot \tan \alpha_i}{R_i} \right) \right]$$

$$B_{ji} = \frac{R_i^3 \cdot \cos^3 \alpha_i}{4L \cdot \tan \alpha_i} \left[\sin \left(\frac{4\pi j}{n_i} \right) - \sin \left(\frac{4\pi j}{n_i} + \frac{2L \cdot \tan \alpha_i}{R_i} \right) \right]$$

Lanteigne [36] observa que a matriz de rigidez obtida é simétrica, em virtude das linearizações feitas para sua obtenção e devido a hipótese (admitida em seu trabalho) de invariância do raio médio das camadas. O autor ressalta ainda que as relações dadas pela equação (5.49) são válidas para um caso geral, onde não é necessária a garantia de integridade estrutural de todos os tendões do cabo (i.é., um ou mais tendões podem ter se rompido). Neste caso, o cabo fica desbalanceado surgindo então os acoplamentos tração-flexão e torção-flexão dados pelos coeficientes k_{FM} e k_{TM} .

No caso em que a disposição de todos os tendões, em todas as camadas helicoidais, é perfeitamente simétrica (i.é, não há sobreposição dos tendões, nem rompimento de algum deles), Lanteigne [36] mostra que os coeficientes k_{FM} , k_{TM} e $(EI)_{eq}$ ficam simplificados e assumem a forma:

$$k_{FM} = 0 \quad , \quad k_{TM} = 0$$

$$(EI)_{eq} = \sum_{i=1}^N n_i (EA)_i \cdot \left(\frac{r_i^2 + 2R_i^2}{4} \right) \cos^3 \alpha_i + (EI)_c$$

Mostra-se, assim, que sob tais circunstâncias o único acoplamento que resta é o de tração-torção, dado pelo coeficiente de rigidez k_{FT} .

Conforme comentamos na introdução deste capítulo, a formulação apresentada por Lanteigne não é totalmente adequada à análise de *risers* flexíveis, havendo pontos que merecem ser reformulados. Os principais pontos de conflito estão enumerados na introdução, sendo desnecessário repeti-los aqui. Contudo, deve-se ressaltar que a formulação proposta pelo autor foi a única encontrada capaz de estimar a resposta de um cabo sob carregamentos combinados de tração, torção e flexão, residindo aí seu principal mérito. Para finalizar este sub-item, seria interessante compararmos as expressões dos coeficientes de rigidez deduzidos por Lanteigne [36] com as expressões (5.5), (5.7) e (5.9), utilizadas em um de nossos modelos (ver item 5.1), e que relacionam os esforços de tração, momento de torção e momento fletor resistidos por uma camada helicoidal com as respectivas componentes de deformação do *riser* ($\Delta L/L$, $\Delta\phi/L$ e K) e da camada (ΔR e $\Delta\alpha$). Tais expressões estão rescritas abaixo para facilitar a comparação:

$$F_i = n_i \cdot (EA)_i \cdot \left[(\cos^3 \alpha_i) \cdot \frac{\Delta L}{L_1} + (R_i \cdot \sin \alpha_i \cdot \cos^2 \alpha_i) \cdot \frac{\Delta\phi}{L_1} + (\sin^2 \alpha_i \cdot \cos \alpha_i) \cdot \frac{\Delta R_i}{R_i} \right] \quad (5.5)$$

$$M_{t,i} = \frac{n_i}{R_i} \cdot \left[(GI_t)_i \cdot \cos \alpha_i \cdot \cos(2\alpha_i) + (EI_y)_i \cdot \sin \alpha_i \cdot \sin(2\alpha_i) \right] \Delta\alpha_i +$$

$$+ \left[n_i (EA)_i R_i \sin \alpha_i \cos^2 \alpha_i \right] \frac{\Delta L}{L} + \left[n_i (EA)_i R_i^2 \cdot \cos \alpha_i \cdot \sin^2 \alpha_i \right] \frac{\Delta\phi}{L} + \quad (5.7)$$

$$+ n_i \sin \alpha_i \left[(EA)_i \sin^2 \alpha_i - \frac{(GI_t)_i \cos^2 \alpha_i}{R_i^2} - \frac{(EI_y)_i \sin^2 \alpha_i}{R_i^2} \right] \Delta R_i$$

$$M_{f,i} = \frac{K.n_i.\cos\alpha_i}{2} \cdot \left[2(GI_t)_i \cdot \cos^2 \alpha_i \sin^2 \alpha_i + (EI_x)_i \cdot (2 - \cos^2 \alpha_i) + \right. \\ \left. + (EI_y)_i \cdot \cos^2 \alpha_i \cdot (2\cos^2 \alpha_i - 1) + (EA)_i \cdot \cos^2 \alpha_i \cdot R_i^2 \right] \quad (5.9)$$

É fácil verificar que as expressões (5.5), (5.7) e (5.9) permitem recuperar as mesmas expressões dadas pela matriz de rigidez (5.49), uma vez desprezadas as variações do ângulo de assentamento ($\Delta\alpha_i$) e do raio médio (ΔR_i) das camadas helicoidais, bem como as contribuições devidas à flexo-torção dos tendões.

Das expressões (5.5), (5.7) e (5.9), podemos observar que no nosso modelo (assim como no de Lanteigne) perde-se o acoplamento tração-flexão e torção-flexão, de tal forma que os coeficientes de rigidez k_{FM} e k_{TM} resultam nulos. Isto se deve aos seguintes fatores:

- i) as expressões (5.5), (5.7) e (5.9) foram deduzidas admitindo-se a hipótese (implícita) de que todos os tendões estejam “trabalhando” e que sua distribuição seja perfeitamente simétrica, em relação ao eixo central do *riser*;
- ii) todas as expressões foram linearizadas;
- iii) o atrito entre as camadas não está sendo considerado em nosso modelo e
- iv) a variação da pressão de contato entre as camadas (com o parâmetro angular θ) devida à flexão do *riser*, está sendo desprezada (o modelo admite que a pressão de contato entre duas camadas é constante e dependente apenas dos carregamentos de natureza axissimétrica).

As razões (i) e (ii) já foram apontadas por Lanteigne [36] como as causas dos desacoplamentos tração-flexão e torção-flexão. Contudo, acreditamos que as razões (iii) e (iv), são igualmente (ou mais) importantes para a explicação deste fato. Observamos que, se tanto as forças de atrito interno quanto a variação da pressão de contato entre as camadas fossem consideradas no modelo, o resultado “líquido” da ação destas forças distribuídas poderia causar os acoplamentos perdidos.

Como conseqüência destes desacoplamentos é possível determinar, a partir das expressões (5.9) e (5.10), uma expressão simples para a determinação da rigidez flexional do *riser*, considerando a hipótese de não-escorregamento entre as camadas. Tal expressão é dada por:

$$(EI)_{eq} = \sum_{i=1}^n \frac{n_i \cdot \cos \alpha_i}{2} \cdot \left[2(GI_t)_i \cdot \cos^2 \alpha_i \cdot \sin^2 \alpha_i + (EI_x)_i \cdot (2 - \cos^2 \alpha_i) + (EI_y)_i \cdot \cos^2 \alpha_i \cdot (2 \cos^2 \alpha_i - 1) + (EA)_i \cdot \cos^2 \alpha_i \cdot R_i^2 \right] + \sum_{j=1}^m (EI)_j \quad (5.50)$$

onde o primeiro somatório fornece a contribuição das camadas helicoidais à rigidez flexional, e o segundo fornece a contribuição das camadas plásticas.

Pode-se mostrar, inclusive, que a expressão (5.50) recupera corretamente o valor da rigidez flexional de um *riser* hipotético para o qual $\alpha_i = 0$ para todas as camadas helicoidais (caso limite). Neste caso, obtém-se:

$$(EI)_{eq} = \sum_{i=1}^n \frac{n_i}{2} \cdot \left[(EI_x)_i + (EI_y)_i + (EA)_i \cdot R_i^2 \right] + \sum_{j=1}^m (EI)_j$$

Deve-se ressaltar, contudo, que, embora estes limites assintóticos ($\alpha_i = 0$ ou $\alpha_i = \pi/2$) sejam interessantes para demonstrar a consistência das expressões finais, eles nem sempre conduzem a valores corretos, uma vez que na dedução de várias expressões utilizadas para as camadas helicoidais consideramos (implicitamente) que o valor do ângulo de assentamento das camadas helicoidais era diferente destes valores extremos (mesmo porque $\alpha_i = 0$ ou $\alpha_i = \pi/2$ não constituem camadas helicoidais!!). Um exemplo claro ligado a este alerta será fornecido a seguir.

Se considerarmos agora a hipótese de escorregamento total entre as camadas, veremos que também é possível (devido aos desacoplamentos citados) determinar uma expressão simples para a rigidez flexional do *riser* nesta condição. Utilizando as expressões (5.10) e (5.36), teremos:

$$(EI)_{eq} = \sum_{i=1}^n n_i \cdot \cos \alpha_i \cdot \left[(GI_t)_i + \frac{3}{2} \left((EI_y)_i - (GI_t)_i \right) \cos^2 \alpha_i \right] + \sum_{j=1}^m (EI)_j \quad (5.51)$$

Tomando o caso limite para o qual $\alpha_i = 0$ para todas as camadas, teríamos então como resultado para a rigidez flexional do *riser*:

$$(EI)_{eq} = \sum_{i=1}^n \frac{n_i}{2} \cdot [3(EI_y)_i - (GI_t)_i] + \sum_{j=1}^m (EI)_j$$

Tal resultado, contudo, não está correto, pois a expressão (5.36), que fornece a contribuição de uma dada camada helicoidal ao momento fletor aplicado ao *riser*, na condição de escorregamento total dos tendões, não pode ser aplicada para o caso em que $\alpha_i = 0$. A razão disto pode ser atribuída, por exemplo, ao fato de que as expressões obtidas para o escorregamento dos tendões fornecem (ver equações (c.142) e (c.143) do Anexo C):

$$\Delta_{bc} = K \cdot R_1^2 \cdot \cos \alpha_1 \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin^2 \alpha_1} \right) \quad \text{e} \quad \Delta_{tc} = \frac{K \cdot R_1^2 \cdot \cos^2 \alpha_1}{\sin \alpha_1}$$

mostrando, claramente, que não são válidas para ângulos de assentamento próximos de zero (caso contrário os deslocamentos resultariam infinitamente grandes, invalidando a hipótese de linearidade geométrica). Como tais relações acabam sendo empregadas na determinação da rigidez flexional, não podemos garantir que a equação (5.51) forneça resultados confiáveis na condição de pequenos ângulos de assentamento.

Lembramos que Lanteigne [36] também propõe uma expressão para a rigidez flexional de cabos na condição de escorregamento total dos tendões. Tal expressão é dada por:

$$(EI)_{eq} = \sum_{i=1}^N n_i (EI)_i + (EI)_c \quad (5.52)$$

Observamos, contudo, que a expressão (5.52), proposta por Lanteigne [36] para o caso de escorregamento total dos tendões, só faz sentido se os ângulos de

assentamento de todas as camadas helicoidais forem nulos²⁴, o que certamente não ocorre nas aplicações práticas.

Finalizando, podemos concluir que:

- i) as expressões utilizadas em nossos modelos são consistentes, pois recuperam expressões mais simples (uma vez admitidas certas hipóteses) propostas por Lanteigne [36], num dos estudos mais completos sobre o tema;
- ii) as expressões que utilizamos são mais gerais e mais adequadas à análise de *risers* flexíveis uma vez que considera tanto as variações de raio médio das camadas quanto as variações dos ângulos de assentamento dos tendões, além de considerar também as contribuições devidas a flexo-torção dos tendões, parâmetros estes ignorados por Lanteigne [36];
- iii) as expressões (5.50) e (5.51), que fornecem os valores de rigidez flexional do *riser* nas condições de ausência de escorregamento e de escorregamento total, podem ser utilizadas sem problemas, desde que os ângulos de assentamento das camadas helicoidais não sejam extremamente pequenos.

5.3.2 Confronto entre nosso modelo e resultados experimentais

Neste item iremos confrontar os valores de rigidez flexional obtidos analiticamente, através das equações (5.50) e (5.51), com valores experimentais obtidos no ensaio de um tubo flexível típico. Os dados do tubo flexível a ser analisado foram publicados por Witz [88], mas também estão reproduzidos no capítulo 4 (ver item 4.5.2). Conforme já comentamos no capítulo anterior, neste artigo publicado por Witz foram feitas diversas comparações entre os valores de rigidez de um flexível obtidos experimentalmente e analiticamente (estes últimos tendo sido calculados por várias instituições ligadas à pesquisa e/ou à utilização de *risers*). Aproveitando os dados publicados por Witz, iremos também comparar os resultados analíticos obtidos pelos nossos modelos com os resultados analíticos obtidos pelas instituições participantes do projeto.

²⁴ Ao contrário da equação (5.51), que não fornece resultado confiável neste caso.

No capítulo 4 já foram feitas as comparações e discussões referentes ao comportamento do tubo sob carregamentos axissimétricos, tendo sido obtidos os valores de rigidez axial e torsional do tubo em diversas situações. Relativamente aos carregamentos envolvendo flexão, Witz [88] explica que foi solicitado aos participantes do projeto que obtivessem os valores de rigidez flexional para o tubo em duas condições:

- a) considerando pressão interna nula;
- b) considerando pressão interna igual a 300 bar (= 30 MPa).

Os valores analíticos foram então comparados com as curvas *momento fletor x curvatura* levantadas experimentalmente para as duas condições citadas. Um ponto interessante a ser destacado é que, conforme observa Witz [88], das mais de 70 instituições inicialmente contatadas e convidadas a participar do projeto, apenas 10 participaram do estudo de caso; e, dentre estas, apenas 6 foram capazes (sic) de determinar a rigidez flexional do tubo. Isto talvez seja mais um indicativo da falta de modelos para a estimativa destas propriedades.

Com os dados do tubo flexível, pudemos determinar sua rigidez flexional com a ajuda das expressões (5.50) e (5.51), associadas, respectivamente, às hipóteses de ausência de escorregamento e de escorregamento total dos tendões devido a flexão. A tabela 5.3 compara os resultados obtidos através dos nossos modelos com os resultados analíticos obtidos pelos participantes indicados no artigo de Witz [88]. Deve-se ressaltar que todos os valores fornecidos por tais participantes considera a hipótese de escorregamento total dos tendões devido a flexão.

Além dos valores calculados pelos participantes, a tabela 5.3 indica também a média e o desvio padrão dos valores fornecidos pelos participantes (os valores correspondentes aos nossos modelos não estão considerados no cálculo da média e do desvio padrão). Deve-se observar que o participante nº 4 (MAI), enviou dois conjuntos de valores para a rigidez flexional, os quais parecem corresponder a

diferentes versões de modelos usados para o cálculo de $(EI)_{eq}$. Os resultados de ambas as versões foram utilizados para o cálculo da média e do desvio padrão.

Tabela 5.3: Declividades das curvas *Momento fletor x curvatura*.

Participante	M/K (N.m²) sem pressão interna	M/K (N.m²) pressão int. de 30 MPa
1) Seanor	–	–
2) Taurus	–	–
3) Lloyd's Register	7625	153374
4) MAI (“ <i>Tape version</i> ”)	594	694 / 830 (*)
MAI	1054	1151 / 1151 (*)
5) Statoil	1440	3710
6) Seaflex	–	–
7) NTH/SINTEF	1490	3489
8) Wellstream	–	–
9) Coflexip	9091	952
10) UCL	1213	–
Média²⁵	3215	1999 / 2026 (*)
Desvio Padrão	3551	1472 / 1443 (*)
Equação (5.50)	230782	230782
Equação (5.51)	850	850

Ainda com relação aos resultados fornecidos pelo participante nº 4, nota-se que no 2º caso (tubo com pressão interna) são fornecidos valores diferentes de rigidez flexional para a primeira versão utilizada. A diferença entre estes valores é que o primeiro desconsidera a existência de uma possível força axial de tração devida à pressão interna e ao efeito de tampa (“*end cap effects*”), enquanto o segundo valor (marcado com (*)) considera este efeito. Isto explica por que a média e o desvio padrão calculados para este 2º caso apresentam dois valores distintos.

²⁵ Desconsideramos o valor obtido pelo 3º participante (Lloyd's Register) no cálculo da média e do desvio padrão referente ao 2º caso (tubo com pressão interna de 30 MPa).

Com base nos resultados indicados na tabela 5.3, é possível verificar que:

- a) há uma grande disparidade nos valores de rigidez flexional obtidos pelos diversos participantes. Esta falta de consenso entre os valores obtidos indica a existência de diferentes modelagens sendo utilizadas, sendo óbvio que algumas delas certamente não conseguem recuperar, de forma adequada, a resposta do *riser* sob carregamentos de flexão;
- b) os valores de rigidez flexional estimados pelos nossos modelos não conseguem recuperar a influência da pressão externa. Isto se deve a algumas hipóteses admitidas na modelagem (conforme já comentamos no item 5.3.1) que precisarão ser reavaliadas em versões futuras;
- c) o valor da rigidez flexional obtido a partir da hipótese de não-escorregamento entre as camadas (equação (5.50)) resultou muito maior que o correspondente valor obtido a partir da hipótese de escorregamento total (equação (5.51)). Conforme veremos, este último é muito mais próximo dos valores de rigidez obtidos experimentalmente.

As figuras 5.8 e 5.9 mostram as curvas *Momento fletor x Curvatura* levantadas através de ensaios a flexão para o tubo, sendo a figura 5.8 associada à condição de pressão interna nula, e a figura 5.9 para uma condição de pressão interna de 300 bar (=30 MPa). Nota-se que nos dois casos há uma histerese relativamente grande, a qual os modelos propostos não conseguem recuperar, uma vez que o atrito interno entre as camadas não está sendo considerado. Notamos também que os valores de rigidez flexional tangentes são relativamente próximos uns dos outros: no primeiro caso, as declividades são de 1014 N.m² (mínima) e de 1190 N.m² (máxima); já no segundo caso temos declividades de 725 N.m² (mínima) e 896 N.m² (máxima). Considerando que a pressão interna aplicada no segundo caso é relativamente grande, podemos inferir destes resultados que a rigidez flexional praticamente independe da pressão interna aplicada ao *riser* (observe que todos os valores experimentais têm a mesma ordem de grandeza, apontando para uma rigidez flexional próxima a 1000 N.m²). Desta forma, o fato de os nossos modelos fornecerem valores de rigidez flexional

independentes do nível de pressão interna e/ou externa aplicadas parece não ter sérias implicações do ponto de vista prático.

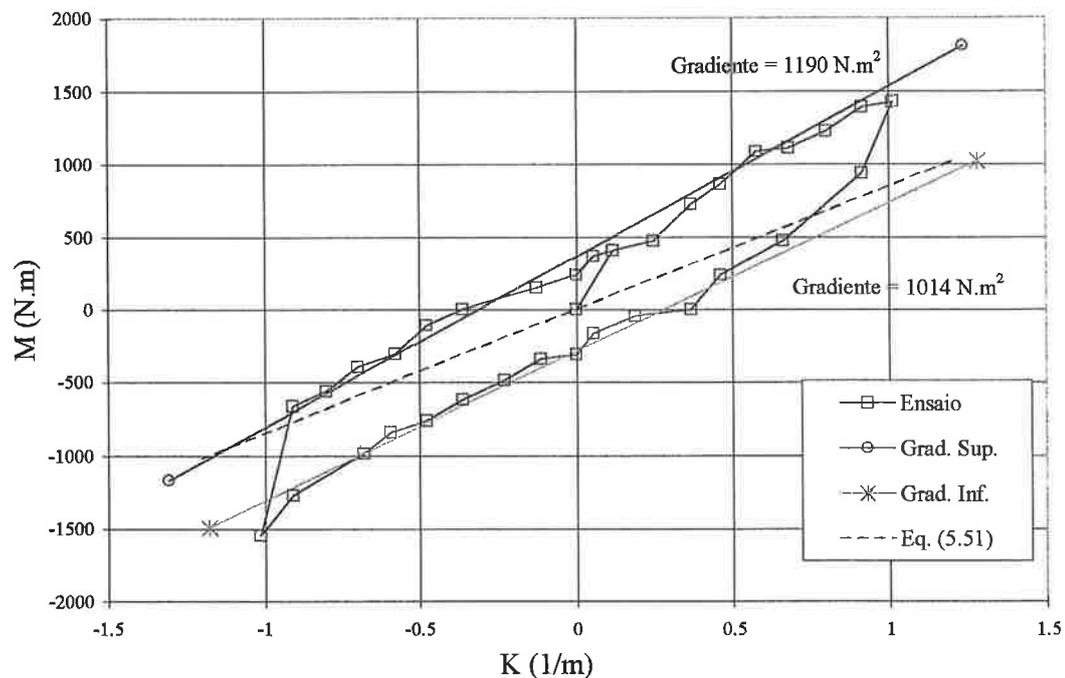


Figura 5.8: Curva *Momento fletor x Curvatura* [88] (tubo sem pressão interna).

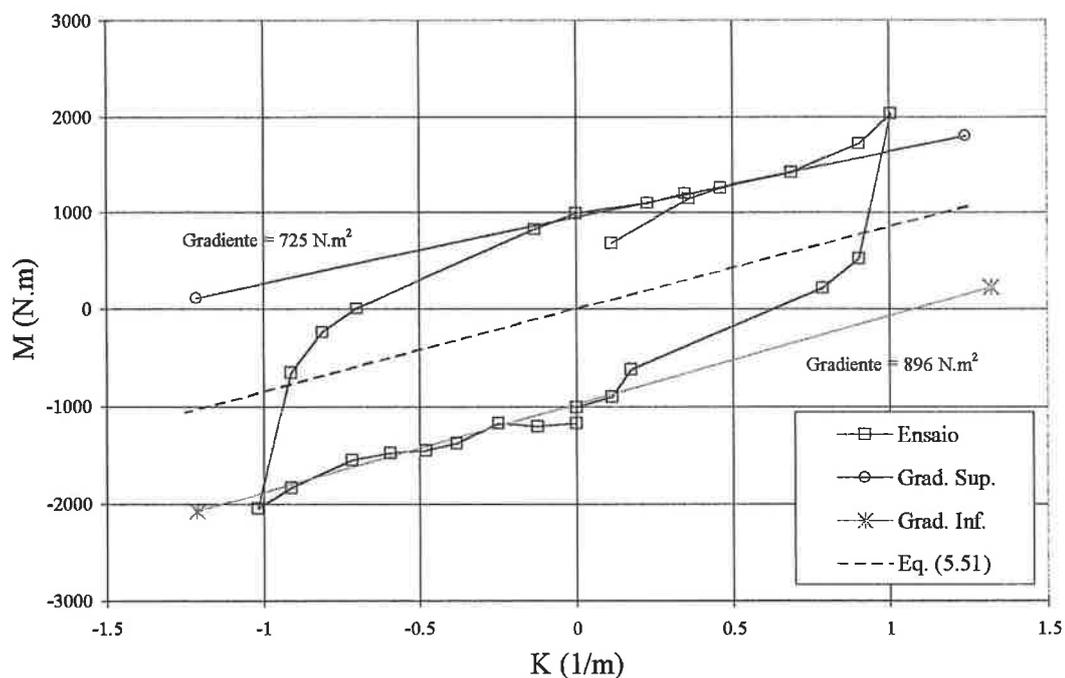


Figura 5.9: Curva *Momento fletor x Curvatura* [88] (tubo com pressão interna).

Pode-se verificar ainda, à luz das comparações entre os resultados analíticos obtidos pelos nossos modelos e os resultados experimentais, que o modelo de escorregamento total é o mais adequado para a determinação da rigidez flexional do tubo. Se compararmos os valores analíticos obtidos com este modelo com os valores médios das declividades observadas experimentalmente, em cada caso, veremos que os erros cometidos seriam:

$$\text{no primeiro caso: } erro = \frac{(850) - (1102)}{(1102)} = -22,9\%$$

$$\text{no segundo caso: } erro = \frac{(850) - (811)}{(811)} = 4,8\%$$

mostrando que os erros cometidos são relativamente pequenos e aceitáveis do ponto de vista prático, principalmente se comparados com os erros que seriam obtidos caso fossem considerados os valores de rigidez calculados pelos participantes citados no trabalho de Witz [88].

6. ANÁLISE DE INSTABILIDADE GLOBAL DE LINHAS

Em aplicações *offshore*, a análise da estabilidade de tubos flexíveis e cabos umbilicais também é fundamental para assegurar que estes equipamentos possam suportar o carregamento aplicado durante as condições de lançamento e/ou operação sem apresentar dano (frequentemente causado pela curvatura excessiva imposta ao elemento quando ocorre a perda de estabilidade). Uma condição particular que deve ser verificada acontece quando a amplitude da tração dinâmica (\tilde{T}), relacionada ao movimento imposto pelo sistema flutuante, excede localmente o valor da tração estática (isto pode ocorrer com frequência em regiões de baixo tensionamento estático como, por exemplo, no *TDP*). Uma vez que a tração dinâmica muda ciclicamente no tempo, tal condição faz com que o *riser* (ou cabo) fique sob compressão dinâmica durante parte do ciclo, conforme ilustra a figura 6.1.

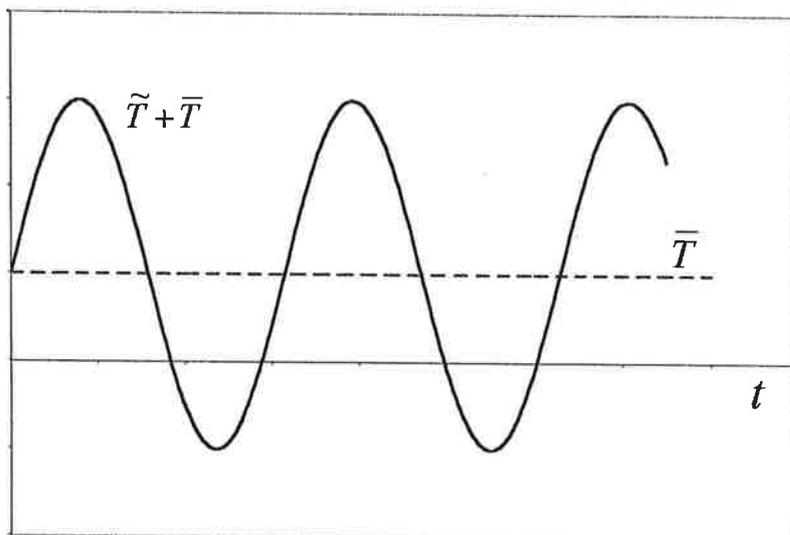


Figura 6.1: Tração dinâmica (\tilde{T}) e estática (\bar{T}) locais ao longo do tempo.

Além disto, condições para a formação de laços na linha (*loops*) também podem estar presentes. Tais condições sempre envolvem a aplicação de momentos de torção na linha, que podem surgir devido aos seguintes fatores (agindo isoladamente ou combinados):

- torção devida à existência de perfil de correnteza helicoidal (como a que ocorre, por exemplo, na Bacia de Campos, RJ);
- torção residual de fabricação/construção (freqüentemente encontrada em tubos flexíveis e umbilicais devido a presença das camadas helicoidais);
- manobras erradas durante a operação de instalação;
- torção residual associada à armazenagem de tubos flexíveis e cabos umbilicais em “cestas”.

Do exposto, pode-se concluir que, se a carga de compressão dinâmica, dada por $P = -(\bar{T} + \tilde{T})$, superar um dado valor crítico (P_{cr}), o *riser*/cabo não suportará mais qualquer acréscimo na carga de compressão e irá “buscar” uma nova configuração de equilíbrio. O valor de P nesta condição é chamado de carga crítica de flambagem e a importância de sua determinação para o projeto de *risers* pode ser atestada pelos seguintes motivos:

- a) a ação simultânea dos carregamentos mencionados (compressão dinâmica e torção) facilita a formação de laços (*loops* ou *hockles*) e de dobras (*kinks*) na linha, podendo comprometer sua integridade estrutural;
- b) se a carga crítica, para uma determinada condição, for conhecida não será necessário impor que as camadas internas suportem (em seu conjunto) valores de compressão superiores a P_{cr} (pois, quando $P > P_{cr}$, há flambagem global do *riser*), evitando-se, assim, um super-dimensionamento desnecessário da seção;
- c) no caso de a carga crítica for atingida para uma determinada condição, deve-se voltar a atenção para o comportamento pós-flambagem da linha, verificando-se se a curvatura máxima na linha ultrapassa valores máximos permitidos pelo projeto ou pelo fabricante.

Por outro lado, conforme assinalam Aranha et al. [13], resultados numéricos não são muito precisos quando a força de compressão local atinge valores próximos de P_{cr} . Isto pode ser demonstrado através da análise de um cabo ideal com rigidez flexional nula: apesar de tal elemento não suportar forças de compressão, os resultados numéricos indicam, algumas vezes, valores de compressão relativamente altos atuando no cabo. Por extensão, também podemos esperar problemas numéricos na análise de *risers* flexíveis (que possuem alguma rigidez flexional) quando a força de compressão se aproxima de P_{cr} . Isto sem citar as possíveis dificuldades de interpretação na análise dos resultados numéricos caso um valor de referência para P_{cr} não seja conhecido.

É importante ressaltar ainda que:

- i) a determinação da carga crítica de flambagem para barras curvas de grande comprimento (em particular para *risers*) consistiu-se num problema cuja solução permaneceu desconhecida durante bastante tempo (ver, p.ex., Rosenthal [73]);
- ii) vários pontos peculiares do problema, como a questão da determinação do comprimento de flambagem em barras curvas de grande comprimento e o efeito da curvatura na carga crítica de flambagem, foram respondidos apenas recentemente com as importantes contribuições de Aranha et al [13], que determinaram uma expressão analítica para a carga crítica de compressão em *risers*, porém para o problema plano apenas;
- iii) a determinação da carga crítica de flambagem para barras curvas de grande comprimento submetidas simultaneamente a compressão e torção constitui uma contribuição original à solução deste problema de estabilidade.

Desta forma, tendo o projeto de *risers* e cabos como foco principal, mostraremos neste capítulo como obter a carga crítica de flambagem destes elementos sob determinadas condições (como, por exemplo, em função da torção localmente aplicada). Veremos ainda que a curvatura inicial local (decorrente da configuração estática da linha) desempenha um papel importante na obtenção da carga crítica. Também será mostrado que as propriedades mecânicas do *riser*, como os valores de

rigidez flexional (EI) e torsional (GJ), que foram objeto de estudo nos capítulos precedentes, têm grande importância na determinação das cargas críticas de flambagem. E, neste sentido, responderemos à seguinte pergunta: “Até que ponto os erros obtidos na avaliação das propriedades do *riser* são importantes na determinação das cargas críticas de flambagem?”.

O capítulo está dividido em seis partes: no item 6.1 o problema a ser resolvido será descrito com mais pormenores, incluindo a apresentação de algumas hipóteses iniciais; o item 6.2 mostrará as equações gerais para a solução do problema; o item 6.3 tratará da aplicação das equações gerais para o problema particular descrito em 6.1; o item 6.4 descreverá um procedimento para o cálculo da carga crítica de compressão dinâmica; no item 6.5 serão resolvidos alguns exemplos de aplicação para *risers* rígidos e flexíveis e o item 6.6 trará algumas considerações referentes à análise de estabilidade de *risers*.

6.1 Descrição do problema a ser resolvido

O objetivo principal deste capítulo é a obtenção de uma expressão analítica para o cálculo da carga crítica de flambagem em *risers* e cabos que estejam submetidos simultaneamente à ação de compressão dinâmica e torção. Destaca-se, portanto, muito mais a preocupação com o problema de projeto do *riser* (ou cabo) do que com o problema de determinação do comportamento pós-flambagem como, por exemplo, tem sido a ênfase dos trabalhos publicados por Lu; Perkins [41, 42] e Gottlieb; Perkins [27].

Na presente análise, admitiremos que o *riser*/cabo se encontra inicialmente (ou seja, em sua configuração estática) num plano vertical (plano OYZ), estando submetido apenas à ação de seu peso próprio submerso e de uma correnteza atuando neste mesmo plano (ver figura 6.2). Admitiremos, ainda, para simplificar o problema, que neste estado inicial não há qualquer torção aplicada ao elemento, de tal forma que os

eixos principais de flexão (Cx) e torção (Cz), em uma seção genérica do cabo, se encontrem paralelos ao plano OYZ do sistema de referência fixo $OXYZ$.

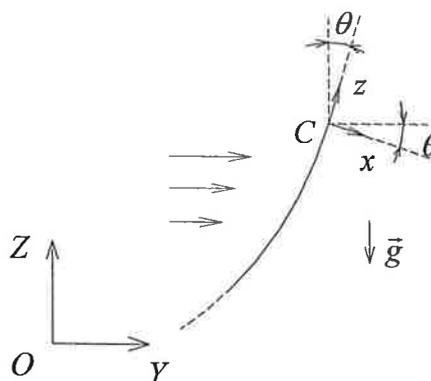


Figura 6.2: Configuração estática do riser.

Deve-se ressaltar que o *riser*/cabo não está “preso” ao plano OYZ , de tal modo que podem existir deslocamentos para fora do plano quando forem aplicadas perturbações ao sistema. Desta forma, os resultados obtidos em nossa análise permitirão verificar se o modo de flambagem ocorre no plano inicial em que se encontra o *riser* (conforme simplificação admitida implicitamente por Aranha et al. [13], ou se um modo de flambagem fora do plano inicial também é possível.

Uma vez que as perturbações que levam à compressão dinâmica do *riser*/cabo estão associadas, sobretudo, ao movimento imposto pelo sistema flutuante ao qual o mesmo está conectado, e considerando que as frequências de oscilação impostas ao sistema são geralmente baixas (da ordem de 0,1 Hz), podemos admitir que se trata de um problema de flambagem num regime quase-estático, e desconsiderar, portanto, as forças de inércia envolvidas no problema frente às forças de natureza elástica existentes¹.

¹ Aranha et al. [13] utilizaram a mesma argumentação, obtendo resultados bastante satisfatórios, conforme será mostrado no item 6.4.

Admitiremos, ainda, que a escala de comprimento em que ocorre a flambagem é muito menor que a escala de comprimento relacionada ao comprimento suspenso do *riser*/cabo e, diante disso, vamos considerar também que, pelo menos na região onde se está analisando a ocorrência de instabilidade, as seguintes simplificações sejam possíveis:

- a) o raio de curvatura local (na configuração estática) é praticamente constante para o trecho considerado;
- b) tanto a tração estática (\bar{T}) quanto a amplitude de tração dinâmica (\tilde{T}) são praticamente constantes ao longo do comprimento de arco S , no trecho considerado.

6.2 Equacionamento geral para a solução do problema

De forma geral, as equações necessárias para a solução de problemas de análise estrutural compreendem: equações de equilíbrio, equações constitutivas e relações entre componentes de deslocamento e componentes de deformação. Neste item serão apresentadas as equações gerais (dentro da teoria clássica) usadas na solução de problemas de estruturas formadas por barras e cabos. As hipóteses necessárias à aplicação destas equações serão também apresentadas.

6.2.1 Equações diferenciais de equilíbrio

As equações diferenciais de equilíbrio de forças e momentos, com relação aos eixos principais de flexo-torção (x , y , z) na seção genérica de uma barra submetida a esforços distribuídos são dadas por (ver equações (a.21) e (a.22) do Anexo A):

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_x}{\partial S_i} - Q_y \cdot \kappa_t + T \cdot \kappa_y + f_{xi} &= 0 \\ \frac{\partial Q_y}{\partial S_i} - T \cdot \kappa_x + Q_x \cdot \kappa_t + f_{yi} &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial S_i} - Q_x \cdot \kappa_y + Q_y \cdot \kappa_x + f_{zi} &= 0 \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_x}{\partial S_i} - M_y \cdot \kappa_t + M_z \cdot \kappa_y - Q_y + m_{xi} &= 0 \\
\frac{\partial M_y}{\partial S_i} - M_z \cdot \kappa_x + M_x \cdot \kappa_t + Q_x + m_{yi} &= 0 \\
\frac{\partial M_z}{\partial S_i} - M_x \cdot \kappa_y + M_y \cdot \kappa_x + m_{zi} &= 0
\end{aligned} \tag{6.2}$$

onde:

T : força normal à seção transversal do *riser/cabo*;

Q_x, Q_y : forças cortantes nas direções x e y , respectivamente;

M_x, M_y : momentos fletores nas direções x e y , respectivamente;

M_z : momento de torção aplicado ao *riser/cabo*;

f_{xi}, f_{yi}, f_{zi} : forças distribuídas (por unidade de comprimento deformado do *riser/cabo*) nas direções x, y, z ;

m_{xi}, m_{yi}, m_{zi} : binários distribuídos (por unidade de comprimento deformado do *riser/cabo*) nas direções x, y, z ;

$\kappa_x, \kappa_y, \kappa_t$: componentes de curvatura e torção da barra numa seção genérica, na configuração deformada;

O subscrito “ i ” presente nas equações de equilíbrio (6.1) e (6.2) significa que as grandezas em questão estão associadas à uma dada configuração deformada Σ_i , em contraste à configuração inicial (ou não-deformada) do *riser/cabo* denominada Σ_1 . Lembramos também que estas equações são obtidas através da teoria clássica de barras (ver, p.ex., Love [40] e/ou Atanackovic [14]) e se baseiam nas seguintes hipóteses:

- a) as seções planas e ortogonais ao eixo central da barra (*riser/cabo*) na configuração não-deformada permanecem planas e ortogonais ao eixo central da barra (*riser/cabo*) na configuração deformada;
- b) as seções transversais não têm suas dimensões nem seu formato alterados após o carregamento.

Deve-se observar ainda que as equações de equilíbrio (6.1) e (6.2) são equações de equilíbrio estático, pois, como já explicado no item 6.1, as forças de inércia são consideradas demasiadamente pequenas se comparadas aos demais esforços atuantes no *cabo/riser*, podendo ser desprezadas. Desta forma, todas as grandezas estáticas e

cinemáticas do problema podem ser consideradas como sendo funções apenas do parâmetro S_i (comprimento de arco, medido ao longo do eixo central do *riser*/cabo, em sua configuração deformada Σ_i). Contudo, podemos expressar todas estas grandezas em função do parâmetro S_1 , que é o comprimento de arco, medido ao longo do eixo central do *riser*/cabo, em sua configuração não-deformada Σ_1 . Consideremos, então, que as relações entre os esforços distribuídos por unidade de comprimento deformado e seus correspondentes por unidade de comprimento não-deformado sejam dadas por:

$$\begin{aligned} f_{xi} \cdot \Delta S_i &= f_{x1} \cdot \Delta S_1 \\ &\vdots \\ m_{xi} \cdot \Delta S_i &= m_{x1} \cdot \Delta S_1 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (6.3)$$

Pode-se mostrar então que as equações diferenciais de equilíbrio (6.1) e (6.2) podem ser reescritas na forma:

$$\begin{aligned} \frac{dQ_x}{dS_1} + (1 + \varepsilon) \cdot (-Q_y \cdot \kappa_t + T \cdot \kappa_y) + f_{x1} &= 0 \\ \frac{dQ_y}{dS_1} + (1 + \varepsilon) \cdot (-T \cdot \kappa_x + Q_x \cdot \kappa_t) + f_{y1} &= 0 \\ \frac{dT}{dS_1} + (1 + \varepsilon) \cdot (-Q_x \cdot \kappa_y + Q_y \cdot \kappa_x) + f_{z1} &= 0 \\ \frac{dM_x}{dS_1} + (1 + \varepsilon) \cdot (-M_y \cdot \kappa_t + M_z \cdot \kappa_y - Q_y) + m_{x1} &= 0 \\ \frac{dM_y}{dS_1} + (1 + \varepsilon) \cdot (-M_z \cdot \kappa_x + M_x \cdot \kappa_t + Q_x) + m_{y1} &= 0 \\ \frac{dM_z}{dS_1} + (1 + \varepsilon) \cdot (-M_x \cdot \kappa_y + M_y \cdot \kappa_x) + m_{z1} &= 0 \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$(6.5)$$

onde ε representa a deformação “média”, medida ao longo do eixo central do *riser*/cabo, numa seção genérica.

6.2.2 Equações constitutivas

Em nossa análise, as seguintes relações lineares entre os esforços solicitantes e as componentes de deformação/curvatura serão admitidas:

$$\begin{aligned} T &= EA.\varepsilon & M_y &= EI_y.\kappa_y \\ M_x &= EI_x.\kappa_x & M_z &= GJ.\kappa_t \end{aligned} \quad (6.6)$$

Admitiremos também que as propriedades elásticas utilizadas nestas equações sejam constantes no tempo e no espaço (independendo, portanto, do carregamento aplicado). Além disto, consideraremos também que $I_x = I_y = I$, o que é bastante razoável para os elementos estruturais aqui estudados (sejam eles *risers* rígidos ou flexíveis), desde que uma possível ovalização, se houver, possa ser desprezada.

Devemos ressaltar, porém, que, no caso de tubos flexíveis, as equações que relacionam os esforços solicitantes com as componentes de deformação do tubo são muito mais complexas que as equações constitutivas aqui admitidas, conforme visto nos capítulos precedentes e em vários artigos que tratam do tema (ver, por exemplo, Féret; Bournazel [24] e Witz [88]). Desta forma, no tocante a análise de estabilidade de tubos flexíveis e cabos umbilicais, os resultados obtidos através da presente análise devem ser vistos com maior cuidado e, naturalmente, como uma primeira aproximação para o tratamento do problema.

6.2.3 Relações entre as componentes de curvatura e torção e os ângulos de Euler

Seja $(OXYZ)$ um sistema fixo de coordenadas. Sejam ainda (θ, ψ, ϕ) os ângulos de Euler medidos entre o sistema fixo de coordenadas $(OXYZ)$ e o sistema local de coordenadas $(Cxyz)$ com origem no centróide C de uma seção genérica do cabo e relacionado aos eixos principais de flexo-torção da seção, de tal forma que: θ corresponde ao ângulo que o eixo local z (tangente ao eixo central do cabo) faz com o eixo fixo Z ; ψ corresponde ao ângulo que um plano paralelo a estes dois eixos (z e Z) faz com o plano fixo XZ ; e ϕ corresponde ao ângulo que o plano principal (x, z)

da barra faz com o plano paralelo aos eixos z e Z , passando pelo centróide C (veja figura 6.3). Pode-se mostrar, assim, que as relações entre as componentes de curvatura (κ_x, κ_y) e torção (κ_t) e os três ângulos de Euler definidos acima são dadas por (ver, por exemplo, Love [40] ou Atanackovic [14]):

$$\begin{aligned}\kappa_x(1+\varepsilon) &= \frac{d\theta}{dS_1} \cdot \text{sen}\phi - \frac{d\psi}{dS_1} \cdot \text{sen}\theta \cdot \text{cos}\phi \\ \kappa_y(1+\varepsilon) &= \frac{d\theta}{dS_1} \cdot \text{cos}\phi + \frac{d\psi}{dS_1} \cdot \text{sen}\theta \cdot \text{sen}\phi \\ \kappa_t(1+\varepsilon) &= \frac{d\phi}{dS_1} + \frac{d\psi}{dS_1} \cdot \text{cos}\theta\end{aligned}\quad (6.7)$$

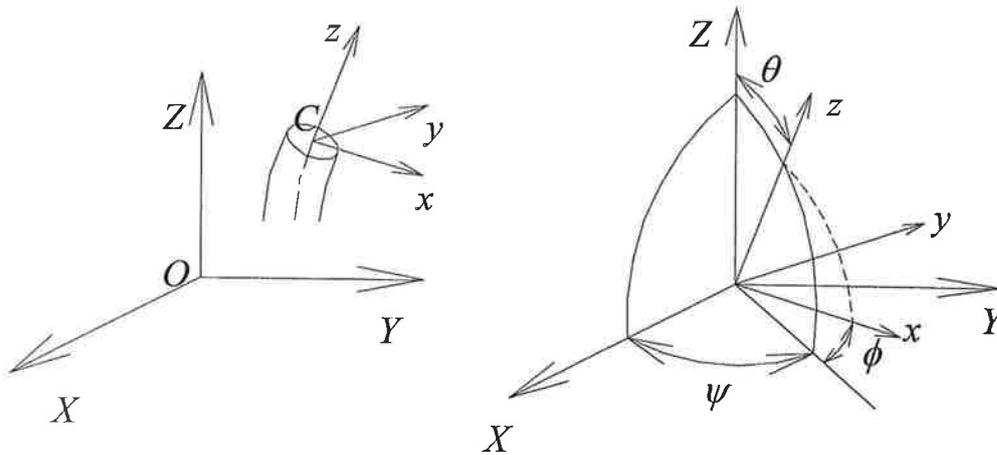


Figura 6.3: Definição dos ângulos de Euler utilizados.

6.2.4 Relações entre componentes do vetor posição e ângulos de Euler

Seja $(C-O) = (X, Y, Z)$ o vetor posição do centróide C de uma seção transversal genérica do cabo (em sua configuração deformada Σ_i) e cujas componentes são medidas relativamente ao sistema fixo de coordenadas $(OXYZ)$ e definidas pelo comprimento de arco S_1 (medido ao longo do eixo central na configuração não-deformada do cabo). As relações entre as componentes de $(C-O)$ e os ângulos de Euler anteriormente definidos são (ver, p.ex., Love [40] ou Coyne [21]):

$$\begin{aligned}
\frac{dX}{dS_1} &= (1 + \varepsilon) \cdot \text{sen} \theta \cdot \cos \psi \\
\frac{dY}{dS_1} &= (1 + \varepsilon) \cdot \text{sen} \theta \cdot \text{sen} \psi \\
\frac{dZ}{dS_1} &= (1 + \varepsilon) \cdot \cos \theta
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Há, portanto, um total de 16 equações que devem ser usadas para a obtenção dos 16 campos formados pelas seguintes incógnitas:

- 6 componentes dos vetores resultantes de força e momento agindo no centróide de uma seção transversal arbitrária do *riser*/cabo ($Q_x, Q_y, T, M_x, M_y, M_z$);
- 3 componentes de curvatura e torção ($\kappa_x, \kappa_y, \kappa_t$) e a deformação do eixo central do *riser*/cabo (ε);
- 3 ângulos de Euler (θ, ψ, ϕ);
- 3 componentes do vetor posição do centróide de uma seção transversal arbitrária do *riser*/cabo (X, Y, Z).

6.3 Aplicação das equações gerais para o problema proposto

Solução do Problema Estático:

Como admitimos que na configuração estática o cabo se encontra totalmente no plano OYZ (ver figura 6.2) e está submetido apenas a carregamentos neste mesmo plano, as seguintes simplificações podem ser aplicadas neste caso:

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}(S) &= \frac{\pi}{2} \quad , \quad \bar{\phi}(S) = 0 \quad , \quad \bar{X}(S) = 0 \\
\bar{f}_y(S) &= 0 \quad , \quad \bar{m}_x(S) = 0 \quad , \quad \bar{m}_z(S) = 0
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Portanto, os únicos campos que restam ser determinados são: $Q_x, T, M_y, \varepsilon, \kappa_y, \theta, Y, Z$ – todos os demais 8 campos sendo identicamente nulos ou constantes. Vamos admitir que a solução completa do problema estático seja conhecida e dada pelas seguintes funções:

$$\begin{aligned}
Q_x(S_1) &= \bar{Q}_x(S_1) & \kappa_y(S_1) &= \bar{\kappa}_y(S_1) \\
T(S_1) &= \bar{T}(S_1) & \theta(S_1) &= \bar{\theta}(S_1) \\
M_y(S_1) &= \bar{M}_y(S_1) & Y(S_1) &= \bar{Y}(S_1) \\
\varepsilon(S_1) &= \bar{\varepsilon}(S_1) & Z(S_1) &= \bar{Z}(S_1)
\end{aligned} \tag{6.10}$$

Tais campos devem satisfazer o seguinte conjunto (simplificado) de equações:

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{Q}_x}{dS_1} + \bar{T} \cdot \frac{d\bar{\theta}}{dS_1} + \bar{f}_{x1} &= 0 \\
\frac{d\bar{T}}{dS_1} - \bar{Q}_x \cdot \frac{d\bar{\theta}}{dS_1} + \bar{f}_{z1} &= 0
\end{aligned} \tag{6.11}$$

$$\begin{aligned}
EI_y \cdot \frac{d\bar{\kappa}_y}{dS_1} + \bar{Q}_x \cdot (1 + \bar{\varepsilon}) + \bar{m}_{y1} &= 0 \\
\bar{T} = EA \cdot \bar{\varepsilon} \quad \bar{M}_y = EI_y \cdot \bar{\kappa}_y &
\end{aligned} \tag{6.12}$$

$$\bar{\kappa}_y \cdot (1 + \bar{\varepsilon}) = \frac{d\bar{\theta}}{dS_1} \tag{6.13}$$

$$\frac{d\bar{Y}}{dS_1} = (1 + \bar{\varepsilon}) \cdot \text{sen} \bar{\theta} \quad \frac{d\bar{Z}}{dS_1} = (1 + \bar{\varepsilon}) \cdot \text{cos} \bar{\theta} \tag{6.14}$$

Solução do Problema de Instabilidade:

Uma vez encontrada a solução para o problema estático, a solução geral para o problema de instabilidade pode ser dada na forma:

$$G(S_1) = \bar{G}(S_1) + \tilde{G}(S_1) \tag{6.15}$$

onde:

$G(S_1)$ corresponde à solução geral para um campo genérico G ;

$\bar{G}(S_1)$ corresponde à solução do problema estático para o campo G ;

$\tilde{G}(S_1)$ é uma perturbação dada ao campo G .

