ALISON BONACCORSI

ESTUDO DO ESCOAMENTO BIDIMENSIONAL AO REDOR DE DOIS CILINDROS EM "TANDEM" UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Engenharia.

São Paulo
2003

ok

ALISON BONACCORSI

ESTUDO DO ESCOAMENTO BIDIMENSIONAL AO REDOR DE DOIS CILINDROS EM "TANDEM" UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Engenharia.

Área de Concentração:
Engenharia Mecânica

Orientador:
Prof. Dr. Júlio R. Meneghini

São Paulo
2003

Agradecimentos

À *FAPESP*, que proporcionou os recursos imprescindíveis ao bom andamento desta pesquisa, inserida num projeto mais abrangente e por ela patrocinado.

À *Petrobrás*, que nos últimos anos tem proposto e motivado pesquisas, dentre as quais a presente, em parceria com a Escola Politécnica da USP.

À *FINEP/CTPetro*, pelas modernas estações de trabalho instaladas no Laboratório de *Dinâmica de Fluidos Computacional*, da Escola Politécnica da USP.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Júlio R. Meneghini, pelas oportunas sugestões e pela paciência e ânimo com que supervisionou este trabalho.

Ao Prof. Dr. Fábio Saltara, pela solicitude dispensada em momentos cruciais, e aos colegas Ricardo B. Fletschart, Rodrigo Fregonesi, Cássio Yamamoto, José I. López e tantos que me incentivaram e, gentilmente, dispuseram-se a auxiliar-me.

A meus pais e a meu irmão, pelo paciente e carinhoso acompanhamento ao longo deste trabalho.

A todos os amigos que “sofreram” e se alegraram comigo no decorrer destes anos.

Muito obrigado!

Resumo

O presente trabalho, no âmbito da engenharia oceânica e da tecnologia marítima, compreende um estudo computacional do fenômeno de emissão de vórtices a partir de corpos rombudos, inseridos num escoamento de fluido newtoniano, incompressível e viscoso. O problema é abordado do ponto de vista bidimensional. Suas equações são discretizadas através do *Método dos Elementos Finitos (MEF)* e implementadas com o *Fractional Step Method (FSM)*. Após a validação dos simuladores numéricos através do estudo do escoamento ao redor de um único cilindro circular, avalia-se o comportamento das forças hidrodinâmicas sobre dois similares, dispostos em configuração "*tandem*", para distintos espaçamentos entre seus centros, sob número de Reynolds 200. Os resultados são confrontados com os procedentes da literatura.

Abstract

This work is set in the context of oceanic engineering and maritime technology, presenting a computational study of the vortex-shedding phenomenon from bluff bodies inserted in a flow of Newtonian incompressible viscous fluid. The problem is approached from the two-dimensional standpoint. Its governing equations are discretized through the *Finite Element Method (FEM)* and are implemented with the *Fractional Step Method (FSM)*. Validation of the numerical simulations was achieved through the study of the flow around a single circular cylinder. Then, the behavior of the hydrodynamic forces on two cylinders arranged in tandem configuration for distinct gaps between their axes under Reynolds number 200, is evaluated. The results are confronted with those from literature.

Conteúdo

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Abreviaturas e Siglas

apud	Como
bopd	Barris de óleo por dia
Cap(s).	Capítulo(s)
cfr.	Conferir
Dif.	Diferença
Dif. rel.	Diferença relativa
Eq(s).	Equação(ões)
et al.	E outros
Fig(s).	Figura(s)
FIV	*Flow-Induced Vibration* – Vibração Induzida pelo Escoamento
FSM	*Fractional Step Method* – Método de Resolução por Partes
MEF	*Método dos Elementos Finitos*
PCG	*Preconditioned Conjugate Grandient*
Pres. trab.	Presente trabalho
Sec(s).	Seção(ões)
Siq.	Siqueira
Tab(s).	Tabela(s)
TM	*Tecnologia Marítima*
VIV	*Vortex-Induced Vibration* – Vibração Induzida por Vórtices
Zdrav.	Zdravkovich

Lista de Símbolos

$\mathbf{A}$	Matriz dos termos convectivos
$A(\phi)$, $B(\phi)$	Equações diferenciais em ϕ
$\mathbf{a}$	Vetor de parâmetros de uma equação de aproximação a uma equação diferencial
a_m	Componentes de $\mathbf{a}$
a^0, a^k	Condição inicial e k-ésima aproximação temporal de a
$\mathbf{C}$	Matriz de massa
C^s	Função cuja derivada de ordem s é contínua, ao menos, por parte
C_d, C_{di}	Coeficiente de arrasto, idem para o cilindro "i"
C_l, C_{li}	Coeficiente de sustentação, idem para o cilindro "i"
$\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$	Operadores diferenciais lineares
$\mathbf{D}$	Matriz do divergente
D	Diâmetro
e, r	Elementos: espacial, temporal
$\mathbf{f}$, $\mathbf{f}^e$	Vetor de carregamento, idem do elemento "e"
f_l, f_l^e	Componentes dos vetores $\mathbf{f}$ e $\mathbf{f}^e$
$\vec{F}_p$, $\vec{F}_\tau$	Vetores de forças devidas à pressão e ao cisalhamento
f_s	Freqüência de emissão de vórtices
F_x, F_y	Forças nas direções x e y
$f(x,y)$, $g(\xi,\eta)$	Funções
H, W	Altura, largura
i, j, k, l, m, n	Contadores e/ou índices direcionais
$\mathbf{J}$	Matriz Jacobiana
$\mathbf{K}$	Matriz Laplaciana
$\mathbf{k}^e$	Matriz de rigidez do elemento "e"

K_{lm}, K^e_{lm}	Componentes da matriz $\mathbf{K}$ e $\mathbf{k}^e$
k_t, k^e_t	Condutividade térmica, idem no elemento "e"
M, M_e	Número de nós: de uma malha de elementos finitos, do elemento "e"
$\mathbf{N}$	Vetor de *funções de forma*
NE	Número de elementos
N_m, N^e_l, N^r_n	Funções de forma: espacial, idem do elemento "e", temporal do elemento "r"
$\vec{n}$, n	Vetor na direção normal, direção normal
$\mathbf{P}$	Vetor de pressão
p, p_m	Pressão: propriedade, idem no nó m
p, r	Termos independentes numa equação diferencial
Q, Q^e	Taxa volumétrica de geração de energia térmica, idem no elemento "e"
$\overline{q}$, $\overline{q}^e$	Fluxo de calor, idem na fronteira do elemento "e"
R	Raio
Re	Número de *Reynolds* (adimensional)
Re_c, Re_{c1}, Re_{c2}	*Reynolds*: crítico, limite inferior, limite superior
R_Ω, R_Γ	Resíduos nos domínios Ω e Γ
St	Número de *Strouhal* (adimensional)
T	Período de emissão de vórtices $(1/f_s)$
t, t_n	Tempo, idem no passo de tempo "n"
$\mathcal{T}(x,y)$, $\mathcal{T}_m$, $\mathcal{T}_1$	Temperatura no plano cartesiano, constantes em "m" e "1"
$\mathbf{U}_i$, $\mathbf{U}^n_i$	Vetor de velocidade do campo final (direção i), idem no passo de tempo "n"
$\widetilde{\mathbf{U}}_i$, $\widetilde{\mathbf{U}}^n_i$	Vetor de velocidade do campo intermediário (direção i), idem no passo de tempo "n"
U	Velocidade de corrente livre (direção x)

u, v, u_m, v_m	Velocidades nas direções x e y, respectivamente, idem para o nó "m"
$\widetilde{u}$, $\widetilde{u}_i^n$	Velocidade do campo intermediário, idem para a direção "i", no passo de tempo "n"
$\overline{u}_m$, $\overline{v}_m$, $\overline{c}_m$	Velocidades direcionais do centróide do elemento "m"
$\widehat{u}$, $\widehat{v}$	Aproximações às soluções exatas, u e v, de uma equação diferencial
UT/D	Tempo admensional ($= 1/St$)
W_i, W_j	Coeficientes-peso (integração através da quadratura de Gauss-Legendre)
W_l, $\overline{W}_l$	Funções-peso (no ponto l): no interior do domínio, em seu contorno
x, y	Variáveis cartesianas
β_i^e, γ_i^e	Derivadas parciais em x e y, respectivamente, da função de forma N_i do elemento "e"
Γ, Γ_j^e	Contorno do domínio espacial, idem do elemento "e" e na variável "j"
γ_n	Razão entre $\int_0^1 W_n T dT$ e $\int_0^1 W_n dT$
Δ^e	Área do elemento "e"
Δt, Δt_n	Intervalo temporal entre dois passos sucessivos, idem no passo de tempo "n"
δ	Delta de Dirac
ϵ	Erro
θ, $\theta_{\mathbf{A}}$, $\theta_{\mathbf{K}}$	Ponto de colocação (no método dos resíduos ponderados), idem para as matrizes **A** e **K**
μ	Viscosidade dinâmica
ν	Viscosidade cinemática
ξ, η	Variáveis no espaço transformado (natural)

ρ	Massa específica
$\sum$	Somatório
τ_w	Tensão de cisalhamento na parede (do cilindro)
ϕ, ϕ_m, $\widehat{\phi}$, $\overline{\phi}$	Funções: contínua, em "m", de aproximação, no contorno
Ω, Ω_e	Domínio espacial, idem do elemento "e"
ω_w	Vorticidade na parede (do cilindro)
∞	Infinito
Oxy, $O\xi\eta$	Sistemas de coordenadas: global (cartesiano), natural

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

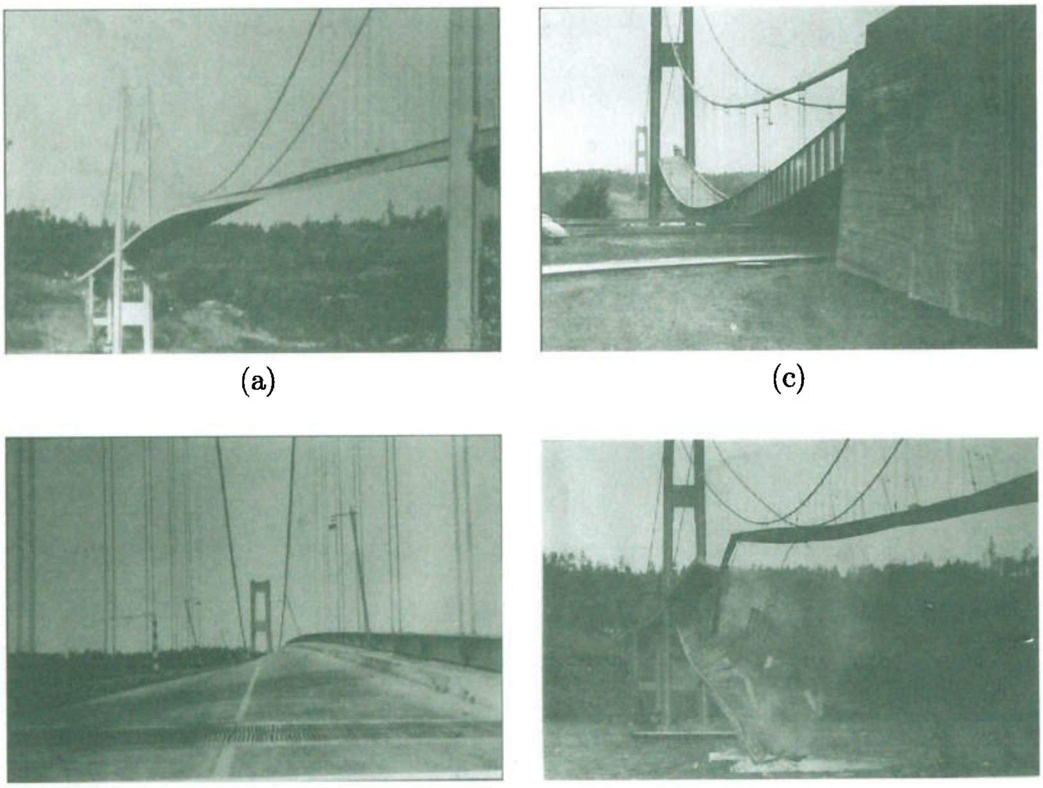
1.1 Motivação e Definição do Problema Estudado

No dia 7 de novembro de 1940, a ponte suspensa Tacoma Narrows, no estado de Washington, E.U.A., em virtude de uma tempestade, ruiu. Sujeita a ventos com velocidade de aproximadamente 67 Km/h, a ponte – de pouco mais de 1,5 Km de extensão – começou a oscilar com movimentos torcionais crescentes que, ao cabo de algumas horas, levaram a estrutura ao colapso. Todo o desenrolar do ocorrido foi filmado.

Mais tarde, o laudo apresentado pelo comitê de investigação do acidente – do qual von Kármán era um dos membros – elucidou que as forças aerodinâmicas (isto é, as forças dos ventos) entraram em ressonância com as freqüências naturais da ponte (LUGT, 1983). E mais, que as oscilações foram causadas pelo desprendimento de vórtices à jusante do escoamento de ar ao redor de sua estrutura. As fotografias apresentas na Fig. (1.1)[1] impressionam quanto às amplitudes de oscilação do tabuleiro da ponte, transmitindo a sensação de que sua estrutura é de borracha. As Figs. (1.1a) e (1.1b) evidenciam o movimento torcional resultante da vibração induzida pelo escoamento, ao passo que a Fig. (1.1d) capta um

[1]Fonte: *Site* da *Carleton University, Department of Civil and Environmental Engineering* – http://www.civeng.carleton.ca/.

instante do colapso da ponte.



(a) (c) (b) (d)

Figura 1.1: Quatro fotografias do incidente que levou ao colapso a ponte Tacoma Narrows – Washington, E.U.A.

Este incidente exemplifica, de forma muito viva, a importância do estudo do fenômeno da vibração induzida pelo escoamento (*"flow-induced vibration – FIV"*), do qual a vibração induzida por vórtices (*"vortex-induced vibration – VIV"*) constitui um caso particular.

Em certas condições, um corpo imerso num escoamento subsônico emite vórtices de forma alternada. Esta característica implica a flutuação das forças devidas ao campo de pressão ao redor do corpo, de tal modo que este poderá vibrar (BLEVINS, 1990).

No âmbito da engenharia oceânica e da tecnologia marítima *(TM)*, os projetos de plataformas petrolíferas e de estruturas afins, necessariamente, enfocam o problema da vibração induzida pelo escoamento, *FIV*. A necessidade da predição de carregamentos hidrodinâmicos devidos a ondas e correntes marítimas sobre membros cilíndricos de estruturas "*offshore*" tem exigido um crescente número de investigações de escoamentos ao redor de corpos rombudos.

Neste contexto, dentre os assuntos que demandam maiores cuidados e atenção, encontra-se o pertinente ao comportamento dinâmico das estruturas tubulares (os então chamados "*risers*") responsáveis pela interligação das plataformas petrolíferas e seus poços no leito do oceano, para fins de prospecção ou explotação. Muito se tem investido na pesquisa e no desenvolvimento destas estruturas, frente aos crescentes desafios de mantenabilidade, segurança no trabalho e ambiental, além do inquestionável aspecto econômico que envolve o confiável desempenho destes componentes na totalidade do processo produtivo.

No Brasil, a *Petrobrás*, líder mundial em exploração em águas profundas e a maior empresa do setor no âmbito nacional, apresentava, em fins de 1999, 14% de suas reservas de petróleo e gás em terra firme, 11% em águas rasas e 25% em águas profundas. Os 50% restantes estavam em águas então classificadas como ultraprofundas. Em termos de explotação, em 30 de dezembro de 2000, de 1.531.364 barris de óleo por dia *(bopd)* – pico da produção diária da empresa – 17% procediam de terra firme, 19% de águas rasas e 64% de águas profundas e ultraprofundas[2]. Esse panorama evidencia, no tocante à exploração petrolífera, que o Brasil é, eminentemente, um país de águas profundas e ultraprofundas.

Dentre os maiores desafios proporcionados por esse cenário, encontra-se o relativo à vibração de "*risers*", resultante da ação de correntes marítimas. A título de exemplo, para a produção em águas ultraprofundas, vêm-se desenvolvendo novas tecnologias, tais como as alternativas de "*risers*" híbridos. Quanto à conhecida como "*Riser Independente*" ("*Self-Standing Riser*") ou "*Torre do Riser*", um dos

[2]Fonte: *Site* da *Petrobrás* – http://www.petrobras.com.br/.

pontos críticos a ser investigado é, justamente, a vibração induzida por vórtices, *VIV*. Também em "*risers*" rígidos, compostos em catenária, os quais têm sido utilizados em plataformas semi-submersíveis, observa-se tal fenômeno.

Diante desse panorama e seguindo MENEGHINI (1993), podemos afirmar que um entendimento dos mecanismos fundamentais da emissão de vórtices ("*vortex-shedding*") e da vibração induzida por vórtices *(VIV)* é de suma importância no projeto destes componentes estruturais.

O enfoque do presente trabalho diz respeito, justamente, ao estudo do escoamento de correntes marítimas ao redor de bancos de "*risers*". Toda a atenção é dirigida ao comportamento dinâmico do fluido, e não ao das estruturas tubulares, de tal forma que estas são consideradas imóveis. Para o caso particular de dois "*risers*" em configuração "*tandem*" – um corpo posicionado atrás do outro, paralelamente à direção do escoamento –, trata-se o problema do ponto de vista bidimensional (num plano transversal aos eixos longitudinais dos cilindros) e através de simulações computacionais.

SIQUEIRA (1999) ressalta que a vantagem de se empregar métodos numéricos para a análise de problemas de vibração induzida pelo escoamento *(FIV)* reside na possibilidade de se estudar em detalhes e sob condições controladas o fenômeno, realizando estudos paramétricos a um custo factível se comparados a experimentais. Destaca-se, ainda, que o simulador numérico deve ser cuidadosamente validado e confrontado com resultados experimentais para que estudos inéditos realizados com o simulador sejam efetivamente dignos de confiança.

Assim sendo, os principais objetivos deste trabalho, quanto ao estudo do escoamento de fluido newtoniano, incompressível e viscoso ao redor do agrupamento de dois cilindros em "*tandem*", são:

1. Adaptar o código computacional desenvolvido por SIQUEIRA (1999), em ordem à utilização de elementos quadrilaterais em simulações numéricas bidimensionais, segundo o *Método dos Elementos Finitos.* Busca-se, com o

emprego destes elementos, viabilizar, futuramente, otimizações do código para simulações tridimensionais com malhas de elementos finitos paralelepipédicos. A forma de construção destas malhas – através de "extrusões" dos elementos planares na direção perpendicular – visa, além de uma maior facilidade de controle de espaçamento entre nós na direção da envergadura dos cilindros, a diminuição do número de seus elementos (em relação às malhas tetraédricas empregadas por SIQUEIRA (1999)), em ordem à redução do tempo computacional;

2. Avaliar, a partir das simulações com o programa elaborado, o comportamento dos coeficientes de arrasto e de sustentação dos "*risers*", em função da variação do espaçamento entre os centros dos cilindros para a configuração proposta;

3. Confrontar os resultados obtidos nas simulações numéricas com os correspondentes ao trabalho de SIQUEIRA (1999), e com os observados experimentalmente por ZDRAVKOVICH (1987).

1.2 Um Breve Apanhado Histórico sobre o Movimento dos Vórtices

Desde os tempos mais remotos até os dias de hoje, os vórtices – em suas mais diversas manifestações, quer naturais, quer decorrentes da intervenção do homem na natureza – têm sido causa de admiração e fascínio.

Em lendas, mitos e superstições da antigüidade; em ensaios filosóficos de diversos períodos da história; em proposições quanto à origem do universo; no pensamento e nos escritos de nomes familiares aos nossos ouvidos, como Aristóteles, Dante Allighieri, Leonardo da Vinci, Strouhal, von Kármán, dentre tantos, encontram-se descrições, referências, ou mesmo autênticos tratados quanto ao movimento circular da matéria, ou mais especificamente falando, quanto à teoria dos vórtices.

LUGT (1983) afirma que os vórtices não são mero capricho da natureza e que, sem sombra de dúvidas, desempenham papel muito mais importante que o de puramente levantar folhas em rodopio num tempestivo dia de outono, ou compor redemoinhos na superfície de um rio. Pelo contrário, os vórtices são essenciais no contexto do movimento da matéria, de tal forma que não se deve estranhar que seu conceito seja de importância central na história da ciência e da filosofia.

Se, por um lado, no campo do macrocosmo, delinearam-se conclusões através de analogias a movimentos vorticais comumente conhecidos, no microcosmo, os vórtices foram utilizados como modelos para a descrição da estrutura atômica da matéria. Tais tentativas, visando o entendimento da natureza através da teoria do movimento dos vórtices, foram invalidadas com a inauguração e o desenvolvimento da física moderna, no início do século XX. No entanto, do ponto de vista da mecânica clássica, o desenvolvimento do conceito de vórtice e suas conseqüentes aplicações em engenharia obtiveram grande sucesso (LUGT, 1983).

Estudos devidos a Bérnard, von Kármán, G. I. Taylor e Görtler contribuíram à compreensão da instabilidade, anteriormente investigada por Helmholtz, Lord Rayleigh e Lord Kelvin. A partir de então, alguma luz foi lançada sobre a intrincada questão da turbulência, na qual se destacaram, posteriormente, nomes como Reynolds, novamente G. I. Taylor, Heisenberg, Prandtl, dentre outros. O progresso no desenvolvimento de aviões, propulsores e turbinas teve seu impulso inicial na teoria da sustentação de Lanchester, Prandtl, Kutta e Joukowsky.

