

**DOUGLAS DANIEL SAMPAIO SANTANA**

**ESTIMAÇÃO DE TRAJETÓRIAS TERRESTRES UTILIZANDO  
UNIDADE DE MEDIÇÃO INERCIAL DE BAIXO CUSTO E  
FUSÃO SENSORIAL**

Dissertação apresentada à Escola  
Politécnica da Universidade de São  
Paulo para obtenção do Título de  
Mestre em Engenharia

São Paulo  
2005

**DOUGLAS DANIEL SAMPAIO SANTANA**

**ESTIMAÇÃO DE TRAJETÓRIAS TERRESTRES UTILIZANDO  
UNIDADE DE MEDIÇÃO INERCIAL DE BAIXO CUSTO E  
FUSÃO SENSORIAL**

Dissertação apresentada à Escola Politécnica  
da Universidade de São Paulo para obtenção  
do Título de Mestre em Engenharia

Área de Concentração:  
Engenharia Mecatrônica e Sistemas  
Mecânicos – Grande Área Mecânica

Orientador:  
Prof. Doutor  
Celso Massatoshi Furukawa

São Paulo  
2005

## ***DEDICATÓRIA***

A minha mãe *Rosa de Almeida Camargo*  
pelo exemplo de coragem, dedicação e  
perseverança.

## ***AGRADECIMENTOS***

Ao meu orientador Prof. Dr. Celso Massatoshi Furukawa pelo firme apoio e pelas muitas vezes em que me reconduziu ao caminho correto da pesquisa de forma que este trabalho pudesse ser concluído.

Ao Prof. Dr. Newton Maruyama e ao Prof. Dr. Julio César Adamowski do departamento de Engenharia Mecatrônica da EPUSP pelo apoio e co-orientação no decorrer do trabalho, ao Prof. Dr. Edvaldo Simões da Fonseca Junior do departamento de Engenharia de Transportes da EPUSP pela significativa contribuição prestada no campo da cartografia, aos amigos Paulo de Tarso Peres e Victor A. F. de Campos pelas muitas vezes em que me ajudaram nos ensaios de campo e laboratório, ao amigo Nilson Noris Franceschetti pelas sugestões apresentadas, a todos os demais colegas de pesquisa do departamento sem citar nomes para não incorrer num gravíssimo erro de omissão.

Ao amigo Ulisses Loureiro de Lima pelas significativas contribuições a mim prestadas durante todos esses anos.

A Companhia do Metropolitano de São Paulo (METRÔ) na pessoa do Engenheiro Francisco José Valentim pela contribuição prestada na obtenção e interpretação da planta cartográfica da linha três do Metrô (linha verde).

Ao RENAPIGI (Rede Nacional de PIGs Instrumentados) da FINEP/CTPETRO, FINEP, ANP e a CAPES pelo apoio financeiro recebido, e ao CENPES-PETROBRAS pelo apoio para a realização de experimentos.

## ***RESUMO***

Este trabalho apresenta um estudo e implementação de um sistema de navegação inercial, utilizado para estimar coordenadas cartográficas e reconstruir a trajetória percorrida por um veículo terrestre (no caso, um automóvel). O sistema emprega uma técnica denominada “fusão sensorial”. A fusão sensorial é obtida a partir de um filtro de Kalman discreto que combina os dados provenientes de uma unidade de medição inercial (UMI) do tipo strapdown, de baixo custo, com informações externas fornecidas por um velocímetro e um conjunto de marcas topográficas (“landmarks”). Estas medidas são então processadas pelo filtro, produzindo estimativas de aceleração, velocidade e posição. São apresentadas as modelagens terrestre e cinemática do veículo, e também as principais fontes de erros que degradam o processo de estimação, incluindo algumas técnicas que minimizam o crescimento destes erros. Finalmente o sistema é modelado de forma estocástica no espaço de estados discreto, e resultados gráficos são apresentados. Estes resultados indicam que não é possível reconstruir as trajetórias de forma satisfatória utilizando-se apenas a UMI, devido a sua baixa precisão. No entanto, a fusão sensorial desenvolvida neste trabalho permite reconstruir as trajetórias com expressiva melhora.

## ***ABSTRACT***

This work presents a study and implementation of an inertial navigation system, designed to estimate chart coordinates and to reconstruct a terrain trajectory of a vehicle (in this case, an automobile). The system uses a technique named “sensor fusion”. The sensor fusion is implemented by a discrete Kalman Filter, that processes the data coming from an low cost strapdown inertial measurement unit (IMU), and them combines external information provided by the vehicle speedometer and a set of landmarks. These measurements are processed by the Kalman Filter, producing acceleration, speed and position estimates. It is presented the terrestrial and kinematical vehicle modeling, and the principal errors sources that degrades the estimation process, including some techniques to minimize the growth of errors. Finally, the system is modeled as a discrete state space stochastic system, and graphic results are presented. These results indicate that it is impossible to reconstruct the trajectories successfully using only the IMU, due to its low accuracy. However, the sensor fusion algorithm developed in this work succeed to reconstruct the trajectories with a notable improvement.

## *SUMÁRIO*

RESUMO	i
ABSTRACT	ii
SUMÁRIO	iii
LISTA DE FIGURAS	viii
LISTA DE TABELAS	xi
LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS	xii
LISTA DE SÍMBOLOS	xiii
1. INTRODUÇÃO	1
1.1. Descrição do problema	1
1.2. Navegação inercial	2
1.3. Objetivos	4
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	6
2.1. Sensores inerciais	6
2.1.1. Acelerômetros	6
2.1.2. Giroscópios	6
2.1.3. Configuração strapdown e plataforma	7
2.1.4. Ruídos e erros de sensores	8
2.1.5. Classificação de uma UMI	9
2.2. Sistemas de coordenadas e transformações	10
2.2.1. Referenciais utilizados em navegação inercial	10
2.2.2. Transformação de coordenadas	14

2.2.2.1. Transformações de coordenadas entre o sistema RPY e o sistema NED por Ângulos de Euler	15
2.2.2.2. Transformações de coordenadas entre o sistema RPY e o sistema NED por Cossenos Diretores	17
2.2.2.3. Transformações de coordenadas entre o sistema NED e o sistema ECEF	19
2.2.2.4. Transformação de coordenadas entre o sistema ECEF e o sistema ECI	19
2.3. Modelagem terrestre da navegação inercial strapdown	20
2.3.1. Conceituando a aceleração denominada força específica	20
2.3.2. Modelagem da navegação num sistema de coordenadas fixo	21
2.3.3. Modelagem da navegação num sistema de coordenadas girante	22
2.3.4. Modelagem da navegação no sistema de coordenadas inercial ECI	23
2.3.5. Modelagem da navegação no sistema de coordenadas terrestre ECEF	26
2.3.6. Modelagem da navegação no sistema de coordenadas da navegação local NED	27
2.3.7. Representação da navegação local NED através das coordenadas curvilíneas ou geodésicas	29
2.3.8. O formato da Terra segundo a convenção WGS-84	32
2.3.9. Deflexão gravitacional sobre a superfície da Terra	34
2.3.10. Mecanização do sistema de navegação local NED	35
3. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	37
3.1. Representação no espaço de estados	37
3.1.1. Estimação de estados	38



3.2. O filtro de Kalman discreto	40
3.2.1. O algoritmo do filtro de Kalman discreto	41
3.3. Modelo proposto para estimar estados de giroscópio	42
3.3.1. Modelo dinâmico dos giroscópios	42
3.3.2. Filtro de Kalman utilizado	44
3.4. Ortogonalização e normalização da matriz de orientação	45
3.4.1. Ortogonalização	46
3.4.2. Normalização	47
3.5. Correções da aceleração	48
3.5.1. Correções determinísticas	48
3.5.1.1. Gravidade local	48
3.5.1.2. Aceleração de Coriolis	49
3.5.1.3. Aceleração centrípeta	50
3.5.2. Correções estocásticas	51
3.5.2.1. Influência dos erros de giroscópios na aceleração	51
3.6. Modelo proposto para estimar estados da plataforma	53
3.6.1. Modelo dinâmico da plataforma	53
3.6.2. Modelo dinâmico alternativo	56
3.6.3. Filtro de Kalman utilizado	57
3.7. Alinhamento inicial e calibração da plataforma	60
3.7.1. Alinhamento inicial	60
3.7.2. Alinhamento terrestre pelo método da matriz de orientação	60
3.7.3. Calibração	62

4. MATERIAIS E MÉTODOS	64
4.1. Testes efetuados	64
4.2. Equipamentos utilizados	65
4.3. Metodologia dos testes	66
4.3.1. Monitoramento do filtro de Kalman	69
4.3.2. Sintonia do filtro de Kalman	70
4.3.3. Inserção de ruídos de medição	72
4.4. Constantes utilizadas	72
5. RESULTADOS E DISCUSSÕES	74
5.1. Velocidades angulares, acelerações e velocidades lineares	74
5.1.1. Sistema de coordenadas da plataforma – RPY	75
5.1.2. Sistema de coordenadas da navegação – NED	78
5.2. Reconstrução da trajetória para o teste em percurso fechado	80
5.2.1. Reconstrução por dupla integração e por filtro de Kalman sem a utilização de medidas de referência	81
5.2.2. Reconstrução por dupla integração e por filtro de Kalman com a utilização de medidas de referência	83
5.2.3. Desempenho dos reconstrotores na presença de ruídos de medição	84
5.3. Análise do efeito da deriva dos giroscópios	86
5.4. Utilização de marcas topográficas para auxiliar o filtro de Kalman	88
5.5. Monitoramento do filtro de Kalman	93
6. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	95

ANEXOS	98
A. O filtro de Kalman discreto	98
B. Transformações de coordenadas	110
C. Scripts Matlab®	121
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	130

## *LISTA DE FIGURAS*

Figura	1.1	Sistema de navegação inercial isolado de rotação	2
Figura	2.1	Configuração de uma UMI strapdown	7
Figura	2.2	Sistema de coordenadas roll-pitch-yaw (RPY)	12
Figura	2.3	Sistemas de coordenadas: inercial, terrestre, local e da plataforma	13
Figura	2.4	Sistemas de coordenadas: terrestre, local e geodésico	13
Figura	2.5	Forças atuando sobre um acelerômetro	20
Figura	2.6	Sistemas de coordenadas fixo e móvel	21
Figura	2.7	Aceleração centrípeta e gravidade local	25
Figura	2.8	Modelo terrestre elíptico adotado pelo comitê WGS84	32
Figura	2.9	Representação da deflexão gravitacional latitudinal	35
Figura	2.10	Modelo do sistema de navegação	36
Figura	3.1	Estimador de estados	39
Figura	3.2	Estimador de estados estocástico	39
Figura	3.3	Ciclo do filtro de Kalman	42
Figura	3.4	Filtro de Kalman para estimar ângulos de rotação	45
Figura	3.5	Influência da deriva do giroscópio z nos acelerômetros x e y	52
Figura	3.6	Filtro de Kalman para estimar estados da plataforma	59
Figura	4.1	UMI strapdown Crossbow modelo VG700AA-202	65
Figura	4.2	Plataforma utilizada nos ensaios automotivos	67
Figura	4.3	Algoritmo do duplo integrador	69
Figura	4.4	Histórico da frequência de amostragem	69

Figura 5.1	Trajatória para o teste em percurso fechado	74
Figura 5.2	Velocidade angular no eixo $x$ (roll)	75
Figura 5.3	Velocidade angular no eixo $y$ (pitch)	75
Figura 5.4	Velocidade angular no eixo $z$ (yaw)	76
Figura 5.5	Aceleração no eixo $x$ - RPY	77
Figura 5.6	Aceleração no eixo $y$ - RPY	77
Figura 5.7	Aceleração no eixo $z$ - RPY	77
Figura 5.8	Velocidade no eixo $x$ - RPY	78
Figura 5.9	Aceleração no eixo $x$ - NED	78
Figura 5.10	Aceleração no eixo $y$ - NED	79
Figura 5.11	Aceleração no eixo $z$ - NED	79
Figura 5.12	Velocidade no eixo $x$ - NED	79
Figura 5.13	Velocidade no eixo $y$ - NED	80
Figura 5.14	Velocidade no eixo $z$ - NED	80
Figura 5.15	Velocidades $x$ e $y$ obtidas por integração	82
Figura 5.16	Trajórias reconstruídas por dupla integração e por filtro de Kalman sem utilizar medidas de referência	82
Figura 5.17	Comparação entre os reconstrutores	83
Figura 5.18	Trajórias reconstruídas por dupla integração e por filtro de Kalman com medidas de referência da velocidade	84
Figura 5.19	Comparação entre os reconstrutores e deslocamento no eixo $z$	84
Figura 5.20	Comparação entre os reconstrutores na presença de ruído de medição - Primeira simulação	85
Figura 5.21	Comparação entre os reconstrutores na presença de ruído de medição - Segunda simulação	85

Figura 5.22	Comparação entre os reconstrotores na presença de ruído de medição - Terceira simulação	86
Figura 5.23	Comparação entre os reconstrotores na presença de ruído de medição - Quarta simulação	86
Figura 5.24	Trajetórias reconstruídas em percurso aberto	87
Figura 5.25	Incremento angular devido ao “bias” de giroscópio	87
Figura 5.26	Teste de inserção de “landmarks” para $\sigma = 1\text{m}$	89
Figura 5.27	Teste de inserção de “landmarks” para $\sigma = 2\text{m}$	90
Figura 5.28	Teste de inserção de “landmarks” para $\sigma = 3\text{m}$	91
Figura 5.29	Teste de inserção de “landmarks” nas curvas	92
Figura 5.30	Monitoramento do filtro de Kalman em percurso fechado utilizando a velocidade como medida de referência	93
Figura 5.31	Monitoramento do filtro de Kalman em percurso fechado utilizando a velocidade + “landmarks” como medida de referência	94

## ***LISTA DE TABELAS***

Tabela 2.1	Classificação de uma UMI	10
Tabela 2.2	Parâmetros do modelo terrestre elíptico (WGS84)	33
Tabela 4.1	Especificações da UMI Crossbow VG700AA-202	66
Tabela 4.2	Constantes utilizadas nos testes de reconstrução de trajetórias	73

***LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS***

EPUSP	Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
UMI	Unidade de Medição Inercial
ECI	Earth - Centered - Inertial
ECEF	Earth - Centered, Earth - Fixed
LPT	Local Tangent Plane
NED	North - East - Down
ENU	East - North - Up
RPY	Roll - Pitch - Yaw
MCD	Matriz de Co-senos Diretores
MO	Matriz de Orientação
MTC	Matriz de Transformação de Coordenadas
MR	Matriz de Rotação
MT	Marcas Topográficas
FPB	Filtro Passa Baixa
FK	Filtro de Kalman
FKE	Filtro de Kalman Estendido
WGS	World Geodetic System
GPS	Global Position System
MEMS	Micro Eletro-Mechanical System
FOG	Fiber Optic Gyro
DSP	Digital Signal Processing



## *LISTA DE SÍMBOLOS*

$\mathbf{f}$	Vetor força específica
$\mathbf{a}$	Vetor aceleração inercial
$\mathbf{g}$	Vetor aceleração gravitacional
$\mathbf{x}_p$	Vetor representado no sistema de coordenadas da plataforma (RPY)
$\mathbf{x}_n$	Vetor representado no sistema de coordenadas da navegação (NED)
$\mathbf{x}_e$	Vetor representado no sistema de coordenadas terrestre (ECEF)
$\mathbf{x}_i$	Vetor representado no sistema de coordenadas inercial (ECI)
$\mathbf{C}_x^y$	Matriz de rotação que transporta um vetor na base $x$ para a base $y$
$\psi$	Ângulo de rotação positiva sobre o eixo $Z$ ou ângulo de yaw
$\theta$	Ângulo de rotação sobre o eixo $Y$ ou ângulo de pitch
$\phi$	Ângulo de rotação sobre o eixo $X$ ou ângulo de roll
$\omega$	Velocidade angular
$\mathbf{r}$	Vetor posição
$\Omega$	Velocidade de rotação da Terra
$\mathbf{P}$	Vetor força peso
$\mathbf{F}$	Vetor de força
$m$	Massa de um corpo
$V$	Velocidade de um corpo
$\mathbf{v}_e$	Vetor de velocidade da plataforma representado no sistema terrestre
$\mathbf{v}_i$	Vetor de velocidade da plataforma representado no sistema inercial

$\mathbf{v}_e^e$	Velocidade terrestre projetada no sistema ECEF
$\mathbf{v}_e^i$	Velocidade terrestre projetada no sistema ECI
$\boldsymbol{\omega}_{ie}$	Vetor de rotação da Terra projetado no sistema inercial
$\boldsymbol{\omega}_{en}$	Vetor de velocidade angular do sistema NED em relação ao sistema ECEF
$\boldsymbol{\omega}_{ep}^p$	Vetor de velocidade angular da plataforma em relação ao sistema terrestre, projetado no sistema da plataforma
$\mathbf{g}_l$	Vetor gravidade local
$\mathbf{f}^x$	Vetor força específica representado no sistema de coordenadas $x$
$L$	Latitude
$\lambda$	Longitude
$h$	Altitude
$\eta$	Deflexão magnética longitudinal
$\xi$	Deflexão magnética latitudinal
$\dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{x}_{k+1}$	Vetor de estados contínuo e discreto
$\mathbf{z}(t), \mathbf{z}_k$	Vetor de medidas contínuo e discreto
$\mathbf{u}(t), \mathbf{u}_k$	Vetor de entradas associado ao processo contínuo e discreto
$\mathbf{w}(t), \mathbf{w}_k$	Vetor de ruídos associado ao processo contínuo e discreto
$\mathbf{e}(t), \mathbf{e}_k$	Vetor de ruídos associado à medição contínuo e discreto
$\mathbf{v}(t), \mathbf{v}_k$	Vetor de ruídos associado à medição contínuo e discreto
$\Phi, \mathbf{A}$	Matrizes contínua e discreta que modelam a transição de estados associada ao processo
$\Gamma, \mathbf{B}$	Matrizes contínua e discreta que modelam as entradas associadas ao processo

<b>C</b>	Matriz que modela os ruídos associados ao processo
<b>H</b>	Matriz que modela os estados associados à medição
<b>G</b>	Matriz que modela os ruídos associados à medição
<b>Q</b>	Covariância do ruído de processo
<b>R</b>	Covariância do ruído de medição
$p(x)$	Probabilidade de $x$
$N(\mu, \sigma^2)$	Distribuição normal com média $\mu$ e variância $\sigma^2$
$\hat{x}$	Estimativa do vetor $x$
$\hat{x}_k^-$	Estimativa a priori do vetor $x$
$\hat{x}_k^+$	Estimativa a posteriori do vetor $x$
<b>P</b>	Matriz de covariância do erro (filtro de Kalman)
<b>K</b>	Ganho do filtro de Kalman
$\Delta_{xy}$	Erro de ortogonalidade entre os vetores $x$ e $y$
$\Delta_{xx}$	Erro de normalização do vetor $x$
$C_i$	$i$ -ésima linha ou coluna da matriz de orientação <b>C</b>
$\Delta t, T$	Período de amostragem
( $\bullet$ )	Notação para designar o produto escalar
( $\otimes$ )	Notação para designar o produto vetorial
$R, R_0$	Raio da Terra
$b$	Sinal de “bias”
$t$	tempo
$v$	Ruído aleatório, “Random Walk”
$b_g$	Bias de giroscópio

$c_x, c_y, c_z$	Coordenadas $x$ , $y$ e $z$
$\delta a$	Erro de aceleração
$\sigma$	Desvio padrão
$\sigma^2$	Variância
$\sigma_c, \sigma_c^2$	Desvio padrão e variância da estimativa de posição

# 1. INTRODUÇÃO

## 1.1. Descrição do problema – Contextualização

Admita um sistema móvel ou veículo no qual se deseja determinar a todo instante os valores da aceleração, velocidade, posição e orientação deste sistema sobre a superfície do globo terrestre, e que neste sistema os valores iniciais das grandezas que se quer determinar são conhecidos. Admita ainda que o sistema está em constante movimento, sendo que os movimentos podem se dar em qualquer direção e sentido.

Dispondo-se no veículo de acelerômetros, velocímetro e odômetro, torna-se possível determinar a aceleração, a velocidade e o deslocamento do mesmo, entretanto não é possível reconstruir a trajetória percorrida, pois não se dispõe de qualquer informação sobre a direção e sentido do movimento. Para contornar este problema, deve-se utilizar um sensor que indique a todo instante a orientação do movimento.

Se a configuração acima puder ser implementada, tem-se então uma solução para reconstrução de trajetórias. Sistemas capazes de reconstruir (estimar) trajetórias possuem muitas aplicações, dentre as quais destacam-se: a navegação autônoma de veículos terrestres, aquáticos ou aéreos, equipamentos para inspeção e mapeamento de dutos, equipamentos que determinam coordenadas cartográficas, etc.

Uma técnica *muito utilizada* – porém *nada trivial*, de se obter um sistema capaz de estimar trajetórias emprega sensores inerciais em conjunto com um algoritmo denominado estimador de estados. Estes sistemas são denominados “*sistemas de navegação inercial*”.

## 1.2. Navegação inercial

Navegação inercial é o processo pelo qual se estabelecem informações sobre a posição, velocidade, atitude<sup>1</sup> e direção de um veículo com relação a um referencial, utilizando informações fornecidas por sensores inerciais tais como acelerômetros e giroscópios (Titterton, 1997). Os sistemas de navegação inercial se baseiam nas leis da mecânica clássica de Newton. Medindo-se as acelerações de um corpo, torna-se possível calcular as mudanças de velocidade e posição através de sucessivas integrações matemáticas.

Basicamente existem dois tipos de sistemas de navegação inercial: os “*sistemas isolados de rotação*” ou “*gimbaled systems*”<sup>2</sup> – ilustrado na figura 1.1, e os “*sistemas não isolados de rotação*” ou “*strapdown systems*”. Neste trabalho será empregado o segundo sistema, e o mesmo será visto em detalhes no próximo capítulo.

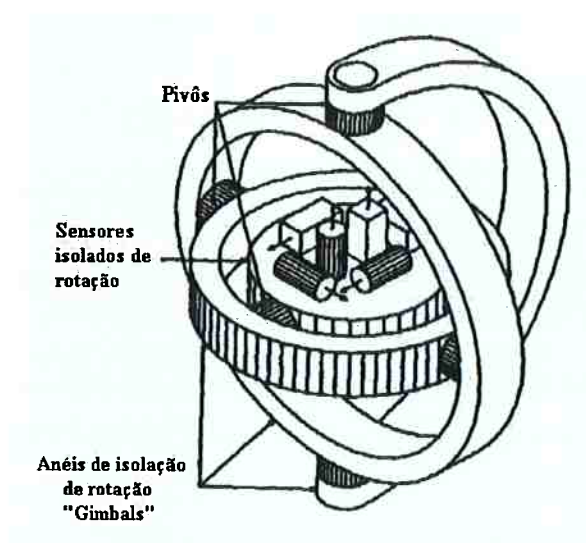


Fig. 1.1 – Sistema de navegação inercial isolado de rotação “gimbaled system”

<sup>1</sup> Atitude ou orientação: posição de um corpo que é determinada pela inclinação dos seus eixos com relação a algum sistema de referência.

<sup>2</sup> “Gimbaled Systems” é o nome dado aos sistemas de navegação inercial com três graus de liberdade. Neste sistema, os sensores inerciais estão isolados do movimento de rotação através de anéis rotativos denominados “gimbals”.

Um sistema de navegação inercial geralmente possui três acelerômetros montados sobre eixos ortogonais. Movimentos rotacionais podem ser obtidos a partir de giroscópios, que medem a velocidade de rotação em torno de um eixo. A maior contribuição de um giroscópio é determinar a orientação dos acelerômetros a todo instante (Lawrence, 1998).

A construção de um sistema de navegação inercial preciso é uma tarefa bastante complexa e conseqüentemente possui custo elevado. A complexidade é justificada basicamente por dois motivos (Sukkarieh, 2000): o alinhamento perfeito entre acelerômetros e giroscópios é uma tarefa bastante difícil, e os sinais disponibilizados por estes sensores sempre estarão contaminados por algum tipo de ruído e deriva<sup>3</sup>.

Os sistemas de navegação inercial são divididos basicamente em três categorias: Alta, média e baixa performance.

Os sistemas de alta performance apresentam pequenos níveis de ruído e deriva, custo elevado (acima de US\$100.000,00) e são utilizados principalmente nas aplicações de uso militar e na aviação comercial (Shin, 2001). Já os equipamentos de baixa e média performance (conhecidos como sistemas de baixo custo) possuem maiores níveis de ruídos e deriva, sendo que suas principais aplicações se dão no campo da navegação de veículos autônomos (terrestres e aquáticos), na robótica, entre outros. O grande inconveniente dos sistemas de baixo custo (que, em particular, é utilizado neste trabalho) é a grande quantidade de ruído e deriva presente nas medições, o que torna inviável sua utilização isolada em aplicações confiáveis de navegação.

Neste sentido grandes esforços têm sido feito para desenvolver novas técnicas que aprimorem os sistemas de baixo custo. O desafio de se desenvolver novas técnicas

---

<sup>3</sup> Taxa na qual o erro em um sensor ou sistema acumula-se com o passar do tempo.

possui seu foco principal na modelagem do sistema, pois os ruídos e derivas presentes nos sensores inerciais são de natureza aleatória.

Devido à característica aleatória dos ruídos e deriva presentes nos sistemas de navegação inercial, a modelagem matemática dos mesmos são desenvolvidas geralmente no espaço de estados discreto. Um estimador estocástico de estados denominado “Filtro de Kalman” é empregado para compor uma fusão sensorial e obter melhores estimativas de estados. A formulação do filtro de Kalman pode ser encontrada em detalhes em (Kalman, 1960) e (Brown, 1997). Na seção Anexos apresenta-se a formulação completa do filtro seguida de um exemplo de aplicação.

### **1.3. Objetivos**

Este trabalho tem por objetivo estudar, implementar e avaliar um sistema para estimar a reconstrução de trajetórias utilizando uma central inercial de baixo custo do tipo “strapdown”. Utilizando apenas este equipamento, a precisão da reconstrução é extremamente baixa, e por este motivo empregam-se técnicas de fusão sensorial.

A fusão dos dados é feita por um filtro de Kalman discreto, cuja função é processar e combinar os dados para obter as estimativas de estados de aceleração, velocidade e posição do veículo.

Inicialmente, investiga-se a adição de medidas de velocidade no processo de reconstrução.

Em seguida, emprega-se um conjunto de marcas topográficas (“landmarks”) conjuntamente com a velocidade. Em algumas aplicações importantes de navegação, “landmarks” são empregados para restringir o erro de estimação. Obviamente, quanto maior o número e mais próximos estes forem, menor será o erro. No entanto, há um custo operacional associado à instalação e manutenção dos “landmarks”.



Neste trabalho investigam-se alguns critérios para estabelecer a distribuição de “landmarks”, levando-se em conta a precisão desejada para a reconstrução.

Como a reconstrução da trajetória depende do referencial adotado, os sistemas de coordenadas utilizados na navegação inercial e suas relações de transformação são apresentados, assim como os procedimentos necessários para corrigir os efeitos da gravidade e o movimento de rotação da Terra, que afetam a leitura dos acelerômetros e giroscópios.

Para modelar o processo corretamente, são desenvolvidas as equações matemáticas relevantes ao problema da estimação inercial de trajetória. As fontes significativas de erros associadas à instrumentação empregada também são modeladas, incluindo-se algumas técnicas que visam minimizar o efeito causado por estes erros.

A reconstrução da trajetória se dá a partir de experimentos realizados nas proximidades da EPUSP, com uma central inercial montada no interior de um veículo. Os experimentos realizados se limitaram a *trajetórias admitidas aproximadamente planas*. Embora a trajetória seja estimada tridimensionalmente, a análise dos resultados se concentra na reconstrução no plano  $xy$ .

O referencial adotado para reconstrução da trajetória é o sistema de navegação local (NED) que será visto adiante.

## ***2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA***

### **2.1. Sensores inerciais**

#### **2.1.1. Acelerômetros**

Acelerômetros são sensores utilizados para medir a aceleração linear em sistemas inerciais. O sinal de saída de um acelerômetro fornece uma medida denominada *força específica*, ou seja, um acelerômetro mede a aceleração do corpo juntamente com a aceleração gravitacional, a qual deve ser compensada. Em formulação vetorial tem-se:

$$\mathbf{f} = \mathbf{a} - \mathbf{g}, \quad (2.1)$$

onde,  $\mathbf{f}$  é o vetor força específica,  $\mathbf{a}$  é vetor da aceleração com relação a um referencial inercial e  $\mathbf{g}$  é o vetor aceleração gravitacional.

Para exemplificar, admita que um corpo possui um acelerômetro fixado paralelamente ao seu eixo z (vertical) e que o mesmo encontra-se em repouso e perfeitamente nivelado sobre a superfície terrestre. Nestas condições a leitura do acelerômetro fixado ao eixo z será “-g” e, portanto deverá ser compensada. O conceito de força específica será visto em detalhes adiante.

#### **2.1.2. Giroscópios**

Os giroscópios utilizados em sistemas “strapdown” são sensores utilizados para medir movimento rotacional em sistemas inerciais. A saída de um giroscópio fornece a *taxa angular* ou *velocidade angular* e, portanto deve ser integrada para que se possa obter o ângulo de rotação.

### 2.1.3. Configuração strapdown e plataforma

“*Strapdown*” é o nome dado para um sistema de medição inercial integrado onde três acelerômetros e três giroscópios são montados sobre eixos ortogonais coincidentes e fixados sobre uma mesma base rígida (Titterton, 1997). Neste sistema a origem dos eixos dos acelerômetros e dos giroscópios deve ser coincidente e seus eixos devem ser paralelos, para que se possam realizar transformações de coordenadas.

Quando uma tríade de sensores inerciais (acelerômetros e giroscópios) é montada sobre uma base rígida e embarcado juntamente com um sistema de controle eletrônico dedicado, tem-se então uma estrutura denominada unidade de medição inercial “strapdown” ou simplesmente “UMI”. Fixando-se uma UMI num dado corpo ou veículo, tem-se uma estrutura denominada *Plataforma*. Esta estrutura passa a formar o sistema de coordenadas do veículo também denominado como sistema de coordenadas da plataforma.

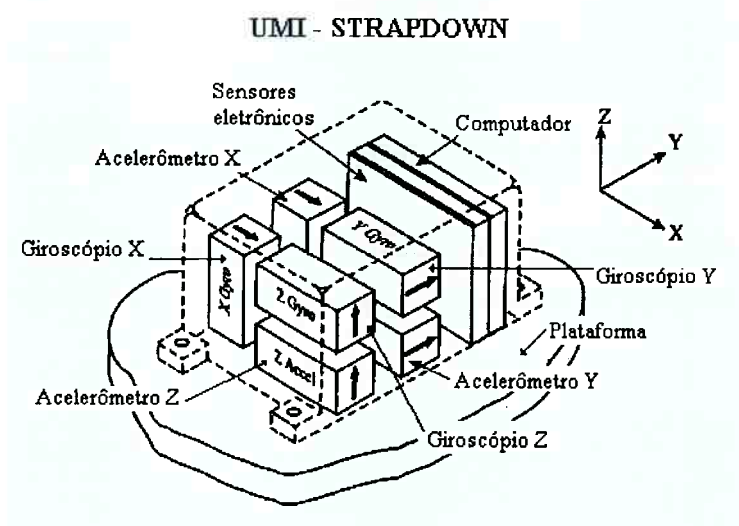


Fig. 2.1 – Configuração de uma UMI strapdown

#### 2.1.4. Ruídos e erros de sensores

As principais fontes de erros que corrompem a precisão de um sistema de navegação inercial são: imperfeição dos sensores e erros devido a distúrbios aleatórios. Os erros devido à imperfeição dos sensores podem ser identificados com elevada precisão por um processo denominado calibração e são classificados como erros determinísticos, ou seja, podem ser expressos por uma função matemática bem determinada. Já as fontes de erros de natureza aleatória não possuem uma função matemática bem determinada, podendo apenas ser descrita através da teoria de processos estocásticos<sup>4</sup> (Papoulis, 2001). A seguir são indicadas as fontes de erros mais significativas que degradam o processo de navegação inercial strapdown.

**Bias:** um erro de “bias” pode ser interpretado como sendo um nível de sinal constante ou que varia muito lentamente, independentemente do sinal de entrada, ou seja, o bias se comporta como um coeficiente linear de uma função de transferência. Mesmo sendo constante, um sinal de bias pode mudar de valor em algumas condições, por exemplo, ao se religar o equipamento.

**Fator de escala:** trata-se de um erro que é proporcional ao sinal de entrada, ou seja, o erro de fator de escala comporta-se como um erro de inclinação do coeficiente angular de uma função de transferência. Embora sejam modelados como lineares, erros deste tipo geralmente exibem algum grau de não linearidade.

**Erro de quantização:** os sinais de saída dos acelerômetros e giroscópios presentes numa UMI são obtidos em instantes discretos de tempo. Isto produz um ruído branco na saída que é proporcional à magnitude da quantização, ou seja, depende da ordem de grandeza com que um sinal elétrico é aproximado para valores diferentes daquele cuja amostra foi obtida.

---

<sup>4</sup> Processo estocástico é o nome dado a um processo onde as variáveis são aleatórias (incertas) durante o intervalo de tempo em que são medidas ou observadas.

**Drift térmico:** os sensores inerciais são afetados pela temperatura e devem ser compensados eletronicamente. Como esta compensação nunca é perfeita, a deriva térmica (drift) deve ser modelada como um processo aleatório.

**Desalinhamento:** refere-se ao desalinhamento mecânico entre eixos. Idealmente os giroscópios e os acelerômetros definem uma base ortogonal idealizada como estrutura da plataforma. Como é impossível se obter um perfeito alinhamento mecânico da plataforma na prática, descrevem-se então os erros de alinhamento de cada sensor com relação aos eixos da plataforma como constantes aleatórias.

#### 2.1.5. Classificação de uma UMI

A qualidade de uma UMI está diretamente relacionada à qualidade de seus sensores, pois os erros e ruídos dos sensores afetam *crucialmente* o desempenho da navegação inercial. UMI's "strapdown" comerciais, são divididas basicamente em três categorias: alta qualidade, média qualidade e baixa qualidade.

**Alta qualidade** refere-se a sistemas capazes de navegar e sentir as mudanças de orientações com excelente precisão por longo tempo de duração (tipicamente horas) somente com a UMI.

**Média qualidade** requer o auxílio de sensores externos para manter a capacidade oferecida pelos sistemas de alta qualidade. Sistemas de média qualidade conseguem operar durante curtos períodos de duração (tipicamente minutos) somente com a UMI.

**Baixa qualidade** requer sensores externos para proporcionar performance *útil* e são capazes de operar somente num curtíssimo intervalo de tempo (tipicamente segundos) utilizando apenas a UMI.

A tabela a seguir extraída de (Brown, 1997) mostra como são classificadas as UMI's do tipo "strapdown" segundo alguns parâmetros de sensores. Dentre estes parâmetros estão o "bias" apresentado na seção anterior e o "random walk" que será visto adiante.

