

JOSÉ IGNACIO HERNÁNDEZ LÓPEZ

ESTUDO DE ESTABILIDADE NO
ESCOAMENTO AO REDOR DE UM
CILINDRO

Tese apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para a obtenção
do título de Doutor em Engenharia.

São Paulo

2004

JOSÉ IGNACIO HERNÁNDEZ LÓPEZ

ESTUDO DE ESTABILIDADE NO
ESCOAMENTO AO REDOR DE UM
CILINDRO

Tese apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para a obtenção
do título de Doutor em Engenharia.

Área de concentração:
Engenharia Mecânica

Orientador:
Professor Dr. Julio Romano Meneghini

São Paulo
2004

*A Carmen,
Adelaida, Pepe,
Maura, Josefina
e a meu avô Bruno.*

AGRADECIMENTOS

A minha esposa María del Carmen, que sempre me incentivou durante a realização deste trabalho, pelo amor com que se dedicou e me apoiou.

Este trabalho contou com o apoio da CAPES (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico), e da PETROBRÁS.

Contou também com a orientação do Prof. Dr. Julio Romano Meneghini, a quem agradeço pela sua ajuda e contínuo apoio.

Ao Prof. Dr. José A.P. Aranha, pela oportunidade de poder observar e aprender ao seu lado.

Ao Prof. Dr. Marcos de Matos Pimenta pelas sugestões no exame de qualificação.

A todos os professores do departamento de Engenharia Mecânica, gostaria de registrar aqui meus sinceros agradecimentos.

A Maria del Carmen López Galan, Alfonso Pappalardo Jr., Guillermo Palmer, Thäis Nazario, Julio Romano Meneghini e José Augusto Penteado Aranha, e Ricardo Flatschart pela ajuda na correção ortográfica do Português. A Julio, Cristina e Jabardo pelo Latex.

Aos Colegas do Núcleo de Dinâmica e Fluidos (NDF), pelas discussões, críticas e sugestões, em especial a Ricardo, Fabio, Jabardo, Cassio, Rodrigo, Alison, Bruno, Jorge, Karl, Gustavo, e os outros que por acaso posso me esquecer, pelo companheirismo e apoio constante. A Rafael Trujillo Codorniú.

A CUBA.

RESUMO

O propósito principal deste estudo é o cálculo do problema linear de estabilidade para o escoamento simétrico ao redor de um cilindro circular. É empregado o método de Usawa, baseado na triangulação do domínio com elementos isoparamétricos (elemento de Taylor Hood: velocidade quadrática e pressão linear), para encontrar a solução aproximada das equações de Navier-Stokes; e o Método das Bases Solenoidais em Elementos Finitos (DFFEM), para encontrar uma base do subespaço solenoidal discreto. O problema linear de estabilidade é embutido no subespaço solenoidal. Neste trabalho é calculado o espectro completo da matriz jacobiana, para o problema de estabilidade do escoamento incompressível ao redor de um cilindro. O espectro tem uma forma topológica semelhante a uma parábola. O Reynolds crítico neste cálculo está na faixa de $47 < Re_c = 47.5 < 48$. O número de Strouhal calculado é $S_t = \frac{\omega D}{2\pi U} = 0,1374$. Os resultados confirmam a efetividade do subespaço nulo do operador divergência, para os cálculos de estabilidade hidrodinâmica na proximidade da bifurcação supercrítica.

ABSTRACT

The principal purpose of this study is the calculation of the linear stability problem of the symmetric flow past a circular cylinder. We employed the Usawa method, based on the triangulation of the domain with isoparametric elements (Taylor-Hood element: quadratic velocity and linear pressure), to find the approximate solution of the discrete Navier-Stokes equation; and the Divergence Free Finite Element method (DFFEM) to find a basis of the solenoidal discrete subspace. The linear stability problem is embedded in the solenoidal subspace. In this work we calculate the complete spectrum of the jacobian matrix for the stability problem of incompressible flow around a cylinder. The spectrum have a topological form similar to a parabola. The critical Reynolds number in our calculation is in the range of $47 < Re_c = 47.5 < 48$. The Strouhal number calculated is $S_t = \frac{\omega D}{2\pi U} = 0,1374$. Our results confirm the effectiveness of the null subspace of the divergence operator for the stability calculations in the vicinity of the supercritical bifurcation.

LISTA DE FIGURAS

4.1	Malha 1	48
4.2	Malha 2	48
4.3	Malha 3	48
4.4	Malha 4	48
4.5	Malha 5	48
4.6	Malha 6	48
4.7	Campo de pressões para o Cilindro Completo (Stokes).	49
4.8	Linhas de corrente (Stokes).	49
4.9	Pressões no ponto frontal (Ps) e traseiro (Pb) do cilindro.	50
4.10	Região de re-circulação observada por Taneda (1956).	51
4.11	Velocidade u na linha de simetria.	52
4.12	Distribuição de vorticidade na superfície do cilindro.	53
4.13	Modulo da velocidade $Re=40$ Zdravkovich (1997)	54
4.14	Modulo da velocidade $Re=40$ (Usawa)	54
4.15	Função de corrente $Re=40$ Zdravkovich (1997)	54
4.16	Função de corrente $Re=40$ (Usawa)	54
4.17	Erro de convergência em múltiplas malhas.	55
4.18	Erro de convergência para uma sequência ascendente em Reynolds numa única malha.	56
4.19	Esparsidade das matrizes de Massa e Difusão.	59
4.20	Esparsidade da matriz Convectiva.	59
4.21	Esparsidade da matriz RR^T	59
4.22	Esparsidade ampliada da matriz de Massa	59
4.23	Espectro completo $Re=46,05$	62
4.24	Espectro ampliado $Re=46,05$	63
4.25	Espectro para $Re=70$ nas malhas 2,3 e 4.	64
4.26	Espectro restrito as vizinhanças do eixo imaginário $Re=46,05$. . .	65

4.27	Parte real do autovalor mais significativo.	66
4.28	Parte imaginária do autovalor mais significativo.	67
4.29	Espectro simétrico e anti-simétrico, malha 3 Re=50.	69
4.30	Diagrama para os elementos $P2P1$, $P2P1^+$ e $P2P1^D$	70
4.31	Esparsidade dos operadores divergência: $P2P1$, $P2P1^+$ e $P2P1^D$	72
4.32	Dimensões dos subespaços solenoidais: $P2P1$, $P2P1^+$ e $P2P1^D$	74
4.33	Espectro para os subespaços gerados por $P2P1$, $P2P1^+$, e $P2P1^D$	76
4.34	Transição do espectro no Reynolds crítico, para o elemento $P2P1^D$	77
4.35	Autovetor que corresponde ao autovalor mais instável.	78
4.36	Evolução da parte real e o Strouhal em função do número de Reynolds.	82
4.37	Evolução da razão entre a parte real e a parte imaginária em função do número de Reynolds.	83
4.38	Ajuste linear da parte real do autovalor, e do Strouhal de saturação.	84
4.39	Coefficientes de Landau, Albaredo (1995)	85

LISTA DE TABELAS

4.1	Malhas: Parâmetros das discretizações	47
4.2	Velocidade na linha de simetria	52
4.3	Posição do ponto de separação	56
4.4	Parâmetros principais das discretizações	59
4.5	Parcelas Real (σ) e Imaginária (ω). Elementos: Quadrático-linear, Quadrático-linear com nó central e Descontínuo ($P2P1$, $P2P1^+$ e $P2P1^D$)	65
4.6	Parâmetros: esta tabela é uma atualização de Ding (1999)	68
4.7	Parâmetros das discretizações para o elemento linear e contínuo com nó central, $P2P1^+$	73
4.8	Parâmetros das discretizações para o elemento descontínuo e linear, $P2P1^D$	73

LISTA DE ABREVIATURAS

Re :	Número de Reynolds
VIV :	Vibração inducida por vortices
PDE :	Equações a derivadas parciais
CFD :	Fluido dinâmica computacional
Re_C :	Número de Reynolds crítico
S_t :	Número de Strouhal
FEM :	Método dos elementos finitos
DVM :	Método das variáveis duais
$DFEM$:	Método solenoidal para elementos finitos
$P2P1$:	Elemento quadrático nas velocidades e linear nas pressões
$P2P1^+$:	Elemento quadrático nas velocidades e linear nas pressões e nó central adicionado
$P2P1^D$:	Elemento quadrático nas velocidades e linear descontínuo nas pressões

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathbb{F}, \mathbb{J} :	Funcionais quadráticos
\mathbb{L} :	Operador linear
$R(*)$:	Resíduo
$(*, *)$:	Produto interno
Ω :	Domínio
$\partial\Omega$:	Fronteira do domínio
$a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$:	Forma bilinear
$\ * \ _E$:	Norma de energia
Υ :	Espaço das funções tentativa
Λ :	Espaço das funções teste
R^n :	Espaço de fase n-dimensional
ϕ_t :	Fluxo
μ :	viscosidade
ρ :	densidade
\mathbf{f} :	forças de campo
p :	pressão
$D_x(*)$:	jacobiano
$\mathbf{F}_u(0, Re \mathbf{u})$:	Operador de Fréchet
X' :	espaço dual
$a(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v})$:	Forma trilinear
π :	operador linear (projetor)
∇^2 :	operador laplaciano
∇ :	operador gradiente
$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$:	termo convectivo
\mathbb{Z} :	subespaço solenoidal

$\dim :$	dimensão
$C^0(\Omega) :$	Espaço das funções contínuas
$C^s(\Omega) :$	Espaço das funções com s derivadas contínuas
$H_0^1(\Omega)^n :$	Espaço vetorial restrito com uma derivada
$L^2(\Omega) :$	Espaço das funções quadrado integrável
$L^2(\Omega)/\mathbb{R} :$	Espaço quociente
$L_0^2(\Omega) :$	Espaço restrito quadrado integrável
$V' :$	espaço dual de V
$H_0^{-1}(\Omega) :$	Espaço dual dos funcionais lineares acotados
$\langle *, * \rangle :$	produto interno
$Z^h :$	subespaço solenoidal discretizado (FEM)
$V_0^h :$	espaço discretizado (FEM) das velocidades
$S_0^h :$	espaço discretizado (FEM) das pressões
$N(\mathbf{U})\mathbf{U} :$	termo convectivo discretizado (FEM)
$\mathbf{V} :$	espaço vetorial
$\mathbf{S} :$	subespaço solenoidal
$D :$	diâmetro
$t :$	tempo
$\ker(*) :$	núcleo
$\pi^S :$	projetor no subespaço solenoidal
$\pi^I :$	projetor no subespaço irrotacional
$\Delta :$	laplaciano
$div :$	operador divergente
$p_r :$	pressão de referência
$\phi_f :$	função potencial
$R^T :$	matriz transposta de R
$R^H :$	matriz hermitica (transposta conjugada) de R
$\kappa(A) :$	número condicional espectral da matriz A
$\lambda_{min}, \lambda_{max} :$	mínimo e máximo autovalor de A
$\mathbf{x}^* :$	vetor solução
$S = BA^{-1}B^T :$	complemento de schur
$M_p :$	matriz discreta para as pressões
$P_{chab} :$	precondicionador de cahouet-chabard

\mathbb{R}^n :	espaço euclidiano n-dimensional
α_k :	peso nodal nas pressões
β_k :	peso nodal nas velocidades
R^T :	operador divergência discreto
R :	operador gradiente discreto
\mathbf{d}_k :	gradiente negativo
\mathbf{x}_0 :	solução de partida
Γ_h :	Malha
$(\mathbf{X}_h^2)^2$:	Espaço (FEM) vetorial discreto
$\mathbf{P}_k(\Omega)$:	Espaço dos polinômios com grau menor ou igual a k
σ :	autovalor

ERRATA

1. Na segunda linha da página *vi*, onde se lê, "Vibração inducida por vórtices", leia-se "Vibração induzida por vórtices".
2. Na página *vi*, onde se lê "ecuações", leia-se "equações".
3. Na página *vii*, onde se lê "tentativa", leia-se "teste".
4. Na página 46, no último parágrafo deve ser acrescentada a sentença: O intervalo de Reynolds investigado é $0 < Re \leq 120$.
5. Na página 50, no último parágrafo, onde se lê "mais", leia-se "mas".
6. Na página 85, a equação (4.29) deve ser substituída por: $\Delta_{Sat} = -\frac{\mu_{0,I}}{\mu_{0,R}}\sigma_0\frac{1}{\pi}$.
7. Na página 61, após o quarto parágrafo, deve ser acrescentada esta sentença: "Para a obtenção do número de Reynolds crítico basta observar o cruzamento dos autovalores mais instáveis pelo eixo imaginário. O valor de Reynolds para o qual ocorre esse cruzamento é denominado Reynolds crítico".

SUMÁRIO

RESUMO	I
ABSTRACT	II
LISTA DE FIGURAS	III
LISTA DE TABELAS	V
LISTA DE ABREVIATURAS	VI
LISTA DE SÍMBOLOS	VII
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 MOTIVAÇÃO	1
1.1.1 IMPORTÂNCIA PRÁTICA	2
1.2 OBJETIVOS	3
1.3 O ESCOAMENTO AO REDOR DE UM CILINDRO	4
1.4 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	5
1.4.1 RESOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES	5
1.4.2 ESTABILIDADE E SUBESPAÇO SOLENOIDAL	6
1.4.3 CONSTANTE DE LANDAU	10
1.5 FORMATO DA TESE	12
2 EQUAÇÕES DOS FLUIDOS INCOMPRESSÍVEIS	14
2.1 PARCELAS SOLENOIDAL E IRROTACIONAL	19
2.2 FORMULAÇÃO PARA A EQUAÇÃO DE STOKES	22

2.3	DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES ATRAVÉS DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS	24
2.3.1	FORMULAÇÃO FRACA TIPO GALERKIN	25
2.4	ELEMENTOS FINITOS DISCRETOS	26
3	ESTABILIDADE HIDRODINÂMICA	29
3.1	BAIXO REYNOLDS	30
3.2	INSTABILIDADE E TRANSIÇÃO	32
3.3	ESTABILIDADE HIDRODINÂMICA FRACA	35
3.3.1	MATRIZ DE MASSA GENERALIZADA	37
3.4	PROJETORES	38
3.5	ELEMENTOS SOLENOIDAIS	40
3.6	SUBESPAÇO NULO DO OPERADOR DIVERGÊNCIA	42
3.6.1	CONDIÇÕES DE CONTORNO NO SUBESPAÇO SOLENOIDAL	44
4	RESULTADOS	46
4.1	CAMPO ESTACIONÁRIO	46
4.1.1	MALHAS	47
4.1.2	VALIDAÇÃO	48
4.1.3	CONVERGÊNCIA	57
4.1.4	OPERADORES DISCRETOS	58
4.2	PROBLEMA DE ESTABILIDADE	60
4.3	SIMETRIA E ANTI-SIMETRIA	70
4.4	SUBESPAÇOS SOLENOIDAIS	71
4.4.1	ESPARSIDADE	72
4.4.2	DIMENSÕES	73
4.5	A FRAÇÃO DE LANDAU	78
4.5.1	REYNOLDS ACIMA DA BIFURCAÇÃO	81
5	CONCLUSÕES	88
5.1	EXTENSÃO DO TRABALHO	91
A	FUNDAMENTOS TEÓRICOS	A-92
A.1	CONCEITOS FUNDAMENTAIS	A-92
A.1.1	FUNCIONAL QUADRÁTICO	A-93
A.1.2	MÉTODO DOS RESÍDUOS PONDERADOS	A-94

A.1.3	MÉTODO DE GALERKIN	A-95
A.2	BIFURCAÇÕES E ESTABILIDADE	A-100
A.2.1	TEORIA LINEAR	A-102
A.2.2	SUBESPAÇOS LINEARES INVARIANTES	A-103
A.3	MOVIMENTOS RÍGIDOS	A-105
A.4	PROBLEMAS DE PONTO DE SELA	A-106
A.4.1	A CONDIÇÃO DE INF-SUP	A-108
A.5	ESPAÇOS FUNCIONAIS E NORMAS	A-109
A.6	A CLASSE DE PROBLEMAS NÃO-LINEARES	A-112
A.7	MÉTODOS DE GRADIENTE	A-114
A.8	GRADIENTES CONJUGADOS	A-116
A.9	PRÉ-CONDICIONADORES	A-118
A.10	O ALGORITMO DE USAWA	A-122
B	PROBLEMA DISCRETO	B-125
B.1	CONDIÇÕES DE CONTORNO	B-125
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	129

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 MOTIVAÇÃO

Este trabalho de doutorado teve como motivação aprofundar a fundamentação teórica do fenômeno de vibração induzida por vórtices, (VIV), devido à emissão de vórtices no escoamento ao redor de um cilindro. O fenômeno de desprendimento de vórtices ("vortex shedding") têm um importante papel dentro do VIV e representa em si um problema clássico de estabilidade onde a solução estacionária das equações de Navier-Stokes do escoamento ao redor de um cilindro circular deixam de ser estáveis, devido a uma bifurcação supercrítica de Hopf (na nomenclatura dos sistemas dinâmicos). Segundo Aranha(2003) os primeiros modelos preditivos utilizados no estudo de VIV, denominados modelos fenomenológicos, resvalam em um tema conexo ao da estabilidade de Hopf. Todos esses modelos baseiam-se na equação de Van der Pol e possuem uma capacidade preditiva invejável, ainda mais quando comparados com as predições diretas que se obtêm através de simulações numéricas (CFD). Esses modelos encontram dois problemas: primeiro, eles traduzem a interação hidro-elástica com uma física muito simplificada; segundo, os coeficientes desses modelos são extraídos de um certo conjunto de experimentos e, por isso, eles podem ser utilizados no máximo como interpoladores, dificilmente

como extrapoladores para uma situação muito distinta daquela que correspondem aos experimentos onde se apóiam.

A bifurcação transforma o campo estacionário de velocidades num campo oscilatório cuja dinâmica é um ciclo limite. Capturar esta primeira bifurcação é o primeiro passo para obter uma compreensão mais apurada do ponto de vista conceitual e científico do fenômeno de "vortex-shedding" e, indiretamente, do fenômeno de VIV.

Evidências empíricas mostram que o fenômeno de VIV e a frequência de desprendimento de vórtices são essencialmente invariantes com o número de Reynolds, no intervalo entre aproximadamente 200 até a zona de transição ($Re \approx 10^5$). Esta observação tem levado a alguns autores a propor modelos fenomenológicos, com o intuito de prever a interação hidroelástica. É um fato que a parcela hidrodinâmica não está diretamente associada as equações de Navier-Stokes nestes procedimentos fenomenológicos.

O propósito fundamental, do qual este trabalho faz parte, consiste em derivar um modelo de oscilador fluido-elástico diretamente a partir das equações de Navier-Stokes. Nesta direção é que se coloca a exploração do subespaço solenoidal discreto, onde a dinâmica fica mais simplificada e carente de multiplicadores de Lagrange. Ao levar o problema de estabilidade ao subespaço antes mencionado consegue-se um grau de redução essencial para a posterior obtenção do modelo do oscilador fluido-elástico.

1.1.1 IMPORTÂNCIA PRÁTICA

Compreender os fundamentos teóricos do mecanismo de desprendimentos de vórtices no escoamento incompressível ao redor de um cilindro é importante no

projeto de sistemas flutuantes de produção de petróleo em águas profundas, devido ao fato de que a rede submersa de dutos está submetida a correntes marítimas, as quais provocam uma interação hidroelástica. Nesta interação os dutos ("risers") podem vir a oscilar transversalmente à corrente acarretando dano por fadiga, diminuindo a vida útil, o que evidentemente não é econômico para a indústria petrolífera. O mecanismo de atenuação destas oscilações empregado nesta indústria, na solução deste problema, possui um alto custo, pelo qual se justifica um estudo rigoroso de fundamentação teórica do fenômeno de geração e desprendimento de vórtices.

Outros exemplos práticos de aplicação da teoria:

- Edifícios altos com formatos cilíndricos sujeitos a rajadas de vento;
- Pilares cilíndricos submersos de pontes sujeitos à corrente fluvial;
- Mastros, torres cilíndricas sujeitos ao efeito dinâmico do vento.

1.2 OBJETIVOS

Considerando a problemática apresentada foram definidos os objetivos do presente trabalho:

- O estudo do problema de estabilidade para o escoamento incompressível ao redor de um cilindro.
- O estudo dos subespaços solenoidais discretos gerados a partir do operador divergência.

A seguir é descrito o substrato físico da dinâmica do escoamento incompressível ao redor de um cilindro, que evolui no espaço do número de Reynolds até a primeira bifurcação de Hopf.

1.3 O ESCOAMENTO AO REDOR DE UM CILINDRO

O escoamento ao redor de um cilindro é considerado de dinâmica mais rica dentro dos casos típicos de escoamentos incompressíveis, (MENEZHINI, 2002). Quando um cilindro circular de diâmetro D e comprimento L é colocado num escoamento uniforme, com velocidade U_∞ , uma esteira é gerada a jusante do cilindro que é controlada por dois parâmetros: o número de Reynolds $Re = (U_\infty D/\nu)$, (onde ν é a viscosidade cinemática) e a razão de aspecto: L/D . Entretanto, ao considerar um cilindro bidimensional infinito, $L/D = \infty$, o escoamento é controlado unicamente pelo número de Reynolds, Re .

À medida que Re é incrementado aparecem diversos regimes para os escoamentos que se formam ao redor de um cilindro. Para $Re \leq 1$, ocorre o escoamento estacionário e lento ("creeping flow"), o qual é descrito teoricamente pela solução das equações de Stokes (BATCHELOR, 1990). Para $Re > 5$ ou 6, o escoamento permanece estacionário mas aparece uma pequena região de recirculação composta por dois vórtices estacionários que rodam em sentidos opostos na parte a jusante do cilindro. Para $Re > Re_C = 45$ (valor crítico de Reynolds), o escoamento sofre uma transição para um estado oscilatório que toma a forma da conhecida esteira de Karman: duas filas de vórtices rodando em direções opostas são desprendidas do cilindro.

O espectro de frequência da esteira mostra um pico diferenciado na frequência fundamental, f . O número de Strouhal $S_t = fD/U_\infty$ se eleva com o número de Reynolds, (WILLIAMSON, 1989), alcançando o valor máximo aproximado, $S_t = 0.2$, para $Re \simeq 200$. A estrutura espaço-temporal responsável por esta mudança qualitativa no comportamento é um modo global auto-sustentável e periódico no tempo (PROVANSAL *et al.*, 1987). Esta bifurcação que acontece

no escoamento é conhecida como de Hopf, sendo a amplitude do ciclo limite da ordem $(Re - Re_C)^{1/2}$ (PROVANSAL *et al.*, 1987).

A seguir foi feita uma revisão bibliográfica onde se descrevem os principais aspectos relativos à pesquisa registrados na literatura.

1.4 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nesta seção foram revisados os principais trabalhos, nos quais baseia-se esta pesquisa no que se refere às partes fundamentais, que estão subtituladas nas subseções a seguir. Estes estudos evidentemente não são os únicos, e ao longo de todo o trabalho, quando necessário, foram citadas as referências bibliográficas que sustentam o tópico em questão.

1.4.1 RESOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

Nesta subseção foi feita uma revisão dos principais estudos dos métodos de resolução numérica das equações de Navier-Stokes. Dos trabalhos onde se trata a resolução numérica das equações de Navier-Stokes existem alguns de revisão indispensável (BREZZI and FORTIN, 1991; BATHE, 1996; GIRAULT and RAVIART, 1986; GUNZBURGER and NICOLAIDES, 1993). Nestes livros pode-se encontrar uma exposição detalhada dos principais procedimentos e problemas associados ao tratamento destas equações, pela Metodologia dos Elementos Finitos (FEM).

FORNBERG (1985,1980) estudou o escoamento viscoso e incompressível ao redor de um cilindro. Em seus estudos o autor determinou, utilizando uma técnica baseada no Método de Newton (utilizando recursos de supercomputação), as

soluções estacionárias e instáveis até o número de Reynolds, $Re=600$. Fornberg encontrou que a região de recirculação cresce em longitude aproximadamente linear com o número de Reynolds. A altura da bolha se incrementa seguindo a lei $(Re)^{1/2}$ até o $Re = 300$, onde se inicia uma transição para um incremento linear com Reynolds. Neste trabalho empregam-se malhas com simetria central e diferenças finitas para a discretização dos operadores. Os trabalhos de Fornberg constituem uma referência importante porque não existem soluções superiores a $Re = 600$ neste tipo de escoamento.

MADAY et al.(1993) fizeram uma análise detalhada do algoritmo de Usawa para o desacoplamento do campo das pressões e das velocidades no caso estacionário e não estacionário da equação de Stokes. Este trabalho concentra-se na construção explícita do espectro do operador das pressões de Usawa.

ELMAN et al.(1996,1999) introduziram pré-condicionadores para sistemas não simétricos indefinidos dos quais Navier-Stokes é um caso particular. com a propriedade de que os autovalores da matriz pré-condicionada são limitados independentemente das dimensões das malhas empregadas nas discretizações. Também são examinadas as características de convergência para os métodos iterativos dotados dos novos pré-condicionadores (ELMAN *et al.*, 2002; BERTRAND and TANGUY, 2002).

1.4.2 ESTABILIDADE E SUBESPAÇO SOLENOIDAL

Um dos primeiros trabalhos apresentados na literatura onde é estudado o problema de estabilidade linear do escoamento ao redor de um cilindro, a partir de uma formulação tipo Elementos Finitos deve-se a JACKSON (1987). Em seus estudos o autor apresenta o problema de estabilidade do escoamento ao redor de

corpos com múltiplas formas. Inicialmente, calcula o campo de solução estacionário das equações de Navier-Stokes e depois formaliza um problema estendido que se acopla ao primeiro com os autovalores (frequências) e os autovetores de novas incógnitas. Ele resolve este sistema como um todo sendo capaz de capturar o valor de Reynolds crítico e a frequência crítica adimensionalizada (Strouhal) na bifurcação de Hopf. Este trabalho tem uma importância fundamental pois foi o primeiro desse tipo, pelo qual temos conhecimento, e deixa alguns problemas abertos. O primeiro corresponde ao uso da simetria para capturar a bifurcação de Hopf, o que de acordo com o próprio autor levaria a uma economia de recursos computacionais significativa (próximo de oito vezes pelas suas próprias conclusões); o segundo, não mencionado pelo autor, está relacionado com a própria natureza do método estendido, que em princípio representa uma das vias possíveis para capturar esta bifurcação e não esgota as alternativas restantes (WINTERS, 1991; POLIASHENKO and AIDUN, 1995; ARANHA, 2001). Outro aspecto que fica inexplorado no trabalho de JACKSON(1987) relaciona-se com o que se denomina linha solenoidal: levar o problema de estabilidade ao subespaço solenoidal e resolvê-lo neste subespaço.

NOACK and ECKELMANN (1992), definiram sobre bases rigorosas a noção de separabilidade para sistemas autônomos finito-dimensionais e aplicaram as equações de Navier-Stokes, no caso específico do cilindro bidimensional. Em seus estudos os autores capturaram a bifurcação de Hopf e descreveram um panorama para as transições nas primeiras fases após a bifurcação. O método empregado no trabalho de NOACK and ECKELMANN (1992) tem um perfil mais analítico, pois o campo base é construído e projetado num espaço de Hilbert solenoidal. Posteriormente NOACK and ECKELMANN (1994) realizaram o estudo do problema

tridimensional de estabilidade do escoamento ao redor de um cilindro empregando o Método de Galerkin para poucas dimensões. Neste trabalho se calcula o problema bidimensional de estabilidade até o $Re = 200$ e se propõe um cenário após a bifurcação supercrítica via equação de Landau. Este trabalho baseia-se no anterior, no sentido em que desenvolve o problema de estabilidade numa mescla de técnicas analíticas e numéricas que conduzem ao método de projeções de Galerkin.

FORTIN et al.(1994) estudaram o problema de estabilidade para o escoamento de Poiseuille do ponto de vista puramente numérico, com uma técnica conhecida como o método das iterações sucessivas inversas: este método constrói um subespaço onde se calcula o problema de estabilidade e se procura pelos autovalores críticos, mais próximos do eixo imaginário, numa faixa nas proximidades desta região. Um aspecto importante é que nele se encontra um estudo de sensibilidade do comportamento das malhas em relação ao problema generalizado de autovalores.

CHEN et al.(1995) apresentaram uma extensão de JACKSON (1987), mas com a correção de colocar o cilindro entre duas paredes, para reproduzir com maior confiabilidade as condições de contorno como verdadeiramente são nos túneis experimentais. Este trabalho combina as metodologias de JACKSON (1987) com as de FORTIN et al.(1994), pois aplica os dois métodos para o problema de estabilidade.

Mais recentemente, (FORTIN *et al.*, 1997; GERVAIS *et al.*, 1997; DING and KAWAHARA, 1998; DING and KAWAHARA, 1999), estes autores estudaram o problema de estabilidade da cavidade sem modificações em relação ao método dos trabalhos anteriores.

Até aqui são apresentados o conjunto de trabalhos que se referem a captura

da bifurcação de Hopf no escoamento incompressível ao redor de um cilindro, a partir do cálculo da estabilidade. Nestes trabalhos não se calcula explicitamente uma base para o subespaço nulo do operador divergência.

GUSTAFSON and HARTMAN(1983) publicaram os primeiros estudos correspondentes a uma linha de investigação paralela que tenta, a grosso modo, lidar com o problema das bases solenoidais em subespaços gerados por leis de conservação. Em seus trabalhos apresentaram uma discussão interessante a respeito das aplicações da Teoria de Grafos no cálculo das bases solenoidais. Posteriormente HALL and HARTMAN (1985) denominaram de Método das Variáveis Duais (DVM), ao procedimento de construir bases solenoidais das equações de Navier-Stokes. A peculiaridade é que, aqui, se emprega uma metodologia de redes associadas baseada na Teoria de Grafos.

BERRY et al.(1985) introduziram um método para calcular a base do espaço nulo do operador divergência em forma esparsa. Esta direção de pensamento é de extrema importância, pois leva a um problema projetado esparsa o que facilita extraordinariamente a resolução das equações de Navier-Stokes, para Reynolds elevados onde, necessariamente, deve-se lidar com muitos graus de liberdade.

GUSTAFSON and HARTMAN (1985) fizeram uma revisão adequada dos avanços da teoria de grafos e redes no cálculo destas bases aplicadas à fluidodinâmica. Este trabalho possui alguns exemplos que mostram soluções do problema primário de cálculo de escoamentos empregando bases calculadas a partir da teoria de grafos.

HALL and YE (1992) comparam o Método das Variáveis Duais (DVM) e o Método Solenoidal para Elementos Finitos (DFEM), de modo a estabelecer as similitudes e diferenças entre duas abordagens de um mesmo problema: resolver as equações de Navier-Stokes no subespaço solenoidal.

Em trabalhos recentes, (XIU and HALL, 1993; XIU and HALL, 1995; XIU and ANDERSON, 1995), construíram bases solenoidais para macro-elementos: espécie de acumulação de elementos finitos de determinado tipo, para gerar funções de forma apropriadas ao cálculo das bases do subespaço nulo do operador divergência. Estas construções estão ainda numa primeira fase de implementação e não se tem conhecimento de que foram usadas com regularidade e eficiência.

Até o momento, o estado da arte neste campo de investigação refere-se, por um lado a bifurcação de Hopf como primeira bifurcação na dinâmica do escoamento ao redor de um cilindro, por outro ao emprego de bases solenoidais para projetar as equações discretas de Navier-Stokes num subespaço onde a conservação de massa é satisfeita.

1.4.3 CONSTANTE DE LANDAU

Nesta seção são apresentados os principais trabalhos onde é feita uma estimativa da constante universal de Landau: a razão entre as partes imaginárias e reais do coeficiente complexo que multiplica ao termo não-linear cúbico da equação de Landau. PROVENSAL et al.(1987) estudaram a esteira do cilindro circular experimentalmente nas vizinhanças do número de Reynolds crítico Re_c . O regime transitório é descrito pela equação de Stuart-Landau. Também, neste trabalho foram estudados os regimes de impulso e ressonantes para determinar os coeficientes da equação de Stuart-Landau.

ALVAREDE and MONKEWITZ (1992) demonstraram que muitas características da emissão alternada de vórtices, para corpos rombudos bidimensionais e o cilindro em particular, são descritas através de um modelo unidimensional que representa o acoplamento difusivo de osciladores, organizados numa linha paralela

ao cilindro. Em termos matemáticos o modelo idealizado consiste numa equação fenomenológica de Ginzburg-Landau, na qual os coeficientes são determinados experimentalmente.

Diferentes modos de desprendimento de vórtices anulares e helicoidais são investigados, (LEWEKE *et al.*, 1993), experimentalmente a partir de medições de fase e frequência. O modelo empregado neste trabalho é o de Ginzburg-Landau com o mecanismo de instabilidade de Eckhaus.