Após a 2ª Guerra Mundial, o desenvolvimento dos computadores eletrônicos e da implementação de métodos numéricos computacionais inaugurou uma nova etapa da mecânica de fluidos. Pela primeira vez, as equações básicas do movimento de um fluido – aplicadas a certos problemas de significativa dificuldade – foram resolvidas numericamente, através de recursos computacionais. A equação do transporte de vorticidade era a chave para o entendimento de escoamentos transitórios (LUGT, 1983).

Na atualidade, muitos são os campos da ciência e da tecnologia para os quais os conceitos e a teoria dos vórtices constituem a base de seus estudos e aplicações. Têm-se, por exemplo, em meteorologia, todo o desenvolvimento da previsão teórica de tempo e a compreensão da circulação atmosférica global. Em acústica, a geração aerodinâmica de som. Em simulações do fenômeno de geração e desprendimento de vórtices – tema do presente trabalho –, a análise do comportamento dinâmico do fluido.

Em astronomia, o conceito de vórtice é encontrado em assuntos como o desenvolvimento do sistema solar e de galáxias, o movimento planetário de atmosferas e os fluxos convectivos no interior de estrelas – problemas para os quais ainda não se deram respostas satisfatórias.

Mesmo na teoria da relatividade e na mecânica quântica, o movimento vortical desempenha importante papel. Por exemplo, Landau e Feynman, em seus estudos sobre o hélio líquido, introduziram o conceito de vórtice quântico ("*quantum vortex*"), ou "*roton*" (LUGT, 1983).

LUGT (1983) encerra sua breve revisão histórica sobre o movimento dos vórtices, argumentando que a ciência moderna estendeu o entendimento quanto aos vórtices e ao seu papel na natureza em dois sentidos. Por um lado, contribuiu à elucidação do significado básico do movimento vortical na mecânica. E, por outro, ao abrir novos horizontes de estudo ao homem, viabilizou a observação e a subseqüente interpretação de fenômenos de vórtices de larga escala. Povos antigos puderam, tão somente, contemplar vórtices de ordem local, tais como redemoinhos de vento e de água. Hoje em dia, podemos muito bem acompanhar o movimento de furacões através de fotos tiradas de satélites, assim como visualizar imagens da superfície de planetas, capturadas por sondas interplanetárias. Astrônomos utilizam modernos equipamentos para estudar a estrutura espiral de galáxias, ao mesmo tempo que ponderam as questões de “quando”, “onde” e “como” esses turbilhões cósmicos foram criados nos primórdios da existência do universo (LUGT, 1983).

1.3 Regimes de Escoamento de um Fluido e Emissão de Vórtices a partir de um Corpo Rombudo

1.3.1 Regiões de Escoamento Perturbado

Qualquer garoto observador, ao brincar na rua, bem sabe que, um automóvel que por ali passa arrasta atrás de si algumas das folhas caídas pelo chão, ou desestabiliza o vôo de seus frágeis aviõezinhos de papel. De fato, um corpo estacionário imerso no escoamento de dado fluido ou, pelo contrário, um corpo em movimento num fluido em repouso, inevitavelmente, produzem uma região de escoamento perturbado ao redor de si. A extensão desta região depende fortemente da forma, da orientação e das dimensões do próprio corpo, bem como da viscosidade do fluido e de sua velocidade relativa ao corpo, podendo, ainda, ser influenciada por uma ampla variedade de pequenos distúrbios.

Geralmente, boa parte dos escoamentos externos, separados, em regime transitório, deve-se à presença de um corpo então chamado *rombudo.* Segundo BEARMAN (1984), um *corpo rombudo* é aquele que, quando posicionado numa corrente de fluido, apresenta escoamento separado numa parte substancial de sua superfície.

Conforme ZDRAVKOVICH (1997), o escoamento perturbado se caracteriza pela variação da velocidade local em magnitude, direção e tempo. A velocidade média local pode ser igual à velocidade da corrente livre, maior ou menor que esta, de acordo com a posição do ponto analisado.

Quanto ao escoamento bidimensional ao redor de um cilindro circular, podem-

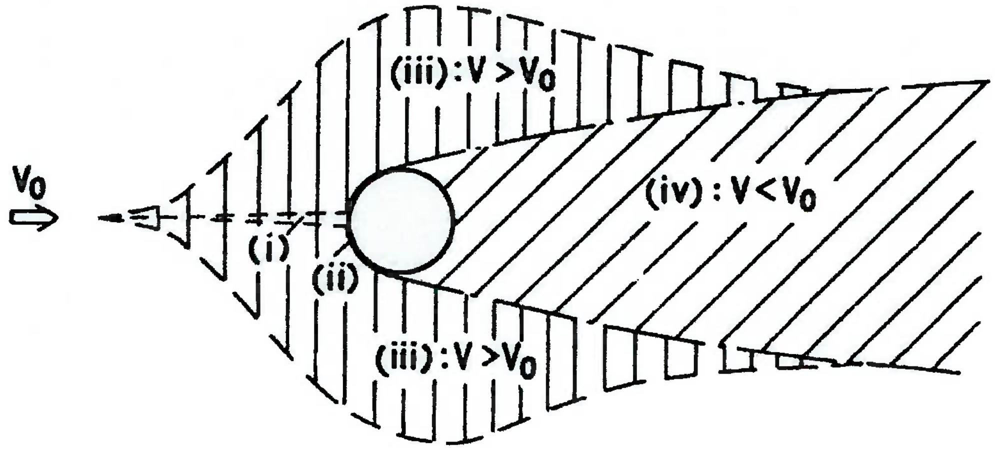


Figura 1.2: Esboço das regiões do escoamento perturbado (ZDRAVKOVICH, 1997).

se distinguir quatro regiões de escoamento perturbado. Estas – esboçadas na Fig. (1.2) – compreendem *(i)* uma estreita região de escoamento retardado, *(ii)* duas camadas limites coladas à superfície do cilindro, *(iii)* duas regiões laterais de escoamento deslocado e acelerado e *(iv)* uma extensa e larga região de escoamento separado, à jusante do cilindro, então chamada de *esteira*.

A região de escoamento retardado (região *(i)*) apresenta grandes flutuações em seu campo de velocidades, que, num procedimento de transferência de calor, aumentam significativamente as taxas de transferência. Em razão da instabilidade intrínseca à região, estruturas características de escoamento instável são geradas na direção do fluxo.

As camadas limites coladas ao cilindro (região *(ii)*) são caracterizadas, em linhas gerais, pela variação do gradiente de pressão ao longo das superfícies do cilindro. Avançando-se no sentido do escoamento, o gradiente de pressão, inicialmente favorável, atinge uma região de gradiente adverso, que se estende até a separação. Mesmo após esta, as camadas limites subsistem no escoamento, agora constituindo as camadas cisalhantes livres.

As regiões de escoamento deslocado (regiões *(iii)*) são, ainda hoje, as menos estudadas, sendo que não se têm notícias de uma medição sistemática de suas dimensões. Sabe-se, no entanto, que sua extensão é fortemente afetada pela proximidade de paredes de confinamento de túneis de vento ou de água.

Finalmente, no tocante à região da esteira (região *(iv)*), para a qual a maior parte dos estudos do passado foi desenvolvida, observam-se tanto a formação de grandes estruturas de escoamento na esteira próxima, como a dissipação destas ao se avançar na esteira (ZDRAVKOVICH, 1997).

1.3.2 Transição de Escoamento Laminar a Turbulento nas Regiões Perturbadas

Nesta seção, encontra-se uma breve descrição dos distintos regimes de escoamento ao redor de cilindros circulares e do fenômeno da transição de escoamento laminar a turbulento, nas regiões perturbadas, em função da presença deste corpo.

Primeiramente, no entanto, apresenta-se a definição do número de Reynolds, o qual será amplamente empregado no decorrer do presente trabalho. Este parâmetro adimensional, via de regra escrito como Re, expressa a razão entre as forças inerciais e as viscosas, intrínsecas ao escoamento. Desta forma, tem-se

$$Re = \frac{\rho U D}{\mu} \tag{1.1}$$

Na Eq. (1.1), ρ diz respeito à densidade do fluido; μ, à sua viscosidade dinâmica; U, à velocidade da corrente livre do escoamento; e D, a um comprimento característico do corpo, que, no caso de um cilindro circular, corresponde ao seu diâmetro externo.

ZDRAVKOVICH (1997) desenvolve uma extensa e minuciosa descrição dos regimes de escoamento ao redor de cilindros circulares. No tocante ao escoamento laminar, ao menos três subdivisões podem ser observadas. Para Re no intervalo de 0 a 4 ou 5, tem-se o regime de "não-separação" ou "*creeping flow*". Neste, o escoamento do fluido acompanha o contorno do cilindro, de tal forma que não se verifica separação. O aparecimento desta caracteriza, então, o regime de "separação permanente", o qual apresenta um par simétrico de vórtices na região da esteira próxima. BLEVINS (1990) elucida que o comprimento na direção do escoamento deste par de vórtices cresce linearmente com o número de Reynolds, chegando a medir três diâmetros do cilindro para Re igual a 45. No entanto, este arranjo torna-se instável a partir de Re entre 30 e 48, tanto que as camadas limites que o envolvem começam a oscilar a partir do ponto de confluência (posição em que essas camadas se unem sobre o eixo de simetria do escoamento). Sua amplitude de oscilação cresce com o aumento do Re, e quando este alcança o intervalo 45–65, as camadas limites desenvolvem cristas e vales num movimento senoidal. Olhando ao conjunto desta esteira periódica laminar, o que se observa são duas fileiras de vórtices intercalados e de sinais opostos.

Aqui, vale a pena fazer uma breve digressão para se apresentar um parâmentro relevante quanto ao fenômeno de *emissão de vórtices* estudado no presente trabalho. O *número de Strouhal*, St, assim chamado por Lord Rayleigh em homenagem ao cientísta Checo Strouhal, é um adimensional que expressa a constante de proporcionalidade entre a freqüência de emissão de vórtices, f_s, e a razão entre a velocidade da corrente livre do escoamento e o comprimento característico do corpo (no caso do cilindro circular, o seu diâmetro). Desta forma

$$St = f_s \frac{D}{U} \tag{1.2}$$

Agora, à medida que o Re cresce, esta esteira torna-se instável, e a transição de regime laminar a turbulento nela surge ao longe, à jusante, e avança gradualmente em sentido contrário ao escoamento. Este desenvolvimento pode ser subdivido em dois sub-regimes. Para Re no intervalo de 180–200 a 220–250, tem-se, na esteira, transição à turbulência, ao passo que, para Re de 220–250 a 350–400, verifica-se a transição de um turbilhão irregular durante sua formação.

Quanto à transição nas camadas cisalhantes livres – condição também chamada, por Wieselsberger, de estado sub-crítico –, destacam-se três fases distintas. O desenvolvimento de ondas de transição (inicialmente apresentadas como ondulações nas camadas limites) encontra-se no intervalo de *Re* de 350–400 a 1.000–2.000. A formação de turbilhões de transição diz respeito a *Re* entre 1.000–2.000 e 20.000–40.000. E, finalmente, para o intervalo de *Re* de 20.000–40.000 a 100.000–200.000, uma repentina passagem à turbulência ocorre nas camadas limites livres, próxima à superfície do cilindro.

ZDRAVKOVICH (1997) comenta que Wieselsberger, à princípio, designou os regimes de escoamento abaixo e acima da crise do arrasto, respectivamente, como sub-crítico e super-crítico. Estudos posteriores, no entanto, contribuíram à melhor compreensão do fenômeno da transição nas camadas limites coladas à superfície do cilindro. Cinco sub-regimes podem ser observados nesta etapa do escoamento.

O intervalo de *Re* de 100.000–200.000 a 300.000–340.000 corresponde ao regime pré-crítico, caracterizado pela primeira transição nas camadas cisalhantes livres, ao longo das linhas de separação. O coeficiente de arrasto diminui com o aumento do *Re*, e este regime termina abruptamente com a queda instantânea deste coeficiente e, simultaneamente, com o salto da freqüência de emissão de vórtices.

BEARMAN (1969) verificou que uma das camadas cisalhantes livres sofre transição, de tal forma que se recola à superfície do cilindro, à jusante do ponto de descolamento. Assim, observa-se uma delgada região – confinada entre a parede do cilindro e a camada cisalhante livre que se estende do ponto de descolamento até o de recolamento – então chamada de bolha de separação. Este regime de transição (regime de uma bolha) compreende o intervalo de *Re* de 300.000–340.000 a 380.000–400.000.

Uma nova queda descontínua do coeficiente de arrasto e mais um salto da freqüência de desprendimento de vórtices surgem quando uma bolha – à semelhança da primeira – é formada do outro lado do cilindro. Isto se dá no início do regime simétrico de duas bolhas. Sua faixa de Re característica é de 380.000–400.000 a 500.000–1.000.000 e seu desenvolvimento comporta uma intrincada combinação de separação laminar, transição, recolamento de camadas cisalhantes livres e separação de camadas limites turbulentas.

No decorrer deste regime, a transição avança em direção à primitiva linha de separação laminar e as bolhas de separação são progressivamente fragmentadas num processo irregular, que impede a emissão periódica de vórtices. Tem-se, então, o regime super-crítico, envolvendo Re de 500.000–1.000.000 a 3.400.000–6.000.000. Até 1961, acreditava-se que este era o último estado do escoamento, para todos os Re acima de 3.400.000.

No entanto, descobriu-se que o desprendimento regular de vórtices reaparece para Re ainda maiores, quando as camadas limites são turbulentas ao longo de toda a extensão do corpo, antes da separação. Vários nomes foram sugeridos pelos mais diversos pesquisadores para este regime, a ponto de se gerar confusão. Aqui, adota-se a nomenclatura de regime pós-crítico, tal como ZDRAVKOVICH (1997). Nele, a transição nas camadas limites ocorre entre as linhas de estagnação e de separação. À medida que se incrementa o Re, a região de transição avança em direção à linha de estagnação assintoticamente e o valor de Re para o limite superior do regime não se define facilmente.

Ao se abordar os regimes de escoamento transversal de um cilindro em função do número de Reynolds, mencionou-se que, sob determinadas condições, o regime de escoamento passa de laminar a turbulento. Embora não seja o intuito deste trabalho estudar tal assunto, delineiam-se algumas breves considerações a seu respeito.

Em escoamentos ao redor de corpos rombudos, a transição de regime laminar a turbulento, nas regiões perturbadas do campo, desenvolve-se de forma sucessiva e ascendente, isto é, a partir da esteira, à jusante do corpo, até a região de corrente livre à sua montante, à medida que o número de Reynolds cresce. Poder-se-ia dizer que a "fronteira" de transição caminha em sentido contrário ao do escoamento do fluido.

Deve-se ressaltar que a transição, nas distintas regiões do campo de escoamento, não se dá para um número de Re pontual, bem definido, mas sim para um dado *intervalo de transição*, entre um Re crítico inicial, Re_{c1}, e um final, Re_{c2}.

ZDRAVKOVICH (1997) ressalta que as sucessivas transições são sensíveis a vários tipos de pequenas perturbações. Estas podem forçar a transição a um Re_c menor e, por vezes, alterar significativamente as estruturas de escoamento características. Neste sentido, pode-se considerar o número de Re como único parâmetro de governo de escoamento ao redor de cilindros, apenas para os escoamentos livres de perturbações.

Quanto ao escoamento ao redor de um cilindro circular, a primeira transição de regime laminar a turbulento é então observada na esteira. A turbulência se desenvolve gradualmente e se difunde pela esteira. No entanto, as camadas cisalhantes livres que a contornam permanecem laminar.

Aumentando-se o Re, a transição atinge agora as camadas cisalhantes livres, deslocando-se em direção à linha de separação na superfície do cilindro. Conseqüentemente, tanto a largura, quanto o comprimento da esteira próxima são afetados.

A transição subseqüente diz respeito à região da camada limite colada ao corpo. Ela tem início na linha de separação e avança no sentido contrário ao do escoamento, em direção à linha de estagnação, à medida que o Re aumenta. Uma repentina queda na força de arrasto (também chamada crise do arrasto) é observada nesta etapa e está relacionada, mais especificamente, à transição na camada limite ao redor da separação. Sabe-se, ainda, que a interação entre separação e transição é extremamente complicada e que diferentes estruturas de escoamento são geradas até que a camada limite seja completamente turbulenta (ZDRAVKOVICH, 1997).

Finalizada a etapa anterior, a transição atinge, por fim, a região de escoamento retardado, de tal forma que, a partir de então, todas as regiões do escoamento perturbado são completamente turbulentas.

1.4 Métodos Numéricos Aplicados à Resolução das Equações de Movimento de um Fluido Incompressível Viscoso

1.4.1 Método dos Elementos Finitos

Pode-se dizer que o *Método dos Elementos Finitos – MEF* – constitui um conjunto de técnicas avançadas que viabilizam a obtenção de soluções aproximadas de equações diferenciais parciais de problemas de valor inicial e/ou de contorno, freqüentemente encontrados em engenharia.

O princípio do método consiste em subdividir o domínio do problema – isto é, o meio contínuo – em um número finito de pequenas regiões, as quais caracterizam os *elementos finitos*. À grade resultante do conjunto de todos os elementos do domínio, chama-se *malha*.

As soluções das equações que regem o fenômeno abordado são aproximadas, então, através de um processo de minimização do erro associado (ϵ), geralmente, empregando-se um método de *resíduos ponderados*.

A formulação assim conduzida resulta em um sistema de equações algébricas para cada um dos elementos da malha. Contudo, em se tratando da resolução do problema como um todo, deve-se proceder a montagem do sistema global de equações, o qual abarca a contribuição pertinente a todos os elementos. Este sistema deve, pois, ser resolvido através de alguma técnica numérica apropriada.

Segundo BAKER, A. J. and PEPPER, D. W. (1991), o método dos elementos finitos foi originalmente concebido por engenheiros que, na década de 1950, procuravam analisar sistemas estruturais aeronáuticos, empregando os recursos computacionais que começavam a despontar. Quem, no entanto, utilizou pela primeira vez o termo *elementos finitos* foi Clough, em 1960.

A partir dos progressos do método observados na área estrutural, a substituição do conceito de balanço de força pela teoria fundamentada tanto no cálculo variacional quanto nos clássicos métodos de Rayleigh-Ritz conduziu à sua utilização em problemas não-estruturais, bem como na ampla classe de problemas não-lineares em mecânica do contínuo.

No tocante aos fenômenos de transporte, devido a não linearidade do termo convectivo da equação de Navier-Stokes, não se admite a formulação do princípio variacional, requerido na teoria de Rayleigh-Ritz. Assim, justifica-se a substituição dos termos derivativos envolvidos, por expressões algébricas de diferenças divididas – mais conhecidas como *diferenças finitas.*

A exposição do método dos elementos finitos neste trabalho não intenta ser exaustiva, mas apenas ilustrativa de um possível caminho de sua aplicação, bem como de seus fundamentos. Entretanto, conforme dizem BAKER, A. J. and PEPPER, D. W. (1991), "*there is no painless cookbook way to gain understanding of the finite element method other than to read, and perhaps reread, the development as presented herein*". Moral da história: a boa compreensão e o domínio sobre o método dos elementos finitos dependem, necessariamente, de um estudo contínuo, profundo e dedicado do assunto.

No Cap. (2), apresentam-se alguns aspectos básicos do procedimento que permite a abordagem numérico-computacional do problema do escoamento transversal de um fluido newtoniano, viscoso e incompressível ao redor de tubos cilíndricos.

1.4.2 *Fractional Step Method* – Método de Resolução por Partes

Os métodos de resolução por partes (*Fractional Step Method – FSM*) de equações discretizadas têm-se popularizado, em parte, devido à grande variedade de possíveis abordagens de discretização dos domínios de tempo e de espaço.

Conforme SIQUEIRA (1999), o *FSM* constitui um eficiente método para a resolução das equações de Navier-Stokes. Através do estabelecimento de um passo de tempo auxiliar entre dois instantes sucessivos de cálculo, obtém-se um campo de velocidades intermediário que satisfaz as equações de quantidade de movimento, porém desprovidas do termo de pressão. A determinação do campo de pressão resulta da solução da equação de Poisson, construída a partir da equação da quantidade de movimento – expressa em termos do campo de velocidades intermediário –, satisfazendo-se, simultaneamente, a condição de conservação de massa para o sistema. Finalmente, procede-se a correção do campo de velocidades intermediário, através da inclusão do termo de pressão, em ordem à obtenção do campo de velocidades final.

Capítulo 2

FORMULAÇÃO EM ELEMENTOS FINITOS PARA O PROBLEMA DE ESCOAMENTO TRANSVERSAL AO REDOR DE CILINDROS

Neste capítulo, o desenvolvimento formal dos métodos numéricos aplicados ao problema de escoamento transversal de fluido newtoniano, incompressível e viscoso ao redor de dois cilindros estacionários dispostos em configuração "*tandem*" é apresentado segundo análise bidimensional. O *Método dos Elementos Finitos* – *MEF* – é utilizado para a discretização espacial e temporal das equações que regem o fenômeno, ao passo que o *Fractional Step Method* – *FSM* – é empregado para o avanço destas no domínio do tempo. Neste sentido, pode-se dizer que o *FSM* conduz o procedimento de resolução do problema enfocado.