Na presente análise, admitiremos que todas as variáveis do problema possuam perturbações. Contudo, com relação às perturbações associadas às cargas distribuídas aplicadas ao cabo, admitiremos que:

$$\begin{aligned}\tilde{f}_x(S) &= 0, & \tilde{f}_y(S) &= 0, & \tilde{f}_z(S) &= 0, \\ \tilde{m}_x(S) &= 0, & \tilde{m}_y(S) &= 0, & \tilde{m}_z(S) &= 0\end{aligned}$$

Se substituirmos, agora, a expressão (6.15), onde aplicável, nas equações gerais (6.4) a (6.8), e usarmos as equações dadas por (6.9) a (6.14), as seguintes relações serão finalmente obtidas (após desprezarmos alguns termos de ordem superior):

Equações diferenciais de equilíbrio:

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{Q}_x}{dS_1} - \tilde{Q}_y \tilde{\kappa}_t + (\bar{T} + \tilde{T}) \tilde{\kappa}_y + \tilde{T} \bar{\kappa}_y &\cong 0 \\ \frac{d\tilde{Q}_y}{dS_1} - (\bar{T} + \tilde{T}) \tilde{\kappa}_x + (\bar{Q}_x + \tilde{Q}_x) \tilde{\kappa}_t &\cong 0 \\ \frac{d\tilde{T}}{dS_1} - \bar{Q}_x \tilde{\kappa}_y - \tilde{Q}_x (\bar{\kappa}_y + \tilde{\kappa}_y) + \tilde{Q}_y \tilde{\kappa}_x &\cong 0\end{aligned}\tag{6.16}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{M}_x}{dS_1} - (\bar{M}_y + \tilde{M}_y) \tilde{\kappa}_t + \tilde{M}_z (\bar{\kappa}_y + \tilde{\kappa}_y) - \tilde{Q}_y &\cong 0 \\ \frac{d\tilde{M}_y}{dS_1} - \tilde{M}_z \tilde{\kappa}_x + \tilde{M}_x \tilde{\kappa}_t + \bar{Q}_x \tilde{\varepsilon} + \tilde{Q}_x &\cong 0 \\ \frac{d\tilde{M}_z}{dS_1} - \tilde{M}_x (\bar{\kappa}_y + \tilde{\kappa}_y) + (\bar{M}_y + \tilde{M}_y) \tilde{\kappa}_x &\cong 0\end{aligned}\tag{6.17}$$

Equações constitutivas:

$$\begin{aligned}\tilde{T} &= EA \tilde{\varepsilon} & \tilde{M}_y &= EI_y \tilde{\kappa}_y \\ \tilde{M}_x &= EI_x \tilde{\kappa}_x & \tilde{M}_z &= GJ \tilde{\kappa}_t\end{aligned}\tag{6.18}$$

Relações entre componentes de curvatura e torção e ângulos de Euler:

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}_x &\cong \left(\frac{d\bar{\theta}}{dS_1} + \frac{d\tilde{\theta}}{dS_1} \right) \text{sen} \tilde{\phi} - \frac{d\tilde{\psi}}{dS_1} \text{sen}(\bar{\theta} + \tilde{\theta}) \text{cos} \tilde{\phi} \\ \tilde{\kappa}_y + \tilde{\kappa}_y &\cong \left(\frac{d\bar{\theta}}{dS_1} + \frac{d\tilde{\theta}}{dS_1} \right) \text{cos} \tilde{\phi} + \frac{d\tilde{\psi}}{dS_1} \text{sen}(\bar{\theta} + \tilde{\theta}) \text{sen} \tilde{\phi} \\ \tilde{\kappa}_t &\cong \frac{d\tilde{\phi}}{dS_1} + \frac{d\tilde{\psi}}{dS_1} \text{cos}(\bar{\theta} + \tilde{\theta})\end{aligned}\tag{6.19}$$

Relações entre as componentes do vetor posição e os ângulos de Euler:

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{X}}{dS_1} &\cong -\text{sen}(\bar{\theta} + \tilde{\theta}) \cdot \text{sen} \tilde{\psi} \\ \frac{d\tilde{Y}}{dS_1} + \frac{d\tilde{Y}}{dS_1} &\cong \text{sen}(\bar{\theta} + \tilde{\theta}) \cdot \text{cos} \tilde{\psi} \\ \frac{d\tilde{Z}}{dS_1} + \frac{d\tilde{Z}}{dS_1} &\cong \text{cos}(\bar{\theta} + \tilde{\theta})\end{aligned}\quad (6.20)$$

Das equações de equilíbrio (6.17) segue que – após usarmos as equações constitutivas dadas por (6.12) e (6.18) e lembrando que $I_x = I_y = I$ por hipótese:

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_y &\cong (EI) \cdot \frac{d\tilde{\kappa}_x}{dS_1} + (GJ - EI) \cdot \tilde{\kappa}_t \cdot (\bar{\kappa}_y + \tilde{\kappa}_y) \\ \tilde{Q}_x &\cong -(EI) \cdot \frac{d\tilde{\kappa}_y}{dS_1} + (GJ - EI) \cdot \tilde{\kappa}_t \cdot \tilde{\kappa}_x - \bar{Q}_x \cdot \tilde{\varepsilon} \\ \frac{d\tilde{\kappa}_t}{dS_1} &= 0\end{aligned}\quad (6.21)$$

Da equação (6.21-c), pode-se concluir que a perturbação correspondente à torção ($\tilde{\kappa}_t$) deve ser praticamente constante ao longo do comprimento de arco S (numa escala correspondente ao comprimento de flambagem do cabo), desde que as hipóteses consideradas até então sejam válidas. Substituindo (6.21) nas equações de equilíbrio (6.16), encontraremos:

$$\begin{aligned}-\frac{d^2\tilde{\kappa}_y}{dS_1^2} + \alpha \cdot \frac{d\tilde{\kappa}_x}{dS_1} - \frac{1}{EI} \cdot \frac{d(\bar{Q}_x \cdot \tilde{\varepsilon})}{dS_1} - \beta \cdot \tilde{\kappa}_y &\cong \gamma \\ \frac{d^2\tilde{\kappa}_x}{dS_1^2} + \alpha \cdot \frac{d\tilde{\kappa}_y}{dS_1} + \frac{1}{EI} \cdot \bar{Q}_x \tilde{\kappa}_t + \beta \cdot \tilde{\kappa}_x &\cong 0 \\ \frac{d\tilde{T}}{dS_1} - \bar{Q}_x \cdot \tilde{\kappa}_y + EI \cdot \left[\frac{d\tilde{\kappa}_y}{dS_1} \cdot (\bar{\kappa}_y + \tilde{\kappa}_y) + \tilde{\kappa}_x \cdot \frac{d\tilde{\kappa}_x}{dS_1} \right] &\cong 0\end{aligned}\quad (6.22)$$

onde os parâmetros α , β e γ são dados por:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{(GJ - 2.EI)\tilde{\kappa}_t}{EI} \\
\beta &= \frac{(GJ - EI)(\tilde{\kappa}_t)^2 + P}{EI} \\
\gamma &= -\bar{\kappa}_y \left[\frac{\tilde{T} + (EI - GJ)(\tilde{\kappa}_t)^2}{EI} \right]
\end{aligned} \tag{6.23}$$

e sendo $P = -(\bar{T} + \tilde{T})$ o valor da compressão dinâmica aplicada ao cabo (note que $P > 0$ quando $\tilde{T} < -\bar{T}$).

Se considerarmos agora que:

- os terceiros termos que aparecem nas equações (6.22-a) e (6.22-b) podem ser desprezados, uma vez que em ambos comparece a força cortante \bar{Q}_x (que geralmente possui valores bastante pequenos ao longo do cabo) multiplicada por outras quantidades também muito pequenas;
- os valores de tração estática (\bar{T}), tração dinâmica (\tilde{T}) e de curvatura estática ($-\bar{\kappa}_y$) são praticamente constantes ao longo do comprimento de arco S (conforme posto no item 6.1);

as equações (6.22-a) e (6.22-b) ficam então simplificadas na forma:

$$\begin{aligned}
-\frac{d^2\tilde{\kappa}_y}{dS_1^2} + \alpha \cdot \frac{d\tilde{\kappa}_x}{dS_1} - \beta \cdot \tilde{\kappa}_y &\cong \gamma \\
\frac{d^2\tilde{\kappa}_x}{dS_1^2} + \alpha \cdot \frac{d\tilde{\kappa}_y}{dS_1} + \beta \cdot \tilde{\kappa}_x &\cong 0
\end{aligned} \tag{6.24}$$

onde os parâmetros α , β e γ , dados por (6.23), têm agora valores constantes (devido à hipótese (b) acima).

6.4 Cálculo da carga crítica de compressão dinâmica

A solução analítica do sistema de equações diferenciais lineares e ordinárias (6.24) envolvendo as perturbações $\tilde{\kappa}_x(S_1)$ e $\tilde{\kappa}_y(S_1)$ é:

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}_x(S_1) &= A_1 \cdot \text{sen}(k_1 S_1) + A_2 \cdot \text{cos}(k_1 S_1) + A_3 \cdot \text{sen}(k_2 S_1) + A_4 \cdot \text{cos}(k_2 S_1) \\ \tilde{\kappa}_y(S_1) &= A_1 \cdot \text{cos}(k_1 S_1) - A_2 \cdot \text{sen}(k_1 S_1) + A_3 \cdot \text{cos}(k_2 S_1) - A_4 \cdot \text{sen}(k_2 S_1) - \frac{\gamma}{\beta}\end{aligned}\quad (6.25)$$

onde k_1 e k_2 são raízes do polinômio:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \alpha \cdot \lambda - \beta \quad (6.26)$$

ou, de forma explícita:

$$k_1 = -\frac{\alpha}{2} + \frac{\sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2} \quad k_2 = -\frac{\alpha}{2} - \frac{\sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2} \quad (6.27)$$

As quatro constantes A_i ($1 \leq i \leq 4$) que aparecem na solução dada por (6.25) devem ser obtidas através de condições de contorno apropriadas. Se designarmos por l^* a menor distância entre pontos do cabo com curvatura nula e associarmos a um destes pontos a origem a partir da qual o comprimento de arco S_1 é medido, teremos as seguintes condições de contorno para a determinação das constantes A_i :

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}_x(0) &= 0 & \tilde{\kappa}_y(0) &= 0 \\ \tilde{\kappa}_x(l^*) &= 0 & \tilde{\kappa}_y(l^*) &= 0\end{aligned}\quad (6.28)$$

Deve-se observar que, da forma como foi definido, l^* corresponde ao “comprimento de flambagem” do cabo/*riser*, permanecendo, porém, como uma das incógnitas do problema.

Aplicando as condições de contorno (6.28), chega-se ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}(k_1 l^*) & \text{cos}(k_1 l^*) & \text{sen}(k_2 l^*) & \text{cos}(k_2 l^*) \\ \text{cos}(k_1 l^*) & -\text{sen}(k_1 l^*) & \text{cos}(k_2 l^*) & -\text{sen}(k_2 l^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma / \beta \\ 0 \\ \gamma / \beta \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

de forma que as quatro constantes A_i ($1 \leq i \leq 4$) são dadas por:

$$\begin{aligned} A_1 = \frac{\gamma}{\beta} - A_3 &= \frac{\gamma}{2\beta} \left[\frac{\text{cos}(k_1 l^* + k_2 l^*) - 1}{\text{cos}(k_2 l^*) - \text{cos}(k_1 l^*)} + 1 \right] \\ A_2 = -A_4 &= -\frac{\gamma}{2\beta} \left[\frac{\text{sen}(k_1 l^* + k_2 l^*) - \text{sen}(k_1 l^*) - \text{sen}(k_2 l^*)}{\text{cos}(k_2 l^*) - \text{cos}(k_1 l^*)} \right] \end{aligned} \quad (6.30)$$

Nota-se também que, qualquer que seja a relação γ/β , a condição que garante a existência de soluções não-triviais (associada a indeterminação do sistema dado por (6.29)) é:

$$\text{Det}(\mathbf{M}) = 0 \quad (6.31)$$

sendo \mathbf{M} a matriz dos coeficientes do vetor de incógnitas A_i .

Da condição (6.31) resulta:

$$(k_1 - k_2) \cdot l^* = 2n\pi \quad (6.32)$$

onde $n \in \mathbb{N}$.

Substituindo, agora, as equações (6.23) e (6.27) em (6.32) chegamos finalmente à seguinte condição:

$$\frac{P}{EI} + \left(\frac{\tilde{M}_z}{2EI} \right)^2 = \left(\frac{n\pi}{l^*} \right)^2 \quad (6.33)$$

A equação (6.33) fornece, portanto, uma relação entre a carga crítica $P = -(\bar{T} + \tilde{T})$ e o momento de torção $\tilde{M}_z = GJ \cdot \tilde{\kappa}_t$ para a análise de estabilidade de *risers* e cabos submetidos simultaneamente à compressão dinâmica e torção. Deve-se ressaltar que tal relação é a mesma obtida por Greenhill que, em 1883, analisou o problema de estabilidade de barras inicialmente retas submetidas à compressão e torção (ver, p.ex., Love [40] e Atanackovic [14]).

De fato, como foi observado² por Aranha et al. [13], a influência da curvatura na determinação da carga crítica de flambagem reside na correta determinação do número n . Para obter uma expressão que nos forneça uma estimativa do “ n ” que deve ser usado em cada caso, precisamos apenas integrar a equação de compatibilidade dada por (ver, p.ex., Aranha et al. [13] ou Pesce [60], cap. 4):

$$\frac{\tilde{T}}{EA} = \frac{du_z(S_1)}{dS_1} + \chi u_x(S_1) \quad (6.34)$$

onde $\chi = -\bar{\kappa}_y$ é a curvatura inicial (i.é, na configuração estática) do riser/cabo na região onde a análise de estabilidade está sendo feita (lembre que, por hipótese, a curvatura inicial foi admitida constante), e $u_x(S_1)$ e $u_z(S_1)$ são componentes do deslocamento do centróide de uma seção transversal arbitrária ($0 \leq S_1 \leq l^*$), medidos nas direções x e z relativamente ao sistema de coordenadas local ($Cxyz$) na configuração estática do riser/cabo (ver figura 6.2).

Quanto ao campo de deslocamento $u_x(S_1)$, necessário para a integração da equação de compatibilidade (6.34), pode-se mostrar que, em primeira ordem, vale:

$$\tilde{\kappa}_y(S_1) \cong \frac{d^2 u_x(S_1)}{dS_1^2} \quad (6.35)$$

Portanto, $u_x(S_1)$ pode ser facilmente obtido através da substituição de (6.25) em (6.35) e posteriores integrações com as seguintes condições de contorno (admitidas):

$$u_x(0) = 0 \quad u_x(l^*) = 0 \quad (6.36)$$

Se, agora, integrarmos a equação de compatibilidade (6.34) entre $S_1 = 0$ e $S_1 = l^*$, e admitirmos também que:

$$u_z(0) = u_z(l^*) \quad (6.37)$$

² Aranha et al. [13] propõem uma expressão para a determinação da carga crítica de flambagem em cabos, porém sem considerar a possibilidade de torção e de deslocamentos fora do plano inicial em que se encontrava o cabo. A expressão (6.33), que considera tais efeitos, é portanto mais geral.

teremos como resultado final:

$$\begin{aligned} & \chi \cdot A_1 \cdot g(k_1, l^*) + \chi \cdot A_2 \cdot h(k_1, l^*) + \chi \cdot A_3 \cdot g(k_2, l^*) + \\ & + \chi \cdot A_4 \cdot h(k_2, l^*) + \frac{\chi \cdot \gamma \cdot (l^*)^3}{12 \cdot \beta} - \frac{\tilde{T} \cdot l^*}{EA} = 0 \end{aligned} \quad (6.38)$$

sendo as funções g e h dadas por:

$$\begin{aligned} g(k_i, l^*) &= \frac{l^*}{k_i^2} \cdot \cos^2\left(\frac{k_i \cdot l^*}{2}\right) - \frac{\text{sen}(k_i \cdot l^*)}{k_i^3} \\ h(k_i, l^*) &= \frac{2}{k_i^3} \cdot \text{sen}^2\left(\frac{k_i \cdot l^*}{2}\right) - \frac{l^*}{2k_i^2} \cdot \text{sen}(k_i \cdot l^*) \end{aligned}$$

As equações (6.33) e (6.38) permitem, assim, a determinação da carga crítica de compressão dinâmica (P_{cr}) para uma dada curvatura local (χ) em função do momento de torção aplicado (também dinamicamente) ao *riser*/cabo. Lembramos, porém, que o “comprimento de flambagem” l^* , que comparece nas equações citadas, permanece ainda como uma incógnita do problema, sendo necessária, portanto, ao menos uma estimativa de l^* para a solução do problema.

Para contornar esta dificuldade, vamos considerar o argumento físico proposto por Aranha et al. [13] e admitir que, se o *riser* está sendo excitado dinamicamente a uma dada frequência ω , a flambagem (caso ocorra) estará associada a uma escala específica de comprimento de onda a qual, pelo menos numa primeira aproximação, pode ser determinada a partir da relação de dispersão de uma viga reta dada por:

$$k = \sqrt[4]{\frac{(m + m_a) \cdot \omega^2}{EI}}$$

onde k é o número de onda e $(m + m_a)$ é a soma da massa do *riser*/cabo com a massa adicional, ambos por unidade de comprimento do *riser*/cabo. Portanto, a aqui denominada “escala de comprimento de flambagem local” l (que é uma estimativa para o comprimento de flambagem efetivo l^*) será dada por:

$$l = \frac{\pi}{k} = \pi \cdot \sqrt[4]{\frac{EI}{(m + m_a) \cdot \omega^2}} \quad (6.39)$$

Utilizando (6.39) como uma aproximação para o comprimento de flambagem efetivo l^* podemos, finalmente, estimar a carga crítica de compressão dinâmica através do seguinte procedimento:

- i) para um dado *riser*/cabo e uma dada frequência de excitação ω , a escala de comprimento de flambagem (l) é obtida através da relação (6.39);
- ii) seja $\eta \in \mathbb{R}$ o valor aproximado do inteiro n (ver equações (6.32) e (6.33)) de tal forma que seja possível admitir que: $n/l^* = \eta/l$;
- iii) substituindo n/l^* por η/l em (6.33), podemos expressar P em função de \tilde{M}_z e de η/l ;
- iv) através das equações (6.23) e (6.27), os parâmetros k_1 , k_2 e γ/β também podem ser escritos como funções de η/l ;
- v) substituindo as equações (6.30) na equação (6.38), e utilizando l ao invés de l^* , pode-se obter o menor valor do real η que satisfaz tal equação;
- vi) tendo-se o valor de η/l , o valor da carga crítica é, então, obtido a partir de (6.33).

Para verificar a consistência do método proposto propomos analisar duas situações particulares, a saber:

- 1) O *riser* não é submetido a torção: isto significa, em outras palavras, que o *riser* deve permanecer em seu plano inicial, ou seja, que a flambagem deve ocorrer no plano inicial (já que deslocamentos fora do plano estariam “impedidos”, por hipótese). Neste caso, os resultados devem recuperar os resultados obtidos por Aranha et al. [13], uma vez que a hipótese de flambagem “no plano” foi implicitamente admitida por estes autores;
- 2) A curvatura inicial do *riser* é muito pequena: neste caso, os resultados obtidos pelo método proposto devem recuperar os resultados obtidos por Greenhill, que analisou a estabilidade de barras inicialmente retas submetidas a torção e compressão simultâneas.

Deixaremos a segunda comparação para o item seguinte quando, ao tratarmos de alguns exemplos de aplicação, verificaremos o que ocorre quando a curvatura inicial do *riser* é muito pequena. Quanto à primeira comparação, é possível mostrar, através das equações dadas neste item, que ao tomarmos o limite para $\tilde{M}_z \rightarrow 0$ (ou, de forma equivalente, para $\tilde{\kappa}_t \rightarrow 0$), teremos:

$$\begin{aligned} k_1 = -k_2 = K &= \sqrt{\frac{P}{EI}} \\ A_1 = A_3 &= \chi \cdot \frac{\tilde{T}}{2P} \\ A_2 = -A_4 &= -\chi \cdot \frac{\tilde{T}}{2P} \cdot \tan(K.l/2) \end{aligned}$$

e, assim, a equação característica (6.38) para a determinação da incógnita η fica sendo:

$$\tan \zeta = \zeta + \frac{\zeta^3}{3} - \frac{\zeta^5}{\xi^2} \quad (6.40)$$

onde: $\zeta = \frac{\eta \cdot \pi}{2}$ $\xi = \chi \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{EA}{k^4 EI}}$

que é exatamente a mesma equação característica obtida por Aranha et al. [13] para a determinação da carga crítica de flambagem de cabos curvos.

Deve-se observar que este resultado já é, por si só, um bom indicativo da consistência do método proposto pois consegue recuperar, com exatidão, a mesma equação proposta pelos autores acima citados para o caso particular em que a linha é “impedida” de sair de seu plano inicial. Ressaltamos ainda que os resultados analíticos obtidos por Aranha et al. [12, 13], com o uso da equação (6.40), foram comparados com resultados numéricos obtidos a partir de programas não-lineares no domínio do tempo, mostrando uma boa concordância em vários casos analisados. As figuras 6.4 e 6.5 ilustram alguns dos resultados obtidos por Aranha et al. [12, 13], mostrando que, quando a compressão dinâmica alcança valores próximos da carga crítica de flambagem (P_{cr}), prevista pela equação (6.40), o *riser* não consegue

suportar valores maiores de compressão (e flamba). Assim, a carga crítica de flambagem corresponde a uma carga de “saturação” do *riser*/cabo.

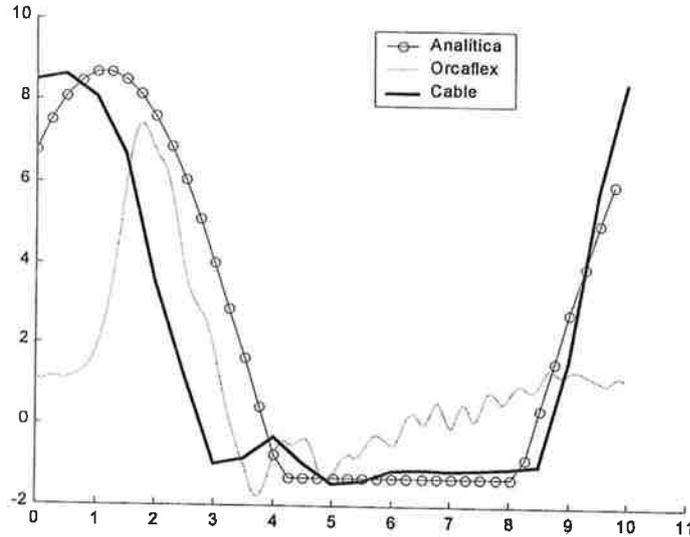


Figura 6.4: Variação da força normal no TDP ao longo do tempo. *Riser* rígido, (período de excitação = 10s, amplitude da onda= 6 m), [13].

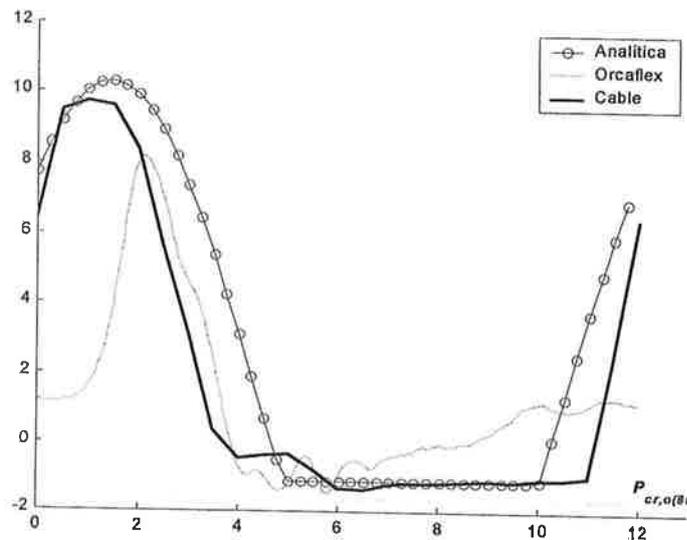


Figura 6.5: Variação da força normal no TDP ao longo do tempo. *Riser* rígido, (período de excitação = 12s, amplitude da onda= 8 m), [13].

Contudo, também é importante lembrar que os programas numéricos utilizados como base de comparação por Aranha et al. [13] não consideravam, na época, a possibilidade de torção nos cabos e, portanto, só permitiam a verificação do fenômeno de instabilidade no plano. Com a utilização do método aqui proposto, que

permite a possibilidade de torção do cabo/*riser*, pode-se ampliar a verificação e responder às perguntas: “O primeiro modo de flambagem ocorre realmente no plano inicial do *riser*?”, “Um modo de flambagem fora do plano é possível?”, “Quais são as cargas de flambagem associadas à cada caso?”, etc. Tais perguntas serão respondidas nos itens seguintes.

6.5 Exemplos de aplicação

Neste item faremos alguns exemplos de aplicação do método proposto no item anterior para a determinação das cargas críticas de compressão dinâmica em *risers*. Serão analisados dois exemplos de *risers* rígidos e um exemplo de *riser* flexível. Para efeito de distinção entre os *risers* rígidos a serem analisados, denominaremos o primeiro de *riser* rígido A, enquanto o segundo, de *riser* rígido B.

6.5.1 Análise do *riser* rígido A

A tabela 6.1 traz os dados do primeiro *riser* rígido a ser analisado (dados extraídos de Aranha; Pinto [12] e Aranha et al. [13]).

Tabela 6.1: Dados do *riser* rígido A

Propriedade	Valor
D (m)	0,2191
EA (kN)	$2,1 \times 10^6$
EI (kN.m ²)	9241
GJ (kN.m ²)	7108
$(m + m_a)$ (kg/m)	108,6
q (N/m)	307

Inicialmente vamos analisar como é a variação de η com a curvatura local e com a frequência imposta ao *riser*, admitindo que nenhuma torção seja aplicada (ou seja, admitindo que não haja deslocamentos “fora do plano inicial”). Três valores típicos de períodos de excitação foram utilizados nesta análise: 8s, 10s e 12s. Para cada um destes períodos, a curva correspondente $\eta \times \log(\chi.l)$, obtida através do procedimento detalhado no item anterior, é mostrada na Figura 6.6 (onde $\chi.l$ é um parâmetro

adimensional relacionado à curvatura estática local χ e ao comprimento l dado pela equação (6.39)).

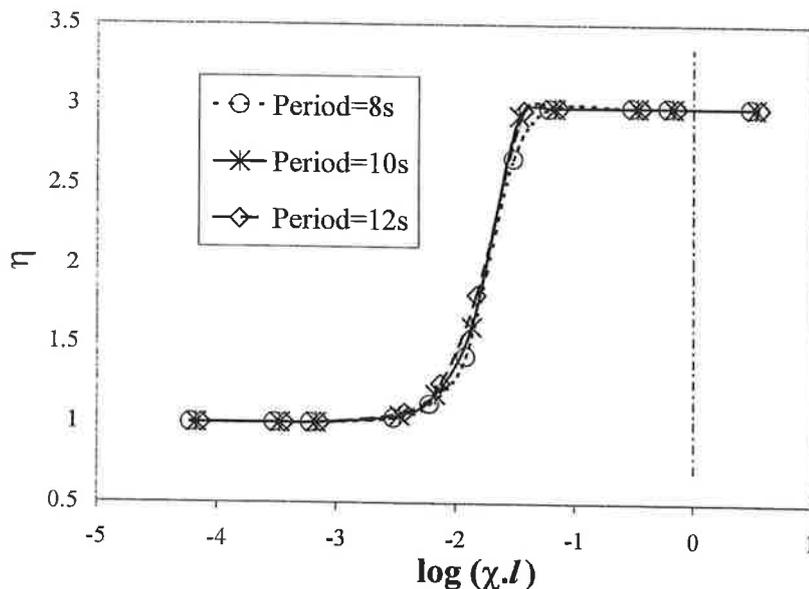


Figura 6.6: Curvas η x $\log(\chi.l)$ para diversos períodos de excitação (*riser* A, $\tilde{\kappa}_t = 0$).

Pode-se observar que, neste caso ($\tilde{\kappa}_t = 0$), o valor do número η^3 a ser utilizado na equação (6.33) independe da frequência de excitação (e, conseqüentemente, da escala de comprimento de flambagem l dada pela equação (6.39)), já que as três curvas coalescem numa única. A figura 6.6 mostra ainda que para valores muito pequenos de curvatura temos $\eta \cong 1$ (ou seja, $n = 1$), ao passo que para grandes curvaturas $\eta \cong 3$ (i.é, $n = 3$). Como era de se esperar, estes resultados estão totalmente de acordo com os encontrados por Aranha et al. [13].

Na região de transição, onde $-2 < \log(\chi.l) < -1$, nota-se um salto na curva, o que parece indicar (tendo em vista a equação 6.33) que o *riser*, neste caso, poderia flambar com $n = 1$ ou $n = 3$, dependendo da “proximidade” com que estivesse de um outro caso. A linha tracejada vertical indicada na Figura 6.6 fornece um limite

³ Lembre que, pelo procedimento proposto, estamos admitindo que $n/l^* = \eta/l$.

máximo estimado para a curvatura adimensional $\chi.l$ de tal forma que a deformação máxima do *riser* (em condições estáticas e considerando apenas o efeito da curvatura⁴) não exceda 0,2%, garantindo-se, desta forma, que o material permaneça no regime elástico linear.

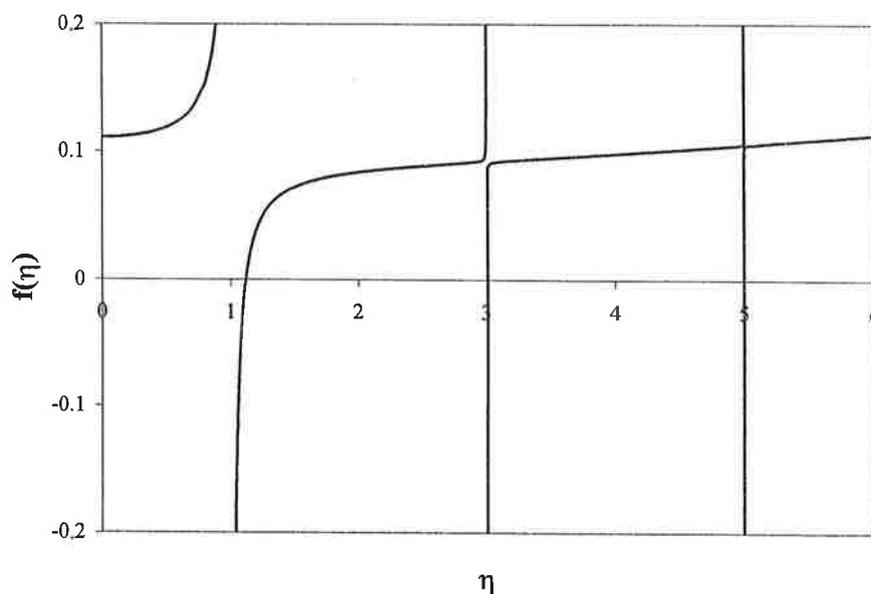


Figura 6.7: Comportamento da função dada pela equação (6.38) no intervalo $0 < \eta < 6$ (*riser* A, $\chi.l = 0,00605$; $\tilde{\kappa}_t.l = 0$; Período = 8s)

A figura 6.7 mostra o comportamento da função dada por (6.38) (com l^* e n substituídos por l e η) na análise de um caso com pequena curvatura ($\chi.l \cong 0,00605$), sem aplicação de torção ($\tilde{\kappa}_t.l = 0$) e para um período de excitação de 8s. Observa-se nitidamente que as duas primeiras raízes da função correspondem a $n = 1$ e $n = 3$ (os valores efetivamente obtidos para a variável η são, respectivamente, $\eta \cong 1,1198$ e $\eta \cong 3,0005$). Os valores das cargas críticas correspondentes aos dois primeiros modos são, então, $P_{cr} \cong 31,2$ kN (para $\eta \cong 1,1198$) e $P_{cr} \cong 224$ kN (para $\eta \cong 3,0005$), conforme equação (6.33).

⁴ Considerando *risers* lançados em configuração de catenária, pode-se mostrar que a região de maior curvatura é na proximidade do TDP, onde $\chi \cong q/T_o$. Portanto, a deformação associada à tração estática – dada por $\varepsilon = T_o/EA = q/(\chi.EA)$ – pode ser desprezada nestas regiões para os valores aqui considerados.

Deve-se observar que a determinação das raízes (η) deve ser realizada com cuidado, posto que a inclinação da função $f(\eta)$, dada pela equação (6.38), para $\eta \cong 3, 5, \dots$, é extremamente acentuada, o que pode levar a dificuldades numéricas na obtenção das raízes.

Ainda para este caso de pequena curvatura, a figura 6.8 mostra os dois primeiros modos de flambagem (associados a $\eta \cong 1,1198$ e $\eta \cong 3,0005$, respectivamente). Observe que apenas os deslocamentos transversais $u_x(S)$ (contidos no plano inicial do *riser*) estão sendo mostrados (pois a inexistência de torção está associada à inexistência de deslocamentos transversais $u_y(S)$ e vice-versa). Note ainda que os modos de flambagem praticamente coincidem com aqueles obtidos para uma viga reta bi-articulada.

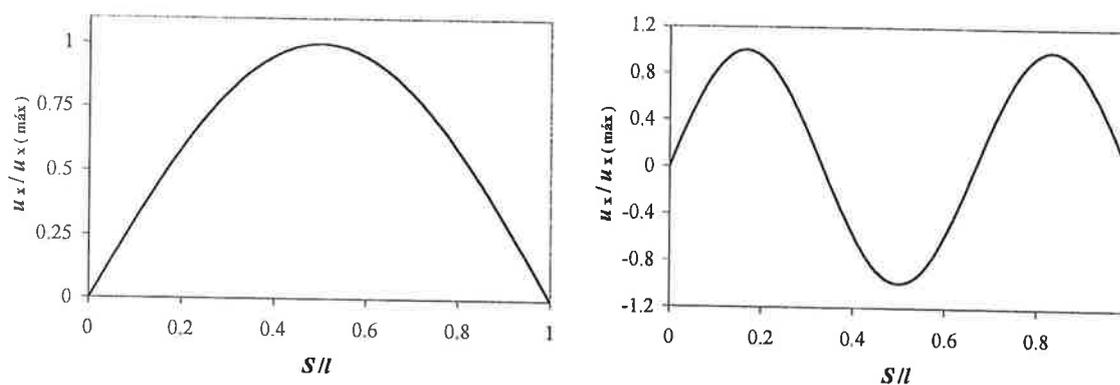


Figura 6.8: Primeiro e segundo modos de flambagem para o *riser* A ($\chi.l = 0,00605$; $\tilde{\kappa}_t.l = 0$; Período=8s).

Se alterarmos, agora, o valor da curvatura adimensional para $\chi.l = 0,605$ (o que corresponde a uma grande curvatura) e mantivermos todos os demais parâmetros inalterados (i.é., $\tilde{\kappa}_t.l = 0$ e período = 8s), veremos que o comportamento da função dada pela equação (6.38), com l^* e n substituídos por l e η , é como mostra a figura 6.9, onde podemos notar que as duas primeiras raízes da função correspondem a $n = 3$ e $n = 5$ (os valores efetivamente obtidos para a variável η são, respectivamente, $\eta \cong 2,983$ e $\eta \cong 4,996$).

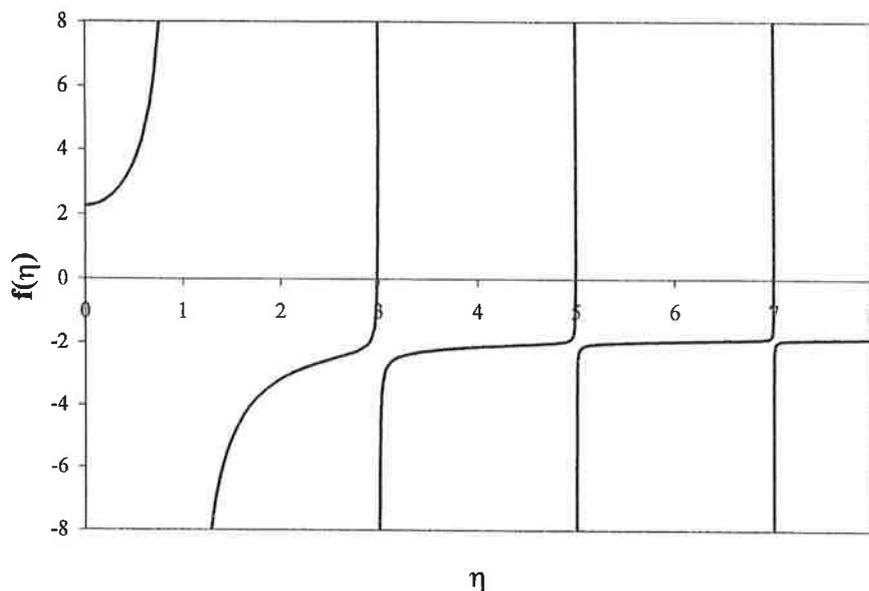


Figura 6.9: Comportamento da função dada pela equação (6.38) no intervalo $0 < \eta < 8$ (*riser* A, $\chi.l = 0,605$; $\tilde{\kappa}_t l = 0$; Período = 8s)

A figura 6.10 mostra os dois primeiros modos de flambagem obtidos para este caso de grande curvatura (correspondentes a $\eta \cong 2,983$ e $\eta \cong 4,996$). As cargas críticas de flambagem obtidas nestes casos sendo de $P_{cr} = 221$ kN (para $\eta \cong 2,983$) e $P_{cr} = 621$ kN (para $\eta \cong 4,996$). Deve-se observar que a existência de uma curvatura maior faz com que a primeira raiz seja $\eta \cong 3$, i.é, com que o primeiro modo de flambagem só ocorra para $n=3$ (e não para $n=1$, como no caso de uma viga reta).

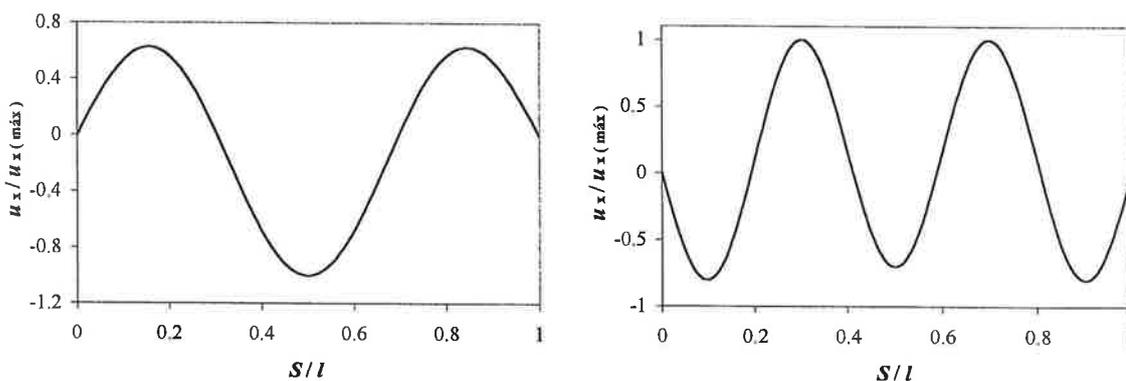


Figura 6.10: Primeiro e segundo modos de flambagem para o *riser* A ($\chi.l = 0,605$; $\tilde{\kappa}_t l = 0$; Período=8s).

Para verificar a influência da torção nos resultados, definimos um segundo adimensional ($\tilde{\kappa}_t l$), que mede a magnitude da torção de acordo com a escala de comprimento de flambagem l . A figura 6.11 mostra as curvas $\eta \times \log(\chi.l)$, obtidas para o riser A, para diferentes valores do adimensional $\tilde{\kappa}_t l$ (foram analisados casos em que $\tilde{\kappa}_t = 0$, $\tilde{\kappa}_t = 0,0001$ rad/m e $\tilde{\kappa}_t = 0,001$ rad/m, que correspondem, respectivamente, a: $\tilde{\kappa}_t l = 0$; $\tilde{\kappa}_t l = 0,00605$ e $\tilde{\kappa}_t l = 0,0605$). Casos envolvendo valores maiores de torção (correspondendo a $\tilde{\kappa}_t l \geq O(1)$) certamente violariam as hipóteses de pequenas perturbações (além de provocar deformações próximas ou superiores a do limite de escoamento do material) e, portanto, não foram considerados nesta análise. O período de excitação foi tomado igual a 8s para todos os casos estudados.

Pela figura 6.11 podemos notar que, para os dois valores não-nulos de torção considerados, os valores de η passam de $\eta \cong 1$ (para pequenos valores de curvatura) para $\eta \cong 2$ (para curvaturas maiores), o que equivale a $n=1$ (para pequenas curvaturas) e $n = 2$ (para grandes curvaturas). Podemos inferir, daí, que, no caso de estarmos diante de grandes valores de curvatura local, a simples possibilidade de permitirmos deslocamentos para fora do plano vertical faz com que haja uma diminuição da carga crítica de flambagem, já que o valor provável de n é 2 (e não 3 como previsto por Aranha et al [13]). A linha vertical tracejada na figura 6.11 indica um limite máximo estimado para a curvatura adimensional $\chi.l$ de tal forma que a deformação máxima do riser (em condições estáticas e considerando apenas o efeito da curvatura⁵) não exceda 0,2%, garantindo-se, desta forma, que o material permaneça no regime elástico linear.

⁵ Desconsiderando o efeito de uma possível tração, pode-se mostrar que o máximo alongamento de uma fibra num tubo submetido a uma dada curvatura (χ) e uma dada torção (κ_t) é dado por:

$$\varepsilon_1 = \frac{(1-\nu)}{4} \cdot (\chi \cdot D_e) + \frac{D_e}{4} \cdot \left[(1+\nu)^2 \cdot \chi^2 + \kappa_t^2 \right]^{1/2}$$

Assim, para pequenos valores de torção (se comparados aos de curvatura), a fórmula acima fornece: $\varepsilon_1 \cong \chi \cdot D_e / 2$. Considerando, $O(\varepsilon_1) = 10^{-3}$ e $O(D_e) = 10^{-1} m$, resulta: $O(\chi) = 10^{-2} m^{-1}$ e, portanto, $O(\chi.l) = 1$.

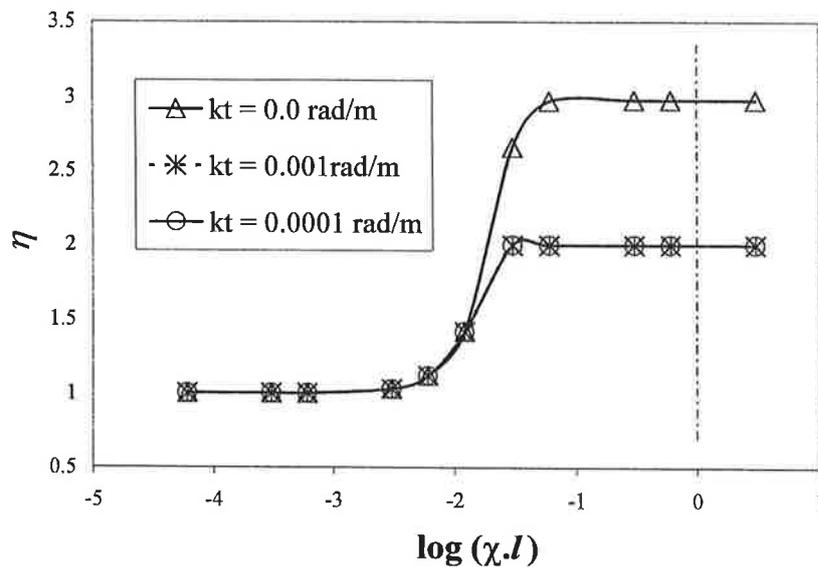


Figura 6.11: Curvas η x $\log(\chi.l)$ para diversos valores de $\tilde{\kappa}_t$ (riser A, Período = 8s).

Alguém, contudo, poderia questionar se o resultado $n = 2$ (para grandes curvaturas) seria obtido mesmo para valores muito pequenos de torção, uma vez que os valores não-nulos de $\tilde{\kappa}_t l$ considerados na figura 6.11 correspondem a binários de torção extremamente elevados. Para responder a esta pergunta, determinamos a primeira raiz da equação (6.38) para um caso em que $\chi.l = 0,1$ (grande curvatura) e para diversos valores de torção (incluindo valores muito pequenos). A figura 6.12 mostra que mesmo para valores irrisórios de torção, e independentemente das frequências de excitação aqui consideradas, a primeira raiz de (6.38) corresponde realmente a $n = 2$, confirmando nossas assertivas. Em outras palavras, sob a terminologia aplicada na teoria de sistemas dinâmicos, estamos diante de um quadro de bifurcação estrutural, controlado pelo parâmetro “torção”.

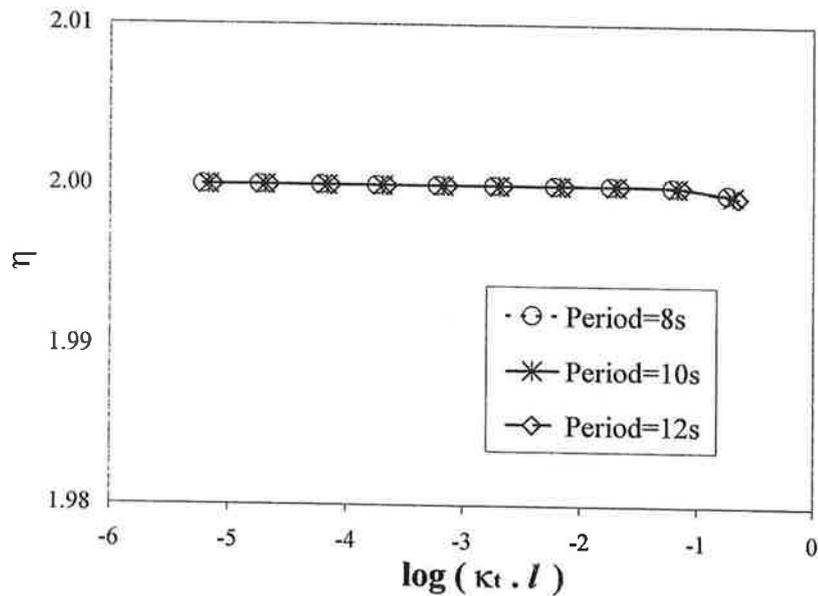


Figura 6.12: Valores de η para diversos valores de $\tilde{\kappa}_t$ (*riser* A, $\chi \cdot l = 0,1$).

As figuras 6.13 e 6.14 mostram o comportamento da função dada pela equação (6.38) para valores de curvatura (adimensionalizada) respectivamente iguais a $\chi \cdot l = 0,00605$ (pequena curvatura) e $\chi \cdot l = 0,605$ (grande curvatura). O adimensional relativo a torção é $\tilde{\kappa}_t \cdot l = 0,00605$ e o período de excitação considerado é de 8s para ambos os casos. Como podemos notar pelas figuras 6.13 e 6.14, a existência de torção implica a ocorrência tanto dos modos ímpares de flambagem (associados a $\eta \cong 1, 3, 5, \dots$) quanto dos modos pares de flambagem (associados a $\eta \cong 2, 4, 6, \dots$). Contudo, de forma idêntica aos casos analisados anteriormente (sem torção, i.é, $\tilde{\kappa}_t \cdot l = 0$), o modo correspondente a $\eta \cong 1$ só ocorre para pequenas curvaturas.

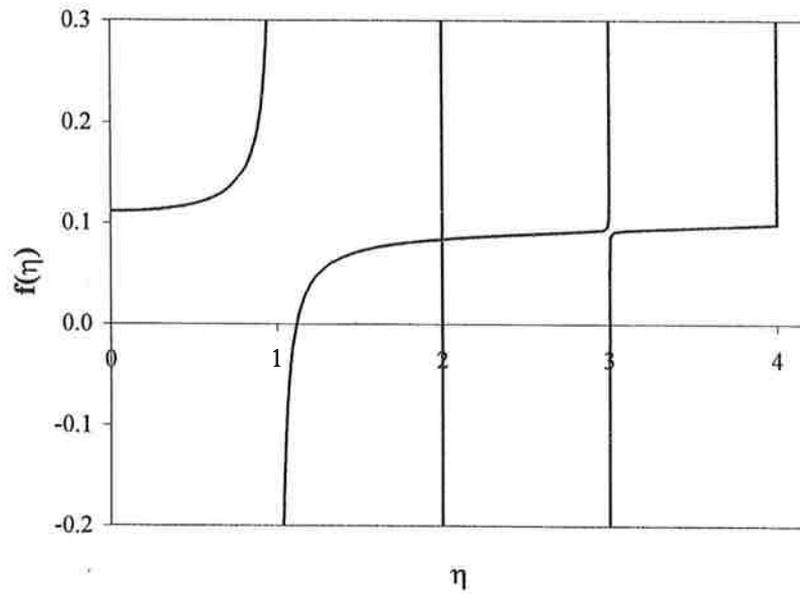


Figura 6.13: Comportamento da função dada pela eq.(6.38) no intervalo $0 < \eta < 4$
(riser A, $\chi.l = 0,00605$; $\tilde{\kappa}_t.l = 0,00605$; Período = 8s)

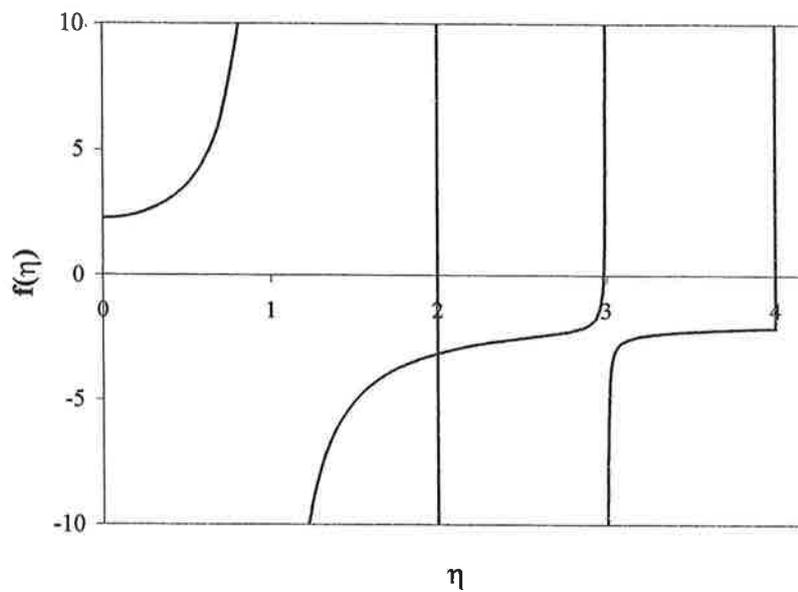


Figura 6.14: Comportamento da função dada pela eq.(6.38) no intervalo $0 < \eta < 4$
(riser A, $\chi.l = 0,605$; $\tilde{\kappa}_t.l = 0,00605$; Período = 8s)

A figura 6.15 ilustra os quatro primeiros modos de flambagem para o riser A, considerando um caso de pequena curvatura. Foram utilizados os mesmos dados que os indicados na figura 6.13, ou seja, $\chi.l = 0,00605$, $\tilde{\kappa}_t.l = 0,00605$, Período = 8s. Os

valores correspondentes obtidos para η foram: $\eta \cong 1,12$, $\eta \cong 2,00$, $\eta \cong 3,00$ e $\eta \cong 4,00$. Deve-se observar que apenas os deslocamentos transversais $u_x(S)$ (contidos no plano inicial do *riser*) ocorrem nos modos ímpares (ver gráficos indicados à esquerda da figura 6.15); ao passo que nos modos pares ambos deslocamentos transversais $u_x(S)$ e $u_y(S)$ ocorrem (ver gráficos indicados à direita da figura 6.15). Os deslocamentos transversais foram adimensionalizados dividindo-se seus valores pelo valor absoluto máximo obtido entre os dois campos existentes.

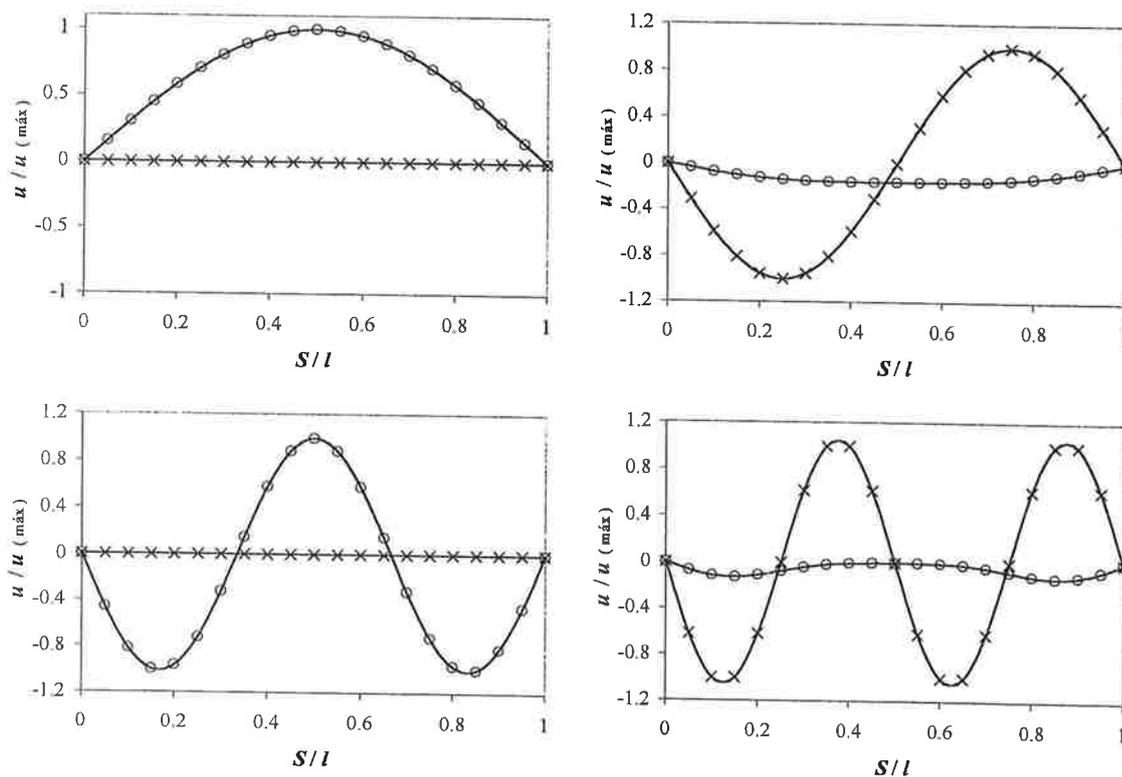


Figura 6.15: Modos de flambagem do *riser* A ($\chi.l = 0,00605$; $\tilde{\kappa}_t.l = 0,00605$; Per.=8s).
 Legenda: $u_x / u_{m\acute{a}x}$ (o) ; $u_y / u_{m\acute{a}x}$ (x)

De forma análoga ao caso anterior, a figura 6.16 ilustra os quatro primeiros modos de flambagem para o *riser* A, considerando porém um caso de grande curvatura. Foram utilizados os mesmos dados indicados na figura 6.14, ou seja, $\chi.l = 0,605$, $\tilde{\kappa}_t.l = 0,00605$, Período = 8s. Os valores correspondentes obtidos para η foram: $\eta \cong 2,00$, $\eta \cong 2,98$, $\eta \cong 4,00$ e $\eta \cong 5,00$.

Nota-se que o mesmo comportamento observado no caso anterior volta a se repetir aqui: nos modos ímpares ocorrem apenas deslocamentos transversais $u_x(S)$ (contidos no plano inicial do *riser*), conforme mostram os gráficos indicados à direita da figura 6.16; nos modos pares, ambos deslocamentos transversais $u_x(S)$ e $u_y(S)$ ocorrem (ver gráficos à esquerda da figura 6.16).

