

CONSULTA
FD-3178

São Paulo
2002

**UTILIZAÇÃO DE MASSAS DESLIZANTES PARA CONTROLE
ÓTIMO DAS VIBRAÇÕES DE UM BRAÇO FLEXÍVEL ROTATIVO:
GENERALIZAÇÃO, SIMULAÇÃO E RESULTADOS**

Dissertação apresentada a Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para obtenção do
título de Mestre em Engenharia Mecânica

Area de Concentração:
Engenharia Mecânica/Mecatrônica

Orientador:
Prof. Dr. Agenor de Toledo Fleury

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

EDER TERCEIRO
Físico, Universidade Estadual de Campinas, 1994

*A Edna Aparecida Pereira
In Memoriam*

Para minha família

Agradeço a tormenta!

Que um dia passou pela minha vida, me jogou numa queda vertiginosa que pensei, em algumas vezes, ser o fim.

Só agora consigo consentar os muitos estragos.

E mais do que tudo me ensinou, após eu passar por tantas adversidades,

a ver as coisas de modo bastante diferente.

É estranho, mas só agora consigo ver o copo cheio pela metade.

Como já não posso agradecer pessoalmente,

deixo minha eterna gratidão a uma irmã que se foi.

Ensinou me tanto durante a vida e com sua ausência....

Sinto sua falta!

RESUMO

A otimização do desempenho de dispositivos mecânicos, como robôs e gruas, implica na redução do peso de seus componentes, mas leva, via de regra, ao surgimento de vibrações nesses dispositivos. Neste trabalho, o modelo dinâmico de um braço flexível em rotação, em que duas massas deslizesantes são incluídas para reduzir as vibrações induzidas, é deduzido através do Princípio Estendido de Hamilton. O sistema resultante é constituído por equações integro-diferenciais acopladas, não-lineares e variáveis no tempo e no espaço. Para contornar as dificuldades matemáticas, foi empregada a modelagem por subestruturação, considerando-se isoladamente o braço flexível e as massas móveis, resultando num modelo suficientemente simples para estudo de síntese de controladores. Esse modelo é genérico no sentido de abranger um número arbitrário de modos de vibração e de massas deslizesantes. Trata-se da extensão do trabalho de OLIVEIRA (2000), quando usou-se apenas uma massa de controle. A questão, é se a inclusão de novas massas produzirá diferenças significativas sobre o desempenho do sistema ou sobre o projeto do controlador.

Das estratégias propostas, a primeira adota trajetórias pré especificadas para as massas. Um controlador LQ com ganho variável foi implementado. Como no caso de uma única massa, os resultados, embora apontem significativa redução nas vibrações do braço, não permitem uma sistematização da abordagem. Na segunda estratégia as forças externas atuando sobre as massas deslizesantes são variáveis de controle. Do problema de Controle ótimo gerado, vários resultados expressivos são alcançados, destacando-se:

- Níveis de vibração extremamente reduzidos;
- sensível redução do movimento das massas de controle, e, portanto das exigências mecânicas de construção, como a potência de motores de acionamento.
- obtenção de deslocamento nulo para a ponta do braço no instante final, condição altamente desejável para um robô ou grua.

ABSTRACT

Performance optimization of mechanical devices, like robots and cranes, usually requires weight reduction of their components. From the other side, weight reduction leads to an increase of structural flexibility and in consequence to undesirable vibration problems. In this work, a dynamical model for a flexible rotating arm carrying sliding masses is deduced using the Extended Hamilton's Principle. The resulting model is a coupled integro-differential system of equations, non-linear and time and space variant due to change in the inertia terms. In order to circumvent mathematical difficulties, substructure modeling was employed, considering the flexible beam and the moving masses separately. A simple model, suitable for control design, has been obtained applying superposition of eigenfunctions. This model is generic in the sense that one can include any number of flexible modes and any number of masses. This work can be considered an extension of a previous one (Oliveira, 2000) where only one slider was taken into account. The objective here is to understand how the inclusion of new sliders shall influence system performance.

Two control strategies are proposed for the slider motions. First assumes that mass trajectories are prescribed. A variable gain LQ controller has been implemented and simulated. Although numerical results point out to a significant reduction on the arm vibrations, assignment of prescribed trajectories remains a trial-and-error approach, meaning lack of consistency for control design. In the second approach, external forces acting on the sliders are taken as control variables, leading to an Optimal Control Problem. Among the many simulated cases, several expressive results can be emphasized:

- Initial vibration levels are reduced to very small ones;
- Sliders perform small motions, thus easing mechanical design and construction as for example power requirements;
- One can now impose null arm tip displacement at the end of the maneuver, a highly desirable situation for a robot or a crane.

Sumário

1	1.1	Revisão	1
2	1.1	Modos de solução e redução de modelos	2
5	1.2	Métodos para o problema de controle ótimo	5
8	1.3	Objetivos do trabalho	8
10		Braço móvel com duas massas deslizando	10
10	2.1	Descrição do Problema	10
12	2.2	Obtenção da solução	12
12	2.3	Propriedades do cálculo variacional	12
13	2.4	Sistema de coordenadas	13
13	2.5	Descrição de um ponto P sobre o braço	13
15	2.6	Cálculo da energia de cada componente	15
15	2.6.1	Energia potencial elástica do braço flexível	15
15	2.6.2	Energia cinética do braço flexível	15
16	2.6.3	Energia cinética de cada massa móvel	16
16	2.6.4	Energia cinética do cubo	16
17	2.6.5	Trabalho das forças não conservativas	17
17	2.7	Cálculo da primeira variação da energia	17
17	2.7.1	Primeira variação da energia potencial elástica da viga	17
18	2.7.2	Primeira variação da energia cinética do braço flexível	18
19	2.7.3	Primeira variação da energia cinética do cubo	19
19	2.7.4	Primeira variação da energia cinética das massas deslizando	19
23	2.8	Princípio Estendido de Hamilton	23
28	3	Subestruturação Do Sistema	28

29	3.1	Sistema de coordenadas
29	3.2	Descrição de um ponto P sobre a barra
32	3.3	Interação braço massa
32	3.4	Energia associada ao subsistema do braço flexível
34	3.4.1	Vibração livre
35	3.4.2	Separação de variáveis
36	3.4.3	Expansão Ortogonal
37	3.4.4	Auto funções e auto valores do sistema
40	3.4.5	Normalização dos modos
43	3.5	Resposta das coordenadas generalizadas
47	4	Modelo do Sistema por Síntese de Subestruturas
47	4.1	Vibração transversal
50	4.2	Movimento angular do braço
52	5	Trajétorias prescritas
52	5.1	Modelo genérico de estados
53	5.2	Modelo com um único modo
55	5.3	Modelo com dois modos
56	5.4	Modelo com três modos
59	5.5	Modos de vibração da viga livre
59	5.6	Modos Naturais de Vibração
62	5.7	Barra engastada-livre
63	5.7.1	O problema de auto valor
64	5.8	Modo normal e frequência natural
65	5.9	Modos de vibração da barra
66	5.10	Resultados de Simulação para Trajetórias Prescritas

9	Bibliografia.....	137
8	Conclusões.....	134
7	Descrição dos casos de simulação para a abordagem de controle ótimo.....	131
6.5	Análise dos Resultados.....	128
6.4.2	Inclusão do segundo modo.....	125
6.4.1	Resultados.....	98
6.4	Resultados da simulação do controle ótimo.....	97
6.3.1	Descrição dos casos expostos.....	94
6.3	Descrição das condições de simulação.....	91
6.2.2	Possibilidades exploradas e a explorar.....	89
6.2.1	Considerações gerais e limitações do método.....	88
6.2	Controle Ótimo.....	83
6.1.3	Modelo do controle ótimo com dois modos.....	81
6.1.2	Modelo com um único modo.....	79
6.1.1	Modelo com um número arbitrário de autofunções.....	76
6.1	Modelo de estado e formulação do Problema de Controle Ótimo.....	76
6	Controle Ótimo do Movimento das Massas sobre o Braço.....	75
5.11	Discussão ou comentários.....	73
5.10.6	Resultados.....	71
5.10.5	Estratégia 5.....	70
5.10.4	Estratégia 4.....	69
5.10.3	Estratégia 3.....	68
5.10.2	Estratégia 2.....	67
5.10.1	Estratégia 1.....	66

Lista de Figuras

Figura 1 Braço rotativo com duas massas deslizantes 10

Figura 2 Principais parâmetros físicos e geométricos envolvidos 13

Figura 3 Sistema braço flexível e massas móveis 28

Figura 4 Forças sobre a massa móvel 30

Figura 5 Modos de vibração para uma viga livre 66

Figura 6 Estratégia 2 para deslocamento das massas 67

Figura 7 Estratégia 3 para deslocamento das massas 68

Figura 8 Estratégia 4 para deslocamento das massas 69

Figura 9 Estratégia 5 para deslocamento das massas 70

Figura 10 Batimento decorrente do movimento das duas massas 71

Figura 11 Vibração da ponta do braço 71

Figura 12 Movimento de rotação do braço 72

Figura 13 Torque aplicado ao braço 72

Figura 14 Deslocamentos das massas caso 3 98

Figura 15 Velocidade das massas caso 3 98

Figura 16 Movimento de rotação do braço caso 3 99

Figura 17 Vibração na ponta do braço caso 3 99

Figura 18 Controle Aplicado caso 3 100

Figura 19 Força em M_1 x Força em M_2 caso 3 100

Figura 20 Deslocamentos das massas caso 5 101

Figura 21 Velocidade das massas caso 5 101

Figura 22 Movimento de rotação do braço caso 5 102

Figura 23 Vibração na ponta do braço caso 5 102

103	Figura 24 Controle Aplicado caso 5
103	Figura 25 Força em M_1 x Força em M_2 caso 5
104	Figura 26 Deslocamentos das massas caso 50
104	Figura 27 Velocidade das massas caso 50
105	Figura 28 Movimento de rotação do braço caso 50
105	Figura 29 Vibração na ponta do braço caso 50
106	Figura 30 Controle Aplicado caso 50
106	Figura 31 Força em M_1 x Força em M_2 caso 50
107	Figura 32 Deslocamentos das massas caso 31
107	Figura 33 Velocidade das massas caso 31
108	Figura 34 Movimento de rotação do braço caso 31
108	Figura 35 Vibração na ponta do braço caso 31
109	Figura 36 Controle Aplicado caso 31
109	Figura 37 Força em M_1 x Força em M_2 caso 31
110	Figura 38 Deslocamentos das massas caso 38
110	Figura 39 Velocidade das massas caso 38
111	Figura 40 Movimento de rotação do braço caso 38
111	Figura 41 Vibração na ponta do braço caso 38
112	Figura 42 Controle Aplicado caso 38
112	Figura 43 Força em M_1 x Força em M_2 caso 38
113	Figura 44 Deslocamentos das massas caso 43
113	Figura 45 Velocidade das massas caso 43
114	Figura 46 Movimento de rotação do braço caso 43
114	Figura 47 Vibração na ponta do braço caso 43
115	Figura 48 Controle Aplicado caso 43

115	Figura 49 Força em M_1 x Força em M_2 caso 43
116	Figura 50 Deslocamentos das massas caso 40
116	Figura 51 Velocidade das massas caso 40
117	Figura 52 Movimento de rotação do braço caso 40
117	Figura 53 Vibração na ponta do braço caso 40
118	Figura 54 Controle Aplicado caso 40
119	Figura 55 Deslocamentos das massas caso 41
119	Figura 56 Velocidade das massas caso 41
120	Figura 57 Movimento de rotação do braço caso 41
120	Figura 58 Vibração na ponta do braço caso 41
121	Figura 59 Controle Aplicado caso 41
121	Figura 60 Força em M_1 x Força em M_2 caso 41
122	Figura 61 Deslocamentos das massas caso 42
122	Figura 62 Velocidade das massas caso 42
123	Figura 63 Movimento de rotação do braço caso 42
123	Figura 64 Vibração na ponta do braço caso 42
124	Figura 65 Controle Aplicado caso 42
124	Figura 66 Força em M_1 x Força em M_2 caso 42
125	Figura 67 Deslocamentos das massas caso dois modos
125	Figura 68 Velocidade das massas caso dois modos
126	Figura 69 Movimento de rotação do braço caso dois modos
126	Figura 70 Vibração na ponta do braço caso dois modos
127	Figura 71 Controle Aplicado caso dois modos
127	Figura 72 Força em M_1 x Força em M_2 caso dois modos
135	Figura 73 Vibração na ponta para a trajetória prescrita e o controle ótimo

1 Introdução

O crescente interesse pelo tema Dinâmica e Controle de Estruturas Flexíveis nas últimas décadas esbarra em alguns fatores limitantes como, na análise, a dificuldade de obtenção de modelo satisfatório para o projeto do controlador, e na prática as limitações dos atuadores atualmente utilizados que são inadequados para a atenuação de efeitos de vibração.

Na maioria dos sistemas mecânicos as soluções adotadas buscam, através do aumento da rigidez da estrutura, contornar os problemas de vibração. Isto é particularmente perceptível na área de Robótica, robôs industriais são projetados para manobras rígidas levando a estruturas pesadas com movimentos lentos. Por outro lado com o avanço da exploração espacial, os problemas relacionados com a flexibilidade estrutural tiveram o tem de ser encarados de outra forma pois é inviável a colocação de estruturas pesadas no espaço. A necessidade de projetar estruturas flexíveis ativas para controlar o movimento elástico induzido torna-se, então, imperativa. Os desdobramentos dessa exigência podem ser utilizados para revisão dos conceitos de projeto em outras áreas, como na já citada Robótica, na Engenharia Automotiva, na Engenharia de Máquinas e outras.

1.1 Revisão

Estruturas flexíveis são caracterizadas através de parâmetros, como rigidez e momento de inércia, que são variáveis no tempo e espaço, constituindo sistemas de parâmetros distribuídos.

Equações diferenciais parciais descrevem o movimento, e devem ser satisfeitas na extensão e nos limites da estrutura, em qualquer instante de tempo. A aplicação do Princípio Estendido de Hamilton leva a um problema de valor de contorno formado pela

equação diferencial que rege o movimento e as condições de contorno que devem ser

satisfeitas. A dedução destes modelos, para os sistemas de parâmetros distribuídos,

pode ser obtida a partir da Teoria Hamiltoniana, como em SPIEGEL (1976) e pelas

equações de Lagrange como em SPIEGEL (1990), além de outros autores. MEIROVITCH

(1990, 1997) trata mais detalhadamente do Princípio Estendido de Hamilton.

Não são possíveis ou factíveis as soluções, de forma fechada, para as equações

diferenciais que descrevem estruturas distribuídas. A alternativa é produzir soluções

aproximadas. Isto significa a discretização espacial da estrutura distribuída.

Procedimentos de discretização usados em dinâmica estrutural são: Método dos Modos

Assumidos, Método de Rayleigh Ritz, Método de Elementos Finitos, Método de

Galerkin e o Método de Colocação. De qualquer forma, em muitas situações as

equações se tornam bastante complicadas.

Para evitar estas dificuldades pode-se usar a síntese de sub-estrutura com técnica de

modelamento. Em MEIROVITCH (1990) há a descrição da técnica de sub-estruturação, a

estrutura total é dividida em diversas partes e são obtidas as equações individualmente

para cada uma. Em seguida é necessário considerar o efeito de uma estrutura sobre outra

para garantir a compatibilidade dos deslocamentos da estrutura como um todo.

1.1 Modos de solução e redução de modelos

Como até a mais simples estrutura flexível apresenta propriedades não uniforme, a

solução analítica do problema de auto valor para o sistema contínuo é, em geral,

impraticável. A necessidade de comparar resultados e prever a resposta do sistema,

impõe construir modelos aproximados. Discutindo as características do problema de

estruturas flexíveis, CLARK (1997) discute sobre as dificuldades de solução e lista os

métodos numéricos usuais.

Uma maneira de tratar o problema é a aplicação de Análise Modal que requer a solução do problema de autovalores produzindo um conjunto infinito de autovalores e auto funções correspondentes. Então, o deslocamento é assumido na forma de uma série, truncada nos modos considerados de maior importância, de auto funções no espaço multiplicadas por coordenadas generalizadas dependentes no tempo

O Método de Modos Assumidos é empregado para aproximar a resposta estrutural em termos de um número finito de funções admissíveis. Neste método, a forma de vibração da estrutura pode ser obtida pela combinação dos modos normais de vibração (problema de auto valor). Os coeficientes a serem determinados são coordenadas generalizadas dependentes do tempo. Assim a resposta do sistema pode ser posta como uma expansão dos modos de vibração da forma:

$$w(x, t) = \sum_N^{l=r} \phi_r(x) \eta_r(t)$$

onde $\phi_r(x)$ são os modos normais de vibração da estrutura

$\eta_r(t)$ são as coordenadas generalizadas dependentes no tempo

Desta forma admite se uma separação de variáveis com a resposta sendo dado pela combinação das coordenadas generalizadas, que são dependentes do tempo, com os modos de vibração.

redução ocasionada por esta aproximação deve ser considerada possível pois na prática os modos de frequência mais alta sofrerão grandes atenuações próprio das limitações de largura de banda de sensores atuadores e processadores. No trabalho de CLARK (1995), discute-se a colocação de transdutores e a necessidade de incluir quantidade suficiente de modos para obter a convergência para as raízes da função de transferência. Para uma correta aproximação do modelo, essa convergência garante a

conformidade da reposta em baixa frequência para a função de transferência da estrutura Diversos trabalhos na literatura tratam, de algum forma, o problema de vibração de estrutura flexíveis, MEIROVITCH (1990) e BOOK (1990) traçam um panorama do estado de arte nesta área. Com as dificuldades de modelagem, muitas opções são exercidas no sentido de obter um modelo mais razoável que permita uma solução simples satisfatória. JUNKINS & KIN (1993) tratam do problema considerando uma massa presa ao extremo livre do braço. A resposta de um modelo de dimensão finita é obtido usualmente por análise modal, que frequentemente usa a solução do problema de auto valor associado com as equações de movimento linearizada nas vizinhanças da trajetória nominal. Como em CLARK, JUNKINS & KIN traçam um paralelo entre as soluções obtidas pelo Método dos Modos Assumidos e o Método dos Elementos Finitos. Indicando que o Método dos Modos Assumidos é particularmente interessante quando é possível prever corretamente o conjunto de funções admissíveis para compor a base da expansão. Em outra vertente está o trabalho de SOFFKER (1995) com aplicação do Método dos Elementos Finitos. Trabalhando a modelagem de robôs com tamanho de braço variável, admite uma série de efeitos. A complexidade do modelo proposto leva a um sistema de equações bastante complicado. Ao listar os possíveis métodos de discretização, ele enfatiza as vantagens do MEF. Neste caso, realmente o uso do MEF se mostra bastante adequado pois possibilita escrever as equações do modelo com os efeitos previstos. No presente trabalho optou se pela obtenção dessa base de expansão admitindo os modos de vibração de um braço flexível livre como uma aproximação satisfatória para o problema do braço flexível com duas massas deslizes. A opção foi desenvolver uma solução através Método dos Modos Assumidos, consciente de que as simplificações

necessárias para o tratamento do problema possibilitariam obter resultados com precisão suficiente para uma análise adequada, dentro das restrições aceitas.

Todos esses esforços são para obter as equações de movimento do braço.

1.2 Métodos para o problema de controle ótimo

A obtenção de trajetórias de controle ótimo para uma dada planta passou por uma série de avanços nos últimos tempos. CITRON (1969) enfatiza que o controle convencional usa técnicas, dentro do domínio da frequência, para obter o controle de uma planta linear com a estabelecimento de especificações dentro do projeto como o deslocamento dos pólos e zeros da função de transferência ou a observação de gráficos com resposta em frequência.

A sofisticação dos projetos atuais, no entanto, demandou uma outra estratégia de análise. Assim o controle ótimo moderno adota uma nova abordagem ao formular os problemas no domínio do tempo e fundamentalmente inserir um critério de desempenho para a análise do sistema e pretendê-lo minimizá-lo. A necessidade de tal critério de desempenho surge das relações dos parâmetros nos projetos que, muitas vezes, possuem algum tipo de vínculo entre si. Assim não pode se estabelecer critérios fixos, como é o caso quando se trabalha no domínio da frequência.

No controle ótimo, as técnicas matemáticas, como o cálculo variacional e métodos de otimização, estão sendo restabelecidas para a devida aplicação na solução dos problemas.

KIRK (1970) destaca o uso da abordagem de variáveis de estado para a definição do sistema de equações listando as seguintes vantagens:

- Equações diferenciais são bastantes adequadas para soluções digitais ou analógicas
- Permite um tratamento uniforme para o estudo de sistemas lineares e não lineares
- Tem grande utilidade no tratamento de investigações teóricas

2 Forte sentido físico relacionado as variáveis de estado.

O Cálculo Variacional, CITRON (1969) e KIRK (1970), é normalmente aplicado para obter as condições necessárias que devem ser satisfeitas pelas variáveis ótimas de controle e consequentes trajetória de estados. Essas condições levam a problemas TPBVP (Two Point Boundary Value Problems) que precisam ser resolvidos para a explícita determinação do controle ótimo. Geralmente tais problemas são não lineares impedindo uma solução analítica. Técnicas numéricas devem ser empregadas para a obtenção do controle ótimo e a trajetória dos estados. Método de Quasilinearização, Método de Variação de Extremos e Métodos Gradientes são citados pela literatura.

Como uma abordagem variacional tem se o Método de Projecção do Gradiente. Esta técnica foi introduzida por J.B. ROSEN, conforme KIRK (1970), consistindo num procedimento iterativo para simultaneamente determinar o extremo de uma função e satisfazer várias relações de restrições. Quando as restrições são funções lineares tem se um problema de programação linear, se as restrições são não lineares é um problema de programação não linear.

Dificuldades de convergência não permitem a simples aplicação dos métodos descritos acima. Em problemas reais, normalmente é necessária uma maior sofisticação dos métodos para a obtenção de alguma resposta.

Nos problemas de controle ótimo, quando a discretização determinará um aproximação para a solução contínua, surge uma dificuldade adicional pelo grande número de variáveis produzindo matrizes esparsas. GILL (1994) indicando o elevado custo de avaliação de tais problemas, propõe como tentativa de solução a utilização de métodos SQP (Sequential Quadratic Programming). O problema não linear é resolvido através de uma sequência de sub problemas de programação quadrática. Ele destaca a rapidez de

convergência e a correção dos resultados quando aplicados a problemas de trajetória

ótima.

Uma outra tentativa por CUTTRELL E BIEGLER (1987) propõe métodos de colocação quando as equações diferenciais são substituídas por condições de colocação satisfeitas para um número finito de pontos no tempo. Assim devem ser encontrados simultaneamente: os parâmetros de controle e os estados do sistema ao longo da malha discretizada.

POIAK (1993), e depois SCHWARTZ (1997) tentando contornar os problemas teóricos e práticos, como esforço computacional e convergência, propõe a abordagem por Aproximações Consistentes, conjunto de recursos de programação matemática, métodos de otimização e programação não linear.

Nesta abordagem o controle ótimo é obtido através de uma sequência de sub problemas de controle ótimo usando métodos convencionais de programação matemática. No Método de Integração Iterativa as equações diferenciais são resolvidas numericamente e as variáveis de controle expressas num sub espaço de dimensão finita, que é a discretização do problema inicial com dimensão infinita.

No trabalho de MENEGALDO (2000) são ressaltados os resultados obtidos, nesta linha, pelos de trabalhos de SCHWARTZ (1996) que introduz contribuições como:

- Determinação de condições nos parâmetros de integração de Runge Kutta para garantir a convergência de pontos estacionários do problema discretizado para os pontos estacionários do problema original
- Determinação de uma métrica não euclidiana para o problema de otimização associado e uma transformação de coordenadas para o emprego de uma métrica euclidiana evitando assim problemas de mau condicionamento.

com o problema já tratado as mesmas duas abordagens serão utilizadas:

ao caso de uma massa (OLIVEIRA, 2000). Para manter a possibilidade de comparação tanto do ponto de vista do controle como da atenuação da vibração quando comparado A ideia é responder se a inclusão de uma massa pode produzir uma resultado melhor do problema matemático.

para a obtenção do controle ótimo, e a análise de casos onde foi obtido a convergência De posse do modelo com duas massas deslizantes sobre o braço, realiza-se a simulação duas massas.

qualquer de massas, o modelo teórico é desenvolvido e implementado o modelo com (OLIVEIRA, 2000), é proposto a generalização do modelo com a inclusão de um número rotação através de controle do movimento de uma massa que desliza sobre ele A partir dos resultados obtidos do controle da vibração de um braço flexível em redistribuição das massas no seu domínio.

Este trabalho visa simular métodos de redução de vibração em estruturas flexíveis pela

1.3 Objetivos do trabalho

ser encontrado no trabalho de MENEGALDO (2000).

Maiores detalhadamentos teóricos sobre o Método de Aproximações Consistentes pode Assim intrinsecamente foi adotada a abordagem das Aproximações Consistentes. No presente trabalho, para a simulação, do modelo obtido, foi usado o software RIOTS. ideias da teoria de aproximação consistente.

- ambiente MATLAB para a resolução de problemas de controle ótima a partir das
- Como principal resultado prático, a implementação de um novo simulador em
- Um novo algoritmo de programação baseado no Método de Newton
- minimiza oscilações nas soluções numéricas.
- Um novo método de solução para os problemas de controle ótimo singulares que

Abordagem 1 - as trajetórias das duas massas é definida previamente. A variável de controle se resume ao torque aplicado através de um sistema motor-cubo. Tal abordagem leva a um modelo linear com coeficientes variantes no tempo, o torque é obtido admitindo um controle linear em relação as variáveis de estado, $n = Kx(t)$, onde matriz de ganho K é determinada através da implementação de um controlador LQR.

Abordagem 2 - o controle é obtido pelo torque aplicado ao braço e pelas forças aplicadas, paralelamente ao movimento rígido do braço, às duas massas. Assim os movimentos das massas são também variáveis de estado. O modelo obtido é não linear e técnicas de otimização são aplicadas. Das diversas possibilidades apresentadas, é adotada a Método de Aproximações Consistentes de SCHWARTZ (1997), através da implementação do simulador RIOTS para resolver os problemas de controle ótimo gerado.

2 Braço móvel com duas massas deslizantes

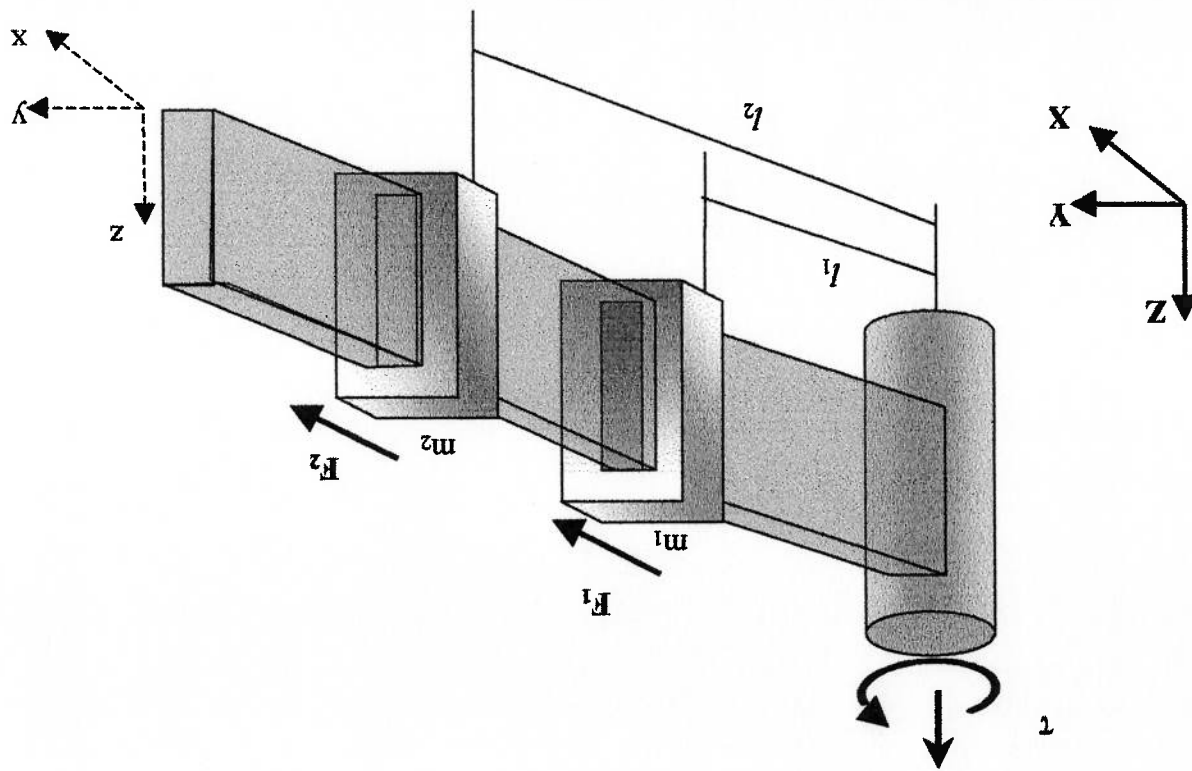


Figura 1 Braço rotativo com duas massas deslizantes

2.1 Descrição do Problema

O sistema mecânico é composto de um braço, admitidamente flexível, e duas massas (m_1 e m_2) que se deslocam sobre ele. O braço faz um movimento de rotação através do torque aplicado pelo cubo onde está fixado. O movimento de rotação do braço, admitindo este como uma estrutura flexível, produzirá em toda a sua extensão uma vibração notadamente na sua extremidade livre. Através de atuadores, as massas seriam deslocadas por uma força tangente, na posição da massa, a direção do braço. O movimento das massas pode provocar alterações na vibração do braço pela interação entre os dois sistemas: braço e massa. Não são consideradas componentes de força

O objetivo é obter o modelo e o controle do sistema mecânico visando reduzir as vibrações induzidas durante a manobra de rotação. O torque aplicado ao cubo e as forças tangentes aplicadas as massas serão as variáveis de controle para o sistema. A composição dos movimentos e consequente variação da distribuição da inércia do sistema, pelo deslocamento das massas sobre o braço, é o método de controle que será de vibração do braço.

utilizar o movimento rígido como um referencial para obter as equações de movimento Uma possível descrição, bastante encontrada na literatura (ver SIMO,1986) é construção que possibilitam essa situação sem haver um choque entre ambas.

possibilidade delas ocuparem a mesma posição será permitida pois existem modos de O movimento das massas, enquanto permanecer no braço, é livre e até a

- movimento de translação sobre o braço
- de rotação, pois estão apoiadas no braço

haverá duas componentes:

Num referencial fixo, o movimento das massas é bastante complicado de descrever pois braço.

que descreve o movimento de rotação do corpo rígido e o referencial móvel na ponta do O problema é descrito, como é comum na literatura usando dois referenciais: um fixo indica a direção tangente ao braço em cada instante em relação a O.

ao cubo. O sistema referencial $M(Oxyz)$ é móvel e fixado próximo ao cubo. O eixo x O sistema referencial $I(OXYZ)$ é inercial e está fixado em O, ponto de fixação do braço consideradas apenas as vibrações no plano de rotação do braço (plano XY).

que o braço terá espessura muito menor que sua altura, e, como consequência, são admitindo que o braço realiza a manobra no plano horizontal. Na prática isso significa como, por exemplo, as forças de atrito e também não se considera efeitos gravitacionais,

aplicado para o controle desta estrutura flexível.

2.2 Obtenção da solução

Uma forma de obter o modelo do sistema, e também frequentemente indicada na literatura, é utilizar o Princípio Estendido de Hamilton; primeiro estabelecendo os termos de energia dos diversos componentes do sistema e determinando os termos para um hipotético deslocamento virtual do sistema numa situação de equilíbrio. Matematicamente significa calcular os variaçionais de energia em relação a estes deslocamentos virtuais. Uma série de resultados de Cálculo Variacional são necessários.

2.3 Propriedades do cálculo variacional

As propriedades listadas abaixo vem do cálculo variacional e serão utilizadas na obtenção das expressões que descrevem o modelo do sistema. A obtenção destas propriedades seguem regras do cálculo diferencial ou a aplicação do conceito de variação, para maiores detalhes ver SPIEGEL(1990). Apenas para exemplificação a propriedade P2 é obtida através da regra da produto de funções:

$$P1 \quad \delta^2 \Omega = 2\Omega \delta \Omega$$

$$P2 \quad \delta[\varepsilon \cdot x \cdot \phi] = \delta[x \cdot \varepsilon \cdot \phi] = x \cdot \delta[\varepsilon \cdot \phi] + \varepsilon \cdot \delta[x]$$

$$\therefore \delta[\varepsilon \cdot x \cdot \phi] = x[\varepsilon \delta \phi] + \varepsilon \cdot \phi \delta x$$

$$P3 \quad \delta(\varepsilon \cdot \phi)^2 = 2\varepsilon \cdot \phi \delta(\varepsilon \cdot \phi) = 2\varepsilon \cdot \delta \phi + \phi \cdot \delta \varepsilon = 2\varepsilon^2 \cdot \phi \cdot \delta \phi + 2\varepsilon \cdot \phi^2 \cdot \delta \varepsilon$$

$$P3A \quad \varepsilon \cdot \phi \delta(\varepsilon \cdot \phi) = \varepsilon \cdot \delta \phi + \phi \cdot \delta \varepsilon = \varepsilon^2 \cdot \phi \cdot \delta \phi + \varepsilon \cdot \phi^2 \cdot \delta \varepsilon$$

$$P4 \quad \varepsilon \delta \varepsilon = \frac{\partial(\varepsilon \delta \varepsilon)}{\partial \varepsilon} - \varepsilon \delta \varepsilon$$

$$P5 \quad \varepsilon \delta \phi + \phi \delta \varepsilon = \frac{\partial(\varepsilon \delta \phi)}{\partial \varepsilon} - \varepsilon \delta \phi + \frac{\partial(\phi \delta \varepsilon)}{\partial \varepsilon} - \phi \delta \varepsilon$$

P6 $\dot{\phi}^2 \delta \phi = \frac{\partial(\dot{\phi}^2 \delta \phi)}{\partial t} - (\dot{\phi}^2 + 2\epsilon \dot{\phi}) \delta \phi$

2.4 Sistema de coordenadas

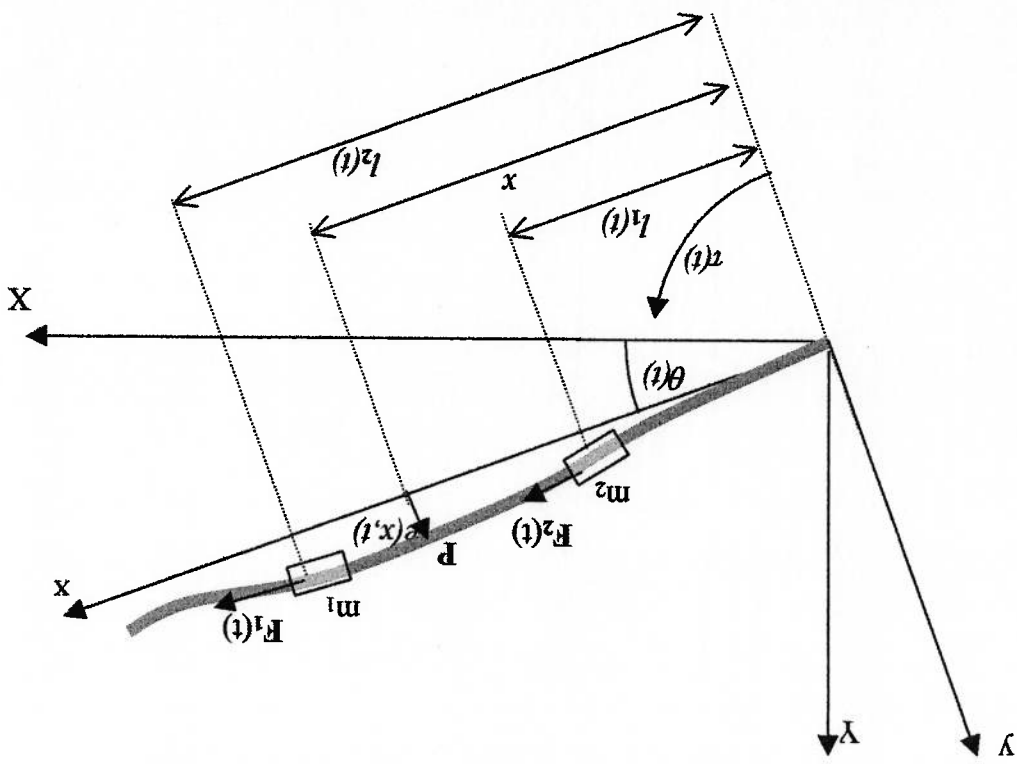


Figura 2 Principais parâmetros físicos e geométricos envolvidos.

2.5 Descrição de um ponto P sobre o braço

A localização do ponto P no sistema móvel M(oxyz) é dado por:

$$\vec{p}_M = xi + e(x, t) \hat{j}$$

(2.1)

A velocidade do ponto P no sistema móvel M(oxyz) é dado por:

$$v_i^2 = x^2 + e^2 + (e\theta)^2 + 2(ex - xe)\theta \quad (2.12)$$

$$v_i^2 = x^2 - 2xe\theta + (e\theta)^2 + e^2 + 2ex\theta + (x\theta)^2 \quad (2.11)$$

Expandido a expressão:

$$v_i^2 = \underline{v}_i \cdot \underline{v}_i = (x - e\theta)^2 + (e + x\theta)^2 \quad (2.10)$$

O quadrado do módulo da velocidade é dado por:

$$\underline{v}_i = (x - e\theta)\hat{j} + (e + x\theta)\hat{i} \quad (2.9)$$

Ou mudando a notação

$$\underline{v}_i = \frac{dx}{dt}\hat{j} - e\frac{d\theta}{dt}\hat{j} + \left(\frac{d\theta}{dt}x + \frac{\partial e(x,t)}{\partial t}\hat{i} + \frac{d\theta}{dt}x\right)\hat{i} \quad (2.8)$$

$$\underline{v}_i = \frac{dx}{dt}\hat{j} + \frac{\partial e(x,t)}{\partial t}\hat{j} + \left(-e\frac{d\theta}{dt}\hat{j} + \frac{d\theta}{dt}x\right)\hat{i} \quad (2.7)$$

$$\underline{v}_i = \frac{dx}{dt}\hat{j} + \frac{\partial e(x,t)}{\partial t}\hat{j} + \begin{vmatrix} x & e \\ 0 & 0 \\ \frac{d\theta}{dt} & k \end{vmatrix} \hat{i} \quad (2.6)$$

$$\underline{v}_i = \frac{dx}{dt}\hat{j} + \frac{\partial e(x,t)}{\partial t}\hat{j} + \frac{d\theta}{dt}k \times (x\hat{i} + e(x,t)\hat{j}) \quad (2.5)$$

$$\underline{v}_i = v_m + \omega_i \times P_m \quad (2.4)$$

A velocidade do ponto P no referencial inercial I(OXYZ) será dado por:

$$\omega_i = \frac{d\theta}{dt}k \quad (2.3)$$

A velocidade angular do referencial móvel em relação ao referencial inercial é dado por:

$$\underline{v}_m = \frac{dP_m}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{j} + \frac{\partial e(x,t)}{\partial t}\hat{j} \quad (2.2)$$

2.6 Cálculo da energia de cada componente

2.6.1 Energia potencial elástica do braço flexível

A energia potencial elástica do braço flexível é dada por:

$$U(t) = \frac{1}{2} \int_L^0 EI v'' \left(\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} \right) dx \quad (2.13)$$

(2.14)

$$\text{com } I_v = \frac{bh^3}{3}$$

2.6.2 Energia cinética do braço flexível

Desprezando o movimento longitudinal do ponto P, isto é admite-se que o deslocamento axial é pequeno, (na direção do braço) tem-se que $x = 0$. A velocidade para um ponto do braço flexível será dada por:

(2.15)

$$v_t^2 = \dot{e}^2 + \dot{x}^2 + 2\dot{e}\dot{x}\theta$$

ou

(2.16)

$$v_t^2 = (\dot{e}\theta)^2 + (\dot{e} + x\dot{\theta})^2$$

A energia cinética de um ponto, sobre o braço, com velocidade v e massa diferencial dm é dada por:

(2.17)

$$dT = \frac{1}{2} dm v^2$$

Assim a energia cinética do braço inteiro é dado por:

(2.18)

$$T_B = \int_L^0 dT = \int_L^0 \frac{1}{2} v^2 dm = \int_L^0 \frac{1}{2} v^2 \rho dx$$

ρ é a densidade linear

A energia cinética total do braço é:

(2.19)

$$T_B = \int_L^0 \frac{1}{2} v^2 \rho dx = \int_L^0 \frac{1}{2} \rho [\dot{e}^2 + (\dot{e}^2 + \dot{x}^2 + 2\dot{e}\dot{x}\theta) \rho dx]$$

$$T_c = \frac{1}{2} M_c L_c^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} J_c \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} J_c \dot{\theta}^2 \quad (2.26)$$

A energia cinética do cubo é:

2.6.4 Energia cinética do cubo

$$T_M(t) = \frac{1}{2} M_1 \left[\dot{l}_1^2 - 2e_1 \dot{l}_1 \dot{\theta} + (e_1 \dot{\theta})^2 + e_1^2 \right] + \frac{1}{2} M_2 \left[\dot{l}_2^2 - 2e_2 \dot{l}_2 \dot{\theta} + (e_2 \dot{\theta})^2 + e_2^2 \right] + 2l_1 e_1 \dot{\theta} + 2l_2 e_2 \dot{\theta} + (l_1 \dot{\theta})^2 + (l_2 \dot{\theta})^2 \quad (2.25)$$

ou ainda

$$T_M(t) = \frac{1}{2} M_1 \left[\dot{l}_1^2 + (e_1 + l_1 \dot{\theta})^2 - e_1 \dot{\theta} \right] + \frac{1}{2} M_2 \left[\dot{l}_2^2 + (e_2 + l_2 \dot{\theta})^2 - e_2 \dot{\theta} \right] \quad (2.24)$$

ou

$$T_M(t) = \frac{1}{2} M_1 v_1^2(l_1) + \frac{1}{2} M_2 v_2^2(l_2) \quad (2.23)$$

E a energia cinética devido as duas massas é dada por:

$$v_2^2(l_2) = \dot{l}_2^2 - 2e_2 \dot{l}_2 \dot{\theta} + (e_2 \dot{\theta})^2 + e_2^2 + 2l_2 e_2 \dot{\theta} + (l_2 \dot{\theta})^2 \quad (2.22)$$

O quadrado da velocidade da massa 2 é dado por:

$$v_1^2(l_1) = \dot{l}_1^2 - 2e_1 \dot{l}_1 \dot{\theta} + (e_1 \dot{\theta})^2 + e_1^2 + 2l_1 e_1 \dot{\theta} + (l_1 \dot{\theta})^2 \quad (2.21)$$

O quadrado da velocidade da massa 1 é dado por:

velocidades. Assim:

e m_2 estão localizadas nos pontos $l_1(t)$ e $l_2(t)$ respectivamente, pode-se calcular suas

Da expressão obtida para a velocidade de um ponto P e considerando que as massas m_1

2.6.3 Energia cinética de cada massa móvel

$$T_B = \int_{l_1}^0 \frac{1}{2} v^2 \rho dx + \int_{l_2}^0 \frac{1}{2} \rho (e\dot{\theta})^2 dx + \int_{l_1}^0 \frac{1}{2} \rho (e + x\dot{\theta})^2 dx \quad (2.20)$$

ou

$$\text{com } J_c = \frac{M_c L_c^2}{2}$$

L_c = raio do cubo

M_c = massa do cubo

J_c = momento de inércia do cubo

2.6.5 Trabalho das forças não conservativas

O trabalho das forças não conservativas é dado por:

$$\delta W = r\delta\theta + F_1\delta l_1 + F_2\delta l_2 \quad (2.28)$$

o primeiro termo refere-se ao trabalho virtual do torque aplicado, os outros dois termos referem-se ao trabalho virtual das forças tangentes aplicadas as massas m_1 e m_2 respectivamente.