Primeiramente, faz-se uma breve exposição, enfocando os *métodos numéricos para a resolução de problemas de valor de contorno* (*Método dos Resíduos Ponderados* e *Método de Galerkin*), o estabelecimento das *funções de forma* empregadas no *MEF*, bem como as técnicas de *integração numérica* utilizadas no presente trabalho. Posteriormente, em ordem à formulação através do *FSM* para o avanço no domínio do tempo, a aplicação do *MEF* para um caso particular da equação de Navier-Stokes é apresentada.

2.1 Aproximação à Solução de Equações Diferenciais e Quesitos de Continuidade

O *Método dos Resíduos Ponderados* é um método variacional que permite a obtenção de soluções aproximadas de equações diferenciais de problemas de valor inicial e/ou de contorno. Conforme ZIENKIEWICZ, O. C. and MORGAN, K. (1983), a chave do problema da determinação numérica da solução de equações diferenciais encontra-se na viabilidade de se desenvolver adequadas funções de aproximação.

Considera-se, inicialmente, uma equação diferencial genérica, escrita na forma

$$A(\phi) = \mathcal{L}\phi + p \qquad \text{em } \Omega \tag{2.1}$$

à qual se encontram associadas as condições de contorno dadas por

$$B(\phi) = \mathcal{M}\phi + r \qquad \text{em } \Gamma \tag{2.2}$$

Nas Eqs. (2.1) e (2.2), o conjunto Ω corresponde ao domínio de definição de ϕ, enquanto Γ diz respeito à fronteira de Ω. Já $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$ são operadores diferenciais *lineares* apropriados, ao passo que p e r constituem termos independentes da função ϕ, para a qual se almeja determinar uma aproximação, $\widehat{\phi}$.

Uma forma então conveniente de se aproximar ϕ é dada por

$$\phi \simeq \widehat{\phi} = \sum_{m=1}^{M} a_m N_m \qquad \text{em } \Omega \tag{2.3}$$

sendo a_m os parâmetros que viabilizam uma boa aproximação para ϕ; N_m, as *funções de forma* globais, definidas em regiões discretas $\Omega_e \in \Omega$ (isto é, nos elementos "e"); e M, o número de funções de forma utilizadas na aproximação descrita.

Propõe-se a resolução da equação diferencial em questão através do *Método dos Resíduos Ponderados*, o qual estabelece que

$$\int_\Omega W_l R_\Omega d\Omega + \int_\Gamma \overline{W}_l R_\Gamma d\Gamma = 0 \tag{2.4}$$

sendo

$$R_\Omega = \mathcal{L}\widehat{\phi} + p \tag{2.5}$$

e

$$R_\Gamma = \mathcal{M}\widehat{\phi} + r \tag{2.6}$$

os resíduos em Ω e Γ, respectivamente.

A Eq. (2.4) viabiliza a determinação da função de aproximação $\widehat{\phi}$ para a solução numérica da equação diferencial dada, Eq. (2.1), através do cálculo dos parâmetros a_m. Tomando-se $\widehat{\phi}$ tal como proposta na Eq. (2.3) e introduzindo-a na equação (2.4) – através dos resíduos R_Ω e R_Γ –, geralmente se obtém um sistema de equações lineares que pode ser representado por

$$\mathbf{Ka} = \mathbf{f} \tag{2.7}$$

Para este sistema, têm-se:

$$\mathbf{a}^T = [a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \dots \quad a_M] \tag{2.8}$$

$$K_{lm} = \int_\Omega W_l \mathcal{L} N_m d\Omega + \int_\Gamma \overline{W}_l \mathcal{M} N_m d\Gamma \qquad 1 \leqslant l, m \leqslant M \tag{2.9}$$

e

$$f_l = -\int_\Omega W_l p d\Omega - \int_\Gamma \overline{W}_l r d\Gamma \qquad 1 \leqslant l \leqslant M \tag{2.10}$$

Definindo-se, desta forma, os coeficientes da matriz $\mathbf{K}$, bem como os elementos do vetor $\mathbf{f}$, deve-se resolver o sistema de equações lineares, Eq. (2.7), para a obtenção do vetor $\mathbf{a}$. Seus componentes (a_m, $m = 1, 2, 3, \dots, M$) são os parâmetros empregados na equação de aproximação, Eq. (2.3), para a solução da equação diferencial linear, Eq. (2.1), sujeita às condições de contorno, Eq. (2.2).

Agora, tendo-se em conta as operações intrínsecas às Eqs. (2.4), (2.5) e (2.6) (derivações e integrações), bem como a maneira que se aproxima a função ϕ através de $\widehat{\phi}$ – Eq. (2.3) –, algumas considerações devem ser traçadas a respeito do comportamento esperado para as *funções de forma* N_m. (Mais à frente, ao se especificar o tipo de elemento utilizado no domínio do escoamento em estudo, definir-se-á a forma destas funções, também conhecidas como *funções de base* ou *de tentativa*).

Dificuldades na integração da Eq. (2.4) podem surgir, caso o integrando apresente algum valor infinito em dada região do domínio da função. A fim de se evitar tal problema, deve-se assegurar – para os casos nos quais a integral possua derivadas de ordem s (ou seja, os operadores $\mathcal{L}$ e/ou $\mathcal{M}$ possuam tais derivadas) – que as derivadas de ordem $s-1$ das funções de forma N_m sejam contínuas (ao menos, *por partes*). Utilizaremos a notação C^{s-1} para designar as funções N_m assim estabelecidas.

2.2 A *Formulação Fraca* e o Método de Galerkin

Agora, focaliza-se a atenção na parte tocante ao operador $\mathcal{L}$, implícito na Eq. (2.4). Freqüentemente, através de uma integração por partes, este termo pode ser representado da seguinte forma

$$\int_\Omega W_l \mathcal{L}\widehat{\phi} d\Omega \equiv \int_\Omega (\mathcal{C}W_l)(\mathcal{D}\widehat{\phi}) d\Omega + \int_\Gamma W_l \mathcal{E}\widehat{\phi} d\Gamma \qquad (2.11)$$

sendo $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ e $\mathcal{E}$ operadores diferenciais lineares, uma ordem de diferenciação abaixo em relação a do operador $\mathcal{L}$. A Eq. (2.11) é conhecida como a *formulação fraca* do método dos resíduos ponderados.

Retornando-se esta expressão à Eq. (2.4) e lançando-se mão de uma adequada relação entre as *funções-peso* W_l e $\overline{W}_l$, faz-se possível o cancelamento, ao menos, de parte da integral no contorno do domínio Ω (isto é, em Γ) simplificando-se, então, o procedimento de cálculo de $\widehat{\phi}$.

Pode-se mostrar que as únicas condições de contorno às quais esta abordagem se aplica com sucesso são determinadas derivadas da função a ser integrada. Elas são chamadas, então, *condições de contorno naturais*. Alguns aspectos devem ser ressaltados com relação ao procedimento descrito.

No tocante às funções de forma N_m – implícitas na Eq. (2.11) através de $\widehat{\phi}$ – verifica-se que a diminuição da ordem de derivação, além de exigir menor grau de continuidade para as N_m, facilita em muito sua construção. Tal fato se dá, especialmente, quando a definição destas é realizada para cada subdomínio Ω_e (isto é, para cada elemento "e") do domínio Ω.

Por outro lado, em virtude da aplicação do operador $\mathcal{C}$ às funções-peso, W_l, necessariamente, sua ordem de continuidade deve ser, agora, mais elevada.

Outro aspecto relevante diz respeito justamente à relação entre os operadores $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$. Via de regra, tais operadores apresentam mesma ordem de derivação. E, com base nesta consideração, justifica-se o emprego do método de *Galerkin*. Neste, as funções-peso, W_l, são estabelecidas iguais às próprias funções de forma, N_m (isto é, $W_l = N_l$).

2.3 Definição das Funções de Forma para Elementos Quadrilaterais e Integração Numérica

A fim de se obter uma aproximação conveniente para a solução da equação diferencial que rege o fenômeno estudado, as funções de forma N_m devem ser construídas, obedecendo determinadas condições.

Primeiramente, deve-se garantir que o aumento do número destas funções para uma dada aproximação leve, necessariamente, à melhoria da qualidade desta. Ou seja, que o erro entre a função aproximada, ϕ, e a função de aproximação, $\widehat{\phi}$, decresça à medida que se incrementa o número de funções de base N_m (ou seja, $\epsilon \to 0$ à medida que $M \to \infty$).

Conseqüentemente, requer-se que a combinação linear utilizada para a aproximação $\widehat{\phi}$ ($\sum_{m=1}^{M} a_m N_m$ em Ω) possa representar, adequadamente, qualquer função ϕ, satisfazendo-a, inclusive, nas fronteiras do domínio Ω. Esta é a chamada condição de *completude*.

Para o problema específico abordado neste trabalho, utilizam-se funções de forma *lineares*, definidas para *elementos quadrilaterais*. A seguir, é apresentada a formulação geral para tais elementos.

No *sistema de coordenadas global, Oxy*, constrói-se o elemento Ω_e, ao qual se associam 4 nós, localizando-os um em cada um dos vértices do quadrilátero. Em virtude de sua forma, podem-se observar que integrações envolvendo as funções de base do elemento, via de regra, são de difícil resolução.

No entanto, é possível e viável realizar uma *transformação de coordenadas* que facilita o cálculo dessas integrais. O sistema de coordenadas em questão é aqui chamado de *sistema de coordenadas natural* ou *local, $O\xi\eta$*. Este é caracterizado pela especificação de dada posição (ξ, η) no interior do elemento através de números adimensionais, de magnitude absoluta limitada à unidade $(-1 \leqslant \xi, \eta \leqslant 1)$.

A Fig. (2.1) mostra o elemento Ω_e, tanto no espaço global, como no transformado. Chama-se a atenção quanto aos limites de ξ e η no sistema de coordenadas natural, bem como à ortogonalidade intrínseca ao elemento.

Na literatura, é muito comum a definição das funções de base para cada um dos nós do elemento quadrilateral, escritas no sistema local de referência, da

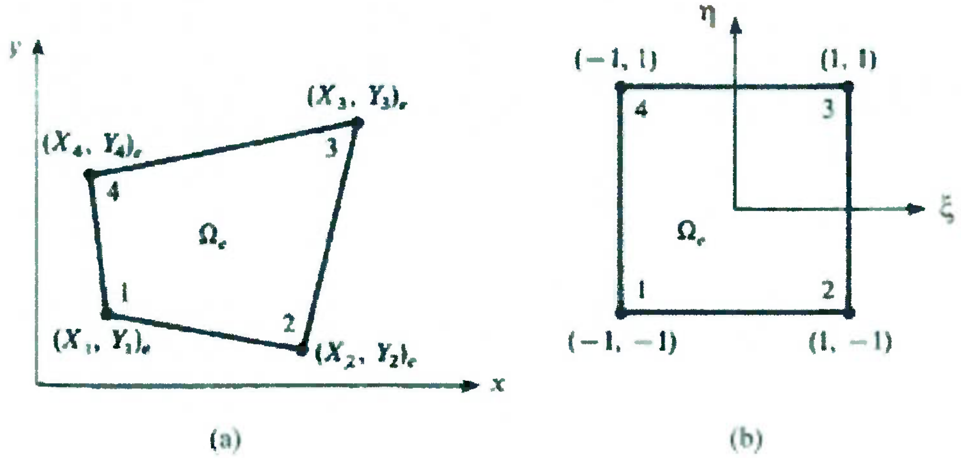


Figura 2.1: Sistemas de coordenadas aplicados sobre o elemento quadrilateral Ω_e: (a) sistema *global*; (b) sistema *local*.

seguinte maneira

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \tag{2.12}$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \tag{2.13}$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \tag{2.14}$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \tag{2.15}$$

As equações de transformação são estabelecidas empregando-se as funções de forma para os nós do elemento, bem como os valores de suas coordenadas globais, como seguem

$$x = N_1(\xi,\eta)X_1 + N_2(\xi,\eta)X_2 + N_3(\xi,\eta)X_3 + N_4(\xi,\eta)X_4 \tag{2.16}$$

$$y = N_1(\xi,\eta)Y_1 + N_2(\xi,\eta)Y_2 + N_3(\xi,\eta)Y_3 + N_4(\xi,\eta)Y_4 \tag{2.17}$$

Como anteriormente mencionado, no tocante ao cálculo de integrais que envolvam funções tais como as N_i $(i = 1, 2, 3$ e $4)$ acima, verifica-se a conveniência de desenvolvê-lo no sistema de coordenadas local. De acordo com a Fig. (2.1), pode-se observar que qualquer elemento "e", no espaço global, corresponde a um único tipo de elemento no sistema local: um quadrado de vértices em $(-1,-1)$, $(1,-1)$, $(1,1)$ e $(-1,1)$. Tal fato, pertinente à transformação, justifica a conveniência de se realizar as integrações tais como exposto.

Seguindo SEGERLIND (1984), a mudança de variáveis para uma integral dupla é

$$\int_A f(x,y)dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} g(\xi,\eta)\,|\det \mathbf{J}|\,d\xi d\eta \tag{2.18}$$

sendo $\mathbf{J}$ a matriz Jacobiana, dada por

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

O processo de integração numérica é então conduzido pela quadratura de Gauss-Legendre (CONTE, S. D. and DE BOOR, C., 1980). SEGERLIND (1984) afirma que a quadratura localiza os pontos de integração que conduzem à maior precisão neste cálculo. Assim, para s pontos sobre uma das coordenadas do sistema, um polinômio de ordem $(2s-1)$ pode ser integrado exatamente. Para uma região bidimensional no espaço transformado, $\xi\eta$, a quadratura de Gauss-Legendre estabelece a relação

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} g(\xi,\eta)d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} W_i W_j g(\xi_i,\eta_j) \tag{2.20}$$

a qual permite o cálculo da integral através de um procedimento numérico somatório.

Na Eq. (2.20), m e n são obtidos pelo equacionamento de $(2m-1)$ e de $(2n-1)$ à maior potência, respectivamente, de ξ e de η, nas equações de transformação (Eqs. (2.16) e (2.17)). W_i e W_j correspondem a coeficientes-peso para ξ e η, respectivamente.

Seguindo MENEGHINI (1989), devem-se considerar algumas características pertinentes à transformação estabelecida entre os sistemas de coordenadas. Ressalta-se, primeiramente, que ela deve ser *bi-unívoca*, ou seja, que a cada ponto do espaço global corresponda tão somente um ponto do espaço local, e vice-versa. Daí, resulta, necessariamente, que o *determinante da matriz Jacobiana* (isto é, o *Jacobiano*) exista e não apresente inversão de sinal no subdomínio, Ω_e. Conforme ARIS (1962) *apud* MENEGHINI (1989), "o Jacobiano representa a relação de volumes entre um elemento infinitesimal de um dos sistemas de coordenadas e um elemento infinitesimal do outro sistema de coordenadas".

Agora, voltando-se à Eq. (2.18), deve-se observar que, via de regra, as derivadas presentes nos integrandos são relativas às coordenadas x e y (mesmo quando no sistema local). Desta forma, faz-se necessário *expressá-las* em função de ξ e de η, tal como requeridas no espaço transformado e, particularmente, na função $g(\xi_i, \eta_j)$ da Eq. (2.20). A aplicação da regra da cadeia para diferenciação sobre as funções de forma resulta

$$\frac{\partial N_m(\xi,\eta)}{\partial \xi} = \frac{\partial N_m(\xi,\eta)}{\partial x}\frac{\partial x(\xi,\eta)}{\partial \xi} + \frac{\partial N_m(\xi,\eta)}{\partial y}\frac{\partial y(\xi,\eta)}{\partial \xi} \tag{2.21}$$

$$\frac{\partial N_m(\xi,\eta)}{\partial \eta} = \frac{\partial N_m(\xi,\eta)}{\partial x}\frac{\partial x(\xi,\eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial N_m(\xi,\eta)}{\partial y}\frac{\partial y(\xi,\eta)}{\partial \eta} \tag{2.22}$$

Este par de equações pode ser escrito em forma matricial

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial N_m(\xi,\eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_m(\xi,\eta)}{\partial \eta} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial N_m(\xi,\eta)}{\partial x} \\ \frac{\partial N_m(\xi,\eta)}{\partial y} \end{array} \right\} \tag{2.23}$$

Ao passo que, a inverção da matriz Jacobiana leva a

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial N_m(\xi,\eta)}{\partial x} \\ \frac{\partial N_m(\xi,\eta)}{\partial y} \end{array} \right\} = \mathbf{J}(\xi,\eta)^{-1} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial N_m(\xi,\eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_m(\xi,\eta)}{\partial \eta} \end{array} \right\} \tag{2.24}$$

Conforme SEGERLIND (1984), o vetor coluna do lado direito da Eq. (2.24) e a matriz Jacobiana são facilmente calculados, tendo-se em vista que ambos possuem as funções de forma do elemento "*e*" expressas em termos de ξ e de η. No entanto, em virtude desta característica da Jacobiana, sua inversa *não* pode ser obtida explicitamente. Faz-se necessário, então, calcular numericamente suas derivadas para cada ponto de integração. Neste contexto, introduz-se a quadratura de Gauss-Legendre para a integração numérica – Eq. (2.20) –, tal como apresentado.

2.4 Formulação Numérica Bidimensional para a Resolução do Escoamento ao Redor de Cilindros

No contexto dos métodos numéricos de aproximação à solução de equações diferenciais de problemas de valor de contorno, fez-se, na Sec. (2.1), uma breve apresentação do *Método dos Resíduos Ponderados*, sobre o qual se fundamenta o *MEF*.

Agora, com base no exposto anteriormente, apresenta-se a formulação bidimensional conforme o *MEF*, tendo-se em conta a abordagem segundo o *FSM*. A aplicação dos simuladores numéricos então elaborados ao escoamento de fluido ao redor de um único cilindro se diferencia da pertinente ao escoamento ao redor de dois cilindros em configuração "*tandem*" apenas quanto ao estabelecimento das condições de contorno dos sistemas. Ou seja, a formulação comporta o enfoque sobre um cilindro ou mais, exigindo, apenas, o coerente estabelecimento das condições de contorno do problema contemplado.

Neste contexto, expõe-se, primeiramente, o procedimento de validação dos simuladores numéricos em questão (através da avaliação dos resultados pertinentes ao escoamento ao redor de um cilindro, frente aos disponíveis na literatura), para então se apresentar o tratamento do escoamento transversal de fluido newtoniano, incompressível e viscoso ao redor de dois cilindros estacionários em "*tandem*".

A Fig. (2.2) apresenta um exemplo de malha computacional plana de elementos finitos para um sistema de apenas um cilindro, empregada em alguns processos de depuração computacional no presente trabalho. A validação, no entanto, será implementada sobre uma malha semelhante, porém mais refinada, a fim de contemplar, adequadamente, a camada limite adjunta à superfície do cilindro.

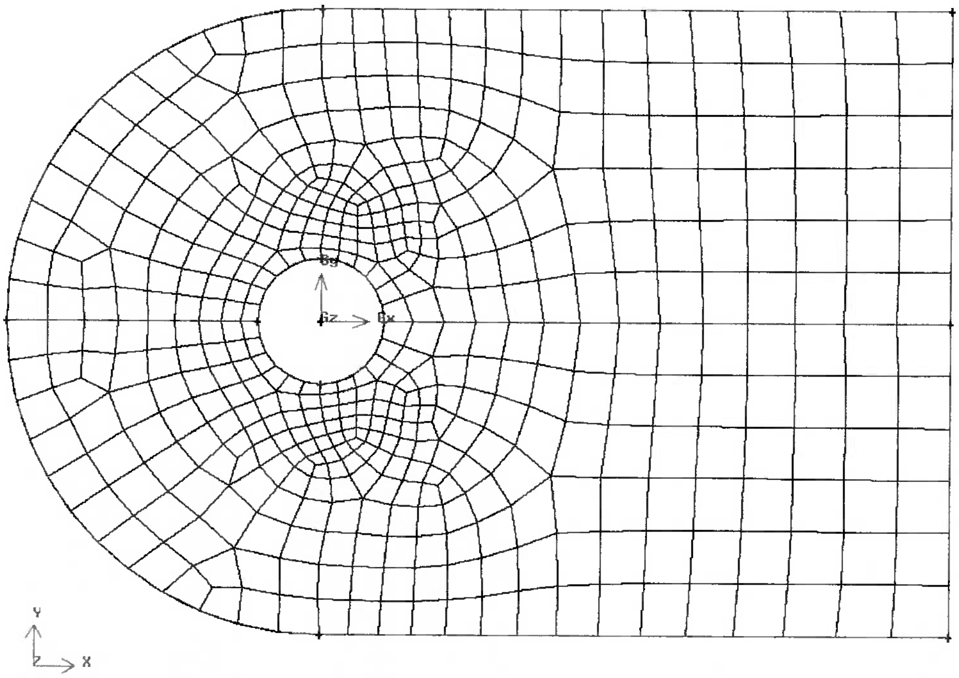


Figura 2.2: Malha não-estruturada de elementos finitos utilizada em alguns processos de depuração de erros computacionais.

Os parâmetros avaliados no processo de validação das simulações numéricas são, basicamente, o número de Strouhal e os coeficientes de arrasto e de sustentação pertinentes ao cilindro isolado. Os resultados obtidos nas simulações serão confrotados com os procedentes da literatura, condizentes tanto a simulações numéricas, quanto a dados experimentais.

