

OK

São Paulo
1998

Dissertação apresentada à Escola Politécnica
da Universidade de São Paulo para obtenção
do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

**DESENVOLVIMENTO DE UM CONTROLADOR
ADAPTATIVO PARA MANIPULADORES FLEXÍVEIS COM
INCERTEZAS DE CARGAS**

EDUARDO GILDIN
Eng. Mecânico, Faculdade de Engenharia Industrial, 1995

São Paulo
1998

Prof. Dr. Lucas A. Moscato

Orientador:

Engenharia Mecânica / Mecatrônica

Área de Concentração:

Dissertação apresentada à Escola Politécnica
da Universidade de São Paulo para obtenção
do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

**DESENVOLVIMENTO DE UM CONTROLADOR
ADAPTATIVO PARA MANIPULADORES FLEXÍVEIS COM
INCERTEZAS DE CARGAS**

Eng. Mecânico, Faculdade de Engenharia Industrial, 1995

EDUARDO GILDIN

19 - 2010
Biblioteca de Ciências Físicas

Aos meus pais e aos meus irmãos.

DEDALUS - Acervo - EPMN

31600010172

AGRADECIMENTOS

- Ao Prof. Dr. Lucas Antônio Moscato, orientador deste trabalho, pelo constante apoio e compreensão ao longo desta pesquisa.
- Ao Prof. Dr. Raul Gonzales-Lima pelas decisivas sugestões, pelas inúmeras discussões esclarecedoras sobre estruturas flexíveis e pelo incentivo para seguir com este tema de pesquisa.
- Ao Prof. Dr. Felipe Paiz, do Depto. de Engenharia Elétrica da EPUSP, pelo indispensável auxílio na elaboração do Capítulo 3 deste texto.
- Ao pessoal do Departamento de Engenharia Mecatrônica da USP pelo excelente ambiente de trabalho criado neste período.
- A todos aqueles que direta ou indiretamente me auxiliaram no desenvolvimento desta pesquisa.

ERRATA

Trocar por:

- 1) Em Conteúdo:
- 2.4. CONCEITO DO REFERENCIAL FLUTUANTE

2) Em Lista de Símbolos

$\phi(x)$: Funções de Forma ou Auto-funções;

3) página 16

...Ele pode ser estendido para sistemas dinâmicos através do Princípio de ...

4) página 22

- A energia cinética de um corpo com referencial inercial fixo no centro de massa pode

ser escrita como:

$$H = I \cdot \omega_f + \int_D \varepsilon \times \varepsilon_f \, dm \quad (2.21a)$$

(2.21a)

$$T = \frac{1}{2} \omega_f \cdot I \cdot \omega_f + \omega_f \cdot \int_D (\varepsilon \times \varepsilon_f) \, dm + \frac{1}{2} \int_D (\varepsilon_f \cdot \varepsilon_f) \, dm \quad (2.23)$$

(2.23)

- O *Tisserand Frame* fornece a mínima energia cinética relativa ao referencial flutuante,

assim:

5) página 23

$$\int_D \varepsilon \times \varepsilon_f \, dm = 0$$

(2.24)

- O *Tisserand Frame* fornece a mínima energia cinética relativa ao referencial

flutuante, assim:

6) página 26

Portanto :

$$\left| \dot{R} \right|^2 = \dot{\omega}^2 \cdot (\dot{r} + \dot{d})^2 - (\dot{\omega} \cdot (\dot{r} + \dot{d}))^2 + \dot{d} \cdot \dot{d} + 2 \cdot \dot{r} \wedge \dot{d} \cdot \dot{\omega} + 2 \dot{d} \wedge \dot{d} \cdot \dot{\omega}$$

$$= \dot{\omega}^2 \cdot |\dot{r} + \dot{d}|^2 - (\dot{\omega} \cdot (\dot{r} + \dot{d}))^2 + \dot{d} \cdot \dot{d} + 2 \cdot \dot{r} \wedge \dot{d} \cdot \dot{\omega} + 2 \dot{d} \wedge \dot{d} \cdot \dot{\omega}$$

• $\delta V = E \cdot I \cdot y''(x, t) \cdot \delta y' \Big|_0^L - \left[E \cdot I \cdot y''' \cdot \delta y \Big|_0^L - \int_0^L E \cdot I \cdot \delta y \cdot y'''' \cdot dx \right]$ (2.47)

• $\delta V = \frac{1}{2} \int_0^L E \cdot I \cdot \delta(y''(x, t))^2 \cdot dx = \frac{1}{2} \int_0^L E \cdot I \cdot 2 \cdot y'' \cdot (\delta y'') \cdot dx$ (2.46)

• $\delta T = I^H \cdot \theta \cdot \delta \theta + I^H \cdot \theta^H \cdot \delta \theta^H + \rho \cdot \int_0^L y \cdot \delta y + \theta \cdot \delta \theta \left[x^2 + y^2(x, t) - \frac{1}{2} (L^2 - x^2) y'^2(x, t) \right] + \left[\frac{1}{2} y \cdot \delta y + \theta \cdot \delta \theta \left(\frac{1}{2} L^2 + y^2(L, t) - \frac{1}{2} (L^2 - x^2) y'^2(x, t) \right) \right] \left[dx + m \cdot p \cdot \left(\frac{1}{2} y \cdot \delta y(L, t) + \theta \cdot \delta \theta \left(\frac{1}{2} L^2 + y^2(L, t) - \frac{1}{2} (L^2 - x^2) y'^2(x, t) \right) \right) \right] + \theta^2 \cdot y \cdot \delta y(x, t) - \frac{1}{2} (L^2 - x^2) y' \cdot \delta y'(x, t) \left[dx + m \cdot p \cdot \left(\frac{1}{2} y \cdot \delta y(L, t) + \theta \cdot \delta \theta \left(\frac{1}{2} L^2 + y^2(L, t) - \frac{1}{2} (L^2 - x^2) y'^2(x, t) \right) \right) \right] + \left(\theta^2 \cdot y \cdot \delta y(x, t) + \theta^2 \cdot y' \cdot \delta y'(x, t) \right) \left[dx + m \cdot p \cdot \left(\frac{1}{2} y \cdot \delta y(L, t) + \theta \cdot \delta \theta \left(\frac{1}{2} L^2 + y^2(L, t) - \frac{1}{2} (L^2 - x^2) y'^2(x, t) \right) \right) \right]$

9) página 29

• $T = \frac{1}{2} \int_0^L \theta^2 \int_0^L \rho \cdot \left[x^2 + y^2(x, t) - x \cdot \int_x^L y'^2(\xi, t) \cdot d\xi \right] dx + \frac{1}{2} \int_0^L \rho \cdot y^2 \cdot dx$ (2.41)

• $\therefore \bar{\omega} \int_0^M \bar{d} \wedge \dot{\bar{d}} dm = 0$ (2.40)

• $T = \frac{1}{2} I^H (\theta + \theta^H)^2 + \dots$ (2.42)

• Sendo movimento síncrono, tem-se: $y(x, t) = \eta(t) \cdot \phi(x)$

8) página 28

• $\frac{1}{2} \cdot \omega^2 \int_0^M (\bar{r} + \bar{d}) \cdot (\bar{r} + \bar{d}) dm = \frac{1}{2} \int_0^L \rho \cdot \left[x^2 + y^2(x, t) - x \cdot \int_x^L y'^2 d\xi \right] dx$ (2.36)

7) página 27

• $T = \frac{1}{2} \omega^2 \int_0^M (\bar{r} + \bar{d}) \cdot (\bar{r} + \bar{d}) dm - \frac{1}{2} \int_0^M (\bar{\omega} \cdot (\bar{r} + \bar{d}))^2 dm + \frac{1}{2} \int_0^M \bar{d} \cdot \dot{\bar{d}} \cdot dm + \bar{\omega} \cdot \int_0^M \bar{r} \wedge \dot{\bar{d}} \cdot dm + \bar{\omega} \cdot \int_0^M \bar{r} \wedge \dot{\bar{d}} \cdot dm$ (2.33)

10) página 30

$$\begin{aligned}
 & \int_{L_2}^{L_1} \left\{ \frac{1}{L_1} I_H \cdot \theta \cdot \delta \theta + I_H \cdot \theta_H \cdot \delta \theta_H + p \cdot \int_{L_2}^0 \left\{ y \cdot \delta y + \theta \cdot \delta \theta \left[x^2 + y^2 - \frac{L^2 - x^2}{2} \right] y'^2(x, t) - \right. \right. \\
 & \left. \left. + \theta^2 \cdot \left[y \cdot \delta y(x, t) - \frac{L^2 - x^2}{2} y' \cdot \delta y'(x, t) \right] \right\} dx + m_p \cdot \left[\frac{1}{L_1} y \cdot \delta y(L, t) + \theta \cdot \delta \theta \left(\frac{1}{L_1} L^2 + y^2(L, t) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - L \int_{L_2}^0 y'^2(\xi, t) d\xi \right) + \theta^2 \left(y \cdot \delta y(L, t) - L \int_{L_2}^0 y' \cdot \delta y'(\xi, t) d\xi \right) \right] - E \cdot I \cdot y'''' \cdot \delta y \cdot dx + \\
 & \left. + \frac{1}{L} T(t) (\delta \theta + \delta \theta_H) \right\} dt = 0
 \end{aligned}$$

(2.48)

• Pode-se resolver cada termo separadamente da equação (2.48), fornecendo :

$$\begin{aligned}
 \bullet \text{ A) } & \int_{L_2}^{L_1} I_H \cdot \theta \cdot \delta \theta \cdot dt = I_H \cdot \theta \cdot \delta \theta \Big|_{L_2}^{L_1} - \int_{L_2}^{L_1} I_H \cdot \dot{\theta} \cdot \delta \theta \cdot dt \\
 \bullet \text{ B) } & \int_{L_2}^{L_1} I_H \cdot \theta_H \cdot \delta \theta_H \cdot dt = I_H \cdot \theta_H \cdot \delta \theta_H \Big|_{L_2}^{L_1} - \int_{L_2}^{L_1} I_H \cdot \dot{\theta}_H \cdot \delta \theta_H \cdot dt \\
 \bullet \text{ D) } & \int_{L_2}^{L_1} \int_{L_2}^0 p \int_{L_2}^0 \theta \cdot \delta \theta \cdot \left[x^2 + y^2 - \frac{L^2 - x^2}{2} y'^2 \right] dx \cdot dt = - \int_{L_2}^{L_1} \int_{L_2}^0 p \int_{L_2}^0 x^2 \cdot \dot{\theta} \cdot dx \cdot dt \cdot \delta \theta -
 \end{aligned}$$

11) página 31

$$\bullet \text{ F) } \int_{L_2}^{L_1} \int_{L_2}^0 m_p \cdot y \cdot \delta y(L, t) \cdot dt = m_p \int_{L_2}^{L_1} y(L, t) \cdot dt \cdot \delta y(L, t) - m_p y^2 \Big|_{L_2}^{L_1} \quad (2.54)$$

$$\bullet \text{ H) } \int_{L_2}^{L_1} \int_{L_2}^0 m_p \cdot \theta^2 \cdot \left(y \cdot \delta y(L, t) - L \int_{L_2}^0 y' \cdot \delta y'(\xi, t) d\xi \right) \cdot dt = \int_{L_2}^0 m_p \cdot \theta^2 \cdot y(L, t) \cdot \delta y(L, t) -$$

$$\bullet \text{ y(0, t) = 0, y'(0, t) = } \theta_H, EI \cdot y''(L, t) = 0, EI \cdot y'''(L, t) - m_p y^p \Big|_{x=L} = 0 \quad EI \cdot y''(0, t) - I_H \cdot \dot{\theta}_H + T(t) = 0 \quad (2.59)$$

18) página 40

- Utilizando-se a equação (2.95), (2.96) pode ser escrita como
- ... [YUA96], analisa-se o mesmo sistema (Figura 2.4), porém ...

17) página 39

onde β é o ângulo do referencial flutuante

16) página 38

Partindo-se da equação diferencial parcial e de (2.60), multiplicando-se ...

15) página 37

$$\begin{aligned} & \bullet \quad e \\ & \bullet \quad (\phi_r, M\phi_s) = \delta_{rs} \\ & \bullet \quad (\phi_r, K\phi_s) = \lambda_r \cdot \delta_{rs} \end{aligned} \quad (2.88)$$

- Desde que as amplitudes das ... e obter a seguinte relação ...
- Devido ao fato de que o produto interno em energia é simétrico em ϕ_r e ϕ_s , o lado ...
- Subtraindo-se a equação (2.85) da equação (2.84) e usando-se ...
- Baseando-se nas equações (2.80) e (2.81), pode-se ...

14) página 36

$$\dots + \int_L^0 \phi_s'' \phi_r'' dx \quad (2.78)$$

13) página 35

$$4) E.I. \phi''''(L). \eta(t) - m_p \cdot \phi(L). \ddot{\eta}(t) = 0$$

12) página 32

..., verifica-se que a dinâmica de corpo rígido e a dinâmica flexível são ...

19) página 41

... completamente controlável, então os polos do sistema em malha fechada...

20) página 43

$$(3.7) \quad \begin{bmatrix} \dot{x} \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ G.C & A-G.C-B.K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -G.Y_r \end{bmatrix}$$

21) página 44

$$(3.8) \quad \frac{d\varphi}{dt} = -g_T \frac{\partial(e^2(p))}{\partial \varphi} = -2 \cdot g_T \cdot e(p) \frac{\partial(e(p))}{\partial \varphi}$$

22) página 47

$$(3.18) \quad \Rightarrow \hat{\theta}(t) = \left(\sum_{i=1}^t \varphi(i) \cdot \varphi^T(i) \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^t \varphi(i) \cdot y(i) \right) = P(t) \cdot \left(\sum_{i=1}^t \varphi(i) \cdot y(i) \right)$$

23) página 49

pode-se escrever:

24) página 59

LEGENDA DA FIGURA 4.6

—	mp=0,0 kg
—	mp=0,1 kg
—	mp=0,2 kg

25) página 71

... Assim, propõe-se uma outra análise, para uma entrada com cinco pulsos retangulares

26) página 73

• Gráfico de Referência e Resposta para cinco pulsos retangulares

- Fig. 4.25- Referência e Resposta da posição angular para entrada com 5 pulsos retangulares.

27) página 74

- Fig. 4.26- Referência e Resposta do deslocamento da ponta para entrada 5 pulsos retangulares.

- Sinal de Controle (Torque) para entrada com 5 pulsos retangulares.

- Fig. 4.27- Sinal de Controle - Torque - para entrada com 5 pulsos retangulares.

Conteúdo

1	1	1.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS	1
4	1	1.2 REVISÃO DE CONTROLE ADAPTATIVO	4
9	1	1.3 BREVE REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	9
11	1	1.4 OBJETIVOS	11
12	1	1.5 TÓPICOS DE CADA CAPÍTULO	12
	2	MODELAGEM MATEMÁTICA DA DINÂMICA DO BRAÇO	
14		FLEXÍVEL	14
14		2.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS	14
15		2.2 PRINCÍPIOS DE MECÂNICA ANALÍTICA	15
15		2.2.1 COORDENADAS GENERALIZADAS	15
15		2.2.2 PRINCÍPIOS DOS TRABALHOS VIRTUAIS	15
16		2.2.3 PRINCÍPIO DE D'ALEMBERT	16
17		2.2.4 PRINCÍPIO DE HAMILTON	17
19		2.3 ENERGIA CINÉTICA E POTENCIAL	19
21		2.4 PRINCÍPIO DO REFERENCIAL FLUTUANTE	21
23		2.5. MODELO DO BRAÇO FLEXÍVEL	23
25		2.5.1 CÁLCULO DA ENERGIA CINÉTICA	25
28		2.5.2 CÁLCULO DA ENERGIA POTENCIAL	28
29		2.5.3 PRINCÍPIO DE HAMILTON	29
34		3.2.4 CONDIÇÕES DE ORTOGONALIDADE - RESPOSTA	34
39		2.6 UTILIZAÇÃO DO MODELO TRADICIONAL	39
40		2.7 CONCLUSÕES	40
41	3	MODELO DO CONTROLADOR	41
41		3.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS	41
41		3.2 MODELO DO CONTROLADOR POR ALOCAÇÃO DE PÓLOS	41

89	CÓDIGOS DOS PROGRAMAS EM MATLAB
89		APÊNDICE D
88	LEMA DE INVERSÃO DE MATRIZ
88		APÊNDICE C
86	ENCURTAMENTO DA VIGA
86		APÊNDICE B
85	ÁLGEBRA LINEAR
85		APÊNDICE A
81		REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS
78	5.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS
76	5.1 CONCLUSÕES
70		5 CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS
66	5.2 SIMULAÇÃO DO CONTROLE ADAPTATIVO
60	5.1 SIMULAÇÃO DO CONTROLE POR ALOCAÇÃO DE PÓLOS
56	4.1 DINÂMICA DO BRAÇO FLEXÍVEL
56		4 SIMULAÇÃO EM COMPUTADOR
54	3.4 CONCLUSÕES
51	NO SISTEMA DO MANIPULADOR
		3.3.2 APLICAÇÃO DO CONTROLADOR AUTO-AJUSTÁVEL
44	3.3.1 TEORIA DO CONTROLADOR AUTO-AJUSTÁVEL
44	3.3 MODELO DO CONTROLADOR ADAPTATIVO

Lista de Figuras

05	Fig. 1.1 - Diagrama de blocos do Controlador de Ganho Programado
07	Fig. 1.2 - Diagrama de blocos do Controlador por Modelo de Referência
08	Fig. 1.3 - Diagrama de blocos do Controlador Auto Ajustável
18	Fig. 2.1 - Princípio de Hamilton
19	Fig. 2.2 - Barra sujeita a esforços e Diagrama de Corpo Livre
24	Fig. 2.3 - Sistemas de coordenadas de um corpo indeformável (linha sólida) de um corpo deformado (linha pontilhada).
25	Fig. 2.4 - Modelo do braço Flexível
42	Fig. 3.1 - Modelo do controlador por Alocação de Pólos.
43	Fig. 3.2 - Estrutura do Controlador por Alocação de Pólos
45	Fig. 3.3 - Esquema do Controlador Auto Ajustável
57	Fig. 4.1 - Aparato experimental da barra flexível
57	Fig. 4.2 - Esquema do braço flexível do Laboratório
58	Fig. 4.3 - Funções de Forma da Viga (4 modos) - $m_p = 0.1 \text{ Kg}$
59	Fig. 4.4 - Esquema da dinâmica do braço no Simulink®
59	Fig. 4.5 - Entrada Tipo Degrau em $\theta_{ref} = 15^\circ$
59	Fig. 4.6 - Vibração na ponta da Viga para entrada em degrau
60	Fig. 4.7 - Esquema do Controle por Alocação de Pólos no Simulink®
61	Fig. 4.8 - Referências para a simulação : $\theta_{ref} = 15^\circ$ e $Y_{rel} = 0 \text{ mm}$
62	Fig. 4.9 - Posição angular - Referência = 15°
62	Fig. 4.10 - Deslocamento na ponta da viga- Referência = 15°
62	Fig. 4.11 - Sinal de Torque - Referência = 15°
63	Fig. 4.12 - Posição angular da alocação de pólos - Referência = 45°
64	Fig. 4.13 - Deslocamento na ponta da viga da alocação de pólos Referência = 45°
64	Fig. 4.14 - Sinal de Torque da alocação de pólos - Referência = 45°
65	Fig. 4.15 - Diagrama de polos e zeros do sistema em malha fechada
67	Fig. 4.16 - Esquema do controle adaptativo no programa Simulink®
68	Fig. 4.17 - Posição angular do adaptativo - Referência = 15°
69	Fig. 4.18 - Deslocamento na ponta da viga do adaptativo - Referência = 15°
69	Fig. 4.19 - Sinal de Torque do adaptativo - Referência = 15°
70	Fig. 4.20 - Massas Estimadas - Referência = 15°
71	Fig. 4.21 - Massas Estimadas para duas velocidades de adaptação - Referência = 15°
72	Fig. 4.22 - Referências para o controle adaptativo
72	Fig. 4.23 - Posição angular do adaptativo - $m1 = 0.1 \text{ kg}$ e $m2 = 0.2 \text{ kg}$
73	Fig. 4.24 - Massas estimadas variação no parâmetro λ .

Lista de Tabelas

Tab. 01 - Freqüências Naturais da Simulação e Experimentais 57

Figura B1 - Encurtamento da Viga - a) Viga; b) Elemento infinitesimal da viga 86

Fig. 5.1 - Esquema do aparato experimental proposto 80

Fig. 4.28 - Massas estimadas para os vários tipos de entrada 75

Fig. 4.27 - Sinal de Controle - Torque - para entrada com 3 degraus 74

Fig. 4.26 - Referência e Resposta do deslocamento da ponta para entrada com 3 degraus. 74

Fig. 4.25 - Referência e Resposta da posição angular para entrada com 3 degraus. 73

Lista de Símbolos

- ⊙ : Vetor que contém os parâmetros do controlador a serem ajustados;
- $q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$: Vetor de coordenadas generalizadas do sistema;
- q_i : Deslocamento virtual de uma partícula i ;
- δW : Trabalho Virtual realizado por δr_i ;
- T : Energia Cinética do sistema;
- V : Energia Potencial do sistema;
- $\delta T, \delta V$: Variação da Energia Cinética e Potencial;
- L : Lagrangeano;
- W_{nc} : Trabalho das Forças não Conservativas;
- $\rho(x)$: Densidade Linear de uma estrutura;
- $A(x)$: Área da secção transversal de uma estrutura;
- $I(x), I^H$: Momento de Inércia principal de uma estrutura;
- $Q(x,t)$: Força cortante em um elemento de viga;
- $M(x,t)$: Momento Fletor em um elemento de viga;
- $\psi(x,t)$: Ângulo de rotação de um elemento de viga devido à flexão;
- $\gamma(x,t)$: Ângulo de distorção de um elemento de viga devido à força cortante;
- $y(x,t)$: Deflexão total da viga em um ponto x ;
- E : Módulo de Elasticidade de um material;
- G : Módulo de elasticidade transversal de uma viga;
- H : Quantidade de Movimento angular de um corpo deformável;
- ε : Vetor do centro de massa à um elemento de massa genérico da estrutura;
- ω : Velocidade angular;
- $\bar{R}, \bar{r}, \bar{d}$: Vetor posição instantânea de um elemento de massa de um corpo;
- Ω : Velocidade angular de um sistema girante;
- m_p : massa pontual na extremidade de uma estrutura;
- θ, θ^H : Posição Angular;
- $\dot{\theta}, \dot{\theta}^H$: Velocidade Angular;
- $\ddot{\theta}, \ddot{\theta}^H$: Aceleração Angular;
- T(t) : Torque aplicado à estrutura;
- $\eta(t)$: Coordenada Modal;
- $\phi(x)$: Funções de Forma ou Autofunções;
- A, B, C, D : Matrizes de um sistema no espaço de estados;
- G, K : Matrizes de Ganhos do Controlador;
- C_o : Matrizes de Controlabilidade;
- O_b : Matriz de Observabilidade;
- x : Vetor de Estados de um sistema;
- \hat{x} : Vetor de Estados estimados de um sistema;
- p : Parâmetro estimado;
- g_T : Constante de ganho de adaptação;
- e : Erro de estimação;

Resumo

Os recentes avanços na área de robôs manipuladores e a crescente demanda industrial têm levado pesquisadores a se aterem ao estudo da modelagem e controle de estruturas cada vez mais leves e com flexibilidade acentuada. Resultados de tais estudos são fundamentais para a aplicação industrial e aeroespacial. Hoje em dia há dois grandes obstáculos que limitam os atuais robôs manipuladores: (1) a flexibilidade inerente da estrutura do robô e seu sistema de transmissão de força que faz com que seja difícil atingir alta precisão na manipulação e (2) para contornar o problema da flexibilidade, faz-se a estrutura ainda mais rígida e pesada, o que tende a aumentar o tempo da manobra, limitando a sua velocidade e exigindo alto gasto de energia. Assim este trabalho trata da modelagem e controle de braços mecânicos flexíveis com apenas um segmento. Duas técnicas de controle foram implementadas, alocação de polos e controle adaptativo, para a verificação da robustez do sistema devido à mudanças de cargas na ponta do manipulador. O modelo dinâmico de apenas um braço foi obtido através do Princípio Estendido de Hamilton, utilizando-se um referencial flutuante (*Tisserand Frame*). Com a utilização deste referencial, as equações linearizadas do modelo tornaram-se desacopladas, sendo uma de suas vantagens o ótimo posicionamento de sensores e atuadores. O desempenho desses controladores foi verificada através de simulações numéricas.

Palavras Chave

Manipuladores Flexíveis, Robôs, Controle Adaptativo, Alocação de Polos, Braços

Flexíveis.

Abstract

Recently, the progress in the field of robot manipulators and the increasingly industrial demand, has led to the development of lighter and more flexible structures. The results of such studies are important in the industrial and aerospace field. Initially, robot control design was based on the assumption that the power transmission was stiff and the links behaved as rigid bodies. For higher operation speeds, the links can deform significantly. Furthermore, flexibility in the links and/or joints decreases tracking accuracy and can cause instability in the controller under payload changes. In order to overcome these problems, this work deals with the modelling and control of light weight flexible manipulators. Two control strategies, Pole Placement Control and Adaptive Control, are compared with respect to the ability to handle abrupt payload changes. The dynamic model of a one-link flexible arm is obtained by Hamilton's Principle, using a floating reference frame (*Tisserand Frame*). With a floating reference frame the linearized equations of motion become uncoupled. These equations of motion have the advantages that optimal placement of actuators and optimal placement of sensors become a straight-forward task. The performance of these controllers have been investigated through numerical simulations.

Keywords

Flexible Manipulators, Robots, Adaptive Control, Pole Placement, Flexible Links.

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

1.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS

Os recentes avanços na área de robôs manipuladores e a crescente demanda industrial têm levado pesquisadores a atermem-se ao estudo da modelagem e controle de estruturas cada vez mais leves e com flexibilidade acentuada. Resultados de tais estudos são fundamentais para a aplicação industrial e aeroespacial, tais como, controle de atitude, lançamento de satélites, manobras de painéis solares, movimentação de manipuladores e telescópios, espaciais ou terrestres.

Apesar da crescente importância das aos robôs manipuladores, ainda são grandes os problemas enfrentados nesta área de pesquisa. Hoje em dia há dois grandes obstáculos que limitam os atuais robôs manipuladores: (1) a flexibilidade inerente da estrutura do robô e seu sistema de transmissão de força que faz com que seja difícil atingir alta precisão na manipulação. e (2) para contornar o problema da flexibilidade, faz-se a estrutura ainda mais rígida e pesada, o que tende a aumentar o tempo da manobra, limitando a sua velocidade e exigindo alto gasto de energia.

Em virtude da leveza dos braços flexíveis, pode-se ter um aumento da velocidade (de resposta) do manipulador e diminuição do consumo de energia, além da redução do seu custo total. Por outro lado, o tempo de amortecimento exigido para suprimir as vibrações

remanescentes do braço atrasa subseqüentes operações, confluindo portanto, com a demanda de crescimento de produtividade.

Neste contexto surge o problema do posicionamento de braços mecânicos flexíveis, onde deseja-se levar a extremidade de manipuladores ou robôs a um dado ponto específico ou fazer percorrer uma trajetória específica, com precisão especificada, otimizada para tempo e da energia gastos na manobra. Vários experimentos têm sido construídos para demonstrar as estratégias de controle para estruturas flexíveis [CAN84].

Os sistemas mecânicos flexíveis apresentam um número infinito de modos de vibração e por isso o seu controle é difícil, já que estes podem ser pouco amortecidos [BAL82]. Assim, um controle preciso exigirá um modelo acurado. Para representar estes sistemas com precisão, modelos de ordem elevada são necessários. Por razões computacionais, durante a implementação do controlador, a ordem desses modelos deve ser limitada. Conseqüentemente, na prática usa-se um controlador de dimensão menor que o próprio sistema, levando ao problema de "spillover", isto é, à existência de excitação de frequências naturais não observadas pelo controlador. Dessa maneira o controlador é projetado truncando-se o número de modos naturais da estrutura; porém, a resposta do sistema a uma dada entrada leva em consideração os seus infinitos modos. Assim, os problemas relativos à *spillover* e a erros de modelagem podem deteriorar o desempenho do controlador [YUA96].

A modelagem da estrutura e o projeto do controlador são atividades iterativas por natureza. Isto se deve ao fato de que o melhor modelo para o projeto do controlador requer "avangados conhecimentos" sobre as várias entradas às quais o modelo estará submetido. Como os sistemas físicos não permitem um modelamento exato, nenhum modelo do sistema pode ser confiável a todas as entradas. Contudo, as entradas às quais o modelo está sujeito

dependem do controlador, que por sua vez, não está disponível na fase da modelagem. Assim, um sistema que permitisse o controle da estrutura flexível sem o conhecimento *a priori* de alguns de seus parâmetros, seria essencial para uma manipulação precisa do sistema robótico flexível.

Neste caso surge a necessidade de um controle adaptativo devido, principalmente, ao desconhecimento da estrutura e da ordem do sistema, às mudanças no regime de controle e em consequência das variações de parâmetros. O problema resume-se em construir um mecanismo de adaptação que leva um dado processo para o seu desempenho ótimo, de acordo com algum critério desejado, mesmo sofrendo mudanças nas condições do ambiente. Um exemplo simples de um mecanismo de controle adaptativo é o controle de ganho automático (AGC) usado em sistemas receptores de rádio para a manutenção de uma intensidade de saída constante ao longo de uma vasta faixa de sinais de entrada. Em uma situação ideal, o sistema de controle adaptativo deve :

i) Ser capaz de adaptar-se continuamente às variações do ambiente, e às exigências do sistema;

ii) Ter alguma característica de aprendizado;

iii) Ser "reproduzível" no sentido de que para as situações de mudanças, o controlador deparar-se-á com novos parâmetros e novas estratégias de controle;

iv) Ter a capacidade de auto-reparação no caso de falha de parâmetros internos;

v) Ser robusto, no sentido de que seu desempenho deve ser insensível à mudanças nas condições ambientais e aos erros de modelagem.

O projeto de tais controladores adaptativos ideais representa um grande desafio para a engenharia de controle.

