

MARCELO MASSARANI

ESTUDO E IMPLANTAÇÃO DO MÉTODO DE LANÇOS PARA O CÁLCULO DE
FREQUÊNCIAS E MODOS DE VIBRAÇÃO EM ESTRUTURAS MECÂNICAS

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da USP para a obtenção
do Título de Mestre em Engenharia.

São Paulo , 1991

FD-1201

São Paulo , 1991

Orientador : Prof. Dr. Ronaldo de Breynne Salvagni
Prof. Titular do Departamento de
Engenharia Mecânica da EPUSP.

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da USP para a obtenção
do Título de Mestre em Engenharia.

ESTUDO E IMPLANTAÇÃO DO MÉTODO DE LANCZOS PARA O CÁLCULO DE
FREQUÊNCIAS E MODOS DE VIBRAÇÃO EM ESTRUTURAS MECÂNICAS

Engenheiro Mecânico , Escola Politécnica da USP , 1987

MARCELO MASSARANI

Aos meus pais.
A Lucélia.

AGRADECIMENTOS

A Marinha do Brasil e a FINEP, cujo apoio financeiro possibilitou este trabalho.

Ao Prof. Ronaldo de Breynne Salvagni, pela sua orientação e incentivo.

Este trabalho considera a questão da solução parcial de problemas de valores próprios simétricos lineares provenientes da análise de problemas de vibração estrutural através do Método dos Elementos Finitos.

Após uma introdução à formulação básica e às origens do Método de Lanczos para a solução do problema de valores próprios de grande ordem, algumas alternativas para algoritmos são discutidas.

Um algoritmo de Lanczos é proposto e implantado no programa MSAP de uso geral baseado no Método dos Elementos Finitos.

This work considers the problem of determining partial eigenvalues of linearized symmetric eigenvalue equations arising from the finite element analysis of structural vibration problems. After an introduction to the basic formulation and origins of Lanczos Method to solve very large symmetric eigenvalue problems, some alternatives for logic are discussed. A Lanczos algorithm is proposed and implemented into the general purpose finite element program MSAP.

ABSTRACT

1	1 - INTRODUÇÃO	1
3	2 - FUNDAMENTOS DO MÉTODO DE LANÇOS	3
3	2.1 - Generalidades	3
4	2.2 - Subespaços Invariantes	4
7	2.3 - Procedimento de Rayleigh-Ritz	7
8	2.4 - Subespaços de Krylov	8
12	2.5 - O Método de Lanços	12
16	3 - A EVOLUÇÃO DO MÉTODO DE LANÇOS	16
23	4 - ALGORITMOS PARA O MÉTODO DE LANÇOS	23
23	4.1 - Algoritmos básicos	23
23	4.1.1 - Algoritmo de Lanços Simples	23
25	4.1.2 - Algoritmo de Lanços Generalizado	25
27	4.2 - Algoritmos por blocos	27
27	4.2.1 - Algoritmo de Lanços por Blocos	27
30	4.2.2 - Algoritmo de Lanços por Blocos Iterativo	30
32	4.3 - Escolha do vetor inicial	32
33	4.4 - Monitoração do erro	33
34	4.5 - Instabilidade numérica	34
35	4.5.1 - Reortogonalização total	35
36	4.5.2 - Reortogonalização seletiva	36
37	4.5.3 - Reortogonalização parcial	37
38	4.5.4 - Algoritmo sem reortogonalização	38
40	5 - SELEÇÃO DO ALGORITMO IMPLANTADO	40

APENDICE 1 - Listagem dos procedimentos em linguagem FORTRAN inseridos no programa MSAP.

APENDICE 2 - Autovalores obtidos pelo Método de Lanczos e pelo Método da Busca do Determinante, dos modelos VIGA e CHAPA3.

8 - REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS 73

7 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS 65

6.4 - Comentários 63

6.3.3 - Dimensão da matriz tri-diagonal 62

6.3.2 - Tempo de processamento 57

6.3.1 - Precisão das aproximações 52

6.3 - Resultados 52

6.2.3 - Chapa quadrada apoiada nos cantos 51

6.2.2 - Chapa retangular com um lado engastado 49

6.2.1 - Viga bi-apoiada 48

6.2 - Testes realizados 48

6.1 - Objetivos 47

6 - TESTES 47

5.8 - Implantação 45

5.7 - Algoritmo escolhido 42

5.6 - Multiplicidade dos autovalores 42

5.5 - Determinação dos autovalores da matriz tri-diagonal 42

5.4 - Reortogonalização 42

5.3 - Monitoração do erro 41

5.2 - Procedimento de escolha do vetor inicial 41

5.1 - Escolha do tipo de algoritmo 40

Os símbolos utilizados neste trabalho são convenientemente identificados, ao longo do mesmo, quando de sua primeira utilização. Para facilitar a leitura, certas regras gerais são fixadas:

- os vetores são designados por letras romanas minúsculas sublinhadas (\underline{g} , \underline{y} , \underline{z} , \underline{u} , \underline{x}) ;

- as matrizes são designadas por letras romanas maiúsculas sublinhadas (\underline{A} , \underline{Z} , \underline{I} , \underline{U}) ;

- espaços e subespaços são designados por letras gregas com um superescrito em letra romana indicando a dimensão do subespaço (ϵ^n , K^m , ϵ^n).

40	Figura 6.1 - Vigas bi-apoiada
40	Figura 6.2 - Chapa retangular com um lado engastado
40	Figura 6.3 - Modelo da chapa retangular com 30 nós e 20 elementos
50	Figura 6.4 - Modelo da chapa retangular com 50 nós e 96 elementos
51	Figura 6.5 - Chapa quadrada apoiada nos cantos
51	Figura 6.6 - Modelo da chapa quadrada com 25 nós e 16 elementos
52	Figura 6.7 - Gráfico indicando os tempos de processamento utilizados pelos métodos de Busca do Determinante, Iteração por Subespaços e Lanczos no cálculo das 5, 10, 15 e 20 primeiras frequências naturais e modos de vibração do modelo VIGA
58	Figura 6.8 - Gráfico indicando os tempos de processamento utilizados pelos métodos de Busca do Determinante e Lanczos no cálculo das 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40 e 45 primeiras frequências naturais e modos de vibração do modelo VIGA
59	Figura 6.9 - Gráfico indicando os tempos de processamento utilizados pelos métodos de Busca do Determinante utilizados pelos métodos de Busca do Determinante, Iteração por Subespaços e Lanczos no cálculo das 5, 10, 15, 20, 25, 30 e 35 primeiras frequências naturais e modos de vibração do modelo CHAPAZ
60	Figura 6.10 - Gráfico indicando os tempos de processamento utilizados pelos métodos de Busca do Determinante, Iteração por Subespaços e Lanczos no cálculo das 5, 10, 15, 20, 25, 30 e 35 primeiras frequências naturais e modos de vibração do modelo CHAPAZ

utilizados pelos métodos de Busca do Deter-
 minante e Lanczos no cálculo das 5, 10, 15,
 20, 25, 30, 35, 40, 45 e 50 primeiras fre-
 quências naturais e modos de vibração do mo-
 delo CHAPAZ 61

Figura 7.1 - Gráfico indicando os tempos de processamento
 utilizados pelo método de Busca do Determi-
 nante e pelos algoritmos de Lanczos e
 Lanczos II, no cálculo das 5, 10, 15, 20, 25,
 30, 35, 40, 45 e 50 primeiras frequências na-
 turais e modos de vibração do modelo CHAPAZ ... 67

Figura 7.2 - Gráfico indicando os tempos de processamento
 utilizados pelos algoritmos de Lanczos e
 Lanczos II, no cálculo das 5, 10, 15, 20, 25,
 30, 35, 40, 45 e 50 primeiras frequências na-
 turais e modos de vibração do modelo CHAPAZ ... 68

Figura 7.3 - Gráfico indicando os tempos de processamento
 utilizados pelo método de Busca do Determi-
 nante e pelos algoritmos de Lanczos e
 Lanczos II, no cálculo das 5, 10, 15, 20, 25,
 30, 35, 40 e 45 primeiras frequências natu-
 rais e modos de vibração do modelo VIGA 69

Figura 7.4 - Gráfico indicando os tempos de processamento
 utilizados pelos algoritmos de Lanczos e
 Lanczos II, no cálculo das 5, 10, 15, 20, 25,
 30, 35, 40 e 45 primeiras frequências natu-
 rais e modos de vibração do modelo CHAPAZ 70

Tabela 6.1 - Frequências naturais para viga bi-apoiada obtida pelo programa MSAP utilizando modelo com 33 elementos 53

Tabela 6.2 - Medida de erro para o modelo de viga bi-apoiada, utilizando-se o Método de Lanczos 54

Tabela 6.3 - Frequências naturais para chapa retangular obtida pelo programa MSAP utilizando modelo de 20 elementos e calculadas analiticamente [2] 54

Tabela 6.4 - Medida de erro para o modelo de chapa retangular com 20 elementos , utilizando-se o Método de Lanczos 55

Tabela 6.5 - Frequências naturais para chapa retangular obtida pelo programa MSAP utilizando modelo de 36 elementos e calculadas analiticamente [2] 55

Tabela 6.6 - Medida de erro para o modelo de chapa retangular com 36 elementos , utilizando-se o Método de Lanczos 56

Tabela 6.7 - Frequências naturais para chapa quadrada obtida pelo programa MSAP utilizando modelo de 16 elementos e calculadas analiticamente [2] 56

Tabela 6.8 - Medida de erro para o modelo de chapa quadrada com 16 elementos utilizando-se o Método de Lanczos 57

Tabela 6.9 - Parcela do tempo total utilizado pelo algo-

ritmo de Lanczos na Decomposição de Cholesky .. 62
Tabela B.10- Dimensão da matriz tridiagonal necessária
para se obter as aproximações dos autovalores
desejados 63

Em 1950, quando os computadores digitais estavam surgindo, Cornelius Lanczos propôs um método iterativo para a solução de problemas de valores próprios lineares.

Embora a maioria dos procedimentos iterativos sejam aproximados e com um número não específico de iterações necessárias, o procedimento sugerido por Lanczos deveria convergir após m passos para um sistema de m graus de liberdade [24].

Convergência neste caso significaria que uma matriz cheia de ordem m seria reduzida a uma matriz triangular de ordem m , que possui os mesmos autovalores.

Os autovalores poderiam ser obtidos eficientemente da matriz triangular [14], e os autovetores através de iterações inversas.

Entretanto, o algoritmo original proposto por Lanczos apresenta instabilidade numérica, era inferior aos métodos para a solução do problema de valores próprios disponíveis na época de sua publicação, e portanto caiu em desuso.

No final dos anos sessenta, o crescente aumento do número de graus de liberdade dos modelos de elementos finitos para análise dinâmica, aumentou o interesse por métodos que permitissem a redução da ordem do problema de valores próprios, no cálculo de frequências naturais e modos de vibração.

O Método de Lanczos foi então resgatado e combinado com o procedimento de Rayleigh-Ritz, tornando-se um eficiente procedimento para determinar frequências naturais e modos de vibração de sistemas dinâmicos.

Neste trabalho, primeiramente serão tratados os fundamentos do Método de Lanczos, e a seguir será apresentado um levantamento

Bibliográfico que mostra a evolução do Método de Lanczos e sua utilização nos últimos anos.

Várias opções de algoritmos para o Método de Lanczos, mostrando variações básicas do algoritmo original, soluções para a questão da instabilidade numérica e outros aspectos, serão discutidos em um capítulo específico.

Propõe-se ainda a implantação de um algoritmo do Método de Lanczos em um programa baseado no Método dos Elementos Finitos. O programa MSAP será utilizado para este fim devido à disponibilidade de seu código fonte.

O programa MSAP utiliza dois métodos para a determinação de autovalores e autovetores : o Método da Busca do Determinante e o Método de Iteração por Subespaços [31]. A utilização de um ou outro método é condicionado à dimensão do problema a ser resolvido.

Preve-se uma relativa superioridade do Método de Lanczos sobre o Método da Busca do Determinante e sobre o Método de Iteração por Subespaços [8], o que poderá ser analisado após a implantação de um algoritmo do Método de Lanczos no programa MSAP.

2 - FUNDAMENTOS DO MÉTODO DE LANÇOS

2.1 - Generalidades

O cálculo de modos e frequências naturais de vibração, de estruturas com comportamento linear modeladas utilizando-se o Método dos Elementos Finitos, significa a solução do problema de autovalores e autovetores em sua forma generalizada, ou seja:

$$(2.1) \quad \bar{K} \bar{x} = \omega^2 \bar{M} \bar{x}$$

onde: \bar{K} : matriz de rigidez ;

\bar{M} : matriz de massa ;

\bar{x} : modo de vibração ;

ω : frequência natural.

A matriz de rigidez \bar{K} pode ser decomposta utilizando o método de Cholesky [8]:

$$(2.2) \quad \bar{K} = \bar{L} \bar{L}^T$$

Definindo \bar{A} como sendo

$$(2.3) \quad \bar{A} = \bar{L}^{-T} \bar{M} \bar{L}^{-T}$$

onde \bar{L} é uma matriz quadrada triangular inferior, tem-se:

$$(2.4) \quad \bar{A} \bar{y} = \lambda \bar{y} \quad e:$$

$$(2.5) \quad \bar{y} = \bar{L}^T \bar{x}$$

Considere-se uma matriz \bar{A} real e simétrica de ordem n , e um

2.2 - Subespaços Invariantes

conhecimento dos tópicos anteriores.

Finalmente o Método de Lanczos poderá ser explicado com o Os Subespaços de Krylov serão abordados em um item seguinte e matriz.

cálculo de aproximações de autovalores e autovetores de uma posteriormente este último, que se constitui em um método para o invariantes, no qual é baseado o Procedimento de Rayleigh-Ritz, e Inicialmente será abordado o conceito de subespaços necessários para o entendimento do Método de Lanczos.

Portanto, alguns comentários sobre estes tópicos são

- os Subespaços de Krylov.

- o Procedimento de Rayleigh-Ritz e

O Método de Lanczos constitui a união de duas ideias :

simétricas e reais.

objetivo é o cálculo de autovalores e autovetores de matrizes Método de Lanczos é direcionado, ou seja, leva-se em conta que o O encaminhamento aqui apresentado para o entendimento do vez que a matriz \bar{A} é simétrica.

clássica, equação (2.4), sem a perda da simetria do problema, uma reduzido da forma generalizada, equação (2.1), para a sua forma O problema de autovalores e autovetores pode, portanto, ser

$$(2.5) \quad \lambda = 1/\omega^2 .$$

Seja $\bar{F} = (\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n)$ uma base qualquer de um subespaço δ^n invariante sob \bar{A} , pode-se escrever:

Propriedade 2

□

De modo oposto, prova-se que todo subespaço invariante sob \bar{A} contém uma base formada por autovetores de \bar{A} [28].

com $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sendo os autovalores associados a $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n$.

$$(2.8) \quad \bar{A} \bar{v} = \bar{A} (a_1 \bar{z}_1 + \dots + a_n \bar{z}_n) = a_1 \bar{A} \bar{z}_1 + \dots + a_n \bar{A} \bar{z}_n = a_1 \lambda_1 \bar{z}_1 + \dots + a_n \lambda_n \bar{z}_n = \lambda_1 a_1 \bar{z}_1 + \dots + \lambda_n a_n \bar{z}_n \in \chi^n$$

χ^n temos:

Tomando-se um subespaço χ^n cuja base é representada pela matriz $\bar{Z} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$ cujas colunas são autovetores da matriz \bar{A} , χ^n é invariante sob \bar{A} , pois tomando-se um vetor $\bar{v} = a_1 \bar{z}_1 + \dots + a_n \bar{z}_n \in \chi^n$

Propriedade 1

Os subespaços invariantes possuem duas propriedades importantes comentadas a seguir.

$$(2.7) \quad \bar{A} \bar{x} \subset \delta^n \text{ para qualquer } \bar{x} \in \delta^n$$

Um subespaço δ^n é dito invariante sob a matriz \bar{A} se:

subespaço δ^n de ordem $n \times m$ do espaço \mathbb{R}^m .
 Define-se a operação indicada por $\bar{A} \bar{x}$ como sendo uma combinação linear das colunas de \bar{A} .

□

\bar{H} é uma matriz simétrica de ordem n e seus autovalores e autovetores determinam autovalores e autovetores da matriz \bar{A} , conforme verificado para a matriz \bar{C} .

$$(2.16) \quad \bar{H} = (\bar{Q}_1^T \bar{Q}_2^T \dots \bar{Q}_n^T) \bar{A} (\bar{Q}_1 \bar{Q}_2 \dots \bar{Q}_n) \quad (\bar{Q}_1^T \bar{Q}_2^T \dots \bar{Q}_n^T = \bar{I})$$

$$(2.15) \quad \bar{A} \bar{Q} = \bar{Q} \bar{H} \quad \text{com}$$

escrever:

Consequentemente tomando-se uma base $\bar{Q} = (\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n)$ do subespaço \bar{Q} invariante sob \bar{A} , onde $\bar{q}_j = \bar{e}_j$ (\bar{e}_j é o delta de Kronecker), utilizando as equações (2.10) e (2.11), pode-se

$$(2.14) \quad \bar{A} \bar{x} = \lambda \bar{x}$$

$$(2.13) \quad \bar{A} \bar{E} \bar{Y} = \lambda \bar{E} \bar{Y} \quad \text{então}$$

$$(2.12) \quad \bar{A} \bar{E} \bar{Y} = \bar{E} \bar{C} \bar{Y}$$

Cada autovetor e autovalor de \bar{C} determina um autovetor e um autovalor de \bar{A} , ou seja, se $\bar{C} \bar{Y} = \lambda \bar{Y}$ então $\bar{x} = \bar{E} \bar{Y}$ é autovetor de \bar{A} e λ é um autovalor de \bar{A} , pois da equação (2.10) temos:

$$(2.11) \quad \bar{C} = (\bar{E}^T \bar{E})^{-1} \bar{E}^T \bar{A} \bar{E}$$

Da equação (2.10) pode-se concluir que:

$$(2.10) \quad \bar{A} \bar{E} = \bar{E} \bar{C}$$

$$(2.9) \quad \bar{A} \bar{E}_j = \sum_{i=1}^n c_{ij} \bar{E}_i \quad \text{para } j=1, \dots, n \quad \text{ou}$$

2.3 - Procedimento de Rayleigh-Ritz

O procedimento de Rayleigh-Ritz é utilizado quando se deseja determinar autovalores e autovetores de uma matriz \bar{A} simétrica, em

número menor que a ordem da matriz \bar{A} .

Se for disponível um subespaço invariante sob a matriz \bar{A} ,

podemos a partir de uma base deste subespaço, determinar

autovalores e autovetores de \bar{A} , em número igual à dimensão deste

subespaço, conforme discutido anteriormente no item 2.2.

Entretanto, de uma forma geral não se dispõe de um subespaço

invariante sob a matriz \bar{A} , e sim de subespaços que podem conter

alguns autovetores da matriz \bar{A} .

O procedimento de Rayleigh-Ritz consiste basicamente na

aplicação da "propriedade 2" dos subespaços invariantes sob uma

matriz, tendo como dados iniciais a matriz \bar{A} (ordem n) da qual se

deseja calcular alguns autovalores e autovetores, e uma base $\bar{U} =$

$(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m)$ ($n \times m$) de um subespaço δ^n , que imagina-se conter

autovetores de \bar{A} .

Podemos dividir o procedimento de Rayleigh-Ritz nos seguintes

passos:

1 - Ortonormalização dos vetores da base inicial \bar{U} , gerando

uma nova base $\bar{Q} = (\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_m)$ do subespaço δ^n , onde $\bar{q}_i \bar{q}_j^T = \delta_{ij}$ (δ_{ij}

é o delta de Kronecker).

2 - Calcular a matriz $\bar{H} = \bar{Q}^T \bar{A} \bar{Q}$.

3 - Calcular os autovalores θ_i e autovetores \bar{y}_i da matriz \bar{H} .

4 - Calcular os vetores $\bar{x}_i = \bar{Q} \bar{y}_i$. Os valores (θ_i, \bar{x}_i) são

chamados pares de Ritz e constituem aproximações para autovalores

e autovetores de \bar{A} .

Subespaço de Krylov K_n é definido como sendo o subespaço que tem como base uma matriz de Krylov (adota-se aqui a notação sugerida na referência [28]), onde \bar{X} indica o subespaço que

$$(2.17) \quad \bar{K}_n(\bar{A}; \bar{A}) = (\bar{I}, \bar{A}\bar{I}, \dots, \bar{A}^{n-1}\bar{I})$$

Considera-se uma matriz \bar{A} real e simétrica de ordem n e um vetor \bar{I} não nulo de comprimento n . Matriz de Krylov \bar{K}_n é uma matriz de dimensão $m \times m$ com $n \leq m$, definida por:

2.4 - Subespaços de Krylov

A "boa qualidade" das aproximações (θ_i, \bar{x}_i) obtidas, ou seja com valores de $\|\bar{d}_i\|$ satisfatórios, dependem do subespaço \bar{K}_n tomado inicialmente, o que é um fator limitante para este procedimento, pois exige uma "boa escolha" de \bar{I} .

Este método é útil para o caso em que se deseja obter um número n de autovalores e autovetores, de uma matriz \bar{A} de ordem m , quando $n \ll m$. Pode-se neste caso obter aproximações para os autovalores e autovetores de \bar{A} , calculando-se autovalores e autovetores de uma matriz \bar{H} simétrica, de ordem muito menor que a da matriz original.

O procedimento de Rayleigh-Ritz obtém as aproximações (θ_i, \bar{x}_i) para autovalores e autovetores de \bar{A} existentes no subespaço \bar{K}_n gerado por \bar{U} , com os menores valores de $\|\bar{d}_i\|$ [28].

5 - Determina-se o erro de cada aproximação dado pelo módulo de $\bar{d}_i = \bar{A}\bar{x}_i - \theta_i\bar{A}\bar{x}_i$. Demonstra-se [28] que o intervalo $[\theta_i - \|\bar{d}_i\|, \theta_i + \|\bar{d}_i\|]$, contém um autovalor de \bar{A} .

Considera-se o caso particular em que a matriz \bar{A} e o vetor inicial \bar{f} geram uma seqüência de subespaços de Krylov, tal que:

$$(2.20) \quad K \subseteq K^{m-1} \subseteq K^{m-2} \subseteq \dots \subseteq K^m$$

Pela sua definição, os subespaços de Krylov são determinados pela matriz \bar{A} e pelo vetor \bar{f} , e de maneira geral:

O vetor q^{m+1} da base ortogonal distinta \bar{Q}^{m+1} do subespaço $K^{m+1}(\bar{f}; \bar{A})$, é obtido ortogonalizando-se $\bar{A} q^m$ com relação a q^1, \dots, q^m , segundo o processo de Gram-Schmidt.

$$(2.19) \quad \begin{aligned} \text{span}(q^1, \dots, q^m, \bar{A} q^m) &= \text{span}(q^1, \dots, q^m, \bar{A}(a^1 q^1 + a^2 q^2 + \dots + a^{m-1} q^{m-1} + q^m)) \\ &= \text{span}(q^1, \dots, q^m, \bar{A} q^1 + a^2 \bar{A} q^2 + \dots + a^{m-1} \bar{A} q^{m-1} + \bar{A} q^m) \\ &= \text{span}(q^1, \dots, q^m, \bar{A} q^1, \dots, \bar{A} q^{m-1}, \bar{A} q^m) \\ &= K^{m+1}(\bar{f}; \bar{A}) = \text{span } \bar{Q}^{m+1} \end{aligned}$$

Existe uma base do subespaço $K(\bar{f}; \bar{A})$, chamada de base ortogonal distinta, obtida aplicando-se o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, nos vetores $\bar{f}, \bar{A} \bar{f}, \dots, \bar{A}^{m-1} \bar{f}$, nesta seqüência. A base obtida desta maneira será representada pela matriz $\bar{Q}^m = (q^1, \dots, q^m)$, onde $q^i = \bar{f}_i$. O subespaço $K^{m+1}(\bar{f}; \bar{A})$ pode ser obtido "adicionando-se" o vetor $\bar{A} q^m$ a base \bar{Q}^m do subespaço $K^m(\bar{f}; \bar{A})$, pois observando-se que $q^i \in K^i(\bar{f}; \bar{A})$:

$$(2.18) \quad K(\bar{f}; \bar{A}) = \text{span } K^m(\bar{f}; \bar{A}) = \text{span}(\bar{f}, \bar{A} \bar{f}, \dots, \bar{A}^{m-1} \bar{f})$$

tem como base a matriz \bar{K} , portanto:

Portanto chamando de

$$(2.27) \quad q_j^T (\bar{A} q_j) = 0.$$

$\bar{A} q_j$ e q_{j+1} não são ortogonais, ou seja

$$(2.26) \quad q_j^T (\bar{A} q_j) = q_j^T (\bar{A} q_j) = 0 \text{ para todo } j < i-1;$$

pela simetria de \bar{A}

$$(2.25) \quad q_j^T (\bar{A} q_j) = 0 \text{ para cada } j > j+1;$$

(2.24), conclui-se que

A matriz $\bar{I} = \bar{Q}^T \bar{A} \bar{Q}$ é tridiagonal, pois das equações (2.22) a

Propriedade 1

seguir:

Importantes para a compreensão do Método de Lanczos, comentadas a Neste caso em particular tem-se duas propriedades que são

$$(2.24) \quad \bar{A} q_j \in K_{j+1}.$$

$$(2.23) \quad q_j^T K_{j-1} = 0.$$

$$(2.22) \quad \bar{A} \bar{k} \in K_{j+1} \text{ onde } \bar{k} \in K_j.$$

escrever para $j < m$:

Para a sequência de subespaços de Krylov acima pode-se

$$(2.21) \quad K(L; \bar{A}) \subset \dots \subset K_{m-1}(L; \bar{A}) \subset K_m(L; \bar{A})$$

O Método de Lanczos é um processo iterativo que visa obter n autovalores e autovetores de uma matriz \bar{A} simétrica de ordem m .