Parâmetro do Sensor	Alta Qualidade	Média Qualidade	Baixa Qualidade
Bias máximo de Giroscópio	$< 0,01 \text{ } ^\circ/\text{hr}$	$0,1-1,0 \text{ } ^\circ/\text{hr}$	$10 \text{ } ^\circ/\text{hr}$
Random Walk de giroscópio	$3 \cdot 10^{-4} \sqrt{^\circ/h}$	$0,01 \sqrt{^\circ/h}$	$> 0,01 \sqrt{^\circ/h}$
Bias máximo de acelerômetro	$10-50 \text{ } \mu\text{g}$	$200-500 \text{ } \mu\text{g}$	$> 1000 \text{ } \mu\text{g}$
Random Walk de acelerômetro	$3-10 \text{ } \mu\text{g}/\sqrt{\text{Hz}}$	$50 \text{ } \mu\text{g}/\sqrt{\text{Hz}}$	$> 50 \text{ } \mu\text{g}/\sqrt{\text{Hz}}$

Tabela 2.1 – Classificação de uma UMI

## 2.2. Sistemas de coordenadas e transformações

### 2.2.1. Referenciais utilizados em navegação inercial

Os sistemas de coordenadas são utilizados para referenciar ou localizar geograficamente um determinado corpo ou veículo. Portanto para se definir a posição de um objeto, torna-se necessário especificar o sistema de coordenadas no qual o objeto está representado. Segundo (Grewal, 2001) os sistemas de coordenadas utilizados em navegação inercial são constituídos basicamente por: sistemas de coordenadas cartesianas e sistemas de coordenadas esféricas, sendo que os mais utilizados são:

**Sistema ECI (Earth-Centered-Inertial)** – sua origem está no centro de massa da Terra sendo que seu eixo  $x$  aponta para o Sol passando pela linha do equador, seu eixo  $z$  passa pelo pólo norte e seu eixo  $y$  é orientado seguindo a regra da mão direita. O sistema ECI é dito inercial por ser considerado fixo em relação a um corpo estelar distante.

**Sistema ECEF (Earth-Centered, Earth-Fixed)** – sua origem está no centro de massa da Terra sendo que seu eixo  $x$  passa pelo cruzamento entre a linha do equador e o meridiano de Greenwich, seu eixo  $z$  passa pelo pólo norte e seu eixo  $y$  é orientado seguindo a regra da mão direita.

**Sistema LPT (Local Tangent Plane)** – são designados como sistemas de coordenadas locais, onde a Terra é representada como uma superfície plana no ponto onde a navegação está sendo analisada. Os sistemas LPT são compostos pelos seguintes sistemas de coordenadas:

**Sistema NED (North-East-Down)** – conhecido como *sistema de navegação local*, sua origem pode ser estabelecida em qualquer ponto do globo terrestre, sendo que seu eixo  $x$  aponta para o norte geográfico, seu eixo  $z$  aponta para o centro da Terra e seu eixo  $y$  é referenciado de acordo com regra da mão direita. Este sistema de coordenadas é amplamente utilizado para navegação terrestre.

**Sistema ENU (East-North-Up)** – também é um *sistema de navegação local*, sua origem pode ser estabelecida em qualquer ponto do globo terrestre, sendo que seu eixo  $x$  aponta para o norte geográfico, seu eixo  $z$  é normal à superfície da Terra e aponta para cima e seu eixo  $y$  é referenciado de acordo com regra da mão direita. Este sistema de coordenadas é amplamente utilizado para navegação aérea.

**Sistema RPY (Roll-Pitch-Yaw)** – conhecido como *sistema de navegação da plataforma*, é um sistema cujos eixos são fixos num veículo, constituindo assim uma estrutura denominada “estrutura móvel”. O eixo  $x$  (eixo de roll) do sistema RPY deve apontar para a direção frontal do movimento do veículo, o eixo  $y$  (eixo de pitch) deve ser ortogonal a  $x$  e apontar para a direita enquanto que o eixo  $z$  (eixo de yaw) aponta para baixo (regra da mão direita). A figura 2.2 mostra como são representados os eixos onde ocorrem os movimentos de rotação denominados: “roll-pitch-yaw” (RPY) que podem ser traduzidos como “rolamento – arfagem – guinada”.

**Sistema Curvilíneo ou Geodésico** – trata-se de um sistema de coordenadas esféricas, onde a localização de um corpo é representada por um deslocamento angular anti-horário cuja origem é o meridiano de Greenwich denominado “*longitude*”, seguido por um movimento angular também anti-horário cuja origem é a linha do equador denominado “*latitude*” e uma cota de elevação referenciada ao nível do mar denominada “*altitude*”.

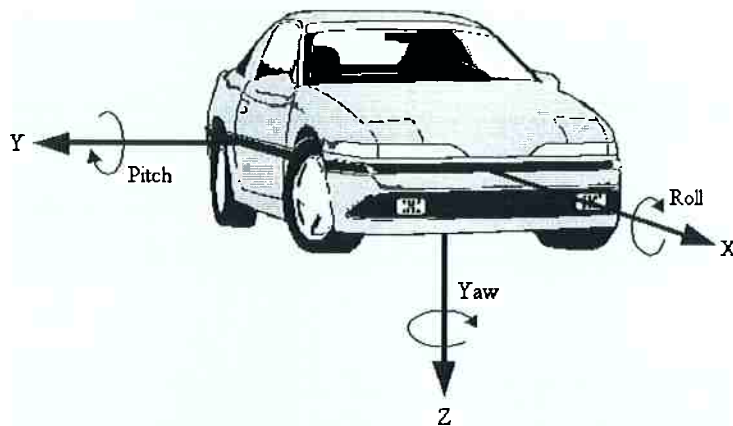


Fig. 2.2 – Sistema de coordenadas roll-pitch-yaw (RPY)



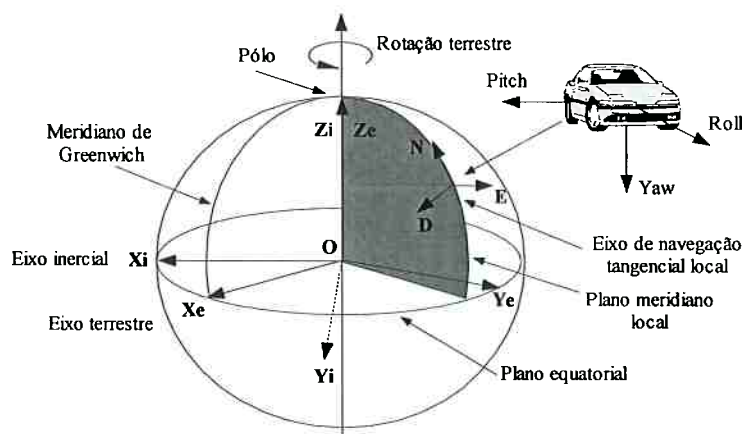


Fig. 2.3 – Sistemas de coordenadas: inercial, terrestre, local e da plataforma

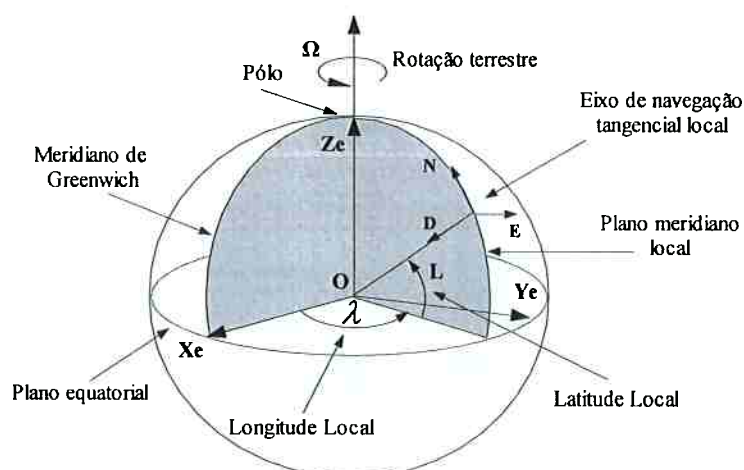


Fig. 2.4 – Sistemas de coordenadas: terrestre, local e geodésico

A figura 2.3 ilustra a relação entre os quatro sistemas de coordenadas. No globo terrestre estão os sistemas: ECI cujos eixos são designados pelo prefixo (i), o sistema ECEF com eixos designados pelo prefixo (e) e o sistema NED ou sistema de navegação local, onde os eixos são designados pelas letras (N, E, D).

O sistema RPY está fixo ao corpo do veículo (plataforma) que por sua vez se movimenta com o sistema de navegação local. A figura 2.4 mostra a relação entre os sistemas de navegação local, terrestre e geodésico.

### 2.2.2. Transformação de coordenadas

As transformações de coordenadas são utilizadas para converter um vetor representado num determinado sistema de coordenadas para um outro sistema de coordenadas conveniente<sup>5</sup>. Para exemplificar, considere um vetor de acelerações tridimensional no sistema de navegação local NED que é representado por:

$$\mathbf{a}_n = \mathbf{a}_{NED} = [a_N \quad a_N \quad a_N]^T \quad (2.2)$$

A matriz de transformação de coordenadas que leva o vetor de aceleração do sistema de navegação local NED para o sistema de navegação da plataforma RPY é definida como:

$$\mathbf{C}_n^p = \mathbf{C}_{NED}^{RPY} \quad (2.3)$$

Assim o novo vetor de acelerações no sistema RPY é dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_p &= \mathbf{C}_n^p \mathbf{a}_n \\ \mathbf{a}_{RPY} &= \mathbf{C}_{NED}^{RPY} \mathbf{a}_{NED} \end{aligned} \quad (2.4)$$

As transformações de coordenadas podem ser obtidas por matriz de *Co-senos Diretores* (MCD), *Ângulos de Euler* ou *Quaternions*. Dependendo da aplicação, um tipo de transformação pode ser mais adequado que o outro, como no caso dos quaternions que evita o problema da singularidade na matriz de transformação de coordenadas (MTC<sup>6</sup>) também conhecido como “Gimbal Lock<sup>7</sup>”. Como neste

---

<sup>5</sup> Nas equações a seguir, os índices *i*, *e*, *n* e *p* são utilizados para indicar os referenciais: inercial (ECI), terrestre (ECEF), da navegação local (NED) e da plataforma (RPY) respectivamente.

<sup>6</sup> Neste texto as notações “Matriz de Transformação de Coordenadas”, “Matriz de Rotação” e “Matriz de Orientação” são sinônimas e serão utilizadas convenientemente.

<sup>7</sup> “Gimbal Lock” é a impossibilidade de se obter a matriz de transformação de coordenadas, devido a uma ou mais matrizes de rotação estarem próximas da singularidade, ou seja, quando os movimentos angulares estão próximos à  $\pm 90^\circ$  os co-senos das matrizes tornam-se nulos.

trabalho não existe a possibilidade de ocorrer a singularidade da MTC devido às condições dinâmicas nas quais o sistema será ensaiado, optou-se pela utilização das matrizes de transformação de coordenadas: “Ângulos de Euler” e “Co-senos Diretores”. A seguir são apresentadas as matrizes de transformação entre os vários sistemas de coordenadas, onde se optou pela apresentação direta das mesmas. Na seção “Anexos” estas transformações são apresentadas com mais detalhes.

### 2.2.2.1. Transformações de coordenadas entre o sistema RPY e o sistema NED por Ângulos de Euler

A seguir são mostradas as matrizes “Ângulos de Euler” que levam um vetor representado no sistema de coordenadas da plataforma RPY para o sistema de coordenadas de navegação local NED (equação 2.5), do sistema NED para RPY (equação 2.6).

$$\mathbf{C}_p^n = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{C}_p^n = \begin{bmatrix} \cos\theta \cos\psi & -\cos\phi \sin\psi + \sin\phi \sin\theta \cos\psi & \sin\phi \sin\psi + \cos\phi \sin\theta \cos\psi \\ \cos\theta \sin\psi & \cos\phi \cos\psi + \sin\phi \sin\theta \sin\psi & -\sin\phi \cos\psi + \cos\phi \sin\theta \sin\psi \\ -\sin\theta & \sin\phi \cos\theta & \cos\phi \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_n^p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$\mathbf{C}_n^p = \begin{bmatrix} \cos\theta \cos\psi & \cos\theta \sin\psi & -\sin\theta \\ -\cos\phi \sin\psi + \sin\phi \sin\theta \cos\psi & \cos\phi \cos\psi + \sin\phi \sin\theta \sin\psi & \sin\phi \cos\theta \\ \sin\phi \sin\psi + \cos\phi \sin\theta \cos\psi & -\sin\phi \cos\psi + \cos\phi \sin\theta \sin\psi & \cos\phi \cos\theta \end{bmatrix}$$

Utilizando-se sensores angulares (giroscópios) com frequências de amostragem elevadas, o período de amostragem é muito pequeno e  $\Delta T$  tende a zero, admitindo-se ainda que a leitura dos giroscópios não se alteram significativamente entre duas

leituras consecutivas, tem-se como conseqüência disso que pequenos ângulos de rotação serão obtidos ao se integrar às velocidades angulares entre duas leituras consecutivas.

Para pequenos ângulos de rotação as equações 2.5 e 2.6 podem ser linearizadas e, portanto podem-se admitir as seguintes aproximações:  $\text{sen}\phi \rightarrow \phi$ ,  $\text{sen}\theta \rightarrow \theta$ ,  $\text{sen}\psi \rightarrow \psi$  e os co-senos destes ângulos se tornam unitários. Neste *caso particular*, as novas matrizes de transformações de coordenadas são aproximadas por:

$$\mathbf{C}_p^n = \mathbf{C}_{RPY}^{NED} = \begin{bmatrix} 1 & -\psi & \theta \\ \psi & 1 & -\phi \\ -\theta & \phi & 1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{C}_n^p = \mathbf{C}_{NED}^{RPY} = \begin{bmatrix} 1 & \psi & -\theta \\ -\psi & 1 & \phi \\ \theta & -\phi & 1 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

onde:  $\psi$  é o ângulo de rotação positiva sobre o eixo  $z$  (ângulo de yaw),  $\theta$  é o ângulo de rotação positiva sobre o novo eixo  $y$  (ângulo de pitch) e  $\phi$  é o ângulo de rotação positiva sobre o eixo  $x$  resultante (ângulo de roll)

### Propagação dos ângulos de Euler no tempo

Os ângulos de Euler  $\phi$ ,  $\theta$  e  $\psi$  são obtidos pelo conjunto de três rotações em relação a uma plataforma estável num dado sistema de navegação inercial (Titterton, 1197). Conseqüentemente  $\dot{\phi}$ ,  $\dot{\theta}$  e  $\dot{\psi}$  são as três componentes das velocidades angulares no mesmo referencial. As velocidades angulares  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  e  $\omega_z$  do sistema de coordenadas da plataforma RPY podem ser relacionadas com  $\dot{\phi}$ ,  $\dot{\theta}$  e  $\dot{\psi}$  do sistema de coordenadas de navegação NED, por:

$$\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Arranjando a equação acima e expressando-a na forma das velocidades angulares do sistema NED obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= (\omega_y \sin\phi + \omega_z \cos\phi) \tan\theta + \omega_x \\ \dot{\theta} &= \omega_y \cos\phi - \omega_z \sin\phi \\ \dot{\psi} &= (\omega_y \sin\phi + \omega_z \cos\phi) \sec\theta \end{aligned} \quad (2.10)$$

Estas equações podem ser utilizadas num sistema strapdown para atualizar os ângulos de Euler obtidos no sistema RPY (giroscópios), para o sistema NED. Entretanto o uso destas equações está limitado até que as soluções para  $\phi$  e  $\psi$  não se tornem indefinidas, ou seja, até que não ocorra a singularidade “gimbal lock”, onde  $\theta = \pm 90^\circ$ .

#### 2.2.2.2. Transformações de coordenadas entre o sistema RPY e o sistema NED por Co-senos Diretores

A transformação de coordenadas através da *matriz de co-senos diretores* (MCD) é definida por uma matriz 3x3, cujas colunas representam os vetores unitários no eixo da plataforma e projetados ao longo do sistema de coordenadas de referência (neste exemplo o sistema de referência é o sistema de navegação local NED).

$$\mathbf{C}_p^n = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

O elemento da  $i$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna representam o co-seno do ângulo entre o eixo do sistema de coordenadas de referência  $i$  e o eixo  $j$  do sistema de coordenadas da plataforma.

Um vetor definido no sistema de coordenadas da plataforma pode ser expresso no sistema de coordenadas de navegação por:

$$\mathbf{r}^n = \mathbf{C}_p^n \mathbf{r}^p \quad (2.12)$$

onde a matriz  $\mathbf{C}_p^n$  é aquela obtida através dos “*Ângulos de Euler*” (equação 2.5).

### Propagação da matriz co-seno diretor no tempo

A matriz de transformação co-seno diretor se propaga no tempo através da seguinte equação:

$$\dot{\mathbf{C}}_p^n = \mathbf{C}_p^n \boldsymbol{\Omega}_{np}^p \quad (2.13)$$

Onde:

$$\boldsymbol{\Omega}_{np}^p = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Na equação 2.13,  $\mathbf{C}_p^n$  é a matriz de orientação inicial (também conhecida como matriz de alinhamento inicial) e  $\boldsymbol{\Omega}_{np}^p$  é a matriz de propagação da velocidade de rotação do sistema da plataforma (RPY) em relação ao sistema de navegação local (NED).

### 2.2.2.3. Transformações de coordenadas entre o sistema NED e o sistema ECEF

Esta seção apresenta a matrizes de transformação do sistema de navegação local NED para o sistema Terra-Fixa ECEF (equação 15) e vice-versa (equação 16). Estas transformações são obtidas a partir da longitude  $\lambda$  e da latitude  $L$ .

$$\mathbf{C}_n^e = \mathbf{C}_{NED}^{ECEF} = \begin{bmatrix} \cos \lambda & \sin \lambda & 0 \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos L & 0 & -\sin L \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin L & 0 & \cos L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$\mathbf{C}_n^e = \mathbf{C}_{NED}^{ECEF} = \begin{bmatrix} -\sin L \cos \lambda & -\sin \lambda & -\cos L \cos \lambda \\ -\sin L \sin \lambda & \cos \lambda & -\cos L \sin \lambda \\ \cos L & 0 & -\sin L \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_e^n = \mathbf{C}_{ECEF}^{NED} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos L & 0 & \sin L \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin L & 0 & \cos L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \lambda & -\sin \lambda & 0 \\ \sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$\mathbf{C}_e^n = \mathbf{C}_{ECEF}^{NED} = \begin{bmatrix} -\sin L \cos \lambda & -\sin L \sin \lambda & \cos L \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\cos L \cos \lambda & -\cos L \sin \lambda & -\sin L \end{bmatrix}$$

### 2.2.2.4. Transformação de coordenadas entre o sistema ECEF e o sistema ECI

As equações 2.17 e 2.18 representam as matrizes de transformação de coordenadas do sistema ECEF para ECI e do sistema ECI para ECEF respectivamente. Estas transformações são obtidas a partir da longitude  $\lambda$ .

$$\mathbf{C}_e^i = \mathbf{C}_{ECEF}^{ECI} = \begin{bmatrix} \cos \lambda & -\sin \lambda & 0 \\ \sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

$$\mathbf{C}_i^e = \mathbf{C}_{ECI}^{ECEF} = \begin{bmatrix} \cos \lambda & \sin \lambda & 0 \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

### 2.3. Modelagem terrestre da navegação inercial strapdown

#### 2.3.1. Conceituando a aceleração denominada força específica

Conforme mencionado anteriormente, um acelerômetro fornece uma medida de aceleração denominada força específica. Para conceituar esta aceleração considere a figura 2.5, onde uma força peso  $\mathbf{P}$  atua sobre uma massa  $m$  e, o corpo sofre um deslocamento produzido por uma força  $\mathbf{F}$ .

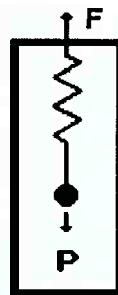


Fig. 2.5 – Forças atuando sobre um acelerômetro

A primeira lei de Newton aplicada ao sistema produz:

$$\sum \text{Forças} = \mathbf{F} + \mathbf{P} = m\mathbf{a}_i, \quad (2.19)$$

a aceleração inercial é obtida por:

$$\mathbf{a}_i = \frac{\mathbf{F}}{m} + \frac{\mathbf{P}}{m} = \mathbf{f} + \mathbf{g}, \quad (2.20)$$



assim, a aceleração sentida pelo acelerômetro, é aquela que produz o movimento, ou seja, é a aceleração denominada força específica  $f$ , dada por:

$$\mathbf{f} = \mathbf{a}_i - \mathbf{g} \quad (2.21)$$

### 2.3.2. Modelagem da navegação num sistema de coordenadas fixo

Considere a situação onde se deseja navegar em um sistema de coordenadas fixo, ou seja, sem aceleração e sem rotação. As componentes da força específica e da aceleração gravitacional são somadas para determinar as componentes da aceleração em relação a um sistema de coordenadas fixo. Estas quantidades podem então ser integradas uma vez para se obter estimativas da velocidade e duas vezes para se obter estimativas da posição.

Este processo pode ser expresso matematicamente da seguinte forma. Seja  $\mathbf{r}$  um vetor posição que mapeia o ponto  $P$  em relação à origem do sistema de coordenadas inerciais (figura 2.6 a).

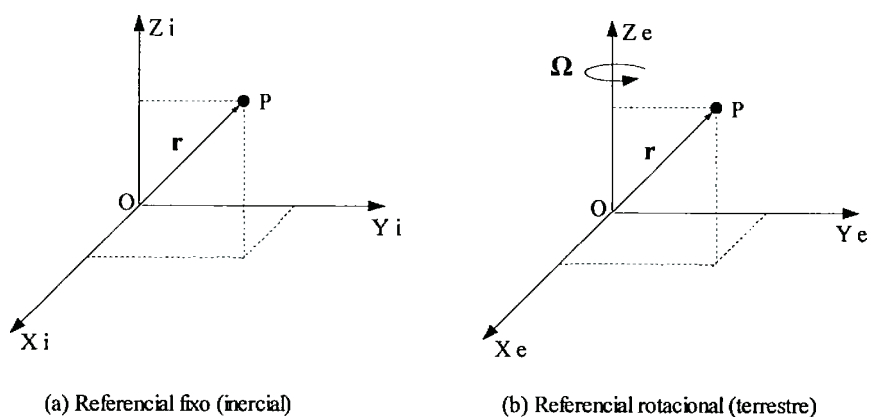


Fig. 2.6 – Sistemas de coordenadas fixo e móvel

A velocidade e a aceleração de  $P$  em relação ao sistema de coordenadas inercial é dada por:

$$\mathbf{v}_i = \left[ \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right]_i \quad (2.22)$$

$$\mathbf{a}_i = \left[ \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right]_i \quad (2.23)$$

Dado que os acelerômetros medem a força específica que atua sobre o ponto  $P$ , tem-se que:

$$\left[ \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right]_i = \mathbf{f} + \mathbf{g} \quad (2.24)$$

A equação acima é chamada de equação da navegação inercial, onde a primeira integração fornece a velocidade e a segunda integração fornece a posição.

### 2.3.3. Modelagem da navegação num sistema de coordenadas girante

Na prática, geralmente necessita-se obter informações sobre a velocidade e a aceleração de um veículo em relação a um sistema de coordenadas girante. Este é o caso quando se navega na superfície terrestre. Nesta situação surge a atuação de forças aparentes sobre o veículo devido ao movimento de rotação terrestre. O teorema de Coriolis relaciona as velocidades de deslocamento de um veículo sobre um referencial girante e um referencial inercial através da seguinte equação:

$$\mathbf{v}_e = \left[ \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right]_e = \left[ \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right]_i - \boldsymbol{\omega}_{ie} \otimes \mathbf{r} \quad (2.25)$$

$$\mathbf{v}_e = \left[ \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right]_e = \mathbf{v}_i - \boldsymbol{\omega}_{ie} \otimes \mathbf{r}, \quad (2.26)$$

onde  $\boldsymbol{\omega}_{ie} = [0 \ 0 \ \boldsymbol{\Omega}]^T$  é o vetor que expressa a velocidade de rotação da Terra em relação ao sistema de referencia inercial e o símbolo  $\otimes$  representa o produto vetorial.

#### 2.3.4. Modelagem da navegação no sistema de coordenadas inercial ECI

Neste sistema se deseja determinar a velocidade de deslocamento de um veículo sobre a superfície da Terra cujos eixos coincidem com os eixos do sistema de coordenadas inercial. Esta velocidade é denotada pelo símbolo  $\mathbf{v}_e^i$  e pode ser obtida expressando-se a equação da navegação (equação 2.24) em termos da velocidade terrestre por:

$$\mathbf{v}_e = \left[ \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right]_e \quad (2.27)$$

A velocidade inercial pode ser obtida por:

$$\mathbf{v}_i = \left[ \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right]_i = \left[ \frac{d\mathbf{r}_e}{dt} \right]_i = \left[ \frac{d\mathbf{r}_e}{dt} \right]_e + \boldsymbol{\omega}_{ie} \otimes \mathbf{r}_e \quad (2.28)$$

Cuja derivada produz a aceleração inercial:

$$\mathbf{a}_i = \left[ \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right]_i = \left[ \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} \right]_i + \frac{d}{dt} [\boldsymbol{\omega}_{ie} \otimes \mathbf{r}_e]_i \quad (2.29)$$

$$\mathbf{a}_i = \left[ \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right]_i = \left[ \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} \right]_i + \boldsymbol{\omega}_{ie} \otimes \left[ \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right]_i + \frac{d\boldsymbol{\omega}_{ie}}{dt} \otimes \mathbf{r} \quad (2.30)$$

Como  $\frac{d\boldsymbol{\omega}_{ie}}{dt} = 0$  e  $\left[ \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right]_i = \left[ \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right]_e + \boldsymbol{\omega}_{ie} \otimes \mathbf{r} = \mathbf{v}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie} \otimes \mathbf{r}$ , obtém-se:

$$\mathbf{a}_i = \left[ \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right]_i = \left[ \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} \right]_i + \boldsymbol{\omega}_{ie} \otimes (\mathbf{v}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie} \otimes \mathbf{r}) \quad (2.31)$$

$$\mathbf{a}_i = \left[ \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right]_i = \left[ \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} \right]_i + \boldsymbol{\omega}_{ie} \otimes \mathbf{v}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie} \otimes (\boldsymbol{\omega}_{ie} \otimes \mathbf{r}) \quad (2.32)$$

Lembrando que  $\mathbf{a}_i = \left[ \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right]_i = \mathbf{f} + \mathbf{g}$ , substituindo na equação acima obtém-se a *equação da navegação inercial no sistema de coordenadas inercial (ECI)*:

$$\left[ \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} \right]_i = \mathbf{f} - \boldsymbol{\omega}_{ie} \otimes \mathbf{v}_e + \mathbf{g} - \boldsymbol{\omega}_{ie} \otimes (\boldsymbol{\omega}_{ie} \otimes \mathbf{r}) \quad (2.33)$$

nesta equação  $\mathbf{f}$  representa a aceleração denominada *força específica*, na qual o sistema de navegação está submetido, enquanto que o termo  $\boldsymbol{\omega}_{ie} \otimes \mathbf{v}_e$  representa a aceleração causada pela velocidade do veículo movendo-se sobre a Terra, esta aceleração é geralmente chamada de aceleração de Coriolis. O termo  $\boldsymbol{\omega}_{ie} \otimes (\boldsymbol{\omega}_{ie} \otimes \mathbf{r})$  define a aceleração centrípeta experimentada pela plataforma devido a rotação da Terra, e não pode ser distinguida da aceleração gravitacional.

A soma vetorial da aceleração gravitacional  $\mathbf{g}$  e da aceleração centrípeta constitui uma componente gravitacional denominada *gravidade local* “ $\mathbf{g}_l$ ”, ou seja, esta gravidade é aquela em que um prumo fica normal a superfície em qualquer ponto do globo terrestre, como mostra a figura a seguir.

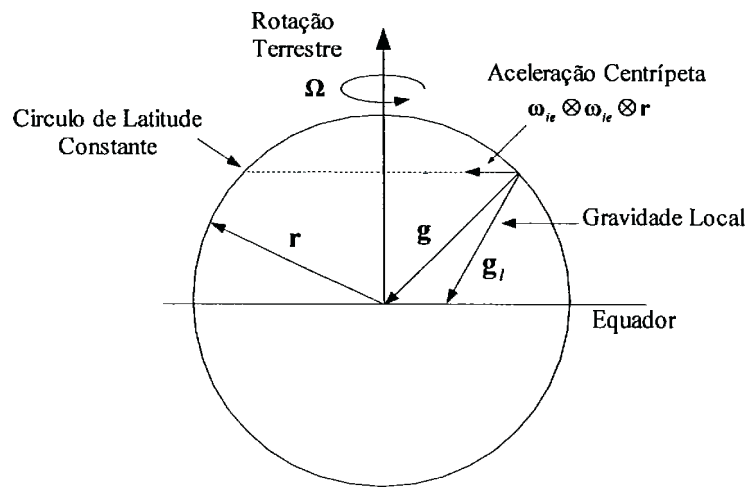


Fig. 2.7 – Aceleração centrípeta e gravidade local

Analisando a figura 2.7, conclui-se que  $\mathbf{g} = \mathbf{g}_l + \boldsymbol{\omega}_{ie} \otimes (\boldsymbol{\omega}_{ie} \otimes \mathbf{r})$ , substituindo na equação 2.33, obtém-se:

$$\left[ \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} \right]_i = \mathbf{f} - \boldsymbol{\omega}_{ie} \otimes \mathbf{v}_e + \mathbf{g}_l \quad (2.34)$$

Esta equação pode ser expressa no sistema inercial, por:

$$\dot{\mathbf{v}}_e^i = \mathbf{f}^i - \boldsymbol{\omega}_{ie}^i \otimes \mathbf{v}_e^i + \mathbf{g}_l^i \quad (2.35)$$

Como os acelerômetros medem a força específica no sistema de coordenadas da plataforma RPY, é necessário aplicar uma transformação de coordenadas. Assim a equação 2.35, pode ser expressa como:

$$\dot{\mathbf{v}}_e^i = \mathbf{C}_p^i \mathbf{f}^p - \boldsymbol{\omega}_{ie}^i \otimes \mathbf{v}_e^i + \mathbf{g}_l^i \quad (2.36)$$

### 2.3.5. Modelagem da navegação no sistema de coordenadas terrestre ECEF

Neste sistema, a velocidade de deslocamento terrestre  $v_e$  é expressa ou projetada em um sistema de coordenadas denominado Terra-Centralizada, Terra-fixa (ECEF), e passa a ser denominada  $v_e^e$ . Através da equação de Coriolis, é conhecido que a taxa de variação da velocidade terrestre  $v_e$  em relação ao eixo da Terra pode ser expressa em termos do sistema inercial por:

$$\left[ \frac{dv_e}{dt} \right]_e = \left[ \frac{dv_e}{dt} \right]_i - \omega_{ie} \otimes v_e \quad (2.37)$$

A derivada da velocidade em relação ao referencial inercial é:

$$\left[ \frac{dv_e}{dt} \right]_i = \mathbf{f} - \omega_{ie} \otimes v_e + \mathbf{g}_l \quad (2.38)$$

Substituindo na equação 2.35 obtém-se a *equação da navegação inercial no sistema de coordenadas Terra-Centralizada Terra-Fixa (ECEF)*:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{dv_e}{dt} \right]_e &= \mathbf{f} - \omega_{ie} \otimes v_e + \mathbf{g}_l - \omega_{ie} \otimes v_e \\ \left[ \frac{dv_e}{dt} \right]_e &= \mathbf{f} - 2\omega_{ie} \otimes v_e + \mathbf{g}_l \end{aligned} \quad (2.39)$$

Que pode ser expressa no sistema ECEF, por:

$$\dot{v}_e^e = \mathbf{f}^e - 2\omega_{ie}^e \otimes v_e^e + \mathbf{g}_l^e \quad (2.40)$$

Para corrigir as saídas dos acelerômetros que fornecem a força específica no sistema RPY, aplica-se a transformação de coordenadas e chega-se à:

$$\dot{\mathbf{v}}_e^e = \mathbf{C}_p^e \mathbf{f}^p - 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \otimes \mathbf{v}_e^e + \mathbf{g}_l^e \quad (2.41)$$

onde  $\mathbf{C}_p^e$  é a matriz de rotação usada para transformar o vetor força específica (corpo do veículo) para o sistema ECEF (Terra-Fixa). Esta matriz se propaga através da seguinte equação:

$$\dot{\mathbf{C}}_p^e = \mathbf{C}_p^e \boldsymbol{\Omega}_{ep}^p \quad (2.42)$$

onde  $\boldsymbol{\Omega}_{ep}^p$  é a forma anti-simétrica ( $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$ ) de  $\boldsymbol{\omega}_{ep}^p$  que é a matriz das velocidades angulares dos giroscópios em relação ao sistema de coordenadas ECEF. Esta matriz é obtida derivando-se as velocidades angulares que são expressas no sistema de coordenadas da plataforma  $\boldsymbol{\omega}_{ip}^p$ , e a velocidade de rotação terrestre  $\boldsymbol{\omega}_{ie}^e$ , que é expressa no sistema ECI e projetada no sistema de coordenadas ECEF.

$$\boldsymbol{\omega}_{ep}^p = \boldsymbol{\omega}_{ip}^p - \mathbf{C}_e^p \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \quad (2.43)$$

onde:  $\mathbf{C}_e^p = [\mathbf{C}_p^e]^T$

### 2.3.6. Modelagem da navegação no sistema de coordenadas da navegação local NED

Para se navegar longas distancias sobre a Terra, as informações de navegação são mais requeridas no sistema geográfico local ou de navegação local NED em termos das componentes de velocidade Norte e Leste ou em termos da Longitude, Latitude e Altitude. Embora tais informações possam ser computadas utilizando as estimativas de posição fornecidas pelos sistemas ECI ou ECEF, elas envolvem transformações das velocidades  $\mathbf{v}_e^i$ ,  $\mathbf{v}_e^e$ . Estas dificuldades aumentam ao representar o campo gravitacional com precisão em um computador. Por estas razões, o sistema de

referência *navegação local*, descrito a seguir é freqüentemente utilizado quando se navega sobre a superfície terrestre (Chatfield, 1997).