A formulação numérica bidimensional para a resolução do escoamento ao redor de cilindros é aqui desenvolvida sobre a malha com dois cilindros em "*tandem*", ainda que, como visto anteriormente, esta formulação é geral.

Primeiramente, definem-se o sistema físico de estudo, as equações que regem o fenômeno, bem como as condições inicial e de contorno, para, então, apresentar-se o procedimento de resolução do problema através do *FSM*. Posteriormente, expõe-se a formulação com o *MEF* para a discretização das equações nos domínios do espaço e do tempo.

O sistema físico sobre o qual será avaliado o escoamento é constituído pela região vizinha aos cilindros e discretizada em elementos quadrilaterais. A Fig. (2.3) apresenta uma malha para o sistema físico, no qual o espaçamento entre centros dos cilindros é de $4D$.

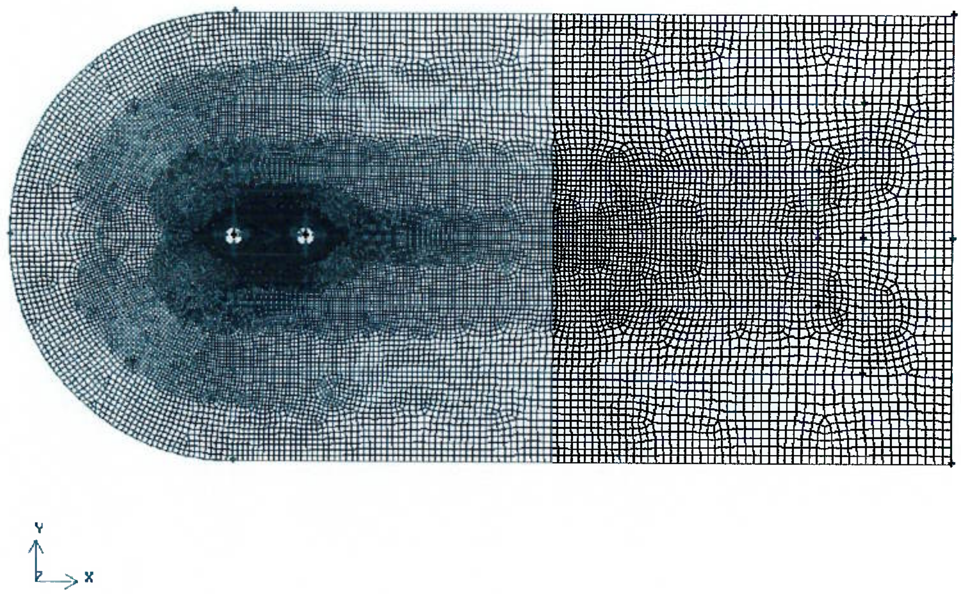


Figura 2.3: Sistema físico do escoamento: região discretizada ao redor de dois cilindros em "*tandem*" – espaçamento $4D$.

As equações que regem o fenômeno em questão são as de conservação de massa e de quantidade de movimento (Navier-Stokes), aplicadas ao sistema então definido. Forças de corpo *não* são consideradas, tendo-se em vista que a aceleração da gravidade atua unicamente na direção normal ao plano que contém o sistema, e as equações, escritas em notação indicial, são

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{2.25}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \tag{2.26}$$

convencionando-se $i, j = 1$ à direção x do escoamento e $i, j = 2$ à y.

As condições do campo de escoamento no instante inicial dizem respeito, fundamentalmente, às velocidades e à pressão em cada um dos nós m da malha de elementos finitos. A Tab. (2.1) apresenta as condições iniciais assim estabelecidas.

Instante $t_0 = 0$ s			
	u_m	v_m	p_m
Nós sobre a fronteira externa	1	0	0
Nós sobre os cilindros	0	0	0
Demais nós	1	0	0

Tabela 2.1: Velocidades e pressão em cada um dos nós da malha, no instante inicial.

As condições de contorno do problema são definidas, assumindo-se, primeiramente, que a *fronteira externa* – isto é, todo o contorno externo da malha – encontra-se, em relação aos cilindros, suficientemente longe para que o seu estado possa ser considerado inalterável no decorrer do tempo. No tocante às paredes externas dos "*risers*", deve-se assegurar que a condição de não-escorregamento e a de gradiente de pressão nulo na direção radial (isto é, normal) sejam atendidas. Desta forma, têm-se

a) Nas paredes dos cilindros:

$$u_m = 0 \tag{2.27}$$

$$v_m = 0 \tag{2.28}$$

$$\partial p_m / \partial n = 0 \tag{2.29}$$

b) Nas fronteiras externas do escoamento:

$$u_m = 1 \tag{2.30}$$

$$v_m = 0 \tag{2.31}$$

$$p_m = 0 \tag{2.32}$$

A resolução das Eqs. (2.25) e (2.26), em cada passo de tempo, consiste na determinação dos campos de velocidades $[u_m]^T$ e $[v_m]^T$ e de pressão $[p_m]^T$, com $m = 1, 2, 3, \ldots, M$.

Em linhas gerais, conforme introduzida na Sec. (1.4.2), a abordagem do *FSM* envolve, primeiramente, a obtenção de um campo de velocidades intermediário, $\widetilde{u}$, através da resolução da equação de Navier-Stokes (Eq. (2.26)) desprovida do termo de pressão. Posteriormente, impondo-se a condição de conservação de massa (Eq. (2.25)) ao sistema, determina-se seu campo de pressão. Assim, à resolução do problema, basta a correção do campo de velocidades intermediário através da inclusão do termo de pressão.

Compreende-se melhor a lógica deste procedimento através do equacionamento subseqüente.

A Eq. (2.26) pode ser reescrita como

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + u_j^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i^n}{\partial x_j^2} \tag{2.33}$$

sendo n e $n+1$ o passo de tempo anterior e o de cálculo, respectivamente.

A abordagem do *FSM* avalia, primeiramente, o campo de velocidades intermediário, $\widetilde{u}$, para o instante de tempo t_{n+1}, através da eliminação do termo de pressão da Eq. (2.33). Ou seja,

$$\frac{\widetilde{u}_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + u_j^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} = \nu \frac{\partial^2 u_i^n}{\partial x_j^2} \tag{2.34}$$

$$\widetilde{u}_i^{n+1} = u_i^n - \Delta t \left(u_j^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} - \nu \frac{\partial^2 u_i^n}{\partial x_j^2} \right) \tag{2.35}$$

Subtraindo-se a Eq. (2.34) da Eq. (2.33), obtém-se

$$\frac{u_i^{n+1} - \widetilde{u}_i^{n+1}}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} \tag{2.36}$$

$$u_i^{n+1} - \widetilde{u}_i^{n+1} = -\frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} \tag{2.37}$$

E a aplicação do operador divergente à esta conduz à

$$\frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial x_i} - \frac{\partial \widetilde{u}_i^{n+1}}{\partial x_i} = -\frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right)^{n+1} \tag{2.38}$$

Agora, sendo imperativa a condição de conservação de massa no sistema $(\partial u_i^{n+1}/\partial x_i = 0)$, a Eq. (2.38) resulta em

$$\frac{\partial \widetilde{u}_i^{n+1}}{\partial x_i} = \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right)^{n+1} \tag{2.39}$$

Esta, por sua vez, é uma equação de Poisson, cuja resolução fornece o campo de pressão do sistema, $[p_m^{n+1}]^T$. Logo, a determinação do campo de velocidades para o instante de tempo t_{n+1} faz-se através da Eq. (2.37).

Todo este procedimento é repetido para cada novo passo de tempo.

2.4.1 Desenvolvimento no Domínio do Espaço

Conforme apresentado na seção anterior, a implementação do problema no domínio do tempo é conduzida através do *FSM*. As discretizações espacial e temporal de suas equações, no entanto, são desenvolvidas através do *MEF*, empregando-se, respectivamente, a formulação de Galerkin e o método de colocação.

A seguir, expõe-se a discretização no domínio do espaço, tomando-se a equação reduzida de Navier-Stokes, isto é, a utilizada pelo *FSM* para a determinação do campo de velocidades intermediário. Visando a clareza desta exposição, considera-se apenas a componente da equação na direção longitudinal do escoamento, ou seja, na direção x.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{2.40}$$

Uma forma conveniente de se aproximar a solução exata, u, da equação diferencial em questão é a expansão em série

$$u \simeq \widehat{u} = \sum_{m=1}^{M} u_m N_m \qquad \text{em } \Omega \tag{2.41}$$

sendo u_m, as velocidades nodais na direção x; N_m, as respectivas funções de forma associadas aos nós em Ω; e M, o número de funções de forma utilizadas na aproximação descrita.

Introduzindo-se a aproximação $\widehat{u}$ na equação diferencial (2.40), obtém-se o *resíduo*

$$R_\Omega \equiv A(\widehat{u}) = \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} + \widehat{u}\frac{\partial \widehat{u}}{\partial x} + \widehat{v}\frac{\partial \widehat{u}}{\partial y} - \nu\left(\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial y^2}\right) \tag{2.42}$$

A aplicação do método dos resíduos ponderados estabelece que

$$\int_\Omega W_l A(\widehat{u})d\Omega = 0 \tag{2.43}$$

Isto é,

$$\int_\Omega W_l\left[\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} + \widehat{u}\frac{\partial \widehat{u}}{\partial x} + \widehat{v}\frac{\partial \widehat{u}}{\partial y} - \nu\left(\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial y^2}\right)\right]d\Omega = 0 \tag{2.44}$$

Substituindo-se nesta a expansão em série da Eq. (2.41), desenvolve-se cada um de seus termos.

A derivada temporal local resulta

$$\begin{aligned}\int_\Omega W_l\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}d\Omega &= \int_\Omega W_l\left(\frac{\partial}{\partial t}\sum_{m=1}^{M} u_m N_m\right)d\Omega \\ &= \sum_{m=1}^{M}\int_\Omega W_l N_m d\Omega\,\frac{du_m}{dt}\end{aligned} \tag{2.45}$$

Os termos convectivos são simplificados pela aplicação do método da "velocidade convectiva do centróide", conforme proposto por GRESHO, P. M. et al. (1984) *apud* MELING, T. S. and DALHEIM, J. (1997). Neste, a velocidade de convecção é estimada para o centróide do elemento através da média aritmética das velocidades de seus nós.

Aqui, apresenta-se apenas a componente $u\,(\partial u/\partial x)$ do termo convectivo, já que a outra é desenvolvida de forma similar. Assim,

$$\begin{aligned}\int_\Omega W_l \widehat{u} \frac{\partial \widehat{u}}{\partial x} d\Omega &= \int_\Omega W_l \left(\sum_{m=1}^{M} u_m N_m \frac{\partial}{\partial x} \sum_{m=1}^{M} u_m N_m \right) d\Omega \\ &= \sum_{n=1}^{NE} \overline{u}_n \left(\sum_{m=1}^{M_e} \int_{\Omega_e} W_l \frac{\partial N_m}{\partial x} d\Omega \, u_m \right) \qquad (2.46)\end{aligned}$$

Nesta equação, NE é o número de elementos da malha, M_e, o número de nós por elemento, e $\overline{u}_n$, a componente na direção x da velocidade do centróide do elemento n.

Integrando-se, por partes, o termo difusivo relativo à direção x, obtém-se

$$\begin{aligned}-\nu \int_\Omega \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial x^2} d\Omega &= -\nu \int_\Omega W_l \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{m=1}^{M} u_m N_m d\Omega \\ &= -\nu \sum_{m=1}^{M} \left\{ \left[W_l \frac{\partial N_m}{\partial x} \right]_\Gamma - \int_\Omega \frac{\partial N_m}{\partial x} \frac{\partial W_l}{\partial x} d\Omega \right\} u_m \qquad (2.47)\end{aligned}$$

Agora, tendo-se em vista as condições de fronteira especificadas ($u = v = 0$, $\partial u/\partial n = \partial v/\partial n = 0$), deve-se ressaltar, para esta equação, que o termo no contorno Γ resulta nulo. Fisicamente, estas condições estabelecem que as variáveis do escoamento já não mais sofrem influência dos cilindros que o perturbam.

As matrizes globais associadas às equações desenvolvidas podem ser escritas como

$$\mathbf{C} = \sum_{m=1}^{M} \int_{\Omega} W_l N_m d\Omega \tag{2.48}$$

$$\mathbf{A} = \sum_{n=1}^{NE} \left[\overline{u}_n \left(\sum_{m=1}^{M_e} \int_{\Omega_e} W_l \frac{\partial N_m}{\partial x} d\Omega \right) + \overline{v}_n \left(\sum_{m=1}^{M_e} \int_{\Omega_e} W_l \frac{\partial N_m}{\partial y} d\Omega \right) \right] \tag{2.49}$$

$$\mathbf{K} = \sum_{m=1}^{M} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_m}{\partial x} \frac{\partial W_l}{\partial x} + \frac{\partial N_m}{\partial y} \frac{\partial W_l}{\partial y} \right) d\Omega \tag{2.50}$$

Assim, pode-se escrever, em notação matricial, uma aproximação para a Eq. (2.40) como

$$\mathbf{C}\frac{du}{dt} + (\mathbf{A} + \nu\mathbf{K})\, u = 0 \tag{2.51}$$

Neste desenvolvimento, não se especifica a função-peso, W_l. No entanto, como se aplica aqui o método com formulação de Galerkin, deve-se considerar, nas equações estabelecidas, que $W_l = N_l$.

2.4.2 Desenvolvimento no Domínio do Tempo

Conforme ZIENKIEWICZ, O. C. and MORGAN, K. (1983), a discretização parcial de equações diferenciais faz-se conveniente em problemas *prismáticos*, para o qual um domínio (no caso em questão, o espacial) é independente de uma das variáveis (neste caso, o tempo). Assim, aproximações para a solução de equações como a Eq. (2.40), podem ser feitas por

$$\phi \simeq \widehat{\phi} = \sum_{m=1}^{M} \phi_m(t) N_m(x, y) \tag{2.52}$$

de tal forma que as funções N_m satisfaçam as condições de contorno essenciais no domínio espacial. Conseqüentemente, ao se aplicar o método dos resíduos ponderados, as derivadas de ϕ_m com respeito a t permanecem, e as equações resultantes são dadas na forma de um conjunto acoplado de equações diferenciais ordinárias, para as quais t é a variável independente. Neste contexto, tem-se o sistema de equações dado pela Eq. (2.51).

Agora, definindo-se um domínio de tempo com elementos lineares cujas funções de forma e suas derivadas são

$$N_n^r = 1 - T \qquad \frac{dN_n^r}{dt} = -\frac{1}{\Delta t_n} \tag{2.53}$$

$$N_{n+1}^r = T \qquad \frac{dN_{n+1}^r}{dt} = \frac{1}{\Delta t_n} \tag{2.54}$$

$$T = \frac{t - t_n}{\Delta t_n} \qquad \Delta t_n = t_{n+1} - t_n \tag{2.55}$$

pode-se escrever uma aproximação para a solução temporal da equação então avaliada, em forma similar ao procedimento praticado no domínio espacial. Logo,

$$u_m = u_m^n N_n^r + u_m^{n+1} N_{n+1}^r \tag{2.56}$$

O método dos resíduos ponderados, aplicado à Eq. (2.51), conduz a

$$\int_0^\infty \left(\mathbf{C}\frac{du_m}{dt} + \mathbf{A}u_m + \nu\mathbf{K}u_m \right) W_n dt = 0 \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.57}$$

para qual, considerando-se funções-peso, W_n, tal que

$$W_n = 0, \qquad t < t_n \qquad \text{e} \qquad t > t_{n+1} \tag{2.58}$$

pode-se escrever

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[\mathbf{C}\frac{du_m}{dt} + (\mathbf{A} + \nu\mathbf{K})\, u_m \right] W_n dt = 0 \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.59}$$

Como a integral, agora, diz respeito unicamente ao elemento r, empregando-se, na equação anterior, as relações (2.53), (2.54), (2.55) e (2.56), obtém-se

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \mathbf{C} \left(u_m^n \frac{dN_n^r}{dt} + u_m^{n+1} \frac{dN_{n+1}^r}{dt} \right) W_n \Delta t_n dT \\ &\qquad + \int_0^1 (\mathbf{A} + \nu\mathbf{K}) \left[u_m^n (1 - T) + u_m^{n+1} T \right] W_n \Delta t_n dT = 0 \\ &\hspace{20em} n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{2.60}$$

Sendo as matrizes $\mathbf{C}$, $\mathbf{A}$ e $\mathbf{K}$ constantes no tempo, resulta

$$\left\{\frac{\mathbf{C}}{\Delta t_n}\int_0^1 W_n dT + (\mathbf{A}+\nu\mathbf{K})\int_0^1 W_n T dT\right\} u_m^{n+1} + \left\{-\frac{\mathbf{C}}{\Delta t_n}\int_0^1 W_n dT + (\mathbf{A}+\nu\mathbf{K})\int_0^1 W_n (1-T)\, dT\right\} u_m^n = 0 \qquad n=0,1,2,\ldots \quad (2.61)$$

Esta relação, válida sobre cada elemento de tempo, r, possibilita (desde que estabelecida uma adequada função-peso, W_n) a determinação de sucessivas aproximações – $a^1, a^2, a^3, \ldots$ – à solução da Eq. (2.51), a partir de uma dada condição inicial, a^0.

Dividindo-se a Eq. (2.61) por $\int_0^1 W_n dT$, obtém-se

$$\left\{\frac{\mathbf{C}}{\Delta t_n} + \gamma_n (\mathbf{A}+\nu\mathbf{K})\right\} u_m^{n+1} + \left\{-\frac{\mathbf{C}}{\Delta t_n} + (1-\gamma_n)(\mathbf{A}+\nu\mathbf{K})\right\} u_m^n = 0 \qquad n=0,1,2,\ldots \quad (2.62)$$

sendo que

$$\gamma_n = \frac{\int_0^1 W_n T dT}{\int_0^1 W_n dT} \qquad (2.63)$$

Conforme ZIENKIEWICZ, O. C. and MORGAN, K. (1983), a aplicação de diferentes formas da função-peso, W_n, à Eq. (2.63) produz uma variedade de esquemas de solução. Adotando-se o método de colocação para $T=\theta$, em cada elemento do domínio de tempo (isto é, $W_n = \delta(T-\theta)$, para $n = 0,1,2,\ldots$), pode-se integrar diretamente esta equação, resultando $\gamma_n = \theta$. Desta forma, a Eq. (2.62) fica

$$\left\{\frac{\mathbf{C}}{\Delta t_n} + \theta (\mathbf{A}+\nu\mathbf{K})\right\} u_m^{n+1} + \left\{-\frac{\mathbf{C}}{\Delta t_n} + (1-\theta)(\mathbf{A}+\nu\mathbf{K})\right\} u_m^n = 0 \qquad n=0,1,2,\ldots \quad (2.64)$$

Conforme a escolha do ponto de colocação, θ, para cada elemento, faz-se com que a equação anterior corresponda a um dos bem conhecidos esquemas de diferenças finitas para a Eq. (2.51) (ZIENKIEWICZ, O. C. and MORGAN, K., 1983).

Para $\theta = 0$, tem-se o esquema de *Euler* (*"forward difference"*)

$$\left\{\frac{\mathbf{C}}{\Delta t_n}\right\} u_m^{n+1} + \left\{-\frac{\mathbf{C}}{\Delta t_n} + (\mathbf{A} + \nu\mathbf{K})\right\} u_m^n = 0 \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.65}$$

Fazendo-se $\theta = 1/2$, obtém-se o método de *Crank-Nicolson* (*"central difference"*)

$$\left\{\frac{\mathbf{C}}{\Delta t_n} + 1/2\,(\mathbf{A} + \nu\mathbf{K})\right\} u_m^{n+1} + \left\{-\frac{\mathbf{C}}{\Delta t_n} + 1/2\,(\mathbf{A} + \nu\mathbf{K})\right\} u_m^n = 0 \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.66}$$

E, finalmente, para $\theta = 1$, resulta o esquema *Implícito* (*"backward difference"*)

$$\left\{\frac{\mathbf{C}}{\Delta t_n} + (\mathbf{A} + \nu\mathbf{K})\right\} u_m^{n+1} + \left\{-\frac{\mathbf{C}}{\Delta t_n}\right\} u_m^n = 0 \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.67}$$

2.5 ***Fractional Step Method*** aplicado à Equação de Navier-Stokes

O *Fractional Step Method* de KIM, H. J. and MOIN, P. (1985) emprega uma abordagem que prescinde da pressão na etapa de predição do procedimento de resolução das equações que governam o fenômeno. FERZIGER, J. H. and PERIC, M. (1996) ressaltam que o papel que a pressão desempenha – no tocante ao procedimento de resolução de escoamento incompressível – é o de *forçar* a conservação de massa do sistema.

Na Sec. (2.4), delineou-se o procedimento de resolução do problema estudado, sob o enfoque do *FSM*. Agora, suas principais etapas são apresentadas, seguindo a mesma estrutura dos programas computacionais então elaborados.