2.5 - O Método de Lanczos

Pode-se calcular o vetor q^{j+1} da base Q^{j+1} utilizando a equação (2.38), com r_j calculado com a equação (2.35) e β_j com a equação (2.37). A matriz \bar{I}^{j+1} pode ser obtida a partir da matriz \bar{I}_j , acrescentando-se α_j^{j+1} (calculado com a equação (2.28)) e β_j^{j+1} nas posições apropriadas.

$$(2.38) \quad r_j = \frac{\beta_j}{q_j^{j+1}}$$

$$(2.37) \quad \beta_j = \|r_j\|, \text{ pois } \|q_j^{j+1}\| = 1.$$

Um comentário final sobre os subespaços de Krylov, refere-se à simplicidade de se obter a matriz tridiagonal $\bar{I}^{j+1} = Q_j^{j+1} \bar{A} Q_j^{j+1}$ a partir da matriz $\bar{I}_j = Q_j \bar{A} Q_j$. Utilizando a equação (2.36), obtêm-se:

$$(2.36) \quad r_j = \beta_j q_j^{j+1}$$

$$(2.35) \quad \bar{A} q_j = \beta_j^{j-1} q_j^{j-1} + \alpha_j q_j + r_j.$$

Portanto no caso de uma matriz \bar{I}_j de ordem j tem-se:

$$(2.34) \quad \bar{A} q_j = \beta_j^{j-1} q_j^{j-1} + \alpha_j q_j + \beta_j q_j^{j+1}$$

O valor de $\bar{A} q_j$ calculado conforme equação (2.33) é:

através do cálculo de autovalores e autovetores de uma matriz tridiagonal \tilde{I}_j de ordem j , com j/m . Isto é feito aplicando-se o procedimento de Rayleigh-Ritz à sequência de subespaços de Krylov $K_j(\tilde{A}; \tilde{q}_j)$ ($j=2, 3, \dots$), onde \tilde{q}_j é um vetor inicial arbitrário, até se obter n autovalores satisfatórios.

A iteração j ($j=2, 3, \dots$) consiste em executar o procedimento de Rayleigh-Ritz (descrito no item 2.3), utilizando o subespaço de Krylov $K_j(\tilde{A}; \tilde{q}_j)$, definido pela matriz \tilde{A} e por um vetor inicial \tilde{q}_j .

O primeiro passo no procedimento de Rayleigh-Ritz, é determinar uma base ortonormal para o subespaço. No método de Lanczos, o subespaço utilizado é o subespaço de Krylov $K_j(\tilde{A}; \tilde{q}_j)$, cuja base ortonormal distinta \tilde{Q}_j pode ser obtida "acrescentando-se" o vetor \tilde{q}_j à base ortonormal distinta $\tilde{Q}_{j-1} = (\tilde{q}_{j-1}, \dots, \tilde{q}_1)$ do subespaço $K_{j-1}(\tilde{A}; \tilde{q}_1)$ disponível da iteração anterior.

O passo seguinte no procedimento de Rayleigh-Ritz, é a obtenção da matriz $\tilde{Q}_j^T \tilde{A} \tilde{Q}_j$. No caso do Método de Lanczos a matriz $\tilde{Q}_j^T \tilde{A} \tilde{Q}_j = \tilde{I}_j$, é tridiagonal, conforme "propriedade 1" citada no item 2.4, e é obtida a partir de \tilde{I}_{j-1} pela adição dos elementos β_{j-1} e α_j nas posições apropriadas. \tilde{I}_j é chamada de matriz de Lanczos.

A extração dos autovalores (θ_j, \tilde{s}_j) da matriz \tilde{I}_j é simplificada devido ao fato de \tilde{I}_j ser tridiagonal.

As melhores aproximações dos autovalores da matriz \tilde{A} obtidas no subespaço $K_j(\tilde{A}; \tilde{q}_j)$ são os pares de Ritz (θ_j, \tilde{s}_j) onde $\tilde{s}_j = \tilde{Q}_j \tilde{s}_j$, $j = 1, \dots, j$. Para verificar a precisão dos pares de Ritz, estima-se o erro de cada aproximação através do módulo de $\tilde{d}_j = \tilde{A} \tilde{s}_j - \theta_j \tilde{s}_j$. A cada iteração a dimensão do subespaço de Krylov utilizado aumenta de um, e as j melhores aproximações dos autovalores neste subespaço, ou seja com os menores valores para $\|\tilde{d}_j\|$, são

matriz \bar{A} de ordem n possui r autovalores, então o procedimento pode calcular apenas um autovetor para cada autovalor. Se dada determinar a multiplicidade de um autovalor de uma dada matriz, e Teoricamente o Método de Lanczos como apresentado não pode autopares desafiados com j iterações.

válidas para $j < l$. Ocorre normalmente [28] de se obter os n decorrentes das propriedades 1 e 2 citadas no item 2.4, são $I_j = Q_j^T \bar{A} Q_j$ e triangular) necessários ao Método de Lanczos Neste caso as expressões (2.35) a (2.38) e resultados (

$$(30) \quad K^l(\bar{A}) < \dots < K^2(\bar{A}) = K^{l+1}(\bar{A}) = \dots = K^m(\bar{A})$$

do tipo:

vetor inicial g_j , tendo-se uma sequência de subespaços de Krylov sejam verificadas, pode não ocorrer dependendo da matriz \bar{A} e do necessária para que as propriedades 1 e 2 citadas no item 2.4 A hipótese feita, representada pela expressão (2.20), valores de j tão pequenos quanto $2m^{1/2}$.

boas aproximações dos autovalores do final do espectro para valores pequenos de j . Pode ser demonstrado [28] que irão surgir acima) para autovalores e correspondentes autovetores, surgem para de que aproximações satisfatórias (segundo critério mencionado A grande aplicabilidade do Método de Lanczos reside no fato problema de valores próprios de uma ou mais matrizes de Lanczos.

de valores próprios de uma matriz \bar{A} (real, simétrica) pelo A ideia básica do Método de Lanczos é substituir o problema satisfatórios para $\|d_j\|$ sejam calculados. O processo continua até que n autopares com valores calculados pelo procedimento de Rayleigh-Ritz.

descrição deveria terminar após r passos, tendo determinado cada um dos autovalores distintos da matriz \tilde{A} , e um autovetor para cada autovalor distinto. Isto se deve ao fato de que as matrizes de Lanczos são simétricas triangulares inferiores, cujos autovalores são distintos [14,28].

Em 1950 Cornelius Lanczos publicou o artigo "An Iteration Method for the Solution of the Eigenvalue Problem of Linear Differential and Integral Operators". O método apresentado neste artigo não pode ser chamado de iterativo, o que significaria conseguir resultados aproximados com um número aberto de passos, pois fornece o resultado exato em n passos para um sistema de n graus de liberdade, ou seja, obtém a partir de da matriz inicial de ordem n , uma matriz tridiagonal de ordem n com os mesmos autovalores.

Os autovalores podem então ser obtidos da matriz tridiagonal, aplicando-se o princípio da sequência de Sturm e bissecções sucessivas nos intervalos que contêm autovalores [35]. Os autovalores correspondentes podem ser obtidos através de iterações inversas [35].

O Método de Lanczos apresenta instabilidade numérica (as colunas da matriz Q , citada no Capítulo 2, perdem sua ortogonalidade devido a erros de arredondamento) e é inferior a outros métodos para o cálculo de todos os autovalores disponíveis na época de sua publicação, como por exemplo o Método de Givens e o Método de Householder [25].

Wilkinson ao se referir ao Método de Lanczos (página 395 da referência [35]) diz: "Se incluirmos a reortogonalização, a instabilidade numérica do Método de Lanczos Simétrico (para matrizes simétricas) é comparável com as reduções simétricas de Givens e Householder para a forma tridiagonal, mas é claro que a redução de Householder é muito mais econômica", e ainda "o processo de Lanczos fornece a mesma (equivalente) matriz

tridiagonal que os métodos de Givén e Householder no cálculo exato. É difícil imaginar alguma razão pela qual deveríamos utilizar o Método de Lanczos em preferência ao Método de Householder". Devido aos motivos acima, o Método de Lanczos caiu em desuso e permaneceu esquecido.

No final dos anos sessenta o tamanho dos modelos dinâmicos de elementos finitos estavam se tornando cada vez maiores, exigindo crescente esforço computacional para o cálculo de autovalores e correspondentes autovetores. Este fato gerou um maior interesse nos métodos que permitissem redução da ordem do problema. Alguns pesquisadores verificaram que utilizando os vetores de Lanczos como base de redução no procedimento de Rayleigh-Ritz, ou seja, o Método de Lanczos na forma apresentada no Capítulo 2, poderiam obter aproximações satisfatórias para os autovalores e correspondentes autovetores, com considerável economia [25]. A partir de então muitos pesquisadores têm dado suas contribuições ao Método de Lanczos, no sentido de otimizá-lo quando utilizado em análise dinâmica.

O Método de Lanczos é discutido por Parlett [28], que apresenta meios de se monitorar a precisão dos autovalores e autovetores obtidos, sem calcular os vetores de Ritz, utilizando autovetores da matriz tridiagonal reduzida. Parlett discute também algumas variações do algoritmo básico.

Pissanetzky [29] analisou o problema de perda de ortogonalidade entre as colunas da matriz Q , devido à erros de arredondamento nas equações de recorrência para obtenção de um novo vetor de Lanczos, o que causa convergência para autovetores repetidos.

Pissanetzky apresenta duas alternativas: o algoritmo de

A reortogonalização seletiva apresentada por Chang proporciona melhorias ao método em dois aspectos: primeiro o subespaço e a reortogonalização do vetor \mathbf{g}_{j+1} é necessária.

convergiu para algum novo autovetor devido à adição do vetor \mathbf{g}_j ao autovetores diferem nestes passos de iteração, então o subespaço vetores de Lanczos \mathbf{g}_j e \mathbf{g}_{j+1} são gerados. Se o número desses desejada, obtidos nos respectivos passos de iteração em que os números de aproximações de autovetores dentro da precisão Lanczos \mathbf{g}_{j+1} deve ser reortogonalizado, é necessário verificar os No processo proposto por Chang, para decidir se o novo vetor encontrados.

vetor de Lanczos \mathbf{g}_{j+1} com relação aos "bons" autovetores é menor ou igual a j , será mais eficiente reortogonalizar o novo da precisão desejada, e desde que o número de autovetores "bons" levam à aproximações de autovetores da matriz de interesse dentro o atual subespaço de dimensão j pode representar (aqueles que para evitar que ele seja paralelo a um dos "bons" autovetores que Chang, desde que a reortogonalização do vetor de Lanczos \mathbf{g}_{j+1} é quando a convergência para um novo autovetor é iminente. Segundo estudos anteriores, diz que a reortogonalização só é necessária Outra alternativa foi descrita por Chang [6] que, baseado em

Lanczos \mathbf{g}_j .

ortogonalidade entre as colunas da matriz \mathbf{Q} e o novo vetor de Lanczos é reortogonalizado quando é detectada uma perda de matriz \mathbf{Q} ; e a reortogonalização parcial, onde o novo vetor de calculado é reortogonalizado com relação a todos os vetores da reortogonalização total, ou seja, cada novo vetor de Lanczos seletiva, ambos discutidos em detalhes por Parlett [28]: a Lanczos com reortogonalização total e com reortogonalização

número de ortogonalizações é reduzido, e segundo o novo valor deve ser reortogonalizado com relaxo a um número menor de valores.

Na análise dinâmica o problema de valores próprios está escrito na forma generalizada $(\bar{K} - \omega^2 \bar{M}) \bar{x} = 0$, com $\bar{M} =$ matriz de massa e $\bar{K} =$ matriz de rigidez e pode ser reduzido a um problema de valores próprios na forma clássica (do tipo $\bar{A} \bar{y} = \lambda \bar{y}$). Smith [33] testou as fatorizações de Cholesky da matriz de massa e da matriz de rigidez na redução do autoproblema generalizado para a forma clássica, e seus efeitos no tempo de processamento necessário na determinação das frequências.

$$(2.1) \quad (\bar{G}^{-1} \bar{K} \bar{G}^{-1}) (\bar{G}^{-1} \bar{x}) = \omega^2 (\bar{G}^{-1} \bar{x}) \quad \text{onde } \bar{M} = \bar{G}^{-1}$$

$$(2.2) \quad (\bar{L}^{-1} \bar{M} \bar{L}^{-1}) (\bar{L}^{-1} \bar{x}) = (1/\omega^2) (\bar{L}^{-1} \bar{x}) \quad \text{onde } \bar{K} = \bar{L}^{-1}$$

De acordo com suas conclusões a expressão (2.1) é mais aconselhável na determinação de frequências mais altas e a expressão (2.2) é mais eficiente na determinação de frequências mais baixas.

Várias implementações do Método de Lanczos foram realizadas tendo por objetivo compará-lo com métodos mais tradicionais para o cálculo de autopares de matrizes esparsas. Chowdhury [7], utilizou o Método de Lanczos para resolver o problema generalizado de autovalores e autovetores, resolve um exemplo numérico para ilustrar as potencialidades do método e compará-lo com o método de Iteração Simultânea. Os resultados obtidos mostraram que o Método de Lanczos utilizou um menor tempo de processamento que o Método de Iteração Simultânea.

Um exemplo de aplicação do Método de Lanczos é dado por Coutinho [10], que utilizou o método na análise dinâmica de estruturas "offshore", obtendo resultados satisfatórios e diminuindo consideravelmente o esforço computacional gasto na determinação da resposta dinâmica sem perda de precisão. Através de uma estratégia de escolha do vetor inicial adequada, verificou-se que alguns efeitos localizados, dependentes de modos de vibração

relação aos resultados obtidos deixado um certo número de usuários do método inseguros com Método de Lanczos ineficiente e a omissão de análises de erros tem utilização de técnicas de reortogonalização inadequadas, torna o Segundo Ojalvo uma seleção imprópria do vetor inicial e a para a escolha do vetor inicial são discutidas por Ojalvo [24]. Algumas questões de precisão, erros numéricos e estratégia Subespacos e Busca do Determinante.

métodos disponíveis no programa SAP 7, ou seja, Iteração por menor tempo de processamento para resolve-los do que os outros os problemas analisados no artigo o Método de Lanczos necessitou desenvolvimento de maneira a utilizar o mínimo de memória. Em todos geral, que utiliza o método dos elementos finitos. A rotina foi para encontrar autovalores e autovetores no programa SAP 7 de uso Weingarten [34] implementou o método de Lanczos como rotina

comparando o desempenho dos dois métodos, para os vários casos. relação ao tempo de processamento. Nour-Oud construiu gráficos métodos e conclui-se que o Método de Lanczos possui vantagens com Subespacos. Alguns exemplos foram resolvidos utilizando-se os dois na época, do Método de Lanczos e do Método de Iteração por autoproblemas em análise estrutural, utilizando versões recentes Nour-Oud [21] desenvolveu programas para a solução de

mais altos, são bem representados.

Uma variante do Método de Lanczos é deduzida por Chen [6] para resolver o problema de valores próprios proveniente da análise de sistemas estruturais com amortecimento viscoso. O algoritmo desenvolvido aproveita as vantagens de esparsidade e simetria das matrizes associadas. Dos resultados obtidos, conclui-se que o algoritmo proposto é consideravelmente mais económico que o algoritmo baseado no Método de Iteração por Subespaços para extrair os modos de vibrar mais baixos de sistemas dinâmicos amortecidos.

Outra variante do método conhecido como Método de Lanczos por Blocos é desenvolvida por alguns autores [14,15,17,22]. Sua vantagem sobre o método tradicional é que o Método de Lanczos por Blocos apresenta melhores resultados em sistemas que possuem autovalores repetidos ou muito próximos [17], o que é apontado como uma deficiência no Método de Lanczos [28]. Por outro lado, o Método de Lanczos tradicional realiza um número consideravelmente menor de operações sendo portanto mais rápido. A ideia básica do Método de Lanczos por Blocos é iniciar a iteração não com um simples vetor de Lanczos q_j , mas com um conjunto de vetores mutuamente perpendiculares tomados como colunas de uma matriz Q_j , e aplicar o procedimento de Rayleigh-Ritz na sequência de subespaços de Krylov $K(A; Q_j)$, $j=1,2,\dots$

Nour-Omid [22] mostra a utilização do Método de Lanczos por Blocos considerando um mecanismo de carregamentos múltiplos, onde cita como situação típica uma estrutura sujeita a movimentos devido a terremotos atuando em três eixos perpendiculares. Nour-Omid [23] mostra ainda a utilização deste método na análise dinâmica de estruturas com amortecimento.

Gupta [15] descreve um algoritmo baseado no Método de Lanczos por Blocos para solução do problema de vibração livre de sistema estruturais rotativos complexos.

O problema de valores próprios associado à análise dinâmica de estruturas complexas discretizadas utilizando o Método dos Elementos Finitos é uma atividade de enorme intensidade computacional. Avanços no desenvolvimento de computadores paralelos com métodos apropriados de solução, têm a vantagem potencial de proporcionar alta velocidade de processamento para auxiliar na solução de problemas de valores próprios. Bostic [3] descreve experiências realizadas envolvendo a implementação do método de Lanczos em um computador com processamento paralelo.

4 - ALGORITMOS PARA O MÉTODO DE LANÇOS

4.1 - Algoritmos básicos

No caso da determinação de modos e frequências naturais de vibração de estruturas com comportamento linear modeladas utilizando-se o Método dos Elementos Finitos, esta se resolvendo o problema de valores próprios na forma generalizada, dado pela equação (2.1), que pode ser reduzido para a forma clássica utilizando-se o processo de Cholesky [8].

Existem dois algoritmos básicos para o Método de Lanços diferenciados pela forma em que o problema de valores próprios é abordado, ou seja na forma clássica ou na forma generalizada. Se o problema esta na forma clássica tem-se o algoritmo de Lanços Simples, se esta na forma generalizada tem-se o algoritmo de Lanços Generalizado.

4.1.1 - Algoritmo de Lanços Simples

O algoritmo de Lanços Simples obtém aproximações para alguns dos autovalores e correspondentes autovetores de uma matriz simétrica \bar{A} de ordem m , e fornece o resultado exato após m passos, ou seja os m autovalores e autovetores da matriz \bar{A} . Utilizando as expressões (2.26) e (2.36) e (2.38), pode-se escrever o seguinte algoritmo para obter j autopares da matriz \bar{A} :

1. $q_j \leftarrow L_j^{-1} / \beta_j$
 2. $u_j \leftarrow \bar{A} q_j$
- L_0 é dado, $\beta_0 = \|L_0\| \neq 0$. Para $j = 1, 2, 3, \dots$ repetir:

A justificativa dada [28] é que embora os dois algoritmos acima sejam equivalentes na aritmética exata, o passo 3 representa uma ortogonalização entre os vetores de Lanczos q_{j-1} e q_{j+1} , diminuindo a instabilidade numérica do método, ou seja, a perda de ortogonalidade entre os vetores de Lanczos.

10. Se satisfatório \rightarrow pare.
 9. Calcular os vetores de Ritz λ .
 8. Calcular os autovares (θ_j, ξ_j) de I_j .
 7. Determinar I_j com $I_{j-1}, \beta_{j-1}, \alpha_j$.
 6. $\beta_j \rightarrow \|r_j\|$
 5. $r_j \rightarrow r_j - \beta_j q_j$
 4. $q_j \rightarrow q_j / \beta_j$
 3. $r_j \rightarrow \bar{u}_j - \beta_{j-1} q_{j-1}$
 2. $\bar{u}_j \leftarrow \bar{A} q_j$
 1. $q_j \rightarrow r_j / \beta_{j-1}$
- r_0 é dado, $\beta_0 = \|r_0\| \neq 0$. Para $j = 1, 2, 3, \dots$ repetir:

algoritmo acima:
 Parlett [28] propõe uma alteração nos passos 3 e 4 do

10. Se satisfatório \rightarrow pare.
9. Calcular os vetores de Ritz λ .
8. Calcular os autovares (θ_j, ξ_j) de I_j .
7. Determinar I_j com $I_{j-1}, \beta_{j-1}, \alpha_j$.
6. $\beta_j \rightarrow \|r_j\|$
5. $r_j \rightarrow r_j - \beta_j q_j$
4. $r_j \rightarrow \bar{u}_j - \beta_{j-1} q_{j-1}$
3. $q_j \rightarrow q_j / \beta_j$

$$(4.3) \quad 1. \quad \bar{y} = \bar{M} \bar{u}$$

Exemplificando, o vetor $\bar{w} = \bar{K}^{-1} \bar{M} \bar{u}$ é calculado em duas etapas:

problema.

Com a estratégia da redução implícita, o Método de Lanczos é aplicado à matriz $\bar{K}^{-1} \bar{M}$ sem que este produto seja calculado explicitamente, o que destruiria a esparsidade e a simetria do

$$(4.2) \quad \bar{K}^{-1} \bar{M} \bar{x} = \lambda \bar{x}$$

$$(4.1) \quad \bar{K} \bar{x} = \lambda \bar{M} \bar{x}$$

problema [9].

Em vez de se reduzir o problema generalizado para a forma clássica antes da aplicação do Método de Lanczos, o algoritmo de Lanczos generalizado propõe a estratégia da redução implícita do

4.1.2- Algoritmo de Lanczos Generalizado

vetores de Ritz ($\lambda = \sigma_j^2$).

recuperado novamente quando for necessário para os cálculos dos necessários, podendo ser armazenado em memória secundária e Após o passo 3 de iteração, o vetor \bar{g}_{j-1} não é mais

secundária para a operação $\bar{A} \bar{y}$.

computador utilizado, sendo então lida em blocos da memória caso a matriz \bar{A} tenha dimensão grande considerando-se a memória do um procedimento que dado \bar{y} retorna $\bar{A} \bar{y}$, o que representa vantagem pelo vetor \bar{g}_j . Na implementação deste algoritmo pode-se elaborar cada iteração, ou seja, no passo 2 a matriz \bar{A} é pós-multiplicada Neste algoritmo a matriz \bar{A} é manipulada somente uma vez em

O passo 2 de cada iteração é realizado em duas etapas, conforme discutido (equações (4.3) e (4.4)), implicando na solução de um sistema de equações lineares em cada iteração.

$$(4.6) \quad \bar{Q} (\bar{M} \bar{K} \bar{M}^T \bar{Q}) \bar{Q} = \bar{I}$$

satisfazendo a seguinte relação:

$$(4.5) \quad \bar{Q}^T \bar{M} \bar{Q} = \bar{I}$$

Este agora \bar{M} -ortogonais, ou seja de Lanczos Simples, exceto pelo fato de que as colunas da Matriz \bar{Q} do algoritmo de Lanczos Generalizado procede como o algoritmo

10. Se satisfatório \rightarrow pare.
9. Calcular os valores de Ritz λ_j
8. Calcular os autovetores (\bar{e}_j, \bar{z}_j) de \bar{I}_j
7. Determinar \bar{I}_j com $\bar{I}_{j-1}, \beta_{j-1}, \alpha_j$

$$6. \beta_j \leftarrow (\bar{L}_j^T \bar{M} \bar{L}_j)^{1/2}$$

$$5. \bar{L}_j \leftarrow \bar{L}_j - \alpha_j \bar{e}_j$$

$$4. \alpha_j \leftarrow \bar{e}_j^T (\bar{M} \bar{L}_j)$$

$$3. \bar{L}_j \leftarrow \bar{L}_j - \alpha_j \bar{e}_j \beta_{j-1}$$

$$2. \bar{u}_j \leftarrow \bar{K} \bar{M} \bar{L}_j$$

$$1. \bar{g}_j \leftarrow \bar{L}_j^T \bar{u}_j / \beta_{j-1}$$

$\bar{L}_0 \leftarrow$ dado, $\beta_0 = (\bar{L}_0^T \bar{M} \bar{L}_0)^{1/2} \neq 0$. Para $j = 1, 2, 3, \dots$ repetir:

O algoritmo de Lanczos Generalizado é proposto abaixo:

$$(4.4) \quad 2. \bar{K} \bar{w} = \bar{y} \quad , \text{ calculando } \bar{w}$$

O algoritmo de Lanczos pode ser reescrito utilizando-se a definição acima: cada vetor coluna de dimensão m no algoritmo de Lanczos simples, será agora entendido como uma matriz de dimensão $m \times k$ e cada escalar como uma matriz de dimensão $k \times k$. A matriz tridiagonal é agora a matriz \tilde{T}_j simétrica triangular por blocos (equação 4.8). Os blocos na codiagonal superior são

$$(4.7) \quad \tilde{T}_j = \text{span}(Q_1, \Delta Q_1, \dots, \tilde{A}^{-1} Q_1)$$

Tomando-se um conjunto de k vetores ortormais arbitrários, como sendo as colunas de uma matriz Q_1 de dimensão $m \times k$, a definição de subespaço de Krylov pode ser entendida como [28]:

4.2.1 - Algoritmo de Lanczos por Blocos

Lanczos por Blocos Iterativo.
conhecidos por algoritmo de Lanczos por Blocos e algoritmo de Cita-se aqui dois algoritmos principais desta variante maior.

Método de Lanczos capaz de determinar a multiplicidade dos autovalores encontrados, porém com um custo de processamento Entreanto, alguns autores [14, 28, 29] sugerem uma variante do

1.
Os algoritmos de Lanczos simples não podem determinar bases dos "autoespaços" associados, quando de dimensão maior que diretamente a multiplicidade dos autovalores encontrados e as

4.2 - Algoritmos por blocos

O algoritmo de Lanczos por blocos é semelhante ao algoritmo de Lanczos Simples, o conjunto de k vetores iniciais que constituem colunas da matriz inicial R_0 são dados. O primeiro

matriz triangular superior de dimensão $k \times k$.
 "Sendo R uma matriz não nula de ordem $m \times k$, cujas colunas são vetores linearmente independentes entre si, então R possui uma única fatoração $R = QR$, onde Q é uma matriz de dimensão $m \times k$, cujas colunas são vetores ortormais entre si ($Q^T Q = I$), e B é uma matriz triangular superior de dimensão $k \times k$."

O seguinte resultado [20] é necessário para o algoritmo de Lanczos por blocos:

$$(4.10) \quad \hat{Q}_j = (\hat{q}_1, \hat{q}_2, \dots, \hat{q}_j)$$

$$(4.9) \quad \hat{A}\hat{Q}_j = \hat{Q}_j \hat{I}_j - \hat{R}_j, \text{ com}$$

escrita como:

A relação fundamental dada pela equação (2.31) agora é

$$(4.8) \quad \hat{I}_j = \begin{bmatrix} \hat{A} & & & & \\ \hat{w}_1 & \hat{A} & & & \\ & \hat{w}_2 & \hat{A} & & \\ & & \hat{w}_3 & \hat{A} & \\ & & & \hat{w}_4 & \hat{A} \\ & & & & \hat{w}_{j-1} & \hat{A} \\ & & & & & \hat{w}_j & \hat{A} \end{bmatrix}$$

matrizes triangulares inferiores e os blocos na codiagonal inferior são triangulares superiores, portanto a matriz \hat{I}_j é na verdade uma matriz de banda, com largura de banda $k+1$.