1.2 REVISÃO DE CONTROLE ADAPTATIVO

A ideia de desenvolver controladores adaptativos surgiu inicialmente na década de 50 com aplicações na indústria aeronáutica. A aplicação de pilotos automáticos e controladores de altitude convencionais em aviões que operavam em uma faixa grande de velocidade revelou-se inadequada pois apresentava bom desempenho somente para um ponto de operação. Para contornar este problema, procurou-se desenvolver um controlador cujos parâmetros variassem automaticamente com as mudanças das condições de operação. Porém, os controladores adaptativos implementados não atingiram o sucesso esperado, principalmente devido às limitações de potência computacional e da teoria de controle. Mas a partir da década de 60, com o surgimento das novas teorias de controle, introdução do conceito de variáveis de estado e desenvolvimento de algoritmos para a identificação de sistemas e estimação de parâmetros, as pesquisas na área de controle adaptativo tomaram grande vulto. Segundo [AST83], na década de 70, com o advento de microprocessadores e os fundamentos teóricos mais sólidos, as pesquisas sobre controle adaptativo tomaram um novo e vigoroso impulso.

O controle adaptativo surge como alternativa quando é necessário um sistema de controle de desempenho elevado no qual os parâmetros do modelo são pouco conhecidos ou variam durante a operação normal. Enquanto um sistema comum por realimentação pretende eliminar o efeito das perturbações do estado do sistema, o controle adaptativo objetiva eliminar os efeitos das perturbações estruturais, causadas essencialmente por variações dos parâmetros dinâmicos do sistema controlado, sobre o desempenho do sistema de controle. Esta característica não é suficiente para classificar um sistema como adaptativo. Não existe ainda, uma definição consensual de quando o sistema é adaptativo ou não. Para Aström [AST89], controle adaptativo é um tipo especial de controle não linear por

realimentação onde os estados do processo podem ser classificados segundo suas

velocidades de evolução. Os estados que evoluem mais lentamente são denominados de

parâmetros do sistema.

A estrutura do controle adaptativo é de malha fechada, com ajuste automático dos

parâmetros do controlador, em função da dinâmica do processo e da perturbação ocorrida.

O ponto principal desta teoria consiste na definição de um critério adequado para o ajuste

dos parâmetros, já que disto dependerá o desempenho do controlador.

Pode-se destacar três abordagens principais de atuação dos controladores adaptativos

[AST89], que determinam a maneira pela qual os parâmetros do controlador são ajustados.

a) Controladores com Ganhos Programados ("Gain Scheduling")

Um dos mais antigos e intuitivos enfoques do Controle Adaptativo é chamado Ganhos

Programados ou "Gain Scheduling", introduzido nos anos 1950 e 1960 no contexto de

controle de sistemas de voo. Neste controlador, cujo esquema é mostrado na figura (1.1), a

variação dos parâmetros é calculada em função da variação do ponto de operação do

sistema através de funções previamente estabelecidas. Para tanto, utilizam-se variáveis

auxiliares que se correlacionam bem com as mudanças na dinâmica do processo.

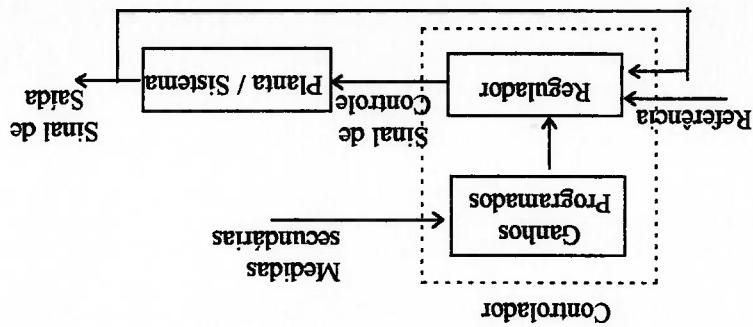


Fig. 1.1 - Diagrama de blocos do Controlador de Ganho Programado

Neste sistema, a realimentação, embora seja utilizada para redefinir os parâmetros do controlador, não é aplicada para corrigir eventuais erros no modelo, assim, este tipo de controlador deve ser encarado como um controle em malha fechada onde os ganhos são ajustados por um compensador externo. Uma das vantagens do controle por ganhos programados é que os parâmetros podem ser ajustados rapidamente, ou seja, tão rápido quanto forem as medidas secundárias. Isto é conveniente especialmente se a dinâmica da planta depender de uma maneira bem conhecida de poucas variáveis medidas. No caso de controle de sistemas de voo, a dinâmica da planta depende de uma maneira relativamente simples da medida da pressão atmosférica.

Apesar da vantagem do rápido ajuste dos parâmetros, o controle por ganhos programados tem a desvantagem de ser um controle adaptativo em malha-aberta, sem nenhum "real aprendizado".

b) Controladores por Modelos de Referência

Uma outra maneira de ajuste dos parâmetros baseia-se em um modelo de referência, no qual as saídas ou o vetor de estados do sistema são obrigados a seguir as saídas ou vetor de estados de um modelo ideal a fim de minimizar um certo Índice de Desempenho. Este modelo ideal, ou referência, é definido em função das especificações de controle exigidas para o sistema real. O sistema consiste de duas malhas conforme ilustrado na figura (1.2). A malha interna representa a malha convencional formada pelo controlador e o processo. A malha externa ajusta os parâmetros do controlador de modo a fazer com que o erro entre a saída do modelo e a saída do processo seja pequeno. O problema central deste esquema consiste em obter um mecanismo de ajuste que leve o erro de saída $e_0 = y^p - y^m$ para zero. Uma das aproximações para tal, chamada de Método do Gradiente, consiste em minimizar

$e_2^0(\Theta)$ é um vetor contendo os parâmetros do controlador a serem ajustados,

através do ajuste de Θ na direção mais decrescente, isto é :

$$\frac{d\Theta}{dt} = -g \frac{\partial}{\partial} (e_2^0(\Theta)) \tag{1.1}$$

$$= -2 \cdot g \cdot e_0(\Theta) \cdot \frac{\partial}{\partial} (y^p(\Theta)) \tag{1.2}$$

onde g é uma constante positiva chamada de ganho de adaptação.

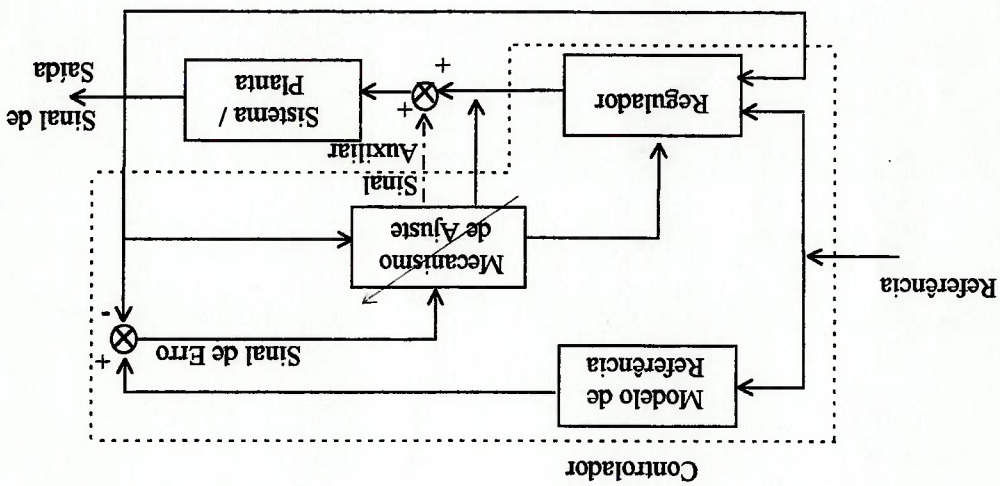


Fig. 1.2 - Diagrama de blocos do Controlador por Modelo de Referência

a) Controladores Auto-Ajustável

Os esquemas discutidos anteriormente são chamados de métodos diretos, pois, as leis de ajuste mostram diretamente como os parâmetros do regulador devem ser atualizados. Um esquema diferente é obtido se os parâmetros do processo forem atualizados "on-line"

Nesta técnica, os parâmetros da planta são determinados utilizando-se um algoritmo de identificação recursivo. Assim, os parâmetros do controlador são obtidos através da estimativa dos parâmetros da planta, como se estes fossem os parâmetros "conhecidos".

Isto é chamado de "Princípio da Equivalência à Certeza".

Esta terceira abordagem é também formada por duas malhas. A malha interna é a mesma do esquema anterior e a malha externa é formada por um estimador dos parâmetros do processo e pelo sintonizador que calcula os parâmetros do controlador.

Deve-se ressaltar que este esquema, ilustrado na figura 1.3, é a forma “explícita” do controlador auto ajustável. A forma “implícita” reparametriza o modelo do sistema, controlador e processo, em função dos parâmetros do controlador. Desta maneira os novos parâmetros estimados são diretamente utilizados no controlador, eliminando-se, assim, a etapa de cálculo.

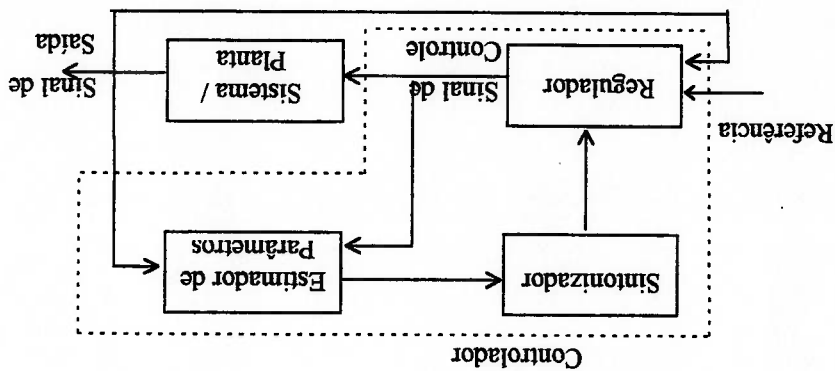


Fig. 1.3 - Diagrama de blocos do Controlador Auto Ajustável

Embora tenha sido feita uma diferenciação entre o controle por modelo de referência e o auto-ajustável, estes estão intimamente relacionados [LAN79] e [AST80]. Enquanto que o regulador auto-ajustável primeiro identifica recursivamente os parâmetros da planta, utilizando estas estimativas para atualizar os parâmetros do controlador através de uma lei fixa, o controle por modelo de referência ajusta os parâmetros do controlador diretamente, ou seja, sem explícita identificação dos parâmetros da planta. Assim, o controlador adaptativo por modelo de referência pode ser visto como um caso especial do controlador

auto-ajustável, com uma transformação identidade entre os parâmetros ajustados e os parâmetros do controlador. O controlador adaptativo auto-ajustável é muito flexível com respeito à técnica do projeto do regulador (alocação de polos, PID, linear quadrático) e da escolha do identificador (ordem $2n$, mínimos quadrados, máxima probabilidade) [SAS89].

1.3 BREVE REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A modelagem e controle de braços leves e flexíveis tem sido apresentado por vários autores [BAR88] - [YUH89]. Várias aproximações das equações de movimento dos sistemas flexíveis têm sido propostas principalmente para sistemas de um único segmento flexível [YUH88]. Em seu artigo, Barbieri e Özgüner [BAR88] propõem a modelagem de um braço flexível para sistemas com restrições (*constrained*) e sem restrições (*unconstrained*).

Cannon e Schmitz [CAN84] relataram os experimentos iniciais no controle da ponta de um braço com um único segmento (*end-point*) flexível. Usando um controlador LQG (Linear Quadratic Gaussian) eles implementaram com sucesso um controle *noncollocated* para o robô. Porém este controlador é sensível a variações em seus parâmetros, e portanto, o desempenho do robô irá diminuir para mudanças de cargas na ponta do braço.

Hasting e Book [HA86] investigaram um controle ótimo por realimentação de estados através da medição da posição angular e deformação do cubo ligado ao braço. Eles sugeriram que a dinâmica do braço é dominada por seus dois primeiros modos de vibrar. Contudo, isto só é verdade para um pequena faixa de velocidades do manipulador. No seu trabalho o efeito de uma variação de carga é discutido, porém não é sugerida nenhuma

solução para o problema. Vários esquemas de controle adaptativo foram propostos para lidar com o problema da mudança de carga na ponta do braço. [YUH86] - [MEN88]. Meldrum e Balas [BAL78], usando um Controle Adaptativo por Referência-Modelo (MRAC), concluíram que para satisfazer a condição de *positive realness*, uma roda de reação teria que ser colocada com os sensores da ponta do braço.

Yuan, Book e Siciliano [YUA89] aplicaram o método de Model Reference Control (MRAC) para o problema de *end-point tracking*. Feliu, Kattan, e Brown [FEL89] usaram a combinação de *feedforward* e *feedback* onde obtiveram um bom resultado no posicionamento do efetuador para um único segmento.

Chia-Hasian Meng [MEN88] modelou o braço flexível através dos Métodos dos Elementos Finitos (FEM) e utilizando um identificador adaptativo junto a um controlador LQG, mostrou ser possível a adaptação às variações de carga do robô. O controle adaptativo para sistemas contínuos, invariantes no tempo (LTI), tem se desenvolvido com sucesso nas últimas décadas [LOZ92] - [LAN79]. Apesar disso, há ainda alguns problemas que não foram claramente resolvidos no caso de sistemas lineares. Em particular, tem-se o problema do conhecimento *a priori* dos ganhos em alta frequência [MOR83]. Lozano e Brogliato [LOZ92] apresentaram um algoritmo de controle adaptativo para sistemas não lineares. Em seu artigo, J Yuh [YUH87], considerando o efeito da flexibilidade do braço como uma perturbação interna do torque no movimento de corpo rígido, mostrou a viabilidade de aplicação de controle adaptativo tipo referência-modelo (MRAC), discreto no tempo, para braços robóticos flexíveis.

Este trabalho tem como objetivos a modelagem e controle de posicionamento de braços mecânicos flexíveis com trajetória específica e carga desconhecida.

Para tal propõe-se a análise dinâmica de uma barra de alumínio flexível ("slewing arm"), com aproximadamente 0,7 m de comprimento, livre em uma das extremidades e articulada na outra através de um eixo - acionado por um motor de corrente contínua e o controlada através de algoritmos adaptativos que podem ajustar os seus parâmetros a fim de suprimir as vibrações remanescentes, e reconhecer variações de carga.

Em [JUN93] mostra-se que quando se utiliza um controlador projetado para um modelo desacoplado, o sistema em malha fechada será estável para a implementação deste controlador em um modelo desacoplado. Porém se este mesmo controlador for implementado para um modelo com acoplamento, mostra-se que este controlador instabiliza outros modos não modelados pelo controlador.

Assim, o modelo matemático da viga flexível baseou-se no uso de um sistema com um referencial flutuante [CHA93]-[CAN77], no qual a quantidade de movimento angular se anula, desacoplando as equações linearizadas da dinâmica do braço.

A utilização de um referencial flutuante, que se move junto ao corpo flexível, oferece a vantagem de que a projeção do torque aplicado ao braço sobre cada modo de vibração da estrutura, torna-se explícita, facilitando, sobremaneira, o posicionamento de sensores e atuadores.

Primeiramente introduz-se um controlador fixo projetado por Alocação de Pólos. Em seguida implementa-se um controlador Adaptativo Auto Ajustável [MOR95], com a

identificação de um parâmetro do sistema. Finalmente, compara-se estes dois controladores para variações de massa na ponta da viga.

1.5 TÓPICOS DE CADA CAPÍTULO

Segue uma breve discussão de cada capítulo para que o leitor possa discriminar os assuntos de seu interesse.

CAPÍTULO 2.

Neste capítulo, abordam-se os princípios básicos que regem a mecânica analítica ou Lagrangeana. É descrito o Princípio dos Trabalhos Virtuais, cuja formulação é a base para o desenvolvimento do Princípio Estendido de Hamilton. e faz-se uma breve conceituação de Energia Cinética e Potencial para sistemas contínuos. Além disso, neste capítulo desenvolve-se o modelo do braço flexível, derivam-se as equações da dinâmica do modelo matemático do braço flexível através do Princípio Estendido de Hamilton com a utilização de uma referencial flutuante. Compara-se este modelo com os métodos tradicionais, nos quais o referencial se movimenta solidário a uma região do braço flexível.

CAPÍTULO 3.

No Capítulo 3 apresenta-se o desenvolvimento de dois algoritmos de controle para o braço flexível: (1) Controle por Alocação de Pólos e (2) Controle Adaptativo. Para o Controle por Alocação de Pólos é utilizado um Observador de Estados para estimar as variáveis de estado não mensuráveis. No caso do Controlador Adaptativo, utiliza-se um controlador Auto-Ajustável, onde um parâmetro do sistema é identificado, e através do Método do Gradiente, faz-se o seu ajuste e a atualização das matrizes do controlador.

CAPÍTULO 4.

O capítulo 4 fornece uma simulação numérica da dinâmica do braço flexível, bem como a introdução dos dois controladores na planta. Apresentam-se gráficos referentes à dinâmica do braço flexível sem o controlador e com o sistema de controle.

CAPÍTULO 5

Neste capítulo discute-se os resultados apresentados nos capítulos anteriores, bem como a utilização de modelagem e do controle adaptativo de sistema manipuladores flexíveis para trabalhos futuros.

APÊNDICE A

No Apêndice A apresenta-se a prova de um Teorema da Álgebra Matricial, utilizada no desenvolvimento das equações..

APÊNDICE B

No Apêndice B, apresenta-se o desenvolvimento matemático do encurtamento da viga [IME90], levada em consideração na modelagem do braço flexível.

APÊNDICE C

Neste apêndice apresenta-se o Lema de Inversão de Matriz, utilizado no cálculo do identificador pelo método dos mínimos quadrados.

APÊNDICE D

Neste apêndice apresenta-se a listagem do programa em Matlab, desenvolvido para a simulação da dinâmica e controle do sistema.

Capítulo 2

MODELAGEM MATEMÁTICA DA DINÂMICA DO BRAÇO FLEXÍVEL

2.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS

Neste capítulo derivam-se as equações da dinâmica do braço flexível através do

Princípio Estendido de Hamilton e apresenta-se a introdução de um referencial flutuante (*Tisserand Frame*), assim como a comparação destas equações com os modelos chamados

tradicionais [OZG97].

Muitos estudos até agora, particularmente no que se refere ao projeto de controle,

tem usado modelos dinâmicos baseados na teoria da viga de Euler-Bernoulli sob a

suposição de que as dimensões da secção transversal da viga são suficientemente pequenas

comparadas com o comprimento [BOO90]. Entretanto, se as dimensões da secção

transversal da viga não puderem ser desprezadas, deve-se considerar os efeitos da

inércia de rotação e flexão devidas à força cortante no movimento da viga, ou seja, usa-se a

teoria da Viga de Timoshenko [BAY89]. Para o estudo presente neste trabalho, considerou-

se o modelo da viga de Euler-Bernoulli.

Primeiramente, discute-se brevemente a teoria em que se baseia o Princípio de

Hamilton, em seguida derivam-se as equações da energia cinética e potencial para uma viga

com carregamento qualquer, e finalmente obtêm-se as equações da dinâmica do braço do manipulador para um braço com um único segmento flexível.

2.2 PRINCÍPIOS DE MECÂNICA ANALÍTICA

2.2.1 COORDENADAS GENERALIZADAS

O número mínimo de coordenadas necessárias para descrever um sistema constitui as chamadas "coordenadas generalizadas". As coordenadas generalizadas são todas independentes e seu número corresponde ao número de graus de liberdade do sistema. São comumente denotados por $q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ e não necessariamente representam as coordenadas cartesianas de um ponto.

2.2.2 PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

O Princípio dos Trabalhos Virtuais mostra essencialmente, o balanço de forças do equilíbrio estático de um sistema. Para a sua conceituação considera-se um sistema de N partículas e denota-se por R_i ($i=1, 2, \dots, N$) as resultantes de todas as forças que agem na partícula i .

Para um sistema em equilíbrio $R_i = 0$ e o mesmo pode ser dito em relação ao produto escalar $R_i \cdot \delta r_i = 0$, onde este produto representa o Trabalho virtual realizado por R_i através do deslocamento virtual δr_i .

Os deslocamentos virtuais não são necessariamente verdadeiros deslocamentos, mas são mudanças infinitesimais nas coordenadas do sistema. Eles são consistentes com as restrições no sistema, porém são arbitrários. Além disso, os deslocamentos virtuais são o

resultado da suposição do deslocamento do sistema em uma superfície bem comportada e que não consome tempo. Assim,

$$\delta \underline{W} = \sum_{i=1}^N R_i \cdot \delta r_i = 0 \quad (2.1)$$

Se há restrições no sistema, a força resultante será a soma de duas parcelas : $R_i = F_i + f_i$,

($i=1,2,\dots,N$), onde F_i é a resultante da forças externas aplicadas no sistema e f_i é a resultante das forças internas (restrições) no sistema. Portanto introduzindo-se esta equação em (2.1),

resulta :

$$\delta \underline{W} = \sum_{i=1}^N F_i \cdot \delta r_i + \sum_{i=1}^N f_i \cdot \delta r_i = 0 \quad (2.2)$$

Porém, em geral as forças internas não realizam trabalho, pois os seus deslocamentos não

possuem componentes na direção das forças. Como exemplo, considere um partícula

movimentando-se sobre uma superfície; as forças internas são perpendiculares aos

deslocamentos possíveis. Assim, a segunda parcela da equação (2.2) é igual a zero, e

portanto (2.2) se reduz a

$$\delta \underline{W} = \sum_{i=1}^N F_i \cdot \delta r_i = 0 \quad (2.3)$$

ou seja, o trabalho realizado pelas forças aplicadas ao sistema através dos deslocamentos

virtuais é zero. Esta é a definição do Princípio do Trabalhos Virtuais.

2.2.3 PRINCIPIO DE D'ALEMBERT

O Princípio dos Trabalhos Virtuais diz respeito ao equilíbrio estático do sistema. Ele

podem ser entendidos para sistemas dinâmicos através do Princípio de D'Alembert. Da

segunda Lei de Newton, tem-se :

Multiplicando-se pelos deslocamentos virtuais e somando-se sobre todo o sistema de

partículas e sabendo que $\sum f_i \cdot \delta r_i = 0$, pode-se escrever:

$$\sum (F_i - m_i \cdot \ddot{r}_i) \delta r_i = 0 \quad (2.5)$$

que é chamado de Princípio de D'Alembert. Este princípio permite transformar o problema

dinâmico em um problema de equilíbrio. Qualquer critério de equilíbrio pode ser

empregado, inclusive o Princípio dos Trabalhos Virtuais.

2.2.4 PRINCÍPIO DE HAMILTON

Sabendo-se que $\delta \underline{W} = \sum_{i=1}^N F_i \cdot \delta r_i$, assumindo-se que os operadores δ e $\frac{d}{dt}$ são

intercambiáveis e considerando

$$\frac{d}{dt} (r_i \cdot \delta r_i) = r_i \cdot \delta r_i + r_i \cdot \frac{d}{dt} (\delta r_i) = r_i \cdot \delta r_i + r_i \cdot \delta (\dot{r}_i) = r_i \cdot \delta r_i + \delta \left(\frac{1}{2} \dot{r}_i \cdot \dot{r}_i \right) \quad (2.6)$$

pode-se escrever

$$r_i \cdot \delta r_i = \frac{d}{dt} (r_i \cdot \delta r_i) - \delta \left(\frac{1}{2} \dot{r}_i \cdot \dot{r}_i \right) \quad (2.7)$$

Multiplicando-se a equação (2.7) por m_i e somando-a por todo o sistema, obtém-se :

$$\sum_{i=1}^N m_i \cdot r_i \cdot \delta r_i = \sum_{i=1}^N m_i \cdot \frac{d}{dt} (r_i \cdot \delta r_i) - \delta \cdot \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{1}{2} \dot{r}_i \cdot \dot{r}_i \right) \quad (2.8)$$

$$= \sum_{i=1}^N m_i \cdot \frac{d}{dt} (r_i \cdot \delta r_i) - \delta T$$

onde T é a energia cinética do sistema.

Introduzindo a equação (2.4) e (2.8) em (2.6), obtém-se :

A solução $r_i = r_i(t)$ ($i=1,2,\dots,N$) na configuração do espaço é chamada de "caminho verdadeiro". Introduzindo o conceito de deslocamento virtual, pode-se imaginar o sistema

movendo-se sobre um outro caminho $r_i(t) + \delta r_i(t)$ chamado de "caminho variacional".

Escolhe-se este caminho como sendo igual ao caminho verdadeiro em dois instantes $t=t_1$ e

$t=t_2$, implicando em: $\delta r_i(t_1) = \delta r_i(t_2) = 0$. (Figura 2.1).

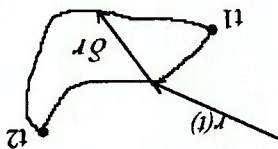


Fig. 2.1 - Princípio de Hamilton

Multiplicando a equação (2.9) por dt e integrando-a entre os instantes t_1 e t_2 , tem-se

$$\int_{t_2}^{t_1} (\delta T + \delta W) dt = \int_{t_2}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^N m_i \frac{d}{dt} (r_i \delta r_i) \right) dt = \sum_{i=1}^N m_i r_i (\delta r_i) \Big|_{t_2}^{t_1} \quad (2.10)$$

que devido à natureza do caminho escolhido se reduz a:

$$\int_{t_2}^{t_1} (\delta T + \delta W) dt = 0 \quad ; \quad \delta r_i(t_1) = \delta r_i(t_2) = 0 \quad (2.11)$$

que é conhecido como Princípio Estendido de Hamilton.

Pode-se escrever este princípio de uma forma mais geral, sendo $\delta W = \delta W_c + \delta W_{nc}$,

onde δW_c é o trabalho das forças conservativas e δW_{nc} é o trabalho das forças não

conservativas. Sabendo-se que $\delta W_c = -\delta V$, onde V é a energia potencial do sistema e

introduzindo-se o Lagrangeano $L = T - V$, o princípio Estendido de Hamilton pode ser

reescrito na forma :

$$\int_{t_2}^{t_1} (\delta L + \delta W_{nc}) dt = 0 \quad ; \quad \delta r_i(t_1) = \delta r_i(t_2) = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.12)$$

2.3 ENERGIA CINÉTICA E POTENCIAL

Para o desenvolvimento das expressões da energia cinética e potencial considera-se uma barra em vibração transversal, como mostrado na Figura (2.2a). Em qualquer ponto x a barra possui massa por unidade de comprimento de comprimento $p(x)$, área da seção transversal $A(x)$, e momento de inércia da área de $I(x)$ em relação à linha neutra (Figura 2.2b).

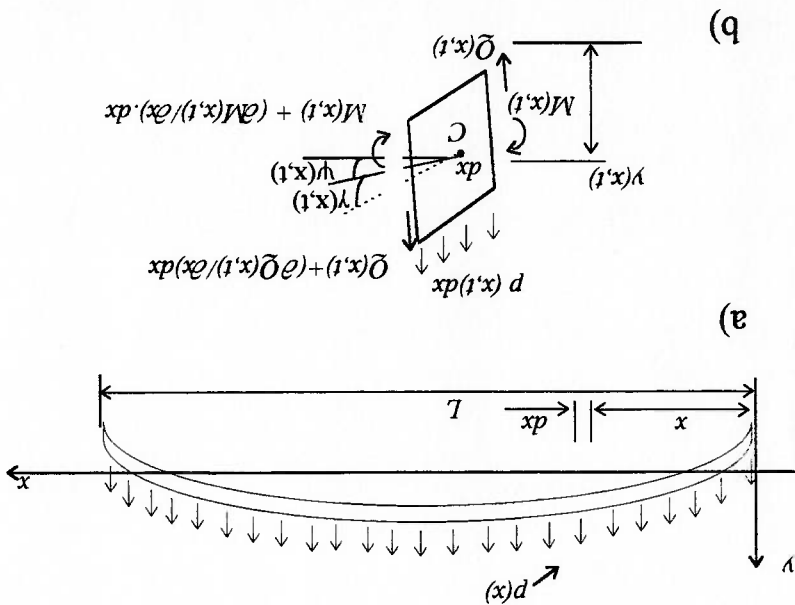


Fig. 2.2 - Barra sujeita a esforços e Diagrama de corpo livre

A deflexão total $y(x,t)$ da barra em um certo ponto x consiste de duas partes, uma causada pela força de flexão e outra pela força cortante. O ângulo da reta tangente à curva de deflexão no ponto x pode ser escrito como

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = \psi(x,t) + \gamma(x,t), \quad (2.13)$$

onde $\psi(x, t)$ é o ângulo de rotação devido à flexão e $\gamma(x, t)$ é o ângulo de distorção devido

à força cortante. Como usual, as deflexões lineares e angulares serão assumidas como pequenas.

A relação entre o momento fletor e a deformação é dada por

$$M(x, t) = E I(x) \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \quad \text{[TTM50]} \quad (2.14)$$

e a relação entre a força cortante e distorção é dada por

$$Q(x, t) = k' G A(x) \gamma(x, t) \quad \text{[TTM50]} \quad (2.15)$$

onde G é o módulo de Elasticidade Transversal e k' é um fator numérico que depende da

geometria da secção transversal.

A energia cinética, devida tanto à translação quanto à rotação do elemento de

massa, pode ser escrita como

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\rho \gamma(x, t) \frac{\partial t}{\partial t} \right]^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \left[\rho \psi(x, t) \frac{\partial t}{\partial t} \right]^2 dx \quad (2.16)$$

onde $J(x)$ é o momento de inércia da massa por unidade de comprimento $p(x)$ relativo à

linha neutra que passa pelo centro C como mostrado na Figura (2.2b). Porém podemos

relacionar $J(x)$ com $I(x)$ por

$$J(x) = \frac{A(x)}{\rho(x)} I(x) = k^2(x) p(x) \quad (2.17)$$

onde $k(x)$ é o raio de giração em relação à linha neutra.