2.7 Cálculo da primeira variação da energia

2.7.1 Primeira variação da energia potencial elástica da viga

Partindo da energia potencial elástica da viga:

$$U(t) = \frac{1}{2} \int_L^0 EI v'' \left(\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} \right) dx \quad (2.29)$$

$$\delta U(t) = \frac{1}{2} \int_L^0 EI v'' \delta \left[\left(\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} \right) \right] dx \quad (2.30)$$

$$\delta U(t) = \frac{1}{2} \int_L^0 2EI v'' \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} \right) dx \quad (2.31)$$

Integrando por parte e usando as igualdades:

$$\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} \right) \right] - \left[\frac{\partial^3 e}{\partial x^3} \delta \left(\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} \right) \right] \quad (2.32)$$

se que:

Admitindo que $\delta x=0$, ou seja não há deslocamento longitudinal do braço flexível, tem

$$\delta T_B = \int_L^0 \rho [e \delta \dot{e} + \{x(e \delta \dot{\theta} + \dot{\theta} \delta e) + e \dot{\theta} \delta x\} + x \dot{\theta} (x \delta \dot{\theta} + \dot{\theta} \delta x) + e \dot{\theta} \delta x + e \dot{\theta} (e \delta \dot{\theta} + \dot{\theta} \delta e)] dx \quad (2.40)$$

$$\delta T_B = \int_L^0 \rho [e \delta \dot{e} + \delta (ex \dot{\theta}) + x \dot{\theta} \delta (x \dot{\theta}) + e \dot{\theta} \delta (e \dot{\theta})] dx \quad (2.39)$$

$$\delta T_B = \frac{1}{2} \int_L^0 \rho [2e \delta \dot{e} + 2\delta (ex \dot{\theta}) + 2e \dot{\theta} \delta (e \dot{\theta}) + 2x \dot{\theta} \delta (x \dot{\theta})] dx \quad (2.38)$$

$$\delta T_B = \frac{1}{2} \int_L^0 \rho [\delta \dot{e}^2 + \delta (2ex \dot{\theta}) + \delta (e \dot{\theta})^2 + \delta (x \dot{\theta})^2] dx \quad (2.37)$$

A primeira variação será:

$$T_B = \frac{1}{2} \int_L^0 \rho [e^2 + 2ex \dot{\theta} + (e \dot{\theta})^2 + (x \dot{\theta})^2] dx \quad (2.36)$$

A energia cinética é dada por:

2.7.2 Primeira variação da energia cinética do braço flexível

$$\delta U = EI_y \left[\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial e}{\partial x} \right) \right]_{x=L}^{x=0} - EI_y \left[\frac{\partial^3 e}{\partial x^3} \delta e \right]_{x=L}^{x=0} + \int_L^0 EI_y \frac{\partial^4 e}{\partial x^4} \delta e dx \quad (2.35)$$

Chegando a:

$$= EI_y \left[\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial e}{\partial x} \right) \right]_{x=L}^{x=0} - EI_y \left[\frac{\partial^3 e}{\partial x^3} \delta e \right]_{x=L}^{x=0} + \int_L^0 EI_y \frac{\partial^4 e}{\partial x^4} \delta e dx \quad (2.34)$$

$$\delta U(t) = \frac{1}{2} \int_L^0 2EI_y \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} \right) dx = EI_y \left[\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial e}{\partial x} \right) \right]_{x=L}^{x=0} - \int_L^0 EI_y \frac{\partial^3 e}{\partial x^3} \delta \left(\frac{\partial e}{\partial x} \right) dx =$$

Obtém-se:

$$\frac{\partial^3 e}{\partial x^3} \delta \left(\frac{\partial e}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^3 e}{\partial x^3} \delta e \right] - \frac{\partial^4 e}{\partial x^4} \delta e \quad (2.33)$$

$$T_M(t) = \frac{1}{2} M_1 \dot{l}_1^2 - 2e_1 \dot{l}_1 \dot{\theta} + (e_1 \dot{\theta})^2 + e_1^2 + 2l_1 e_1 \dot{\theta} + (l_1 \dot{\theta})^2 +$$

Para as massas a energia cinética é dada por:

2.7.4 Primeira variação da energia cinética das massas deslizantes

$$\delta T^c = J^c \left(\frac{\partial(\delta\theta)}{\partial t} - \ddot{\theta}\delta\theta \right) \quad (2.50)$$

$$\delta T^c = \frac{1}{2} J^c \delta\theta^2 = J^c \delta\theta \left(\frac{\partial(\delta\theta)}{\partial t} - \ddot{\theta}\delta\theta \right) \quad (2.49)$$

Sua primeira variação, aplicando a propriedade P4, fica:

$$T^c = \frac{1}{2} J^c \theta^2 \quad (2.48)$$

A energia cinética do cubo é:

2.7.3 Primeira variação da energia cinética do cubo

$$\delta T_B(t) = \int_T^0 \rho \left[-\dot{e} - x\ddot{\theta} + e\dot{\theta}^2 \right] \delta e + \left\{ x\ddot{x} - (x^2 + e^2)\ddot{\theta} \right\} \delta\theta + \frac{\partial(e\delta e)}{\partial t} - x \left(\frac{\partial(e\delta\theta + \theta\delta e)}{\partial t} \right) + (x^2 + e^2) \frac{\partial(\delta\theta)}{\partial t} \Bigg] dx \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial(e\delta e)}{\partial t} - x \left(\frac{\partial(e\delta\theta)}{\partial t} + \frac{\partial(\theta\delta e)}{\partial t} \right) + (x^2 + e^2) \frac{\partial(\delta\theta)}{\partial t} \Bigg] dx \quad (2.46)$$

$$\delta T_B(t) = \int_T^0 \rho \left[-\dot{e} - x\ddot{\theta} + e\dot{\theta}^2 \right] \delta e + \left\{ x\ddot{x} - (x^2 + e^2)\ddot{\theta} \right\} \delta\theta +$$

Rearranjando os termos obtém-se finalmente:

$$\delta T_B = \int_T^0 \rho \left[\frac{\partial(e\delta e)}{\partial t} - \dot{e}\delta e + x \left(\frac{\partial(e\delta\theta)}{\partial t} - \ddot{\theta}\delta e \right) + (x^2 + e^2) \left(\frac{\partial(\delta\theta)}{\partial t} - \ddot{\theta}\delta\theta \right) + e\dot{\theta}^2 \delta e \right] dx \quad (2.45)$$

Aplicando as propriedades P4, P5 e P4 nos três primeiros termos do integrando tem-se:

$$\delta T_B = \int_T^0 \rho \left[e\delta e + x(e\delta\theta + \theta\delta e) + (x^2 + e^2)(\delta\theta\dot{\theta} + e\dot{\theta}^2\delta e) \right] dx \quad (2.41)$$

ser retirados da integral

Observando que os z^o e 4^o termos dessa igualdade não dependem de e_i e assim podem

(2.55)

$$\delta T_M(t) = M_1 \int_0^t \left[\delta(l_1 e_1 \theta) + e_1 \theta \delta(e_1 \theta) + e_1 \delta e_1 + \delta(e_1 l_1 \theta) \right] dx + M_1 \left[l_1 \delta l_1 + l_1 \theta \delta(l_1 \theta) \right] + M_2 \int_0^t \left[\delta(l_2 e_2 \theta) + e_2 \theta \delta(e_2 \theta) + e_2 \delta e_2 + \delta(e_2 l_2 \theta) \right] dx + M_2 \left[l_2 \delta l_2 + l_2 \theta \delta(l_2 \theta) \right]$$

Assim:

apenas um ponto não nulo.

A integral se dá ao longo do braço (a deformação do braço pode ocorrer em todos os pontos e assim a massa localizada em um destes pontos pode produzir uma deformação). O delta indica a posição da massa no instante t. Logo este integrando terá

(2.54)

$$e_i = e(l_i, t) = \int e(x, t) \Delta_l dx$$

Por facilidade, adota-se:

(2.53)

$$\delta T_M(t) = M_1 \left[l_1 \delta l_1 - \delta(l_1 e_1 \theta) + e_1 \theta \delta(e_1 \theta) + e_1 \delta e_1 + \delta(l_1 e_1 \theta) + l_1 \theta \delta(l_1 \theta) \right] + M_2 \left[l_2 \delta l_2 - \delta(l_2 e_2 \theta) + e_2 \theta \delta(e_2 \theta) + e_2 \delta e_2 + \delta(l_2 e_2 \theta) + l_2 \theta \delta(l_2 \theta) \right]$$

Como primeira simplificação tem-se:

(2.52)

$$\delta T_M(t) = \frac{1}{2} M_1 \left[\delta l_1^2 - 2\delta(l_1 e_1 \theta) + \delta(e_1 \theta)^2 + \delta e_1^2 + 2\delta(l_1 e_1 \theta) + \delta(l_1 \theta)^2 \right] + \frac{1}{2} M_2 \left[\delta l_2^2 - 2\delta(l_2 e_2 \theta) + \delta(e_2 \theta)^2 + \delta e_2^2 + 2\delta(l_2 e_2 \theta) + \delta(l_2 \theta)^2 \right]$$

Para o primeiro variacional:

(2.51)

$$+ \frac{1}{2} M_2 \left[\delta l_2^2 - 2e_2 l_2 \theta + (e_2 \theta)^2 + e_2^2 + 2l_1 e_1 \theta + (l_1 \theta)^2 \right]$$

Para cada massa móvel o primeiro variacional será dado por:

$$\begin{aligned}
 \delta T_M(t) = & M_1 \int_0^t \left[-e_1 (\dot{l}_1 \delta \theta + \dot{\theta} \delta l_1) - l_1 \dot{\theta} \delta e_1 + e_1 \dot{\theta}^2 \delta e_1 + \frac{\partial (\dot{e}_1 \delta e_1)}{\partial t} - e_1 \dot{\theta} \delta l_1 \right] dx + \\
 & + M_1 \left[\frac{\partial (l_1 \dot{\theta}^2)}{\partial t} - l_1 \dot{\theta} \delta e_1 + l_1^2 \dot{\theta} \delta \theta + l_1 \dot{\theta}^2 \delta l_1 \right] + \\
 & + M_2 \int_0^t \left[-e_2 (\dot{l}_2 \delta \theta + \dot{\theta} \delta l_2) - l_2 \dot{\theta} \delta e_2 + e_2 \dot{\theta}^2 \delta e_2 + \frac{\partial (\dot{e}_2 \delta e_2)}{\partial t} - e_2 \dot{\theta} \delta l_2 \right] dx + \\
 & + M_2 \left[\frac{\partial (l_2 \dot{\theta}^2)}{\partial t} - l_2 \dot{\theta} \delta e_2 + l_2^2 \dot{\theta} \delta \theta + l_2 \dot{\theta}^2 \delta l_2 \right] + \\
 & + M_1 \left[\frac{\partial (l_1 \dot{\theta}^2)}{\partial t} - l_1 \dot{\theta} \delta e_1 + l_1^2 \dot{\theta} \delta \theta + l_1 \dot{\theta}^2 \delta l_1 \right] + \\
 & + M_2 \left[\frac{\partial (l_2 \dot{\theta}^2)}{\partial t} - l_2 \dot{\theta} \delta e_2 + l_2^2 \dot{\theta} \delta \theta + l_2 \dot{\theta}^2 \delta l_2 \right]
 \end{aligned}
 \tag{2.57}$$

Aplicando a propriedade P5 nos termos entre parênteses e a propriedade P4 tem-se:

$$\begin{aligned}
 \delta T_M(t) = & M_1 \int_0^t \left[-e_1 (\dot{l}_1 \delta \theta + \dot{\theta} \delta l_1) - l_1 \dot{\theta} \delta e_1 + e_1 \dot{\theta}^2 \delta e_1 + \frac{\partial (\dot{e}_1 \delta e_1)}{\partial t} - e_1 \dot{\theta} \delta l_1 \right] dx + \\
 & + M_1 \left[\frac{\partial (l_1 \dot{\theta}^2)}{\partial t} - l_1 \dot{\theta} \delta e_1 + l_1^2 \dot{\theta} \delta \theta + l_1 \dot{\theta}^2 \delta l_1 \right] + \\
 & + M_2 \int_0^t \left[-e_2 (\dot{l}_2 \delta \theta + \dot{\theta} \delta l_2) - l_2 \dot{\theta} \delta e_2 + e_2 \dot{\theta}^2 \delta e_2 + \frac{\partial (\dot{e}_2 \delta e_2)}{\partial t} - e_2 \dot{\theta} \delta l_2 \right] dx + \\
 & + M_2 \left[\frac{\partial (l_2 \dot{\theta}^2)}{\partial t} - l_2 \dot{\theta} \delta e_2 + l_2^2 \dot{\theta} \delta \theta + l_2 \dot{\theta}^2 \delta l_2 \right]
 \end{aligned}
 \tag{2.56}$$

P3A nos termos fora da integral obtêm-se:

Usando as propriedades P2, P3A, P4 e P2 a cada um dos termos nas integrais e P4 e

$$\begin{aligned}
 (2.59) \quad & \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(l_2 \theta^2 - l_2 \theta \dot{\theta} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(l_2 \theta \dot{\theta} \right) + \theta \ddot{\theta} \right] + M_2 \\
 & + \frac{\partial}{\partial t} \left(e_2 \dot{x}_2 \right) - e_2 \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(l_2 \theta \dot{\theta} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(l_2 \theta \dot{\theta} \right) \right) + \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(e_2 \dot{x}_2 \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(e_2 \dot{x}_2 \right) \right] \Delta l_2 dx + \\
 & + M_2 \int_0^t \left[e_2 \ddot{\theta} + e_2 \theta \ddot{\theta} + (-\ddot{e}_2 + e_2 \theta^2 - l_2 \theta \ddot{\theta}) \dot{x}_2 + \{ e_2 \ddot{l}_2 - l_2 \ddot{e}_2 - e_2 \dot{\theta} \} \dot{\theta} \right] dt \\
 & + \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(l_1 \theta^2 - l_1 \theta \dot{\theta} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(l_1 \theta \dot{\theta} \right) + \theta \ddot{\theta} \right] + M_1 \\
 & + \frac{\partial}{\partial t} \left(e_1 \dot{x}_1 \right) - e_1 \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(l_1 \theta \dot{\theta} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(l_1 \theta \dot{\theta} \right) \right) + \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(e_1 \dot{x}_1 \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(e_1 \dot{x}_1 \right) \right] \Delta l_1 dx + \\
 & + M_1 \int_0^t \left[e_1 \ddot{\theta} + e_1 \theta \ddot{\theta} + (-\ddot{e}_1 + e_1 \theta^2 - l_1 \theta \ddot{\theta}) \dot{x}_1 + \{ e_1 \ddot{l}_1 - l_1 \ddot{e}_1 - e_1 \dot{\theta} \} \dot{\theta} \right] dt
 \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned}
 (2.58) \quad & \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(l_2 \theta^2 - l_2 \theta \dot{\theta} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(l_2 \theta \dot{\theta} \right) - \theta \ddot{\theta} \right] + M_2 \\
 & + \frac{\partial}{\partial t} \left(e_2 \dot{x}_2 \right) - e_2 \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(l_2 \theta \dot{\theta} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(l_2 \theta \dot{\theta} \right) \right) + \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(e_2 \dot{x}_2 \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(e_2 \dot{x}_2 \right) \right] \Delta l_2 dx + \\
 & + M_2 \int_0^t \left[e_2 \ddot{\theta} + e_2 \theta \ddot{\theta} + (-\ddot{e}_2 + e_2 \theta^2 - l_2 \theta \ddot{\theta}) \dot{x}_2 + \{ e_2 \ddot{l}_2 - l_2 \ddot{e}_2 - e_2 \dot{\theta} \} \dot{\theta} \right] dt \\
 & + \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(l_1 \theta^2 - l_1 \theta \dot{\theta} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(l_1 \theta \dot{\theta} \right) - \theta \ddot{\theta} \right] + M_1 \\
 & + \frac{\partial}{\partial t} \left(e_1 \dot{x}_1 \right) - e_1 \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(l_1 \theta \dot{\theta} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(l_1 \theta \dot{\theta} \right) \right) + \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(e_1 \dot{x}_1 \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(e_1 \dot{x}_1 \right) \right] \Delta l_1 dx + \\
 & + M_1 \int_0^t \left[e_1 \ddot{\theta} + e_1 \theta \ddot{\theta} + (-\ddot{e}_1 + e_1 \theta^2 - l_1 \theta \ddot{\theta}) \dot{x}_1 + \{ e_1 \ddot{l}_1 - l_1 \ddot{e}_1 - e_1 \dot{\theta} \} \dot{\theta} \right] dt
 \end{aligned}$$

2.8 Princípio Estendido de Hamilton

O Princípio Estendido de Hamilton estabelece que entre dois instantes t_1 e t_2 a energia

do sistema obedece a:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta L + \delta W) dt = 0 \quad (2.67)$$

com L , o lagrangiano do sistema, sendo dado por:

$$L = T - U = T_B + T_M + T_C - U \quad (2.68)$$

e W o trabalho das forças não conservativas.

Assim o Princípio Estendido de Hamilton ficará:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta(T - U) + \delta W) dt = \int_{t_1}^{t_2} (\delta(T_B + T_M + T_C - U) + \delta W) dt = 0 \quad (2.69)$$

Ou seja vale para o sistema:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T_B + \delta T_M + \delta T_C - \delta U + \delta W) dt = 0 \quad (2.70)$$

Relembrando os termos:

$$\delta T_B(t) = \int_{t_1}^{t_2} \rho \left[-\ddot{e} - x\ddot{\theta} + e\dot{\theta}^2 \right] \delta x + (-x\ddot{e} - (x^2 + e^2)\ddot{\theta}) \delta \theta dx \quad (2.71)$$

$$\delta T_M(t) = M_1 \int_{t_1}^{t_2} \left[e_1 \ddot{\theta} - e_1 \dot{\theta} \right] \delta x_1 + (-\ddot{e}_1 + e_1 \dot{\theta}^2 - \dot{e}_1 \dot{\theta}) \delta e_1 + (e_1 \ddot{e}_1 - \dot{e}_1 \dot{e}_1 - \dot{e}_1 \ddot{e}_1 - e_1^2 \ddot{\theta}) \delta \theta dx_1$$

$$+ M_1 \left[\dot{e}_1 \dot{\theta}^2 - \dot{e}_1 \ddot{\theta} - \dot{e}_1 \ddot{\theta} \right] + M_2 \int_{t_1}^{t_2} \left[e_2 \ddot{\theta} - e_2 \dot{\theta} \right] \delta x_2 + (-\ddot{e}_2 + e_2 \dot{\theta}^2 - \dot{e}_2 \dot{\theta}) \delta e_2 + (e_2 \ddot{e}_2 - \dot{e}_2 \dot{e}_2 - \dot{e}_2 \ddot{e}_2 - e_2^2 \ddot{\theta}) \delta \theta dx_2$$

$$+ M_2 \left[\dot{e}_2 \dot{\theta}^2 - \dot{e}_2 \ddot{\theta} - \dot{e}_2 \ddot{\theta} \right] \quad (2.72)$$

$$\delta T_C = J^c (-\ddot{\theta} \delta \theta) \quad (2.73)$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \int_T^0 \rho (-x\ddot{e} + e^2) dx - x\ddot{e} + e^2 \right\} \theta + M_1 \int_T^0 (e_1 \dot{l}_1 - l_1 \dot{e}_1 - e_1 \theta^2) dx + M_2 \int_T^0 (e_2 \dot{l}_2 - l_2 \dot{e}_2 - e_2 \theta^2) dx + \\
 & + \left[M_1 \int_T^0 (-\dot{e}_1 + e_1 \theta^2 - l_1 \dot{\theta}) \Delta l_1 dx \right] \delta e_1 + \\
 & + \left[M_2 \int_T^0 (-\dot{e}_2 + e_2 \theta^2 - l_2 \dot{\theta}) \Delta l_2 dx \right] \delta e_2 + \\
 & + \left[\int_T^0 \rho (-\ddot{e} - x\ddot{\theta} + e\theta^2) dx - \int_T^0 EI^V \frac{\partial^4 e}{\partial x^4} dx \right] \delta e + \\
 & + \left[-M_1 l_1 \ddot{\theta} - M_2 l_2 \ddot{\theta} - J^c \dot{\theta} + \tau \right] \delta \theta +
 \end{aligned}$$

O modelo é descrito pela equação:

$$\begin{aligned}
 & \int_T^0 \rho \left[\frac{\partial (e\delta e)}{\partial t} x - \frac{\partial (e\delta e + \theta\delta e)}{\partial t} \right] dx + \left(x^2 + e^2 \right) \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial (e\delta e)}{\partial t} \right] + \\
 & + M_1 \int_T^0 \left[\frac{\partial (e_1 \delta e_1)}{\partial t} - e_1 \left(\frac{\partial (l_1 \delta \theta)}{\partial t} + \frac{\partial (e_1 \delta \theta)}{\partial t} \right) - l_1 \left(\frac{\partial (\theta \delta l_1)}{\partial t} + \frac{\partial (e_1 \delta \theta)}{\partial t} \right) \right] dx + \\
 & + M_2 \int_T^0 \left[\frac{\partial (e_2 \delta e_2)}{\partial t} - e_2 \left(\frac{\partial (l_2 \delta \theta)}{\partial t} + \frac{\partial (e_2 \delta \theta)}{\partial t} \right) - l_2 \left(\frac{\partial (\theta \delta l_2)}{\partial t} + \frac{\partial (e_2 \delta \theta)}{\partial t} \right) \right] dx + \\
 & + M_1 \left[\frac{\partial (l_1 \delta \theta)}{\partial t} + l_1^2 \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial (e\delta e)}{\partial t} \right] + M_2 \left[\frac{\partial (l_2 \delta \theta)}{\partial t} + l_2^2 \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial (e\delta e)}{\partial t} \right] + J^c \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial (e\delta e)}{\partial t} \right] \right] = 0
 \end{aligned}
 \tag{2.77}$$

Os termos de ordem superior por apresentarem derivadas temporais dos diferenciais das variáveis pretendidas foram desprezados. Tais termos estão listados logo adiante:

$$\int_{t_2}^{t_1} (\delta T_B + \delta T_M + \delta T_C - \delta U + \delta W) dt = 0
 \tag{2.76}$$

Assim para o sistema tem se:

$$\delta W = \tau \delta \theta + F_1 \delta l_1 + F_2 \delta l_2
 \tag{2.75}$$

$$\delta U = EI^V \left[\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right) \right]_{x=L}^{x=0} - EI^V \left[\frac{\partial^3 e}{\partial x^3} \delta e \right]_{x=L}^{x=0} + \int_L^0 EI^V \frac{\partial^4 e}{\partial x^4} \delta e dx
 \tag{2.74}$$

flexão e curvatura serão nulas, isto é:

As condições de contorno são originadas na consideração que na fixação do cubo a

$$\begin{aligned}
 & M_2 \int_0^L [e_2 \ddot{\theta} + e_2 \theta^2] [M_2 dx + M_2 (l_2 \dot{\theta}^2 - \ddot{l}_2) + F_2] = 0 \\
 & M_1 \int_0^L [e_1 \ddot{\theta} + e_1 \theta^2] [M_1 dx + M_1 (l_1 \dot{\theta}^2 - \ddot{l}_1) + F_1] = 0 \\
 & M_2 \int_0^L (-\ddot{e}_2 + e_2 \theta^2 - l_2 \dot{\theta}) M_2 dx = 0 \\
 & M_1 \int_0^L (-\ddot{e}_1 + e_1 \theta^2 - l_1 \dot{\theta}) M_1 dx = 0 \\
 & \int_0^L \rho (-\ddot{e} - x \ddot{\theta} + e \theta^2) dx - \int_0^L EI^V \frac{\partial^4 e}{\partial x^4} dx = 0 \\
 & + M_2 \int_0^L (e_2 \ddot{l}_2 - l_2 \ddot{e}_2 - e_2 \dot{\theta}) M_2 dx - (M_1 l_1^2 + M_2 l_2^2 + J^c) \ddot{\theta} + \tau = 0 \\
 & \int_0^L \rho (-x \ddot{e} - x^2 \ddot{\theta} + e \theta^2) dx + M_1 \int_0^L (e_1 \ddot{l}_1 - l_1 \dot{\theta}) M_1 dx +
 \end{aligned}$$

cada coeficiente isoladamente deve ser nulo, ou seja

Na equação do modelo cada uma das coordenadas e_1, e_2, l_1, l_2 e θ é independente. Assim

$$(2.79) \quad EI^V \left[\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} \delta \right]_{x=L} - EI^V \left[\frac{\partial^3 e}{\partial x^3} \delta \right]_{x=L} = 0$$

Com as condições de contorno embutidas em:

$$(2.78) \quad \left[M_2 \int_0^L [e_2 \ddot{\theta} + e_2 \theta^2] [M_2 dx + M_2 (l_2 \dot{\theta}^2 - \ddot{l}_2) + F_2] \delta l_2 = 0 \right. \\
 \left. + \left[M_1 \int_0^L [e_1 \ddot{\theta} + e_1 \theta^2] [M_1 dx + M_1 (l_1 \dot{\theta}^2 - \ddot{l}_1) + F_1] \delta l_1 + \right. \right.$$

Assim as equações para o modelo contínuo do sistema foram obtidas. A complexidade do sistema obtido não permite facilmente chegar a solução. Nas próximas seções será

$$\begin{aligned}
 e|_{x=0} &= 0 & \frac{\partial e}{\partial x}|_{x=0} &= 0 \\
 \frac{\partial^2 e}{\partial x^2}|_{x=L} &= 0 & \frac{\partial^2 e}{\partial x^2}|_{x=L} &= 0 \\
 \frac{\partial^3 e}{\partial x^3}|_{x=L} &= 0 & \frac{\partial^3 e}{\partial x^3}|_{x=L} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.86}$$

As condições de contorno ficam:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 e}{\partial x^2}|_{x=L} &= 0 & \frac{\partial^3 e}{\partial x^3}|_{x=L} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.85}$$

Como os infinitesimais são arbitrários deve se torná-los nulos, isto é:

$$-EI^V \left[\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} \right]_{x=L} \delta \left(\frac{\partial x}{\partial e} \right) \Big|_{x=L} + EI^V \left[\frac{\partial^3 e}{\partial x^3} \right]_{x=L} \delta e(L) = 0
 \tag{2.84}$$

Reduzindo se a:

$$EI^V \left[\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial x}{\partial e} \right) \right]_{x=L} - EI^V \left[\frac{\partial^3 e}{\partial x^3} \delta e \right]_{x=L} = 0
 \tag{2.83}$$

Aplicando essas condições a equação 2.79:

$$\delta e(0) = 0 \quad \delta \left(\frac{\partial x}{\partial e} \right) \Big|_{x=0} = 0
 \tag{2.82}$$

Consequentemente tem-se:

$$e(0) = 0 \quad \frac{\partial e}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0
 \tag{2.81}$$

utilizado um método para contornar esta situação e chegar em equações com uma melhor possibilidade para a obtenção da solução.

3 Subestruturação Do Sistema

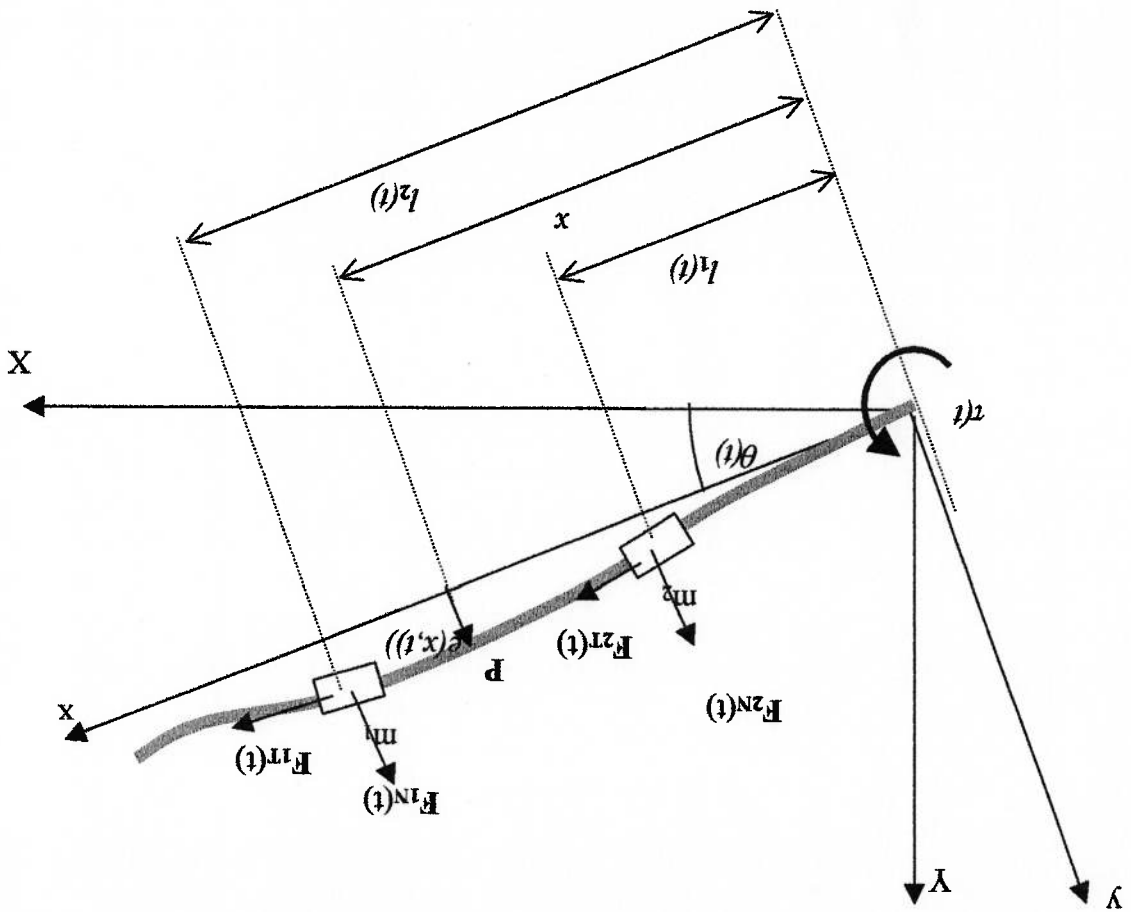


Figura 3 Sistema braço flexível e massas móveis

Em sistemas complexos, as equações que governam o movimento, frequentemente, não permitem obter a solução pretendida de forma razoável. Uma estratégia possível é considerar o sistema constituído de diversas subestruturas, determinar as equações que governam essas subestruturas e depois considerar a interação de cada estrutura sobre a outra para determinar seus efeitos sobre a estrutura como um todo. Na situação tratada isso significa descrever o movimento das massas sobre a barra. Determinar a energia do

sistema braço flexível e cubo, aplicar a lei de ação de reação para estes dois sistemas, o

das massa e o sistema braço flexível e cubo.

3.1 Sistema de coordenadas

3.2 Descrição de um ponto P sobre a barra

A localização do ponto de aplicação da força devido a ação da massa sobre o braço no

sistema móvel M(oxyz) é dada por:

$$\vec{p}_M = \hat{i} + e(x, t) \hat{j} \quad (3.01)$$

A velocidade do ponto P no sistema móvel M(oxyz) é dada por:

$$\vec{v}_M = \frac{d\vec{p}_M}{dt} = \frac{d\hat{i}}{dt} + \frac{\partial}{\partial t} \left[\hat{j} = \hat{i} + e \right]_{x=1} \quad (3.02)$$

A aceleração do ponto P no sistema móvel M(oxyz) é dada por:

$$\vec{a}_M = \frac{d^2\vec{p}_M}{dt^2} = \frac{d^2\hat{i}}{dt^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\hat{j} = \hat{i} + e \right]_{x=1} \quad (3.03)$$

A velocidade angular do referencial móvel em relação ao referencial inercial é dada por:

$$\omega_I = \frac{d\theta}{dt} \hat{k} = \theta \dot{\hat{k}} \quad (3.04)$$

A aceleração no referencial inercial I(OXYZ) será dada por:

$$a_I = a_M + \frac{d\omega_I}{dt} \times p_M + 2\omega_I \times v_M + \omega_I \times \omega_I \times p_M \quad (3.05)$$

$$a_I = (\ddot{i} + \dot{e}\dot{j}) + \theta \dot{k} \times (\dot{i} + e\dot{j}) + 2\theta \dot{k} \times (\dot{i} + e\dot{j}) + \theta \dot{k} \times \theta \dot{k} \times (\dot{i} + e\dot{j}) \quad (3.06)$$

$$a_I = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \theta \\ \dot{i} & \dot{j} & \dot{k} \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \theta \\ \dot{i} & \dot{j} & \dot{k} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dot{i} & \dot{j} & \dot{k} \\ \dot{i} & \dot{j} & \dot{k} \end{vmatrix} \quad (3.07)$$

$$a_I = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \theta \\ \dot{i} & \dot{j} & \dot{k} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \theta \\ \dot{i} & \dot{j} & \dot{k} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dot{i} & \dot{j} & \dot{k} \\ \dot{i} & \dot{j} & \dot{k} \end{vmatrix} - e\theta \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \theta \\ \dot{i} & \dot{j} & \dot{k} \end{vmatrix} \quad (3.08)$$

A projeção da aceleração a na direção normal da a componente:

$$a = \frac{\partial x}{\partial t} \tag{3.13}$$

seja:

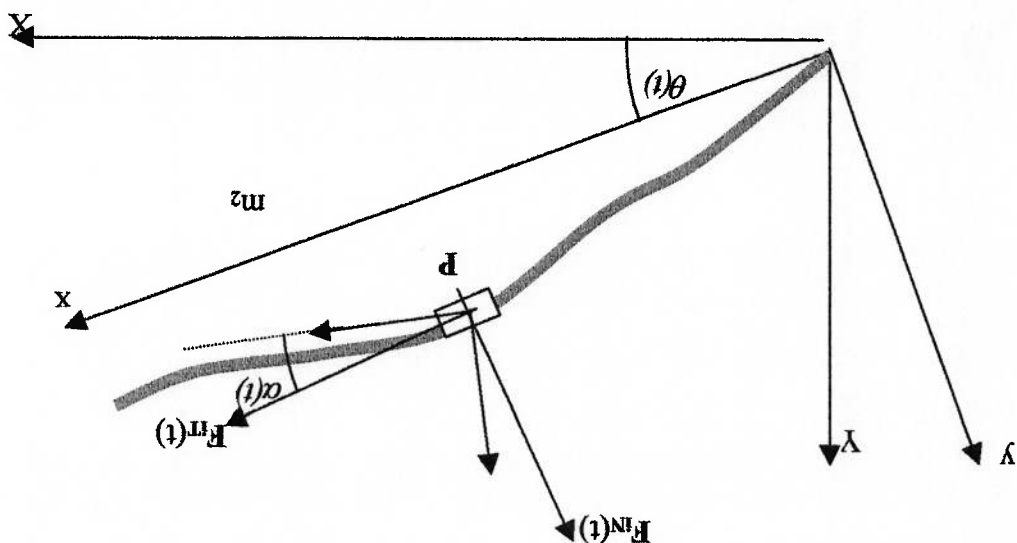
Sendo o ângulo de curvatura a derivada temporal da deformação no ponto da massa, ou

$$\dot{t} = \cos \alpha \dot{i} + \sin \alpha \dot{j} \tag{3.12}$$

$$\dot{n} = -\sin \alpha \dot{i} + \cos \alpha \dot{j} \tag{3.11}$$

As direções tangentes e normal são dadas por:

Figura 4 Forças sobre a massa móvel



que:

Para determinar a força aplicada sobre o braço impõe se a 2ª Lei de Newton, observando

A equação (3.10) indica aceleração do ponto da barra onde está a massa de controle.

$$a_t = (\ddot{i} - e\dot{\theta} - 2e\theta - 1\theta^2)\hat{i} + (\dot{e} + 1\dot{\theta} + 2i\dot{\theta} - e\theta^2)\hat{j} \tag{3.10}$$

$$a_n = (\ddot{i} + \dot{e}\hat{j}) + (-e\dot{\theta}\hat{i} + 1\dot{\theta}\hat{j}) + 2(-e\theta\hat{i} + i\theta\hat{j}) + (-1\theta^2\hat{i} - e\theta^2\hat{j}) \tag{3.09}$$

força resultante sobre a massa M_i

$$F_{IT} = M_i (\ddot{i}_i - e_i \ddot{\theta} - 2e_i \dot{\theta} - l_i \dot{\theta}^2) \quad (3.22)$$

Com as mesmas aproximações obtêm-se:

$$a_{IT} = (\ddot{i}_i - e_i \ddot{\theta} - 2e_i \dot{\theta} - l_i \dot{\theta}^2) \cos \alpha + (\ddot{e} + l\ddot{\theta} + 2l\dot{\theta} - e\dot{\theta}^2) \sin \alpha \quad (3.21)$$

semelhante. Aceleração tangente é dada por:

Para a obtenção da componente tangente da força aplicada, o procedimento é

acortolis a aceleração de Coriolis

a_{att} a aceleração do transporte da massa (deslocamento angular do braço)

$a_{transversal}$ a aceleração do deslocamento transversal do braço

com

$$F_{IN} = M_i (a_{transversal} + a_{att} + a_{coriolis}) \quad (3.20)$$

entre massa e braço.

Força resultante sobre a massa M_i devido ao movimento do braço e movimento relativo

$$F_{IN} = M_i (\ddot{e}_i + l_i \ddot{\theta} + 2l_i \dot{\theta} - e_i \dot{\theta}^2) \quad (3.19)$$

Obtendo para a força normal:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &\approx 0 \\ \cos \alpha &\approx 1 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Para pequenas deflexões pode-se admitir:

$$F_{IN} = M_i a_{IN} \quad (3.17)$$

A força normal aplicada a massa pelo braço é dada por:

$$a_{IN} = -(\ddot{i}_i - e_i \ddot{\theta} - 2e_i \dot{\theta} - l_i \dot{\theta}^2) \sin \alpha + (\ddot{e} + l\ddot{\theta} + 2l\dot{\theta} - e\dot{\theta}^2) \cos \alpha \quad (3.16)$$

$$a_{IN} = ((\ddot{i}_i - e_i \ddot{\theta} - 2e_i \dot{\theta} - l_i \dot{\theta}^2) \ddot{i}_i + (\ddot{e} + l\ddot{\theta} + 2l\dot{\theta} - e\dot{\theta}^2) \ddot{j}_i) \cdot (-\sin \alpha \ddot{i}_i + \cos \alpha \ddot{j}_i) \quad (3.15)$$

$$a_{IN} = a_i \cdot n \quad (3.14)$$

3.3 Interação braço massa

O braço flexível preso ao cubo forma outro subsistema. As forças externas são o torque $\tau(t)$ aplicado ao cubo e uma força concentrada $F_B^i(t)$ normal a viga e aplicada no ponto $x = l_i$. Na verdade essa força é a reação da massa a ação do braço ao girar. Assim

$$F_B^i(l_i) = -F_{iv}^i(l_i) = -M_i(\ddot{e}_i^i + l_i\ddot{\theta}^i + 2l_i\dot{\theta}^i - e_i^i\dot{\theta}^2) \quad (3.23)$$

força aplicada ao braço $i=1,2$ (das massas)

3.4 Energia associada ao subsistema do braço flexível

Pelo isolamento deste sistema, considera-se apenas as forças no braço flexível. Assim deve se considerar a energia cinética do braço e do cubo a energia potencial do braço e

o trabalho das forças não conservativas.

$$\delta W = \tau \delta \theta + F_B^1(l_1) \delta e_1^1 + F_B^2(l_2) \delta e_2^2 \quad (3.24)$$

Com o Princípio Estendido de Hamilton:

$$\int_{t_2}^{t_1} (\delta L + \delta W) dt = 0 \quad (3.25)$$

com L , o lagrangiano do sistema, sendo dado por:

$$L = T - U = T_B + T_C - U \quad (3.26)$$

e W o trabalho das forças não conservativas.

Assim o Princípio Estendido de Hamilton ficará:

$$\int_{t_2}^{t_1} (\delta(T - U) + \delta W) dt = \int_{t_2}^{t_1} (\delta(T_B + T_C - U) + \delta W) dt = 0 \quad (3.27)$$

Ou seja vale para o sistema:

$$\int_{t_2}^{t_1} (\delta T_B + \delta T_C - \delta U + \delta W) dt = 0 \quad (3.28)$$

Relembrando os termos:

$$(3.37) \quad \ddot{e}_1 + l_1 \dot{\theta} + 2l_1 \theta - e_1 \theta^2 = 0$$

$$(3.36) \quad \int_L^0 \rho (-\ddot{e} - x\ddot{\theta} + e\theta^2) dx - \int_L^0 EI_V \frac{\partial^4 e}{\partial x^4} dx = 0$$

$$(3.35) \quad \int_L^0 \rho (-x\ddot{e} - x^2\ddot{\theta} - e^2\theta) dx - J^c \ddot{\theta} + \tau = 0$$

isoladamente deve ser nulo, ou seja:

Da equação do modelo cada coordenada é independente, assim cada coeficiente

$$(3.34) \quad -EI_V \left[\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial e}{\partial x} \right) \right]_{x=L}^{x=0} + EI_V \left[\frac{\partial^3 e}{\partial x^3} \delta e \right]_{x=L}^{x=0} \left\{ dt = 0 \right. \\ -M_1 (\ddot{e}_1 + l_1 \dot{\theta} + 2l_1 \theta - e_1 \theta^2) \delta e_1 - M_2 (\ddot{e}_2 + l_2 \dot{\theta} + 2l_2 \theta - e_2 \theta^2) \delta e_2 + \\ \left. + \int_L^0 \rho (-\ddot{e} - x\ddot{\theta} + e\theta^2) dx - \int_L^0 EI_V \frac{\partial^4 e}{\partial x^4} dx \right\} \delta e - \\ \left. \int_{l_2}^{l_1} \int_L^0 \rho (-x\ddot{e} - x^2\ddot{\theta} - e^2\theta) dx - J^c \ddot{\theta} + \tau \right\} \delta \theta +$$

subestrutura do braço flexível e cubo.

A aplicação do Princípio Estendido de Hamilton resultará no seguinte modelo para a

$$(3.33) \quad \delta W = \tau \delta \theta - M_1 (\ddot{e}_1 + l_1 \dot{\theta} + 2l_1 \theta - e_1 \theta^2) \delta e_1 - M_2 (\ddot{e}_2 + l_2 \dot{\theta} + 2l_2 \theta - e_2 \theta^2) \delta e_2$$

$$(3.32) \quad \delta W = \tau \delta \theta + F^B(l_1) \delta e_1 + F^B(l_2) \delta e_2$$

$$(3.31) \quad \delta U = EI_V \left[\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial e}{\partial x} \right) \right]_{x=L}^{x=0} - EI_V \left[\frac{\partial^3 e}{\partial x^3} \delta e \right]_{x=L}^{x=0} + \int_L^0 EI_V \frac{\partial^4 e}{\partial x^4} \delta e dx$$

$$(3.30) \quad \delta T^c = J^c (-\ddot{\theta} \delta \theta)$$

$$(3.29) \quad \delta T^B(t) = \int_L^0 \rho \left[(-\ddot{e} - x\ddot{\theta} + e\theta^2) \delta e + (-x\ddot{\theta} - x^2\ddot{\theta} - e^2\theta) \delta \theta \right] dx$$

Tem-se:

$$\int_L^0 \rho x^2 \ddot{\theta} dx = 0 \tag{3.44}$$

$$e^2 \theta^2 = 0 \tag{3.43}$$

Fazendo as aproximações:

$$-\int_L^0 \rho x \ddot{e} dx - \left(\int_L^0 \rho(x^2 + e^2) dx + J_c \right) \ddot{\theta} + \tau = 0 \tag{3.42}$$

$$\rho(-\ddot{e} - x\ddot{\theta} + e^2 \theta^2) - EI_Y \frac{\partial^4 e}{\partial x^4} = 0 \tag{3.41}$$

solução impõe:

A solução homogênea das duas primeiras equações (3.35) e (3.36) do modelo representam a vibração livre do braço sem a ação de forças externas ao subsistema.

3.4.1 Vibração livre

$$\left. \frac{\partial e}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \qquad \left. \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} \right|_{x=0} = 0$$

$$\left. \frac{\partial^3 e}{\partial x^3} \right|_{x=L} = 0 \qquad \left. \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} \right|_{x=L} = 0 \tag{3.40}$$

As condições de contorno são as mesmas obtidas anteriormente:

$$EI_Y \left[\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial e}{\partial x} \right) \right]_{x=L} - EI_Y \left[\frac{\partial^3 e}{\partial x^3} \delta e \right]_{x=L} = 0 \tag{3.39}$$

Com a condição de contorno dada por:

$$e^2 + l^2 \ddot{\theta} + 2l \dot{\theta}^2 - e^2 \theta^2 = 0 \tag{3.38}$$

$$-\int_L^0 p x z \ddot{\theta} dx - J^c \ddot{\theta} = 0 \tag{3.52}$$

Chegando finalmente a:

$$-\int_L^0 p x z \ddot{\theta} dx + \int_L^0 p x^2 \ddot{\theta} dx - (J_B + J^c) \ddot{\theta} = -\int_L^0 p x z \ddot{\theta} dx + J_B \ddot{\theta} - J^c \ddot{\theta} = 0$$

$$-\int_L^0 p x \ddot{\theta} dx - (J_B + J^c) \ddot{\theta} = -\int_L^0 p x (\ddot{z} - x \ddot{\theta}) dx - (J_B + J^c) \ddot{\theta} =$$

E também:

$$p z + EI_Y \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = 0 \tag{3.51}$$

permite escrever as 3.47 e 3.48 como:

$$e(x,t) = z(x,t) - x \cdot \ddot{\theta}(t) \tag{3.50}$$

$$e(x,t) = z(x,t) - x \cdot \theta(t) \tag{3.49}$$

A mudança de variável :

3.4.2 Separação de variáveis

$$-\int_L^0 p x e \ddot{\theta} dx - (J_B + J^c) \ddot{\theta} = 0 \tag{3.48}$$

$$p(e + x \ddot{\theta}) + EI_Y \frac{\partial^4 e}{\partial x^4} = 0 \tag{3.47}$$

O movimento do braço é dado por:

momento de inércia da viga.

$$J_B = \int_L^0 p x^2 dx \tag{3.46}$$

$$-\int_L^0 p x e \ddot{\theta} dx - \left(\int_L^0 p x^2 dx + J^c \right) \ddot{\theta} = 0 \tag{3.45}$$

Para as condições de contorno:

$$(3.53) \quad e(0) = z(0) = 0$$

$$(3.54) \quad \left. \frac{\partial e}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{\partial(z(x,t) + x \cdot \theta(t))}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial z(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} + \theta(t) = 0$$

$$(3.55) \quad \left. \frac{\partial z(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = -\theta(t)$$

$$(3.56) \quad \begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 e}{\partial z^2} \right|_{x=L} &= \left. \frac{\partial^2 z}{\partial z^2} \right|_{x=L} = 0 \\ \left. \frac{\partial^3 e}{\partial z^3} \right|_{x=L} &= \left. \frac{\partial^3 z}{\partial z^3} \right|_{x=L} = 0 \end{aligned}$$

$$(3.57) \quad \int_L^0 p x \ddot{z} dx + J^c \ddot{\theta} = 0$$

$$(3.58) \quad p \ddot{z} + EI^V \frac{\partial^4 z}{\partial z^4} = 0$$

$$(3.59) \quad \begin{aligned} z \Big|_{x=0} &= 0 \\ \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{x=0} &= -\theta(t) \\ \left. \frac{\partial^2 z}{\partial z^2} \right|_{x=L} &= 0 \\ \left. \frac{\partial^3 z}{\partial z^3} \right|_{x=L} &= 0 \end{aligned}$$

3.4.3 Expansão Ortogonal

As equações 3.57 e 3.58 expressam a vibração livre do braço flexível. Uma expansão de funções independente e ortogonais com separação de variáveis permite distinguir o movimento espacial do temporal. Admitindo possível que:

$$(3.60) \quad z(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x) \eta_r(t)$$

Substituindo se na equação 3.58, de vibração livre:

$$(3.61) \quad \sum_{r=1}^{\infty} \left[\rho \phi_r \ddot{\eta}_r + EI_V \frac{\partial^4 \phi_r}{\partial x^4} \eta_r \right] = 0$$

$$(3.62) \quad \sum_{r=1}^{\infty} \ddot{\eta}_r \int_L \rho x \phi_r dx + J^c \ddot{\theta} = 0$$

Como as funções são ortogonais cada expressão para r deve ser individualmente nula

em 3.61:

$$(3.63) \quad \rho \phi_r \ddot{\eta}_r + EI_V \frac{\partial^4 \phi_r}{\partial x^4} \eta_r = 0$$

$$(3.64) \quad \frac{EI_V \frac{\partial^4 \phi_r}{\partial x^4}}{\rho \phi_r} = -\frac{\ddot{\eta}_r}{\eta_r} = \omega_r^2$$

O que impõe:

$$(3.65) \quad EI_V \frac{\partial^4 \phi_r}{\partial x^4}(x) - \omega_r^2 \rho \phi_r(x) = 0$$

$$(3.66) \quad \ddot{\eta}_r(t) + \omega_r^2 \eta_r(t) = 0$$

3.4.4 Auto funções e auto valores do sistema

A solução das equações recaem num problema de auto valor. Para o conjunto de funções admissíveis é proposta a seguinte solução:

$$(3.67) \quad \phi_r(x) = a_r \sin(\beta_r x) + b_r \cos(\beta_r x) + c_r \sinh(\beta_r x) + d_r \cosh(\beta_r x)$$

Substituindo na equação 3.65:

$$(3.68) \quad \frac{EI_V}{\rho \omega_r^2} \phi_r''''(x) - \omega_r^2 \rho \phi_r(x) = 0$$

Definindo

$$\sum_{r=1}^{\infty} (a_r + c_r) \beta_r \eta_r = -\theta(t) \quad (3.78)$$

$$\left. \frac{\partial \phi_r}{\partial x} \right|_{x=0} = \sum_{r=1}^{\infty} \beta_r [a_r \cos(\beta_r L) - b_r \sin(\beta_r L) + c_r \cosh(\beta_r L) + d_r \sinh(\beta_r L)] = -\theta(t) \quad (3.77)$$

Para a condição da primeira derivada:

$$\left. \frac{\partial^3 \phi_r}{\partial x^3} \right|_{x=L} = \beta_r^3 [-a_r \cos(\beta_r L) + b_r \sin(\beta_r L) + c_r \cosh(\beta_r L) + d_r \sinh(\beta_r L)] = 0 \quad (3.76)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \phi_r}{\partial x^2} \right|_{x=L} = \beta_r^2 [-a_r \sin(\beta_r L) - b_r \cos(\beta_r L) + c_r \sinh(\beta_r L) + d_r \cosh(\beta_r L)] = 0 \quad (3.75)$$

$$\phi_r(0) = a_r + d_r = 0 \quad (3.74)$$

A substituição dessa condição na solução proposta produz:

$$\phi_r \Big|_{x=0} = \left. \frac{\partial^2 \phi_r}{\partial x^2} \right|_{x=L} = \left. \frac{\partial \phi_r}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \quad (3.73)$$

A solução não trivial impõe as seguintes condições:

$$\left. \frac{\partial z}{\partial z} \right|_{x=0} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\partial \phi_r}{\partial x} \Big|_{x=0} \eta_r = -\theta(t) \quad (3.72)$$

$$\left. \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} \right|_{x=L} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\partial^3 \phi_r}{\partial x^3} \Big|_{x=L} \eta_r = 0 \quad (3.71)$$

$$\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{x=L} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\partial^2 \phi_r}{\partial x^2} \Big|_{x=L} \eta_r = 0 \quad (3.70)$$

$$z(0, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(0) \eta_r = 0 \quad (3.69)$$

Para as condições de contorno dadas em 3.59 tem-se:

sistema linear e determinar os coeficientes da solução proposta.