Neste modelo, a velocidade terrestre da plataforma  $\mathbf{v}_e$  é expressa no sistema de coordenadas da navegação local para fornecer  $\mathbf{v}_e^n$ . A taxa de variação da velocidade  $\mathbf{v}_e^n$  em relação ao eixo de navegação local pode ser expressa em termos da taxa de variação da velocidade no eixo inercial como:

$$\left[ \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} \right]_n = \left[ \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} \right]_i - [\boldsymbol{\omega}_{ie} + \boldsymbol{\omega}_{en}] \otimes \mathbf{v}_e \quad (2.44)$$

como  $\left[ \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} \right]_i = \mathbf{f} - \boldsymbol{\omega}_{ie} \otimes \mathbf{v}_e + \mathbf{g}_l$ , obtém-se a *equação da navegação inercial no sistema de coordenadas da navegação local NED*:

$$\left[ \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} \right]_e = \mathbf{f} - [2\boldsymbol{\omega}_{ie} + \boldsymbol{\omega}_{en}] \otimes \mathbf{v}_e + \mathbf{g}_l \quad (2.45)$$

Convertendo-se as saídas dos acelerômetros, a equação anterior pode ser expressa no sistema de coordenadas da navegação local NED, por:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_e^n &= \mathbf{C}_p^n \mathbf{f}^p - [2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n] \otimes \mathbf{v}_e^n + \mathbf{g}_l^n \\ \dot{\mathbf{v}}_e^n &= \mathbf{f}^n - [2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n] \otimes \mathbf{v}_e^n + \mathbf{g}_l^n \end{aligned} \quad (2.46)$$

onde  $\mathbf{C}_p^n$  é a matriz de rotação usada para transformar o vetor força específica da plataforma para o sistema NED. Esta matriz propaga-se através da seguinte equação:

$$\dot{\mathbf{C}}_p^n = \mathbf{C}_p^n \boldsymbol{\Omega}_{nb}^p \quad (2.47)$$



onde  $\Omega_{np}^p$  é a forma anti-simétrica de  $\omega_{np}^p$  que é a matriz de velocidade angular dos giroscópios em relação ao sistema de coordenadas navegação local. Esta matriz é obtida derivando-se a as velocidades angulares expressas no sistema de referência da plataforma  $\omega_{ip}^p$  e a velocidade de rotação terrestre  $\omega_{in}$ , onde:  $\omega_{in} = \omega_{ie} + \omega_{en}$

$$\omega_{np}^p = \omega_{ip}^p - C_n^p [\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n] \quad (2.48)$$

### 2.3.7. Representação da navegação local NED através das coordenadas curvilíneas ou geodésicas

A aceleração de um sistema de navegação inercial referenciada no sistema de navegação local NED é expressa pela seguinte equação:

$$\dot{\mathbf{v}}_e^n = \mathbf{f}^n - [2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n] \otimes \mathbf{v}_e^n + \mathbf{g}_l^n \quad (2.49)$$

Nesta equação  $\mathbf{v}_e^n$  representa a velocidade da plataforma em relação a superfície terrestre, expressa no sistema NED por:

$$\mathbf{v}_e^n = [v_N \quad v_E \quad v_D]^T \quad (2.50)$$

Neste vetor, as componentes  $v_N$ ,  $v_E$  e  $v_D$ , representam as velocidades nos sentidos norte, leste e para baixo, respectivamente.

A componente  $\mathbf{f}^n$  representa o vetor de acelerações (força específica) fornecido pelos acelerômetros no referencial de navegação local, e pode ser representada através de:

$$\mathbf{f}^n = [a_N \quad a_E \quad a_D]^T = [\dot{v}_N \quad \dot{v}_E \quad \dot{v}_D]^T \quad (2.51)$$

O vetor  $\omega_{ie}^n$ , é o vetor de velocidade de rotação da Terra em relação ao referencial inercial, expresso no sistema de coordenadas de navegação local, e pode ser obtido por:

$$\omega_{ie}^n = C_e^n \cdot \omega_{ie}^e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos L & 0 & \sin L \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin L & 0 & \cos L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \lambda & -\sin \lambda & 0 \\ \sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega \cos L \\ 0 \\ -\Omega \sin L \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

$\omega_{en}^n$  representa a taxa de rotação do sistema NED em relação ao sistema ECEF. O vetor  $\omega_{en}^n$  também é denominado como *vetor taxa de transporte* (Titterton, 1997), e pode ser expresso em termos das coordenadas geodésicas: latitude, longitude e altitude por:

$$\omega_{en}^n = [\dot{\lambda} \cos L \quad -\dot{L} \quad -\dot{\lambda} \sin L]^T \quad (2.53)$$

as componentes  $\dot{\lambda}$  e  $\dot{L}$  representam as taxas de variações (derivadas) da longitude e latitude respectivamente, podendo ser representadas por:

$$\dot{\lambda} = \frac{v_E}{(R_0 + h) \cos L} \quad (2.54)$$

$$\dot{L} = \frac{v_N}{(R_0 + h)} \quad (2.55)$$

substituindo  $\dot{\lambda}$  e  $\dot{L}$  na equação 2.53, tem-se:

$$\omega_{en}^n = \left[ \frac{v_E}{(R_0 + h)} \quad -\frac{v_N}{(R_0 + h)} \quad -\frac{v_E}{(R_0 + h)} \tan L \right]^T, \quad (2.56)$$

onde  $R_0$  é o raio da Terra e  $h$  é a altitude da plataforma representada no sistema NED.

$\mathbf{g}_l$  é a componente gravitacional local que inclui os efeitos combinados da gravitação terrestre  $\mathbf{g}$  e da aceleração centrípeta  $\boldsymbol{\omega}_{ie} \otimes \boldsymbol{\omega}_{ie} \otimes \mathbf{r}$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_l^n &= \mathbf{g}^n - \boldsymbol{\omega}_{ie}^n \otimes (\boldsymbol{\omega}_{ie}^n \otimes \mathbf{R}) \\ \mathbf{g}_l^n &= \mathbf{g}^n - \boldsymbol{\omega}_{ie}^n \otimes (\boldsymbol{\omega}_{ie}^n \otimes (R_0 + h))\end{aligned}\quad (2.57)$$

Substituindo-se a equação 2.52 na equação 2.57 e desenvolvendo o produto vetorial, obtém-se uma representação para a gravidade local, dada por:

$$\mathbf{g}_l^n = \mathbf{g}^n - \left[ \begin{array}{cc} \frac{\Omega^2 (R_0 + h) \sin 2L}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\Omega^2 (R_0 + h) (1 + \cos 2L)}{2} \end{array} \right]^T \quad (2.58)$$

As componentes da força específica  $\mathbf{f}^n$ , que são as saídas dos acelerômetros, podem ser expressas no sistema NED através das coordenadas geodésicas (Titterton, 1997), pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned}a_N &= \dot{v}_N = f_N - v_E (2\Omega + \dot{\lambda}) \sin L + v_D \dot{L} + \xi g \\ a_N &= f_N - 2\Omega v_E \sin L + \frac{(v_N v_D - v_E^2 \tan L)}{(R_0 + h)} + \xi g\end{aligned}\quad (2.59)$$

$$\begin{aligned}a_E &= \dot{v}_E = f_E + v_N (2\Omega + \dot{\lambda}) \sin L + v_D (2\Omega + \dot{\lambda}) \cos L - \eta g \\ a_E &= f_E - 2\Omega (v_N \sin L - v_D \cos L) + \frac{v_E}{(R_0 + h)} (v_D - v_N \tan L) - \eta g\end{aligned}\quad (2.60)$$

$$\begin{aligned}a_D &= \dot{v}_D = f_D - v_E (2\Omega + \dot{\lambda}) \cos L - v_N \dot{L} + g \\ a_D &= f_D - 2\Omega v_E \cos L - \frac{(v_E^2 + v_N^2)}{(R_0 + h)} + g\end{aligned}\quad (2.61)$$

onde  $\xi$  e  $\eta$  representam as deflexões angulares e serão discutidas adiante.

### 2.3.8. O formato da Terra segundo a convenção WGS-84

O modelo que adota a Terra como uma esfera perfeita, não é suficiente para representar a navegação inercial de precisão. Neste sentido um modelo mais realista deve ser adotado. Devido ao achatamento nos pólos, o formato da Terra assemelha-se a uma elipse. O comitê “World Geodetic System” em sua convenção de 1984 (WGS-84), propôs que a forma da Terra é uma elipsóide como ilustra a figura a seguir.

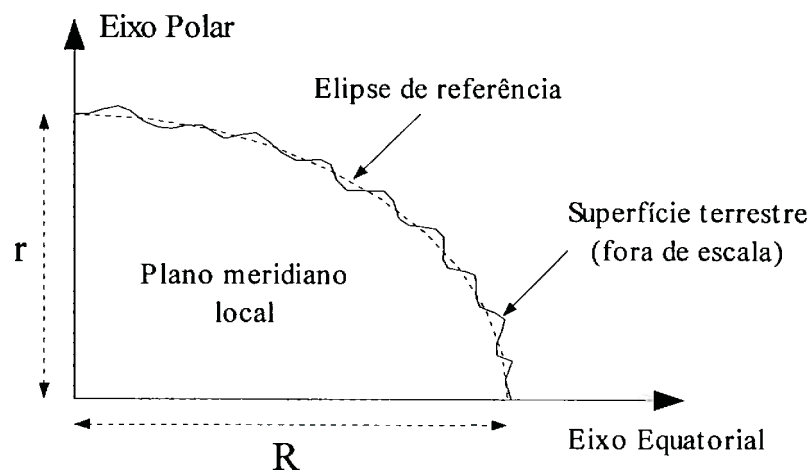


Fig. 2.8 – Modelo terrestre elíptico adotado pelo comitê WGS84

A seguir definem-se os parâmetros do modelo terrestre elíptico.

Parâmetro	Definição	Magnitude	Unidade
$R$	Comprimento do eixo semi-maior	6378137,0	[m]
$r = R(1 - f)$	Comprimento do eixo semi-menor	6356752,3142	[m]
$f = \frac{R - r}{R}$	Achatamento da elipsóide	$\frac{1}{298,257223563}$	--

$e = \sqrt{f(2-f)}$	Maior excentricidade da elipsóide	0,0818191908426	--
$\Omega$	Rotação da Terra	7,292115e-6 ou 15,041067	[rad/s] [°/h]

Tabela 2.2 – Parâmetros do modelo terrestre elíptico (WGS84)

Adotando-se o modelo terrestre definido pelo comitê WGS-84, as taxas de variação da latitude e da longitude devem ser corrigidas através das seguintes equações (Titterton, 1997):

$$\dot{\lambda} = \frac{v_E}{(R_E + h) \cos L} \quad (2.62)$$

$$\dot{L} = \frac{v_N}{(R_N + h)} \quad (2.63)$$

Onde:

$$R_E = \frac{R}{\sqrt{(1-e^2 \sin^2 L)}} \quad (2.64)$$

$$R_N = \frac{R(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2 \sin^2 L)^3}} \quad (2.65)$$

Assim a equação 2.56 deve ser corrigida e passa a ser representada matricialmente como:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{en}^n &= \left[ \frac{v_N}{(R_E + h)} \quad -\frac{v_E}{(R_N + h)} \quad -\frac{v_E}{(R_E + h)} \tan L \right]^T \\ \boldsymbol{\omega}_{en}^n &= \begin{bmatrix} \frac{1}{(R_E + h)} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{(R_N + h)} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\tan L}{(R_E + h)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_N \\ v_E \\ v_E \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.66)$$

As componentes da velocidade em termos das coordenadas curvilíneas (geodésicas) são obtidas por:

$$\mathbf{v}_e^n = \begin{bmatrix} v_N \\ v_E \\ v_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (R_N + h) & 0 & 0 \\ 0 & (R_E + h) \cos L & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{L} \\ \dot{\lambda} \\ \dot{h} \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

Logo, as derivadas das coordenadas geodésicas podem ser escritas como:

$$\dot{\mathbf{r}}_e^n = \begin{bmatrix} \dot{L} \\ \dot{\lambda} \\ \dot{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(R_N + h)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(R_E + h) \cos L} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_N \\ v_E \\ v_D \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

### 2.3.9. Deflexão gravitacional sobre a superfície da Terra

Conforme mencionado anteriormente existem variações da atração gravitacional sobre a superfície terrestre denominadas deflexões angulares. Este fenômeno ocorre devido à anomalias na gravidade terrestre, tais como: distribuição não uniforme da massa da Terra, variações gravitacionais devido a aceleração centrífuga, que varia em função da latitude, etc. A figura 2.9 ilustra a deflexão meridional  $\xi$  que o corre

no sentido da latitude. Para entender a deflexão  $\eta$ , imagine que  $\eta$  é a deflexão que ocorre no sentido da longitude.

Portanto, devido ao fenômeno da deflexão gravitacional, expressa-se o vetor gravidade local em termos da decomposição de suas componentes no sentido: norte, leste e baixo [N E D], através de:

$$\mathbf{g}_l = \begin{bmatrix} g_{l\_N} \\ g_{l\_E} \\ g_{l\_D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi g \\ -\eta g \\ g \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

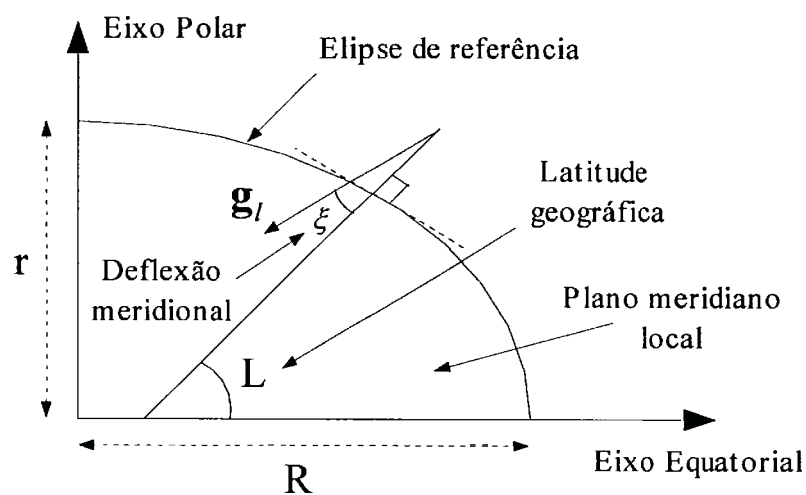


Fig. 2.9 – Representação da deflexão gravitacional latitudinal ( $\xi$ )

### 2.3.10. Mecanização do sistema de navegação local NED

A figura a seguir ilustra um algoritmo que pode ser implementado para estimar coordenadas de posições no sistema de coordenadas locais NED, a partir de uma central inercial strapdown.

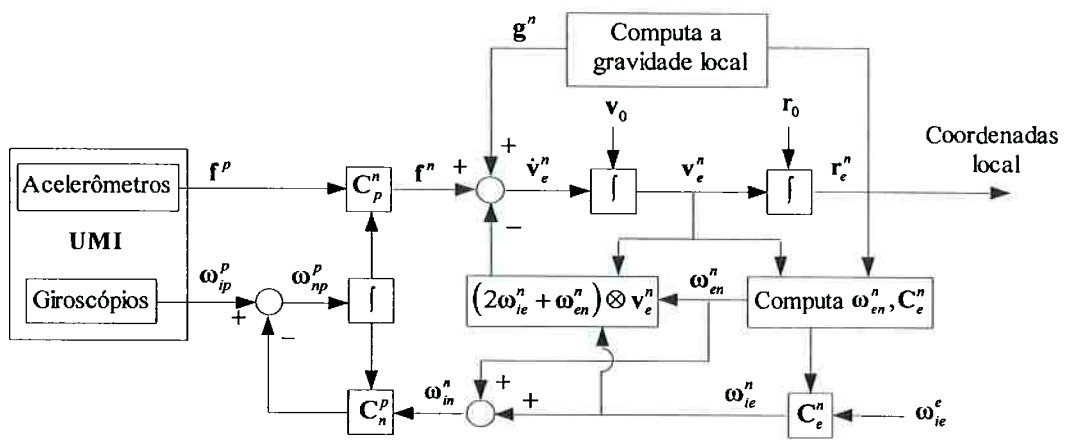


Fig. 2.10 – Modelo do sistema de navegação



### 3. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Descreve-se a seguir a formulação do problema da estimação de trajetória através da navegação inercial. Inicialmente é descrita a representação no espaço de estados, os modelos matemáticos que regem a dinâmica do sistema e a implementação do filtro de Kalman através destes modelos. A estimação de estados está dividida em duas partes: na primeira parte são estimados os ângulos de rotação da plataforma e na segunda parte são estimados os estados de aceleração, velocidade e posição. O processo de se estimar primeiramente os ângulos de rotação se faz necessário para realizar as transformações de coordenadas com maior precisão, pois antes de se estimar a aceleração, a velocidade e a posição da plataforma, estas grandezas devem estar projetadas no sistema de coordenadas da navegação local NED.

#### 3.1. Representação no espaço de estados

O espaço de estados é uma técnica que é utilizada para representar as equações diferenciais que descrevem o comportamento de um sistema dinâmico. A vantagem de se utilizar a representação no espaço de estados, é que ela se dá no domínio do tempo e pode ser aplicada diretamente a sistemas lineares, não lineares e multivariáveis, como é o caso deste trabalho. Outra vantagem é que ela pode ser facilmente discretizada e, portanto implementada em computadores digitais.

Um sistema linear pode ser descrito no espaço de estados por (Franklin, 1998):

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(t) + \mathbf{\Gamma}\mathbf{u}(t) + \mathbf{C}\mathbf{w}(t) \\ \mathbf{z}(t) &= \mathbf{H}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{e}(t)\end{aligned}\tag{3.1}$$

Estas equações podem ser discretizadas e representadas no espaço de estados discretos por (Chen, 2000):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{C}\mathbf{w}_k \\ \mathbf{z}_k &= \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{G}\mathbf{e}_k \end{aligned} \quad (3.2)$$

As matrizes  $(\Phi, \mathbf{A})$  e  $(\Gamma, \mathbf{B})$  nas equações 3.1 e 3.2, se relacionam através de:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= e^{\Phi T} \\ \mathbf{B} &= \left( \int_0^T e^{\Phi \tau} d\tau \right) \Gamma \end{aligned} \quad (3.3)$$

Na equação 3.2,  $\mathbf{x}_k$ , é o vetor de estados,  $\mathbf{u}_k$  é o vetor de entradas,  $\mathbf{z}_k$  é o vetor de medidas de referência (ou saídas),  $\mathbf{w}_k$  é um vetor de ruídos aleatórios do processo e  $\mathbf{e}_k$  é um vetor de erros de medição. As matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  são matrizes que definem a dinâmica do processo, enquanto que  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{H}$  são matrizes que definem a equação de medição.

### 3.1.1. Estimação de estados

A reconstrução de trajetórias através da navegação inercial é interpretada como um problema de estimação de estados, onde, dado o modelo matemático que descreve a navegação, e um conjunto de medidas, torna-se possível conhecer o valor de seus estados a cada instante.

A figura 3.1 ilustra o problema de estimação de estados. Neste mecanismo (Furukawa, 1992),  $x$  são os estados a serem estimados,  $u$  são as entradas do sistema (que devem ser conhecidas) e  $z$  são algumas saídas relacionadas a  $x$  por  $h(x)$  e que podem ser observadas. O estimador determina as estimativas  $\hat{x}$  dos estados a partir de modelos matemáticos do sistema e da função de saída  $h$ .

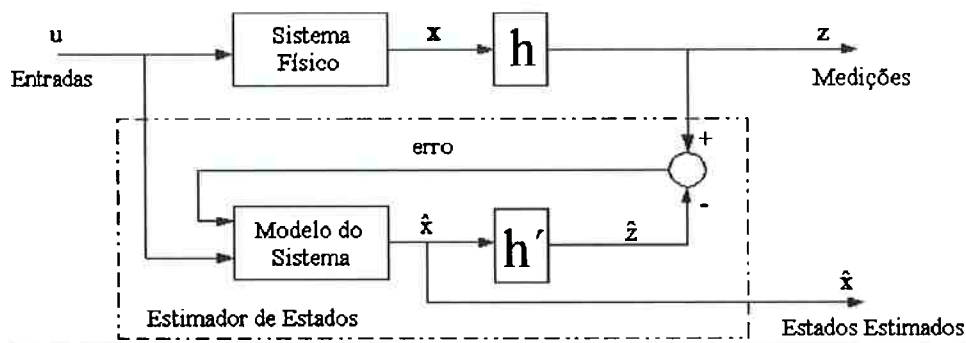


Fig. 3.1 – Estimador de estados

Ocorre, entretanto que os sistemas reais estão sujeitos a erros e ruídos, os quais não estão representados no modelo anterior. Para contornar este problema, as fontes de erros podem ser modeladas como ruídos adicionados às entradas ( $\omega$ ) e às saídas ( $\nu$ ) do sistema (figura 3.2). Os ruídos adicionados às entradas são conhecidos como ruídos de processo e os ruídos adicionados às saídas são conhecidos como ruídos de medição.

Devido a presença de ruídos aleatórios, o novo sistema passa a ter natureza estocástica (aleatória), onde tem-se agora que determinar não somente a estimativa dos estados  $\hat{x}$ , mas também a incerteza  $\hat{p}$  associada a esta estimativa.

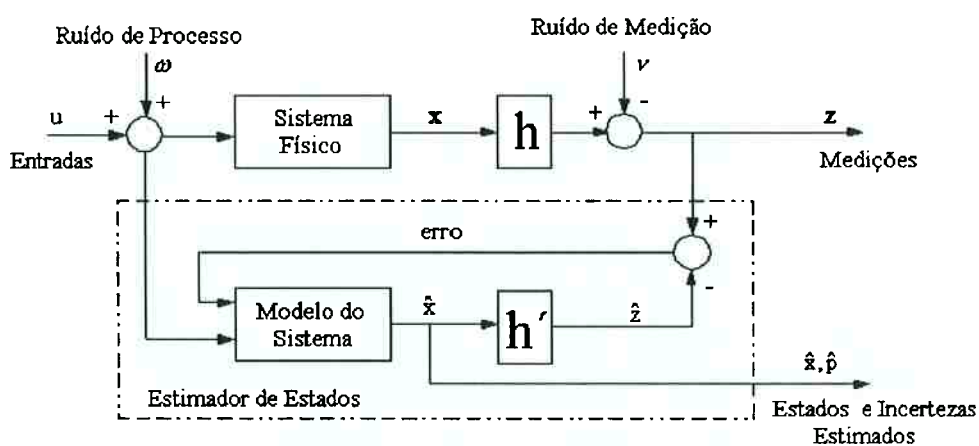


Fig. 3.2 – Estimador de estados estocástico

Adequando-se os conceitos ora mencionados ao problema da navegação inercial, tem-se que: o veículo (plataforma) passa a ser o sistema dinâmico, as entradas são as leituras dos acelerômetros e os estados (variáveis) a serem estimados são as posições, velocidades e erros de acelerações.

### 3.2. O filtro de Kalman discreto

Conforme mencionado anteriormente, neste trabalho será empregada uma técnica estocástica de estimação de estados conhecida como “*Filtro de Kalman*” (FK). O filtro de Kalman é o núcleo do algoritmo de navegação proposto, sendo que o mesmo realiza conjuntamente a fusão sensorial, gerando assim as estimativas dos estados e efetuando a correção destas estimativas através de medidas auxiliares que podem ser medidas de velocidade, marcas topográficas ou ambas.

O Filtro de Kalman é essencialmente um conjunto de equações matemáticas que implementam um estimador de estados conhecido como “preditor-corretor”. Quando algumas condições são satisfeitas, o filtro de Kalman é considerado um estimador ótimo e minimiza a covariância do erro estimado. O filtro de Kalman é empregado no sentido de tentar estimar o estado  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$  de um processo controlado em instantes discretos de tempo, que é governado por uma equação de diferenças linear estocástica

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{w}_{k-1}, \quad (3.4)$$

e uma equação de medição  $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^m$  que é dada por:

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k. \quad (3.5)$$

As variáveis aleatórias  $\mathbf{w}_k$  e  $\mathbf{v}_k$  representam os ruídos do processo e da medição respectivamente. Considera-se que estas variáveis são ruídos brancos, independentes

(estatisticamente descorrelacionadas) e com distribuição normal de probabilidade dada por:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{w}) &\sim N(0, \mathbf{Q}) \\ p(\mathbf{v}) &\sim N(0, \mathbf{R}) \end{aligned} \quad (3.6)$$

### 3.2.1. O algoritmo do filtro de Kalman discreto

O FK estima um processo utilizando uma forma de controle por realimentação – o filtro estima o estado do processo em algum instante de tempo e então obtém a realimentação (ruído) na forma de medições. Assim, as equações para o filtro de Kalman são divididas em dois grupos, atualização temporal (predição) e atualização da medição (correção). As equações de atualização temporal são responsáveis em projetar a frente (no tempo) o estado corrente e a estimativa da covariância do erro para obter uma estimativa do erro a priori para o próximo instante de tempo. As equações para atualização da medição são responsáveis pela realimentação, ou seja, elas incorporam uma nova medição ao estado estimado a priori para obter uma estimativa melhorada a posteriori.

As equações de atualização temporal do filtro de Kalman discreto são:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_k \quad (3.7)$$

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{A}\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{A}^T + \mathbf{Q} \quad (3.8)$$

As equações de atualização da medição do filtro de Kalman discreto são:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T (\mathbf{H}\mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} \quad (3.9)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_k^-) \quad (3.10)$$

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \mathbf{P}_k^- \quad (3.11)$$

O primeiro passo da atualização da medição é computar o ganho do filtro de Kalman ( $K_k$ ). O próximo passo é atualizar a medição do processo para obter  $x_k$ , e então gerar uma estimativa do estado a posteriori através da incorporação de uma medição. O passo final é obter uma estimativa da covariância do erro a posteriori.

Após cada ciclo de atualização temporal e atualização da medição, o processo é repetido através da estimativa posteriori anterior que é utilizada para projetar ou prever uma nova estimativa a priori. A figura 3.3 mostra como funciona o ciclo de operação do filtro de Kalman discreto.

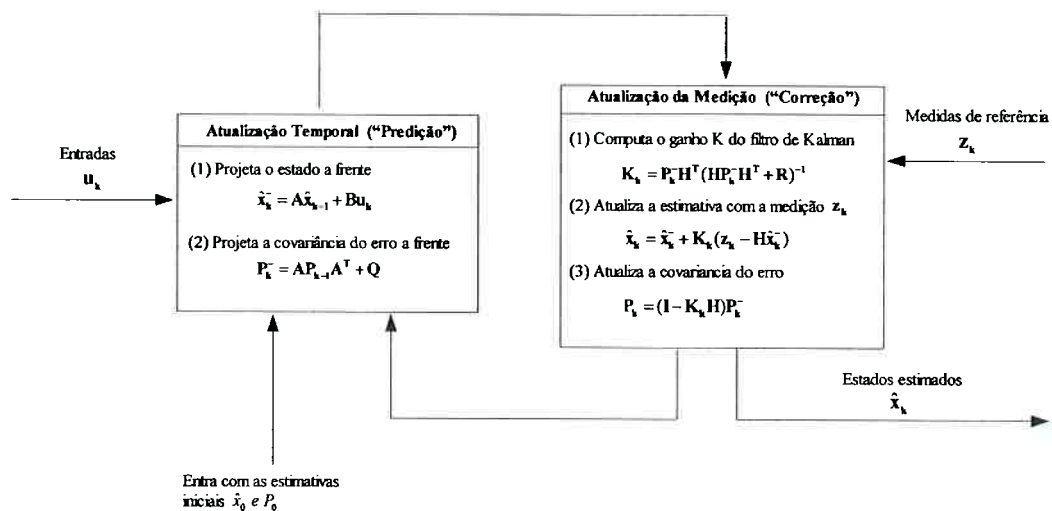


Fig. 3.3 – Ciclo do filtro de Kalman

### 3.3. Modelo proposto para estimar estados de giroscópio

#### 3.3.1. Modelo dinâmico dos giroscópios

O modelo adotado para definir a dinâmica dos giroscópios baseia na derivada angular onde:  $\frac{d\theta}{dt} = \omega \rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_0^t \omega dt$ . Resolvendo-se esta integral definida, o valor instantâneo de um ângulo pode ser definido por:

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega.t \quad (3.12)$$

Admitindo-se que  $\omega$  é a velocidade angular produzida pelos giroscópios, e que a mesma pode estar contaminada por um erro  $\delta\omega$  e um ruído  $w$ , a equação 3.12 pode ser escrita como:

$$\theta(t) = \theta_0 + (\omega + \delta\omega + w).t \quad (3.13)$$

Esta equação pode ser discretizada através da seguinte técnica:

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\theta_{(k+1)t} - \theta_{kt}}{\Delta t} = \omega + \delta\omega + w \quad (3.14)$$

Para sistemas amostrados o intervalo de tempo  $\Delta t$  corresponde a um período de amostragem  $T$ . Fazendo este período de amostragem muito pequeno a equação 3.14 pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \frac{\theta_{k+1} - \theta_k}{T} &\approx \omega + \delta\omega + w \\ \theta_{k+1} &\approx \theta_k + \omega T + \delta\omega T + wT \end{aligned} \quad (3.15)$$

Esta equação pode ser representada no espaço de estados discreto por:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{C}\mathbf{w}_k, \quad (3.16)$$

onde  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  são as matrizes que definem a dinâmica do sistema,  $\mathbf{x}$  é um vetor de estados que é composto pelas grandezas que se deseja estimar, ou seja, os ângulos ( $\theta_x$ ,  $\theta_y$  e  $\theta_z$ ) e os erros dos giroscópios ( $\delta\omega_x$ ,  $\delta\omega_y$  e  $\delta\omega_z$ );  $\mathbf{u}$  é o vetor de entradas e é composto pelas velocidades angulares ( $\omega_x$ ,  $\omega_y$  e  $\omega_z$ ) fornecidas pelos giroscópios e  $\mathbf{w}$  é um vetor de ruídos aleatórios presente nas medidas dos giroscópios. A equação 3.16 pode ser escrita na forma matricial por:

$$\begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \\ \delta\omega_x \\ \delta\omega_y \\ \delta\omega_z \end{bmatrix}_{K+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \\ \delta\omega_x \\ \delta\omega_y \\ \delta\omega_z \end{bmatrix}_K + \begin{bmatrix} T & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & T \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}_K + \begin{bmatrix} T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{bmatrix}_K \quad (3.17)$$

### 3.3.2. Filtro de Kalman utilizado

Giroscópios apresentam uma parcela de erros que não são determinísticos, ou seja, que não possuem um modelo matemático definido. Portanto a forma mais adequada de minimizar seus efeitos é através do Filtro de Kalman (Brown, 1997) e (Rogers, 2000).

Para se utilizar o filtro de Kalman, deve-se obter uma referência do vetor de estados (que pode ser medidas angulares fornecidas por um inclinômetro). É importante que o ruído do processo  $w$  não possua as mesmas características do ruído de referência  $e$ , pois, no caso de ambos possuírem a mesma característica tem-se uma correlação estatística entre eles e o Filtro de Kalman não funcionará adequadamente.

A seguir é apresentado o modelo da medição que será utilizado com o filtro, neste modelo  $e$  é um vetor de erros de medidas e  $z$  é o vetor de medidas de referências (ângulos).



$$\begin{bmatrix} z_x \\ z_y \\ z_z \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \\ \delta\omega_x \\ \delta\omega_y \\ \delta\omega_z \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}_k \quad (3.18)$$

A figura a seguir ilustra um diagrama de implementação do filtro de Kalman para se obter as estimativas angulares, a partir do vetor de velocidades angulares  $\omega_k$  fornecido pelos giroscópios da UMI e do vetor de medidas de referência  $z_k$  fornecido pelo inclinômetro.

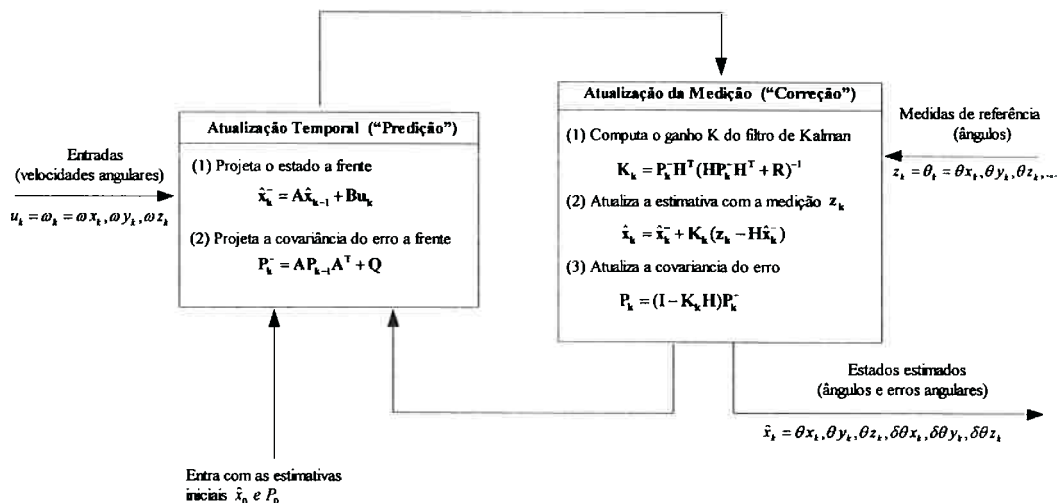


Fig. 3.4 – Filtro de Kalman para estimar ângulos de rotação

### 3.4. Ortogonalização e normalização da matriz de orientação

Em sistemas de navegação inercial strapdown, ao se implementar algoritmos para determinar a orientação da plataforma, é interessante aplicar um teste de consistência na matriz de orientação (MO) para evitar que ocorra a propagação de erros (Titterton, 1997). Dado que as linhas e colunas de uma MO representam a projeção dos vetores

unitários de cada eixo do sistema de coordenadas da plataforma, as mesmas devem sempre ser ortogonais entre si, e a soma do quadrado dos elementos de cada linha ou coluna devem ser unitários.

### 3.4.1. Ortogonalização

As condições para ortogonalidade das  $i$ -ésima,  $j$ -ésima e  $k$ -ésima linhas ou colunas de uma MO, aqui denotada por  $C_i$ ,  $C_j$  e  $C_k$  é que o produto escalar entre duas linhas ou colunas quaisquer sejam igual a zero. Em aplicações práticas, este não é necessariamente o caso então se pode definir um resíduo a partir de:

$$\begin{aligned}\Delta_{ij} &= C_i C_j^T \\ \Delta_{ik} &= C_i C_k^T \\ \Delta_{jk} &= C_j C_k^T\end{aligned}\tag{3.19}$$

onde  $\Delta_{ij}$ ,  $\Delta_{ik}$  e  $\Delta_{jk}$  são os erros de ortogonalidade entre as componentes  $C_i$ ,  $C_j$  e  $C_k$ .

Admitindo que cada linha ou coluna de  $C_i$ ,  $C_j$  e  $C_k$  possuam erros igualmente distribuídos, pode-se efetuar uma correção a partir de:

$$\begin{cases} \hat{C}_i = C_i - \frac{1}{2} \Delta_{ij} C_j \\ \hat{C}_i = C_i - \frac{1}{2} \Delta_{ik} C_k \end{cases}\tag{3.20}$$

$$\begin{cases} \hat{C}_j = C_j - \frac{1}{2} \Delta_{ij} C_i \\ \hat{C}_j = C_j - \frac{1}{2} \Delta_{jk} C_k \end{cases}\tag{3.21}$$

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{C}}_k = \mathbf{C}_k - \frac{1}{2}\Delta_{ik}\mathbf{C}_i \\ \hat{\mathbf{C}}_k = \mathbf{C}_k - \frac{1}{2}\Delta_{jk}\mathbf{C}_j \end{cases} \quad (3.22)$$

Agrupando-se a contribuição de erro de ortogonalidade de cada componente nas equações 3.20 a 3.22, obtém-se as linhas ou colunas estimadas:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{C}}_i = \mathbf{C}_i - \frac{1}{2}\Delta_{ij}\mathbf{C}_j - \frac{1}{2}\Delta_{ik}\mathbf{C}_k \\ \hat{\mathbf{C}}_j = \mathbf{C}_j - \frac{1}{2}\Delta_{ij}\mathbf{C}_i - \frac{1}{2}\Delta_{jk}\mathbf{C}_k \\ \hat{\mathbf{C}}_k = \mathbf{C}_k - \frac{1}{2}\Delta_{ik}\mathbf{C}_i - \frac{1}{2}\Delta_{jk}\mathbf{C}_j \end{cases} \quad (3.23)$$

### 3.4.2. Normalização

Os erros de normalização podem ser identificados comparando-se a soma dos quadrados dos elementos em cada linha ou coluna, com um valor unitário, ou seja:

$$\begin{cases} \Delta_{ii} = 1 - \mathbf{C}_i\mathbf{C}_i^T \\ \Delta_{jj} = 1 - \mathbf{C}_j\mathbf{C}_j^T \\ \Delta_{kk} = 1 - \mathbf{C}_k\mathbf{C}_k^T \end{cases} \quad (3.24)$$

Rearranjando as equações acima e utilizando o critério de distribuição de erros discutido anteriormente, chega-se à:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{C}}_i = \mathbf{C}_i - \frac{1}{2} \Delta_{ii} \mathbf{C}_i \\ \hat{\mathbf{C}}_j = \mathbf{C}_j - \frac{1}{2} \Delta_{jj} \mathbf{C}_j \\ \hat{\mathbf{C}}_k = \mathbf{C}_k - \frac{1}{2} \Delta_{kk} \mathbf{C}_k \end{cases} \quad (3.25)$$

Nas equações 3.20 a 3.25, a notação ‘^’ representa a quantidade estimada (corrigida).