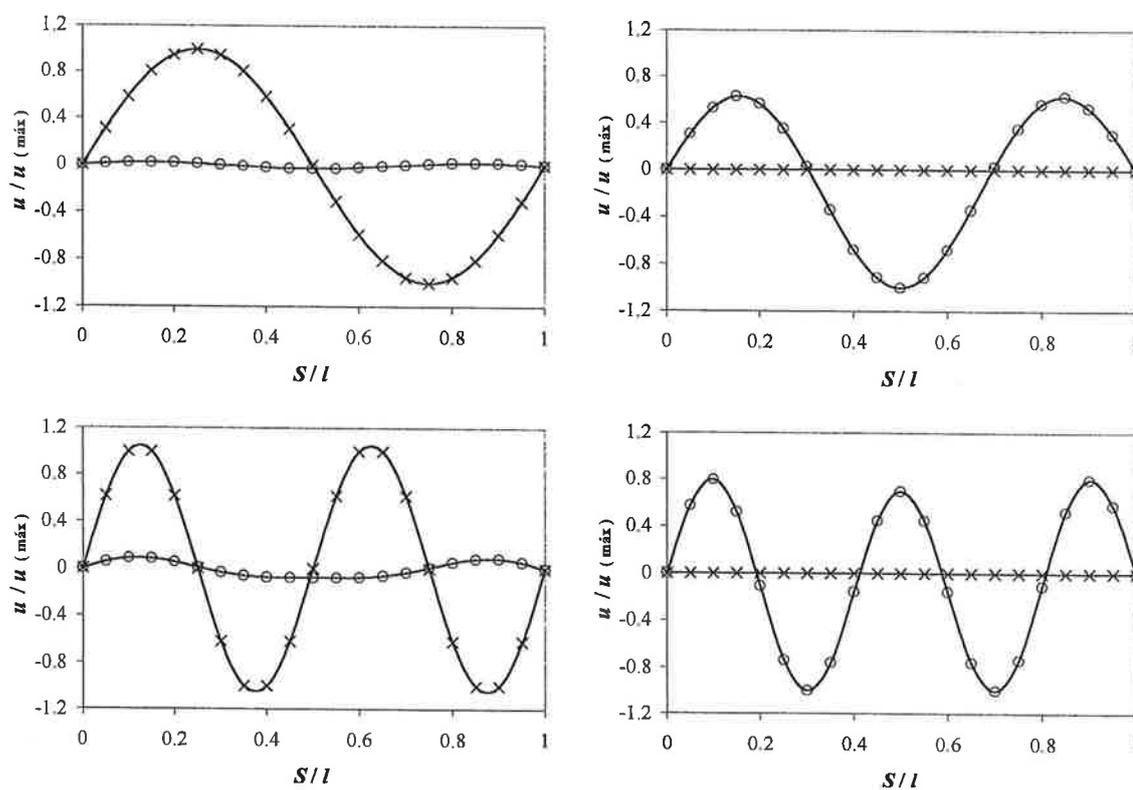


Figura 6.16: Modos de flambagem do *riser* A ($\chi.l=0,605$; $\tilde{\kappa}_t.l=0,00605$; Per.=8s).

Legenda: $u_x / u_{\text{máx}}$ (o) ; $u_y / u_{\text{máx}}$ (x)

6.5.2 Análise do riser rígido B

A tabela 6.2 traz os dados do segundo *riser* rígido a ser analisado (dados extraídos de Pesce [60]).

Tabela 6.2: Dados do *riser* rígido B

Propriedade	Valor
D (m)	0,27305
EA (kN)	$3,07 \times 10^6$
EI (kN.m ²)	25035
GJ (kN.m ²)	19258
$(m + m_a)$ (kg/m)	176
q (N/m)	535,57

O objetivo desta segunda análise é apenas verificar se o mesmo comportamento obtido para o *riser* A se repete para o *riser* B, que possui propriedades bem diferentes. Assim, vamos analisar inicialmente como varia η com a curvatura local e com a frequência imposta ao *riser*, admitindo que nenhuma torção seja aplicada. Os mesmos valores de períodos de excitação serão utilizados: 8s, 10s e 12s. Para cada um destes períodos, a curva correspondente $\eta \times \log(\chi.l)$ é mostrada na Figura 6.17.

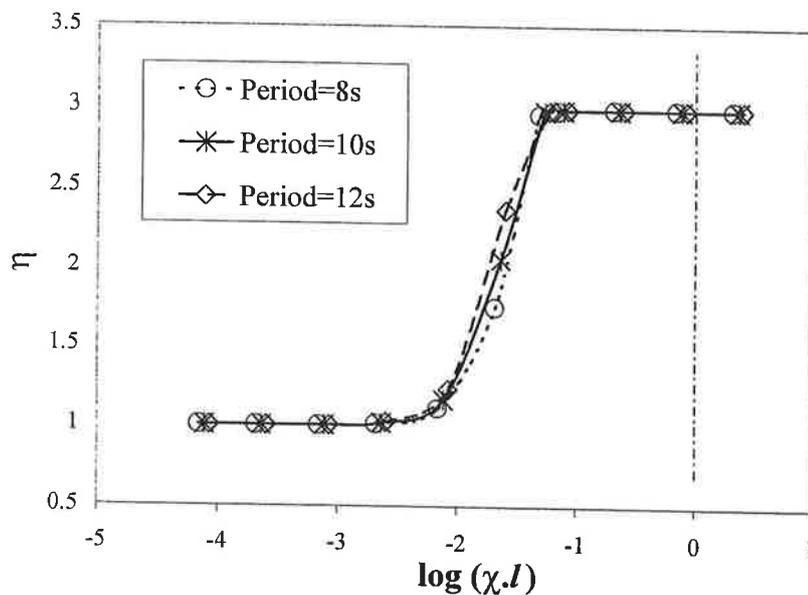


Figura 6.17: Curvas $\eta \times \log(\chi.l)$ para diversos períodos de excitação (*riser* B, $\tilde{\kappa}_t = 0$).

Comparando as figuras 6.6 e 6.17, nota-se claramente que os dois *risers* exibem o mesmo comportamento, sendo o primeiro número de onda (n) igual a 1 quando a curvatura local é pequena, e passando para $n = 3$ quando a curvatura local apresenta valores maiores. A região de transição, situada no intervalo $-2 < \log(\chi.l) < -1$, também é recuperada neste caso.

As figuras 6.18 e 6.19 mostram, respectivamente, o comportamento da função dada por (6.38) (com l^* e n substituídos por l e η) para um caso com pequena curvatura ($\chi.l \cong 0,00688$) e para um caso com grande curvatura ($\chi.l \cong 0,688$). Nos dois casos não há aplicação de torção ($\tilde{\kappa}_t.l = 0$) e o período de excitação considerado é de 8s.

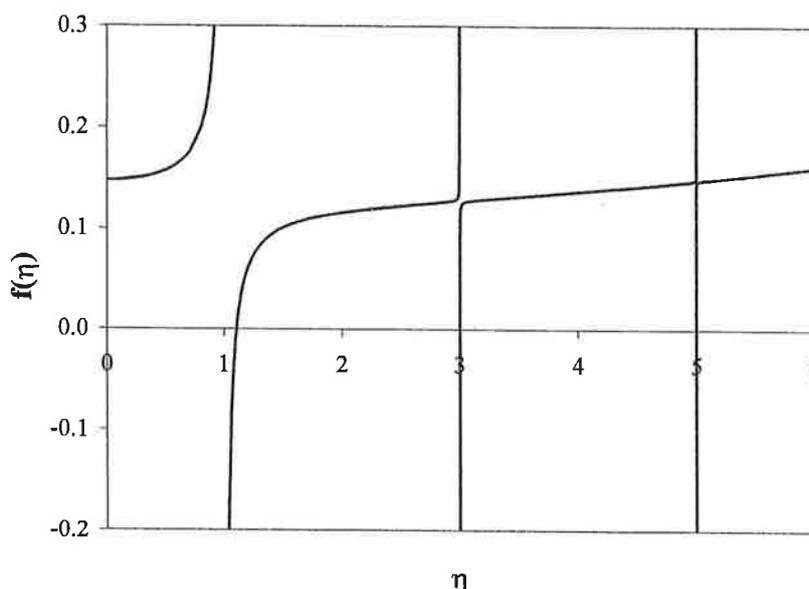


Figura 6.18: Comportamento da função dada pela equação (6.38) no intervalo $0 < \eta < 6$ (*riser* B, $\chi.l \cong 0,00688$; $\tilde{\kappa}_t.l = 0$; Período = 8s).

Ao compararmos as figuras 6.18 e 6.19 com as figuras 6.7 e 6.9 (respectivamente) percebemos que o comportamento da função $f(\eta)$ é o mesmo, não obstante estarmos tratando de *risers* com diferentes características. Deve-se ressaltar ainda que, embora o adimensional $\chi.l$ não seja exatamente o mesmo para os *risers* A e B, os valores utilizados são bem próximos (compare os valores de $\chi.l$ nas figuras 6.7 e 6.18 e, também, nas figuras 6.9 e 6.19).

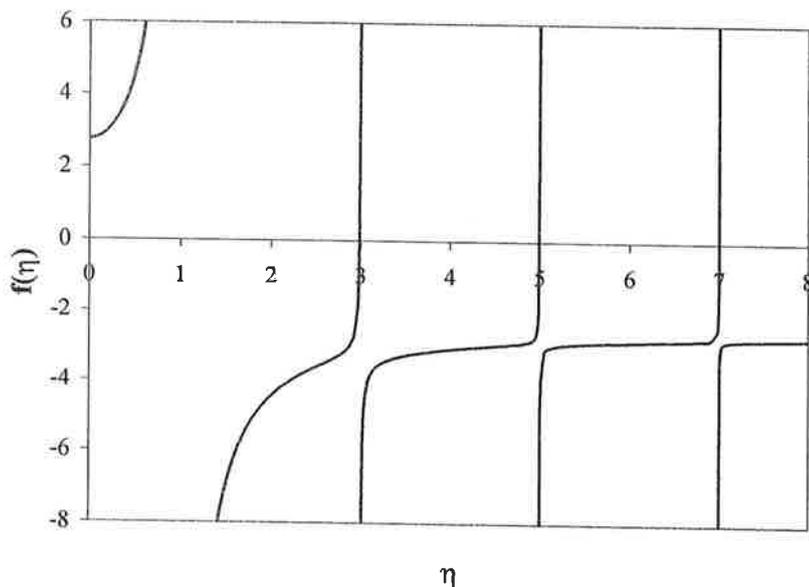


Figura 6.19: Comportamento da função dada pela equação (6.38) no intervalo $0 < \eta < 8$ (*riser* B, $\chi.l \cong 0,688$; $\tilde{\kappa}_t.l = 0$; Período = 8s)

Para analisarmos o comportamento do *riser* B na presença de torção, construímos as curvas $\eta \times \log(\chi.l)$ para diferentes valores do adimensional $\tilde{\kappa}_t.l$ (tal como no caso do *riser* A, foram analisados casos em que $\tilde{\kappa}_t = 0$, $\tilde{\kappa}_t = 0,0001$ rad/m e $\tilde{\kappa}_t = 0,001$ rad/m, que correspondem, respectivamente, a: $\tilde{\kappa}_t.l = 0$; $\tilde{\kappa}_t.l = 0,00688$ e $\tilde{\kappa}_t.l = 0,0688$). O período de excitação considerado em todos os casos foi de 8s. A figura 6.20 mostra que os resultados obtidos para o *riser* B são exatamente equivalentes aos obtidos para o *riser* A (comparar figura 6.20 com figura 6.11).

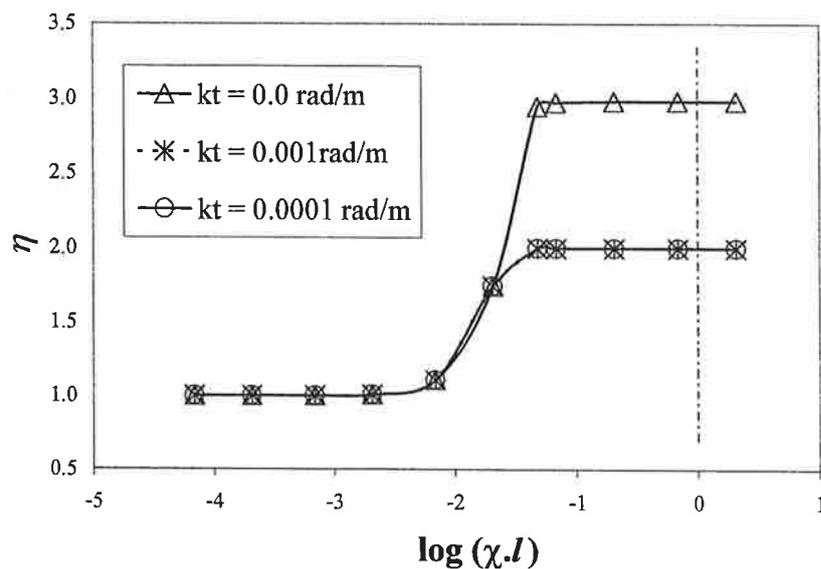


Figura 6.20: Curvas η x $\log(\chi.l)$ para diversos valores de $\tilde{\kappa}_t$ (*riser* B, Período = 8s).

Para finalizar a comparação entre os resultados obtidos para os *risers* A e B, foram levantadas as curvas da função $f(\eta)$, dada pela equação (6.38), para o *riser* B em duas situações distintas, a saber:

- i) com pequena curvatura ($\chi.l \cong 0,00688$) e com torção ($\tilde{\kappa}_t.l \cong 0,00688$) e
- ii) com grande curvatura ($\chi.l \cong 0,688$) e com torção ($\tilde{\kappa}_t.l \cong 0,00688$).

Se compararmos os resultados obtidos para o *riser* B (ver figuras 6.21 e 6.22) com os obtidos para o *riser* A (ver figuras 6.13 e 6.14) podemos claramente notar que as curvas são praticamente as mesmas, apesar da pequena diferença existente entre os adimensionais utilizados em cada caso.

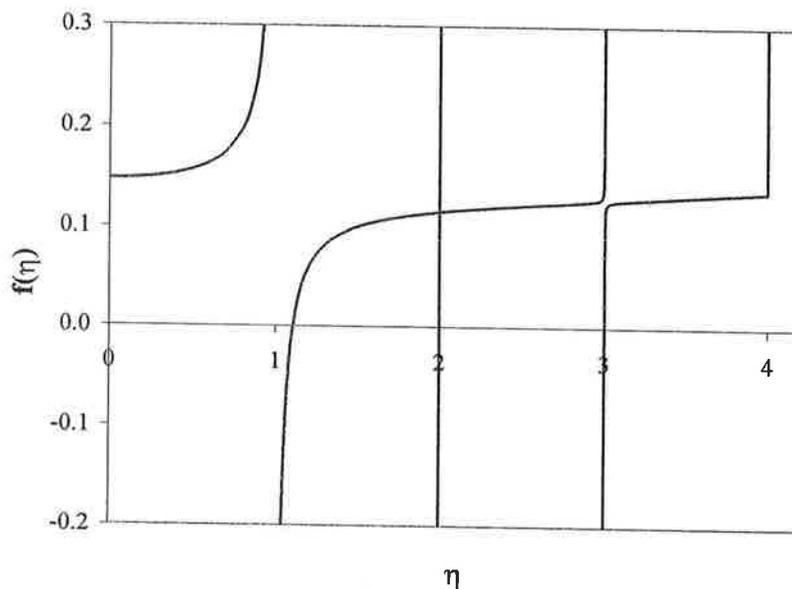


Figura 6.21: Comportamento da função dada pela equação (6.38) no intervalo $0 < \eta < 4$ (*riser B*, $\chi.l \cong 0,00688$; $\tilde{\kappa}_t.l \cong 0,00688$; Período = 8s).

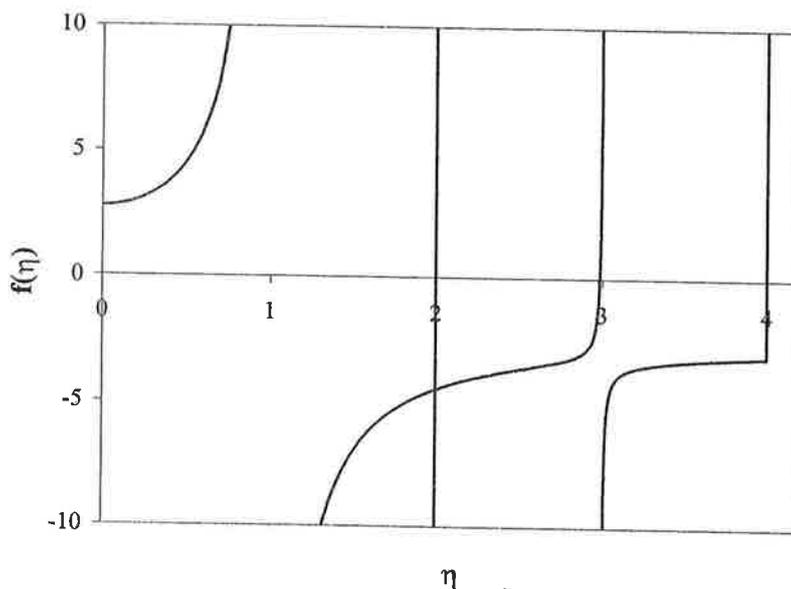


Figura 6.22: Comportamento da função dada pela equação (6.38) no intervalo $0 < \eta < 4$ (*riser B*, $\chi.l \cong 0,688$; $\tilde{\kappa}_t.l \cong 0,00688$; Período = 8s).

Através das diversas comparações feitas entre os resultados obtidos para os *risers A e B*, podemos inferir então que a determinação do parâmetro crítico n (ou seu equivalente real η), necessário ao cálculo da carga crítica de flambagem do *riser*

(conforme equação (6.33)), independe das características particulares do *riser* rígido estudado, sendo função apenas dos dimensionais que regem o fenômeno de instabilidade, estando entre eles seguramente os dimensionais de curvatura ($\chi.l$) e de torção ($\tilde{\kappa}.l$).

Os próximos itens cuidarão da análise de estabilidade de um tubo flexível típico à luz do procedimento detalhado no item 6.4, admitindo-se que todas as hipóteses feitas para a obtenção da equação (6.33) sejam válidas. Para verificarmos a influência do erro devido à incerteza nos valores das constantes elásticas para a determinação da carga crítica de compressão dinâmica, a análise será feita de duas formas: i) utilizando as constantes elásticas obtidas através de ensaios (item 6.5.3) e ii) utilizando as constantes elásticas obtidas por métodos analíticos conforme procedimento detalhado nos capítulos 3, 4 e 5 do presente trabalho (item 6.5.4).

6.5.3 Análise de um tubo flexível utilizando resultados experimentais para as constantes elásticas

As principais propriedades do tubo flexível a ser analisado estão dadas na tabela 6.3 (dados extraídos de Witz [88]).

Tabela 6.3: Dados do tubo flexível

Propriedade	Valor	Observação
D (m)	0,1115	(diâmetro externo do <i>riser</i>)
EA (kN)	83330	--
EI (kN.m ²)	0,96	--
GJ (kN.m ²)	24,4	(torção no sentido horário)
GJ (kN.m ²)	113,0	(torção no sentido anti-horário)
($m + m_a$) (kg/m)	40,4	--
q (N/m)	200	--

Deve-se ressaltar que, no tocante às propriedades elásticas do tubo (EA, EI, GJ), os valores relacionados na tabela 6.3 foram estimados a partir de curvas obtidas através de ensaios do referido tubo (ver Witz [88]). Em todos os casos foram utilizados

valores “médios”, representativos das respectivas curvas obtidas experimentalmente (todas elas apresentando histerese). Observa-se ainda que, no caso particular da rigidez torsional GJ do tubo, dois valores são informados na tabela: um quando se trata de torção no sentido horário, e outro, no sentido anti-horário. Esta diferença nos obriga a analisar, também, a influência do sentido de aplicação da torção na estabilidade do tubo. Dividiremos, assim, a análise de estabilidade em três partes:

- i) Análise do tubo sem aplicação de torção;
- ii) Análise do tubo com torção no sentido horário;
- iii) Análise do tubo com torção no sentido anti-horário.

6.5.3.1 Análise do tubo sem aplicação de torção

Neste caso, vamos analisar apenas como varia o parâmetro η com a curvatura local e com a frequência imposta ao *riser*. Os períodos de excitação utilizados serão os mesmos utilizados nas análises anteriores: 8s, 10s e 12s. Para cada um destes períodos, a curva correspondente $\eta \times \log(\chi.l)$ é mostrada na figura 6.23, onde se nota basicamente o mesmo comportamento já observado para os *risers* rígidos (a não ser pela pequena translação observada na região de transição, aqui compreendida entre -2,5 e -1,5).

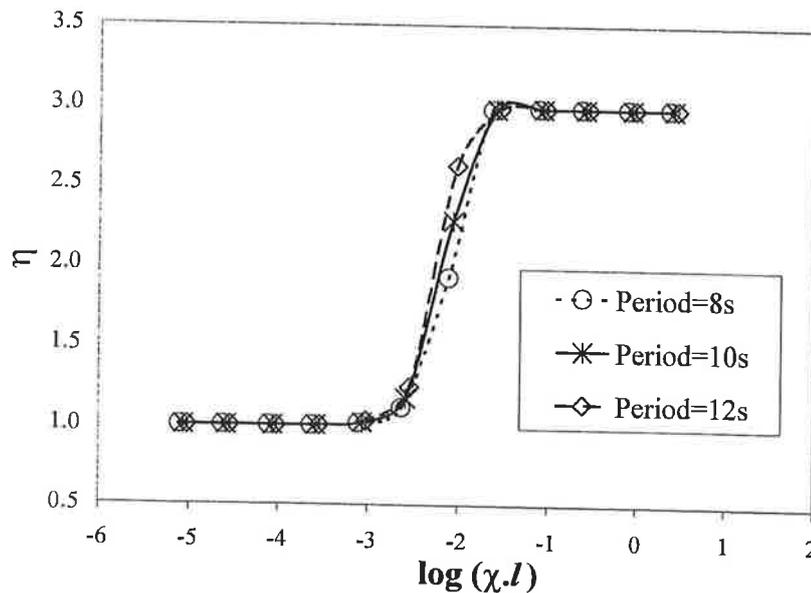


Figura 6.23: Curvas $\eta \times \log(\chi.l)$ para diversos períodos de excitação (*riser* flexível 2,5”, constantes elásticas obtidas em ensaios, $\tilde{\kappa}_t = 0$).

6.5.3.2 Análise do tubo com torção no sentido horário

Para analisarmos o comportamento do *riser* flexível na presença de torção (aplicada no sentido horário), construímos as curvas η x $\log(\chi.l)$ para diferentes valores do adimensional $\tilde{\kappa}_t l$ (ver figura 6.24). Como nos casos anteriores (de *risers* rígidos), analisamos casos em que $\tilde{\kappa}_t = 0$, $\tilde{\kappa}_t = 0,0001$ rad/m e $\tilde{\kappa}_t = 0,001$ rad/m. Ainda, dado o baixo valor de rigidez torsional do *riser* flexível aqui estudado, consideramos o caso em que $\tilde{\kappa}_t = 0,01$ rad/m. Para as características do *riser* dadas na tabela 6.3 e considerando o período de excitação de 8s, a escala de comprimento de flambagem, neste caso, é $l \cong 7,8$ m (conforme equação (6.39)). Assim, os correspondentes adimensionais de torção são: $\tilde{\kappa}_t l = 0$; $\tilde{\kappa}_t l = 0,00078$; $\tilde{\kappa}_t l = 0,0078$ e $\tilde{\kappa}_t l = 0,078$. Pela figura 6.24 podemos notar que as curvas obtidas para o *riser* flexível são bastante semelhantes às obtidas para os *risers* rígidos A e B (comparar figura 6.24 com figuras 6.11 e 6.20). Percebe-se, contudo, uma certa tendência de queda no valor do parâmetro η para casos de grande curvatura conforme aumentamos progressivamente a torção. Este fato será retomado nos itens seguintes.

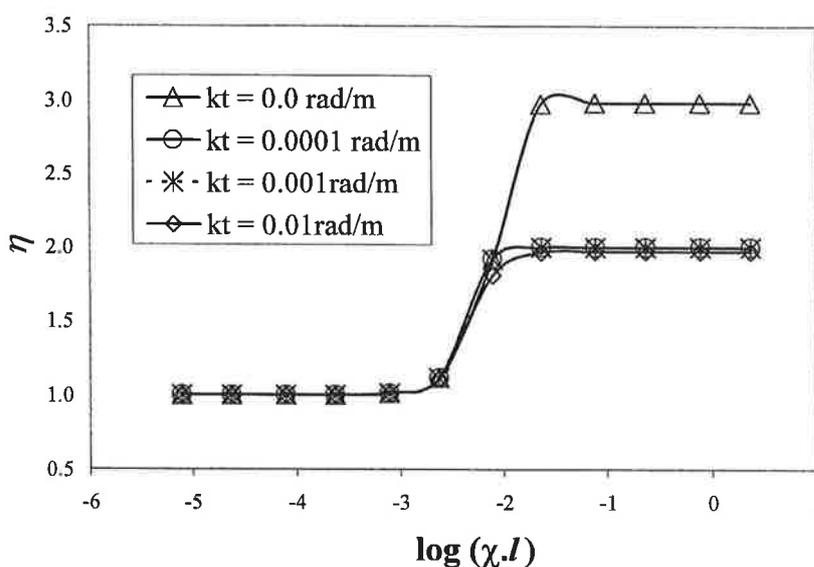


Figura 6.24: Curvas η x $\log(\chi.l)$ para diversos valores de $\tilde{\kappa}_t$ (*riser* flexível 2,5", constantes elásticas obtidas em ensaios, torção horária, Per.=8s).

6.5.3.3 Análise do tubo com torção no sentido anti-horário

A figura 6.25 mostra as curvas $\eta \times \log(\chi.l)$ obtidas para o mesmo *riser* flexível e para os mesmos dados do item anterior, sendo agora a torção aplicada no sentido anti-horário (portanto, com rigidez torsional maior, conforme tabela 6.3). Pela figura 6.25 nota-se uma visível diferença no comportamento das curvas obtidas quando comparadas às anteriores (ver figuras 6.11, 6.20 e 6.24). Como em todos os casos já vistos, aqui também observamos que $\eta \cong 1$ para pequenas curvaturas, independentemente da torção aplicada (pelo menos para os níveis de torção aqui considerados). Porém, para casos de grande curvatura, notamos que o valor $\eta \cong 2$ não é obtido para qualquer valor de torção, mas somente para valores muito pequenos (veja curvas para $\tilde{\kappa}_t l = 0,00078$ e $\tilde{\kappa}_t l = 0,0078$). Ao aumentarmos o valor da torção, nestes casos de grande curvatura, notamos que a tendência de queda no valor do parâmetro η , já percebida na figura 6.24, realmente ocorre.

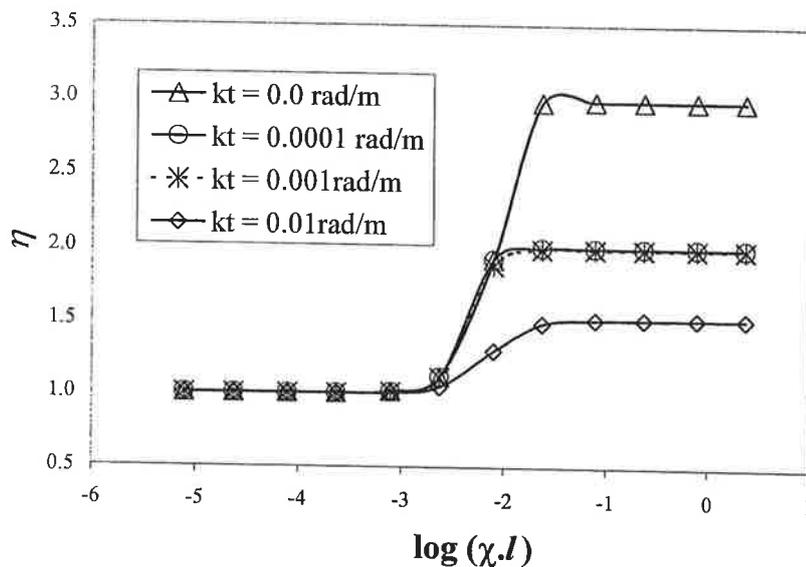


Figura 6.25: Curvas $\eta \times \log(\chi.l)$ para diversos valores de $\tilde{\kappa}_t$ (*riser* flexível 2,5", constantes elásticas obtidas em ensaios, torção anti-horária, Per.=8s).

Se lembrarmos que a mudança no comportamento das curvas relacionadas às figuras 6.24 e 6.25 deve-se apenas à mudança no valor da rigidez torsional GJ (conforme o sentido de aplicação da torção), isto nos sugere a existência de outro adimensional, ligado a rigidez torsional, que também é importante para o estudo de estabilidade.

Nada mais natural, portanto, se definirmos este novo adimensional como a razão entre a rigidez flexional do cabo (EI) e sua rigidez torsional (GJ). A fim de analisar a influência deste adimensional no valor do parâmetro η em casos de grande curvatura, construímos as curvas $\eta \times \log(\tilde{\kappa}_t l)$, para o *riser* flexível aqui estudado, parametrizando-as em diversos valores de EI/GJ (ver figura 6.26). A rigidez flexional EI foi considerada constante (mesmo valor dado na tabela 6.3), variando-se apenas os valores atribuídos à rigidez torsional GJ. As curvas obtidas com EI/GJ = 0,0085 e EI/GJ = 0,039 estão relacionadas, respectivamente, aos valores de rigidez torsional extraídos da tabela 6.3 (torção no sentido anti-horário e horário). As duas outras curvas, obtidas para EI/GJ = 0,01 e EI/GJ = 0,1, servem apenas como complemento, mostrando como seria o comportamento da curva para outros valores de EI/GJ. O adimensional ligado a curvatura do *riser* também foi mantido constante nesta análise ($\chi.l = 0,1$).

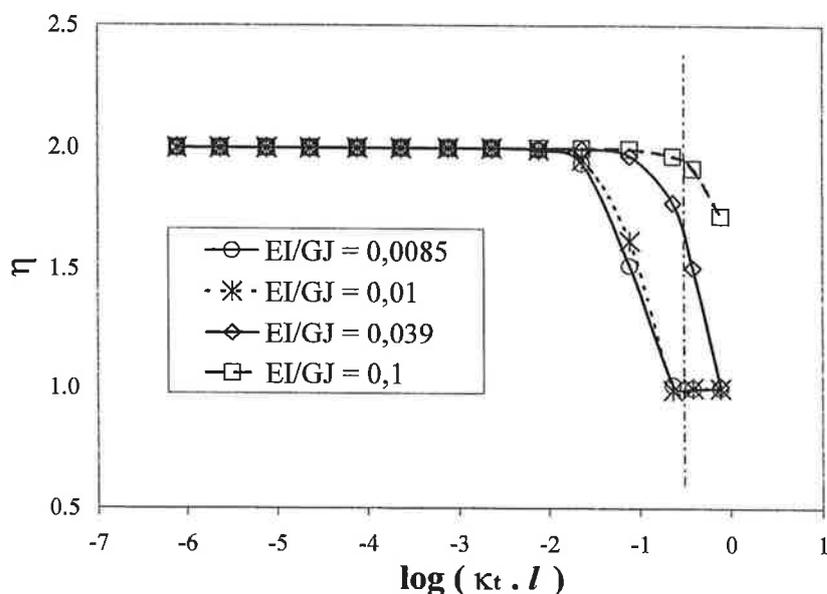


Figura 6.26: Curvas $\eta \times \log(\tilde{\kappa}_t l)$ para $\chi.l = 0,1$ e para diversos valores do adimensional EI/GJ (*riser* flexível 2,5", Período = 8s).

Pela figura 6.26 nota-se claramente uma tendência de diminuição do parâmetro η , que passa de $\eta = 2$ para pequenos valores de torção para $\eta = 1$ para valores mais altos de torção. Deve-se observar ainda que esta tendência parece ocorrer para todos os valores de EI/GJ considerados. Pelas curvas obtidas pode-se inferir também que o

adimensional EI/GJ está relacionado à determinação do valor de $\tilde{\kappa}_r l$ para o qual a transição de $\eta = 2$ para $\eta = 1$ tem início: para valores mais baixos de EI/GJ , a transição também ocorre para valores mais baixos de $\tilde{\kappa}_r l$.

6.5.4 Análise de um tubo flexível utilizando resultados obtidos por métodos analíticos para as constantes elásticas

As propriedades mecânicas de um tubo flexível (como os valores de rigidez axial, flexional e torsional) podem ser medidas experimentalmente ou estimadas a partir de modelos analíticos. Para verificar se as diferenças entre os valores obtidos para tais propriedades, usando um ou outro método, têm influência significativa no comportamento do tubo quanto à estabilidade, analisaremos o mesmo tubo flexível do item 6.5.3, porém utilizando agora as propriedades mecânicas estimadas a partir dos modelos analíticos propostos nos capítulos 3 e 5. Os valores destas propriedades foram determinados nos capítulos 4 e 5 e estão reproduzidos na tabela 6.4 a seguir.

Tabela 6.4: Dados do tubo flexível

Propriedade	Valor	Observação
D (m)	0,1115	(diâmetro externo do riser)
EA (kN)	127000	—
EI (kN.m ²)	0,85	(modelo com escorregamento total)
GJ (kN.m ²)	81	(torção no sentido horário)
GJ (kN.m ²)	215	(torção no sentido anti-horário)
($m + m_a$) (kg/m)	40,4	—
q (N/m)	200	—

Observamos novamente que, no caso particular da rigidez torsional GJ do tubo, dois valores são informados na tabela: um para torção no sentido horário, e outro para torção no sentido anti-horário. Assim, de forma análoga ao que foi feito no item 6.5.3, dividiremos a análise de estabilidade em três partes:

- i) Análise do tubo sem aplicação de torção;
- ii) Análise do tubo com torção no sentido horário;

iii) Análise do tubo com torção no sentido anti-horário.

6.5.4.1 Análise do tubo sem aplicação de torção

Vamos analisar apenas como varia o parâmetro η com a curvatura local e com a frequência imposta ao *riser*. Os períodos de excitação utilizados serão os mesmos utilizados nas análises anteriores: 8s, 10s e 12s. Para cada um destes períodos, a curva correspondente $\eta \times \log(\chi.l)$ é mostrada na figura 6.27, onde notamos o mesmo comportamento observado na figura 6.23.

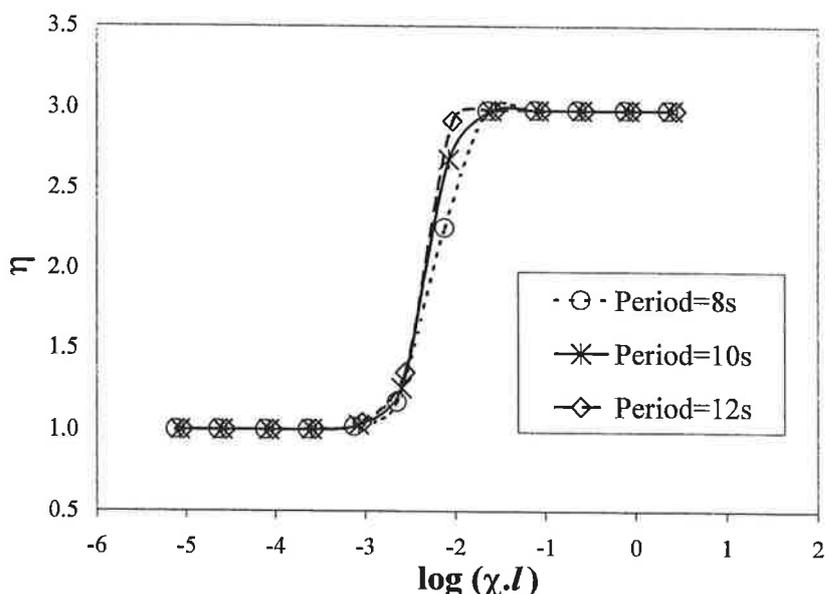


Figura 6.27: Curvas $\eta \times \log(\chi.l)$ para diversos períodos de excitação (*riser* flexível 2,5", constantes elásticas dadas por modelos analíticos, $\tilde{\kappa}_t = 0$).

6.5.4.2 Análise do tubo com torção no sentido horário

Para analisarmos o comportamento do *riser* flexível na presença de torção (sentido horário), construímos as curvas $\eta \times \log(\chi.l)$ para diversos valores do adimensional $\tilde{\kappa}_t.l$ (ver figura 6.28). Como no item 6.5.3.2, os casos analisados envolvem os seguintes valores de torção: $\tilde{\kappa}_t = 0$, $\tilde{\kappa}_t = 0,0001$ rad/m, $\tilde{\kappa}_t = 0,001$ rad/m e $\tilde{\kappa}_t = 0,01$ rad/m. Para as características do *riser* dadas na tabela 6.4 e considerando apenas o período de excitação de 8s, a escala de comprimento de flambagem, neste caso, é $l \cong 7,6$ m (conforme equação (6.39)), valor este bastante próximo daquele obtido no

item 6.5.3.2. Os adimensionais de torção correspondentes ficam então dados por:

$$\tilde{\kappa}_t l = 0; \tilde{\kappa}_t l = 0,00076; \tilde{\kappa}_t l = 0,0076 \text{ e } \tilde{\kappa}_t l = 0,076.$$

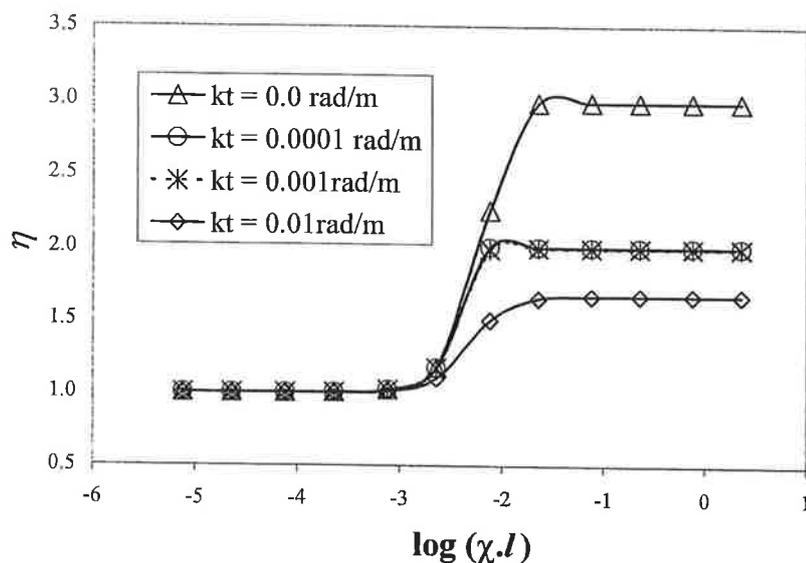


Figura 6.28: Curvas η x $\log(\chi.l)$ para diversos valores de $\tilde{\kappa}_t$ (*riser* flexível 2,5", constantes elásticas dadas por modelos analíticos, torção horária, Per.=8s).

Comparando as curvas da figura 6.28 com as suas correspondentes da figura 6.24, notamos que em vários aspectos o comportamento do *riser* quanto a estabilidade é basicamente o mesmo, ou seja:

- i) para pequenos valores de curvatura ($\chi.l \leq 0,001$), que correspondem a uma situação em que o eixo central do *riser* é praticamente reto, há flambagem com $\eta \cong 1$, independentemente do nível de torção aplicada;
- ii) para curvaturas maiores ($\chi.l > 0,01$), há flambagem com $\eta \cong 3$, desde que o *riser* seja impedido de se deslocar fora de seu plano inicial (isto é, desde que não haja torção);
- iii) para $\chi.l > 0,01$ e $\tilde{\kappa}_t l < 0,01$, há flambagem com $\eta \cong 2$.

A diferença fundamental entre os dois gráficos ocorre apenas na curva referente ao valor de torção $\tilde{\kappa}_t = 0,01$ rad/m, onde notamos que, para valores de curvatura tais que $\chi.l > 0,01$, o gráfico 6.24 indica flambagem com $\eta \cong 2$, enquanto o gráfico 6.28

indica $\eta \cong 1,7$. Esta pequena diferença pode ser explicada pelo fato de os adimensionais EI/GJ possuírem valores ligeiramente diferentes nos dois casos analisados, conforme mostra a tabela 6.5.

Tabela 6.5: Comparação entre valores do adimensional EI/GJ

(EI/GJ): valores obtidos experimentalmente	(EI/GJ): valores obtidos analiticamente	Observação
0,03934	0,0105	(torção no sentido horário)
0,0085	0,00395	(torção no sentido anti-horário)

Conforme já mencionamos no item 6.5.3, o adimensional EI/GJ também influencia o comportamento do *riser* quanto a estabilidade, de tal maneira que, para valores mais baixos de EI/GJ, a transição de $\eta = 2$ para $\eta = 1$ também ocorre para valores mais baixos de $\tilde{\kappa}_t l$ ou, de forma equivalente, se fixarmos o valor do adimensional de torção $\tilde{\kappa}_t l$ e diminuirmos o valor do adimensional EI/GJ, o resultado será uma queda no valor do parâmetro η (ver figuras 6.26 e 6.30). Isto explica a diferença entre os gráficos das figuras 6.24 e 6.28.

6.5.4.3 Análise do tubo com torção no sentido anti-horário

A figura 6.29 mostra as curvas $\eta \times \log(\chi l)$ obtidas para o caso de torção no sentido anti-horário e constantes elásticas determinadas a partir dos modelos analíticos desenvolvidos nos capítulos 3 e 5. Comparando as curvas da figura 6.29 com suas correspondentes da figura 6.25, podemos verificar que o comportamento é basicamente o mesmo, de tal forma que os mesmos comentários feitos no item 6.5.4.2 valem também para este caso. É interessante observar ainda que, para valores suficientemente altos do adimensional de torção ($\tilde{\kappa}_t l$), não há mudança no valor do parâmetro η , que permanece com um valor bastante próximo da unidade, independentemente do valor atribuído ao adimensional de curvatura.

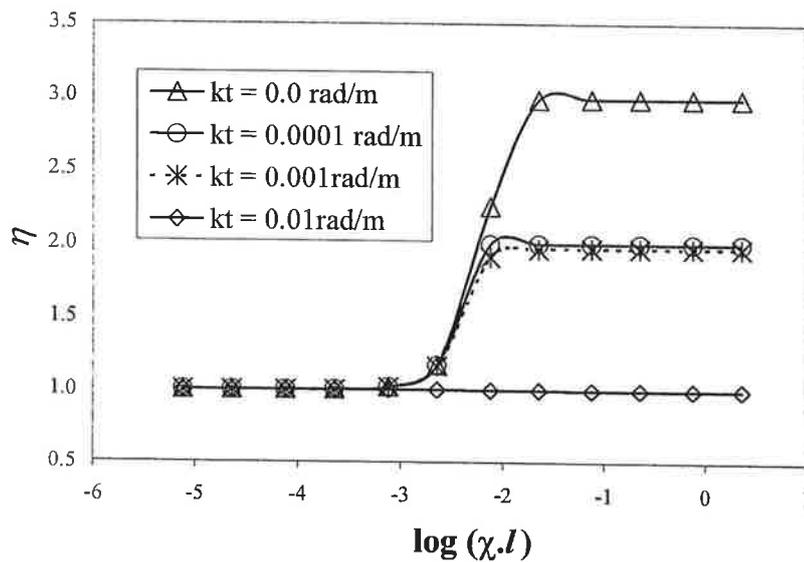


Figura 6.29: Curvas η x $\log(\chi.l)$ para diversos valores de $\tilde{\kappa}_t$ (*riser* flexível 2,5", constantes elásticas dadas por modelos analíticos, torção anti-horária, Per.=8s).

Tal comportamento também pode ser verificado pela figura 6.30, que mostra diversas curvas η x $\log(\tilde{\kappa}_t.l)$ parametrizadas segundo alguns valores do adimensional EI/GJ . A rigidez flexional EI foi considerada constante (mesmo valor dado na tabela 6.4), variando-se apenas os valores atribuídos à rigidez torsional GJ . As curvas obtidas para $EI/GJ = 0,00395$ e $EI/GJ = 0,0105$ estão relacionadas, respectivamente, aos valores de rigidez torsional extraídos da tabela 6.4 (torção no sentido anti-horário e horário). As duas outras curvas, obtidas para $EI/GJ = 0,05$ e $EI/GJ = 0,1$, servem apenas como complemento, mostrando como seria o comportamento da curva para outros valores de EI/GJ . O adimensional ligado a curvatura do *riser* também foi mantido constante nesta análise ($\chi.l = 0,1$).

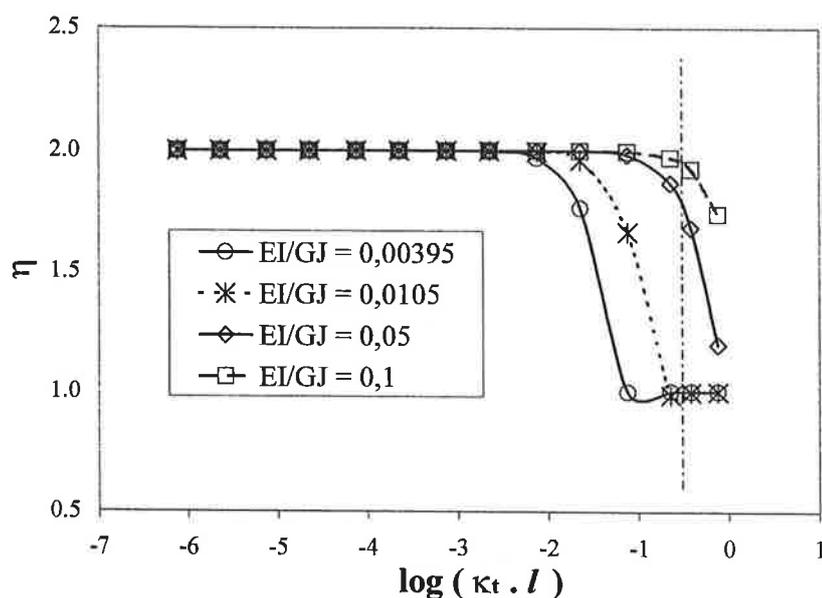


Figura 6.30: Curvas $\eta \times \log(\tilde{\kappa}_t l)$ para $\chi.l = 0,1$ e para diversos valores do adimensional EI/GJ (*riser* flexível 2,5", Período = 8s).

É interessante observarmos, ainda, que, se retomarmos a equação (6.33), dada por:

$$\frac{P}{EI} + \left(\frac{\tilde{M}_z}{2EI} \right)^2 = \left(\frac{n\pi}{l^*} \right)^2 = \left(\frac{\eta\pi}{l} \right)^2$$

é fácil mostrar que a mesma pode ser expressa da seguinte forma adimensional:

$$\frac{l^2}{\lambda^2} + \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{GJ}{EI} \right)^2 (\tilde{\kappa}_t l)^2 = \eta^2 \quad (6.41)$$

onde ficam evidentes os adimensionais $\tilde{\kappa}_t l$ e EI/GJ (ou seu inverso, GJ/EI), mencionados até o momento.

O comprimento λ que surge na equação (6.41) está associado à carga crítica de flambagem, sendo definido por:

$$\lambda^2 = \pi^2 \cdot \frac{EI}{P}$$

Desta forma, quando não há torção atuando no cabo ($\tilde{\kappa}_t l = 0$), a relação (6.41) fornece simplesmente:

$$l = \eta \cdot \lambda$$

e a carga crítica de flambagem fica dada por:

$$P_{cr} = \eta^2 \cdot \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (6.42)$$

Com a adimensionalização das equações, alguns resultados antes obtidos tornam-se bastante óbvios. Vimos, por exemplo, que o comportamento dos *risers* rígidos A e B quanto a estabilidade é o mesmo (conforme resultados obtidos nos itens 6.5.1 e 6.5.2). Este resultado não é de estranhar, se lembrarmos que, para *risers* rígidos, o adimensional EI/GJ é dado por:

$$\frac{EI}{GJ} = 1 + \nu \cong 1,3$$

Ou seja, para *risers* rígidos o adimensional EI/GJ é uma constante que depende apenas do coeficiente de Poisson do material (sendo que, para aço, $\nu \cong 0,3$). Assim, mudanças nas dimensões do *riser* não afetam este adimensional e, conseqüentemente, o comportamento de todos os *risers* rígidos será exatamente o mesmo, caso os demais adimensionais também sejam mantidos iguais.

Deve-se ressaltar ainda que, para tubos flexíveis e cabos umbilicais, o adimensional dado pela razão EI/GJ pode assumir diferentes valores, dependendo de vários fatores como: número de camadas plásticas e helicoidais, disposição das camadas, geometria das camadas e materiais utilizados nas camadas. Conclui-se, daí, que a determinação dos valores de rigidez equivalente para tubos flexíveis e cabos umbilicais tem grande importância na previsão do comportamento do *riser*/cabo quanto à estabilidade.

Para finalizar este estudo, apresentaremos a seguir, a título de ilustração, alguns valores da carga crítica de flambagem (P_{cr}) para o *riser* flexível analisado nos itens 6.5.3 e 6.5.4. Lembramos que a análise de estabilidade feita nestes itens tratou do mesmo *riser*, tendo, porém, o item 6.5.3 utilizado os valores de rigidez obtidos experimentalmente (conforme tabela 6.3), enquanto o item 6.5.4 utilizou os valores de rigidez obtidos analiticamente (conforme tabela 6.4). Desta forma, os valores de P_{cr} estão dados nas tabelas 6.6 e 6.7 segundo esta mesma divisão: a tabela 6.6 fornece os

valores de P_{cr} para EI e GJ determinados experimentalmente; enquanto a tabela 6.7, para EI e GJ obtidos analiticamente. Deve-se observar que os resultados foram obtidos para o mesmo período de excitação (8s).

Tabela 6.6: Valores de P_{cr} para EI e GJ obtidos experimentalmente, Per.=8s.

	$\chi.l = 0,0001$ (pequena curvatura)	$\chi.l = 0,1$ (grande curvatura)	Observações	EI/GJ
$\tilde{\kappa}_t l = 0,0$	155 N	1377 N	(sem torção)	–
$\tilde{\kappa}_t l = 0,001$	155 N	619 N	(torção horária)	0,0393
$\tilde{\kappa}_t l = 0,01$	154 N	618 N		
$\tilde{\kappa}_t l = 0,1$	129 N	565 N		
$\tilde{\kappa}_t l = 0,001$	155 N	619 N	(torção anti-hor.)	0,0085
$\tilde{\kappa}_t l = 0,01$	149 N	606 N		
$\tilde{\kappa}_t l = 0,1$	-388 N	-269 N		

Tabela 6.7: Valores de P_{cr} para EI e GJ obtidos analiticamente, Per.=8s.

	$\chi.l = 0,0001$ (pequena curvatura)	$\chi.l = 0,1$ (grande curvatura)	Observação	EI/GJ
$\tilde{\kappa}_t l = 0,0$	146 N	1296 N	(sem torção)	–
$\tilde{\kappa}_t l = 0,001$	146 N	582 N	(torção horária)	0,0105
$\tilde{\kappa}_t l = 0,01$	142 N	574 N		
$\tilde{\kappa}_t l = 0,1$	-189 N	-10 N		
$\tilde{\kappa}_t l = 0,001$	145 N	582 N	(torção anti-hor.)	0,00395
$\tilde{\kappa}_t l = 0,01$	122 N	528 N		
$\tilde{\kappa}_t l = 0,1$	-2213 N	-2211 N		

Em ambos os casos, foram considerados dois valores de curvatura adimensional, correspondentes a $\chi.l = 0,0001$ e $\chi.l = 0,1$, e quatro condições de torção: $\tilde{\kappa}_t.l = 0$ (sem torção), $\tilde{\kappa}_t.l = 0,001$ (pequena torção), $\tilde{\kappa}_t.l = 0,01$ (torção moderada) e $\tilde{\kappa}_t.l = 0,1$ (grande torção). Também foi considerado o sentido de atuação do momento de torção no *riser*, posto que os valores de rigidez torsional diferem de forma significativa quanto ao sentido.