Com as quatro condições de contorno, equação 3.59, já obtidas pode-se estabelecer um

(3.85)

$$\begin{aligned} s_T &= \sin(\beta' T) \\ s_T &= \sinh(\beta' T) \\ c_T &= \cos(\beta' T) \\ c_T &= \cosh(\beta' T) \end{aligned}$$

Para simplificação da notação, adota-se:

$$(3.84) \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p' \\ c' \\ b' \\ a' \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos(\beta' T) + 1 & -\sinh(\beta' T) & 0 & 0 & 0 \\ -L\beta' \sin(\beta' T) & L\beta' \cosh(\beta' T) & 0 & 0 & 0 \\ \beta'_2 \cosh(\beta' T) & \beta'_2 \sinh(\beta' T) & 0 & 0 & 0 \\ \beta'_3 \sin(\beta' T) & \beta'_3 \cosh(\beta' T) & 0 & 0 & 0 \\ \beta'_2 \cosh(\beta' T) & \beta'_2 \sinh(\beta' T) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que terá a forma:

Através das equações 3.74, 3.76, 3.77 e 3.83 acima pode se montar um sistema linear

(3.83)

$$\begin{bmatrix} d \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p' \\ c' \\ b' \\ a' \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos(\beta' T) + 1 & -\sinh(\beta' T) & 0 & 0 & 0 \\ -L\beta' \sin(\beta' T) & L\beta' \cosh(\beta' T) & 0 & 0 & 0 \\ \beta'_2 \cosh(\beta' T) & \beta'_2 \sinh(\beta' T) & 0 & 0 & 0 \\ \beta'_3 \sin(\beta' T) & \beta'_3 \cosh(\beta' T) & 0 & 0 & 0 \\ \beta'_2 \cosh(\beta' T) & \beta'_2 \sinh(\beta' T) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo a substituição da solução proposta e realizando a integral em 3.82, obtém-se:

$$(3.82) \quad \int_0^L dx \phi' dx - J^c \bar{\theta}' = 0$$

$$(3.81) \quad \int_0^L dx \phi' dx - J^c \bar{\theta}' \eta_r = 0$$

$$(3.80) \quad \sum_{r=1}^{\infty} \int_0^L dx \phi' \eta_r dx - \sum_{r=1}^{\infty} J^c \bar{\theta}' \eta_r = 0$$

Essa condição, 3.79, na equação 3.62 de vibração livre produz:

$$(3.79) \quad \bar{\theta}' = (a_r + c_r) \beta'_r \sum_{r=1}^{\infty} \bar{\theta}' \eta_r = -\theta(t)$$

Assim:

$$(3.86) \quad \begin{bmatrix} 0 & -\beta_2^r s_L & -\beta_3^r c_L & +s_L \\ 0 & -\beta_2^r c_L & -\beta_3^r s_L & \\ 1 & -\beta_2^r c_L & -\beta_3^r s_L & \\ 1 & \beta_2^r s_L & \beta_3^r c_L & \\ 0 & \beta_2^r s_L & \beta_3^r c_L & \\ 0 & \frac{J^c \beta_3^r}{d} - L \beta_1^r c_L & -1 & \\ 0 & \frac{J^c \beta_3^r}{d} + L \beta_1^r c_L & -1 & \\ 1 & \beta_2^r s_L & \beta_3^r c_L & \\ 0 & \beta_2^r c_L & \beta_3^r s_L & \\ 1 & \beta_2^r s_L & \beta_3^r c_L & \\ 0 & \beta_2^r c_L & \beta_3^r s_L & \\ 0 & L \beta_1^r s_L - c_L + 1 & & \\ & \begin{bmatrix} a_1^r \\ b_1^r \\ c_1^r \\ d_1^r \end{bmatrix} & & \\ & = & & \\ & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & & \end{bmatrix}$$

Os valores β_r estão associados as frequências naturais. Para a solução não trivial do sistema acima deve se impor nulo, o determinante resultando na equação:

$$(3.87) \quad [\cos(\beta_1 L) \cosh(\beta_1 L) + 1] J^c \beta_3^r + \sin(\beta_1 L) \cosh(\beta_1 L) - \cos(\beta_1 L) \sinh(\beta_1 L) = 0 \quad (3.87)$$

As raízes dessa equação transcendental serão obtidas numericamente. A solução substituída no sistema linear produz uma função exclusiva dos parâmetros da estrutura. Com a determinação dos coeficientes pode se expressar o r -ésimo modo da estrutura, através da solução do sistema linear de 3.86 e da equação 3.87. Além disso determina se a frequência de vibração através de 3.68.

3.4.5 Normalização dos modos

Para o sistema obtido deve se determinar a estrutura matemática que normaliza os modos. Partindo da equação do modelo 3.58:

$$(3.88) \quad p\ddot{z} + EI^V \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = 0$$

Multiplicando por x e integrando por todo o braço flexível:

$$(3.89) \quad \int_L^0 p x z \dot{z} dx + \int_L^0 EI^V x \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} dx = 0$$

Integrando por partes a segunda integral:

identidade para a fixação no cubo:

Combinando as duas equações 3.94 e 3.97 de vibração livre obtém-se a seguinte

$$\int_L^0 p x z dx - J^c \left. \frac{\partial^2}{\partial z} \frac{\partial x}{\partial t} \right|_{x=0} = 0 \quad (3.97)$$

Substituindo 3.96 em 3.95

$$\left. \frac{\partial x}{\partial z} \right|_{x=0} = -\theta(t) \Leftrightarrow \left. \frac{\partial^2}{\partial z} \frac{\partial x}{\partial t} \right|_{x=0} = -\dot{\theta}(t) \quad (3.96)$$

e a condição de contorno :

$$\int_L^0 p x z dx + J^c \ddot{\theta} = 0 \quad (3.95)$$

Considerando a equação de 3.57 da vibração livre:

$$\int_L^0 p x z dx + E I^V \left. \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \right|_{x=0} = 0 \quad (3.94)$$

Considerando novamente a condição de contorno 3.59, tem-se:

$$\int_L^0 p x z dx - E I^V \left. \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \right|_{x=L} = \int_L^0 p x z dx - E I^V \left. \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \right|_{x=L} + E I^V \left. \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \right|_{x=0} = 0 \quad (3.93)$$

Integrando novamente:

$$\int_L^0 p x z dx - \int_L^0 E I^V \frac{\partial^3 x}{\partial z^3} dx = 0 \quad (3.92)$$

Obtém-se

$$E I^V \left(x \frac{\partial^3 x}{\partial z^3} \right) \Big|_{x=L} - E I^V \left(x \frac{\partial^3 x}{\partial z^3} \right) \Big|_{x=0} = 0 \quad (3.91)$$

Com a aplicação da condição de contorno de 3.59

$$\int_L^0 p x z dx + E I^V \left(x \frac{\partial^3 x}{\partial z^3} \right) \Big|_{x=L} - \int_L^0 E I^V \frac{\partial^3 x}{\partial z^3} dx = 0 \quad (3.90)$$

(3.98)

$$EI_V \frac{\partial^2 z}{\partial z^2} \Big|_{x=0} + J^C \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \Big|_{x=0} = 0$$

Como é admitida a expansão de auto modos, a equação acima pode ser escrita:

(3.99)

$$EI_V \frac{d^2 \phi_r}{dx^2} \Big|_{x=0} \cdot \eta_r + J^C \frac{d\phi_r}{dx} \Big|_{x=0} \cdot \dot{\eta}_r = 0$$

Considerando a equação 3.66

(3.100)

$$\eta_r + \omega_r^2 \eta_r = 0$$

Pode-se escrever a condição acima como

(3.101)

$$\left(EI_V \frac{d^2 \phi_r}{dx^2} \Big|_{x=0} - J^C \frac{d\phi_r}{dx} \Big|_{x=0} \cdot \omega_r^2 \right) \eta_r = 0$$

Ou seja

(3.102)

$$EI_V \phi_r'' \Big|_{x=0} - \omega_r^2 \cdot J^C \phi_r' \Big|_{x=0} = 0$$

Da separação de variáveis a descrição espacial do movimento é dado pela equação

3.65:

(3.103)

$$EI_V \frac{d^4 \phi_r}{dx^4} - \omega_r^2 \rho \phi_r = 0$$

multiplicando por ϕ_s e integrando:

(3.104)

$$\int_L^0 \phi_s \frac{d^4 \phi_r}{dx^4} dx - \int_L^0 \omega_r^2 \rho \phi_s \phi_r dx = 0$$

Obtendo:

(3.105)

$$\left[\phi_s \frac{d^3 \phi_r}{dx^3} \Big|_{x=0} - \int_L^0 \phi_s \frac{d^2 \phi_r}{dx^2} dx \right] - \int_L^0 \omega_r^2 \rho \phi_s \phi_r dx = 0$$

(3.106)

$$\left[\phi_s \frac{d^3 \phi_r}{dx^3} \Big|_{x=L} - \left[\phi_s \frac{d^3 \phi_r}{dx^3} \Big|_{x=0} - \int_L^0 \phi_s \frac{d^2 \phi_r}{dx^2} dx \right] \right] - \int_L^0 \omega_r^2 \rho \phi_s \phi_r dx = 0$$

Considerando as condições de contorno 3.73 tem-se a equação:

$$(3.107) \quad \int_L^0 d\phi_s d^3\phi_r dx + \int_L^0 \omega_r^c \rho \phi_s \phi_r dx = 0$$

Integrando novamente por partes:

$$(3.108) \quad \left[d\phi_s d^2\phi_r \right]_L^{x=0} - \int_L^0 d^2\phi_s d^2\phi_r dx + \int_L^0 \omega_r^c \rho \phi_s \phi_r dx = 0$$

$$\left[d\phi_s d^2\phi_r \right]_L^{x=L} - \left[d\phi_s d^2\phi_r \right]_L^{x=0} - \int_L^0 d^2\phi_s d^2\phi_r dx + \int_L^0 \omega_r^c \rho \phi_s \phi_r dx = 0$$

Novamente usando as condições de contorno 3.73 tem-se:

$$(3.109) \quad \int_L^0 d^2\phi_s d^2\phi_r dx = \int_L^0 \omega_r^c \rho \phi_s \phi_r dx - \phi_s' \Big|_{x=0} \phi_r'' \Big|_{x=0}$$

Substituindo a equação 3.102 rescrita abaixo em 3.109:

$$(3.110) \quad \phi_r'' \Big|_{x=0} = \omega_r^c \cdot J^c \phi_r' \Big|_{x=0}$$

Tem-se

$$(3.111) \quad \int_L^0 d^2\phi_s d^2\phi_r dx = \int_L^0 \omega_r^c \rho \phi_s \phi_r dx - \phi_s' \Big|_{x=0} \left(\omega_r^c \cdot J^c \phi_r' \Big|_{x=0} \right)$$

Chegando a

$$(3.112) \quad \int_L^0 d^2\phi_s d^2\phi_r dx = \frac{1}{EI^V} \left\{ \int_L^0 \omega_r^c \rho \phi_s \phi_r dx - J^c \omega_r^c \phi_s' \phi_r' \Big|_{x=0} \right\}$$

Uma normalização possível é:

$$(3.113) \quad \delta_{rs} = \frac{1}{EI^V} \left\{ \int_L^0 \omega_r^c \rho \phi_s \phi_r dx - J^c \omega_r^c \phi_s' \phi_r' \Big|_{x=0} \right\}$$

3.5 Resposta das coordenadas generalizadas

O sistema é descrito por 3.35 com a simplificação de alguns termos:

(3.114)

$$\int_0^L \rho(x) \ddot{x} + x^2 \ddot{\theta} dx + J^c \ddot{\theta} = \tau$$

Considerando a mudança de variáveis dada em 3.50:

(3.115)

$$\int_0^L \rho(x) \ddot{z} + x^2 \ddot{\theta} dx + J^c \ddot{\theta} = \tau$$

E a identidade em 3.96:

(3.116)

$$\int_0^L \rho x z dx + J^c \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial x}{\partial z} \Big|_{x=0} = \tau$$

Da expansão de auto modos:

(3.117)

$$\int_0^L \rho x \sum_{r=1}^{\infty} [\phi_r, \ddot{\eta}_r] dx + J^c \sum_{r=1}^{\infty} [\phi_r' |_{x=0}, \ddot{\eta}_r] = \tau$$

Da equação 3.94

(3.118)

$$\int_0^L \rho x \sum_{r=1}^{\infty} [\phi_r, \ddot{\eta}_r] dx = -EI^V \sum_{r=1}^{\infty} [\phi_r'' |_{x=0}, \ddot{\eta}_r]$$

Substituindo na equação 3.117:

(3.119)

$$-EI^V \sum_{r=1}^{\infty} [\phi_r'' |_{x=0}, \ddot{\eta}_r] + J^c \sum_{r=1}^{\infty} [\phi_r' |_{x=0}, \ddot{\eta}_r] = \tau$$

Multiplicando pela derivada da auto função s, calculada na origem, tem se:

(3.120)

$$EI^V \sum_{r=1}^{\infty} [\phi_r'' \phi_s' |_{x=0}, \ddot{\eta}_r] + J^c \sum_{r=1}^{\infty} [\phi_r' \phi_s' |_{x=0}, \ddot{\eta}_r]$$

(3.121)

$$J^c \sum_{r=1}^{\infty} [\phi_r' \phi_s' |_{x=0}, \ddot{\eta}_r] + EI^V \sum_{r=1}^{\infty} [\phi_r'' \phi_s' |_{x=0}, \ddot{\eta}_r] = -\tau \phi_s' |_{x=0}$$

equação do movimento dos modos do braço

Integrando a equação 3.47 do modelo, ao longo do braço:

(3.122)

$$\int_0^L \rho (-\ddot{e} - x \ddot{\theta}) dx - \int_0^L EI^V \frac{\partial^4 e}{\partial x^4} dx = 0$$

Com a mudança de variável dada em 3.50:

$$(3.131) \quad \sum_{r=1}^{\infty} \int_L^0 \rho \phi_r' \phi_r' dx \ddot{\eta}_r = \tau \phi_s' |_{x=0} + J^C \sum_{r=1}^{\infty} \left[\phi_r' \phi_r' \right]_{x=0} \ddot{\eta}_r - EI^V \sum_{r=1}^{\infty} \int_L^0 \phi_r'' \phi_r'' dx \eta_r$$

E agrupando as duas equações 3.120 e 3.130

$$(3.130) \quad \sum_{r=1}^{\infty} \int_L^0 \rho \phi_r' \phi_r' dx \ddot{\eta}_r = -EI^V \sum_{r=1}^{\infty} \left[\phi_r'' \phi_r'' \right]_{x=0} \eta_r - EI^V \sum_{r=1}^{\infty} \int_L^0 \phi_r'' \phi_r'' dx \eta_r$$

Aplicando as condições de contorno de 3.73:

$$(3.129) \quad \sum_{r=1}^{\infty} \int_L^0 \rho \phi_r' \phi_r' dx \ddot{\eta}_r - EI^V \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ \left[\phi_r'' \phi_r'' \right]_{x=L} - \int_L^0 \phi_r'' \phi_r'' dx \right\} \eta_r = 0$$

Continuando a integração do último termo:

$$(3.128) \quad \sum_{r=1}^{\infty} \int_L^0 \rho \phi_r' \phi_r' dx \ddot{\eta}_r - \sum_{r=1}^{\infty} \int_L^0 EI^V \phi_r'' \phi_r'' dx \eta_r = 0$$

Usando as condições de contorno, equação 3.73, tem-se:

$$(3.127) \quad \sum_{r=1}^{\infty} \int_L^0 \rho \phi_r' \phi_r' dx \ddot{\eta}_r + \sum_{r=1}^{\infty} \left[EI^V \left[\phi_r'' \phi_r'' \right]_{x=L} - \int_L^0 EI^V \phi_r'' \phi_r'' dx \right] \eta_r = 0$$

Integrando por partes o segundo termo:

$$(3.126) \quad \int_L^0 \rho \sum_{r=1}^{\infty} \left[\phi_r' \phi_r' \ddot{\eta}_r + \int_L^0 EI^V \sum_{r=1}^{\infty} \left[\phi_r'' \phi_r'' \right]_{(IV)} \eta_r \right] dx = 0$$

Multiplicando pela auto função s:

$$(3.125) \quad \int_L^0 \rho \sum_{r=1}^{\infty} \left[\phi_r' \ddot{\eta}_r + \int_L^0 EI^V \sum_{r=1}^{\infty} \left[\phi_r'' \eta_r \right]_{(IV)} \right] dx = 0$$

e a expansão em auto modos:

$$(3.124) \quad \int_L^0 \left(\rho \ddot{z} + EI^V z \right)_{(IV)} dx = 0$$

Assim:

$$(3.123) \quad \int_L^0 \rho \left(-\ddot{z} + x \ddot{\theta} - x \ddot{\theta} \right) dx - \int_L^0 EI^V \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} dx = 0$$

Resposta do sistema para as coordenadas generalizadas, descrevendo a relação entre coordenadas espaciais e temporais. Admitindo a expansão ortogonal na separação de variáveis nas equações derivadas na subestruturação do sistema.

$$\ddot{\eta}_r + \omega_r^2 \eta_r = \tau \phi'_s \Big|_{x=0} \quad (3.135)$$

Como δ_{rs} é não nulo apenas quando $s = r$.

$$\delta_{rs} \ddot{\eta}_r + \omega_r^2 \delta_{rs} \eta_r = \tau \phi'_s \Big|_{x=0} \quad (3.134)$$

$$(3.133)$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left[\int_L^0 \rho \phi_r \phi_r dx - J^C [\phi'_r \phi'_r] \Big|_{x=0} \right] \ddot{\eta}_r + EI^Y \sum_{r=1}^{\infty} \omega_r^2 \left[\int_L^0 \rho \phi_r \phi_r dx - J^C [\phi'_r \phi'_r] \Big|_{x=0} \right] \eta_r = \tau \phi'_s \Big|_{x=0}$$

Da norma adotada, equação. 3.113, obtém-se:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left[\int_L^0 \rho \phi_r \phi_r dx - J^C [\phi'_r \phi'_r] \Big|_{x=0} \right] \ddot{\eta}_r + EI^Y \sum_{r=1}^{\infty} \left[\int_L^0 \phi_r'' \phi_r'' dx \right] \eta_r = \tau \phi'_s \Big|_{x=0} \quad (3.132)$$

4 Modelo do Sistema por Síntese de Subestruturas

As equações obtidas já é possível obter a flexão transversal e o movimento angular do braço desacoplado. Assim pode se descrever a relação entre os modos de vibração e o movimento angular do braço.

4.1 Vibração transversal

Para força aplicada pela massa ao braço flexível, equação 3.23:

$$F^E(l_i) = -F^N(l_i) = -M_i(\ddot{z}_i + l_i\ddot{\theta} + 2l_i\dot{\theta}) \quad (4.1)$$

$i=1,2$ (das massas)

Com a mudança de variáveis

$$e_i(x,t) = z_i(x,t) - l_i \cdot \theta(t) \quad (4.2)$$

$$F^E(l_i) = -F^N(l_i) = -M_i(\ddot{z}_i + 2l_i\dot{\theta}) \quad (4.3)$$

Substituindo a equação 4.3 na equação 3.135 que governa o comportamento das coordenadas η_i . Na realidade considera se a inclusão 2ª Lei de Newton, e por conseguinte a interação das duas subestruturas concebidas, com a força aplicada pelas massas:

$$\ddot{\eta}_i + \omega_2^2 \eta_i = \int_L^0 F^E(l_i) \phi_i dx + \tau \phi_i' \Big|_{x=0} \quad (4.4)$$

Substituindo a força externa, equação 4.3:

$$\ddot{\eta}_i + \omega_2^2 \eta_i = - \int_L^0 M_i (\ddot{z}_i + 2l_i\dot{\theta}) \phi_i dx + \tau \phi_i' \Big|_{x=0} \quad (4.5)$$

Expandindo z em auto funções, com o uso da equação 3.60:

$$\ddot{\eta}_i + \omega_2^2 \eta_i = - \int_L^0 M_i \sum_{s=1}^{\infty} \left[\phi_s \Big|_{x=l_i} \eta_s \right] \phi_i dx - \int_L^0 M_i 2l_i \dot{\theta} \phi_i dx + \tau \phi_i' \Big|_{x=0} \quad (4.6)$$

$$[T] \{ \ddot{\eta}_r \}^{pxl} + [W] \{ \ddot{\eta}_r \}^{pxl} = -2M_i \dot{\theta} \left\{ \int_L^0 \phi_p dx \right\}^{pxl} + \tau \left\{ \phi_p' \Big|_{x=0} \right\}^{pxl} \quad (4.9)$$

Esquematicamente:

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_2^d \\ \eta_p \end{bmatrix} = -2M_i \dot{\theta} \begin{bmatrix} \int_L^0 \phi_1 dx \\ \int_L^0 \phi_2 dx \\ \int_L^0 \phi_p dx \end{bmatrix} + \tau \begin{bmatrix} \phi_1' \Big|_{x=0} \\ \phi_2' \Big|_{x=0} \\ \phi_p' \Big|_{x=0} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$$\begin{bmatrix} 1 + M_i \phi_1 \Big|_{x=l_i} \int_L^0 \phi_1 dx & M_i \phi_2 \Big|_{x=l_i} \int_L^0 \phi_2 dx & M_i \phi_p \Big|_{x=l_i} \int_L^0 \phi_p dx \\ M_i \phi_1 \Big|_{x=l_i} \int_L^0 \phi_2 dx & 1 + M_i \phi_2 \Big|_{x=l_i} \int_L^0 \phi_2 dx & M_i \phi_p \Big|_{x=l_i} \int_L^0 \phi_p dx \\ M_i \phi_1 \Big|_{x=l_i} \int_L^0 \phi_1 dx & M_i \phi_2 \Big|_{x=l_i} \int_L^0 \phi_1 dx & 1 + M_i \phi_p \Big|_{x=l_i} \int_L^0 \phi_p dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_2 \\ \ddot{\eta}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_p \end{bmatrix}$$

Matricialmente pode se escrever:

$$\ddot{\eta}_p + \omega_2^d \eta_p = -M_i \phi_1 \Big|_{x=l_i} \int_L^0 \phi_p dx \ddot{\eta}_1 - M_i \phi_2 \Big|_{x=l_i} \int_L^0 \phi_p dx \ddot{\eta}_2 - \dots - M_i \phi_p \Big|_{x=l_i} \int_L^0 \phi_p dx \ddot{\eta}_p - 2M_i \dot{\theta} \int_L^0 \phi_p dx + \tau \phi_p' \Big|_{x=l_i} \quad (4.7)$$

$$\ddot{\eta}_2 + \omega_2^d \eta_2 = -M_i \phi_1 \Big|_{x=l_i} \int_L^0 \phi_2 dx \ddot{\eta}_1 - M_i \phi_2 \Big|_{x=l_i} \int_L^0 \phi_2 dx \ddot{\eta}_2 - \dots - M_i \phi_p \Big|_{x=l_i} \int_L^0 \phi_2 dx \ddot{\eta}_p - 2M_i \dot{\theta} \int_L^0 \phi_2 dx + \tau \phi_2' \Big|_{x=l_i}$$

$$\ddot{\eta}_1 + \omega_2^d \eta_1 = -M_i \phi_1 \Big|_{x=l_i} \int_L^0 \phi_1 dx \ddot{\eta}_1 - M_i \phi_2 \Big|_{x=l_i} \int_L^0 \phi_1 dx \ddot{\eta}_2 - \dots - M_i \phi_p \Big|_{x=l_i} \int_L^0 \phi_1 dx \ddot{\eta}_p - 2M_i \dot{\theta} \int_L^0 \phi_1 dx + \tau \phi_1' \Big|_{x=l_i}$$

Expandindo essa equação para cada um dos seus p modos apenas como visualização.

E a equação 4.10 pode ser escrita:

$$S_{rs} = \left\{ \begin{array}{l} \text{para } r \neq s \\ \text{para } r = s \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \frac{1 + \sum_p^{k=1} M_i \phi_k |_{x=l_i}}{\int_L^0 \phi^k dx} \\ -M_i \phi_r |_{x=l_i} \int_L^0 \phi^s dx \\ \frac{1 + \sum_p^{k=1} M_i \phi_k |_{x=l_i}}{\int_L^0 \phi^k dx} \\ \frac{M_i + M_2 \sum_p^{k=1, k \neq r} \phi_k |_{x=l_i}}{\int_L^0 \phi^k dx} \end{array} \right. \quad (4.11)$$

com $[S]^{-1}_{pxp} = [T]^{-1}_{pxp}$ e os elementos de S dados por:

equação do movimento de flexão transversal (com vibração) do braço “desacoplado”

$$\{ \ddot{w}_r \}_{pxl} = [T]^{-1}_{pxp} \{ \ddot{w}_r \}_{pxl} - [W]_{pxp} \{ \ddot{w}_r \}_{pxl} - 2M_i \dot{\theta}_i \left\{ \int_L^0 \phi_r dx \right\}^{pxl} + \tau \{ \phi'_r |_{x=0} \}_{pxl} \quad (4.10)$$

Rescrevendo:

$$[W]_{pxp} = \begin{bmatrix} \omega_1 & & \\ & \omega_2 & \\ & & \omega_p \end{bmatrix}$$

$$[T]_{pxp} = \begin{bmatrix} M_i \phi_1 |_{x=l_i} \int_L^0 \phi^p dx & M_i \phi_2 |_{x=l_i} \int_L^0 \phi^p dx & 1 + M_i \phi_p |_{x=l_i} \int_L^0 \phi^p dx \\ M_i \phi_1 |_{x=l_i} \int_L^0 \phi^2 dx & 1 + M_i \phi_2 |_{x=l_i} \int_L^0 \phi^2 dx & M_i \phi_p |_{x=l_i} \int_L^0 \phi^2 dx \\ 1 + M_i \phi_1 |_{x=l_i} \int_L^0 \phi^1 dx & M_i \phi_2 |_{x=l_i} \int_L^0 \phi^1 dx & M_i \phi_p |_{x=l_i} \int_L^0 \phi^1 dx \end{bmatrix}$$

com

4.2 Movimento angular do braço

Para a dinâmica de rotação do braço “desacoplado” deve se considerar:

- O momento resultante da força aplicada ao braço rígido rotativo pela massa.
- O momento resultante pela flexão da viga dada pelo deslocamento virtual no ponto de contato.
- O torque aplicado pelo cubo

Assim o trabalho devido a estas forças não conservativas é dado por:

$$\delta W = \left[\tau + F_{Ej}(l_i) \right] \delta \theta + F_{Ej}(l_i) \delta e_i \quad (4.13)$$

com F_{Ej} a componente na direção da flexão transversal da força F_E devido a massa

Como:

$$F_{Ej}(l_i) = M_i \ddot{e}_i + l_i \ddot{\theta} + 2\dot{l}_i \dot{\theta} + e_i \dot{\theta}^2 \quad (4.14)$$

A dinâmica de rotação é descrita pela equação diferencial:

$$(J_B + J_C + M_i l_i^2) \ddot{\theta} = \tau + F_{Ej}(l_i) \eta_i \quad (4.15)$$

Foi desprezado o termo $F_{Ej}(l_i) \delta e_i$, pois comparativamente sua influência sobre os

efeitos de rotação do braço serão menos importantes, principalmente pelas dificuldades

matemáticas envolvidas com sua inclusão.

Como pela equação 4.3:

$$F_{Ej}(l_i) = -F^N(l_i) = -M_i \ddot{z} \left[\ddot{z} + 2\dot{l}_i \dot{\theta} \right] \quad (4.16)$$

E expandido z nas auto funções, ou modos, tem-se:

$$F_{Ej}(l_i) = -F^N(l_i) = -M_i \left(\sum_{r=1}^{\infty} \phi_r | \ddot{\eta}_r + 2\dot{l}_i \dot{\theta} \right) \quad (4.17)$$

variáveis de estado e controle.

modos de vibração e o movimento de rotação do braço, e uma conveniente escolha das Para o modelo de estado deve se considerar as equações 4.12 e 4.21, que descrevem os

$$\ddot{\theta} = \frac{J_B + J_C + M l_2^2}{\sum_{p=1}^r \sum_{s=1}^r S^rs (\omega_2^s \eta_s) \phi_r |_{l_i} + 2M l_2 \dot{\theta} \left(\int_L^0 \phi_s dx \right) \phi_r |_{l_i} - 1} \left(1 - \sum_{p=1}^r \sum_{s=1}^r S^rs (\phi_r' |_{x=0}) \phi_r |_{l_i} \right) \tau \quad (4.21)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{(J_B + J_C + M l_2^2)}{\tau + \sum_{p=1}^r \sum_{s=1}^r S^rs (\omega_2^s \eta_s) \phi_r |_{l_i} + 2M l_2 \dot{\theta} \left(\int_L^0 \phi_s dx \right) \phi_r |_{l_i} - \tau \sum_{p=1}^r \sum_{s=1}^r S^rs (\phi_r' |_{x=0}) \phi_r |_{l_i} - 2M l_2 \dot{\theta}} \quad (4.20)$$

(4.19)

$$(J_B + J_C + M l_2^2) \ddot{\theta} = \tau + \sum_{p=1}^r \sum_{s=1}^r S^rs (\omega_2^s \eta_s) \phi_r |_{l_i} \left(\int_L^0 \phi_s dx \right) \phi_r' |_{x=0} - \tau \phi_r' |_{x=0} - 2M l_2 \dot{\theta} \quad (4.146)$$

$$(J_B + J_C + M l_2^2) \ddot{\theta} = \tau - M l_2 \left(\sum_{p=1}^r \phi_r |_{l_i} \left(\frac{1}{M l_2} \sum_{s=1}^r S^rs \left(-\omega_2^s \eta_s - 2M l_2 \dot{\theta} \int_L^0 \phi_s dx + \tau \phi_r' |_{x=0} \right) \right) \right) + 2l_2 \dot{\theta} \quad (4.18)$$

Substituindo a equação da flexão transversal da viga, equação 4.12

$$(J_B + J_C + M l_2^2) \ddot{\theta} = \tau - M l_2 \left(\sum_{p=1}^r \phi_r |_{l_i} \ddot{\eta}_r + 2l_2 \dot{\theta} \right) \quad (4.18)$$

Substituindo em 4.15

5 Trajetórias prescritas

Através da implementação de um controlador LQR buscou-se uma solução para atenuação das vibrações na ponta do braço pela imposição prévia do movimento das massas. As variáveis de estado são então o modos de vibração do braço e o movimento de rotação do braço (deslocamento e velocidade angular). Há apenas uma variável de controle o torque aplicado ao braço pelo motor. A vantagem dessa abordagem é tornar o sistema linear, embora variante no tempo. O controle linear usa os estados indicados para realimentar o sistema e tentar diminuir a vibração. Esta constitui-se na primeira abordagem para o tratamento do problema. É necessário desenvolver o modelo de variáveis de estado, considerando que na as equações obtidas para os modos de vibração e movimento angular do braço a posição das massas ainda será um parâmetro do sistema. Na outra abordagem proposta a posição das massas será variável de estado.

5.1 Modelo genérico de estados

O modelo de estados é genérico no sentido de pode incluir qualquer quantidade de modos de vibração. Usando as equações 4.12 e 4.21 reescritas abaixo:

$$\ddot{\eta}_r = \frac{1}{M_i} \sum_{s=1}^p S_{rs} \left(-\omega_s^2 \eta_s - 2M_i l_i \theta \int_0^L \phi_s dx + \tau \phi_s' \Big|_{x=0} \right) \quad (5.1)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{\sum_{s=1}^p S_{rs} (\omega_s^2 \eta_s) \phi_r \Big|_{l_i} + 2M_i l_i \theta \left(\sum_{s=1}^p S_{rs} \int_0^L \phi_s dx \right) \phi_r \Big|_{l_i} - 1}{J_B + J_C + M_i l_i^2} + \left(1 - \sum_{s=1}^p S_{rs} (\phi_r' \Big|_{x=0}) \phi_r \Big|_{l_i} \right) \tau \quad (5.2)$$

Podese exprimir o modelo de variáveis de estado definindo as seguintes variáveis de estado e controle:

$$t = n$$

$$(5.5) \quad \begin{matrix} x_3 = \theta \\ x_1 = \eta_1 \\ x_4 = \theta \\ x_2 = \eta_1 \end{matrix}$$

As variáveis de estado e controle serão:

5.2 Modelo com um único modo

$$\begin{aligned} M^1 l^2_2 &= M^1 l^1_2 + M^1 l^1_1 \\ M^2 l^2_2 &= M^2 l^2_2 + M^2 l^2_1 \end{aligned}$$

subtendendo uma soma, como abaixo:

O modelo genérico de estado será especificado para um, dois e três modos que serão implementados na solução. Em todos os termos envolvendo as duas massas, a notação

(5.4d)

$$x_{2p+2} = \frac{\sum_{s=1}^{\infty} S^{rs} (\omega_s x_{2s-1}) \phi_{r|l_i} + 2M^i l^i x_{2p+2} \left(\int_L^0 \phi_s dx \right) \phi_{r|l_i} - 1}{J^B + J^C + M^i l^i_2} \left(1 - \sum_p \sum_{s=1}^{\infty} S^{rs} (\phi_{r|l_i} |_{x=0}) \phi_{r|l_i} \right) n$$

(5.4c)

$$\begin{aligned} x_{2p+1} &= x_{2p+2} \\ \text{com } r &= 1, \dots, p \end{aligned}$$

(5.4b)

$$x_{2r} = \frac{1}{p} \sum_{s=1}^{\infty} S^{rs} \left(-\omega_s x_{2s-1} - 2M^i l^i x_{2p+2} \int_L^0 \phi_s dx + u \phi'_s |_{x=0} \right)$$

(5.4a)

$$x_{2r-1} = x_{2r}$$

podará ser escrito:

Substituindo estas igualdades nas equações 5.1 e 5.2, o modelo genérico de estados

$$t = n$$

(5.3)

$$\begin{matrix} x_{2p+1} = \eta^p \\ x_{2p-1} = \eta^p \\ \vdots \\ x_3 = \eta_2 \\ x_1 = \eta_1 \\ x_{2p+2} = \theta \\ x_{2p} = \eta^p \\ \vdots \\ x_4 = \eta_2 \\ x_2 = \eta_1 \end{matrix}$$

(5.8)

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{J_{BC} + M_i l_2}{S_{11} \omega_2^2 \phi_l |_{l_i}} & 0 & 0 \\ 2M_i l_i S_{11} \int_L^0 \phi_1 dx \left(\phi_l |_{l_i} - 1 \right) & -2l_i S_{11} \int_L^0 \phi_1 dx & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{J_{BC} + M_i l_2}{S_{11} \omega_2^2 \phi_l |_{l_i}} \left[\begin{array}{c} 1 \\ -S_{11} \phi_l' |_{x=0} \phi_l' |_{l_i} \end{array} \right] \\ 0 \\ \frac{M_i}{S_{11} \phi_l' |_{x=0}} \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{n}$$

Matricialmente terá a forma:

$$x_4 = \frac{J_{BC} + M_i l_2}{S_{11} \omega_2^2 \phi_l |_{l_i}} x_1 + \frac{J_{BC} + M_i l_2}{S_{11} \omega_2^2 \phi_l |_{l_i}} \left[\begin{array}{c} 1 \\ -S_{11} \phi_l' |_{x=0} \phi_l' |_{l_i} \end{array} \right] x_4 + \frac{J_{BC} + M_i l_2}{n} \quad (5.7d)$$

$$x_3 = x_4 \quad (5.7c)$$

$$x_2 = -\frac{M_i}{S_{11} \omega_2^2} x_1 - 2l_i \left[S_{11} \int_L^0 \phi_1 dx \right] x_4 + \frac{M_i}{S_{11} \phi_l' |_{x=0}} \quad (5.7b)$$

$$x_1 = x_2 \quad (5.7a)$$

Fazendo $r=s=p=1$

(5.6d)

$$x_{2p+2} = \frac{J_B + J_C + M_i l_2}{\sum_{s=1}^r \sum_{s=1}^r S^{rs} (\omega_2^s x_{2s-1} \phi_l |_{l_i} + 2M_i l_i x_{2p+2}) + \sum_{s=1}^r \sum_{s=1}^r S^{rs} \int_L^0 \phi_s dx \left(\phi_r |_{l_i} - 1 \right) + \left(1 - \sum_{s=1}^r \sum_{s=1}^r S^{rs} (\phi_r' |_{x=0} \phi_r' |_{l_i}) \right) n}$$

$$x_{2p+1} = x_{2p+2} \quad (5.6c)$$

$$x_{2r} = \frac{1}{S_{11}} \sum_{s=1}^r S^{rs} \left(-\omega_2^s x_{2s-1} - 2M_i l_i x_{2p+2} \int_L^0 \phi_s dx + n \phi_s' |_{x=0} \right) \quad (5.6b)$$

$$x_{2r-1} = x_{2r} \quad (5.6a)$$

apenas um modo será a especificação $p=1$. Assim as equações de estado ficam:

Usando as equações 5.4a, 5.4b, 5.4c e 5.4d rescreitas abaixo, o modelo genérico com

5.3 Modelo com dois modos

As variáveis de estado e controle serão:

$$(5.09) \quad \begin{aligned} x_1 &= \eta_1 & x_2 &= \eta_2 \\ x_3 &= \eta_2 & x_4 &= \eta_2 \\ x_5 &= \theta & x_6 &= \theta \end{aligned}$$

$$n = r$$

Usando as equações 5.4b e 5.4d escritas abaixo:

$$(5.10) \quad \dot{x}_{2r} = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^r M_i S^{rs} \left(-\omega_2^s x_{2s-1} - 2M_i l_i x_{2p+2} \int_L \phi_s dx + n \phi'_s \Big|_{x=0} \right)$$

$$\dot{x}_{2p+2} = \frac{\sum_{r=1}^2 \sum_{s=1}^r S^{rs} (\omega_2^s x_{2s-1} \eta_r |_{l_i} + 2M_i l_i x_{2p+2} \int_L \phi_s dx) \left(\eta_r |_{l_i} - 1 \right) + \left(1 - \sum_{r=1}^2 \sum_{s=1}^r S^{rs} (\phi'_r |_{x=0} \eta_r |_{l_i} \right) n}{J_B + J_C + M l_i^2}$$

$$(5.11)$$

Como r e s variam de 1 a 2 e $p=2$

Para $r = 1$

$$x_1 = x_2$$

$$(5.12a)$$

$$(5.12b) \quad \dot{x}_2 = -\frac{M_i}{\omega_2 S_{11}} x_1 - \frac{M_i}{\omega_2 S_{12}} x_3 - 2l_i \sum_{s=1}^2 \left(S_{1s} \int_L \phi_s dx \right) x_6 + \frac{\sum_{s=1}^2 S_{1s} \phi'_s |_{x=0} M_i}{n}$$

Para $r = 2$

$$x_3 = x_4$$

$$(5.12c)$$

$$(5.12d) \quad \dot{x}_4 = -\frac{M_i}{\omega_2 S_{21}} x_1 - \frac{M_i}{\omega_2 S_{22}} x_3 - 2l_i \sum_{s=1}^2 \left(S_{2s} \int_L \phi_s dx \right) x_6 + \frac{\sum_{s=1}^2 S_{2s} \phi'_s |_{x=0} M_i}{n}$$

Para $p = 2$

$$x_5 = x_6$$

$$(5.12e)$$

$n = t$

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \eta_1 & x_7 &= \theta \\
 x_2 &= \eta_2 & x_8 &= \theta \\
 x_3 &= \eta_2 & x_5 &= \eta_3 \\
 x_4 &= \eta_2 & x_6 &= \eta_3 \\
 x_7 &= \eta_1 & x_8 &= \theta
 \end{aligned}
 \tag{5.14}$$

As variáveis de estado e controle serão:

5.4 Modelo com três modos

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{c} \frac{J_{BC} + M_i I_2}{1 - \sum_{r=1}^2 \sum_{s=1}^2 S^{rs} (\phi_r |_{x=0} | \phi_s |_{l_i})} \\ 0 \\ M_i \\ \sum_{k=1}^2 S^{2k} \phi_r^k |_{x=0} \\ 0 \\ M_i \\ \sum_{k=1}^2 S^{1k} \phi_r^k |_{x=0} \\ 0 \end{array} \right] + \\
 & \left[\begin{array}{c} \sum_{r=1}^2 S^{r1} \phi_r |_{l_i} \omega_1^2 \\ 0 \\ M_i \\ -S^{21} \omega_2^2 \\ 0 \\ M_i \\ -S^{11} \omega_2^2 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \dot{x}_6 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_1 \end{bmatrix} = \\
 & \left[\begin{array}{ccc} \sum_{r=1}^2 S^{r2} \phi_r |_{l_i} \omega_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & M_i & 0 \\ -S^{22} \omega_2^2 & 0 & 1 \\ M_i & 0 & 0 \\ -S^{12} \omega_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_6 \\ x_5 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} + \\
 & \left[\begin{array}{c} \frac{J_{BC} + M_i I_2}{2M_i I_2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \int_0^L \phi_s dx \left(\phi_r |_{l_i} - 1 \right) \\ \int_0^L \phi_s dx \\ \int_0^L \phi_s dx \\ \int_0^L \phi_s dx \\ \int_0^L \phi_s dx \\ \int_0^L \phi_s dx \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{5.13}$$

Matricialmente:

com $J_{BC} = J^B + J^C$ apenas por facilidade.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_6 &= \frac{\omega_1^2 \sum_{r=1}^2 S^{r1} \phi_r |_{l_i}}{J_{BC} + M_i I_2} x_1 + \frac{\omega_2^2 \sum_{r=1}^2 S^{r2} \phi_r |_{l_i}}{J_{BC} + M_i I_2} x_2 + \frac{2M_i I_2 \left(\int_0^L \phi_s dx \left(\phi_r |_{l_i} - 1 \right) \right)}{J_{BC} + M_i I_2} x_6 + \\
 & \frac{\int_0^L \phi_s dx}{J_{BC} + M_i I_2} x_3 + \frac{\int_0^L \phi_s dx}{J_{BC} + M_i I_2} x_4 + \frac{\int_0^L \phi_s dx}{J_{BC} + M_i I_2} x_5 + \frac{\int_0^L \phi_s dx}{J_{BC} + M_i I_2} x_6
 \end{aligned}
 \tag{5.12f}$$

Sendo que $p = 3$, $r = 1, 2, 3$ e $s = 1, 2, 5$.

Usando as equações 5.4a, 5.4b, 5.4c e 5.4d rescreitas abaixo:

$$x_{2r-1} = x_{2r} \quad (5.15a)$$

$$x_{2r} = \frac{1}{p} \sum_{s=1}^p M_i S^{rs} \left(-\omega_2^s x_{2s-1} - 2M_i l_i x_{2p+2} \int_L^0 \phi_s dx + n \phi_s' \Big|_{x=0} \right) \quad (5.15b)$$

com $r = 1, \dots, 3$

$$x_{2p+1} = x_{2p+2} \quad (5.15c)$$

$$x_{2p+2} = \frac{J_B + J_C + M_i l_i^2}{\sum_{s=1}^3 S^{rs} \left(\omega_2^s x_{2s-1} \right) \phi_r |_{l_i} + 2M_i l_i x_{2p+2} \left(\sum_{s=1}^3 \sum_{r=1}^3 S^{rs} \int_L^0 \phi_s dx \right) \phi_r |_{l_i} - 1} + \left(1 - \sum_{s=1}^3 \sum_{r=1}^3 S^{rs} \left(\phi_r' \Big|_{x=0} \right) \phi_r |_{l_i} \right) n \quad (5.15d)$$

Para $r=1$

$$x_1 = x_2 \quad (5.16a)$$

$$x_2 = -\frac{M_i}{\omega_2 S^{11}} x_1 - \frac{M_i}{\omega_2 S^{12}} x_3 - \frac{M_i}{\omega_2 S^{13}} x_5 - 2l_i \sum_{s=1}^3 \int_L^0 S^{1s} \phi_s dx \Big|_{x=0} + \frac{M_i}{\sum_{s=1}^3 S^{1s} \phi_s' \Big|_{x=0}} n \quad (5.16b)$$

Para $r=2$

$$x_3 = x_4 \quad (5.16c)$$

$$x_4 = -\frac{M_i}{\omega_2 S^{21}} x_1 - \frac{M_i}{\omega_2 S^{22}} x_3 - \frac{M_i}{\omega_2 S^{23}} x_5 - 2l_i \sum_{s=1}^3 \int_L^0 S^{2s} \phi_s dx \Big|_{x=0} + \frac{M_i}{\sum_{s=1}^3 S^{2s} \phi_s' \Big|_{x=0}} n \quad (5.16d)$$

Para $r=3$

$$x_5 = x_6 \quad (5.16e)$$

$$x_6 = -\frac{M_i}{\omega_2 S^{31}} x_1 - \frac{M_i}{\omega_2 S^{32}} x_3 - \frac{M_i}{\omega_2 S^{33}} x_5 - 2l_i \sum_{s=1}^3 \int_L^0 S^{3s} \phi_s dx \Big|_{x=0} + \frac{M_i}{\sum_{s=1}^3 S^{3s} \phi_s' \Big|_{x=0}} n \quad (5.16f)$$

Para $p=3$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{J_{BC} + M_l^2}{1 - \sum_{s=1}^r \sum_{s=1}^3 S^{rs} \phi_r^s | \phi_r^s |_{x=0}^{l_i}} \\ 0 \\ M_l^2 \\ \frac{\sum_{s=1}^r \sum_{s=1}^3 S^{3s} \phi_r^s | \phi_r^s |_{x=0}^{l_i}}{M_l^2} \\ 0 \\ M_l^2 \\ \frac{\sum_{s=1}^r \sum_{s=1}^3 S^{2s} \phi_r^s | \phi_r^s |_{x=0}^{l_i}}{M_l^2} \\ 0 \\ M_l^2 \\ \frac{\sum_{s=1}^r \sum_{s=1}^3 S^{1s} \phi_r^s | \phi_r^s |_{x=0}^{l_i}}{M_l^2} \\ 0 \\ \frac{J_{BC} + M_l^2}{J_{BC} + M_l^2} \end{bmatrix} n$$

(5.17)

$$\begin{bmatrix} x_8 \\ x_7 \\ x_6 \\ x_5 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\omega_2^1 \sum_{s=1}^r \sum_{s=1}^3 S^{r1} \phi_r^s | \phi_r^s |_{x=0}^{l_i}}{J_{BC} + M_l^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M_l^2}{\omega_2^2 S_{31}^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\omega_2^2 S_{32}^2}{M_l^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\omega_2^2 S_{22}^2}{M_l^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\omega_2^3 S_{23}^2}{M_l^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\omega_2^3 S_{13}^2}{M_l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{J_{BC} + M_l^2}{J_{BC} + M_l^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\omega_2^1 \sum_{s=1}^r \sum_{s=1}^3 S^{r1} \phi_r^s | \phi_r^s |_{x=0}^{l_i}}{J_{BC} + M_l^2} \\ \frac{\omega_2^2 \sum_{s=1}^r \sum_{s=1}^3 S^{r2} \phi_r^s | \phi_r^s |_{x=0}^{l_i}}{J_{BC} + M_l^2} \\ \frac{\omega_2^3 \sum_{s=1}^r \sum_{s=1}^3 S^{r3} \phi_r^s | \phi_r^s |_{x=0}^{l_i}}{J_{BC} + M_l^2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2M_l^2 \left(\sum_{s=1}^r \sum_{s=1}^3 S^{rs} \phi_r^s | \phi_r^s |_{x=0}^{l_i} \int_0^L \phi_s dx - 1 \right)}{J_{BC} + M_l^2} \\ -2l_i \sum_{s=1}^r \int_0^L S^{3s} \phi_s dx \\ -2l_i \sum_{s=1}^r \int_0^L S^{2s} \phi_s dx \\ -2l_i \sum_{s=1}^r \int_0^L S^{1s} \phi_s dx \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_8 \\ x_7 \\ x_6 \\ x_5 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

Matricialmente tem a forma:

$$(5.16h) \quad x_8 = \frac{\omega_2^1 \sum_{s=1}^r \sum_{s=1}^3 S^{r1} \phi_r^s | \phi_r^s |_{x=0}^{l_i}}{J_{BC} + M_l^2} x_1 + \frac{\omega_2^2 \sum_{s=1}^r \sum_{s=1}^3 S^{r2} \phi_r^s | \phi_r^s |_{x=0}^{l_i}}{J_{BC} + M_l^2} x_2 + \frac{\omega_2^3 \sum_{s=1}^r \sum_{s=1}^3 S^{r3} \phi_r^s | \phi_r^s |_{x=0}^{l_i}}{J_{BC} + M_l^2} x_3 + \frac{J_{BC} + M_l^2}{J_{BC} + M_l^2} x_8 + \frac{2M_l^2 \left(\sum_{s=1}^r \sum_{s=1}^3 S^{rs} \phi_r^s | \phi_r^s |_{x=0}^{l_i} \int_0^L \phi_s dx - 1 \right)}{J_{BC} + M_l^2} x_8$$

$$(5.16g) \quad x_7 = \frac{\sum_{s=1}^r \sum_{s=1}^3 S^{rs} \phi_r^s | \phi_r^s |_{x=0}^{l_i} \left(\omega_2^2 x_2^{2s-1} \phi_r^s | \phi_r^s |_{x=0}^{l_i} + 2M_l^2 x_2^{2p+2} \right)}{J_{BC} + M_l^2} + \frac{\sum_{s=1}^r \sum_{s=1}^3 S^{rs} \phi_r^s | \phi_r^s |_{x=0}^{l_i} \left(-1 \right) + \left(-1 \right)}{J_{BC} + M_l^2} x_7$$

(5.16g)

$x_7 = x_8$

5.5 Modos de vibração da viga livre

Pela adoção do Método dos Modos Assumidos, abaixo está uma leve descrição para a obtenção dos modos de vibração de uma viga livre, modelo que será adotado como aproximação para os modos de vibração do braço com as duas massas deslizantes.