### 3.5. Correções da aceleração

#### 3.5.1. Correções determinísticas

A aceleração da plataforma no sistema de coordenadas NED é representada pela seguinte equação:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_e^n &= \mathbf{C}_p^n \mathbf{f}^p - [2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n] \otimes \mathbf{v}_e^n + \mathbf{g}_l^n \\ \mathbf{a}_e^n &= \mathbf{f}^n + \mathbf{g}_l^n - 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n \otimes \mathbf{v}_e^n - \boldsymbol{\omega}_{en}^n \otimes \mathbf{v}_e^n \end{aligned} \quad (3.26)$$

O primeiro termo da equação representa a força específica medida pelos acelerômetros e projetada no sistema NED, o segundo, terceiro e quarto termo, representam a gravidade local, a aceleração de Coriolis e a aceleração centrípeta respectivamente e, portanto devem ser efetuadas as correções destas acelerações para evitar os efeitos indesejados das mesmas sobre a aceleração da plataforma.

##### 3.5.1.1. Gravidade local

A primeira correção a ser efetuada é a compensação da gravidade local que é dada pelo segundo termo da equação ( $\mathbf{g}_l^n$ ), e pode ser expressa no sistema NED pela seguinte equação:

$$\mathbf{g}_l^n = \mathbf{g}^n - \left[ \frac{\Omega^2 (R_0 + h) \sin 2L}{2} \quad 0 \quad \frac{\Omega^2 (R_0 + h) (1 + \cos 2L)}{2} \right]^T \quad (3.27)$$

Onde a componente da aceleração ( $\mathbf{g}^n$ ), é a aceleração gravitacional  $\mathbf{g}$ , expressa no sistema de navegação local:

$$\mathbf{g}^n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9.80665 \end{bmatrix} m/s^2 \quad (3.28)$$

### 3.5.1.2. Aceleração de Coriolis

A segunda correção determinística refere-se ao terceiro termo da equação. Este termo representa a aceleração sentida pela plataforma ao se deslocar sobre um referencial girante, e é conhecido como “aceleração de Coriolis”.

A rotação da Terra no sistema de coordenadas ECEF, é:

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.00007292 \end{bmatrix} rad/s \quad (3.29)$$

Esta rotação pode ser transportada para o sistema NED, fazendo-se:

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^n = \mathbf{C}_e^n \cdot \boldsymbol{\omega}_{ie}^e = \begin{bmatrix} -\sin L \cos \lambda & -\sin L \sin \lambda & \cos L \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\cos L \cos \lambda & -\cos L \sin \lambda & -\sin L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega \cos L \\ 0 \\ -\Omega \sin L \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

A velocidade da plataforma ( $\mathbf{v}_e^p$ ) pode ser projetada para o sistema NED, através de:

$$\mathbf{v}_e^n = \mathbf{C}_p^n \mathbf{v}_e^p = \mathbf{C}_p^n \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}_p = \begin{bmatrix} v_N \\ v_E \\ v_D \end{bmatrix}_n \quad (3.31)$$

Logo, a correção da aceleração de Coriolis é feita através do seguinte vetor:

$$\mathbf{a}_{Coriolis} = -2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n \otimes \mathbf{v}_e^n = -2 \begin{bmatrix} \Omega \cos L \\ 0 \\ -\Omega \sin L \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} v_N \\ v_E \\ v_D \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} v_D \Omega \sin L \\ -\Omega(v_N \sin L + v_D \cos L) \\ v_E \Omega \cos L \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

### 3.5.1.3. Aceleração centrípeta

A terceira e última correção que deve ser feita refere-se ao quarto termo da equação 3.26. Esta parcela representa a aceleração sentida pela plataforma ao se deslocar sobre uma superfície curva e é conhecida como “aceleração centrípeta”

O vetor que representa a taxa de transporte sobre a superfície terrestre pode ser expresso em termos das coordenadas curvilíneas, por:

$$\boldsymbol{\omega}_{en}^n = \left[ \frac{v_E}{(R_0 + h)} \quad -\frac{v_N}{(R_0 + h)} \quad -\frac{v_E}{(R_0 + h)} \tan L \right]^T \quad (3.33)$$

Portanto a correção da aceleração centrípeta é feita através do seguinte vetor:

$$\mathbf{a}_{Centripeta} = -\boldsymbol{\omega}_{en}^n \otimes \mathbf{v}_e^n = - \begin{bmatrix} \frac{v_E}{(R_0 + h)} \\ -\frac{v_N}{(R_0 + h)} \\ -\frac{v_E \tan L}{(R_0 + h)} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} v_N \\ v_E \\ v_D \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{v_E^2 \tan L - v_N v_D}{(R_0 + h)} \\ \frac{v_E v_N \tan L - v_E v_D}{(R_0 + h)} \\ \frac{v_E^2 - v_N^2}{(R_0 + h)} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

### 3.5.2. Correções estocásticas

#### 3.5.2.1. Influência dos erros de giroscópios na aceleração

Os acelerômetros medem a aceleração absoluta com relação a um “frame” inercial. Na estimação de velocidades e trajetórias, interessa somente a aceleração linear (translacional), portanto devem-se compensar todos os outros erros de aceleração. Para objetivos práticos considera-se nesta análise, que a gravidade é a única componente indesejável do sistema. A orientação do acelerômetro deve ser conhecida com grande precisão para que se possa compensar a componente gravitacional evitando assim adicionar erros sobre a aceleração translacional (aquela que realmente interessa).

A orientação dos acelerômetros pode ser obtida através de giroscópios. Os giroscópios de uma UMI produzem uma saída proporcional à velocidade de rotação. Os sinais produzidos pelos giroscópios estão contaminados por ruídos e deriva (drift) (Nebot, 1999). Para pequenos intervalos de tempo, a deriva pode ser aproximada como um sinal de bias constante. Assim a orientação pode ser obtida da seguinte forma:

$$\theta_m = \int (\dot{\theta} + b + \nu) dt = \theta + bt + \int \nu dt \quad (3.35)$$

Nota-se que a integração do sinal do giroscópio produz um ângulo de rotação juntamente com mais dois termos indesejáveis, ou seja, um termo que cresce com o tempo devido a deriva (bias)  $b$ , e outro termo conhecido como “Random Walk<sup>8</sup>” ou “Passeio Aleatório” devido ao ruído  $\nu$ .

Outra fonte muito importante de erro que deve ser modelada é a deriva do giroscópio. A figura a seguir mostra a situação onde um erro de deriva constante “ $b$ ”, atua sobre o eixo de rotação  $z$ .

---

<sup>8</sup> “Random Walk” é uma somatória de processos com ruído branco. Também é conhecido como processos de Wiener (Grewal, 2001).

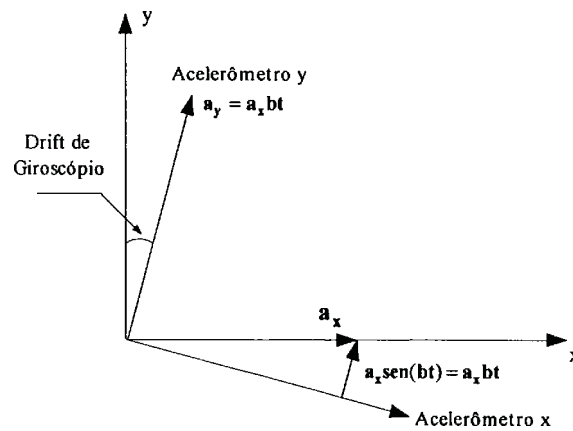


Fig. 3.5 – Influência da deriva do giroscópio z nos acelerômetros x e y

Como pode ser observado este erro de rotação, produz uma leitura incorreta de orientação para os acelerômetros  $x$  e  $y$ , além de introduzir um acoplamento do acelerômetro  $x$  no acelerômetro  $y$ . Conforme mostra a figura, uma constante de aceleração  $a_x$  na direção do eixo  $x$ , produz erros de aceleração, velocidade e posição no eixo  $y$ . Assumindo que o “drift” de giroscópio seja pequeno, pode-se linearizar  $\text{sen}(bt) = bt$ , e portanto os erros de aceleração, velocidade e posição são obtidos por:

$$\begin{aligned}
 e_{ay} &= a_x bt \\
 e_{vy} &= \frac{1}{2} a_x bt^2 \\
 e_{py} &= \frac{1}{6} a_x bt^3
 \end{aligned}
 \tag{3.36}$$

Observa-se então que um pequeno drift de giroscópio produz erros de aceleração proporcional a  $t$ , erros de velocidade proporcional a  $t^2$  e erros de posição proporcional a  $t^3$ .

Também pode ser observado na figura 3.5 que um “drift” (“bias”) de giroscópio introduz um “bias” no acelerômetro  $y$  e como consequência, temos que esta componente induzida irá produzir erros de posição e velocidades dados por:



$$\begin{aligned} e_{vy} &= bt \\ e_{py} &= \frac{1}{2}bt^2 \end{aligned} \quad (3.37)$$

### 3.6. Modelo proposto para estimar estados da plataforma

#### 3.6.1. Modelo dinâmico da plataforma

O modelo dinâmico da plataforma é baseado nas leis do movimento de Newton, que possibilita obter a velocidade e a posição a partir da aceleração. Pelas leis de Newton, a aceleração pode ser expressa a partir da derivada da velocidade em relação ao tempo:

$$\frac{dv}{dt} = a \quad (3.38)$$

Admitindo que esta aceleração seja a aceleração fornecida pela UMI e que a mesma possui erros devido a imprecisão dos acelerômetros ( $\delta a$ ) e erros devido a influência de “bias” de giroscópio ( $b_g at$ ), pode-se escrever :

$$a_{medido} = (a_{real} + \delta a + b_g at), \quad (3.39)$$

Isolando-se a aceleração real, substituindo na equação 3.38 e integrando, obtém-se a velocidade, que é dada por:

$$\frac{dv}{dt} = (a_{medida} - \delta a - b_g at) \rightarrow \int_{v_0}^v dv = \int_0^t (a_{medida} - \delta a) dt - \int_0^t b_g at dt \quad (3.40)$$

$$v = v_0 + (a_{medida} - \delta a)t - \frac{1}{2}b_g at^2 + w \quad (3.41)$$

A velocidade pode ser expressa em termos da derivada da posição em relação ao tempo:

$$\frac{dp}{dt} = v \quad (3.42)$$

Substituindo a equação 3.41 na equação 3.42 e integrando, obtém-se a posição:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= v_0 + (a_{medida} - \delta a)t - \frac{1}{2}b_g a t^2 \\ \int_{p_0}^p dp &= \int_0^t v_0 dt + \int_0^t (a_{medida} - \delta a)t dt - \int_0^t \frac{1}{2}b_g a t^2 dt \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$p = p_0 + v_0 t + \frac{1}{2}(a_{medida} - \delta a)t^2 - \frac{1}{6}b_g a t^3 + w \quad (3.44)$$

As equações 3.41 e 3.44 podem ser discretizadas em intervalos de tempo igual a  $T$ , e representadas vetorialmente, por:

$$\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{p}_k + \mathbf{v}_k T + \frac{1}{2}\mathbf{a}_k T^2 - \frac{1}{2}\delta\mathbf{a}_k T^2 - \frac{1}{6}\mathbf{b}_g \mathbf{a}_k T^3 + \mathbf{w}_k \quad (3.45)$$

$$\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{v}_k + \mathbf{a}_k T - \delta\mathbf{a}_k T - \frac{1}{2}\mathbf{b}_g \mathbf{a}_k T^2 + \mathbf{w}_k \quad (3.46)$$

Estas equações definem o modelo discreto da dinâmica da plataforma e podem ser combinadas para fornecer uma representação no espaço de estados discreto, do tipo:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{C}\mathbf{w}_k \quad (3.47)$$

Nas equações 3.45 e 3.46 o vetor  $\mathbf{a}_k$  contém as acelerações fornecidas pela UMI nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , já transformadas para o sistema NED e feitas às correções determinísticas, assim  $\mathbf{a}_k$  será o vetor de entradas. O erro de aceleração  $\delta a$  é

desconhecido, ou seja, é uma grandeza que se deseja estimar e, portanto fará parte do vetor de estados. Matricialmente tem-se:

$$\begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ \delta a_x \\ \delta a_y \\ \delta a_z \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T & 0 & 0 & \frac{T^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & T & 0 & 0 & \frac{T^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & T & 0 & 0 & \frac{T^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ \delta a_x \\ \delta a_y \\ \delta a_z \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} & 0 & -\frac{b_x T^3}{6} \\ -\frac{b_x T^3}{6} & \frac{T^2}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{b_x T^3}{6} & \frac{T^2}{2} \\ T & 0 & -\frac{b_x T^2}{2} \\ -\frac{b_x T^2}{2} & T & 0 \\ 0 & -\frac{b_x T^3}{6} & T \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}_k + \quad (3.48)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{c_x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{c_y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{c_z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{v_x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{v_y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{v_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \\ w^4 \\ w^5 \\ w^6 \\ w^7 \\ w^8 \\ w^9 \end{bmatrix}_k$$

Evidentemente, este modelo não se aplica a sistemas com aceleração variável, entretanto para intervalos de amostragem ( $T$ ) muito pequenos, pode-se admitir que a aceleração da plataforma se mantém constante entre duas amostras consecutivas e, portanto as equações 3.45 e 3.46 podem ser empregadas neste sistema, pois, a amostragem da aceleração da plataforma é feita em intervalos de tempo muito pequenos.

### 3.6.2. Modelo dinâmico alternativo

O modelo dinâmico da plataforma obtido a partir das equações 3.45 e 3.46 exige que seja conhecido o valor do “bias” dos giroscópios. Entretanto, obter o “bias” de um giroscópio é uma tarefa difícil que depende de um laboratório com instrumentos sofisticados. Para sistemas onde não se conheça o valor de “bias” dos giroscópios, uma alternativa é modelar o mesmo como um ruído aleatório.

$$\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{p}_k + \mathbf{v}_k T + \frac{1}{2} \mathbf{a}_k T^2 - \frac{1}{2} \delta \mathbf{a}_k T^2 + \mathbf{w}_k \quad (3.49)$$

$$\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{v}_k + \mathbf{a}_k T - \delta \mathbf{a}_k T + \mathbf{w}_k \quad (3.50)$$

Assim os efeitos que o “bias” dos giroscópios produzem na posição e na velocidade da plataforma são inseridos na matriz  $\mathbf{C}$  da equação 3.47 .

Realocando os termos convenientemente, as equações 3.49 e 3.50 podem ser escritas na forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ \delta a_x \\ \delta a_y \\ \delta a_z \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T & 0 & 0 & \frac{T^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & T & 0 & 0 & \frac{T^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & T & 0 & 0 & \frac{T^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ \delta a_x \\ \delta a_y \\ \delta a_z \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{T^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{T^2}{2} \\ T & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & T \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}_k +$$

$$\begin{bmatrix} \frac{T^3}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{T^3}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{T^3}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{T^2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{T^2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{T^2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \\ w^4 \\ w^5 \\ w^6 \\ w^7 \\ w^8 \\ w^9 \end{bmatrix}_k \quad (3.51)$$

Nos modelos descritos pelas equações 3.48 e 3.51, o vetor de estados  $\mathbf{x}$  é formado por nove elementos:  $c_x$ ,  $c_y$  e  $c_z$  são as três coordenadas de posição,  $v_x$ ,  $v_y$  e  $v_z$  são as três componentes da velocidade e  $\delta a_x$ ,  $\delta a_y$  e  $\delta a_z$  são as componentes do erro de aceleração. O vetor de entradas  $\mathbf{u}$  é formado por três elementos que são as componentes da aceleração  $a_x$ ,  $a_y$  e  $a_z$  fornecidas pela UMI, e conforme mencionado anteriormente já devem estar feitas as correções determinísticas e a transformação para o sistema NED. O vetor  $\mathbf{w}$ , composto por nove elementos independentes é um vetor de ruídos aleatórios do processo.  $T$  é o período de amostragem utilizado entre duas medições consecutivas e  $b_g$  é o “bias” do giroscópio.

### 3.6.3. Filtro de Kalman utilizado

Uma simulação simples do sistema irá gerar erros de posição elevados, após poucos minutos, e isso se deve à presença dos ruídos aleatórios nas medidas fornecidas pelos acelerômetros e giroscópios da UMI. Neste sentido será adotado um filtro de Kalman, que utiliza como medidas de referência: a velocidade fornecida por um velocímetro, a posição fornecida por marcas topográficas ou ambas.

Como o ruído da UMI é um ruído cumulativo e o ruído das medidas de referência (marcas topográficas ou velocímetro) que são obtidos a partir de uma planta cartográfica e um encoder digital incremental rotativo não são cumulativos, o Filtro de Kalman consegue combinar satisfatoriamente estas características e estimar a posição do veículo com erros relativamente pequenos.

A seguir são apresentados os modelos das medições que serão utilizados com o filtro, onde  $e$  é um vetor de erros de medidas e  $z$  é o vetor de medidas de referência de: velocidade (equação 3.52), coordenadas de posição (equação 3.53) e ambas (equação 3.54).

$$\begin{bmatrix} z_x \\ z_y \\ z_z \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ \delta a_x \\ \delta a_y \\ \delta a_z \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^1 \\ e^2 \\ e^3 \end{bmatrix}_k \quad (3.52)$$

$$\begin{bmatrix} z_x \\ z_y \\ z_z \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ \delta a_x \\ \delta a_y \\ \delta a_z \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^1 \\ e^2 \\ e^3 \end{bmatrix}_k \quad (3.53)$$

$$\begin{bmatrix} z_x \\ z_y \\ z_z \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ \delta a_x \\ \delta a_y \\ \delta a_z \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^1 \\ e^2 \\ e^3 \end{bmatrix}_k \quad (3.54)$$

A figura a seguir ilustra o diagrama de implementação do FK para se obter as estimativas de estados do sistema, a partir do vetor de medidas de aceleração  $\mathbf{a}_k$  fornecidas pelos acelerômetros da UMI e do vetor de medidas de referência  $\mathbf{z}_k$  fornecido pelo velocímetro.

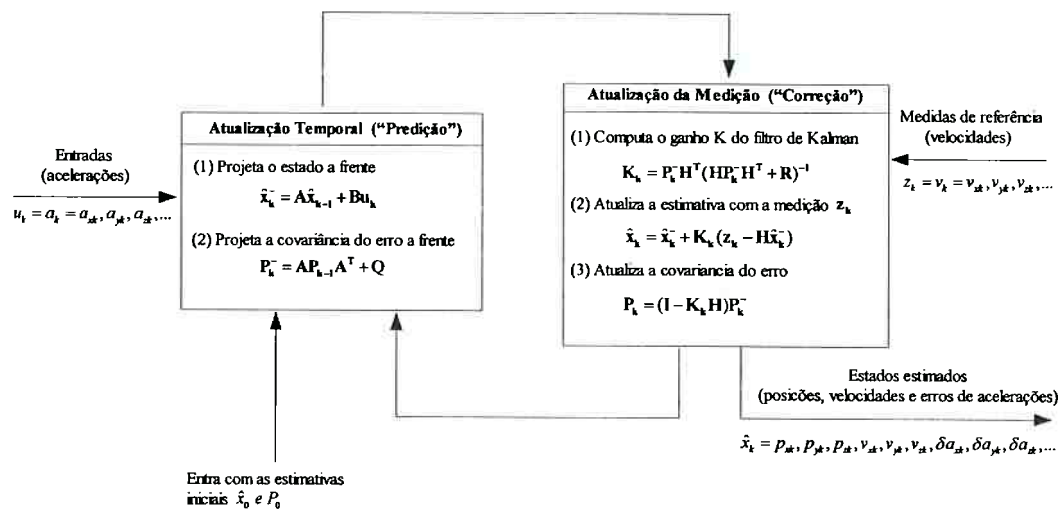


Fig. 3.6 – Filtro de Kalman utilizado para estimar estados da plataforma

### **3.7. Alinhamento inicial e calibração da plataforma**

#### **3.7.1. Alinhamento inicial**

O alinhamento inicial ou orientação inicial é necessário para transportar as grandezas medidas pelos acelerômetros fixados na plataforma para o sistema de coordenadas NED. Portanto o alinhamento inicial é a determinação da matriz de orientação inicial que alinha o sistema de coordenadas da plataforma com o sistema de navegação local NED.

O alinhamento inicial pode ser feito de muitas formas, sendo que a mais simples é a utilização de uma técnica conhecida por “girocompassing”, que utiliza os acelerômetros da UMI para efetuar o nivelamento e os giroscópios para determinar o norte geográfico.

O nivelamento é obtido inclinando-se a plataforma até que apenas o acelerômetro do eixo  $z$  apresente leitura igual à aceleração gravitacional ( $-g$ ). Para determinação do norte geográfico, gira-se a UMI em torno do eixo  $z$  até que o giroscópio do eixo  $x$  apresente leitura nula e o giroscópio do eixo  $y$  apresente a velocidade de rotação da Terra ( $\Omega$ ).

A técnica de girocompassing não pode ser aplicada em UMI's que possuam giroscópios com erros próximos ou superiores a  $15,04^\circ/\text{h}$ , devido à impossibilidade de se medir a velocidade de rotação da Terra [Shin, 2001].

#### **3.7.2. Alinhamento terrestre pelo método da matriz de orientação**

Na seção anterior mencionou-se o método de alinhamento inicial pela técnica de “girocompassing”, entretanto tal técnica exige que a plataforma seja nivelada e depois rotacionada para se obter o norte geográfico. Uma técnica semelhante que não



necessita rotacionar a plataforma é o *alinhamento terrestre pelo método da matriz de orientação*, mostrado a seguir:

Os acelerômetros e giroscópios montados na plataforma medem respectivamente a força específica  $\mathbf{f}^p$  e a velocidade angular  $\boldsymbol{\omega}_{ie}^p$  estas grandezas se relacionam com o sistema de navegação local NED da seguinte forma:

$$\mathbf{f}^p = \mathbf{C}_n^p \mathbf{f}^n \quad (3.55)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^p = \mathbf{C}_n^p \boldsymbol{\omega}_{ie}^n \quad (3.56)$$

Estas equações podem ser escritas como:

$$\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Omega \cos L \\ 0 \\ -\Omega \sin L \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

Analisando a equação 3.57, nota-se que os elementos da terceira coluna podem ser obtidos por:

$$\begin{aligned} f_x &= -g c_{13} \rightarrow c_{13} = -\frac{f_x}{g} \\ f_y &= -g c_{23} \rightarrow c_{23} = -\frac{f_y}{g} \\ f_z &= -g c_{33} \rightarrow c_{33} = -\frac{f_z}{g} \end{aligned} \quad (3.59)$$

Na equação 3.58, os elementos da primeira coluna podem ser obtidos através de:

$$\begin{aligned}
 \omega_x &= \Omega \cos L c_{11} - \Omega \sin L c_{13} \rightarrow c_{11} = \frac{\omega_x}{\Omega \cos L} - \frac{f_x \tan L}{g} \\
 \omega_y &= \Omega \cos L c_{21} - \Omega \sin L c_{23} \rightarrow c_{21} = \frac{\omega_y}{\Omega \cos L} - \frac{f_y \tan L}{g} \\
 \omega_z &= \Omega \cos L c_{31} - \Omega \sin L c_{33} \rightarrow c_{31} = \frac{\omega_z}{\Omega \cos L} - \frac{f_z \tan L}{g}
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

Finalmente, os elementos  $c_{12}$ ,  $c_{22}$  e  $c_{32}$  podem ser determinados utilizando-se a propriedade da ortogonalidade da (MO), ou seja, dada uma matriz ortonormal, da álgebra linear sabe-se que:

$$\begin{aligned}
 c_{12} &= -c_{21}c_{33} + c_{31}c_{23} \\
 c_{22} &= c_{11}c_{33} - c_{13}c_{31} \\
 c_{32} &= -c_{11}c_{23} + c_{13}c_{21}
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

### 3.7.3. Calibração

A calibração dos sensores inerciais não é propriamente uma intervenção física nos sensores da UMI. Na verdade trata-se de um processo onde se procura estimar (obter) os valores de “bias” e fatores de escalas de giroscópios e através destes determinar os “bias” e fatores de escala dos acelerômetros. Este procedimento é bastante sensível e demorado, e deve ser feito com a plataforma em repouso.

A calibração inicial da UMI é muito importante senão dizer imprescindível em sistemas de navegação inercial onde não se disponha de informações auxiliares (fusão sensorial) para estimar estados de acelerômetro e giroscópios, pois, sem a calibração inicial torna-se impossível reconstruir com relativa precisão as trajetórias percorridas pela plataforma. Para se efetuar a calibração inicial deve-se dispor de sensores auxiliares com precisão elevada (inclinômetros, GPS, etc.) e então combinar

as informações através de um Filtro de Kalman para obter as estimativas dos erros de acelerômetros e giroscópios (Nebot, 1999) e (Maybeck, 1976).

## ***4. MATERIAIS E MÉTODOS***

A seguir apresentam-se os materiais e os métodos empregados na execução dos ensaios de estimação de trajetórias através de uma UMI “strapdown” e fusão sensorial.

### **4.1. Testes efetuados**

Para o ensaio de estimação de trajetórias, foram efetuados quatro testes automotivos sendo que três foram feitos com duração média de 5 minutos cada e a distância percorrida foi de aproximadamente 2800 metros em percurso fechado (saída e chegada no mesmo ponto), em uma região aproximadamente plana.

A escolha de um percurso em trajetória fechada possui algumas características favoráveis. Primeiramente porque permite testar e avaliar visualmente dois tipos de reconstrutores: o “Duplo Integrador” e o “Filtro de Kalman”. Como o percurso é fechado, espera-se reconstruir graficamente uma trajetória fechada, isto é justificável pela facilidade de compreensão dos resultados obtidos, ou seja, visualmente consegue-se distinguir se a trajetória reconstruída é parecida com a trajetória percorrida.

A segunda razão para se escolher a trajetória fechada é que neste tipo de ensaio torna-se possível avaliar o efeito da deriva do giroscópio responsável pelo movimento de guinada, pois o mesmo será solicitado continuamente. A desvantagem do percurso fechado é que tanto os erros de acelerômetros e de giroscópios afetam negativamente a reconstrução do trajeto. Neste sentido um quarto teste em percurso aberto e relativamente reto foi efetuado, no qual os giroscópios são pouco solicitados e há predominância de excitação dos acelerômetros.

## 4.2. Equipamentos utilizados

A unidade de medição inercial empregada para os experimentos é uma UMI do tipo “strapdown” de baixo custo modelo VG700AA-202 da Crossbow (figura 4.1). Este tipo de UMI destina-se principalmente a aplicações em testes automotivos e tem como principais sensores embarcados:

- 3 acelerômetros do tipo MEMS (“Micro Eletro Mechanical System”)
- 3 giroscópios do tipo FOG (“Fiber Optic Gyro”)
- Sensor de temperatura
- Processador digital de sinais (DSP) de 32 bits
- Comunicação analógica ( $\pm 4096$  pontos – 0 a  $\pm 5V$ ) e digital (RS-232 - Baud Rate = 38400 bps)
- Temporizador interno

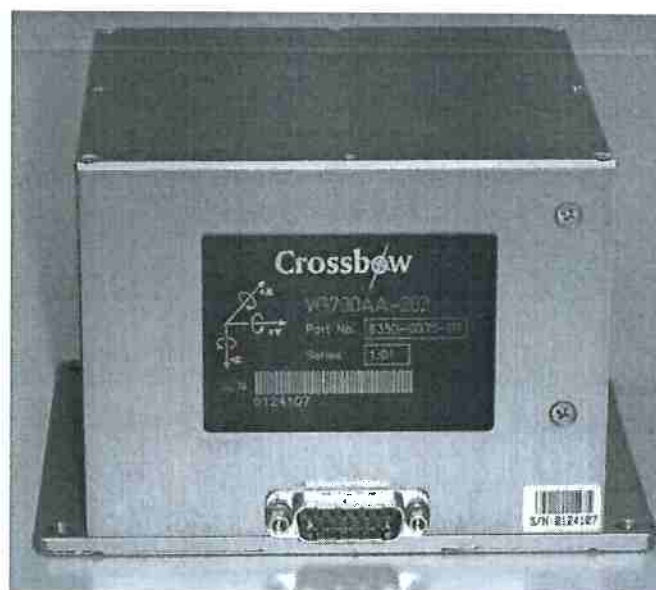


Fig. 4.1 – UMI “strapdown” Crossbow modelo VG700AA-202

Outras especificações relevantes da UMI VG700AA-202 são apresentadas no quadro a seguir:

<b>Especificação</b>	<b>Faixa de Operação</b>	<b>Unidade</b>
Máxima taxa angular (roll/pitch/yaw)	$\pm 200$	$^{\circ}/\text{seg.}$
Bias máximo de giroscópio	$< \pm 20$	$^{\circ}/\text{hr.}$
Random Walk de giroscópio	$< 0,4$	$\sqrt{^{\circ}/h}$
Resolução máxima de giroscópio	0,025	$^{\circ}/\text{seg.}$
Máxima faixa de aceleração (X/Y/Z)	$\pm 2$	g
Bias máximo de acelerômetro	0,085	$\text{m}/\text{s}^2$
Random Walk de acelerômetro	$< 0,1$	$\text{m}/(\text{s}\sqrt{h})$
Resolução máxima de acelerômetro	0,01	$\text{m}/\text{s}^2$
Taxa máxima de amostragem	100	Amostras/seg.
Temperatura de operação	-40 a 71	$^{\circ}\text{C}$
Tensão de alimentação	10 a 30	$V_{\text{DC}}$
Dimensões	12,7x15,24x10,16	cm
Peso	1,6	kg

Tabela 4.1 – Especificações da UMI Crossbow VG700AA-202

### 4.3. Metodologia dos testes

Neste trabalho, a UMI foi embarcada no interior do veículo e conectada a um computador portátil onde a coleta de dados foi efetuada a partir do “software” Giroview fornecido juntamente com a UMI. Foram adotados em ambos os testes diferentes taxas de amostragem conforme mencionado anteriormente. Para alimentação da UMI utilizou-se a tensão disponível na bateria do veículo.

O processamento de dados para estimação da trajetória realizada foi efetuado off-line num computador PC através do “software” Matlab® versão 6,5 Release 13.

A figura a seguir mostra a plataforma montada para a realização dos testes na EPUSP.



Fig. 4.2 – Plataforma utilizada nos ensaios automotivos

Os algoritmos testados foram o duplo integrador no qual foi empregada a mecanização da figura 4.3 para obtenção da posição, e o filtro de Kalman, baseado no modelo alternativo, descrito pela equação 3.51 a 3.54. Para a simulação através do filtro de Kalman, adotaram-se três situações: primeira simulação sem medidas de referência, ou seja, a matriz de medição  $\mathbf{H}$  foi declarada nula, uma segunda simulação tendo como medida de referência a velocidade da plataforma, e finalmente uma terceira simulação tendo como medidas de referências a velocidade da plataforma juntamente com um conjunto de marcas topográficas “landmarks”. A velocidade da plataforma foi obtida a partir da leitura do velocímetro do veículo. Esta leitura foi coletada através de uma filmadora digital e os dados foram extraídos e interpolados posteriormente a fim de se obter a mesma quantidade de medidas fornecidas pela a UMI. As marcas topográficas (MT) utilizadas como medidas de referência foram convenientemente escolhidas e foram obtidas junto ao setor de

geodésica e cartografia do Departamento de Engenharia de Transportes da EPUSP. Utilizou-se ainda o odômetro do veículo para fornecer o deslocamento relativo.

Dado que a navegação de interesse é feita no sistema de coordenadas da plataforma RPY e depois projetada para o sistema de navegação local NED, não seria necessário o alinhamento inicial da plataforma, pois, o interesse é na reconstrução da trajetória  $xy$  e, portanto a determinação do norte geográfico não seria importante. Entretanto, devido a problemas de desnivelamentos, existem decomposições da aceleração gravitacional nos acelerômetros  $xy$ , tornando-se necessário conhecer a orientação inicial da plataforma para em seguida efetuar a propagação da orientação instantânea. A orientação inicial foi obtida com o auxílio dos acelerômetros mantendo-se a plataforma em repouso.

Devido a indisponibilidade de equipamentos adequados, a calibração externa inicial da UMI não foi efetuada, entretanto tal deficiência não é crucial, pois conforme mencionado anteriormente este procedimento é imprescindível apenas quando não se dispõe de medições auxiliares para compor uma fusão sensorial.

Antes de se iniciar os testes a UMI ficou num processo de calibração interna através do “software” *Giroview* (fornecido pelo fabricante) por aproximadamente 10 minutos. Este procedimento é recomendado pelo fabricante e tem por objetivo minimizar através de “software” os erros relativos à deriva térmica e fator de escala (UMI Crossbow VG700AA-202).

Para comparar a trajetória estimada com a trajetória real, utiliza-se um conjunto de marcas topográficas do trajeto onde o ensaio foi efetuado.

Os modelos adotados para reconstruir as trajetórias são o *duplo integrador*, cujo algoritmo de implementação é ilustrado através da figura 4.3, e o *filtro de Kalman* apresentado na seção 3.6. Em ambos os modelos as acelerações, velocidades e posições são transportadas para o sistema NED, e as correções determinísticas são efetuadas.



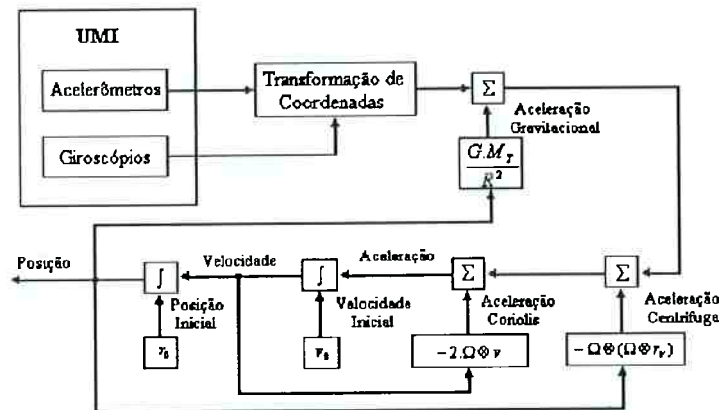


Fig. 4.3 – Algoritmo do duplo integrador

Os ângulos de “roll”, “pitch” e “yaw”, são obtidos integrando-se as velocidades angulares em instantes discretos de tempo  $\Delta T_k$ , pois a UMI utilizada apresenta variação no período de amostragem  $\Delta T$  como mostra a figura a seguir.