Dos resultados obtidos, podemos verificar que:

- a) nos casos em que não há torção ($\tilde{\kappa}_t.l = 0$), o resultado obtido para a carga crítica, considerando grandes curvaturas, é nove vezes superior àquele obtido para pequenas curvaturas. Tal resultado já era esperado, pois, quando não há torção, P_{cr} é obtido diretamente da equação (6.42), e para pequenas curvaturas tem-se $\eta \cong 1$, enquanto para grandes curvaturas $\eta \cong 3$;
- b) considerando ainda os casos sem torção, verifica-se que os valores obtidos para P_{cr} nas tabelas 6.6 e 6.7 fornecem praticamente os mesmos resultados, quer se considere pequenas ou grandes curvaturas. A razão disto decorre do fato de o valor de rigidez flexional calculado analiticamente ($EI = 850 \text{ N.m}^2$) ser bastante próximo do valor obtido experimentalmente ($EI = 960 \text{ N.m}^2$);
- c) para valores “pequenos” ($\tilde{\kappa}_t.l = 0,001$) ou “moderados” ($\tilde{\kappa}_t.l = 0,01$) de torção, e para pequenas curvaturas ($\chi.l = 0,0001$), a carga crítica de flambagem se mantém praticamente constante (por volta de 150 N). De fato, para pequenas curvaturas temos $\eta \cong 1$, e uma vez que a torção não atinge valores elevados, podemos desprezar sua influência no cálculo da carga crítica, o que faz com que o valor de P_{cr} se mantenha por volta de 150 N (correspondente ao valor obtido para pequena curvatura, sem torção);
- d) para valores “pequenos” ($\tilde{\kappa}_t.l = 0,001$) ou “moderados” ($\tilde{\kappa}_t.l = 0,01$) de torção, e para grandes curvaturas ($\chi.l = 0,1$), o resultado obtido para a carga crítica é cerca de quatro vezes superior àquele obtido para pequenas curvaturas. Isto se explica pelo fato de podermos desprezar o efeito da torção no cálculo da carga

crítica quando a mesma não atinge valores elevados, à semelhança do que foi discutido em (c). Porém, para grandes curvaturas e havendo torção (mesmo que muito pequena), tem-se $\eta \cong 2$, de onde surge o fator 4 para o aumento da carga crítica;

- e) os valores obtidos para a carga crítica são praticamente independentes do sentido de aplicação da torção, desde que os valores de torção sejam pequenos, o que é consistente com o que já foi afirmado em (c) e (d);
- f) Para valores de torção significativamente elevados ($\tilde{\kappa}_t l = 0,1$), podemos verificar a existência de uma maior dispersão nos resultados obtidos nas tabelas 6.6 e 6.7. A explicação para esta maior dispersão é que, para valores altos de torção, a importância do adimensional EI/GJ na determinação de P_{cr} aumenta. Por outro lado, podemos notar que os valores deste adimensional nas tabelas 6.6 e 6.7 chegam a diferir em até uma ordem de grandeza, sendo provavelmente esta a causa da diferença entre os valores encontrados;
- g) além da dispersão nos resultados obtidos (nos casos em que $\tilde{\kappa}_t l = 0,1$), podemos notar ainda que, dependendo do valor do adimensional EI/GJ , há até mesmo uma mudança no sentido de aplicação da carga crítica. Tomando, por exemplo, os resultados da tabela 6.6 para $\tilde{\kappa}_t l = 0,1$ e para $\chi.l = 0,0001$, vemos que o valor da carga crítica é $P_{cr} = 129$ N, para torção no sentido horário ($EI/GJ = 0,0393$), indicando, portanto, que o *riser* flamba para uma condição em que haja compressão superior a 129 N. Já se considerarmos torção no sentido anti-horário ($EI/GJ = 0,0085$), a carga crítica de flambagem, para os mesmos valores de $\tilde{\kappa}_t l$ e $\chi.l$ será $P_{cr} = -388$ N, indicando que a instabilidade irá ocorrer para valores de tração (!) inferiores a 388 N.

6.6 Considerações referentes à análise de estabilidade

Neste item propusemos um método para a determinação da carga crítica de flambagem em tubos flexíveis e cabos umbilicais submetidos a ação simultânea de compressão dinâmica e torção, considerando ainda o efeito da curvatura local. Através de uma análise cuidadosa, conseguimos mostrar que a relação entre os valores críticos de compressão dinâmica (P) e torção (\tilde{M}_z) é dada simplesmente por (ver eq. (6.33)):

$$\frac{P}{EI} + \left(\frac{\tilde{M}_z}{2EI} \right)^2 = \left(\frac{n\pi}{l^*} \right)^2$$

a qual coincide integralmente com a clássica equação de Greenhill, que em 1883 analisou o problema de estabilidade de barras (inicialmente retas) submetidas à compressão e torção.

A consistência da relação obtida foi verificada através de vários exemplos e comparações, incluindo resultados recentemente obtidos por Aranha et al. [12,13], que determinaram uma expressão para o cálculo da carga crítica de flambagem em cabos, incluindo o efeito da curvatura, mas sem considerar o efeito da possibilidade de torção. De posse dos vários resultados obtidos e das comparações feitas, podemos estabelecer os pontos principais que devem ser ressaltados nesta análise. São eles:

- a) há, pelo menos, três adimensionais que regem o fenômeno de instabilidade em cabos: o adimensional relacionado à curvatura local (χl), o adimensional relacionado à torção aplicada ($\tilde{\kappa}_t l$) e o adimensional que estabelece a relação entre a rigidez flexional e a rigidez torsional do cabo (EI/GJ);
- b) ampliando algumas das conclusões estabelecidas por Aranha et al. [13], pudemos constatar que modos de flambagem que ocorrem fora do plano inicial do *riser* são possíveis;
- c) para valores muito pequenos de curvatura local ($\chi l \leq 0,001$), que corresponde a casos em que o eixo central do *riser*/cabo é praticamente reto, a flambagem

ocorre para $n = 1$, independentemente do nível de torção aplicada. Diga-se, de passagem, que esta conclusão está de acordo com as apresentadas por Greenhill (ver, p.ex., Love [40]) e por Aranha et al.[13];

- d) para valores maiores de curvatura local ($\chi.l > 0,01$), a flambagem pode ocorrer para $n = 3$ (desde que o *riser*/cabo esteja impedido de sair de seu plano inicial, ou seja, desde que não haja qualquer torção aplicada⁶), mas também para $n = 2$ ou até mesmo para $n = 1$, dependendo do nível de torção aplicado e da relação EI/GJ do *riser*/cabo (ver figura 6.29, por exemplo);
- e) naturalmente, uma correta avaliação das propriedades mecânicas do *riser*/cabo é essencial para uma boa estimativa da carga crítica de flambagem, o que confere ainda maior importância à obtenção de modelos analíticos que possam fornecer os valores de rigidez com confiabilidade aceitável.

Com relação aos modos de flambagem, podemos ainda inferir, através dos resultados obtidos, que:

- i) Nos casos em que não há torção (e, por conseqüência, sem deslocamentos transversais para “fora do plano inicial” do *riser*), apenas os modos “ímpares” de flambagem podem existir (note que nos casos analisados não foram encontradas raízes $\eta \cong 2, 4, 6, \dots$ na ausência de torção);
- ii) Nos casos em que existe torção, mesmo que pequena, podem existir tanto os modos ímpares de flambagem (correspondentes a $\eta \cong 1, 3, 5, \dots$) quanto os modos pares (correspondentes a $\eta \cong 2, 4, 6, \dots$);
- iii) Os modos ímpares de flambagem estão associados a deslocamentos transversais totalmente contidos no plano inicial do *riser*/cabo (daí sua ligação com casos em que não há aplicação de torção). Já os modos pares estão associados à existência de deslocamentos transversais contidos no plano e fora dele também, ou seja, o modo de flambagem, neste caso, é tridimensional.

⁶ Este resultado confere com as conclusões apresentadas por Aranha et al. [13].

7. CONCLUSÕES

O desenvolvimento de ferramentas de auxílio ao projeto de *risers* flexíveis e cabos umbilicais é fundamental para a exploração de petróleo em águas profundas e ultra-profundas. Entre estas ferramentas merecem destaque os modelos analíticos, os quais são utilizados tanto na análise global de linhas flexíveis quanto na análise local destas estruturas. O presente trabalho procurou contribuir com o desenvolvimento e aprimoramento destas ferramentas dando ênfase aos seguintes tópicos (objetivos do trabalho):

- i) obtenção de modelos analíticos que permitam a análise local de tubos flexíveis e cabos umbilicais submetidos a carregamentos combinados de qualquer natureza;
- ii) proposta de uma expressão para a determinação da carga crítica de flambagem em *risers*, considerando a natureza tridimensional do problema;
- iii) fundamentação de todas as hipóteses feitas para o cumprimento dos objetivos (i) e (ii) acima assinalados.

Conforme foi ressaltado em vários pontos deste trabalho, os modelos analíticos para a análise local de *risers* flexíveis e cabos umbilicais são importantes por duas razões principais:

- i) permitem a determinação dos valores de rigidez (axial, torsional e flexional) equivalente do *riser*/cabo, os quais são imprescindíveis para diversos outros tipos de análise como, por exemplo: para uma análise global mais refinada da linha (principalmente em regiões críticas da linha, como o TDP e o topo); para a determinação da carga crítica de flambagem; para a determinação dos modos naturais de vibração da linha; para a verificação da possibilidade de formação de laços na linha, e assim por diante;
- ii) permitem determinar as tensões e deformações em cada camada, decorrentes da ação dos diversos carregamentos aplicados ao *riser*/cabo. Desta forma, pode-se fazer uma melhor estimativa da vida útil destas estruturas.

O capítulo 3 apresentou um primeiro modelo analítico para a análise local de tubos e cabos submetidos apenas a esforços axissimétricos (tração, torção, pressão interna e externa). A modelagem das diversas camadas que constituem tubos e cabos, para estes carregamentos, possibilitou um primeiro contato com o problema, servindo também como um modelo de partida para carregamentos mais complexos que foram analisados no capítulo 5 (envolvendo a flexão de tubos/cabos). Através da utilização de modelos analíticos consistentes para cada camada, foi possível obtermos um sistema de equações algébricas que, ao ser resolvido, fornecia diretamente os valores de tensões e deformações nas diversas camadas, bem como os valores de rigidez axial e torsional do tubo/cabo nas condições de carregamento dadas.

No capítulo 4, foram realizadas comparações entre resultados analíticos (obtidos através do modelo proposto no capítulo 3), numéricos (envolvendo um modelo com elementos finitos) e experimentais (obtidos na literatura) para diversos tipos de cabos e tubos flexíveis. Através destas comparações, pudemos constatar que, no cômputo geral, os resultados previstos pelo modelo analítico proposto estão na faixa daqueles devidos a outros modelos analíticos consistentes utilizados por muitas instituições (ver, por exemplo, tabelas 4.30 a 4.35 do capítulo 4). Por outro lado, também pudemos verificar que os resultados analíticos obtidos com o modelo proposto sempre forneceram valores de rigidez superiores aos valores das declividades médias obtidas em ensaios (ver figuras 4.11 e 4.12), sendo as maiores diferenças observadas em carregamentos envolvendo a torção do tubo. Conforme explicamos naquele capítulo, a causa desta diferença pode estar ligada ao fato de que a hipótese ligada à uniformidade de deformações (para todas as camadas e ao longo de todo o comprimento do trecho) pode não ser plausível nas condições realizadas no ensaio. Uma outra explicação possível pode ser atribuída à acomodação das camadas (devido a existência de pequenos vazios entre elas) durante a realização do ensaio, o que torna a estrutura mais flexível.

Complementando o modelo desenvolvido no capítulo 3, o capítulo 5 apresentou dois modelos analíticos para a análise local de *risers* e cabos, considerando o efeito da

flexão como carregamento adicional aos já considerados carregamentos axissimétricos. Estes modelos basearam-se em duas abordagens clássicas encontradas na literatura, que são: (a) modelo na ausência de escorregamento entre as camadas e (b) modelo de escorregamento total entre as camadas. Deve-se destacar que o desenvolvimento destes dois modelos foi feito a partir de um cuidadoso estudo geométrico das camadas helicoidais, feito no Anexo C. As expressões analíticas desenvolvidas para os dois modelos considerados no capítulo 5 foram, então, utilizadas para a estimativa da rigidez flexional de um dado tubo flexível, sendo tais valores comparados posteriormente com valores experimentais extraídos da literatura. Tal comparação mostrou que o modelo de escorregamento total fornece valores de rigidez flexional bastante próximos daqueles obtidos experimentalmente. Contudo, devido à adoção de certas hipóteses simplificadoras, verificamos que a expressão analítica obtida para o cálculo da rigidez flexional não consegue recuperar o acoplamento entre os carregamentos de flexão e os carregamentos axissimétricos (tração, torção e pressão interna ou externa).

Embora não tenha sido ressaltado no capítulo 5, podemos claramente observar que o fato de terem sido considerados carregamentos de flexão na análise local provocou uma mudança nas incógnitas do problema, que deixaram de ser as tensões nas camadas (como no modelo apresentado no capítulo 3) e passaram a ser os esforços generalizados nas camadas (i.é, força axial, momento fletor e torção absorvidos em cada camada). Contudo, é fácil verificar que, uma vez conhecidos estes esforços generalizados (obtidos através da solução do novo sistema de equações algébricas proposto), pode-se chegar facilmente às tensões em qualquer ponto e em qualquer camada do tubo/cabo.

Atendendo ao segundo objetivo deste trabalho, foi proposto, no capítulo 6, um método para a determinação da carga crítica de flambagem em tubos flexíveis e cabos umbilicais, submetidos a ação simultânea de compressão dinâmica e torção, considerando ainda o efeito da curvatura local. Através de uma análise consistente,

foi demonstrado que a relação entre os valores críticos de compressão dinâmica (P) e torção (\tilde{M}_z) é dada por:

$$\frac{P}{EI} + \left(\frac{\tilde{M}_z}{2EI} \right)^2 = \left(\frac{n\pi}{l^*} \right)^2$$

a qual coincide integralmente com a clássica equação de Greenhill (ver, por exemplo, Love [40]), deduzida há mais de um século (1883), para uma barra inicialmente reta. Deve-se ressaltar, contudo, que a expressão obtida é geral, valendo não apenas para *risers*, mas para qualquer barra curva de grande comprimento submetida aos carregamentos considerados. Neste caso, os parâmetros n e l^* devem ser consistentemente reinterpretados à luz das equações de compatibilidade geométrica. A consistência da relação obtida foi verificada através de vários exemplos e comparações, incluindo resultados recentemente obtidos por Aranha et al. [12,13]. De posse dos vários resultados obtidos e das comparações feitas, pudemos estabelecer várias considerações interessantes ligadas à análise de estabilidade de barras curvas (válidas inclusive para *risers*) apresentadas no capítulo 6.

Deve-se ressaltar finalmente que, além do desenvolvimento dos modelos analíticos apresentados nos capítulos 3, 5 e 6 deste trabalho, houve também um intenso trabalho de formulação e discussão de hipóteses, além de diversas verificações internas de consistência dos modelos, feitas paralelamente à obtenção das diversas expressões analíticas. A indicação clara das hipóteses adotadas e sua fundamentação cumpre, assim, o terceiro objetivo deste trabalho.

Para finalizar, gostaríamos de apresentar aos leitores algumas perspectivas de trabalhos futuros, envolvendo a análise de tubos flexíveis e cabos umbilicais. Entre elas, destacam-se:

- Determinação das tensões nas diversas camadas que compõem os tubos flexíveis e cabos umbilicais e comparação com resultados obtidos experimentalmente: a utilização das formulações propostas nos capítulos 3 e 5 deste trabalho permite a obtenção da distribuição de tensões tanto nas camadas helicoidais quanto nas

camadas plásticas para qualquer combinação de carregamentos (envolvendo tração, torção, flexão e pressões interna e externa). Contudo, devido a falta de dados experimentais que pudessem ser utilizados para o confronto de resultados, concluímos que não haveria muito sentido na apresentação pura e simples de números. Em nossa opinião, estas comparações são imprescindíveis para o aprofundamento da discussão quanto à pertinência de todas as hipóteses assumidas na modelagem, podendo servir tanto para a validação das mesmas quanto para sua reformulação (e busca de modelos mais completos). Outro ponto importante desta comparação é a verificação do nível de solicitação nas várias camadas, frente aos diversos carregamentos, quando comparadas às tensões máximas admissíveis para o material (por exemplo: na flexão pura, serão as camadas plásticas as mais solicitadas? E na tração pura, qual a relação entre a tensão equivalente no ponto mais solicitado dos tendões e a tensão de escoamento do material?);

- Modelagens que considerem as forças de atrito e a histerese no carregamento: os modelos desenvolvidos no presente trabalho desconsideram as forças de atrito e, conseqüentemente, não conseguem reproduzir a histerese associada aos carregamentos aplicados ao *riser*/cabo (ver, por exemplo, figuras 4.11 e 4.12 do capítulo 4, e as figuras 5.8 e 5.9 do capítulo 5). Assim, uma proposta muito interessante seria a incorporação de modelos de atrito aos modelos analíticos desenvolvidos nos capítulos 3 e 5 deste trabalho. A realização desta empreitada permitiria, por exemplo, investigarmos qual o efeito das forças de atrito e da histerese nas hipóteses, geralmente adotadas pelos modelos atuais, de uniformidade de deformações ($\Delta L/L_1$ e $\Delta\phi/L_1$) ao longo de todo o trecho do tubo/cabo e em todas as camadas;

- Modelagem de camadas helicoidais com geometrias mais complexas: o presente trabalho fez um estudo bastante cuidadoso e completo acerca da geometria das camadas helicoidais (ver Anexo C). Contudo, neste estudo foram admitidas certas

hipóteses¹ que, de certa forma, “privilegiam” tendões com seções transversais retangulares (pois estas são comumente encontradas nas armaduras de tração de *risers*). Desta forma, uma interessante proposta de trabalho futuro envolve a reformulação destas hipóteses para que sejam consideradas seções transversais mais complexas, como as encontradas nas carcaças intertravadas e nas camadas zeta;

- Melhorias no modelo proposto para análise de carregamentos combinados: deve-se observar que, no desenvolvimento do modelo analítico apresentado no capítulo 5 para a análise de carregamentos combinados envolvendo a flexão, o problema foi resolvido através do chamado método semi-inverso, segundo o qual algumas hipóteses cinemáticas (relativas ao campo de deslocamentos dos pontos pertencentes ao eixo central dos feixes helicoidais) foram inicialmente admitidas, para que o problema pudesse ser resolvido. Uma destas hipóteses admitia que o eixo central do tubo/cabo formava, após a flexão, uma curva plana com raio de curvatura constante². Contudo, uma hipótese ainda mais geral deveria considerar que, após a deformação, o eixo central do tubo/cabo pudesse ser representado por uma curva *no espaço*, de tal forma que a tortuosidade desta curva também fosse considerada como um dos parâmetros do problema. Os resultados analíticos obtidos através desta análise mais geral seriam, certamente, de grande valor para a análise local destas estruturas.

- Modelagem com elementos finitos de um trecho de riser flexível ou de cabo umbilical para a determinação da distribuição de esforços na seção: embora seja sempre interessante a modelagem com elementos finitos, bem como a visualização dos resultados da análise, é importante salientar que uma modelagem tridimensional com elementos finitos para um dado trecho de *riser* (ou cabo) pode ser extremamente laboriosa e frustrante. De fato, o objetivo inicial deste trabalho era apresentar um

¹ Admitimos, por exemplo, que um dos eixos principais da seção transversal do tendão fosse sempre perpendicular à “superfície de suporte” sobre a qual a curva, representando o eixo central do tendão, está assentada.

² Devemos lembrar que, mesmo com esta hipótese simplificadora, foi necessário um extenso trabalho algébrico e computacional para chegarmos à solução do problema.

modelo com elementos finitos para a análise de qualquer tipo de *riser* e qualquer carregamento. As inúmeras e infrutíferas investidas em tipos de modelagem, utilizando inclusive algoritmos não-lineares e elementos de contato, serviram apenas para confirmar que a modelagem com elementos finitos certamente não é a mais adequada para todos os fins e para todos os recursos. Vale a pena deixar registrado que as últimas modelagens que tentamos realizar com elementos finitos foram feitas com o programa ADINA, versão 7.2 (ver referências [1, 2, 3]), instalado numa estação Sun Ultra 5, com 256 Mb RAM. As modelagens envolveram apenas duas camadas helicoidais contendo poucos tendões (quatro a cinco, no máximo) e uma única camada plástica interna. Todas as camadas foram modeladas com elementos sólidos de oito nós. O comprimento do trecho analisado era equivalente a dois ou três passos de uma das camadas helicoidais. O tempo de processamento era geralmente muito grande (quatro a cinco dias) e os arquivos gerados imensos (eram necessários quase dez minutos para que as figuras de visualização de tensões fossem carregadas). Conforme assinalamos no capítulo 3, os modelos com elementos finitos (para análise local de tubos e cabos) apresentam um custo bastante elevado devido ao tempo necessário à modelagem e à obtenção de resultados qualitativamente aceitáveis. Contudo, eles também têm sua importância enquanto novas ferramentas para a análise local;

- Implementação dos modelos analíticos em códigos computacionais de análise global: este trabalho permitiria, por exemplo, que fosse considerada a assimetria dos valores de rigidez à torção e a variação das propriedades de rigidez ao longo do comprimento da linha (*riser*) na análise global.
- Determinação das cargas críticas de flambagem através de métodos numéricos (como o método dos elementos finitos, por exemplo) e/ou ensaios experimentais: a obtenção das cargas críticas de flambagem por outros métodos e o confronto dos resultados obtidos através destes métodos com os resultados do modelo analítico proposto no capítulo 6 é muito importante para testar a confiabilidade do modelo. Como um modelo com elementos finitos (neste caso, para a análise global) parece ser

a saída mais “rápida” como forma de verificação, sugerimos que seja feita inicialmente a análise do problema plano sem torção, para diversas condições de carregamento (i.é, diferentes frequências e amplitudes de oscilação e diferentes configurações estáticas). Deve-se ressaltar, contudo, que, mesmo se os resultados analíticos forem confirmados por modelos numéricos, isto não elimina a necessidade de verificação experimental, envolvendo várias situações;

- *Análise de linhas flexíveis na condição pós-flambagem*: o estudo da *elastica* de linhas flexíveis uma vez alcançada a condição crítica de flambagem também tem grande interesse no projeto de *risers* flexíveis e cabos umbilicais. Novamente ressaltamos que a comparação de resultados obtidos através de modelos analíticos e/ou numéricos com ensaios experimentais é altamente desejável. Como sugestões de leitura para os que se quiserem se dedicar a esta área de pesquisa sugerimos as seguintes referências: Alexander; Antman [4], Atanackovic [14], Gottlieb; Perkins [27], Lu; Perkins [41, 42] e Stump; Fraser [79, 80].

ANEXOS

Anexo A: Equações diferenciais de equilíbrio

Anexo B: Obtenção de equações constitutivas

Anexo C: Geometria de feixes helicoidais

**Anexo D: Fórmulas para camadas cilíndricas
de parede espessa**

Anexo A: Equações diferenciais de equilíbrio

As equações gerais de equilíbrio de uma barra, sob ação de um carregamento genérico e cujo eixo na configuração deformada é descrito por uma curva qualquer no espaço, foram obtidas por Clebsch, sendo também descritas por Kirchhoff, conforme relata Love [40]. Em sua obra, Love [40] traz a dedução completa das equações de equilíbrio, porém com o uso de uma notação que não corresponde exatamente à encontrada na literatura atual, tornando difícil o entendimento por parte de pesquisadores e estudantes que tomam contato com o assunto pela primeira vez. Desta forma, mostraremos neste anexo, com uma notação mais adequada e de uma forma talvez mais didática, como obter as equações diferenciais de equilíbrio dadas por Clebsch.

A.1. Eixos principais de flexo-torção e direções principais de curvatura

Consideremos, inicialmente, uma barra prismática de eixo reto, de tal forma que linhas homólogas pertencentes a diferentes seções transversais sejam paralelas entre si. Designaremos a configuração inicial (não-deformada) da barra por Σ_1 , enquanto a configuração deformada será designada Σ_i ($i > 1$). Se tal barra for submetida a torção, sem ser fletida (ou seja, de modo que seu eixo permaneça reto), elementos lineares em diferentes seções transversais, que na configuração inicial Σ_1 eram paralelos, ficam inclinados um em relação ao outro. Seleccionemos um par destes elementos lineares, paralelos um ao outro na configuração não-deformada, que passem pelos centróides das respectivas seções transversais e que sejam orientados segundo um dos eixos principais. Se designarmos por ΔS_i a distância entre as duas seções transversais e por Δf_i o ângulo (em radianos) entre as direções destes dois elementos na configuração deformada, então a torção (*twist*) será dada por:

$$\kappa_{ti} = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \frac{\Delta f_i}{\Delta S_i} = \frac{df_i}{dS_i} \quad (\text{a.1})$$

Porém, se a barra também estiver sendo fletida, a torção κ_{ti} não pode ser calculada de modo tão simples. Neste caso devemos admitir que o eixo central, na configuração deformada Σ_i , torna-se uma curva qualquer no espaço. Consideremos um sistema de eixos fixos $OXYZ$ de tal forma que o eixo Z seja paralelo ao eixo central da barra na configuração não deformada, e que os eixos X e Y sejam paralelos aos eixos principais da seção transversal nesta mesma configuração. Seja C_1 um ponto qualquer do eixo central da barra, na configuração inicial Σ_1 , e consideremos três elementos lineares da barra partindo de C_1 nas direções dos eixos X , Y e Z (ver figura a.1).

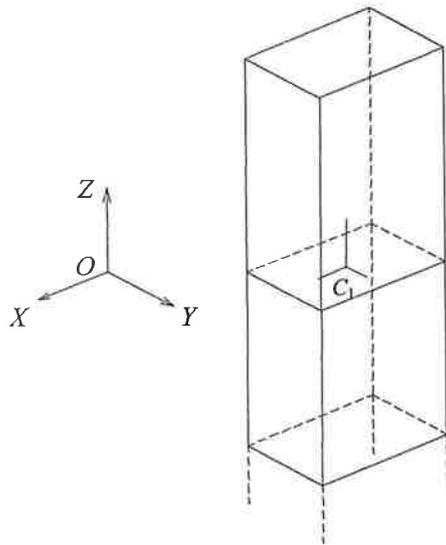


Figura a.1: Barra prismática na configuração não-deformada Σ_1 .

Quando a barra é deformada, estes três elementos lineares não continuam a ser, necessariamente, ortogonais entre si (devido às distorções que podem existir no ponto entre estas direções). Contudo, através destes três elementos, é possível construir para cada seção transversal um novo sistema de eixos ortogonais (x, y, z) . A origem deste sistema será o próprio ponto C_1 na configuração deformada da barra, que será denotado C_i . O eixo z será definido pela tangente ao eixo central deformado

em C_i , e o plano (x,z) será definido como o plano que contém o elemento linear que, na configuração não-deformada, parte de C_1 na direção X . O plano (x,z) será, portanto, um dos planos principais da barra. O sentido do eixo z é escolhido de tal forma que o comprimento de arco deformado (S_i) do eixo central, medido a partir de um ponto escolhido sobre o eixo, aumente. O sentido do eixo x pode ser escolhido arbitrariamente, porém o sentido do eixo y deve ser escolhido de tal modo que a base formada pelos versores $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, associados respectivamente às direções dos eixos x , y e z , tenha orientação positiva. O sistema de eixos (x, y, z) assim construído para qualquer ponto do eixo central deformado consiste nos eixos principais de flexo-torção da barra naquele ponto (ver figuras a.2 e a.3).

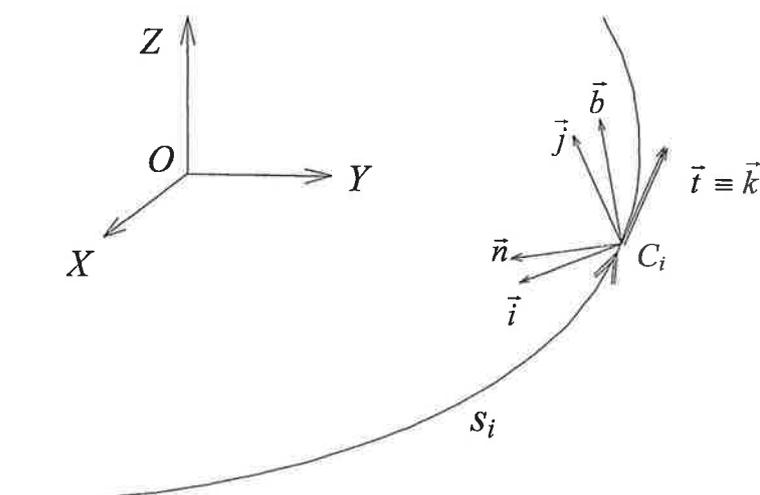


Figura a.2: Eixo central na configuração deformada Σ_i , eixos principais de flexo-torção $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ e triédro de Frenet $(\vec{n}, \vec{b}, \vec{t})$ numa posição genérica do eixo.

De forma geral, as direções dos eixos principais de flexão (\vec{i}, \vec{j}) podem não coincidir com as direções principais de curvatura (\vec{n}, \vec{b}) do eixo central deformado, conforme ilustram as figuras a.2 e a.3. Denotando por f_i o ângulo formado entre o versor normal \vec{n} e o plano principal de flexão (y,z) , podemos escrever as seguintes relações entre os versores das bases $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ e $(\vec{n}, \vec{b}, \vec{t})$:

$$\begin{bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sen } f_i & -\text{cos } f_i & 0 \\ \text{cos } f_i & \text{sen } f_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{n} \\ \vec{b} \\ \vec{t} \end{bmatrix} \quad (\text{a.2})$$

ou, invertendo a relação, teremos de forma equivalente:

$$\begin{bmatrix} \vec{n} \\ \vec{b} \\ \vec{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sen } f_i & \text{cos } f_i & 0 \\ -\text{cos } f_i & \text{sen } f_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{bmatrix} \quad (\text{a.3})$$

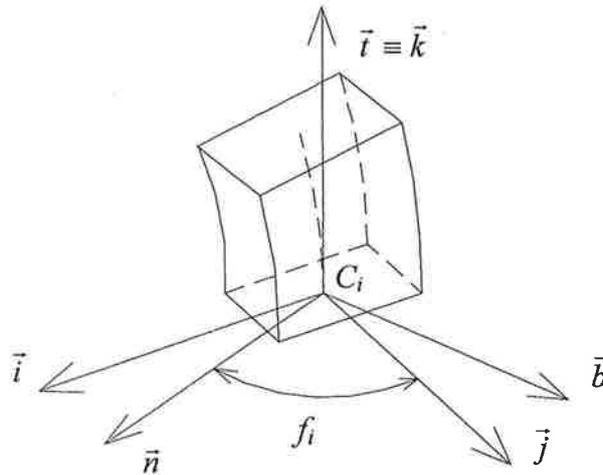


Figura a.3: Detalhe do eixo central na configuração deformada, com indicação dos eixos principais de flexão-torção $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ e triedro de Frenet $(\vec{n}, \vec{b}, \vec{t})$ em C_i .

Derivando as relações (a.2) em relação ao comprimento de arco deformado S_i , virá:

$$\begin{bmatrix} \frac{d\vec{i}}{dS_i} \\ \frac{d\vec{j}}{dS_i} \\ \frac{d\vec{k}}{dS_i} \end{bmatrix} = \frac{df_i}{dS_i} \cdot \begin{bmatrix} \text{cos } f_i & \text{sen } f_i & 0 \\ -\text{sen } f_i & \text{cos } f_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{n} \\ \vec{b} \\ \vec{t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{sen } f_i & -\text{cos } f_i & 0 \\ \text{cos } f_i & \text{sen } f_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{d\vec{n}}{dS_i} \\ \frac{d\vec{b}}{dS_i} \\ \frac{d\vec{t}}{dS_i} \end{bmatrix} \quad (\text{a.4})$$

Porém, das conhecidas relações de Frenet, sabemos que¹:

¹ Ver, por exemplo, Boulos; Zagottis [15].

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{n}}{dS_i} &= \tau_i \cdot \vec{b} - \chi_i \cdot \vec{t} \\
\frac{d\vec{b}}{dS_i} &= -\tau_i \cdot \vec{n} \\
\frac{d\vec{t}}{dS_i} &= \chi_i \cdot \vec{n}
\end{aligned} \tag{a.5}$$

onde χ_i e τ_i representam, respectivamente, a curvatura e a tortuosidade² num ponto genérico da curva na configuração deformada Σ_i .

Substituindo, então, (a.5) em (a.4) e rearranjando os termos:

$$\begin{bmatrix} \frac{d\vec{i}}{dS_i} \\ \frac{d\vec{j}}{dS_i} \\ \frac{d\vec{k}}{dS_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{df_i}{dS_i} + \tau_i \right) \cos f_i & \left(\frac{df_i}{dS_i} + \tau_i \right) \sin f_i & -\chi_i \cdot \sin f_i \\ -\left(\frac{df_i}{dS_i} + \tau_i \right) \sin f_i & \left(\frac{df_i}{dS_i} + \tau_i \right) \cos f_i & -\chi_i \cdot \cos f_i \\ \chi_i & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{n} \\ \vec{b} \\ \vec{t} \end{bmatrix} \tag{a.6}$$

Consideremos, agora, o vetor curvatura definido por:

$$\vec{K}_i = \chi_i \cdot \vec{b} \tag{a.7}$$

ou, usando (a.3):

$$\vec{K}_i = (-\chi_i \cdot \cos f_i) \cdot \vec{i} + (\chi_i \cdot \sin f_i) \cdot \vec{j} \tag{a.8}$$

Vemos, assim, que o vetor curvatura possui duas componentes segundo os eixos principais de flexão da barra. Designemos estas componentes por κ_{xi} e κ_{yi} , tais que:

$$\begin{aligned}
\kappa_{xi} &= -\chi_i \cdot \cos f_i \\
\kappa_{yi} &= \chi_i \cdot \sin f_i
\end{aligned} \tag{a.9}$$

² Em sua obra, Love [40] denota a medida da tortuosidade por $1/\Sigma$.

É imediato perceber que κ_{xi} é a projeção do vetor curvatura segundo a direção principal \vec{i} , enquanto κ_{yi} é a projeção do vetor curvatura segundo a direção principal \vec{j} .

Para abreviar ainda mais a notação, consideremos a grandeza κ_{ii} dada por:

$$\kappa_{ii} = \frac{df_i}{dS_i} + \tau_i \quad (\text{a.10})$$

Usando, agora, as relações (a.3), (a.9) e (a.10) em (a.6), resulta:

$$\begin{bmatrix} \frac{d\vec{i}}{dS_i} \\ \frac{d\vec{j}}{dS_i} \\ \frac{d\vec{k}}{dS_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_{ii} & -\kappa_{yi} \\ -\kappa_{ii} & 0 & \kappa_{xi} \\ \kappa_{yi} & -\kappa_{xi} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{bmatrix} \quad (\text{a.11})$$

Examinando as relações (a.11), em particular as referentes às duas primeiras linhas, podemos dar uma interpretação geométrica para a grandeza κ_{ii} dada por (a.10). A primeira equação nos diz que a taxa de variação da direção principal \vec{i} com o comprimento de arco S_i possui duas componentes: uma paralela ao plano (x,y) e outra perpendicular ao mesmo. Desta forma, a norma da componente paralela ao plano principal (x,y) , que no caso é a própria grandeza κ_{ii} , nada mais é que a torção (deve-se observar que o mesmo resultado seria obtido se considerássemos a taxa de variação de \vec{j} com S_i). No caso particular, visto inicialmente, em que o eixo central de uma barra submetida somente à torção permanecia reto, tanto a curvatura quanto a tortuosidade da curva formada pelo eixo central deformado são nulas, e as equações (a.1) e (a.10) são, neste caso, coincidentes.

Vemos portanto que a matriz anti-simétrica dada por (a.11) fica completamente definida através das componentes de curvatura κ_{xi} e κ_{yi} , e da torção κ_{ti} ³. Tais relações serão bastante úteis na dedução das equações diferenciais de equilíbrio da barra sob carregamento genérico.

A.2. Obtenção das equações diferenciais de equilíbrio da barra

Quando a barra prismática indicada na figura a.1 é deformada devido a esforços externos aplicados sobre ela, surgem esforços internos (tensões) distribuídos nas diversas seções transversais da barra. As tensões que agem numa dada seção transversal são estaticamente equivalentes a uma força aplicada sobre o centróide da seção e a um binário. Considerando os eixos principais de flexo-torção $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de uma seção genérica da barra, designemos por Q_x , Q_y e T as componentes da força resultante aplicada sobre o centróide da seção, medidas nas direções de \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} respectivamente (assim, Q_x e Q_y representam as forças cortantes nas direções de \vec{i} e \vec{j} , enquanto T representa a força normal). Designemos também por M_x , M_y e M_z as componentes do binário na seção (assim M_x e M_y representam os momentos fletores na seção, enquanto M_z representa o momento de torção na seção). A figura a.4 mostra os esforços solicitantes⁴ numa seção genérica (os sentidos indicados são os considerados positivos).

³ Na analogia cinemática com o movimento de um pião, citada por Love [40], a matriz anti-simétrica obtida corresponde ao tensor de rotações.

⁴ Em sua obra, Love [40] denota os esforços solicitantes Q_x , Q_y , T e M_x , M_y , M_z , respectivamente, por: N , N' , T e G , G' , H .

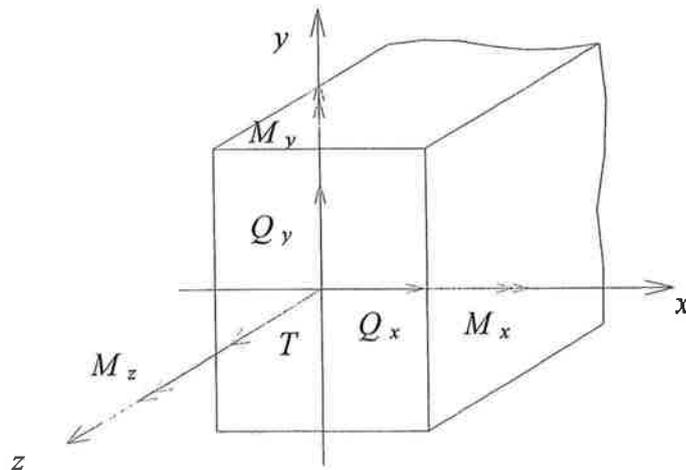


Figura a.4: Esforços solicitantes numa seção genérica da barra.

Os esforços solicitantes indicados na figura a.4 são obtidos através das seguintes relações (ver figura a.5):

$$\begin{aligned}
 Q_x &= \iint (\tau_{zx}) dx \cdot dy & M_x &= \iint (\sigma_z \cdot y) dx \cdot dy \\
 Q_y &= \iint (\tau_{zy}) dx \cdot dy & M_y &= -\iint (\sigma_z \cdot x) dx \cdot dy \\
 T &= \iint (\sigma_z) dx \cdot dy & M_z &= \iint (\tau_{zy} \cdot x - \tau_{zx} \cdot y) dx \cdot dy
 \end{aligned}
 \tag{a.12}$$

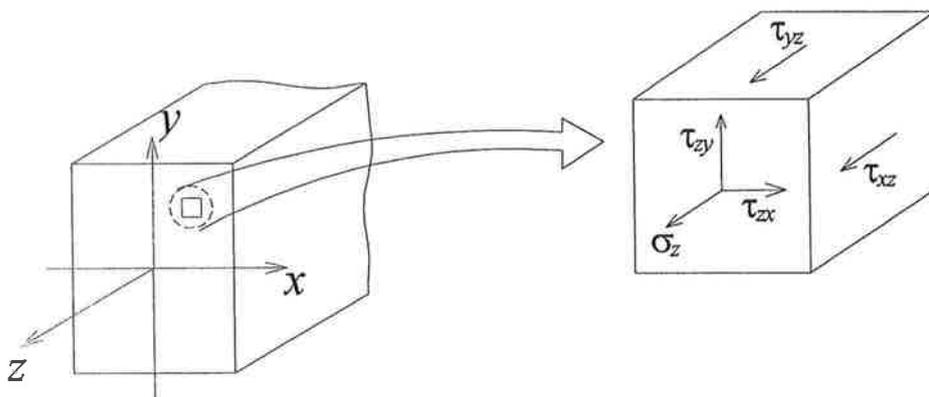


Figura a.5: Direções principais de flexo-torção e tensões atuantes na seção.

Pode-se observar, pelas relações (a.12) e pela figura a.5, que não estão sendo consideradas as tensões σ_x, σ_y e τ_{xy} atuando no elemento indicado. Embora estas tensões existam realmente (devido a carregamentos distribuídos aplicados sobre a superfície lateral da barra, por exemplo), iremos admitir que elas possam ser

desprezadas quando comparadas à magnitude das demais tensões (principalmente se comparadas à tensão normal σ_z).

Para a obtenção das equações diferenciais de equilíbrio da barra, é preciso conhecer os esforços externos aplicados à mesma. Genericamente, podemos admitir que os esforços externos são dados por forças e momentos distribuídos por unidade de comprimento da barra, os quais sempre podem ser decompostos segundo os eixos principais de flexo-torção em cada posição do eixo deformado. Sejam f_x, f_y, f_z e m_x, m_y, m_z as componentes de força e momento distribuídos por unidade de comprimento (deformado) da barra segundo as direções principais de flexo-torção (x, y, z). Deve-se observar que tanto os esforços externos distribuídos por unidade de comprimento (f_x, f_y, f_z e m_x, m_y, m_z) quanto os esforços internos solicitantes (Q_x, Q_y, T e M_x, M_y, M_z) são funções do tempo e do espaço (que pode ser medido pelo comprimento de arco S_i a partir de uma posição arbitrária sobre o eixo central deformado), o mesmo valendo para os versores $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ que definem os eixos principais de flexo-torção em cada posição do eixo central deformado.

A figura a.6 mostra um elemento infinitesimal de uma barra deformada, de comprimento $\Delta S_i = S_i'' - S_i'$, onde S_i' e S_i'' são os comprimentos de arco S_i (medidos a partir de uma posição arbitrária) associados às posições dos pontos extremos do elemento (C_i' e C_i''). A figura mostra ainda os vetores \vec{f} e \vec{m} relacionados aos esforços externos por unidade de comprimento da barra (f_x, f_y, f_z e m_x, m_y, m_z) e as resultantes de forças e binários \vec{R} e \vec{M} relacionadas aos esforços internos solicitantes (Q_x, Q_y, T e M_x, M_y, M_z) nas duas posições extremas. As equações diferenciais de equilíbrio da barra serão obtidas impondo-se o equilíbrio de forças e momentos que agem sobre o elemento.

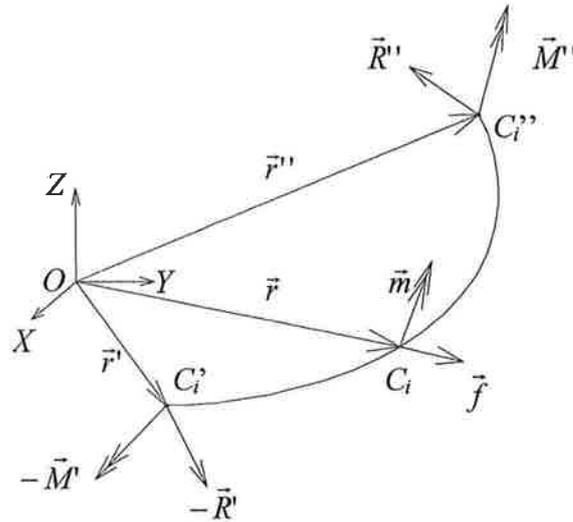


Figura a.6: Esforços externos e internos num elemento infinitesimal da barra.

Impondo primeiramente o equilíbrio de forças para o elemento, virá:

$$\vec{R}'' + (-\vec{R}') + \int_{S_i'}^{S_i''} \vec{f} \cdot dS_i = \vec{0} \quad (\text{a.13})$$

Porém, $\vec{R}'' = \vec{R}' + \Delta\vec{R}$, e assim a equação (a.13) fica:

$$\Delta\vec{R} + \int_{S_i'}^{S_i''} \vec{f} \cdot dS_i = \vec{0} \quad (\text{a.14})$$

Dividindo a expressão (a.14) por ΔS_i e tomando o limite para $\Delta S_i \rightarrow 0$ (i.é, $S_i'' \rightarrow S_i'$), teremos:

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial S_i} + \vec{f} = \vec{0} \quad (\text{a.15})$$

Lembrando agora que $\vec{R} = Q_x \cdot \vec{i} + Q_y \cdot \vec{j} + T \cdot \vec{k}$ e que as derivadas dos versores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ com relação ao comprimento de arco deformado S_i são dadas por (a.11), encontraremos, finalmente, as três equações de equilíbrio de forças segundo as direções principais de flexo-torção $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ em S_i :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q_x}{\partial S_i} - Q_y \cdot \kappa_{ii} + T \cdot \kappa_{yi} + f_x &= 0 \\
\frac{\partial Q_y}{\partial S_i} - T \cdot \kappa_{xi} + Q_x \cdot \kappa_{ii} + f_y &= 0 \\
\frac{\partial T}{\partial S_i} - Q_x \cdot \kappa_{yi} + Q_y \cdot \kappa_{xi} + f_z &= 0
\end{aligned} \tag{a.16}$$

Impondo agora o equilíbrio de momentos⁵ para o elemento da figura a.6, teremos:

$$\vec{M}'' + (-\vec{M}') + (C_i'' - C_i') \times \vec{R}'' + \int_{S_i'}^{S_i''} (C_i - C_i') \times \vec{f} \cdot dS_i + \int_{S_i'}^{S_i''} \vec{m} \cdot dS_i = \vec{0} \tag{a.17}$$

Porém, $\vec{M}'' = \vec{M}' + \Delta\vec{M}$ e, da figura a.6, é fácil perceber que:

$$(C_i'' - C_i') = \vec{r}'' - \vec{r}' \quad \text{e} \quad (C_i - C_i') = \vec{r}(S_i) - \vec{r}'$$

onde \vec{r}' e \vec{r}'' são os vetores-posição que definem as coordenadas dos pontos C_i' e C_i'' , respectivamente. Por extensão, $\vec{r}(S_i)$ é o vetor-posição do ponto $C_i(S_i)$ (para $S_i' \leq S_i \leq S_i''$).

Fazendo as substituições necessárias e dividindo a expressão (a.17) por ΔS_i , teremos, após tomarmos o limite para $\Delta S_i \rightarrow 0$ (ou seja, para $S_i'' \rightarrow S_i'$):

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial S_i} + \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial S_i} \Big|_{S_i=S_i'} \times \vec{R}' \right) + \vec{0} \times \frac{\partial \vec{R}}{\partial S_i} \Big|_{S_i=S_i'} + \vec{0} \times \vec{f}(S_i') + \vec{m}(S_i') = \vec{0} \tag{a.18}$$

Lembrando que: $\vec{M} = M_x \cdot \vec{i} + M_y \cdot \vec{j} + M_z \cdot \vec{k}$ e que $\frac{\partial \vec{r}}{\partial S_i} \Big|_{S_i=S_i'} = \vec{k}(S_i') = \vec{k}$

teremos, após o cálculo das derivadas parciais em (a.18) e o uso das relações (a.11), as seguintes equações escalares:

⁵ Escolhemos o ponto C_i' como pólo.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_x}{\partial S_i} - M_y \cdot \kappa_{ii} + M_z \cdot \kappa_{yi} - Q_y + m_x &= 0 \\
\frac{\partial M_y}{\partial S_i} - M_z \cdot \kappa_{xi} + M_x \cdot \kappa_{ii} + Q_x + m_y &= 0 \\
\frac{\partial M_z}{\partial S_i} - M_x \cdot \kappa_{yi} + M_y \cdot \kappa_{xi} + m_z &= 0
\end{aligned} \tag{a.19}$$

As três equações dadas por (a.19) são as três equações de equilíbrio de momentos segundo as direções principais de flexo-torção $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ em S_i e constituem, juntamente com as três equações dadas por (a.16), as equações diferenciais de equilíbrio da barra. Deve-se ressaltar que, para a obtenção destas equações, nenhuma ressalva foi feita quanto aos deslocamentos sofridos pelo eixo central, de tal forma que a teoria permanece válida até mesmo para grandes deslocamentos da barra.

A.3. Equações diferenciais de equilíbrio para uma barra naturalmente curva

No item anterior obtivemos as equações diferenciais de equilíbrio para uma barra prismática cujo eixo central, em sua configuração inicial Σ_1 (não-deformada), era reto. Contudo, pode ocorrer que a barra, em sua configuração inicial, já possua curvatura e torção, sendo seu eixo central descrito por uma curva qualquer no espaço. Neste caso, as direções principais de flexo-torção (\vec{i}, \vec{j}) podem estar, em cada ponto do eixo central da barra, defasadas de um ângulo f_1 em relação às direções principais de curvatura (\vec{n}, \vec{b}) , sendo tal ângulo variável para cada ponto da curva ($f_1 = f_1(S_1)$).

Sejam C_1 um ponto genérico do eixo central na configuração inicial Σ_1 e (x_1, y_1, z_1) os eixos principais de flexo-torção para a seção transversal passando por C_1 referentes a esta configuração, sendo o eixo z_1 tangente à curva em C_1 . Sejam ainda κ_{x1}, κ_{y1} e κ_{t1} as componentes iniciais de curvatura e torção, associadas ao ponto C_1 . Se denotarmos por τ_1 e χ_1 as medidas de tortuosidade e curvatura da curva em C_1 , e por f_1 o ângulo que a direção da normal (\vec{n}) à curva em C_1 faz com o plano principal de flexo-torção (y_1, z_1) , podemos escrever as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
\kappa_{x1} &= -\chi_1 \cdot \cos f_1 \\
\kappa_{y1} &= \chi_1 \cdot \sin f_1 \\
\kappa_{t1} &= \frac{df_1}{dS_1} + \tau_1
\end{aligned}
\tag{a.20}$$

que são análogas às relações (a.9) e (a.10) deduzidas anteriormente.

Ao ser submetida a esforços externos, a barra, representada pelo seu eixo central, assume uma nova configuração, a que designaremos configuração deformada Σ_i . Contudo, é sempre possível construir para cada ponto do eixo central um novo sistema de eixos principais de flexo-torção (x_i, y_i, z_i) , de tal forma que o eixo z_i seja tangente ao eixo central deformado em cada ponto, e que o plano principal (x_i, y_i) contenha o elemento linear que, na configuração inicial, partia de C_1 na direção de x_1 . Através deste novo sistema pode-se determinar, como antes, as componentes de curvatura $(\kappa_{x_i}$ e $\kappa_{y_i})$ e a torção (κ_{t_i}) para cada ponto do eixo central na configuração deformada Σ_i . Se utilizarmos, então, o mesmo procedimento visto anteriormente, veremos que as equações de equilíbrio serão escritas de forma idêntica às relações (a.16) e (a.19), ou seja:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q_x}{\partial S_i} - Q_y \cdot \kappa_{t_i} + T \cdot \kappa_{y_i} + f_x &= 0 \\
\frac{\partial Q_y}{\partial S_i} - T \cdot \kappa_{x_i} + Q_x \cdot \kappa_{t_i} + f_y &= 0 \\
\frac{\partial T}{\partial S_i} - Q_x \cdot \kappa_{y_i} + Q_y \cdot \kappa_{x_i} + f_z &= 0
\end{aligned}
\tag{a.21}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_x}{\partial S_i} - M_y \cdot \kappa_{t_i} + M_z \cdot \kappa_{y_i} - Q_y + m_x &= 0 \\
\frac{\partial M_y}{\partial S_i} - M_z \cdot \kappa_{x_i} + M_x \cdot \kappa_{t_i} + Q_x + m_y &= 0 \\
\frac{\partial M_z}{\partial S_i} - M_x \cdot \kappa_{y_i} + M_y \cdot \kappa_{x_i} + m_z &= 0
\end{aligned}
\tag{a.22}$$

A.4. Equações diferenciais de equilíbrio dinâmico para uma barra

Se considerarmos as forças de inércia e a inércia rotacional da barra nas equações de equilíbrio, teremos as equações diferenciais de equilíbrio dinâmico da barra. Se designarmos por ρ_i a densidade linear de massa da barra em sua configuração deformada Σ_i (i.é., a massa por unidade de comprimento deformado da barra) e tomarmos um elemento infinitesimal da barra, de comprimento $\Delta S_i = S_i'' - S_i'$, onde S_i' e S_i'' são os comprimentos de arco deformados S_i (medidos a partir de uma posição arbitrária) associados às posições dos pontos extremos do elemento (C_i' e C_i''), podemos escrever as seguintes equações diferenciais de equilíbrio da barra ao impormos o equilíbrio de forças sobre o elemento (ver figura a.7):

$$\vec{R}'' + (-\vec{R}') + \int_{S_i'}^{S_i''} \vec{f} \cdot dS_i = \rho_i \cdot \Delta S_i \cdot \vec{a}_G \quad (\text{a.23})$$

onde \vec{a}_G representa a aceleração do centro de massa do elemento com relação ao sistema de referência inercial $OXYZ$ indicado.