5.6 Modos Naturais de Vibração

Vibrações transversais numa viga

A deflexão total $y(x,t)$ da barra no ponto x consiste de duas partes: uma devido ao dobramento e outra pelo cisalhamento, a inclinação da curva nesse ponto pode ser

escrita:

$$(5.18) \quad \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = \psi(x,t) + \beta(x,t)$$

com

$\psi(x,t)$ ângulo de rotação devido ao dobramento

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = \psi(x,t) + \beta(x,t) \text{ ângulo de distorção devido ao cisalhamento}$$

a relação entre o momento de torção e a deformação de dobramento é:

$$(5.19) \quad M(x,t) = EI(x) \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x}$$

a relação entre a força de cisalhamento e a deformação de cisalhamento é dada por:

$$(5.20) \quad Q(x,t) = K_G A(x) \beta(x,t)$$

com G o módulo de cisalhamento e

K um fator numérico dependendo da forma da seção, com apenas o

cisalhamento, o elemento terá distorção mas não rotação.

Para formular o problema de valor de contorno aplica-se o Princípio Estendido de

Hamilton. A vantagem desta abordagem obtenção expressões de movimento e correta

formulação das condições de contorno.

$$\int_{z_2}^{z_1} (\delta T + \delta W_{ext}) = \int_{z_1}^{z_2} \left[\int_{-L}^L m \frac{\partial^2}{\partial y^2} \delta \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right) dx + \int_{-L}^L k_z m \frac{\partial}{\partial y} \delta \psi \right] dx -$$

Com as expressões obtidas o Princípio de Hamilton fica:

$$\delta V = \int_{-L}^L EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \delta \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right) dx + \int_{-L}^L k' GA \left(\frac{\partial x}{\partial y} - \psi \right) \delta \left(\frac{\partial x}{\partial y} - \psi \right) dx$$

$$\delta V = \int_{-L}^L EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \delta \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right) dx + \int_{-L}^L k' GA \delta \psi dx \quad (5.25)$$

A energia potencial é dada por:

$$\delta W(t) = \delta W^o(t) + \delta W^{me}(t) = -\delta V(t) + \int_{-L}^L p(x,t) \delta y(x,t) dx \quad (5.24)$$

externo está na direção do deslocamento, assim:

O trabalho virtual consiste do trabalho conservativo e não conservativo. O carregamento

$$\delta T(t) = \int_{-L}^L m \frac{\partial^2}{\partial y^2} \delta \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right) dx + \int_{-L}^L k_z m \frac{\partial}{\partial y} \delta \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right) dx \quad (5.23)$$

A variação de T pode se escrita:

$k(x)$ raio de giração em torno do eixo neutro.

com ρ densidade de massa

$$J(x) = \rho I(x) = \frac{m(x)}{L} I(x) = k^2(x) m(x) \quad (5.22)$$

Como

$J(x)$ momento de inércia por unidade de comprimento

com L o comprimento da barra

$$T(t) = \int_{-L}^L \left[\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial y^2} \right] m(x) dx + \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left[\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \right] J(x) dx \quad (5.21)$$

A energia cinética devida a translação e rotação é expressa por:

A geometria do sistema nem sempre fornece o número adequado de condições de contorno. no caso de uma barra engastada, a geometria requer que a rotação seja nula em cada extremo; (5.31) impõe que a força de cisalhamento ou a variação da

deflexão seja nula nos extremos. Satisfestas todas as condições de contorno será única a solução da equação diferencial. A equação (5.30) impõe que o momento de torção ou a variação da barra seja seu comprimento. As condições de contorno são descritas nas equações (5.30) e (5.31). primeiras equações descrevem o movimento da barra e devem ser satisfeitas em todo o conjunto das quatro equações forma o problema de valor de contorno. As duas

$$\left[k'GA \frac{\partial \psi}{\partial y} - \psi \right]_{y=0} = 0 \quad (5.31)$$

$$\left[EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \right]_{x=0} = 0 \quad (5.30)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + k'GA \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - \psi \right) - k_2 m \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \quad (5.29)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[k'GA \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - \psi \right) \right] - m \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + p = 0 \quad (5.28)$$

como nulos nos extremos, obtendo assim:

Os deslocamentos virtuais são arbitrário e independentes, assim eles pode ser impostos

$$- \left[EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \right]_{x=0} - \left[k'GA \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - \psi \right) \right]_{y=0} \delta \psi \Big|_0 = 0 \quad (5.27)$$

$$\int_0^L \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] + k'GA \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - \psi \right) - k_2 m \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right\} \delta \psi dx + \int_0^L p \delta \psi dx + p \left[-m \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + p \right]_{z=0} \delta \psi = 0$$

Após uma série de manipulações, tem-se:

$$- \int_0^L EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx + \int_0^L k'GA \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - \psi \right) \delta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - \psi \right) dx + \int_0^L p \delta \psi dx = 0 \quad (5.26)$$

da barra e a deflexão sejam nulas nos dois extremos, produzindo um número adequado de quatro restrições de contorno. porém no caso de uma barra articulada nos dois extremos, a geometria requer apenas que a deflexão seja zero nos dois extremos, assim produz se apenas duas condições de contorno. restam impor outras duas.

As condições de contorno, resultantes de compatibilidade geométrica, são chamadas de condições de contorno geométrica ou essencial ou imposta. Quando essas imposições geométricas não produzem número adequado de condições de contorno, as condições restantes são obtidas pelo equilíbrio de momento ou cisalhamento.

Condições de contorno naturais ou adicionais ou dinâmicas são condições obtidas do equilíbrio de momento ou das forças de cisalhamento

As condições de contorno naturais ou geométricas devem ser compostas para a obtenção do número correto de condições de contorno.

5.7 Barra engastada-livre

Quando engastada em $x=0$, então

$$y(0, t) = 0 \quad (5.32)$$

$$\psi(0, t) = 0 \quad (5.33)$$

no extremo livre $x=L$ a deflexão e a rotação deve ser nulos, assim:

$$M(L, t) = EI \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \quad (5.34)$$

$$\tilde{O}(L, t) = \left[KGA \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \psi \right) \right]_{x=L} = 0 \quad (5.35)$$

que reflète a situação de que tanto o momento de torção quanto a força de cisalhamento se anulam no extremo engastado.

5.7.1 O problema de auto valor

Quando as dimensões da seção reta são pequenas em relação ao comprimento da barra pode se desprezar os efeitos de cisalhamento e inércia de rotação. Se admitirmos que o carregamento externo é nulo as duas equações de movimento pode ser combinadas levando a equação diferencial da vibração livre:

$$(5.36) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right] = -m(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$$

pele fato de desprezar os efeitos de rotação e cisalhamento obtêm-se;

$$(5.37) \quad \psi(x,t) = \frac{\partial v(x,t)}{\partial x}$$

e para o momento pode-se escrever:

$$(5.38) \quad \tilde{Q}(x,t) = -\frac{\partial M(x,t)}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[EI(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right]$$

assumindo uma separável de variáveis:

$$(5.39) \quad y(x,t) = Y(x)f(t)$$

a equação de vibração livre pode se reescrita como:

$$(5.40) \quad \frac{1}{EI(x)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 Y(x)}{\partial x^2} \right] = -\frac{1}{m(x)} \frac{d^2 f(t)}{dt^2}$$

Pelo isolamento das variáveis esta equação deve ser constante e pode ser dividida em duas partes e obtendo-se:

$$(5.41) \quad \frac{d^2}{dx^2} \left[EI(x) \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \right] - \omega^2 m(x) Y(x) = 0$$

$$(5.42) \quad \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \omega^2 f(t) = 0$$

O problema de auto valor consiste na a determinação do parâmetro ω^2 satisfazendo a equação diferencial homogênea linear e também as condições de contorno.

$$\cos(\beta L) \cosh(\beta L) = 0 \quad (5.50)$$

Da imposição das condições de contorno obtêm-se a equação:

$$Y(x) = a_1 \sin(\beta x) + a_2 \cos(\beta x) + a_3 \sinh(\beta x) + a_4 \cosh(\beta x) \quad (5.49)$$

A solução geral de (5.43) tem a forma:

$$\left. \frac{d^3 Y(x)}{dx^3} \right|_{x=L} = 0 \quad (5.48)$$

$$\left. \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \right|_{x=L} = 0 \quad (5.47)$$

Condições de contorno naturais:

$$\left. \frac{dY(x)}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad (5.46)$$

$$Y(0) = 0 \quad (5.45)$$

Condições de contorno geométricas:

As condições de contorno se dividem nos dois extremos sendo:

$$\text{com } \beta^4 = \frac{\omega^2 m}{EI} \quad (5.44)$$

$$\left. \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \right|_{x=L} - \beta^4 Y(x) = 0 \quad (5.43)$$

Para uma barra uniforme a equação diferencial toma a forma:

5.8 Modo normal e frequência natural

necessário utilizar as condições de contorno que determinarão a forma única da solução.

Apenas com a equação diferencial não é possível obter a solução única, para isso é

soluções não triviais $Y(x)$ são chamadas funções características ou auto funções.

O parâmetro ω^2 é chamado valor característico ou auto valor e associado a elas as

$$Y_1(x) = A_1 \left[\sin(\beta_1 L) - \sinh(\beta_1 x) - \cos(\beta_1 L) + \cosh(\beta_1 x) \right] + \left[\sin(\beta_2 L) + \cosh(\beta_2 x) \right] \cos(\beta_2 L) - \cosh(\beta_2 x)$$

correspondem modos naturais dados por:

a solução numérica determina uma infinidade de valores β_n . A estes valores

Descrição dos parâmetros utilizados na simulação

(5.51)

Altura do braço $b = 0.0254$ [m]

Comprimento do braço $L = 0.7$ [m]

Densidade linear de massa do braço $\rho = 0.069$ [kg/m]

Densidade volumétrica do alumínio 2710 [kg/m³]

Espessura do braço $h = 0.001$ [m]

Massa acoplada $M = 5\%$ de m [kg]

Massa do braço $m = 0.0482$ [kg]

Módulo de elasticidade do alumínio $E = 7.1 \cdot 10^{10}$ [Pa]

Momento de inércia da secção transversal do braço $Ib = 2.12 \cdot 10^{-10}$ [m⁴]

Momento de inércia do cubo $J_c = 1.35 \cdot 10^{-4}$ [kg/m²]

5.9 Modos de vibração da barra

Com os valores indicados acima pode-se construir os modos naturais de vibração da

barra.

Para os três primeiros modos tem-se os seguintes valores:

Modo	β_n	f_n
1º modo	5,37	6,79
2º modo	8,61	17,45
3º modo	11,82	32,86

Os modos de vibração para a viga livre serão:

ser comparados.

mesmos de trabalho anterior [OLIVEIRA, (2000)], pois desta forma também poderiam ficar fixas na sua posição original. Os pontos de localização das massas foram os

Como estratégia inicial e para efeito de comparação com as outras estratégias, as massas

5.10.1 Estratégia 1

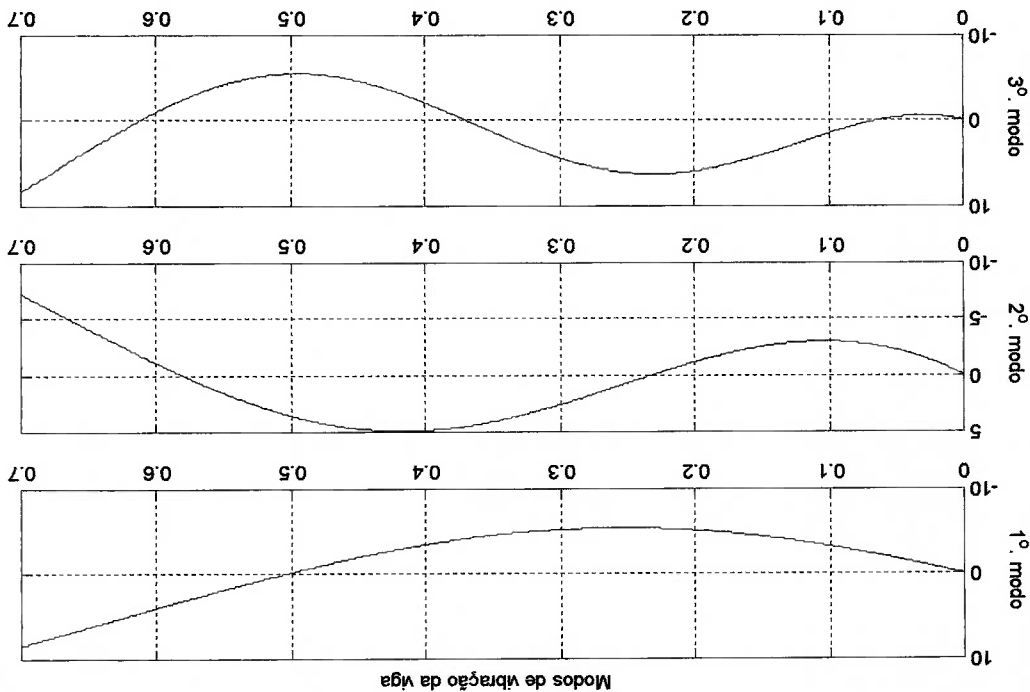
casos apresentados.

implementadas mas seus resultados apresentados não diferem substancialmente dos estratégias que permitem sustentar as conclusões obtidas. Varias outras foram As estratégias utilizadas estão explicitadas abaixo. São apresentadas apenas cinco

5.10 Resultados de Simulação para Trajetórias Prescritas

Durante as simulações foram utilizados os resultados aqui apresentados.

Figura 5 Modos de vibração para uma viga livre



5.10.2 Estratégia 2

M_1	Fixa	$L_{10} = .2552$	$v_1 = 0$
M_2	Fixa	$L_{20} = .5520$	$v_2 = 0$

Nesta estratégia as massas estão inicialmente no meio do braço. Cada uma se movimentará com velocidade constante, porém em direções opostas: uma parte para a extremidade livre do braço e a outra vai para a extremidade fixa, junto ao cubo. O tempo de deslocamento é o inverso da primeira frequência de vibração do braço. Tentou se com isso obter algum efeito de ressonância com a vibração do braço. Depois de chegarem as extremidades as massas terminam o seu deslocamento sendo essa sua

posição final.

- M_1 Velocidade constante do meio para o cubo $l_1 = l_{10} + v_1 t$ $l_{10} = L/2$ $v_1 = -(L/2) * f_{arm}$
- M_2 Velocidade constante do meio para a ponta $l_2 = l_{20} + v_2 t$ $l_{20} = L/2$ $v_2 = (L/2) * f_{arm}$

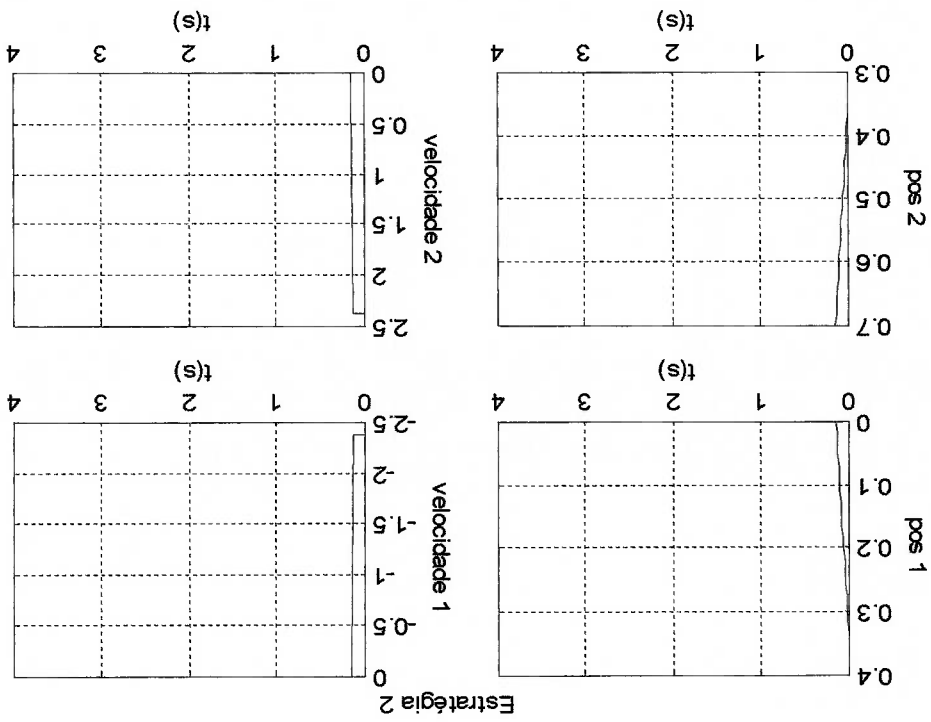


Figura 6 Estratégia 2 para deslocamento das massas

5.10.3 Estratégia 3

Nesta estratégia as massas estão inicialmente no meio do braço. Ambas as massas irão até a extremidade do braço e voltarão a posição original. O movimento é senoidal com frequência igual a frequência de vibração do braço. O tempo de deslocamento é o inverso da primeira frequência de vibração do braço. Novamente tentou se obter algum efeito de ressonância com a vibração do braço.

M_1 Num ciclo sai do meio vai até o cubo e volta

$$l_1 = l_{10} + A_1 \sin(2\pi f_{arm} t - \pi/2)$$

$$l_{10} = 0.25L$$

$$\frac{dl_1}{dt} = -2\pi f_{arm} A_1 \cos(2\pi f_{arm} t - \pi/2)$$

$$A_1 = 0.25L$$

M_2 Num ciclo sai do meio vai até a ponta e volta

$$l_2 = l_{20} + A_2 \sin(2\pi f_{arm} t - \pi/2)$$

$$l_{20} = 0.75L$$

$$\frac{dl_2}{dt} = -2\pi f_{arm} A_2 \cos(2\pi f_{arm} t - \pi/2)$$

$$A_2 = 0.25L$$

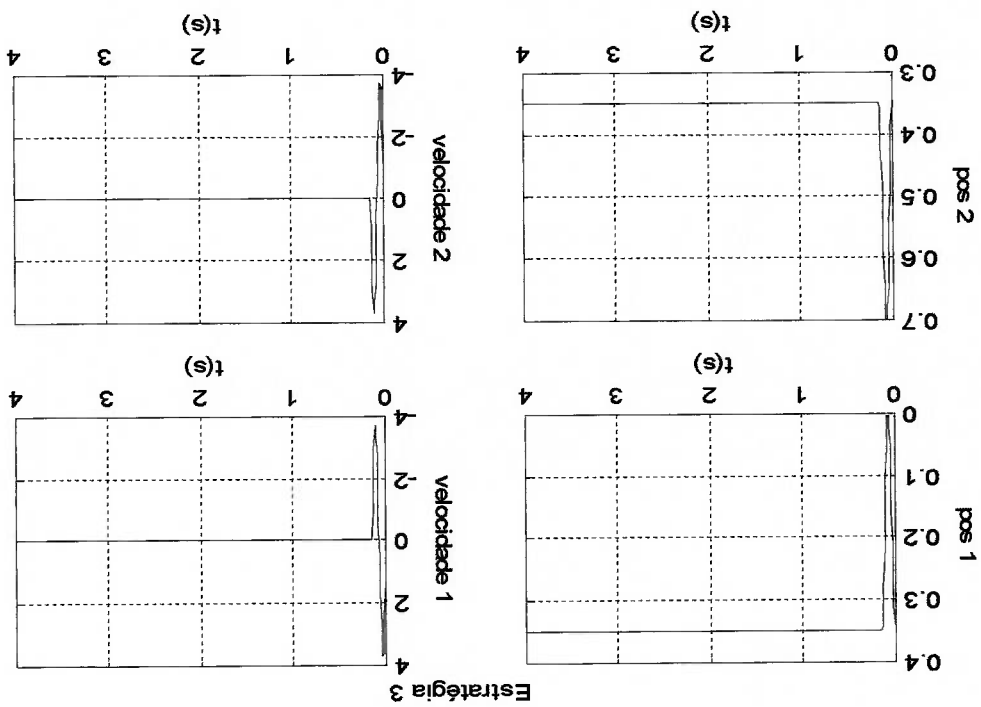


Figura 7 Estratégia 3 para deslocamento das massas

Nesta estratégia, pelos resultados obtidos anteriormente no [OLIVEIRA, (2000)]

quando a manutenção do movimento acabava provocando uma excitação no sistema que aumenta a vibração no final da manobra, adotou-se um amortecimento para o

movimento das duas massas

M₁

Movimento senoidal atenuado

$$\mu = 1,5$$

$$l_1 = l_{10} + A_1 \sin(2\pi f_{arm} t - \pi/2) e^{-\mu t}$$

$$l_{10} = 0,5L$$

$$\frac{dl_1}{dt} = A_1 e^{-\mu t} \left(-2\pi f_{arm} \cos(2\pi f_{arm} t - \pi/2) - \mu * \sin(2\pi f_{arm} t - \pi/2) \right)$$

$$A_1 = 0,5L$$

M₂

Movimento senoidal atenuado

$$\mu = 1,5$$

$$l_2 = l_{20} + A_2 \sin(2\pi f_{arm} t - \pi/2) e^{-\mu t}$$

$$l_{20} = 0,5L$$

$$\frac{dl_2}{dt} = A_2 e^{-\mu t} \left(-2\pi f_{arm} \cos(2\pi f_{arm} t - \pi/2) - \mu * \sin(2\pi f_{arm} t - \pi/2) \right)$$

$$A_2 = 0,5L$$

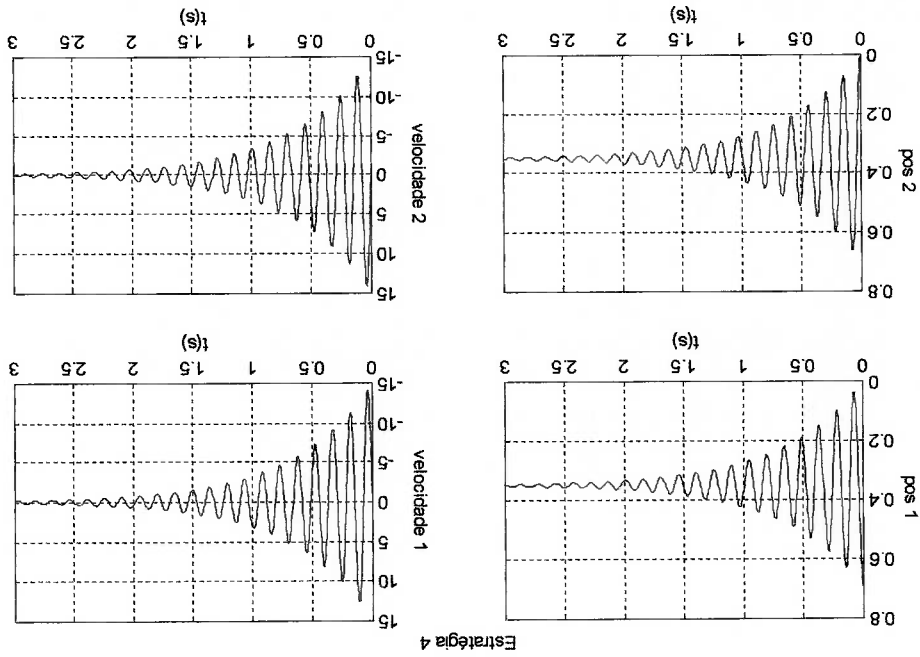


Figura 8 Estratégia 4 para deslocamento das massas

5.10.5 Estratégia 5

Nesta estratégia, as duas massas partindo, próximo ao cubo, na extremidade fixa do braço se deslocam até a outra extremidade. Há apenas uma pequena distância separando as duas massas. A possível atenuação da vibração decorreria do efeito de batimento do movimento das duas massas.

M₁ movimento senoidal PRODIZINDO BATIMENTO

$$l_1 = l_{10} + A_1 \sin(2\pi f_{arm} t - \pi/2) \quad l_{10} = 0.5L$$

$$\frac{dl_1}{dt} = -2\pi f_{arm} A_1 \cos(2\pi f_{arm} t - \pi/2) \quad A_1 = 0.5L$$

M₂ movimento senoidal PRODIZINDO BATIMENTO $d = 0.05L$

$$l_2 = l_{20} + (A_2 - d) \sin\left(2\pi \left(\frac{L-d}{L}\right) f_{arm} t - \pi/2\right) \quad l_{20} = 0.5L$$

$$\frac{dl_2}{dt} = -2\pi \left(\frac{L-d}{L}\right) f_{arm} (A_2 - d) \cos\left(2\pi \left(\frac{L-d}{L}\right) f_{arm} t - \pi/2\right) \quad A_2 = 0.5L$$

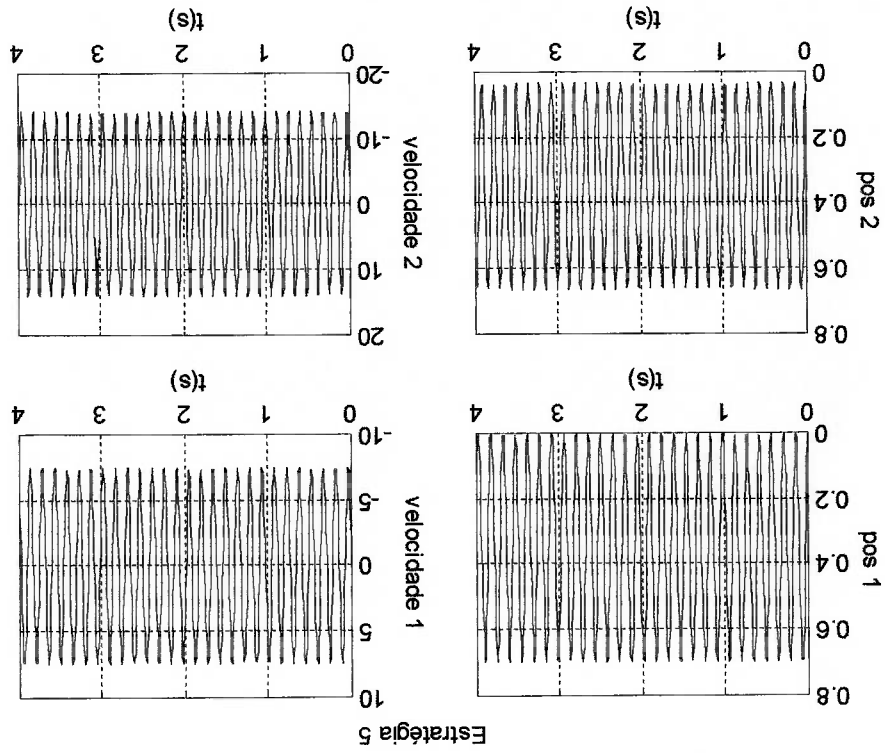
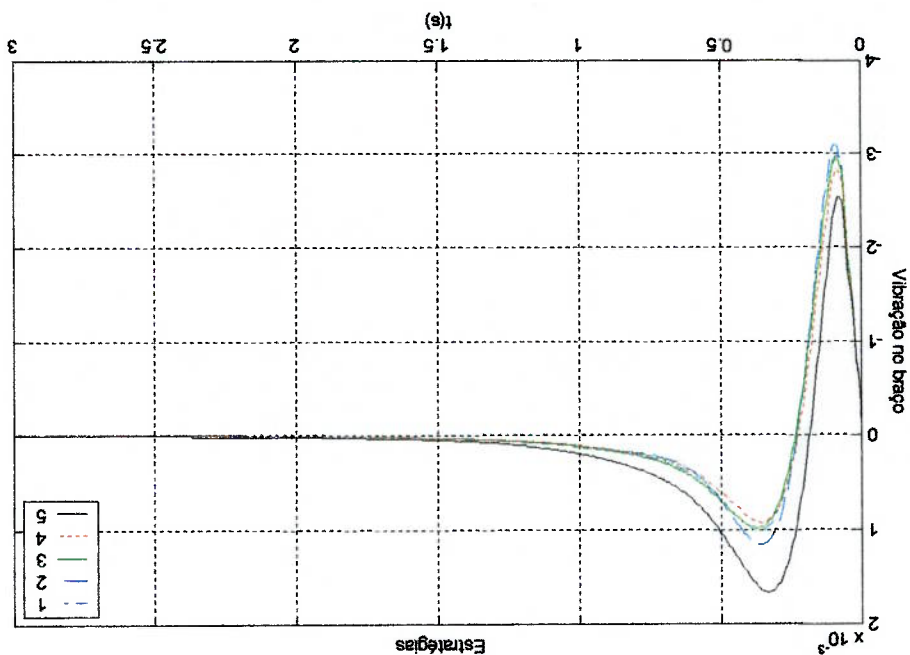


Figura 9 Estratégia 5 para deslocamento das massas

Figura 11 Vibração da ponta do braço



Abaixo estão os gráficos para as cinco estratégias descritas.

5.10.6 Resultados

Figura 10 Batimento decorrente do movimento das duas massas

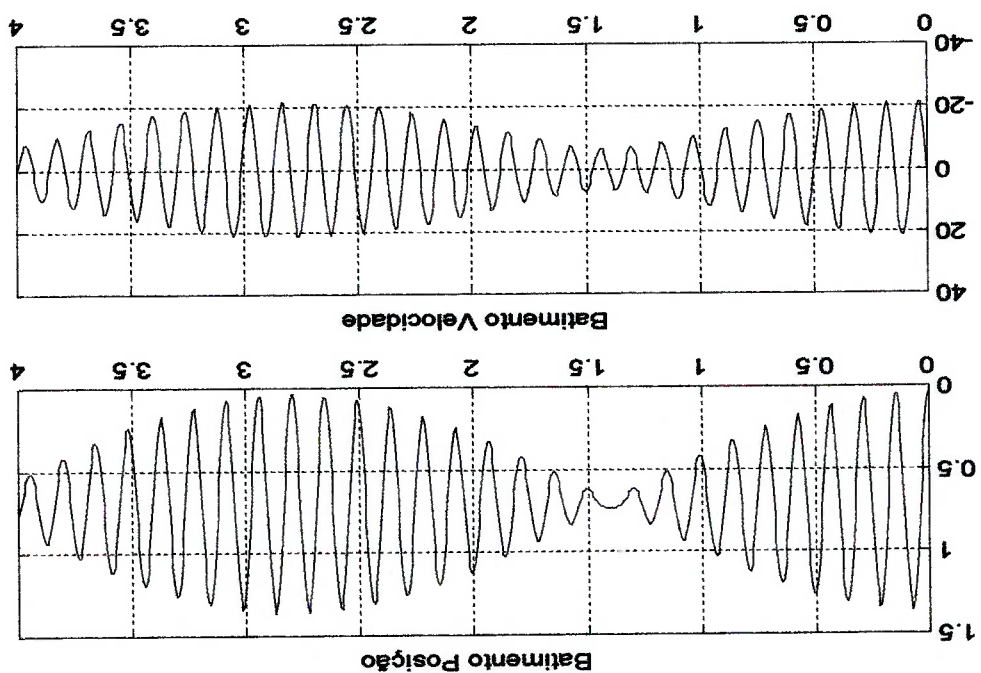


Figura 13 Torque aplicado ao braço

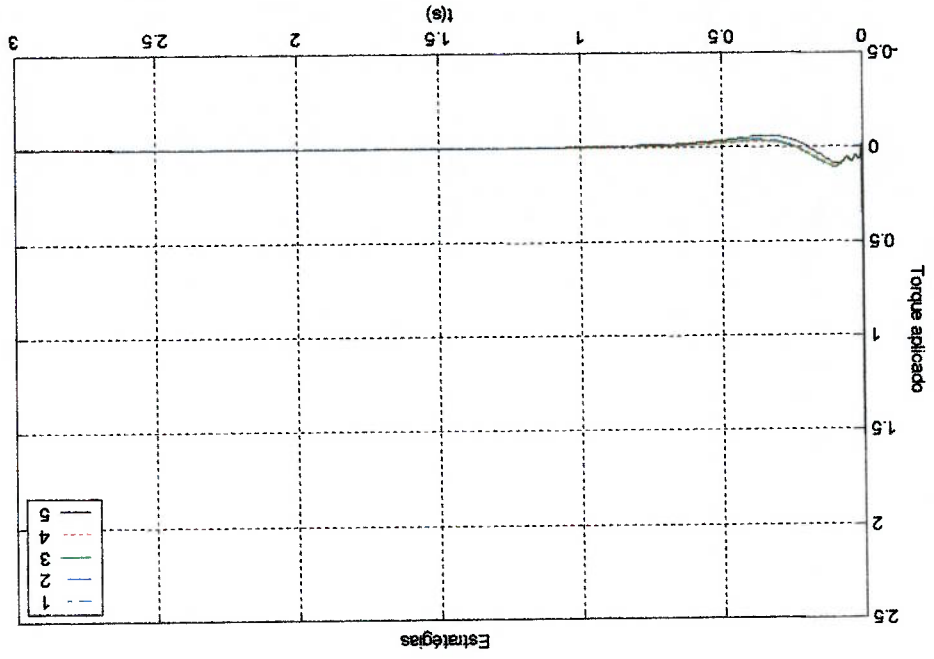
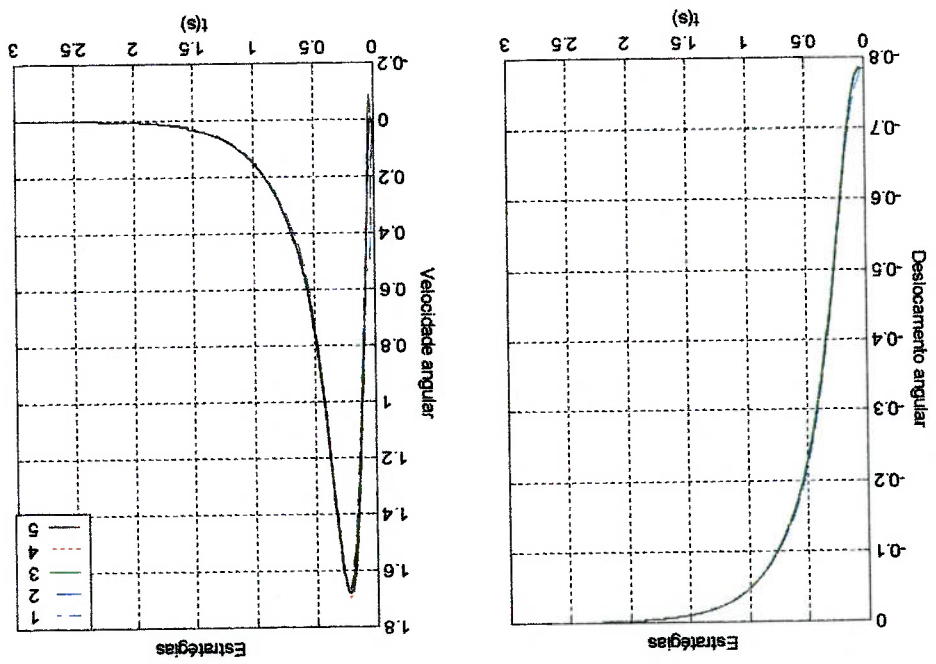


Figura 12 Movimento de rotação do braço



5.11 Discussão ou comentários

O objetivo da inclusão da segunda massa é atenuar ainda mais a vibração da ponta do braço em relação aos resultados já obtidos em relação ao caso de controle de apenas uma massa, estudado em OLIVEIRA, (2000).

As diversas estratégias estudadas foram implementadas para verificar possíveis diferenças na resposta e qual o resultado prático da pré-determinação da trajetória. Aqui foram apresentados os resultados de cinco estratégias apenas por uma questão de brevidade, pois muito outros casos foram implementados. Como não houve nenhum caso que se destacasse optou-se pela apresentação de alguns resultados que suportam as conclusões.

Uma acentuada redução da amplitude de vibração não foi observada em nenhuma das estratégias propostas em relação ao caso com apenas uma massa. A vibração continua sendo da ordem de $1,5 \times 10^{-2}$.

O que se observa é um alisamento na amplitude de vibração. A resposta é muito mais 'lisa' que o caso de uma massa apenas.

Outro resultante de destaque é o tempo em que a barra vibra. No caso de apenas uma massa esse tempo está entre 1,5s a 2,5s dependendo da posição estabelecida para a massa. No caso de duas massas esse tempo é levemente menor situando se na casa de 1,5s para todas as estratégias adotadas.

Outro fator relevante é o pico de velocidade angular do braço, diretamente relacionada ao esforço (energia despendida) para o controle da vibração. Em relação ao caso de uma massa percebe-se que no caso de duas massas o pico se dá num instante posterior, aproximadamente 0,1s no primeiro caso contra 0,25s no segundo. Além disso o pico de velocidade do segundo caso é cerca de 20% menor em relação ao primeiro caso. Aqui

continua se observando o efeito de alisamento. O sinal no segundo caso é bem mais comportado que no primeiro. É difícil estabelecer o que é causa e efeito nesta situação. Talvez a maior dificuldade para obtenção de uma melhor resposta ocorra pelo fato de admitirmos uma modo de vibração independente da posição das massas. Com as massas fixas isso não é uma grande obstrução, mas quando há um movimento pré determinado esse deslocamento altera o sistema, e assim a matriz de realimentação K para o controle linear não corresponde a situação física no decorrer do tempo

6 Controle Ótimo do Movimento das Massas sobre o Braço

O modelo dinâmico do sistema, com manobra pré especificada da massa móvel, é linear. Nestes casos os termos das matrizes $A(t)$ e $B(t)$ são conhecidos, e embora variantes no tempo, é possível estabelecer uma estratégia de controle linear, utilizando como variável de controle o torque aplicado ao cubo. O modelo de estado resultante possui $2p+2$ equações, $2p+2$ variáveis de estado e uma variável de controle, sendo p o número de modos considerados.

Uma segunda abordagem para o problema de controle utiliza o movimento das massas para o controle. Aparecem agora três variáveis de controle:

- O torque aplicado ao cubo
- A força F_i aplicada a cada uma das massas: $F = M^i (l_i - l_i \theta_z)$

O modelo tem então a seguinte estrutura:

$$F = M^i (l_i - l_i \theta_z) \quad (6.1)$$

$$\ddot{\eta}_i = - \frac{\sum_{s=1}^p \omega_z^s S^{rs} \eta_s}{M^i} - 2l_i \dot{\theta}_z \sum_{s=1}^p S^{rs} \dot{\phi}_s dx + \frac{\sum_{s=1}^p S^{rs} \phi_s' |_{x=0}}{M^i} \tau \quad (6.2)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{\sum_{p=1}^p \sum_{s=1}^p S^{rs} \omega_z^s \eta_s (\phi_r |_{l_i} + 2M^i l_i \dot{\theta}_z) \left(\int_L^0 \phi_s dx \right) \phi_r |_{l_i} - 1 \left(1 - \sum_{p=1}^p \sum_{s=1}^p S^{rs} (\phi_r' |_{x=0} \phi_s' |_{l_i}) \right) \tau}{J^B + J^C + M^i l_i^2} \quad (6.3)$$

O modelo tem como variáveis de estado os modos de vibração do braço, equação 6.2, e a posição angular, equação 6.3. As variáveis de controle são a força aplicada a cada massa, equação 6.1, e o torque aplicado pelo cubo na equação 6.3. O modelo obtido é não linear já existem duas fontes de não linearidade:

1. Expressões contendo os produtos entre l_i, l_i, θ pois l_i, l_i tornam se

variáveis de estado.

2. A matriz S é não injetora, e aqui como a posição da massa é uma variável

de estado a sua determinação não é única.

Assim, para um movimento pré especificado da massa acoplada, a matriz $[S]^{pxp}$ é conhecida em qualquer instante de tempo, já que a posição l_i é conhecida. O problema inverso determinar uma posição ótima ou sub-ótima que atenda algum requisito de otimização para o controlador não é imediato, já que a cada valor de $[S]^{pxp}$ corresponde mais de uma posição l_i

6.1 Modelo de estado e formulação do Problema de Controle Ótimo

6.1.1 Modelo com um número arbitrário de autofunções

Pode se exprimir o modelo de estado para p modos definindo as seguintes variáveis de estado e controle:

$$\begin{array}{ll}
 x_1 = \eta_1 & x_{2p-1} = \eta_p \\
 x_3 = \eta_2 & \vdots \\
 x_4 = \eta_2 & x_{2p+1} = \theta \\
 x_2 = \eta_1 & x_{2p+2} = \theta \\
 x_4 = \eta_2 & \vdots \\
 x_2 = \eta_1 & x_{2p} = \eta_p \\
 x_4 = \eta_2 & x_{2p+2} = \theta \\
 x_2 = \eta_1 & x_{2p+4} = l_1 \\
 x_4 = \eta_2 & x_{2p+4} = l_1 \\
 x_2 = \eta_1 & x_{2p+6} = l_2 \\
 x_4 = \eta_2 & n_3 = F_2 \\
 n_1 = \tau & n_2 = F_1
 \end{array}
 \tag{6.9}$$

Da definição das variáveis de estado e controle obtêm se:

$x_{2r-1} = x_{2r}$ modos de vibração do braço, $r = 1, 2, \dots, p$

velocidade angular do braço $x_{2p+1} = x_{2p+2}$

velocidade da massa 1 $x_{2p+3} = x_{2p+4}$

velocidade da massa 2 $x_{2p+5} = x_{2p+6}$

As equações das variáveis de estado relacionadas a velocidade das massas poderão ser

escritas usando a equação 6.1:

$$l_i = \frac{M_i}{F} + l_i \theta^2 \quad (6.10)$$

(6.11)

$$x_{2p+4} = x_{2p+3} x_{2p+2} + \frac{M_1}{n_2}$$

(6.12)

$$x_{2p+6} = x_{2p+5} x_{2p+2} + \frac{M_2}{n_3}$$

As equações 6.11 e 6.12 descrevem a velocidade das massas acopladas com o respectivo controle aplicado.