O custo para se determinar os autovalores e autovetores de \bar{A}_j é alto se comparado ao custo de se determinar autovalores e autovetores de uma matriz tri-diagonal. Na prática este fato força

no item 4.1.1.

considerando-se a memória do computador utilizado, conforme citado representa uma vantagem caso a matriz \bar{A} tenha dimensão grande. Pode-se elaborar um procedimento para dado \bar{Q} retorna $\bar{A}\bar{Q}$, o que seja é pós-multiplicada pelo bloco \bar{Q}_j no passo 2 da iteração. autovetores, é manipulada somente uma vez em cada iteração, ou A matriz \bar{A} da qual se deseja determinar autovalores e

Ritz.

recuperado quando for necessário para o cálculo dos valores de necessário, podendo ser armazenado em memória secundária e Após o passo 2 o bloco (ou matriz) \bar{Q}_{j-1} não é mais

8. Se satisfatório \leftarrow pare.
 7. Calcular os valores de Ritz $\lambda_j = \bar{Q}_{j-1}^T \bar{A} \bar{Q}_{j-1}$
 6. Calcular os autovetores (θ_j, \bar{e}_j) de \bar{A}_j
 5. Determinar \bar{I}_j com $\bar{I}_{j-1} \cdot \bar{B}_{j-1} \cdot \bar{A}_j$
 4. $\bar{R}_j \leftarrow \bar{R}_{j-1} - \bar{Q}_{j-1} \bar{A}_j$
 3. $\bar{A}_j \leftarrow \bar{Q}_{j-1}^T \bar{R}_j$
 2. $\bar{R}_j \leftarrow \bar{A}\bar{Q}_j - \bar{Q}_{j-1} \bar{B}_{j-1}$
 1. $\bar{R}_{j-1} = \bar{Q}_{j-1}^T \bar{R}_j$ (fatorar \bar{R}_{j-1} para obter \bar{Q}_j e \bar{B}_{j-1})
- \bar{R}_0 é dado, $\bar{Q}_0 = \bar{Q}$. Para $j = 1, 2, 3, \dots$ repetir:

Pode-se escrever o seguinte algoritmo:

algoritmo de Lanczos Simples.

\bar{B}_0 , que não é utilizado de fato, e processo continua como no passo do processo iterativo é fatorar a matriz \bar{R}_0 obtendo-se \bar{Q}_1 e

R_k^x se satisfatório \rightarrow pare

5. Verificar a convergência usando as normas das colunas de

$$4. R_k^x \rightarrow R_k^x - Q_k^x A_k^x$$

$$3. A_k^x \rightarrow (Q_k^x)^T R_k^x$$

$$2. R_k^x \rightarrow \Delta Q_k^x$$

1. Para $k=1$ $R_0 = Q_1^T B_0$ (calcular R_0 para obter Q_1^x e B_0^x)

autopares desejados é dado, $Q_0 = \bar{Q}$.

R_0 de dimensão $m \times q$ onde q é pelo menos igual ao número de

Pode-se escrever o seguinte algoritmo :

das colunas de R_k^x (equação 4.8).

A convergência do algoritmo é acompanhada através da norma

colunas da matriz inicial Q_1^x , para a iteração seguinte.

matriz \bar{I}_m são calculados e os vetores de Ritz são utilizados como

Os q maiores autovalores e correspondentes autovetores da

Lanczos por blocos, adotando $m \times q$ como a dimensão de cada matriz Q_k .

determinado número $n-1$ de vezes os passos 1 a 5 do algoritmo de

O algoritmo consiste em efetuar a cada iteração um

autovetores de uma matriz simétrica \bar{A} de ordem m .

aproximações para os q maiores autovalores e correspondentes

O algoritmo de Lanczos por Blocos Iterativo, fornece

4.2.2- Algoritmo de Lanczos por Blocos Iterativo

determinados.

possuem multiplicidade menor ou igual a k são diretamente

Blocos k que autovetores, cujos correspondentes autovalores

A principal vantagem apontada no algoritmo de Lanczos por

k ser um número pequeno, usualmente 2, 3, ou 4 [28,29].

Este procedimento pode ser justificado utilizando-se a propriedade \mathcal{Z} dos subespaços invariáveis comentada no item 2.2. Se o subespaço gerado pelos vetores de Ritz que são as colunas da matriz \bar{Q}_k^T , fosse invariável, concluiria-se através das equações 2.15 e 2.16 que $\bar{R}_k^T = \bar{Q}^T$ e que os vetores de Ritz são autovetores da matriz \bar{A} , já que foram obtidos aplicando-se o procedimento de Rayleigh-Ritz (item 2.3). Portanto, quanto menor os valores contidos na matriz \bar{R}_k^T melhores são as aproximações obtidas para os autovetores de \bar{A} [28].

$$(4.11) \quad \bar{R}_k^T = \bar{A} \bar{Q}_k^T - \bar{Q}_k^T (\bar{Q}_k^T \bar{A} \bar{Q}_k^T)$$

Nos passos 2 a 5 do algoritmo de Lanczos determina-se a norma das colunas de \bar{R}_k^T para verificar se foram obtidas aproximações dentro da precisão desejada. \bar{R}_k^T é dado por:

6. Para $j = 2, \dots, n$ repetir:
 - 6.1. Calcular os q maiores autovalores e correspondentes autovetores $(\theta_k^j, \bar{e}_k^j)$ de \bar{I}_k^j
 7. Calcular os vetores de Ritz $y_k^j = \bar{Q}_k^j \bar{e}_k^j$
 8. Tomar os vetores de Ritz como colunas de \bar{Q}^{k+1}
 9. $k \leftarrow k+1$
 10. Continuar a partir de 2.
6. Calcular os q maiores autovalores e correspondentes autovalores \bar{I}_k^j com $\bar{I}_k^j = \bar{B}_k^{j-1} \bar{A}_k \bar{B}_k^{j-1}$
- 6.2. $\bar{R}_k^{j-1} = \bar{Q}_k^{j-1} \bar{B}_k^{j-1}$ (calcular \bar{R}_k^{j-1} para obter $\bar{Q}_k^j = \bar{B}_k^{j-1}$)
- 6.3. $\bar{R}_k^j = \bar{A} \bar{Q}_k^j - \bar{Q}_k^j (\bar{B}_k^{j-1})^T$
- 6.4. $\bar{A}_k^j = \bar{Q}_k^j (\bar{R}_k^j)^T$
- 6.5. $\bar{R}_k^j + \bar{R}_k^j - \bar{Q}_k^j \bar{A}_k^j$
- 6.6. Determinar \bar{I}_k^j com $\bar{I}_k^j = \bar{B}_k^{j-1} \bar{A}_k \bar{B}_k^{j-1}$

o problema original possui menos autovetores do que os seus m de liberdade de rotação. Neste caso a matriz de massa é singular e consideradas as inércias rotacionais, mas foram incluídos os graus Como exemplo pode-se citar um modelo de vigas onde não foram o número de graus de liberdade do sistema original.

situação ocorre quando o número de massas consideradas é menor que como combinação linear dos autovetores do sistema original. Esta (definido por seus autovetores), ou seja, não pode ser escrito inicial pode não estar contido no "espaço" do sistema original para um sistema de m graus de liberdade, onde o vetor de lanços comenta o caso em que a matriz \tilde{A} possui menos que m autovetores números para obter cada elemento do vetor de lanços inicial, e Ojalvo [24] recomenda o uso de um gerador randômico de como escolha para o vetor de lanços inicial.

Chang [5] apresenta o vetor $\mathbf{g}_1^T = (1 \ 1 \ \dots \ 1)^T / \sqrt{m}$ de dimensão m ,

processamentos consecutivos.

de \mathbf{g}_1 ser perpendicular a um autovetor de interesse em dois seja gerado aleatoriamente [24,28], alegando que seria "difícil". Alguns autores recomendam que o vetor de lanços inicial \mathbf{g}_1 ,

inicial de onde se obtém a matriz \mathbf{Q}_1 .

\mathbf{g}_1 , e nos algoritmos apresentados no item 4.2, a matriz \mathbf{R}_0 é dado e solicitada como dado inicial, de onde se obtém o vetor inicial Rayleigh-Ritz. Nos algoritmos apresentados no item 4.1, o vetor \mathbf{L}_0 subespaços de Krylov a serem submetidos ao procedimento de lanços por blocos), a partir do qual será definida a sequência de inicial \mathbf{g}_1 , ou um conjunto de valores iniciais (algoritmo de No Método de Lanços é preciso escolher um vetor de Lanços

graus de liberdade. O problema reduzido para sua forma clássica, apresenta uma matriz \bar{A} de ordem n dita "defectiva", isto é, possui n k n m autovetores.

Neste caso precisa-se garantir que não se procurará obter valores de λ de Lanczos em número maior do que os n autovetores existentes, e que todos os valores de λ de Lanczos estão contidos no "espaço" do sistema original, isto é, podem ser escritos como combinação linear dos autovetores do sistema original.

As condições acima podem ser alcançadas [24], pré-multiplicando-se o vetor inicial obtido aleatoriamente pela matriz \bar{A} , normalizando-o e utilizando-o como o vetor de Lanczos inicial na iteração.

4.4 - Monitoração do erro

A precisão dos pares de Rayleigh-Ritz (θ_j, χ_j) encontrados em cada iteração devem ser acompanhadas para indicar o momento de se interromper o processo iterativo, ou seja quando se obtiver os n autovetores desejados.

Parlett [28] aponta o valor de $\|\bar{A} \chi - \chi \theta\|$ como sendo uma medida indicativa da precisão dos pares de Rayleigh-Ritz. Pode-se determinar (θ_j, χ_j) a partir dos autopares (θ_j^i, χ_j^i) da matriz \bar{I}_j na iteração j do algoritmo de Lanczos. Entretanto é possível calcular $\|\bar{A} \chi - \chi \theta\|$ sem calcular χ prosseguindo-se da seguinte maneira [28]:

$$\begin{aligned} (4.12) \quad \|\bar{A} \chi - \chi \theta\| &= \|\bar{A} \bar{Q} \bar{e}_j - \bar{Q} \bar{e}_j \theta_j\|, \text{ pois } \chi = \bar{Q} \bar{e}_j \\ (4.13) \quad \|\bar{A} \chi - \chi \theta\| &= \|\bar{A} \bar{Q} \bar{Q}^T \bar{I}_j \bar{e}_j\|, \text{ pois } \bar{e}_j \bar{e}_j^T = \bar{I}_j \\ (4.14) \quad \|\bar{A} \chi - \chi \theta\| &= \|\bar{Q}^T \bar{A} \bar{Q} \bar{e}_j - \theta_j \bar{e}_j\|, \text{ utilizando (2).} \end{aligned}$$

4.5 - Instabilidade numérica

$$(4.17) \quad e_i = \beta_j |e_j^i| / \theta_i$$

equação (4.15) como sendo:

Ojavo [24] utiliza conceito inclui a magnitude do autovalor associado na verificação da convergência, redefinindo e_i da

$$(4.18) \quad e_{v_i} = 10^{-4} \theta_i$$

significativos, o valor:

implementação realizada em um computador VAX com 15 dígitos magnitude do autovalor associado. Chang [5] utiliza em sua aceitar um autovalor encontrado como resultado, deve refletir a Pelo que foi dito acima é aparente que o valor de e_i para apropriada.

correspondente autovalor foi encontrado com a precisão relativa de convergência para autovalores não precisa ser efetuado se o para autovalores e autovalores respectivamente. Portanto, o teste encontrados através de iteração vetorial são da ordem de e^2 e e Chang [5] comenta que o erros relativos de autopares

para $\| \bar{\lambda} - \lambda_i e_i \|$.

desejada, ou seja, $e_i < \hat{e}$, onde \hat{e} indica o valor máximo permitido calcular os vetores de Ritz, até que se tenha alcançado a precisão I_j normalizados ($\bar{\lambda}(m)$) indicam a convergência e não a precisão Portanto os valores nas últimas posições dos autovalores de

$$(4.18) \quad \| \bar{\lambda} - \lambda_i e_i \| = \beta_j |e_j^i| = e_i, \text{ pois } \| \bar{\lambda} \| = 1$$

Os computadores fornecem um conjunto discreto de números para representar o conjunto dos números reais. O número de valores existentes em um determinado intervalo depende do número de algarismos utilizados pelo computador para representar um número real, e da base numérica utilizada (base 2, base 8, base 16, etc.).

Portanto, pode-se dizer que toda operação realizada por um computador é de precisão finita, ou seja, erros de arredondamento ocorrem em toda operação numérica.

O efeito desta precisão finita dos cálculos numéricos no Método de Lanczos, é a perda de ortogonalidade entre os vetores de Lanczos a medida que a iteração progride.

Uma vez perdida a ortogonalidade entre os vetores de Lanczos, a matriz de Lanczos I_j não representa mais a projeção ortogonal da dada matriz \bar{A} nos subespaços de Krylov utilizados, e as relações apresentadas no Capítulo 2 baseadas neste resultado deixam de ser aplicáveis. Observa-se [14] que além da perda de ortogonalidade, ocorre também a perda da independência linear dos vetores de Lanczos.

Pode-se observar [28] que este fato leva o método a convergir para autovalores repetidos.

Algumas soluções foram encontradas [5,10,14,20,28] para, se não solucionar, diminuir os efeitos dos erros de arredondamento, entre os quais destacam-se a reortogonalização total, a reortogonalização parcial, a reortogonalização seletiva e o algoritmo sem reortogonalização.

4.5.1 - Reortogonalização total

Para se decidir se o vetor de Lanczos g^{j+1} deve ser reortogonalizado, pode-se comparar o número de autovalores "bons" reortogonalizado, isto significa que o espaço gerado pelos vetores de Lanczos convergiu para um novo autovalor devido à adição do vetor g_j e a reortogonalização do vetor g^{j+1} é necessária.

Desde que a reortogonalização do novo vetor de Lanczos g^{j+1} é para evitar que este vetor seja paralelo a algum "bom" autovalor reortogonalizado, então o vetor de Lanczos subsequente deve ser reortogonalizado.

Foi observado [5] que a reortogonalização do novo vetor de Lanczos com relação aos anteriores, é necessário se este novo vetor contribui pouco para a aproximação de um autovalor do subespaço gerado pelos vetores de Lanczos. Em outras palavras, se um conjunto de vetores de Lanczos existentes podem aproximar um novo autovalor, então o vetor de Lanczos subsequente deve ser reortogonalizado.

4.5.2 - Reortogonalização seletiva

As equações (4.18) e (4.19) são executadas até que $e^{(j)}$ atinja um valor determinado pelo usuário.

$$(4.19) \quad e^{(j)} = g^{(j)T} g^{(j+1)}$$

$$(4.18) \quad g^{(j+1)} = g^{(j)} - \sum_{i=1}^j e^{(i)} g^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots$$

O processo de reortogonalização total baseia-se na aplicação sucessiva do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt em cada novo vetor de Lanczos gerado, considerando cada vetor gerado anteriormente [24].

Subtraindo-se as expressões (4.21) e (4.22) para eliminar os termos envolvendo \bar{A} , pode-se obter a fórmula recursiva abaixo:

$$(4.22) \quad \bar{A} \bar{g}_j = \alpha_j \delta_{j,j} + \beta_j \delta_{j,j-1} + \beta_j \delta_{j,j+1}$$

Uma equação similar pode ser obtida no i -ésimo passo do procedimento de Lanczos:

$$(4.21) \quad \bar{A} \bar{g}_j = \alpha_j \delta_{j,j} + \beta_{j-1} \delta_{j,j-1} + \beta_j \delta_{j,j+1}$$

Pre-multiplicando-se a equação (2.34) por \bar{g}_j obtêm-se:

$$(4.20) \quad \bar{g}_j^T \bar{g}_j = \bar{g}_j^T \bar{A} \bar{g}_j$$

numa fórmula recursiva obtida a partir da expressão:
O processo de reortogonalização parcial [10,20] baseia-se

4.5.3 - Reortogonalização parcial

reortogonalizações e reduzido.
reortogonalizações e o número de vetores utilizados nas aspectos favoráveis: diminui as ocasiões em que são realizadas A reortogonalização seletiva conforme apresentada possui dois autovetores calculados.
reortogonalizar o novo vetor de Lanczos com relação aos "bons" que o número de vetores de Lanczos, é mais eficiente representar, e desde que o número de "bons" autovetores é menor que o espaço gerado pelos atuais j vetores de Lanczos pode

"Seja uma matriz \bar{A} real e simétrica de dimensão $n \times n$ e seja q_1 um vetor inicial utilizado nas equações recursivas 2.28, 2.35 e 2.37 para obter as matrizes de Lanczos \bar{I}_n , $n = 1, 2, \dots$, então para um certo N suficientemente grande, todo autovalor distinto da

precisão finita :

chamado Fenômeno de Lanczos [14], que é observado em aritmética de

O algoritmo de Lanczos sem reortogonalização é baseado no

4.5.4 - Algoritmo sem reortogonalização

A perda de ortogonalidade entre os vetores de Lanczos pode ser facilmente monitorada através da matriz \bar{W} , e um passo de reortogonalização é efetuado quando $\delta_{jj}^{1/2}$ é maior que o valor $\epsilon^{1/2}$.

$$(4.24) \quad \bar{W} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \delta_{11} & & & & & & & & & \\ & & \delta_{21} & & & & & & & & \\ & & & \delta_{31} & & & & & & & \\ & & & & \delta_{41} & & & & & & \\ & & & & & \delta_{j,1} & & & & & \\ & & & & & & \delta_{j,2} & & & & \\ & & & & & & & \dots & & & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

A fórmula recursiva (4.23) pode ser vista como a construção, linha por linha, da matriz \bar{W} simétrica de dimensão j :

erro de arredondamento.

onde $\delta_{1j}^2 = 1$, $j = 1, 2, \dots$

$\delta_{j-1}^2 = \epsilon$, $j = 2, 3, \dots$ e ϵ é da ordem de grandeza do

$$(4.23) \quad \beta^{j+1} \delta_{j+1}^2 = \beta^j \delta_{j+1}^2 + (\alpha_j^2 - \alpha_j^2) \delta_{j+1}^2 + (\beta_j^2 - \beta_j^2) \delta_{j-1}^2$$

matriz \bar{A} aparecerá como autovalor da matriz de Lanczos I_n para todo $n \in \mathbb{N}$. " O que é proposto é não realizar reortogonalização entre os valores de Lanczos, dando prosseguimento ao processo até que se obtenha os autovalores desejados.

É necessário identificar dentro os autovalores da matriz I_n , quais representam boas aproximações para autovalores de \bar{A} e quais são decorrentes das perdas de ortogonalidade entre os vetores de Lanczos. Algumas soluções para este problema são apresentadas por Cullum [14].

Ocorre, frequentemente, de a dimensão da matriz tridimensional I_n exceder a dimensão da matriz \bar{A} ($n > m$) [29].

B-SELEÇÃO DO ALGORITMO IMPLANTADO

B.1 - Escolha do tipo de algoritmo

A escolha foi feita entre os tipos principais de algoritmos

apresentados nos itens 4.1 e 4.2:

- algoritmos de Lanczos básicos e

- algoritmos de Lanczos por blocos.

Conforme explicado no Capítulo 4, a principal diferença entre

estes dois tipos de algoritmos é que no caso dos algoritmos

básicos a iteração começa a partir de um único vetor inicial,

enquanto que nos algoritmos por blocos a iteração começa a partir

de um conjunto de vetores.

A principal vantagem dos algoritmos por blocos sobre os

algoritmos simples é que, no caso dos algoritmos por blocos, a

multiplicidade dos autovalores encontrados pode ser diretamente

determinada, o que aparentemente não é possível no caso dos

algoritmos simples.

É a principal vantagem dos algoritmos simples é que as

matrizes das quais deve-se determinar autovalores e autovetores,

são triangulares, enquanto que as matrizes obtidas pelos

algoritmos por blocos são de banda. Portanto, no caso dos

algoritmos simples a obtenção dos autovalores e autovetores exige

um menor número de operações e menos memória.

Para a implantação do Método de Lanczos no programa de uso

geral MSAP [31] baseado no Método dos Elementos Finitos, optou-se

pelos algoritmos de Lanczos básicos devido à simplicidade das

rotinas para a obtenção de autovalores e autovetores das matrizes

A vantagem deste procedimento para monitorar o erro das aproximações obtidas para os autovalores e autovetores, é que os associados.

(Item 4.3), levando em consideração a magnitude do autovalor j através do valor $e_j = \beta_j |e_j^T| / \theta_j$, sugerido por Ojalvo [22]. A precisão dos pares de Ritz são monitorados em cada iteração

5.3 - Monitoração do erro

4.2).

pelos autovetores da matriz \bar{A} , no caso desta ser "defeituosa" (Item evita-se que o vetor inicial não pertença ao "espaço" definido deseja determinar os autopares. Ojalvo argumenta que desta forma gerado randomicamente, pré-multiplicado pela matriz \bar{A} da qual se o sugerido por Ojalvo [22], onde recomenda-se o uso de um vetor Como procedimento para a escolha do vetor inicial, adotou-se

5.2 - Procedimento de escolha do vetor inicial

redução sem perda da simetria do problema (Item 2.2). forma clássica. A Decomposição de Cholesky [8], realiza esta o problema de valores próprios de sua forma generalizada para sua No caso do algoritmo de Lanczos Simples é necessário reduzir vantagem numa primeira implantação do Método de Lanczos.

primeiro, por ser um algoritmo mais simples o que representa uma algoritmo de Lanczos Generalizado (Item 4.1.2), optou-se pelo Capítulo 4, ou seja, algoritmo de Lanczos Simples (Item 4.1.1) • Entre os algoritmos de Lanczos básicos apresentados no de Lanczos que são tridiagonais.

valores de Ritz não precisam ser determinados a cada iteração.

5.4 - Reortogonalização

Para garantir a ortogonalidade entre os vetores de Lanczos, optou-se pela reortogonalização total (item 4.4.1), ou seja, cada novo vetor de Lanczos obtido é reortogonalizado com relação a todos os vetores obtidos anteriormente.

O opção pela reortogonalização total, deve-se basicamente à sua facilidade de implementação, e a garantia de ortogonalidade entre os vetores de Lanczos.

5.5 - Determinação dos autovalores da matriz tridiagonal

Para a determinação dos autovalores da matriz tridiagonal T_j , construída na iteração j de procedimento, adotou-se o algoritmo QR [10] para o cálculo de autovalores, muito eficiente para matrizes tridiagonais simétricas [28], e o Método da Iteração Inversa [14] para a determinação dos autovalores.

5.6 - Multiplicidade dos autovalores

Para verificar a multiplicidade dos autovalores encontrados, e se realmente foram encontrados os n maiores autovalores (n menores frequências), acrescenta-se ao algoritmo um procedimento de verificação da posição dos autovalores no espectro e sua multiplicidade, baseado na Sequência de Sturm [19].

5.7 - Algoritmo escolhido

Baseado no que foi dito anteriormente pode-se escrever o seguinte algoritmo:

Dados : \bar{K} = matriz de rigidez ;

\bar{M} = matriz de massa ;

n = número de autopares desejados.

(1) - Decomposição de Cholesky:

determina-se \bar{L} tal que $\bar{K} = \bar{L} \bar{L}^T$;

$$\bar{A} = \bar{L}^{-T} \bar{M} \bar{L}^{-T} .$$

(2) - Vetor inicial:

$$j = 0 ;$$

gerar vetor \bar{L}_j randomicamente;

$$\bar{L}_j = \bar{A} \bar{L}_j ;$$

$$\beta_j = \|\bar{L}_j\| \neq 0 .$$

(3) - Vetor de Lanczos:

$$j = j+1 ;$$

$$g_j = \bar{L}_{j-1} / \beta_{j-1} .$$

(4) - Reortogonalização Total:

se $j > 1$ ortogonalizar g_j com relação aos vetores g_k ($k < j$)

segundo o procedimento de Gram-Schmidt.

$$(5) - \bar{u}_j = \bar{A} g_j .$$

(6) - Cálculo de α_j e β_j :

(14) - Ortonormalização:

$$\bar{x}_i = \bar{L}^T x_i$$

(13) - Cálculo dos autovetores do problema original (θ_i, \bar{x}_i) :

$$x_i = Q \bar{x}_i$$

(12) - Cálculo dos pares de Rayleigh-Ritz (θ_i, x_i) :

(11) - Se $NVB < n$ então repetir a partir de (3).

se $j > 1$ guardar g_{j-1} como coluna $j-1$ da matriz Q .

(10) - Armazenamento dos vetores de Lanczos:

se $\epsilon_i >$ tolerância utilizada então $NVB = NVB+1$.

$$e_i = \beta_j |s_{ij}| / \theta_i$$

repetir para $i = 1, \dots, j$

$NVB = 0$:

(9) - Número de autovetores satisfatórios:

o algoritmo QR e Iteração Inversa.

se $j \geq n$ calcular os autovetores (θ_i, \bar{x}_i) de \bar{I}_j utilizando

(8) - Autovetores de \bar{I}_j (θ_i, \bar{x}_i) :

(7) - Construir \bar{I}_j com $\bar{I}_{j-1}, \beta_{j-1}, \alpha_j$.

$$\beta_j = \|\bar{r}_j\|$$

$$r_j = \bar{r}_j - \alpha_j \bar{e}_j$$

$$\alpha_j = \bar{r}_j^T \bar{e}_j$$

$$r_j = \bar{r}_j - \alpha_j \bar{e}_j$$

Uma modificação no algoritmo de Lanczos simples é feita no passo (8) da iteração, onde somente se calculam os autovalores e autovetores da matriz tridiagonal, se sua dimensão é maior ou igual ao número de frequências desejadas.

Esta modificação evita o cálculo desnecessário de autovalores e autovetores das matrizes tridiagonais de dimensão menor do que o número de frequências naturais desejadas, pois mesmo constituindo aproximações dentro da precisão requerida não são em quantidade desejada.

5.8 - Implantação

O algoritmo apresentado no item 5.6 foi implantado no programa MSAP [31], como procedimento para obtenção das primeiras frequências naturais e respectivos modos de vibração. As matrizes de massa e rigidez são determinadas pelos procedimentos existentes no programa MSAP, e o algoritmo de Lanczos é acionado para determinar frequências e modos de vibração.

