



São Paulo, 1991

Dissertação de mestrado  
apresentado ao Departamento de  
Engenharia Mecânica da Escola  
Politécnica da Universidade de  
São Paulo.

RESPOSTA AO DESBALANÇAMENTO DE  
ROTORES APOIADOS EM MANCAIS DE  
DESILIZAMENTO

ANTONIO NEGREIRA LOPEZ

FD-1204  
B C

Sao Paulo, 1991

Orientador: Prof. Dr. Francisco Emilio Baccaro Niero  
Depto. Engenharia Mecânica.

Dissertação de mestrado  
apresentada ao Departamento de  
Engenharia Mecânica da Escola  
Politécnica da Universidade de  
Sao Paulo.

RESPOSTA AO DESBALANÇAMENTO DE  
ROTORES APOIADOS EM MANCAIS DE  
DESILIZAMENTO

Eng. Mecânico, Faculdade de Engenharia Industrial, 1982

ANTONIO NEGREIRA LOPEZ

SUMÁRIO

Resposta ao desbalanceamento de rotores apoiados em mancais de deslizamento

I - Introdução..... 1

1.1 - Rotor de Jettcott..... 4

1.1.1 - Análise do rotor de Jettcott..... 4

1.1.2 - Amortecimento do rotor..... 6

1.2 - Rotor de Jettcott com mancais flexíveis e amortecidos... 9

1.1.2 - Amortecimento ótimo do rotor..... 12

2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA..... 16

2.1 - Descrição dos artigos..... 16

3 - Mancais de deslizamento..... 24

3.1 - Método de cálculo..... 24

3.1.1 - Solução da equação de Reynolds..... 25

3.1.2 - Método de diferenças finitas..... 25

3.1.3 - Condições de contorno..... 26

3.2 - Coeficientes dinâmicos..... 27

3.3 - Procedimento de cálculo..... 29

3.3.1 - Valores adimensionais..... 30

3.4 - Descrição do programa..... 31

3.5 - Comparação de resultados..... 35

4 - Velocidades críticas..... 49

4.1 - Método de cálculo..... 50

4.1.1 - Modelo matemático..... 50

4.1.2 - Método de matrizes de transferência..... 51

4.1.3 - Efeito giroscópico..... 52

4.2 - Procedimento de cálculo..... 53

4.3 - Descrição do programa..... 55

4.4 - Comparação de resultados..... 59

Notação e Nomenclatura..... IV

Lista de figuras..... VII

Lista de tabelas..... X

5 - Resposta ao desbalanceamento.....	66
5.1 - Metodo de calculo.....	68
5.1.1 - Metodo de matrizes de transferencia.....	68
5.2 - Procedimento de calculo.....	69
5.3 - Descricao do programa.....	71
5.4 - Comparacao de resultados.....	76
6 - Determinações experimentais e comparações com resultados calculados.....	82
6.1 - Descrição dos ensaios.....	82
6.2 - Descrição dos calculos e comparação de resultados.....	83
7 - Conclusões e estudos futuros.....	90
8 - Referências Bibliográficas.....	92



O presente trabalho apresenta um procedimento numérico para cálculo da resposta ao desbalanceamento de rotores flexíveis apoiados em mancais de deslizamento. No cálculo são consideradas as características dinâmicas dos mancais, e os efeitos do momento giroscópico e a força coriânica. Além desse procedimento, são descritos e analisados diversos aspectos a ele relacionados, como cálculo das velocidades críticas e dos modos de vibrar, que são indispensáveis para uma análise completa da resposta ao desbalanceamento. Para comprovação dos resultados dos programas desenvolvidos, são feitas comparações com resultados publicados, e com as determinações experimentais da resposta ao desbalanceamento durante a subida de rotação de uma turbina a vapor. A partir dos resultados, conceitos e métodos de análise descritos neste trabalho é possível estudar outros problemas de dinâmica de rotores, tais como: estabilidade de rotores e mancais, influência da flexibilidade da fundação, efeito de empenamento de rotores, utilização de mancais de sapatas, etc.

RESUMO

This work presents a numerical procedure for the calculation of the unbalance response of a flexible rotor supported by journal bearings. This procedure takes into account the dynamics characteristics of the bearings and the gyroscopic moments and shear forces effects. Several aspects related to this calculation which are necessary for a complete unbalance response analysis are described and analysed, like the critical speed and mode shape. To evaluate the results obtained by the developed programs they were compared with published results and with experimental measurements of the unbalance response of a steam turbine, during its startup. The results, concepts and analysis methods here described may be used in the study of other rotor dynamic problems such as: rotor-bearing stability, influence of foundation flexibility and effect of bow on rotor behaviour, determination of tilting-pad bearing coefficients, etc.

**ABSTRACT**

Notação e Nomenclatura

Definição

Notação

A	- fator de amplificação,
A	área da seção do segmento [ mm <sup>2</sup> ] (capítulo 4 e 5)
A	- fator de amplificação para amortecimento ótimo
c, c	- folga radial do mancal [ $\mu$ m ]
C	- amortecimento crítico do rotor
cr	
c	- amortecimento uniforme do mancal
r	
Cxx, Cyy, CxyCyx	- coeficientes de amortecimento [ N.s/m ]
D	- diâmetro do mancal [ mm ]
e	- excentricidade do mancal [ $\mu$ m ]
E	- módulo de elasticidade [ N/mm <sup>2</sup> ]
f	- relação de frequência
Fx, Fy	- forças do filme de fluido nas direções (X,Y) [ N ]
h	- espessura do filme de fluido [ $\mu$ m ]
l	- $\frac{f-1}{f}$
I	- inércia polar [ kg.mm <sup>2</sup> ]
I	- inércia transversal [ kg.mm <sup>2</sup> ]
J	- momento de inércia da seção do segmento [ mm <sup>4</sup> ]
K	- rigidez à flexão do rotor de Jeticott.
K	- rigidez do mancal (capítulo 4)
K	- relação de rigidez
K	- rigidez uniforme do mancal
J	
Kxx, Kyy, Kxy, Kyx	- coeficientes de rigidez [ N/m ]

L	- largura do mancal [ mm ]
l	- comprimento do trecho do rotor [ mm ]
M, m	- massa [ kg ]
m e <sup>n</sup>	- deslocamento do rotor
Mx	- momento fletor no plano (X,Z) [ N.m ]
My	- momento fletor no plano (Y,Z) [ N.m ]
N	- velocidade de rotação [ rpm ]
p	- pressão do filme de fluido [ N.s/m <sup>2</sup> ]
r, r'	- coordenadas polares do rotor de Jeffcott
R	- raio do mancal D/2 [ mm ]
s	- velocidade crítica amortecida
S	- número de Sommerfeld
t	- tempo
u	- distância do centro de massa ao centro geométrico do rotor de Jeffcott
Vx	- força cortante na direção (X) [ N ]
Vy	- força cortante na direção (Y) [ N ]
(X, Y, Z)	- coordenadas cartesianas
P, W	- ângulo de fase
A	- diferença
e	- fator de amortecimento do rotor, relação de excentricidade e/c (capítulo 3)
f	- fator de amortecimento total do mancal
φ	- rotação no plano (Y,Z) [ rad ], ângulo de altitude (capítulo 3)
γ	- coeficiente de amortecimento
μ	- viscosidade do lubrificante [ N.s/m <sup>2</sup> ]
θ	- rotação no plano (X,Z) [ rad ]



- 2 - velocidade de rotação [ rad/s ]
- 3 - precessão [ rad/s ]

Figura	Descrição	Página
1.1	Rotor de Jeticoll.....	4
1.2	Coordenadas do Rotor de Jeticoll.....	4
1.3	Resposta ao desbalançamento do rotor.....	6
1.4	Rotor de Jeticoll com mancais flexíveis e amortecedores.....	9
1.5	Relação de amplitude do disco x relação de frequência com mancais rígidos, para vários valores de amortecimento do rotor.....	15
2.1	Perfis de mancais industriais.....	21
3.1	Sistema de coordenadas do mancal.....	35
3.2	Perfil do mancal cilíndrico.....	35
3.3	Perfil do mancal elíptico.....	36
3.4	Perfil do mancal 3 lobulos.....	36
3.5	Comparação - cálculo e ref.[3] para mancal cilíndrico L/D = 0.5	37
	a - Coeficientes principais de rigidez.....	37
	b - Coeficientes cruzados de rigidez.....	37
	c - Coeficientes principais de amortecimento.....	38
	d - Coeficientes cruzados de amortecimento.....	38
3.6	Comparação - cálculo e ref.[3] para mancal cilíndrico L/D = 1	39
	a - Coeficientes principais de rigidez.....	39
	b - Coeficientes cruzados de rigidez.....	39
	c - Coeficientes principais de amortecimento.....	40
	d - Coeficientes cruzados de amortecimento.....	40
3.7	Comparação - cálculo e ref.[3] para mancal elíptico L/D = 0.5	41
	a - Coeficientes principais de rigidez.....	41
	b - Coeficientes cruzados de rigidez.....	41
	c - Coeficientes principais de amortecimento.....	42
	d - Coeficientes cruzados de amortecimento.....	42
3.8	Comparação - cálculo e ref.[3] para mancal elíptico L/D = 1	43
	a - Coeficientes principais de rigidez.....	43
	b - Coeficientes cruzados de rigidez.....	43
	c - Coeficientes principais de amortecimento.....	44
	d - Coeficientes cruzados de amortecimento.....	44

Lista de Figuras

3.9 - Comparação - cálculo e ref. [3] para mancal 3 lobulos L/D = 0,5  
 a - Coeficientes principais de rigidez..... 45  
 b - Coeficientes cruzados de rigidez..... 45  
 c - Coeficientes principais de amortecimento..... 46  
 d - Coeficientes cruzados de amortecimento..... 46

3.10- Comparação - cálculo e ref. [3] para mancal 3 lobulos L/D = 1  
 a - Coeficientes principais de rigidez..... 47  
 b - Coeficientes cruzados de rigidez..... 47  
 c - Coeficientes principais de amortecimento..... 48  
 d - Coeficientes cruzados de amortecimento..... 48

4.1 - Modelo do rotor discretizado..... 51  
 4.1a- Disco com rotação e precessão síncrona..... 53  
 4.2 - Rotor de teste da referência [2]..... 59  
 4.3a - Mapa das críticas do rotor com 1 disco..... 63  
 4.4a - Mapa das críticas do rotor com 2 discos..... 64  
 4.5a - Mapa das críticas do rotor com 3 discos..... 65  
 5.1 - Rato máximo da órbita do rotor com 1 disco..... 80  
 5.2 - Rato máximo da órbita no lado sem disco do rotor com 2 discos..... 80  
 5.3 - Rato máximo da órbita no lado com disco do rotor com 2 discos..... 81  
 5.4 - Rato máximo da órbita do rotor com 3 discos..... 81  
 6.1a - Amplitude da componente IN mancal LA direção horizontal..... 85  
 6.1b - Fase da componente IN do mancal LA direção horizontal..... 85  
 6.2a - Amplitude da componente IN mancal LA direção vertical..... 86  
 6.2b - Fase da componente IN do mancal LA direção vertical..... 86

Figura	Descrição	Página
6.3	- Rotor da turbina ensaiada.....	87
6.4a	- Mapa das criticas da turbina.....	88
6.4b	- Modos de vibrar da turbina.....	88
6.5a	- Resposta ao deslocamento da turbina.....	89
6.5b	- Fase da amplitude de orbitação na direção horizontal.....	89



Lista de Tabelas

Tabela	Descrição	Página
2.1	- Vantagens, desvantagens e comentários para os principais tipos de mancais industriais.....	22
3.1	- Dados de entrada do programa.....	36
4.1	- Discretização do rotor com 1 disco central.....	60
4.2	- Discretização do rotor com 1 disco central e outro na extremidade.....	60
4.3	- Discretização do rotor com 1 disco central e 2 nas extremidades.....	61
4.4	- Coeficientes de rigidez e amortecimento dos mancais em função da rotação.....	61
4.5	- Comparação das velocidades críticas calculadas e referência [2].....	62
5.1	- Rigidez e amortecimento dos mancais em função da rotação para rotor com 1 disco.....	77
5.2	- Rigidez e amortecimento dos mancais em função da rotação para rotor com 2 discos.....	78
5.3	- Rigidez e amortecimento dos mancais em função da rotação para rotor com 3 discos.....	79
6.1	- Discretização do rotor da turbina de ensaio.....	83
6.2	- Coeficientes de rigidez e amortecimento dos mancais da turbina ensaiada.....	84

## 1 - Introdução

Modernas máquinas rotativas para indústrias de processos, produzem ou absorvem grandes quantidades de potência em um espaço relativamente pequeno, visando melhoria da eficiência e a redução dos custos de fabricação.

Durante o projeto dessas máquinas, considerações de rendimento e de dinâmica de rotores estão frequentemente em conflito. A melhoria do rendimento tende a maximizar a vazão e a pressão, e minimizar a perda de energia do fluido através da limitação do tamanho e peso da máquina. Isto geralmente sugere altas velocidades de rotação, múltiplos estágios, altas cargas nos componentes rotativos e grande espaçamento entre estágios. Todos estes itens tendem a criar problemas de dinâmica de rotores.

O sucesso e a confiabilidade do projeto de máquinas rotativas, principalmente turbomáquinas, requer cooperação e compromissos entre as duas áreas, rendimento e dinâmica de rotores.

Do ponto de vista da dinâmica de rotores os seguintes itens devem ser verificados durante o projeto ou estudo de modificações de máquinas rotativas:

- Evitar as velocidades críticas na faixa de operação;
- Minimizar a resposta dinâmica na passagem por alguma velocidade crítica;
- Minimizar as vibrações e as cargas transmitidas para a estrutura da máquina;
- Evitar instabilidade do sistema;
- Evitar ressonâncias torcionais e instabilidade torcional do trem de máquinas.

Essas máquinas com alta densidade de energia e vazão tem rotores leves e eixos fixíveis apoiados em mancais de deslizamento, suportando grandes cargas a alta rotação (operação acima da frequência natural de processo do sistema rotativo).

Nessas velocidades de rotação (4.000 a 30.000 rpm) grande parte dos problemas de operação de máquinas rotativas são causados por vibrações, principalmente relacionadas com a força síncrona de deslocamento.

Do ponto de vista de aplicação prática, a coincidência da velocidade de rotação do rotor com uma das frequências naturais de processo positiva do sistema rotativo, ocasiona uma ressonância excitada principalmente pela força síncrona de deslocamento, que é chamada velocidade crítica à flexão.

Neste caso, o rotor, deformado de acordo com o modo de vibrar na frequência natural de processo do sistema rotativo, orbita ao redor da linha elástica do rotor estático posicionada



conforme o centro de equilíbrio dos mancais. Para um observador externo, o rotor parece vibrar, porém essa vibração nada mais é que a projeção da órbita em uma direção.

Durante a subida ou descida de rotação de modernas máquinas rotativas, em geral supercríticas (velocidade de operação acima da primeira velocidade crítica), é necessário a passagem por alguma velocidade crítica. A resposta ao desbalanceamento determina não só a posição da velocidade crítica amortecida, mas também a amplitude de órbita do rotor, principalmente junto aos mancais, e o grau de amortecimento do sistema rotativo.

A operação de máquinas em alta rotação pode também ocasionar a instabilidade hidrodinâmica do sistema rotor-mancais, sendo esta caracterizada pela presença do sistema rotor-mancais em uma frequência diferente da velocidade de rotação. A causa da instabilidade em geral está associada a variação da pressão dinâmica do fluido ao redor do rotor.

O estudo de dinâmica de rotores através de modelos matemáticos para o cálculo das velocidades críticas a flexão, da resposta ao desbalanceamento, de frequências naturais torcionais e do limite de estabilidade hidrodinâmica durante seu projeto ou estudo de modificações, evita problemas de funcionamento e prolonga a vida útil dos equipamentos.

O objetivo deste trabalho é desenvolver um método de cálculo da resposta ao desbalanceamento de rotores apoiados em mancais de deslizamento, determinando as velocidades críticas amortecidas, amplitude máxima de órbita do rotor, seu fator de amplificação e o grau de amortecimento do sistema rotor-mancais.

Para comprovação dos resultados calculados, é feita uma análise das medições realizadas durante a subida de rotação de uma turbina a vapor. Também são comparados resultados publicados da resposta ao desbalanceamento de um modelo reduzido de rotor e dos coeficientes dinâmicos de mancais industriais típicos com os resultados calculados neste trabalho.

O desenvolvimento de uma metodologia de cálculo das frequências naturais torcionais e do limite de estabilidade hidrodinâmica tem grande importância para a consolidação do estudo e de projetos dinâmicos de rotores e mancais; porém estes assuntos não são tratados neste trabalho por fugirem ao seu escopo.

Para o cálculo das velocidades críticas e da resposta ao desbalanceamento é utilizado neste trabalho o método de matrizes de transferência. Este método tem dado bons resultados para o cálculo das velocidades críticas de ordens mais baixas (1<sup>a</sup>, 2<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup>), conforme Vancel[3].

O cálculo das características dinâmicas dos mancais (rigidez e amortecimento) é feito através da solução da equação de Reynolds pelo método das diferenças finitas.

Para facilitar o entendimento da resposta ao desbalanceamento de um rotor, é apresentado neste capítulo, o equacionamento e análise de um rotor simples composto de um eixo flexível com uma massa central, apoiado em mancais rígidos, chamado rotor de Jeffcott. Também é feito o equacionamento do mesmo rotor apoiado em mancais flexíveis, para determinação do amortecimento ótimo desses mancais.

A seguir, no capítulo 2, é apresentada uma revisão bibliográfica comentando os principais artigos utilizados como referência, descrevendo seus métodos de cálculos e os principais aspectos introduzidos em cada artigo.

No capítulo 3 são apresentados os principais conceitos e a descrição do método e do programa utilizado para o cálculo das características dinâmicas de mancais de deslizamento de lobulos fixos, indispensáveis para atingir os objetivos deste trabalho. Além disso, são comparados resultados publicados e calculados para verificação da precisão de cálculo.

No capítulo 4 são mostrados os principais conceitos e a metodologia envolvida no cálculo e análise das velocidades críticas não amortecidas à flexão, para comparação deste método com os resultados de análise que é largamente utilizado por projetistas, com os resultados da resposta ao desbalanceamento. Também é feita uma descrição do programa utilizado para esse cálculo e comparação com resultados publicados.

No capítulo 5 é apresentado o procedimento, equacionamento e descrição do programa desenvolvido para o cálculo numérico da resposta ao desbalanceamento de um rotor genérico, as principais vantagens desse cálculo durante o projeto ou modificações de máquinas rotativas e a comparação de resultados calculados e publicados.

No capítulo 6 é feita uma descrição de ensaios realizados em uma turbina a vapor durante a subida de rotação, e a comparação dos resultados registrados com os calculados através do método descrito neste trabalho.

No capítulo 7 são apresentadas as principais conclusões do trabalho e são sugeridos tópicos para estudos futuros e possíveis melhorias nas sistemáticas de cálculo.

No anexo A é feita a demonstração das equações resultantes da equação de Reynolds para os coeficientes dinâmicos, e essas equações na forma de diferenças finitas.

No anexo B é apresentado o equacionamento de trecho do rotor, utilizado para o cálculo das velocidades críticas e da resposta ao desbalanceamento. No anexo C estão as matrizes de transferência para esses cálculos.



### 1.1 - Rotor de Jeffcott

A análise do modelo chamado rotor de Jeffcott figura 1.1, utilizado pela primeira vez em 1919 [17], facilita o entendimento da resposta ao desbalanceamento do rotor em máquinas de alta rotação.

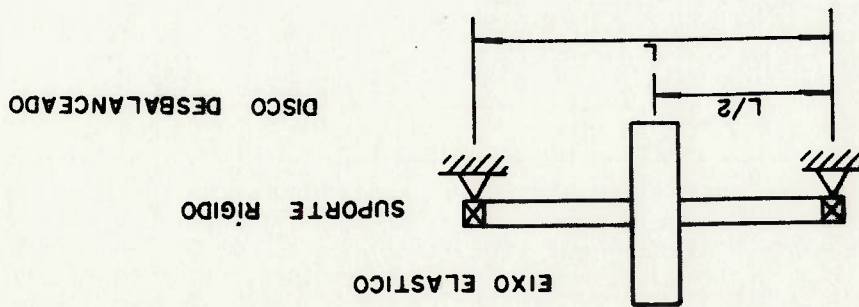


Figura 1.1 - Rotor de Jeffcott

Este modelo massa-mola com 2 graus de liberdade executa um movimento de órbitação ao redor da linha de centro. O modelo do rotor consiste em um disco montado centralmente em um eixo com massa desprezível suportado por mancais. O disco tem uma massa de desbalanceamento, isto é, o centro de massa é diferente do centro geométrico e os mancais são rígidos e o amortecimento viscoso atua no movimento absoluto do disco.

### 1.1.1 - Análise do Rotor de Jeffcott

Na figura 1.2 é apresentado o perfil do rotor de Jeffcott orbitando e as coordenadas que descrevem o movimento.

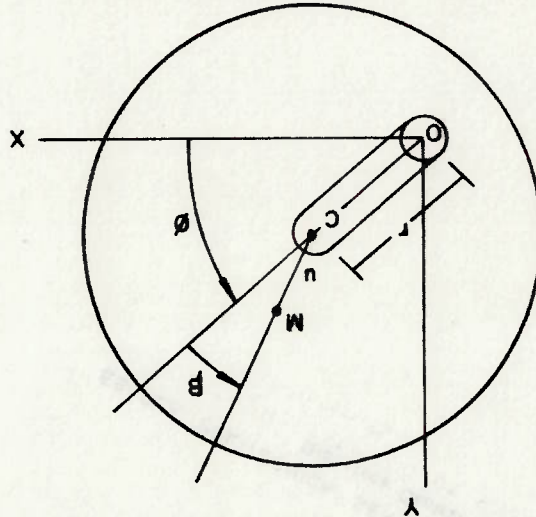


Figura 1.2 - Coordenadas do Rotor de Jeffcott

O centro de massa do disco desbalanceado é M. O ponto C localiza o centro geométrico do disco. O deslocamento estático é denominado u = CH e a deflexão do eixo devido as forças dinâmicas é OC. A força peso é desprezada nesta análise por ser insignificante em relação as forças dinâmicas em turbinas.

O eixo tem rigidez à flexão K, o disco tem uma massa m, e a orbitação do disco e do eixo no ar dissipa energia aproximadamente com um amortecimento viscoso C. Admitindo-se a velocidade de rotação constante ω, o sistema tem 2 graus de liberdade.

$$\dot{\omega} = \dot{\theta} + \dot{\phi} = \text{constante ou } \dot{\phi} = \omega - \dot{\theta}$$

As coordenadas polares r e θ tem a vantagem de fornecer a solução de processo síncrona em termos de constantes facilmente interpretadas, mas as equações de movimento são não lineares dificultando a análise de estabilidade do sistema rotor-mancais.

As coordenadas cartesianas x e y (no centro do eixo) produzem equações lineares. A solução em termos de x e y em função do tempo tem sido útil por estarem essas grandezas diretamente relacionadas com as medidas de vibração em turbinas através de sensores de proximidade instalados principalmente junto aos mancais.

As equações diferenciais e suas soluções em ambas as coordenadas são apresentadas para o caso de eixo com rotação constante.

### -Coordenadas polares

As equações diferenciais de movimento deduzidas pelas equações de Lagrange e apresentadas por Gunter [24] são:

$$(1.1) \quad \ddot{r} + \frac{m}{C} \dot{r} + \left[ \frac{K}{2} - \dot{\theta}^2 \right] r = \omega^2 u \cos(\omega t - \dot{\theta})$$

$$(1.2) \quad r \ddot{\theta} + \left[ 2\dot{r} + \frac{m}{C} \dot{r} \right] \dot{\theta} = \omega^2 u \sin(\omega t - \dot{\theta})$$

A solução para processo síncrona (θ̇ = ω):

$$(1.3) \quad r = \frac{\omega^2 u \sqrt{\frac{K}{m} - \omega^2 + (C\omega/m)^2}}{2}$$

Na figura 1.3 são apresentados os gráficos r e  $\beta$  em função de  $\omega$ , mostrando a solução para qualquer rotação constante  $\omega$  do eixo.

$$\omega t - \alpha_s = \beta_s = \arctg \left[ \frac{c \omega}{\sqrt{2} \sqrt{m(k/m - \omega^2)}} \right] \quad (1.4)$$

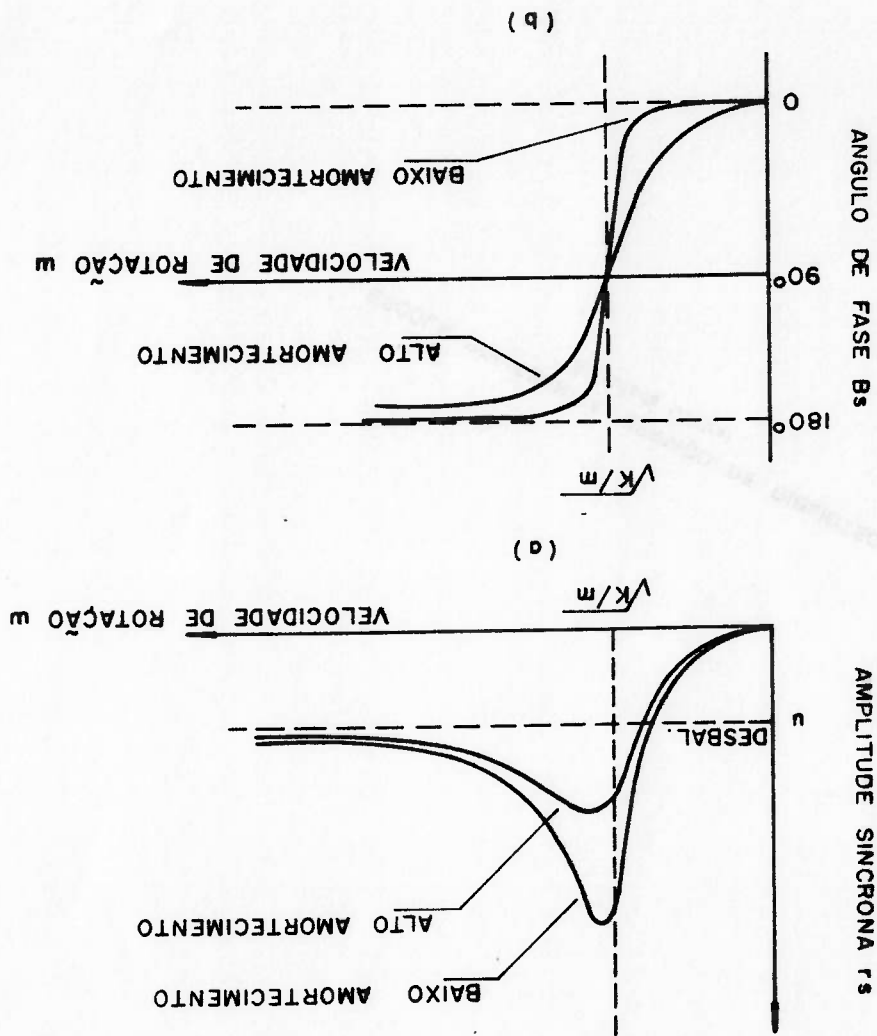


Figura 1.3 - Resposta ao deslocamento do rotor



As equações diferenciais de movimento deduzidas pela 2ª lei de Newton e apresentadas por Melrovitch [27] e Thomson [10] são:

$$(1.5) \quad m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = m \omega^2 u \cos \omega t$$

$$(1.6) \quad m \ddot{y} + c \dot{y} + ky = m \omega^2 u \sin \omega t$$

A solução para processo síncrono é:

$$(1.7) \quad x = \frac{\omega^2 u}{z} \cos(\omega t - \beta)$$

$$(1.8) \quad y = \frac{\omega^2 u}{z} \sin(\omega t - \beta)$$

$$(1.9) \quad \beta = \arctg \left[ \frac{m(K/m - \omega^2)}{c \omega} \right]$$

$$(1.10) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

A figura 1.3a mostra como a amplitude da orbitação síncrona aumenta com a aproximação da velocidade crítica e decresce aproximando do valor do desbalanceamento estático em rotações supercríticas. Além disso, mostra a definição mais utilizada para velocidades críticas amortecidas, sendo a rotaçao correspondente a máxima amplitude de resposta ao desbalanceamento do rotor com processo síncrono positiva.

A figura 1.3b mostra a variação do ângulo de fase  $\beta$  com a rotaçao. Antes da passagem pela velocidade crítica o centro de massa está na parte externa do disco, isto é,  $\beta > 90$  graus, na velocidade crítica passa por 90 graus de defasagem e em velocidades supercríticas tende para 180 graus posicionando o centro de massa na parte interna do disco. Este fenômeno é chamado inversão da velocidade crítica. A amplitude de orbitação  $r$  tende para o valor  $u$  em velocidades supercríticas.

Próximo a velocidade crítica o parâmetro mais importante para redução da amplitude de orbitação é o amortecimento. Na figura 1.3a pode-se observar que o aumento do amortecimento aumenta a velocidade crítica.



A análise do rotor de Jeffcott indica 3 soluções para minimizar as amplitudes de vibração:

- Balanceamento do rotor
- Mudança de velocidade de operação
- Aumento do amortecimento no sistema

Apesar do modelo simples essas soluções podem ser aplicadas para máquinas reais mais complexas.

### 1.1.2 - Amortecimento do rotor

Em função da dificuldade de medição direta do amortecimento em sistemas rotor-mancas e havendo diferentes fontes de amortecimento, é utilizado na prática um amortecimento total em termos percentuais do amortecimento crítico. O coeficiente de amortecimento crítico  $C_{cr}$  que corresponde ao valor mínimo necessário para atenuar uma vibração livre do sistema sem ocorrência de oscilação.

O fator de amortecimento é  $C/C_{cr}$ . Para o rotor de Jeffcott o coeficiente de amortecimento crítico é  $2\sqrt{km}$ .

A equação 1.3 pode ser escrita de forma adimensional usando o fator de amortecimento  $\zeta$  e a frequência natural  $\omega_n = \sqrt{k/m}$

resultando:

$$\frac{r}{s} = \frac{\sqrt{(1 - \zeta^2)^2 + (2\zeta\omega/\omega_n)^2}}{2(\omega/\omega_n)^2}$$

(1.11)

## 1.2 - Rotor de Jeffcott com mancais flexíveis e amortecidos

Como foi visto na análise do rotor de Jeffcott, o amortecimento é um dos principais fatores de controle da amplitude de orbitação na passagem por uma velocidade crítica. Em rotores apoiados em mancais de deslizamento, a principal fonte de amortecimento é o movimento de translação do eixo no mancal, dissipando energia através do filme de fluido. Para que este mecanismo de amortecimento atue efetivamente, faz-se necessário o posicionamento dos mancais o mais longe possível dos nós de vibração do rotor.

O equacionamento do rotor de Jeffcott apoiado em mancais flexíveis com amortecimento, figura 1.4, objetiva a determinação da resposta ao deslocamento e a análise do amortecimento ótimo. Este tratamento permite o estabelecimento de critérios de avaliação do grau de amortecimento de sistemas rotor-mancais mais complexos. O equacionamento descrito foi aproveitado da publicação de Gunter [6] que destaca principalmente o estudo da estabilidade de rotores.

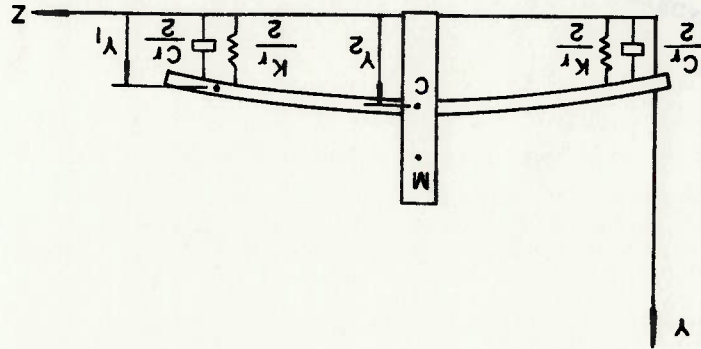


Figura 1.4 - Rotor de Jeffcott com mancais flexíveis e amortecidos

As equações diferenciais de movimento deduzidas pela 2ª Lei de Newton e apresentadas por Gunter [6] são:

$$\begin{aligned}
 (1.12) \quad m \ddot{x}_2 + k_s (x_2 - x_1) &= m e^u \omega \cos \omega t \\
 (1.13) \quad m \ddot{y}_2 + k_s (y_2 - y_1) &= m e^u \omega \sin \omega t \\
 (1.14) \quad c \dot{x}_1 + k_r x_1 + k_s (x_1 - x_2) &= 0 \\
 (1.15) \quad c \dot{y}_1 + k_r y_1 + k_s (y_1 - y_2) &= 0
 \end{aligned}$$

O ângulo de fase  $\beta$  do desbalanceamento em relação a uma marca no disco é assumido zero sem perder a generalidade. Para facilitar o equacionamento utiliza-se equações na forma adimensional e defini-se as seguintes variáveis complexas:

- $k$  - rigidez uniforme dos mancais
- $c$  - amortecimento uniforme dos mancais
- $k_s$  - rigidez à flexão do eixo do rotor
- $e$  - distância do centro geométrico ao centro de massa do disco
- $u$

$$z = x + iy$$

$$\dot{z} = \dot{x} + i\dot{y}$$

e os parâmetros:

$$\frac{\omega_{cr}}{2} = k / m \quad - \text{velocidade crítica para mancais rígidos}$$

$$k = 2k_s / k \quad - \text{relação de rigidez}$$

$$c = c / m\omega_{cr} \quad - \text{fator de amortecimento total do mancal}$$

$$f = \omega / \omega_{cr} \quad - \text{relação de frequência}$$

A equação de movimento fica:

$$\ddot{z} + \omega_{cr}^2 (z - z_1) = e \omega_{cr}^2 e^{i\omega t} \quad (1.16)$$

$$2\omega_{cr}^2 \dot{z} + \omega_{cr}^2 z + \omega_{cr}^2 (1+k) z_1 - \omega_{cr}^2 z_2 = 0 \quad (1.17)$$

Considerando a solução harmônica vem:

$$z^1 = A e^{i\omega t}$$

$$z^2 = B e^{i\omega t}$$

com esta solução a equação (1.17) pode ser resolvida para  $z^1$  em

termos de  $z^2$ .

(1.18)

$$z^1 = \frac{(1+k) + 2i\epsilon}{z^2}$$

Substituindo na equação (1.16) obtem uma equação simples de movimento do rotor:

$$z^2 + \omega^2 z^2 \left[ \frac{k(1+k) + 2i\epsilon}{z^2} + 2i\epsilon \right] = e^{i\omega t} \quad (1.19)$$

Separando os termos de amortecimento e rigidez:

$$z^2 + \omega^2 z^2 \left[ \frac{(1+k) + 2i\epsilon}{z^2} + 2i\epsilon \right] = e^{i\omega t} + \omega^2 z^2 \left[ \frac{k(1+k) + 2i\epsilon}{z^2} + 2i\epsilon \right]$$

(1.20)

$$= e^{i\omega t}$$

ou

$$z^2 + 2\omega^2 z^2 + \omega^2 z^2 = e^{i\omega t}$$



Como foi visto no item 1.1, o amortecimento é o principal mecanismo de controle das amplitudes de orbitação de rotores na passagem por uma velocidade crítica. Em vista disso, neste item é apresentado o equacionamento para determinação do amortecimento ótimo do rotor de jetcott apoiado em mancais fixíveis e amortecidos, fornecendo parâmetros de referência para avaliação do grau de amortecimento de rotores genéricos.

Considerando a equação de movimento (1.20), determina-se que o amortecimento efetivo no centro do rotor é:

$$\epsilon_e = \frac{\epsilon_r (1 + K) + (2\epsilon_e)^L}{2} \quad (1.23)$$

1.2.1 - Amortecimento ótimo do rotor

$$\beta = \arctg \left[ \frac{2\omega_{cr} \epsilon_e}{\omega^2 - \omega_e^2} \right] \quad (1.22)$$

$$z = \frac{\left[ \frac{\omega^2 - \omega_e^2}{2} + \left[ \frac{\omega^2 - \omega_e^2}{2} \right]^2 + \left[ \frac{2\omega_{cr} \epsilon_e}{\omega} \right]^2 \right]^{1/2}}{\omega_e} \quad (1.21)$$

A solução de amplitude e fase para processo síncrona fica:

$$\omega_e = \omega_{cr} \left[ \frac{K(1 + K) + (2\epsilon_e)^L}{2} \right]$$

$$\epsilon_e = \frac{\epsilon_r (1 + K) + (2\epsilon_e)^L}{2}$$

onde

Para um valor determinado de  $k$ , o amortecimento efetivo é zero se  $\epsilon = 0$  ou se  $\epsilon$  for muito grande. O máximo valor de  $\epsilon$  fornece o valor de amortecimento ótimo para resposta do rotor ao desbalanceamento. Este valor ótimo de  $\epsilon$  é dado pela solução de:

$$\frac{ae}{e} = 0$$

(1.24)

que fornece:

$$\epsilon = \frac{r_0}{1+k}$$

(1.25)

Substituindo na equação (1.23) o amortecimento efetivo máximo do rotor:

$$\epsilon = \frac{1}{4f(1+k)}$$

(1.26)

Para obter o valor numérico do amortecimento ótimo do rotor é necessário selecionar a relação de frequência  $f$ , e portanto a frequência onde ocorre o pico de resposta ao desbalanceamento. Isto pode ser determinado através da solução da amplitude do centro do rotor  $|B|$ , determinando-se o valor de  $f$  que a maximiza.