A expressão da energia potencial pode ser escrita como

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_0^L M(x, t) \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \int_0^L Q(x, t) \gamma(x, t) dx \quad (2.18a)$$

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_0^L E I(x) \left[\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \right]^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L k' G A(x) \gamma^2(x, t) dx \quad (2.18b)$$

2.4 PRINCÍPIO DO REFERENCIAL FLUTUANTE

Para um corpo que sofre pequenas deformações elásticas, é difícil especificar eixos

para a medida de suas deformações. Se um sistema inercial fixo é escolhido, os

deslocamentos relativos aos seus eixos tornar-se-ão grandes se o corpo sofrer rotações

devido a momentos aplicados externamente. Assim, a análise dinâmica do sistema usando

estes deslocamentos poderia exigir mais do que uma análise de primeira ordem. Para

simplificar esta análise, sugere-se o uso de uma referência que de alguma maneira se mova

com o "corpo rígido". Se a referência se move ou "flutua" com o corpo, de uma maneira

apropriada, então as medidas desses deslocamentos relativos à essa referência serão

menores. Portanto a análise dinâmica do sistema poderá ser feita utilizando-se somente os

termos de primeira ordem da vibração do corpo. Dentre os vários tipos de referência

flutuante existentes, neste trabalho será usado o *Tisserand Frame* [CAN77], devido à

simplificações que conduz nas expressões do momento angular e energia cinética da viga.

Devido ao fato de um corpo deformável possuir deslocamento relativo entre suas

partes, a inércia do sistema não permanece constante. Na formulação das equações

dinâmicas do sistema, a quantidade de movimento angular e a energia cinética são funções

desses deslocamentos. Pode-se escrever a Quantidade de Movimento Angular para um

corpo deformável, em relação ao seu centro de massa, como sendo :

$$H = \int_D \varepsilon \times \varepsilon \, dm \quad (2.19)$$

onde: ε = vetor do centro de massa à um elemento de massa genérico;

$\dot{\varepsilon}$ = derivada de ε no tempo, relativa ao espaço inercial;

dm = elemento de massa genérico;

$H =$ Quantidade de movimento angular relativo ao centro de massa.

Se uma referência flutuante f é introduzida com a sua origem no centro de massa,

então :

$$\varepsilon = \varepsilon^f + \omega^f \times \varepsilon \quad (2.20)$$

onde ε^f é a derivada de ε relativo à referência flutuante f , e ω^f é a velocidade angular de

f relativo ao espaço inercial. Assim utilizando estas relações podemos calcular H .

$$H = I \cdot \omega^f + \int_D \varepsilon \times \dot{\varepsilon} \, dm \quad (2.21a)$$

$$\text{onde} \quad \int_D \varepsilon \times (\omega^f \times \varepsilon) \, dm = I \cdot \omega^f \quad (2.21b)$$

onde I é a Matriz de Inércia em relação ao centro de massa. O segundo termo da

equação (2.21a) é a quantidade de movimento angular da referência flutuante, e é

conhecida como quantidade de movimento angular interno. O primeiro termo da

equação (2.21a) é estruturalmente idêntico à quantidade de movimento angular do

corpo rígido; porém, como o corpo é deformável, a Matriz de Inércia não permanece

constante.

A energia cinética de um corpo com referências inerciais fixas no centro de massa

pode ser escrita como:

$$T = \frac{1}{2} \int \dot{\varepsilon} \cdot \dot{\varepsilon} \, dm \quad (2.22)$$

Usando a equação (2.20) pode-se escrever a energia cinética como sendo :

$$T = \frac{1}{2} \omega^f \cdot I \cdot \omega^f + \omega^f \cdot \int_D \varepsilon \times \dot{\varepsilon} \, dm + \frac{1}{2} \int_D \dot{\varepsilon} \cdot \dot{\varepsilon} \, dm \quad (2.23)$$

Pode-se reconhecer o primeiro termo desta equação como tendo a mesma estrutura da

energia cinética de um corpo rígido. Novamente, esta quantidade difere da energia de corpo

rígido pelo fato de que I não é constante.

Para o *Tisserand Frame*, a expressão para a quantidade de movimento angular e energia cinética serão estruturalmente simplificadas através da mudança da referência para um ponto onde a quantidade de movimento angular interna sempre é igual a zero. Para levar a quantidade de movimento angular interna para zero, uma relação de restrição é introduzida

$$\int_D \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\varepsilon} \, dm = 0 \quad (2.24)$$

Assim, da equação (2.21), o momento angular fica

$$H = I \cdot \boldsymbol{\omega}^F \quad (2.25)$$

Esta equação é estruturalmente idêntica à de corpo rígido, porém I não é constante.

O *Tisserand Frame* fornece a mínima energia cinética relativa à referência flutuante,

assim:

$$\delta \left(\frac{1}{2} \int_D \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \, dm \right) = \int_D \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} \, dm = 0 \quad (2.26)$$

2.5 MODELO DO BRAÇO FLEXÍVEL

Para um sistema deformável que pode ser submetido à grandes deslocamentos de

corpo rígido e pequenas deformações elásticas, o vetor da posição instantânea de qualquer

ponto do sistema, em relação a um referencial inercial, pode ser expresso como :

$$\bar{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{R}}_0 + \mathbf{r} + \mathbf{d} \quad (2.27)$$

onde o vetor $\bar{\mathbf{R}}_0$ localiza a origem do referencial flutuante, o vetor \mathbf{r} denota a posição de

arrastamento em um referencial flutuante e \mathbf{d} denota a deformação elástica em relação a

este referencial flutuante. (Figura 2.3).

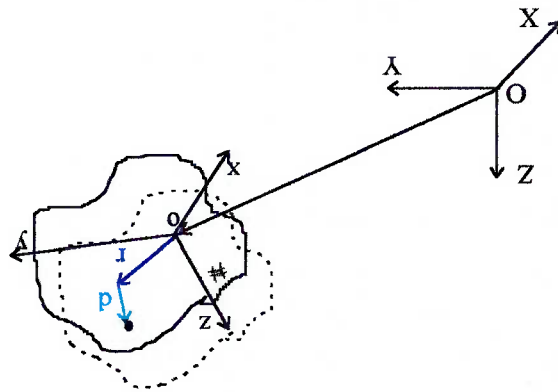


Fig. 2.3 - Sistemas de coordenadas de um corpo indeformável (linha sólida) e de um corpo deformado (linha pontilhada).

O braço mostrado na figura 2.4 é modelado como uma viga contínua de comprimento L , massa por unidade de comprimento ρ , massa na ponta m^p , e possui um cubo rígido. Este braço é controlado por um torque $T(t)$ aplicado no cubo à ele ligado. Para o sistema proposto para o modelo do braço flexível $R_o = 0$, pois estaremos tratando de movimento plano.

O modelo matemático da dinâmica da barra foi desenvolvido através do princípio Estendido de Hamilton e que pode ser expresso da seguinte forma :

$$\int_{t_2}^{t_1} (\delta T - \delta V + \delta W_{nc}) dt \quad (2.28)$$

onde δ indica a primeira variação, t_1 e t_2 são os limites de tempo da integração, T e V são respectivamente a Energia Cinética e Potencial da barra e W_{nc} é o trabalho das forças não conservativas do sistema.

A seguir calcula-se as energias cinética e potencial que serão utilizadas no princípio

Estendido de Hamilton para a obtenção das equações que descrevem a dinâmica do braço

flexível.

2.5.1 CÁLULO DA ENERGIA CINÉTICA

Sabendo-se que para o sistema da figura (2.4), a energia cinética pode ser calculada

como

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L R^2 \cdot dm$$

onde M é a massa total do sistema.

Pode-se relacionar o sistema fixo na Fig. 2.4 com o sistema de referência flutuante

através da propriedade de que a derivada de um vetor em relação a um sistema fixo é igual

a [BEE81]:

$$\dot{Q}_{XYZ} = \dot{Q}_{xyz} + \Omega \wedge Q$$

(2.30)

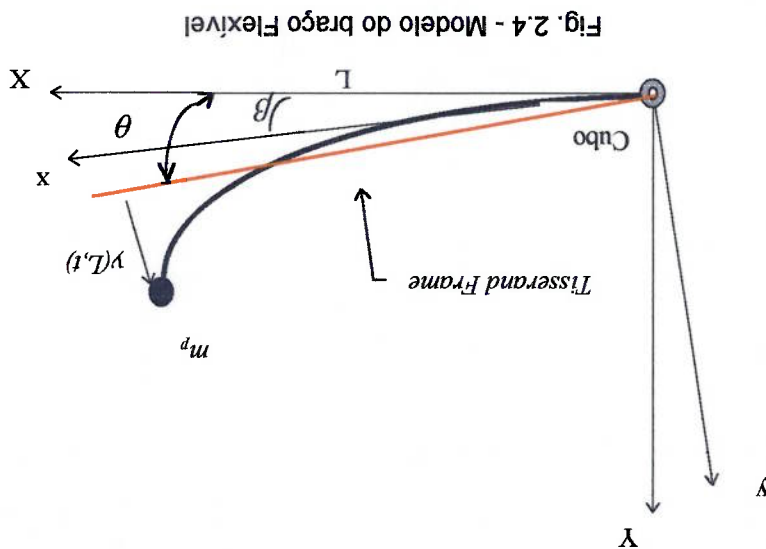


Fig. 2.4 - Modelo do braço flexível

onde, Ω é a velocidade angular do sistema girante, pode-se, então, calcular o vetor $\dot{\mathbf{R}}$.

$$\dot{\mathbf{R}} = \bar{\omega} \wedge (\mathbf{r} + \bar{\mathbf{d}}) + \left(\dot{\mathbf{d}}_{rel} \right) \quad (2.31)$$

onde:

$$\bar{\mathbf{d}}_{rel} = \mathbf{r} + \bar{\mathbf{d}} \Rightarrow \dot{\mathbf{d}}_{rel} = \dot{\mathbf{r}} + \dot{\bar{\mathbf{d}}} = \dot{\mathbf{d}}$$

Assim,

$$\dot{\mathbf{R}} \dot{\mathbf{R}} = \left(\bar{\omega} \wedge (\mathbf{r} + \bar{\mathbf{d}}) + \left(\dot{\mathbf{d}} \right) \right)^2 = \left| \bar{\omega} \wedge (\mathbf{r} + \bar{\mathbf{d}}) \right|^2 + \left| \left(\dot{\mathbf{d}} \right) \right|^2 + 2 \left(\bar{\omega} \wedge (\mathbf{r} + \bar{\mathbf{d}}) \right) \cdot \left(\dot{\mathbf{d}} \right) \quad (2.32)$$

Nota : $\left| \bar{\omega} \wedge \mathbf{v} \right|^2 = \left| \bar{\omega} \right|^2 \cdot \left| \mathbf{v} \right|^2 - (\bar{\omega} \cdot \mathbf{v})^2$ (APÊNDICE A)

Portanto :

$$\left| \dot{\mathbf{R}} \right|^2 = \bar{\omega}^2 \cdot (\mathbf{r} + \bar{\mathbf{d}})^2 - (\bar{\omega} \cdot (\mathbf{r} + \bar{\mathbf{d}}))^2 + \dot{\bar{\mathbf{d}}}^2 + 2 \cdot \bar{\omega} \cdot \mathbf{r} \wedge \bar{\mathbf{d}} + 2 \cdot \bar{\omega} \cdot \bar{\mathbf{d}} \wedge \dot{\bar{\mathbf{d}}} + 2 \cdot \bar{\omega} \cdot \mathbf{r} \wedge \dot{\bar{\mathbf{d}}} + 2 \cdot \bar{\omega} \cdot \bar{\mathbf{d}} \wedge \dot{\bar{\mathbf{d}}} + 2 \cdot \bar{\omega} \cdot \mathbf{r} \wedge \dot{\bar{\mathbf{d}}} + 2 \cdot \bar{\omega} \cdot \bar{\mathbf{d}} \wedge \dot{\bar{\mathbf{d}}}$$

$$\therefore T = \frac{1}{2} \omega^2 \int (\mathbf{r} + \bar{\mathbf{d}})^2 dm - \frac{1}{2} \int (\bar{\omega} \cdot (\mathbf{r} + \bar{\mathbf{d}}))^2 dm + \frac{1}{2} \int \dot{\bar{\mathbf{d}}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{d}}} \cdot dm + \bar{\omega} \cdot \int \mathbf{r} \wedge \dot{\bar{\mathbf{d}}} \cdot dm + \bar{\omega} \cdot \int \bar{\mathbf{d}} \wedge \dot{\bar{\mathbf{d}}} \cdot dm \quad (2.33)$$

Acréscendo-se uma massa concentrada m_p em um ponto qualquer do corpo, pode-

se escrever :

$$\therefore T = \frac{1}{2} \omega^2 \int (\mathbf{r} + \bar{\mathbf{d}})^2 dm - \frac{1}{2} \int (\bar{\omega} \cdot (\mathbf{r} + \bar{\mathbf{d}}))^2 dm + \frac{1}{2} \int \dot{\bar{\mathbf{d}}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{d}}} \cdot dm + \bar{\omega} \cdot \int \mathbf{r} \wedge \dot{\bar{\mathbf{d}}} \cdot dm + \bar{\omega} \cdot \int \bar{\mathbf{d}} \wedge \dot{\bar{\mathbf{d}}} \cdot dm + \frac{1}{2} \cdot m_p \cdot \dot{\mathbf{R}}_p^2 \quad (2.34)$$

Devido à introdução do *Tisserand Frame*, os eixos de referência são submetidos à

seguinte restrição matemática [CHA93]:

encurtamento da barra $\vec{d} = y\vec{j} - \frac{1}{2}\int_x^0 y'^2 dx\vec{i}$ [IMÉ90] (APÊNDICE B) a expressão da

Considerando-se $\vec{\omega} = \theta\vec{k}$, $\vec{r} = x\vec{i}$, $dm = \rho \cdot dx$ e levando-se em consideração o

$$\int_{\vec{r}} \vec{r} \times \vec{d} \cdot dm + L \times \vec{d} \cdot m_p = 0 \quad (2.35)$$

energia cinética, resolvendo cada termo separadamente, torna-se :

$$A) \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \int_{\vec{r}} (\vec{r} + \vec{d}) \cdot (\vec{r} + \vec{d}) dm = \frac{1}{2} \theta^2 \int_L^0 \rho \left[x^2 - \frac{1}{2} \int_x^0 y'^2 dx \right] + y^2 dx$$

$$= \frac{1}{2} \theta^2 \int_L^0 \rho \cdot \left[x^2 + y^2(x, t) - x \cdot \int_x^0 y'^2 dx + \left(\frac{1}{2} \int_x^0 y'^2 dx \right) \right] dx$$

$$\therefore \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \int_{\vec{r}} (\vec{r} + \vec{d}) \cdot (\vec{r} + \vec{d}) dm = \frac{1}{2} \theta^2 \int_L^0 \rho \cdot \left[x^2 + y^2(x, t) - x \cdot \int_x^0 y'^2 dx \right]$$

(2.36)

$$B) \left[-\frac{1}{2} \int (\vec{\omega} \cdot (\vec{r} + \vec{d}))^2 = 0 \right], \text{ pois, } \vec{\omega} \perp (\vec{r} + \vec{d})$$

(2.37)

$$C) \frac{1}{2} \int \vec{d} \cdot \vec{d} \cdot dm = \frac{1}{2} \int \rho \cdot \left[y^2 + \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \int_x^0 y'^2 dx \right) \right] dx$$

(2.38)

$$\therefore \frac{1}{2} \int \vec{d} \cdot \vec{d} \cdot dm = \frac{1}{2} \int \rho \cdot [y^2(x, t)] dx$$

$$D) \left[\vec{\omega} \cdot \int_{\vec{r}} \vec{r} \wedge \vec{d} \cdot dm = 0 \right], \text{ pois, } \int_{\vec{r}} \vec{r} \wedge \vec{d} \cdot dm = 0$$

(2.39)

$$E) \vec{\omega} \cdot \int \vec{d} \wedge \vec{d} \cdot dm = \theta k \int_L^0 \rho \left\{ y\vec{j} - \frac{1}{2} \int_x^0 y'^2 dx \vec{i} \right\} \wedge \left[y\vec{j} + \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \int_x^0 y'^2 dx \right) \vec{i} \right] dx$$

encurtamento da barra $\bar{d} = y_{\bar{t}} - \frac{1}{2} \int_x^0 y'^2 dx_{\bar{t}}$ [IME90] (APÊNDICE B) a expressão da

Considerando-se $\bar{\omega} = \theta_{\bar{t}}$, $\bar{r} = x_{\bar{t}}$, $dm = \rho \cdot dx$ e levando em consideração o

$$\int_M \bar{r} \times \bar{d} \cdot dm + L \times \bar{d}^T m_p = 0 \quad (2.35)$$

energia cinética, resolvendo cada termo separadamente, torna-se :

$$A) \frac{1}{2} \omega^2 \int_M (\bar{r} + \bar{d}) \cdot (\bar{r} + \bar{d}) dm = \frac{1}{2} \theta^2 \int_L^0 \rho \left[x - \int_x^0 y' \cdot d\zeta \right] \left(x^2 + y^2 + \int_x^0 y'^2 d\zeta \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \theta^2 \int_L^0 \rho \left[x^2 + y^2 + \int_x^0 y'^2 d\zeta + \int_x^0 \left(\frac{2}{x} \int_x^0 y'^2 d\zeta \right) dx \right]$$

$$\therefore \frac{1}{2} \omega^2 \int_M (\bar{r} + \bar{d}) \cdot (\bar{r} + \bar{d}) dm = \frac{1}{2} \theta^2 \int_L^0 \rho \cdot \left[x^2 + y^2 + \int_x^0 y'^2 d\zeta \right]$$

(2.36)

$$B) - \frac{1}{2} \int_M (\bar{\omega} \cdot (\bar{r} + \bar{d}))^2 = 0, \text{ pois, } \bar{\omega} \perp (\bar{r} + \bar{d})$$

(2.37)

$$C) \frac{1}{2} \int_M \bar{d} \cdot \bar{d} \cdot dm = \frac{1}{2} \int_L^0 \rho \cdot \left[y^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{2}{x} \int_x^0 y'^2 d\zeta \right) \right] dx$$

(2.38)

$$\therefore \frac{1}{2} \int_M \bar{d} \cdot \bar{d} \cdot dm = \frac{1}{2} \int_L^0 \rho \cdot [y^2(x,t)] \cdot dx$$

$$D) \bar{\omega} \cdot \int_M \bar{r} \wedge \bar{d} \cdot dm = 0, \text{ pois, } \int_M \bar{r} \wedge \bar{d} \cdot dm = 0$$

(2.39)

$$E) \bar{\omega} \cdot \int_M \bar{d} \wedge \bar{d} \cdot dm = \theta_{\bar{t}} \int_L^0 \rho \left\{ y_{\bar{t}} - \frac{1}{2} \int_x^0 y'^2 d\zeta \right\} \left[y_{\bar{t}} + \frac{d}{dt} \left(- \frac{2}{x} \int_x^0 y'^2 d\zeta \right) \right] dx$$

$$= \theta \bar{k} \cdot \rho \int_L^0 \left[-y \frac{d}{dt} \left(-\frac{2}{1} \int_x^0 y'^2 ds \right) - \bar{k} - y \int_x^0 \frac{2}{1} y'^2 ds \right] dx$$

$$= -\frac{1}{2} \theta \cdot \rho \int_L^0 y \frac{d}{dt} \left(\frac{2}{1} \int_x^0 y'^2 ds \right) - y \int_x^0 y'^2 ds \left[dx \right]$$

Sendo movimento síncrono, temos : $y(x,t) = \eta(t) \cdot \phi(x)$

$$= \frac{1}{2} \theta \cdot \rho \int_L^0 \left[\eta(t) \cdot \phi(x) \cdot \frac{d}{dt} \left(\eta(t) \int_x^0 \phi'(x) ds \right) - \eta(t) \cdot \phi(x) \cdot \int_x^0 \phi'(x) ds \right] dx$$

(2.40)

$$\boxed{\therefore \int \bar{d} \wedge \bar{d} dm = 0}$$

Juntando-se todos estes termos, chega-se à seguinte expressão da energia cinética :

$$T = \frac{1}{2} \theta^2 \int_L^0 \rho \cdot \left[x^2 + y^2(x,t) - x \cdot \int_x^0 y'^2(s,t) \cdot ds + \frac{2}{1} \int_0^L \rho \cdot y'^2 \cdot dx \right] dx$$

(2.41)

Desenvolvendo-se a segunda integral através da inversão dos seus limites, e incluindo uma

massa m_p na ponta da viga, chega-se à seguinte expressão final para a Energia Cinética :

$$T = \frac{1}{2} I_H \theta^2 \left(\theta + \theta_H \right) + \frac{1}{2} \int_L^0 \rho \left[y^2 + \theta^2 \left[x^2 + y^2(x,t) - \frac{2}{1} \int_0^L \rho \cdot y'^2(x,t) dx \right] \right] dx + \frac{1}{2} m_p \left\{ y^2(L,t) + \theta^2 \left[L^2 + y^2(L,t) - \int_L^0 y'^2(x,t) dx \right] \right\}$$

(2.42)

onde () denota derivada em relação ao tempo e (') representa a derivada em relação à x , I_H

é o momento de inércia das partes móveis rígidas (cubo e motor), EI é a rigidez à flexão, θ

é o ângulo de rotação da referência flutuante e θ_H é a rotação do cubo relativo ao

referencial.

2.5.2 CÁLCULO DA ENERGIA POTENCIAL

O cálculo da energia potencial, baseada na equação 2.18, pode ser escrita como:

2.5.3 PRINCÍPIO DE HAMILTON

A primeira variação do trabalho virtual das forças não conservativas é

$$\delta W_{nc} = T(t) \cdot (\delta\theta + \delta\theta^H) \tag{2.44}$$

Aplicando o variacional na Energia Cinética, tem-se:

$$\begin{aligned} \delta T = & I_H \cdot \delta \cdot \delta\theta + I_H \cdot \theta^H \cdot \delta\theta^H + \rho \cdot \int_L^0 \left[y \cdot \delta y + \theta \cdot \delta\theta \right] \left[x^2 + y^2(x,t) - \frac{(L^2 - x^2)}{2} y'^2(x,t) \right] + \\ & + \theta^2 \cdot \left[y \cdot \delta y(x,t) - \frac{(L^2 - x^2)}{2} y' \cdot \delta y'(x,t) \right] \left[dx + m_p \cdot \left[-y \cdot \delta y(L,t) + \theta \cdot \delta\theta \left(-L^2 + y^2(L,t) - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - L \int_L^0 y'^2(s,t) ds \right) + \theta^2 \right] \left(y \cdot \delta y(L,t) - L \int_L^0 y' \cdot \delta y'(s,t) ds \right) \right] \end{aligned} \tag{2.45}$$

Aplicando o variacional na Energia Potencial, resulta:

$$\delta V = \frac{1}{2} \int_L^0 E \cdot I \cdot \delta(y''(x,t)) \cdot dx = \frac{2}{2} \int_L^0 E \cdot I \cdot 2 \cdot y'' \cdot (\delta y'') \cdot dx \tag{2.46}$$

Integrando por partes, vem

$$\delta V = E \cdot I \cdot y''(x,t) \cdot \delta y'|_L^0 - \int_L^0 E \cdot I \cdot \delta y' \cdot y'''(x,t) \cdot dx$$

$$\delta V = E \cdot I \cdot y''(x,t) \cdot \delta y'|_L^0 - \left[E \cdot I \cdot y''' \cdot \delta y \right]_L^0 + \int_L^0 E \cdot I \cdot \delta y \cdot y''' \cdot dx \tag{2.47}$$

Aplicando o Princípio de Hamilton, vem :

$$V = \frac{1}{2} \int_L^0 E \cdot I \cdot (y''(x,t))^2 dx$$

(2.43)

$$\left\{ -I_H \cdot \ddot{\theta} \delta \theta + I_H \cdot \dot{\theta} \delta \dot{\theta} + p \int_L^0 \left[y \cdot \delta y + \dot{\theta} \delta \theta \left(x^2 + y^2 \right) - \frac{2}{(L^2 - x^2)} y'^2 \right] dx + m^p \left[-y \cdot \delta y(L, t) + \dot{\theta} \delta \theta \left(-L^2 + y^2(L, t) - \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. -L \int_L^0 y'^2(s, t) ds \right) + \theta^2 \left(y \cdot \delta y(L, t) - L \int y' \cdot \delta y'(s, t) ds \right) \right] - E \cdot I \cdot y'' \cdot \delta y \Big|_L^0 + \int_L^0 E \cdot I \cdot y''' \cdot \delta y \cdot dx + \frac{1}{L} T(t) (\delta \theta + \delta \theta_H) \Big\} dt = 0$$

(2.48)

Podem-se resolver cada termo separadamente da equação (3.30), fornecendo :

$$A) \int_L^0 I_H \cdot \ddot{\theta} \delta \theta \cdot dt = I_H \cdot \dot{\theta} \delta \theta \Big|_L^0 - \int_L^0 I_H \cdot \dot{\theta} \delta \dot{\theta} \cdot dt$$

$$\therefore \int_L^0 I_H \cdot \ddot{\theta} \delta \theta \cdot dt = - \int_L^0 I_H \cdot \dot{\theta} \delta \dot{\theta} \cdot dt$$

(2.49)

$$B) \int_L^0 I_H \cdot \dot{\theta} \delta \dot{\theta} \cdot dt = I_H \cdot \dot{\theta} \delta \theta_H \Big|_L^0 - \int_L^0 I_H \cdot \ddot{\theta} \delta \theta_H \cdot dt$$

$$\therefore \int_L^0 I_H \cdot \dot{\theta} \delta \dot{\theta} \cdot dt = - \int_L^0 I_H \cdot \ddot{\theta} \delta \theta_H \cdot dt$$

(2.50)

$$C) \int_L^0 \int_L^0 p \cdot y \cdot \delta y \cdot dx \cdot dt = \int_L^0 p \cdot \int_L^0 y \cdot \delta y \cdot dx \cdot dt = \int_L^0 p \cdot \left[y \cdot \delta y \Big|_L^0 - \int_L^0 \dot{y} \cdot \delta y \cdot dt \right] dx$$

$$\therefore \int_L^0 \int_L^0 p \cdot y \cdot \delta y \cdot dx \cdot dt = - \int_L^0 \int_L^0 p \cdot \dot{y} \cdot \delta y \cdot dx \cdot dt$$

(2.51)

$$D) \int_L^0 \int_L^0 \theta \cdot \delta \theta \cdot \left[x^2 + y^2 + \frac{2}{L^2 - x^2} y'^2 \right] dx \cdot dt = - \int_L^0 \int_L^0 p \cdot x^2 \cdot \ddot{\theta} \delta \theta \cdot dx \cdot dt -$$

$$- \int_L^0 \int_L^0 p \cdot \ddot{\theta} \cdot y^2 \cdot dx \cdot dt + \int_L^0 \int_L^0 \frac{2}{L^2 - x^2} y'^2 \cdot \ddot{\theta} \delta \theta \cdot dx \cdot dt \delta \theta$$

(2.52)

$$E) \int_L^{l_2} \rho \int_0^t \theta^2 \cdot y \cdot \delta y - \frac{L^2 - x^2}{2} \cdot y' \cdot \delta y' \left[dx \cdot dt = \int_L^{l_2} \rho \int_0^t \theta^2 \cdot y \cdot dx \cdot dt \cdot \delta y - \right.$$

$$(2.53) \quad \left. - \int_L^{l_2} \theta^2 \cdot \frac{L^2 - x^2}{2} \cdot y' \cdot \delta y' \Big|_L^0 + \int_L^{l_2} \rho \cdot \theta^2 \int_0^t -x \cdot y' + \frac{L^2 - x^2}{2} y'' \cdot dx \cdot dt \cdot \delta y \right.$$

$$(2.54) \quad F) \int_L^{l_2} m_p \cdot y \cdot \delta y(L, t) \cdot dt = m_p \int_L^{l_2} y(L, t) \cdot dt \cdot \delta y(L, t)$$

$$(2.55) \quad G) \int_L^{l_2} m_p \cdot \theta \cdot \delta \theta \cdot \left(L^2 + y^2(L, t) - L \int_L^0 y'^2 \cdot dx \right) dt = - \int_L^{l_2} m_p \cdot L^2 \cdot \ddot{\theta} \cdot dt \cdot \delta \theta -$$

$$- \int_L^{l_2} m_p \cdot y^2(L, t) \cdot \ddot{\theta} \cdot dt \cdot \delta \theta + \int_L^{l_2} m_p \int_L^0 y'^2 \cdot \ddot{\theta} \cdot dx \cdot dt \cdot \delta \theta$$

$$H) \int_L^{l_2} m_p \cdot \theta^2 \cdot \left(y \cdot \delta y(L, t) - L \int_L^0 y' \cdot \delta y'(L, t) \cdot dx \right) \cdot dt = \int_L^{l_2} m_p \cdot \theta^2 \cdot y(L, y) \cdot \delta y(L, t) -$$

$$(2.56) \quad - \int_L^{l_2} m_p \cdot L \cdot y' \cdot \delta y' \Big|_L^0 + \int_L^{l_2} m_p \int_L^0 \theta^2 \cdot L \cdot y'' \cdot dx \cdot dt \cdot \delta y$$

Agrupando-se os termos semelhantes da equações (2.49) à (2.56), desconsiderando-se

os termos quadráticos das derivadas, e considerando-se os deslocamentos $\delta \theta$, $\delta \theta^H$ e δy

arbitrários, decorrem as equações da dinâmica do braço :

$$(2.57) \quad \left(I^H + \int_L^0 \rho x^2 dx + m_p \cdot L^2 \right) \ddot{\theta} = T(t)$$

$$(2.58) \quad \rho \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} + EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} - \theta^2 \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho \left(L^2 - x^2 \right) \frac{\partial \theta}{\partial y} + m_p \cdot L \left[\frac{\partial \theta}{\partial y} + \rho y \right] \right] \right\} = 0$$

associadas as seguintes condições de contorno :

$$y(0, t) = 0, \quad EI \cdot y'(0, t) = \theta^H, \quad EI \cdot y''(L, t) = 0, \quad EI \cdot y'''(L, t) - m_p \cdot g + \theta^2 \cdot L y'(x=L) = 0$$

$$(2.59) \quad EI \cdot y''(0, t) = I^H \cdot \ddot{\theta}^H + T(t) = 0$$

onde esta última equação representa o balanço de momentos no cubo da viga.