Lembrando que $\vec{R}'' = \vec{R}' + \Delta \vec{R}$, teremos:

$$\Delta \vec{R} + \int_{S_i'}^{S_i''} \vec{f} \cdot dS_i = \rho_i \cdot \Delta S_i \cdot \vec{a}_G$$

Dividindo a expressão obtida por ΔS_i e tomando o limite para $\Delta S_i \rightarrow 0$ (ou seja, $S_i'' \rightarrow S_i'$), teremos:

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial S_i} + \vec{f} = \rho_i \cdot \vec{a} \quad (\text{a.24})$$

onde \vec{a} representa a aceleração do ponto do eixo central da barra definido pela coordenada curvilínea S_i .

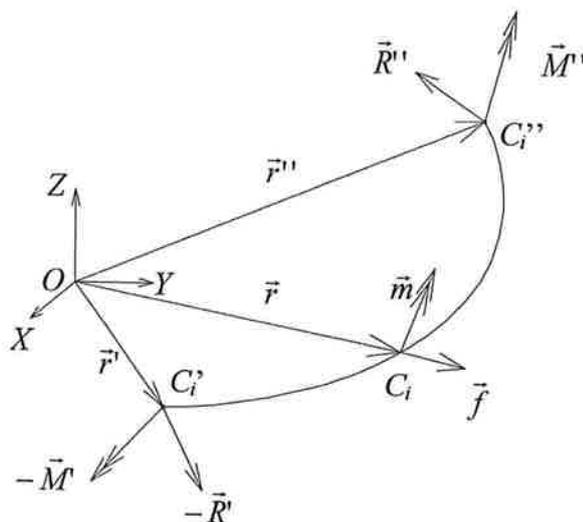


Figura a.7: Esforços externos e internos num elemento infinitesimal da barra.

Para expressarmos as equações diferenciais de equilíbrio dinâmico segundo as direções principais de flexo-torção $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ em S_i , precisamos saber como os versores $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ associados ao sistema de referência fixo $OXYZ$ se relacionam com os versores $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Consideremos, então, conhecida a matriz de mudança de base entre as duas bases citadas, de tal forma que:

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{bmatrix} \quad (\text{a.25})$$

Assim, se o vetor posição \vec{r} do ponto do eixo central da barra definido pela coordenada curvilínea S_i for dado por:

$$\vec{r} = X.\vec{e}_x + Y.\vec{e}_y + Z.\vec{e}_z \quad (\text{a.26})$$

resulta:

$$\vec{a} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} = \ddot{X}.\vec{e}_x + \ddot{Y}.\vec{e}_y + \ddot{Z}.\vec{e}_z \quad (\text{a.27})$$

onde $\ddot{G}(S_i, t) = \frac{\partial^2 G(S_i, t)}{\partial t^2}$, sendo $G(S_i, t)$ uma grandeza dinâmica qualquer.

Utilizando, então, as relações (a.25) em (a.27), teremos as seguintes equações diferenciais de equilíbrio dinâmico segundo as direções principais de flexo-torção $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ em S_i :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_x}{\partial S_i} - Q_y \cdot \kappa_{ti} + T \cdot \kappa_{yi} + f_x &= \rho_i \cdot (\ddot{X} \cdot l_1 + \ddot{Y} \cdot m_1 + \ddot{Z} \cdot n_1) \\ \frac{\partial Q_y}{\partial S_i} - T \cdot \kappa_{xi} + Q_x \cdot \kappa_{ti} + f_y &= \rho_i \cdot (\ddot{X} \cdot l_2 + \ddot{Y} \cdot m_2 + \ddot{Z} \cdot n_2) \\ \frac{\partial T}{\partial S_i} - Q_x \cdot \kappa_{yi} + Q_y \cdot \kappa_{xi} + f_z &= \rho_i \cdot (\ddot{X} \cdot l_3 + \ddot{Y} \cdot m_3 + \ddot{Z} \cdot n_3) \end{aligned} \quad (\text{a.28})$$

Retomando o elemento indicado na figura a.7 e aplicando, agora, o Teorema do Momento Angular⁶ (elegemos como pólo o ponto C_i'), teremos:

$$\vec{M}'' + (-\vec{M}') + (C_i'' - C_i') \times \vec{R}'' + \int_{S_i'}^{S_i''} (C_i - C_i') \times \vec{f} \cdot dS_i + \int_{S_i'}^{S_i''} \vec{m} \cdot dS_i = \dot{\vec{H}}_{C_i'} + \rho_i \cdot \Delta S_i \cdot \vec{v}_{C_i'} \times \vec{v}_G$$

onde:

$\dot{\vec{H}}_{C_i'}$ = taxa de variação (no tempo) do momento angular do elemento, com relação ao pólo C_i' ;

$\vec{v}_{C_i'}$ = velocidade do ponto C_i' com relação ao sistema de referência fixo $OXYZ$;

\vec{v}_G = velocidade do centro de massa do elemento com relação ao sistema de referência fixo $OXYZ$.

O momento angular do elemento com relação ao pólo C_i' é dado por:

$$\vec{H}_{C_i'} = \rho_i \cdot \Delta S_i \cdot \vec{r}_G \times \vec{v}_{C_i'} + \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (\text{a.29})$$

⁶ Admite-se que o elemento considerado é suficientemente pequeno para que se possa tratá-lo como um corpo rígido, sendo, nestas condições, válido o Teorema do Momento Angular. Uma dedução mais rigorosa deveria considerar a deformação do elemento (sugerimos, para isto, a leitura do item 12.7 do livro "Methods of analytical dynamics", de Meirovitch [45], que trata de sistemas de massa variável).

onde:

$\vec{r}_G = (G - C_i')$ é o vetor posição do centro de massa do elemento com relação ao sistema de referência móvel $C_i'xyz$;

$J_x, J_{xy}, J_{xz}, \dots$ são os momentos e produtos de inércia do elemento com relação aos eixos xyz passando por C_i' ;

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$ são as componentes do vetor velocidade angular do sistema de referência móvel $C_i'xyz$ (expressas neste mesmo sistema de referência).

Se substituirmos (a.29) na expressão do Teorema do Momento Angular, dividirmos a expressão obtida por ΔS_i e levarmos ao limite para $\Delta S_i \rightarrow 0$, obteremos as seguintes equações diferenciais de equilíbrio dinâmico (de momentos) segundo as direções principais de flexo-torção $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ em S_i ⁷:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_x}{\partial S_i} - M_y \cdot \kappa_{ii} + M_z \cdot \kappa_{yi} - Q_y + m_x &= \frac{f_{cm} \cdot \rho_i \cdot r^2}{4} (\dot{\omega}_x + \omega_y \cdot \omega_z) \\ \frac{\partial M_y}{\partial S_i} - M_z \cdot \kappa_{xi} + M_x \cdot \kappa_{ii} + Q_x + m_y &= \frac{f_{cm} \cdot \rho_i \cdot r^2}{4} (\dot{\omega}_y - \omega_x \cdot \omega_z) \\ \frac{\partial M_z}{\partial S_i} - M_x \cdot \kappa_{yi} + M_y \cdot \kappa_{xi} + m_z &= \frac{f_{cm} \cdot \rho_i \cdot r^2}{2} \dot{\omega}_z \end{aligned} \quad (\text{a.30})$$

⁷ As equações (a.30) são apenas ilustrativas, válidas para o caso de uma barra com seção transversal circular de raio r . O fator f_{cm} que surge nas equações seria um fator de correção devido à distribuição de massa na seção transversal da barra (admitindo-se que o material não fosse homogêneo, mas que tivesse uma distribuição axissimétrica).

Anexo B: Obtenção de equações constitutivas

Este anexo trata da obtenção de algumas equações constitutivas para uma barra, enfatizando as hipóteses feitas para sua validade, a saber:

- i) admite-se que o material da barra seja homogêneo, isotrópico e tenha comportamento elástico-linear;
- ii) admite-se que a seção transversal da barra seja constante (leia-se, sem alteração significativa de suas dimensões e de seu formato) com relação ao comprimento de arco (S_i) que define a posição da seção em qualquer configuração Σ_i considerada (inicial ou deformada);
- iii) as seções planas na configuração inicial Σ_1 da barra permanecem planas na configuração deformada Σ_i ($i > 1$) da barra (desconsidera-se o “empenamento”);
- iv) as seções transversais permanecem ortogonais ao eixo da barra, quer na configuração inicial, quer na configuração deformada da barra;
- v) admite-se que os efeitos de quaisquer tensões normais atuando em planos ortogonais ao da seção transversal possam ser desprezados.

As hipóteses enumeradas acima são as utilizadas na teoria clássica de barras (ver, por exemplo, Atanackovic [14], pg. 23). Se, além destas hipóteses, admitíssemos que o eixo da barra é inextensível, recairíamos na teoria clássica de barras proposta por Bernoulli-Euler. Tal hipótese não será considerada neste estudo, de tal forma que a extensibilidade do eixo da barra entrará como uma das “medidas de deformação” da barra. Contudo, deve-se observar que as deformações medidas devem ser suficientemente pequenas para assegurar a validade da hipótese (ii). Deve-se ressaltar ainda que, pela hipótese (iv), não pode haver distorções na seção, ou seja, estamos desprezando a influência do cisalhamento na geometria deformada da barra. Uma discussão detalhada acerca da adoção desta hipótese pode ser apreciada em Atanackovic [14]. Cumpre ressaltar ainda que a restrição da possibilidade de distorção, a ser considerada em regimes de não-linearidade geométrica (grandes

deslocamentos e/ou grandes deformações), leva a ambiguidades de configurações elásticas numa barra sob torção, conforme apontado por Alexander; Antman [4], que se referem às hipóteses (i)-(v) como hipóteses de Kirchhoff.

O estudo a seguir é uma generalização do apresentado por Atanackovic [14], que mostrou como obter algumas equações constitutivas para uma barra em condições de deformação plana. Consideremos, inicialmente, que a geometria da barra em sua configuração inicial (não-deformada) Σ_1 seja conhecida, o que significa conhecer a posição de um ponto genérico pertencente ao eixo da barra (ou, em outras palavras, conhecer a curva formada pelo eixo da barra), bem como a orientação dos eixos principais de flexão da seção com relação às direções principais de curvatura (\vec{n} e \vec{b}).

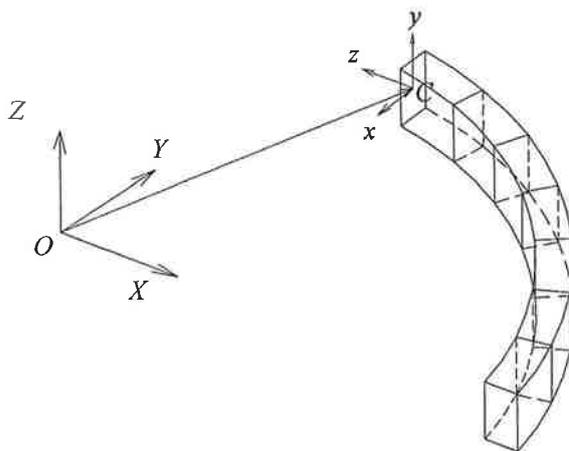


Figura b.1: Barra na configuração inicial (Σ_1) e indicação dos eixos principais de flexo-torção (x, y, z) numa determinada seção.

A figura b.1 mostra uma barra em sua configuração inicial (Σ_1). O sistema $OXYZ$ indicado nesta figura é um sistema fixo de eixos, enquanto o sistema $Cxyz$ é um sistema com origem no centróide C da seção transversal (definida pelo comprimento de arco S_1 da curva formada pelo eixo da barra) e associado às direções principais de flexo-torção da seção (direções x, y e z). Designemos por $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ os versores associados respectivamente às direções x, y e z . Seja P um ponto genérico

pertencente a esta seção transversal conforme ilustra a figura b.2. O vetor posição do ponto P com relação ao sistema de eixos fixos $OXYZ$ pode ser dado pela relação:

$$\vec{r}_p = (P-O) = (P-C) + (C-O) \quad (\text{b.1})$$

Porém, da figura b.2 é imediato observar que:

$$(P-C) = x_p \cdot \vec{i} + y_p \cdot \vec{j} \quad (\text{b.2})$$

e como:

$$\begin{aligned} \vec{i} &= (\text{sen } f_1) \cdot \vec{n} - (\text{cos } f_1) \cdot \vec{b} \\ \vec{j} &= (\text{cos } f_1) \cdot \vec{n} + (\text{sen } f_1) \cdot \vec{b} \end{aligned} \quad (\text{b.3})$$

resulta:

$$(P-C) = (x_p \cdot \text{sen } f_1 + y_p \cdot \text{cos } f_1) \cdot \vec{n} + (-x_p \cdot \text{cos } f_1 + y_p \cdot \text{sen } f_1) \cdot \vec{b} \quad (\text{b.4})$$

onde \vec{n} e \vec{b} são os versores que definem as direções normal e binormal da curva formada pelo eixo da barra e f_1 é o ângulo formado entre os versores \vec{n} e \vec{j} (ver figura b.2). Deve-se notar que, pela hipótese (iv), os versores \vec{i} , \vec{j} , \vec{n} e \vec{b} são todos coplanares.

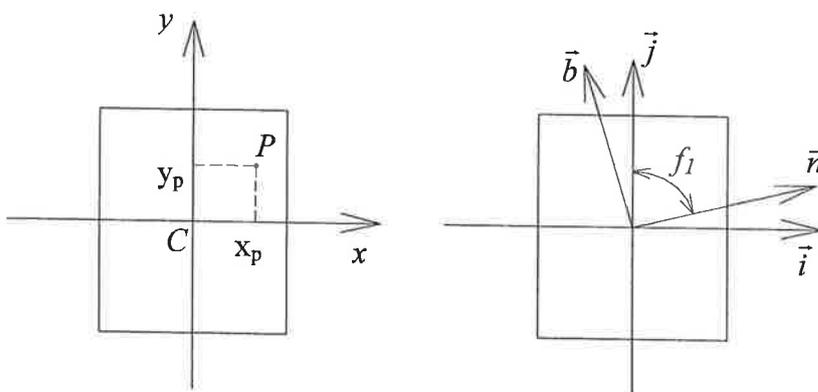


Figura b.2: Seção transversal da barra e localização do ponto P .

Designando por $\vec{r}_c = (C-O)$ o vetor posição do centróide C da seção transversal com relação ao sistema de eixos $OXYZ$, teremos:

$$\vec{r}_p = (x_p \cdot \text{sen } f_1 + y_p \cdot \text{cos } f_1) \cdot \vec{n} + (-x_p \cdot \text{cos } f_1 + y_p \cdot \text{sen } f_1) \cdot \vec{b} + \vec{r}_c \quad (\text{b.5})$$

Se derivarmos a expressão (b.5) com relação ao comprimento de arco (não deformado) S_1 , virá:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}_p}{dS_1} = & (x_p \cdot \cos f_1 - y_p \cdot \text{sen } f_1) \cdot \frac{df_1}{dS_1} \cdot \vec{n} + (x_p \cdot \text{sen } f_1 + y_p \cdot \cos f_1) \cdot \frac{d\vec{n}}{dS_1} + \\ & + (x_p \cdot \text{sen } f_1 + y_p \cdot \cos f_1) \cdot \frac{df_1}{dS_1} \cdot \vec{b} + (-x_p \cdot \cos f_1 + y_p \cdot \text{sen } f_1) \cdot \frac{d\vec{b}}{dS_1} + \frac{d\vec{r}_c}{dS_1} \end{aligned} \quad (\text{b.6})$$

e, lembrando que (ver equações (a.5)):

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{n}}{dS_1} &= \tau_1 \cdot \vec{b} - \chi_1 \cdot \vec{t} \\ \frac{d\vec{b}}{dS_1} &= -\tau_1 \cdot \vec{n} \\ \frac{d\vec{r}_c}{dS_1} &= \vec{t} \end{aligned} \quad (\text{b.7})$$

teremos, após substituição de (b.7) em (b.6):

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}_p}{dS_1} = & (1 - x_p \cdot \chi_1 \cdot \text{sen } f_1 - y_p \cdot \chi_1 \cdot \cos f_1) \cdot \vec{t} + \\ & + (x_p \cdot \cos f_1 - y_p \cdot \text{sen } f_1) \cdot \left(\frac{df_1}{dS_1} + \tau_1 \right) \cdot \vec{n} + \\ & + (x_p \cdot \text{sen } f_1 + y_p \cdot \cos f_1) \cdot \left(\frac{df_1}{dS_1} + \tau_1 \right) \cdot \vec{b} \end{aligned} \quad (\text{b.8})$$

Utilizando agora as relações (a.20), teremos:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}_p}{dS_1} = & (1 - x_p \cdot \kappa_{y1} + y_p \cdot \kappa_{x1}) \cdot \vec{t} + (x_p \cdot \cos f_1 - y_p \cdot \text{sen } f_1) \cdot \kappa_{t1} \cdot \vec{n} + \\ & + (x_p \cdot \text{sen } f_1 + y_p \cdot \cos f_1) \cdot \kappa_{t1} \cdot \vec{b} \end{aligned} \quad (\text{b.9})$$

Calculando a norma do vetor $\frac{d\vec{r}_p}{dS_1}$, obtemos:

$$\left\| \frac{d\vec{r}_p}{dS_1} \right\| = \left[(1 - x_p \cdot \kappa_{y1} + y_p \cdot \kappa_{x1})^2 + (x_p^2 + y_p^2) \cdot \kappa_{t1}^2 \right]^{1/2}$$

ou seja:

$$\|d\vec{r}_p\| = \left[(1 - x_p \cdot \kappa_{y1} + y_p \cdot \kappa_{x1})^2 + (x_p^2 + y_p^2) \cdot \kappa_{t1}^2 \right]^{1/2} \cdot dS_1 \quad (\text{b.10})$$

Pode-se verificar a consistência da equação (b.10) notando-se que, para $x_p = y_p = 0$ (ou seja, quando P coincide com o centróide C), resulta $\|d\vec{r}_p\| = dS_1$. Uma segunda verificação pode ser feita para o caso em que $\tau_1 = 0$ (i.é., a curva formada pelo eixo da barra não possui tortuosidade) e $f_1 = \pi$ (constante), ou seja, para o caso de deformação plana. Neste caso, é fácil perceber que a equação (b.10) se reduz a:

$$\|d\vec{r}_p\| = (1 + y_p \cdot \chi_1) \cdot dS_1$$

que coincide com as fórmulas (2.1.13) e (2.3.3) dadas por Atanackovic [14].

Se retomarmos, agora, a expressão (b.10) e calcularmos a aproximação em série de Taylor até os termos de primeira ordem, obteremos:

$$\|d\vec{r}_p\| = (1 - x_p \cdot \kappa_{y1} + y_p \cdot \kappa_{x1}) \cdot dS_1 \quad (\text{b.11})$$

A expressão (b.11) nos fornece uma aproximação para o comprimento inicial de uma fibra que passa pelo ponto P e é “paralela” ao eixo central (na configuração não-deformada da barra). Para calcularmos o alongamento (ε_{zp}) sofrido por esta fibra devemos calcular agora seu comprimento na configuração deformada Σ_i ($i > 1$). Utilizando um procedimento totalmente análogo ao desenvolvido para o cálculo de $\|d\vec{r}_p\|$, chegamos a:

$$\|d\vec{r}_p^*\| = \left[(1 - x_p \cdot \kappa_{yi} + y_p \cdot \kappa_{xi})^2 + (x_p^2 + y_p^2) \cdot \kappa_{ti}^2 \right]^{1/2} \cdot dS_i \quad (\text{b.12})$$

onde $\|d\vec{r}_p^*\|$ é o comprimento da fibra na configuração deformada da barra, e κ_{xi}, κ_{yi} e κ_{ti} são as componentes de curvatura e torção do eixo central deformado dadas por:

$$\begin{aligned}
\kappa_{xi} &= -\chi_i \cdot \cos f_i \\
\kappa_{yi} &= \chi_i \cdot \sin f_i \\
\kappa_{ti} &= \frac{df_i}{dS_i} + \tau_i
\end{aligned}
\tag{b.13}$$

Linearizando a expressão (b.12), obtemos:

$$\|d\vec{r}_p^*\| = (1 - x_p \cdot \kappa_{yi} + y_p \cdot \kappa_{xi}) \cdot dS_i
\tag{b.14}$$

Como estamos admitindo pequenas deformações, podemos calcular o alongamento ε_{zp} da fibra em estudo através da seguinte relação:

$$\varepsilon_{zp} = \frac{\|d\vec{r}_p^*\| - \|d\vec{r}_p\|}{\|d\vec{r}_p\|}
\tag{b.15}$$

Substituindo (b.11) e (b.14) em (b.15), virá:

$$\varepsilon_{zp} = \frac{(1 - x_p \cdot \kappa_{yi} + y_p \cdot \kappa_{xi}) \cdot dS_i - (1 - x_p \cdot \kappa_{y1} + y_p \cdot \kappa_{x1}) \cdot dS_1}{(1 - x_p \cdot \kappa_{y1} + y_p \cdot \kappa_{x1}) \cdot dS_1}
\tag{b.16}$$

E lembrando que a relação entre os comprimentos de arco deformado (dS_i) e não deformado (dS_1), medidos ao longo do eixo central, é dada por:

$$dS_i = (1 + \varepsilon_c) \cdot dS_1
\tag{b.17}$$

teremos, após substituição:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{zp} &= \frac{\varepsilon_c}{(1 - x_p \cdot \kappa_{y1} + y_p \cdot \kappa_{x1})} - \frac{x_p \cdot [(1 + \varepsilon_c) \cdot \kappa_{yi} - \kappa_{y1}]}{(1 - x_p \cdot \kappa_{y1} + y_p \cdot \kappa_{x1})} + \\
&+ \frac{y_p \cdot [(1 + \varepsilon_c) \cdot \kappa_{xi} - \kappa_{x1}]}{(1 - x_p \cdot \kappa_{y1} + y_p \cdot \kappa_{x1})}
\end{aligned}
\tag{b.18}$$

Note que ε_c é a deformação de uma fibra que passa pelo centróide da seção (isto fica evidente se fizermos $x_p = y_p = 0$ na fórmula acima). Pode-se observar ainda que, se considerarmos o caso em que $\tau = \tau_1 = 0$ (não há torção inicial na curva formada pelo

eixo da barra) e $f = f_1 = \pi$ (constante), ou seja, para o caso de deformação plana, a fórmula (b.18) fica:

$$\varepsilon_{zp} = \frac{\varepsilon_c}{(1 + y_p \cdot \kappa_{x1})} + \frac{y_p \cdot [(1 + \varepsilon_c) \cdot \kappa_{xi} - \kappa_{x1}]}{(1 + y_p \cdot \kappa_{x1})} \quad (\text{b.19})$$

que está de acordo com as fórmulas (2.1.19) e (2.1.24) dadas por Atanackovic [14].

Considerando, agora, a hipótese (v), segundo a qual os efeitos de quaisquer tensões normais atuando em planos ortogonais ao da seção transversal são desprezíveis, podemos calcular a força normal (T) e os momentos fletores atuantes na seção transversal da barra segundo as direções y (M_y) e x (M_x), através de:

$$\begin{aligned} T &= \iint_A E \cdot \varepsilon_{zp} \cdot dA \\ M_y &= - \iint_A E \cdot \varepsilon_{zp} \cdot x_p \cdot dA \\ M_x &= + \iint_A E \cdot \varepsilon_{zp} \cdot y_p \cdot dA \end{aligned} \quad (\text{b.20})$$

Utilizando (b.18) em (b.20), teremos as seguintes equações constitutivas para a barra:

$$\begin{aligned} T &= E \cdot A^* \cdot \varepsilon_c - E \cdot S_y^* \cdot [(1 + \varepsilon_c) \cdot \kappa_{yi} - \kappa_{y1}] + E \cdot S_x^* \cdot [(1 + \varepsilon_c) \cdot \kappa_{xi} - \kappa_{x1}] \\ M_y &= -E \cdot S_y^* \cdot \varepsilon_c + E \cdot I_y^* \cdot [(1 + \varepsilon_c) \cdot \kappa_{yi} - \kappa_{y1}] - E \cdot I_{xy}^* \cdot [(1 + \varepsilon_c) \cdot \kappa_{xi} - \kappa_{x1}] \\ M_x &= E \cdot S_x^* \cdot \varepsilon_c - E \cdot I_{xy}^* \cdot [(1 + \varepsilon_c) \cdot \kappa_{yi} - \kappa_{y1}] + E \cdot I_x^* \cdot [(1 + \varepsilon_c) \cdot \kappa_{xi} - \kappa_{x1}] \end{aligned} \quad (\text{b.21})$$

sendo as grandezas geométricas A^* , S_x^* , S_y^* , I_{xx}^* , I_{yy}^* e I_{xy}^* dadas por:

$$\begin{aligned} A^* &= \iint_A \frac{1}{(1 - x_p \cdot \kappa_{y1} + y_p \cdot \kappa_{x1})} dA & I_x^* &= \iint_A \frac{y_p^2}{(1 - x_p \cdot \kappa_{y1} + y_p \cdot \kappa_{x1})} dA \\ S_x^* &= \iint_A \frac{y_p}{(1 - x_p \cdot \kappa_{y1} + y_p \cdot \kappa_{x1})} dA & I_y^* &= \iint_A \frac{x_p^2}{(1 - x_p \cdot \kappa_{y1} + y_p \cdot \kappa_{x1})} dA \\ S_y^* &= \iint_A \frac{x_p}{(1 - x_p \cdot \kappa_{y1} + y_p \cdot \kappa_{x1})} dA & I_{xy}^* &= \iint_A \frac{x_p \cdot y_p}{(1 - x_p \cdot \kappa_{y1} + y_p \cdot \kappa_{x1})} dA \end{aligned} \quad (\text{b.22})$$

Consideremos, agora, o caso particular em que as direções principais de flexão da seção transversal (direções \vec{i} e \vec{j}) coincidem inicialmente (i.é, na configuração não-deformada Σ_1) com as direções principais de curvatura \vec{n} e \vec{b} (ou seja, $f_1 = \pi/2$). Neste caso, conforme mostram as equações (a.20) e (b.13):

$$\begin{aligned}\kappa_{x1} &= 0 \\ \kappa_{y1} &= \chi_1\end{aligned}$$

de tal forma que as equações constitutivas (b.21) ficam simplificadas para:

$$\begin{aligned}T &= E.A^*.\varepsilon_c - E.S_y^*.[(1 + \varepsilon_c).\kappa_{yi} - \chi_1] + E.S_x^*.[(1 + \varepsilon_c).\kappa_{xi}] \\ M_y &= -E.S_y^*.\varepsilon_c + E.I_y^*.[(1 + \varepsilon_c).\kappa_{yi} - \chi_1] - E.I_{xy}^*.[(1 + \varepsilon_c).\kappa_{xi}] \\ M_x &= E.S_x^*.\varepsilon_c - E.I_{xy}^*.[(1 + \varepsilon_c).\kappa_{yi} - \chi_1] + E.I_x^*.[(1 + \varepsilon_c).\kappa_{xi}]\end{aligned}\quad (b.23)$$

e as grandezas geométricas A^* , S_x^* , S_y^* , I_x^* , I_y^* e I_{xy}^* ficam dadas por:

$$\begin{aligned}A^* &= \iint_A \frac{1}{(1 - x.\chi_1)} dA & I_x^* &= \iint_A \frac{y^2}{(1 - x.\chi_1)} dA \\ S_x^* &= \iint_A \frac{y}{(1 - x.\chi_1)} dA & I_y^* &= \iint_A \frac{x^2}{(1 - x.\chi_1)} dA \\ S_y^* &= \iint_A \frac{x}{(1 - x.\chi_1)} dA & I_{xy}^* &= \iint_A \frac{x.y}{(1 - x.\chi_1)} dA\end{aligned}\quad (b.24)$$

Para termos uma idéia mais clara a respeito da influência da curvatura inicial da barra sobre as equações constitutivas, vamos analisar um caso em que a seção transversal da barra seja retangular ($b \times t$), conforme ilustra a figura b.3:

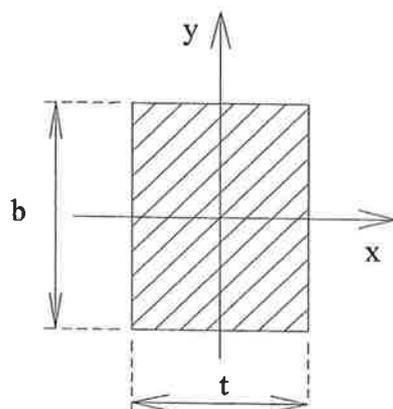


Figura b.3: Seção transversal retangular ($t \times b$).

Das equações (b.24) resulta imediatamente para a seção retangular:

$$\begin{aligned}
 A^* &= \frac{b}{\chi_1} \cdot \ln\left(\frac{2+t\cdot\chi_1}{2-t\cdot\chi_1}\right) & I_x^* &= \frac{b^3}{12\cdot\chi_1} \cdot \ln\left(\frac{2+t\cdot\chi_1}{2-t\cdot\chi_1}\right) \\
 S_x^* &= 0 & I_y^* &= -\frac{b\cdot t}{\chi_1^2} + \frac{b}{\chi_1^3} \cdot \ln\left(\frac{2+t\cdot\chi_1}{2-t\cdot\chi_1}\right) \\
 S_y^* &= -\frac{b\cdot t}{\chi_1} + \frac{b}{\chi_1^2} \cdot \ln\left(\frac{2+t\cdot\chi_1}{2-t\cdot\chi_1}\right) & I_{xy}^* &= 0
 \end{aligned} \tag{b.25}$$

Porém, para a função ímpar $g(\xi)$ definida por:

$$g(\xi) = \ln\left(\frac{2+\xi}{2-\xi}\right), \quad \xi \in (-2, 2)$$

é fácil mostrar (por expansão em série de Taylor) que, nas proximidades de $\xi = 0$, a função $g(\xi)$ pode ser aproximada por:

$$g(\xi) = \xi + \frac{\xi^3}{12} + O(\xi^5)$$

onde $O(\xi^5)$ representa um erro de aproximação da ordem de ξ^5 .

Assim, utilizando tal resultado em (b.25), resulta para as grandezas A^* , S_y^* , I_x^* e I_y^* :

$$\begin{aligned}
A^* &= b.t \left[1 + \frac{(t.\chi_1)^2}{12} + O((t.\chi_1)^4) \right] \\
S_y^* &= \frac{b.t^2}{12} \left[t.\chi_1 + O((t.\chi_1)^3) \right] \\
I_x^* &= \frac{t.b^3}{12} \left[1 + \frac{(t.\chi_1)^2}{12} + O((t.\chi_1)^4) \right] \\
I_y^* &= \frac{b.t^3}{12} \left[1 + O((t.\chi_1)^2) \right]
\end{aligned} \tag{b.26}$$

Considerando um erro da ordem $O((t.\chi_1)^2)$ como aceitável, teremos das expressões (b.23), (b.25) e (b.26), as seguintes equações para o caso analisado:

$$\begin{aligned}
T &\cong E.\varepsilon_c.(bt) - E.\frac{b.t^2}{12}(t.\chi_1).[\kappa_{yi} - \chi_1] \\
M_y &\cong -E.\frac{b.t^2}{12}(t.\chi_1).\varepsilon_c + E.\frac{b.t^3}{12}.[\kappa_{yi} - \chi_1] \\
M_x &\cong E.\frac{t.b^3}{12}.\kappa_{xi}
\end{aligned}$$

Considerando, ainda, que as deformações sejam pequenas, de tal forma que seja razoável desprezar infinitésimos de ordem superior (como o produto de $t.\chi_1$ por $(\kappa_{yi} - \chi_1)$ ou o de $t.\chi_1$ por ε_c) quando comparados aos termos remanescentes, chega-se finalmente às seguintes expressões clássicas:

$$\begin{aligned}
T &= EA.\varepsilon_c \\
M_y &= EI_y.(\kappa_{yi} - \kappa_{y1}) = EI_y.(\kappa_{yi} - \chi_1) \\
M_x &= EI_x.(\kappa_{xi} - \kappa_{x1}) = EI_x.\kappa_{xi}
\end{aligned} \tag{b.27}$$

onde: $A = b.t$, $I_{xx} = \frac{t.b^3}{12}$ e $I_{yy} = \frac{b.t^3}{12}$ correspondem, respectivamente, à área e aos momentos de inércia (com relação aos eixos x e y) da seção transversal.

Anexo C: Geometria de feixes helicoidais

Um dos elementos estruturais mais importantes de um tubo flexível ou de um cabo umbilical são os tendões que constituem as armaduras helicoidais de tração. Pelo fato de tais elementos apresentarem uma dimensão (comprimento) preponderante sobre as demais (largura e espessura), podemos representar sua geometria através das equações paramétricas de seu eixo. O objetivo deste anexo é apresentar alguns elementos de geometria que possibilitem a determinação de parâmetros importantes na análise estrutural das armaduras helicoidais (como a curvatura e tortuosidade iniciais, as variações de curvatura e tortuosidade, etc.). Cada um dos itens seguintes irá tratar da geometria destas camadas (baseando-se nas equações paramétricas do eixo central para um tendão genérico), considerando as seguintes situações:

- (1) Geometria inicial da camada: trata do estudo geométrico do eixo central do tendão de uma camada helicoidal em sua configuração não deformada;
- (2) Geometria da camada considerando carregamentos axissimétricos: trata do estudo geométrico do eixo central do tendão de uma camada helicoidal considerando apenas deformações provenientes de carregamentos axissimétricos;
- (3) Geometria da camada considerando flexão sem escorregamento: trata do estudo geométrico do eixo central do tendão de uma camada helicoidal considerando que o cilindro suporte que sustenta a camada (substrato) seja submetido a uma curvatura constante e que não haja escorregamento relativo entre a camada e o substrato;
- (4) Geometria da camada considerando flexão com escorregamento: idem ao anterior, considerando agora o escorregamento total entre os tendões que compõem a camada helicoidal e o substrato.

Para diferenciar os parâmetros “comuns” que ocorrem em mais de uma situação (como, por exemplo, as expressões da curvatura nas situações (1), (2), (3) ou (4)), serão utilizados subscritos que remetem ao caso particular que está sendo analisado.

Desta forma, a expressão da curvatura para a situação (1), que trata da configuração não-deformada da camada (Σ_1), será nomeada χ_1 , e assim por diante. Os parâmetros que permanecerem constantes não serão diferenciados por subscritos.

C.1. Geometria inicial da camada

Admitiremos que a geometria inicial do tubo ou cabo e das camadas que o constituem esteja associada à sua configuração não-deformada (Σ_1). Nesta configuração admite-se que a estrutura (tubo ou cabo) esteja totalmente descarregada e tenha seu eixo central perfeitamente reto. Nestas condições, é razoável associarmos as equações paramétricas do eixo central de um tendão genérico, pertencente a uma dada camada helicoidal, às equações paramétricas de uma hélice cilíndrica de passo constante, que são dadas por:

$$\begin{aligned} x_1 &= R_1 \cdot \cos \theta_1 \\ y_1 &= R_1 \cdot \text{sen } \theta_1 \\ z_1 &= \frac{h_1 \cdot (\theta_1 - \theta_0)}{2\pi} = \frac{R_1 \cdot (\theta_1 - \theta_0)}{\tan \alpha_1} \end{aligned} \quad (\text{c.1})$$

onde R_1 é o raio do cilindro que suporta o eixo central do tendão (hélice); θ_1 é o valor do ângulo, medido a partir do eixo fixo X , que define a posição angular de um ponto da hélice; θ_0 é o valor que θ_1 assume no plano $z = 0$; h_1 representa o passo da hélice e α_1 é o ângulo de assentamento inicial da hélice, medido a partir de um eixo paralelo ao eixo Z (ver figura c.1).

O vetor posição de um ponto genérico (C_1) pertencente à curva descrita pelas equações paramétricas (c.1) é então:

$$\vec{r}_{c1} = (C_1 - O) = R_1 \cdot \cos \theta_1 \cdot \vec{e}_x + R_1 \cdot \text{sen } \theta_1 \cdot \vec{e}_y + \frac{R_1 \cdot (\theta_1 - \theta_0)}{\tan \alpha_1} \cdot \vec{e}_z \quad (\text{c.2})$$

onde $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ são os versores associados respectivamente às direções X , Y e Z do sistema de coordenadas fixo $OXYZ$ indicado na figura c.1.

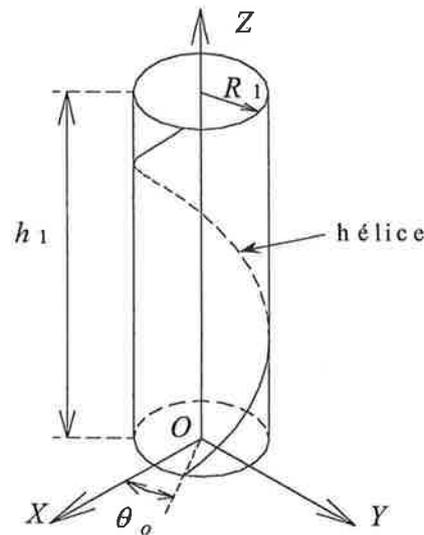


Figura c.1: Representação do eixo central de um tendão por uma hélice cilíndrica.

O comprimento de arco dS_1 de um elemento infinitesimal é calculado através de:

$$dS_1 = \left(\sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\theta_1}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{d\theta_1}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{d\theta_1}\right)^2} \right) \cdot d\theta_1 \quad (c.3)$$

resultando:

$$dS_1 = \frac{R_1 \cdot d\theta_1}{\sin \alpha_1} \quad (c.4)$$

C.1.1. Cálculo da curvatura e da tortuosidade iniciais

O versor tangente à curva formada pelo eixo central do tendão passando pelo ponto C_1 é definido por:

$$\vec{t}_1 = \frac{d\vec{r}_{c1}}{dS_1} = \frac{d\vec{r}_{c1}}{d\theta_1} \cdot \frac{d\theta_1}{dS_1} \quad (c.5)$$

resultando:

$$\vec{t}_1 = -\sin \alpha_1 \cdot \sin \theta_1 \cdot \vec{e}_x + \sin \alpha_1 \cdot \cos \theta_1 \cdot \vec{e}_y + \cos \alpha_1 \cdot \vec{e}_z \quad (c.6)$$

Utilizando, agora, as fórmulas de Frenet dadas por:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vec{n}_1}{dS_1} &= \tau_1 \cdot \vec{b}_1 - \chi_1 \cdot \vec{t}_1 \\
 \frac{d\vec{b}_1}{dS_1} &= -\tau_1 \cdot \vec{n}_1 \\
 \frac{d\vec{t}_1}{dS_1} &= \chi_1 \cdot \vec{n}_1
 \end{aligned}
 \tag{c.7}$$

teremos:

$$\chi_1 \cdot \vec{n}_1 = \frac{d\vec{t}_1}{dS_1} = \frac{d\vec{t}_1}{d\theta_1} \cdot \frac{d\theta_1}{dS_1}$$

Obtemos, assim, as componentes do vetor normal:

$$\vec{n}_1 = -\cos\theta_1 \cdot \vec{e}_x - \text{sen}\theta_1 \cdot \vec{e}_y \tag{c.8}$$

e a expressão para a curvatura:

$$\chi_1 = \left\| \frac{d\vec{t}_1}{dS_1} \right\| = \frac{\text{sen}^2 \alpha_1}{R_1} \tag{c.9}$$

Para o cálculo do vetor binormal \vec{b}_1 , pode-se partir da primeira das fórmulas (c.7), ou diretamente do produto vetorial entre os versores tangente e normal, resultando:

$$\vec{b}_1 = \cos\alpha_1 \cdot \text{sen}\theta_1 \cdot \vec{e}_x - \cos\alpha_1 \cdot \cos\theta_1 \cdot \vec{e}_y + \text{sen}\alpha_1 \cdot \vec{e}_z \tag{c.10}$$

e utilizando, agora, a segunda das fórmulas (c.7), obtemos a expressão para a tortuosidade τ_1 :

$$\tau_1 = \left\| \frac{d\vec{b}_1}{dS_1} \right\| = \frac{\text{sen}\alpha_1 \cdot \cos\alpha_1}{R_1} \tag{c.11}$$

Resumindo, as expressões para os versores tangente (\vec{t}_1), normal (\vec{n}_1) e binormal (\vec{b}_1) que definem o triedro de Frenet em cada ponto do eixo central de um tendão ficam:

$$\begin{aligned}
 \vec{t}_1 &= -\text{sen}\alpha_1 \cdot \text{sen}\theta_1 \cdot \vec{e}_x + \text{sen}\alpha_1 \cdot \cos\theta_1 \cdot \vec{e}_y + \cos\alpha_1 \cdot \vec{e}_z \\
 \vec{n}_1 &= -\cos\theta_1 \cdot \vec{e}_x - \text{sen}\theta_1 \cdot \vec{e}_y \\
 \vec{b}_1 &= \cos\alpha_1 \cdot \text{sen}\theta_1 \cdot \vec{e}_x - \cos\alpha_1 \cdot \cos\theta_1 \cdot \vec{e}_y + \text{sen}\alpha_1 \cdot \vec{e}_z
 \end{aligned}
 \tag{c.12}$$

E as expressões para a curvatura χ_1 e para a tortuosidade τ_1 ficam:

$$\chi_1 = \frac{\text{sen}^2 \alpha_1}{R_1} \quad (\text{c.13})$$

e

$$\tau_1 = \frac{\text{sen} \alpha_1 \cdot \text{cos} \alpha_1}{R_1} \quad (\text{c.14})$$

Deve-se ressaltar que todas as expressões dadas aqui foram obtidas para hélices com enrolamento positivo ($\alpha_1 > 0$), conforme ilustra a figura c.1. Contudo, as mesmas expressões continuam válidas para hélices com enrolamento negativo, desde que se tome $\alpha_1 < 0$. Deve-se observar, neste último caso, que um acréscimo no comprimento de arco S_1 está associado a um decréscimo na variável θ_1 (ver equação (c.4)).

C.1.2. Cálculo das curvaturas e da torção segundo eixos principais

Um item importante na análise estrutural das camadas helicoidais presentes em tubos e cabos é a determinação das curvaturas κ_x e κ_y e da torção κ_t associadas aos eixos principais de flexo-torção da seção transversal do tendão numa dada configuração. Conforme o estudo feito no Anexo A do presente trabalho, vimos que os eixos principais de flexão da seção transversal de uma barra não coincidem, necessariamente, com as direções principais de curvatura da curva formada pelo eixo central da barra. De fato, as relações entre as componentes de curvatura segundo os eixos principais de flexão (designadas por κ_x e κ_y) e a curvatura χ da curva formada pelo eixo central são dadas por (ver equações (a.9)):

$$\begin{aligned} \kappa_{xi} &= -\chi_i \cdot \text{cos} f_i \\ \kappa_{yi} &= \chi_i \cdot \text{sen} f_i \end{aligned}$$

onde f_i é o ângulo formado entre o versor normal \vec{n}_i e o plano principal de flexão (y, z), conforme mostra a figura c.2.

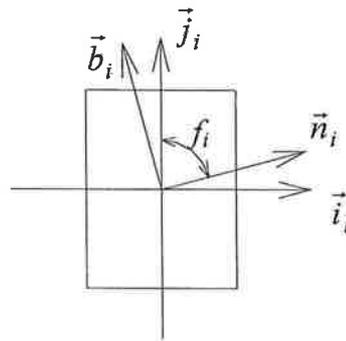


Figura c.2: Seção transversal genérica de um tendão indicando direções principais de curvatura (\vec{n}_i e \vec{b}_i) e direções principais de flexão da seção (\vec{i}_i e \vec{j}_i).

Deve-se chamar a atenção para o fato de que, ao longo deste trabalho, serão utilizadas tanto a base formada pelos versores $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, ligados ao sistema fixo de coordenadas $OXYZ$, quanto a base formada pelos versores $(\vec{i}_i, \vec{j}_i, \vec{k}_i)$, associados aos eixos principais de flexo-torção $Cxyz$ de uma dada seção transversal do tendão numa configuração genérica Σ_i , e a base formada pelos versores $(\vec{n}_i, \vec{b}_i, \vec{t}_i)$, que fornecem as direções principais de curvatura e torção da curva formada pelo eixo central do tendão (ver figuras c.2 e c.3).

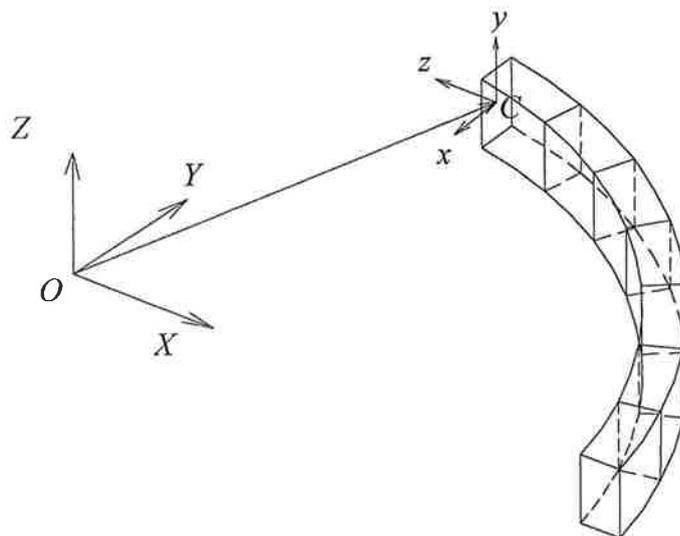


Figura c.3: Sistemas de coordenadas $OXYZ$ (fixo) e $Cxyz$ (eixos principais de flexo-torção da seção transversal do tendão).

Do estudo feito no Anexo A vimos também que a torção é dada por (equação (a.10)):

$$\kappa_{ii} = \frac{df_i}{dS_i} + \tau_i$$

Considerando que estamos tratando da configuração inicial (não-deformada) do tubo/cabo, temos, de acordo com a notação empregada (uso do subscrito “1” para denotar tal configuração), as seguintes expressões para as curvaturas e para a torção segundo os eixos principais:

$$\begin{aligned} \kappa_{x1} &= -\chi_1 \cdot \cos f_1 \\ \kappa_{y1} &= \chi_1 \cdot \sin f_1 \\ \kappa_{t1} &= \frac{df_1}{dS_1} + \tau_1 \end{aligned} \quad (\text{c.15})$$

Para obtermos as expressões finais de κ_{x1} , κ_{y1} e κ_{t1} precisamos conhecer como varia a função $f_1(S_1)$. Faremos, então, as seguintes hipóteses:

- i) na configuração inicial do tubo/cabo, os tendões estão dispostos de tal forma que f_1 é constante (i.é., é independente de S_1);
- ii) as direções principais de flexo-torção da seção $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ coincidem respectivamente com as direções principais de curvatura $(\vec{n}_1, \vec{b}_1, \vec{t}_1)$ da curva formada pelo eixo central do tendão, ou seja, $f_1 = \pi/2$.

A hipótese (i) é bastante razoável e se justifica pela própria construção das camadas helicoidais. Já a hipótese (ii) será admitida pelos seguintes motivos:

- em primeiro lugar, porque isto é bastante próximo da realidade quando tratamos, por exemplo, de tendões que possuam uma seção transversal tal que os versores \vec{n}_1 e \vec{i}_1 sejam praticamente coincidentes. Isto é aceitável para tendões com seção transversal retangular, utilizados com frequência na construção de tubos flexíveis;
- em segundo lugar, para facilitar o tratamento matemático (que irá se mostrar bastante árduo em alguns itens posteriores).

Utilizando as equações (c.13) e (c.14) e as simplificações acima, as relações para κ_{x1} , κ_{y1} e κ_{t1} ficam dadas por:

$$\begin{aligned}\kappa_{x1} &= 0 \\ \kappa_{y1} = \chi_1 &= \frac{\text{sen}^2 \alpha_1}{R_1} \\ \kappa_{t1} = \tau_1 &= \frac{\text{sen} \alpha_1 \cdot \text{cos} \alpha_1}{R_1}\end{aligned}\tag{c.16}$$

Deve-se ressaltar, contudo, que as expressões dadas por (c.16) são válidas somente no caso em que as hipóteses (i) e (ii) feitas acima sejam aceitáveis. Para as seções transversais presentes em carcaças intertravadas e nas camadas de reforço de pressão, deve-se utilizar as equações gerais dadas por (c.15).

C.2. Geometria da camada considerando carregamentos axissimétricos

Consideremos, agora, que o tubo (ou cabo) esteja submetido a carregamentos axissimétricos como tração, torção, pressão externa e pressão interna (se se tratar de tubo flexível). Se admitirmos que tais carregamentos sejam aplicados de tal forma que o eixo central do tubo/cabo permaneça reto (como no caso anterior) e se desprezarmos o atrito interno entre as camadas helicoidais e as camadas adjacentes a elas, podemos também considerar neste caso que as equações paramétricas dos eixos centrais dos tendões que constituem as camadas helicoidais estejam associadas às equações paramétricas de uma hélice cilíndrica de passo constante. Desta forma, embora as expressões dadas no item anterior tenham sido desenvolvidas para a configuração não deformada do tubo (e conseqüentemente da camada), elas podem ser perfeitamente adaptadas para uma configuração deformada que “mantenha” a geometria do eixo central dos tendões próxima a de uma hélice cilíndrica de passo constante. Obviamente, deve-se neste caso utilizar os valores correntes do raio, do passo e do ângulo de assentamento da camada nas equações paramétricas da hélice deformada. As equações paramétricas do eixo central do tendão na configuração deformada (Σ_2) ficam então dadas por:

$$\begin{aligned}
 x_2 &= R_2 \cdot \cos \theta_2 \\
 y_2 &= R_2 \cdot \sin \theta_2 \\
 z_2 &= \frac{h_2 \cdot (\theta_2 - \theta_0)}{2\pi} = \frac{R_2 \cdot (\theta_2 - \theta_0)}{\tan \alpha_2}
 \end{aligned}
 \tag{c.17}$$

onde R_2 , θ_2 , h_2 e α_2 são os parâmetros equivalentes a R_1 , θ_1 , h_1 e α_1 , porém relacionados à configuração deformada (Σ_2) da camada. Admitiremos que o valor do parâmetro angular de referência θ_0 seja o mesmo nas configurações não-deformada (Σ_1) e deformada (Σ_2), desde que se trate, obviamente, do mesmo tendão.

As relações entre as grandezas geométricas antes e após a deformação são dadas por:

$$\begin{aligned}
 R_2 &= R_1 + \Delta R \\
 \alpha_2 &= \alpha_1 + \Delta \alpha \\
 h_2 &= h_1 + \Delta h
 \end{aligned}
 \tag{c.18}$$

O vetor posição de um ponto genérico (C_2) pertencente à curva descrita pelas equações paramétricas (c.17) é agora dado por:

$$\vec{r}_{c_2} = (C_2 - O) = R_2 \cdot \cos \theta_2 \cdot \vec{e}_x + R_2 \cdot \sin \theta_2 \cdot \vec{e}_y + \frac{R_2 \cdot (\theta_2 - \theta_0)}{\tan \alpha_2} \cdot \vec{e}_z
 \tag{c.19}$$

onde $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ são os versores associados respectivamente às direções X , Y e Z do sistema de coordenadas fixo $OXYZ$ indicado na figura c.4.

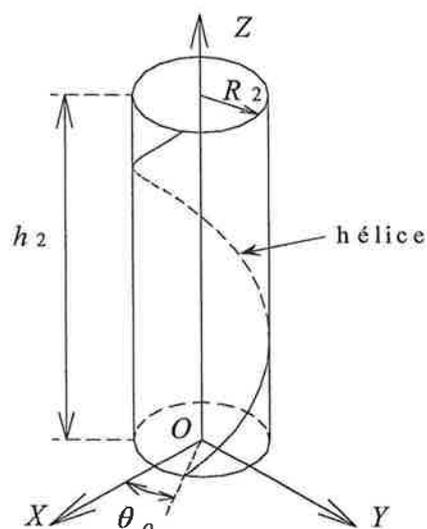


Figura c.4: Representação do eixo central de um tendão na configuração deformada.

