

AGENOR DE TOLEDO FLEURY  
Engenheiro Mecânico, ITA, 1973  
Mestre em Engenharia, Escola Politécnica da USP, 1978

ESTIMADORES DE ESTADO DE SISTEMAS DINÂMICOS  
BASEADOS NO CONCEITO DE DUALIDADE

Tese apresentada à Escola Politécnica da USP para obtenção do Título de Doutor em Engenharia.

Orientador: Prof. Dr. ATAIR RIOS NETO  
Pesquisador Titular do Departamento  
de Mecânica Espacial e Controle -  
Instituto de Pesquisas Espaciais -  
CNPq

São Paulo, 1985

DEDALUS - Acervo - EPBC



31200030657

*Ft. 190*

A Cássia, Fábio, Maurício  
e Camila.

## AGRADECIMENTOS

Deixando de lado o tom impessoal que deve ser colocado ao longo do trabalho, quero primeiramente citar as pessoas para as quais palavras de agradecimento significam resgatar apenas parte de minha dívida.

- Cássia, minha mulher, Fábio e Maurício, meus filhos, cujo apoio, carinho e espírito de sacrifício são minha fonte de energia;
- Dr. Atair Rios Neto, mestre e amigo, de quem recebi, além da orientação séria e dedicada, do apoio constante e das idéias francas, um exemplo de dignidade;
- Dr. Luis Novaes Ferreira França, cuja ajuda amigável, incansável e desinteressada me abriu caminho para concluir esse trabalho.

Agradeço sinceramente, também, aos colegas que colaboraram diretamente neste trabalho, entre os quais destaco Hélio K. Kuga, Roberto V. F. Lopes, Dr. João Moro, Dr. Luiz Danilo D. Ferreira e Dr. Antonio F. Martins Neto, e aos que indiretamente participaram na forma de apoio às minhas outras atividades. No plano de instituições, além do INPE, através do Departamento de Mecânica Espacial e Controle e do projeto CONTAT, gostaria de também agradecer ao Departamento de Engenharia Mecânica da EPUSP e ao seu pessoal o suporte recebido no período inicial deste trabalho. Finalmente, meus agradecimentos às Sras. Vera L.C. Corrã e Ma. Auxiliadora M.A. Bonafê pela eficiente datilografia do texto.

### ABSTRACT

*This work presents the development of a new state estimator for dynamic systems based upon the duality concept between state estimation and optimal control problems. The main objective is a preliminar qualification of the estimator for use in real time nonlinear systems which can recursively be approximated by linear systems. The duality concept is used to transform the original estimation problem in an equivalent one of virtual control. This control problem is then used to generate an adaptive, locally convergent algorithm where, instead of full state estimation, one has to estimate just a control vector with smaller dimension than the state vector. The control formulation allows also the development of convergence acceleration criteria. Three convergence criteria, as well as adaptive noise methods to compensate for model errors, are then developed and used with the proposed estimator in the test problem created to validate the estimator. The algorithm is implemented in a digital computer to estimate the orbit of a low Earth orbit satellite under simulated conditions. Numerical results include various test cases to take account for different initial values for the estimator, different standard deviations for the observations and different number of Earth stations observing the satellite, thus allowing a good evaluation for the estimator characteristics.*

## RESUMO

Este trabalho apresenta o desenvolvimento de um novo estimador de estado para sistemas dinâmicos baseado no conceito de dualidade entre estimação e controle ótimo. O objetivo principal é qualificar preliminarmente o estimador para utilização em tempo real com sistemas não lineares que possam ser tratados por aproximações lineares e para os quais não se disponha de boa modelagem do sistema no modelo adotado para o estimador. A dualidade é explorada para se gerar a transformação do problema original de estimação num equivalente virtual de controle, do qual se obtém um algoritmo adaptativo de convergência local onde, ao invés de se estimar o estado, estima-se um vetor de controles de dimensão menor ou, no máximo, igual à dimensão do vetor de estado. Além disso, a formulação de controle permite o desenvolvimento de critérios de aceleração da convergência. Três desses critérios, assim como técnicas de ruído do adaptativo para compensação do erro, são desenvolvidos para utilização junto com o estimador. Para os testes de validação, o algoritmo resultante é implementado em computador digital para tratar o problema crítico de estimação da órbita de um satélite a baixa altitude ao redor da Terra, sob condições simuladas. Resultados numéricos para diversas condições de precisão das observações, valores iniciais do estimador e número de estações rastreando o satélite são apresentados e comentados de modo a se ter uma avaliação das potencialidades do estimador desenvolvido.

## SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
LISTA DE FIGURAS .....	<i>viii</i>
LISTA DE TABELAS .....	<i>x</i>
LISTA DE SÍMBOLOS .....	<i>xi</i>
<u>CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO</u> .....	1
<u>CAPÍTULO 2 - FUNDAMENTOS TEÓRICOS</u> .....	7
2.1 - O problema de estimação analisado .....	7
2.2 - A dualidade entre estimação e controle .....	10
2.3 - Técnicas usuais de estimação de sistemas não lineares .....	18
2.3.1 - Filtro Linearizado de Kalman .....	23
2.3.2 - Filtro Estendido de Kalman .....	24
2.3.3 - Filtros de maior ordem .....	29
2.4 - O problema de divergência .....	32
2.5 - Técnicas de compensação de erro .....	34
2.5.1 - Ruído Adaptativo .....	36
2.5.2 - Técnica de Compensação do Modelo Dinâmico .....	40
2.5.3 - Estimador Sequencial Adaptativo .....	42
2.6 - A dualidade no desenvolvimento de estimadores de estado ...	44
2.6.1 - Observador para sistemas estocásticos não lineares .....	45
2.6.2 - O Filtro Estendido de Kalman com ganhos constantes .....	47
2.7 - Revisão dos estimadores apresentados .....	49
<u>CAPÍTULO 3 - UM ESTIMADOR DE ESTADO BASEADO NA DUALIDADE</u> .....	53
3.1 - Proposta do estimador .....	53
3.2 - Propagação do estado estimado .....	55
3.3 - Estimador proposto .....	60
3.4 - Inclusão de ruído adaptativo .....	70
3.5 - A matriz Gama: critérios .....	83
3.5.1 - Critério Direto .....	84
3.5.2 - Critério de Restauração .....	85
3.5.3 - Critério Automático .....	88
3.6 - Análise matemática do estimador proposto .....	92

	<u>Pág.</u>
<u>CAPÍTULO 4 - APLICAÇÃO AO PROBLEMA DE ESTIMAÇÃO DE ÓRBITA: RESULTADOS</u> .....	100
4.1 - Descrição do problema .....	100
4.2 - Órbita simulada e modelo do estimador .....	102
4.3 - Esquema de observações .....	102
4.4 - Suporte computacional utilizado .....	109
4.5 - Condições iniciais do estimador .....	111
4.6 - Parâmetros para análise dos resultados .....	114
4.7 - Resultados dos testes .....	116
4.7.1 - Caso 1: Testes de funcionamento do estimador .....	118
4.7.2 - Caso 2: Uso do estimador com condições reais de precisão das observações e inicialização .....	127
4.7.3 - Caso 3: Teste de sensibilidade aos erros iniciais do estado .....	141
4.7.4 - Caso 4: Teste de sensibilidade às não-linearidades das observações .....	148
4.8 - Análise dos testes realizados .....	152
<u>CAPÍTULO 5 - COMENTÁRIOS, CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES</u> .....	156
5.1 - Comentários .....	156
5.2 - Conclusões e recomendações .....	159
APÊNDICE A - MODELAGEM DA DINÂMICA DO ESTIMADOR	
APÊNDICE B - MODELAGEM DAS OBSERVAÇÕES	
APÊNDICE C - DIAGRAMAS DE BLOCOS	
APÊNDICE D - O PROBLEMA DE TESTE RESOLVIDO ATRAVÉS DAS TÉCNICAS USUAIS	
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.	

## LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
4.1 - Primeiro satélite brasileiro (MECB) .....	102
4.2 - Estações fictícias de rastreamento .....	107
4.3 - $\Delta r$ e $\Delta \hat{r}$ para o Caso 1: Critério Direto .....	119
4.4 - $\Delta v$ e $\Delta \hat{v}$ para o Caso 1: Critério Direto .....	119
4.5 - Resíduo normalizado de "Range" para o Caso 1: Critério Di reto .....	120
4.6 - Resíduo normalizado de "Range-rate" para o Caso 1: Critério Direto .....	120
4.7 - $\Delta r$ e $\Delta \hat{r}$ para o Caso 1: Critério de Restauração .....	121
4.8 - $\Delta v$ e $\Delta \hat{v}$ para o Caso 1: Critério de Restauração .....	122
4.9 - Resíduo normalizado de "Range" para o Caso 1: Critério de Restauração .....	122
4.10 - Resíduo normalizado de "Range-rate" para o Caso 1: Critério de Restauração .....	123
4.11 - $\Delta r$ e $\Delta \hat{r}$ para o Caso 1: Critério Automático .....	124
4.12 - $\Delta v$ e $\Delta \hat{v}$ para o Caso 1: Critério Automático .....	125
4.13 - Resíduo normalizado de "Range" para o Caso 1: Critério Au tomático .....	125
4.14 - Resíduo normalizado de "Range-rate" para o Caso 1: Critério Automático .....	126
4.15 - $\Delta r$ e $\Delta \hat{r}$ para o Caso 2: Critério Direto, 4 estações .....	129
4.16 - $\Delta v$ e $\Delta \hat{v}$ para o Caso 2: Critério Direto, 4 estações .....	129
4.17 - Resíduo normalizado de "Range" para o Caso 2: Critério Di reto, 4 estações .....	130
4.18 - Resíduo normalizado de "Range-rate" para o Caso 2: Critério Direto, 4 estações .....	130
4.19 - $\Delta r$ e $\Delta \hat{r}$ para o Caso 2: Critério de Restauração, 4 estações	132
4.20 - $\Delta v$ e $\Delta \hat{v}$ para o Caso 2: Critério de Restauração, 4 estações	132
4.21 - Resíduo normalizado de "Range" para o Caso 2: Critério de Restauração, 4 estações .....	133
4.22 - Resíduo normalizado de "Range-rate" para o Caso 2. Crité rio de Restauração, 4 estações .....	133
4.23 - $\Delta r$ e $\Delta \hat{r}$ para o Caso 2: Critério Automático, 4 estações ...	134
4.24 - $\Delta v$ e $\Delta \hat{v}$ para o Caso 2: Critério Automático, 4 estações ...	135



	<u>Pág.</u>
4.25 - $\Delta r$ e $\Delta \hat{r}$ para o Caso 2: Critério Direto, 3 estações .....	136
4.26 - $\Delta v$ e $\Delta \hat{v}$ para o Caso 2: Critério Direto, 3 estações .....	137
4.27 - $\Delta r$ e $\Delta \hat{r}$ para o Caso 2: Critério de Restauração, 3 estações .....	138
4.28 - $\Delta v$ e $\Delta \hat{v}$ para o Caso 2: Critério de Restauração, 3 estações .....	139
4.29 - $\Delta r$ e $\Delta \hat{r}$ para o Caso 2: Critério Automático, 3 estações ...	140
4.30 - $\Delta v$ e $\Delta \hat{v}$ para o Caso 2: Critério Automático, 3 estações ...	140
4.31 - $\Delta r$ e $\Delta \hat{r}$ para o Caso 3: Critério Automático .....	143
4.32 - $\Delta v$ e $\Delta \hat{v}$ para o Caso 3: Critério Automático .....	143
4.33 - Resíduo normalizado de "Range" para o Caso 3: Critério Au- tomático .....	144
4.34 - Resíduo normalizado de "Range-rate" para o Caso 3: Critério Automático .....	144
4.35 - $\Delta r$ e $\Delta \hat{r}$ para o Caso 3: Critério Direto .....	146
4.36 - $\Delta v$ e $\Delta \hat{v}$ para o Caso 3: Critério Direto .....	146
4.37 - Resíduo normalizado de "Range" para o Caso 3: Critério Di- reto .....	147
4.38 - Resíduo normalizado de "Range-rate" para o Caso 3: Critério Direto .....	147
4.39 - $\Delta r$ e $\Delta \hat{r}$ para o Caso 4: Critério Automático .....	149
4.40 - $\Delta v$ e $\Delta \hat{v}$ para o Caso 4: Critério Automático .....	150
4.41 - Resíduo normalizado de "Range" para o Caso 4: Critério Au- tomático .....	150
4.42 - Resíduo normalizado de "Range-rate" para o Caso 4: Critério Automático .....	151
B.1 - Medida de "Range" .....	B.2
C.1 - Simulação da órbita verdadeira .....	C.1
C.2 - Teste do Estimador .....	C.2
D.1 - $\Delta r$ e $\Delta \hat{r}$ para o FEK sem compensação de erro .....	D.1
D.2 - $\Delta v$ e $\Delta \hat{v}$ para o FEK sem compensação de erro .....	D.2
D.3 - Resíduo normalizado de "Range" para o FEK sem compensação de erro .....	D.3
D.4 - $\Delta r$ e $\Delta \hat{r}$ para o FEK com Ruído Adaptativo .....	D.4
D.5 - $\Delta v$ e $\Delta \hat{v}$ para o FEK com Ruído Adaptativo .....	D.4
D.6 - Resíduo normalizado de "Range" para o FEK com Ruído Adapta- tivo .....	D.5
D.7 - Resíduo normalizado de "Range-rate" para o FEK com Ruído Adaptativo .....	D.5

LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
2.1 - Relações de dualidade controle - estimação .....	15
4.1 - Perturbações em um satélite em relação à órbita Kepleriana na .....	103
4.2 - Resumo dos testes realizados .....	107

## LISTA DE SÍMBOLOS

- $a_D$  - Aceleração devida ao arrasto atmosférico
- $a_G$  - Aceleração devida ao geopotencial
- $a_{SSL}$  - Aceleração devida às perturbações luni-solares
- $C$  - Matriz de ganhos do controlador
- $C_D$  - Coeficiente de arrasto atmosférico
- $C_{in}$  - Coeficiente harmônico esférico
- $C_p$  - Coeficiente de correção de posição
- $C_v$  - Coeficiente de correção de velocidade
- $E[.]$  - Operador esperança
- $e$  - Processo de Gauss-Markov
- $F$  - Matriz de derivadas parciais em relação ao estado
- $F_c$  - Matriz de derivadas parciais na aproximação controlada
- $f$  - Vetor de funções do estado
- $f_m$  - Vetor de funções do estado modelado no estimador
- $f_{nm}$  - Vetor de funções do estado não modelado no estimador
- $G$  - Matriz de acoplamento estado-ruído na aproximação controlada
- $\bar{G}$  - Matriz de acoplamento estado-ruído no sistema contínuo
- $g_k$  - Vetor de coeficientes de correção em posição e velocidade
- $H$  - Matriz de derivadas parciais das observações
- $h$  - Vetor de funções das observações
- $I$  - Matriz identidade
- $J$  - Índice de desempenho, critério de otimização
- $K$  - Matriz de ganhos de Kalman
- $K^u$  - Matriz de ganhos de Kalman para pseudo-observações
- $M$  - Matriz de observabilidade
- $M_k$  - Matriz de acoplamento para pseudo-observações dos controles

- m - Vetor de funções forçantes
- $m_s$  - Massa do satélite
- $N_k$  - Matriz de acoplamento para pseudo-observações
- P - Matriz de covariâncias dos erros no estado
- $P_u$  - Matriz de covariâncias dos erros nos controles
- $P_u^c$  - Matriz de covariâncias dos erros nos controles corrigida
- p - Função densidade de probabilidade
- Q - Matriz de covariâncias dos ruídos no estado
- $Q_u$  - Matriz de correção das covariâncias dos erros nos controles
- $q_u$  - Elementos da diagonal de  $Q_u$
- $q_x$  - Elementos da diagonal de Q
- R - Matriz de covariâncias dos ruídos nas observações
- r - Resíduos calculados das observações
- $r_v$  - Resíduos verdadeiros das observações
- $r_u$  - Resíduos calculados na obtenção dos controles
- $r_s$  - Posição do satélite
- S - Matriz dual de P no problema de controle
- $S_{in}$  - Coeficiente harmônico esférico
- t - Tempo
- V - Matriz de peso
- v - Vetor de ruído das observações
- U - Matriz de peso
- u - Vetor de controles determinísticos
- $u_c$  - Vetor de controles virtuais
- W - Matriz de controlabilidade
- w - Vetor de ruídos no estado
- X - Vetor de estado estendido
- x - Vetor de estado

- $x_c$  - Vetor de estado na aproximação controlada
- $Z$  - Sequência de observações
- $z$  - Vetor de observações
- $z^v$  - Vetor de observações verdadeiras
- $z_p$  - Pseudo-observações
- $\beta$  - Processo Browniano, sequência Gaussiana para geração de  $Q_u$
- $\gamma$  - Matriz de acoplamento estado-ruído na aproximação controlada
- $\Gamma$  - Matriz de acoplamento estado-ruído no modelo discreto
- $\delta$  - Desvio ou perturbação da variável
- $\delta(.)$  - Função Delta de Dirac
- $\Delta$  - Perturbação da variável na aproximação controlada
- $\Phi$  - Matriz de transição de estado
- $\eta$  - Processo de Gauss-Markov
- $\xi$  - Sequência branca Gaussiana para geração de  $Q_x$
- $\rho$  - "Range"
- $\dot{\rho}$  - "Range-rate"
- $\sigma$  - Desvio-padrão
- $\hat{\cdot}$  - Indica valor estimado
- $\dot{\cdot}$  - Indica derivação em relação ao tempo
- $\bar{\cdot}$  - Indica valor de referência.
- $\sim$  - Indica aproximação de um estado por uma dada função densidade de probabilidades

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

Este trabalho trata do desenvolvimento, implementação e teste de um novo estimador de estado para sistemas dinâmicos, baseado no conceito de dualidade entre estimação e controle. O objetivo principal é qualificar preliminarmente esse estimador para aplicações com sistemas não lineares que possam ser tratados através de aproximações lineares e para os quais não se disponha de uma boa modelagem do sistema no modelo adotado para o estimador. É também um requisito importante que o estimador possa ser aplicado a controle de processos, o que significa que deve ter capacidade de operação em tempo real, isto é, deve processar todos os dados disponíveis sobre o sistema em estudo entre instantes consecutivos do tempo em que são realizadas medidas sobre o mesmo.

O problema de se conseguir extrair, da melhor maneira, informações de interesse sobre o comportamento de um dado sistema a partir de um conjunto de observações tem merecido grande destaque nas últimas três décadas, devido ao número enorme de aplicações possíveis nos mais variados ramos da ciência e da tecnologia. A origem dos estudos nessa área é, no entanto, muito mais antiga. Gauss, em 1809, propôs em seu trabalho "Teoria Motus", a técnica sistemática primeira para tratamento desse tipo de problema, hoje conhecida como Método dos Mínimos Quadrados. Criado para permitir obter, com maior precisão, o movimento dos corpos celestes, esse método, baseado apenas em considerações determinísticas, constitui até hoje poderosa ferramenta para aplicações em diversas áreas do conhecimento e apenas recentemente encontrou competidores à altura nos chamados métodos modernos de estimação. Durante muito tempo o problema de estimação, isto é, a procura de um melhor conhecimento sobre um dado sistema ou fenômeno físico a partir de uma série de medidas aparentemente redundantes, ficou restrito ao método de Mínimos Quadrados e suas variantes, desde que não existiam técnicas matemáticas que permitissem um melhor tratamento. Apenas após o surgimento dos trabalhos de Kolmogorov, na década de 30 (ver, por exemplo, Papoulis, 1965), sobre a teoria matemática de Probabilidade, com sua definição axiomática, formou-se a base teórica necessária para a descrição do fenômeno físico através de um

modelo estocástico. Isto permitiu a Wiener (1949), propor, pela primeira vez, a solução recursiva de um problema de estimação, embora ainda sob uma série de hipóteses restritivas e exigindo o uso de técnicas do domínio das frequências.

Com o surgimento dos trabalhos de Kalman (Kalman, 1960; Kalman, Bucy, 1961), a par do levantamento das restrições de aplicação existentes, todas as linhas de desenvolvimento foram reunidas dentro da mesma formulação. Além disso, o algoritmo decorrente, no caso de sistemas lineares, parecia ter sido feito sob medida para uso em computador digital. Embora muito tempo tivesse decorrido antes que se reconhecesse a importância do chamado Filtro de Kalman, as necessidades de aplicação, principalmente na área aeroespacial, se encarregaram de demonstrar que o caminho aberto seria longo e extremamente profícuo. Uma grande variedade de métodos, aplicáveis a problemas específicos, foram desenvolvidos e testados com sucesso em campos tão diversificados como a Engenharia de Controle, Engenharia Civil, Bioengenharia, Economia, entre outros.

Nas aplicações relativas a sistemas não lineares a estrutura do Filtro de Kalman permitiu o aparecimento de diversas técnicas, baseadas em aproximações lineares, que, pela sua simplicidade, tornaram-se a palavra de ordem. Exemplo típico dessa afirmação é o Filtro Estendido de Kalman (Kalman e Bucy, 1961, Jazwinski, 1970, Maybeck, 1982). Ao mesmo tempo, várias linhas de pesquisa para aplicação direta a sistemas não lineares foram ou estão sendo desenvolvidas com outras ferramentas diferentes das aproximações lineares. De um modo geral, as técnicas resultantes são extremamente complicadas e tem ainda pouca utilidade prática, embora muito se tenha avançado, como, por exemplo, na abordagem probabilística para filtragem não linear (Kushner, 1967, Jazwinski, 1970), e desenvolvimento em séries especiais (Hempel, 1980). A maior dificuldade nessa linha é lidar com um problema de dimensão infinita já que, para sistemas não lineares, o tratamento completo exige o conhecimento, a cada instante, de toda a distribuição de probabilidades associada ao sistema.

O estimador desenvolvido neste trabalho segue a linha de aproximações lineares para tratamento dos sistemas não lineares, o que implica a utilização de modelos simplificados na dinâmica do estimador, devido à dificuldade de se incluir todas as características físicas dos sistemas e às limitações impostas pelos recursos teóricos e computacionais. Esta opção por um estimador linear permite que se explore o conceito de dualidade entre os problemas de controle e estimação. Esse conceito é utilizado para a caracterização de um vetor de controles virtuais que tem ação equivalente aos efeitos não modelados na dinâmica do estimador. O vetor de controles é estimado com base na informação contida nos valores previstos para os resíduos das observações, gerando, dessa forma, uma trajetória controlada que força o estimador a se aproximar da trajetória verdadeira do sistema. Isto permite, na condição de se ter um esquema em que a dinâmica e as observações são processos discretos ou discretizados no tempo, reduzir a determinação do controle a um problema de estimação ótima linear estocástica de parâmetros, fazendo com que na fase de filtragem do estimador, ao invés do estado, se estime um controle (Rios Neto e Fleury, 1984). Como os efeitos não modelados, via de regra, não atuam sobre todas as componentes de estado do sistema, obtém-se uma redução do número de variáveis a serem estimadas. Uma vez obtidas as estimativas para os controles virtuais, a estimativa atualizada do estado pode ser obtida com a propagação da última estimativa utilizando os controles estimados na dinâmica adotada para o estimador. Para a propagação das incertezas associadas, trata-se a incerteza na estimativa do pseudocontrole de forma análoga a um ruído no estado.

A formulação proposta permite, dessa maneira, além de uma redução no número de variáveis a serem estimadas, a transformação do problema original num problema virtual equivalente de controle, onde, garantidas as condições necessárias de observabilidade e controlabilidade do sistema, a convergência para a trajetória do sistema real tem caráter ao menos local. O desenvolvimento do estimador é feito de maneira que se possa aplicá-lo a qualquer problema, independente dos processos que descrevem a dinâmica do sistema e o esquema de observações.



Tendo em vista uma futura utilização para estimação autônoma da órbita de satélites artificiais, os testes de validação prática do estimador proposto tem por base um problema crítico de estimação da órbita de um satélite a baixa altitude, onde as observações são feitas por estações fictícias de rastreamento em Terra. A dinâmica do modelo do estimador é propositalmente construída de maneira muito simplificada em relação a uma órbita "real", simulada em computador, de modo a maximizar os efeitos da parte não modelada quando se tem órbitas de baixa altitude. A órbita real, que inclui, então, diversas forças de difícil modelagem não incluídas no modelo do estimador, é utilizada como padrão de comparação para se avaliar o desempenho do estimador desenvolvido.

O esquema de observações utilizado é dependente da órbita simulada no sentido de que essa órbita "real" fornece as características de estado (posição e velocidade) e os parâmetros de determinação das observações do satélite para as estações fictícias de rastreamento. Nesse caso, o satélite está sempre visível para um número fixo de estações topocêntricas colocadas simetricamente em relação ao ponto subsatélite (Negreiros de Paiva, 1980), garantindo boas condições de observabilidade para o sistema.

Testes iniciais, para o problema descrito, indicaram que, como na maioria dos casos em que se emprega um estimador linear para aproximação de sistemas não lineares, existe necessidade de se compensar o efeito dos erros de modelagem que deterioram as estimativas, provocando divergência. Para tanto, são incluídas técnicas de ruído adaptativo (Rios Neto e Kuga, 1981, 1982), em dois pontos ao longo do algoritmo. A escolha se deve ao fato de se conseguir resultados muito bons com o emprego dessa técnica no problema de estimação de órbita (Kuga, 1982), embora outros métodos de compensação do erro possam ser utilizados.

Uma das consequências da transformação do problema original de estimação de um sistema dinâmico num equivalente virtual de controle é que se tem novas interpretações para as variáveis envolvidas. Em particular, a matriz de acoplamento,  $\bar{G}$ , em  $\dot{x} = f(x,t) + \bar{G} w(t)$ , entre as variáveis de estado e os ruídos, no problema de estimação, é definida tendo seus elementos como zero ou um, dependendo da existência ou não de ruído de estado na compo

nente associada. No problema de controle a matriz equivalente,  $G$ , pode ser vista como uma matriz de ganhos, à disposição do projetista para melhorar as características de convergência do método. A partir dessa constatação, são desenvolvidos e implantados três métodos de geração da matriz  $G$ , variável ou não ao longo do processamento, e chamados Critérios Direto, de Restauração e Automático. Os três critérios tem bom comportamento quando utilizados junto com o estimador proposto, fornecendo-lhe maior versatilidade no tratamento de cada caso de teste.

Os testes de validação prática do estimador e dos critérios associados com o problema de estimação de órbita levam a resultados muito bons, qualificando preliminarmente o método para as aplicações a que se destina.

Resumindo a forma com que serão apresentados os diversos tópicos desenvolvidos neste trabalho, no Capítulo 2 são apresentados os fundamentos teóricos que permitem a formulação do estimador de estado, ao mesmo tempo em que se discute os vários métodos utilizados atualmente para estimação de sistemas não lineares. São também abordados os aspectos fundamentais da dualidade entre estimação e controle, incluindo os estimadores baseados nesse conceito disponíveis na literatura.

O Capítulo 3 é reservado ao desenvolvimento do estimador proposto em todos os seus aspectos. Após a formulação do estimador são discutidas sucessivamente as técnicas de Ruído Adaptativo incluídas para tratamento do problema de estimação de órbitas, os critérios de aceleração de convergência por geração, via teoria de controle, da matriz de acoplamento  $G$  e, finalmente, é feita uma análise matemática do estimador que demonstra suas características de convergência local.

No Capítulo 4 é descrito o problema de estimação de órbita de um satélite a baixa altitude usado para validação do estimador de estado. São discutidas as particularidades de implementação em computador digital tanto do programa para geração da órbita "real" como do programa necessário para o estimador. Os casos de teste definidos permitem analisar o desempenho do estimador sob várias e sucessivamente mais complexas condições de solução. Os resultados das simulações são apresentados para cada caso e cada

critério utilizado, permitindo ao final uma análise detalhada do comportamento do estimador.

O Capítulo 5 inclui, além dos comentários de ordem geral a respeito de todo o desenvolvimento feito e dos resultados obtidos, as principais conclusões sobre o novo estimador de estado e as recomendações para trabalhos futuros com o propósito de qualificar o estimador como ferramenta de real utilidade na solução de problemas relativos a Controle de Processos. Ao menos em caráter preliminar, a conclusão principal deste trabalho é que o novo estimador de estado satisfaz todas as exigências para que isso aconteça.

## CAPÍTULO 2

### FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Neste capítulo pretende-se, a par de colocar os fundamentos teóricos que nortearam o desenvolvimento do estimador de estado proposto, traçar um panorama dos recentes desenvolvimentos na área de filtragem não linear, através da apresentação e discussão de vários dos seus mais significativos resultados.

#### 2.1 - O PROBLEMA DE ESTIMAÇÃO ANALISADO

As classificações possíveis para um problema de estimação estão ligados fundamentalmente à natureza e à evolução temporal do sistema que está sendo estudado, ao processo de observações feita sobre o sistema e ao tratamento que se pretende dar às observações para gerar as estimativas do estado do sistema em questão.

Dessa maneira, o modelo matemático que descreve o fenômeno em estudo pode ser linear ou não linear quanto à sua natureza. A sua evolução no tempo pode ser tratada por um modelo matemático contínuo ou discreto, dependendo das condições empregadas para formulação do modelo.

O processo de observações ou medidas realizadas sobre o sistema pode ser também, a princípio, contínuo ou discreto, representando, então, que, no caso contínuo, existem medidas a qualquer instante de tempo, enquanto, no caso discreto, tais medidas só estarão disponíveis em instantes determinados e não em todo intervalo de tempo de interesse. Para a maioria dos problemas de aplicação em Engenharia o caso comum é o de observações discretas ao longo do tempo.

Considera-se, então, um vetor  $x(t)$ , de  $n$  componentes, que representa o estado do sistema de interesse:

$$x(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

Considere-se, agora, que sobre o sistema acima são realizadas observações em instantes  $t_i$  do tempo, agrupadas para cada  $t_i$ , no vetor  $z_i(t_i)$  de dimensão  $r$ :

$$z_i(t_i) = \begin{Bmatrix} z_1(t_i) \\ \vdots \\ z_r(t_i) \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

Admita que a sequência de observações até o instante  $t_\ell$  seja representado por:

$$Z(t_\ell) = \{z_1(t_1), z_2(t_2), \dots, z_i(t_i), \dots, z_\ell(t_\ell)\} \quad (2.3)$$

ou de forma mais simplificada

$$Z_\ell = \{z_1, z_2, \dots, z_i, \dots, z_\ell\} \quad (2.4)$$

Dada a sequência de observações  $Z_\ell$ , o problema de estimação consiste em se obter uma estimativa do estado do sistema  $x(t_k)$  baseada em  $t_\ell$  e  $t_k$ :

- se  $t_\ell > t_k$ , o problema de estimação é dito de alisamento ou suavização;
- se  $t_\ell = t_k$ , o problema é de filtragem;
- finalmente, se  $t_k > t_\ell$ , o problema é dito de predição.

O interesse nesse trabalho é sobre problemas de filtragem para sistemas não lineares com observações discretas. O sistema não linear será descrito então pela equação diferencial estocástica de Itô (Jazwinski, 1970):

$$dx(t) = f[x(t), t] dt + G(t) d\beta(t) \quad (2.5)$$

onde  $x(t)$  representa o vetor de dimensão  $n$  do estado;  $f$  é um vetor de funções do estado e do tempo também de dimensão  $n$ ;  $G$  é uma matriz  $n \times m$  e de funções contínuas do tempo  $t$  e  $\beta$  é um vetor de dimensão  $m$  de um processo Browniano com difusão dada por:

$$E[d\beta(t) d\beta^T(t)] = Q(t) dt \quad (2.6)$$

Embora a definição rigorosa, do ponto de vista matemático, seja dada pela expressão (2.5), é comum se utilizar a expressão equivalente formal:

$$\dot{x}(t) = f[x(t), t] + G(t) w(t) \quad (2.7)$$

onde  $w$  é um processo branco Gaussiano cuja estatística é dada por:

$$E[w(t)] = 0 \quad (2.8)$$

$$E(w(t) w^T(\tau)) = Q(t) \delta(t-\tau) \quad (2.9)$$

Na expressão acima  $\delta(t-\tau)$  representa a "função" Delta de Dirac e  $Q(t)$  tem a mesma definição de (2.6).

O processo de medidas ou observações é representado por:

$$z(t_k) = h[x(t_k), t_k] + v(t_k) \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

onde  $z$  é o vetor de dimensão  $r$  das medidas,  $h$  é um vetor de funções também de dimensão  $r$  e  $v$  é a sequência, novamente de dimensão  $r$ , branca Gaussiana de ruído nas observações. A estatística do ruído  $v(.,.)$ , admitido independente do ruído de estado  $w(.,.)$ , tem como parâmetros:

$$E[v(t_k)] = 0 \quad (2.11)$$

$$E[v(t_k) v(t_k)^T] = R_k > 0 \quad (2.12)$$

Admite-se, também, que é conhecida uma estimativa inicial para o estado no instante  $t_0$ , correspondente ao início do processo de estimação. Essa estimativa é dada por:

$$E[x(t_0)] = \hat{x}(t_0) \quad (2.13)$$

$$E[(x(t_0) - \hat{x}(t_0)) (x(t_0) - \hat{x}(t_0))^T] = P(t_0) \quad (2.14)$$

com a hipótese de  $x(t_0)$  ser independente do ruído  $w(.,.)$ . Claramente o sistema não linear proposto para análise não representa o caso mais geral. A definição da matriz  $G(t)$  em (2.5), por exemplo, não explicita uma dependência de seus componentes em relação ao estado como tratado, por exemplo, em Jazwinski (1970). No entanto, o modelo descrito é representativo para uma grande classe de problemas práticos e sua estrutura garante aplicabilidade para uma enorme série de resultados da Teoria de Estimação em sistemas lineares. Essa linha de pesquisa, ou seja, a de aproximação linear, como já citado, tem sido a grande fonte de inspiração para solução de problemas extremamente complexos como o de controle de processos em que correção de órbita e de atitude de satélites artificiais (Jazwinski, 1970, Rios Neto e Kuga, 1981), pilotos automáticos de navios (Cruz e Rios Neto, 1980), sistemas de navegação para aviões (Maybeck, 1979), são apenas alguns exemplos.

## 2.2 - A DUALIDADE ENTRE ESTIMAÇÃO E CONTROLE

A idéia fundamental no desenvolvimento do estimador de estado, descrito no Capítulo 3, encontra sua base na dualidade existente entre as Teorias de Estimação e Controle. Neste item pretende-se discutir os principais aspectos da dualidade, com ênfase nas relações de dualidade válidas para sistemas lineares. O desenvolvimento será feito analisando-se o problema de controle de um sistema linear estocástico.

Considera-se que o sistema a ser controlado possa ser adequadamente descrito pela equação diferencial estocástica linear:

$$\dot{x}(t) = F(t) x(t) + G(t) w(t) + B(t) u(t) \quad (2.15)$$

onde  $x(t)$  é o estado do sistema, dado por um vetor  $n \times 1$ ;  $u(t)$  são os controles que agem sobre esse sistema, dados por um vetor  $s \times 1$  e  $w(t)$  é um vetor de dimensão  $m$  de ruído branco gaussiano com estatística:

$$E[w(t)] = 0 \quad (2.16)$$

$$E[w(t) w^T(\tau)] = Q(t) \delta(t-\tau). \quad (2.17)$$

Apenas para discussão desse tópico, admite-se que o processo de medidas sobre o sistema descrito em (2.15) seja linear e contínuo no tempo, isto é, as observações possíveis sobre o estado  $x(t)$  são dados por:

$$z(t) = H(t) x(t) + v(t) \quad (2.18)$$

onde  $z(t)$  é o vetor  $r \times 1$  que contém as medidas;  $v(t)$  é também um ruído branco gaussiano de estatística:

$$E[v(t)] = 0 \quad (2.19)$$

$$E[v(t) v^T(\tau)] = Q(t) \delta(t-\tau) \quad (2.20)$$

Posto isto, o problema é agora gerar um controle  $u(t)$  em malha fechada, baseado nas observações  $z(t)$ . Para tanto, admite-se primeiramente que se possa tratar apenas do problema de controle, isto é, admite-se que o modelo matemático do sistema e processo de observação sejam perfeitos, sem, portanto, necessidade de se incluir as parcelas de ruído. Nesse caso, (2.15) e (2.16) se reduzem a:

$$\dot{x}(t) = F(t) x(t) + B(t) u(t) \quad (2.21)$$

$$z(t) = H(t) x(t) \quad (2.22)$$

e pode-se impor um critério de otimização que permita determinar o controle  $u(t)$  de maneira unívoca. Uma das maneiras mais convenientes para definição do critério de otimização é utilizar uma forma quadrática a ser minimizada, o que corresponde ao problema ideal de otimização: critério quadrático com vínculos lineares. Isto corresponde, no problema de otimização, a, por exemplo, dada uma condição inicial  $x(t_0)$  no instante  $t_0$ , levar o sistema até uma condição final nula, no instante  $t_f$ , se for definido o critério:

$$J = \frac{1}{2} x(t_f)^T V_f x(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [(x^T(t) V(t) x(t) + u^T(t) U(t) u(t))] dt \quad (2.23)$$



O critério quadrático expresso por (2.23) corresponde também à minimização da energia de controle para transferência do sistema, e exige as matrizes  $V_f$  e  $V$  simétricas e semi definidas positivas, enquanto a matriz  $U(t)$  deve ser simétrica e definida positiva (Gelb et alii, 1974).

A solução desse problema de controle ótimo pode ser obtida através de qualquer das abordagens usuais da teoria: Cálculo Variacional, Princípio do Máximo de Pontryaguin, Programação Dinâmica. O resultado final é trazido por uma lei de controle em malha fechada dado por (Citron, 1969; Gelb et alii, 1974):

$$u(t) = - C(t) x(t) \quad (2.24)$$

onde a matriz  $C(t)$ , de dimensão  $s \times n$ , é expressa por:

$$C(t) = U^{-1}(t) B^T(t) S(t) \quad (2.25)$$

A matriz  $S(t)$ , no caso, é obtida através de uma equação matricial de Riccati:

$$\dot{S}(t) = -F^T(t) S(t) - S(t) F(t) + S(t) B(t) U^{-1}(t) B^T(t) S(t) - V(t) \quad (2.26)$$

com a condição de contorno:

$$S(t_f) = V_f \quad (2.27)$$

Admita-se agora o sistema completo, quando os ruídos no estado e nas observações se fazem presentes. Claramente, o problema é diferente pelo fato de o estado do sistema,  $x(t)$ , ser da natureza aleatória devido aos ruídos forçantes. Isso leva a que se tenha de redefinir o critério de otimização, que dependia do valor correto do estado  $x(t)$ , por um critério estatístico, dado pelo valor médio de  $J$ :

$$\bar{J} = E \left[ \frac{1}{2} x^T(t_f) V_f x(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x^T(t) V(t) x(t) + u^T(t) U(t) u(t)] dt \right] \quad (2.28)$$

onde  $E$  denota o operador esperança ou expectância.

O problema de controle ótimo estocástico agora é o de minimizar  $\bar{J}$  de (2.28) sujeito às equações de movimento dadas por (2.15) e, como se pretende uma lei de realimentação, também sujeito ao processo de observações descrito por (2.18). Este é o ponto chave para a segunda parte do problema linear proposto: como os controles  $u(t)$ , uma vez gerada uma estimativa conveniente do estado a partir das observações e da dinâmica do sistema, tornam-se entradas conhecidas, determinísticas, para o sistema em estudo, o procedimento para obtenção dessa estimativa pode ser obtido separadamente. A realização dessa lei de controle ótimo estocástica através de um processo de filtragem e de um processo de controle distintos é conhecida como Princípio de Separação e demonstra-se (Gelb, et alii, 1974, Bryson e Ho, 1975, Maybeck, 1982) que tal lei, para o problema proposto, é dada por:

$$u(t) = -C(t) \hat{x}(t) \quad (2.29)$$

onde  $C(t)$  é a matriz obtida em (2.25) e  $\hat{x}$  é o valor estimado do estado através do emprego do Filtro Linear de Kalman.

Para gerar o Filtro Linear de Kalman, considera-se o sistema dado em (2.15) juntamente com as condições iniciais:

$$E[x(t_0)] = \hat{x}(t_0) \quad (2.30)$$

$$E[x(t_0) x^T(t_0)] = P(t_0) \quad (2.31)$$

onde se admite  $x(t_0)$  Gaussiano e independente do processo  $w(.,.)$ .

Com isso, sendo  $x(t_0)$ ,  $w(.,.)$ , e  $v(.,.)$  processos mutuamente independentes e Gaussianos, serão também não correlacionados entre si (Jazwinski, 1970).

O critério de desempenho do estimador é também um dado fundamental. O filtro de Kalman é otimizado segundo o ponto de vista Bayesiano, isto é, procura-se maneiras de propagar a função de densidade de probabilidade condicionada a toda história das observações feitas sobre o sistema. Com esse critério Bayesiano, a função densidade condicionada, em vista das hipóteses colocadas, permanecerá sempre Gaussiana e, com isso, a média, a

moda, a mediana condicionadas ou qualquer escolha lógica de estimativa baseada na função de densidade condicionada convergem para o mesmo valor. Em particular a média condicionada é a estimativa de mínima variância do erro, independente das propriedades da função densidade condicionada (Jazwinski, 1970).

Para o modelo em estudo é possível demonstrar que a média e a matriz de covariâncias, parâmetros suficientes para caracterizar totalmente a função densidade de probabilidade condicionada a toda história das medidas, obedecem as seguintes equações diferenciais (Maybeck, 1979):

$$\dot{\bar{x}}(t) = F(t) \bar{x}(t) + K(t) [z(t) - H(t) \bar{x}(t)] \quad (2.32)$$

$$\dot{P}(t) = F(t) P(t) + P(t) F^T(t) - P(t) H^T(t) R^{-1}(t) H(t) P(t) + G(t) Q(t) G^T(t) \quad (2.33)$$

$$K(t) = P(t) H^T(t) R^{-1}(t) \quad (2.34)$$

Compare-se, então, as expressões (2.33) e (2.34) para o Filtro de Kalman, de um lado, e as expressões (2.25) e (2.26), para o controlador linear, de outro. A menos de transposições e sinais, as equações diferenciais são equações de Riccati que devem ser resolvidas com condições de contorno em  $t_0$ , para a matriz de covariâncias  $P(t)$ , e em  $t_f$ , para a matriz  $S(t)$ . Uma vez obtidas as soluções em qualquer instante de tempo, tais matrizes fornecem diretamente as matrizes de Ganho de Kalman,  $K(t)$ , e de Ganho do Controlador,  $C(t)$ . Existem, portanto, analogias entre as estruturas dos dois problemas e, conseqüentemente, as condições para as quais existem soluções para o problema de controle tem correspondência direta no problema de filtragem ou estimação, e vice-versa. Por essa razão os problemas de controle e estimação são ditos duais um do outro. Para o problema tratado, linear-quadrático-Gaussiano, ou LQG, como é conhecido na literatura, as relações de dualidade são expressas na Tabela 2.1 (Gelb et alii, 1974).

Para o estabelecimento das condições do problema de controle ótimo estocástico desenvolvidas até aqui, as hipóteses de controlabilidade e observabilidade tanto no problema de controle como no de estimação não

foram levantadas, embora implicitamente se admitisse sistema controlável e observável. No entanto, esses conceitos, introduzidos por Kalman, geram condições necessárias e, em alguns casos, suficientes, para garantir que problemas de controle ótimo ou estimação tenham solução possível (Citron, 1969).

TABELA 2.1

RELAÇÕES DE DUALIDADE CONTROLE - ESTIMAÇÃO

CONTROLE		FILTRAGEM
S	←————→	P
F	←————→	F <sup>T</sup>
V	←————→	GQG <sup>T</sup>
B	←————→	H <sup>T</sup>
U	←————→	R
C	←————→	K <sup>T</sup>
t <sub>f</sub>	←————→	t <sub>0</sub>
Controlabilidade ↔		Observabilidade
Observabilidade ↔		Controlabilidade

Controlabilidade está ligada aos efeitos das entradas sobre os estados do sistema e pode ser definida sob dois pontos de vista. No problema de controle coloca-se a controlabilidade determinística ou controlabilidade completa enquanto para filtragem, o conceito dual propõe controlabilidade estocástica, também chamada perturbabilidade.

Num problema de controle, o sistema linear ou não linear é dito completamente controlável se, para quaisquer dois estados préfixados  $x_0$  e  $x_f \in R^n$  e qualquer instante  $t_0$ , existem funções contínuas por partes de controle  $u(\cdot)$  de tal forma que a solução do sistema a partir de  $t_0$ ,  $x(t_0) = x_0$  satisfaz  $x(t_f) = x_f$  para um intervalo  $(t_0, t_f)$  finito (Maybeck, 1979). Isso implica em que, se todo e qualquer estado inicial  $x(t_0) = x_0$  pode ser transferido para qualquer estado final  $x_f$ , em um intervalo de tempo finito, pela aplicação de um controle  $u(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_f$ , então o sistema é completamente controlável. Para que isso ocorra, a estrutura do sistema deve ser tal que o controle  $u$  aja sobre todas as variáveis de estado.

Para sistemas lineares, podem ser obtidos, de maneira simples, critérios para verificação de controlabilidade. Considerando o sistema descrito por (2.21) e definindo matriz de transição de estado,  $\phi(t, \tau)$ , para esse sistema através de:

$$\dot{\phi}(t, t_0) = F(t) \phi(t, t_0) \quad (2.35)$$

$$\phi(t_0, t_0) = I \quad (2.36)$$

onde  $I$  é a matriz identidade de dimensão  $n \times n$ , demonstra-se que o sistema em (2.21) é completamente controlável se a matriz Gramiana de controlabilidade (e.g., Maybeck, 1979):

$$W(t_0, t_f) \triangleq \int_{t_0}^{t_f} \phi(t_0, \tau) B(\tau) B^T(\tau) \phi^T(t_0, \tau) d\tau \quad (2.37)$$

for de posto  $n$ .

O conceito dual da controlabilidade completa é dada pela controlabilidade estocástica ou perturbabilidade do sistema e tem o mesmo sentido que no caso do controle determinístico. Dessa forma, um modelo estocástico tem controlabilidade estocástica se os ruídos de entrada afetam todas as variáveis de estado, o que pode ser definido do seguinte modo (Maybeck, 1979): se existirem números reais positivos  $\alpha$  e  $\beta$ ,  $0 < \alpha < \beta < \infty$ , e um intervalo de tempo  $\Delta t$  de maneira que, para todo  $t \geq t_0 + \Delta t$ ,

$$\alpha I \leq \int_{t-\Delta t}^t \phi(t, \tau) G(\tau) Q(\tau) G^T(\tau) \phi^T(t, \tau) d\tau \leq \beta I \quad (2.38)$$

o sistema (2.15) é estocasticamente controlável.

Deve-se notar que a condição (2.38) é mais rigorosa que a controlabilidade completa, uma vez que exige, além da integral ser definida positiva, que existam limites inferior e superior.

O conceito de observabilidade está ligado aos efeitos do estado do sistema sobre as saídas ou medidas ou observações do mesmo. Observabilidade pode ser definida, como a controlabilidade, tanto no contexto de

controle determinístico como no caso estocástico. Para uma melhor colocação do caso determinístico, admita que a saída do sistema seja dada por:

$$z(t) = h[x(t), u(t), t] \quad (2.39)$$

Nesse caso, um sistema, linear ou não linear, é dito completamente observável se, dados dois instantes  $t_0$  e  $t_1$ , o conhecimento de  $u(t)$  e  $z(t)$ , para todo  $t \in [t_0, t_1]$ , é suficiente para determinar  $x(t)$ ,  $t \in (t_0, t_1]$ . Isso significa que, para um sistema ser completamente observável, sua estrutura deve ser tal que a observação  $z(t)$  é afetada pela mudança de qualquer das variáveis de estado do sistema e que o efeito da modificação de uma única variável de estado sobre a saída deve ser diferenciado do efeito da modificação de qualquer outra variável de estado.

Novamente, no caso de sistemas lineares podem ser obtidos critérios para verificação da observabilidade. É possível demonstrar (Maybeck, 1979, Luenberger, 1979) que se a matriz Gramiana de observabilidade:

$$M(t_0, t_f) \triangleq \int_{t_0}^{t_f} \phi^T(\tau, t_0) H^T(\tau) H(\tau) \phi(\tau, t_0) d\tau \quad (2.40)$$

for de posto  $n$ , então, o sistema é completamente observável.

Observabilidade estocástica, conceito dual da observabilidade completa, é definido de maneira análoga a controlabilidade estocástica, isto é, dados números reais positivos  $\alpha$  e  $\beta$  tais que  $0 < \alpha < \beta < \infty$  e um intervalo de tempo  $\Delta t$ , se para todo  $t \geq t_0 + \Delta t$

$$\alpha I \leq \int_{t-\Delta t}^t \phi^T(\tau, t) H^T(\tau) R^{-1}(\tau) H(\tau) \phi(\tau, t) d\tau \leq \beta I \quad (2.41)$$

o sistema (2.15) é estocasticamente observável.

Embora sejam conceitos um tanto abstratos e de difícil aplicação prática, controlabilidade e observabilidade são de grande importância para estudo da estabilidade dos modelos de estimação. No caso do Fil

tro Linear de Kalman, é possível provar (Jazwinski, 1970; Sorenson, 1969) que se o sistema em que o filtro se baseia é estocasticamente controlável e observável, então o filtro é uniforme, assintótica e globalmente estável.

A extensão dos conceitos de dualidade para o caso de sistemas não lineares representa um grande desafio, na medida em que a dificuldade matemática aumenta sensivelmente. A partir do trabalho original de Feldbaum (1973) muito se tem investido em pesquisas que permitam tratar controle estocástico em sistemas não lineares, o que pode ser comprovado pelo grande número de publicações (Bar-Shalom, Tse, 1976; Sorenson, 1976; Maybeck, 1982, entre outros).

Os resultados práticos, entretanto, são ainda muito restritos e verifica-se que mesmo a estrutura do problema é modificada, no sentido de que os conceitos tradicionais de malha aberta e malha fechada, tão comuns ao controle determinístico, não tem igual significado no controle estocástico não linear. No entanto, para o que se pretende desenvolver com o modelo adotado neste trabalho, descrito no item anterior, os conceitos de dualidade discutidos até aqui são suficientes, tendo em vista que resultados aplicáveis para controle determinístico (Lee e Marcus, 1967) ou estocástico (Sunahara et alii, 1975) são essencialmente extensões do caso linear.

### 2.3 - TÉCNICAS USUAIS DE ESTIMAÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES

Na seção anterior foi descrita a obtenção do Filtro de Kalman para sistemas lineares com dinâmica contínua e observações contínuas, com o propósito de se mostrar as relações de dualidade entre os problemas de estimação e controle. Pretende-se agora reescrever o Filtro de Kalman linear para o caso de observações discretas, de forma a caracterizar a versão mais comum de aplicação e discutir as razões do reconhecimento praticamente unânime de sua aplicabilidade e versatilidade no tratamento de grande número de problemas dos mais diversos campos de ciência. A partir dessa constatação, fica mais fácil responder o porquê de as técnicas mais usuais de aplicação a sistemas não lineares serem baseadas no filtro de Kalman linear. Problemas que podem ser modelados na forma descrita no item 2.2, po

dem ser tratados com técnicas obtidas do Filtro linear, sendo que tais modelos representam praticamente o limite de complicação suportado pelas aproximações lineares (Gelb et alii, 1974). Dentro desse espírito, após a revisão do filtro linear com observações discretas, serão discutidos o Filtro Linearizado de Kalman, o Filtro Estendido de Kalman, seguramente a mais importante ferramenta de estimação em uso hoje em dia e os Filtros de maior ordem. Este último nome é atribuído aos filtros onde os termos de ordem maior ou igual a 2 são retidos quando da linearização (Jazwinski, 1970).

Considera-se, então, a dinâmica do sistema linear dado por:

$$\dot{x}(t) = F(t) x(t) + G(t) w(t) \quad (2.42)$$

onde as variáveis tem as mesmas definições e dimensões de (2.15) e valem as mesmas condições sobre o ruído branco Gaussiano  $w(t)$ .

O processo de medidas sobre o sistema é discreto ao longo do tempo, sendo dado por:

$$z(t_k) = H(t_k) x(t_k) + v(t_k) \quad (2.43)$$

onde  $t_k$  representa o instante da observação e  $v(t_k)$  é uma sequência branca e Gaussiana com estatística:

$$E[v(t_k)] = 0 \quad (2.44)$$

$$E[v(t_k) v^T(t_k)] = R(t_k) \quad (2.45)$$

com  $R(t_k)$  definida positiva.

Para facilitar a compreensão do texto, a partir daqui será utilizada a notação de Jazwinski (1970) e Kuga (1982). A necessidade de uma notação clara e simples ficará evidente ao longo do desenvolvimento teórico. Dessa forma, reescreve-se (2.43) através de:

$$z_k = H_k x(t_k) + v_k \quad (2.46)$$



com

$$E[v_k v_k^T] = R_k \quad (2.47)$$

Nessas condições, o Filtro de Kalman é um algoritmo recursivo caracterizado por ciclos de propagações ou previsões e de atualizações ou correções no intervalo de tempo considerado para solução do problema, a partir do instante inicial  $t_0$ . O ciclo de propagação pode ser entendido como representativo da evolução do processo estocástico do estado no intervalo entre duas observações e é traduzido por equações diferenciais (ou de diferenças) para o valor médio e para a matriz de covariância, num intervalo típico  $t_{k+1} < t < t_k$ , da seguinte maneira (Gelb et alii, 1974 e Jazwinski, 1970):

$$\dot{\hat{x}}(t|t_{k-1}) = F(t) \hat{x}(t|t_{k-1}) \quad (2.48)$$

$$\dot{P}(t|t_{k-1}) = F(t) P(t|t_{k-1}) + P(t|t_{k-1}) F^T(t) + G(t) Q(t) G^T(t) \quad (2.49)$$

O ciclo de atualização ou correção corresponde à incorporação das observações num instante típico  $t_k$ , levando às seguintes equações algébricas para cálculo do Ganho de Kalman e atualizações do estado e da matriz de covariância dos erros no estado:

$$K_k = P(k|k-1) H_k^T [H_k P(k|k-1) H_k^T + R_k]^{-1} \quad (2.50)$$

$$\hat{x}(k|k) = \hat{x}(k|k-1) + K_k [z_k - H_k \hat{x}(k|k-1)] \quad (2.51)$$

$$P(k|k) = P(k|k-1) - K_k H_k P(k|k-1) \quad (2.52)$$

Os valores obtidos para  $\hat{x}(t)$  em (2.51) e  $P(t)$  em (2.52) são usados, então, como condições iniciais para um novo ciclo de propagação da mesma forma que as condições no final do ciclo de propagação ( $\hat{x}(k|k-1)$ )

e  $P(k|k-1)$ , segundo a notação) são usadas como as informações a priori para o ciclo de atualização. Importante observar também que, no caso apresentado anteriormente, com dinâmica contínua e observações contínuas ao longo do tempo, os ciclos de atualização e propagação se misturam, uma vez que entre dois instantes quaisquer de tempo, devem ser levadas em conta a evolução do sistema e as observações efetuadas.

A par de sua estrutura simples, o algoritmo resultante traz embutidas algumas características que o distinguem principalmente em relação aos métodos estatísticos utilizados antes do seu aparecimento. Dentre elas destacam-se a forma do algoritmo, talhada para uso em computador digital, o processamento recursivo ao invés de processamento em lotes ("batch"), o que significa inversão de matrizes de menor ordem e, no caso linear, como a matriz de covariâncias é independente das observações (veja (2.50)-(2.52)), essa matriz e, em consequência, o Ganho de Kalman, podem ser calculados a priori e armazenados para utilização no instante da observação.