Uma boa aproximação pode ser feita observando-se que  $\epsilon$  em e sempre pequeno e torna-se menor com o crescimento de  $k$ .

Assim, a frequência do pico da resposta ao desbalanceamento é muito próxima a  $\omega$ , e portanto:

$$f = \frac{\omega}{e}$$

(1.27)

sendo  $\omega$  extraído da equação (1.20). Substituindo o amortecimento ótimo (1.25), vem:

$$f = \sqrt{\frac{2(1+k)}{1+2k}}$$

(1.28)

As expressões para o amortecimento do mancal e para o amortecimento efetivo máximo ficam:

$$\epsilon_{ro} = \frac{2}{(1+K) \sqrt{2(1+K) + 2K}} \quad (1.29)$$

$$\epsilon_{em} = \frac{2 \sqrt{2(1+K) + 2K}}{1} \quad (1.30)$$

O coeficiente de amortecimento ótimo do mancal  $\epsilon$ :

$$c_{ro} = m \omega \epsilon \quad (1.31)$$

$$c_{ro} = m \omega (1+K) \sqrt{\frac{1+2K}{2(1+K)}} \quad (1.32)$$

O fator de amortecimento ótimo e aproximadamente:

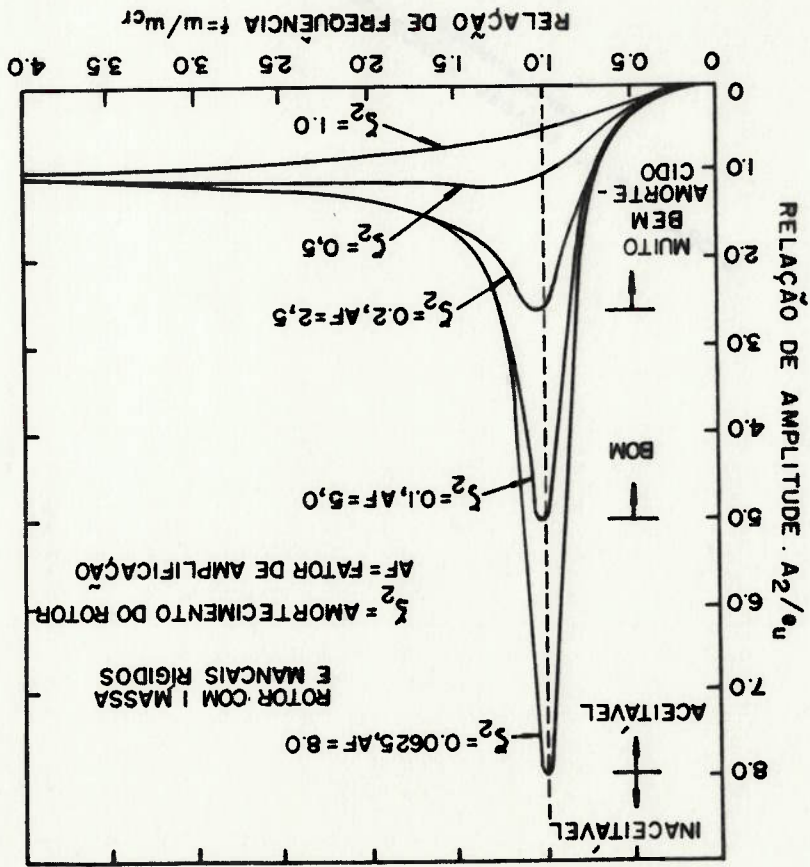
$$A = \frac{1}{\epsilon} \quad (1.33)$$

$$\text{onde } A = \frac{1}{|B|}, \text{ com } \omega = \omega_n$$

Essa análise permite calcular o fator de amortecimento considerando somente o amortecimento dos mancais. Os valores de amortecimento adequados para uma boa operação são avaliados pelo fator de amortecimento.

Conforme Malanoski, 1975, para um fator de amortecimento  $A > 10$  o amortecimento é considerado baixo. A figura 1.5 retirada de Allaire [28] fornece critérios de aceitação para rotores com mancais rígidos.

Figura 1.5 - Relação de amplitude do disco X relação de frequência com mancais rígidos, para vários valores de amortecimento do rotor





Neste capítulo são descritos e discutidos os artigos considerados mais importantes e destacadamente relacionados ao escopo deste trabalho, qual seja o de desenvolver um método de cálculo da resposta ao desbalanceamento de rotores apoiados em mancais de deslizamento. Para uma revisão bibliográfica mais geral sobre velocidades críticas de rotores, sugere-se a dissertação de Silva [38], onde é feito um levantamento mais completo dos artigos existentes, com comparações dos métodos de cálculo de vários autores.

Os principais conceitos de dinâmica de rotores contidos neste trabalho foram baseados principalmente nos livros de Hartog [9], Thomson [10], Timoshenko [23], Meirovitch [27], Harris [30], Rao [31] e Vance [33] e nos artigos de Prohl [1], Lund [2], [5], [25] e [32], Green [6], Rankine [16], Myklestad [18], Vance [29] e Barrett, Gunter e Allaire [34].

A teoria de mancais de deslizamento foi baseada nos livros tradicionais de Pinkus e Sternlicht [12], Wilcock [13], Cameron [35] e Constantinescu [40] e a análise e encaminhamento da solução numérica foram baseados nos artigos de Lund e Thomsen [3], Lund [4] e [26], Allaire e Flack [7] e Haeg [19] e [21].

## 2.1 - Descrição dos artigos

O artigo apresentado por Prohl [1] descreve um método numérico que permite calcular as principais velocidades críticas de um rotor genérico apoiado em mancais elásticos.

No modelo adotado a elasticidade dos mancais é considerada constante e simétrica, o rotor pode ter eixo escalonado e vários discos com inércia. Além disso, o chamado "efeito giroscópico" associado ao momento de inércia dos discos do rotor também pode ser considerado no cálculo.

Os métodos computacionais simples existentes na época, como o de Rayleigh e Stodola [15], determinavam somente a velocidade crítica fundamental. Para o cálculo de velocidades críticas de maior ordem, os métodos eram sujeitos a limitações e computacionalmente complicados sendo impraticáveis mesmo para rotores simples.

No método de Prohl os resultados tem sido satisfatórios nas velocidades críticas de ordem mais baixas (1ª, 2ª e 3ª).

Nesse método, o rotor é discretizado em trechos e modelado por discos conectados por barras. Os discos tem a massa e o momento de inércia equivalentes aos trechos do rotor, e as barras a rigidez e flexão equivalente aos trechos do rotor. Os mancais são representados por molas com rigidez equivalente a do filme de fluido dos mancais.

Em cada trecho do modelo, são determinados os esforços (momento fletor e força cortante), e os deslocamentos (deflexão e inclinação) de sua extremidade direita em função da esquerda. Computabilizando os esforços e deslocamentos entre os trechos, o cálculo se processa de uma extremidade a outra do rotor, montando-se uma tabela contendo as frequências tentativas e os coeficientes de influência dos esforços e deslocamentos da extremidade direita do último trecho em função da esquerda do primeiro. As frequências das velocidades críticas são determinadas quando atinge a condição de esforços zero na extremidade livre do rotor. Para isso, o determinante da matriz dos coeficientes de influência de esforços em função dos deslocamentos deve ser igual a zero.

No artigo [2] de Lund são apresentados os resultados comparativos entre estudo analítico e ensaios de um rotor com desbalanceamento.

A análise pode ser aplicada para qualquer sistema rotor-mancais sendo o rotor representado através de massas e momentos de inércia concentrados unidos por barras flexíveis. No modelo também é considerado o efeito do momento giroscópico. Cada mancal é representado por 4 coeficientes de rigidez e 4 coeficientes de amortecimento.

O movimento descrito pelo rotor é uma órbita elíptica ao redor da linha elástica do rotor posicionada em relação a posição de equilíbrio dos mancais. O cálculo da amplitude, fase e frequência de vibração em duas direções ortogonais, determinam o movimento de órbita do rotor, principalmente junto aos mancais.

O rotor testado é formado por 1 eixo cilíndrico e uniforme com discos montados nas extremidades e 1 no centro do eixo, sendo apoiado em mancais de deslizamento tipo sapatas, "tilling-pad". As amplitudes de vibração do rotor, causadas pelo desbalanceamento induzido, são medidas através de 2 sensores de proximidade instalados junto aos mancais, no centro e nas extremidades do rotor.

Os 2 sensores posicionados em direções ortogonais captam a variação da superfície girante do eixo, formando uma órbita. A medição foi registrada na faixa de 3000 a 24000 rpm para 3 diferentes configurações de montagem dos discos, obtidas através da leitura de uma ou duas massas das extremidades do eixo atingindo até a 3ª velocidade crítica.

Os resultados de comparação dos dados experimentais com os calculados teoricamente foram considerados em geral bons.

No artigo [3] de Lund e Thomsen é apresentado um método para o cálculo dos coeficientes de rigidez e amortecimento para mancais de deslizamento. Além disso, são calculadas a carga de sustentação produzida pela pressão hidrodinâmica; temperatura de

operação: perda de potência e vazão de fluido de mancais.

Os resultados de cálculos realizados para mancais cilíndricos com 2 entradas axiais, elípticos, 3 lobulos e cilíndrico desloçado ("off set"), são mostrados através de tabelas com valores adimensionais.

O método utilizado é através da solução da equação de Reynolds por diferenças finitas, determinando a distribuição de pressão para uma excentricidade pré-estabelecida. Com a integração dessa pressão na superfície do mancal é calculada a carga estática  $F_z$  e  $F_x$  e o ângulo de atitude  $\theta$ .

O sistema de coordenadas fixas é utilizado no modelamento, possibilitando o cálculo para mancais com geometria não cilíndrica. A fixação das coordenadas implica em um processo iterativo para determinação da posição de operação do eixo no mancal.

As principais diferenças introduzidas neste artigo em relação aos métodos tradicionais foram:

- Utilização de coordenadas fixas, permitindo o cálculo para várias geometrias de mancais, além do cilíndrico, inclusive com pré-carga.
  - A equação de Reynolds escrita de forma a incluir as perturbações, para facilitar o cálculo dos coeficientes dinâmicos.
  - Formação de 5 sistemas de equações a partir das diferenças finitas, variando somente o lado direito do sistema, exigindo apenas 1 inverso da matriz de coeficientes.
  - Variação da malha no cálculo das diferenças finitas na região de cavitação, a fim de determinar com maior precisão a posição da condição de contorno  $p = 0$  e  $ap/ae = 0$ .
- O artigo [1] de Lund apresenta um método para o cálculo dos coeficientes de rigidez e de amortecimento para mancais de sapatas ("tilling-pad").

Na grande maioria das aplicações de mancais de deslizamento são utilizados mancais fixos como cilíndricos, elípticos etc. Em máquinas com alta velocidade de operação ou baixa carga nos mancais, especialmente máquinas verticais, frequentemente ocorre a instabilidade hidrodinâmica, chamada "oil whip". Nessas condições os mancais de sapatas pivotadas tem vantagens em relação aos mancais fixos. Esse tipo de mancal é estável se o efeito de inércia das sapatas for pequeno e o atrito dos pivôs for desprezível.

A análise inclui o efeito da inércia da sapata. Os resultados são fornecidos em forma de gráficos adimensionais para mancais centralmente pivotados com 4, 5, 6 e 12 sapatas.

No cálculo real das velocidades críticas e da resposta ao



Por estas razões, o método aplicado no artigo é uma alteração do procedimento utilizado por MYKLESJED e FROHL, descrito anteriormente, que consiste na montagem de um sistema de

autoválculos. Para o cálculo das frequências naturais do sistema representado por matrizes de rigidez, amortecimento e inércia, formulando o problema de autoválculos, as dimensões das matrizes é igual a 6 vezes o número de massas ou estágios do sistema, por exemplo 240 x 240, tornando difícil o trabalho computacional. Além disso, as matrizes não são simétricas, necessitando modificações especiais para o cálculo tradicional dos autoválculos.

As velocidades críticas amortecidas e o limite de estabilidade são determinados pelo cálculo de  $s$  também chamados autoválculos do sistema amortecido com vibração livre.

Se  $\gamma$  é negativo a vibração diminui com o tempo, porém se  $\gamma$  é positivo a amplitude aumenta tornando o sistema instável.

$$s = \gamma + i\omega$$

$\gamma$  - expoente de amortecimento  
 $\omega$  - frequência natural amortecida  
 $\omega$  - fase  
 $|x|$  - amplitude

$$x = |x| e^{i(\omega t + \psi)}$$

A amplitude de vibração para sistemas amortecidos é:

Também é incluído no cálculo o efeito de histerese do eixo provocando amortecimento interno e forças aerodinâmicas desestabilizadoras.

No artigo [5] de Lund é descrito um método para o cálculo do limite de estabilidade e das velocidades críticas amortecidas para rotores fixíveis apoiados em mancais de deslizamento. Esse método é análogo ao de MYKLESJED-FROHL, utilizado para cálculo de velocidades críticas não amortecidas. O modelo do rotor pode simular qualquer geometria de eixo e configuração de suporte utilizados na prática. Os mancais são representados por propriedades dinâmicas lineares, ou seja pelos coeficientes de rigidez e amortecimento dos mancais.

É apresentada também, uma comparação entre os resultados calculados e medidos, sendo a concordância considerada boa para a faixa normal de operação de mancais.

desbalanceamento de rotores deve ser incluído o efeito da flexibilidade e amortecimento dos mancais. Para isso, as forças de froudo são expressas através de coeficientes de rigidez e de amortecimento determinados a partir da teoria de lubrificação.

equações [D] dos coeficientes de influência dos esforços da primeira. As frequências das velocidades críticas são determinadas quando atinge a condição de esforços zero nas extremidades do rotor. Para isso, o valor  $\Delta = \det [D]$  deve ser igual a zero. No caso do cálculo das velocidades críticas amortecidas, a função de determinante é um polinômio de  $s$  com coeficientes complexos. A iteração para determinação das frequências é a seguinte:

$$\Delta = \Delta + (s - s_0) (d\Delta/ds) = 0$$

Para demonstrar a aplicação do método, são apresentados resultados para um compressor industrial multietágio.

O artigo de Green [6] apresenta uma análise do efeito giroscópico em rotores, mostrando as forças e o movimento de discos rotativos, sendo estudado o caso geral e várias possibilidades críticas de rotores comuns, apresentando em forma de gráficos para todos os graus de efeito giroscópico, e relação de frequência de rotação e de precessão.

Exemplos específicos são mostrados para sistemas de viga engastada, diapolada com 1 disco, diapolada com 2 discos e com infinitos discos.

As forças e movimentos de discos rotativos são estudados para o caso geral, e várias possibilidades críticas de sistemas de rotores comuns são determinadas e apresentadas em gráficos para todos os graus de efeito giroscópico. Exemplos específicos são mostrados para sistema de viga engastada, sistema diapolado suportando um disco, um sistema com dois discos e um sistema com infinitos discos.

Os métodos de solução são indicados para esses casos.

O efeito giroscópico é mostrado para todas relações possíveis de frequência de rotação e frequência de precessão.

O artigo de Allaire [7] discute efeito da geometria dos mancais, tanto teoricamente como com resultados experimentais. Os três principais tipos de mancais discutidos no artigo são os multilobos, represa de pressão e mancais de sapatas.

Turbomáquinas frequentemente são sujeitas a vibrações devido as velocidades críticas, desbalanceamento e instabilidade. Normalmente a modificação mais barata em máquinas é o mancal.

Uma grande variedade de mancais têm sido desenvolvida para eliminar diferentes tipos de problemas de vibração.

Na figura 2.1 são apresentados os perfis dos mancais industriais mais comuns.

Na tabela 2.1 é apresentado um resumo indicando as vantagens, desvantagens e comentários para os mancais discutidos no artigo.

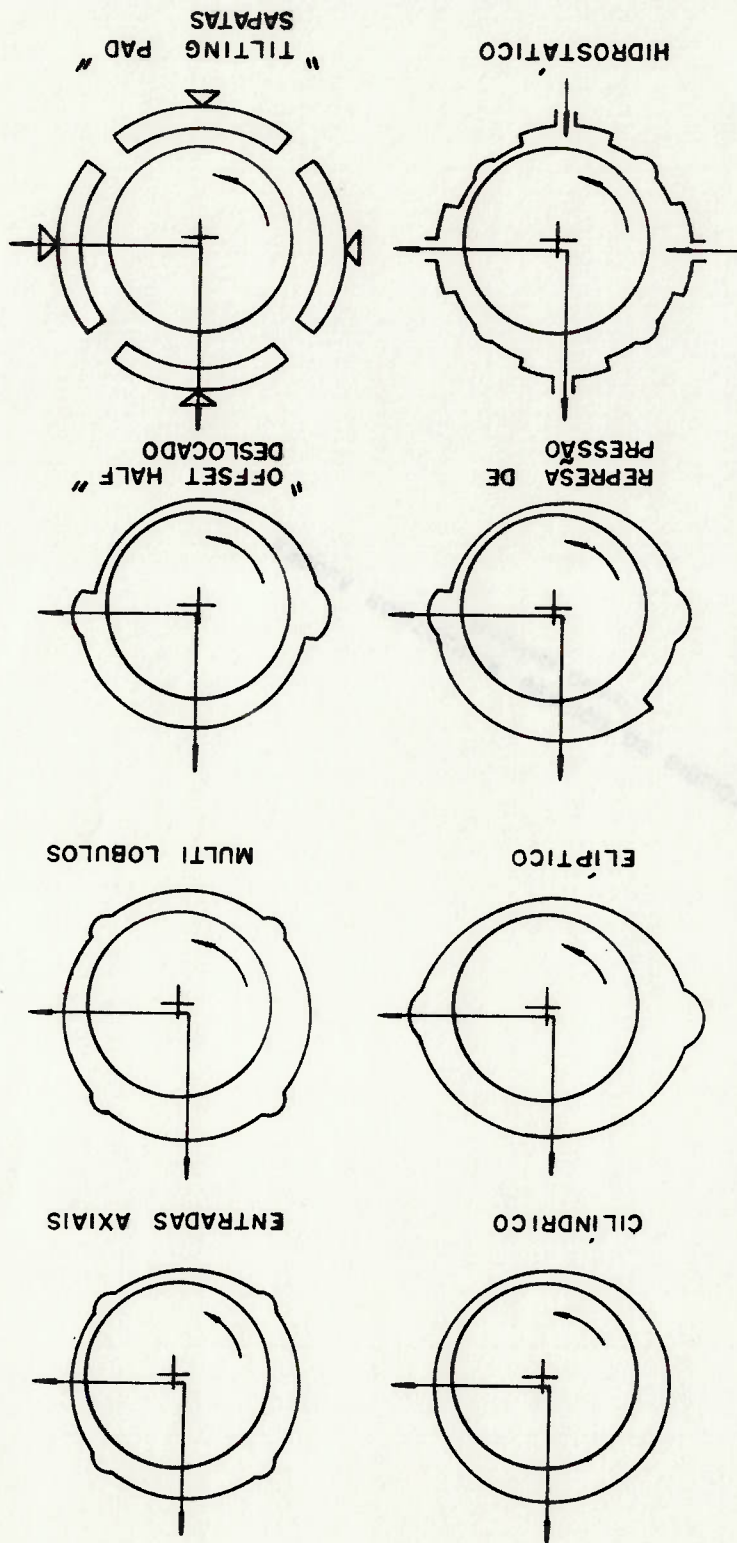


Figura 2.1 - Perfis de mancais industriais



TIPO DE MANCAL	VANTAGENS	DESVANTAGENS	COMENTARIOS
Cilindrico	1 - Fácil fabricação 2 - Baixo custo	1 - Muito sujeito a "oil whirl" 2 - Baixa resistência a vibração	Mancas circulares quase sempre são deformados para ficar em eplícticos.
Arco parcial	1 - Fácil fabricação 2 - Baixo custo 3 - Baixa perda de potência	1 - Baixa resistência a vibração 2 - Dificuldade no suprimento de óleo	Mancas usados somente em máquinas antigas.
Entradas axiais	1 - Fácil fabricação 2 - Baixo custo	1 - Sujeito a "oil whirl"	Mancas circulares quase sempre são deformados para ficar em eplícticos ou multilobulos.
Buchas flutuante	1 - Relativamente fácil fabricação 2 - Baixo custo	1 - Sujeito a "oil whirl"	Usado principalmente em turbos compressores de alta rotação para motores diesel.
Elípticos	1 - Fácil fabricação 2 - Baixo custo 3 - Bom amortecimento nas velocidades críticas	1 - Sujeito a "oil whirl" em altas rotações 2 - Direção de carregamento deve ser conhecida	Provavelmente o mancal mais utilizado em rotações médias e baixas
Deslocado ("Off set half")	1 - Excelente supressão de "whirl" em altas rotações 2 - Baixo custo 3 - Fácil fabricação	1 - Regular supressão de "whirl" em rotações moderadas 2 - Direção de carregamento deve ser conhecida	Tem alta rigidez horizontal e baixa na vertical
3 e 4 lobulos (multilobulos)	1 - Boa supressão de "whirl" 2 - Bom rendimento geral 3 - Custo moderado	1 - Alguns tipos podem ser caros para fabricar 2 - Sujeito a "whirl" em altas rotações	Atualmente utilizado por vários fabricantes como mancais padrões de projeto
Represa de pressão	1 - Boa supressão de "whirl" 2 - Baixo custo 3 - Bom amortecimento nas velocidades críticas 4 - Fácil fabricação	1 - Torna instável com pequeno aviso 2 - Represa sujeita a desgaste com o tempo 3 - Direção de carregamento deve ser conhecida 4 - Não elamina o "whirl" para rotores muito flexíveis	Muito popular em indústrias petroquímicas Fácil converter eplíctico em represa de pressão
Represa de pressão de eixais ou multilobulos com pré-carga	1 - Represa é relativamente fácil colocar em mancais existentes 2 - Boa supressão de "whirl" 3 - Relativamente baixo custo 4 - Bom rendimento geral	1 - Mancal complexo requerendo análise detalhada 2 - Não elimina o "whirl" devido a causa externas aos mancais	Utilizado como padrão em projeto para vários fabricantes

Tabela 2.1 - Vantagens, desvantagens e comentários para os principais tipos de mancais industriais.

TIPO DE MANCAL	VANTAGENS	DESvantagens	COMENTÁRIOS
Hidrostático	<ul style="list-style-type: none"> <li>1 - Grande faixa de parâmetros</li> <li>2 - Custo moderado</li> <li>3 - Boa capacidade de carga</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>1 - Baixo amortecimento nas velocidades para rotores de alta precisão</li> <li>2 - Requer projeto cuidadoso</li> <li>3 - Requer suprimento de lubrificação</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>1 - Geralmente alta rigidez utilizada para mancais</li> </ul>
Mancais de sapata ("tilting-pad")	<ul style="list-style-type: none"> <li>1 - Não causa "whirl" (não tem componentes cruzados)</li> <li>2 - Grande faixa de parâmetros</li> <li>3 - Custo original próximo de outros tipos</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>1 - Alto custo de reposição</li> <li>2 - Requer projeto cuidadoso</li> <li>3 - Baixo amortecimento nas velocidades para mancais</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>1 - Mancais largamente utilizados para estabilizar máquinas com excitações sub-síncronas externas aos mancais</li> </ul>
		<ul style="list-style-type: none"> <li>4 - Dificuldade para determinação da folga real</li> <li>5 - Alta perda de potência</li> </ul>	

### 3 - Mancais de deslizamento

Considerando a equação de movimento (1.20) do rotor de Jeffcott apoiado em mancais flexíveis e amortecidos, visto no capítulo 1, pode-se observar que os parâmetros  $k$  e  $c$  relacionados com a rigidez e amortecimento dos mancais tem grande influencia no comportamento dinâmico de máquinas rotativas com relação as velocidades críticas  $\omega_c$  e sua resposta ao desbalanceamento. Outros elementos como selos, impelidores, efeito de histerese do eixo etc., também influem nesse comportamento dinâmico.

Neste trabalho somente é estudado o comportamento dinâmico de sistemas rotor-mancais de deslizamento em função de inúmeros casos de problemas dinâmicos registrados e solucionados através do estudo desse sistema.

Neste capítulo é apresentado o procedimento de cálculo utilizado para determinação das características dinâmicas de 3 tipos de mancais mais comuns, e é feita uma comparação entre os resultados calculados pelo programa de computador desenvolvido e dados da literatura.

#### 3.1 - Método de cálculo

Os principais parâmetros dos mancais de deslizamento que influenciam no comportamento dinâmico do sistema, são os coeficientes de rigidez e amortecimento. Esses coeficientes são determinados a partir da solução da equação de Reynolds.

O problema básico em hidrodinâmica de mancais é determinar a distribuição da pressão do fluido  $p(\theta, z)$  para uma dada geometria do mancal, resolvendo a seguinte equação de Reynolds em coordenadas cilíndricas, cuja dedução é apresentada por Pinkus [12] a partir da equação da continuidade:

$$R \frac{1}{z} \frac{d}{dz} \left[ \frac{1}{h^3} \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{h^3} \frac{d}{dz} \right) + \frac{1}{a} \frac{d}{dz} \right] \left[ \frac{1}{h^3} \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{h^3} \frac{d}{dz} \right) + \frac{1}{a} \frac{d}{dz} \right] = \frac{1}{1} \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{h^3} \frac{d}{dz} \right) + \frac{1}{a} \frac{d}{dz} \quad (3.1)$$

$p = p(\theta, z)$  - distribuição de pressão.

A solução dessa equação implica em assumir algumas simplificações:

- O único parâmetro importante do fluido é a viscosidade, isto é, o efeito da tensão de cisalhamento.
- As forças inerciais do fluido são desprezíveis.
- O fluido é incompressível.
- A espessura do filme de fluido é muito fina, não havendo variação de pressão na espessura e não existe curvatura do fluido.



- A viscosidade do fluido é constante.  
 - Não há escorregamento do fluido nas paredes do mancal.

**3.1.1 - Solução de equação de Reynolds**

Existem duas aproximações utilizadas para se obter a distribuição de pressão em mancais cilíndricos através de integração direta.

A primeira aproximação considera o mancal infinitamente longo, desprezando o termo  $\frac{z}{h} \left[ \frac{12\mu}{h^3} \frac{ae}{ap} \right]$ , não havendo vazão de fluido pelas laterais do mancal ( $qz=0$ ), sendo a pressão constante na direção z.

A segunda aproximação considera o mancal infinitamente curto, desprezando o termo  $\frac{1}{2} \frac{R}{ap} \left[ \frac{12\mu}{h^3} \frac{ae}{ap} \right]$ , sendo a vazão circumferencial do fluido  $q\theta = \frac{2}{\omega h}$ .

O lado direito da equação fica  $\frac{1}{2} \omega \frac{ae}{ah}$  não havendo variação da posição do eixo no mancal com o tempo.

**3.1.2 - Método das diferenças finitas**

O cálculo das características dinâmicas (rigidez e amortecimento) de mancais finitos é feito através da solução numérica da equação de Reynolds pelo método das diferenças finitas (M.D.F.) descrito no artigo de Lund [3].

Para solução numérica dessa equação também pode ser utilizado o método dos elementos finitos (M.E.F.), que é equivalente ao M.D.F., tendo vantagens na discretização quando o perfil do mancal for complexo, ou apresentar ranhuras ou estrías.

Para o cálculo da distribuição de pressão na superfície de mancais finitos, são admitidas as simplificações usuais para a solução da equação de Reynolds: viscosidade constante; inércia do fluido desprezível; pressão constante na espessura do fluido.

A zona de ruptura do filme de óleo é determinada por um procedimento iterativo. A integração do campo de pressão determina a carga estática, os quatro coeficientes de rigidez e quatro coeficientes de amortecimento.



Os coeficientes dinâmicos são determinados impondo pequenas perturbações de posição e velocidade nas duas direções x e y, e calculando as diferenças das distribuições de pressão. A integração das pressões dinâmicas na superfície do mancal determina os coeficientes dinâmicos.

Esses coeficientes são os termos de primeira ordem da expansão em série de Taylor da variação da força de sustentação em função das pequenas perturbações impostas:

$$\begin{aligned} \text{AF} &= F - F_0 = K \Delta + K \Delta^2 + K \Delta^3 + \dots \\ \text{AF} &= F - F_0 = K \Delta + K \Delta^2 + K \Delta^3 + \dots \end{aligned} \quad (3.2)$$

Conforme Lund [3], essa aproximação pode ser aplicada para mancais reais para amplitudes de orbitação do eixo com até metade da folga radial.

### 3.1.3 - Condições de contorno

Em condições normais o filme de fluido converge e diverge em função da geometria do mancal, sendo esperada a ocorrência de cavitação na região divergente da folga.

Para solução da equação de Reynolds através de integração direta ou numérica é necessário admitir condições de contorno, sendo as 3 principais condições usualmente utilizadas as seguintes:

- A condição de Sommerfeld, que assume continuidade do filme de fluido e cujo equacionamento indica a existência de pressão negativa na região divergente da folga. Isto não é observado, na realidade, a menos de casos específicos.

Essa condição era utilizada por facilidade de solução analítica.

- A condição de % Sommerfeld ou Gumbel, que assume a continuidade do filme de fluido despressando a região de pressão negativa.

Esta condição é usualmente utilizada na integração direta de mancais infinitos, porém não apresenta bons resultados para grandes excentricidades.

- A condição de Swit e Stielver, que considera a continuidade de vazão e a existência de uma região de interface com ocorrência de cavitação.

Nessa interface é admitida

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

Essa condição é conseguida na solução numérica impondose  $p = 0$  toda vez que  $p > 0$ , tendo sido obtidos bons resultados para determinação da distribuição de pressão de mancais com esse procedimento.

### 3.2 - Coeficientes dinâmicos

Neste trabalho a solução da equação de Reynolds é feita através de um método numérico, devido à limitação de aplicação de métodos de integração direta para mancais infinitamente curtos ou longos.

Para solução da equação e determinação da distribuição de pressão no mancal foi utilizado o método das diferenças finitas e a técnica iterativa "successive overrelaxation" (S.O.R.) para acelerar as iterações sucessivas.

A equação de Reynolds foi adimensionalizada permitindo realizar apenas um procedimento de cálculo para uma certa geometria de mancal, sendo os resultados independentes das condições operacionais, folga e viscosidade do fluido.

O equacionamento, coordenadas e parte dos procedimentos de cálculo foram baseados no artigo [3] de Lund e Thomsen, sendo apresentado no anexo A o desenvolvimento das equações adimensionais para determinação da carga, ângulo de atitude e características dinâmicas de mancais de deslizamento em função da excentricidade.

A seguir são mostradas as 5 equações resultantes da equação de Reynolds para utilização na forma de diferenças finitas.

$$\frac{ae}{a} \begin{bmatrix} H \\ 3a \\ \frac{ae}{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L \\ - \\ D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} az \\ - \\ a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ 3a \\ \frac{ae}{p} \end{bmatrix} = 12 \pi \frac{ae}{a} H \quad (3.4)$$

$$\frac{ae}{a} \begin{bmatrix} H \\ 3a \\ \frac{ae}{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L \\ - \\ D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} az \\ - \\ a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ 3a \\ \frac{ae}{p} \end{bmatrix} =$$

$$= 12 \pi \frac{ae}{a} \begin{bmatrix} H \\ 3a \\ \frac{ae}{p} \end{bmatrix} - \frac{ae}{a} \begin{bmatrix} H \\ 3a \\ \frac{ae}{p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ - \\ D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} az \\ - \\ a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ 3a \\ \frac{ae}{p} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

As expressões de integração das distribuições de pressão na superfície do mancal para determinação da força de sustentação, e os 4 coeficientes dinâmicos são as seguintes:

$$F = \begin{bmatrix} F_{X0} \\ F_{Y0} \\ F_{X0} \\ F_{Y0} \\ F_{XX} \\ F_{YY} \\ F_{XX} \\ F_{YY} \\ F_{XY} \\ F_{YX} \\ F_{XY} \\ F_{YX} \\ F_{XY} \\ F_{YX} \\ F_{XY} \\ F_{YX} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W \\ F \\ W \\ F \\ C \\ C \\ C \\ C \\ C \\ C \\ C \\ C \\ C \\ C \\ C \\ C \end{bmatrix} = \Sigma - z \begin{bmatrix} L \\ z \\ z \\ L \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ p \\ p \\ p \\ p \\ p \\ p \\ p \\ p \\ p \\ p \\ p \\ p \\ p \\ p \\ p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x \\ y \\ x \\ y \\ x \\ y \\ x \\ y \\ x \\ y \\ x \\ y \\ x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \int R \, d\theta \, dz$$

$$\Delta y = \frac{ae}{a} \begin{bmatrix} H \\ 3a \\ 3a \\ H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ p \\ p \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L \\ D \\ 2 \\ L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ a \\ a \\ a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ 3a \\ 3a \\ H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ az \\ az \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ p \\ p \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{N}{12} \sin \theta \quad (3.8)$$

$$\Delta x = \frac{ae}{a} \begin{bmatrix} H \\ 3a \\ 3a \\ H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ p \\ p \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L \\ D \\ 2 \\ L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ a \\ a \\ a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ 3a \\ 3a \\ H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ az \\ az \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ p \\ p \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{N}{12} \cos \theta \quad (3.7)$$

$$= 12 \pi \left[ \frac{ae}{a} \frac{H}{3 \sin \theta} - \frac{ae}{a} \frac{H}{3 \sin \theta} \right] - \frac{ae}{a} \frac{H}{3 \sin \theta} \begin{bmatrix} 0 \\ p \\ p \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L \\ D \\ 2 \\ L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ a \\ a \\ a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ 3a \\ 3a \\ H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ az \\ az \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ p \\ p \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$



### 3.3 - Procedimento de cálculo

Os procedimentos para determinação da força de sustentação e dos coeficientes dinâmicos de mancais de lobulos fixos, com e sem pré-carga (elipsidade), são os seguintes:

- Discretização do mancal nas direções, radial e axial. Por simetria, na direção axial o cálculo, feito para metade do mancal;

- Montagem da equação de Reynolds na forma adimensional de diferenças finitas, vide anexo A, para uma certa excentricidade do eixo no mancal;

- Imposição do ângulo de atitude (zero) graus e determinação da distribuição de pressão estática e integração na direção  $\psi$ , determinando a força  $F_Y$ ;

- Imposição do ângulo de atitude 90 graus e determinação da distribuição de pressão estática e integração na direção  $\psi$ , determinando a força  $F_Y$ ;

- Em função dos valores encontrados para os  $F_Y$ , realizar novas imposições para o ângulo de atitude, até que  $F_Y$  seja zero ou melhor, menor que um erro mínimo. As imposições são feitas de forma iterativa pelo método das médias;

$F_Y$  = função de  $\sigma$

$$\sigma = \frac{\sigma \cdot F_Y \cdot D - \sigma \cdot F_Y \cdot E}{(E \text{ ou } D) - F_Y} = \frac{D \cdot F_Y \cdot E}{E \cdot F_Y \cdot D - \sigma \cdot F_Y \cdot E}$$

E - esquerdo

D - direito

- Determinado o ângulo de atitude  $\sigma$ , determinar a distribuição de pressão, integrando na superfície do mancal para obter a força de sustentação  $F_X$  ou  $W$ .

- A partir da distribuição de pressão verificar onde ocorre a cavitação do fluido no mancal, isto é, determinação da linha de pressão zero e diferente de zero na malha do mancal.

- Integração da equação de Reynolds para os 4 coeficientes dinâmicos, mudando apenas o lado direito da equação, equações 3.5 a 3.8. Essa integração é feita nos limites de contorno do fluido.