Desprezando-se os termos em θ^2 na equação (2.58), e admitindo movimento

síncrono, $y(x,t)$ pode ser expresso por :

$$y(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} \eta_r(t) \cdot \phi_r(x) \quad (2.60)$$

a equação (2.58) pode ser escrita da seguinte forma para cada modo:

$$p \cdot \ddot{y} + E \cdot I \cdot y''''(x,t) = 0$$

$$p \cdot \ddot{\eta}(t) \cdot \phi(x) + E \cdot I \cdot \eta(t) \cdot \phi''''(x) = 0$$

e separando as variáveis de tempo e espaço, tem-se

$$E I \phi''''(x) = -\frac{p}{\eta(t)} \phi(x) = \lambda \eta(t) \quad (2.61)$$

Desde que x é independente de t , as equações do lado direito e esquerdo da equação

(2.61) é igual a uma constante λ . Considerando que $\lambda = \omega^2 > 0$, devido à solução de

interesse ser oscilatória, obtêm-se

$$E I \phi''''(x) = \lambda \eta(t) = \omega^2 p \phi(x) \quad (2.62)$$

$$E I \phi_r''''(x) - \omega^2 p \phi_r(x) = 0 \quad (2.63)$$

As condições de contorno ficam :

$$1) \eta(t) \cdot \phi(x) = 0 \Rightarrow \phi(x) = 0 \quad (2.64)$$

$$2) E I \cdot \phi''(L) \cdot \eta(t) = 0 \Rightarrow \phi''(L) = 0 \quad (2.65)$$

$$3) \eta(t) \cdot \phi'(0) = \theta_H \quad (2.66)$$

$$4) E I \cdot \phi'''(L) \cdot \eta(t) - m_p \cdot \phi(L) \cdot \eta(t) = 0$$

$$E I \phi'''(L) = \frac{\eta(t)}{\ddot{\eta}(t)} = \lambda = \omega^2 = \frac{m_p \phi(L) \eta(t)}{E I \phi'''(L) + \lambda m_p \phi(L)} = 0 \quad (2.67)$$

5) Introduzindo-se (2.66) na 5ª Condição de Contorno e fazendo $T(t) = 0$, tem-se:

$$(2.68) \quad E \cdot I \cdot \eta(t) \cdot \phi''(0) - I_H \cdot \ddot{\eta}(t) \cdot \phi'(0) = 0 \Rightarrow E \cdot I \cdot \phi''(0) + \lambda \cdot I_H \cdot \phi'(0) = 0$$

Voltando à equação (2.63), tem-se :

$$d^4 \phi(x) - \omega^2 \rho \frac{dx^4}{dx^4} \phi(x) = 0$$

Uma possível função de forma é dada por:

$$(2.69) \quad \phi^4(x) = a^4 \cdot \text{sen}(\beta^4 x) + b^4 \cdot \cos(\beta^4 x) + c^4 \cdot \text{senh}(\beta^4 x) + d^4 \cdot \text{cosh}(\beta^4 x)$$

$$\text{onde } \beta^4 = \frac{EI}{\omega^2 \rho}$$

Introduzindo-se a equação (2.69) nas condições de contorno, obtêm-se :

$$(2.70) \quad 1) \phi(0) = 0 \Rightarrow b^4 + d^4 = 0$$

$$(2.71) \quad 2) \phi''(0) = 0 \Rightarrow -a^4 \cdot \text{sen}(\beta^4 L) - b^4 \cdot \cos(\beta^4 L) + c^4 \cdot \text{senh}(\beta^4 L) + d^4 \cdot \text{cosh}(\beta^4 L) = 0$$

$$(2.72) \quad 3) \phi''(L) + \frac{EI}{I_H} \omega^2 \phi'(L) = 0 \Rightarrow \text{fazendo } \alpha^4 = \frac{EI}{I_H} \omega^2 \text{ temos}$$

$$(2.73) \quad \phi''(L) + \alpha^4 \phi'(L) = 0 \Rightarrow \alpha^4 \cdot \beta^4 \cdot a^4 - \beta^4 \cdot b^4 + \alpha^4 \cdot c^4 + \beta^4 \cdot d^4 = 0$$

$$(2.74) \quad \phi(L) + \frac{EI}{\omega^2 m_p} \phi'(L) = 0 \Rightarrow \text{fazendo } \gamma^4 = \frac{EI}{\omega^2 m_p} \text{ temos}$$

$$-\beta^4 \cdot a^4 \cdot \cos(\beta^4 L) + \beta^4 \cdot c^4 \cdot \text{cosh}(\beta^4 L) + \beta^4 \cdot b^4 \cdot \text{sen}(\beta^4 L) + \beta^4 \cdot d^4 \cdot \text{cosh}(\beta^4 L) + \beta^4 \cdot \gamma^4 \cdot \text{senh}(\beta^4 L) + \beta^4 \cdot \gamma^4 \cdot \text{cosh}(\beta^4 L) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\beta^4 \cdot \cos(\beta^4 L) + \gamma^4 \cdot \text{sen}(\beta^4 L) + \beta^4 \cdot \cos(\beta^4 L) + \gamma^4 \cdot \text{cosh}(\beta^4 L) + \beta^4 \cdot \text{senh}(\beta^4 L) + \gamma^4 \cdot \text{cosh}(\beta^4 L) + \beta^4 \cdot \text{senh}(\beta^4 L) + \gamma^4 \cdot \text{cosh}(\beta^4 L) + \beta^4 \cdot \text{senh}(\beta^4 L) + \gamma^4 \cdot \text{cosh}(\beta^4 L) + \beta^4 \cdot \text{senh}(\beta^4 L) + \gamma^4 \cdot \text{cosh}(\beta^4 L) = 0$$

e que na forma matricial resulta :

$$(2.74) \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_r \\ b_r \\ c_r \\ d_r \\ p_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \beta_r & \cosh(\beta_r L) & +\gamma_r \cosh(\beta_r L) \\ 0 & \alpha_r & \sinh(\beta_r L) & +\beta_r^2 \cosh(\beta_r L) \\ 1 & -\beta_r & -\cos(\beta_r L) & +\beta_r^2 \sin(\beta_r L) \\ 0 & \alpha_r & -\sin(\beta_r L) & +\beta_r^3 \cos(\beta_r L) \\ 0 & 0 & +\gamma_r \sin(\beta_r L) & +\beta_r^2 \sin(\beta_r L) \end{bmatrix}$$

$$\text{onde } \alpha_r = \frac{\omega_r^2 I_H}{EI} \text{ e } \gamma_r = \frac{EI}{\omega_r^2 m_p}$$

Soluções não triviais podem ser obtidas quando o determinante da matriz se anula,

definindo a equação característica do problema,

$$(2.75) \quad 2\alpha_r \gamma_r \sin(\beta_r L) \cosh(\beta_r L) - 2\beta_r^4 \sin(\beta_r L) \cosh(\beta_r L) - 4\beta_r \gamma_r \sin(\beta_r L) \sinh(\beta_r L) - 2\alpha_r \gamma_r \cos(\beta_r L) \cosh(\beta_r L) - 2\alpha_r \beta_r^3 \cos(\beta_r L) \cosh(\beta_r L) - 2\alpha_r \gamma_r \cos(\beta_r L) \sinh(\beta_r L) + 2\beta_r^4 \cos(\beta_r L) \sinh(\beta_r L) = 0$$

Os valores de β_r que satisfazem a equação (2.75) estão associadas às frequências

naturais do sistema.

2.5.4 O PROBLEMA DA RESPOSTA - CONDIÇÃO DE ORTOGONALIDADE

O próximo passo será a análise da propriedade da ortogonalidade dos autovalores,

para podermos utilizar, em seguida, o teorema da expansão para o problema da resposta.

Fazendo ϕ_r e ϕ_s duas auto-funções e multiplicando-se a equação (2.63) por ϕ_s ,

integrando-a ao longo do domínio L e utilizando-se as condições de contorno, determinam-

se as condições de ortogonalidade. Assim:

$$(2.76) \quad \int_0^L \phi_s \cdot \phi_r'' dx = \int_0^L \phi_s \cdot \beta_r^4 \cdot \phi_r \cdot dx$$

Resolvendo a primeira integral por partes, tem-se:

$$\int_L^0 \phi_s \cdot \phi_r'' dx = \phi_s \cdot \phi_r''|_L^0 - \int_L^0 \phi_r''' \cdot \phi_s dx = \phi_s \cdot \phi_r''|_L^0 - \phi_s \cdot \phi_r''|_L^0 + \int_L^0 \phi_r'' \cdot \phi_s' dx$$

$$= \phi_s(L) \cdot \phi_r''(L) + \phi_s(0) \cdot \phi_r''(0) + \int_L^0 \phi_r'' \cdot \phi_s' dx \quad (2.77)$$

Substituindo as seguintes equações de contorno na equação (2.77),

a) $E \cdot I \cdot \phi_r'''(L) + \lambda \cdot m_p \cdot \phi_r'(L) = 0 \Rightarrow \phi_r'''(L) = -\frac{E \cdot I}{\omega_2^2 \cdot m_p} \cdot \phi_r'(L)$

b) $E \cdot I \cdot \phi_r''(0) + \lambda \cdot I_H \cdot \phi_r'(0) = 0 \Rightarrow \phi_r''(0) = -\frac{E \cdot I}{\omega_2^2 \cdot I_H} \cdot \phi_r'(0)$

Resulta :

$$\phi_s(L) \left(-\frac{E \cdot I}{\omega_2^2 \cdot m_p} \cdot \phi_r'(L) + \phi_s'(0) \right) - \left(\frac{E \cdot I}{\omega_2^2 \cdot I_H} \cdot \phi_s'(0) \right) \phi_r'(0) + \int_L^0 \phi_r'' \cdot \phi_s' dx \quad (2.78)$$

Substituindo-se a equação (2.78) na equação original (2.76), resulta :

$$-\frac{E \cdot I}{\omega_2^2 \cdot m_p} \cdot \phi_s(L) \cdot \phi_r'(L) - \frac{E \cdot I}{\omega_2^2 \cdot I_H} \cdot \phi_s'(0) \cdot \phi_r'(0) + \int_L^0 \phi_r'' \cdot \phi_s' dx = \frac{E \cdot I}{\omega_2^2 \cdot \rho} \int_L^0 \phi_r'' \cdot \phi_s' dx \quad (2.79)$$

Assim,

$$\int_L^0 E \cdot I \cdot \phi_r'' \cdot \phi_s'(x) dx = \omega_2^2 \cdot \rho \int_L^0 \phi_r'' \cdot \phi_s'(x) dx + \omega_2^2 \cdot m_p \cdot \phi_s(L) \cdot \phi_r'(L) + \omega_2^2 \cdot I_H \cdot \phi_s'(0) \cdot \phi_r'(0) \quad (2.80)$$

Da equação (2.80), o *Stiffness Inner Product* pode ser escrito como

$$(\phi_s, K \phi_r) = \int_L^0 \phi_r'' E I \phi_s' dx \quad (2.81)$$

onde K é o operador de inércia (*stiffness operator*). O *Mass Inner Product* do sistema tem a seguinte forma

$$(\phi_s, M\phi_r) = \int_L^0 \rho \phi_r \phi_s dx + I_H \phi_r'(0) \phi_s'(0) + m_p \phi_s(L) \phi_r(L) \quad (2.82)$$

onde M é o operador de massa (*mass operator*). Devido ao fato de que ϕ_r , ϕ_s , e suas

derivadas serem simétricas na equação (2.81), pode-se dizer que :

$$(\phi_s, M\phi_r) = (\phi_r, M\phi_s) \quad (2.83)$$

Baseando-se nas equações (2.84) e (2.85), pode-se expressar a equação (2.83) como

$$(\phi_s, K\phi_r) = \lambda_r (\phi_s, M\phi_r) \quad (2.84)$$

Da mesma maneira, tem-se

$$(\phi_r, K\phi_s) = \lambda_s (\phi_r, M\phi_s) \quad (2.85)$$

Subtraindo-se a equação (2.84) da equação (2.85) e usando-se a equação (2.83), obtêm-se

$$(\phi_s, K\phi_r) - (\phi_r, K\phi_s) = (\lambda_r - \lambda_s) (\phi_s, M\phi_r) \quad (2.86)$$

Devido ao fato de que o produto interno de inércia é simétrico em ϕ_r e ϕ_s , o lado esquerdo

da equação (2.86) é zero. Assumido-se que os autovalores λ_r e λ_s são distintos, a equação

(2.86) fornece

$$(\phi_s, M\phi_r) = 0, \quad \lambda_r \neq \lambda_s \quad (2.87)$$

Desde que as amplitude das auto-funções não são únicas, pode-se normalizar as auto-

funções e obter-se a seguinte relação de ortogonalidade

$$\begin{aligned} (\phi_r, K\phi_s) &= \lambda_r \cdot \delta_{rs} \\ (\phi_r, K\phi_s) &= \delta_{rs} \end{aligned} \quad (2.88)$$

Assim, pode-se escrever :

onde δ_{rs} é a função delta de Kronecker.

$$\int_L^0 \phi''_r E I \phi''_s dx = \omega_r \cdot \delta_{rs} \tag{2.89}$$

$$\int_L^0 \rho \phi'_r \phi'_s dx + I^H \phi'_r(0) \phi'_s(0) + m^p \phi'_r(L) \phi'_s(L) = \delta_{rs}$$

Partindo-se da equação (2.63), multiplicando-se por ϕ'_s e integrando-a por partes por

todo o domínio L , resulta

$$E I \sum_L^r \eta(t) \left[\int_L^0 \phi'_r(x) \phi'_s(x) dx + \phi'_s(L) \phi'_r(L) + \phi'_s(0) \phi'_r(0) \right] + \rho \sum_L^r \eta(t) \int_L^0 \phi'_s(x) \phi'_r(x) dx = 0$$

(2.90)

Sabendo-se que da condição de contorno (2.68)

$$I^H \sum_L^r \eta_r(t) \phi'_r(0) - E I \sum_L^r \eta_r(t) \phi'_r(L) = T(t) \tag{2.91}$$

(2.91)

e utilizando-se a condição de contorno (2.58), resulta :

$$\sum_L^r \eta_r(t) \left(\int_L^0 E I \phi''_r(x) \phi'_s(x) dx + \sum_L^r \eta_r(t) E I \phi'_s(L) \right) \frac{E I}{-\omega_r \cdot m^p \cdot \phi'_r(L)} + \phi'_s(0) I^H \sum_L^r \eta_r(t) \phi'_r(0)$$

$$+ \sum_L^r \eta_r(t) \rho \int_L^0 \phi'_s(x) \phi'_r(x) dx = \phi'_s(0) T(t) \tag{2.92}$$

(2.92)

Sabendo-se que $\ddot{\eta}_r(t) = -\omega_r^2 \cdot \eta_r(t)$ (Equação 2.62), pode-se escrever a equação (2.92) da seguinte forma :

$$\sum_L^r \eta_r(t) \left(\int_L^0 E I \phi''_r(x) \phi'_s(x) dx + \sum_L^r \eta_r(t) \left[m^p \cdot \phi'_s(L) \cdot \phi'_r(L) + I^H \cdot \phi'_s(0) \cdot \phi'_r(0) \right] \right) + \rho \int_L^0 \phi'_s(x) \phi'_r(x) dx = \phi'_s(0) T(t) \tag{2.93}$$

(2.93)

Utilizando as condições de ortogonalidade, resultam as equações diferenciais no tempo:

que junto com a equação (2.60), permitem o cálculo da resposta do sistema dinâmico. O

$$\ddot{\eta}_r + \omega_r^2 \eta_r = \phi_r'(0) \cdot T(t) \quad (2.94)$$

movimento do sistema no referencial inercial é dado por:

$$\theta = \beta + \gamma'(0) + \sum_{r=1}^2 \phi_r'(0) \cdot \eta_r(t) \quad (2.95)$$

onde β é o ângulo da referência flutuante

$$\begin{cases} X(t) = L \cos \beta + \gamma(L) \operatorname{sen} \beta \\ Y(t) = L \operatorname{sen} \beta - \gamma(L) \cos \beta \end{cases} \quad (2.96)$$

Considerando-se para a simplicidade do modelo, os dois primeiros modos, pode-se

então, escrever o problema na forma matricial ou de Equações de Estado.

Seja o vetor $q = \{\theta \ \dot{\theta} \ \eta_1 \ \dot{\eta}_1 \ \eta_2 \ \dot{\eta}_2 \ \eta_3 \ \dot{\eta}_3\}^T$, o vetor que define as variáveis de estado do

sistema, então :

$$\dot{T}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_2 \\ \ddot{\eta}_2 \\ \dot{\eta}_3 \\ \ddot{\eta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ \eta_1 \\ \dot{\eta}_1 \\ \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 \\ \eta_3 \\ \dot{\eta}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi_1'(0) \\ 0 \\ \phi_2'(0) \\ 0 \\ 0 \\ 1/I_{Total} \end{bmatrix} \quad (2.97)$$

onde $I_{Total} = I^H + \rho \int_L^0 x^2 \cdot dx + m \cdot L^2$

Sabendo-se que podemos medir o ângulo β , $\gamma'(0)$ e $X'(L)$, pode-se escrever a saída

do sistema na seguinte forma :

$$(2.98) \quad \begin{matrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ \eta_1 \\ \dot{\eta}_1 \\ \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\phi_1'(0) & 0 & 0 & -\phi_2'(0) \\ 0 & 0 & \phi_1'(0) & 0 & 0 & \phi_2'(0) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_1(0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_2(0) \\ T & 0 & 0 & \phi_1(0) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \beta(t) \\ \gamma'(0) \\ \gamma^{abs}(T) \\ \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_2 \end{matrix}$$

Utilizando-se a equação (3.76), (3.79) pode ser escrita como

2.6 UTILIZAÇÃO DO MODELO TRADICIONAL

Para a comparação do modelo proposto com os modelos tradicionais [BAR88]-

[YUA96], analisa-se do mesmo sistema (Figura 2.4), porém com a colocação de um

referencial fixo na barra. Sendo a posição de um elemento de massa descrito por

$R = x(t) \cdot \theta(t) + y(x,t)$, pode-se escrever :

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho \cdot \dot{\theta}^2 (x, \theta + y)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \rho \cdot \dot{\theta}^2 (x, \theta + y)^2 dx$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L E \cdot I \cdot \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx$$

(2.100)

Utilizando-se o Princípio Estendido de Hamilton, chega-se às equações lineares do

movimento e condições de contorno para o braço flexível para um torque aplicado a seu

centro.

Desenvolvendo-se estas duas equações e comparando-as com as equações (2.57) e (2.58), verifica-se que a dinâmica de corpo rígido e a dinâmica do corpo flexível são acopladas.

2.7 CONCLUSÕES

A utilização de um referencial flutuante (*Tisserand Frame*) leva ao cálculo de uma energia cinética mínima do movimento de corpo rígido do sistema em relação a este referencial. Assim, as equações da dinâmica do braço possuem termos não lineares menores (com respeito a este referencial) e, portanto a linearização é mais precisa, levando a efeitos mais desprezíveis quando da desconsideração destes termos.

Através da análise da equação (2.94), pode-se dizer que os efeitos dos atuadores externos (neste caso o torque no cubo do braço) sobre cada modo natural são representados por um único número escalar, gerando assim, um índice utilizável na decisão do posicionamento destes atuadores.

Capítulo 3

MODELO DO CONTROLADOR

3.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS

Dois controladores serão desenvolvidos para o controle do manipulador flexível. Propõe-se primeiramente, o projeto de um controlador por Alocação de Pólos com um Observador de Estados. Para este controlador, os parâmetros desconhecidos não serão identificados, porém as mesmas matrizes de ganhos do controle por alocação de pólos e do observador de estados serão usadas para o projeto do regulador do segundo sistema de controle projetado, ou seja, o Controlador Adaptativo auto ajustável.

3.2 MODELO DO CONTROLADOR POR ALOCAÇÃO DE PÓLOS

Admitindo-se que todas as variáveis de estado sejam mensuráveis e estejam disponíveis para a realimentação, mostra-se que, se o sistema considerado for completamente controlável pelo estado, então os pólos do sistema em malha fechada podem ser colocados em quaisquer posições desejadas por meio de realimentação de estado através de uma matriz de ganhos apropriada [OGA90]. Esta técnica começa com a determinação dos pólos de malha fechada desejados com base nos requisitos de resposta

transitória e resposta em frequência, tais como velocidade, razão de amortecimento ou largura de faixa, bem como requisitos de regime estacionário.

Como nem todas as variáveis de estado estão disponíveis para a realimentação, necessita-se estimar as variáveis não disponíveis. Para tal, um observador de estados é utilizado, para estimar as componentes de estado não medidas. Uma condição necessária e suficiente para a observação de estado do sistema é que o sistema seja completamente observável.

Para um sistema definido como

$$(3.1) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \text{ sendo } A_{n \times n}$$

as condições de controlabilidade e observabilidade são :

$$(3.2) \quad \text{Sistema Controlável : } Co = [B : AB : \dots : A^{n-1}B] \Rightarrow Co \text{ tem posto } n$$

$$(3.3) \quad \text{Sistema Observável : } Ob = [C^T : A^T C^T : \dots : (A^T)^{n-1} C^T] \Rightarrow Ob \text{ tem posto } n$$

Admitindo-se um observador de estado com a seguinte estrutura

$$(3.4) \quad \dot{\hat{x}} = A \cdot \hat{x} + B \cdot u + G(y - Yr) - C \cdot \hat{x}$$

pode-se montar o seguinte diagrama de blocos do sistema, onde Yr é um ângulo final de

referência.

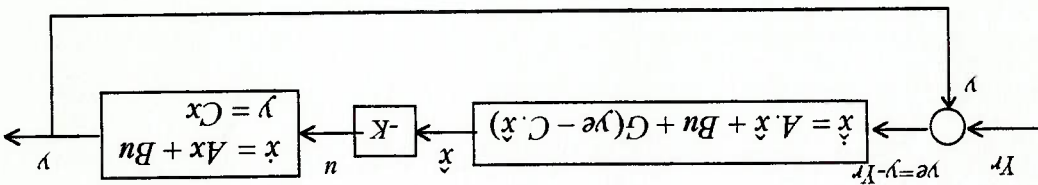


Fig. 3.1 - Modelo do controlador por alocação de polos.

Para esta planta em malha fechada, tem-se as seguintes equações:

$$(3.5) \quad \begin{cases} \dot{x} = A \cdot x + B \cdot n \\ y = C \cdot x \\ n = -K\hat{x} \\ \dot{\hat{x}} = A \cdot \hat{x} + B \cdot n + G((C \cdot x - Yr) - C \cdot \hat{x}) \end{cases}$$

Rearranjando estas equações, obtêm-se :

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \Rightarrow x &= A \cdot x - B \cdot K \cdot \hat{x} \\ \dot{\hat{x}} &= A \cdot \hat{x} - B \cdot K \cdot \hat{x} + G \cdot C \cdot x - G \cdot Yr - G \cdot C \cdot \hat{x} \\ \Rightarrow \dot{\hat{x}} &= (G \cdot C) \cdot x + (A - G \cdot C - B \cdot K) \cdot \hat{x} - G \cdot Yr \end{aligned}$$

que escritas na forma matricial, para o sistema em malha fechada, resulta

$$(3.7) \quad \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ GC & A - GC - BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -GYr \end{bmatrix}$$

Para poder visualizar melhor a introdução do Observador de Estados faz-se o

diagrama de blocos completo para o sistema:

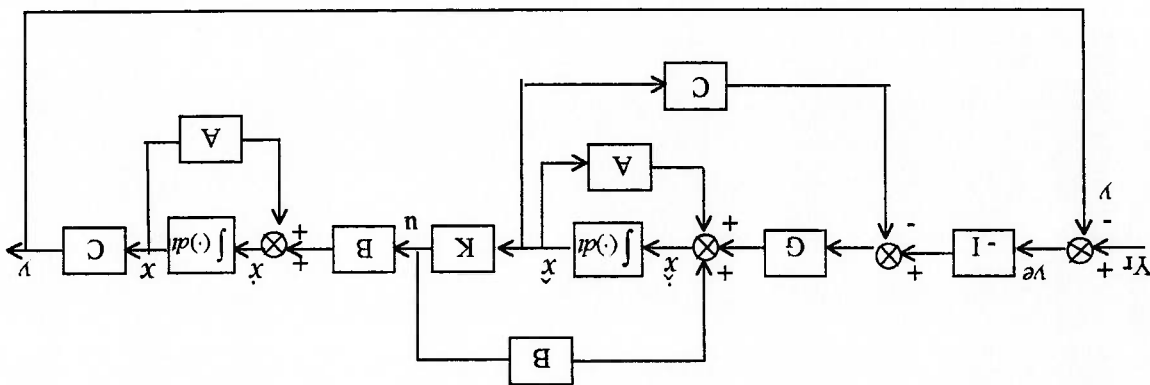


Fig. 3.2 - Estrutura do Controlador por Alocação de Pólos

Os pólos de malha fechada desejados a serem gerados pela realimentação de estado (imposição de pólos) são escolhidos de tal maneira que o sistema satisfaça os requisitos de desempenhos pré estabelecidos. Os pólos do Observador são usualmente escolhidos de modo que a resposta do Observador seja muito mais rápida do que a resposta do sistema.

Uma regra empírica, consiste em uma resposta do Observador duas a cinco vezes mais rápida do que a resposta do sistema.

3.3 MODELO DO CONTROLADOR ADAPTATIVO

3.3.1. TEORIA DO CONTROLADOR AUTO-AJUSTÁVEL

O controlador auto ajustável é baseado na idéia da separação da estimação dos

parâmetros desconhecidos da planta e do projeto do controlador. Os parâmetros desconhecidos são estimados “*on-line*” através de um método de estimação recursiva (mínimos quadrados, abordagem estocástica, máxima probabilidade). Os parâmetros estimados são então, tratados como se fossem reais, ou seja, as incertezas na estimação não são consideradas. Esse processo chama-se “Princípio da Equivalência à Certeza” [MOR95].

Este princípio afirma que em um contexto adaptativo o controle de realimentação de um processo deve, em cada instante de tempo, ser projetado com base nas estimativas correntes dos parâmetros da planta, com o entendimento que estas estimativas são consideradas corretas, mesmo que elas não necessariamente sejam. A motivação para esta idéia é óbvia : se os parâmetros estimados da planta convergem para os “verdadeiros parâmetros da planta” então um controlador com estes parâmetros estimados deve convergir para o aproximado do comportamento que um outro sistema alcançaria se não houvesse incertezas na planta.

Para o entendimento do controlador auto ajustável, faz-se o desenvolvimento de seus componentes, mostrados separadamente, na figura 3.3.

A) Sintonizador

A1) Método do Gradiente

Uma maneira de fazer o ajuste recursivo dos parâmetros desconhecidos do sistema é através do Método do Gradiente. A idéia deste método consiste em reduzir o erro $(e_1 = \hat{y} - y)$ entre os valores estimados e reais, ajustando-se os parâmetros desconhecidos (p) na direção negativa do gradiente deste erro. Assim, pode-se escrever :

$$\frac{dp}{dt} = -g_r \frac{\partial \phi}{\partial e_1(p)}$$

$$= -2 \cdot g_r \cdot e_1(p) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial e_1(p)}$$

$$\frac{dp}{dt} = -2 \cdot g_r \cdot e_1(p) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial p}$$

onde g_r é uma constante positiva chamada de ganho de adaptação. A condição inicial $p(0)$ é arbitrária, porém, ela pode ser escolhida levando-se em consideração qualquer informação *a priori* em relação aos parâmetros da planta.

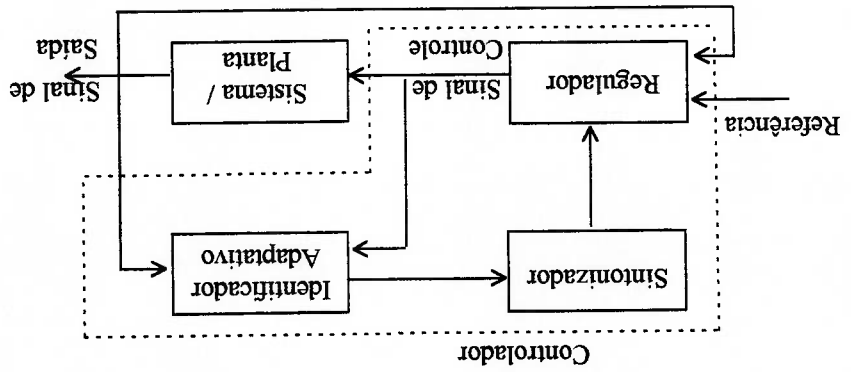


Fig. 3.3 - Esquema do Controlador Auto Ajustável

A2) Mínimos Quadrados

Um outro método muito usado para a identificação de parâmetros desconhecidos é a técnica dos mínimos quadrados [AST89]. No controle adaptativo os parâmetros do processo são desconhecidos, e é necessário um método de estimação que ajuste os parâmetros recursivamente.

Gauss formulou o princípio dos mínimos quadrados para a determinação da órbita de planetas. De acordo com este princípio os parâmetros desconhecidos de um modelo matemático podem ser escolhidos de tal forma que “a soma dos quadrados das diferenças entre os valores observados atualmente e os valores computados, multiplicados por um número que mede o grau de precisão, é mínimo”.