DUSEK *et al.* (1994) estudaram a primeira bifurcação de Hopf para um cilindro infinito analisando-a teoricamente e por simulações diretas. Neste trabalho os autores investigaram o modelo de Landau e também calcularam a constante de Landau; este cálculo realiza-se a partir de posições pontuais na região a jusante do cilindro, e simulações temporais.

LEWEKE and PROVANSAL (1994) estudaram a transição a partir do arranjo de vórtices de Kármán para uma estrutura menos organizada de emissão de vórtices no caso do anel. Para isso é empregada a equação complexa de Ginzburg-Landau. Aqui interpreta-se a instabilidade do desprendimento de vórtices periódicos como uma instabilidade de Benjamin-Feir de um sistema unidimensional de osciladores não-lineares acoplados.

Nos trabalhos mais importantes que se referem ao cálculo da constante universal de Landau (ALBAREDE and PROVANSAL, 1995*a*; LEWEKE and PROVANSAL, 1995) é apresentada uma explicação formal e completa da obtenção dos coeficientes fenomenológicos, para a equação de Ginzburg-Landau e se discutem as principais tentativas de calcular o coeficiente de Landau por outros autores. Nestes trabalhos o problema do cálculo do coeficiente de Landau e Ginzburg-Landau para o escoamento ao redor de um cilindro é tratado em toda a sua importância e é enunciado como um dos problemas fundamentais ainda

abertos para este tipo especial de escoamento.

DWIGH et al.(2000) estudaram o cenário de bifurcações 3-D para o escoamento ao redor de um cilindro até o número de Reynolds, $Re = 300$. Isto é feito a partir de um estudo das simetrias e fundamentando-se nas ferramentas da teoria das bifurcações.

Finalmente SCHOUVEILER AND PROVANSAL (2002) caracterizaram experimentalmente a esteira periódica para uma esfera. Os experimentos mostram que as oscilações autosustentáveis aparecem via bifurcação de Hopf. Em seu estudo os autores discutiram a relevância de uma equação tipo Landau, para descrever a dinâmica temporal dos modos desprezados nas proximidades do Reynold crítico. A partir das evoluções temporais dos transientes foram estimados os parâmetros de Landau.

1.5 FORMATO DA TESE

Neste trabalho foi realizado um estudo do problema de estabilidade do escoamento incompressível ao redor de um cilindro, com a particularidade de que o problema de estabilidade foi projetado no subespaço solenoidal discreto. Este documento esta dividido da seguinte forma:

- No Capítulo 1 descreveu-se a a motivação, assim como o objetivo principal do trabalho, a física do escoamento ao redor de um cilindro e finalmente apresenta-se uma síntese da bibliografia para esta pesquisa.
- No Capítulo 2 apresentou-se as equações de Navier-Stokes na formulação primitiva, e os métodos para calcular a solução destas equações.

- No Capítulo 3 foram apresentados os conceitos fundamentais para compreender os problemas de estabilidade hidrodinâmica em geral, e particularmente o caso que nos ocupa. Também foi abordada a forma fraca para o problema generalizado de estabilidade. Aqui pode-se encontrar os fundamentos dos subespaços solenoidais discretos, dos projetores e os principais resultados no que concerne ao estudo de estabilidade.
- No Capítulo 4 foram apresentados os domínios computacionais e os principais resultados na discretização dos operadores e no cálculo do campo de velocidades simétrico. Tratou-se dos resultados (espectros) que constituem o ponto central deste trabalho, e descreveu-se a equação de Landau assim como seus coeficientes. Além disso extrapolam-se os resultados do capítulo anterior, com o propósito de estimar a constante universal que envolve a razão entre as partes imaginária e real do coeficiente não-linear de Landau.
- No Capítulo 5 apontam-se as conclusões e sugestões para a continuação da pesquisa.
- Os Apêndices A e B apresentam aqueles fundamentos teóricos, não incluídos na tese, e que também ajudaram na compreensão do problema em estudo.

CAPÍTULO 2

EQUAÇÕES DOS FLUIDOS

INCOMPRESSÍVEIS

O primeiro passo no problema deste trabalho foi o estudo das equações que descrevem a dinâmica dos fluidos incompressíveis, ou seja, as equações de Navier-Stokes. Estas equações foram derivadas a partir dos seguintes princípios básicos:

- Conservação de massa.
- Conservação do momento.
- Conservação da energia.

É possível encontrar uma derivação completa destas equações (LANDAU and LIFSCHITZ, 1959; CUVELIER *et al.*, 1986). Estas equações descrevem o escoamento incompressível e viscoso, por isso devemos resolvê-las conjuntamente. Neste trabalho somente foram estudados os casos de escoamentos incompressíveis e isotérmicos. As incógnitas para este tipo especial de escoamento são as velocidades e as pressões. Quando tratam-se as equações mantendo a formulação

das velocidades e pressões denominam-se de formulação de variáveis primitivas. Existem outras formulações para estas mesmas equações como a de função de corrente-vorticidade, mas não foram utilizadas nesta pesquisa e por isso não foram descritas.

Neste trabalho considera-se um escoamento com as seguintes características (CUVELIER *et al.*, 1986):

- O meio é incompressível.
- O fluido é Newtoniano.
- As propriedades do meio são independentes da temperatura e uniformes.
- O escoamento é não turbulento.

Por outro lado o tratamento das equações de Navier-Stokes será feito na sua forma adimensionalizada, a partir da velocidade característica (que para este problema é a velocidade do escoamento ao longe) e da distância característica (o diâmetro de um cilindro). A seguir, é apresentado o tratamento das equações de Navier-Stokes.

As equações básicas para o escoamento Newtoniano e compressível, conhecidas com o nome de Navier-Stokes são dadas em termos da densidade ρ , a velocidade, \mathbf{U} , o coeficiente de viscosidade, μ , e as forças de campo, \mathbf{f} , através de:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \rho \mathbf{U} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{U} + \mathbf{f}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \rho \mathbf{U}, \quad (2.2)$$

A equação (2.1) expressa a conservação do momento e a equação (2.2) a conservação de massa. Estas equações devem ser complementadas com a equação

da conservação da energia. É necessário, além disso uma equação de estado do fluido para fechar este sistema no caso de escoamento compressível. Este problema de fechamento é conseguido também no caso de incompressibilidade pura. Mesmo que a incompressibilidade seja uma idealização, os escoamentos compressíveis podem exibir um estado de incompressibilidade, quando encontram-se em velocidades que são pequenas comparadas a velocidade do som no escoamento (pequenos números de Mach). A aproximação da incompressibilidade elimina a necessidade de uma equação de estado e reduz a equação de conservação de massa a uma restrição dada por:

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (2.3)$$

Esta restrição impõe ao escoamento possuir divergência zero.

Assumindo que o escoamento seja isotérmico com condições específicas de contorno e iniciais, temos a forma incompressível e adimensionalizada das equações de Navier-Stokes, (BREZZI and FORTIN, 1991):

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{U} + \mathbf{f}, \quad (2.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{G}, \quad em \quad \partial\Omega, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{U}_0(\mathbf{x}) \quad t = 0, \quad (2.7)$$

Admite-se que o fluido ocupa uma região Ω do espaço e que a velocidade $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$ é dada em Ω no instante de tempo $t = 0$. A massa é conservada em Ω (equação de continuidade), p é o campo escalar chamado pressão, e o número adimensional de Reynolds é dado por:

$$Re = \frac{\rho U D}{\mu}, \quad (2.8)$$

onde: ρ é a densidade do escoamento, μ é a viscosidade do escoamento e D é o diâmetro do cilindro. Esta forma adimensional ilustra que para valores elevados do número de Reynolds o termo convectivo ($\mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U}$) domina o termo viscoso ($\frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{U}$). No caso contrário, quando o termo convectivo está ausente (baixas velocidades), as equações resultantes são conhecidas como equações de Stokes. Em ausência dos gradientes de pressão, as equações resultantes conhecem-se como a forma incompressível das equações de Burgers; finalmente na ausência do termo viscoso (difusão) denominam-se equações de Euler.

Para a solução destas equações são necessárias tanto condições de contorno como iniciais. As condições iniciais podem ser dadas com simplicidade, pois basta especificar as velocidades no tempo inicial, $t = 0$. Este campo de velocidades deve satisfazer a equação da continuidade. No sistema que forma as equações de Navier-Stokes mais a equação da continuidade, na formulação de variáveis primitivas, trabalha-se com as grandezas mais relevantes sob o ponto de vista físico, pois consiste em duas (2-D) equações elípticas para as velocidades, acopladas com a equação da continuidade. Este sistema de equações requer apenas três condições de contorno para as velocidades ou para as tensões nas fronteiras (CUVELIER *et al.*, 1986). É conhecido que para o caso de incompressibilidade não são necessárias condições de contorno para as pressões (LADYSHESNKAYA, 1969), demonstrando assim papel particular das pressões no processo de solução das equações de Navier-Stokes.

Denominam-se as velocidades de contorno $\mathbf{U} = \mathbf{U}_B$ e as outras forças que intervêm, e que forçam o movimento, como dados. Os dados podem ser estacionários e o escoamento dentro de Ω variante no tempo ou turbulento.

Podemos perfeitamente definir o espaço vetorial \mathbf{V} , composto por funções suficientemente contínuas, cada uma satisfazendo as condições de fronteira; e o

subespaço solenoidal \mathbf{S} . Como as restrições da conservação de massa estão implícitas na definição do espaço \mathbf{S} , o escoamento é descrito pela equação algébrica-diferencial:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{U} + \mathbf{f}, \quad (2.9)$$

$$\mathbf{U} \in \mathbf{S}, \quad (2.10)$$

nas equações (2.9),(2.10) foram omitidas as especificações das condições iniciais e de contorno. Nos espaços \mathbf{V} e \mathbf{S} estão definidos os produtos internos usuais (\mathbf{v}, \mathbf{u}) e a norma $\|\mathbf{u}\|_1$ sobre Ω (ver anexo A.5), e portanto são espaços de Hilbert. O produto interno da equação (2.9) com qualquer função \mathbf{v} é formado envolvendo integrais sobre o domínio do problema Ω . O resultado pode ser escrito como (substituindo \mathbf{U} por \mathbf{u}):

$$(\mathbf{v}, \dot{\mathbf{u}}) + (\mathbf{v}, \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = -(\mathbf{v}, \nabla p) + \frac{1}{Re} (\mathbf{v}, \nabla^2 \mathbf{u}) + (\mathbf{v}, \mathbf{f}), \quad (2.11)$$

$$\mathbf{u} \in \mathbf{S} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad (2.12)$$

O gradiente da pressão e o termo difusivo são integrados por partes para reduzir as exigências de continuidade. Esta forma é conhecida como variacional ou fraca das equações de Navier-Stokes e suas soluções como fracas ou generalizadas. Qualquer solução da equação (2.9) satisfaz a equação (2.11). Se a equação (2.11) é satisfeita para todo \mathbf{v} em \mathbf{V} , e \mathbf{u} é suficientemente suave, pode ser mostrado que a solução da equação (2.11) é também solução da equação (2.9). Portanto as equações (2.9) e (2.11) são descrições equivalentes dos escoamentos incompressíveis.

Numa série de artigos de Leray, (LERAY, 1933; LERAY, 1934a; LERAY,

1934b), demonstram que a solução de uma equação variacional que não contém o termo do gradiente de pressão resulta exatamente no mesmo escoamento que aquele dado pela equação (2.11), e portanto pela equação (2.9). De modo que, a formulação solenoidal para os escoamento incompressíveis

$$(\mathbf{v}, \dot{\mathbf{u}}) + (\mathbf{v}, \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = \frac{1}{Re} (\mathbf{v}, \nabla^2 \mathbf{u}) + (\mathbf{v}, \mathbf{f}), \quad (2.13)$$

$$\mathbf{u} \in \mathbf{S}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad (2.14)$$

está bem estabelecida. Os escoamentos incompressíveis podem ser calculados segundo a equação (2.13) sem incluir a pressão.

2.1 PARCELAS SOLENOIDAL E IRROTACIONAL

É bem conhecido o resultado que garante a decomposição de um campo vetorial \mathbf{V} como $\mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \phi$, onde ϕ é um campo escalar conhecido como o potencial escalar, e \mathbf{A} é um campo vetorial solenoidal: conhecido como o potencial vetorial. Em outras palavras: todo campo vetorial pode ser decomposto numa parte solenoidal e numa parte irrotacional, onde a parte solenoidal é dada por $\nabla \times \mathbf{A}$ e a parcela irrotacional é dada por $\nabla \phi$.

Pode-se formalmente definir aqui os operadores de projeção π^S e π^I , com as propriedades que para um campo vetorial arbitrário \mathbf{V} , $\pi^S \mathbf{V}$ devolve a parte solenoidal de \mathbf{V} , e $\pi^I \mathbf{V}$ fornece a parte irrotacional de \mathbf{V} . Observa-se que:

$$\pi^S \pi^S = \pi^S, \quad (2.15)$$

$$\pi^I \pi^I = \pi^I, \quad (2.16)$$

$$\pi^S \pi^I = 0, \quad (2.17)$$

os operadores possuem autovalores 0 e 1. O produto $\pi^S \pi^I = 0$ expressa a ortogonalidade das projeções. Formalmente, os operadores podem ser escritos como:

$$\pi^I = \nabla \Delta^{-1} \nabla \cdot, \quad (2.18)$$

$$\pi^S = I - \pi^I, \quad (2.19)$$

através de um trabalho operacional podemos comprovar os projetores anteriormente descritos. O laplaciano inverso Δ^{-1} é a função de Green do operador de Poisson.

Voltando à equação de Navier-Stokes, pode-se empregar estes operadores, que foram anteriormente introduzidos, para decompô-la ortogonalmente nestes subespaços. Tomando \mathbf{u} solenoidal então $\dot{\mathbf{u}}$ e $\Delta \mathbf{u}$ também o serão (HOLDEMAN, 2001). A força de campo pode ser decomposta numa parte solenoidal (não conservativa), \mathbf{f}^S , e numa parte irrotacional (conservativa), \mathbf{f}^I , então o escoamento solenoidal pode ser decomposto como:

$$(\dot{\mathbf{u}} + \pi^S(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) - \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} - \mathbf{f}^S) + (\nabla p + \pi^I(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) - \mathbf{f}^I) = 0, \quad (2.20)$$

Como os dois termos da equação (2.20) são ortogonais se tornam nulas separadamente. Portanto, o campo de velocidade satisfaz:

$$\dot{\mathbf{u}} + \pi^S(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) - \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} = \mathbf{f}^S, \quad \mathbf{u} \in \mathbf{S}. \quad (2.21)$$

A equação (2.21) é conhecida como a forma incompressível da equação de Burger.

O segundo termo pode ser colocado numa forma alternativa:

$$\nabla p = -\pi^I(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) + \mathbf{f}^I, \quad (2.22)$$

$$\nabla p = -\frac{1}{2}\nabla(u^2) + \mathbf{f}^I + \pi^I(\mathbf{u} \times \nabla \times \mathbf{u}), \quad (2.23)$$

Nas equações (2.22) e (2.23) temos empregado a identidade vetorial:

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \nabla u^2/2 - \mathbf{u} \times \nabla \times \mathbf{u}, \quad (2.24)$$

Esta é precisamente a forma diferencial da equação de Bernoulli. O gradiente de pressões é função do termo convectivo e é independente da variação de quantidade de movimento. Substituindo $\mathbf{f}^I = -\nabla\phi_f$ e empregando uma forma explícita do projetor, o gradiente de pressões pode ser integrado e obter a equação de Bernoulli para um escoamento incompressível e viscoso como:

$$p - p_r = -\frac{u^2}{2} - \phi_f + \Delta^{-1}\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \nabla \times \mathbf{u}), \quad (2.25)$$

onde p_r é uma constante de integração ou uma pressão de referência. Este resultado foi estabelecido sem referências às linhas de correntes ou tubos.

A decomposição ortogonal demonstra que a equação de Navier-Stokes não é uma simples equação dinâmica para as velocidades, onde a pressão comanda o escoamento, e sim uma combinação de duas equações com a segunda fornecendo a pressão como uma variável derivada que depende do fluxo (HOLDEMAN, 2001).

2.2 FORMULAÇÃO PARA A EQUAÇÃO DE STOKES

A equação de Stokes descreve o movimento de um fluido viscoso incompressível em um domínio n -dimensional (com $n=2$ ou 3):

$$\nabla^2 \mathbf{u} + \nabla p = -f, \text{ em } \Omega \quad (2.26)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \text{ em } \Omega \quad (2.27)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0, \text{ sobre } \partial\Omega. \quad (2.28)$$

Onde $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ é o campo de velocidade e $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é a pressão. Como o escoamento é incompressível temos a equação de continuidade $\text{div } \mathbf{u} = 0$. Pelo teorema de Gauss temos para os valores dados na fronteira \mathbf{u}_0 que:

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{u}_0 \cdot \vec{n} \, ds = \int_{\Omega} \text{div } \mathbf{u} \, dV = 0, \quad (2.29)$$

Esta condição de compatibilidade em \mathbf{u}_0 sempre é satisfeita pelas condições homogêneas de contorno. A força externa dada f causa uma aceleração no escoamento, o gradiente de pressão se comporta como uma força adicional prevendo mudanças na densidade. Do ponto de vista matemático, a pressão pode ser vista como um multiplicador de lagrange.

Se a equação (2.28) é satisfeita por alguma função $\mathbf{u} \in [C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})]^n$ e $p \in C^1(\Omega)$, então pode-se denominar \mathbf{u} e p , de soluções clássicas para o problema de Stokes. É importante notar que a equação (2.28) apenas determina a pressão até uma constante aditiva, a qual usualmente é fixa forçando a normalização:

$$\int_{\Omega} p \, dV = 0, \quad (2.30)$$

Devido a restrição $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, a formulação fraca do problema de Stokes conduz um problema de ponto de sela. Para aproveitar o que foi exposto anteriormente tem-se:

$$X = H_0^1(\Omega)^n, M = L_0^2(\Omega) := \{q \in L^2(\Omega); \int_{\Omega} q \, dV = 0\}, \quad (2.31)$$

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, dV, \quad (2.32)$$

$$b(\mathbf{v}, q) = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v} \, q \, dV. \quad (2.33)$$

Como é usual restringir-se a atenção às condições de contorno homogêneas $\mathbf{u}_0 = 0$. Então o problema de ponto de sela para a equação de Stokes torna-se: encontrar $(\mathbf{u}, p) \in X \times M$ tal que

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = (f, \mathbf{v})_0 \quad \forall \mathbf{v} \in X \quad (2.34)$$

$$b(\mathbf{u}, q) = 0 \quad \forall q \in M. \quad (2.35)$$

A solução (\mathbf{u}, p) da equação (2.35) é chamada solução clássica se $\mathbf{u} \in [C^2(\Omega)]^n \cap C^0(\bar{\Omega})$ e $p \in C^1(\Omega)$. É muito importante ressaltar que para $\mathbf{v} \in H_0^1$ e $q \in H^1$ a fórmula de Green afirma:

$$b(\mathbf{v}, q) = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v} \, q \, dV = - \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla q \, dV + \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot q \, \vec{n} \, ds \quad (2.36)$$

$$= - \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla q \, dV. \quad (2.37)$$

Portanto pode-se observar que os operadores div e $-\operatorname{grad}$ são adjuntos. Também, da equação (2.37) se deriva que $b(\mathbf{v}, q)$ não varia se é adicionada uma função constante a q , por isso pode-se identificar M com $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$: neste espaço quociente considera-se as funções em L^2 equivalentes, mesmo que se diferenciem numa

constante.

2.3 DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES ATRAVÉS DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Aqui trata-se da representação discreta e computacional do problema matemático. Este problema é enunciado como:

- Encontrar uma solução adequada para as equações de Navier-Stokes no caso específico em questão: o escoamento incompressível ao redor de um cilindro.

O problema da discretização das equações de Navier-Stokes ocupa um lugar de extrema importância e faz parte do centro de atenção da comunidade científica (GUNZBURGER and NICOLAIDES, 1993; GIRAULT and RAVIART, 1986; BATHE, 1996; TEMAN, 1977; ZIENKIEWICZ and TAYLOR, 1991; BREZZI and FORTIN, 1991), que se dedicam a investigação dos escoamentos para os quais estas equações representam a principal descrição rigorosa, sob o ponto de vista físico e matemático. Considerando que as equações de Navier-Stokes ainda continuam sendo a principal fonte de referência teórica na predição dos principais tipos de escoamentos de importância, portanto modelos mais efetivos de discretização e métodos mais elaborados de solução são importantes tanto no campo teórico como prático.

É bom ressaltar que o principal problema numérico com que se deve lidar está relacionado com a inversão de um sistema esparso não-linear de equações. Nesta seção será abordada basicamente a diretriz a ser seguida, na tentativa

de se resolver numericamente as equações de Navier-Stokes, para o escoamento incompressível ao redor de um cilindro na faixa de Reynolds de interesse.

2.3.1 FORMULAÇÃO FRACA TIPO GALERKIN

A formulação fraca de Galerkin é uma extensão mais elaborada de (2.11), onde tem-se construído as formas bilineares e trilineares, esta formulação afirma que: Dado um campo de forças $\mathbf{f} \in H_0^{-1}(\Omega)$, busca-se um campo de velocidades $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ e um campo escalar de pressões $p \in L_0^2(\Omega)$ tal que:

$$(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega) \quad (2.38)$$

$$b(\mathbf{u}, q) = 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega) \quad (2.39)$$

onde as formas bilineares:

$$(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega, \quad (2.40)$$

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, d\Omega = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, d\Omega, \quad (2.41)$$

$$b(\mathbf{v}, q) = - \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\Omega, \quad (2.42)$$

e a forma trilinear

$$c(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n w_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_j \, d\Omega, \quad (2.43)$$

onde $n = \dim \Omega$. Empregando a forma bilinear $b(\cdot, \cdot)$ pode-se definir o subespaço:

$$\mathbb{Z} = \{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega) : b(\mathbf{v}, q) = 0, \forall q \in L_0^2(\Omega)\}, \quad (2.44)$$

que está constituído pelas funções solenoidais fracas. Retomando (2.39) observa-se que o campo de velocidades $\mathbf{u} \in \mathcal{Z}$.

2.4 ELEMENTOS FINITOS DISCRETOS

Com a formulação de Galerkin estabelecida, o problema aproximado para o qual a solução via elementos finitos é determinada se define da seguinte maneira: primeiro, obtém-se a seleção dos espaços de elementos finitos, as famílias de espaços de elementos finitos \mathbf{V}_0^h e S_0^h para as velocidades e a pressão. Aqui h é associado a um parâmetro que está relacionado com a medida da malha e com a subdivisão de $\bar{\Omega}$ em elementos finitos. Então, necessita-se encontrar $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_0^h$ e $p^h \in S_0^h$ tal que:

$$(\dot{\mathbf{u}}^h, \mathbf{v}^h) + a(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) + c(\mathbf{u}^h, \mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) + b(\mathbf{v}^h, p^h) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}^h) \quad \forall \mathbf{v}^h \in \mathbf{V}_0^h, \quad (2.45)$$

$$b(\mathbf{u}^h, q^h) = 0 \quad \forall q^h \in S_0^h, \quad (2.46)$$

Tomando as bases específicas para \mathbf{V}_0^h e para S_0^h então (2.45) e (2.46) são equivalentes a um sistema não-linear de equações algébricas. Se $\{q_j(\mathbf{x})\}$, $j = 1, \dots, J$ e $\mathbf{v}_k(\mathbf{x})$, $k = 1, 2, \dots, K$, são bases em \mathbf{V}_0^h e S_0^h , podemos escrever

$$p^h = \sum_{j=1}^J \alpha_j q_j(\mathbf{x}) \quad e \quad \mathbf{u}^h = \sum_{k=1}^K \beta_k \mathbf{v}_k(\mathbf{x}) \quad (2.47)$$

para algumas constantes α_j , $j = 1, 2, \dots, J$, e β_k , $k = 1, 2, \dots, K$. Se substituírmos estas expressões em (2.45) e (2.46) resulta:

$$\sum_{k=1}^K (\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_l) \dot{\beta}_k + \sum_{k=1}^K a(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_l) \beta_k + \sum_{k,m=1}^K c(\mathbf{v}_m, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_l) \beta_k \beta_m + \sum_{j=1}^J b(\mathbf{v}_l, q_j) \alpha_j = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_l) \quad (2.48)$$

para $l = 1, \dots, K$ e

$$\sum_{k=1}^K b(\mathbf{v}_k, q_i) \beta_k = 0 \text{ para } i = 1, \dots, J, \quad (2.49)$$

que constituem um sistema quadrático algébrico não-linear de $J+K$ equações para as $J+K$ incógnitas:

$$\mathbf{P} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_J)^T, j = 1, \dots, J, \quad (2.50)$$

$$\mathbf{U} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k, \dots, \beta_K)^T, k = 1, \dots, K \quad (2.51)$$

Este sistema pode ser expresso em notação matricial:

$$M \dot{\mathbf{U}} + A \mathbf{U} + N(\mathbf{U}) \mathbf{U} + R \mathbf{P} = \mathbf{F}, \quad (2.52)$$

$$R^T \mathbf{U} = 0, \quad (2.53)$$

onde M é a matriz de massa, $-R^T$ é a matriz de divergência discreta, R a matriz gradiente discreta, A é o laplaciano discreto, $N(\mathbf{U})\mathbf{U}$ representa o termo convectivo não-linear, \mathbf{F} é o carregamento conhecido como dados. A representação matricial:

$$\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{U}} \\ \dot{\mathbf{P}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A + N(\mathbf{U}) & R \\ R^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (2.54)$$

é muito importante no processo de verificação porque está padronizada na literatura, e auxilia o processo de compreensão, no instante de analisar os métodos de resolução destas equações.

O método selecionado e implementado para resolver as equações de Navier-Stokes é um método de descenso (ver Anexos A.7, A.8, A.9 e A.10), pois minimiza

um funcional quadrático no complemento de Schur e é especialmente apropriado para resolver estas equações (MADAY *et al.*, 1993; GIRAULT and RAVIART, 1986; BREZZI and FORTIN, 1991; GUNZBURGER and NICOLAIDES, 1993; TEMAN, 1977).

Neste estudo o termo convectivo conjuntamente com a aceleração local

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, \quad (2.55)$$

é tratado pela técnica das Características de Galerkin, (HECHT and PIRONNEAU, 2002), que fornece uma discretização no tempo para (2.55) :

$$\frac{1}{\delta t}(u^{n+1} - u^n \circ X^n), \quad (2.56)$$

$$u^n \circ X^n(x) \approx u^n(x - u^n(x)\delta t) \quad (2.57)$$

o qual é incondicionalmente estável (HECHT and PIRONNEAU, 2002). Quando aplicamos esta técnica de discretização ao sistema (2.54) resulta em:

$$\begin{pmatrix} A + \frac{M}{\delta t} & R \\ R^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}^{n+1} \\ \mathbf{P}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} + \frac{M}{\delta t} \mathbf{U}^n(\mathbf{x} - \mathbf{U}^n(\mathbf{x})\delta t) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (2.58)$$

Neste sistema (2.58) a influência do termo convectivo é linearizada (HECHT and PIRONNEAU, 2002) e colocada como carregamento. Em cada instante de tempo as equações de Navier-Stokes discretizadas se transformam num problema linear com restrições. Aqui emprega-se o algoritmo de Usawa (ver Anexos A.7,A.8,A.9 e A.10) para calcular os campos de velocidade e pressão, (PIRONNEAU, 1989; HECHT and PIRONNEAU, 2002).

CAPÍTULO 3

ESTABILIDADE HIDRODINÂMICA

O objetivo da hidrodinâmica é descrever e prever os movimentos dos fluidos submetidos à aplicação das forças. Para os fluidos incompressíveis, no caso particular das equações de Navier-Stokes, estas forças relacionam-se com o número de Reynolds. Quando este é pequeno existe uma correspondência única entre as forças internas e da fronteira com os movimentos previstos. Na medida em que o número de Reynolds cresce, o problema torna-se complexo com muitas soluções, o que traduzido numa linguagem mais matemática equivale ao domínio da não unicidade nas soluções.

Neste capítulo são desenvolvidos os conceitos da teoria da estabilidade hidrodinâmica que se relacionam diretamente com o objetivo principal do trabalho: o estudo da estabilidade do escoamento ao redor de um cilindro. O material aqui exposto é válido para aqueles escoamentos que satisfazem as equações de Navier-Stokes e além disso, obedecem o critério de incompressibilidade: conservação de massa.

3.1 BAIXO REYNOLDS

É um fato observado experimentalmente de que quando o número de Reynolds, Re , é pequeno a solução das equações de Navier-Stokes é única e determinada pelos dados, depois que a condição inicial evoluiu ao longo do tempo.

O problema de estabilidade reduz-se ao estudo das perturbações que atuam no momento inicial (na verdade elas agem em todo momento), sobre a base de que apenas as condições iniciais variam. A teoria hidrodinâmica estuda a determinação das condições limites que levam a estabilidade assintótica ou a instabilidade do movimento básico, sem o conhecimento específico das perturbações. Esta teoria não estuda a evolução temporal das perturbações iniciais, mas o seu comportamento assintótico, e tenta indicar os valores dos parâmetros físicos nos quais a amplificação das perturbações começam a aparecer. No momento inicial o movimento básico $\bar{\mathbf{U}}, \bar{P}$ é submetido às perturbações, segundo:

$$(\mathbf{U} - \bar{\mathbf{U}}, P - \bar{P}) = (\mathbf{u}, p), \quad (3.1)$$

onde as perturbações (\mathbf{u}, p) são amortecidas ou não. No caso em que o campo de velocidades resultante \mathbf{U} permanece próximo de $\bar{\mathbf{U}}$ o movimento é considerado estável, no caso em que $\mathbf{U} \rightarrow \bar{\mathbf{U}}$ quando $t \rightarrow \infty$ o movimento é assintoticamente estável. Os movimentos instáveis não são observados na realidade dos escoamentos, pois as perturbações são limitadas pelo efeito da viscosidade. Pode-se ver que (3.1) satisfaz:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{U}} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{U}} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (3.2)$$

onde

$$\mathbf{u} \in H = \{\mathbf{u} : \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \mathbf{u}|_{\Omega} = 0, \langle |\nabla \mathbf{u}|^2 \rangle < \infty\} \quad (3.3)$$

e

$$\langle |\nabla \mathbf{u}|^2 \rangle = \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 d\Omega \equiv \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} d\Omega \quad (3.4)$$

com $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0$ dado. Agora podemos aproveitar a identidade:

$$\mathbf{u} \cdot (\bar{\mathbf{U}} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p) = \nabla \cdot \left(\frac{\bar{\mathbf{U}} |\mathbf{u}|^2}{2} + \frac{\mathbf{u} |\mathbf{u}|^2}{2} + \mathbf{u} p \right); \quad (3.5)$$

e multiplicando (3.2) por \mathbf{u} e integrando temos:

$$\frac{1}{2} \frac{d\langle |\mathbf{u}|^2 \rangle}{dt} = -\langle \mathbf{u} \cdot \nabla \bar{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{u} \rangle - \frac{1}{Re} \langle |\nabla \mathbf{u}|^2 \rangle \leq \langle |\nabla \mathbf{u}|^2 \rangle (\nu_E - \frac{1}{Re}); \quad (3.6)$$

onde ν_E é dado por:

$$\nu_E = \max\left(\frac{-\langle \mathbf{u} \cdot \nabla \bar{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{u} \rangle}{\langle |\nabla \mathbf{u}|^2 \rangle}\right) > 0. \quad (3.7)$$

A existência de ν_E é garantida pelo cálculo de variações (GEORGESCU, 1985; JOSEPH, 1985). Temos um decaimento monotônico quando a dissipação $\frac{1}{Re} \langle |\nabla \mathbf{u}|^2 \rangle$ é maior que a produção de energia $\langle \mathbf{u} \cdot \nabla \bar{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{u} \rangle$. Estas equações possuem a propriedade de que o termo não-linear $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ é inercial e desaparece no processo de integração. Esta peculiaridade não é típica dos problemas não-lineares e nos permite solucionar a equação (3.6) em forma independente da amplitude \mathbf{u} . O quociente (3.7) das formas quadráticas é bem estabelecido no cálculo das variações e a existência de ν_E quando $\mathbf{u} \in H$ é garantida, e $\langle |\mathbf{u}|^2 \rangle$ decai quando $\frac{1}{Re} > \nu_E$, para números pequenos de Reynolds.

Em particular a teoria garante a existência de um coeficiente $\Lambda > 0$ tal que:

$$\langle |\nabla \mathbf{u}|^2 \rangle > \frac{\Lambda}{2} \langle |\mathbf{u}|^2 \rangle \quad (3.8)$$

substituindo (3.8) em (3.6) e integrando, temos:

$$\langle |\mathbf{u}(t)|^2 \rangle \leq \langle |\mathbf{u}_0|^2 \rangle e^{\Lambda \int_0^t (\frac{1}{Re} - \nu_E) dt}, \quad (3.9)$$

onde o coeficiente ν_E depende de $\frac{1}{Re}$ e t pois: $\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}, t, \frac{1}{Re})$. Escoamentos estacionários são únicos quando $\frac{1}{Re} > \nu_E$, e o mesmo pode-se afirmar para os movimentos periódicos, (GEORGESCU, 1985). De modo mais geral (3.9) mostra que:

$$\langle |\mathbf{u}|^2 \rangle = \langle |\mathbf{U} - \bar{\mathbf{U}}|^2 \rangle \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty \quad (3.10)$$

isto significa que $\bar{\mathbf{U}} \rightarrow \mathbf{U}$ em média, quando Re é pequeno. Então, para Re pequenos existe apenas uma solução \mathbf{U} determinada univocamente pelos dados, e independente dos valores iniciais de $\mathbf{U}(\mathbf{x}, 0)$.