São dadas perturbações infinitesimais de deslocamento e velocidade ( $\Delta A_x$ ,  $\Delta A_y$ ,  $\Delta A_z$  e  $\Delta V_x$ ,  $\Delta V_y$ ,  $\Delta V_z$ ). Essas perturbações causam uma

Variação da distribuição da pressão do fluido e consequentemente das forças de sustentação (F<sub>x</sub> e F<sub>y</sub>).

$$F = \iint p \, dz \, da \quad (3.9)$$

Esta forma determina-se os coeficiente dinâmicos do mancal:

$$F_x = F_{x0} + K_{xx} x + K_{xy} y + C_{xx} x + C_{xy} y \quad (3.10)$$

$$F_y = F_{y0} + K_{yx} x + K_{yy} y + C_{yx} x + C_{yy} y \quad (3.11)$$

### 3.3.1 - Valores adimensionais

$$z = \left[ \frac{L}{z} \right] \quad \text{- comprimento do mancal}$$

$$h = c \, H \quad \text{- espessura do filme de fluido}$$

$$p = p \, N \left[ \frac{R}{p} \right] \quad \text{- pressão do fluido no mancal}$$

$$S = \frac{W}{p \, N \, D \, L} \left[ \frac{R}{S} \right] \quad \text{- número de Sommerfeld}$$

$$K = \frac{W}{K \, C} \quad \text{- rigidez adimensional}$$

$$C = \frac{W}{C \, C} \quad \text{- amortecimento adimensional}$$

### 3.4 - Descrição do programa

PROGRAMA DINAM: Determinação dos coeficientes de rigidez e de amortecimento de mancais de lóbulos

DEFINIÇÃO DAS VARIÁVEIS

ESTABELECIAMENTO DE COMMON PARA A SUBROTINA

DADOS DE ENTRADA

Entrada de dados geométricos do mancal  
Entrada de dados de iteração

IMPRIMIR DADOS DE ENTRADA

CONSTANTES

CALCULOS PRELIMINARES

ENTRADA DA EXCENTRICIDADE

CALCULO DAS MATRIZES ESTÁTICAS

MONTAGEM DE DIFERENÇAS FINITAS

CALCULO DA PRESSÃO ESTÁTICA

$$P(L, I, J) = (1-W) \cdot (F(I, J) - B(J)) \cdot P(L, I, J+1) - C(J) \cdot P(L, I, J-1) - D(J) \cdot (P(L, I+1, J) + P(L, I-1, J)) / A(J)$$

CALL DISPRE - Subrotina de cálculo da distribuição de pressão

CALCULO DA FORÇA ESTÁTICA

Projecção das pressões nas direções X e Y

Integração da pressão na direção axial

CALL QSF - Subrotina de integração por Simpson

Integração da pressão na direção radial

CALL QSF - Subrotina de integração por Simpson

CALCULO DO ANGULO DE ATITUDE

Recálculo das forças Fx e Fy até Fy  $\leq$  Erro máximo

DETERMINAÇÃO DA LINHA DE CONTOURNO

M1(N) para P = 0 e M2(N) para P = 0

CALCULO DAS MATRIZES DINÂMICAS

CALCULO DAS PRESSÕES DINÂMICAS

CALL DISPRE - Subrotina de cálculo da distribuição de pressão

CALCULO DOS COEFICIENTE DINÂMICOS

Integração da pressão na direção axial

CALL QSF - Subrotina de integração por Simpson

Integração da pressão na direção radial

CALL QSF - Subrotina de integração por Simpson

K, K, K, C, C, C, C, e L

xx xy yy xx xy yy

FIM



PROGRAMA DIMAN

DEFINICAO DAS VARIAVEIS

P - Distribuicao de presso no mancal

A - Coeficientes de P(L, I, J)

B - Coeficientes de P(L, I, J+1)

C - Coeficientes de P(L, I, J-1)

D - Coeficientes de P(L, I+1, J), P(L, I-1, J)

F - Lado direito da equacao

$$P(L, I, J) = (1-M) \cdot (F(I, J) - B(I)) \cdot P(L, I, J+1) - C(I) \cdot P(L, I, J-1) - D(I) \cdot (P(L, I+1, J) + P(L, I-1, J)) / A(I)$$

ESTABELECCIMENTO DE COMMON PARA A SUBROTINA

DADOS DE ENTRADA

LEIA :

Entrada de dados geometricos do mancal

ML - Numero de lbulos

CD - Relacao L/D

ELF - Elipsidade ou pre-carga

ALFA - Angulo dos lbulos

TP1 - Angulo de inicio dos lbulos

Entrada de dados da iteracao

MP - Numero de pontos na direcao axial

MP - Numero de pontos na direcao radial

NMAX - Numero maximo de iteracoes

EMAX - Erro maximo entre iteracoes

M - Fator de relaxacao

IMPRIMIR DADOS DE ENTRADA

CONSTANTES

PI = 4 \* ATAN (1.)

CALCULOS PRELIMINARES

ALFA = ALFA \* PI / 180

DT = ALFA / (MP - 1)

DZ = 1 / (MP - 1)

TP1 = TP1 \* PI / 180

ENTRADA DA EXCENTRICIDADE

SE Excentricidade especificada

LEIA : EC - Excentricidade

SE Varredura de excentricidade

LEIA :

ECI - Excentricidade inicial

AEC - Acrescimo de excentricidade

MEC - Numero de acrescimos

```

VERIFICACAO DA EXCENTRICIDADE COM A FOLGA
SE Excentricidade maior que a folga
Mensagem e PARE

CALCULO DAS MATRIZES ESTATICAS
LOOP : N de 1 a NL - Numero de lobulos
EP = V EC2 + ELP2 - 2 x ELP x cos(FI)
H = 1 - EP
SE 1 Lobulo
FIP = FI - Angulo de atitude
SE MAD
/ EC x sen(FI) - ELP x sen(QIP) \
FIP = arctg ; -----
\ EC x cos(FI) - ELP x cos(QIP) /
- Angulo de atitude

MONTAGEM DE DIFERENCAS FINITAS
LOOP : M de 1 a MP - Dircção radial
HJ = 1 + EP x cos(M - 1) x DT + TP1 - FIP(N)
HJNM = 1 + EP x cos(M - 1.5) x DT + TP1 - FIP(N)
HJPM = 1 + EP x cos(M - 0.5) x DT + TP1 - FIP(N)
B = HJPM3 / DT2
C = HJNM3 / DT2
D = HJ3 / DT3 / CD2
A = -( B + C + 2 x D )
LOOP : I de 1 a NP - Dircção axial
F = 12 x PI x (HJPM - HJNM) / DI
P = 0
NJ = NP - Numero de pontos até a condicao de contorno

CALCULO DA PRESSAO ESTATICA
CALL DISPRE - Subrotina de cálculo da distribuição de pressão

CALCULO DA FORÇA ESTATICA
Projção das pressões nas direções X e Y
PX = P x cos (TEJA)
PY = P x sen (TEJA)
TEJA - Angulo dos pontos discretizados

Integração da pressão na direção axial
CALL GSF - Subrotina de integração por Simpson
Integração da pressão na direção radial
CALL GSF - Subrotina de integração por Simpson

CALCULO DO ANGULO DE ATITUDE
X = -----
(FXR - FXL)
(XL x FXR - XR x FXL)
FI = X
SE (DINY(1) > 0
SE (DINY(1) < 0
XR = X e FXR = DINY(1)
XL = X e FXL = DINY(1)

```





### 3.5 - Comparação de resultados

Em função das dificuldades técnicas e financeiras para construção de bancada de teste, conforme mostrada por Glienke [39], para determinação dos coeficientes dinâmicos de mancais e através de medições, a comprovação dos resultados calculados e feita pela comparação com resultados consolidados de outros autores.

A figura 3.1 mostra o sistema de coordenadas fixas utilizado no equacionamento do programa de cálculo das características dinâmicas de mancais (programa DINAM).

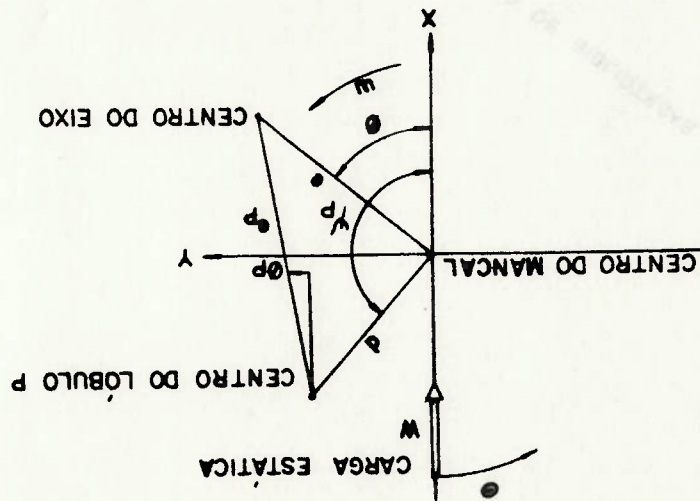


Figura 3.1 - Sistema de coordenadas do mancal

Os mancais cilíndricos com 2 entradas de óleo, elípticos e 3 lobulos mostrados nas figuras 3.2 a 3.4, foram calculados para relações  $L/D = 0.5$  e  $L/D = 1$ , através do método descrito neste trabalho e seus resultados comparados com os divulgados, para os mesmos mancais, no artigo de Lund [31].

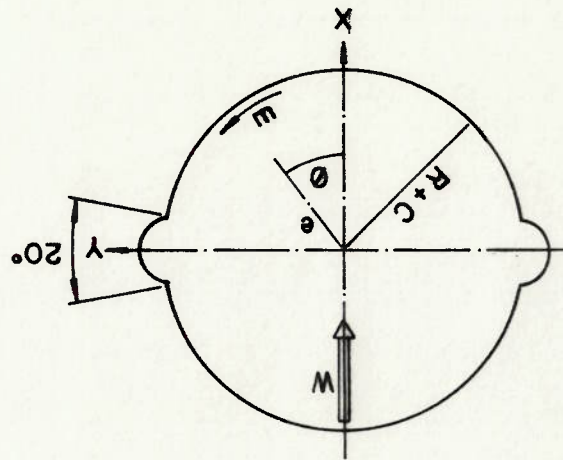


Figura 3.2 - Perfil do mancal cilíndrico

Nas figuras 3.5a a 3.10d são apresentadas curvas dos coeficientes de rigidez e de amortecimento para os mancais calculados, comparando os resultados calculados pelo método descrito neste trabalho e os publicados na referência [3]. Através dessas curvas pode-se observar que os resultados são muito próximos, o que permitiu a verificação do programa desenvolvido.

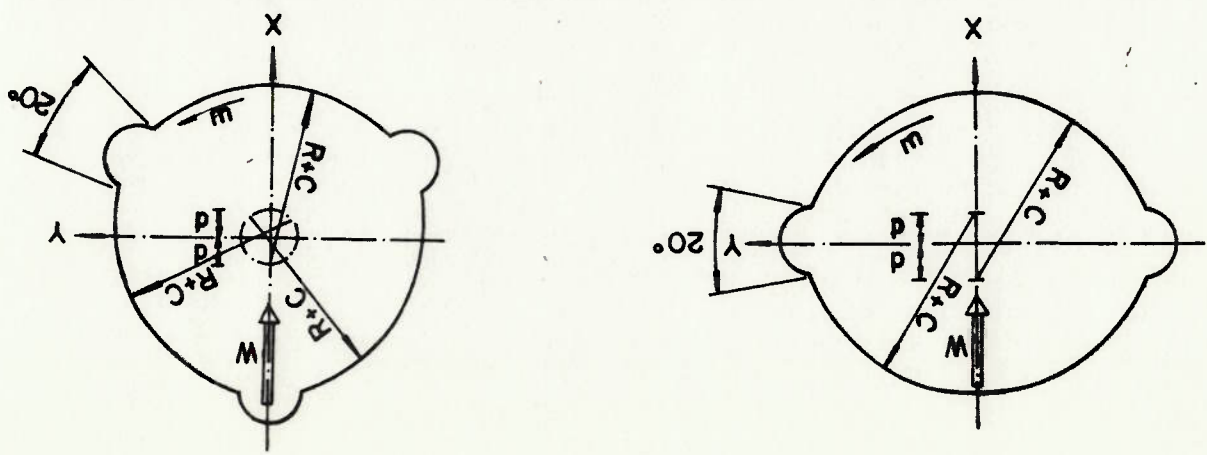
O número de pontos de discretização do mancal, erro máximo e número de iterações foram definidos previamente através de uma série de execuções do programa para um mancal cilíndrico, verificando-se que esses valores adotados são adequados para atingir a convergência dos resultados. O fator de relaxação foi adotado conforme recomendação da referência [36] (valor entre 1,25 e 1,5).

Tabela 3.1 - Dados de entrada do programa

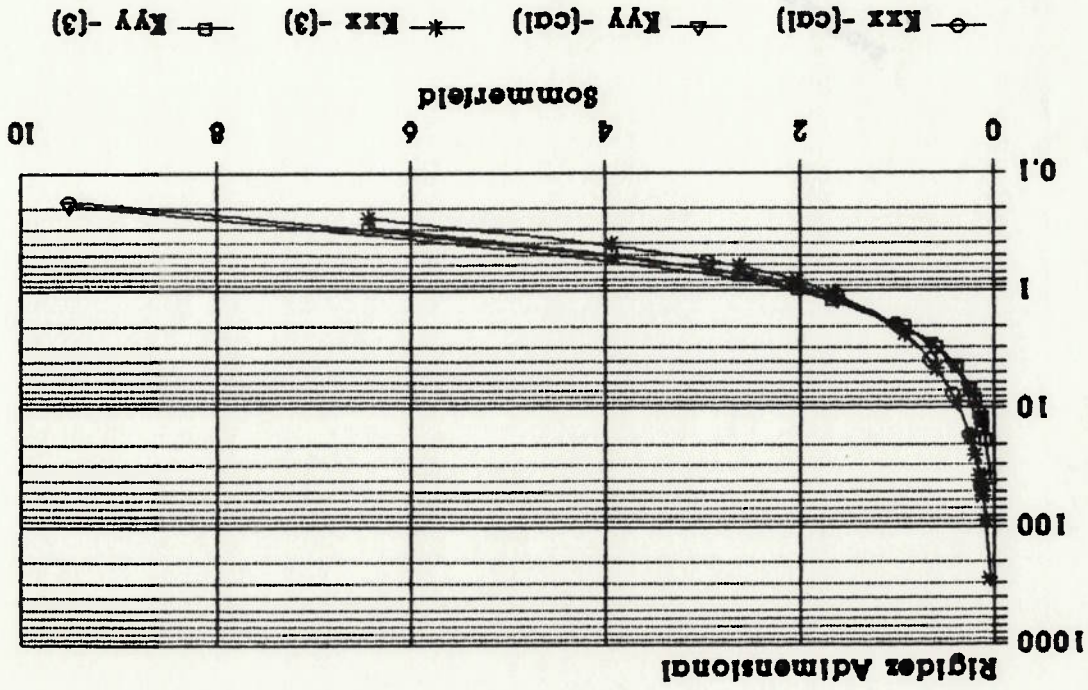
tipo de mancal	rel. elipsoid.	ângulo	ne pto. axial	radial	ns max. iterações	erro máximo
cilíndrico	0,5	160	10	15	90	0,0001
elíptico	0,5	160	10	15	90	0,0001
3 lobulios	0,5	100	10	10	90	0,0001

Os dados de entrada para execução do programa, tabela 3.1, definem a geometria dos mancais e as variáveis de controle das iterações.

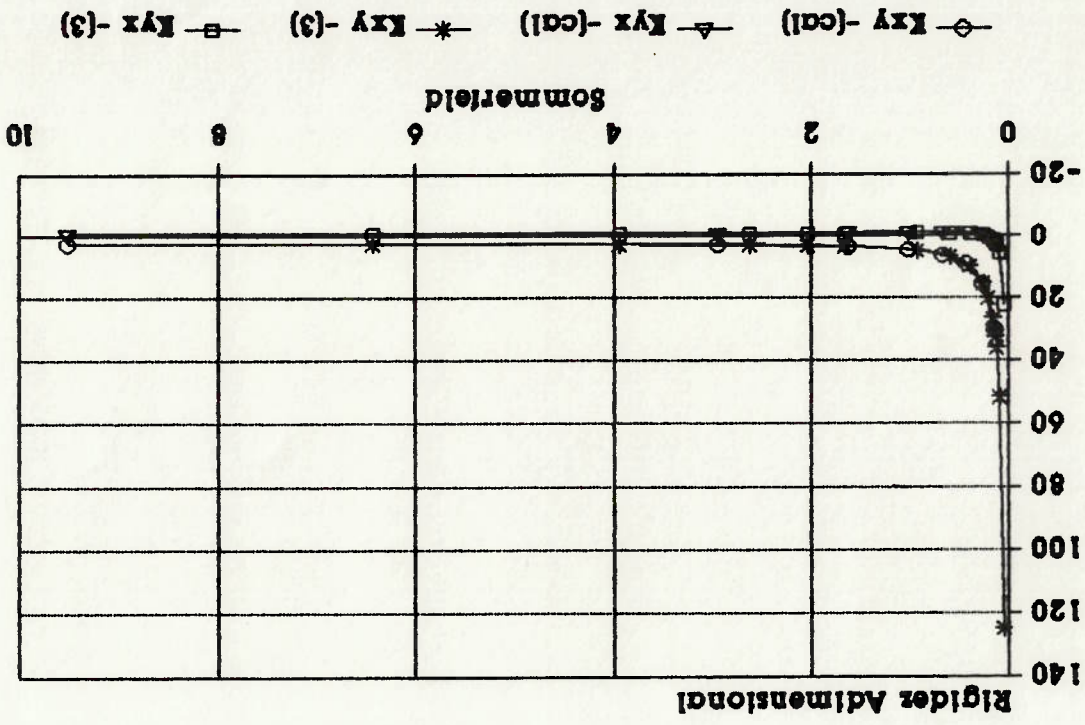
Figura 3.3 - Perfil do mancal elíptico  
Figura 3.4 - Perfil do mancal 3 lobulios



**Manca Cilindrico L/D = 0.5**  
 Comparacao - Calculo e Rel(s)



**Figura 3.5a - Coeficientes Principais**



**Figura 3.5b - Coeficientes Cruzados**



Figura 3.5d - Coeficientes Cruzados

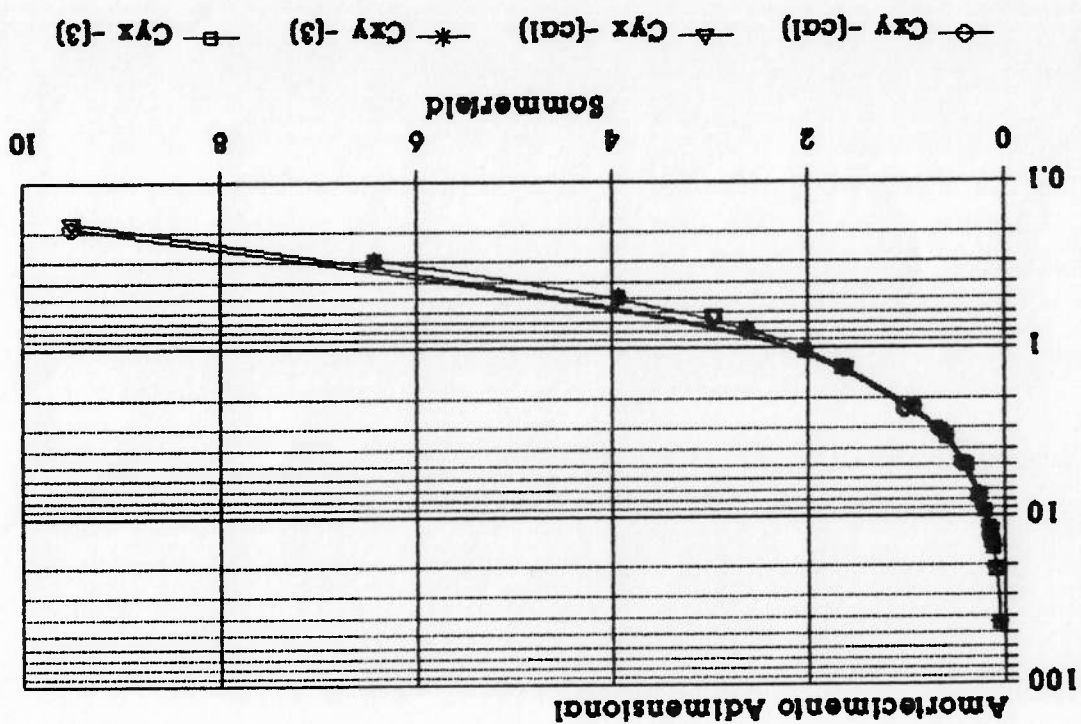
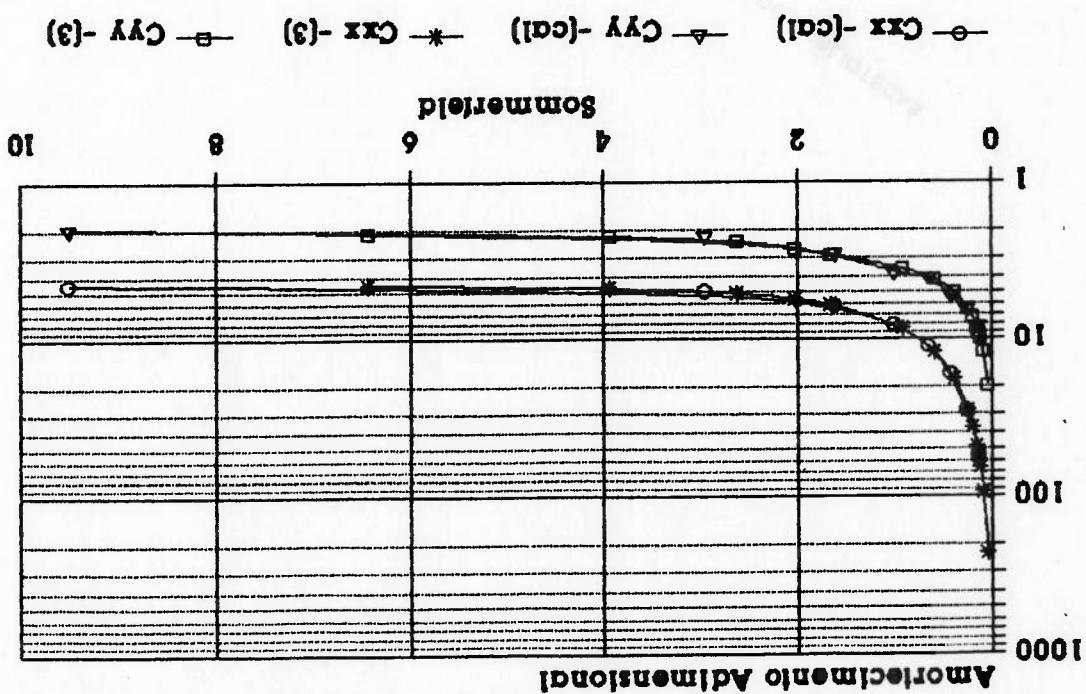


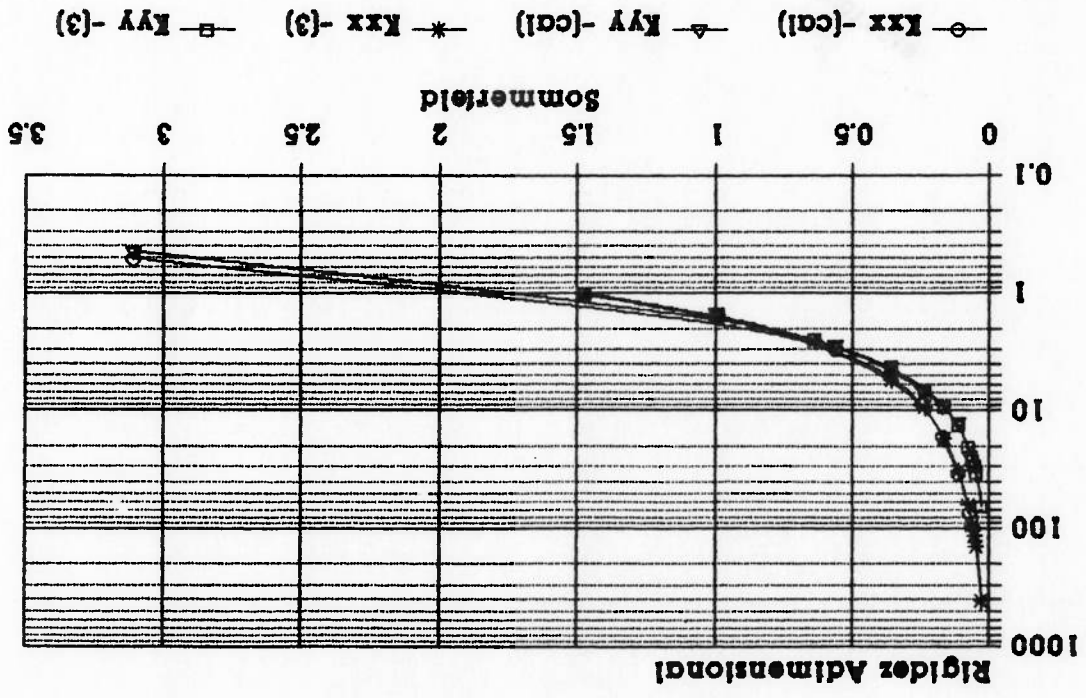
Figura 3.5c - Coeficientes Principales



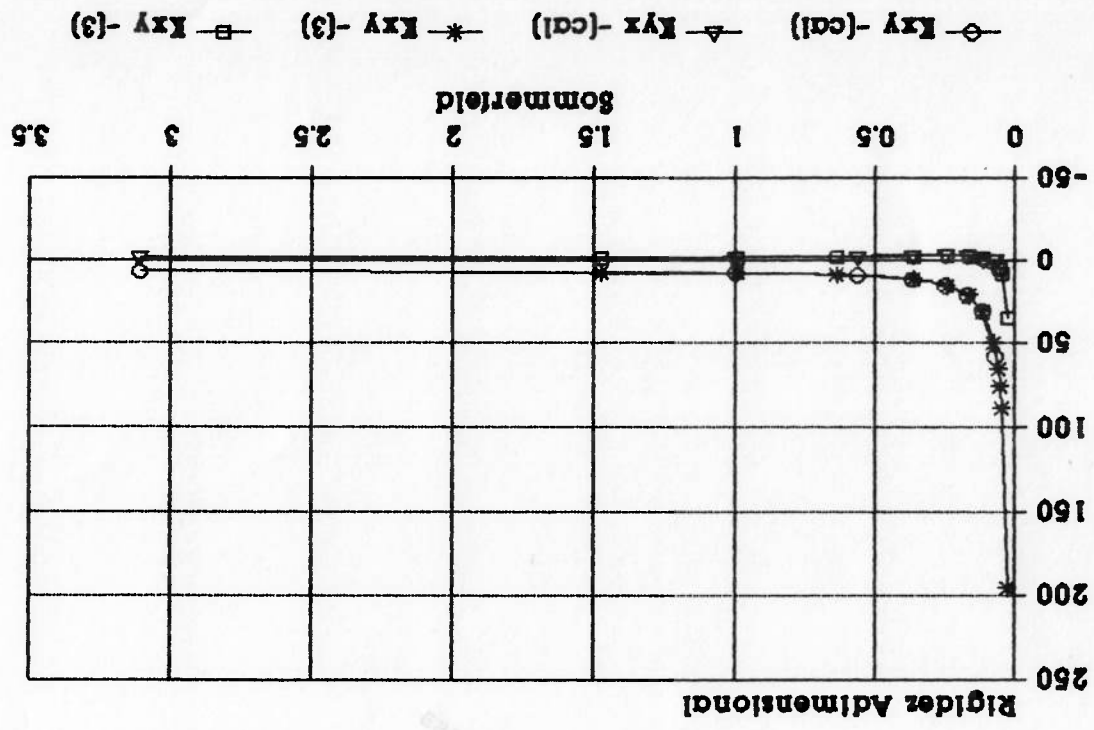
Mancal Cilindrico L/D = 0.5  
Comparacao - Calculo e Rel(3)



**Manca Cilindrico L/D = 1**  
 Comparacao - Calculo e Rel.(3)

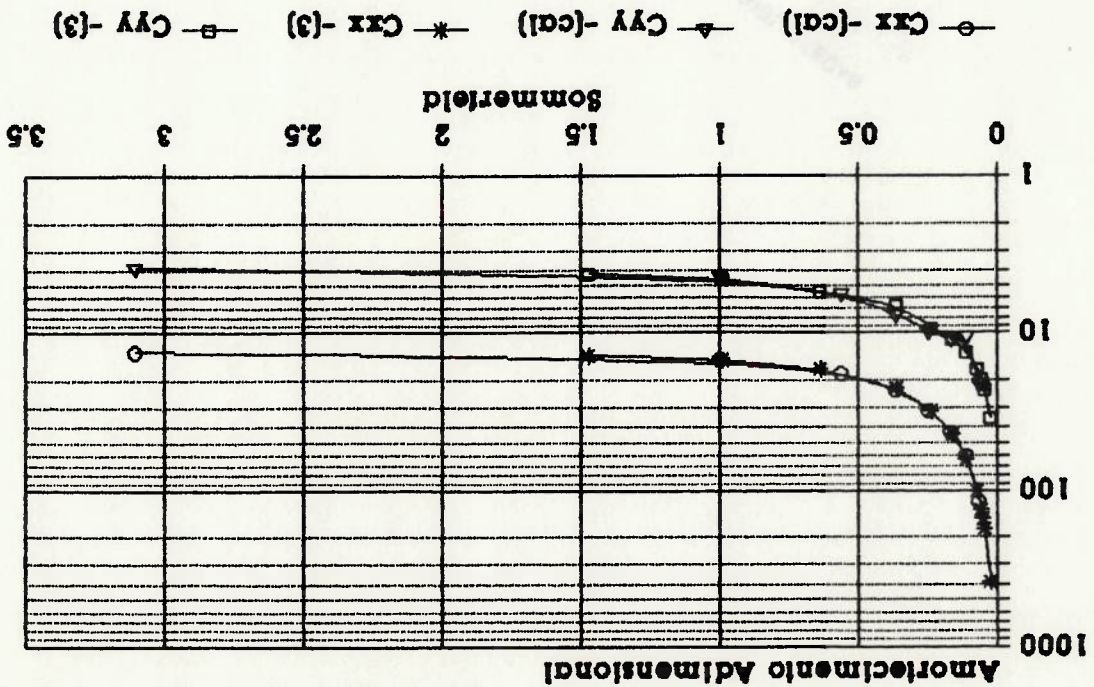


**Figura 3.6a - Coeficientes Cruzados**

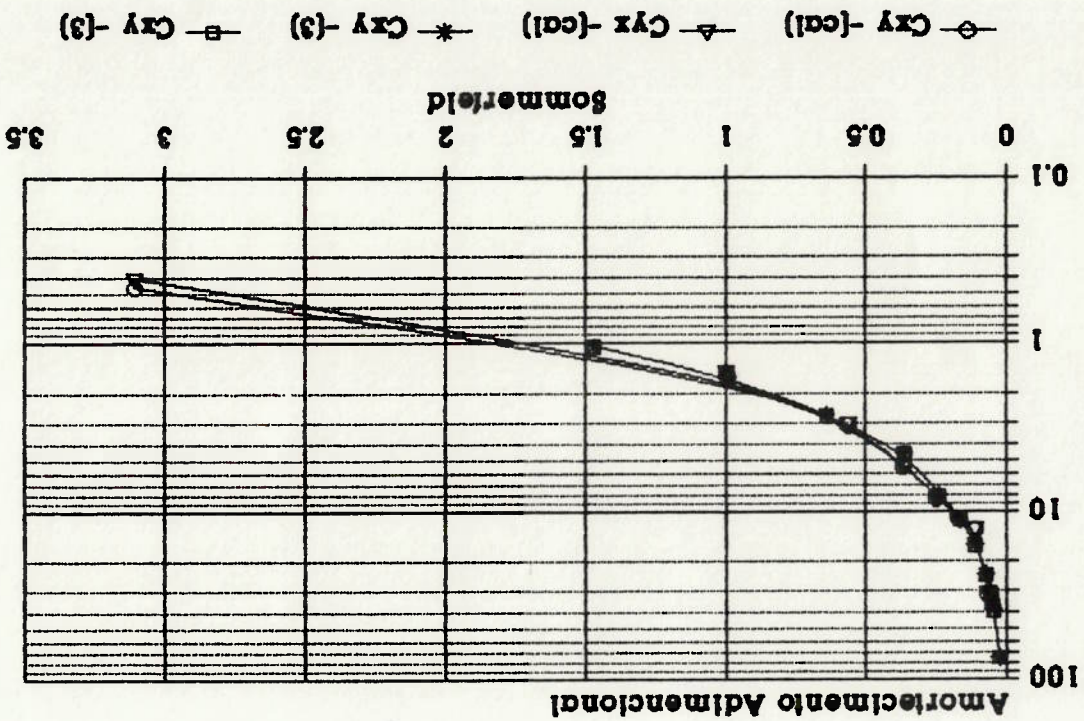


**Figura 3.6b - Coeficientes Cruzados**

**MANCAI Cilindrico L/D = 1**  
 Comparacao - Calculo e Res(3)

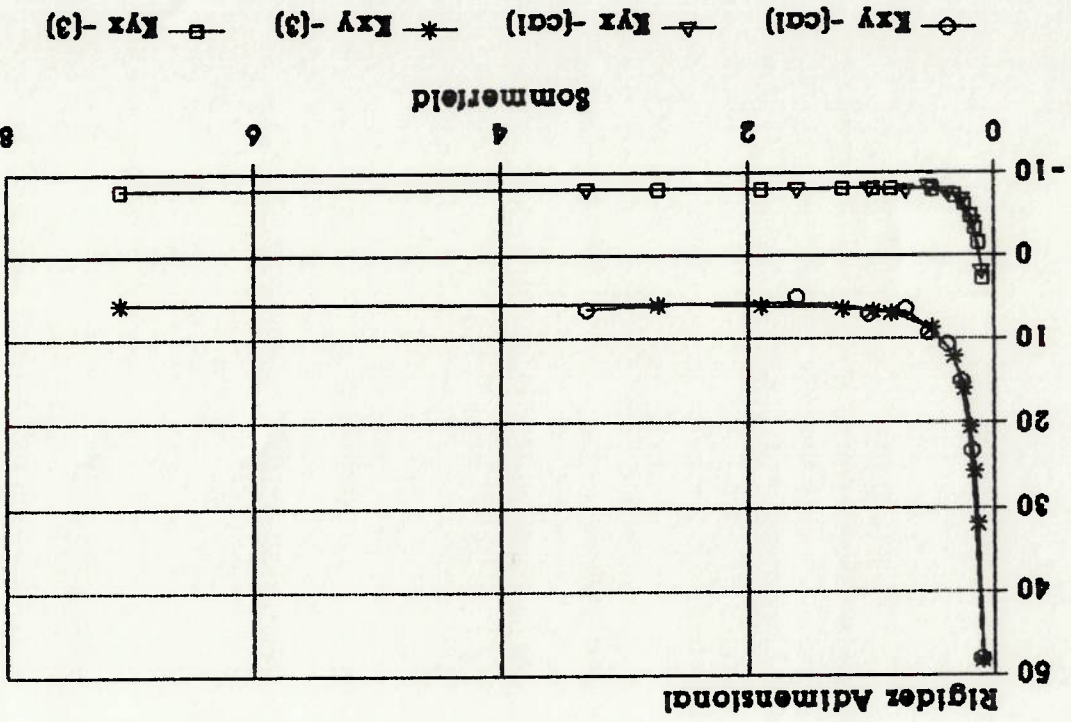
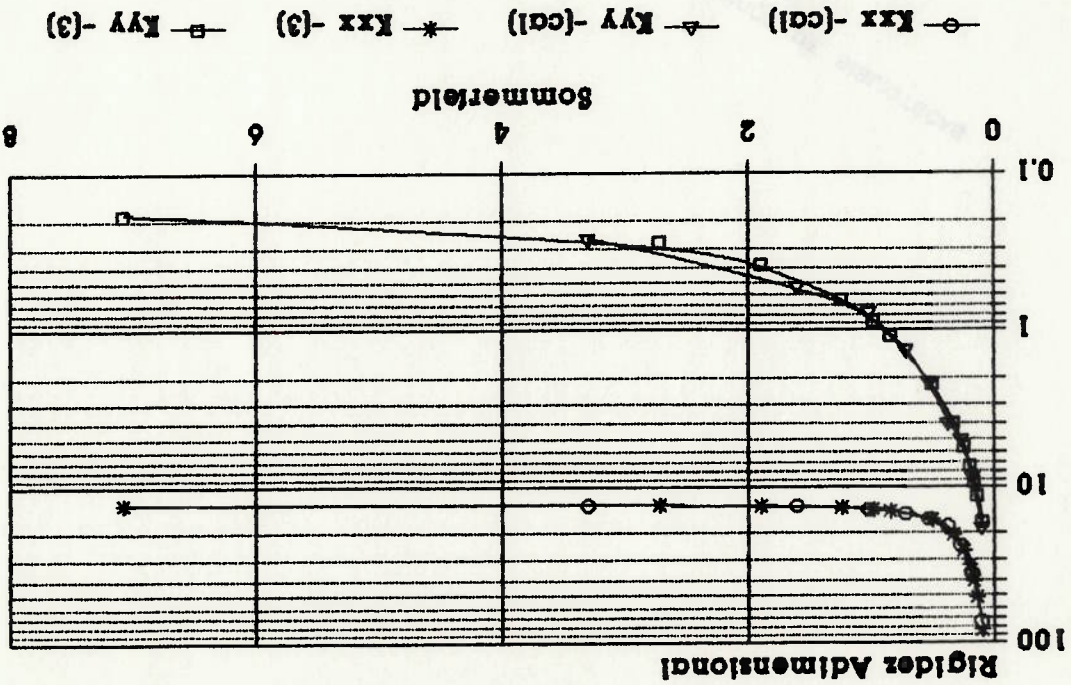


**Figura 3.6c - Coeficientes Principais**



**Figura 3.6d - Coeficientes Cruzados**

Manca elíptica L/D = 0.5  
 Comparação - Cálculo e Rel.(3)





Manca Elipico L/D = 0.5  
Comparaco - Calculo e Rel.(s)