- *1ªetapa – obtenção do campo de velocidades intermediário:* A integração da equação de conservação da quantidade de movimento sem o termo de pressão – Eq. (2.40) – foi detalhadamente desenvolvida nas Secs. (2.4.1) e (2.4.2). Reescrevendo a Eq. (2.64) para o vetor $\mathbf{U}_i$ ($\mathbf{U}_1 = [u_m]^T$ e $\mathbf{U}_2 = [v_m]^T$, com $m = 1, 2, 3, \ldots, M$) e assinalando o campo de velocidades intermediário com o símbolo til ($\tilde{}$), assim como se fez na Sec. (2.4), tem-se

$$\left\{\frac{\mathbf{C}}{\Delta t_n} + \theta\,(\mathbf{A} + \nu\mathbf{K})\right\}\widetilde{\mathbf{U}}_i^{n+1} + \left\{-\frac{\mathbf{C}}{\Delta t_n} + (1-\theta)\,(\mathbf{A} + \nu\mathbf{K})\right\}\mathbf{U}_i^n = 0$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (2.68)$$

Da resolução deste sistema linear procede $\widetilde{\mathbf{U}}_i^{n+1}$.

- *2ª etapa – determinação do campo de pressão:* Para se determinar o campo de velocidades final, $\mathbf{U}_i^{n+1}$, faz-se necessário avaliar o termo relativo à pressão, do qual ainda não se tem conhecimento.

  Na apresentação do *FSM*, na Sec. (2.4), demonstrou-se a obtenção da equação de Poisson para a pressão – Eq. (2.39) –, reescrita abaixo

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial p}{\partial x_i}\right)^{n+1} = \frac{\rho}{\Delta t}\left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i}\right)^{n+1} \qquad (2.69)$$

  cuja resolução proporciona o campo de pressão do escoamento em t_{n+1}.

  Em forma matricial, tem-se

$$\mathbf{K}\mathbf{P}^{n+1} = -\frac{\rho}{\Delta t}\mathbf{D}_i\widetilde{\mathbf{U}}_i^{n+1} \qquad (2.70)$$

  sendo $\mathbf{P}$ o vetor de pressões dos nós dos elementos da malha ($\mathbf{P} = [p_m]^T$, $m = 1, 2, 3, \ldots, M$).

- *3ª etapa – cálculo do campo de velocidades final:* Agora, tendo-se em mãos a pressão para todos os nós da malha, o campo de velocidades final para o instante de tempo t_{n+1} é obtido através da correção do campo de velocidades intermediário – Eq. (2.35) – ao se incluir o termo de pressão, tal como na Eq. (2.37), reapresentada a seguir

$$u_i^{n+1} = \widetilde{u}_i^{n+1} - \frac{\Delta t}{\rho}\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} \tag{2.71}$$

Em notação matricial, pode-se escrever então

$$\mathbf{C}\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{C}\widetilde{\mathbf{U}}_i^{n+1} - \frac{\Delta t}{\rho}\mathbf{D}_i\mathbf{P}^{n+1} \tag{2.72}$$

A seguir, as etapas do procedimento de cálculo então descrito são reunidas e apresentadas em notação matricial, proporcionando uma visão geral e sucinta do método implementado.

$$\textit{1ª etapa} \quad : \quad \left\{\frac{\mathbf{C}}{\Delta t_n} + \theta\left(\mathbf{A} + \nu\mathbf{K}\right)\right\}\widetilde{\mathbf{U}}_i^{n+1} = -\left\{-\frac{\mathbf{C}}{\Delta t_n} + (1-\theta)\left(\mathbf{A} + \nu\mathbf{K}\right)\right\}\mathbf{U}_i^n \tag{2.73}$$

$$\textit{2ª etapa} \quad : \quad \mathbf{K}\mathbf{P}^{n+1} = -\frac{\rho}{\Delta t}\mathbf{D}_i\widetilde{\mathbf{U}}_i^{n+1} \tag{2.74}$$

$$\textit{3ª etapa} \quad : \quad \mathbf{C}\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{C}\widetilde{\mathbf{U}}_i^{n+1} - \frac{\Delta t}{\rho}\mathbf{D}_i\mathbf{P}^{n+1} \tag{2.75}$$

Na Sec. (2.4.1), apresentou-se o desenvolvimento das matrizes **C**, **A** e **K**. A matriz **D** também resulta da aplicação do *MEF*, em processo semelhante ao desenvolvido naquela seção. Estas matrizes, pois, são expressas como

$$\mathbf{C} = \int_\Omega \mathbf{N}^T\mathbf{N}\,d\Omega \tag{2.76}$$

$$\mathbf{A} = \sum_{e=1}^{NE} \bar{c}_n \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i}\,d\Omega \tag{2.77}$$

$$\mathbf{K} = \int_\Omega \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i}^T\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i}\,d\Omega \tag{2.78}$$

$$\mathbf{D}_i = \int_\Omega \mathbf{N}^T\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i}\,d\Omega \tag{2.79}$$

nas quais **N** representa o vetor de funções de forma de cada um dos nós da malha, e $\bar{c}_n$, a velocidade do centróide do elemento n.

A abordagem adotada no procedimento anteriormente exposto difere, em alguns aspectos, da utilizada por MELING, T. S. and DALHEIM, J. (1997). Estes, para a determinação do campo de velocidades intermediário, $\widetilde{u}_i^{n+1}$, propõem que a velocidade no instante $t_{n+1/2}$ seja estimada (através da convecção de u_i^n) e empregada na parcela diferencial do termo convectivo. No entanto, conforme observado nos códigos computacionais de SIQUEIRA (1999), este procedimento não se faz imprescindível, podendo-se utilizar no lugar de $\widetilde{u}_i^{n+1/2}$ o próprio campo de velocidades do instante anterior, isto é, u_i^n. Assim se procede no presente trabalho, tendo-se em vista, especialmente, o tempo de processamento computacional requerido.

Devem-se ressaltar, ainda, alguns aspectos intrínsecos ao tratamento numérico dispensado às Eqs. (2.73), (2.74) e (2.75), em ordem à solução do problema em questão.

Primeiramente, no tocante ao termo convectivo ($\mathbf{AU}_i^n$), utiliza-se o método de *Adams–Bashforth* (esquema que determina o valor de uma variável num dado instante de tempo a partir de seus valores em dois instantes anteriores), tal como empregado por SIQUEIRA (1999).

À resolução da Eq. (2.73), deve-se ainda escolher o ponto de colocação, θ. No entanto, em virtude da natureza do escoamento ao redor de *cilindro estacionário* (conseqüentemente, de malha de elementos finitos *invariável no tempo*), a matriz dos termos difusivos, **K**, é constante e igual em todos os intervalos de tempo, não ocorrendo o mesmo, porém, com a matriz dos termos convectivos, **A** (cfr. Eq. (2.77): $\bar{c}_n$ é implementado a cada passo de tempo). Neste sentido, estabelecem-se valores diferentes para o parâmetro θ, condizentes a um e a outro termo. Reescrevendo-se a Eq. (2.73) para esta abordagem, tem-se

$$\left\{\frac{\mathbf{C}}{\Delta t_n} + \theta_{\mathbf{A}}\mathbf{A} + \theta_{\mathbf{K}}\nu\mathbf{K}\right\}\widetilde{\mathbf{U}}_i^{n+1} = -\left\{-\frac{\mathbf{C}}{\Delta t_n} + (1-\theta_{\mathbf{A}})\,\mathbf{A} + (1-\theta_{\mathbf{K}})\,\nu\mathbf{K}\right\}\mathbf{U}_i^n \tag{2.80}$$

Adotando-se o método de *Crank-Nicolson* para o termo difusivo e o esquema de *Euler* (cfr. Eqs. (2.66) e (2.65)) para o convectivo, tem-se $\theta_{\mathbf{K}} = 1/2$ e $\theta_{\mathbf{A}} = 0$. Logo

$$\left\{\frac{\mathbf{C}}{\Delta t_n} + \frac{1}{2}\nu\mathbf{K}\right\}\widetilde{\mathbf{U}}_i^{n+1} = -\left\{-\frac{\mathbf{C}}{\Delta t_n} + \mathbf{A} + \frac{1}{2}\nu\mathbf{K}\right\}\mathbf{U}_i^n \tag{2.81}$$

Procedendo-se desta forma, procura-se que a matriz $\left\{\frac{\mathbf{C}}{\Delta t_n} + \frac{1}{2}\nu\mathbf{K}\right\}$ seja mais *diagonal dominante* que a correspondente observada em MELING, T. S. and DALHEIM, J. (1997) – isto é, $\mathbf{C}/\Delta t_n$ –, o que contribui a estabilidade da solução numérico-computacional.

Finalmente, com respeito à Eq. (2.75), tem-se a etapa de *correção* do *FSM*. Este processo implica, tão somente, a adição do termo de pressão ao campo de velocidades intermediário, $\widetilde{\mathbf{U}}_i^{n+1}$, e não propriamente a resolução do sistema de equações lineares, tal como desenvolvido nas etapas anteriores.

2.6 Cálculo dos Coeficientes de Força

Tal como em SIQUEIRA (1999), as forças atuantes no(s) cilindro(s) imerso(s) no escoamento são calculadas através da integração tanto da parcela pertinente à tensão de cisalhamento quanto da contribuição devida ao campo de pressão, agentes nas paredes daquele(s) componente(s). Por definição, a tensão de cisalhamento no plano xy é

$$\tau_w = -\mu\omega_w \tag{2.82}$$

sendo

$$\omega_w = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.83}$$

a vorticidade na parede.

Desta forma, a força devida à pressão é

$$\vec{F}_p = -\int_A p\vec{n}dA \tag{2.84}$$

sendo $\vec{n}$ o vetor normal à superfície do cilindro, enquanto a pertinente ao cisalhamento corresponde a

$$\vec{F}_\tau = \int_A \vec{\tau}_w dA \tag{2.85}$$

A força resultante sobre um cilindro assim calculada é então decomposta nas direções x e y (F_x e F_y, respectivamente) e os coeficientes de arrasto e de sustentação associados são finalmente obtidos de

$$C_d = \frac{F_x}{\frac{1}{2}\rho U^2 D} \tag{2.86}$$

$$C_l = \frac{F_y}{\frac{1}{2}\rho U^2 D} \tag{2.87}$$

Capítulo 3

VALIDAÇÃO DOS SIMULADORES NUMÉRICOS DESENVOLVIDOS – ESCOAMENTO AO REDOR DE UM CILINDRO

Neste capítulo, faz-se a validação dos simuladores numéricos desenvolvidos, através do levantamento da curva *Strouhal x Reynolds* para o escoamento transversal ao redor de um único cilindro estacionário. Os parâmetros avaliados são, basicamente, os coeficientes de arrasto e de sustentação do cilindro, bem como o respectivo número de Strouhal associado ao regime de escoamento estabelecido.

Os resultados procedentes das simulações numéricas realizadas com os programas então elaborados são devidamente confrontados com os obtidos – numérica ou experimentalmente – por outros pesquisadores. Naturalmente, dá-se maior atenção aos resultados devidos a SIQUEIRA (1999), tendo-se em vista que seus códigos computacionais constituem a base para os então desenvolvidos.

Primeiramente, no entanto, destacam-se alguns aspectos relativos à malha bidimensional de elementos finitos empregada nas simulações, em ordem a validação do código computacional.

3.1 Malha de Elementos Finitos Empregada no Procedimento de Validação dos Simuladores

Na Fig. (3.1), apresenta-se a malha de elementos finitos utilizada no procedimento de validação dos simuladores numéricos do escoamento transversal ao redor de cilindros, desenvolvidos no presente trabalho. Gerada através do "software" *Gambit (Fluent, Inc.)*, versão 2.0.4, e constituída por elementos quadrilaterais, é desenhada de tal forma que o centro do cilindro (de raio unitário, R) corresponda à coordenada (0,0) e que seus extremos, na direção x, encontrem-se $25R$ à montante e $80R$ à jusante da origem do sistema de coordenadas. Na direção y, estende-se também até $25R$, como pode ser constatado através da Fig. (3.1). Conta com um total de 20.816 nós e 20.608 elementos. Sobre sua fronteira externa, encontram-se 288 nós e, sobre o contorno do cilindro, 128, numerados, respectivamente, de 1 a `ibreak1` $= 288$ e de 289 (`ibreak1` $+ 1$) a `ibreak2` $= 416$, em ordem ao estabelecimento das condições de contorno do problema. No tocante ao passo de tempo, a princípio seria utilizado o mesmo empregado por SIQUEIRA (1999), isto é, 1×10^{-2}. No entanto, verificou-se que, para este valor, a solução numérica do problema divergia. Desta forma, novos valores para o passo de tempo foram testados a fim de se obter a solução do problema. Na Tab. (3.1), encontram-se alguns valores dos números de Strouhal em função do tamanho do passo de tempo, resultantes das simulações para o escoamento ao redor de um cilindro, com $Re = 200$.

Assim, nas simulações, o passo de tempo adimensional (UT/D) resultante é $2,5 \times 10^{-3}$. A velocidade de corrente livre, U, é unitária. Uma visão mais detalhada da região próxima ao cilindro é apresentada na Fig. (3.2).

A malha utilizada por SIQUEIRA (1999) distingue-se, primeiramente (além do tipo de elemento utilizado), pela geometria retangular de seu contorno externo. Embora também possua um cilindro de raio unitário centrado em (0,0), estende-

Passo de Tempo	St
1×10^{-3}	0,209
2×10^{-3}	0,202
5×10^{-3}	0,202

Tabela 3.1: Números de Strouhal em função do passo de tempo ($Re = 200$).

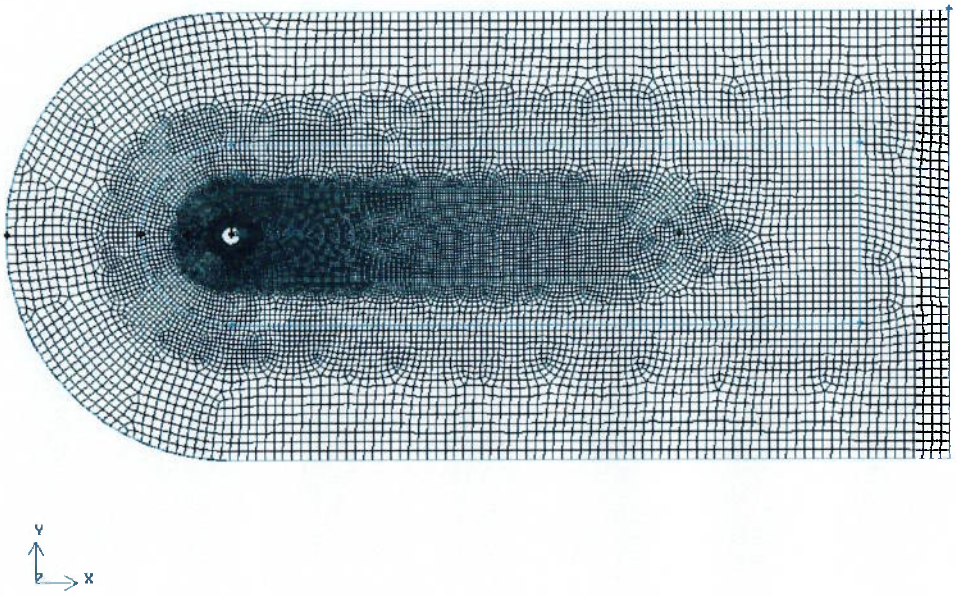


Figura 3.1: Malha não-estruturada de elementos finitos quadrilaterais empregada nas simulações para validação do código computacional então desenvolvido.

se até $15R$ à montante do cilindro e até $50R$ à sua jusante, enquanto, na direção y, tanto acima quanto abaixo, desloca-se até 21,3R em relação à origem do sistema de coordenadas. No total, contabiliza 27.062 elementos – triangulares – e 13.696 nós, dos quais 100 compõem a fronteira externa do domínio e 228, a parede do cilindro. O passo de tempo adimensional utilizado é $5,0 \times 10^{-3}$ e a velocidade de corrente livre do escoamento também é unitária.

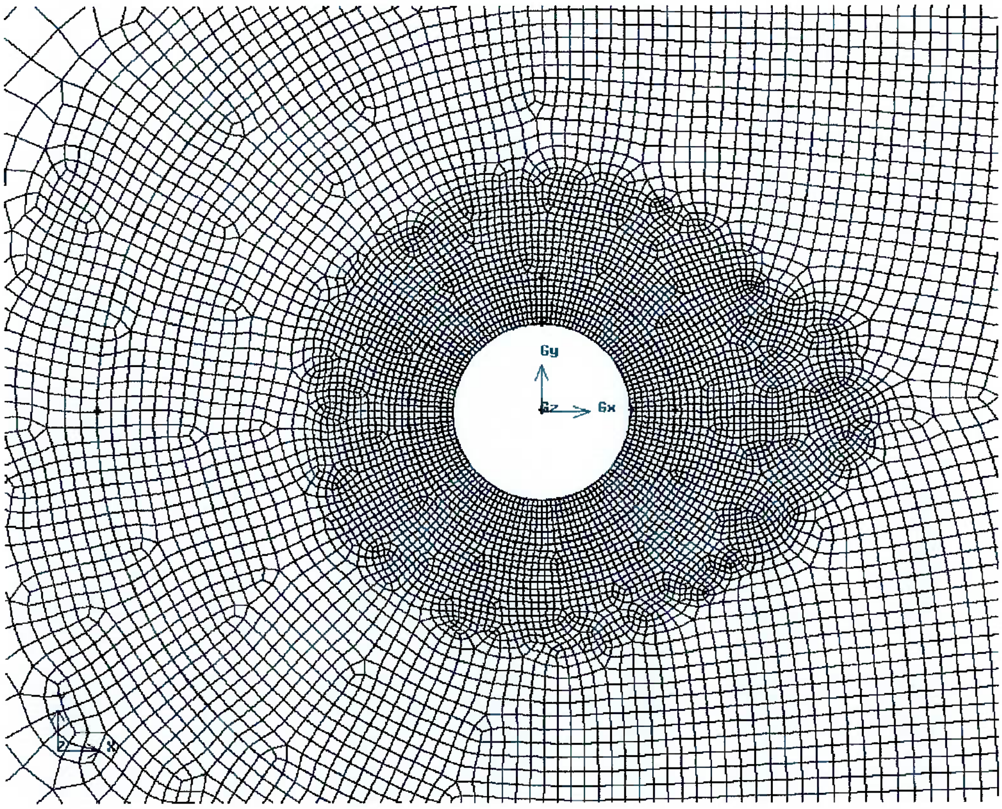


Figura 3.2: Região próxima ao cilindro. Destaca-se a variação no tamanho dos elementos conforme sua distância ao cilindro.

Re	*St* – **Pres. Trab.**	*St* – **SIQUEIRA (1999)**	**Dif. Relativa (%)**
60	0,138	0,125	10,098
80	0,157	0,154	1,979
100	0,169	0,165	2,47
120	0,179	0,174	2,63
140	0,186	0,178	4,64
160	0,192	0,186	3,48
180	0,197	0,190	3,89
200	0,202	0,196	3,26

Tabela 3.2: Números de Reynolds e respectivos números de Strouhal e diferença percentual relativa condizentes ao presente trabalho e ao de SIQUEIRA (1999).

3.2 Obtenção da Curva de *Strouhal x Reynolds* para o Escoamento ao Redor de Um Cilindro

Para a obtenção da curva *Strouhal x Reynolds* para o escoamento transversal ao redor de um único cilindro, foram realizadas simulações para oito números de Reynolds, concordantes aos utilizados por SIQUEIRA (1999) em processo similar.

Na Tab. (3.2), são apresentados os resultados obtidos para o número de Strouhal em função do número de Reynolds nas simulações pertinentes ao presente trabalho e ao de SIQUEIRA (1999), bem como para a respectiva diferença percentual relativa.

Na Fig. (3.3), têm-se as curvas *Strouhal x Reynolds* construídas com base nos valores da Tab. (3.2), bem como as procedentes de outros três trabalhos. A curva de KARNIADAKIS, G. E. and TRIANTAFYLLOU, G. (1989) bem como a de SA, J. Y. and CHANG, K. S. (1988) derivam de simulações numéricas e são aqui recolhidas de WILLIAMSON (1991). Este, por sua vez, coletou os pontos da relação *Strouhal x Reynolds* (dos quais, apenas alguns constam na Fig. (3.3)) através de ensaios experimentais em túnel de vento.

Os coeficientes de força (de arrasto e de sustentação) procedentes das si-

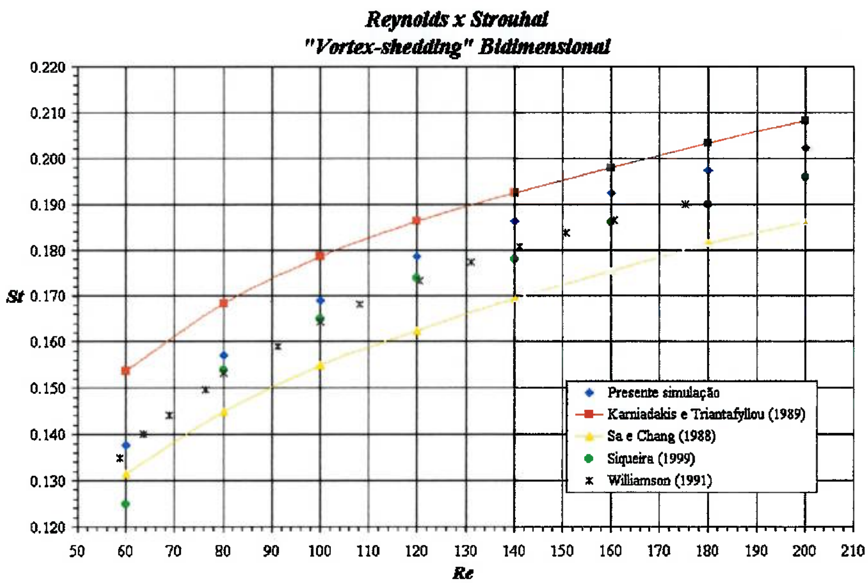


Figura 3.3: Curva *Strouhal x Reynolds* para "*vortex-shedding*" bidimensional. Todos os dados, a exceção dos relativos à presente simulação e aos de SIQUEIRA (1999), são extraídos de WILLIAMSON (1991).

mulações do escoamento ao redor de um cilindro estacionário – para números de Reynolds 60, 100 e 200 – e os respectivos contornos de vorticidade são apresentados na Fig. (3.4).