Logicamente, na extensão para os problemas não lineares, seria desejável que tais características fossem mantidas. Em alguns casos, mostra-se que isso acontece, como no Filtro Linearizado, enquanto, em outros desenvolvimentos, apenas parte dessas características são ainda válidas. No entanto, a característica de otimalidade é perdida: como se trabalha com aproximações, os filtros serão apenas subótimos.

Para se obter os filtros baseados em aproximações lineares, considere-se o sistema não linear descrito na seção 2.1, formalmente dado por:

$$\dot{x}(t) = f[x(t), t] + G(t) w(t) \quad (2.53)$$

com as mesmas definições introduzidas naquela seção.

Admite-se agora que seja possível gerar uma trajetória determinística de referência, ou nominal,  $\bar{x}(t)$ , a partir de uma dada

condição inicial  $\bar{x}(t_0)$  e satisfazendo:

$$\dot{\bar{x}}(t) = f[\bar{x}(t), t] \quad (2.54)$$

Define-se, então:

$$\delta x(t) = x(t) - \bar{x}(t) \quad (2.55)$$

como sendo a perturbação ou desvio da referência em relação à trajetória nominal em cada instante  $t \geq t_0$ . Então  $\delta x(\dots)$ , tomado como uma aproximação de primeira ordem do sistema não linear em relação a trajetória nominal será um processo estocástico satisfazendo a equação diferencial (Maybeck, 1982):

$$\dot{\delta x}(t) = F[\bar{x}(t), t] \delta x(t) + G(t) w(t) \quad (2.56)$$

onde

$$F[\bar{x}(t), t] = \left[ \frac{\partial f(x(t), t)}{\partial x} \right]_{x=\bar{x}} \quad (2.57)$$

A expressão (2.57) traduz a dependência da matriz  $F$  de derivadas parciais em relação à trajetória nominal adotada.

Com as hipóteses colocadas, a condição inicial para (2.56) será Gaussiana com estatística dado por:

$$E[\delta x(t_0)] = \bar{x}(t_0) - \bar{x}(t_0)$$

$$E[\delta x(t_0) \delta x^T(t_0)] = P(t_0)$$

Considere agora o processo de observações não linear:

$$z_k = h(x(t_k), t_k) + v_k \quad (2.58)$$

com as mesmas definições estabelecidas na seção 2.1.

Para linearizar as observações, considere-se a observação de referência ou nominal, obtida a partir do valor  $\bar{x}(t_k)$  da trajetória de referência:

$$\bar{z}_k = h[\bar{x}(t_k), t_k] \quad (2.59)$$

Este será o ponto em torno do qual a equação (2.58) será linearizada. Define-se, então, a observação perturbada  $\delta z_k$  no instante  $t_k$  através de:

$$\delta z_k = z_k - \bar{z}_k \quad (2.60)$$

Expandindo (2.58) no sentido médio quadrático em torno da medida nominal  $\bar{z}_k$  e utilizando as definições (2.60) e (2.55), chega-se a:

$$\delta z_k = H[\bar{x}(t_k), t_k] \delta x(t_k) + v_k \quad (2.61)$$

onde a matriz de derivadas parciais, de dimensão  $r \times n$ :

$$H[\bar{x}(t_k), t_k] = \left[ \frac{\partial h(x(t), t)}{\partial x} \right]_{x=\bar{x}(t_k)} \quad (2.62)$$

é avaliada sobre a trajetória de referência.

### 2.3.1 - FILTRO LINEARIZADO DE KALMAN

O desenvolvimento até este ponto permitiu que, partindo de um modelo não linear do sistema, se chegasse a uma aproximação linear para o mesmo, que pode ser resumido em:

$$\delta \dot{x}(t) = F[\bar{x}(t), t] \delta x(t) + G(t) w(t) \quad (2.63)$$

$$\delta z_k = H[\bar{x}(t_k), t_k] \delta x(t_k) + v_k \quad (2.64)$$

. Condição inicial:

$$x(t_0) \sim N(\bar{x}(t_0) - \bar{x}(t_0), P(t_0)) \quad (2.65)$$

Ao modelo linear (2.63) - (2.65) pode ser aplicado o Filtro de Kalman como estabelecido nas equações (2.48) - (2.52). A saída desse filtro será a estimativa ótima de  $\delta x(t)$ , dado por  $\delta \bar{x}(t)$ , para todo  $t$  do intervalo de interesse, o que permitirá estimar o estado do sistema não linear por:

$$\hat{x}(t) = \bar{x}(t) + \delta \bar{x}(t) \quad (2.66)$$

Desde que a aproximação de primeira ordem em relação à trajetória nominal represente com fidelidade o desvio do sistema não linear, pode-se esperar bons resultados da aplicação do algoritmo. A forma desse estimador, usando a integração de uma trajetória nominal diretamente a partir de uma única condição inicial, é conhecida como o Filtro Linearizado de Kalman. É importante observar que as mesmas características computacionais do filtro linear valem para o filtro linearizado, uma vez que, conhecida a trajetória de referência, as matrizes  $F[\bar{x}(t), t]$ , de (2.57), e  $H[\bar{x}(t_k), t_k]$ , de (2.62), podem ser calculadas e armazenadas. Com isso, a matriz de covariâncias permanece independente das observações e tanto a matriz de covariâncias como o Ganho de Kalman podem ser obtidas a priori e armazenadas. Isto, no entanto, a par de exigir grande disponibilidade de armazenagem em computador, é, na prática, inviável, já que significa manter tanto a dinâmica do sistema como o processo de observações muito próximos a uma trajetória nominal que, se conhecida, pode levar a se dispensar o uso de esquemas complexos. Claramente, a dificuldade do método é obter uma trajetória de referência que seja uma boa aproximação para o sistema não linear e, sob este aspecto, na maioria dos casos, o Filtro Estendido de Kalman é uma melhor opção.

### 2.3.2 - FILTRO ESTENDIDO DE KALMAN

A idéia básica do Filtro Estendido é linearizar o sistema não linear em torno de cada estimativa atualizada do estado ( $\bar{x}(t_k)$ )

assim que essa estimativa esteja disponível. Para discutir essa idéia, considere que após o processamento do vetor de medidas  $z_k$  esteja disponível a estimativa do estado  $\bar{x}(k|k)$  e se relinearize o sistema em torno desse valor. A trajetória nominal será integrada a partir dessa condição para o intervalo típico  $t_k < t \leq t_{k+1}$ , isto é:

$$\dot{\bar{x}}(t|t_k) = f[\bar{x}(t|t_k), t] \quad (2.67)$$

$$\bar{x}(t_k|t_k) = \bar{x}(k|k)$$

Em  $t_k$ , após a incorporação das medidas e da relinearização, a melhor estimativa da perturbação  $\delta x(t)$  devido ao processo de linearização, é dada por:

$$\delta \bar{x}(t_k) = 0 \quad (2.68)$$

De acordo com o modelo da perturbação (2.63), através do uso do Filtro de Kalman para sistemas lineares, deve-se integrar:

$$\dot{\delta \bar{x}}(t|t_k) = F[\bar{x}(t|t_k), t] \delta \bar{x}(t|t_k) \quad (2.69)$$

com a condição inicial, para esse intervalo, fornecido por (2.68). Ora, como se tem um sistema de equações diferenciais lineares com condição inicial nula,  $\delta \bar{x}(t|t_k)$  é identicamente nulo ao longo de todo intervalo  $(t_k, t_{k+1})$  e:

$$\delta \bar{x}(t_{k+1}|t_k) = 0 \quad (2.70)$$

Como se admite que o sistema não linear seja estimado a partir de:

$$\hat{x}(t) = \bar{x}(t|t_k) + \delta x(t) \quad (2.71)$$

a melhor estimativa de  $x(t)$  nesse intervalo é dada por:

$$\bar{x}(t|t_k) = \bar{x}(t|t_k) + \delta\bar{x}(t|t_k) \quad (2.72)$$

Mas, em razão de  $\delta\bar{x}(t|t_k)$  ser nulo em todo intervalo, a propagação do filtro deverá obedecer:

$$\dot{\bar{x}}(t|t_k) = f[\bar{x}(t|t_k), t], \quad t_k < t < t_{k+1} \quad (2.73)$$

com a condição inicial

$$\bar{x}(t_k|t_k) = \bar{x}(k|k) \quad (2.74)$$

É importante observar que a propagação do estado usa as equações dinâmicas não lineares do sistema. Completado o ciclo de propagação, o vetor de observações deve ser incorporado. Para isso, a medida nominal (ver (2.61)) será dada em  $t_{k+1}$  por:

$$\bar{z}_{k+1} = h[\bar{x}(t_{k+1}|t_k), t_{k+1}] \quad (2.75)$$

e, usando o Filtro de Kalman linear, para  $x(t)$ , decorre:

$$\delta\bar{x}(t_{k+1}|t_{k+1}) = \delta\bar{x}(t_{k+1}|t_k) + K_{k+1} [\delta z_{k+1} - H_{k+1} \bar{x}(t_{k+1}|t_k)] \quad (2.76)$$

Em vista das relações (2.74) e (2.70) e da definição da medida nominal  $\delta z_{k+1}$ , chega-se a

$$\delta\bar{x}(t_{k+1}|t_{k+1}) = K_{k+1} \{z_{k+1} - h[\bar{x}(t_{k+1}|t_k), t_{k+1}]\} \quad (2.77)$$

onde a matriz de Ganho de Kalman,  $K_{k+1}$  é avaliada através de  $P(t_k)$  e  $H(t_k)$  definidas sobre a trajetória de referência.

Como, no caso, o sistema não linear deve ser estimado de:

$$\bar{x}(t_{k+1}|t_{k+1}) = \bar{x}(t_{k+1}|t_k) + \delta \bar{x}(t_{k+1}|t_{k+1}) \quad (2.78)$$

obtem-se, finalmente, para a atualização:

$$\bar{x}(t_{k+1}|t_{k+1}) = \bar{x}(t_{k+1}|t_k) + K_{k+1} \{z_{k+1} - h[\bar{x}(t_{k+1}|t_k), t_{k+1}]\} \quad (2.79)$$

Para inicializar o algoritmo, a estimativa em torno da qual o sistema deve ser linearizado é aquela que representa o melhor conhecimento do estado, isto é:

$$\bar{x}(t_0|t_0) = \hat{x}(t_0) \quad (2.80)$$

o que leva a:

$$\delta \bar{x}(t_0) = 0 \quad (2.81)$$

Em resumo, as principais modificações do filtro estendi do em relação ao filtro linearizado, devido ao fato de se relinearizar o sistema em torno de cada nova estimativa, ficam por conta da propagação e da atualização (equações (2.73) e (2.78)) do valor médio  $\bar{x}(t)$  que utilizam as funções não lineares contidas na dinâmica e nas observações. As equações de propagação e de atualização da matriz de covariâncias permanecem na mesma forma linear do filtro original. Portanto, o algoritmo resultante pode ser colocado na seguinte forma:

. Atualização no instante  $t_k$ , processando a medida  $z_k$ :

- Ganho de Kalman



$$K_k = P(k|k-1) H_k^T \{H_k P(k|k-1) H_k^T + R_k\}^{-1} \quad (2.82)$$

- Matriz de Covarianças:

$$P(k|k) = P(k|k-1) - K_k H_k P(k|k-1) \quad (2.83)$$

- Estado

$$\bar{x}(t_k|t_k) = \bar{x}(t_k|t_{k-1}) + K_k \{z_k - h[\bar{x}(t_k|t_{k-1}), t]\} \quad (2.84)$$

. Propagação entre os instantes  $t_k$  e  $t_{k+1}$  de:

- Matriz de Covariança

$$\begin{aligned} \dot{P}(t|t_k) = & F[\bar{x}(t|t_k), t] P(t|t_k) + P(t|t_k) F^T[\bar{x}(t|t_k), t] + \\ & + G(t) Q(t) G^T(t) \end{aligned} \quad (2.85)$$

- Estado

$$\dot{\bar{x}}(t|t_k) = f[\bar{x}(t|t_k), t] \quad (2.86)$$

As características do Filtro Estendido de Kalman de linearização sempre em torno da última estimativa disponível e propagação usando a parte não linear do modelo levam a que o desempenho desse filtro seja, na maioria dos casos, muito melhor que o do filtro linearizado. Em compensação, o algoritmo é computacionalmente mais complexo, perdendo, inclusive, a vantagem de se poder calcular a priori a matriz de covariança e o ganho de Kalman devido ao acoplamento dos cálculos para essas matrizes com a geração das estimativas e com o processo de observações sobre o sistema.

Como já citado, o Filtro Estendido, em vista de sua simplicidade na abordagem de sistemas não lineares, tem sido empregado

nas mais diversas áreas. Como decorrência, outros algoritmos, baseados em interações locais, foram desenvolvidos para tratamento das não-linearidades inerentes ao problema, com a consequente geração de melhorias na trajetória de referência e nas estimativas (Jazwinski, 1970). Como a interação é local, a estrutura do filtro permanece inalterada. Caso típico para exemplificar essa linha é o Filtro Estendido-Iterado de Kalman, desenvolvido por Denham e Pines (1966). A idéia básica do algoritmo é reduzir o efeito da não-linearidade das observações através de vários ciclos de atualização (equações (2.82) e (2.84)) no mesmo instante  $t_k$ , até se atingir a situação em que não há diferenças significativas entre duas iterações consecutivas. Em outras palavras, dada a estimativa  $\bar{x}(t_k | t_{k-1})$  a priori, o filtro estendido produz a estimativa  $\bar{x}(t_k | t_k)$ . Ao invés de se propagar o filtro, essa estimativa  $\bar{x}(t_k | t_k)$  é usado como estimativa a priori para um novo ciclo de atualização, após recalcular os parâmetros necessários. Esse processo é mantido até não haver, praticamente, alteração nas estimativas entre duas iterações subsequentes. Evidentemente, este algoritmo demanda uma carga computacional muito maior que o filtro estendido, podendo, no entanto, apresentar melhores resultados em problemas com grandes não-linearidades nas observações.

Outro desenvolvimento importante a partir do filtro estendido, agora no sentido de reduzir a carga computacional, é o chamado Filtro Estendido de Kalman com Ganhos Constantes. Esse algoritmo será discutido em outro contexto, no item 2.6.

### 2.3.3 - FILTROS DE MAIOR ORDEM

Desde o aparecimento do Filtro de Kalman e suas versões decorrentes, várias propostas surgiram com a intenção de criar algoritmos mais eficientes e mais abrangentes. De um modo geral, é sempre possível criar um esquema que permita resolver sistemas mais complicados que os englobados pelo Filtro Estendido, mas, tornar esse esquema viável em termos de utilização prática é uma tarefa extremamente complicada.

O passo seguinte na linha do Filtro Estendido  $\bar{e}$ , naturalmente, incluir os termos de maior ordem na expansão em série, de modo a minimizar os efeitos de não-linearidade do sistema em estudo. Esses termos de maior ordem podem ser combinados com hipóteses de trabalho sobre a função de densidade condicionada de probabilidade para gerar os chamados Filtros de Ordem  $n$  Truncados, onde  $n$  define a ordem do último termo retido na expansão. Se for admitido que as densidades condicionadas são Gaussianas, o filtro gerado  $\bar{e}$  dito Gaussiano de Ordem  $n$ .

O Filtro Gaussiano de Segunda Ordem  $\bar{e}$  obtido através da expansão do modelo do sistema em torno da melhor estimativa, retendo os termos até 2ª ordem. O mesmo deve ser feito para o modelo não linear das observações, resultando, após a manipulação algébrica, o filtro na seguinte forma, para um intervalo típico  $t_k < t \leq t_{k+1}$ :

. Propagação

- Estado:

$$\dot{\bar{x}}(t|t_k) = f[\bar{x}(t|t_k), t] + \frac{1}{2} \partial^2(f, P(t|t_k)) \quad (2.87)$$

- Matriz de Covariância:

$$\begin{aligned} \dot{P}(t|t_k) = & F[\bar{x}(t|t_k), t] P(t|t_k) + P(t|t_k) F^T[\bar{x}(t|t_k), t] + \\ & + G(t) Q(t) G^T(t) \end{aligned} \quad (2.88)$$

onde o operador  $\partial^2(f, P(t))$  simboliza um vetor cujo  $i$ -ésimo elemento  $\bar{e}$  definido por (Gelb et alii, 1974):

$$\partial_i^2(f, P(t|t_k)) \triangleq \text{traço} \left\{ \left[ \begin{array}{c} \partial^2 f_i \\ \partial x_p \quad \partial x_q \end{array} \right]_{x=\bar{x}} P(t|t_k) \right\} \quad (2.89)$$

. Atualização

- Estado

$$\begin{aligned} \bar{x}(t_k | t_k) = & \bar{x}(t_k | t_{k-1}) - K_k \{z_k - h[\bar{x}(t_k | t_{k-1}), t_k] - \\ & - \frac{1}{2} \partial^2(h, P(k/k))\} \end{aligned} \quad (2.90)$$

- Ganho de Kalman

$$K_k = P(k|k-1) H_k^T [H_k P(k|k-1) H_k^T + R_k + A_k]^{-1} \quad (2.91)$$

- Matriz de Covariância

$$P(k|k) = P(k|k-1) - K_k H_k P(k|k-1) \quad (2.92)$$

A matriz  $A_k$ , que comparece no cálculo de Ganho de Kalman, (2.91), é dada por:

$$\begin{aligned} A_k = & \frac{1}{4} E[\partial^2(h[\bar{x}(t_k | t_{k-1}), t_k], \bar{x}(t_k | t_{k-1}) \bar{x}^T(t_k | t_{k-1})) \partial^2(h, \bar{x}(t_k | t_{k-1}), \bar{x}^T)] - \\ & - \frac{1}{4} \partial^2(h[\bar{x}(t_k | t_{k-1}), P(k|k-1)]) \partial^2(h[\bar{x}(t_k | t_{k-1}), P(k|k-1)]) \end{aligned} \quad (2.93)$$

O cálculo dessa matriz já apresenta tamanho grau de complicação que seus elementos devem ser calculados através de aproximações (Gelb et alii, 1974). É justamente nesse ponto que reside a contração dos Filtros de Ordem n: mesmo o caso mais simples, Gaussiano e de ordem 2, leva a uma algebrismo tão complexo que o efeito de seu uso se torna duvidoso. Acrescentando-se as dificuldades de ordem computacional na implementação desse tipo de filtro, verifica-se que sua utilização só deve ser cogitada no caso de falha com todas as alternativas das aproximações lineares.

De qualquer forma é interessante observar que o Filtro Gaussiano de Segunda Ordem inclui um termo dependente da covariância tanto na propagação como na atualização do estado. Estes termos, denominados Termos de Correção de Desvio (Maybeck, 1982), podem ser de extrema utilidade para sistemas com grandes não-linearidades.

Existem na literatura (Maybeck, 1982; Jazwinski, 1970; Gelb et alii, 1974; Athans et alii, 1968; Wishner et alii, 1969), como citado, vários exemplos de desenvolvimento ou aplicação de algoritmos de ordem  $n$ , porém, com as ressalvas, sempre, de excessiva carga computacional e aplicação restrita a problemas particulares. Para os propósitos da revisão apresentada, acredita-se que o exemplo do Filtro Gaussiano de Segunda Ordem é suficiente.

#### 2.4 - O PROBLEMA DE DIVERGÊNCIA

Embora o Filtro de Kalman, nas suas várias versões, seja uma ferramenta bastante útil e simples, sua implementação na análise de qualquer sistema pode acarretar o surgimento de diversos problemas, afetando seriamente a qualidade final. As causas desses problemas podem ter diferentes origens e se manifestam na análise dos resíduos associados ao filtro, levando ao que se chama de "divergência" do filtro (Gelb et alii, 1974; Maybeck, 1982; Kuga, 1982). Essencialmente a divergência ocorre quando os erros reais de estimação tornam-se muito diferentes dos valores preditos pela variação do erro resultantes da aplicação do filtro. Dessa maneira pode acontecer que os erros reais tornem-se ilimitados enquanto os erros apontados pelo filtro se mostram pequenos. Esse fenômeno é conhecido como divergência verdadeira do filtro. Por outro lado, pode ocorrer que os erros apontados pelo filtro sejam maiores, embora limitados, enquanto os erros reais são pequenos. Este segundo caso caracteriza a divergência aparente (Gelb et alii, 1974; Maybeck, 1982). Divergência aparente não é considerado problema grave e deve ser esperada, dentro de certos níveis, quando são utilizados os filtros subótimos baseados em aproximações lineares (Gelb et alii, 1974).

Divergência verdadeira pode ser ocasionada basicamente por três motivos:

- . efeitos de não-linearidades que ficam encobertas quando da linearização do modelo;
- . efeitos de modelagem inadequada do sistema físico;
- . efeitos do algoritmo computacional escolhido e da sua implantação na máquina.

O fenômeno pode ser explicado à luz de qualquer dos algoritmos apresentados nas seções anteriores. O fato da matriz  $P(t)$  da covariância dos erros no estado se tornar pequena leva a que a matriz de ganhos de Kalman se torne também pequena, dessa forma impedindo que as novas observações à disposição do filtro sejam corretamente incorporadas. Diz-se, então, que o filtro se "fecha". Pelas equações (2.82) e (2.84) do Filtro Estendido, verifica-se que se cria um ciclo fechado: com  $P(t_{k+1}|t_k)$  pequena,  $K_{k+1}$ , sendo diretamente proporcional a  $P(t_{k+1}|t_k)$  será também pequena (equação (2.82));  $K_{k+1}$  pequena implica que tanto a matriz de covariância  $P(t_{k+1}|t_{k+1})$  de (2.83) como a estimativa do estado,  $\bar{x}(t_{k+1}|t_{k+1})$ , de (2.84) serão muito pouco afetadas nesse ciclo de atualização. Por outro lado  $P(k+1|k+1)$  será a condição inicial para a propagação da matriz de covariância em  $(t_{k+1}, t_{k+2})$  e a mesma sistemática ocorre no passado seguinte. Repetindo a consagrada frase de Jazwinski (1970), "o filtro aprende muito bem o sistema errado".

A maneira correta de se verificar a divergência num problema de estimação é através do acompanhamento do resíduo das observações. Para um passo típico, o resíduo é definido por:

$$r(k+1|k) = z_{k+1} - H_{k+1} \bar{x}(k+1|k) \quad (2.94)$$

Essa nomenclatura não é consagrada, sendo a definição acima utilizada por Jazwinski (1970) e Maybeck (1979), enquanto Kailath

(1971), entre outros autores, define  $r(k+1|k)$  de (2.94) como inovação. Se (2.94) representa a inovação, então o resíduo é definido por (Kalath, 1971):

$$r(k+1|k) = z_{k+1} - H_{k+1} \hat{x}(k+1|k+1) \quad (2.95)$$

e se verifica que a diferença entre as duas notações se refere a usar a média antes ou depois da incorporação das observações.

Utilizando a definição de Jazwinski (1979), para não haver divergência, os resíduos a cada passo devem ter estatística:

$$E[r(k+1|k)] = 0 \quad (2.96)$$

$$E[r(k+1|k) r^T(k+1|k)] = H_{k+1} P(k+1|k) H_{k+1}^T + R_{k+1} \quad (2.97)$$

Logicamente, o que se consegue com isso é apenas um teste de verificação e o que se deve procurar são maneiras de se prevenir a divergência. Métodos para este propósito são discutidos no item subseqüente e devem ser adicionados aos algoritmos discutidos na medida em que não existe a priori maneiras de se determinar se a aplicação de um dado algoritmo ao particular problema de interesse irá ou não gerar divergência. Os critérios citados na literatura (Jazwinski, 1970; Denham e Pines, 1966) são apenas qualitativos e se resumem a afirmar que as matrizes de covariâncias dos ruídos no estado,  $Q(t)$ , e de covariâncias dos ruídos nas observações,  $R(t)$ , devem ser suficientemente grandes, em relação à matriz de covariâncias dos erros no estado  $P(t)$  para que não ocorram tais fenômenos.

## 2.5 - TÉCNICAS DE COMPENSAÇÃO DE ERRO

Apresentado o problema da divergência do Filtro, este item se propõe a analisar métodos para contornar inconvenientes desse ti

po. Com relação aos três efeitos que podem comprometer o desempenho do estimador, nominalmente, escolha e implementação do algoritmo, não linearidades e má modelagem do sistema físico, existem métodos consagrados para lidar com o terceiro efeito, mas pouco se tem de realmente efetivo para tratar os dois primeiros. A análise desenvolvida estará, portanto, restrita aos métodos de tratamento de modelagem deficiente.

Quanto à escolha do algoritmo e sua implantação, claramente deve existir uma solução de compromisso entre os diversos aspectos envolvidos na abordagem do sistema não linear. Apenas para citar um problema relativo à implantação, a forma de atualização da matriz de covariâncias dos erros no estado nos diversos filtros já discutidos até aqui (equação (2.82), por exemplo) é numericamente ruim, podendo destruir a simetria da matriz devido a erros de arredondamento (Jazwinski, 1970). Existem formas equivalentes propostas para evitar esse inconveniente, mas levam a maior esforço computacional (Maybeck, 1979). A decisão pela escolha de sua forma não é, em consequência, trivial e deve ser englobada num esquema mais geral de pré-análise do sistema em estudo.

Para tratamento das não linearidades não existem critérios rigorosos a serem obedecidos. De uma maneira geral, se as matrizes de covariâncias dos ruídos de entrada do sistema,  $Q(t)$  do estado e  $R(t)$  das observações, forem suficientemente grandes em relação à matriz de covariâncias dos erros no estado, os efeitos de linearização do sistema ficarão mascarados e deve-se esperar um bom comportamento do estimador (Jazwinski, 1970). No entanto, o critério é bastante vago e de pouca utilidade pois é impraticável estabelecer a priori como devem ser as matrizes  $Q$  e  $R$  quando comparadas a  $P$ . Para sistematizar um tratamento adaptativo para matriz de ruídos das observações, Rios Neto e Negreiros de Paiva (1983) propõe um esquema que leva em conta as não linearidades desprezadas, o que conduz a bons resultados sem grandes complicações computacionais.

As técnicas para compensação do modelo dinâmico incompleto ou incorreto no estimador são, em grande parte, técnicas que se utilizam de adição de ruído de entrada, através da matriz  $Q(t)$ , ou direta



mente através da matriz de covariâncias  $P(t)$  dos erros do estado. Desta forma, tais métodos contribuem para tratamento das não linearidades, embora não seja essa sua finalidade básica. Dentre esse conjunto de métodos de compensação do erro, destaca-se o de Ruído Adaptativo proposto originalmente por Jazwinski (1969).

Por outro lado, estão também disponíveis técnicas de compensação do erro baseadas em aproximações das partes do sistema físico não levadas em conta para a modelagem do estimador. Dentro desse grupo serão abordadas a Técnica de Compensação do Modelo Dinâmico proposto por Ingram (1971) e o Estimador Sequencial Adaptativo (Jazwinski, 1974).

### 2.5.1 - RUÍDO ADAPTATIVO

Na análise do problema de divergência, foi colocado que quando o resíduo de observação  $r(k+1|k)$  obedece a uma determinada distribuição de probabilidades o estimador tem boas características de estabilidade. Este fato leva a que se possa desenvolver uma técnica de compensação do erro no modelo dinâmico através do monitoramento, passo a passo, dos resíduos, se, ao invés de se pretender verificar a qualidade estatística dos resíduos produzidos, através das relações (2.96) e (2.97), optar-se por introduzir, no modelo do estimador, um ruído adicional que seja consistente com a estatística dos resíduos produzidos. Esta técnica, denominada Ruído Adaptativo, foi proposta por Jazwinski (1969) e recentemente ampliada pelos trabalhos de Rios Neto e Kuga (1981, 1982) e Kuga (1982), demonstrando excelentes resultados para problemas na forma proposta no item 2.1, quando utilizada como um algoritmo auxiliar do Filtro Estendido de Kalman.

A idéia fundamental da técnica é ajustar os níveis do ruído de entrada no modelo dinâmico, expressos nos elementos da matriz  $Q(t)$ , de modo a que esses ruídos se adaptem aos resíduos de observação. Isto não implica em nenhuma contradição com os métodos apresentados, visto que a estimativa inicial para  $Q(t)$  representa apenas uma medida do desconhecimento do usuário sobre as parcelas não modeladas dentro da dinâmica do estimador.

São hipóteses para aplicação do Ruído Adaptativo o não correlacionamento entre os ruídos das observações a serem processadas e entre os ruídos forçantes na dinâmica do sistema, isto é, admite-se a priori que as matrizes  $R_k$  e  $Q(t)$  que aparecem nas relações (2.47) e (2.21), respectivamente, sejam diagonais. A necessidade dessas restrições estão ligadas a dois aspectos distintos. No caso da matriz de covariâncias de ruídos nas observações  $R_k$ , a não correlação entre seus elementos implica em que o processamento possa ser feito sequencialmente, ou seja, cada componente do vetor de observações  $z_k$  pode ser incorporado independentemente. Por uma análise da estrutura do Filtro Linear ou do Filtro Estendido de Kalman verifica-se que não há nenhuma modificação no algoritmo caso se processe uma ou todas as  $r$  observações contidas no vetor de medidas, isto é, caso o processamento seja sequencial ou simultâneo (Kuga, 1982). A vantagem do processamento sequencial é evitar a inversão de uma matriz  $r \times r$ , onde  $r$  é a dimensão do vetor de observações  $z_k$ . Com relação a matriz de covariâncias do ruído no estado,  $Q(t)$ , o procedimento do Ruído Adaptativo gera os elementos  $q_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , que representam as varianças do ruído dinâmico de modo a garantir a consistência dos resíduos.

Admitindo o Filtro Estendido de Kalman e definindo-se o resíduo observado através de:

$$r(k+1|k) = z_{k+1} - \bar{z}_{k+1} \quad (2.98)$$

onde  $z_{k+1}$  é a observação (escalar) e  $\bar{z}_{k+1}$  a observação estimada, condicionada à história das observações anteriores:

$$\bar{z}_{k+1} = E \{z_{k+1} | z_k, z_k, \dots, z_1\} \equiv h[\bar{x}(t_k | t_{k-1}), t_k] \quad (2.99)$$

a hipótese fundamental de consistência entre o resíduo e sua estatística, na forma proposta por Jazwinski (1969), é obtida supondo-se que o resíduo tenha distribuição Gaussiana e determinando-se a variança do ruído  $q$  que produz o resíduo mais provável. Esta conceituação pode ser traduzida por:

$$\begin{aligned} & \max p[r(k+1|k)] \\ & q \geq 0 \end{aligned}$$

onde  $p$  é a função densidade de probabilidades do resíduo e a restrição  $q \geq 0$  decorre das propriedades de uma variância. A maximização da probabilidade de ocorrência do resíduo leva a que, para obedecer a condição acima, nas hipóteses de resíduo com densidade Gaussiana, de média nula e covariância dada por (2.97), deve-se ter (Jazwinski, 1970):

$$r^2(k+1|k) = E \left\{ r^2(k+1|k) \right\} \quad (2.100)$$

Ora, a quantidade  $r(k+1|k)$  está disponível numericamente antes de cada ciclo de propagação, enquanto o termo à direita em (2.100) pode ser desenvolvido até que se obtenha explicitamente a matriz  $Q(t)$  ou seus elementos  $q_i$ ,  $i = 1, \dots, r$ . Portanto, após manipulações algébricas, pode-se gerar uma equação do tipo:

$$z'_{k+1} = H'_{k+1} q \quad (2.101)$$

onde  $z'_{k+1}$  é uma pseudo observação, obtida a partir do resíduo e  $H'_{k+1}$  é uma matriz, calculada com os dados do sistema, que permite relacionar o vetor  $q$  dos elementos de  $Q(t)$  com as pseudoobservações. A solução de (2.101) fornece, então, os valores da matriz  $Q(t)$  consistentes com o resíduo para uma dada pseudoobservação. Jazwinski (1970) utiliza esse valor como estimativa a priori para processamento das pseudo observações subsequentes através de um estimador de mínimos quadrados.

A alternativa proposta por Rios Neto e Kuga (1981, 1982) e Kuga (1982) está centrada na ideia do resíduo verdadeiro, mais completa que a do resíduo observado por admitir que também o resíduo observado é calculado de maneira incerta, já que está baseado numa observação contaminada com ruídos. Para tanto, definem o resíduo verdadeira através de:

$$r_v(k+1|k) = z^v_{k+1} - \bar{z}_{k+1} \quad (2.102)$$

onde  $z_{k+1}^V$  é a observação real, verdadeira, que seria obtida caso não existissem erros de medida. Nesse caso, os resíduos verdadeiro e observado são relacionados por (Kuga, 1982):

$$r(k+1|k) = r_V(k+1|k) + v_{k+1} \quad (2.103)$$

Da mesma maneira, para o resíduo verdadeiro, impõe-se para compatibilizar os elementos da matriz  $Q$  com os resíduos que:

$$\begin{aligned} \max \quad & p[r_V(k+1|k)] \\ q \geq & 0 \end{aligned}$$

o que leva a:

$$r_V^2(k+1|k) = E \{r_V^2(k+1|k)\} \quad (2.104)$$

As equações das pseudo observações tomam agora a forma:

$$z_{k+1}'' = H_{k+1}'' q + v_{k+1}'' \quad (2.105)$$

onde  $v_{k+1}''$  é um ruído Gaussiano e de média nula, que representa a incerteza nas pseudo observações. O processamento das pseudoobservações, nessa nova forma, pode ser feito através do Filtro de Kalman com processamento sequencial, o que significa utilizar a mesma estrutura computacional, em termos de algoritmos, desenvolvida para o problema de estimação do estado.

O desenvolvimento completo da técnica de ruído adaptativo na forma de Rios Neto e Kuga (1981) será feita quando do estabelecimento do estimador de estado proposto nesse trabalho. Essa forma se mostra muito mais atrativa que a de Jazwinski (1969), por levar em conta as incertezas no cálculo dos resíduos e por permitir a utilização de idênticas rotinas computacionais para cálculo tanto do ruído adaptativo

como dos ciclos associados ao Filtro Estendido. Além disso, essa técnica tem sido empregada na solução de problemas bastante complexos com amplo sucesso (Rios Neto e Kuga, 1981 e 1982; Kuga, 1982; Moro, 1983, entre outros).

### 2.5.2 - TÉCNICA DE COMPENSAÇÃO DO MODELO DINÂMICO

A técnica de Compensação do Modelo Dinâmico é um algoritmo que permite, a partir das informações contidas nos resíduos, estimar diretamente os efeitos não modelados em paralelo com a estimativa do estado (Ingram, 1971; Tapley e Ingram, 1973). A inclusão da parcela não modelada da dinâmica dentro do estimador fornece a esse último melhores características de estabilidade, sem exigir nenhum conhecimento da parcela incluída. O desenvolvimento dessa técnica leva a um esquema análogo ao Filtro de Schmidt-Kalman para estimação simultânea de estado e parâmetros (Jazwinski, 1970), com conseqüente aumento na dimensão do vetor de estado, o que representa uma grande limitação a sua utilização em tempo real. No entanto, suas características de estabilidade e precisão levam a que tenha grande destaque entre as técnicas aplicadas à correção de má modelagem do sistema físico no estimador.

Para discutir as idéias básicas da Compensação do Modelo Dinâmico, admite-se que o sistema não-linear seja descrito por:

$$\dot{x}(t) = f_m(x(t), t) + f_{nm}(x(t), t) \quad (2.106)$$

onde  $f_m$  representa a parte dinâmica incluída no estimador e  $f_{nm}$  representa a parte a ser suprida pelo método, isto é, as componentes não modeladas seja por desconhecimento, seja para não complicar excessivamente o modelo do estimador, ou por qualquer outro motivo.

Para um grande número de casos de interesse, pode-se colocar que o vetor  $f_{nm}$  tem parte de suas componentes nulas visto que o

modelo para  $x(t)$  engloba derivadas exatas. Esse é o caso, por exemplo, de sistemas mecânicos onde as equações obtidas a partir das leis de Newton levam a que o sistema de 1ª ordem equivalente à forma (2.106) seja escrito por:

$$\dot{r}_p(t) = v_p(t) \quad (2.107)$$

$$\dot{v}_p(t) = a_m(r, v, t) + a_{nm}(r, v, t) \quad (2.108)$$

onde  $r_p(t)$  indica posição do móvel,  $v_p(t)$  sua velocidade, e  $a_m, a_{nm}$  tem, cada um, 3 componentes, no caso de um sistema mecânico. Essas considerações se tornam bastante importantes na medida em que o número de componentes do vetor de acelerações não modeladas representa o aumento do número de variáveis a serem estimadas pelo filtro.

Posto isto, o vetor de componentes não modeladas é aproximado por um processo de primeira ordem de Gauss-Markov, dado por:

$$\dot{e}(t) = -B_c e(t) + w_c(t) \quad (2.109)$$

onde o vetor  $e$  tem a dimensão de componentes ativos de  $f_{nm}$  em (2.106), admitido igual a  $\lambda$ , ou correspondentemente, a mesma dimensão do vetor  $a_{nm}$  em (2.108) e  $B_c$  é uma matriz  $\lambda \times \lambda$  diagonal, de elementos iguais e positivos, constantes e conhecidos a priori, que representam os coeficientes de correlação ao longo do tempo (Kuga, 1982). Deste modo:

$$B_c = b_c I_{\lambda} \quad (2.110)$$

onde  $b_c$  é uma constante e  $I_{\lambda}$  a matriz de identidade de ordem  $\lambda$ . Finalmente, em (2.109),  $w_c$  é um vetor de dimensão  $\lambda$  de ruído branco Gaussiano, de média nula e matriz de covariâncias  $Q_c$  diagonal.

Resulta, então, que o vetor de estado aumentado fica na forma:

$$X^T = [x^T; e^T] \quad (2.111)$$

com a dinâmica do sistema sendo descrita por:

$$\dot{X}(t) = f_c(X(t), t) + G_c(t) w(t) \quad (2.112)$$

onde

$$f_c^T(X(t), t) = [(f_m(x(t), t) + e(t))^T; (-B_c e)^T] \quad (2.113)$$

$$G_c^T(t) = [0_n; I_\ell]$$

$0_n$  em (2.113) representa a matriz nula de ordem  $n$ .

Observe que o sistema englobando o estado aumentado em (2.112) tem a mesma estrutura usada nas versões do Filtro de Kalman e, portanto, a mesma sistemática de abordagem do problema deve ser utilizada. Em particular, a técnica de Compensação do Modelo Dinâmico tem sido utilizada em conjunto com o Filtro Estendido de Kalman em problemas tão complexos como estimação de órbita de satélites com resultados excelentes (Kuga, 1982; Rios Neto, 1973; Tapley e Ingram, 1973; Rios Neto e Cruz, 1984). Mesmo o esforço computacional maior devido à inclusão de novas variáveis a serem estimadas simultaneamente com o estado pode ser minorado com a integração analítica de parte das equações diferenciais adicionais na dinâmica do estimador, em razão da particular escolha do modelo que descreve a parte não modelada, dado por (2.109) (Kuga, 1982).

### 2.5.3 - ESTIMADOR SEQUENCIAL ADAPTATIVO

O estimador sequencial adaptativo é um algoritmo proposto por Jazwinski (1974). A idéia fundamental deste estimador é a de adi

cionar ao modelo dinâmico uma função forçante aleatória que representa os erros de modelagem e estimar essa função simultaneamente com o estado, desta forma adaptando o sistema a quaisquer variações. O modelo adotado para essa função forçante aleatória é o de um polinômio com coeficientes aleatórios e variantes no tempo.

Desse modo, o modelo do estimador é dado por:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) + Gm(t) \quad (2.114)$$

onde  $Gm(t)$  representa os erros do modelo e  $m(t)$  a função forçante a ser estimada.

Adotando um modelo discreto de observações, como em (2.58), o modelo dinâmico pode ser discretizado:

$$x(k+1) = \tilde{f}(x(k), m(t)) \quad (2.115)$$

Nessa altura é necessário caracterizar a função  $m(t)$ . Em cada intervalo  $(t_k, t_{k+1})$ ,  $m(t)$  é modelado por um polinômio linear no tempo, isto é:

$$m(t) = m(t_k) + \dot{m}(t_k) (t - t_k) \quad (2.116)$$

onde o coeficiente  $\dot{m}$  é modelado como uma constante aleatória com estatística fixada a priori, o que significa para o intervalo  $(t_k, t_{k+1})$ :

$$\dot{m}(t) = \dot{m}(t_k) \quad (2.117)$$

Com isso, verifica-se que o método implica em aproximações por segmentos de reta e, portanto, quanto menor o intervalo entre medidas melhor a aproximação em relação ao sistema real. Por outro lado, o estado aumentado deve incluir o estado original  $x(t)$ , a função  $m$  e os coeficientes  $\dot{m}$ , ou seja:



$$X^T(t) = [x^T(t), m^T(t), \dot{m}^T] \quad (2.118)$$

Isto significa que o estimador deve ser capaz de fornecer estimativas para todas essas variáveis, além das matrizes de covariância associadas. Apenas a matriz de covariância dos coeficientes  $m$  deve ser definida a priori e mantida constante ao longo do tempo de maneira a deixar o filtro "aberto" a novas informações (Jazwinski, 1974). A estrutura colocada permite o uso do Filtro Estendido de Kalman para propagar e atualizar as estimativas de  $x$ ,  $m$  e  $\dot{m}$ .

Jazwinski (1974) relata a aplicação desse estimador a problemas de estimação de parâmetros e de estimação de órbitas com resultados muito bons. No entanto, o fato de se aumentar o estado no estimador com dois vetores ( $m$  e  $\dot{m}$ ) compromete a sua possível aplicação, principalmente em problemas para os quais é necessária estimação em tempo real. Sob esse aspecto, o estimador adaptativo sequencial se encontra em desvantagem mesmo em relação à técnica de Compensação Modelo Dinâmico descrita no anteriormente. O grande atributo do método reside, claramente, nas precisões das estimativas que permite obter.

## 2.6 - A DUALIDADE NO DESENVOLVIMENTO DE ESTIMADORES DE ESTADO

As relações de dualidade entre as teorias de Estimação e Controle, desenvolvidas no item 2.2, levaram direta ou indiretamente, à proposta de algoritmos para estimação de sistemas lineares e não lineares. Para isso contribuiu o conceito de que métodos aplicáveis à solução de problemas de controle devem necessariamente ter um análogo dual em problemas de estimação. Embora a aplicabilidade de métodos obtidos a partir dessa hipótese seja questionável, a idéia do desenvolvimento de estimadores baseados em métodos de projetos para controles é fundamental no estabelecimento do Observador para Sistemas Estocásticos Não Lineares (Tarn e Rasis, 1970) e na conceituação do Filtro Estendido de Kalman com Ganhos Constantes (Safonov e Athans, 1978), como técnica de características especiais de estabilidade e implementação.

Estes trabalhos, extremamente representativos da dualidade no sentido de que englobam uma grande classe de problemas não lineares, são apresentados a seguir.

### 2.6.1 - OBSERVADOR PARA SISTEMAS ESTOCÁSTICOS NÃO LINEARES

O Observador para Sistemas Estocásticos Não Lineares, proposto por Tarn e Rasis (1976), é uma extensão para o caso estocástico dos observadores de Luenberger de uso em problemas determinísticos, ou seja, onde as medidas são consideradas perfeitas. A idéia do observador de Luenberger é basicamente a de que num problema de controle, via de regra, o número de variáveis de estado que podem ser medidas é menor que a dimensão do vetor de estado, seja por existirem variáveis inacessíveis, ou por não se dispor da instrumentação adequada. Para se compensar essa deficiência, um modelo (determinístico) do sistema é implementado em computador, de modo que a saída total do sistema é fornecida pelos sensores disponíveis e pela saída, convenientemente tratada, do algoritmo do observador. Existem duas versões largamente utilizadas: o observador identidade, onde o vetor de estado é totalmente reconstruído dentro do "modelo" e o observador de mínima ordem ou de Luenberger, onde apenas as medidas não disponíveis através dos sensores são reconstruídas dentro do modelo. Observadores nessas formas são extremamente úteis quando a estimativa inicial do sistema é ruim, pois a convergência pode ser conseguida rapidamente (Luenberger, 1969; Maybeck, 1979), embora no seu projeto não possam ser incluídos critérios de otimização, utilizando-se, para tanto, técnicas de Controle Moderno como, por exemplo, colocação de polos (Luenberger, 1979).

Na passagem para os sistemas estocásticos não lineares Tarn e Rasis (1976) se preocuparam em tentar preservar todos esses aspectos e, em especial, a estabilidade do algoritmo quanto a erros significativos na estimativa inicial. Para isso foi desenvolvida toda uma formulação baseada nas chamadas Funções Semelhantes a Lyapunov dos sistemas não lineares, como uma forma dual da estabilidade determinística. Os resultados, de grande interesse, estão centrados na sequência abaixo (Tarn e Rasis, 1976).

Considere o sistema não linear na forma de

$$dx(t) = f(x(t), t) dt + G(x(t), t) dw(t) \quad (2.119)$$

com o modelo de observações

$$dz(t) = h(x(t), t) + L(x(t), t) dv(t) \quad (2.120)$$

onde  $w$  e  $v$  são processos Brownianos não correlacionados e todos os vetores e matrizes acima seguem as definições usuais já feitas anteriormente.

Impondo as condições de que o observador seja do tipo identidade, linear com relação aos dados observados e assintótico na ausência dos ruídos, chega-se a:

$$dy(t) = f(y(t), t) dt + B[dz(t) - h(y(t), t) dt] \quad (2.121)$$

onde  $B$  é uma matriz de constantes. Para este observador, demonstra-se que, nas hipóteses de  $G$  e  $L$  limitadas, se existir uma matriz simétrica e positiva definida  $Q$  tal que a matriz gerada por  $Q(f_x - Bh_x - (\frac{\alpha}{2}) L)$  é semidefinida negativa, então o erro  $e(t) = x(t) - y(t)$  é exponencialmente limitado na sentido médio quadrático com expoente escalar  $\alpha > 0$ .  $f_x$  e  $h_x$  acima indicam as matrizes de derivadas parciais de  $f$  e  $h$  em relação ao estado  $x(t)$ , respectivamente (Tarn e Rasis, 1976), enquanto a matriz  $Q$  serve para a obtenção da função semelhante a Lyapunov. Resultados análogos podem ser obtidos com formulação discreta para a dinâmica e/ou processo de observações.

Uma constatação importante sobre o estimador acima é a de que a matriz de ganho  $B$  atuando sobre o resíduo é constante, ao contrário do que acontece nas versões do Filtro de Kalman.

O Observador Estocástico para Sistemas Não Lineares descrito têm como grandes atrativos a aplicabilidade a uma grande classe

de problemas não lineares e o fato de, verificados os critérios de estabilidade baseados nas funções de Lyapunov, o estimador ser não divergente. No entanto, a montagem desse estimador é tarefa bastante complexa, pois não existe um roteiro de projeto a ser seguido, assim como não há maneiras diretas de construção das funções de Lyapunov para testar a estabilidade. Mais ainda, as estimativas geradas no observador não são otimizadas. Estas deficiências do método são também inerentes aos observadores determinísticos de Luenberger, o que limita o alcance da técnica. Finalmente, do ponto de vista de carga computacional, o observador estocástico apresenta excelentes características por trabalhar com matriz de ganho constante.

#### 2.6.2 - O FILTRO ESTENDIDO DE KALMAN COM GANHOS CONSTANTES

Embora o Filtro Estendido de Kalman com Ganhos Constantes seja um caso particular do Filtro Estendido apresentado no item 2.3.2, o seu reconhecimento como método com excelentes propriedades de estabilidade e implementação só foram estabelecidos a partir do trabalho de Safonov e Athans (1978). Por sua vez, este trabalho é uma extensão do estudo de Safonov (1977) sobre problemas Lineares Quadráticos Gaussianos. Em ambos, as relações de dualidades são exploradas para determinar características de robustez (anti-divergência) para estimadores e reguladores.

Com relação ao Filtro Estendido de Kalman com Ganhos Constantes (FEKGC) procura-se justificar a sua utilização com o argumento do esforço computacional reduzido em comparação com o Filtro Estendido usual. O emprego de uma aproximação pré-calculada do Ganho de Kalman evita a carga associada com a atualização em tempo real da matriz de covariâncias do sistema. Segundo os autores, é questionável o cálculo do ganho passo a passo, uma vez que os erros de modelagem dos ruídos no sistema e nas observações são muito grandes e, portanto, torna-se sem sentido exigir precisão nesse cálculo, sendo preferível o uso de uma aproximação.

Com essa motivação, o estudo do FEKGC levou a três conclusões importantes (Safonov e Athans, 1978):

- a) O desempenho do estimador  $\bar{e}$  é muito bom mesmo para aproximações bastante ruins do modelo.
- b) O estimador  $\bar{e}$  não divergente, isto é, intrinsecamente robusto, para os efeitos de aproximação necessários. Para esse estimador, é possível obter relações analíticas para verificação de não divergência.
- c) No contexto do controlador estocástico, vale, para o FEKGC, um teorema de Separação, o que permite usar o estimador como gerador da estimativas do estado para uso nas leis de controle sem afetar a estabilidade do controlador.

A modificações do FEKGC em relação ao Filtro Estendido usual ficam por conta do cálculo da matriz de covariâncias erro no estado e da matriz de Ganhos de Kalman. Para isso, admitindo válidas as hipóteses e definições do item 2.3.2, escolhe-se uma trajetória nominal  $\bar{x}(t)$  que permita o cálculo das matrizes  $F[\bar{x}(t), t]$  e  $H[\bar{x}(t), t]$  e resolve a equação algébrica de Riccati:

$$F[\bar{x}(t), t] \bar{P} + \bar{P} F^T[\bar{x}(t), t] - \bar{P} H^T[\bar{x}(t), t] R^{-1} H[\bar{x}(t), t] \bar{P} + Q = 0 \quad (2.122)$$

Com os valores de  $\bar{P}$ , a matriz de Ganhos de Kalman será dada por:

$$\bar{K} = \bar{P} H^T[\bar{x}(t), t] R^{-1} \quad (2.123)$$

Obtida a matriz  $\bar{K}$  por esse processo "off-line", o FEKGC segue os mesmos passos do Filtro Estendido usual, substituindo-se  $K_k$  por  $\bar{K}$ .

Se a aproximação feita parece, a primeira vista, grosseira, Safonov e Athans (1978) mostram que mesmo para uma trajetória nominal ruim o filtro desenvolvido é não divergente, tendo margem de ganho infinita, pelo menos 50% de tolerância de redução do ganho e, no mínimo,  $\pm 60^\circ$  de margem de fase em relação à situação ideal em que a linearização é exata. Essa grande robustez do FEKGC é dual à robustez apresentada pelos reguladores lineares quadráticos com realimentação do estado (Safonov, 1977).

Os resultados apresentados demonstram que o método FEKGC possui propriedades muito boas para aplicações em controle de processos, onde o compromisso de precisão não é muito estreito, mas onde se requer utilização em tempo real e garantia de não divergência. No entanto, as condições de verificação de robustez são ainda muito complicadas e o roteiro de síntese do estimador de utilidade restrita, existindo limitações notáveis no reconhecimento dos próprios autores (Safonov e Athans, 1978).

O desempenho do FEKGC na aplicação a um problema específico em que a solução ótima analítica para o estimador é conhecida foi analisado por Liu e Marcus (1980) e por Liu (1978). Tais trabalhos permitem, também, avaliar o desempenho do Filtro Estendido de Kalman entre os diversos algoritmos simulados. Verifica-se, então, que para o caso em questão o desempenho do Filtro Estendido é tão bom quanto o do estimador ótimo, sendo que a única diferença entre os dois algoritmos reside na matriz de ganhos. O FEKGC tem um comportamento quase tão bom quanto o Filtro Estendido ou o estimador ótimo, sendo que os resultados da simulação sugerem que, se for escolhido algum método subótimo, o FEKGC é preferível devido às suas características computacionais mais simples (Liu e Marcus, 1980).

## 2.7 - REVISÃO DOS ESTIMADORES APRESENTADOS.

Ao longo dos itens anteriores procurou-se apresentar os fundamentos teóricos necessários ao desenvolvimento do estimador de es

tado proposto neste trabalho, ao mesmo tempo em que se traçava um panorama do estado-da-arte em estimação de sistemas não lineares através da escolha e discussão de trabalhos que representam as principais linhas de pesquisa na área. Do que foi exposto, pode-se destacar três tendências caracterizadas por:

- . uso de modelos complexos;
- . uso de modelos simplificados em conjunto com técnicas adaptativas;
- . uso das noções de dualidade.

A utilização de estimadores baseados em modelos complexos, da qual os Filtros de Maior Ordem são os grandes representantes, tem sua importância centrada na solução de sistemas não lineares onde a existência de não-linearidades significativas na dinâmica e no processo de observações leva a que técnicas mais simples não possam ser usadas. Além disso, se as densidades de probabilidades envolvidas no problema forem não Gaussianas não há outro recurso que não seja o de utilizar filtros de Maior Ordem. Entretanto, a aplicabilidade desses filtros é questionável principalmente se a dimensão do vetor de estado for grande. Jazwinski (1970) coloca que para dimensão maior que 3 o problema já tende a se tornar intratável. Também a melhora pela inclusão de termos de maior ordem é duvidosa na medida em que se uma aproximação de primeira ordem for inadequada então não há razão para que os termos de maior ordem corrijam sozinho os defeitos do modelo. Para efeitos de aplicação em tempo real, por exemplo em controle de processos, tais métodos devem ser descartados: o esforço computacional envolvido é tão grande que inviabilizam essa utilização.

Técnicas baseadas em aproximações lineares, como já ressaltado ao longo desse capítulo, são empregadas hoje, salvo raras exceções, em todos os problemas de estimação não linear. O Filtro Estendido de Kalman, devido à sua característica de relinearização em torno de melhor estimativa, é o método consagrado nessa área. Entretanto devido aos problemas que estão geralmente embutidos na formulação inicial

do sistema, pode ocorrer divergência do estimador. As técnicas adaptativas de compensação do erro, como o Ruído Adaptativo e a Compensação do Modelo Dinâmico, tem sido desenvolvidas para evitar que isso ocorra, atuando em conjunto com o Filtro Estendido. Os resultados obtidos com essa abordagem tem demonstrado que o futuro, provavelmente, está nessa direção. As razões para isso são muitas: as técnicas adaptativas são de fácil implementação, não aumentam significativamente o trabalho computacional, encobrem efeitos de má modelagem e, eventualmente, também os efeitos de não linearidades do modelo. Se o Filtro Estendido de Kalman é atualmente aceito, com quase unanimidade, como o método mais adequado ao tratamento de um problema de estimação não linear, a técnica de compensação de erro a ser utilizada depende muito do particular sistema no qual deverá ser empregado. Em problemas de controle de processos, essa técnica deve ser a mais simples possível, sem que haja comprometimento dos resultados, de modo a garantir que as estimativas estejam disponíveis para as outras partes do processo em tempo hábil. Esse fator, da mesma maneira que faz a escolha pender para o lado de uma técnica como a do Ruído Adaptativo, por não introduzir novas variáveis de estado no modelo, abre espaço para que se procure outros métodos ainda mais simples que o Filtro Estendido desde que se mantenha a mesma qualidade das estimativas. Sob esse aspecto, o Filtro Estendido de Kalman com Ganhos Constantes, com suas importantes características de robustez, passa a ser bastante atrativo. Da mesma forma, o estimador desenvolvido neste trabalho, onde se propõe tratar um número de variáveis menor que a do vetor de estado, representa um passo no sentido de se conseguir obter métodos mais simples e ainda precisos.