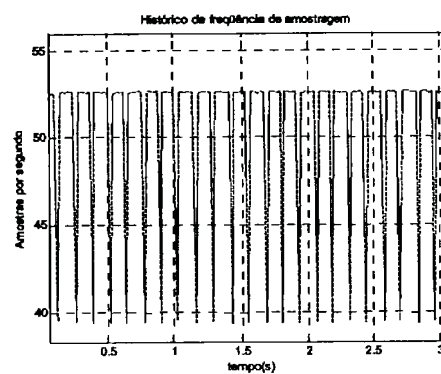


Fig. 4.4 – Histórico da frequência de amostragem da UMI VG700AA-202

#### 4.3.1. Monitoramento do filtro de Kalman

Para testar se o filtro de Kalman está funcionando adequadamente, seu desempenho é monitorado através da análise da matriz de covariância do erro  $\mathbf{P}$  e da checagem da média das inovações ou resíduos  $(z_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-)$ .

A análise de  $\mathbf{P}$  consiste de dois procedimentos: primeiro testar se  $\mathbf{P}$  é semi-definida positiva e segundo testar os elementos da diagonal principal de  $\mathbf{P}$ .

Para testar se  $\mathbf{P}$  é semi-definida positiva, primeiramente simetriza-se a matriz  $\mathbf{P}$  por  $\mathbf{P} = (\mathbf{P} + \mathbf{P}^T)/2$  e então aplica-se a fatoração modificada de Cholesky (Greewal, 2001 e Golub, 1996) sobre a matriz  $\mathbf{P}$  a cada iteração. Esta técnica também é conhecida como fatoração  $\mathbf{UDU}^T$  e no caso de  $\mathbf{P}$  não ser semi-definida positiva o algoritmo falhará e o processo será interrompido. O teste da diagonal de  $\mathbf{P}$  consiste em extrair a norma euclidiana (norma 2) a cada iteração e verificar seu comportamento.

A checagem da média das inovações (resíduos) é feita extraíndo-se uma amostra de  $(z_k - \mathbf{H}_k \hat{x}_k^-)$  a cada iteração e plotando seu histograma. Se o filtro estiver trabalhando corretamente o histograma deve apresentar uma distribuição com média zero (Greewal, 2001).

#### 4.3.2. Sintonia do filtro de Kalman

Para sintonizar corretamente o filtro de Kalman é necessário conhecer as matrizes de covariância do ruído de processo  $\mathbf{Q}$  e do ruído de medição  $\mathbf{R}$ .

Em geral, o ruído de processo  $\mathbf{Q}$  é de difícil caracterização, demandando um grande esforço experimental e de modelagem. Por esse motivo, existem várias técnicas descritas na literatura para se chegar a uma estimativa inicial, passível ainda de ajustes por tentativa e erro. Emprega-se neste trabalho, uma técnica numérica extraída de (Brown, 1997) para a estimação de  $\mathbf{Q}$ .

Primeiramente forma-se uma matriz bloco, tal que:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -\Phi_{(9 \times 9)} & \Gamma \mathbf{W} \Gamma^T_{(9 \times 9)} \\ \mathbf{0}_{(9 \times 9)} & \Phi^T_{(9 \times 9)} \end{bmatrix} \cdot \Delta t$$

onde  $\Phi$  e  $\Gamma$  são as matrizes de transição de estados e de entradas respectivamente (vide equação 3.1).  $W$  é a densidade espectral de potência dos ruídos associados ao vetor de entradas  $u$ , no caso as leituras dos acelerômetros. Como não é trivial a caracterização de  $W$ , admite-se inicialmente que este ruído seja normalmente distribuído com média zero e covariância unitária. Neste caso particular, a densidade espectral de potência do ruído torna-se unitária e portanto  $W$  fica sendo:

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A operação  $e^M$  produz uma nova matriz bloco, cujos elementos são:

$$e^M = \begin{bmatrix} \dots_{(9 \times 9)} & A^{-1}Q_{(9 \times 9)} \\ \mathbf{0}_{(9 \times 9)} & A^T_{(9 \times 9)} \end{bmatrix}$$

Portanto  $Q$  é obtida transpondo-se  $A$  (segunda linha e segunda coluna), e em seguida multiplica-se este resultado por  $A^{-1}Q$  (primeira linha segunda coluna).O resultado obtido e utilizado neste trabalho em particular é:

$$Q = \begin{bmatrix} 7,1289e-7 & 0 & 0 & 2,9370e-5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7,1289e-7 & 0 & 0 & 2,9370e-5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7,1289e-7 & 0 & 0 & 2,9370e-5 & 0 & 0 & 0 \\ 2,9370e-5 & 0 & 0 & 1,2725e-3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2,9370e-5 & 0 & 0 & 1,2725e-3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,9370e-5 & 0 & 0 & 1,2725e-3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz da covariância do ruído de medição  $R$  pode ser obtida numericamente através do erro das velocidades  $xyz$ . Neste experimento não se dispõe de instrumentos que permitam obter a velocidade real, portanto torna-se impossível

encontrar o erro produzido pelo velocímetro do veículo. Neste sentido uma aproximação (relativamente grosseira) é implementada. Nesta aproximação admite-se que o erro do velocímetro oscila em torno de  $\pm 5\%$  do valor lido. Portanto é possível obter uma matriz com os erros de velocidade nas direções  $xyz$ , e a partir desses valores extrair a covariância. O resultado obtido é o valor de  $\mathbf{R}$  a ser adotado, que para este caso em particular vale:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1,9335e-1 & 4,3569e-3 & 1,8150e-1 \\ 4,3569e-3 & 1,9494e-1 & -9,7583e-2 \\ 1,8150e-1 & -9,7583e-2 & 1,0164e+2 \end{bmatrix} \left[ m^2 / s^2 \right]$$

#### 4.3.3. Inserção de ruídos de medição

Para testar a robustez dos reconstrutores, são adicionados ruídos as medições de velocidades. Os ruídos adicionados são produzidos artificialmente pela função “randn” do Matlab®, são normalmente distribuídos em torno de zero e possuem covariância unitária. Neste tipo de distribuição a potência de ruído é unitária ( $\sigma^2$ ), portanto a adição percentual de ruído é feita por  $\mathbf{v}_k = \sqrt{p_r} \cdot \sigma^2 \cdot \delta \mathbf{v}_k$ , onde  $\mathbf{v}_k$  e  $\delta \mathbf{v}_k$  são as velocidades e os erros de velocidades no instante  $k$ , e  $p_r$  corresponde a fração de potência de ruído adicionado (por exemplo,  $p_r = 1$  implica em 100% de potência de ruído adicionado).

#### 4.4. Constantes utilizadas

A tabela a seguir apresenta os valores das constantes que foram empregadas nos testes efetuados.

<b>Grandeza</b>	<b>Símbolo</b>	<b>Valor adotado</b>
Aceleração gravitacional	$g$	9,80665 m/s <sup>2</sup>
Velocidade de rotação da Terra	$\Omega$	0,7292e-4 rad/s
Latitude local	$L$	23,32 <sup>o</sup>
Longitude local	$\lambda$	46,43 <sup>o</sup>
Raio da Terra	$R_0$	6378137 m

Tabela 4.2 – Constantes utilizadas nos testes de reconstrução de trajetórias

## 5. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Este capítulo apresenta os resultados obtidos nos testes automotivos realizados nas dependências da EPUSP. Todos os resultados são apresentados graficamente, sendo que em alguns casos também são apresentadas as distribuições estatísticas através de histogramas. A utilização de histogramas melhora a interpretação dos resultados onde a análise gráfica é muito carregada.

### 5.1. Velocidades angulares, acelerações e velocidades lineares

Apresentam-se a seguir os dados obtidos através de um teste em percurso fechado no perímetro externo da EPUSP com duração aproximada de 5 minutos e distância percorrida de aproximadamente 2800 metros (figura 5.1). As velocidades angulares e as acelerações foram extraídas da UMI numa taxa de 50 amostras por segundo e são apresentadas nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  respectivamente. A velocidade linear foi extraída do velocímetro do veículo numa taxa de 1 amostra a cada 5 segundos. Inicialmente os dados são apresentados no sistema de coordenadas da plataforma (RPY) e posteriormente são transportados para o sistema de coordenadas da navegação local (NED).

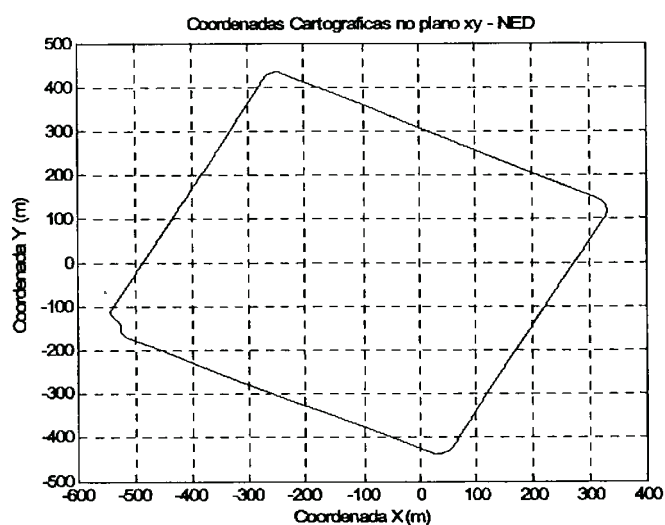


Fig. 5.1 – Trajetória para o teste em percurso fechado

### 5.1.1. Sistema de coordenadas da plataforma – RPY

As figuras 5.2 a 5.4 ilustram o comportamento da atitude do veículo durante o teste em trajetória fechada. As velocidades angulares em torno dos eixos  $x$  e  $y$  possuem predominância de componentes de alta frequência indicando que uma grande quantidade de movimentos de rolamento e arfagem ocorreram. Estes resultados estão coerentes com o ensaio efetuado, pois o percurso percorrido apresenta em toda sua extensão desnivelamentos, lombadas e depressões causando assim uma grande quantidade de movimentos de “roll” e “pitch” respectivamente.

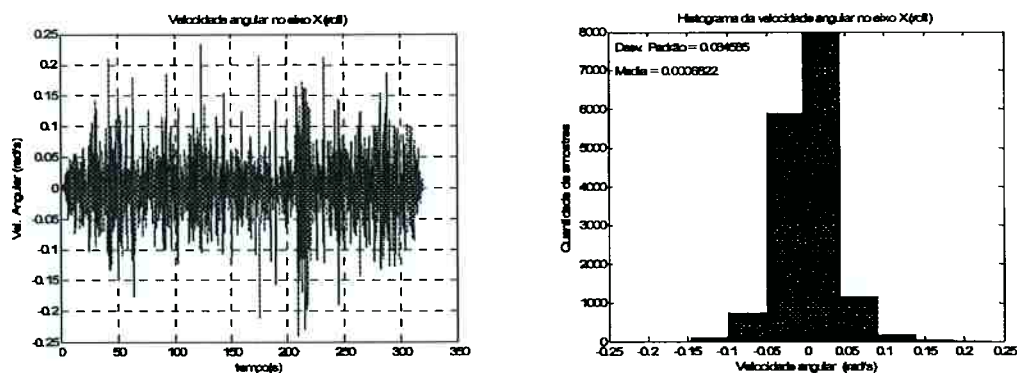


Fig. 5.2 – Velocidade angular no eixo  $x$  (roll)

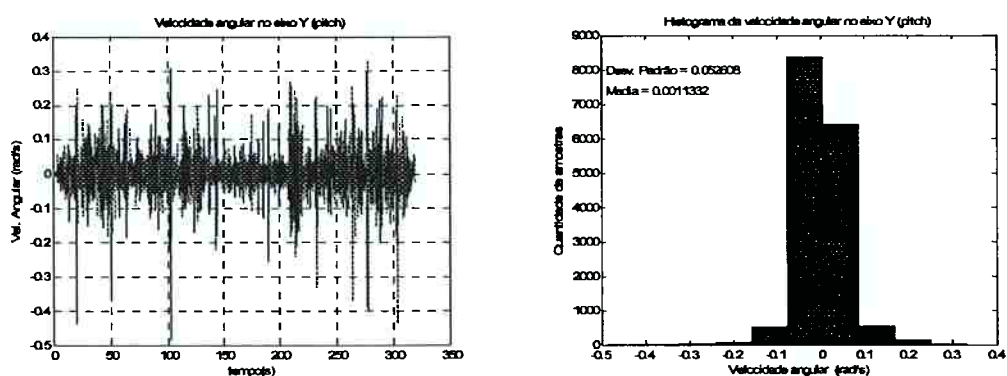


Fig. 5.3 – Velocidade angular no eixo  $y$  (pitch)

Nas figuras anteriores, os histogramas 5.2 e 5.3 indicam que os movimentos de rolagem e arfagem não são normalmente distribuídos em torno de zero, e também não apresentam média nula, tendendo a favorecer (ou seja, acumular) movimentos angulares numa única direção. Provavelmente isto ocorre devido ao efeito dos amortecedores do veículo, que apresentam diferentes taxas de deslocamentos durante os movimentos de compressão e distensão.

A velocidade angular em torno do eixo z (figura 5.4) apresenta seis pontos pronunciados, onde os valores positivos indicam movimento de guinada no sentido horário e vice-versa. Estas mudanças de direção estão de acordo com o percurso descrito pela figura 5.1.

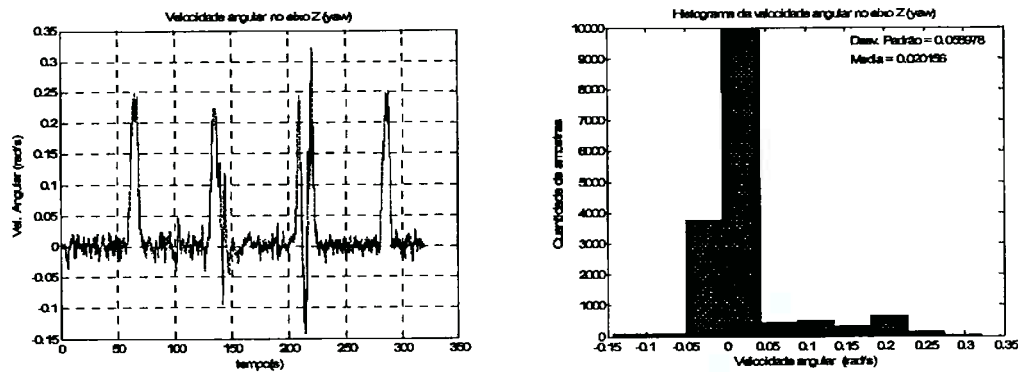
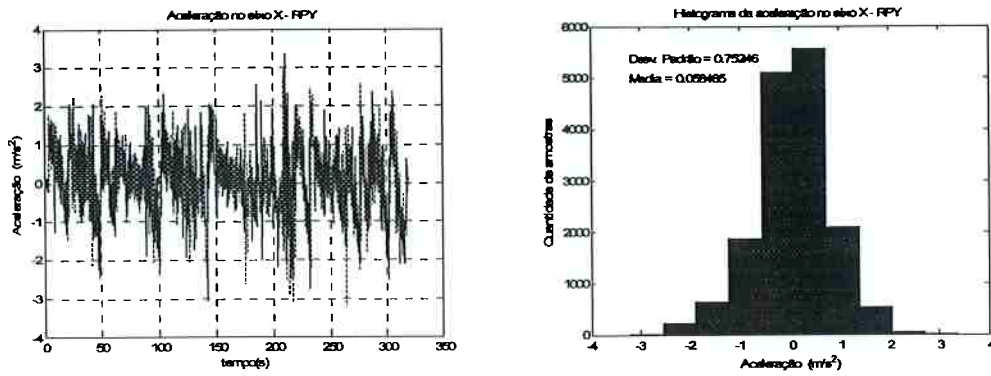
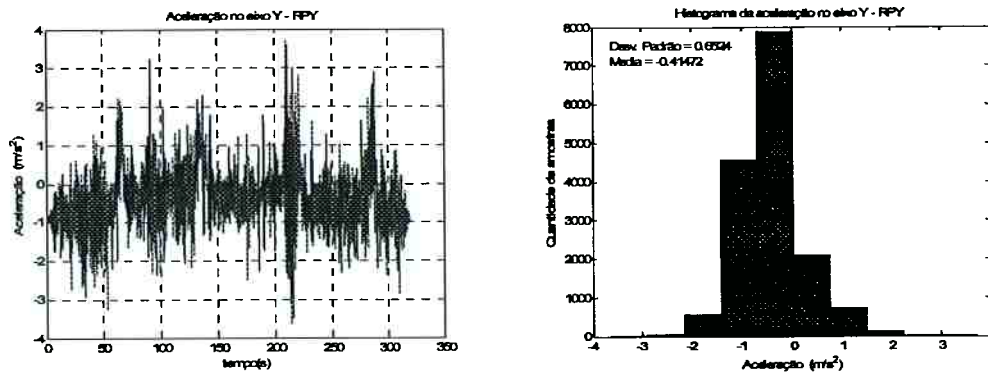
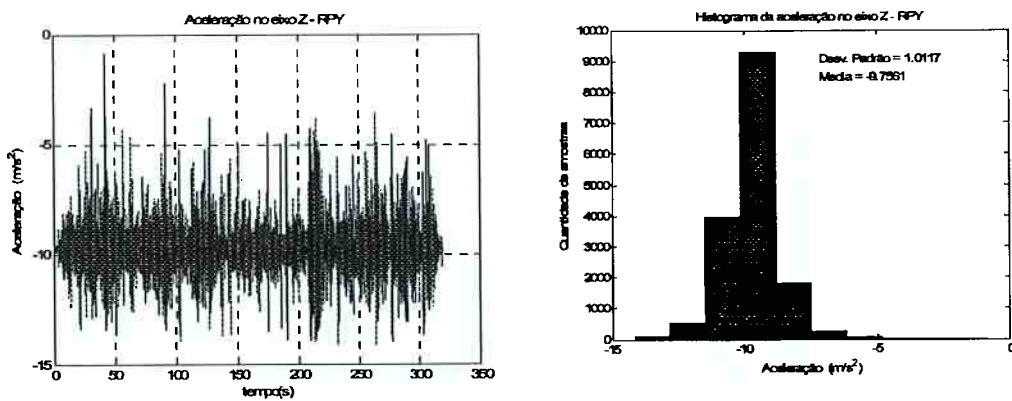


Fig. 5.4 – Velocidade angular no eixo z (yaw)

As figuras 5.5 a 5.7 descrevem o comportamento das acelerações que atuam no veículo. A aceleração no eixo  $x$  atinge valores de  $\pm 3 m/s^2$  com média positiva muito pequena como mostra seu histograma. A aceleração no eixo  $y$  atinge picos superiores à do eixo  $x$ , com média negativa, o que indica que os desnivelamentos causaram movimentos de rolamento e conseqüente decomposição da aceleração gravitacional em  $y$ . O gráfico da figura 5.5 mostra que, devido ao acoplamento das acelerações causados pelos movimentos de “roll” e “pitch”, a aceleração no eixo  $z$  oscilou em torno de um valor médio acima de  $10 m/s^2$ , entretanto seu histograma indica que a aceleração média no eixo  $z$  ficou em torno de  $-9,76 m/s^2$ , que corresponde a aproximadamente a aceleração gravitacional  $g = 9,8 m/s^2$ .



Fig. 5.5 – Aceleração no eixo  $x$ Fig. 5.6 – Aceleração no eixo  $y$ Fig. 5.7 – Aceleração no eixo  $z$

No sistema de coordenadas da plataforma, a velocidade linear apresentada a seguir possui componente apenas na direção  $x$ , pois o sentido de deslocamento do veículo está paralelo ao eixo  $x$  da UMI

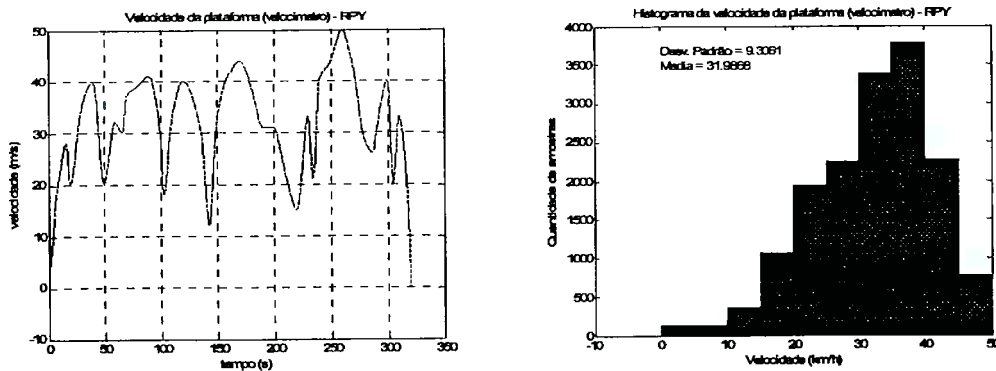


Fig. 5.8 – Velocidade no eixo  $x$

### 5.1.2. Sistema de coordenadas da navegação – NED

Nesta seção, as acelerações e a velocidade linear obtidas anteriormente são transportadas para o sistema de coordenadas NED. A transformação foi efetuada por “Ângulos de Euler”, segundo a equação 2.5 e os incrementos angulares foram obtidos integrando-se as velocidades angulares entre duas amostras consecutivas. No sistema NED, as acelerações serão utilizadas como entradas para os algoritmos de reconstrução de trajetórias.

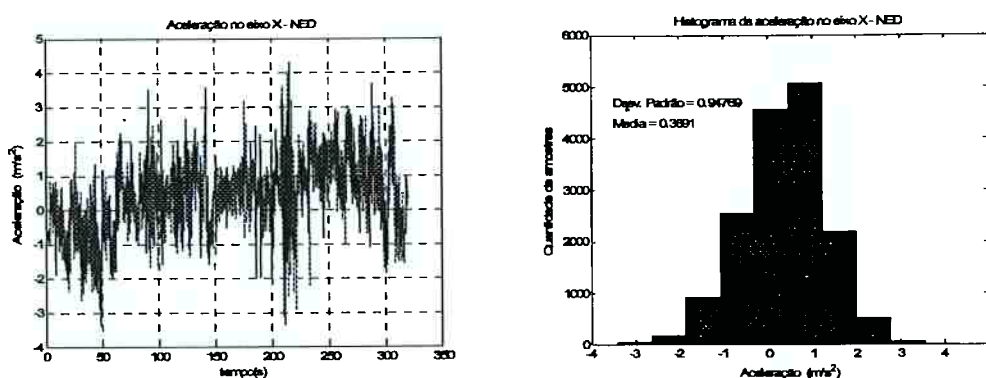


Fig. 5.9 – Aceleração no eixo  $x$

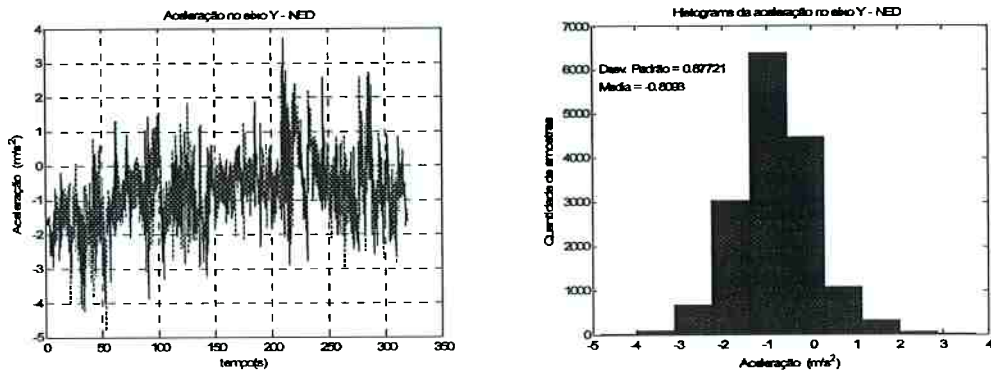


Fig. 5.10 – Aceleração no eixo y

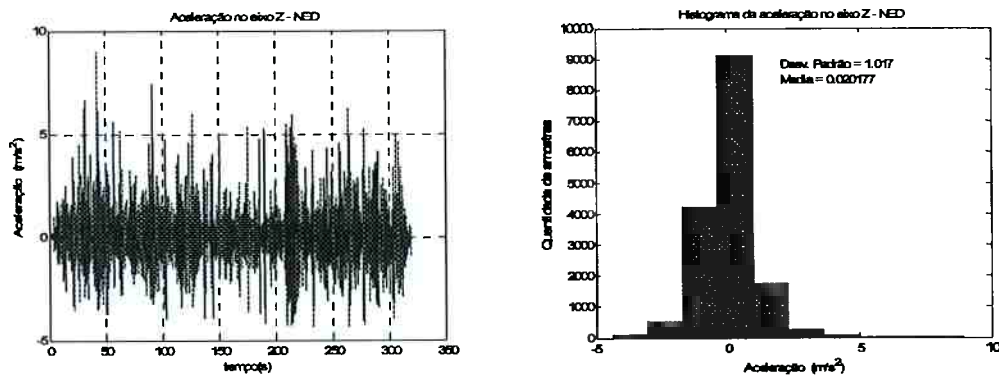


Fig. 5.11 – Aceleração no eixo z

Ao transportar as grandezas para o sistema de coordenadas NED, a velocidade linear que anteriormente possuía componentes somente na direção  $x$  passa a ter componentes nas três direções como mostram as figuras 5.12 a 5.14. Estas velocidades são utilizadas como medidas de referência na reconstrução da trajetória.

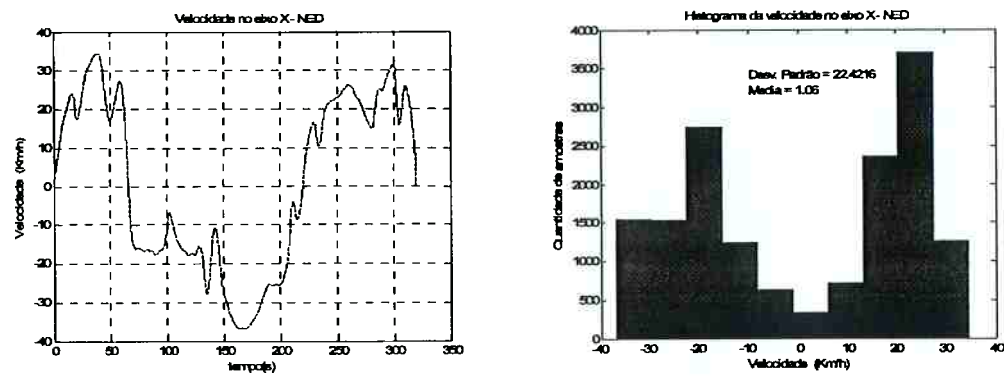


Fig. 5.12 – Velocidade no eixo x

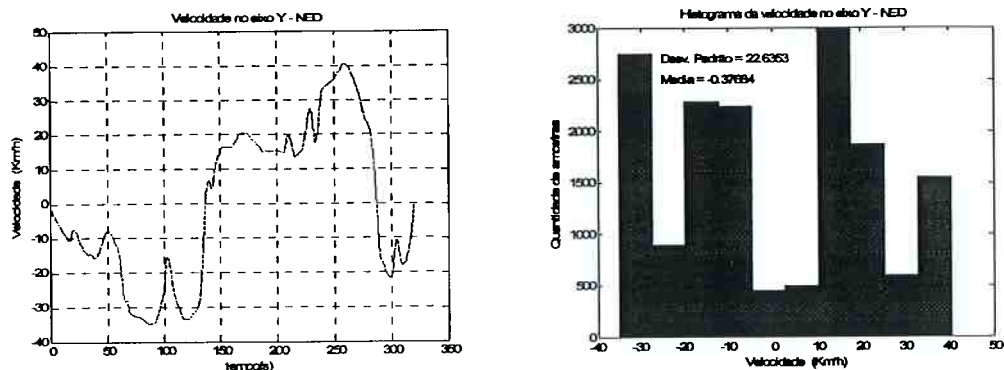


Fig. 5.13 – Velocidade no eixo y

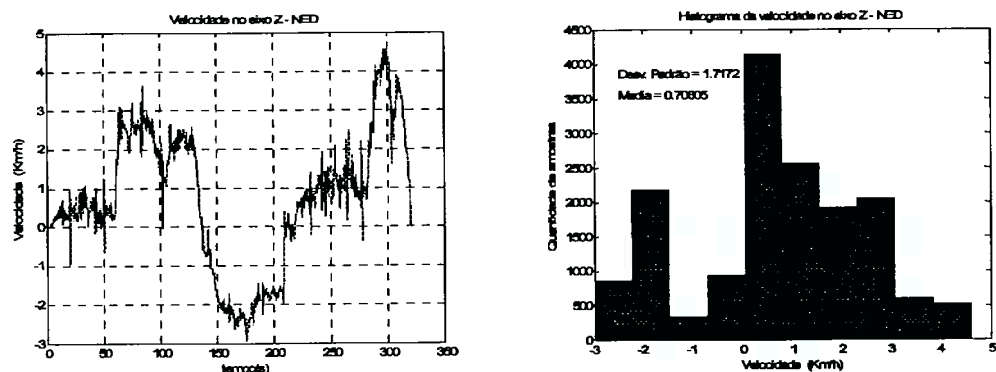


Fig. 5.14 – Velocidade no eixo z

## 5.2. Reconstrução da trajetória para o teste em percurso fechado

Apresentam-se a seguir as trajetórias no sistema NED obtidas através dos algoritmos “Duplo Integrador” e “Filtro de Kalman”. Ambos os reconstrotores foram implementados *sem a utilização* de medidas de referência (ou seja, baseando-se apenas nas medições fornecidas pela UMI) e *com a utilização* de medidas de referência. Adotaram-se como medidas de referências as velocidades no sistema NED e um conjunto de marcas topográficas “landmarks”.

### 5.2.1. Reconstrução por dupla integração e por filtro de Kalman sem a utilização de medidas de referência

A primeira investigação apresenta as trajetórias reconstruídas por dupla integração trapezoidal das acelerações e pelo filtro de Kalman sem utilizar nenhuma medida de referência. As acelerações utilizadas estão no sistema NED.

Analisando os histogramas das acelerações  $x$  e  $y$  (figura 5.9 e 5.10) nota-se que as acelerações  $x$  e  $y$  possuem uma predominância de amostras com valores positivos e negativos respectivamente, portanto a primeira integração cumulativa produz velocidade na direção  $x$  com predominância positiva e velocidade na direção  $y$  com predominância negativa (figuras 5.14 e 5.15). Integrando-se as velocidades obtêm-se os deslocamentos  $x$  e  $y$ , onde se observa que o duplo integrador produz uma trajetória em percurso aberto e não fechado (figura 5.16a).

A trajetória reconstruída pelo filtro de Kalman sem a utilização de medidas de referência também apresenta percurso aberto e valores incompatíveis com a trajetória real, (como mostra a figura 5.16b), mas muito semelhante ao percurso obtido pelo duplo integrador (vide figura 5.17) Neste processamento, não é utilizado o modelo descrito nas equações 3.51, com 9 estados, e sim um modelo mais simples com apenas seis estados (sem a estimação dos erros de aceleração  $\delta \mathbf{a}$ ), uma vez que neste caso não se dispõe de informações adicionais para estimar  $\delta \mathbf{a}$ . Além disso, a matriz  $\mathbf{H}$  é declarada nula, fazendo com que a matriz de ganho  $\mathbf{K}$  seja também sempre nula, e portanto os estados estimados deixam de ser corrigidos pelo vetor de entradas  $\mathbf{z}$ . Em resumo, as equações 3.49 e 3.50 foram simplificadas por:

$$\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{p}_k + \mathbf{v}_k T + 0,5 \mathbf{a}_k T^2 + \mathbf{w}_k \text{ e } \mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{v}_k + \mathbf{a}_k T + \mathbf{w}_k \text{ respectivamente.}$$

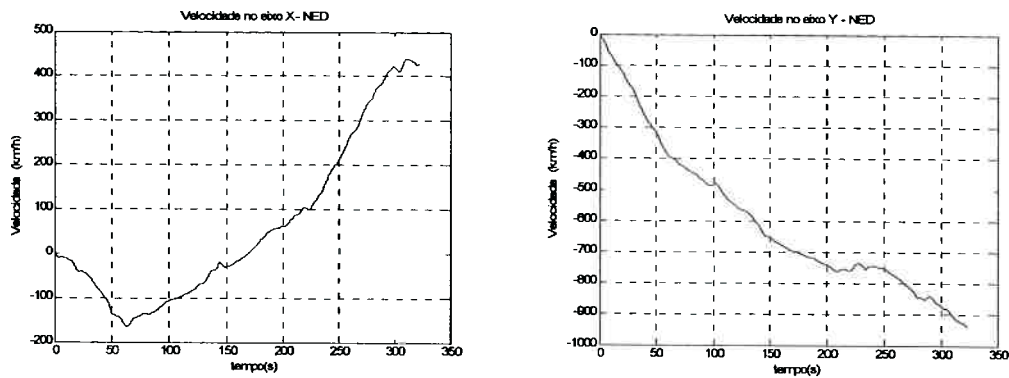


Fig. 5.15 – Velocidades x e y obtidas por integração

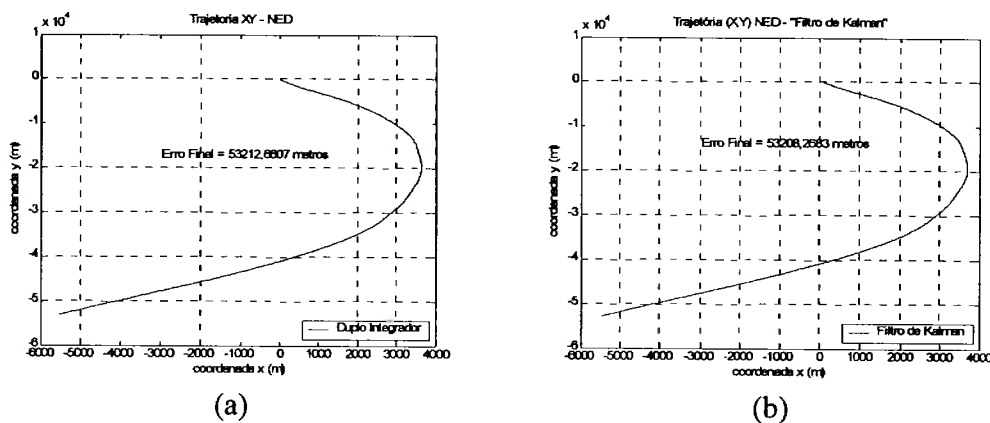


Fig. 5.16 – Trajetórias reconstruídas por dupla integração e por filtro de Kalman sem utilizar medidas de referência

A figura 5.16, mostra que nenhum dos reconstrutores apresentou resultados compatíveis com a trajetória real (figura 5.1), indicando que as informações geradas pela UMI não são precisas o suficiente para reconstruir a trajetória. Para cada reconstrutor também são apresentados os erros finais da trajetória reconstruída. No plano  $xy$  e no eixo  $z$ , os erros finais de reconstrução são definidos respectivamente por:  $\delta c_{xy} = \sqrt{(cx_f - cx_i)^2 + (cy_f - cy_i)^2}$ ,  $\delta c_z = cz_f - cz_i$ . Como a trajetória real é fechada, esses valores idealmente seriam nulos.

Analisa-se o erro no plano  $xy$  ( $\delta c_{xy}$ ) em separado do erro na coordenada  $z$  ( $\delta c_z$ ), porque este último tende a crescer muito devido à dinâmica dos amortecedores, que influenciam as medidas do giroscópio de “pitch”, como será visto adiante. A separação entre  $\delta c_{xy}$  e  $\delta c_z$  evita que erros elevados no eixo  $z$  venham a mascarar o erro final da trajetória reconstruída no plano.