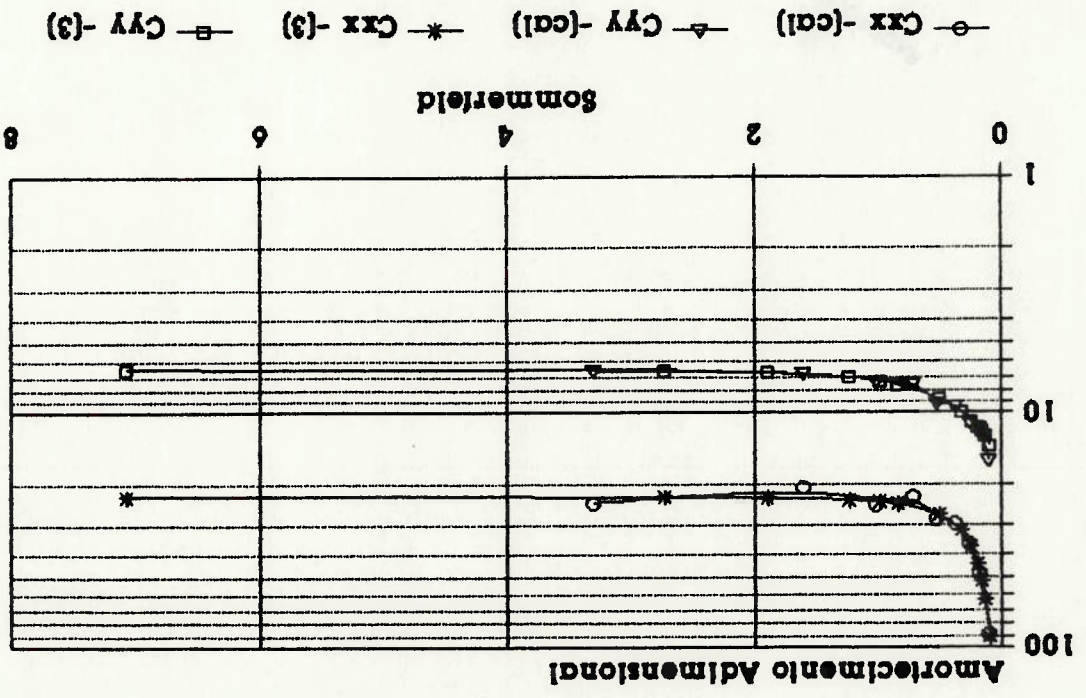


Figura 3.7c - Coeficientes Principais

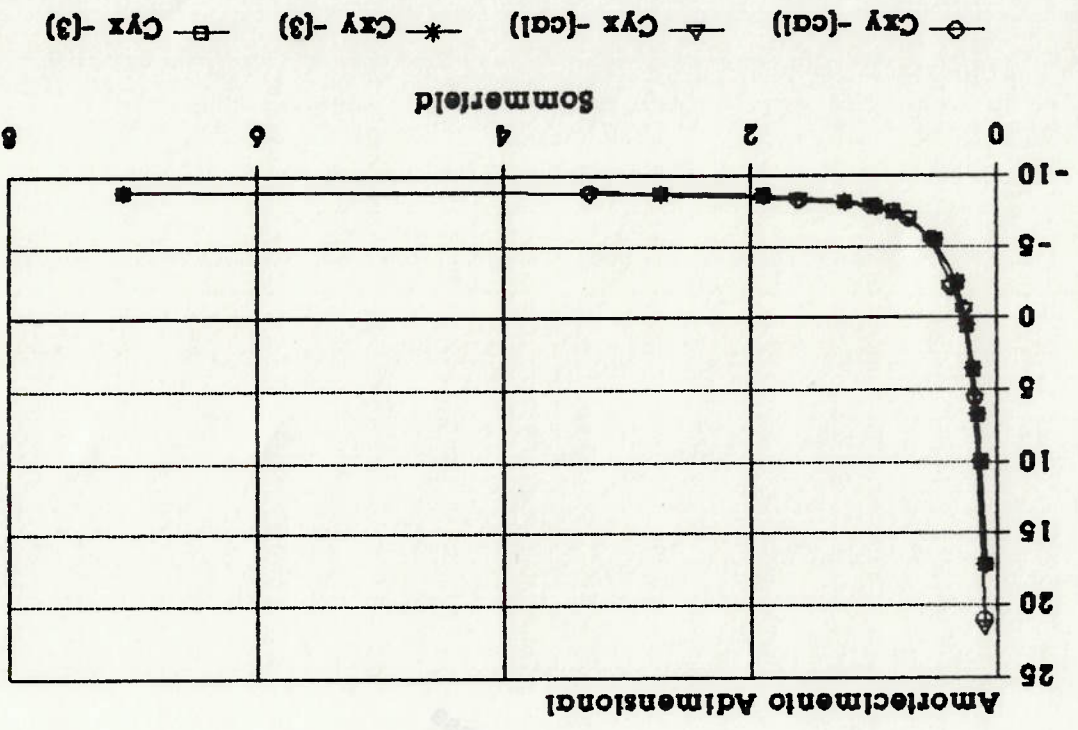
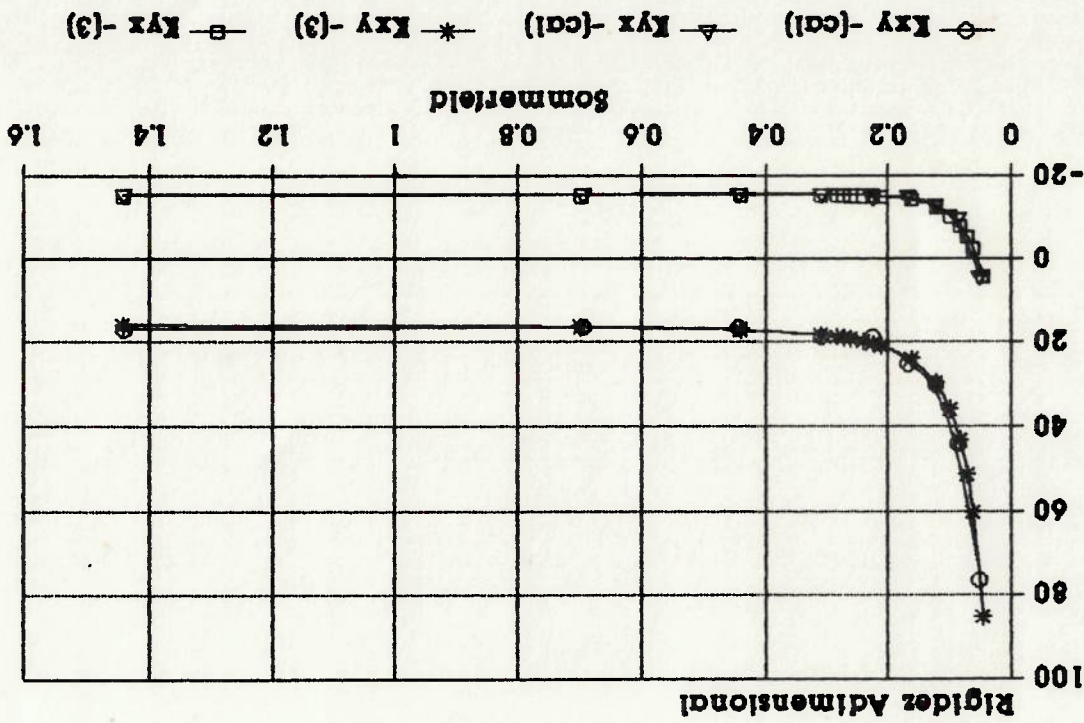
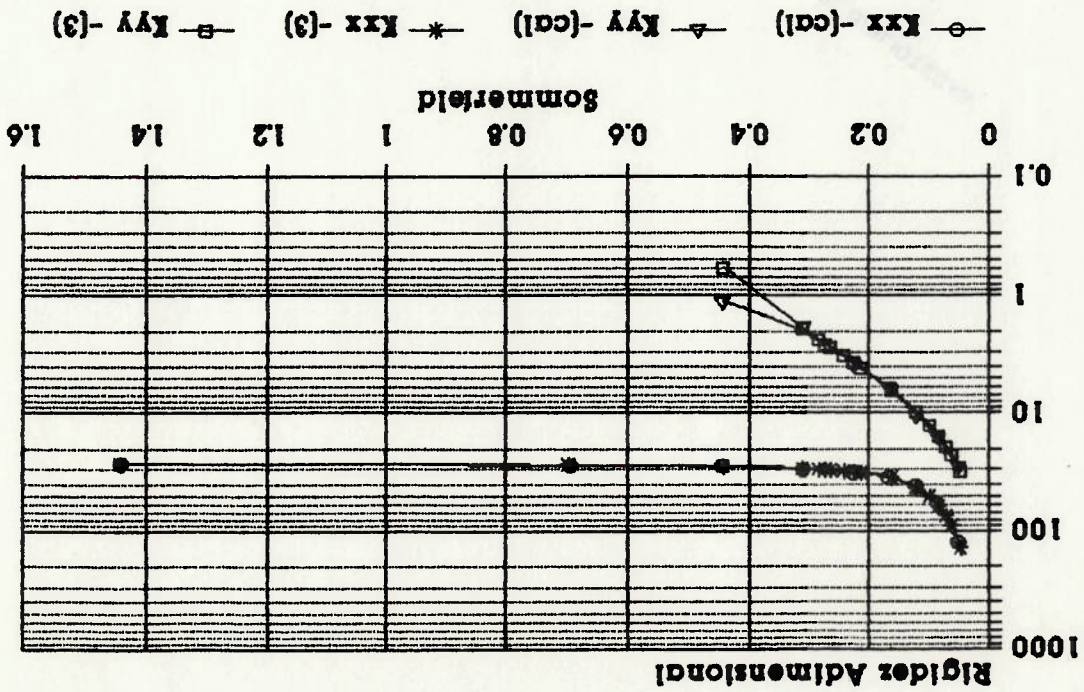


Figura 3.7d - Coeficientes Cruzados

Manca Elíptico L/D = 1  
 Comparaco - Cálculo e Rel(s)



Manca elipico L/D = 1  
 Comparacao - Calculo e Rel(3)

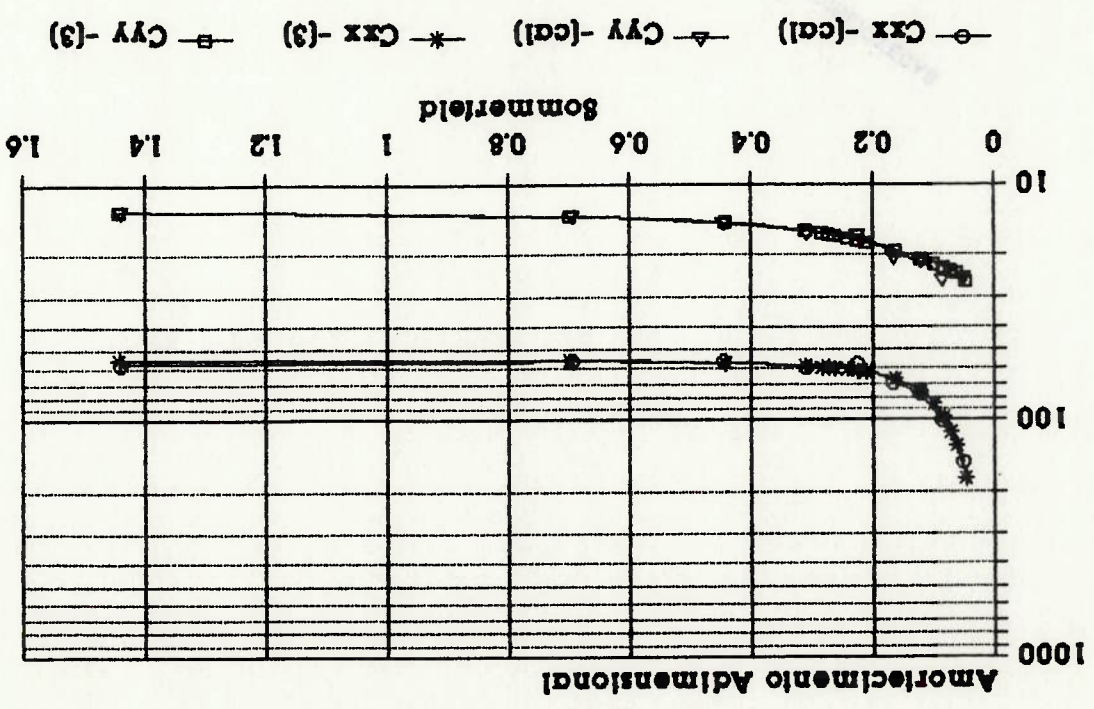


Figura 3.8c - Coeficientes Principais

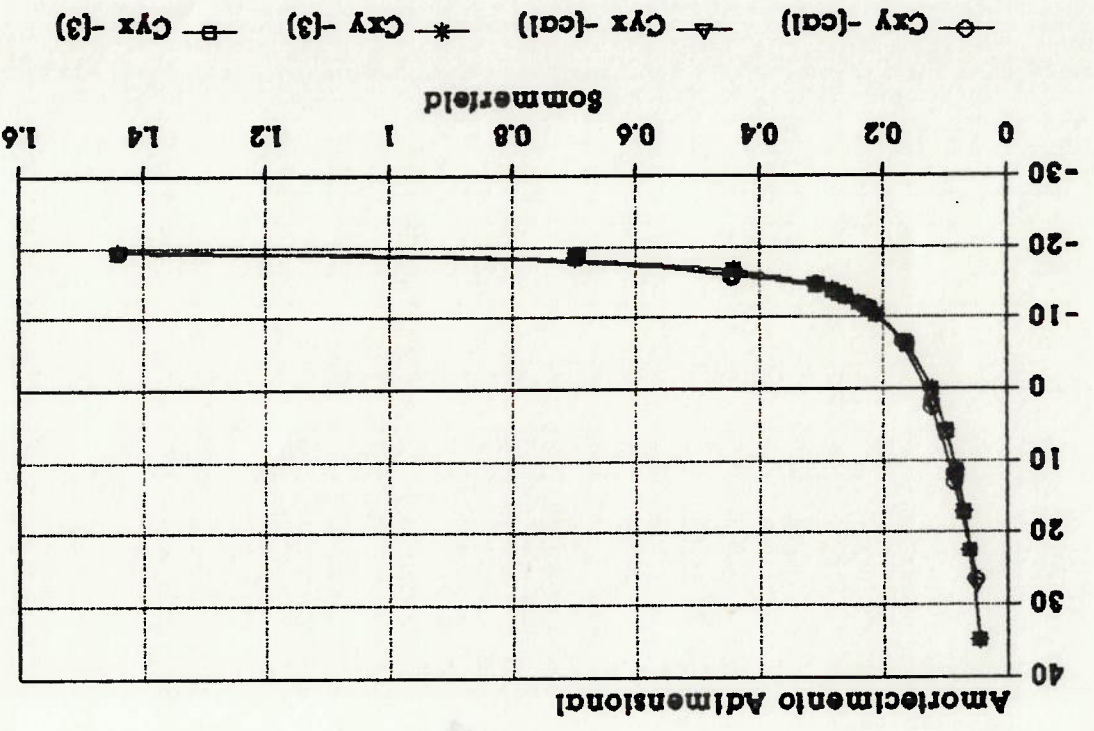
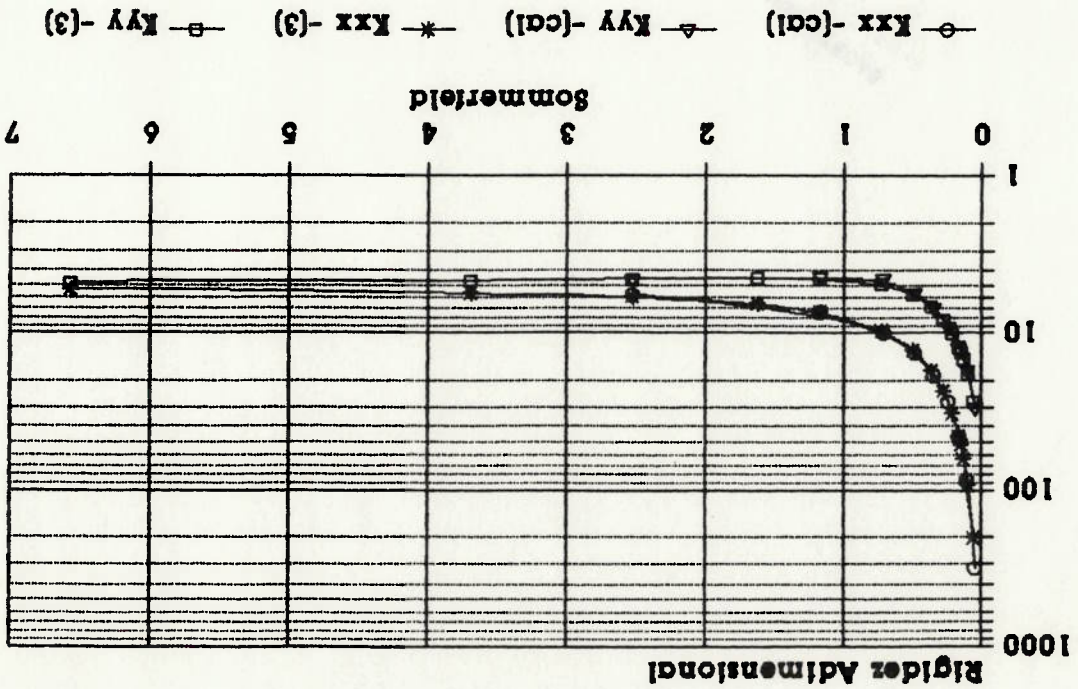


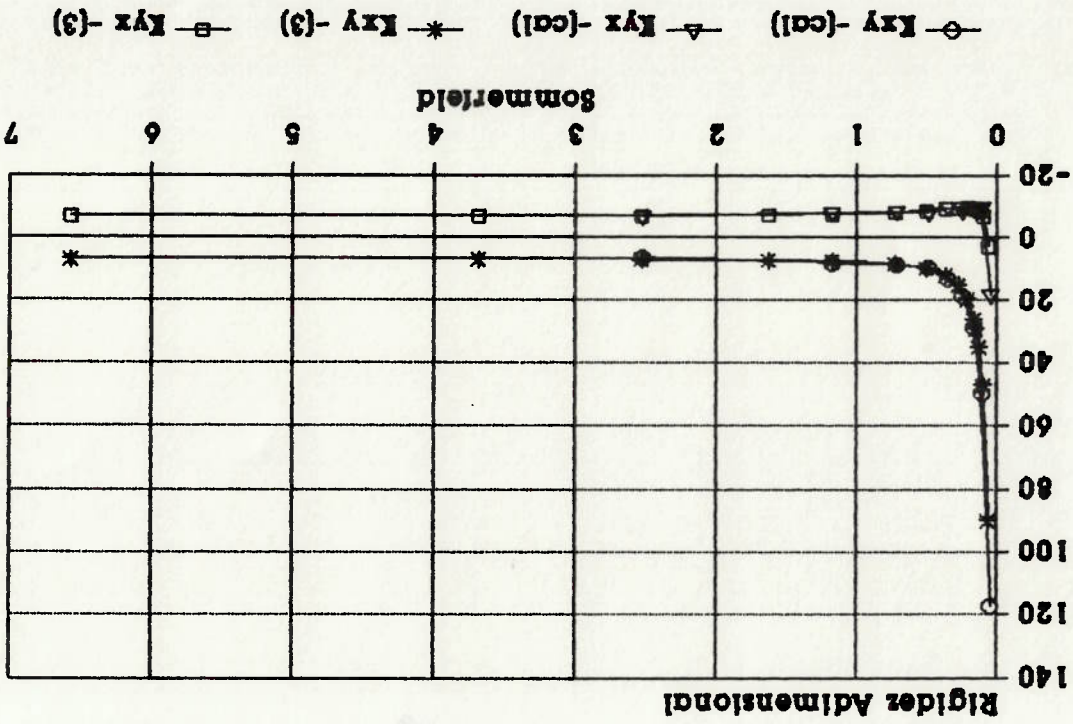
Figura 3.8d - Coeficientes Cruzados



**Mancal 3 Lobulos L/D = 0.6**  
**Comparacao - Calculo e Rel(3)**



**Figura 3.9a - Coeficientes Principais**



**Figura 3.9b - Coeficientes Cruzados**

Figura 3.9d - Coeficientes Cruzados

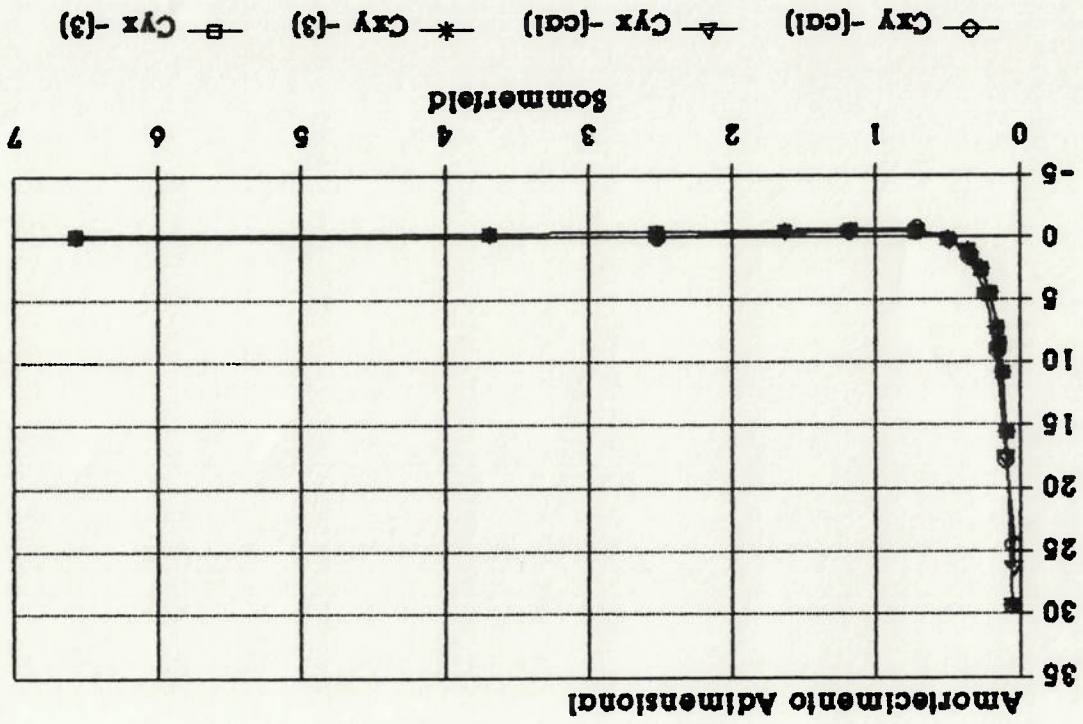
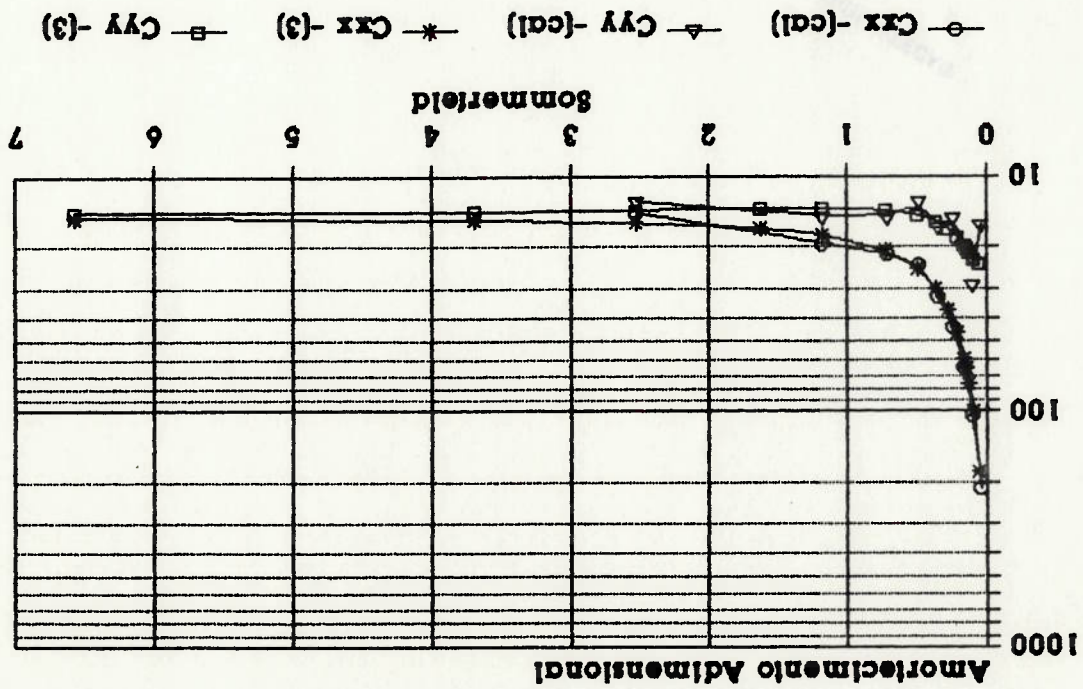


Figura 3.9c - Coeficientes Principales



Mancal 3 Lobulos L/D = 0.5  
Comparacao - Calculo e Ref(3)

Figura 3.10b - Coeficientes Cruzados

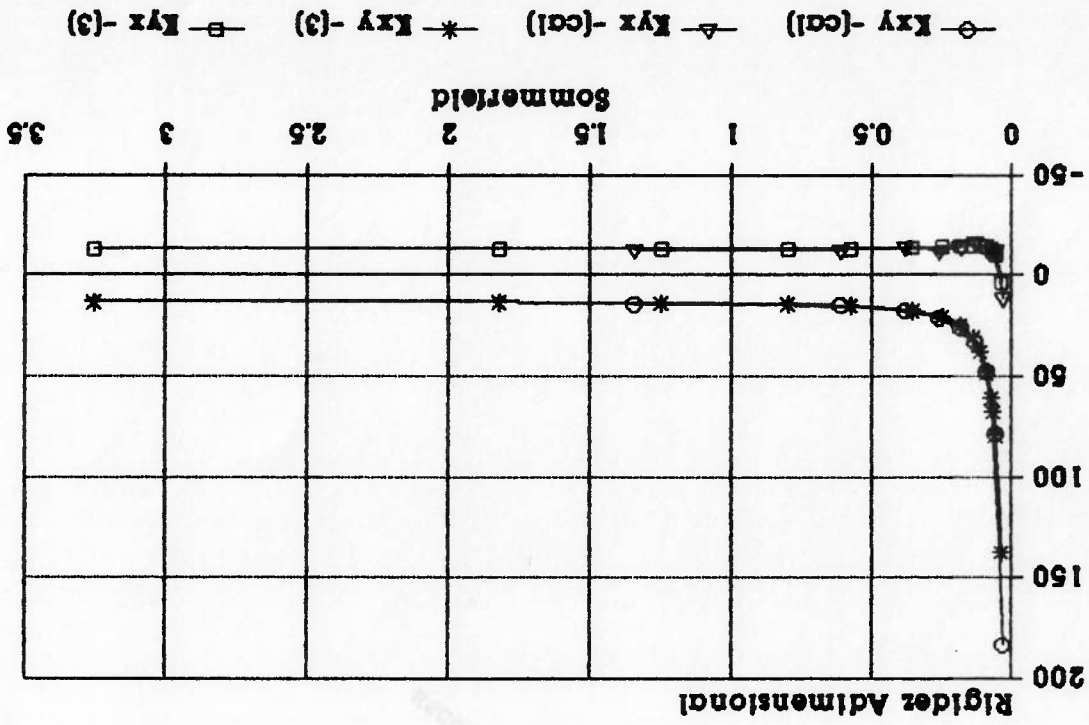
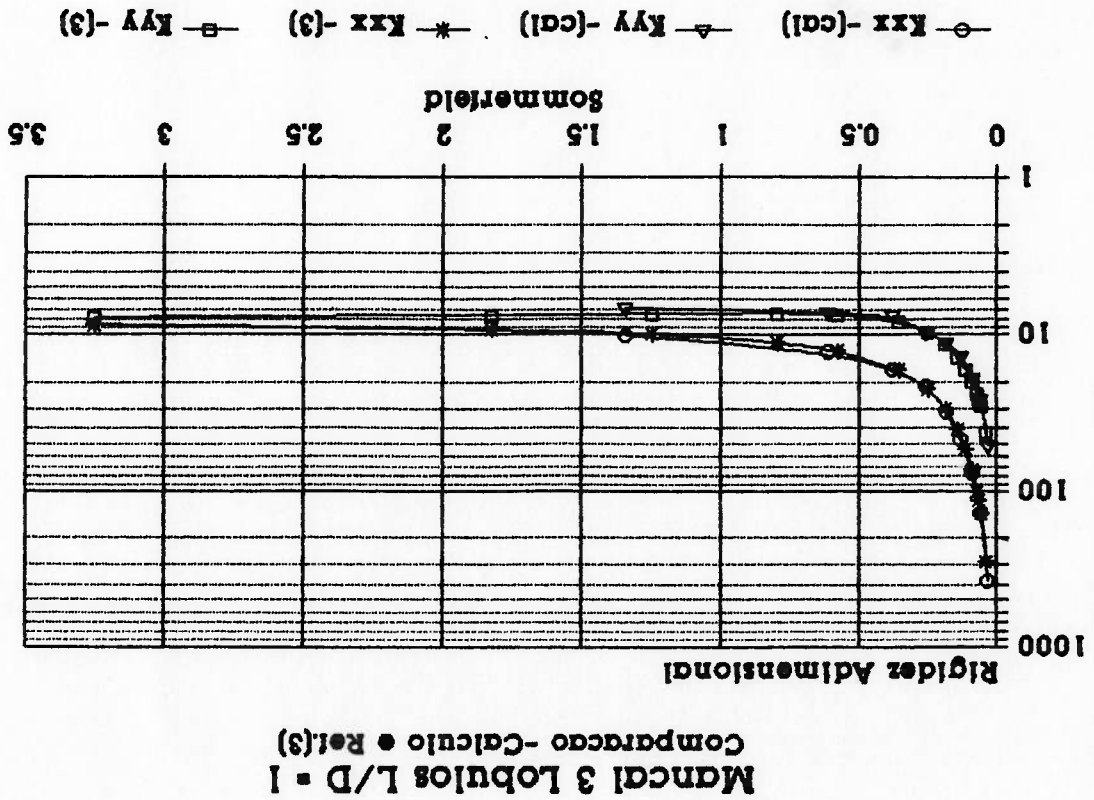


Figura 3.10a - Coeficientes Principales





Manca 3 Lobulos L/D = 1  
 Comparacao - Calculo e Ret(s)

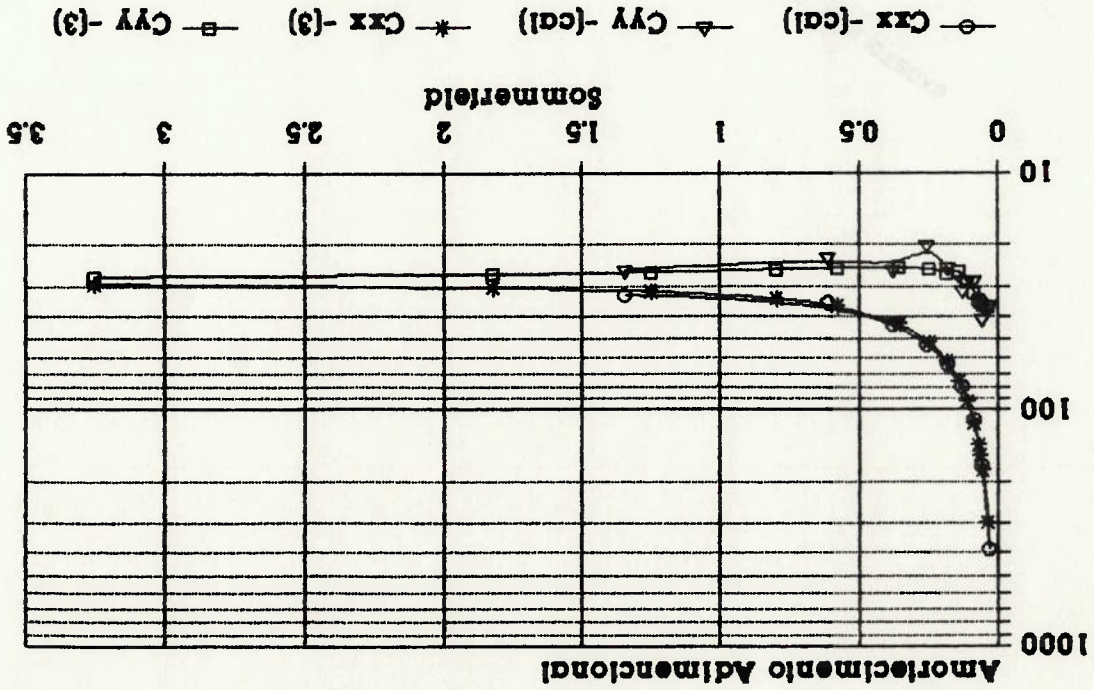


Figura 3.10C - Coeficientes Principais

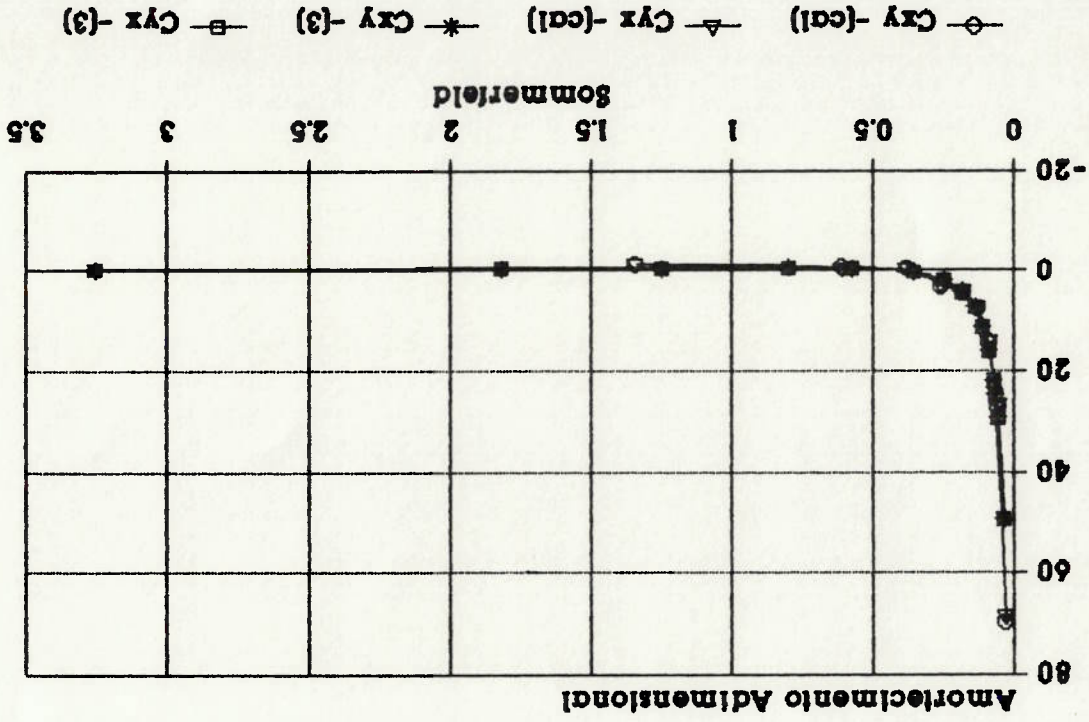


Figura 3.10d - Coeficientes Cruzados



Em projetos e modificações de máquinas rotativas de alta rotação, a primeira providência na análise dinâmica é a determinação das principais velocidades críticas não amortecidas e do sistema rotor-mancais, em função da simplicidade de cálculo e das importantes informações obtidas, como o mapa das críticas e os modos de vibrar. Além disso, na análise da resposta ao desbalanceamento é recomendável o conhecimento prévio dos principais modos de vibrar para colocação das massas de teste de desbalanceamento.

No capítulo I foi apresentado o equacionamento para determinação da velocidade crítica e da resposta ao desbalanceamento do rotor de Jeffcott, que pela simplicidade fornece resultados de aplicação restrita. Para rotores genéricos faz-se necessário a utilização de métodos numéricos para determinação das velocidades críticas.

Em vista disso, neste trabalho é descrito um método largamente utilizado devido a sua simplicidade e generalidade para o cálculo das velocidades críticas não amortecidas, baseado no artigo de Prohl [11].

Neste capítulo é apresentado o método de cálculo, descrição do programa e comparação de resultados, além dos conceitos fundamentais para uma análise de resultados reais. Um levantamento completo de artigos comparando vários métodos de cálculo e conceitos teóricos de velocidades críticas estão descritos na dissertação de Silva [36].

Do ponto de vista de aplicação prática, a coincidência da velocidade de rotação do rotor com uma das frequências naturais de processo positiva do sistema rotativo, ocasiona uma ressonância excitada principalmente pela força síncrona de desbalanceamento, que é chamada velocidade crítica  $\beta$  flexão. A força de desbalanceamento ocasiona um aumento de amplitude de orbitação do rotor na passagem pelas velocidades críticas, sendo esta condição extremamente danosa para o funcionamento das máquinas.

Neste caso, o rotor deformado de acordo com o modo de vibrar na frequência natural de processo do sistema rotativo, orbita ao redor da linha elástica do rotor posicionada em relação a posição de equilíbrio dos mancais. Para um observador externo, o rotor parece vibrar, porém essa vibração é a projeção da orbitação em uma direção.

O método de cálculo das velocidades críticas de sistemas reais rotor-mancais deve considerar a variação da rigidez dos mancais com a rotação, utilizando para isto a metodologia desenvolvida no capítulo 3. Além disso, o efeito do momento giroscópico do rotor, descrito a seguir neste capítulo, deve ser incluído na modelagem do rotor.

Os mancais são representados por molas com rigidez equivalente a do filme de fluido dos mancais.

O rotor é discretizado em trechos e modelado por discos conectados por barras, figura 4.1. Os discos têm a massa e o momento de inércia equivalentes ao trecho do rotor e as barras a rigidez e flexão equivalente aos trechos do eixo do rotor. O movimento de vibração se dá na direção x e inclinação no plano x, z, vide anexo B.

#### 4.1.1 - Modelo matemático

Para simplificação do modelo são desprezados o amortecimento dos mancais, o efeito de histerese do eixo, forças e influências aerodinâmicas e influência da selagem.

O método dos elementos finitos (M.E.F.), descrito por Ruhn [37], também tem sido utilizado para esse cálculo, ou a utilização de programas comerciais como ANSYS, NASTRAN, COSMOS, SAP etc. A principal dificuldade de execução através desses programas comerciais é a parametrização dos dados de entrada.

Neste trabalho o método utilizado para o cálculo das velocidades críticas são amortecidas e o método de matrizes de transferência (M.M.T.), baseado no artigo [1] de Prohl. Esse método é amplamente utilizado em função de sua simplicidade de cálculo e boa precisão de resultados, generalidade de aplicação e facilidade de parametrização dos dados de entrada, vantagens essas indispensáveis para elaboração de programas de computador.