Com relação aos estimadores obtidos a partir da dualidade estimação-controle, o Observador para Sistemas Estocásticos Não lineares (Tarn e Rasis, 1976) sintetiza, de uma maneira apropriada, a metodologia que tem sido seguida nessa linha, isto é, a tentativa de se transportar a abordagem de um para outro campo na forma originalmente proposta. O risco nessa transferência é se levar também (ou ainda ampliar) as limitações de método original, tornando-o de pouca serventia



para as aplicações necessárias. No estimador proposto procura-se explorar uma outra filosofia que é a de colocar o problema de estimação dentro de uma formulação de controle e fazer uso das relações de dualidade. Essa abordagem é totalmente original e espera-se tornar claras as suas vantagens ao longo do capítulo seguinte.

## CAPÍTULO 3

### UM ESTIMADOR DE ESTADO BASEADO NA DUALIDADE

No presente capítulo, formula-se, a partir dos fundamentos teóricos e práticos abordados no capítulo anterior, um estimador de estado utilizando as idéias básicas das relações de dualidade entre os problemas de estimação e controle. São discutidos sucessivamente a proposta do estimador, a propagação do estado, o algoritmo em si, a necessidade de inclusão de técnicas auxiliares e os critérios de ajuste do estimador, tendo em vista sua validação como ferramenta de aplicação a sistemas não lineares. O capítulo é finalizado com a análise matemática do estimador proposto.

#### 3.1 - PROPOSTA DO ESTIMADOR

Em problemas de estimação de estado de sistemas dinâmicos não-lineares, como já ressaltado, não se dispõe, em geral, de boa modelagem dinâmica para descrever o comportamento do sistema físico dentro do estimador de estado. As dificuldades para se conseguir um modelo representativo estão ligados aos efeitos não modelados, por desconhecimento da realidade completa do sistema ou para evitar a sobrecarga do modelo, e às limitações impostas pelos recursos computacionais e teóricos. Estas restrições podem conduzir o estimador à divergência e, para evitá-la, deve-se lançar mão de diversas técnicas que procuram compensar o efeito de erros de modelagem na deterioração das estimativas. Técnicas como as de Ruído Adaptativo (Jazwinski, 1969; Rios Neto e Kuga 1981 e 1982, por exemplo) condicionam a matriz de covariâncias dos erros no estado, explorando as informações contidas nos resíduos das observações para manter a capacidade do estimador de extrair o estado a partir das observações. Em técnicas como as de Compensação do Modelo Dinâmico (Tapley e Ingram, 1973) os mesmos resíduos são utilizados para estimativa direta dos componentes não modelados. Técnicas como essa implicam necessariamente no aumento do número de variáveis a serem estimadas.

O procedimento desenvolvido neste trabalho propõe uma alternativa para a solução do problema de estimação de sistemas não lineares. As noções de dualidade entre as teorias de estimação e controle são utilizadas para caracterização de um pseudocontrole de ação equivalente aos efeitos não

modelados. Estima-se, então, o valor desse controle com base nas informações contidas nos valores previstos para os resíduos das observações, de maneira a eliminar tais resíduos (Rios Neto e Fleury, 1984). A dinâmica do sistema e o processo de observações são admitidas discretas ou discretizadas no tempo e a aplicação desse esquema leva a que a determinação do controle seja reduzida à solução de um problema de estimação ótima linear estocástica de parâmetros, inserindo-se, dessa forma, o problema de estimação num problema de controle. Em consequência, no ciclo de filtragem ou atualização do estimador, ao invés de um estado, estima-se um controle. Uma vez obtido esse controle, pode-se imediatamente gerar a estimativa de estado. Para a propagação das incertezas associadas, trata-se a incerteza na estimativa do pseudocontrole de forma análoga a um ruído de estado, fechando-se, assim, o ciclo num passo típico do estimador.

A formulação proposta traz vantagens sobre os esquemas discutidos anteriormente. Dessa maneira, se o modelo inclui derivadas exatas (ver item 2.2), o vetor de pseudocontrole terá dimensão menor que o estado, fazendo com que um número menor de variáveis seja estimado a cada passo. Essa característica é desejável nos chamados sistemas mecânicos de segunda ordem, dos quais o problema de estimação de órbitas é um dos exemplos representativos. A recomposição do estado se faz diretamente do vetor de controle já que o que se deseja é, na verdade, o estado estimado. O estimador proposto permite a utilização de modelos simplificados e fornece, através dos controles, uma medida das componentes não modeladas do sistema a cada passo. Não se vincula a dinâmica dos controles, como era de se esperar pois, no caso de vinculação, até o nome controle perderia o sentido. Isso significa que não há necessidade de extensão do estado para cálculo das componentes não modeladas como no caso das técnicas de Compensação do Modelo Dinâmico e do Estimador Sequencial Adaptativo (ver itens 2.2 e 2.3). Finalmente, a inclusão do problema de estimação dentro de uma formulação de controle leva a que se possa dispor de procedimentos desenvolvidos para a última área que são extremamente convenientes para tratamento no estimador.

Sob esses aspectos o procedimento proposto constitui uma alternativa vantajosa e viável. Uma vez garantidas as necessárias condições de observabilidade e controlabilidade, o estimador apresenta resultados satisfatórios, como demonstrado nos capítulos subsequentes, com a utilização conjunta com a técnica de Ruído Adaptativo.

### 3.2 - PROPAGAÇÃO DO ESTADO ESTIMADO

Admite-se que o sistema não linear cujo estado se pretende estimar seja descrito por:

$$\dot{x}(t) = f[x(t), t] \quad (3.1)$$

onde  $x$ , vetor de dimensão  $n$ , pretende representar o estado verdadeiro do sistema. Qualquer que seja o modelo escolhido, (3.1) é apenas uma aproximação à descrição do sistema físico original, pois, além de não se ter um modelo perfeito, a incerteza nas condições iniciais e os erros inerentes à aproximação da solução por processos numéricos introduziriam erros para afastar a propagação do modelo do sistema que pretende reproduzir.

Para levar em conta o efeito do desconhecimento sobre o sistema, adiciona-se, formalmente, às equações originais do movimento um ruído aleatório  $w(.,.)$ , representado por um vetor de dimensão  $m$  e reescreve-se (3.1) através de:

$$\dot{x}(t) = f[x(t), t] + \bar{G}w \quad (3.2)$$

onde  $\bar{G}$  é uma matriz retangular  $n \times m$  e  $w(.,.)$  é um processo aleatório Gaussiano no branco cuja estatística é dada por:

$$E [w(t)] = 0 \quad (3.3)$$

$$E [w(t) w^t(\tau)] = Q(t) \delta(t-\tau) \quad (3.4)$$

onde  $\delta(t-\tau)$  é o operador Delta de Dirac.

Como todo procedimento de estimação, o estimador proposto se baseia numa trajetória determinística nominal gerada com o melhor modelo que as circunstâncias permitem utilizar. No presente caso, a trajetória nominal será denotada por:

$$\dot{\bar{x}} = f[\bar{x}, t] \quad (3.5)$$

A trajetória nominal, num passo típico, deve ser integrada com a melhor condição inicial disponível para tentar mantê-la o mais próximo possível da trajetória real. Essa condição inicial é supostamente traduzida pela estimativa do estado obtido no passo anterior. Então, supondo que o passo típico que está sendo tratado seja o  $k+1$ -ésimo passo, que vai do instante  $t_k$  até  $t_{k+1}$ , a condição inicial será denotada por:

$$\bar{x}(t_k) = \bar{x}(k|k) \quad (3.6)$$

onde  $\bar{x}(k|k)$  é a estimativa citada. Sua obtenção será descrita ao longo deste item.

Considere-se agora a perturbação no estado medida a partir da trajetória nominal. Tal perturbação é dada por  $x(t) - \bar{x}(t)$  para um instante  $t \in [t_k, t_{k+1}]$  e se traduz num processo estocástico satisfazendo (Maybeck, 1982):

$$\dot{x}(t) - \dot{\bar{x}}(t) = f[x(t), t] - f[\bar{x}(t), t] + \bar{G} w(t) \quad (3.7)$$

A equação (3.7) é uma equação diferencial estocástica não linear que, no sentido médio quadrático (Jazwinski, 1970), pode ser expandida numa série em torno da trajetória nominal:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) - \dot{\bar{x}}(t) = & f[\bar{x}(t), t] + \left[ \frac{\partial f[x(t), t]}{\partial x} \right]_{x=\bar{x}} [x(t) - \bar{x}(t)] + \sigma(2) + \\ & - f[\bar{x}(t), t] + \bar{G} w \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\dot{x}(t) - \dot{\bar{x}}(t) = \left[ \frac{\partial f[x(t), t]}{\partial x} \right]_{x=\bar{x}} [x(t) - \bar{x}(t)] + \sigma(2) + \bar{G} w \quad (3.9)$$

onde  $\sigma(2)$  representa os termos de ordem maior que 1 na expansão e onde se nota a avaliação da matriz de coeficientes  $\left[ \frac{\partial f[x(t), t]}{\partial x} \right]_{x=\bar{x}}$  sobre a trajetória nominal gerada.

A aproximação de primeira ordem da equação (3.9), chamada equação de perturbação, é dada por:

$$\dot{\hat{x}}(t) - \dot{\bar{x}}(t) = F[\bar{x}(t), t] [x(t) - \bar{x}(t)] + \bar{G} w \quad (3.10)$$

onde:

$$F[\bar{x}(t), t] = \left[ \frac{\partial f[x(t), t]}{\partial x} \right]_{x = \bar{x}}$$

Definindo a perturbação  $\Delta x(t)$  por:

$$\Delta x(t) = x(t) - \bar{x}(t) \quad (3.11)$$

a equação (3.10) se reduz a:

$$\Delta \dot{x}(t) = F[\bar{x}(t), t] \Delta x(t) + \bar{G} w \quad (3.12)$$

Para efeito de uso em computador a equação (3.12) geralmente é discretizada. Uma forma conveniente de se fazer essa discretização é o uso da matriz de transição associada ao sistema.

Define-se matriz de transição através da relação:

$$\dot{\phi}(t, t_k) = F(t) \phi(t, t_k) \quad (3.13)$$

onde a matriz  $\phi$  tem dimensão  $n \times n$ , sendo  $n$  a ordem do sistema. A condição inicial associada a (3.13) é:

$$\phi(t_k, t_k) = I \quad (3.14)$$

onde  $I$  é a matriz identidade  $n \times n$ .

Com o uso da matriz de transição, a forma discretizada de (3.12) é dada por:

$$\Delta x(t_{k+1}) = \phi(t_{k+1}, t_k) \Delta x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \phi(t_k, s) \bar{G}(s) w(s) ds \quad (3.15)$$

Admitindo que  $w(t)$  seja um "step-process", ou seja, os intervalos de tempo são suficientemente curtos para que se possa considerar  $w(t)$  como constante em cada intervalo, pode-se então colocar a integral em (3.15) na forma:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \phi(t_k, s) \bar{G}(s) w(s) ds = \left[ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \phi(t_k, s) \bar{G}(s) ds \right] w_k = \Gamma_k w_k \quad (3.16)$$

com a estatística do ruído  $w_k$  dada através de:

$$E \left[ w_k \right] = 0 \quad (3.17)$$

$$E \left[ w_k w_j^t \right] = Q_k \delta_{kj} \quad (3.18)$$

onde  $\delta_{kj}$  é o Delta de Kronecker e  $Q_k$  é a correspondente matriz de covarianças de  $w(\dots)$  para o caso discreto.

Chega-se, então, à forma discretizada desejada, expressa por:

$$\Delta x(t_{k+1}) = \phi(t_{k+1}, t_k) \Delta x(t_k) + \Gamma_k w_k \quad (3.19)$$

Nota-se agora que  $\Delta x(t_{k+1})$  é uma variável aleatória que representa o desvio do estado verdadeiro em relação à trajetória nominal na propagação do sistema no intervalo  $(t_k, t_{k+1})$ . Esse desvio, ou essa variável aleatória, se a nominal for escolhida tal que  $\bar{x}(t_k) = E[x(t_k) | Z_k]$ , tem média nula condicionada às observações anteriores, como pode ser rapidamente demonstrado pela aplicação do operador esperança condicionada  $E[\cdot | Z_k]$ , onde  $Z_k$  representa o conjunto de todas as observações feitas sobre o sistema até o instante  $t_k$ , aos dois lados da equação (3.19):

$$E \left[ \Delta x(t_{k+1}) \mid Z_k \right] = E \left[ \phi(t_{k+1}, t_k) \Delta x(t_k) \mid Z_k \right] + E \left[ \Gamma_k w_k \mid Z_k \right]$$

$$\Delta \bar{x}(t_{k+1}) = \phi(t_{k+1}, t_k) E \left[ \Delta x(t_k) \mid Z_k \right] + \Gamma_k E \left[ w_k \mid Z_k \right]$$

$$\Delta \bar{x}(t_{k+1}) = 0 \tag{3.20}$$

onde, na segunda passagem, o primeiro termo se anula pela escolha da trajetória de referência e o segundo termo se anula pelas hipóteses feitas sobre o ruído de estado.

A dispersão verdadeira da variável aleatória  $\Delta x(t_{k+1})$  em torno dessa média não pode ser conhecida pois o estado verdadeiro não é conhecido. No entanto, pode-se usar a estrutura da equação (3.19), que descreve  $\Delta x$ , e a dispersão aproximada dada pela informação a priori. O fato de  $\Delta x(k+1)$ , uma vez adotada a aproximação pela informação a priori, ser uma variável aleatória de média condicionada nula, leva a que se possa afirmar que tal v.a. é nula a menos de um erro  $\eta(k+1|k)$ , isto é:

$$\Delta x(t_{k+1}) = \Delta \bar{x}(t_{k+1}) + \eta(k+1|k) \tag{3.21}$$

$$\Delta x(t_{k+1}) = 0 + \eta(k+1|k) \tag{3.22}$$

onde a média condicionada de  $\eta(k+1|k)$  a  $Z_k$  é nula.

O mesmo raciocínio pode ser aplicado a qualquer instante  $t$  do intervalo  $(t_k, t_{k+1})$ , em particular ao instante  $t_k$ , isto é:

$$\Delta x(t_k) = \Delta \bar{x}(t_k) + \eta(k|k) = 0 + \eta(k|k) \tag{3.23}$$

Substituindo (3.22) e (3.23) na expressão (3.19) obtêm-se a representação do processo  $\eta(\dots)$  por:

$$\eta(k+1|k) = \phi(t_{k+1}, t_k) \eta(k|k) + \Gamma_k w_k \tag{3.24}$$



A equação (3.24) é um processo de Markov de 1ª ordem e, conhecida a estatística de  $w(\dots)$ , pode ser propagada desde que se tenha condições iniciais convenientes para a média e para a covariância da variável  $\eta$ . Como  $\eta$  é um processo que representa o desvio  $\Delta x$ , o melhor conhecimento da sua estatística é aquele do instante inicial de integração isto é, a aproximação dada pela informação priori usada e traduzida por:

$$E \left[ \eta(k|k) \mid Z_k \right] = 0 \quad (3.25)$$

$$E \left[ \eta(k|k) \eta^T(k|k) \mid Z_k \right] = P(k|k) \quad (3.26)$$

onde  $P(k|k)$  é a matriz de covariâncias de  $\Delta x$  no instante  $t_k$ , processadas todas as observações  $Z_k = \{z_1, \dots, z_k\}$  até  $t_k$ . Nessas condições,  $P(k|k)$  pode ser obtida diretamente da equação de propagação da matriz de covariância do Filtro de Kalman (ver Capítulo 2) a partir de uma dada condição inicial  $P_0$ .

### 3.3 - ESTIMADOR PROPOSTO

Imagine-se agora uma "aproximação controlada" ao problema de estimação do sistema não linear apresentado. Primeiramente, admite-se que o estado verdadeiro possa ser aproximado por um estado "controlado" cuja definição é a seguinte:

$$\dot{x}_c = f(x_c, t) + G u_c \quad (3.27)$$

Novamente  $x_c$  é um vetor de dimensão  $n$  que representa o estado controlado,  $G$  é uma matriz retangular  $n \times q$  e  $u_c$  é um vetor de controles a serem estimados de dimensão  $q$ .

A estrutura da equação (3.27) é exatamente a mesma de (3.2) e, portanto um algoritmo nela baseado poderá fornecer uma aproximação pelo menos tão boa quanto a que pode ser obtida com o modelo de (3.2). No entanto, a matriz  $G$ , assim como o vetor de controles  $u_c$ , não são a princípio definidos e a idéia básica é que, satisfazendo certas condições que aparecerão a seguir, o produto  $G u_c$  representa um controle virtual a ser estimado que leva  $x_c$  a se aproximar do estado verdadeiro do sistema.

Admite-se que o vetor de controles estimados ou virtuais  $u_c$  seja um "step-process", portanto constante ao longo de cada intervalo, cuja finalidade é forçar o sistema contido no estimador a se aproximar do estado verdadeiro. O produto  $G u_c$  será propagado ao longo do intervalo, conforme proposto a seguir, de maneira a tentar diminuir faixas de incertezas em torno das estimativas do estado. Raciocinando então, em termos do problema de controle sugerido por (3.27), resulta um procedimento de controle de extremidades onde a adição do "controle"  $u_c$  tenta aproximar, em cada passo, o sistema verdadeiro pelo sistema controlado.

O procedimento é adaptativo no sentido de que a aproximação controlada adapta o sistema controlado do sistema verdadeiro e, nesse caso, a matriz  $G$  desempenha um papel fundamental. Ela deve garantir controlabilidade ao sistema controlado, isto é, deve ter uma estrutura que permita a aplicação do controle estimado  $u_c$ , de modo a guiar tal sistema ao objetivo pretendido de aproximação do estado verdadeiro. Além disso, como o algoritmo resultante deve estimar também o controle virtual  $u_c$ , a correta definição de  $G$  representa menor esforço computacional. Para um bom número de aplicações, a definição da matriz  $G$  é tarefa simples, como, por exemplo, no caso de sistemas mecânicos de segunda ordem.

Isto posto, o procedimento a ser usado com a aproximação controlada segue os mesmos passos desenvolvidos para a propagação do estado na seção anterior. A condição inicial usada num passo típico com a aproximação controlada será, como sempre, a melhor estimativa disponível, isto é:

$$x_c(t_k) = \hat{x}(k|k) \quad (3.28)$$

Da mesma forma, é preciso definir uma trajetória nominal de controle,  $\bar{x}_c$ , através de:

$$\dot{\bar{x}}_c(t) = f(\bar{x}_c(t), t) \quad (3.29)$$

e integrada a partir de:

$$\bar{x}_c(t_k) = \hat{x}(k|k) \quad (3.30)$$

Segue-se a obtenção da equação diferencial estocástica da perturbação controlada, conseguida pela linearização da equação (3.27), no sentido médio quadrático, em torno da trajetória nominal controlada. Para não tornar o desenvolvimento excessivamente repetitivo, apenas o resultado final é colocado e este é dado por:

$$\Delta \dot{x}_c = F_c \left[ \bar{x}_c(t), t \right] \Delta x_c + G u_c \quad (3.31)$$

onde:

$$F_c \left[ \bar{x}_c(t), t \right] = \left[ \frac{\partial f(x_c(t), t)}{\partial x_c} \right]_{x_c = \bar{x}_c} \quad (3.32)$$

Observe-se agora que a condição inicial para o sistema controlado da perturbação é dado, no  $k+1$ -ésimo passo, por:

$$\begin{aligned} \Delta x_c(t_k) &= x_c(t_k) - \bar{x}_c(t_k) = \bar{x}(k|k) - \bar{x}(k|k) \\ \Delta x_c(t_k) &= 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

A condição (3.33), ao contrário da abordagem anterior, é identicamente nula pois tanto a trajetória controlada quanto a nominal associada foram definidas sobre a mesma condição inicial,  $\bar{x}(k|k)$ .

Como a solução de um sistema linear forçado é a soma da homogênea associada a uma solução particular conveniente, verifica-se que no modelo proposto em (3.31), a solução da equação homogênea será nula em qualquer ponto do intervalo, visto que essa solução corresponde a integrar um sistema linear com a condição inicial nula, isto é:

$$\Delta \dot{x}_c = F_c \left[ \bar{x}_c, t \right] \Delta x_c ; \Delta x_c(t_k) = 0 \quad (3.34)$$

A solução da equação de perturbações do sistema controlado se resume então a solução associada ao termo forçante e, como se está usando a hipótese de "step-process" para  $u_c$ , esta solução pode ser escrita em um instante  $\bar{t}$  do intervalo  $(t_k, t_{k+1})$  como:

$$\Delta x_c(\bar{t}) = \left[ \int_{t_k}^{\bar{t}} \Phi_c(\bar{t}, s) G(s) ds \right] u_c(\bar{t}) \quad (3.35)$$

onde  $\phi_c(t, t_k)$  é a matriz de transição associada ao sistema (3.34) isto é, a solução da equação matricial:

$$\dot{\phi}_c(\bar{t}, t_k) = F_c \left[ \bar{x}_c(t), t \right] \phi_c(\bar{t}, t_k) \quad (3.36)$$

$$\phi_c(t_k, t_k) = I \quad (3.37)$$

Em particular, para o instante  $t_{k+1}$ , (3.35) é escrita como:

$$\Delta x_c(t_{k+1}) = \left[ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \phi_c(t_{k+1}, s) G(s) ds \right] u_c(t_k) \quad (3.38)$$

Lembrando que  $u_c$  é contante ao longo do intervalo.

Definindo:

$$\gamma(k+1, k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \phi_c(t_{k+1}, s) G(s) ds \quad (3.39)$$

então:

$$\Delta x_c(t_{k+1}) = \gamma(k+1, k) u_c(t_k) \quad (3.40)$$

Resta agora definir qual o critério empregado para gerar o vetor de controles estimados  $u_c$ . Claramente, o que se deseja é que a aproximação controlada proposta leve ao melhor conhecimento do sistema verdadeiro. No caso ideal, a perturbação controlada deveria reproduzir exatamente o desvio do estado real em relação a nominal a cada passo. O critério de otimização a ser imposto é então que:

$$\Delta x(t_{k+1}) \cong \Delta x_c(t_{k+1}) \quad (3.41)$$

pois, se  $\Delta x(t_{k+1})$  pudesse ser conhecido exatamente, o estado verdadeiro do sistema estaria determinado.

Substituindo  $\Delta x(t_{k+1})$  pela expressão (3.22) e  $\Delta x_c(t_{k+1})$  por (3.40) na expressão (3.41) resulta:

$$\gamma(k+1,k) u_c(t_k) = n(k+1|k) \quad (3.42)$$

o que, pelo fato de  $n(k+1|k)$  ser de média condicionada nula, leva a que (3.42) possa ser reescrita como:

$$\gamma(k+1,k) u_c(t_k) + n(k+1|k) = 0 \quad (3.43)$$

A equação (3.43) é a informação a priori necessária para estimar o controle virtual  $u_c$  obtida no processo de propagação do estado. Esse controle virtual deve também levar à satisfação das observações associadas ao sistema não linear que está sendo estimado. Para tanto, admite-se que as observações são discretas no tempo e podem ser descritas por:

$$z_{k+1} = h(x(t_{k+1}), t_{k+1}) + v_{k+1} \quad (3.44)$$

onde  $z$  é um vetor de  $r$  componentes que representam as medidas e  $v(.,.)$  um processo branco Gaussiano que representa a incerteza nas medidas. A estatística de  $v(.,.)$  é dada por:

$$E \begin{bmatrix} v_k \end{bmatrix} = 0 \quad (3.45)$$

$$E \begin{bmatrix} v_k & v_j^T \end{bmatrix} = R_k \delta_{kj} \quad (3.46)$$

A partir daqui, abandona-se, sem perda de generalidade, a notação referente à trajetória nominal de controle, visto que a escolha lógica da nominal deve levar à mesma curva, tanto na propagação do estado estimado como na propagação do estado controlado ou ainda nas observações linearizadas sobre o sistema.

Definindo uma medida nominal  $\bar{z}(t_{k+1})$  através de:

$$\bar{z}_{k+1} = h(\bar{x}(t_{k+1}), t_{k+1}) \quad (3.47)$$

pode-se, novamente, expandir (3.44) no sentido médio quadrático em torno da medida nominal  $\bar{z}_{k+1}$  através de:

$$z_{k+1} = h(\bar{x}(t_{k+1}), t_{k+1}) + \left[ \frac{\partial h(x(t_{k+1}), t_{k+1})}{\partial x} \right]_{x = \bar{x}} (x(t_{k+1}) - \bar{x}(t_{k+1})) + \sigma(2) + v_{k+1} \quad (3.48)$$

$$z_{k+1} - \bar{z}_{k+1} = \left[ \frac{\partial h(x(t_{k+1}), t_{k+1})}{\partial x} \right]_{x = \bar{x}} \Delta x(t_{k+1}) + \sigma(2) + v_{k+1} \quad (3.49)$$

Desprezando os termos de ordem maior que 1 e definindo a medida perturbada  $\Delta z(t_{k+1})$  através de:

$$\Delta z_{k+1} = z_{k+1} - \bar{z}_{k+1} \quad (3.50)$$

obtêm-se finalmente:

$$\Delta z_{k+1} = H \left[ \bar{x}(t_{k+1}), t_{k+1} \right] \Delta x(t_{k+1}) + v_{k+1} \quad (3.51)$$

onde:

$$H \left[ \bar{x}(t_{k+1}), t_{k+1} \right] = \left[ \frac{\partial h(x(t_{k+1}), t_{k+1})}{\partial x} \right]_{x = \bar{x}} \quad (3.52)$$

é avaliada sobre a trajetória nominal. Apenas para simplificar a notação, coloca-se:

$$H_{k+1} = H \left[ \bar{x}(t_{k+1}), t_{k+1} \right] \quad (3.53)$$

Substituindo  $\Delta x(t_{k+1})$  de (3.51) por  $\Delta x_c(t_{k+1})$  e, em seguida, pela correspondente expressão em  $u_c$ , (3.43), chega-se à equação de observação a ser satisfeita pelo controle estimado, que é dada por:

$$\Delta z_{k+1} = H_{k+1} \gamma(k+1, k) u_c(t_k) + v_{k+1} \quad (3.54)$$

Resumindo, o vetor de controles virtuais  $u_c$  deve ser estimado de modo a satisfazer simultaneamente:

Informação a priori:

$$\gamma(k+1,k) u_c(t_k) + \eta(k+1|k) = 0 \quad (3.55)$$

Equação de observação:

$$\Delta z_{k+1} = H_{k+1} \gamma(k+1,k) u_c(t_k) + v_{k+1} \quad (3.56)$$

ou, numa forma mais compacta:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \hline \Delta z_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma(k+1,k) \\ \hline H_{k+1} \gamma(k+1,k) \end{bmatrix} u_c(t_k) + \begin{bmatrix} \eta(k+1|k) \\ \hline v_{k+1} \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

$$z_{k+1}^c = M_{k+1}^c u_c(t_k) + v_{k+1}^c \quad (3.58)$$

onde  $z_{k+1}^c$  é o vetor de observações de dimensão  $(n+r)$ ,  $v_{k+1}^c$  é o vetor de ruídos de dimensões também  $(n+r)$  e  $M_{k+1}^c$  é uma matriz de dimensões  $[(n+r) \times q]$ .

O vetor de observações expresso por (3.57) deve ser processada em lote ("batch") ao final de cada passo típico. Isso corresponde a reduzir o problema de estimação de um sistema dinâmico a um problema de estimação ótima linear estocástica de parâmetros. O estimador para o controle virtual  $u_c$  será, então, o estimador para o caso de observação linear e não correlação controle - observação e desconhecimento prévio dos controles. A forma desse estimador pode ser obtida diretamente do teorema fundamental de Gauss-Markov (Liebelt, 1967; Maybeck, 1979), com as hipóteses feitas. Dessa maneira, resulta para a média do controle virtual  $u_c$ :

$$\hat{u}_c(t_k) = \left[ \begin{array}{c} \gamma^T(k+1,k) P^{-1}(k+1|k) \gamma(k+1,k) + \gamma^T(k+1,k) H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1} \gamma(k+1,k) \\ \gamma^T(k+1,k) H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} \Delta z_{k+1} \end{array} \right]^{-1} \quad (3.59)$$

A matriz de covariâncias dos erros na estimativa do controle virtual  $u_c$  é expressa por:

$$P_{u_c}(k+1|k) = \left[ \begin{array}{c} \gamma^T(k+1,k) \quad P^{-1}(k+1|k) \quad \gamma(k+1,k) + \gamma^T(k+1,k) \quad H_{k+1}^T \quad R_{k+1}^{-1} \quad H_{k+1} \\ \cdot \quad \gamma(k+1,k) \end{array} \right]^{-1} \quad (3.60)$$

Com os valores da média e da matriz de covariância de erros em  $u_c$ , é possível atualizar as variáveis de interesse que logicamente são a média e a matriz de covariâncias dos erros no estado no instante  $t_{k+1}$ . Para isso, parte-se de:

$$\Delta x_c(t_{k+1}) = \gamma(k+1,k) u_c(t_k) \quad (3.61)$$

Tomando a esperança condicionada às informações contidas em  $Z_{k+1}$ :

$$E \left[ \Delta x_c(t_{k+1}) | Z_{k+1} \right] = E \left[ \gamma(k+1,k) u_c(t_k) | Z_{k+1} \right] \quad (3.62)$$

$$E \left[ \Delta x_c(t_{k+1}) | Z_{k+1} \right] = \gamma(k+1,k) E \left[ u_c(t_k) | Z_{k+1} \right] \quad (3.63)$$

$$\Delta \bar{x}_c(t_{k+1}) \cong \gamma(k+1,k) \hat{u}_c(t_k) \quad (3.64)$$

Observa-se que a última passagem é uma aproximação. Portanto, as demais passagens baseadas em (3.64) refletirão esse fato, embora não se coloque explicitamente o símbolo de aproximação a cada passo.

Retomando a equação (3.62) e utilizando (3.41), obtém-se:

$$\Delta \bar{x}(k+1) = E \left[ \Delta x(k+1) | Z_{k+1} \right] \cong E \left[ \Delta x_c(k+1) | Z_{k+1} \right] \quad (3.65)$$

$$\Delta \bar{x}(k+1) = \Delta \bar{x}_c(k+1) \quad (3.66)$$

$$\Delta \bar{x}(k+1) = \gamma(k+1,k) \hat{u}_c(t_{k+1}) \quad (3.67)$$



A partir da relação acima é possível recompor o estado do sistema não linear, estado este que é o objetivo principal da utilização do algoritmo. Para isso, deve-se relembrar que:

$$\bar{x}(k+1) = E \left[ x(k+1) | Z_{k+1} \right] \quad (3.67)$$

$$\bar{x}(k+1) = E \left[ \bar{x}(k+1) + \Delta x(k+1) | Z_{k+1} \right] \quad (3.68)$$

$$\bar{x}(k+1) = E \left[ \bar{x}(k+1) | Z_{k+1} \right] + E \left[ \Delta x(k+1) | Z_{k+1} \right] \quad (3.69)$$

$$\bar{x}(k+1) \cong \bar{x}(k+1) + \Delta \bar{x}_c(k+1) \quad (3.70)$$

Finalmente chega-se a:

$$\bar{x}(k+1) \cong \bar{x}(k+1) + \gamma(k+1, k) \bar{u}_c(t_k) \quad (3.71)$$

Para obtenção da matriz de covariâncias do erro no estado, os mesmos passos devem ser seguidos:

$$P(k+1|k+1) = E \left[ (x(k+1) - \bar{x}(k+1)) (x(k+1) - \bar{x}(k+1))^T | Z_{k+1} \right] \quad (3.72)$$

$$P(k+1|k+1) = E \left[ \Delta x(k+1) \Delta x^T(k+1) | Z_{k+1} \right] \quad (3.73)$$

$$P(k+1|k+1) = E \left[ \Delta x_c(k+1) \Delta x_c^T(k+1) | Z_{k+1} \right] \quad (3.74)$$

$$P(k+1|k+1) = E \left[ \gamma(k+1, k) u_c(t_k) u_c^T(t_k) \gamma^T(k+1) | Z_{k+1} \right] \quad (3.75)$$

$$P(k+1|k+1) = \gamma(k+1, k) P_u(k+1|k) \gamma^T(k+1, k) \quad (3.76)$$

Completa-se, dessa maneira, um passo típico do estimador. As novas estimativas do estado,  $\bar{x}(k+1)$ , e da matriz de covariâncias,  $P(k+1|k+1)$ , serão usadas como condições iniciais para propagação no intervalo seguinte, substituídas nas equações (3.5) e (3.26).

Em resumo, o algoritmo proposto consiste dos seguintes passos:

1) Propagação do estado estimado através de:

a) Integração das equações do movimento em  $t_k < t < t_{k+1}$

$$\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}(t), t) \quad (3.77)$$

com a condição inicial:

$$\bar{x}(t_k) = \bar{x}(k) \quad (3.78)$$

b) Propagação da matriz de covariâncias de erros no estado em  $t_k < t < t_{k+1}$

$$P(k+1|k) = \Phi(k+1, k) P(k|k) \Phi^T(k+1, k) + \gamma(k+1, k) Q_k \gamma^T(k+1, k) \quad (3.79)$$

2) Atualização do Estado em  $t_{k+1}$

a) Estimativa do controle virtual  $u_c$ :

$$\hat{u}_c(t_k) = \begin{bmatrix} \gamma^T(k+1, k) P^{-1}(k+1|k) \gamma(k+1, k) + \gamma^T(k+1, k) H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1} \\ \gamma(k+1, k) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \gamma^T(k+1, k) H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} \Delta z_{k+1} \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

b) Cálculo da matriz de covariâncias dos erros no controle:

$$P_u(k+1|k) = \begin{bmatrix} \gamma^T(k+1|k) P^{-1}(k+1|k) \gamma(k+1, k) + \gamma^T(k+1, k) H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1} \\ \gamma(k+1, k) \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.81)$$

c) Recomposição do vetor de estado:

$$\bar{x}(k+1) = \bar{x}(k+1) + \gamma(k+1, k) \hat{u}_c(k) \quad (3.82)$$

d) Recomposição da matriz de covarianças dos erros no estado:

$$P(k+1|k+1) = \gamma(k+1,k) P_u(k+1|k) \gamma^T(k+1,k) \quad (3.83)$$

A formulação apresentada até este ponto já permite a colocação de alguns comentários. Dessa maneira, verifica-se que a aproximação por um controle virtual constante ao longo do intervalo de interesse representa uma simplificação considerável para os efeitos não modelados no estimador. Essa aproximação será razoável na medida em que os intervalos de tempo para que as observações estejam disponíveis sejam suficientemente pequenos e que a estrutura do sistema, representada pela matriz  $G$ , garanta condições de controlabilidade. Por outro lado, o estimador, trabalhando com um controle por trechos e, portanto, sem acoplamento ao longo do tempo, tem efeito puramente local, isto é, o estimador atua sobre as informações que estão disponíveis ao final de cada intervalo de interesse e sobre a informação a priori contida na propagação do desvio da trajetória real em relação a trajetória nominal. Essa formulação permite que os efeitos não modelados no estimador sejam aproximados, adaptativamente, pelos controles virtuais, com redução do número de variáveis a serem estimadas, ou, no máximo, com número igual de variáveis de estado e de controle, o que representa uma vantagem significativa sobre as técnicas apresentadas anteriormente. Finalmente, destaca-se o aspecto de que o problema de estimação é praticamente transformado num problema de controle onde os controles virtuais  $u_c$  têm por objetivo guiar o sistema original na direção da satisfação das observações disponíveis. Isto permite que se lance mão de uma série de artifícios e interpretações, disponíveis na Teoria de Controle mas não ainda utilizados em Teoria de Estimação, para auxiliar na solução do problema de estimação não linear, como ficará claro mais adiante.

#### 3.4 - INCLUSÃO DE RUÍDO ADAPTATIVO

Testes preliminares com o estimador proposto para a solução do problema de aplicação de estimação de órbita de um satélite a baixa altitude, descrito no Capítulo 4, demonstraram a necessidade de se incluir alguma técnica de compensação de erros. Pelas razões discutidas a seguir, optou-se pela inclusão de um esquema de ruído adaptativo.

A forma proposta para o estimador de  $u_c(t_k)$  baseado em:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \hline \Delta z_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma(k+1,k) \\ \hline H_{k+1} \quad \gamma(k+1,k) \end{bmatrix} u_c(t_k) + \begin{bmatrix} n(k+1|k) \\ \hline v_{k+1} \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

Leva a que se tenha informações redundantes sobre o controle virtual  $u_c$ . Para tanto, basta lembrar que o estado tem dimensão maior ou igual ao vetor de controles. Como consequência, desde o primeiro passo, apesar das aproximações envolvidas no cálculo dos controles, a tendência do procedimento é supor que estimou "bem demais" o vetor  $u_c$ , o que significa que a matriz de covariância  $P_u(k+1|k)$  "é pequena". Como o cálculo da matriz de covariância dos erros no estado,  $P(k+1|k+1)$ , está centrado no valor da matriz  $P_u(k+1|k)$  (ver equação 3.83), imediatamente  $P(k+1|k+1)$  traduz um nível de confiança na estimativa que fecha a incorporação de novas informações. Encerrado um passo típico, a matriz  $P_u$  será novamente calculada com base na matriz de covariância propagada do estado,  $P(k+2|k+1)$ , por sua vez obtida a partir de  $P_u(k+1|k)$ . Logicamente  $P_u$  será novamente "pequena", o mesmo ocorrendo para o controle  $u_c(t_{k+1})$  e para a nova matriz atualizada de covariâncias do estado  $P(k+2|k+2)$ . Em resumo, as estimativas do controle e do estado começam a divergir, resultado que é refletido por valores bastante pequenos dos elementos da diagonal da matriz de covariâncias dos erros no estado, incoerentes com a estimativa alcançada. Para contornar esse problema, mantendo  $P_u$  e  $P$  abertas à incorporação de novas observações, pode-se lançar mão de esquemas de ruído adaptativo. A sistemática para aplicação do ruído adaptativo segue a proposta de Rios Neto e Kuga (1981 e 1982), sendo utilizada em dois pontos distintos ao longo de um ciclo completo do algoritmo: sobre a matriz  $P_u(k+1|k)$  imediatamente após o cálculo dessa matriz no ciclo de atualização e antes, portanto, da recomposição da matriz de covariâncias dos erros no estado,  $P(k+1|k+1)$  e sobre a matriz  $Q_{k+1}$ , usada na propagação da matriz de covariâncias dos erros, no instante em que novas observações se tornam disponíveis.

Pode-se notar, então, a preocupação de manter  $P_u$  aberta durante o processo de atualização, assim como manter  $P$  aberta durante a propagação. Com isso, pretende-se compensar os efeitos da forma proposta com o estimador para  $u_c$  e, também, compensar os efeitos da modelagem muito pobre na propagação do estimador.

Verifica-se que a inclusão de ruído adaptativo não altera o esquema básico do estimador e resta, ainda, a vantagem evidente de não se entender o vetor estimado além do número de controle virtuais  $u_c$  necessário, o que compensa a complicação introduzida no algoritmo.

Considera-se primeiramente o caso de corrigir a matriz de covariâncias do controle,  $P_u(k+1|k)$ . Como já discutido no item 2.1, a hipótese básica de aplicação da técnica do ruído adaptativo é que a matriz de covariâncias dos ruídos nas observações,  $R_{k+1}$ , seja diagonal ou possa ser diagonalizada. Isso significa que não existe correlação entre as observações permitindo o processamento sequencial das mesmas. Essa idéia é essencial para o desenvolvimento a seguir:

Admite-se que  $\hat{u}_c$  e  $P_u$  calculadas pelo estimador são apenas aproximações dos valores reais de  $u_c$  e da matriz de covariâncias do controle  $P_u^r$ . Partindo de:

$$\begin{aligned} \Delta z_{k+1} &= H \left[ \bar{x}(t_{k+1}), t_{k+1} \right] \gamma(k+1, k) u_c(t_k) + v_{k+1} \\ \Delta z_{k+1} &= H_{k+1} \gamma(k+1, k) u_c(t_k) + v_{k+1} \end{aligned} \quad (3.85)$$

define-se a observação estimada  $\Delta \hat{z}_{k+1}$  como:

$$\Delta \hat{z}_{k+1} = H_{k+1} \gamma(k+1, k) \hat{u}_c(t_k) \quad (3.86)$$

Considerando agora a  $i$ -ésima componente de cada um dos vetores  $\Delta z_{k+1}$  e  $\Delta \hat{z}_{k+1}$ , define-se o resíduo do controle  $u_c$  pelo escalar:

$$r_u^i(k+1) = \Delta z_{k+1}^i - \Delta \hat{z}_{k+1}^i \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (3.87)$$

$$r_u^i(k+1) = H_{k+1}^i \gamma(k+1, k) \left[ u_c(t_k) - \hat{u}_c(t_k) \right] + v_{k+1}^i \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (3.88)$$

onde  $r$  é a dimensão do vetor de observações e  $H_{k+1}^i$ , é a  $i$ -ésima linha de  $H_{k+1}$ .

O resíduo verdadeiro é dado por (Rios Neto e Kuga, 1981, 1982):

$$r_{uv}^i(k+1) = \Delta z_{k+1}^i - \Delta \hat{z}_{k+1}^i \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (3.89)$$

onde  $\Delta z^i$  é a observação verdadeira, que seria obtida se não existissem erros de medida. Portanto, a relação entre o resíduo de controle e o resíduo verdadeiro é:

$$r_u^i(k+1) = r_{uv}^i(k+1) + v_{k+1}^i \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (3.90)$$

Então de (3.89), obtem-se:

$$r_{uv}^i(k+1) = H_{k+1}^i \gamma(k+1, k) \left[ u_c(t_k) - \hat{u}_c(t_k) \right] \quad (3.91)$$

Elevando (3.91) ao quadrado:

$$\begin{aligned} (r_{uv}^i(k+1))^2 &= H_{k+1}^i \gamma(k+1, k) \left[ u_c(t_k) - \hat{u}_c(t_k) \right] \left[ u_c(t_k) - \hat{u}_c(t_k) \right]^T \gamma^T(k+1, k) \cdot \\ &\cdot H_{k+1}^{iT} \end{aligned} \quad (3.92)$$

Aplicando o operador esperança a ambos os lados da expressão (3.92):

$$\begin{aligned} E \left[ (r_{uv}^i(k+1))^2 \right] &= H_{k+1}^i \gamma(k+1, k) E \left\{ \left[ u_c(t_k) - \hat{u}_c(t_k) \right] \left[ u_c(t_k) - \hat{u}_c(t_k) \right]^T \right\} \cdot \\ &\cdot \gamma^T(k+1, k) H_{k+1}^{iT} \end{aligned} \quad (3.93)$$

Como já colocado anteriormente, a matriz  $P_u(k+1|k)$  é apenas uma aproximação ao valor verdadeiro de  $P_u^r$  e torna-se necessário modificá-la para que esse fato seja levado em conta no algoritmo, produzindo melhores estimativas. Isto leva a:

$$E \left\{ \left[ u_c(t_k) - \hat{u}_c(t_k) \right] \left[ u_c(t_k) - \hat{u}_c(t_k) \right]^T \right\} = P_u(k+1|k) + Q_u(k+1|k) = P_u^c(k+1|k) \quad (3.94)$$

onde  $P_u(k+1|k)$  é a matriz de covariâncias do controle  $u_c$  fornecido pelo estimador e  $Q_u(k+1|k)$  é uma matriz diagonal de elementos  $q_u(k+1|k)$  que devem ser estimados de modo a manter o esquema de filtragem aberto às novas informações. À medida que o esquema convergir,  $Q_u(k+1|k)$  decresce em relação à matriz  $P_u$  até se tornar compatível com a ordem de magnitude dos desvios nas observações e das aproximações envolvidas.

Substituindo (3.94) em (3.93), chega-se a:

$$E \left[ \left( r_{uv}^i(k+1) \right)^2 \right] = H_{k+1}^i \gamma(k+1, k) \left[ P_u(k+1|k) + Q_u(k+1|k) \right] \gamma^T(k+1, k) H_{k+1}^{i, T} \quad (3.95)$$

Por outro lado, de (3.90):

$$r_{uv}^i(k+1) = r_u^i(k+1) - v_{k+1}^i \quad (3.96)$$

que, elevada ao quadrado:

$$\left( r_{uv}^i(k+1) \right)^2 = \left( r_u^i(k+1) \right)^2 - 2r_u^i(k+1) v_{k+1}^i + v_{k+1}^{i 2} \quad (3.97)$$

A equação (3.97) pode ser reescrita como:

$$\left( r_{uv}^i(k+1) \right)^2 = \left( r_u^i(k+1) \right)^2 + \beta_{k+1}^i \quad (3.98)$$

onde  $\beta_{k+1}^i$  é um ruído da forma:

$$\beta_{k+1}^i = v_{k+1}^{i 2} - 2r_u^i(k+1) \cdot v_{k+1}^i \quad (3.99)$$

cujas propriedades estatísticas podem ser deduzidas lembrando que  $v_{k+1}^i$  é gaussiano, de média nula e matriz de covariâncias  $R_{k+1}$  diagonal. Segue-se:

$$E \left[ \beta_{k+1}^i \right] = E \left[ v_{k+1}^{i 2} - 2r_u^i(k+1) v_{k+1}^i \right] = E \left[ v_{k+1}^{i 2} \right] = R_{k+1}^{ii} \quad (3.100)$$

onde  $R_{k+1}^{ii}$  é elemento da diagonal da matriz de covariância  $R_{k+1}$ .

$$E \left[ \left( \beta_{k+1}^i - E \left[ \beta_{k+1}^i \right] \right)^2 \right] = E \left[ \left( \beta_{k+1}^i - R_{k+1}^{ii} \right)^2 \right] =$$

$$E \left[ \left( v_{k+1}^{i 2} - 2r_u^i(k+1) v_{k+1}^i - R_{k+1}^{ii} \right)^2 \right] =$$

$$E \left[ v_{k+1}^{i 4} - 4r_u^i(k+1) v_{k+1}^{i 3} - 2R_{k+1}^{ii} v_{k+1}^{i 2} + 4r_u^i(k+1) + 4R_{k+1}^{ii} r_u^i(k+1) v_{k+1}^i + \right. \\ \left. + R_{k+1}^{ii 2} \right] \quad (3.101)$$

Utilizando as seguintes expressões (Kuga, 1982):

$$E \left[ r_u^i(k+1) \right] = 0 \quad (3.102)$$

$$E \left[ v_{k+1}^i \right] = 0 \quad (3.103)$$

$$E \left[ \left( r_u^i(k+1) \right)^2 \right] = \left( r_u^i(k+1) \right)^2 \quad (3.104)$$

$$E \left[ v_{k+1}^i{}^2 \right] = R_{k+1}^{ii} \quad (3.105)$$

$$E \left[ v_{k+1}^i{}^3 \right] = 0 \quad (3.106)$$

$$E \left[ v_{k+1}^i{}^4 \right] = 3R_{k+1}^{ii}{}^2 \quad (3.107)$$

chega-se, finalmente, a:

$$E \left[ \left( \beta'_{k+1} - E \left[ \beta'_{k+1} \right] \right)^2 \right] = 2R_{k+1}^{ii}{}^2 + 4 \left( r_u^i(k+1) \right)^2 R_{k+1}^{ii} \quad (3.108)$$

Utiliza-se agora o critério de consistência entre o resíduo verdadeiro e sua estatística na forma proposta por Jazwinski, (1969), e generalizada por Rios Neto e Kuga, (1981 e 1982), isto é:

$$E \left[ \left( r_{uv}^i(k+1) \right)^2 \right] = \left( r_{uv}^i(k+1) \right)^2 \quad (3.109)$$

de modo a obter:

$$H_{k+1}^i{}^T \gamma(k+1, k) \left[ P_u(k+1|k) + Q_u(k+1|k) \right] \gamma^T(k+1, k) H_{k+1}^i{}^T = \left( r_u^i(k+1) \right)^2 + \beta'_{k+1} \quad (3.110)$$

A seguir  $\beta'_{k+1}$  é transformado num ruído branco Gaussiano, através de:

$$\beta_{k+1} = \beta'_{k+1} - R_{k+1}^{ii} \quad (3.111)$$



Com isso, as propriedades estatísticas de  $\beta_{k+1}$  podem ser calculadas:

$$E[\beta_{k+1}] = E[\beta'_{k+1} - R_{k+1}^{ii}] = 0 \quad (3.112)$$

$$\begin{aligned} E\left[\left(\beta_{k+1} - E[\beta_{k+1}]\right)^2\right] &= E[\beta_{k+1}^2] = E\left[\beta'_{k+1} - R_{k+1}^{ii}\right]^2 = \\ &= 2R_{k+1}^{ii} + 4\left(r_u^i(k+1)\right)^2 \cdot R_{k+1}^{ii} \end{aligned} \quad (3.113)$$

Substituindo (3.111) em (3.110) e rearranjando a expressão, chega-se:

$$\begin{aligned} r_u^i(k+1)^2 + R_{k+1}^{ii} - H_{k+1}^i \gamma(k+1, k) P_u(k+1|k) \gamma^T(1+1, k) H_{k+1}^{i T} &= \\ = H_{k+1}^i \gamma(k+1, k) Q_u(k+1|k) \gamma^T(k+1, k) H_{k+1}^{i T} + \beta_{k+1} \end{aligned} \quad (3.114)$$

Pelo fato de  $Q_u(k+1|k)$  ser diagonal e  $H_{k+1}^i$  um vetor para cada componente de observação ou resíduo, verifica-se que:

$$\begin{aligned} H_{k+1}^i \gamma(k+1, k) Q_u(k+1|k) \gamma^T(k+1, k) H_{k+1}^{i T} &= (H_{i1} \gamma_{11} + H_{i2} \gamma_{21} + \dots + H_{in} \gamma_{n1})^2 \cdot \\ \cdot q_u^1(k+1|k) + \dots + (H_{i1} \gamma_{1m} + H_{i2} \gamma_{2m} + \dots + H_{in} \gamma_{nm})^2 q_u^m(k+1|k) &= \\ = \sum_{\ell=1}^m \left( \sum_{j=1}^n H_{ij} \gamma_{j\ell} \right)^2 q_u^\ell \end{aligned} \quad (3.115)$$

Definindo o vetor  $M_{k+1}$  através de:

$$M_{k+1} = \left[ \left( \sum_{j=1}^n H_{ij} \gamma_{j1} \right)^2 ; \left( \sum_{j=1}^n H_{ij} \gamma_{j2} \right)^2 ; \dots ; \left( \sum_{j=1}^n H_{ij} \gamma_{jm} \right)^2 \right] \quad (3.116)$$

e definindo também pseudo observação  $\Delta z_p^i$  por:

$$\Delta z_p^i(k+1) = \left( r_u^i(k+1) \right)^2 + R_{k+1}^{ii} - H_{k+1}^i \gamma(k+1, k) P_u(k+1|k) \gamma^T(k+1, k) H_{k+1}^{i T} \quad (3.117)$$

a expressão (3.114) é reduzida a:

$$\Delta z_p^i(k+1) = M_{k+1} q_u(k+1|k) + \beta_{k+1} \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (3.118)$$

A equação (3.118) é chamada equação de pseudo-observações e permite obter a estimativa para a matriz  $Q_U(k+1|k)$  através de seus elementos  $q_U(k+1|k)$ . É importante observar que as pseudo-observações  $\Delta z_p^i(k+1)$  podem ser calculadas assim que a matriz  $P_U(k+1|k)$  estiver disponível. O mesmo se aplica para a obtenção de  $M_{k+1}$  e da estatística associada ao ruído  $\beta_{k+1}$ . O processamento de tais pseudo-observações deve ser sequencial, isto é, pseudo-observação por pseudo-observação. Além disso, é necessário que se tenha informação a priori sobre os elementos  $q_U(k+1|k)$ .

No passo inicial, como não há nenhum conhecimento sobre os controles virtuais  $u_c$  ou sobre sua dispersão, a informação a priori será dada por uma distribuição normal (Gaussiana) com média:

$$\bar{q}_U^i(1|0) = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.119)$$

e variância tal que:

$$\sigma \bar{q}_U = |\hat{u}_{c_i}| \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.120)$$

Desta forma, a matriz de covariâncias a priori para as variáveis aleatórias  $q_U(1|0)$  será dada por:

$$\bar{P}_{q_U}(1|0) = \left\{ \text{diag} (\hat{u}_{c_i})^2, \quad i = 1, \dots, m \right\} \quad (3.121)$$

Com essa colocação pretende-se por em xeque a estimativa produzida para a matriz de covariâncias do controle  $P_U(1|0)$  através de uma larga faixa de incerteza que engloba os valores estimados para o controle  $\hat{u}_c$ . Esta forma representa o desenvolvimento sobre as estimativas no primeiro passo, inicializando o processo de ruído adaptativo a favor da segurança.

Para as iterações seguintes, adota-se como informação a priori, para a dispersão representando a incerteza nos elementos  $q_U^i$ , os valores obtidos na iteração imediatamente anterior, segundo uma distribuição normal (Gaussiana), que corresponda de alguma maneira, a uma realimentação desses valores. Seguindo esse raciocínio e levando em conta o desconhecimento sobre os controles  $u_c$  a cada passo, define-se a média a priori por:

$$\bar{q}_u^i(k+1|k) = 0 \quad k \neq 1, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.122)$$

e a covariança a priori por:

$$\bar{P}_{qu}(k+1|k) = \text{diag} \left\{ 9 \left( \bar{q}_u^i(k|k-1) \right)^2, \quad k \neq 1, \quad i = 1, \dots, m \right\} \quad (3.123)$$

Verifica-se assim que a estimativa a priori a partir da segunda interação corresponde a centrar o valor de  $\bar{q}_u$  em zero e colocar uma grande dispersão em torno desse valor nulo, o que significa a atribuição de uma larga faixa de incertezas para a estimativa das covarianças do controle produzidas. Como a técnica é adaptativa, a estimativa a priori, utilizada claramente a favor da segurança, será modificada ao longo do processamento das pseudo-observações até atingir valores mais realistas.

Com isso, espera-se que o processo de adaptação do ruído conduza à obtenção de valores consistentes e que, progressivamente, os elementos da matriz  $Q_u$  vão decrescendo até estabilizar em valores compatíveis com a "ordem de magnitude" dos elementos da matriz de ruídos nas observações,  $R_{k+1}$ , e de outros erros devidos às aproximações envolvidas.

Definida a informação a priori, o processamento sequencial das pseudo-observações pode ser feito através das relações normais do ciclo de atualização do Filtro de Kalman. A sequência para incorporação de cada pseudo-observação é dada por:

- Cálculo do Ganho de Kalman,  $K_{k+1}^u$

$$K_{k+1}^u = \bar{P}_{qu}(k+1|k) M_{k+1}^T \left[ M_{k+1} \bar{P}_{qu}(k+1) M_{k+1}^T + 2R_{k+1}^{ii} + 4 \left( r_u^{ii}(k+1) \right)^2 R_{k+1}^{ii} \right]^{-1} \quad (3.124)$$

- Atualização do vetor  $q_u(k+1)$

$$\hat{q}_u(k+1) = \bar{q}_u(k+1) + K_{k+1}^u \left[ \Delta z_p(k+1) - M_{k+1} \bar{q}_u(k+1) \right] \quad (3.125)$$

- Atualização da matriz de covariância  $P_{qu}$

$$P_{qu}(k+1|k) = \bar{P}_{qu}(k+1|k) - K_{k+1}^u M_{k+1} \bar{P}_{qu}(k+1|k) \quad (3.126)$$

- Requisito de uma variância para  $\hat{q}_u(k+1|k)$

$$\hat{q}_u^i(k+1) = \begin{cases} 0 & \text{se } \hat{q}_u^i(k+1) = 0 \\ \hat{q}_u^i(k+1) & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.127)$$

Após este procedimento, é possível montar a matriz  $Q_u$  na forma:

$$Q_u(k+1|k) = \left\{ \text{diag } \hat{q}_u^i(k+1), i = 1, 2, \dots, m \right\} \quad (3.128)$$

e obtém-se a matriz  $P_u^C(k+1|k)$  corrigida, através de:

$$P_u^C(k+1|k) = P_u(k+1|k) + Q_u(k+1,k) \quad (3.129)$$

A nova matriz  $P_u^C(k+1|k)$  é então utilizada para a recomposição da matriz de covariâncias dos erros no estado, em lugar de  $P_u(k+1|k)$ , no último passo do algoritmo (equação 3.83).