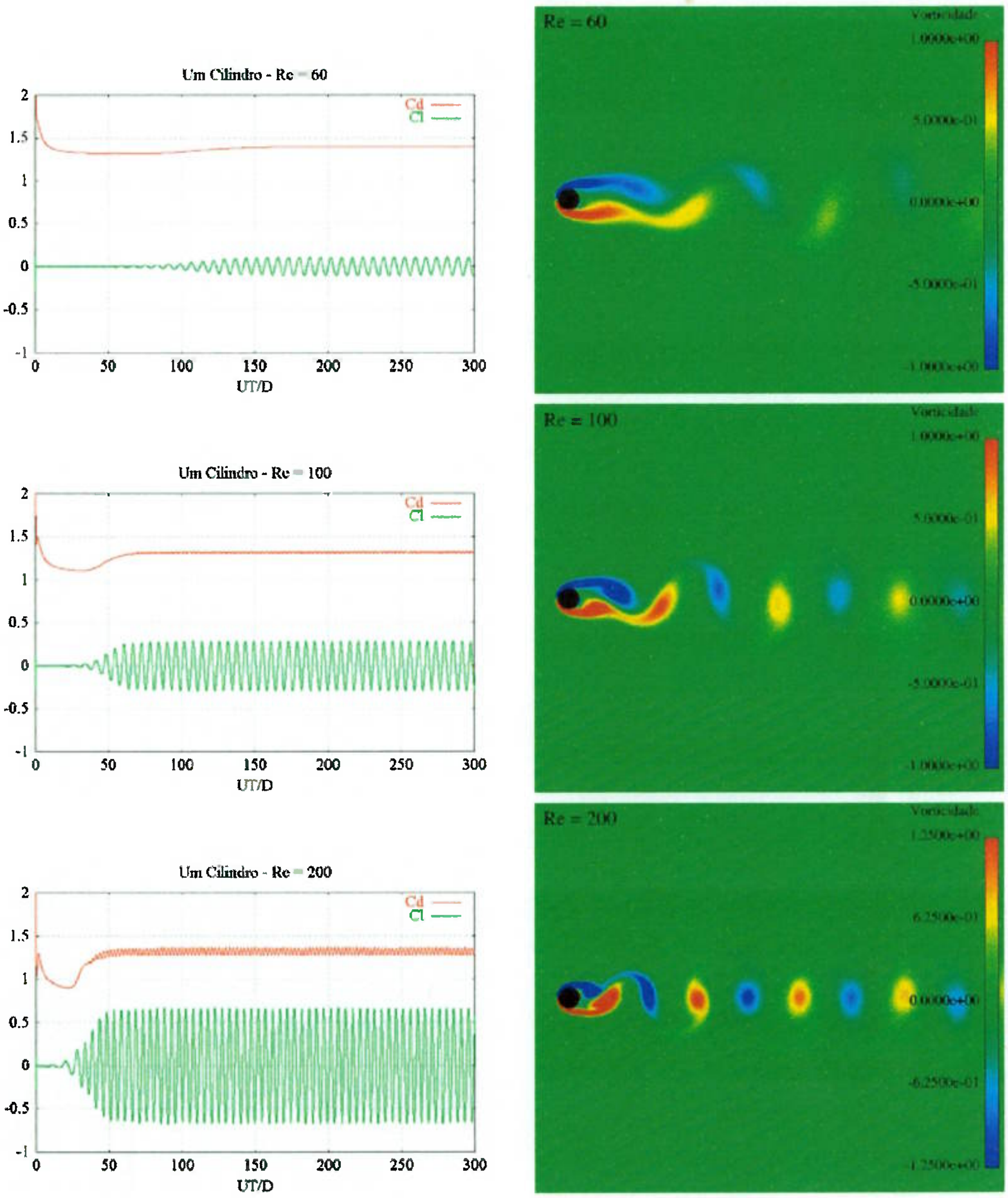


Figura 3.4: Coeficientes de arrasto e de sustentação e respectivos contornos de vorticidade, pertinentes ao escoamento ao redor de um cilindro.

Capítulo 4

SIMULAÇÕES DO ESCOAMENTO AO REDOR DE DOIS CILINDROS EM "*TANDEM*"

Concluída a validação dos simuladores numéricos do escoamento transversal ao redor de um cilindro estacionário, conduzida no Cap. (3), procede-se, agora, a simulação do escoamento ao redor de dois cilindros – também estacionários – em configuração "*tandem*", analisando-se o comportamento de ambos para seis casos específicos de espaçamento entre seus centros.

Tal como em SIQUEIRA (1999), procura-se avaliar a influência do espaçamento entre os centros dos cilindros sobre as perturbações então ocasionadas no escoamento, lançando-se mão dos coeficientes de arrasto e de sustentação, bem como dos respectivos números de Strouhal. Seis casos, correspondentes a espaçamentos de 1,5D, 2D, 3D, 4D, 5D e 8D entre os cilindros, são analisados para número de Reynolds 200.

Na Fig. (2.3), da Sec. (2.4), apresentou-se a malha de elementos finitos quadrilaterais, construída para a simulação do escoamento ao redor de dois cilindros em "*tandem*", distanciados de 4D. Na Fig. (4.1), proporciona-se uma visualização mais próxima da região discretizada ao redor destes cilindros. Malhas similares àquela foram geradas – novamente, com o auxílio do "software" *Gambit (Fluent, Inc.)*, versão 2.0.4 – para as demais configurações. Na Tab. (4.1), sumarizam-se as informações *número de elementos* e *número de nós* das malhas em questão.

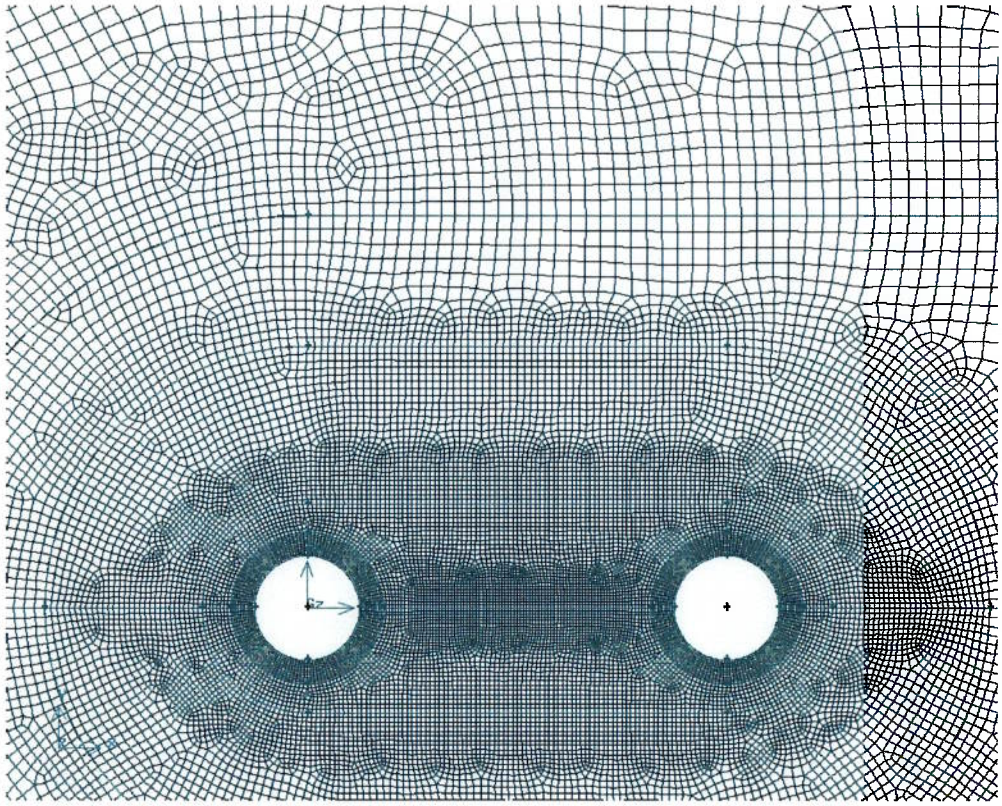


Figura 4.1: Região discretizada em elementos finitos quadrilaterais ao redor de dois cilindros em configuração "*tandem*".

O comportamento dos coeficientes de força no decorrer do tempo, para todos os casos estudados, bem como os correspondentes contornos de vorticidade para um dado instante de tempo adimensional são apresentados nas Figs. (4.2) e (4.3).

Pode-se observar que a inversão de sentido do coeficiente de arrasto do segundo cilindro ocorre entre os espaçamentos de $3D$ e $4D$. Para este último caso, verifica-se também que, após estabelecido o desprendimento de vórtices – em $UT/D \cong 180$ – e decorrido um intervalo de tempo adimensional de aproximada-

Malha	Nº de elementos	Nº de nós
1,5D	31.982	32.305
2D	30.608	30.931
3D	32.388	32.711
4D	36.580	36.903
5D	37.316	37.639
8D	42.784	43.107

Tabela 4.1: Números de elementos e de nós das malhas empregadas nas simulações do escoamento ao redor de dois cilindros em "*tandem*".

mente 120, além do coeficiente de arrasto *instantâneo* do segundo cilindro ter sua amplitude diminuída, seu valor *médio* sofre uma redução de cerca de 40%. Simultaneamente, a amplitude se seu coeficiente de sustentação também decresce. Por outro lado, os coeficientes de força do primeiro cilindro, desde o estabelecimento da emissão de vórtices, não apresentam variações significativas em seus valores *médio* e *instantâneo*. Este quadro se repete para os espaçamentos entre cilindros de $5D$ e $8D$, embora o intervalo no qual estes coeficientes são maiores seja cada vez menor.

Estes eventos são, similarmente, observados em SIQUEIRA (1999), embora o intervalo de tempo adimensional no qual os coeficientes de força do segundo cilindro permaneçam sensivelmente maiores seja inciado em $UT/D \cong 130$ e se estenda até $UT/D \cong 200$, para o caso de espaçamento de $4D$ entre os cilindros.

Na Fig. (4.4), para regiões próximas aos cilindros, mostram-se os vetores de velocidade para os casos de espaçamentos $2D$ e $5D$. No primeiro, para o qual *não* se verifica desprendimento de vórtices do cilindro frontal, observam-se duas regiões de recirculação (praticamente simétricas em relação ao eixo horizontal da figura) entre os dois cilindros. No segundo caso, para o qual se visualiza a região imediatamente à jusante do cilindro frontal, podem-se localizar, aproximadamente, os pontos de separação e o ponto de estagnação posterior, além de se poder vislumbrar parte do mecanismo de formação de um vórtice (modelo

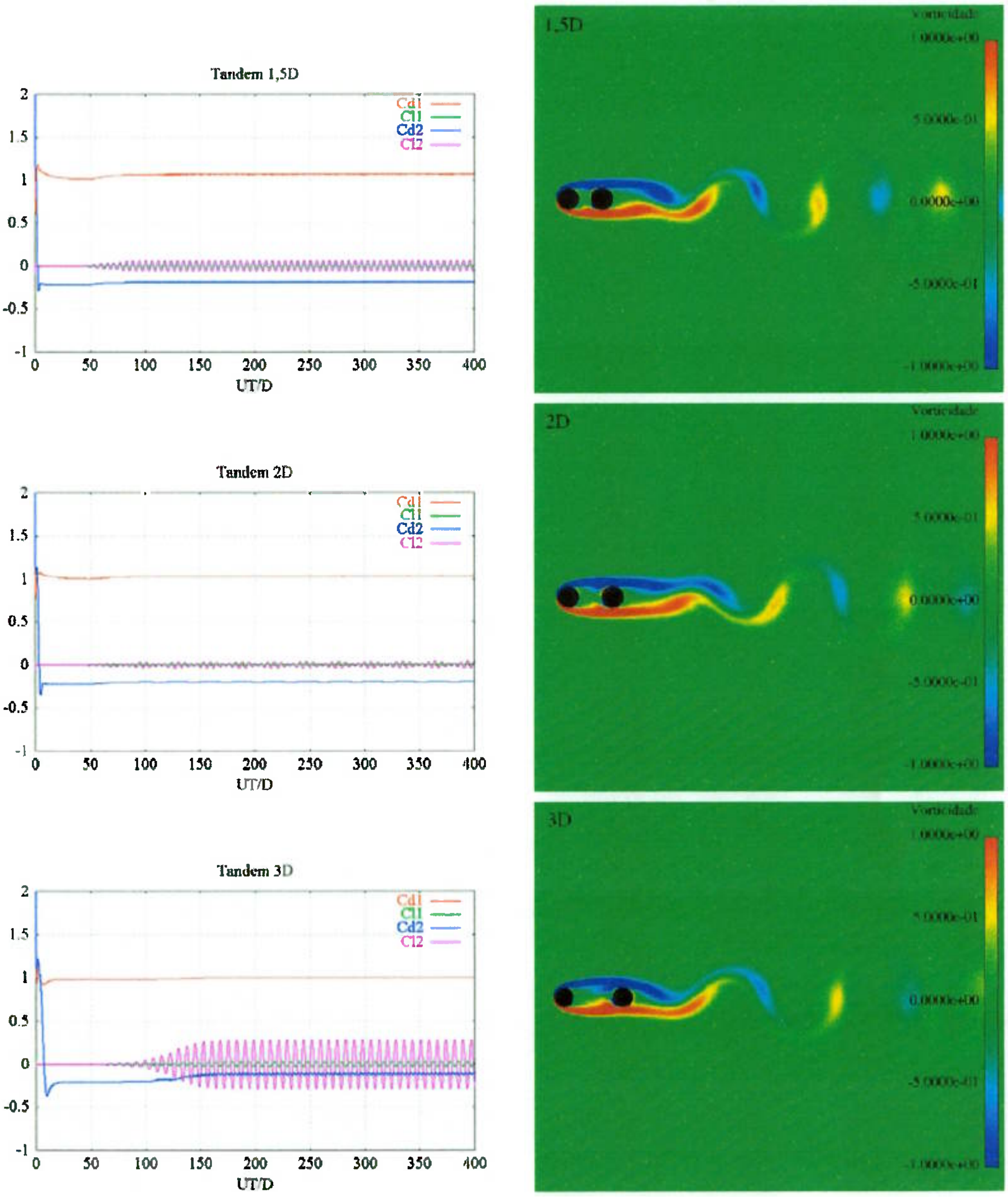


Figura 4.2: Coeficientes de arrasto e de sustentação e respectivos contornos de vorticidade, para os espaçamentos 1,5D, 2D e 3D ($Re = 200$).

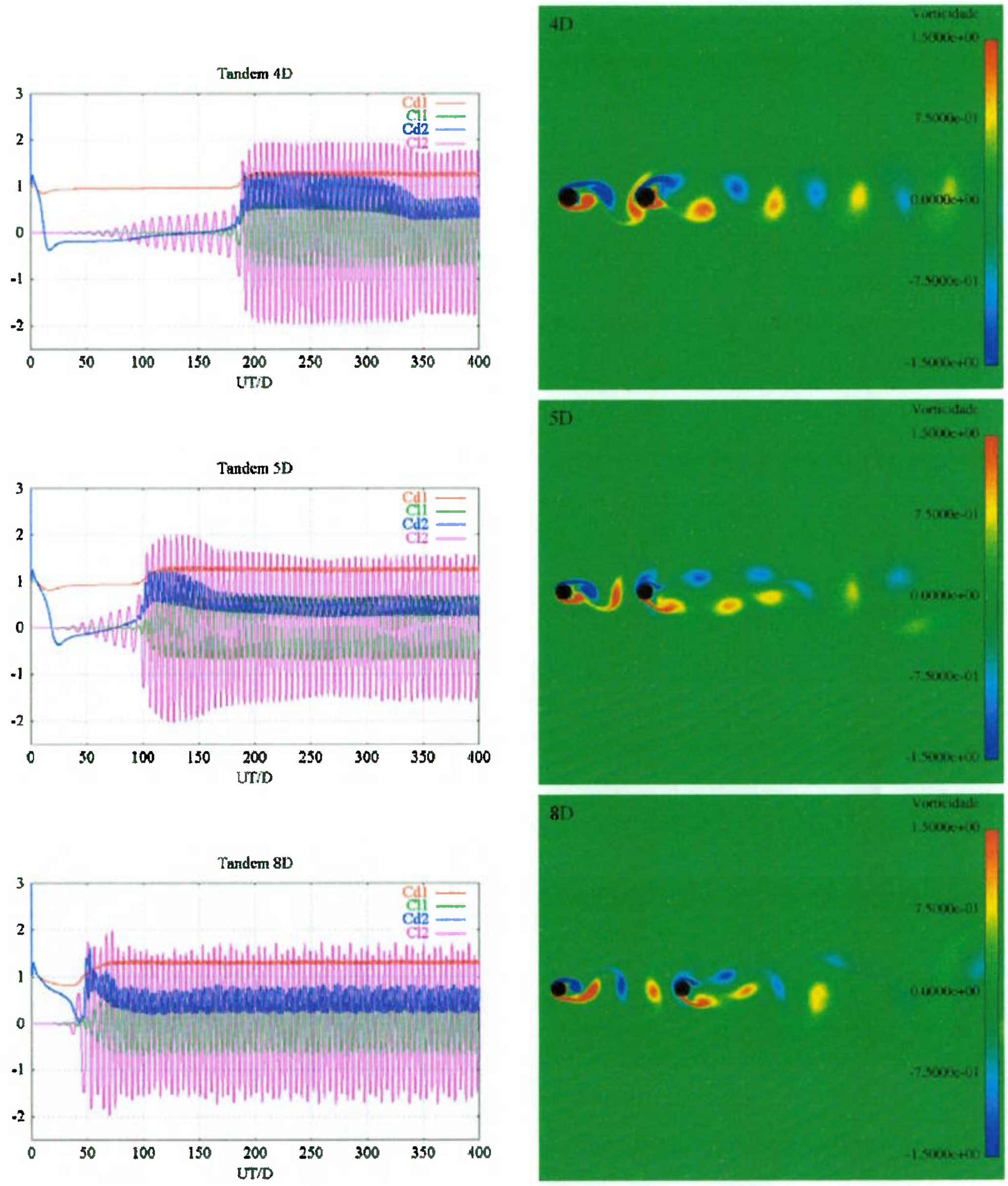


Figura 4.3: Coeficientes de arrasto e de sustentação e respectivos contornos de vorticidade, para os espaçamentos $4D$, $5D$ e $8D$ ($Re = 200$).

segundo GERRARD (1966) *apud* SIQUEIRA (1999)). Já na Fig. (4.5), são apresentados, para todos os casos simulados, os contornos de pressão para um dado instante de tempo adimensional.

Deve-se ressaltar ainda que, em todas as simulações, um significativo erro numérico é constatado no campo de pressão, nas proximidades da fronteira externa pertinente à saída do escoamento, tal como pode ser observado na Fig. (4.6). Obviamente, este erro reflete-se no subseqüente campo de velocidades calculado, e sua mais provável origem encontra-se nas condições de contorno então estabelecidas.

De fato, na Sec. (2.4), estas foram definidas (à semelhança de SIQUEIRA (1999)) de tal forma que a fronteira externa era assumida livre de perturbações. No entanto, esta hipótese não se verifica, já que a presença do(s) cilindro(s) introduz no sistema uma perturbação (caracterizada pelo fenômeno de geração e desprendimento de vórtices), que acompanha o escoamento e, necessariamente, atravessa sua fronteira externa. Procedendo-se daquela forma, confina-se no interior do sistema uma quantidade de movimento que, de acordo com o princípio da conservação, deveria ser dissipada em virtude da viscosidade do fluido ao longo do escoamento, até o infinito.

Uma possível abordagem, com um enfoque mais próximo do que em realidade se observa, é proposta por ARANHA (2003), que a chama de *Impedância da Esteira*. Primeiramente, define-se uma região semi-infinita (então chamada de *região da esteira*) à direita da linha vertical, à qual também pertence a fronteira de saída do sistema. O campo de escoamento aí encontrado caracteriza-se pela superposição do campo de escoamento ao longe com o das perturbações procedentes do sistema. Desta forma, as variáveis desse escoamento são, exclusivamente, funções destas perturbações, que, do ponto de vista da região da esteira, constituem condições de contorno (sua entrada corresponde à saída do sistema), juntamente com as pertinentes ao infinito.