As equações das variáveis de estado relacionadas aos modos de vibração do braço

poderão ser escritas usando a equação 6.2:

$$x_{2r} = \ddot{\eta}_r = - \frac{\sum_{s=1}^p \omega_2^s S^{rs} \eta_s}{\sum_{s=1}^p S^{rs} \phi'_s |_{x=0}} - \frac{M_i}{2l_i \theta} \sum_{s=1}^p S^{rs} \int_L^0 \phi^s dx + \frac{M_i}{\tau} \quad (6.13)$$

$$x_{2r} = - \frac{\sum_{s=1}^p \omega_2^s S^{rs} x_{2s-1} (M_1 x_{2p+4} + M_2 x_{2p+6})}{\sum_{s=1}^p S^{rs} \int_L^0 \phi^s dx} + \frac{M_1 + M_2}{\sum_{s=1}^p S^{rs} \phi'_s |_{x=0}} + \frac{M_1 + M_2}{n_1} \quad (6.14)$$

A equação 6.14 descreve os modos de vibração do braço com o respectivo controle

A equação da variável de estado relacionada ao movimento angular do braço poderá ser

escritas usando a equação 6.3:

$$\ddot{\theta} = \frac{J_B + J_C + M_1 l_1^2}{\sum_{p=1}^r \sum_{s=1}^p S^{rs} (\omega_2^s \eta_s) \phi_r |_{l_1} + 2M_1 l_1 \theta} \left(\sum_{p=1}^r \sum_{s=1}^p S^{rs} \int_L^0 \phi^s dx \phi_r |_{l_1} - 1 \right) + \left(1 - \sum_{p=1}^r \sum_{s=1}^p S^{rs} \phi_r |_{x=0} \right) \phi_r |_{l_1} \tau \quad (6.15)$$

A matriz S é escrita com as variáveis adotadas:

$$\dot{x}_{2p+6} = \frac{M_2}{n_3} x_{2p+5} + x_{2p+2} \quad (6.25)$$

$$\dot{x}_{2p+5} = x_{2p+6} \quad (6.24)$$

$$\dot{x}_{2p+4} = \frac{M_1}{n_2} x_{2p+3} + x_{2p+2} \quad (6.23)$$

$$\dot{x}_{2p+3} = x_{2p+4} \quad (6.22)$$

$$\dot{x}_{2p+2} = \frac{J_B + J_C + M_1 x_{2p+3}^2 + M_2 x_{2p+5}^2}{n_1} \left(1 - \sum_p \sum_{r=1}^p S^{rs} \phi_r' |_{x=0} \phi_r'(l_i) \right) \quad (6.21)$$

$$\dot{\theta} = \frac{J_B + J_C + M_1 x_{2p+3}^2 + M_2 x_{2p+5}^2}{J_B + J_C + M_1 x_{2p+3}^2 + M_2 x_{2p+5}^2} + \frac{\sum_p \sum_{r=1}^p \omega_2^s \phi_r^s(l_i) S^{rs} x_{2s-1s}}{2(M_1 x_{2p+4}^2 + M_2 x_{2p+6}^2) \sum_p \sum_{r=1}^p S^{rs} \phi_r(l_i) S^{rs} \int_L^0 \phi_s dx} \left[-1 \right] \quad (6.20)$$

$$\dot{x}_{2p+1} = x_{2p+2} \quad (6.19)$$

$$\dot{x}_{2r} = - \frac{M_1 + M_2}{\sum_p \sum_{r=1}^p \omega_2^s S^{rs} x_{2s-1s}} - \frac{M_1 + M_2}{2(M_1 x_{2p+4}^2 + M_2 x_{2p+6}^2) \sum_p \sum_{r=1}^p S^{rs} \int_L^0 \phi_s dx} + \frac{M_1 + M_2}{\sum_p \sum_{r=1}^p S^{rs} \phi_r^s |_{x=0}} \quad (6.18)$$

com $r = 1, \dots, p$.

$$\dot{x}_{2r-1} = x_{2r} \quad (6.18)$$

O modelo completo terá a seguinte estrutura

A equação 6.16 descreve o movimento angular do braço e seu respectivo controle.

$$\dot{x}_{2p+2} = \theta = \frac{J_B + J_C + M_1 x_{2p+3}^2 + M_2 x_{2p+5}^2}{J_B + J_C + M_1 x_{2p+3}^2 + M_2 x_{2p+5}^2} + \frac{\sum_p \sum_{r=1}^p \omega_2^s \phi_r^s(l_i) S^{rs} x_{2s-1s}}{2(M_1 x_{2p+4}^2 + M_2 x_{2p+6}^2) \sum_p \sum_{r=1}^p S^{rs} \int_L^0 \phi_s dx} \left[-1 \right] \left(1 - \sum_p \sum_{r=1}^p S^{rs} \phi_r' |_{x=0} \phi_r'(l_i) \right) \quad (6.16)$$

(6.33) $x_7 = x_8$

(6.32) $x_6 = x_5 x_2 + \frac{M_1}{n_2}$

(6.31) $x_5 = x_6$

(6.30)

$$x_4 = \frac{J_b + J_c + M_1 x_5^2 + M_2 x_7^2}{\omega_2^2 \phi(l) S_{11}} x_1 + \frac{J_b + J_c + M_1 x_5^2 + M_2 x_7^2}{2(M_1 x_6 + M_2 x_8) \phi(l) S_{11} \int_0^T \phi dx - 1} + \frac{J_b + J_c + M_1 x_5^2 + M_2 x_7^2}{1 - S_{11} \phi'|_{x=0} \phi(l)} n_1$$

(6.29) $x_3 = x_4$

(6.28) $x_2 = -\frac{\omega_2^2 S_{11} M_1 + M_2}{x_1} - \frac{2(M_1 x_6 + M_2 x_8) x_4 S_{11} \int_0^T \phi dx}{M_1 + M_2} + \frac{S_{11} \phi'|_{x=0} n_1}{M_1 + M_2}$

$x_1 = x_2$

Para $r=1$

(6.27)
$$\begin{aligned} x_1 &= \eta_1 & x_2 &= \eta_1 \\ x_3 &= \theta & x_4 &= \theta \\ x_5 &= l_1 & x_6 &= l_1 \\ x_7 &= l_2 & x_8 &= l_2 \\ n_1 &= \tau & n_2 &= F_1 \\ n_3 &= F_2 \end{aligned}$$

As variáveis de estado e controle serão:

6.1.2 Modelo com um único modo

(6.26)
$$S_{rs} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{M_1 + M_2 \sum_{p=1, k \neq r}^k [\phi^k(x_{2p+3}) + \phi^k(x_{2p+5})] \int_0^T \phi^k dx}{1 + M_1 \sum_p^p [\phi^k(x_{2p+3}) + \phi^k(x_{2p+5})] \int_0^T \phi^k dx} \text{ para } r \neq s \\ \frac{-M_2 \sum_p^p [\phi^r(x_{2p+3}) + \phi^r(x_{2p+5})] \int_0^T \phi^s dx}{1 + M_1 \sum_p^p [\phi^k(x_{2p+3}) + \phi^k(x_{2p+5})] \int_0^T \phi^k dx} \text{ para } r = s \end{array} \right.$$

6.1.3 Modelo do controle ótimo com dois modos

As variáveis de estado e controle serão:

$$(6.37) \quad \begin{aligned} x_1 &= \eta_1 & x_2 &= \eta_1 \\ x_3 &= \eta_2 & x_4 &= \eta_2 \\ x_5 &= \theta & x_6 &= \theta \\ x_7 &= l_1 & x_8 &= l_1 \\ x_9 &= l_2 & x_{10} &= l_2 \\ u_1 &= \tau & u_2 &= F_1 \\ u_3 &= F_2 \end{aligned}$$

Para $r = 1$

$$(6.38) \quad \begin{aligned} x_1 &= x_2 \\ x_2 &= -\frac{S_{11}\omega_2^2}{M_1 + M_2}x_1 - \frac{S_{12}\omega_2^2}{M_1 + M_2}x_3 - \frac{2(M_1x_8 + M_2x_{10})}{\sum_{s=1}^2 S_{1s}} \int_0^L \phi_s dx \\ &+ \frac{M_1 + M_2}{\sum_{s=1}^2 S_{1s} \phi_s^2 |_{x=0}} x_6 \end{aligned} \quad (6.39)$$

Para $r = 2$

$$(6.40) \quad \begin{aligned} x_3 &= x_4 \\ x_4 &= -\frac{S_{21}\omega_2^2}{M_1 + M_2}x_1 - \frac{S_{22}\omega_2^2}{M_1 + M_2}x_3 - \frac{2(M_1x_8 + M_2x_{10})}{\sum_{s=1}^2 S_{2s}} \int_0^L \phi_s dx \\ &+ \frac{M_1 + M_2}{\sum_{s=1}^2 S_{2s} \phi_s^2 |_{x=0}} x_6 \end{aligned} \quad (6.41)$$

Para $p=2$

$$(6.42) \quad \begin{aligned} x_5 &= x_6 \\ x_6 &= \frac{\omega_2^2 \sum_{r=1}^2 S_{r1} \phi_r^2(i)}{J_{BC} + M_1 x_7^2 + M_2 x_9^2} x_1 + \frac{\omega_2^2 \sum_{r=1}^2 S_{r2} \phi_r^2(i)}{J_{BC} + M_1 x_7^2 + M_2 x_9^2} x_3 + \frac{2(M_1 x_8 + M_2 x_{10})}{\sum_{r=1}^2 \sum_{s=1}^2 S_{rs}} \left[\int_0^L \phi_s dx \right] - 1 \\ &+ \frac{J_B + J_C + M_1 x_7^2 + M_2 x_9^2}{n_1} \end{aligned} \quad (6.43)$$

$$(6.44) \quad x_7 = x_8$$

$$\begin{bmatrix}
 x_1 \\
 x_2 \\
 x_3 \\
 x_4 \\
 x_5 \\
 x_6 \\
 x_7 \\
 x_8 \\
 x_9 \\
 x_{10}
 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

Matricialmente o modelo terá a forma:

Desta forma o problema terá dez variáveis de estado e três de controle.

$$\begin{aligned}
 x_1(0) &= \eta_1(0) = 0 & x_2(0) &= \eta_1(0) = 0 & x_3(0) &= \eta_2(0) = 0 & x_4(0) &= \eta_2(0) = 0 & x_5(0) &= \theta(t_f) = 0 \\
 x_6(0) &= \theta(0) = \theta_0 & x_7(0) &= l^1(0) = l_1^0 & x_8(0) &= l^1(0) = 0 & x_9(0) &= l^2(0) = l_2^0 & x_{10}(0) &= l^2(t_f) = 0 \\
 x_{10}(0) &= l^2(0) = l_2^0 & & & & & & & &
 \end{aligned}$$

Vinculos de contorno

$$x_{10} = x_9 x_2 + \frac{M_2}{n} \tag{6.47}$$

$$x_9 = x_{10} \tag{6.46}$$

$$x_8 = x_7 x_2 + \frac{M_1}{n} \tag{6.45}$$

(6.50)

$$\Psi^b(t_f) x(t_f) = [\Psi_1 \quad \Psi_2 \quad \dots \quad \Psi_b]^T = 0$$

q vínculos de contorno

satisfazendo:

(6.49)

$$IP = IP[x(t_f)] = g[t_f, t_f, x(t_f)] + \int_{t_f}^{t_i} L(t, x, u) dt$$

Determinar o vetor de controle u(t) no intervalo (t_i, t_f) que minimiza:

Um a possível formulação Padrão do Problema de Minimização é dada por:

propostas seguem um certo padrão.

Vários autores tratam desse problema, fora pequenas variações de notação todas as

nesta área que está o Problema do Controle Ótimo (PCO).

O comum é usar Cálculo Variacional para o estudo de mínimo de integrais no tempo. É

minimização de uma integral no tempo.

casos, a um problema de minimização da energia do sistema, o que envolve a

A otimização do critério de desempenho (IP) do sistema corresponde, na maioria dos

6.2 Controle Ótimo

Desta forma o problema terá dez variáveis de estado e três de controle.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_3 \\ n_2 \\ n_1 \end{bmatrix}$$

autônomo com tempo final aberto:

Outros tipos de Problemas de controle ótimo podem ser tratados com a mesma formulação apresentada acima. Por exemplo, um problema eventualmente não-

critério de desempenho

o primeiro termo do lado direito refere se aos vínculos dinâmicos e o segundo ao com

$$H(x, u, t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i - L(x, u, t) \quad (6.53)$$

hamiltoniano do sistema

O Princípio do Máximo de Pontryagin estabelece que o controle ótimo u^* maximiza o

inicial $x^* = f(x^*, u^*, t)$, descrevendo desta forma a melhor trajetória para o sistema.

O controle $u^* = u^*(t)$, solução do PCO, gera uma solução ótima do problema de valor

$$h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$l : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x(t) \in \mathbb{R}^n \quad u(t) \in \mathbb{R}^m$$

As funções são definidas nos seguintes espaços:

$x(t)$	$n \times 1$	vetor de variáveis de estado
$u(t)$	$m \times 1$	vetor de variáveis de controle
$f(t)$	$n \times 1$	vetor do sistema dinâmico

sistema de n equações com

$$\text{vínculo dinâmico do sistema } \dot{x} = f(x, u, t) \quad (6.52)$$

matriz $q \times 1$ de funções conhecidas de $x(t)$ e t

$$\text{restrição simples de parada } \Omega[x(t_f), t_f] = 0 \quad (6.51)$$

$t_f = x^{n+1}(b) = a + (t - a)\beta$. A duração ótima será $T^* = t_f - a = (b - a)\beta = T\beta$

β : fator de escala de duração

$b = a + T$, $T = b - a$: Tempo nominal de duração da trajetória

$$I(t, x, n) = \tilde{I}(x^{n+1}, x, n)$$

$$g(\alpha, x, n) = \tilde{g}(a + T\beta, x(b))$$

sendo:

$$\text{Sujeito a } \dot{x} = h(t, x, n) = \begin{cases} x^{n+2} h(x, x^{n+1}, n) \\ 0 \\ x^{n+2} \end{cases}$$

$$\min_{\beta} g(\alpha, x, n) + \int_a^b L(t, x, n) dt$$

$$\begin{cases} \beta \\ a \\ x \end{cases} = \alpha = \begin{cases} a \\ x \end{cases}$$

$$x = \begin{cases} x \\ x^{n+1} \\ x^{n+2} \end{cases} = \begin{cases} \beta \\ a + (t - a)\beta \\ \beta \end{cases}$$

Pode ser convertido num problema com tempo definido, utilizando um vetor de estados aumentado, ou seja o sistema definido terá uma variável a mais. O tratamento dado aqui é o mesmo dado por [Schwartz], e também é utilizado no simulador RIOTS.

$$x(a) = \zeta, t \in [a, a+T]$$

$$x(a) = \zeta, t \in [a, a+T]$$

sujeito a $\dot{x} = h(t, x, n)$,

$$IP = IP[x(t_f)] = \min_{\beta} [g(T, x(T)) + \int_{a+T}^a L(t, x, n) dt]$$

$$\min_{\beta} g(T, x(T)) + \int_{a+T}^a L(t, x, n) dt$$

$$\text{Se } a = 0 \text{ e } b = 1, t_r = T^* = \beta$$

No fundo o problema continua sendo tratado como tempo definido, e obtém-se na variável introduzida no sistema um valor de escala que determinar o tempo necessário para o sistema.

Diversos métodos numéricos para a resolução de problemas de controle ótimo têm sido estudados. Entre eles a Teoria das Aproximações Consistentes, que vem sendo desenvolvida por Polak e seus colaboradores. Formula o Problema do Controle Ótimo através de uma representação da dinâmica do sistema em um espaço discreto, integrando-se numericamente as equações diferenciais usando Runge-Kutta. As variáveis de controle são representadas pelos coeficientes de splines.

Uma versão discretizada da função objetivo é minimizada empregando rotinas de programação não linear, entre elas o SQP (sequential quadratic programming). Uma vez obtida a solução do problema de otimização, os controles encontrados são introduzidos no sistema dinâmico, que é novamente integrado pelo Método de Runge-Kutta, obtendo um novo problema de otimização. O processo iterativo prossegue até que as condições de optimalidade sejam satisfeitas dentro de uma tolerância especificada.

SCHWARTZ (1996) estudou uma variante do método, e implementou um toolbox para o Matlab, RIOTS_95 (Recursive Integration Optimal Trajectory Solver), que permite a resolução de uma ampla gama de problemas de controle ótimo, inclusive com vínculos terminais, de trajetória e de desigualdade nas variáveis de estado e de controle. O funcionamento do RIOTS_95 é descrito por Schwartz, Polak & Chen (1997).

Três grupos de rotinas definem o software:

1. Simulação

Ha várias formas do comando simulate, com algoritmos Runge Kutta de várias ordens com passo fixo ou algoritmos com passo variável. A partir de

diversos parâmetros de entrada, como um vetor de tempo, estados iniciais e finais, o vetor de controle, etc., são calculadas a trajetória do sistema, o valor do IP alcançado, diversos gradientes, valores ao longo do tempo das funções de vínculo, erros de integração entre outras grandezas

2. Otimização

Dependendo das características do OCP, estão disponíveis várias rotinas de otimização. A mais genérica chama-se *riots* e está baseada no pacote comercial de otimização NPSOL (Gill et al., 1986). Esta desenvolvida para resolver Problemas de controle ótimo com todos os tipos de vínculos definidos acima e uma função objetivo. Entretanto, é computacionalmente cara, sendo viável apenas a problemas de médio porte sem malhas de discretização muito refinadas. A rotina menos genérica, porém mais econômica, é a *pdmin*, capaz apenas de trabalhar com vínculos de controle simples e limites nas condições iniciais. É indicada para problemas de grande porte que podem ser formulados desta maneira, e oferece diversas opções na escolha do algoritmo de otimização: L-BFGS, gradiente e gradiente projetado (SCHWARTZ et al., 1997). Uma versão modificada de *pdmin* é a rotina *aug_lagrng*, que pode incluir também vínculos terminais de igualdade. A subrotina *outer* utiliza *riots* várias vezes, redistribuindo a malha de discretização, através do comando *distribute*, até atingir uma precisão especificada. Existem ainda outras rotinas auxiliares, que estimam erros de integração e da aproximação do controle, aplicam transformações de coordenadas, etc.

Dado um OCP, o usuário escreve um conjunto de oito funções, em *main* ou *control*, *act*, *h*, *l*, *g*, *Dh*, *DL*, *Dg*. Nas duas primeiras são

funções l , as g , seguidas de suas derivadas. As derivadas podem ser eventualmente omitidas, pois o programa pode calculá-las automaticamente através de diferenças finitas.

3. Rotinas auxiliares

Tem diversos usos no programa, algumas funções são necessárias para as rotinas de otimização e outras são funções definidas pelo usuário. São cinco rotinas:

control_error calcula a norma dos erros da solução obtida

distribute redistribui a discretização da integração. Os coeficientes da spline de

controle obtidas anteriormente são interpoladas na nova discretização.

est_errors estima o erro de integração global para os métodos de Runge Kutta de

passo fixo e nos métodos de passo variável obtém valores preciso para função objetivo

e violações nas restrições e trajetórias.

sp_plot plota os coeficientes da spline para o controle.

transform computa o produto interno em L_2 de duas splines.

6.2.1 Considerações gerais e limitações do método

A utilização de métodos numéricos de integração com passo variável, em

problemas de integração de equações diferenciais, tem propriedades de estabilidade \times

custo bastante superiores. Em problemas de controle ótimo como o erro de integração

depende da aproximação para representação paramétrica do controle os métodos de

passo variável não mantêm os resultados de estabilidade \times custo. Assim utilizam-se

discretizações com tamanho de passo fixo nas diversas tentativas de solução, e ao final

pode se tentar algum refinamento na malha.

Em problemas com vínculos de igualdade ou desigualdade nas variáveis de

estado, é possível que não exista uma solução, para um dado nível de discretização, que

respeite todos esses vínculos. Recomenda-se assim que as tolerâncias na violação dos

implementação de restrições no instante final e alterações na função de otimização. restrições nas variáveis de estado de controle através de equações e inequações a discretização a obtenção da melhor condição inicial, passando pela implementação de O simulador RIOTS permite uma série de simulações da redistribuição dos pontos de de splines para o controle.

implementação de métodos de integração baseados em Runge Kutta e a representação sequência de problemas é obtida pela discretização do sistema dinâmico com a acumulação num sentido definido será a solução do problema ótimo original. A solução de uma sequência de problemas de controle ótimo discreto. Esse ponto de consistentes. Nesta abordagem a solução é obtida como um ponto de acumulação da Os métodos numéricos implementados estão baseados na teoria de aproximações

6.2.2 Possibilidades exploradas e a explorar

foram observados na simulação tratado neste trabalho. tratamento numérico de controle ótimo. E é de salientar que estes inconvenientes não Entretanto, tais limitações são compartilhadas por praticamente todos os algoritmos de

- Impossibilidade de tratar problemas com atrasos na sua dinâmica.
 - Necessidade de uma boa estimativa inicial para as condições inicial com dinâmica altamente instável;
 - Necessidade de uma boa estimativa inicial do vetor de controles para problemas discretização e vínculos genéricos, principalmente desiguaisdades de estados.
 - a incapacidade de trabalhar com problemas de grande porte com alto nível de
- Algumas limitações do *software* listadas pelo seu autor, como:

evitando cálculos desnecessários na tentativa de satisfazer tais vínculos. vínculos sejam aumentadas, caso a discretização não seja suficientemente refinada,

Pelas próprias características dos problemas de controle ótimo ao usar o método de Runge Kutta permite uma série de implementações dependentes da ordem de integração desejada.

6.3 Descrição das condições de simulação

Com a utilização do RIOTS para a simulação do sistema vários casos foram simulados. Para qualquer um dos casos vale a seguinte situação. É imposto em todas a simulações do sistema as seguintes condições:

Posição inicial	Posição final	Velocidade inicial	Velocidade final
		Nula	Nula
Barra	$\theta = -\pi/4$	$\theta = 0$	Nula
			Nula
Massa 1	As massa devem se manter dentro		Nula
Massa 2	do braço durante toda a manobra		Nula

Estas condições apenas garantem que o braço começa e termina a manobra parado. Também as massas de controle estarão paradas no começo e fim da manobra, além disso é imposto que o movimento das massas não pode exceder os limites físicos do braço. Esta última restrição impede a comparação com o trabalho, de OLIVEIRA (2000), com apenas uma massa, pois num dos casos demonstrados o movimento da massa era livre e ela acaba se deslocando para fora do braço. Isto produz um resultado interessante, mas que não foi coberto nas simulações realizadas aqui.

Ha uma série de parâmetros ou condições que podem ser alterados para a realização da simulação. Na realidade isto impõe algumas dificuldades, pois a convergência do problema depende da escolha correta do conjunto de parâmetros. É necessário uma série de testes até que se perceba quais os melhores valores para a obtenção de uma solução. Os parâmetros mais frequentemente ajustados durante todo o processo de simulação foram:

a) Função objetivo

Uma exigência dos métodos de otimização. A melhor escolha do controle inicial tem fator fundamental na convergência do método. Foram testados alguns tipos de controle inicial, na maioria dos casos houve apenas uma adequação dos tipos usados no trabalho de OLIVEIRA (2000), a exceção fica para o controle inicial nulo que, surpreendente, produziu resultados de sucesso para o caso com um modo de vibração apenas. A medida que resultados positivos eram obtidos, eles começaram a ser usados também como controle inicial, em configurações iniciais diferentes da que eles foram obtidos. Particularmente útil no caso com dois modos de vibração, em que os todos casos de

c) controle inicial

fica comprometida.

uma diminuição dos casos de simulação com sucesso, pois a convergência do método manobra, novas soluções foram buscadas para tempos menores. O resultado prático é alguns parâmetros sobre outros. Depois de alguns casos de sucesso com esse tempo de sistema. Durante as simulações isso foi bastante importante devido a intererência de manobra analisada, mas com isso consegue se uma brecha para obter uma resposta do o trabalho de OLIVEIRA (2000). Este tempo pode ser considera-lo longo para o tipo de Inicialmente foi adotado o valor de 4s para o tempo de manobra, para comparações com

b) Tempo de manobra

sistema, que será discutida quando da apresentação dos casos. utilizados. Outro aspecto importante é sua influência sobre o comportamento do listados todos os casos de sucesso, e se observa a profusão de funções objetivo para a obtenção da função objetivo que permitisse a convergência. No apêndice estão convergência da simulação. Na realidade os parâmetros foram ajustados empiricamente Logo no início dos testes foi perceptível a influência da função objetivo para a

sucesso apresentados aqui foram obtidos usando como controle inicial a solução ótima

do problema com um modo.

d) A posição inicial da massa M_2

Esta massa de controle foi deixada mais próxima a extremidade livre do braço. Normalmente suas posições variavam em 0.5, 0.6 e 0.7 (extremo livre do braço). Na realidade em todas as simulações o que é pré determinado é sua posição inicial, e não seu movimento durante a manobra.

e) A posição inicial da massa M_1

Deve se pensar no conjunto das massas. A posição da massa 2 já foi descrita. Os casos descritos, indicam uma posição inalterada para a massa 2, enquanto a massa 1 tem sua posição original deslocada pelos pontos: de 0.0 a 0.7, com um intervalo de 0.1 em cada uma das situações dentro de cada simulação.

f) Restrição sobre a posição final das massas de controle

Mesmo não possuindo a influência de outros parâmetros, o tipo de restrição sobre a posição final das massas de controle determina comportamentos distintos para o sistema simulado. Durante a simulação foram especificadas as seguintes restrições:

■ a posição final é livre

■ as massas voltam para as respectivas posições iniciais

■ a massa 1 volta para posição original, a massa 2 vai para extremo do braço próximo

ao cubo

g) Restrição no deslocamento da ponta do braço.

Inicialmente o deslocamento da ponta do braço está livre. Também foi possível obter sucesso na simulação com a restrição de deslocamento nulo da ponta do braço. Nos casos simulados, a influência deste fator não foi perceptível na convergência

6.3.1 Descrição dos casos expostos

A simulação ocorre para duas situações bastante distintas. Num primeiro momento foram simulados sistemas com apenas um modo de vibração. Houve uma grande quantidade de casos positivos, foi até necessário limitar a quantidade de casos expostos. Quando sistemas com a inclusão do segundo modo foram simulados, a quantidade de casos positivos não foi tão grande. Isto devido a dificuldades numéricas de convergência, já que as exigências do RIOTS atingem esse segundo modo. Seguindo o critério adotado de apresentar apenas os casos que o RIOTS convergia plenamente, varias simulações foram descartadas mesmo apresentada resposta semelhante aos casos positivos. Serão expostos 10 casos, o critério de escolha tentou privilegiar a maior abrangência de situações possíveis. A experiência obtida com as simulações, permite destacar fatores mais importantes, como:

- Funções objetivo diferentes
- Tempo de manobra
- Controles iniciais adotados
- Inclusão de segundo modo de vibração

No apêndice estão listados todos os casos simulados com êxito e algumas informações adicionais como o tempo de execução das simulações. Os casos indicados fazem parte de uma lista e sua numeração não é sequencial, pois alguns casos foram descartados para exposição.

A tabela abaixo expõe os principais parâmetros para os casos que expostos:

A primeira coluna indica o número do caso.

A segunda indica a posição inicial da massa 2.

A terceira indica o tempo previsto para a manobra

A quarta indica qual controle inicial usado

A quinta indica qual restrição sobre o deslocamento da ponta do braço no instante inicial

A sexta indica qual a posição final para as duas massas. P0 indica posição inicial, assim a massa retorna para sua posição inicial.

A sétima indica quantos casos de sucesso ocorreram na situação.

O tempo necessário para realizar todas as simulações com resposta positiva.

Caso	M2	IP = min	Δt	u_0	Vibr	Pos ^{mm} Ms	OK	$\Delta T(\text{min})$
3	0.5	$\int_4^0 x_2^1(t) dt$	4s	1	Livre	$M_1 = \text{livre}$ $M_2 = \text{livre}$	4	22.0
5	0.6	$\int_4^0 x_2^1(t) dt$	4s	2	Livre	$M_1 = \text{livre}$ $M_2 = \text{livre}$	5	21.5
31	0.6	$\int_4^0 x_2^1(t) dt$	4s	3	livre	$M_1 = P_0$ $M_2 = P_0$	7	109.75
38	0.7	$\int_3^0 2x_2^1(t) dt$	3s	2	livre	$M_1 = \text{livre}$ $M_2 = \text{livre}$	4	40.3
40	0.5	$\int_1^0 [4x_2^1(t) + x_2^2(t)] dt$	1s	3	nula	$M_1 = \text{livre}$ $M_2 = \text{livre}$	1	97.7
41	0.5	$\int_2^0 [4x_2^1(t) + x_2^2(t)] dt$	2s	3	nula	$M_1 = P_0$ $M_2 = P_0$	7	239.3
42	0.5	$\int_4^0 [4x_2^1(t) + x_2^2(t)] dt$	4s	3	nula	$M_1 = P_0$ $M_2 = P_0$	5	130.4
43	0.5	$\int_4^0 [4x_2^1(t) + x_2^2(t)] dt$	4s	3	livre	$M_1 = P_0$ $M_2 = P_0$	4	152.8
50	0.7	$\int_4^0 [4x_2^1(t) + x_2^2(t)] dt$	4s	2	nula	$M_1 = P_0$ $M_2 = 0$	7	155.1

Trajectoria restrita a barra, sem restrição quanto a posição final das massas de controle e ao deslocamento da ponta do braço no instante final da manobra.
 O tempo de manobra: 4s

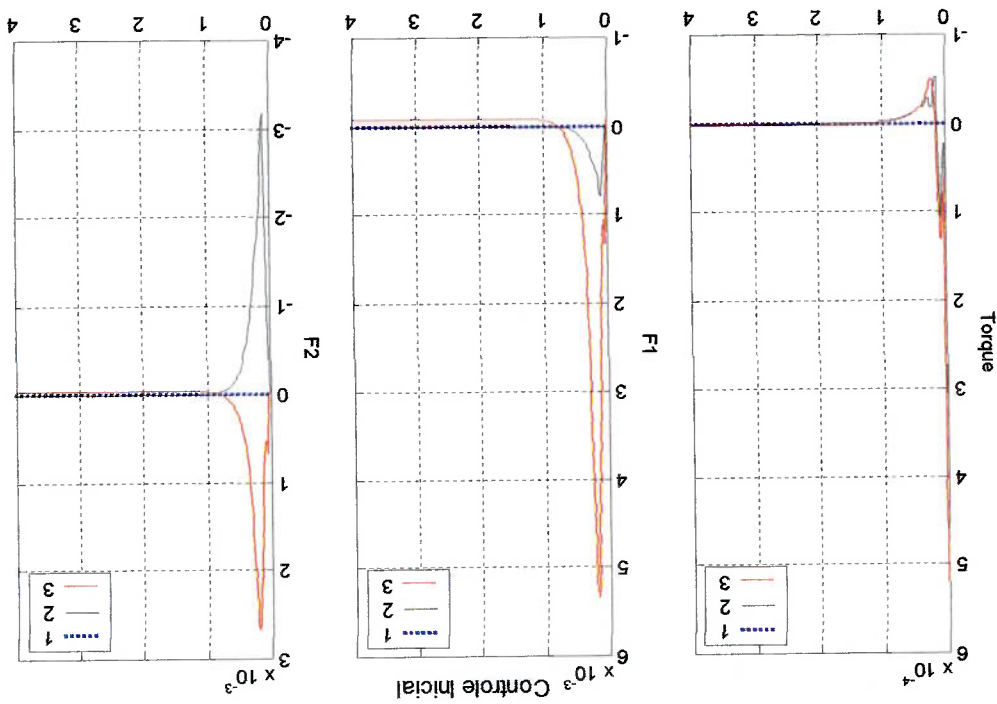
$$\text{O critério de desempenho: } IP \min \int_0^4 [x_2^4(t) + x_2^2(t) + x_3^2(t) + x_4^2(t)] dt$$

Posição inicial da massa 2 em 0.6

Posição inicial da massa 1 em 0.

Para o caso com dois modos os seguintes valores permanecerem inalterados:

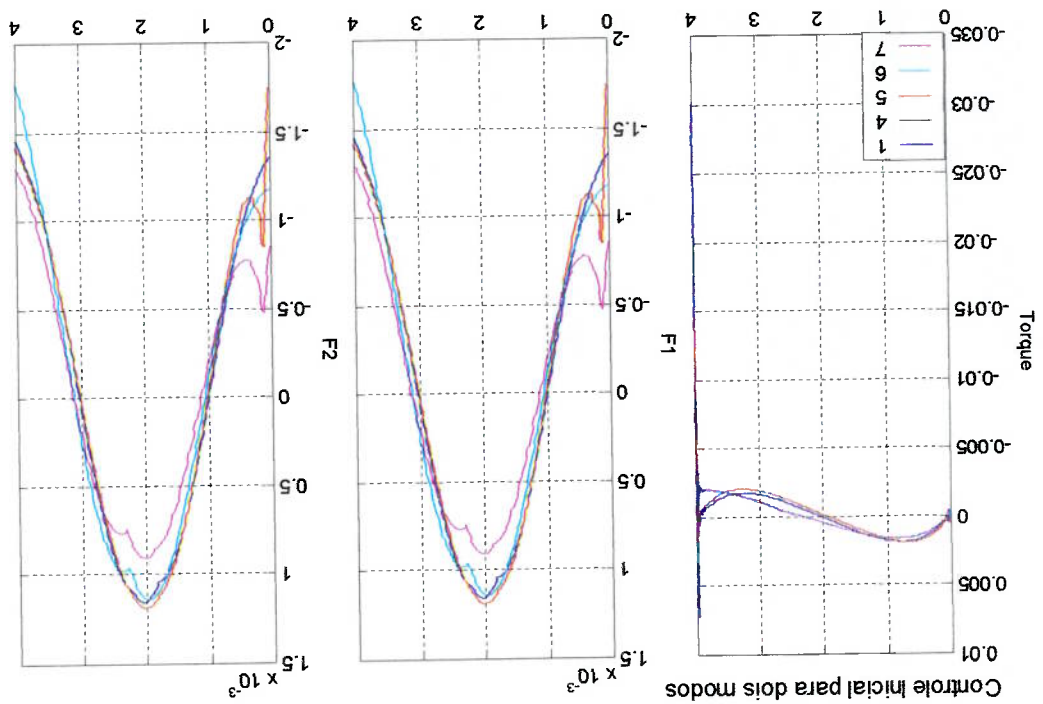
O controle inicial 1 é um controle nulo.



Para melhor entendimento o gráfico abaixo indica os controles iniciais aplicados, para as simulações com um modo de vibração:

A seguir estão expostas as respostas dos casos descrito acima. Em cada conjunto de gráficos expressou as grandezas mais importantes para a descrição do problema. O movimento de rotação do braço, o movimento das massas de controle, além do esforço de controle pela ação das forças sobre as massas e o torque sobre o braço.

6.4 Resultados da simulação do controle ótimo



Abaixo o gráfico para o controle inicial aplicado para o caso com dois modos, todos os exemplos são casos de solução ótima que foram aplicados para dois modos.

Caso	Controle inicial	T _{cpu} (min)
1	solução08m0704	48.2
4	solução05m0704	53.7
5	solução05m0703	52.2
6	solução07m0704	48.0
7	solução02m0703	47.8