O comprimento de arco dS_2 de um elemento infinitesimal é calculado através de:

$$dS_2 = \left(\sqrt{\left(\frac{dx_2}{d\theta_2}\right)^2 + \left(\frac{dy_2}{d\theta_2}\right)^2 + \left(\frac{dz_2}{d\theta_2}\right)^2} \right) \cdot d\theta_2 \quad (\text{c.20})$$

resultando:

$$dS_2 = \frac{R_2 \cdot d\theta_2}{\text{sen } \alpha_2} \quad (\text{c.21})$$

O versor tangente à curva passando pelo ponto C_2 é definido por:

$$\vec{t}_2 = \frac{d\vec{r}_{c2}}{dS_2} = \frac{d\vec{r}_{c2}}{d\theta_2} \cdot \frac{d\theta_2}{dS_2} \quad (\text{c.22})$$

resultando:

$$\vec{t}_2 = -\text{sen } \alpha_2 \cdot \text{sen } \theta_2 \cdot \vec{e}_x + \text{sen } \alpha_2 \cdot \text{cos } \theta_2 \cdot \vec{e}_y + \text{cos } \alpha_2 \cdot \vec{e}_z \quad (\text{c.23})$$

Utilizando, agora, as fórmulas de Frenet dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{n}_2}{dS_2} &= \tau_2 \cdot \vec{b}_2 - \chi_2 \cdot \vec{t}_2 \\ \frac{d\vec{b}_2}{dS_2} &= -\tau_2 \cdot \vec{n}_2 \\ \frac{d\vec{t}_2}{dS_2} &= \chi_2 \cdot \vec{n}_2 \end{aligned} \quad (\text{c.24})$$

teremos:

$$\chi_2 \cdot \vec{n}_2 = \frac{d\vec{t}_2}{dS_2} = \frac{d\vec{t}_2}{d\theta_2} \cdot \frac{d\theta_2}{dS_2}$$

Obtemos, assim, as componentes do versor normal:

$$\vec{n}_2 = -\text{cos } \theta_2 \cdot \vec{e}_x - \text{sen } \theta_2 \cdot \vec{e}_y \quad (\text{c.25})$$

e a expressão para a curvatura:

$$\chi_2 = \left\| \frac{d\vec{t}_2}{dS_2} \right\| = \frac{\text{sen}^2 \alpha_2}{R_2} \quad (\text{c.26})$$

Para o cálculo do versor binormal \vec{b}_2 , pode-se partir da primeira das fórmulas (c.24), ou diretamente do produto vetorial entre os versores tangente e normal, resultando:

$$\vec{b}_2 = \text{cos } \alpha_2 \cdot \text{sen } \theta_2 \cdot \vec{e}_x - \text{cos } \alpha_2 \cdot \text{cos } \theta_2 \cdot \vec{e}_y + \text{sen } \alpha_2 \cdot \vec{e}_z \quad (\text{c.27})$$

e utilizando, agora, a segunda das fórmulas (c.24), obtemos a expressão para a tortuosidade τ_2 :

$$\tau_2 = \left\| \frac{d\vec{b}_2}{dS_2} \right\| = \frac{\text{sen}\alpha_2 \cdot \text{cos}\alpha_2}{R_2} \quad (\text{c.28})$$

Resumindo, as expressões para os versores tangente (\vec{t}_2), normal (\vec{n}_2) e binormal (\vec{b}_2) que definem o triedro de Frenet em cada ponto do eixo central de um tendão ficam:

$$\begin{aligned} \vec{t}_2 &= -\text{sen}\alpha_2 \cdot \text{sen}\theta_2 \cdot \vec{e}_x + \text{sen}\alpha_2 \cdot \text{cos}\theta_2 \cdot \vec{e}_y + \text{cos}\alpha_2 \cdot \vec{e}_z \\ \vec{n}_2 &= -\text{cos}\theta_2 \cdot \vec{e}_x - \text{sen}\theta_2 \cdot \vec{e}_y \\ \vec{b}_2 &= \text{cos}\alpha_2 \cdot \text{sen}\theta_2 \cdot \vec{e}_x - \text{cos}\alpha_2 \cdot \text{cos}\theta_2 \cdot \vec{e}_y + \text{sen}\alpha_2 \cdot \vec{e}_z \end{aligned} \quad (\text{c.29})$$

E as expressões para a curvatura χ_2 e para a tortuosidade τ_2 ficam:

$$\chi_2 = \frac{\text{sen}^2 \alpha_2}{R_2} \quad (\text{c.30})$$

e

$$\tau_2 = \frac{\text{sen}\alpha_2 \cdot \text{cos}\alpha_2}{R_2} \quad (\text{c.31})$$

C.2.1. Cálculo da deformação do eixo central do tendão

Neste item será deduzida uma expressão que relaciona a deformação média, $\varepsilon_{t,12}$, de um tendão (medida na direção do versor tangente ao eixo central do tendão) com as componentes de deformação da camada helicoidal da qual ele faz parte. Como componentes de deformação da camada helicoidal serão consideradas as seguintes deformações:

1. Deformação axial da camada helicoidal (ε_h): é a deformação medida na direção do eixo do tubo/cabo. Considerando que antes da aplicação dos esforços a camada considerada tenha uma altura de referência h_1 (passo na configuração não-deformada Σ_1), e que, após a aplicação dos esforços, a altura de referência tenha passado a um valor h_2 (igual ao passo na configuração deformada Σ_2), a deformação axial da camada será por definição:

$$\varepsilon_h = \frac{\Delta h}{h_1} = \frac{h_2 - h_1}{h_1} \quad (\text{c.32})$$

Deve-se observar que, de acordo com a hipótese de que as seções transversais do tubo/cabo (que eram inicialmente planas antes da deformação) permanecem planas após a deformação¹, a deformação axial da camada helicoidal (ε_h) confunde-se com a deformação axial do próprio tubo/cabo, de tal forma que podemos escrever também:

$$\varepsilon_h = \frac{\Delta h}{h_1} = \frac{\Delta L}{L_1} \quad (\text{c.33})$$

onde $\Delta L / L_1$ representa a deformação axial do tubo/cabo (medida na direção tangente ao eixo central do tubo/cabo) devida à aplicação dos carregamentos axissimétricos.

2. Deformação circunferencial da camada helicoidal (ε_c): é a deformação devida à variação do diâmetro (ou raio) da camada provocada pelos carregamentos axissimétricos aplicados ao tubo/cabo. Considerando que antes da aplicação dos esforços (configuração inicial) a camada considerada tenha um raio R_1 , e que, após a aplicação dos esforços (configuração deformada), o raio passe a ter um valor R_2 , a deformação circunferencial da camada será por definição:

$$\varepsilon_c = \frac{\Delta R}{R_1} = \frac{R_2 - R_1}{R_1} \quad (\text{c.34})$$

3. Deformação angular da camada helicoidal (ε_ϕ): é a deformação devida à variação do número de voltas *de um dado trecho da camada, medido a partir de uma posição de referência* (como, por exemplo, a posição angular de referência θ_0). Consideremos que o trecho da camada tenha comprimento L_1 (medido na direção do eixo OZ) antes da aplicação dos esforços, e que tal comprimento corresponda a um número de voltas N_1 dado por:

¹ Note que esta hipótese admite que não há escorregamento relativo entre as diversas camadas que constituem o tubo flexível ou o cabo umbilical.

$$N_1 = \frac{\theta_1(L_1) - \theta_0}{2\pi} = \frac{L_1}{h_1} = \frac{L_1 \cdot \tan \alpha_1}{2\pi \cdot R_1}$$

Após a aplicação dos esforços, o comprimento deformado da camada será L_2 (medido na direção do eixo OZ) e o número de voltas correspondente será:

$$N_2 = \frac{\theta_2(L_2) - \theta_0}{2\pi} = \frac{L_2}{h_2} = \frac{L_2 \cdot \tan \alpha_2}{2\pi \cdot R_2}$$

A deformação angular ε_φ será, por definição:

$$\varepsilon_\varphi = \frac{N_2 - N_1}{N_1} = \frac{\theta_2(L_2) - \theta_1(L_1)}{\theta_1(L_1) - \theta_0} \quad (\text{c.35})$$

ou, se definirmos a variável φ_i como sendo a variação angular associada ao número de voltas N_i (para o trecho de camada de comprimento L_i numa dada configuração Σ_i), ou seja:

$$\varphi_i = 2\pi \cdot N_i = \theta_i(L_i) - \theta_0 \quad (\text{c.36})$$

teremos, de forma equivalente, a seguinte expressão para a deformação angular ε_φ :

$$\varepsilon_\varphi = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varphi_1} = \frac{\Delta\varphi}{\varphi_1} = \frac{R_1 \cdot \Delta\varphi}{L_1 \cdot \tan \alpha_1} \quad (\text{c.37})$$

Se lembrarmos que, como as demais componentes de deformação, ε_φ deve ser constante ao longo do comprimento do *riser* (e, portanto, independente do comprimento de referência L_1 tomado inicialmente), podemos então escrever:

$$\varepsilon_\varphi = \frac{\theta_2(L_2) - \theta_1(L_1)}{\theta_1(L_1) - \theta_0} = \frac{\theta_2(z_2) - \theta_1(z_1)}{\theta_1(z_1) - \theta_0}$$

mas:

$$\varepsilon_\varphi = \frac{\Delta\varphi}{\varphi_1} = \frac{\Delta\varphi}{2\pi \cdot N_1} = \frac{\Delta\varphi \cdot h_1}{2\pi \cdot L_1} \quad \text{e} \quad \theta_1 - \theta_0 = \frac{2\pi \cdot z_1}{h_1}$$

Logo:

$$\theta_2 - \theta_1 = \varepsilon_\varphi \cdot (\theta_1 - \theta_0) = \frac{\Delta\varphi \cdot z_1}{L_1}$$

resultando:

$$\theta_2 = \theta_1 + \frac{\Delta\varphi \cdot z_1}{L_1} \quad (\text{c.38})$$

ou, usando a terceira das equações (c.1), teremos de forma equivalente:

$$\theta_2 = \theta_1 + \frac{\Delta\varphi \cdot R_1 \cdot (\theta_1 - \theta_0)}{L_1 \cdot \tan \alpha_1} \quad (\text{c.39})$$

As expressões (c.38) e (c.39) fornecem, assim, as relações entre os parâmetros angulares θ_2 (associado à configuração deformada Σ_2) e θ_1 (associado à configuração inicial Σ_1).

Para o cálculo da deformação axial média, $\varepsilon_{t,12}$, medida na direção do vetor tangente ao eixo central do tendão e associada às configurações inicial (Σ_1) e deformada (Σ_2) da camada, consideremos um comprimento de arco, medido ao longo do eixo do tendão, com comprimento inicial S_1 (antes da aplicação dos esforços) e comprimento final S_2 (após a aplicação dos esforços). Podemos definir a deformação $\varepsilon_{t,12}$ do tendão como:

$$\varepsilon_{t,12} = \frac{\Delta S}{S_1} = \frac{S_2 - S_1}{S_1} \quad (\text{c.40})$$

É fácil perceber que as quatro deformações definidas aqui não são independentes, já que é impossível ter uma delas com valor diferente de zero, tendo as demais valores nulos. Deve haver, portanto, uma relação que estabeleça um elo entre as quatro deformações dadas. Para encontrarmos tal relação, consideremos a figura c.5 que mostra o eixo retificado de um tendão, com ângulo de assentamento α , medido com relação ao eixo do tubo/cabo, numa configuração “intermediária” entre Σ_1 e Σ_2 .

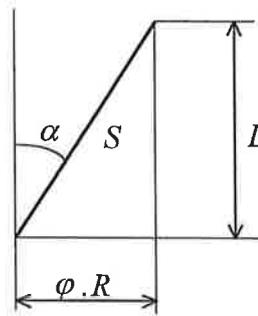


Figura c.5: Eixo retificado de um tendão numa configuração intermediária.

Da figura c.5, obtemos imediatamente a relação:

$$S^2 = (\varphi.R)^2 + (L)^2 \quad (\text{c.41})$$

onde os valores das variáveis S , φ , R e L se referem àqueles associados à configuração intermediária entre Σ_1 e Σ_2 .

Diferenciando a equação (c.41), teremos:

$$2S.dS = 2\varphi.R.(\varphi.dR + R.d\varphi) + 2L.dL$$

Dividindo, agora, a relação obtida por $(2.S^2)$ e observando ainda pela figura c.5 que:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\varphi.R}{S} \quad \text{e} \quad \text{cos } \alpha = \frac{L}{S}$$

resulta finalmente:

$$\frac{dS}{S} = \text{sen}^2 \alpha \left(\frac{dR}{R} + \frac{d\varphi}{\varphi} \right) + \text{cos}^2 \alpha \left(\frac{dL}{L} \right)$$

Aceitando a hipótese de linearidade geométrica, podemos agora considerar que os valores das variáveis S , φ , R e L , bem como do ângulo de assentamento α , correspondam a seus respectivos valores tomados na configuração inicial Σ_1 . Da mesma forma, podemos considerar que os infinitésimos dS , $d\varphi$, dR e dL correspondam às variações ΔS , $\Delta\varphi$, ΔR e ΔL associadas às configurações Σ_1 e Σ_2 . Com estas simplificações, a equação fica:

$$\frac{\Delta S}{S_1} = \text{sen}^2 \alpha_1 \cdot \left(\frac{\Delta R}{R_1} + \frac{\Delta \varphi}{\varphi_1} \right) + \cos^2 \alpha_1 \cdot \left(\frac{\Delta L}{L_1} \right)$$

Utilizando agora as definições dadas anteriormente, resulta:

$$\varepsilon_{t,12} = (\varepsilon_c + \varepsilon_\varphi) \cdot \text{sen}^2 \alpha_1 + \varepsilon_h \cdot \cos^2 \alpha_1 \quad (\text{c.42})$$

ou, de forma equivalente:

$$\varepsilon_{t,12} = (\text{sen}^2 \alpha_1) \cdot \frac{\Delta R}{R_1} + (\text{sen} \alpha_1 \cdot \cos \alpha_1) \cdot R_1 \cdot \frac{\Delta \varphi}{L_1} + (\cos^2 \alpha_1) \cdot \frac{\Delta L}{L_1} \quad (\text{c.43})$$

C.2.2. Comparação entre a equação (c.42) e outras obtidas na literatura

A equação (c.42) estabelece a dependência entre a deformação axial média do tendão, $\varepsilon_{t,12}$, e as componentes de deformação da camada (ε_c , ε_φ e ε_h). Equações equivalentes à equação (c.42) foram também apresentadas por F eret; Bournazel [24], Knapp [34] e Pesce et al. [58], entre outros. A expressão trazida por F eret; Bournazel [24] é exatamente igual   equa o equivalente (c.43), embora os autores utilizem uma not ao um pouco diferente e não apresentem nenhuma dedu o da rela o. Os autores admitem também que as componentes de deforma o ε_h e ε_φ são as mesmas para todas as camadas que constituem o *riser*. Pesce et al [58] já apresentam em seu trabalho uma dedu o formal para a equa o (c.42), porém com algumas pequenas diferenças na defini o das componentes de deforma o, além de um trabalho algébrico muito mais extenso.

Knapp [34] apresenta uma expressão exata (dentro das hipóteses admitidas) para o cáculo da deforma o axial do tendão, partindo de simples considera es geométricas. A rela o obtida   da forma:

$$\varepsilon_{t,12} = \left[(1 + \varepsilon_h)^2 \cdot \cos^2 \alpha_1 + (1 + \varepsilon_c)^2 \cdot (1 + \varepsilon_\varphi)^2 \cdot \text{sen}^2 \alpha_1 \right]^{1/2} - 1 \quad (\text{c.44})$$

Para a obtenção de uma relação mais simples, Knapp propõe a linearização da expressão (c.44), expandindo-a em série de Taylor e tomando apenas os dois primeiros termos da série (termos lineares). Após algumas simplificações, o autor chega à seguinte relação:

$$\varepsilon_{t,12} = \varepsilon_h \cdot \cos^2 \alpha_1 + \left[\left(\varepsilon_\varphi + \frac{1}{2} \right) (\varepsilon_c + 1)^2 - \frac{1}{2} \right] \cdot \sin^2 \alpha_1 \quad (\text{c.45})$$

Nota-se que a “linearização” proposta por Knapp terminou “um passo” antes da obtenção de uma verdadeira relação linear entre $\varepsilon_{t,12}$ e as demais componentes de deformação: se multiplicarmos as expressões entre parênteses e desprezarmos os termos de ordem superior (não lineares), chegaremos exatamente à equação proposta (c.42).

Deve-se ressaltar que, para os níveis de deformação alcançados nas aplicações práticas de tubos flexíveis e umbilicais (geralmente menores que 0,2% de deformação), todas as equações apresentadas fornecem praticamente o mesmo resultado, não havendo necessidade de utilizarmos equações mais complexas que a dada por (c.42), como as expressões fornecidas por Knapp [34].

C.2.3. Cálculo da variação do ângulo de assentamento

Neste item será deduzida uma segunda expressão bastante empregada na análise estrutural de tendões em armaduras helicoidais: a que relaciona a variação do ângulo de assentamento dos tendões com as componentes de deformação da camada. Para sua obtenção consideremos novamente a figura c.5 do item C.2.1 e a seguinte relação geométrica:

$$\tan \alpha = \frac{\varphi \cdot R}{L} \quad (\text{c.46})$$

onde novamente os valores das variáveis φ , R , L e α se referem a uma configuração intermediária entre Σ_1 e Σ_2 . Diferenciando a equação (c.46), virá:

$$\frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{R}{L} d\varphi + \frac{\varphi}{L} dR - \frac{\varphi \cdot R}{L^2} dL$$

Após algumas simples manipulações, e utilizando novamente a relação (c.46), teremos:

$$d\alpha = \text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \left(\frac{d\varphi}{\varphi} + \frac{dR}{R} - \frac{dL}{L} \right) \quad (\text{c.47})$$

Como antes, podemos considerar (dentro da hipótese de linearidade geométrica) que os valores das variáveis α , φ , R e L correspondam aos respectivos valores associados à configuração não-deformada Σ_1 . Também podemos considerar que os infinitésimos $d\alpha$, $d\varphi$, dR e dL correspondam às variações $\Delta\alpha$, $\Delta\varphi$, ΔR e ΔL associadas às configurações Σ_1 e Σ_2 . Com estas simplificações, a equação (c.47) fica:

$$\Delta\alpha = \text{sen } \alpha_1 \cdot \cos \alpha_1 \cdot \left(\frac{\Delta\varphi}{\varphi_1} + \frac{\Delta R}{R_1} - \frac{\Delta L}{L_1} \right)$$

Utilizando agora as definições dadas por (c.33), (c.34) e (c.37), resulta:

$$\Delta\alpha = \text{sen } \alpha_1 \cdot \cos \alpha_1 \cdot (\varepsilon_\varphi + \varepsilon_c - \varepsilon_h) \quad (\text{c.48})$$

ou, de forma equivalente:

$$\Delta\alpha = \cos^2 \alpha_1 \cdot R_1 \frac{\Delta\varphi}{L_1} + \text{sen } \alpha_1 \cdot \cos \alpha_1 \cdot \left(\frac{\Delta R}{R_1} - \frac{\Delta L}{L_1} \right) \quad (\text{c.49})$$

As equações (c.48) e (c.49) fornecem, assim, a variação do ângulo de assentamento de uma camada helicoidal em função das componentes de deformação da camada e do ângulo de assentamento inicial de uma forma bastante simples (note que a variação do ângulo de assentamento é definida por $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$).

C.2.4. Comparação entre a equação (c.48) e outras obtidas na literatura

Expressões análogas à equação (c.48), ou sua equivalente (c.49), também são bastante recorrentes na literatura. Neste item será feita uma comparação entre a equação (c.48) e outras equações encontradas na literatura que permitem a determinação do ângulo de assentamento final dos tendões de armaduras helicoidais.

Em seu artigo, Knapp [34] traz duas expressões deste tipo: a primeira é bastante geral, valendo inclusive para grandes deformações, enquanto a segunda consiste numa expressão mais simples, obtida pela “linearização” da equação geral. São elas, respectivamente:

$$\frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} = \frac{(1 + \varepsilon_c) \cdot (1 + \varepsilon_\varphi)}{(1 + \varepsilon_h)} \quad (\text{c.50})$$

e

$$\frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} = (1 + \varepsilon_c) \cdot (1 + \varepsilon_\varphi - \varepsilon_h) \quad (\text{c.51})$$

Witz; Tan [86] trazem somente uma expressão para o cálculo do ângulo de assentamento final, a qual é bastante similar à primeira expressão dada por Knapp, com algumas pequenas diferenças quanto à notação empregada. Pesce et al. [58] trazem também uma expressão análoga, obtida com um maior trabalho algébrico, mas fornecendo diretamente a variação do ângulo de assentamento (e não a tangente do ângulo de assentamento final) em função de características geométricas da camada e das componentes de deformação da camada. As expressões fornecidas por Witz; Tan [86] e Pesce et al. [58] são, respectivamente²:

$$\frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} = \frac{(1 + \varepsilon_c + \varepsilon_\varphi)}{(1 + \varepsilon_h)} \quad (\text{c.52})$$

e

$$\Delta \alpha = \frac{\tan \alpha_1 \cdot (\varepsilon_\varphi + \varepsilon_c - \varepsilon_h)}{1 + \varepsilon_h + (1 + \varepsilon_c + \varepsilon_\varphi) \cdot \tan^2 \alpha_1} \quad (\text{c.53})$$

Embora as equações apresentadas pareçam bastante diferentes da equação (c.48), pode-se mostrar que todas estas equações recaem na equação (c.48) se fizermos as respectivas aproximações em série de Taylor (em torno de $\varepsilon_c = \varepsilon_h = \varepsilon_\varphi = 0$), restando-se de forma consistente apenas os termos lineares da série.

² As notações empregadas por Witz; Tan [86] e Pesce et al. [58] diferem um pouco da utilizada neste texto, por isso resolvemos adaptar as equações propostas por estes autores para a nossa notação.

Lembrando novamente que os níveis de deformação alcançados nas aplicações práticas de tubos flexíveis e umbilicais são bastante pequenos (menores que 0,2% de deformação), podemos concluir que todas as equações apresentadas fornecem praticamente o mesmo resultado, não havendo necessidade de utilizarmos equações mais complexas que a dada por (c.48) ou sua equivalente (c.49).

C.2.5. Cálculo das variações de curvatura e de tortuosidade

A variação de curvatura em um ponto genérico do eixo central do tendão, devida à passagem da configuração não-deformada Σ_1 para a configuração deformada Σ_2 , é por definição:

$$\Delta\chi_{12} = \chi_2 - \chi_1 = \chi_1 \cdot \left(\frac{\chi_2}{\chi_1} - 1 \right) \quad (\text{c.54})$$

Utilizando, agora, as expressões (c.13) e (c.30), que fornecem, respectivamente, as expressões das curvaturas do eixo central do tendão nas configurações não-deformada Σ_1 e deformada Σ_2 , encontramos:

$$\frac{\chi_2}{\chi_1} = \left(\frac{\text{sen } \alpha_2}{\text{sen } \alpha_1} \right)^2 \cdot \left(\frac{R_1}{R_2} \right) = \left(\frac{\text{sen}(\alpha_1 + \Delta\alpha)}{\text{sen } \alpha_1} \right)^2 \cdot \left(\frac{R_1}{R_1 + \Delta R} \right)$$

ou, de forma aproximada:

$$\frac{\chi_2}{\chi_1} \cong 1 + \frac{2 \cdot \Delta\alpha}{\tan \alpha_1} - \frac{\Delta R}{R_1}$$

Substituindo a expressão acima em (c.54), resulta a seguinte forma linearizada para a variação da curvatura:

$$\Delta\chi_{12} = \chi_1 \cdot \left(\frac{2 \cdot \Delta\alpha}{\tan \alpha_1} - \frac{\Delta R}{R_1} \right) \quad (\text{c.55})$$

ou, se usarmos a expressão (c.48), teremos uma expressão equivalente à (c.55) que fornece a variação da curvatura em função das componentes de deformação da camada:

$$\Delta\chi_{12} = \chi_1 \cdot \left(2 \cos^2 \alpha_1 \cdot (\varepsilon_\phi + \varepsilon_c - \varepsilon_h) - \varepsilon_c \right) \quad (\text{c.56})$$

De forma análoga, a variação da tortuosidade é dada por:

$$\Delta\tau_{12} = \tau_2 - \tau_1 = \tau_1 \left(\frac{\tau_2}{\tau_1} - 1 \right) \quad (\text{c.57})$$

Se utilizarmos as expressões (c.14) e (c.31), que fornecem, respectivamente, as expressões das tortuosidades do eixo central do tendão nas configurações inicial (Σ_1) e deformada (Σ_2), teremos:

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \left(\frac{\text{sen } \alpha_2 \cdot \cos \alpha_2}{\text{sen } \alpha_1 \cdot \cos \alpha_1} \right) \left(\frac{R_1}{R_2} \right) = \left(\frac{\text{sen}(\alpha_1 + \Delta\alpha) \cdot \cos(\alpha_1 + \Delta\alpha)}{\text{sen } \alpha_1 \cdot \cos \alpha_1} \right) \left(\frac{R_1}{R_1 + \Delta R} \right)$$

ou, de forma aproximada:

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} \cong 1 + \left(\frac{2}{\tan 2\alpha_1} \right) \cdot \Delta\alpha - \frac{\Delta R}{R_1}$$

Substituindo esta última expressão em (c.57), resulta a seguinte forma linearizada para a variação da tortuosidade:

$$\Delta\tau_{12} = \tau_1 \cdot \left[\left(\frac{2}{\tan 2\alpha_1} \right) \cdot \Delta\alpha - \frac{\Delta R}{R_1} \right] \quad (\text{c.58})$$

ou, se usarmos a expressão (c.48), teremos a seguinte expressão equivalente à (c.58) que fornece a variação de tortuosidade em função das componentes de deformação:

$$\Delta\tau_{12} = \tau_1 \cdot \left[\cos(2\alpha_1) \cdot (\varepsilon_\varphi + \varepsilon_c - \varepsilon_h) - \varepsilon_c \right] \quad (\text{c.59})$$

C.2.6. Cálculo das curvaturas e da torção segundo eixos principais

Seguindo um raciocínio análogo ao feito no item C.1.2 e considerando que estamos tratando agora da configuração deformada Σ_2 da camada, temos, de acordo com a notação empregada, as seguintes expressões para as curvaturas e para a torção segundo os eixos principais de flexo-torção da seção transversal dos tendões:

$$\begin{aligned} \kappa_{x_2} &= -\chi_2 \cdot \cos f_2 \\ \kappa_{y_2} &= \chi_2 \cdot \text{sen } f_2 \\ \kappa_{t_2} &= \frac{df_2}{dS_2} + \tau_2 \end{aligned} \quad (\text{c.60})$$

Para a determinação da função $f_2(S_2)$, serão admitidas aqui hipóteses idênticas às admitidas no item C.1.2, a saber:

- i) estando o tubo/cabo submetido apenas a carregamentos axissimétricos (configuração deformada Σ_2), podemos admitir que os tendões continuam dispostos de tal forma que f_2 seja constante (e, portanto, independente de S_2);
- ii) as direções principais de flexo-torção da seção $(\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$ coincidem respectivamente com as direções principais de curvatura $(\vec{n}_2, \vec{b}_2, \vec{t}_2)$ da curva formada pelo eixo central do tendão, ou seja, $f_2 = \pi/2$.

Utilizando então as equações (c.30) e (c.31) e as simplificações acima, as relações para κ_{x_2} , κ_{y_2} e κ_{t_2} ficam dadas por:

$$\begin{aligned}\kappa_{x_2} &= 0 \\ \kappa_{y_2} &= \chi_2 = \frac{\text{sen}^2 \alpha_2}{R_2} \\ \kappa_{t_2} &= \tau_2 = \frac{\text{sen} \alpha_2 \cdot \cos \alpha_2}{R_2}\end{aligned}\tag{c.61}$$

Como antes, devemos ressaltar que as expressões dadas por (c.61) são válidas apenas no caso em que as hipóteses (i) e (ii) feitas acima sejam aceitáveis (ver ressalvas feitas no item C.1.2).

C.3. Geometria da camada considerando flexão sem escorregamento

Nos itens anteriores (C.1 e C.2) estudamos a geometria de uma hélice de passo constante que tinha como suporte um cilindro reto. As expressões obtidas naqueles itens são particularmente úteis para a determinação de parâmetros geométricos associados tanto à configuração não-deformada das armaduras helicoidais quanto à configuração deformada destas camadas em casos de carregamentos axissimétricos (ver capítulo 3). Um outro estudo importante está relacionado à geometria que a hélice cilíndrica assume quando o cilindro suporte sofre uma curvatura em torno de um eixo. Os resultados obtidos a partir deste estudo geométrico servirão para a análise de tubos e cabos submetidos a carregamentos combinados envolvendo flexão (ver capítulo 5). Sem qualquer prejuízo da generalidade, admitiremos que o estudo a ser realizado neste item esteja partindo da configuração deformada Σ_2 , ou seja, o

tubo (ou cabo) já está previamente deformado devido à aplicação de carregamentos axissimétricos. A nova configuração deformada, devida à superposição da flexão aos carregamentos axissimétricos, será nomeada configuração deformada Σ_3 . Os itens seguintes tratarão do estudo geométrico das camadas helicoidais nesta nova configuração deformada.

C.3.1. Estudo da geometria para curvaturas “positivas”

Para a obtenção das equações paramétricas dos pontos pertencentes ao eixo central de um tendão cujo substrato está sendo fletido, consideremos a figura c.6, que mostra a mesma hélice cilíndrica apresentada na figura c.4, tendo agora seu cilindro suporte se “transformado” num toróide com raio de curvatura $\rho = 1/K$ (K sendo a curvatura). Sem perda de generalidade, podemos considerar que a flexão ocorre em torno do eixo fixo OX , como ilustrado nas figuras c.6 e c.7.

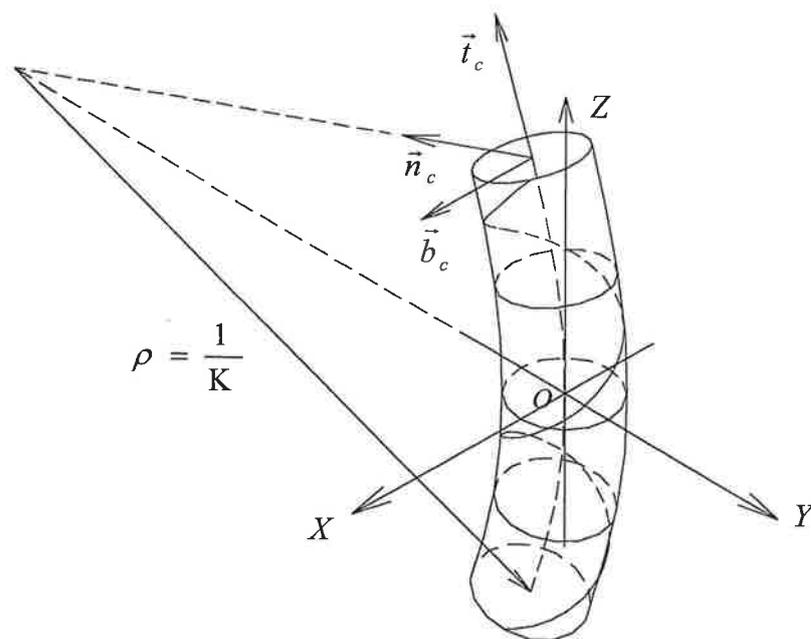


Figura c.6: Representação 3D do eixo central de um tendão fletido.

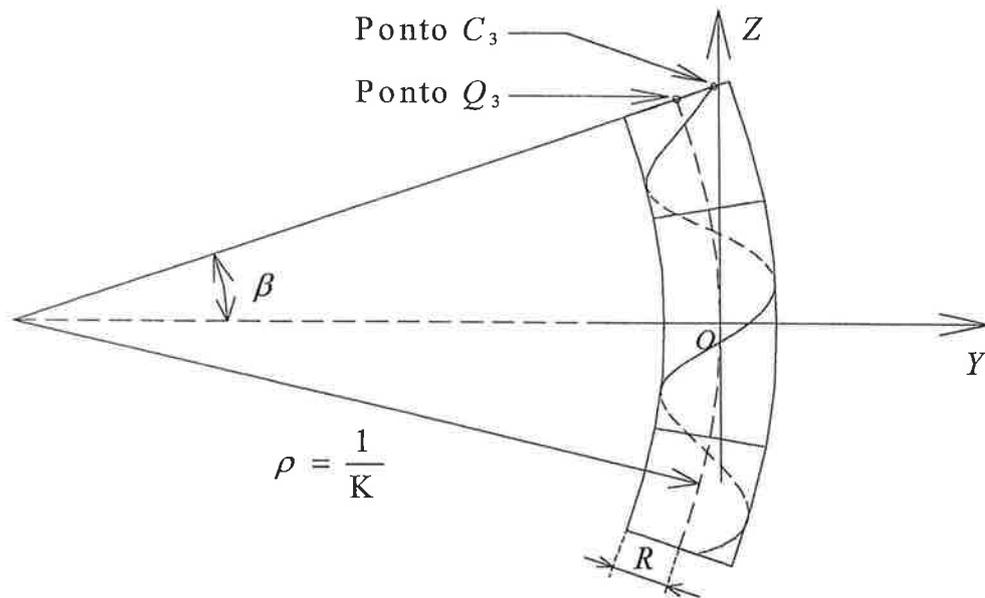


Figura c.7: Vista lateral (plano YZ) da hélice deformada.

A figura c.6 mostra ainda o triedro de Frenet $(\vec{t}_c, \vec{n}_c, \vec{b}_c)^3$ associado à curva formada pelos pontos do eixo central do tubo/cabo (representado pela linha pontilhada passando pela origem do sistema de referência $OXYZ$). Deve-se observar que, como o vetor curvatura para esta curva é dado por:

$$\vec{K} = K \cdot \vec{b}_c = \kappa_x \cdot \vec{e}_x$$

e sendo os versores \vec{b}_c e \vec{e}_x coincidentes, resulta: $\kappa_x = K$. Desta forma, diremos que a configuração deformada ilustrada na figura c.6 está associada a uma “curvatura positiva” (pois $\kappa_x = K > 0$), e as equações a serem obtidas aqui serão, portanto, válidas para este caso. Mais adiante, discutiremos as mudanças para o caso de curvaturas “negativas”.

Considerando ainda que o tubo ou cabo, do qual faz parte o tendão que está sendo analisado, tenha uma distribuição axissimétrica de material, e que o raio de curvatura

³ Utilizaremos o subscrito “c” quando nos referirmos aos versores associados ao triedro de Frenet do eixo central do tubo/cabo, para diferenciar da notação empregada para os versores associados ao triedro de Frenet do eixo central do tendão (sem o subscrito “c”).

(ρ) imposto a ele seja pelo menos uma ordem de grandeza maior que uma dimensão característica de sua seção transversal (como o raio), podemos admitir que o eixo central do tubo/cabo não possua qualquer deformação adicional, ou seja, que o comprimento dos elementos lineares pertencentes a este eixo após a deformação por flexão (configuração deformada Σ_3) tenha o mesmo valor que antes da deformação por flexão (configuração deformada Σ_2).

Tomemos, agora, dois pontos (Q_2 e C_2) que, antes da flexão do tubo/cabo, pertenciam a uma mesma seção transversal do tubo/cabo: o primeiro (ponto Q_2) estando situado sobre o eixo central do tubo/cabo, e o segundo (ponto C_2), sobre o eixo central do tendão. As coordenadas que definem a posição do ponto C_2 , antes da deformação, são portanto as mesmas dadas pelas relações (c.17), ou seja:

$$\begin{aligned} x_2 &= R_2 \cdot \cos \theta_2 \\ y_2 &= R_2 \cdot \sin \theta_2 \\ z_2 &= \frac{h_2 \cdot (\theta_2 - \theta_0)}{2\pi} = \frac{R_2 \cdot (\theta_2 - \theta_0)}{\tan \alpha_2} \end{aligned} \quad (\text{c.62})$$

Admitindo que durante a flexão não haja escorregamento entre os tendões e o substrato, e também que não haja empenamento da seção, os dois pontos continuam a pertencer a um mesmo plano na configuração deformada Σ_3 do tubo, sendo agora denotados por Q_3 e C_3 , respectivamente (ver figura c.7). Deve-se observar que estas duas premissas (não-escorregamento e não-empenamento) estão relacionadas à hipótese de Navier, ou seja, as seções transversais (do tubo) que eram planas antes da deformação continuarão planas após a deformação.

Pela figura c.7, é imediato perceber que o ângulo β definido pelo arco OQ_3 é dado por:

$$\beta = \frac{\Delta S}{\rho} = K \cdot \Delta S$$

onde ΔS representa o comprimento de arco medido ao longo do eixo central do tubo/cabo, entre os pontos O e Q_3 .

Lembrando, agora, que o eixo central do tubo/cabo permanece “indeformável” após a flexão, teremos:

$$\Delta S = z_2 = \frac{R_2 \cdot (\theta_2 - \theta_o)}{\tan \alpha_2}$$

resultando:

$$\beta = \frac{K \cdot R_2 \cdot (\theta_2 - \theta_o)}{\tan \alpha_2} \quad (\text{c.63})$$

Designando por d a distância entre os pontos Q_3 e a projeção do ponto C_3 no plano YZ , temos ainda:

$$d = R_2 \cdot \text{sen } \theta_2 \quad (\text{c.64})$$

É fácil perceber através das figuras c.6 e c.7 que as coordenadas finais do ponto C_3 ficam então dadas pelas seguintes relações:

$$\begin{aligned} x_3 &= x_2 = R_2 \cdot \cos \theta_2 \\ y_3 &= (\rho + d) \cdot \cos \beta - \rho \\ z_3 &= (\rho + d) \cdot \text{sen } \beta \end{aligned}$$

ou, lembrando que $\rho = 1/K$ e usando (c.63) e (c.64), virá:

$$\begin{aligned} x_3 &= R_2 \cdot \cos \theta_2 \\ y_3 &= \left(\frac{1}{K} + R_2 \cdot \text{sen } \theta_2 \right) \cdot \cos \left(\frac{K \cdot R_2 \cdot (\theta_2 - \theta_o)}{\tan \alpha_2} \right) - \frac{1}{K} \\ z_3 &= \left(\frac{1}{K} + R_2 \cdot \text{sen } \theta_2 \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{K \cdot R_2 \cdot (\theta_2 - \theta_o)}{\tan \alpha_2} \right) \end{aligned} \quad (\text{c.65})$$

É imediato verificar que as equações (c.65) recuperam (c.62) no limite para $K \rightarrow 0$.

Através de (c.65) podemos obter o comprimento de arco infinitesimal associado à hélice deformada (configuração deformada Σ_3):

$$dS_3 = \left(\sqrt{\left(\frac{dx_3}{d\theta_2} \right)^2 + \left(\frac{dy_3}{d\theta_2} \right)^2 + \left(\frac{dz_3}{d\theta_2} \right)^2} \right) \cdot d\theta_2$$

resultando:

$$dS_3 = \left[\text{sen}^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_2 \cdot (1 + KR_2 \cdot \text{sen} \theta_2)^2 \right]^{1/2} \cdot \frac{R_2 \cdot d\theta_2}{\text{sen} \alpha_2} \quad (\text{c.66})$$

Definindo o parâmetro adimensional de curvatura dado por:

$$\eta = K \cdot R_2 \quad (\text{c.67})$$

e a variável ξ dada por:

$$\xi(\alpha_2, \eta, \theta_2) = \left[\text{sen}^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_2 \cdot (1 + \eta \cdot \text{sen} \theta_2)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{c.68})$$

podemos reescrever a equação (c.66), que fica simplesmente:

$$dS_3 = \frac{\xi \cdot R_2}{\text{sen} \alpha_2} \cdot d\theta_2 \quad (\text{c.69})$$

Note que no limite para $K \rightarrow 0$, temos: $\eta \rightarrow 0$ e $\xi \rightarrow 1$, de tal forma que a relação (c.69) recupera (c.21), como esperado.

O versor tangente à curva (associada ao eixo central do tendão) passando por C_3 é:

$$\vec{t}_3 = \frac{d\vec{r}_{c3}}{dS_3} = \frac{d\vec{r}_{c3}}{d\theta_2} \cdot \frac{d\theta_2}{dS_3} \quad (\text{c.70})$$

onde $\vec{r}_{c3} = (C_3 - O)$ é o vetor posição do ponto C_3 , com relação ao sistema fixo $OXYZ$.

Usando, então, as relações (c.65), que fornecem as componentes do vetor \vec{r}_{c3} , e as relações (c.67) a (c.69), virá:

$$\vec{t}_3 = t_{x3} \cdot \vec{e}_x + t_{y3} \cdot \vec{e}_y + t_{z3} \cdot \vec{e}_z \quad (\text{c.71})$$

sendo:

$$t_{x3} = -[\text{sen} \theta_2 \cdot \text{sen} \alpha_2] \cdot \frac{1}{\xi}$$

$$t_{y3} = [\cos \theta_2 \cdot \cos \beta \cdot \text{sen} \alpha_2 - (1 + \eta \cdot \text{sen} \theta_2) \cdot \text{sen} \beta \cdot \cos \alpha_2] \cdot \frac{1}{\xi}$$

$$t_{z3} = [\cos \theta_2 \cdot \text{sen} \beta \cdot \text{sen} \alpha_2 + (1 + \eta \cdot \text{sen} \theta_2) \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha_2] \cdot \frac{1}{\xi}$$

Novamente, pode-se perceber que quando $K \rightarrow 0$, temos: $\eta \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow 0$, $\xi \rightarrow 1$, e a equação (c.71) recai consistentemente na equação (c.23).

Utilizando, agora, as fórmulas de Frenet para a condição deformada (Σ_3) do eixo central do tendão, teremos:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{n}_3}{dS_3} &= \tau_3 \cdot \vec{b}_3 - \chi_3 \cdot \vec{t}_3 \\ \frac{d\vec{b}_3}{dS_3} &= -\tau_3 \cdot \vec{n}_3 \\ \frac{d\vec{t}_3}{dS_3} &= \chi_3 \cdot \vec{n}_3\end{aligned}\tag{c.72}$$

E da terceira das relações (c.72), virá:

$$\chi_3 \cdot \vec{n}_3 = \frac{d\vec{t}_3}{dS_3} = \frac{d\vec{t}_3}{d\theta_2} \cdot \frac{d\theta_2}{dS_3}$$

Obtemos, assim, as componentes do versor normal:

$$\vec{n}_3 = n_{x3} \cdot \vec{e}_x + n_{y3} \cdot \vec{e}_y + n_{z3} \cdot \vec{e}_z\tag{c.73}$$

sendo:

$$\begin{aligned}n_{x3} &= \frac{\text{sen}^2 \alpha_2 \cdot \cos \theta_2}{\chi_3 \cdot R_2 \cdot \xi^2} \cdot [-1 + g_1(\alpha_2, \eta, \theta_2)] \\ n_{y3} &= \frac{\text{sen}^2 \alpha_2}{\chi_3 \cdot R_2 \cdot \xi^2} \cdot [g_2(\alpha_2, \eta, \theta_2) + g_3(\alpha_2, \eta, \theta_2)] \\ n_{z3} &= -\frac{\text{sen}^2 \alpha_2}{\chi_3 \cdot R_2 \cdot \xi^2} \cdot [g_4(\alpha_2, \eta, \theta_2) + g_5(\alpha_2, \eta, \theta_2)]\end{aligned}$$

e as funções $g_i(\alpha_2, \eta, \theta_2)$, $1 \leq i \leq 5$, são:

$$\begin{aligned}
g_1(\alpha_2, \eta, \theta_2) &= \frac{\eta \cdot \cos^2 \alpha_2 \cdot \sin \theta_2 \cdot (1 + \eta \cdot \sin \theta_2)}{\xi^2} \\
g_2(\alpha_2, \eta, \theta_2) &= -\frac{\eta \cdot \cos \beta \cdot (1 + \eta \cdot \sin \theta_2)}{\tan^2 \alpha_2} - \sin \theta_2 \cdot \cos \beta - \frac{2\eta \cdot \cos \theta_2 \cdot \sin \beta}{\tan \alpha_2} \\
g_3(\alpha_2, \eta, \theta_2) &= \frac{\eta \cdot \cos^2 \alpha_2 \cdot \cos \theta_2 \cdot (1 + \eta \cdot \sin \theta_2)}{\xi^2} \cdot \left[\frac{\sin \beta}{\tan \alpha_2} (1 + \eta \cdot \sin \theta_2) - \cos \theta_2 \cdot \cos \beta \right] \\
g_4(\alpha_2, \eta, \theta_2) &= \frac{\eta \cdot \sin \beta \cdot (1 + \eta \cdot \sin \theta_2)}{\tan^2 \alpha_2} + \sin \theta_2 \cdot \sin \beta - \frac{2\eta \cdot \cos \theta_2 \cdot \cos \beta}{\tan \alpha_2} \\
g_5(\alpha_2, \eta, \theta_2) &= \frac{\eta \cdot \cos^2 \alpha_2 \cdot \cos \theta_2 \cdot (1 + \eta \cdot \sin \theta_2)}{\xi^2} \cdot \left[\frac{\cos \beta}{\tan \alpha_2} (1 + \eta \cdot \sin \theta_2) + \cos \theta_2 \cdot \sin \beta \right]
\end{aligned}$$

onde β e ξ são dados respectivamente pelas relações (c.63) e (c.68), e χ_3 é a curvatura, cuja expressão final é dada por:

$$\chi_3 = \frac{[f_1(\alpha_2, \eta, \theta_2) + f_2(\alpha_2, \eta, \theta_2)]^{1/2}}{R_2 \cdot \xi^3} \quad (\text{c.74})$$

sendo as funções $f_i(\alpha, \eta, \theta)$, $1 \leq i \leq 2$, dadas por:

$$\begin{aligned}
f_1(\alpha_2, \eta, \theta_2) &= \eta^2 \cdot \cos^2 \theta_2 \cdot \cos^2 \alpha_2 \cdot (\xi^2 + \sin^2 \alpha_2)^2 \\
f_2(\alpha_2, \eta, \theta_2) &= \xi^2 \cdot \left(\eta \cdot (1 + \eta \cdot \sin \theta_2) \sin \theta_2 \cdot \cos^2 \alpha_2 + \sin^2 \alpha_2 \right)^2
\end{aligned}$$

Pode-se facilmente verificar que a expressão (c.74) recupera (c.30) no limite para $K \rightarrow 0$. Da mesma forma, vê-se que, no limite, as componentes do versor normal dadas por (c.73) recaem nas componentes dadas pela equação (c.25).

Uma vez conhecidas as componentes dos versores tangente e normal, dadas respectivamente pelas relações (c.71) e (c.73), pode-se determinar as componentes do versor binormal diretamente através do produto vetorial entre os dois primeiros, resultando:

$$\vec{b}_3 = \vec{t}_3 \times \vec{n}_3 = (t_{y3} \cdot n_{z3} - t_{z3} \cdot n_{y3}) \cdot \vec{e}_x + (t_{z3} \cdot n_{x3} - t_{x3} \cdot n_{z3}) \cdot \vec{e}_y + (t_{x3} \cdot n_{y3} - t_{y3} \cdot n_{x3}) \cdot \vec{e}_z \quad (\text{c.75})$$

Pode-se mostrar que as componentes do versor binormal também recuperam as componentes dadas por (c.27) no limite para $K \rightarrow 0$.

Para o cálculo da tortuosidade, podemos utilizar tanto a primeira quanto a segunda das relações (c.72), já que dispomos agora de todos os parâmetros necessários ao cálculo. Utilizando, por exemplo, a segunda relação, teremos:

$$\tau_3 = \left\| \frac{d\vec{b}_3}{dS_3} \right\| = \left\| \frac{d\vec{b}_3}{d\theta_2} \right\| \left(\frac{dS_3}{d\theta_2} \right)^{-1} \quad (\text{c.76})$$

O desenvolvimento de (c.76), no entanto, não compensa as dificuldades em expressá-la algebricamente através de uma relação matematicamente simples. O êxito nesta empreitada não conduziria, do ponto de vista prático, a nada melhor do que resultaria de uma simples expansão em série de Taylor. Deixaremos de lado esta tarefa, que poderá, se necessário, ser executada com o auxílio de um manipulador algébrico-computacional. Assim, se ao desenvolvermos a relação (c.76) substituirmos R_2, α_2 e θ_2 por:

$$\begin{aligned} R_2 &= R_1 + \Delta R \\ \alpha_2 &= \alpha_1 + \Delta \alpha \\ \theta_2 &= \theta_1 + \frac{\Delta \varphi \cdot R_1 \cdot (\theta_1 - \theta_0)}{L_1 \cdot \tan \alpha_1} \end{aligned}$$

e fizermos a expansão em série de Taylor de (c.76) (em torno de $\Delta R = 0$, $\Delta \alpha = 0$, $\Delta \varphi = 0$ e $K = 0$), retendo apenas os termos lineares (em $\Delta R, \Delta \alpha, \Delta \varphi$ e K), teremos a seguinte expressão linearizada para τ_3 :

$$\tau_3 = \tau_1 \left[1 - \frac{\Delta R}{R_1} + \frac{2}{\tan 2\alpha_1} \cdot \Delta \alpha + \frac{(2 \cos^4 \alpha_1 - \cos^2 \alpha_1 - 2) \cdot \text{sen } \theta_1}{\text{sen}^2 \alpha_1} \cdot KR_1 \right] \quad (\text{c.77})$$

Pode-se facilmente verificar que, para $K=0$, a expressão (c.77) recai de forma consistente nas equações deduzidas no item C.2.5 (ver equações (c.57) e (c.58)).

C.3.2. Observação para o caso de curvaturas “negativas”

No item anterior foram obtidas relações gerais (válidas até mesmo para grandes curvaturas impostas ao tubo) para expressar as componentes dos versores tangente, normal e binormal associados aos pontos do eixo central de uma hélice fletida sobre um toróide de curvatura K conhecida. Foram apresentadas também a expressão da curvatura (κ_3) e uma indicação para a obtenção da tortuosidade (τ_3) em cada ponto da hélice. Lembramos, porém, que as equações foram obtidas considerando-se valores “positivos” de curvatura (i.é., $\kappa_x = K > 0$). Discutiremos agora as mudanças necessárias para o caso de curvaturas “negativas”. As figuras c.8 e c.9 ilustram o caso em questão.

Pela figura c.8 vemos que o vetor curvatura associado ao eixo central do toróide é:

$$\vec{K} = K \cdot \vec{b}_c = \kappa_x \cdot \vec{e}_x$$

de tal forma que : $\kappa_x = -K < 0$ (pois $\vec{b}_c = -\vec{e}_x$), daí porque designarmos tal caso como de curvatura “negativa”.

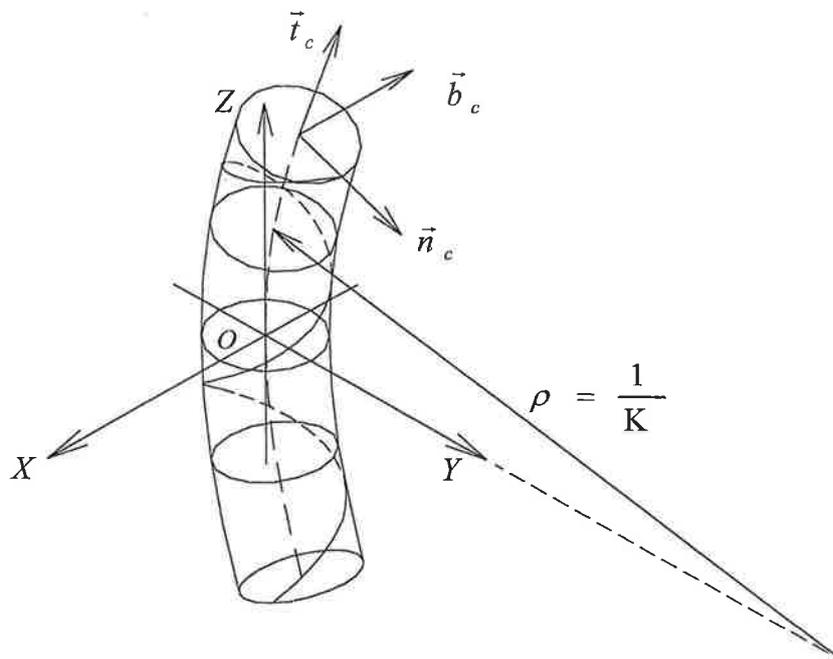


Figura c.8: Representação 3D do eixo central de um tendão fletido.

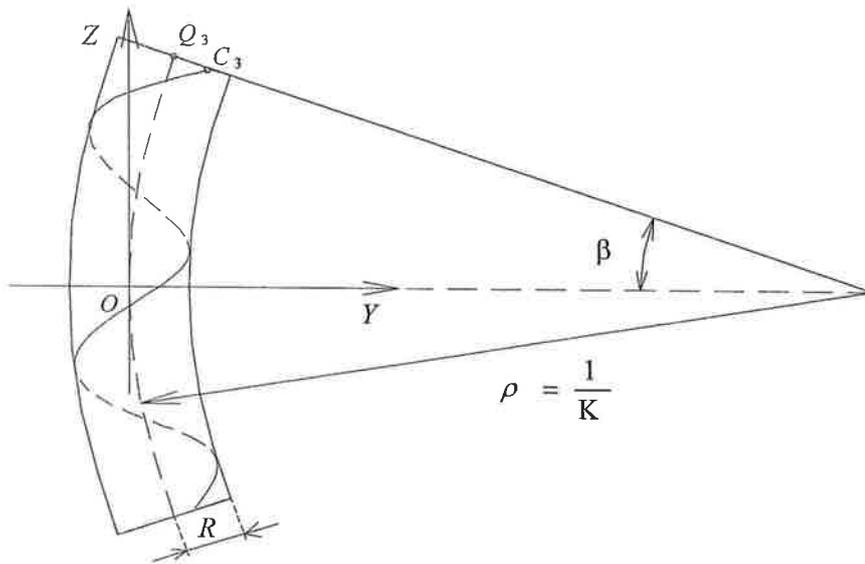


Figura c.9: Vista lateral (plano YZ) da hélice deformada.