A implantação foi realizada sem a utilização de memória secundária, ou seja todos os dados estão na memória principal, excesso é feita na leitura das matrizes de massa e rigidez e no fornecimento das frequências naturais e modos de vibração obtidos de volta ao programa MSAP.

Existe uma limitação na dimensão das matrizes utilizadas e

profanto no número de graus de liberdade dos modelos processados.
No computador utilizado, o Burroughs B7900 do Centro de
Computação Eletrônica da USP, uma matriz cujos valores são reais
em precisão simples pode ter no máximo 65.000 posições.
O Apêndice 1 contém uma listagem das rotinas implantadas no
programa MSAP.

6.1 - Objetivos

Foram realizados alguns testes do algoritmo baseado no Método de Lanczos implantado no programa MSAP, tendo os seguintes objetivos:

- Verificar a precisão das aproximações para frequências naturais e modos de vibração obtidos com o algoritmo de Lanczos implantado no programa MSAP;

- medir o tempo necessário à obtenção das frequências naturais e modos de vibração pelo algoritmo de Lanczos.

A precisão das aproximações determinadas para frequências naturais ω e modos de vibração \bar{x} , será fornecida pela seguinte expressão [1] :

$$(6.1) \quad e = \frac{\|\bar{kx}\|}{\|\bar{kx} - \omega^2 \bar{Mx}\|}$$

Fisicamente \bar{kx} representa as forças nodais elásticas e $\omega^2 \bar{Mx}$ representa as forças nodais de inércia quando o modelo de elementos finitos está vibrando no modo \bar{x} . A equação 6.1 calcula o desbalançamento das forças nodais dividido pela norma das forças nodais elásticas, que deve ser "pequeno" se ω^2 e \bar{x} constituem uma "boa" aproximação de um autopar [1].

O tempo para a obtenção das frequências naturais e modos de vibração, é medido a partir do início da rotina de cálculo dos autopares, ou seja a partir da Decomposição de Cholesky, até o normalização dos modos de vibração com relação à matriz de massa.

Figura 6.1 : Viga bi-apoiada.



6.2.1 - Viga bi-apoiada (Figura 6.1).

- um para a placa quadrada.
- dois para a placa retangular;
- um para a viga bi-apoiada;

Foram elaborados quatro modelos :

- viga bi-apoiada;
- chapa retangular engastada;
- chapa quadrada apoiada nos cantos.

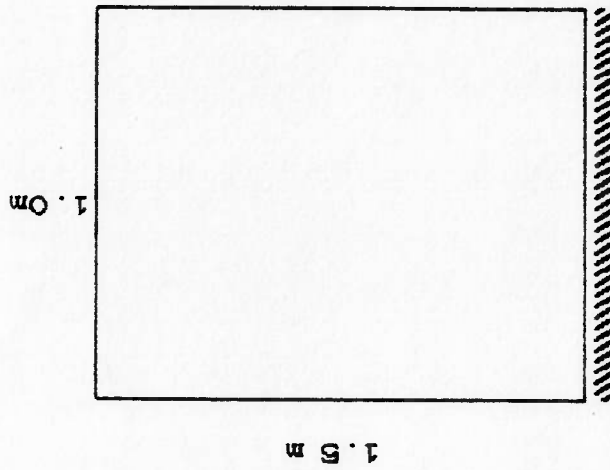
Foram considerados para testes três problemas:

6.2 - Testes realizados

Não é considerado o tempo gasto na impressão dos resultados. A medição do tempo é feita desta forma para possibilitar uma comparação de tempo utilizado entre a rotina baseada no Método de Lanczos, e as rotinas baseadas nos métodos de Busca do Determinante e Iteração por Subespaços, disponíveis no programa MSAP, já que a medição de tempo para as duas rotinas citadas é feita de forma análoga no programa MSAP.

Dimensões:

Figura 6.2 : Chapa retangular com um lado engastado.



6.2.2- Chapa retangular com um lado engastado (Figura 6.2).

- 34 nós;
- 33 elementos;
- 88 graus de liberdade.

Modelo VIGA :

- propriedades do material:
- densidade = 7850 Kg/m^3 ;
- módulo de elasticidade = $0.26 \cdot 10^6 \text{ MPa}$;
- coeficiente de Poisson = 0.3 .

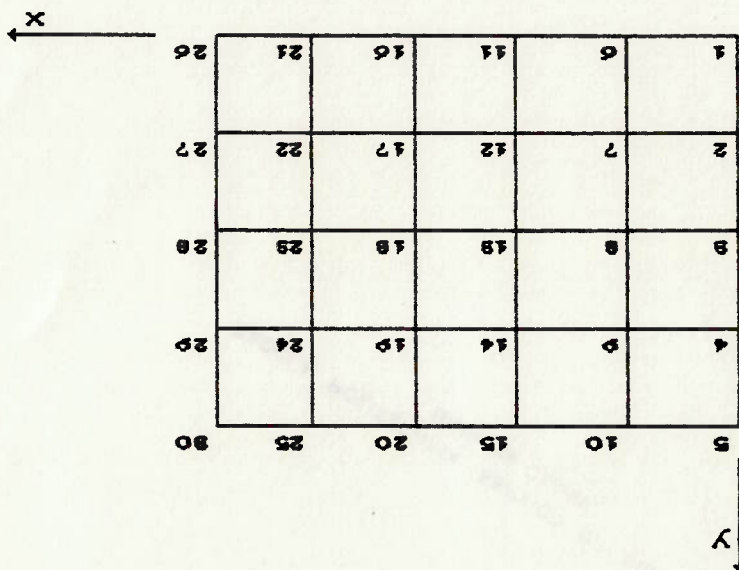
- comprimento = 6 m ;
- área da secção transversal = 0.0005 m^2 ;
- momento de inércia de área = $1.041 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4$.

Valores e propriedades geométricas:

- 225 graus de liberdade.
- 36 elementos;
- 50 nós;

Modelo CHAPAZ (Figura 6.4) :

Figura 6.8 : Modelo da chapa retangular com 80 nós e 20 elementos.



- 125 graus de liberdade.
- 20 elementos ;
- 20 nós ;

Modelo CHAPA (Figura 6.3) :

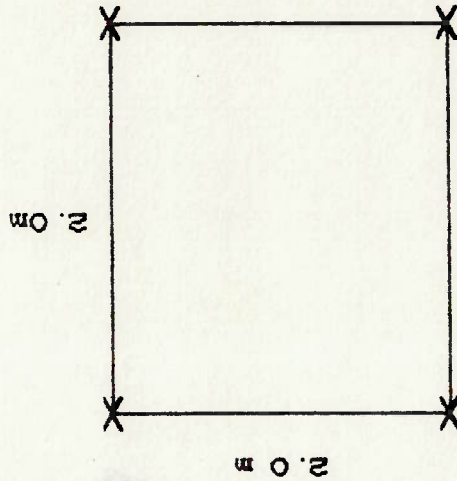
- coeficiente de Poisson = 0.3 .
 - módulo de elasticidade = $0.206 \cdot 10^6$ MPa;
 - densidade = 7800 Kg/m³;
- Propriedades do material:

- largura = 1.0 m .
- comprimento = 1.5 m ;
- espessura = 0.01 m ;

- comprimento do lado = 2.0 m .
- espessura = 0.01 m ;

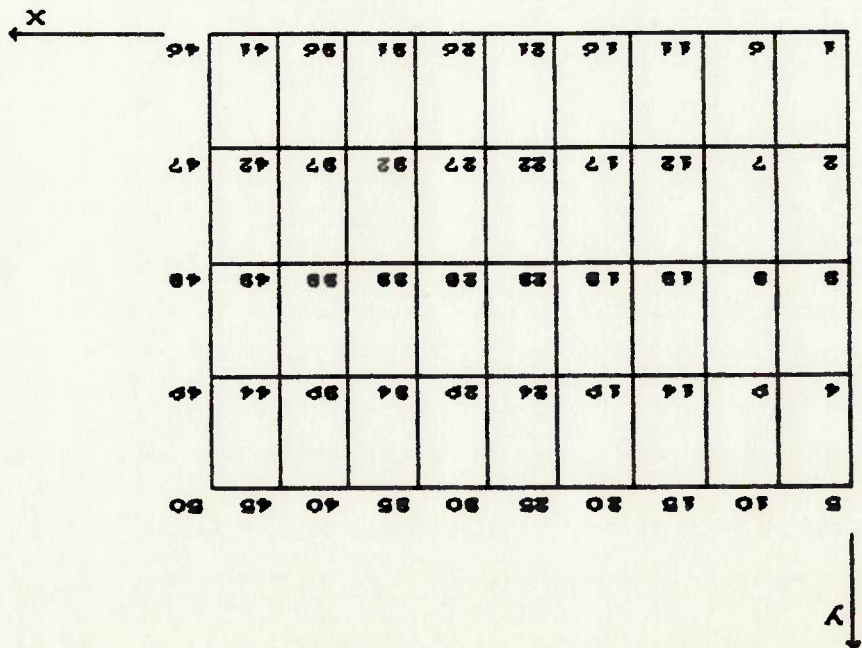
Dimensões:

Figura 6.5 : chapa quadrada apolada nos cantos.



6.2.3- Chapa quadrada apolada nos cantos (Figura 6.5).

Figura 6.4 : Modelo da chapa retangular com 50 nós e 56 elementos.

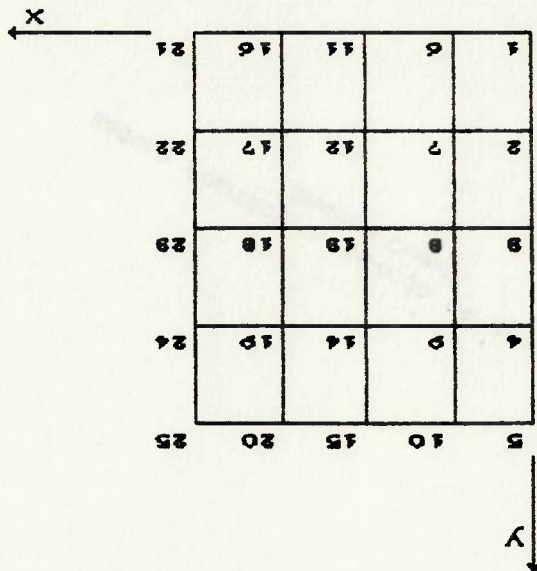


A seguir são apresentados os resultados obtidos no cálculo

6.3.1 - Precisão das aproximações

6.3 - Resultados

Figura 6.6 : Modelo da chapa quadrada com 25 nós e 16 elementos.



- 113 graus de liberdade.

- 16 elementos;

- 25 nós;

Modelo CHAPA3 (Figura 6.6) :

- coeficiente de Poisson = 0.3 .

- módulo de elasticidade = $0.206 \cdot 10^6$ MPa;

- densidade = 7800 Kg/m^3 ;

Propriedades do material:

Tabal 6.1 : Frequências naturais para viga bi-apoiada o tidas pelo programa MSAP utilizando modelo com 88 elementos.

FREQUÊNCIAS NATURAIS (rad/s)			
Nº	Busca Deter.	Iter Subesp.	Lanczos
1	0.95509 10 ¹	0.95509 10 ¹	0.95509 10 ¹
2	0.33198 10 ²	0.33198 10 ²	0.33198 10 ²
3	0.62889 10 ²	0.62889 10 ²	0.62889 10 ²
4	0.94102 10 ²	0.94102 10 ²	0.94102 10 ²
5	0.12518 10 ³	0.12518 10 ³	0.12518 10 ³

MODELO VIGA:

6.4, 6.5, 6.8).
 das cinco primeiras frequências naturais pelo programa MSAP, dos modelos VIGA, CHAPAI, CHAPAZ e CHAPAZ, utilizando os métodos de Busca de Determinante, Iteração por Subespaços e Lanczos (tabelas 6.1, 6.3, 6.5 e 6.7), e ainda, a precisão (ou erro) das aproximações dadas pelo valor de ϵ na equação 6.1 (tabelas 6.2,

FREQÜÊNCIAS NATURAIS (rad/s)

Nº	Busca Deter.	Iter. Subesp.	Lanczos	Blevins (2)
1	0.23516 10 ²	0.23516 10 ²	0.23516 10 ²	0.24032 10 ²
2	0.77574 10 ²	0.77574 10 ²	0.77574 10 ²	0.80730 10 ²
3	0.14107 10 ⁹	0.14107 10 ⁹	0.14107 10 ⁹	0.14943 10 ⁹
4	0.25672 10 ⁹	0.25672 10 ⁹	0.25672 10 ⁹	0.27295 10 ⁹
5	0.31705 10 ⁹	0.31705 10 ⁹	0.31705 10 ⁹	0.37241 10 ⁹

Tabela 6.1 : Frequências naturais da chapa retangular obtidas pelo programa MSAP utilizando o modelo de 20 elementos e calculadas analiticamente (2).

MODELO CHAPA:

Tabela 6.2 : Medida de erro nos autopares obtidos para o modelo de viga bi-apoiada, utilizando-se o Método de Lanczos.

Autopar	e (Eq. 6.1)
1	0.1066 10 ⁻⁸
2	0.1978 10 ⁻⁸
3	0.4529 10 ⁻⁸
4	0.2339 10 ⁻⁴
5	0.1051 10 ⁻²

Tabela 6.5 : Frequências naturais da chapa retangular obtidas pelo programa MSAP utilizando o modelo de 96 e calculadas analiticamente (2).

FREQUÊNCIAS NATURAIS (rad/s)				
Nº	Busca Deter.	Iter. Subesp.	Lanczos	Blevins (2)
1	0.23774 10 ²	0.23774 10 ²	0.23774 10 ²	0.24032 10 ²
2	0.76539 10 ²	0.76539 10 ²	0.76539 10 ²	0.80730 10 ²
3	0.14503 10 ³	0.14503 10 ³	0.14503 10 ³	0.14943 10 ³
4	0.25803 10 ³	0.25803 10 ³	0.25803 10 ³	0.27295 10 ³
5	0.31906 10 ³	0.31906 10 ³	0.31906 10 ³	0.37241 10 ³

MODELO CHAPAZ:

Tabela 6.4 : Medida de erro nos autopares obtidas para o modelo de chapa retangular com 80 elementos, utilizando-se o Método de Lanczos.

Autopar	e (Eq. 6.1)
1	0.1159 10 ⁻⁶
2	0.1793 10 ⁻⁶
3	0.4122 10 ⁻⁶
4	0.2083 10 ⁻⁵
5	0.1531 10 ⁻⁴

Tabela 6.7 : Frequências naturais de chapa quadrada obtidas pelo programa MSAP utilizando o modelo de 16 elementos e calculadas analiticamente [2].

FREQUÊNCIAS NATURAIS (rad/s)				
Nº	Busca Deter.	Iter. Subesp.	Lanczos	Blevins [2]
1	0.29051 10 ²	0.29051 10 ²	0.29051 10 ²	0.27760 10 ²
2	0.60142 10 ²	0.60142 10 ²	0.60142 10 ²	0.61390 10 ²
3	0.60142 10 ²	0.60142 10 ²	0.60142 10 ²	0.61390 10 ²
4	0.63546 10 ²	0.63546 10 ²	0.63546 10 ²	0.64889 10 ²
5	0.15149 10 ³	0.15149 10 ³	0.15149 10 ³	-----

MODELO CHAPAS:

Tabela 6.6 : Medida de erro nos autopares obtidos para o modelo de chapa retangular com 8 elementos, utilizando-se o Método de Lanczos.

Autopar	ϵ (Eq. 6.1)
1	0.2690 10 ⁻⁶
2	0.3716 10 ⁻⁶
3	0.1359 10 ⁻⁵
4	0.6264 10 ⁻⁵
5	0.4301 10 ⁻⁴

O tempo de processamento utilizado para a obtenção de autovalores e autovetores pelos métodos de Busca do Determinante, iteração por Subespaços e Lanczos, em alguns testes, estão indicados nos gráficos a seguir (Figuras 6.7, 6.8, 6.9 e 6.10).

6.3.2- Tempo de processamento

Tabela 6.8 : Medida de erro nos autovalores obtidos para o modelo da chapa quadrada com 16 elementos, utilizando-se o Método de Lanczos.

Autopar e (Eq. 6.1)	1	$0.1052 \cdot 10^{-6}$
	2	$0.5054 \cdot 10^{-6}$
	3	$0.3442 \cdot 10^{-6}$
	4	$0.3445 \cdot 10^{-6}$
	5	$0.1155 \cdot 10^{-5}$

No gráfico estão indicados os tempos de processamento utilizados pelos métodos de Busca do Determinante, Iteração por Subespaços e Lanczos no cálculo das 5, 10, 15 e 20 primeiras frequências naturais e modos de vibração do modelo VIGA.

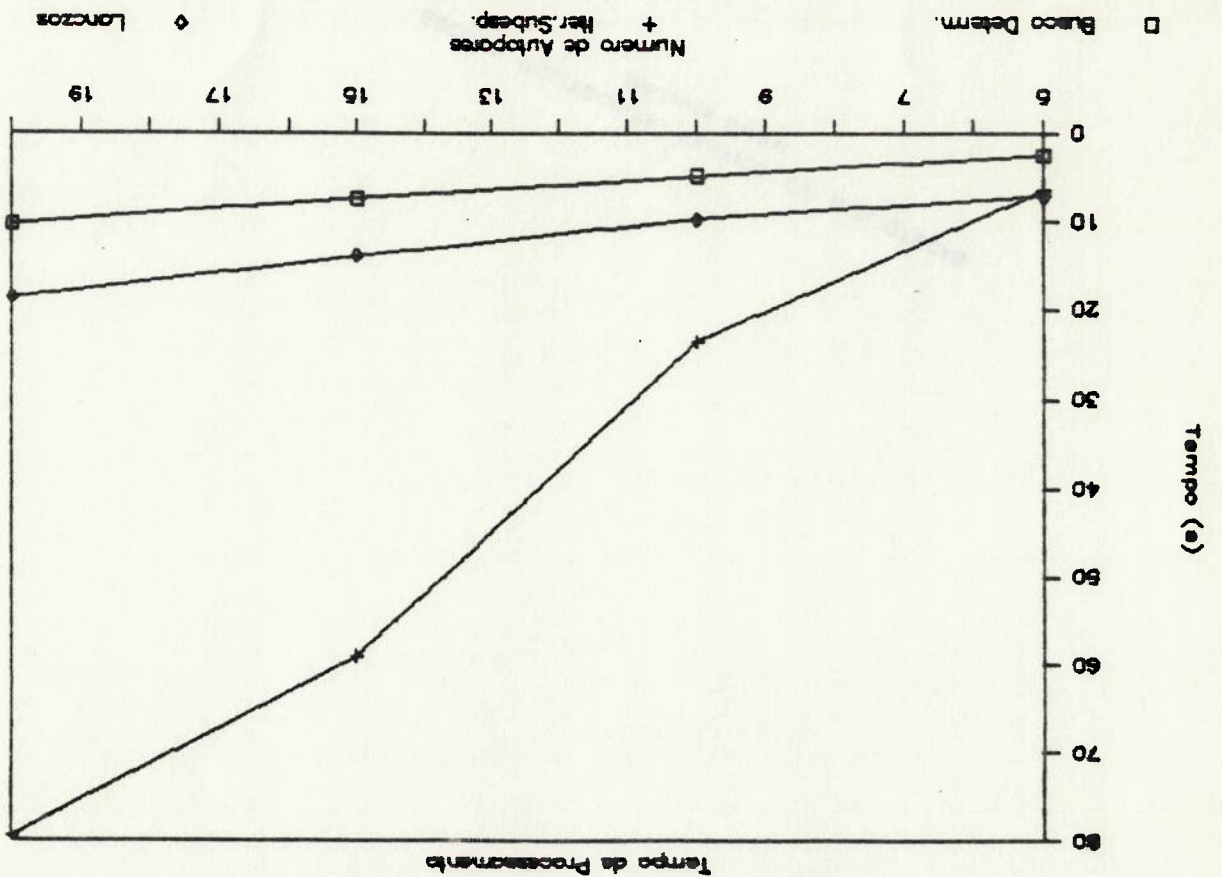


Figura 6.7 - Modelo VIGA

Tempo de Processamento

Tempo (s)

No gráfico estão indicados os tempos de processamento utilizados pelos métodos de Busca do Determinante e Lanczos no cálculo das 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40 e 45 primeiras frequências naturais e modos de vibração do modelo VIGA.

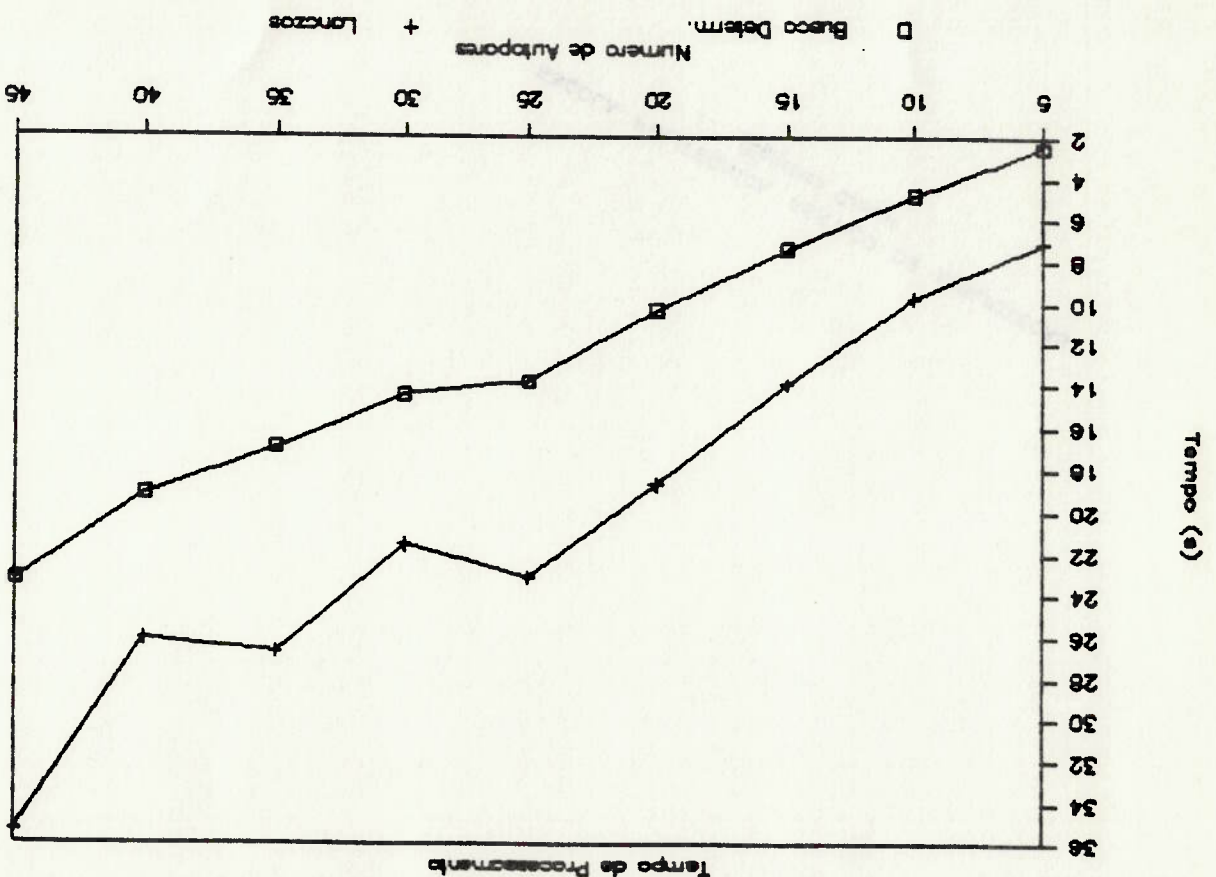


Figura 6.8 - Modelo VIGA

No gráfico estão indicados os tempos de processamento utilizados pelos métodos de Busca de Determinante, Iteração por Subespaços e Lanczos no cálculo das 5, 10, 15, 20, 25, 30 e 35 primeiras frequências naturais e modos de vibração do modelo CHAPA2.

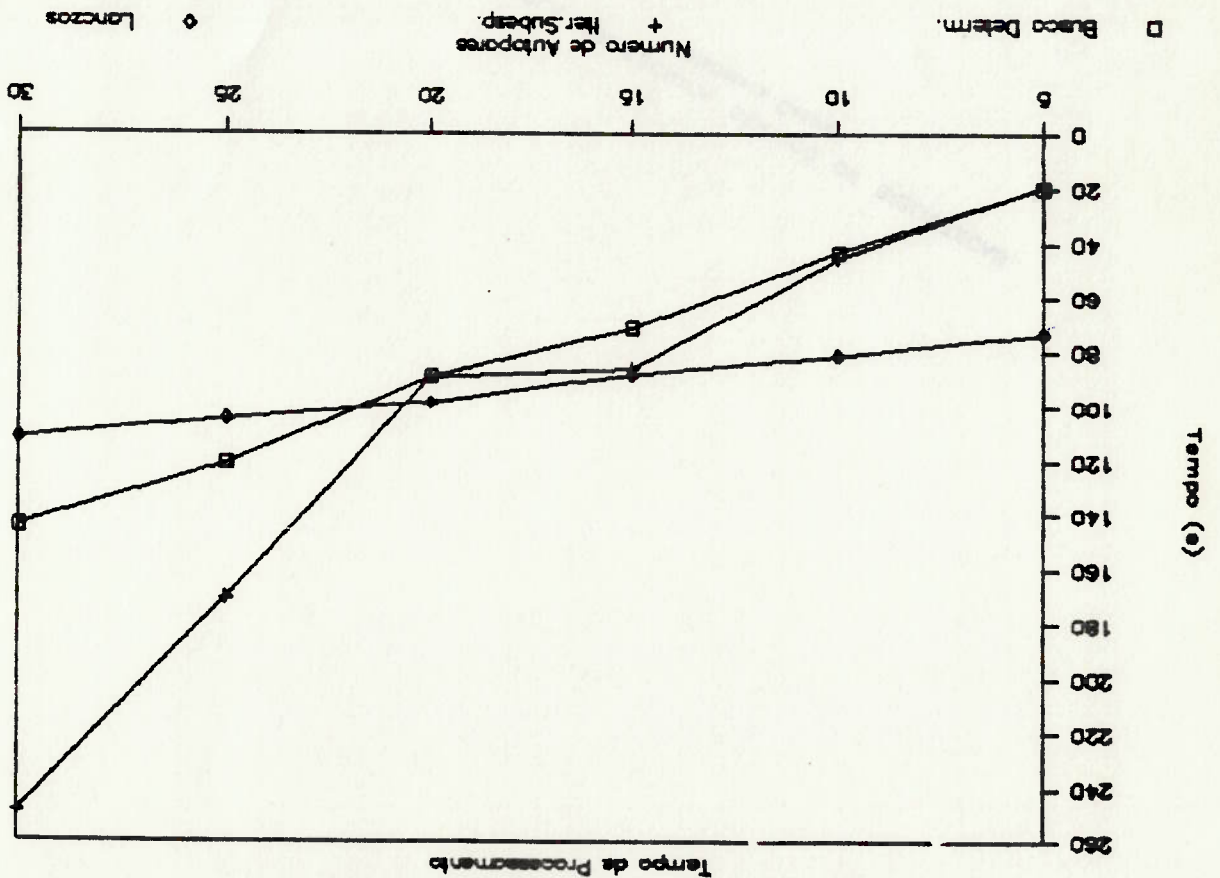


Figura 6.9 - Modelo CHAPA2

No gráfico estão indicados os tempos de processamento utilizados pelos métodos de Busca do Determinante e Lanczos no cálculo das 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, e 50 primeiras frequências naturais e modos de vibração do modelo CHAPA2.