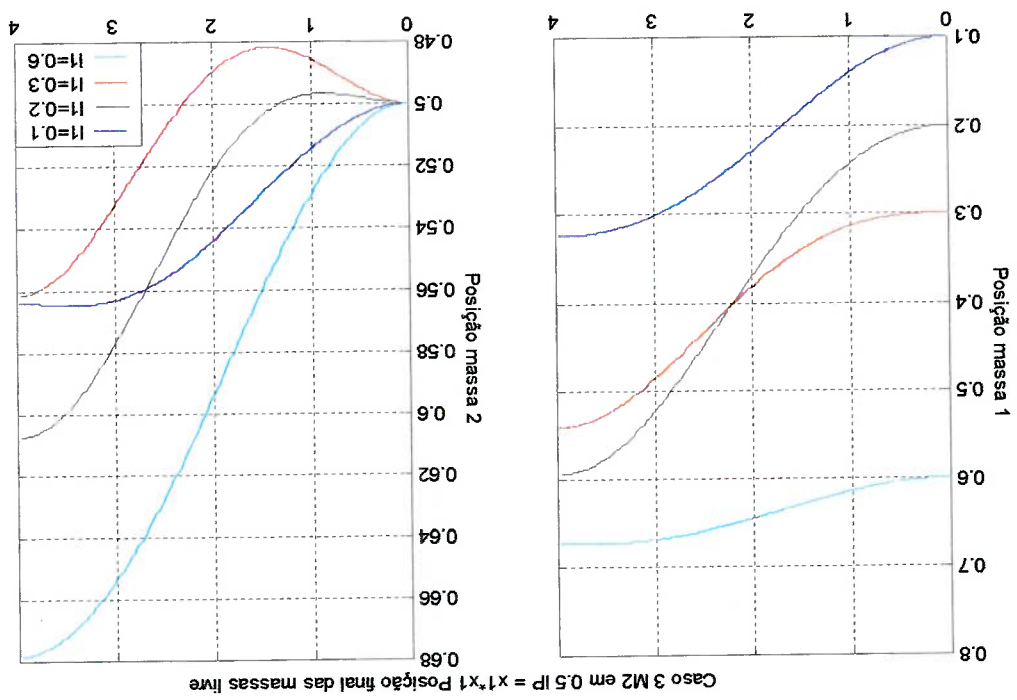


Figura 14 Deslocamentos das massas caso 3

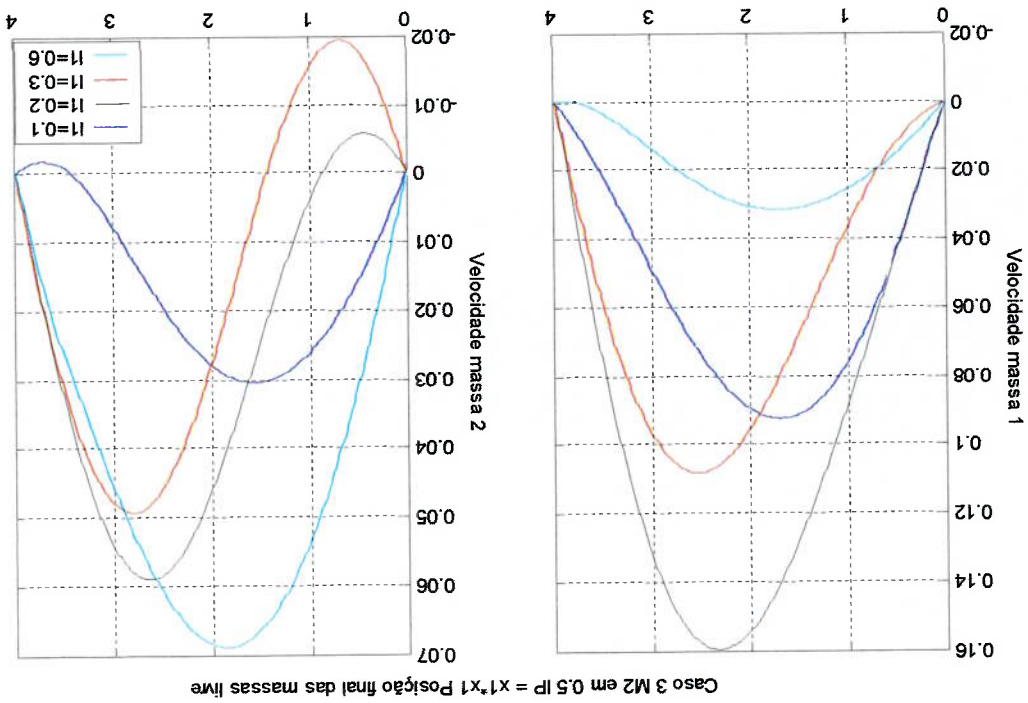


Figura 15 Velocidade das massas caso 3

Figura 17 Vibração na ponta do braço caso 3

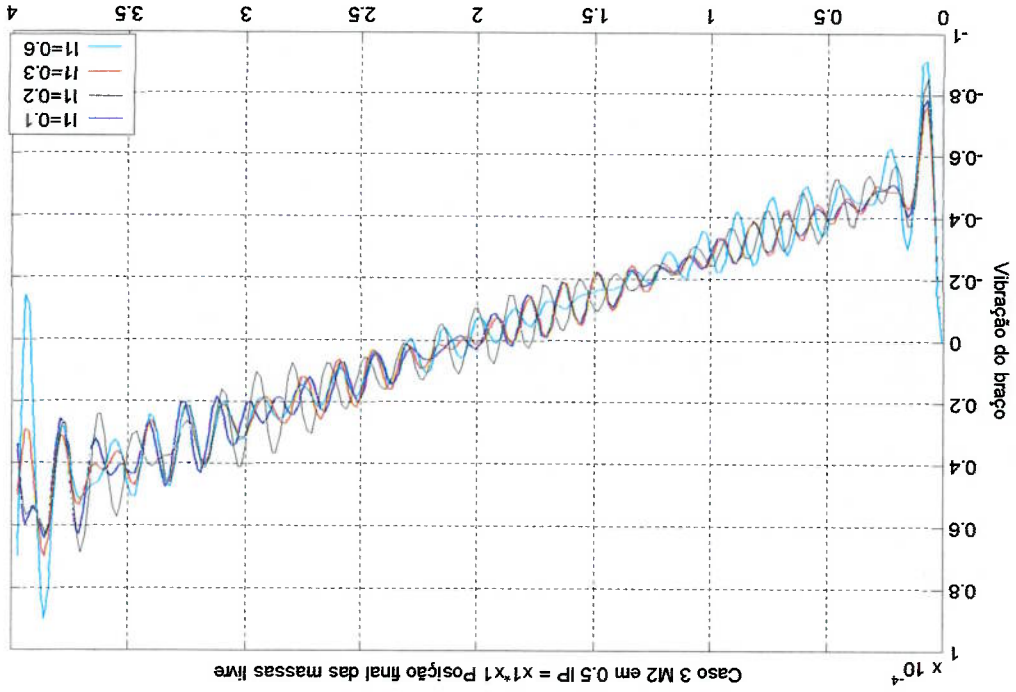


Figura 16 Movimento de rotação do braço caso 3

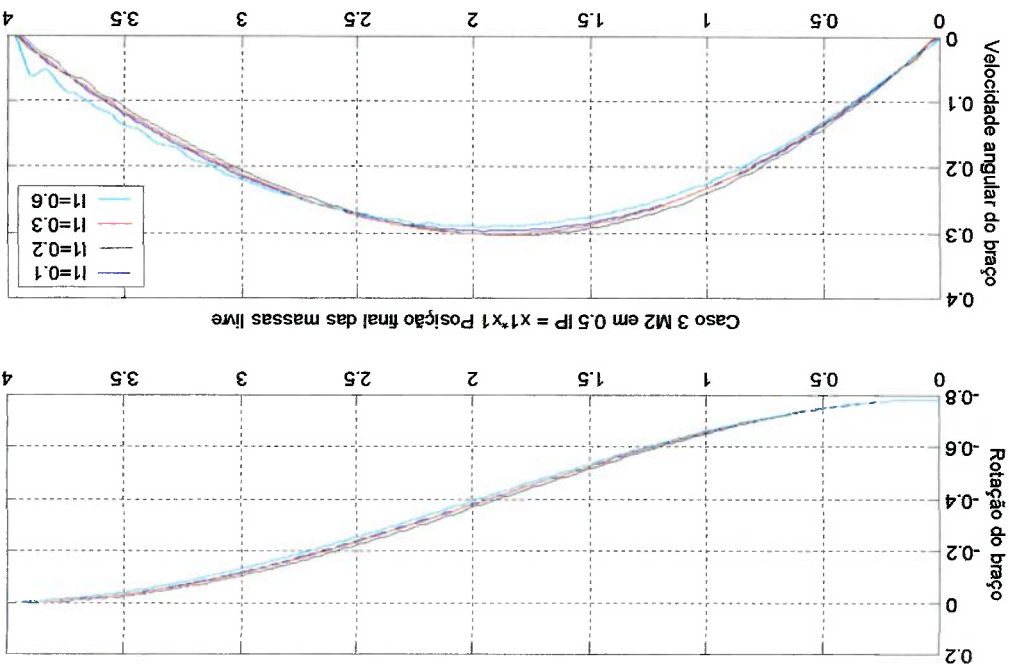


Figura 19 Força em M_1 x Força em M_2 caso 3

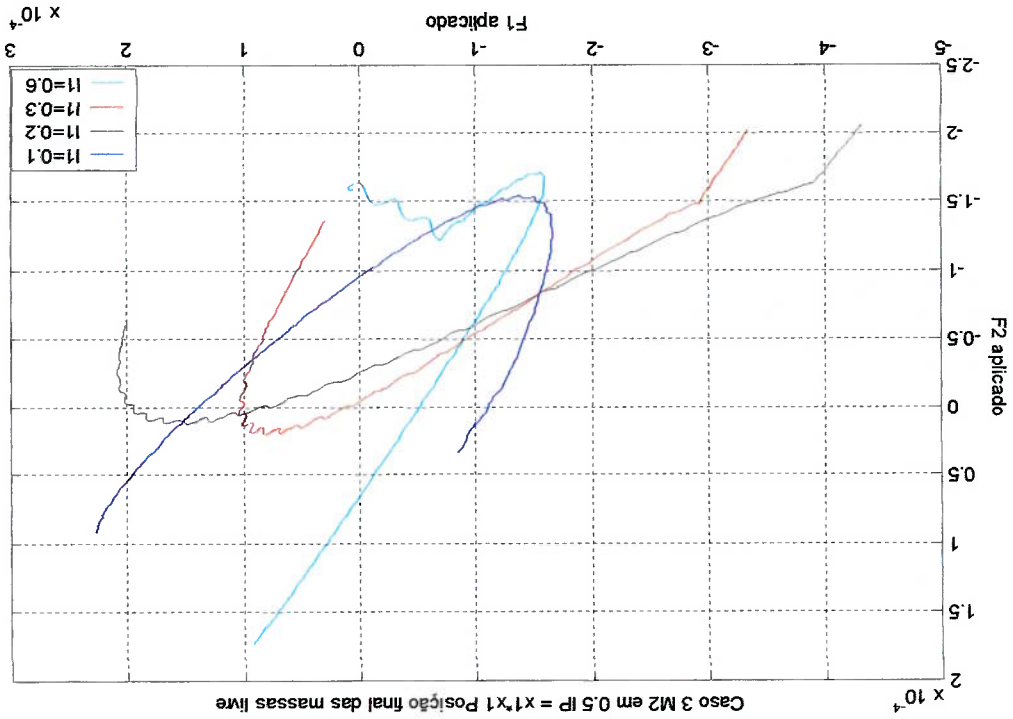


Figura 18 Controle Aplicado caso 3

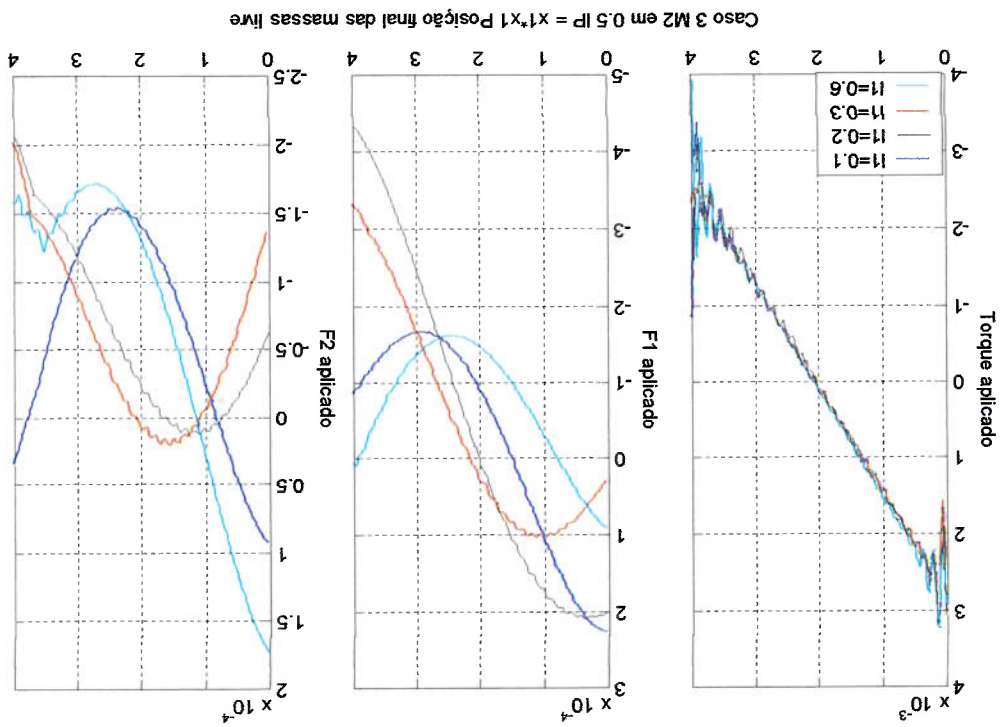


Figura 21 Velocidade das massas caso 5

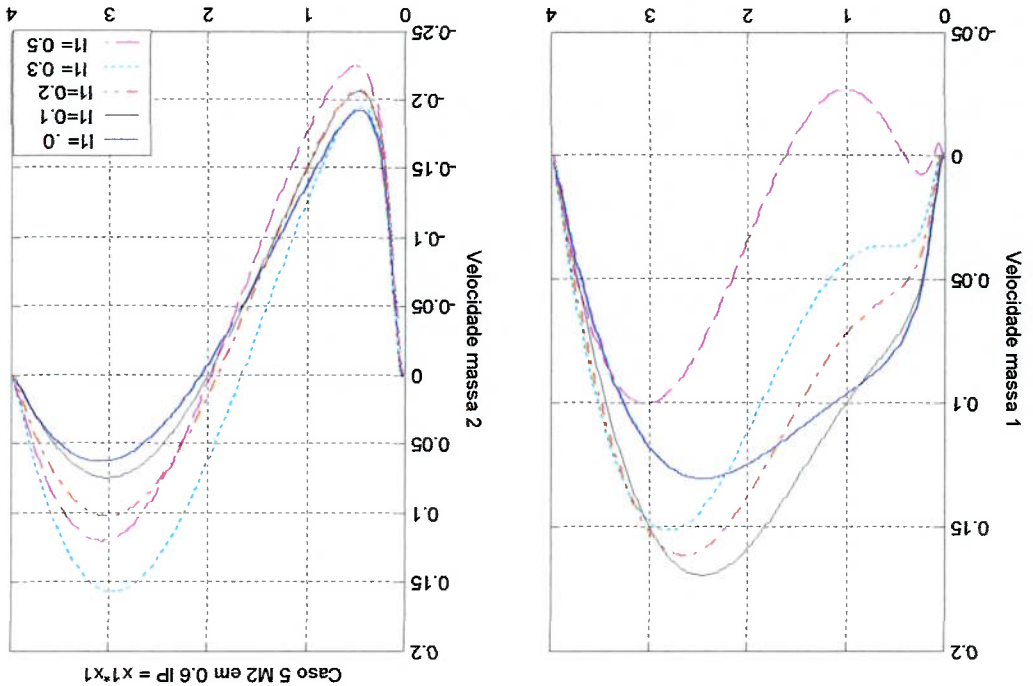


Figura 20 Deslocamentos das massas caso 5

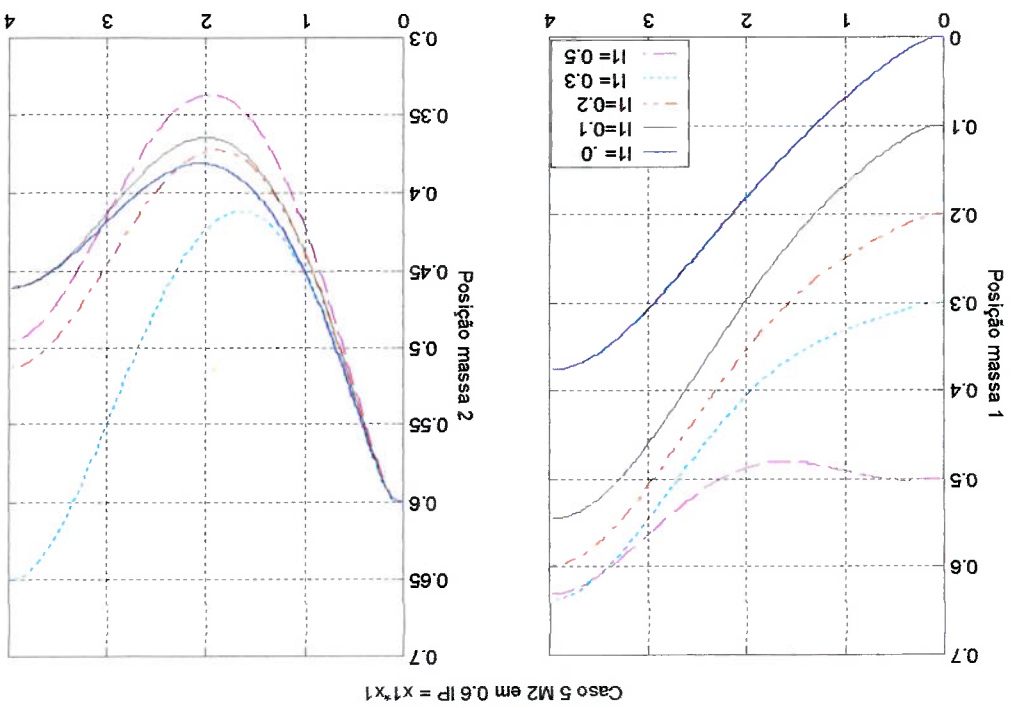


Figura 23 Vibração na ponta do braço caso 5

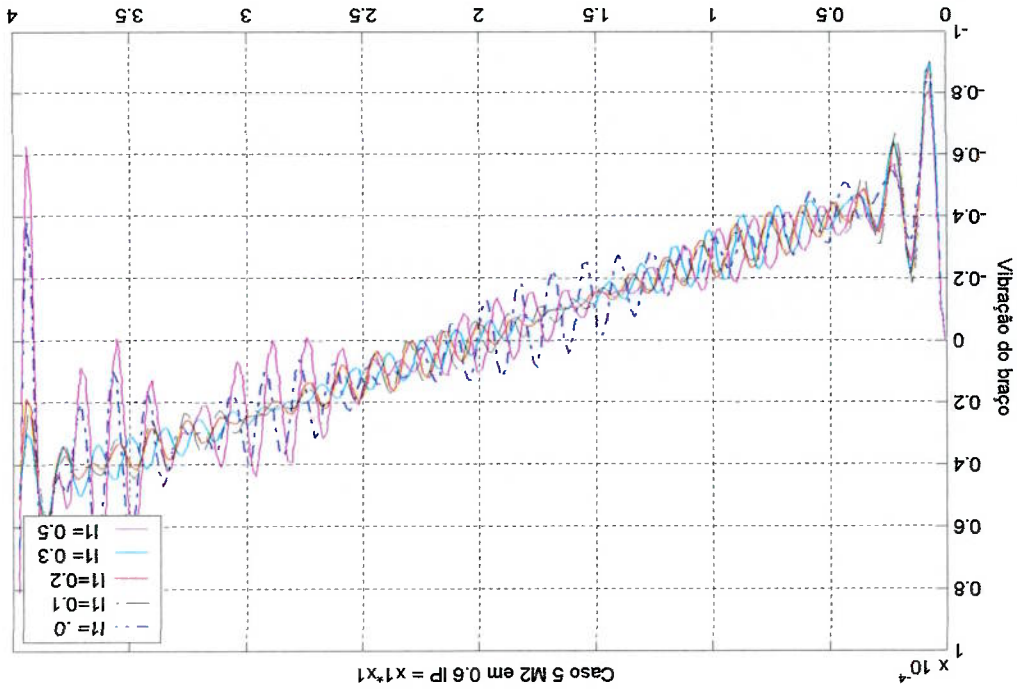


Figura 22 Movimento de rotação do braço caso 5

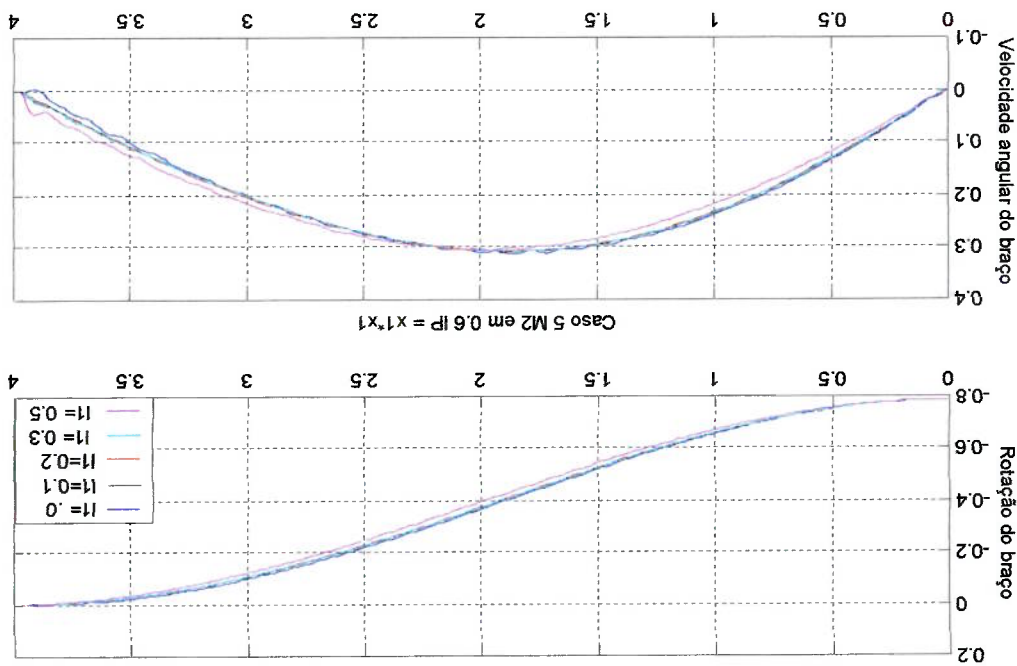


Figura 25 Força em M_1 x Força em M_2 caso 5

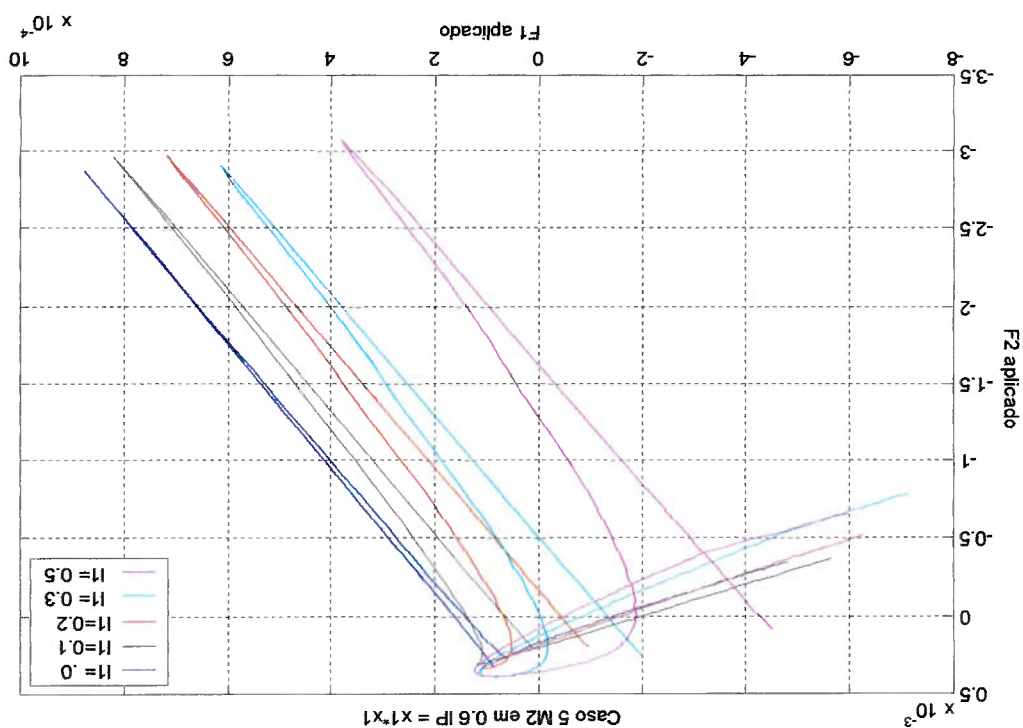


Figura 24 Controle Aplicado caso 5

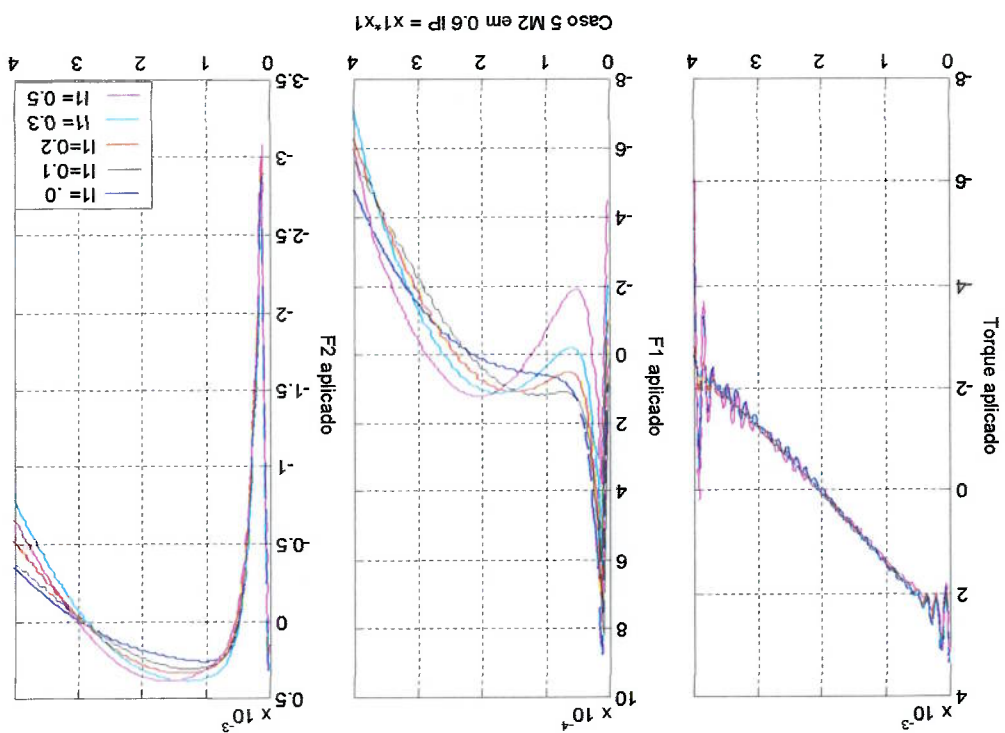


Figura 27 Velocidade das massas caso 50

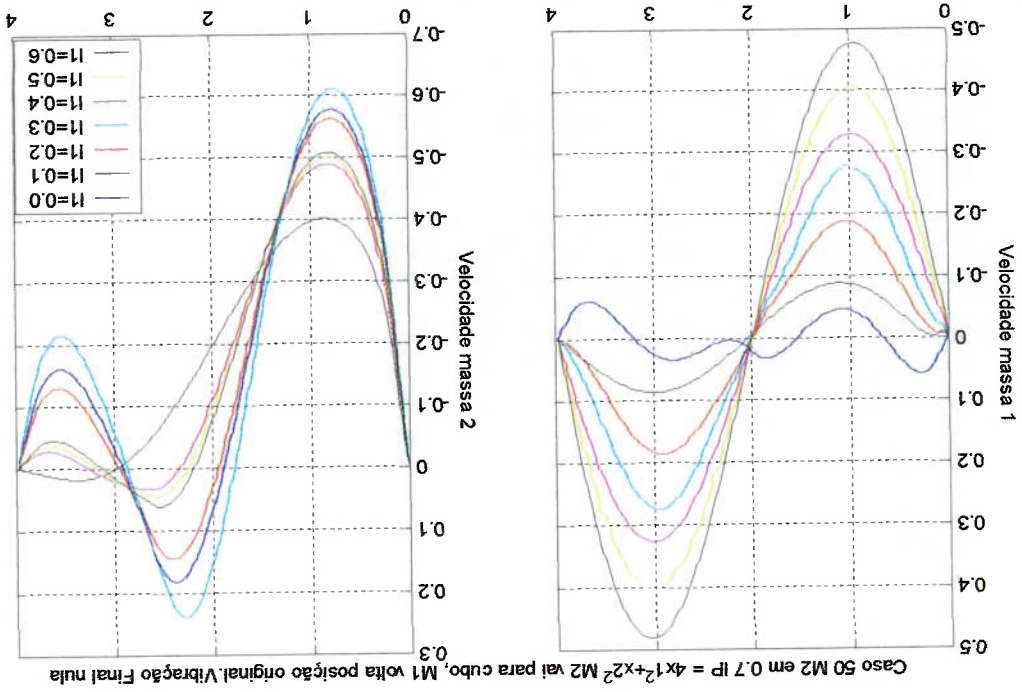


Figura 26 Deslocamentos das massas caso 50

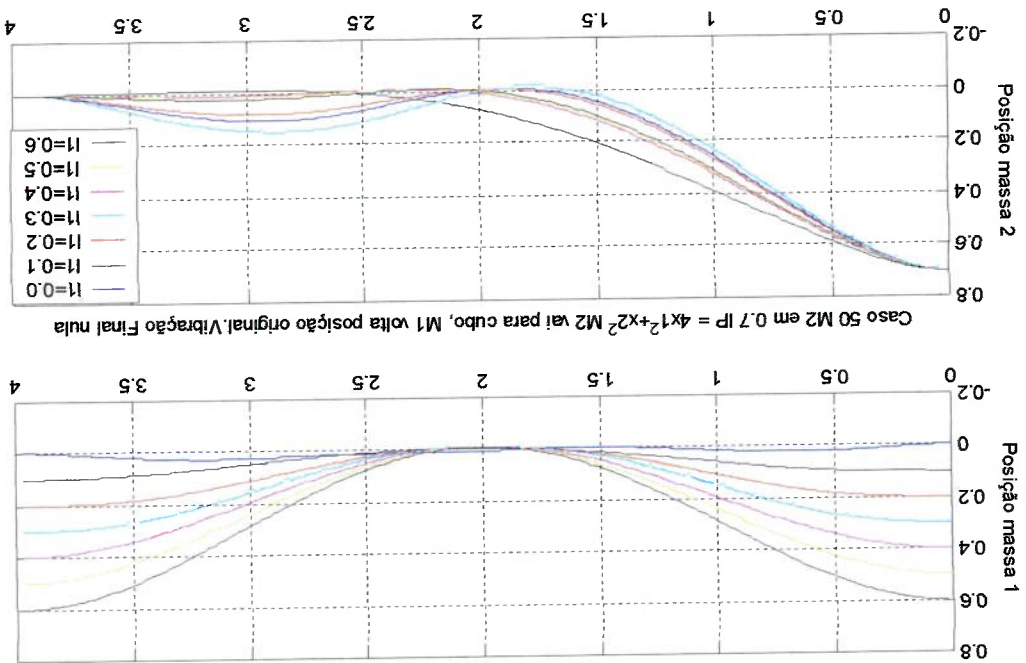


Figura 29 Vibração na ponta do braço caso 50

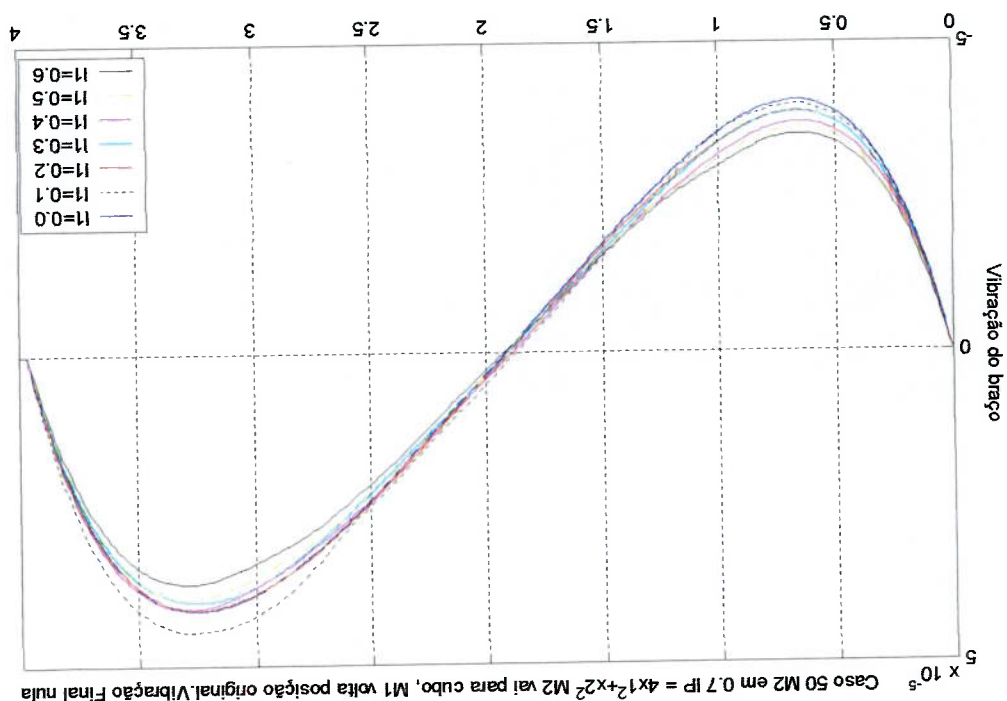


Figura 28 Movimento de rotação de braço caso 50

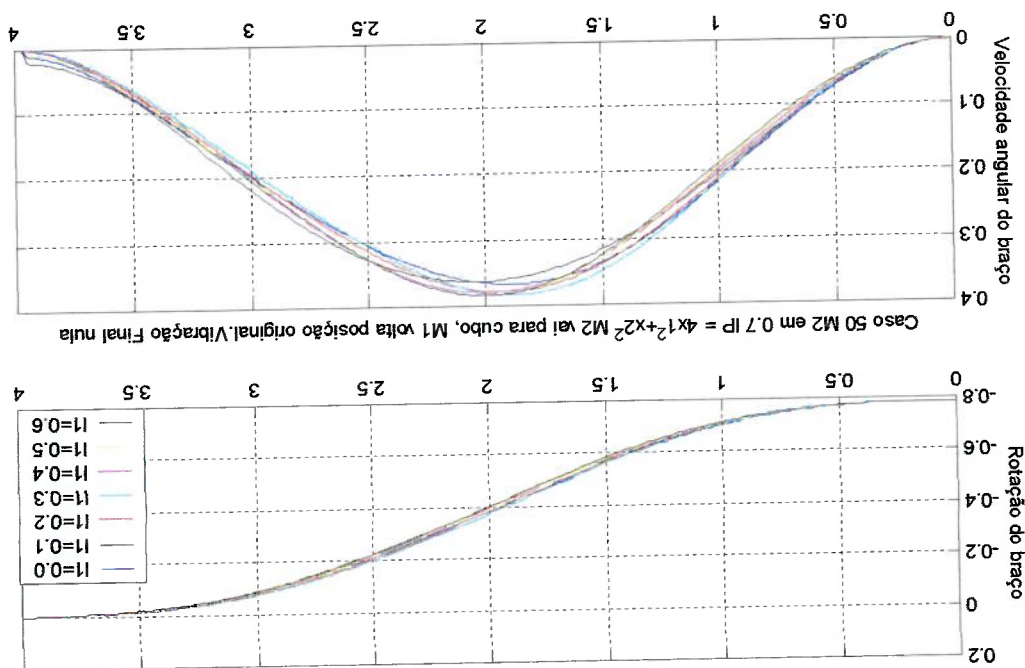


Figura 31 Força em M_1 x Força em M_2 caso 50

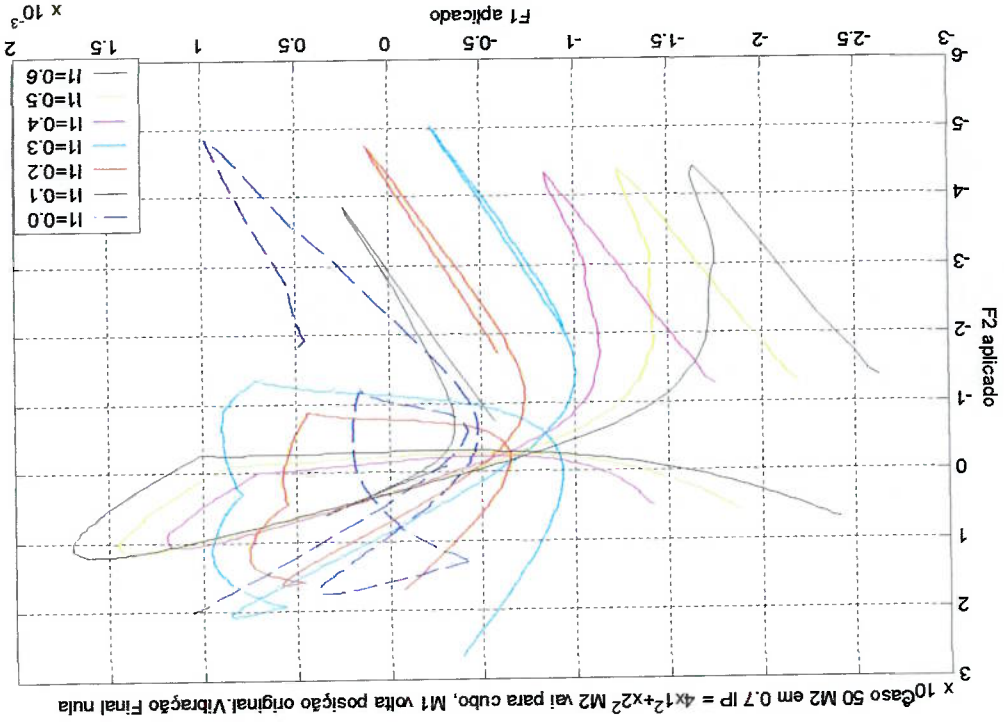
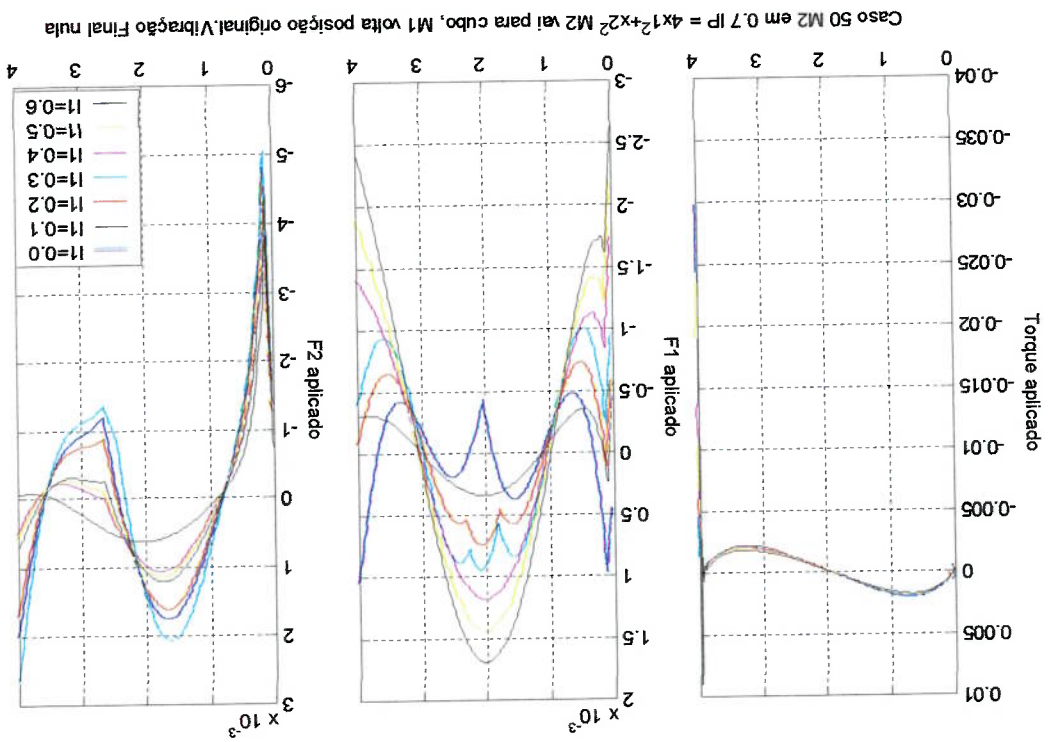