Partindo da figura c.9 e utilizando raciocínio análogo ao detalhado anteriormente, mostra-se que as equações paramétricas dos pontos da hélice deformada são, agora, dadas pelas seguintes relações:

$$\begin{aligned}
 x_3 &= R_2 \cdot \cos \theta_2 \\
 y_3 &= \frac{1}{K} - \left(\frac{1}{K} - R_2 \cdot \sin \theta_2 \right) \cdot \cos \left(\frac{K \cdot R_2 \cdot (\theta_2 - \theta_0)}{\tan \alpha_2} \right) \\
 z_3 &= \left(\frac{1}{K} - R_2 \cdot \sin \theta_2 \right) \cdot \sin \left(\frac{K \cdot R_2 \cdot (\theta_2 - \theta_0)}{\tan \alpha_2} \right)
 \end{aligned} \tag{c.78}$$

Comparando as equações paramétricas (c.65), obtidas para o caso de curvatura “positiva”, com as equações paramétricas (c.78), obtidas para o caso de curvatura “negativa”, é fácil perceber que os dois conjuntos de equações são em essência um só. Para mostrar isto, basta substituir nas equações (c.65) a variável “K” por “-K” e ver que as equações (c.78) são prontamente recuperadas. Podemos concluir, então, que todas as relações obtidas anteriormente (considerando curvaturas “positivas”) são também válidas para o caso em que a curvatura é “negativa”. Neste caso, basta substituímos a variável “K” por “-K” em todas as relações em que ela aparecer.

C.3.3. Cálculo da deformação do eixo central do tendão

A deformação axial, medida na direção tangente ao eixo central do tendão, associada às configurações inicial (Σ_1) e deformada (Σ_3), será dada por:

$$\varepsilon_{t,13} = \frac{dS_3 - dS_1}{dS_1} = \frac{dS_3}{dS_2} \cdot \frac{dS_2}{dS_1} - 1 \quad (\text{c.79})$$

mas, lembrando que:

$$\varepsilon_{t,12} = \frac{dS_2}{dS_1} - 1 = \text{deformação axial do eixo central do tendão associada a } \Sigma_1 \text{ e } \Sigma_2;$$

$$\varepsilon_{t,23} = \frac{dS_3}{dS_2} - 1 = \text{deformação axial do eixo central do tendão associada a } \Sigma_2 \text{ e } \Sigma_3;$$

resulta:

$$\varepsilon_{t,13} = (1 + \varepsilon_{t,23})(1 + \varepsilon_{t,12}) - 1 \cong \varepsilon_{t,12} + \varepsilon_{t,23} \quad (\text{c.80})$$

Ou seja, desde que as deformações sejam pequenas (como de fato são), podemos considerar a composição de deformação total como a soma das deformações $\varepsilon_{t,12}$ (que corresponde à parcela de deformação devida aos carregamentos axissimétricos) e $\varepsilon_{t,23}$ (que corresponde à parcela de deformação devida à flexão do tubo). A primeira parcela, $\varepsilon_{t,12}$, já foi obtida anteriormente (ver equação (c.43)). Calculemos, então, a parcela $\varepsilon_{t,23}$:

$$\varepsilon_{t,23} = \frac{dS_3}{dS_2} - 1 = \left(\frac{dS_3}{d\theta_2} \right) \left(\frac{d\theta_2}{dS_2} \right)^{-1} - 1$$

Utilizando, então, as expressões (c.21) e (c.69), teremos:

$$\varepsilon_{t,23} = \xi - 1 = \left[\text{sen}^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_2 \cdot (1 + \eta \cdot \text{sen} \theta_2)^2 \right]^{1/2} - 1 \quad (\text{c.81})$$

Se lembrarmos, agora, que (ver expressões (c.18), (c.39), e (c.67)):

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \alpha_1 + \Delta\alpha \\ \theta_2 &= \theta_1 + \frac{\Delta\varphi \cdot R_1 \cdot (\theta_1 - \theta_0)}{L_1 \cdot \tan \alpha_1} \\ \eta &= K \cdot R_2 = K \cdot (R_1 + \Delta R) \end{aligned}$$

teremos, após substituímos α_2, θ_2 e η pelas expressões dadas e fizermos a expansão em série de Taylor de (c.76) (em torno de $\Delta\alpha = 0, \Delta\varphi = 0, \Delta R = 0$ e $K = 0$) retendo apenas os termos lineares (em $\Delta\alpha, \Delta\varphi, \Delta R$ e K):

$$\varepsilon_{t,23} \cong K.R_1.\cos^2 \alpha_1.\sen \theta_1 \quad (\text{c.82})$$

A menos de pequenas diferenças quanto à notação, a expressão (c.82) coincide exatamente com a apresentada por Witz; Tan [87]. Deve-se ressaltar, uma vez mais, que tal expressão foi obtida considerando a hipótese de não escorregamento entre os tendões e o substrato.

Assim, a expressão final para a deformação axial, medida na direção tangente ao eixo central do tendão e associada às configurações Σ_1 e Σ_3 , é dada aproximadamente por:

$$\varepsilon_{t,13} = (\sen^2 \alpha_1) \frac{\Delta R}{R_1} + (\sen \alpha_1.\cos \alpha_1) R_1 \frac{\Delta \varphi}{L_1} + (\cos^2 \alpha_1) \frac{\Delta L}{L_1} + K R_1 \cos^2 \alpha_1.\sen \theta_1 \quad (\text{c.83})$$

C.3.4. Obtenção das direções principais de flexo-torção

O objetivo deste item é a obtenção das direções principais de flexo-torção da seção transversal de um tendão, após a flexão do tubo/cabo. Em outras palavras, como podemos expressar os versores $(\vec{i}_3, \vec{j}_3, \vec{k}_3)$, associados à configuração deformada Σ_3 , na base formada pelos versores $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ do sistema de coordenadas fixo $OXYZ$?

Para resolver este problema vamos lançar mão da hipótese de Navier, já admitida anteriormente (ver item C.3.1), ou seja: após a deformação por flexão, as seções que eram inicialmente planas continuarão planas. No caso de tubos flexíveis e cabos umbilicais, isto quer dizer que o centróide de uma dada seção transversal do tubo/cabo e todos os centróides das seções transversais dos tendões de uma camada helicoidal (*definidos pela mesma seção transversal do tubo/cabo antes da deformação por flexão*) continuarão pertencendo à mesma seção transversal após a deformação.

Consideremos que antes da deformação por flexão (ou seja, na configuração deformada Σ_2), uma das direções principais de flexão seja dada por (ver item C.2.6):

$$\vec{i}_2 = \frac{(C_2 - Q_2)}{\|(C_2 - Q_2)\|} = \vec{n}_2$$

onde Q_2 corresponde ao centróide de uma dada seção transversal do tubo/cabo, e C_2 corresponde ao centróide da seção transversal de um tendão que fica definido pela interseção do eixo central do tendão com a seção transversal do tubo/cabo passando por Q_2 (logo, Q_2 e C_2 pertencem ao mesmo plano).

Após a deformação por flexão, a direção principal de flexão \vec{i}_3 será então dada por:

$$\vec{i}_3 = \frac{(Q_3 - C_3)}{\|(Q_3 - C_3)\|} \quad (\text{c.84})$$

o que se justifica pela hipótese de Navier e pela constrição imposta pelas camadas adjacentes que restringe os deslocamentos dos tendões⁴.

Deve-se ressaltar que a equação (c.84) só será válida se \vec{i}_2 e \vec{n}_2 forem coincidentes, conforme explicado nos itens C.1.2 e C.2.6. Contudo, observa-se que após a flexão (configuração deformada Σ_3), os versores \vec{i}_3 e \vec{n}_3 não são mais coincidentes.

Lembrando agora que as coordenadas⁵ do ponto C_3 , pertencente ao eixo central do tendão na configuração deformada Σ_3 , são dadas por (ver equações (c.65)):

$$\begin{aligned} x_{C_3} &= R_2 \cdot \cos \theta_2 \\ y_{C_3} &= \left(\frac{1}{K} + R_2 \cdot \text{sen } \theta_2 \right) \cdot \cos \beta - \frac{1}{K} \\ z_{C_3} &= \left(\frac{1}{K} + R_2 \cdot \text{sen } \theta_2 \right) \cdot \text{sen } \beta \end{aligned} \quad (\text{c.85})$$

e notando que as coordenadas⁵ do ponto Q_3 (centróide do tubo/cabo, coplanar com C_3) são dadas por (ver figura c.10):

⁴ Para um tendão com seção transversal retangular, por exemplo, a rotação em torno do próprio eixo fica praticamente impedida pelas camadas adjacentes. O mesmo pode não ocorrer, entretanto, se a seção transversal do tendão for circular e se o atrito entre as camadas for desprezível.

⁵ Coordenadas segundo o sistema fixo de coordenadas $OXYZ$.

$$\begin{aligned}
 x_{Q_3} &= 0 \\
 y_{Q_3} &= \frac{1}{K} \cdot \cos \beta - \frac{1}{K} \\
 z_{Q_3} &= \frac{1}{K} \cdot \sin \beta
 \end{aligned}
 \tag{c.86}$$

onde: $\beta = \frac{K \cdot R_2 \cdot (\theta_2 - \theta_0)}{\tan \alpha_2}$ (conforme equação (c.63))

resulta diretamente das equações (c.84) a (c.86):

$$\vec{i}_3 = -(\cos \theta_2) \cdot \vec{e}_x - (\cos \beta \cdot \sin \theta_2) \cdot \vec{e}_y - (\sin \beta \cdot \sin \theta_2) \cdot \vec{e}_z
 \tag{c.87}$$

A direção principal \vec{k}_3 será tomada como sendo coincidente com o versor tangente à curva formada pelo eixo central do tendão na configuração deformada Σ_3 . Portanto:

$$\vec{k}_3 = \vec{t}_3 = t_{x3} \cdot \vec{e}_x + t_{y3} \cdot \vec{e}_y + t_{z3} \cdot \vec{e}_z
 \tag{c.88}$$

onde as componentes t_{x3} , t_{y3} e t_{z3} são dadas no item C.3.1 (ver equações (c.71)).

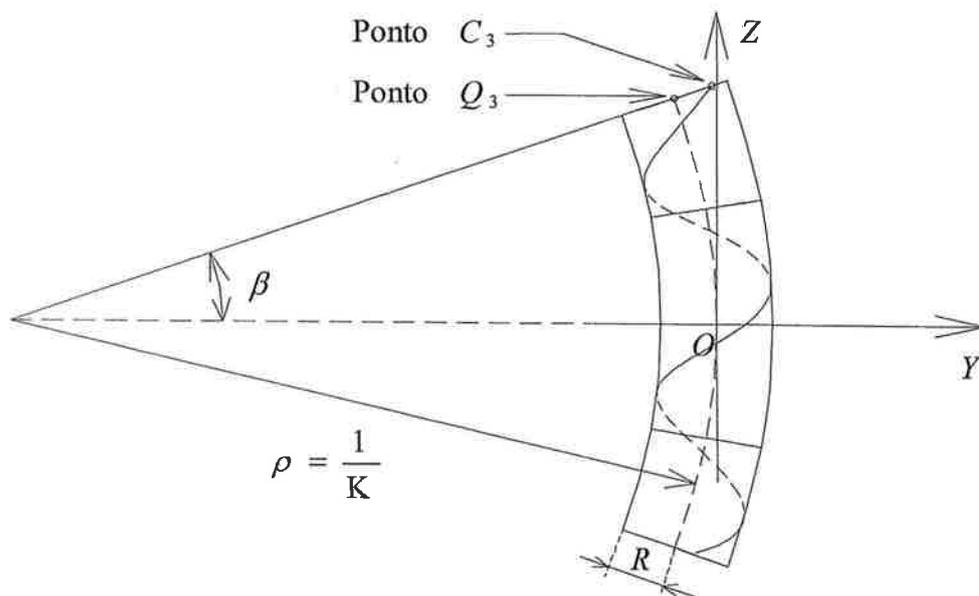


Figura c.10: Vista lateral (plano YZ) da hélice deformada.

A direção principal restante (\vec{j}_3) pode agora ser determinada através do produto vetorial entre as duas primeiras, resultando:

$$\vec{j}_3 = \vec{k}_3 \times \vec{i}_3 = j_{x3} \cdot \vec{e}_x + j_{y3} \cdot \vec{e}_y + j_{z3} \cdot \vec{e}_z \quad (\text{c.89})$$

onde:

$$j_{x3} = \frac{\cos \alpha_2 \cdot \sin \theta_2 \cdot (1 + \eta \cdot \sin \theta_2)}{\xi}$$

$$j_{y3} = -\frac{[\sin \beta \cdot \sin \alpha_2 + \cos \theta_2 \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha_2 \cdot (1 + \eta \cdot \sin \theta_2)]}{\xi}$$

$$j_{z3} = \frac{[\cos \beta \cdot \sin \alpha_2 - \cos \theta_2 \cdot \sin \beta \cdot \cos \alpha_2 \cdot (1 + \eta \cdot \sin \theta_2)]}{\xi}$$

e sendo η e ξ dados pelas equações (c.67) e (c.68).

C.3.5. Cálculo das curvaturas e da torção segundo eixos principais

As expressões que fornecem as componentes de curvatura e a torção segundo os eixos principais de flexo-torção da seção transversal dos tendões são (ver equações (a.9) e (a.10)):

$$\begin{aligned} \kappa_{x3} &= -\chi_3 \cdot \cos f_3 \\ \kappa_{y3} &= \chi_3 \cdot \sin f_3 \\ \kappa_{t3} &= \frac{df_3}{dS_3} + \tau_3 \end{aligned} \quad (\text{c.90})$$

As expressões de χ_3 e τ_3 já foram determinadas no item C.3.1. Precisamos agora calcular as quantidades: $\cos f_3$, $\sin f_3$ e df_3/dS_3 . Pela figura c.11 é imediato perceber que:

$$\begin{aligned} \cos f_3 &= \vec{n}_3 \cdot \vec{j}_3 = n_{x3} \cdot j_{x3} + n_{y3} \cdot j_{y3} + n_{z3} \cdot j_{z3} \\ \sin f_3 &= \vec{n}_3 \cdot \vec{i}_3 = n_{x3} \cdot i_{x3} + n_{y3} \cdot i_{y3} + n_{z3} \cdot i_{z3} \end{aligned} \quad (\text{c.91})$$

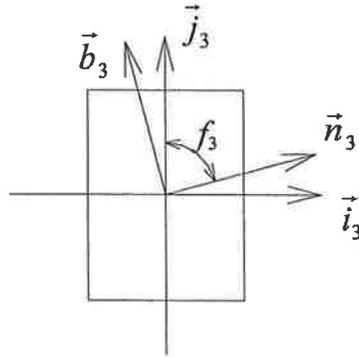


Figura c.11: Relação entre versores (\vec{n}_3 e \vec{b}_3) e versores (\vec{i}_3 e \vec{j}_3).

Utilizando as relações (c.91) em (c.90) virá, após o uso das relações (c.73), (c.74), (c.87) e (c.89) e posterior expansão das expressões resultantes em série de Taylor (em torno de $\Delta\alpha = 0, \Delta\varphi = 0, \Delta R = 0$ e $K = 0$) retendo apenas os termos lineares (em $\Delta\alpha, \Delta\varphi, \Delta R$ e K):

$$\begin{aligned} \kappa_{x3} &\cong (-2 + \cos^2 \alpha_1) \cos \alpha_1 \cdot \cos \theta_1 \cdot K \\ \kappa_{y3} &\cong \chi_1 \left[1 - \frac{\Delta R}{R_1} + \frac{2}{\tan \alpha_1} \Delta\alpha + \frac{\cos(2\alpha_1)}{\tan^2 \alpha_1} \sin \theta_1 \cdot K R_1 \right] \end{aligned} \quad (\text{c.92})$$

Pode-se facilmente verificar que, para $K = 0$, as equações (c.92) recuperam exatamente os resultados previstos para κ_{x2} e κ_{y2} , conforme itens C.2.5 e C.2.6.

Para determinarmos df_3/dS_3 basta notar que das duas primeiras relações de (c.90) é possível obter:

$$f_3 = \arctan \left(-\frac{\kappa_{y3}}{\kappa_{x3}} \right) \quad (\text{c.93})$$

Partindo-se, então, das expressões completas (i.é., ainda não linearizadas) de κ_{x3} e κ_{y3} , pode-se determinar, a partir de (c.93), a expressão do ângulo f_3 e, conseqüentemente, de sua derivada com relação ao comprimento de arco deformado S_3 , já que:

$$\frac{df_3}{dS_3} = \frac{df_3}{d\theta_2} \cdot \left(\frac{dS_3}{d\theta_2} \right)^{-1}$$

Seguindo este procedimento, teremos como resultado final (após linearizarmos a expressão resultante através da expansão em série de Taylor em torno de $\Delta\alpha = 0$, $\Delta R = 0$, $\Delta\varphi = 0$ e $K = 0$):

$$\frac{df_3}{dS_3} \cong \frac{(2 - \cos^2 \alpha_1) \cdot \text{sen } \theta_1}{\tan \alpha_1} \cdot K \quad (\text{c.94})$$

De (c.77), (c.90) e (c.94), resulta, assim, a seguinte expressão simplificada para κ_{t3} :

$$\kappa_{t3} \cong \tau_1 \cdot \left[1 - \frac{\Delta R}{R_1} + \frac{2}{\tan 2\alpha_1} \Delta\alpha - 2 \cos^2 \alpha_1 \cdot \text{sen } \theta_1 \cdot KR_1 \right] \quad (\text{c.95})$$

Mais uma vez observa-se que, para $K = 0$, a expressão (c.95) é consistente com os resultados obtidos para κ_{t2} , conforme itens C.2.5 e C.2.6.

C.4. Geometria da camada considerando flexão com escorregamento

No item anterior (C.3) estudamos a geometria assumida por uma hélice cilíndrica quando o eixo central de seu cilindro suporte era submetido a uma curvatura constante em torno de um eixo. Na obtenção das equações então deduzidas, uma das principais hipóteses admitidas foi a de não-escorregamento dos tendões e de não-empenamento da seção, de tal forma que, para todas as configurações intermediárias entre Σ_2 e Σ_3 , os tendões permaneciam “unidos” às camadas adjacentes. Fisicamente, esta hipótese só é aceitável se as forças de atrito entre os tendões e as camadas adjacentes forem suficientemente altas para impedir qualquer deslocamento relativo entre as camadas. Por outro lado, a adoção desta hipótese para o comportamento do tubo/cabo faz com que sua rigidez flexional aumente consideravelmente (ver capítulo 5).

Testes realizados em tubos flexíveis⁶ mostram que, inicialmente (i.é., ao darmos início à flexão do tubo), a rigidez flexional é, de fato, bastante grande, uma vez que as forças de atrito ainda não foram vencidas. Desta forma, o modelo utilizado no item

⁶ Ver, por exemplo, Féret; Bournazel [24].

anterior pode representar de forma bastante razoável o comportamento estrutural nesta primeira etapa do carregamento. Porém, a observação experimental também revela que, uma vez vencidas as forças de atrito, há uma redução significativa da rigidez flexional: redução esta que é devida ao escorregamento relativo entre os tendões e as camadas adjacentes. Devido à sua simplicidade, boa parte dos trabalhos encontrados na literatura utilizam, de forma explícita ou não, a hipótese de escorregamento total dos tendões (*full slip*). Lançando mão desta hipótese simplificadora também, apresentaremos nos itens seguintes a última parte do estudo geométrico das camadas helicoidais, considerando agora a *flexão com escorregamento*. Esta última configuração deformada será nomeada configuração deformada Σ_4 .

C.4.1. Determinação das novas equações paramétricas do eixo central

O objetivo deste item é a obtenção das equações paramétricas que definem a posição dos pontos pertencentes ao eixo central de um determinado tendão, após o escorregamento. Admitiremos que o raio de curvatura imposto ao tubo/cabo continue inalterado. Partindo da configuração deformada Σ_3 , correspondente à flexão sem escorregamento, podemos considerar então que, após o escorregamento, as equações paramétricas dos pontos do eixo central do tendão na nova configuração sejam dadas por:

$$\begin{aligned}x_4 &= x_3 + \Delta_x \\y_4 &= y_3 + \Delta_y \\z_4 &= z_3 + \Delta_z\end{aligned}\tag{c.96}$$

onde (x_3, y_3, z_3) correspondem às coordenadas⁷ de um ponto genérico do eixo central na configuração deformada Σ_3 , e $(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)$ correspondem às componentes⁷ do vetor deslocamento $(\vec{\Delta})$ no ponto considerado.

Substituindo as relações (c.65) em (c.96), teremos:

⁷ Com relação ao sistema fixo de coordenadas *OXYZ*.

$$\begin{aligned}
 x_4 &= R_2 \cdot \cos \theta_2 + \Delta_x \\
 y_4 &= \left(\frac{1}{K} + R_2 \cdot \text{sen } \theta_2 \right) \cdot \cos \beta - \frac{1}{K} + \Delta_y \\
 z_4 &= \left(\frac{1}{K} + R_2 \cdot \text{sen } \theta_2 \right) \cdot \text{sen } \beta + \Delta_z
 \end{aligned}
 \tag{c.97}$$

onde $\beta = \frac{K \cdot R_2 \cdot (\theta_2 - \theta_o)}{\tan \alpha_2}$ (ver equação (c.63)).

Por outro lado, podemos considerar que o ponto (pertencente ao eixo central do tendão) que na configuração deformada Σ_3 tinha sua posição definida pelos parâmetros β e θ_2 , tenha agora (ou seja, após o escorregamento) sua posição definida pelos parâmetros $\beta_4 = \beta + \Delta\beta$ e $\theta_4 = \theta_2 + \Delta\theta$, onde $\Delta\beta$ representa o avanço angular da seção transversal com relação a uma seção transversal tomada como referência (seção contida no plano OXY) e $\Delta\theta$ representa o avanço angular medido no plano da seção transversal com relação a um eixo paralelo ao eixo fixo OX (ver figura c.12).

Desta forma, as equações paramétricas dos pontos do eixo central do tendão na nova configuração deformada Σ_4 também podem ser expressas pelas seguintes relações equivalentes:

$$\begin{aligned}
 x_4 &= R_2 \cdot \cos \theta_4 \\
 y_4 &= \left(\frac{1}{K} + R_2 \cdot \text{sen } \theta_4 \right) \cdot \cos \beta_4 - \frac{1}{K} \\
 z_4 &= \left(\frac{1}{K} + R_2 \cdot \text{sen } \theta_4 \right) \cdot \text{sen } \beta_4
 \end{aligned}
 \tag{c.98}$$

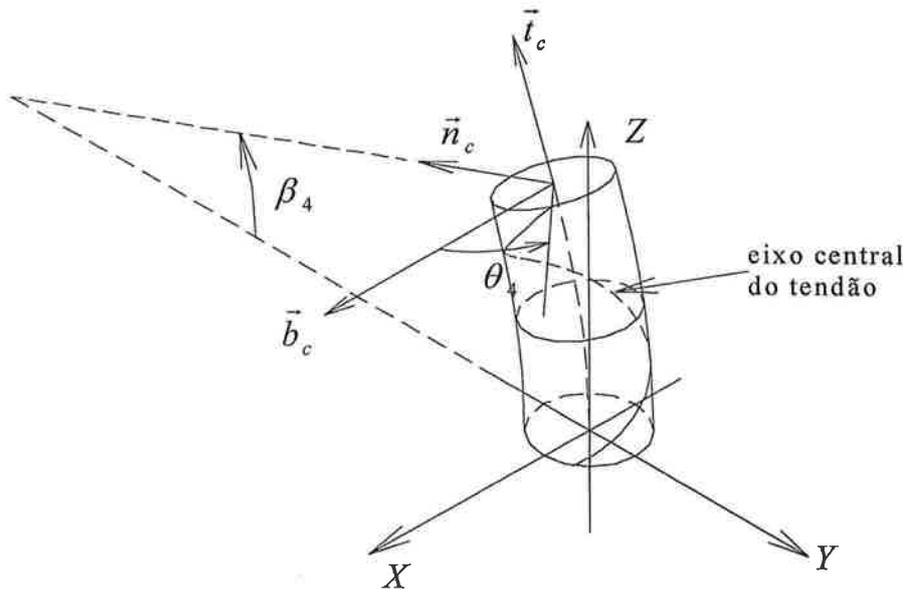


Figura c.12: Indicação dos parâmetros $\beta_4 = \beta + \Delta\beta$ e $\theta_4 = \theta_2 + \Delta\theta$.

C.4.2. Eixos de Darboux-Ribeaucourt

Para entender o processo de determinação das componentes do vetor deslocamento $\vec{\Delta}$, é preciso antes descrever uma nova base de versores associada à curva formada pelo eixo central do tendão na configuração deformada Σ_3 (i.é, anterior ao escorregamento dos tendões). Consideremos, então, a base $b = (\vec{t}_3, \vec{N}_3, \vec{B}_3)$ formada pelos seguintes versores (ver figura c.13):

\vec{t}_3 : é o versor tangente ao eixo central do tendão na configuração deformada Σ_3 ;

\vec{N}_3 : é o versor normal à superfície de suporte do eixo central do tendão na configuração deformada Σ_3 ;

\vec{B}_3 : é o versor que define a direção transversal, definido como o produto vetorial entre os versores \vec{t}_3 e \vec{N}_3 .

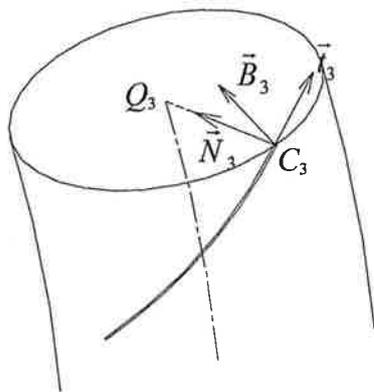


Figura c.13: Base formada pelos versores $(\vec{t}_3, \vec{N}_3, \vec{B}_3)$.

Segundo Féret; Leroy; Estrier [25], as direções formadas por $(\vec{t}, \vec{N}, \vec{B})$ formam os chamados eixos de Darboux-Ribeaucourt. Deve-se observar que os versores \vec{N} e \vec{B} não são as direções principais de curvatura normal e binormal (designadas, respectivamente, por \vec{n} e \vec{b}) da curva formada pelo eixo central do tendão. Os versores $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$, que definem o triedro de Frenet, são obtidos diretamente das equações paramétricas de uma dada curva, dependendo, portanto, apenas destas equações. Já os eixos de Darboux-Ribeaucourt dependem não apenas das equações paramétricas que definem a curva, mas também das equações que definem a superfície sobre a qual a curva está assentada.

Lembrando agora que a determinação do versor tangente \vec{t}_3 já foi feita no item C.3.1 (ver equação (c.71)) e que o versor \vec{N}_3 , normal    superfície suporte, é dado por (ver figura c.13):

$$\vec{N}_3 = \frac{(Q_3 - C_3)}{\|(Q_3 - C_3)\|}$$

coincidindo, portanto, com a direção principal de flexão \vec{i}_3 (conforme hipóteses feitas no item C.3.4), temos (ver equação (c.87)):

$$\vec{N}_3 = -(\cos\theta_2) \cdot \vec{e}_x - (\cos\beta \cdot \text{sen}\theta_2) \cdot \vec{e}_y - (\text{sen}\beta \cdot \text{sen}\theta_2) \cdot \vec{e}_z \quad (\text{c.99})$$

Para determinarmos o versor \vec{B}_3 basta apenas calcular o produto vetorial entre os versores \vec{t}_3 e \vec{N}_3 , resultando:

$$\vec{B}_3 = \vec{t}_3 \times \vec{N}_3 = \vec{k}_3 \times \vec{i}_3 = \vec{j}_3 \quad (\text{c.100})$$

ou seja, as componentes do versor \vec{B}_3 coincidem com as da direção principal de flexão \vec{j}_3 , dadas pela equação (c.89).

Se admitirmos, agora, que os deslocamentos $(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)$ são pequenos se comparados à alguma dimensão característica da seção transversal da camada (como, por exemplo, o raio), podemos considerar que o vetor deslocamento $\vec{\Delta} = (\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)$, se escrito com relação à base $(\vec{t}_3, \vec{N}_3, \vec{B}_3)$, tenha apenas componentes segundo a direção tangencial (\vec{t}_3) e transversal (\vec{B}_3), já que a componente de deslocamento segundo a direção \vec{N}_3 fica praticamente impedida devido à existência das camadas adjacentes. Assim:

$$\vec{\Delta} \cong \Delta_t \cdot \vec{t}_3 + \Delta_b \cdot \vec{B}_3 \quad (\text{c.101})$$

onde Δ_t e Δ_b são as componentes de deslocamento segundo as direções tangencial (\vec{t}_3) e transversal (\vec{B}_3), respectivamente.

Utilizando as equações (c.71) e (c.89), que fornecem as componentes dos versores \vec{t}_3 e \vec{B}_3 segundo a base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ associada ao sistema fixo de coordenadas $OXYZ$, e lembrando que um vetor se escreve de forma única numa dada base, teremos as seguintes relações entre as componentes de deslocamento $(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)$ e (Δ_t, Δ_b) :

$$\begin{aligned} \Delta_x &= \Delta_t \cdot t_{x3} + \Delta_b \cdot B_{x3} \\ \Delta_y &= \Delta_t \cdot t_{y3} + \Delta_b \cdot B_{y3} \\ \Delta_z &= \Delta_t \cdot t_{z3} + \Delta_b \cdot B_{z3} \end{aligned} \quad (\text{c.102})$$

C.4.3. Cálculo de $\Delta\theta$ e $\Delta\beta$ em função das componentes Δ_t e Δ_b

Se substituirmos as relações (c.102) nas equações paramétricas (c.97) e lembrarmos que as últimas são equivalentes às equações paramétricas (c.98), teremos as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} R_2 \cdot (\cos \theta_2) + \Delta_t \cdot t_{x3} + \Delta_b \cdot B_{x3} &= R_2 \cdot \cos \theta_4 \\ \left(\frac{1}{K} + R_2 \cdot \text{sen } \theta_2 \right) \cdot \cos \beta + \Delta_t \cdot t_{y3} + \Delta_b \cdot B_{y3} &= \left(\frac{1}{K} + R_2 \cdot \text{sen } \theta_4 \right) \cdot \cos \beta_4 \quad (\text{c.103}) \\ \left(\frac{1}{K} + R_2 \cdot \text{sen } \theta_2 \right) \cdot \text{sen } \beta + \Delta_t \cdot t_{z3} + \Delta_b \cdot B_{z3} &= \left(\frac{1}{K} + R_2 \cdot \text{sen } \theta_4 \right) \cdot \text{sen } \beta_4 \end{aligned}$$

Substituindo, agora, as expressões que fornecem as componentes dos versores \vec{t}_3 e \vec{B}_3 (ver equações (c.71), (c.89) e (c.100)) e considerando ainda que:

$$\begin{aligned} \theta_4 &= \theta_2 + \Delta\theta \\ \beta_4 &= \beta + \Delta\beta \end{aligned} \quad (\text{c.104})$$

onde $\Delta\theta \ll 1$ e $\Delta\beta \ll 1$ (por hipótese), obtemos as seguintes relações aproximadas para a determinação das variações $\Delta\theta$ e $\Delta\beta$ em função dos deslocamentos tangencial (Δ_t) e transversal (Δ_b)⁸:

$$\begin{aligned} \Delta\theta &\cong \left(\frac{\text{sen } \alpha_2}{R_2 \cdot \xi} \right) \cdot \Delta_t - \left(\frac{\cos \alpha_2 \cdot (1 + \eta \cdot \text{sen } \theta_2)}{R_2 \cdot \xi} \right) \cdot \Delta_b \\ \Delta\beta &\cong \frac{K \cdot \Delta_t \cdot \cos \alpha_2}{\xi} + \frac{K \cdot \Delta_b \cdot \text{sen } \alpha_2}{\xi \cdot (1 + \eta \cdot \text{sen } \theta_2)} \end{aligned} \quad (\text{c.105})$$

C.4.4. Cálculo da deformação do eixo central do tendão

Procedendo de forma análoga ao que foi feito no item C.3.3, temos que a deformação axial, medida na direção tangente ao eixo central do tendão e associada à configuração deformada Σ_4 , é dada por:

$$\varepsilon_{t,14} = \frac{dS_4 - dS_1}{dS_1} = \frac{dS_4}{dS_3} \cdot \frac{dS_3}{dS_2} \cdot \frac{dS_2}{dS_1} - 1 \quad (\text{c.106})$$

⁸ Mostra-se que $\Delta\theta$ é obtido a partir da primeira relação dada por (c.103), enquanto $\Delta\beta$ pode ser obtido a partir da segunda ou da terceira relação dada por (c.103).

mas, lembrando que:

$$\varepsilon_{t,12} = \frac{dS_2}{dS_1} - 1 = \text{deformação axial do eixo central do tendão (associada a } \Sigma_1 \text{ e } \Sigma_2),$$

$$\varepsilon_{t,23} = \frac{dS_3}{dS_2} - 1 = \text{deformação axial do eixo central do tendão (associada a } \Sigma_2 \text{ e } \Sigma_3),$$

$$\varepsilon_{t,34} = \frac{dS_4}{dS_3} - 1 = \text{deformação axial do eixo central do tendão (associada a } \Sigma_3 \text{ e } \Sigma_4),$$

resulta:

$$\varepsilon_{t,14} = (1 + \varepsilon_{t,34})(1 + \varepsilon_{t,23})(1 + \varepsilon_{t,12}) - 1 \cong \varepsilon_{t,12} + \varepsilon_{t,23} + \varepsilon_{t,34} \quad (\text{c.107})$$

Como já ressaltamos anteriormente (item C.3.3), a aproximação dada acima só é válida caso os níveis de deformações sejam bastante pequenos se comparados à unidade (o que geralmente ocorre nas aplicações). As duas primeiras parcelas, correspondentes a $\varepsilon_{t,12}$ e $\varepsilon_{t,23}$, já foram obtidas anteriormente (ver equações (c.43) e (c.82)). Calculemos, então, a parcela $\varepsilon_{t,34}$:

$$\varepsilon_{t,34} = \frac{dS_4}{dS_3} - 1 = \left(\frac{dS_4}{d\theta_2} \right) \left(\frac{dS_3}{d\theta_2} \right)^{-1} - 1 \quad (\text{c.108})$$

Porém:

$$\frac{dS_4}{d\theta_2} = \left[\left(\frac{dx_4}{d\theta_2} \right)^2 + \left(\frac{dy_4}{d\theta_2} \right)^2 + \left(\frac{dz_4}{d\theta_2} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{c.109})$$

e, da expressão (c.69) vem:

$$\frac{dS_3}{d\theta_2} = \frac{\xi \cdot R_2}{\text{sen } \alpha_2}$$

O problema principal que surge neste momento é a avaliação da expressão (c.109). Se partirmos das equações paramétricas (c.97) e utilizarmos as relações dadas por (c.102), teremos:

$$\begin{aligned}
 x_4 &= R_2 \cdot \cos \theta_2 + \Delta_t \cdot t_{x3} + \Delta_b \cdot B_{x3} \\
 y_4 &= \left(\frac{1}{K} + R_2 \cdot \sin \theta_2 \right) \cdot \cos \beta - \frac{1}{K} + \Delta_t \cdot t_{y3} + \Delta_b \cdot B_{y3} \\
 z_4 &= \left(\frac{1}{K} + R_2 \cdot \sin \theta_2 \right) \cdot \sin \beta + \Delta_t \cdot t_{z3} + \Delta_b \cdot B_{z3}
 \end{aligned} \tag{c.110}$$

Nota-se pela expressão (c.110) que há uma indefinição com relação às funções deslocamento Δ_t e Δ_b . Para resolver este problema admitiremos que tais funções possam ser expressas na forma:

$$\begin{aligned}
 \Delta_t &= \Delta_t(\theta_2) = \Delta_{tc} \cdot \cos \theta_2 + \Delta_{ts} \cdot \sin \theta_2 \\
 \Delta_b &= \Delta_b(\theta_2) = \Delta_{bc} \cdot \cos \theta_2 + \Delta_{bs} \cdot \sin \theta_2
 \end{aligned} \tag{c.111}$$

onde Δ_{tc} , Δ_{ts} , Δ_{bc} e Δ_{bs} são os coeficientes que fornecem as amplitudes das funções seno e co-seno. Note que os subscritos utilizados referem-se, respectivamente, à direção do deslocamento (tangencial ou transversal) e à função aproximadora utilizada (seno ou co-seno).

A escolha das funções seno e co-seno para a aproximação dos funções deslocamento Δ_t e Δ_b se justifica pelos seguintes motivos:

- 1) Considerando a geometria do eixo central dos tendões, é razoável supor que as funções deslocamentos sejam funções periódicas cujo argumento seja proporcional ao parâmetro angular θ_2 ;
- 2) Entre as funções periódicas mais simples de serem utilizadas estão justamente as função seno e co-seno;
- 3) Mesmo que as funções deslocamento fossem descritas por funções periódicas mais complexas que as admitidas por (c.111), estas poderiam ser aproximadas através de séries de Fourier, cujos primeiros termos são justamente as funções seno e co-seno.

Desta forma, (c.111) consiste, na verdade, numa primeira aproximação para as funções deslocamento Δ_t e Δ_b . Uma proposta para a determinação das amplitudes Δ_{tc} , Δ_{ts} , Δ_{bc} e Δ_{bs} será indicada mais adiante. Por enquanto, admitiremos que tais amplitudes sejam quantidades conhecidas. Com as expressões dadas fica fácil

determinarmos a deformação $\varepsilon_{t,34}$. Efetuando as operações necessárias e fazendo a expansão em série de Taylor de $\varepsilon_{t,34}$ (em torno de $K = 0$, $\Delta R = 0$, $\Delta\alpha = 0$, $\Delta\varphi = 0$, $\Delta_{tc} = 0$, $\Delta_{ts} = 0$, $\Delta_{bc} = 0$ e $\Delta_{bs} = 0$), resulta a seguinte expressão linearizada:

$$\varepsilon_{t,34} \cong \frac{\text{sen } \alpha_1 \cdot \cos \theta_1}{R_1} \cdot \Delta_{ts} - \frac{\text{sen } \alpha_1 \cdot \text{sen } \theta_1}{R_1} \cdot \Delta_{tc} \quad (\text{c.112})$$

Deve-se observar que a expressão (c.112), apesar de aproximada, é consistente pois, dentro da hipótese de pequenos deslocamentos, o deslocamento transversal (Δ_b) não deve afetar de forma significativa a deformação axial do tendão, de tal forma que, numa primeira aproximação, já era esperado que $\varepsilon_{t,34}$ dependesse apenas da componente de deslocamento tangencial (Δ_t). Além disso, pode-se notar que, no caso em que ambas as amplitudes Δ_{tc} e Δ_{ts} são nulas, teremos como resultado $\varepsilon_{t,34} \cong 0$, o que também faz sentido, uma vez que a deformação axial $\varepsilon_{t,34}$ é devida apenas ao escorregamento dos tendões.

Desta forma, a expressão final para a deformação $\varepsilon_{t,14}$, medida na direção tangente ao eixo central do tendão, é dada aproximadamente por (ver equações (c.107), (c.43), (c.82) e (c.112)):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{t,14} \cong & (\text{sen}^2 \alpha_1) \frac{\Delta R}{R_1} + (\text{sen} \alpha_1 \cdot \cos \alpha_1) R_1 \frac{\Delta \varphi}{L_1} + (\cos^2 \alpha_1) \frac{\Delta L}{L_1} + \\ & + K R_1 \cos^2 \alpha_1 \cdot \text{sen} \theta_1 + \frac{\text{sen } \alpha_1 \cdot \cos \theta_1}{R_1} \cdot \Delta_{ts} - \frac{\text{sen } \alpha_1 \cdot \text{sen } \theta_1}{R_1} \cdot \Delta_{tc} \end{aligned} \quad (\text{c.113})$$

C.4.5. Cálculo dos versores associados ao triedro de Frenet

Neste item determinaremos os versores tangente, normal e binormal associados à curva formada pelo eixo central do tendão na configuração deformada Σ_4 . Seja C_4 um ponto pertencente ao eixo central do tendão nesta configuração. O versor tangente à curva (associada ao eixo central do tendão) passando por C_4 é dado por:

$$\vec{t}_4 = \frac{d\vec{r}_{c4}}{dS_4} = \frac{d\vec{r}_{c4}}{d\theta_2} \cdot \frac{d\theta_2}{dS_4} \quad (\text{c.114})$$

onde $\vec{r}_{c4} = (C_4 - O)$ é o vetor posição do ponto C_4 , com relação ao sistema fixo $OXYZ$.

Usando, então, as relações (c.97), que fornecem as componentes do vetor \vec{r}_{c4} , e as relações auxiliares (c.102) e (c.111), é possível determinarmos as componentes do versor tangente \vec{t}_4 . Contudo, o desenvolvimento de (c.114) não compensa as dificuldades em expressar tal relação através de uma forma matematicamente mais simples. Lembrando que esta tarefa pode, se necessário, ser executada com o auxílio de um manipulador algébrico-computacional, deixaremos o resultado de (c.114) na forma implícita dada por:

$$\vec{t}_4 = t_{x4} \cdot \vec{e}_x + t_{y4} \cdot \vec{e}_y + t_{z4} \cdot \vec{e}_z \quad (\text{c.115})$$

sendo as componentes (t_{x4}, t_{y4}, t_{z4}) determinadas conforme indicado acima.

Conforme ressaltado em outras vezes, uma simples expansão em série de Taylor pode conduzir, do ponto de vista prático, a resultados suficientemente precisos. Assim, se ao desenvolvermos a relação (c.114), substituírmos R_2, α_2 e θ_2 por:

$$\begin{aligned} R_2 &= R_1 + \Delta R \\ \alpha_2 &= \alpha_1 + \Delta \alpha \\ \theta_2 &= \theta_1 + \frac{R_1 \cdot (\theta_1 - \theta_0)}{L_1 \cdot \tan \alpha_1} \cdot \Delta \varphi \end{aligned}$$

e fizermos a expansão em série de Taylor das componentes do versor \vec{t}_4 (em torno de $K = 0, \Delta R = 0, \Delta \alpha = 0, \Delta \varphi = 0, \Delta_{tc} = 0, \Delta_{ts} = 0, \Delta_{bc} = 0$ e $\Delta_{bs} = 0$), retendo apenas os termos lineares, teremos as seguintes expressões linearizadas para as componentes:

$$\begin{aligned} t_{x4} \cong & -\text{sen } \theta_1 \cdot \text{sen } \alpha_1 - \text{sen } \theta_1 \cdot \cos \alpha_1 \cdot \Delta \alpha - \cos \theta_1 \cdot \text{sen } \alpha_1 \cdot \Delta \varphi + \left(R_1 \cdot \cos^2 \alpha_1 \cdot \text{sen } \alpha_1 \cdot \text{sen}^2 \theta_1 \right) K \\ & - \left(\frac{\cos^2 \theta_1 \cdot \text{sen}^2 \alpha_1}{R_1} \right) \cdot \Delta_{tc} - \left(\frac{\text{sen}(2\theta_1) \cdot \text{sen}^2 \alpha_1}{2 \cdot R_1} \right) \cdot \Delta_{ts} + \left(\frac{\text{sen}(2\alpha_1) \cdot \cos(2\theta_1)}{2 \cdot R_1} \right) \cdot \Delta_{bc} + \\ & + \left(\frac{\text{sen}(2\alpha_1) \cdot \text{sen}(2\theta_1)}{2 \cdot R_1} \right) \cdot \Delta_{bs} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{y4} \cong & \cos\theta_1 \cdot \text{sen}\alpha_1 + \cos\theta_1 \cdot \cos\alpha_1 \cdot \Delta\alpha - \text{sen}\theta_1 \cdot \text{sen}\alpha_1 \cdot \Delta\varphi \\
& - \frac{R_1 \cos^2 \alpha_1}{\text{sen}\alpha_1} \left(\frac{\text{sen}(2\theta_1) \cdot \text{sen}^2 \alpha_1}{2} + \theta_1 - \theta_0 \right) K - \left(\frac{\text{sen}(2\theta_1) \cdot \text{sen}^2 \alpha_1}{2 \cdot R_1} \right) \cdot \Delta_{tc} \\
& - \left(\frac{\text{sen}^2 \theta_1 \cdot \text{sen}^2 \alpha_1}{R_1} \right) \cdot \Delta_{ts} + \left(\frac{\text{sen}(2\alpha_1) \cdot \text{sen}(2\theta_1)}{2 \cdot R_1} \right) \cdot \Delta_{bc} - \left(\frac{\text{sen}(2\alpha_1) \cdot \cos(2\theta_1)}{2 \cdot R_1} \right) \cdot \Delta_{bs}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{z4} \cong & \cos\alpha_1 - \text{sen}\alpha_1 \cdot \Delta\alpha + R_1 \cdot \cos\alpha_1 \cdot \cos\theta_1 \cdot (\theta_1 - \theta_0 + \text{sen}^2 \alpha_1 \cdot \tan\theta_1) K \\
& - \left(\frac{\text{sen}^2 \alpha_1 \cdot \text{sen}\theta_1}{R_1} \right) \cdot \Delta_{bc} + \left(\frac{\text{sen}^2 \alpha_1 \cdot \cos\theta_1}{R_1} \right) \cdot \Delta_{bs}
\end{aligned}$$

Para a obtenção dos versores normal (\vec{n}_4) e binormal (\vec{b}_4), utilizaremos as fórmulas de Frenet para a configuração deformada Σ_4 , ou seja:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{n}_4}{dS_4} &= \tau_4 \cdot \vec{b}_4 - \chi_4 \cdot \vec{t}_4 \\
\frac{d\vec{b}_4}{dS_4} &= -\tau_4 \cdot \vec{n}_4 \\
\frac{d\vec{t}_4}{dS_4} &= \chi_4 \cdot \vec{n}_4
\end{aligned} \tag{c.116}$$

Da terceira das relações (c.116), vem:

$$\chi_4 = \left\| \frac{d\vec{t}_4}{dS_4} \right\| = \left\| \frac{d\vec{t}_4}{d\theta_2} \cdot \frac{d\theta_2}{dS_4} \right\|$$

expressão que, uma vez expandida em série de Taylor (em torno de $K = 0$, $\Delta R = 0$, $\Delta\alpha = 0$, $\Delta\varphi = 0$, $\Delta_{tc} = 0$, $\Delta_{ts} = 0$, $\Delta_{bc} = 0$ e $\Delta_{bs} = 0$), resulta na seguinte expressão linearizada para a curvatura:

$$\begin{aligned}
\chi_4 \cong & \chi_1 \cdot \left[1 - \frac{\Delta R}{R_1} + \frac{2}{\tan\alpha_1} \cdot \Delta\alpha + \frac{\text{sen}\theta_1 \cdot \cos(2\alpha_1)}{\tan^2 \alpha_1} \cdot KR_1 \right] + \\
& + \chi_1 \cdot \left[2 \cdot \text{sen}\theta_1 \cdot \cos\alpha_1 \cdot \frac{\Delta_{bc}}{R_1} - 2 \cdot \cos\theta_1 \cdot \cos\alpha_1 \cdot \frac{\Delta_{bs}}{R_1} \right]
\end{aligned} \tag{c.117}$$

Ainda, da terceira das relações (c.116), pode-se também obter as componentes do versor normal:

$$\vec{n}_4 = \frac{1}{\chi_4} \cdot \frac{d\vec{t}_4}{dS_4} = n_{x4} \cdot \vec{i} + n_{y4} \cdot \vec{j} + n_{z4} \cdot \vec{k} \quad (\text{c.118})$$

que, uma vez expandidas em série de Taylor (em torno de $K = 0$, $\Delta R = 0$, $\Delta \alpha = 0$, $\Delta \varphi = 0$, $\Delta_{tc} = 0$, $\Delta_{ts} = 0$, $\Delta_{bc} = 0$ e $\Delta_{bs} = 0$), resultam nas seguintes expressões linearizadas:

$$n_{x4} \cong -\cos \theta_1 + \left(2 - \cos^2 \alpha_1\right) \frac{\text{sen } 2\theta_1}{2 \cdot \tan^2 \alpha_1} \cdot KR_1 + (\text{sen } \theta_1) \cdot \Delta \varphi - (\cos \alpha_1 \cdot \text{sen } 2\theta_1) \cdot \frac{\Delta_{bc}}{R_1} \\ - \left(2 \cos \alpha_1 \cdot \text{sen}^2 \theta_1\right) \frac{\Delta_{bs}}{R_1} + \left(\frac{\text{sen } \alpha_1 \cdot \text{sen } 2\theta_1}{2}\right) \cdot \frac{\Delta_{tc}}{R_1} + (\text{sen } \alpha_1 \cdot \text{sen}^2 \theta_1) \cdot \frac{\Delta_{ts}}{R_1}$$

$$n_{y4} \cong -\text{sen } \theta_1 + \frac{(-2 + \cos^2 \alpha_1) \cos^2 \theta_1}{\tan^2 \alpha_1} \cdot KR_1 - (\cos \theta_1) \cdot \Delta \varphi + 2 \cos \alpha_1 \cdot \cos^2 \theta_1 \cdot \frac{\Delta_{bc}}{R_1} + \\ + \cos \alpha_1 \cdot \text{sen}(2\theta_1) \cdot \frac{\Delta_{bs}}{R_1} - \text{sen } \alpha_1 \cdot \cos^2 \theta_1 \cdot \frac{\Delta_{tc}}{R_1} - \frac{\text{sen } \alpha_1 \cdot \text{sen}(2\theta_1)}{2} \cdot \frac{\Delta_{ts}}{R_1}$$

$$n_{z4} \cong \left[(2 - \cos^2 \alpha_1) \cdot \cos \theta_1 - \text{sen } \theta_1 \cdot (\theta_1 - \theta_0) \right] \frac{KR_1}{\tan \alpha_1} - (\text{sen } \alpha_1 \cdot \cos \theta_1) \cdot \frac{\Delta_{bc}}{R_1} \\ - (\text{sen } \alpha_1 \cdot \text{sen } \theta_1) \cdot \frac{\Delta_{bs}}{R_1}$$

Uma vez conhecidas as componentes dos versores tangente e normal, dadas respectivamente pelas relações (c.115) e (c.118), pode-se determinar as componentes do versor binormal diretamente através do produto vetorial entre os dois primeiros, resultando:

$$\vec{b}_4 = \vec{t}_4 \times \vec{n}_4 = (t_{y4} \cdot n_{z4} - t_{z4} \cdot n_{y4}) \cdot \vec{i} + (t_{z4} \cdot n_{x4} - t_{x4} \cdot n_{z4}) \cdot \vec{j} + (t_{x4} \cdot n_{y4} - t_{y4} \cdot n_{x4}) \cdot \vec{k} \quad (\text{c.119})$$

Para o cálculo da tortuosidade podemos utilizar a segunda das relações (c.116), já que dispomos agora de todos os parâmetros necessários ao cálculo. Assim:

$$\tau_4 = \left\| \frac{d\vec{b}_4}{dS_4} \right\| = \left\| \frac{d\vec{b}_4}{d\theta_2} \right\| \left(\frac{dS_4}{d\theta_2} \right)^{-1} \quad (\text{c.120})$$

Se, ao desenvolvermos a relação (c.120) substituirmos R_2 , α_2 e θ_2 por:

$$\begin{aligned}
R_2 &= R_1 + \Delta R \\
\alpha_2 &= \alpha_1 + \Delta \alpha \\
\theta_2 &= \theta_1 + \frac{R_1 \cdot (\theta_1 - \theta_0)}{L_1 \cdot \tan \alpha_1} \cdot \Delta \varphi
\end{aligned}$$

e fizermos a expansão em série de Taylor (em torno de $K = 0, \Delta R = 0, \Delta \alpha = 0, \Delta \varphi = 0, \Delta_{tc} = 0, \Delta_{ts} = 0, \Delta_{bc} = 0$ e $\Delta_{bs} = 0$), retendo apenas os termos lineares, teremos a seguinte expressão linearizada para τ_4 :

$$\begin{aligned}
\tau_4 &= \tau_1 \left[1 - \frac{\Delta R}{R_1} + \frac{2}{\tan 2\alpha_1} \cdot \Delta \alpha + \frac{(2 \cos^4 \alpha_1 - \cos^2 \alpha_1 - 2) \cdot \text{sen } \theta_1}{\text{sen}^2 \alpha_1} \cdot KR_1 \right] + \\
&+ \tau_1 \left[2 \cdot \cos \alpha_1 \cdot \text{sen } \theta_1 \cdot \frac{\Delta_{bc}}{R_1} - 2 \cdot \cos \alpha_1 \cdot \cos \theta_1 \cdot \frac{\Delta_{bs}}{R_1} \right] \quad (c.121)
\end{aligned}$$

Pode-se facilmente verificar que a expressão (c.121) recai de forma consistente nas equações deduzidas anteriormente (ver, por exemplo, equação (c.77)).