O método dos mínimos quadrados pode ser facilmente desenvolvido para um modelo matemático escrito na forma

$$y(t) = \phi_1(t) \cdot \theta_1 + \phi_2(t) \cdot \theta_2 + \dots + \phi_n(t) \cdot \theta_n = \phi^T(t) \cdot \theta \quad (3.10)$$

onde y é a variável observada, θ_n são os parâmetros desconhecidos e os ϕ_n são funções conhecidas que podem depender de outras variáveis. As variáveis ϕ_n de “variáveis de regressão” e o modelo a ela associada é chamado de “modelo regressor”. Pode-se escrever:

$$\phi(t) = [\phi_1(t) \quad \phi_2(t) \quad \dots \quad \phi_n(t)]^T ; \quad \theta^T = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \dots \quad \theta_n]$$

Além disso, pode-se dizer que os pares de observação $\{y(t), \phi(t), t = 1, 2, \dots, i\}$ são obtidos experimentalmente. O problema reside no fato de se determinar os parâmetros de tal maneira que as saídas do modelo computadas pela equação (3.10) tornam-se as mais próximas possíveis das variáveis medidas $y(t)$ de acordo com os critérios de mínimos quadrados. Introduzindo-se as seguintes notações

$$\bullet \text{ Erro Residual } \Rightarrow \varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t) = y(t) - \phi^T(t) \cdot \theta \quad (3.11)$$

$$\bullet \Phi(t) = \begin{bmatrix} \phi_T(t) \\ \vdots \\ \phi_T(1) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$\bullet Y(t) = [y(1) \ y(2) \ \dots \ y(t)]^T ; \ E(t) = [\varepsilon(1) \ \varepsilon(2) \ \dots \ \varepsilon(t)]^T \quad (3.13)$$

$$\bullet P(t) = (\Phi_T(t) \cdot \Phi(t))^{-1} = \left(\sum_{i=1}^{t-1} \phi_T(i) \cdot \phi_T(i) \right)^{-1} \quad (3.14)$$

o erro dos mínimos quadrados pode ser escrito na seguinte forma:

$$V(\theta, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^t (\gamma(i) - \phi_T(i) \cdot \theta)^2 = \frac{1}{2} \|E\|_2^2 \quad (3.15)$$

onde $E = Y - \hat{Y} = Y - \Phi \cdot \theta$.

A solução para este problema de mínimos quadrados é dada por [AST89]: A função

(3.15) é mínima para os parâmetros θ tais que

$$\Phi^T \cdot \Phi \cdot \theta = \Phi^T \cdot Y \quad (3.16)$$

Se a matriz $\Phi^T \cdot \Phi$ é não singular, o mínimo é único e é definido por:

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \cdot \Phi)^{-1} \cdot \Phi^T \cdot Y \quad (3.17)$$

$$\Leftrightarrow \hat{\theta}(t) = \left(\sum_{i=1}^t \phi_T(i) \cdot \phi_T(i) \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^t \phi_T(i) \cdot \gamma(i) \right) = P(t) \cdot \left(\sum_{i=1}^t \phi_T(i) \cdot \gamma(i) \right) \quad (3.18)$$

Em controle adaptativo, as observações dos parâmetros do sistema são obtidas sequencialmente em tempo real, assim é desejável criar um algoritmo recursivo que utilize os resultados obtidos no tempo $t-1$.

Partindo-se da equação (3.17), pode-se escrevê-la de uma forma recursiva da maneira seguinte. Fazendo-se $\hat{\theta}(t-1)$ a estimação dos mínimos quadrados e baseando-se

na definição de $P(t)$ segue-se que:

$$P(t)^{-1} = P(t-1)^{-1} + \phi_T(t) \cdot \phi_T(t) \quad (3.19)$$

Utilizando-se as equações (3.18) e (3.19), tem-se

$$\sum_{t=1}^t \hat{\theta}(t) \cdot y(t) = P(t-1) \cdot \hat{\theta}(t-1) - \phi^T(t) \cdot \hat{\theta}(t-1) \quad (3.20)$$

A estimativa no tempo t pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(t) &= \hat{\theta}(t-1) - P(t-1) \cdot \phi^T(t) \cdot \hat{\theta}(t-1) + P(t) \cdot y(t) \\ &= \hat{\theta}(t-1) + P(t) \cdot \phi(t) \cdot (\gamma(t) - \phi^T(t) \cdot \hat{\theta}(t-1)) \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\text{onde } K(t) = P(t) \cdot \phi(t) \quad ; \quad \varepsilon(t) = y(t) - \phi^T(t) \cdot \hat{\theta}(t-1)$$

O parâmetro $\varepsilon(t)$ pode ser interpretado como sendo o erro previsto (um passo a

frente) baseados na estimativas de $\hat{\theta}(t-1)$. Para a implementação deste algoritmo é

necessário derivar a equação recursiva para $P(t)$, ao invés de $P(t)^{-1}$. Através do Lema de

Inversão de Matriz [AST89] (Apêndice C), determina-se $P(t)$.

Aplicando-se o Lema (C1) em $P(t)$ e utilizando-se a equação (3.19), tem-se

$$\begin{aligned} P(t) &= \left(\Phi^T(t) \cdot \Phi(t) + \phi^T(t) \cdot \phi(t) \right)^{-1} \\ &= P(t-1) - P(t-1) \cdot \phi^T(t) \cdot \left(I + \phi^T(t) \cdot P(t-1) \cdot \phi(t) \right)^{-1} \cdot \phi(t) \cdot P(t-1) \end{aligned}$$

$$(3.22)$$

Assim, pode-se escrever o algoritmo recursivo para os mínimos quadrados como:

$$(3.23) \quad \hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + K(t) \cdot \left(y(t) - \phi^T(t) \cdot \hat{\theta}(t-1) \right)$$

$$(3.24) \quad K(t) = P(t) \cdot \phi(t) = P(t-1) \cdot \phi(t) \cdot \left(I + \phi^T(t) \cdot P(t-1) \cdot \phi(t) \right)^{-1}$$

$$(3.25) \quad \begin{aligned} P(t) &= P(t-1) - P(t-1) \cdot \phi^T(t) \cdot \left(I + \phi^T(t) \cdot P(t-1) \cdot \phi(t) \right)^{-1} \cdot \phi(t) \cdot P(t-1) \\ &= \left(I - K(t) \cdot \phi^T(t) \right) P(t-1) \end{aligned}$$

Na equação (3.23) pode-se notar que $\hat{\theta}(t)$ é obtido adicionando-se um fator de correção no

seu valor $\hat{\theta}(t-1)$ previamente calculado.

B) Identificador Adaptativo Parametrizado

Representando-se a função de transferência da planta de um sistema como

$$T(s) = \frac{\beta(s)}{1 - \alpha(s)} \quad (3.26)$$

pode-se escrever:

$$y = \beta(s) \cdot n + \alpha(s) \cdot y \quad (3.27)$$

onde $\alpha(s)$, $\beta(s)$ são funções de transferências estáveis e estritamente próprias.

Considerando-se um identificador parametrizado de ordem $2n$, onde n é a ordem do

sistema, pode-se escrever

$$x_1 = A_1(p) \cdot x_1 + b_1 \cdot n + d_1 \cdot y \quad (3.28)$$

$$y = C_1(p) \cdot x_1 = \begin{bmatrix} d_1^1 & d_1^2 \end{bmatrix} \cdot x_1 \quad (3.29)$$

onde

$$A_1 = \begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & A_0 \end{bmatrix}; \quad b_1 = \begin{bmatrix} b_0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad d_1 = \begin{bmatrix} b_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

e (A_0, b_0) um par controlável arbitrário, com A_0 estável e p os parâmetros do sistema a

serem identificados. A equação (3.29) representa a familiar *forma de regressão*

$(y = p^T x_1 + w(t))$, onde $w(t)$ representa os termos exponencialmente decrescentes, muito

conveniente em identificação e controle adaptativo, já que permite escrever uma equação

linear nos parâmetros a serem identificados.

Escrevendo-se a transformada de Laplace da equação (3.28) e (3.29), chega-se a:

$$X_1(s) = (sI - A_1)^{-1} \cdot b_1 \cdot U(s) + d_1 \cdot Y(s) \quad (3.31)$$

Substituindo-se a equação (3.29) e (3.30) em (3.31), tem-se

$$\begin{aligned} \hat{y} &= \begin{bmatrix} p_1^T & p_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sI - A_1)^{-1} (b_1 \cdot U(s) + d_1 \cdot X(s)) \\ 0 \\ (sI - A_0)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix} U(s) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix} X(s) \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\hat{y} = p_1^T \cdot (sI - A_0)^{-1} \cdot b_0 \cdot U(s) + p_2^T \cdot (sI - A_0)^{-1} \cdot b_0 \cdot X(s) \quad (3.33)$$

A equação (3.33) pode ser escrita na forma:

$$\hat{y} = \beta(s) \cdot n + \alpha(s) \cdot y \quad (3.34)$$

sendo, da equação (3.33), p_1^T e p_2^T os únicos vetores de n posições tal que a função de

$$\text{transfêrencia da planta seja igual à } T(s) = \frac{\beta(s)}{1 - \alpha(s)}.$$

Dessa forma, o erro de identificação, definido como

$$e_I = \hat{y} - y \quad (3.35)$$

pode ser escrito como

$$e_I = \hat{y} - y = \beta(s) \cdot n + \alpha(s) \cdot y - y = 0 \quad (3.36)$$

a menos de uma parcela exponencial decrescente com as constantes de tempo de A_I . Assim, o identificador parametrizado de ordem $2n$, leva a um erro de identificação nulo quando os parâmetros identificados são corretos.

C) Regulador

Para o projeto do regulador utilizou-se a técnica de Alocação de Pólos com um Observador de Estados, como proposto acima. Porém para o sistema adaptativo, as matrizes de ganhos, K_{nom} e G_{nom} , da alocação de pólos e do observador de estados respectivamente adaptaram-se a medida que eram estimados e ajustados os parâmetros desconhecidos.

$$\begin{aligned}
 \hat{y} &= [p_T^1 \quad p_T^z] \left((sI - A_1)^{-1} \cdot (b_1 \cdot U(s) + d_1 \cdot Y(s)) \right) \\
 \hat{y} &= [p_T^1 \quad p_T^z] \cdot \begin{bmatrix} (sI - A_0)^{-1} & 0 \\ 0 & (sI - A_0)^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot U(s) + \begin{bmatrix} b_0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot Y(s)
 \end{aligned}
 \tag{3.32}$$

$$\hat{y} = p_T^1 \cdot (sI - A_0)^{-1} \cdot b_0 \cdot U(s) + p_T^z \cdot (sI - A_0)^{-1} \cdot b_0 \cdot Y(s)
 \tag{3.33}$$

A equação (3.33) pode ser escrita na forma:

$$\hat{y} = \beta(s) \cdot y + \alpha(s) \cdot y
 \tag{3.34}$$

sendo, da equação (3.33), p_T^1 e p_T^z os únicos vetores de n posições tal que a função de

$$\text{transferência da planta seja igual à } T(s) = \frac{\beta(s)}{1 - \alpha(s)}.$$

Dessa forma, o erro de identificação, definido como

$$e_I = \hat{y} - y
 \tag{3.35}$$

pode ser escrito como

$$e_I = \hat{y} - y = \beta(s) \cdot y + \alpha(s) \cdot y - y = 0
 \tag{3.36}$$

a menos de uma parcela exponencial decrescente com as constantes de tempo de A_I . Assim, o identificador parametrizado de ordem $2n$, leva a um erro de identificação nulo quando os parâmetros identificados são corretos.

C) Regulador

Para o projeto do regulador utilizou-se a técnica de Alocação de Pólos com um Observador de Estados, como proposto acima. Porém para o sistema adaptativo, as matrizes de ganhos, Kn e $Gnom$, da alocação de pólos e do observador de estados respectivamente foram adaptando-se a medida que eram estimadas e ajustadas os parâmetros desconhecidos.

3.3.2. APLICAÇÃO DO CONTROLADOR AUTO-AJUSTÁVEL NO SISTEMA DO

MANIPULADOR

Para a aplicação do controle adaptativo auto-ajustável no sistema do braço flexível, deve-se em primeiro lugar identificar o parâmetro desconhecido, no caso a massa na ponta da viga. Em seguida, utilizando-se o método do gradiente, faz-se o ajuste deste parâmetro, e assim, a atualização das matrizes de ganho do controlador.

Partindo-se das matrizes A, B e C desenvolvidas no Capítulo 2, verifica-se que a estimação do valor da massa na ponta da viga (m_p) não é uma tarefa direta, pois, o parâmetro massa não segue uma lei linear. Porém, utilizando-se a equação (2.97), verifica-se que as equações são lineares no estado θ e para o parâmetro $1/I^{Total}$, portanto

pode-se escrever:

$$(3.37) \quad \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/I^{Total} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} T(t)$$

$$(3.38) \quad \text{onde } \hat{p} = \frac{I^{Total}}{1} = \frac{I^H + pL^3/3 + m_p L^2}{1}$$

Assim, pode-se construir um identificador de ordem $2n$ para estimar o parâmetro \hat{p} e através de um cálculo algébrico simples estimar o valor da massa na ponta da viga m_p .

Partindo-se da equação (3.37), pode-se escrever

$$(3.39) \quad \theta = \hat{p} \cdot T(t)$$

Utilizando-se a transformada de Laplace, tem-se

$$(3.40) \quad s^2 \cdot \theta(s) = \hat{p} \cdot T(s)$$

Para este sistema pode-se construir um identificador adaptativo parametrizado:

$$x_I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_I + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \theta + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} T(t) \quad (3.41)$$

(3.42)

$$\theta = C_I \cdot x_I$$

(3.43)

$$\text{onde } C_I = [c1(p) \quad c2(p) \quad c3(p) \quad c4(p)]$$

que rescreta na forma de função de transferência torna-se :

(3.44)

$$\begin{aligned} s \cdot X_I &= A(\lambda) \cdot X_I + B_I \cdot \theta + D_I \cdot T \\ X_I &= (sI - A(\lambda))^{-1} \cdot (B_I \cdot \theta + D_I \cdot T) \\ \theta &= C_I \cdot x_I \end{aligned}$$

O passo seguinte, será a determinação dos parâmetros $c_i(p)$ ($i=1,2,3,4$), com a

finalidade de determinar a equação de erro do identificador e portanto a equação do

sintonizador. Escrevendo a equação (3.44) de uma forma mais explícita, tem-se:

$$\theta = [c1(p) \quad c2(p) \quad c3(p) \quad c4(p)] \cdot \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ -1 & s + \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & s + \lambda_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \theta + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} T$$

(3.45)

$$\theta = C(p) \cdot (sI - A(\lambda))^{-1} \cdot (B_I \cdot \theta + D_I \cdot T)$$

Rearranjando-se estas equações tem-se:

$$(1 - C(p) \cdot (sI - A(\lambda))^{-1} \cdot B_I) \cdot \theta = C(p) \cdot (sI - A(\lambda))^{-1} \cdot D_I \cdot T \quad (3.46)$$

resolvendo a equação matricial para o membro a esquerda chega-se a:

$$\begin{aligned}
 & \left(1 - [c1(p) \ c2(p) \ c3(p) \ c4(p)] \cdot \frac{s^2 + \lambda_2 \cdot s + \lambda_1}{1} \right) \cdot \theta = \begin{bmatrix} s + \lambda_2 & 1 & 0 & 0 \\ -\lambda_1 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s + \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda_1 & s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} 1 - [c1(p) \ c2(p) \ c3(p) \ c4(p)] \cdot \frac{s^2 + \lambda_2 \cdot s + \lambda_1}{1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \theta = \begin{bmatrix} s \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 & = \left(1 - \frac{s^2 + \lambda_2 \cdot s + \lambda_1}{(c3(p) + s \cdot c4(p))} \right) \cdot \theta
 \end{aligned}$$

(3.47)

e resolvendo para o membro da direita tem-se :

$$\begin{aligned}
 & \left(1 - [c1(p) \ c2(p) \ c3(p) \ c4(p)] \cdot \frac{s^2 + \lambda_2 \cdot s + \lambda_1}{1} \right) \cdot \theta = \begin{bmatrix} s + \lambda_2 & 1 & 0 & 0 \\ -\lambda_1 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s + \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda_1 & s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} [c1(p) \ c2(p) \ c3(p) \ c4(p)] \cdot \frac{s^2 + \lambda_2 \cdot s + \lambda_1}{1} \\ c1(p) \ c2(p) \ c3(p) \ c4(p) \\ s \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \theta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 & = \frac{(c1(p) + s \cdot c2(p))}{s^2 + \lambda_2 \cdot s + \lambda_1} \cdot T
 \end{aligned}$$

(3.48)

Igualando-se as equações (3.47) e (3.48), tem-se :

$$(3.49) \quad (c1(p) + s \cdot c2(p)) \cdot T = (s^2 + \lambda_2 \cdot s + \lambda_1 - c3(p) - s \cdot c4(p)) \cdot \theta$$

Comparando-se a equação (3.49) com (3.40), para que estas duas equações tenham a

mesma função de transferência, chega-se a conclusão que :

$$C(p) = [p \ 0 + \lambda_1 + \lambda_2] \quad e \quad C(\hat{p}) = [\hat{p} \ 0 + \lambda_1 + \lambda_2] \quad (3.50)$$

Assim, o algoritmo de identificador torna-se:

$$e_r = C(\hat{p}) \cdot x_{I_t} - \theta \quad (3.51)$$

$$e_r = [\hat{p} \ 0 \ \lambda_1 \ \lambda_2] \cdot x_{I_t} - \theta$$

e o algoritmo do sintonizador, utilizando-se o método do gradiente, torna-se:

$$\dot{\hat{p}} = -g_r \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot x_{I_t} \cdot e_r \quad (3.52)$$

onde g_r é o ganho do sintonizador, isto é, a velocidade de adaptação do sistema.

Dessa maneira, a massa m_p , pode ser estimada, sendo:

$$\hat{p} = \frac{I_{Total}}{1} = \frac{I_H + p \cdot \frac{\xi}{I_3} + m_p \cdot I_2}{1}$$

assim,

$$\hat{m}_p = \frac{I_2}{\left(\frac{\hat{p}}{I_3} - I_H - p \cdot \frac{\xi}{I_3} \right)} \quad (3.53)$$

3.4 CONCLUSÕES

Através da verificação de que as equações são lineares no estado θ e para o

parâmetro $\frac{1}{I_{Total}}$, mostrou-se possível a construção de um sistema de equações que

puderam ser colocadas na *forma de regressor*, isto é, em uma equação linear nos

parâmetros desconhecidos da planta. Através de um identificador de ordem $2n$ e um

sintonizador construído a partir do método do gradiente, mostrou-se que o erro de

identificação tende para zero se os parâmetros identificados forem corretos.

Mostrou-se também, que a lei de ajuste dos parâmetros do sintonizador, pode ser construída através do método dos mínimos quadrados. Porém, o algoritmo desenvolvido para o método do gradiente, mostrou-se menos complexo.

Capítulo 4

SIMULAÇÃO EM COMPUTADOR

4.1 DINÂMICA DO BRAÇO FLEXÍVEL

O modelo descrito no capítulo 2 foi simulado em computador utilizando-se o

programa MatLab/Simulink[®] para o seguintes dados da barra :

- Material : Alumínio

densidade : $d = 2710 \text{ Kg/m}^3$

Módulo de Young : $E = 71 \text{ GPa}$

- Dimensões (L x b x h) : $0.70 \times 0.0254 \times 0.001 \text{ m}$

- Momento de Inércia do Cubo : $I_H = 7.87.10^{-3} \text{ Kg.m}^2$

Para a validação do modelo analítico, utilizou-se o aparato experimental, visto na

figura 4.1, construído no Departamento de Engenharia Mecânica da USP. Neste sistema

tem-se uma barra flexível de alumínio, ligada a um motor de corrente contínua por meio de

um cubo metálico. Na figura 4.2, mostra-se o esquema detalhado da barra flexível.

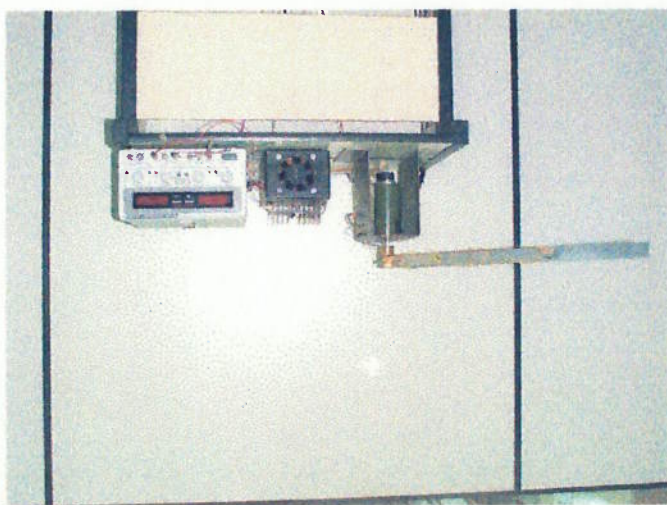


Fig. 4.1 - Aparato experimental da barra flexível

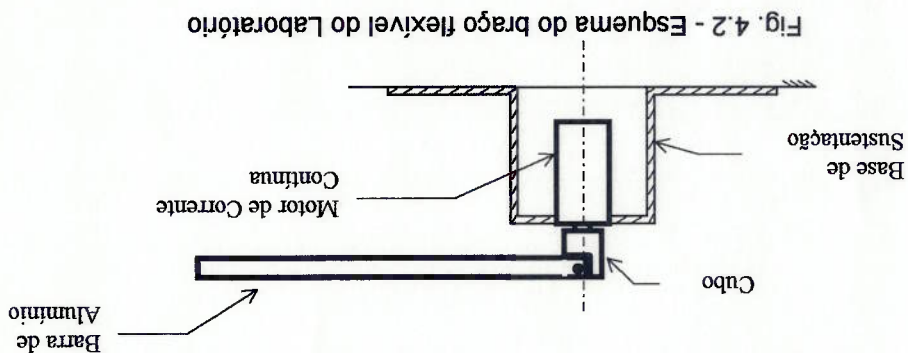


Fig. 4.2 - Esquema do braço flexível do laboratório

Assim, através do modelo matemático, foram obtidas as frequências naturais dos primeiros quatro modos de vibrar que estão indicadas na tabela 01. Nesta tabela tem-se as frequências naturais sem massa na ponta da viga e com um massa $m_p = 0.1 \text{ kg}$. Além disso mostra-se as frequências naturais obtidas através do arranjo experimental da figura 4.1.

Tabela 01 - Frequências Naturais da Simulação e Experimentais - $m_p = 0.1 \text{ kg}$.

Modo	ω (rad/s) - m_p	f (Hz) - m_p	f (Hz)	Freq. Exp.
1º modo	27.7146	4.4109	6.1047	6.25
2º modo	88.6403	14.1075	15.8082	15.75
3º modo	168.0363	26.7438	29.5922	31.37
4º modo	308.6040	49.1159	53.4288	-

As discrepâncias entre as frequências naturais do modelo analítico e experimentais são da ordem de 5%. No gráfico 4.3 tem-se as funções de forma da viga para os quatro primeiros modos de vibração para uma massa de $m_p = 0.1 \text{ kg}$.

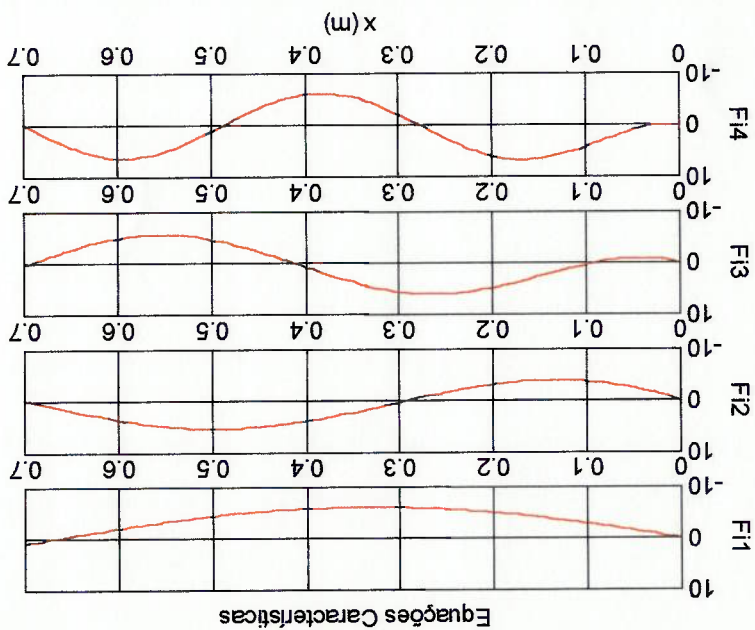


Fig. 4.3 - Funções de Forma da Viga (4 modos) - $m_p = 0.1 \text{ Kg}$

Para a verificação da dinâmica da viga flexível, foi feita uma simulação em Simulink®. Para uma entrada tipo degrau, com a referência $\theta_{ref} = 15^\circ$ (Figura 4.5), simulou-se o sistema para várias massas na ponta da viga. A figura 4.4 exibe o sistema simulado. Verifica-se da figura 4.6 que na medida em que se aumenta a massa na ponta da viga, tem-se um atraso na resposta do sistema. Além disso, devido ao fato de que o sistema está sempre acelerado, a média das vibrações na ponta do braço são negativas, ou seja, a deformação na ponta da barra está sempre em sentido contrário aos valores positivos do referencial flutuante.

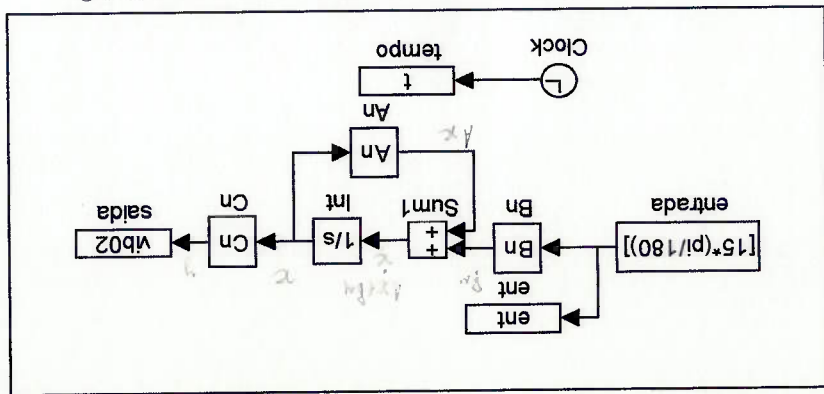


Fig. 4.4 - Esquema da dinâmica do braço no Simulink®

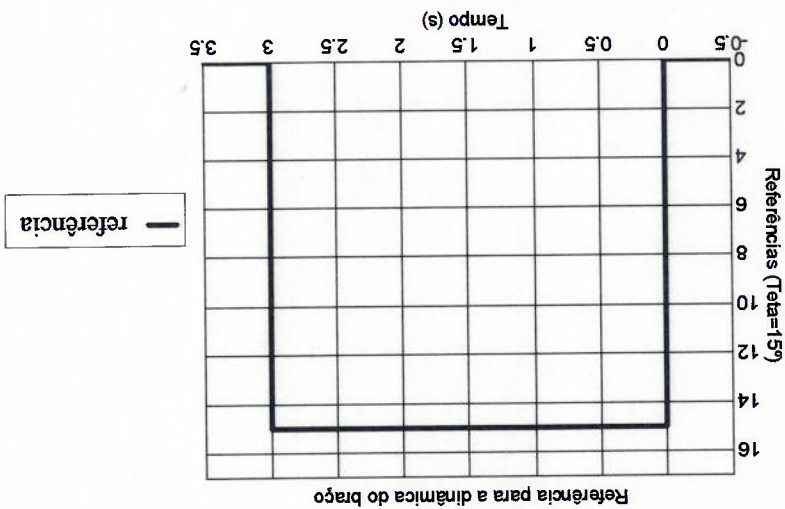


Fig. 4.5 - Entrada Tipo Degrau em $\theta_{ref} = 15^\circ$

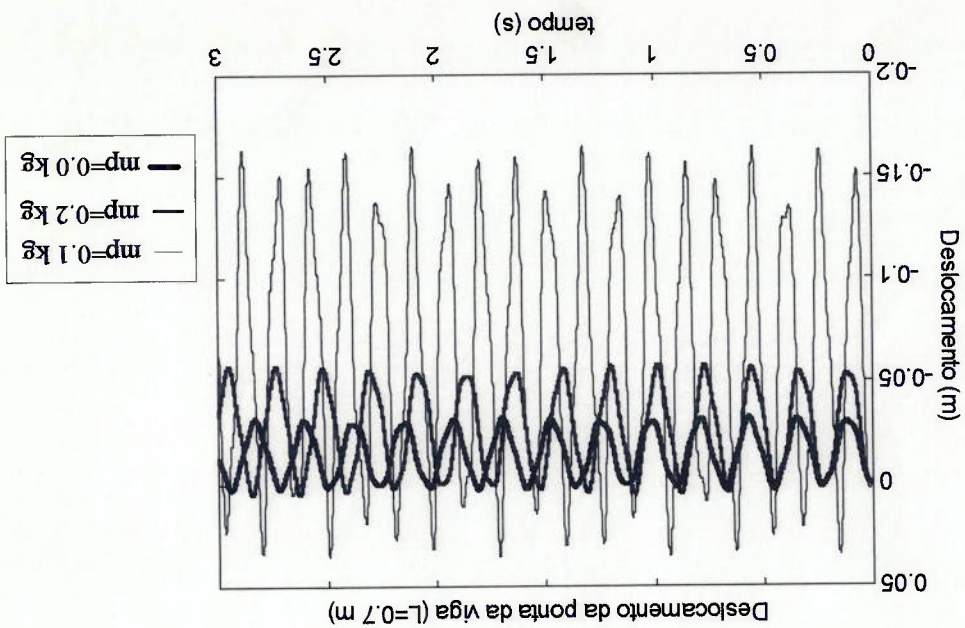


Fig. 4.6 - Vibração na ponta da Viga para entrada em degrau

4.2 SIMULAÇÃO DO CONTROLE POR ALOCAÇÃO DE PÓLOS

Partindo-se das matrizes A, B, e C do sistema apresentado no Capítulo 2, calcula-se as matrizes de Controlabilidade (Co) e Observabilidade (Ob). Verifica-se que o posto destas duas matrizes são: $\text{posto}(Co) = \text{posto}(Ob) = 6$. Assim, a planta é completamente controlável e observável pelo estado. Portanto pode-se utilizar o método de alocação de polos junto com um observador de estados para este sistema.

Para a simulação do controle por alocação de polos, considerou-se várias massas na ponta da viga. A simulação foi realizada utilizando-se o programa Simulink®. O esquema da simulação do controle por Alocação de Polos, encontra-se descrito na figura 4.7.