3.2 INSTABILIDADE E TRANSIÇÃO

Quando o escoamento evolui no tempo, sendo o Reynolds pequeno, este é univocamente determinado pelos dados, independente das condições iniciais. Este escoamento único possui o máximo de simetria consistente com os dados. Para grandes números de Reynolds perde-se a unicidade e outros escoamentos são observados com outras estruturas de simetria. Por exemplo, movimentos que são estacionários podem ser substituídos por movimentos periódicos, quase-periódicos ou aperiódicos. Portanto, deve-se ressaltar que para grandes valores do número

de Reynolds se observam escoamentos que não seguem a simetria imposta pelos dados. Nos escoamentos turbulentos a quebra de simetria é dramática: portanto nesses escoamentos a quebra entre os dados e o fluxo (dinâmica) é muito elusiva.

Um das idéias preponderantes a respeito das tentativas de explicar este processo de transição a turbulência, baseia-se numa sequência de bifurcações (LANDAU and LIFSCHITZ, 1959). Landau e Hopf fundamentaram sua teoria em conjecturas, que se derivam de uma sucessiva perda da estabilidade das soluções em relação a pequenas perturbações (GEORGESCU, 1985).

Para Re pequenos existe um escoamento estacionário: $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{x}, Re)$, e o campo escalar: $p = p[\mathbf{U}]$. A evolução das perturbações \mathbf{u} de \mathbf{U} é regida pela equação (3.2) que na forma compacta é dada por:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{F}(\mathbf{u}, Re) - \nabla p, \quad \mathbf{u} \in H; \quad (3.11)$$

onde:

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}, Re) = \mathbf{F}_u(0, Re | \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}; \quad (3.12)$$

e:

$$\mathbf{F}_u(0, Re | \mathbf{u}) = \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} - \bar{\mathbf{U}}(Re) \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \nabla \bar{\mathbf{U}}(Re); \quad (3.13)$$

O operador linear que é a derivada do operador $\mathbf{F}(\mathbf{u}, Re)$, com o termo não-linear $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = 0$ é conhecido como operador de Fréchet. Como: $\mathbf{F}(0, Re) = 0$, então, $\mathbf{u} = 0$ e $p[0] = 0$ são soluções da equação (3.11) para todo Re . Quando \mathbf{u} é suficiente pequeno podemos estudar as condições de estabilidade para o campo estacionário $\bar{\mathbf{U}}$, segundo o problema linearizado:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{F}_u(0, Re | \mathbf{u}) - \nabla p, \quad \mathbf{u} \in H; \quad (3.14)$$

no qual baseia-se toda a teoria hidrodinâmica de estabilidade linear. Aqui eliminou-se o termo não-linear $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$.

Agora pode-se tentar as soluções tipo modos normais (GEORGESCU, 1985; JOSEPH, 1985), sendo que:

$$\mathbf{u} = e^{\sigma t} \zeta, \quad (3.15)$$

$$p[\mathbf{u}] = e^{\sigma t} p[\zeta], \quad (3.16)$$

onde $\zeta \in H$ resolve (3.14) se ζ e

$$\sigma(Re) = \xi(Re) + i\eta(Re), \quad (3.17)$$

resolve o problema espectral dado por:

$$\sigma \zeta = \mathbf{F}_u(0, Re | \zeta) - \nabla p[\zeta], \quad \zeta \in H; \quad (3.18)$$

Quando Ω é um domínio limitado, existe um número infinito de autovalores isolados $\sigma(Re)$ e todos eles estão localizados dentro de uma parábola aberta, na parte mais negativa do plano complexo (JOSEPH, 1985). A estabilidade do campo médio $\bar{\mathbf{U}}$ pode ser determinada pelo problema espectral: $\bar{\mathbf{U}}$ é condicionalmente estável se para todos os autovalores se cumpre que: $\xi(Re) < 0$ e é instável se: $\xi(Re) > 0$ para algum autovalor.

Condicionalmente estável significa estabilidade em relação a pequenas perturbações: um escoamento condicionalmente estável pode ser instável para grandes perturbações, cuja evolução não é governada pela teoria linear (GEORGESCU, 1985). À medida que o Re é incrementado existe um valor crítico de Reynolds Re_C

para o qual: $\xi(Re_C) = 0$, isto para alguns autovalores. Se: $\eta(Re_C) \equiv \omega_0 \neq 0$, então: $\pm i\omega_0$ são autovalores iguais de \mathbf{F}_u com autovetores ζ e o complexo conjugado $\bar{\zeta}$. Em geral, passam um par complexo conjugado de autovalores no semiplano positivo complexo, quando o Reynolds é incrementado e passa ao valor crítico Re_C . Na situação descrita, a perda de estabilidade de $\bar{\mathbf{U}}$ implica a existência de uma nova solução $\bar{\mathbf{U}} + \mathbf{u}$, que se bifurca a partir de $\bar{\mathbf{U}}$. Este tipo de bifurcação, onde passam um par de autovalores conjugados é conhecida como bifurcação de Hopf (JOSEPH, 1985).

Basicamente, este trabalho de pesquisa se fundamenta neste substrato teórico. O principal problema que persiste é que não existem, até hoje, soluções exatas para o caso particular do escoamento ao redor de um cilindro. O que resta esclarecer é o significado do problema abstrato de autovalores (3.18), ou seja, tentar uma representação discreta do mesmo e procurar por uma solução aproximada. É precisamente sobre esse tema que tratam os próximos capítulos.

3.3 ESTABILIDADE HIDRODINÂMICA FRACA

Nesta seção é tratada a formulação fraca para o problema de estabilidade. Igualmente como as equações de Navier-Stokes existe uma forma fraca bem estabelecida que se desprende do problema formal de estabilidade hidrodinâmica para o caso em estudo. Esta forma está bem estudada (GUNZBURGER and NICOLAIDES, 1993; JOSEPH, 1985; GEORGESCU, 1985), e é independente aos poucos casos particulares onde os métodos analíticos tiveram sucesso.

Quando discretizado o problema de autovalores generalizado, equação (3.14),

resulta nas equações (GUNZBURGER and NICOLAIDES, 1993):

$$\sigma(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) + a(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) + b(\mathbf{v}^h, p^h) + c(\mathbf{U}, \mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) + c(\mathbf{u}^h, \mathbf{U}, \mathbf{v}^h) = 0, \quad (3.19)$$

$$b(\mathbf{u}^h, q^h) = 0, \quad (3.20)$$

onde as formas bilineares e trilineares já foram definidas anteriormente em (2.41), (2.42) e (2.43), as funções \mathbf{v}^h e q^h pertencem aos espaços \mathbf{V}_0^h e S_0^h . No processo de discretização, primeiramente particiona-se Ω com uma malha de elementos finitos Γ_h , os quais consistem em triângulos. Nessa malha define-se os espaços:

$$\mathbf{X}_h^2 = \{w_h \in C^0(\Omega) \mid w_h|_K \in \mathbf{P}_2(K), \forall K \in \Gamma_h\}, \quad (3.21)$$

onde é possível construir duas aproximações conformes de $\mathbf{H}_0^1 \times L_0^2$, denominadas $\mathbf{V}_0^h \times S_0^h$, onde $\mathbf{V}_0^h = (\mathbf{X}_h^2)^2 \cap \mathbf{H}_0^1$ e $S_0^h = \mathbf{X}_h^1$, este é o elemento conhecido de Taylor-Hood (P2P1) (BATHE, 1996; ZIENKIEWICZ and TAYLOR, 1991).

Empregando elementos finitos para resolver (3.19) e (3.20) obtém-se um problema generalizado de autovalores. Seja $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ o vetor dos graus de liberdade nodais, para a perturbação nas velocidades \mathbf{u} e nas pressões $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^m$, o vetor dos graus de liberdade que definem as perturbações nas pressões p . A forma discretizada de (3.19) e (3.20) é:

$$\begin{pmatrix} A + L(\mathbf{U}) & -R \\ R^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

onde A é $(n \times n)$ a matriz de difusão esparsa, a matriz $L(\mathbf{U})$ não simétrica de ordem $(n \times n)$ é a soma dos termos convectivos, $-R$ é a matriz gradiente discreta de ordem $(n \times m)$ e posto m , R^T é a divergência discreta $(m \times n)$, e M é a

matriz simétrica de massa, de ordem $(n \times n)$. O problema de autovalores (3.22) é real e não-simétrico, então, os autovalores são reais ou em pares complexos conjugados (FORTIN *et al.*, 1997; GUNZBURGER and NICOLAIDES, 1993). É de interesse o espectro da matriz $A + L(U)$, para calcular os autovetores e autovalores da restrição do operador $A + L(U)$ ao subespaço \mathbb{Z} .

3.3.1 MATRIZ DE MASSA GENERALIZADA

O problema generalizado de autovalores (3.22) possui uma matriz de massa generalizada:

$$\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

Como pode-se notar esta matriz é singular. Essa singularidade em problemas discretos generalizados de autovalores com matrizes de massa que não são positivas definidas é a principal causa de que a exploração do subespaço solenoidal, como suporte para estudos de estabilidade hidrodinâmica, seja um problema atual que sobreviveu ao passar do tempo. De tal sorte que, não há na literatura trabalhos onde se estuda algum tipo de estabilidade hidrodinâmica fazendo uso explícito das virtudes deste subespaço. A singularidade desta matriz tem contribuído de forma expressiva para que a formulação ou o tratamento para problemas de estabilidade hidrodinâmica, em variáveis primitivas seja deixado de lado nos últimos tempos (FORTIN *et al.*, 1997); favorecendo a linha do operador de Orr-Sommerfield.

A principal virtude de projetar o problema generalizado de autovalores consiste precisamente em que esta singularidade desaparece e se trabalha com um problema usual onde a matriz de massa é positiva definida. Do ponto de vista

dos métodos tradicionais para calcular autovalores e autovetores esta vantagem parece definitiva. A principal desvantagem está relacionada com o tamanho do subespaço solenoidal discreto.

3.4 PROJETORES

O primeiro caminho seguido para obter uma representação matricial adequada no subespaço solenoidal foi a construção de um projetor, para o subespaço nulo do operador divergência. Na seqüência será descrita esta tentativa sob o ponto de vista geral e depois discutido como é possível aplicá-la para o caso em questão.

Seja F uma matriz retangular cujas colunas são linearmente independentes. O vetor $F\mathbf{x}$ é expandido por F . Seja um vetor \mathbf{a} , no caso em que $\mathbf{a} - F\mathbf{x}$ é ortogonal a F , então $F\mathbf{x}$ é a projeção ortogonal do vetor \mathbf{a} no espaço expandido por F . Portanto:

$$F^H(\mathbf{a} - F\mathbf{x}) = 0. \quad (3.24)$$

onde o índice H refere-se à transposta conjugada (hermítica). Como $F\mathbf{x}$ é a projeção ortogonal no espaço gerado por F , observa-se que:

$$\mathbf{x} = (F^H F)^{-1} F^H \mathbf{a}, \quad (3.25)$$

e a inversa existe devido a independência linear das colunas de F . Agora se pode descobrir que o projetor no espaço gerado por F é:

$$P_F = F(F^H F)^{-1} F^H \quad (3.26)$$

o que significa que para qualquer vetor \mathbf{a} , $P_F \mathbf{a}$ é a projeção ortogonal de \mathbf{a} no

espaço gerado por F .

Os projetores possuem três propriedades importantes:

1. $P_F^2 = P_F$.
2. $(I - P_F)^2 = I - P_F$.
3. $(I - P_F) P_F = 0$, $P_{(F)^\perp} = (I - P_F)$.

através da segunda e terceira propriedade pode-se concluir que $I - P_F$ é o projetor do espaço complementar de F .

Com isso, é possível construir um projetor para o subespaço solenoidal nas equações de Navier-Stokes. Para o subespaço gerado pelo operador gradiente tem-se o projetor:

$$P_R = R \cdot (R^T \cdot R)^{-1} \cdot R^T \quad (3.27)$$

se a propriedade 3 for aplicada para o suplemento, ou subespaço ortogonal ao do posto do operador gradiente,

$$P_{(R)^\perp} = (I - P_R), \quad (3.28)$$

resulta no projetor que faz a conexão com o subespaço solenoidal.

Esta primeira tentativa de projetar o problema de estabilidade e de Navier-Stokes, baseia-se no uso deste projetor. Mas aparece a seguinte dificuldade: o processo de inversão de matrizes não conserva a esparsidade. Este problema não permite construir projetores esparsos, o que se traduz numa diminuição extraordinária das dimensões do problema, factível de se tratar por este caminho. Devido a esta situação desistiu-se da idéia, mas é possível que com o desenvolvimento computacional para a inversão de matrizes esparsas, esta direção poderá ocupar lugar de destaque.

3.5 ELEMENTOS SOLENOIDAIS

Existem três formas fundamentais de inverter o sistema linear esparsa resultante do processo de discretização para as equações de Navier-Stokes (GUNZBURGER and NICOLAIDES, 1993; CUVELIER *et al.*, 1986):

- Integração direta.
- Método de penalidade.
- Subespaço solenoidal.

Cada método possui suas próprias desvantagens: o primeiro tem um grande custo computacional, pois as técnicas de inversão diretas demandam muita memória; o segundo requer a introdução de um parâmetro grande, cujo valor é sujeito a um estudo de experimentação numérica prolongado; e o terceiro, é baseado na construção de bases solenoidais para o subespaço nulo do operador divergência e possui um elevado grau de dificuldade na obtenção das bases, pois a metodologia para obtê-las ainda não está suficientemente desenvolvida. A aplicação da terceira técnica desacopla o campo de pressões do campo de velocidades, sem a necessidade de introduzir parâmetros artificiais adicionais. O sistema resultante pela terceira via é menor no que se refere aos graus de liberdade dos outros (CUVELIER *et al.*, 1986).

Para muitas aplicações, em especial o caso dos escoamentos incompressíveis, a equação de conservação de massa $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ exige que o campo de velocidades discreto $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}$. Isto significa que o campo de velocidades discretos é pelo menos, no sentido fraco, solenoidal. De modo geral $\mathbb{Z}^h \not\subseteq \mathbb{Z}$ (GUNZBURGER and NICOLAIDES, 1993), mas deve-se selecionar o espaço de elementos finitos \mathbf{V}_0^h tal que, as funções que pertencem a \mathbf{V}_0^h sejam ao menos fracamente solenoidais, ou

seja, $\mathbf{V}_0^h \subset \mathbb{Z}$. Adicionalmente estes elementos causam uma grande simplificação, pois a determinação da velocidade é desacoplada em relação a pressão. Como $\mathbf{V}_0^h \subset \mathbb{Z}$, isto implica que, $\mathbb{Z}^h = \mathbf{V}_0^h$, é necessário resolver para o campo de velocidades \mathbf{u}^h a seguinte equação:

$$a(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) + c(\mathbf{u}^h, \mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}^h), \forall \mathbf{v}^h \in \mathbf{V}_0^h \quad (3.29)$$

Utilizando a representação matricial das equações de Navier-Stokes:

$$\begin{pmatrix} A & R \\ R^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

onde a matriz A representa a soma das matrizes convectiva e difusiva. Todo o problema da projeção solenoidal destas equações, se reduz em encontrar uma base T do espaço nulo da matriz divergência discreta R^T . Supondo que T possua colunas que formam a base para o subespaço nulo de R^T . Como: $\mathbf{U} = T \mathbf{V}$ e como: $\mathbf{V} \in \ker R^T$ então:

$$T^T R \mathbf{P} = R^T T \mathbf{P} = 0, \quad (3.31)$$

até que a equação projetada no subespaço solenoidal seja:

$$(T^T A T) \mathbf{V} = T^T \mathbf{F} \quad (3.32)$$

Como (3.32) é resolvida para \mathbf{V} o campo discreto de velocidades é recuperado de:

$$\mathbf{U} = T \mathbf{V} \quad (3.33)$$

A vantagem deste procedimento consiste em que representa uma redução significativa do esforço para se obter a solução do problema (BREZZI and FORTIN, 1991; GUNZBURGER and NICOLAIDES, 1993; CUVELIER *et al.*, 1986).

3.6 SUBESPAÇO NULO DO OPERADOR DIVERGÊNCIA

Um aspecto muito importante consiste em encontrar uma base para o subespaço nulo do operador divergência. Tal e como visto anteriormente, representando $\mathbf{u} = \{\beta_k\}$ e $\mathbf{q} = \{q_j\}$, temos que:

$$b(\mathbf{u}^h, p^h) = \langle R^T \mathbf{u}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{R}^J} = \langle \mathbf{u}, R \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{R}^K}. \quad (3.34)$$

São necessárias as matrizes S e T associadas ao produto interno dos espaços \mathbf{V}^h e S^h . Seja:

$$s_{ij} = ((q_i, q_j))_{S^h}, \quad 1 \leq i, j \leq J, \quad (3.35)$$

$$t_{ij} = ((\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j))_{\mathbf{V}^h}, \quad 1 \leq i, j \leq K. \quad (3.36)$$

usando as mesmas notações temos:

$$\|\mathbf{u}^h\|_{\mathbf{V}^h}^2 = \langle T \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}^K} \quad (3.37)$$

$$\|q^h\|_{S^h}^2 = \langle S \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{R}^J}. \quad (3.38)$$

os operadores S e T podem ser considerados como isomorfismos para as cópias de \mathbb{R}^K e \mathbb{R}^J representando \mathbf{V}^h e S^h , em uma outra cópia nos espaços duais \mathbf{V}^{th} e S^{th} .

Considerando o problema singular generalizado de autovalores. Encontrar a

base T de vetores ortonormais de \mathbb{R}^K , $\{\mathbf{u}_i \mid 1 \leq i \leq K\}$, e a base de vetores S ortonormais de \mathbb{R}^J , $\{\mathbf{q}_i \mid 1 \leq i \leq J\}$, tal que existem $\mu_i > 0$ que satisfazem:

$$R^T \cdot \mathbf{u}_i = \mu_i S \cdot \mathbf{q}_i, \quad \forall \mathbf{u}_i \in \ker R^T, \quad (3.39)$$

$$R \cdot \mathbf{q}_i = \mu_i T \cdot \mathbf{u}_i, \quad \forall \mathbf{q}_i \in \ker R, \quad (3.40)$$

É de interesse o caso em que $S = I$ e $T = I$, que é o caso clássico para a matriz R^T . Se: μ_i , \mathbf{u}_i e \mathbf{q}_i existem, então, a partir de (3.39) e (3.40) e representando por r o $rank(R^T)$ temos:

$$R^T \cdot T^{-1} \cdot R \mathbf{q}_i = \mu_i^2 S \cdot \mathbf{q}_i, \quad 1 \leq i \leq r, \quad (3.41)$$

$$R \cdot S^{-1} \cdot R^T \mathbf{u}_i = \mu_i^2 T \cdot \mathbf{u}_i, \quad 1 \leq i \leq r. \quad (3.42)$$

Estes são problemas generalizados de autovalores. A partir deles podem-se obter as bases desejadas dos subespaços nulos. Então, finalmente tem-se

$$R^T = S P \Sigma U^T T^T, \quad (3.43)$$

$$R = T U \Sigma P^T S^T, \quad (3.44)$$

onde U e P são matrizes formadas com os vetores colunas \mathbf{u}_i e \mathbf{q}_i , e Σ é uma matriz pseudo-diagonal de ordem $J \times K$, que contém os autovalores μ_i em sua diagonal principal.

Para o caso em que $S = I$ e $T = I$ no problema de autovalores (3.42) os autovalores nulos correspondem a um conjunto de autovetores, que constituem uma base do subespaço nulo do operador divergência. Esta base pode ser calculada por uma técnica tradicional de autovalores, se o problema não tiver excessivos graus de liberdade. Neste trabalho calcula-se esta base para o problema (3.42)

considerando os graus de liberdade que correspondem aos nós na linha de simetria como livres.

Para o importante caso de introduzir simetria e anti-simetria no operador divergência, calculam-se os problemas simétricos (+) e anti-simétricos (-):

$$R^+ \cdot S^{-1} \cdot (R^+)^T \mathbf{u}_i = \mu_i^2 T \cdot \mathbf{u}_i, \quad 1 \leq i \leq r. \quad (3.45)$$

$$R^- \cdot S^{-1} \cdot (R^-)^T \mathbf{u}_i = \mu_i^2 T \cdot \mathbf{u}_i, \quad 1 \leq i \leq r. \quad (3.46)$$

com isto podem-se calcular ambas as bases para os subespaços nulos simétricos e anti-simétricos do operador divergência. Então, o problema linear de estabilidade se divide em dois: um problema simétrico e outro anti-simétrico. É de se esperar que o modo mais instável se encontre na parcela anti-simétrica (ARANHA, 2001; JACKSON, 1987).

3.6.1 CONDIÇÕES DE CONTORNO NO SUBESPAÇO SOLENOIDAL

Quando se projeta o problema generalizado de estabilidade (3.22) para o subespaço solenoidal discreto é preciso que as matrizes projetadas carreguem a informação associada as condições de contorno para o problema de estabilidade. Isto se consegue colocando nos elementos da diagonal principal da matriz $R \cdot R^T$ o valor igual a 1 (para os nós da fronteira), e igualando a zero os elementos restantes não nulos que se encontram na fila e na coluna, cuja intersecção origina o elemento diagonal em questão. Uma vez repetido este processo para todos os nós retidos na fronteira, e aqueles que encontram-se na linha de simetria, é garantido

que todos os vetores que formam a base do subespaço nulo:

$$R \cdot R^T \mathbf{u} = \mu^2 \mathbf{u}, \quad (3.47)$$

obtidos ao resolver o problema de autovalores (3.47), carregam a informação referente as condições de contorno e de simetria.

Em outras palavras: resolvendo o problema ordinário de autovalores (3.47) é possível obter a base do subespaço nulo para a matriz $R \cdot R^T$, que coincide com o subespaço nulo do operador divergência R^T (ARANHA, 2001; ARANHA, 2003). Se for aplicado o procedimento anteriormente descrito com os nós colocados na fronteira a matriz $R \cdot R^T$, então naturalmente transmite-se a informação de contorno para a base do subespaço solenoidal. Esta informação está contida nos autovetores que se correspondem com autovalores nulos do problema (3.47).

Quando finalmente projeta-se na forma da equação (3.32), ou para calcular o problema generalizado de autovalores projetado:

$$[T^T \cdot (A + L(\mathbf{U})) \cdot T] \mathbf{w} = \sigma (T^T \cdot M \cdot T) \mathbf{w}, \quad (3.48)$$

este problema já carrega as condições de contorno na base do subespaço solenoidal.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS

4.1 CAMPO ESTACIONÁRIO

Neste capítulo são descritos os resultados dos cálculos numéricos que envolvem as soluções das equações de Navier-Stokes para um domínio computacional, com geometria bidimensional ao redor do cilindro. Também, detalha-se a validação quantitativa e qualitativa dos campos de velocidade e pressão para o tipo especial de escoamento em estudo.

Os campos de velocidade e pressão, soluções das equações de Navier-Stokes para o escoamento ao redor de um cilindro estão bem estudados e caracterizados (ZDRAVKOVICH, 1997; FORNBERG, 1980; FORNBERG, 1985). Esta foi a principal fonte no processo de validação para o cálculo do campo base na faixa de Reynolds em estudo.

<i>malhas</i>	<i>elementos</i>	<i>nos</i>	X_{max}	X_{min}	Y_{max}	Y_{min}	D
1	780	419	12,25D	-3,75D	3,75D	-3,75D	2
2	196	120	10D	-2,5D	5D	0,0	2
3	784	435	10D	-2,5D	5D	0,0	2
4	3136	1653	10D	-2,5D	5D	0,0	2
5	1296	703	12,5D	-2,5D	3,5D	0,0	2
6	3421	1812	40D	-5D	5D	0,0	2

Tabela 4.1: Malhas: Parâmetros das discretizações

4.1.1 MALHAS

O primeiro passo envolve a resolução do problema de Stokes, para uma configuração de malha que contemplará o cilindro circular completo. Esta primeira etapa permitirá a validação do algoritmo selecionado, para calcular o campo estacionário nesta configuração e preparar o caminho para o estudo de estabilidade.

Na tabela (4.1) estão representadas as principais características das malhas empregadas nos cálculos. Nas primeiras duas colunas o número de elementos e de nós, nas duas seguintes o valor maior e menor das ordenadas, a seguir os valores maiores e menores das abscissas, e finalmente o diâmetro do cilindro. Nestas malhas a origem coincide com o centro do cilindro. A malha 1 foi empregada para validar o problema de Stokes e no processo de implementação do algoritmo de Usawa. As malhas 2, 3 e 4 foram usadas nos estudos de convergência. As malhas 5 e 6 foram criadas com a intenção de obter os principais resultados deste trabalho.

Foi implementado e testado o algoritmo de Usawa, para resolver os problemas de Stokes e Navier-Stokes numa configuração computacional, para o cilindro completo com um número de graus de liberdade não muito elevado, (ver a figura (4.1)). Um aspecto importante neste estudo foi a geração de uma sequência de malhas imersas umas dentro das outras, que permitiram realizar um estudo da

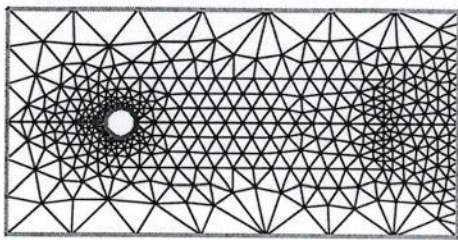


Figura 4.1: Malha 1

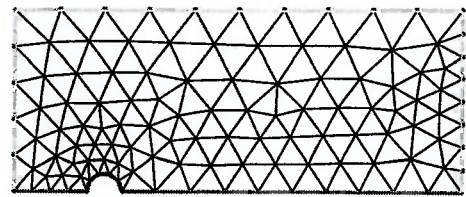


Figura 4.2: Malha 2

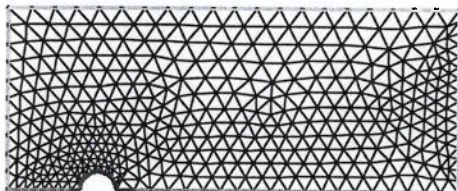


Figura 4.3: Malha 3

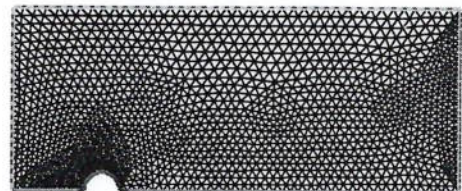


Figura 4.4: Malha 4



Figura 4.5: Malha 5

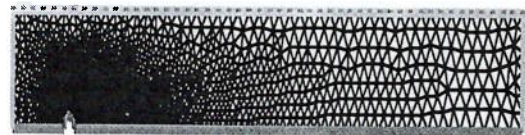


Figura 4.6: Malha 6

convergência do método de Usawa, no cálculo do campo estacionário de velocidades e pressões no escoamento ao redor do cilindro.

As malhas 2, 3 e 4, que foram empregadas nos estudos de convergência são geradas de tal modo, que cada triângulo da malha grossa foi dividido em quatro novos triângulos. Este processo permite garantir, sob o ponto de vista numérico, um estudo da convergência do algoritmo nesta sequência de malhas.

4.1.2 VALIDAÇÃO

Existem algumas variantes: (GIRAULT and RAVIART, 1986), na literatura para lidar com o problema anteriormente mencionado, tanto em sua versão mais simples: Stokes, como para o caso mais adequado de interesse: Navier-Stokes. Mas a atenção foi totalmente voltada para a família de métodos do tipo

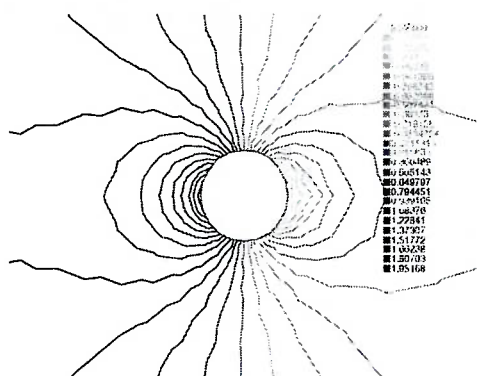


Figura 4.7: Campo de pressões para o Cilindro Completo (Stokes).

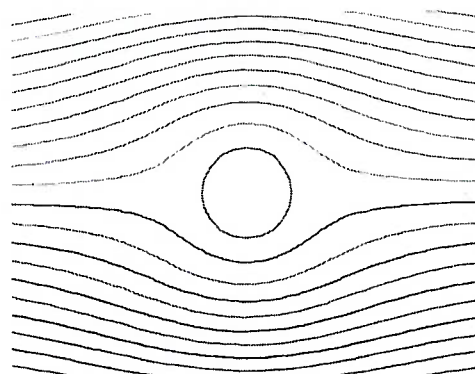


Figura 4.8: Linhas de corrente (Stokes).

Usawa, (MADAY *et al.*, 1993; BREZZI and FORTIN, 1991), pois eles combinam simplicidade, elegância e conseguem resolver ambos os problemas eficientemente, (BREZZI and FORTIN, 1991; FORTIN *et al.*, 1997; GIRAULT and RAVIART, 1986).

A solução do problema de Stokes pelo método de Usawa fornece um campo estacionário de velocidades e de pressões, figura (4.7), que caracteriza a dinâmica do escoamento incompressível ao redor do cilindro. No gráfico pode-se observar a distribuição das pressões, com os valores mais elevados na parte frontal e os menores na parte traseira do cilindro (ZDRAVKOVICH, 1997), característica deste tipo de escoamento. O campo das funções de corrente da figura (4.8) é solução do problema de Stokes; este resultado foi comparado com as linhas de correntes reportadas em (ZDRAVKOVICH, 1997). Este campo de velocidades é calculado com condições de Dirichlet no contorno.

$$\mathbf{u}|_{\partial\Gamma} = (1, 0)^T, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{u}|_{Ci} = (0, 0)^T, \quad (4.2)$$

Na figura (4.9) estão representadas as pressões nos pontos $(-1,0)$ e $(1,0)$ do

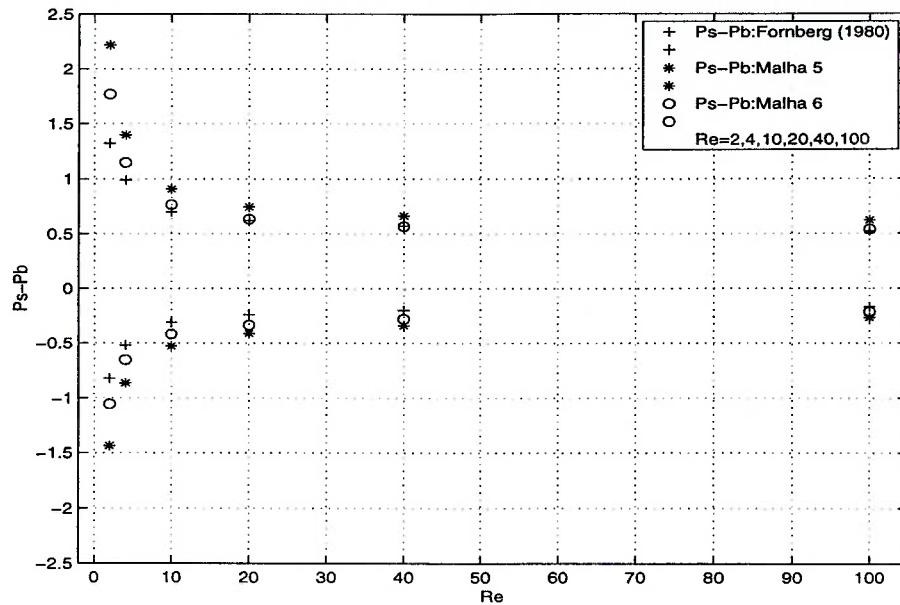


Figura 4.9: Pressões no ponto frontal (Ps) e traseiro (Pb) do cilindro.

cilindro, calculadas pelo método de Usawa e comparadas com os resultados de (FORNBERG, 1980) para valores de Reynolds ($Re=2,4,10,20,40,100$), nas malhas 5 e 6. Pode-se constatar uma melhoria na aproximação, a medida que a malha empregada possui um número maior de elementos.