Figura 30 Controle Aplicado caso 50



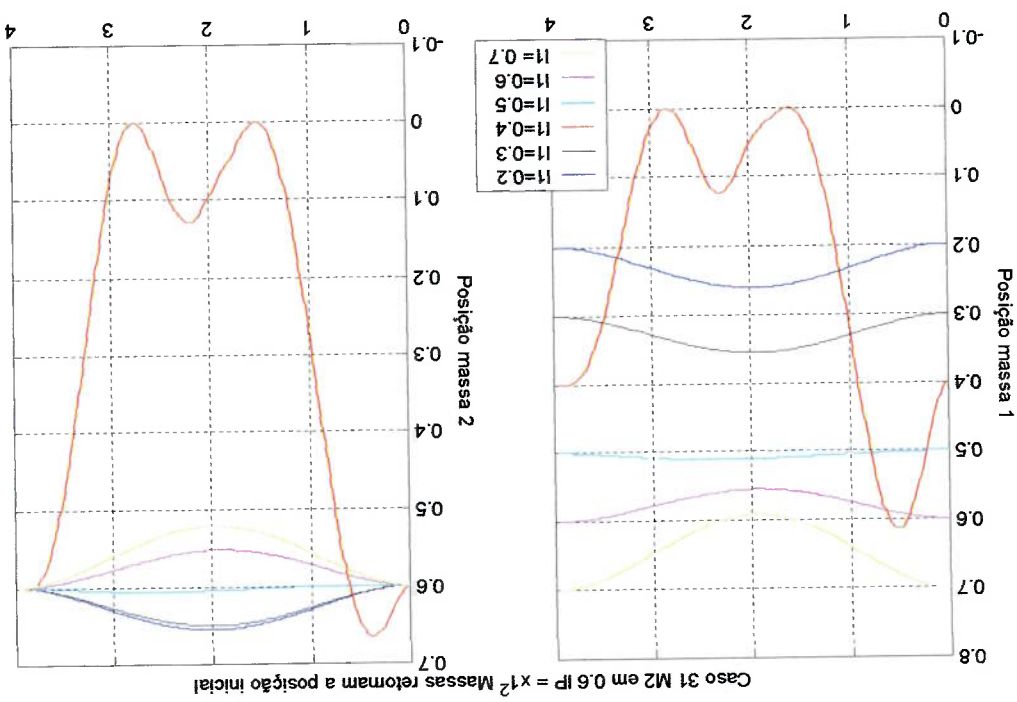


Figura 32 Deslocamentos das massas caso 31

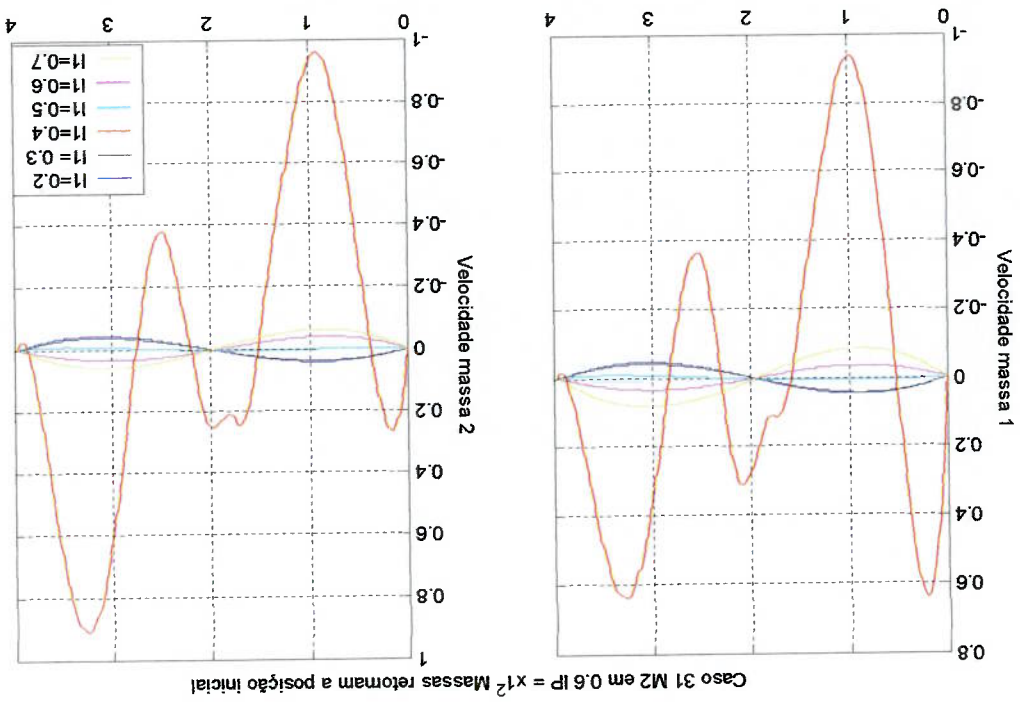


Figura 33 Velocidade das massas caso 31

Figura 35 Vibração na ponta do braço caso 31

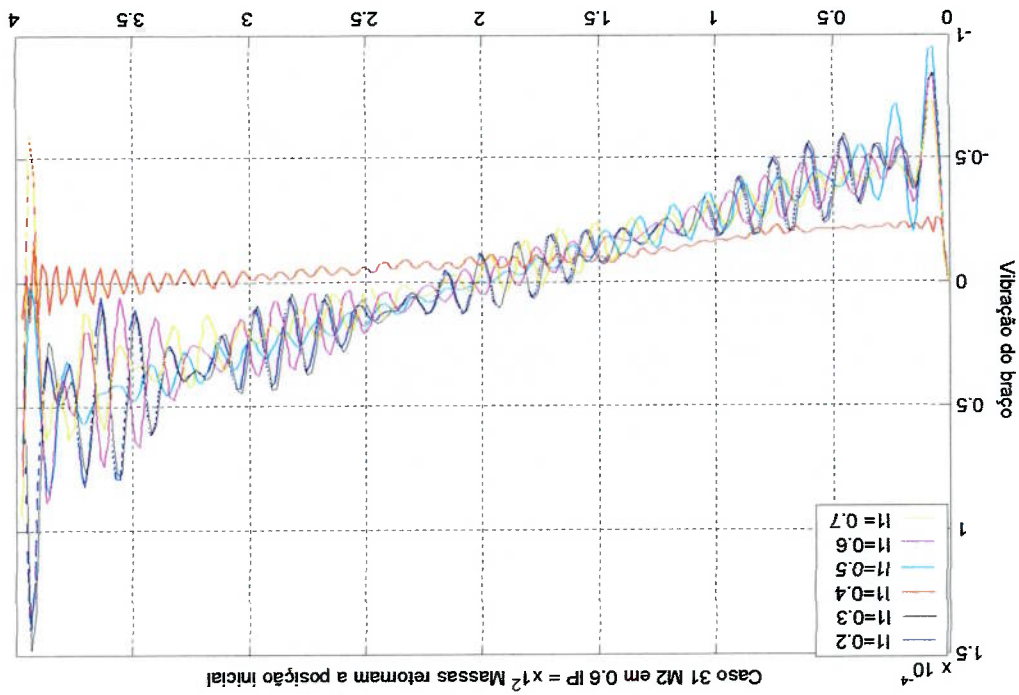


Figura 34 Movimento de rotação do braço caso 31

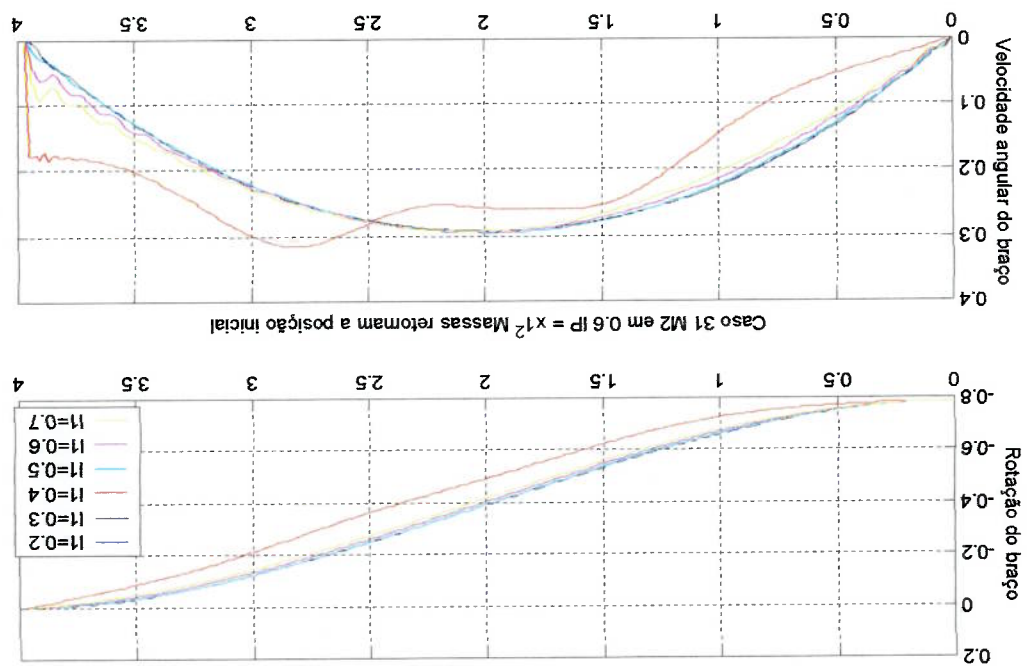


Figura 37 Força em M_1 x Força em M_2 caso 31

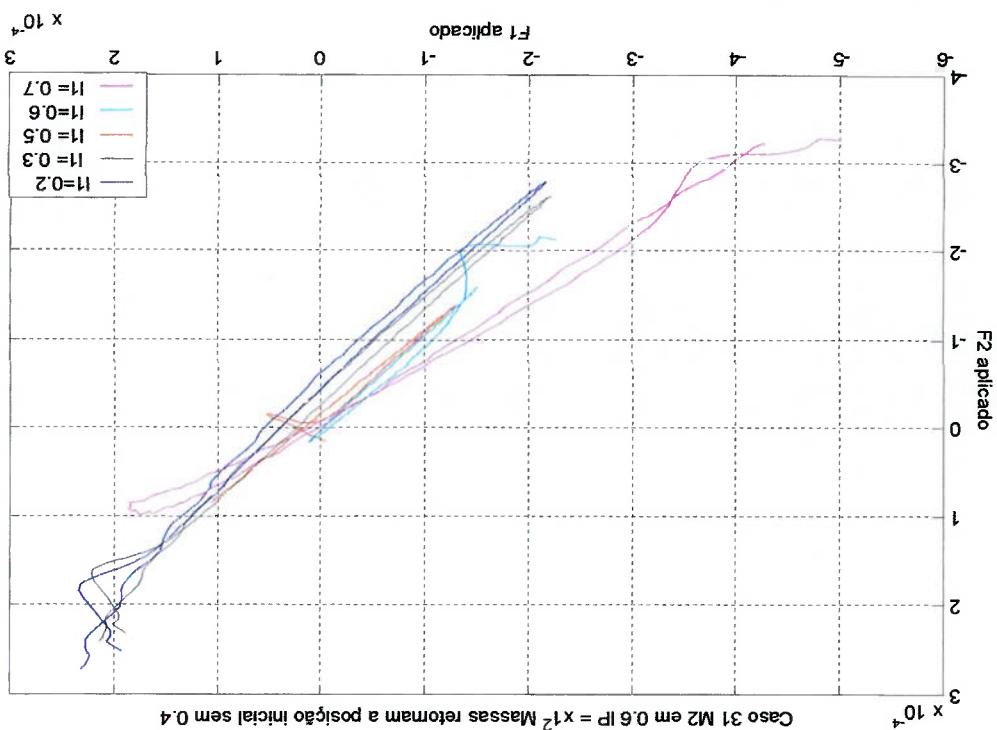


Figura 36 Controle Aplicado caso 31

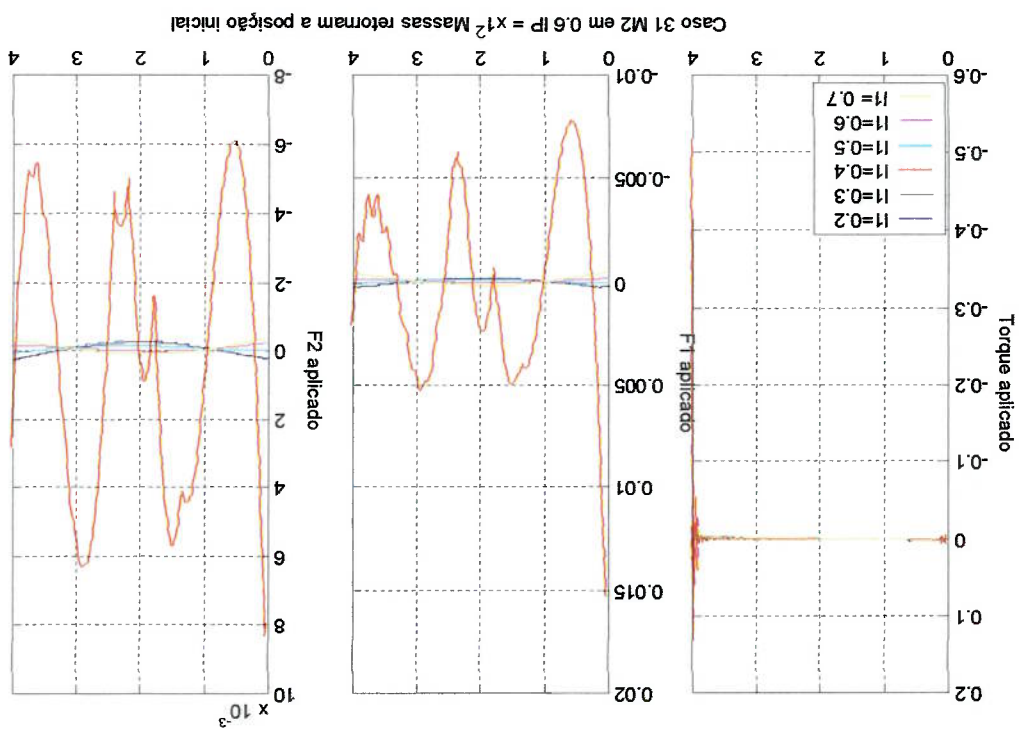


Figura 39 Velocidade das massas caso 38

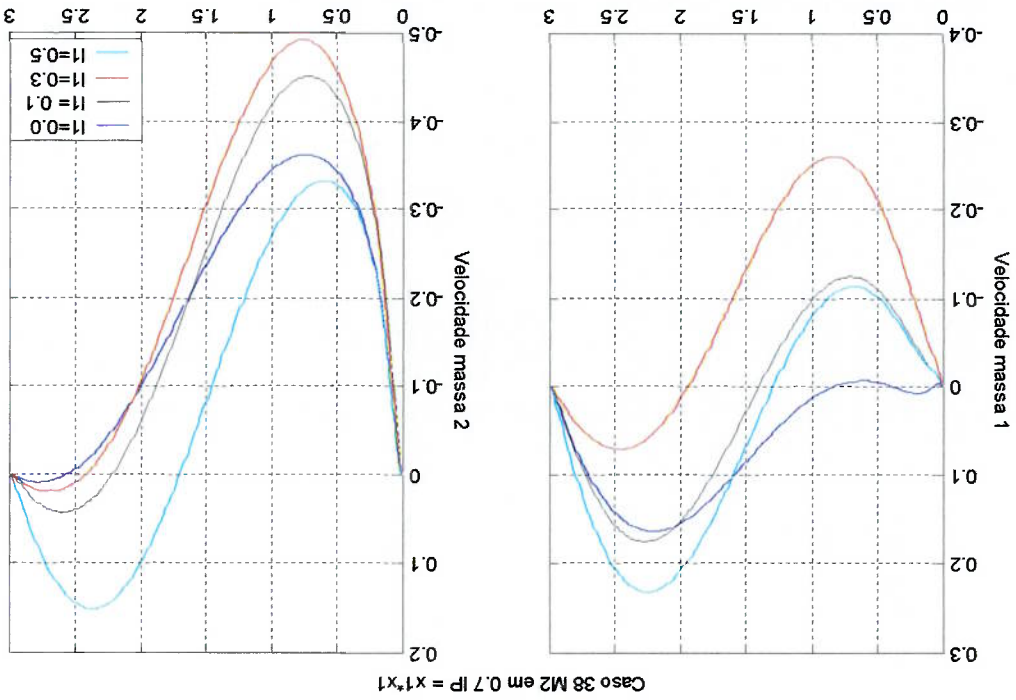


Figura 38 Deslocamentos das massas caso 38

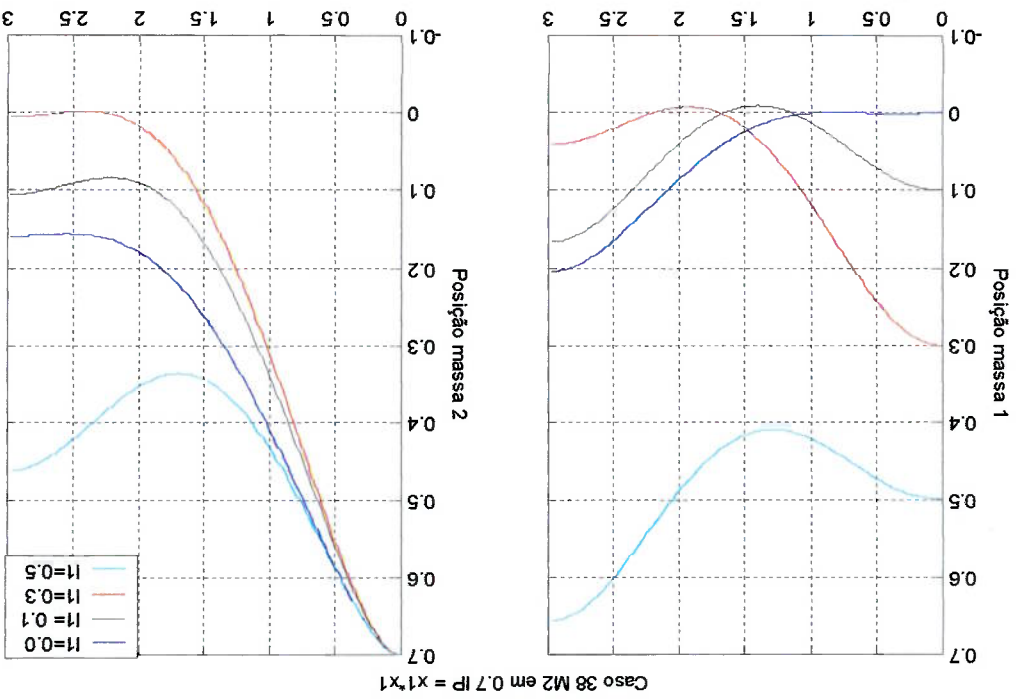


Figura 41 Vibração na ponta do braço caso 38

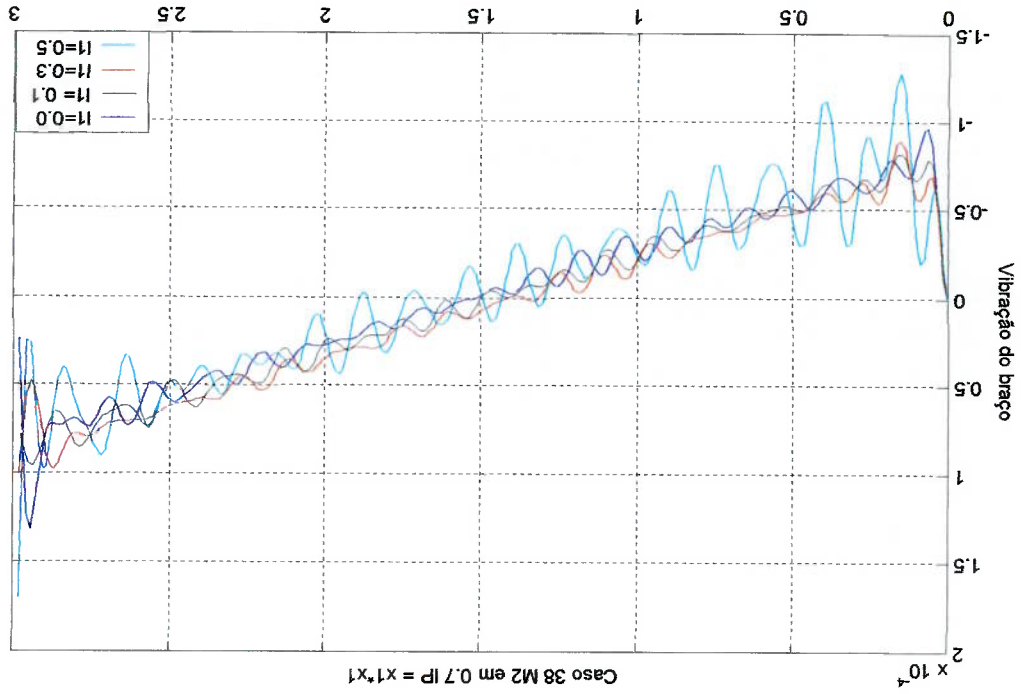


Figura 40 Movimento de rotação do braço caso 38

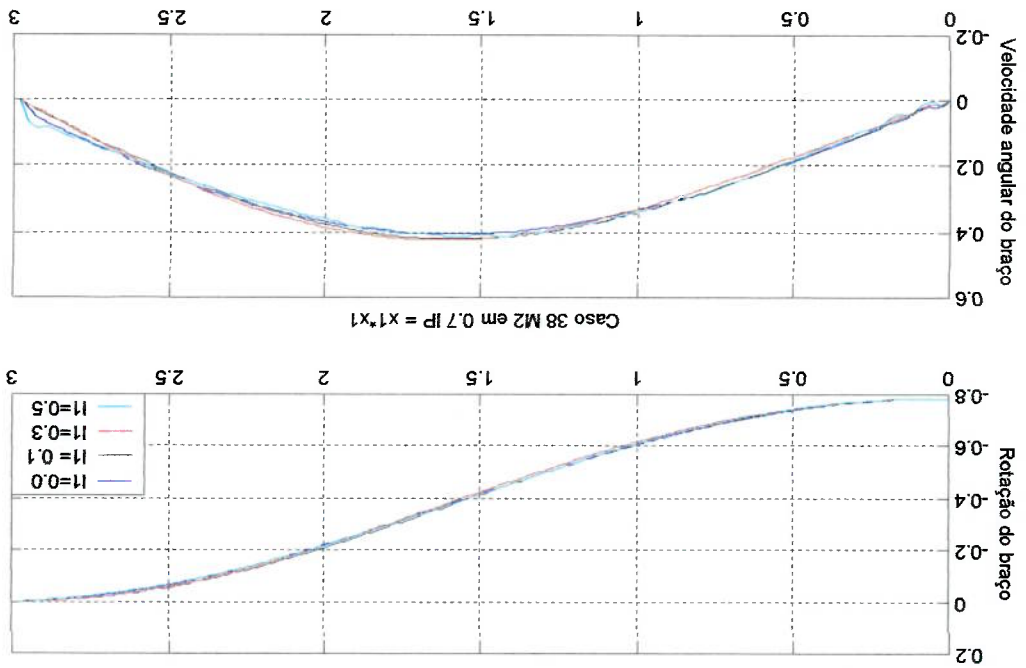


Figura 43 Força em M_1 x Força em M_2 caso 38

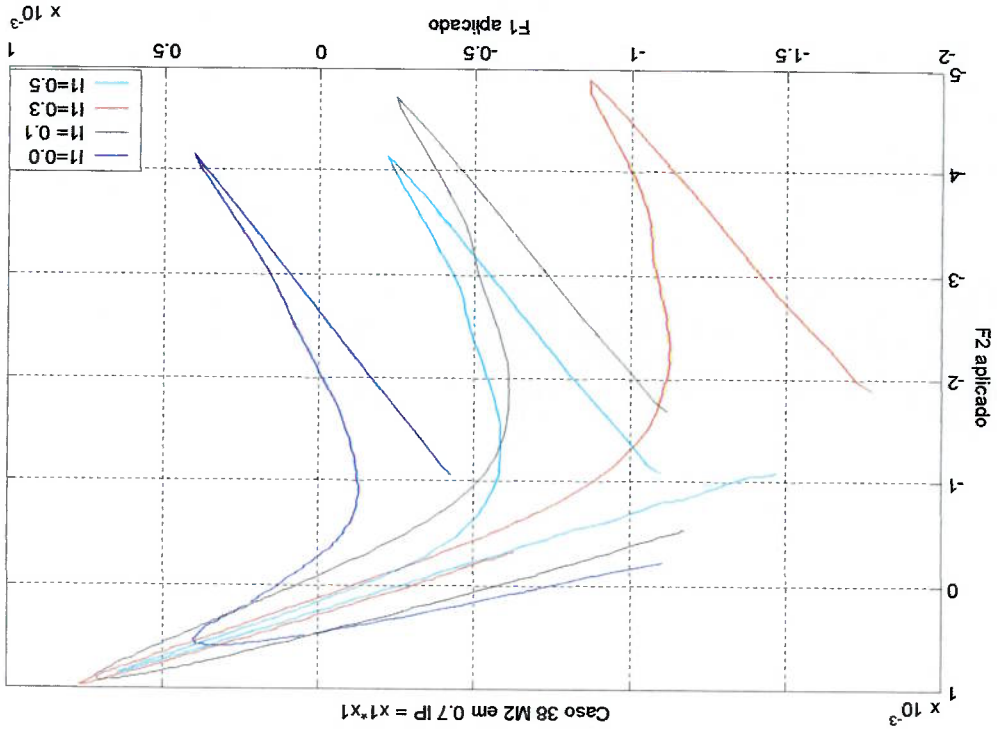


Figura 42 Controle Aplicado caso 38

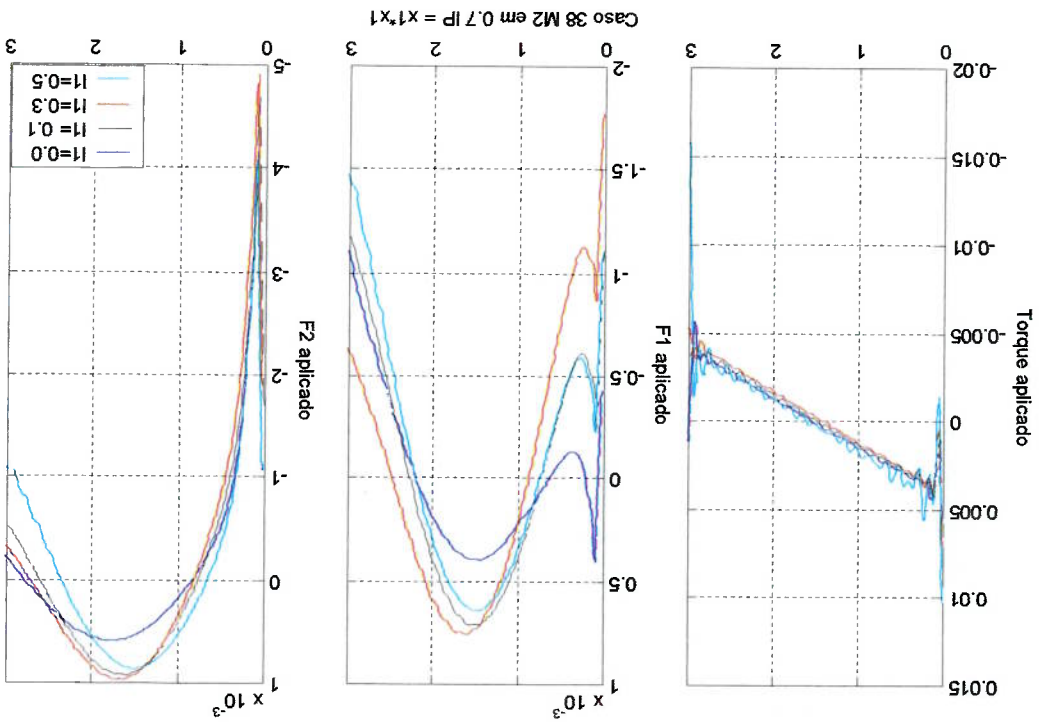


Figura 45 Velocidade das massas caso 43

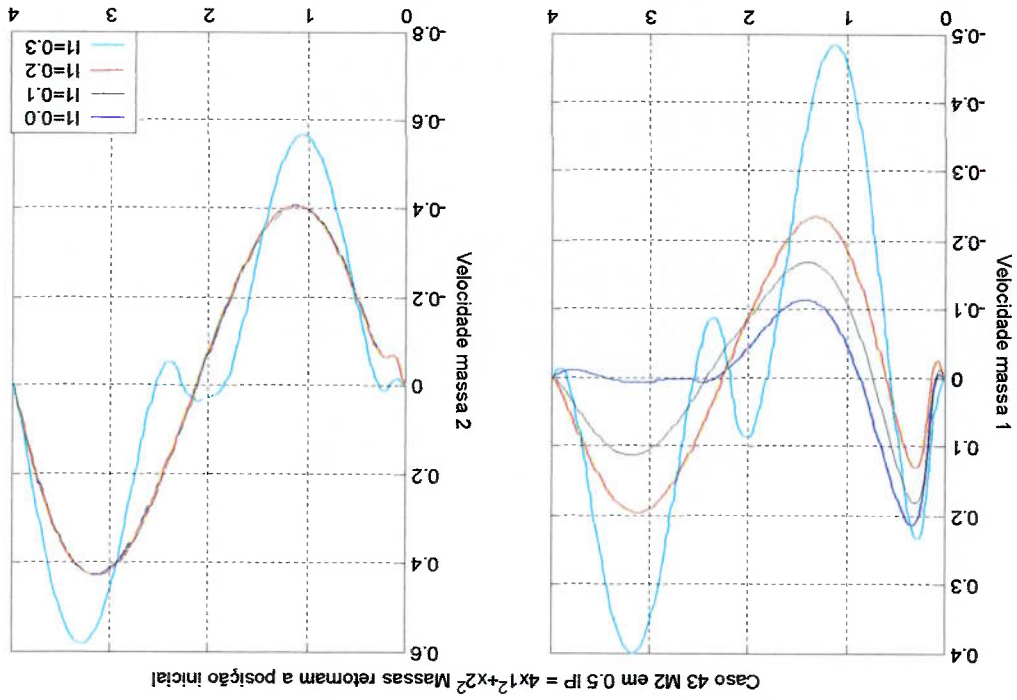


Figura 44 Deslocamentos das massas caso 43

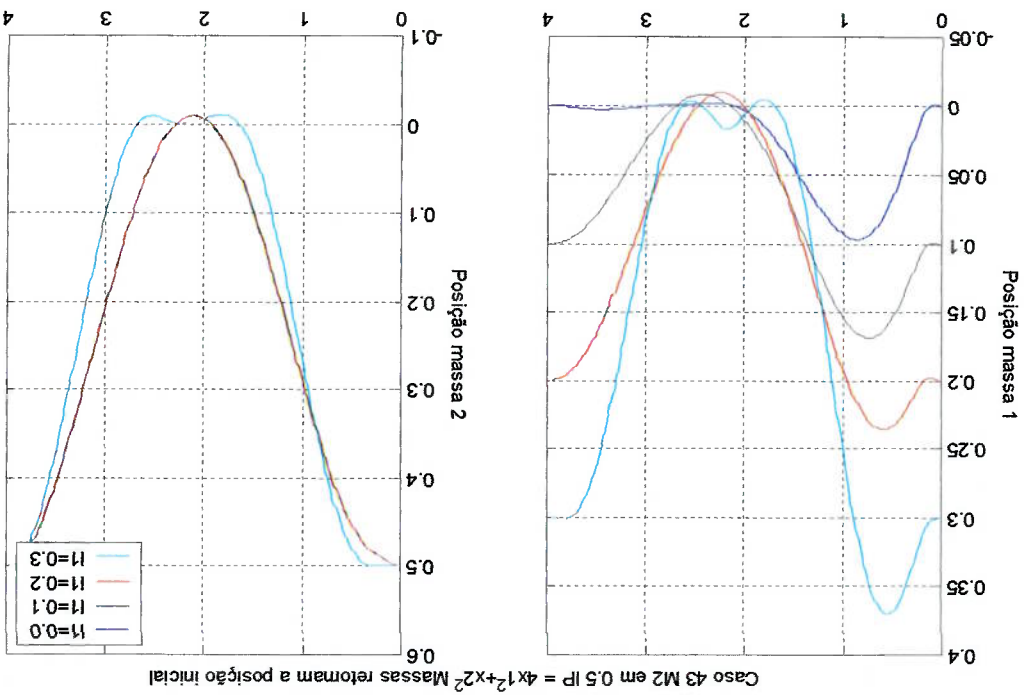


Figura 47 Vibração na ponta do braço caso 43

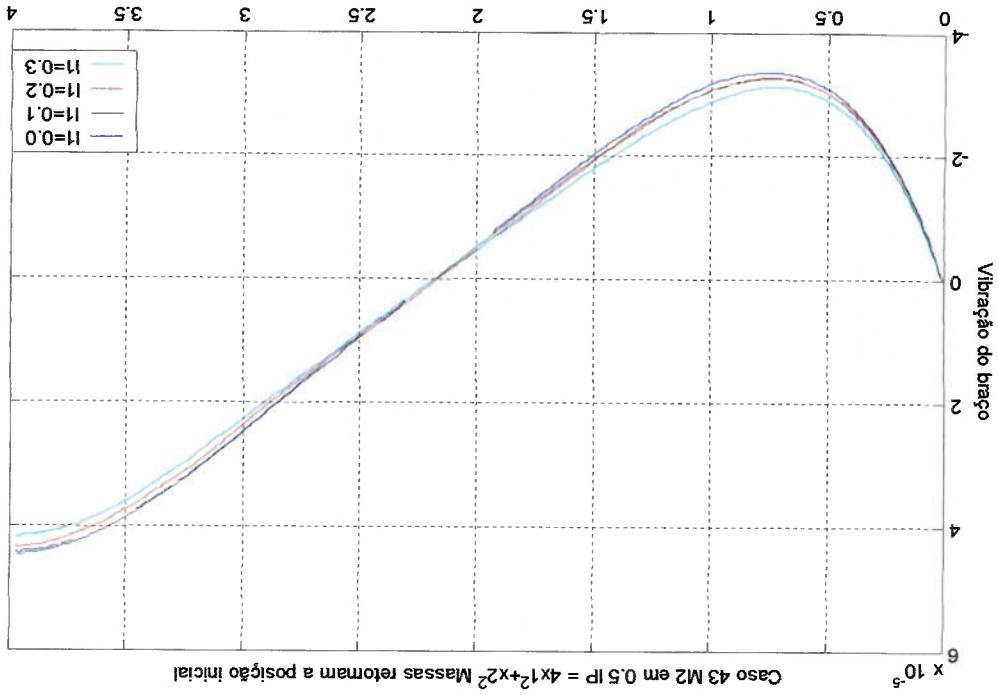


Figura 46 Movimento de rotação do braço caso 43

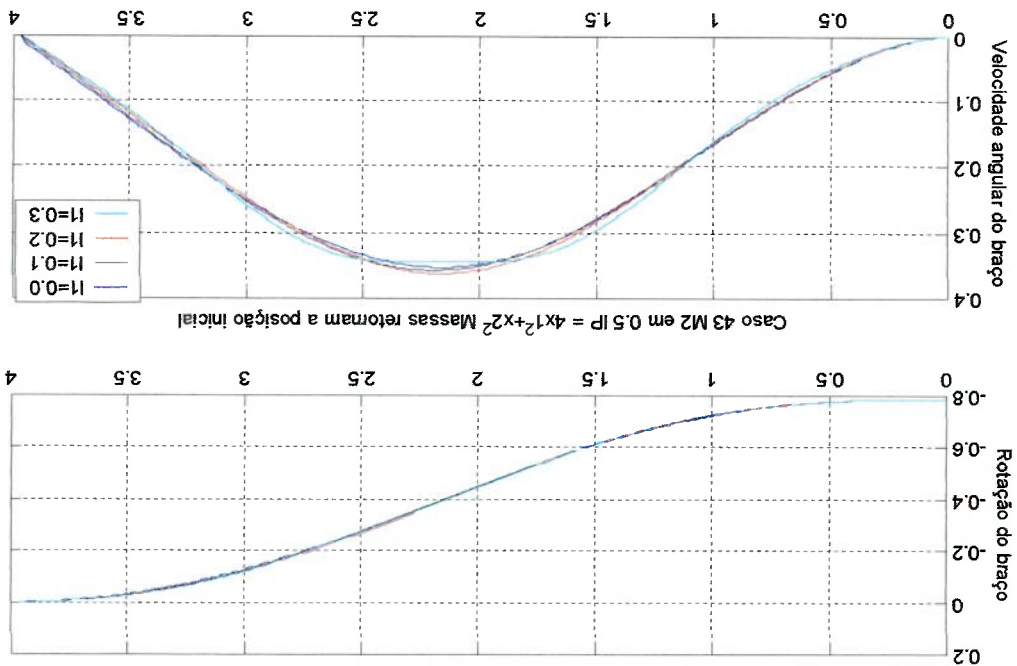


Figura 49 Força em M_1 x Força em M_2 caso 43

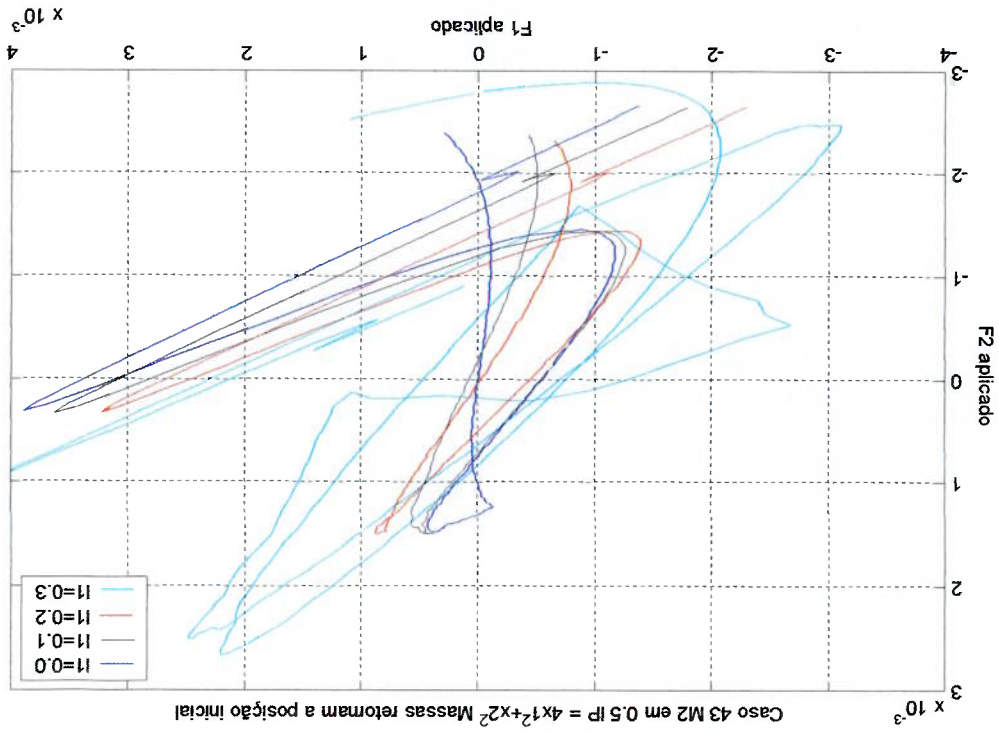
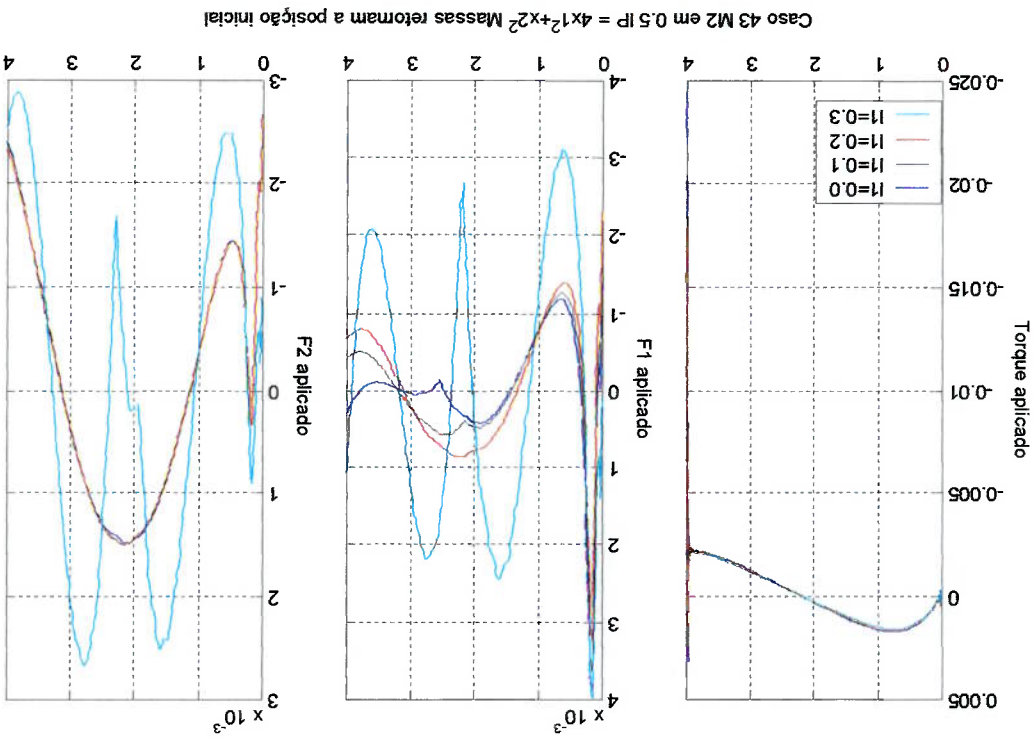