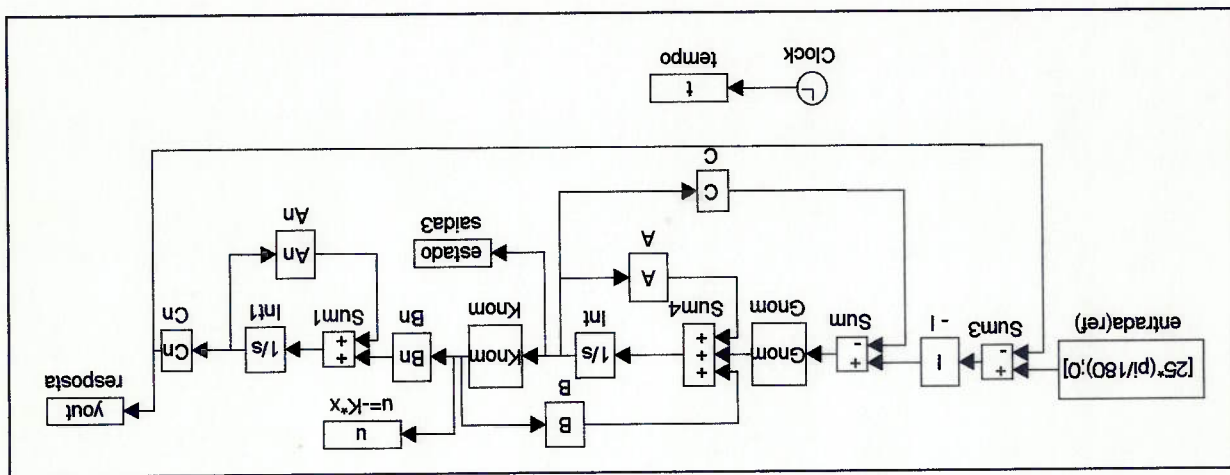


Fig. 4.7 - Esquema do Controle por Alocação de Polos no Simulink®

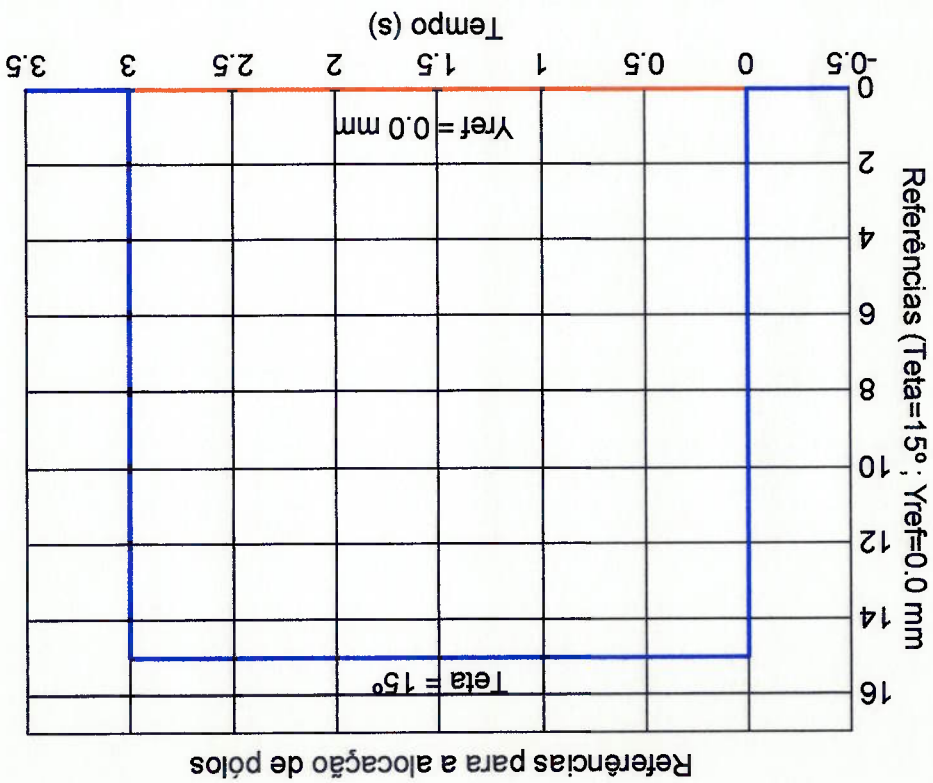
Para uma entrada tipo degrau, descrita pela figura 4.8, tem-se as várias respostas para o sistema do braço flexível, variando-se a massa na ponta. Para uma primeira análise, faz-se a simulação com a referência dada por: $\theta_{ref} = 25^\circ$ e $X_{rel} = 0 \text{ mm}$, onde θ_{ref} representa a referência para a posição angular e X_{rel} a referência para o deslocamento na ponta do braço.

Os polos de malha fechada forma escolhidos, através de dois polos dominantes, de tal forma que a resposta tivesse um sobresinal máximo de 10% e um tempo de acomodação de $t=1s$. Assim, os seis polos escolhidos foram:

$$p = [-5 -7 -8+42i -8-42i -20+110i -20-110i];$$

$$q = [-20.3 -21.3 -25+42i -25-42i -30+110i -30-110i];$$

As respostas para estes polos são mostradas nas figuras abaixo.



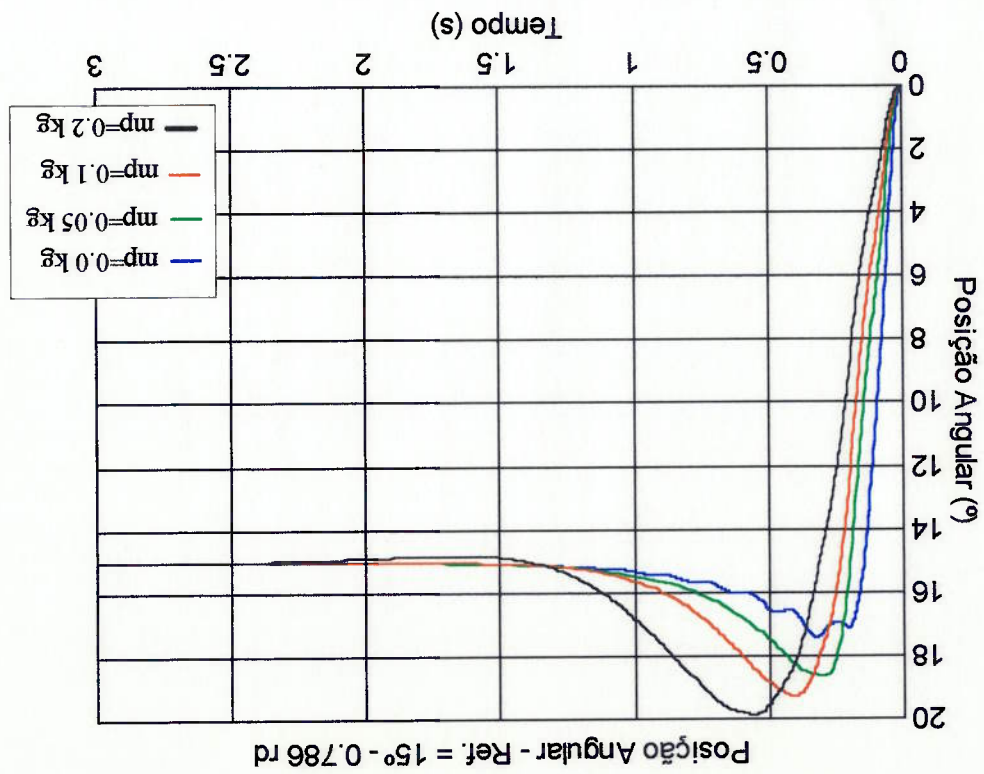


Fig. 4.9 - Posição angular da alocação de pólos - Referência = 15°

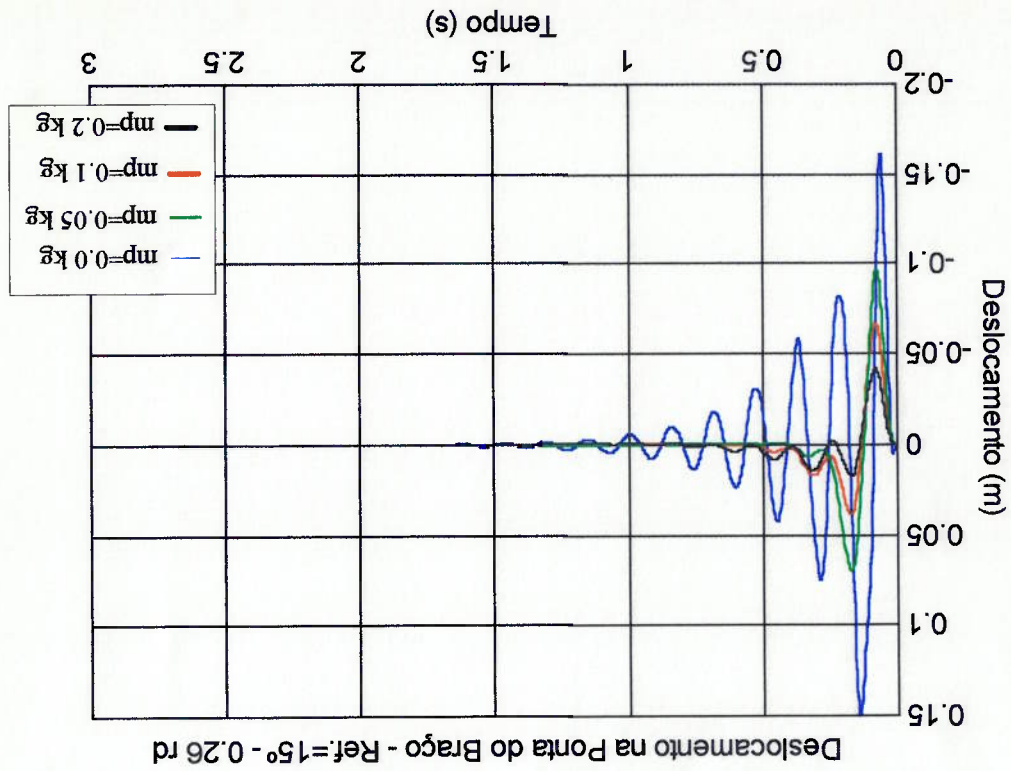
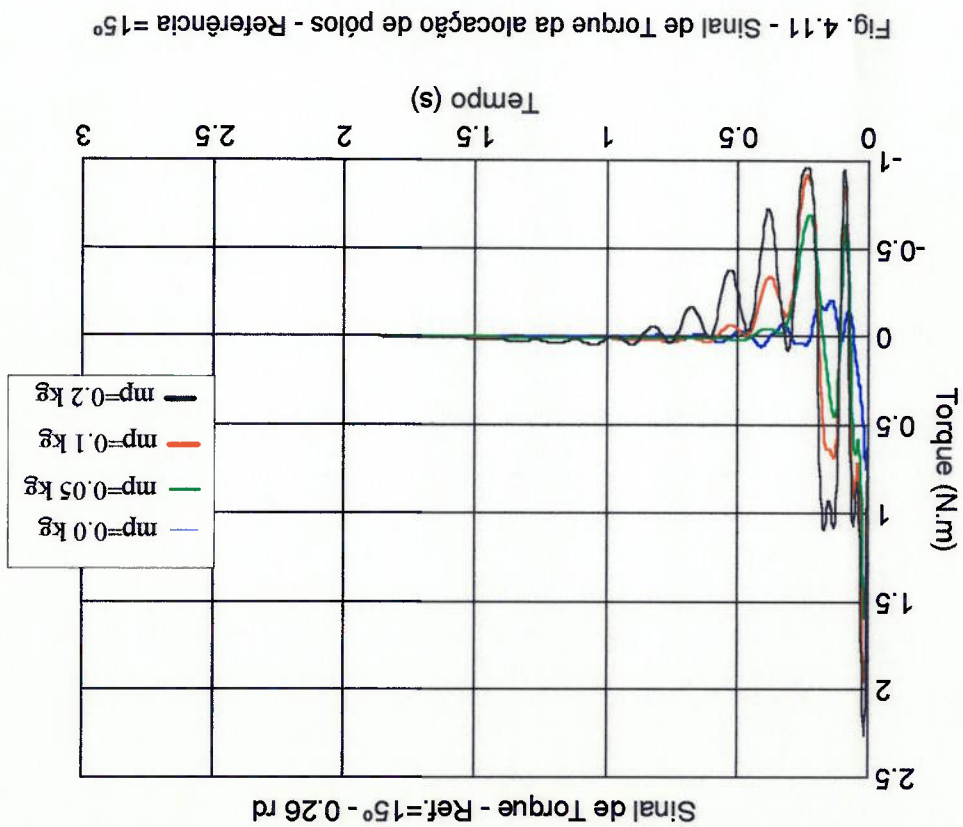


Fig. 4.10 - Deslocamento na ponta da viga da alocação de pólos - Referência = 15°

Através da análise dos gráficos acima, verifica-se que em um sistema com controle sem aprendizado, como a alocação de pólos, a dinâmica do sistema fica modificada para variações de seus parâmetros, tais como, a massa na ponta do braço. Para a verificação da estabilidade do sistema para grandes variações no ângulo de rotação, simulou-se o sistema de alocação de pólos para um degrau dado em $\theta_{ref} = 45^\circ$ e $Y_{ref} = 0 \text{ mm}$. As respostas são mostradas abaixo.



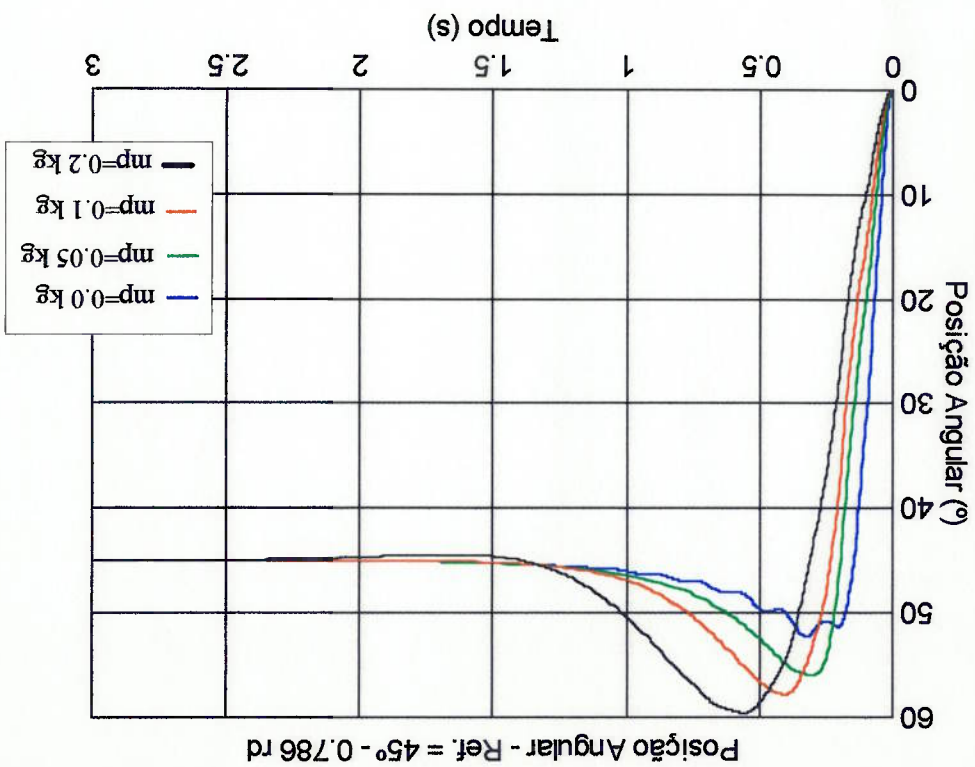


Fig. 4.12 - Posição angular da alocação de pólos - Referência = 45°

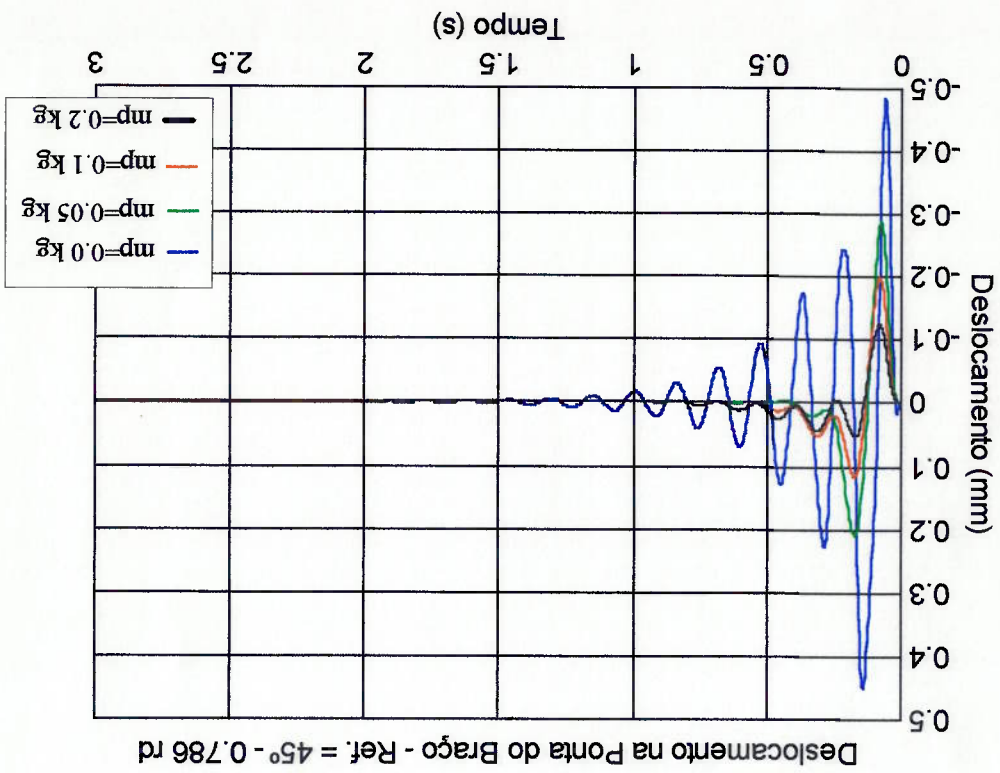
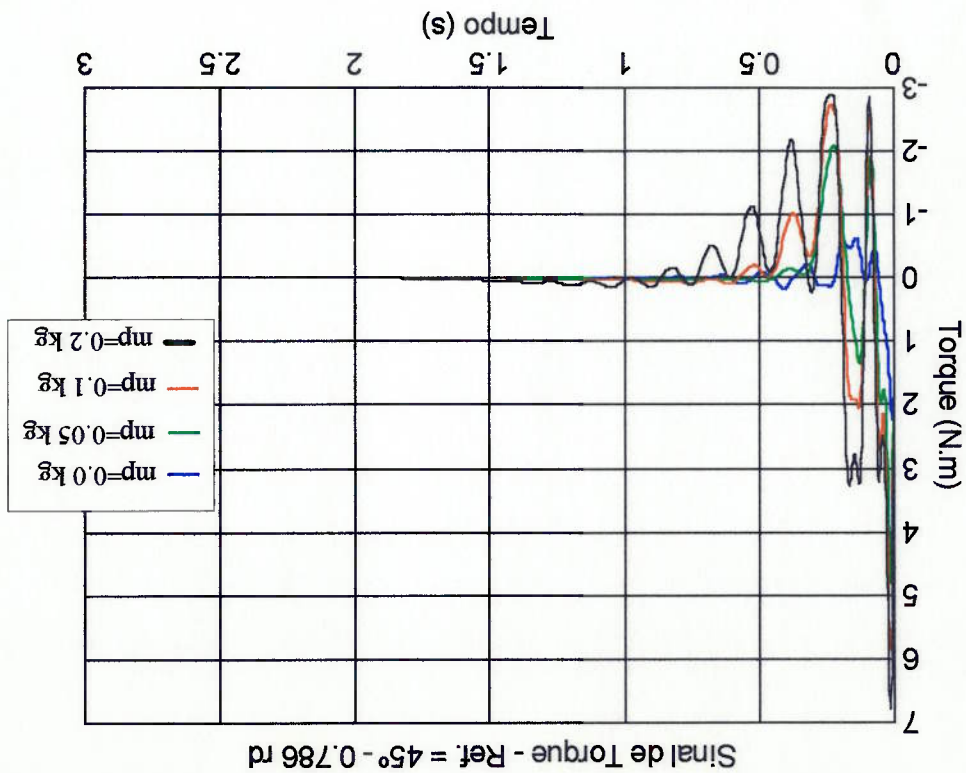


Fig. 4.13 - Deslocamento na ponta da viga da alocação de pólos - Referência = 45°

A ideia inicial seria projetar um controle por alocação de polos, onde a resposta do sistema estivesse dentro do especificado (sobre-sinal $< 10\%$ e tempo de acomodação < 1 s). Porém, verifica-se através da análise da figura 4.15, isto é, da localização dos polos e zeros do sistema em malha fechada, que este apresenta zeros nas vizinhanças de seus polos. Assim, com descrito em [OGA90] as hipóteses para a determinação da resposta do sistema através de polos dominantes não podem ser aplicadas. Portanto para determinar-se uma resposta de acordo com a especificação desejada, deveriam ser considerados os outros polos do sistema em malha fechada, e não somente os polos dominantes.



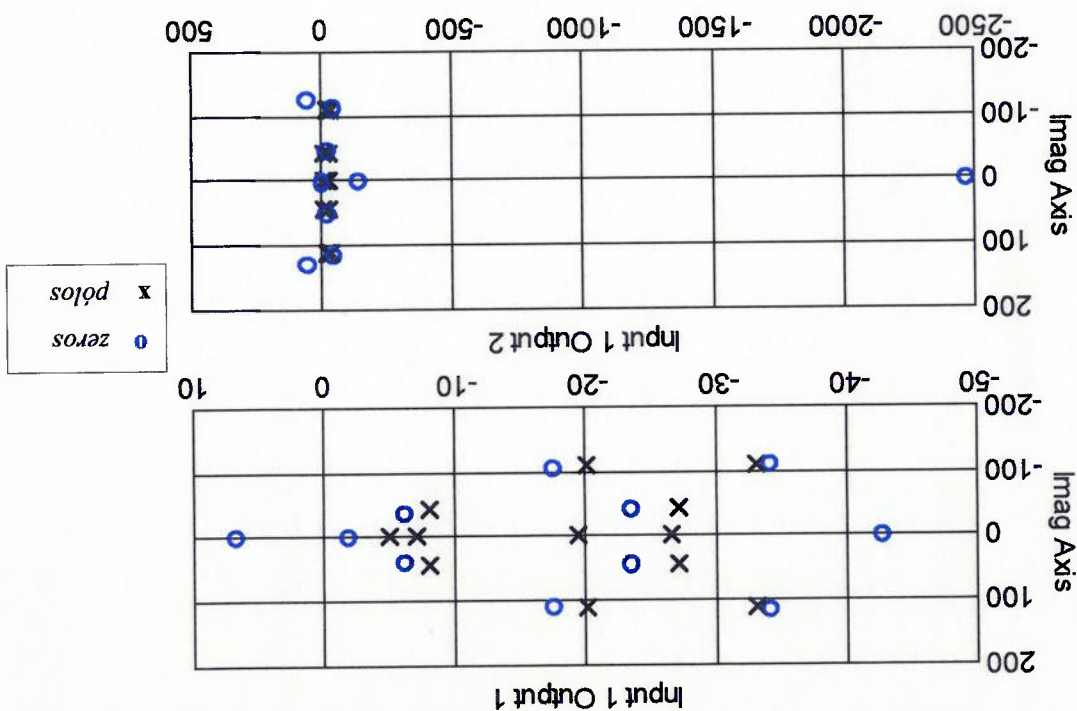
4.3 SIMULAÇÃO DO CONTROLE ADAPTATIVO

Para a simulação do controle Adaptativo utilizou-se o software Simulink[®]. Pode-se verificar a montagem do diagrama de blocos na figura 4.16.

Neste esquema, as matrizes A, B, C, K e G são atualizadas através do programa *update.m*, que é chamada através do bloco *calc*. O seu código pode ser visto no Apêndice D deste trabalho. Os valores das matrizes A_0 e b_0 (mostradas no Capítulo 3) foram escolhidas como:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}; \quad b_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{sendo } \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \text{ e } (A_0; b_0) \text{ um par controlável.}$$

Fig. 4.15 - Diagrama de polos e zeros do sistema em malha fechada
a) Entrada 1 e Saída 1 (θ); b) Entrada 1 e Saída 2 (γ)



Utilizando-se os mesmos valores de referência, as mesmas posições dos pólos que o controle por alocação de pólos, e partindo-se como valores iniciais para as matrizes A, B, C, D do observador, calculados com uma massa na ponta de $m_p = 0.1 \text{ kg}$, tem-se os gráficos abaixo para o controle adaptativo.

Para a simulação do controle adaptativo, utilizou-se um valor inicial do parâmetro a ser identificado de $p(\theta) = 10 \text{ (kg.m}^2\text{)}^{-1}$, pois, como descrito na seção 3.3.1 deste trabalho, sua escolha é arbitrária, dependendo somente do conhecimento *a priori* do sistema. Assim, esta condição, fornece um valor inicial para a massa na ponta da viga de $m_p = 0.18 \text{ kg}$, que representa um valor dentro da faixa de variação da carga do manipulador.