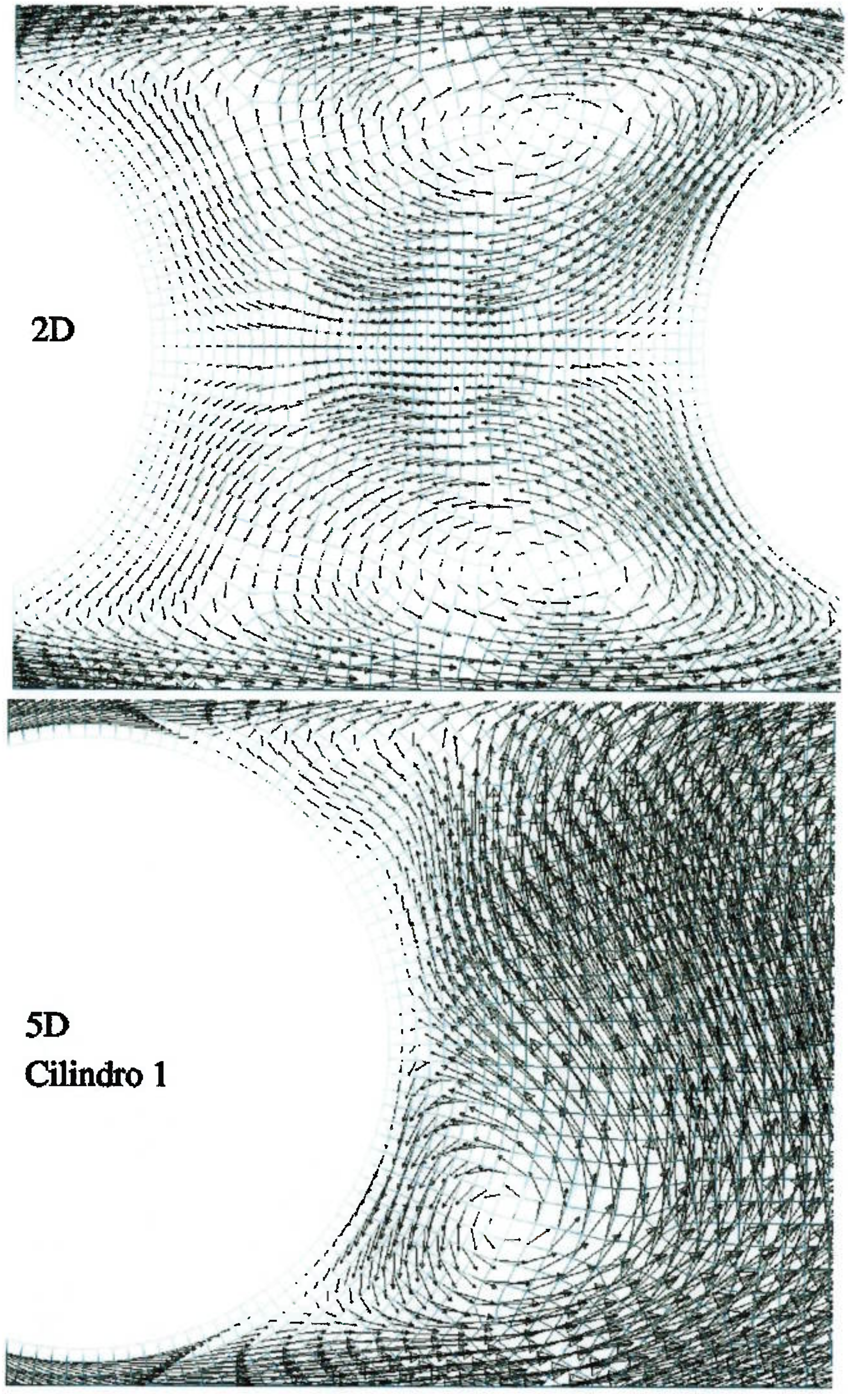


Figura 4.4: Vetores de velocidade em regiões próximas aos cilindros, pertinentes a espaçamentos $2D$ e $5D$ ($Re = 200$).

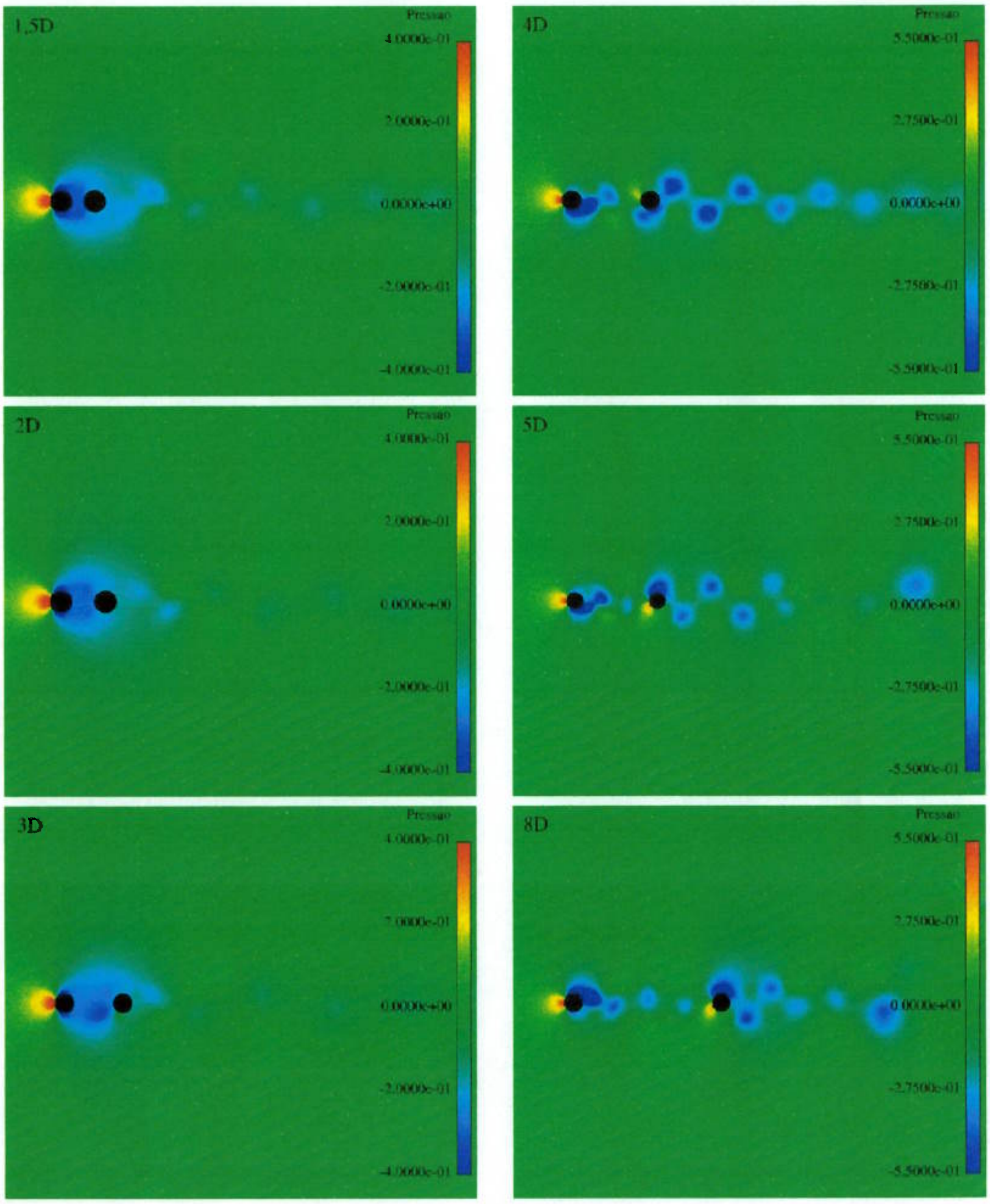


Figura 4.5: Contornos de pressão para os diversos espaçamentos simulados (Re = 200).

Gap	St – **Cilindro 1**			St – **Cilindro 2**		
	Pres. Trab.	Siq.	Dif. rel. (%)	Pres. Trab.	Siq.	Dif. rel. (%)
$1{,}5D$	0,174	0,167	3,95	0,174	0,167	4,03
$2D$	0,166	0,130	27,52	0,164	0,130	25,85
$3D$	0,132	0,125	5,38	0,132	0,125	5,25
$4D$	0,186	0,174	6,88	0,186	0,174	6,77
$5D$	0,188	—	—	0,187	—	—
$8D$	0,196	—	—	0,196	—	—

Tabela 4.2: Números de Strouhal (para $Re = 200$) dos cilindros em "*tandem*", procedentes do presente trabalho [Pres. trab.] e de SIQUEIRA (1999) [Siq.]. "Gap" diz respeito ao espaçamento entre os cilindros.

Em virtude da natureza do escoamento (mais especificamente, do desaparecimento das perturbações no infinito), suas equações podem ser aproximadas por séries de potência assintóticas, que permitem transformar o problema originalmente não-linear numa seqüência de problemas lineares.

Em termos do número de Strouhal – entenda-se, de seu valor médio para o regime estabilizado de desprendimento de vórtices –, na Tab. (4.2), são expostos os resultados procedentes tanto das simulações então realizadas, quanto das conduzidas por SIQUEIRA (1999).

Na curva experimental de C_d x Re – não apresentada aqui – devida a Wieselsberger *apud* SCHLICHTING (1979), verifica-se que a variação do coeficiente de arrasto do cilindro no intervalo de Reynolds de 200 até a *crise do arrasto* é pequena. Assim sendo, confrontam-se aqui alguns dos resultados para os coeficientes de arrasto médios, pertinentes aos dois cilindros em "*tandem*", obtidos nas presentes simulações (para $Re = 200$) com os obtidos experimentalmente por ZDRAVKOVICH (1987), para $Re = 4 \times 10^4$. A Tab. (4.3) sumariza os resultados em questão, bem como os procedentes de SIQUEIRA (1999).

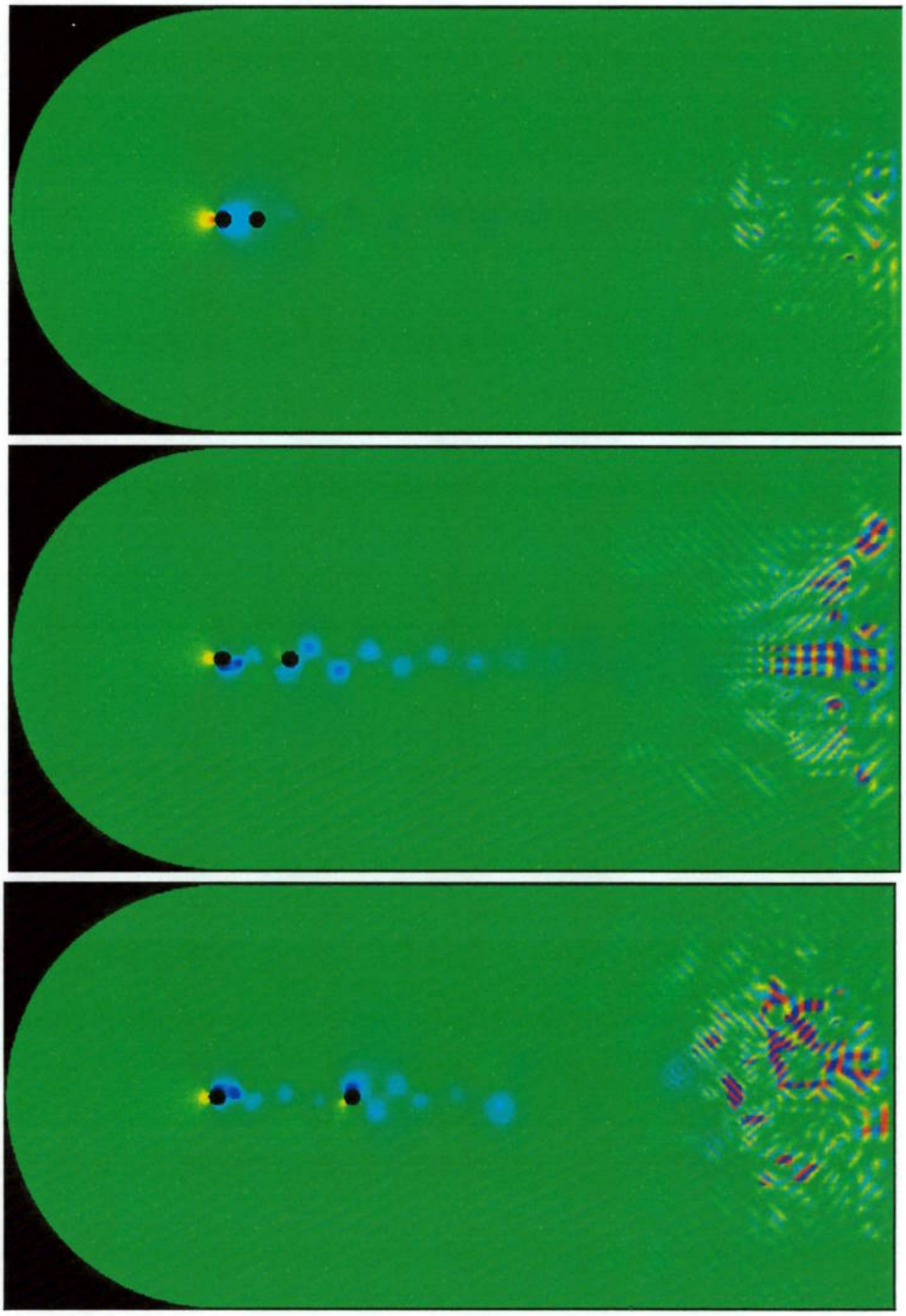


Figura 4.6: Comparação qualitativa entre erros numéricos intrínsecos aos campos de pressão nos espaçamentos de $2D$, $4D$ e $8D$ ($Re = 200$).

Gap	$\overline{C}_d$ – **Cilindro 1**			$\overline{C}_d$ – **Cilindro 2**		
	Pres. Trab.	Zdrav.	Dif. rel. (%)	Pres. Trab.	Zdrav.	Dif. rel. (%)
$3D$	0,999	1,05	–4,86	–0,114	–0,16	–28,75
$5D$	1,256	1,25	0,48	0,455	0,43	5,81
	Pres. Trab.	Siq.	Dif. rel. (%)	Pres. Trab.	Siq.	Dif. rel. (%)
$1{,}5D$	1,066	1,06	0,60	–0,187	–0,18	3,68
$2D$	1,034	1,03	0,36	–0,197	–0,17	15,60
$3D$	0,999	1,00	0,11	–0,114	–0,08	42,68
$4D$	1,268	1,18	7,43	0,727	0,38	91,31
$5D$	1,256	—	—	0,455	—	—
$8D$	1,302	—	—	0,500	—	—

Tabela 4.3: Coeficientes de arrasto médios (para Re = 200) dos cilindros em "*tandem*", procedentes do presente trabalho [Pres. trab.] e de SIQUEIRA (1999) [Siq.]. Os de ZDRAVKOVICH (1987) [Zdrav.] são experimentais e correspondem a $Re = 4 \times 10^4$. "Gap" diz respeito ao espaçamento entre os cilindros.

Capítulo 5

DISCUSSÕES E CONCLUSÃO

Ao concluir seu trabalho, SIQUEIRA (1999) afirma que, não obstante o grande avanço tecnológico (especificamente, no tocante à possibilidade da utilização de supercomputadores) e o subseqüente progresso na engenharia oceânica, "a simulação completa de um '*riser*' em um cenário real está muito longe de ser alcançada pelas atuais técnicas da Dinâmica dos Fluidos Computacional". Mesmo passados quatro anos – através dos quais a tecnologia em computadores, estações de trabalho, bem como em desenvolvimento de algoritmos, etc., não parou de avançar – pode-se ainda refletir quanto ao afirmado, se o intuito da Dinâmica de Fluidos Computacional é realmente o de contemplar um problema (seja lá qual for) em sua totalidade e num cenário real.

Provavelmente (para não se dizer, certamente), todo pesquisador inserido no contexto da Mecânica dos Fluidos Computacional, mais cedo ou mais tarde, dá-se conta de que, a fim de estudar um dado fenômeno físico neste âmbito, necessariamente deve destacar alguns de seus aspectos em detrimento de outros. Caso contrário – isto é, o querer abarcar todos e cada um dos "incontáveis" detalhes do fenômeno – seu estudo resultaria extremamente minucioso, extenso e praticamente insolucionável. E isto, habitualmente, é o que se verifica nas mais diversas áreas do conhecimento, e por que não dizer, da tão rica vida do homem.

Assim sendo, o desenrolar do presente trabalho constitui uma boa mostra desta tese. Ainda que se tenha deparado com algumas limitações (por exemplo, às pertinentes ao tratamento das condições de contorno), deve-se destacar que significativa contribuição é dada no que diz respeito ao tratamento numérico através do Método dos Elementos Finitos, quanto ao tipo de elemento utilizado.

De fato, uma das propostas iniciais deste trabalho era desenvolver algoritmos para a solução de problemas de escoamento transversal de fluido incompressível ao redor de agrupamento de cilindros no espaço tridimensional. Para tanto, primeiramente, adaptar-se-iam as subrotinas de SIQUEIRA (1999) – para o caso bidimensional – à utilização de elementos finitos quadrilaterais, em ordem à posterior "extrusão" dessas malhas (ao longo do(s) eixo(s) longitudinal(is) do(s) cilindro(s)) para a construção de outras, tridimensionais, com elementos prismáticos (paralelepipédicos). Procedendo-se assim, obter-se-iam, dentre outros, o controle do número de elementos gerados ao longo da envergadura do(s) cilindro(s) bem como a redução do número total de elementos na malha em relação às de elementos tetraédricos utilizadas por SIQUEIRA (1999). Conseqüentemente, redução do tempo computacional, além da flexibilização – em termos de construção de malhas – para avaliação de maiores comprimentos de tubos.

Tendo-se verificado a inviabilidade – no tocante à demanda temporal – de execução da totalidade da proposta, concluiu-se, no entanto, a etapa pertinente à adaptação das subrotinas em questão. No decorrer deste processo, em função de peculiaridades intrínsecas à utilização de elementos quadrilaterais, vislumbrou-se a possibilidade do emprego de funções de forma (pertinentes ao *MEF*) de ordem superior às então utilizadas (de primeira ordem). Tal abordagem sequer foi iniciada, tendo-se em vista o enfoque requerido no trabalho bem como o atraso então observado em seu cronograma. Deixa-se como sugestão a futuros trabalhos, no entanto, a implementação do *MEF* com funções de forma de ordem superior, a qual poderia ter seus resultados confrontados, por exemplo, com os procedentes de trabalhos envolvendo métodos espectrais, tal como o de JABARDO (2003).

No tocante às simulações numéricas conduzidas no presente trabalho, são tecidos alguns comentários. Primeiramente, fundamentou-se a validação dos simuladores através do levantamento das curvas de *Strouhal x Reynolds* para o escoamento ao redor de um único cilindro estacionário, no intervalo de Reynolds compreendido entre 60 e 200, sendo os valores deste parâmetro espaçados de 20 em 20, tal como em SIQUEIRA (1999). De modo geral, os resultados mostraram-se concordantes e muito satisfatórios frente aos encontrados na literatura.

Com respeito às simulações do escoamento ao redor de dois cilindros em "*tandem*", confrontando-se tanto qualitativa como quantitativamente os coeficientes de arrasto e de sustentação em função do tempo, bem como os respectivos números de Strouhal, em linhas gerais, observou-se grande concordância para com os resultados de SIQUEIRA (1999). Uma exceção é constatada quanto ao número de Strouhal de ambos os cilindros para o espaçamento de $2D$ (cfr. Tab. (4.2)) e outra, quanto ao valor do coeficiente de arrasto médio do cilindro posicionado à jusante na montagem. Neste caso, verificou-se que o aumento da distância em relação ao primeiro cilindro levou ao incremento da diferença percentual relativa, frente aos dados daquele autor (cfr. Tab. (4.3)).

Não obstante essas específicas discrepâncias, de modo geral, os comportamentos dos coeficientes examinados seguem os observados no trabalho de referência. A inversão de sentido do coeficiente de arrasto do cilindro à jusante deve ocorrer para um espaçamento (ou para um dado intervalo) entre os de $3D$ e $4D$. Até então, tem-se emissão de vórtices apenas do segundo cilindro, ao passo que as camadas de cisalhamento desprendidas do primeiro, recolam-se ao segundo. Já a partir do caso $4D$, verifica-se emissão de vórtices também do primeiro, e as amplitudes de oscilação das forças de arrasto e de sustentação (evidenciadas através dos gráficos dos respectivos coeficientes) são incrementadas.

Os resultados obtidos para os coeficientes de arrasto dos cilindros também se encontram muito próximos dos respectivos valores disponibilizados por ZDRAV-

KOVICH (1987).

Concluídas todas as simulações numéricas, tomou-se conhecimento de uma possível e nova abordagem quanto às condições de contorno. A *Impedância da Esteira*, conforme proposta por ARANHA (2003), viabiliza um tratamento das condições de contorno da saída do sistema que envolve o(s) cilindro(s) de forma mais adequada à natureza do escoamento. A magnitude dos erros observados no campo de pressão (cfr. Fig. (4.6)) muito provavelmente seria reduzida com a adoção desta abordagem. Este empreendimento é aqui deixado como sugestão a futuros trabalhos.

Bibliografia

ARANHA, J. A. P. (2003). Comunicação pessoal.

ARIS, R. (1962). *Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics.* Prentice-Hall.

BAKER, A. J. and PEPPER, D. W. (1991). *Finite Elements 1 – 2 – 3.* McGraw-Hill, Inc.

BARRETT, R., BERRY, M., CHAN, T. F., DEMMEL, J. W., DONATO, J., DONGARRA, J., EIJKHOUT, V., POZO, R., ROMINE, C., and VAN DER VORST, H. A. (1993). *TEMPLATES for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods.* SIAM.