Figura 48 Controle Aplicado caso 43



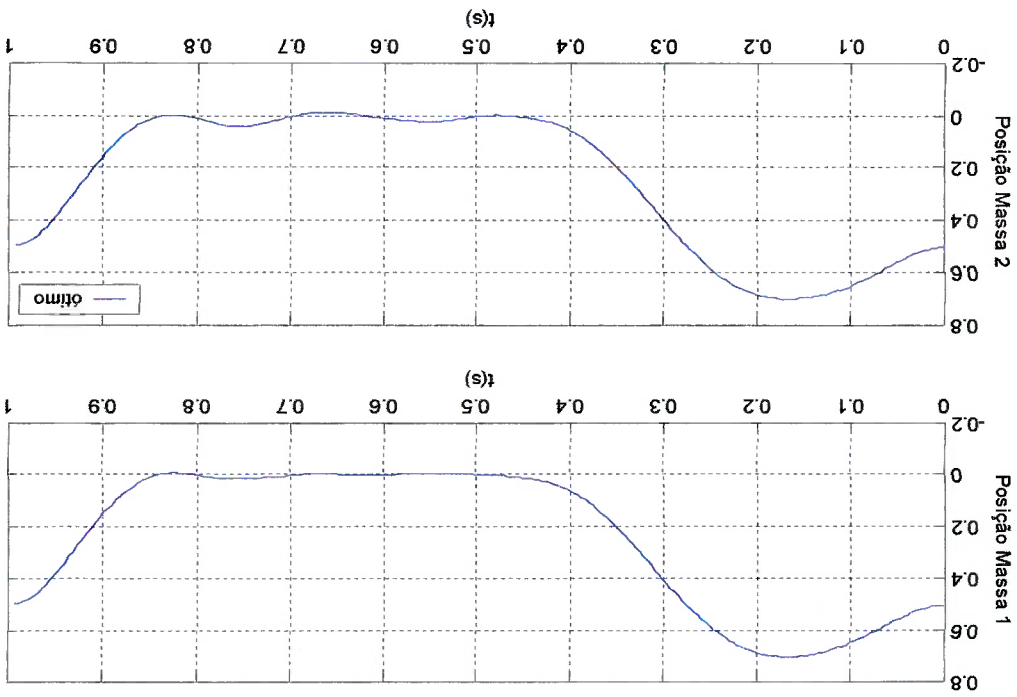


Figura 50 Deslocamentos das massas caso 40

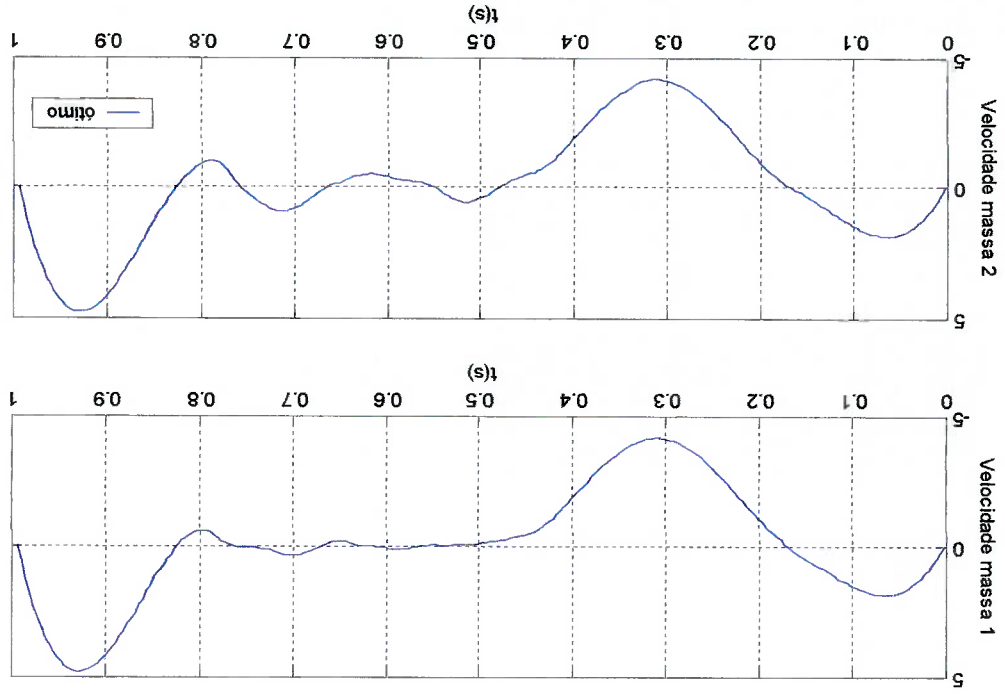


Figura 51 Velocidade das massas caso 40

Figura 53 Vibração na ponta do braço caso 40

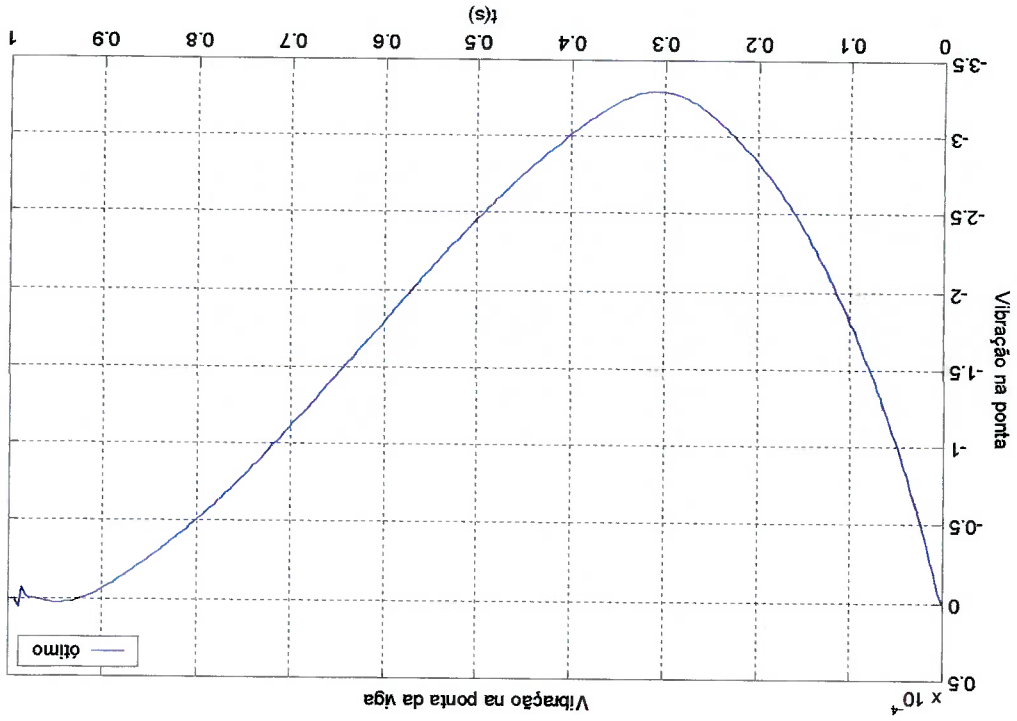


Figura 52 Movimento de rotação do braço caso 40

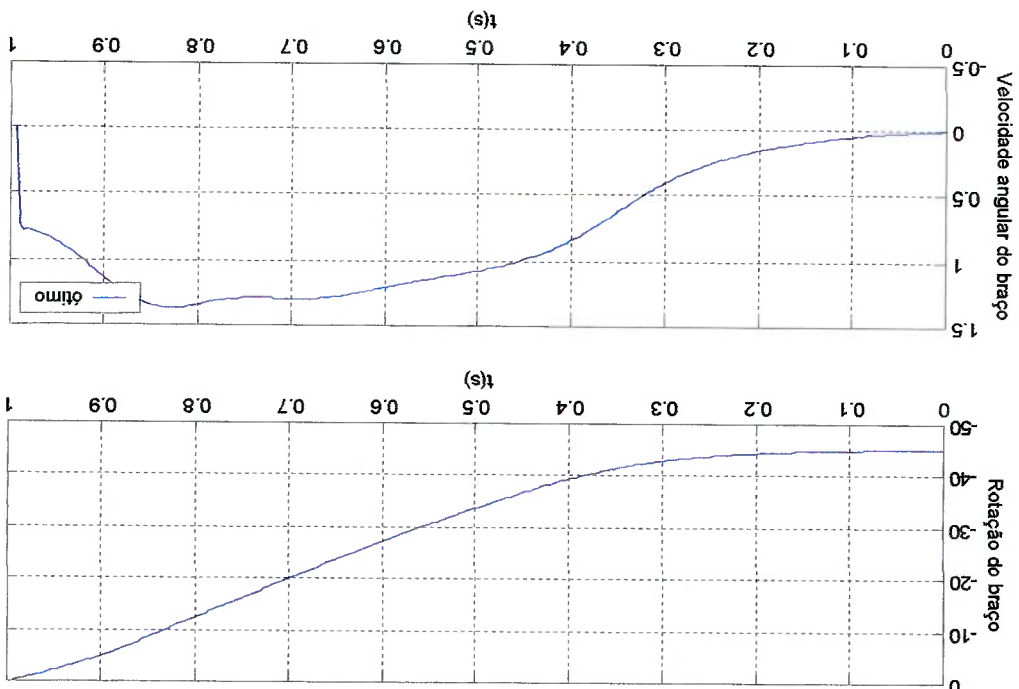


Figura 54 Controle Aplicado caso 40

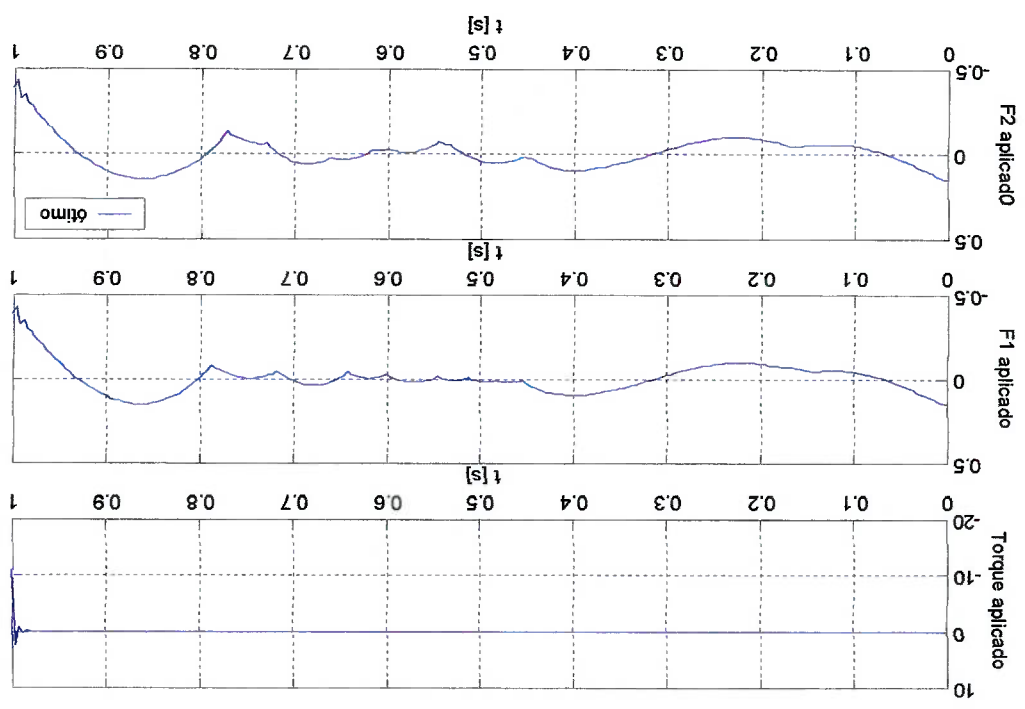


Figura 56 Velocidade das massas caso 41

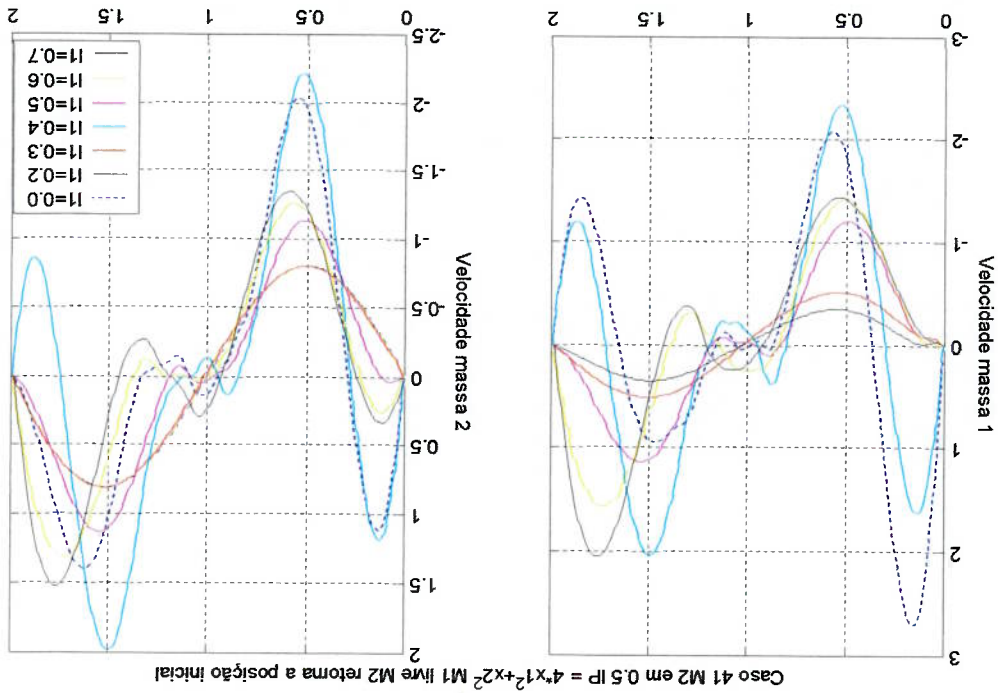


Figura 55 Deslocamentos das massas caso 41

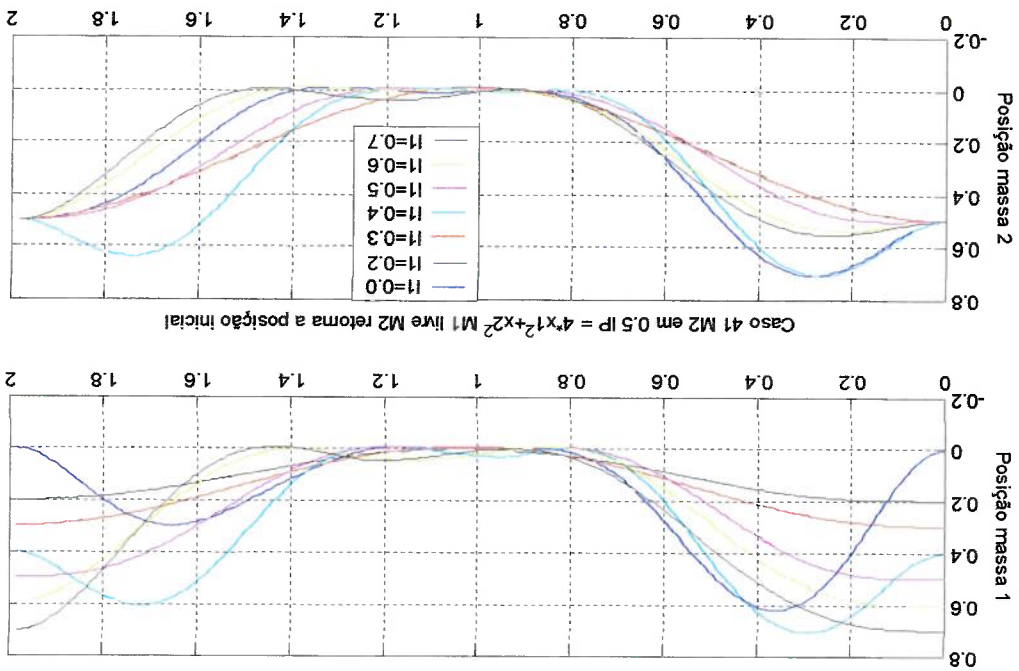


Figura 58 Vibração na ponta do braço caso 41

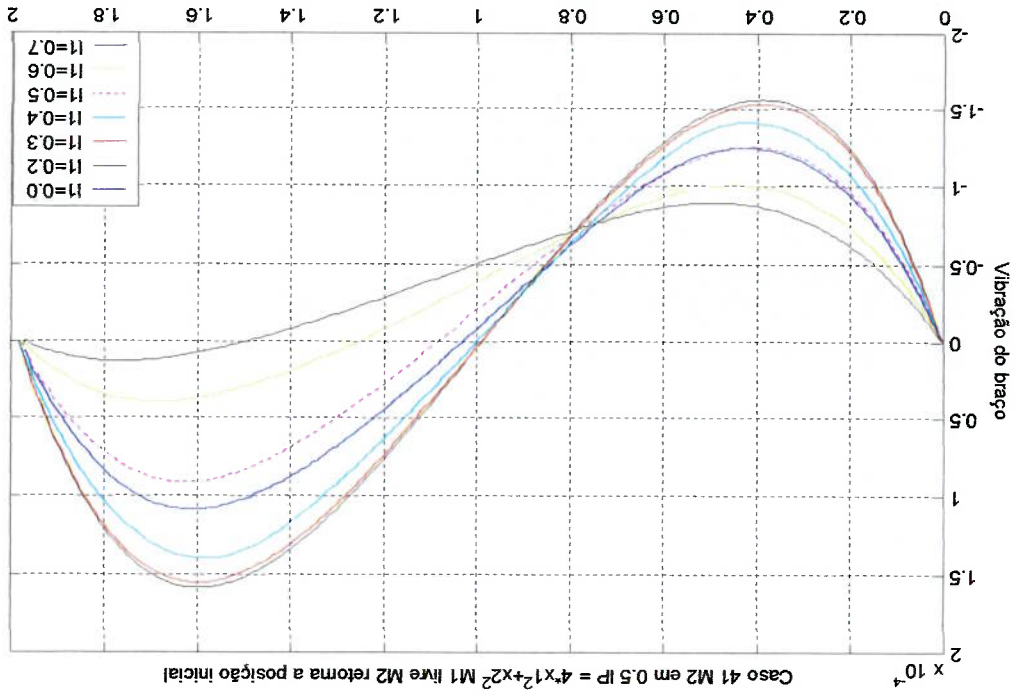


Figura 57 Movimento de rotação do braço caso 41

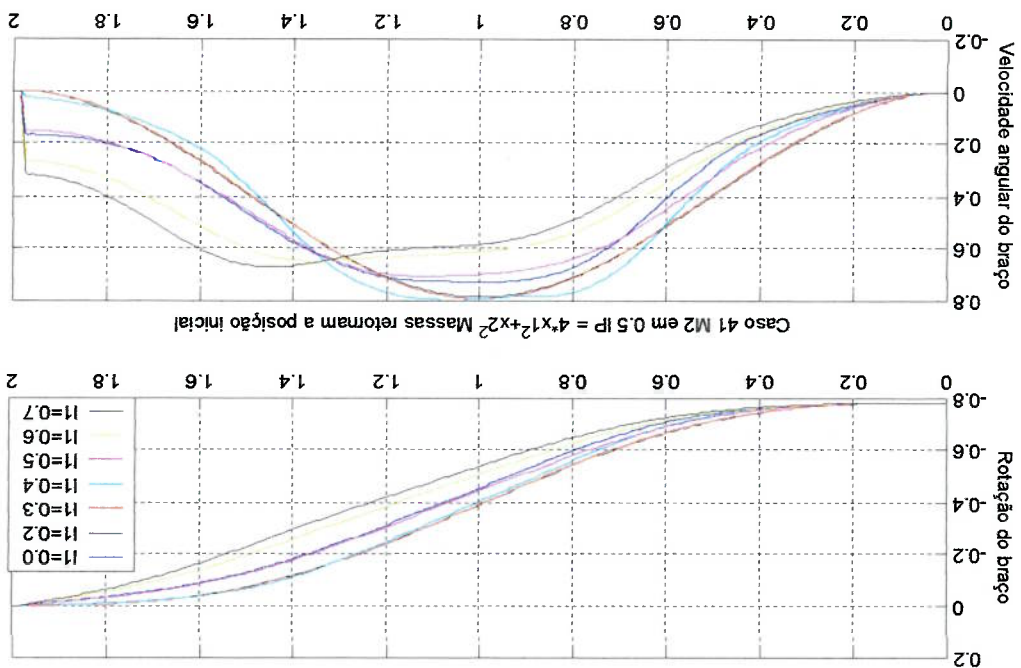


Figura 60 Força em M_1 x Força em M_2 caso 41

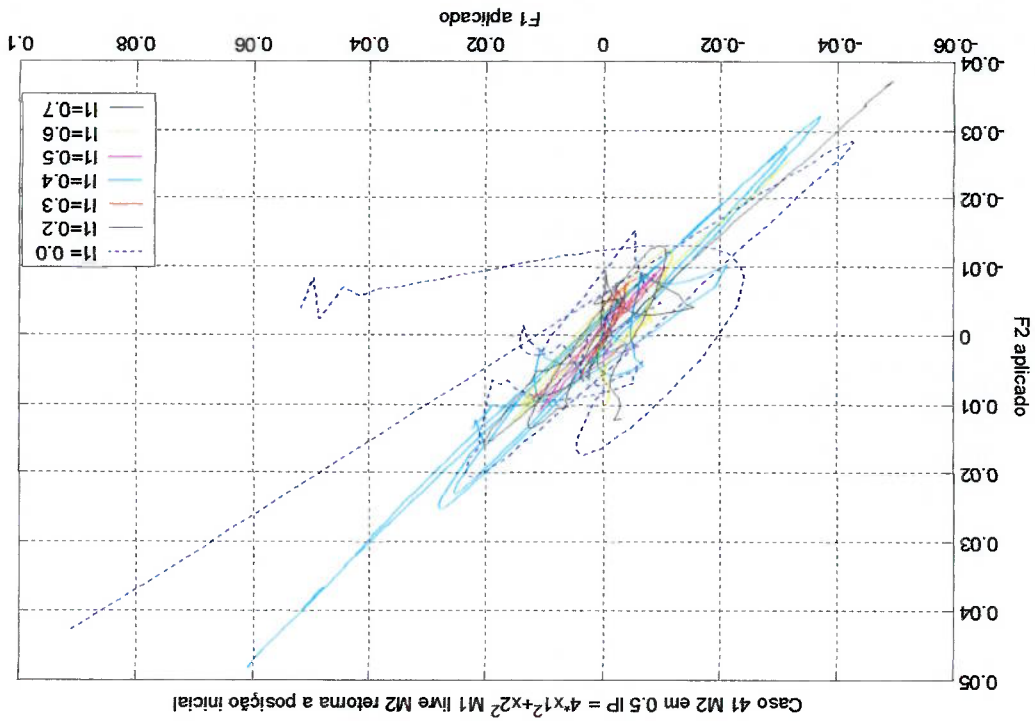


Figura 59 Controle Aplicado caso 41

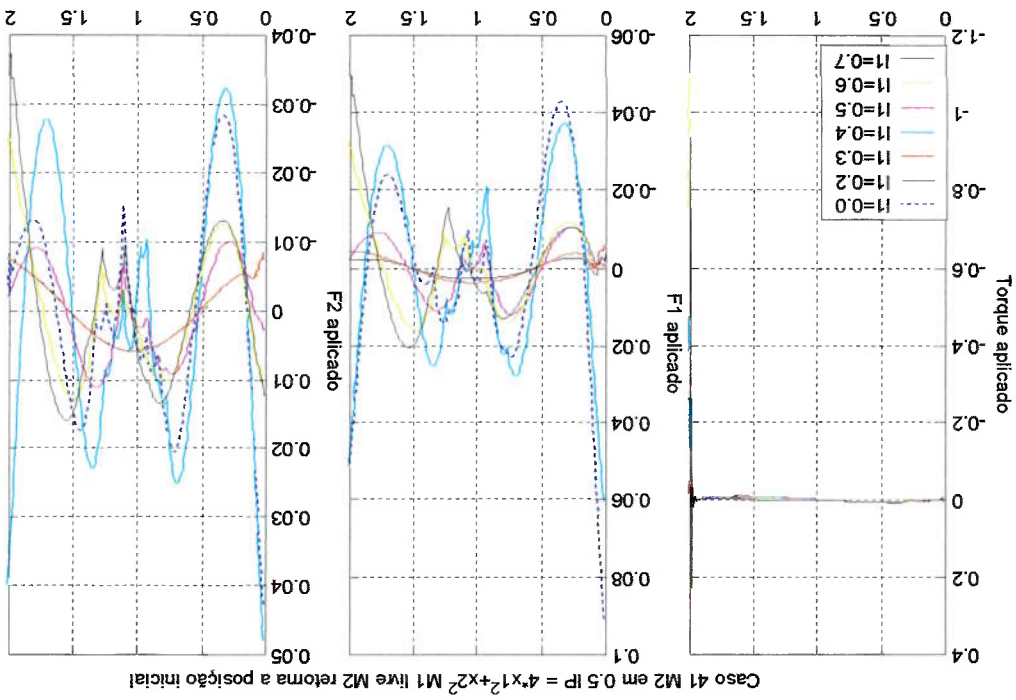


Figura 62 Velocidade das massas caso 42

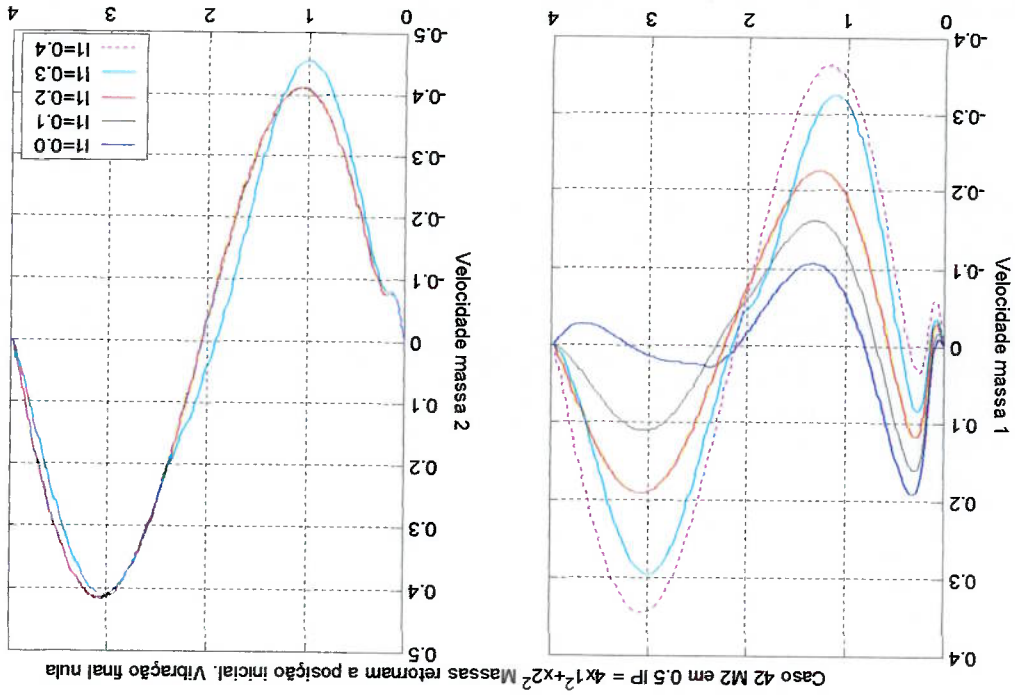


Figura 61 Deslocamentos das massas caso 42

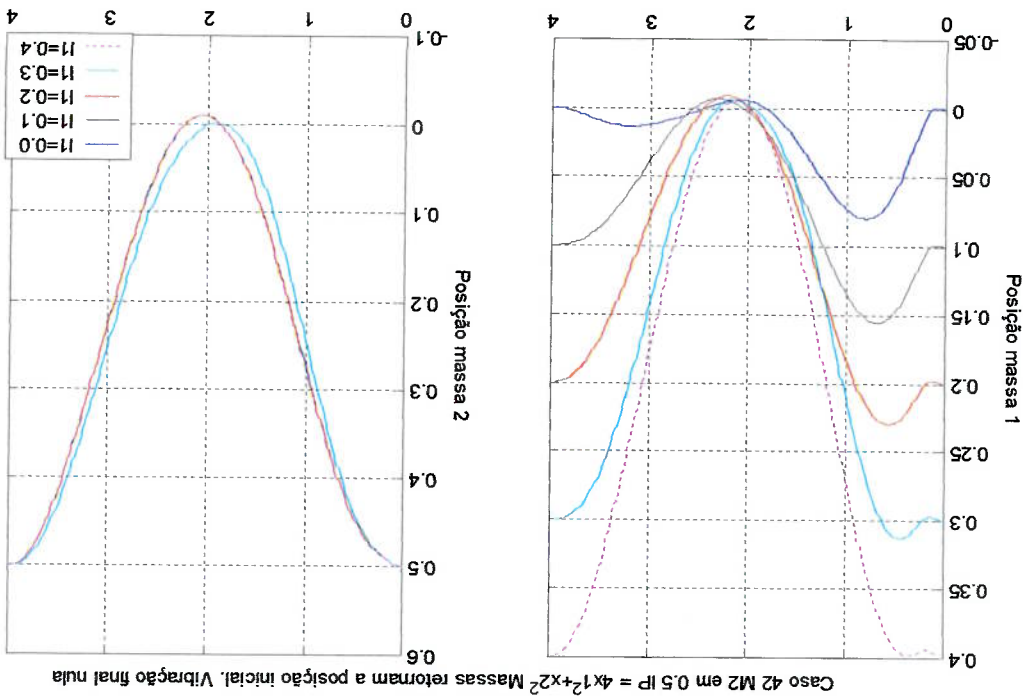


Figura 64 Vibração na ponta do braço caso 42

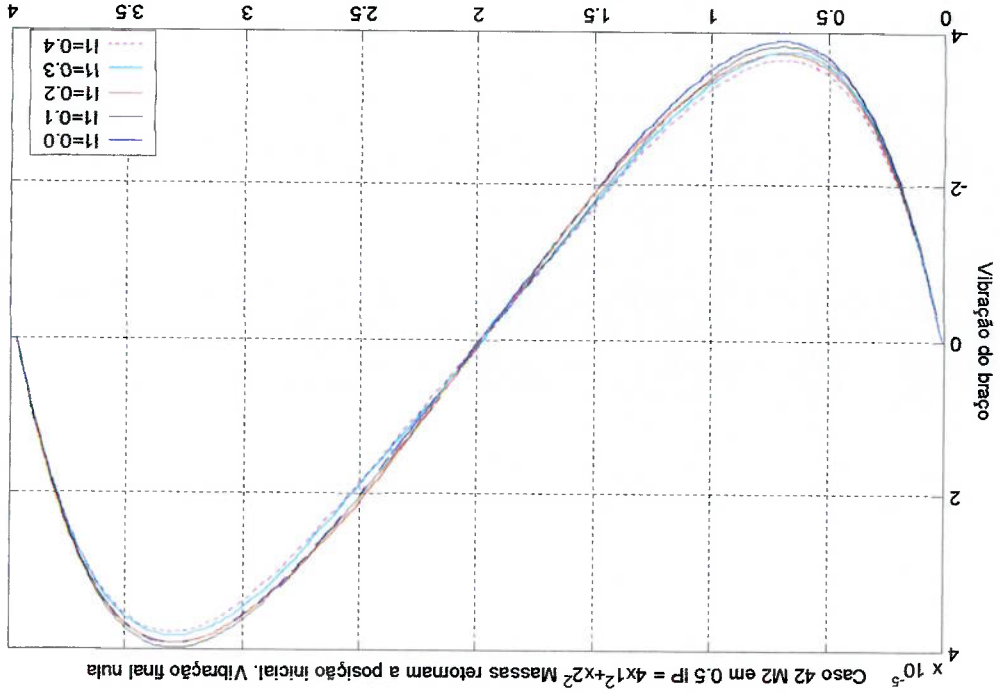


Figura 63 Movimento de rotação do braço caso 42

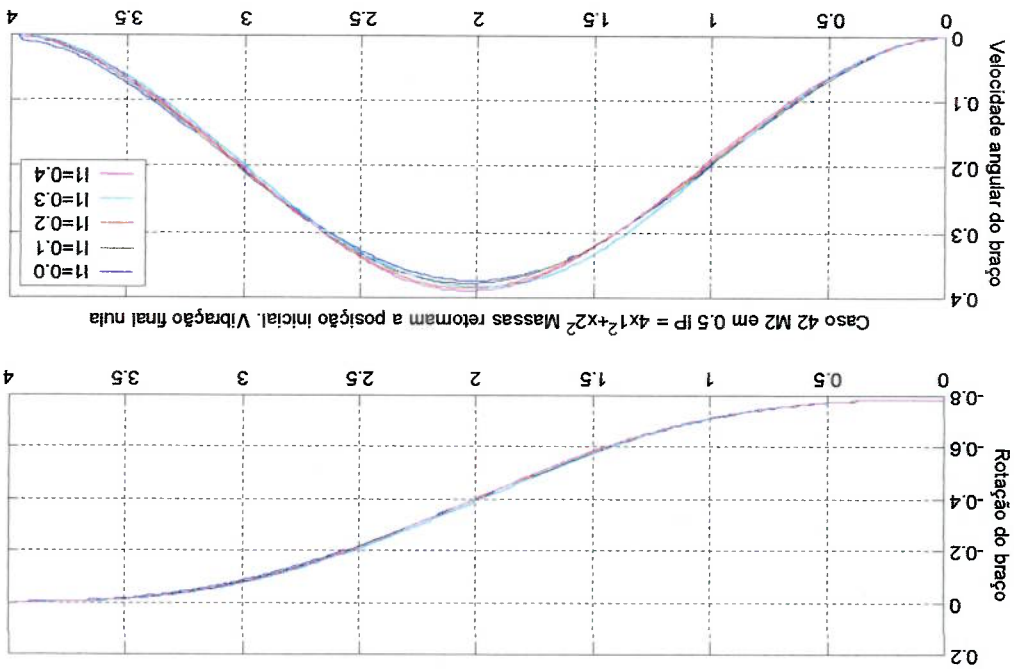


Figura 66 Força em M_1 x Força em M_2 caso 42

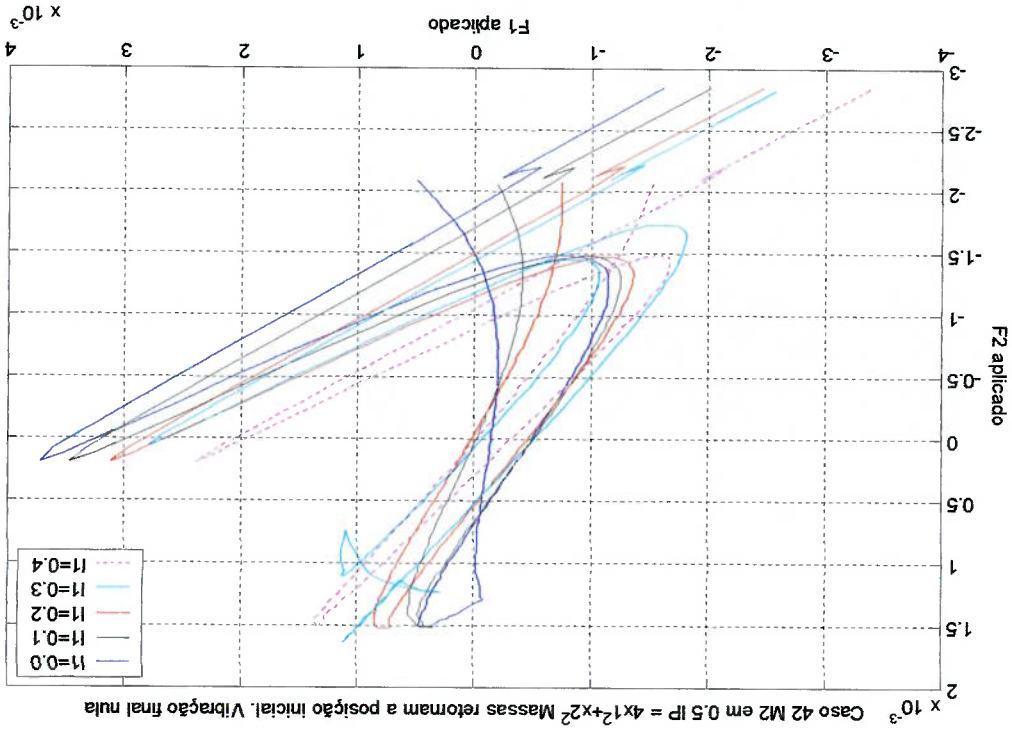
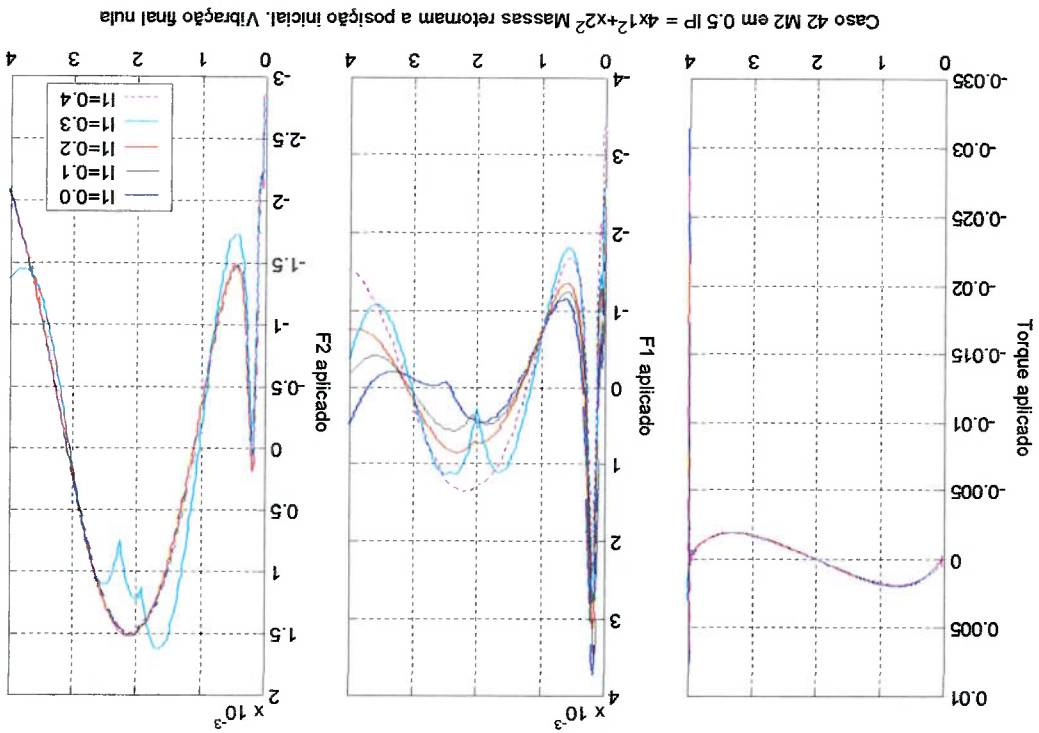


Figura 65 Controle Aplicado caso 42



6.4.2 Inclusão do segundo modo

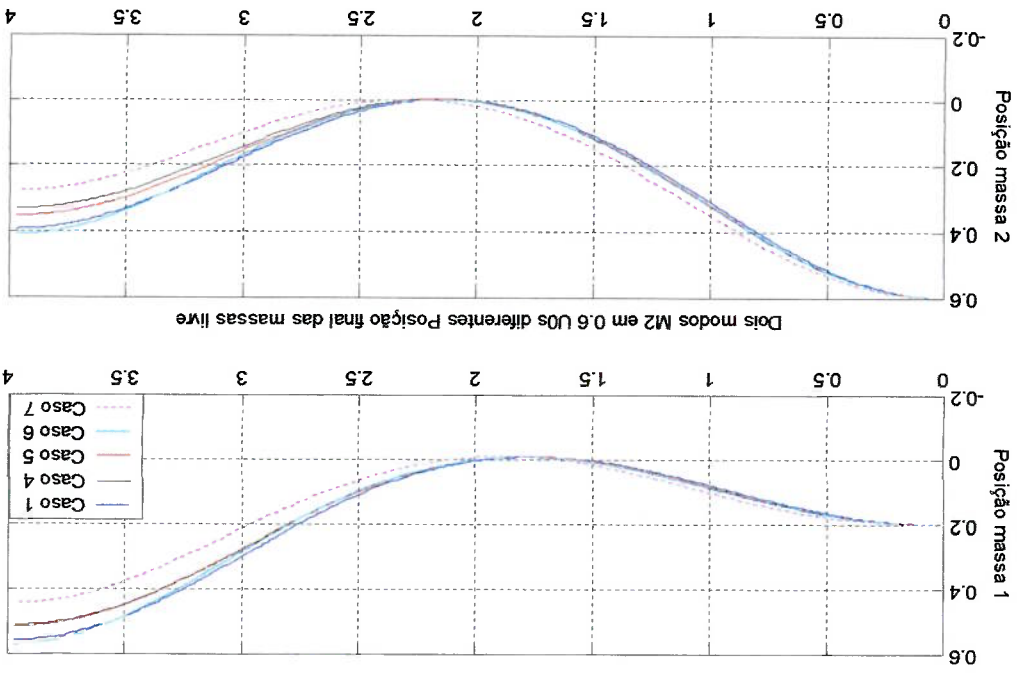


Figura 67 Deslocamentos das massas caso dois modos

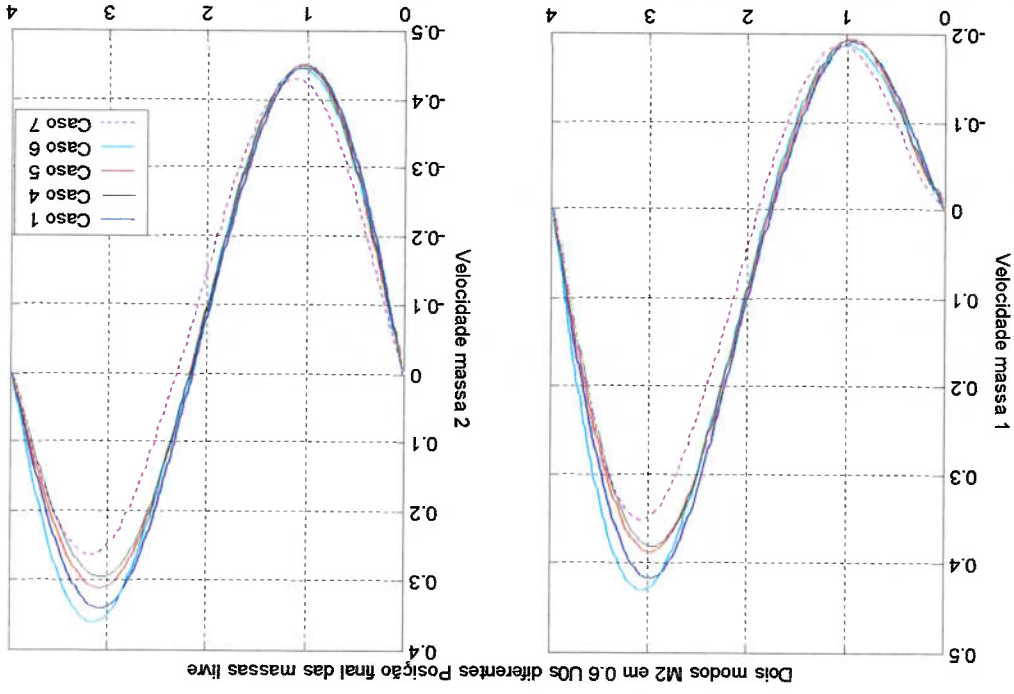


Figura 68 Velocidade das massas caso dois modos

Figura 70 Vibração na ponta do braço caso dois modos

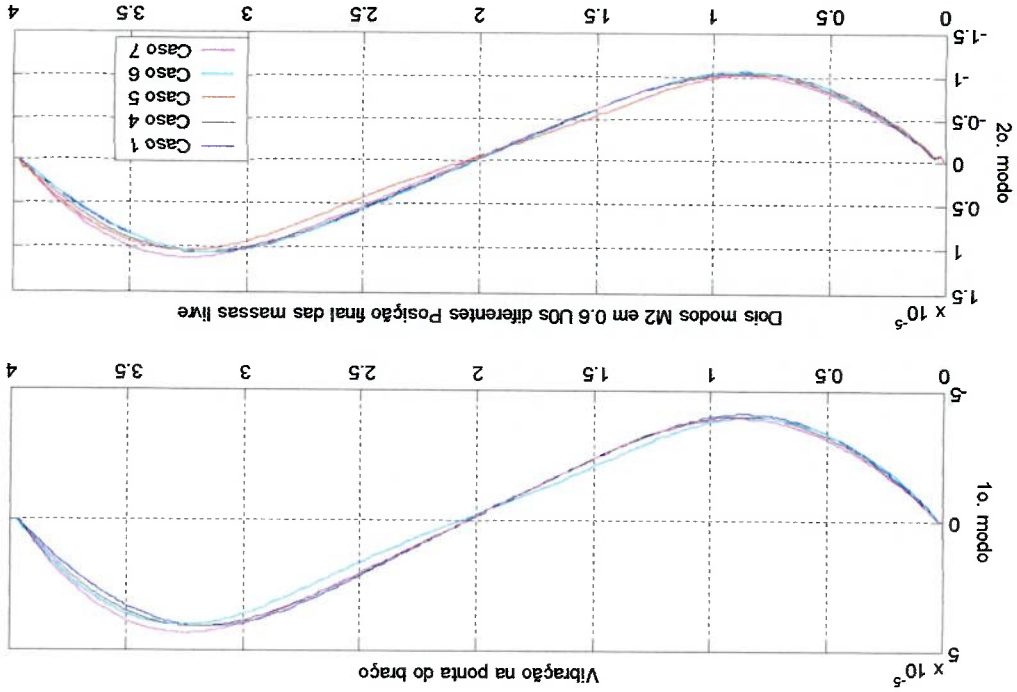


Figura 69 Movimento de rotação do braço caso dois modos

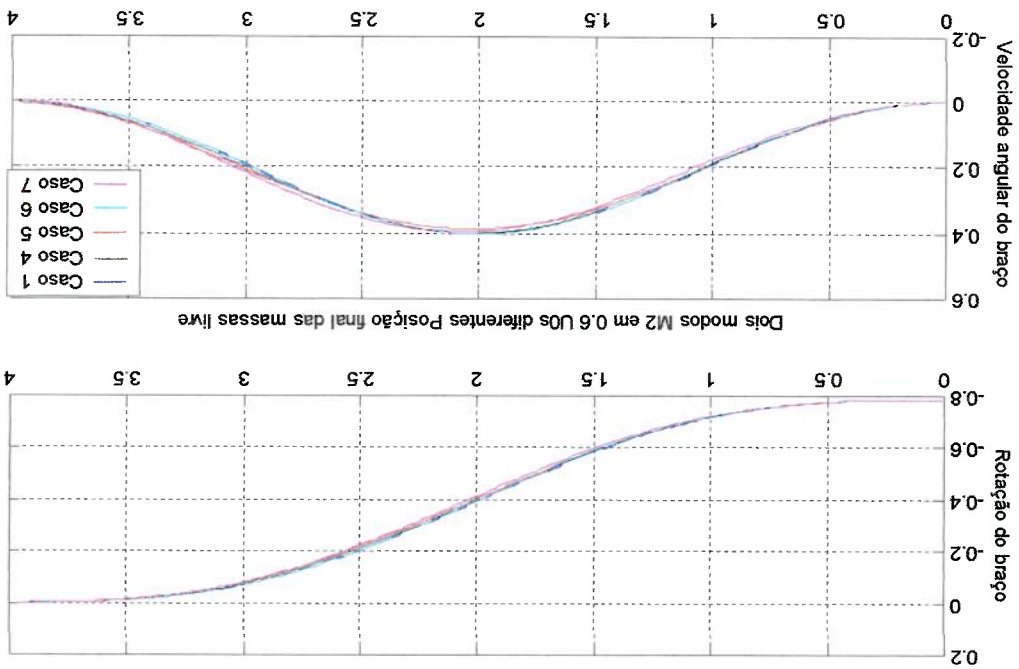


Figura 72 Força em M_1 x Força em M_2 caso dois modos

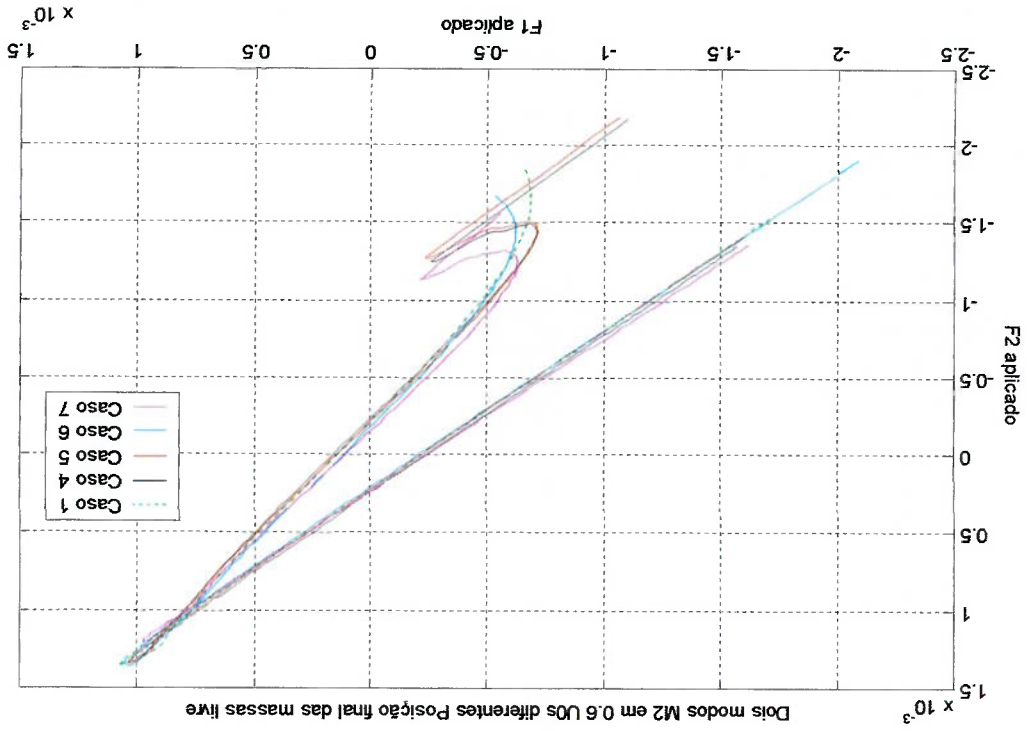
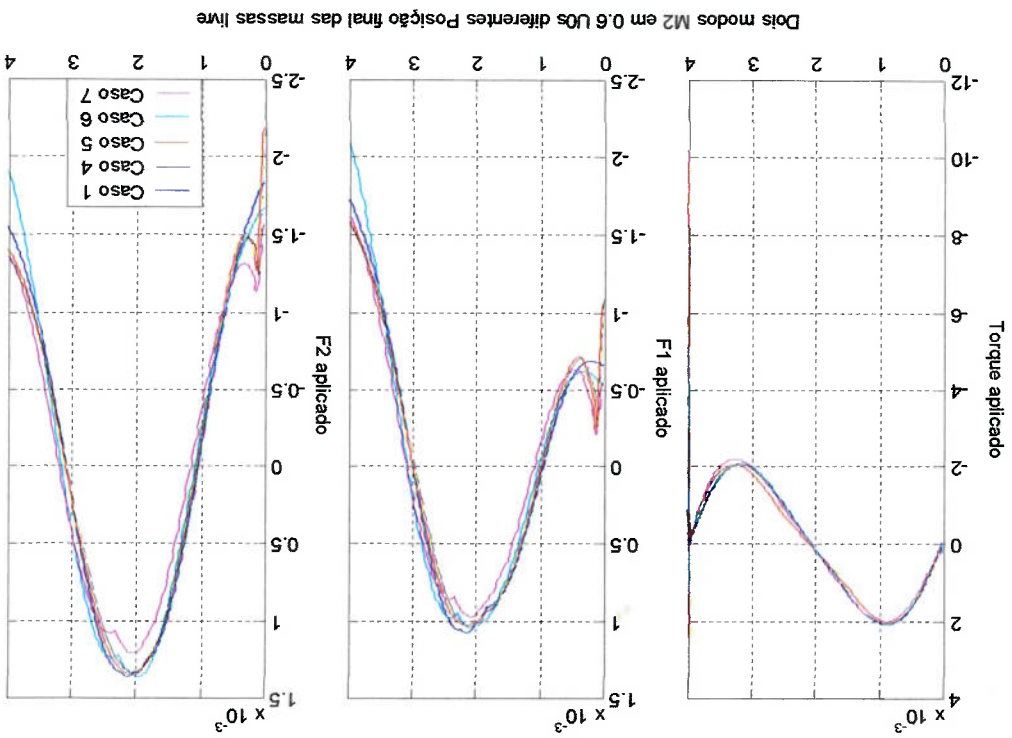


Figura 71 Controle Aplicado caso dois modos



6.5 Análise dos Resultados

Para o caso 3, os deslocamentos das massa 1 e 2 são relativamente pequenos quando comparados ao deslocamento obtido no trabalho de OLIVEIRA (2000). O controle inicial é nulo. Pela figura 19 observa-se um comportamento, $F_1 \times F_2$, para o sistema bastante variado.

Para o caso 5, a massa 2 já possui um deslocamento maior. Mesmo assim, ela praticamente não passa da metade do braço.

Na figura 25, percebe-se uma semelhança no comportamento do sistema, $F_1 \times F_2$. O fator de indução pode ser o controle inicial, alterado em relação ao caso 3.

Para o caso 50, as condições de simulação mudaram bastante. São diferentes: o critério de desempenho, a restrição sobre a posição final de cada uma das massas e a restrição sobre o deslocamento da ponta do braço.

Pela própria condição de simulação, o deslocamento das massas é maior que nos casos anteriores. A posição da ponta do braço é coincidente ao sistema de coordenadas da viga sombra um pouco antes da metade do temo de manobra, aproximadamente 1,8s.

O comportamento do sistema, $(F_1 \times F_2)$ figura 31, é similar para todos os casos desta simulação. Como o caso anterior, essa nova relação, aparentemente, é influenciada pelo critério de desempenho, ao menos.

Este caso foi simulado, pensando-se em utilizar a massa 2, a mais externa, como transporte de carga além de ser utilizada como controle. Por isso a necessidade da massa 2 ir até o outro extremo do braço.

O caso 31 é semelhante ao caso 5. A mais influente restrição é para as massas voltarem as suas posições iniciais. Isto parece ter influência no comportamento do sistema, $(F_1 \times F_2)$ figura 37, que não apresenta a mesma similaridade.

Como em vários outros casos, a posição inicial, neste em 0,4, produz alguma dificuldade numérica na convergência. Em outros casos, não expostos, essa característica volta a ocorrer. Menos frequente, o ponto inicial em 0,3 também produz respostas com algum tipo de 'distúrbio'. Isso pode ser causado pela proximidade com a raiz do primeiro modo de vibração em 0,3556.

O caso 43 é outro onde as 'dificuldades numéricas' aparecem. Mesmo não sendo tão evidente como no caso anterior. A resposta do sistema obtida quando a posição inicial da massa 1 está em 0,3 é claramente distinta das demais situações.

O caso 38 representa a dificuldade em identificar, com certeza, a influência dos diversos parâmetros já descritos. Não há restrição sobre o deslocamento da ponta do braço no instante final de manobra. Porém, é claro a semelhança de comportamento, ($F_1 \times F_2$) figura 43, nas diversas situações.

Os casos 40, 41 e 42 expõe o comportamento do sistema para diferentes tempos de manobra.

Observa-se uma dificuldade na convergência, com a diminuição do tempo de manobra. Até 'suavidade' do controle não é mais observada.

Com tempo de manobra de 4s, a inversão (de atrasada passa a estar adiantada), da ponta do braço em relação a viga sombra, ocorre praticamente na metade do tempo de manobra. No caso 41, com $\Delta t = 2s$, todas as inversões ocorrem acima da metade do tempo de manobra, e há uma variação de aproximadamente 0,5s (ou $\frac{1}{4}$ do tempo de manobra). Sendo que quanto mais tarde ocorre essa inversão menor é o pico do deslocamento da ponta do braço. Comparando se o caso 42, figura 66 ($F_1 \times F_2$), e o caso 43, figura 49 ($F_1 \times F_2$), pode se observar um 'zigzagague' nos dois. Aparentemente este comportamento tem forte correlação com o controle inicial aplicado.

A inclusão do segundo modo tem como objetivo verificar a presença de características já obtidas com apenas um modo. A maioria dos comentários já realizados também estendem-se para esse caso. Pela figura 70, observa-se que o segundo modo é aproximadamente de 20 a 25% menor do que o primeiro modo.

A obtenção de casos positivos de convergência foi bastante afetada com a inclusão desse segundo modo. Estão expostos os casos como mesmo critério adotado para a situação com apenas um modo, a convergência obtida no RIOTS. Pela experiência obtida durante todas as simulações, vários outros casos poderiam ser considerados válidos, mas a justificativa demandaria um esforço fora dos propósitos deste trabalho.

Um bom resultado obtido são os caso simulados com a restrição de deslocamento nulo para a vibração da ponta.

7 Descrição dos casos de simulação para a abordagem de

controle ótimo

Na tabela abaixo estão os casos simulados para o controle com um modo de vibração.

Estão descritos os seguintes dados

M_2 posição inicial de uma das massas de controle.

IP função objetivo adotada

Δt tempo de manobra

u_0 controle inicial aplicado

$Vibr_j$ a condição para o deslocamento na ponta do braço no instante final da

manobra

$Post_{mm} Ms$ a posição das massas de controle no instante final.

OK

indica quantos casos foram realmente simulados.

Caso	M_2	IP = min	Δt	u_0	$Vibr_j$	$Post_{mm} Ms$	OK
1	0.7	$\int_4^0 x_2^1(t) dt$	4s	1	Livre	$M_1 = livre$ $M_2 = livre$	3
2	0.6	$\int_4^0 x_2^1(t) dt$	4s	1	Livre	$M_1 = livre$ $M_2 = livre$	4
3	0.5	$\int_4^0 x_2^1(t) dt$	4s	1	Livre	$M_1 = livre$ $M_2 = livre$	4
4	0.7	$\int_4^0 x_2^1(t) dt$	4s	2	Livre	$M_1 = livre$ $M_2 = livre$	3
5	0.6	$\int_4^0 x_2^1(t) dt$	4s	2	Livre	$M_1 = livre$ $M_2 = livre$	5
6	0.5	$\int_4^0 x_2^1(t) dt$	4s	2	Livre	$M_1 = livre$ $M_2 = livre$	5

7	0.7	$\int_4^s [2x_1^2(t) + x_2^2(t)] dt$	4s	1	Livre	$M_1 = P_0$ $M_2 = P_0$	7
8	0.7	$\int_4^s [2x_1^2(t) + x_2^2(t)] dt$	4s	1	nula	$M_1 = P_0$ $M_2 = P_0$	7
9	0.7	$\int_4^s [2x_1^2(t) + x_2^2(t)] dt$	4s	2	nula	$M_1 = P_0$ $M_2 = P_0$	4
10	0.7	$\int_4^s [2x_1^2(t) + x_2^2(t)] dt$	4s	1	nula	$M_1 = \text{livre}$ $M_2 = \text{livre}$	1
20	0.7	$\int_4^s [2x_1^2(t) + x_2^2(t)] dt$	4s	2	livre	$M_1 = P_0$ $M_2 = P_0$	7
21	0.7	$\int_4^s x_1^2(t) dt$	4s	2	livre	$M_1 = \text{livre}$ $M_2 = \text{livre}$	5
22	0.5	$\int_4^s x_2^2(t) dt$	4s	2	livre	$M_1 = \text{livre}$ $M_2 = \text{livre}$	3
23	0.7	$\int_4^s [2x_1^2(t) + x_2^2(t)] dt$	4s	2	livre	$M_1 = \text{livre}$ $M_2 = \text{livre}$	8
31	0.6	$\int_4^s x_1^2(t) dt$	4s	3	livre	$M_1 = P_0$ $M_2 = P_0$	7
32	0.7	$\int_4^s x_2^2(t) dt$	4s	3	livre	$M_1 = P_0$ $M_2 = P_0$	7
33	0.7	$\int_4^s [x_1^2(t) + x_2^2(t)] dt$	4s	3	livre	$M_1 = P_0$ $M_2 = P_0$	6
34	0.7	$\int_4^s [2x_1^2(t) + x_2^2(t)] dt$	4s	1	livre	$M_1 = 0.6$ $M_2 = 0.6$	1
35	0.7	$\int_4^s [x_1^2(t) + x_2^2(t)] dt$	4s	1	livre	$M_1 = \text{livre}$ $M_2 = \text{livre}$	9
36	0.5	$\int_3^0 [x_1^2(t)] dt$	3s	1	livre	$M_1 = \text{livre}$ $M_2 = \text{livre}$	2
38	0.7	$\int_3^0 [2x_1^2(t)] dt$	3s	2	livre	$M_1 = \text{livre}$ $M_2 = \text{livre}$	4

2	$M_1 = \text{livre}$ $M_2 = \text{livre}$	livre	3	4s	$\int_4^0 [2x_2^2(t)] dt$	39	0.6	
1	$M_1 = P0$ $M_2 = P0$	nula	3	1s	$\int_1^0 [4x_2^2(t) + x_2^2(t)] dt$	40	0.5	
7	$M_1 = P0$ $M_2 = P0$	nula	3	2s	$\int_2^0 [4x_2^2(t) + x_2^2(t)] dt$	41	0.5	
5	$M_1 = P0$ $M_2 = P0$	nula	3	4s	$\int_4^0 [4x_2^2(t) + x_2^2(t)] dt$	42	0.5	
4	$M_1 = P0$ $M_2 = P0$	livre	3	4s	$\int_4^0 [4x_2^2(t) + x_2^2(t)] dt$	43	0.5	
3	$M_1 = P0$ $M_2 = P0$	livre	3	4s	$\int_4^0 [x_2^2(t)] dt$	45	0.5	
1	$M_1 = P0$ $M_2 = 0$	livre	3	4s	$\int_4^0 [4x_2^2(t) + x_2^2(t)] dt$	46	0.5	
5	$M_1 = P0$ $M_2 = 0$	nula	3	4s	$\int_4^0 [4x_2^2(t) + x_2^2(t)] dt$	47	0.5	
4	$M_1 = P0$ $M_2 = 0$	nula	3	4s	$\int_4^0 [4x_2^2(t) + x_2^2(t)] dt$	48	0.7	
8	$M_1 = P0$ $M_2 = 0$	nula	3	3s	$\int_3^0 [4x_2^2(t) + x_2^2(t)] dt$	49	0.7	
7	$M_1 = P0$ $M_2 = 0$	nula	2	4s	$\int_4^0 [4x_2^2(t) + x_2^2(t)] dt$	50	0.7	

8 Conclusões

Nas duas abordagens adotadas percebe-se benefícios significativos em relação ao problema com apenas uma massa de controle, que por sua vez, é nitidamente superior ao caso sem massas deslizando OLIVEIRA (2000). Nota-se:

1. A suavização das vibrações com a inclusão da segunda massa na abordagem com trajetórias prescritas
2. A independência do comportamento do sistema em relação às estratégias adotadas para a primeira abordagem.

3. A diminuição dos esforços de controle

4. A redução dos picos de vibrações

5. As influências dos controles iniciais na abordagem de controle ótimo e o reconhecimento do comportamento do sistema e sua dependência das condições e exigências iniciais (critério de desempenho).

6. A obtenção de uma resposta com vibração final nula para o braço.

Como comparação entre as duas abordagens adotadas para o problema estão dispostos abaixo os gráficos que demonstram a melhor resposta para cada abordagem: para trajetórias prescritas é a ESTRATÉGIA 5 e para o controle ótimo é o CASO 50. É evidente a redução do deslocamento da ponta do braço na abordagem de controle ótimo. Pelo movimento de rotação do braço, percebe-se que na primeira abordagem o controle aplicado é muito mais brusco impondo um movimento mais rápido para o braço, que praticamente chega a sua posição final na metade do tempo de manobra e depois realiza um suave movimento até a manobra estar completa.

A complexidade dos modelos e os tempos de simulação da segunda abordagem são muito maiores que na primeira. Porém os resultados obtidos compensam o esforço realizado. A comparação com os resultados anteriores demonstra que a atenuação das

Figura 74 Movimento de rotação do braço para a trajetória prescrita e o controle ótimo

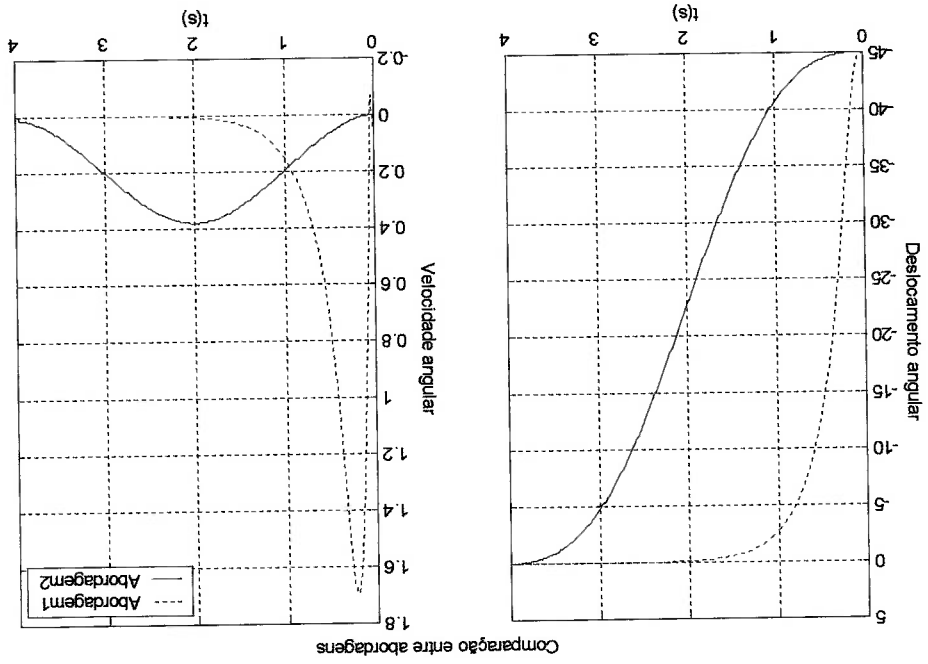
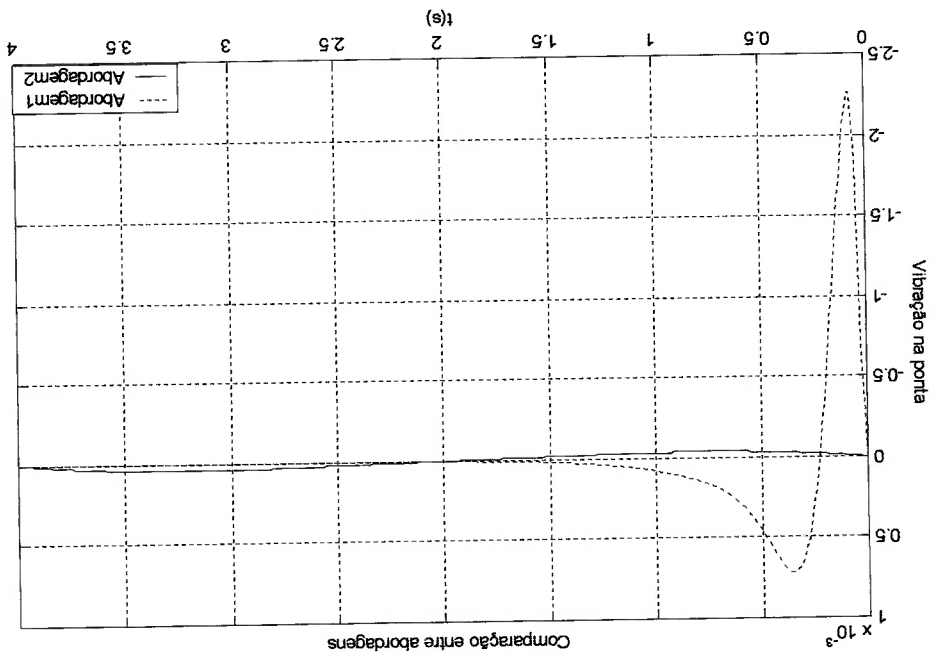


Figura 73 Vibração na ponta para a trajetória prescrita e o controle ótimo



vibrações é obtida com a utilização de valores menores de massa de controle, além de se ressaltar que estão divididos em duas partes sobrecarregando menos a estrutura física que as suporta.

Durante a simulação foi imposto que as massas de controle permanecessem nos limites físicos do braço. Os resultados obtidos são mais consistentes que os de OLIVEIRA (2000), quando o cursor não tinha limites e poderia deslocar-se por extensões além da estrutura inicial para continuar seu movimento.

Ainda em relação ao problema com apenas uma massa, os deslocamentos das massas são consideravelmente menores possibilitando vantagens construtivas quando da sua real aplicação.

O torque aplicado ao braço tem grande influência sobre as vibrações da viga, resultado obtido por OLIVEIRA(2000) e aqui também observado. A vantagem da inclusão da segunda massa é permitir a variação do termo de inércia devido aos cursores, alterando o momento inércia do sistema cubo-braço-massas.

Apesar dos resultados, a aplicação do simulador RIOTS ainda limita a ponte entre o desenvolvimento teórico e a implementação computacional. Melhores resultados para o controle de estruturas flexíveis dependem, ainda, de um pacote mais dedicado. Existem ainda muitos problemas, teóricos e práticos, a serem resolvidos. Durante a simulação do sistema proposto percebeu-se a dificuldade na análise do comportamento do sistema, muitas vezes surgindo indagações da origem de alguns comportamentos irregulares. Em muitas situações propostas o sistema não consegue a simulação ou não chega a uma convergência provocando resultados de difícil interpretação.

9 Bibliografia

- [1] BOOK, W.J., "Modeling, Design, and Control of Flexible Manipulator Arms: a Tutorial Review", In: Conference on Decision and Control, 29th, Honolulu, 1990. Proceedings, Honolulu, s. ed., pp. 500-506, 1990.
- [2] BRYSON, A.E.; HO, Y.C., "Applied Optimal Control" Rev. Printing. (Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1975).
- [3] CITRON, S.J., "Elements of Optimal Control", Holt, Rinehart and Winston Inc., 1969.
- [4] CLARK, R.L.; SAUNDERS, W.; GIBBS, G.P., "Adaptive structures: dynamics and control", John Wiley & Sons, 1997.
- [5] CUTRELL, J.E.; BIEGLER, L.T., "On the Optimization of Differential algebraic process systems" AIChE Journal, vol. 33 No. 8, pp 1257-1270, 1987.
- [6] GILL, P. E.; MURRAY, W.; WRIGHT, M.H. "Practical Optimization", Academic Press, London and New York, 1981.
- [7] GILL, P.E.; MURRAY, W.; SAUNDERS, M.A.; WRIGHT, M.H. "User's guide for NPSOL (Version 4.0)." Report SOL 86-2. Department of Operations Research, Stanford University, California, USA (1986).
- [8] GILL, P.E.; MURRAY, W.; SAUNDERS, M.A.; "Large scale SQP Methods and their Application in Trajectory Optimization" in International Series of Numerical Mathematics, vol 115, pp 29-42, (1994).
- [9] JUNKINS, J.L.; KIM, Y. "Introduction to Dynamics and Control of Flexible Structures", American Institute of Aeronautics and Astronautics, Washington, D.C., 1993.
- [10] KIRK, D.E., "Optimal Control Theory: an introduction", Prentice-Hall, 1970.

- [11] MEIROVITCH, L., "Computational Methods in Structural Dynamics", Sythoff & Noordhoff, 1980.
- [12] MEIROVITCH, L., "Dynamics and Control of Structures", John Wiley & Sons, 1990.
- [13] MEIROVITCH, L., "Elements ofVibration Analysis", McGraw-Hill, 1986.
- [14] MEIROVITCH, L., "Principles and Techniques of Vibrations", Prentice-Hall, 1997.
- [15] MENEGALDO, L.L., "Modelagem Biomecânica e Controle Ótimo da Postura Humana Através de Algoritmos Baseados na Teoria de Aproximações Consistentes", Tese de Doutorado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2000.
- [16] OLIVEIRA, F., "Controle de Vibrações de um Braço Rotativo Flexível pelo Movimento de uma Massa sobre o Braço", Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2000.
- [17] OLIVEIRA, F.; FLEURY, A., "Controle de Vibrações de um Braço Rotativo Flexível pelo Movimento de uma Massa sobre o Braço". In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECÂNICA, XV, Águas de Lindóia, 1999. COBEM 99, São Paulo, ABCM, 1999.
- [18] OZGÜNER, F.; BARBIERI, U., "Unconstrained and Constrained Mode Expansions for a Flexible Slewing Link", Transactions of the ASME, Vol. 110, pp. 416-421, 1988.
- [19] POLAK, E., "On the Use of Consistent Approximations in the Solution of Semi-Infinite Optimization and Optimal Control Problems", Math. Progr., Vol. 62, pp.385-415, 1993.

- [20] SCHWARTZ, A. L., POLAK, E., CHEN Y., "RIOTS -Recursive Integration Optimal Control Trajectory Solver. A MATLAB toolbox for solving optimal control problems. Version 1.0", Dept. of Electrical Engineering and Computer Science, University of California at Berkeley, 1997.
- [21] SCHWARTZ, A. L., Theory and Implementation of Numerical Methods Based on Runge-Kutta Integration for Solving Optimal Control Problems, Ph.D. dissertation, University of California at Berkeley, 1996
- [22] SIMO, J.C.; VU-QUOC, L., "On the Dynamics of Flexible Beams under Large Overall Motions -The Plane Case, Parts I & II", Journal of Applied Mechanics, Vol. 53, pp. 849-863, 1986.
- [23] SOFFKER, D., "Elastic Robot Arms with Varying Length -Part I: A Systematic Nonlinear Modeling Approach." in: Sinha, S.C.; Cusumano, J.P.; Pfeifer, F. (eds.): Vibration of Nonlinear, Random, and Time-Varying Systems -Time Varying Systems and Structures, ASME DE-V 84-1, 1995, pp. 109-119.
- [24] SPIEGEL, M., "Theory and Problems of Theoretical Mechanics: with an Introduction to Lagrange's Equation and Hamiltonian Theory" Schaum's Outline Series, McGraw Hill, 1990.
- [25] SPIEGEL, M., "Mecânica Racional", Recife, McGraw-Hill do Brasil, 1976.
- [26] VON STRYK, O.; BULIRSCH, R. "Direct and indirect methods for trajectory optimization." Annals of Operations Research 37 (1992) 357-373.



Henry D. Thoreau, em 'A Desobediência Civil'

“O soldado que se nega a servir numa guerra injusta
é aplaudido por aqueles que não se negam a
sustentar o governo injusto que a promove...”