#### 4.1 - Método de cálculo

A maior dificuldade encontrada para esse cálculo é a determinação da rigidez equivalente dos mancais. Nos casos em que a rigidez do eixo é menor que a rigidez dos mancais, é feita uma estimativa para a rigidez equivalente pela média entre a rigidez horizontal e a vertical dos coeficientes do mancal  $(k_{xx} + k_{yy})/2$ .

Os modos de vibrar representam as amplitudes relativas de vibração da linha elástica do rotor; sua análise é indispensável para o posicionamento de massas e mancais no rotor.

O mapa das críticas é um gráfico contendo as curvas da variação das principais velocidades críticas com a rigidez dos mancais e as curvas de rigidez dos mancais em função da rotação. Os cruzamentos das curvas identificam as velocidades críticas do sistema rotor-mancais, podendo ser avaliadas as posições das velocidades críticas com relação a velocidade de operação da máquina.

Para uma análise do comportamento dinâmico de um rotor, é conveniente avaliar os gráficos, "mapa das críticas e modos de vibrar", resultantes do procedimento de cálculo descritos neste capítulo.



Para discretização do rotor em trechos, é seguido o critério de separação conforme o escalonamento do eixo, mantendo a relação máxima do comprimento/diâmetro do trecho menor que 1. Uma discretização em segmentos menores aumentam o trabalho de processamento sem grande melhora de precisão de resultados. Uma grande quantidade de trechos implica em erros numéricos em função do número de multiplicações sucessivas das matrizes de transferência.

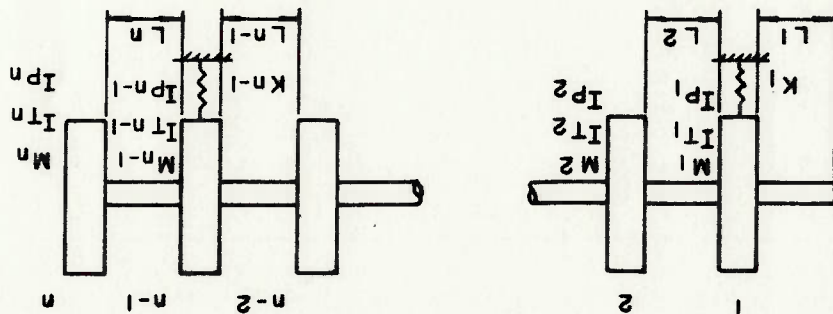


Figura 4.1 - Modelo do rotor discretizado

#### 4.1.2 - Método de matrizes de transferência

A partir do modelo matemático do sistema rotor-mancais são montadas as seguintes matrizes contendo as propriedades elásticas e inerciais para cada trecho:

- Matriz ponto ou de massa [M], contém as propriedades inerciais e os coeficientes das forças internas do trecho (efeito giroscópico e rigidez dos mancais), vide anexo C;

- Matriz campo ou de rigidez [K], contém as propriedades elásticas, vide anexo C.

A multiplicação das 2 matrizes [M], [K] determinam os coeficientes de influência, em função de  $\omega$  (ou rotação), dos esforços (momento fletor e força cortante) e dos deslocamentos (deflexão e inclinação) da extremidade direita do trecho em função da esquerda.

Compatibilizando os esforços e deslocamentos entre os trechos, o cálculo se processa de uma extremidade a outra do rotor, para uma certa frequência tentativa. Os valores das velocidades críticas são determinados quando é atingida a condição de esforços zero nas extremidades do rotor. Para isso, o determinante da matriz dos coeficientes de influência de esforços em função dos deslocamentos deve ser igual a zero. Para determinar essa condição deve-se pesquisar numericamente as mudanças de sinal do determinante.

#### 4.1.3 - Efeito giroscópico

Assumindo um disco fino, rígido e rigidamente montado em um eixo, considerando-se pequenas deflexões e o disco perfeitamente centrado, não resulta em forças. Havendo uma precessão resulta em uma força com direção para fora com valor  $m r a$ .

Pelo teorema do momento angular, a razão de variação no tempo do momento angular de um sistema em relação ao centro de massa é igual ao momento resultante das forças externas em relação a esse ponto. O momento angular é representado por 2 vetores devido a rotação, normal ao disco; e devido a precessão, na direção do plano do disco. As componentes desses vetores na direção de  $\Omega$  são constantes e não envolvem momento. As componentes na direção ortogonal somadas vetorialmente tem valor

$$I \omega_{sens} - I \omega_{sens} \cos \alpha \quad (4.1)$$

e direção de  $(-\alpha)$ .

Diferenciando esta quantidade em relação ao tempo, determina-se o momento agindo sobre o disco

$$2(I \omega_{sens} - I \omega_{sens} \cos \alpha) \dot{\alpha} \quad (4.2)$$

que é positivo para fora do papel, com tendência de redução da deflexão.

Com as condições admitidas de pequenas deflexões:  $\sin \alpha = \alpha$  e  $\cos \alpha = 1$ . Sendo o disco fino, o momento polar é 2 vezes o momento transversal. Inserindo  $h = \omega r^2$ , obtém-se o momento resultante sobre o disco:

$$I \omega^2 (2h - 1) \Omega \quad \text{com sentido positivo na direção de redução de } \alpha$$

Com a deformação do eixo as massas giram e orbitam ao redor da linha de centro dos mancais. Esse movimento introduz um esforço ao longo do rotor devido a aceleração de Coriolis, que é chamado efeito giroscópico.

No modelo, somente é considerada a precessão direta, isto é, precessão e rotação no mesmo sentido e frequência. Para este caso o esforço introduzido é no sentido do alinhamento da precessão com a rotação do disco.



- Estabelecidas as condições de extremidades livres do rotor, obtêm-se como condições de contorno:

$$\begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M \\ V \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \theta \\ M \\ V \end{bmatrix}^0$$

- Determinação da matriz dos coeficientes de influência dos estorços e deslocamentos de uma extremidade do rotor em relação a outra.

{X} - Vetor de estado, contém os estorços e deslocamentos das seções entre trechos

$$\{X\} = [M]^n \cdot [K]^n \cdot [M]^{n-1} \cdot [K]^{n-1} \cdot \dots \cdot [M]^1 \cdot [K]^1 \cdot \{X\}^0$$

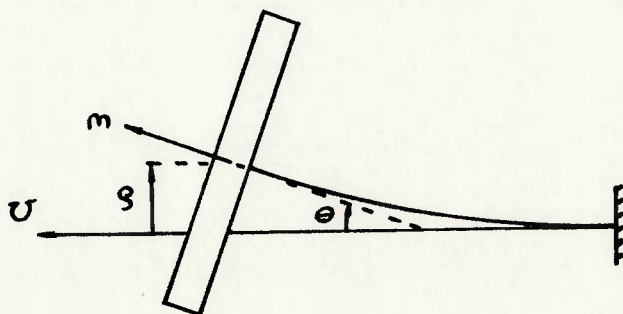
- Realização das multiplicações sucessivas do primeiro ao último trecho;

- Montagem das matrizes de transferência em função da velocidade de rotação tentativa;

São os seguintes os procedimentos para determinação das velocidades críticas de um rotor para uma certa rigidez das mancais:

#### 4.2 - Procedimento de cálculo

Figura 4.2a - Disco com rotação e pressão síncrona



$$\begin{array}{l} M_n = 0 \\ V_n = 0 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} M_o = 0 \\ V_o = 0 \end{array} \right.$$

- Essas condições implicam no sistema de 2 equações a 2 incógnitas abaixo, com termos independentes nulos. Para que o sistema tenha solução não trivial o determinante dos coeficientes deve ser igual a zero.

$$\left[ \begin{array}{l} M = n X + n e \\ V = n X + n e \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 31 \quad 32 \quad 0 \\ 41 \quad 42 \quad 0 \end{array}$$

$$\det D = 0$$

portanto:

$$n \cdot n - n \cdot n = 0$$

- As velocidades críticas são determinadas pela pesquisa de mudança de sinal do determinante em função da frequência tentativa, ou seja os zeros da função  $\det D(\omega) = 0$ .

O procedimento descrito é feito para vários valores de rigidez dos mancais para determinação do mapa das críticas. Os modos de vibrar são determinados a partir dos valores das deflexões contidos nos vetores de estado de cada passo entre trechos.

#### 4.3 - Descrição do programa

PROGRAMA CRITICAS: Cálculo das velocidades críticas não amortecidas

DEFINICAO DAS VARIAVEIS

CARACTERISTICAS DOS ESTAGIOS:  
CARACTERISTICAS DOS MANCAIS:

CONSTANTES

ENTRADA DE DADOS DO ROTOR

VERIFICACAO DOS DADOS

CORRECOES

GERACAO DE ARQUIVO DE DADOS

CALCULO DOS ESTAGIOS DO ROTOR

ENTRADA PARA TIPO DE CALCULO

LEIA : MCRIT

SE MCRIT = 1 - Mapa das criticas - Rotação constante

SE MCRIT = 2 - Modos de vibrar - Varredura de rotação

VARIACAO DA RIGIDEZ DOS MANCAIS

CALCULO DOS MANCAIS

VERIFICACAO DE VELOCIDADE CRITICA

SE Determinante  $\times$  Determinante anterior  $< 0 \rightarrow$  Mudança de sinal e passagem pelo 0 (zero)

MATRIZES DE TRANSFERENCIA

MULTIPLICACAO DAS MATRIZES DE TRANSFERENCIA

do 1o ao NEq Estágio

SOLUCAO DO SISTEMA

DETERMINACAO DO MODO DE VIBRAR

SE variação da rigidez

Mostrar gráfico do mapa das criticas

CALL MAPA

SE rigidez constante

Mostra gráfico dos modos de vibrar

CALL MODO

FIM



PROGRAMA CRITICAS

DEFINICAO DAS VARIAVEIS

CARACTERISTICAS DOS ESTABIOS:

- NE - Número de estágios
- COMP - Comprimento
- DIAM - Diâmetro
- MASS - Massa
- TRAN - Inércia transversal
- POLA - Inércia polar
- EJ - Módulo de elasticidade x inércia segão círculo
- GAS - Módulo transversal de elasticidade x área segão círculo
- RIG - Rigidez do mancal do estágio
- X - Vetor de estado para o estágio

CARACTERISTICAS DOS MANCAIS:

- NM - Número de mancais
- RIGID - Rigidez
- TABM - Número do estágio do mancal

MATRIZES:

- A - Matriz de transferência do estágio
- B, C - Matrizes auxiliares
- DET - Determinante de C

ROTACAO: OMEGA

CONSTANTES

- PI =  $4 \times \text{ATAN}(1.)$
- 6
- RD =  $7.85 \times 10$  - Massa específica do aço
- 5
- ELAST =  $2.08 \times 10$  - Módulo de elasticidade do aço
- 4
- ELASTR =  $8.0 \times 10$  - Módulo transversal de elasticidade do aço

ENTRADA DE DADOS DO ROTOR

SE dados em arquivo: Abertura de arquivo SE NÃO Entrada pelo terminal

LEIA : NE

LOOP : N = 1 a NE e LEIA : COMP, DIAM, MASS, TRAN, POLA

LEIA : NM

LOOP : M = 1 a NM e LEIA : TABM, RIGID

VERIFICACAO DOS DADOS

LOOP : N = 1 a NE e IMPRIME : M, COMP, DIAM, MASS, TRAN, POLA

LOOP : M = 1 a NM e IMPRIME : M, TABM, RIGID

CORRECOES

GERACAO DE ARQUIVO DE DADOS

CALCULO DOS ESTABIOS DO ROTOR

Varredura exponencial : RIGI = 10 a RIGF = 10  
 MK = Numero do ponto 1 a 400 e acrescimos de 80  
 RZ = 10Log (RIGF/RIGI) / 400 x (MK-1) + Log (RIGI)

SE MCRIT = 1  
 RPMI = 10 - Rotacao inicial  
 RPMF = 30.000 - Rotacao final  
 DRPM - Acrecimo de rotacao

VARIACAO DA RIGIDEZ DOS MANCAIS

SE MCRIT = 2  
 RIG(TABM(N)) = RIGID(N) x 10

RIGID(1)  
 RIG(TABM(N)) = ----- x 10  
 RIGID(N)

SE MCRIT = 1  
 CALCULO DOS MANCAIS

SE MCRIT = 1 - Mapa das criticas - Rotacao constante  
 SE MCRIT = 2 - Modos de vibrar - Varredura de rotacao

LEIA : MCRIT  
 ENTRADA PARA TIPO DE CALCULO

GAS(N) = -----  
 PI x DIAM(N) x ELASTR

EJ(N) = -----  
 PI x DIAM(N) x ELAST

COMP(N) = COMP(N) x 10

POLA(N) = IPB + POLA(N) x 10

TRAN(N) = ITB + TRAN(N) x 10

MASS(N) = MAB + MASS(N)

$$IPB = \frac{\sqrt{\frac{DIAM(N) \times COMP(N)}{DIAM(N+1) \times COMP(N+1)} + \frac{RO \times PI}{32}}}{4}$$

$$ITB = \frac{\sqrt{\frac{DIAM(N) \times COMP(N)}{DIAM(N+1) \times COMP(N+1)} + \frac{RO \times PI}{32}}}{4} + \frac{\sqrt{\frac{DIAM(N)}{DIAM(N+1)}}}{3} + \frac{\sqrt{\frac{DIAM(N+1)}{DIAM(N)}}}{3}$$

$$MAB = \frac{\sqrt{\frac{DIAM(N) \times COMP(N) + DIAM(N+1) \times COMP(N+1)}{RO \times PI}}}{2}$$

SE RPM < 100.000 --> DRPM = 1000  
 SE RPM < 10.000 --> DRPM = 100  
 SE RPM < 1.000 --> DRPM = 10  
 SE RPM < 100 --> DRPM = 1

SE MCRIT = 2  
 RZ = 1

VERIFICACAO DE VELOCIDADE CRITICA  
 SE Determinante x Determinante anterior < 0 --> Mudanca de sinal e passagem pelo 0 (zero)

MATRIZES DE TRANSFERENCIA

$A(1,1,N) = 1$   
 $A(1,2,N) = COMP(N)$   
 $A(1,3,N) = A(1,2,N) / (2 \times EJ(N))$   
 $A(1,4,N) = -A(1,2,N) / (6 \times EJ(N)) + A(1,2,N) / GAS(N)$   
 $A(2,1,N) = 0$   
 $A(2,2,N) = 1$   
 $A(2,3,N) = A(1,2,N) / EJ(N)$   
 $A(2,4,N) = -A(1,3,N)$   
 $A(3,1,N) = 0$   
 $A(3,2,N) = TRAN(N) + OMEGA2$   
 $A(3,3,N) = A(3,2,N) \times A(2,3,N) + 1$   
 $A(3,4,N) = -A(3,2,N) \times A(1,3,N) - A(1,2,N)$   
 $A(4,1,N) = (RIG(N) \times RZ - MASS(N) \times OMEGA2)$   
 $A(4,2,N) = A(4,1,N) \times A(1,2,N)$   
 $A(4,3,N) = A(4,1,N) \times A(1,3,N)$   
 $A(4,4,N) = A(4,1,N) \times A(1,4,N) + 1$

MULTIPLICACAO DAS MATRIZES DE TRANSFERENCIA  
 do 1º ao N-ésimo Estagio  
 SOLUCAO DO SISTEMA

$DET = C(3,1) \times C(3,2) - C(3,2) \times C(4,1)$   
 $DET = C(3,1) \times C(4,2) - C(3,2) \times C(4,1)$

DETERMINACAO DO MODO DE VIBRACAO

SE MCRIT = 2

NM - Número da velocidade critica  
 $X(1,1,NM) = 1$   
 $X(2,1,NM) = -C(3,1) / C(3,2)$   
 $X(3,1,NM) = 0$   
 $X(4,1,NM) = 0$

SE MCRIT = 1

Mostrar gráfico do mapa das criticas  
 CALL MAPA

SE MCRIT = 2

Mostra gráfico dos modos de vibrar  
 CALL MODO

FIN





Tabela 4.2 - discretização do rotor com 1 disco central e outro na extremidade

N	COMPRIM [mm]	DIAMETRO [mm]	MASSA [kg]	I.TRANSV [kg.mm <sup>2</sup> ]	I.POLAR [kg.mm <sup>2</sup> ]
1:	.1000E-01	63.50	.0000	.0000	.0000
2:	76.20	63.50	.0000	.0000	.0000
3:	63.50	63.50	.0000	.0000	.0000
4:	63.50	63.50	.0000	.0000	.0000
5:	97.79	63.50	.0000	.0000	.0000
6:	71.76	63.50	.0000	.0000	.0000
7:	71.76	63.50	.0000	.0000	.0000
8:	76.20	152.4	.0000	.0000	.0000
9:	76.20	152.4	.0000	.0000	.0000
10:	71.76	63.50	.0000	.0000	.0000
11:	71.76	63.50	.0000	.0000	.0000
12:	97.79	63.50	.0000	.0000	.0000
13:	63.50	63.50	.0000	.0000	.0000
14:	63.50	63.50	4.080	8950.	.1395E+05
15:	76.20	63.50	4.080	8950.	.1395E+05

Tabela 4.1 - discretização do rotor com 1 disco central

N	COMPRIM [mm]	DIAMETRO [mm]	MASSA [kg]	I.TRANSV [kg.mm <sup>2</sup> ]	I.POLAR [kg.mm <sup>2</sup> ]
1:	.1000E-01	63.50	.0000	.0000	.0000
2:	76.20	63.50	.0000	.0000	.0000
3:	63.50	63.50	.0000	.0000	.0000
4:	63.50	63.50	.0000	.0000	.0000
5:	97.79	63.50	.0000	.0000	.0000
6:	71.76	63.50	.0000	.0000	.0000
7:	71.76	63.50	.0000	.0000	.0000
8:	76.20	152.4	.0000	.0000	.0000
9:	76.20	152.4	.0000	.0000	.0000
10:	71.76	63.50	.0000	.0000	.0000
11:	71.76	63.50	.0000	.0000	.0000
12:	97.79	63.50	.0000	.0000	.0000
13:	63.50	63.50	.0000	.0000	.0000
14:	63.50	63.50	.0000	.0000	.0000
15:	76.20	63.50	.0000	.0000	.0000

Nas figuras 4.3a e 4.3b são apresentados os mapas das críticas para o rotor com as 3 configurações de montagem, de onde foram retirados os valores das 3 primeiras velocidades críticas, mostrados na tabela 4.5, para comparação de resultados.

Comparando os valores da tabela 4.5 foi observada uma diferença média de 10% para as 3 velocidades críticas dos 3 rotores analisados. Esses resultados podem ser considerados bons, comprovando os resultados do programa desenvolvido. As velocidades críticas calculadas, de um modo geral, foram maiores

Tabela 4.4 - Coeficientes de rigidez e amortecimento dos mancais em função da rotação

Rotação [rpm]	Rigidez [N/mm] x 10.000			amortecimento [N.s/mm]		
	1 disco cada man.	2 discos man. leve man. cart.	3 discos cada man.	1 disco cada man.	2 discos man. leve man. cart.	3 discos cada man.
6050	1.42	1.42	1.49	1.47	2.07	1.49
8100	1.86	1.89	2.15	2.07	2.73	2.77
11000	2.68	2.70	2.77	2.73	4.89	5.08
16000	4.59	4.70	5.08	4.89	8.97	9.01
24000	8.81	8.86	9.01	8.97		
6050	25.9	27.3	29.8	29.4	29.8	29.8
8100	27.3	28.2	30.5	29.8	30.5	30.5
11000	30.3	31.2	32.6	32.1	32.6	32.6
16000	38.2	39.1	40.5	39.9	40.5	40.5
24000	46.6	47.1	48.0	47.8	48.0	48.0

Tabela 4.3 - discretização do rotor com 1 disco central e 2 nas extremidades

N	COMPRIM [mm]	DIAMETRO [mm]	MASSA [Kg]	I, TRANSV [Kg.mm <sup>2</sup> ]	I, POLAR [Kg.mm <sup>2</sup> ]
1:	.1000E-01	63.50	4.080	8935.	.1392E+05
2:	76.20	63.50	4.080	8935.	.1392E+05
3:	63.50	63.50	.0000	.0000	.0000
4:	63.50	63.50	.0000	.0000	.0000
5:	97.79	63.50	.0000	.0000	.0000
6:	71.76	63.50	.0000	.0000	.0000
7:	71.76	63.50	.0000	.0000	.0000
8:	76.20	63.50	.0000	.0000	.0000
9:	76.20	152.4	.0000	.0000	.0000
10:	71.76	63.50	.0000	.0000	.0000
11:	71.76	63.50	.0000	.0000	.0000
12:	97.79	63.50	.0000	.0000	.0000
13:	63.50	63.50	.0000	.0000	.0000
14:	63.50	63.50	4.080	8935.	.1392E+05
15:	76.20	63.50	4.080	8935.	.1392E+05



que as publicadas na referência [2].

A maior diferença encontrada foi de 23% nas 1<sup>as</sup> velocidades críticas do rotor nas configurações de 1 e 3 discos, possívelmente relacionada com uma maior rigidez do eixo no modelo calculado, uma vez que foi admitido o diâmetro integral do eixo na parte central do modelo. As diferenças na rigidez e massa do modelo foram acentuadas pela distribuição de massa do correspondente modo de vibrar.

Vel. crit. [rpm]	1 <sup>a</sup>		2 <sup>a</sup>		3 <sup>a</sup>	
	calc.	ref. [2]	calc.	ref. [2]	calc.	ref. [2]
1 disco	8700	7200	20800	17800	24200	24500
2 discos	5800	6100	8700	8700	22500	21000
3 discos	6200	5000	7100	5800	11000	11000

Tabela 4.5 - Comparação das velocidades críticas calculadas e referência [2]

Nas figuras 4.3b a 4.5b são mostrados os modos de vibrar relacionados com as 3 primeiras velocidades críticas não amortecidas para as 3 configurações de montagem do rotor. O conhecimento prévio dos modos de vibrar é indispensável para o posicionamento das massas de desbalanceamento a serem utilizados na determinação das correspondentes velocidades críticas através da resposta ao desbalanceamento, conforme será apresentado no próximo capítulo.

**MAPA DAS CRITICAS**

Calculo rotor com 1 disco

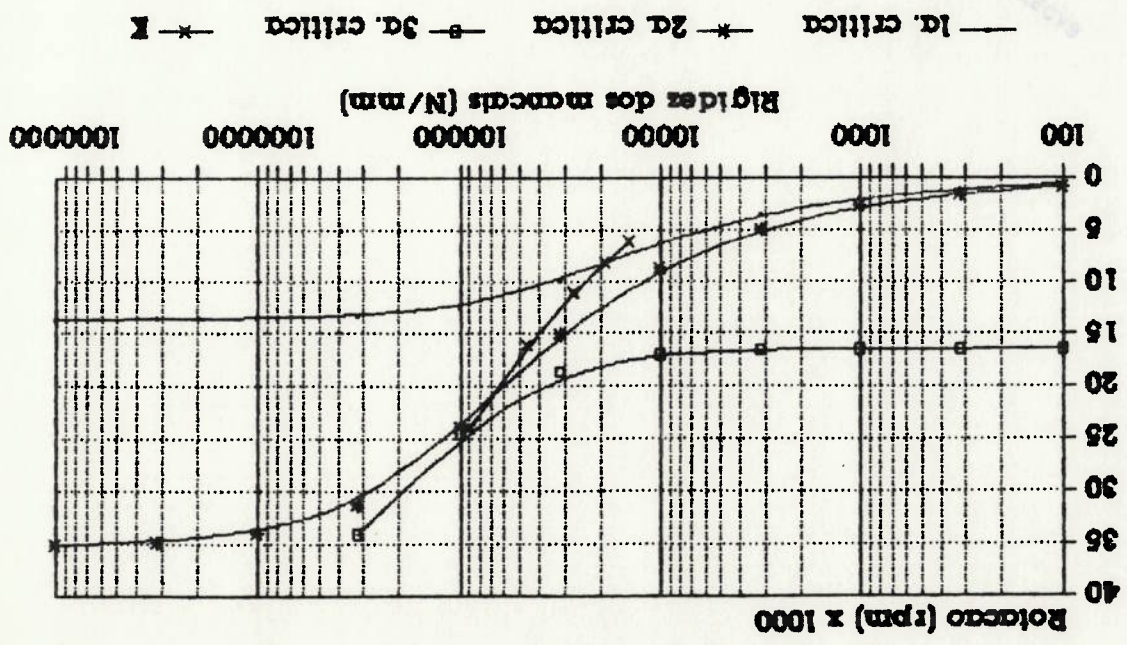


Figura 43a - Velocidade critica x rigidez dos mancais e rigidez dos mancais x rotacao

**Modos de vibração para rigidez dos mancais nas velocidades criticas**

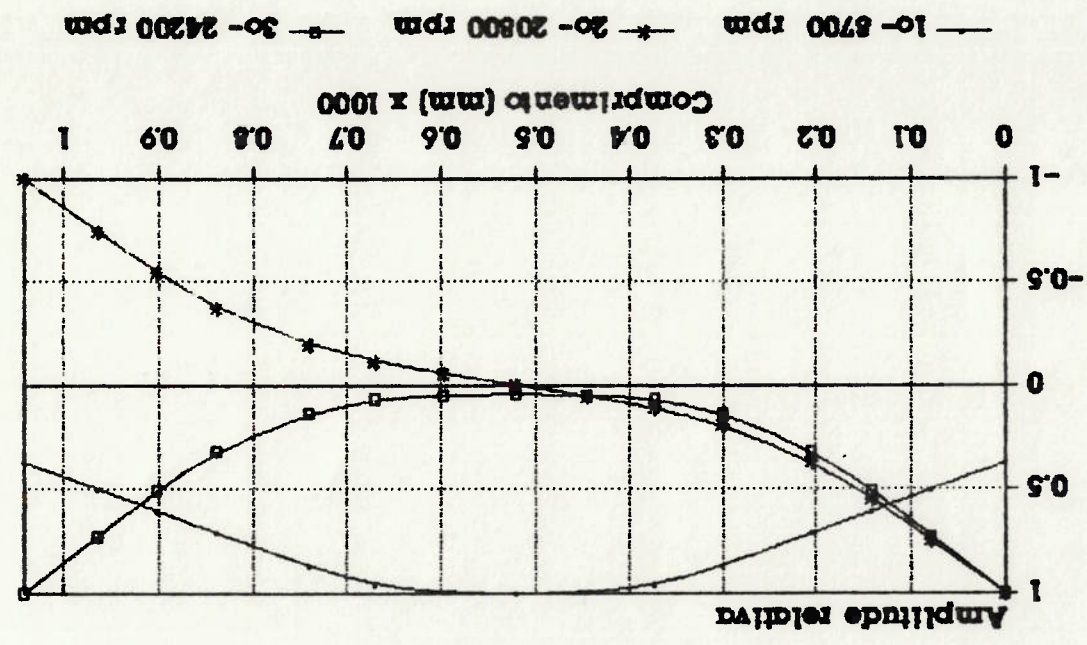
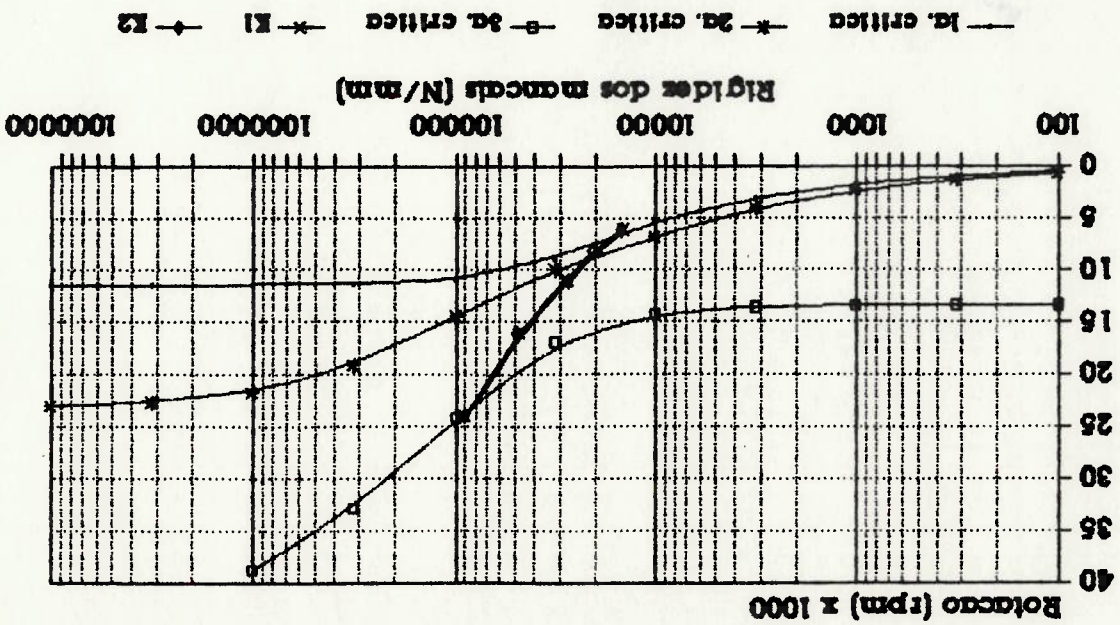


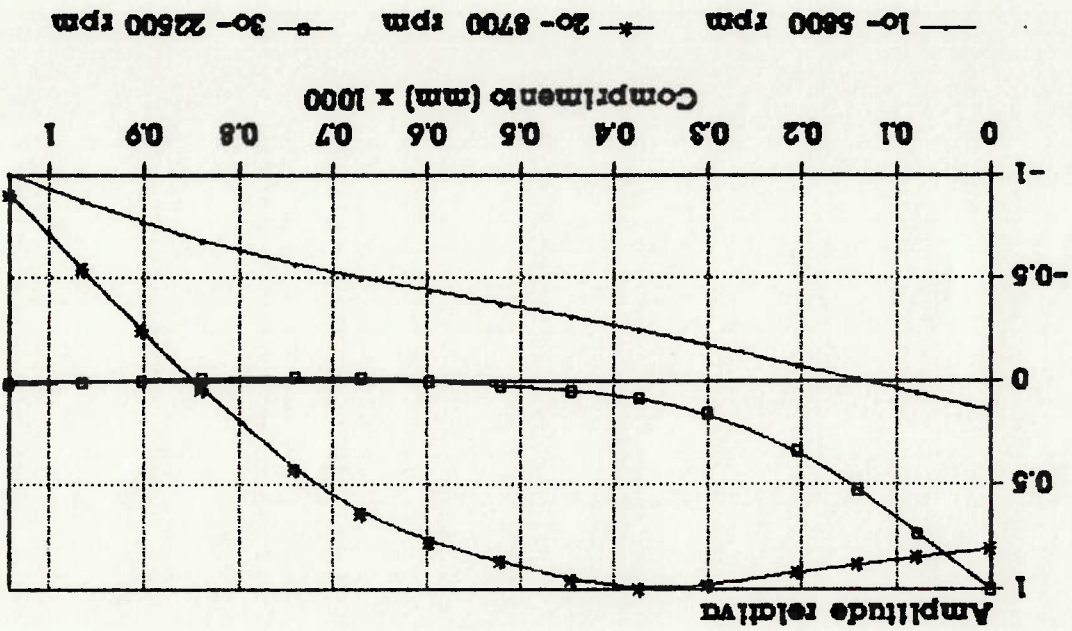
Figura 43b - Amplitude relativa x Comprimento do eixo - rotor 1 disco

**MAPA DAS CRITICAS**  
**Calculo rotor com 2 discos**



**Figura 44a - Velocidade critica x rigidez dos mancais e rigidez dos mancais x rotacao**

**Modos de vibrar**  
**para rigidez dos mancais nas**  
**velocidades criticas**



**Figura 44b - Amplitude relativa x**  
**Compimento do eixo - rotor 2 discos**



# MAPA DAS CRITICAS

Calculo rotor com 3 discos

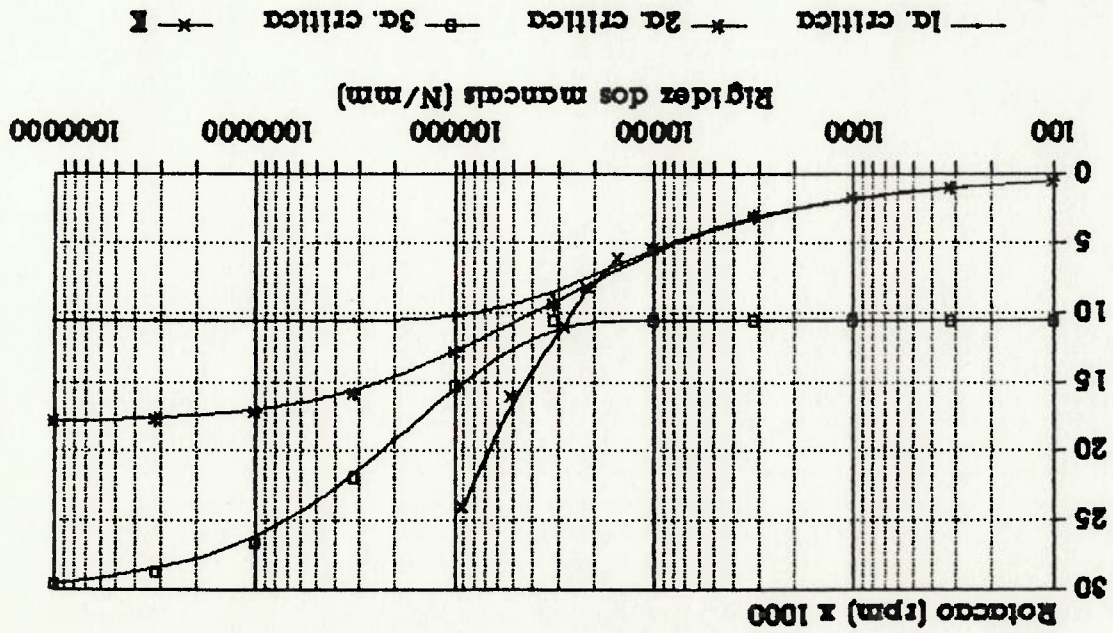


Figura 4.5a - Velocidade critica x rigidez dos mancais e rigidez dos mancais x rotaçao

# Modos de Vibraçao para rigidez dos mancais nas velocidades criticas

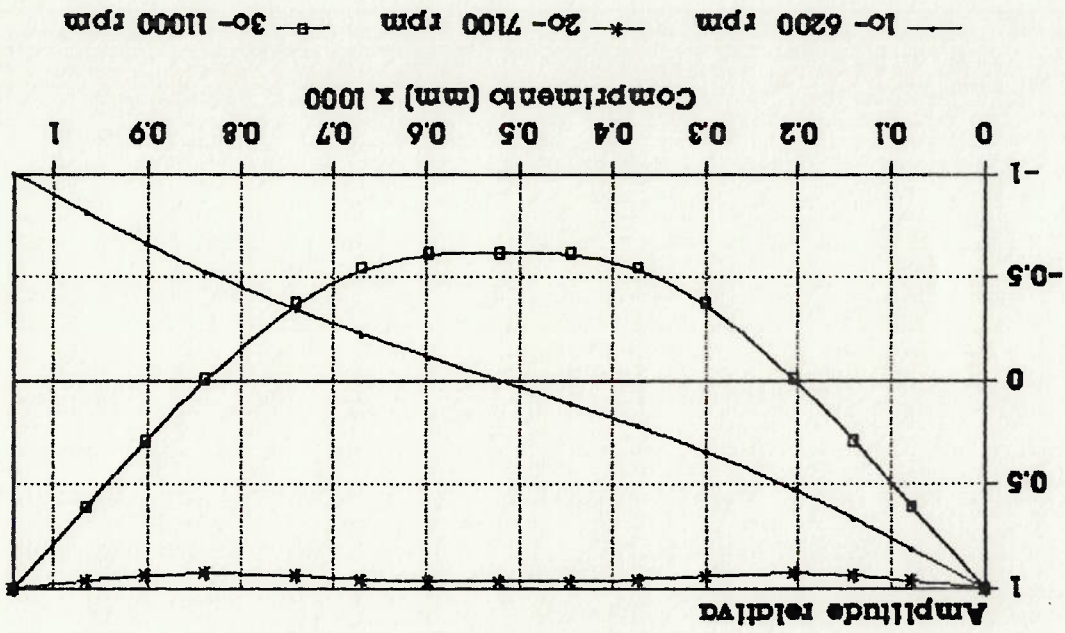


Figura 4.5b - Amplitude relativa x Comprimento do eixo - rotor 3 discos

O procedimento usual de projeto dinâmico de motores compreende o ajuste da configuração do rotor e dos mancais para que as velocidades críticas não amortecidas estejam fora da faixa de operação da máquina. Este procedimento implica em erros, principalmente por não considerar o amortecimento dos mancais e pela dificuldade na determinação de uma rigidez equivalente uniforme a partir dos 4 coeficientes  $k_{xx}$ ,  $k_{xy}$ ,  $k_{yx}$  e  $k_{yy}$  dos mancais.

Apesar do cálculo das velocidades críticas ser naturalmente muito valioso no projeto de motores, somente fornece parte das informações necessárias ao projeto. Além disso, não considera o amortecimento dos mancais, apresentando tendência de fornecer valores de velocidades críticas menores que os reais.

O mapa das críticas serve como resultado intermediário numa análise dinâmica de um rotor, possibilitando verificar a posição das críticas em relação a faixa de operação da máquina.

O modo de vibrar depende do nível e da distribuição do desbalanceamento ao longo do eixo e do regime de operação, sendo que as deflexões da linha elástica do rotor não estão em geral em um único plano axial.