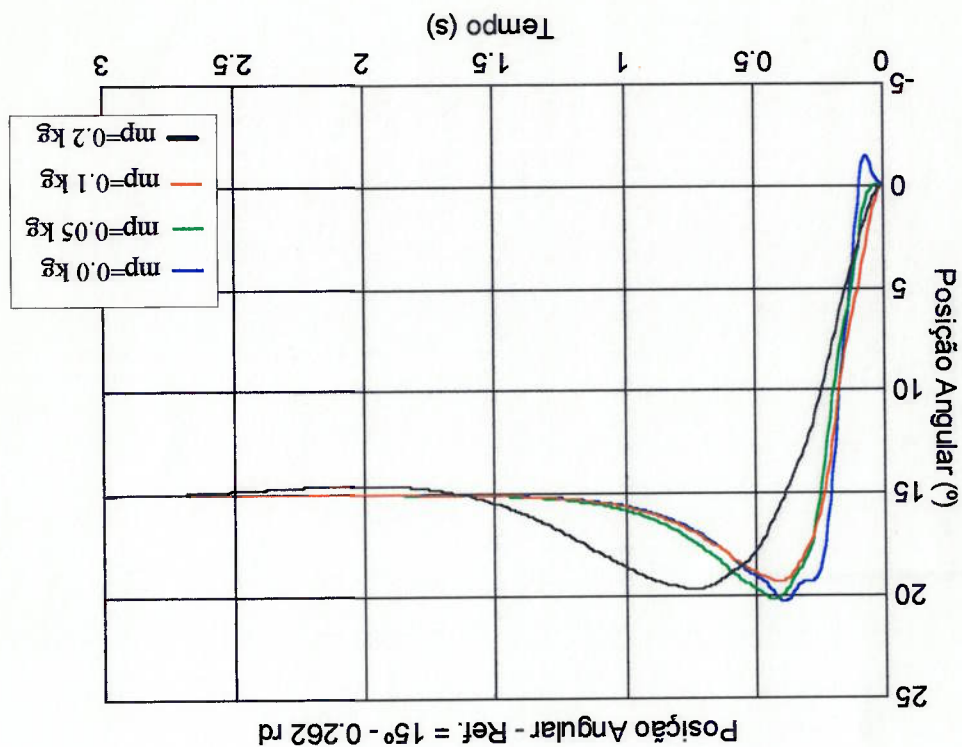


Fig. 4.17 - Posição angular do adaptativo - Referência = 15°

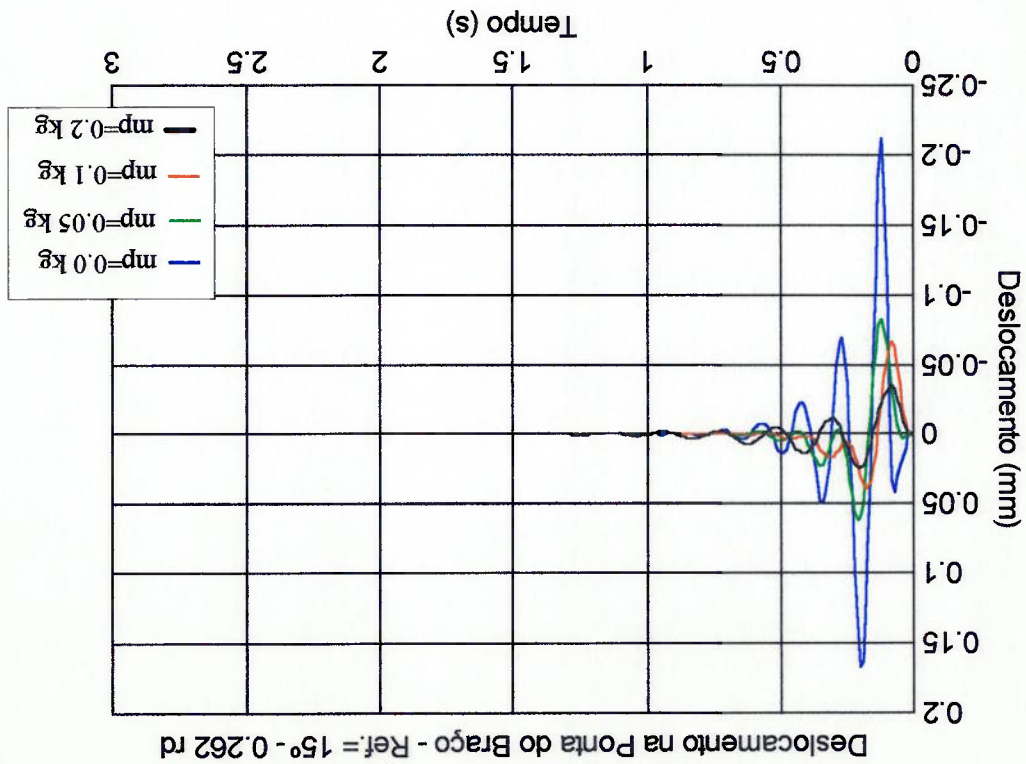


Fig. 4.18 - Deslocamento na ponta da viga do adaptivo - Referência = 15°

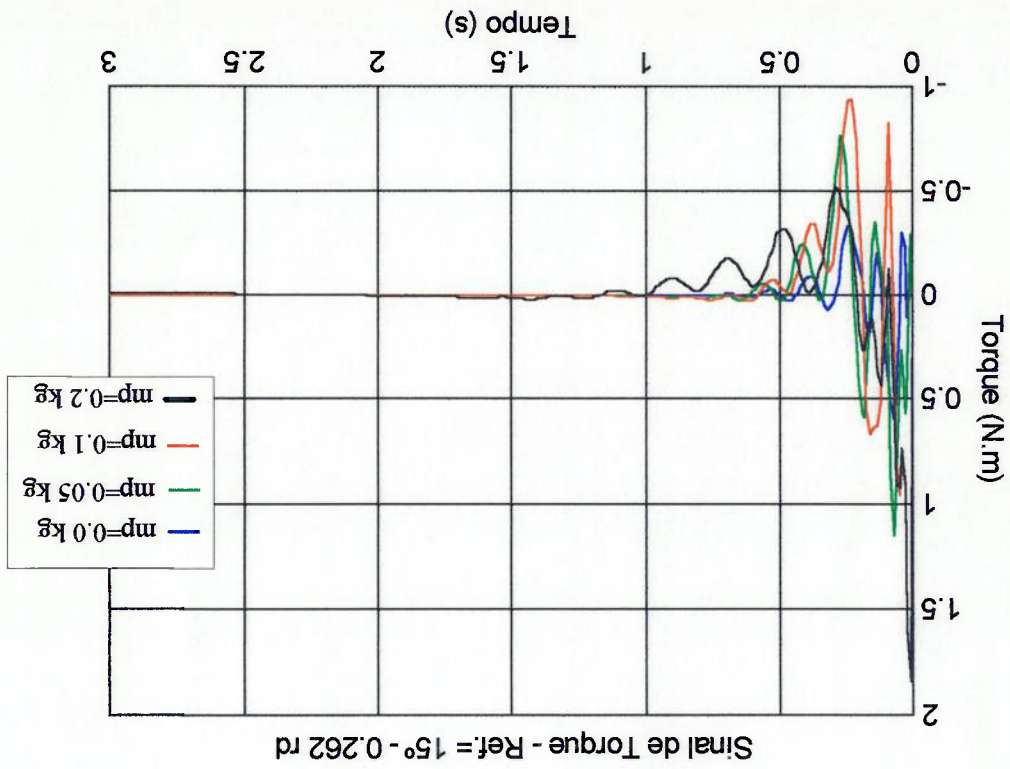


Fig. 4.19 - Sinal de Torque do adaptivo - Referência = 15°

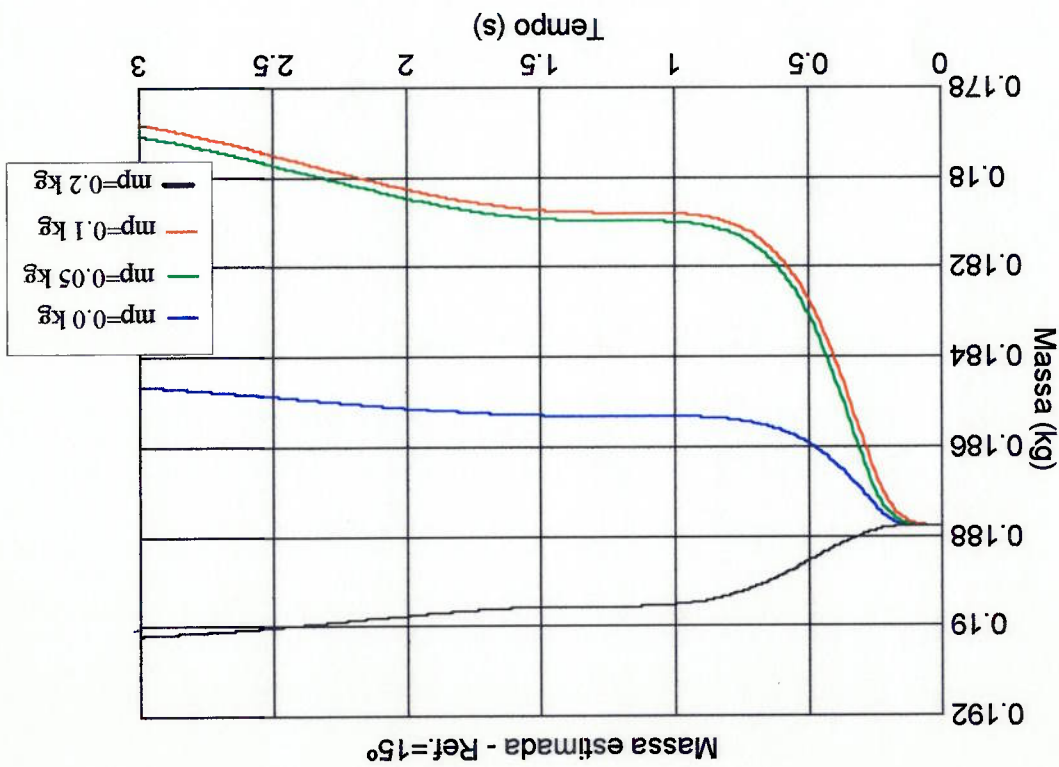


Fig. 4.20 - Massas Estimadas - Referência = 15°

Verifica-se dos gráficos acima que com a utilização de um controlador com aprendizado, neste caso, o controlador adaptativo auto-ajustável, as massas estimadas tendem para os seus valores nominais, apesar de ser lenta sua estimação. Além disso, no controle adaptativo, as respostas são mais lentas comparadas com o controle sem aprendizado. Porém, no sistema adaptativo as respostas são mais robustas em relação à variações de cargas no manipulador. Isto verifica-se comparando as figuras (4.09) e (4.17). Pode-se comparar as velocidades de adaptação do sistema de controle, mostrando-se em um gráfico duas curvas de massa estimadas. Em uma delas, utiliza-se a velocidade de adaptação de $g_T = 500$ e em outra uma velocidade menor de $g_T = 1$. Estes gráficos podem ser vistos nas figuras abaixo.

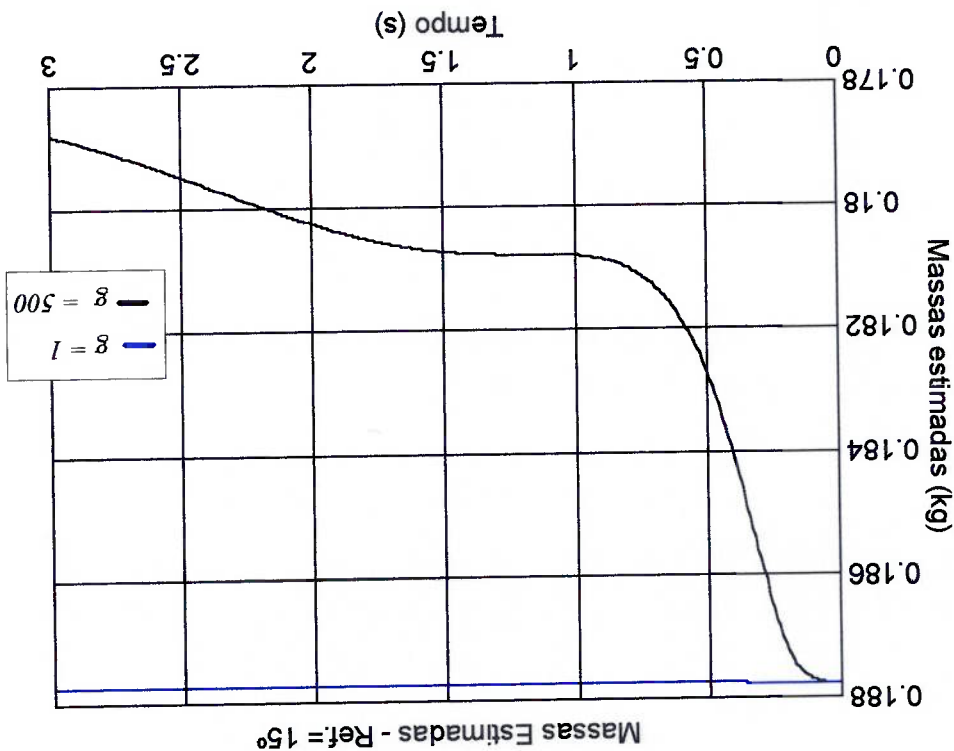


Fig. 4.21 - Massas Estimadas para duas velocidades de adaptação - Referência = 15°

Para a verificação do processo de aprendizado do sistema adaptativo, uma série de teste são feitos com respeito à variações da referência e dos parâmetros escolhidos do sistema de controle. Em primeiro lugar, simulou-se o sistema com uma entrada de referência como visto na figura 4.22. Pode-se verificar que com várias entradas do tipo degrau, o sistema apresentou uma melhora no processo de aprendizado, isto é, o tempo necessário para a convergência da massa estimada para o seu valor nominal foi menor. Porém, esta entrada não resultou em uma estimação adequada, pois, a massa ainda não atingiu o um valor conveniente (Fig. 4.24).

Além disso, através da mudança na escolha do parâmetro λ_1 e λ_2 das matrizes A_0 e b_0 do identificador, verifica-se também (figura 4.25), uma melhora na estimação do valor da massa na ponta do braço. Assim, propõe-se uma outra análise, para uma entrada com três degraus, como mostrada na figura 4.26.

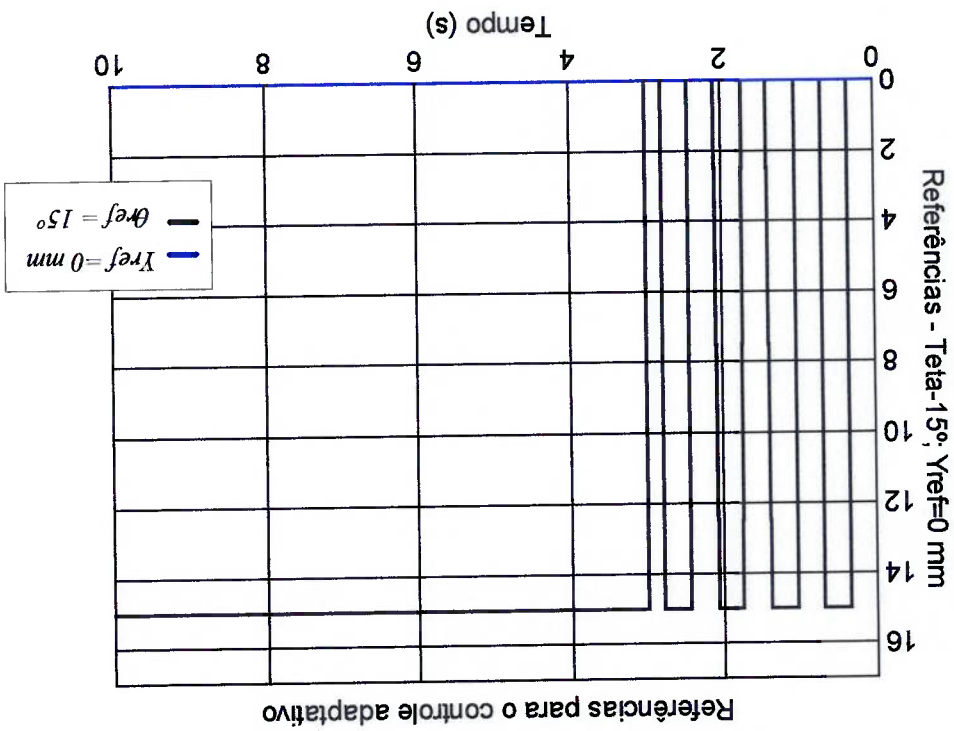


Fig. 4.22 - Referências para o controle adaptativo com vários graus

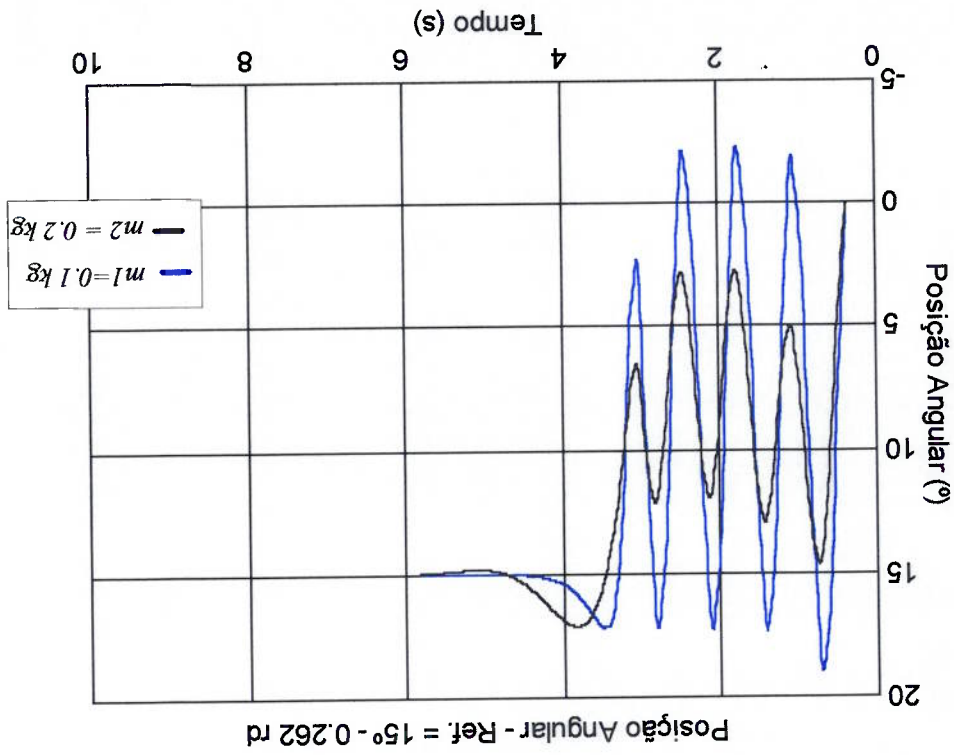


Fig. 4.23 - Posição angular do adaptativo - $m_1 = 0,1 \text{ kg}$ e $m_2 = 0,2 \text{ kg}$.

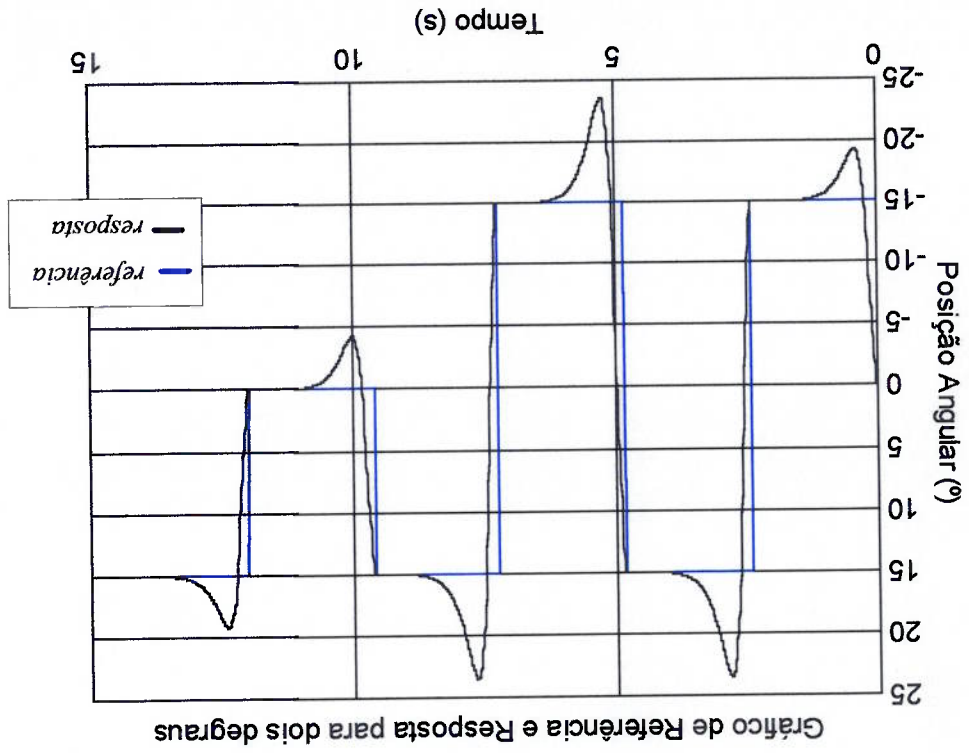


Fig. 4.25- Referência e Resposta da posição angular para entrada com 3 degraus.

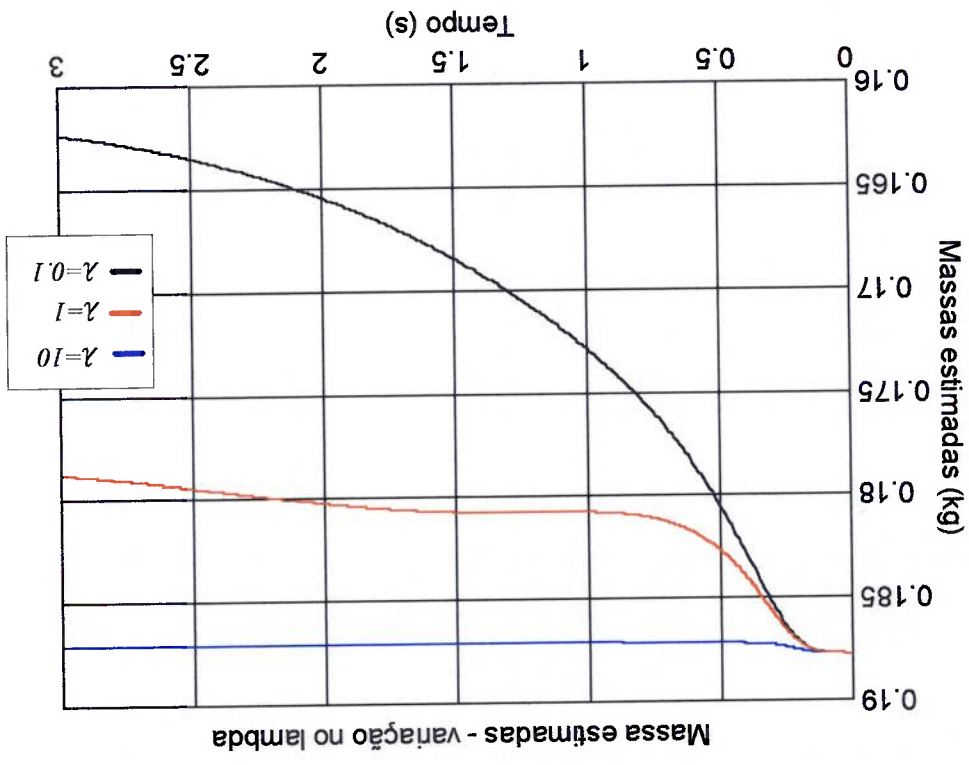


Fig. 4.24- Massas estimadas variação no parâmetro λ .

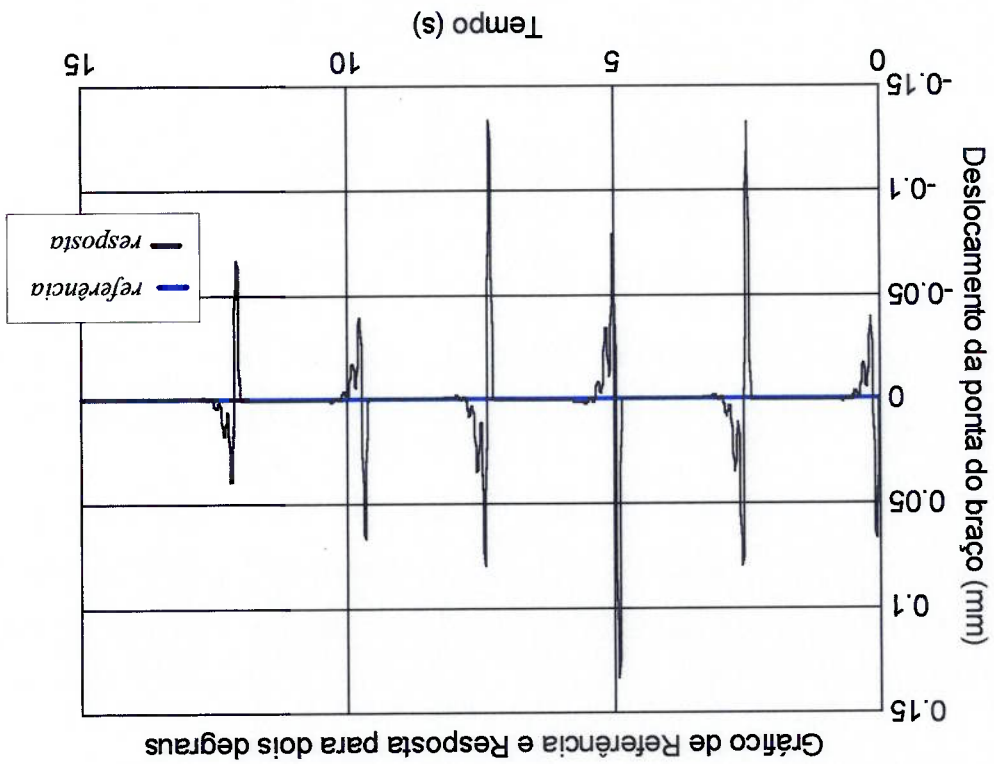


Fig. 4.26- Referência e Resposta do deslocamento da ponta para entrada com 3 degraus.

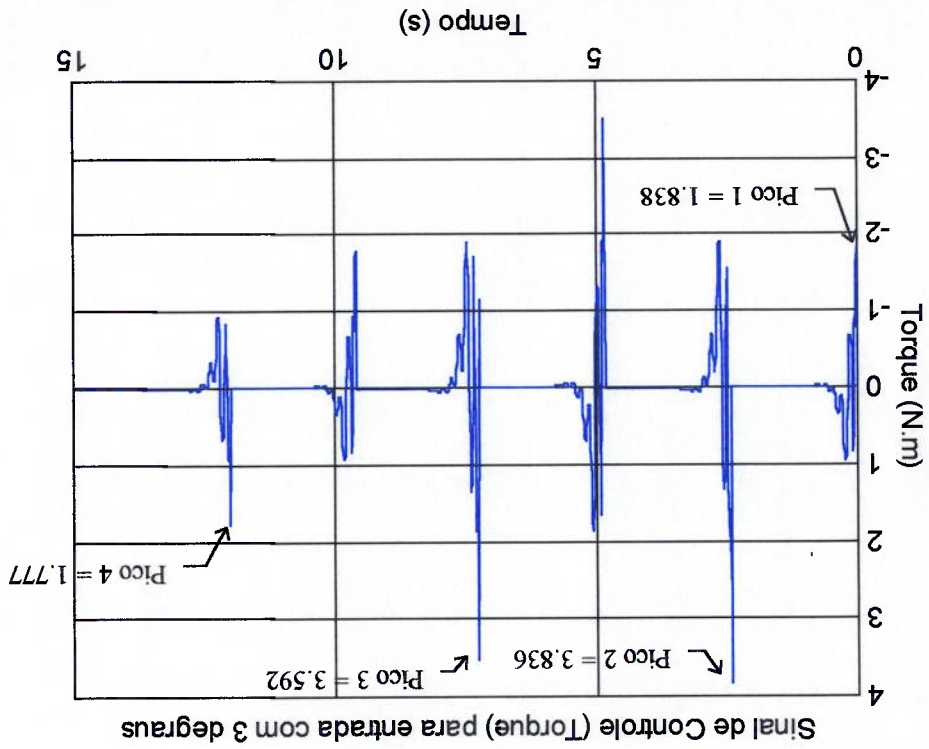
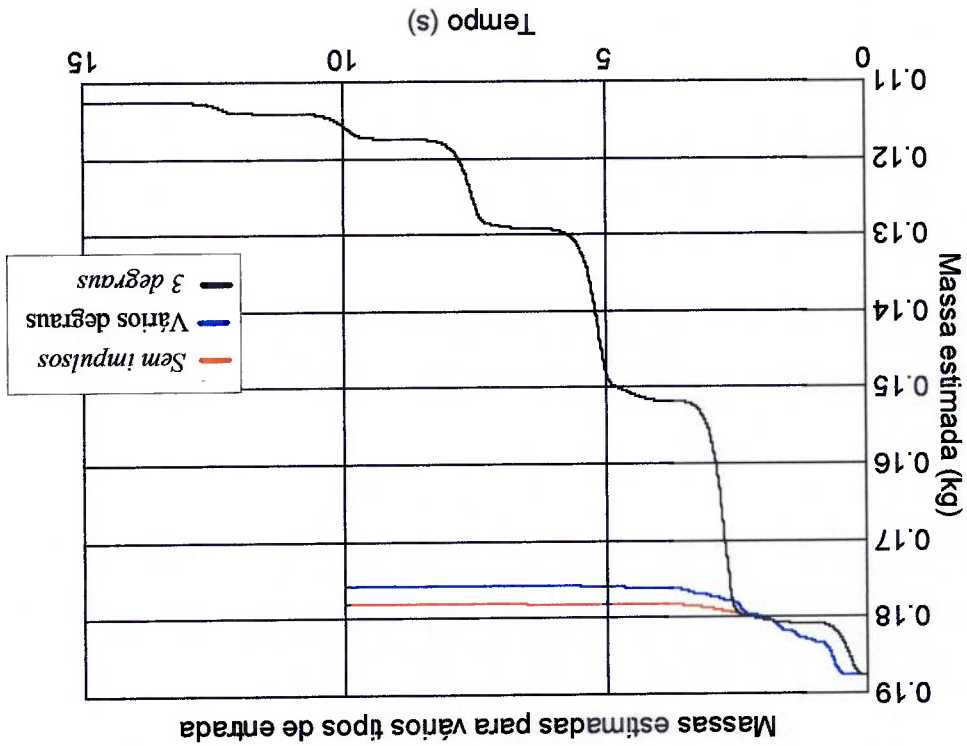


Fig. 4.27- Sinal de Controle - Torque - para entrada com 3 degraus

Analisando-se a figura (4.27), verifica-se uma diminuição no valor de pico do sinal de controle, isto é, no torque do motor aplicado ao braço flexível. Comparando-se, por exemplo, os picos 1 e 4, o torque no pico 4 é menor, para o mesmo desempenho do sistema em relação ao sobre-sinal máximo e tempo de acomodação da resposta da posição angular (Fig. 4.25). Apesar de o tempo para a identificação da massa na ponta do braço estar elevado (Fig. 4.28), verifica-se uma sensível melhoria em sua estimação com relação aos outros tipos de entrada. Pode-se concluir portanto, que o sistema adaptativo auto-ajustável, possui a característica de aprendizado, pois, ao longo do tempo, a massa na ponta da viga foi estimada para um valor próximo ao nominal, diminuindo o esforço de controle, e assim, diminuindo o gasto de energia do sistema.



Capítulo 5

CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS

5.1 CONCLUSÕES

Este trabalho constitui um primeiro passo no sentido da aplicação de técnicas avançadas de controle na solução dos problemas de posicionamento de manipuladores flexíveis com relação à variações de cargas por ele manipulados.

Para tanto, nesta dissertação, foi desenvolvido um modelo para braços mecânicos flexíveis com um grau de liberdade e o projeto do seu sistema de controle através da introdução de dois tipos de controladores: sem aprendizado (Alocação de Pólos) e com aprendizado (Adaptativo).

O modelo analítico do braço mecânico foi desenvolvido com a utilização de um referencial flutuante (*Tisserand Frame*) que se move junto o braço. Com o uso deste referencial, verifica-se que as equações linearizadas da dinâmica do sistema flexível são desacopladas em relação ao modo rígido. Além disso, as equações da dinâmica do braço possuem termos não lineares de menor magnitude com respeito a este referencial e, portanto a linearização é um pouco mais precisa.

O uso de um referencial flutuante permite o emprego das autofunções da EDP (Equação Diferencial Parcial) diretamente no sistema de controle, com vantagens na fase de escolha de posição de sensores e atuadores já que os efeitos dos atuadores (neste caso o

torque no cubo do braço) sobre cada modo natural são representados por um único número escalar, gerando assim, um índice utilizável na decisão do posicionamento destes atuadores. Boa concordância foi encontrada entre os parâmetros modais do modelo analítico e do modelo experimental do manipulador, mais especificamente, frequências naturais e funções de forma.

Antes da implementação do controle adaptativo, implementou-se o controle em malha fechada por alocação de pólos. Verificou-se que o desempenho deste controlador varia para diferentes cargas na ponta do braço flexível. Propõe-se, assim, o uso de um controlador com aprendizado (controlador adaptativo auto-ajustável). Além disso, devido à dinâmica do sistema em malha fechada apresentar zeros muito próximos de seus pólos, a localização adotada deste pólos para o controlador não forneceu uma resposta esperada, com sobressinais resultando maiores que o especificado. Um estudo mais detalhado a respeito do posicionamento de pólos e zeros deste sistema seria aconselhável.

O projeto do sistema de controle adaptativo baseou-se na utilização de um identificador de ordem $2n$, permitindo assim, a construção de uma equação algébrica simples para o cálculo da massa desconhecida, a partir da verificação de que as equações são lineares em relação o estado θ e para o parâmetro $\frac{1}{I_{Tot}}$. Portanto, o controle adaptativo foi capaz de identificar a variação de massa na ponta da estrutura, mostrando em simulação numérica, livre de ruído, a sua viabilidade física e robustez à variações de carga.

Apesar deste projeto não ser otimizado, muitas vantagens foram conquistadas, principalmente no que se refere à construção de um algoritmo simples para a identificação da massa. Além disso, o controle adaptativo auto-ajustável permite uma flexibilidade quanto à escolha da técnica de projeto para o regulador. Assim, poderia ser implementado uma

técnica de controle ótimo ou um do tipo PID para gerar as respostas dentro das especificações desejadas.

A utilização de um algoritmo adaptativo efetivamente identificou a massa e reduziu o sinal de controle, mantendo-se a localização dos pólos e zeros de malha fechada. Ilustrou-se algumas vantagens do controle adaptativo para o problema de controle de posição e vibração de manipuladores flexíveis

Mais do que atingir os objetivos propostos, este trabalho abre um caminho para novas pesquisas na área de modelagem e controle de estruturas flexíveis, estudos estes, importantes para aplicações em áreas como manobra de painéis solares, manipuladores industriais e espaciais, manobra de satélites, entre outros.