Para a inclusão do ruído adaptativo na propagação da matriz de covariâncias dos erros no estado atua-se diretamente sobre a matriz  $Q_{k+1}$  no intervalo entre duas observações consecutivas. Como já destacado, a necessidade de adaptar o ruído nesse trecho do algoritmo se prende à compensação dos efeitos de modelagem muito pobre na dinâmica do estimador. Para aplicação em conjunto com o estimador proposto, pode-se usar a técnica proposta por Rios Neto e Kuga, (1981 e 1982) sem praticamente nenhuma alteração. Em relação à técnica modificada para correção de  $P_u(k+1|k)$ , cujo desenvolvimento foi mostrado passo a passo, as principais diferenças ficam por conta da obtenção dos resíduos de observação.

Na obtenção dos resíduos, o resíduo da observação no intervalo  $(t_k, t_{k+1})$  é dado por:

$$r(k+1) = z_{k+1} - \bar{z}_{k+1} = \Delta z_{k+1} \quad (3.130)$$

$$r(k+1) = H \left[ \bar{x}(t_{k+1}), t_{k+1} \right] \Delta x(t_{k+1}) + v_{k+1} \quad (3.131)$$

o que, usando a expressão (3.19), para propagação de  $\Delta x$ :

$$\Delta x(t_{k+1}) = \Phi(t_{k+1}, t_k) \Delta x(t_k) + \Gamma_k w_k \quad (3.132)$$

leva a que:

$$r(k+1) = H_{k+1} \left\{ \Phi(t_{k+1}, t_k) \left[ x(t_k) - \bar{x}(t_k) \right] + \Gamma_k w_k \right\} + v_{k+1} \quad (3.133)$$

Nesse caso, tem-se para o resíduo verdadeiro  $r_v(k+1)$ :

$$r_v(k+1) = H_{k+1} \left\{ \Phi(t_{k+1}, t_k) \left[ x(t_k) - \bar{x}(t_k) \right] + \Gamma_k w_k \right\} \quad (3.134)$$

de onde se pode obter a esperança de  $r_v^2(k+1)$  através de:

$$E \left[ r_v^2(k+1) \right] = H_{k+1} \Phi(t_{k+1}, t_k) P(k|k) \Phi^T(t_{k+1}, t_k) H_{k+1}^T + H_{k+1} \Gamma_k Q_k \Gamma_k^T H_{k+1}^T \quad (3.135)$$

O método agora se propõe a estimar os elementos da diagonal de  $Q_k$  cuja dimensão, como  $Q_u(k+1|k)$ , é também  $(m \times m)$ , de modo que haja consistência entre os resíduos e sua estatística, isto é, impõe-se:

$$r_v^2(k+1) = E \left[ r_v^2(k+1) \right] \quad (3.136)$$

Seguindo-se o mesmo procedimento utilizado no desenvolvimento de  $Q_u(k+1|k)$ , a expressão para  $r_v^2(k+1)$  pode ser obtida a partir da relação:

$$r(k+1) = r_v(k+1) + v_{k+1} \quad (3.137)$$

Resulta uma equação de pseudo-observações na forma (Kuga, 1982):

$$z_X^i(k+1) = N_{k+1}^i q_X(k+1) + \xi_{k+1}^i \quad (3.138)$$

onde  $z_X(k+1)$  é a pseudo-observação definida por:

$$z_X^i(k+1) = r^2(k+1) + R_{k+1}^{ii} - H_{k+1}^i \Phi(k+1, k) P(k|k) \Phi^T(k+1, k) H_{k+1}^{iT} \quad (3.139)$$

$N_{k+1}^i$  é um vetor cujos componentes são gerados a partir da constatação de  $Q_k$  ser diagonal e dados por:

$$N_{k+1}^i = \left[ \left( \sum_{j=1}^n H_{ij} \Gamma_{j1} \right)^2 ; \left( \sum_{j=1}^n H_{ij} \Gamma_{j2} \right)^2 ; \dots ; \left( \sum_{j=1}^n H_{ij} \Gamma_{jm} \right)^2 \right] \quad (3.140)$$

$q_X(k+1)$  é o vetor cujos elementos são os elementos de  $Q_k$  e, finalmente,  $\xi_{k+1}^i$  é um ruído branco, Gaussiano, cujas propriedades estatísticas são (Kuga, 1982):

$$E \left[ \xi_{k+1}^i \right] = 0 \quad (3.141)$$

$$E \left[ \xi_{k+1}^{i^2} \right] = 4r^{i^2}(k+1) R_{k+1}^{ii} + 2 R_{k+1}^{ii^2} \quad (3.142)$$

O esquema para processamento das pseudo-observações é o Filtro de Kalman sequencial, fornecido pelas equações (3.125) e (3.128), com as devidas modificações nas variáveis. A informação a priori necessária para esse processamento segue o desenvolvimento de Kuga, (1982). Para o caso de não se dispor de nenhuma informação sobre os níveis de ruído exigidos, na primeira interação, o critério utilizado para gerar informação a priori a favor da segurança consiste em escolher o vetor  $\bar{q}$  com distribuição uniforme (Kuga, 1982). Assim, define-se:

$$\bar{q}_X(1|0) = \frac{1}{2} \alpha_X \bar{I}_m \quad (3.143)$$

onde  $\alpha_X$  é um escalar, cuja obtenção é discutida a seguir, e  $\bar{I}_m$  é o vetor unitário de dimensão  $m$ , isto é:

$$\bar{I}_m = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.144)$$

O coeficiente  $\alpha_x$  é escolhido de tal forma que:

$$\alpha_x = \max \left\{ \alpha_j \mid |N_1^j| \alpha_j \bar{I}_n = |z_x^j(1)|, j = 1, \dots, m \right\} \quad (3.145)$$

onde  $N_1^j$  é o vetor correspondente à  $j$ -ésima componente do 1º vetor de  $m$  observações, segundo (3.140), e  $z_x^j(1)$  é a  $j$ -ésima componente do 1º vetor de pseudo-observações, calculada através de (3.139). A definição de  $\alpha_x$  acima tem por intenção compatibilizar a ordem de magnitude dos dois membros de (3.138), excluindo o ruído  $\epsilon_{k+1}^i$ , de modo a "abrir" o esquema de adaptação do ruído aos resíduos contidos nas pseudo-observações.

Para cálculo de variância de  $\alpha_x$  e conseqüente estabelecimento da matriz de covariâncias para as variáveis aleatórias  $\bar{q}_x(1|0)$ , admite-se uma função de distribuição de probabilidades uniforme, com média  $\frac{1}{2} \alpha_x$ . Na ausência de informações sobre  $\bar{q}_x$  e sobre  $\alpha_x$ , esta hipótese é razoável (Kuga, 1982). Com isso, a variância de  $\alpha_x$  será dada por:

$$\sigma_{\alpha_x}^2 = \frac{\alpha_x^2}{12} \quad (3.146)$$

e a matriz de covariâncias a priori  $\bar{P}_{qx}(1|0)$  por:

$$\bar{P}_{qx}(1|0) = \text{diag} \left\{ \frac{1}{12} \alpha_x^2 \right\} \quad (3.147)$$

com  $\bar{P}_{qx}$  de dimensão  $m \times m$ .

Para outras iterações diferentes da primeira utiliza-se, para a informação a priori, a sistemática de realimentar os valores  $\bar{q}_x(k|k)$  e  $P_{qx}(k|k)$  como estimativas a priori para o cálculo de  $\bar{q}_x(k+1|k+1)$  e  $P_{qx}(k+1|k+1)$ , (Kuga, 1982), isto é:

$$\bar{q}_x(k+1|k) = \bar{q}_x(k|k) \quad (3.148)$$

$$\bar{P}_{qx}(k+1|k) = P_{qx}(k+1|k) + W_{qx}(k|k) \quad (3.149)$$

onde  $W_{qx}(k|k)$  é uma matriz diagonal de constantes muito pequenas, somada a  $P_{qx}(k|k)$  para garantir que a estimativa a priori  $\bar{P}_{qx}(k+1|k)$  seja não inferior ao zero numérico do computador utilizado.

A inclusão dos esquemas de ruído adaptativo no auxílio à correção das possíveis deficiências do procedimento e do modelo do estimador é, até esta altura, necessária. Os resultados obtidos com o emprego dessa técnica mostraram-se muito bons, com a vantagem de acarretar uma carga computacional relativamente pequena e, como principal atrativo, não necessitar aumento na dimensão do estado.

### 3.5 A MATRIZ GAMA: CRITÉRIOS

A transformação do problema de estimação num problema virtual de controle leva a que se possa ter uma outra interpretação para a matriz  $G$  definida em (3.27), assim como para a correspondente matriz  $\gamma(k+1,k)$  definida em (3.39). Sob o ponto de vista de controle, a matriz  $G$  pode ser explorada para ajudar a convergência do método no sentido de se criar artifícios que são usuais em problemas de controle e não são utilizados na aplicação direta da teoria de Estimação por carecerem de interpretação física. Em outras palavras, dentro do problema de estimação, a matriz  $\bar{G}$ , como colocada em (3.2), é definida como uma matriz de acoplamento entre as variáveis de estado e seus respectivos ruídos. Dessa maneira, se:

$$\dot{x}(t) = f(x(t),t) + \bar{G} w(t) \quad (3.150)$$

a matriz  $\bar{G}$ ,  $(n \times m)$ , é usualmente dada, em problemas mecânicos, por:

$$\bar{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ I_m \end{bmatrix} \quad (3.151)$$

onde  $I_m$  é a matriz identidade de ordem  $m$ .

Verifica-se, assim, que essa matriz, na forma (3.151), serve apenas para definir quais as variáveis de estado que sofrem ação direta dos ruídos  $w(\cdot, \cdot)$ . No caso de sistemas mecânicos onde as equações de movimento são pelo menos de segunda ordem (acelerações), a redução a um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, para ajuste à forma padrão (3.150), leva a que se tenha equações exatas, isto é, sem termos forçantes, para as posições. Definida através da relação (3.151) ou de qualquer outra maneira, a matriz  $\bar{G}$  deverá garantir as condições de controlabilidade e observabilidade discutidas no Capítulo 2.



Mantendo sempre a preocupação de garantia de controlabilidade e observabilidade do sistema em estudo, a correspondente matriz  $G$  para o estimador proposto pode ser reinterpretado sob o ponto de vista de controle. Claramente, definir  $G$  da mesma maneira que em (3.151) faz sentido pois essa condição indicaria o acoplamento entre as variáveis de estado e seus respectivos controles virtuais que substituem o efeito dos ruídos de estado. Portanto, as equações exatas permanecem inalteradas e os controles virtuais atuam diretamente sobre as variáveis de estado afetadas anteriormente por ruídos. No caso de sistemas mecânicos, os controles virtuais tem a imediata interpretação de acelerações não-modeladas, as quais são estimadas ao longo do tempo de utilização do estimador. No entanto, desde que se está trabalhando com controles virtuais, o acoplamento dado por  $G$  pode ser modificado para se forçar uma melhor convergência do algoritmo. Em particular, três critérios são sugeridos e discutidos para gerar a matriz  $G$  e consequentemente  $\gamma(k+1,k)$ . Estes critérios são chamados critério direto, critério de restauração e critério automático, sendo sua discussão colocada a seguir:

### 3.5.1 - CRITÉRIO DIRETO

Por critério direto entende-se a definição da matriz  $G$  a priori, isto é, uma vez colocados os coeficientes, estes não são alterados durante todo o intervalo em que o estimador trabalha. A forma para  $G$  dada por (3.151) está, portanto, englobada nesse critério.

Como já mencionado, a introdução desses critérios tem por propósito aumentar o acoplamento entre os controles virtuais estimados e as variáveis de estado dentro do modelo do estimador. A forma mais direta de realizar esse acoplamento é definir  $G$  como:

$$G = \begin{bmatrix} C_p I_{n-m} \\ C_v I_m \end{bmatrix} \quad (3.152)$$

onde  $C_p$  e  $C_v$  são constantes positivas,  $I_m$  é a matriz identidade de ordem  $m$  e  $I_{n-m}$  é uma matriz conveniente de elementos 0 e 1.

Com isso, os controles virtuais passam a atuar diretamente sobre as equações com derivadas exatas, enquanto se mantém uma estrutura simples para a definição de  $G$ , uma vez que são necessários apenas dois parâmetros

$C_p$  e  $C_v$ . É importante observar que, em (3.152), deve-se compatibilizar di mensionalmente estes coeficientes.

A necessidade de uso de um critério como esse se torna clara na medida em que se discute o exemplo de aplicação usado para teste do estimador. Nesse exemplo se mostra que o uso desse critério compensa a falta de acoplamento surgida pela redução do número de variáveis estimadas. A mesma consideração se aplica aos outros critérios de geração da matriz G.

### 3.5.2 - CRITÉRIO DE RESTAURAÇÃO

A idéia básica do critério de restauração foi proposta por (Miele, 1975) para tratamento de problemas de controle ótimo. Num problema de controle ótimo, de uma maneira geral, procura-se maximizar ou minimizar um funcional que traduz o critério de otimização definido sobre o sistema, sujeito à satisfação das equações diferenciais de movimento, quase sempre não lineares, e à satisfação de vínculos de contorno nos instantes inicial e final de aplicação do controle, configurando um problema de contorno em dois extremos (two-point boundary value problem). Para solução numérica de problemas desse tipo, encontram-se desenvolvidas técnicas ditas de busca di reta como o Método do Gradiente (Bryson e Denham, 1962) ou o Método do Gra<sup>u</sup>diente Conjugado (Lasdon et alii, 1967), que, ao menos a nível teórico, for necem a solução ótima para o controle procurado. No entanto, dado um conjun<sup>to</sup> de condições iniciais, a aplicação desses métodos leva a uma situação con flitante, onde se procura, simultaneamente, caminhar na direção do gradien<sup>te</sup> do funcional e satisfazer os vínculos de contorno no instante final. A técnica de restauração (Miele, 1975), se propõe a contornar essa situação atuando da seguinte forma: nos primeiros passos, ignora-se a necessidade de se procurar a solução ótima até que os vínculos de contorno no instante fi nal estejam satisfeitos dentro de uma determinada faixa de precisão, sendo isto feito através de correções nas funções de controle geradas dentro do algoritmo; uma vez obtida essa condição, libera-se o procedimento para cami<sup>n</sup>har na direção de busca da solução ótima, tanto que deve acarretar altera<sup>ç</sup>ões nos vínculos de contorno, levando-os novamente para fora da faixa de precisão; nesse caso, trabalha-se sobre a nova função de controle até sa tisfazer novamente os vínculos terminais; caso contrário, isto é, as novas

funções de controle não alteram significativamente os vínculos de extremidade, pode-se tentar um novo passo na direção do gradiente. Dessa maneira, o algoritmo do problema de controle restaura, automaticamente, as condições de contorno até que se consiga otimizar as funções de controle dentro das precisões desejadas para satisfação dos vínculos terminais.

Os fundamentos da técnica de restauração podem, guardadas as devidas proporções, ser aplicados ao estimador proposto. Esse estimador pode ser visto, como já dito, como um controlador de extremidades passo a passo, na medida em que tenta aproximar o estado modelado em relação ao sistema verdadeiro usando as observações como objetivo a ser satisfeito. No entanto, em função da modelagem usada em que apenas parte das componentes do vetor de variáveis de estado é diretamente afetado pelos controles estimados ou pela correspondente parcela de ruído, é de se esperar que essas componentes tenham melhores características de convergência que as componentes em que o efeito dos controles é indireto. Em outras palavras, se a definição de G utilizada é expressa por (3.151), isto é:

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix} \quad (3.153)$$

então as m componentes ligadas a  $I_m$  devem apresentar melhores características de convergência. Esta afirmação, constatada nos testes com o estimador, é corrigida através do critério direto, mas pode ser ampliada pela colocação de um critério de restauração que atue de modo a que, nos trechos em que exista melhor convergência das variáveis afetadas pelo ruído seja dada preferência à correção das outras variáveis e vice-versa. Essa idéia pressupõe a existência de alguma medida que quantifique a convergência das variáveis estimadas para seus valores reais. Por uma análise detalhada das saídas do algoritmo, verifica-se que a única medida disponível é fornecida pelo erro estimado, dado pela média dos valores da matriz de covariância dos erros no estado.

Uma maneira possível para definir o erro estimado para as variáveis de estado não forçadas, no k-ésimo passo é dado por:

$$e_p(k) = \frac{1}{(n-m)\sigma_p} \left[ \sum_{i=1}^{n-m} P_{ii}(k|k) \right]^{1/2} \quad (3.154)$$

onde  $P_{ii}(k|k)$  é o  $i$ -ésimo elemento da diagonal da matriz de covariâncias do erro no estado,  $P(k|k)$ , e  $\sigma_p$  é o desvio-padrão das observações associadas a essas variáveis. De maneira análoga, o erro estimado para as variáveis forçadas é dado por:

$$e_v(k) = \frac{1}{m\sigma_p} \left[ \sum_{i=1}^m P_{ii}(k|k) \right]^{1/2} \quad (3.155)$$

Os erros  $e_p(k)$  e  $e_v(k)$  podem ser obtidos logo após a atualização da matriz de covariância  $P(k|k)$ , na saída do ciclo de atualização do estimador. Esses erros devem, caso o método esteja convergindo, se situar em torno do valor unitário, indicando que o erro estimado está dentro da faixa de precisão das observações. Este fato permite, então, que se defina o critério de restauração da seguinte maneira:

- O algoritmo é inicializado com qualquer estimativa coerente para a matriz  $G$  como, por exemplo, o critério direto expresso por (3.152) ou mesmo a definição usual (3.153).
- Após um número pequeno de passos, os erros  $e_p$  e  $e_v$  são testados e redefina-se a matriz  $G$ , caso necessário, segundo:
  - se  $0 < e_p < d$  e  $0 < e_v < d$ , onde  $d$  é um número real positivo, então os erros estão dentro da faixa prevista e o critério anterior deve ser mantido.
  - se  $0 < e_p < d$  mas  $e_v > d$ , então o critério anterior deve ser substituído por outro que preferencialmente corrija as variáveis forçadas em detrimento das demais. Isso é feito alterando a matriz  $G$  por:

$$G = \begin{bmatrix} C_p^v & \bar{I}_{n-m} \\ C_v^v & I_m \end{bmatrix} \quad (3.156)$$

isto é, um critério direto com os coeficientes reescalados para privilegiar a convergência para as variáveis forçadas;

se  $0 < e_v < d$  mas  $e_p > d$  então o critério anterior deve ser substituído por outro que acelere a convergência nas variáveis não forçadas. Da mesma forma a substituição se faz por:

$$G = \begin{bmatrix} C_p^p & \bar{I}_{n-m} \\ C_v^p & I_m \end{bmatrix} \quad (3.157)$$

com o conseqüente reescalonamento através dos coeficientes  $C_p^p$  e  $C_v^p$ .

- Após este teste, o algoritmo prossegue com a matriz G gerada por um número pequeno de passos quando se repete novamente o teste.

Os resultados obtidos na aplicação dessa técnica ao estimador proposto demonstram que esse número pequeno de passos está situado em torno de 5, de modo a não sobrecarregar demasiadamente o estimador. No caso de teste, o número d foi definido como  $d = 2.0$ .

Uma análise cuidadosa dos dois critérios já descritos conduz à conclusão de que, apesar de apresentarem grandes vantagens sobre a forma padrão (3.151), aumentando o acoplamento entre os controles estimados e todas as variáveis de estado, em ambos os casos, e privilegiando a convergência para parte das variáveis de estado no caso do critério de restauração, tais critérios ainda padecem de dois problemas. O primeiro se refere ao fato de que as estimativas do controle são usadas para reconstrução do estado com o mesmo sinal já que todas as constantes arbitradas são positivas. Depois, essas constantes só podem ser geradas por tentativa e erro, ou seja, não há maneira de obtê-las automaticamente dentro do algoritmo. O critério automático, discutido a seguir, tem por intenção resolver esses inconvenientes.

### 3.5.3 - CRITÉRIO AUTOMÁTICO

O critério automático representa uma maneira de gerar a matriz G dentro do algoritmo de estimação, desta forma evitando a atribuição de valores incompatíveis com a convergência que se pretende para o algoritmo. A idéia dessa técnica é reduzir a determinação dos componentes da matriz G a um problema determinístico de controle ótimo que pode ser resolvido passo a passo. Assim, a matriz G é redefinida para cada intervalo  $(t_k, t_{k+1})$  de trabalho do estimador.

Sob o ponto de vista de controle, como reiterado diversas vezes, o estimador se comporta como um controlador que deve levar o sistema, de  $t_k$ , a satisfazer as condições de observação no instante  $t_{k+1}$ . Para geração do critério, admite-se, por simplicidade, que tanto o sistema como as observações sejam determinísticas. A lei de evolução do desvio  $\Delta x(t)$ , um intervalo típico é dado, como no item 3.2, por:

$$\Delta x(t_{k+1}) = \phi(k+1,k) \Delta x(t_k) + \gamma(k+1,k) u_c(t_k) \quad (3.158)$$

onde  $\phi(k+1,k)$  é a matriz de transição do sistema e  $\gamma(k+1,k)$  é obtida através de:

$$\gamma(k+1,k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \phi(t_k, s) G(s) ds \quad (3.159)$$

Admitindo como já feito em todos os desenvolvimentos anteriores, que  $G$  é constante e igual a  $G_k$  para esse intervalo típico:

$$\begin{aligned} \gamma(k+1,k) &= \left[ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \phi(t_k, s) ds \right] G_k \\ \gamma(k+1,k) &= \bar{B}_k G_k \end{aligned} \quad (3.160)$$

onde

$$\bar{B}_k = \left[ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \phi(t_k, s) ds \right] \quad (3.161)$$

Voltando a (3.157) obtém-se:

$$\Delta x(t_{k+1}) = \phi(k+1,k) \Delta x(t_k) + \bar{B}_k G_k u_c(t_k) \quad (3.162)$$

Admite-se que todos os valores à direita de (3.161) são conhecidos ou podem ser calculados, com exceção da matriz  $G$ . O que se deseja, no instante  $t_{k+1}$ , é que as observações sejam totalmente satisfeitas para se ter em correspondência, o melhor  $\Delta x(t_{k+1})$ . Isto significa que, no caso ideal:

$$\Delta z_{k+1} = H_{k+1} \Delta x(t_{k+1}) \quad (3.163)$$

o que pode ser traduzido por procurar minimizar uma função objetivo dada por:

$$J = \left[ \Delta z_{k+1} - H_{k+1} \Delta x(t_{k+1}) \right]^T \left[ \Delta z_{k+1} - H_{k+1} \Delta x(t_{k+1}) \right] \quad (3.164)$$

sujeito ao vínculo dinâmico expresso por (3.161).

É importante observar que se admite todos os valores conhecidos ou calculáveis, a menos da matriz  $G_k$ , cuja forma é dada por:

$$G_k = \begin{bmatrix} G_{1,k} \\ G_{2,k} \end{bmatrix} \quad (3.165)$$

onde  $G_{1,k}$  tem uma forma diagonal conveniente e:

$$G_{2,k} = \text{diag} \left\{ G_{ij,k}^2 ; \begin{array}{l} i = n-m+1, \dots, n \\ j = 1, \dots, m \end{array} \right\} \quad (3.166)$$

A função objetivo  $J$  deve, portanto, ser otimizada em relação aos parâmetros da matriz  $G_k$ . Substituindo a expressão (3.162) em (3.164) e fazendo:

$$\frac{\partial J}{\partial G_k} = 0 \quad (3.167)$$

resulta após as necessárias manipulações algébricas:

$$H_{k+1} \bar{B}_k G_k u_c(t_k) = \Delta z_{k+1} - H_{k+1} \phi(t_{k+1}, t_k) \Delta x(t_k) \quad (3.168)$$

Trabalhando agora sobre o lado esquerdo da igualdade (3.168) e aproveitando a estrutura diagonal da matriz  $G_k$ , a igualdade pode ser reduzida a uma expressão na forma:

$$D_{k+1} g_k = \Delta z_{k+1} - H_{k+1} \phi(t_{k+1}, t_k) \Delta x(t_k) \quad (3.169)$$

onde  $D_{k+1}$  é uma matriz de dimensão  $r \times n$ , obtida a partir de  $H_{k+1}$ ,  $\bar{B}_k$  e  $u_c(t_k)$ , e  $g_k$  é um vetor de dimensão  $n$  que contém os elementos da matriz  $G_k$  que devem ser calculados.

Obtém-se, dessa maneira, uma equação linear nos componentes de  $G_k$ , cuja solução depende das dimensões relativas do vetor  $g_k$  e do número de observações disponíveis, traduzidas pela dimensão do vetor  $\Delta z_{k+1}$ . Se  $r = n$ , isto é, o número de observações em  $t_{k+1}$  é igual ao número de variáveis de estado, então a solução é direta. Se  $r \neq n$ , a solução para  $g_k$  deve ser procurada por um método do tipo Mínimos Quadrados, determinístico, como os que podem ser encontradas em bibliotecas normais de computador (IMSL, 1981).

A par de apresentar uma complicação adicional que é a de se resolver o sistema linear (3.169) a cada passo, o critério de geração automática tem uma outra restrição imediata representada pelo fato de se calcular os elementos de  $G_k$  com os valores correntes de  $u_c(t_k)$  que devem ser obtidos no mesmo intervalo. A proposta, para se contornar esse caso é atrasar o cálculo de  $G_k$  até que todos os valores necessários estejam disponíveis, o que significa gerar a matriz com atraso de um passo. Para a primeira iteração pode-se usar qualquer critério, como por exemplo, a forma padrão expressa por (3.151). Ao final dessa primeira iteração, os valores necessários para cálculo da matriz  $G_k$  estarão disponíveis e assim, sucessivamente, para todas as outras iterações. Como o esquema proposto é adaptativo e as aproximações usadas são bastante simplificadoras, esse atraso não chega a causar grandes transtornos na aplicação da técnica. Além desse, outros pontos devem ser ressaltados na análise do critério automático. Assim, pode ser observado que esse critério trabalha com o estado propagado pelo estimador, que, em geral, é muito pobre e, portanto, o critério é ótimo apenas para os parâmetros e para a estrutura, não muito realistas, do problema determinístico que gera a matriz  $G_k$ . Finalmente, essas mesmas considerações de modelo e estrutura, aliadas à solução numérica para os parâmetros de  $G_k$ , levam a que se deve colocar limitações para valores máximos e mínimos desses parâmetros como forma de compensar os erros introduzidos por todos esses fatores. Além disso, essa limitação é necessária, pois deve-se recordar que o critério gera  $G_k$  baseado na média das variáveis de estado e dos controles mas não leva em conta as respectivas covariâncias, que estão sendo ajustadas através das técnicas de ruído adaptativo apresentadas. Apesar de ser uma limitação no sentido eventualmente não se aproveitar de maneira



integral os valores calculados de  $G_k$ , essa faixa de limitação pode ser colocada larga o suficiente para aproveitar de forma muito boa o desenvolvimento realizado. Deve-se observar que colocar limites superiores e inferiores para os coeficientes é muito mais simples que ajustar os valores sem outras informações. Além disso, o critério automático preserva o sinal de correção do controle, o que não é feito em nenhum outro caso, assim como permite coeficientes diferentes para as diversas variáveis de cada grupo.

Este critério mostrou, como esperado, a maior facilidade de ajuste quando dos testes com o estimador. Serviu, também, através de análise das componentes de  $G_k$  como modo seguro de gerar os coeficientes para os outros dois critérios apresentados. No entanto, a estrutura de determinação dos parâmetros  $g_k$  permite antever ao menos dois desdobramentos para se obter soluções de modo ainda simples. Primeiramente, a forma de (3.169) possibilita a resolução por métodos recursivos, processando uma a uma as "observações" contidas à direita de mesma. Segundo, é possível reiterar sobre os valores de  $g_k$ , isto é, elimina-se o passo de atraso se a  $G_k$  obtida no final do passo indicado no desenvolvimento for incorporado ao início do algoritmo e todas as passagens forem repetidas para calcular controles virtuais e estados.

As características de convergência de cada um dos critérios citados serão discutidas quando da apresentação dos testes com o estimador.

### 3.6 - ANÁLISE MATEMÁTICA DO ESTIMADOR PROPOSTO

Este item é utilizado para demonstrar matematicamente passagens propostas quando do desenvolvimento do estimador de estado (ver seção 3.3). Em particular, a preocupação é demonstrar a existência do controle virtual  $u_c$ , a cada passo, e discutir a convergência do método para o caso de um sistema linear, o que é suficiente, em vista das hipóteses de aproximação lançadas, para garantir a aplicabilidade para os sistemas não lineares com a forma descrita nos itens anteriores.

Considere-se, então, o sistema linear contínuo no tempo com processo de observações discreto dado por:

$$\dot{x}(t) = F(t) x(t) + \bar{G}_k w \quad (3.170)$$

$$z_{k+1} = H_{k+1} x(t_{k+1}) + v_{k+1} \quad (3.171)$$

onde, com exceção das matrizes  $F(t)$  e  $H_k$ , todas as outras variáveis tem as mesmas definições e dimensões colocadas nas seções precedentes  $F(t)$  e  $H_k$  são,

agora, matrizes associadas à dinâmica linear e às observações lineares, ao invés das usuais matrizes de derivadas parciais dos sistemas não lineares. Usando a correspondente notação para sistemas discretizados no tempo, obtem-se de (3.170):

$$x(t_{k+1}) = \phi(t_{k+1}, t_k) x(t_k) + \Gamma_k^{\ell} w_k \quad (3.172)$$

Na propagação do estado, pode-se definir o desvio  $\Delta x(t)$  como a diferença entre a trajetória linear verdadeira e a trajetória propagada através de:

$$\Delta x(t) = x(t) - \bar{x}(t) \quad (3.173)$$

o que levará a uma equação para a evolução de  $\Delta x(t)$  na forma:

$$\Delta x(t_{k+1}) = \phi(t_{k+1}, t_k) \Delta x(t_k) + \Gamma_k^{\ell} w_k \quad (3.174)$$

Por outro lado, definindo a trajetória controlada para o sistema linear por:

$$\dot{x}_c(t) = F(t) x_c(t) + G^{\ell} u_c(t) \quad (3.175)$$

ou, equivalentemente, na forma discreta:

$$x_c(t_{k+1}) = \phi(t_{k+1}, t_k) x_c(t_k) + \gamma^{\ell}(k+1, k) u_c(t_k) \quad (3.176)$$

é possível repetir exatamente os mesmos passos seguidos para a obtenção do caso não linear com a única ressalva de que as matrizes  $F(t)$  e sua correspondente  $\phi(t_{k+1}, t_k)$ , além da matriz  $H_{k+1}$ , são definidas de maneira diferente.

A forma do filtro para o controle virtual  $u_c$  é, então, a mesma obtida no item 3.3, e fornece para a média e para a matriz de covariâncias dos erros no controle, respectivamente:

$$\hat{u}_c(t_k) = \left[ \gamma^{\ell T}(k+1, k) P^{-1}(k+1|k) \gamma^{\ell}(k+1, k) + \gamma^{\ell T}(k+1, k) H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1} \gamma^{\ell}(k+1, k) \right]^{-1} \cdot \gamma^{\ell T}(k+1, k) H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} \Delta z_{k+1} \quad (3.177)$$

$$P_U(k+1|k) = \left[ \gamma^{\ell T}(k+1,k) P^{-1}(k+1|k) \gamma^{\ell}(k+1,k) + \gamma^{\ell T}(k+1,k) H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1} \cdot \gamma^{\ell}(k+1,k) \right]^{-1} \quad (3.178)$$

Para demonstrar a existência de solução para o caso linear, abandonando-se o índice  $\ell$  de  $\gamma^{\ell}(k+1,k)$ , verifica-se que, de (3.177), segue imediatamente que:

$$\bar{u}_c(t_k) = P_U(k+1|k) \gamma^T(k+1,k) H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} \Delta z_{k+1} \quad (3.180)$$

e, portanto, uma vez demonstrada a existência de  $P_U(k+1|k)$  o vetor de controles estimados  $\bar{u}_c(t_k)$  existe pois todas as matrizes e vetores envolvidos são não nulos por hipótese ou por construção. Na realidade, o desvio nas observações,  $\Delta z_{k+1}$ , pode ser nulo mas esta condição indicaria que  $\bar{u}_c(t_k)$  é também nulo, o que é correto, pois a satisfação total das observações pelo modelo dentro do estimador leva, em correspondência, a se descartar a ação do controle virtual para correção da trajetória.

Posto isto, pode-se analisar os termos para  $P_U(k+1,k)$  em (3.178) individualmente. Utilizando a definição de  $\gamma(k+1,k)$ , tem-se, para o primeiro termo:

$$\gamma^T(k+1,k) P^{-1}(k+1|k) \gamma(k+1,k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} G^T(s) \phi^T(s, t_k) ds \cdot P^{-1}(k+1|k) \cdot \int_{t_k}^{t_{k+1}} \phi(\tau, t_k) G(\tau) d\tau \quad (3.181)$$

Como  $G$  é constante ao longo de  $[t_k, t_{k+1}]$ :

$$\gamma^T(k+1,k) P^{-1}(k+1|k) \gamma(k+1,k) = G^T \left[ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \phi^T(s, t_k) P^{-1}(\tau|t_k) \phi(\tau, t_k) ds d\tau \right] G \quad (3.182)$$

$$\gamma^T(k+1,k) P^{-1}(k+1|k) \gamma(k+1,k) = G^T \left[ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \phi^T(\tau, t_k) P^{-1}(\tau|t_k) \phi(\tau, t_k) d\tau \right] G \quad (3.183)$$

Para o segundo termo, tem-se:

$$\begin{aligned} \gamma^T(k+1,k) H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1} \gamma(k+1,k) &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} G^T(s) \phi^T(s, t_k) ds \cdot H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1} \\ &\cdot \int_{t_k}^{t_{k+1}} \phi(\tau, t_k) G(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.184)$$

Usando o fato de  $G$ ,  $H_{k+1,k} R_{k+1}^{-1}$  serem constantes:

$$\begin{aligned} \gamma^T(k+1,k) H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1} \gamma(k+1,k) &= G^T \left[ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \phi^T(s, t_k) ds H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} \right. \\ &\left. \cdot \phi(\tau, t_k) ds d\tau \right] G \end{aligned} \quad (3.185)$$

$$\begin{aligned} \gamma^T(k+1,k) H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1} \gamma(k+1,k) &= G^T \left[ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \phi^T(\tau, t_k) H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1} \right. \\ &\left. \cdot \phi(\tau, t_k) d\tau \right] G \end{aligned} \quad (3.186)$$

Observando agora as igualdades (3.183) e (3.186), verifica-se que os termos entre colchetes indicam a propagação, no intervalo de interesse, da matriz inversa das covariâncias dos erros no estado e da matriz de informação (Jazwinski, 1970). Além disso, a expressão (3.186) envolve diretamente o conceito de observabilidade do sistema, embutido na matriz de informação, ou seja, o requisito de observabilidade estocástica do sistema implica em que:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \phi^T(\tau, t_k) H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1} \phi(\tau, t_k) > 0 \quad (3.187)$$

o que mostra que essa matriz é sempre definida positiva. Para as expressões (3.183), com a hipótese de  $P(t_0) > 0$ , é possível demonstrar (Jazwinski, 1970) também que o termo entre colchetes é definido positivo, já que poderia ser reescrito através de:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi^T(\tau, t_k) P^{-1}(\tau | t_k) \Phi(\tau, t_k) d\tau = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi^T(\tau, 0) P^{-1}(t_0) \Phi(\tau, 0) d\tau. \quad (3.188)$$

em função das propriedades da matriz de transição.

Juntando novamente os termos isolados à expressão  $P_u(k+1|k)$ , obtém-se:

$$P_u(k+1|k) = \left\{ G^T \left[ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi^T(\tau | t_k) \left( P^{-1}(\tau | t_k) + H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1} \right) \Phi(\tau, t_k) d\tau \right] G \right\}^{-1} \quad (3.189)$$

O termo entre colchetes é, portanto, definido positivo pelas considerações já feitas. A matriz  $G$ , por sua vez, é uma matriz construída no sentido de que a formulação de controle permite que se estabeleça a estrutura de  $G$  para torná-la compatível com o problema. Mesmo com tal matriz definida pelo critério usual de estimação:

$$G = \begin{bmatrix} 0_{n-m} \\ I_m \end{bmatrix} \quad (3.190)$$

o produto entre chaves é definido positivo. Conclui-se, então, que o termo à direita de (3.189) é sempre inversível e, portanto, a matriz  $P_u(k+1|k)$  sempre existe. Cuidado especial deve ser tomado apenas com o uso do Critério Automático, na geração dos coeficientes de  $G$ .

Demonstrada a existência da estimativa, é necessário desenvolver, ainda para o caso do sistema linear, a convergência local do método, desde que obedecidas as hipóteses colocadas. No caso aqui tratado não é possível, como para uma grande parte dos estimadores baseados em aproximações

lineares, fazer recair diretamente no Filtro Linear de Kalman, fato que simplificará bastante tal discussão e ampliará seu alcance.

Dito isto, é possível demonstrar que o filtro na forma (3.177) e (3.178) satisfaz o critério Bayesiano (Bryson e Ho, 1975), se for admitido, como feito no desenvolvimento do método, que as funções densidade de probabilidade envolvidas são todas Gaussianas. Nesse caso, partindo de:

$$z_{k+1}^c = M_{k+1}^c u_c(t_k) + v_{k+1}^c \quad (3.191)$$

ou de forma equivalente:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\Delta z_{k+1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma(k+1,k) \\ H_{k+1} \gamma(k+1,k) \end{bmatrix} u_c(t_k) + \begin{bmatrix} -\frac{n(k+1|k)}{v_{k+1}} \end{bmatrix} \quad (3.192)$$

e usando Bryson e Ho, (1975), prova-se que aplicação do critério Bayesiano, ou seja, geração da função densidade de probabilidades  $p(u_c | z_{k+1}^c)$  utilizando a densidade  $p(z_{k+1}^c | u_c)$ , leva a se poder escrever:

$$\hat{u}_c(t_k) = P_u(k+1,k) M_{k+1}^{cT} \bar{R}_{k+1}^{-1} z_{k+1}^c \quad (3.193)$$

$$P_u(k+1|k) = \left( M_{k+1}^{cT} \bar{R}_{k+1}^{-1} M_{k+1}^c \right)^{-1} \quad (3.194)$$

onde  $\bar{R}_{k+1}$  é a matriz de covariâncias dos ruídos de observação  $v_{k+1}^c$ .

Substituindo os valores expressos em (3.192) nas igualdades acima, obtém-se:

$$P_u(k+1|k) = \left\{ \begin{bmatrix} \gamma(k+1,k) \\ H_{k+1} \gamma(k+1,k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P^{-1}(k+1|k) & 0 \\ 0 & R_{k+1}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma(k+1,k) \\ H_{k+1} \gamma(k+1,k) \end{bmatrix} \right\}^{-1} \quad (3.195)$$

$$P_u(k+1|k) = \left[ \gamma^T(k+1,k) P^{-1}(k+1|k) \gamma(k+1,k) + \gamma^T(k+1,k) H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1} \gamma(k+1,k) \right]^{-1} \quad (3.196)$$

$$\hat{u}_c(t_k) = P_u(k+1|k) \begin{bmatrix} \gamma(k+1,k) \\ H_{k+1} \gamma(k+1,k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P^{-1}(k+1|k) & 0 \\ 0 & R_{k+1}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta z_{k+1} \end{bmatrix} \quad (3.197)$$

$$\hat{u}_c(t_k) = P_u(k+1,k) \gamma^T(k+1,k) H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} \Delta z_{k+1} \quad (3.198)$$

As expressões (3.196) e (3.198) são as mesmas obtidas anteriormente para o estimador de  $u_c(t_k)$ .

Além disso, a forma obtida para o filtro satisfaz o critério de minimizar, a cada passo, um critério de otimização. Esse critério que permite estimar o controle  $u_c(t_k)$  de modo a aproximar, tanto quanto possível, o sistema linear das observações realizadas, é traduzido pela forma quadrática:

$$J = \frac{1}{2} \left[ \gamma(k+1,k) u_c(t_k) \right]^T P^{-1}(k+1|k) \left[ \gamma(k+1,k) u_c(t_k) \right] + \frac{1}{2} \left[ \Delta z_{k+1} - H_{k+1} \gamma(k+1,k) u_c(t_k) \right]^T R_{k+1}^{-1} \left[ \Delta z_{k+1} - H_{k+1} \gamma(k+1,k) u_c(t_k) \right] \quad (3.199)$$

Derivando-se a função objetivo J em relação a  $u_c(t_k)$  e impondo:

$$\frac{\partial J}{\partial u_c(t_k)} = \gamma(k+1,k) P^{-1}(k+1|k) \gamma(k+1,k) \hat{u}_c(t_k) + \gamma^T(k+1,k) H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1} \cdot \gamma(k+1,k) \hat{u}_c(t_k) - \gamma^T(k+1,k) H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} \Delta z_{k+1} = 0 \quad (3.200)$$

recai-se novamente nas equações (3.198) e (3.196), que fornecem a média e a matriz de covariâncias dos erros em  $u_c(t_k)$ , configurando então a condição necessária para minimização de J.

A condição suficiente pode ser obtida através de nova derivação da função objetivo em relação ao vetor de controles  $u_c(t_k)$ . A matriz obtida deve ser definida positiva para que a forma quadrática de J seja mínima. Nesse caso, obtem-se:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial [u_c(t_k) u_c^T(t_k)]} = \left[ \gamma^T(k+1, k) P^{-1}(k+1|k) \gamma(k+1, k) + \gamma^T(k+1, k) H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} \gamma(k+1, k) \right] \quad (3.201)$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial [u_c(t_k) u_c^T(t_k)]} = P_u(k+1|k) \quad (3.202)$$

e, portanto, deve-se ter:

$$P_u(k+1|k) > 0 \quad (3.203)$$

condição que, como já demonstrado, é válida no caso linear com as hipóteses adotadas.

Conclue-se, então, que, para um sistema linear, o método proposto, garantidas condições de observabilidade e controlabilidade, converge localmente. Desse modo, o estimador desenvolvido pode ser aplicado à estimação de sistemas não lineares principalmente no caso de modelos muito pobres para a dinâmica pois a característica de convergência local garante a adaptação do modelo às observações realizadas sobre o sistema. Os resultados dos testes com o procedimento, descritos no próximo Capítulo, atestam a veracidade dessa afirmação.



## CAPÍTULO 4

### APLICAÇÃO AO PROBLEMA DE ESTIMAÇÃO DE ÓRBITAS: RESULTADOS

Neste Capítulo descreve-se a aplicação do estimador proposto à solução do problema de estimação da órbita de um satélite artificial em torno da Terra. São destacadas as condições utilizadas para os testes no que diz respeito à dinâmica do movimento, esquema de observações empregado, su porte computacional necessário e parâmetros para análise dos resultados. Es ses resultados, obtidos sob diversas condições de observabilidade do siste ma em estudo, assim como sob diferentes níveis de precisão nas observações, demonstram a eficiência do estimador proposto mesmo em situações adversas.

#### 4.1 - DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

O problema escolhido para teste do estimador proposto é o de estimação de órbitas, em tempo real, de satélites artificiais a baixa alti tude. A escolha desse problema deve-se a uma série de fatores dentre os quais pode-se destacar:

- trata-se de um problema não linear e de difícil modelagem, suficientemente complicado para garantir um teste realista acerca do desem penho do estimador de estado;
- a condição de observabilidade local, requerida pelo estimador, e que pode ser suprida facilmente pela montagem de teste, através de esta ções fictícias (Negreiros de Paiva, 1980), será uma realidade quando estiverem disponíveis redes de comunicação satélite-satélite como é o caso do GPS - Global Positioning System (Kruczyski, 1977) - dessa forma permitindo o emprego de estimadores adaptativos, como o aqui desenvolvido, em esquemas autônomos de determinação e controle de ór bita;
- a infraestrutura computacional necessária para realização dos testes se encontra disponível como fruto do trabalho de pesquisa e implan tação, no INPE, de outros estimadores para o problema de estimação de órbitas (Rios Neto e Kuga, 1981 e 1982, Kuga, 1982 e Negreiros de Paiva, 1980, entre outros);

- da mesma maneira que o suporte computacional desenvolvido pode ser utilizado, os resultados já obtidos servem como padrão de comparação para o estimador proposto.

Levando esses fatos em conta, o estimador de estado foi testado contra uma órbita simulada, que, para todos os efeitos, é considerada a órbita verdadeira do satélite, obtida a partir de um modelo matemático que engloba as principais forças agindo sobre o mesmo. O modelo embutido no estimador é consideravelmente simplificado e o filtro deve, portanto, gerar as aproximações necessárias para reproduzir a órbita simulada. Caracterizam-se, dessa forma, erros propositais de modelagem que guardam semelhança com o problema de determinação de órbita onde agem forças não totalmente conhecidas e de difícil equacionamento.

O processo de observações é montado passo a passo dentro do algoritmo de teste, através das chamadas estações fictícias (Nêgreiros de Piva., 1980). Embora esta seja uma situação ideal de observação do sistema, não está fora da realidade na medida em que hoje se implanta a rede GPS, onde se garante que pelo menos 4 satélites da rede estarão observando o satélite em estudo. No caso de estações fictícias, a localização dessas últimas, como será detalhado, depende da posição do satélite na órbita. Localizadas as estações e geradas as observações através de métodos determinísticos, tais observações são imediatamente corrompidas com ruídos aleatórios, caracterizando, assim, a informação como será recebida pelo estimador.

Esta montagem do teste permite que se compare o desempenho do estimador de estado sob várias condições de observabilidade, aumentando ou diminuindo o número de estações que observam o satélite e alterando o nível de precisão das informações disponíveis para o estimador.

No que segue estão detalhadas as condições utilizadas no procedimento numérico para geração da órbita simulada e do modelo do estimador, obtidas através de Kuga, (1982).

#### 4.2 - ÓRBITA SIMULADA E MODELO DE ESTIMADOR

Para se testar o estimador em uma aplicação típica de estimação de órbitas, lança-se mão de uma órbita simulada o mais aproximadamente possível de uma órbita real. A órbita simulada fornecerá, uma vez conhecida, os dados necessários para a geração das observações, assim como os parâmetros em relação aos quais as saídas do estimador, ou seja, o estado do sistema, serão comparadas para se poder analisar seu desempenho.

Para se gerar a órbita simulada é necessário que se tenha os dados do satélite em questão. Em particular, o caso escolhido corresponde ao do primeiro satélite a ser desenvolvido, lançado e operado em território brasileiro, o chamado Satélite de Coleta de Dados da MECB. As características principais desse satélite são: relação área sobre massa de  $0,00729\text{m}^2/\text{kg}$ , com área de referência de  $0,707107\text{m}^2$  e peso aproximado de 97 kg, com a geometria de um prisma reto de base octogonal (Kuga, 1982), conforme apresentado na Figura 4.1.

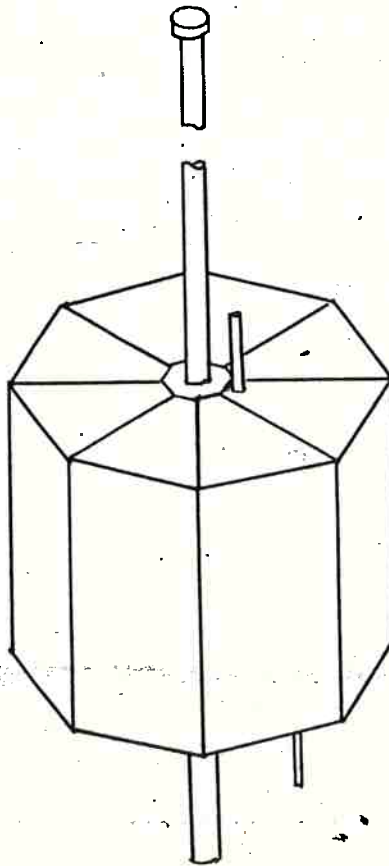


Fig. 4.1 - Primeiro satélite brasileiro (MECB)

Com a declarada intenção de complicar o problema para o estimador, a órbita de trabalho será de baixa altitude. Isto significa que tanto a órbita simulada como a órbita gerada pelo estimador corresponderão a uma condição crítica, pois em órbitas de baixa altitude a influência dos termos perturbadores da órbita é muito mais pronunciada, conforme se verifica na Tabela 4.1 (Jensen et alii, 1962), onde se admite satélites de área projetada e massa unitárias.

TABELA 4.1

PERTURBAÇÕES EM UM SATÉLITE EM RELAÇÃO À ÓRBITA KEPLERIANA

PERTURBAÇÕES	ALTITUDE EM KM			
	250	700	2000	15000
<u>GEOPOTENCIAL:</u>				
1. KEPLER	1	1	1	1
2. ACHATAMENTO TERRESTRE	10 <sup>-3</sup>	10 <sup>-3</sup>	10 <sup>-3</sup>	10 <sup>-4</sup>
3. TERMOS SUPERIORES	10 <sup>-6</sup>	10 <sup>-6</sup>	10 <sup>-6</sup>	-
<u>ARRASTO ATMOSFÉRICO</u>	10 <sup>-4</sup>	10 <sup>-6</sup>	-	-
<u>LUNI-SOLAR</u>	10 <sup>-7</sup>	10 <sup>-7</sup>	10 <sup>-7</sup>	10 <sup>-6</sup>

Definidas essas condições para o problema, a órbita simulada leva em conta todos os efeitos de perturbação contidos na tabela, nominalmente, acelerações devidas ao movimento kepleriano, ao achatamento terrestre, aos termos superiores do geopotencial, ao arrasto atmosférico e à influência luni-solar. Enquanto isso, o modelo do estimador compreende apenas as acelerações devidas ao movimento kepleriano e ao achatamento terrestre. Em outras palavras, separando-se os efeitos envolvidos para uma e outra órbita, tem-se:

- para a órbita simulada:

$$\ddot{\vec{r}}_S = \ddot{\vec{a}}_G + \ddot{\vec{a}}_D + \ddot{\vec{a}}_{SSL} \quad (4.1)$$

onde  $\ddot{\vec{r}}_S$  é a aceleração do satélite,  $\ddot{\vec{a}}_G$  é a aceleração devida ao geopotencial;  $\ddot{\vec{a}}_D$  é a aceleração devida ao arrasto atmosférico e  $\ddot{\vec{a}}_{SSL}$  é a aceleração devida às perturbações luni-solares.

Nesse caso, a aceleração devida ao geopotencial engloba o problema dos dois corpos, o achatamento terrestre expresso pelo coeficiente do harmônico zonal  $J_2$ , os coeficientes zonais até  $J_6$  e os coeficientes dos harmônicos tesserais até  $C_{44}$  e  $S_{44}$  (e.g., Kuga, 1982). A expressão para o geopotencial pode ser expressa em termos de séries de harmônicos esféricos por:

$$U = \frac{\mu}{r} \left\{ 1 + \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{n=0}^i \left( \frac{R}{r} \right)^i P_i^{(n)}(\sin \vartheta) \left[ C_{in} \cos n\lambda + S_{in} \sin n\lambda \right] \right\} \quad (4.2)$$

onde os  $P_i^{(n)}$  são funções associadas de Legendre,  $C_{in}$  e  $S_{in}$  são os coeficientes dos harmônicos esféricos,  $\lambda$  é a longitude do ponto subsatélite,  $\vartheta$  é a latitude do ponto subsatélite,  $R$  é o raio equatorial da Terra,  $r$  é o módulo do vetor posição do centro de massa do satélite e  $\mu$  é a constante gravitacional.

Desenvolvendo (4.2) em série e truncando segundo a precisão desejada, pode-se calcular a parcela  $\vec{a}_G$  por:

$$\vec{a}_G = \nabla U \quad (4.3)$$

onde  $\nabla$  representa o operador gradiente.

A aceleração devida ao Sol e à Lua é feita através de uma aproximação de primeira ordem, levando-se em conta apenas o movimento de um corpo de massa  $m_j$ , em relação às coordenadas inerciais, sujeito à atração de  $n-1$  outros corpos, isto é:

$$\vec{r}_S = G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq S}}^n m_j \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_S}{r_{Sj}^3} \quad (4.4)$$

onde  $G$  é a constante gravitacional e  $r_{Sj}$  é o módulo do vetor que liga S (satélite) a  $j$ . A expressão final que liga os efeitos do Sol e Lua sobre o satélite, descrita no sistema relativo de coordenadas centrado na Terra, é dada por (e.g., Kuga, 1982):

$$\vec{a}_{SSL} = G m_L \left( \frac{\vec{r}_{SL}}{r_{SL}^3} - \frac{\vec{r}_{TL}}{r_{TL}^3} \right) + G m_{SS} \left( \frac{\vec{r}_{SSS}}{r_{SSS}^3} - \frac{\vec{r}_{TSS}}{r_{TSS}^3} \right) \quad (4.5)$$

onde  $m_L$  e  $m_{SS}$  são as massas da Lua e do Sol, respectivamente,  $\vec{r}_{SL}$  é o vetor de posição da Lua em relação ao satélite,  $\vec{r}_{TL}$  é o vetor de posição da Lua em relação à Terra e, finalmente,  $\vec{r}_{TSS}$  é o vetor de posição do Sol em relação à Terra.

Finalmente, a aceleração devida ao arrasto atmosférico é fornecida através de:

$$\vec{a}_D = \frac{1}{2} \rho \frac{A}{m} C_D v_0 \vec{v}_0 \quad (4.6)$$

onde  $\rho$  é a densidade atmosférica local,  $A$  é a área de referência ou da seção transversal do satélite,  $m$  é a massa do satélite,  $C_D$  seu coeficiente de arrasto,  $\vec{v}_0$  é a velocidade do satélite relativa à atmosfera e  $v_0$  o módulo dessa velocidade.

No cálculo das parcelas componentes da aceleração  $\ddot{\vec{r}}_S$  do satélite existem muitas complicações, como, por exemplo, as determinações de  $\rho$  e  $C_D$  em (4.6). No entanto, estão desenvolvidas, dentro do INPE, rotinas bastante poderosas para a realização desses cálculos (Negreiros de Paiva, 1979 e 1980; Carrara, 1980; Medeiros e Kuga, 1980; entre outros) de modo a permitir a fácil execução da órbita simulada nas condições propostas.

- para o modelo do estimador:

$$\ddot{\vec{r}}_S^e = \vec{a}_{G,p} \quad (4.7)$$

onde  $\vec{a}_{G,p}$  representa a parte da aceleração devida ao geopotencial, levando-se em conta apenas o achatamento terrestre e o problema dos dois corpos. Desta forma, o geopotencial é dado por (e.g., Kuga, 1982):

$$\bar{U} = - \frac{\mu}{r_{SL}^e} \left[ 1 + \frac{J_2 R^2}{2 r_S^e{}^2} \left( 1 - 3 \frac{z^2}{r_S^e{}^2} \right) \right] \quad (4.8)$$

onde  $J_2$  é o coeficiente do segundo harmônico zonal e  $z$  é a terceira coordenada de  $\vec{r}_S^e = (x, y, z)$ , que representa a posição do centro de massa do satélite. As outras variáveis tem a mesma definição dada em (4.2)

A aceleração  $\ddot{r}_S^e$  é obtida a partir do geopotencial  $\bar{U}$  pela aplicação do operador gradiente, isto é:

$$\ddot{r}_S^e = - \nabla \bar{U} \quad (4.9)$$

Verifica-se, então, que o modelo matemático do estimador é significativamente mais pobre que o modelo simulado, não incluindo os efeitos de ordem superior do geopotencial, do arrasto atmosférico ou das perturbações luni-solares. Esta situação de grande diferença na modelagem torna-se ainda mais crítica quando a órbita é de baixa altitude pois os efeitos não modelados no estimador atingem valores que podem comprometer o desempenho de qualquer filtro.