Uma análise dinâmica mais completa inclui o cálculo da amplitude de vibração para uma distribuição particular de desbalanceamentos, com a presença de amortecimento dos mancais.

Desta forma, para determinação das velocidades críticas considerando o amortecimento e os 4 coeficientes de rigidez dos mancais, existem 2 métodos básicos de cálculo:

- Cálculo das velocidades críticas amortecidas determinando-se os autovalores do sistema rotor-mancais. Esse método foi apresentado por Lund no artigo [5].

- Cálculo da resposta ao desbalanceamento determinando as amplitudes máximas de vibração em função da rotação para um ou mais pontos do rotor, supondo-se um desbalanceamento adequado excitando os principais modos de vibrar, e ob tendo-se como consequência as correspondentes velocidades críticas.

Como foi observado pela análise do rotor de Jeffcott no capítulo 1, o amortecimento do sistema é o principal mecanismo de controle da amplitude de vibração durante a passagem por uma velocidade crítica, sendo indispensável leva-lo em consideração na avaliação de uma máquina rotativa. O grau de amortecimento do sistema pode ser avaliado pela agudez da resposta ao desbalanceamento na passagem por uma velocidade crítica ou pela parte real dos autovalores complexos no cálculo de velocidades críticas amortecidas.



Desta forma, para uma maior precisão na análise do comportamento dinâmico de rotores, deve ser considerado o amortecimento dos mancais de deslizamento, que é a principal fonte de dissipação de energia mecânica em máquinas rotativas. Neste caso a determinação do comportamento dinâmico do sistema é feito pela obtenção dos autovalores do sistema rotativo, conforme referência [5], ou pela resposta ao desbalanceamento, através do cálculo das amplitudes de orbitação do rotor para uma varredura de rotação.

Pelo cálculo da resposta ao desbalanceamento com um posicionamento adequado das massas de desbalanceamento, pode-se determinar com boa precisão as velocidades críticas, a sensibilidade do sistema durante a passagem por essas velocidades e o grau de amortecimento do sistema.

Além disso, pode-se determinar o grau e os planos de balanceamento mais adequados para uma operação mais suave da máquina.

As principais vantagens na determinação da resposta ao desbalanceamento são:

- Verificar a sensibilidade do sistema à presença de massas desbalanceadoras tais como: inclusões, quebra de palhetas, erosão etc.
- Estabelecimento de níveis máximos permitíveis de desbalanceamento para rotores flexíveis.
- Estabelecimento de folgas máximas em mancais e selos.
- Auxílio na escolha de planos de balanceamento.
- Cálculo das velocidades críticas.
- Auxílio no posicionamento de massas, inércias e mancais no rotor.

No capítulo 1 foi apresentado o equacionamento da resposta ao desbalanceamento do rotor de Jeffcott, modelo bastante simplificado, que é útil para o entendimento do movimento de um rotor. A resposta ao desbalanceamento de rotores reais deve ser determinada através de métodos numéricos em função do número de graus de liberdade. Neste trabalho é utilizado o método de matrizes de transferência.

O cálculo da resposta ao desbalanceamento é feito através do modelamento do rotor e mancais em uma simulação de funcionamento da máquina durante uma varredura de rotação para um desbalanceamento definido.

O rotor é modelado por discos com massas e momentos de inércia concentrados ligados por barras uniformes e cada mancal é modelado por 4 coeficientes de rigidez e 4 de amortecimento.

Neste capítulo é apresentado o procedimento e equacionamento desenvolvidos para o cálculo numérico da resposta ao desbalanceamento, as principais vantagens desse cálculo durante o projeto ou modificações de máquinas rotativas, e a comparação de



resultados calculados com obtidos na literatura.

Além disso, neste capítulo é apresentada também uma comparação de resultados obtidos no rotor testado com os resultados calculados pelo método desenvolvido neste trabalho.

### 5.1 - Método de cálculo

Para determinação da resposta ao desbalanceamento de um sistema rotor-mancais genérico faz-se necessário utilizar um método numérico. Neste trabalho o método escolhido foi o de matrizes de transferência (M.M.T.), baseado no artigo de Lund [2], principalmente pela simplicidade de algoritmo, baixo tempo de processamento e pequena memória de computador necessária para armazenamento das variáveis.

Outro método que também tem sido utilizado é o de elementos finitos (M.E.F.), que apresenta algumas desvantagens em relação ao (M.M.T.), tais como: a necessidade de inversão de grandes matrizes e cálculo de seus autovalores para cada rotação, que é uma tarefa numericamente trabalhosa em função do número de graus de liberdade (16 para cada elemento); utilização de variáveis complexas; obtenção de matrizes não simétricas; e variação dos coeficientes de rigidez, amortecimento dos mancais e efeito do momento giroscópico com a rotação de cálculo.

### 5.1.1 - Método de matrizes de transferência

O sistema é dividido em segmentos e são montadas as matrizes de rigidez e massa de modo semelhante ao descrito no item 4.1.2.

Com a introdução do amortecimento dos mancais e a força desbalanceadora é necessário a manipulação de variáveis complexas e o equacionamento do movimento de vibração em duas direções x e y. Essas direções são fixas no espaço para permitir a utilização dos parâmetros dos mancais calculados no capítulo 3. Entretanto, as propriedades do rotor (inércia, rigidez) devem ser assimétricas para que seja válido o equacionamento.

Neste caso, definimos o vetor de estado como sendo:

$$\{X\} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ Mx \\ My \\ Vx \\ Vy \end{bmatrix}$$

O equacionamento dos elementos elásticos e de inércia que permite a montagem das matrizes de rigidez e massa, referência [11], é mostrado no anexo B.

O momento giroscópico, referência [11], neste caso, acarreta termos cruzados em  $e$  e  $s$ , uma vez que para processo síncrono

$$M_{EX} = -I_p \cdot \omega \cdot s \quad e \quad M_{EY} = I_p \cdot \omega \cdot e$$

Deve-se notar que o vetor de estado é um vetor girante complexo

$\{X\} = \{Xr\} + i \{Xi\}$ , sendo que a parte imaginária está atrasada de  $1/4$  do período de rotação em relação à parte real, ou seja por exemplo:

~~$$Y = Yr \cos \omega t + Yi \sin \omega t.$$~~

O deslocamento em cada segundo do rotor é imposto adicionando-se aos termos  $Vx$  e  $Vy$  do vetor de estado de cada ponto, as forças rotativas de deslocamento como segue:

$$Vx = Vx + Ux \cdot \omega - i \cdot Uy \cdot \omega$$

$$Vy = Vy + Uy \cdot \omega + i \cdot Ux \cdot \omega$$

### 5.2 - Procedimento de cálculo

São os seguintes os procedimentos para determinação da resposta ao deslocamento de um rotor apoiado em mancais de deslizamento, para uma certa velocidade de rotação:

- Montagem das matrizes de transferência em função da velocidade de rotação;

$$\{X\} = [M] \cdot \{X\} \cdot n \quad [M] \cdot \{X\} \cdot n-1 \quad \dots \quad [M] \cdot \{X\} \cdot 1 \quad \{X\} \cdot 0$$

- Imposição de 4 deformações unitárias, separadamente para cada variável  $x$ ,  $y$ ,  $e$  e  $s$ , na seqüência "0" do rotor, mantendo as condições de contorno;

$$\begin{array}{l} Mx_0 = 0 \\ My_0 = 0 \\ Vx_0 = 0 \\ Vy_0 = 0 \end{array}$$

- Realização das multiplicações sucessivas do primeiro ao último trecho, não levando em consideração as forças de deslocamento;

- Obtenção da matriz de influência dos deslocamentos na seção "0" nos esforços na seção "n" para as 4 deformações impostas:

- Uma nova pesquisa é feita com deslocamentos nulos na seção "0", agora considerando as forças de deslocamento, obtendo-se o vetor de influência dos deslocamentos nos esforços da seção "n":

- Montagem e solução do sistema de equações

$$\{ F \} = [ D ] \cdot \{ X \} + \{ E \}$$

{ F } - Vetor de esforços na seção "n" (vetor nulo)

[ D ] - Matriz de influência dos deslocamentos

{ X } - Vetor de Deslocamentos na seção "0" (incógnitas)

{ E } - Vetor de influência dos deslocamentos

- Impondo os resultados calculados no vetor de deslocamentos na seção "0", determina-se as amplitudes de vibração para qualquer segmento do rotor (Vetor { X } ).

Esse procedimento descrito é feito para várias velocidades de rotação, determinando assim a resposta ao deslocamento para uma varredura de rotação.

As velocidades críticas são determinadas pela amplitude máxima de vibração e pela mudança de fase dos deslocamentos x e y de aproximadamente 180 graus].

Os modos de vibrar forçados são determinados a partir dos valores dos deslocamentos nos vetores de estado das seções do modelo.



5.3 - Descrição do programa

PROGRAMA DESBAL: Determinação da resposta ao desbalanceamento

DEFINICAO DAS VARIÁVEIS

CARACTERÍSTICAS DOS ESTÁGIOS:

CARACTERÍSTICAS DOS MANCAIS:

DESBALANCEAMENTOS

CONSTANTES

ENTRADA DE DADOS DO ROTOR

VERIFICACAO DOS DADOS

CORRECOES

GERACAO DE ARQUIVO DE DADOS

CALCULO DOS ESTÁGIOS DO ROTOR

ENTRADA DOS DESBALANCEAMENTOS

CORRECOES

TIPO DE CALCULO: Subida de rotação/ Rotação constante

Leitura das características dos mancais em função da rotação

CALL RIAM

CALCULO DA INFLUENCIA DOS DESLOCAMENTOS

MONTAGEM DO SISTEMA DE EQUACOES DE COEFICIENTES COMPLEXOS

CALL SUBI

Calculo de  $m_{xne}$ ,  $m_{yne}$ ,  $v_{xne}$  e  $v_{yne}$

LADO DIREITO DO SISTEMA DE EQUACOES

CONDICOES INICIAIS :  $x_0 = y_0 = \theta_0 = \dot{\theta}_0 = \dot{x}_0 = \dot{y}_0 = v_{x0} = v_{y0} = 0$

CALL SUBI

Calculo de  $m_{xne}$ ,  $m_{yne}$ ,  $v_{xne}$  e  $v_{yne}$

SOLUCAO DO SISTEMA DE EQUACOES

CALL SIMO

Calculo de  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $\theta_0$  e  $\dot{\theta}_0$

CALCULO DA RESPOSTA AO DESBALANCEAMENTO

CONDICOES INICIAIS :  $x_0 = y_0 = \theta_0 = \dot{\theta}_0 = \dot{x}_0 = \dot{y}_0 = v_{x0} = v_{y0} = 0$

CALL SUBI

AMPLITUDE E FASE NA SUBIDA DE ROTACAO

SAIDA DE RESULTADOS PARA ROTACAO CONSTANTE

MODOS DE VIBRAR

FIM

PROGRAMA DESBAL

DEFINICAO DAS VARIAVEIS

CARACTERISTICAS DOS ESTAGIOS:

NE - Número de estagios  
COMP - Comprimento  
DIAM - Diâmetro  
MASS - Massa  
TRAN - Inércia transversal  
POLA - Inércia polar  
EI - Módulo de elasticidade x Inércia seção circular  
IAS - Módulo transversal de elasticidade x Area seção circular

CARACTERISTICAS DOS MANCAIS:

NM - Número de mancais  
TABM - Número do estágio do mancal  
RIGID (1 a 4) - Rigidez - Kxx, Kyy, Kxy e Kyx

AMORT (1 a 4) - Amortecimento - Cxx, Cyy, Cxy e Cyx

DESBALANÇAMENTOS

ND - Número de desbalançamentos  
TABD - Número do estágio do desbalançamento  
UX - Projeto X do desbalançamento  
UY - Projeto Y do desbalançamento

VECTORES DE ESTADO

RE (1 a 8) + i CO (1 a 8) - X, Y, U, B, Mx, My, Vx e Vy

MATRIZES:

EL, KA, RL, RK, CL, CK - Partições da matriz de transferência  
AM - Amplitude máxima de orbitação  
BN - Amplitude mínima de orbitação  
FASE da orbita em relação a X  
DR, DC, ED, D - Matrizes e vetor do sistema de equações

ROTACAO: OMEGA

CONSTANTES

PI = 4 x ATAN (1.)  
-6  
RO = 7.85 x 10<sup>5</sup> - Massa específica do aço  
ELAST = 2.08 x 10<sup>4</sup> - Módulo de elasticidade do aço  
ELASTR = 8.0 x 10<sup>4</sup> - Módulo transversal de elasticidade do aço





ABERTURA DE ARQUIVO PARA SAIDA DE DADOS  
 LEIA : RPMI - Rotação inicial  
 DRPM - Acréscimo de rotação  
 RPMF = RPMI + ( NP x NSR - 1 ) x DRPM - Rotação final  
 CORRECOES  
 SE Rotação constante  
 LEIA : RPMI  
 DRPM = 0  
 NP = 1  
 NSR = 1

VARRIEDURA DE ROTACAO PARA SUBIDA OU ROTACAO CONSTANTE

LOOP : NS = 1 a NSR

LOOP : IP = 0 a (NP - 1)

SE Subida de rotação

Leitura das características dos mancais em função da rotação

CALL R1AM

CALCULO DA INFLUENCIA DOS DESLOCAMENTOS

MONTAGEM DO SISTEMA DE EQUACOES DE COEFICIENTES COMPLEXOS

4 CONDICIONES INICIAIS :  $Ux = Uy = 0$ ,  $Mxo = Myo = Vxo = Vyo = 0$

1 -  $Xo = 1$ ,  $Yo = 0$ ,  $Bo = 0$

2 -  $Yo = 1$ ,  $Xo = 0$ ,  $Bo = 0$

3 -  $Bo = 1$ ,  $Xo = Yo = 0$

4 -  $Bo = 1$ ,  $Xo = Yo = 0$

CALL SUBI

Cálculo de  $Mxne$ ,  $Myne$ ,  $Vxne$  e  $Vyne$

LADO DIREITO DO SISTEMA DE EQUACOES

CONDICIONES INICIAIS :  $Xo = Yo = Bo = 0$ ,  $Mxo = Myo = Vxo = Vyo = 0$

CALL SUBI

Cálculo de  $Mxne$ ,  $Myne$ ,  $Vxne$  e  $Vyne$

SOLUCAO DO SISTEMA DE EQUACOES

CALL SIMO

Cálculo de  $Xo$ ,  $Yo$ ,  $Bo$  e  $Bo$

CALCULO DA RESPOSTA AO DESBALANÇAMENTO

CONDICIONES INICIAIS :  $Xo = Yo = Bo = 0$ ,  $Mxo = Myo = Vxo = Vyo = 0$

CALL SUBI

AMPLITUDE E FASE NA SUBIDA DE ROTACAO

AN = AMP(XR, XI, YR, YI, I)

BN = AMP(XR, XI, YR, YI, -I)

FASE = FASE(XR, XI, YR, YI)

SAIDA DE RESULTADOS PARA SUBIDA DE ROTACAO

IMPRIMIR : IP, AN, BN, FASE

CALL VFX - Pictar Subida

GRAVACAO EM ARQUIVO : IP, AN, BN, FASE

SAIDA DE RESULTADOS PARA ROTACAO CONSTANTE

MODOS DE VIRAR

GRAVACAO EM ARQUIVO : J = 1 a NE, AM, BN, FASE

CALL VFX - "Pictar" Modos de Vibrar

SE Novo ensaio : Retorna para definir novo desbalançamento

SE MAD : FIM

VARIAVEIS COMUNS  
DEFINICAO DAS PARTICOES DA MATRIZ DE TRANFERENCIA  
COM E SEM AS CARACTERISTICAS DOS MANCAIS

MULTIPLICACAO DAS MATRIZES  
CALL MULTI  
CALL MULTI

INCLUSAO DO DESBALANÇAMENTO NO ESTAGIO

$$Re(Vx) = RE(7, TABD) + Ux \times OMEGA$$

$$Im(Vx) = CO(7, TABD) - Uy \times OMEGA$$

$$Re(Vy) = RE(8, TABD) + Uy \times OMEGA$$

$$Im(Vy) = CO(8, TABD) + Ux \times OMEGA$$

MULTI

Multiplicação das partides da matriz de rigidez

EL, KA

MULTI  
Multiplicação das partides da matriz de transferencia

RL, RK, EL, CL, CK

AMP

Cálculo dos raios de órbita

FASE

Cálculo da fase da órbita em relação a direção X

#### 5.4 - Comparação de resultados

A comprovação dos resultados do programa desenvolvido para determinação da resposta ao desbalanceamento de rotores apoiados em mancais de deslizamento é feita através da comparação de resultados publicados no artigo de Lund [2] com os calculados e apresentados neste capítulo. Além disso, no capítulo 6, é feita uma comparação da resposta ao desbalanceamento calculada de uma turbina a vapor, com os dados experimentais determinados no curso deste trabalho.

O rotor utilizado na comparação com dados da literatura é o mesmo modelo reduzido de rotor, figura 4.2, com 3 diferentes configurações de montagem, já apresentado no capítulo 4. As discretizações das 3 configurações do rotor, tabelas 4.1 a 4.3, e a posição dos mancais nos estágios 4 e 12 utilizadas para entrada de dados do programa também são as mesmas do capítulo das velocidades críticas do capítulo anterior.

A resposta ao desbalanceamento é calculada para a faixa de 6.000 a 25.000 rpm com acréscimos de 1000 rpm, com o valor total das massas de desbalanceamento de 720 g.mm, distribuídas da seguinte forma para as 3 configurações do rotor:

1 disco - 100% do desbalanceamento no centro do rotor;  
2 discos - 50% do desbalanceamento no centro do rotor e 50% na extremidade com disco e em oposição de fase;  
3 discos - 33% do desbalanceamento no centro do rotor e 33% em cada uma das extremidades do eixo em oposição de fase com a massa central.

Nas tabelas 5.1 a 5.4 estão os coeficientes de rigidez (KXX e KYY) e de amortecimento (CXX e CYY) dos mancais de sapatas em série com a rigidez do pivô das sapatas (87.600 N/mm), conforme mencionado em [2], em função da rotação. No caso de mancais de sapata ("tilling-pad") não existem os coeficientes cruzados que foram descritos no capítulo 3. Esses dados foram obtidos a partir da interpolação por "spline" (passagem de 1 polinômio de 3º grau em cada par de pontos) dos dados da tabela 4.4.



Tabela 5.1 - rigidez e amortecimento dos mancais em função da rotação para rotor com 1 disco

rotação [rpm]	rigidez [N/mm]	amortec. [N.s/mm]
6000	141E+05	18.7
7000	156E+05	18.4
8000	183E+05	17.8
9000	211E+05	17.2
10000	236E+05	16.7
11000	262E+05	16.3
12000	289E+05	15.8
13000	318E+05	15.3
14000	348E+05	14.8
15000	378E+05	14.1
16000	408E+05	13.4
17000	438E+05	12.5
18000	466E+05	11.7
19000	492E+05	10.8
20000	515E+05	10.1
21000	534E+05	9.34
22000	551E+05	8.75
23000	564E+05	8.33
24000	574E+05	8.03
25000	581E+05	7.82

Tabela 5.2 - Rígidz e amortecimento dos mancais em função da rotação para rotor com 2 discos

rotação [rpm]	Rígidz [N/mm] mancal s / disco	amortec. mancal s/disco	amortec. mancal c/disco
6000	.143E+05	19.7	20.9
7000	.159E+05	19.1	20.0
8000	.188E+05	18.2	18.6
9000	.215E+05	17.5	17.7
10000	.240E+05	17.1	17.3
11000	.266E+05	16.6	16.9
12000	.294E+05	16.2	16.5
13000	.323E+05	15.6	15.8
14000	.354E+05	15.0	15.0
15000	.384E+05	14.2	14.2
16000	.415E+05	13.4	13.2
17000	.445E+05	12.5	12.3
18000	.472E+05	11.6	11.4
19000	.497E+05	10.8	10.6
20000	.520E+05	9.87	9.86
21000	.538E+05	9.28	9.20
22000	.554E+05	8.71	8.69
23000	.567E+05	8.28	8.28
24000	.576E+05	8.01	8.00
25000	.584E+05	7.80	7.79

Tabela 5.3 - Rígidez e amortecimento dos mancais em função da rotação para rotor com 3 discos

Nas figuras 5.1 a 5.4 são mostradas as amplitudes de orbitação calculadas neste trabalho e as publicadas na referência [2] para comparação dos resultados. Analisando essas figuras, pode-se observar que para as curvas dos rotores com 2 e 3 discos as posições de rotação das amplitudes máximas calculadas estão um pouco abaixo das determinadas na referência [2]. Isto possivelmente está relacionado com diferenças nos valores da rigidez do modelo calculado a partir dos dados disponíveis. A forma das curvas de resposta podem ser consideradas satisfatórias principalmente para a curva do rotor com 3 discos, figura 5.4.

Rotação [rpm]	Rígidez [N/mm]	Amortec. [N.s/mm]
6000	.151E+05	21.1
7000	.172E+05	20.2
8000	.207E+05	18.8
9000	.234E+05	17.8
10000	.254E+05	17.3
11000	.274E+05	17.0
12000	.300E+05	16.5
13000	.331E+05	15.9
14000	.364E+05	15.0
15000	.398E+05	14.0
16000	.429E+05	13.1
17000	.458E+05	12.1
18000	.484E+05	11.2
19000	.508E+05	10.4
20000	.528E+05	9.72
21000	.545E+05	9.11
22000	.560E+05	8.62
23000	.572E+05	8.25
24000	.580E+05	7.99
25000	.588E+05	7.78



Figura 5.2 - Rato máximo da orbita

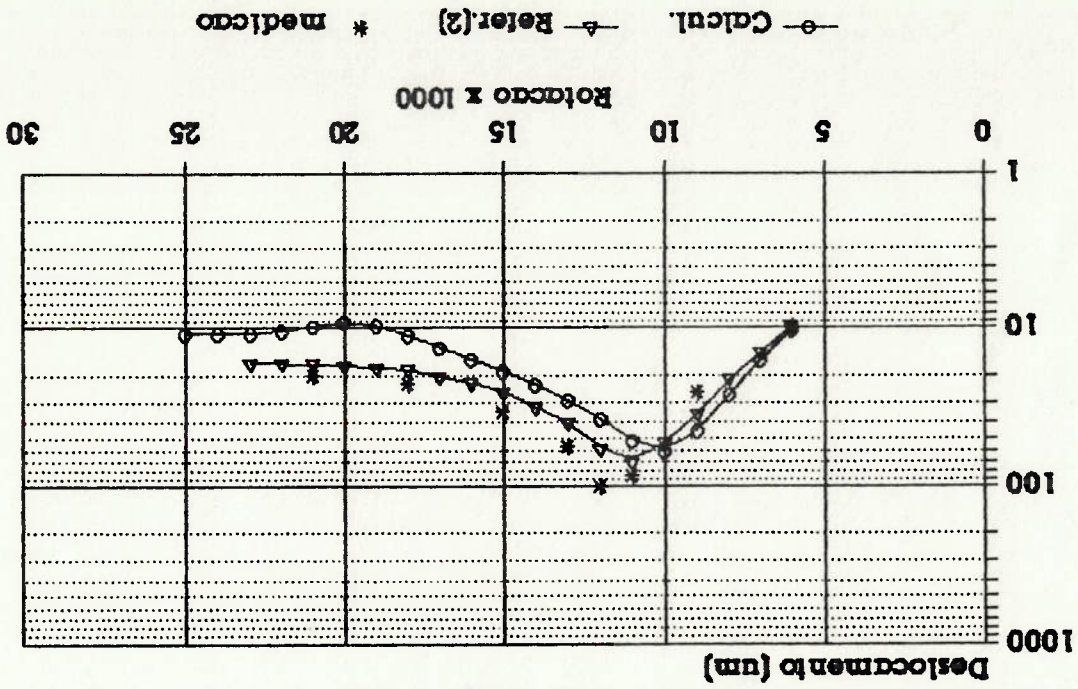


Figura 5.1 - Rato máximo da orbita

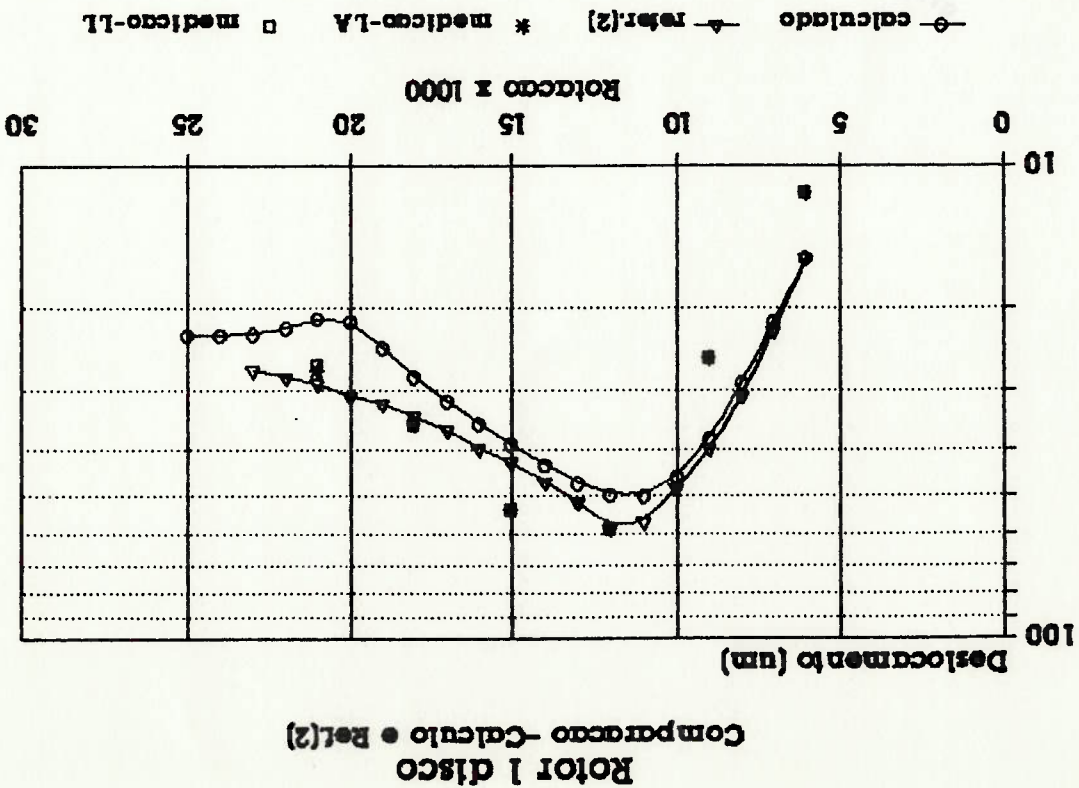


Figura 5.4 - Ratio maximo da orbita

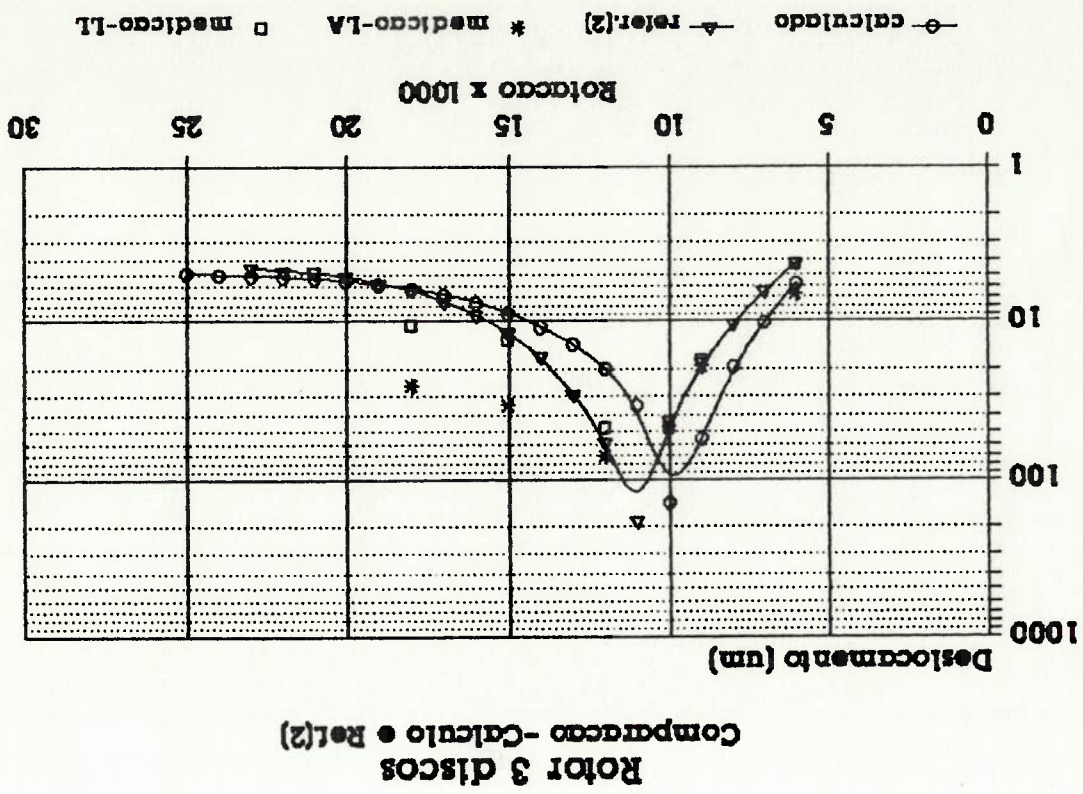
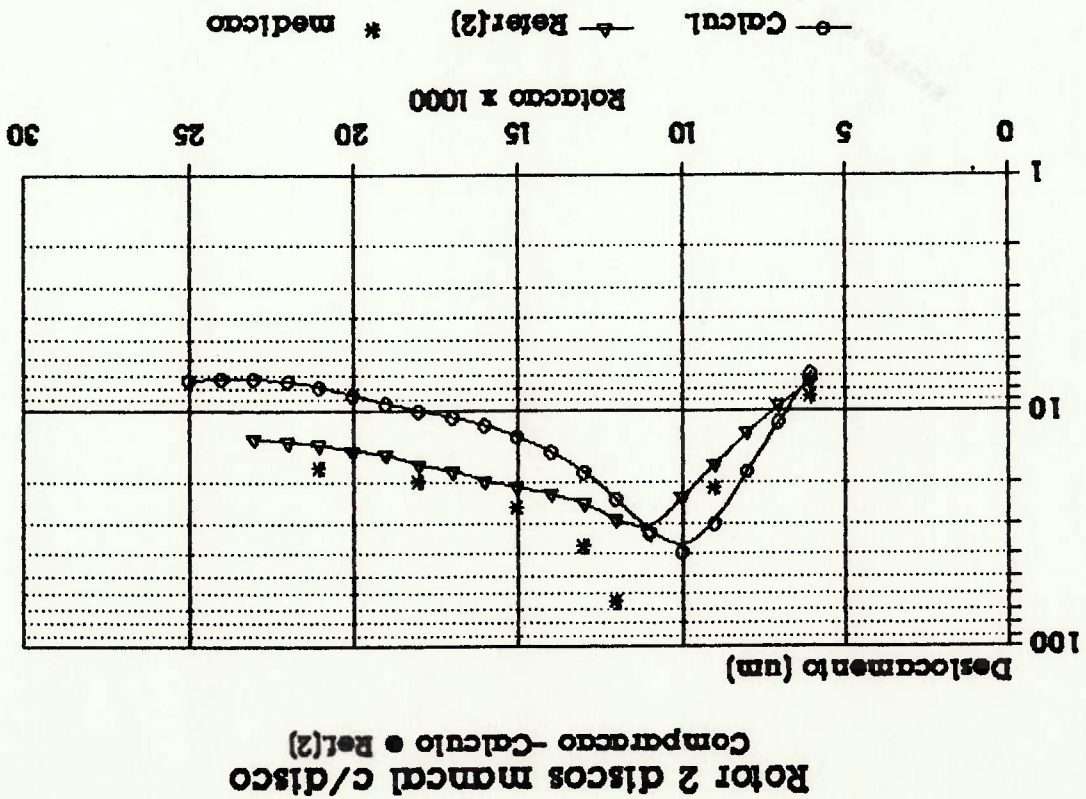


Figura 5.3 - Ratio maximo da orbita



## 6 - Determinações experimentais e comparações com resultados calculados

Para comparação com resultados calculados, foi realizado no dia 28/08/90 medições das vibrações do eixo da turbina GA.906 S de acionamento de uma bomba de alimentação de caldeira da POU (Petroquímica Unigro S/A).

Essas medições visavam determinar a velocidade crítica de flexão da turbina a vapor desacoplada do resto do grupo, através de duas subidas de rotação e, verificar sua resposta ao desbalanceamento.

### 6.1 - Descrição dos ensaios

Foram realizadas medições de deslocamento do eixo junto ao mancal do lado acoplado da turbina nas direções horizontal e vertical.

Para o registro das vibrações foram utilizados 2 sensores de proximidade fixados na carga do mancal por bases magnéticas. Também foi instalado um tacômetro ótico com saída TTL (pulso de 5V) para registro da rotação e controle do filtro seguidor.

Os sinais de deslocamento foram filtrados na frequência de rotação através de um filtro seguidor ("tracking-filter") controlado pelo sinal do tacômetro ótico.

A largura de banda desse filtro foi especificada em 20% da componente IN não havendo assim atenuação de sua amplitude.

O sinal dos sensores de proximidade foram armazenados em um coletor de dados portátil de 1 canal, tendo sido necessário realizar 2 subidas de rotação para registro das 2 direções, horizontal e vertical.

Durante as subidas de rotação, aproximadamente de 500 a 7500 rpm, foram registradas as amplitudes e fases da componente IN em função da rotação instantânea. Essas subidas foram realizadas o mais lento possível permitindo admitir a rotação constante durante a aquisição dos sinais.

A superfície observada pelos sensores de proximidade tinham irregularidades de usinagem e magnéticas que influem nas medições, sendo chamados erros de "run-out". Esses erros foram cancelados através da subtração vetorial (amplitude, fase) das medições em cada rotação com o registro de giro lento, aproximadamente 600 rpm, onde as forças dinâmicas são desprezíveis.

Nas figuras 6.1 e 6.2 são mostradas as amplitudes da componente IN nas direções horizontal e vertical e sua fase em relação ao sinal do tacômetro para a subida de rotação da máquina, com e sem correção de "run-out".



6.2 - Descrição dos cálculos e comparação dos resultados

Na figura 6.3 são mostradas as dimensões do rotor de aço da turbina ensaiada. Esse rotor é apoiado em mancais cilíndricos com diâmetros 82,5 e 76,3 [mm], comprimentos 76 e 60 [mm], folgas radiais nominais de 0,075 e 0,07 [mm] e carga de 711 e 718 [N] no lado acoplado e livre respectivamente e viscosidade dinâmica do óleo 0,0018 [Pa.s] na temperatura de operação de 49 [Graus C].

A 1ª e 2ª velocidades críticas fornecidas pelo fabricante da turbina são 6.390 e 18.600 rpm. Analisando os gráficos da figura 6.1 e 6.2 pode-se observar um aumento da amplitude de vibração 5.750 rpm na direção horizontal e 6.300 rpm na vertical. A baixa velocidade crítica encontrada na direção horizontal possivelmente está relacionada com uma baixa rigidez do mancal nessa direção causada por folga excessiva do mancal nessa direção.

A tabela 6.1 apresenta a discretização do rotor para entrada de dados dos programas de cálculo das velocidades críticas e da resposta ao desbalanceamento. Na tabela 6.2 são apresentados os coeficientes de rigidez e de amortecimento dos mancais da turbina para as rotações de cálculo da resposta ao desbalanceamento. Os mancais são posicionados nos estágios 7 (mancal LI) e 21 (mancal LA), e os sensores de proximidade do ensaio no estágio 22.

N	COMPRIM [mm]	DIAMETRO [mm]	MASSA [Kg]	I, TRANSV [Kg.mmm2]	I, POLAR [Kg.mmm2]
1:	16,00	25,00	.0000	.0000	.0000
2:	51,00	38,40	.2800	143,0	165,0
3:	49,00	57,30	.0000	.0000	.0000
4:	61,00	76,20	.0000	.0000	.0000
5:	55,50	63,70	1.530	2000,	3890,
6:	47,50	63,70	.0000	.0000	.0000
7:	47,00	76,20	.0000	.0000	.0000
8:	47,00	76,20	.0000	.0000	.0000
9:	51,00	88,90	.0000	.0000	.0000
10:	92,00	101,6	.0000	.0000	.0000
11:	137,0	114,3	.0000	.0000	.0000
12:	57,00	114,3	.0000	.0000	.0000
13:	57,00	114,3	.0000	.0000	.0000
14:	137,5	114,3	37,27	.4710E+06	.9340E+06
15:	122,0	114,3	.0000	.0000	.0000
16:	109,0	114,3	.0000	.0000	.0000
17:	57,00	114,3	.0000	.0000	.0000
18:	57,00	114,3	.0000	.0000	.0000
19:	88,50	114,3	.0000	.0000	.0000
20:	63,50	101,6	.0000	.0000	.0000
21:	142,0	82,40	.0000	.0000	.0000
22:	142,0	82,40	.0000	.0000	.0000
23:	27,60	50,00	1.140	1170,	1510,
24:	66,00	50,00	1.940	1990,	3070,
25:	24,00	50,00	.7900	820,0	1560,

Tabela 6.1 - discretização do rotor da turbina de ensaio

Na figura 6.4a é apresentado o "mapa das críticas" de onde foram retirados os valores de 4.000 e 7.500 rpm para a 1ª e 2ª velocidade crítica não amortecida, considerando somente os coeficientes principais de rigidez dos mancais. Os valores encontrados são menores que os medidos e os fornecidos pelo fabricante da turbina. Para uma melhor precisão de cálculo é necessário determinar uma rigidez equivalente dos mancais considerando também seus coeficientes cruzados de rigidez e o amortecimento.