Nesta primeira etapa, onde se buscava obter as soluções adequadas das equações de Navier-Stokes, permitiu validar o algoritmo de Usawa numa malha com elementos triangulares de Taylor-Hood, ou seja, elementos quadráticos nas velocidades e lineares nas pressões. Neste estado da pesquisa tem-se um algoritmo capaz de resolver as equações de Navier-Stokes (MADAY *et al.*, 1993; GIRAULT and RAVIART, 1986).

O campo de velocidades simétrico que se forma no escoamento ao redor do cilindro é o campo base, cuja estabilidade linear pretende-se estudar na faixa de Reynolds, até que ocorra a perda de estabilidade transformando-se num campo variável no tempo. Este campo existe supostamente para números de Reynolds altos, (ARANHA, 2003; LADYSHESNKAYA, 1969), mais seu caráter instável o

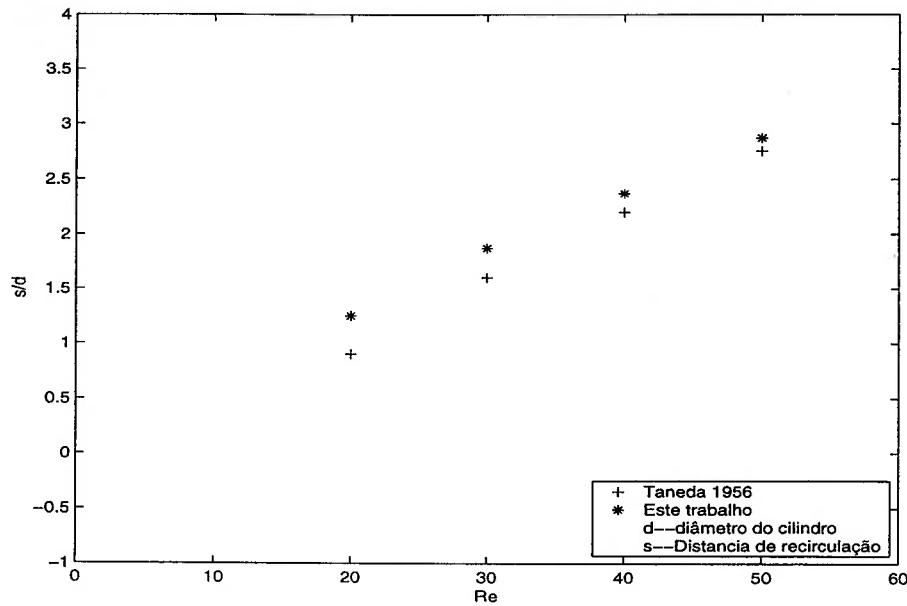


Figura 4.10: Região de re-circulação observada por Taneda (1956).

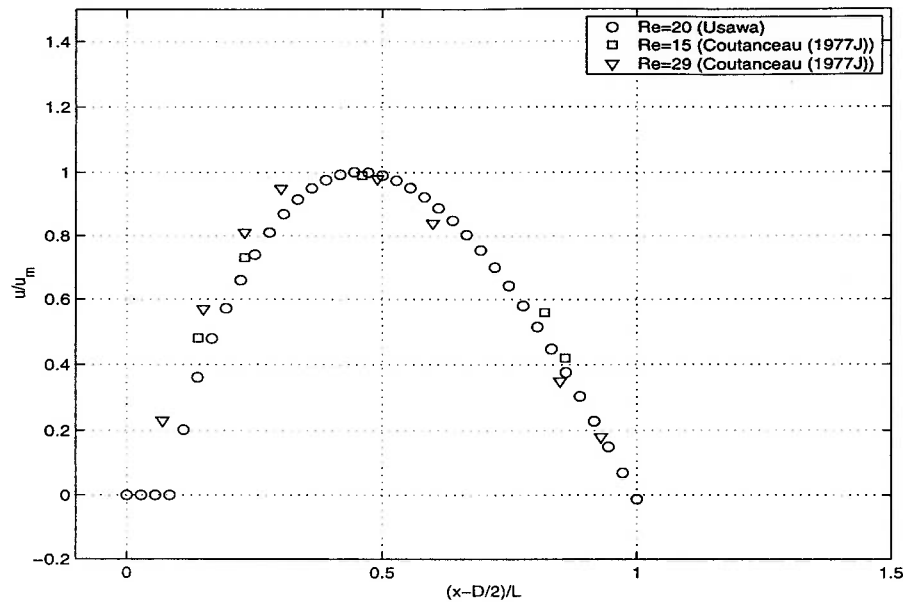
impede de realmente aparecer neste tipo de escoamento. A ausência aparente desta solução estacionária básica tem desviado a atenção da comunidade em relação a importância desta solução, no mecanismo de transição para o escoamento ao redor do cilindro. Uma das hipóteses que propiciaram o surgimento desta pesquisa, esta relacionada precisamente em restaurar a verdadeira importância deste campo, na rica dinâmica que ocorre no escoamento ao redor do cilindro.

Neste trabalho foram empregadas as condições de Dirichlet nos contornos de entrada, saída e superior. Na linha horizontal que divide o cilindro em duas partes simétricas foram colocadas as condições de contorno de simetria:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (4.3)$$

$$v = 0, \quad (4.4)$$

Outro aspecto a considerar na dinâmica deste escoamento simétrico é com

Figura 4.11: Velocidade u na linha de simetria.

Re	$-U_{max}/U_{\infty}$	X/L_w	dt	<i>Fonte</i>
20	0,030	0,41	-	(COUTANCEAU and BOUARD, 1977J)
20	0,036	0,44	0,005	Este trabalho (Malha 6)

Tabela 4.2: Velocidade na linha de simetria

relação aos tamanhos do diâmetro do cilindro e a região de re-circulação. Um estudo quantitativo desta relação para a faixa de Reynolds pode ser vista na figura (4.10). Nesta, se comparam os resultados numéricos obtidos, com os observados em (TANEDA, 1956). Nela o comportamento do tamanho da região de re-circulação, a medida que se incrementa o número de Reynolds, para os cálculos numéricos comparados com as observações experimentais. Pode-se dizer que a evolução em Reynolds para as dimensões da região de re-circulação se aproximam das dimensões observadas no experimento. Este resultado garante que o dito campo está relativamente bem próximo da faixa de Reynolds que se tem interesse.

A tabela (4.2) mostra a validação da velocidade na linha de simetria a partir

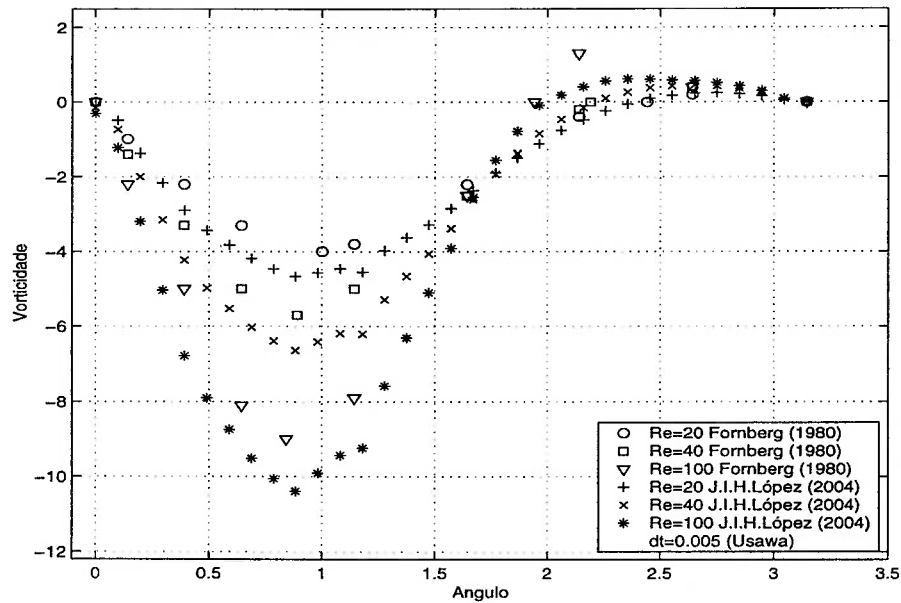


Figura 4.12: Distribuição de vorticidade na superfície do cilindro (vorticidade, radianos).

do campo, segundo Usawa, calculado neste trabalho empregando-se a malha 6, e comparando com os resultados experimentais (COUTANCEAU and BOUARD, 1977J). U_{max} representa o valor máximo de velocidade na linha de simetria após o cilindro, na região de recirculação, e X/L_w representa o valor da posição dentro desta linha onde a velocidade alcança seu máximo (ZDRAVKOVICH, 1997). Este campo de velocidade possui a forma de uma parábola invertida, que atinge seu ponto máximo no ponto X/L_w e toma o valor nulo no cilindro e no ponto da linha de simetria donde acaba a região de recirculação.

Um aspecto importante para validar o campo de velocidade corresponde a estrutura anteriormente descrita da componente deste campo na linha de simetria. A forma parabólica anteriormente descrita (COUTANCEAU and BOUARD, 1977J; ZDRAVKOVICH, 1997) não muda segundo estes autores na faixa de Reynolds $15 < Re < 30$, feitas a partir das medições experimentais. Na figura (4.11) esta representado este campo de velocidades u/u_{max} na linha de simetria

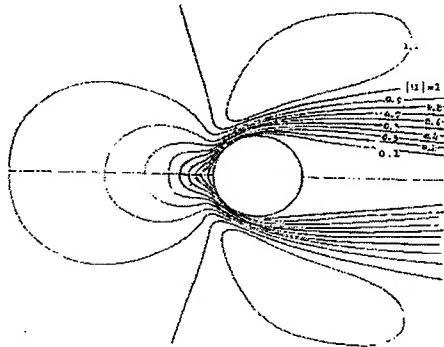


Figura 4.13: Modulo da velocidade
Re=40 Zdravkovich (1997)

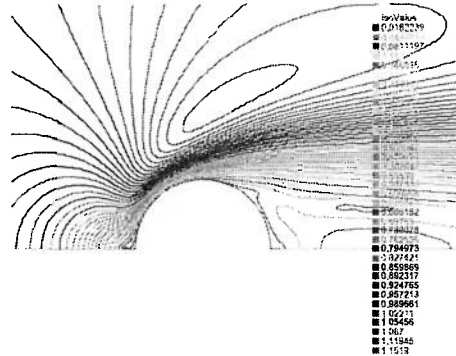


Figura 4.14: Modulo da velocidade
Re=40 (Usawa)

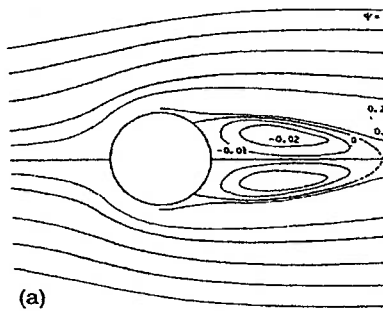


Figura 4.15: Função de corrente
Re=40 Zdravkovich (1997)

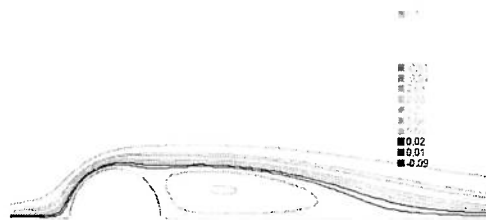


Figura 4.16: Função de corrente
Re=40 (Usawa)

conjuntamente com os resultados experimentais reportados pelos autores antes mencionados. No eixo das abscissas temos o tamanho da região de recirculação colocado no intervalo $[0, 1]$, e nas ordenadas temos dividido as velocidades pela velocidade máxima no intervalo em que é negativa. Esta representação foi empregada para utilizar os resultados, com os quais desejamos comparar com a solução obtida (COUTANCEAU and BOUARD, 1977J).

Com o método de Usawa e para $Re=20$, um valor que encontra-se na faixa apresentada neste trabalho. Foi calculado o campo de velocidade solução das equações de Navier-Stokes, para o escoamento ao redor de um cilindro. Como se observa no gráfico a estrutura parabólica é recuperada pelo campo de velocidades

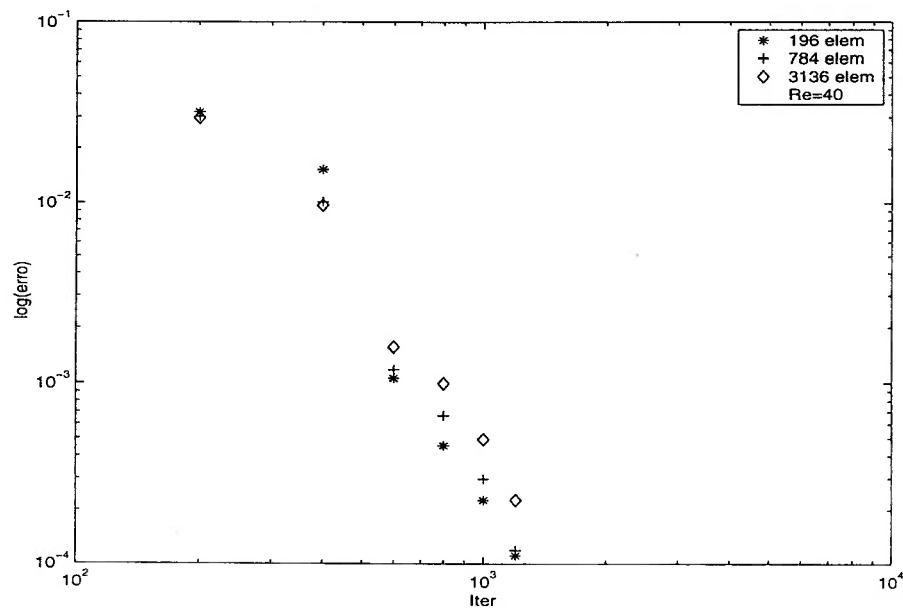


Figura 4.17: Erro de convergência em múltiplas malhas.

na linha de simetria. E além disso, quando comparado o campo teórico de velocidades com os campos medidos e reportados se obtém uma aproximação razoável nesta faixa de Reynolds.

Na figura (4.12) estão representadas as distribuições de vorticidade calculadas neste trabalho (Método de Usawa), conjuntamente com aquelas calculadas por FORNBERG (1980) (Método de Newton) na superfície do cilindro. Os valores do número de Reynolds representados são: $Re=20,40$ e 100 . O espaço temporal empregado no algoritmo de Usawa foi de $dt = 0.005$. O ângulo varia de 0 (o ponto de estagnação frontal do cilindro) até π (o ponto traseiro do cilindro). Este cálculo foi realizado empregando-se a malha 6.

Pode-se apreciar na figura (4.12) que a geração de vorticidade a partir do esquema de Usawa é superior, na região anterior ao ponto de separação, ao método de Newton empregado por FORNBERG (1980). Na região posterior a este ponto existe maior concordância para os valores $Re=20,40$. Mesmo assim a estrutura qualitativa destes campos é similar.

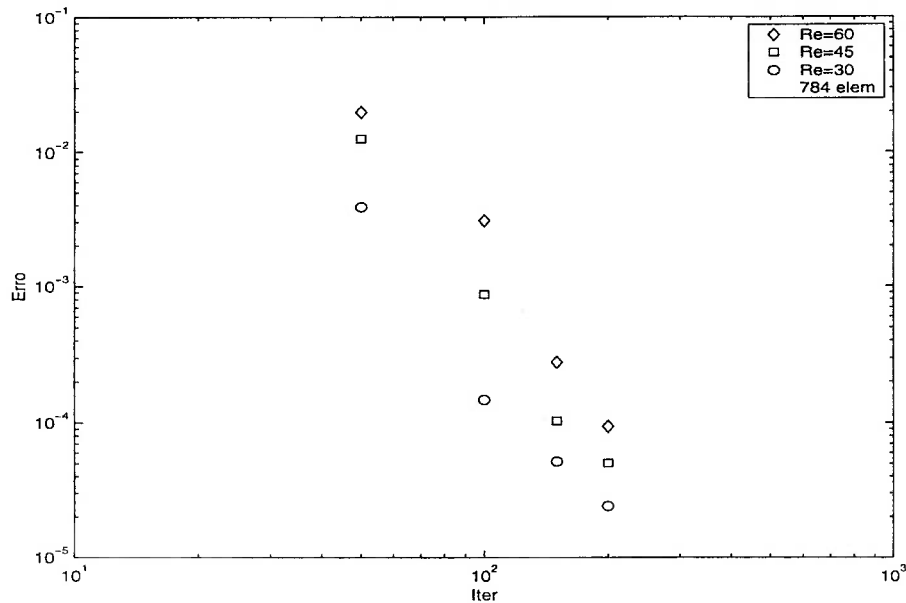


Figura 4.18: Erro de convergência para uma sequência ascendente em Reynolds numa única malha.

<i>Re</i>	<i>Fornberg(1980)</i>	<i>Coutanceau(1977J)</i>	<i>J.I.H.Lopez(2004)</i>
20	$\theta = 45,83^\circ$	$\theta = 42^\circ$	$\theta = 40,7^\circ$
40	$\theta = 54,43^\circ$	$\theta = 54^\circ$	$\theta = 55,03^\circ$
100	$\theta = 68,75^\circ$	–	$\theta = 68,7^\circ$

Tabela 4.3: Posição do ponto de separação

Na tabela (4.3) estão representados os valores em graus dos ângulos para o ponto de separação calculados neste trabalho e por outros autores. Para os valores de $Re=20,40$ e 100 na primeira coluna temos os resultados de FORNBERG (1980) a partir do método de Newton, na segunda coluna os resultados reportados por COUTANCEAU (1977J), a partir do experimento, e na terceira coluna os resultados deste trabalho usando o método de Usawa. Como pode-se observar nesta tabela não existem discrepâncias em relação aos ângulos do ponto de separação, para estes valores de Reynolds.

Na figura (4.13) está representado o campo escalar que corresponde ao módulo de velocidade $|\mathbf{u}|$ tomado de ZDRAVKOVICH (1997), para $Re=40$. Estas

isolinhas representam o módulo de velocidade constante. Na figura (4.14) ao lado tem-se a mesma magnitude mas calculada a partir do algoritmo de Usawa implementado no trabalho, para o $Re=40$. Como pode-se observar o campo calculado se corresponde plenamente ao campo reportado por Zdravkovich (1997). Finalmente na figura (4.15) estão representadas as linhas de corrente para o escoamento ao redor do cilindro ($Re=40$) (ZDRAVKOVICH, 1997). Do lado direito na figura (4.16) está representado o campo de linhas de corrente para o $Re=40$ pelo método de Usawa implementado neste trabalho. Estes gráficos coincidem qualitativa e quantitativamente. Neste ponto, da-se como encerrado a validação do campo estacionário.

4.1.3 CONVERGÊNCIA

O problema da convergência é de extrema importância nos cálculos numéricos, pois representa a única garantia computacional de que a solução encontrada satisfaz a representação discretizada dos operadores. Outro aspecto a considerar é a necessidade de que o salto ao contínuo esteja garantido no modelo discreto selecionado.

Nesta seção será estudado o comportamento dos cálculos nas três malhas das figuras (4.2), (4.3) e (4.4). É importante garantir a estabilidade dos cálculos quando o nível de discretização se incrementa, ou quando o número de elementos cresce.

Na figura (4.17) podemos observar o comportamento do erro de convergência segundo a norma $\|\mathbf{u}_h^m - \mathbf{u}_h\|_1$, em função do número de iterações. O gráfico está representado em escala logarítmica, pois é a mais apropriada. Nesta figura (4.17) foi representado o erro de convergência do método de Usawa, na solução das equações de Navier-Stokes para o número de Reynolds $Re=40$ e empregando

as três malhas mencionadas (196 : 784 : 3136 : elementos). Este estudo mostra uma qualidade desejável do algoritmo: que as propriedades de convergência não dependam fortemente do processo de discretização. Ou seja, que a medida que o número de elementos cresce o esforço relativo de convergência permanece invariante, (BATHE, 1996). Observando a figura (4.17) nota-se efetivamente que a convergência é independente das malhas empregadas.

Na figura (4.18) está representado o experimento numérico para uma única malha, que consiste em três rodadas com intervalos em Reynolds, onde a diferença entre elas é ($Re=30$, $Re=45$, $Re=60$). Neste caso pode-se observar uma ligeira dependência do processo de convergência em relação ao número de Reynolds. É natural obter este resultado, pois à medida que o Reynolds cresce a influência do termo convectivo se faz mais significativa, e dificulta o processo de convergência.

4.1.4 OPERADORES DISCRETOS

Conseguir uma discretização adequada dos principais operadores que constituem as equações de Navier-Stokes e o problema generalizado de estabilidade, é um passo importante que garante uma adequada representação matemática do problema contínuo a resolver.

Nesta seção será tratado o processo de discretização dos principais operadores que constituem as equações de Navier-Stokes e do problema generalizado de autovalores, para o estudo de estabilidade. Estes operadores foram discretizados numa forma matricial cuja esparsidade para o elemento, quadrático nas velocidades e linear na pressões (Taylor-Hood), será mostrado a seguir.

Na figura (4.19) observa-se uma representação da estrutura de esparsidade das matrizes que representam os operadores de massa e difusão. Estas matrizes são

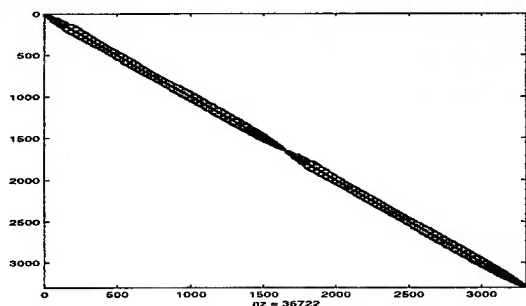


Figura 4.19: Esparsidade das matrizes de Massa e Difusão.

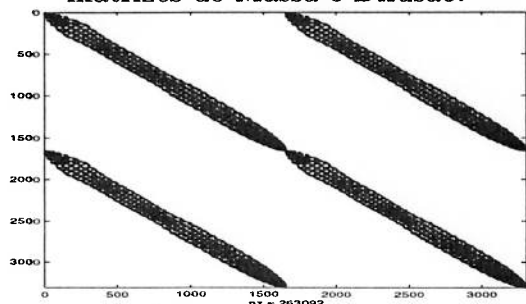
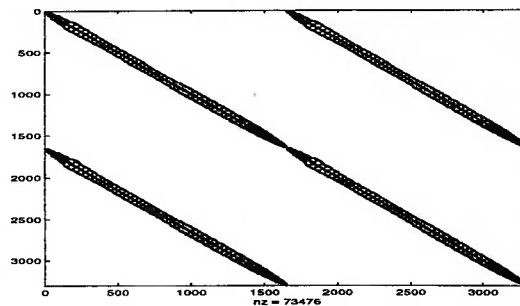
Figura 4.21: Esparsidade da matriz RR^T 

Figura 4.20: Esparsidade da matriz Convectiva.

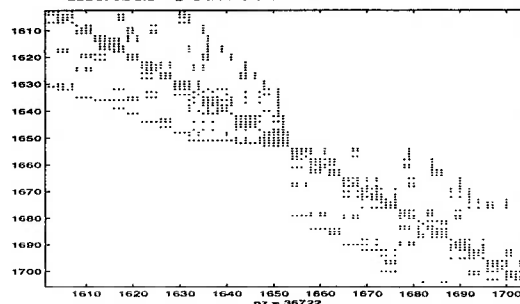


Figura 4.22: Esparsidade ampliada da matriz de Massa

malha	elementos	$\dim(\mathbf{V}_0^h)$	$\dim(\mathbf{S}_0^h)$	$\dim(\ker(\mathbf{R}_h^T))$
2	196	870	120	626
3	784	3306	435	2635
4	3136	12882	1653	10769

Tabela 4.4: Parâmetros principais das discretizações

positivas definidas e simétricas. É possível observar a simetria na figura (4.22), onde se mostra uma ampliação detalhada da estrutura de esparsidade da matriz de massa. Esta estrutura constitui essencialmente as posições dos elementos não nulos destas matrizes, a qual é bem conhecida e estudada de modo que pode ser utilizada como fonte de verificação, na hora de gerar os operadores para realizar os cálculos. Também, torna-se muito importante as verificações internas, que são necessárias no momento de trabalhar com estas matrizes de elevados graus de liberdade.

Na figura (4.20) temos a representação da esparsidade para o operador convectivo em sua forma jacobiana, com o campo de velocidades estacionário. Este operador diferente dos de massa e difusão, não é simétrico e possui elementos nas sub-matrizes fora da diagonal principal.

Para o cálculo da base solenoidal foi muito importante construir o operador da figura (4.21). O núcleo deste operador, que coincide com o núcleo do operador divergência serviu de base para o cálculo da estabilidade linear, no caso do escoamento ao redor do cilindro. Este operador foi construído como sendo o produto do transposto do operador divergência por ele mesmo.

Na tabela (4.4) tem-se os principais parâmetros das três malhas utilizadas nos cálculos de estabilidade; a quantidade de elementos de cada uma delas, assim como as principais dimensões dos espaços de elementos finitos discretos, para as velocidades \mathbf{V}_0^h , as pressões \mathbf{S}_0^h e, na última coluna, as dimensões dos subespaços solenoidais calculados para cada uma das malhas. O estudo e o aprendizado do cálculo destes subespaços nulos constitui o maior resultado operacional desta tese.

4.2 PROBLEMA DE ESTABILIDADE

O problema de estabilidade hidrodinâmica para o escoamento incompressível ao redor do cilindro possui algumas características especiais, que geram grandes dificuldades na hora da implementação computacional dos algoritmos necessários para resolução. A seguir, são enumeradas algumas delas:

- Cada problema de estabilidade está constituído por dois problemas acoplados: cálculo do campo estacionário, cuja estabilidade pretende-se estudar, e o problema de autovalores que completa o estudo de estabilidade.

- Estes problemas anteriores possuem naturezas numéricas diferentes, o primeiro baseia-se na resolução de sistemas lineares esparsos, e o segundo se relaciona com o cálculo de autovalores e autovetores em sistemas indefinidos, devido ao qual não existem pacotes computacionais onde este acoplamento esteja naturalmente previsto.
- Existe pouca disponibilidade de algoritmos e técnicas computacionais, que tratam o problema de cálculo de autovalores para sistemas indefinidos, comparados aos problemas de inversão de sistemas lineares esparsos, os quais são bem estudados na literatura.
- A barreira solenoidal tem erguido um grande inconveniente, como visto anteriormente, no avanço dos cálculos de estabilidade.
- Para calcular este problema generalizado de autovalores, assim como para o cálculo da base solenoidal, utilizamos as rotinas, disponíveis e incorporadas ao Matlab (Eig e Eigs), do Arpack, (LEHOUCQ *et al.*, 1997), e do Lapack, (ANDERSON *et al.*, 1999).

Estas dificuldades, adicionadas as outras inerentes ao problema físico-matemático, condicionaram a pauta do modelo de solução encontrado, para resolver o problema numérico de estabilidade.

A seguir descreve-se o roteiro seguido para calcular o problema de estabilidade:

- Primeiramente foi gerado o domínio computacional, através do gerador de malhas especializado (GAMBIT).
- Na segunda etapa subdividiu-se esta malha em mais duas malhas com maior densidade, para garantir o estudo de estabilidade. Neste passo criou-se um programa em FORTRAN 77.

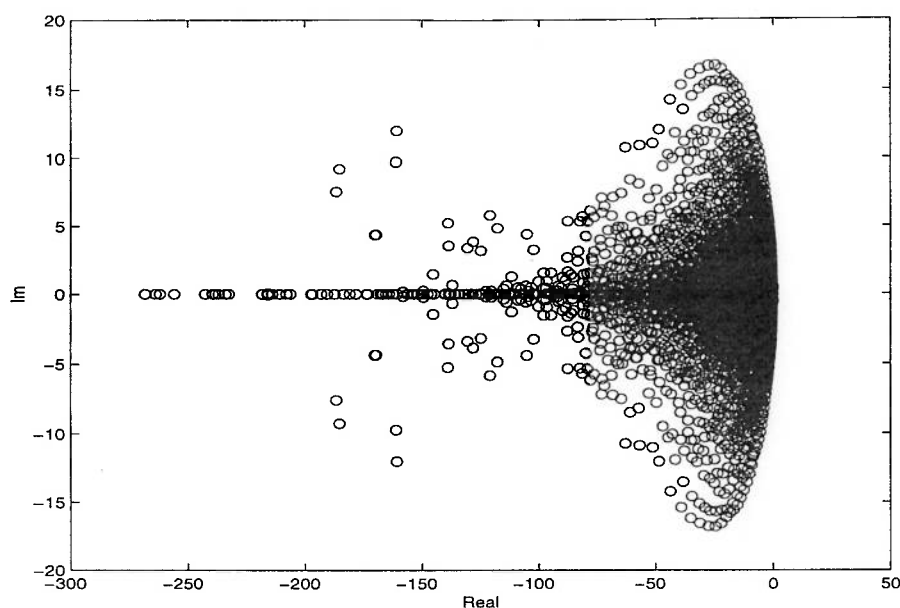


Figura 4.23: Espectro completo $Re=46,05$.

- Numa terceira etapa criou-se um programa em FORTRAN 77, para compatibilizar os formatos de malhas gerados pelo GAMBIT e os formatos admitidos pelo FREEFEM: um "solver" especializado em resolver equações a derivadas parciais (HECHT and PIRONNEAU, 2002).
- O FREEFEM permitiu resolver os principais problemas, com as malhas geradas no GAMBIT. Primeiro, implementou-se o algoritmo de Usawa e depois construiu-se a matriz jacobiana no campo base, que conjuntamente com a matriz de massa e as dos operadores divergência e gradiente obteve-se a informação necessária, para projetar o problema de estabilidade no subespaço solenoidal.
- Com estas matrizes exportadas do FREEFEM calculou-se através do programa MATLAB, a base do subespaço nulo do operador divergência e o problema generalizado de autovalores.

Este é o roteiro que permitiu resolver o problema de estabilidade no subespaço solenoidal. O objetivo final deste estudo de estabilidade linear consiste

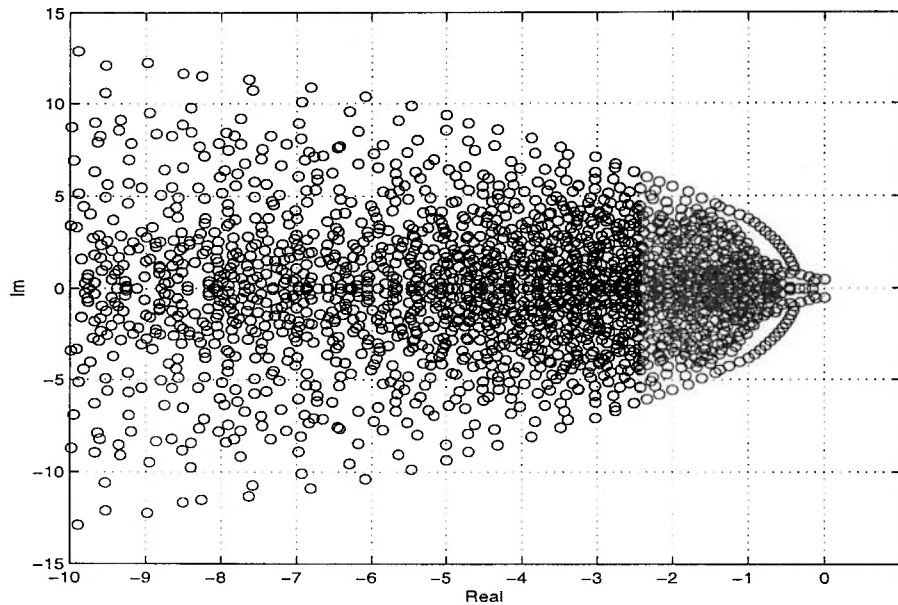


Figura 4.24: Espectro ampliado $\text{Re}=46,05$.

em calcular o espectro do problema generalizado de autovalores. Este espectro carrega os autovalores cujas componentes reais e imaginárias caracterizam a taxa de crescimento da amplitude, e a frequência das perturbações que crescem a partir do campo estacionário. Até o momento não existe na literatura uma teoria geral e bem estabelecida que descreva a estrutura deste espectro, (GEORGESCU, 1985; JOSEPH, 1985). Existe consenso que o espectro deve ter a forma de uma parábola, (NOACK and ECKELMANN, 1994), e esta opinião baseia-se nos espectros de equações difusivas e convectivas mais simples, do que as equações de Navier-Stokes. Nesta seção serão tratados os resultados, que constituem a principal busca deste trabalho e estão relacionados com o problema de estabilidade linear generalizado, para o escoamento simétrico ao redor de um cilindro circular. Uma vez tendo os principais ingredientes do problema de estabilidade na forma dos operadores discretizados, resolve-se o problema de

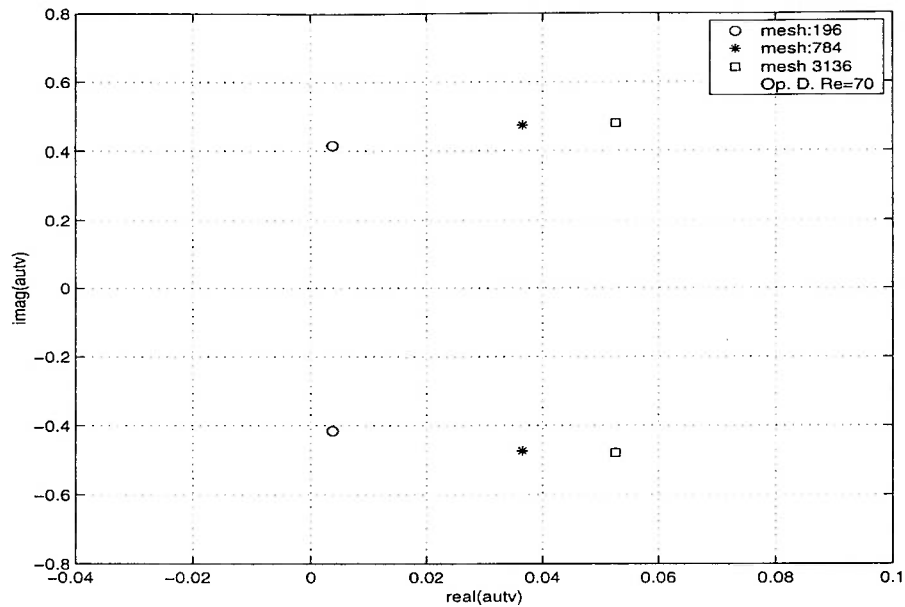


Figura 4.25: Espectro para $Re=70$ nas malhas 2,3 e 4.

autovalores generalizado. Espera-se que na solução deste problema, em forma dos pares autovalores-autovetores seja possível localizar a bifurcação de Hopf.