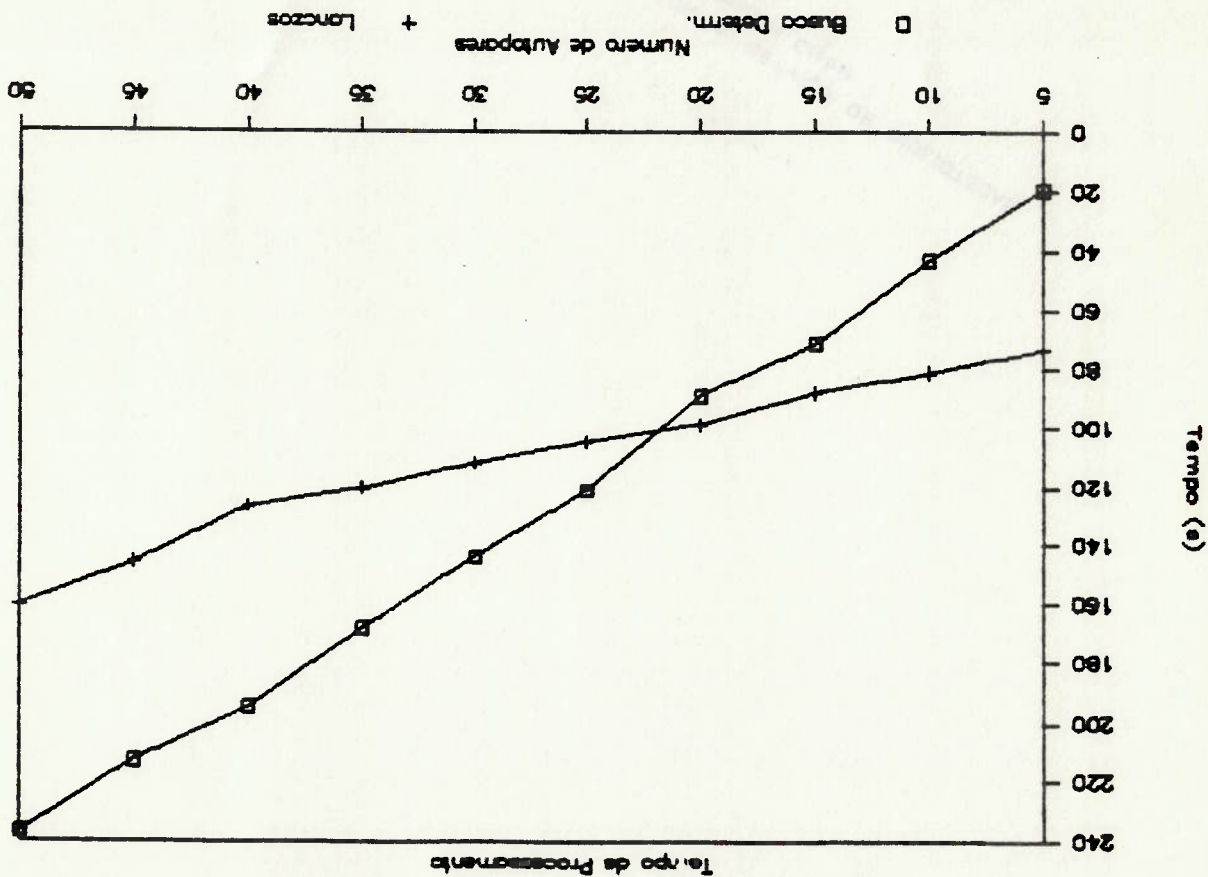


Figura 6.10 - Modelo CHAPA2

As dimensões das matrizes tri diagonais obtidas através do algoritmo de Lanczos implantado, que a partir de seus autovalores e autovetores obtêm-se aproximações para os autovalores e autovetores do problema original dentro da precisão requerida e em número desejado, estão indicados na tabela 6.10.

6.3.3- Dimensão da matriz tri diagonal

Tabela 6.9 : Parcela do tempo total utilizado pelo algoritmo de Lanczos na decomposição de Cholesky.

Modelo	Dec. Cholesky
VIGA	5.1 s
CHAPA1	7.8 s
CHAPA2	56.5 s
CHAPA3	10.5 s

A tabela 6.9 mostra a parcela do tempo total utilizado pelo algoritmo de Lanczos, na transformação do problema de valores próprios da forma generalizada para a clássica através da decomposição de Cholesky.

pelos Métodos de Busca de Determinante e Lanczos.
 primeiras frequências naturais dos modelos VIGA e CHAPA3, obtidos
 - o Apêndice 2 contém os autovalores correspondentes às cinco

nunca maiores que 0.11×10^{-2} ;

equação 6.1 foram na maioria dos casos menores que 0.1×10^{-4} e
 - o valores dos erros para os autopares medidos segundo a

mesmos resultados;

do Determinante, Iteração por Subespaços e Lanczos apresentam os
 das frequências naturais pelo programa MSAP, os métodos de Busca
 - dentro do número de algoritmos utilizados na apresentação

Precisão dos resultados:

6.4 - Comentários.

Tabela 6.10 : Dimensão da matriz triangular necessária para se obter as aproximações dos autopares desejados.

NºAutop.	VIGA	CHAPA1	CHAPA2	CHAPA3
5	16	14	14	15
10	26	--	26	--
15	36	--	36	--
20	44	--	44	--
25	50	--	49	--
30	50	--	55	--
35	57	--	50	--
40	58	--	64	--
45	68	--	76	--
50	--	--	83	--

Multiplicidade dos autovalores:

- para o modelo CHAPAS o algoritmo de Lanczos determina a multiplicidade do autovalor correspondente à segunda frequência, obtendo os mesmos resultados que o Método de Busca do Determinante e Iteração por Subespaços (tabela 6.7):
- os autovalores obtidos pelo algoritmo de Lanczos para as frequências 2 e 3 da tabela 6.7 diferem dos obtidos pelo Método da Busca do Determinante (Apêndice 2).

Tempo de processamento:

- uma comparação entre o tempo de processamento utilizado, Determinante, pois dentre os métodos disponíveis no programa MSAP, Método de Busca do Determinante é o mais eficiente para o caso dos modelos usados nos testes, que podem ser processados utilizando-se somente a memória principal do computador [9]:
- para o modelo VIGA o algoritmo de Lanczos utiliza mais tempo de processamento do que o Método de Busca do Determinante para o cálculo das 45 primeiras frequências naturais e modos de vibração;
- para o modelo CHAPAS o algoritmo de Lanczos utiliza menos tempo de processamento que o Método de Busca do Determinante, para o cálculo das 25, 30, 35, 40, 45 e 50 primeiras frequências naturais e modos de vibração.

7 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Os resultados obtidos pelo algoritmo de Lanczos implantado no programa MSAP são satisfatórios, como pode ser observado nas tabelas do item 6.3.1.

O algoritmo implantado utiliza menos tempo de processamento que o Método da Busca de Determinante no caso de problemas com um maior número de graus de liberdade, como é o caso do modelo CHAPAZ.

Mostra-se útil implantar um algoritmo de Lanczos no programa MSAP, para determinar frequências naturais e modos de vibração de modelos cujas matrizes de rigidez e de massa não podem ser inteiramente armazenadas em memória principal, a fim de se aproveitar o desempenho do Método de Lanczos na solução de problemas de valores próprios de grande dimensão.

A Decomposição de Cholesky é responsável por uma parcela significativa do tempo total de processamento (tabela 6.8). Uma avaliação do algoritmo de Lanczos Generalizado é deixada como sugestão, pois este pode ser mais eficiente em termos de tempo de processamento, já que não necessita realizar a Decomposição de Cholesky.

O algoritmo de Lanczos implantado no programa MSAP, somente passa a calcular os autovalores e autovetores das matrizes de Lanczos, quando sua dimensão for igual ou maior ao número de frequências desejadas.

A última matriz de Lanczos gerada pelo processo iterativo, que a partir de seus autovalores e autovetores obtêm-se aproximações para os autovalores e autovetores do problema original, em número desejado na precisão requerida, possui

dimensão sempre maior que o número frequências desejadas segundo a tabela 6.10.

Para se ter uma ideia da variação no tempo de processamento, foi realizada uma modificação no algoritmo implantado, de forma que os autovalores e autovetores das matrizes de Lanczos são calculados, se estas matrizes forem de dimensão igual ou maior a uma vez e meia o número de frequências desejadas.

A "nova" rotina foi batizada de Lanczos II e alguns testes foram realizados para comparar o seu desempenho com o procedimento original (Lanczos), utilizando os modelos VIGA e CHAPAZ descritos no capítulo 6. Os resultados obtidos estão indicados nos gráficos das figuras 7.1, 7.2, 7.3 e 7.4.

No gráfico estão indicados os tempos de processamento utilizados pelo Método de Busca de Determinante e algoritmos Lanczos e Lanczos II, no cálculo das 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, e 50 primeiras frequências naturais e modos de vibração do modelo CHAPA2.

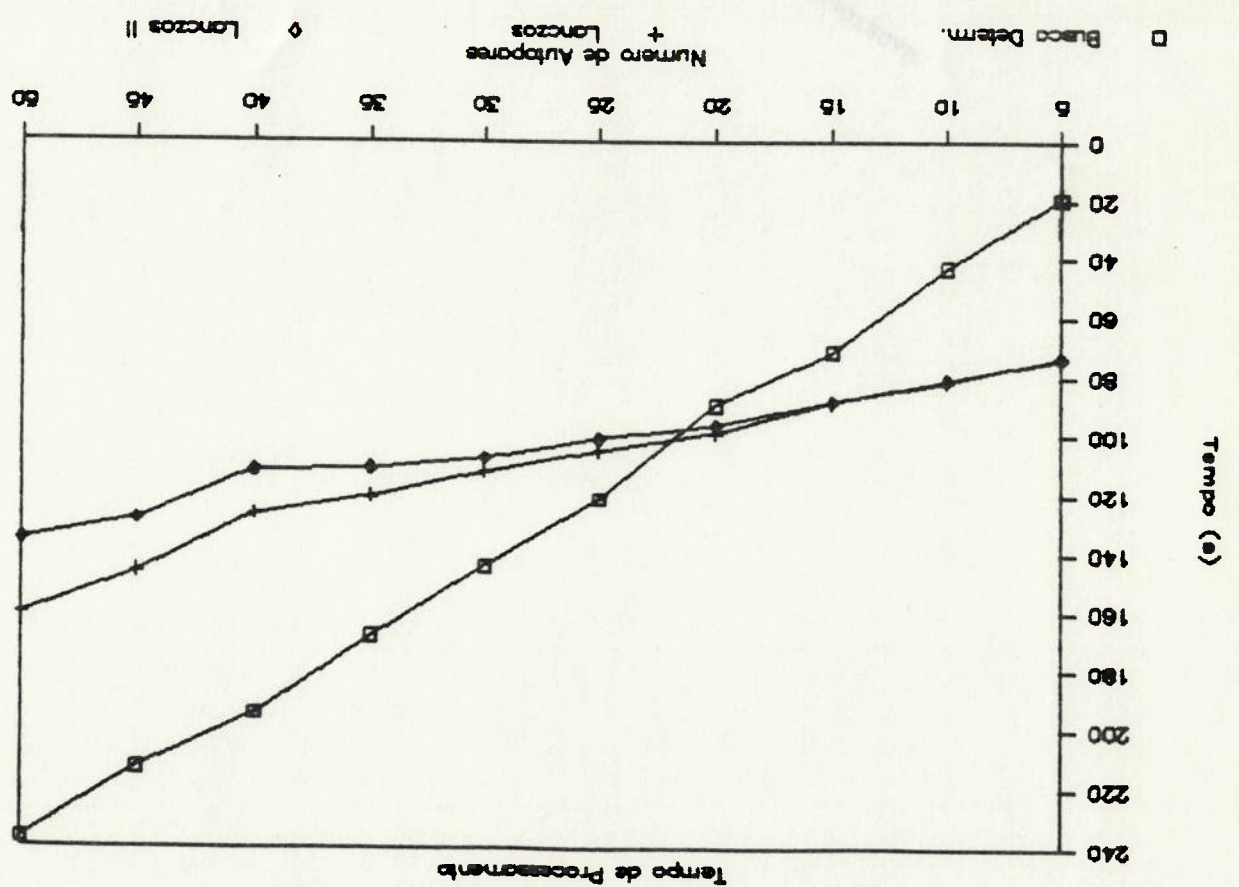


Figura 7.1 - Modelo CHAPA2

No gráfico estão indicados os tempos de processamento utilizados pelos algoritmos Lanczos e Lanczos II, no cálculo das 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, e 50 primeiras frequências naturais e modos de vibração do modelo CHAPA2, descontado o tempo gasto na Decomposição de Cholesky.

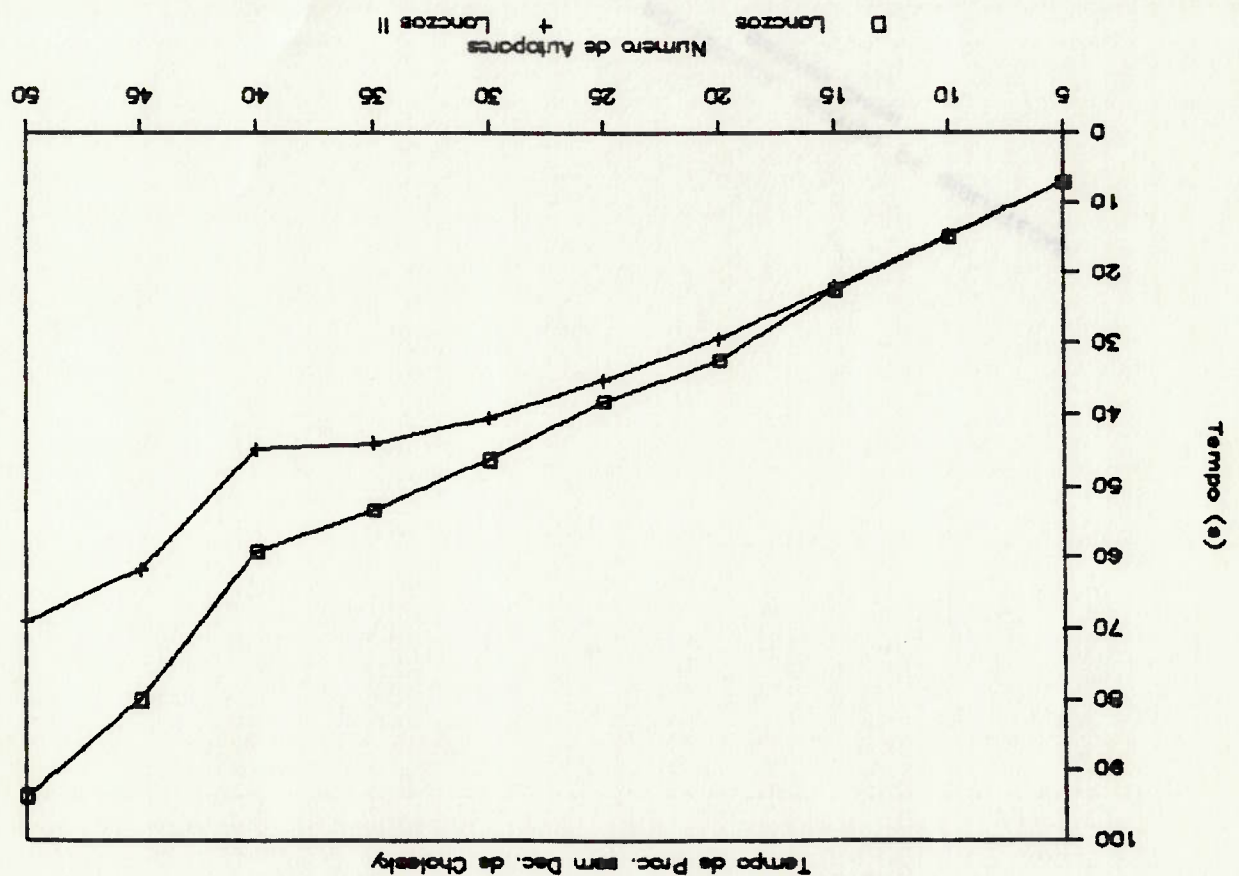


Figura 7.2 - Modelo CHAPA2

Tempo de Proc. sem Dec. de Cholesky

No gráfico estão indicados os tempos de processamento utilizados pelo Método de Busca do Determinante e algoritmos Lanczos e Lanczos II, no cálculo das 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, e 45 primeiras frequências naturais e modos de vibração do modelo VIGA.

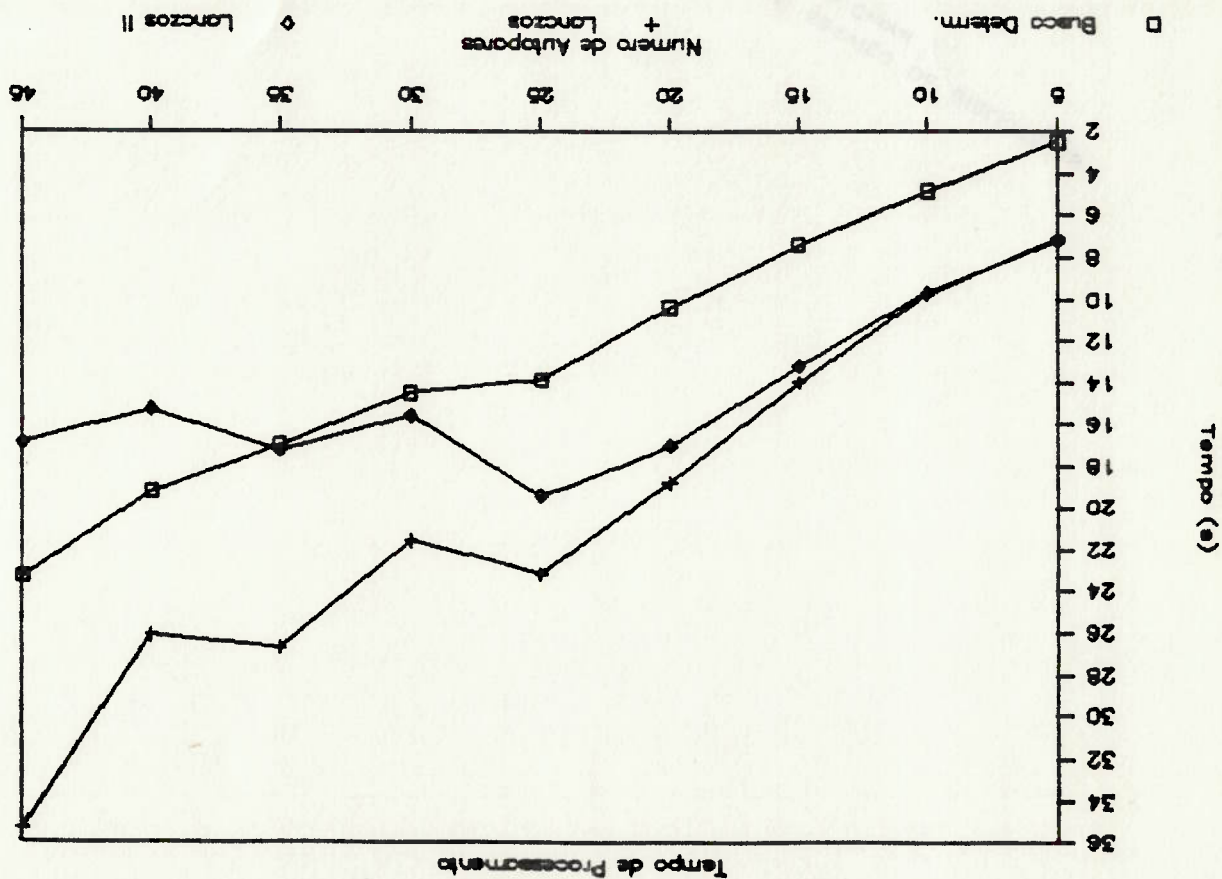


Figura 7.3 - Modelo VIGA

No gráfico estão indicados os tempos de processamento utilizados pelos algoritmos Lanczos e Lanczos II, no cálculo das 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, e 45 primeiras frequências naturais e modos de vibração do modelo VIGA, descontado o tempo gasto na Decomposição de Cholesky.

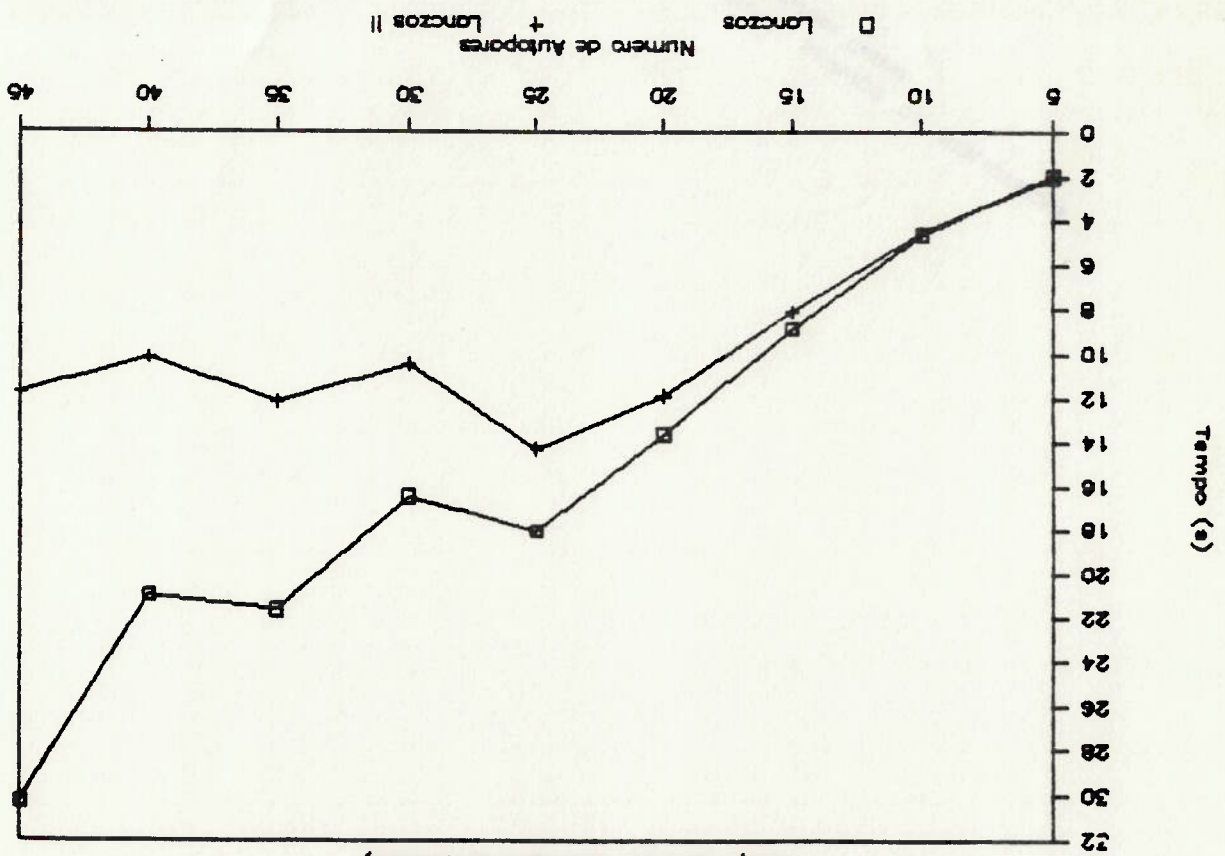


Figura 7.4 - Modelo VIGA

Conforme pode-se observar nas figuras 7.1 a 7.4, o algoritmo Lancos II, por efetuar um número menor de operações, utiliza menos tempo de processamento que o algoritmo de Lancos originalmente implantado.

Observa-se ainda, que para o modelo VIGA, o algoritmo Lancos II utiliza menor tempo de processamento que o Método da Busca Determinante no cálculo das 40 e 45 primeiras frequências naturais e modos de vibração (figura 7.3).

Seria de grande contribuição para a diminuição do tempo gasto no processamento, que se pudesse começar a calcular os autovalores e autovetores das matrizes de Lancos, quando estas tiverem dimensão muito próxima a da matriz de Lancos final.

Uma sugestão para trabalhos futuros é estudar uma relação entre a "forma" das matrizes de massa e rigidez, o número frequências desejadas e a dimensão da matriz de Lancos gerada pelo processo iterativo, que a partir de seus autovalores e autovetores obtêm-se aproximações para os autovalores e autovetores do problema original, em número desejado e dentro da precisão requerida.

Nas tabelas 6.7 e 6.8, observa-se que o algoritmo de Lancos determinou uma frequência natural com dois modos de vibração associados, o que não deveria ocorrer considerando-se o Método de Lancos como descrito no Capítulo 2. O autovalor correspondente à frequência natural 60.142 rad/s do modelo CHAPAS é de multiplicidade 2, portanto qualquer vetor pertencente ao correspondente "autoespaço" de ordem 2, é um autovalor.

O fato do algoritmo de Lancos ter encontrado dois autovalores para o autovalor citado, não se deve à instabilidade

numérica comentada no item 4.5, pois o algoritmo de Lanczos implantado realiza reortogonalização total.