5.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

O assunto da modelagem e controle de estruturas flexíveis tem sido muito estudados nos últimos anos e encontram-se diversos temas de pesquisas nesta área. Neste item colocam-se algumas idéias e propostas para possíveis trabalhos futuros que surgiram ao longo da execução desta dissertação.

5.2.1 Otimização dos parâmetros do controlador

Através do uso de uma lei dos mínimos quadrados, pode-se otimizar os parâmetros do controlador, bem como o ganho do sintonizador. Além disso, pode-se construir um sistema através da técnica de controle adaptativo robusto, principalmente para a verificação da variação de cargas na ponta do braço flexível.

5.2.2 Inclusão de um modelo de atrito no motor ligado ao cubo.

Para a implementação deste sistema de controle no experimento da bancada montada no Departamento de Engenharia Mecânica da USP, seria interessante desenvolver um modelo de atrito para a sua compensação, já que atualmente o sistema montado apresenta problemas de atrito no motor elétrico, o que poderia prejudicar a performance do controlador.

5.2.3 Implementação do sistema de controle

Uma etapa posterior à otimização dos parâmetros do controlador seria a implementação deste sistema de controle na bancada experimental do Depto. de Engenharia Mecânica. Para tal, seria necessário a implementação de um sistema de visão para a leitura do deslocamento da ponta do braço. Além disso, poderia ser desenvolvido um modelo que levasse em consideração o uso de atuadores piezocerâmicos.

5.2.4 Modelamento do manipulador com mais de dois graus de liberdade

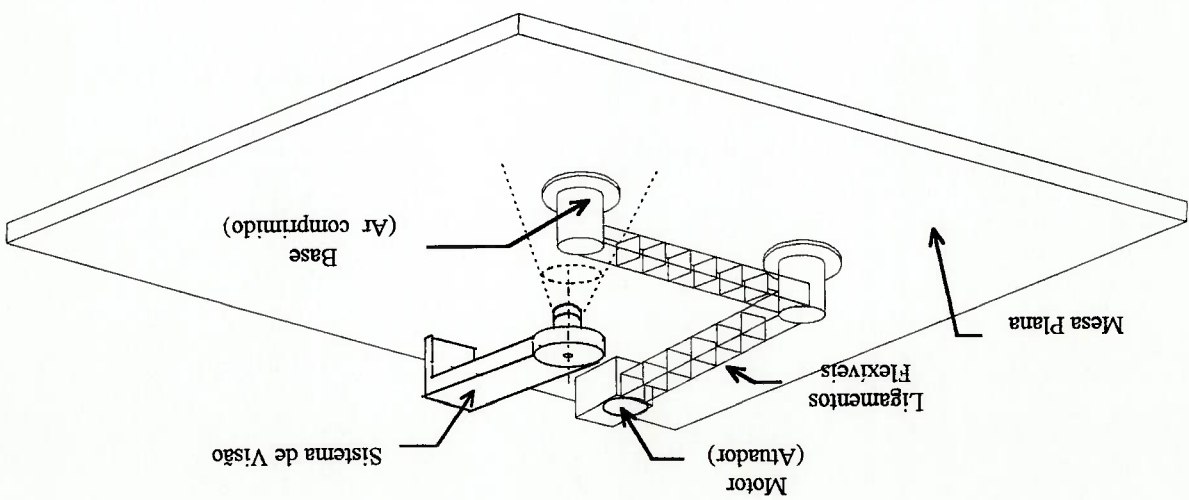
Em [JUN93], mostra-se a influência dos termos não lineares na estabilidade do controlador. Assim, um proposta para um próximo trabalho seria o desenvolvimento de modelos que levassem em conta os termos não lineares, verificando a influência de desconsideração na estabilidade do sistema em malha fechada.

Para tal seria interessante modelar um manipulador com mais de uma grau de liberdade, utilizando-se outras técnicas. Para um sistema com dois graus de liberdade pode-se utilizar o seguinte esquema.

O sistema apresentado na Fig. 5.1, consiste de dois ligamentos flexíveis feitos por duas tiras paralelas de alumínio, separadas por pontes também de alumínio. Esta estrutura poderá flutuar livremente no plano horizontal, porém seu movimento será restrito nos planos verticais e torsionais.

Este sistema será controlado por dois motores de corrente contínua acoplados na ponta fixa do primeiro braço (1ª junta) e na segunda junta. Ao final do segundo braço será montado um dispositivo de mudanças de cargas. Para não levar em consideração os efeitos da gravidade e do atrito, o sistema será montado sobre suportes que permitam a entrada de ar comprimido, formando-se um colchão de ar entre a base do braço e a mesa a ele ligada.

Fig.5.1 - Esquema do aparato experimental proposto



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [AST80] ASTROM, K. J. Self-tuning regulators : design, principles and applications. In: NARENDRA, K.S.; MONOPOLI. *Applications of adaptive control*. New York, Academic Press, 1980.
- [AST83] ASTROM, K. J. Theory and applications of adaptive control : a survey. *Automatica*, v. 19, n. 5, p.471-86, Feb, 1983.
- [AST89] ASTROM, K. J., WITTENMARK, B. *Adaptive control*. Reading, Addison-Wesley, 1989.
- [BAL78] BALAS, M. J. Feedback controls of flexible systems. *IEEE Transaction on Automatic Control*, v. 23, n. 4, p.473-679, 1978.
- [BAR88] BARBIERI, E.; OZGUNER, U. Unconstrained and constrained mode expansions for a flexible slewing link. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, v. 110, n. 4, p.416-421, Dec., 1988.
- [BAY89] BAYO, E. Timoshenko Versus Bernoulli-Euler beam theories for the inverse dynamics of flexible robots. *International Journal of Robotics and Automations*, v.4, n. 1, p.53-56, 1989.
- [BEE81] BEER, F.P.; JOHNSTON JR, E.R. *Mecânica vetorial para engenheiros : dinâmica*, 3.ed. São Paulo, McGraw-Hill, 1991, v.2.
- [BOO75] BOOK, W. J.; MAIZZA-NETO, O.; WHITNEY, D.E. Feedback control of two beam, two joint systems with distributed flexibility. *Journal of Dynamic Systems, Measure and Control*, v. 7, n.4, p.424-431, Dec., 1975.
- [BOO84] BOOK, W. J. Recursive lagrangian dynamics of flexible manipulator arms. *International Journal of Robotics Research*, v. 3, n. 3, p.87-101, 1984.
- [BOO90] BOOK, W. J. Modeling, design, and control of flexible manipulator arms : a tutorial review. In: **CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL**, 29th, Honolulu, 1990. *Proceedings*, Honolulu, s.ed., 1990, p.500-506.
- [CAN84] CANNON, R. H.; SCHMITZ, E. Initial experiments on the control of a flexible manipulator. *The International Journal of Robotics Research*, v.3, p.62-75, 1984.

- [CAN77] CANAVIN, J.R.; LIKINIS, P.W., Floating Reference Frames for Flexible Spacecraft. *Journal of Spacecraft*, v. 14, n. 12, p.724-732, Dec. 1977.
- [CHA93] CHANG MARK, SHIH-HSIAO. Pulse response based minimum time control of flexible structures. Texas, The University of Texas at Austin, 1993, Tese (Doutorado).
- [CRA68] CRAIG JR., R.R.; BAMPTON, M.C.C. Coupling of substructures for dynamic analysis. *AIAA Journal*, v.6, p.1313-1319, 1968.
- [CRA90] CRAIG JR., R.R.. *Structural dynamics: an introduction to computer methods*. New York, John Wiley, 1981.
- [DAM96] DAMAREN, C.J. Adaptive control of manipulators carrying large uncertain payloads. *Journal of Robotics Systems*, v.13, n.4, p.219-228, 1996.
- [FEL89] FELIU, V.; RATTAN, K.S.; BROWN Jr, H.B. Adaptive control of a single-link flexible manipulator in the presence of joint friction and load changes. In: *IEEE INT. CONF. ROBOTICS AUTOMATIONS*, Scottsdale, 1989. *Proceedings*. Washington, Computers Society, 1989, p.1036-1041.
- [GIL97] GILDIN, E.; MOSCATO, L.A.; GONZALES-LIMA, R. Desenvolvimento de um controlador adaptativo para manipuladores flexíveis com incertezas de cargas. In: *CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECÂNICA*, 14, Bauru, 1997. COBEM97, São Paulo, ABCM, 1997.
- [GOL72] GOLDENBERG, S.; SHAPIRO, M. A study of coupling procedures for the Space Shuttle. Bethpage, NASA, Grumman Aersp. Corp, NY, 1972.
- [GUP86] GUPTA, M.N. *Adaptive methods for control system design*. New York, Institute of Electrical and Electronics Engineering, 1986.
- [IHA86] HASTINGS, G.G.; BOOK, W.J. Verification of a linear dynamic model for flexible robotic manipulators, In: *IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON ROBOTICS AND AUTOMATION*, San Francisco, 1986. *Proceedings*, s.l., s.ed., p.1024-1029
- [ZHA86] HASTINGS G. G.; BOOK, W. J. Experiment in Optimal Control of a Flexible Arm, In: *IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON ROBOTICS AND AUTOMATION*, San Francisco, 1986. *Proceedings*, s.l., s.ed., p.1024-1029.
- [JUN93] JUNKINS, J.T., KIM, Y. *Introduction to dynamics and control of flexible structures*. Washington, AIAA, 1993.
- [LAN79] LANDAU, Y.D. *Adaptive control : the model reference approach*. New York, Marcel Dekker, 1979, 406p.

- [LEI77] LEITHOLD, L. O. *Cálculo com geometria analítica*. São Paulo, Harper Row do Brasil, 1977.
- [LOZ92] LOZANO R., BROGLIATO, B. Adaptive control of a simple nonlinear system without a priori information on the parameters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v.33, n. 1, January 1992.
- [IMB90] MEIROVITCH, L. *Computational methods in structural dynamics*, Alphen aan den Rijn Sijthoff, Noordhoff, 1980.
- [ZMB90] MEIROVITCH, L. *Dynamics and control of Structures*, New York, John Wiley & Sons, 1990.
- [MEL86] MELDRUM, D. R.; BALAS, M. J. Application of MRAC to a flexible remote manipulator arm. In: *AMERICAN CONTROL CONFERENCE*, 1986. *Proceedings*. Seattle, WA, 1986, v.2, p.825-832.
- [MEN88] MENQ, C.-H.; CHEN, J.S. Dynamic modelling and payload-adaptive control of a flexible manipulator. In: *AMERICAN CONTROL CONFERENCE*, 1988. *Proceedings*. s.n.t., p.488-493.
- [MOR83] MORSE, A.S., Recent problems in parameters adaptive control. In: Landau I.D., *Outils et modèles mathématiques pour l'automatique, l'analyse de systèmes et le traitement du signal*. Paris, Cnrs, 1983. v. 3, p.733-740.
- [MOR95] MORSE, A.S. MIMO Design models and internal regulators for cyclicly switched parameter-adaptive control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v.39, n. 9, September, 1994.
- [NIC86] NICOSIA, S.; TOMEI, P.; TORNAMBE. Dynamic modeling of flexible robot manipulators, In: *INTERNATIONAL IEEE CONF. ROBOTICS AND AUTOMATION*, San Francisco. *Proceedings*. s.l., s.ed., 1986, p.365-372.
- [OGA90] OGATA, K. *Engenharia de controle moderno*. Rio de Janeiro, Prentice Hall, 1993.
- [ROV88] ROVNER, D.M. Experiments in load-adaptive control of a very flexible one-link manipulator. *Automatica*, v.24, n.4, p.541-548, 1988.
- [SAS89] SASTRY, S.; BODSON, M. *Adaptive control : stability, convergence, and robustness*. New Jersey, Prentice-Hall, 1989.
- [TUR84] TURCIC, D.A.; MIDHA, A. Generalized equations of motion for the dynamic analysis of elastic mechanism systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, v. 106, n. 4, p.249-254, Dec., 1984.

- [YUA89] YUAN, B.S.; BOOK, W. J.; SICILIANO. Direct adaptive control of a one-link flexible arm with tracking. *Journal of Robotic Systems*, v. 6, n. 6, p.663-680, 1989.
- [YUA96] YUAN, K.; HU, CHEN-MENQ. Nonlinear modeling and partial linearizing control of a slewing Timoshenko-Beam. *Journal of Dynamics Systems, Measurement and Control*, v. 118, p.75-83, March 1996.
- [YUH86] YUH J.; HOLLEY, W. E. Discrete-time model reference adaptive control of a flexible link. In : **ASILOMAR CONF. ON SIGNAL, SYSTEMS, AND COMPUTERS, 20th**, Pacific Grove, CA, *Proceedings*, s.l., s.ed., 1986.
- [YUH87] YUH J. Application of discrete-time model reference adaptive control to a flexible single-link robot. *Journal of Robotic Systems*, v.4, n. 5, p.621-630, 1987.
- [WAN93] WANG, D. Comparison of controls strategies for the single flexible link. *Fields Institute Communications*, v.2, p.113-131, 1993.

Apêndice A

ALGÉBRAS LINEARES

Demonstrar que: Se A e B são dois vetores quaisquer em V_3 , então

$$|A \times B|^2 = |A|^2 \cdot |B|^2 + (A \cdot B)^2 \tag{A1}$$

Demonstração

Sejam $A = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ e $B = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, então,

$$|A \times B|^2 = (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 = a_2^2 b_3^2 - 2a_2 a_3 b_2 b_3 + a_3^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 - 2a_1 a_3 b_1 b_3 + a_3^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 + a_2^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2$$

(A2)

$$|A|^2 \cdot |B|^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 = a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_3^2 b_3^2 + 2a_1 a_2 b_1 b_2 + 2a_1 a_3 b_1 b_3 + 2a_2 a_3 b_2 b_3$$

(A3)

Comparando-se as expressões (A2) e (A3), conclui-se que :

$$|A \times B|^2 = |A|^2 \cdot |B|^2 + (A \cdot B)^2$$

Apêndice B

ENCURTAMENTO DA VIGA

Considerando-se a figura abaixo,

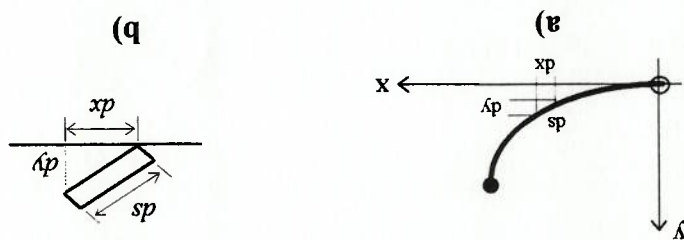


Figura B1 - Encurtamento da Viga - a) Viga; b) Elemento infinitesimal da viga

(B1) Define-se o encurtamento como sendo : $de = ds - dx$

onde ds é o incremento no comprimento da viga devido à flexão.

(B2) Da Figura B1b, tem-se : $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$

Substituindo a equação (B1) em (B2), vem

$$de = \sqrt{dx^2 + dy^2} - dx = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx - dx \quad (B3)$$

$$de = \int_x^0 \left[1 + y'^2\right]^{1/2} dx - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \int_x^0 \left[1 + y'^2\right]^{1/2} dx - 1 \cdot dx$$

Se $f(n)$ uma função qualquer, tem-se que:

$$f(n) = (1+n)^p \xrightarrow{\text{derivada}} f'(n) = p(1+n)^{p-1}$$

Da Expansão em Séries de Taylor, obtém-se :

$$f(n) + f'(n) \cdot (n - 0) + \left(\text{Termo de Ordem} > 2\right)$$

Desconsiderando os termos de ordem superior a dois, vem:

$$f(n) \equiv f(0) + f'(0) \cdot (n - 0)$$

(B4)

Utilizando-se esta expansão na equação (B3), vem :

$$\text{sendo } p = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f'(n) = \frac{1}{2}(1+n)^{-1/2}$$

Assim $f(y) \equiv 1 + \frac{1}{2}y^{1/2}$ que substituindo na expressão (B3), fornece:

$$e(x,t) = \int_x^0 \left[1 + \frac{1}{2}y^{1/2} \right] - 1 dx$$

$$\therefore e(x,t) = \frac{1}{2} \int_x^0 y^{1/2}(x,t) \cdot dx$$

(B5)

Apêndice C

LEMA DE INVERSÃO DE MATRIZ

Lema da inversão de matriz [AST89]

Seja A, C e $(C^{-1} + D \cdot A^{-1} \cdot B)$ matrizes quadradas não singulares, então :

$$(A + B \cdot C \cdot D)^{-1} = A^{-1} - A^{-1} \cdot B \cdot (C^{-1} + D \cdot A^{-1} \cdot B)^{-1} \cdot D \cdot A^{-1} \quad (C1)$$

Prova: Através de uma substituição direta, tem-se

$$\begin{aligned} (A + B \cdot C \cdot D)^{-1} &= A^{-1} - A^{-1} \cdot B \cdot (C^{-1} + D \cdot A^{-1} \cdot B)^{-1} \cdot D \cdot A^{-1} \\ &= I + B \cdot C \cdot D^{-1} - B(C^{-1} + D \cdot A^{-1} \cdot B)^{-1} \cdot D \cdot A^{-1} \\ &= I + B \cdot C \cdot D^{-1} - B \cdot C \cdot D^{-1} - B \cdot C \cdot D^{-1} + D \cdot A^{-1} \cdot B \cdot (C^{-1} + D \cdot A^{-1} \cdot B)^{-1} \cdot D \cdot A^{-1} \\ &= I + B \cdot C \cdot D^{-1} - B \cdot C \cdot D^{-1} - B \cdot C \cdot D^{-1} + D \cdot A^{-1} \cdot B \cdot (C^{-1} + D \cdot A^{-1} \cdot B)^{-1} \cdot D \cdot A^{-1} \\ &= I + B \cdot C \cdot D^{-1} - B \cdot C \cdot D^{-1} - B \cdot C \cdot D^{-1} + D \cdot A^{-1} \cdot B \cdot (C^{-1} + D \cdot A^{-1} \cdot B)^{-1} \cdot D \cdot A^{-1} \\ &= I \end{aligned}$$

Apêndice D

CÓDIGOS DOS PROGRAMAS EM MATLAB

1) DADOS.M

```
% PROGRAMA DE SIMULAÇÃO DO CONTROLADOR POR ALOCAÇÃO DE PÓLOS
%
% DESENVOLVIDO POR : EDUARDO GILDIN
% DATA : 1ªVER. DEZ/97 2ªVER. FEV/98
```

```
% DADOS DO SISTEMA MECÂNICO DO BRAÇO FLEXÍVEL
% DADOS DA BANCADA DO PROF. RAUL
% SIMULAÇÃO DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO
% EDUARDO GILDIN
```

% dados do sistema da barra

L=0.7; % Comprimento da Viga

b=0.0254; % Largura da Viga

ha=0.001; % Espessura da Viga

vol=L*b*ha; % Volume

%ro=massa por unidade de comprimento

m=2710*vol;

ro=m/L;

IH=1.29e-4;

% Inércia das partes rígidas móveis

I=(b*ha³)/12;

% Momento de inércia da Viga

E=6.3e10;

% Módulo de Elasticidade

2) FUNÇÃO UPDATE.M

```
function [A1, B1, C1, K1, G1]=update(me)
```

```
% PROGRAMA DE SIMULAÇÃO DO CONTROLADOR POR ALOCAÇÃO DE PÓLOS
% ALOCAÇÃO DE PÓLOS NOMINAL
```

```
% DESENVOLVIDO POR : EDUARDO GILDIN
```

```
% DATA : 1ªVER. DEZ/97 2ªVER. FEV/98
```

%

%Cálculo das autofunções

%Cálculo das autofunções com a massa na ponta

```
system_depend('14','on');
```

```
clear global A B C K G
% Definição das variáveis globais
global I me edu A1 B1 C1 G1 K1
% e locais
```



```

me=me;
dados
% Entrada dos dados da Barra
%Cálculo dos Betas(raízes da equação característica)
B1=fzero('massao',5.3);
B2=fzero('massao',8.7);
B3=fzero('massao',11.8);
B4=fzero('massao',16.0);
B5=fzero('massao',20.3);
A1=B1^4*(H/ro);
A2=B2^4*(H/ro);
A3=B3^4*(H/ro);
A4=B4^4*(H/ro);
A5=B5^4*(H/ro);
G1=B1^4*(me/ro);
G2=B2^4*(me/ro);
G3=B3^4*(me/ro);
G4=B4^4*(me/ro);
G5=B5^4*(me/ro);
%Cálculo dos w
w1m=sqrt(B1^4*E^1/ro);
w2m=sqrt(B2^4*E^1/ro);
w3m=sqrt(B3^4*E^1/ro);
w4m=sqrt(B4^4*E^1/ro);
w5m=sqrt(B5^4*E^1/ro);
% Valores de ar,br,cr,dr
% Resolver o seguinte sistema : A.X=0
A1=[0 1 0 1;A1 -B1 -sin(B1*L) -cos(B1*L) sinh(B1*L) cosh(B1*L)];
A2=[0 1 0 1;A2 -B2 -sin(B2*L) -cos(B2*L) sinh(B2*L) cosh(B2*L)];
A3=[0 1 0 1;A3 -B3 -sin(B3*L) -cos(B3*L) sinh(B3*L) cosh(B3*L)];
A4=[0 1 0 1;A4 -B4 -sin(B4*L) -cos(B4*L) sinh(B4*L) cosh(B4*L)];
A5=[0 1 0 1;A5 -B5 -sin(B5*L) -cos(B5*L) sinh(B5*L) cosh(B5*L)];
B1^3*cos(B1*L)+G1*sin(B1*L) B1^3*cos(B3*L)+G3*cos(B3*L)
B2^3*cos(B2*L)+G2*sin(B2*L) B2^3*cos(B4*L)+G4*cos(B4*L)
B3^3*cos(B3*L)+G3*sin(B3*L) B3^3*cos(B5*L)+G5*cos(B5*L)
B4^3*cos(B4*L)+G4*sin(B4*L) B4^3*cos(B1*L)+G1*cos(B1*L)
B5^3*cos(B5*L)+G5*sin(B5*L) B5^3*cos(B2*L)+G2*cos(B2*L)
B1^3*cos(B1*L)+G1*sin(B1*L) B1^3*cos(B2*L)+G2*cos(B2*L)
B2^3*cos(B2*L)+G2*sin(B2*L) B2^3*cos(B3*L)+G3*cos(B3*L)
B3^3*cos(B3*L)+G3*sin(B3*L) B3^3*cos(B4*L)+G4*cos(B4*L)
B4^3*cos(B4*L)+G4*sin(B4*L) B4^3*cos(B5*L)+G5*cos(B5*L)
B5^3*cos(B5*L)+G5*sin(B5*L) B5^3*cos(B1*L)+G1*cos(B1*L)
X1(4)=1;
X2(4)=1;
X3(4)=1;
X4(4)=1;
X5(4)=1;
B1=-1;-B1;-cosh(B1*L);-B1^3*sinh(B1*L)-G1*cos(B1*L);
B2=-1;-B2;-cosh(B2*L);-B2^3*sinh(B2*L)-G2*cos(B2*L);
B3=-1;-B3;-cosh(B3*L);-B3^3*sinh(B3*L)-G3*cos(B3*L);
B4=-1;-B4;-cosh(B4*L);-B4^3*sinh(B4*L)-G4*cos(B4*L);
B5=-1;-B5;-cosh(B5*L);-B5^3*sinh(B5*L)-G5*cos(B5*L);
X1(1:3)=A1(1:3)\B1(1:3);
X2(1:3)=A2(1:3)\B2(1:3);

```

```

X3(1:3)=A3(1:3,1:3)\B3(1:3);
X4(1:3)=A4(1:3,1:3)\B4(1:3);
X5(1:3)=A5(1:3,1:3)\B5(1:3);
X1=X1.;
X2=X2.;
X3=X3.;
X4=X4.;
X5=X5.;
%Cálculo dos modos de vibração (3 Primeiros)
dl=L/100;
xp=dl:L;
for cont=1:length(xp),
    F11(cont)=X1(1)*sin(Br1*xp(cont))+X1(2)*cos(Br1*xp(cont))+X1(3)*sinh(Br1*xp(cont))+X1(4)*
    cosh(Br1*xp(cont));
    F12(cont)=X2(1)*sin(Br2*xp(cont))+X2(2)*cos(Br2*xp(cont))+X2(3)*sinh(Br2*xp(cont))+X2(4)*
    cosh(Br2*xp(cont));
    F13(cont)=X3(1)*sin(Br3*xp(cont))+X3(2)*cos(Br3*xp(cont))+X3(3)*sinh(Br3*xp(cont))+X3(4)*
    cosh(Br3*xp(cont));
    F14(cont)=X4(1)*sin(Br4*xp(cont))+X4(2)*cos(Br4*xp(cont))+X4(3)*sinh(Br4*xp(cont))+X4(4)*
    cosh(Br4*xp(cont));
    F15(cont)=X5(1)*sin(Br5*xp(cont))+X5(2)*cos(Br5*xp(cont))+X5(3)*sinh(Br5*xp(cont))+X5(4)*
    cosh(Br5*xp(cont));
end
%normalização
F11=Br1*(X1(1)+X1(3));
F12=Br2*(X2(1)+X2(3));
F13=Br3*(X3(1)+X3(3));
F14=Br4*(X4(1)+X4(3));
F15=Br5*(X5(1)+X5(3));
aux1=0;
aux2=0;
aux3=0;
aux4=0;
aux5=0;
for cont=1:length(xp)-1,
    aux1=aux1+ro*dl*(F11(cont)+F11(cont+1))/2^2;
    aux2=aux2+ro*dl*(F12(cont)+F12(cont+1))/2^2;
    aux3=aux3+ro*dl*(F13(cont)+F13(cont+1))/2^2;
    aux4=aux4+ro*dl*(F14(cont)+F14(cont+1))/2^2;
    aux5=aux5+ro*dl*(F15(cont)+F15(cont+1))/2^2;
end
delta1=aux1+IH*(F11(1)^2+me*(F11(1))^2;
delta2=aux2+IH*(F12(1)^2+me*(F12(1))^2;
delta3=aux3+IH*(F13(1)^2+me*(F13(1))^2;
delta4=aux4+IH*(F14(1)^2+me*(F14(1))^2;
delta5=aux5+IH*(F15(1)^2+me*(F15(1))^2;
X1(1)=X1(1)/sqrt(delta1);
X1(2)=X1(2)/sqrt(delta1);
X1(3)=X1(3)/sqrt(delta1);
X1(4)=X1(4)/sqrt(delta1);
X2(1)=X2(1)/sqrt(delta2);
X2(2)=X2(2)/sqrt(delta2);
X2(3)=X2(3)/sqrt(delta2);
X2(4)=X2(4)/sqrt(delta2);

```

```

X3(1)=X3(1)/sqrt(delta3);
X3(2)=X3(2)/sqrt(delta3);
X3(3)=X3(3)/sqrt(delta3);
X3(4)=X3(4)/sqrt(delta3);
X4(1)=X4(1)/sqrt(delta4);
X4(2)=X4(2)/sqrt(delta4);
X4(3)=X4(3)/sqrt(delta4);
X4(4)=X4(4)/sqrt(delta4);
X5(1)=X5(1)/sqrt(delta5);
X5(2)=X5(2)/sqrt(delta5);
X5(3)=X5(3)/sqrt(delta5);
X5(4)=X5(4)/sqrt(delta5);
%Novas Funções
for cont=1:length(xp),
F1m(cont)=X1(1)*sin(Br1*xp(cont))+X1(2)*cos(Br1*xp(cont))+X1(3)*sinh(Br1*xp(cont))+X1(4)*cosh(Br1*xp(cont));
F12m(cont)=X2(1)*sin(Br2*xp(cont))+X2(2)*cos(Br2*xp(cont))+X2(3)*sinh(Br2*xp(cont))+X2(4)*cosh(Br2*xp(cont));
F13m(cont)=X3(1)*sin(Br3*xp(cont))+X3(2)*cos(Br3*xp(cont))+X3(3)*sinh(Br3*xp(cont))+X3(4)*cosh(Br3*xp(cont));
F14m(cont)=X4(1)*sin(Br4*xp(cont))+X4(2)*cos(Br4*xp(cont))+X4(3)*sinh(Br4*xp(cont))+X4(4)*cosh(Br4*xp(cont));
F15m(cont)=X5(1)*sin(Br5*xp(cont))+X5(2)*cos(Br5*xp(cont))+X5(3)*sinh(Br5*xp(cont))+X5(4)*cosh(Br5*xp(cont));
end
F11m=B1*(X1(1)+X1(3));
F12m=B2*(X2(1)+X2(3));
F13m=B3*(X3(1)+X3(3));
F14m=B4*(X4(1)+X4(3));
F15m=B5*(X5(1)+X5(3));
totalm=IH+ro*(L^3/3)+me*L^2;
% Cálculo das matrizes A B C e D
A1=[0 1 0 0 0; 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0];
B1=[0:(1/totalm); 0; F11m; 0; F12m];
C1=[1 0 0 0 0; 0 F11m(length(F1m)) 0 F12m(length(F12m)) 0];
D1=zeros(2,1);
% Localização dos Pólos do sistema em malha fechada
p1=[-5 -7 -8+42i -8-42i -20+110i -20-110i];
q1=[-20.3 -25.3 -27+42i -27-42i -33+110i -33-110i];
% Cálculo das matrizes de Ganho do Sistema de Alocação de Pólos
K1=place(A1,B1,p1);
% Matriz de Ganho do Controlador
G1=place(A1,C1,q1);
% Matriz de Ganho do Observador
G1=G1';

```

3) FUNÇÃO MULT.M

% PROGRAMA DE SIMULAÇÃO DO CONTROLADOR POR ALOCAÇÃO DE PÓLOS
 % DESENVOLVIDO POR : EDUARDO GILDIN
 % DATA : 1ªVER. DEZ/97 2ªVER. FEV/98

```
function tra=mult(ent1)
    global tra
    % Definição das variáveis globais
    aux1=ent1(1:4);
    % aux1 recebe os primeiros 4 valores da entrada
    aux2=ent1(5:8);
    % aux2 recebe os últimos 4 valores da entrada
    tra=sum(aux1.*aux2);
end
```