Na figura (4.23) observa-se o espectro do problema generalizado de autovalores (malha 5). Este espectro possui a forma parabólica tão mencionada na literatura (GEORGESCU, 1985; GERVAIS *et al.*, 1997). É um fato interessante a ressaltar, que normalmente nestes estudos não se consegue capturar o espectro completo do problema generalizado de estabilidade, pois o que se tenta é descobrir uma faixa próxima do eixo imaginário, onde encontram-se aqueles autovalores mais instáveis. A estrutura topológica deste espectro não tem sido reportada até o momento.

A figura (4.24) tem o mesmo espectro ampliado nas proximidades do semi-plano direito. Nele, pode-se apreciar com maior facilidade a parabolicidade característica, e além disso uma pretumbrância que sobressai nos autovalores mais próximos da instabilidade: isto pode ser devido a uma característica peculiar da dinâmica do cilindro. Na tabela (4.5) estão representadas as partes reais e imagi-

	<i>malha2</i>	<i>malha3</i>	<i>malha4</i>
P2P1	$\sigma = -0,0406$ $\omega = 0,4040$	$\sigma = 0,0284$ $\omega = 0,4710$	$\sigma = 0,0530$ $\omega = 0,4802$
P2P1 ⁺	$\sigma = -0,0209$ $\omega = 0,4432$	$\sigma = 0,0369$ $\omega = 0,4753$	$\sigma = 0,0531$ $\omega = 0,4800$
P2P1 ^D	$\sigma = 0,0038$ $\omega = 0,4158$	$\sigma = 0,0366$ $\omega = 0,4739$	$\sigma = 0,0527$ $\omega = 0,4791$

Tabela 4.5: Parcelas Real (σ) e Imaginária (ω). Elementos: Quadrático-linear, Quadrático-linear com nó central e Descontínuo (P2P1, P2P1⁺ e P2P1^D)

nárias para os autovalores críticos quando calculado o problema de estabilidade com as malhas 2, 3 e 4 da tabela (4.1). A partir desta tabela na figura (4.25) foram capturados os autovalores mais instáveis para $Re=70$, empregando as três malhas das figuras (4.2), (4.3) e (4.4), para o operador divergência descontínuo. Pode-se

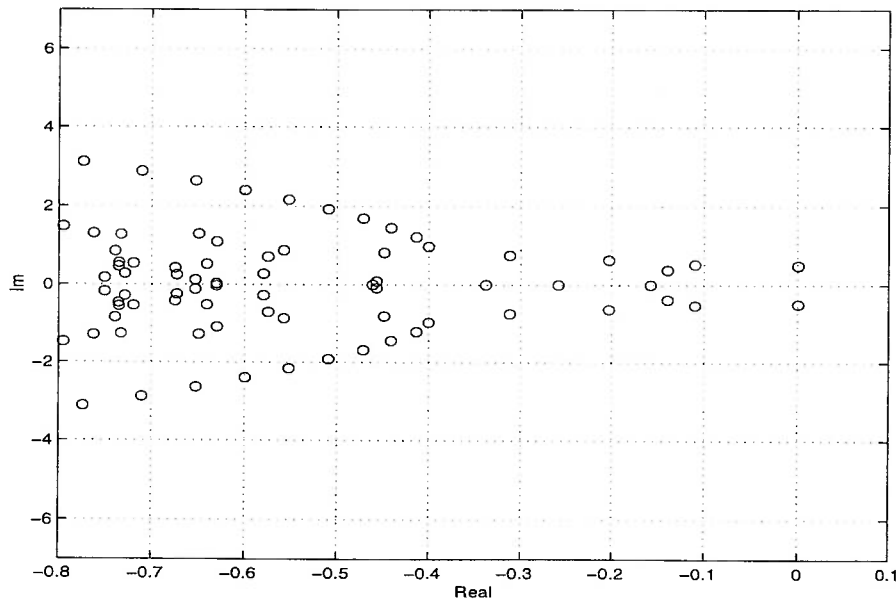


Figura 4.26: Espectro restrito as vizinhanças do eixo imaginário $Re=46,05$.

perceber um deslocamento destes autovalores na região de instabilidade, à medida que o refinamento das malhas incrementa-se: este comportamento é típico dos problemas de autovalores e já foi reportado em (GERVAIS *et al.*, 1997; FORTIN *et al.*, 1994). Na figura (4.26) observa-se uma segunda ampliação do espectro, na

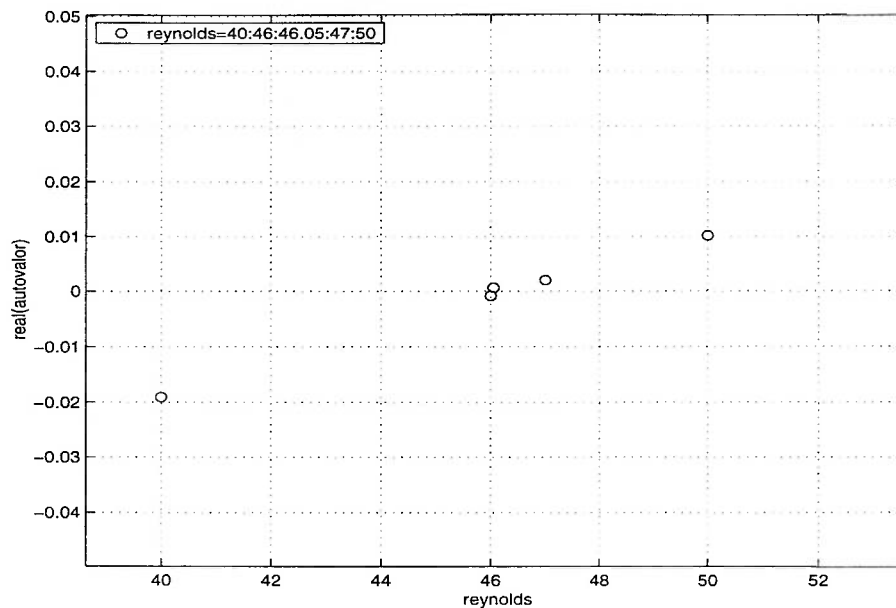


Figura 4.27: Parte real do autovalor mais significativo.

região mais próxima ao par conjugado de autovalores, que fornece a bifurcação de Hopf, para o valor de Reynolds crítico que se encontra entre 46 e 46,05 (malha 5). Esta figura mostra que a bifurcação de Hopf acontece no subespaço solenoidal discreto gerado pelo elemento de Taylor-Hood, (BATHE, 1996).

É conhecido que na bifurcação de Hopf o estado estacionário perde a sua estabilidade e a dinâmica cai num ciclo limite, cuja frequência é igual à parte imaginária do autovalor crítico. A amplitude do ciclo limite se incrementa desde zero até a raiz quadrada do parâmetro da bifurcação ($Re - Re_C$). Este ciclo pode ser localmente estável ou instável, dependendo se a bifurcação é supercrítica ou subcrítica. A estrutura da solução periódica no tempo após a bifurcação no ponto $Re = Re_C$ pode ser construída em correspondência com a fórmula:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + a \xi_R \cos(\omega t) - a \xi_I \sin(\omega t), \quad (4.5)$$

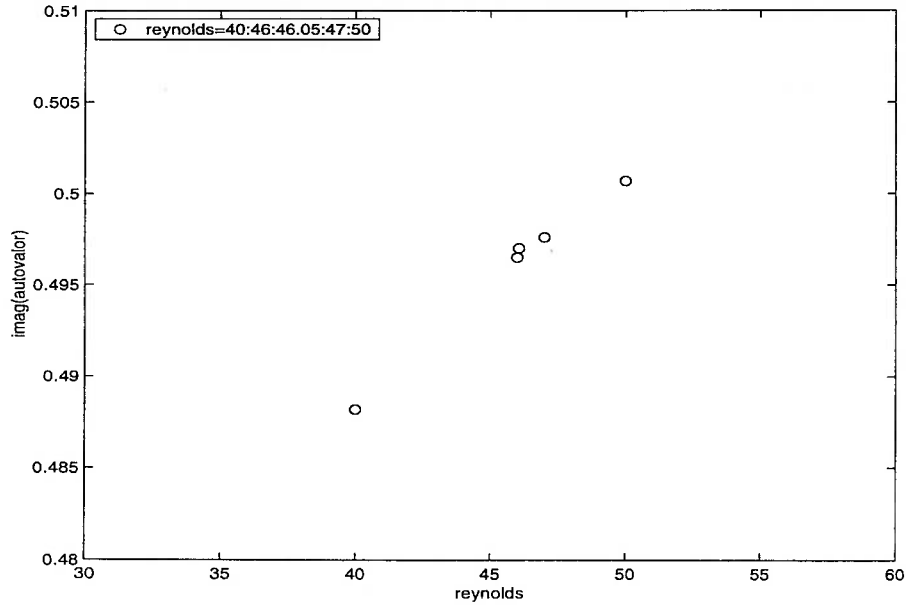


Figura 4.28: Parte imaginária do autovalor mais significativo.

onde ω é a parte imaginária do autovalor mais instável, e ξ_R e ξ_I são as partes reais e imaginárias do autovetor complexo correspondente ao autovalor crítico, e $a(Re)$ é o raio do ciclo limite:

$$a(Re) = \sqrt{\left(\frac{d}{b}\right)(Re - Re_C)}, \quad (4.6)$$

a constante $b \neq 0$ pode ser determinada empiricamente, tal e como se faz nos modelos fenomenológicos, (PROVANSAL *et al.*, 1987; ALBAREDE and PROVANSAL, 1995b), onde se determina a criticalidade e a estabilidade do ciclo limite. Se $b > 0$, o ciclo é localmente estável, se $b < 0$ é instável e a bifurcação de Hopf subcrítica. Existe uma condição adicional para a parte real do autovalor crítico, que caracteriza uma bifurcação de Hopf, é a seguinte, (POLIASHENKO and AIDUN, 1995):

$$\frac{d}{dRe}(\text{Real} \{\lambda(Re_C)\}) = d \neq 0. \quad (4.7)$$

<i>Literatura</i>	St_c	Re_c	<i>Metodo</i>	<i>Malha</i>
(JACKSON, 1987)	0,13626	45,403	FEM: N-Raph	3056
(MORZYNSKI and THIELE, 1991)	0,13451	46,270	FDM: N-Raph	3200
(WILLIAMSON, 1989)	0,1220	47,90	Experimento	
(BERGER and WILE, 1972)	0,12	50,0	Experimento	
(GRESHO <i>et al.</i> , 1984)	0,14	50,0	FEM-2D	
(CHEN <i>et al.</i> , 1995)	0,138	47,90	FEM: Iter-Sub	10000
(DING and KAWAHARA, 1999)	0,12619	46,389	FEM: Arnoldi	9870
(NOACK and ECKELMANN, 1994)	0,149	54,0	Galerkin	63mdos:2D
Este trabalho	0,1374	47,5	FEM: sub-sole	3016

Tabela 4.6: Parâmetros: esta tabela é uma atualização de Ding (1999)

ou seja, a derivada, segundo o parâmetro da parte real do autovalor crítico caracteriza a bifurcação de Hopf. Esta condição é conhecida como condição de transversalidade.

A figura (4.27) representa a parte real do autovalor mais instável, para a faixa de Reynolds que compreende os valores de 40, 46, 46,05, e 50. O valor crítico está localizado entre os valores de 46 e 46,05, mas observando a razão de crescimento da parte real nesta faixa de Reynolds é fácil perceber que se cumpre a condição de transversalidade, (WINTERS, 1991; JOSEPH, 1985; POLIASHENKO and AIDUN, 1995).

Na próxima figura (4.28) estão representados a parte imaginária dos autovalores mais instáveis, para os valores do número de Reynolds próximos a bifurcação de Hopf. Nesta figura pode-se apreciar a taxa de crescimento da frequência, nesta faixa de Reynolds. A tabela (4.6) contém uma descrição dos principais trabalhos realizados na literatura, onde o problema de estabilidade linear é calculado, para o escoamento incompressível ao redor do cilindro. Na segunda e terceira coluna encontram-se os valores do número de Strouhal e o Reynolds crítico, no qual o escoamento simétrico perde a estabilidade e ocorre a bifurcação. Pode-se apreciar observando cuidadosamente estas duas primeiras colunas, que o número de

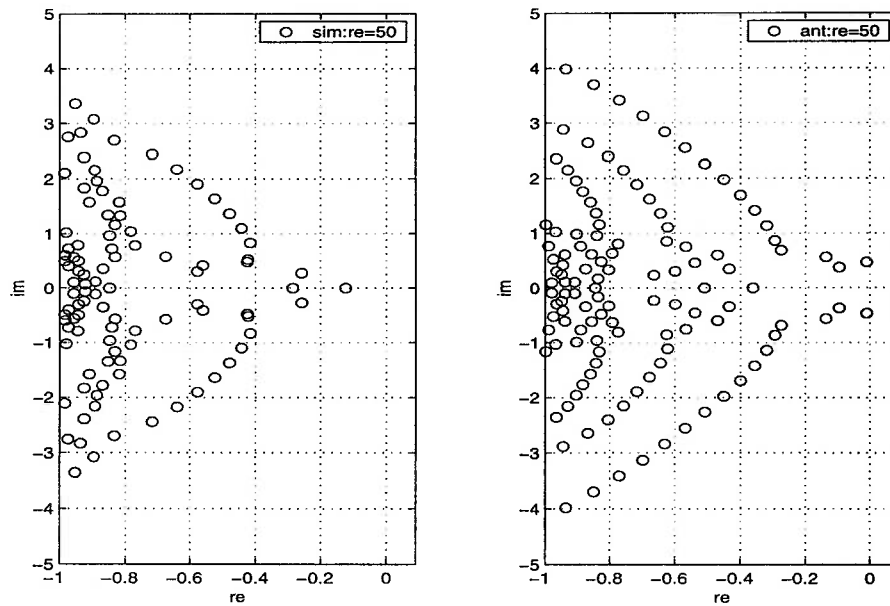


Figura 4.29: Espectro simétrico e anti-simétrico, malha 3 $Re=50$.

Strouhal obtido neste trabalho (malha 6):

$$St_c = \frac{\omega D}{2\pi U} = 0,1374, \quad (4.8)$$

está bem próximo dos principais trabalhos enumerados na tabela. No que se refere ao número de Reynolds crítico $Re_c = 47,5$, acontece uma situação similar: encontra-se bem próximo do $Re_c = 48$ que é o valor aceito. Independentemente que existam evidências experimentais que caminhem na direção de uma diminuição do número de Reynolds crítico, será preciso por em prática novas idéias para conseguir capturar essa suposta diminuição no valor de Reynolds, onde a bifurcação acontece. Na quarta coluna da tabela (4.6) apresenta-se o nome da técnica numérica empregada para obter esses valores do problema de estabilidade, e na última a quantidade de graus de liberdade (nós) nas malhas usadas. É importante ressaltar a influência significativa do emprego de bases solenoidais nestes cálculos, a qual está associada a uma redução do valor crítico de Reynolds, a partir do qual

o escoamento ao redor do cilindro perde a sua dinâmica estacionária e cai no ciclo limite.

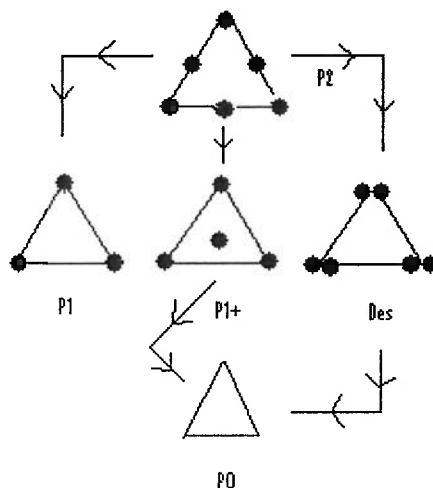


Figura 4.30: Diagrama para os elementos $P2P1$, $P2P1^+$ e $P2P1^D$.

4.3 SIMETRIA E ANTI-SIMETRIA

A idéia de separar o problema generalizado de autovalores em uma parcela simétrica e uma anti-simétrica foi elaborada em (ARANHA, 2001), e implementada neste trabalho.

Na figura (4.29) temos a decomposição do espectro para o problema de estabilidade generalizado, quando impostas as condições de simetria e anti-simetria para número de Reynolds 50 e a malha de 784 elementos. Estas condições de simetria são impostas basicamente no cálculo da base do subespaço nulo do operador divergência. Esta imposição conduz a dois problemas generalizados de autovalores (simétrico e antisimétrico), cujos resultados dividem o espectro nas estruturas mostradas na figura (4.29). Do lado esquerdo estão representados os autovalores

que correspondem aos autovetores simétricos, e a direita os autovalores correspondentes aos modos anti-simétricos.

Este resultado é importante, pois representa mais uma confirmação de que o modo mais instável e portador da bifurcação de Hopf é anti-simétrico. Pode-se dizer que pela primeira vez esta separação é feita no problema de estabilidade, para a dinâmica do escoamento ao redor do cilindro circular. Apesar de que na literatura está bem apresentada a anti-simetria do modo mais instável que carrega a bifurcação de Hopf, (JACKSON, 1987; CHEN *et al.*, 1995); neste trabalho os modos simétricos e os anti-simétricos são calculados separadamente.

Uma vantagem implícita ao estudo da estabilidade para o escoamento estacionário, levando em conta a simetria do mesmo, consiste em que facilita isolar a dinâmica que se bifurca em ciclo limite. Aproveitar a simetria do escoamento base conjuntamente com a decomposição solenoidal, associada as equações de Navier-Stokes, permite contar com um modelo mais reduzido da dinâmica. Este resultado se combinado com o teorema da variedade central, facilita capturar esta dinâmica, para um sistema discreto de finitos graus de liberdade, cujo número é elevado, num sistema reduzido tipo equação de Landau.

4.4 SUBESPAÇOS SOLENOIDAIIS

Nesta seção serão analisados os subespaços solenoidais que podem ser gerados a partir do elemento quadrático e suas combinações com os elementos lineares que o antecedem, ver Figura (4.30). Estes elementos lineares são: o elemento linear contínuo ($P1$), o elemento linear contínuo com nó central ($P1^+$), e o elemento linear descontínuo, ($P1^D$).

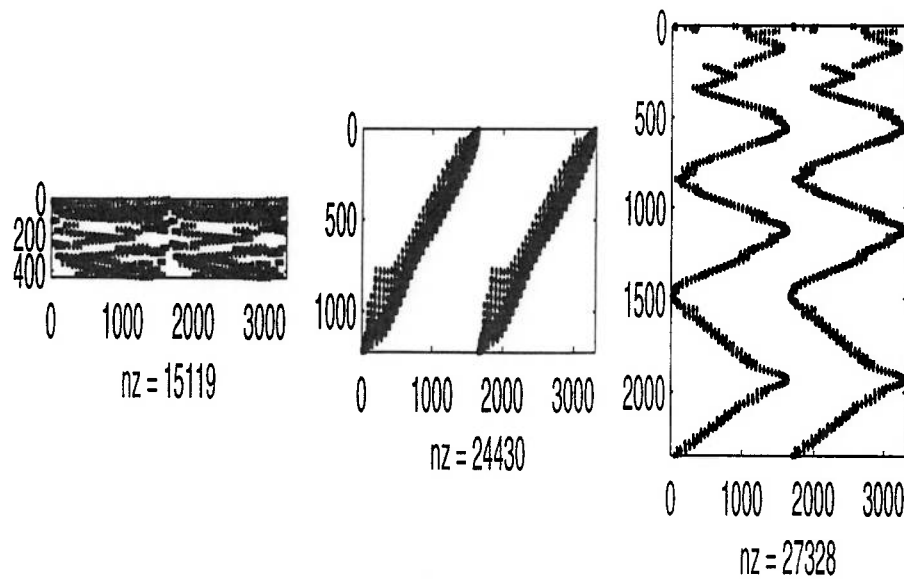


Figura 4.31: Esparsidade dos operadores divergência: $P2P1$, $P2P1^+$ e $P2P1^D$.

4.4.1 ESPARSIDADE

Entende-se por estrutura de esparsidade de um operador a representação visual dos elementos não-nulos da matriz que o representa. A representação visual da esparsidade tem um papel importante em futuras implemetações, pois serve como guia de verificação na construção da representação matricial dos operadores. Neste caso particular, a esparsidade é tratada para o operador divergência a partir do emprego de três elementos distintos. A idéia motriz que possibilitou pensar em múltiplos elementos está associada a procura do subespaço minimal, que é capaz de suportar a dinâmica na forma da bifurcação de Hopf.

Construindo o operador divergência discreto para cada uma das combinações do elemento quadrático com os elementos lineares anteriormente nomeados, são obtidos três subespaços solenoidais cada um portando uma estrutura de esparsidade diferente. Esta estrutura pode ser observada na Figura (4.31). O gráfico da esquerda mostra o padrão de esparsidade do operador divergência discreto,

<i>malha</i>	<i>elementos</i>	$\dim(\mathbf{V}_0^h)$	$\dim(\mathbf{S}_0^h)$	$\dim(\ker(\mathbf{R}_h^T))$
2	196	870	316	431
3	784	3306	1219	1852
4	3136	12882	4789	7634

Tabela 4.7: Parâmetros das discretizações para o elemento linear e contínuo com nó central, $P2P1^+$

<i>malha</i>	<i>elementos</i>	$\dim(\mathbf{V}_0^h)$	$\dim(\mathbf{S}_0^h)$	$\dim(\ker(\mathbf{R}_h^T))$
2	196	870	588	160
3	784	3306	2352	720
4	3136	12882	9408	3016

Tabela 4.8: Parâmetros das discretizações para o elemento descontínuo e linear, $P2P1^D$.

associado a combinação do elemento quadrático, para as velocidades, e ao elemento linear contínuo, $P2P1$, para as pressões. A figura central representa a estrutura de esparsidade da combinação do elemento quadrático com o elemento linear contínuo mais um nó central $P2P1^+$. E finalmente, na terceira figura da direita temos a esparsidade da combinação do elemento quadrático com o elemento linear descontínuo $P2P1^D$.

4.4.2 DIMENSÕES

Estes subespaços solenoidais, gerados por esta famílias de elementos finitos lineares associados ao elemento quadrático, constituem o conjunto dos subespaços nulos do operador divergência, que é possível gerar seguindo a metodologia da formulação fraca. É nos subespaços solenoidais onde os modelos numéricos procuram as soluções que satisfazem o operador de Navier-Stokes; portanto uma caracterização destes é muito importante.

Aqui é natural perguntar-se como se comporta o problema generalizado de

autovalores (estabilidade) em cada um destes subespaços. Felizmente pode-se responder a esta pergunta submetendo cada um destes subespaços ao mesmo estudo de estabilidade. Ao projetar-se as mesmas matrizes jacobiana e de massa em cada um destes subespaços solenoidais, obtém-se três problemas generalizados de autovalores de diferentes dimensões. Na Tabela (4.7) apresentam-se os principais

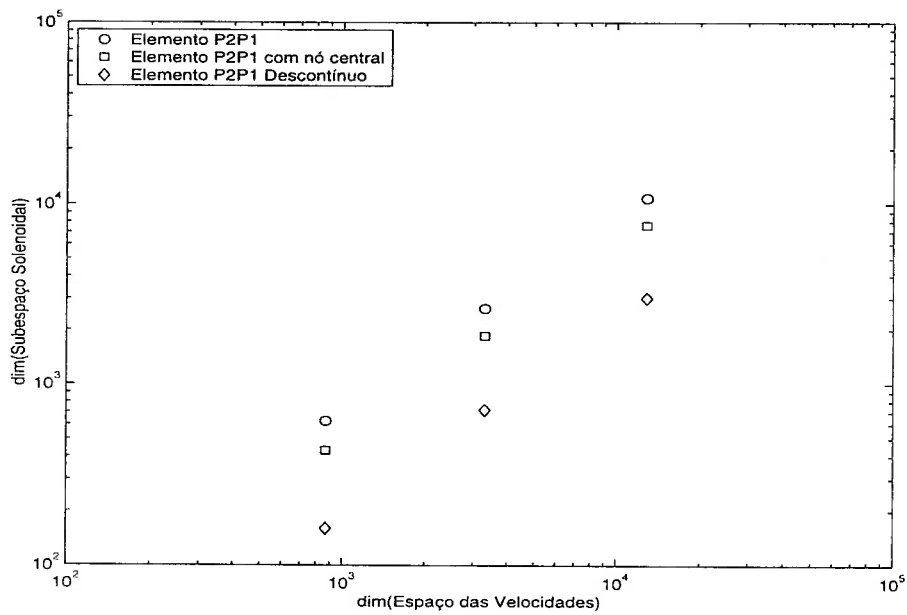


Figura 4.32: Dimensões dos subespaços solenoidais: $P2P1$, $P2P1^+$ e $P2P1^D$.

parâmetros de discretização para a combinação entre o elemento quadrático e o linear contínuo com nó central, $P2P1^+$. A primeira coluna mostra as malhas empregadas na construção do operador divergência. Na segunda, o número de elementos por malha, na terceira a dimensão do espaço da velocidade, na quarta a dimensão do espaço da pressão, e na quinta a dimensão do subespaço solenoidal para esta combinação de elementos em cada uma das malhas. O mesmo para a Tabela (4.8), que corresponde a combinação do elemento quadrático e o linear descontínuo, $P2P1^D$.

Estas tabelas mostram a relação de crescimento entre o espaço discreto das

velocidades \mathbf{V}_0^h e o subespaço solenoidal discreto $\ker(\mathbf{R}_h^T)$, para diferentes combinações de elementos ou pares de interpolação (velocidade-pressão). Sabe-se que, o tamanho do subespaço é fundamental para que suporte ou capture a dinâmica que se pretende projetar nele, (BATHE, 1996; GIRAULT and RAVIART, 1986; GUNZBURGER and NICOLAIDES, 1993), e a partir destas tabelas pode-se ter uma idéia quantitativa do comportamento do subespaço, a medida que o número de elementos cresce. De todos estes subespaços $P2P1$ é o maior, e o gerado pelo elemento descontínuo, $P2P1^D$, é o menor.

Na figura (4.32) temos em escala logarítmica a representação das dimensões dos subespaços solenoidais descritos nas tabelas (4.4), (4.7) e (4.8); observando que os três subespaços solenoidais crescem proporcionalmente com as suas dimensões e obedecem a relação

$$\dim(R_{P1^D}^T) < \dim(R_{P1^+}^T) < \dim(R_{P2}^T) \quad (4.9)$$

que é verificada na figura (4.32). A relação (4.9) estabelece uma ordem natural entre os subespaços gerados pelos três tipos de elementos. Como era de se esperar existem três subespaços solenoidais de dimensões decrescentes, nos quais pode-se representar e resolver o problema de estabilidade linear.

Na figura (4.33) é representado o cálculo do mesmo problema de estabilidade projetado nos três subespaços estudados anteriormente, como se vê as dimensões destes subespaços diferem significativamente (malha 3). Ao observar os três espectros da figura (4.33), observa-se que neles a estrutura topológica dos autovalores mais instáveis permanece invariante. Isto leva a pensar que, o subespaço solenoidal construído a partir do operador divergente descontínuo carrega a dinâmica da mesma forma que os subespaços solenoidais com maiores dimensões.

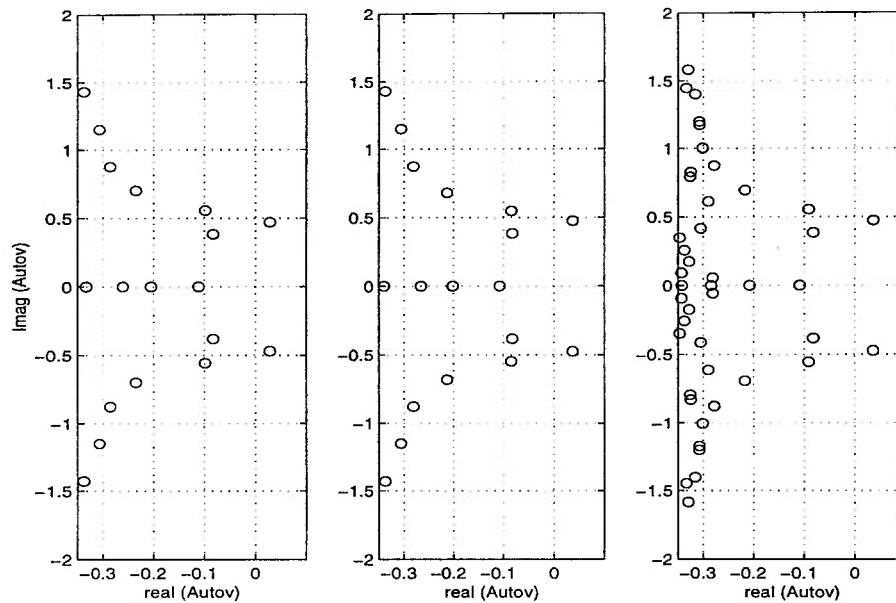


Figura 4.33: Espectro para os subespaços gerados por $P2P1$, $P2P1^+$, e $P2P1^D$.

Na figura (4.34) observa-se o espectro de autovalores (malha 6) no processo de cruzamento pela bifurcação. Esta captura se faz com a intenção de verificar a exigência de continuidade para o acoplamento entre as variações do campo estacionário e a influência destas modificações no cálculo de estabilidade. Se pode apreciar que a transição é contínua o que garante o bom condicionamento do problema calculado.

Na figura (4.35) pode-se ver as linhas de corrente da parte real do autovetor que corresponde ao modo mais instável, é dizer que se bifurca. Este modo corresponde ao valor de $Re=50$ (malha 6). No trabalho de JACKSON (1987), pode-se encontrar as linhas de corrente para a parte real do modo que se bifurca e ao compará-las verifica-se que o subespaço solenoidal conserva a estrutura modal observada por outros autores (JACKSON, 1987; CHEN *et al.*, 1995; DING and KAWAHARA, 1999).

A partir destes cálculos sabe-se que pela via solenoidal com o elemento quadrático nas velocidades e linear nas pressões se atinge no máximo uma redução

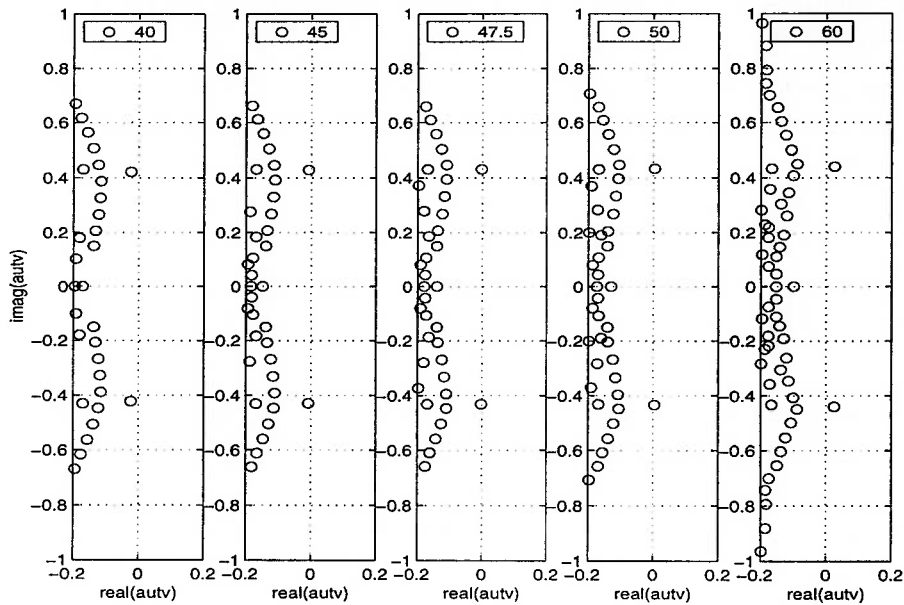


Figura 4.34: Transição do espectro no Reynolds crítico, para o elemento $P2P1^D$.

na ordem de 83 por cento nos graus de liberdade a calcular; com o elemento descontínuo no lugar do linear contínuo esta redução atinge 23 por cento no que diz respeito ao problema generalizado de autovalores. É muito promissor que num subespaço tão pequeno possa-se calcular o problema de estabilidade sem grandes modificações na topologia dos autovalores. Esta propriedade que poderia ser denominada de subsistência da dinâmica para o subespaço descontínuo, pode ter extraordinária relevância para cálculos com elevados graus de liberdade.