Provavelmente, este resultado inesperado deve-se ao fato de que estamos trabalhando com uma aritmética de precisão finita, onde erros de arredondamento ocorrem em todas as operações realizadas.

Uma das principais críticas aos algoritmos de Lanczos simples [14,28,29] é baseado no argumento de que estes algoritmos, conforme demonstrado considerando-se uma aritmética exata [14,28], não poderiam determinar a multiplicidade dos autovalores obtidos, favorecendo a utilização dos algoritmos de Lanczos por blocos, mais complexos.

O estudo deste fenômeno, fica como sugestão para trabalhos futuros, pois seu entendimento pode resultar em um algoritmo para o Método de Lanczos eficiente na determinação de autovalores com multiplicidade maior que 1 e respectiva base de seu autoespaço.

- (11) BATHE, K.J.; WILSON, E.L.; PETERSON, F.E. SAP IV = A Structural Analysis Program for Static and Dynamic Response of Linear Systems. Berkeley, University of California, 1974.
- (12) BLEVINS, R.D. Formulas for Natural Frequency and Mode Shape. Malabar, Robert E. Krieger Publishing Company, 1986.
- (13) BOSTIC, S.W.; FULTON, R.E. Implementation of the Lanczos Method for Structural Vibration Analysis on a Parallel Computer. Computers and Structures, 25 : 395-403, 1987.
- (14) CARNAHAN, B.; LUTHER, H.A.; WILKES J.O. Applied Numerical Methods. New York, John Wiley & Sons, 1969.
- (15) CHANG, S.C. Lanczos Algorithm with Selective Reorthogonalization for Eigenvalue Extraction in Structural Dynamic and Stability Analysis. Computers and Structures, 23 : 121-128, 1986.
- (16) CHEN, H.C. & TAYLOR, R.L. Solution of Eigenproblems for Damped Structural Systems by the Lanczos Algorithm. Computers and Structures, 30 : 151-161, 1988.
- (17) CHOWDHURY, P.C. The Truncated Lanczos Algorithm for Partial Solution of the Symmetric Problem. Computers and Structures, 5 : 439-446, 1976.

- [8] CLOUGH, R. W. & PENZLEN, J. Dynamics of Structures. New York, McGraw-Hill, 1975.
- [9] CORREA NETO, M. R. S. Análise de Métodos Numéricos para Determinação de Frequências e Modos Naturais de Vibração de Estruturas Discretizadas por Elementos Finitos. Dissertação de Mestrado, Depto. de Engenharia Mecânica, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1989.
- [10] COUTINHO, L. G. A. et alii. The Application of the Lanczos Mode Superposition Method in Dynamic Analysis of Offshore Structures. Computers and Structures, 25 : 615-626, 1987.
- [11] COUTINHO, L. G. A.; LANDAU, L.; WRABEL, L. C.; EBCKEW, N. F. F. Modal Solution of Transient heat Conduction Utilizing Lanczos Algorithm. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 28 : 13-25, 1989.
- [12] CRAIG JR., R. R. Structural Dynamics. New York, John Wiley & Sons, 1981.
- [13] CRAIG JR., R. R.; KIM, H. M.; SU, T. J. Some Applications of Lanczos Vectors in Structural Dynamics. Proceedings 6th International Modal Analysis Conference, Vol. I : 501-506, Society for Experimental Mechanics Inc., 1988.
- [14] CULLUM, J. K. & WILLOUGHBY, R. A. Lanczos Algorithms for Large Symmetric Eigenvalue Computations, Vol. I Theory = Vol. II Programs.

[15] GUPTA, K.K. & LAWSON, C.K. Development of a Block Lanczos Algorithm for Free Vibration Analysis of Spinning Structures. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 26 : 1029-1037, 1988.

[16] HARRIS, C.M. & CREDE, C.B. Shock and Vibration Handbook. 2. ed., New York, McGraw-Hill, 1976.

[17] KIM, H.M. & CRAIG JR., R.R. Structural Dynamics Analysis Using an Unsymmetric Block Lanczos Algorithm. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 26 : 2305-2318, 1988.

[18] MANGSULI, D.G.; RAMAKURTI, V. Lanczos Method Applied to the Solution of Eigenvalue Problems of Cyclic Symmetric Structures. Computers and Structures, 34 : 349-353, 1989.

[19] MEIROVITCH, L. Computational Methods in Structural Dynamics. Maryland, Sijthoff & Noordhoff, 1980.

[20] NOUR-OMID, B.; PARLETT, B.N.; TAYLOR, R.L. A Newton-Lanczos method of Non-Linear Finite Element Equations. Computers and Structures, 16 : 241-252, 1983.

[21] NOUR-OMID, B.; PARLETT, B.N.; TAYLOR R.L. Lanczos Versus Subspace Iteration for Solution of Eigenvalue Problems. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 19 :

[22] NOUR-OMID, B. & CLOUGH, R.W. Block Lanczos Method for Dynamic Analysis of Structures. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 13 : 271-276, 1985.

[23] NOUR-OMID, B.; REGELBRUGGE, M.E. Lanczos Method for Analysis of Damped Structural Systems. Proceedings 6th International Modal Analysis Conference, Vol.I : 495-500, Society for Experimental Mechanics Inc., 1988.

[24] OJALVO, I.U. Proper Use of Lanczos Vectors for Large Eigenvalue Problems. Computers and Structures (Trends in Numerical Analysis and Parallel Algorithms), 20 : 115-220, 1985.

[25] OJALVO, I.U. Origins and Advantages of Lanczos Vectors for Large Dynamic Systems. Proceedings 6th International Modal Analysis Conference, Vol.I : 489-494, Society for Experimental Mechanics Inc., 1988.

[26] PAIGE, C.C. Practical Use of The Symmetric Lanczos Process With Re-Orthogonalization. BIT, 10 : 183-195, 1970.

[27] PARLETT, B.N.; SCOTT, D.S. The Lanczos Algorithm With Selective Orthogonalization. Mathematics of Computation, 33 : 217-238, 1979.

[28] PARLETT, B.N. The Symmetric Eigenvalue Problem. Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, 1980.

[29] PISSANETZKY, S. Sparse Matrix Technology. New York, Academic Press, 1984.

[30] RALSTON, A. & RABINOWITZ, P. A First Course in Numerical Analysis. McGraw-Hill, 2. ed., SPRE, 1985.

[31] SALVANI, R.B. Systema MSAPDIN. Analise Estática e Dinâmica de Sistemas Lineares pelo Método dos Elementos Finitos = Manual do Usário. São Paulo, Universidade de São Paulo, 1987.

[32] SCOTT, D.S. How to Make the Lanczos Algorithm Converge Slowly. Mathematics of Computation, 33 : 239-247, 1979.

[33] SMITH, I.M. & HESHMATI, E.E. Use of a Lanczos Algorithm in Dynamic Analysis of Structures. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 11 : 585-598, 1983.

[34] WEINGARTEN, V.I.; RAMANATHAN, R.K.; CHEN C.N. Lanczos Eigenvalue Algorithm for Large Structures on a Minicomputer Computers and Structures, 16 : 253-257, 1983.

[35] WILKINSON, J.H. The Algebraic Eigenvalue Problem. Oxford, Clarendon Press, 1965.

[36] ZIENKIEWICZ, O.C. The Finite Element Method. 3. ed., London, McGraw-Hill, 1977.

APENDICE 1 - Listagem dos procedimentos em linguagem FORTRAN

Inseridos no programa NSAP.

SUBROUTINE CHLSK(N,MB,MT)

C
C ROTA PARA TRANSFORMAÇÃO DO AUTOPROBLEMA GENERALIZADO
C PARA O CLASSICO ATRAVES DA DECOMPOSIÇÃO DE CHOLESKY

INTEGER NVB,I,J,K

REAL A,M,L,L2,Q,Q1,Q2,R,U,V,V2,VL,TA,TB

REAL S1,SKJ

REAL TT,TT1

DIMENSION AC(250,250),MC(250),LC(250,250),QC(250,250),Q1(250),QC(250),
DIMENSION ON RC(250),UC(250),VC(250,20),V2(250,20)
DIMENSION ON VL(250),TAC(250),TBC(250),L2C(250,250)
DIMENSION ON TT(5)

C
C LEITURA DAS MATRIZES DE MASSA E RIGIDEZ

CALL SECOND(TT(1))

REWRITE(9)

REWRITE(4)

READ(4) ((AC(I,J),I=1,N),J=1,MB)

READ(9) (MC(I),I=1,N)

C
C FATORIZACAO DA MATRIZ DE RIGIDEZ

DO 10 I=1,N

S1=0.0

DO 25 J=1,I-1

S1=L(J,I-J+1)*L(J,I-J+1)+S1

CONTINUE

LC(I,1)=SORT(AC(I,1)-S1)

DO 50 K=I+1,N

SKJ=0.0

DO 35 J=1,I-1

SKJ=SKJ+L(J,I-J+1)*L(J,K-J+1)

CONTINUE

LC(I,K-I+1)=(AC(I,K-I+1)-SKJ)/LC(I,1)

CONTINUE

50

CONTINUE

10

DO 55 I=1,N

DO 56 J=1,N

AC(I,J)=0.0

LC(I,J)=L(I,J)

CONTINUE

56

CONTINUE

55

CONTINUE

C
C INVERSAO DA MATRIZ L

DO 60 I=1,N

AC(I,1)=1.0/LC(I,1)

IF (I.EQ.N) GOTO 60

DO 70 J=I+1,N

K=J

```

77 K=K-1
   IF (K.LT.1) GOTO 81
   IF (K.LT.1) GOTO 81
   KK=K-1+1
   IF (KK.LE.0) GOTO 80
   AC1,J-I+1)=AC1,J-I+1)-LCK,J-K+1)*AC1,K-I+1)
   GOTO 77
80 AC1,J-I+1)=AC1,J-I+1)/L(J,1)
   CONTINUE
81 CONTINUE
80 CONTINUE
   MATRIX M PRE-MULT. P/INV E POS-MULT P/INV TRANSP
C
C
DO 105 I=1,N
DO 106 J=1,N
LC1,J)=0.0
CONTINUE
106 CONTINUE
105 CONTINUE
DO 100 K=1,N
DO 200 J=K,N
DO 300 I=1,K
LCK,J-K+1)=LCK,J-K+1)+KC1)*AC1,J-I+1)*AC1,K-I+1)
CONTINUE
300 CONTINUE
200 CONTINUE
100 CONTINUE
CALL SECONDX(TT(2))
CALL LANGZOSX(N,M1,L,Q,Q1,Q2,R,U,TA,TB,V,V2,VL,NVB)
C
C
CALCULA AUTOVECTORES / L TRANSP
C
C
DO 400 I=1,NVB
DO 410 J=1,N
Q1(J)=V2(J,I)
CALL SISTRICL2,Q1,Q2,N)
DO 420 J=1,N
V2(J,I)=Q2(J)
CONTINUE
420 CONTINUE
CALL SECONDX(TT(3))
C
C
ORDENA AUTOPARES
C
C
CALL STURKX(N,MB,NVB,VL,V2,A,M)
CALL SECONDX(TT(4))
C
TT1=0.0
DO 500 I=1,3
TT(I)=TT(I+1)-TT(I)
TT1=TT1+TT(I)
CONTINUE
WRITE (6,1000) TT(1),TT(2),TT(3)
C
1000 FORMAT (, RELATORIO DE TEMPO GASTO - LANGZOS , //,
1 EX, DECOMPOSICAO DE CHOLESKY.....=,FB.2, //,
2 EX, CALCULO DE AUTOPARES.....=,FB.2, //,
3 EX, IMPRESSAO DOS RESULTADOS.....=,FB.2, //)
RETURN
END
C
C

```

SUBROUTINE LANZOS(N,M,AA,Q,Q1,Q2,R,U,TA,TB,VET,VAL,NVB)

C ROTINA PARA O CALCULO DE AUTOVALORES E AUTOVECTORES
C UTILIZANDO O METODO DE LANZOS PARA A FORMA CLASSICA

INTEGER NVB,NVA,I,J,K

REAL A,B,H,PE,Q,Q1,Q2,U,R,TA,TB,AA,VET,VAL,VETS

DI MENSION (Q250,250),Q1(250),Q2(250),R(250),U(250),TA(250),TB(250)
DI MENSION VET(250,20),VETS(250,20),VAL(20),AAC(250,250)

C INICIALIZACAO DE VARIAVEIS E VETORES

NVB=0

NVA=0

K=0

B=0

C VETOR INICIAL

CALL GRANDN,U,3,0

CALL CALCUR,U,N,AD

DO 5 I=1,N

B=B+R(I)*R(I)

B=SORTB

DO 10 I=1,N

Q1(I)=0.0

CONTINUE

DO 30 I=1,N

Q2(I)=R(I)/B

C ORTONORMALIZA O VETOR Q2 COM RELACAO AS COLUNAS DE Q

DO 51 J=1,K

PE=0

DO 52 I=1,N

PE=PE+Q1(J)*Q2(I)

DO 53 I=1,N

Q2(I)=Q2(I)-PE*Q1(J)

PE=0

DO 54 I=1,N

PE=PE+Q2(I)*Q2(I)

PE=SORTP(PE)

DO 55 I=1,N

Q2(I)=Q2(I)/PE

CONTINUE

NVA=NVB

C DETERMINACAO DE ALFA E BETA

CALL CALCUCU,Q2,N,AA

DO 70 I=1,N

R(I)=U(I)-Q1(I)*B

A=0.0

DO 80 I=1,N

A=A+Q2(I)*R(I)

DO 80 I=1,N

R(I)=R(I)-Q2(I)*A

H=0.0

```

DO 100 I=1,N
H=H+R(I)*R(I)
B=SORT(H)
C
C GUARDA VALORES DE ALFA E BETA NOS VETORES QUE REPR. A MATRIZ T
C
K=K+1
TB(K)=B
TAC(K)=A
IF (K.EQ.1) GOTO 105
IF (K.LE.M) GOTO 104
C
C CALCULO DOS AUTOPARES DE T
C
CALL QRCK,TA,TB,VET,VAL,NVB)
C
C GUARDA O VETOR Q K-1
C
DO 107 I=1,N
Q(I,K-1)=Q(I)
CONTINUE
107
DO 110 I=1,N
Q(I)=Q(I)
IF (NVB.EQ.NVBAD) GOTO 20
DO 130 I=1,N
Q(I,K)=Q(I)
CONTINUE
130
IF (NVB.LT.M) GOTO 20
C
C PRE-MULTIPLICA AUTOVET DE T POR Q
C
DO 150 II=1,NVB
DO 150 I=1,N
VET(I,II)=0.0
DO 140 J=1,K
VET(I,II)=VET(I,II)+Q(I,J)*VET(J,II)
CONTINUE
140
CONTINUE
CONTINUE
150
CONTINUE
150
WRITE (6,200) K
FORMAT, DIMENSAO DE T =',16)
RETURN
END
C
C
C
C
SUBROUTINE CALCUCU,Q,N,AD
C
C
C
C
CALCULA O VALOR DE U=AQ
C
REAL U,Q,A
DIMENSI ON AC 250,250), Q(250), UC 250)
INTEGER I,J,K
DO 10 I=1,N
UC(I)=0.0
K=I
C

```

```

DO 20 J=1,N-1+1
UKI=UKI+ACI,J*(QK)
K=K+1
CONTINUE
J=I
K=I
IF(J,EQ,1) GOTO 10
K=K+1
J=J-1
UKI=UKI+ACI,I-J+1*(QK)
GOTO 30
CONTINUE
RETURN
END

SUBROUTINE STURKCN,MB,M,VAL,VET,A,M
INTEGER I,II,J,K
REAL A,M,DT,L,PP,DD,D,VAL,VET,AUT,XX,YY
DIMENSION AC(250,250),DC(250),MC(250),LC(250,250),XC(250),YC(250)
DIMENSION VAL(250),VET(250,250)
C
C
C
MTRIZES DE MASSA E RIGIDEZ
REWINDCB
REWINDCD
READK4) (CACI,J,I=1,ND,J=1,MB)
READCB) (MCID,I=1,ND)
C
C
C
ORTORM. CORRELACAO A MATRIZ DE MASSA
DO 200 I=1,M
DT=0
DO 210 J=1,N
DT=DT+VET(J,I)*VET(J,I)*(MCJ)
CONTINUE
DT=SORTDT
DO 220 J=1,N
VET(J,I)=VET(J,I)/DT
CONTINUE
CONTINUE
C
C
C
IMPRIME RESULTADOS
DO 430 I=1,M
PP=1/SORT(VALCI)
WRITE(6,435)
FORMAT.
WRITE(6,440) PP
FORMAT. FREQUENCIA ,E14.5)
C
450
WRITE(6,450)
FORMAT.
DO 460 J=1,N
WRITE(6,470) VET(J,I)
FORMAT.
E14.5)
CONTINUE
460
470

```



```

I=N
X(N)=B(N)/A(N,1)
DO 10 K=1,N-1
I=N-K
S=0.0
DO 20 J=I+1,N
S=A(I,J-I+1)*X(J)+S
CONTINUE
X(I)=(B(I)-S)/A(I,1)
CONTINUE
RETURN
END

SUBROUTINE QR(N,TB,VE1,VAL1,NVB)
C
C
C
C
C ROTINA PARA CALCULO DE AUTOVALORES E AUTOVECTORES
C ALGORITMO QR E ITERACAO INVERSA
REAL R,VE1,VAL,E1,E2,E3,A1,B1,A2,B2,D,U,V,TP,X1
/M,BK,BKA,BN,BD,ALFA,P1,P2,P3,P4,P5,OM1,PM4,Q2,EE
REAL DELTA,PP,EPS,TA,TB,VAL1,VE1,TB2,G,Y,V2
INTEGER P,Q,I,J,K,II,NVB
DIMENSION TA(250),TB(250),VE1(250,20),VAL1(20),V2(250)
DIMENSION TA(250),TB(250),VE1(250,20),VAL1(20),V2(250)
DIMENSION R(250,5),VE1(250,20),G(250),TB2(250)
C
C ALGORITMO QR
C
C CONSTANTES DE ERRO
E1=1E-08
E2=1E-08
E3=1E-08
C
C INICIALIZACAO DA MATRIZ DE TRABALHO E VARIAVEIS
DO 5 J=1,N+5
DO 5 I=1,5
R(J,I)=0.0
CONTINUE
CONTINUE
DO 10 J=1,N
R(J,3)=TA(J)
CONTINUE
ND=N-1
DO 20 J=1,ND
R(J,4)=TB(J)
R(J+1,2)=TB(J)
CONTINUE
L=N
C
C INICIO DO PROCESSO ITERATIVO
IF (L-1) 150,150,40
A2=1.0

```

```

C
C CALCULO DE PP
B2=0.0
D=((R(L-1,3)+R(L,3))*2)-4*(R(L-1,3)*R(L,3)-R(L-1,4)*M2)
U=((R(L-1,3)+R(L,3))+SORT(D))/2
V=((R(L-1,3)+R(L,3))-SORT(D))/2
TP=ABS(U-R(L,3))-ABS(V-R(L,3))
IF (TP) 50,60,60
PP=U
GOTO 70
PP=V
C
C R-I*PP
C
DO 80 J=1,L
R(J,3)=R(J,3)-PP
C
C CALCULO DAS ROTACOES DE R
C
LD=L-1
DO 80 P=1,LD
Q=P+1
ALFA= SORT R(P,3)*R(P,3)+R(Q,3)+R(Q,3)*R(Q,3)
A1=R(P,3)/ALFA
B1=R(Q,3)/ALFA
P1=R(P,1)
P2=R(P,2)
P3=R(P,3)
P4=R(P,4)
P5=R(P,5)
R(P,1)=A1*R(P,1)
R(P,2)=A1*R(P,2)+B1*R(Q,1)
R(P,3)=A1*R(P,3)+B1*R(Q,2)
R(P,4)=A1*R(P,4)+B1*R(Q,3)
R(P,5)=A1*R(P,5)+B1*R(Q,4)
R(Q,1)=A1*R(Q,1)-B1*P2
R(Q,2)=A1*R(Q,2)-B1*P3
R(Q,3)=A1*R(Q,3)-B1*P4
R(Q,4)=A1*R(Q,4)-B1*P5
R(Q,5)=A1*R(Q,5)
OM1=R(Q,1)
IF (P,LE,1) GOTO 92
P4=R(P-2,4)+B2*R(P-2,5)
R(P-2,5)=-1.0)*B2*P4+A2*R(P-2,5)
IF (P,LE,1) GOTO 93
P3=R(P-1,3)
R(P-1,3)=A2*R(P-1,3)+B2*R(P-1,4)
R(P-1,4)=-1.0)*B2*P3+A2*R(P-1,4)
IF (Q,LE,1) GOTO 94
Q2=R(Q-1,2)
R(Q-1,2)=A2*R(Q-1,2)+B2*R(Q-1,3)
R(Q-1,3)=-1.0)*B2*Q2+A2*R(Q-1,3)
R(Q,1)=A2*R(Q,1)+B2*R(Q,2)
R(Q,2)=-1.0)*B2*OM1+A2*R(Q,2)
A2=A1
B2=B1
CONTINUE
90

```

SUBROUTINE ITINVCALFA,BETA,V2,X1,EPS,G,MEV,ITD

C
C
C

END
RETURN
CONTINUE
CONTINUE
VET1(II,NVB)=VET(II,J)
DO 280 II=1,N
VAL1(NVB)=VAL(J)
NVB=NVB+1
IF (EPS.GT.E3) GOTO 280
EPS=ABS(VET(N,J)*TBC(N)/VAL(J))
DO 260 J=1,N
NVB=0

280
280

C
C VERIFICA O NUMERO DE AUTOVALORES BONS
C

CONTINUE
VET(II,I)=VET(II)
DO 200 II=1,N
CALL ITINVTATA,TB2,V2,X1,E2,G,N,3)
CALL GRANDCN,G,Y)
X1=VAL(I)
Y=Y+0.1
DO 180 I=1,N
TB2(I)=TB2(I-1)
DO 180 I=2,N
TB2(I)=0.0
Y=1.0

180
200

C
C CALCULO DE AUTOVALORES
C

VAL(L)=R(L,3)

150

C FIM DO PROCESSO DE ITERACAO E ARMAZENAMENTO DE RESULTADOS
C

GOTO 30

140

L=L-1

VAL(L)=R(L,3)

130

IF (E.E.GT.E1) GOTO 140

EE=ABS(R(L-1,4))

R(J,3)=R(J,3)+P

120

DO 120 J=1,L

R(Q+1,2)=(-1.0)*B2*Q1+A2*R(Q+1,2)

R(Q+1,1)=A2*R(Q+1,1)+B2*R(Q+1,2)

R(Q,3)=(-1.0)*B2*Q2+A2*R(Q,3)

R(Q,2)=A2*R(Q,2)+B2*R(Q,3)

R(P,4)=(-1.0)*B2*P3+A2*R(P,4)

R(P,3)=A2*R(P,3)+B2*R(P,4)

95

R(P-1,5)=(-1.0)*B2*P4+A2*R(P-1,5)

R(P-1,4)=A2*R(P-1,4)+B2*R(P-1,5)

P4=R(P-1,4)

IF (P.LE.1) GOTO 95

Q1=R(Q+1,1)

Q2=R(Q,2)

P3=R(P,3)

P=L

C C O PROCESSO DE ITERACAO INVERSA
C PROCEDIMENTO PARA O CALCULO DE AUTOVETORES UTILIZANDO

REAL ALFA, BETA, V1, V2, G
REAL X1, U, Z, TEMP, RATIO, SUM, XU, NORM, TSUM, BETAN
REAL EPS, EPS3, EPS4, ERROR, ERRORV, ZERO, ONE
INTEGER I, II, I1, I1TER
DIMENSION ALFAC(250), BETAC(250), V1(250), V2(250), GC(250)

ONE=1.0
ZERO=0.0
ITER=1
NP1=MEV+1
NM1=MEV-1
BETAM=BETAC(NP1)
BETAC(NP1)=ZERO

C
C
C
C

TSUM=ABSC(ALFAC1))
DO 10 I=2, MEV
TSUM= TSUM+ABS(ALFAC1)+BETAC1))

EPS3=EPS*TSUM
EPS4=FLOAT(MEV)*EPS3
GSUM=ZERO

DO 20 I=1, MEV
GSUM=GSUM+ABS(GC1))

GSUM=EPS4/GSUM

DO 30 I=1, MEV

V2C1)=GSUM*GC1)

I1=1

CONTINUE

U=ALFAC1)-X1

Z=BETAC2)

DO 60 I=2, MEV

IF (BETAC1).GT. ABS(U)) GOTO 50

V1C1)-1)=Z/U

V2C1)-1)=V2C1)-1)/U

RATIO=BETAC1)/U

U=ALFAC1)-X1-Z*RATIO

Z=BETAC1)+1)

GOTO 60

CONTINUE

RATIO=U/BETAC1)

BETAC1)=(-1.0)*BETAC1)

V1C1)-1)=ALFAC1)-X1

U=Z-RATIO*V1C1)-1)

Z=(-1.0)*RATIO*BETAC1)+1)

TEMP=V2C1)-1)

V2C1)-1)=V2C1)

V2C1)=TEMP-RATIO*V2C1)

CONTINUE

IF (U.EQ.ZERO) U=EPS3

V2CMEV)=V2CMEV)/U

DO 80 I1=1, NM1

C
C
C
C

60

50

40

30

20

10

```

*-----
IF (BETACI+1).LT.ZERO) GOTO 70
V2CI)=V2CI)-V1CI)*V2CI+1)
GOTO 80
BETACI+1)=(-1.0)*BETACI+1)
V2CI)=(V2CI)-V1CI)*V2CI+1)-BETACI+2)*V2CI+2)/BETACI+1)
CONTINUE
NORM=ZERO
DO 80 I=1,MEV
NORM=NORM+ABSC V2CI)
IF (NORM.GE.ONE) GOTO 110
I7=I7+1
IF (I7.GT.I7ER) GOTO 110
XU=EPS4/NORM
DO 100 I=1,MEV
V2CI)=V2CI)*XU
GOTO 40
110 CONTINUE
SUM=ZERO
DO 115 II=1,MEV
SUM=V2CI)*V2CI)+SUM
SUM=ONE/SORT(SUM)
DO 120 II=1,MEV
V2CI)=SUM*V2CI)
ERROR=ABSC V2CI)
V1(MEV)=ALFAC(MEV)*V2CI(MEV)+BETAC(MEV)-1)*V2CI(MEV)
DO 130 J=2,MN1
JM=MP1-J
V1(JMD)=ALFAC(JMD)*V2CI(JMD)+BETAC(JM-1)*V2CI(JM+1)-X1*
V1CI)=ALFAC1)*V2CI)+BETAC2)*V2CI2)-X1*V2CI1)
ERROR=ZERO
DO 135 II=1,MEV
ERROR=V1CI)*V1CI)+ERRORV
ERRORV=SORT(ERRORV)
IF (I7.GT.I7ER) ERRORV=-ERRORV
BETAC(MP1)=BETAM
RETURN
END
135
130
115
110
100
90
80
70

```

C
 C PROCEDIMIENTO PARA GERAR NUMEROS RANDOMICAMENTE
 C
 C
 C
 C
 C
 C
 C
 C SUBROUTINE GRANDN,G,Y)

```

REAL G,Y
INTEGER N,1
DIMENSION GK(250)
DO 10 I=1,N
GCI)=RANDOM(Y)
Y=Y+0.2
CONTINUE
10 RETURN
END
C

```

APENDICE 2 - Autovalores obtidos pelo Método de Lanczos e pelo Método de Busca de Determinante, dos modelos VIGA e CHAPA3.