A órbita simulada corresponde, então, a uma situação de baixa altitude, aproximadamente 250 km acima da superfície da Terra. Tal órbita é gerada com excentricidade praticamente nula, ou seja, a órbita é circular, com inclinação de  $42^\circ$ , partindo de um ponto com latitude  $34^\circ$  e longitude leste  $223^\circ$ . No sistema geocêntrico inercial, as condições iniciais para a geração da órbita são dadas por:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - 0.62847935 \\ - 0.59584712 \\ + 0.57437687 \\ + 0.058140365 \\ - 0.034575644 \\ + 0.027313138 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

onde as coordenadas de posição são expressas em unidades de raio terrestre e as coordenadas de velocidade em unidades de raio terrestre por minuto. Uma unidade de raio terrestre corresponde a 6378,160 Km para as devidas conversões. A data correspondente a tais efemérides leva a zero hora, zero minuto e zero segundo do dia 19 do mês de janeiro do ano de 1970, cuja data juliana é de 2440587,5. A órbita simulada é integrada a partir desses dados e armazenada para uso conjunto com o estimador de estado. As condições iniciais para o estimador são estabelecidas através de introdução de ruído nos dados iniciais correspondentes à órbita simulada, como será descrito mais adiante.

A descrição completa do modelo matemático do estimador se encontra no Apêndice A.

#### 4.3 - ESQUEMA DE OBSERVAÇÕES

De posse da órbita simulada, pode-se completar os requisitos de teste para o estimador de estado proposto montando o esquema de observações simuladas sobre o sistema. Utiliza-se neste trabalho a geração de observações através de estações fictícias de rastreamento (Negreiros de Paiva, 1980), ou seja, estações de rastreamento cujas características de estado (posição e velocidade) e observações da órbita do satélite são determinadas dentro do próprio procedimento de teste a partir da órbita simulada.

Estações fictícias são, então, criadas para fornecer condições ideais de teste, de modo que o satélite esteja sempre visível a um número fixo de estações topocêntricas colocadas simetricamente em relação ao ponto subsatélite, ponto este que indica a projeção do satélite sobre a superfície terrestre, como mostrado na Figura 4.2 (Kuga, 1982) para 3 estações de rastreamento.

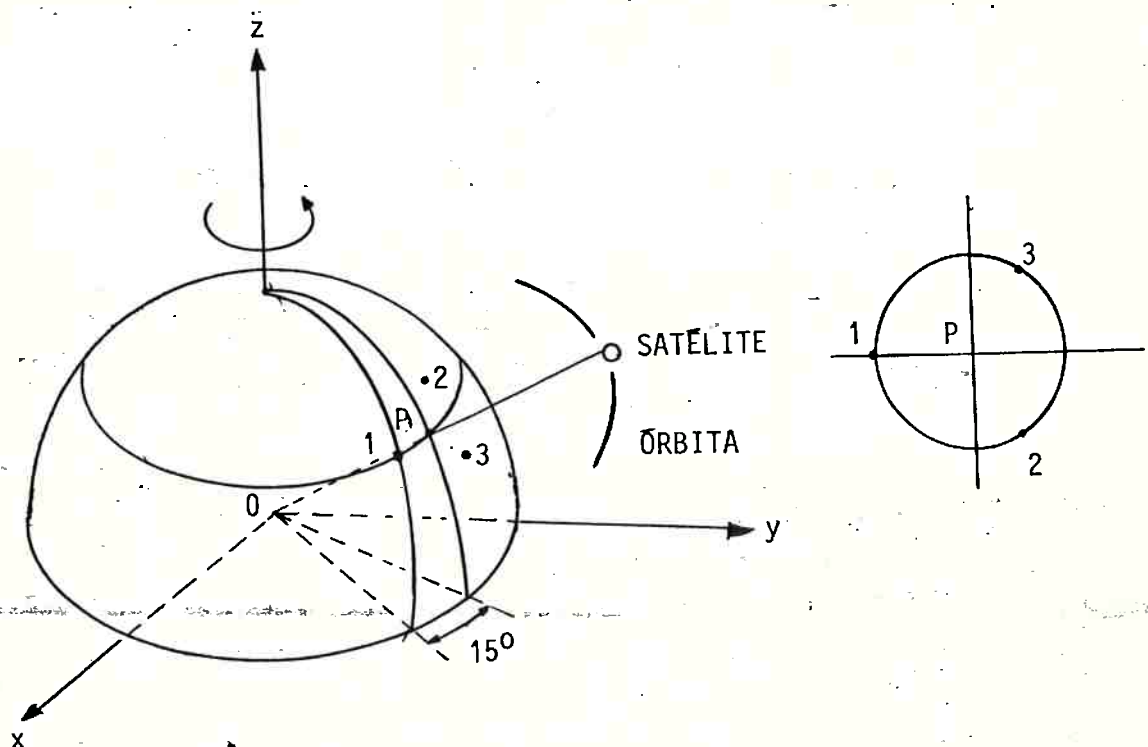


Fig. 4.2 - Estações fictícias de rastreamento



Com isso, obtêm-se uma geometria das estações em relação ao satélite favorável ao estimador proposto no sentido de garantir o seu requisito de observabilidade local.

O número fixo de estações fictícias pode ser alterado no programa de simulação para se testar o desempenho do estimador em relação ao nível de observabilidade a cada passo. Em particular, neste trabalho foram considerados os casos de 2, 3 e 4 estações rastreado o satélite, implicando, segundo essa sequência, num decréscimo no nível de dificuldade para o desempenho do estimador.

Cada estação fictícia, em qualquer dos casos considerados, realiza observações de "range", ou seja, a medida de distância do centro de massa do satélite até a antena da estação de rastreamento, e "range-rate", ou seja, a derivada em relação ao tempo da medida do "range". Em consequência, o número de observações a cada instante no esquema de observações varia entre 4 e 8. Resumindo o que foi até aqui exposto, a órbita simulada fornece dados suficientes para que, a cada passo, se localize o ponto subsatélite e se distribua o número previamente determinado de estações fictícias em torno desse ponto. Confrontando as coordenadas das estações fictícias com a posição do satélite na órbita simulada, gera-se, de forma determinística, as observações de "range", e "range-rate" para cada estação.

Deve-se, agora, proceder à contaminação de cada uma das observações com uma componente aleatória para que se tenha tais observações na forma descrita nos capítulos anteriores. Isto é feito através da adição de ruído branco gaussiano (Negreiros de Paiva, 1980), diretamente na rotina de cálculo das observações, usando os valores admitidos a priori para representar o ruído nas observações. Neste trabalho admite-se como desvios padrões dos ruídos das observações, três conjuntos de valores distintos. Assim, o desvio padrão da medida de "range",  $\sigma_p$ , pode ter os valores 3,0, 10,0 e 100,0m, enquanto, em correspondência, o desvio padrão da medida de "range-rate", é fixado em 0,01, 0,1 e 1,0 m/s, respectivamente. Com isso pretende-se testar o estimador proposto quanto às precisões fornecidas nas observações para os extremos de valores utilizados na prática (3,0m e 0,01m/s), e valores bastante grosseiros (100,0m e 1,0m/s), relativos aos erros cometidos pela instrumentação disponível.

Finalmente, dentro do esquema de observações, é necessário de finir a taxa em que cada estação realiza observações. A taxa de observações é o tempo necessário para uma estação obter um conjunto de medidas de "range" e "range-rate" consecutivamente (Kuga, 1982). Em princípio, quanto mais alta for essa taxa melhor deverá ser o desempenho do estimador pois este terá disponível um maior número de informações (Negreiros de Paiva, 1980). Admite-se aqui que cada estação é capaz de realizar uma medida de "range" e uma medida de "range-rate" a cada segundo, o que leva a uma taxa de observações igual a duas medidas por segundo por estação.

A modelagem matemática necessária para gerar as observações de "range" e "range-rate", de forma determinística, encontra-se no Apêndice B.

#### 4.4 - SUPORTE COMPUTACIONAL UTILIZADO

Neste item descreve-se de maneira breve o suporte computacional utilizado para implantação dos testes do estimador proposto em computador digital.

A filosofia adotada foi a de utilizar ao máximo os recursos computacionais já existentes no INPE como fruto de longos anos de trabalho em determinação e estimação de órbitas nos aspectos de implantação, correções e desempenho do estimador proposto.

Resumindo os comentários colocados nas seções anteriores e tendo em vista os diagramas de bloco referentes à geração da órbita simulada e implementação do estimador de estado, descritos no Apêndice C, são necessários métodos computacionais para geração da órbita simulada; para obtenção, a cada passo, da matriz de transição de estados; para determinação das observações sobre o sistema e parâmetros associados e, finalmente, para inversão de matrizes. Dentre estes, a situação mais complexa fica por conta da geração da órbita simulada, que exige métodos muito precisos de modelagem e integração para se obter bons resultados.

Na determinação da órbita simulada as três parcelas que compõem a aceleração do satélite são calculadas separadamente. A rotina para cálculo da componente devida ao geopotencial consiste numa fórmula recursiva na

qual se trunca a expressão do potencial nos termos correspondentes ao quarto harmônico esférico mas levando em conta os termos zonais até  $J_6$ . Esta rotina foi implementada por Negreiros de Paiva (1980). Quanto à aceleração devida às perturbações luni-solares, o cálculo relativo à expressão (4.5) necessita o conhecimento da posição de Sol e Lua em relação à Terra para sua realização. Utilizando a rotina de Medeiros e Kuga (1980), para o que deve-se fornecer a data de ocorrência da efeméride luni-solar, obtêm-se esses vetores e a aceleração pode ser calculada. Para a determinação da aceleração de arrasto atmosférico (equação 4.6) é necessário conhecer tanto a densidade atmosférica local como o coeficiente de arrasto  $C_D$ . A avaliação dessa densidade é feita com base no modelo atmosférico de Jacchia, (1971), através de procedimento computacional implantado por Rios Neto (1973) e Negreiros de Paiva (1979). O coeficiente de arrasto  $C_D$  é calculado através do ajuste de uma expressão polinomial obtida a partir da teoria molecular dos gases combinada com o escoamento aerodinâmico (Carrara, 1980). Esse coeficiente é obtido de maneira determinística, desde que se disponha das características básicas do satélite (Kuga, 1982). Todos estes procedimentos para determinação da órbita simulada encontram-se embutidos em um programa específico para geração de órbitas (Negreiros de Paiva, 1980) onde, fornecidas as condições iniciais da órbita e os parâmetros do satélite, a integração das equações diferenciais do movimento é feita pela subrotina ODE (Shampine e Gordon, 1975) do tipo preditor-corretor, com controle do passo e ordem variável. Trata-se de uma subrotina de grande precisão, dessa forma, garantindo resultados confiáveis para a órbita simulada.

Na geração da matriz de transição de estado, necessária para propagação da matriz de covariâncias dos erros no estado, entre outras, e do estado propagado no intervalo entre dois instantes em que se tem disponíveis as informações, utilizou-se um pacote computacional mais simples, visto que não há sentido em se usar integradores poderosos, como a ODE (Shampine e Gordon, 1975), para propagar o modelo linearizado da matriz de transição ou o modelo pobre do estado, dados no passo típico  $(t_k, t_{k+1})$  por, respectivamente:

$$\dot{\phi}(t, t_k) = F \left[ \bar{x}(t_k); t \right] \phi(t, t_k) \quad (4.11)$$

$$\phi(t_k, t_k) = I \quad (4.12)$$

$$\dot{\bar{x}}(t) = f(\bar{x}(t), t) \quad (4.13)$$

$$\bar{x}(t_k) = \bar{x}(t_k) \quad (4.14)$$

As integrações das equações diferenciais ((4.11) e (4.13)) são feitas pela subrotina INTEG (Kuga, 1982), utilizando o integrador RKF 45 (Forsythe et alii, 1977) que corresponde a um método de Runge-Kutta de quarta/quinta ordem com controle automático de passo.

Para gerar as observações através de estações fictícias, a subrotina GERFIC (Negreiros de Paiva, 1980) se utiliza do vetor de estado do satélite na órbita simulada e das coordenadas de posição e velocidade das estações. De posse dessas informações, tal subrotina fornece os valores de "range" e "range-rate" determinísticos, conforme descrito no Apêndice B. A contaminação da observação com ruído branco Gaussiano é feita automaticamente dentro do pacote. Outros parâmetros gerados dentro da subrotina servem para o cálculo da matriz de derivadas parciais das observações ( $H_{k+1}$ ) nas rotinas utilizadas a seguir dentro do programa, INERC e DEROBS (Kuga, 1982).

Finalmente, para os testes do estimador foram usados pacotes computacionais de caráter geral para tratamento de matrizes e sistemas lineares da biblioteca IMSL (1981). Em particular, foram necessários subprogramas para inversão de matrizes (LINV2F) e, quando da aplicação do critério automático, de geração da matriz G (ver seção 3.5), subprogramas de resolução de sistemas lineares (LEQTRF) no caso do número de observações ser igual ao número de variáveis de estado, ou subprogramas de mínimos quadrados determinísticos (LLBQF), no caso do número de observações a cada passo ser diferente do número de variáveis de estado do sistema em estudo.

#### 4.5 - CONDIÇÕES INICIAIS DO ESTIMADOR

O estimador foi testado, como já ressaltado, com diversas condições de precisão das observações e sob diversas condições de nível de observabilidade, esta última traduzida pelo número de estações que rastreiam o satélite. O objetivo, com essas situações criadas, foi o de verificar até que ponto as hipóteses utilizadas no desenvolvimento do estimador não causam a divergência do mesmo nas condições críticas de estimação de órbita de um

satélite a baixa altitude. É fato conhecido na literatura (Jazwinski, 1970; Kuga, 1982, entre outros) que o problema colocado diverge em poucos segundos se não houver esquemas de compensação dos erros como os aqui propostos. Para uma análise mais cuidadosa dessa afirmativa, o Apêndice D apresenta um resumo da abordagem ao problema de estimação de órbita com uso das técnicas usuais de estimação para sistemas não lineares.

Dessa maneira, as condições iniciais para o estimador, nos diversos casos de teste descritos a seguir, foram modificadas de acordo com as precisões envolvidas nas observações, independentemente do número de estações que observam o satélite. Em outras palavras, para cada conjunto de precisões nas observações de "range" e "range-rate" foi gerado um conjunto de condições iniciais para o estimador e procedeu-se a variação no número de estações observando o satélite, mantidas fixas as condições iniciais e os níveis de precisão.

Para manter coerência com essa proposta, as piores condições iniciais, isto é, maiores erros nos primeiros passos do algoritmo, correspondem ao melhor nível de precisão das observações. Nesse caso, seguindo a formulação de Kuga (1982), o estimador é inicializado com desvios de ordem de 1000 metros em posição e de 1.5m/s em velocidade, enquanto as observações tem desvios-padrões de 3 metros em "range" e 0.01m/s em "range-rate". Com os desvios  $\sigma_p = 1000\text{m}$  e  $\sigma_v = 1.5\text{m/s}$ , o estado inicial é gerado corrompendo-se o estado "real" simulado; ou seja, as condições iniciais já estabelecidas para a órbita simulada, com um ruído aleatório através de:

$$\hat{x}_{0,i} = x_{0,i} + a_r \cdot \sigma_p \quad , \quad i = 1,2,3 \quad (4.15)$$

$$\hat{x}_{0,j} = x_{0,j} + a_v \cdot \sigma_v \quad , \quad j = 4,5,6 \quad (4.16)$$

onde  $\hat{x}_{0,i}$  e  $\hat{x}_{0,j}$  correspondem às componentes iniciais de posição e velocidade, respectivamente;  $x_{0,i}$  e  $x_{0,j}$  são as componentes de posição e velocidade iniciais da órbita simulada e  $a_r$  e  $a_v$  são variáveis aleatórias de médias nulas e variâncias unitárias.

A matriz de covariâncias dos erros no estado inicial,  $P_0$ , por coerência com a estimativa do estado, é tomada diagonal com:

$$(P_0)_{ii} = \sigma_p^2 \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.17)$$

$$(P_0)_{jj} = \sigma_v^2 \quad j = 4, 5, 6 \quad (4.18)$$

Deve ser destacado que a atribuição de bons níveis de precisão nas medidas das estações leva também à situação de maior influência das não linearidades no processo de observações (Rios Neto e Negreiros de Paiva, 1983). Dessa forma, para se poder analisar separadamente o efeito de condições iniciais ruins no desempenho do estimador, os valores iniciais críticos de 1000m em posição e 1.5m/s em velocidade são também utilizados com desvios padrões de 10m nas observações de "range" e 0.1m/s nas observações de "range-rate", onde os efeitos de não linearidades nas observações devem ser menos sentidos.

Nos testes com observações de nível grosseiro de precisão, onde são utilizados desvios-padrões de 100m em "range" e 1,0m/s em "range-rate", o erro inicial em posição se encontra diminuído para 300 metros e o erro inicial em velocidade colocado em 1,5m/s. Essa situação, a par de configurar a primeira condição de teste de funcionamento para o estimador, serve para se ter uma avaliação comparativa com o caso dito normal de precisão das observações. Neste caso "normal", em relação às duas anteriores, de observações com desvios-padrões de 10 metros em "range" e 0,1m/s em "range-rate", adotou-se 80 metros para o erro inicial em posição e 0,6m/s para o erro inicial em velocidade configurando a situação obtida na prática no que diz respeito as observações e condições iniciais obtidas da determinação preliminar da órbita (Kuga, 1982). Com esses valores, em ambos os casos, o estado inicial do estimador foi gerado segundo o critério expresso pelas equações (4.15) e (4.18).

Geradas as condições iniciais, estas são mantidas para os casos em que se varia o número de estações que rastreiam o satélite. Verifica-se, assim, que os testes realizados com o estimador tem também a preocupação de detetar as possíveis deficiências deste com relação a estimativa inicial empregada.

#### 4.6 - PARÂMETROS PARA ANÁLISE DOS RESULTADOS

Para que se possa analisar o comportamento do estimador proposto nos diversos casos de teste é conveniente que sejam definidas algumas variáveis de modo a permitir uniformidade na comparação dos resultados. Essa comparação pode ser necessária entre as várias situações simuladas ou entre o estimador analisado e outros estimadores para os quais se disponha de resultados. As variáveis de análise definidas na sequência são bastante utilizadas em problemas de estimação de órbita e podem ser encontradas, por exemplo, nos trabalhos de Jazwinski (1970), Kuga (1982) ou Rios Neto e Negreiros de Paiva (1983).

Para estudo dos erros em posição são definidas duas variáveis, o erro real  $\Delta r$  e o erro estimado  $\Delta \bar{r}$ , através das relações, para o instante  $t_k$ :

$$\Delta r(k) = \left\{ \sum_{i=1}^3 \left[ x_i(k) - \bar{x}_i(k) \right]^2 \right\}^{1/2}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.19)$$

$$\Delta \bar{r}(k) = \left\{ \sum_{i=1}^3 P_{ii}(k) \right\}^{1/2}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.20)$$

Com o erro real  $\Delta r(k)$  determina-se o módulo do erro em posição cometido pelo estimador em relação à órbita simulada, "verdadeira", já que as componentes  $x_i(k)$  são geradas pelo simulador e as componentes  $\bar{x}_i(k)$  são fornecidas pelo estimador. Por outro lado, o erro estimado  $\Delta \bar{r}(k)$  indica o módulo do erro estimado em posição, obtido a partir da matriz de covariâncias dos erros no estado no instante  $t_k$ ,  $P(k|k)$ . Nesse caso, os elementos  $P_{ii}(k)$  são as componentes da diagonal da matriz de covariâncias dos erros no estado referentes à posição.

Nos testes que serão apresentados na seção seguinte, o erro real e o erro estimado em posição aparecem superpostos no mesmo gráfico sob o nome Resíduo DR na ordenada. Os valores indicados estão em unidades de metro (m). Um bom comportamento do estimador é materializado quando os erros estimado e real em posição convergem para valores próximos ao final do inter

valo de tempo utilizado para estimação, sendo que, quanto menores os valores desses erros, melhor é a estimativa em posição.

De maneira análoga, para análise dos erros em velocidade são definidos o erro real  $\Delta v$  e o erro estimado  $\Delta \hat{v}$ , dados num instante típico  $t_k$ , por:

$$\Delta v(k) = \left\{ \sum_{i=4}^6 [x_i(k) - \hat{x}_i(k)]^2 \right\}^{1/2}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.21)$$

$$\Delta \hat{v}(k) = \left\{ \sum_{i=4}^6 P_{ii}(k) \right\}^{1/2}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.22)$$

Com isso,  $\Delta v(k)$  representa o módulo do erro em velocidade cometido pelo estimador em relação ao valor real dessas velocidades, obtido pela integração da órbita simulada.  $x_i(k)$  e  $\hat{x}_i(k)$ , como no caso de posição, são componentes de velocidade fornecidas pela órbita simulada e pelo estimador, respectivamente. O módulo do erro estimado em velocidade  $\Delta \hat{v}(k)$  é gerado diretamente pelas componentes da diagonal da matriz de covariâncias dos erros no estado referentes à velocidade.

As mesmas considerações sobre o comportamento do estimador com relação às estimativas de posição podem ser estendidas para o caso de velocidades, ou seja, os erros estimado e real em velocidade devem convergir para valores próximos e quanto menor seus valores, melhor a estimativa. Nos gráficos que resumem os testes realizados, esses erros aparecem também superpostos com o nome Resíduo DV na ordenada, em unidades de metro por segundo (m/s).

Um outro parâmetro de grande interesse para análise dos resultados é o chamado resíduo normalizado das observações. Esse resíduo normalizado é a diferença entre o valor efetivamente observado, ou seja, a medida real, e o valor calculado para a mesma observação usando o estado estimado pelo filtro.

Define-se, então, o resíduo normalizado de "range" num instante  $t_k$ , pela média dos resíduos de "range" para cada estação normalizado pelo desvio-padrão associado à medida de "range", isto é:



$$r_{\rho}(k) = \left\{ \frac{1}{NEF} \sum_{i=1}^{NEF} \left[ z_{\rho}(k) - \hat{z}_{\rho}(k) \right]_i \right\} / \sigma_{\rho}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.23)$$

onde,  $z_{\rho}$  é o valor da medida de "range" fornecido pela  $i$ -ésima estação no instante  $t_k$ ,  $\hat{z}_{\rho}$  é o valor estimado da mesma medida, ou seja, o valor obtido com o estado fornecido pelo estimador substituído nas equações que determinam a observação;  $\sigma_{\rho}$  é o desvio-padrão admitido para as observações e NEF é o número de estações fictícias que rastreiam o satélite. Verifica-se, assim, que o resíduo definido por (4.23) é colocado em unidades de desvio-padrão da observação.

Na análise do desempenho do estimador, a convergência é traduzida pela manutenção do resíduo normalizado na faixa de  $\pm 3\sigma$  ao longo do intervalo de estimação, assim como pela obtenção de média nula e características de não-tendenciosidade para esse resíduo. O gráfico para este parâmetro tem o nome Resíduo R-RO na ordenada e é adimensional.

As mesmas colocações feitas para o resíduo normalizado de "range" podem ser usadas para o resíduo normalizado de "range-rate". Define-se este último por:

$$r_{\dot{\rho}} = \left\{ \frac{1}{NEF} \sum_{i=1}^{NEF} \left[ z_{\dot{\rho}}(k) - \hat{z}_{\dot{\rho}}(k) \right]_i \right\} / \sigma_{\dot{\rho}}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.24)$$

onde  $z_{\dot{\rho}}(k)$  é o valor da medida de "range-rate" fornecido pela estação  $i$  no instante  $t_k$ ,  $\hat{z}_{\dot{\rho}}(k)$  é o valor estimado para a mesma medida de "range-rate",  $\sigma_{\dot{\rho}}$  é o desvio-padrão da observação e NEF tem o mesmo significado anterior. Os gráficos para este parâmetro aparecem sob o nome Resíduo-R-RO PONTO na seção seguinte.

#### 4.7 - RESULTADOS DOS TESTES

Neste item são apresentados os resultados de diversos casos de teste simulados no computador BURROUGHS B6800 do INPE. A apresentação desses resultados é feita na forma de gráficos para os seis parâmetros de análise definidos na seção 4.5, obtidos através da subrotina GRAFI (Carrara, 1984).

Os testes realizados visam, em essência, mostrar o desempenho do estimador em relação a quatro aspectos:

- Funcionamento do estimador em uma situação favorável das precisões de observação e desfavorável das condições iniciais atribuídas (caso 1);
- Condições regulares de funcionamento do estimador de órbita quanto a precisão das observações e inicialização (caso 2);
- Sensibilidade aos erros iniciais do estado para uma condição regular de precisão das observações (caso 3);
- Sensibilidade do estimador quanto às não linearidades das observações (caso 4).

Dessa forma, a apresentação dos resultados será feita na sequência dos aspectos abordados, colocada acima, que corresponde, em linhas gerais, a um aumento consecutivo no grau de dificuldade do problema tratado.

Antes da discussão de cada caso, é importante ainda destacar que, na maioria das situações testadas, foi simulada a condição de definição da matriz G na forma padrão, utilizada nos problemas de estimação (ver item 3.5), isto é:

$$G = \begin{bmatrix} 0_3 \\ I_3 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

O comportamento obtido para o estimador nessa condição foi o de convergência em velocidade e pequena divergência em posição, fato que pode ser atribuído à falta de acoplamento entre as equações de movimento no modelo do estimador. Os critérios de geração da matriz G, discutidos no capítulo anterior, tornam-se, então, necessários para garantir a convergência do estimador em posição. Mais que isso, nos casos simulados procurou-se atender prioritariamente a convergência em posição por ser essa convergência mais problemática do que para as componentes de velocidade.

#### 4.7.1 - CASO 1: TESTES DE FUNCIONAMENTO DO ESTIMADOR

O primeiro caso de teste simulado com o estimador proposto leva em conta a necessidade de se conhecer suas características principais de implementação no que tange à definição dos vários parâmetros para utilização dos três critérios de geração da matriz  $\gamma(k+1,k)$ .

A situação escolhida corresponde, então, às condições muito boas de observabilidade com 4 estações rastreando simultaneamente o satélite. A precisão das observações foi selecionada de modo a praticamente se eliminar os problemas de não linearidades, caracterizando grandes desvios-padrões. Esses desvios foram definidos como  $\sigma_p = 100\text{m}$  para as observações de "range" e  $\sigma_{\dot{p}} = 1.0\text{m/s}$  para as observações do "range-rate", níveis, portanto, bastante altos e que mascaram os efeitos de não linearidade. As condições iniciais para o estimador, por outro lado, foram colocadas acima dos padrões usuais para que se mantivesse coerência com as outras condições. Assim, os erros iniciais em posição e velocidade foram colocados como  $\sigma_p = 300\text{m}$  e  $\sigma_v = 1.5\text{m/s}$ . Estes valores são, na realidade muito maiores que os obtidos comumente na determinação preliminar da órbita, onde a utilização dos métodos clássicos leva a precisões da ordem de  $\sigma_p = 100\text{m}$  e  $\sigma_v = 0.1\text{m/s}$  (Kuga, 1982).

Seguindo a ordem de apresentação dos critérios de geração da matriz  $\gamma(k+1,k)$ , as Figuras, 4.3 a 4.6 mostram os resultados obtidos com a utilização do Critério Direto. Os coeficientes utilizados são  $C_p = 10.0$  e  $C_v = 3.0$  (ver seção 3.5).

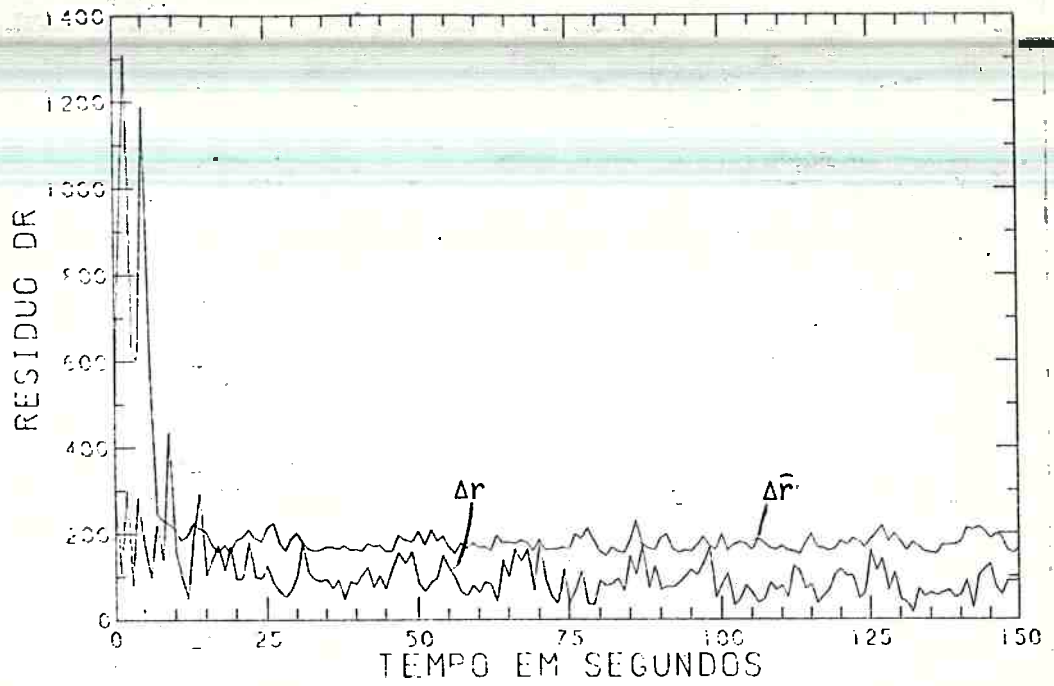


Fig. 4.3 -  $\Delta r$  e  $\Delta \bar{r}$  para o Caso 1: Critério Direto

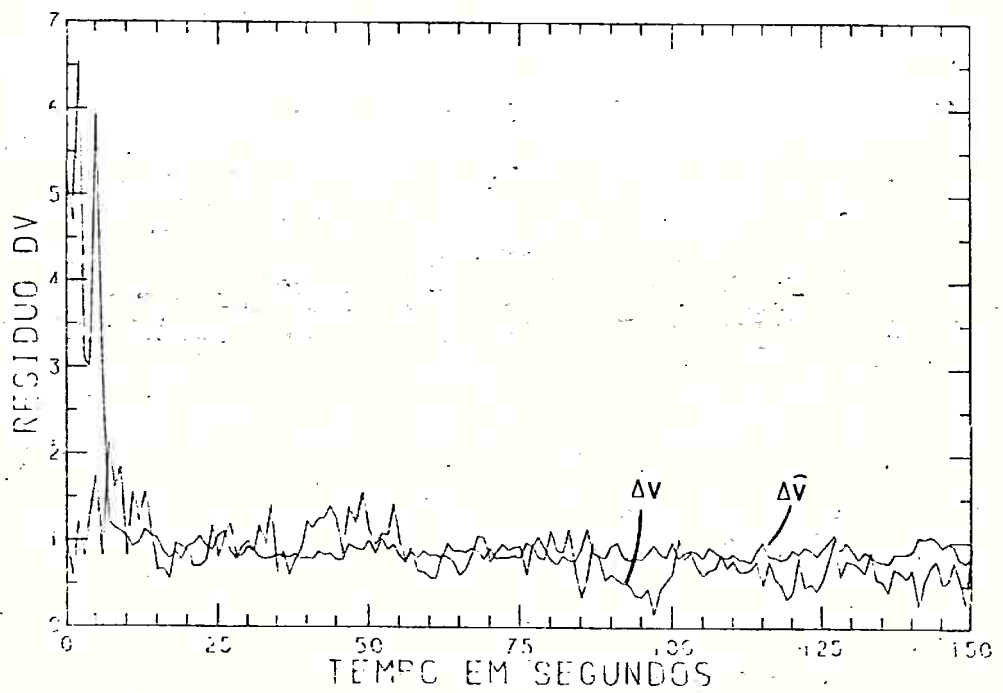


Fig. 4.4 -  $\Delta v$  e  $\Delta \bar{v}$  para o Caso 1: Critério Direto

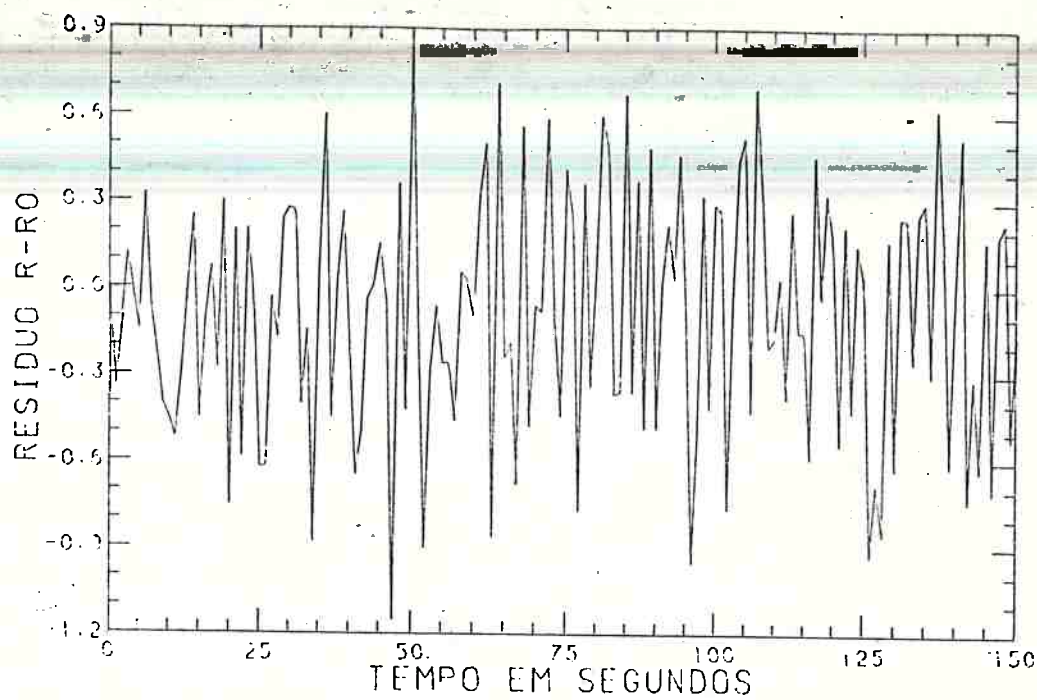


Fig. 4.5 - Resíduo normalizado de "Range" para o Caso 1: Critério Direto

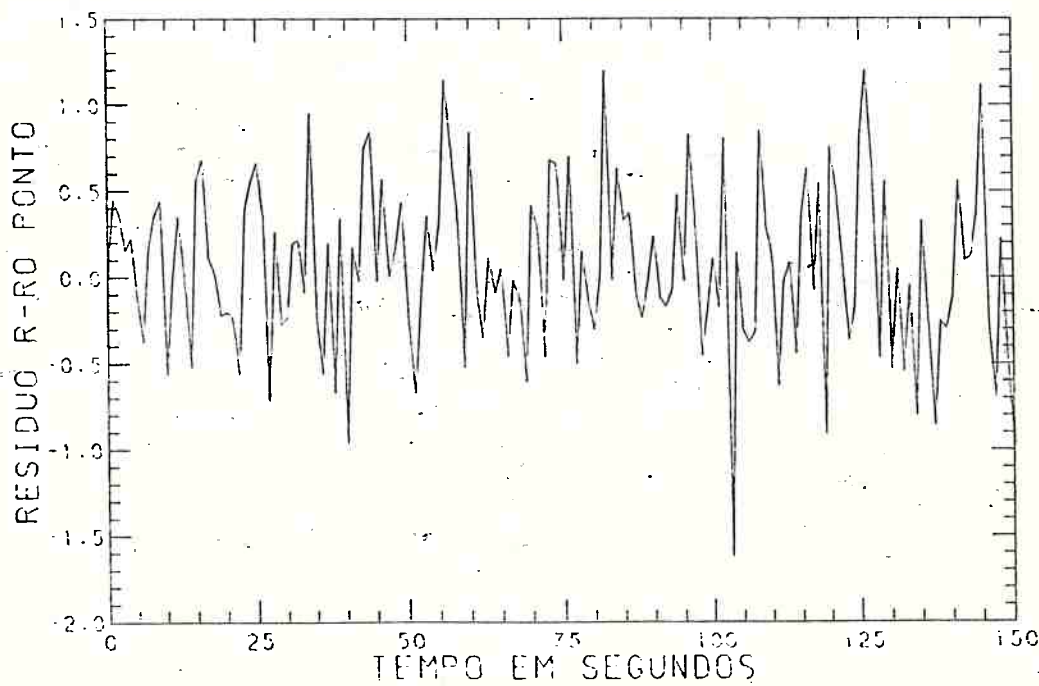


Fig. 4.6 - Resíduo normalizado de "Range-Rate" para o Caso 1: Critério Direto

Verifica-se um comportamento razoável do estimador em função das características do problema simulado. Após cerca de 20 segundos de propagação as estimativas de posição e de velocidade já estão dentro da faixa de precisão das observações e convergem para valores ainda menores durante todo o tempo restante de processamento. Para 150 segundos de utilização o erro real em posição já é da ordem de 80 m (Figura 4.3) enquanto o erro real em velocidade se encontra em torno de 0,4m/s (Figura 4.4). Com isso, verifica-se uma melhor convergência em velocidade, fato que se repete sempre quando do uso do Critério Direto. Os resíduos normalizados, tanto de "range" quanto de "range-rate" apresentam bom comportamento, situando-se sempre na faixa de -1 a +1, com poucos picos isolados que ultrapassam esses valores.

As curvas apresentadas nas Figuras 4.7 a 4.10 traduzem a aplicação do Critério de Restauração ao mesmo problema. Os coeficientes utilizados neste teste foram  $C_p^D = 120,0$ ;  $C_v^D = 1,0$ ;  $C_p^V = 0$  e  $C_v^V = 3,0$ , sendo o critério padrão (ver seção 3.5) dado por:  $C_p = 10,0$ ;  $C_v = 3,0$ . O teste para mudança de coeficientes foi realizado em 5 em 5 segundos.

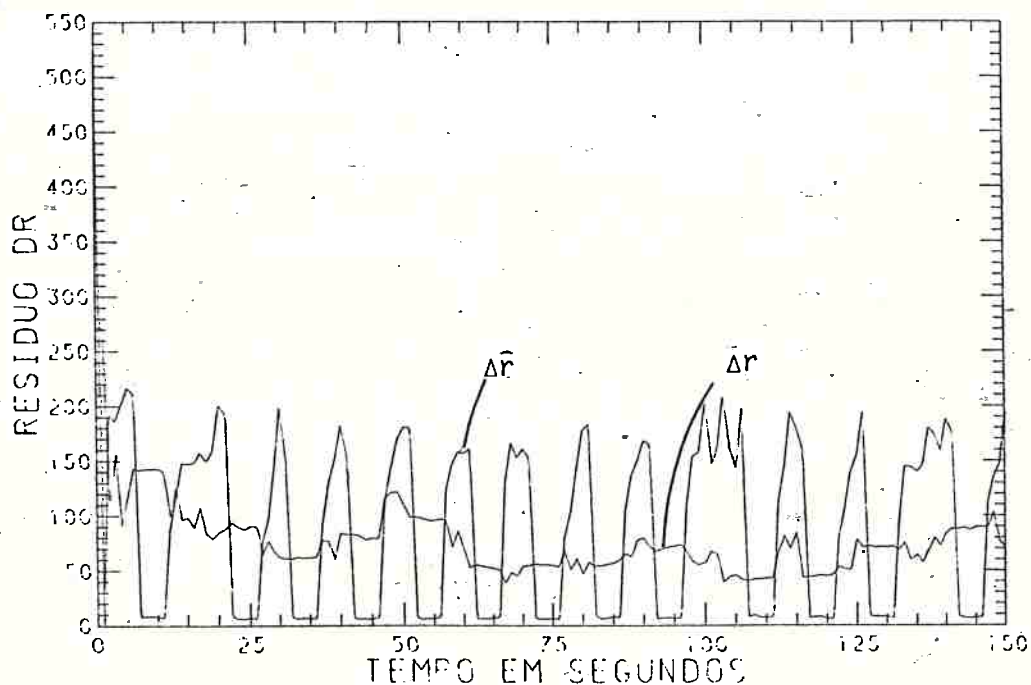


Fig. 4.7 -  $\Delta r$  e  $\Delta \bar{r}$  para o Caso 1: Critério de Restauração.

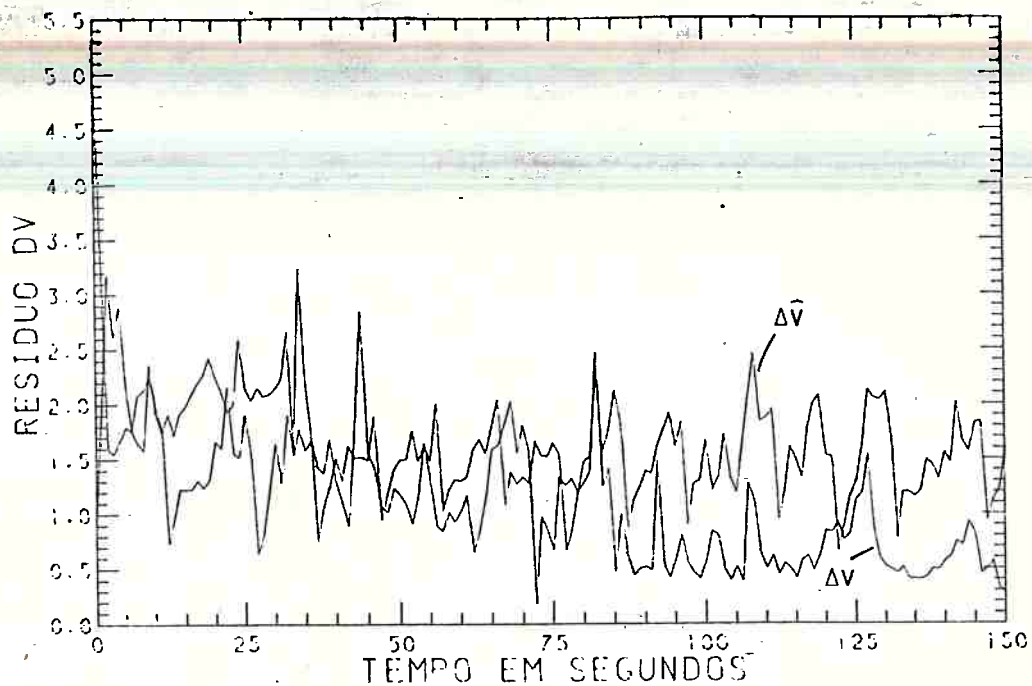


Fig. 4.8 -  $\Delta v$  e  $\Delta \bar{v}$  para o Caso 1: Critério de Restauração

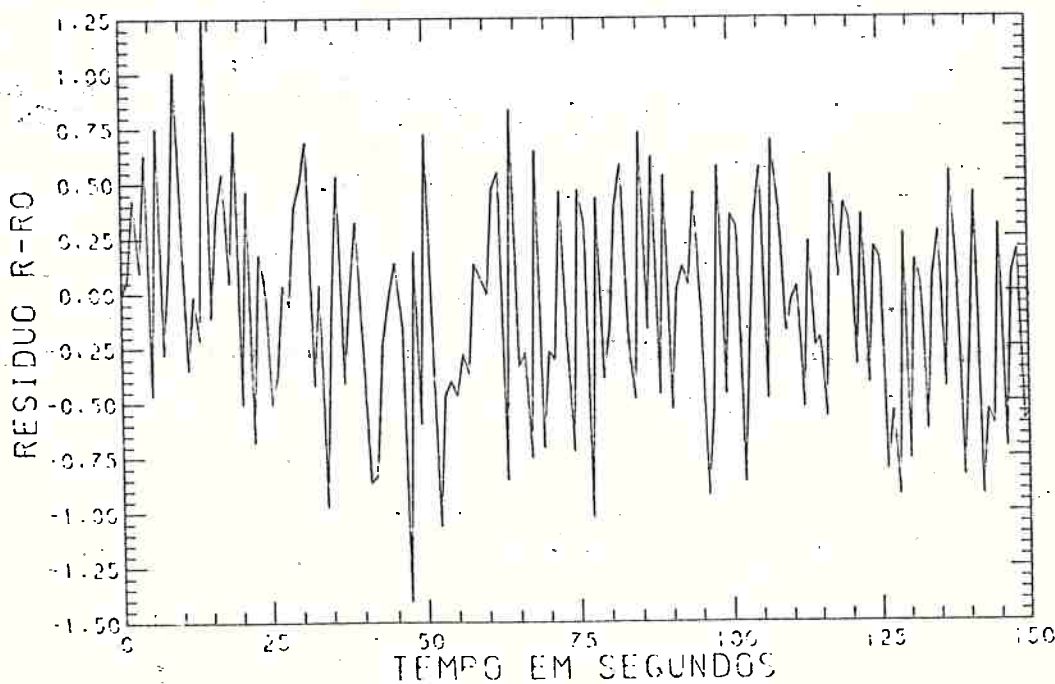


Fig. 4.9 - Resíduo normalizado de "Range" para o Caso 1: Critério de Restauração

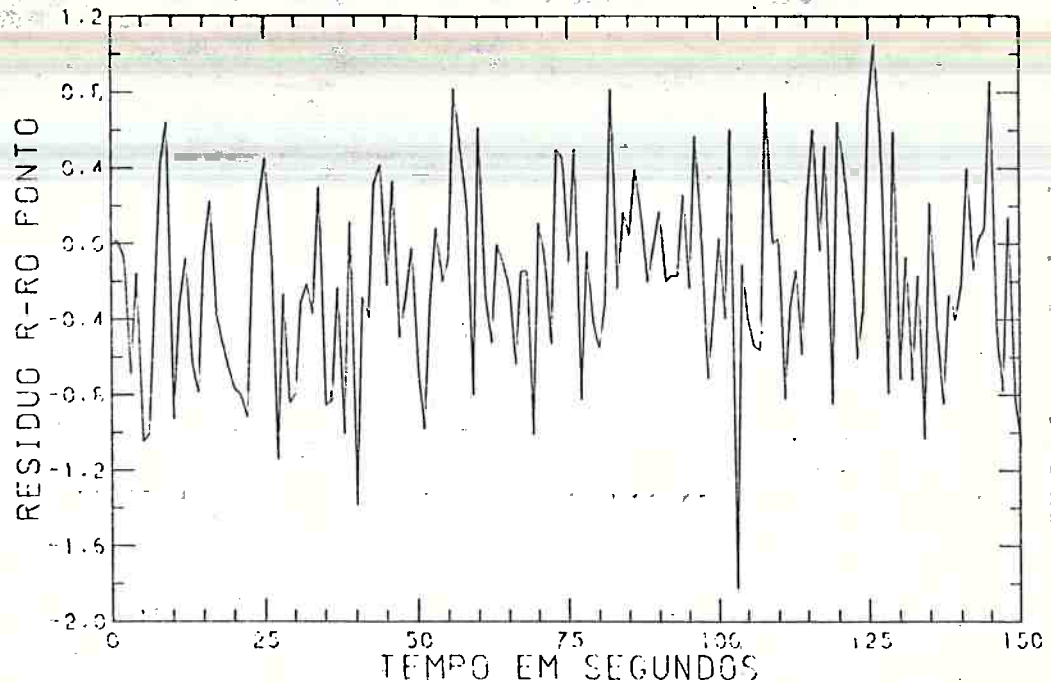


Fig. 4.10 - Resíduo normalizado de "Range-Rate" para o Caso 1: Critério de Restauração

Os gráficos das Figuras 4.7 a 4.10 demonstram que o Critério de Restauração tem praticamente as mesmas características de convergência do Critério Direto. Os resultados mostram valores melhores em velocidade, com estimativas da ordem de 0,3m/s após 150 segundos de processamento, enquanto o erro real em posição se situa em 70 metros, (Figuras 4.8 e 4.7, respectivamente). Verifica-se, também, que os resíduos normalizados de observações tem bom comportamento (Figuras 4.9 e 4.10), mantendo-se sempre na faixa desejável,  $-1$  a  $+1$ , e não apresentando nenhuma tendência a divergência.

Ainda dentro do Caso 1, a aplicação ao estimador proposto do Critério Automático para geração da matriz  $\gamma(k+1,k)$ , leva aos valores resumidos nos gráficos das Figuras 4.11 a 4.14. Para a obtenção dessas curvas, os coeficientes da matriz  $G_k$  foram calculados de forma a que os seguintes limites, superior e inferior, fossem respeitados:



$$0,05 \leq |G_{ii,k}^1| \leq 1,0 \cdot |\bar{G}_{ij,k}^1| \quad i = 1,2,3. \quad (4.25)$$

$$0,05 \leq |G_{ij,k}^2| \leq 4,0 \cdot |\bar{G}_{ij,k}^2| \quad i = 4,5,6 \quad (4.26)$$
$$j = 1,2,3$$

onde:

$$|\bar{G}_{ij,k}| = \frac{|G_{ij,k}|}{|\max G_{ij,k}|} \quad (4.27)$$

Em outras palavras, para esse critério, a matriz  $G_k$  é diagonal cujos termos tem valores máximo em módulo de 1,0 e mínimo de 0,05 para as componentes de posição e máximo de 4,0 e mínimo de 0,05 para as componentes de velocidade. Obrigatoriamente o sinal de cada termo, calculado como na seção 3.5, é mantido a cada passo.

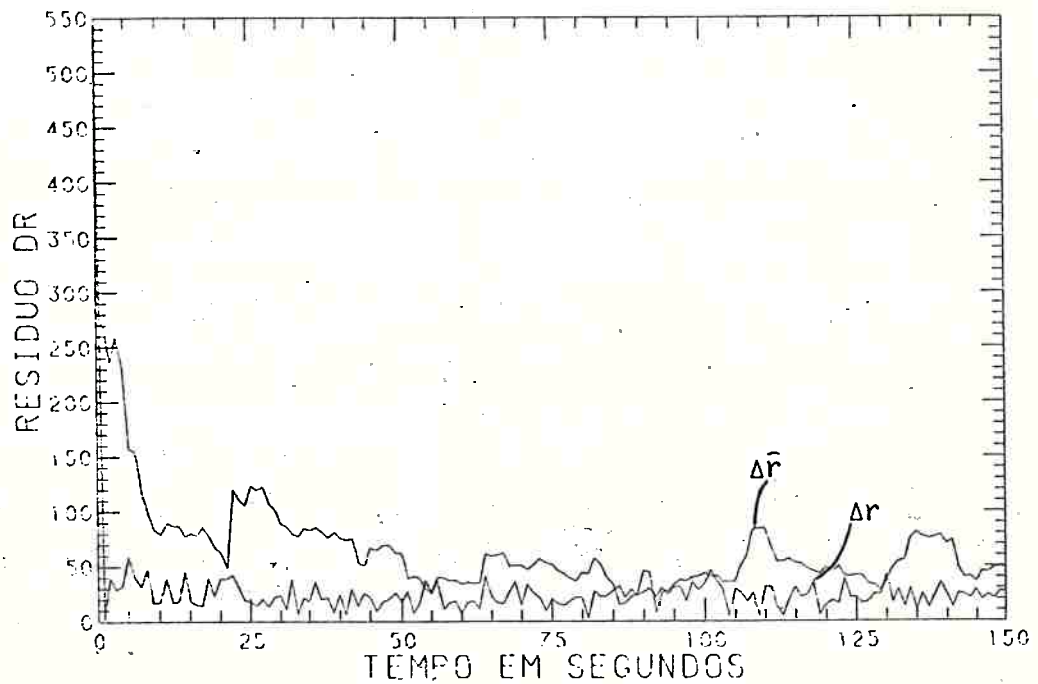


Fig. 4.11 -  $\Delta r$  e  $\Delta \bar{r}$  para o Caso 1: Critério Automático

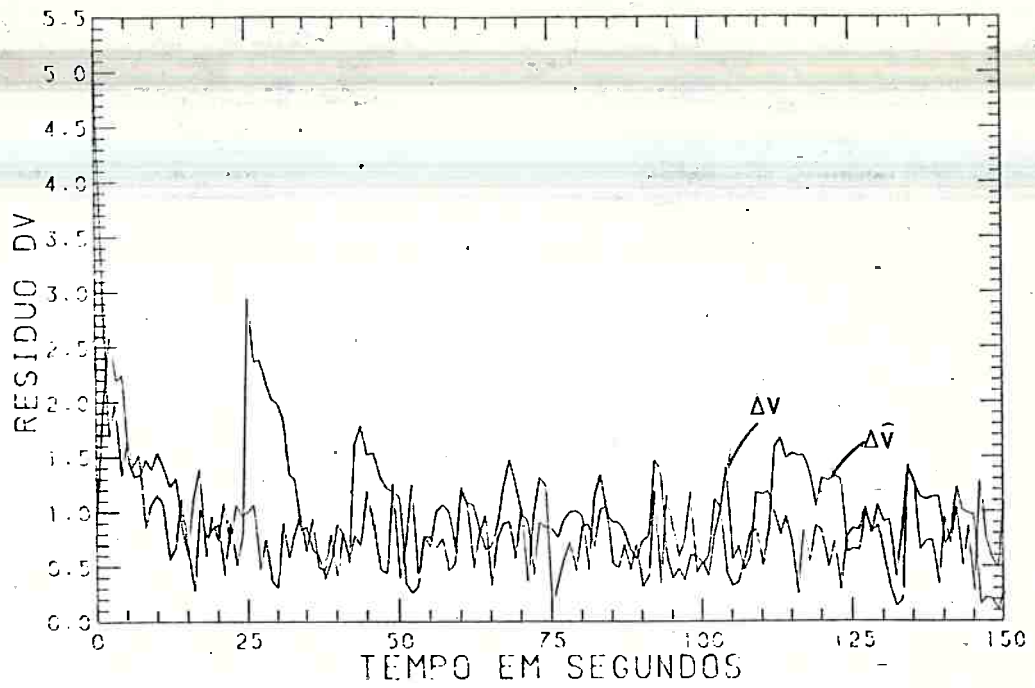


Fig. 4.12 -  $\Delta v$  e  $\Delta \hat{v}$  para o Caso 1: Critério Automático

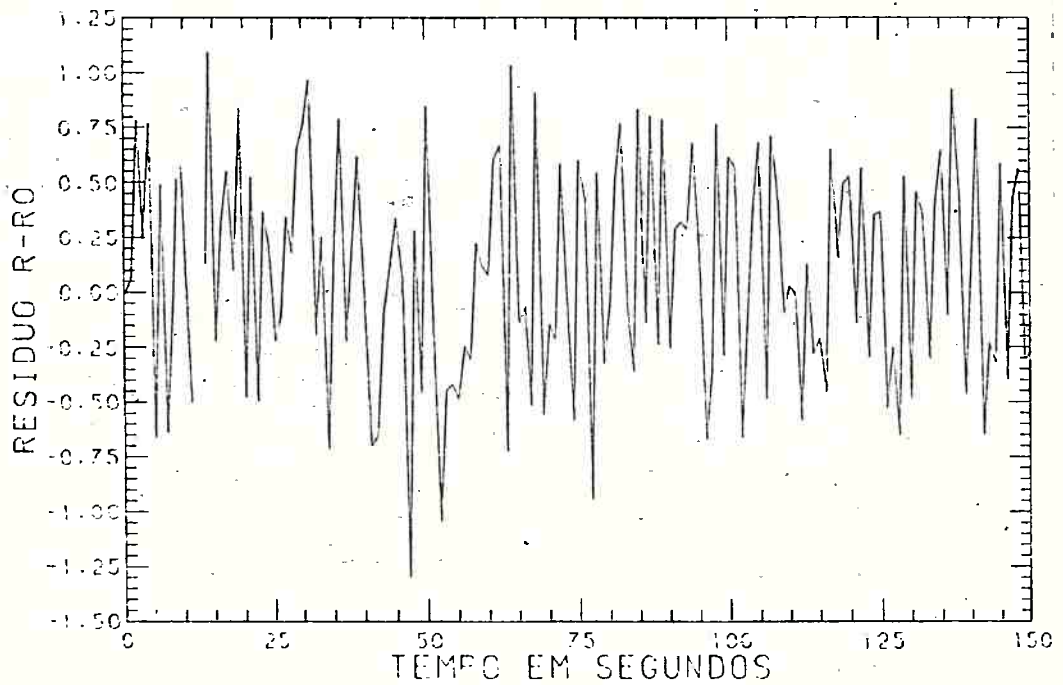


Fig. 4.13 - Resíduo normalizado de "Range" para o Caso 1: Critério Automático

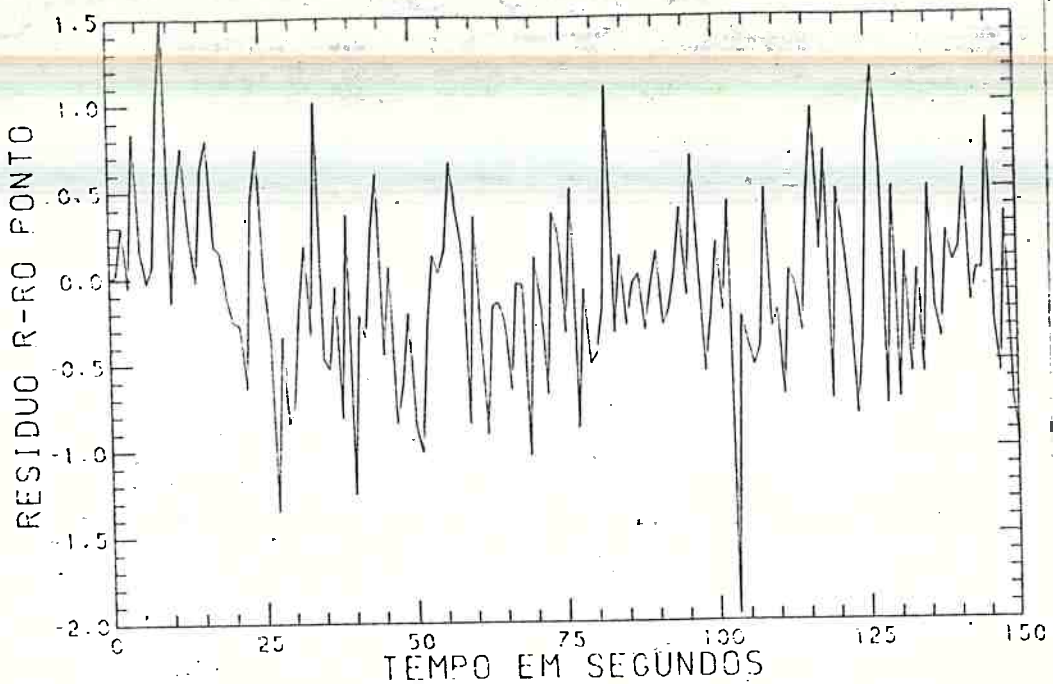


Fig. 4.14 - Resíduo normalizado de "Range-Rate" para o Caso 1: Critério Automático

Verifica-se, das Figuras 4.11 e 4.12, uma convergência muito boa tanto em posição como em velocidade, embora com uma característica um tanto oscilatória nesta última. Ainda no caso da velocidade torna-se difícil distinguir entre o erro estimado e o erro real, tal a coincidência entre os valores obtidos. As precisões conseguidas ao final de 150 segundos de processamento estão na faixa de 50m para a estimativa de posição e de 0,2m/s para a estimativa de velocidade. Da mesma forma que para os testes simulados com os critérios direto e de restauração, observa-se um comportamento consistente dos resíduos normalizados de observação, com apenas alguns picos isolados fora da faixa de  $\pm 1\sigma$ , demonstrando a convergência do estimador.