C.4.6. Obtenção das direções principais de flexo-torção

O objetivo deste item é a obtenção das direções principais de flexo-torção da seção transversal de um tendão, após o escorregamento do mesmo. Em outras palavras, queremos saber como expressar os versores $(\vec{i}_4, \vec{j}_4, \vec{k}_4)$, associados à configuração deformada Σ_4 , na base formada pelos versores $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ do sistema de coordenadas fixo $OXYZ$.

Como vimos anteriormente (item C.3.4), uma das direções principais de flexão fora admitida como sendo perpendicular à superfície do toróide (superfície sobre a qual o eixo central do tendão está assentado). Especificamente, consideramos que a direção principal de flexão \vec{i}_3 era dada por (ver equação (c.84)):

$$\vec{i}_3 = \frac{(Q_3 - C_3)}{\|(Q_3 - C_3)\|}$$

o que se justificava pela hipótese de Navier e pela constrição imposta pelas camadas adjacentes que restringe os deslocamentos dos tendões.

Embora não se possa garantir que a hipótese de Navier (segundo a interpretação dada no item C.3.4 para a seção transversal do tubo/cabo) seja válida após o escorregamento dos tendões, podemos ainda considerar que uma das direções principais de flexão do tendão seja dada por:

$$\vec{i}_4 = \frac{(Q_4 - C_4)}{\|(Q_4 - C_4)\|} \quad (\text{c.122})$$

onde C_4 corresponde ao centróide da seção transversal de um tendão que fica definido pela interseção do eixo central do tendão com a seção transversal do tubo/cabo definida pelo ângulo $\beta_4 = \beta + \Delta\beta$, e Q_4 corresponde ao centróide da seção transversal do tubo/cabo definida pelo mesmo ângulo $\beta_4 = \beta + \Delta\beta$, ou seja, Q_4 e C_4 pertencem à mesma seção. A diferença neste caso é que o ângulo β_4 pode variar conforme passamos de um tendão para outro (de uma mesma camada), devido à dependência de $\Delta\beta$ com as componentes de deslocamento (ver equação (c.105)). Se confirmada esta variação, pode-se dizer que a “não-verificação” da hipótese de Navier, após o escorregamento dos tendões, cria uma espécie de “empenamento” da seção transversal.

Lembrando agora que as coordenadas⁹ do ponto C_4 , pertencente ao eixo central do tendão na configuração deformada Σ_4 , são dadas por (ver equações (c.110)):

$$\begin{aligned} x_4 &= R_2 \cdot \cos \theta_2 + \Delta_t \cdot t_{x3} + \Delta_b \cdot B_{x3} \\ y_4 &= \left(\frac{1}{K} + R_2 \cdot \sin \theta_2 \right) \cdot \cos \beta - \frac{1}{K} + \Delta_t \cdot t_{y3} + \Delta_b \cdot B_{y3} \\ z_4 &= \left(\frac{1}{K} + R_2 \cdot \sin \theta_2 \right) \cdot \sin \beta + \Delta_t \cdot t_{z3} + \Delta_b \cdot B_{z3} \end{aligned} \quad (\text{c.123})$$

E notando que as coordenadas do ponto Q_4 (centróide do tubo/cabo, coplanar com C_4) são dadas por (ver figura c.14):

⁹ Coordenadas segundo o sistema fixo de coordenadas $OXYZ$.

$$\begin{aligned}
 x_{Q_4} &= 0 \\
 y_{Q_4} &= \frac{1}{K} \cdot \cos \beta_4 - \frac{1}{K} \\
 z_{Q_4} &= \frac{1}{K} \cdot \text{sen } \beta_4
 \end{aligned}
 \tag{c.124}$$

onde: $\beta_4 = \beta + \Delta\beta$ (conforme equação (c.104)), sendo:

$$\beta = \frac{K \cdot R_2 \cdot (\theta_2 - \theta_0)}{\tan \alpha_2} \quad (\text{conforme equação (c.63)}) \text{ e}$$

$$\Delta\beta \cong \frac{K \cdot \Delta_r \cdot \cos \alpha_2}{\xi} + \frac{K \cdot \Delta_b \cdot \text{sen } \alpha_2}{\xi \cdot (1 + \eta \cdot \text{sen } \theta_2)} \quad (\text{conforme equação (c.105)}).$$

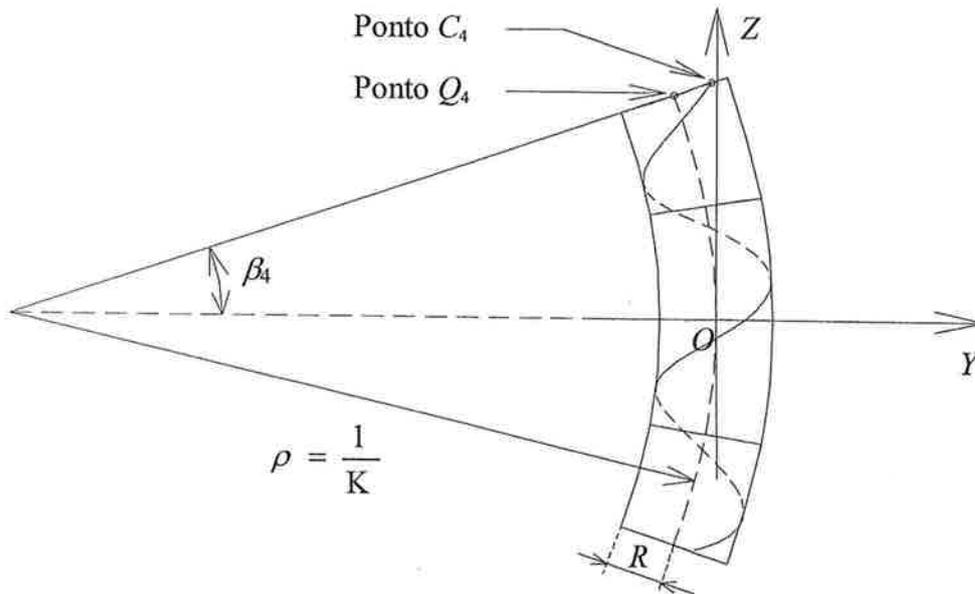


Figura c.14: Vista lateral (plano YZ) da hélice deformada.

Resulta diretamente das equações (c.122) a (c.124):

$$\vec{i}_4 = (i_{x_4}) \cdot \vec{e}_x + (i_{y_4}) \cdot \vec{e}_y + (i_{z_4}) \cdot \vec{e}_z \tag{c.125}$$

onde as componentes do versor \vec{i}_4 são dadas por:

$$i_{x_4} = \frac{(x_{Q_4} - x_4)}{\sqrt{(x_{Q_4} - x_4)^2 + (y_{Q_4} - y_4)^2 + (z_{Q_4} - z_4)^2}}$$

$$i_{y4} = \frac{(y_{Q4} - y_4)}{\sqrt{(x_{Q4} - x_4)^2 + (y_{Q4} - y_4)^2 + (z_{Q4} - z_4)^2}}$$

$$i_{z4} = \frac{(z_{Q4} - z_4)}{\sqrt{(x_{Q4} - x_4)^2 + (y_{Q4} - y_4)^2 + (z_{Q4} - z_4)^2}}$$

A direção principal \vec{k}_4 será tomada como sendo coincidente com o versor tangente à curva formada pelo eixo central do tendão na configuração deformada Σ_4 . Portanto:

$$\vec{k}_4 = \vec{t}_4 = t_{x4} \cdot \vec{e}_x + t_{y4} \cdot \vec{e}_y + t_{z4} \cdot \vec{e}_z \quad (\text{c.126})$$

onde as componentes t_{x4} , t_{y4} e t_{z4} são dadas no item C.4.5.

A direção principal restante (\vec{j}_4) pode agora ser determinada através do produto vetorial entre as duas primeiras, resultando:

$$\vec{j}_4 = \vec{k}_4 \times \vec{i}_4 = j_{x4} \cdot \vec{i} + j_{y4} \cdot \vec{j} + j_{z4} \cdot \vec{k} \quad (\text{c.127})$$

C.4.7. Cálculo das curvaturas e da torção segundo eixos principais

As expressões que fornecem as componentes de curvatura e a torção segundo os eixos principais de flexo-torção da seção transversal dos tendões são (ver equações (a.9) e (a.10)):

$$\begin{aligned} \kappa_{x4} &= -\chi_4 \cdot \cos f_4 \\ \kappa_{y4} &= \chi_4 \cdot \sen f_4 \\ \kappa_{t4} &= \frac{df_4}{dS_4} + \tau_4 \end{aligned} \quad (\text{c.128})$$

As expressões de χ_4 e τ_4 já foram determinadas no item C.4.5. Precisamos agora calcular as quantidades: $\cos f_4$, $\sen f_4$ e df_4/dS_4 . Pela figura c.15 é imediato perceber que:

$$\begin{aligned} \cos f_4 &= \vec{n}_4 \cdot \vec{j}_4 = n_{x4} \cdot j_{x4} + n_{y4} \cdot j_{y4} + n_{z4} \cdot j_{z4} \\ \sen f_4 &= \vec{n}_4 \cdot \vec{i}_4 = n_{x4} \cdot i_{x4} + n_{y4} \cdot i_{y4} + n_{z4} \cdot i_{z4} \end{aligned} \quad (\text{c.129})$$

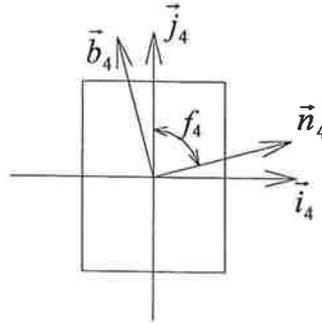


Figura c.15: Relação entre vetores (\vec{n}_4 e \vec{b}_4) e vetores (\vec{i}_4 e \vec{j}_4).

Utilizando as relações (c.129) em (c.128) teremos, após o uso das relações que fornecem as componentes dos vetores \vec{n}_4 , \vec{i}_4 e \vec{j}_4 e posterior expansão das expressões resultantes em série de Taylor, as seguintes expressões finais:

$$\kappa_{x4} \cong \left(-2 + \cos^2 \alpha_1\right) \cos \alpha_1 \cdot \cos \theta_1 \cdot K + \chi_1 \cdot \left[\cos \theta_1 \cdot \frac{\Delta_{bc}}{R_1} + \text{sen } \theta_1 \cdot \frac{\Delta_{bs}}{R_1} \right] \quad (\text{c.130})$$

$$\begin{aligned} \kappa_{y4} \cong \chi_1 \left[1 - \frac{\Delta R}{R_1} + \frac{2}{\tan \alpha_1} \Delta \alpha + \frac{\cos(2\alpha_1)}{\tan^2 \alpha_1} \text{sen } \theta_1 \cdot K R_1 \right] + \\ + 2 \cdot \cos \alpha_1 \cdot \chi_1 \left[\text{sen } \theta_1 \cdot \frac{\Delta_{bc}}{R_1} - \cos \theta_1 \cdot \frac{\Delta_{bs}}{R_1} \right] \end{aligned} \quad (\text{c.131})$$

Pode-se facilmente verificar que as equações (c.130) e (c.131) recuperam os resultados obtidos para κ_{x3} e κ_{y3} , caso não haja escorregamento entre os tendões (ver equações (c.92)).

Para determinarmos df_4/dS_4 basta notar que das duas primeiras relações de (c.128) é possível obter:

$$f_4 = \arctan \left(-\frac{\kappa_{y4}}{\kappa_{x4}} \right) \quad (\text{c.132})$$

Partindo-se, então, das expressões completas (i.é., ainda não linearizadas) de κ_{x4} e κ_{y4} , pode-se determinar, a partir de (c.132), a expressão do ângulo f_4 e, conseqüentemente, de sua derivada com relação ao comprimento de arco deformado S_4 , já que:

$$\frac{df_4}{dS_4} = \frac{df_4}{d\theta_2} \cdot \left(\frac{dS_4}{d\theta_2} \right)^{-1}$$

Seguindo este procedimento, teremos como resultado final (após linearizarmos a expressão resultante através da expansão em série de Taylor em torno de $K = 0$, $\Delta R = 0$, $\Delta\alpha = 0$, $\Delta\varphi = 0$, $\Delta_{tc} = 0$, $\Delta_{ts} = 0$, $\Delta_{bc} = 0$ e $\Delta_{bs} = 0$):

$$\frac{df_4}{dS_4} \cong \frac{(2 - \cos^2 \alpha_1) \cdot \text{sen } \theta_1}{\tan \alpha_1} \cdot K - \frac{\text{sen } \alpha_1 \cdot \text{sen } \theta_1}{R_1^2} \cdot \Delta_{bc} + \frac{\text{sen } \alpha_1 \cdot \cos \theta_1}{R_1^2} \cdot \Delta_{bs} \quad (\text{c.133})$$

De (c.121), (c.128) e (c.133), resulta, assim, a seguinte expressão simplificada para κ_{t4} :

$$\begin{aligned} \kappa_{t4} = \tau_1 \left[1 - \frac{\Delta R}{R_1} + \frac{2}{\tan 2\alpha_1} \cdot \Delta\alpha - 2 \cdot \cos^2 \alpha_1 \cdot \text{sen } \theta_1 \cdot KR_1 \right] + \\ + \tau_1 \cdot \frac{\cos(2\alpha_1)}{\cos \alpha_1} \left[\text{sen } \theta_1 \cdot \frac{\Delta_{bc}}{R_1} - \cos \theta_1 \cdot \frac{\Delta_{bs}}{R_1} \right] \end{aligned} \quad (\text{c.134})$$

Mais uma vez observa-se que a expressão (c.134) é consistente com os resultados obtidos nos itens anteriores (ver equação (c.95)).

C.4.8. Determinação das componentes de deslocamento

No item C.4.4 foram propostas as seguintes aproximações para as funções deslocamento Δ_t e Δ_b (ver equações (c.111)):

$$\begin{aligned} \Delta_t = \Delta_t(\theta_2) &= \Delta_{tc} \cdot \cos \theta_2 + \Delta_{ts} \cdot \text{sen } \theta_2 \\ \Delta_b = \Delta_b(\theta_2) &= \Delta_{bc} \cdot \cos \theta_2 + \Delta_{bs} \cdot \text{sen } \theta_2 \end{aligned}$$

A partir destas funções foram determinadas, nos itens que se seguiram, diversas grandezas cinemáticas (como a deformação, as curvaturas, etc). Naturalmente, todas as grandezas obtidas ficaram em função das amplitudes desconhecidas Δ_{tc} , Δ_{ts} , Δ_{bc} e Δ_{bs} . O objetivo deste item é propor uma forma para a determinação destas amplitudes.

Para começar, vamos analisar o funcional L que fornece o comprimento de arco, medido ao longo do eixo central de um dado tendão entre dois pontos dados, na configuração deformada Σ_4 . Tal funcional pode ser expresso na seguinte forma:

$$L = \int G(\theta_4, \beta_4, \beta_4') \cdot d\theta_4$$

onde θ_4 e β_4 são os parâmetros angulares já definidos anteriormente (ver, por exemplo, item C.4.1, figura c.12), sendo θ_4 a variável independente e β_4 a variável dependente de tal forma que:

$$\begin{aligned} \beta_4 &= \beta_4(\theta_4) \\ \beta_4'(\theta_4) &= \frac{d\beta_4(\theta_4)}{d\theta_4} \end{aligned}$$

Naturalmente, decorre da própria definição do funcional L que a função $G(\theta_4, \beta_4, \beta_4')$ deve ser:

$$G(\theta_4, \beta_4, \beta_4') = \frac{dS_4}{d\theta_4} = \sqrt{\left(\frac{dx_4}{d\theta_4}\right)^2 + \left(\frac{dy_4}{d\theta_4}\right)^2 + \left(\frac{dz_4}{d\theta_4}\right)^2} \quad (\text{c.135})$$

Utilizando, então, as equações paramétricas (c.98) em (c.135), resulta:

$$G(\theta_4, \beta_4, \beta_4') = \left[R_2^2 + \left(\frac{1}{K} + R_2 \cdot \text{sen } \theta_4 \right)^2 \cdot \left(\frac{d\beta_4}{d\theta_4} \right)^2 \right]^{1/2}$$

A equação de Euler-Lagrange nos fornece a condição para a obtenção de um extremo do funcional L , ou seja, a condição para minimizar o comprimento de arco L entre dois pontos dados do eixo central do tendão. Como o comprimento considerado é o comprimento deformado na configuração Σ_4 , esta condição é equivalente a uma condição de mínima energia, se considerarmos a energia de deformação devida às forças normais de tração no tendão como sendo a parcela preponderante na energia

de deformação total do tendão¹⁰. A equação de Euler-Lagrange é dada por (ver, p. ex., Shames; Dym [76]):

$$\frac{d}{d\theta_4} \left[\frac{\partial G}{\partial \beta_4'} \right] - \frac{\partial G}{\partial \beta_4} = 0$$

Como $\frac{\partial G}{\partial \beta_4} = 0$, resulta:

$$\frac{d}{d\theta_4} \left[\frac{\partial G}{\partial \beta_4'} \right] = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial G}{\partial \beta_4'} = C$$

ou seja:

$$\frac{\left(\frac{1}{K} + R_2 \cdot \text{sen } \theta_4 \right)^2 \cdot \left(\frac{d\beta_4}{d\theta_4} \right)}{\sqrt{R_2^2 + \left(\frac{1}{K} + R_2 \cdot \text{sen } \theta_4 \right)^2 \cdot \left(\frac{d\beta_4}{d\theta_4} \right)^2}} = C \quad (\text{c.136})$$

onde C é uma constante a ser determinada.

Após algumas manipulações algébricas de (c.136), é possível mostrar que a equação de Euler-Lagrange fornece a seguinte relação:

$$\frac{d\beta_4}{d\theta_4} = \frac{C \cdot K \cdot \eta}{(1 + \eta \cdot \text{sen } \theta_4) \cdot \sqrt{(1 + \eta \cdot \text{sen } \theta_4)^2 - (C \cdot K)^2}} \quad (\text{c.137})$$

onde $\eta = K \cdot R_2$ (conforme equação (c.67)).

A integral de (c.137) em relação à θ_4 não pode ser expressa através de funções analiticamente conhecidas pois recai numa integral elíptica. Contudo, para pequenas curvaturas (i.é., para $\eta \ll 1$), poderíamos propor uma aproximação para a função dada por (c.137), através de sua expansão em série de Taylor em torno de $K = 0$ (ou, de forma equivalente, em torno de $\eta = 0$). O único problema neste procedimento é que não podemos garantir, a priori, se a constante de integração C depende, ou não,

¹⁰ Esta hipótese é justificável, uma vez que os adimensionais que estabelecem a relação entre a rigidez axial (EA) dos tendões e os valores de rigidez flexional e torsional (EI_x , EI_y e GJ) são bem maiores que a unidade (ex.: $EAR^2/EI_x \gg 1$).

de K , pois, se $C = C(K)$, a linearização não será feita corretamente. É preciso, então, determinarmos em primeiro lugar uma estimativa para a constante C , mesmo que para pequenos valores de curvatura. Para isto, devemos observar que:

$$\frac{d\beta_4}{d\theta_4} = \frac{d\beta_4}{d\theta_2} \left(\frac{d\theta_4}{d\theta_2} \right)^{-1} \quad (\text{c.138})$$

Lembrando, contudo, que (ver equações (c.63), (c.104) e (c.105)):

$$\begin{aligned} \theta_4 &\cong \theta_2 + \left(\frac{\text{sen } \alpha_2}{R_2 \cdot \xi} \right) \Delta_t - \left(\frac{\text{cos } \alpha_2 \cdot (1 + \eta \cdot \text{sen } \theta_2)}{R_2 \cdot \xi} \right) \Delta_b \\ \beta_4 &\cong \frac{K \cdot R_2 \cdot (\theta_2 - \theta_0)}{\tan \alpha_2} + \frac{K \cdot \Delta_t \cdot \text{cos } \alpha_2}{\xi} + \frac{K \cdot \Delta_b \cdot \text{sen } \alpha_2}{\xi \cdot (1 + \eta \cdot \text{sen } \theta_2)} \end{aligned} \quad (\text{c.139})$$

e que, segundo as aproximações dadas por (c.111),

$$\begin{aligned} \Delta_t &= \Delta_t(\theta_2) = \Delta_{tc} \cdot \text{cos } \theta_2 + \Delta_{ts} \cdot \text{sen } \theta_2 \\ \Delta_b &= \Delta_b(\theta_2) = \Delta_{bc} \cdot \text{cos } \theta_2 + \Delta_{bs} \cdot \text{sen } \theta_2 \end{aligned}$$

então, se substituirmos as relações dadas acima na relação (c.138) e esta última na relação (c.136), é possível mostrar que, ao linearizarmos o adimensional “ $K.C$ ” em torno de $K=0$, $\Delta_{tc}=0$, $\Delta_{ts}=0$, $\Delta_{bc}=0$ e $\Delta_{bs}=0$, obteremos:

$$\begin{aligned} K.C &\cong \text{cos } \alpha_2 + \left[KR_2 \cdot \text{cos } \alpha_2 \cdot (1 + \text{sen}^2 \alpha_2) - \text{sen}^2 \alpha_2 \cdot \frac{\Delta_{bc}}{R_2} \right] \text{sen } \theta_2 + \\ &+ \left[\text{sen}^2 \alpha_2 \cdot \frac{\Delta_{bs}}{R_2} \right] \text{cos } \theta_2 \end{aligned} \quad (\text{c.140})$$

Como o adimensional “ $K.C$ ” deve ser uma constante e, portanto, independente da variável θ_4 (que, em primeira aproximação, coincide com θ_2), devemos impor que os coeficientes das funções $\text{sen } \theta_2$ e $\text{cos } \theta_2$ sejam ambos nulos, o que nos leva a:

$$\begin{aligned} \Delta_{bc} &= K \cdot R_2^2 \cdot \text{cos } \alpha_2 \cdot \left(1 + \frac{1}{\text{sen}^2 \alpha_2} \right) \\ \Delta_{bs} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{c.141})$$

Se ainda considerarmos a expansão em série de Taylor de (c.141) em torno de $\Delta R = 0$ e $\Delta \alpha = 0$, pode-se mostrar que, em primeira aproximação, temos:

$$\Delta_{bc} = K.R_1^2 \cdot \cos \alpha_1 \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin^2 \alpha_1} \right) \quad (c.142)$$

$$\Delta_{bs} = 0$$

Ficam, assim, determinados os coeficientes Δ_{bc} e Δ_{bs} . Para a determinação dos coeficientes Δ_{tc} e Δ_{ts} , devemos observar que a expressão da deformação axial, medida na direção tangente ao eixo central do tendão, fornece (ver equação (c.113)):

$$\varepsilon_{t,14} \cong (\sin^2 \alpha_1) \frac{\Delta R}{R_1} + (\sin \alpha_1 \cdot \cos \alpha_1) R_1 \frac{\Delta \varphi}{L_1} + (\cos^2 \alpha_1) \frac{\Delta L}{L_1} +$$

$$+ \left[KR_1 \cos^2 \alpha_1 - \sin \alpha_1 \cdot \frac{\Delta_{tc}}{R_1} \right] \cdot \sin \theta_1 + \left[\sin \alpha_1 \cdot \frac{\Delta_{ts}}{R_1} \right] \cdot \cos \theta_1$$

Se considerarmos que após o escorregamento total dos tendões haverá um estado uniforme de deformação (mantido pela aplicação das forças de tração no cabo), podemos impor que os coeficientes das funções $\sin \theta_1$ e $\cos \theta_1$ sejam também ambos nulos, o que nos traz:

$$\Delta_{tc} = \frac{K.R_1^2 \cdot \cos^2 \alpha_1}{\sin \alpha_1} \quad (c.143)$$

$$\Delta_{ts} = 0$$

Apenas para completar o raciocínio iniciado com a proposta de linearização da função dada por (c.137)¹¹, devemos notar que, ao substituirmos

$$K.C = \cos \alpha_2$$

na equação (c.137), teremos:

$$\frac{d\beta_4}{d\theta_4} \cong \frac{\cos \alpha_2 \cdot \eta}{(1 + \eta \cdot \sin \theta_4) \cdot \sqrt{(1 + \eta \cdot \sin \theta_4)^2 - (\cos \alpha_2)^2}} \quad (c.144)$$

¹¹ Embora isto não seja mais necessário, já que as amplitudes das funções deslocamento acabaram sendo obtidas durante a discussão da proposta de linearização da função dada por (c.137).

Lembrando que $\eta = K.R_2$, teremos, após efetuarmos uma série de substituições¹² e linearizarmos a expressão (c.144) em torno de $K = 0$, $\Delta\alpha = 0$ e $\Delta R = 0$, a seguinte expressão simplificada:

$$\frac{d\beta_4}{d\theta_4} \cong \frac{K.R_1}{\tan \alpha_1} \left[1 + \frac{\Delta R}{R_1} - \frac{2.\Delta\alpha}{\sin 2\alpha_1} - K.R_1.\sin \theta_2 \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin^2 \alpha_1} \right) \right] \quad (\text{c.145})$$

Pode-se verificar, após cuidadoso estudo, que a expressão (c.145) consegue recuperar integralmente uma expressão análoga dada por Féret; Leroy; Estrier [25] na forma¹³:

$$\frac{d\beta_4}{d\theta_4} \cong \frac{K.R_1}{\tan \alpha_1} [1 + z.K.R_1.\sin \theta_2] \quad (\text{c.146})$$

Com referência à expressão proposta por estes autores, deve-se destacar que:

- i) o procedimento para sua obtenção não é sequer revelado pelos autores que se limitam a justificar seu emprego através de “estudos anteriores de curvas sobre superfícies”. Alguns indícios para a obtenção desta relação são brevemente citados num artigo anterior de Féret; Bournazel [24];
- ii) os autores omitem o fato de que a constante z que aparece na relação é dada por:

$$z = -1 - \frac{1}{\sin^2 \alpha_1}$$

fato este que pode ser verificado através da comparação da relação (c.146) com a expressão (c.145) aqui deduzida; ou ainda através de comparações entre outras expressões definidas pelos autores e expressões análogas (não demonstradas) dadas no artigo de Féret; Bournazel [24];

- iii) a expressão proposta por Féret; Leroy; Estrier [25] não considera mudanças na geometria decorrentes de carregamentos que não a flexão do cabo, sendo, portanto, “menos completa” que a expressão (c.145) apresentada neste trabalho.

¹² A seqüência é: substituem-se as relações (c.142) e (c.143) nas relações (c.111). Em seguida, as relações (c.111) são substituídas na primeira das relações (c.139) e esta última na equação (c.144). Finalmente são feitas as substituições: $R_2 = R_1 + \Delta R$ e $\alpha_2 = \alpha_1 + \Delta\alpha$.

¹³ A expressão foi reescrita segundo nossa convenção e notação para facilitar a comparação com a equação (c.145).

Deve-se observar finalmente que ao substituírmos as expressões (c.142) e (c.143), que forcecem as amplitudes das funções deslocamento, nas relações (c.111) obtém-se:

$$\begin{aligned}\Delta_t(\theta_2) &= \frac{K.R_1^2 \cdot \cos^2 \alpha_1}{\text{sen } \alpha_1} \cdot \cos \theta_2 \\ \Delta_b(\theta_2) &= K.R_1^2 \cdot \cos \alpha_1 \cdot \left(1 + \frac{1}{\text{sen}^2 \alpha_1} \right) \cdot \cos \theta_2\end{aligned}\tag{c.147}$$

Com relação a estas expressões é importante destacar que:

- i) os resultados são válidos apenas para pequenas curvaturas ($K.R_1 \ll 1$);
- ii) a metodologia proposta (para a obtenção dos coeficientes das funções aproximadoras) pode ser estendida, se for desejável, para incluir outros termos da série de Fourier, como $\text{sen } 2\theta_1$, $\text{cos } 2\theta_1$, etc;
- iii) as parcelas de energia de deformação do tendão devidas às variações de curvatura e de torção foram consideradas desprezíveis face à energia de deformação devida a sua extensibilidade;
- iv) as expressões obtidas recuperam as expressões propostas por Féret; Bournazel [24] e por Féret; Leroy; Estrier [25], uma vez desprezadas as variações de raio e do ângulo de assentamento.

Anexo D: Fórmulas para camadas cilíndricas de parede espessa

Este anexo trata da obtenção dos campos de deslocamentos, deformações e tensões em camadas cilíndricas de parede espessa, submetidas a carregamentos axissimétricos como pressão interna e externa e tração axial. Admitiremos que o material que constitui a camada é homogêneo e com comportamento elástico linear. Serão admitidas também as hipóteses de que o carregamento aplicado à camada independe da coordenada z (direção axial do tubo) e de linearidade geométrica (pequenas deformações e pequenos deslocamentos).

Consideremos a figura d.1, que mostra a seção transversal de uma camada plástica submetida à pressão interna p_i e pressão externa p_e . Sejam a e b os valores dos raios interno e externo da camada, e E e ν as constantes elásticas do material.

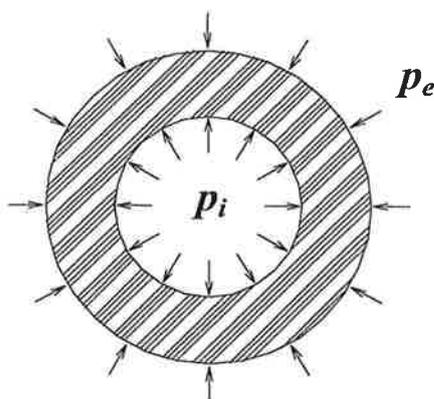


Figura d.1: Tubo de parede espessa sob pressão interna e externa.

Devido à simetria geométrica e de carregamento, a única equação de equilíbrio de forças que precisa ser considerada é na direção radial, sendo expressa por (ver, por exemplo, Timoshenko [82]):

$$\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{d\sigma_r}{dr} = 0 \quad (\text{d.1})$$

As relações deslocamento-deformação são, neste caso, dadas por:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{du}{dr} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u}{r}\end{aligned}\tag{d.2}$$

e as equações constitutivas do material são:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{1}{E}[\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)] \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E}[\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)]\end{aligned}\tag{d.3}$$

ou, alternativamente:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) + 2G\varepsilon_r \\ \sigma_\theta &= \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) + 2G\varepsilon_\theta \\ \sigma_z &= \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) + 2G\varepsilon_z\end{aligned}\tag{d.4}$$

onde, $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, e $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

Substituindo as equações (d.2) em (d.4), e estas em (d.1), mostra-se que a equação diferencial que rege o campo de deslocamentos radiais $u(r)$ é dada por:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0\tag{d.5}$$

cuja solução é:

$$u(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r}\tag{d.6}$$

Sendo as constantes de integração C_1 e C_2 obtidas através das seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned}r = a &\Rightarrow \sigma_r = -p_i \\ r = b &\Rightarrow \sigma_r = -p_e\end{aligned}$$

resultando em:

$$C_1 = \frac{(p_i \cdot a^2 - p_e \cdot b^2)}{(b^2 - a^2)} \cdot \frac{\nu}{\lambda} - \nu \cdot \varepsilon_z$$

$$C_2 = \frac{(p_i - p_e) \cdot a^2 b^2}{2G \cdot (b^2 - a^2)}$$

E o campo de deslocamentos radiais fica, então, dado por:

$$u(r) = \left[\frac{(p_i \cdot a^2 - p_e \cdot b^2)}{(b^2 - a^2)} \cdot \frac{\nu}{\lambda} - \nu \cdot \varepsilon_z \right] \cdot r + \left[\frac{(p_i - p_e) \cdot a^2 b^2}{2G \cdot (b^2 - a^2)} \right] \cdot \frac{1}{r} \quad (\text{d.7})$$

e o campo de tensões fica:

$$\sigma_r = \frac{a^2}{(b^2 - a^2)} \cdot \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \cdot p_i - \frac{b^2}{(b^2 - a^2)} \cdot \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cdot p_e$$

$$\sigma_\theta = \frac{a^2}{(b^2 - a^2)} \cdot \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \cdot p_i - \frac{b^2}{(b^2 - a^2)} \cdot \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \cdot p_e \quad (\text{d.8})$$

$$\sigma_z = \frac{2\nu \cdot (p_i \cdot a^2 - p_e \cdot b^2)}{(b^2 - a^2)} + E \cdot \varepsilon_z$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ADINA: Automatic dynamic incremental nonlinear analysis. ADINA user interface, users guide. Watertown: ADINA R & D. Inc., 1996. 366p. (Report ARD-96-1).
- [2] ADINA: Automatic dynamic incremental nonlinear analysis. ADINA theory and modeling guide. Watertown:ADINA R & D, Inc., 1997. 474p. v.1 (Report ARD-97-7).
- [3] ADINA: Automatic dynamic incremental nonlinear analysis. ADINA system 7.2, release notes. Watertown: ADINA R & D, Inc, 1998. 1v.
- [4] ALEXANDER, J.C.; ANTMAN, S.S. The ambiguous twist of Love. **Quarterly of Applied Mathematics**, Charles St. v.40, n.1, p.83-92, abr. 1982.
- [5] ALGOR, **Manual do usuário**. s.n.t.
- [6] ANFLEX . **Análise não-linear de risers e linhas de ancoragem**: versão 2.0. s.l: Cenpes/Diprex/Sedem , 1991.
- [7] ARANHA, J.A.P.; PESCE, C.P.; MARTINS, C.A. **Mecânica de cabos submersos**: comportamento estrutural estático. São Paulo: EPUSP/PMC, 1992. v.1., 28p. (Monografia do Departamento de Engenharia Mecânica, 76/92).
- [8] ARANHA, J.A.P.; PESCE, C.P.; MARTINS, C.A. **Mecânica de cabos submersos**: comportamento dinâmico. São Paulo:EPUSP/PMC, 1992. v.2, 60p. (Monografia do Departamento de Engenharia Mecânica, 76/92).

- [9] ARANHA, J.A.P.; PESCE, C.P.; MARTINS, C.A. **Mecânica de cabos submersos: efeito local de flexão via teoria de camada limite**. São Paulo: EPUSP/PMC, 1992. v.3, 23p. (Monografia do Departamento de Engenharia Mecânica, 77/92).
- [10] ARANHA, J.A.P.; PESCE, C.P.; MARTINS, C.A.; ANDRADE, B.L.R. Mechanics of submerged cables: asymptotic solution and dynamic tension. In: INTERNATIONAL OFFSHORE & POLAR ENGINEERING CONFERENCE, 3., Singapore, 1993. **Proceedings**. Golden: Isope, 1993. v. 2, p.345-356.
- [11] ARANHA, J.A.P. et al. **Estudo de comportamento estrutural de um cabo umbilical 9+3+1: Avaliação preliminar de susceptibilidade ao fenômeno de “kink” nos cabos elétricos de cabos umbilicais**. São Paulo, EPUSP/PNV/Pirelli, 1998. v.3, 13p. (Relatório técnico).
- [12] ARANHA, J.A.P.; PINTO, M.O. Dynamic tension in risers and mooring lines: an algebraic approximation for harmonic excitation. **Applied Ocean Research**, Southampton, v.23, n.2, p.63-81, 2001.
- [13] ARANHA, J.A.P.; PINTO, M.O.; SILVA, R.M.C. On the dynamic compression of risers: an analytic expression for the critical load. **Applied Ocean Research**, Southampton, v.23, n.2, p.83-91, 2001.
- [14] ATANACKOVIC, T.M. **Stability theory of elastic rods**. World Scientific Publishing : Singapura, 1997.
- [15] BOULOS, P.; ZAGOTTIS, D.L. **Mecânica e Cálculo: um curso integrado**. São Paulo: Edgard Blücher, 1991. v.1.

- [16] BROWN, P.A.; SOLTANAHMADI, A.; CHANDWANI, R. Problems encountered in detailed design of flexible riser systems. **Engineering Structures**, Guildford, v. 11, n.4, p.234-241, out. 1989.
- [17] CLAYDON, P.; COOK, G.; BROWN, P.A.; CHANDWANI, R. A theoretical approach to prediction of service life of unbonded flexible pipes under dynamic loading conditions. **Marine Structures**, Oxford, v. 5, n.5, p.399-429, 1992.
- [18] COCKS, P.J. Testing and structural integrity of flexibel pipes. **Engineering Structures**, Guildford, v. 11, n.4,p.217-222, out. 1989.
- [19] COSTELLO, G.A. Large deflections of helical spring due to bending. **Journal of the Engineering Mechanics Division- ASCE**, New York, v.103, n.3, p.481-487, jun. 1977.
- [20] COSTELLO, G.A. **Theory of wire rope**. New York:Springer Verlag, 1990.
- [21] COYNE, J. Analysis of the formation and elimination of loops in twisted cable, **IEEE Journal of Oceanic Engineering**, New York, v.15, n. 2., p. 72-83, abr.1990.
- [22] CRUZ, F.T.L. **Análise estrutural de linhas flexíveis pelo método dos elementos finitos**. São Paulo, 1996. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.
- [23] CUSTÓDIO, A.B.; VAZ, M.A.; ESTEFEN, S. F. Análise local do comportamento de umbilicais submarinos sob carregamento axissimétrico. (Em CD-Rom) In: CONGRESSO NACIONAL DE TRANSPORTE MARÍTIMOS, CONSTRUÇÃO NAVAL E OFFSHORE, 17, Rio de Janeiro, 1998. **Anais**. Rio de Janeiro: SOBENA, 1998. 12p.

- [24] FÉRET, J.J. ; BOURNAZEL, C.L. Calculation of stresses and slip in structural layers of unbonded flexible pipes. **Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering**, New York, v. 109, p.263-269, 1987.
- [25] FÉRET, J.; LEROY, J.M.; ESTRIER, P. Calculation of stresses and slips in flexible armour layers with layers interaction. **Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering**, New York,v.117, p.469-474, 1995.
- [26] GOTO, Y; OKAMOTO, T.; ARAKI, M.; FUKU, T. Analytical study of the mechanical strength of flexible pipes. **Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering**, New York, v.109, p.249-253, ago. 1987.
- [27] GOTTLIEB, O.; PERKINS, N.C. Local and global bifurcation analyses of a spatial cable elastica. **Journal of Applied Mechanics**, New York, v. 66, n.2, p. 352-360, jun. 1999.
- [28] HIBBELER, R.C. **Mechanics of Materials**. 3.ed. s.l.: Prentice Hall, 1997.
- [29] HILL, R.T.; MEASAMER, J.C. Advanced flexible pipe materials for aggressive hydrocarbon service. In: INTERNATIONAL OFFSHORE AND POLAR ENGINEERING CONFERENCE, 3, Singapore, 1993. **Proceedings**. Golden, ISOPE, 1993. v.2, p.359-364.
- [30] HUANG, N.C. Finite extension of an elastic strand with a central core. **Journal of Applied Mechanics**, New York, v.45, n.4, p.852-858, dez. 1978.
- [31] Informativo do Instituto de Estudos Avançados da Universidade de São Paulo, São Paulo, v.3, n° 43, maio/jul. 1996.

- [32] JACOB, B.P. **Estratégias computacionais para a análise não-linear dinâmica de estruturas complacentes para águas profundas.** Rio de Janeiro, 1990. Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- [33] JUVINALL, R.C.; MARSHEK, K.M. **Fundamentals of machine component design.** 2.ed. New York: John Wiley, 1983. 761p.
- [34] KNAPP, R.H. Derivation of a new stiffness matrix for helically armoured cables considering tension and torsion. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, London, v. 14, n.4, p.515-529, 1979.
- [35] KNAPP, R.H. Structural modeling of undersea cables. **Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering**, New York, v.111, p.323-330, nov. 1989.
- [36] LANTEIGNE, J. Theoretical estimation of the response of helically armored cables to tension, torsion, and bending. **Journal of Applied Mechanics**, New York, v. 52, n.2, p.423-432, jun. 1985.
- [37] LE, T.T.; KNAPP, R.H. A finite element model for cables with nonsymmetrical geometry and loads. **Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering**, New York, v. 116, n.1, p.14-20, fev. 1994.
- [38] LEGALLAIS, L.; STRATFOLD, M.; HARDY, J. A new generation of umbilical hoses: field drilling and development systems. In: ANNUAL OFFSHORE TECHNOLOGY CONFERENCE, Houston, 1993. **Proceedings.** Dallas, OTC, 1993. v.4, p.115-123.
- [39] LEKHNITSKII, S.G. **Theory of Elasticity of an Anisotropic Body.** Moscow: Mir Publishers, 1981.

- [40] LOVE, A.E.H. **A treatise on the mathematical theory of elasticity**. 4. ed. New York: Dover Publications, 1944. 643p.
- [41] LU, C.L.; PERKINS, N.C. Nonlinear spatial equilibria and stability of cables under uni-axial torque and thrust. **Journal of Applied Mechanics**, New York, v. 61, n.4, p.879-886, dez. 1994.
- [42] LU, C.L.; PERKINS, N.C. Complex spatial equilibria of U-joint supported cables under torque, thrust and self-weight. **International Journal Non-linear Mechanics**, Oxford, v. 30, n. 3, p.271-285, 1995.
- [43] MAKINO, Y. et al. Development of light-weight flexible riser pipe. Field drilling and development systems proceedings. In: ANNUAL OFFSHORE TECHNOLOGY CONFERENCE, Houston, 1993. **Proceedings**. Dallas, OTC, 1993. v.3, p.523-530.
- [44] MAPLE V, Release 4, versão 4.00b. Copyright © 1981-1996 de Waterloo Maple Inc.
- [45] MEIROVITCH, L. **Methods of analytical dynamics**. New York: McGraw-Hill, 1970. 524p.
- [46] MOORE, F. Materials for flexible riser systems: problems and solutions. **Engineering Structures**, Guildford, v. 11, n.4, p.208-216, out. 1989.
- [47] MOURELLE, M.M.; GONZALEZ, E.C. Programa ANFLEX: curso de utilização. s.l.:Cenpes/Diprex/Sedem, 1991.

- [48] MOURELLE, M.M. **Análise dinâmica de sistemas estruturais constituídos por linhas marítimas**. Rio de Janeiro, 1998. Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- [49] O'BRIEN, P.J.; MCNAMARA, J.F. Significant characteristics of three-dimensional flexible riser analysis. **Engineering Structures**, Guildford, v. 11, n.4, p.223-233, out. 1989.
- [50] PATEL, M.H.; SEYED, F.B. Internal flow-induced behaviour of flexible risers. **Engineering Structures**, Guildford, v. 11, n.4, p.266-280, out. 1989.
- [51] PATEL, M.H.; SEYED, F.B. Review of flexible riser modelling and analysis techniques. **Engineering Structures**, Guildford, v. 17, n. 4, p.293-304, maio, 1995.
- [52] PATEL, M.H.; WITZ, J.A.; TAN, Z. **A flexible riser design manual**. 2.ed. London: Bentham Press, 1994. 1v.
- [53] PESCE, C.P.; ARANHA, J.A.P.; MARTINS, C.A.; TANAKA, D.; TANIGUCHI, C. **Estudos preliminares visando o desenvolvimento de métodos de previsão de vida útil de cabos umbilicais e tubos flexíveis para operação offshore**: programa básico de pesquisa e desenvolvimento. São Paulo: EPUSP/Pirelli, 1993. (Relatório Técnico, 02-1993).
- [54] PESCE, C.P. **Cabos e tubos submersos em configuração de catenária**: elementos de análise e dimensionamento na situação de operação. São Paulo: EPUSP, 1994. 51p. (Monografia do Departamento de Engenharia Mecânica).

- [55] PESCE, C.P. **Cabos e tubos submersos em configuração de catenária:** elementos de análise e dimensionamento; fadiga. São Paulo:EPUSP, 1994. 42 p. (Monografia do Departamento de Engenharia Mecânica).
- [56] PESCE, C.P.; MARTINS, C.A.; ARANHA, J.A.P. **Tubo flexível de produção:** modelo simplificado de comportamento estrutural sob carregamento localizado pela ação de lagartas de tração durante o lançamento; Crushing: desenvolvimento de produtos da linha petróleo-offshore. São Paulo: EPUSP/Pirelli, 1995. v.1. (Relatório técnico).
- [57] PESCE, C.P.; MARTINS, C.A.; ARANHA, J.A.P. **Tubo flexível de produção:** modelo simplificado de comportamento estrutural sob carregamento localizado pela ação de lagartas de tração durante o lançamento; Efeito do “squeezing” e carregamento ao longo da linha: desenvolvimento de produtos da linha petróleo-offshore São Paulo: EPUSP/Pirelli, 1995. v.2. (Relatório técnico).
- [58] PESCE, C.P., RAMOS JR., R.; ARANHA, J.A.P. **Desenvolvimento de métodos de previsão de vida útil de produtos da linha petróleo-offshore:** distribuição de esforços solicitantes na seção, modelo analítico. São Paulo: EPUSP/Pirelli, 1996. v.1., 76p. (Relatório técnico, FI-RT-1.3.1).
- [59] PESCE, C.P.; RAMOS JR., R.; ARANHA, J.A.P. **Desenvolvimento de métodos de previsão de vida útil de produtos da linha petróleo-offshore:** distribuição de esforços solicitantes na seção, aplicação do método dos elementos finitos. São Paulo: EPUSP/Pirelli, 1997. v.2, 60p. (Relatório. Técnico, FI-RT-1.3.1).
- [60] PESCE, C.P. **Mecânica de cabos e tubos submersos lançados em “catenária”: uma abordagem analítica e experimental.** São Paulo, 1997. Tese (Livre Docência) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.

- [61] PESCE, C.P. et al. **Estudo de comportamento estrutural de um cabo umbilical 9+3+1**: avaliação de vida útil e análise em condições estáticas e dinâmicas. São Paulo: EPUSP-PNV/Pirelli, 1998. v.1, 26p. (Relatório técnico).
- [62] PESCE, C.P.; MARTINS, C.A.; ARANHA, J.A.P.; RAMOS JR., R.
Desenvolvimento de modelos voltados à mecânica estrutural de cabos umbilicais e tubos flexíveis. In: WORKSHOP REDE DE PESQUISA EM TECNOLOGIA SUBMARINA, Rio de Janeiro, 1998. **Anais**. Rio de Janeiro, RECOPE/TECSUB/COPPE/UFRJ, 1998. n.p.
- [63] PHILLIPS, J.W.; COSTELLO, G.A. Contact stresses in twisted wire cables. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, v. 99, p.331-341, abr.1973.
- [64] PHILLIPS, J.W.; COSTELLO, G.A. Analysis of wire ropes with internal-wire-rope cores. **Journal of Applied Mechanics**, New York, v. 52, n.3, p.510-516, set. 1985.
- [65] PROGELHOF, R.C. & THRONE, J.L. **Polymer engineering principles**: properties, processes and tests for design. Munich: Hanser Publishers, 1993. 918p.
- [66] RAMOS JR., R. PESCE, C.P.; SANTOS, M.F. **Estudo de instabilidade estrutural de uma mangueira reforçada por carcaça intertravada para uso em cabo umbilical**: cálculo da distribuição de pressão ao longo da carcaça por elementos finitos. EPUSP-PNV/Pirelli, 1997. v.2. (Relatório técnico).

- [67] RAMOS JR., R. et al. **Estudo de comportamento estrutural de um cabo umbilical 9+3+1**: estudo de instabilidade estrutural das veias do núcleo elétrico em cabos umbilicais; determinação do campo de deformações axiais nas veias do núcleo elétrico por elementos finitos. EPUSP/PNV/Pirelli, 1998. v.2, (Relatório técnico).
- [68] RAMOS JR., R.; PESCE, C.P.; MARTINS, C.A. Some remarks on the structural behaviour of flexible pipes subjected to axial loading. In: WORKSHOP ON SUBSEA PIPELINES,2., Rio de Janeiro, 1999. Proceedings. Rio de Janeiro, UFRJ, 1999. p.133-147.
- [69] RAMOS JR., R.; PESCE, C.P.; MARTINS, C.A. A comparative analysis between analytical and FE-based models for flexible pipes subjected to axisymmetric loads. In: **INTERNATIONAL SOCIETY OF OFFSHORE AND POLAR ENGINEERING CONFERENCE, 10., Seattle, 2000. ISOPE 2000:proceedings. Cupertino:ISOPE, 2000. v.2, p.80-88.**
- [70] RAMOS JR., R.; PESCE, C.P. A stability analysis of risers subjected to dynamic compression coupled with twisting. (Em CD-Rom) **INTERNATIONAL CONFERENCE ON OFFSHORE MECHANICS AND ARCTIC ENGINEERING, Rio de Janeiro, 2001. OMAE 2001: proceedings. New York: ASME, 2001.**
- [71] RAMOS JR., R.; PESCE, C.P. Structural mechanics of flexible risers subjected to combined loads. (Em CD-Rom) In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECÂNICA/BRAZILIAN CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING, 16., Uberaba, 2001. COBEM 2001: anais. Uberlândia, ABCM,2001.
- [72] RICARDO, O.G.S. **Teoria das Estruturas**. São Paulo: McGraw-Hill, 1978. 670p.

- [73] ROSENTHAL, F., The application of Greenhill's formula to cable hocking.
Journal of Applied Mechanics, New York, v.43, n.4, p. 681-683, 1976.
- [74] SAEVIK, S. A finite element model for predicting stresses and slip in flexible pipe armouring tendons. **Computers & Structures**, New York, v. 46, n. 2, p. 219-230, 1993.
- [75] SEYED, F.B.; PATEL, M.H. Mathematics of flexible risers including pressure and internal flow effects. **Marine Structures**, Barking, v. 5, p. 121-150, 1992.
- [76] SHAMES, I.H.; DYM, C.L. **Energy and finite element methods in structural mechanics**. Washington : Hemisphere Pub. Corp.,1985. 757p.
- [77] SOUZA, A.P.F., ESTEFEN, S.F., VAZ, M.A.; ALVES, T.M.J. **Colapso de dutos flexíveis sob pressão externa**. (Em CD-Rom) In: CONGRESSO NACIONAL DE TRANSPORTE MARÍTIMOS, CONSTRUÇÃO NAVAL E OFFSHORE, 17, Rio de Janeiro, 1998. **Anais**. Rio de Janeiro: SOBENA, 1998. 8p.
- [78] SOUZA, L.A.L. **Rigidez à flexão de cabos umbilicais submarinos**. Rio de Janeiro, 1998. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- [79] STUMP, D.M.; FRASER, W.B. The writhing of circular cross-sections rods: undersea cables to DNA supercoils. **Proceedings of the Royal Society of London: Series A, Mathematical and physical sciences**, Grã Bretanha, n. 454, p.2123-2156, ago. 1998.

- [80] STUMP, D.M.; FRASER, W.B. Multiple solutions for writhed rods: implications for DNA supercoiling. **Proceedings of the Royal Society of London: Series A, Mathematical and physical sciences**, Grã Bretanha, n. 456, p.455-467, fev. 2000.
- [81] SUGIER, A. et al. Weight reduction of flexible pipes using aluminium alloys. In: INTERNATIONAL OFFSHORE AND POLAR ENGINEERING CONFERENCE, 3, Singapore, 1993. **Proceedings**. Golden, ISOPE, 1993. p.194-200.
- [82] TIMOSHENKO, S.P. **Resistência dos Materiais**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1976. v.2.
- [83] TIMOSHENKO, S.P., KRIEGER, S.W. **Theory of plates and shells**. 26.ed. Singapore: McGraw-Hill, 1959.
- [84] TIMOSHENKO, S.P.; GOODIER, J.N. **Teoria da Elasticidade**. 3.ed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1980. 545p.
- [85] TIMOSHENKO, S.P.; GERE, J.E. **Mecânica dos Sólidos**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1984. v.2.
- [86] WITZ, J.A.; TAN, Z. On the axial-torsional structural behaviour of flexible pipes, umbilicals and marine cables. **Marine Structures**, Barking, v. 5, p.205-227, 1992.
- [87] WITZ, J.A.; TAN, Z. On the flexural structural behaviour of flexible pipes, umbilicals and marine cables. **Marine Structures**, Barking, v. 5, p.229-249, 1992.

- [88] WITZ, J.A. A case study in the cross-section analysis of flexible risers. **Marine Structures**, Barking, v. 9, p.885-904, 1996.