Modelo VIGA

1º modo : frequência 0,551E+00 rad/s

Lanczos

Busca de Det.

-7,85290E-02	1,19180E-18
-2,03840E-02	1,19180E-18
-7,81730E-02	2,44580E-18
-4,16360E-02	-7,71060E-02
-3,69970E-18	-7,71060E-02
-6,25020E-02	-7,71060E-02
-7,53430E-02	-7,71060E-02
-1,31430E-15	-7,71060E-02
-8,27910E-02	-7,71060E-02
-7,28980E-02	-7,71060E-02
-1,59590E-15	-7,71060E-02
-1,02320E-01	-7,71060E-02
-6,97930E-02	-7,71060E-02
-1,85250E-15	-7,71060E-02
-1,20910E-01	-7,71060E-02
-6,60570E-02	-7,71060E-02
-2,08480E-15	-7,71060E-02
-1,38400E-01	-7,71060E-02
-6,17220E-02	-7,71060E-02
-2,28720E-15	-7,71060E-02
-1,54630E-01	-7,71060E-02
-5,68290E-02	-7,71060E-02
-2,46110E-15	-7,71060E-02
-1,69440E-01	-7,71060E-02
-5,14210E-02	-7,71060E-02
-2,61310E-15	-7,71060E-02
-1,82720E-01	-7,71060E-02
-4,55480E-02	-7,71060E-02
-2,72970E-15	-7,71060E-02
-1,94320E-01	-7,71060E-02
-3,92610E-02	-7,71060E-02
-2,81640E-15	-7,71060E-02
-2,04160E-01	-7,71060E-02
-3,26200E-02	-7,71060E-02
-2,87630E-15	-7,71060E-02
-2,12140E-01	-7,71060E-02
-2,56830E-02	-7,71060E-02
-2,91230E-15	-7,71060E-02
-2,18190E-01	-7,71060E-02

1. 851 30E-02
1. 80050E-17
-2. 22250E-01
-1. 11750E-02
1. 51340E-17
-2. 24290E-01
-3. 73630E-03
1. 63880E-17
-2. 24290E-01
-3. 73630E-03
1. 11750E-02
1. 88950E-17
-2. 18190E-01
1. 85130E-02
1. 68150E-17
-2. 12140E-01
2. 56830E-02
2. 24670E-17
-2. 04160E-01
3. 26200E-02
2. 91440E-17
-1. 94320E-01
3. 92610E-02
2. 4000E-17
-1. 82720E-01
4. 55480E-02
1. 79400E-17
-1. 69440E-01
5. 14210E-02
1. 10300E-17
-1. 54630E-01
5. 68290E-02
1. 22840E-17
-1. 38400E-01
6. 17220E-02
1. 35380E-17
-1. 20810E-01
6. 60570E-02
1. 47920E-17
-1. 02320E-01
6. 97930E-02
5. 29240E-18
-8. 27910E-02
7. 28980E-02
-4. 62250E-18
-6. 25020E-02
7. 53430E-02
-1. 48510E-17
-4. 16360E-02
7. 71060E-02
-1. 35970E-17
-2. 03840E-02
7. 81730E-02
7. 85290E-02

-1. 851 30E-02
-2. 91990E-15
-2. 22250E-01
-1. 11750E-02
-2. 90670E-15
-2. 24290E-01
-3. 73630E-03
-2. 87260E-15
-2. 24290E-01
-3. 73630E-03
-2. 81680E-15
-2. 22250E-01
1. 11750E-02
-2. 74000E-15
-2. 18190E-01
1. 85130E-02
-2. 64540E-15
-2. 12140E-01
2. 56830E-02
-2. 52520E-15
-2. 04160E-01
3. 26200E-02
-2. 38760E-15
-1. 94320E-01
3. 92610E-02
-2. 24580E-15
-1. 82720E-01
4. 55480E-02
-2. 08860E-15
-1. 69440E-01
5. 14210E-02
-1. 91330E-15
-1. 54630E-01
5. 68290E-02
-1. 71270E-15
-1. 38400E-01
6. 17220E-02
-1. 49490E-15
-1. 20810E-01
6. 60570E-02
-1. 26120E-15
-1. 02320E-01
6. 97930E-02
-1. 02660E-15
-8. 27910E-02
7. 28980E-02
-7. 83870E-16
-6. 25020E-02
7. 53430E-02
-5. 35240E-16
-4. 16360E-02
7. 71060E-02
-2. 69190E-16
-2. 03840E-02
7. 81730E-02
7. 85290E-02

Busca de Det.

Lanzos

1. 38240E-01	1. 38240E-01
-2. 47880E-18	-2. 47880E-18
-3. 56230E-02	-3. 56230E-02
-1. 35290E-01	-1. 35290E-01
-5. 08680E-18	-5. 08680E-18
-7. 16410E-02	-7. 16410E-02
-1. 27520E-01	-1. 27520E-01
-7. 69470E-18	-7. 69470E-18
-1. 04920E-01	-1. 04920E-01
-1. 15280E-01	-1. 15280E-01
-4. 28180E-18	-4. 28180E-18
-1. 34280E-01	-1. 34280E-01
-9. 89810E-02	-9. 89810E-02
-1. 18930E-17	-1. 18930E-17
-1. 58700E-01	-1. 58700E-01
-7. 92000E-02	-7. 92000E-02
-1. 07100E-17	-1. 07100E-17
-1. 77320E-01	-1. 77320E-01
-5. 66390E-02	-5. 66390E-02
-1. 33180E-17	-1. 33180E-17
-1. 89480E-01	-1. 89480E-01
-3. 20970E-02	-3. 20970E-02
-1. 59260E-17	-1. 59260E-17
-1. 94760E-01	-1. 94760E-01
-6. 44920E-03	-6. 44920E-03
-1. 85330E-17	-1. 85330E-17
-1. 92990E-01	-1. 92990E-01
1. 93890E-02	1. 93890E-02
-2. 20450E-14	-2. 20450E-14
1. 84230E-01	1. 84230E-01
-4. 44950E-02	-4. 44950E-02
-2. 30720E-14	-2. 30720E-14
1. 68810E-01	1. 68810E-01
-6. 79720E-02	-6. 79720E-02
-2. 38490E-14	-2. 38490E-14
1. 47300E-01	1. 47300E-01
-8. 89800E-02	-8. 89800E-02
-2. 44030E-14	-2. 44030E-14
1. 20470E-01	1. 20470E-01
-1. 06770E-01	-1. 06770E-01
-1. 61750E-17	-1. 61750E-17
-8. 92970E-02	-8. 92970E-02
1. 20700E-01	1. 20700E-01
-7. 72150E-17	-7. 72150E-17
-5. 49000E-02	-5. 49000E-02
1. 30270E-01	1. 30270E-01
-1. 80630E-17	-1. 80630E-17
-1. 85230E-02	-1. 85230E-02
1. 35140E-01	1. 35140E-01
-2. 06710E-17	-2. 06710E-17
1. 85230E-02	1. 85230E-02
1. 35140E-01	1. 35140E-01

-1. 78240E-01	-1. 68620E-01
-6. 73690E-18	-4. 52140E-02
-1. 78240E-01	6. 56570E-15
	-1. 68620E-01

Lanczos

Busca de Def.

3º modo : frequência 6.289E+01 rad/s

-1. 38240E-01	-1. 38240E-01
1. 35290E-01	-1. 35290E-01
-3. 56230E-02	3. 56230E-02
-2. 24150E-15	6. 65420E-17
1. 27520E-01	-1. 27520E-01
-7. 16410E-02	7. 16410E-02
-4. 49990E-15	6. 91480E-17
1. 15280E-01	-1. 15280E-01
-1. 04920E-01	1. 04920E-01
-6. 65410E-15	1. 73100E-17
9. 89810E-02	-9. 89810E-02
-1. 34280E-01	1. 34280E-01
-8. 76200E-15	-2. 81710E-17
7. 92000E-02	-7. 92000E-02
-1. 58700E-01	1. 58700E-01
-1. 08040E-14	-6. 55140E-17
5. 66390E-02	-5. 66390E-02
-1. 77320E-01	1. 77320E-01
-1. 27890E-14	-6. 29080E-17
3. 20970E-02	-3. 20970E-02
-1. 89480E-01	1. 89480E-01
-1. 46400E-14	-6. 03010E-17
6. 44920E-03	-6. 44920E-03
-1. 94760E-01	1. 94760E-01
-1. 63460E-14	-5. 76950E-17
-1. 93890E-02	1. 93890E-02
-1. 92990E-01	1. 92990E-01
-1. 79100E-14	-5. 13870E-17
-4. 44950E-02	4. 44950E-02
-1. 84230E-01	1. 84230E-01
-1. 93250E-14	-3. 33840E-17
-6. 79720E-02	6. 79720E-02
-1. 68810E-01	1. 68810E-01
-2. 06080E-14	-4. 21540E-18
-8. 89800E-02	8. 89800E-02
-1. 47300E-01	1. 47300E-01
-2. 16860E-14	-3. 84000E-17
-1. 06770E-01	1. 06770E-01
-1. 20470E-01	1. 20470E-01
-2. 26090E-14	-8. 15120E-17
-1. 20700E-01	1. 20700E-01
-8. 92970E-02	8. 92970E-02
-2. 34740E-14	-2. 58850E-17
-1. 30270E-01	1. 30270E-01
-5. 49000E-02	5. 49000E-02
-2. 41030E-14	-2. 32780E-17

1. 38250E-17
-8. 83610E-02
-1. 45880E-01
-2. 09130E-17
-1. 23750E-01
-1. 12040E-01
-2. 03950E-17
-1. 48680E-01
-6. 97080E-02
-3. 10460E-17
-1. 61280E-01
-2. 21760E-02
-3. 89540E-17
-1. 60640E-01
2. 68350E-02
-4. 60410E-17
-1. 46860E-01
7. 34740E-02
-5. 31280E-17
-1. 21120E-01
1. 14070E-01
-6. 02140E-17
-8. 55080E-02
1. 45420E-01
5. 10880E-17
-4. 28940E-02
1. 65070E-01
4. 40020E-17
3. 29200E-03
1. 71460E-01
3. 69160E-17
4. 93480E-02
1. 64120E-01
2. 98290E-17
9. 15870E-02
1. 43650E-01
2. 27420E-17
1. 26630E-01
1. 11680E-01
-5. 31530E-17
1. 51670E-01
7. 07920E-02
-2. 44170E-17
1. 64710E-01
2. 42430E-02
-3. 15040E-17
1. 64710E-01
-2. 42430E-02
-1. 64710E-01
-3. 85900E-17
1. 51670E-01
-7. 07920E-02
-4. 56760E-17
1. 26630E-01
-1. 11680E-01
4. 35880E-17
9. 15870E-02
-1. 43650E-01
-7. 97650E-17
4. 93480E-02

1. 32090E-14
-8. 83610E-02
-1. 45880E-01
1. 94870E-14
-1. 23750E-01
-1. 12040E-01
2. 53740E-14
-1. 48680E-01
-6. 97080E-02
3. 08000E-14
-1. 61280E-01
-2. 21760E-02
3. 58020E-14
-1. 60640E-01
2. 68350E-02
4. 03140E-14
-1. 46860E-01
7. 34740E-02
4. 42740E-14
-1. 21120E-01
1. 14070E-01
4. 76860E-14
-8. 55080E-02
1. 45420E-01
5. 06570E-14
-4. 28940E-02
1. 65070E-01
5. 29870E-14
3. 29200E-03
1. 71460E-01
5. 47220E-14
4. 93480E-02
1. 64120E-01
5. 59670E-14
9. 15870E-02
1. 43650E-01
5. 67450E-14
1. 26630E-01
1. 11680E-01
5. 69540E-14
1. 51670E-01
7. 07920E-02
5. 67990E-14
1. 64710E-01
2. 42430E-02
5. 62160E-14
1. 64710E-01
-2. 42430E-02
1. 64710E-01
-2. 42430E-02
5. 51860E-14
1. 51670E-01
-7. 07920E-02
5. 37590E-14
1. 26630E-01
-1. 11680E-01
5. 20110E-14
9. 15870E-02
-1. 43650E-01
4. 96810E-14
4. 93480E-02

4º modo : frequência 8.410E+01 rad/s

1. 64120E-01	2. 04410E-01
-2. 13850E-16	-9. 61300E-18
3. 29200E-03	5. 05740E-02
-1. 71460E-01	1. 83420E-01
-9. 32170E-17	-1. 97270E-17
-4. 28940E-02	9. 46600E-02
-1. 65070E-01	1. 37800E-01
1. 80870E-17	-2. 98400E-17
-8. 55080E-02	1. 23780E-01
-1. 45420E-01	7. 44220E-02
1. 10790E-16	-4. 20860E-17
-1. 14070E-01	1. 34230E-01
1. 03710E-16	1. 83180E-03
-1. 46860E-01	-5. 82350E-17
-7. 34740E-02	1. 24840E-01
9. 66270E-17	
-1. 60640E-01	
-2. 68350E-02	
8. 95420E-17	
-1. 61280E-01	
2. 21760E-02	
5. 39510E-17	
-1. 48680E-01	
6. 97080E-02	
-1. 39760E-17	
-1. 23750E-01	
1. 12040E-01	
-1. 08820E-16	
-8. 83610E-02	
1. 45880E-01	
-1. 15900E-16	
-4. 52140E-02	
1. 68620E-01	
1. 78240E-01	

Busca do Det. Lanczos

-7. 00780E-02
 -5. 47100E-17
 9. 71300E-02
 -1. 31460E-01
 -6. 48200E-17
 5. 51700E-02
 -1. 73910E-01
 -7. 49280E-17
 4. 95940E-03
 -1. 91610E-01
 -8. 50350E-17
 -4. 63960E-02
 -1. 82200E-01
 -2. 58220E-16
 -9. 16290E-02
 -1. 47050E-01
 -2. 68320E-16
 -1. 24350E-01
 -9. 11330E-02
 -2. 78410E-16
 -1. 39940E-01
 -2. 22960E-02
 -2. 88500E-16
 -1. 36160E-01
 4. 98250E-02
 -2. 98580E-16
 -1. 13500E-01
 1. 15140E-01
 -4. 40470E-16
 -7. 50890E-02
 1. 64520E-01
 -2. 82170E-16
 -2. 62450E-02
 1. 91070E-01
 -2. 92230E-16
 2. 62450E-02
 1. 91070E-01
 -3. 02290E-16
 7. 50890E-02
 1. 64950E-01
 1. 64950E-01
 -3. 12340E-16
 1. 13500E-01
 1. 15140E-01
 -3. 98920E-16
 1. 36160E-01
 4. 98250E-02
 -3. 98720E-16
 1. 39940E-01
 -2. 22960E-02
 -4. 66650E-16
 1. 24350E-01
 -9. 11330E-02
 -3. 58220E-16
 9. 16290E-02
 -1. 47050E-01
 -2. 05150E-16
 4. 63960E-02
 -1. 82200E-01
 -2. 94890E-17

-7. 00780E-02
 -9. 20320E-14
 9. 71300E-02
 -1. 31460E-01
 -1. 03900E-13
 5. 51790E-02
 -1. 73910E-01
 -1. 14370E-13
 4. 95940E-03
 -1. 91610E-01
 -1. 23510E-13
 -4. 63960E-02
 -1. 82200E-01
 -1. 31370E-13
 -9. 16290E-02
 -1. 47050E-01
 -1. 37700E-13
 -1. 24350E-01
 -9. 11330E-02
 -1. 42580E-13
 -1. 39940E-01
 -2. 22960E-02
 -1. 46060E-13
 -1. 36160E-01
 4. 98250E-02
 -1. 48280E-13
 -1. 13500E-01
 1. 15140E-01
 -1. 49360E-13
 -7. 50890E-02
 1. 64520E-01
 -1. 48820E-13
 -2. 62450E-02
 1. 91070E-01
 -1. 47430E-13
 2. 62450E-02
 1. 91070E-01
 -1. 47430E-13
 2. 62450E-02
 1. 91070E-01
 -1. 44830E-13
 7. 50890E-02
 1. 64950E-01
 1. 64950E-01
 -1. 41110E-13
 1. 13500E-01
 1. 15140E-01
 -1. 36330E-13
 1. 36160E-01
 4. 98250E-02
 -1. 30590E-13
 1. 39940E-01
 -2. 22960E-02
 -1. 24090E-13
 1. 24350E-01
 -9. 11330E-02
 -1. 16350E-13
 9. 16290E-02
 -1. 47050E-01
 -1. 07780E-13
 4. 63960E-02
 -1. 82200E-01
 -9. 82310E-14

-4. 5320E-12
 -1. 5119E-01
 -8. 32910E-02
 -4. 2703E-12
 -1. 9685E-01
 -3. 5434E-02
 -3. 9456E-12
 -1. 9936E-01
 1. 9049E-02
 -3. 5500E-12
 -1. 5795E-01
 6. 8193E-02
 -3. 0946E-12
 -8. 1208E-02
 1. 0110E-01
 -2. 5863E-12
 1. 4774E-02
 1. 1028E-01
 -2. 0152E-12
 1. 0987E-01
 9. 3208E-02
 -1. 3854E-12
 1. 8427E-01
 5. 2853E-02
 -6. 9714E-13
 2. 2110E-01

2. 1248E-16
 -1. 5119E-01
 -8. 32910E-02
 1. 9062E-16
 -1. 9685E-01
 -3. 5434E-02
 1. 6875E-16
 -1. 9936E-01
 1. 9049E-02
 1. 4688E-16
 -1. 5795E-01
 6. 8193E-02
 9. 7465E-17
 -8. 1208E-02
 1. 0110E-01
 9. 5769E-17
 1. 4774E-02
 1. 1028E-01
 6. 4586E-17
 1. 0987E-01
 9. 3208E-02
 4. 2697E-17
 1. 8427E-01
 5. 2853E-02
 2. 0807E-17
 2. 2110E-01

Lanczos

Busca do Det.

5º modo : frequência 1.252E+02 rad/s

2. 04410E-01
 1. 8342E-01
 -5. 0574E-02
 -1. 3045E-14
 1. 3780E-01
 -9. 4660E-02
 -2. 6602E-14
 7. 4422E-02
 -1. 2378E-01
 -3. 9770E-14
 1. 8318E-03
 -1. 3423E-01
 -5. 2605E-14
 -7. 0078E-02
 -1. 2484E-01
 -6. 5136E-14
 -1. 3146E-01
 -9. 7139E-02
 -7. 6913E-14
 -1. 73910E-01
 -5. 5179E-02
 -8. 80110E-14
 -1. 91610E-01
 -4. 9594E-03

2. 04410E-01
 1. 8342E-01
 -5. 0574E-02
 -1. 4563E-16
 1. 3780E-01
 -9. 4660E-02
 -1. 3563E-16
 7. 4422E-02
 -1. 2378E-01
 -4. 8288E-17
 1. 8318E-03
 -1. 3423E-01
 -2. 1217E-17
 -7. 0078E-02
 -1. 2484E-01
 -6. 6509E-17
 -1. 3146E-01
 -9. 7139E-02
 -4. 6503E-17
 -1. 73910E-01
 -5. 5179E-02
 -3. 9497E-17
 -1. 91610E-01
 -4. 9594E-03

-1. 1404OE-01
 -7. 2384OE-02
 1. 9824OE-16
 -1. 2090OE-01
 2. 2494OE-02
 2. 2009OE-16
 -1. 0230OE-01
 1. 1295OE-01
 2. 4193OE-16
 -6. 2112OE-02
 1. 7944OE-01
 2. 6376OE-16
 -8. 9116OE-03
 2. 0763OE-01
 2. 8558OE-16
 4. 5932OE-02
 1. 9139OE-01
 1. 2952OE-16
 1. 9139OE-01
 4. 5932OE-02
 -4. 8156OE-02
 2. 5106OE-16
 1. 3415OE-01
 1. 1573OE-01
 4. 8156OE-02
 2. 7285OE-16
 1. 1573OE-01
 -4. 8156OE-02
 2. 9464OE-16
 2. 9675OE-02
 1. 0675OE-02
 1. 3415OE-01
 -1. 1642OE-16
 3. 1642OE-16
 4. 5932OE-02
 -1. 9139OE-01
 5. 5664OE-16
 -8. 9116OE-03
 -2. 0763OE-01
 3. 6761OE-16
 -6. 2112OE-02
 -1. 7944OE-01
 2. 3310OE-16
 -1. 0230OE-01
 -1. 1295OE-01
 3. 2282OE-16
 -1. 2090OE-01
 -2. 2494OE-02
 3. 0854OE-16
 -1. 1404OE-01
 7. 2384OE-02
 1. 9583OE-16
 -8. 3291OE-02
 1. 5119OE-01
 2. 1757OE-16
 -3. 5434OE-02
 1. 9685OE-01
 2. 3926OE-16
 1. 9049OE-02
 1. 9936OE-01
 2. 6094OE-16
 6. 8193OE-02
 1. 5795OE-01

-1. 1404OE-01
 -7. 2384OE-02
 1. 9824OE-16
 -1. 2090OE-01
 2. 2494OE-02
 2. 2009OE-16
 -1. 0230OE-01
 1. 1295OE-01
 2. 4193OE-16
 -6. 2112OE-02
 1. 7944OE-01
 2. 6376OE-16
 -8. 9116OE-03
 2. 0763OE-01
 2. 8558OE-16
 4. 5932OE-02
 -1. 9139OE-01
 5. 5664OE-16
 -8. 9116OE-03
 -2. 0763OE-01
 3. 6761OE-16
 -6. 2112OE-02
 -1. 7944OE-01
 2. 3310OE-16
 -1. 0230OE-01
 -1. 1295OE-01
 3. 2282OE-16
 -1. 2090OE-01
 -2. 2494OE-02
 3. 0854OE-16
 -1. 1404OE-01
 7. 2384OE-02
 1. 9583OE-16
 -8. 3291OE-02
 1. 5119OE-01
 2. 1757OE-16
 -3. 5434OE-02
 1. 9685OE-01
 2. 3926OE-16
 1. 9049OE-02
 1. 9936OE-01
 2. 6094OE-16
 6. 8193OE-02
 1. 5795OE-01

Modelo CHAPA3

1º modo : frequência 2.905E+00 rad/s

Lanczos

Busca do Det.

-1.67620E-12	1.01100E-01
8.12080E-02	8.12080E-02
6.84100E-17	1.10280E-01
-1.47740E-02	-1.47740E-02
1.10740E-16	1.10740E-16
9.32080E-02	9.32080E-02
-1.09870E-01	-1.09870E-01
1.32400E-16	1.32400E-16
5.28530E-02	5.28530E-02
-1.84270E-01	-1.84270E-01
-2.2110E-01	-2.2110E-01

8.18260E-02	8.18260E-02
0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00
2.91130E-15	2.91130E-15
3.73510E-02	3.73510E-02
5.82720E-02	5.82720E-02
-4.55330E-02	-4.55330E-02
5.36070E-15	5.36070E-15
3.14610E-15	3.14610E-15
5.26640E-02	5.26640E-02
1.28250E-11	1.28250E-11
-3.20690E-02	-3.20690E-02
4.92840E-15	4.92840E-15
2.02890E-15	2.02890E-15
3.73510E-02	3.73510E-02
-5.82720E-02	-5.82720E-02
-4.55330E-02	-4.55330E-02
8.18260E-02	8.18260E-02
8.18260E-02	8.18260E-02
0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00
3.28230E-15	3.28230E-15
3.53110E-15	3.53110E-15
3.73510E-02	3.73510E-02
-4.55330E-02	-4.55330E-02
5.82720E-02	5.82720E-02
0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00
3.79040E-02	3.79040E-02
-3.79040E-02	-3.79040E-02
3.4810E-15	3.4810E-15
3.80350E-15	3.80350E-15

7. 00840E-02
2. 22890E-11
3. 04350E-02
0. 00000E+00
4. 86740E-15
4. 25440E-15
5. 99220E-02
-3. 79040E-02
-3. 79040E-02
3. 79040E-02
0. 00000E+00
2. 55150E-15
4. 33960E-15
3. 73510E-02
-4. 55330E-02
5. 82720E-02
0. 00000E+00
2. 85320E-39
-5. 26640E-02
-3. 20690E-02
-6. 63060E-12
-1. 79510E-11
0. 00000E+00
0. 00000E+00
-7. 83900E-02
3. 00650E-11
-2. 64590E-11
0. 00000E+00
-7. 00840E-02
3. 04350E-02
-1. 73420E-11
0. 00000E+00
2. 85320E-39
-5. 26640E-02
3. 20690E-02
1. 21140E-12
0. 00000E+00
0. 00000E+00
-3. 73510E-02
-4. 55330E-02
-5. 82720E-02
0. 00000E+00
0. 00000E+00
-3. 79040E-02
-3. 79040E-02
-5. 99220E-02
0. 00000E+00
0. 00000E+00
-7. 00840E-02
2. 04660E-11
-3. 04350E-02
0. 00000E+00
0. 00000E+00

7. 00840E-02
7. 35770E-12
-3. 04350E-02
4. 86740E-15
4. 86740E-15
-3. 79040E-02
-3. 79040E-02
3. 79040E-02
2. 55150E-15
4. 33960E-15
3. 73510E-02
-4. 55330E-02
-5. 82720E-02
3. 83620E-15
4. 59140E-15
5. 26640E-02
3. 20690E-02
8. 34190E-12
4. 43570E-15
4. 53530E-15
7. 00840E-02
3. 04350E-02
7. 29250E-12
5. 13690E-15
4. 38680E-15
7. 83900E-02
8. 91620E-12
9. 23280E-12
4. 59210E-15
4. 81630E-15
7. 00840E-02
-3. 04350E-02
6. 31770E-12
4. 03680E-15
4. 80450E-15
5. 26640E-02
-3. 20690E-02
-3. 02240E-12
2. 59930E-15
4. 29770E-15
3. 73510E-02
4. 55330E-02
5. 82720E-02
4. 84010E-15
4. 29330E-15
5. 99220E-02
3. 79040E-02
3. 79040E-02
5. 44710E-15
3. 86730E-15
7. 00840E-02
7. 69390E-12
3. 04350E-02
4. 09090E-15
0. 00000E+00
0. 00000E+00
-3. 04350E-02
0. 00000E+00
0. 00000E+00
-3. 79040E-02
3. 79040E-02
-5. 99220E-02
0. 00000E+00
3. 79040E-02
-3. 79040E-02
0. 00000E+00
3. 79040E-02
-3. 79040E-02
0. 00000E+00
3. 79040E-02
-3. 79040E-02
0. 00000E+00
3. 79040E-02
-3. 79040E-02
0. 00000E+00
3. 79040E-02
0. 00000E+00
3. 64410E-15

2º modo : frequência 6.014E+01 rad/s

0.0000E+00	0.0000E+00
3.7351E-02	3.7351E-02
4.5533E-02	4.5533E-02
5.8272E-02	5.8272E-02
8.1826E-02	8.1826E-02
0.0000E+00	0.0000E+00
3.7351E-02	3.7351E-02
4.5533E-02	4.5533E-02
5.8272E-02	5.8272E-02
8.1826E-02	8.1826E-02
0.0000E+00	0.0000E+00
3.2069E-02	3.2069E-02
0.0000E+00	0.0000E+00
0.0000E+00	0.0000E+00
3.7351E-02	3.7351E-02
5.8272E-02	5.8272E-02
8.1826E-02	8.1826E-02
0.0000E+00	0.0000E+00
3.0995E-15	3.0995E-15
3.7351E-02	3.7351E-02
5.8272E-02	5.8272E-02
4.5533E-02	4.5533E-02
8.1826E-02	8.1826E-02
8.1826E-02	8.1826E-02

Busca de Det.