Com isso, completa-se o teste de funcionamento do estimador, demonstrando a sua convergência com qualquer dos critérios de geração da matriz  $\gamma(k+1,k)$ . O comportamento entre os erros real e estimado, tanto em posição como velocidade, é coerente em todos os testes apresentados, sendo que a melhor situação ocorre quando do uso do Critério Automático (Figuras 4.11 e 4.12). As precisões nas estimativas conseguidas situam-se dentro do que poderia ser esperado em função das características definidas para o particular

problema tratado. Em todos os testes, os valores estimados se encontram dentro da faixa de precisão das observações em poucos segundos de processamento, sendo a velocidade de convergência maior também no caso do Critério Automático, embora a diferença com relação aos outros dois critérios seja bastante pequena. As estimativas, ao final de 150 segundos de processamento, são, ainda levando em conta a qualidade ruim das observações, bastante boas. Os erros reais em posição variam, ao final desse intervalo, entre 50m, para o Critério Automático, e 80m, para o Critério Direto, enquanto os erros reais em velocidade ficam entre 0,2m/s (Critério Automático) e 0,4m/s (Critério Direto), atestando, dessa maneira, a potencialidade do método.

Satisfeitas condições mínimas de funcionamento, o estimador será agora empregado em problemas de estimação de órbita com as condições reais encontradas na prática.

#### 4.7.2 - CASO 2: USO DO ESTIMADOR COM CONDIÇÕES REAIS DE PRECISÃO DAS OBSERVAÇÕES E INICIALIZAÇÃO

Determinadas, após os testes iniciais, as principais características de convergência do estimador de estado proposto e de seus critérios associados, pode-se proceder a análise do comportamento dos mesmos sob condições reais de precisão das observações, fornecidas pelas estações de rastreamento, e de precisão na definição das condições iniciais.

Com relação às condições iniciais que devem ser atribuídas ao estimador, os métodos ditos clássicos utilizados para determinação preliminar da órbita levam a precisões da ordem de 100m em posição e 0,1m/s em velocidade. Optou-se, para este novo caso, por valores da mesma ordem de grandeza em posição, porém com erros maiores em velocidade, de modo a dificultar ainda mais um pouco o trabalho do estimador. O erro inicial em posição foi estabelecido, então, como sendo 80m e o erro inicial em velocidade 0,6m/s. Dado estes valores, as condições iniciais do estimador são geradas através das relações (4.15) e (4.18).

Quanto à precisão das observações, foram escolhidos os valores de 10m para o desvio-padrão das observações de "range" e de 0,1m/s para o desvio-padrão das observações de "range-rate". Estes valores podem ser encon

trados usualmente na prática, embora medidas ainda mais precisas possam ser obtidas. Jazwinski (1974) utiliza observações de "range-rate" com precisão de  $10^{-3}$  m/s e, eventualmente,  $10^{-4}$  m/s. No entanto, para os propósitos deste teste, os níveis de precisão arbitrados estão razoáveis, pois os efeitos de não linearidade nas observações não serão totalmente encobertos. Mais adiante, para outro caso testado, a precisão das observações será ainda mais refinada.

Utilizando, então, condições regulares quanto a condições iniciais e precisão das observações, o número de estações que rastreiam o satélite foi variado entre 2 e 4, para se verificar qual o nível de redundância nas observações necessário para um bom desempenho do estimador. Os resultados se mostraram muito bons com 3 e 4 estações, ou seja, 6 ou 8 observações a cada passo. Com apenas 2 estações de rastreamento o estimador não apresenta bom desempenho. Após uma rápida convergência das estimativas para valores das faixas de precisão atribuídas para as observações, ocorre divergência das mesmas estimativas após decorrido um período de tempo da ordem de 50 a 100 segundos de propagação, dependendo do critério adotado para geração da matriz  $\gamma(k+1,k)$ . Este fato confirma a necessidade de redundância local de observações para garantir um desempenho satisfatório do filtro.

Por outro lado, quando existe tal redundância, o comportamento do estimador é, via de regra, muito bom. Tomando primeiramente a situação em que 4 estações fictícias rastreiam simultaneamente o satélite, as Figuras 4.15 a 4.18 mostram os gráficos obtidos quando da utilização do estimador com o Critério Direto de geração de  $\gamma(k+1,k)$ . Os coeficientes arbitrados foram, para esse caso,  $C_p = 10,0$  e  $C_v = 2,0$ .

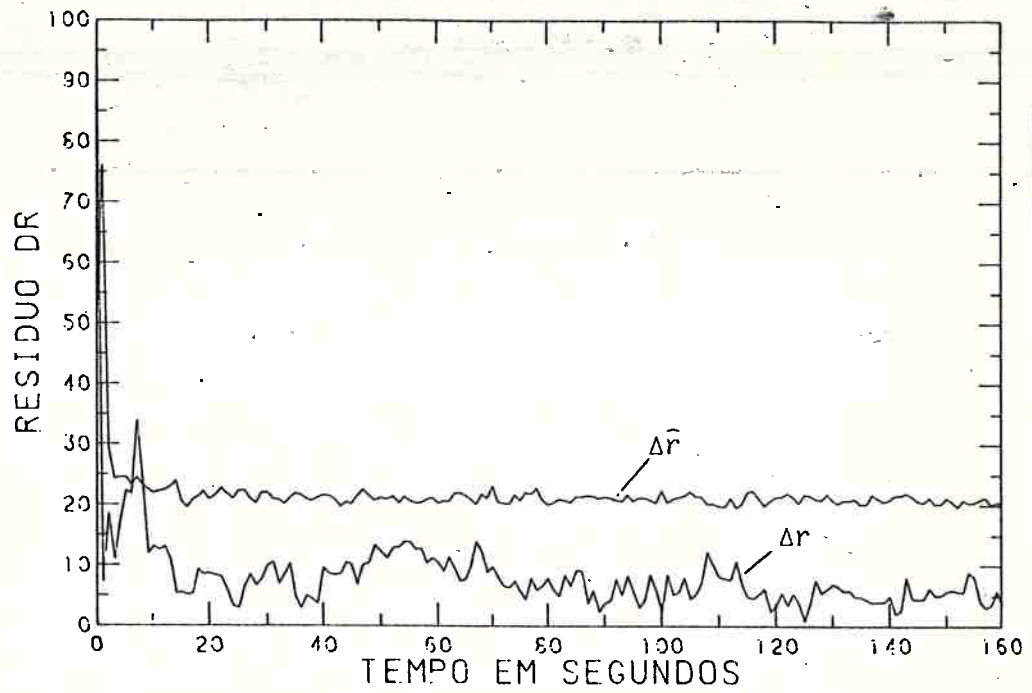


Fig. 4.15 -  $\Delta r$  e  $\Delta \bar{r}$  para o Caso 2: Critério Direto, 4 estações

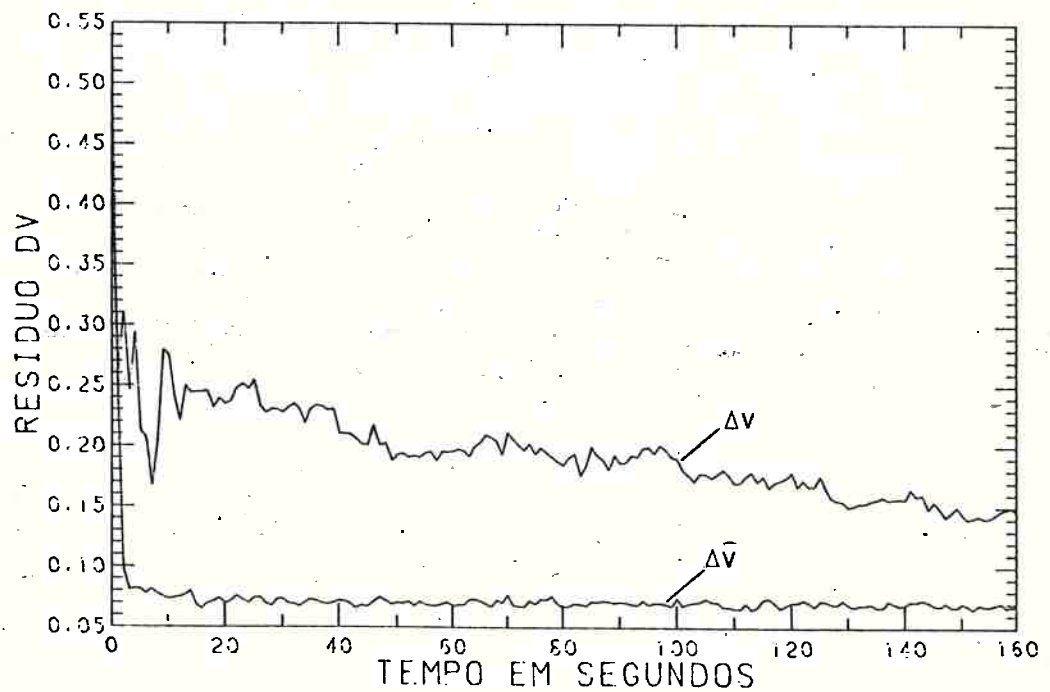


Fig. 4.16 -  $\Delta V$  e  $\Delta \bar{V}$  para o Caso 2: Critério Direto, 4 estações

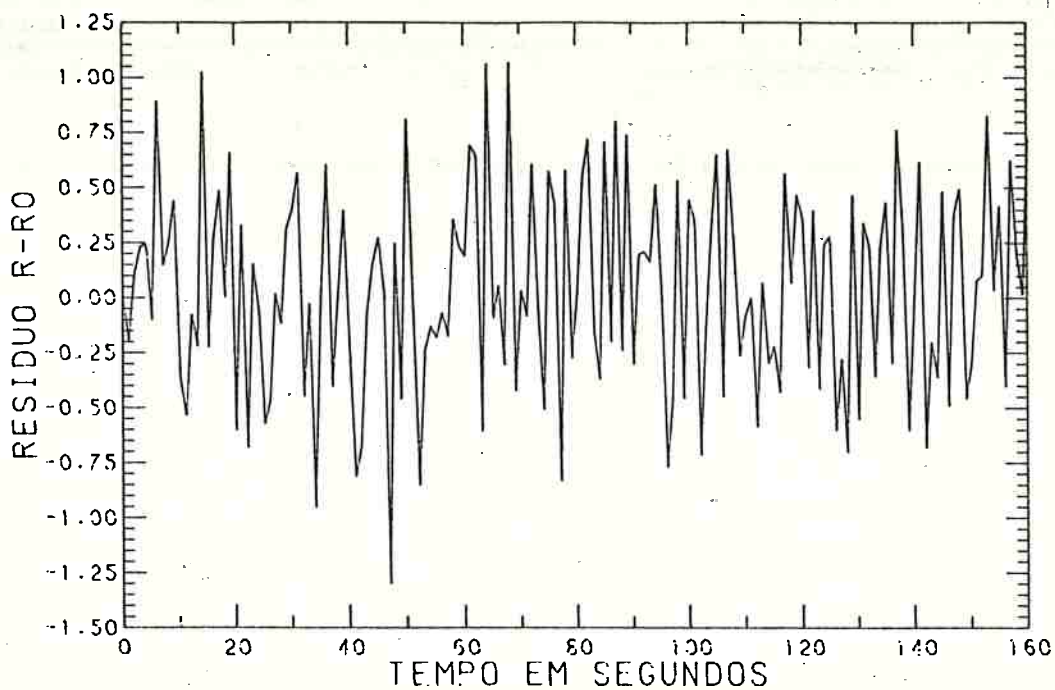


Fig. 4.17 - Resíduo normalizado de "Range" para o Caso 2: Critério Direto, 4 estações

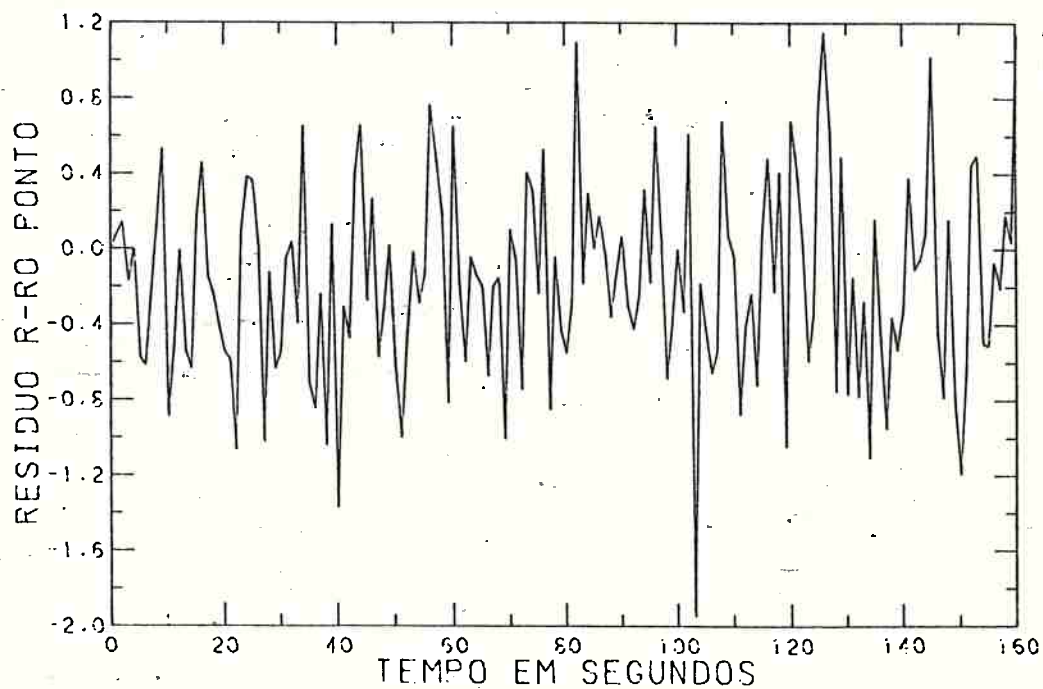


Fig. 4.18 - Resíduo normalizado de "Range-Rate" para o Caso 2: Critério Direto, 4 estações

Constata-se, assim, após 180 segundos de propagação do estimador, que o erro real em posição já está reduzido a aproximadamente 5m, enquanto o erro real em velocidade está da ordem de 0.12m/s. Os resíduos de observação, por sua vez, permanecem na faixa de  $\pm 1\sigma$ , sem nenhuma demonstração de divergência. Quanto aos erros estimados, verifica-se que permanecem um pouco acima dos reais para posição, enquanto, para velocidade, existe convergência para valores próximos, embora tal convergência exija maior tempo de processamento.

A concordância entre os valores dos erros estimados e reais torna-se bastante boa quando da utilização do Critério de Restauração no mesmo problema de 4 estações de rastreamento. Os coeficientes arbitrados para esse caso são:  $C_p^P = 120,0$ ,  $C_v^P = 1,0$ ;  $C_p^V = 20,0$ ,  $C_v^V = 2,0$  e  $C_p^V = 10,0$ ,  $C_v^V = 8,0$ , sendo o intervalo de tempo para teste de tais coeficientes mantido em 3 segundos.

Como se vê, das Figuras 4.19 a 4.22, o Critério de Restauração leva a valores bastante coerentes para os erros reais e estimados, tanto em posição como em velocidade, embora a convergência se torne um pouco mais lenta. Os erros reais em posição após 160 segundos de propagação são da ordem de 7m e os erros reais em velocidade da ordem de 0,1m/s. Novamente, para os resíduos normalizados de "range" e "range-rate", as características obtidas indicam convergência do método. Como esse fato se repete em praticamente todos os testes realizados, os gráficos referentes aos resíduos de observação não serão apresentados aqui por diante, exceto quando necessário para explicação de alguma particularidade do caso em questão.



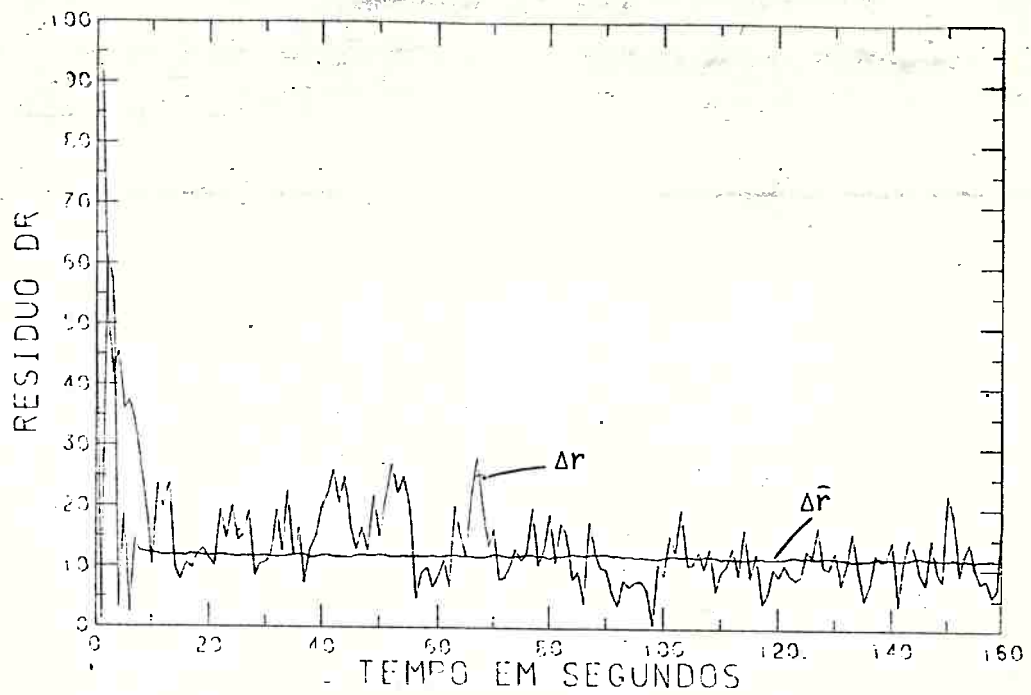


Fig. 4.19 -  $\Delta r$  e  $\Delta \bar{r}$  para o Caso 2: Critério de Restauração, 4 estações

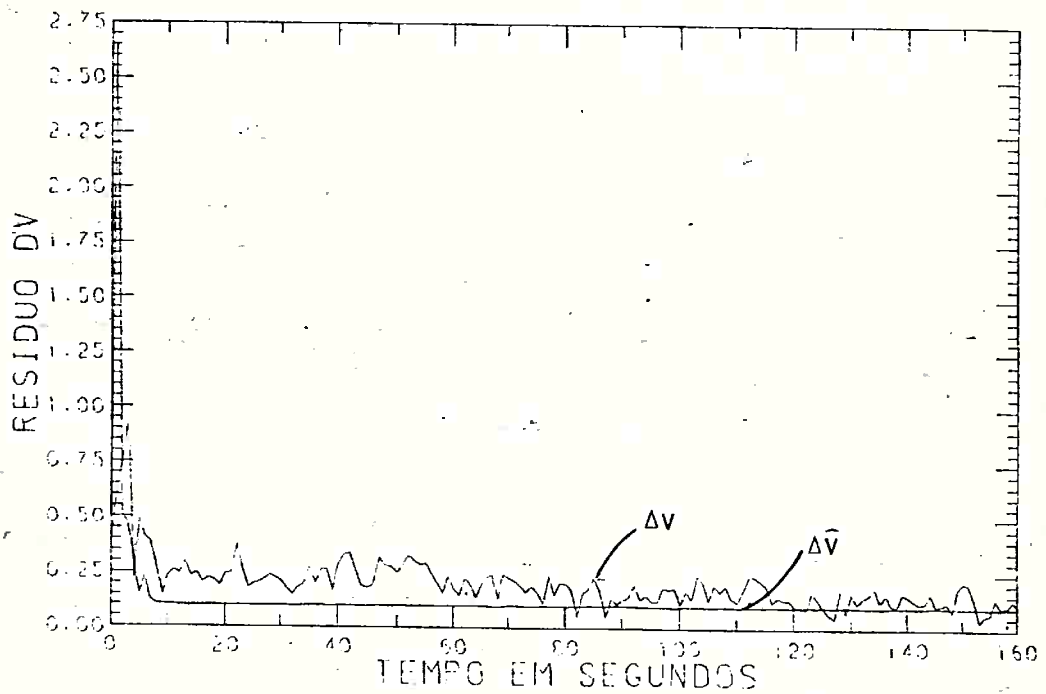


Fig. 4.20 -  $\Delta v$  e  $\Delta \bar{v}$  para o Caso 2: Critério de Restauração, 4 estações

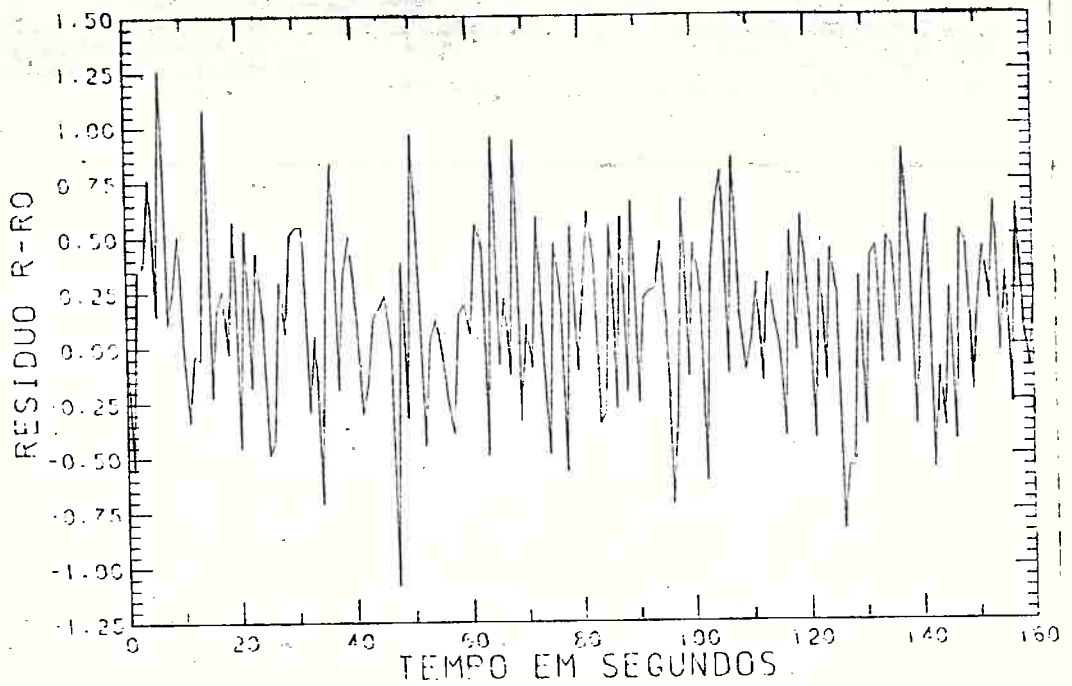


Fig. 4.21 - Resíduo normalizado de "Range" para o Caso 2:  
Critério de Restauração, 4 estações

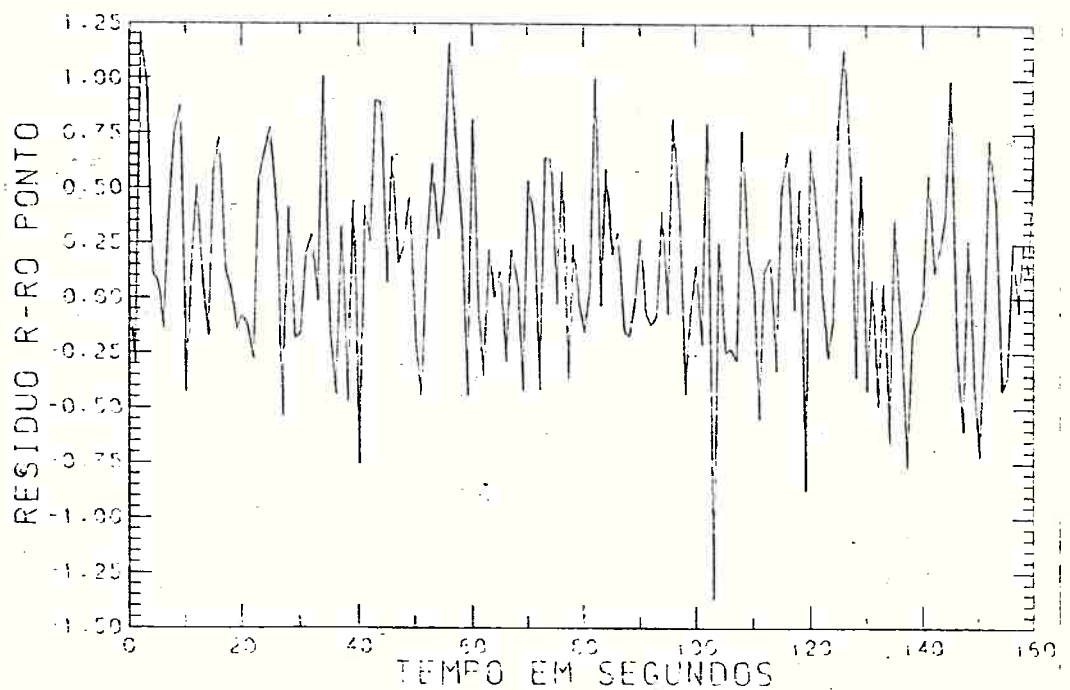


Fig. 4.22 - Resíduo normalizado de "Range-Rate" para o Caso 2:  
Critério de Restauração, 4 estações

As Figuras 4.23 e 4.24 resumem a aplicação do Critério Automático de geração da matriz  $\tilde{\gamma}(k+1,k)$  para o caso de 4 estações de rastreamento. A faixa de variação possível foi definida de modo que:

$$0,1 \leq |G_{ii,k}^1| \leq 2,0 \cdot |\tilde{G}_{ii,k}^1| \quad i = 1,2,3 \quad (4.28)$$

$$0,1 \leq |G_{ij,k}^2| \leq 8,0 \cdot |\tilde{G}_{ij,k}^2| \quad \begin{matrix} i = 1,2,3 \\ j = 4,5,6 \end{matrix} \quad (4.29)$$

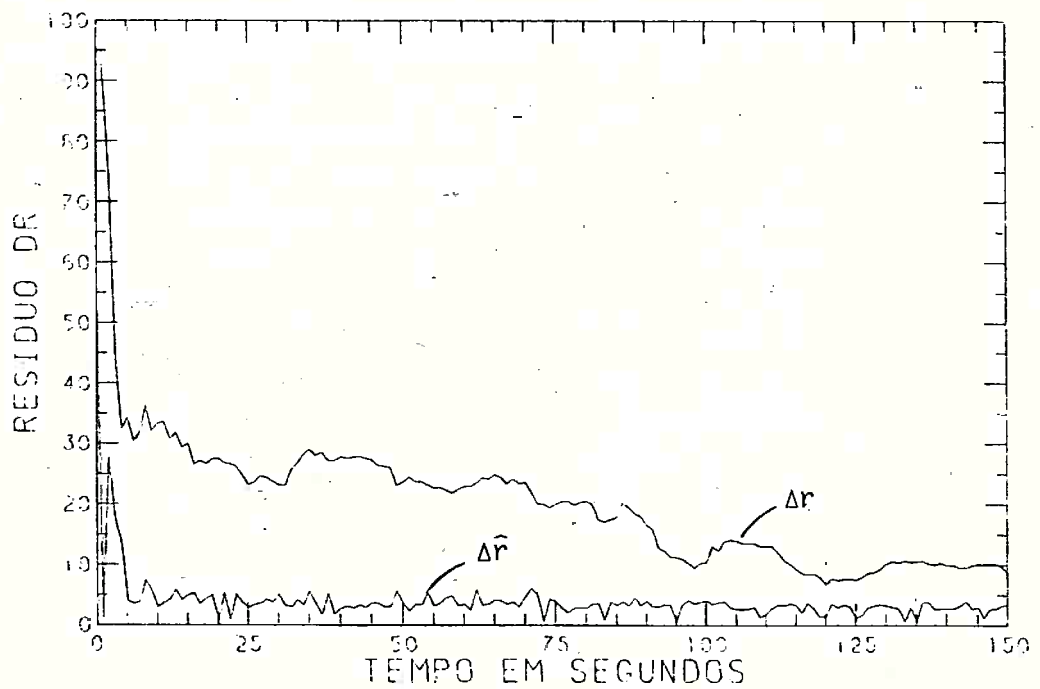


Fig. 4.23 -  $\Delta r$  e  $\Delta \tilde{r}$  para o Caso 2: Critério Automático, 4 estações

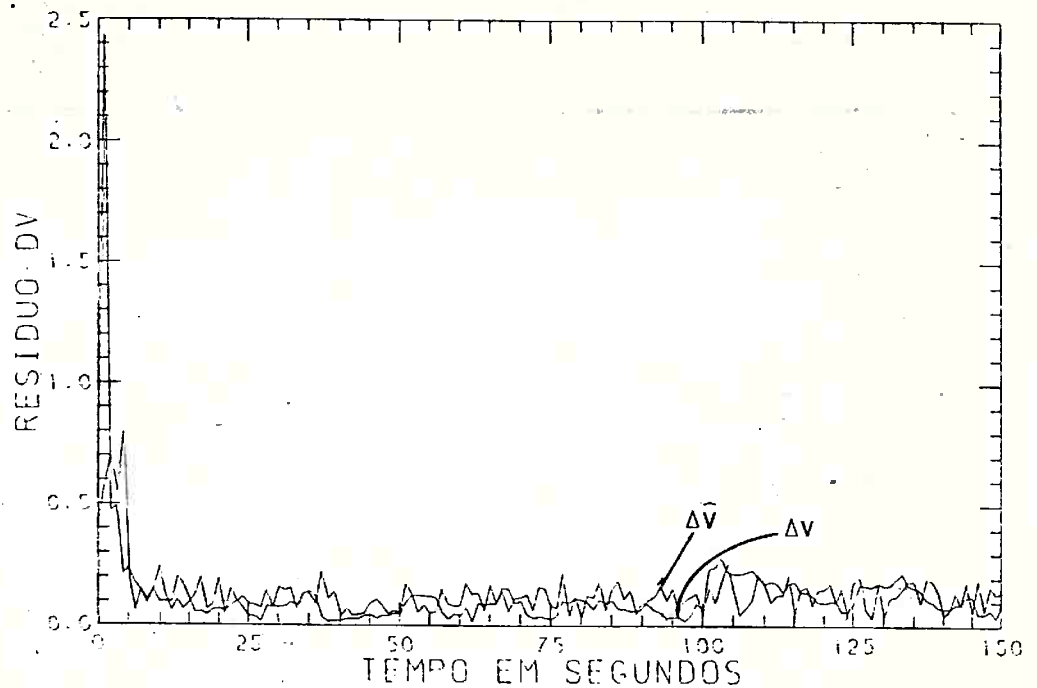


Fig. 4.24 -  $\Delta v$  e  $\Delta \hat{v}$  para o Caso 2: Critério Automático, 4 estações

Para o Critério Automático, no caso de 4 estações, destaca-se novamente, a rapidez na convergência em velocidade e a coerência entre os erros real e estimado também em velocidade (Figura 4.24). Nesse caso, a convergência em posição é um pouco mais lenta, mas, com 150 segundos de propagação, a estimativa em posição já atingiu a faixa de precisão da observação (10m) e demonstra condições de prosseguir na direção de melhores estimativas. A convergência em velocidade é extremamente rápida, atingindo valores da ordem de 0.06m/s ao final do intervalo de propagação.

Analisados, para o caso de condições reais de precisão das informações e de inicialização do estimador, os testes com o uso de 4 estações, constata-se uma situação bastante semelhante ao Caso 1. Assim, todos os critérios utilizados em conjunto com o estimador de estado fornecem boas características de convergência, colocando os erros reais, tanto de posição como de velocidade, rapidamente dentro da faixa de precisão das observações. Em nenhum caso o erro real em posição supera a precisão da observação em "range", colocada como 10m, situando-se entre este valor e o valor mínimo de 5m obti

dos com o Critério Direto. O mesmo fato ocorre com as componentes de velocidade com as estimativas, ao final do intervalo de integração, entre 0.06 m/s (Critério Automático) e 0,1m/s. Desta forma, o desempenho do estimador corresponde plenamente à expectativa quando utilizado num caso realista em que existe redundância de informações. Este fato é confirmado ainda quando o número de estações que rastreiam o satélite é reduzido a três. Os gráficos das Figuras 4.25 e 4.26, ilustram a solução do caso 2, mantidas as mesmas condições de precisão das observações ( $\sigma_p = 10m$ ;  $\sigma_\delta = 0.1m/s$ ) e as mesmas condições iniciais para o estimador (80m de erro em posição e 0.6m/s em velocidade), obtidas através do Critério Direto, com coeficiente  $C_p = 4,0$ ,  $C_v = 10,0$

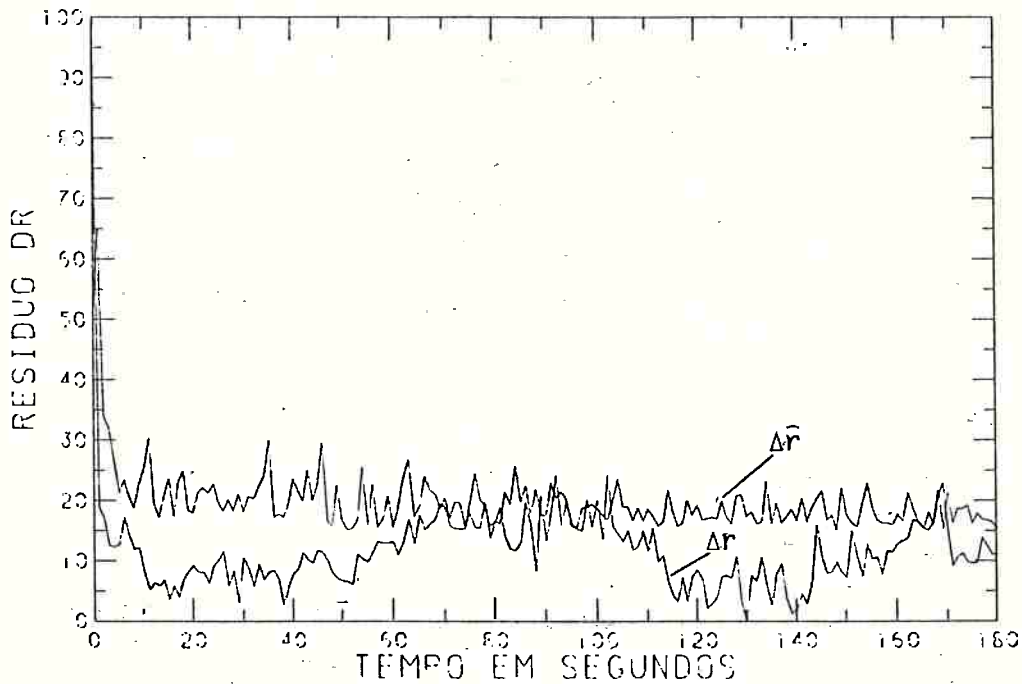


Fig. 4.25 -  $\Delta r$  e  $\Delta \dot{r}$  para o Caso 2: Critério Direto, 3 estações

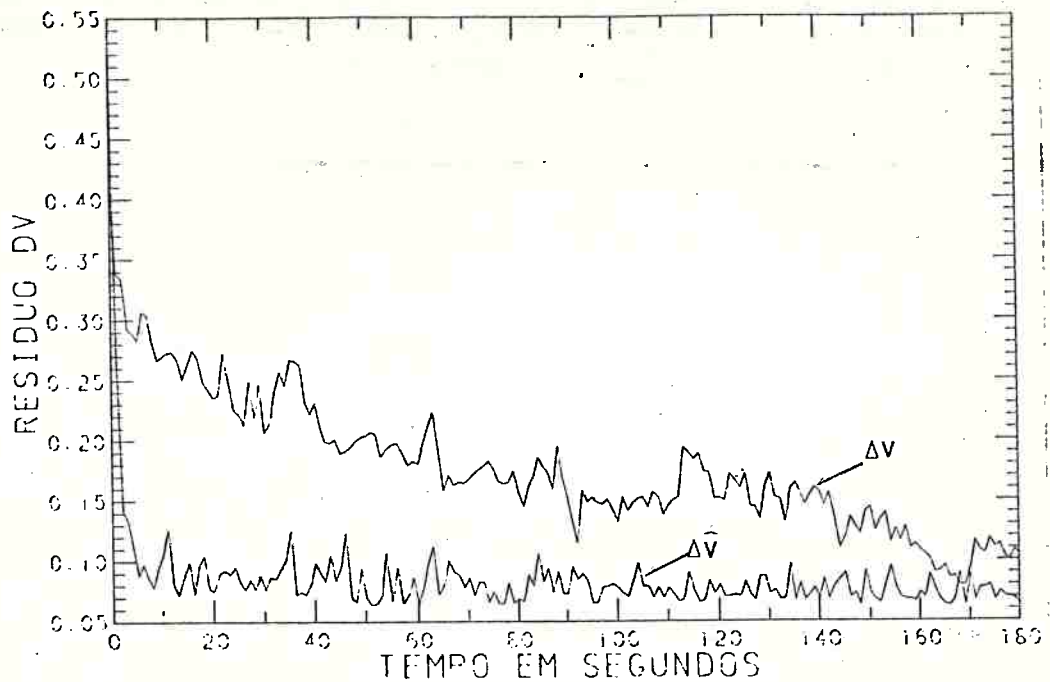


Fig. 4.26 -  $\Delta v$  e  $\Delta \bar{v}$  para o Caso 2: Critério Direto, 3 estações

Nota-se, em relação ao mesmo caso simulado com 4 estações (Figuras, 4.15 e 4.16), um comportamento um pouco menos estável do estimador, mas, ainda assim, dentro das precisões estabelecidas para a problema. Deve ser lembrado que, em nenhum dos testes realizados, foi feita uma investigação minuciosa sobre os coeficientes utilizados e sim procedeu-se a uma busca num universo bastante restrito apenas com o propósito de se demonstrar a convergência e as potencialidades do método. Mesmo com essa restrição, fica clara a convergência do estimador para o teste em questão, com a estimativa de posição tendo erro real da ordem de 10m e a estimativa em velocidade com erro real da ordem de 0.1m/s ao final do intervalo de propagação. Da mesma forma, encerrada a propagação, os erros reais e estimados guardam boa semelhança, garantindo as estimativas realizadas.

A utilização do Critério de Restauração para tratamento do Caso 2 com 3 estações de rastreamento se encontra resumido nas Figuras 4.27 e 4.28. Como na situação de uso do Critério Direto, o comportamento dos resíduos normalizados de observação não traz modificações em relação a todos os

testes já discutidos, razão pela qual seus gráficos não são diretamente expostos. Os coeficientes utilizados na simulação do Critério de Restauração foram:  $C_p^P = 30,0$ ;  $C_v^P = 1,0$ ;  $C_p^V = 0$ ;  $C_v^V = 3,0$ ;  $C_p = 4,0$ ;  $C_v = 1,0$ , e o intervalo entre testes foi arbitrado em 5 segundos.

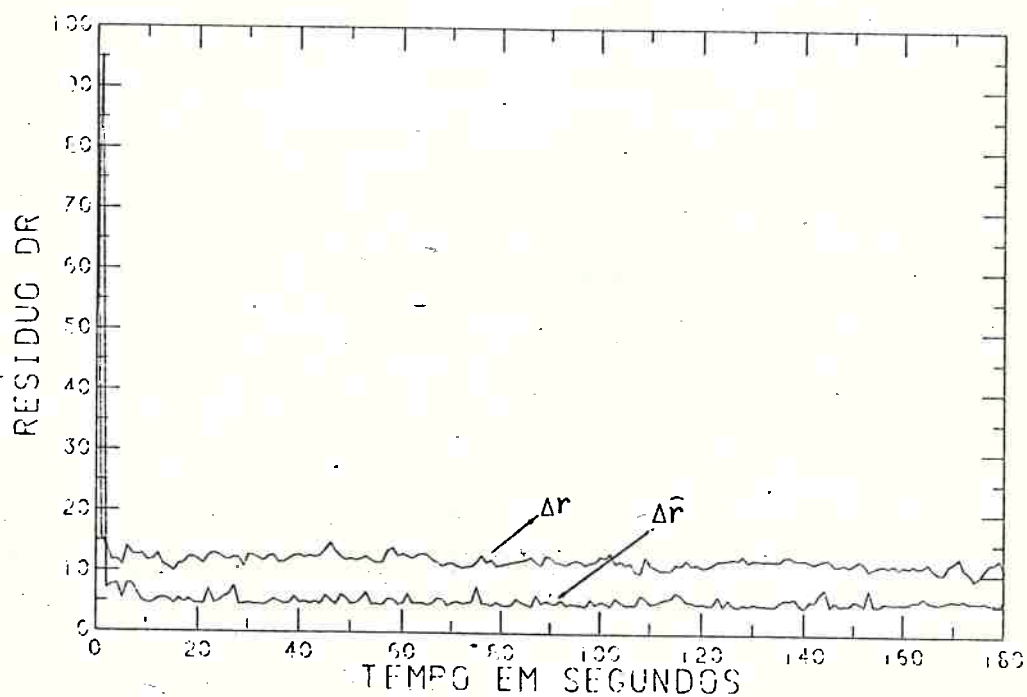


Fig. 4.27 -  $\Delta r$  e  $\Delta \bar{r}$  para o Caso 2: Critério de Restauração, 3 estações

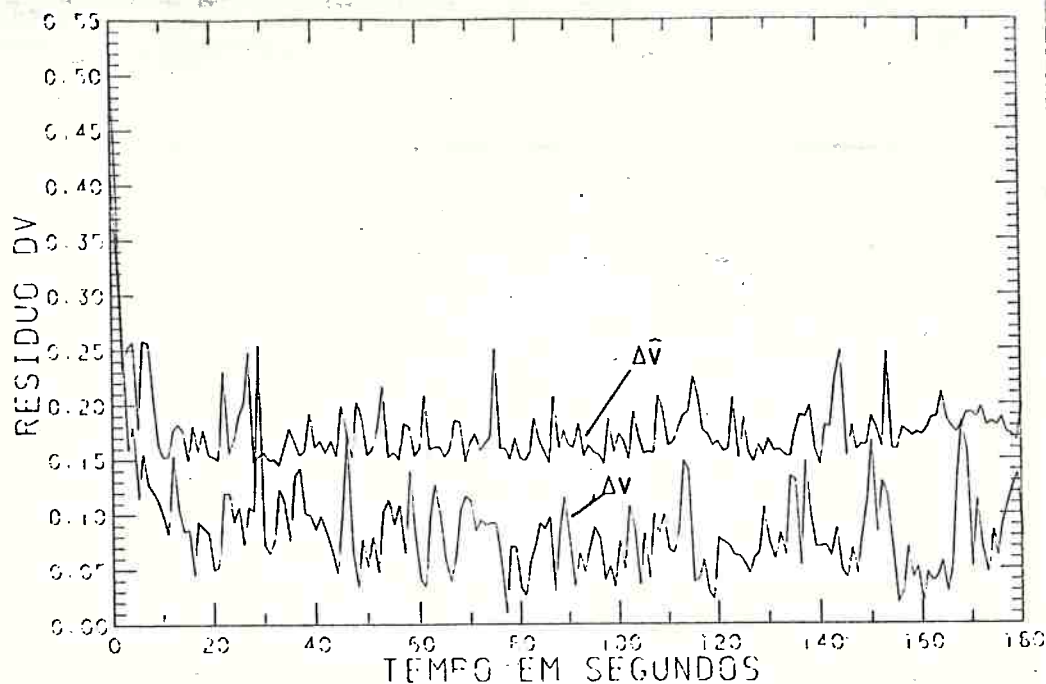


Fig. 4.28 -  $\Delta v$  e  $\Delta \bar{v}$  para o Caso 2: Critério de Restauração, 3 estações

Verifica-se, em relação a este teste com 3 estações, as mesmas características de convergência para posição obtidas com 4 estações: a convergência é extremamente rápida e a estimativa mantém dentro da faixa de precisão das observações pelo restante do intervalo de propagação da órbita. A estimativa para a velocidade é um pouco menos estável que a obtida com 3 estações, mas se mantém dentro da faixa de precisão das observações, para onde converge rapidamente. Das Figuras 4.27 e 4.28 se nota, também, que os erros estimados, tanto em posição como velocidade, estão razoavelmente próximos dos erros reais, característica desejável na propagação do estimador.

Para o Critério Automático os resultados obtidos se encontram resumidos nas Figuras 4.29 e 4.30. As faixas de variação dos coeficientes desse critério são as mesmas definidas em (4.28) e (4.29).



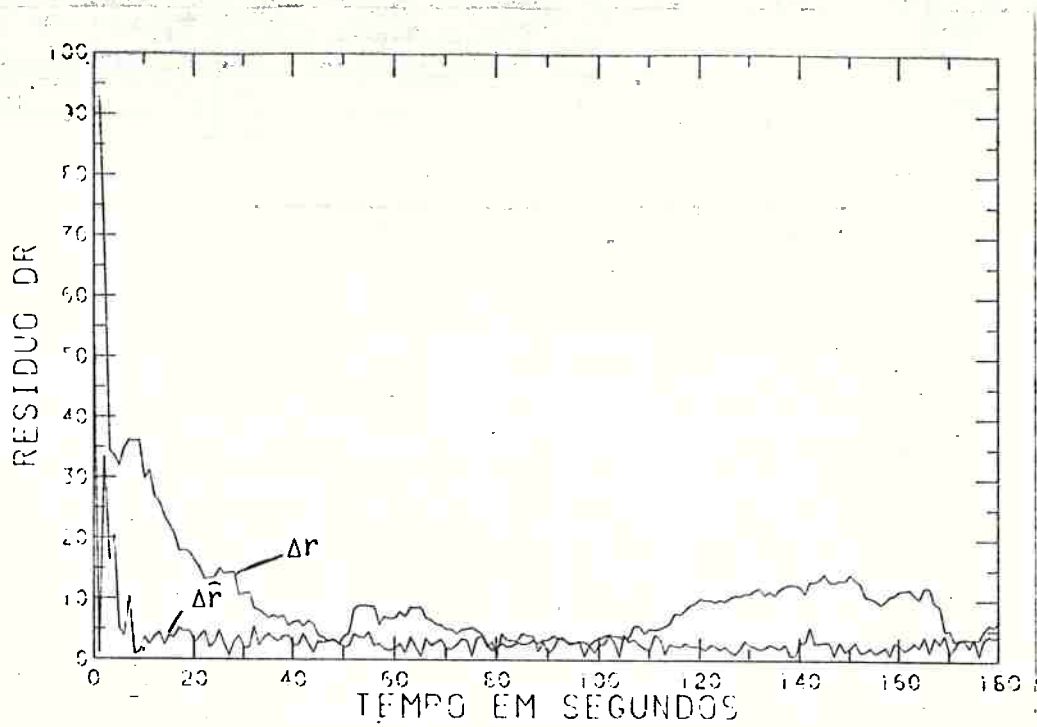


Fig. 4.29 -  $\Delta r$  e  $\Delta \bar{r}$  para o Caso 2: Critério Automático, 3 estações

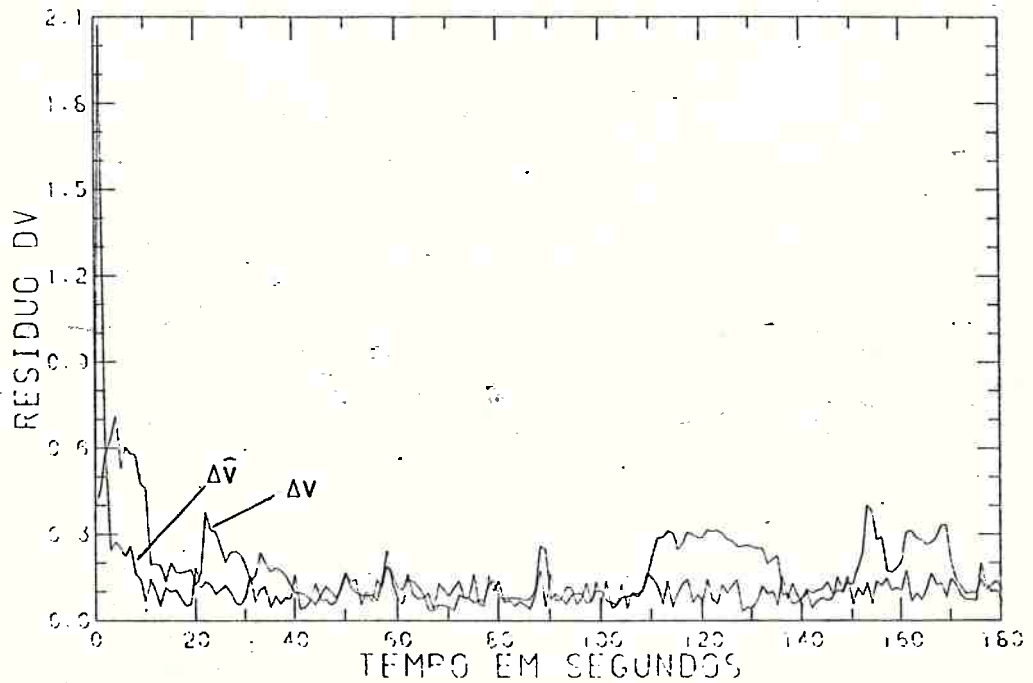


Fig. 4.30 -  $\Delta v$  e  $\Delta \bar{v}$  para o Caso 2: Critério Automático, 3 estações

Obtêm-se, novamente, as mesmas características, para o teste com 3 estações, conseguidas quando da simulação com 4 estações. As diferenças ficam por conta de pequenas separações entre os erros estimados e reais, tanto em velocidade quanto em posição, em alguns trechos do intervalo de propagação e de uma mais rápida convergência em posição. Os valores finais obtidos após 180 segundos de propagação indicam erros de 5m na estimativa de posição e 0.05m/s na estimativa de velocidade, resultados muito bons para a situação de teste utilizada.

Sintetizando o que foi descrito para o Caso 2, o estimador se mostrou capaz de superar o problema com condições regulares de precisão nas observações e de inicialização desde que o nível de informação ponto a ponto seja suficiente, isto é, desde que haja redundância das observações. Dessa maneira, o estimador tem bom comportamento quando se dispõe de 6 ou 8 observações sobre o sistema (3 ou 4 estações), mas ainda não é possível convergência quando se dispõe de apenas 4 observações (2 estações) para gerar o controle virtual  $\hat{u}_c$  (3 componentes) e daí extrair o estado total do sistema que tem 6 componentes.

Embora todos os critérios utilizados para geração da matriz  $\gamma(k+1,k)$  tenham fornecido resultados consistentes, é possível notar diferenças na passagem de 4 estações para 3 estações. O critério mais afetado nessa mudança é o Direto que perde, aparentemente, um pouco de sua característica de estabilidade, enquanto a diferença menos marcante ocorre quando do uso do Critério Automático. Este fato pode, em primeira análise, ser creditado ao caráter mais local do Critério Automático que adapta também os controles à situação enfrentada. Esse assunto será discutido mais adiante, em conjunto com os casos 3 e 4, onde tal efeito se torna predominante.

#### 4.7.3 - CASO 3: TESTE DE SENSIBILIDADE AOS ERROS INICIAIS DO ESTADO

Superadas as fases de funcionamento do estimador e de seu uso na solução do problema de estimação de órbita com as condições comentadas encontradas na prática, a terceira bateria de testes corresponde ao fornecimento de condições iniciais críticas para o estimador, mantidas as precisões das observações realizadas sobre o satélite no nível usual.