A tentativa de efetuar este estudo para valores do número de Reynolds elevados esbarra necessariamente com o crescimento dos graus de liberdade do sistema a inverter, e com o aumento das dimensões do subespaço solenoidal, onde o problema generalizado de autovalores é projetado. Nesta situação em que o sistema discretizado possui dimensões elevadas, ter o controle sob o subespaço menor onde o problema é válido, significa contar com uma ponte onde outros métodos necessariamente falhariam. Acredita-se que esta possibilidade já justifica o estudo destes subespaços e ao mesmo tempo vislumbra uma futura aplicação deles não

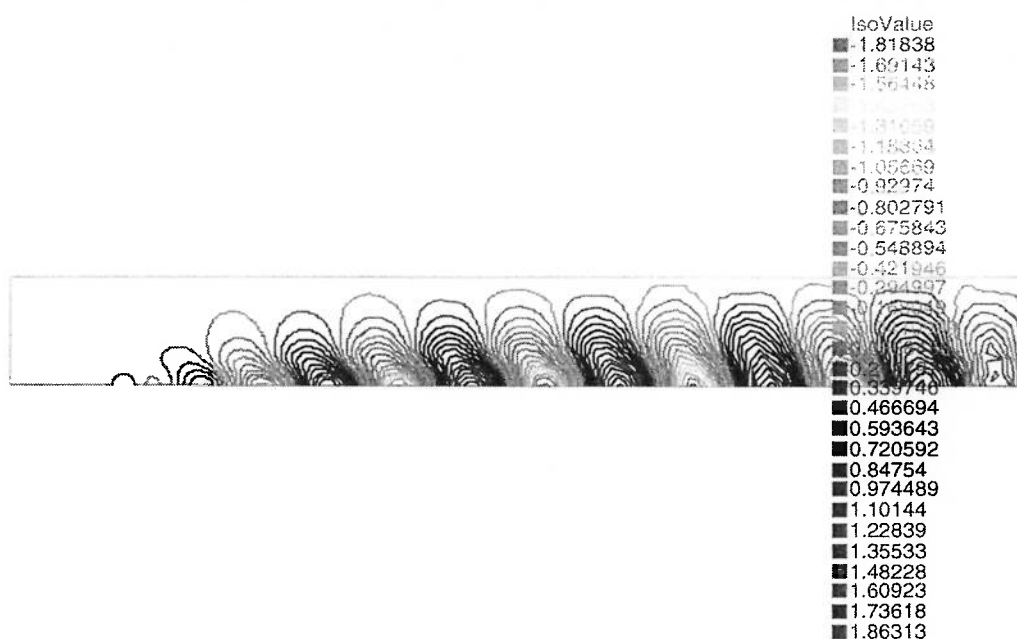


Figura 4.35: Autovetor que corresponde ao autovalor mais instável.

apenas nos estudos de estabilidade para pequenos valores do número de Reynolds, mas para valores elevados podem tornar-se uma alternativa promissória.

4.5 A FRAÇÃO DE LANDAU

É de extraordinária importância estudar o comportamento do problema de estabilidade linear, quando o número de Reynolds é incrementado acima do valor crítico. As evidências empíricas mostram que o número de Strouhal e o fenômeno de (VIV), em sua aparência macroscópica são essencialmente invariantes no intervalo de Reynolds 200 até a zona de transição ($Re \approx 10^5$). Como apenas um modo é instável é muito provável que a parte ordenada do escoamento, seja descrita por um sistema dinâmico com um só grau de liberdade, como os modelos heurísticos baseados no oscilador de Van der Pol (ARANHA, 2001; ARANHA, 2003).

Considerando a solução estacionária $\mathbf{u}_s(Re)$ do escoamento em torno de um

cilindro circular para um certo número de Reynolds, Re , e supondo que:

$$\lambda_\alpha(Re) = \sigma_\alpha(Re) \pm i \omega_\alpha(Re); \alpha = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.10)$$

sejam os autovalores característicos do sistema linear obtido pela linearização das equações de Navier-Stokes no entorno da solução estacionária; e estas foram discretizadas pelo Método dos Elementos Finitos. Os valores característicos estão ordenados pela regra:

$$\sigma_0(Re) \geq \sigma_1(Re) \geq \sigma_2(Re) \geq \dots, \quad (4.11)$$

e seja Re_c o valor de Re para o qual $\sigma_0(Re_c) = 0$. Para $Re > Re_c$ temos $\sigma_0 > 0$ e a solução estacionária é instável. Seja $\mathbf{E}_0(\mathbf{x}, Re)$ o autovetor associado ao autovalor $\lambda_0(Re)$ mais duas condições sobre os autovalores são apresentadas:

$$\sigma_\alpha(Re_c) < 0; \alpha = 1, 2, \dots; \quad (4.12)$$

$$\omega_0(Re_c) \neq 0. \quad (4.13)$$

A primeira condição implica que só um modo é instável nas vizinhanças de Re_c ; a segunda que esse modo é complexo. Portanto $\mathbf{E}_0(\mathbf{x}, Re) = \mathbf{E}_{0,R}(\mathbf{x}, Re) \pm i \mathbf{E}_{0,I}(\mathbf{x}, Re)$ e localmente existe um plano de fases instável gerado pelos vetores $\mathbf{E}_{0,R}(\mathbf{x}, Re)$; $\mathbf{E}_{0,I}(\mathbf{x}, Re)$. As perturbações $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ nas vizinhanças da solução estacionária podem ser escritas na forma:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha} [A_{\alpha} \mathbf{E}_{\alpha}(\mathbf{x}, Re) e^{(\sigma_{\alpha}(Re) + i\omega_{\alpha}(Re))t} + (*)], \quad (4.14)$$

onde (*) representa o complexo conjugado do termo à esquerda. Supondo que

$\sigma_\alpha(Re) < 0$ para $\alpha \geq 1$, a perturbação $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ é atraída para o plano instável gerado pelos vetores $\mathbf{E}_{0,R}(\mathbf{x}, Re)$; $\mathbf{E}_{0,I}(\mathbf{x}, Re)$. As perturbações $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ significam:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \rightarrow [A_0(t)\mathbf{E}_0(\mathbf{x}, Re)e^{i\omega(Re)t} + (*)], \quad (4.15)$$

e para t suficiente pequeno:

$$A_0(t) \cong A_0 e^{\sigma_0(Re)t}, \quad (4.16)$$

Desenhando essa solução exponencial no espaço de fase bidimensional gerado pelos vetores $\mathbf{E}_{0,R}(\mathbf{x}, Re)$; $\mathbf{E}_{0,I}(\mathbf{x}, Re)$ e supondo que as parcelas não-lineares do sistema dinâmico subjacente (Navier-Stokes) limitam o crescimento exponencial, pode-se verificar que essa solução tende a se enrolar em torno de uma órbita fechada, o ciclo limite.

É um fato aceito que nas vizinhanças do número de Reynolds crítico $Re \approx Re_c$ cumpre-se:

$$\sigma_0(Re) \ll \omega_0(Re), \quad (4.17)$$

$$\sigma_0(Re_c) = 0, \quad (4.18)$$

a partir deste raciocínio pode-se mostrar que a amplitude, $A_0(t)$ deverá satisfazer uma equação da forma:

$$\frac{dA_0}{dt} - \sigma_0(Re)A_0 + \mu_0(Re) |A_0|^2 A_0 = 0, \quad (4.19)$$

$$\mu_0 = \mu_{0,R} + i\mu_{0,I}, \text{ com } \mu_{0,R} > 0, \quad (4.20)$$

conhecida como a equação de Stuart-Landau. A amplitude A_c do ciclo limite é

o ponto de equilíbrio não-trivial dessa equação, esta amplitude é dada por:

$$A_{cl} = \sqrt{\frac{\sigma_0}{\mu_{0,R}}}. \quad (4.21)$$

A obtenção da equação de Landau depende da condição $\sigma_0(Re) \ll \omega_0(Re)$ que é obrigatoriamente satisfeita nas vizinhanças da bifurcação, mas, pelo que evidenciam as simulações numéricas e os experimentos, isso não ocorre exclusivamente aí. A literatura especializada concentra a atenção nas vizinhanças de Re_c e procura, com o auxílio de experimentos ou de simulações numéricas inferir os coeficientes $\{\sigma_0(Re); \mu_0(Re)\}$.

Neste capítulo estuda-se como a partir do problema de estabilidade para as equações de Navier-Stokes, pode-se fazer uma estimativa do comportamento destes coeficientes, para uma faixa do número de Reynolds acima do Reynolds crítico Re_c .

4.5.1 REYNOLDS ACIMA DA BIFURCAÇÃO

Um aspecto importante quando o valor do número de Reynolds é incrementado nos cálculos de estabilidade, relaciona-se com o comportamento da razão entre a parte real e a parte imaginária do autovalor crítico (4.17). Esta razão desempenha um papel importante no que diz respeito a validade da equação de Landau, e nos modelos fenomenológicos tipo equação de Van der Pol (ARANHA, 2001). Intuitivamente, para os valores de Reynolds em que esta razão permanece pequena, a equação de Landau ou outras similares são válidas.

A Figura (4.36) apresenta o comportamento da parte real e a parte imaginária do autovalor crítico a partir do calculo de estabilidade se comparado com

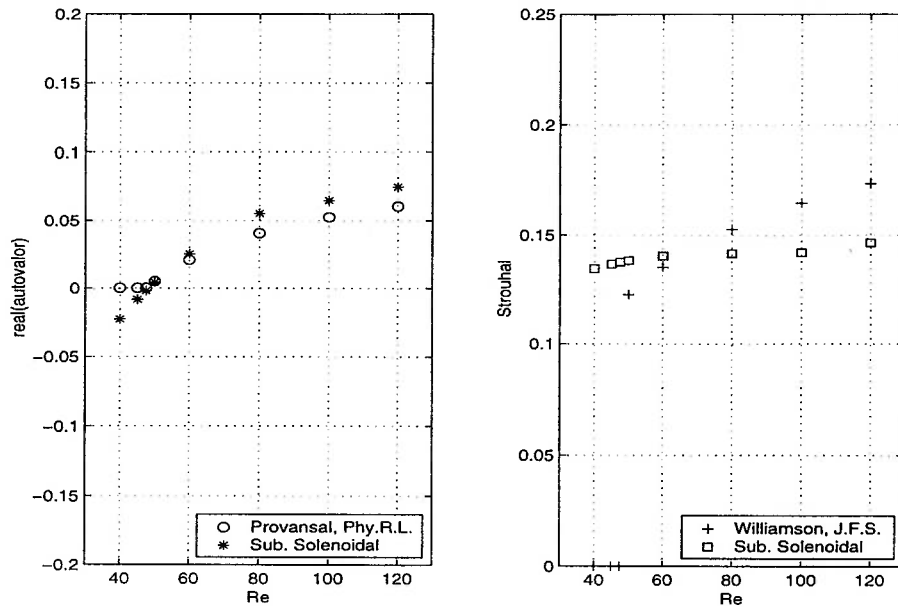


Figura 4.36: Evolução da parte real e o Strouhal em função do número de Reynolds.

(LEWEKE and PROVANSAL, 1994):

$$\sigma = k \frac{\nu}{D^2} (Re - Re_C), \quad (4.22)$$

onde foi tomado $k=0,2$, ν é a viscosidade cinemática e D o diâmetro. Para o número de Strouhal (WILLIAMSON and BROWN, 1998):

$$S_t = 0,2665 - \frac{1,018}{\sqrt{Re}}, \quad (4.23)$$

até o valor de Reynolds igual a 120. Os cálculos apresentados foram no subespaço solenoidal mais reduzido: o gerado pelo elemento descontínuo. Pode ser visto na Figura (4.36) que a parte real do autovalor crítico possui um comportamento mais próximo do esperado que o número de Strouhal, ou frequência adimensional. É possível que a diferença na faixa de Reynolds compreendida entre os valores de 60 e 120, corresponda com a influência dos efeitos não-lineares, que se manifestam

numa queda da frequência fornecida pelo problema de estabilidade linear. A Figura (4.37) mostra a representação da razão entre a parte real e a parte imaginária do autovalor crítico. Tal e como esperado na condição de hipóteses esta razão varia fracamente com o incremento do número de Reynolds (ARANHA, 2001). Este panorama possui extraordinária importância pois permite afirmar que a equação de Landau pode ser extrapolada não só nas vizinhanças da bifurcação, mas para valores de Reynolds superiores ao do Reynolds crítico. O que implica poder usar o argumento de Landau para capturar a parcela ordenada do escoamento, quando os valores do parâmetro estão distantes da bifurcação.

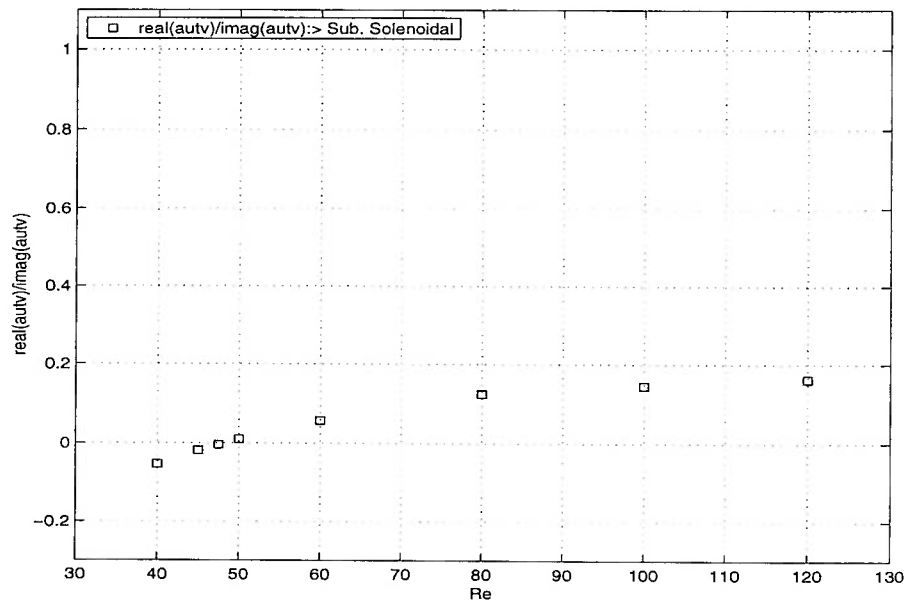


Figura 4.37: Evolução da razão entre a parte real e a parte imaginária em função do número de Reynolds.

Nesta seção será discutido o cálculo da estabilidade linear que permite estimar a razão entre as partes imaginárias e real do coeficiente não-linear da equação de Landau. Esta equação não-linear captura o regime oscilatório, que surge na bifurcação supercrítica de Hopf no escoamento incompressível ao redor de um cilindro. A equação de Landau (4.20) possui os coeficientes $\sigma_0(Re)$ e $\mu_0(Re)$ que podem

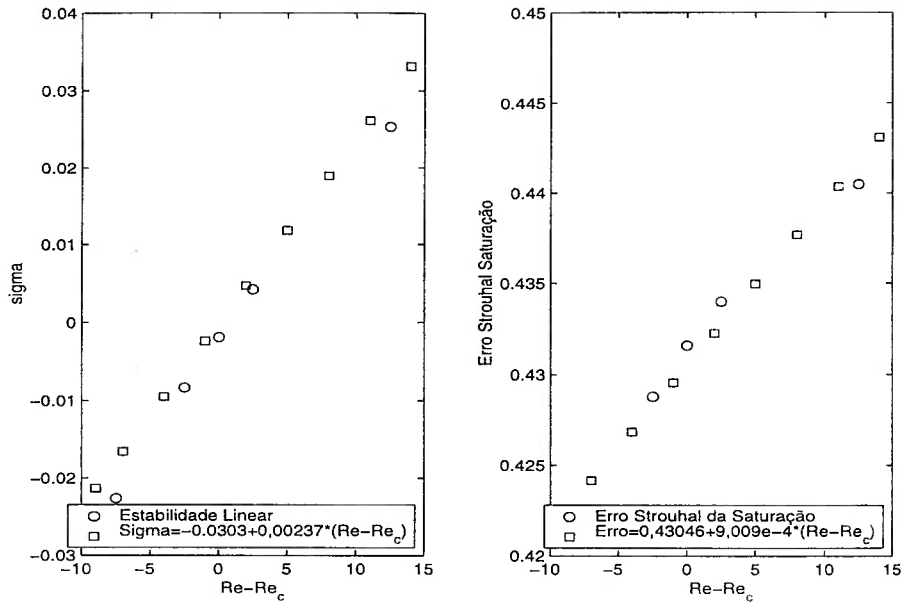


Figura 4.38: Ajuste linear da parte real do autovalor, e do Strouhal de saturação.

ser estimados a partir de experimentos (PROVANSAL *et al.*, 1987; NOACK and ECKELMANN, 1994; JOSEPH, 1985). O primeiro coeficiente $\sigma_0(Re)$, pode ser calculado a partir do problema de estabilidade linear pois ele constitui a parte real do autovalor crítico do espectro de estabilidade; já para estimar o segundo coeficiente $\mu_0(Re)$ é necessário aplicar o teorema de variedade central.

O fato de se ter calculado o problema de estabilidade linear numa faixa de Reynolds acima da bifurcação, permite fazer uma estimativa do segundo coeficiente. Para isso será revista uma solução estacionária, em forma de ciclo limite, da equação de Landau:

$$A = A_{cl} e^{i\omega_s t}; \quad (4.24)$$

$$\omega_s = \omega - \frac{\mu_{0,I}}{\mu_{0,R}} \sigma_0. \quad (4.25)$$

É evidente, que a frequência ω_s do escoamento oscilatório gerado após a bifurcação

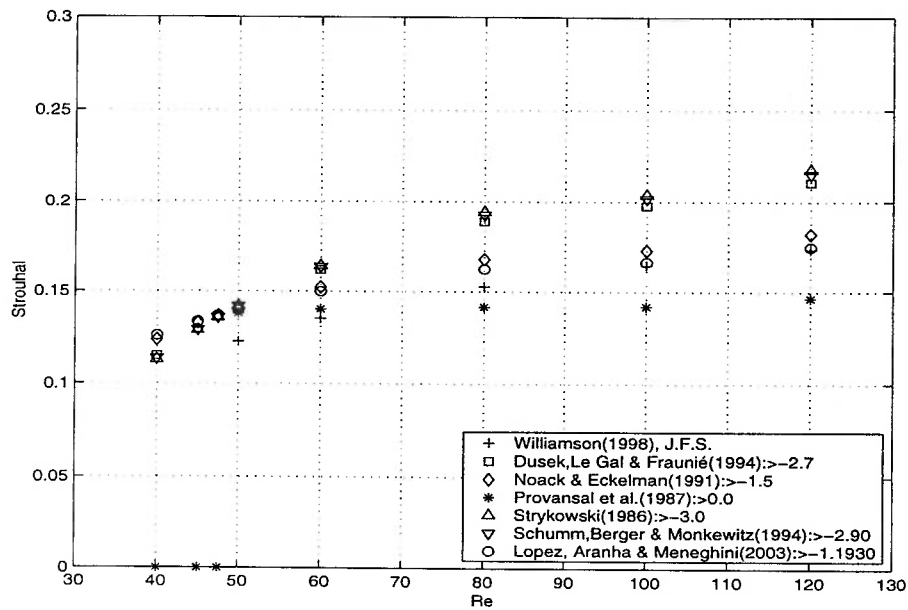


Figura 4.39: Coeficientes de Landau, Albaredo (1995)

depende de uma frequência linear, produto do estudo de estabilidade, acrescido de uma correção que inclui o quociente das partes imaginária e real, do segundo coeficiente de Landau.

Se chamamos Strouhal de saturação a:

$$\Delta_{Sat} = (S_s - S_t), \quad (4.26)$$

onde

$$S_s = \frac{\omega_s D}{2\pi U}, \quad (4.27)$$

$$S_t = \frac{\omega D}{2\pi U}, \quad (4.28)$$

então temos:

$$\Delta_{Sat} = - \frac{\mu_{0,I}}{\mu_{0,R}} \sigma_0, \quad (4.29)$$

mais o comportamento da parte real no cruzamento (bifurcação) é caracterizado por (PROVANSAL *et al.*, 1987; NOACK and ECKELMANN, 1994; LEWEKE and PROVANSAL, 1994):

$$\sigma_0 = \alpha * (Re - Re_C), \quad (4.30)$$

onde α pode ser estimado como a inclinação do ajuste linear, a partir do comportamento deste coeficiente nas vizinhanças da bifurcação. Na figura (4.38) está representado este ajuste. Se pode apreciar que o valor obtido é:

$$\alpha = 0,00237 \quad (4.31)$$

Agora podemos estimar o valor de k para os cálculos feitos neste trabalho. A partir de (4.22) temos:

$$\alpha = k \frac{\nu}{D^2} = k \frac{UD}{ReD^2} = \frac{k}{2Re}, \quad (4.32)$$

tomando $U=1$ e $D=2$. Para o valor $Re = Re_C = 47,5$ podemos calcular o coeficiente k :

$$k = 0,225 \quad (4.33)$$

Para estimar o quociente entre as partes imaginárias e real do coeficiente de Landau basta ver na figura (4.38) o ajuste linear para o comportamento do estrouhal de saturação Δ_{Sat} . Desta figura podemos deduzir o valor do quociente

de Landau:

$$-\left(\frac{\mu_{0,I}}{\mu_{0,R}}\right)\frac{\alpha}{\pi} = 0,0009, \quad (4.34)$$

$$\frac{\mu_{0,I}}{\mu_{0,R}} = -\frac{0,0009 \cdot \pi}{0,00237} = -1,1930, \quad (4.35)$$

No trabalho, (ALBAREDE and PROVANSAL, 1995a), pode-se encontrar uma compilação das tentativas realizadas por outros autores para estimar o segundo coeficiente da equação de Landau. A Figura (4.39) apresenta a influência das principais propostas para o coeficiente de Landau, efetuadas na literatura a partir deste cálculo de estabilidade. Pode ser visto que o quociente:

$$\frac{\mu_{0,I}}{\mu_{0,R}} = -1.1930, \quad (4.36)$$

aproxima melhor o valor do Strouhal na faixa mais afastada da bifurcação. Nas proximidades da bifurcação, a influência da correção não tem um papel significativo como era de se esperar. Este resultado mostra a capacidade preditiva do problema linear de estabilidade, pois fornece uma estimativa teórica do quociente universal que envolve à parte imaginária e real do coeficiente de Landau.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES

Neste capítulo são descritos os principais resultados obtidos neste trabalho. A principal particularidade desta pesquisa está na tentativa de projetar o problema de estabilidade linear, no subespaço solenoidal, e finalmente fazê-lo com sucesso ao capturar a bifurcação de Hopf. O cálculo do campo base, para o estudo da estabilidade a partir de técnicas variacionais e empregando o algoritmo de Usawa é um procedimento bem estudado na literatura (BREZZI and FORTIN, 1991; FORTIN *et al.*, 1994; FORTIN *et al.*, 1997; MADAY *et al.*, 1993).

Outro aspecto considerado original e associado ao primeiro ponto, corresponde com a separação do problema de autovalores em simétrico e anti-simétrico. Este último ponto possui um extraordinário interesse para dar continuidade ao processo de capturar a dinâmica das equações de Navier-Stokes, em modelos reduzidos à partir do teorema da variedade central.

Por último, este trabalho possui valor metodológico, como ponto de partida para alcançar outros resultados, pois nele tenta-se juntar as diferentes arestas que constituem este problema de estabilidade linear, para o escoamento incompressível ao redor de um cilindro sob o ponto de vista numérico.

Neste trabalho foram obtidos os seguintes resultados:

-
- Realização de uma busca bibliográfica do problema numérico de estabilidade linear, no escoamento incompressível ao redor do cilindro circular. Esta busca favoreceu os métodos variacionais, como candidatos eficientes para lidar com os problemas de Stokes e Navier-Stokes, no cálculo do campo simétrico de velocidades. Também permitiu entender o problema generalizado de autovalores e as principais dificuldades associadas a este.
 - Foram estudadas e construídas bases solenoidais discretas para o subespaço nulo do operador divergência empregando a discretização com o elemento quadrático nas velocidades e linear nas pressões de Taylor-Hood, assim como com o elemento linear com nó central, e linear descontínuo nas pressões. Este elemento (Taylor-Hood), cuja popularidade é elevada nos cálculos numéricos para as equações de Navier-Stokes, não tinha sido utilizado para gerar bases solenoidais. O mesmo pode-se dizer dos outros elementos.
 - Os campos estacionários foram calculados (solução das equações de Stokes e Navier-Stokes), empregando o algoritmo de Usawa.
 - O problema de estabilidade linear foi projetado no subespaço solenoidal discreto, e neste calculou-se o espectro de autovalores.
 - Aproveitou-se da simetria para calcular bases simétricas e anti-simétricas, cujos respectivos problemas generalizados de autovalores separaram o espectro.
 - Foi possível capturar a bifurcação supercrítica de Hopf no problema generalizado de autovalores no subespaço solenoidal discreto. O Reynolds crítico obtido foi de $Re_C = 47,5$, e o número de Strouhal, $S_t = 0,1374$.
 - Os subespaços solenoidais que podem ser construídos a partir do elemento

quadrático em combinação com elementos lineares foram caracterizados, e suas dimensões calculadas.

- O cálculo de estabilidade linear se estendeu até o valor de $Re=120$. Este cálculo permitiu estimar o quociente da parte imaginária e real do coeficiente de Landau nesta faixa de Reynolds:

$$\frac{\mu_I}{\mu_R} = -1.1930.$$

Conhecer o valor deste coeficiente constitui um problema importante (ALBAREDE and PROVANSAL, 1995a), que até o momento permanece aberto.

Os pontos mencionados estabelecem o roteiro seguido nesta pesquisa, para atingir os objetivos propostos. Duas janelas científicas têm permitido o surgimento deste trabalho:

- Os subespaços solenoidais discretos têm sido explorados timidamente como via aceitável, para estudar as soluções numéricas das equações de Navier-Stokes.
- O baixo Reynolds crítico da bifurcação de Hopf no escoamento ao redor de um cilindro cria uma vantagem sutil, para o estudo do problema de estabilidade linear, pela via solenoidal. Pois a dinâmica é factível de ser capturada sem grandes gastos em discretização, para pequenos Reynolds: isto não acontece na cavidade onde as bifurcações surgem em Reynolds mais elevados (FORTIN *et al.*, 1994; FORTIN *et al.*, 1997).

5.1 EXTENSÃO DO TRABALHO

Este trabalho de estabilidade possui uma continuidade garantida. Ressaltando três direções:

- A primeira corresponde com o aproveitamento do teorema da variedade central, para construir um sistema dinâmico reduzido, que contenha as principais características dinâmicas das equações de Navier-Stokes.
- A segunda está relacionada com estender o estudo da estabilidade para números de Reynolds elevados.
- Ainda, uma terceira mais operacional, ao mesmo tempo não menos importante, pois não tem sido explorada e que está relacionada com a extensão do estudo de estabilidade linear para cilindros agrupados.

Considerando que, o segundo tópico acima é uma continuação natural deste trabalho: elevar o valor do número de Reynolds e resolver o problema linear de estabilidade para estes valores, enfrenta-se o inconveniente que está associado à estrutura indefinida da representação discretizada do problema generalizado de autovalores. À medida que o Reynolds cresce, também aumentam as dimensões do subespaço nulo, onde necessariamente o problema de estabilidade deve ser resolvido. Esta situação cria um impasse nas técnicas tradicionais para autovalores, que geram bases não-esparsas para o núcleo do operador divergência. Este problema pode ser contornado a partir da geração de bases esparsas para o subespaço solenoidal, até o momento esta temática está incipiente.

APÊNDICE A

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

A.1 CONCEITOS FUNDAMENTAIS

Neste capítulo são descritos os principais tópicos que do ponto de vista teórico constituem os fundamentos nos quais se baseia esta pesquisa. É importante compreender o caráter multidisciplinar do problema linear de estabilidade para as equações de Navier-Stokes; sob o ponto de vista numérico constitui um tópico que tem tido um avanço lento nos últimos tempos, tal e como foi descrito na revisão bibliográfica. Nota-se que na ausência de uma teoria geral bem estabelecida na literatura, o progresso se manifesta caso a caso pois o problema generalizado de estabilidade, para as equações de Navier-Stokes permanece ainda aberto. Este fato decorre, principalmente, devido as próprias dificuldades de encontrar as soluções gerais das equações de Navier-Stokes; assim como a multiplicidade de abordagens que caracterizam os mecanismos de transição para diversos tipos de escoamentos. Tal e como em outras áreas do conhecimento onde a teoria geral permanece estacionária na espera de novas idéias; aqui o trabalho numérico vai fazendo o seu papel segundo seu estilo: caso a caso.

Aqui trata-se de resultados bem estabelecidos, que permitem levar com sucesso o estudo de estabilidade linear, para o escoamento incompressível ao redor do

cilindro circular. Estes resultados provêm principalmente da teoria dos sistemas dinâmicos ou elementos finitos.

A.1.1 FUNCIONAL QUADRÁTICO

Para iniciar com os conceitos necessários é oportuno analisar o funcional quadrático:

$$\mathbb{F}(u) = \int_0^1 [p(x)(u'(x))^2 + q(x)(u(x))^2 - 2f(x)u(x)] dx \quad (\text{A.1})$$

que possui um mínimo em relação as variações em $u(x)$, dado pela equação de Euler:

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du(x)}{dx}\right) + q(x)u(x) = f(x). \quad (\text{A.2})$$

Portanto ao invés de resolver a equação diferencial (A.2) para determinar $u(x)$, uma alternativa equivalente é encontrar a função $u(x)$ que minimiza o funcional A.1. A idéia de Raleigh-Ritz consiste em aproximar a solução por um número finito de funções $u(x) = \sum_i^N q_i \Phi_i(x)$ e determinar os coeficientes desconhecidos q_i , que minimizam o funcional A.1.

No caso dos elementos finitos a solução é aproximada por um número finito de funções que são locais por natureza. O ponto de partida dos elementos finitos foi a equação diferencial A.2, que foi formulada como uma forma integral de tal forma que o sistema pode ser reduzido a um sistema algébrico, para ser resolvido numericamente. A conexão entre estes dois métodos está realizada quando a forma integral, para os elementos finitos é exatamente a mesma que a forma funcional, para o método de Raleigh-Ritz. O descobrimento desta relação foi muito importante, (KARNIADAKIS and SHERWIN, 1999), pois colocou os elementos

finitos sobre bases matemáticas consistentes.

A.1.2 MÉTODO DOS RESÍDUOS PONDERADOS

Quando aproxima-se numericamente uma solução exata estamos substituindo uma expansão infinita por uma representação finita. Esta representação significa que a equação diferencial não pode ser satisfeita em todo lugar de região, mas que pode-se satisfazer apenas um número finito de condições. É precisamente a seleção de tais condições a satisfazer, que definem o tipo do método numérico. O método dos resíduos ponderados mostra como a seleção de diferentes funções teste na forma integral das equações, pode ser usada para construir muitos dos métodos numéricos que existem.

Consideremos uma equação diferencial linear no domínio Ω

$$\mathbb{L}(u) = 0 \quad (\text{A.3})$$

sujeita as condições iniciais e de contorno apropriadas. Admitindo que a solução $u(\mathbf{x}, t)$, pode ser devidamente representada por uma solução aproximada da forma

$$u^\delta(\mathbf{x}, t) = u_0(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=1}^N \hat{u}_i \Phi_i(\mathbf{x}), \quad (\text{A.4})$$

onde $\Phi_i(\mathbf{x})$ são funções analíticas chamadas funções tentativa, $\hat{u}_i(t)$ são os N coeficientes desconhecidos, e $u_0(\mathbf{x}, t)$ é selecionada para satisfazer as condições iniciais e de contorno. Substituindo A.4 em A.3 produz um resíduo R , tal que

$$\mathbb{L}(u^\delta) = R(u^\delta) \quad (\text{A.5})$$

Agora tem-se várias formas de determinar os coeficientes $\hat{u}_i(t)$. Para fazer

isto coloca-se restrições no residual R que reduzirá a equação A.5 a um sistema linear de equações diferenciais ordinárias em $\hat{u}_i(t)$. É claro que se a equação original A.3 não depende do tempo então os coeficientes \hat{u}_i podem ser determinados diretamente a partir da solução de um sistema de equações algébricas.