Lanczos

-2.0311E-01	2.8644E-02
5.0904E-02	3.9418E-31
3.9418E-31	8.6487E-03
8.6487E-03	-8.3301E-02
-8.3301E-02	-1.2336E-02
-1.2336E-02	4.4644E-31
4.4644E-31	3.5528E-31
3.5528E-31	6.5184E-04
6.5184E-04	2.0108E-01
2.0108E-01	-1.0293E-01
-1.0293E-01	1.4226E-01
1.4226E-01	-9.0989E-02
-9.0989E-02	2.6169E-31
2.6169E-31	5.1434E-31
5.1434E-31	-1.4258E-01
-1.4258E-01	1.4057E-03
1.4057E-03	-1.2902E-01
-1.2902E-01	3.9941E-31
3.9941E-31	5.5373E-31
5.5373E-31	-9.0464E-02
-9.0464E-02	-1.4209E-01
-1.4209E-01	-9.1821E-02
-9.1821E-02	3.5528E-31
3.5528E-31	4.4644E-31
4.4644E-31	-1.3597E-14
-1.3597E-14	1.3572E-01
1.3572E-01	-1.6910E-01
-1.6910E-01	-7.7994E-15
-7.7994E-15	-2.1337E-02
-2.1337E-02	-1.1570E-14
-1.1570E-14	-1.1190E-01
-1.1190E-01	-7.6103E-02
-7.6103E-02	1.2465E-02
1.2465E-02	-1.1295E-01
-1.1295E-01	-7.7912E-15
-7.7912E-15	-5.5507E-15
-5.5507E-15	-6.8726E-02
-6.8726E-02	1.1337E-01
1.1337E-01	-1.3188E-01
-1.3188E-01	1.5111E-01
1.5111E-01	-1.1251E-01
-1.1251E-01	-1.6255E-14
-1.6255E-14	-1.2112E-14
-1.2112E-14	-6.0892E-02
-6.0892E-02	-1.1815E-02
-1.1815E-02	8.6365E-02
8.6365E-02	-1.1472E-14
-1.1472E-14	-7.2032E-15
-7.2032E-15	-6.6952E-02
-6.6952E-02	5.0904E-02

2. 36850E-03
 -3. 04280E-02
 -7. 90950E-15
 -3. 44200E-15
 -5. 17840E-02
 6. 23550E-02
 -1. 01560E-01
 -2. 20540E-15
 -4. 55850E-15
 -8. 47930E-03
 1. 08710E-01
 -1. 12860E-01
 -4. 91420E-15
 -4. 66380E-15
 5. 13760E-02
 1. 30680E-01
 -8. 82620E-02
 -1. 57170E-14
 -9. 96040E-15
 -7. 92320E-02
 8. 75600E-02
 -1. 60800E-02
 -1. 08530E-14
 -8. 88490E-15
 -4. 01420E-02
 7. 87260E-02
 -8. 04400E-02
 -2. 91170E-15
 -1. 97020E-15
 -1. 35930E-13
 8. 44040E-02
 -1. 08880E-01
 4. 09070E-15
 7. 56750E-15
 4. 01420E-02
 7. 87260E-02
 -8. 04400E-02
 5. 77600E-15
 8. 50850E-15
 7. 92320E-02
 8. 75600E-02
 -1. 60800E-02
 -9. 99610E-15
 -1. 29660E-14
 -5. 13760E-02
 1. 30680E-01
 -8. 82620E-02
 -1. 08040E-14
 -3. 24650E-04
 9. 66940E-02
 -1. 10440E-02
 3. 99410E-31
 5. 53730E-31
 -8. 93500E-03
 9. 87420E-03
 -2. 02970E-02
 -1. 37440E-01
 9. 51820E-03
 -1. 37440E-01
 4. 54200E-31
 5. 45820E-31
 4. 52680E-03
 8. 87790E-03
 -1. 01530E-01
 3. 99410E-31
 5. 53730E-31
 -8. 93500E-03
 9. 87420E-03
 -2. 02970E-02
 2. 61690E-31
 5. 14340E-31
 -3. 24650E-04
 9. 66940E-02
 -1. 10440E-02
 5. 00850E-31
 5. 00850E-31
 7. 03180E-03
 -1. 28190E-01
 5. 00850E-31
 -4. 43100E-02
 7. 33790E-02
 -9. 50820E-02
 2. 61690E-31
 5. 14340E-31
 3. 24650E-04
 9. 66940E-02
 -1. 10440E-02
 3. 99410E-31
 5. 53730E-31
 -8. 93500E-03
 9. 87420E-03
 -2. 02970E-02
 4. 54200E-31
 5. 45820E-31
 4. 54200E-31
 5. 53640E-02
 7. 03180E-03
 -1. 28190E-01
 3. 94190E-31
 3. 94190E-31
 3. 94190E-31

3^o modo : frequência 6.014E+01 rad/s

Busca de Det. Lanczos

1. 20130E-01	-1. 13080E-03
-1. 44750E-01	2. 01150E-01
1. 58200E-14	0. 00000E+00
1. 02250E-14	0. 00000E+00
-5. 48040E-02	1. 08110E-04
-9. 32880E-02	1. 07090E-02
-1. 31520E-01	9. 64810E-02
9. 72270E-15	0. 00000E+00
1. 52880E-14	0. 00000E+00
-8. 38240E-02	8. 63070E-03
-1. 54930E-02	2. 03010E-02
-9. 26350E-02	9. 53790E-03
3. 50600E-15	0. 00000E+00
6. 04910E-15	0. 00000E+00
-6. 39720E-02	1. 21210E-02
9. 14600E-02	-8. 31320E-03
5. 87070E-03	-8. 35430E-02
1. 42490E-01	-2. 81700E-02
1. 63780E-01	-2. 03110E-01
2. 35180E-14	0. 00000E+00
1. 51220E-14	0. 00000E+00
5. 58690E-02	-9. 10180E-02
-1. 32280E-01	1. 02730E-01

5. 99520E-02	5. 09040E-02
2. 36650E-03	-6. 08530E-02
-3. 04280E-02	-8. 57860E-02
1. 13220E-14	3. 55280E-31
5. 98220E-15	4. 46440E-31
6. 08920E-02	1. 23360E-02
-1. 19150E-02	-8. 33010E-02
8. 63650E-02	8. 64870E-03
1. 51110E-01	2. 01080E-01
-1. 12510E-01	6. 51840E-04
-1. 31780E-14	5. 14340E-31
-8. 87490E-15	2. 61690E-31
6. 87260E-02	9. 09880E-02
1. 13370E-01	1. 42260E-01
-1. 31880E-01	-1. 02930E-01
1. 23810E-15	5. 53730E-31
-9. 74590E-15	3. 99410E-31
1. 02210E-01	1. 29020E-01
1. 24650E-02	1. 40570E-03
-1. 12950E-01	-1. 42580E-01
5. 95020E-15	4. 46440E-31
-4. 60010E-15	3. 55280E-31
7. 61030E-02	9. 18210E-02
-1. 11900E-01	-1. 42090E-01
-2. 13370E-02	-9. 04640E-02
-1. 69100E-01	-2. 03110E-01
1. 35720E-01	2. 86440E-02

1. 4228E-01
0. 0000E+00
0. 0000E+00
-4. 4428E-02
8. 4939E-02
7. 3176E-02
0. 0000E+00
0. 0000E+00
8. 5755E-03
0. 0000E+00
0. 0000E+00
-6. 1077E-02
8. 5859E-02
5. 0799E-02
0. 0000E+00
0. 0000E+00
-5. 0799E-02
8. 5859E-02
-6. 1077E-02
0. 0000E+00
0. 0000E+00
-1. 4212E-01
8. 0692E-02
-9. 1821E-02
0. 0000E+00
0. 0000E+00
1. 3578E-03
1. 4260E-01
1. 2904E-01
0. 0000E+00
0. 0000E+00
1. 2904E-01
0. 0000E+00
0. 0000E+00
6. 7923E-03
1. 2821E-01
6. 5374E-02
0. 0000E+00
0. 0000E+00
0. 0000E+00
8. 1941E-03
0. 0000E+00
0. 0000E+00
1. 3745E-01
-1. 1287E-11
0. 0000E+00
0. 0000E+00
6. 7923E-03
1. 2821E-01
-6. 5374E-02
0. 0000E+00
0. 0000E+00
0. 0000E+00
-6. 5374E-02
1. 2821E-01
6. 7923E-03
0. 0000E+00
0. 0000E+00
0. 0000E+00
-1. 4212E-01
8. 0692E-02
9. 1821E-02
0. 0000E+00
0. 0000E+00
-6. 1077E-02
8. 5859E-02
5. 0799E-02
0. 0000E+00
0. 0000E+00
8. 5755E-03
1. 0155E-01
4. 3726E-03
0. 0000E+00
0. 0000E+00
7. 3176E-02
0. 0000E+00
0. 0000E+00
-4. 4428E-02
8. 4939E-02
0. 0000E+00
0. 0000E+00
1. 2807E-14
0. 0000E+00
1. 2807E-14
5. 4080E-03
-1. 1264E-01
-1. 0999E-01
2. 6779E-15
-2. 1833E-15
-4. 2468E-02
-7. 7503E-02
-8. 3288E-02
-7. 2011E-15
-9. 9936E-16
-6. 7270E-02
-2. 5424E-02
-7. 5264E-03
3. 4222E-15
-8. 7775E-16
-7. 3673E-02
-1. 5337E-02
1. 0775E-01
2. 0986E-14
8. 2609E-15
9. 8480E-02
-1. 0883E-01
-1. 3188E-02
1. 0192E-14
6. 3700E-15
4. 8840E-02
-9. 7851E-02
-6. 5969E-02
-6. 7483E-15
-6. 6109E-15
3. 2284E-13
-1. 0491E-01
-8. 9296E-02
-1. 8876E-14
-2. 5738E-14
-4. 9840E-02
-9. 7851E-02
-6. 5969E-02
-6. 7483E-15
-6. 6109E-15
3. 2284E-13
-1. 0491E-01
-8. 9296E-02
-1. 8876E-14
-2. 5738E-14
-4. 9840E-02
-9. 7851E-02
-6. 5969E-02
-2. 0884E-14
-2. 7668E-14
-9. 8480E-02
-1. 0883E-01
-1. 3188E-02
1. 2979E-14
1. 4737E-14
7. 3673E-02
-1. 5337E-02
1. 0775E-01
9. 0683E-15
5. 1944E-15
6. 7270E-02
-2. 5424E-02
-7. 5264E-03
-7. 5264E-03
-1. 1162E-15
4. 2468E-02

1. 0930E-01
0. 0000E+00
0. 0000E+00
-4. 4428E-02
8. 4939E-02
7. 3176E-02
0. 0000E+00
0. 0000E+00
8. 5755E-03
0. 0000E+00
0. 0000E+00
-6. 1077E-02
8. 5859E-02
5. 0799E-02
0. 0000E+00
0. 0000E+00
-5. 0799E-02
8. 5859E-02
-6. 1077E-02
0. 0000E+00
0. 0000E+00
-1. 4212E-01
8. 0692E-02
-9. 1821E-02
0. 0000E+00
0. 0000E+00
1. 3578E-03
1. 4260E-01
1. 2904E-01
0. 0000E+00
0. 0000E+00
1. 2904E-01
0. 0000E+00
0. 0000E+00
6. 7923E-03
1. 2821E-01
6. 5374E-02
0. 0000E+00
0. 0000E+00
0. 0000E+00
8. 1941E-03
0. 0000E+00
0. 0000E+00
1. 3745E-01
-1. 1287E-11
0. 0000E+00
0. 0000E+00
6. 7923E-03
1. 2821E-01
-6. 5374E-02
0. 0000E+00
0. 0000E+00
0. 0000E+00
-6. 5374E-02
1. 2821E-01
6. 7923E-03
0. 0000E+00
0. 0000E+00
0. 0000E+00
-1. 4212E-01
8. 0692E-02
9. 1821E-02
0. 0000E+00
0. 0000E+00
-6. 1077E-02
8. 5859E-02
5. 0799E-02
0. 0000E+00
0. 0000E+00
8. 5755E-03
1. 0155E-01
4. 3726E-03
0. 0000E+00
0. 0000E+00
7. 3176E-02
0. 0000E+00
0. 0000E+00
-4. 4428E-02
8. 4939E-02
0. 0000E+00
0. 0000E+00
1. 2807E-14
0. 0000E+00
1. 2807E-14
5. 4080E-03
-1. 1264E-01
-1. 0999E-01
2. 6779E-15
-2. 1833E-15
-4. 2468E-02
-7. 7503E-02
-8. 3288E-02
-7. 2011E-15
-9. 9936E-16
-6. 7270E-02
-2. 5424E-02
-7. 5264E-03
3. 4222E-15
-8. 7775E-16
-7. 3673E-02
-1. 5337E-02
1. 0775E-01
2. 0986E-14
8. 2609E-15
9. 8480E-02
-1. 0883E-01
-1. 3188E-02
1. 0192E-14
6. 3700E-15
4. 8840E-02
-9. 7851E-02
-6. 5969E-02
-6. 7483E-15
-6. 6109E-15
3. 2284E-13
-1. 0491E-01
-8. 9296E-02
-1. 8876E-14
-2. 5738E-14
-4. 9840E-02
-9. 7851E-02
-6. 5969E-02
-6. 7483E-15
-6. 6109E-15
3. 2284E-13
-1. 0491E-01
-8. 9296E-02
-1. 8876E-14
-2. 5738E-14
-4. 9840E-02
-9. 7851E-02
-6. 5969E-02
-2. 0884E-14
-2. 7668E-14
-9. 8480E-02
-1. 0883E-01
-1. 3188E-02
1. 2979E-14
1. 4737E-14
7. 3673E-02
-1. 5337E-02
1. 0775E-01
9. 0683E-15
5. 1944E-15
6. 7270E-02
-2. 5424E-02
-7. 5264E-03
-7. 5264E-03
-1. 1162E-15
4. 2468E-02

-1. 73450E-01	-1. 73450E-01
1. 73450E-01	1. 73450E-01
-1. 80260E-01	-1. 80260E-01
1. 21280E-01	1. 21280E-01
-7. 68560E-02	-7. 68560E-02
6. 65360E-15	2. 94600E-28
1. 58630E-14	5. 79500E-28
-1. 87500E-01	-1. 87500E-01
2. 34450E-11	-2. 69680E-11
-1. 09110E-01	-1. 09110E-01
1. 04830E-14	4. 49870E-28
1. 74260E-14	6. 24140E-28
-1. 80260E-01	-1. 80260E-01
-1. 21280E-01	-1. 21280E-01
-7. 68560E-02	-7. 68560E-02
9. 59380E-15	4. 00290E-28
1. 43850E-14	5. 03090E-28
-1. 73450E-01	-1. 73450E-01
-1. 73450E-01	-1. 73450E-01

Lanzos

Busca de Def.

4^o modo : frecuencia 6.355E+01 rad/s

-1. 44750E-01	2. 01150E-01
-1. 20130E-01	-1. 13080E-03
-1. 31520E-01	9. 64810E-02
-9. 32880E-02	1. 07090E-02
5. 48040E-02	-1. 08110E-04
1. 57350E-15	0. 00000E+00
-2. 30890E-14	0. 00000E+00
-9. 26350E-02	9. 53790E-03
-1. 54930E-02	2. 03010E-02
8. 38240E-02	-8. 63070E-03
1. 06870E-14	0. 00000E+00
-1. 56880E-14	0. 00000E+00
5. 87070E-03	-8. 35430E-02
9. 14600E-02	-8. 31320E-03
6. 39720E-02	-1. 21210E-02
1. 22530E-14	0. 00000E+00
1. 32500E-14	0. 00000E+00
1. 63780E-01	-2. 03110E-01
1. 42490E-01	-2. 81700E-02
-1. 09300E-01	1. 42280E-01
-1. 32280E-01	1. 02730E-01
-6. 58690E-02	9. 10180E-02
-2. 10750E-14	0. 00000E+00
-3. 08480E-14	0. 00000E+00
-1. 09990E-01	7. 31760E-02
-1. 12640E-01	9. 49390E-02
-5. 40800E-03	4. 44290E-02
-8. 44060E-15	0. 00000E+00
-2. 11560E-14	0. 00000E+00
-8. 32880E-02	8. 57550E-03
-7. 75030E-02	1. 01550E-01

4. 00290E-28	1. 11620E-14
5. 03090E-28	1. 17170E-14
7. 68560E-02	7. 68560E-02
-1. 80260E-01	-1. 80260E-01
-1. 21280E-01	-1. 21280E-01
4. 44210E-28	1. 28250E-14
4. 44210E-28	1. 02270E-14
4. 75230E-11	1. 65270E-11
-1. 18180E-01	-1. 18180E-01
-1. 18180E-01	-1. 18180E-01
5. 11800E-28	1. 71940E-14
5. 11800E-28	1. 21080E-14
-3. 10070E-02	-3. 10070E-02
-1. 16450E-10	-1. 12390E-10
-1. 18630E-01	-1. 18630E-01
5. 64350E-28	1. 53720E-14
5. 64350E-28	1. 35770E-14
-6. 40120E-11	-9. 18660E-11
-1. 18180E-01	1. 18180E-01
-1. 18180E-01	-1. 18180E-01
6. 15240E-28	8. 25630E-15
5. 79500E-28	1. 38490E-14
7. 68560E-02	7. 68560E-02
1. 80260E-01	1. 80260E-01
-1. 21280E-01	-1. 21280E-01
4. 49870E-28	1. 28640E-14
6. 24140E-28	1. 49300E-14
1. 09110E-01	1. 09110E-01
-1. 87500E-01	-1. 87500E-01
2. 94600E-28	1. 18180E-01
-1. 18180E-01	-1. 18180E-01
5. 64350E-28	5. 64350E-28
5. 64350E-28	5. 64350E-28
2. 94470E-11	2. 94470E-11
5. 64350E-28	1. 57490E-14
5. 64350E-28	1. 38890E-14
2. 94470E-11	8. 15160E-11
-1. 18180E-01	-1. 18180E-01
4. 00290E-28	1. 11620E-14

5° modo : frecuencia 1.515E+02 rad/s

1.18180E-01	1.18180E-01
6.15240E-28	5.11800E-28
-3.10070E-02	-1.13900E-10
1.18630E-01	1.18630E-01
4.44210E-28	4.44210E-28
-7.42410E-11	1.18180E-01
1.18180E-01	1.18180E-01
4.00290E-28	5.03090E-28
7.68560E-02	1.80260E-01
1.21280E-01	-1.73450E-01
1.80260E-01	1.73450E-01
1.73450E-01	1.73450E-01
5.79500E-28	5.03090E-28
2.94600E-28	-7.68560E-02
-7.68560E-02	-1.21280E-01
1.80260E-01	1.80260E-01
6.24140E-28	1.75160E-14
4.49870E-28	1.10230E-14
-1.09110E-01	-1.09110E-01
-2.01800E-11	-5.35740E-11
1.87500E-01	1.87500E-01
5.03090E-28	1.40510E-14
4.00290E-28	9.97300E-15
-7.68560E-02	-7.68560E-02
1.21280E-01	1.21280E-01
1.80260E-01	1.80260E-01
1.73450E-01	1.73450E-01
1.73450E-01	1.73450E-01

Busca de Def. Lanzos

-1.43180E-01	-1.43180E-01
1.43180E-01	1.43180E-01
3.56770E-29	-1.02240E-12
2.83870E-29	-6.42240E-13
-6.78260E-02	-6.78260E-02
-8.85550E-02	-8.85550E-02
-1.73570E-01	-1.73570E-01
4.42610E-29	-5.82900E-13
3.19030E-29	-9.76120E-13
-9.24440E-02	-9.24440E-02
1.84310E-10	4.69210E-10
-3.06190E-01	-3.06190E-01
4.10960E-29	-1.63460E-13
2.08920E-29	-3.71970E-13
-6.78260E-02	-6.78260E-02

8. 85550E-02	8. 85550E-02
-1. 73570E-01	-1. 73570E-01
1. 43180E-01	1. 43180E-01
1. 43180E-01	1. 43180E-01
-1. 54980E-12	-1. 54980E-12
-9. 70920E-13	-9. 70920E-13
-6. 78260E-02	-6. 78260E-02
1. 73570E-01	1. 73570E-01
8. 85550E-02	8. 85550E-02
3. 15010E-29	3. 15010E-29
3. 15010E-29	3. 15010E-29
5. 27080E-03	5. 27080E-03
1. 24520E-01	1. 24520E-01
1. 24520E-01	1. 24520E-01
-1. 16010E-13	-1. 16010E-13
2. 02050E-13	2. 02050E-13
3. 89750E-02	3. 89750E-02
-3. 02920E-10	-3. 02920E-10
-2. 19710E-01	-2. 19710E-01
5. 59190E-13	5. 59190E-13
1. 42450E-13	1. 42450E-13
5. 27080E-03	5. 27080E-03
-1. 24520E-01	-1. 24520E-01
-1. 24520E-01	-1. 24520E-01
-1. 98180E-13	-1. 98180E-13
1. 40660E-13	1. 40660E-13
-6. 78260E-02	-6. 78260E-02
-1. 73570E-01	-1. 73570E-01
8. 85550E-02	8. 85550E-02
-1. 36760E-12	-1. 36760E-12
-5. 08280E-13	-5. 08280E-13
-9. 24440E-02	-9. 24440E-02
3. 06190E-01	3. 06190E-01
-3. 81240E-10	-3. 81240E-10
-6. 38870E-13	-6. 38870E-13
-3. 85890E-13	-3. 85890E-13
3. 89750E-02	3. 89750E-02
2. 19710E-01	2. 19710E-01
4. 08920E-10	4. 08920E-10
5. 17830E-13	5. 17830E-13
5. 02820E-13	5. 02820E-13
9. 79850E-02	9. 79850E-02
-1. 10570E-10	-1. 10570E-10
1. 38010E-11	1. 38010E-11
1. 33220E-12	1. 33220E-12
1. 82650E-12	1. 82650E-12
3. 89750E-02	3. 89750E-02
-2. 19710E-01	-2. 19710E-01
-3. 48250E-10	-3. 48250E-10
1. 45390E-12	1. 45390E-12
1. 99350E-12	1. 99350E-12
-9. 24440E-02	-9. 24440E-02
-3. 06190E-01	-3. 06190E-01
3. 05300E-10	3. 05300E-10
-8. 38980E-13	-8. 38980E-13
-9. 33940E-13	-9. 33940E-13
-6. 78260E-02	-6. 78260E-02
1. 73570E-01	1. 73570E-01
-8. 85550E-02	-8. 85550E-02

4. 0021 OE-29
4. 0021 OE-29
5. 2708OE-03
1. 2452OE-01
1. 2452OE-01
4. 3630OE-29
3. 6295OE-29
3. 8975OE-02
4. 5774OE-11
2. 1971 OE-01
3. 1501 OE-29
3. 1501 OE-29
5. 2708OE-03
1. 2452OE-01
-1. 2452OE-01
2. 8387OE-29
3. 5677OE-29
-6. 7826OE-02
-1. 7357OE-01
-8. 8555OE-02
-1. 4318OE-01
-1. 4318OE-01
4. 1096OE-29
2. 0892OE-29
-6. 7826OE-02
-8. 8555OE-02
1. 7357OE-01

-5. 5598OE-13
-3. 0125OE-13
5. 2708OE-03
1. 2452OE-01
1. 2452OE-01
5. 6452OE-13
1. 3612OE-13
3. 8975OE-02
4. 1914OE-10
2. 1971 OE-01
1. 4568OE-12
6. 3214OE-13
5. 2708OE-03
-1. 2452OE-01
-1. 2452OE-01
2. 1473OE-12
1. 4550OE-12
-6. 7826OE-02
-1. 7357OE-01
-8. 8555OE-02
-1. 4318OE-01
-1. 4318OE-01
-8. 2263OE-13
-7. 9982OE-13
-6. 7826OE-02
-8. 8555OE-02
1. 7357OE-01
1. 1287OE-12
-6. 8604OE-13
-9. 2444OE-02
-3. 5758OE-10
3. 0619OE-01
1. 5845OE-13
-7. 8503OE-14
-6. 7826OE-02
8. 8555OE-02
1. 7357OE-01
1. 4318OE-01
-1. 4318OE-01