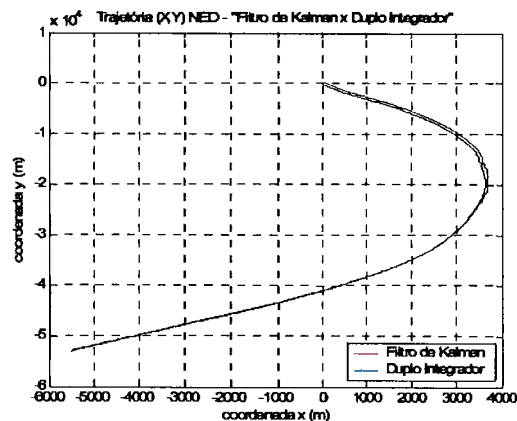


Fig. 5.17 – Comparação entre os reconstituidores

### 5.2.2. Reconstrução por dupla integração e por filtro de Kalman com a utilização de medidas de referência

Apresentam-se as trajetórias reconstruídas com a utilização da velocidade como medidas de referência. Para o duplo integrador as medidas de referência são utilizadas a cada iteração no termo  $\mathbf{v}_k$  da equação  $\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{p}_k + \mathbf{v}_k T + 0,5\mathbf{a}_k T^2$ , enquanto que para o filtro de Kalman as medidas de referência são utilizadas no termo  $\mathbf{z}_k$  da equação  $\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_k^-)$ . A figura 5.18 ilustra as trajetórias reconstruídas pelo duplo integrador e pelo filtro de Kalman. Nestas trajetórias fica evidente que somente a inclusão da velocidade como medida de referência melhora *drasticamente* o desempenho do sistema, e que sem isso o processo da navegação fica *inviável*.

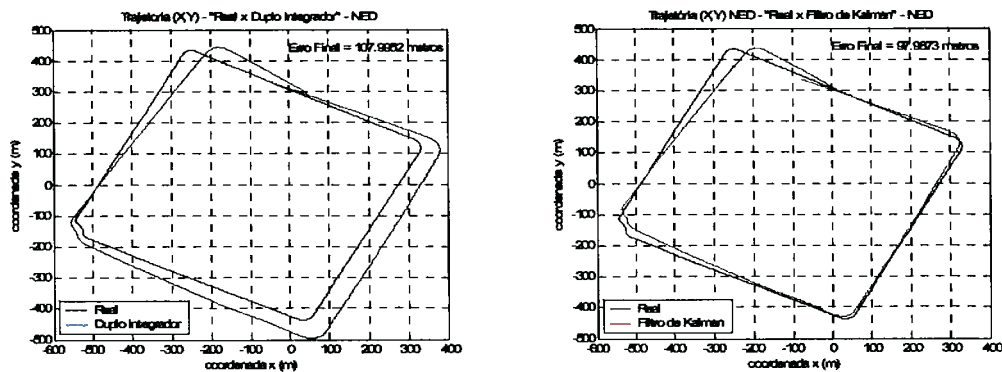


Fig. 5.18 – Trajetórias reconstruídas por dupla integração e por filtro de Kalman com medidas de referência da velocidade

A seguir apresenta-se a comparação entre os reconstrutores, e também o comportamento do deslocamento no eixo  $z$  ao longo do percurso. Note que o deslocamento no eixo  $z$  não volta para a origem, indicando que o filtro não atuou satisfatoriamente nesta direção. A causa provável para esta ocorrência seria a atuação do giroscópio  $y$  (pitch) que atua de forma assimétrica durante as freadas e arrancadas do veículo. Como consequência disso a velocidade no eixo  $z$  não foi corretamente transportada do sistema RPY para o sistema NED.

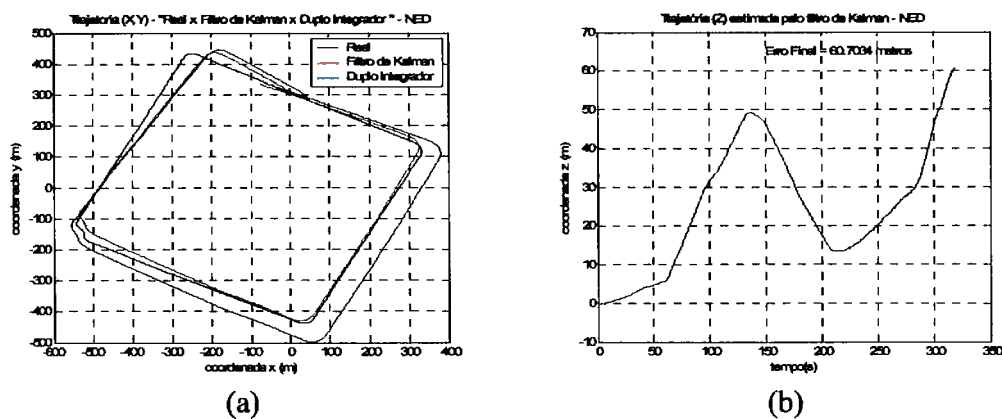


Fig. 5.19 – Comparação entre os reconstrutores (a) - Deslocamento no eixo  $z$  (b)

### 5.2.3. Desempenho dos reconstrutores na presença de ruídos de medição

A seguir são apresentados os resultados obtidos pelo duplo integrador e pelo filtro de Kalman, quando se aplica um ruído aleatório às medidas de velocidade. Os ruídos



foram produzidos artificialmente pela função “randn” do Matlab® e inseridos no vetor de velocidades NED. Foram executadas quatro simulações nas quais as potências dos ruídos inseridos correspondem respectivamente a 50%, 100%, 150% e 200%, do valor da covariância do erro de medição  $R$ . Nestas simulações, nota-se que o filtro de Kalman combinou satisfatoriamente as medidas de referências ruidosas, produzindo resultados superiores ao duplo integrador (vide figuras 5.20 a 5.24). Apesar do erro final observado nos dois métodos serem próximos, a trajetória reconstruída pelo filtro de Kalman adere melhor à trajetória real.

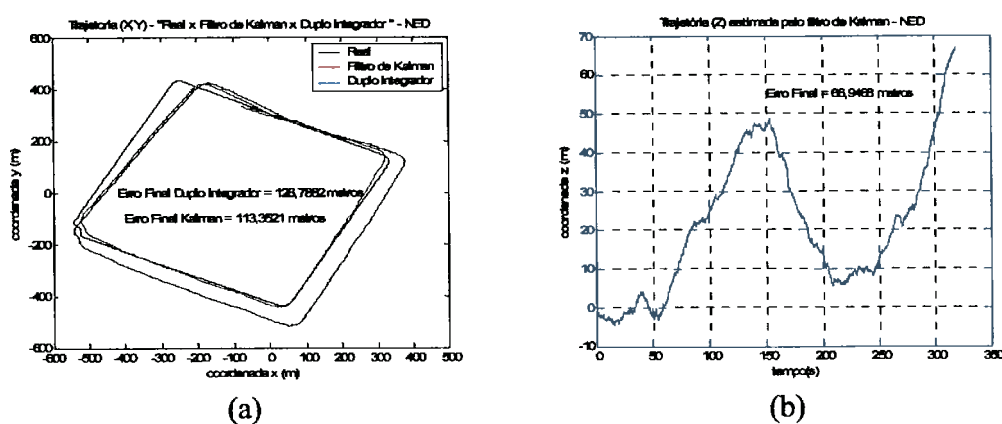


Fig. 5.20 –Comparação entre os reconstrotores na presença de ruído de medição  
Primeira simulação: potência de ruído = 50% do ruído de medição  $R$

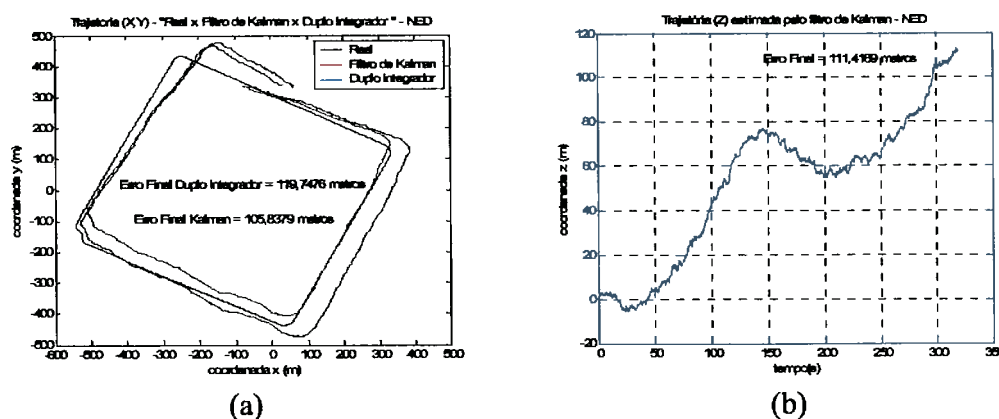


Fig. 5.21 –Comparação entre os reconstrotores na presença de ruído de medição  
Segunda simulação: potencia de ruído = 100% do ruído de medição  $R$

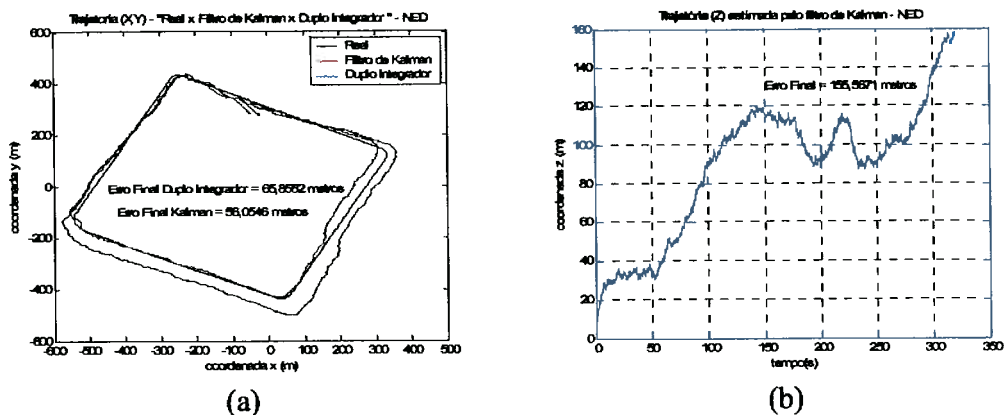


Fig. 5.22 – Comparação entre os reconstrotores na presença de ruído de medição  
Terceira simulação: potência de ruído = 150% do ruído de medição R

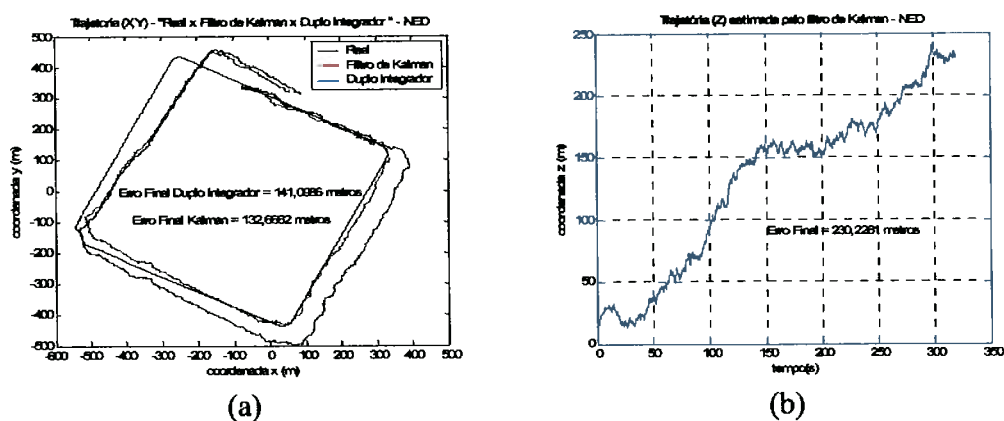


Fig. 5.23 – Comparação entre os reconstrotores na presença de ruído de medição  
Quarta simulação: potência de ruído = 200% do ruído de medição R

### 5.3. Análise do efeito da deriva dos giroscópios

A seguir apresenta-se um teste em trajetória aberta e aproximadamente reta, cujo objetivo é investigar o efeito da deriva dos giroscópios. A figura 5.21 mostra as trajetórias reconstruídas pelo duplo integrador e pelo filtro de Kalman. Note que durante o trecho em que a trajetória real é reta, ambos os reconstrotores acompanham o percurso sem sofrer desvio significativo. Entretanto quando se inicia um movimento de guinada, a trajetória reconstruída pelo duplo integrador passa a

acumular um desvio angular sobre o eixo z. Este desvio cumulativo é um indício de que o giroscópio z (yaw) após ser submetido a uma taxa de rotação significativa pela primeira vez, passa a apresentar deriva.

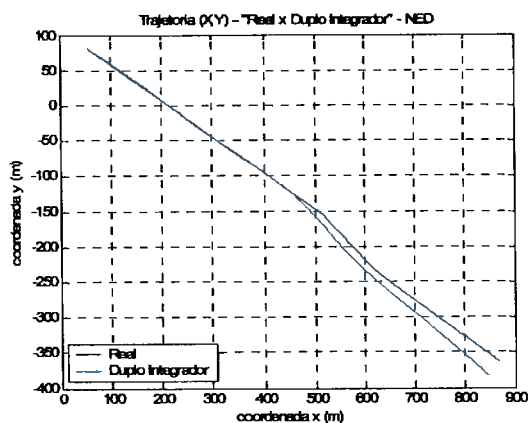


Fig. 5.24 – Trajetórias reconstruídas em percurso aberto

Além do efeito da deriva, os giroscópios também apresentam um sinal aleatório de valor constante denominado “bias”. Este sinal também se soma à deriva contribuindo para o desvio angular durante a reconstrução da trajetória. A figura a seguir ilustra o incremento angular produzido pelo “bias” dos giroscópios durante aproximadamente três minutos. Estes gráficos foram obtidos a partir de testes consecutivos com a UMI em repouso sobre uma base nivelada.

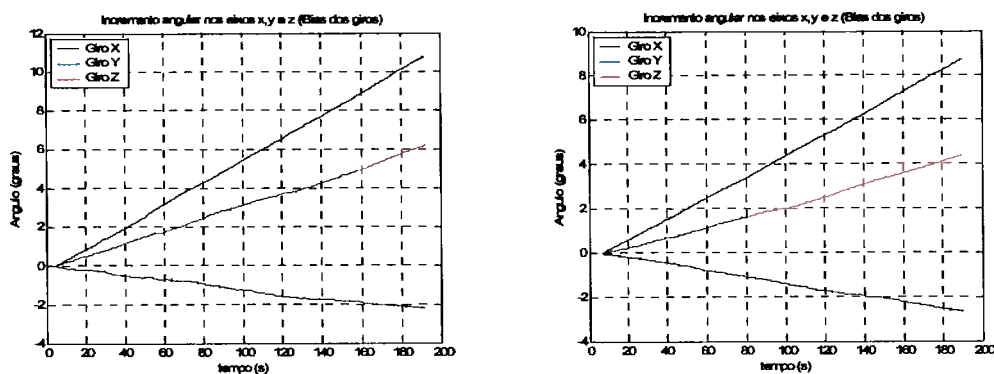


Fig. 5.25 – Incremento angular devido ao “bias” de giroscópio

Analisando as figuras 5.21 e 5.22, conclui-se que os erros dos giroscópios contribuem fortemente para inviabilizar a navegação inercial através da UMI apenas. Essa conclusão é corroborada na próxima seção, quando se observa que a inclusão de “landmarks” nas curvas melhora significativamente a reconstrução da trajetória, atenuando o efeito da deriva dos giroscópios.

#### 5.4. Utilização de marcas topográficas para auxiliar o filtro de Kalman

Esta seção investiga a contribuição obtida na reconstrução da trajetória ao se empregar um conjunto de marcas topográficas “landmarks” sobre o filtro de Kalman conjuntamente com a velocidade.

O critério adotado para inserir as marcas topográficas fundamenta-se na monitoração da matriz de covariância do erro  $\mathbf{P}$ . Nesta matriz, os três primeiros elementos da diagonal principal são as covariâncias dos erros de deslocamento  $x$ ,  $y$  e  $z$  respectivamente. Neste sentido, admitindo-se que  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$  sejam os desvios padrão nas três direções, a norma  $\sigma_c = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2}$  fornece uma medida da incerteza da estimativa de posição. Portanto, ao limitar o crescimento da covariância do erro a um valor arbitrário representado por  $\sigma_c$ , estatisticamente acredita-se que em 99% das ocorrências a trajetória estimada no ponto cujo desvio é  $\sigma_c$ , encontra-se a  $\pm 3\sigma_c$  da trajetória real.

As figuras 5.23 a 5.25 ilustram as trajetórias reconstruídas e os landmarks inseridos para valores de  $\sigma_c = 1\text{m}$ ,  $\sigma_c = 2\text{m}$  e  $\sigma_c = 3\text{m}$  respectivamente. Nestas figuras também são apresentados os históricos temporais da covariância do erro de posição e o deslocamento no eixo  $z$ .

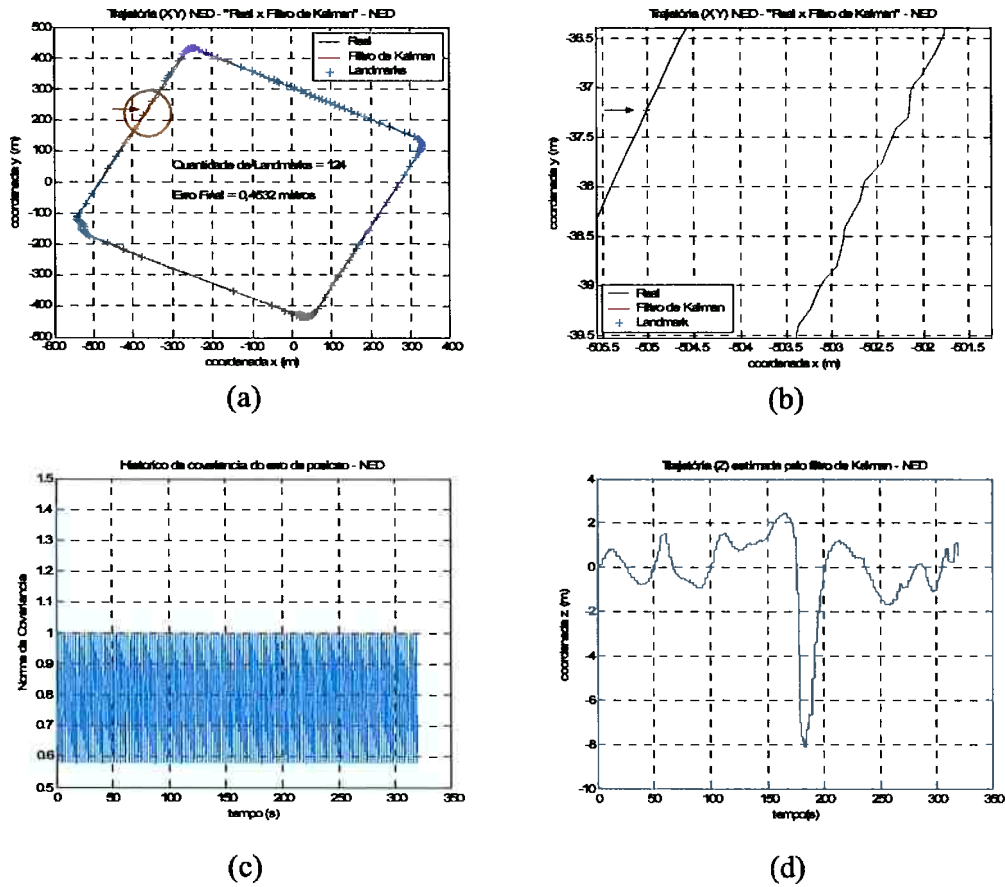
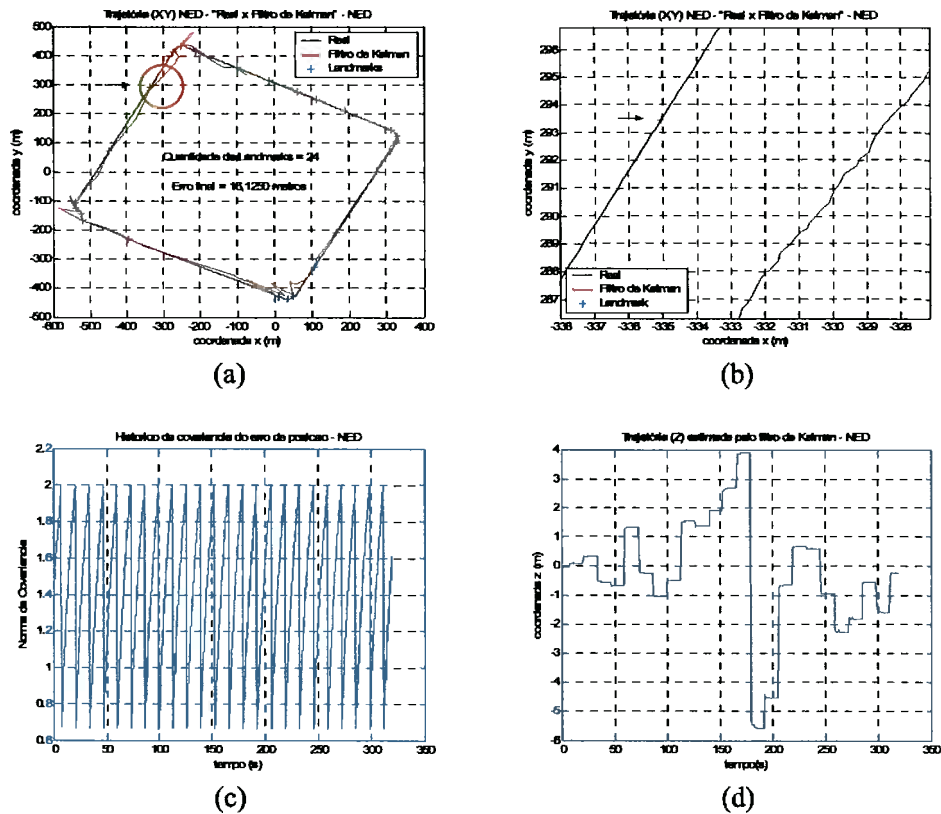


Fig. 5.26 - Teste para  $\sigma_c = 1\text{m}$

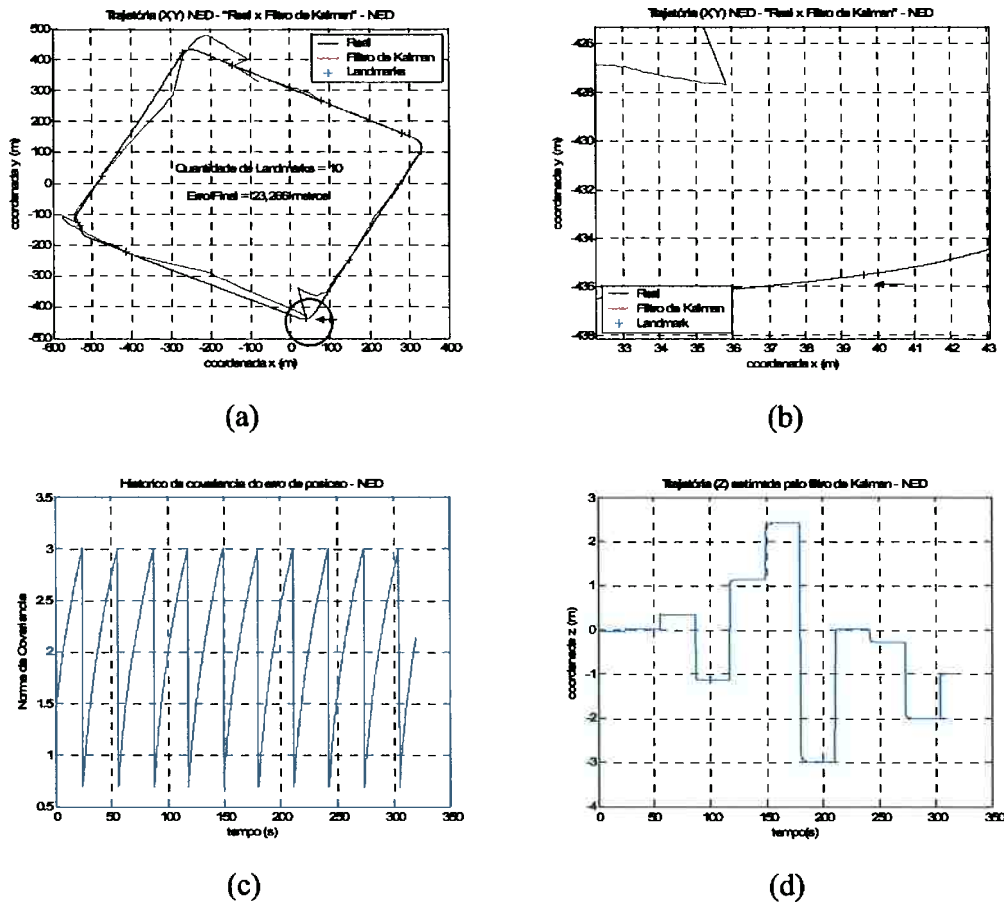
- (a) Trajetória e landmarks      (b) Trecho ampliado  
 (c) Variação de  $\sigma_c$       (d) Deslocamento no eixo z

Para  $\sigma_c = 1\text{m}$  o desvio entre a trajetória real e estimada ficou em aproximadamente 2,9 m, correspondendo a expectativa de  $\pm 3\sigma_c$ . Além do mais o crescimento do erro de deslocamento no eixo z foi atenuado significativamente, em contra-partida a quantidade de "landmarks" inseridos é relativamente elevada correspondendo a uma taxa de aproximadamente 1 "landmark" a cada 25,6 metros de deslocamento linear.

Fig. 5.27 - Teste para  $\sigma = 2m$ 

- (a) Trajetória e landmarks      (b) Trecho ampliado  
 (c) Variação de  $\sigma$               (d) Deslocamento no eixo z

Para  $\sigma_c = 2m$ , o erro entre a trajetória real e estimada ficou em aproximadamente 5,7 m (mantendo-se portanto dentro da faixa  $\pm 3\sigma_c$ ). O crescimento do erro de deslocamento no eixo z foi novamente atenuado, e a quantidade de “landmarks” inseridos foi reduzida a uma taxa de aproximadamente 1 “landmarks” a cada 116,7 metros. Entretanto, com a redução de “landmarks”, dois pontos da trajetória apresentaram desvios muito elevados (acima de 50 m).

Fig. 5.28 - Teste para  $\sigma = 3\text{m}$ 

- (a) Trajetória e landmarks      (b) Trecho ampliado  
 (c) Variação de  $\sigma_c$       (d) Deslocamento no eixo z

Para  $\sigma_c = 3\text{m}$ , o erro entre a trajetória real e estimada ficou em aproximadamente 8,95 m, mantendo-se novamente na faixa de  $\pm 3\sigma_c$ , o crescimento do erro de deslocamento no eixo z continua sendo atenuado, porém com menor eficiência, e a quantidade de “landmarks” inseridos foi reduzida a uma taxa de aproximadamente 1 “landmarks” a cada 280 metros. A redução excessiva de “landmarks” mostra entretanto que a trajetória reconstruída apresenta desvios elevados em relação a trajetória real.

Analisando os três testes anteriores, observou-se que o critério adotado levou a uma concentração de inserção de “landmarks” nas curvas. Observou-se também que para os testes que utilizam a velocidade como medidas de referência, ocorre um aumento da deriva de giroscópio quando a plataforma apresenta movimento de guinada, ou seja, quando passa por uma curva. Baseado nestas observações uma nova investigação foi implementada, priorizando a minimização da incerteza gerada pelos giroscópios nas curvas. Neste novo teste foram inseridos 10 “landmarks” sendo: 1 no início, 1 no fim e 8 nas curvas como mostra a figura 5.26a.

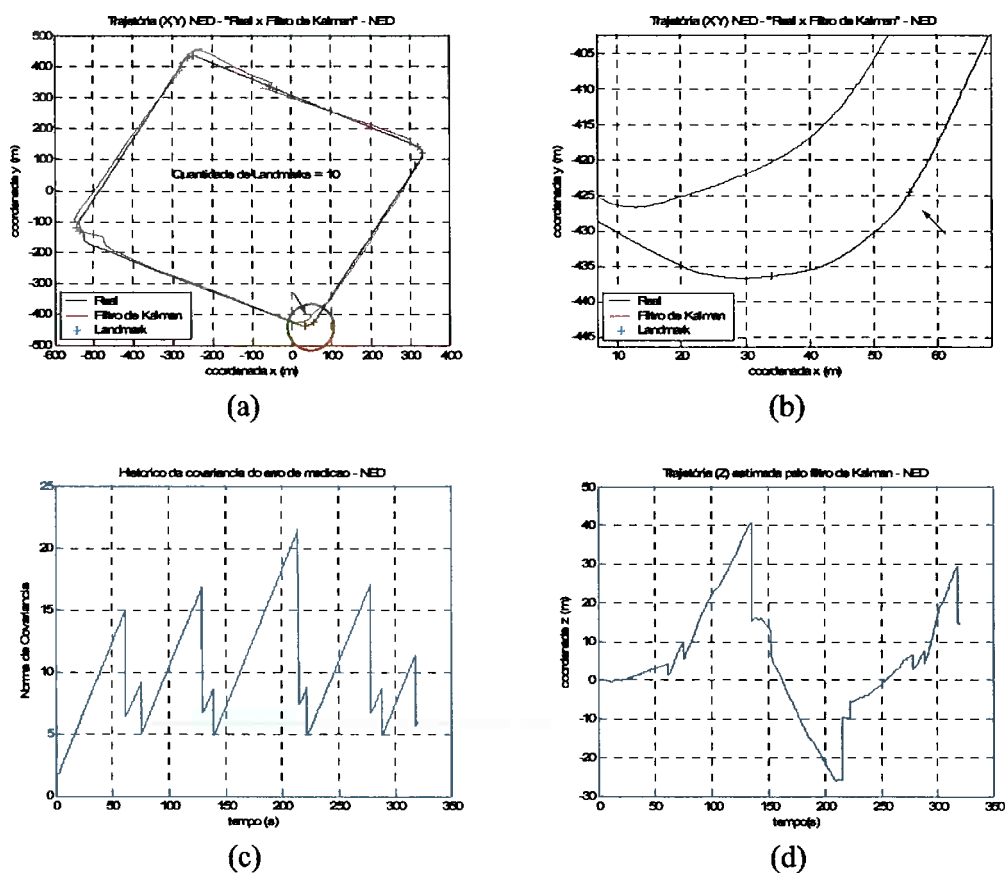


Fig. 5.29 - Teste para landmarks inseridos nas curvas

- (a) Trajetória e landmarks      (b) Trecho ampliado  
 (c) Variação de  $\sigma_c$       (d) Deslocamento no eixo z



O resultado deste experimento mostra que a trajetória reconstruída aproxima-se mais da trajetória real se comparado ao teste anterior, e que o desvio observado na mesma região foi reduzido para aproximadamente 20 m, como mostra a figura 5.26b.

### 5.5. Monitoramento do filtro de Kalman

Nesta seção, verifica-se se o filtro de Kalman está funcionando adequadamente, aplicando as técnicas descritas na seção 4.3.1, em “Materiais e Métodos”. O monitoramento do filtro é feito através da análise da matriz de covariância do erro  $P$  e da checagem da média das inovações ou resíduos  $(z_k - H_k \hat{x}_k^-)$ .

Apresentam-se a seguir os resultados obtidos a partir dos testes efetuados em percurso fechado e aberto, nos quais utilizaram-se como medidas de referência somente a velocidade e a velocidade + “landmarks”.

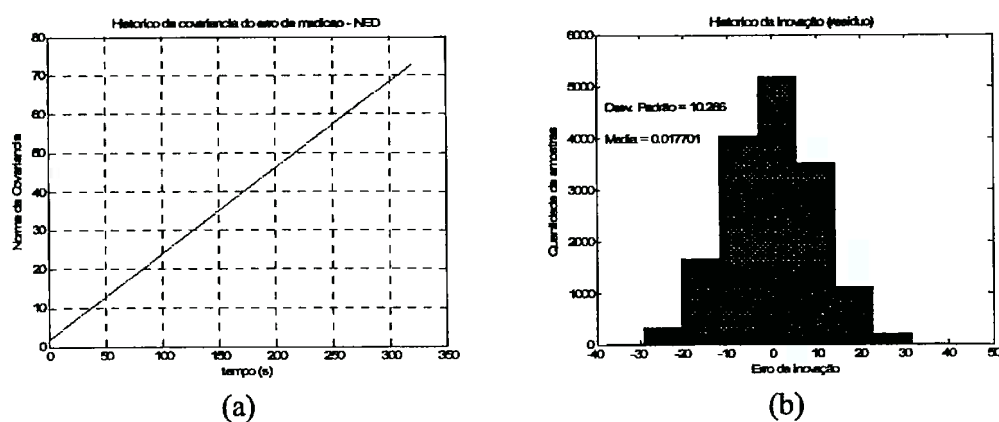


Fig. 5.30 – Monitoramento do filtro de Kalman – Percurso fechado  
 (a) Teste de covariância do erro – (b) Teste de inovação  
 medida de referência: velocidade

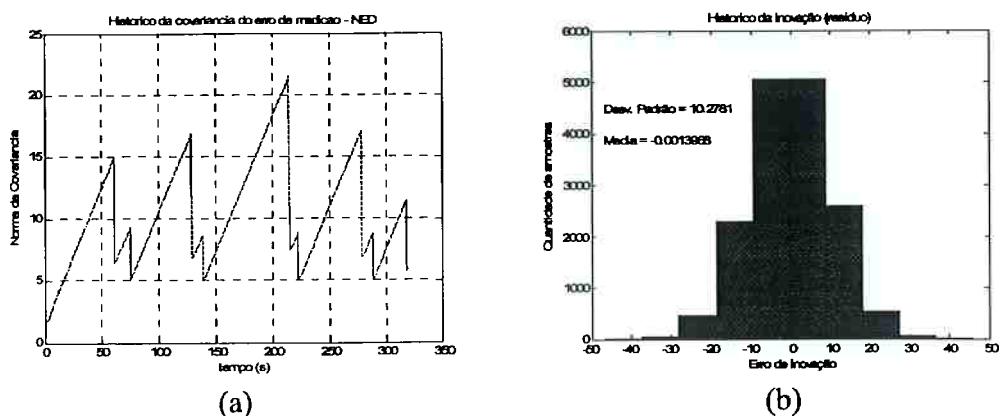


Fig. 5.31 – Monitoramento do filtro de Kalman – Percurso fechado  
 (a) Teste de covariância do erro – (b) Teste de inovação  
 medida de referência: velocidade + “landmarks”

As figuras 5.28 a 5.31 mostram que a covariância do erro aumenta com o tempo para os testes onde se utiliza somente a velocidade como medida de referência e é atenuada quando se utiliza velocidade + “landmarks” como medidas de referência. Quanto ao teste que monitora a sequência das inovações, observa-se que todos os histogramas possuem uma distribuição muito parecida com uma distribuição “Gaussiana” de média zero, o que indica que o filtro está trabalhando corretamente.