Na figura 6.4b são representados os modos de vibrar do rotor nas velocidades críticas calculadas.

As figuras 6.5a e 6.5b apresentam as amplitudes e fases calculadas da componente IN nas direções horizontal e vertical para a posição dos sensores. A maior amplitude de orbitação foi verificada a 6.600 rpm, correspondendo à velocidade crítica da turbina. A diferença do valor calculado com o medido e o fornecido pelo fabricante está relacionada com a existência de uma ranura longitudinal no mancal cilíndrico real, não considerada no modelo de cálculo.

Mancal LI - Coeficientes para as rotações de 1500 a 11000 rpm  
Rígidez [N/mm] - Amortecimento [N.s/mm]

KXX	KYY	KXY	KYX	CXX	CYY	CXY	CYX
.189E+05	.154E+05	.500E+05	.127E+05	.671E+03	.205E+05	.115E+03	.115E+03
.184E+05	.149E+05	.655E+05	.164E+05	.580E+03	.175E+05	.755E+02	.755E+02
.181E+05	.146E+05	.750E+05	.200E+05	.561E+03	.164E+05	.574E+02	.574E+02
.180E+05	.145E+05	.875E+05	.236E+05	.550E+03	.156E+05	.468E+02	.468E+02
.178E+05	.144E+05	.100E+06	.273E+05	.493E+03	.152E+05	.404E+02	.404E+02
.177E+05	.143E+05	.113E+06	.309E+05	.488E+03	.149E+05	.340E+02	.340E+02
.177E+05	.142E+05	.125E+06	.345E+05	.484E+03	.148E+05	.309E+02	.309E+02
.177E+05	.141E+05	.138E+06	.382E+05	.482E+03	.146E+05	.266E+02	.266E+02
.177E+05	.140E+05	.150E+06	.418E+05	.481E+03	.145E+05	.245E+02	.245E+02
.177E+05	.139E+05	.163E+06	.455E+05	.480E+03	.144E+05	.223E+02	.223E+02
.178E+05	.139E+05	.175E+06	.491E+05	.467E+03	.144E+05	.202E+02	.202E+02
.178E+05	.138E+05	.188E+06	.527E+05	.467E+03	.144E+05	.191E+02	.191E+02
.178E+05	.137E+05	.200E+06	.564E+05	.466E+03	.143E+05	.170E+02	.170E+02
.179E+05	.136E+05	.213E+06	.600E+05	.466E+03	.142E+05	.160E+02	.160E+02
.179E+05	.136E+05	.225E+06	.636E+05	.466E+03	.142E+05	.149E+02	.149E+02
.180E+05	.135E+05	.238E+06	.673E+05	.465E+03	.142E+05	.149E+02	.149E+02
.180E+05	.134E+05	.250E+06	.709E+05	.465E+03	.142E+05	.138E+02	.138E+02
.181E+05	.133E+05	.263E+06	.745E+05	.465E+03	.142E+05	.128E+02	.128E+02
.181E+05	.133E+05	.275E+06	.782E+05	.464E+03	.142E+05	.128E+02	.128E+02
.182E+05	.132E+05	.288E+06	.818E+05	.464E+03	.142E+05	.117E+02	.117E+02

Mancal LA - Coeficientes para as rotações de 1500 a 11000 rpm  
Rígidez [N/mm] - Amortecimento [N.s/mm]

KXX	KYY	KXY	KYX	CXX	CYY	CXY	CYX
.164E+05	.127E+05	.800E+05	.164E+05	.921E+03	.236E+03	.814E+02	.814E+02
.161E+05	.124E+05	.900E+05	.218E+05	.855E+03	.223E+03	.614E+02	.614E+02
.161E+05	.123E+05	.110E+06	.273E+05	.842E+03	.216E+03	.464E+02	.464E+02
.161E+05	.122E+05	.130E+06	.327E+05	.833E+03	.212E+03	.386E+02	.386E+02
.161E+05	.122E+05	.150E+06	.382E+05	.825E+03	.211E+03	.329E+02	.329E+02
.162E+05	.121E+05	.170E+06	.438E+05	.817E+03	.209E+03	.286E+02	.286E+02
.163E+05	.119E+05	.190E+06	.491E+05	.813E+03	.208E+03	.243E+02	.243E+02
.163E+05	.118E+05	.210E+06	.545E+05	.808E+03	.207E+03	.214E+02	.214E+02
.164E+05	.117E+05	.230E+06	.600E+05	.808E+03	.207E+03	.200E+02	.200E+02
.165E+05	.116E+05	.260E+06	.655E+05	.806E+03	.207E+03	.186E+02	.186E+02
.166E+05	.115E+05	.270E+06	.709E+05	.806E+03	.207E+03	.171E+02	.171E+02
.166E+05	.114E+05	.290E+06	.764E+05	.806E+03	.206E+03	.157E+02	.157E+02
.167E+05	.113E+05	.320E+06	.818E+05	.806E+03	.206E+03	.143E+02	.143E+02
.168E+05	.112E+05	.340E+06	.873E+05	.806E+03	.206E+03	.130E+02	.130E+02
.168E+05	.111E+05	.360E+06	.927E+05	.806E+03	.206E+03	.121E+02	.121E+02
.169E+05	.109E+05	.370E+06	.982E+05	.806E+03	.206E+03	.114E+02	.114E+02
.170E+05	.108E+05	.400E+06	.104E+06	.806E+03	.205E+03	.107E+02	.107E+02
.171E+05	.107E+05	.420E+06	.109E+06	.806E+03	.205E+03	.100E+02	.100E+02
.171E+05	.106E+05	.440E+06	.115E+06	.806E+03	.205E+03	.930E+01	.930E+01
.172E+05	.105E+05	.460E+06	.120E+06	.806E+03	.205E+03	.930E+01	.930E+01

Tabella 6.2 - Coeficientes de rigidez e amortecimento dos mancais da turbina ensaiada

Figura 6.1b - Fase da componente IN

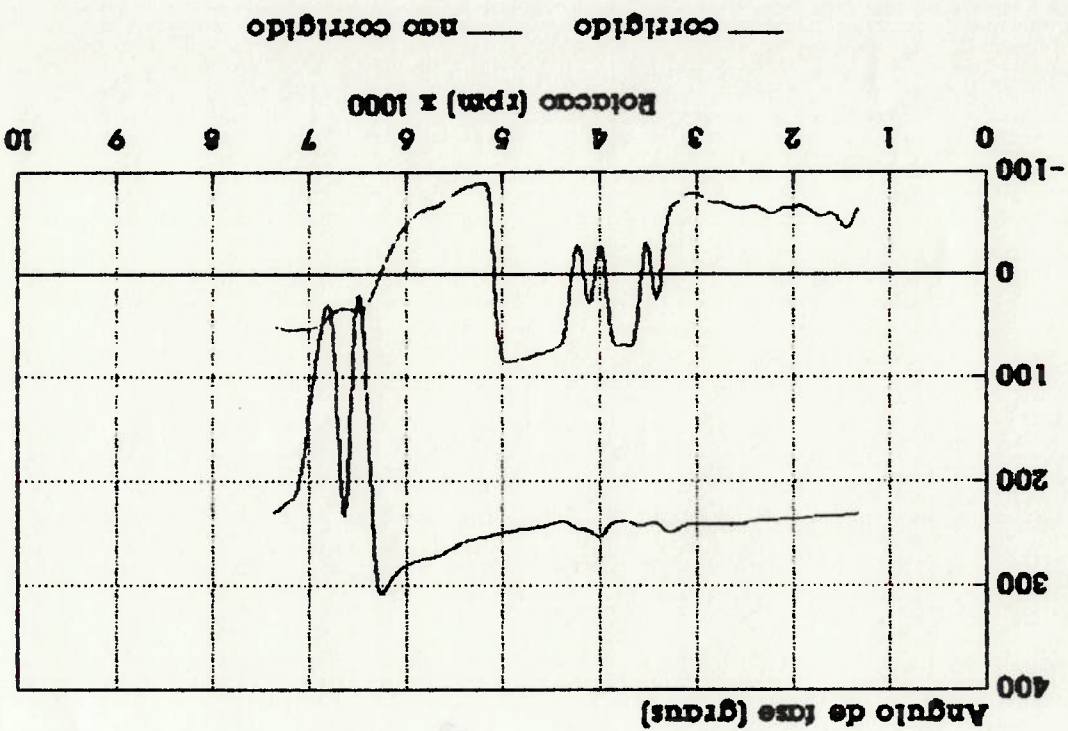
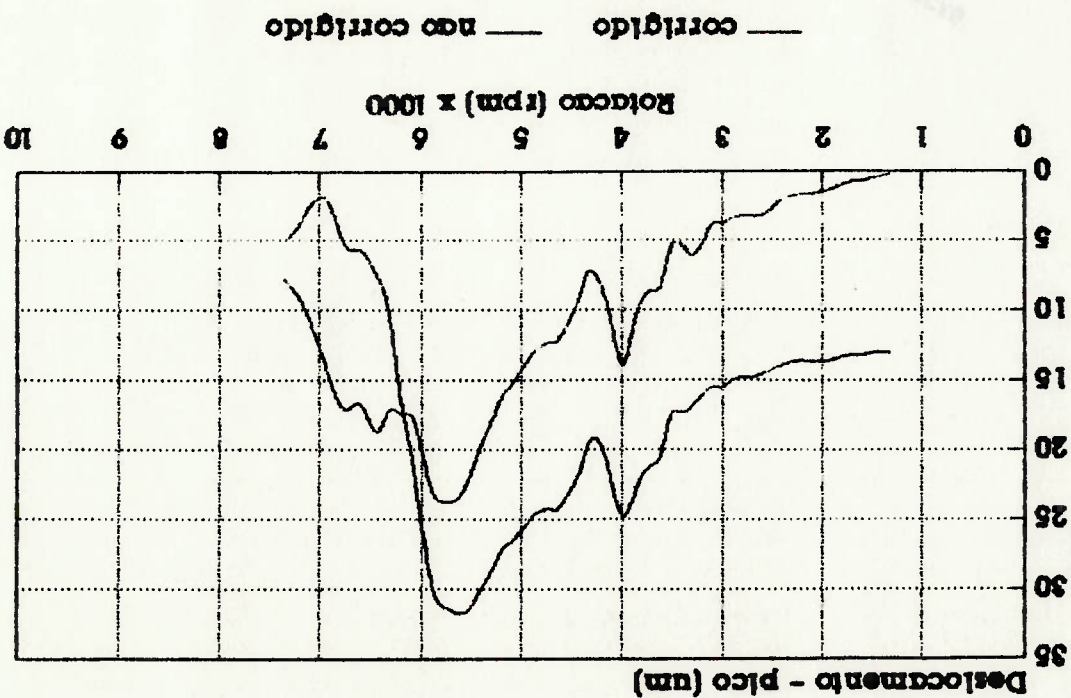


Figura 6.1a - Amplitude da componente IN



Subida de rotação da turbina  
Medição - mancal LA direção horizontal



Figura 6.2b - Fase da componente IN

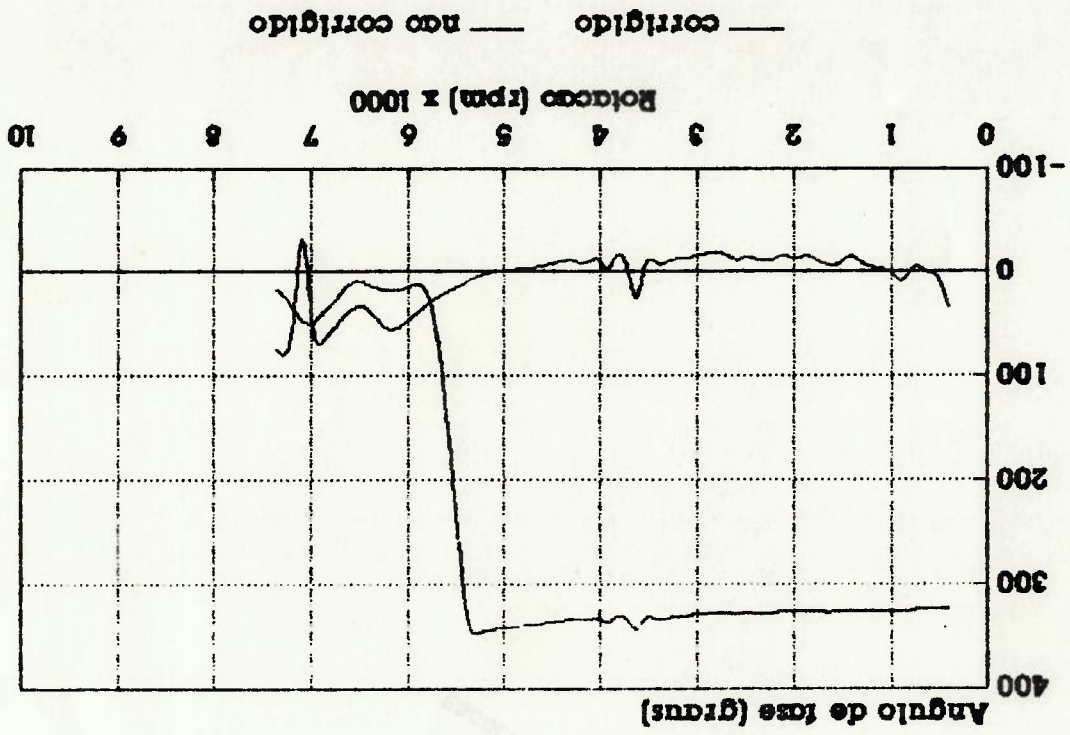
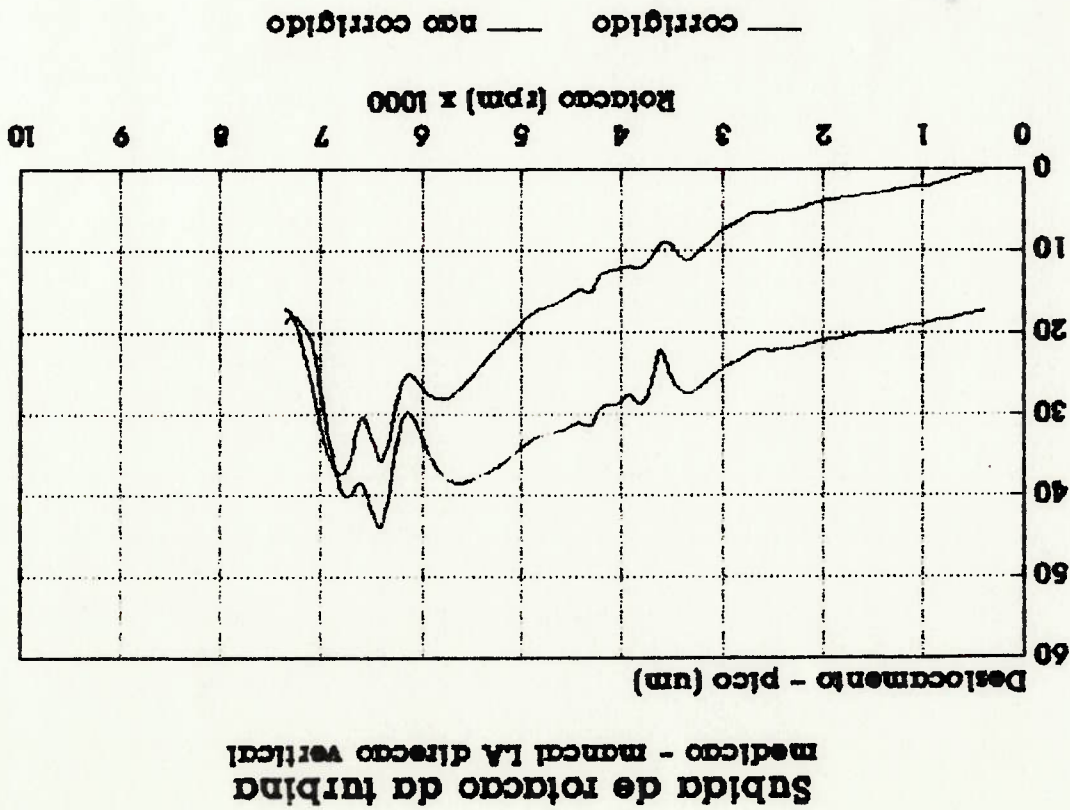


Figura 6.2a - Amplitude da componente IN



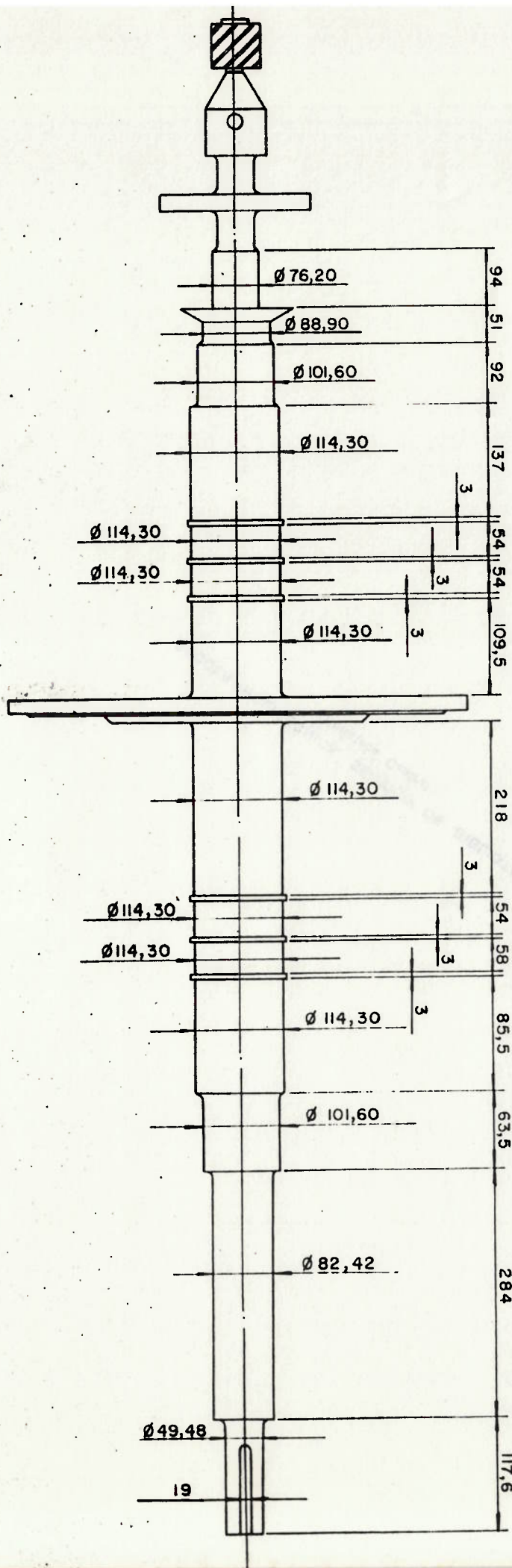


Figura 6.3 - Rotor da turbina ensaiada

Mapa das criticas  
Calculo da turbina - Rotacao 9000 rpm

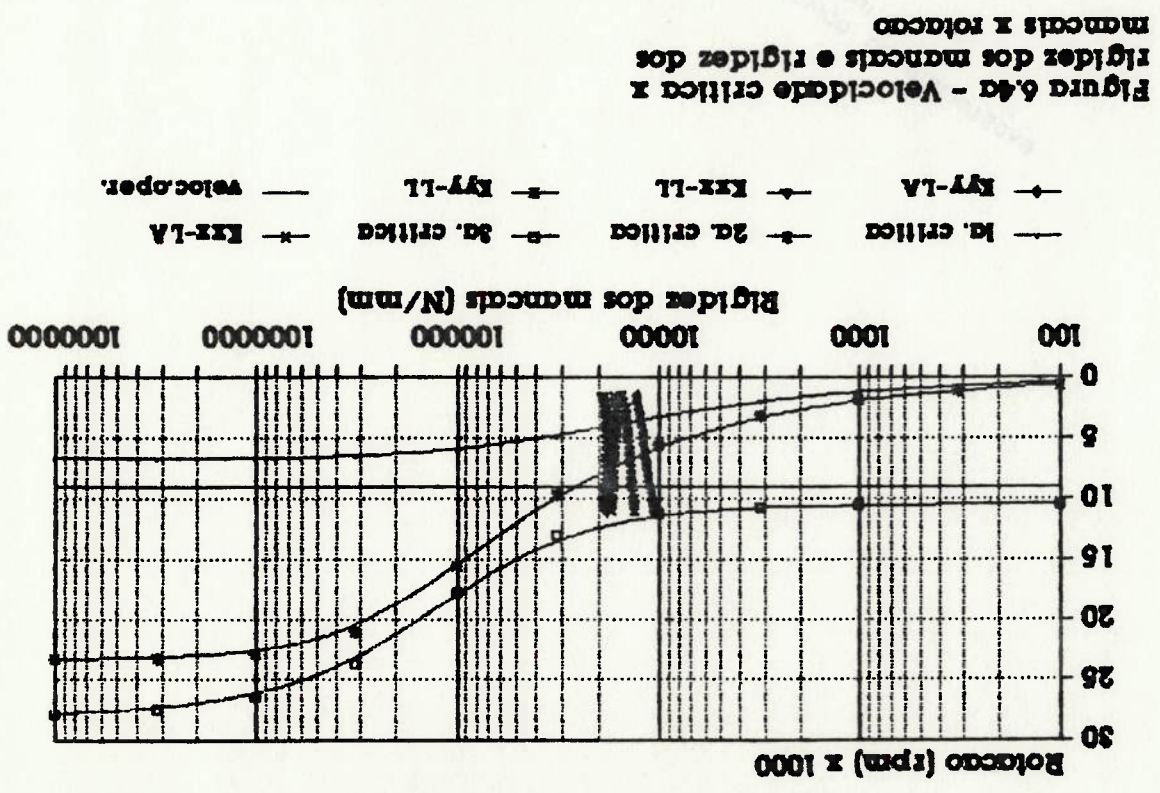


Figura 6.4a - Velocidade critica x rigidez dos mancais e rigidez dos mancais x rotacao

Modos de vibrar  
turbina a vapor GA.906

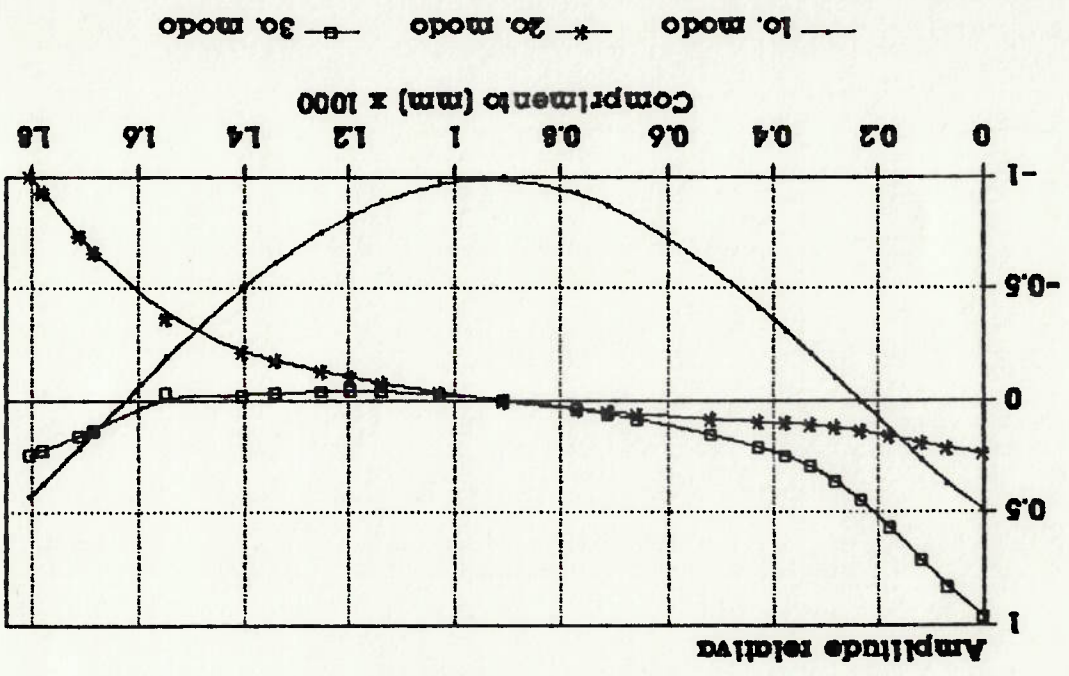


Figura 6.4b - Amplitude relativa x comprimento do eixo da turbina ensaiada



**SUBIDA DE ROTACAO DA TURBINA**

resposta ao deslocamento

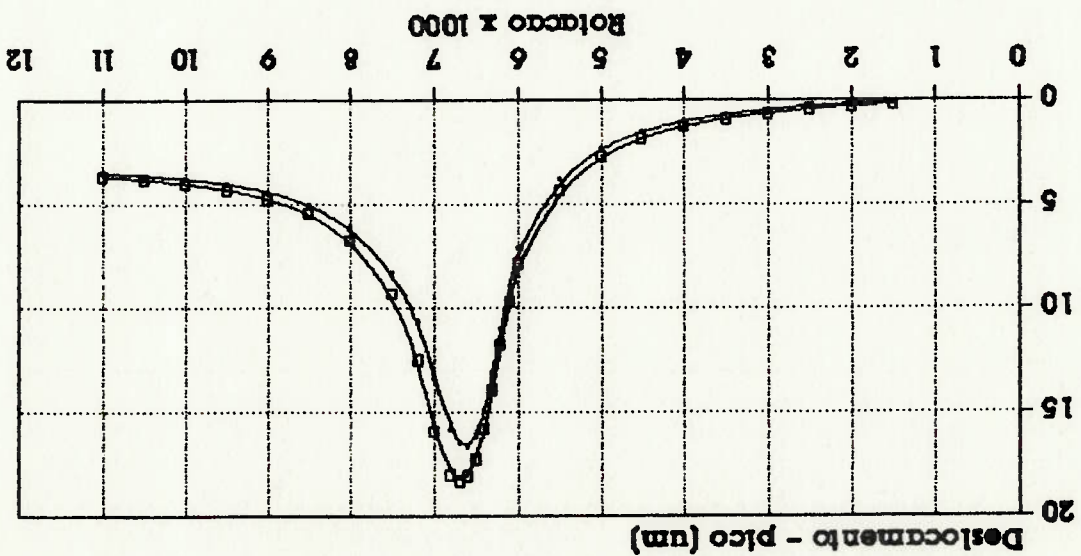


Figura 6.5a - Amplitude da componente IN  
Deslocamento residual  
 $N = 0.364$  (g.m)

— vertical (A) — horizontal (X)

**SUBIDA DE ROTACAO DA TURBINA**

resposta ao deslocamento

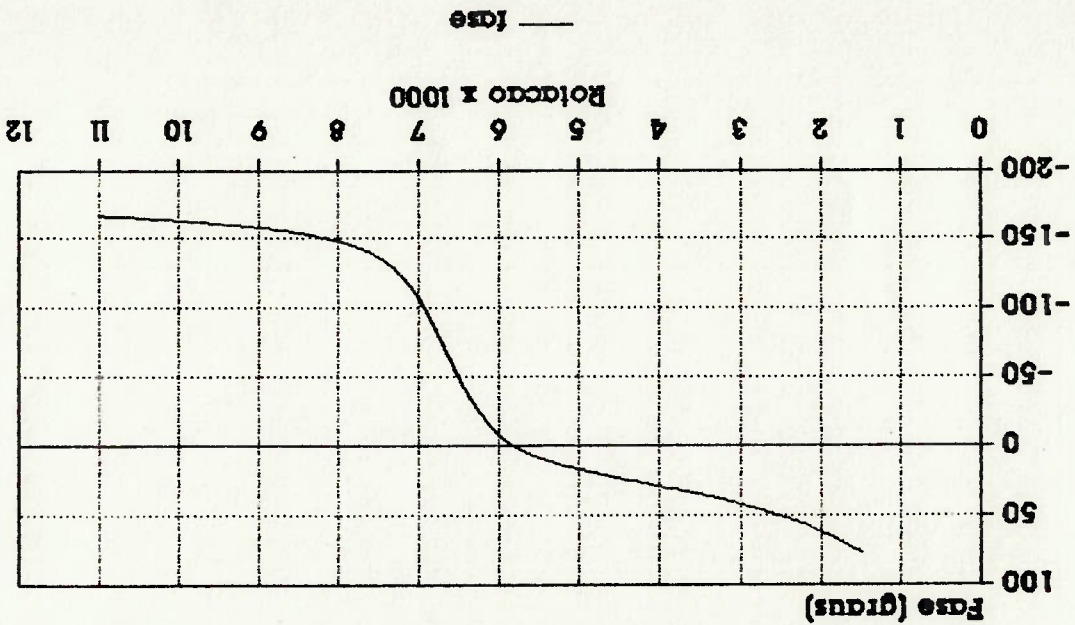


Figura 6.5b - Fase da componente IN  
em relacao a direcao horizontal (X)  
 $N = 0.364$  (g.m)

— fase

Neste trabalho foi desenvolvida e apresentada uma metodologia para determinação da resposta ao desbalanceamento de rotores genéricos de máquinas rotativas apoiados em mancais de deslizamento. Para um melhor entendimento do comportamento dinâmico de rotores foi apresentado o equacionamento e a análise do rotor de Jeffcott com mancais rígidos e flexíveis.

O estudo da resposta ao desbalanceamento incluiu o cálculo das características dinâmicas de mancais de deslizamento, para utilização dos coeficientes de rigidez e de amortecimento na execução do programa de resposta ao desbalanceamento. Além disso, a determinação das velocidades críticas não amortecidas e dos modos de vibrar também foi incluída neste trabalho, principalmente pela sua utilidade na escolha do posicionamento das massas de desbalanceamento.

Para os 3 programas de computador desenvolvidos neste trabalho, foram feitas comparações com resultados publicados para o rotor prático para comparação dos resultados da resposta ao desbalanceamento.

Os resultados dessas comparações podem ser considerados muito bons para os coeficientes dinâmicos dos mancais; no cálculo das velocidades críticas as diferenças dos resultados estão por volta de 10%, e foram atribuídas à incerteza dos dados de entrada; os resultados comparativos da resposta ao desbalanceamento foram considerados satisfatórios, quando se leva em conta a incerteza dos dados de entrada, principalmente na comparação com o rotor da turbina a vapor.

Embora alguns outros métodos de cálculo possam ser utilizados para determinação da resposta ao desbalanceamento, foi possível verificar que de um modo geral o método adotado é adequado.

A metodologia desenvolvida neste trabalho pode ser utilizada para estudo e solução de problemas de dinâmica de rotores, em situações como: projeto de máquinas e mancais; recepção e garantia da qualidade de funcionamento de máquinas novas; verificação de normas como a API para compressores e turbinas.

Como tópicos para trabalhos futuros mencionam-se:

- Desenvolvimento de um programa de cálculo das velocidades críticas amortecidas, que possibilite a determinação do limite de estabilidade de sistemas rotor-mancais, visto que a instabilidade é causa de inúmeros problemas de modernas máquinas rotativas.

- Na área de mancais, desenvolvimento de um programa de cálculo das características dinâmicas de mancais de sapatas ("tilling-pad") e consideração da variação da viscosidade do fluido no mancal, melhorando a precisão no cálculo do amortecimento de

- O estudo do comportamento dinâmico de rotores com mancais magnéticos, uma tecnologia bastante recente, que possibilita o controle das vibrações de forma eficiente mesmo na passagem por uma velocidade crítica.

mancais.



8 - Referencias Bibliograficas

1. Prohl, M.A., "General Method for Calculating Critical Speeds of Flexible Rotors," J. Appl. Mech., Vol. 12, p. 142, (1945).
2. Lund, J.W.; Orcutt, F.K., "Calculations and Experiments on the Unbalance Response of a Flexible Rotor," Trans. ASME J. Eng. Ind., novembro, p. 785 (1967).
3. Lund, J.W.; Thomsen, K.K., "A Calculation Method and Data for the Dynamic Coefficients of Oil-Lubricated Journal Bearings," Topics in Fluid Film Bearing and Rotor System Design and Optimization, ASME conference, April 1978, p. 1-28.
4. Lund, J.W., "Spring and Damping coefficients for the Tilling-Pad Journal Bearing," ASLE Transactions Vol. 7, p. 342-352 (1964).
5. Lund, J.W., "Stability and Damped critical speeds of Flexible Rotor in Fluid-Film Bearings," Trans. ASME J. Eng. Ind., maio, p. 509 (1974).
6. Green, R.B., "Gyroscopic Effects on the Critical Speeds of Flexible Rotors," Trans. ASME Vol. J. Appl. Mech., p. 369 (1948).
7. Allaire, P.E.; Flack, R.D., "Journal Bearing Design for High Speed Turbomachinery," Rotating Machinery and Controls Industrial Research Program, Report no UVA/643092/MAEB1/165, maio 1980.
8. Barrett, L.E.; Gunter, E.J., "Stability and Nonlinear Response of Rotor-Bearing Systems with Squeeze Film Bearings," Rotating Machinery and Controls Industrial Research Program, Report no UVA/643092/MAEB1/154, Janeiro 1979.
9. Den Hartog, J.P., Mechanical Vibrations, Fourth Edition, McGraw-Hill Book Co., New York, 1956.
10. Thomson, W.T., Teoria da Vibração com Aplicações, ed. Intendencia, 1973 R.J.
11. Pestel, E.C.; Leckie, F.A., Matrix Methods in Elasto Mechanics, McGraw-Hill, New York, N.Y., 1963.
12. Pinkus, O.; Sternlicht, B., Theory of Hydrodynamic Lubrication, McGraw-Hill Book Co., New York, 1961.
13. Wilcock, D.F.; Boose, E.R., Bearing Design and Application, McGraw-Hill Co., New York, 1957.
14. Myklesstad, N.D., "A new Method of Calculating Natural Modes of Uncoupled Bending Vibration of Airplane Ings and Other Types of Beams," Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 11, No 2, April 1944, p. 153-162.

15. Stodola, A., Steam and Gas Turbines, Volumes 1 e 2, Traduzido por L.C. Loewenstein, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1927.
16. Rankine, W.J.; McQ., "Centrifugal Whirling of Shafts," The Engineer, Vol. 27, p. 249, (1869).
17. Jeffcott, H.H., "The Lateral Vibrations of Loaded Shafts in the Neighborhood of a Whirling Speed: The Effect of Want of Balance," Phil. Mag., Vol. 37, p. 304-314 (1919).
18. Myklesstad, N.O.; J. Aero Sci., Vol. 11, p. 153 (1944).
19. Haeg, A.C., "The Influence of Oil-Film Journal Bearings on the Stability of Rotating Machines," Trans. ASME, Journal Appl. Mech., Vol. 68, p. 211, (1946).
20. Haeg, A.C.; Warner, P.C., "Oil Whip of Flexible Rotors," Trans. ASME, Vol. 75, No. 7, p. 1339-1344 (1953).
21. Haeg, A.C.; Sankey, G.O., "Some Dynamic Properties of Oil-Film Journal Bearings with Reference to the Unbalance Vibration of Rotors," Trans. ASME J. Appl. Mech., Vol. 78, p. 302-306, AMR Vol. 9, Revue 1665 (1956).
22. Sternlicht, B., "Elastic and Damping Properties of Cylindrical Journal Bearing," Trans. ASME, Series D., Vol. 81 (1959), p. 101-108.
23. Timoshenko, S., Vibration Problems in Engineering, D. Von Nostrand Company, Inc., New York.
24. Gunter, E.J., Jr., "Dynamic Stability of Rotor Bearing Systems," NASA SP-113, 1966.
25. Lund, J.W., "The Stability of an Elastic Rotor in Journal Bearings with Flexible, Damped Supports," Trans. ASME, J. Appl. Mech., dezembro 1965, p. 911.
26. Lund, J.W., "Review of the Concept of Dynamic Coefficients for Fluid Film Journal Bearings," Trans. ASME, J. Trib., Janeiro 1967, Vol. 109, p. 37.
27. Melrovitch, L., Elements of Vibration Analysis, 2 ed, McGraw-Hill, New York, 1966.
28. Allaire, R.E., Rotor dynamics short course, compressors, turbines, pumps, Centro de Pesquisa de Petróleos, 1966, 3v.
29. Vance, J.M.; Murphy, B.T.; Tripp, H.A., "Critical Speeds of Turdomachinery: Computer Predictions vs. Experimental Measurements, Parts I and II," Trans. ASME, J. Vib., Ac., Str. and Rel. Des., 109(1), p.1-4, 1987.

30. Harris, C.M., Shock Vibration Handbook, McGraw-Hill Book Co., New York 1988.
31. Rao, J.S., Rotor Dynamics, Wiley Eastern Limited, New Delhi, 1983.
32. Lund, J.W., "Modal response of a flexible rotor in fluid film bearing," Trans. ASME, J. Eng. Ind., Vol. 96, 1974, p. 525.
33. Vance, J.W., Rotor Dynamics of Turbomachinery, John Wiley & Sons Inc., 1988.
34. Barrett, L.E.; Gunter, E.J.; Allaire, P.E., "Optimum Bearing and Support Damping for Unbalance Response and Stability of Turbomachinery," J. Eng. Power, p. 89-94, Janeiro 1978.
35. Cameron, A., Principles of Lubrication, Longman Group Limited, London, 1966.
36. Carnahan, B.; Luther, H.A.; Wilkes, J.O., Applied Numerical Methods, John Wiley & Sons Inc., New York, 1969.
37. Ruhl, R.L.; Booker, J.F., "A Finite Element Model for Distributed Parameter Turbomotor Systems," Trans. ASME, J. Eng. Ind., fevereiro 1972, p. 126.
38. Silva, J.R.R.R., Estudo sobre as velocidades críticas de rotores flexíveis, dissertação de mestrado, Escola Politécnica da USP, Departamento de Engenharia Mecânica, 1969.
39. Glienicke, J., "Experimental Investigation of the Stiffness and Damping Coefficients of Turbine Bearings and their Application to Instability Prediction," Proc. Instn. Mech. Engrs., 1966-67, Vol. 181, Pt 3B, p. 116.
40. Constantinescu, V.N.; Nica, A.; Pascovici, M.D.; Ceptureanu, G.; Nedelau, S., Sliding Bearings, Aliterton Press, Inc., New York, 1985.
41. Merian, J.L., Dinâmica, Livro técnico e científico editora S.A. 1976.