Para definir o tipo de restrição a colocar em R primeiro é necessário introduzir o produto interno (f, g) sobre o domínio Ω definido como

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \quad (\text{A.6})$$

A restrição no resíduo corresponde ao produto interno do resíduo, que seja nulo, em relação a uma função de teste:

$$(v_j(\mathbf{x}), R) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (\text{A.7})$$

a função $v_j(\mathbf{x})$ é conhecida como função de teste. Uma vez obtida a convergência o resíduo tende a zero e a solução aproximada de $u^\delta(\mathbf{x}, t)$ se aproxima da solução exata $u(\mathbf{x}, t)$ quando $N \rightarrow \infty$. Portanto, a natureza do método é determinada pela seleção das funções de tentativa $\Phi_i(\mathbf{x})$ e das funções de teste v_j .

A.1.3 MÉTODO DE GALERKIN

Neste método as funções teste são selecionadas as mesmas que as funções tentativas $v_j = \Phi_j$. Agora vejamos como se aplica o método de Galerkin a partir de uma equação diferencial, tomemos de exemplo a equação de Poisson

$$\mathbb{L}(u) \equiv \nabla^2 u + f = 0. \quad (\text{A.8})$$

que aparece em muitas áreas da física. Para o caso unidimensional, esta equação se transforma em:

$$\mathbb{L}(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f = 0. \quad (\text{A.9})$$

devendo especificar as condições de contorno, para que o problema esteja bem definido e tenha solução única. Considerando a solução no domínio $\Omega = \{x \mid 0 < x < 1\}$, e podendo considerar as condições de contorno:

$$u(0) = g_D, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1) = g_N \quad (\text{A.10})$$

onde g_D e g_N são constantes dadas para o problema unidimensional. A condição $u(0) = g_D$ especifica uma condição na solução e é conhecida como condição de Dirichlet ou essencial. A condição de contorno da derivada da solução é conhecida como de Neuman ou natural. Se multiplicamos A.9 pela função $v(x)$ que por definição é zero nas fronteiras de Dirichlet $\partial\Omega_D$, e integrando sobre o domínio Ω obtém-se o produto interno de $\mathbb{L}(u)$ com v ,

$$(v, \mathbb{L}(u)) = \int_0^1 v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f \right) dx = 0 \quad (\text{A.11})$$

se integrando A.11 por partes tem-se:

$$\int_0^1 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx = \int_0^1 v f dx + \left[v \frac{\partial u}{\partial x} \right]_0^1. \quad (\text{A.12})$$

exigindo que as funções teste sejam nulas, nas fronteiras de Dirichlet $v(0) = 0$.

Aplicando a condição de Neuman ao último termo de A.12:

$$\int_0^1 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx = \int_0^1 v f dx + v(1)g_N. \quad (\text{A.13})$$

Aqui observa-se que as condições de Neuman estão incluídas na formulação (naturais). Esta forma integral das equações tal e como apresentadas em A.12 e A.13 são conhecidas como formulação fraca do problema.

A aproximação de Galerkin do problema A.9 é a solução da forma fraca de A.13, quando a solução exata é aproximada por uma expansão finita representada por $u^\delta(x)$. A função $v(x)$ é também substituída por uma expansão finita denominada de v^δ , e portanto a equação A.13 se transforma em

$$\int_0^1 \frac{\partial v^\delta}{\partial x} \frac{\partial u^\delta}{\partial x} dx = \int_0^1 v^\delta f dx + v^\delta(1)g_N. \quad (\text{A.14})$$

Para o caso de condições de contorno de Dirichlet temos que

$$u^\delta = u^H + u^D \quad (\text{A.15})$$

onde

$$u^H(\partial\Omega_D) = 0, \quad u^D(\partial\Omega_D) = g_D. \quad (\text{A.16})$$

substituindo A.15 em A.14 tem-se

$$\int_0^1 \frac{\partial v^\delta}{\partial x} \frac{\partial u^H}{\partial x} dx = \int_0^1 v^\delta f dx + v^\delta(1)g_N - \int_0^1 \frac{\partial v^\delta}{\partial x} \frac{\partial u^D}{\partial x} dx. \quad (\text{A.17})$$

Esta equação A.17 pode ser resolvida com um sistema finito algébrico onde todos os termos da direita são conhecidos e as funções homogêneas u^H e as funções de teste v^δ possuem um número finito de funções. A técnica de Galerkin reduz um problema diferencial a um sistema algébrico que pode ser resolvido no computador.

Pode-se construir uma aproximação de Galerkin para o operador

$$\mathbb{L}(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \lambda u + f = 0, \quad (\text{A.18})$$

quando $\lambda \in \mathbb{R}$ é uma constante positiva. Com as condições de contorno apropriadas

$$u(0) = g_D, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l) = g_N \quad (\text{A.19})$$

deseja-se encontrar a solução no intervalo $0 < x < l$ que será representada por Ω . O domínio aberto

$$\Omega = \{x \mid 0 < x < l\} =]0, l[. \quad (\text{A.20})$$

e o domínio $\bar{\Omega}$ fechado

$$\bar{\Omega} = \{x \mid 0 \leq x \leq l\} = [0, l]. \quad (\text{A.21})$$

multiplicando A.18 por uma função teste $v(x)$ e integrando no domínio Ω obtém-se:

$$\int_0^l v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx - \int_0^l \lambda v u dx + \int_0^l v f dx = 0. \quad (\text{A.22})$$

Supondo que $u(x)$ e $v(x)$ são suficientemente suaves, podemos integrar o primeiro termo por partes

$$\int_0^l \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx - \int_0^l \lambda v u dx = \int_0^l v f dx + [v \frac{\partial u}{\partial x}]_0^l. \quad (\text{A.23})$$

se além disso forem introduzidas as notações

$$a(v, u) = \int_0^1 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda v u \right) dx \quad (\text{A.24})$$

e

$$f(v) = \int_0^1 v f dx + \left[v \frac{\partial u}{\partial x} \right]_0^1 \quad (\text{A.25})$$

a equação A.22 pode ser escrita como

$$a(v, u) = f(v). \quad (\text{A.26})$$

$a(v, u)$ é uma energia, e o espaço de todas as funções que possuem energia finita em Ω é conhecido como

$$E(\Omega) = \{u \mid a(u, u) < \infty\}. \quad (\text{A.27})$$

Associado com este espaço tem-se a norma de energia

$$\|u\|_E = \sqrt{a(u, u)}. \quad (\text{A.28})$$

As funções que pertencem ao espaço da energia se denominam H^1 e satisfazem a condição, em que a integral do quadrado da função e suas derivadas são acotadas. Considerando as soluções de A.18 onde $f(v)$ é finita. Significa que, tomando como candidatos as funções de tentativa, aquelas que se encontram no espaço da energia e satisfazem as condições de Dirichlet. Este espaço é chamado de espaço tentativa e representado por

$$\Upsilon = \{u \mid u \in H^1, u(0) = g_D\}. \quad (\text{A.29})$$

similarmente definem-se o espaço das funções teste

$$\Lambda = \{v \mid v \in H^1, v(0) = 0\}. \quad (\text{A.30})$$

Este espaço de teste Λ é comumente denominado como H_0^1 onde o sub-índice 0 refere-se ao fato de que este é um espaço homogêneo. Agora de forma geral, a formulação fraca pode definir-se como: Encontrar $u \in \Upsilon$, tal que

$$a(v, u) = f(v), \quad \forall v \in \Lambda. \quad (\text{A.31})$$

Até aqui de modo geral e para o caso unidimensional é o que pode ser entendido por formulação fraca. A extensão para mais dimensões assim como as principais propriedades da formulação fraca está devidamente apresentada em (ZIENKIEWICZ and TAYLOR, 1991; BATHE, 1996; KARNIADAKIS and SHERWIN, 1999; GUNZBURGER and NICOLAIDES, 1993) entre outros.

A.2 BIFURCAÇÕES E ESTABILIDADE

Supondo, para iniciar esta seção de estabilidade, que estuda-se um sistema físico cujos estados são governados pela equação de evolução $\frac{dX}{dt} = X(x(t))$, que possui curvas integrais únicas. Seja x_0 um ponto fixo do fluxo de X , (GUCKENHEIMER and HOLMES, 1983), significa $X(x_0) = 0$. Imaginando que foi realizado um experimento sobre o sistema no tempo $t = 0$, concluí-se que se encontra no estado x_0 . Será que este sistema se manterá no estado x_0 em todo o tempo futuro? A resposta matemática é sim. Sabe-se que os experimentos se correspondem com modelos idealizados, mas em muitos casos prefere-se perguntar se o sistema permanecerá próximo do estado x_0 , ou se iniciou próximo de x_0 . A resposta a esta

nova pergunta não é sempre sim. Mas analisando a equação de evolução deste processo, algumas vezes é possível fazer predições sob o comportamento futuro do sistema iniciando próximo de x_0 . Este é o problema fundamental nos estudos de estabilidade, e pode-se afirmar que esta última pergunta invariavelmente não muda de significado.

Um conceito associado ao de estabilidade é o de bifurcação. Existem objetos diversos: superfícies, funções, variedades, campos vetoriais, equações diferenciais e outros cuja estrutura qualitativa e topológica altera-se com a mudança de um parâmetro (ou vários), do qual estes objetos dependem: a este processo de mudança se refere à palavra bifurcação (ARNOLD, 1972).

É muito vantajoso expressar diferentes sistemas numa forma simples ou básica, de tal modo que a teoria possa ser desenvolvida uniformemente. Os sistemas dinâmicos de forma geral podem ser expressos como sistemas diferenciais de primeira ordem :

$$\dot{x} = V(\mu, x), \quad x \in R^n, \quad \mu \in R; \quad (\text{A.32})$$

dependentes do parâmetro μ , que descreve um movimento num espaço de fase n -dimensional R^n . Quando formulado desta maneira o sistema dinâmico se identifica com o campo vetorial $V(\mu, x)$. Assim pode-se pensar nas soluções de (A.32) como trajetórias a partir de uma condição inicial $x(0)$, que determina unívocamente a solução $x(t)$, e a curva correspondente em R^n (parametrizada em t). Em outras palavras a associação $x(0) \rightarrow x(t)$ define a aplicação:

$$\phi_t : R^n \rightarrow R^n; \quad (\text{A.33})$$

onde $\phi_t(x(0)) = x(t)$. Esta aplicação é conhecida como o fluxo determinado por (A.32). A dinâmica depende de um parâmetro ajustável μ , e é admitido na origem

$(\mu, x) = (0, 0)$, a existência de um ponto fixo de equilíbrio para o movimento $V(0, 0) = 0$. Como sempre se pode ter um ponto fixo de solução (μ_0, x_0) se a origem for movimentada a partir de uma transformação de coordenadas, esta representação é suficiente geral.

Segundo (A.32) para $\mu = 0$ tem-se um estado de equilíbrio em $x = 0$. O problema fundamental na teoria local de bifurcações é que acontece no espaço de fases próximo de $x = 0$, quando ocorrem variações em μ . A resposta a esta questão nas proximidades de $x = 0$, para da a Teoria linear de estabilidade em sistemas dinâmicos será discutida mais adiante.

A.2.1 TEORIA LINEAR

A teoria de estabilidade linear para sistemas dinâmicos baseia-se na expansão de Taylor de (A.32) em $x = 0$:

$$\dot{x} = V(\mu, 0) + D_x V(\mu, 0) \cdot x + O(x^2); \quad (\text{A.34})$$

onde $D_x V(\mu, 0)$ representa o jacobiano, com elementos:

$$(D_x V(\mu, 0))_{ij} \equiv \frac{\partial V_i}{\partial x_j}; \quad (\text{A.35})$$

aqui $O(x^2)$ refere-se aos termos de ordem elevada que são pelo menos quadráticos nas componentes de x . Para $\mu = 0$, o termo constante em (A.34) desaparece e nas proximidades de $x = 0$ estuda-se o sistema linearizado:

$$\dot{x} = D_x V(0, 0) \cdot x; \quad (\text{A.36})$$

ignorando os efeitos dos termos não-lineares. Normalmente os autovalores de $D_x V(0,0)$ não são degenerados, e esta matrix pode ser diagonalizada com uma transformação de coordenadas $x \rightarrow \hat{x}$. Isto permite expressar (A.35) como:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \end{pmatrix}; \quad (\text{A.37})$$

onde a solução geral de (A.37) é obviamente

$$\hat{x}(t) = \begin{pmatrix} \hat{x}_1(0)e^{\lambda_1 t} \\ \hat{x}_2(0)e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ \hat{x}_n(0)e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}; \quad (\text{A.38})$$

Pode-se concluir que se $Real(\lambda_i) < 0$, então quando $t \rightarrow \infty$, a componente \hat{x}_i tende a zero, contrariamente $Real(\lambda_i) > 0$ implica no crescimento exponencialmente rápido da componente \hat{x}_i .

A.2.2 SUBESPAÇOS LINEARES INVARIANTES

Para cada autovalor λ de $D_x V(0,0)$ existe um subespaço associado de R^n : o autoespaço E_λ . Como admite-se que $D_x V(0,0)$ é diagonalizável, E_λ depende apenas que λ seja real ou complexo. Quando λ é real, E_λ é o subespaço gerado pelos autovetores:

$$E_\lambda \equiv \{v \in R^n \mid (D_x V(0,0) - \lambda I)(D_x V(0,0) - \bar{\lambda} I) \cdot v = 0\} \quad (\text{A.39})$$

Se λ é não degenerado então $\dim E_\lambda = 1$. Quando λ é complexo, os autovetores são complexos e o subespaço E_λ é gerado pela parte real e imaginária dos autovetores de λ . Neste caso temos que a $\dim E_\lambda = 2$. Cada autovalor λ corresponde ao modo do sistema que é estável, instável ou neutro dependendo se $Real \lambda < 0$, $Real \lambda > 0$ ou $Real \lambda = 0$, respectivamente. Dividindo os autovetores generalizados de $D_x V(0,0)$ em três conjuntos correspondentes a estas possibilidades, os quais são o subespaço estável E^s , instável E^u e o subespaço central E^c :

$$E^s = span\{v \mid v \in E_\lambda : Re\lambda < 0\} \quad (A.40)$$

$$E^u = span\{v \mid v \in E_\lambda : Re\lambda > 0\} \quad (A.41)$$

$$E^c = span\{v \mid v \in E_\lambda : Re\lambda = 0\} \quad (A.42)$$

Estes subespaços geram o espaço de fase $R^n = E^s \oplus E^c \oplus E^u$ e ao mesmo tempo são invariantes: se $x(0) \in E^\alpha$, $\alpha = s, c, u$, então a trajetória $x(t)$ com esta condição inicial satisfaz $x(t) \in E^\alpha$. Para E^s e E^u a dinâmica possui uma descrição assintótica simples: se $x(t) \in E^s$, então quando $t \rightarrow \infty$ a trajetória converge ao equilíbrio; se $x(t) \in E^u$, então quando $t \rightarrow -\infty$ a trajetória converge ao equilíbrio. Um ponto de equilíbrio $x = 0$ é assintoticamente estável se existe uma vizinhança das condições iniciais $0 < |x(0)| < \epsilon$, tal que, para todo $x(0)$ em suas vizinhanças :

1. a trajetória $x(t)$ satisfaz $|x(t)| < \epsilon$ para $t > 0$.
2. $|x(t)| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Para o sistema (A.36) o equilíbrio é assintoticamente estável se e somente se, $Re(\lambda) < 0$ para cada λ de $D_x V(0,0)$. Ou seja: o espectro do jacobiano deve estar

no semiplano esquerdo do plano complexo em λ .

A.3 MOVIMENTOS RÍGIDOS

Existe outro caminho para mostrar o teorema de estabilidade global tratado no capítulo anterior:

- Os fluxos que perturbam os movimentos rígidos são globalmente estáveis (JOSEPH, 1985).

Podemos definir o movimento rígido como o movimento $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$ para o qual o tensor \mathbf{D} é dado por:

$$\mathbf{D} = (\nabla\mathbf{U} + \nabla\mathbf{U}^T)/2 = 0, \quad (\text{A.43})$$

em Ω . O gradiente de velocidades $\nabla\mathbf{U}$ pode ser descomposto nas respectivas parte simétrica e anti-simétrica:

$$\nabla\mathbf{U} = \mathbf{D} + \mathbf{\Omega}, \quad (\text{A.44})$$

onde:

$$\mathbf{\Omega} = (\nabla\mathbf{U} - \nabla\mathbf{U}^T)/2, \quad (\text{A.45})$$

é a matriz de vorticidade com componentes:

$$\Omega_{ij} = -\Omega_{ji}, \quad (\text{A.46})$$

Como:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{u} = u_i \Omega_{ij} u_j \equiv 0, \quad (\text{A.47})$$

podemos comprovar que:

$$\langle \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{U} \cdot \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u} \rangle, \quad (\text{A.48})$$

sempre, e:

$$\langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u} \rangle = 0, \quad (\text{A.49})$$

para movimentos rígidos. A energia de uma perturbação sobre um movimento com $\mathbf{D} = 0$ decai monotonicamente e devido à (3.6):

$$\frac{1}{2} \frac{d\langle |\mathbf{u}|^2 \rangle}{dt} = -\frac{1}{Re} \langle |\nabla \mathbf{u}|^2 \rangle; \quad (\text{A.50})$$

se \mathbf{D} é pequeno o segundo termo da parte direita da equação (3.6) tende a predominar sobre o primeiro, levando a um decaimento da energia das perturbações arbitrárias.

A.4 PROBLEMAS DE PONTO DE SELA

Nesta seção será feita uma análise dos problemas variacionais com restrições, pois eles atuam um papel importante, na hora de resolver as Equações de Navier-Stokes via formulação fraca.

Sejam X e M dos espaços de Hilbert e supondo que

$$a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}, \quad b : X \times M \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{A.51})$$

são duas formas bilineares contínuas. Seja $f \in X'$ e $g \in M'$ as paridades duais de X com X' e M com M' através de $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Considerando o problema de mínimo.

Problema (M). Encontrar o mínimo sobre X de

$$\mathbb{J}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - \langle f, \mathbf{u} \rangle \quad (\text{A.52})$$

sujeito a restrição

$$b(\mathbf{u}, \mu) = \langle \mathbf{g}, \mu \rangle, \forall \mu \in M. \quad (\text{A.53})$$

Se $\lambda \in M$, então J e a função de Lagrange

$$\mathbb{L}(\mathbf{u}, \lambda) := \mathbb{J}(\mathbf{u}) + [b(\mathbf{u}, \lambda) - \langle \mathbf{g}, \lambda \rangle] \quad (\text{A.54})$$

possuem os mesmos valores no conjunto de todos os pontos que satisfazem as restrições. Ao invés de procurar o mínimo de \mathbb{J} pode-se procurar o mínimo de $\mathbb{L}(\cdot, \lambda)$ com λ fixo. Aqui o problema consiste em qual $\lambda \in M$ pode ser selecionado, de tal forma que o mínimo de $\mathbb{L}(\cdot, \lambda)$ sobre o espaço X é um elemento que satisfaz as restrições. Como $\mathbb{L}(\mathbf{u}, \lambda)$ é uma expressão quadrática em \mathbf{u} e λ , recai-se inevitavelmente no seguinte problema de Ponto de sela:

Problema (S). Encontrar $(\mathbf{u}, \lambda) \in X \times M$ com

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, \lambda) = \langle f, \mathbf{v} \rangle, \forall \mathbf{v} \in X, b(\mathbf{u}, \mu) = \langle \mathbf{g}, \mu \rangle, \forall \mu \in M, \quad (\text{A.55})$$

Podemos observar que para a solução do problema (S), (\mathbf{u}, λ) devem satisfazer a propriedade de ponto de sela:

$$\mathbb{L}(\mathbf{u}, \mu) \leq \mathbb{L}(\mathbf{u}, \lambda) \leq \mathbb{L}(\mathbf{v}, \lambda) \forall (\mathbf{v}, \mu) \in X \times M. \quad (\text{A.56})$$

Apenas é necessário que $a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0$ (BATHE, 1996). A componente de ponto de sela (\mathbf{u}, λ) fornece a solução do problema (M).

A.4.1 A CONDIÇÃO DE INF-SUP

A equação (A.55) define o mapeamento linear

$$L : X \times M \longrightarrow X' \times M'(\mathbf{u}, \lambda) \longmapsto (f, \mathbf{g}). \quad (\text{A.57})$$

Introduzindo as notações:

$$V(\mathbf{g}) = \{\mathbf{v} \in X; b(\mathbf{v}, \mu) = \langle \mathbf{g}, \mu \rangle, \forall \mu \in M\} \quad (\text{A.58})$$

$$V = \{\mathbf{v} \in X; b(\mathbf{v}, \mu) = 0, \forall \mu \in M\}; \quad (\text{A.59})$$

Como b é contínuo, V é um subespaço fechado de X . É possível reformular (A.55) em forma de uma equação operacional, se for associado o mapeamento

$$A : X \longrightarrow X', \langle A \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \forall \mathbf{v} \in X, \quad (\text{A.60})$$

com a forma bilinear a . O mapeamento A é definido pela ação do funcional $A\mathbf{u} \in X'$, em cada $\mathbf{v} \in X$. Similarmente, associa-se o mapeamento B e seu mapeamento adjunto B' com a forma b :

$$B : X \longrightarrow M', \quad B' : M \longrightarrow X', \quad (\text{A.61})$$

$$\langle B \mathbf{u}, \mu \rangle = b(\mathbf{u}, \mu) \forall \mu \in M, \quad \langle B' \lambda, \mathbf{v} \rangle = b(\mathbf{v}, \lambda) \forall \mathbf{v} \in X \quad (\text{A.62})$$

Portanto (A.55) é equivalente a

$$A \mathbf{u} + B' \lambda = f, \quad (\text{A.63})$$

$$B \mathbf{u} = \mathbf{g}. \quad (\text{A.64})$$

Ressaltando o importante resultado que afirma: Para o problema (A.55), o mapeamento (A.57) define um isomorfismo $L : X \times M \longrightarrow X' \times M'$ se e somente se, as duas seguintes condições forem satisfeitas, (BATHE, 1996; GUNZBURGER and NICOLAIDES, 1993):

1. A forma bilinear a é V -elíptica: $a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \alpha \|\mathbf{v}\|^2 \forall \mathbf{v} \in V$, onde $\alpha > 0$.
2. A forma bilinear b satisfaz a denominada condição Inf-sup (LBB):

$$\exists \beta > 0 \quad \inf_{0 \neq \mu \in M} \sup_{0 \neq \mathbf{v} \in X} \frac{b(\mathbf{v}, \mu)}{\|\mathbf{v}\| \|\mu\|} \geq \beta. \quad (\text{A.65})$$

Estas condições estabelecem a possibilidade de solução e a unicidade da mesma no problema apresentado em (A.55). O problema principal na hora de selecionar os espaços adequados via formulação fraca, consiste em satisfazer estas duas condições. Sabe-se que no caso específico da fluidodinâmica a primeira condição de coercitividade é trivial mas a condição LBB é crítica; já em problemas de elasticidade por exemplo, as duas condições podem apresentar dificuldades na hora de satisfazê-las. A experiência prática demonstra que forçar o cumprimento destas duas condições é de extraordinária importância, para a estabilidade de cálculo com elementos finitos.

A.5 ESPAÇOS FUNCIONAIS E NORMAS

Antes de introduzir a formulação variacional e a formulação fraca para as equações de Navier-Stokes, é importante definir os espaços funcionais e as normas associadas que permitiram uma leitura melhor do material a seguir. Mais detalhes podem-se encontrar na literatura (BREZZI and FORTIN, 1991; GIRAULT and RAVIART, 1986).

Denotamos por $L^2(\Omega)$ o espaço das funções quadrado integrável sob o domínio Ω , e equipado com o produto interno e a norma:

$$(p, q) = \int_{\Omega} p q \, d\Omega \quad \|q\|_0 = (q, q)^{1/2}, \quad (\text{A.66})$$

Para qualquer inteiro k não negativo, definimos o espaço de Sobolev:

$$H^k(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega) : D^s q \in L^2(\Omega), \quad s = 1, \dots, k\}, \quad (\text{A.67})$$

onde D^s qualquer e todas as derivadas de ordem s . Então $H^k(\Omega)$ consiste das funções quadrado integrável com derivadas até de ordem k que são também quadrado integrável. $H^k(\Omega)$ fica equipado com a norma:

$$\|q\|_k = \left(\|q\|_0^2 + \sum_{s=1}^k \|D^s q\|_0^2 \right)^{1/2}, \quad (\text{A.68})$$

onde a soma estende-se em todas as derivadas de ordem k ou menor. Podemos ver que:

$$H^0(\Omega) = L^2(\Omega), \quad (\text{A.69})$$

De interesse particular são os espaços $H^1(\Omega)$ que estão formados pelas funções com uma derivada quadrado integrável. A estes espaços podemos associar a norma:

$$\|q\|_1 = \left(\|q\|_0^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial q}{\partial x_i} \right\|_0^2 \right)^{1/2}, \quad (\text{A.70})$$

para as funções que pertencem a $H_0^1(\Omega)$, (GUNZBURGER and NICOLAIDES, 1993), é comum empregar a seminorma:

$$|q|_1 = \left(\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial q}{\partial x_i} \right\|_0^2 \right)^{1/2}, \quad (\text{A.71})$$

Denotamos por $H^{-1}(\Omega)$ o espaço dual que está formado pelos funcionais lineares acotados sobre $H_0^1(\Omega)$, se $q \in H^{-1}(\Omega)$ isto implica que $(q, v) < \infty$ para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. A norma de $H^{-1}(\Omega)$ é dada por:

$$\|q\|_{-1} = \sup_{0 \neq v \in H_0^1(\Omega)} \frac{(q, v)}{\|v\|_1} \quad (\text{A.72})$$

Também empregamos os espaços traço, que são a restrição ao contorno das funções que pertencem a $H^1(\Omega)$. Para citar um exemplo, $H^{1/2}(\Gamma)$ consiste das funções (traço) que pertencem a $H^1(\Omega)$. A modo de exemplo para o caso das funções vetoriais empregamos o espaço:

$$\mathbf{H}_0^1(\Omega) = [H_0^1(\Omega)]^n = \{\mathbf{v} : v_i \in H_0^1(\Omega) \ i = 1, \dots, n\}, \quad (\text{A.73})$$

é dizer este espaço consiste de funções vetoriais cada uma das quais pertence a $H_0^1(\Omega)$. É equipado com a norma:

$$\|\mathbf{v}\|_k = \left(\sum_{i=1}^n \|v_i\|_k^2 \right)^{1/2}, \quad (\text{A.74})$$

O produto interno para as funções que pertencem a:

$$\mathbf{L}(\Omega) = \mathbf{H}^0(\Omega) = [L^2(\Omega)]^n, \quad (\text{A.75})$$

é dado por

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega, \quad (\text{A.76})$$

E não existe contradição em denotar os produtos internos com a mesma notação, tanto para o caso vetorial como escalar.

A.6 A CLASSE DE PROBLEMAS NÃO-LINEARES

Nesta seção estuda-se a generalização do problema variacional não-linear mencionado anteriormente. Esta família de problemas não lineares contém como caso particular as equações de Navier-Stokes.

Considerando novamente dois espaços (reais) de Hilbert X e M normalizados com $\|\cdot\|_X$ e $\|\cdot\|_M$ respectivamente, e a forma bilinear contínua como:

$$b(\cdot, \cdot) : (v, \mu) \in X \times M \longrightarrow b(v, \mu) \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.77})$$

a não-linearidade é introduzida pela forma:

$$a(\cdot; \cdot, \cdot) : (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in X \times X \times X \longrightarrow a(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R} \quad (\text{A.78})$$

onde, para $\mathbf{w} \in X$, o mapeamento $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \longrightarrow a(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v})$ é uma forma bilinear e contínua em $X \times X$.

Então consideremos o seguinte problema: Dado $\mathbf{l} \in X'$, encontrar o par $(\mathbf{u}, \lambda) \in X \times M$ que satisfaz:

$$a(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, \lambda) = \langle \mathbf{l}, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in X, \quad (\text{A.79})$$

$$b(\mathbf{u}, \mu) = 0 \quad \forall \mu \in M. \quad (\text{A.80})$$

Introduzindo os operadores lineares $A(\mathbf{w}) \in \mathcal{L}(X; X')$ para \mathbf{w} em X , e $B \in \mathcal{L}(X; M')$ definidos por:

$$\langle A(\mathbf{w})\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = a(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in X, \quad (\text{A.81})$$

$$\langle B \mathbf{v}, \mu \rangle = b(\mathbf{v}, \mu) \quad \forall \mathbf{v} \in X, \quad \forall \mu \in M. \quad (\text{A.82})$$

Com estas notações o problema anterior se transforma em: encontrar $(\mathbf{u}, \lambda) \in X \times M$ tal que:

$$A(\mathbf{u}) \mathbf{u} + B' \lambda = \mathbf{l} \text{ em } X', \quad (\text{A.83})$$

$$B \mathbf{u} = 0 \text{ em } M' \quad (\text{A.84})$$

Como temos $V = \ker(B)$ pode-se associar com o problema anterior o seguinte problema: Encontrar $\mathbf{u} \in V$ tal que:

$$a(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{l}, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad (\text{A.85})$$

ou de forma equivalentemente:

$$\pi A(\mathbf{u})\mathbf{u} = \pi \mathbf{l} \quad \text{em } V', \quad (\text{A.86})$$

onde o operador linear $\pi \in \mathcal{L}(X'; V')$ é definido como:

$$\langle \pi \mathbf{l}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{l}, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (\text{A.87})$$

As dificuldades aqui encontradas concentram-se na hora de resolver o problema não-linear. A teoria que trata da existência de soluções para este problema baseia-se principalmente no teorema do ponto fixo de Brouwer.

É evidente que a estrutura variacional descrita anteriormente para problemas não-lineares pode ser diretamente extrapolada para as equações de Navier-Stokes. Este processo sob forma analítica e rigorosa pode ser encontrado na literatura (GIRAULT and RAVIART, 1986).

Vale destacar que todo este trabalho de investigação baseia-se ou constitui-se

na construção de uma representação discreta de (A.86).

A.7 MÉTODOS DE GRADIENTE

É muito importante na hora de resolver sistemas lineares, para matrizes positivas definidas A , observar que a solução de $A \mathbf{x} = b$ é também o mínimo de

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T A \mathbf{x} - b^T \mathbf{x}, \quad (\text{A.88})$$

O método mais elementar de encontrar esse mínimo é o método do gradiente. Este método em sua forma tradicional é estável mas converge lentamente se o número condicional $\kappa(A)$ é grande. Infelizmente $\kappa(A)$ é elevado para os sistemas lineares resultantes da discretização dos problemas de contorno elípticos, onde evidentemente se encontram as equações de Navier-Stokes. É fato que para problemas de ordem $2m$, o número condicional cresce tipicamente como h^{-2m} .

Pode-se entender o método do gradiente como a minimização de uma C^1 função (A.88), definida em um conjunto aberto $M \subset \mathbb{R}^n$. O método do gradiente funciona da seguinte forma: escolhe-se um $\mathbf{x}_0 \in M$. Para $k = 0, 1, 2, \dots$, realiza-se os seguintes cálculos:

- Determinar a direção: Cálculo do gradiente negativo $\mathbf{d}_k = -\nabla f(\mathbf{x}_k)$.
- Busca na trajetória (linha): Encontrar o ponto $t = \alpha_k$ ao longo da linha $\{\mathbf{x}_k + t\mathbf{d}_k : t \geq 0\} \cap M$, onde f atinge o mínimo local. Então calcula-se $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k$.