## **6. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES**

O principal objetivo deste trabalho foi desenvolver e testar um sistema de navegação inercial para aplicações terrestres baseado em uma UMI “strapdown” de baixo custo, empregando técnicas de fusão sensorial com leituras adicionais de um velocímetro e “landmarks”. Embora não seja inédita, esta pesquisa conduziu as seguintes contribuições:

- Realizou-se uma extensiva revisão bibliográfica sobre navegação inercial terrestre, consolidando-se diversos modelos matemáticos e equacionamentos.
- Foi modelado e implementado um filtro de Kalman com nove estados, sendo que os resultados mostraram-se satisfatórios em se tratando de uma UMI de baixo custo.

Baseado no desenvolvimento e nos testes conduzidos neste trabalho apresentam-se a seguir as seguintes conclusões e recomendações:

- A UMI de baixo custo utilizada, não permitiu por si só a reconstrução das trajetórias ensaiadas de forma minimamente satisfatória, devido principalmente à baixa precisão de seus giroscópios e acelerômetros.
- No entanto, a utilização de medidas de velocidade como leituras externas auxiliares melhora drasticamente o desempenho dos reconstrotores desenvolvidos.
- O reconstroto baseado no filtro de Kalman é superior ao duplo integrador, pois além de mostrar-se mais robusto na presença de ruídos aleatórios, ainda permite compor uma fusão sensorial mais flexível.

- Como era de se esperar, a utilização de “landmarks” diminui sensivelmente o erro de reconstrução da trajetória, mostrando-se superior em relação aquela que utiliza apenas a velocidade como medida de referência.
- Investigou-se um critério para estabelecer a quantidade de “landmarks” necessária para uma desejada precisão de reconstrução, monitorando-se a matriz de covariância  $P$ . A aplicação desse critério levou a resultados coerentes, em que a distância média entre “landmarks” diminui com o aumento da precisão estipulada, o que valida o critério proposto.
- A deriva e o “bias” dos giroscópios afetam sensivelmente a aceleração e principalmente as matrizes que efetuam a transformação de coordenadas da aceleração e da velocidade, influenciando diretamente na reconstrução da trajetória. Neste sentido, deve-se investigar o emprego de sensores para medir a orientação da plataforma, tais como giroscópios adicionais (mais precisos), inclinômetros, bússolas, etc.
- Verificou-se que a imprecisão dos giroscópios pôde ser compensada com sucesso, incluindo-se estrategicamente “landmarks” nas curvas do trajeto. Abre-se assim uma possível frente de pesquisa para a determinação de pontos ótimos de inserção de “landmarks”, com base nas curvas da trajetória.

Baseado na experiência adquirida pelo autor ao longo da execução deste trabalho, o mesmo julga importante fazer outras recomendações além daquelas expostas anteriormente :

- Outras técnicas que verificam a divergência do filtro de Kalman devem ser implementadas a fim de aumentar a confiabilidade das estimativas. Além disso, ruídos coloridos e não gaussianos devem ser inseridos e testados com o filtro, pois esta prática pode reduzir a possibilidade da instabilidade e divergência do filtro, que geralmente ocorre quando o sistema é mal modelado.

- Para minimizar o efeito produzido pelo “bias” de giroscópio, recomenda-se também, sempre empregar as técnicas de ortogonalização e normalização para evitar a propagação de erro das matrizes que efetuam as transformações de coordenadas.
- Outros modelos devem ser testados, incluindo-se o modelo que emprega o efeito do “bias” de giroscópio o qual foi desenvolvido neste trabalho. No entanto para empregar este modelo deve-se possuir métodos que permitam efetuar a calibração e o alinhamento inicial.
- Desenvolver um sistema de aquisição de dados mais elaborado que possibilite efetuar a aquisição de dados de forma sincronizada, e conseqüentemente inferir medidas mais significativas e confiáveis no vetor de medições do filtro de Kalman.
- Testar o modelo e algoritmos utilizados neste trabalho em aplicações com diferentes faixas de aceleração, velocidade e mudança de orientação.
- Entre os vários tipos de sensores que podem ser utilizados como medidas de referência para aumentar o sistema de fusão sensorial, a utilização do GPS é promissora, pois este equipamento permite obter dados de velocidade e posição cada vez mais precisos a um custo acessível.

## ***ANEXOS***

### **A. O filtro de Kalman discreto**

#### **A.1. Introdução**

O Filtro de Kalman é essencialmente um conjunto de equações matemáticas que implementam um estimador de estados conhecido como “preditor-corretor”. Quando algumas condições são satisfeitas o filtro de Kalman é considerado um estimador ótimo e minimiza a covariância do erro estimado. Desde de sua introdução, o filtro de Kalman é objeto de extensas pesquisas e aplicações, particularmente na área de navegação autônoma ou assistida. Isto talvez se deva em grande parte, aos avanços da computação digital, que torna o uso do filtro aplicável na prática, e também a sua simplicidade e robustez. Raramente as condições necessárias para robustez e otimalidade são encontradas em aplicações práticas, e mesmo assim o filtro ainda opera de forma bastante satisfatória.

#### **A.2. O Filtro de Kalman Discreto**

Esta seção descreve o filtro discreto de Kalman baseado na sua formulação do artigo [Kalman 1960] onde as ocorrências de medições e estados são estimados em instantes discretos de tempo.

O filtro de Kalman é empregado no sentido de tentar estimar o estado  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$  de um processo controlado em instantes discretos de tempo, que é governado por uma equação de diferenças linear estocástica

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k, \quad (\text{A.1})$$

É uma equação de medição  $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^m$  que é dada por

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k. \quad (\text{A.2})$$

As variáveis aleatórias  $\mathbf{w}_k$  e  $\mathbf{v}_k$  representam os ruídos do processo e da medição respectivamente. Considera-se que estas variáveis são ruídos brancos, independentes e com distribuição normal de probabilidade dada por:

$$\mathbf{p}(\mathbf{w}) \sim \mathbf{N}(0, \mathbf{Q}), \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{p}(\mathbf{v}) \sim \mathbf{N}(0, \mathbf{R}). \quad (\text{A.4})$$

Na prática, as matrizes que representam a covariância do ruído do processo  $\mathbf{Q}$  e a covariância do ruído de medição  $\mathbf{R}$ , podem mudar a cada instante de tempo ou a cada medição, entretanto assume-se por ora que as mesmas são constantes.

A matriz  $\mathbf{A}_{n \times n}$  na equação de diferenças (A.1) relaciona o estado no instante de tempo  $k$  (anterior) ao estado no instante de tempo  $k+1$  (presente). Note que na prática  $\mathbf{A}$  pode mudar a cada instante de tempo, porém aqui  $\mathbf{A}$  é considerada constante. A matriz  $\mathbf{B}_{n \times p}$  relaciona a entrada de controle  $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^p$  (opcional) ao estado  $\mathbf{x}$ . A matriz  $\mathbf{H}_{m \times n}$  na equação de medição (A.2) relaciona o estado  $\mathbf{x}$  a medição  $\mathbf{z}_k$ . Na prática  $\mathbf{H}$  pode mudar a cada instante de tempo ou medição, porém aqui  $\mathbf{H}$  é considerada constante.

### A.3. A formulação computacional do filtro

Define-se  $\hat{\mathbf{x}}_k^- \in \mathbf{R}^n$  (note o sobrescrito ‘ - ’) como uma estimativa de estado a priori no instante de tempo  $k$ , conhecendo-se o processo anterior ao instante de tempo  $k$ , e  $\hat{\mathbf{x}}_k \in \mathbf{R}^n$  como uma estimativa de estado a posteriori no instante de tempo  $k$  dada a medição  $\mathbf{z}_k$ . Pode então se definir estimativas de erros a priori e a posteriori como

$$\mathbf{e}_k^- \equiv \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-, \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbf{e}_k \equiv \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k. \quad (\text{A.6})$$

A estimativa da covariância do erro a priori é dada então por

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{E}[\mathbf{e}_k^- \mathbf{e}_k^{-T}], \quad (\text{A.7})$$

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{E}[\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T]. \quad (\text{A.8})$$

Ao desenvolver as equações para implementar o filtro de Kalman, o objetivo é encontrar uma equação que compute uma estimativa de estado a posteriori  $\hat{\mathbf{x}}_k$  como uma combinação linear de uma estimativa de estado a priori  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$  e uma diferença proporcional entre a medição atual  $\mathbf{z}_k$  e uma predição de medição  $\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_k^-$  como mostra a equação A.9.

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_k^-) \quad (\text{A.9})$$

A diferença  $(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_k^-)$  na equação A.9 é chamada de inovação da medição ou resíduo. O resíduo reflete a discrepância entre a medição predita  $\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_k^-$  e a medição atual  $\mathbf{z}_k$ .

A matriz  $\mathbf{K}_{(n \times m)}$  na equação A.9 é o fator de ganho que minimiza a covariância do erro a posteriori da equação A.8 (para maiores detalhes ver Brown e Hwang 1996). Uma forma de obter o ganho  $\mathbf{K}$  que minimiza a equação A.8 é dada por

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1}, \quad (\text{A.10})$$

Ou na forma escalar por

$$\mathbf{K} = \frac{\mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T}{\mathbf{H} \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T + \mathbf{R}}. \quad (\text{A.11})$$



Analisando a equação A.11 nota-se que na medida em que a covariância do erro de medição se aproxima de zero, o ganho  $\mathbf{K}$  atua cada vez mais, sobre o resíduo, ou seja,

$$\lim_{\mathbf{R}_k \rightarrow 0} \mathbf{K}_k = \mathbf{H}^{-1}. \quad (\text{A.12})$$

Por outro lado, na medida em que a covariância do erro estimado a priori  $\mathbf{P}_k^-$  se aproxima de zero, o ganho  $\mathbf{K}$  atua cada vez menos, sobre o resíduo, ou seja,

$$\lim_{\mathbf{P}_k^- \rightarrow 0} \mathbf{K}_k = 0. \quad (\text{A.13})$$

Outra forma de se pensar em como  $\mathbf{K}$  atua sobre o sistema é que quando a covariância do erro de medição  $\mathbf{R}$  se aproxima de zero, a medição atual  $\mathbf{z}_k$  torna-se mais verdadeira, enquanto que a medição predita  $\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_k^-$  torna-se menos verdadeira. Por outro lado, na medida em que a covariância do erro estimado a priori  $\mathbf{P}_k^-$  se aproxima de zero, a medição atual  $\mathbf{z}_k$  torna-se menos verdadeira, enquanto que a medição predita  $\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_k^-$  torna-se mais verdadeira.

#### A.4. A formulação probabilística do filtro

A justificativa para a equação A.9 tem origem na probabilidade da estimativa a priori  $\mathbf{x}_k^-$  condicionada a todas as medidas anteriormente obtidas (regra de Bayes). Por enquanto é suficiente pensar que o filtro de Kalman mantém os dois primeiros momentos da distribuição de estados

$$\mathbf{E}[\mathbf{x}_k] = \hat{\mathbf{x}}_k, \quad (\text{A.14})$$

$$\mathbf{E}[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)^T] = \mathbf{P}_k. \quad (\text{A.15})$$

A equação do estado estimado a posteriori (A.9), reflete a média (primeiro momento) da distribuição de estado – ela é normalmente distribuída se as condições da equação A.3 e A.4 forem satisfeitas. A equação da covariância do erro estimado a posteriori (A.8) reflete a variância da distribuição de estado (segundo momento). Em outras palavras:

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_k) \sim N(\mathbf{E}[\mathbf{x}_k], \mathbf{E}[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)^T]), \quad (\text{A.16})$$

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_k) = N(\hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{P}_k). \quad (\text{A.17})$$

Para maiores detalhes sobre a formulação probabilística do filtro de Kalman, consultar (Brown, 1997).

#### A.5. O algoritmo do filtro de Kalman discreto

O filtro de Kalman estima um processo utilizando uma forma de controle por realimentação – o filtro estima o estado do processo em algum instante de tempo e então obtém a realimentação (ruído) na forma de medições. Assim, as equações para o filtro de Kalman são divididas em dois grupos, atualização temporal (predição) e atualização da medição (correção). As equações de atualização temporal são responsáveis em projetar a frente (no tempo) o estado corrente e a estimativa da covariância do erro para obter uma estimativa do erro a priori para o próximo instante de tempo (lembre-se que as atualizações ocorrem em instantes discretos de tempo). As equações para atualização da medição são responsáveis pela realimentação, ou seja, elas incorporam uma nova medição ao estado estimado a priori para obter uma estimativa melhorada a posteriori.

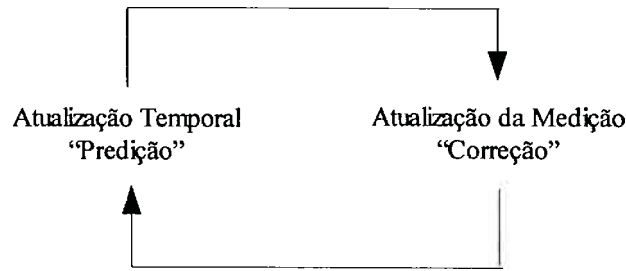


Fig. A.1 – O ciclo contínuo do filtro de Kalman discreto.

Na figura A.1 a atualização temporal projeta o estado estimado corrente (estado atual) à frente em instantes discretos de tempo. A atualização da medição ajusta a estimativa projetada através de uma medição atual no mesmo instante de tempo

As equações de atualização temporal do filtro de Kalman discreto são:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_k \quad (\text{A.18})$$

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{A}\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{A}^T + \mathbf{Q} \quad (\text{A.19})$$

Note que as equações de atualização temporal projetam as estimativas de estado e covariância à frente a partir do instante de tempo  $k-1$  ao instante de tempo  $k$ .

As equações de atualização da medição do filtro de Kalman discreto são:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T (\mathbf{H}\mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} \quad (\text{A.20})$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (z_k - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_k^-) \quad (\text{A.21})$$

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \mathbf{P}_k^- \quad (\text{A.22})$$

O primeiro passo da atualização da medição é computar o ganho do filtro de Kalman ( $\mathbf{K}_k$ ). O próximo passo é atualizar a medição do processo para obter  $\mathbf{x}_k$ , e então

gerar uma estimativa do estado a posteriori através da incorporação de uma medição. O passo final é obter uma estimativa da covariância do erro a posteriori. Após cada ciclo de atualização temporal e atualização da medição, o processo é repetido através da estimativa posteriori anterior que é utilizada para projetar ou prever uma nova estimativa a priori. Esta natureza recursiva é uma das mais agradáveis características do filtro de Kalman, pois, elas permitem implementações práticas muito simples. A figura A.2 mostra como funciona o ciclo de operação do filtro de Kalman discreto.

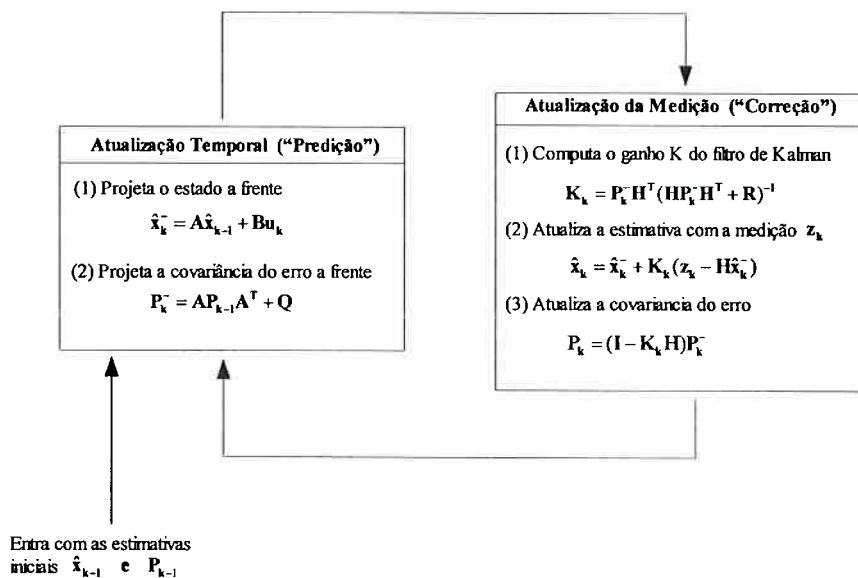


Fig. A.2 - O ciclo de operação do filtro de Kalman discreto

#### A.6. Exemplo de aplicação: Estimando uma constante aleatória

Na seção anterior foram apresentadas as formas discretas do filtro de Kalman linear e não linear. Para que se possa entender melhor o funcionamento do filtro de Kalman, esta seção apresenta um exemplo de aplicação bastante simples.

### A.6.1. O modelo do processo

Neste exemplo simples o objetivo é tentar estimar uma constante escalar aleatória (uma tensão, por exemplo). Assume-se que se pode medir a tensão (constante aleatória) e que a mesma esta corrompida por um ruído branco de  $0.1 V_{RMS}$  (pense que o conversor A/D do voltímetro não possui uma precisão adequada à medição). Assim o processo pode ser modelado pela seguinte equação de diferenças linear estocástica

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k$$

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_k,$$

E a medição  $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^m$  pode ser modelada por

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k.$$

Como o estado a ser estimado não muda a cada instante de tempo, e o mesmo é um escalar, tem-se que,  $\mathbf{A} = 1$ . dado que não existe uma entrada de controle tem-se que  $\mathbf{u}_k = 0$ . A medição depende diretamente do estado  $\mathbf{x}_k$ , portanto  $\mathbf{H} = 1$ .

### A.6.2. Equações e parâmetros do filtro

As equações de atualização temporal (predição) são:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \hat{\mathbf{x}}_{k-1}$$

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{P}_{k-1} + \mathbf{Q}$$

As equações de atualização da medição (correção) são:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- (\mathbf{P}_k^- + \mathbf{R})^{-1}$$

$$\mathbf{K}_k = \frac{\mathbf{P}_k^-}{\mathbf{P}_k^- + \mathbf{R}}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)$$

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k) \mathbf{P}_k^-$$

Assume-se que a variância do processo seja muito pequena,  $Q = 10^{-5}$  (certamente poderia se admitir  $Q = 0$ , porém assumindo que  $Q$  é muito pequeno e  $Q > 0$ , tem-se uma flexibilidade maior na sintonia do filtro, como será mostrado adiante). Assume ainda que por experiência se conhece que o valor verdadeiro da constante aleatória possui uma distribuição padrão normal de probabilidade, então admite-se que o valor inicial da constante é zero, em outras palavras, assume-se o valor da estimativa inicial  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1} = 0$ .

Similarmente à escolha de  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ , também é necessário escolher o valor inicial de  $\mathbf{P}_{k-1}$  (admita que  $\mathbf{P}_{k-1} = \mathbf{P}_0$ ). Se houver certeza absoluta que a estimativa para o estado inicial seja  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1} = 0$ , pode-se admitir então que  $\mathbf{P}_0 = 0$ . No entanto se a estimativa para o estado inicial for  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1} \neq 0$ , escolher  $\mathbf{P}_0 = 0$  poderá fazer com que o filtro estime inicialmente e para sempre  $\hat{\mathbf{x}}_k = 0$ . Para contornar este problema, escolhe-se  $\mathbf{P}_0 \neq 0$ . Inicialmente será escolhido  $\mathbf{P}_0 = \mathbf{I}$ .

### A.6.3. Simulações e Resultados

Inicialmente escolheu-se uma constante escalar  $z = 0.5287$  (veja que  $z$  não possui o acento de circunflexo porque ela representa o valor verdadeiro e não o valor estimado). Foram simuladas 50 medições distintas  $\mathbf{z}_k$  que possui erro normalmente distribuído e com um desvio padrão de 0.1 (lembre-se que foi assumido que a

medição é corrompida por um ruído branco de medição de  $0.1 V_{RMS}$ ). A fim de obter resultados mais elucidativos, foram executadas simulações com 50 iterações e com diferentes parâmetros para o filtro.

Na primeira simulação fixou-se a variância do erro de medição  $R = (0.1)^2 = 0.01$ . Dado que este é o valor verdadeiro da variância do erro de medição, espera-se uma melhor performance do filtro em termos da estimativa da variância. Isto se tornará mais evidente a partir da segunda e terceira simulação. O valor verdadeiro da constante aleatória  $x = 0.5287$  é dado pela linha sólida, o ruído de medição é dado pelas marcas cruzadas '+', e a estimativa do filtro pela curva restante.

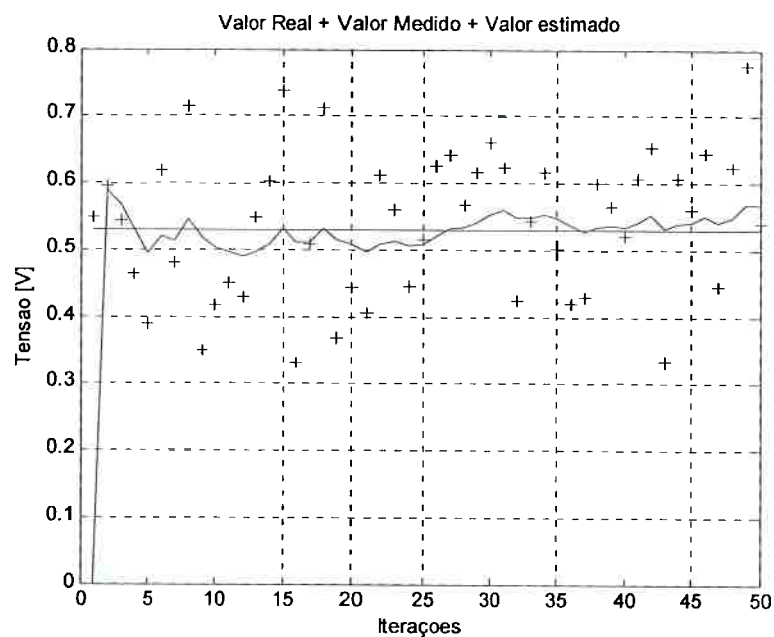


Fig. A.3 – Resultado da primeira simulação  $R = (0.1)^2 = 0.01$

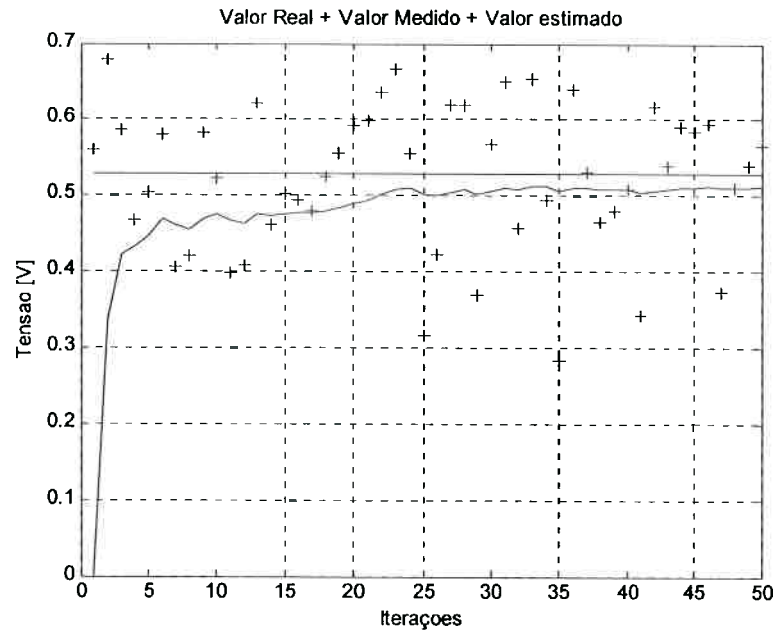


Fig. A.4 – Resultado da segunda simulação  $R = (1)^2 = 1$

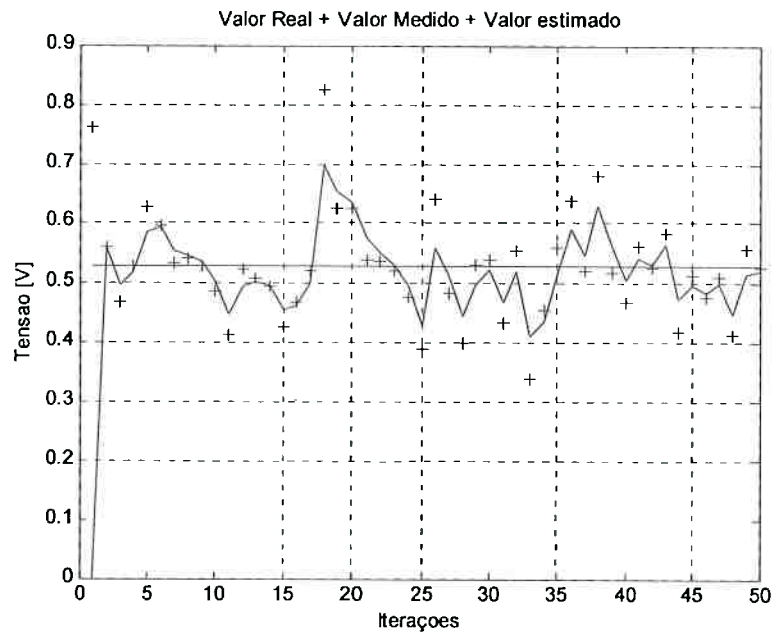


Fig. A.5 – Resultado da terceira simulação  $R = (0.01)^2 = 0.0001$



Enquanto que a estimação de uma constante aleatória é bastante simples e direta, ela claramente demonstra o funcionamento do filtro de Kalman. Na figura A.5 em particular nota-se que a estimativa da filtragem de Kalman aparece consideravelmente mais suavizada do que o ruído de medição.

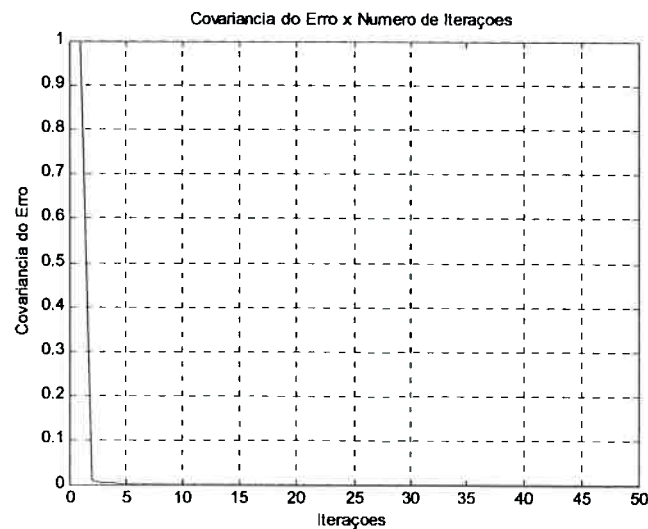


Fig. A.6 – Resultado da convergência de  $P_k$  após 50 iterações

Foi dito anteriormente que não é crítico considerar a escolha inicial de  $P_0 \neq 0$ , pois, o filtro eventualmente tenderia a convergir para o estado esperado (ou seja, melhor estimativa para  $x_k$ ). A figura A.6 mostra o valor de  $P_k$  em função da iteração. Com um total de 50 iterações o valor de  $P_k$  que inicialmente foi declarado como  $P_0 = 1$ , assentou –se por volta de 0 volts após a quinta iteração.

## B. Transformações de coordenadas

### B.1. Ângulos de Euler

A seguir descrevem-se as matrizes de rotação que transportam grandezas do sistema de navegação móvel (RPY) representada pelo índice “*b*”, para o sistema de navegação local (NED) representada pelo índice “*n*”. A operação inversa também será descrita.

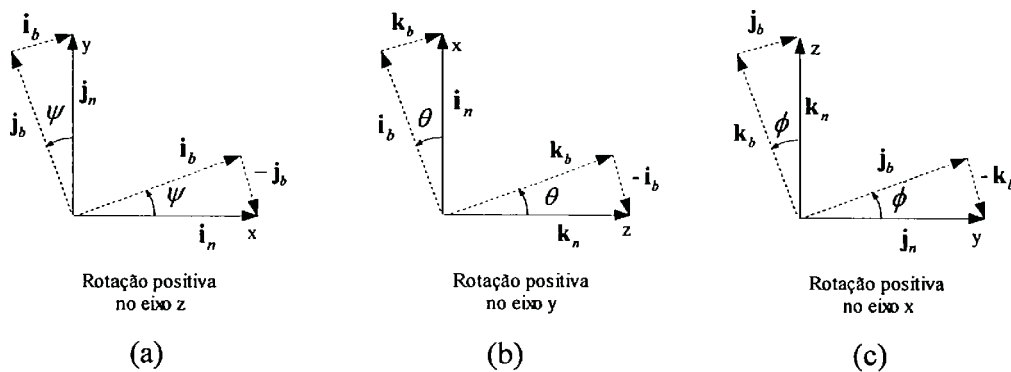


Fig. B.1 – Rotações – yaw (a), pitch (b) e roll (c)

#### Rotação em torno do eixo z (yaw)

Na figura B.1(a) os vetores unitários que representam o sistema de navegação local (NED) em função do sistema de navegação móvel (RPY), pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{i}_n &= \cos \psi \cdot \mathbf{i}_b - \sin \psi \cdot \mathbf{j}_b + 0 \cdot \mathbf{k}_b \\
 \mathbf{j}_n &= \sin \psi \cdot \mathbf{i}_b + \cos \psi \cdot \mathbf{j}_b + 0 \cdot \mathbf{k}_b \\
 \mathbf{k}_n &= 0 \cdot \mathbf{i}_b + 0 \cdot \mathbf{j}_b + \mathbf{k}_b
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

Ou na forma matricial, por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_n \\ \mathbf{j}_n \\ \mathbf{k}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{i}_b \\ \mathbf{j}_b \\ \mathbf{k}_b \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Assim a matriz de rotação no eixo  $z$  que transporta o sistema móvel (RPY) para o sistema de navegação local (NED) é:

$$\mathbf{R}_{(yaw)} = \mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

#### Rotação em torno do eixo $y$ (pitch)

Os vetores unitários que representam o sistema de navegação local (NED) em função do sistema de navegação móvel (RPY), são obtidos a partir da figura B.1(b) por:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_n &= \cos \theta \cdot \mathbf{i}_b + 0 \cdot \mathbf{j}_b + \sin \theta \cdot \mathbf{k}_b \\ \mathbf{j}_n &= 0 \cdot \mathbf{i}_b + \mathbf{j}_b + 0 \cdot \mathbf{k}_b \\ \mathbf{k}_n &= -\sin \theta \cdot \mathbf{i}_b + 0 \cdot \mathbf{j}_b + \cos \theta \cdot \mathbf{k}_b \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Ou na forma matricial, por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_n \\ \mathbf{j}_n \\ \mathbf{k}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{i}_b \\ \mathbf{j}_b \\ \mathbf{k}_b \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

Assim a matriz de rotação no eixo  $y$  que transporta o sistema móvel (RPY) para o sistema de navegação local (NED) é:

$$\mathbf{R}_{(pitch)} = \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

### Rotação em torno do eixo x (roll)

Finalmente a figura B.1(c) permite escrever os vetores unitários do sistema de navegação local (NED) em função do sistema de navegação móvel (RPY), como:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_n &= \mathbf{i}_b + 0 \cdot \mathbf{j}_b + 0 \cdot \mathbf{k}_b \\ \mathbf{j}_n &= 0 \cdot \mathbf{i}_b + \cos \phi \cdot \mathbf{j}_b - \sin \phi \cdot \mathbf{k}_b \\ \mathbf{k}_n &= 0 \cdot \mathbf{i}_b + \sin \phi \cdot \mathbf{j}_b + \cos \phi \cdot \mathbf{k}_b \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Ou na forma matricial, por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_n \\ \mathbf{j}_n \\ \mathbf{k}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{i}_b \\ \mathbf{j}_b \\ \mathbf{k}_b \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

Portanto a matriz de rotação no eixo  $x$  que transporta o sistema móvel (RPY) para o sistema tangencial (NED) é:

$$\mathbf{R}_{(roll)} = \mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

Para efetuar uma rotação nos três eixos, rotaciona-se primeiro em  $x$ , depois no novo eixo  $y$  e finalmente no novo eixo  $z$ . Matematicamente tem-se:

$$\mathbf{C}_{RPY}^{NED} = \mathbf{C}_b^n = \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_3 \quad (\text{B.10})$$

$$\mathbf{C}_b^n = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

$$\mathbf{C}_b^n = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & -\cos \phi \sin \psi + \sin \phi \sin \theta \cos \psi & \sin \phi \sin \psi + \cos \phi \sin \theta \cos \psi \\ \cos \theta \sin \psi & \cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \theta \sin \psi & -\sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \theta \sin \psi \\ -\sin \theta & \sin \phi \cos \theta & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{B.12})$$

A operação inversa da equação B.10, fornece a matriz de rotação do sistema de navegação local (NED) para o sistema de navegação móvel (RPY), ou seja:

$$\mathbf{C}_{NED}^{RPY} = \mathbf{C}_n^b = [\mathbf{C}_1 \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_3]^{-1} \quad (\text{B.13})$$

Dado que as matrizes de rotação são ortonormais, da álgebra linear tem-se que a sua inversa é igual a sua transposta, portanto a matriz de rotação do sistema de navegação local (NED) para o sistema de navegação móvel (RPY) fica sendo:

$$\mathbf{C}_{NED}^{RPY} = \mathbf{C}_n^b = [\mathbf{C}_1 \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_3]^T = \mathbf{C}_3^T \mathbf{C}_2^T \mathbf{C}_1^T \quad (\text{B.14})$$

$$\mathbf{C}_n^b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.15})$$

$$\mathbf{C}_n^b = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ -\cos \phi \sin \psi + \sin \phi \sin \theta \cos \psi & \cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \theta \sin \psi & \sin \phi \cos \theta \\ \sin \phi \sin \psi + \cos \phi \sin \theta \cos \psi & -\sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \theta \sin \psi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{B.16})$$

## B.2. Matriz de Co-Senos Diretores

Alem dos ângulos de Euler, outra forma de efetuar a transformação de coordenadas é através de uma matriz de rotação denominada “Matriz de Co-Senos Diretores” (MCD). A MCD é definida por uma matriz 3x3, cujas colunas são os vetores unitários representados no eixo da plataforma e projetados ao longo do sistema de coordenadas de referência (neste exemplo o sistema de referência é o plano tangencial local NED).

$$C_b^n = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{B.17})$$

O elemento da  $i$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna representam o co-seno do ângulo entre o eixo do sistema de coordenadas de referência  $i$  e o eixo  $j$  do sistema de coordenadas da plataforma.

### B.2.1. Transformação de coordenadas através da matriz co-seno diretor

Um vetor definido no sistema de coordenadas da plataforma pode ser expresso no sistema de coordenadas da navegação local por:

$$\mathbf{r}^n = \mathbf{C}_b^n \mathbf{r}^b \quad (\text{B.18})$$

onde a matriz  $\mathbf{C}_b^n$  é aquela obtida através dos “Ângulos de Euler”

### B.2.2. Propagação da matriz co-seno diretor no tempo

A taxa de variação da matriz  $\mathbf{C}_b^n$  com o tempo é dada por:

$$\dot{C}_b^n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta C_b^n}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{C_b^n(t + \Delta t) - C_b^n(t)}{\Delta t} \quad (\text{B.19})$$

onde  $C_b^n(t)$  e  $C_b^n(t + \Delta t)$  representam a MCD no instante de tempo  $t$  e  $t + \Delta t$  respectivamente. A matriz  $C_b^n(t + \Delta t)$  pode ser escrita como um produto de duas matrizes, por:

$$C_b^n(t + \Delta t) = C_b^n(t)A(t) \quad (\text{B.20})$$

onde  $A(t)$  é a MCD que relaciona o sistema de coordenadas da plataforma no instante de tempo  $t$  ao sistema de coordenadas de navegação local no instante de tempo  $t + \Delta t$ . Para pequenos ângulos de rotação, a matriz  $A(t)$  pode ser escrita como (Titterton, 1997):

$$A(t) = [I + \Delta\Psi] \quad (\text{B.21})$$

Na equação acima,  $I$  é uma matriz identidade 3x3 e  $\Delta\Psi$  é definida por:

$$\Delta\Psi = \begin{bmatrix} 0 & -\Delta\psi & \Delta\theta \\ \Delta\psi & 0 & -\Delta\phi \\ -\Delta\theta & \Delta\phi & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.22})$$

Nesta matriz  $\Delta\psi$ ,  $\Delta\theta$  e  $\Delta\phi$  são os pequenos ângulos de rotação no qual a plataforma é rotacionada sobre os eixos de yaw, pitch e roll respectivamente. No limite quando  $\Delta t$  tende a zero a aproximação por pequenos ângulos torna-se válida e a ordem de rotação não é importante.