A intenção, com esse procedimento, é complicar ainda mais o trabalho do estimador com a atribuição de erros muito maiores que os cometidos através dos métodos usuais de determinação preliminar da órbita. Esses erros iniciais são então colocados como  $\sigma_p = 1000\text{m}$  em posição e  $\sigma_v = 1,5\text{m/s}$  em velocidade e as condições iniciais do estimador são geradas pelo método descrito no item 4.5. Admite-se, para este novo caso, os mesmos níveis de precisão nas observações de "range" e "range-rate" do caso anterior, isto é,  $\sigma_p = 10\text{m}$  e  $\sigma_{\dot{p}} = 0,1\text{m/s}$ . O número de estações que observam o satélite é mantido em três, condição mínima, como já discutido, para garantir correto desempenho do estimador.

Obtêm-se, neste teste, características totalmente distintas na convergência do estimador quando se emprega cada um dos critérios tratados. Assim, a convergência, com a utilização do Critério Automático, é bastante rápida, enquanto para os Critérios Direto e de Restauração, essa convergência é bastante lenta, embora contínua. Tomando para primeira análise o uso do estimador com Critério Automático, obtêm-se como resultados os gráficos das Figuras 4.31 a 4.34, onde foram utilizados coeficientes  $G_{ij,k}^1$  e  $G_{ij,k}^2$  tais que:

$$0,05 \leq |G_{ij,k}^1| \leq 40 \cdot |\bar{G}_{ii,k}^1| \quad i = 1,2,3 \quad (4.30)$$

$$0,05 \leq |G_{ij,k}^2| \leq 80 \cdot |\bar{G}_{ij,k}^2| \quad \begin{array}{l} i = 1,2,3 \\ j = 4,5,6 \end{array} \quad (4.31)$$

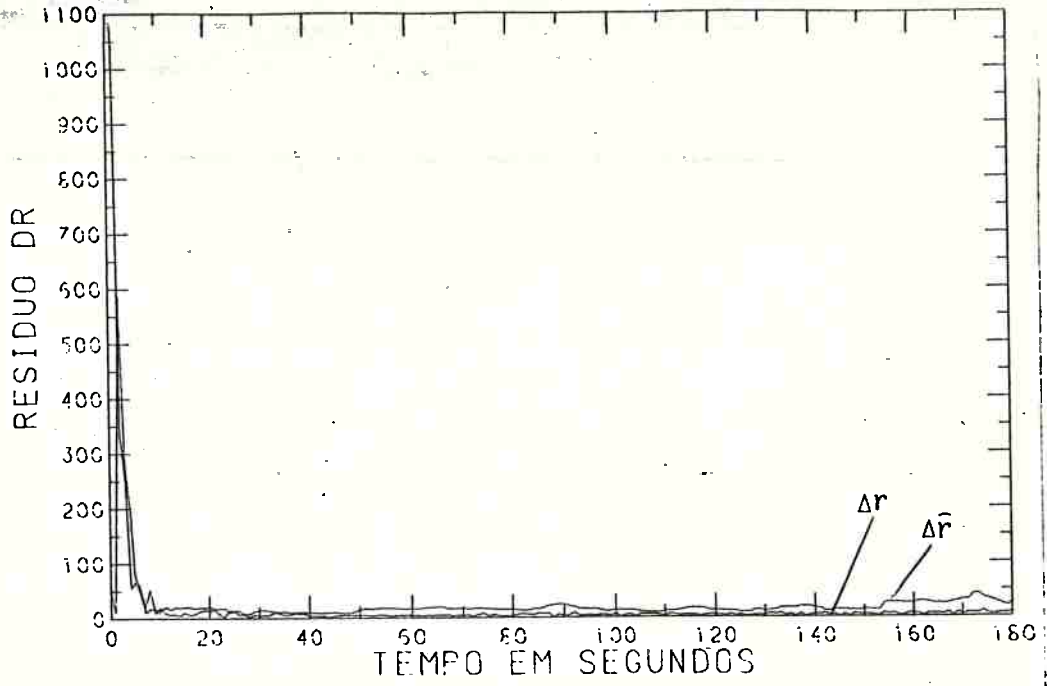


Fig. 4.31 -  $\Delta r$  e  $\Delta \bar{r}$  para o Caso 3: Critério Automático

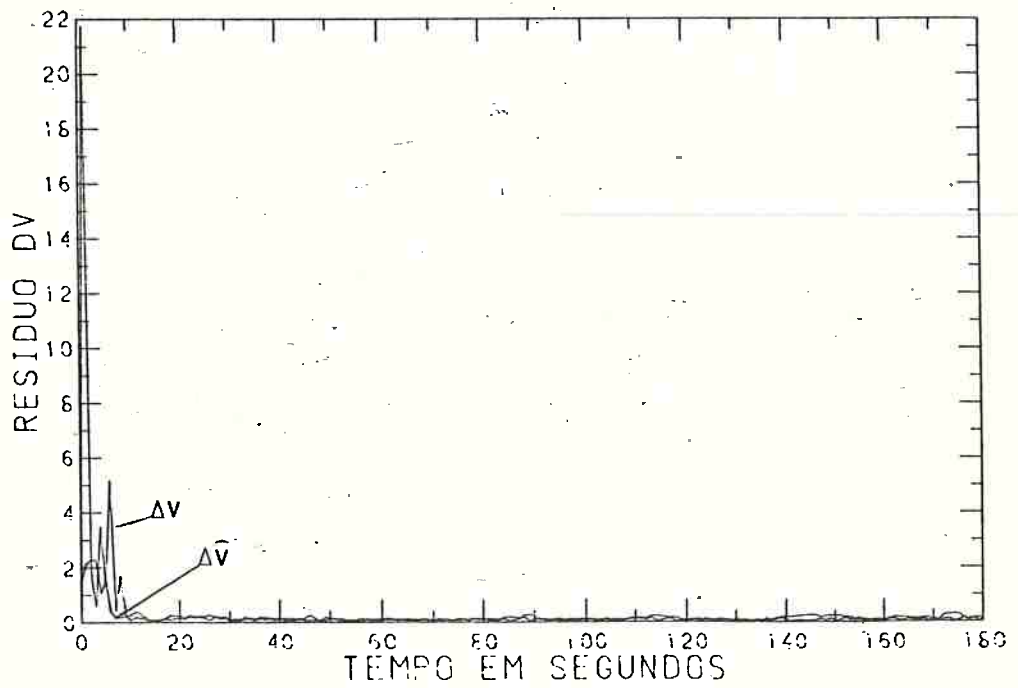


Fig. 4.32 -  $\Delta v$  e  $\Delta \bar{v}$  para o Caso 3: Critério Automático

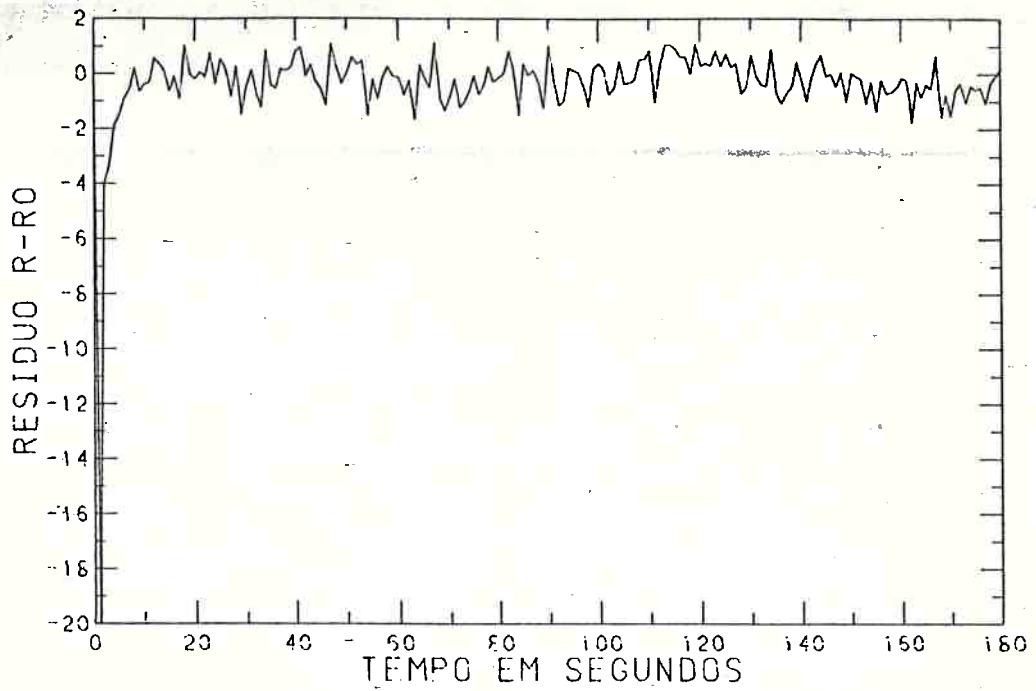


Fig. 4.33 - Resíduo normalizado de "Range" para o Caso 3:  
Critério Automático

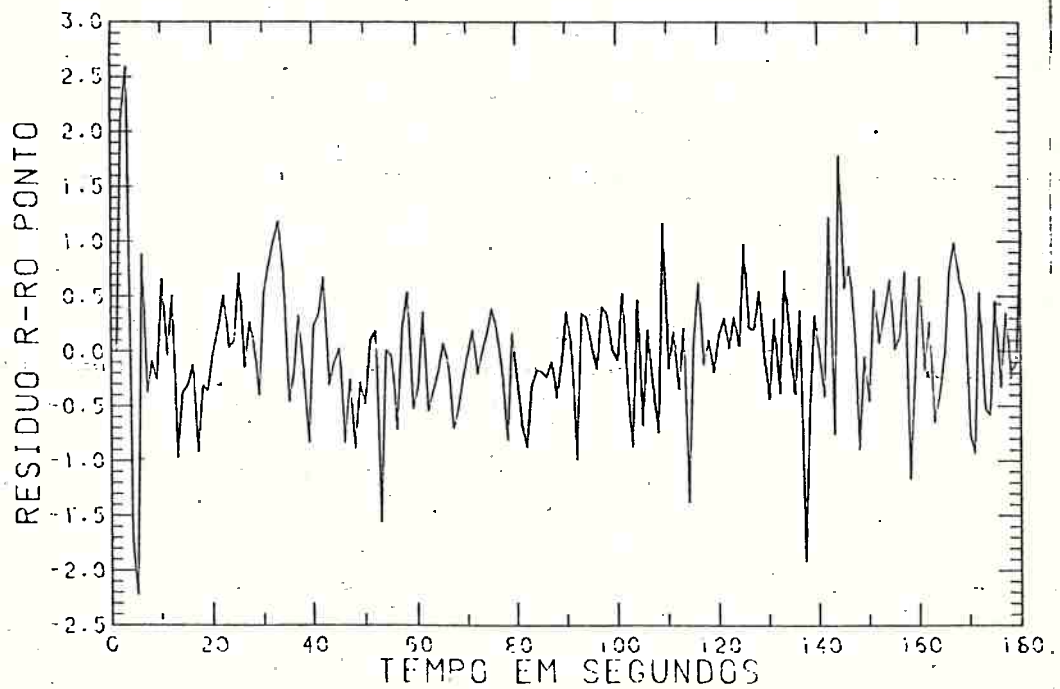


Fig. 4.34 - Resíduo normalizado de "Range-Rate" para o Caso 3:  
Critério Automático

Os resultados apresentados comprovam o bom desempenho do estimador com Critério Automático, mesmo nessa situação crítica de teste. Em menos de 10 segundos, tanto posição como velocidade se encontram dentro da faixa de precisão das respectivas observações, o que, se é difícil visualizar pela escala utilizada nos gráficos de erros reais e estimados (Figuras 4.31 e 4.32), pode ser facilmente constatado nos gráficos dos resíduos normalizados das observações. Após esse período e até o final do intervalo de propagação, os erros reais em posição e velocidade permanecem dentro da referida faixa, da mesma forma que os erros estimados. Neste teste, que, em termos relativos, trouxe os melhores resultados do desempenho do estimador, vale ainda ressaltar que, em termos dos resíduos normalizados das observações, os valores máximos mostrados nas Figuras 4.33 e 4.34 correspondem aos pontos obtidos após o processamento do primeiro lote de informações, situação bem mais favorável, já que, como em todos os outros casos discutidos, foi atribuído valor nulo para esses resíduos no instante inicial da propagação do estimador.

Para a aplicação do estimador com os dois outros critérios, deve ser destacado que as condições de definição do Critério de Restauração tornam-no uma versão refinada do Critério Direto no sentido de dar prioridade à convergência para posição ou para velocidade como descrito no Capítulo anterior. Assim, quando as duas estimativas, de posição e de velocidade, estão distantes da convergência, o Critério de Restauração comanda a matriz  $G_k$  para priorizar a convergência em posição e essa escolha é mantida enquanto não forem alteradas as características de convergência do sistema. No caso em análise, os erros iniciais do estimador estão tão distantes das faixas de possíveis trocas de coeficientes dentro do Critério de Restauração que o comportamento dos dois critérios, Direto e Restauração, se confundem. Em outras palavras, o estimador, no caso do uso do Critério de Restauração, praticamente só utiliza os coeficientes atribuídos para se tentar acelerar a convergência em posição, até que consiga chegar próximo a região de troca de coeficientes, relacionada com a faixa de precisão das observações e traduzida pelos erros estimados em posição e velocidade.

Tendo isto em mente, as Figuras 4.35 e 4.38 mostram o comportamento do estimador utilizando o Critério Direto com coeficientes  $C_p = 10,0$ ,  $C_v = 3,0$  para 500 segundos de propagação da órbita.

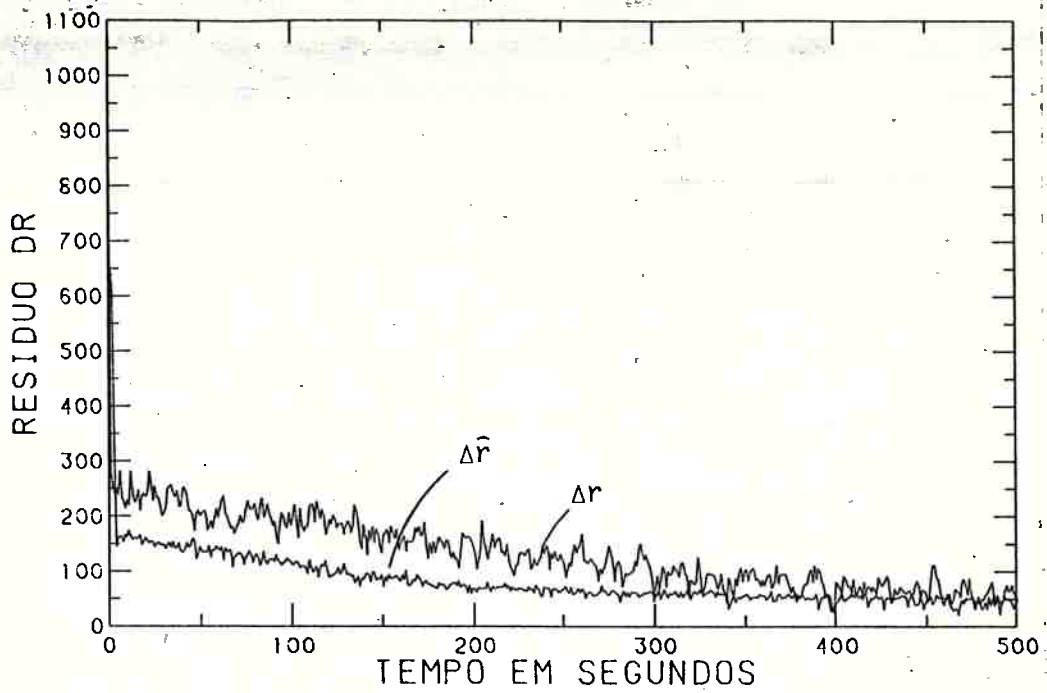


Fig. 4.35 -  $\Delta r$  e  $\Delta \bar{r}$  para o Caso 3: Critério Direto

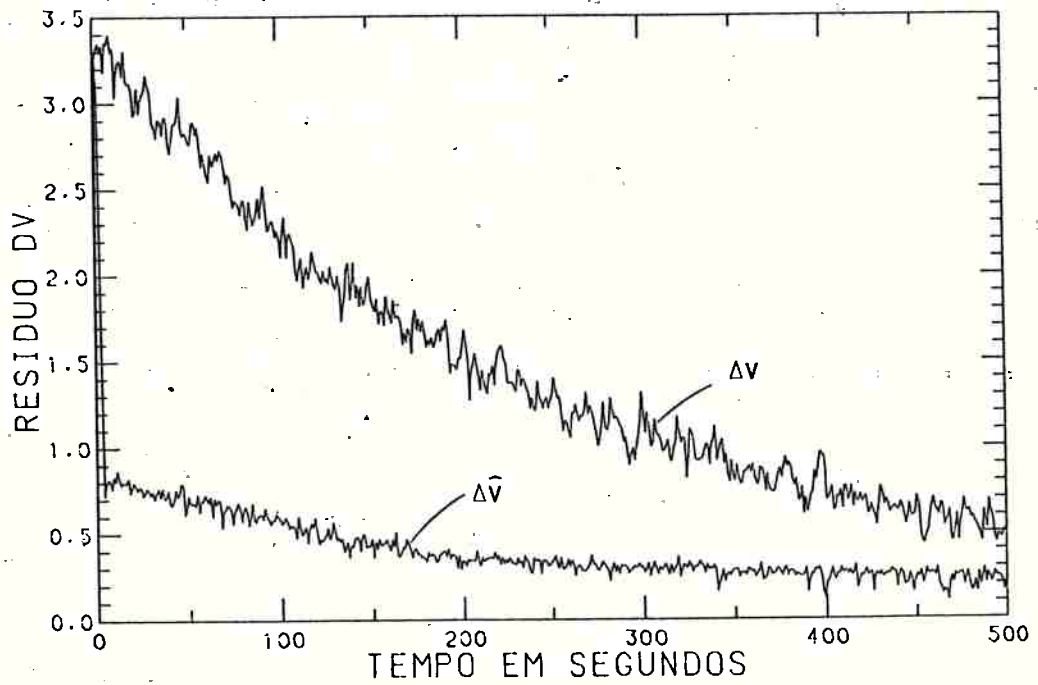


Fig. 4.36 -  $\Delta v$  e  $\Delta \bar{v}$  para o Caso 3: Critério Direto

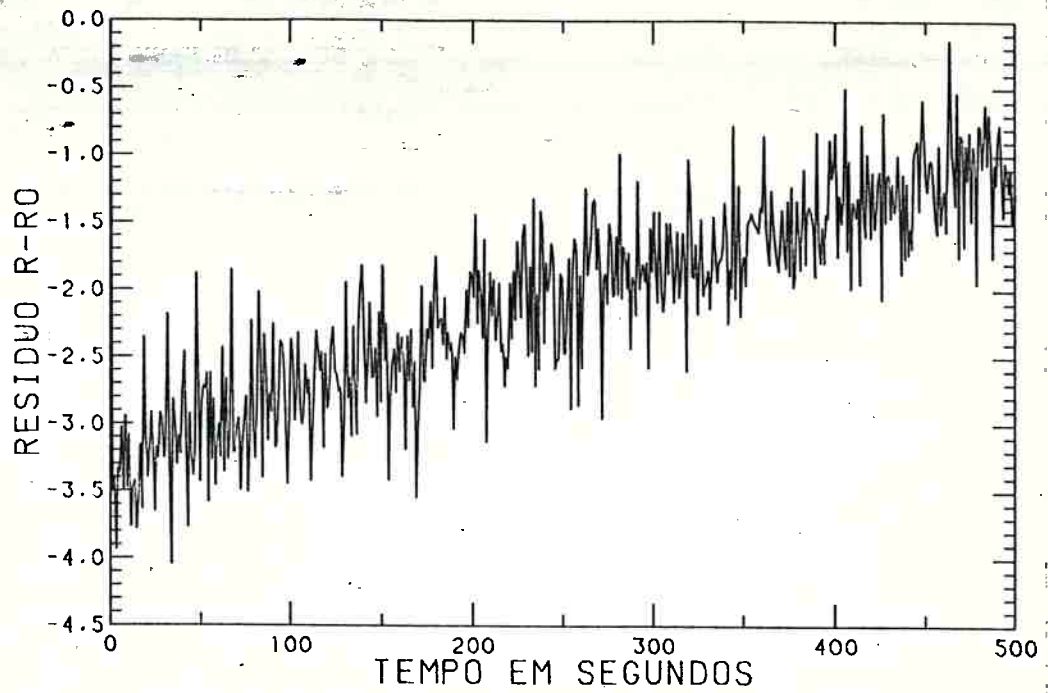


Fig. 4.37 - Resíduo normalizado de "Range" para o Caso 3:  
Critério Direto

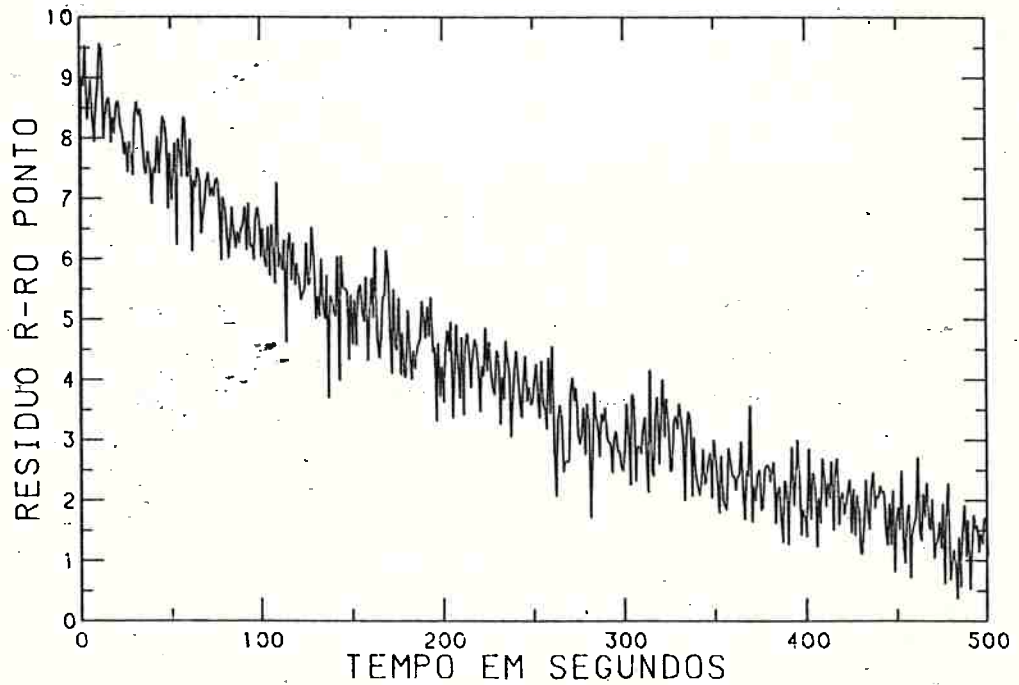


Fig. 4.38 - Resíduo normalizado de "Range-Rate" para o Caso 3:  
Critério Direto



Verifica-se, dessa forma, uma convergência muito mais lenta para o Critério Direto, em comparação com o Critério Automático. Mesmo assim, a convergência ocorre, já que após 500 segundos de propagação, os erros reais estão da ordem de 50m em posição e de 0,5m/s em velocidade, contra os valores iniciais de 1000m em posição e 1,5m/s em velocidade. Também dos gráficos relativos aos resíduos normalizados das observações pode-se constatar a convergência pois, ao final do intervalo de propagação, tais resíduos começam a adentrar a faixa correspondente a  $\pm 1\sigma$ , onde devem estabilizar.

Com este exemplo é possível verificar algumas das vantagens e desvantagens associadas aos critérios sugeridos para acelerar a convergência do método. Tanto o Critério Direto como o de Restauração se baseiam em coeficientes, ou ganhos, constantes e positivos, que não mudam ao longo da propagação. Dessa forma, os controles virtuais estimados  $\hat{u}_c$  são incorporados a uma componente de posição e sua correspondente velocidade com o mesmo sinal, independente de serem tais componentes, eventualmente, de sinais contrários. Isto é uma consequência direta de se estimar o estado por um vetor de controles de menor dimensão e, quando os valores iniciais para o estimador estão muito longe dos valores verdadeiros, pode-se ter efeitos cumulativos de correção com o mesmo sinal sobre uma determinada componente, dificultando a convergência. No caso do Critério Automático, mesmo com o atraso de um passo, o controle estimado é incorporado com o sinal correto, diluindo esse efeito cumulativo. Um outro aspecto a ser abordado é que o Critério Automático, mesmo com as restrições impostas pelos limites superior e inferior, atualiza os coeficientes de  $G_k$  a cada passo. Nos dois outros critérios desenvolvidos, os coeficientes, ou conjuntos destes, são mantidos fixos durante toda a propagação e nem sempre os valores utilizados para iniciar a propagação são convenientes depois de um determinado período de propagação da órbita.

#### 4.7.4 - CASO 4: TESTE DE SENSIBILIDADE ÀS NÃO-LINEARIDADES DAS OBSERVAÇÕES

O último teste realizado com o estimador serve para se analisar o efeito das não linearidades nas observações sobre o desempenho do mesmo. É sabido que quanto mais precisas as informações entregues a um estimador baseado em aproximações lineares, como o desenvolvido nesse trabalho, maiores serão os efeitos das não linearidades nas observações sobre os erros reais e estimados (Rios Neto e Negreiros de Paiva, 1983).

A situação de teste escolhida foi a mesma do Caso 3, com grandes erros iniciais para o estimador ( $\sigma_p = 1000\text{m}$ ,  $\sigma_v = 1,5\text{m/s}$ ) e 3 estações observando o satélite. As precisões das observações foram reduzidas para  $\sigma_\rho = 3\text{m}$  e  $\sigma_v = 0,01\text{m/s}$ . Dadas as condições de teste, s̄o teria sentido utilizar o estimador com Critério Automático de geração de  $\hat{\gamma}(k+1,k)$  visto que os outros dois critérios n̄o apresentam bom desempenho para essas condições.

As Figuras 4.39 a 4.42 resumem os resultados obtidos com a utilizaç̄o, no Critério Automático, das mesmas faixas definidas em (4.30) e (4.31).

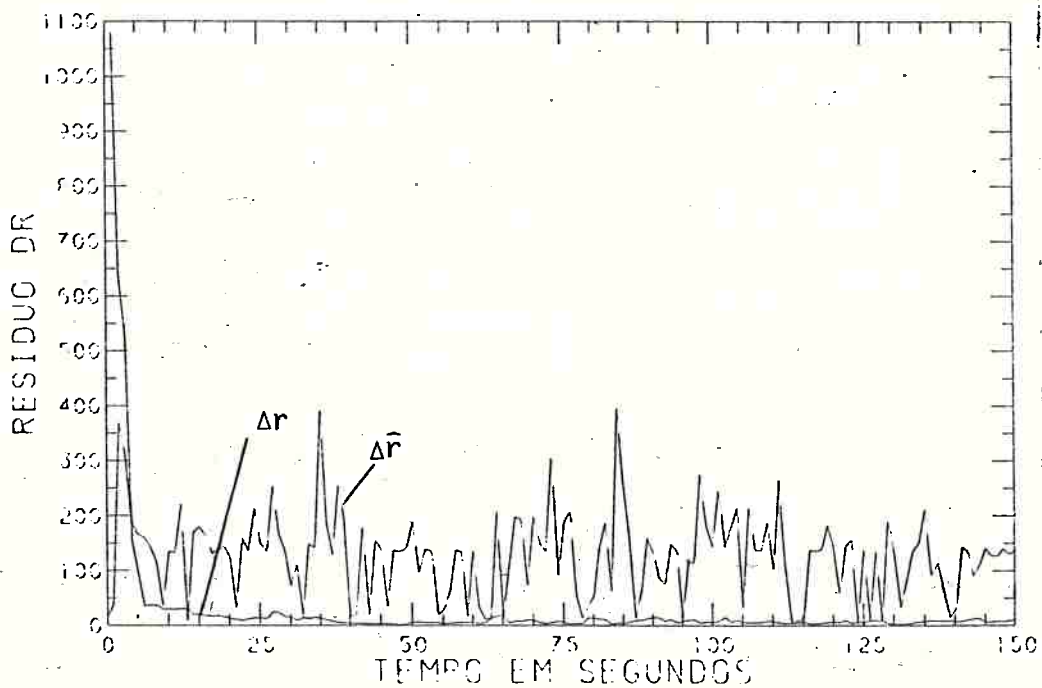


Fig. 4.39 -  $\Delta r$  e  $\Delta \hat{r}$  para o Caso 4: Critério Automático

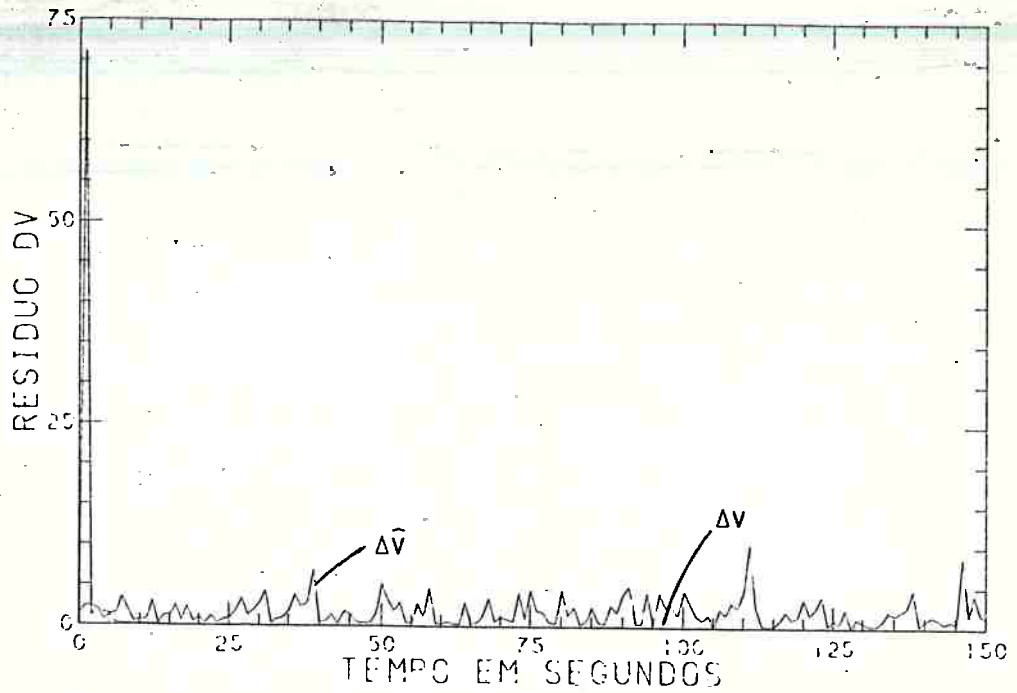


Fig. 4.40 -  $\Delta v$  e  $\Delta \bar{v}$  para o Caso 4: Critério Automático

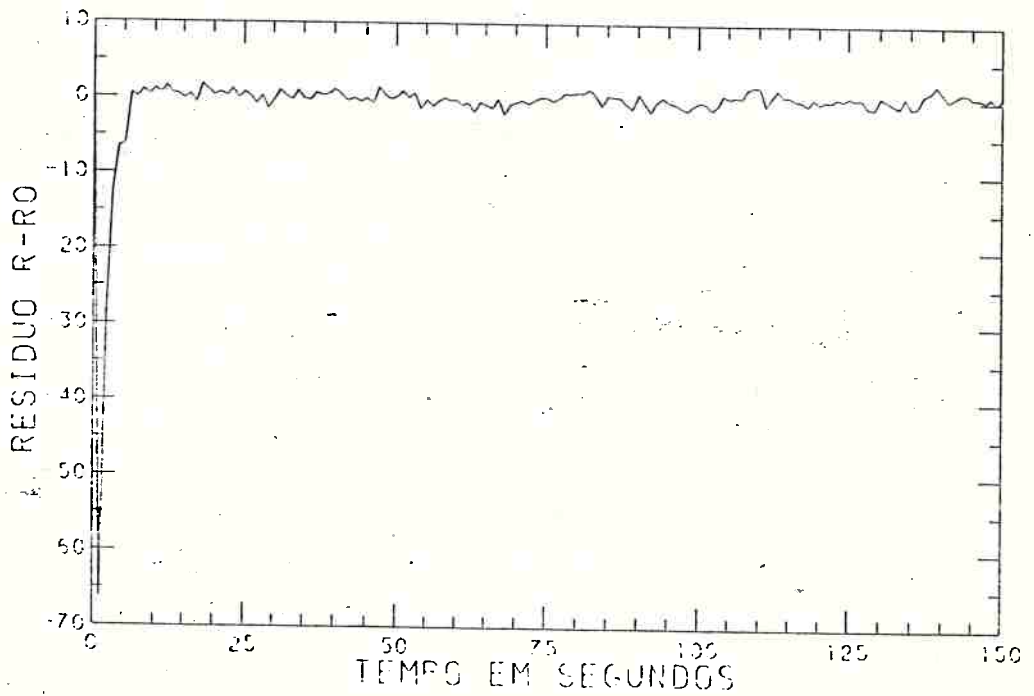


Fig. 4.41 - Resíduo normalizado de "Range" para o Caso 4: Critério Automático

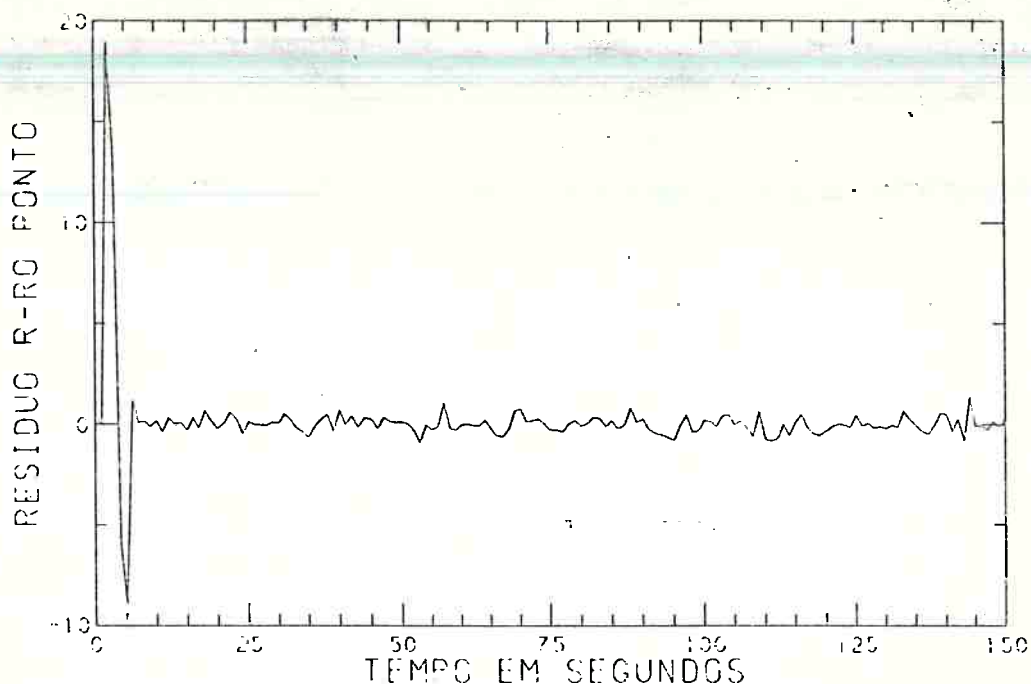


Fig. 4.42 - Resíduo normalizado de "Range-Rate" para o Caso 4: Critério Automático

Verifica-se novamente a excelente convergência do algoritmo proposto para valores dentro das faixas de precisão das observações. Em pouco mais de 5 segundos os erros reais em posição e velocidade estão da ordem de 3m e 0.01m/s, o que pode ser constatado tanto dos gráficos para os erros reais como das curvas dos resíduos normalizados de "range" e "range-rate". No entanto, em relação ao Caso 3, onde os desvios-padrões das observações em "range" e "range-rate" eram maiores, o comportamento dos erros estimados deteriora-se de maneira. Este fato pode ser explicado pelo efeito das não linearidades nas observações. Como se está utilizando um modelo linearizado para tais observações, à medida que se melhora a qualidade das informações, maiores são as componentes não lineares desprezadas. Para os erros reais, a utilização de ruído adaptativo continuamente mascara esses efeitos não lineares, já que a técnica fornece maneiras de reduzir os resíduos das observações adaptativamente, introduzindo ruído no estimador. Para os erros estimados, entretanto a situação é outra, pois a tendência dos erros estimados é aproximar a matriz de covariâncias dos erros nas observações ( $R_k$ ). Como essa matriz tem normalmente valores irrealistas quando se usa aproximações lineares, os erros estimados tendem a esses valores inicialmente e continuamente se aproximam e se

afastam devido aos efeitos de não linearidades nas observações, ou seja, os erros estimados não conseguem "aprender" o modelo das observações. O comportamento desses erros, deve, nessa situação, ser oscilatório como colocado nas Figuras 4.39 e 4.40. Sugere-se, então, que quando se enfrentar dificuldades desse tipo, ou seja, grandes não linearidades nas informações, se utilize técnicas como a proposta por Rios Neto e Negreiros de Paiva, (1983) onde os termos de 2ª ordem na linearização das observações são incorporados, através de ruídos adicionais gerados a partir dos resíduos de observação, à matriz de covariâncias dos erros nas observações, dessa forma minimizando os efeitos de tais não-linearidades.

#### 4.8 - ANÁLISE DOS TESTES REALIZADOS

Completada a descrição dos testes efetuados com o estimador a Tabela 4.2, resume as situações criadas e os principais resultados alcançados:

TABELA 4.2

RESUMO DOS TESTES REALIZADOS

CASO	NÚMERO ESTAÇÕES	CRITÉRIOS	$\sigma_p$ (m)	$\sigma_v$ (m/s)	ERRO INICIAL EM POSIÇÃO EM (m)	ERRO INICIAL EM VELOCIDADE DE (m/s)	ERRO REAL FINAL POSIÇÃO (m)	ERRO REAL FINAL VELOCIDADE (m/s)	ERRO ESTIMADO FINAL POSIÇÃO (m)	ERRO ESTIMADO FINAL VELOCIDADE (m/s)	TEMPO DE PROVAÇÃO (s)
1	4	DIRETO	100.	1.	300	1.5	80	0.40	130	0.60	150
		RESTAURAÇÃO	100.	1.	300	1.5	70	0.30	100	0.90	150
		AUTOMÁTICO	100.	1.	300	1.5	50	0.20	25	0.50	150
2	4	DIRETO	10.	0.1	80	0.6	5	0.12	15	0.07	180
		RESTAURAÇÃO	10.	0.1	80	0.6	7	0.10	10	0.10	180
		AUTOMÁTICO	10.	0.1	80	0.6	10	0.06	4	0.05	180
3	3	DIRETO	10.	0.1	80	0.6	10	0.10	15	0.07	180
		RESTAURAÇÃO	10.	0.1	80	0.6	10	0.10	6	0.15	180
		AUTOMÁTICO	10.	0.1	80	0.6	5	0.05	5	0.05	180
4	3	D.R.A	10.	0.1	80	0.6	(*)	(*)	(*)	(*)	-
		AUTOMÁTICO	10.	0.1	1000.	1.5	10	0.10	15	0.10	180
		DIRETO	10.	0.1	1000.	1.5	50	0.50	30	0.20	500(**)
4	3	AUTOMÁTICO	3.	0.01	1000.	1.5	3	0.01	40	0.10	180

Observações: (\*) - divergência  
 (\*\*) - ainda em convergência após 500s

Da análise dos testes realizados com o estimador de estado uma série de conclusões pode ser tirada:

- o estimador proposto necessita, para funcionamento, ao menos no problema de estimação de órbita, da inclusão de técnicas de ruído adaptativo e dos critérios de geração da matriz  $G_k$  para aceleração da convergência;
- satisfeitos esses dois pré-requisitos, o estimador demonstra desempenho bastante bom nos testes a que é submetido, garantindo rápida convergência para valores coerentes com as precisões definidas em cada caso, fato que pode ser constatado do resumo dos resultados da Tabela 4.2;
- dos casos analisados, só não foi possível obter convergência quando da utilização de apenas duas estações de rastreamento, o que confirma a necessidade prevista de redundância local das observações para produzir estimativas coerentes. Em função das hipóteses utilizadas no desenvolvimento do estimador, aparentemente, a única saída para se contornar essa dificuldade e forçar a convergência seria a utilização de um modelo melhor na dinâmica do estimador. Um modelo pobre como o que é utilizado neste trabalho leva a que a estimativa se deteriore tão rapidamente entre observações que o estimador não consegue aprender o sistema, provocando divergência;
- é necessário corrigir os efeitos de não linearidades das observações quando se utiliza informações com níveis de precisão muito bons. Esses efeitos de não linearidade não afetam os erros reais quando se utiliza de técnicas de ruído adaptativo mas acusam sensível degradação nos erros estimados (Caso 4);
- o melhor desempenho entre os critérios sugeridos para geração da matriz  $G_k$  ou da correspondente  $\gamma(k+1,k)$  fica por conta do Critério Automático por possibilitar ajuste nos ganhos (coeficientes) e fornecer os sinais adequados para os mesmos, como discutido na apresentação do Caso 3;

- os resultados com os Critérios Direto e de Restauração são bastante bons e deve-se pesquisar formas mais operacionais de geração de seus respectivos coeficientes;
  
- para os casos em que é possível uma comparação com os resultados obtidos por outras técnicas, como mostrado no Apêndice D, verifica-se que o comportamento do estimador proposto é bastante semelhante ao Filtro de Estendido de Kalman com auxílio de Ruído Adaptativo na solução do problema de estimação da órbita de um satélite a baixa altitude.
  
- não houve preocupação com o tempo gasto para processamento de cada teste dentro de cada caso simulado, tanto que as observações das estações de rastreamento eram geradas internamente ao programa. O programa de computador utilizado foi montado sem qualquer restrição de otimização, já que, como citado, o seu objetivo era a validação do estimador. Ainda assim, algumas observações podem ser feitas a respeito do tempo de processamento do programa. Conclusões diretas são que tanto menor o número de observações (ou estações) mais rápido o algoritmo, e, entre os critérios sugeridos, o Critério Automático é o mais lento, enquanto os Critérios Direto e de Restauração gastam praticamente o mesmo tempo de computador por iteração. Para os casos com 4 estações eram necessários aproximadamente 80 segundos de processamento para 180 iterações (~ 0.45s por iteração) com os Critérios Direto e de Restauração, enquanto para o Critério Automático gastava-se cerca de 90 segundos para 160 iterações (~ 0.56s por iteração). Para 3 estações estes números eram reduzidos a 70 segundos para 180 iterações (~ 0.40s por iteração) quando da utilização dos Critérios Direto e de Restauração e a 90 segundos para 180 iterações (~ 0.5s por iteração) para o Critério Automático. Portanto, o Critério Automático é cerca de 20% mais lento que os outros dois, fator que pode ser decisivo na escolha do critério a ser utilizado.



## CAPÍTULO 5

### COMENTÁRIOS, CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

#### 5.1 - COMENTÁRIOS

A dualidade entre estimação e controle ótimo de um sistema dinâmico foi utilizada na definição de um controle virtual de ação equivalente aos efeitos não modelados, o que permitiu tratar o problema antes exclusivamente de estimação de estado, por um problema de controle estocástico. Como consequência, tem-se novas interpretações que podem ser visualizadas mais facilmente através de controladores e que não haviam sido ainda propostas em desenvolvimento de filtros para estimação de estado. Geometricamente, os controles virtuais definidos devem conduzir o sistema modelado no estimador, dada uma condição inicial num instante determinado, a satisfazer as observações disponíveis sobre a sistema verdadeiro ao final de um intervalo de propagação típico. Desde que sejam garantidas condições de observabilidade sobre o sistema em estudo ao final desse intervalo de propagação e uma vez garantida a controlabilidade do modelo do estimador em conjunto com a estrutura definida para o controle, os controles virtuais são capazes de guiar o sistema na direção da satisfação das observações. Gera-se, dessa forma, uma trajetória de controle que aproxima adaptativamente a trajetória de referência estimada da trajetória real. Essa idéia, que é a idéia central do procedimento, permite que se trabalhe com dinâmica muito pobre no modelo do estimador e que se reduza o número de variáveis a serem estimadas, pois o vetor de controles virtuais tem dimensão menor ou, no máximo, igual ao vetor de estado do sistema. Em particular, para os sistemas mecânicos de segunda ordem, onde a redução a um sistema de primeira ordem implica no aparecimento de derivadas não forçadas para as componentes de posição, as quais dispensam o uso direto dos efeitos não modelados, reduz-se sempre à metade o número de variáveis a serem estimadas, fato que é uma sensível vantagem do estimador proposto. Com isso, o problema original de estimação de um sistema dinâmico é transformado num problema virtual equivalente de controle, onde as variáveis de controle, admitidas constantes aleatórias ao longo de cada intervalo, são obtidas através de estimação linear ótima de parâmetros. Uma vez disponíveis os controles virtuais, o estado do sistema pode ser

reconstruído aproximadamente. A propagação das incertezas nos controles é tratada de forma análoga a um ruído no estado, mantendo-se, durante a propagação do sistema no intervalo entre observações, uma estrutura em tudo semelhante ao conhecido Filtro Estendido de Kalman (Jazwinski, 1970). O estimador resultante, como feito nesse trabalho, pode ser desenvolvido de forma genérica, de modo a permitir sua aplicação a qualquer outro tipo de problema diferente do problema de estimação de órbita analisado. Essa preocupação em manter o estimador aplicável a outros problemas é bastante importante em controle de processos na medida em que não são muitas as alternativas existentes para se poder empregar modelagens simplificadas e operações em tempo real.

A estrutura do filtro desenvolvido é linear e tem seu interesse voltado à estimação de estado de sistemas não lineares que possam ser tratados por aproximações lineares, situação mais usual na prática. Para isso, o teste criado para o estimador corresponde a um problema crítico de estimação de órbita de um satélite a baixa altitude. A superação desse teste, como alcançada, serve como qualificação preliminar para o estimador que deve, a partir daqui, ser submetido a testes reais de funcionamento.

Para se obter os bons resultados dos testes, no entanto, foi necessário contornar duas dificuldades. Assim, verificou-se, no início das simulações, que o estimador se "fechava" rapidamente às novas observações, em vista da redundância de informações que se dispunha sobre o vetor de controles  $u_c$ , o que era traduzido por uma matriz de covariâncias nos erros do controle  $P_u$  muito pequena. Corrigida essa tendência, pela inclusão de uma técnica de ruído adaptativo que permite "abrir" a matriz  $P_u$ , notou-se que, devido aos efeitos de má modelagem, o mesmo ocorria com a matriz de covariância dos erros no estado,  $P$ , durante a propagação. Novamente foi aplicado um método de ruído adaptativo, na forma proposta por Rios Neto e Kuga (1981, 1982), permitindo então recolocar as matrizes de covariância dos erros nos níveis desejados. Finalmente, foi necessário corrigir o acoplamento, no problema de órbita, entre as variáveis não forçadas (posições) e as variáveis forçadas (velocidade). Foram criados, então, três critérios de aceleração de convergência, que forneceram resultados muito bons, mas que podem e devem ainda ser melhorados. Dentre esses critérios o que apresentou melhor desem

penho foi o Critério Automático, obtido a partir de uma aproximação de Controle Ótimo. As desvantagens deste critério, quais sejam, a de obrigar a solução de um sistema linear de ordem igual à dimensão do estado, completo ou não, acarretando maior tempo de processamento; o fato de só se poder utilizá-lo com um passo de atraso e a necessidade de normalização dos coeficientes, são compensadas pelos fatos de se dispor do sinal correto para incorporação dos controles, o que é de grande interesse quando o vetor de correções (controles) tem dimensão menor que o estado que se está estimando, e de se ter um ganho variável, adaptado ao longo do intervalo de processamento do estimador. No entanto, o maior problema com esse critério é que exige tempo adicional de cálculo dos coeficientes, um fator que, numa aplicação de tempo real, deve ser muito bem pesado antes de se decidir pela sua utilização. Quanto aos outros dois critérios, os resultados obtidos justificam plenamente a sua criação. O Critério Direto, por si, valida a idéia do estimador proposto e o coloca na forma mais simples de utilização direta. O Critério de Restauração traz embutida uma idéia bastante forte, aplicada com muito sucesso em Controle Ótimo. Num e noutro caso, seria de extrema valia se estivesse disponível um método de estimar os coeficientes antes da propagação. No Critério de Restauração, em particular, poder-se-ia aumentar o número interno de testes e escolha dos coeficientes de modo a minimizar os efeitos de uma escolha inicial errônea.

Superadas, então, as dificuldades intrínsecas do filtro desenvolvido, foram realizados os testes com condições simuladas. Os resultados, como já diversas vezes ressaltado, se mostraram satisfatórios para o atual estágio e promissores para se tentar tornar o filtro mais operacional. As conclusões obtidas a partir dos testes de estimação de órbita nas condições críticas descritas no Capítulo 4 são de grande importância para desenvolvimentos futuros. Assim, confirmou-se a necessidade de redundância local de observações para bom funcionamento do estimador, o que exige, para o problema de órbita, um mínimo de 3 estações rastreando o satélite. Garantida essa condição de observabilidade, o comportamento do estimador é bom qualquer que seja a condição inicial colocada, da mesma forma que seu bom desempenho só é alterado com precisão muito boa das informações recebidas. Essa última situação ocorre com a maioria dos filtros em aproximações lineares e está ligada aos efeitos de não linearidades das observações. Nesse caso, é praticamente mandatório se recorrer a outras técnicas de correção como a de Rios Neto e Negreiros de Paiva, (1983).

Quanto aos aspectos numéricos do estimador desenvolvido algumas considerações devem ser tecidas. O estimador, conforme descrito no Apêndice C, exige integração de equações diferenciais ordinárias, quadraturas e inversões de matrizes. Apenas com relação à inversão de matrizes certos cuidados devem ser tomados. Na forma atual, o filtro inverte a matriz de covariâncias dos erros no estado,  $P(\cdot|\cdot)$ , e a matriz de covariâncias dos ruídos na observação  $R_k$ , o que não é a forma mais conveniente por problemas de tempo de processamento e precisão numérica. É importante que sejam investigadas formas equivalentes para o filtro que minimizem a necessidade de inversão dessas matrizes.

## 5.2 - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Do que foi exposto nos capítulos anteriores e no item de comentários precedente, é possível afirmar que:

- o estimador de estado desenvolvido está centrado no conceito de dualidade entre estimação e controle e existe ainda muito a ser extraído desse conceito em termos de pesquisa;
- os resultados obtidos com o estimador de estado são bastante promissores e devem ser feitos esforços com o intuito de torná-lo mais operacional. Nesse sentido, de imediato, poder-se-ia propor a obtenção de formas equivalentes para as equações do filtro visando minimizar inversões de matrizes;
- a aplicação de qualquer um dos três critérios de geração da matriz  $\gamma(k+1,k)$  conduz a bons resultados. Os esforços no sentido de aperfeiçoá-los, ou criar outros, devem levar em conta também seus efeitos sobre as matrizes de covariâncias de erros;
- a escolha da técnica de Ruído Adaptativo para manter a capacidade do estimador de extrair informações das novas observações foi baseada principalmente nos excelentes resultados obtidos com essa técnica no problema de estimação de órbitas (Kuga, 1982). É importante, em seguida, proceder-se a testes com outras técnicas menos sofisticadas para levantar a real capacidade de operação do estimador;

- o uso do estimador de estado proposto permite reduzir o número de variáveis estimadas, o que é uma característica bastante vantajosa para um estimador;
- a obtenção do vetor de controles estimados  $\hat{u}_c$  permite a reconstrução do estado do sistema com boa aproximação;
- o desenvolvimento do estimador foi feito de forma genérica, permitindo sua aplicação a outros tipos de problemas de estimação;
- o desenvolvimento do estimador foi feito com o propósito de garantir sua validação prática, não havendo preocupação com o aspecto de tempo computacional gasto. Sugere-se um estudo detalhado do tempo de processamento do estimador desenvolvido contra outros estimadores representativos para uma melhor avaliação desse item, da maior relevância;
- as mesmas considerações da recomendação anterior podem ser levantadas para testes com condições reais de funcionamento, como, por exemplo, no problema de estimação de uma órbita real;
- não foram conseguidas boas condições de convergência nos testes com apenas duas estações de rastreamento. Recomenda-se investigar se é necessária uma melhora no modelo do estimador para forçar essa convergência ou se a definição de outros critérios para a matriz  $\gamma(k+1,k)$  é suficiente para modificar essa situação;
- é necessário completar a demonstração da validação matemática do estimador. Em particular, é preciso ligar a estimativa  $\hat{u}_c$  à média condicionada às observações anteriores;
- o estimador desenvolvido tem garantida sua convergência local desde que obedecidas as hipóteses colocadas e garantida a redundância, também local, das observações.

- o estimador proposto tem desempenho comparável às técnicas normalmente utilizadas na estimação de sistemas não lineares.

Finalmente, o estimador de estado baseado no conceito de dualidade, em vista das características demonstradas, se qualifica para aproximação de sistemas não lineares, operando em tempo real e com dinâmica pobre no estimador. Sua aplicação é de interesse para controle de processos levando em conta suas particularidades. Especificamente o que se pretende é torná-lo viável para estimação autônoma de órbita utilizando sistemas do tipo GPS (Global Positioning System).

## APÊNDICE A

### MODELAGEM DA DINÂMICA DO ESTIMADOR

O movimento modelado no estimador, conforme descrito no Capítulo 4, corresponde a parte da aceleração devido ao geopotencial levando-se em conta apenas o problema dos dois corpos e o achatamento terrestre. Nesse caso, a expressão do geopotencial se reduz:

$$\bar{U} = \frac{\mu}{r_s^e} \left[ 1 + \frac{J_2 R^2}{2r_s^{e2}} \left( 1 - \frac{3z^2}{r_s^{e2}} \right) \right] \quad (\text{A.1})$$

onde  $\mu$  é a constante gravitacional;  $R$  é o raio equatorial da Terra;  $r_s^e$  é o módulo do vetor de posição do centro de massa de satélite;  $z$  é a terceira coordenada de  $r_s^e = (x, y, z)$  e  $J_2$  é o coeficiente do segundo harmônico zonal.

A aceleração  $\ddot{r}_s^e$  do satélite é obtida a partir do geopotencial  $\bar{U}$  pela aplicação do operador gradiente:

$$\ddot{r}_s^e = -\nabla \bar{U} \quad (\text{A.2})$$

o que leva imediatamente a:

$$\ddot{x}^e = -\frac{\partial \bar{U}}{\partial x^e} = f_1 \quad (\text{A.3})$$

$$\ddot{y}^e = -\frac{\partial \bar{U}}{\partial y^e} = f_2 \quad (\text{A.4})$$

$$\ddot{z}^e = -\frac{\partial \bar{U}}{\partial z^e} = f_3 \quad (\text{A.5})$$

onde:

$$f_1 = - \frac{\mu x^e}{r_s^{e^3}} \left[ 1 + \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{r_s^{e^2}} \left( 1 - \frac{5z^e}{r_s^{e^2}} \right) \right] \quad (A.6)$$

$$f_2 = - \frac{\mu y^e}{r_s^{e^2}} \left[ 1 + \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{r_s^{e^2}} \left( 1 - \frac{5z^e}{r_s^{e^2}} \right) \right] \quad (A.7)$$

$$f_3 = - \frac{\mu z^e}{r_s^{e^3}} \left[ 1 + \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{r_s^{e^2}} \left( 3 - \frac{5z^e}{r_s^{e^2}} \right) \right] \quad (A.8)$$

Para reduzir o sistema (A.3) - (A.5) a um sistema de primeira ordem, necessário para compatibilizar com a notação adotada, define-se  $x_1 \triangleq \dot{x}^e$ ,  $x_2 \triangleq \dot{y}^e$ ,  $x_3 \triangleq \dot{z}^e$ ,  $x_4 \triangleq \dot{x}^e$ ,  $x_5 \triangleq \dot{y}^e$ ,  $x_6 \triangleq \dot{z}^e$ . Com isso, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad (A.9)$$

ou, na forma compactada apresentada:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) \quad (A.10)$$

Desse modo, a dinâmica modelada no estimador fica totalmente caracterizada pelo sistema expresso por (A.9). A implementação do estimador exige ainda o conhecimento da matriz de derivadas parciais:

$$F(\bar{x}(t), t) = \left[ \frac{\partial f(x(t), t)}{\partial x} \right]_{x=\bar{x}} \quad (A.11)$$

avaliada sobre uma trajetória nominal. Por simplicidade adota-se a notação  $\frac{\partial f}{\partial x}$  para desenvolver essa matriz de dimensão 6 x 6.