Este método gera uma seqüência (\mathbf{x}_k) que obedece:

$$f(\mathbf{x}_0) \geq f(\mathbf{x}_1) \geq f(\mathbf{x}_2) \geq \dots, \quad (\text{A.89})$$

onde as igualdades são obedecidas apenas nos pontos onde o gradiente se torna nulo. Para o caso especial da função quadrática (A.88) temos:

$$\mathbf{d}_k = b - A \mathbf{x}_k, \quad (\text{A.90})$$

$$\alpha_k = \frac{\mathbf{d}_k^T \mathbf{d}_k}{\mathbf{d}_k^T A \mathbf{d}_k}, \quad (\text{A.91})$$

É de extraordinária importância que para funções quadráticas, a velocidade de convergência é determinada pela grandeza do número condicional $\kappa(A)$. Como medida de distância pode-se empregar a norma de energia, (BATHE, 1996):

$$\|\mathbf{x}\|_A := \sqrt{\mathbf{x}^T A \mathbf{x}}. \quad (\text{A.92})$$

Se \mathbf{x}^* é solução da equação $A \mathbf{x} = b$, e utilizando-se a conhecida propriedade:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^*) + \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|_A^2. \quad (\text{A.93})$$

então aplicando-a em (A.90) e (A.91) e após um tratamento algébrico

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}^*\|_A^2 = \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|_A^2 \left[1 - \frac{(\mathbf{d}_k^T \mathbf{d}_k)^2}{\mathbf{d}_k^T A \mathbf{d}_k \mathbf{d}_k^T A^{-1} \mathbf{d}_k} \right]. \quad (\text{A.94})$$

Agora pode-se tentar estimar a quantidade entre colchetes, se for calculado o número condicional de uma matriz em relação a norma euclidiana. então para matrizes definidas positivas, esta quantidade coincide com o número condicional espectral:

$$\kappa(A) = \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)} \quad (\text{A.95})$$

Aqui é aceitável sem demonstração a famosa desigualdade de Kantorovitch: Seja A uma matriz simétrica positiva definida com número condicional espectral

$\kappa(A)$. Então

$$\frac{(\mathbf{x}^T A \mathbf{x})(\mathbf{x}^T A^{-1} \mathbf{x})}{(\mathbf{x}^T \mathbf{x})^2} \leq \left(\frac{1}{2}\sqrt{\kappa} + \frac{1}{2}\sqrt{\kappa^{-1}}\right)^2 \quad (\text{A.96})$$

para todo vetor $\mathbf{x} \neq 0$. Podemos combinar (A.94) com (A.96), e com a identidade

$$1 - \frac{4}{(\sqrt{\kappa} + \sqrt{\kappa^{-1}})^2} = \frac{(\kappa - 1)^2}{(\kappa + 1)^2} \quad (\text{A.97})$$

é válido que se for aplicado o método do gradiente a função (A.88) é gerada uma sequência que obedece a seguinte desigualdade:

$$\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\| \leq \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}\right)^k \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\|_A. \quad (\text{A.98})$$

Analisando (A.98), nota-se que a medida em que o número condicional se aproxima de 1.0, a velocidade de convergência aumenta (para $\kappa = 1$, bastaria uma iteração), de modo que é desejável manter este número o mais próximo possível da unidade. Para números condicionais elevados a velocidade de convergência se comporta como:

$$\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \approx 1 - \frac{2}{\kappa} \quad (\text{A.99})$$

próximo da unidade. O que é verdadeiramente desastroso, pois observando-se cautelosamente (A.98), a cada nova iteração se afasta cada vez mais da solução.

A.8 GRADIENTES CONJUGADOS

A idéia principal dos gradientes conjugados é garantir que as direções sucessivas não sejam paralelas. Isto é usar direções ortogonais, quando a ortogonalidade é medida numa métrica mais apropriada para o problema (A.88) do que a métrica euclidiana. Para compreender melhor considere que: seja A uma matriz

simétrica não-singular, então dois vetores \mathbf{x} e \mathbf{y} são chamados conjugados ou A -ortogonais sempre que obedeça $\mathbf{x}^T A \mathbf{y} = 0$. Admite-se que A seja positiva definida, neste caso qualquer conjunto de k vetores pares conjugados $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ são linearmente independentes, isto se nenhum deles for o vetor nulo. Supondo que $\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{n-1}$ são direções conjugadas, e que a solução desejada $\mathbf{x}^* = A^{-1}b$ possuem a expansão:

$$\mathbf{x}^* = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \mathbf{d}_k \quad (\text{A.100})$$

em termos desta base.

Devido as relações de ortogonalidade temos

$$\mathbf{d}_i^T A \mathbf{x}^* = \sum_k \mathbf{d}_i^T A \alpha_k \mathbf{d}_k = \alpha_i \mathbf{d}_i^T A \mathbf{d}_i, \quad (\text{A.101})$$

$$\alpha_i = \frac{\mathbf{d}_i^T A \mathbf{x}^*}{\mathbf{d}_i^T A \mathbf{d}_i} = \frac{\mathbf{d}_i^T b}{\mathbf{d}_i^T A \mathbf{d}_i}, \quad (\text{A.102})$$

Então usando vetores conjugados, com uma base arbitrária diferente, pode-se calcular os coeficientes α_i na expansão de \mathbf{x}^* diretamente para o vetor dado b .

Seja \mathbf{x}_0 um vetor arbitrário em R^n . A expansão do vetor correção $\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_0$ em função das direções conjugadas, pode-se calcular recursivamente a partir dos gradientes $\mathbf{g}_k := \nabla f(\mathbf{x}_k)$. Se $\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{n-1}$ são direções conjugadas, e seja $\mathbf{x}_0 \in R^n$. Então a sequência gerada pela recursão é,

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k, \quad (\text{A.103})$$

$$\alpha_k = -\frac{\mathbf{d}_k^T \mathbf{g}_k}{\mathbf{d}_k^T A \mathbf{d}_k}, \quad (\text{A.104})$$

$$\mathbf{g}_k = A \mathbf{x}_k - b, \quad (\text{A.105})$$

fornece a solução $\mathbf{x}_n = A^{-1}b$ pelo menos depois de n passos. Este resultado

permite construir o algoritmo dos gradientes conjugados que está bem explorado na literatura, (MADAY *et al.*, 1993; GIRAULT and RAVIART, 1986).

A.9 PRÉ-CONDICIONADORES

Na seção anterior foi visto que a velocidade de convergência dos métodos iterativos depende das propriedades espectrais da matriz dos coeficientes; e especificamente do número de condição espectral (A.95). Portanto, uma metodologia muito utilizada consiste em transformar o sistema linear cuja solução pretende encontrar num outro equivalente, mas com propriedades espectrais favoráveis. Os pré-condicionadores são matrizes que efetuam estas transformações.

Para mostrar um exemplo que evidencia a idéia anterior, se a matriz M aproxima a matriz dos coeficientes do sistema a resolver A de algum modo, então o sistema transformado:

$$M^{-1} \cdot A \mathbf{x} = M^{-1} \mathbf{b}, \quad (\text{A.106})$$

possui a mesma solução que o sistema original $A \mathbf{x} = \mathbf{b}$, mas as propriedades espectrais da matriz $M^{-1} \cdot A$ podem ser mais favoráveis. Para lidar com o problema de definir um pré-condicionador podem ocorrer duas possibilidades:

- Encontrar uma matriz M que aproxima a matriz A e a resolução do sistema se torna mais fácil que resolvê-lo para A .
- Encontrar uma matrix M que aproxima A^{-1} , tal que, apenas seja necessário a multiplicação por M .

A maioria dos pré-condicionadores recaem na primeira categoria. Na prática a transformação do sistema linear $A \rightarrow M^{-1} \cdot A$ não é muito empregada. Uma forma de introdução de um pré-condicionador é separá-lo em $M = M_1 \cdot M_2$ e

transformar o sistema em

$$M_1^{-1} \cdot A \cdot M_2^{-1}(M_2 \mathbf{x}) = M_1^{-1} \mathbf{b}, \quad (\text{A.107})$$

As matrizes M_1 e M_2 são conhecidas como pré-condicionadores da esquerda e da direita. Então, aplicando o seguinte algoritmo iterativo:

- Transformar o vetor da direita $\hat{\mathbf{b}} \leftarrow M_1^{-1} \mathbf{b}$.
- Substituir a matriz dos coeficientes $\hat{A} = M_1^{-1} \cdot A \cdot M_2^{-1}$, e resolver o sistema $\hat{A} \mathbf{y} = \hat{\mathbf{b}}$.
- Calcular $\mathbf{x} = M_2^{-1} \mathbf{y}$.

Um fato importante é que a matrix transformada dos coeficientes $M_1^{-1} \cdot A \cdot M_2^{-1}$ preserve as propriedades teóricas de A e de M , no caso em que A é simétrica positiva-definida e $M_1 = M_2^T$, então a matriz dos coeficientes transformada é também simétrica e positiva-definida. Esta transformação é preferível a $M^{-1} \cdot A$, a qual não garante as propriedades anteriormente citadas (ELMAN *et al.*, 2002; ELMAN, 1996; ELMAN, 1999).

A matriz dos coeficientes que aparece nas discretizações das equações de Navier-Stokes (3.22) é do tipo indefinida: possui autovalores nos semiplanos positivos e negativos do espectro. É muito vantajoso empregar pré-condicionadores para resolver estes sistemas indefinidos, que aparecem como resultado de problemas variacionais com restrições, para os quais Stokes e Navier-Stokes são casos particulares. O papel do pré-condicionador neste caso, consiste em reduzir o número de iterações necessárias para atingir a convergência, sem incrementar significativamente o volume de cálculos em cada iteração.

Para tentar dar uma explicação mais consistente, suponha que para a matriz

dos coeficientes A foi escolhido um pré-condicionador P tal que P^{-1} é uma aproximação de baixo custo computacional da inversa de A , com isto obtém-se um bom pré-condicionador. Agora a condição suficiente para um bom pré-condicionador é que a matriz pré-condicionadora $T = P^{-1} \cdot A$, possua um polinômio mínimo de baixa ordem. Esta condição é usualmente expressa em termos que T possua poucos autovalores diferentes: ou seja, que as formas canônicas de Jordan possuam blocos de Jordan de pequenas dimensões.

Existe uma proposição, (MALCOLM *et al.*, 2000), onde se mostra que se

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.108})$$

é pré-condicionada com

$$P = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & BA^{-1}B^T \end{pmatrix}, \quad (\text{A.109})$$

então a matriz pré-condicionada $T = P^{-1} \cdot \tilde{A}$, satisfaz

$$T \cdot (T - I) \cdot (T^2 - T - I) = 0. \quad (\text{A.110})$$

Como (A.110) pode ser fatorizada em fatores lineares distintos, segue que T é diagonalizável e possui ao menos os quatro autovalores distintos:

$$0, 1, \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}. \quad (\text{A.111})$$

No caso em que T seja não-singular então possui três autovalores não nulos. Esta proposição se aplica igualmente para pré-condicionadores do tipo $T = P_1^{-1} \tilde{A} P_2^{-1}$,

onde $P_1 P_2 = P$, basta aplicar transformações de similaridade ou fatorizações que envolvam P , uma demonstração simples deste resultado pode ser encontrada em (MALCOLM *et al.*, 2000). Assim, para qualquer vetor \mathbf{r} o subespaço de Krylov

$$\text{span}\{\mathbf{r}, T\mathbf{r}, T^2\mathbf{r}, T^3\mathbf{r}, \dots\} \quad (\text{A.112})$$

é de dimensão de pelo menos 3, se T é não-singular (4 se é singular). Portanto, para os métodos iterativos baseados no subespaço de Krylov o processo de busca da solução termina em três iterações, se o pré-condicionador P for usado.

Para o caso do complemento de Schur (A.122) podemos ver heurísticamente que está bem condicionado, pois

$$S \rightarrow \nabla \cdot (\nabla^2)^{-1} \nabla \approx \frac{\nabla \cdot \nabla}{\nabla^2} \approx 1. \quad (\text{A.113})$$

o que implica que o complemento de Schur discreto é muito próximo da matriz discreta M_p para as pressões,

$$M_p = \int_{\Omega} \delta p \delta p d\Omega, \quad (\text{A.114})$$

a qual é análoga discreta da matriz identidade. Portanto é comum usar esta matriz M_p como pré-condicionador.

Normalmente, no processo de solução das equações de Navier-Stokes a parte mais intensa está relacionada com o cálculo das pressões. Para valores relativos grandes de $(\Delta t/Re)$ a inversa da matriz de massa para as pressões é um bom pré-condicionador, mas para valores pequenos de $(\Delta t/Re)$ não é efetivo. Neste caso são necessários novos pré-condicionadores, para que estas técnicas variacionais sejam competitivas, para elevados valores de Reynolds. A idéia central

de obter pré-condicionadores efetivos da pressão foi colocada pela primeira vez, (CAHOUEY and CHABARD, 1986), baseada na seguinte identidade:

$$-\nabla \cdot (\Delta t^{-1} \mathbf{I} - \frac{1}{Re} \nabla^2) \nabla = (\frac{1}{Re} \mathbf{I}^{-1} - \Delta t^{-1} (\nabla^2)^{-1})^{-1}, \quad (\text{A.115})$$

onde \mathbf{I} é o operador identidade. Mesmo que esta identidade não seja exata para os operadores discretos correspondentes, ela sinaliza um bom ponto de partida para a construção de pré-condicionadores apropriados (CAHOUEY and CHABARD, 1986).

No algoritmo de Usawa usado para o cálculo dos campos estacionários das equações de Navier-Stokes emprega-se o pré-condicionador conhecido com o nome de Cahouet-Chabard, (CAHOUEY and CHABARD, 1986):

$$P_{Chab} = (\frac{1}{\Delta t} (\nabla^2)^{-1} + \frac{1}{Re} \mathbf{I}) \quad (\text{A.116})$$

A.10 O ALGORITMO DE USAWA

Já foi visto anteriormente que a determinação do mínimo

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T A \mathbf{u} - \mathbf{u}^T f \quad (\text{A.117})$$

com as restrições

$$R^T \mathbf{u} = g, \quad (\text{A.118})$$

leva a um sistema indefinido de equações da forma

$$A \mathbf{u} + R \lambda = f, \quad (\text{A.119})$$

$$B^T \mathbf{u} = g, \quad (\text{A.120})$$

Onde se B é uma matriz de ordem $m \times n$ então o multiplicador de lagrange λ é um vetor m -dimensional. Para o caso específico de interesse, a atenção será voltada para as restrições linearmente independentes. Também na maioria dos casos A é inversível. Depois de multiplicar a equação (A.119) por A^{-1} , pode-se eliminar u da equação (A.120) e tem-se:

$$R^T \cdot A^{-1} \cdot R \lambda = R^T \cdot A^{-1} f - g, \quad (\text{A.121})$$

a matriz $R^T \cdot A^{-1} \cdot R$ para a equação reduzida (A.121) é positiva-definida e além disso é conhecida como o complemento de Schur. O complemento de Schur é muito importante na inversão dos sistemas indefinidos, isto pode ser constatado ao aplicar a decomposição de Cholesky:

$$\begin{pmatrix} A & R \\ R^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ R^T & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & -R^T \cdot A^{-1} \cdot R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & R \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad (\text{A.122})$$

e a inversa

$$\begin{pmatrix} A & R \\ R^T & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} - (A^{-1} \cdot R \cdot S^{-1} \cdot R^T \cdot A^{-1}) & A^{-1} \cdot R \cdot S^{-1} \\ S^{-1} \cdot R^T \cdot A^{-1} & -S^{-1} \end{pmatrix} \quad (\text{A.123})$$

onde $S = R^T \cdot A^{-1} \cdot R$ é o complemento de Schur; daí a importância de garantir inversão no complemento de Schur.

O algoritmo de Usawa foi concebido para lidar com estes problemas de ponto de sela. De modo geral afirma o seguinte: Seja um $\lambda_0 \in R^n$. Encontrar u_k e λ_k

tal que

$$A \mathbf{u}_k = f - R\lambda_{k-1}, \quad (\text{A.124})$$

$$\lambda_k = \lambda_{k-1} + \alpha(R^T \mathbf{u}_k - g), \quad (\text{A.125})$$

onde $k = 1, 2, \dots$. Normalmente assume-se que o parâmetro α é suficiente pequeno. Para analisar este algoritmo define-se o resíduo

$$\mathbf{q}_k := \mathbf{g} - R^T \mathbf{u}_k. \quad (\text{A.126})$$

Supondo que a solução do problema de ponto de sela é representada por $(\mathbf{u}^*, \lambda^*)$. Agora tem-se que

$$\mathbf{q}_k = \mathbf{g} - R^T \cdot A^{-1}(f - R\lambda_{k-1}) = R^T \cdot A^{-1} \cdot R(\lambda_{k-1} - \lambda^*), \quad (\text{A.127})$$

o que significa que

$$\lambda_k - \lambda_{k-1} = -\alpha \mathbf{q}_k = \alpha R^T \cdot A^{-1} \cdot R(\lambda^* - \lambda_{k-1}), \quad (\text{A.128})$$

com isso observa-se que o algoritmo de Usawa é uma aplicação do método do gradiente a equação reduzida (A.121) usando passo fixo. Empregando (A.91) em um passo resulta

$$\alpha_k = \frac{\mathbf{q}_k^T \mathbf{q}_k}{(R\mathbf{q}_k)^T A^{-1} R\mathbf{q}_k}. \quad (\text{A.129})$$

Basicamente, este algoritmo é constituído de um processo de minimização onde se minimiza (aplicando uma técnica de descenso) o complemento de Schur, e se encontra o multiplicador de lagrange, para depois calcular finalmente o campo de velocidades.

APÊNDICE B

PROBLEMA DISCRETO

B.1 CONDIÇÕES DE CONTORNO

Nesta seção serão discutidas as condições não homogêneas de contorno, aplicadas para resolver as equações de Navier-Stokes. Considerando $\mathbf{u} = \mathbf{g}$ no contorno Γ com $\mathbf{g} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, e

$$\int_{\Gamma} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = 0, \quad (\text{B.1})$$

e o conjunto

$$V_g = \{\mathbf{u} \in H^1(\Omega) : \mathbf{u}|_{\Gamma} = \mathbf{g}, \mathbf{g} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\}, \quad (\text{B.2})$$

nota-se que $V_0 = H_0^1(\Omega)$. Na formulação fraca seria: encontrar $\mathbf{u} \in V_g$ e $p \in L_0^2(\Omega)$ de modo que, se satisfaçam as equações de Navier-Stokes. A função de teste $\mathbf{v} \in H_0^1$ o que implica $\mathbf{v}|_{\Gamma} = \mathbf{0}$. Escolhendo os espaços de elementos finitos $V^h \subset H^1(\Omega)$ e $S_0^h \subset L_0^2(\Omega)$. Representando por $V^h|_{\Gamma}$ a restrição de V^h na fronteira Γ ; é dizer $V^h|_{\Gamma}$ consiste das funções definidas em Γ e que coincidem com os valores de fronteira, pelo menos com uma função que pertence a V^h . Supondo que V^h é um espaço de elementos finitos lagrangiano (seus graus de liberdade

são exclusivamente funções dos valores dos pontos). Seja $\{V_k, k = 1, \dots, K\}$ uma base lagrangiana para V^h . Sejam os primeiros K_I funções da base associados com os nós interiores \mathbf{x}_k , tal que para os $k = 1, \dots, K_I, \mathbf{v}_k = 0$ para $\mathbf{x} \in \Gamma$. As restantes funções da base $\{\mathbf{v}_k\}, k = K_I + 1, \dots, K$, são associadas com os nós \mathbf{x}_k que estão em Γ . Este processo pôde-se obter eficientemente renumerando os nós.

Se \mathbf{g}^h é selecionado como um interpolante de contorno de \mathbf{g} , então

$$\mathbf{g}^h(\mathbf{x}) = \sum_{k=K_I+1}^K \tilde{\beta}_k \mathbf{v}_k(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (\text{B.3})$$

onde os coeficientes $\tilde{\beta}$ são componentes apropriados de \mathbf{g} , avaliados em \mathbf{x} . É comum escolher as funções de base $\mathbf{v}_k(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x})\mathbf{e}_i$, onde \mathbf{e}_i são os vetores coordenados unitários, e $\phi_m(\mathbf{x})$ são polinômios escalares tal que, $\phi_m(\mathbf{x}_l) = \delta_{lm}$, \mathbf{x}_l os nós da triangulação. Agora tem-se que

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^n \phi_m(\mathbf{x}) \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_m) \mathbf{e}_i = \sum_{m=1}^M \phi_m(\mathbf{x}) \mathbf{g}(\mathbf{x}_m), \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (\text{B.4})$$

onde $\mathbf{x}_m, m = 1, \dots, M$, são os nós da fronteira. Então em (B.3)

$$\mathbf{v}_k(\mathbf{x}) = \phi_m(\mathbf{x}) \mathbf{e}_i, \quad (\text{B.5})$$

e $\tilde{\beta}_k = \gamma(\mathbf{x}_m) \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_m)$ com $k = K_I + (m - 1)n + i$. Se $\mathbf{u}^h \in V^h$ satisfaz $\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{g}^h(\mathbf{x})$ para $\mathbf{x} \in \Gamma$, obtendo:

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{K_I} \beta_k \mathbf{v}_k(\mathbf{x}) + \sum_{k=K_I+1}^K \tilde{\beta}_k \mathbf{v}_k(\mathbf{x}), \quad (\text{B.6})$$

onde $\beta_k = 1, \dots, K_I$ são os coeficientes a determinar; os coeficientes $\tilde{\beta}$ das funções da base associadas com a fronteira são conhecidos. Esta contribuição de \mathbf{u}^h forma

parte da data do sistema discreto em que se transformam as equações de Navier-Stokes, o que significa que passam para o lado direito como carregamento.

Para o caso importante de condições de contorno naturais, pode-se dividir os segmentos de fronteira Γ em Γ_n e Γ_τ . Estes segmentos podem ser vários e não necessariamente disjuntos. Seja:

$$V_g = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega) : \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{g}, \text{ em } \Gamma_n; \mathbf{n} \times \mathbf{v} \times \mathbf{n} = \mathbf{g}_\tau, \text{ em } \Gamma_\tau\} \quad (\text{B.7})$$

e $S = L_0^2(\Omega)$ se $\Gamma_n = \Gamma$, ou $S = L^2(\Omega)$ para o restante, onde $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ é a componente de \mathbf{v} normal à fronteira Γ , e $\mathbf{n} \times \mathbf{v} \times \mathbf{n} = \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$ é a projeção de \mathbf{v} no plano tangente a Γ . As condições essenciais de contorno (velocidades normais e tangenciais):

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = g_n, \text{ em } \Gamma_n, \quad (\text{B.8})$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{n} \times \mathbf{n} = g_\tau, \text{ em } \Gamma_\tau, \quad (\text{B.9})$$

então as funções tentativa $\mathbf{u} \in V_g$, e as funções teste $\mathbf{v} \in V_0$. A formulação fraca para as contribuições das condições de contorno naturais tomam a forma, (GUNZBURGER and NICOLAIDES, 1993): de encontrar $\mathbf{u} \in V_g$ e $p \in S$, tal que satisfaçam

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) + c(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) + d(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V_0, \quad (\text{B.10})$$

$$b(\mathbf{u}, q) = 0, \quad \forall q \in S. \quad (\text{B.11})$$

o funcional linear $d(\cdot)$ é dado por

$$d(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma/\Gamma_n} (-p + \nu \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma + \int_{\Gamma/\Gamma_\tau} (\nu \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u} \times \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{n}) \, d\Gamma, \quad (\text{B.12})$$

em (B.12) Γ/Γ_n apresenta o complemento de Γ_n : $\mathbf{x} \in \Gamma/\Gamma_n \Rightarrow \mathbf{x} \in \Gamma$ mas \mathbf{x} não está em Γ_n . Isto é a contribuição das condições naturais de contorno. Para o caso específico da linha central de simetria tem-se que $\Gamma/\Gamma_n = \emptyset$ e em Γ/Γ_τ supõe-se que, $(\mu \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \times \mathbf{u}) = 0$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALBAREDE, P. and M. PROVANSAL (1995a). Quase-periodic cylinder wakes and the ginzburg-landau model. *J. Fluid Mech.* **291**, 191–222.
- ALBAREDE, P. and M. PROVANSAL (1995b). Quasi-periodic cylinder wakes and the ginzburg-landau model. *J. Fluid Mech.* **291**, 191–222.
- ANDERSON, E., Z. BAI, C. BISCHOF, S. BLACKFORD, J. DEMMEL, J. DONGARRA, J. DU CROZ, A. GREENBAUM, S. HAMMARLING, A. MCKENNEY and D. SORENSEN (1999). Lapack user's guide third edition. *www.netlib.org*.
- ARANHA, J.A.P. (2001). On the stability of steady symmetric flow around a circular cylinder. *Private Communication* **1**, 1–21.
- ARANHA, J.A.P. (2003). Relatório (1) do projeto temático: Comunicação privada. *FAPESP*.
- ARNOLD, V.I. (1972). Lectures on bifurcation in versal families. *Russ. Math. Surveys.* **27**, 52.
- BATCHELOR, G.K. (1990). *An Introduction to Fluid Dynamics*. 3 ed.. Cambridge University Press, New York.
- BATHE, K.J. (1996). *Finite Element Procedures*. New Jersey: Prentice-Hall.
- BERGER, E. and R. WILE (1972). Periodic flow phenomena. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **4**, 313.
- BERTRAND, F. and P.A. TANGUY (2002). Krylov-based usawa algorithms for the stokes equations using discontinuous-pressure tetrahedral finite elements. *Journal of Computational Physics* **181**, 617–638.

- BREZZI, F. and M. FORTIN (1991). *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer Series in Computational Mathematics.
- CAHOUE, J. and J.P. CHABARD (1986). Some fast 3d finite element solvers for the generalized stokes problem. *Int. J. Num. Meth. Fluids* **8**(6), 869.
- CHEN, J.H., W.G. PRITCHARD and S.J. TAVENER (1995). Bifurcation for flow past a cylinder between parallel planes. *J. Fluid Mech.* **284**, 23–41.
- COUTANCEAU, M. and R. BOUARD (1977J). Experimental determination of the main features of the viscous flow in the wake of a circular cylinder in uniform translation, part i; steady flow.. **79**, 231–236.
- CUVELIER, C., A. SEGAL and A.A. van STEENHOVEN (1986). *Finite Element Methods and Navier-Stokes Equations*. D. Reidel Publishing Company, Boston.
- DING, Y. and M. KAWAHARA (1998). Linear stability of incompressible flow using a mixed finite element method. *Journal of Computational Physics* **139**, 243–273.
- DING, Y. and M. KAWAHARA (1999). Three-dimensional linear stability analysis of incompressible viscous flows using the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **31**, 451–479.
- ELMAN, H. (1996). Fast nonsymmetric iterations and preconditioning for navier-stokes equations. *SIAM J. Sci. COMPUT.* **17**(1), 33–46.
- ELMAN, H. (1999). Preconditioning for the steady-state navier-stokes equations with low viscosity. *SIAM J. Sci. COMPUT.* **20**(4), 1299–1316.
- ELMAN, H.C., D.J. SILVESTER and A.J. WATHEN (2002). Performance and analysis of saddle point preconditioners for the discrete steady-state navier-stokes equations. *Numer. Math.* **90**, 665–688.
- FORNBERG, B. (1980). A numerical study of steady viscous flow past a circular cylinder. *J. Fluid Mech.* **98**(part 4), 819–855.
- FORNBERG, B. (1985). Steady viscous flow past a circular cylinder up to reynolds number 600. *Journal of Computational Physics* **61**, 297–320.

- FORTIN, A., M. JARDACK, J.J. GERVAIS and R. PIERRE (1994). Old and new result on the two-dimensional poiseuille flow. *Journal of Computational Physics* **115**, 455–469.
- FORTIN, A., M. JARDACK, J.J. GERVAIS and R. PIERRE (1997). Localization of hopf bifurcations in fluid flow problems. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **24**, 1185–1220.
- GEORGESCU, A. (1985). *Hydrodynamic stability theory*. Martinus Nijhoff Publishers, Boston.
- GERVAIS, J.J., D. LEMELIN and R. PIERRE (1997). Some experiments with stability analysis of discrete incompressible flows in the lid-driven cavity. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **24**, 477–492.
- GIRAULT, V. and P.A. RAVIART (1986). *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*. Vol. 5. Springer Series in Comp. Mathematics.
- GRESHO, P.M., S.T. CHAN, R.L. LEE and C.D. UPSON (1984). A modified finite element method for solving the time-dependent incompressible navier-stokes equations: Part 2. applications. *Int. J. Numer. Methods Fluids* **4**, 619.
- GUCKENHEIMER, J. and P. HOLMES (1983). *Nonlinear Oscillations Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. Vol. 42. Applied Mathematical Sciences. New York: Springer-Verlag.
- GUNZBURGER, M. D. and R. A. NICOLAIDES (1993). *Incompressible Computational Fluid Dynamics*. Cambridge University Press.
- HECHT, F. and O. PIRONNEAU (2002). Freefem++: manual, version 1.23. *Université Pierre et Marie Curie, Laboratoire Jacques-Louis Lions, 175 rue du Chevaleret, Paris XIII, On the web at ftp://www.freefem.org*.
- HOLDEMAN, J.T. (2001). Incompressible flow-dynamic or kinematic ?. *Preprint submitted (unpublished)* pp. 1–5.
- JACKSON, C.P. (1987). A finite-element study of the onset of vortex shedding in flow past variously shaped bodies. *J. Fluid Mech.* **182**, 23–45.
- JOSEPH, D.D. (1985). *Hydrodynamic Stability and Bifurcation*. Springer-Verlag, New York.

- KARNIADAKIS, G. and S.J. SHERWIN (1999). *Spectral/hp Element Methods for CFD*. New York: Oxford University Press.
- LADYSHESNKAYA, O.A. (1969). *The mathematical theory of viscous incompressible flow*. 2 ed.. Gordon and Breach, New York.
- LANDAU, L. and LIFSCHITZ (1959). *Fluid Mechanics*. Oxford: Pergamon.
- LEHOUCQ, R.B., D.C. SORENSEN and C. YANG (1997). Arpack user's guide: Solution of large scale eigenvalue problems with implicit restarted arnoldi methods.. *arpack@caam.rice.edu*.
- LERAY, J. (1933). Etude de diverses 'equations int'egrales nonlin'eaes et de quelques probl'emes que pose l'hydrodynamique. *J. Math. Pures Appl.* **12**, 1–82.
- LERAY, J. (1934a). Essai sur les mouvements d'un liquide visqueux que limitent des parois. *J. Math. Pures Appl.* **13**, 331–418.
- LERAY, J. (1934b). Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. *Acta. Math.* **63**, 193–248.
- LEWEKE, T. and M. PROVANSAL (1994). Model of transition in bluff body wakes. *Physical Review Letters* **72**(20), 3174–3177.
- LEWEKE, T. and M. PROVANSAL (1995). The flow behind rings: bluff body wakes without end effects. *J. Fluid Mech.* **288**, 265–310.
- LEWEKE, T., M. PROVANSAL and L. BOYER (1993). Stability of vortex shedding modes in the wake of a ring at low reynolds numbers. *Physical Review Letters* **71**(21), 3469–3472.
- MADAY, Y., D. MEIRON, A.T PATERAS and E.M. RONQUIST (1993). Analysis of iterative methods for the steady and unsteady stokes problem: Application to spectral element discretizations. *SIAM J. SCI. COMPUT.* **14**(2), 310–337.
- MALCOLM, F.M., G.H. GOLUB and J.A. WATHEN (2000). A note on preconditioning for indefinite linear systems. *SIAM. J. SCI. COMPUT.* **21**(6), 1969–1972.

- MENEGHINI, J.R. (2002). Projetos de pesquisa no tópico geração e desprendimento de vórtices no escoamento ao redor de cilindros. *Resenha para o título de Livre-Docente, São Paulo*.
- MORZYNSKI, M. and F. THIELE (1991). Numerical stability analysis of a flow about a cylinder. *Z. Angew. Math. Mech.* **71**, T424–T428.
- NOACK, B.R. and B.R. ECKELMANN (1994). A global stability analysis of the steady and periodic cylinder wake. *J. Fluid Mech.* **270**, 297–330.
- PIRONNEAU, O. (1989). *Finite Element Methods for Fluids*. Chichester New York: John Wiley and Sons.
- POLIASHENKO, M. and C.K. AIDUN (1995). A direct method for computation of simple bifurcations. *Journal of Computational Physics* **121**, 246–260.
- PROVANSAL, M., C. MATHIS and L. BOYER (1987). Bernard-von karman instability: transient and forced regimes. *J. Fluid Mech.* **182**, 1–22.
- TANEDA, S. (1956). *J. Phys. Soc.* p. 302.
- TEMAN, R. (1977). *Navier-Stokes equations: Theory and numerical analysis*. North-Holland, Amsterdam.
- WILLIAMSON, C.H.K. (1989). Oblique and parallel modes of vortex shedding in the wake of a circular cylinder at low reynolds numbers. *J. Fluid Mech.* **206**, 579–627.
- WILLIAMSON, C.H.K. and G.L. BROWN (1998). A series in $1/\sqrt{re}$ to represent the strouhal-reynolds number relationship of the cylinder wake. *J. of Fluids and Structures.* **291**, 1073–1085.
- WINTERS, K.H. (1991). Bifurcation and stability: a computational approach. *Computer Physics Communications* **65**, 299–309.
- XIU, Y. and C.A. HALL (1993). The construction of an optimal weakly divergence-free macroelement. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **36**, 2245–2262.
- XIU, Y. and C.A. HALL (1995). The construction of a null basis for a discrete divergence operator. *Journal of Computational and Applied Mathematics* **58**, 117–133.

- XIU, Y. and G. ANDERSON (1995). The derivation of minimal support basis functions for the discrete divergence operator. *Journal of Computational and Applied Mathematics* **61**, 105–116.
- ZDRAVKOVICH, M.M. (1997). *Flow Around Circular Cylinders, vol:1 Fundamentals*. Oxford University Press.
- ZIENKIEWICZ, K.J. and R.L. TAYLOR (1991). *The Finite Element Method*. Vol. 2. 4 ed.. New York: McGraw Hill.