Substituindo  $C_b^n(t + \Delta t)$  na equação B.19, obtém-se:

$$\dot{\mathbf{C}}_b^n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{C}_b^n(t)(\mathbf{I} + \Delta \Psi) - \mathbf{C}_b^n(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{C}_b^n(t)(\mathbf{I} + \Delta \Psi - \mathbf{I})}{\Delta t}, \quad (\text{B.23})$$

como  $\mathbf{C}_b^n(t)$  torna-se invariante no tempo pode-se escrever:

$$\dot{\mathbf{C}}_b^n = \mathbf{C}_b^n \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \Psi}{\Delta t} \quad (\text{B.24})$$

No limite quando  $\Delta t$  tende a zero  $\frac{\Delta \Psi}{\Delta t}$  torna-se a forma anti-simétrica ( $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$ )

do vetor da taxa angular  $\boldsymbol{\omega}_{nb}^b = [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T$ , o qual representa a taxa de rotação do sistema da plataforma em relação ao sistema de navegação local, ou seja:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \Psi}{\Delta t} = \boldsymbol{\Omega}_{nb}^b \quad (\text{B.25})$$

Substituindo na equação B.24 tem-se:

$$\dot{\mathbf{C}}_b^n = \mathbf{C}_b^n \boldsymbol{\Omega}_{nb}^b \quad (\text{B.26})$$

onde:

$$\boldsymbol{\Omega}_{nb}^b = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.27})$$

Na equação B.26,  $\mathbf{C}_b^n$  é a matriz de orientação inicial (também conhecida como matriz de alinhamento inicial) e  $\boldsymbol{\Omega}_{nb}^b$  é a matriz de propagação da taxa de rotação do sistema da plataforma (RPY) para o sistema de navegação local (NED).



### B.3. Transformação de coordenadas entre os sistemas ECEF, NED e ECI

Nesta seção são apresentadas as relações de transformação entre os sistemas de coordenadas: terrestre (ECEF), da navegação local (NED) e inercial (ECI).

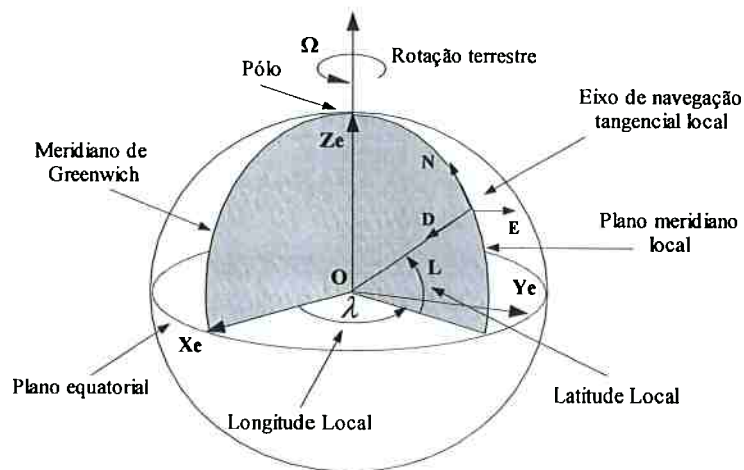


Fig. B.2 – Sistemas de coordenadas do globo terrestre

#### B.3.1. Transformação do sistema ECEF para NED

Na figura B.2 a transformação do sistema ECEF para o sistema NED é obtida a partir das seguintes ações:

1. Rotaciona-se o globo no eixo z de um ângulo de  $\lambda$ , e obtém-se a seguinte matriz de rotação

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} \cos \lambda & -\sin \lambda & 0 \\ \sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.28})$$

2. Em seguida rotaciona-se o globo em torno do novo eixo y de um ângulo de  $\phi$  e obtém-se:

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} \cos L & 0 & \sin L \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin L & 0 & \cos L \end{bmatrix} \quad (\text{B.29})$$

3. Ao executar as duas operações anteriores, o novo eixo  $x$  ficou normal à superfície terrestre, o novo eixo  $y$  ficou normal ao plano do meridiano local e o novo eixo  $z$  tangencia o meridiano local e aponta para o norte geográfico da Terra. Portanto para fazer com que o eixo  $x$  aponte para o norte geográfico, o eixo  $z$  fique normal a superfície da Terra apontando para o seu centro de massa e o eixo  $y$  completar o sistema de coordenadas através da regra da mão direita, basta rotacionar o novo sistema de coordenadas de  $90^\circ$  positivos em torno do eixo  $y$ . Assim a matriz de rotação no eixo  $y$  é dada então por:

$$\mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{B.30})$$

$$\mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & 0 & \sin 90^\circ \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin 90^\circ & 0 & \cos 90^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.31})$$

Portanto para efetuar a rotação nos três eixos, rotaciona-se primeiro em  $\lambda$ , depois em  $L$  e finalmente em  $\theta$ . Esta operação é representada matematicamente por:

$$\mathbf{C}_{ECEF}^{NED} = \mathbf{C}_e^n = \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_1 \quad (\text{B.32})$$

$$\mathbf{C}_e^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos L & 0 & \sin L \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin L & 0 & \cos L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \lambda & -\sin \lambda & 0 \\ \sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.33})$$

### B.3.2. Transformação do sistema NED para ECEF

A transformação do sistema de coordenadas NED para ECEF é obtida através da inversa da matriz  $C_n^e$ , ou seja:

$$C_{NED}^{ECEF} = C_n^e = [C_e^n]^{-1} = [C_e^n]^T = C_1^T C_2^T C_3^T \quad (B.34)$$

$$C_n^e = \begin{bmatrix} \cos \lambda & \sin \lambda & 0 \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos L & 0 & -\sin L \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin L & 0 & \cos L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (B.35)$$

### B.3.3. Conversão das coordenadas cartesianas em função da latitude $L$ e da longitude $\lambda$

Na figura B.2 as coordenadas cartesianas  $[x \ y \ z]^T$  podem ser representadas em função da latitude  $L$  e da longitude  $\lambda$ , ou seja.

$$z_e = r \sin L \quad (B.36)$$

Como a projeção entre o meridiano local e a linha do equador é uma diagonal dada por:

$$diagonal_{\text{meridiano-equador}} = r \cos L \quad (B.37)$$

As projeções da linha diagonal no eixo  $x_e$  e  $y_e$  são:

$$\begin{aligned} x_e &= r \cos L \cos \lambda \\ y_e &= r \cos L \sin \lambda \end{aligned} \quad (B.38)$$

Assim o sistema cartesiano pode ser representado em termos da latitude e da longitude por:

$$\begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos L \cos \lambda \\ r \cos L \sin \lambda \\ r \sin L \end{bmatrix} \quad (\text{B.39})$$

#### B.3.4. Transformação do sistema ECEF para ECI

Analisando a figura B.2 verifica-se que existe um movimento de rotação em torno do eixo z. Portanto a transformação de coordenadas de ECEF para ECI é obtida a partir da matriz que descreve esta rotação.

$$\mathbf{C}_e^i = \mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} \cos \lambda & -\sin \lambda & 0 \\ \sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.40})$$

Assim um vetor no sistema ECEF pode ser representado no sistema ECI por:

$$\mathbf{v}^i = \mathbf{C}_e^i \mathbf{v}^e \quad (\text{B.41})$$

#### B.3.5. Transformação do sistema ECI para ECEF

Como a transformação anterior produziu uma matriz ortonormal, a transformação do sistema de coordenadas ECI para ECEF é obtida através da transposta de  $\mathbf{C}_e^i$ .

$$\mathbf{C}_i^e = \mathbf{C}_1^T = \begin{bmatrix} \cos \lambda & \sin \lambda & 0 \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.42})$$

## C. Scripts Matlab®

A seguir são apresentados os trechos mais relevantes que foram utilizados para implementar a reconstrução das trajetórias.

### C.1. Script para correções determinísticas

```

%=====
% Script para correção determinística dos dados dos giroscópios
%=====
clc;
close;
%=====
% Declara dados de entrada (Latitude, Longitude e Velocidade de Rotação)
%=====

% latitude e longitude

Latitude = 23.32*pi/180;
Longitude = 46.43*pi/180;

Lat = Latitude;
Long = Longitude;

% velocidade de rotação da Terra [rad/s]

wie = [0 0 0.7292e-4]';

%=====
% transforma velocidade de rotação da Terra para o sistema NED
%=====

% matriz de rotação NED => ECEF

C1 = [ 0 0 1;0 1 0;-1 0 0];
C2 = [cos(Lat) 0 sin(Lat);0 1 0;-sin(Lat) 0 cos(Lat)];
C3 = [cos(Long) -sin(Long) 0; sin(Long) cos(Long) 0;0 0 1];

Ce_n = C3*C2*C1;
wie_n = Ce_n*wie;

%=====
% captura saidas dos giroscopios e transforma em radianos/s
%=====

% as saidas dos giroscopios estao no sistema da plataforma

Wx_p = Dados_UMI(:,ncol_UMI-7)*pi/180;
Wy_p = Dados_UMI(:,ncol_UMI-6)*pi/180;
Wz_p = Dados_UMI(:,ncol_UMI-5)*pi/180;

% gera vetor de tempos discretos "T" (UMI em Angle Mode)

for (i=1:nlin_UMI)
    if (i==1)
        T = Dados_UMI(i+1,1)-Dados_UMI(i,1);
    end
end

```

```

else
    T = Dados_UMI(i,1)-Dados_UMI(i-1,1);
end

% transforma velocidades angulares (W) em angulos (radianos)

Ox_p = -Wx_p(i)*T;
Oy_p = -Wy_p(i)*T;
Oz_p = -Wz_p(i)*T;

% gera matriz anti-simetrica (forma linearizada de NED ==> RPY)
Anti_simetrica = [1 -Oz_p Oy_p ; Oz_p 1 -Ox_p ; -Oy_p Ox_p 1]';

%====
% transforma velocidade da Terra do sistema NED para o sistema RPY
%====

wie_p = Anti_simetrica*wie_n;

%====
% compensa velocidade da Terra nas medidas de giroscopios
%====

Wx_p(i) = Wx_p(i)-wie_p(1);
Wy_p(i) = Wy_p(i)-wie_p(2);
Wz_p(i) = Wz_p(i)-wie_p(3);

end
beep

%-----
% Os dados de saida sao:
% -----
% Vetor com os angulos de rotaçao (compensados) em torno dos eixos xyz no
% sistema de coordenadas da plataforma (RPY) ==> Ox_p, Oy_p e Oz_p
% -----

```

## C.2. Script para transformação de coordenadas

```

%====
% Script para transformar aceleração e velocidade do sistema de coordenadas
% da plataforma (RPY) para o sistema de coordenadas de navegação (NED)
% através das medidas de giroscopio não estimadas (GNE) por filtro de Kalman
%====
clc;
close;

%====
% Declara constantes: aceleração gravitacional, raio terrestre, velocidade
% de rotação terrestre, latitude local, longitude local, altitude local e
% demais parâmetros do modelo da Terra, segundo WGS84.
%====

% latitude e longitude

Latitude = 23.32*pi/180;
Longitude = 46.43*pi/180;

```

```

Lat = Latitude;
Long = Longitude;

% velocidade de rotaçao da Terra [rad/s]

wie = [0 0 0.7292e-4]';

% constante de aceleraçao gravitacional (g)

g = 9.80665;

% raio aproximado da Terra (m)

T_raio = 6378137;

%=====
% Matriz de transformaçao de coordenadas inicial (Matriz de alinhamento
% inicial)
%=====

roll_ini = Dados_UMI(1,ncol_UMI-9)*pi/180;
pitch_ini = Dados_UMI(1,ncol_UMI-8)*pi/180;
yaw_ini = -12.5*pi/180;

% mudançaa de variavel

R = roll_ini;
P = pitch_ini;
Y = yaw_ini;

% gera matriz de transformaçao de coordenada inicial (Angulos de Euler)

Rx = [1 0 0 ; 0 cos(R) -sin(R) ; 0 sin(R) cos(R)];
Ry = [cos(P) 0 sin(P) ; 0 1 0 ; -sin(P) 0 cos(P)];
Rz = [cos(Y) -sin(Y) 0 ; sin(Y) cos(Y) 0 ; 0 0 1];

% Matriz de alinhamento inicial RPY ==> NED

Cpn_ini = Rz*Ry*Rz;
Cpn = Cpn_ini;

%=====
% captura saidas dos giroscopios (UMI em Angle Mode)e transforma em
% radianos
%=====

% Gx = Dados_UMI(:,ncol_UMI-7);
% Gy = Dados_UMI(:,ncol_UMI-6);
% Gz = Dados_UMI(:,ncol_UMI-5);

%=====
% captura saidas dos acelerometros e converte em m/s^2 (UMI em Angle Mode)
% estas componentes de aceleraçao estao no sistema de coordenadas RPY
% ( Roll Pitch Yaw)(sistema da plataforma)
%=====

Ax_p = g*Dados_UMI(:,ncol_UMI-4)';
Ay_p = g*Dados_UMI(:,ncol_UMI-3)';
Az_p = g*Dados_UMI(:,ncol_UMI-2)';

%=====
% captura angulos de roll e pitch para coorigir decomposiçao gravitacional
% (UMI em Angle Mode)e transforma em radianos
%=====

```

```

roll = Dados_UMI(:,ncol_UMI-9)*pi/180;
pitch = Dados_UMI(:,ncol_UMI-8)*pi/180;

Ax_p = Ax_p - g*sin(pitch);
Ay_p = Ay_p - g*sin(roll);

%=====
% gera vetor de tempos discretos "T" (UMI em Angle Mode)
%=====

for (i=1:nlin_UMI)
    if (i==1)
        T = Dados_UMI(i+1,1)-Dados_UMI(i,1);
    else
        T = Dados_UMI(i,1)-Dados_UMI(i-1,1);
    end

%=====
% captura velocidades angulares [rad/s] com rotaçao da Terra corrigida
% e converte em angulos [rad] (sistema de coordenadas da plataforma (RPY))
%=====

Ox_p(i) = -Wx_p(i)*T;
Oy_p(i) = -Wy_p(i)*T;
Oz_p(i) = -Wz_p(i)*T;

%=====
% sugestao para computar o angulo de rotaçao - Titterton - pg 301
%=====

% teta = [Ox_p(i) Oy_p(i) Oz_p(i)];
% omega = [Ox_p(i) Oy_p(i) Oz_p(i)]/T;
% dteta = cross(teta,omega)*T;
% teta = teta+dteta;
%
% Ox_p(i) = teta(1);
% Oy_p(i) = teta(2);
% Oz_p(i) = teta(3);

%=====
% gera matriz anti-simetrica (RPY ==> NED)
%=====

Anti_simetrica = [1 -Oz_p(i) Oy_p(i) ; Oz_p(i) 1 -Ox_p(i) ; -Oy_p(i) Ox_p(i)
1];

%=====
% gera vetor com aceleracoes [Ax Ay Az] e velocidade [Vx Vy Vz] no
% instante (i)estes vetores encontram-se no sistema de coordenadas RPY
%=====

% ajuste do fator de escala da velocidade (kv)

kv = 1
A_p = [Ax_p(i) Ay_p(i) Az_p(i)]';
V_p = [Velocidade(i) 0 0]*kv;

%=====
% transforma vetor de aceleracoes [Ax Ay Az] e velocidades [Vx Vy Vz] que
% estao no sistema de coordenadas da plataforma (RPY) para o sistema de
% coordenadas de navegaçao (NED). Se i=1 utiliza matriz de orientaçao
% inicial. Se i > 1 rotaciona a matriz a partir da rotaçao anterior.
%=====

```



```

%=====
% efetua correção de ortogonalização da matriz de orientação
%=====
    Cijk = Cpn*Anti_simetrica;

    dij = Cijk(1,:)*Cijk(2,:);
    dik = Cijk(1,:)*Cijk(3,:);
    djk = Cijk(2,:)*Cijk(3,:);

    Ci = Cijk(1,:)-0.5*dij*Cijk(2,:)-0.5*dik*Cijk(3,:);
    Cj = Cijk(2,:)-0.5*dij*Cijk(1,:)-0.5*djk*Cijk(3,:);
    Ck = Cijk(3,:)-0.5*dik*Cijk(1,:)-0.5*djk*Cijk(2,:);

    Cijk = [Ci;Cj;Ck];
    Cpn = Cijk;

%=====
% fim da ortogonalização e normalização da matriz de orientação
%=====

    A_n(:,i)=Cpn*A_p;
    V_n(:,i)=Cpn*V_p;

end

% -----
% separa as componentes de aceleração e velocidade dos eixos [x y z] que ja
% estao convertidas para o sistema de coordenadas NED
% -----
% -----
% adiciona ruido de medição k (sem ruido ==> k = 0)
% necessario para simulação do filtro de Kalman
% -----

k=0

Ax_n = A_n(1,:);
Ay_n = A_n(2,:);
Az_n = A_n(3,:);

Vx_n = V_n(1,:)+randn(1,nlin_UMI)*k;
Vy_n = V_n(2,:)+randn(1,nlin_UMI)*k;
Vz_n = V_n(3,:)+randn(1,nlin_UMI)*k;

% ka=0;
% kv=0;

% Ax_n = A_n(1,:)+randn(1,nlin_UMI)*ka;
% Ay_n = A_n(2,:)+randn(1,nlin_UMI)*ka;
% Az_n = A_n(3,:)+randn(1,nlin_UMI)*ka;

% Vx_n = V_n(1,:)+randn(1,nlin_UMI)*kv;
% Vy_n = V_n(2,:)+randn(1,nlin_UMI)*kv;
% Vz_n = V_n(3,:)+randn(1,nlin_UMI)*kv;

% -----
% compensa aceleração gravitacional que no sistema NED esta
% presente somente no eixo z
% -----

Az_n = Az_n + g;

%=====
%                               Nome e formato dos dados de saída
%=====

```

```

% Os dados de saida sao:
% -----
% Vetores de aceleracoes e velocidades nao estimados no sistema NED
% -----
% Aceleracao NED no eixo (X) ==> Nome: Ax_n (vetor nx1)
% Aceleracao NED no eixo (y) ==> Nome: Ay_n (vetor nx1)
% Aceleracao NED no eixo (z) ==> Nome: Az_n (vetor nx1)

% Velocidade NED no eixo (x) ==> Nome: Vx_n (vetor nx1)
% Velocidade NED no eixo (y) ==> Nome: Vy_n (vetor nx1)
% Velocidade NED no eixo (z) ==> Nome: Vz_n (vetor nx1)

% -----
% Vetores com angulos de rotacao nao estimados em radianos
% -----
% Angulo de rotacao RPY no eixo (x) ==> Nome: Ox_p (vetor nx1)
% Angulo de rotacao RPY no eixo (y) ==> Nome: Oy_p (vetor nx1)
% Angulo de rotacao RPY no eixo (z) ==> Nome: Oz_p (vetor nx1)
% -----

% -----
% Matriz de alinhamento inicial => Cpn_ini = Rz*Ry*Rz;
% Matriz de rotacao (plataforma (RPY) => navegacao (NED)) => Cpn;
% -----

```

### C.3. Script do filtro de Kalman

```

%=====
% Implementação do filtro de kalman para o teste automotivo
%=====

clc;
close;
% -----
% dados iniciais
% -----
%=====
% gera vetores de posição, velocidade e aceleração inicial
%=====

Po = [Coordenada_x(1) Coordenada_y(1) 0]
Vo = [Vx_n(1) Vy_n(1) Vz_n(1)]
Ao = [Ax_n(1) Ay_n(1) Az_n(1)]

% inicialização do vetor de estados

Xest = [Po Vo Ao]';

% inicializa matriz de covariancia do erro

P = eye(9)*1e0;

% inicialização do vetor de entradas

U = [0 0 0]';

% -----
% declara ruido de medição da velocidade Rv (erro de velocidade = 10%)
% -----

```

```

Rvn = 0.1*v_n';
G = cov(Rvn);
Krm = 1;
Rv = Krm*G;

% -----
% declara desvio padrao do ruido de medição da posição
% (erro de posição ep = 0,5m)
% -----

epx = .5;
epy = .5;
epz = .5;

Rp = diag([epx epy epz]);
Rp = Rp*Rp';

% -----
% matrizes que representam a medição
% -----
% H_Coord: quando tem-se medidas de referencia das coordenadas
% -----

H_Coord = [1 0 0 0 0 0 0 0 0; ...
           0 1 0 0 0 0 0 0 0; ...
           0 0 1 0 0 0 0 0 0];

H_Vel = [0 0 0 1 0 0 0 0 0; ...
         0 0 0 0 1 0 0 0 0; ...
         0 0 0 0 0 1 0 0 0];

% -----
% inicio do loop - filtro de Kalman
% -----

% calculo do intervalo de amostragem

for (i=1:nlin_UMI)
    if (i==1)
        T = Dados_UMI(i+1,1)-Dados_UMI(i,1);
    else
        T = Dados_UMI(i,1)-Dados_UMI(i-1,1);
    end

% -----
% matrizes da dinamica do sistema ==> x(k+1) = A.x(k)+B.u(k)+C.w(k)
% -----

A = [1 0 0 T 0 0 .5*T^2 0 0; ...
     0 1 0 0 T 0 0 .5*T^2 0; ...
     0 0 1 0 0 T 0 0 .5*T^2; ...
     0 0 0 1 0 0 T 0 0; ...
     0 0 0 0 1 0 0 T; ...
     0 0 0 0 0 1 0 0; ...
     0 0 0 0 0 0 1 0; ...
     0 0 0 0 0 0 0 1];

```

```

B = [.5*T^2 0 0; ...
      0 .5*T^2 0; ...
      0 0 .5*T^2; ...
      T 0 0; ...
      0 T 0; ...
      0 0 T; ...
      0 0 0; ...
      0 0 0; ...
      0 0 0];

% -----
% matriz do ruído associado ao processo (erro de posição proporcional ao
% cubo do tempo, erro de velocidade proporcional ao quadrado do tempo e
% erro de aceleração proporcional ao tempo.
% -----

C = [T^3/6 0 0 0 0 0 0 0 0; ...
      0 T^3/6 0 0 0 0 0 0 0; ...
      0 0 T^3/6 0 0 0 0 0 0; ...
      0 0 0 T^2/2 0 0 0 0 0; ...
      0 0 0 0 T^2/2 0 0 0 0; ...
      0 0 0 0 0 T^2/2 0 0 0; ...
      0 0 0 0 0 0 T 0 0; ...
      0 0 0 0 0 0 0 T 0; ...
      0 0 0 0 0 0 0 0 T];

% declara ruído de processo Q

Q = 10^-2.4*C*C' ;

% entradas do sistema u(k) => (leituras dos acelerômetros transformadas para
NED)

U = [Ax_n(i) Ay_n(i) Az_n(i)]';

% -----
% verifica se utiliza medidas de coordenadas ou medidas de velocidade
% -----

if landmark(i,1) == 0
    H = H_Vel;
    Z = [Vx_n(i) Vy_n(i) Vz_n(i)]';
    R = Rv;
else
    H = H_Coord;
    Z = [landmark(i,1) landmark(i,2) 0]';
    R = Rp;
end

% -----
% Atualização temporal (Predição)
% -----

% projeta o estado a frente

Xest = A*Xest + B*U;

% projeta a covariancia do erro a frente

P = A*P*A'+Q;

% -----
% Atualização da medição (Correção)
% -----
% computa o ganho K do filtro de Kalman

```

```

K = P*H'*inv(H*P*H'+R);
% atualiza a estimativa Xk com a medição Zk
Xest = Xest + K*(Z-H*Xest);
% atualiza a covariância do erro
P = P-K*H*P;
Var_P = [P(1,1) P(2,2) P(3,3)];
STD_(i) = norm(Var_P);
% simetriza a matriz P
P = 0.5*(P+P');
% armazena estados estimados (gera uma matriz onde cada coluna da matriz
% representa uma estimativa dos estados no instante (i))
M_Xest(:,i)=Xest;
%=====
% Geração da trajetória com duplo integrador a partir dos vetores de
% dados no sistema NED
%=====
if i == 1
    Px(i)=Po(1)+Vx_n(i)*T+.5*Ax_n(i)*T^2;
    Py(i)=Po(2)+Vy_n(i)*T+.5*Ay_n(i)*T^2;
    Pz(i)=Po(3)+Vz_n(i)*T+.5*Az_n(i)*T^2;
else
    Px(i)=Px(i-1)+Vx_n(i)*T+.5*Ax_n(i)*T^2;
    Py(i)=Py(i-1)+Vy_n(i)*T+.5*Ay_n(i)*T^2;
    Pz(i)=Pz(i-1)+Vz_n(i)*T+.5*Az_n(i)*T^2;
end
%=====
% Fim do Teste com duplo integrador
%=====
end

```

## ***REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS***

BAR-SHALOM, Y. ; LI, X. R. **Estimation and Tracking: Principles, Techniques and Software**. USA: Artech House, 1993.

BAR-SHALOM, Y. ; LI, X. R. **Estimation With Applications to Tracking and Navigation: Theory, Algorithms and Software**. USA: John Wiley and Sons, 2001.

BAR-SHALOM, Y. ; LI, X. R. **Multitarget – Multisensor Tracking: Principles and Techniques**. USA: YBS, 1995.

BROWN, R. G.; HWANG, P. Y. C. **Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering**. 3. Ed.. New York, USA: John Wiley and Sons, 1997

BURRUS, C. S. et al. **Computer Based Exercises for Signal Processing Using Matlab**. New Jersey, USA: Prentice Hall, 1994.

CAMPOS, V. A. et al. (2004). Filtros de Partículas Aplicados à Estimação de Trajetórias. Gramado: Artigo aceito para publicação nos anais do XV CBA (Congresso Brasileiro de Automática), 2004.

CAMPOS, V. A. et al. (2004). Trajectory Estimation of a PIG Using a Low Cost Inertial Measurement Unit and Odometry. Joinville: Artigo aceito para publicação nos anais do VI INDUSCON (Conferência para Aplicações Industriais), 2004.

CAMPOS, V. A. F. **Aplicação do Filtro de Kalman e dos Filtros de Amostras à Estimação de Trajetórias em Navegação Inercial**. São Paulo, Brasil: Dissertação de Mestrado, EPUSP, 2004

CHATFIELD, A. B. **Fundamentals of High Accuracy Inertial Navigation**. USA: The American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1997. vol. 174

CHEN, CHI-TSONG. **Linear System Theory and Design**. 3 Ed. USA: IE-Oxford, 1998.

CLÁUDIO, D. M. ; MARINS, J. M. **Cálculo Numérico Computacional**. 2. Ed.. São Paulo: Editora Atlas S.A, 1994

CLEYNER, S. P. et al. (2002). *Formulação de um Sistema de Navegação Inercial para Veículos Robóticos*. Natal: Artigo aceito para publicação nos anais do XIV CBA (Congresso Brasileiro de Automática), 2002

CRAIG, J. J. **Introduction to Robotics – Mechanics and Control**. 2. Ed.. USA: Addison-Wesley, 1989

CROSSBOW. *Measurement of a Vehicle's Dynamic Motion - Combine Angular Rate Sensors with Accelerometers*. USA: CROSSBOW IMU Application Note, 1999.

CROSSBOW. **VG700AA User's Manual**. Setembro de 2002 (Document 7430-0074-01)

CRUZ, C. ; RIBEIRO, U. **Metodologia Científica: Teoria e Prática**. São Paulo: Editora Axcel Books, 2003.

DANTAS, C. A. B. **Probabilidade: Um Curso Introdutório**. 2. Ed.. São Paulo, Brasil: EDUSP, 2000.

DONHA, D. C. *Estudo, Implementação, Teste e Avaliação de um sistema de Posicionamento Dinâmico*. São Paulo: Tese de Doutorado, EPUSP, 1989.

DOROBANTU, R.; ZEBHAUSER, B. *Field Evaluation of Low Cost Strapdown IMU by means GPS*. Germany: Technische Universität München, 1999

DUDEK, G.; JENKIN, M. **Computational Principles of Mobile Robotics**. USA: Cambridge University Press, 2000.

USP. Diretrizes para Apresentação de Dissertações e Teses. São Paulo, Brasil: Serviço de Bibliotecas da USP, 2001.

FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; WORKMAN, M. **Digital Control of Dynamic Systems**. 3. ed.. USA: Addison Wesley Longman, Inc., 1998

FURUKAWA, C. M. Navegação de um Veículo Autônomo por Ultra-Som em Ambiente Estruturado. São Paulo, Brasil: Dissertação de Mestrado EPUSP, 1992

FURUKAWA, C. M.; ADAMOWSKI, J. C.; CAMERINI, C. S. Ultrasonic Pig for Oil Pipeline Inspection. In: IEEE INDUSTRY APPLICATIONS SOCIETY, III INDUSCON: Anais. São Paulo, Brasil: IEEE Sul Brasil, Escola Politécnica da USP, 1998

GELB, A. et al. **Applied optimal Estimation**. USA: MIT Press, 1986

GOLUB, G. H. ; LOAN, C. F. V. **Matrix Computations**. 3. Ed.. USA: The Johns Hopkins University Press, 1996

GRENON, G.; AN, E.; SMITH, S. Enhancement of the Inertial Navigation System of the Florida Atlantic University Autonomous Underwater Vehicles. Florida, USA: Institute of Ocean and System Engineering – Sea Tech, Florida Atlantic University, 2000

GREWAL, M. S.; HENDERSON, V. D.; MIYASAKO, R. S. Applications of Kalman Filtering to the Calibration and Alignment of Inertial Navigation Systems. USA: IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 36, no. 1, Janeiro de 1991



GREWAL, M. S.; WEILL, L. R.; ANDREWS, A. P. **Global Positioning Systems, Inertial Navigation and Integration**. New York, USA: John Wiley & Sons, 2001.

GUSTAFSSON, F. et al. (2001) Particle Filters for Positioning, Navigation and Tracking. IEEE Transactions on Signal Processing, Special Issue on Monte Carlo Methods for Statistical Signal Processing, pp. 1-13.

JAFFE, R. C. **Random Signals for Engineers Using Matlab® and Mathcad®**. New Jersey, USA: Springer-Verlag, Cherry Hill, 2000

JAZWINSKI, A. H. **Stochastic Process and Filtering Theory**. Mathematic in Science and Engineering vol.64 – USA: Academic Press, 1970.

KAILATH, T. **Linear Systems**. New Jersey, USA: Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1980

KALMAN, E. R.; BUCY, R. New Results in Linear Filtering and Prediction Theory. USA: Journal of Basic Engineering. Transactions ASME Series D, 1961. vol. 83, pp. 95-108

KALMAN, R. E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. USA: Journal of Basic Engineering. Transactions ASME Series D, vol 82, pp. 35-45,1960

KELLY, A. Introduction to Mobile Robots, Position Estimation 4: Inertial Navigation Systems. USA: University of Carnegie Mellon,1996

KING, A. D. Inertial Navigation – Forty Years of Evolution. UK: GEC Review, vol.13, pp. 140-149, 1998

KREYSZIG, E . **Advanced Engineering Mathematics**. 7. Ed.. New York, USA: John Wiley and Sons, 1993

LAWRENCE, A. **Modern Inertial Technology – Navigation, Guidance and Control**. 2. Ed. New York, USA: Springer-Verlag, 1998

LIPSCHUTZ, S. **Álgebra Linear**. 3. Ed.. São Paulo: Makron Books, 1994

LJUNG, L. **System Identification: Theory for the User**. 2. Ed.. New Jersey, USA: Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1999

MATLAB versão 6.5 Release 13. USA: The Mathworks, Inc., Junho de 2002

MAYBECK, P. S. **Stochastic Models, Estimation and Control**, Volume 1. USA: Academic Press, Inc., 1976.

NEBOT, E.; DURRANT-WHITE, H. Initial Calibration and Alignment of Low Cost Inertial Navigation Units for Land Vehicle Applications. USA: Journal of Robotics Systems, v. 16, no.2, pp. 81-92, Fevereiro de 1999

PAPOULIS, A.; PILLAI, S. U. **Probability, Random Variables and Stochastic Processes**. 4. Ed. New York, USA: Mc Graw Hill, 2001

ROGERS, R. M. **Applied Mathematics in Integrated Navigation Systems**. Virginia, USA: AIAA Education Series, 2000

SANTANA, D. D. S. et al. (2004). Estimação de Trajetórias Utilizando Sistema de Navegação Inercial Strapdown. Gramado: Artigo aceito para publicação nos anais do XV CBA (Congresso Brasileiro de Automática), 2004.

SANTOS, I. F. **Dinâmica de Sistemas Mecânicos**. São Paulo: Makron Books, 2001

SAVAGE, P. G. Strapdown Inertial Navigation Integration Algorithm Design. USA: Part1. Journal of Guidance, Control and Dynamics, vol. 21(1), pp.19-28, 1998

SAVAGE, P. G. Strapdown Inertial Navigation Integration Algorithm Design. USA: Part2. Journal of Guidance, Control and Dynamics, vol. 21(2), pp.208-221, 1998

SCHULTZ, T. W. **C and the 8051 Programming for Multitasking**. New Jersey, USA: Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1993

SHIN, E. Accuracy Improvement of Low Cost INS/GPS for Land Applications. Calgary, Canadá: Dissertação de Mestrado, The University of Calgary, 2001

STOVAL, S. H. **Basic Inertial Navigation**. California, USA: Naval Air Warfare Center Weapons Division, September 1997 (report number NAWCWPNS TM 8128)

STRANG, G. **Introduction to Linear Algebra**. USA: MIT Press, 1998

SUKKARIEH, S. Low Cost, High Integrity, Aided Inertial Navigation Systems for Autonomous Land Vehicles. Australian: PhD Thesis, Australian Centre for Field Robotics, Department of Mechanical and Mechatronic Engineering, University of Sydney, 2000

TITTERTON, D. H.; WESTON, J. L. **Strapdown Inertial Navigation Technology**. London, UK: IEE Radar, Sonar, Navigation and Avionics Series 5, 1997

VU, H.; ESFANDIARI, R. **Dynamic Systems Modeling and Analysis**. Singapore: MacGraw-Hill International, 1998

WALCHKO, K. J. ; MASON, P. A. C. (2002). Inertial Navigation. Florida, USA: Florida Conference on Recent Advances in Robotics, 2002

WALCHKO, K. J. et al (2002). Embedded Low Cost Inertial Navigation System.

Gainesville, USA: University of Florida, 2002

WGS-84. "Department of Defense World Geodetic System 1984: Its Definition and Relationship With Local Geodetic Systems". Belgium: DMA TR 8350.2, September 1984.