Anexo A - Dedução das equações para determinação dos coeficientes dinâmicos a partir da equação de Reynolds

$$(A.1) \quad \frac{1}{a} \frac{z}{R} \frac{ae}{ae} \left[ \frac{h}{ae} \frac{ap}{ap} + \frac{az}{az} \right] = \frac{1}{ae} \frac{az}{az} \left[ \frac{h}{ae} \frac{ap}{ap} + \frac{az}{az} \right] + \frac{1}{ae} \frac{az}{az} \left[ \frac{h}{ae} \frac{ap}{ap} + \frac{az}{az} \right]$$

valores adimensionais

$$h = c H \quad ae = \frac{e - e}{z} H$$

$$p = \mu N \left[ \frac{c}{R} \frac{1}{p} \right] \quad az = \frac{z}{L} \quad az = \frac{z}{L} \quad az = \frac{z}{L} \quad az = \frac{z}{L}$$

$$w = z \pi N$$

adimensionalizando (A.1)

$$= \left[ \frac{1}{a} \frac{z}{R} \frac{ae}{ae} \right] \frac{c}{H} \mu N \left[ \frac{R}{R} \right] + \frac{az}{ae} \left[ \frac{c}{H} \mu N \right] \left[ \frac{R}{R} \right] = \left[ \frac{1}{a} \frac{z}{R} \frac{ae}{ae} \right] \frac{c}{H} \mu N \left[ \frac{R}{R} \right] + \frac{az}{ae} \left[ \frac{c}{H} \mu N \right] \left[ \frac{R}{R} \right]$$

(A.2)

$$\frac{1}{a} \frac{z}{R} \frac{ae}{ae} \pi N + \frac{az}{ae} \frac{c}{H} \mu N$$

$$(A.3) \quad \frac{ae}{a} \frac{z}{R} \frac{ae}{ae} \left[ \frac{h}{ae} \frac{ap}{ap} + \frac{az}{az} \right] = \frac{ae}{a} \frac{z}{R} \frac{ae}{ae} \left[ \frac{h}{ae} \frac{ap}{ap} + \frac{az}{az} \right] + \frac{ae}{a} \frac{z}{R} \frac{ae}{ae} \left[ \frac{h}{ae} \frac{ap}{ap} + \frac{az}{az} \right]$$

$$(A.4) \quad \frac{ae}{a} \frac{z}{R} \frac{ae}{ae} \left[ \frac{h}{ae} \frac{ap}{ap} + \frac{az}{az} \right] = \frac{ae}{a} \frac{z}{R} \frac{ae}{ae} \left[ \frac{h}{ae} \frac{ap}{ap} + \frac{az}{az} \right] + \frac{ae}{a} \frac{z}{R} \frac{ae}{ae} \left[ \frac{h}{ae} \frac{ap}{ap} + \frac{az}{az} \right]$$

admitindo pequenas perturbações

$$H = H^0 + \Delta x \cos \theta + \Delta y \sin \theta$$

$$\bar{p} = p^0 + \Delta x p_x^0 + \Delta y p_y^0 + \Delta z p_z^0$$

substituindo em (A.3)

$$\frac{ae}{a} \left[ (H^0 + \Delta x \cos \theta + \Delta y \sin \theta) \frac{ae}{a} (p^0 + \Delta x p_x^0 + \Delta y p_y^0 + \Delta z p_z^0) + \dots \right]$$

$$+ \left[ \frac{D}{2} \frac{ae}{a} (H^0 + \Delta x \cos \theta + \Delta y \sin \theta) \frac{ae}{a} (p^0 + \Delta x p_x^0 + \Delta y p_y^0 + \Delta z p_z^0) + \dots \right]$$

$$= 12 \pi \frac{ae}{a} (H^0 + \Delta x \cos \theta + \Delta y \sin \theta) \frac{ae}{a} (p^0 + \Delta x \cos \theta + \Delta y \sin \theta) + \dots$$

$$H^3 = H^0 + 3H^0 \Delta x \cos \theta + 3H^0 \Delta y \sin \theta \quad (A.5)$$

desprezando os termos de ordem superior

$$\frac{ae}{a} \left[ H^0 \frac{ae}{a} (p^0 + \Delta x p_x^0 + \Delta y p_y^0 + \Delta z p_z^0) + \dots \right] + \frac{ae}{a} \left[ 3H^0 \Delta x \cos \theta \frac{ae}{a} p^0 + \dots \right] + \left[ \frac{D}{2} \frac{ae}{a} \frac{ae}{a} (p^0 + \Delta x p_x^0 + \Delta y p_y^0 + \Delta z p_z^0) + \dots \right]$$



$$+ \begin{bmatrix} L \\ - \\ D \\ - \\ z \\ a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3H \\ 0 \\ \Delta x \cos \theta \\ a \\ - \\ p \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L \\ - \\ D \\ - \\ z \\ a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3H \\ 0 \\ \Delta y \sin \theta \\ a \\ - \\ p \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L \\ - \\ D \\ - \\ z \\ a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3H \\ 0 \\ \Delta x \cos \theta \\ a \\ - \\ p \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L \\ - \\ D \\ - \\ z \\ a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3H \\ 0 \\ \Delta y \sin \theta \\ a \\ - \\ p \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= 12 \pi \frac{a}{e} H^0 + 12 \pi \frac{a}{e} \Delta x \cos \theta + 12 \pi \frac{a}{e} \Delta y \sin \theta + \dots$$

rearranging (A.6)

$$+ \frac{a}{e} \begin{bmatrix} 3H \\ 0 \\ \Delta x \cos \theta \\ a \\ - \\ p \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{a}{e} \begin{bmatrix} 3H \\ 0 \\ \Delta y \sin \theta \\ a \\ - \\ p \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{a}{e} \begin{bmatrix} 3H \\ 0 \\ \Delta x \cos \theta \\ a \\ - \\ p \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{a}{e} \begin{bmatrix} 3H \\ 0 \\ \Delta y \sin \theta \\ a \\ - \\ p \\ 0 \end{bmatrix} + \dots$$



$$+ \begin{bmatrix} 1 \\ D \\ z \end{bmatrix} \frac{ae}{a} \left[ \frac{3H}{2} \Delta y \operatorname{sen} \theta + \frac{ae}{p} \right] =$$

$$= 12 \pi \frac{ae}{a} H \cos \theta + 12 \pi \frac{ae}{a} \Delta x \cos \theta + 12 \pi \frac{ae}{a} \Delta y \operatorname{sen} \theta +$$

$$+ \frac{12ae}{a} H \cos \theta + \frac{12ae}{a} \Delta x \cos \theta + \frac{12ae}{a} \Delta y \operatorname{sen} \theta \quad \text{(A.7)}$$

agrupando (A.7)

$$\frac{ae}{a} \begin{bmatrix} ae \\ H \\ z \end{bmatrix} \frac{ae}{p} + \Delta x \frac{ae}{a} \begin{bmatrix} ae \\ H \\ z \end{bmatrix} \frac{ae}{p} + \Delta y \frac{ae}{a} \begin{bmatrix} ae \\ H \\ z \end{bmatrix} \frac{ae}{p} +$$

$$+ \Delta x \frac{ae}{a} \begin{bmatrix} ae \\ H \\ z \end{bmatrix} \frac{ae}{p} + \Delta y \frac{ae}{a} \begin{bmatrix} ae \\ H \\ z \end{bmatrix} \frac{ae}{p} +$$

$$+ \Delta x \frac{ae}{a} \begin{bmatrix} ae \\ H \\ z \end{bmatrix} \frac{ae}{p} + \Delta y \frac{ae}{a} \begin{bmatrix} ae \\ H \\ z \end{bmatrix} \frac{ae}{p} +$$

$$+ \Delta x \frac{ae}{a} \begin{bmatrix} 3H \\ z \end{bmatrix} \cos \theta + \Delta y \frac{ae}{a} \begin{bmatrix} 3H \\ z \end{bmatrix} \operatorname{sen} \theta +$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 \\ D \\ z \end{bmatrix} \frac{ae}{a} \begin{bmatrix} L \\ D \\ z \end{bmatrix} \frac{ae}{p} + \begin{bmatrix} 1 \\ D \\ z \end{bmatrix} \frac{ae}{a} \begin{bmatrix} L \\ D \\ z \end{bmatrix} \frac{ae}{p} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 \\ D \\ z \end{bmatrix} \frac{ae}{a} \begin{bmatrix} L \\ D \\ z \end{bmatrix} \frac{ae}{p} + \begin{bmatrix} 1 \\ D \\ z \end{bmatrix} \frac{ae}{a} \begin{bmatrix} L \\ D \\ z \end{bmatrix} \frac{ae}{p} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 \\ D \\ z \end{bmatrix} \frac{ae}{a} \begin{bmatrix} L \\ D \\ z \end{bmatrix} \frac{ae}{p} + \begin{bmatrix} 1 \\ D \\ z \end{bmatrix} \frac{ae}{a} \begin{bmatrix} L \\ D \\ z \end{bmatrix} \frac{ae}{p} +$$

$$+ \left[ \frac{D}{z} \frac{\partial}{\partial z} \right] \Delta y \frac{e^{-\frac{z}{a}}}{a} \text{sen } \theta =$$

$$= \frac{12 \pi}{a} H^0 \frac{e^{-\frac{z}{a}}}{a} \cos \theta + \frac{12 \pi}{a} \Delta x \cos \theta + \frac{12 \pi}{a} \Delta y \text{sen } \theta +$$

$$+ \frac{12}{a} H^0 \frac{e^{-\frac{z}{a}}}{a} \cos \theta + \frac{12}{a} \Delta x \cos \theta + \frac{12}{a} \Delta y \text{sen } \theta \quad \text{at } N \quad \text{(A.8)}$$

separando (A.8)

$$\frac{e^{-\frac{z}{a}}}{a} \left[ \frac{D}{z} \frac{\partial}{\partial z} \right] H^0 \frac{e^{-\frac{z}{a}}}{a} \text{sen } \theta + \left[ \frac{D}{z} \frac{\partial}{\partial z} \right] H^0 \frac{e^{-\frac{z}{a}}}{a} \cos \theta = \frac{12 \pi}{a} H^0 \frac{e^{-\frac{z}{a}}}{a} \text{sen } \theta \quad \text{(A.9)}$$

$$\frac{e^{-\frac{z}{a}}}{a} \left[ \frac{D}{z} \frac{\partial}{\partial z} \right] H^0 \frac{e^{-\frac{z}{a}}}{a} \cos \theta + \frac{e^{-\frac{z}{a}}}{a} \left[ \frac{D}{z} \frac{\partial}{\partial z} \right] H^0 \frac{e^{-\frac{z}{a}}}{a} \text{sen } \theta = \frac{12 \pi}{a} \cos \theta \quad \text{(A.10)}$$

$$\frac{e^{-\frac{z}{a}}}{a} \left[ \frac{D}{z} \frac{\partial}{\partial z} \right] H^0 \frac{e^{-\frac{z}{a}}}{a} \text{sen } \theta + \frac{e^{-\frac{z}{a}}}{a} \left[ \frac{D}{z} \frac{\partial}{\partial z} \right] H^0 \frac{e^{-\frac{z}{a}}}{a} \cos \theta = \frac{12 \pi}{a} \text{sen } \theta \quad \text{(A.11)}$$

$$\frac{e^{-\frac{z}{a}}}{a} \left[ \frac{D}{z} \frac{\partial}{\partial z} \right] H^0 \frac{e^{-\frac{z}{a}}}{a} \cos \theta + \frac{e^{-\frac{z}{a}}}{a} \left[ \frac{D}{z} \frac{\partial}{\partial z} \right] H^0 \frac{e^{-\frac{z}{a}}}{a} \text{sen } \theta = \frac{12 \pi}{a} \cos \theta \quad \text{(A.12)}$$

$$(A.13) \quad \frac{N}{12} \sin \theta = \frac{a}{12} \left[ \frac{3}{a} H_0 \frac{ae}{p} \frac{ae}{y} + \frac{L}{D} \frac{ae}{z} \frac{ae}{a} \frac{ae}{H} \frac{ae}{p} \frac{ae}{y} \right] + \frac{a}{12} \left[ \frac{3}{a} H_0 \frac{ae}{p} \frac{ae}{y} + \frac{L}{D} \frac{ae}{z} \frac{ae}{a} \frac{ae}{H} \frac{ae}{p} \frac{ae}{y} \right]$$

equação estática de Reynolds

$$\frac{N}{12} \frac{ae}{a} H_0 = \frac{a}{12} \left[ \frac{3}{a} H_0 \frac{ae}{p} \frac{ae}{p} + \frac{L}{D} \frac{ae}{z} \frac{ae}{a} \frac{ae}{H} \frac{ae}{p} \frac{ae}{p} \right] + \frac{a}{12} \left[ \frac{3}{a} H_0 \frac{ae}{p} \frac{ae}{p} + \frac{L}{D} \frac{ae}{z} \frac{ae}{a} \frac{ae}{H} \frac{ae}{p} \frac{ae}{p} \right]$$

$$\frac{N}{12} \frac{ae}{a} \cos \theta = \frac{a}{12} \left[ \frac{3}{a} H_0 \frac{ae}{p} \frac{ae}{x} + \frac{L}{D} \frac{ae}{z} \frac{ae}{a} \frac{ae}{H} \frac{ae}{p} \frac{ae}{x} \right] + \frac{a}{12} \left[ \frac{3}{a} H_0 \frac{ae}{p} \frac{ae}{x} + \frac{L}{D} \frac{ae}{z} \frac{ae}{a} \frac{ae}{H} \frac{ae}{p} \frac{ae}{x} \right]$$

$$(A.14) \quad \frac{N}{12} \frac{ae}{a} \cos \theta = \frac{a}{12} \left[ \frac{3}{a} H_0 \frac{ae}{p} \frac{ae}{p} \cos \theta + \frac{L}{D} \frac{ae}{z} \frac{ae}{a} \frac{ae}{H} \frac{ae}{p} \frac{ae}{p} \cos \theta \right] - \frac{a}{12} \left[ \frac{3}{a} H_0 \frac{ae}{p} \frac{ae}{p} \cos \theta + \frac{L}{D} \frac{ae}{z} \frac{ae}{a} \frac{ae}{H} \frac{ae}{p} \frac{ae}{p} \cos \theta \right]$$

$$\frac{N}{12} \frac{ae}{a} \sin \theta = \frac{a}{12} \left[ \frac{3}{a} H_0 \frac{ae}{p} \frac{ae}{y} + \frac{L}{D} \frac{ae}{z} \frac{ae}{a} \frac{ae}{H} \frac{ae}{p} \frac{ae}{y} \right] + \frac{a}{12} \left[ \frac{3}{a} H_0 \frac{ae}{p} \frac{ae}{y} + \frac{L}{D} \frac{ae}{z} \frac{ae}{a} \frac{ae}{H} \frac{ae}{p} \frac{ae}{y} \right]$$

$$(A.15) \quad \frac{N}{12} \frac{ae}{a} \sin \theta = \frac{a}{12} \left[ \frac{3}{a} H_0 \frac{ae}{p} \frac{ae}{p} \sin \theta + \frac{L}{D} \frac{ae}{z} \frac{ae}{a} \frac{ae}{H} \frac{ae}{p} \frac{ae}{p} \sin \theta \right] - \frac{a}{12} \left[ \frac{3}{a} H_0 \frac{ae}{p} \frac{ae}{p} \sin \theta + \frac{L}{D} \frac{ae}{z} \frac{ae}{a} \frac{ae}{H} \frac{ae}{p} \frac{ae}{p} \sin \theta \right]$$

$$\frac{N}{12} \cos \theta = \frac{a}{12} \left[ \frac{3}{a} H_0 \frac{ae}{p} \frac{ae}{x} + \frac{L}{D} \frac{ae}{z} \frac{ae}{a} \frac{ae}{H} \frac{ae}{p} \frac{ae}{x} \right] + \frac{a}{12} \left[ \frac{3}{a} H_0 \frac{ae}{p} \frac{ae}{x} + \frac{L}{D} \frac{ae}{z} \frac{ae}{a} \frac{ae}{H} \frac{ae}{p} \frac{ae}{x} \right]$$

$$\frac{N}{12} \sin \theta = \frac{a}{12} \left[ \frac{3}{a} H_0 \frac{ae}{p} \frac{ae}{y} + \frac{L}{D} \frac{ae}{z} \frac{ae}{a} \frac{ae}{H} \frac{ae}{p} \frac{ae}{y} \right] + \frac{a}{12} \left[ \frac{3}{a} H_0 \frac{ae}{p} \frac{ae}{y} + \frac{L}{D} \frac{ae}{z} \frac{ae}{a} \frac{ae}{H} \frac{ae}{p} \frac{ae}{y} \right]$$



desenvolvendo o lado direito para (A.14) - Ax

$$\begin{bmatrix} 12 \pi \frac{a}{a} \cos \theta - \frac{ae}{a} \\ \frac{3H}{2} \cos \theta - \frac{ae}{a} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D \\ - \\ T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{az}{a} \\ - \\ \frac{az}{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \pi \frac{a}{a} \cos \theta - \frac{ae}{a} \\ \frac{3H}{2} \cos \theta - \frac{ae}{a} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D \\ - \\ T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{az}{a} \\ - \\ \frac{az}{a} \end{bmatrix} \quad (A.16)$$

a partir da equação (A.9) admitindo H constante em z

$$\begin{bmatrix} \frac{ae}{a} \\ - \\ \frac{3H}{2} \cos \theta - \frac{ae}{a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D \\ - \\ T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{az}{a} \\ - \\ \frac{az}{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \pi \frac{a}{a} \cos \theta - \frac{ae}{a} \\ \frac{3H}{2} \cos \theta - \frac{ae}{a} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{ae}{a} \\ - \\ \frac{3H}{2} \cos \theta - \frac{ae}{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \pi \frac{a}{a} \cos \theta - \frac{ae}{a} \\ \frac{3H}{2} \cos \theta - \frac{ae}{a} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D \\ - \\ T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{az}{a} \\ - \\ \frac{az}{a} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{az}{a} \\ - \\ \frac{az}{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \pi \frac{a}{a} \cos \theta - \frac{ae}{a} \\ \frac{3H}{2} \cos \theta - \frac{ae}{a} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D \\ - \\ T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{az}{a} \\ - \\ \frac{az}{a} \end{bmatrix} \quad (A.17)$$

substituindo (A.17) em (A.16)

$$\begin{bmatrix} 12 \pi \frac{a}{a} \cos \theta - \frac{ae}{a} \\ \frac{3H}{2} \cos \theta - \frac{ae}{a} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D \\ - \\ T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{az}{a} \\ - \\ \frac{az}{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \pi \frac{a}{a} \cos \theta - \frac{ae}{a} \\ \frac{3H}{2} \cos \theta - \frac{ae}{a} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D \\ - \\ T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{az}{a} \\ - \\ \frac{az}{a} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} D \\ - \\ T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{az}{a} \\ - \\ \frac{az}{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \pi \frac{a}{a} \cos \theta - \frac{ae}{a} \\ \frac{3H}{2} \cos \theta - \frac{ae}{a} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D \\ - \\ T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{az}{a} \\ - \\ \frac{az}{a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 \pi \frac{a}{a} \cos \theta - \frac{ae}{a} \\ \frac{3H}{2} \cos \theta - \frac{ae}{a} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D \\ - \\ T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{az}{a} \\ - \\ \frac{az}{a} \end{bmatrix}$$



$$= 12 \pi \left[ \frac{ae}{a} \cos \theta - \frac{ae}{3a} \cos^3 \theta \right] - \left[ \frac{ae}{a} \cos \theta - \frac{ae}{3a} \cos^3 \theta \right] = \left[ \frac{ae}{a} \cos \theta - \frac{ae}{3a} \cos^3 \theta \right] \quad (A.21)$$

substituindo (A.20) em (A.14)

$$= \left[ \frac{ae}{a} \cos \theta - \frac{ae}{3a} \cos^3 \theta \right] + \left[ \frac{ae}{a} \cos \theta - \frac{ae}{3a} \cos^3 \theta \right] = \left[ \frac{ae}{a} \cos \theta - \frac{ae}{3a} \cos^3 \theta \right] \quad (A.20)$$

rearranjando

$$= \left[ \frac{ae}{a} \cos \theta - \frac{ae}{3a} \cos^3 \theta \right] + \left[ \frac{ae}{a} \cos \theta - \frac{ae}{3a} \cos^3 \theta \right]$$



desenvolvendo o lado direito para (A.15) - ΔV

$$\begin{bmatrix} 12 \mp \frac{ae}{a} \text{ sen } \theta - \frac{ae}{a} \\ 3H \frac{ae}{2} \text{ sen } \theta - \frac{ae}{p} \\ \frac{ae}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{ae}{2} \\ \frac{ae}{2} \text{ sen } \theta - \frac{ae}{p} \\ \frac{ae}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12 \mp \frac{ae}{a} \text{ sen } \theta - \frac{ae}{a} \\ 3H \frac{ae}{2} \text{ sen } \theta - \frac{ae}{p} \\ \frac{ae}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ae}{2} \\ \frac{ae}{2} \text{ sen } \theta - \frac{ae}{p} \\ \frac{ae}{2} \end{bmatrix} \quad (A.22)$$

a partir da equação (A.9) admitindo H constante em z

$$\begin{bmatrix} \frac{ae}{a} \left[ 3 \frac{ae}{a} H \frac{ae}{p} \right] \\ \frac{ae}{2} \left[ 12 \mp \frac{ae}{a} \text{ sen } \theta - \frac{ae}{a} \right] \\ \frac{ae}{2} \left[ \frac{ae}{2} \right] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{ae}{2} \\ \frac{ae}{2} \text{ sen } \theta - \frac{ae}{p} \\ \frac{ae}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ae}{2} \\ \frac{ae}{2} \text{ sen } \theta - \frac{ae}{p} \\ \frac{ae}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{ae}{2} \\ \frac{ae}{2} \text{ sen } \theta - \frac{ae}{p} \\ \frac{ae}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ae}{2} \\ \frac{ae}{2} \text{ sen } \theta - \frac{ae}{p} \\ \frac{ae}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{ae}{2} \\ \frac{ae}{2} \text{ sen } \theta - \frac{ae}{p} \\ \frac{ae}{2} \end{bmatrix}$$

$$(A.23) \quad \begin{bmatrix} \frac{ae}{2} \\ \frac{ae}{2} \text{ sen } \theta - \frac{ae}{p} \\ \frac{ae}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ae}{2} \\ \frac{ae}{2} \text{ sen } \theta - \frac{ae}{p} \\ \frac{ae}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{ae}{2} \\ \frac{ae}{2} \text{ sen } \theta - \frac{ae}{p} \\ \frac{ae}{2} \end{bmatrix}$$

substituindo (A.23) em (A.22)

$$\begin{bmatrix} 12 \mp \frac{ae}{a} \text{ sen } \theta - \frac{ae}{a} \\ 3H \frac{ae}{2} \text{ sen } \theta - \frac{ae}{p} \\ \frac{ae}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{ae}{2} \\ \frac{ae}{2} \text{ sen } \theta - \frac{ae}{p} \\ \frac{ae}{2} \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{D}{2} \\ \frac{3H}{2} \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{ae}{2} \\ \frac{ae}{2} \text{ sen } \theta - \frac{ae}{p} \\ \frac{ae}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{ae}{2} \\ \frac{ae}{2} \text{ sen } \theta - \frac{ae}{p} \\ \frac{ae}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{ae}{2} \\ \frac{ae}{2} \text{ sen } \theta - \frac{ae}{p} \\ \frac{ae}{2} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{ae}{2} \\ \frac{ae}{2} \text{ sen } \theta - \frac{ae}{p} \\ \frac{ae}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{ae}{2} \\ \frac{ae}{2} \text{ sen } \theta - \frac{ae}{p} \\ \frac{ae}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{ae}{2} \\ \frac{ae}{2} \text{ sen } \theta - \frac{ae}{p} \\ \frac{ae}{2} \end{bmatrix}$$







Equação de Reynolds na forma de diferenças finitas

$$\frac{ae}{a} \begin{bmatrix} ae \\ H \\ \frac{ae}{a} \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L \\ - \\ D \\ \frac{ae}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ \frac{ae}{a} \\ \frac{ae}{p} \end{bmatrix} = 12 \pi \frac{ae}{a} H$$

	$P(I, J-1)$	$P(I, J)$	$P(I-1, J)$
$H(I-1, J)$	$H(I, J)$	$H(I, J)$	$H(I, J+1)$

$$\frac{ae}{a} \frac{P(I, J) - P(I, J-1)}{\Delta e} = \frac{ae}{a} \frac{P(I, J+1) - P(I, J)}{\Delta e}$$

$$\frac{ae}{a} \begin{bmatrix} ae \\ H \\ \frac{ae}{a} \\ p \end{bmatrix} = \frac{ae}{a} \frac{H(I, J+1) - H(I, J-1)}{ae} - \frac{ae}{a} \frac{P(I, J+1) - P(I, J-1)}{\Delta e}$$

$$= \frac{ae}{a} \begin{bmatrix} H(I, J+1) - P(I, J+1) - P(I, J-1) \\ \frac{ae}{a} \end{bmatrix} \left[ \frac{ae}{a} \frac{P(I, J) - P(I, J-1)}{\Delta e} \right]$$

$$\frac{ae}{a} \begin{bmatrix} ae \\ H \\ \frac{ae}{a} \\ p \end{bmatrix} = \frac{ae}{a} \frac{H(I, J+1) - H(I, J-1)}{ae} - \frac{ae}{a} \frac{P(I, J+1) - P(I, J-1)}{\Delta e}$$

$$P(1, j) + \left[ \frac{\Delta e}{z} \frac{H^0(j+\%) + H^0(j-\%) }{3} \right] - \frac{\Delta e}{z} \frac{H^0(j+\%) P(1, j+1)}{3} + \frac{\Delta e}{z} \frac{H^0(j-\%) P(1, j-1)}{3}$$

$$12 + \frac{ae}{H^0} = 12 + \left[ \frac{\Delta e}{H^0(j+\%) - H^0(j-\%)} \right]$$

$$\frac{ae}{z} \frac{H^0}{3} \frac{ae}{z} \frac{H^0}{3} \frac{ae}{z} \frac{H^0}{3} = \left[ \frac{ae}{z} \frac{H^0}{3} \frac{ae}{z} \frac{H^0}{3} \frac{ae}{z} \frac{H^0}{3} \right] = \frac{ae}{z} \frac{H^0}{3} \frac{ae}{z} \frac{H^0}{3} \frac{ae}{z} \frac{H^0}{3} \frac{ae}{z} \frac{H^0}{3}$$

$$\frac{ae}{z} \frac{H^0}{3} \frac{ae}{z} \frac{H^0}{3} \frac{ae}{z} \frac{H^0}{3} = \left[ \frac{ae}{z} \frac{H^0}{3} \frac{ae}{z} \frac{H^0}{3} \frac{ae}{z} \frac{H^0}{3} \right] = \frac{ae}{z} \frac{H^0}{3} \frac{ae}{z} \frac{H^0}{3} \frac{ae}{z} \frac{H^0}{3} \frac{ae}{z} \frac{H^0}{3}$$

$$\frac{ae}{z} \frac{H^0}{3} \frac{ae}{z} \frac{H^0}{3} \frac{ae}{z} \frac{H^0}{3} = \frac{ae}{z} \frac{H^0}{3} \frac{ae}{z} \frac{H^0}{3} \frac{ae}{z} \frac{H^0}{3} \frac{ae}{z} \frac{H^0}{3} = \frac{ae}{z} \frac{H^0}{3} \frac{ae}{z} \frac{H^0}{3} \frac{ae}{z} \frac{H^0}{3} \frac{ae}{z} \frac{H^0}{3}$$

$$\frac{ae}{z} \frac{H^0}{3} \frac{ae}{z} \frac{H^0}{3} \frac{ae}{z} \frac{H^0}{3} = \left[ \frac{ae}{z} \frac{H^0}{3} \frac{ae}{z} \frac{H^0}{3} \frac{ae}{z} \frac{H^0}{3} \right] = \frac{ae}{z} \frac{H^0}{3} \frac{ae}{z} \frac{H^0}{3} \frac{ae}{z} \frac{H^0}{3} \frac{ae}{z} \frac{H^0}{3}$$

$$- \left[ \frac{\Delta e}{z} \frac{H^0(j+\%) + H^0(j-\%)}{3} \right] P(1, j)$$

$$= \left[ \frac{ae}{z} \frac{H^0}{3} \frac{ae}{z} \frac{H^0}{3} \frac{ae}{z} \frac{H^0}{3} \right] = \frac{ae}{z} \frac{H^0}{3} \frac{ae}{z} \frac{H^0}{3} \frac{ae}{z} \frac{H^0}{3} \frac{ae}{z} \frac{H^0}{3} \frac{ae}{z} \frac{H^0}{3}$$

$$D(j) = \frac{\frac{\Delta z}{z} \begin{bmatrix} 1 \\ D \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} H(j+\frac{\Delta z}{z}) \\ H(j+\frac{\Delta z}{z}) \end{bmatrix}}$$

$$C(j) = \frac{\Delta z}{\begin{bmatrix} H(j-\frac{\Delta z}{z}) \\ H(j-\frac{\Delta z}{z}) \end{bmatrix}}$$

$$B(j) = \frac{\Delta z}{\begin{bmatrix} H(j+\frac{\Delta z}{z}) \\ H(j+\frac{\Delta z}{z}) \end{bmatrix}}$$

$$= 12 \pi \left[ \frac{\Delta z}{\begin{bmatrix} H(j+\frac{\Delta z}{z}) - H(j-\frac{\Delta z}{z}) \end{bmatrix}} \right]$$

$$+ \frac{\Delta z}{\begin{bmatrix} H(j-\frac{\Delta z}{z}) \\ H(j-\frac{\Delta z}{z}) \end{bmatrix}} P(1, j-1) + \begin{bmatrix} 1 \\ D \end{bmatrix} \left[ \frac{\Delta z}{z} \begin{bmatrix} H(j) \\ H(j) \end{bmatrix} P(1+1, j) + P(1-1, j) \right]$$

$$- \left[ \frac{\Delta z}{\begin{bmatrix} H(j+\frac{\Delta z}{z}) + H(j-\frac{\Delta z}{z}) \\ H(j+\frac{\Delta z}{z}) + H(j-\frac{\Delta z}{z}) \end{bmatrix}} + \begin{bmatrix} 1 \\ D \end{bmatrix} \left[ \frac{\Delta z}{z} \begin{bmatrix} H(j) \\ H(j) \end{bmatrix} P(1, j) + \frac{\Delta z}{z} \begin{bmatrix} H(j+\frac{\Delta z}{z}) \\ H(j+\frac{\Delta z}{z}) \end{bmatrix} P(1, j+1) \right] \right]$$

$$= 12 \pi \left[ \frac{\Delta z}{\begin{bmatrix} H(j+\frac{\Delta z}{z}) - H(j-\frac{\Delta z}{z}) \end{bmatrix}} \right]$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 \\ D \end{bmatrix} \left[ \frac{\Delta z}{z} \begin{bmatrix} H(j) \\ H(j) \end{bmatrix} P(1+1, j) + \frac{\Delta z}{z} \begin{bmatrix} H(j) \\ H(j) \end{bmatrix} P(1-1, j) - \frac{\Delta z}{z} \begin{bmatrix} H(j) \\ H(j) \end{bmatrix} P(1, j) \right]$$

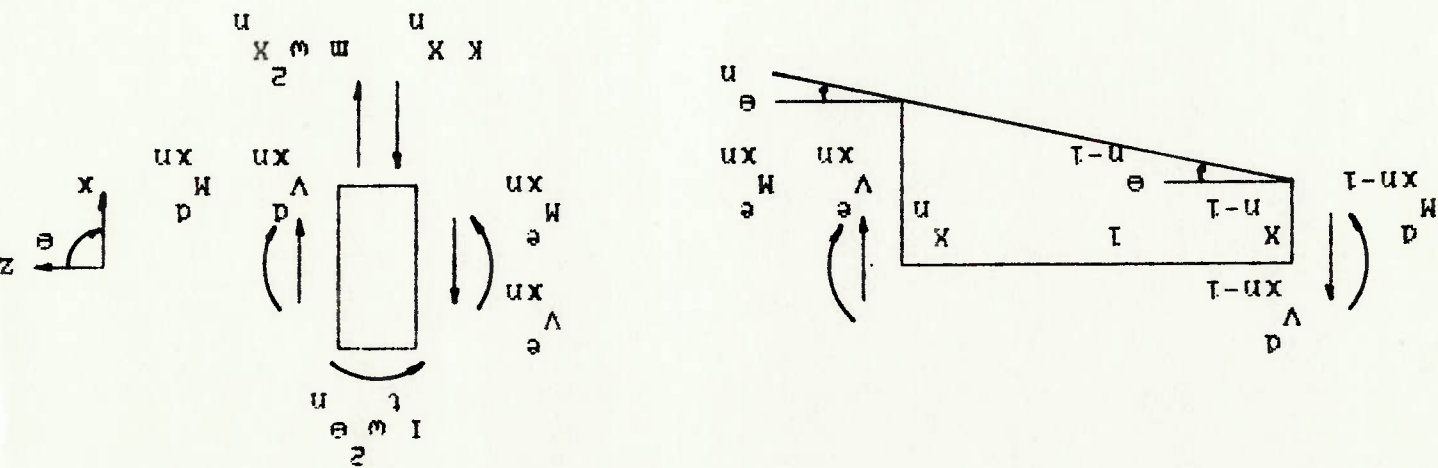






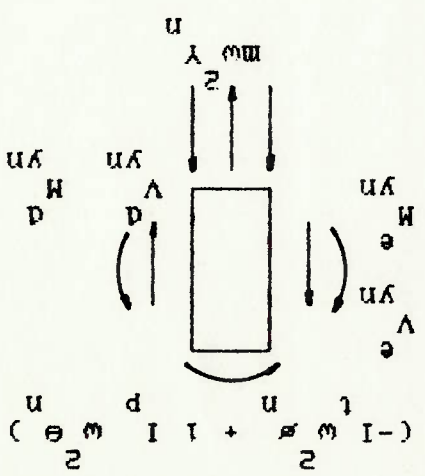
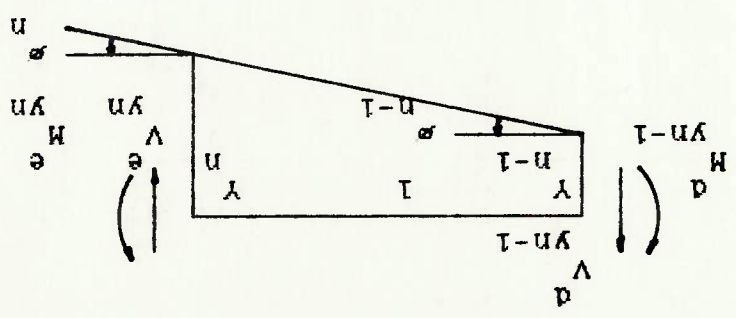
**Anexo B**  
 Equacionamento do elemento para o cálculo de velocidades críticas.

B.1



$$\left[ \begin{aligned}
 X &= X^{n-1} + \theta^{n-1} + \frac{1}{2} \frac{V^{n-1} E I}{d} - \frac{1}{3} \frac{V^d E I}{d} + \frac{1}{1} \frac{M^{n-1} G A_s}{1} \\
 \theta &= \theta^{n-1} + \frac{M^{n-1}}{d} - \frac{1}{1} \frac{V^d E I}{d} \\
 M_d &= M^{n-1} - V^{n-1} + \frac{1}{2} \frac{V^d E I}{d} \\
 V_d &= V^{n-1} - \frac{1}{2} \frac{V^d E I}{d} + K X + \frac{1}{2} \frac{V^d E I}{d}
 \end{aligned} \right.$$





$$\left[ \begin{aligned}
 V_d &= V_d - w_n l \\
 M_e &= M_e + V_d l - \frac{1}{2} w_n l^2 \\
 e &= e - \frac{1}{2} w_n l \\
 Y &= Y + \frac{1}{2} w_n l \\
 \end{aligned} \right]$$

$$\begin{aligned}
 & (K_{yy} + i\omega C_{yy}) Y + (K_{yx} + i\omega C_{yx}) X \\
 & (-i\omega \theta + 1) I_p \omega_n^2 + 1 I_p \omega_n^2
 \end{aligned}$$



Anexo C - Matrizes de transferência do modelo do rotor

Matriz de rigidez

[K] =

1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0
0	-1	0	1	0	0	0	0
$\frac{EF}{2}$	0	$\frac{EF}{2}$	0	1	0	0	0
0	$-\frac{EF}{2}$	0	$\frac{EF}{2}$	0	1	0	0
$\frac{GEJ}{3} + \frac{GAS}{1}$	0	$-\frac{GEJ}{2}$	0	-1	0	1	0
0	$\frac{GEJ}{3} + \frac{GAS}{1}$	0	$\frac{GEJ}{2}$	0	1	0	1