Por inspeção das equações de movimento, verifica-se que as equações diferenciais relacionadas às componentes de posição contêm apenas termos relativos às componentes de velocidade e vice-versa para as componentes de velocidade. Com isso, pode-se reduzir  $\frac{\partial f}{\partial x}$  a (Kuga, 1982):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \\ A_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

onde  $0_{3 \times 3}$  é uma submatriz nula de dimensão  $3 \times 3$ ;  $I_{3 \times 3}$  é a submatriz identidade  $3 \times 3$  e  $A_{3 \times 3}$  é uma matriz  $3 \times 3$  dada por:

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x^e} & \frac{\partial f_1}{\partial y^e} & \frac{\partial f_1}{\partial z^e} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x^e} & \frac{\partial f_2}{\partial y^e} & \frac{\partial f_2}{\partial z^e} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x^e} & \frac{\partial f_3}{\partial y^e} & \frac{\partial f_3}{\partial z^e} \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

onde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x^e} &= \frac{\mu}{r_s^{e^2}} \left[ 3x^{e^2} - r_s^{e^2} - \frac{3}{2} J_2 R^2 + \frac{15}{2} \frac{J_2 R^2}{r_s^{e^2}} (x^{e^2} + z^{e^2}) - \frac{105}{2} \frac{J_2 R^2}{r_s^{e^2}} x^{e^2} z^{e^2} \right] \\ \frac{\partial f_1}{\partial y^e} &= 3 \frac{\mu x^e y^e}{r_s^{e^5}} \left[ 1 + \frac{5}{2} \frac{J_2 R^2}{r_s^{e^2}} - \frac{35}{2} \frac{J_2 R^2}{r_s^{e^4}} z^{e^2} \right] \\ \frac{\partial f_1}{\partial z^e} &= 3 \frac{\mu x^e z^e}{r_s^{e^5}} \left[ 1 + \frac{15}{2} \frac{J_2 R^2}{r_s^{e^2}} - \frac{35}{2} \frac{J_2 R^2}{r_s^{e^4}} z^{e^2} \right] \\ \frac{\partial f_2}{\partial x^e} &= \frac{\partial f_1}{\partial y^e}; \quad \frac{\partial f_2}{\partial y^e} = \frac{y^e}{x^e} \frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{f_1}{x^e}; \quad \frac{\partial f_2}{\partial z^e} = \frac{y^e}{x^e} \frac{\partial f_1}{\partial z^e} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x^e} = \frac{\partial f_1}{\partial z^e}; \quad \frac{\partial f_3}{\partial y^e} = \frac{\partial f_2}{\partial z^e}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial z^e} = \frac{\mu}{r_s e^5} \left[ -r_s e^2 + 3(z e^2 - \frac{3}{2} J_2 R^2 + 15 \frac{J_2 R^2}{r_s e^2} z e^2 - \frac{35}{2} \frac{J_2 R^2}{r_s e^4} z^4) \right]$$

Esse desenvolvimento completa a modelagem da dinâmica do estimador e estão disponíveis todas as equações necessárias para implementação do algoritmo.

Em particular, a formulação do estimador para a aproximação controlada é dada por:

$$\dot{x}_c = f(x_c(t), t) + G u_c(t) \quad (A.15)$$

ou

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{c1} \\ \dot{x}_{c2} \\ \dot{x}_{c3} \\ \dot{x}_{c4} \\ \dot{x}_{c5} \\ \dot{x}_{c6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{c4} \\ x_{c5} \\ x_{c6} \\ f_1(x_c, t) \\ f_2(x_c, t) \\ f_3(x_c, t) \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} u_{c1} \\ u_{c2} \\ u_{c3} \end{bmatrix} \quad (A.16)$$

com a matriz G, de dimensão 6 x 3, dada por algum dos três critérios desenvolvidos na Seção 3.5.

## APÊNDICE B

### MODELAGEM DAS OBSERVAÇÕES

As observações necessárias para simulação do estimador no problema de estimação de órbita de um satélite em torno da Terra são fornecidas por estações topocêntricas fictícias, conforme descrito no Capítulo 4. As medidas "realizadas" por tais estações são do tipo "range" e "range-rate", bastante comuns no rastreamento de satélites.

O objetivo deste apêndice é gerar as equações de observação escalares utilizadas no procedimento, da forma:

$$z = h(x, t) \quad (B.1)$$

onde  $z$  é o valor numérico da medida,  $x$  é o vetor de estado do satélite e  $h$  a relação não linear que modela a observação.

Para manter coerência com a órbita "real" simulada, as observações são obtidas no sistema de coordenadas quase inercial, geocêntrico, com a origem do vetor  $Ox$  no equatorial terrestre, apontando para o ponto vernal da data de 1950,0. Convém lembrar que, uma vez gerado o valor determinístico da medida, através de (B.1), esta será corrompida com ruído aleatório para caracterizar uma medida real, antes de ser entregue ao estimador.

A observação de "range" é dada pela medida da distância do centro de massa do satélite até a antena da estação de rastreamento, conforme apresentado na Figura B.1.

Da Figura B.1, tem-se:

$$\vec{\rho} = \vec{r} - \vec{R}_E \quad (B.2)$$

onde  $\vec{\rho}$  é o vetor de "range",  $\vec{r}$  é o vetor posição do satélite e  $\vec{R}_E$  o vetor de posição da estação. A medida realizada pela estação corresponde

ao módulo do vetor de "range" e, portanto:

$$h_1(x, t) = \rho = [(x - x_E)^2 + (y - y_E)^2 + (z - z_E)^2]^{1/2} \quad (B.3)$$

onde  $\vec{r} = (x, y, z)$  são as coordenadas de posição do satélite e  $\vec{R} = (x_E, y_E, z_E)$  as coordenadas de posição da estação.

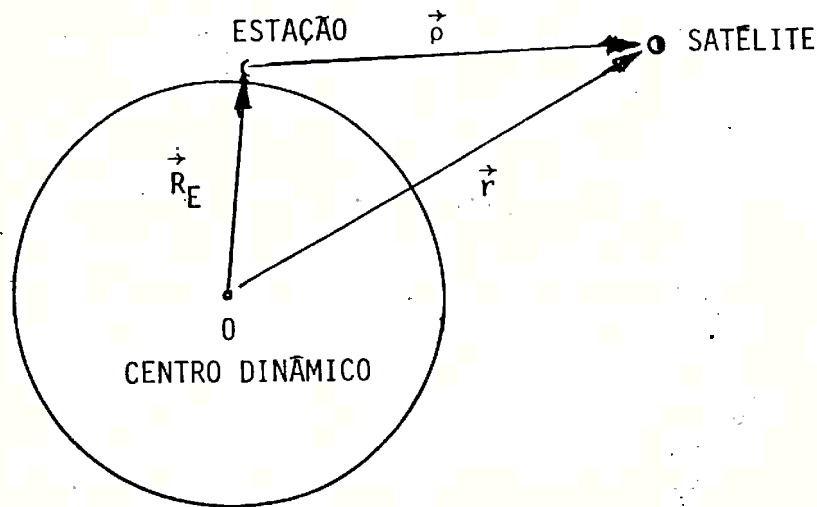


Fig. B.1 - Medida de "range" (Kuga, 1982).

Para obtenção do "range-rate" basta derivar a expressão do "range" em relação ao tempo. Para tanto utiliza-se a expressão:

$$\rho^2 = \vec{\rho} \cdot \vec{\rho} = (\vec{r} - \vec{R}_E) \cdot (\vec{r} - \vec{R}_E) \quad (B.4)$$

que, derivada, fornece:

$$\rho \dot{\rho} = (\vec{r} - \vec{R}_E) \cdot (\dot{\vec{r}} - \dot{\vec{R}}_E) \quad (B.5)$$

onde  $\dot{\vec{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  representa o vetor velocidade do satélite e  $\dot{\vec{R}}_E = (\dot{x}_E, \dot{y}_E, \dot{z}_E)$  é o vetor velocidade da estação. Desenvolvendo a expressão (B.5) chega-se à relação entre medida e vetor de estado na forma:

$$h_2(x, t) = \dot{\rho} = \frac{1}{\rho} [(x - x_E) (\dot{x} - \dot{x}_E) + (y - y_E) (\dot{y} - \dot{y}_E) + (z - z_E) (\dot{z} - \dot{z}_E)] \quad (B.6)$$

Dessa maneira, a modelagem das observações fica completa, com as expressões necessárias sendo dadas por (B.3) e (B.6). Estas relações são agora utilizadas para gerar a matriz de derivadas parciais das observações em relação ao vetor de estado  $x$ , que, num passo típico do algoritmo, é dada por:

$$H_k = \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x(t_k) = \bar{x}(t_k)} \quad (B.7)$$

Tomando-se a equação de definição da medida de "range", (B.3), e derivando em relação a cada uma das variáveis:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x - x_E}{\rho}; \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{y - y_E}{\rho}; \quad \frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{z - z_E}{\rho} \quad (B.8)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial \rho}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial \rho}{\partial \dot{z}} = 0$$

Para se obter a derivada da observação de "range-rate" em relação às variáveis de estado, utiliza-se a regra da cadeia:

$$\frac{\partial \rho \dot{\rho}}{\partial x} = \rho \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial x} + \dot{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (B.10)$$

e, portanto:

$$\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho \dot{\rho}}{\partial x} - \dot{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \quad (B.11)$$

A utilização da expressão (B.11) é preferível pois  $\frac{\partial \rho \dot{\rho}}{\partial x}$  é facilmente calculável de:

$$\rho\dot{\rho} = (\vec{r} - \vec{R}_E) \cdot (\dot{\vec{r}} - \dot{\vec{R}}_E) = (x - x_E) (\dot{x} - \dot{x}_E) + (y - y_E) (\dot{y} - \dot{y}_E) + (z - z_E) (\dot{z} - \dot{z}_E) \quad (\text{B.12})$$

Obtem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \dot{\rho}}{\partial x} &= \dot{x} - \dot{x}_E; & \frac{\partial \rho \dot{\rho}}{\partial y} &= \dot{y} - \dot{y}_E; & \frac{\partial \rho \dot{\rho}}{\partial z} &= \dot{z} - \dot{z}_E \\ \frac{\partial \rho \dot{\rho}}{\partial \dot{x}} &= x - x_E; & \frac{\partial \rho \dot{\rho}}{\partial \dot{y}} &= y - y_E; & \frac{\partial \rho \dot{\rho}}{\partial \dot{z}} &= z - z_E \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Substituindo, agora, as expressões (B.9), (B.13) e (B.14) em (B.11), obtem-se, para as derivadas parciais das observações:

$$\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial x} = \frac{1}{\rho} [(\dot{x} - \dot{x}_E) - \dot{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}] \quad (\text{B.15})$$

$$\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial y} = \frac{1}{\rho} [(\dot{y} - \dot{y}_E) - \dot{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y}] \quad (\text{B.16})$$

$$\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial z} = \frac{1}{\rho} [(\dot{z} - \dot{z}_E) - \dot{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z}] \quad (\text{B.17})$$

$$\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \dot{x}} = \frac{1}{\rho} (x - x_E) = \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (\text{B.18})$$

$$\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \dot{y}} = \frac{1}{\rho} (y - y_E) = \frac{\partial \rho}{\partial y} \quad (\text{B.19})$$

$$\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \dot{z}} = \frac{1}{\rho} (z - z_E) = \frac{\partial \rho}{\partial z} \quad (\text{B.20})$$

Dessa maneira, a matriz de derivadas parciais das observações de "range" e "range-rate" em relação ao estado para uma estação E é dada por:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial x} & \frac{\partial \rho}{\partial y} & \frac{\partial \rho}{\partial z} & \frac{\partial \rho}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial \rho}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial \rho}{\partial \dot{z}} \\ \frac{\partial \rho}{\partial x} & \frac{\partial \rho}{\partial y} & \frac{\partial \rho}{\partial z} & \frac{\partial \rho}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial \rho}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial \rho}{\partial \dot{z}} \end{bmatrix} \quad (B.21)$$

com as componentes calculadas através de (B.8), (B.9) e (B.15) a (B.20).

## APÊNDICE C

### DIAGRAMAS DE BLOCOS

Neste apêndice são mostrados os diagramas de bloco simplificados utilizados no programa de teste do estimador.

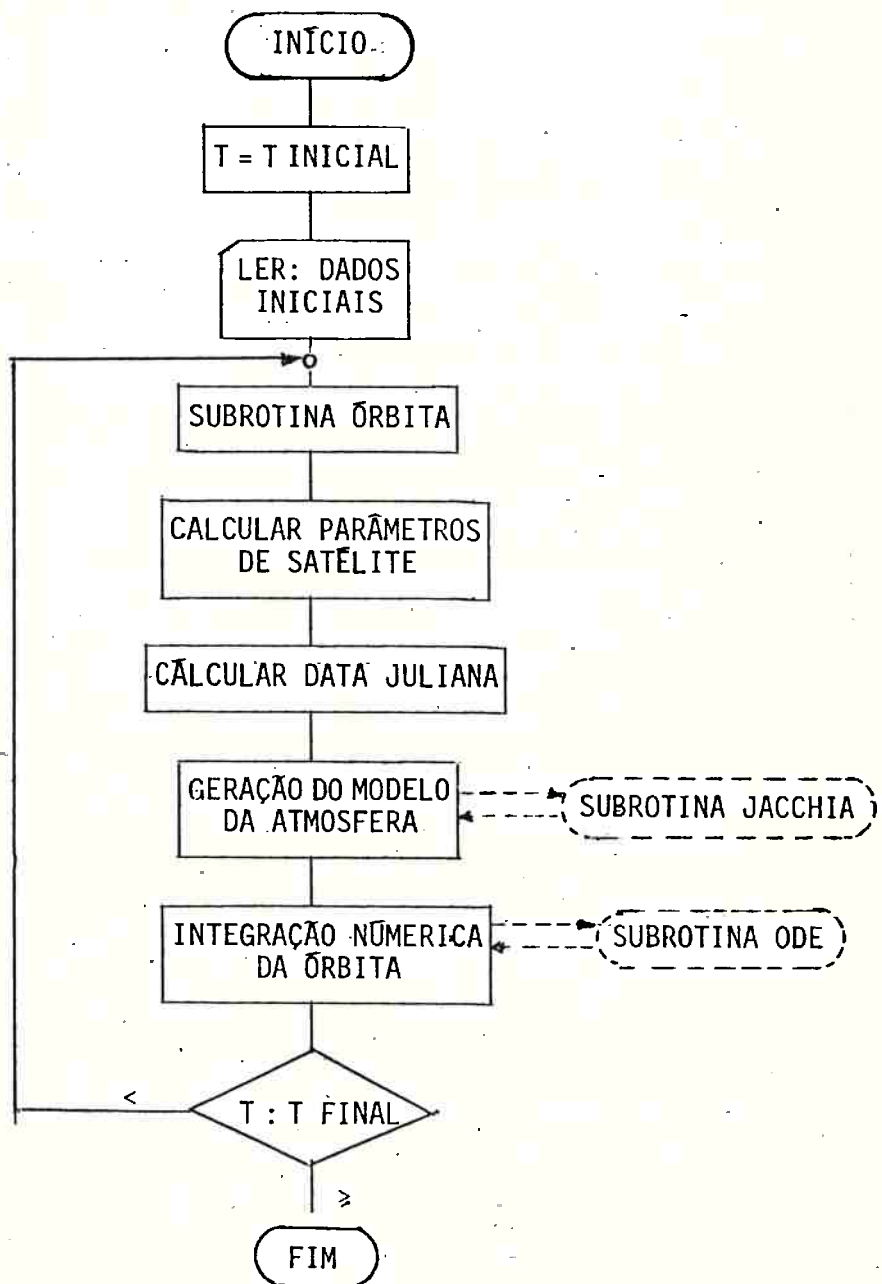
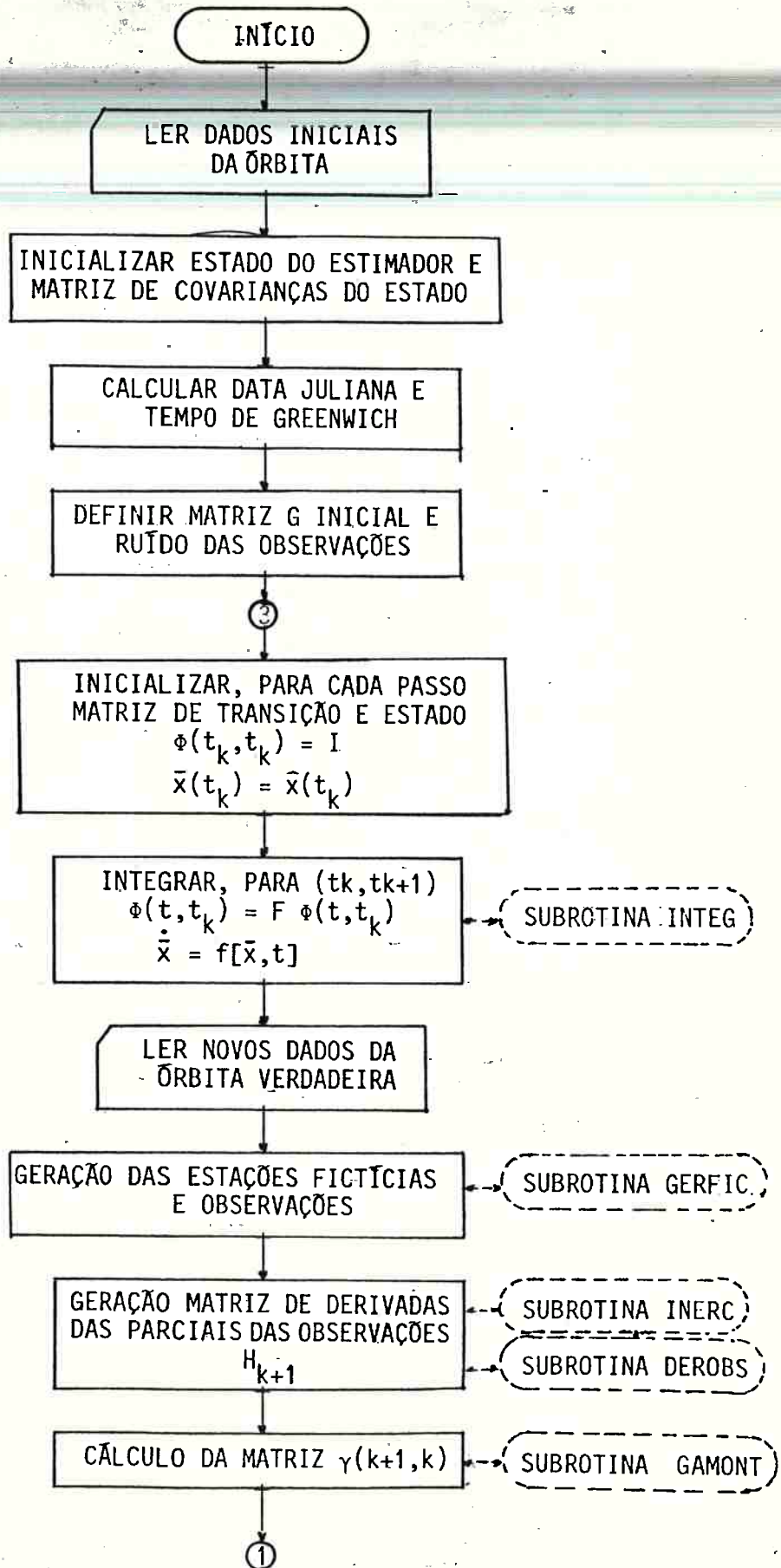


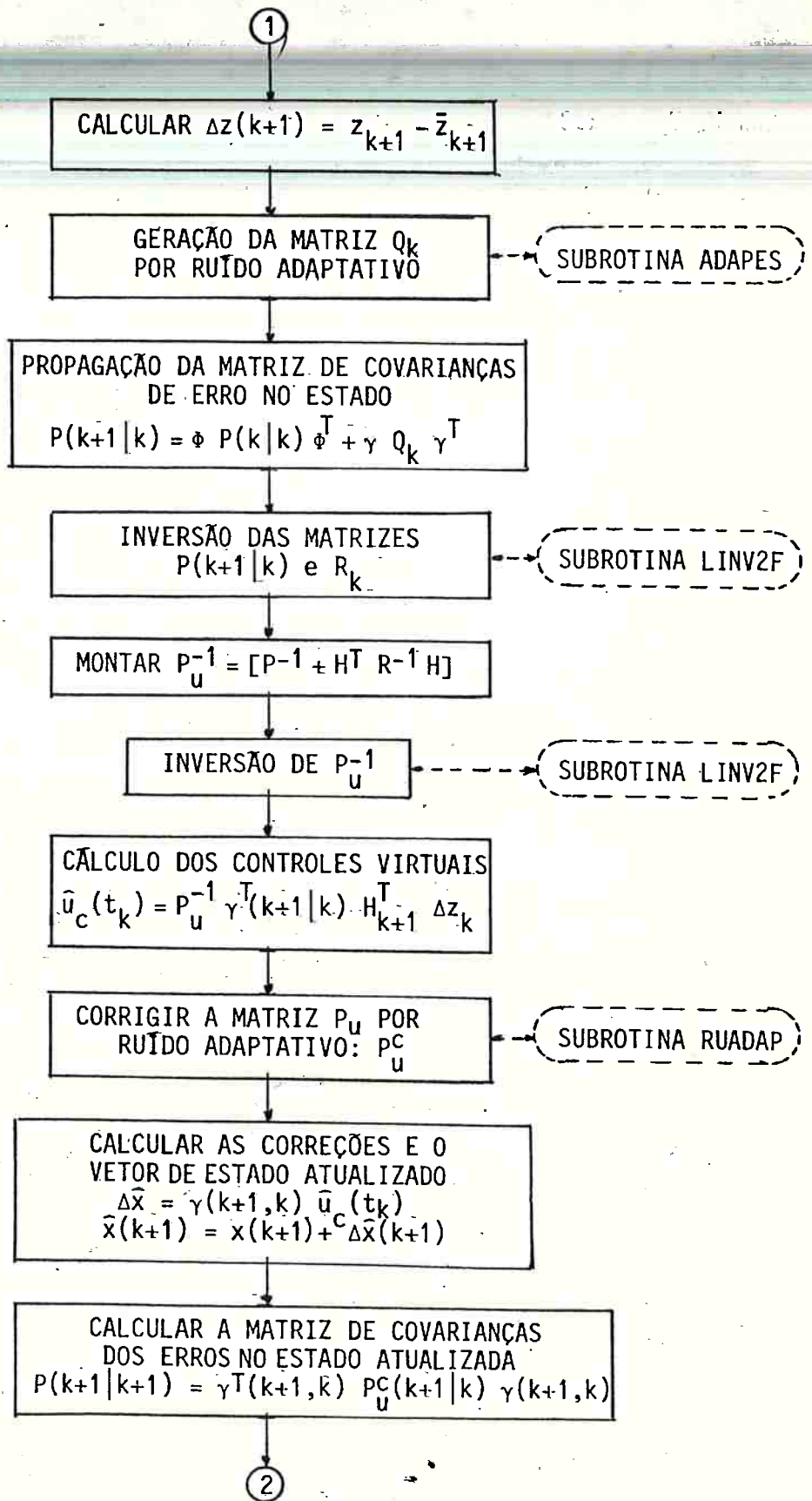
Fig. C.1 - Simulação da órbita verdadeira





(continua)

(cont.: Fig. C.2)



(continua)

(conclusão Fig. C.2)

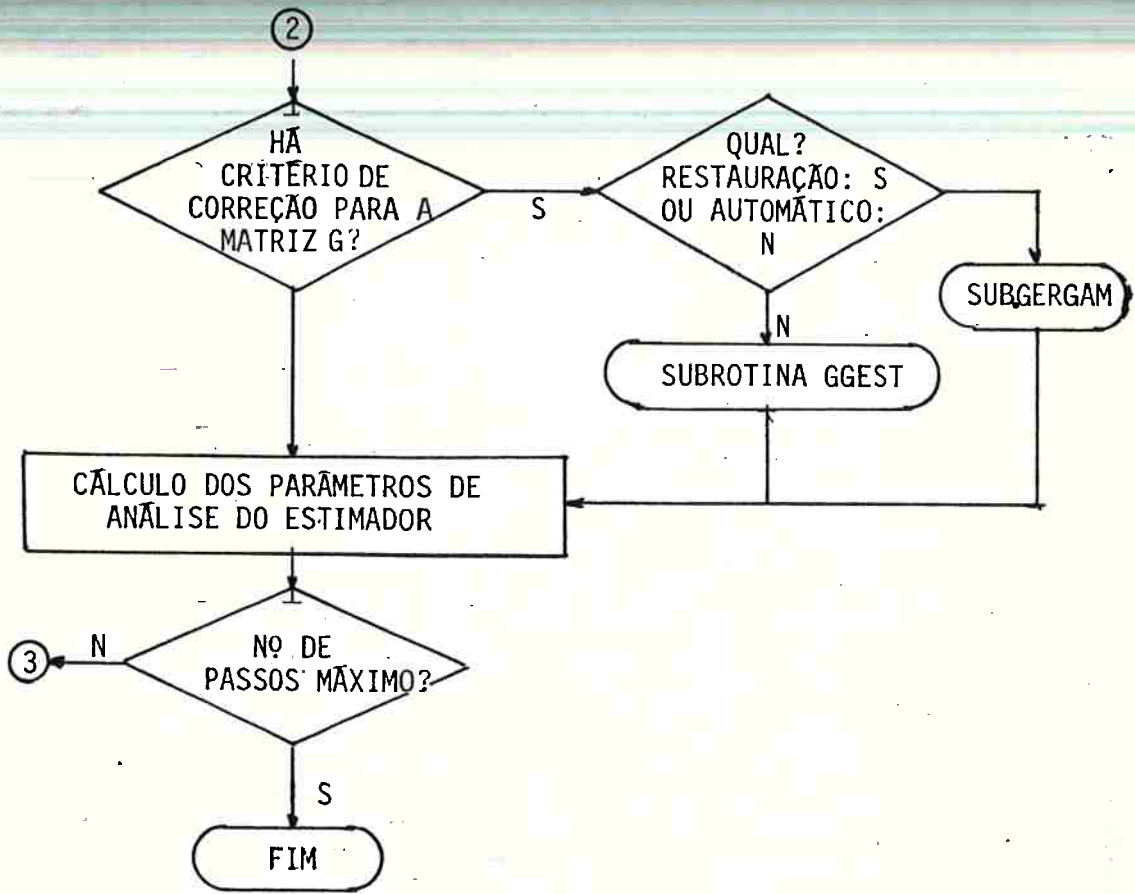


Fig. C.2 - Teste do estimador

## APÊNDICE D

### O PROBLEMA DE TESTE RESOLVIDO ATRAVÉS DAS TÉCNICAS USUAIS

Neste apêndice são resumidos alguns dos resultados obtidos na solução do problema de estimação da órbita de um satélite a baixa altitude com a utilização das técnicas usuais descritas no Capítulo 2. Com isso pretende-se destacar o alto grau de dificuldade existente no tratamento desse problema e, ao mesmo tempo, fornecer dados para comparação entre o desempenho do estimador proposto e o desempenho das outras técnicas. Este resumo está baseado principalmente no trabalho de Kuga (1982) em razão de se ter, nesse trabalho, as mesmas características de satélite e órbita usadas no problema de teste com o estimador proposto.

Para caracterizar a tendência de divergência no problema tratado, as Figuras D.1, D.2 e D.3 (Kuga, 1982) mostram os comportamentos dos erros estimados e reais em posição e velocidade e do resíduo normalizado de "range" para o caso da aplicação do Filtro Estendido de Kalman sem técnica de compensação dos erros de modelagem.

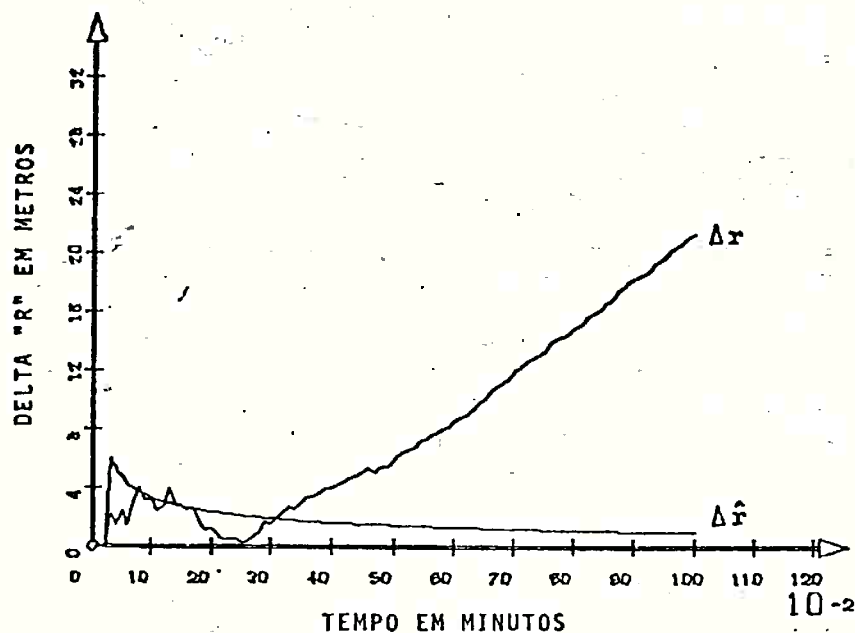


Fig. D.1 -  $\Delta r$  e  $\Delta \hat{r}$  para o FEK sem compensação do erro.

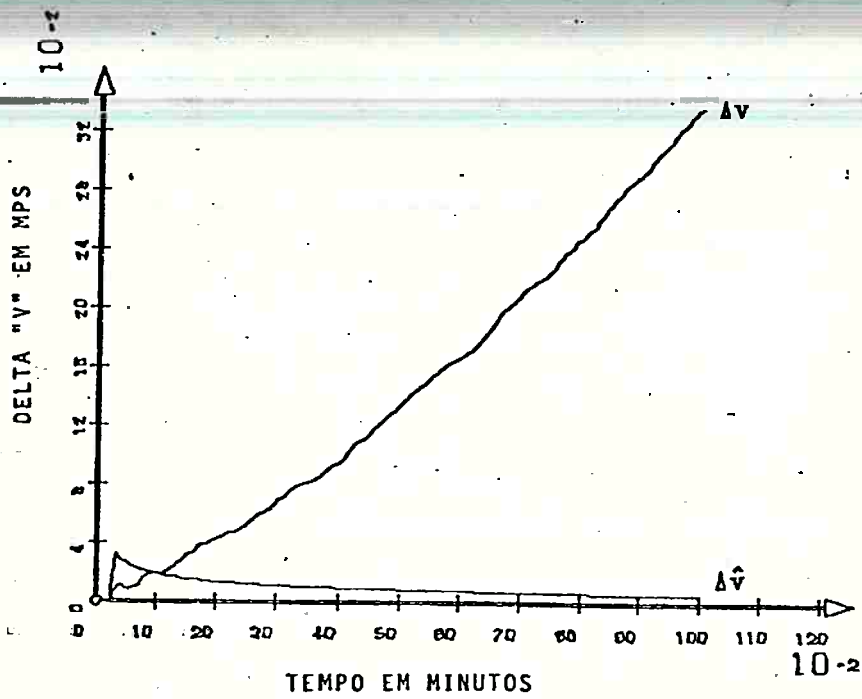


Fig. D.2 -  $\Delta v$  e  $\Delta \hat{v}$  para o FEK sem compensação do erro.

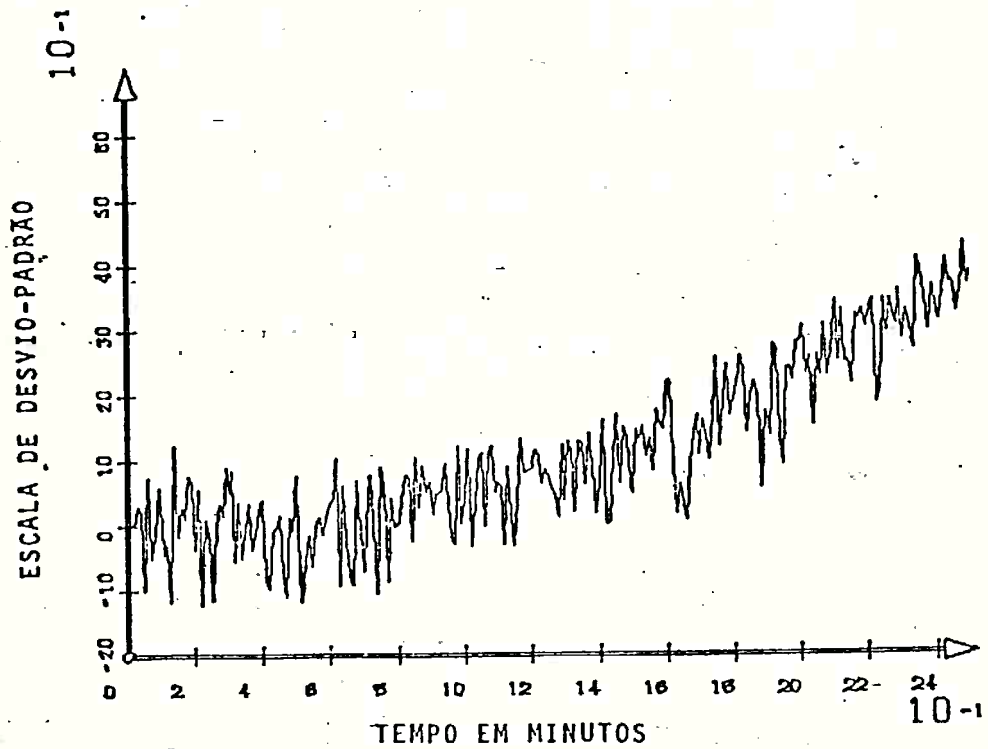


Fig. D.3 - Resíduo Normalizado de "Range" para o FEK sem técnica de compensação do erro.

Verifica-se, portanto, de qualquer das Figuras acima, a rápida manifestação de divergência pois em apenas 20 seg. os erros reais, tanto em posição como em velocidade, começam a crescer indicando a deterioração das estimativas enquanto os respectivos erros estimados decrescem, transmitindo uma visão totalmente irrealista ao estimador.

Embora seja bastante difícil montar um esquema completo de comparação entre os resultados obtidos com o estimador proposto e os resultados alcançados com a utilização de outras técnicas, é sempre possível estabelecer comparações a níveis qualitativos entre dois estimadores se baseados na solução de problemas semelhantes. Com esse espírito, são mostrados os gráficos correspondentes aos erros reais e estimados para posição e velocidade (Figuras D.4 e D.5) e aos resíduos normalizados de "range" e "range-rate" obtidos por Kuga, (1982), para o problema de estimação de órbita, nas mesmas condições do Caso 3 com uso do Critério Automático apresentado no Capítulo 4, com as ressalvas de que os desvios-padrões nas observações de "range" e "range-rate" e os valores iniciais de velocidades e matriz de covariância dos erros no estado são diferentes. Nessa simulação foram usados o Filtro Estendido de Kalman e a técnica de Ruído Adaptativo baseada no acompanhamento do resíduo verdadeiro de observação (Rios Neto e Kuga, 1981).

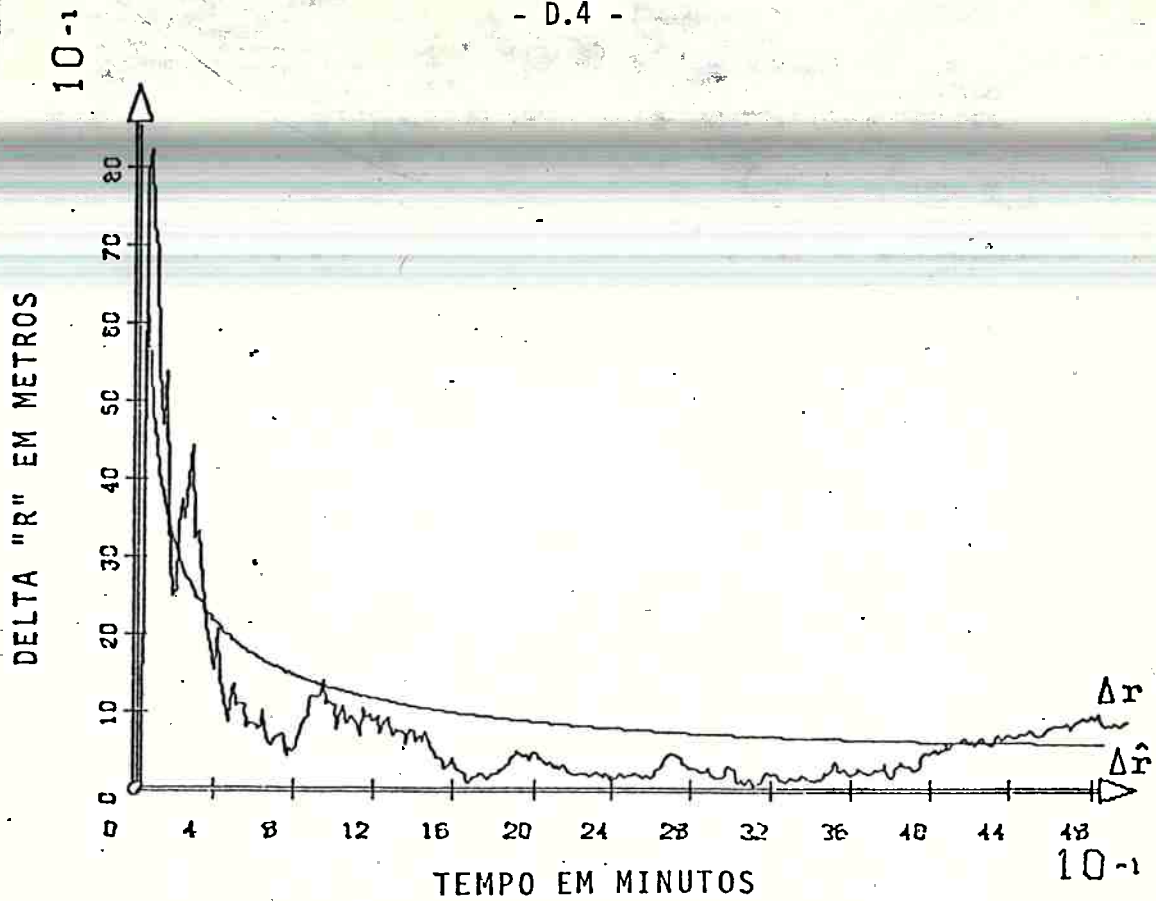


Fig. D.4 -  $\Delta r$  e  $\hat{\Delta r}$  para FEK com Ruído Adaptativo.

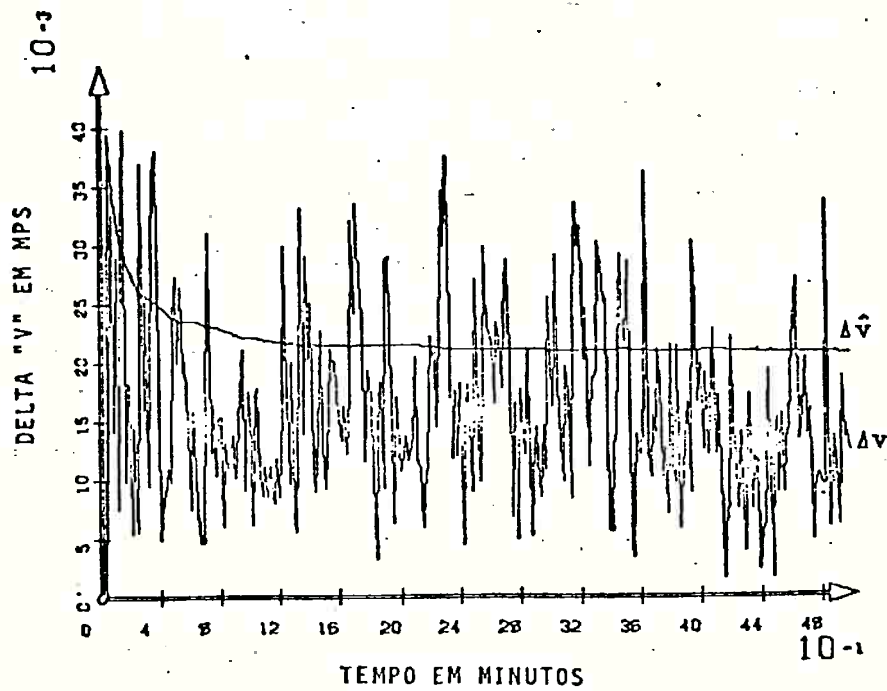


Fig. D.5 -  $\Delta v$  e  $\hat{\Delta v}$  para FEK com Ruído Adaptativo.

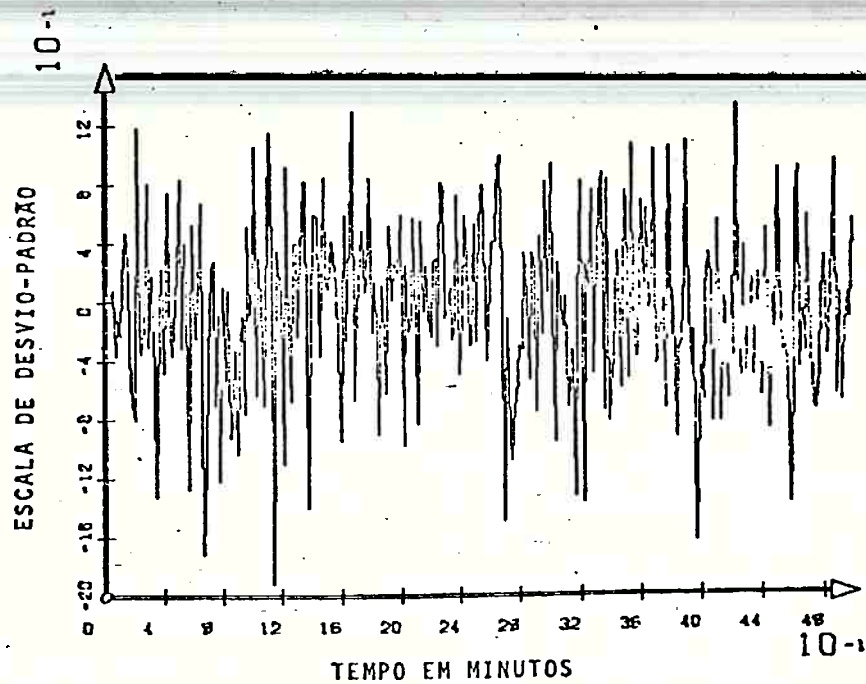


Fig. D.6 - Resíduo Normalizado de "Range" para FEK com Ruído Adaptativo.

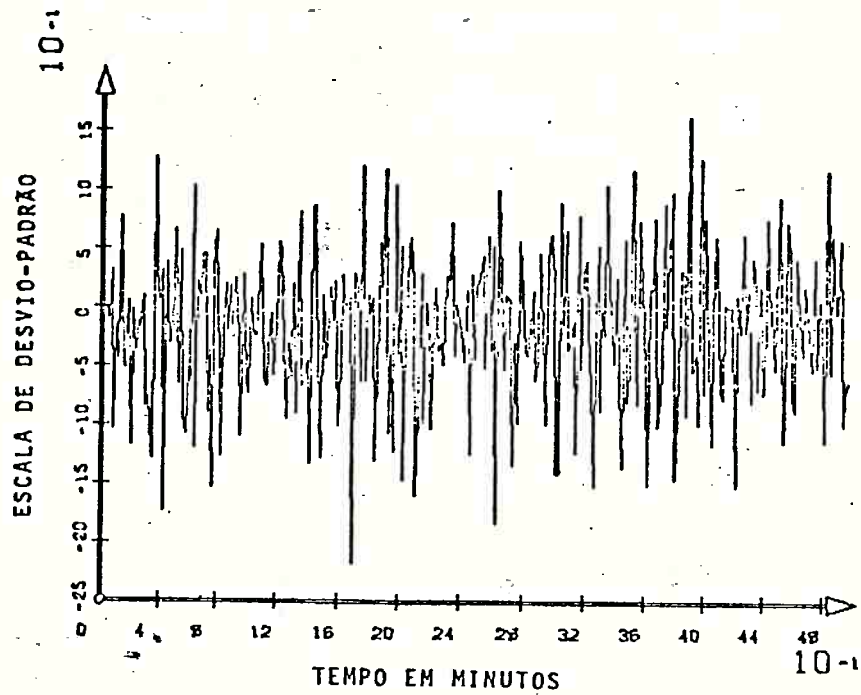


Fig. D.7 - Resíduo Normalizado de "Range-rate" para FEK com Ruído Adaptativo.



Nota-se, por confrontação das Figuras 4.31 a 4.35 com as Figuras mostradas acima que o comportamento dos dois estimadores é bastante semelhante, embora as diferenças nas escalas para uma e outra simulação, entre outros motivos, não permitam uma comparação direta. Ainda assim, verifica-se que o estimador proposto tem convergência tão rápida quanto o Filtro Estendido, caracterizada pelo atingimento da faixa de precisão das observações em cerca de 10 segundos e a manutenção das estimativas dentro dessa faixa ao longo de todo o intervalo de processamento.

Os comportamentos dos resíduos normalizados das observações são da mesma forma muito parecidos, colocando-se, em ambos os casos, rapidamente na faixa de  $\pm 1\sigma$ .

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ATHANS, M.; WISHNER, R.P.; BERTOLINI, A. Suboptimal state estimation for continuous - time nonlinear systems from discrete noisy measurements. *IEEE Transactions Automatic Control*, AC13(5):504-514, Oct. 1968.
- BAR-SHALOM, Y.; TSE, E. Concepts and Methods in Stochastic Control. New York, NY, Academic, 1976. *Control and Dynamic Systems Advances in Theory and Applications* (12):99-172.
- BRYSON, A.E.; DENHAM, W.F. A Steepest-Ascent Method for solving optimum programming problems. *Transactions ASME, ser. E, J Applied Mechanics*, 247-257, 1962.
- BRYSON, A.E.; HO, Y.C. *Applied optimal control*. New York, John Wiley, 1975.
- CARRARA, V. *As rotinas gráficas Curva e Gráfico: descrição e utilização*. São José dos Campos, INPE, fev. 1984. (INPE-3009-RPI/087).
- . *Estimação das forças aerodinâmicas em satélites terrestres, aplicação a um satélite experimental*. São José dos Campos, INPE, nov. 1980. (INPE-1944-RPE/262).
- CITRON, S.J. *Elements of Optimal Control*. New York, Holt, Rinehart and Winston, 1969.
- CRUZ, J.J.; RIOS NETO, A. Estimating the state of ships in the presence of unmodelled accelerations, *American Towing Tank Conference*, 19, Ann Arbor, Michigan, USA, 1980.
- DENHAM, W.F.; PINES, S. Sequential estimation when measurement function nonlinearity is comparable to measurement error. *AIAA Journal*, 4, 1071-1076, 1966.
- FELDBAUM, A. *Principes theoriques des systems asservis optmaux*. Moscou, Mir, 1973 (Edição francesa).
- FORSYTHE, G.E.; MALCOLM, M.A.; MOLER, G.B. *Computer methods for mathematical computations*. Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1977.

- GELB, A.; KASPER Jr., J.F.; NASH Jr., R.A.; PRICE, C.F.; SUTHERLAND, Jr., A.A. *Applied optimal estimation*. Cambridge, MA, MIT, 1974.
- HEMPEL, P.R. General expansion of the density for nonlinear filtering. *AIAA Journal Guidance and Control*, 3(2):166-171, March/April 1980.
- INTERNATIONAL MATHEMATICAL AND STATISTICAL LIBRARY (IMSL). *IMSL Library Reference Manual*. USA, 1981, v. 2, cap. L.
- INGRAM, D.S. *Orbit determination in the presence of unmodeled accelerations*. Applied Mechanics Research Laboratory Report 1022, Univ. Texas at Austin, 1971.
- JACCHIA, L.G. *Revised static models for the thermosphere and exosphere with empirical temperature profiles*. Cambridge, MA, Smithsonian Astrophysical Observatory, 1971. (SAO Special Report n<sup>o</sup> 332).
- JAZWINSKI, A.H. Adaptive filtering. *Automatica*, 5:475-485, 1969.
- . *Stochastic processes and filtering theory*. New York, Academic, 1970. (Mathematics in Science and Engineering, 64).
- . Adaptive sequential estimation with applications. *Automatica* (10):203-207, 1974.
- JENSEN, J.; TOWNSEND, G.E.; KORK, J.; KRAFT, J.D. *Design guide to orbital flight*. New York, NY. Mc Graw-Hill, 1962.
- KAILATH, T. An innovations approach to least square estimation. -Part I: Linear filtering in additive white noise. *IEEE Transactions Automatic Control*, AC-13; 646-655, 1968.
- KALMAN, R.E.; BUCY, R.S. New results in linear filtering and prediction theory. *Transactions ASME, Ser D, JBasic Engineering*, 83, 95-108, 1961.
- KALMAN, R.E. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions ASME, Ser D, JBasic Engineering*, 82, 35-45, 1960.
- KRUCZYSKI, L.R. *Global Positioning System navigation algorithms*, Applied Mechanics Research Laboratory Report 1079, Univ. of Texas at Austin, 1977.

- KUGA, H.K. *Estimação adaptativa de órbitas aplicada a satélites a baixa altitude*. Tese de Mestrado em Ciência Espacial. São José dos Campos, INPE, fev. 1982. (INPE-2316-TDL/079).
- KUSHNER, H.J. *Stochastic stability and control*. New York, Academic, 1967.
- LASDON, L.S.; MITTER, S.K.; WARREN, A.D. The Conjugate Gradient Method for optimal control problems. *IEEE Transactions Automatic Control*, AC-12(2):132-138, 1967.
- LEE, E.B.; MARKUS, L. *Foundation of Optimal Control Theory*. New York, Wiley, 1967.
- LIEBELT, P.B. *An introduction to optimal estimation*. Menlo Park, CA, Addison-Wesley, 1967.
- LIU, C.H.; MARCUS, S.I. Estimator performance for a class of nonlinear estimation problems. *IEEE Transactions Automatic Control*. AC-25(2):299-302, Apr. 1980.
- LIU, C.H. *A comparison of Optimal and Suboptimal estimators and estimation lower bounds*. Ms'C. Dissertation. Austin, TX, The University of Texas at Austin, Aug. 1978.
- LUENBERGER, D.G. *Introduction to dynamic systems: theory, models and applications*. New York, Wiley, 1979.
- . An introduction to observers. *IEEE Transactions Automatic Control*, AC-16(6):596-602, 1971.
- MAYBECK, R.S. *Stochastic models, estimation and control*. v. 1, New York, Academic, 1979. (Mathematics in Science and Engineering 141-1).
- . *Stochastic models, estimation and control*, v. 2, New York, Academic, 1982. (Mathematics in Science and Engineering 141-2).
- MEDEIROS, V.M.; KUGA, H.K. *Algoritmo de baixa precisão para determinação da posição dos dez corpos mais importantes do sistema solar*. São José dos Campos, INPE, dez. 1980. (INPE-1954-RPE/268).

- MIELE, A. Recent advances in gradient algorithms for optimal control problems. *J Optimization Theory and Applications*, 17(5/6):361-430, 1975.
- MORO, J. *Modelagem, análise e síntese preliminar de um sistema de controle de atitude em três eixos para satélites artificiais*. Tese de doutoramento. São Paulo, SP, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1983.
- NEGREIROS DE PAIVA, R. *Simulação numérica da densidade atmosférica*. São José dos Campos, INPE, mar. 1979. (INPE-1436-RPI/002).
- . *Simulação da órbita e das observações de um satélite artificial ao redor da Terra*. São José dos Campos, INPE, dez. 1980. (INPE-1955-RPE/269).
- PAPOULIS, A. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. Tokyo, Mc Graw-Hill Kogakusha, 1965.
- RIOS NETO, A. *The estimation of the state and the unmodeled atmospheric drag for near Earth satellites*. PhD Dissertation. Austin, Tx, The University of Texas at Austin, 1973.
- RIOS NETO, A.; CRUZ, J.J. A stochastic rudder control law for ship path-following autopilots. Accepted for publication in *Automatica*, v. 21(4), 1985. Paper 707.
- RIOS NETO, A.; KUGA, H.K. Estimacão adaptativa e em tempo real de órbita de satélites artificiais a baixa altitude. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECÂNICA, 6, Rio de Janeiro, 1981. *Anais. Associação Brasileira de Ciências Mecânicas*, 1981, v.B, p. 405-414.
- . Estimacão adaptativa do ruído no estado para o filtro de Kalman. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 4, Campinas, 1982. *Anais. Campinas*, 1982. vol. 1, p. 101-105.
- RIOS NETO, A.; NEGREIROS DE PAIVA, R. An adaptive satellite orbit estimation scheme using an analytical approach and a dynamical model compensation technique. In: S. FERRAZ-MELLO, P.E. NACOZY. *The Motion of Planets and Natural and Artificial Satellites*. São Paulo, Universidade de São Paulo, 133-146, 1983.

- RIOS NETO, A.; FLEURY, A.T. *Utilização das noções de dualidade no desenvolvimento de um estimador de estado*. São José dos Campos, INPE, set. 1984. (INPE-3288-RPI/110).
- SAFONOV, M.G. *Robustness and stability aspects of multivariable feedback system design*. PhD Dissertation. Cambridge, MA, MIT, 1977.
- SAFONOV, M.G.; ATHANS, M. Robustness and computational aspects of nonlinear stochastic estimators and regulators. *IEEE Transactions Automatic Control*, AC-23(4):717-725, 1978.
- SHAMPINE, L.F.; GORDON, M.K. *Computer solutions of ordinary differential equations: the initial value problem*. San Francisco, CA., W.H. Freeman, 1975.
- SORENSEN, H.W. An overview of filtering and stochastic control in dynamic systems. New York, NY, Academic, 1976. *Control and Dynamic Systems Advances in Theory and Applications*(12):1-56.
- SORENSEN, T.W. Kalman filtering techniques. New York, NY, Academic, 1969. *Advances in Control Systems* (3):219-292.
- SUNAHARA, Y.; AIHARA, S.; KISHINO, K. On the stochastic observability and controllability for nonlinear systems. *International J Control*, 22(1):65-82, Jan. 1975.
- TAPLEY, B.D.; INGRAM, D.S. Orbital determination in the presence of unmodeled accelerations. *IEEE Transactions Automatic Control*, AC-18(4):359-373, Aug. 1973.
- TARN, T.J.; RASIS, Y. Observers for nonlinear stochastic systems. *IEEE Transactions Automatic Control*, AC-21(4):441-448, Aug. 1976.
- WIENER, N. *The extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series*. New York, Wiley, 1949.
- WISHNER, R.P.; TABACZYNSKI, J.A.; ATHANS, M. A comparison of three non-linear filters. *Automatica*, 5:487-496, 1969.