BEARMAN, P. W. (1969). On vortex shedding from a circular cylinder in the critical reynolds number region. *Journal of Fluid Mechanics*, 37:557 – 585.

BEARMAN, P. W. (1984). Vortex shedding from oscillating bluff bodies. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 16:195 – 222.

BLEVINS, R. D. (1990). *Flow-Induced Vibration.* Van Nostrand Reinhold, 2nd edition.

CONTE, S. D. and DE BOOR, C. (1980). *Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach.* McGraw-Hill, New York, 3rd edition.

FERZIGER, J. H. and PERIC, M. (1996). *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer.

GERRARD, J. H. (1966). The mechanics of the formation region of vortices behind bluff bodies. *Journal of Fluid Mechanics*, 25:part 2, 401 – 413.

GRESHO, P. M., CHAN, S. T., LEE, R. L., and UPSON, C. D. (1984). Response characteristics of a vortex-excited cylinder at low reynolds numbers. *Journal of Fluids and Structures*, 6:39 – 50.

JABARDO, P. J. S. (2003). Estudo numérico e experimental do escoamento ao redor de cilindros. Master's thesis, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo.

KARNIADAKIS, G. E. and TRIANTAFYLLOU, G. (1989). Frequency selection and asymptotic states in laminar wake. *Journal of Fluid Mechanics*, 199:441 – 469.

KIM, H. J. and MOIN, P. (1985). Application of a fractional-step method to incompressible navier-stokes equations. *Journal Comput. Phys.*, 59:308.

LUGT, H. J. (1983). *Vortex Flow in Nature and Technology.* John Wiley & Sons, Inc.

MELING, T. S. and DALHEIM, J. (1997). Numerical prediction of the response of a vortex-excited cylinder at low reynolds numbers. In *Proceedings $7^{\underline{th}}$ International Offshore and Polar Engineering Conference (ISOPE)*, Honolulu. U.S.A.

MENEGHINI, J. R. (1989). Geração e utilização de sistemas de coordenadas orientadas de acordo com as fronteiras do escoamento. Master's thesis, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo.

MENEGHINI, J. R. (1993). *Numerical Simulation of Bluff Body Flow Control Using a Discrete Vortex Method.* PhD thesis, Faculty of Engineering, University of London, Imperial College, Londres.

SA, J. Y. and CHANG, K. S. (1988). Shedding pattern of the near-wake vórtices behind a circular cylinder. *Submitted to Journal of Fluid Mechanics.*

SCHLICHTING, H. (1979). *Boudary-Layer Theory.* McGraw-Hill, Inc., $7^{\underline{th}}$ edition.

SEGERLIND, L. J. (1984). *Applied Finite Element Analysis.* John Wiley & Sons, Inc., $2^{\underline{nd}}$ edition.

SIQUEIRA, C. L. R. (1999). *Simulação Numérica do Escoamento ao Redor de Cilindros: Aplicação a Problemas Bi e Tridimensionais.* PhD thesis, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo.

WILLIAMSON, C. H. K. (1991). 2-d and 3-d aspects of the wake of a cylinder, and their relation to wake computations. *Vortex Dynamics and Vortex Methods, Lectures in Applied Mathematics*, pages 719 – 751.

ZDRAVKOVICH, M. M. (1987). The effects of interference between circular cylinders in cross flow. *Journal of Fluids and Structures*, 1:239 – 261.

ZDRAVKOVICH, M. M. (1997). *Flow Around Circular Cylinders*, volume 1 — Fundamentals. Oxford University Press, Inc., New York.

ZIENKIEWICZ, O. C. and MORGAN, K. (1983). *Finite Elements and Approximation.* John Wiley & Sons, Inc.

Apêndice A

Estrutura dos Programas Elaborados para a Simulação do Escoamento ao Redor de Cilindros

Seguindo-se parcialmente a formulação proposta por SIQUEIRA (1999), elaboraram-se programas computacionais, em linguagem *Fortran*, para a simulação do escoamento transversal de fluido newtoniano incompressível viscoso ao redor de um ou mais cilindros, segundo abordagem bidimensional. A seguir, delineam-se sucintamente as atribuições gerais pertinentes aos três programas então desenvolvidos.

O primeiro foi construído a fim de se reestruturar os dados intrínsecos à malha computacional de elementos finitos gerada para o domínio do escoamento. Sua necessidade se fez notar apenas quando do tratamento das condições de contorno no programa principal (para a solução dos sistemas de equações pertinentes ao fenômeno). A atuação deste código – então nomeado `ReadMesh.f` – caracteriza-se pela leitura do arquivo de dados da malha gerada no "software" *Gambit (Fluent, Inc.)*, versão 2.0.4, e conseqüente renumeração dos nós que constituem as condições de contorno. A fronteira externa do escoamento, invariavelmente, recebe os nós de números `1` a `ibreak1`, de forma seqüencial, convencionada em sentido anti-horário. À renumeração dos nós dos cilindros, convenciona-se o sentido inverso. Para o caso de um único cilindro, os nós correspondentes à sua parede dão continuidade à seqüência iniciada na fronteira externa, de tal forma que, ao primeiro nó, atribui-se o número `ibreak1` + `1` e, ao último, `ibreak2`. Quanto ao agrupamento em "*tandem*", os nós do cilindro à montante são renumerados de `ibreak1` + `1` a `ibreakM`, e o cilindro à jusante, de `ibreakM+1` a `ibreak2`. Esta renumeração dos nós da malha facilita consideravelmente o tratamento das condições de contorno do escoamento quanto à montagem dos vetores de carregamento e à solução dos sistemas de equações no programa principal.

O segundo programa – `PreProc.f` –, semelhantemente ao utilizado por SIQUEIRA (1999), encarrega-se do pré-processamento de informações pertinentes à malha computacional para o domínio do escoamento. Essencialmente, são estabelecidas as relações de conectividade de elementos e de nós da malha (inseridas na abordagem compacta de dados desenvolvida por SIQUEIRA (1999)); as informações pertinentes às funções de forma e suas derivadas; bem como os parâmetros associados ao procedimento de transformação de coordenadas requerido na aplicação da quadratura de Gauss-Legendre para a integração numérica. Neste sentido, a adaptação do código elaborado por SIQUEIRA (1999) exigiu alterações significativas quanto à transição de abordagem de elemento triangular a quadrilateral, a princípio, insuspeitadas.

Finalmente, o programa principal – `Frac2D.f` – incumbe-se da leitura de todas as informações geradas e armazenadas anteriormente, da implementação dos parâmetros temporais e da montagem e resolução dos sistemas de equações representativas do escoamento. O método pré-condicionado do *Gradiente Conjugado* (*Preconditioned Conjugate Gradient – PCG*), tal como apresentado por BARRETT, R. et al. (1993), é utilizado na resolução dos sistemas lineares de equações, seguindo fielmente a abordagem de SIQUEIRA (1999).

Apêndice B

Resolução do Problema de Transferência de Calor em Placa Plana

Nesta seção, apresenta-se o procedimento de validação de um algoritmo computacional, estruturado em Elementos Finitos, para a resolução de um específico problema de transferência de calor em placa plana, à qual se calcula sua distribuição de temperatura.

Em razão de sua simplicidade frente ao problema de escoamento de fluido newtoniano, incompressível e viscoso ao redor de corpos rombudos, seu tratamento constituiu importante ponto de referência à elaboração de códigos computacionais que, posteriormente, viabilizaram a construção dos simuladores numéricos pertinentes ao tema do presente trabalho.

SIQUEIRA (1999) resolveu este problema através do *MEF* (com formulação de Galerkin), empregando elementos *triangulares* de primeira ordem. Os resultados obtidos foram então comparados com os procedentes da solução analítica, cujo desenvolvimento também é apresentado por este autor. Aqui, por conveniência, simplesmente será apresentada sua equação final.

Seguindo ZIENKIEWICZ, O. C. and MORGAN, K. (1983), a transferência de calor bidimensional em regime permanente, em sua forma mais geral, é modelada pela equação diferencial parcial

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_t\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_t\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)+Q=0 \tag{B.1}$$

sujeita às condições de contorno

$$\phi = \overline{\phi} \qquad \text{em } \Gamma_\phi \tag{B.2}$$

$$k_t\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\overline{q} \qquad \text{em } \Gamma_q \tag{B.3}$$

Uma expansão em série que aproxima convenientemente a solução exata da Eq. (B.1) é a já bem conhecida

$$\phi \simeq \widehat{\phi} = \sum_{m=1}^{M} \phi_m N_m \tag{B.4}$$

Deve-se ressaltar que as condições de contorno em Γ_ϕ podem ser imediatamente satisfeitas para os nós deste contorno, simplesmente pela definição dos valores nodais, ϕ_m.

A formulação fraca do Método dos Resíduos Ponderados, utilizando as próprias funções de forma como funções peso (isto é, a formulação de Galerkin), resulta em

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial N_l}{\partial x}k_t\frac{\partial \widehat{\phi}}{\partial x}+\frac{\partial N_l}{\partial y}k_t\frac{\partial \widehat{\phi}}{\partial y}\right)dxdy = \int_\Omega QN_l dxdy - \int_{\Gamma_q}\overline{q}N_l d\Gamma$$

$$l = 1,2,3,\ldots,M \tag{B.5}$$

Introduzindo a aproximação para a solução da equação diferencial nesta última, obtém-se o sistema de equações da forma

$$\mathbf{K}\phi = \mathbf{f} \tag{B.6}$$

para o qual os componentes da matriz de rigidez do elemento "e", $\mathbf{k}^e$, e de seu vetor de carregamento, $\mathbf{f}^e$, são

$$K^e_{lm} = \int_{\Omega_e}\left(\frac{\partial N^e_l}{\partial x}k_t\frac{\partial N^e_m}{\partial x}+\frac{\partial N^e_l}{\partial y}k_t\frac{\partial N^e_m}{\partial y}\right)dxdy \tag{B.7}$$

$$f^e_l = \int_{\Omega_e} QN^e_l dxdy - \int_{\Gamma^e_q} N_l\overline{q}d\Gamma \tag{B.8}$$

Nesta formulação, o domínio Ω_e é a superfície do elemento "e", bem como o contorno Γ_q^e diz respeito à parte de sua fronteira que pertence, ou se aproxima, ao contorno Γ_q do espaço físico Ω. Conseqüentemente, a integral em Γ_q^e aparece apenas para os elementos adjacentes a Γ_q. Esta formulação em Elementos Finitos é completamente geral, e para se determinar as matrizes e os vetores do sistema para um dado tipo de elemento, requer-se simplesmente a introdução das pertinentes funções de formas (ZIENKIEWICZ, O. C. and MORGAN, K., 1983).

Como pode ser visto em SIQUEIRA (1999), as funções de interpolação então propostas para elementos triangulares permitem que a montagem e a resolução do sistema de equações sejam conduzidas exclusivamente no espaço físico, xy.

Por outro lado, ao se empregar elementos *quadrilaterais*, faz-se necessário introduzir uma transformação dos elementos do espaço físico para um elemento geral no espaço matemático. Um sistema de coordenadas local, (ξ, η), constitui a base sobre a qual se constrói o elemento quadrilateral regular (cfr. Sec. (2.3), com vértices em $(-1,-1)$, $(1,-1)$, $(1,1)$ e $(-1,1)$.

Em SIQUEIRA (1999), como as derivadas das funções de forma dos elementos triangulares são dadas exclusivamente em função das coordenadas geométricas nodais, resulta que a contribuição do elemento "e" – cfr. Eq. (B.7) – à matriz global do sistema, $\mathbf{K}$, é calculada por

$$\mathbf{k}^e = k_t^e \Delta^e \begin{bmatrix} (\beta_i^e)^2 + (\gamma_i^e)^2 & \beta_i^e\beta_j^e + \gamma_i^e\gamma_j^e & \beta_i^e\beta_k^e + \gamma_i^e\gamma_k^e \\ \beta_i^e\beta_j^e + \gamma_i^e\gamma_j^e & (\beta_j^e)^2 + (\gamma_j^e)^2 & \beta_j^e\beta_k^e + \gamma_j^e\gamma_k^e \\ \beta_i^e\beta_k^e + \gamma_i^e\gamma_k^e & \beta_j^e\beta_k^e + \gamma_j^e\gamma_k^e & (\beta_k^e)^2 + (\gamma_k^e)^2 \end{bmatrix} \quad \text{(B.9)}$$

sendo i, j e k os três nós do elemento "e"; k_t^e o valor médio para o coeficiente de transferência de calor do elemento; $\int_{\Omega_e} dxdy = \Delta^e$, sua área; $\beta_i^e = \partial N_i^e/\partial x$ e $\gamma_i^e = \partial N_i^e/\partial y$ – com expressões similares para os demais nós.

Convencionando-se que apenas o lado que une os nós i e j do elemento "e"pertence, ou se aproxima, à fronteira Γ_q, obtém-se, com a integração para o vetor de carregamento do elemento

$$f_i^e = \frac{1}{3}Q^e\Delta^e - \frac{1}{2}\overline{q}^e\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \quad \text{(B.10)}$$

$$f_j^e = \frac{1}{3}Q^e\Delta^e - \frac{1}{2}\overline{q}^e\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \quad \text{(B.11)}$$

$$f_k^e = \frac{1}{3}Q^e\Delta^e \quad \text{(B.12)}$$

O segundo termo do lado direito dos componentes f_i^e e f_j^e contam apenas aos elementos que, de fato, pertencem ou tocam o contorno Γ_q, sendo naturalmente desconsiderados quanto aos elementos interiores do domínio Ω.

Quanto ao elemento quadrilateral, conduz-se o mesmo procedimento de cálculo, porém, no espaço transformado, $\xi\eta$, tal como apresentado na Sec. (2.3), Eq. (2.18).

Desta forma, a contribuição do elemento quadrilateral "e" à matriz global do sistema começa a ser calculada por

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{k}^e(x,y)^T\mathbf{k}^e(x,y)dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathbf{k}^e(\xi,\eta)^T\mathbf{k}^e(\xi,\eta)\,|\det \mathbf{J}|\,d\xi d\eta \quad \text{(B.13)}$$

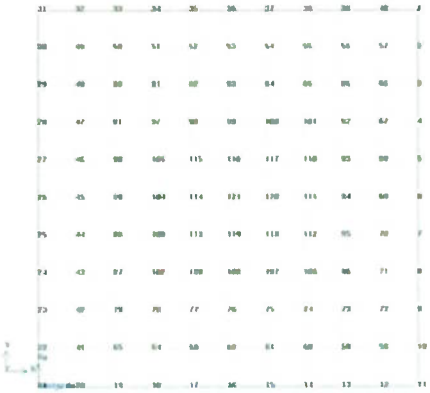
O processo de integração numérica é o mesmo então apresentado na Sec. (2.3).

A solução analítica, apresenta por SIQUEIRA (1999), é dada por

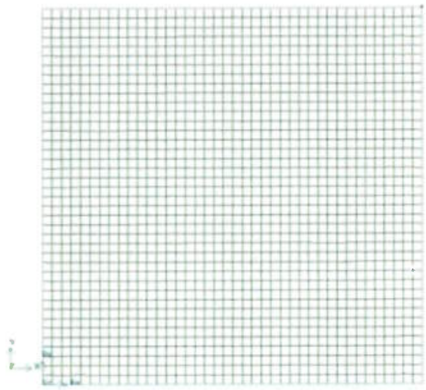
$$\mathcal{T}(x,y) = \mathcal{T}_m \frac{\sinh\left(\frac{y\pi}{W}\right)\sin\left(\frac{x\pi}{W}\right)}{\sinh\left(\frac{H\pi}{W}\right)} + \mathcal{T}_1 \quad \text{(B.14)}$$

Agora, delimita-se finalmente o problema solucionado e confronta-se com a resposta analítica e a de SIQUEIRA (1999). Uma placa plana quadrada, de lados $W = H = 40$ [$u.m.$], é submetida, em sua aresta superior, a um perfil de temperatura senoidal (de amplitude $\mathcal{T}_m = 150$ °C), permanecendo as demais à temperatura constante, $\mathcal{T}_1 = 30$ °C. Não há geração de calor (isto é, $Q = 0$) e a placa se encontra isolada do meio circundante, ou seja, não há fluxo de calor ($\overline{q} = 0$) em seu contorno.

A Fig. (B.1) apresenta duas malhas de elementos quadrilaterais (com 100 e 1600 elementos, respectivamente), utilizadas para a resolução do problema através



(a)



(b)

Figura B.1: Malhas de elementos quadrilaterais para placa plana com (a) 100; e com (b) 1.600 elementos.

do *MEF*. A numeração presente na Fig. (B.1-a) diz respeito aos nós da malha. Soluciona-se o problema para ambas, empregando-se funções de forma lineares.

A equação que rege a condução de calor é então escrita como

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \tag{B.15}$$

sujeita à condição de contorno

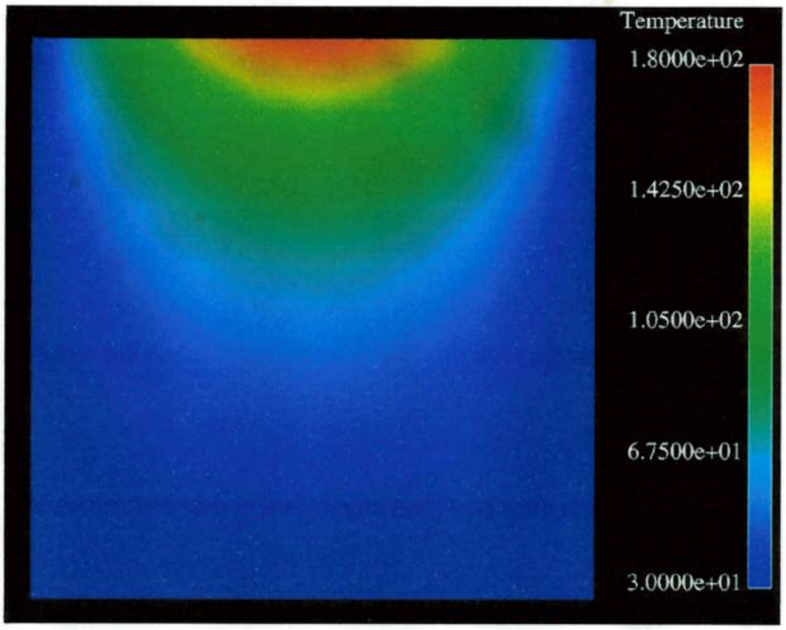
$$\phi = \overline{\phi} \qquad \text{em } \Gamma_\phi \tag{B.16}$$

Para efeitos de comparação, na Tab. (B.1), apresentam-se alguns dados relativos à solução do problema, pertinentes às abordagens desenvolvidas em SIQUEIRA (1999) e no presente trabalho.

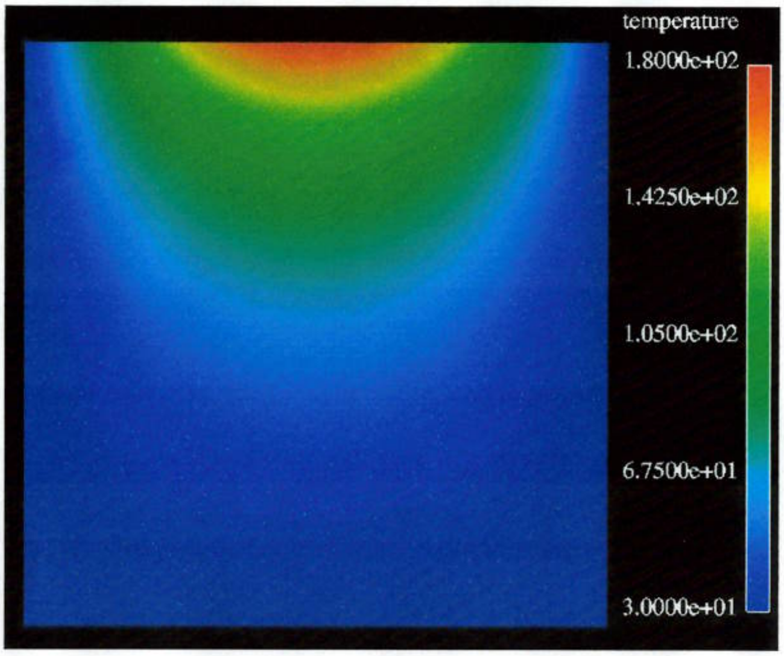
	SIQUEIRA (1999)	**Presente I**	**Presente II**
N^o de Elementos da Malha	3526	100	1600
N^o de Nós da Malha	1842	121	1681
Máximo Erro Relativo$^{(1)}$	0,0954	1,2009	0,0774

Tabela B.1: Dados comparativos quanto à solução do problema de condução de calor em placa plana. $^{(1)}$ Com respeito à solução analítica e em módulo.

Através do "software" *Ensight*, puderam-se visualizar as distribuições de temperatura sobre a placa plana em questão, obtidas nas simulações para as duas malhas apresentadas. Nas Figs. (B.2-a) e (B.2-b), pode-se avaliar, qualitativamente, a influência do refinamento de malha sobre a solução numérica. Por outro lado, quanto à sua precisão, mais vale recorrer aos dados apresentados na Tab. (B.1).



(a)



(b)

Figura B.2: Distribuição de temperatura em placa plana. Simulação sobre a malha de (a) 100 e (b) 1.600 elementos.